

ბ. კომლაძე

უპელესი
პათემატიკა

ზოგადი ქურსი

ნაწილი

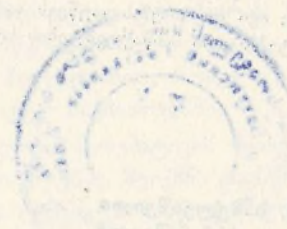
II

ბ. კომლაძე

უმაღლესი მათემატიკა ზოგადი კურსი

ნაწილი II

საქართველოს სსრ სახალხო განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია
სახელმძღვანელოდ საინჟინრო-ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1990

517(075.3)

22.11
51
3 71

წიგნის პირველი ნაწილი, რომელიც გასულ წელს გამოიცა, შედგება უმაღლესი მათემატიკის შესავლისა და ორი განყოფილებისაგან. I განყოფილება — დეტერმინანტები და წრფივი ალგებრის ელემენტები, ვექტორული ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები; II განყოფილება — დიფერენციალური აღრიცხვა.

წიგნის მეორე ნაწილი მოიცავს ოთხ განყოფილებას: ინტეგრალური აღრიცხვა, მწკრივები, დიფერენციალური განტოლებანი და გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდები.

განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების საინჟინრო-ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის; იგი ინტერესს გაუწევს აგრეთვე ეკონომიკური სპეციალობისა და უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებსაც.

რედაქტორი პროფ. მ. ბაშელეიშვილი
რეცენზენტები: დოც. ა. ლურსმანაშვილი
დოც. თ. შარაშენიძე



80163

© თბილისი უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1990

1602020000

K
M 608 (06) — 90

ISBN 5-511-00294-1

წინასიტყვაობა

წინამდებარე სახელმძღვანელო შედგენილია უმაღლესი სასწავლებლების საინჟინრო-ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის ამჟამად მოქმედი უმაღლესი მათემატიკის კურსის პროგრამის მიხედვით. წიგნში განხილულია ინტეგრალური აღრიცხვის, მწკრივთა თეორიის, დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის, გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდების, ანუ, როგორც დღეს უწოდებენ, რიცხვითი მეთოდების ელემენტები. გამოყენებული ლიტერატურა უმთავრესად მითითებულია ამ წიგნის პირველ ნაწილში. თუ მკითხველს სურს, უფრო ღრმად შეისწავლოს უმაღლესი მათემატიკის კურსი, უნდა მიმართოს წიგნის ორივე ნაწილში მითითებულ ლიტერატურას. წიგნში განხილულია ინტეგრალური აღრიცხვის, მწკრივთა თეორიისა და დიფერენციალურ განტოლებათა საკითხები იმ მოცულობით, რომელიც საჭიროა ინჟინერ-ეკონომისტისათვის პრაქტიკულ საქმიანობაში.

გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდები, როგორც სასწავლო დისციპლინა, ბოლო წლებში შეიქმნა და სწრაფად მოიკიდა ფეხი ეკონომიკურ და უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში. კაცობრიობას ყოველთვის ესაჭიროებოდა მასობრივი გამოთვლები. ამისათვის კი საჭირო იყო გამოთვლების საშუალებანი. გამოჩენილი მათემატიკოსები ყოველთვის ცდილობდნენ შეექმნათ გამოთვლების იარაღები. ბ. პასკალმა, ე. გ. ლაიბნიცმა, ბ. ლ. ჩებიშევი, ა. ნ. კრილოვმა და სხვ. შექმნეს თავისი დროისათვის კარგი მათემატიკური მანქანები. ეს მანქანები მხოლოდ მექანიკური მოქმედებით ასრულებდნენ გამოთვლებს. მათემატიკური მანქანის შექმნა მრავალმხრივ მათემატიკურ ცოდნას მოითხოვს და დამოკიდებულია ტექნიკის განვითარების დონეზე. აბაკი, რუსული საანგარიშო, ლოგარიტმული საბანკო, მექანიკური არითმომეტრი, სათვლელ-ანალიზური მანქანა და სხვა ამგვარი საშუალებანი სხვადასხვა დროს შეიქმნა და ასახავს თავისი დროის მეცნიერულ-ტექნიკურ შესაძლებლობებს.

თანამედროვე ეპოქაში მოხდა დიდი ნახტომი. მექანიკური გამოთვლების საშუალებანი შეიცვალა დაპროგრამებული მართვის ელექტრონული გამოთვლელი მანქანებით (ეგმ). ეს მანქანები სრულიად განსხვავებულია მექანიკური გამოთვლელი მანქანებისაგან. ეგმ-ის შექმნა გამოწვეულია თანამედროვე მოთხოვნილებით. თითქმის ყველა პრაქტიკული ამოცანის

ამონახსნი მიღებულ უნდა იქნეს, რაც შეიძლება, მცირე დროში. ისეთი ამოცანების ამოხსნა, რომლებიც დაკავშირებულია ატომური ენერგიის გამოყენებასთან, კოსმოსთან, ამინდის პროგნოზირებასთან, სახელმწიფო მნიშვნელობის ეკონომიკურ საკითხებთან, შეუძლებელია ეგმ-ის გამოყენების გარეშე.

გამოთვლითი ტექნიკის შესაძლებლობათა ზრდას თვისებრივი მხარეც აქვს და, ზოგჯერ, აღარებენ სამრეწველო რევოლუციას, რომელიც გამოწვეული იყო ორთქლის მანქანის გამოგონებით. უნდა აღინიშნოს, რომ ორი საუკუნის მანძილზე ადამიანის მოძრაობის სიჩქარე ფეხით მოსიარულის სიჩქარიდან, 6 კმ/სთ-დან, გაიზარდა კოსმონავტის სიჩქარემდე — 30 000 კმ/ს-მდე, ე. ი. მოძრაობის სიჩქარე გაიზარდა 5 000-ჯერ. პირველი ეგმ-ის შექმნიდან 40 წლის განმავლობაში ოპერაციითა შესრულების სიჩქარე 0,1-ოპერაციიდან სეკუნდში გაიზარდა 10⁷ ოპერაციამდე სეკუნდში, ე. ი. გამოთვლების სიჩქარე გაიზარდა 10⁸-ჯერ.

რიცხვითი ამოხსნა როგორც ხელით, ისე ეგმ-ის გამოყენებით მოითხოვს მათემატიკის მრავალი დარგის ცოდნას. რიცხვითი ამონახსნის მიღება ყოველთვის იყო გამოჩენილ მათემატიკოსთა კვლევის საგანი. ი. ნიუტონს, ლ. ეილერს, კ. ფ. გაუსს, ნ. ი. ლობაჩევსკის, პ. ლ. ჩებიშევის, ს. ი. ბერნშტეინს, ა. ნ. კრილოვს, ს. ლ. სობოლევს, ლ. ვ. კანტოროვიჩს, ა. ნ. ტიხონოვს, შ. ე. მიქელსონს და სხვ. დიდი ღვაწლი მიუძღვით რიცხვითი მეთოდების განვითარებაში. გაიზარდა მათემატიკური მეთოდების გამოყენება სხვადასხვა მეცნიერებაში, ე. ი. მოხდა სხვადასხვა მეცნიერების ე. წ. მათემატიზაცია. შეიქმნა სხვადასხვა მოვლენათა და პროცესთა მათემატიკური მოდელები, რომლებიც მათემატიკური მეთოდებით შეისწავლება. სწორედ მათემატიკური მოდელის საფუძველზე მუშაობს დაპროგრამებული მართვის დაზგები.

გავრცელდა აზრი ეგმ-ის „ყოვლადშემძლეობის“ შესახებ. თითქოს მათემატიკოსები ეგმ-ით განთავისუფლდნენ ყოველგვარი გარჯისაგან, რომლებიც ამა თუ იმ ამოცანის ამოხსნასთანაა დაკავშირებული. სინამდვილეში კი საქმე სხვაგვარადაა. ეგმ მხოლოდ ეხმარება მათემატიკოსს სათანადო ამოცანის სწრაფად ამოხსნაში. ამოცანათა ამოხსნის რიცხვითი ამოხსნების განვითარებას მოჰყვა ამოცანის ამოხსნის რაციონალური მეთოდის დიდი რაოდენობით შექმნა. ამ მეთოდებიდან უნდა აირჩეს სათანადო ამოცანის ამოხსნის საუკეთესო მეთოდი, სადაც მხედველობაში უნდა მივიღოთ ეგმ-ის ტიპი. ეგმ-ით ამონახსნი მიხსლოებით მიიღება. ამის გამო წინასწარ უნდა იქნეს გამოანგარიშებული ის ცდომილება, რომელიც მოსაღებ ამონახსნს ექნება. ეს კი მოითხოვს რიცხვითი მეთოდების საფუძვლიან ცოდნას. ეს გამოთვლები უმეტესად ხელით უნდა შესრულდეს, სადაც შეძლებისდაგვარად უნდა გამოვიყენოთ მცირე გამოთვლელი მანქანები, ცხრილები, ნომოგრამები, ლოგარიტმული სახაზავი, რუსული სა-

ანგარიშო და სხვა საშუალებანი. ამ საშუალებათა გამოყენებით მიღებული მნიშვნელობანი ზოგჯერ მეტად არაზუსტია, მაგრამ პრაქტიკული იდეალისაზრისით და, საერთოდ, ამონახსნის ზოგადი წარმოდგენისათვის, სრულიად საკმარისია. უნდა შევნიშნოთ, რომ ნომოგრამები, ცხრილები, ლოგარიტმული სახაზავი და რუსული საანგარიშო თავისი სიპრატივისა და უნივერსალურობის გამო კიდევ დიდხანს დარჩება პრაქტიკულ ხმარებაში.

განყოფილება „გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდები“ აკვებულია იმგვარად, რომ სტუდენტი ძირითადად გაეცნოს გამოთვლების საშუალებებს და დაპროგრამების ელემენტებს, რათა შემდეგ, როდესაც გაეცნობა განტოლებათა ამოხსნის მეთოდებს, მწყრივთა კრებადობის გაუმჯობესებას და მისი ჯამის გამოთვლას და სხვა ამგვარ საკითხებს, სპეციალური კურსების შესწავლამდე შესძლოს ამ შედარებით მარტივი საკითხების დაპროგრამება და სათანადო პერსონალურ მანქანაზე მისი განხორციელება.

წიგნის მესამე ნაწილში შეისწავლება ჩვეულებრივ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები, წრფივი კერძო წარმოებულიანი განტოლებანი, დიფერენციალურ განტოლებათა მიხსლოებითი ამოხსნა და ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანა და პროგრამით გათვალისწინებული მონათესავე საკითხები.

წიგნზე მუშაობის პროცესში საქმიანი შენიშვნებითა და მითითებებით დიდი დახმარება გამიწია მასწავლებელმა თამარ გიორგის ასულმა ძნელად, რისთვისაც მას დიდ მადლობას მოვასხნებ.

წიგნის ავტორი შეეცადა, შეძლებისდაგვარად, შეექმნა სახელმძღვანელო, რომელიც დააკმაყოფილებდა სტუდენტთა მოთხოვნებს. მაგრამ, ალბათ, წიგნზე მუშაობის პროცესში ძნელია, თავი დააღწიო მთლიანად ზოგიერთ უზუსტობასა და ხარვეზებს. ამ მხრივ არც წინამდებარე სახელმძღვანელო იქნება გამონაკლისი. შემდეგ გამოცემაში ავტორი შეეცდება შეავსოს სახელმძღვანელო იმ შენიშვნების გათვალისწინებით, რომლებსაც დიდი მადლობის გრძნობით მიიღებს საქმის გულწრფელად დაინტერესებული პირებისაგან.

III განყოფილება

ინტეგრალური აღრიცხვა

თავი I

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§ 1. პირველყოფილი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი

1. პირველყოფილი ფუნქცია. განვიხილოთ მექანიკის შემდეგი ამოცანა:

მოენახოთ მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონი, რომელიც წრფეზე მუდმივი a აჩქარებით მოძრაობს, თუ ცნობილია, რომ საწყის მომენტში, $t=0$, სიჩქარე ნულის ტოლია, $v(0)=0$, და გავლილი მანძილი $s(t)$ მატერიალური წერტილის საწყისი მდგომარეობიდან აითვლება, $s(0)=0$.

ამ ამოცანის ამოხსნისათვის მოვიგონოთ მატერიალური წერტილის აჩქარების განსაზღვრა: აჩქარება არის $v(t)$ სიჩქარის t დროით წარმოებული,

$$\frac{dv}{dt} = a.$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ

$$v(t) = at + C, \quad (1)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივი სიდიდეა. (1) ფორმულაში დავუშვათ $t=0$ და მხედველობაში მივიღოთ $v(0)=0$; გვექნება

$$C=0.$$

ამგვარად,

$$v(t) = at. \quad (2)$$

თუ ვისარგებლებთ სიჩქარის განსაზღვრით, (2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{ds}{dt} = at,$$

საიდანაც

$$s(t) = \frac{at^2}{2} + C_1, \quad (3)$$

სადაც C_1 აგრეთვე ნებისმიერი მუდმივია.

ამოცანაში მოცემული პირობის ძალით, $t=0$ -სათვის $s(0)=0$. (3) ტოლობიდან მივიღებთ

$$C_1 = 0.$$

ამრიგად,

$$s(t) = \frac{at^2}{2}. \quad (4)$$

როგორც ცნობილია, (4) ფორმულა გალილეიმ¹ ცდების საფუძველზე მიიღო (უპაეო სივრცეში თავისუფლად ვარდნილი სხეულის მოძრაობის კანონი $s = \frac{gt^2}{2}$).

აქ $s(t)$ ფუნქციის წარმოებულით, $\frac{ds}{dt} = at$, ფუნქცია $s(t)$ განსაზღვრეთ,

$s(t) = \frac{at^2}{2}$, ე. ი. ფუნქციის წარმოებულით თვით ფუნქცია განსაზღვრეთ. ფაქტიურად გაწარმოების შეზღუდული მოქმედება შევასრულეთ. გაწარმოების შეზღუდულ მოქმედებას ინტეგრება ეწოდება.

ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა რაიმე E სიმრავლეში, საზოგადოდ, $E = \{x | a < x < b\}$, მოცემულია უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი (პირველადი) $]a, b[$ ინტერვალში, თუ ამ ინტერვალში $F(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f(x)$ -ის ტოლია,

$$F'(x) = f(x). \quad (5)$$

ცხადია, თუ $]a, b[$ ინტერვალში $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილია $F(x)$ ფუნქცია, მაშინ $F(x) + C$ ფუნქციაც, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, იქნება აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი, რადგანაც

$$(F(x) + C)' = f(x).$$

პირიქით, თუ $]a, b[$ ინტერვალში $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციებია $F_1(x)$ და $F(x)$, მაშინ მათი სხვაობა $F_1(x) - F(x)$ $]a, b[$ ინტერვალში მუდმივი იქნება.

¹ გალილეო გალილეი (1564—1642), იტალიელი ფიზიკოსი, მექანიკოსი, ასტრონომი, პოეტი, ფილოლოგი და კრიტიკოსი.

მართლაც, x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $[a, b]$ ინტერვალშიდან

$$F'_1(x) = f(x), \quad F'(x) = f(x),$$

მაშინ

$$[F_1(x) - F(x)]' = F'_1(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0. \quad (6)$$

ასეა ვაჩვენოთ, რომ თუ $[a, b]$ ინტერვალში $\Phi(x) = F_1(x) - F(x)$ ფუნქციის ნულის ტოლი წარმოებული აქვს, მაშინ ეს ფუნქცია $[a, b]$ ინტერვალში მუდმივია.

დამტკიცება: ავიღოთ $[a, b]$ ინტერვალშიდან რაიმე x_1 წერტილი და ვთქვათ $[a, b]$ ინტერვალის ნებისმიერი წერტილია x . გამოვიყენოთ $[x_1, x]$ სეგმენტზე ლაგრანჟის ფორმულა (ნაწ. 1, მე-15 თავი, § 1, პ 5):

$$\Phi(x) - \Phi(x_1) = (x - x_1) \Phi'(\xi).$$

რადგანაც პირობის ძალით $\Phi'(\xi) = 0$, ამ ტოლობიდან მივიღებთ

$$\Phi(x) - \Phi(x_1) = 0, \quad \text{ანუ} \quad \Phi(x) = \Phi(x_1).$$

მაშასადამე, $[a, b]$ ინტერვალის ყოველ x წერტილში $\Phi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა არის ერთი და იგივე რიცხვი $\Phi(x_1)$. ეს სწორედ იმას ნიშნავს, რომ $\Phi(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ ინტერვალში მუდმივია და მისი მნიშვნელობაა $\Phi(x_1)$, $C = \Phi(x_1)$.

მივიღეთ,

$$F_1(x) - F(x) = C,$$

საიდანაც

$$F_1(x) = F(x) + C.$$

ამრიგად, დაგამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 1. თუ $F(x)$ არის მოცემული $f(x)$ ფუნქციის რომელიმე პირველყოფილი ფუნქცია $[a, b]$ ინტერვალში, მაშინ $F(x) + C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ზოგადი სახით პირველყოფილი ფუნქციაა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ $[a, b]$ ინტერვალში $f(x)$ ფუნქციის რომელიმე პირველყოფილი ფუნქციაა $F(x)$, მაშინ იმავე $[a, b]$ ინტერვალში სხვა პირველყოფილი ფუნქცია იქნება $F(x) + C$, სადაც C მუდმივი სათანადოდ უნდა შეირჩეს.

მაგალითად, $f(x) = 2x$. ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი. მივიღებთ:

$$F(x) = x^2 + C.$$

მაგრამ, თუ მოვიტოვებთ $f(x)$ -ის ისეთი პირველყოფილი გვეპოვნა,

რომლის მნიშვნელობა $x=1$ -თვის იქნებოდა 4, $F(1)=4$, მაშინ C უნდა განესაზღვროთ შემდეგი ტოლობიდან

$$4 = 1^2 + C.$$

საიდანაც

$$C = 3.$$

ამრიგად, $f(x) = 2x$ -ის პირველყოფილი ფუნქცია, რომელიც $x=1$ -თვის ლებულობს მნიშვნელობას 4-ს, იქნება $F(x) = x^2 + 3$.

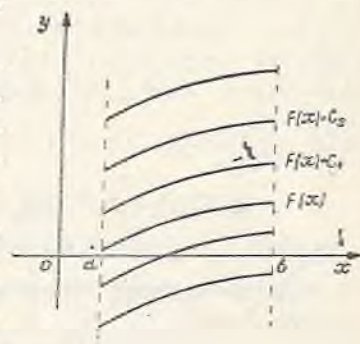
ამრიგად, $[a, b]$ ინტერვალში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი წარმოადგენს ისეთ $F(x)$ ფუნქციას სიმრავლეს, რომელთა ელემენტები მხოლოდ მუდმივით განსხვავდებიან.

შეიძლება შემოვიტანოთ $f(x)$ ფუნქციისათვის $[a, b]$ სეგმენტზე პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქციის ცნება. $F(x)$ ფუნქციაში ვიგულისხმებთ ისეთ ფუნქციას, რომელსაც $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში აქვს წარმოებული $F'(x)$. ამასთან $F(x)$ ფუნქციის აქვს აგრეთვე მარჯვენა წარმოებული a წერტილში $F'(a+0)$, სადაც $F'(a+0) = f(a+0)$ და აქვს b წერტილში მარცხენა წარმოებული $F'(b-0) = f(b-0)$.

ანალოგიურად განისაზღვრება $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი უსასრულო წრფეზე და ნახევარღერძზე^{1, 2}.

შემდეგში, როდესაც საქმე გვექნება $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილ ფუნქციასთან $F(x)$ -თან, ყოველთვის ვიგულისხმებთ ერთ-ერთ პირველყოფილ ფუნქციას, მაგრამ სიტყვა „ერთ-ერთს“ ხანდახან არ ვიხმარებთ. $[a, b]$ ინტერვალში $F(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის საფუძველზე აღვიღოთ წარმოსადგენია, რომ პირველყოფილ ფუნქციასა გრაფიკები მიიღება ერთ-ერთი პირველყოფილი ფუნქციის $F(x)$ -ის გრაფიკის Oy ღერძის გასწვრივ პარალელური გადატანით (ნახ. 1).

2. პირველყოფილი ფუნქციის თვისებები. ვაჩვენოთ, რომ, თუ $[a, b]$ ინტერვალში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა $F(x)$, მაშინ $kf(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი იქნება $kF(x)$,



ნახ. 1

¹ В. А. Ильин, В. А. Сазовничий, Бл. Х. Сендов, Математический анализ, I, Изд. МГУ, 1985, стр. 291.

² В. А. Зорич, Математический анализ, I, М., 1981, стр. 314.

სადაც k მუდმივია ან მოკლედ, $kf(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა $kF(x)$, თუ $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა $F(x)$.
მართლაც,

$$(kf(x))' = k(F(x))' = kf(x).$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 2. თუ $[a, b]$ ინტერვალში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილია $F(x)$ ფუნქცია, იმავე ინტერვალში $kf(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი ფუნქცია იქნება $kF(x)$.

სრულიად ასევე ვაჩვენებთ, რომ ჰეშმარიტია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. თუ $[a, b]$ ინტერვალში განსაზღვრული $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციების სათანადო პირველყოფილი ფუნქციებია $F_1(x)$ და $F_2(x)$, მაშინ იმავე ინტერვალში $F_1(x) + F_2(x)$ იქნება $f_1(x) + f_2(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი.

შეგვიძლია დავამტკიცოთ უფრო ზოგადი თეორემა.

თეორემა 4. თუ $[a, b]$ ინტერვალში განსაზღვრული $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციების სათანადოდ პირველყოფილი ფუნქციებია $F_1(x)$ და $F_2(x)$, მაშინ $k_1F_1(x) + k_2F_2(x)$ ფუნქცია იქნება $k_1f_1(x) + k_2f_2(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი, სადაც k_1 და k_2 მუდმივებია.

მართლაც,

$$(k_1F_1(x) + k_2F_2(x))' = (k_1F_1(x))' + (k_2F_2(x))' = k_1F_1'(x) + k_2F_2'(x) = k_1f_1(x) + k_2f_2(x).$$

3. განუსაზღვრელი ინტეგრალი. როგორც ვიცით, $F(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

$f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილის მოძებნის ამოცანას $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრების ამოცანას უწოდებენ.

მოცემული $f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილისა და C მუდმივის ჯამს $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელ ინტეგრალს უწოდებენ და აღნიშნავენ $\int f(x)dx$ სიმბოლოთი,

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (7)$$

ეს ტოლობა ასე წაიკითხება: განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)dx$ დიფ-

ერენციალისა ტოლია $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი $F(x)$ პლუს ნებისმიერი მუდმივი C .

(7) ტოლობაში $f(x)$ ფუნქციას ინტეგრალქვეშა ფუნქციას უწოდებენ, ხოლო $f(x)dx$ — ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას. სიმბოლო $\int$ ინტეგრალის ნიშანია.

როგორც (7) ტოლობა გვიჩვენებს, გამოსახულება $\int f(x)dx$ აღნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილ ფუნქციათა მთელ სიმრავლეს.

ამრიგად, სიმბოლო $\int f(x)dx$ აღნიშნავს იმ ფუნქციათა სიმრავლეს,

რომელთა დიფერენციალი ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაა $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილ ფუნქციათა $F(x) + C$ სიმრავლიდან რომ გამოვყოთ რომელიმე $F_1(x)$ ფუნქცია, მოცემული უნდა გვქონდეს ე. წ. საწყისი პირობა — საწყისი მნიშვნელობანი.

როცა $x = x_0$, მაშინ პირველყოფილი ფუნქცია y_0 -ის ტოლი უნდა იყოს. ისე, როგორც ზემოთ მაგალითზე ვაჩვენეთ, ჩასმით $x = x_0$ გვექნება

$$y_0 = F(x_0) + C,$$

საიდანაც

$$C = y_0 - F(x_0).$$

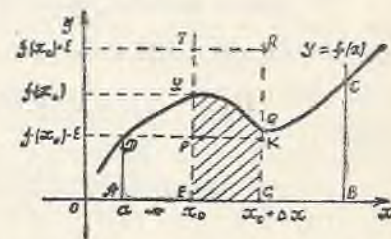
შევიტანოთ C -ს მიღებული მნიშვნელობა $F(x) + C$ გამოსახულებაში, გვექნება:

$$F(x) - F(x_0) + y_0. \quad (8)$$

მიღებული (8) ფუნქცია სწორედ საძიებელი $F_1(x)$ ფუნქციაა, $y = F_1(x)$.

ამრიგად, $F(x) + C$ ფუნქციათა სიმრავლიდან გამოვყავით $f(x)$ ფუნქციის ის პირველყოფილი ფუნქცია $y = F_1(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას: როდესაც $x = x_0$, მაშინ $y = y_0$.

გამოვარკვეით $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი $y = F(x)$ ფუნქციის გეომეტრიული მნიშვნელობა¹. ავიღოთ სიბრტყეზე Oxy კოორდინატთა სისტემა. კოორდინატთა ამ სისტემაში (ნახ. 2) ავაგოთ $y = f(x)$ წირი,



ნახ. 2

¹ ა. რაზმაძე, განუსაზღვრელი ინტეგრალები, თბილისი, 1956 გვ. 17—18.

$x=a$ და $x=b$ წრფეები. განვიხილოთ ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წიხით, $x=a$, $x=b$ წრფეებით და Ox ღერძით. ამ ფიგურას ეწოდება მრუდწირული ტრაპეცია. ნახაზზე $ABCD$ მრუდწირული ტრაპეციაა. $[a, b]$ სეგმენტზე ავიღოთ რომელიმე $E(x_0)$ და $G(x_0+\Delta x)$ წერტილები. რადგანაც x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია პირობის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0: (|\Delta x| < \eta) \Rightarrow (|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

ε და E წერტილებზე გავატაროთ Oy ღერძის პარალელური წრფეები. განვიხილოთ $AELD$ მრუდწირული ტრაპეცია. ამ ტრაპეციის ფართობი, ცხადია, x_0 -ის ფუნქციაა. $AELD$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი $S(x_0)$ -ით აღვნიშნოთ. ვაჩვენოთ, რომ $S'(x_0) = f(x_0)$. Oxy კოორდინატთა სისტემაში ავაგოთ წრფეები, რომელთა განტოლებანია:

$$y = f(x_0) + \varepsilon, y = f(x_0) - \varepsilon,$$

(x_0 ფიქსირებულია). ამ წრფეების $x=x_0$, $x=x_0+\Delta x$ წრფეებთან გადაკვეთის წერტილები სათანადოდ P, K, R, T ასოებით აღვნიშნოთ. რადგანაც x_0 -ის მივცეთ ნაზრდი Δx , ამიტომ $S(x_0)$ -იც მიიღებს ნაზრდს $\Delta S(x)$

$$\Delta S(x) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

ცხადია, $\Delta S(x)$ გამოსახავს $EGQL$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს. ნახაზიდან ადვილი მისახვედრია, რომ $EGQL$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი აკმაყოფილებს უტოლობებს:

$$\text{ფართ. } EGKP \leq \text{ფართ. } EGQL \leq \text{ფართ. } EGRT,$$

სადაც $EGKP$ და $EGRT$ მართკუთხედებია. მაშასადამე,

$$[f(x_0) - \varepsilon] \Delta x \leq \Delta S(x) \leq [f(x_0) + \varepsilon] \Delta x,$$

საიდანაც

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \leq f(x_0) + \varepsilon. \quad (9)$$

ეს უტოლობა სრულდება ნებისმიერი Δx -სათვის, $0 < |\Delta x| < \eta$, სადაც $x_0 + \Delta x \in [a, b]$.

(9) უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $\Delta x \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x_0),$$

ანუ

$$S'(x_0) = f(x_0).$$

რადგანაც x_0 ნებისმიერად იყო აღებული $[a, b]$ სეგმენტიდან, შეგვიძლია დავწეროთ

$$S'(x) = f(x).$$

ეს ტოლობა კი იმას ნიშნავს, რომ $S(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველწოდელი ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე:

$$S(x) = F(x) + C. \quad (10)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $S(a) = 0$. ამის გამო (10) მოგვცემს

$$S(a) = F(a) + C = 0,$$

საიდანაც

$$C = -F(a).$$

ამრიგად,

$$S(x) = F(x) - F(a). \quad (11)$$

მივიღეთ: თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და უარყოფით მნიშვნელობებს არ ღებულობს $[a, b]$ შუალედში, მაშინ $y=f(x)$ წიხით, $x=a$ წრფით, Ox ღერძით და $x=b$ წერტილზე გატარებული Oy ღერძის პარალელური წრფით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის $S(x)$ ფართობი $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა.

თუ $f(x)$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$S(b) = F(b) - F(a). \quad (12)$$

ეს უკანასკნელი იძლევა $ABCD$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს.

ახლა დავსვათ კითხვა: $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს პირველყოფილი ფუნქცია?

ზემოთ გეომეტრიულად ვაჩვენეთ და კიდევ ავაგეთ $[a, b]$ სეგმენტზე არაუარყოფითი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია. ესაა სათანადო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი $S(x)$. განსაზღვრულ ინტეგრალთა თეორიაში დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 5. სეგმენტზე ყოველ უწყვეტ ფუნქციას აქვს პირველყოფილი ფუნქცია.

ელემენტარული ფუნქციების გაწარმოებით მივიღეთ, რომ ელემენტარული ფუნქციის წარმოებული ელემენტარული ფუნქციაა. მაგრამ ამას გერ ვიტყვი ელემენტარული ფუნქციის პირველყოფილის შესახებ. ელემენტარული ფუნქციის ინტეგრალი ყოველთვის არაა ელემენტარული ფუნქცია. მაგალითად,

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{e^x}{x} dx$$

არ წარმოადგენენ ელემენტარულ ფუნქციებს. ამ ფუნქციებს უმაღლეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს უწოდებენ.

4. განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები. განუსაზღვრელი ინტეგრალის განსაზღვრიდან

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

სადაც $f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილია $F(x)$ ფუნქცია, გვექნება:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x),$$

ანუ

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x). \quad (13)$$

ასევე, თუ $\int f(x) dx$ -ს ასე გადავწერთ $\int F'(x) dx$, მაშინ, ცხადია, გვექნება

$$\int F'(x) dx = F(x) + C. \quad (14)$$

მიღებული ტოლობები გვიჩვენებენ:

1°. ჯერ ფუნქციის ინტეგრება და შემდეგ გაწარმოება ფუნქციას არ ცვლის, ხოლო ჯერ ფუნქციის გაწარმოება და შემდეგ ინტეგრება მოცემულ ფუნქციას ნებისმიერი მუდმივი ცვლის.

მნელი მისახვედრი არაა, რომ ყოველი ტოლობა, რომლის ორივე ნაწილში განუსაზღვრელი ინტეგრალებია, არის სიმრავლეთა ტოლობა¹. სწორედ ამ პრინციპით მტკიცდება განუსაზღვრელი ინტეგრალის ქვემოთ მოტანილი თვისებები.

2°. თუ k მუდმივია, მაშინ

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx. \quad (15)$$

ეს ტოლობა ისე უნდა გავიგოთ, რომ ტოლობის ორივე ნაწილში მოთავსებულ ფუნქციათა წარმოებულები ერთი და იგივე ფუნქციაა. მართლაც,

$$\left(\int kf(x) dx \right)' = kf(x),$$

$$\left(k \int f(x) dx \right)' = k \left(\int f(x) dx \right)' = kf(x).$$

სრულიად ასევე დამტკიცდება, რომ

3°. თუ k_1 და k_2 მუდმივებია, მაშინ

$$\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx. \quad (16)$$

5. ელემენტარულ ფუნქციათა ინტეგრალების ცხრილი. თუ ვისარგებლებთ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცნებით, ადვილად მივიღებთ ინტეგრალთა შემდეგ ცხრილს:

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n+1 \neq 0,$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

$$3) \int e^x dx = e^x + C,$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$5) \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1, \quad C_1 = \frac{\pi}{2} + C,$$

$$10) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C = -\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} x + C_1, \quad C_1 = \frac{\pi}{2} + C.$$

$$11) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$12) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$13) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$14) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

ცხადია, ცხრილში მოცემული ფორმულები ჭეშმარიტია ნამდვილი რიცხვების იმ სიმრავლეში, სადაც ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან. მაგალითად, მე-9 ფორმულა ჭეშმარიტია ნამდვილ რიცხვთა იმ შუალედში, რომელიც არ შეიცავს -1 -ს ან $+1$ -ს.

მე-2 ფორმულა მიღებულია შემდეგი მსჯელობის საფუძველზე:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot |x|' = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \cdot 1, & \text{თუ } x > 0, \\ \frac{1}{|x|} \cdot (-1), & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

¹ Л. Д. Кудрявцев, Курс математического анализа, т. I, М., 1981, стр. 380.

მაშასადამე,

$$(\ln |x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{თუ } x > 0, \\ \frac{1}{-x}(-1), & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

ამრიგად,

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

ეს ტოლობა, რა თქმა უნდა, არაა ჭეშმარიტი, როცა $x=0$. ე. ი. $\ln |x|$ არის პირველყოფილი $f(x) = \frac{1}{x}$ ფუნქციისა ნამდვილ რიცხვთა იმ შუალედში, რომელიც არ შეიცავს 0-ს. $]-\infty, 0[$ და $]0, +\infty[$ შუალედებისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

თუ ვისარგებლებთ მე-2 ფორმულით, შეგვიძლია გამოვთვალოთ

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C.$$

ამრიგად,

$$15) \int \operatorname{tg} x dx = - \ln |\cos x| + C.$$

ასევე შეგვიძლია ვაჩვენოთ

$$16) \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

თუ ვისარგებლებთ მე-9 ფორმულით, გამოვთვალოთ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d \frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

ამრიგად, მივიღეთ უფრო ზოგადი ფორმულა, ვიდრე მე-9 ფორმულა:

$$9') \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

სრულიად ასევე მივიღებთ

$$10') \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

შეგვიძლია მე-2 ფორმულა განვაზოგადოთ:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \ln |x+a| + C.$$

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი ფორმულა

$$2') \int \frac{dx}{x+a} = \ln |x+a| + C$$

ამ ფორმულის საფუძველზე გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}, \quad a \neq b.$$

გამოვიღეთ იგივეობიდან

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right),$$

გვექნება

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} &= \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x-b} \right) = \\ &= \frac{1}{a-b} (\ln |x-a| + C_1 - \ln |x-b| - C_2) = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + C, \end{aligned}$$

სადაც

$$C = \frac{C_1 - C_2}{a-b}.$$

ამგვარად,

$$17) \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + C.$$

ამ ფორმულიდან, თუ $b = -a$, მივიღებთ

$$18) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი ტოლობის მართებულობა

$$19) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C,$$

სადაც k მუდმივია.

2. გ. კომლაძე



§ 2. უშუალო ინტეგრება. მაგალითები

ფუნქციითა უშუალო ინტეგრება ემყარება განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებას

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx,$$

სადაც გამოიყენება ზემოთ მოცემული ელემენტარულ ფუნქციითა ცხრილი.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1.

$$\begin{aligned} \int (3-2x)\sqrt{x} dx &= \int \left(3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \\ &= 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 2 \int x^{\frac{3}{2}} dx = 3 \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C_1 \right) - \\ &- 2 \left(\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C_2 \right) = 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 3C_1 - 2C_2 = \\ &= 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} + C, \end{aligned}$$

სადაც

$$C = 3C_1 - 2C_2.$$

შენიშვნაში ჯერ მოცემული ფუნქციების პირველყოფილ ფუნქციებს გამოვთვლით და შემდეგ ნებისმიერ მუდმივს C -ს მივუწეროთ.

მაგალითი 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{(x^2+5)^3} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+5)}{(x^2+5)^3} = \frac{1}{2} \frac{(x^2+5)^{-3+1}}{-3+1} + C = \\ &= -\frac{(x^2+5)^{-2}}{4} + C = -\frac{1}{4(x^2+5)^2} + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 3.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} &= \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \\ &= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctg x + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 4.

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \int e^{ax} d(ax) = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

მაგალითი 5.

$$\int e^{\sin x+1} \cos x dx = \int e^{\sin x+1} d(\sin x+1) = e^{\sin x+1} + C.$$

მაგალითი 6.

$$\int \sin 7x dx = \frac{1}{7} \int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{7} \cos 7x + C.$$

მაგალითი 7.

$$\int \frac{dx}{\cos^2(2x+3)} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+3)}{\cos^2(2x+3)} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x+3) + C.$$

მაგალითი 8.

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{tg} 5x - 3)^2 dx &= \int (\operatorname{tg}^2 5x - 6 \operatorname{tg} 5x + 9) dx = \\ &= \int [(\operatorname{tg}^2 5x + 1) - 6 \operatorname{tg} 5x + 8] dx = \int \frac{dx}{\cos^2 5x} - 6 \int \operatorname{tg} 5x dx + \\ &+ 8 \int dx = \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + \frac{6}{5} \ln |\cos 5x| + 8x + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 9.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+1} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + C.$$

მაგალითი 10.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 11.

$$\int \frac{dx}{x^2+x-5} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{21}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{21}{4}}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}{x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{2x+1-\sqrt{21}}{2x+1+\sqrt{21}} \right| + C.$$

მაგალითი 12.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x-2)^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{6-(x-2)^2}} =$$

$$= \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} + C.$$

მაგალითი 13.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-2}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-6}} = \ln |x+2+\sqrt{(x+2)^2-6}| + C =$$

$$= \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x-2}| + C.$$

მაგალითი 14.

$$\int 2^{x^2+x} \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int 2^{x^2+x} d(x^2+x) = \frac{2^{x^2+x-1}}{\ln 2} + C.$$

სავარჯიშო 1. გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

- 1) $\int \frac{(x-1)^3}{x^4} dx$, 2) $\int \frac{t^4 dt}{(2+3t^5)^2}$, 3) $\int \frac{2^x-3^x}{6^x} dx$,
- 4) $\int (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 d\alpha$, 5) $\int (\sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha)^2 d\alpha$,
- 6) $\int \frac{t^2-1}{t^3-3t} dt$, 7) $\int \frac{3du}{\sqrt{9-4u^2}}$, 8) $\int \frac{5du}{\sqrt{4-u^2}}$,
- 9) $\int \frac{dz}{\sqrt{8-2z-z^2}}$, 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$, 11) $\int \frac{dy}{\sqrt{2+2y+y^2}}$,
- 12) $\int \frac{dx}{x^2+4x+9}$, 13) $\int \frac{dx}{1+x-x^2}$, 14) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$,

- 15) $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$, 16) $\int \frac{2x+3}{x^2+4} dx$, 17) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx$,
- 18) $\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}$, 19) $\int \frac{\cos 3x}{4+2\sin 3x} dx$, 20) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$,
- 21) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$, 22) $\int \sin^3 x dx$, 23) $\int \cos^5 x dx$,
- 24) $\int \operatorname{tg} 7x dx$, 25) $\int \sqrt[3]{x+1} dx$, 26) $\int x\sqrt{2+x^2} dx$,
- 27) $\int x e^{x^2} dx$, 28) $\int \cos^4 x dx$, 29) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$,
- 30) $\int \frac{dx}{\sin x}$, 31) $\int \frac{dx}{\cos x}$, 32) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$,
- 33) $\int \frac{\sin 2x dx}{2\cos^2 x+3}$, 32) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$, 34) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$,
- 35) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$.

§ 3. ინტეგრირება ცვლადთა შეცვლის მეთოდით

განვიხილოთ უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი

$$\int f(x) dx. \quad 1)$$

დავუშვათ

$$x = \varphi(t),$$

სადაც $\varphi(t)$ ფუნქციის რაიმე შუალედში t ცვლადით უწყვეტი წარმოებული აქვს.

დავამტკიცოთ, რომ (1) ინტეგრალის გამოთვლისათვის საკმარისია $\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$ ინტეგრალი გამოვთვალოთ და შემდეგ t ცვლადი $t = \varphi(x)$ -ით შევცვალოთ, სადაც t განისაზღვრება $x = \varphi(t)$ ტოლობიდან. მართლაც,

$$d \int f(x) dx = f(x) dx,$$

$$d \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = f(x) dx.$$

მაშასადამე, $\int f(x) dx$ და $\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$, სადაც $\varphi(t) = x$, ერთი და იმავე $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციებია. ამის გამო გვექნება

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt, \quad t = \psi(x). \quad (2)$$

ამ ფორმულას განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცვლადთა შეცვლით ან ჩასმით გამოთვლის ფორმულა ეწოდება.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx.$$

დავუშვათ

$$\frac{1}{x} = t,$$

მაშინ

$$t = \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2} dx = -dt.$$

გამოსათვლელ ინტეგრალში ჩასმა მოგვცემს:

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = - \int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 - 1}}.$$

ჩასმა:

$$\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$$

მოგვცემს

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 - 1}} &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{4 \frac{1}{t^2} - 1}} = - \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = -\arcsin \frac{t}{2} + C = -\arcsin \frac{1}{2x} + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 3.

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}.$$

ჩასმა:

$$\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} &= - \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2} - 4}} = - \int \frac{tdt}{\sqrt{1 - 4t^2}} = - \\ &= - \frac{1}{8} \int \frac{d(2t)^2}{\sqrt{1 - (2t)^2}} = - \frac{1}{8} \int \frac{d(1 - (2t)^2)}{\sqrt{1 - (2t)^2}} = \\ &= - \frac{1}{8} \frac{[1 - (2t)^2]^{\frac{1}{2} + 1}}{-\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{1}{4 \sqrt{1 - (2t)^2}} + C = \\ &= \frac{1}{4 \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} + C = \frac{x}{4 \sqrt{x^2 - 4}} + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 4.

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

ჩასმა:

$$x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{a \cos t dt}{(a^2 - a^2 \sin^2 t) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} = \int \frac{a \cos t dt}{a^3 \cos^3 t} = \\ &= \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} + C = \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}.$$

ჩასმა:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + k} = t &\Rightarrow \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + k}} = dt \Rightarrow \frac{dx}{t} = \frac{dt}{x} \Rightarrow \frac{dx}{t} = \\ &= \frac{dx + dt}{x + t} \Rightarrow \frac{dx}{t} = \frac{d(x+t)}{x+t} \Rightarrow \int \frac{dx}{t} = \int \frac{d(x+t)}{x+t} + C = \\ &= \ln |x+t| + C = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C \end{aligned}$$

ამგვარად:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$$

მივიღეთ მე-19 ფორმულა (იხილეთ ელემენტარულ ფუნქციათა ინტეგრირების ცხრილი).

§ 4. ნაწილობრივი ინტეგრირება

ვთქვათ, $u(x)$ და $v(x)$ უწყვეტად წარმოებული ფუნქციებია, მაშინ გამოსახულებიდან

$$udv = d(uv) - vdu$$

მივიღებთ

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du + C$$

ანუ

$$\int u dv = uv - \int v du + C.$$

რადგანაც C მუდმივი შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $\int v du$ ინტეგრალში, გვექნება

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

მიღებული ფორმულა საშუალებას იძლევა $\int u dv$ გამოვთვალოთ $\int v du$ ინტეგრალის საშუალებით.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

$$\int \ln x dx.$$

დავუშვათ

$$u = \ln x, \quad dv = dx,$$

მაშინ

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x.$$

(1) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

მაგალითი 2.

$$\int x^2 \cos x dx.$$

დავუშვათ

$$x^2 = u, \quad \cos x dx = dv,$$

მაშინ

$$du = 2x dx, \quad v = \sin x.$$

(1) ფორმულით მივიღებთ

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx.$$

$\int x \sin x dx$ -ის გამოსათვლელად კიდევ გამოვიყენოთ ნაწილობრივი ინტეგრირება. ამისათვის დავუშვათ

$$x = u, \quad \sin x dx = dv,$$

$$du = dx, \quad v = -\cos x.$$

(1) ფორმულით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \\ &+ \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

საბოლოოდ გვექნება

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

§ 5. ინტეგრალთა უმარტივესი ტიპები

1. რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრება. მთელი რაციონალური ფუნქციის, ანუ მრავალწევრის

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \quad (1)$$

ინტეგრება შეიძლება უშუალოდ, ფუნქციითა ჯამის ინტეგრალის თვისების საფუძველზე.

თუ გვაქვს წილად-რაციონალური ფუნქცია $\frac{P(x)}{Q(x)}$, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია, ამასთან, თუ $P(x)$ მრავალწევრის ხარისხი არაა ნაკლები $Q(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე, მაშინ $P(x)$ მრავალწევრის $Q(x)$ მრავალწევრზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad (2)$$

სადაც $g(x)$ მრავალწევრი $p(x)$ მრავალწევრის $Q(x)$ მრავალწევრზე გაყოფითა, ხოლო $R(x)$ — სათანადო ნაშთი. ამასთან $R(x)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი $Q(x)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელზე ნაკლებია. (2) გამოსახულების პირველი შესაყრების — $g(x)$ მრავალწევრის ინტეგრება უშუალოდ შეიძლება. შევჩერდეთ მეორე შესაყრების — $\frac{R(x)}{Q(x)}$ წესიერი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებაზე.

როგორც ვიცით, $Q(x)$ მრავალწევრი დაიშლება $(x-a)^v$ და $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^u = (x^2 + px + q)^u$ თანამრავლებად, სადაც a და $\alpha \pm \beta i$ რიცხვები $Q(x)$ მრავალწევრის ნულებია.

დავშალოთ $\frac{R(x)}{Q(x)}$ წესიერი რაციონალური ფუნქცია ელემენტარული წილადების ჯამად:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{v=1}^{k_1} \frac{A_v}{(x-a_1)^v} + \dots + \sum_{\mu_1=1}^{q_1} \frac{M_{\mu_1} x + N_{\mu_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1}} + \dots + \sum_{\mu_r=1}^{q_n} \frac{M_{\mu_r} x + N_{\mu_r}}{(x^2 + p_r x + q_r)^{\mu_r}}, \quad (3)$$

სადაც

$$k_1 + \dots + 2q_1 + \dots + 2q_r = M,$$

m არის $Q(x)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებით მივიღებთ სამი სახის ინტეგრალს:

$$\int \frac{dx}{x-a}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^v}, \quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^u} dx.$$

პირველი ორი ინტეგრალი ადვილად გამოითვლება:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln |x-a| + C, \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^v} = \frac{1}{(1-v)x^{v-1}} + C. \quad (5)$$

განვიხილოთ მესამე ინტეგრალი.

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^u} dx. \quad (6)$$

ჯერ განვიხილოთ ამ ინტეგრალის სხვადასხვა კერძო შემთხვევა.

1) ვთქვათ, $\alpha + \beta i$ არის $x^2 + px + q$ სამწევრის ნული. მაშინ, როგორც ცნობილია, $\alpha - \beta i$ აგრეთვე მისი ნული იქნება და

$$x^2 + px + q = (x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = (x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

ამიტომ გვექნება

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \arctg \frac{x - \alpha}{\beta} + C. \quad (7)$$

2) გამოვთვალოთ

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^v}.$$

გვექნება

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^v} = \int \frac{dx}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^v}. \quad (8)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x - \alpha = t, \quad \text{მაშინ} \quad dx = dt.$$

(8) ინტეგრალში სათანადო ჩასმა მოგვცემს:

$$\int \frac{dx}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^v} = \int \frac{dt}{(t^2 + \beta^2)^v}.$$

გამოვთვალთ მიღებული ინტეგრალი

$$I_v = \int \frac{dt}{[t^2 + \beta^2]^v} \quad (9)$$

გვექნება

$$I_v = \frac{1}{\beta^2} \int \frac{(t^2 + \beta^2) - t^2}{(t^2 + \beta^2)^v} dt = \frac{1}{\beta^2} \int \frac{dt}{(t^2 + \beta^2)^{v-1}} - \frac{1}{\beta^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + \beta^2)^v} = \frac{1}{\beta^2} I_{v-1} - \frac{1}{\beta^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + \beta^2)^v} \quad (10)$$

ამ გამოსახულების უკანასკნელი ინტეგრალი გამოვთვალოთ ნაწილობითი ინტეგრებით. ამისათვის მივიღოთ

$$u = t, \quad dv = \frac{t dt}{(t^2 + \beta^2)^v}$$

აქედან გვექნება

$$du = dt, \quad v = \int \frac{t dt}{(t^2 + \beta^2)^v} = \frac{1}{2(1-v)} \frac{1}{(t^2 + \beta^2)^{v-1}}$$

ამის გამო

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + \beta^2)^v} = \frac{t}{2(1-v)} \frac{1}{(t^2 + \beta^2)^{v-1}} - \frac{1}{2(1-v)} \int \frac{dt}{(t^2 + \beta^2)^{v-1}}$$

უკანასკნელი გამოსახულების (10) გამოსახულებაში ჩასმა მოგვცემს:

$$I_v = \frac{1}{\beta^2} I_{v-1} - \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{t}{2(1-v)} \frac{1}{(t^2 + \beta^2)^{v-1}} - \frac{1}{2(1-v)} I_{v-1} \right],$$

ანუ

$$I_v = \frac{t}{2\beta^2(v-1)(t^2 + \beta^2)^{v-1}} + \frac{1}{\beta^2} \left[1 + \frac{1}{2(1-v)} \right] I_{v-1}$$

ამგვარად, მივიღეთ

$$I_v = \frac{t}{2\beta^2(v-1)(t^2 + \beta^2)^{v-1}} + \frac{3-2v}{2\beta^2(1-v)} I_{v-1} \quad (11)$$

ცხადია, ინტეგრალი I_{v-1} გამოითვლება I_{v-2} ინტეგრალით და ასე შემდეგ. საბოლოოდ მივიღებთ I_1 -ს,

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{t}{\beta} + C.$$

(11) ფორმულას ეწოდება რეკურენტული ფორმულა. ეს ფორმულა იძლევა საშუალებას I_v გამოვთვალოთ I_{v-1} საშუალებით.

3) გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{Mx + N}{[(x-a)^2 + \beta^2]^v} dx. \quad (12)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x-a=t$. მაშინ

$$x = a + t, \quad dx = dt.$$

გვექნება

$$\begin{aligned} \int \frac{M(a+t) + N}{(t^2 + \beta^2)^v} dt &= (Ma + N) \int \frac{dt}{(t^2 + \beta^2)^v} + \\ &+ M \int \frac{t dt}{(t^2 + \beta^2)^v} = (Ma + N) I_v + \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + \beta^2)}{(t^2 + \beta^2)^v} = \\ &= (Ma + N) I_v + \frac{M}{2} \frac{1}{(1-v)(t^2 + \beta^2)^{v-1}} + C. \end{aligned}$$

ამგვარად, მივიღეთ

$$\int \frac{Mx + N}{[(x-a)^2 + \beta^2]^v} dx = \frac{M}{2(1-v)} \frac{1}{(t^2 + \beta^2)^{v-1}} + (Ma + N) I_v, \quad (13)$$

სადაც I_v გამოითვლება (11) ფორმულით.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)^2} dx. \quad (14)$$

ფუნქცია $\frac{x+1}{x(x-1)^2}$ დავშალოთ ელემენტარული წილადების ჯამად,

გვექნება:

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}. \quad (15)$$

გამოვთვალოთ A , B და C მრიცხველები.

(15) გამოსახულების გაერთმნისწესიანებით გვექნება:

$$x+1 = A(x-1)^2 + Bx + C(x-1)x,$$

ანუ

$$x+1 = (A+C)x^2 + (-2A+B-C)x + A,$$

საიდანაც

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -2A + B - C = 1 \\ A = 1. \end{cases}$$

მიღებული განტოლებათა სისტემიდან ამოვხსნათ A, B, C :

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ C &= -1, \\ B &= 2. \end{aligned}$$

ამის გამო (14) ინტეგრალი მოგვცემს

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x(x-1)^2} dx &= \int \left[\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \right] dx = \int \frac{dx}{x} + \\ &+ 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x-1} = \ln|x| - \frac{2}{x-1} - \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

დავშალოთ ელემენტარულ წილადებად $\frac{1}{x^3+1}$. გვექნება

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

სათანადო გაერთმნიშვნელობა მოგვცემს

$$1 = A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1),$$

ანუ

$$1 = (A+M)x^2 + (-A+M+N)x + (A+N),$$

საიდანაც მივიღებთ განტოლებათა სისტემას.

$$\begin{cases} A + M = 0, \\ -A + M + N = 0, \\ A + N = 1. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნა მოგვცემს

$$A = \frac{1}{3}, \quad M = -\frac{1}{3}, \quad N = \frac{2}{3}.$$

ამგვარად, გვექნება

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \\ &- \frac{1}{3} \int \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}. \quad (16)$$

შეგვიძლია ვისარგებლოთ (11) ფორმულით:
 $\beta=1, \nu=3$. გვექნება

$$I_3 = \frac{x}{2(3-1)(x^2+1)^{3-1}} + \frac{3-2 \cdot 3}{2(1-3)} I_2,$$

$$I_2 = \frac{x}{2(2-1)(x^2+1)^{2-1}} + \frac{3-2 \cdot 2}{2(1-2)} I_1,$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x.$$

მიმდევრობითი ჩასმა (16) ინტეგრალის მნიშვნელობას მოგვცემს:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C.$$

2. ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}\right) dx, \quad (17)$$

სადაც R თავისი არგუმენტების x -ისა და y -ის, $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}$, რაციონალური ფუნქციაა.

(17) ინტეგრალის გამოთვლა

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = z^n. \quad (18)$$

ჩასმით რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებაზე მიიყვანება. მართლაც, (18) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}} = z.$$

აქედან კი გვექნება

$$x = \frac{b_1 z^n - b}{a - a_1 z^n}, \quad (19)$$

საიდანაც

$$dx = \frac{n(ab_1 - a_1b)z^{n-1}}{(a - a_1z^n)^2} dz. \quad (20)$$

შევიტანოთ (18) — (20) მნიშვნელობანი (17) ინტეგრალში, გვექნება:

$$\begin{aligned} \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}\right) dx &= \int R\left(\frac{b_1 z^n - b}{a - a_1 z^n}, z\right) \frac{n(ab_1 - a_1b)z^{n-1}}{(a - a_1 z^n)^2} dz = \\ &= \int R_1(z) dz, \end{aligned}$$

სადაც $R_1(z)$ რაციონალური ფუნქციაა.

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}} dx.$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ ხარისხის მაჩვენებელთა საერთო მნიშვნელია 12. მაშინ მოცემულ ინტეგრალში ჩასმით

$$x = z^{12}, \quad dx = 12z^{11} dz$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int \frac{z^6 - z^4}{z^4 + z^3} 12z^{11} dz &= 12 \int \frac{z^8 - z^7}{z + 1} z^{11} dz = \\ &= 12 \int z(z-1)z^{11} dz = 12 \int (z^{12} - z^{11}) dz = \\ &= 12 \left(\frac{z^{14}}{14} - \frac{z^{12}}{12} \right) + C = 12 \left(\frac{z^{\frac{14}{12}}}{\frac{14}{12}} - \frac{z^{\frac{12}{12}}}{\frac{12}{12}} \right) + C. \end{aligned}$$

მ. ეილერის ჩასმები. ვთქვათ, გვინდა გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad (21)$$

სადაც $R(x, y)$ რაციონალური ფუნქციაა თავისი არგუმენტების x -ისა და y -ის მიმართ, $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. (21) ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენებთ ე. წ. ეილერის ჩასმებს.

1) შემთხვევა. ვთქვათ $a > 0$, მაშინ დავუშვათ

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}, \quad (22)$$

სადაც t ახალი ცვლადია.

ვაჩვენოთ, რომ (22) ჩასმით (21) ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება მიიყვანება რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებაზე.

მართლაც, (22) გამოსახულებიდან გვექნება

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= t^2 - 2\sqrt{a}tx + ax^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow bx + c &= t^2 - 2\sqrt{a}tx \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}. \end{aligned} \quad (23)$$

უკანასკნელი გამოსახულების დიფერენცირებით მივიღებთ

$$dx = \frac{2t(2\sqrt{a}t + b) - 2\sqrt{a}(t^2 - c)}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt,$$

ანუ

$$dx = \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt.$$

3. გ. კომლაძე

(23) გამოსახულებიდან x -ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (22)-ში, მივიღებთ

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b},$$

ანუ

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}. \quad (24)$$

(23) და (24) მნიშვნელობანი შევიტანოთ (21) ინტეგრალში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \\ &= \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}\right) \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt = \\ &= \int R_1(t) dt. \end{aligned} \quad (25)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ მიღებული ინტეგრალის ქვეშ $R_1(t)$ რაციონალური ფუნქციაა, სადაც t განისაზღვრება (22) გამოსახულებიდან,

$$t = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

(25) ინტეგრალი მოგვცემს

$$\int R_1(t) dt = F(t) + C,$$

ანუ

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) = F(\sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}) + C.$$

ამგვარად, ვაჩვენეთ, რომ ირაციონალური გამოსახულების

$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ ინტეგრება ეილერის პირველი ჩასმით,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x,$$

მიიყვანება რაციონალური $R_1(t)$ ფუნქციის ინტეგრებაზე.

2) შემთხვევა. ვთქვათ, $a < 0$, მაგრამ $c > 0$, მაშინ ეილერის მეორე ჩასმით

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - xt. \quad (26)$$

(21) ინტეგრალი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებაზე მიიყვანება:

შართლაც, (26)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= c - 2\sqrt{c}xt + x^2t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow ax^2 + bx &= -2\sqrt{c}xt + x^2t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow ax + b &= -2\sqrt{c}t + xt^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= -\frac{b + 2\sqrt{c}t}{a - t^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{b + 2\sqrt{c}t}{t^2 - a}, \end{aligned} \quad (27)$$

საიდანაც

$$dx = \frac{2\sqrt{c}(t^2 - a) - 2t(b + 2\sqrt{c}t)}{(t^2 - a)^2} dt,$$

ანუ

$$dx = -2 \frac{\sqrt{c}a + bt + \sqrt{c}t^2}{(t^2 - a)^2} dt. \quad (28)$$

(26)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{c} - \frac{b + 2\sqrt{c}t}{t^2 - a} t \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \frac{\sqrt{c}(t^2 - a) - bt - 2\sqrt{c}t^2}{t^2 - a}, \end{aligned}$$

ანუ

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a\sqrt{c} + bt + \sqrt{c}t^2}{a - t^2}. \quad (29)$$

(27) — (29) გამოსახულებათა საფუძველზე ადვილად დავასკვნით, რომ $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ინტეგრალი $R_1(t)$ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებაზე მიიყვანება:

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \\ &= \int R\left(\frac{b + \sqrt{c}t}{t^2 - a}, \frac{a\sqrt{c} + bt + \sqrt{c}t^2}{a - t^2}\right) \left(-2 \frac{\sqrt{c}a + bt + \sqrt{c}t^2}{(t^2 - a)^2}\right) dt = \\ &= \int R_1(t) dt. \end{aligned}$$

3) შემთხვევა. თუ $a < 0$ და $c < 0$, მაშინ $ax^2 + bx + c$ კვადრატული სამწევრის ნულები უნდა იყოს ნამდვილი, წინააღმდეგ შემთხვევაში $ax^2 + bx + c < 0$ x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის და $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ იქნება წარმოსახვითი სიდიდე. ჩვენ კი განვიხილავთ ნამდვილი არგუმენტის ნამდვილ ფუნქციას.

ამგვარად, დავუშვათ, რომ კვადრატული სამწევრის ნულები ნამდვილია. აღვნიშნოთ ეს ნულები α და β -თი. მაშინ შემოვიღოთ აღნიშვნა — ეილერის მესამე ჩასმა:

$$\sqrt{a'(x-\alpha)(\beta-x)} = \sqrt{a'}(x-\alpha)t, \quad (30)$$

სადაც $a' = -a$. რადგანაც

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) = -a(x-\alpha)(\beta-x) = a'(x-\alpha)(\beta-x),$$

(30)-დან მივიღებთ

$$a'(x-\alpha)(\beta-x) = a'(x-\alpha)^2 t^2 \Rightarrow \beta-x = (x-\alpha)t^2,$$

საიდანაც

$$x = \frac{\beta + \alpha t^2}{t^2 + 1}, \quad (31)$$

ხოლო

$$dx = \frac{2\alpha t(t^2 + 1) - 2t(\beta + \alpha t^2)}{(t^2 + 1)^2} dt \Rightarrow dx = \frac{2(\alpha - \beta)t}{(t^2 + 1)^2} dt. \quad (32)$$

(30) გამოსახულება (31)-ის საფუძველზე მოგვცემს:

$$\sqrt{a'(x-\alpha)(\beta-x)} = \sqrt{a'} \left(\frac{\beta + \alpha t^2}{t^2 + 1} - \alpha \right) t,$$

ანუ

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a'}(\beta - \alpha)t}{t^2 + 1}. \quad (33)$$

(31)–(33) ტოლობათა საფუძველზე გვქმნება

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \int R\left(\frac{\beta + \alpha t^2}{t^2 + 1}, \frac{\sqrt{a'}(\beta - \alpha)t}{t^2 + 1}\right) \times \\ &\times \frac{2(\alpha - \beta)t}{(t^2 + 1)^2} dt = \int R_1(t) dt, \end{aligned}$$

სადაც $R_1(t)$ რაციონალური ფუნქციაა.

4. მაგალითები.

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

ვისარგებლოთ ეილერის პირველი ჩასმით

$$\sqrt{x^2 + x - 1} = t - x,$$

საიდანაც

$$x^2 + x - 1 = t^2 - 2xt + x^2 \Rightarrow x - 1 = t^2 - 2xt \Rightarrow x = \frac{t^2 + 1}{1 + 2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t(1 + 2t) - 2(t^2 + 1)}{(1 + 2t)^2} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2(t^2 + t - 1)}{(1 + 2t)^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2 + x - 1} = t - \frac{t^2 + 1}{1 + 2t} = \frac{t + 2t^2 - t^2 - 1}{1 + 2t} = \frac{t^2 + t - 1}{1 + 2t}.$$

მიღებული მნიშვნელობანი შევიტანოთ გამოსათვლელ ინტეგრალში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}} &= \int \frac{2(t^2 + t - 1)(1 + 2t)^2}{(t^2 + t - 1)(t^2 + 1)(1 + 2t)^3} dt = 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} = \\ &= 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2 + x - 1}) + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2 - 5x + 4}}. \quad (34)$$

ვისარგებლოთ ეილერის მეორე ჩასმით

$$\sqrt{-x^2 - 5x + 4} = 2 - xt. \quad (35)$$

გვქმნება

$$-x^2 - 5x + 4 = 4 - 4xt + x^2 t^2 \Rightarrow -x^2 - 5x = -4xt + x^2 t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - 5 = -4t + xt^2 \Rightarrow x = \frac{-5 + 4t}{1 + t^2}. \quad (36)$$

უქანასკნელიდან დიფერენცირებით მივიღებთ

$$dx = \frac{4(1+t^2) - 2t(-5+4t)}{(1+t^2)^2} dt \Rightarrow dx = \frac{-4t^2 + 10t + 4}{(1+t^2)^2} dt,$$

ანუ

$$dx = \frac{2(-2t^2 + 5t + 2)}{(1+t^2)^2} dt. \quad (37)$$

(36)-დან x -ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (35)-ში, გვექნება

$$\begin{aligned} \sqrt{-x^2 - 5x + 4} &= 2 - t \frac{-5+4t}{1+t^2} = \frac{2(1+t^2) - t(-5+4t)}{1+t^2} = \\ &= \frac{-2t^2 + 5t + 2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

შევიტანოთ (35)–(37) მნიშვნელობანი (34) ინტეგრალში, გვექნება:

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{2(-2t^2 + 5t + 2)}{(1+t^2)^2}}{\frac{-5+4t}{1+t^2} - \frac{2t^2 + 5t + 2}{1+t^2}} dt &= \int \frac{2(-2t^2 + 5t + 2)}{(-2t^2 + 5t + 2)(-5+4t)} dt = \\ &= 2 \int \frac{dt}{4t-5} = \frac{1}{2} \ln |4t-5| + C. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2-5x+4}} = \frac{1}{2} \ln \left| 4 \frac{2 - \sqrt{-x^2-5x+4}}{x} - 5 \right| + C,$$

ანუ

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2-5x+4}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{5x+4\sqrt{-x^2-5x+4}-8}{x} \right| + C.$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}. \quad (38)$$

$-x^2+3x-2$ კვადრატული სამწევრის ნულებია 2 და 1. გამოვიყენოთ ეილერის მესამე ჩასმა

$$\sqrt{-(x-1)(x-2)} = \sqrt{(x-1)(2-x)} = (x-1)t. \quad (39)$$

ამ გამოსახულებიდან მივიღებთ:

$$(x-1)(2-x) = (x-1)^2 t^2 \Rightarrow 2-x = (x-1)t^2 \Rightarrow x = \frac{2+t^2}{t^2+1}. \quad (40)$$

გამოვთვალოთ dx .

გვექნება:

$$dx = \frac{2t(t^2+1) - 2t(2+t^2)}{(t^2+1)^2} dt \Rightarrow dx = \frac{-2t}{(t^2+1)^2} dt. \quad (41)$$

(40)-დან x -ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (39)-ში. მივიღებთ:

$$\sqrt{-x^2+3x-2} = \left(\frac{2+t^2}{t^2+1} - 1 \right) t = \frac{2+t^2-t^2-1}{t^2+1} t,$$

ანუ

$$\sqrt{-x^2+3x-2} = \frac{t}{t^2+1}. \quad (42)$$

(41) და (42) მნიშვნელობანი შევიტანოთ (38) ინტეგრალში, გვექნება:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} &= \int \frac{-2t}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{t^2+1}{t} dt = -2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= -2 \operatorname{arctg} t + C, \end{aligned}$$

ანუ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + C.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ ფუნქცია განსაზღვრულია, თუ

$$-x^2+3x-2 > 0 \Rightarrow x^2-3x+2 < 0.$$

უქანასკნელი უტოლობა სრულდება, თუ

$$1 < x < 2.$$

სწორედ x -ის ამ მნიშვნელობებისათვის უნდა ავიღოთ ფუნქცია

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}.$$

ამგვარად, (38) ინტეგრალი უნდა განვიხილოთ მხოლოდ $1 < x < 2$ შუალედში.

1. ჩასმის ხერხით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

- 1) $\int \sqrt{1+3x} dx$, 2) $\int \sqrt{4+5x} dx$, 3) $\int x \sqrt{2+3x^2} dx$,
- 4) $\int x^2 \sqrt{5-x^3} dx$, 5) $\int x e^{-x^2} dx$, 6) $\int x^2 2^{5x^3} dx$,
- 7) $\int \sin 5x dx$, 8) $\int \operatorname{tg} \frac{x}{7} dx$, 9) $\int 3x^2 \sqrt{x^2+4} dx$,
- 10) $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{2} dx$, 11) $\int \operatorname{tg} \frac{x}{3} dx$, 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$,
- 13) $\int \frac{dx}{9-4x^2}$, 14) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$, 15) $\int \frac{2x-1}{2x+4} dx$,
- 16) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$, 17) $\int \sin 3x dx$, 18) $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$,
- 19) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$, 20) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-4}}$, 21) $\int \frac{dx}{x \sqrt{9x^2-4}}$,
- 22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}$, 23) $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{1+\ln x}}$, 24) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$,
- 25) $\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, 26) $\int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$, 27) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$,
- 28) $\int \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^2}$, 29) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}}$, 30) $\int \frac{xdx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$.

2. ნაწილობითი ინტეგრებით გამოთვალეთ:

- 1) $\int x e^{-2x} dx$, 2) $\int \arcsin x dx$, 3) $\int x \sin 2x dx$,
- 4) $\int \arcsin x dx$, 5) $\int \frac{x^2}{e^x} dx$, 6) $\int \cos 5x \cos x dx$,
- 7) $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$, 8) $\int x \operatorname{tg} 2x dx$, 9) $\int x^2 \sin 3x dx$,
- 10) $\int x^3 \ln x dx$, 11) $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x dx$, 12) $\int \sec^2 x \ln \cos x dx$,
- 13) $\int (\arcsin x)^2 dx$, 14) $\int x^3 \sin x^2 dx$, 15) $\int x^3 \cos x^2 dx$,

- 16) $\int x^3 \ln x dx$, 17) $\int \ln x dx$, 18) $\int x \ln^2 x dx$,
- 19) $\int x \arcsin x dx$, 20) $\int x \operatorname{arctg} x dx$, 21) $\int \ln(1+x^2) dx$.

3. ელემენტარულ წილებად გაშლით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

- 1) $\int \frac{x^2+x+2}{x^3-x^2} dx$, 2) $\int \frac{3x^3+6x^2-1}{x(x^2-1)(x-1)} dx$,
- 3) $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x+1)^2}$, 4) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x-1)^2}$,
- 5) $\int \frac{xdx}{x^3+1}$, 6) $\int \frac{x^2 dx}{x^2-1}$, 7) $\int \frac{xdx}{1-x^3}$,
- 8) $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$, 9) $\int \frac{x^3 dx}{x^3-1}$, 10) $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)} dx$,
- 11) $\int \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)^2} dx$, 12) $\int \frac{x^2-1}{x^3(x^2+1)^2} dx$, 13) $\int \frac{x+1}{x(1+x^2)^2} dx$,
- 14) $\int \frac{x+1}{x^4-1} dx$, 15) $\int \frac{x^2 dx}{x^5-1}$.

4. გამოთვალეთ შემდეგი ირაციონალური ფუნქციების ინტეგრალები:

- 1) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$, 2) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$,
- 3) $\int \frac{\sqrt[3]{x+5}-\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}} dx$, 4) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$,
- 5) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$, 6) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1} dx$,
- 7) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}$, 8) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt{x^2})}$,
- 9) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$.

5. გამოიყენეთ ეილერის ჩასმები შემდეგი ინტეგრალების გამოსათვლელად

- 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$,
- 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 2x - x^2}}$,
- 3) $\int \sqrt{x^2 - x + 3} dx$,
- 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 13x - 9}}$,
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^3 + 5x + 6}}$,
- 6) $\int \frac{x dx}{\sqrt{-x^2 + 4x + 2}}$,
- 7) $\int \frac{dx}{(x + 4)\sqrt{x^2 + x + 1}}$,
- 8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$,
- 9) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$,
- 10) $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$,
- 11) $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}}$,
- 12) $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 - x - x^2}}$.

6. ნაწილობითი ინტეგრებით გამოთვალეთ

- 1) $\int e^{ax} \cos bx dx$,
- 2) $\int e^{ax} \sin bx dx$,
- 3) $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx$,
- 4) $\int x^3 \ln^2 x dx$,
- 5) $\int (x^3 + 1) \ln x dx$,
- 6) $\int e^{-2x} \cos 3x dx$,
- 7) $\int e^{3x} \sin 5x dx$,
- 8) $\int 2^{2x} \cos 3x dx$,
- 9) $\int 3^{4x} \sin 2x dx$,
- 10) $\int \sin(\ln x) dx$,
- 11) $\int \cos(\ln x) dx$,
- 12) $\int \sqrt{1 + x^2} dx$.

შეიძლება ინტეგრალის $I = \int e^x \sin x dx$ -ის გამოთვლა.

მართლაც,

$$\int e^x \sin x dx = - \int e^x d \cos x = -e^x \cos x + \int \cos x e^x dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი კვლავ ნაწილობითი ინტეგრებით გამოვთვალოთ:

$$\int \cos x e^x dx = \int e^x d \sin x = e^x \sin x - \int \sin x e^x dx + C_1.$$

ამგვარად,

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I + C_1,$$

საიდანაც

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x + C_1.$$

აქედან კი

$$I = \frac{1}{2} \int e^x (-\cos x + \sin x) + C.$$

§ 6. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ინტეგრირება

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad (1)$$

სადაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია R რაციონალური ფუნქციაა $\sin x$ -ისა და $\cos x$ -ის მიმართ. ასეთი სახის ინტეგრალთა გამოთვლა დაიყვანება რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრებაზე.

მართლაც, თუ მოვიგონებთ

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

ჩასმა

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z \quad (2)$$

მოგვცემს

$$x = 2 \arctg z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1 + z^2}.$$

მაშინ

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2z}{1 + z^2}, \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right) \frac{2dz}{1 + z^2} = \int R_1(z) dz,$$

სადაც $R_1(z)$ რაციონალური ფუნქციაა.

სათანადო გამოთვლა მოგვცემს

$$\int R_1(z) dz = F(z) + C,$$

$$\text{სადაც } z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

ამის გამო გვექნება

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = F\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C.$$

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

ჩასმით $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ მივიღებთ:

$$x = 2 \operatorname{arctg} z, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2},$$

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}.$$

ამიტომ

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dz}{(1+z^2) \frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + C,$$

ანუ

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

ეს ფორმულა ელემენტარულ ფუნქციათა ინტეგრლების ცხრილში შეგვიძლია ჩავრთოთ.

ახლა განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad (3)$$

სადაც n და m რაციონალური რიცხვებია.

ამ ინტეგრალს განვიხილავთ ორ შემთხვევაში, როცა იგი ელემენტარულ ფუნქციებში გამოითვლება.

1) შემთხვევა. m და n -დან ერთ-ერთი კენტი რიცხვია.

მაგალითად, $n = 2k + 1$, სადაც k მთელი რიცხვია. გვექნება

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx &= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d \sin x. \end{aligned} \quad (4)$$

თუ $(1 - \sin^2 x)^k$ -ს გავშლით ნიუტონის ბინომის ფორმულით, მაშინ მივიღებთ შემდეგი სახის ინტეგრლების ჯამს

$$\int \sin^p x d \sin x = \frac{\sin^{p+1} x}{p+1} + C.$$

განვიხილოთ მაგალითი

მაგალითი 9. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \sin^{\frac{3}{4}} x \cos^2 x dx$. გვექნება

$$\begin{aligned} \int \sin^{\frac{3}{4}} x \cos^2 x dx &= \int \sin^{\frac{3}{4}} x (1 - \sin^2 x) d \sin x = \\ &= \int \sin^{\frac{3}{4}} x d \sin x - \int \sin^{\frac{11}{4}} x d \sin x = \\ &= \frac{\sin^{\frac{7}{4}} x}{\frac{7}{4}} - \frac{\sin^{\frac{15}{4}} x}{\frac{15}{4}} + C = \frac{4}{7} \sin^{\frac{7}{4}} x - \frac{4}{15} \sin^{\frac{15}{4}} x + C. \end{aligned}$$

2) $m+n$ ლუწი რიცხვია. ვთქვათ, $m+n=2k$. გვექნება:

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{m+n-m} x dx &= \int \sin^m x \cos^{2k-m} x dx = \int \operatorname{tg}^m x \frac{dx}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^k} = \\ &= \int \frac{\operatorname{tg}^m x d(\operatorname{tg} x)}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^{k+1}}. \end{aligned}$$

ცალკე განვიხილოთ შემთხვევა. m და n დადებითი ლუწი რიცხვებია. ამ შემთხვევაში, ნაცვლად $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ ჩასმისა, შეგვიძლია ვისარგებლოთ ფორმულებით

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sin 2x, \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}, \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

მაშინ (3) ინტეგრალის ქვეშ მივიღებთ $\sin 2x$ -ს ან $\cos 2x$ -ს კენტ ხარისხში (რომელიც 1-ელ შემთხვევაში განვიხილეთ) ან ორივე ლუწი ხარისხში, რომლისთვისაც ვისარგებლებთ (5)-ის ანალოგიური ფორმულებით. მივიღებთ ინტეგრალის ქვეშ $\sin 4x$ ან $\cos 4x$ -ის ფუნქციას და ა. შ. ეს პროცესი ბოლომდე მიიყვანება, რადგანაც (5) ფორმულებით ხარისხის მაჩვენებელია ჯამი ორჯერ მცირდება.

მაგალითი 10. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx. \quad (6)$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ასე გარდაქმნათ:

$$\begin{aligned}\sin^4 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{8} (1 - \cos 2x) (1 - \cos^2 2x) = \\ &= \frac{1}{8} (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) = \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} + \cos^3 2x \right) = \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos^3 2x.\end{aligned}$$

(6) ინტეგრალი ამ გარდაქმნით მოგვცემს:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx + \\ &+ \frac{1}{16} \int \cos^3 2x d \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + \\ &+ \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) d \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \sin 2x - \\ &- \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.\end{aligned}$$

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx. \quad (7)$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ასე გარდაქმნათ:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) x + \sin (\alpha - \beta) x].$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned}\int \sin \alpha x \cos \beta x dx &= \frac{1}{2} \int \sin (\alpha + \beta) x dx + \frac{1}{2} \int \sin (\alpha - \beta) x dx = \\ &= -\frac{1}{2(\alpha + \beta)} \cos (\alpha + \beta) x - \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \cos (\alpha - \beta) x + C.\end{aligned}$$

ამგვარად,

$$\begin{aligned}\int \sin \alpha x \cos \beta x dx &= -\frac{1}{2(\alpha + \beta)} \cos (\alpha + \beta) x - \\ &- \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \cos (\alpha - \beta) x + C.\end{aligned} \quad (8)$$

ასევე გამოითვლება ინტეგრალები:

$$\int \sin \alpha x \sin \beta x dx = -\frac{1}{2(\alpha + \beta)} \sin (\alpha + \beta) x + \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \sin (\alpha - \beta) x + C, \quad (9)$$

$$\int \cos \alpha x \cos \beta x dx = \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \sin (\alpha + \beta) x + \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \sin (\alpha - \beta) x + C. \quad (10)$$

§ 7. შიშვენიერების ინტეგრალის სხვადასხვა მნიშვნელობის შესახებ

1. შევნიშნოთ, რომ მოცემული ფუნქციის ინტეგრება ყოველთვის არ სრულდება ზემოთ შესწავლილი ერთ-ერთი ხერხით. ხშირად გვხვდება სხვადასხვა ხერხის გამოყენება, რათა ინტეგრალი მივიყვანოთ ელემენტარულ ფუნქციათა ცხრილის ინტეგრალზე. ზოგჯერ კი ერთი და იგივე ინტეგრალი სხვადასხვა ხერხით გამოითვლება. ინტეგრალის გამოთვლის პრაქტიკული ჩვევის გამომუშავების შემდეგ ადვილად დავადგენთ, თუ რომელი ხერხით უფრო ხელსაყრელია ინტეგრალის გამოთვლა.

2. ზოგჯერ ინტეგრალქვეშა ცვლადის სხვადასხვაგვარად გარდაქმნით და შემდეგ ინტეგრებით სხვადასხვა ფუნქციას ვღებულობთ. მაგრამ ეს ფუნქციები ერთი და იმავე ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციებია. ამის გამო ასეთ პირველყოფილ ფუნქციათა შორის არსებობს იგივე დამოკიდებულება. ამრიგად, განუსაზღვრელი ინტეგრალი ზოგჯერ საშუალებას იძლევა დავამყაროთ სხვადასხვა ფუნქციებს შორის დამოკიდებულება.

მაგალითად, გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \arcsin (x-1) + C.$$

თუ მოცემულ ინტეგრალს ასე წარმოვადგენთ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{2-x}},$$

შემოვიღებთ აღნიშვნას $\sqrt{x} = t$, მაშინ $x = t^2$ და $dx = 2t dt$, მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{2-x}} = \int \frac{2t dt}{t \sqrt{2-t^2}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} + C.$$

მიღებული ფუნქციები ერთი და იმავე ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციებია, გვეჩვენება

$$\arcsin (x-1) = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} + C.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარეში ჩავსვათ $x=1$, მივიღებთ

$$0 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + C, \quad C = -\frac{\pi}{2},$$

მაშასადამე,

$$\arcsin(x-1) = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{\pi}{2}$$

ყველა x -სათვის, თუ $2x-x^2 > 0$, ანუ $0 < x < 2$.

ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 3. გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

- 1) $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x},$ 2) $\int \sin^8 x \cos^2 x dx,$ 3) $\int \sin^5 x \cos^4 x dx,$
- 4) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx,$ 5) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx,$ 6) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx,$
- 7) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx,$ 8) $\int \frac{dx}{\sin^4 x},$ 9) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x},$
- 10) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx,$ 11) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x},$ 12) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx,$
- 13) $\int \sin 3x \cos 5x dx,$ 14) $\int \sin 5x \cos 7x dx,$ 15) $\int \sin x \cos \frac{x}{2} dx,$
- 16) $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx,$ 17) $\int \sin 2x \sin 4x dx,$ 18) $\int \sin 3x \sin 2x dx,$
- 19) $\int \cos 4x \cos x dx,$ 20) $\int \cos 2x \cos 5x dx,$ 21) $\int \cos 3x \cos 6x dx$
- 22) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx,$ 23) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx,$ 24) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}.$

თ ა ვ ი II

განსაზღვრული ინტეგრალი

§ 1. ამოცანები, რომელთაც მიჰყავართ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებად

1. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობის განხილვის დროს შემოვიტანეთ მრუდწირული ტრაპეციის ცნება (თავი I, § 1, n3) და ნაჩვენები იყო, რომ, თუ $f(x)$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, $x=a$ და $x=b$ წრფეებით და Ox ღერძით, ტოლია

$$F(b) - F(a),$$

სადაც $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე (ნახ. 1). $f(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე კი აქვს პირველყოფილი ფუნქციათა უსასრულო სიმრავლე. მაგრამ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი არაა დამოკიდებული პირველყოფილი ფუნქციის შერჩევაზე, მართლაც, თუ $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციებია $\Phi(x)$ და $F(x)$, მაშინ არსებობს ისეთი C მუდმივი, რომ

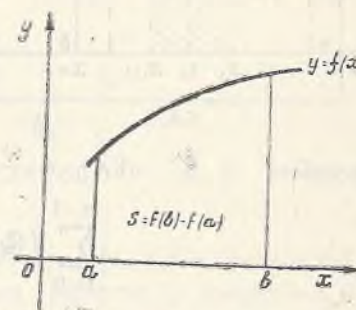
$$\forall x \in [a, b] \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C.$$

მაშასადამე, ეს ტოლობა მართებულია $x=a$ და $x=b$ -სთვისაც. გვექნება

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქციით შეგვიძლია გამოვთვალოთ სათანადო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი.

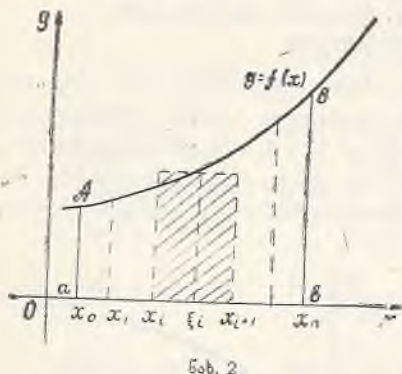
4. გ. კომლაძე



ნახ. 1

ჩვენ შეგვეძლოს, მრუდწირული ტრაპეციის ზემოთ განსაზღვრული ფართობის საფუძველზე შემოგვეტანა განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება, მაგრამ ავარჩიეთ სხვა მეთოდი. ეს მეთოდია $[a, b]$ სეგმენტის სათანადო ქვესეგმენტებად დაყოფა და სათანადო ინტეგრალური ჯამის ზღვრის გამოთვლა. ისტორიულად განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება ამ მეთოდით არის შემოტანილი.

დავუბრუნდეთ საკითხს: გამოვთვალოთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, $f(x) \geq 0$, $b > a$. სრულიად ბუნებრივია მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი შემდეგნაირად განსაზღვროთ (ნახ. 2). $[a, b]$ სეგმენტი



ნახ. 2

დავყოთ წერტილებით

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b.$$

განვიხილოთ ქვესეგმენტი $[x_i, x_{i+1}]$. ამ სეგმენტზე ავიღოთ რაიმე ξ_i წერტილი. $[x_i, x_{i+1}]$ სეგმენტის სიგრძე აღვნიშნოთ Δx_i -თი, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$. შევადგინოთ ნამრავლი

$$f(\xi_i) \Delta x_i.$$

ეს ნამრავლი გამოსახავს იმ მართკუთხედის ფართობს, რომლის ფუძეა $[x_i, x_{i+1}]$, ხოლო სიმაღლე $f(\xi_i)$.

შევადგინოთ ე. წ. ინტეგრალური ჯამი

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

ცხადია, თუ $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ წერტილებს შევცვლით სხვა წერტილებით $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$, მივიღებთ $[a, b]$ სეგმენტის სხვაგვარ დაყოფას, სადაც $\max \Delta x'_i = \lambda_1$ სხვა მნიშვნელობა ექნება. $[x'_i, x'_{i+1}]$, $i = 0, n-1$, მონაკვეთებზე ავიღოთ სათანადოდ ξ'_i , $i = 0, n-1$, წერტილები. $[a, b]$ სეგმენტის ამგვარ დაყოფას, განსხვავებით წინა დაყოფისაგან λ_1 დანაწილება ვუწოდოთ. ამ λ_1 დაყოფისათვის $[a, b]$ სეგმენტზე შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi'_i) \Delta x'_i.$$

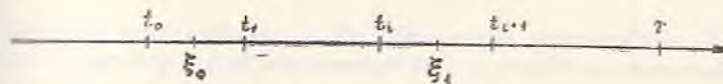
ეს ინტეგრალური ჯამი საზოგადოდ განსხვავებული იქნება წინა (1) ინტეგრალური ჯამისაგან.

$[a, b]$ სეგმენტი დავყოთ უფრო წვრილ-წვრილ მონაკვეთებად. ე. ი. Δx_i მონაკვეთთა რიცხვი უსასრულოდ ვზარდოთ ისე, რომ $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$. ამ შემთხვევაში მივიღებთ (1) ინტეგრალურ ჯამთა მიმდევრობას. თუ (1) ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როდესაც $\lambda \rightarrow 0$ არსებობს, როგორც $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებისაგან, ისე ξ_i წერტილების არჩევისაგან დამოუკიდებლად, მაშინ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (2)$$

ბუნებრივია, მივიღოთ ab BA მრუდწირული ტრაპეციის ფართობად.

2. მატერიალური წერტილის მიერ გავლილი მანძილი. ეთქვათ, მატერიალური წერტილი მოძრაობს $v(t)$ სიჩქარით t_0 -დან T დრომდე. T — დროა, დროის მონაკვეთი $[t_0, T]$ დავყოთ მცირე დროებად: t_0 -დან t_1 -მდე, t_1 -დან t_2 -მდე და ა. შ. t_{n-1} -დან T -დრომდე (ნახ. 3). დროის პირველ მონაკვეთში $[t_0, t_1]$ სიჩქარე $v(\xi_0)$ -ის ტოლად მივიღოთ, $\xi_0 \in [t_0, t_1]$. მაშინ $\Delta t_0 = t_1 - t_0$ დროში გავლილი მანძილი დაახლოებით იქნება $v(\xi_0) \Delta t_0$.



ნახ. 3

ახლა ავიღოთ დროის შემდეგი მონაკვეთი $[t_1, t_2]$. ამ დროში სიჩქარე იყოს მუდმივი. მის მნიშვნელობად მივიღოთ ξ_1 მომენტში $v(t)$ -ს მნიშვნელობა, $v(\xi_1)$, $\xi_1 \in [t_1, t_2]$. $[t_1, t_2]$ დროის მონაკვეთში გავლილი მანძილი დაახლოებით იქნება $v(\xi_1) \Delta t_1$, $\Delta t_1 = t_2 - t_1$ და ა. შ. თუ $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, T]$ დროის მონაკვეთებში გავლილ მანძილებს შევკრებთ, მივიღებთ მატერიალური წერტილის მიერ $[t_0, T]$ დროში გავლილ მანძილოს მიახლოებით მნიშვნელობას,

$$\sum_{i=0}^{n-1} v(\xi_i) \Delta t_i.$$

თუ ამ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი არსებობს, როცა $\lambda = \max \Delta t_i \rightarrow 0$, დამოუკიდებლად $[t_0, T]$ დროის ნებისმიერი λ დანაწილებისა და ξ_i დროის ნებისმიერი მნიშვნელობისა $[t_i, t_{i+1}]$ დროის მონაკვეთში,

მაშინ ეს ზღვარი შეგვიძლია მივიღოთ იმ მატერიალური წერტილის მიერ გავლილი მანძილის მნიშვნელობად, რომელიც მოძრაობს $v(t)$ სიჩქარით $[t_0, T]$ დროის მონაკვეთში:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} v(\xi_i) \Delta t_i. \quad (3)$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ მატერიალური წერტილის მიერ გავლილი მანძილი $[t_0, T]$ დროის მონაკვეთში გამოითვლება ფორმულით

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} v(\xi_i) \Delta t_i = s(T) - s(t_0),$$

სადაც $s(t_0)$ არის t_0 დრომდე გავლილი მანძილი, ხოლო $s(T)$ არის T დრომდე გავლილი მანძილი.

§ 2. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება. თვისებები.

1. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული და მექანიკური მნიშვნელობანი. ზემოთ განხილულმა ორმა ამოცანამ დაგვარწმუნა იმაში, რომ, მიუხედავად კონკრეტული შინაარსისა, ორივე ამოცანის ამოხსნა შოითხოვს გარკვეული სახის ჯამის ზღვრის გაშოთვლას. ქვემოთ სწორედ ამ საკითხს შევეხებით.

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია რაიმე $f(x)$ ფუნქცია. ეს სეგმენტი წერტილებით $x_0, x_1, \dots, x_n$ დავანაწილოთ ქვესეგმენტებად, სადაც $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$, მივიღებთ სეგმენტებს $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$. ამ სეგმენტების სიგრძეები აღვნიშნოთ Δx_i -თი

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

$[a, b]$ სეგმენტის, $a < b$, სასრულ ქვესეგმენტების სიმრავლეს $\{[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, n-1}\}$ ვუწოდოთ $[a, b]$ სეგმენტის Λ დანაწილება ან დაყოფა, ხოლო მის ელემენტებს — ქვესეგმენტებს — Λ დანაწილების ქვესეგმენტები,

$$\Lambda = \{[x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{0, n-1}\}.$$

განვიხილოთ Δx_i , $i = \overline{0, n-1}$, რიცხვებიდან უდიდესი. ამ უდიდეს რიცხვს Λ დანაწილების პარამეტრი ვუწოდოთ, პარამეტრი λ ასოთი აღვნიშნოთ, $\lambda(\Lambda) = \max \Delta x_i$, $i = \overline{0, n-1}$. თითოეულ $[x_i, x_{i+1}]$ სეგმენტზე რომელიმე ξ_i წერტილი ავიღოთ და შევადგინოთ ე. წ. ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

Λ დანაწილების სეგმენტებზე ავარჩიეთ სათანადოდ $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ წერტილები, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$. Λ დანაწილების ქვესეგმენტთა $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, და $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ წერტილთა გაერთიანება (Λ, ξ) წყვილით აღინიშნება. ცხადია, (Λ, ξ) წარმოადგენს $[a, b]$ სეგმენტის სათანადოდ არჩეულ წერტილთა სიმრავლეს. (Λ, ξ) ელემენტების სიმრავლე P ასოთი აღინიშნება: $P = \{p \mid p = (\Lambda, \xi)\}$.

თუ დავაკვირდებით σ ინტეგრალური ჯამის განსაზღვრას, შევამჩნევთ, რომ იგი ფუნქციას f და (Λ, ξ) წყვილისა:

$$\sigma(f, (\Lambda, \xi)) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

ხოლო ფიქსირებული f ფუნქციისათვის σ ინტეგრალური ჯამი განსაზღვრული იქნება P სიმრავლეზე. ამის გამო შეგვიძლია განვიხილოთ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როდესაც $\lambda(\Lambda) = \lambda \rightarrow 0$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

ამ ჯამს შეიძლება ჰქონდეს გარკვეული ზღვარი, რომელიც დამოუკიდებელია როგორც Λ დანაწილებაზე, ისე ξ წერტილების არჩევაზე.

თუ არსებობს

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I, \quad (2)$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_a^b f(x) dx,$$

რაც ასე წაიკითხება: ინტეგრალი a -დან b -მდე $f(x) dx$.

(2) ტოლობა ასე გამოითქმის: I რიცხვს ეწოდება σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როდესაც $\lambda \rightarrow 0$, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი Δ დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი $\lambda(\Delta) < \delta$, და ნებისმიერი ξ_i წერტილისათვის $[x_i, x_{i+1}]$ სეგმენტზე ჰემარიტია უტოლობა

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე წარმოადგენს

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad \text{ინტეგრალური ჯამის ზღვარს}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

a და b რიცხვს ეწოდება სათანადოდ ინტეგრალის ქვედა და ზედა საზღვარი, $[a, b]$ სეგმენტს — საინტეგრაციო სეგმენტი, x ცვლადს — საინტეგრაციო ცვლადი.

თუ არსებობს (2) ზღვარი, მაშინ იტყვიან, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე რიმანის¹ აზრით, ხოლო თვით ზღვარს

$\int_a^b f(x) dx$ უწოდებენ რიმანის ინტეგრალს. ჩვენ მხოლოდ რიმანის ინტეგრალს განვიხილავთ. ამის გამო სიმოკლისათვის სიტყვებს „რიმანის“ და „რიმანის აზრით“ არ ვიხმარებთ.

ძნელი არაა იმის შემჩნევა, რომ ინტეგრალი $\int_a^b f(x) dx$ დამოუკიდებელია ინტეგრების x ცვლადზე. ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz. \quad (3)$$

ზემოთ განხილული ამოცანების საფუძველზე დავასკვნით:

¹ ბერნჰარდ რიმანი (1826—1866), გერმანელი მათემატიკოსი.

1) თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x) \geq 0$, მაშინ ამ ფუნქციის ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე გეომეტრიულად გამოსახავს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც Oxy კოორდინატთა სისტემაში შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, $x=a$ და $x=b$ წრფეებით და Ox ღერძით,

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

2) თუ მატერიალური წერტილი წრფეზე მოძრაობს $v(t)$ სიჩქარით $[t_0, T]$ დროის მონაკვეთში, მაშინ t_0 -დან T -მდე დროში წერტილის მიერ გავლილი მანძილი გამოისახება განსაზღვრული ინტეგრალით

$$s = \int_{t_0}^T v(t) dt.$$

2. ფუნქციის ინტეგრებადობის აუცილებელი პირობა. დავამტკიცოთ თეორემა. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე.

მართლაც, ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია შემოუსაზღვრა-

ვია და $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ სეგმენტის P დაყოფის $f(x)$ ფუნქციის ინ-

ტეგრალური ჯამია. რადგანაც $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია შემოუსაზღვრავია, იგი შემოუსაზღვრავი იქნება ერთ რომელიმე $[x_i, x_{i+1}]$ ქვესეგმენტზე მაინც. ვთქვათ, ეს ქვესეგმენტია $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$.

გვქმნება

$$\sigma = f(\xi_{i_0}) \Delta x_{i_0} + \sum_{i=0, i \neq i_0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_{i_0}) \Delta x_{i_0} + A. \quad (4)$$

ყველა ξ_i ნებისმიერია, მაგრამ ფიქსირებულია.

(4) ტოლობიდან ცხადია

$$|\sigma| \geq |f(\xi_{i_0})| \Delta x_{i_0} - |A|. \quad (5)$$

რადგანაც $f(x)$ შემოუსაზღვრავია $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ ქვესეგმენტზე, როგორი დიდი რიცხვიც უნდა იყოს $N > 0$, მოიძებნება ისეთი $\xi_{i_0} \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$,

$$\Delta x_{i_0} |f(\xi_{i_0})| - |A| > N,$$

$$|f(\xi_{i_0})| > \frac{|A| + N}{\Delta x_{i_0}}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (5) უტოლობაში, გვექნება

$$|\sigma| > N,$$

სადაც N ნებისმიერი დიდი რიცხვია.

ამგვარად, მივიღეთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრავია, მაშინ როგორც უნდა იყოს $N > 0$ და როგორც უნდა იყოს Λ დაყოფა, სათანადო ინტეგრალური ჯამი $\sigma_\Lambda \notin \mathbb{R}$, წერტილის სათანადო არჩევით, შეიძლება გახდეს N რიცხვზე მეტი. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადი არაა სეგმენტზე.

დავამტკიცეთ, რომ, თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. ეს სრულებით არ ნიშნავს, რომ ყოველი შემოსაზღვრული ფუნქცია ინტეგრებადია.

მაგალითად, ე. წ. დირიხლეს¹ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,} \\ 0, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია,} \end{cases}$$

შემოსაზღვრულია ნებისმიერ $[a, b]$ სეგმენტზე, მაგრამ არაა ინტეგრებადი ამავე სეგმენტზე. რადგანაც $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი Λ დაყოფის, თუ ξ_i -ს ავიღებთ რაციონალურ წერტილში, $\sigma = b - a$, ხოლო, თუ ξ_i -ს ავიღებთ ირაციონალურ წერტილში, $\sigma = 0$.

ამის გამო ინტეგრალურ σ ჯამს, $\lambda(\Lambda) \rightarrow 0$ -თვის, ზღვარი არა აქვს. ე. ი. $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობა აუცილებელია და არაა საკმარისი $f(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადობისათვის.

§ 3. განსაზღვრული ინტეგრალის არსებობა

1. დარბუს² ჯამები. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია და, ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტის დამყოფი წერტილებია $x_0, x_1, \dots, x_n$, სადაც

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad a < b, \quad \lambda(\Lambda) = \max_i \Delta x_i. \quad (1)$$

¹ პეტერ გუსტავ ლეჟენდრი (1805—1859), გერმანელი მათემატიკოსი.

² ჟან გასტონ დარბუს (1842—1917), ფრანგი მათემატიკოსი.

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x);$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

შევაღვიწოთ ჯამები

$$\underline{s}_\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad \bar{s}_\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

ამ ჯამებს ეწოდება დარბუსის ჯამები.

ცხადია,

$$\underline{s}_\Lambda \leq \sigma \leq \bar{s}_\Lambda. \quad (2)$$

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის იმ წერტილებს, რომლებითაც Λ დანაწილება მივიღეთ, დავამატოთ ახალი წერტილები. ამ ახალი წერტილებით და ძველი წერტილებით მიღებული დანაწილება Λ_1 -ით აღვნიშნოთ. ცხადია,

$$\Lambda \subset \Lambda_1.$$

Λ_1 დაყოფას Λ დაყოფის გაგრძელება ეწოდება.

ვაჩვენოთ, რომ ჭეშმარიტია

ლემმა 1. თუ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი Λ და Λ_1 დაყოფისათვის Λ_1 დაყოფა Λ დაყოფის გაგრძელებაა, მაშინ

$$\underline{s}_\Lambda \leq \underline{s}_{\Lambda_1} \leq \bar{s}_{\Lambda_1} \leq \bar{s}_\Lambda. \quad (3)$$

მართლაც, ვთქვათ, Λ დანაწილება მიიღება შემდეგი წერტილებით:

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n,$$

ხოლო Λ_1 — შემდეგი წერტილებით:

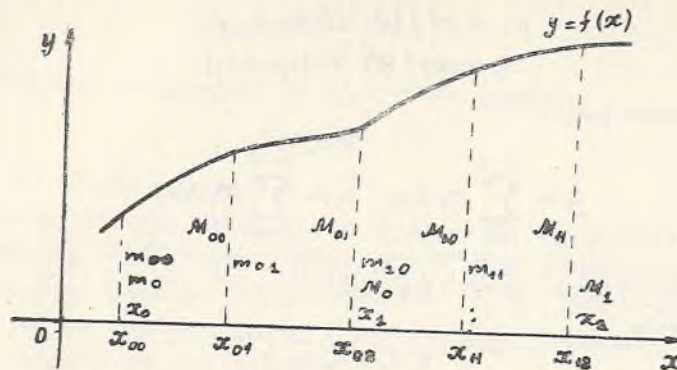
$$\begin{aligned} x_0 &= x_{00}, x_{01}, \dots, x_{0k} = x_1 = x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1e} = \\ &= x_2 = x_{20}, \dots, x_{n-1} = x_{n-1,0}, \dots, x_{n-1,p} = x_n, \end{aligned}$$

მაშინ, ცხადია,

$$m_0 \leq m_{00}, m_{01}, \dots, m_{0, k-1},$$

$$m_1 \leq m_{10}, m_{11}, \dots, m_{1, e-1}$$

და ა. შ. (ნახ. 4).



ნახ. 4

$$M_{00}, M_{01}, \dots, M_{0, n-1} \leq M_0,$$

$$M_{10}, M_{11}, \dots, M_{1, n-1} \leq M_1$$

და ა. შ.

თუ ვიმსჯელებთ ნახაზზე გამოსახული დანაწილებით, გვექნება:

$$s_\lambda = m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1),$$

$$s_{\lambda_1} = m_{00}(x_{01} - x_{00}) + m_{01}(x_{02} - x_{01}) +$$

$$+ m_{10}(x_{11} - x_{10}) + m_{11}(x_{12} - x_{11}) \geq$$

$$\geq m_0(x_{01} - x_{00}) + m_0(x_{02} - x_{01}) +$$

$$+ m_1(x_{11} - x_{10}) + m_1(x_{12} - x_{11}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{\lambda_1} \geq m_0(x_{02} - x_{00}) + m_1(x_{12} - x_{10}) =$$

$$= m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1).$$

s_λ და s_{λ_1} -ის მნიშვნელობათა შედარებით მივიღებთ

$$s_\lambda \leq s_{\lambda_1}.$$

სრულიად ასევე ვაჩვენებთ (3) უტოლობის მეორე ნაწილის,

$$\overline{s_{\lambda_2}} \leq \overline{s_\lambda}$$

ქვეშარიტებას.

ვაჩვენოთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული ფუნქციისათვის

$$\sup_{\xi, \eta \in [a, b]} [f(\xi) - f(\eta)] = \sup_{\xi, \eta \in [a, b]} |f(\xi) - f(\eta)| = M - m, \quad (4)$$

სადაც

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

მართლაც, ნებისმიერი $\xi, \eta \in [a, b]$ -თვის

$$f(\xi) - f(\eta) \leq |f(\xi) - f(\eta)| \leq M - m. \quad (5)$$

შეორე მხრივ, მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტზე ისეთი ξ და η , რომ

$$f(\xi) > M - \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(\eta) < m + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

(6) უტოლობებიდან ცხადია,

$$f(\xi) - f(\eta) > M - \frac{\varepsilon}{2} - \left(m + \frac{\varepsilon}{2}\right) = M - m - \varepsilon. \quad (7)$$

(5) და (7) უტოლობანი ადასტურებენ (4) უტოლობის ჭეშმარიტებას.

ამგვარად, დავამტკიცეთ

ლემა 2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, მაშინ

$$\sup_{\xi, \eta \in [a, b]} [f(\xi) - f(\eta)] = \sup_{\xi, \eta \in [a, b]} |f(\xi) - f(\eta)| = M - m,$$

სადაც

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

2. თეორემები სეგმენტზე ფუნქციის ინტეგრებადობის შესახებ¹.

ჯერ დავამტკიცოთ თეორემა სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის ინტეგრებადობის შესახებ.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

მართლაც, თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტია, მაშინ იგი $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრულია (იხ. კოშის თეორემა სეგმენტზე

¹ С. М. Никольский, Курс математического анализа, т. I, М., 1973, стр. 341.

უწყვეტი ფუნქციის შემოსაზღვრულობის შესახებ). ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე Δ დაყოფა, რომელთათვის $\max \Delta x = \lambda < \delta$. თითოეული $[x_i, x_{i+1}]$ სეგმენტისათვის გამოვიყენოთ მე-2 ლემა:

$$\sup_{\xi_i, \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]} [f(\xi_i) - f(\eta_i)] = \sup_{\xi_i, \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]} |f(\xi_i) - f(\eta_i)| = M_i - m_i, \quad (8)$$

სადაც

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x);$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

შევადგინოთ ამ Δ დაყოფისათვის $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალური და დარბუს ჯამები,

$$\underline{s} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad \sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$\overline{s} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

(2) უტოლობის თანახმად

$$\underline{s} \leq \sigma \leq \overline{s}. \quad (9)$$

როცა $\lambda \rightarrow 0$ 1-ელი ლემის თანახმად დარბუს ჯამეა σ არ მცირდება და ზედა ჯამები $\overline{s}$ არ იზრდება. ამასთან, აღვილი შესამჩნევია, რომ ყველა ჯამეა ჯამი ზემოდან შემოსაზღვრულია, ხოლო ყოველი ზედა ჯამი ქვემოდან შემოსაზღვრულია.

მართლაც,

$$\underline{s} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \leq M \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = M(b-a).$$

ასევე

$$\overline{s} \geq m(b-a).$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ $[x_i, x_{i+1}]$ ქვესეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტზე მოიძებნება ისეთი ξ_i და η_i წერტილები, რომ

$$M_i = f(\xi_i), \quad m_i = f(\eta_i). \quad (10)$$

(4) დამოკიდებულების თანახმად გვექნება, რომ ყველა $\Delta x_i < \delta$ -სათვის

$$\sup_{\xi_i, \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]} [f(\xi_i) - f(\eta_i)] = \sup_{\xi_i, \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]} |f(\xi_i) - f(\eta_i)| = f(\xi_i) - f(\eta_i), \quad (11)$$

სადაც $f(\xi_i)$ და $f(\eta_i)$ განისაზღვრება (10) პირობებიდან. განვიხილოთ სხვაობა

$$\overline{s} - \underline{s} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i.$$

უქანსკენიდან (10) და (11) ტოლობების საფუძველზე მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \overline{s} - \underline{s} &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{\xi_i, \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]} |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta x_i \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(\delta) \Delta x_i = \omega(\delta)(b-a), \end{aligned} \quad (12)$$

სადაც

$$\omega(\delta) = \sup_{\xi_i, \eta_i \in [a, b], |\xi_i - \eta_i| < \delta} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|.$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$(\delta \rightarrow 0) \Rightarrow (\omega(\delta) \rightarrow 0).$$

თუ ავიღებთ $\omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, მაშინ (12)-დან მივიღებთ:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \max \Delta x_i = \lambda < \delta) \Rightarrow \overline{s} - \underline{s} < \varepsilon.$$

ამგვარად, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამის ზღვარი არსებობს, როდესაც $\max \Delta x_i = \lambda \rightarrow 0$, ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

თეორემა 2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია მონოტონურია, მაშინ იგი $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადია.

ვთქვათ, განსაზღვრულობისათვის, $f(x)$ არაა კლებადი. $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი Δ დაყოფისათვის, $\max \Delta x_i = \lambda < \delta$, $\delta > 0$, გვექნება

$$\bar{s} - \underline{s} = \sum_{i=0}^{n-1} [M_i - m_i] \Delta x_i.$$

მე-2 ლემის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} \bar{s} - \underline{s} &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta x_i \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \Delta x_i \leq \delta \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]. \end{aligned}$$

უკანასკნელი დამოკიდებულებიდან ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\bar{s} - \underline{s} \leq \delta [f(b) - f(a)].$$

აქედან კი, თუ $\delta > 0$ სათანადოდ ავარჩევთ,

$$\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)},$$

მაშინ

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \max \Delta x_i = \lambda < \delta) \Rightarrow \bar{s} - \underline{s} < \varepsilon.$$

ამგვარად, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია, თუ მონოტონურია, მაშინ იგი ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

შევნიშნოთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე მონოტონურ $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ სასრული რაოდენობის წვედების წერტილები ან თვლადი სიმრავლე წვედების წერტილებისა (ამის შესახებ ნახსენები იყო 1-ელ პარაგრაფში).

მართლაც, ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია. ავიღოთ წერტილები $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. ამ წერტილებში $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ პირველი გვარის წვედები. შევარჩიოთ $\varepsilon > 0$ იმდენად მცირე, რომ

$$x_0 + \varepsilon < x_1 - \varepsilon < x_1 + \varepsilon < x_2 - \varepsilon < x_2 + \varepsilon < x_3 - \varepsilon < \dots$$

მაშინ

$$\sum_{i=0}^n [f(x_i + \varepsilon) - f(x_i - \varepsilon)] \leq f(b) - f(a) \equiv \delta. \quad (13)$$

თუ $x_i = a$, მაშინ უნდა ჩავთვალოთ $f(a - \varepsilon) = f(a)$ და, თუ $x_n = b$, მაშინ ჩავთვალოთ $f(x_n + \varepsilon) = f(b)$.

თუ (13) გამოსახულებაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$\sum_{i=0}^n [f(x_i + 0) - f(x_i - 0)] \leq \delta. \quad (14)$$

ადვილი წარმოსადგენია, რომ $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს არა უმეტეს ერთი წვედების წერტილისა, სადაც ნახტომი $\frac{\delta}{2}$ -ზე მეტია.

(ორ წერტილში რომ ნახტომის სიდიდე $\frac{\delta}{2}$ -ზე მეტი იყოს, მაშინ ნახტომთა ჯამი (14)-ის მიხედვით, δ -ზე მეტი იქნება). თუ ასეთი წერტილი არსებობს, მას მივაწეროთ ნომერი 1, შემდეგ მოვნახოთ ის წერტილები, სადაც ნახტომთა სიდიდე $\frac{\delta}{3}$ -ზე მეტია. ასეთი წერტილი შეიძლება იყოს ორი. თუ ასეთი წერტილი ერთია და ის განსხვავდება წინა წერტილისაგან, მივაწეროთ ნომერი 2. თუ ასეთი წერტილები ორია და ერთ-ერთი განსხვავდება წინა წერტილისაგან, უნომრო წერტილს მივაწეროთ ნომერი 2, თუ ორივე წერტილი უნომროა, მივაწეროთ ნომერი 2 და 3 და ა. შ. ამ მოქმედებით $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის წვედების ყველა წერტილი გადაინომრება. მაშასადამე, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ მონოტონურ $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს წვედების წერტილები სასრული რაოდენობის ან უსასრულო, მაგრამ წვედების წერტილთა სიმრავლე არა უმეტეს თვლადი სიმრავლე იქნება.

ზემოთ ვაჩვენეთ, $[a, b]$ სეგმენტზე ყოველი უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია იმავე $[a, b]$ სეგმენტზე. ვაჩვენეთ აგრეთვე, რომ ყველა შემოსაზღვრული მონოტონური ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადია იმავე სეგმენტზე. მონოტონური ფუნქცია შეიძლება იყოს წვედები, მაგრამ წვედების წერტილთა სიმრავლე არა უმეტეს თვლადი სიმრავლეა.

აქ დაგვებადება კითხვა. რამდენად ბევრი უნდა იყოს $f(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე წვედების წერტილები, რომ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი დარჩეს?

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა ლებეგის შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. $f(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრაციისათვის აუცილებელია და საკმარისია $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე იყოს შემოსაზღვრული და ყველგან უწყვეტი, გარდა იმ წერტილების სიმრავლისა, რომლის ლებეგის ზომა ნულია.

რაიმე M სიმრავლის ლებეგის ზომა შემდეგნაირად განისაზღვრება: სიმრავლის ყოველი წერტილი დაფარეთ რაიმე ინტერვალებით. განვიხილოთ ამ ინტერვალთა სიგრძეების ჯამის ზუსტი ქვედა საზღვარი. ამ ქვედა საზღვარს ეწოდება M სიმრავლის ლებეგის ზომა. აქედან ადვილი წარმოსადგენია, რომ M სიმრავლის ლებეგის ზომა ნულია, თუ $V > 0$ -თვის მოიძებნება M სიმრავლის დამფარავი ინტერვალების სასრული ან თვლადი სიმრავლე, რომელთა სიგრძეების ჯამი ნაკლებია ε -ზე. წერტილთა სასრული ან თვლადი სიმრავლის ლებეგის ზომა ნულია, რადგანაც ყოველ წერტილს დაფარავთ $\varepsilon \cdot 2^{-n}$ -ზე ნაკლები სიგრძის ინტერვალთა და ასეთი ინტერვალების სიგრძეების ჯამი ნაკლებია ε -ზე. შევნიშნოთ, რომ იმ სიმრავლეთა ზორის, რომლის ლებეგის ზომა ნულია, არის არათვლადი სიმრავლეც.

მაგალითად, ავიღოთ $[0, 1]$ სეგმენტი. გავყოთ ეს სეგმენტი სამ ტოლ ნაწილად და უკუვაგდოთ $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ ინტერვალთა დარჩენილი ორი ნაწილი ძველ გავყოთ სამ-სამ ტოლ ნაწილად და უკუვაგდოთ $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$, $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ და ა. შ. უკუვაგდებულ ინტერვალთა სიგრძეების ჯამი იქნება

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = 1.$$

დარჩენილ წერტილთა E სიმრავლე (კანტორის სიმრავლე) ჩაკეტილია, სრულია — ყოველი წერტილი ზღვრული წერტილია E სიმრავლისა. ეს სიმრავლე არსად არაა მკერძი $[0, 1]$ სეგმენტზე — ყოველი ინტერვალთა E -სგან განსხვავებულ წერტილს. E სიმრავლე არაა თვლადი. ახლა განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus E. \end{cases}$$

¹ ანრი ლებეგი (1875—1941), ფრანგი მათემატიკოსი.

² დამტკიცება იხ. С. М. Никольский, Курс математического анализа, т. II, М., 1973, § 12. 10. стр. 33.

³ П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, М.-Л., 1938.

ეს ფუნქცია უწყვეტია $[0, 1] \setminus E$ სიმრავლის ყოველ წერტილში და წყვეტილია E სიმრავლის ყოველ წერტილში. ეს ფუნქცია ინტეგრებადია

$[0, 1]$ სეგმენტზე. ინტეგრალის მნიშვნელობა ნულის ტოლია $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

ამრიგად, განხილულ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე აქვს წყვეტის წერტილთა არათვლადი სიმრავლე, მაგრამ იგი ინტეგრებადია რიმანის აზრით.

§ 4. განსაზღვრული ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

ზემოთ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი განვსაზღვრეთ $a < b$ -სთვის. ახლა კი გავაფართოოთ ინტეგრალის ცნება, როცა $a = b$ და $a > b$. მივიღოთ, რომ

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad a > b. \quad (2)$$

დავამტკიცოთ თეორემა.

თეორემა 1. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია და $a < c < b$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტზე და პირიქით. ამასთან

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (3)$$

მართლაც, თეორემის პირობის თანახმად არსებობს ინტეგრალური

ჯამის $\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ ზღვარი, როცა $\lambda \rightarrow 0$. ეს ზღვარი დამოუკიდებელია

λ დაყოფისაგან და ξ_i წერტილის მდებარეობისაგან $[x_i, x_{i+1}]$ ქვე-სეგმენტზე. ამის გამო c წერტილი ყოველთვის შეგვიძლია ჩავთვალოთ $[a, b]$ სეგმენტის დამყოფ წერტილად. ამგვარად, შეგვიძლია ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი Λ დაყოფა, რომლის $\max \Delta x_i = \lambda$; $[a, c]$ სეგ-

მენტის დაყოფა აღენიშნოთ Λ_1 , $\lambda_1 (\Lambda_1) = \lambda_1$; $[c, b]$ სეგმენტის დაყოფა — Λ_2 , $\lambda_2 (\Lambda_2) = \lambda_2$.

განვიხილოთ სხვაობა

$$\overline{s}_\lambda - \underline{s}_\lambda = (\overline{s}_{\lambda_1} - \underline{s}_{\lambda_1}) + (\overline{s}_{\lambda_2} - \underline{s}_{\lambda_2}). \quad (4)$$

$[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობის გამო (4) გამოსახულების მარცხენა ნაწილი მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $\lambda \rightarrow 0$. (4) განსახულების მარჯვენა მხარეში არაუარყოფითი სიდიდეებია, ამის გამო თითოეული შესაძრები მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც სათანადოდ λ_1 და $\lambda_2 \rightarrow 0$. ეს კი ამტკიცებს $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობას თითოეულ $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტზე. ამიტომ ტოლობიდან

$$s_\lambda = s_{\lambda_1} + s_{\lambda_2},$$

როცა $\lambda \rightarrow 0$, გამომდინარეობს (3) ტოლობა.

(2) განსაზღვრის შემდეგ აღვილი საჩვენებელია (3) ტოლობის მართებულება მაშინაც, როცა $a < b < c$.

მართლაც, (3) ტოლობის საფუძველზე $a < b < c$ -სთვის გვექნება

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

საიდანაც

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx.$$

(2) ტოლობით მივიღებთ:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

ამგვარად, (3) ტოლობა მართებულია a და b წერტილების მიმართ c წერტილის ნებისმიერი მდებარეობის დროსაც.

თეორემა 2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია და k ნებისმიერი მუდმივია, მაშინ $kf_1(x)$ და $f_1(x) + f_2(x)$ ინტეგრებადია და მართებულია ტოლობები:

$$\int_a^b k f_1(x) dx = k \int_a^b f_1(x) dx \quad (5)$$

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \quad (6)$$

მართლაც, $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ -ის ინტეგრებადობის გამო მივიღებთ:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} k f_1(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^{n-1} f_1(\xi_i) \Delta x_i = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} f_1(\xi_i) \Delta x_i,$$

ანუ

$$\int_a^b k f_1(x) dx = k \int_a^b f_1(x) dx.$$

სხვა შემოწმდება (6) ტოლობის მართებულობა.

(5) და (6) შეიძლება გავაერთიანოთ:

$$\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int_a^b f_1(x) dx + k_2 \int_a^b f_2(x) dx. \quad (7)$$

თეორემა 3. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ინტეგრებადია, მაშინ $|f(x)|$ -იც ინტეგრებადია იმავე $[a, b]$ სეგმენტზე.

მართლაც, ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე Λ დაყოფა, $\lambda(\Lambda) = \lambda$. აღენიშნოთ

$$M_{f_i} = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad m_{f_i} = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

ნებისმიერი ξ_i , η_i -სთვის, $\xi_i, \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, გვექნება:

$$|f(\xi_i) - f(\eta_i)| \leq |f(\xi_i) - M_{f_i}| + |M_{f_i} - m_{f_i}| + |m_{f_i} - f(\eta_i)| \leq M_{f_i} - m_{f_i}. \quad (8)$$

ავიღოთ (8) უტოლობის მარცხენა ნაწილში $M_{|f|} = \sup |f(\xi_i)|$, $m_{|f|} = \inf |f(\eta_i)|$, $\xi_i, \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, გავამრავლოთ Δx_i -ზე და შევკრიბოთ, $i = 0, 1, \dots, n-1$. მივიღებთ

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_{|f|} - m_{|f|}) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} (M_{f_i} - m_{f_i}) \Delta x_i. \quad (9)$$

$[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობის გამო (9) უტოლობის მარჯვენა მხარე შეგვიძლია ნებისმიერ $\varepsilon > 0$ რიცხვზე ნაკლები გავხადოთ, მაშინ მარცხენა ნაწილიც ამავე პირობას დააკმაყოფილებს. ეს კი გვიჩვენებს $|f(x)|$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადობას.

თეორემა 4. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია და ამასთან $|f(x)| > d > 0$, მაშინ $\frac{1}{f(x)}$ ფუნქციაც ინტეგრებადია იმავე $[a, b]$ სეგმენტზე. მართლაც, განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ დაყოფა:

$$M_{f_i} = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad m_{f_i} = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

შევადგინოთ სხვაობა

$$\frac{1}{f(\xi_i)} - \frac{1}{f(\eta_i)} \leq \left| \frac{f(\xi_i) - f(\eta_i)}{f(\xi_i)f(\eta_i)} \right| \leq \frac{1}{d^2} (M_{f_i} - m_{f_i}).$$

ავიღოთ ამ უტოლობათა მარცხენა ნაწილის ზედა საზღვარი $[x_i, x_{i+1}]$ შუალედში, გავამრავლოთ Δx_i -ზე და შევკრიბოთ, $i=0, 1, \dots, n-1$, მივიღებთ

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_{1/f_i} - m_{1/f_i}) \Delta x_i \leq \frac{1}{d^2} \sum_{i=0}^{n-1} (M_{f_i} - m_{f_i}) \Delta x_i.$$

$f(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადობის გამო მიღებული უტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნებისმიერ $\varepsilon > 0$ რიცხვზე ნაკლები შეგვიძლია გავხადოთ, მაშინ ამ უტოლობის მარცხენა ნაწილიც ამავე პირობას დააკმაყოფილებს, რაც $[a, b]$ სეგმენტზე $\frac{1}{f(x)}$ ფუნქციის ინტეგრებადობას ადასტურებს.

აღვიღი შესამჩნევია, რომ

$$\begin{aligned} f(\xi)g(\xi) - f(\eta)g(\eta) &= f(\xi)g(\xi) - f(\xi)g(\eta) + f(\xi)g(\eta) - \\ &- f(\eta)g(\eta) = f(\xi)(g(\xi) - g(\eta)) + g(\eta)(f(\xi) - f(\eta)). \end{aligned}$$

ამ ტოლობის საფუძველზე ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი თეორემის კვანძობა:

თეორემა 5. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია, მაშინ ამავე სეგმენტზე ინტეგრებადია $f(x) \cdot g(x)$ ფუნქციათა ნამრავლი.

§ 5. თეორემა სავსებითი ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის შესახებ

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია ინტეგრებადი ფუნქციები $f(x)$ და $g(x)$, ამასთან $f(x) \leq g(x)$, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (1)$$

მართლაც, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციათა ინტეგრებადობის გამო ნებისმერი Λ , $\lambda(\Lambda) = \lambda$, დაყოფისათვის გვექნება

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \Delta x_i.$$

თუ უკანასკნელ დამოკიდებულებაში ზღვარზე გადავალთ, $\max \Delta x_i = \lambda \rightarrow 0$, მივიღებთ (1) უტოლობის კვანძობას.

ამრიგად, დავამტკიცეთ.

თეორემა 1. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია და ამასთან $f(x) \leq g(x)$, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა.

თეორემა 2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, მაშინ

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq k(b-a), \quad (2)$$

სადაც

$$k = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

მართლაც, განვიხილოთ უტოლობა

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|. \quad (3)$$

თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ინტეგრებადია წინა პარაგრაფის მე-3 თეორემის ძალით, $|f(x)|$ -იც ინტეგრებადია იმავე სეგმენტზე. (3) უტოლობიდან მივიღებთ

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (4)$$

მაგრამ, თეორემის პირობის ძალით

$$|f(x)| \leq k,$$

საიდანაც

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b k dx = k \int_a^b dx = k(b-a). \quad (5)$$

(4) და (5) დამოკიდებულებანი ადასტურებენ (2) უტოლობის ჭეშმარიტებას.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ.

თეორემა 3. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციები და $g(x) \geq 0$, მაშინ

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = A \int_a^b g(x) dx, \quad (6)$$

სადაც

$$m \leq A \leq M, \quad m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

მართლაც, რადგანაც $g(x) \geq 0$, გვექნება

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x).$$

ამ უტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (7)$$

თუ $\int_a^b g(x) dx = 0$, მაშინაც (6) უტოლობა ჭეშმარიტია.

ვთქვათ,

$$\int_a^b g(x) dx > 0,$$

მაშინ (7) უტოლობა მოგვცემს

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M. \quad (8)$$

ცხადია, A უნდა ავიღოთ (8) უტოლობის შუა ნაწილის ტოლი,

$$A = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx},$$

მაშინ (6) უტოლობის ჭეშმარიტება ცხადია.

შედეგი: თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და რადგანაც უწყვეტი ფუნქცია ღებულობს ყველა მნიშვნელობას მის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს შორის, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტზე მოიძებნება ისეთი ξ წერტილი, რომ $f(\xi) = A \in [m, M]$,

$$\frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = f(\xi).$$

აქედან,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx, \quad a \leq \xi \leq b.$$

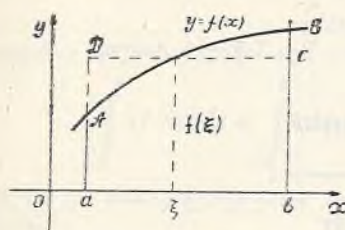
ამგვარად, თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ უწყვეტია და $g(x) \geq 0$ ფუნქცია ინტეგრებადია, მაშინ მოიძებნება ისეთი ξ , $a \leq \xi \leq b$, რომ

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (9)$$

თუ (9) ტოლობაში დავუშვებთ $g(x) = 1$, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in [a, b]. \quad (10)$$

მიღებულ ფორმულას აქვს მარტივი გეომეტრიული აზრი (ნახ. 5).



ნახ. 5

მართლაც, ინტეგრალი $\int_a^b f(x) dx$

იძლევა $abBA$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$ წრფეებით, Ox ღერძით და $y=f(x)$ წირით. $f(\xi)(b-a)$ იძლევა მართკუთხედ $abCD$ -ს ფართობს, რომლის ფუძეა $b-a$ და სიმაღლე $f(\xi)$. (10) ტოლობა ნიშნავს AB წირზე ისეთი M

წერტილის არსებობას, $M(\xi, f(\xi))$, რომ $abBA$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი $abCD$ მართკუთხედის ფართობის ტოლია,

$$S_{abBA} = S_{abCD}.$$

§ 8. განსაზღვრული ინტეგრალის ზედა საზღვრით წარმოდგენილი.
ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

1. განსაზღვრული ინტეგრალის ზედა საზღვრით წარმოდგენილი.

ვთქვათ $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქცია. განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1)$$

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, რადგანაც ვიცით, რომ, თუ არსებობს $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი, მაშინ არსებობს $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი $[a, x]$ სეგმენტზე, $a \leq x \leq b$ და განსაზღვრის თანახმად

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0,$$

ხოლო

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

ვაჩვენოთ, რომ $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია.
მართლაც,

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= F(x+h) - F(x) = \\ &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

თუ $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = k$, მაშინ უკანასკნელიდან მივიღებთ

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_x^{x+h} |f(t)| dt \leq kh,$$

საიდანაც

$$\Delta F(x) \rightarrow 0, \text{ როდესაც } h \rightarrow 0.$$

ამგვარად $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ფუნქცია უწყვეტია, როდესაც $f(x)$

ფუნქცია ინტეგრებადი ია $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე არა მარტო ინტეგრებადია, არამედ უწყვეტიცაა, მაშინ

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

მართლაც, (2) დამოკიდებულებით,

$$\Delta F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას (§ 5, (1)), გვექნება

$$\Delta F(x) = hf(\xi), \quad x \leq \xi \leq x+h.$$

მაშინ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(\xi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi).$$

მაგრამ $x \leq \xi < x+h$, როდესაც $h \rightarrow 0$, მაშინ $\xi \rightarrow x$, ამის გამო უკანასკნელიდან გვექნება:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{h} = f(x),$$

ანუ

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x). \quad (3)$$

ამგვარად, თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტია, მაშინ $F(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული, $F'(x) = f(x)$, $a \leq x \leq b$. მაშასადამე, $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი.

ამით დავამტკიცეთ:

თეორემა 1. $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციას ამავე სეგმენტზე აქვს პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (4)$$

ტოლობით განისაზღვრება (იხ. თ. I, § 1, n 3, თეორემა 5).

2. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველყოფილი ფუნქციაა $\Phi(x)$, ხოლო $F(x)$ ფუნქცია (4) ტოლობითაა განსაზღვრული, მაშინ

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

სადაც C რომელიმე მუდმივია. ამ ტოლობაში ჩავსვათ $x=a$ და მხედველობაში მივიღოთ $F(a)=0$, გვექნება

$$\Phi(a) = C.$$

ამგვარად,

$$\Phi(x) = F(x) + \Phi(a),$$

საიდანაც

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a).$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვათ $x=b$ და მხედველობაში მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx = F(b),$$

გვექნება

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b}.$$

მიღებული ტოლობა გვიჩვენებს, რომ მართებულია ნიუტონ-ლაიბნიცის შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და იმავე $[a, b]$ სეგმენტზე მისი ნებისმიერი პირველყოფილი ფუნქციაა $\Phi(x)$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b}. \quad (5)$$

ამ ფორმულას ასეც წერენ:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b.$$

(5) ფორმულას ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა ეწოდება. იგი აკავშირებს განსაზღვრულ და განუსაზღვრელ ინტეგრალს, თუ ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია.

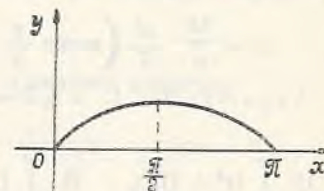
(5) ფორმულა საშუალებას იძლევა $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი გამოვთვალოთ $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალით.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც $[0, \pi]$ შუალედში შემოსაზღვრულია Ox ღერძით და $y = \sin x$ წირით. (ნახ. 6).

ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობიდან მოცემული ფიგურის ფართობი

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx.$$



ნახ. 6.

ჩერ ვიპოვოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

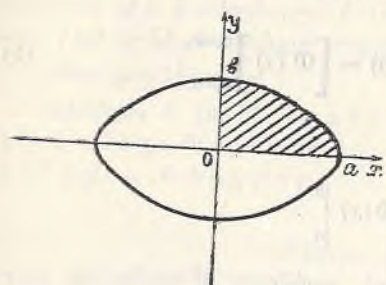
საძიებელი ფართობი იქნება.

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2.$$

ამგვარად, ნახაზზე ნაჩვენები ფიგურის ფართობი 2 ერთეულის ტოლია.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (ნახ. 7).

ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობიდან მივიღებთ



ნახ. 7

$$S = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

ჯერ გამოვთვალოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

შემოვიღოთ ჩასმა

$$x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt.$$

გვექნება:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt &= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

თუ შევიტანთ ფართობის გამოსათვლელ ფორმულაში, მივიღებთ

$$S = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)_0^a = \pi ab.$$

სავარჯიშო 4. 1. გამოთვალოთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$\begin{aligned} 1) \int_1^2 (x^2 + 1) dx, \quad 2) \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx, \quad 3) \int_0^{\pi} \sin 5x dx, \\ 4) \int_{-\pi}^{\pi} \cos 4x dx, \quad 5) \int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx, \quad 6) \int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx, \end{aligned}$$

$$7) \int_0^{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} x dx, \quad 8) \int_1^e \ln x dx, \quad 9) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$10) \int_1^e \ln^2 x dx, \quad 11) \int_0^{\pi} \operatorname{tg} 5x dx, \quad 12) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x dx,$$

$$13) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi, \quad 14) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos t}, \quad 15) \int_{-1}^1 z e^{-z} dz, \quad 16) \int_0^3 x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx.$$

2. გამოვთვალოთ იმ ფიგურათა ფართობები, რომლებიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით:

1) $y = \frac{1}{x}$, $x=1$, $x=e$, $y=0$; 2) $y=x^2$, $y=1$; 3) $y=x^2-1$, $-1 \leq x \leq 2$, $y=2$; 4) $y=\sin x$, $y=0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$; 5) $y=x^2$, $y=x$;

6) $x^2=y^2=1$, $x=2$; 7) $y=x^3$, $y=-1$, $x=0$; 8) $y=\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$,

$-1 \leq x \leq 1$, $y=0$; 9) $y=\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$, $-1 \leq x \leq 1$, $y=0$;

10) $y=\sin^2 x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

§ 7. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის მეთოდები

1. ცვლადთა შეცვლა. დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები: 1) ფუნქცია $f(x)$ უწყვეტია $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე; 2) $[a, b]$ სეგმენტი სიმრავლეა რომელიმე $x=g(t)$ ფუნქციისა, რომელიც განსაზღვრულია $\alpha \leq t \leq \beta$ სეგმენტზე. $g(t)$ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე

ზე აქვს უწყვეტი წარმოებული; 3) $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$. ამ პირობებში ჭეშმარიტია ფორმულა

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)] g'(t) dt. \quad (1)$$

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ თითოეული ამ ინტეგრალიდან, არსებობს, როგორც სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციების ინტეგრალები.

განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის რომელიმე $F(x)$ პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2)$$

რადგანაც ფუნქციები $F(x)$ და $g(t)$ წარმოებადი ფუნქციებია სათანადო სეგმენტებზე, მაშინ რთული ფუნქცია $F[g(t)]$ წარმოებადი ფუნქცია იქნება $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების ფორმულა, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} F[g(t)] = F'[g(t)] g'(t),$$

სადაც წარმოებული F' გამოითვლება x არგუმენტით, $F'[g(t)] = F'(x)$, რომელშიაც $x=g(t)$. რადგანაც $F'(x)=f(x)$, როცა $x=g(t)$, გვექნება

$$F'[g(t)] = f[g(t)].$$

ამრიგად

$$\frac{d}{dt} F[g(t)] = f[g(t)] g'(t).$$

მაშასადამე, ფუნქცია $F[g(t)]$, რომელიც განსაზღვრულია და უწყვეტი $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, წარმოადგენს $f[g(t)] g'(t)$ ფუნქციის პირველყოფილ ფუნქციას. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_\alpha^\beta f[g(t)] g'(t) dt = F[g(\beta)] - F[g(\alpha)].$$

რადგანაც $g(\beta)=b$ და $g(\alpha)=a$, გვექნება

$$\int_\alpha^\beta f[g(t)] g'(t) dt = F(b) - F(a).$$

შევადაროთ მიღებული ფორმულა (2) ფორმულას, ამით დავრწმუნდებით (1) ფორმულის ჭეშმარიტებაში:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)] g'(t) dt.$$

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა (ცვლადთა გარდაქმნა-ჩასმა)

$$x = \sin t,$$

საიდანაც

$$dx = \cos t dt, \quad x=0, \quad t=0; \quad x=1, \quad t=\frac{\pi}{2},$$

$$x^2 \sqrt{1-x^2} = \sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t} = \sin^2 t \cos t.$$

ინტეგრალში მიღებულ მნიშვნელობათა შეტანით გვექნება

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow x=0, \quad t=0; \quad x=1, \quad t=1; \quad dx = 2t dt.$$

სათანადო ჩასმა მოგვცემს

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x+1}} = \int_0^1 \frac{t \cdot 2t dt}{t+1} = 2 \int_0^1 \frac{(t^2-1)+1}{t+1} dt =$$

$$= 2 \int_0^1 \left[t-1 + \frac{1}{t+1} \right] dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

2. ნაწილობითი ინტეგრება. დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციებს უწყვეტი წარმოებულები აქვთ, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x). \quad (3)$$

მართლაც,

$$\frac{d}{dx} (u(x)v(x)) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

ე. ი. $[a, b]$ სეგმენტზე $u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა $u(x)v(x)$. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით მივიღებთ

$$\int_a^b \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b,$$

საიდანაც

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx + \int_a^b v \frac{du}{dx} dx = (uv) \Big|_a^b,$$

ანუ

$$\int_a^b u dv + \int_a^b v du = (uv) \Big|_a^b.$$

აქედან კი $\int_a^b u dv$ შესაკრების განსაზღვრით მივიღებთ

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x d e^x = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = e - (e - e^0) = 1.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 \arctg x dx,$$

ალგნიშნით

$$\arctg x = u, \quad dx = dv, \quad \text{მაშინ } du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x.$$

გამოვიყენოთ (3) ფორმულა, მივიღებთ

$$\int_0^1 \arctg x dx = x \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{dx}{1+x^2} = x \arctg x \Big|_0^1 -$$

$$- \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \arctg 1 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx,$$

სადაც m ნატურალური რიცხვია.

6. გ. კომლაძე

ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx.$$

პირველი შესაკრები ნულია. მეორე შესაკრებში შევცვალოთ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ -ით, მივიღებთ

$$I_m = (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m,$$

საიდანაც

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

ამრიგად, მივიღეთ რეკურენტული, ანუ დაყვანის ფორმულა. ამ ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენებით მივიღებთ I_1 ან I_2 ინტეგრალს, იმისდა მიხედვით m ლუწია, თუ კენტია:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \quad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

ასე რომ, საბოლოოდ გვექნება

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1} \quad (5)$$

ასეთივე მნიშვნელობანი მიიღება I'_m -საც,

$$I'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx.$$

3. ვალისის ფორმულა. ვთქვათ, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, მაშინ ჰეშმარიტია უტოლობა

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

ამ უტოლობის 0-დან $\frac{\pi}{2}$ -მდე ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx.$$

ამ უტოლობიდან (4) და (5) ფორმულებით გვექნება

$$\frac{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1} < \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}. \quad (6)$$

თუ გამოვიყენებთ აღნიშვნას

$$(2n)!! = 2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2,$$

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1.$$

მივიღებთ

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \quad (7)$$

საიდანაც

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n}.$$

ამ უტოლობის მარჯვენა და მარცხენა ნაწილთა შორის სხვაობაა

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2.$$

ამ სხვაობის ზღვარი, ნულის ტოლია, როდესაც $n \rightarrow +\infty$. მაშასადამე, (7) უტოლობის მარჯვენა ნაწილის ზღვარი ტოლია მარცხენა ნაწილის ზღვრისა და ეს საერთო ზღვარია $\frac{\pi}{2}$.

ამრიგად,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}, \quad (8)$$

$$\frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}$$

მივიღეთ ე. წ. ვალისის¹ ფორმულა.

ვალისის ფორმულით π რიცხვი წარმოდგენილია რაციონალური ცვლადის ზღვარით. თავდაპირველად ვალისის ფორმულით სარგებლობდნენ π რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად. დღეისათვის π რიცხვის გამოსათვლელად უფრო ეფექტური ფორმულები არსებობს, მაგრამ ვალისის ფორმულა თეორიულ გამოკვლევებში წარმატებით გამოიყენება.

§ 8. არასაკუთრივი ინტეგრალები

სეგმენტზე შემოუსაზღვრელი ფუნქცია არაა ინტეგრებადი რი-მანის აზრით (§ 2, n 2). თუ ფუნქცია განსაზღვრულია უსასრულო შუალედში, ან შეიძლება ლაპარაკი მისი ინტეგრებადობის შესახებ, რადგანაც, რიმანის აზრით, ინტეგრებადობა ეხება მხოლოდ იმ ფუნქციებს, რომლებიც განსაზღვრულია მხოლოდ სეგმენტზე. ქვემოთ ინტეგრალის ცნებას განვაზოგადებთ ისეთ ფუნქციებზე, რომლებიც განსაზღვრულია უსასრულო შუალედში და ისეთ ფუნქციებზე, რომლებიც სასრულო შუალედში არაა შემოსაზღვრული.

1. არაშემოსაზღვრული ფუნქციების არასაკუთრივი ინტეგრალები. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b[$ შუალედში (ნახევარსეგმენტი) და არაა შემოსაზღვრული სეგმენტზე, მაგრამ ინტეგრებადია, რიმანის აზრით, ნებისმიერ $[a, \beta] \subset [a, b[$ სეგმენტზე. კერძოდ, $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია ნებისმიერ სეგმენტზე $[a, \beta] \subset [a, b[$.

თუ არსებობს ზღვარი (სასრული)

$$\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx, \quad (1)$$

მაშინ მას უწოდებენ არასაკუთრივ ინტეგრალს

და აღნიშნავენ $\int_a^b f(x) dx$.

ამრიგად,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx. \quad (2)$$

¹ ჯონ ვალისი (1616—1703), ინგლისელი მათემატიკოსი.

ამ განსაზღვრის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ b წერტილის ნებისმიერ მიდამოში $f(x)$ ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული.

თუ (1) ზღვარი არსებობს, მაშინ ამბობენ, (2) ინტეგრალი კრებადი არ არსებობს, მაშინ ამბობენ, რომ (2) ინტეგრალი განშლადია.

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს პირველყოფილი ყოველ $[a, \beta] \subset [a, b[$ შუალედში, მაშინ

$$\int_a^\beta f(x) dx = F(\beta) - F(a)$$

და

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} F(\beta) - F(a) = F(b-0) - F(a), \quad F(b-0) = \lim_{\beta \rightarrow b-0} F(\beta).$$

სრული ანალოგიით განსაზღვრება $\int_a^b f(x) dx$ იმ შემთხვევაში,

როდესაც $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]a, b]$ შუალედში და ყოველ $[a, \beta] \subset]a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადია:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_\alpha^b f(x) dx.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია განიციდის უსასრულო წვევებს $[a, b]$ სეგმენტის შიგნით წერტილში და კრებადია ინტეგრალად

$$\int_a^c f(x) dx, \quad \int_c^b f(x) dx,$$

მაშინ ჯამს $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე არასაკუთრივი აზრით.

ზემოთ მოტანილი არასაკუთრივი ინტეგრალის განსაზღვრა შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ:

ინტეგრალს $\int_a^b f(x) dx$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე, განსაკუთრებულობით b წერტილში, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

- 1) b სასრული რიცხვია;
- 2) $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, რიმანის აზრით, ყოველ სეგმენტზე $[a, \beta] \subset [a, b]$;
- 3) $f(x)$ ფუნქცია b წერტილში არაა შემოსაზღვრული;

4) არსებობს ზღვარი $\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx$.

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ინტეგრალის კრებადობა.

ავიღოთ ნებისმიერი $[0, \beta]$ სეგმენტი, $0 < \beta < 1$. შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^\beta = \arcsin \beta - \arcsin 0 = \arcsin \beta.$$

რადგანაც $\arcsin x$ უწყვეტი ფუნქციაა $[-1, 1]$ სეგმენტზე, ამიტომ

$$\lim_{\beta \rightarrow 1-0} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow 1-0} \arcsin \beta = \arcsin(1-0) = \frac{\pi}{2}.$$

მაშასადამე, ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ კრებადია $[0, 1]$ სეგმენტზე,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow 1-0} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. ვთქვათ, მოცემულია ინტეგრალი $\int_a^b f(x) dx$

განსაკუთრებულობით ერთადერთ წერტილში b . ამ ინტეგრალის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი კოშის პირობის შესრულება: თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\beta_0 < b$ რიცხვი, რომ

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(t) dt \right| < \varepsilon$$

ნებისმიერი β_1 და β_2 რიცხვებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < b$, მაშინ ინტეგრალი $\int_a^b f(x) dx$ კრებადია.

მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

განსაზღვრის თანახმად ინტეგრალი $\int_a^b f(x) dx$ კრებადია, თუ $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$

არსებობს. ამ უკანასკნელისათვის კი საჭიროა კოშის პირობის შესრულება: ყოველ $\varepsilon > 0$ -სათვის არსებობს β_0 , სადაც $a < \beta_0 < b$, ისე, რომ სრულდება უტოლობა $|F(\beta_2) - F(\beta_1)| < \varepsilon$ ყველა β_1 და β_2 -სათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < b$. მაგრამ

$$F(\beta_2) - F(\beta_1) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x) dx.$$

ეს უკანასკნელი კი თეორემას ამტკიცებს.

თეორემა 2. ვთქვათ, ფუნქციები $f(x)$ და $g(x)$ განსაზღვრულია $[a, b]$ შუალედში და ინტეგრებადია ყოველ $[a, \beta] \subset [a, b]$ სეგმენტზე რიმანის აზრით. თუ

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

მაშინ ინტეგრალის

$$\int_a^b g(x) dx \quad (3)$$

კრებადობიდან გამომდინარეობს ინტეგრალის

$$\int_a^b f(x) dx \quad (4)$$

კრებადობა და ჭეშმარიტია უტოლობა

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (5)$$

თუ (4) ინტეგრალი განშლადია, განშლადია (3) ინტეგრალიც.

მართლაც, თეორემის პირობის თანახმად ნებისმიერ $[a, \beta] \subset [a, b]$ სეგმენტზე რიმანის ინტეგრალები

$$F(\beta) = \int_a^\beta f(x) dx, \quad G(\beta) = \int_a^\beta g(x) dx$$

არსებობს და ეს ინტეგრალები ნებისმიერი β -თვის, $\beta < b$, აკმაყოფილებს უტოლობას

$$F(\beta) \leq G(\beta).$$

ფუნქციები $F(\beta)$ და $G(\beta)$ არაა კლებადი. თეორემის პირობის თანახმად არაკლებადი $F(\beta)$ ფუნქცია ზემოდან შემოსაზღვრულია (3) არასაკუთრივი ინტეგრალით. ეს კი უზრუნველყოფს (4) ინტეგრალის კრებადობას,

$$\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

თუ (4) ინტეგრალი განშლადია, მაშინ (3) ინტეგრალი ზემოდან შემოსაზღვრული არ იქნება და, ცხადია, (3) ინტეგრალი განშლადი იქნება. (3) ინტეგრალის კრებადობიდან (5) უტოლობის ჭეშმარიტება აშკარაა.

ამრიგად, თეორემის ჭეშმარიტება დამტკიცდა, ამ თეორემას შედარების თეორემა უწოდებენ.

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 2. გამოვიკვლიოთ, α -ს რა მნიშვნელობისთვისაა კრებადი ინტეგრალი

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

რადგანაც $\alpha \in]0, 1[$ -თვის

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_a^1, & \text{თუ } \alpha \neq 1, \\ \ln |x| \Big|_a^1, & \text{თუ } \alpha = 1, \end{cases}$$

მაშინ ზღვარი

$$\lim_{a \rightarrow 0+0} \int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

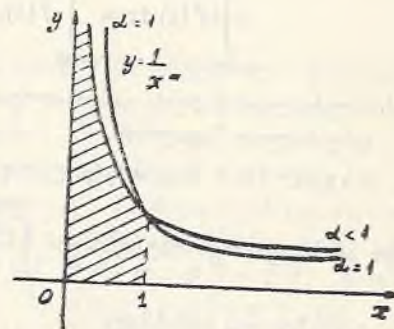
არსებობს მხოლოდ $\alpha < 1$ -სათვის (ნახ. 8).

ამრიგად, აღებული არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია

$\alpha < 1$ -თვის (ნახ. 8).

2. არასაკუთრივი ინტეგრალი უსასრულო საზღვრებით. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, +\infty[$ შუალედში და ინტეგრებადია, რიმანის აზრით, ნებისმიერ $[a, \beta] \subset [a, +\infty[$ სეგმენტზე. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx, \quad (6)$$



ნახ. 8

მაშინ მას უწოდებენ არასაკუთრივ ინტეგრალს და აღნიშნავენ

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (7)$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx.$$

ამბობენ აგრეთვე, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი (7) კრებადია $[a, +\infty[$ შუალედში, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას $[a, +\infty[$ შუალედში ეწოდება, არასაკუთრივი აზრით, ინტეგრებადი. თუ (6) ზღვარი არ არსებობს, მაშინ ამბობენ (7) ინტეგრალი განშლადია.

თუ $f(x)$ ფუნქციას $[a, +\infty[$ შუალედში აქვს პირველყოფილი ფუნქცია $F(x)$, მაშინ

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} F(\beta) - F(a) = F(+\infty) - F(a),$$

სადაც $F(+\infty) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} F(\beta)$.

ანალოგიურად განისაზღვრება

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

და

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

განსაზღვრულობისათვის განვიხილავთ (6) არასაკუთრივ ინტეგრალს.

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 2. გამოვიკვლიოთ, α -ს რა მნიშვნელობისთვისაა კრებადი არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

განსაზღვრის თანახმად:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^{\beta} = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\beta^{\alpha-1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

ესაქმნება, თუ $\alpha - 1 > 0$, მიღებული $\frac{1}{\beta^{\alpha-1}} \rightarrow 0$, როდესაც $\beta \rightarrow +\infty$.

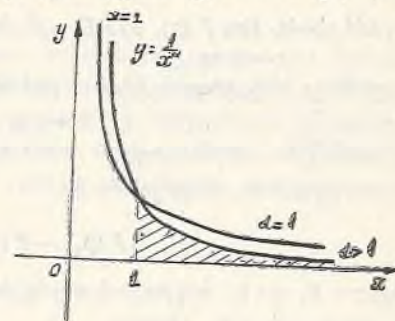
მაშასადამე, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, თუ $\alpha > 1$.

მე-9 ნახაზზე ნაჩვენებია $y = \frac{1}{x^\alpha}$ წირები, რომლებიც უსასრულო მრუდწირულ ტრაპეციას შემოსაზღვრავენ $[1, +\infty[$ შუალედში. თუ $\alpha > 1$, მაშინ $y = \frac{1}{x^\alpha}$ წირის მიერ შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი სასრულია. ასეთი მრუდწირული ტრაპეცია დაშტრბილია, თუ $\alpha \leq 1$ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი $[1, +\infty[$ შუალედში შემოსაზღვრული არაა.

განვსაზღვროთ აბსოლუტურად კრებადი არასაკუთრივი ინტეგრალი.

არასაკუთრივი ინტეგრალი (7) აბსოლუტურად კრებადია, თუ კრებადია ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx. \quad (8)$$



ნახ. 9

თუ (7) ინტეგრალი კრებადია, ხოლო (8) ინტეგრალი განშლადია, მაშინ ამბობენ, (7) ინტეგრალი პირობით კრებადია.

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. ვთქვათ, მოცემულია $[a, +\infty[$ შუალედში $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ინტეგრებადია, რიმაანის აზრით, ყოველ სეგმენტზე $[a, \beta] \subset [a, +\infty[$. არასაკუთრივი აზრით, $[a, +\infty[$ შუალედში $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია კოშის პირობის შესრულება: თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი β_0 რიცხვი, რომ

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

ნებისმიერი β_1 და β_2 რიცხვებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2$, მაშინ ინტეგრალი

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad (9)$$

კრებადია.

ეს თეორემა 1-ელი თეორემის ანალოგიურად დამტკიცდება.

მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad a < x < +\infty.$$

თუ არსებობს $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, მაშინ, განსაზღვრის თანახმად, არსებობს (9) არასაკუთრივი ინტეგრალი. მაგრამ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ არსებობისათვის აუცილებელია

და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი β_0 , $a < \beta_0 < +\infty$, რიცხვი, რომ

$$|F(\beta_2) - F(\beta_1)| < \varepsilon$$

ყოველი β_1 და β_2 რიცხვებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2$. ცხადია,

$$F(\beta_2) - F(\beta_1) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(t) dt.$$

ამით თეორემა დამტკიცდა.

მე-2 თეორემის ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4. ვთქვათ, ფუნქციები $f(x)$ და $g(x)$ განსაზღვრულია $[a, +\infty[$ შუალედში და ინტეგრებადია, რიმანის აზრით, ყოველ სეგმენტზე $[a, \beta] \subset [a, +\infty[$. თუ $[a, +\infty[$ შუალედში

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

მაშინ $\int_a^{\infty} g(x) dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან გამომდინა-

რეობს $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ინტეგრალის კრებადობა და ქეშმარიტია უტოლობა

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx. \quad (10)$$

თუ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ განშლადია, მაშინ განშლადია ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

3. შენიშვნები. განვიხილოთ რიმანის ინტეგრალი და შემდეგ არასაკუთრივი ინტეგრალი. არასაკუთრივი ინტეგრალისაგან განსხვავებით რიმანის ინტეგრალს ზოგჯერ საკუთრივ ინტეგრალს უწოდებენ.

თუ დავაკვირდებით ზემოთ მოტანილი არასაკუთრივი ინტეგრალის განსაზღვრას, შევამჩნევთ, რომ ორივე განსაზღვრა შეგვიძლია გავავრთიანოთ. გამოსახულებას

$$\int_a^b f(x) dx$$

უწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი a -დან b -მდე, განსაკუთრებულობით b წერტილში, თუ სრულდება შემდეგი პირობები: თუ b სასრული რიცხვია, მაშინ ფუნქცია $f(x)$ ინტეგრებადია, რიმანის აზრით, ყოველ $[a, \beta]$ სეგმენტზე, $[a, \beta] \subset [a, b]$, ამასთან, $f(x)$ არაა შემოსაზღვრული b წერტილში. თუ b არის სიმბოლო $+\infty$, $b = +\infty$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, \beta]$ სეგმენტზე, სადაც β ნებისმიერი სასრული რიცხვია, $\beta > a$. ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x) dx,$$

სადაც b სასრული რიცხვია ან $+\infty$, მაგრამ იმ განსაზღვრით, რომელიც ახლა გამოვთქვით.

არასაკუთრივი ინტეგრალების გამოთვლის დროს რიმანის ინტეგრლების თვისებებით ვისარგებლებთ, მაგრამ წინასწარ უნდა დავრწმუნ-

დეთ იმაში, რომ აღებული თვისება ჭეშმარიტია არასაკუთრივი ინტეგრალისათვის.

მაგალითად, თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციების $[a, b]$ სეგმენტზე არასაკუთრივი ინტეგრალები კრებადია, მაშინ ნებისმიერი k_1 და k_2 მუდმივი რიცხვებისათვის ჭეშმარიტია ტოლობა

$$\int_a^b (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) dx = k_1 \int_a^b f_1(x) dx + k_2 \int_a^b f_2(x) dx. \quad (11)$$

მართლაც, განსაზღვრის თანახმად

$$\begin{aligned} \int_a^b (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) dx &= \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) dx = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow b-0} \left[k_1 \int_a^\beta f_1(x) dx + k_2 \int_a^\beta f_2(x) dx \right] = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \left[k_1 \int_a^\beta f_1(x) dx \right] + \\ &+ \lim_{\beta \rightarrow b-0} \left[k_2 \int_a^\beta f_2(x) dx \right] = k_1 \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f_1(x) dx + k_2 \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f_2(x) dx = \\ &= k_1 \int_a^b f_1(x) dx + k_2 \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორ გამოიყენება ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა არასაკუთრივი ინტეგრალისათვის.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b[$ შუალედში და აქვს პირველყოფილი ფუნქცია $F(x)$ ყოველ $[a, \beta] \subset [a, b[$ სეგმენტზე და დავუშვათ, რომ ამ პირველყოფილს აქვს ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow b-0} F(x) = \begin{cases} F(b-0), & \text{თუ } b \text{ სასრულია,} \\ F(+\infty), & \text{თუ } b = +\infty, \end{cases}$$

მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} F(b-0) - F(a), & \text{თუ } b \text{ სასრულია,} \\ F(+\infty) - F(a), & \text{თუ } b = +\infty \end{cases} \quad (12)$$

მართლაც, პირველყოფილ ფუნქციაში გვულისხმობთ ისეთ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია ყოველ $[a, \beta] \subset [a, b[$ სეგმენტზე და

წარმოებადია ამავე სეგმენტზე. არასაკუთრივი ინტეგრალის განსაზღვრის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx.$$

თუ ზღვრის ქვეშ მოთავსებული ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულას, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} [F(\beta) - F(a)] = \lim_{\beta \rightarrow b-0} F(\beta) - F(a) = F(b-0) - F(a).$$

რაც უნდა გვეჩვენებინა.

(12) ტოლობა უნდა გავიგოთ შემდეგი აზრით: თუ ორივე ნაწილი არსებობს, მაშინ ისინი ტოლია. თუ ორივე ნაწილს ერთდროულად აზრი არა აქვს, მაშინ ტოლობის ორივე ნაწილში ზღვრები არ არსებობს.

ზემოთ განსაზღვრეთ არასაკუთრივი ინტეგრალის აბსოლუტურად კრებადობა. თუ გამოვიყენებთ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის კოშის პირობას, მაშინ უტოლობის

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} |f(x)| dx \right| \quad (13)$$

საფუძველზე დავასკვნით, რომ, თუ არასაკუთრივი ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ ის კრებადია.

4. ეილერ-პუასონის ინტეგრალი. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad (14)$$

ქნელი არაა იმის დადგენა, რომ ფუნქცია $f(t) = (1+t)e^{-t}$ აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას $t=0$ წერტილში, $f(0) = 1$. სხვა წერტილებში

$$(1+t)e^{-t} < 1.$$

დავუშვათ, $t = -x^2$, $t = x^2$. მივიღებთ

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1 \quad \text{და} \quad (1+x^2)e^{-x^2} < 1, \quad x \neq 0,$$

საიდანაც

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}. \quad (15)$$

ნებისმიერი l რიცხვისათვის, ცხადია,

$$\int_0^l e^{-x^2} dx < \int_0^l \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

აქედან გამომდინარეობს K ინტეგრალის არსებობა. გამოვთვალოთ K ინტეგრალი

(15) უტოლობის n ნატურალურ რიცხვში ახარისხებით, მივიღებთ

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2}. \quad (16)$$

$$e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}. \quad (17)$$

(16) უტოლობის $0 < x < 1$ შუალედში, ხოლო (17) უტოლობის $0 < x < +\infty$ -ში ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}. \quad (18)$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალები. გვექნება

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

აქ გამოვიყენეთ ცვლადთა შეცვლა $x = \cos t$ და ვისარგებლეთ მე-7 პარაგრაფის მე-5 ფორმულით. ამრიგად,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \quad (19)$$

ასევე გამოვთვალოთ ინტეგრალს

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

აქ გამოვიყენეთ ცვლადთა შეცვლა $x = \operatorname{tg} t$ და ვისარგებლეთ მე-7 პარაგრაფის მე-4 ფორმულით. ამრიგად,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

(18) უტოლობის შუა წევრი ასე ჩავწეროთ:

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} K. \quad (21)$$

აქ გამოვიყენეთ ცვლადთა შეცვლა $t = \sqrt{n} x$.

(18) უტოლობიდან (19)–(21) ფორმულების საფუძველზე მივიღებთ

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

ამ უტოლობის კვადრატში ახარისხებით, მივიღებთ

$$\frac{n}{2n+1} \cdot \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2 (2n+1)} < K^2 < \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{((2n-3)!!)^2 (2n-1)}{((2n-2)!!)^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

თუ ვისარგებლებთ ვალისის ფორმულით (§ 7, $n=4$)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2 (2n+1)}$$

და გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $n \rightarrow +\infty$, მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} < K^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

საიდანაც ადვილად დავასკვნით, რომ უტოლობის მარცხენა ნაწილისა და მარჯვენა ნაწილის ზღვრები ტოლია $\frac{\pi}{4}$ -ის. მაშასადამე,

$$K^2 = \frac{\pi}{4},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ამრიგად,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ამ ინტეგრალს ეილერ-პუასონის¹ ინტეგრალი ეწოდება. მას დიდი გამოყენება აქვს ალბათობათა თეორიაში.
საეარჯიშო 5. 1. გამოთვალეთ ინტეგრალები:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}, & \quad 2) \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx, & 3) \int_0^2 \frac{dx}{4x^2+1}, \\ 4) \int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}, & 5) \int_0^1 \frac{xdx}{x^2-3x+2}, & 6) \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx, \\ 7) \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x^3}-1)}, & 8) \int_1^2 \frac{dx}{x^2+x+1}, & 9) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1+u}{1-x}} dx, \\ 10) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}, & 11) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x}, & 12) \int_5^{10} \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx, \\ 13) \int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x+1}}, & 14) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\sin x}, & 15) \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}. \end{aligned}$$

2. გამოთვალეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{\pi} x \cos x dx, & \quad 2) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx, & 3) \int_0^{e-1} \ln(1+x) dx, \\ 4) \int_0^1 x^2 e^x dx, & 5) \int_1^e \ln^2 x dx, & 6) \int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx, \\ 7) \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx, & 8) \int_0^1 \arccos x dx, & 9) \int_0^{2\pi} x^2 \sin x dx. \end{aligned}$$

¹ სიმეონ დენი პუასონი (1781—1840), ფრანგი მათემატიკოსი, მექანიკოსი, უიზიკოსი, მათემატიკური ფიზიკის ერთ-ერთი ფუძემდებელი.

3. გამოთვალეთ შემდეგი არასაკუთრივი ინტეგრალები:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx, & \quad 2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, & 3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x}, \\ 4) \int_{-\infty}^0 x e^x dx, & 5) \int_0^1 x \ln x dx, & 6) \int_0^1 \ln^2 x dx, \\ 7) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}, & 8) \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx, & 9) \int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}, \\ 10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}, & 11) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x dx, & 12) \int_0^2 \frac{dx}{(x^2-4)^2}, \\ 13) \int_0^1 x^2 \ln x dx, & 14) \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}, & 15) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

4. გამოიყვლიეთ შემდეგი არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx, & \quad 2) \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}, & 3) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ 4) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, & 5) \int_a^b \frac{dx}{(b-x)\sqrt[3]{x-a}}, & 6) \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^s}, \quad s < 1, \\ & & s > 1; \\ 7) \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx, \quad p < 2. & 8) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, & 9) \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x^\alpha} \text{ კრებადია,} \end{aligned}$$

$$\text{თუ } \int_a^{\infty} \varphi(x) dx < \infty, \quad \alpha > 0.$$

თავი III

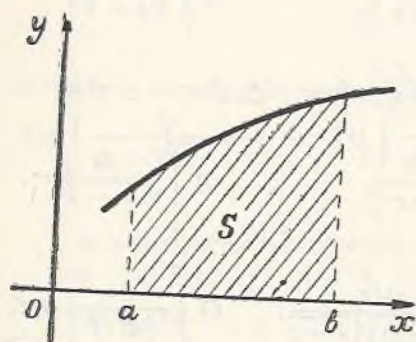
განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება

§ 1. ფართობის გამოთვლა

1. დეკარტის კოორდინატებში ფართობის გამოთვლა. როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული და უწყვეტი $f(x) \geq 0$

ფუნქციის ინტეგრალი $\int_a^b f(x, dx)$ გეომეტრიულად გამოსახავს იმ მრუდ-

წირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$ წრფეებით, Ox ღერძით და $y=f(x)$ წირით (ნახ. 1).



ნახ. 1

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

ანუ

$$S = \int_a^b y dx.$$

თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x) < 0$, მაშინ

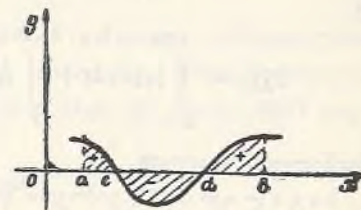
$$\int_a^b f(x) dx < 0.$$

ამიტომ ფართობი იმ მრუდწირული ტრაპეციისა, რომელიც შემოსაზღვრულია ისევ $x=a$, $x=b$ წრფეებით Ox ღერძით და $y=f(x)$ წირით (ნახ. 2), გამოისახება ფორმულით

$$S = - \int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$



ნახ. 2



ნახ. 3

თუ $y=f(x)$ წირი $[a, b]$ სეგმენტს გადაჰყვეთ ერთ ან რამდენიმე წერტილში, მაშინ, ადვილი შესამჩნევია, რომ ადვილი ექნება შემდეგ ტოლობას (ნახ. 3):

$$S = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \int_d^b f(x) dx, \quad (1)$$

ჩაღვანაც

$$\int_a^c f(x) dx > 0, \quad \int_c^d f(x) dx < 0, \quad \int_d^b f(x) dx > 0.$$

თუ წირი მოცემულია პარამეტრულად

$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t), \end{cases}$$

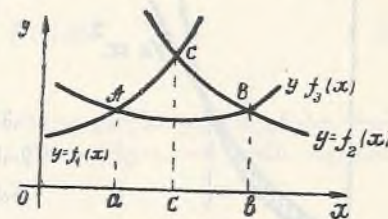
სადაც $a \leq t \leq \beta$, მაშინ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \int_a^\beta f(t) g'(t) dt,$$

სადაც $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$.

თუ ბრტყელი ფიგურა არაა მრუდწირული ტრაპეცია, მაშინ უნდა

შეცადოთ ეს ფიგურა გამოისახოთ მრუდწირული ტრაპეციების საშუალებით (ნახ. 4).



ნახ. 4

ცხადია

ანუ

$$S_{ABC} = S_{acCA} + S_{cbBC} - S_{abBA},$$

$$S_{ABC} = \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx. \quad (2)$$

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ წრის ფართობი.

წრეწირის ცენტრი ავიღოთ კოორდინატთა სათავეში, მაშინ მისი განტოლება იქნება $x^2 + y^2 = a^2$. ავიღოთ წრის პირველი მეოთხედი, მისი განტოლებიდან $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq a$. ამიტომ

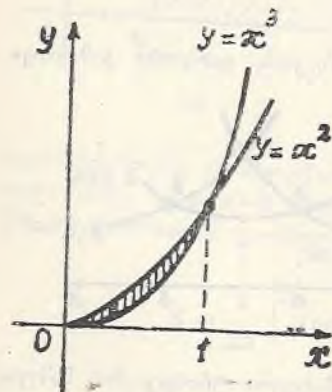
$$S = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

ჩასმით $x = a \sin t$ მივიღებთ

$$dx = a \cos t dt, \quad x = 0, \quad t = 0; \quad x = a, \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

გვექნება

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$



ნახ. 5

$$= 2a^2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 \frac{\pi}{2} = \pi a^2.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით $y = x^2$, $y = x^3$. (ნახ. 5).

წირების გადაკვეთის წერტილებია (1,1) და (0,0)

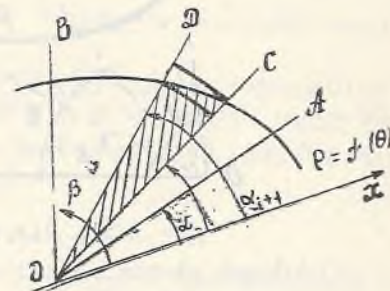
ცხადია,

$$S = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

2. ბოლარულ კოორდინატებში ფართობის გამოთვლა. გამოვთვალოთ იმ მრუდწირული სექტორის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ წრფეებით და $\rho = f(\theta)$ წირით (ნახ. 6). კუთხე AOB დავყოთ მცირე კუთხეებად, ამისათვის O წერტილიდან გავატაროთ სხივები:

$$\theta = \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = \beta.$$

განვიხილოთ იმ მრუდწირული სექტორის ფართობი, რომელიც შემოწერილია $\theta = \alpha_i$, $\theta = \alpha_{i+1}$ სხივებით და $\rho = f(\theta)$ წირით. ეს მრუდწირული სექტორი იყოს OCD . ამ სექტორის ფართობია, დაახლოებით,



ნახ. 6

$$S_{OCD} \approx \frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 (\theta_{i+1} - \theta_i) = \frac{1}{2} f^2(\xi_i) \Delta \theta_i, \quad \xi_i \in [\theta_i, \theta_{i+1}].$$

ცხადია, იმავე მსგელობით, როგორც განვსაზღვრეთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, აქაც მივიღებთ

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i) \Delta \theta_i, \quad \xi_i \in [\theta_i, \theta_{i+1}], \quad \lambda = \max \Delta \theta_i,$$

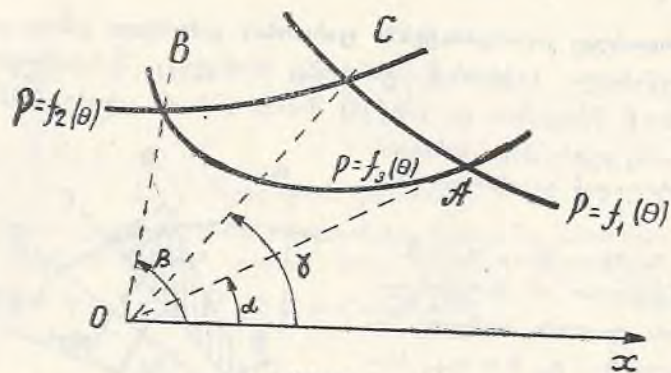
ანუ

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta. \quad (3)$$

აქაც განვიხილავთ დარბუს ქვედა და ზედა ჯამებს და ვაჩვენებთ, რომ, თუ $\alpha \leq \theta \leq \beta$ სეგმენტზე უწყვეტია $f(\theta)$ ფუნქცია, არსებობს ინტეგრალური ჯამის ზღვარი

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i) \Delta \theta_i.$$

თუ გვაქვს რაიმე ფიგურა, რომელიც რამდენიმე წირითაა შემოსაზღვრული, ვეცადოთ ეს ფიგურა წარმოვადგინოთ მრუდწირული სექტორებით (7).



ნახ. 7

ამ ნახაზიდან, ცხადია,

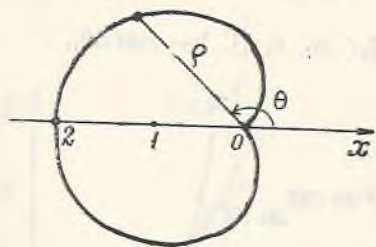
$$S_{ACB} = S_{OAC} + S_{OCB} - S_{OAB},$$

ანუ

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left(\int_{\alpha}^{\gamma} f_1^2(\theta) d\theta + \int_{\gamma}^{\beta} f_2^2(\theta) d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} f_3^2(\theta) d\theta \right). \quad (4)$$

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\rho = 1 - \cos \theta$ წირით (კარდიოიდა) შემოსაზღვრული ფართობი (ნახ. 8). გვექნება:



ნახ. 8

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

§ 2. ბრტყელი წირის რაჰლის სიგრძე

ჩვენთვის ცნობილია წრფის მონაკვეთების სიგრძე და წრეწირის სიგრძე, ბრტყელი წირი (წირი სიბრტყეზე) ეწოდება იმ $M(x, y)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის კოორდინატები განისაზღვრებიან განტოლებებით

$$\begin{aligned} x &= g(t), \\ y &= f(t), \end{aligned} \quad (1)$$

სადაც $g(t)$ და $f(t)$ ფუნქციები მოცემულია რომელიმე $\alpha \leq t \leq \beta$ სეგმენტზე.

ვთქვათ, მოცემულია AB წირი (1) განტოლებებით, სადაც $g(t)$ და $f(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[a, \beta]$ სეგმენტზე. ვიგულისხმობთ, რომ ამ წერტილების კოორდინატებია სათანადოდ $A[g(a), f(a)]$, $B[g(\beta), f(\beta)]$ (ნახ. 9). $[a, \beta]$ სეგმენტი, წერტილებით

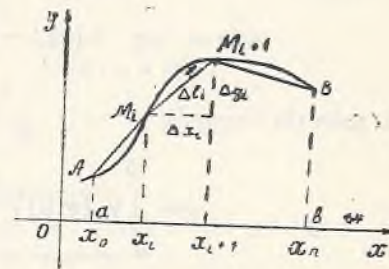
$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta,$$

დავანაწილოთ ქვესეგმენტებად. ამ წერტილების შესაბამისი წერტილები AB წირზე აღვნიშნოთ ასეებით

$$A = M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = B.$$

ამ წერტილებით შევადგინოთ ტეხილი, $M_i M_{i+1}$ რგოლის სიგრძე აღვნიშნოთ ΔL_i -ით. ამ რგოლის სიგრძეა ჯამი მოგვეცეს $AM_1 \dots M_{n-1} B$ ტეხილის სიგრძეს

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta L_i. \quad (2)$$



ნახ. 9

აღვილი წარმოსადგენია

$$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{[\Delta g(t_i)]^2 + [\Delta f(t_i)]^2}. \quad (3)$$

თუ ვისარგებლებთ ლაგრანჟის თეორემით, (2)-დან მივიღებთ:

$$\Delta L_i = \sqrt{[g'(\xi_i)]^2 + [f'(\eta_i)]^2} \Delta t_i, \quad \xi_i, \eta_i \in [t_i, t_{i+1}].$$

ჩაღვანაც $g'(t)$ და $f'(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია, გვექნება

$$\Delta L_i = \{ \sqrt{[g'(\xi_i)]^2 + [f'(\xi_i)]^2} + o(\Delta \xi_i) \} \Delta t_i, \quad (4)$$

სადაც

$$\Delta \xi_i = \eta_i - \xi_i, \quad o(\Delta \xi_i) \rightarrow 0, \quad \text{როცა } \Delta \xi_i \rightarrow 0.$$

შევიტანოთ (4) მნიშვნელობა (2) გამოსახულებაში და გადავიღეთ ზღვარზე, როდესაც $\lambda = \max \Delta t_i \rightarrow 0$. მივიღებთ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[g'(\xi_i)]^2 + [f'(\xi_i)]^2} + \omega(\Delta \xi_i) \right\} \Delta t_i, \quad (5)$$

სადაც $|\Delta \xi_i| \leq \Delta t_i$, $\omega(\Delta \xi_i) \rightarrow 0$, როდესაც $\Delta t_i \rightarrow 0$. პირველი ნაწილის ზღვარი არსებობს:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{[g'(\xi_i)]^2 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta t_i = \int_a^\beta \sqrt{[g'(t)]^2 + [f'(t)]^2} dt,$$

ხოლო მეორე ნაწილი მოგვცემს

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega(\Delta \xi_i) \Delta t_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\omega(\Delta t_i)| \Delta t_i < \omega(\lambda) (\beta - \alpha),$$

$$\omega(\lambda) = \sup_{i \in [0, 1, \dots, n-1]} \omega(\Delta \xi_i) \rightarrow 0, \text{ როდესაც } \lambda \rightarrow 0.$$

ამის გამო (5) მოგვცემს

$$s = \int_a^\beta \sqrt{[g'(t)]^2 + [f'(t)]^2} dt. \quad (6)$$

თუ წირი მოცემულია განტოლებით

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= f(t). \end{aligned}$$

ამის გამო (6) ფორმულა მოგვცემს

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (7)$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[g'(t)]^2 + [f'(t)]^2} dt.$$

ცხადია

$$\frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{[g'(t)]^2 + [f'(t)]^2},$$

საიდანაც

$$ds = \sqrt{[g'(t)]^2 + [f'(t)]^2} dt,$$

ანუ

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (8)$$

ამის გამო (6) ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$s = \int_a^\beta ds,$$

ხოლო (8) ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$s = \int_a^b ds.$$

(8) გამოსახულებას ეწოდება რკალის დიფერენციალი. ამ დიფერენციალით გამოითვლება რკალის სიგრძე.

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ r რადიუსიანი წრეწირის სიგრძე. წრეწირი ავიღოთ პარამეტრული განტოლებებით

$$\begin{aligned} x &= r \cos t, \\ y &= r \sin t, \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

ავიღოთ წრეწირის მეოთხედი, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r dt = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4rt \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r.$$

ვთქვათ, წირი მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $\rho = f(\theta)$. თუ გადავიყვანთ მართკუთხა კოორდინატებში, გვექნება

$$\begin{aligned} x &= f(\theta) \cos \theta, \\ y &= f(\theta) \sin \theta. \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} dx &= (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta) d\theta, \\ dy &= (f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta) d\theta, \\ dx^2 + dy^2 &= ([f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2) d\theta^2. \end{aligned}$$

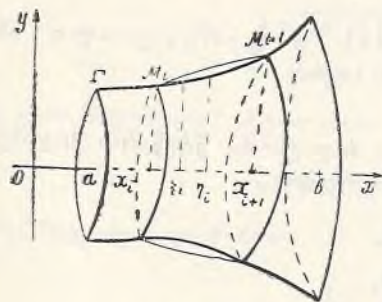
აქედან კი

საიდანაც

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2} d\theta, \\ s &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2} d\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

§ 8. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი

ვთქვათ $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია Γ წირი $y = f(x)$ განტოლებით, სადაც $f(x)$ ფუნქციას აქვს ამ სეგმენტზე უწყვეტი წარმოებული. გამოვთვალოთ Γ წირით Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის S ფართობი. ამისათვის $[a, b]$ სეგმენტი დავყოთ



ნახ. 10

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ წერტილებით ქვესეგმენტებად. Γ წირში ჩავსვათ Γ_n ტეხილი $(x_i, f(x_i))$ წვეროებით. ავიღოთ Γ_n ტეხილების ბრუნვით მიღებული ზედაპირის S_n ფართობი (ნახ. 10).

$$\begin{aligned} S_n &= \pi \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) + \\ &+ f(x_i)] \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

სადაც

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = \Delta y_i.$$

ისევე, როგორც წირის რკალის სიგრძის გამოთვლისათვის გავაკეთეთ, აქაც გვექნება:

$$f(x_i) + f(x_{i+1}) = 2f(x_i) + f'(\xi_i) \Delta x_i,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} &= \sqrt{\Delta x_i^2 + [f'(\eta_i)]^2 \Delta x_i^2} = \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} \Delta x_i + o(\Delta x_i) \Delta x_i, \end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned} \xi_i &\in [x_i, x_{i+1}], \eta_i \in [x_i, x_{i+1}], |\eta_i - \xi_i| \leq \Delta x_i, \\ \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} o(\Delta x_i) &= 0, \end{aligned}$$

ქანასკნელ გამოსახულებათა (1) ტოლობაში შეტანა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} S_n &= \pi \sum_{i=0}^{n-1} [2f(x_i) + f'(\xi_i) \Delta x_i] [\sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} + o(\Delta x_i)] \Delta x_i = \\ &= 2\pi \sum f(x_i) \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} \Delta x_i + \pi \sum 2f(x_i) o(\Delta x_i) \Delta x_i + \\ &+ \pi \sum f'(\xi_i) [\sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} + o(\Delta x_i)] \Delta x_i^2. \end{aligned} \quad (2)$$

მიღებული გამოსახულების მესამე და მეორე შესაკრები მოგვცემს

$$\begin{aligned} & \left| \sum (f'(\xi_i) (\sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} + o(\Delta x_i)) \Delta x_i^2 + 2 \sum f(x_i) o(\Delta x_i) \Delta x_i \right| \leq \\ & \leq \sum |f'(\xi_i)| [\sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} + o(\Delta x_i)] \Delta x_i \cdot \Delta x_i + \\ & + 2 \sum |f(\xi_i)| |o(\Delta x_i)| \Delta x_i \leq \lambda (M_1 \sum \Delta x_i + 2M_2 \sum \Delta x_i) \leq \lambda M(b-a), \end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned} \lambda &= \max \Delta x_i, |f'(\xi_i)| [\sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} + o(\Delta x_i)] \leq M_1, |f(\xi_i) o(\Delta x_i)| \leq M_2, \\ M_1 + 2M_2 &= M. \end{aligned}$$

ამის გამო (2) გამოსახულება, როცა $\lambda \rightarrow 0$, ზღვარში მოგვცემს

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3)$$

(3) ფორმულა ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (4)$$

თუ წირი პარამეტრულადაა მოცემული, მაშინ

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (5)$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ r რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართობი. ცხადია, სფეროს ზედაპირი მიიღება $x^2 + y^2 = r^2$ წრეწირის X ღერძის გარშემო ბრუნვით.

$x^2 + y^2 = r^2$ -დან, ცხადია,

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad -r \leq x \leq r.$$

შევიტანოთ (4) ფორმულაში, გვექნება

$$S = 2\pi \int_{-r}^r y \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{y^2 + x^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r r dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r,$$

საიდანაც

$$S = 4\pi r^2.$$

§ 4. პარალელური კვეთის ფართობებით სხეულის მოცულობის განსაზღვრა და გამოთვლა

როგორც ვიცით ცილინდრის მოცულობა, რომლის მსახველის პერპენდიკულარული კვეთა წრეა და სიმაღლე H , გამოითვლება ფორმულით

$$V = SH.$$

ამ ფორმულით ვისარგებლებთ ნებისმიერი სხეულის მოცულობის გამოთვლად, როცა ცნობილია სხეულის პარალელური კვეთების ფართობები. ვთქვათ, სხეულის მდებარეობა $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ მოცემულია მე-11 ნახაზზე. გავტაროთ Ox ღერძისადმი პერპენდიკულარული სიბრტყეები $x=a, \dots, x=x_i, x=x_{i+1}, \dots, x=b$. მთელი სხეული მოთავსებულია $x=a$ და $x=b$ სიბრტყეთა შორის. დავუშვათ, x წერტილზე გატარებული Ox ღერძისადმი პერპენდიკულარული სიბრტყით სხეულის კვეთაში მიღებული ფიგურის ფართობია $f(x)$. სეგმენტის დანაწილების x_i და x_{i+1} წერტილებზე გატარებულ სიბრტყეთა შორის მო-

თავსებული სხეულის ნაწილი ჩავთვალოთ ცილინდრად, რომლის სიმაღლეა Δx_i , ხოლო ფუძის ფართობად მივიღოთ $f(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$; $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

განვიხილოთ ინტეგრალური ჯამი

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

განვიხილოთ აგრეთვე დარბუს ჯამები:

$$\underline{V}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad \bar{V}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

სადაც

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

ბუნებრივია, აღებული სხეულის მოცულობად მივიღოთ დარბუს ჯამების საერთო ზღვარი, როდესაც $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, თუ ეს საერთო ზღვარი არსებობს, და ეს ზღვარი არსებობს, თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია. უტოლობიდან

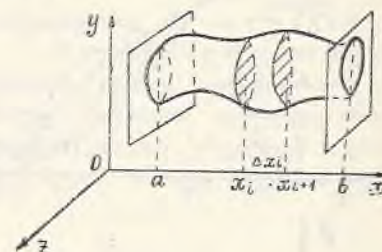
$$\underline{V}_n \leq V_n \leq \bar{V}_n$$

მივიღებთ:

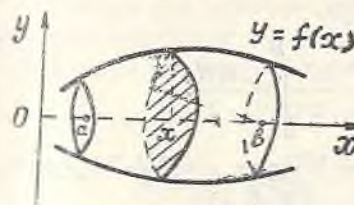
$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

ამრიგად, იმ სხეულის მოცულობა, რომლის y ღერძისადმი ყოველ x წერტილში, $a \leq x \leq b$, პერპენდიკულარულ კვეთაში მიღებული ფიგურის ფართობი გამოისახება უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციით, ტოლია $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალისა $[a, b]$ სეგმენტზე.

კერძოდ, თუ სხეული შემოსაზღვრულია Ox ღერძის გარშემო $y=f(x)$ წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირით და $x=a$, $x=b$ სიბრტყეებით (ბრუნვითი სხეული, ნახ. 12), მაშინ Ox ღერძის პერპენდიკულარული



ნახ. 11



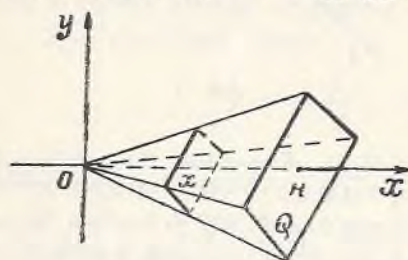
ნახ. 12

რულ კვეთაში მიიღება წრე, რადიუსით $f(x)$, და კვეთაში მიღებული წრის ფართობი ტოლია $\pi f^2(x)$. ამის გამო (1) ფორმულა მოგვცემს

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2)$$

მაგალითი 1. გამოთვალეთ პირამიდის მოცულობა, თუ ფუძის ფართობია Θ და სიმაღლე H .

კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ პირამიდის წვეროში და Ox ღერძი გავავლოთ პირამიდის ფუძის პერპენდიკულარულად (ნახ. 13). რაიმე x წერტილზე, $0 \leq x \leq H$ გავატაროთ Oy ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყე, კვეთაში მიღებული ფიგურის $S(x)$ -სათვის გვექნება



ნახ. 13

$$\frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2},$$

საიდანაც

$$S(x) = \frac{Q}{H^2} x^2.$$

შევიტანოთ (1) ფორმულაში, გვექნება

$$V = \frac{Q}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{Q}{H^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^H = \frac{QH}{3}.$$

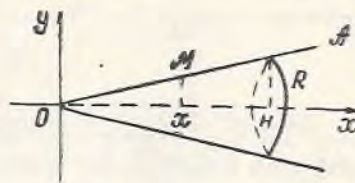
მაგალითი 2. გამოთვალეთ იმ წრიული კონუსის მოცულობა, რომლის ფუძის რადიუსია R და სიმაღლეა H (ნახ. 14).

კონუსი მიიღება OA წრფის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო,

$$0 \leq x \leq H.$$

OA წრფის განტოლებაა

$$y = \frac{R}{H} x.$$



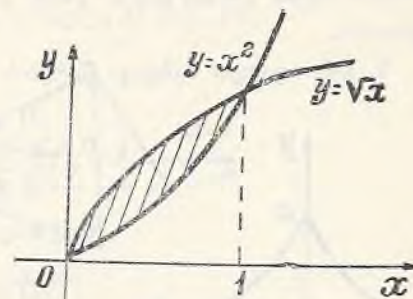
ნახ. 14

შევიტანოთ (2) ფორმულაში, მივიღებთ

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H} x \right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^H = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

მაგალითი 3. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = \sqrt{x}$ და $y = x^2$ წირების Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირით.

ამ წირების გადაკვეთის წერტილია (1,1). აღნიშნულ სხეულს მოცულობა მიიღება (ნახ. 15) $y = \sqrt{x}$ წირის Ox ღერძის გარშემო, $0 \leq x \leq 1$, ბრუნვით მიღებული ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობას გამოვკლავთ $y = x^2$ წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა:



ნახ. 15

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}.$$

სავარჯიშო 6.

1. მონახეთ კოსინუსოიდის ერთი ტალღით Ox ღერძთან შემოსაზღვრული ფართობი.

2. მონახეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია

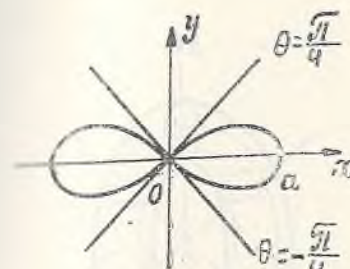
წირით $\rho = a \sqrt{\cos 2\theta}$ (ბერნულის ლემნიკატა, ნახ. 16).

3. გამოთვალეთ ელიფსის ფართობი მისი პარამეტრული განტოლებების $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ საშუალებით.

4. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^2$, $y = x$ წირებით.

5. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით $xy = 4$, $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$.

6. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

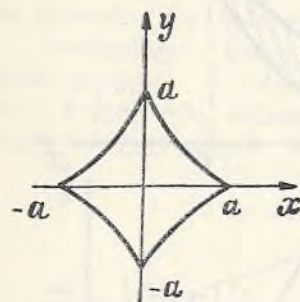


ნახ. 16

7. იპოვეთ კარდიოიდი $\rho = a(1 + \cos \theta)$ შემოსაზღვრული ფართობი.

8. იპოვეთ $y = \arccos x$, $x=0$, $y=\pi$ წირებით შემოსაზღვრული ფართობი.

9. გამოთვალეთ შემდეგი წირების რკალის სიგრძე:



ნახ. 17

1) $y^2 = x^3$ წირის რკალის სიგრძე, $0 \leq x \leq 1$;

2) $y = \ln \cos x$ წირის რკალის სიგრძე, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$;

3) $y^2 = (x+1)^3$ წირის რკალის სიგრძე, $-1 \leq x \leq 4$.

4) ასტროიდის $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ რკალის სიგრძე (ნახ. 17).

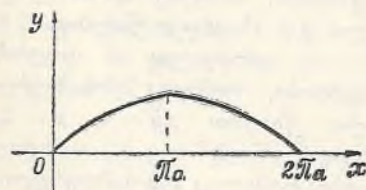
10. გამოთვალეთ შემდეგი წირების Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი:

1) ციკლოიდის $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ერთი თაღის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი (ნახ. 18);

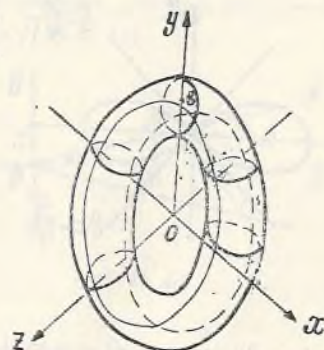
2) $y = x^2$ პარაბოლის, $0 \leq x \leq 4$, ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი;

3) $y^2 = 4x$ პარაბოლის ბრუნვით, $0 \leq x \leq 4$, მიღებული ზედაპირის ფართობი;

4) $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, $b > a$, წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი (ნახ. 19).



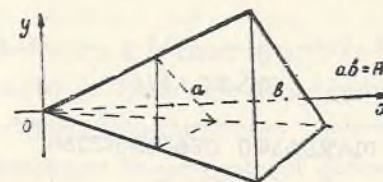
ნახ. 18



ნახ. 19

11. მონახეთ მოცულობანი:

1) წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა, თუ ქვედა ფუძის ფართობია Q , ზედა ფუძის ფართობი q და სიმაღლე H (ნახ. 20).



ნახ. 20

2) $y = 4 - x^2$ წირის, $-2 \leq x \leq 2$, Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

3) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$ წირებით Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

4) $x^2 - y^2 = 4$, $y = 2$, $y = -2$ წირებით Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.



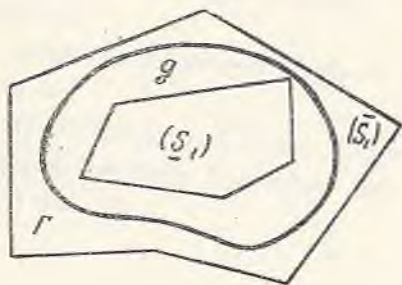
თავი IV

ორჯერადი ინტეგრალები

§ 1. გეომეტრიული და ფიზიკური ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ
ორჯერადი ინტეგრალის ცნებასად

1. ფართობადი ფიგურები. შემდეგში დავგვირდება ფართობადი ფიგურის ცნება. ჩვენთვის ცნობილია მრავალკუთხედი არეან, მოკლედ, მრავალკუთხედი და მისი ფართობის გამოთვლის საშუალებანი. ახლა მრავალკუთხედის ნაცვლად ავიღოთ ბრტყელი ფიგურა. ეს ფიგურა G ასოთი აღვნიშნოთ. მისი საზღვარი კი Γ ასოთი.

ბრტყელი ფიგურა ან ბრტყელი არე G ეწოდება სიბრტყის იმ ნაწილს, რომელიც შემოხაზულელია რაიმე Γ ჩაკეტილი მარტივი წირით (ნახ. 1).



ნახ. 1

Γ -ს ეწოდება მარტივი წირი, თუ იგი თავის თავს არ გადაკვეთს, ე. ი. არა აქვს ჯერადი წერტილები. შევნიშნოთ, რომ მარტივი წირი Γ მთელ სიბრტყეს ყოფს ორ ნაწილად: შიგა ნაწილი და გარე ნაწილი. ეს წინადადება დამტკიცებულია ეორდანის¹ მიერ. Γ წირს ეწოდება G ფიგურის საზღვარი.

ამ განსაზღვრების საფუძველზე, მრავალკუთხედი არის ფიგურა, რომლის საზღვარია ჩაკეტილი ტენილი.

ვიტყვი, რომ (S_1) მრავალკუთხედი ჩახაზულია G ფიგურაში, თუ (S_1) მრავალკუთხედის ყველა წერტილი ეკუთვნის G ფიგურას ან მის საზღვარს.

თუ ბრტყელი G ფიგურის ყველა წერტილი ეკუთვნის რაიმე (S_1) მრავალკუთხედს, მაშინ ვიტყვი G ფიგურაზე შემოხაზულია (S_1) მრავალკუთხედი.

ვთქვათ, G ბრტყელ ფიგურაში შეიძლება ჩახაზოს და შემოხაზოს მრავალკუთხედები.

განვიზილოთ სიმრავლე G ბრტყელ ფიგურაში ჩახაზული მრავალკუთხედებისა $\{(S_n) | n \in \mathbb{N}\}$ და შემოხაზული მრავალკუთხედებისა $\{(\bar{S}_n) | n \in \mathbb{N}\}$. G ფიგურაში ჩახაზული მრავალკუთხედის ფართობი აღვნიშნოთ S_n ასოთი, ხოლო შემოხაზული მრავალკუთხედის ფართობი $\bar{S}_n$ ასოთი. ცხადია, ყოველი ჩახაზული მრავალკუთხედის ფართობი არ აღემატება ჩახაზვისმიერი შემოხაზული მრავალკუთხედის ფართობს,

$$S_n \leq \bar{S}_m, n \in \mathbb{N}, m \text{ თუქირებულია.} \quad (1)$$

მცელი არაა იმის წარმოდგენა, რომ სიმრავლე G ფიგურაში ჩახაზული მრავალკუთხედების ფართობებისა $\{S_n | n \in \mathbb{N}\}$ შემოსაზღვრულია ზემოდან, ხოლო სიმრავლე G ფიგურაზე შემოხაზული მრავალკუთხედების ფართობებისა $\{\bar{S}_n | n \in \mathbb{N}\}$ — ქვემოდან. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} S_n = S, \inf_{n \in \mathbb{N}} \bar{S}_n = \bar{S}.$$

ვანგვოთ, რომ G ფიგურაში ჩახაზული მრავალკუთხედების ფართობთა სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი არაა მეტი შემოხაზული მრავალკუთხედების ფართობთა სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარზე,

$$S \leq \bar{S}. \quad (2)$$

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, $S > \bar{S}$. მაშინ ზუსტი ზედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად, ყოველი $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი G ფიგურაში ჩახაზული მრავალკუთხედი (S_{n_1}) , რომლის ფართობი $S_{n_1} > S - \varepsilon$. ასევე, არსებობს ისეთი შემოხაზული მრავალკუთხედი $(\bar{S}_{n_2})$, რომლის ფართობი $\bar{S}_{n_2} < \bar{S} + \varepsilon$.

$$\text{ვთქვათ, } \varepsilon = \frac{S - \bar{S}}{2} > 0, \text{ მაშინ გვექნება}$$

$$S_{n_1} > S - \varepsilon = S - \frac{S - \bar{S}}{2} = \frac{S + \bar{S}}{2},$$

$$\bar{S}_{n_2} < \bar{S} + \varepsilon = \bar{S} + \frac{S - \bar{S}}{2} = \frac{S + \bar{S}}{2}.$$

¹ მარი ედმონ კამილი ეორდანი (1838—1922), ფრანგი მათემატიკოსი.

ამ უტოლობებიდან დავასკვნით

$$\underline{S}_{n_1} > \overline{S}_{n_2}.$$

რაც შეუძლებელია.

მაშასადამე, (2) უტოლობა ჭეშმარიტია.

შემოვიღოთ ბრტყელი ფიგურის ფართობადობის ცნება.

ვიტყვი, რომ ბრტყელი ფიგურა g ფართობადია, თუ g ფიგურაში ჩახაზული მრავალკუთხედების ფართობთა სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი ტოლია g ფიგურაზე შემოხაზული მრავალკუთხედების ფართობთა სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვრისა, $\underline{S} = \overline{S}$, ამასთან რიცხვს $S = \underline{S} = \overline{S}$ ეწოდება g ბრტყელი ფიგურის ფართობი,

$$S = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\underline{S}_n\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{S}_n\}. \quad (3)$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვი: ბრტყელი ფიგურა g ფართობადია უორდანის აზრით¹.

დავამტკიცოთ თეორემა ბრტყელი ფიგურის ფართობადობის შესახებ.

თეორემა 1. g ბრტყელი ფიგურის ფართობადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ -სათვის არსებობდეს g ფიგურაზე შემოხაზული $(\overline{S}_{n_2})$ მრავალკუთხედი და g ფიგურაში ჩახაზული $(\underline{S}_{n_1})$ მრავალკუთხედი ისეთი, რომ ამ მრავალკუთხედთა ფართობთა სხვაობა $\overline{S}_{n_2} - \underline{S}_{n_1}$ ნაკლები იყოს ε -ზე,

$$\overline{S}_{n_2} - \underline{S}_{n_1} < \varepsilon.$$

დამტკიცება. 1) აუცილებლობა. ვთქვათ g ფიგურა ფართობადია, ე. ი.

$$S = \underline{S} = \overline{S}.$$

რადგანაც $\underline{S}$ და $\overline{S}$ სათანადოდ $\{\underline{S}_{n_1} | n_1 \in \mathbb{N}\}$, $\{\overline{S}_{n_2} | n_2 \in \mathbb{N}\}$ სიმრავლეების ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრებია, მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε -სათვის არსებობს ისეთი $\underline{S}_{n_1}$, რომ

$$S - \underline{S}_{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ასევე არსებობს ისეთი $\overline{S}_{n_2}$, რომ

$$\overline{S}_{n_2} - S < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ უტოლობათა შეკრებით მივიღებთ

$$\overline{S}_{n_2} - \underline{S}_{n_1} < \varepsilon,$$

რაც თეორემის პირობის აუცილებლობას ამტკიცებს.

2) საკმარისობა. ვთქვათ, $\underline{S}_{n_1}$ და $\overline{S}_{n_2}$ იმ მრავალკუთხედთა ფართობებია, რომელთათვისაც

$$\overline{S}_{n_2} - \underline{S}_{n_1} < \varepsilon.$$

მივჩაგ

$$\underline{S}_{n_1} \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \overline{S}_{n_2}.$$

ამედან კი ცხადია

$$\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon.$$

რადგანაც ε ნებისმიერია, დავასკვნით $\overline{S} = \underline{S}$.

ამით თეორემის საკმარისობა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს წრის ფართობის განსაზღვრის ჭეშმარიტება წრეში ჩახაზული და წრეზე შემოხაზული წესიერი მრავალკუთხედების ფართობთა მიმდევრობის საშუალებით, მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის განსაზღვრა დარბუს ჯამების საშუალებით (თავი II, § 3), მრუდწირული სექტორის ფართობის გამოთვლა სათანადო დარბუს ჯამების საშუალებით (თავი III, § I, n 2).

შემოვიღოთ g ფიგურის საზღვრის Γ -ს ფართობის ცნება.

ვიტყვი, რომ g ფიგურის Γ საზღვრის ფართობი ნულის ტოლია, თუ ნებისმიერი დადებითი ε -სათვის არსებობს g ფიგურაში ჩახაზული და g ფიგურაზე შემოხაზული ისეთი მრავალკუთხედები, რომ ამ მრავალკუთხედთა ფართობების სხვაობა ნაკლები იყოს ε -ზე (ნახ. 2 ა),

$$\overline{S}_{n_2} - \underline{S}_{n_1} < \varepsilon.$$

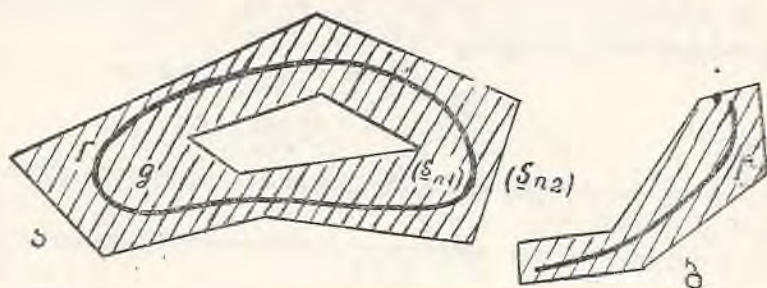
ადვილი წარმოსადგენია, რომ ეს განსაზღვრა გამომდინარეობს შემოწმებული განსაზღვრიდან. ვიტყვი, რომ Γ წირის ფართობი ნულის ტოლია, თუ Γ წირი შეიძლება დაიფაროს

¹ С. М. Никольский, Курс математического анализа, т. II, 1983, стр. 13, 118

ისეთი მრავალკუთხა ფიგურით, რომლის ფართობი ნაკლებია ნებისმიერ ε დადებით რიცხვზე (ნახ. 2 ბ). ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა არა აქვს წირი ჩაკეტილია თუ არაა ჩაკეტილი.

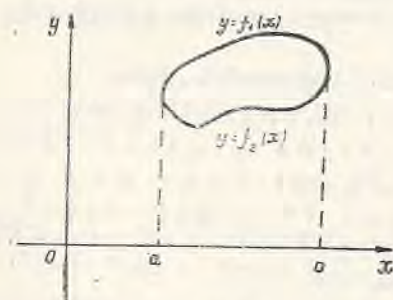
ამ განსაზღვრის შემდეგ 1-ელი თეორემა ასე ჩამოყალიბდება:

თეორემა 2. იმისათვის, რომ g ფიგურა იყოს ფართობადი აუცილებელია და საკმარისი g ფიგურის საზღვრის Γ -ს ფართობი იყოს ნული.



ნახ. 2

თუ g არის საზღვარი — კონტური შედგება $y=f_i(x)$, $i=\overline{1, k}$ წირების სასრული რიცხვისაგან, სადაც $f_i(x)$ ფუნქცია უწყვეტია სათანადო სეგმენტზე $[a_i, b_i]$, მაშინ g არე ფართობადია.



ნახ. 3

შორის მოთავსებული ფართობი ნაკლებია ε -ზე.

ასევე შეგვიძლია ვიმსჯელოთ $y=f_2(x)$ წირის შესახებაც.

მაგალითად, მე-3 ნახაზზე მოცემული g წირი შედგება $y=f_1(x)$ და $y=f_2(x)$ წირებისაგან, რომლებიც $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტია. $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f_1(x)$ ფუნქციის დარბუს ზედა ჯამსა და ქვედა ჯამს შორის სხვაობა შეგვიძლია გავხადოთ ნებისმიერ დადებით ε -ზე ნაკლები, ე. ი. $\forall \varepsilon > 0$ მოიძებნება ისეთი $f_1(x)$ წირის მომცველი ტეხილი და $f_1(x)$ წირით შემოსაზღვრული ტეხილი, რომელთა

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის საფუძველზე ადვილად დავასკვნით, რომ ფართობადი g არე შეიძლება დანაწილდეს ფართობად არეებად და, თუ არეები ფართობადია, მაშინ მათგან შედგენილი არე ფართობადი იქნება.

2. ცილინდრული სხეულის მოცულობის განსაზღვრა. ვთქვათ $Oxyz$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია სხეული, რომელიც შემოსაზღვრულია Oxy სიბრტყით, $z=f(x, y)$ ზედაპირით და ცილინდრული ზედაპირით, რომელთა მსახველები z ღერძის პარალელურია და მიმართებულია Oxy სიბრტყეში მყოფი ჩაკეტილი Γ კონტური. Γ კონტურა შემოსაზღვრავს g არეს (ნახ. 4). ამგვარ სხეულს ეწოდება ცილინდრული სხეული.

განვსაზღვროთ მოცემული სხეულის მოცულობა.

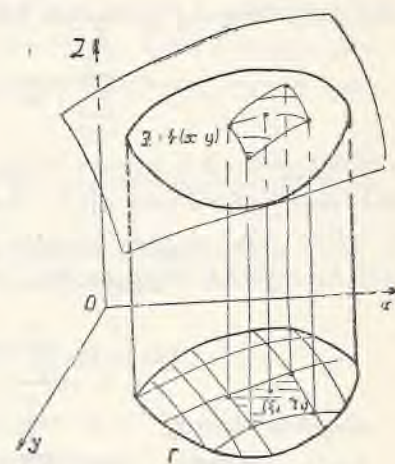
g არე დავყოთ n ნაწილად:

$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. ყოველი $\Delta\sigma_i$ ქვეარესათვის — უკრედებისათვის ავიღოთ ცილინდრული სხეული, რომლის ფუძეა $\Delta\sigma_i$ არე, მსახველი Oz ღერძის პარალელურია და ზემოდან შემოსაზღვრულია $z=f(x, y)$ ზედაპირით. $\Delta\sigma_i$ არეში (საზღვარზე ის ზეგნით) ავიღოთ ნებისმიერი (ξ_i, η_i) წერტილი. $\Delta\sigma_i$ არეს ფართობი ისევე $\Delta\sigma_i$ -თი აღვნიშნოთ. სიმაღლედ ავიღოთ $f(\xi_i, \eta_i)$, მაშინ $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ იქნება იმ ცილინდრული სხეულის მოცულობა, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $z=f(\xi_i, \eta_i)$ ზედაპირით, ხოლო ფუძეა $\Delta\sigma_i$ არე. მთელი ცილინდრული სხეულის მოცულობა დაახლოებით იქნება

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

ეს ჩამი მით უფრო ზუსტად გამოსახავს მოცემული ცილინდრული სხეულის მოცულობას, რაც უფრო მცირე იქნება $\Delta\sigma_i$ ფართობი. $\Delta\sigma_i$ არეებიდან უდიდესი დიაგონალის სიგრძე ($\Delta\sigma_i$ არეს დიამეტრი) აღვნიშნოთ λ -თი. მაშინ საძიებელი მოცულობა

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \quad (4)$$



ნახ. 4

3. თხელი ფირფიტის მასის განსაზღვრა. თხელი ფირფიტა ცილინდრული სხეულია, რომლის სისქე მხედველობაში არაა მიღებული. ამის გამო თხელი ფირფიტა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც g ბრტყელი არე, რომელიც ჩაკეტილი წირითაა შემოსაზღვრული. ამ არეს ნებისმიერ (x, y) წერტილში მასის სიმკვრივე იყოს $\mu(x, y)$. სიმკვრივე იცვლება წერტილიდან წერტილში გადასვლის დროს. g არე დავანაწილოთ $\Delta\sigma$ ქვეარეებად. $i=1, 2, \dots, n$. $\Delta\sigma_i$ არეში მივიღოთ, რომ მასის სიმკვრივე მუდმივია და მისი მნიშვნელობა ტოლია რომელიმე წერტილში $\mu(\xi_i, \eta_i)$ -ს მნიშვნელობისა. ამგვარად, $\Delta\sigma_i$ არეს მასა დაახლოებით ტოლია

$$f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

მაშასადამე, მთელი g ფირფიტის მასა დაახლოებით იქნება

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

ეს მნიშვნელობა მით უფრო ზუსტად გამოსახავს მთელი g ფირფიტის მასას, რაც უფრო მცირე იქნება $\Delta\sigma_i$ ფართობი, ანუ, რაც უფრო მცირე იქნება $\Delta\sigma_i$ არეების უდიდესი დიამეტრი λ . ამის გამო g ფირფიტის მასის რაოდენობას მივიღებთ ზღვარზე გადასვლით, როცა $\lambda \rightarrow 0$,

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \quad (5)$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)$ ანალოგიურია $[a, b]$ სეგ-

მენტზე $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ ინტეგრალური ჯამის. ამის გამო საჭიროა გავათავო-

თ $\int_a^b f(x) dx$ ინტეგრალის ცნება.

§ 2. ორჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრა

ვთქვათ, g ფართობად არეში მოცემულია $f(x, y)$ ფუნქცია. g არე ფართობად $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ ქვეარეებად დავანაწილოთ. თითოეულ $\Delta\sigma_i$ ქვეარეეში (ξ_i, η_i) ნებისმიერი წერტილი ავიღოთ და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \quad (1)$$

სადაც $\Delta\sigma_i$ ქვეარის ფართობია $\Delta\sigma_i$. ამ $\Delta\sigma_i$ ქვეარეების დიამეტრთან უდიდესი დიამეტრის სიგრძე λ ასოთი აღვნიშნოთ,¹ $\lambda = \max d \Delta\sigma_i$. ფართობადი g არის ასეთ დანაწილებას λ დანაწილებათა ეწოდოთ. ვთქვათ, არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = I, \quad (2)$$

რომლის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული g არის λ დანაწილებაზე და $\Delta\sigma_i$ ქვეარეში (ξ_i, η_i) წერტილის ადგებაზე, მაშინ I რიცხვს ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალი გავრცელებული g ფართობად არეზე.

ამრიგად, I რიცხვს ეწოდება $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ ინტეგრალური ჯამის

ზღვარი, როცა $\lambda \rightarrow 0$, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ქვეშარიტია უტოლობა

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \right| < \varepsilon,$$

g არის λ დაყოფისა და (ξ_i, η_i) წერტილების $\Delta\sigma_i$ ქვეარეში არჩევისა-გან დამოუკიდებლად, მხოლოდ სრულდებოდეს უტოლობა $\lambda < \delta$.

I რიცხვი რომ არის $f(x, y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული g ფართობად არეზე, სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$I = \iint_g f(x, y) d\sigma.$$

თუ I ინტეგრალი არსებობს, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციას g არეში ინტეგრებადი ფუნქცია ეწოდება.

g არეში $f(x, y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის ქვეშარიტება:

თეორემა 1. g ფართობად არეში $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის აუცილებელია ამავდროულად $f(x, y)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობა.

¹ მე-2 თავის მე-2 პარაგრაფში λ მხოლოდ სეგმენტის ქვესეგმენტებიდან უდიდეს სიგრძეს აღნიშნავდა.

მართლაც, თუ g არეში $f(x, y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული არაა, მაშინ g არეს ნებისმიერი დანაწილების დროს მოინახება ისეთი $\Delta\sigma_{i_0}$ ქვე-არე, რომელშიც $f(x, y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია. $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_{i_0-1}, \Delta\sigma_{i_0+1}, \dots, \Delta\sigma_n$ ქვეარეებიდან ავარჩიოთ (ξ_i, η_i) წერტილები. $\Delta\sigma_{i_0}$ ქვე-არეში შევვიძლია ავიღოთ ისეთი (ξ_{i_0}, η_{i_0}) წერტილი, რომ $f(\xi_{i_0}, \eta_{i_0}) \Delta\sigma_{i_0}$ წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობა (ცხადია, მთელი ინტეგრალური ჯამის მნიშვნელობა) მეტი იყოს ნებისმიერ დადებით რიცხვზე. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ინტეგრალურ ჯამს სასრული ზღვარი არა აქვს. ცხადია, თუ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

არსებობს, ეს ზღვარი არ შეიცვლება ისეთ $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ შესაკრებთა უკუგდებით, რომელთა მამრავლები $\Delta\sigma_i$ ისეთი ფიგურების ფართობებია, რომლებიც ფარავენ ნულფართობის მქონე g არეში მდებარე ნებისმიერ L წირს (იხ. § 1, n 1).

მართლაც,

$$\sigma = \sum' f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \sum'' f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \quad (3)$$

სადაც მეორე შესაკრებში აღებული მამრავლები $\Delta\sigma_i$ ისეთი ფიგურების ფართობებია, რომლებიც ფარავენ L წირს (ნახ. 5).

რადგანაც $f(x, y)$ ინტეგრებადია g არეში, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია,

$$|f(x, y)| \leq A,$$

მაშინ

$$|\sum' f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i| \leq \sum'' |f(\xi_i, \eta_i)| \Delta\sigma_i \leq A \sum'' \Delta\sigma_i,$$

ხოლო

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum'' \Delta\sigma_i = 0,$$

რადგანაც L წირის დამფარავ ქვეარეთა ფართობების ჯამი მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $\lambda \rightarrow 0$.

ამის გამო (3) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum' f'(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. ვთქვათ, g ფართობად არეში არსე-

ბობს ინტეგრალური ჯამის ზღვარი $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$.

ეს ზღვარი არ შეიცვლება ინტეგრალური ჯამი-

დან $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ ისეთი $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ შესაკრებთა უკუ-

გდებით, რომელთა მამრავლები $\Delta\sigma_i$ ისეთი ფიგურების ფართობებია, რომლებიც ფარავენ ნულფართობის მქონე g არეში მდებარე ნებისმიერ წირს.

დავუბრუნდეთ ზემოთ განხილულ ამოცანებს.

1) ორჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრის შემდეგ წინა პარაგრაფის

(4) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_g f(x, y) d\sigma.$$

ამგვარად, $f(x, y)$ ფუნქციის g არეში გავრცელებული ორჯერადი ინტეგრალი გეომეტრიულად გამოსახავს იმ ცილინდრული სხეულის მოცულობას, რომლის ფუძეა g არე, ზემოდან შემოსაზღვრულია $z=f(x, y)$ ზედაპირით, მსახელები პარალელურია Oz ღერძის და მსახელების მიმართულია g არის საზღვარი Γ წირი.

2) ორჯერადი ინტეგრალით გამოისახება g ფირფიტის მასა M , როცა ფირფიტის (x, y) წერტილში მასის სიმკვრივეა $f(x, y)$. მართლაც, წინა პარაგრაფის (5) ფორმულიდან მივიღებთ

$$M = \iint_g f(x, y) d\sigma.$$

§ 3. ორჯერადი ინტეგრალის თვისებები

ორჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრის საფუძველზე აღვილი შესაძლებელია:

1) თუ $f(x, y)$ ფუნქცია g არეში ინტეგრებადია, მაშინ იმავე არეში

¹ Н. А. Фролов, Курс математического анализа, ч. 2, М., 1959, стр. 137—148.

ინტეგრებადია $k f(x, y)$ ფუნქცია, სადაც k მუდმივია, ამასთან მართებულია ტოლობა

$$\iint_G k f(x, y) d\sigma = k \iint_G f(x, y) d\sigma.$$

2) თუ $f_1(x, y)$ და $f_2(x, y)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია G არეში, მაშინ $f_1(x, y) + f_2(x, y)$ ჯამიც ინტეგრებადია, ამასთან მართებულია ტოლობა

$$\iint_G (f_1(x, y) + f_2(x, y)) d\sigma = \iint_G f_1(x, y) d\sigma + \iint_G f_2(x, y) d\sigma.$$

1) და 2) თვისება შეგვიძლია გავაერთიანოთ:

$$\iint_G (k_1 f_1(x, y) + k_2 f_2(x, y)) d\sigma = k_1 \iint_G f_1(x, y) d\sigma + k_2 \iint_G f_2(x, y) d\sigma. \quad (1)$$

3) ვთქვათ G არე, რომელშიაც მოცემულია $f(x, y)$ ფუნქცია, გაყოფილია G_1 და G_2 არეებად. თუ G_1 და G_2 არეებში $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, მაშინ იგი ინტეგრებადია G არეში, ამასთან მართებულია ტოლობა

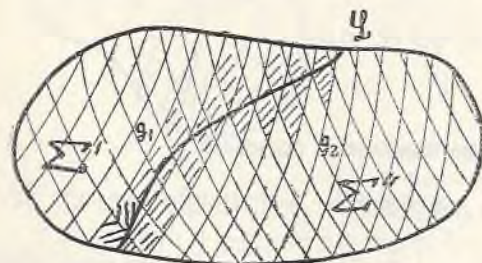
$$\iint_{G_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{G_2} f(x, y) d\sigma = \iint_G f(x, y) d\sigma. \quad (2)$$

მართლაც, $f(x, y)$ ინტეგრებადია როგორც G_1 , ისე G_2 არეში, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $G_1 \cup G_2 = G$ არეში. აგრეთვე G_1 , G_2 არეები ფართობადია. ფართობადი იქნება აგრეთვე G არეც.

განვიხილოთ G არეს რაიმე λ დაყოფა. შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი G არეში:

$$\begin{aligned} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i &= \\ &= \sum' f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i + \\ &+ \sum'' f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i + \\ &+ \sum''' f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i, \quad (3) \end{aligned}$$

სადაც პირველი შესაყრები შედგენილია იმ $\Delta \sigma_i$ ქვეარეებისაგან, რომლებიც ფარავს G_1 არეს G_1 და G_2 არეთა საერთო L საზღვრის დამფარავ $\Delta \sigma_i$ -ების



ნახ. 6.

გარეშე (ნახ. 6), $\sum'' f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ ჯამი შედგენილია იმ ქვეარეებისაგან,

რომლებიც ფარავს G_2 არეს, ხოლო მესამე შესაყრები შედგენილია L წირის დამფარავ $\Delta \sigma_i$ არეებისაგან. წინა პარაგრაფის მე-2 თეორემის საფუძველზე დავასკვნით:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum''' f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum' f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = \iint_{G_1} f(x, y) d\sigma,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum'' f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = \iint_{G_2} f(x, y) d\sigma.$$

ამის გამო (3) მოგვცემს

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum' f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum'' f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i,$$

რაც იმასტურებს (2) ტოლობის მართებულობას.

4) თუ G არეში $f(x, y)$ ინტეგრებადია და $m \leq f(x, y) \leq M$, მაშინ $[m, M]$ სეგმენტზე მოიქცევენა ისეთი μ , რომ

$$\iint_G f(x, y) d\sigma = \mu S_G, \quad (4)$$

სადაც S_G G არეს ფართობია.

მართლაც, G არეს ნებისმიერი λ დაყოფით მივიღებთ:

$$m \Delta \sigma_i \leq f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i \leq M \Delta \sigma_i.$$

თუ ამ უტოლობებს შევკრიბავთ $i=1, 2, \dots, n$ -სათვის, მივიღებთ

$$m \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i.$$

შევაჩვენებთ, როცა $\lambda \rightarrow 0$, გვექნება

$$m S_G \leq \int_a^b f(x, y) d\sigma \leq M S_G,$$

ანუ

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x, y) d\sigma}{S_G} \leq M.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\frac{\int_a^b f(x, y) d\sigma}{S_g} = \mu, \quad m \leq \mu \leq M,$$

საიდანაც მივიღებთ (4) ტოლობის მართებულობას.

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია g არეში, მაშინ მოიძებნება ისეთი (ξ, η) წერტილი, რომ

$$f(\xi, \eta) = \mu, \quad \mu \in [m, M].$$

ამ შემთხვევაში (4) ფორმულა მოგვცემს

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) S_g, \quad (\xi, \eta) \in g. \quad (5)$$

(5) ფორმულას ორჯერადი ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა ეწოდება.

ამ ფორმულის გეომეტრიული მნიშვნელობა ადვილი წარმოსადგენია.

განვიხილოთ ცილინდრული სხეული, რომლის ფუძეა g ფართობადი არე და შემოსაზღვრულია $z=f(x, y) \geq 0$ ზედაპირით. g არეში არსებობს ისეთი (ξ, η) წერტილი, რომ ამ ცილინდრული სხეულის მოცულობა V არეს ფართობისა და (ξ, η) წერტილში $f(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობის ნამრავლის ტოლია.

§ 4. ორჯერადი ინტეგრალის არსებობა

განსაზღვრული ინტეგრალის არსებობის თეორემის დამტკიცების დროს $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ λ დანაწილებას განვიხილავთ. ერთი დანაწილებიდან მეორე დანაწილებაზე გადასვლა დანაწილების ხასიათის შეცვლას არ იწვევს. ორჯერადი ინტეგრალის შემთხვევაში კი დამატებითი სიძნელეები წარმოიშობა. ორი სასრული დანაწილებიდან მესამე დანაწილებაზე გადასვლით g არე შეიძლება უსასრულო ქვესიმრავლეებად დანაწილდეს.

მაგალითად, g არე შეიცავს Oxy კოორდინატთა სისტემის სათავეს. ჯერ g არე დავანაწილოთ X ღერძით. შემდეგ დავანაწილოთ წირით

$$\varphi(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

ამ ორი დანაწილების შეერთებით კოორდინატთა სათავეს მიდამოში მიიღება უსასრულო სიმრავლე g არის ნაწილებისა, ამ მესამე დანაწილებიდან ერთი ან ორი არ აქვს რიგის ინტეგრალური ჯამი.

შემდეგში g არეს დანაწილების ასეთ შემთხვევას გამოვრიცხავთ.

ჩემოთ ვაჩვენებთ, რომ g არეში $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრებისათვის შეიძლება (და არა საკმარისი) g არეში $f(x, y)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობა.

ქვემოთ შევისწავლით ინტეგრებად ფუნქციათა კლასებს: ვაჩვენებთ, რომ g არეში უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია.

წინასწარ დავამტკიცოთ ლემები.

ლემა 1. თუ g ფართობადი არეში $f(x, y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, $|f(x, y)| \leq A$, და g არე შეიძლება დაიყოს სასრულ რიცხვ ფართობად $g_1, g_2, \dots, g_l$ ქვეარეებად, სადაც ყოველ g_k არეში, $k=1, l$, $f(x, y)$ ფუნქცია მუდმივია, $f(x, y) = c_k$, მაშინ g არეში $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია,

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \sum_{k=1}^l c_k S_{g_k}.$$

სადაც S_{g_k} g_k არის ფართობია.

მართლაც, g არე დავყოთ $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ ფართობად ქვეარეებად. შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \quad (1)$$

ამ დავყოფისათვის

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{g_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \sum_{g_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \dots + \\ &+ \sum_{g_l} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \sum_{\sim} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \end{aligned} \quad (2)$$

სადაც $\sum_{g_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ არის ჯამი ინტეგრალური σ ჯამის იმ შესაკრებებისა,

მ. კ. კომლაძე

რომლებიც მიიღება g_1 არეში მოთავსებული $\Delta\sigma_i$ ქვეარეებისაგან. ასევე $\sum_{g_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ არის ჯამი ინტეგრალური σ ჯამის იმ შესაყრებებისა, რომლებიც მიიღება g_2 არეში მოთავსებული ქვეარეებისაგან და ა. შ., ხოლო $\sum_{g_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ შედგენილია $g_1, g_2, \dots, g_l$ არეების საზღვრების დამფარავი $\Delta\sigma_i$ ქვეარეებისაგან.

რადგანაც g_k არეში $f(x, y)$ ფუნქცია მუდმივია, $f(x, y) = c_k$, გვექნება

$$\sum_{g_k} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = c_k \sum_{g_k} \Delta\sigma_i.$$

ამის გამო (2) ტოლობა მოგვცემს

$$\sigma = c_1 \sum_{g_1} \Delta\sigma_i + c_2 \sum_{g_2} \Delta\sigma_i + \dots + c_l \sum_{g_l} \Delta\sigma_i + \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

თუ ვისარგებლებთ წინა პარაგრაფის მე-2 თეორემით, გვექნება

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = c_1 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{g_1} \Delta\sigma_i + c_2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{g_2} \Delta\sigma_i + \dots + c_l \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{g_l} \Delta\sigma_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

რადგანაც

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = 0,$$

მივიღებთ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \sum_{k=1}^l c_k s_{g_k}.$$

ამით ჩამოყალიბებული ლემა დამტკიცდა.

განვიხილოთ g არეში ინტეგრებადი ფუნქციის შემდეგი ჯამი

$$\underline{s} = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\sigma_i, \quad (3)$$

სადაც

$$m_i = \inf_{(x, y) \in \Delta\sigma_i} f(x, y).$$

ეს ეწოდება g არეში $f(x, y)$ ფუნქციის ქვედა ჯამი.

თუ g არეში $f(x, y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, $\sup_{(x, y) \in g} |f(x, y)| = A$, ნებისმიერი დანაწილებისათვის გვექნება

$$\underline{s} \leq A S_g.$$

მაშასადამე, ქვედა ჯამთა სიმრავლე $\{\underline{s}\}$ შემოსაზღვრულია. ამის გამო ამ სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი, რომელიც I ასოთი აღვნიშნოთ,

$$\sup \underline{s} = I. \quad (4)$$

ეს ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის g არეში ქვედა ინტეგრალი. ლემა 2. $\underline{s}$ ქვედა ჯამს, როცა $\lambda \rightarrow 0$, სადაც λ არის $\Delta\sigma_i$ ქვეარეების დიამეტრებიდან უდიდესი, $\max d \Delta\sigma_i = \lambda$, აქვს ზღვარი, რომელიც g არეში $f(x, y)$ ფუნქციის ქვედა ინტეგრალის ტოლია,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{s} = I.$$

დამტკიცება: ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$. რადგანაც $\underline{s}$ ჯამების ზუსტი ზედა საზღვარია I , მოინახება g არის ისეთ ფართობად $g_1, g_2, \dots, g_l$ არეებად დანაწილება, $\max d g_i = \delta > 0$, რომ შესაბამისი $f(x, y)$ ფუნქციის ქვედა ჯამი $\underline{s}'$ მეტი იქნება $I - \varepsilon$ -ზე,

$$\underline{s}' = \sum_{i=1}^l m'_i s_{g_i} > I - \varepsilon, \quad (5)$$

სადაც

$$m'_i = \inf_{(x, y) \in g_i} f(x, y).$$

განვიხილოთ $\varphi(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც შემდეგნაირადაა განსაზღვრული:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} m'_i, & (x, y) \in g_i \setminus \Gamma_{g_i}, \\ -A, & (x, y) \in \Gamma_{g_i}, \quad i = 1, \dots, l, \end{cases}$$

სადაც Γ_{g_i} არის g_i არეს საზღვარი, $A = \sup_{(x, y) \in g} |f(x, y)|$.

ცხადია, g არეში (იგულისხმება g არე ჩაკეტილია)

$$-A \leq \varphi(x, y) \leq f(x, y) \leq A.$$

$\varphi(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს 1-ელი ლემის პირობებს. ამის გამო

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{s}(\varphi) = \iint_g \varphi(x, y) d\sigma = \sum_{i=1}^n m_i S_{g_i}.$$

სადაც $\underline{s}(\varphi)$ არის $\varphi(x, y)$ ფუნქციის ქვედა ინტეგრალური ჯამი g არეში. (5) პირობის თანახმად, გვექნება

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{s}(\varphi) = \underline{s}'_e > I - \varepsilon. \quad (6)$$

ანუ $\varepsilon > 0$ -თვის მოიწახება ისეთი $\delta > 0$, რომ ყოველი $\lambda < \delta$ -თვის

$$\underline{s}'_e - \varepsilon < \underline{s}(\varphi) < \underline{s}'_e + \varepsilon.$$

ამ უტოლობის (6)-თან შედარება მოგვცემს

$$I - 2\varepsilon < \underline{s}'_e - \varepsilon < \underline{s}(\varphi). \quad (7)$$

g არე დავანაწილოთ ისეთ $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ ფართობად არეებად, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\max d\Delta\sigma_i = \lambda < \delta$.
ეთქვათ,

$$m_i = \inf_{(x, y) \in \Delta\sigma_i} f(x, y),$$

$$\mu_i = \inf_{(x, y) \in \Delta\sigma_i} \varphi(x, y).$$

შევადგინოთ ქვედა ჯამები

$$\underline{s}(\varphi) = \sum_{i=1}^n \mu_i \Delta\sigma_i, \quad \underline{s}(f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\sigma_i.$$

რადგანაც $\mu_i \leq m_i$, ამიტომ

$$\underline{s}(\varphi) \leq \underline{s}(f). \quad (8)$$

$\varphi(x, y)$ ფუნქცია $\Delta\sigma_i$ არეში ლებულობს სასრულ მნიშვნელობებს, ამიტომ მას აქვს უმცირესი მნიშვნელობა და ეს მნიშვნელობაა μ_i . ამის

გამო ქვედა ჯამი $\underline{s}(\varphi)$ ამავე დროს არის $\sigma(\varphi)$ ინტეგრალური ჯამი, ამიტომ

$$\underline{s}(\varphi) = \sigma(\varphi) > \underline{s}'_e - \varepsilon > I - 2\varepsilon$$

მაგრამ (8) პირობის თანახმად $\underline{s}(f) \geq \sigma(\varphi)$, ამასთან (4) პირობით $\underline{s}(f) \leq I$, ამრიგად, ყოველი $\lambda < \delta$ -თვის გვექნება

$$I \geq \underline{s}(f) > I - 2\varepsilon,$$

ანუ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{s}(f) = I.$$

ამით გამოთქმული ლემა დამტკიცდა.

მე-2 თავის მე-3 პარაგრაფის მე-2 ლემის ანალოგიურად დავამტკიცებთ შემდეგ ლემას:

ლემა 3. თუ g არეში მოცემული $f(x, y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, მაშინ

$$\sup_{(\xi, \eta), (\xi', \eta') \in g} [f(\xi, \eta) - f(\xi', \eta')] = \sup_{(\xi, \eta), (\xi', \eta') \in g} |f(\xi, \eta) - f(\xi', \eta')| = M - m, \quad (9)$$

სადაც

$$M = \sup_{(x, y) \in g} f(x, y), \quad m = \inf_{(x, y) \in g} f(x, y).$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა g არეში უწყვეტი $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრებადობის შესახებ.

თეორემა 1. ჩაკეტილ ფართობად g არეში უწყვეტი $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია g არეში.

დამტკიცება. g არე დავანაწილოთ $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ ფართობად ისე, რომ $\max d\Delta\sigma_i = \lambda < \delta$, $i = 1, \dots, n$. შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

და ქვედა ჯამი

$$\underline{s} = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\sigma_i.$$

რადგანაც $f(x, y)$ ფუნქცია g არეში უწყვეტია, ამიტომ მოიძებნება (ξ'_i, η'_i) წერტილი $\Delta\sigma_i$ არეში, რომ

$$m_i = f(\xi'_i, \eta'_i).$$

ამის გამო ქვედა ჯამი ასე ჩაიწერება:

$$\underline{s} = \sum_{i=1}^n f(\xi'_i, \eta'_i) \Delta\sigma_i.$$

მეორე ლემის თანახმად შემოსაზღვრული ფუნქციისათვის და, მაშასადამე, ჩაკეტილ g არეში უწყვეტი $f(x, y)$ ფუნქციისათვის, ქვედა ჯამს აქვს ზღვარი

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = I.$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s.$$

ამისათვის განვიხილოთ სხვაობა

$$\sigma - \underline{s} = \sum_{i=1}^n [f(\xi_i, \eta_i) - f(\xi'_i, \eta'_i)] \Delta\sigma_i.$$

გამოვიყენოთ მე-3 ლემა $\Delta\sigma_i$ ფართობად არეებზე:

$$\sup_{(\xi_i, \eta_i), (\xi'_i, \eta'_i) \in g} |f(\xi_i, \eta_i) - f(\xi'_i, \eta'_i)| = M_i - m_i.$$

ვთქვათ,

$$\max_{i=1, 2, \dots, n} (M_i - m_i) = \omega,$$

მაშინ

$$0 \leq \sigma - \underline{s} \leq \sum_{i=1}^n [f(\xi_i, \eta_i) - f(\xi'_i, \eta'_i)] \Delta\sigma_i \leq \omega \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \omega S_g. \quad (10)$$

$\forall \varepsilon > 0$ შეგვიძლია ავარჩიოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ g არეს λ დანაწილებით $\max d\Delta\sigma_i = \lambda < \delta$, ყოველ $\Delta\sigma_i$ ქვეარეში $i = 1, 2, \dots, n$,

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{S_g},$$

ასე

$$\max (M_i - m_i) = \omega < \frac{\varepsilon}{S_g}.$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

ამის გამო (10) მოგვცემს:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, |(\lambda < \delta) \Rightarrow 0 \leq \sigma - \underline{s} < \varepsilon,$$

ასე

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\sigma - \underline{s}) = 0.$$

თუ გამოვალთ ტოლობიდან

$$\sigma = (\sigma - \underline{s}) + \underline{s},$$

შევიღოთ მივიღებთ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\sigma - \underline{s}) + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{s},$$

ასე

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I.$$

ამით თეორემა დამტკიცდა.

თუ შოვიგონებთ მე-2 პარაგრაფის მე-2 თეორემას, დავასკვნით:

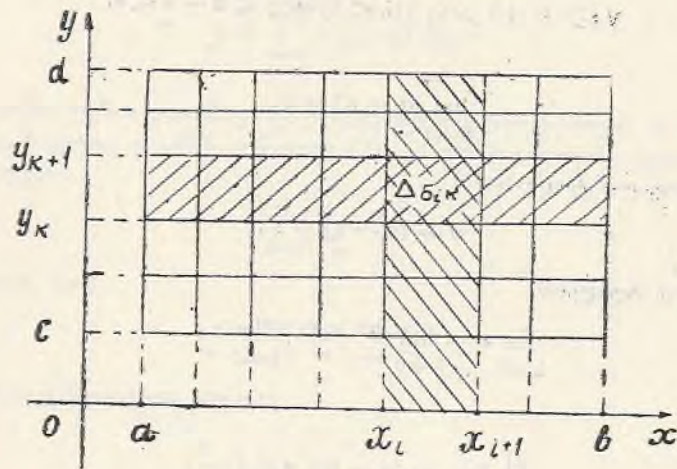
ფართობად არეში $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრირებადი ი, თუ g არეში $f(x, y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია და g არე შეიძლება დანაწილდეს სასრულ რიცხვ ფართობად $g_1, g_2, \dots, g_e$ ქვეარეებად, ისე, რომ ყოველ ქვეარეში $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტი იყოს, ხოლო საზღვრებზე, შეიძლება წყვეტილი.

§ 5. ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა

ორჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრა იძლევა მისი გამოთვლის ხერხს, მაგრამ პრაქტიკისათვის ეს ხერხი არაა ხელსაყრელი. ქვემოთ ნაჩვენები იქნება ხერხი, რომლითაც ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება განსაზღვრული ინტეგრალის ორჯერ გამოთვლაზე.

1. მართკუთხოვანი არე. ვთქვათ, g არე მართკუთხედია $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ (ნახ. 7), g არეში მოცემული $f(x, y)$ ფუნქცია — ინტეგრებადი, მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი

$$I = \iint_g f(x, y) d\sigma,$$



ნახ. 7

არაა დამოკიდებული g არეს დანაწილებაზე. g არე დაეანაწილოთ წრფეებით

$$x = x_i, \quad y = y_k, \quad i = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, m},$$

სადაც

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d,$$

მივიღებთ მართკუთხედებს, რომლებიც $\Delta\sigma_{ik}$ -ით აღვნიშნავთ. ცხადია,

$$\Delta\sigma_{ik} = \Delta x_i \Delta y_k.$$

ამ დანაწილებისათვის $f(x, y)$ ფუნქციის g არეში ინტეგრალური ჯამი იქნება

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \Delta x_i \Delta y_k,$$

სადაც (ξ_{ik}, η_{ik}) ნებისმიერი წერტილია $\Delta\sigma_{ik}$ კვადრეში. რადგანაც I ინტეგრალი დამოუკიდებელია (ξ_{ik}, η_{ik}) წერტილის მდებარეობისაგან $\Delta\sigma_{ik}$ მართკუთხედში, ავიღოთ ამ მართკუთხედის (x_i, y_k) წერტილი, მაშინ ინტეგრალური ჯამი ასე შეგვიძლია ჩავეწეროთ:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{m-1} f(x_i, y_k) \Delta y_k \right] \Delta x_i. \quad (1)$$

სადაც ჯერ შევკრებთ k -ს მიმართ, ე. ი. $\Delta_{i0}, \Delta_{i1}, \dots, \Delta_{i, m-1}$ მართკუთხედების მიმართ, რომლებიც ვერტიკალურ ზოლს ქმნიან. ამ ზოლის საზღვარია $x = x_i$ და $x = x_{i+1}$ წრფეები. შემდეგ ამ ჯამებს შევკრებთ i -ს მიმართ. ე. ი. მართკუთხედში $[x_i, x_{i+1}]$ ზოლს გადავადგილებთ $i = 0, n-1$.

(1) ჯამის საშუალებით მოცემულ g არეზე $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრალი ასე განისაზღვრება:

$$I = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{m-1} f(x_i, y_k) \Delta y_k \right] \Delta x_i, \quad (2)$$

სადაც $\Delta x = \max_i \Delta x_i$, $\Delta y = \max_k \Delta y_k$.

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს: ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ g არეს $\Delta\sigma_{ik}$ მართკუთხედებზე ნებისმიერად დანაწილებისათვის, თუ $\Delta x < \delta$ და $\Delta y < \delta$ ჰქონდარიტა უტოლობა

$$\left| I - \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{m-1} f(x_i, y_k) \Delta y_k \right] \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

დავაფიქსიროთ $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\Delta x < \delta$ და ცალკე განვიხილოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sum_{k=0}^{m-1} f(x_i, y_k) \Delta y_k.$$

ვთქვათ, ამ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი არსებობს, როცა $\Delta y \rightarrow 0$. ეს ზღვარი $\varphi(x_i)$ -თი აღვნიშნოთ,

$$\varphi(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy.$$

(3) უბოლოობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta y \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$\left| I - \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(x_i) \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad (4)$$

გავლელად (4) უბოლოობა ჰეშმარიტია $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დაწველებისათვის, როცა $\Delta x < \delta$. რადგანაც $\varepsilon > 0$ ნებისმიერია, ეს ნიშნავს

$$I = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(x_i) \Delta x_i = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

ანუ

$$I = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (5)$$

თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x, y) dx,$$

გამინ ანალოგიურად (5) ფორმულისა მივიღებთ

$$I = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (6)$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ.

თეორემა 1. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია g მართკუთხედში, $g = [a, b] \times [c, d]$, $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, ამასთან ყოველ $x \in [a, b]$ -თვის არსებობს ინტეგრალი

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad (7)$$

მაშინ არსებობს განმეორებითი ინტეგრალი

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

და ჰეშმარიტია ტოლობა

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (8)$$

თუ ამ თეორემაში (7) პირობას შევცვლით პირობით: არსებობს ყოველი $y \in [c, d]$ -თვის ინტეგრალი

$$\psi(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad (9)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ არსებობს განმეორებითი ინტეგრალი

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

და ჰეშმარიტია ტოლობა

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (10)$$

ამ თეორემით ორგერადი ინტეგრალის გამოთვლა მიყვანილია (8) და (10) ფორმულებით განმეორებითი ინტეგრალუბის გამოთვლაზე:

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (11)$$

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 1. გამოვივლით ინტეგრალი

$$\iint_g xy^2 d\sigma, \quad g = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(11) ფორმულით გვამჩნევს

$$\iint_g xy^2 d\sigma = \int_1^2 dx \int_0^1 xy^2 dy. \quad (12)$$

ინტეგრალში $\int_0^1 xy^2 dy$ ინტეგრალური ცვლადია y , ხოლო x მუდმივია.

ამის გამო მივიღებთ

$$\int_0^1 xy^2 dy = x \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = x \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{x}{3}.$$

ახლა გამოვთვალოთ (12) განმეორებითი ინტეგრალის მეორე ინტეგრალი, მივიღებთ

$$\int_1^2 \frac{x}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (2^2 - 1) = \frac{1}{2}.$$

ამრიგად,

$$\iint_g xy^2 d\sigma = \frac{1}{2}.$$

(8) და (10) ფორმულების დამტკიცების დროს ბუნებრივი იყო g მართკუთხედის კოორდინატა ღერძების პარალელური წრფეებით დანაწილება. მივიღეთ $\Delta \sigma_{ik} = \Delta x_i \Delta y_k$. სასურველია, ორჯერადი ინტეგრალის წარმოშობის ეს ფაქტი ასახული იყოს ორჯერადი ინტეგრალის სიმბოლოში. ამის გამო ორჯერადი ინტეგრალის $\iint_g f(x, y) d\sigma$ ნაცვლად

ხშირად წერენ

$$\iint_g f(x, y) dx dy \quad \text{ან} \quad \iint_g f(x, y) dy dx.$$

უფრო მეტიც, ორჯერადი ინტეგრალი $\iint_g f(x, y) d\sigma$ დავიყვანეთ განმეორებითი ინტეგრალზე. ამის გამო ორჯერად ინტეგრალს ხშირად შემდეგი სიმბოლოთი აღნიშნავენ:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx,$$

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\iint_g \frac{dx dy}{(x+y)^3}, \quad g = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3\}.$$

(11) ფორმულით გვექნება:

$$\begin{aligned} \iint_g \frac{dx dy}{(x+y)^3} &= \int_1^2 \int_2^3 \frac{dy dx}{(x+y)^3} = -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} \Big|_2^3 dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^2 \left[\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right] dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2} \right] \Big|_1^2 = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\iint_g \frac{dx dy}{(x+y)^3} = \frac{1}{60}.$$

შენიშვნა. როდესაც $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი განსაზღვრეთ, $f(x)$ ფუნქცია ცალსახად იყო განსაზღვრული. ასეთი ფუნქციისათვის შევადგინეთ დარბუს ქვედა და ზედა ჯამები. დარბუს ჯამები შეგვიძლია შევადგინოთ მაშინაც, როდესაც $f(x)$ მნიშვნელობა განუსაზღვრელია x -ის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის, მაგრამ უნდა ვიცოდეთ x წერტილში $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელობის საზღვრები. მაგალითად, თუ $f(x)$ წყვეტილია, უნდა ვიცოდეთ $f(x-0)$ და $f(x+0)$. ამ შემთხვევაში $f(x)$ -ის მნიშვნელობად მივიღოთ $f(x-0)$ -სა და $f(x+0)$ -ს შორის რაიმე მნიშვნელობა. ამ მნიშვნელობათა დახმარებით

შევაღვინოთ ღარბუს ქვედა და ზედა ჯამები. თუ არსებობს ქვედა ჯამების ზუსტი ზედა საზღვარი, ეს მოგვცემს $f(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე ქვედა ინტეგრალს,

$$\sup \{ \underline{\sigma} \} = \int_a^b f(x) dx.$$

თუ არსებობს ზედა ჯამების ზუსტი ქვედა საზღვარი, ეს მოგვცემს $f(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე ზედა ინტეგრალს,

$$\inf \{ \overline{\sigma} \} = \int_a^b f(x) dx.$$

თუ ეს ინტეგრალები ტოლია, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადია,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

ამ შენიშვნით კიდევ ერთხელ მივიღეთ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალობის განსაზღვრა, როდესაც $[a, b]$ სეგმენტზე ფუნქციას აქვს წყვეტის წერტილები, მაგრამ ამ წერტილთა სიმრავლე უნდა დაიფაროს ისეთ სასრულო ან თვლად ინტეგრალთა სიმრავლით, რომელთა სიგრძეების ჯამის ზუსტი ქვედა საზღვარი — წყვეტის წერტილთა სიმრავლის ზომა ნულის ტოლია.

როდესაც g მართკუთხედში — ორგანზომილებიან სეგმენტზე, $g = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, ორჯერადი ინტეგრალი განვიხილეთ, დავუშვიტ, რომ ყოველი x -სათვის $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე არსებობს ინტეგრალი (7),

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

ეს მოთხოვნა შეგვიძლია ავიცილოთ, თუ ვისარგებლებთ იმავე განსაზღვრით, რაც განსაზღვრულ ინტეგრალზე მივიღეთ.

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია g მართკუთხედში არის ყოველ წერტილში, გარდა, შესაძლებელია ზოგიერთი წერტილისა. მაგრამ ამ წერტილებში ცნობილი უნდა იყოს განუსაზღვრელობის სეგმენტი.

ასეთ (x, y) წერტილში $f(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობად უნდა ავიღოთ რომელიმე მნიშვნელობა აღნიშნული სეგმენტიდან. ამ მნიშვნელობათა დახმარებით უნდა შევაღვინოთ $f(x, y)$ ფუნქციის ღარბუს ჯამები g არისათვის. თუ ყველა ზედა ჯამების სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი არსებობს, ეს მნიშვნელობა მოგვცემს $f(x, y)$ ფუნქციის g ორგანზომილებიან სეგმენტზე ზედა ორჯერად ინტეგრალს,

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^n M_i \Delta \sigma_i \right\} = \iint_g f(x, y) d\sigma, \quad m_i \leq f(x, y) \leq M_i, \quad (x, y) \in \Delta \sigma_i.$$

თუ ქვედა ჯამებისათვის არსებობს ზუსტი ზედა საზღვარი, ეს მნიშვნელობა მოგვცემს $f(x, y)$ ფუნქციის g ორგანზომილებიან სეგმენტზე ქვედა ორჯერად ინტეგრალს,

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \Delta \sigma_i \right\} = \iint_g f(x, y) d\sigma.$$

თუ ეს ინტეგრალები ტოლია, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია g ორგანზომილებიან სეგმენტზე და მისი მნიშვნელობა იქნება $f(x, y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალი g ორგანზომილებიან სეგმენტზე,

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \iint_g f(x, y) d\sigma = \iint_g f(x, y) d\sigma.$$

თუ ამ მოსაზრებიდან გამოვალთ, მაშინ შეგვიძლია ასეთი თეორემა დავამტკიცოთ:

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია g მართკუთხედში, $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, მაშინ არსებობს განმეორებითი ინტეგრალები

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

და ჰეშმარიტია ტოლობა

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

ამ სახით თეორემის დამტკიცება შრომატევადია¹. ამ საკითხს ამ წიგნის მესამე ნაწილში უფრო დაწვრილებით გავარჩევთ (ნაწ. III, თავი III, § 2, n1—n4).

2. ნებისმიერი ფართობადი არე. აქ განვიხილავთ ორ შემთხვევას:

ა) g არე შემოსაზღვრულია $x=a$ და $x=b$ წრფეებით და $y=\varphi_1(x)$ $g=\varphi_2(x)$ წირებით, სადაც $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ (ნახ. 8).

ვთქვათ, g არეში $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია და ნებისმიერი

$x \in [a, b]$ -სათვის არსებობს ინტეგრალი

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \varphi(x),$$

მაშინ არსებობს განმეორებითი ინტეგრალი

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

და მართებულია ტოლობა

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

მოცემული g არე მოვათავსოთ $ABCD$ მართკუთხედში:

$$G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

განვიხილოთ $F(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც შემდეგნაირადაა განსაზღვრული:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in g, \\ 0, & (x, y) \in G \setminus g. \end{cases}$$

წირები $y = \varphi_1(x)$ და $y = \varphi_2(x)$ G არეს ყოფენ ორ ფართობად არეებად: g არე და $G \setminus g$ არე.

$F(x, y)$ ფუნქციას g არეში აქვს წყვეტი: წირები $y = \varphi_1(x)$ და $y = \varphi_2(x)$ დანარჩენ წერტილებში უწყვეტია. რადგანაც $G = g \cup (G \setminus g)$ და g არე ფართობადია, მაშინ

¹ ვლ. ქელიძე, ე. წითლანაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. 11, თბილისი 1975, გვ. 442—448.

$$\iint_G F(x, y) d\sigma = \iint_g f(x, y) d\sigma + \iint_{G \setminus g} f(x, y) d\sigma = \iint_g f(x, y) d\sigma.$$

ზაგრამ $a \leq x \leq b$ -სთვის გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_c^d F(x, y) dy &= \int_c^{\varphi_1(x)} F(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^d F(x, y) dy = \\ &= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned} \quad (13)$$

1-ელი თეორემის თანახმად გვექნება

$$\iint_G F(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

მიღებულ ფორმულაში შევიტანოთ (13) მნიშვნელობა:

$$\iint_G F(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

ანუ

$$\iint_g f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 2. ვთქვათ, g არე შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$ წრფეებით და $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ უწყვეტი წირებით, სადაც $\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$ ყველა $x \in [a, b]$ -თვის, თუ f არეში $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, ამასთან ნებისმიერი x -თვის $[a, b]$ სეგმენტიდან არსებობს ინტეგრალი

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

მაშინ არსებობს განმეორებითი ინტეგრალი

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

ინტეგრალების გამოთვლაზე, ჯერ ერთი საინტეგრაციო ცვლადით და შემდეგ მეორე ცვლადით.

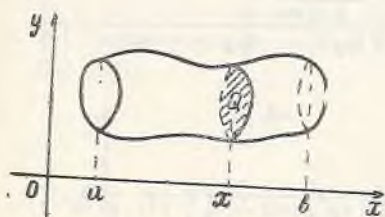
8. უწყვეტა ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა. 1-ელ თეორემაში განხილული იყო ინტეგრებადი $f(x, y)$ ფუნქცია ფართობად g არეში და მოთხოვნილი იყო, მაგალითად, მარტივი ინტეგრალის $\int_c^d f(x, y) dy$ არსებობა ყოველი $x \in [a, b]$ -თვის, მაშინ ორჯერადი ინტეგ-

რალის გამოთვლა მიიყვანება ორი მარტივი ინტეგრალის გამოთვლაზე, როგორც ამას გვიჩვენებს (11) ფორმულა. მე-4 პარაგრაფში დამტკიცებული იყო, თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია და ჩაკეტილ ფართობად g არეში, მაშინ არსებობს ორჯერადი ინტეგრალი $\iint_g f(x, y) d\sigma$ (§ 4. თეო-

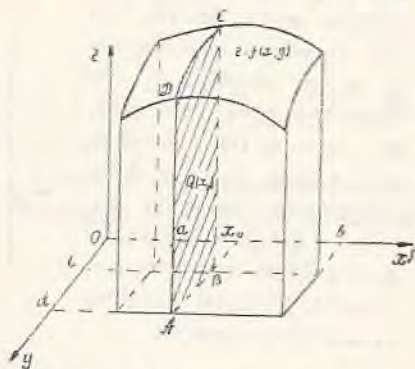
რემა 1). ახლა სწორედ ჩაკეტილი g არეში უწყვეტი ფუნქცია განვიხილოთ.

პირველ ნაწილში ჩვენ განვიხილეთ სხეულის მოცულობის გამოთვლა სხეულში პარალელური კვეთების ფართობების საშუალებით (ნახ. 12),

$$V = \int_a^b Q(x) dx. \quad (17)$$



ნახ. 12



ნახ. 13

$Q(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ x წერტილზე Ox ღერძისადმი გატარებული პერპენდიკულარულ სიბრტყის საშუალებით სხეულში მიღებული ფიგურის ფართობი. გამოვიყენოთ (17) ფორმულა წინა პუნქტებში განხილული ცილინდრული სხეულის მოცულობის გამოსათვლელად. $[a, b]$ სეგმენტის x_0 წერტილზე გატარით Ox ღერძისადმი პერპენდიკულარული სიბრტყე. ამ სიბრტყით ცილინდრულ სხეულში (ნახ. 13).

$$\{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

მივიღებთ $ABCD$ მრუდწირულ ტრაპეციას, რომლის ფართობია

$$Q(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy. \quad (18)$$

ინტეგრალი (18) არსებობს, რადგანაც $f(x_0, y)$ ფუნქცია უწყვეტია $[c, d]$ სეგმენტზე. რადგანაც x_0 წერტილი ნებისმიერია $[a, b]$ სეგმენტზე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$Q(x) = \int_c^d f(x, y) dy. \quad (19)$$

ვაჩვენოთ, რომ $Q(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. მართლაც, $[a, b]$ სეგმენტზე ავიღოთ x_0 წერტილი და მივცეთ ნაზრდი Δx ისე, რომ $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. განვიხილოთ სხვაობა

$$Q(x_0 + \Delta x) - Q(x_0) = \int_c^d (f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)) dy. \quad (20)$$

რადგანაც $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია g არეში, ნებისმიერი $y \in [c, d]$ — სათვის, შეგვიძლია ვთქვათ: ყოველი $\varepsilon > 0$ —სათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რომ, როდესაც $|\Delta x| < \delta$, მაშინ $|f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{c - d}$, ამის გამო (20) მოგვცემს ($c < d$)

$$\begin{aligned} |Q(x_0 + \Delta x) - Q(x_0)| &\leq \int_c^d |f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)| dy < \\ &< \int_c^d \frac{\varepsilon}{c - d} dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

ამრიგად, $Q(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. ეს კი გვაძლევს, რომ $Q(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. ეს თვისება საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ აღებული ცილინდრული სხეულის მოცულობა (17) ფორმულის საშუალებით

$$V = \int_a^b Q(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

მეორე მხრივ

$$V = \iint_g f(x, y) dx dy.$$

ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\iint_g f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

ამით ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა მივიყვანეთ ორი განმეორებითი ინტეგრალის გამოთვლაზე.

ზემოთ დამტკიცებულ თეორემებში ფართობად g არეში $f(x, y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალის არსებობასთან ერთად მოთხოვნილია თითოეული მარტივი ინტეგრალიდან ერთ-ერთი ინტეგრალის არსებობა. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია g არეში, პრაქტიკაში სწორედ ასეთი ინტეგრალები გვხვდება, მაშინ თითოეული მარტივი ინტეგრალის არსებობა ცხადია და ასეთი ფუნქციისათვის ორჯერადი ინტეგრალის არსებობა დამტკიცებული გვაქვს. ამ შემთხვევაში 1-ლი თეორემა ასეთ სახეს მიიღებს:

თეორემა 3. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ფართობად g არეში,

$$g = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\},$$

სადაც $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული g არეზე გამოითვლება ორი განმეორებითი ინტეგრალის საშუალებით,

$$\iint_g f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ იმ პირამიდის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო სიბრტყეებით და $x+y+z=1$ სიბრტყით.

ამოხსნა. წინასწარ შევადგინოთ ნახაზი (ნახ. 14). g არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ წრფეებით:

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x.$$

z ფუნქცია განვსაზღვროთ მოცემული განტოლებიდან

$$z = 1 - x - y.$$

საძიებელი მოცულობა იქნება

$$V = \iint_g (1-x-y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[1-x-x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \text{ (კუბ. ერთ)}$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია ზედაპირებით:

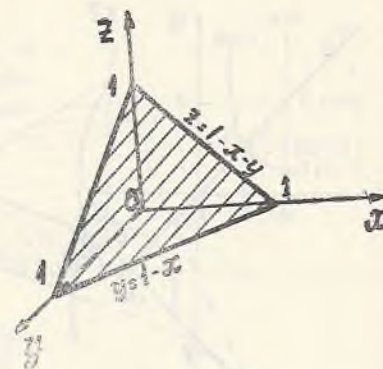
$$y = x^2, x+y=2, y=0, x+y+z=3, z=0.$$

ამოხსნა. შევადგინოთ ნახაზი (ნახ. 15). სხეულის ფუძე g არე:

$$g = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2; 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x\},$$

ანუ

$$g = g_1 \cup g_2.$$



ნახ. 14

$$= \int_1^2 \left(4 - \frac{4}{y} \right) dy + \int_2^4 (4 - y) dy = \left(4y - \ln y \right) \Big|_1^2 + \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_2^4 =$$

$$= 8 - 4 \ln 2 - 4 + (16 - 8) - (8 - 2) = 6 - 4 \ln 2.$$

ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 7. 1. ორჯერადი ინტეგრალით ჩაწერეთ და გამოთვალეთ იმ ფიგურების ფართობები, რომლებიც შემოსაზღვრულია წირებით:

- 1) $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = 2$, $x = -2$; 2) $y^2 = 4 + x$, $x + 3y = 0$;
 3) $y = \ln x$, $x - y = 1$; $y = -1$; 4) $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$;
 5) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 2$; 6) $y = 2x - x^2$, $y = x^2$;
 7) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$.

2. ააგეთ ფიგურები, რომელთა ფართობები გამოითვლება შემდეგი ინტეგრალებით:

- 1) $\int_a^b dx \int_a^x dy$; 2) $\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2 - y^2}} dx$; 3) $\int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{2-x} dy$.
 4) $\int_1^2 dx \int_1^{\frac{1}{x}} dy$; 5) $\int_2^3 dx \int_0^{\frac{1}{x-1}} dy$.

3. გამოთვალეთ იმ სხეულთა მოცულობანი, რომლებიც შემოსაზღვრულია შემდეგი ზედაპირებით:

- 1) $z = x^2 + y^2$, $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;
 2) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$;
 3) $z = x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = 1$;
 4) $x^2 + y^2 = 1$, $x + y = 1$, $z = 0$;
 5) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $x \left(x - \frac{a}{2} \right) + y^2 = 0$;
 6) $z = e^{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$;

$$7) z = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0;$$

$$8) y^2 = x, \quad x^2 = y, \quad x + z - 3 = 0, \quad z = 0;$$

$$9) z = x^2, \quad y + z = 1, \quad y = -1;$$

$$10) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad x + y + z = 1, \quad z = 0.$$

§ 6. ცვლადთა უცვლად ორჯერად ინტეგრალში

ვთქვათ, გვინდა ფართობად g არეში გამოთვალეთ უწყვეტი $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრალი.

დავუშვათ, რომ გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (1)$$

რომლებიც ამყარებენ ურთიერთცალსახა თანადობას g არის (x, y) და g' არის (u, v) წერტილებს შორის. g' არე მოთავსებულია O_1uv სიბრტყეში.

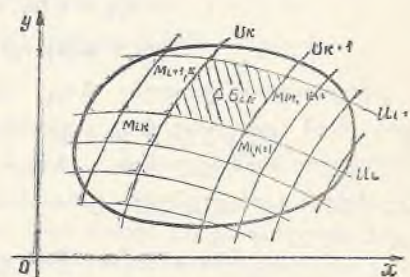
(1) ფორმულებით O_1uv სიბრტყეში მდებარე g' არე გადაისახება Oxy სიბრტყეში მდებარე g არეზე, ხოლო (1) სისტემიდან განსაზღვრული

$$u = \varphi_1(x, y), \quad v = \psi_1(x, y) \quad (2)$$

ფუნქციებით Oxy სიბრტყეში მდებარე g არე გადაისახება O_1uv სიბრტყეში მდებარე g' არეზე.

თუ (1) განტოლებათა სისტემაში დავუშვებთ $u = \text{const}$, მაშინ (1) სისტემა მოგვცემს წირს, რომელიც v პარამეტრზეა დამოკიდებული

(ნახ. 17). ეს წირი u -ს მნიშვნელობის მიხედვით u_i ასოთი აღვნიშნოთ. ასევე, თუ (1) განტოლებათა სისტემაში დავუშვებთ $v = \text{const}$, მივიღებთ წირს, რომელსაც u წირი დავარქვათ და ეს წირი v -ს მნიშვნელობათა მიხედვით v_k -თი აღვნიშნოთ. g არეს ყოველ M წერტილზე გაივლის ორი u_i და v_k წირი. (u_i, v_k) მნიშვნელობანი შეგვიძლია განვიზილეთ როგორც M წერტილის კოორდინატები (u, v) კოორდინატთა სის-



ნახ. 17

(3) ინტეგრალურ ჯამში შევიტანოთ x და y -ის მნიშვნელობანი (1) გამოსახულებებიდან, ხოლო $\Delta\sigma_{ik}$ -ს მნიშვნელობა (7)-დან, მივიღებთ:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{h \rightarrow 0} \sum f[\varphi(u_i, v_k), g(u_i, v_k)] |I(u_i, v_k)| \Delta u_i \Delta v_k = \\ = \iint_{G'} f[\varphi(u, v), g(u, v)] |I(u, v)| du dv.$$

ამგვარად, თუ ორჯერად ინტეგრალში მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას (1) ფორმულებით, მივიღებთ:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G'} f[\varphi(u, v), g(u, v)] |I(u, v)| du dv, \quad (8)$$

სადაც $I(u, v)$ განისაზღვრება (6) ფორმულით.

§ 7. ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა პოლარულ კოორდინატებში

1. ორჯერადი ინტეგრალი პოლარულ კოორდინატებში. ვთქვათ, ფართობად G არეს საზღვარი მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში. ამ შემთხვევაში სათანადო ორჯერადი ინტეგრალი გავრცელებული G არეზე შემოვიღოთ გამოვთვალოთ პოლარულ კოორდინატებში. ვისარგებლოთ პოლარულ კოორდინატთა გარდაქმნის შემდეგი ფორმულებით:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad (1)$$

სადაც ρ, θ პოლარული კოორდინატებია.

გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho, \quad |I| = |\rho| = \rho.$$

ორჯერადი ინტეგრალი (1) გარდაქმნით მიიღებს სახეს:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (2)$$

თუ როგორ გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალი პოლარულ კოორდინატებში, ამისათვის განვიხილოთ ნახაზი (ნახ. 18). G არე მიიღება, თუ θ იცვლება α -სა და β -ს შორის და ρ იცვლება a -სა და b -ს შორის:

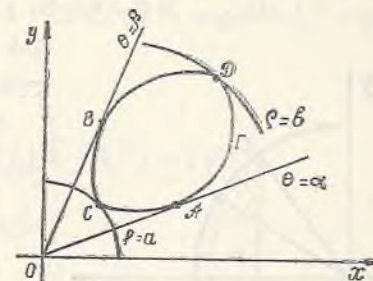
$$G = \{\alpha \leq \theta \leq \beta, \quad a \leq \rho \leq b\}.$$

$\theta = \alpha$ და $\theta = \beta$ წრფეები G არეს-კონტურს ეხებიან A და B წერტილებში. ამით Γ კონტური იყოფა ორ ნაწილად BCA და ADB . ვთქვათ, პირველი ნაწილის განტოლებაა

$$\rho = \varphi_1(\theta),$$

ხოლო მეორე ნაწილის განტოლებაა

$$\rho = \varphi_2(\theta).$$



ნახ. 18

ჯერ ავიღოთ (2) ინტეგრალი ρ ცვლადით, შემდეგ θ ცვლადით, გვექნება:

$$\iint_G f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \quad (3)$$

თუ გვინდა ავიღოთ ინტეგრალი ჯერ θ ცვლადით და შემდეგ ρ ცვლადით, მაშინ $a \leq \rho \leq b$, წრეწირები $\rho = a$, $\rho = b$ G არეს Γ საზღვარს ეხებიან C და D წერტილებში. ამით Γ წირი იყოფა ორ ნაწილად: პირველი — CAD , რომლის განტოლებაა

$$\theta = g_1(\rho),$$

მეორე — DBC , რომლის განტოლებაა

$$\theta = g_2(\rho),$$

ამის გამო ორჯერადი ინტეგრალი შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b d\rho \int_{g_1(\rho)}^{g_2(\rho)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\theta. \quad (4)$$

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\iint_G \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta$, სადაც G შე-

მოსაზღვრულია $\rho \cos \alpha = 1$ წრფით და $\rho = 2$ -რადიუსიანი წრეწირით (ნახ. 19).

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ A, B, C, D წერტილების კოორდინატები. ადვილი შესამჩნევია, B წერტილში $\rho = 2, \theta = 0$; A წერტილში $\theta = 0$, მაშინ განტოლებიდან $\rho \cos \theta = 1$ მივიღებთ $\rho = 1$.

C წერტილში $\rho = 2$, მაშინ განტოლებიდან $\rho \cos \theta = 1$, მივიღებთ $\theta = \frac{\pi}{3}$.

ამგვარად, გვექნება:

$$A(1; 0), B(2; 0), C\left(2, \frac{\pi}{3}\right), D\left(2, -\frac{\pi}{3}\right).$$

აქედან ადვილად დავასკვნით:

$$g = \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \leq \rho \leq 2, -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

რადგანაც ინტეგრალქვეშ θ -ს მიმართ სიმეტრიული ფუნქციაა, ამიტომ

$$I = 2 \int_{g_1} \int \rho^2 \cos \theta \, d\rho \, d\theta,$$

სადაც g_1 არე g არეს ზედა ნაწილია:

$$g_1 = \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

I ინტეგრალი ჯერ გამოვთვალოთ ρ ცვლადით, შემდეგ θ ცვლადით, გვექნება

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 \rho^2 \cos \theta \, d\rho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \, d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 \rho^2 \, d\rho =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(8 \cos \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta =$$

$$= \frac{2}{3} \left[8 \sin \theta - \operatorname{tg} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3} (4\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

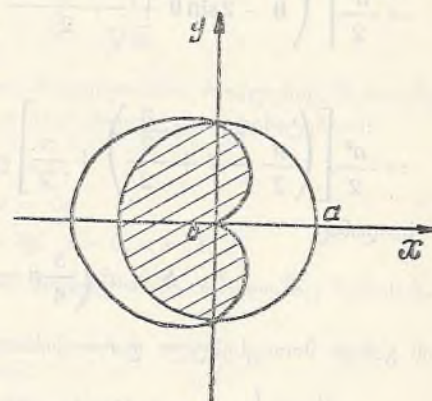
2. ფართობის გამოთვლა.

თუ (2) ფორმულაში ჩავსვამთ $f(x, y) = 1$, მივიღებთ g არეს ფართობს პოლარულ კოორდინატებში:

$$S = \iint_g dx \, dy = \iint_g \rho \, d\rho \, d\theta. \quad (5)$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით $\rho = a(1 - \cos \theta)$, $\rho = a$.

ამოხსნა. ჯერ ავაგოთ წირები. $\rho = a(1 - \cos \theta)$ — კარდიოიდა და $\rho = a$ — წრეწირი (ნახ. 20).



ნახ. 20

$$\frac{g}{2} = \left\{ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq a(1 - \cos \theta) \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq a \right\}.$$

ნახაზიდან ცხადია,

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a(1-\cos \theta)} \rho \, d\rho + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho \, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 (1 - \cos \theta)^2}{2} d\theta +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^a d\theta = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (1 - \cos \theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a^2 d\theta \right) = \\
& = \frac{a^2}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \right) = \\
& = \frac{a^2}{2} \left[\left(\theta - 2\sin \theta + \frac{\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \theta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] = \\
& = \frac{a^2}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{a^2}{2} \left(\frac{5\pi}{4} - 2 \right),
\end{aligned}$$

საიდანაც

$$S = a^2 \left(\frac{5}{4}\pi - 2 \right).$$

წრის გარეთ მოთავსებული ფართობისათვის გვექნება:

$$\frac{g}{2} = \left\{ a \leq \rho \leq a(1 - \cos \theta), \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right\}.$$

ამ არეს ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}
\frac{S_1}{2} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_a^{\rho} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \rho^2 \Big|_a^{\rho} d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta - 1) d\theta = \\
&= \frac{a^2}{2} \left(-2\sin \theta + \frac{\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 2 \right),
\end{aligned}$$

საიდანაც

$$S_1 = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 2 \right).$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 8.

1. გამოთვალეთ ფართობი იმ ფიგურების, რომლებიც შემოსაზღვრულია წირებით:

$$1) y = x^2, \quad y^2 = x^3; \quad 2) y = x^4, \quad y = 2;$$

$$3) \rho = 4(1 + \cos \theta), \quad \rho \cos \theta = 3 \quad (\text{წრფის მარჯვნიდან}).$$

2. შეცვალეთ ინტეგრების რიგი და გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$1) \int_a^b dx \int_a^x dy; \quad 2) \int_0^n dy \int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2 - y^2}} dx.$$

3. გამოთვალეთ იმ სხეულთა მოცულობანი, რომლებიც შემოსაზღვრულია ზედაპირებით (შეცვალეთ პოლარული კოორდინატებით):

$$1) z = mx, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0;$$

$$2) az = a^2 - x^2 - y^2, \quad z = 0;$$

$$3) x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 2y, \quad z = 0, \quad z = 2.$$

4. გამოთვალეთ იმ სხეულთა მოცულობანი, რომლებიც შემოსაზღვრულია ზედაპირებით:

$$1) z = a - x, \quad y^2 = ax, \quad z = 0;$$

$$2) z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0;$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$4) x^2 + y^2 = 4, \quad x + z = 2, \quad z = 0;$$

$$5) x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0, \quad z = x^2 + y^2.$$

§ 8. ორჯერადი ინტეგრალის გამოყენება გეომეტრიული და ფიზიკური ამოცანების ამოსახსნელად

1. ზედაპირის ფართობი. ვთქვათ სამგანზომილებიან სივრცეში მოცემულია რაიმე ზედაპირი. ამ ზედაპირზე გამოვყოთ Γ ჩაკეტილი წირით შემოსაზღვრული G ნაწილი (ნახ. 21). ზედაპირის G ნაწილის პროექცია Oxy სიბრტყეზე იყოს ფართობადი g არე. G ზედაპირის შესახებ დავუშ-

ვით, რომ მის ყოველ წერტილში შეიძლება მსგების სიბრტყის გატარება, რომელიც უწყვეტად შეიცვლის მდებარეობას შეხების წერტილის ზედაპირზე უწყვეტად მოძრაობის დროს. ანალიზურად ეს ნიშნავს: თუ ზედაპირის განტოლებაა

$$z = f(x, y),$$

მაშინ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია და აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $f'_x(x, y)$ და $f'_y(x, y)$.

განვსაზღვროთ მოცემული ზედაპირის G ნაწილის ფართობი.

მოვიქცეთ შემდეგნაირად. გ არე დაგანაწილოთ ფართობად

$$\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$$

ქვეარეებად. ამ ქვეარეების კონტურებზე გავატაროთ Oz ღერძის პარალელური წრფეები, ეს წრფეები G ზედაპირს დაჰყოფს ელემენტარულ ნაწილებად

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n.$$

ყოველ ელემენტარულ ΔS_i ზედაპირზე ავიღოთ რომელიმე (ξ_i, η_i, ζ_i) წერტილი და მასზე გავატაროთ მოცემული ზედაპირის მსგებ სიბრტყე

$$z - f(\xi_i, \eta_i) = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i). \quad (1)$$

ამ სიბრტყეზე $\Delta \sigma_i$ ქვეარეს კონტურზე გატარებული Oz ღერძის პარალელური წრფეები მოგვცემს ბრტყელ ელემენტარულ ნაწილს, რომელიც $\Delta S'_i$ -ით აღვნიშნოთ.

ასე რომ, G ზედაპირის მსგებ სიბრტყეებზე მივიღებთ

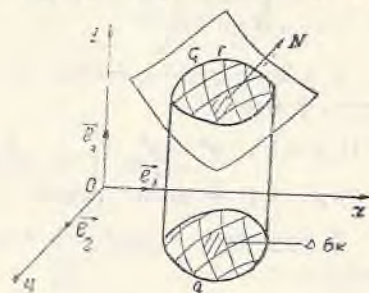
$$\Delta S'_1, \Delta S'_2, \dots, \Delta S'_n$$

ელემენტარულ ბრტყელ არეებს. ამ ელემენტარულ ქვეარეს ფართობი ისევ $\Delta S'_i$ -ით აღვნიშნოთ.

თუ ამ ელემენტარულ ბრტყელ ქვეარეთა ფართობებს შევკრიბავთ, მივიღებთ საძიებელ ფართობის მიახლოებით მნიშვნელობას,

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S'_i.$$

თუ ამ გამოსახულებას აქვს ზღვარი, როდესაც $\max d_{\Delta \sigma_i} = \lambda \rightarrow 0$,



ნახ. 21

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება G ზედაპირის ფართობი,

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S'_i. \quad (2)$$

როგორც ვიცით, სიბრტყეთა შორის კუთხე ეწოდება სიბრტყეთა პერპენდიკულარულ წრფეებს შორის კუთხეს. ასე რომ, (1) მსგებ სიბრტყესა და Oxy შორის კუთხე γ_i ტოლია $z = f(x, y)$ ზედაპირის $\vec{N}$ ნორმალისა და Oz ღერძს შორის კუთხისა. (ξ_i, η_i, ζ_i) წერტილში ზედაპირის $\vec{N}_i$ ნორმალის კოორდინატებია $(-f'_x(\xi_i, \eta_i), -f'_y(\xi_i, \eta_i), +1)$, ხოლო Oz ღერძის $\vec{e}_3$ მიმართულების კოორდინატებია $(0, 0, 1)$. თუ ვისარგებლებთ $\vec{N}_i$ და $\vec{e}_3$ ვექტორების სკალარული ნამრავლით, გვექნება

$$\vec{N}_i \cdot \vec{e}_3 = |\vec{N}| |\vec{e}_3| \cos \gamma_i,$$

საიდანაც

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{(f'_x(\xi_i, \eta_i))^2 + (f'_y(\xi_i, \eta_i))^2 + 1}}, \quad (3)$$

სადაც γ_i მახვილი კუთხეა.

ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია

$$\Delta \sigma_i = \Delta S'_i \cos \gamma_i,$$

საიდანაც

$$\Delta S'_i = \frac{\Delta \sigma_i}{\cos \gamma_i}.$$

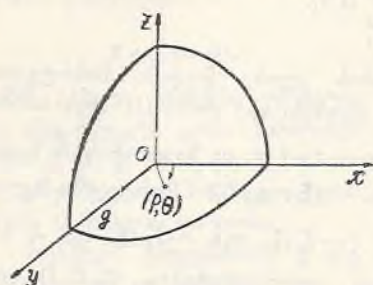
თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ (3) მნიშვნელობას და (2) ფორმულით გამოვთვალოთ S -ს მივიღებთ

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'_x(\xi_i, \eta_i))^2 + (f'_y(\xi_i, \eta_i))^2} \cdot \Delta \sigma_i. \quad (4)$$

რადგანაც დაშვების თანახმად $z = f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია და უწყვეტი კერძო წარმოებულები აქვს g ფართობად არეში, მაშინ ფუნქცია $\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}$ უწყვეტია g არეში და, მაშასადამე, არსებობს (4) ზღვარი. გვექნება

$$S = \iint_g \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} d\sigma. \quad (5)$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ R რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართობი. ავიღოთ სფეროს მერვედი ნაწილი (ნახ. 22). სფეროს განტოლებიდან



ნახ. 22

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

განვსაზღვროთ კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

გამოვთვალოთ

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{R}{z}.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი (6) ფორმულაში, გვექნება

$$\frac{S}{8} = \iint_g \frac{R}{z} dx dy.$$

ვისარგებლოთ პოლარული კოორდინატებით: $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. მაშინ

$$g = \left\{ 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

სათანადო ჩასმით $\frac{S}{8}$ -ის ფორმულაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{S}{8} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \frac{R\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^R d\theta = \\ &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi R^2}{2}; \end{aligned}$$

საიდანაც

$$S = 4\pi R^2.$$

თუ ზედაპირი მოცემულია არაცხადი სახით,

$$F(x, y, z) = 0,$$

მაშინ ამ არაცხადი ფუნქციიდან განვსაზღვროთ კერძო წარმოებულები

$$F'_x + F'_z z'_x = 0, \quad F'_y + F'_z z'_y = 0.$$

საიდანაც

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანოთ (5) ფორმულაში, მივიღებთ

$$S = \iint_g \frac{1}{F'_z} \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z} d\sigma. \quad (6)$$

2. ბრტყელი ფიგურის ინერციის მომენტი. ავიღოთ მატერიალური M წერტილი და რაიმე L ღერძი. ამ წერტილის მასისა და ამ წერტილიდან ღერძამდე მანძილის კვადრატის ნამრავს, ეწოდება M წერტილის ინერციის მომენტი მოცემული L ღერძის მიმართ (ნახ. 23).

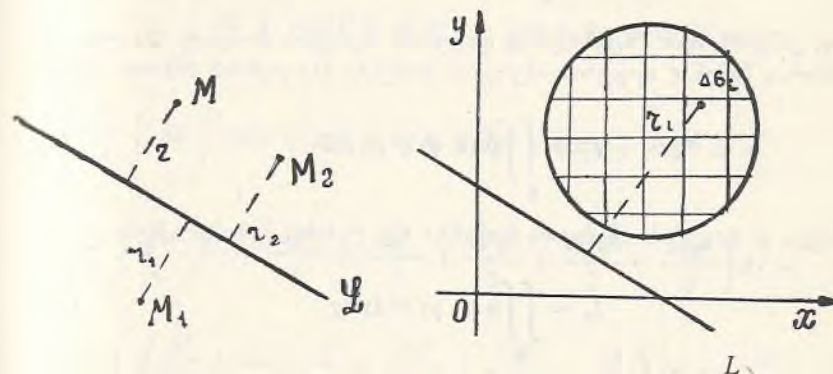
$$I_L = mr^2.$$

თუ ავიღებთ $M_1, M_2, \dots, M_n$ მატერიალურ წერტილთა სისტემას, მაშინ მისი ინერციის მომენტი L ღერძის მიმართ იქნება

$$I_L = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

სადაც m_i არის M_i წერტილის მასა, ხოლო r_i — ამ წერტილიდან L ღერძამდე მანძილი.

ავიღოთ სიბრტყეში რაიმე g ფართობადი ფიგურა (ფირფიტა). ამ ფიგურის სიმკვრივე (x, y) წერტილში იყოს $\mu(x, y)$ (ნახ. 24).



ნახ. 23

ნახ. 24

გ ფიგურა დაენაწილოთ ფართობად

$$\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$$

ფიგურებად. $\Delta \sigma_i$ ფიგურაში ავიღოთ რომელიმე (ξ_i, η_i) წერტილი. ვივლისხმობთ, რომ ამ (ξ_i, η_i) წერტილში მოთავსებულია $\Delta \sigma_i$ ფიგურის მასა. (ξ_i, η_i) წერტილიდან L ლერძამდე მანძილი იყოს r_i , მაშინ $\Delta \sigma_i$ ფიგურის ინერციის მომენტი L ლერძის მიმართ იქნება:

$$\mu(\xi_i, \eta_i) r_i^2 (\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

მთელი ფიგურის ინერციის მომენტი დაახლოებით ტოლი იქნება

$$\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) r_i^2 (\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

თუ ამ ჯამის ზღვარი არსებობს, ზოცა $\max d \Delta \sigma_i = \lambda \rightarrow 0$, მაშინ მიღებულ ზღვარს ეწოდება მოცემული g ფიგურის ინერციის მომენტი L ლერძის მიმართ:

$$I_L = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) r_i^2 (\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i. \quad (7)$$

თუ g ფიგურა ფართობადია, $\mu(x, y)$ სიმკვრივე უწყვეტია, მაშინ (7) ზღვარი არსებობს და

$$I_L = \iint_g \mu(x, y) r^2(x, y) dx dy. \quad (8)$$

თუ განვიხილავთ მოცემული g ფიგურის ინერციის მომენტს Ox ლერძის მიმართ, მაშინ g ფიგურის ინერციის მომენტი Ox ლერძის მიმართ იქნება

$$I_x = \iint_g \mu(x, y) y^2 dx dy. \quad (9)$$

ასევე, g ფიგურის ინერციის მომენტი Oy ლერძის მიმართ იქნება

$$I_y = \iint_g \mu(x, y) x^2 dx dy. \quad (10)$$

ცხადია, g ფიგურის ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავეს

მიმართ, ე. ი. კოორდინატთა სათავეზე გამავალ Oxy სიბრტყის პერპენდიკულარული ლერძის მიმართ იქნება

$$I_0 = \iint_g (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy. \quad (11)$$

ცხადია,

$$I_0 = I_x + I_y.$$

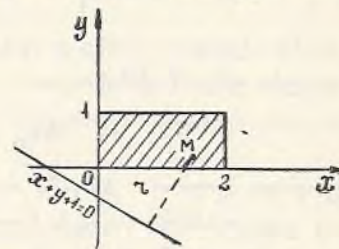
მაგალითი 2. განვსაზღვროთ $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ მართკუთხედის ინერციის მომენტი $x+y+1=0$ წრფის მიმართ, თუ მართკუთხედის (x, y) წერტილში სიმკვრივე $\mu(x, y) = xy$ (ნახ. 25).

ამოხსნა. მივიყვანოთ $x+y+1=0$ წრფე ნორმალურ სახეზე. გვექნება:

$$\frac{x+y+1}{-\sqrt{2}} = 0$$

მანძილი ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილიდან $x+y+1=0$ წრფემდე იქნება

$$r = \left| \frac{x+y+1}{-\sqrt{2}} \right| = \frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}.$$



ნახ. 25

ვისარგებლოთ (8) ფორმულით. მივიღებთ

$$\begin{aligned} I_L &= \frac{1}{2} \iint_g xy (x+y+1)^2 dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 xy (x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 (x^2y + xy^3 + xy + 2x^2y^2 + 2x^2y + 2xy^2) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{x^3y^2}{2} + \frac{xy^4}{4} + \frac{xy^2}{2} + \frac{2x^2y^3}{3} + \frac{2x^2y^2}{2} + \frac{2xy^3}{3} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x}{3} \right) dx = 4 \frac{23}{36}. \end{aligned}$$

3. ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრი. ვთქვათ, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ წერტილებში სათანადოდ მოთავსებულია მასები $m_1, m_2, \dots, m_n$, მაშინ სიმძიმის ცენტრის C წერტილის კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი დამოკიდებულებით

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (12)$$

თუ გვინდა გავიგოთ რაიმე g ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, ფიგურა უნდა დაგვანაწილოთ

$$\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$$

ფიგურებად. ავიღოთ $\Delta \sigma_i$ -ში რომელიმე (ξ_i, η_i) წერტილი, რომელშიდაც ვიგულისხმობთ მოთავსებულია მთელი $\Delta \sigma_i$ -ს მასა. თუ g ფიგურის (x, y) წერტილში მასის სიმკვრივეა $\mu(x, y)$ მაშინ $\Delta \sigma_i$ -ს მასა იქნება $\mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$. ამის გამო (12) ფორმულებიდან გვექნება

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i}{\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i}{\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i}, \quad (13)$$

თუ g ფიგურა ფართობადია და $\mu(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციაა g -ში, მაშინ (12) გამოსახულების ზღვარი არსებობს, როდესაც $\max d \Delta \sigma_i = \lambda \rightarrow 0$ გვექნება

$$x_c = \frac{\iint_g x \mu(x, y) dx dy}{\iint_g \mu(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_g y \mu(x, y) dx dy}{\iint_g \mu(x, y) dx dy}. \quad (14)$$

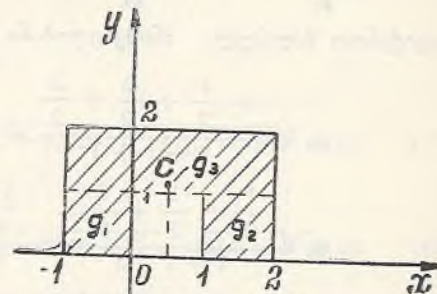
მაგალითი 3. მოვინახოთ იმ ერთგვაროვანი ფიგურის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც გამოსახულია 26-ე ნახაზზე.

ამოხსნა. g ფიგურა წარმოვადგინოთ სამ ფიგურად:

$$g_1 = \{-1 \leq x \leq 0; 0 \leq y \leq 1\},$$

$$g_2 = \{1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\},$$

$$g_3 = \{-1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2\}.$$



ნახ. 26

სხეული ერთგვაროვანია — ეს ნიშნავს, რომ მოცემული სხეულის ყოველი $\Delta \sigma_i$ -ს მასა პროპორციულია $\Delta \sigma_i$ -ს ფართობისა და პროპორციულობის კოეფიციენტი მუდმივია (ესაა ფიგურის სიმკვრივე). სიმარტივისათვის მივიღოთ $\mu(x, y) \equiv 1$.

გამოვთვალოთ ინტეგრალები:

$$\iint_{g_1} x dx dy = \int_{-1}^0 x dx \int_0^1 dy = -\frac{1}{2},$$

$$\iint_{g_2} x dx dy = \int_1^2 x dx \int_0^1 dy = \frac{3}{2},$$

$$\iint_{g_3} x dx dy = \int_{-1}^2 x dx \int_1^2 dy = \frac{3}{2};$$

$$\iint_{g_1} y dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_0^1 y dy = \frac{1}{2};$$

$$\iint_{g_2} y dx dy = \int_1^2 dx \int_0^1 y dy = \frac{1}{2};$$

$$\iint_{g_3} y dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_1^2 y dy = \frac{9}{2};$$

$$\iint_{g_1} dx dy = 1, \quad \iint_{g_2} dx dy = 1, \quad \iint_{g_3} dx dy = 3.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი (14) ფორმულებში. მივიღებთ:

$$x_c = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{1+1+3} = \frac{5}{5} = 0,5;$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2}}{1+1+3} = \frac{11}{5} = 2,2.$$

4. ზედაპირის ინერციის მომენტი. ვთქვათ, $z=f(x, y)$ ზედაპირის G ნაწილის აქვს S ფართობი (ნახ. 21). G ნაწილის მასის სიმკვრივე (x, y, z) წერტილში იყოს

$$\mu(x, y, z) = \mu(x, y, f(x, y)).$$

მოცემული ზედაპირის G ნაწილის გეგმილი g ფიგურა დავანაწილოთ $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ ფიგურებად. ამ ფიგურათა შესაბამისი ნაწილები, როგორც G ნაწილის ფართობის გამოთვლის დროს გავაკეთეთ, იყოს

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n.$$

ავიღოთ G ზედაპირის ამ ელემენტარული ნაწილებიდან ერთი რომელიმე Δs_i . წარმოვიდგინოთ ამ ნაწილის მთელი მასა მოთავსებულია $(\xi_i, \mu_i, z_i) \in \Delta s_i$ წერტილში. მასის სიდიდე ამ წერტილში იქნება

$$\Delta m_i = \mu(\xi_i, \eta_i, z_i) \Delta S_i =$$

$$= \mu(\xi_i, \eta_i, z_i) \sqrt{1 + (f'_x(\xi_i, \eta_i))^2 + (f'_y(\xi_i, \eta_i))^2} \Delta \sigma_i.$$

ΔS_i — ელემენტარული ზედაპირის ინერციის მომენტი რაიმე L ღერძისადმი იქნება

$$\mu(\xi_i, \eta_i, z_i) \sqrt{1 + (f'_x(\xi_i, \eta_i))^2 + (f'_y(\xi_i, \eta_i))^2} \cdot r^2(\xi_i, \eta_i, z_i) \Delta \sigma_i$$

სადაც $r(\xi_i, \eta_i, z_i)$ მანძილია $M(\xi_i, \eta_i, z_i)$ -დან L ღერძამდე.

თუ ამ გამოსახულებებს გამოვიანგარიშებთ ყველა წერტილებისათვის, $i=1, 2, \dots, n$, შევკრებთ და გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\max d\Delta\sigma_i = \lambda \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$I_L = \iint_g r^2(x, y, z) \mu(x, y, z) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy, \quad (15)$$

სადაც $z=f(x, y)$.

თუ L ღერძი, მაგალითად, Ox ღერძს ემთხვევა, მაშინ

$$I_x = \iint_g (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy. \quad (16)$$

ასევე მივიღებთ

$$I_y = \iint_g (z^2 + x^2) \mu(x, y, z) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy, \quad (17)$$

$$I_z = \iint_g (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy. \quad (18)$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ სფეროს იმ ნაწილის ინერციის მომენტი Oz ღერძისადმი, რომელიც მოთავსებულია $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის პირველ ნაწილში (ნახ. 22). სიმკვრივე მუდმივია. ამოხსნა. მივიღოთ $\mu=1$. ვისარგებლოთ (18) ფორმულით:

$$I_z = \iint_g (x^2 + y^2) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy. \quad (19)$$

გამოვთვალოთ კერძო წარმოებულები $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ -დან:

$$z'_x = -\frac{x}{z}, \quad z'_y = -\frac{y}{z},$$

რის შედეგადაც

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

შევიტანოთ (19) ფორმულაში, მივიღებთ

$$I_z = a \iint_g (x^2 + y^2) \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

შემოვიღოთ პოლარული კოორდინატები:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq a,$$

$$I_z = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}. \quad (20)$$

ცალკე გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}. \quad (21)$$

ჩასმით $\sqrt{a^2 - \rho^2} = t$ მივიღებთ:

$$a^2 - \rho^2 = t^2, \quad -\rho d\rho = t dt, \quad \rho^2 = a^2 - t^2; \quad \rho = 0, \quad t = a; \quad \rho = a, \quad t = 0.$$

(21) ინტეგრალი მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} &= - \int_a^0 \frac{(a^2 - t^2) t dt}{t} = \int_0^a (a^2 - t^2) dt = \\ &= \left(a^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3. \end{aligned}$$

ამის გამო (20)-დან მივიღებთ

$$I_z = \frac{2}{3} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{a^4 \pi}{3}.$$

5. ზედაპირის სიმძიმის ცენტრი. წინა პუნქტის ანალოგიურად, $z = I(x, y)$ ზედაპირის G ნაწილის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრისათვის, ზედაპირის G ნაწილის გეგმილი g დავყოთ $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ ფიგურებად. მათი შესაბამისი ელემენტარული ზედაპირები G ზედაპირზე იქნება

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$$

თუ ზედაპირის სიმკვრივეა $\mu(x, y)$, მაშინ ΔS_i ელემენტარული ზედაპირის მასა იქნება $\mu \Delta S_i$. ეს მასა, წარმოვიდგინოთ, მოთავსებულია ΔS_i ზედაპირის რომელიმე (ξ_i, η_i, ζ_i) წერტილში, თუ ამ მასას გავამრავლებთ ξ_i -ზე, შევკრებთ, $i=1, 2, \dots, n$, და გავყოფთ ყველა წერტილის

მასათა ჯამზე, მივიღებთ დაახლოებით სიმძიმის ცენტრის x კოორდინატს. ΔS_i შევცვალოთ სიდიდით

$$\sqrt{1 + (f'_x(\xi_i, \eta_i))^2 + (f'_y(\xi_i, \eta_i))^2} \Delta\sigma_i.$$

მიღებულ გამოსახულებაში გადავდეთ ზღვარზე, როდესაც $\max d\Delta\sigma_i = \lambda \rightarrow 0$. მივიღებთ სიმძიმის ცენტრის x_c კოორდინატს. ასევე მივიღებთ y_c და z_c კოორდინატებს. გვექნება

$$x_c = \frac{\int \int g \mu(x, y, z) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy}{M} \quad (22)$$

$$y_c = \frac{\int \int g \mu(x, y, z) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy}{M}$$

$$z_c = \frac{\int \int g \mu(x, y, z) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy}{M}$$

სადაც

$$M = \int \int g \mu(x, y, z) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy. \quad (23)$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ a რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის იმ ნაწილის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც პირველ საკოორდინატო კუთხეშია მოთავსებული (ნახ. 22). სიმკვრივე მუდმივია.

ამოხსნა. სიმკვრივე მივიღოთ 1-ის ტოლად.

ჯერ გამოვთვალოთ მოცემული ზედაპირის მასა:

$$M = \int \int g \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy.$$

სფეროს განტოლებიდან

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

განვსაზღვროთ კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

შემდეგ გამოვთვალოთ

$$\sqrt{1 + (z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2} = \frac{a}{z}.$$

ამის გამო მოცემული ზედაპირის გამოსათვლელად გვექნება ფორმულა

$$M = \iint_g \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy.$$

გადავიდეთ პოლარულ კოორდინატებზე $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. მივიღებთ

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \frac{a\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho = -\frac{a}{2} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{d(a^2 - \rho^2)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \\ &= -\frac{a\pi}{2} \sqrt{a^2 - \rho^2} \Big|_0^a = \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

ეს მნიშვნელობა ასეთი გამოთვლის გარეშეც შეგვეძლო მიგვეღო. ზედაპირი ერთგვაროვანია, $\mu=1$, მაშინ ზედაპირის მასა მისი ფართობის ტოლია:

$$M = \frac{4\pi a^2}{8} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

ახლა გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} \iint_g x \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy &= \iint_g x \frac{a}{z} dx dy = \\ &= a \iint_g \frac{xdx dy}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \int_0^a \frac{\rho^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho. \quad (24) \end{aligned}$$

თითოეული ინტეგრალი გამოვთვალოთ ცალ-ცალკე.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

ინტეგრალი $\int_0^a \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$ გამოვთვალოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით:

$$u = \rho, \quad dv = \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}; \quad v = -\sqrt{a^2 - \rho^2}; \quad du = d\rho.$$

გვექნება

$$\int_0^a \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = -\rho \sqrt{a^2 - \rho^2} \Big|_0^a + \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი $\rho = a \sin \theta$ ჩასმით მოგვცემს

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$\int_0^a \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

ამის გამო (24) ინტეგრალი მოგვცემს $\frac{a \cdot \pi a^2}{4} = \frac{\pi a^3}{4}$.

(22) ფორმულაში სათანადო ჩასმა მოგვცემს

$$x_c = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{a}{2}.$$

ახლა გამოვთვალოთ

$$\iint_g y \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \int_0^a \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} =$$

$$= -a \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^3}{4}.$$

(22) ფორმულაში სათანადო ჩასმა მოგვცემს

$$y_c = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{a}{2}.$$

გამოთვალეთ

$$\iint_g z \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2} dx dy = \iint_g z \frac{a}{z} dx dy = a \iint_g dx dy.$$

პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით მივიღებთ:

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho d\rho = a \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{\pi a^3}{4}.$$

(22) ფორმულაში სათანადო ჩასმა მოგვცემს

$$z_c = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{a}{2}.$$

ამგვარად, ერთგვაროვანი სფეროს იმ ნაწილის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც პირველ საკოორდინატო კუთხეშია, იმყოფება წერტილში $C\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 9.

1. გამოთვალეთ ფართობები შემდეგი ზედაპირებისა:

1) $2z = x^2$ ცილინდრული ზედაპირის, რომელიც მოკვეთილია სიბრტყეებით: $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

2) $z^2 = 2xy$ ზედაპირის, რომელიც მოკვეთილია სიბრტყეებით: $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$.

3) $x^2 + y^2 = z^2$ კონუსის ზედაპირის, რომელიც მოთავსებულია $z^2 = 2x$ ცილინდრულ ზედაპირში.

2. გამოთვალეთ იმ სხეულის მასა, რომელიც შემოსაზღვრულია სიბრტყეებით: $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, თუ მასის სიმკვრივე ყოველ წერტილში წერტილის აბლიკატის ტოლია.

3. გამოთვალეთ Oz ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი იმ სიბრტყისა, რომლის განტოლებაა $x+z=a$ და შემოსაზღვრულია სიბრტყეებით $y=0$, $y=a$, $x=0$, $x=a$, თუ სიბრტყე ერთგვაროვანია.

4. განსაზღვრეთ ერთგვაროვანი ნახევარსფეროს სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ მისი განტოლებაა $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ და შემოსაზღვრულია $z=0$ სიბრტყით (იგულისხმება ნახევარსფეროს ზედა ნაწილი, $z \geq 0$).

IV განყოფილება

მ წ კ რ ი ვ ე ბ ი

თ ა მ ი V

რიცხვთა მწკრივები

§ 1. რიცხვთა მწკრივები. კრებადობა და განშლადობა.
ძირითადი თვისებები

1. კრებადობა და განშლადობა. ვთქვათ, გვაქვს რიცხვთა მიმდევრობა

$$\{u_n\} = u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

შევაერთოთ, მოცემული მიმდევრობის წევრები შეკრების ნიშნით

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (1)$$

მიღებულ გამოსახულებას ეწოდება რიცხვთა მწკრივი.

რიცხვებს $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ეწოდება მწკრივის წევრები, u_n -ს ეწოდება მწკრივის n -ე წევრი.
განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულებანი:

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

ამ გამოსახულებებს ეწოდება (1) მწკრივის კერძო ჯამები ან მწკრივის მონაკვეთები.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ყოველ (1) მწკრივს შეესაბამება კერძო ჯამების (S_n) მიმდევრობა და, პირიქით, ყოველ (S_n) მიმდევრობას შეესაბამება მწკრივი.

მართლაც, (2) ტოლობებიდან მიმდევრობით განესაზღვროთ

$$u_1 = S_1, u_2 = S_2 - S_1, \dots, u_n = S_n - S_{n-1}, \dots,$$

საიდანაც შევადგენთ მწკრივს

$$S_1 + (S_2 - S_1) + \dots + (S_n - S_{n-1}) + \dots$$

ამრიგად, რიცხვთა მწკრივი რიცხვთა მიმდევრობის ჩაწერის ერთ-ერთი ფორმაა.

რადგანაც (1) მწკრივსა და მწკრივის კერძო ჯამების (S_n) მიმდევრობას შორის ურთიერთცალსახა თანადობა არსებობს, შეიძლება (1) მწკრივის ჯამი განესაზღვროთ როგორც (S_n) მიმდევრობის ზღვარი.

თუ კერძო ჯამების (S_n) მიმდევრობას აქვს ზღვარი S , მაშინ ვიტყვი, (1) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი არის S .

ამ შემთხვევაში წერენ

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

ან

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ არ არსებობს ან $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, ან $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ მაშინ ვიტყვი (1) მწკრივი განშლადია და სათანადოდ წერენ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ არ არსებობს, } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty.$$

მწკრივის მაგალითია საშუალო სკოლის კურსიდან კარგად ცნობილი, გეომეტრიული პროგრესია

$$u + uq + uq^2 + \dots + uq^n + \dots \quad (4)$$

ამ პროგრესიის კერძო ჯამები

$$S_n = u + ug + \dots + uq^{n-1} = \frac{u(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1, n = 1, 2, \dots$$

ცხადია,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{u}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

მაშინ (4) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი

$$S = \frac{u}{1-q}.$$

თუ $q=1$, მაშინ (4) მწკრივი მოგვეცემს

$$u + u + u + \dots + u + \dots$$

ამრიგად, (4) მწკრივი $q=1$ -სათვის განშლადია.

თუ $q=-1$, მაშინ (4) მწკრივი მოგვეცემს

$$u - u + u - \dots$$

ამ მწკრივის კერძო ჯამებია $u, 0, u, 0, \dots$, მაშასადამე, ამ მწკრივის ჯამი არ არსებობს — მწკრივი განშლადია.

თუ $|q| > 1$, მაშინაც, (3) მწკრივი განშლადია.

მოვიგონოთ ნამდვილი α რიცხვის უსასრულო ათწილადად გაშლა:

$$\alpha = c_0, c_1, c_2 \dots c_n \dots$$

ცხადია, α რიცხვი წარმოადგენს შემდეგი მწკრივის ჯამს

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \dots \quad (5)$$

საზოგადოდ, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ, თუ $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ ციფრებია, მაშინ (5) მწკრივი კრებადია.

მართლაც, რადგანაც $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ ციფრები 9-ს არ აღემატება, გვექნება

$$S_1 = c_0;$$

$$S_2 = c_0 + \frac{c_1}{10} \leq c_0 + \frac{9}{10} = c_0, 9;$$

$$S_3 = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} < c_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} = c_0, 99$$

და ა. შ.

$$S_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{10^{n-1}} \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^{n-1}} = c_0, 99 \dots 9 < c_0 + 1.$$

ამგვარად, მიმდევრობა (S_n) ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული, და როგორც ვიცით ასეთ მიმდევრობას აქვს ზღვარი. ეს ზღვარი ის α ნამდვილი რიცხვია, რომელსაც (5) მწკრივის ჯამი გამოისახავს.

(1) მწკრივი ასე ჩავწეროთ:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots).$$

პირველი შესაკრები S_n კერძო ჯამია, ხოლო მეორე შესაკრებს

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \quad (6)$$

ეწოდება (1) მწკრივის n -უ რ ი ნ ა შ თ ი. ეს უკანასკნელი R_n -ით აღვნიშნოთ.

ვაჩვენოთ, რომ (1) მწკრივი და (6) მწკრივი ერთდროულად კრებადია ან განშლადი.

მართლაც, (6) მწკრივის S'_n კერძო ჯამი ყოველთვის შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც სხვაობა შემდეგი ჯამებისა

$$u_{n+1} + \dots + u_{n+k} = (u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+k}) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n),$$

ანუ

$$S'_n = S_{n+k} - A,$$

სადაც $\sum_{i=1}^n u_i = A$ მუდმივი სიდიდე.

ცხადია,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+k} - A.$$

ე. ი. (6) მწკრივი განშლადია ან კრებადია (1) მწკრივთან ერთად.

ამგვარად, დავამტკიცეთ (1) მწკრივის შემდეგი თვისება:

თეორემა 1. თუ რიცხვთა მწკრივიდან სასრული რაოდენობის პირველ წევრებს უკუვავადებთ მწკრივის კრებადობა (განშლადობა) არ დაირღვევა.

ცხადია, კრებადი მწკრივის ჯამი შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$S = S_n + R_n, \quad (7)$$

საიდანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 \quad (8)$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (1) მწკრივი კრებადია, თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \mid (n > N) \Rightarrow (R_n < \varepsilon). \quad (9)$$

ცხადია, N დამოკიდებულია ε -ზე. რაც უფრო მცირეა ε , მით უფრო დიდი იქნება N რიცხვი, ამიტომ დავწერთ: $N = N(\varepsilon)$.

R_n გვიჩვენებს იმ ცდომილებას, რომელსაც ჩვენ დაუშვებთ, როცა (1) მწკრივის S ჯამის ნაცვლად ავიღებთ პირველი n წევრის S_n -ის ჯამს. მაგალითად, განვიხილოთ მწკრივი:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots \quad (10)$$

გამოვთვალოთ S_n :

$$S_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

ცხადია,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$$

ამგვარად, (10) მწკრივის ჯამი $S=2$.

თუ (10) მწკრივში n -ურ წევრზე შევჩერდებით, მაშინ (10) მწკრივის ჯამი S_n -საგან განსხვავდება $\frac{1}{n}$ -ით:

$$R_n = S - S_n = 2 - \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

2. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. აუცილებელი პირობა. ზემოთ აღნიშნეთ (1) მწკრივი

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

კრებადია, თუ მისი კერძო ჯამებისაგან შედგენილი (S_n) მიმდევრობა კრებადია. (S_n) მიმდევრობის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა ე. წ. კოშის კრიტერიუმი [ნაწ. I, თავი XIII, § 4, n3], რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: (S_n) მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid (n > N, m > N) \Rightarrow (|S_m - S_n| < \varepsilon). \quad (11)$$

განსაზღვრულობისათვის დაუშვათ, რომ $n < m = n + p$, p ნატურალური რიცხვია, გვექნება

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad S_{n+p} = u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p},$$

საიდანაც

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}.$$

ამის გამო (1) მწკრივის კრებადობისათვის კოშის პირობა (1) ასე გამოიქმნის:

თეორემა 2. მწკრივის

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

კრებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ისეთი ნატურალური N რიცხვი არსებობდეს, რომ უტოლობას

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

აღგილი ჰქონდეს ყოველ $n > N$ და ნებისმიერი p ნატურალური რიცხვისათვის, ანუ

$$\left(S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid (\forall n > N \wedge \forall p \in \mathbb{N}) \Rightarrow (|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon)). \quad (12)$$

თუ (1) მწკრივი კრებადია, მაშინ უტოლობა

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

უნდა შესრულდეს $\forall p \in \mathbb{N}$. კერძოდ $p=1$ -სათვისაც, მაშინ გვექნება

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid (n > N) \Rightarrow (|u_{n+1}| < \varepsilon),$$

ანუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = 0.$$

ამგვარად, თუ (1) მწკრივი კრებადია, მაშინ მწკრივის ზოგადი წევრი $u_n \rightarrow 0$;

$$\left(S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \right). \quad (13)$$

ამგვარად, მივიღეთ, რომ (1) მწკრივისათვის ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა 3. მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია მისი ზოგადი u_n წევრი მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, როდესაც $n \rightarrow \infty$.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს: თუ მწკრივი კრებადია, მაშინ ზოგადი წევრი მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაგრამ თუ მწკრივის ზოგადი წევრი მიისწრაფვის ნულისაკენ, ეს კიდეც იმას არ ნიშნავს, რომ მწკრივი კრებადია; $u_n \rightarrow 0$ მწკრივის კრებადობის საკმარისი ნიშანი არაა. ამ წინადადების დასამტკიცებლად განვიხილოთ ე. წ. ჰარმონიული მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (14)$$

ამ მწკრივის $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, როდესაც $n \rightarrow \infty$, მაგრამ ადვილად დავამტკიცებთ, რომ მწკრივი განშლადია.

მართლაც, (14) მწკრივიდან ავიღოთ $p=n$ წევრიანი მონაკვეთი:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

აქედან ცხადია, $p=n$ -თვის ჰარმონიული მწკრივის p წევრიანი მონაკვეთი არ აკმაყოფილებს კოშის კრიტერიუმს — (12) პირობას:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2}.$$

ამრიგად, ჰარმონიული მწკრივის $p=n$ წევრის ჯამი არაა ნაკლები ნებისმიერ დადებით ε რიცხვზე. რაც ჰარმონიული მწკრივის განშლადობის მაჩვენებელია.

3. ძირითადი თვისებები. ვთქვათ, მწკრივი

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

კრებადია.

თუ (1) მწკრივის წევრებს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე a მამრავლზე, მაშინ მიღებული მწკრივიც კრებადი იქნება და მიღებული მწკრივის ჯამი $\bar{S} = Sa$, სადაც S (1) მწკრივის ჯამია.

მართლაც, განვიხილოთ მწკრივი

$$au_1 + au_2 + \dots + au_n + \dots \quad (15)$$

ამ მწკრივის კერძო ჯამი იქნება

$$\bar{S}_n = au_1 + au_2 + \dots + au_n = aS_n,$$

სადაც

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

(1) მწკრივის n -ური კერძო ჯამია.

ცხადია,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} aS_n = aS.$$

ამგვარად დამტკიცდა:

თეორემა 4. თუ მწკრივი

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

კრებადია და მისი ჯამი არის $S(u)$, მაშინ (1) მწკრივის წევრობრივად a რიცხვზე გამრავლებით მიღებული მწკრივი

$$au_1 + au_2 + \dots + au_n + \dots \quad (15)$$

კრებადი იქნება და მისი ჯამი

$$S(au) = aS(u).$$

ცხადია, თუ (1) მწკრივი განშლადია, მაშინ (15) მწკრივიც განშლადი იქნება.

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 5. თუ მწკრივები

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (16)$$

კრებადია, მაშინ

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots \quad (17)$$

მწკრივიც კრებადი იქნება და მისი ჯამი სათანადოდ მიიღება შესაკრები ჯამებიდან,

$$S(u+v) = S(u) + S(v).$$

მართლაც, (17) მწკრივის კერძო ჯამი

$$\begin{aligned} S_n(u+v) &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) = \\ &= (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = S_n(u) + S_n(v), \end{aligned}$$

მოგვცემს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(u+v) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(u) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(v) = S(u) + S(v).$$

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ მწკრივის

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots \quad (18)$$

კრებადობა.

შევადგინოთ კერძო ჯამი S_n :

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

ცხადია,

$$S_n \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

(8) მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 2. გამოვარკვეოთ მწკრივის

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (19)$$

კრებადობა.

ავილოთ მწკრივის მონაკვეთი, რომელიც p წევრს შეიცავს

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!},$$

რადგანაც

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} < \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 2} = \frac{1}{2^n},$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!} &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \\ &+ \frac{1}{2^{n+p-1}} = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

თუ ავიღებთ ისეთ $N \in \mathbb{N}$, რომ $2^{N-1} > \frac{1}{\varepsilon}$, მაშინ უტოლობა

$$\left| \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!} \right| < \varepsilon$$

შესრულდება ყოველი $n > N$ და ნებისმიერი p ნატურალური რიცხვისათვის.

ამგვარად, (19) მწკრივისათვის სრულდება კრებადობის კოშის კრიტერიუმი. (19) მწკრივი კრებადია.

(19) მწკრივის S_n კერძო ჯამი ჩვენთვის ცნობილია (ნაწ. I, თ. XV, § 3, n 3):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

საიდანაც

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

სავარჯიშო 10.

1. გამოვიკვლიოთ მწკრივის

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots$$

კრებადობა. განიხილოთ $s > 1$, $s < 1$ შემთხვევები ($s > 1$ — კრ.; $s < 1$ — განშ.).

2. გამოვიკვლიოთ, რომელი მწკრივია კრებადი მოცემული მწკრივებიდან

$$1) 1 + \frac{10}{1} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \dots + \frac{10^n}{n!} + \dots \quad (\text{კრ.})$$

$$2) 1 + \frac{1}{10} + \frac{2!}{10^2} + \frac{3!}{10^3} + \dots + \frac{n!}{10^n} + \dots \quad (\text{განშ.})$$

3. გამოვიკვლიოთ მწკრივის

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots$$

კრებადობა და გამოთვალოთ მისი ჯამი.

4. გამოიკვლიეთ მწკრივის

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \frac{1}{10^9} + \frac{1}{10^{11}} + \frac{1}{10^{13}} + \dots$$

კრებადობა. მწკრივის ჯამი როგორი რიცხვია?

5. გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივის კრებადობა

$$\begin{aligned} 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2+k^4} \quad (\text{კრ}); & \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1} \quad (\text{განშ}); \\ 3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}; \quad (\text{განშ}) & \quad 4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2+3)^{5/3}} \quad (\text{კრ}); \\ 5) \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \quad (\text{კრ}); & \quad 6) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2} \quad (\text{კრ}); \\ 7) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^{k-1}} \quad (\text{კრ}); & \quad 8) \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+2}{k^2+3} \quad (\text{კრ}). \end{aligned}$$

6. გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივის კრებადობა. კრებადობის შემთხვევაში გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; S = \frac{1}{4}. & \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2-9}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; S = \frac{1}{2}. & \quad 4) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-1)}; \\ 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; S = 1. & \quad 6) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \dots \\ 7) \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots; S = \frac{1}{2}. & \\ 8) 1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \dots & \end{aligned}$$

§ 2. დადებითი მწკრივები

1. დადებითი მწკრივების კრებადობის და განშლადობის საკმარისი პირობები.

განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

თუ მწკრივის წევრები $u_n \geq 0$, მაშინ მას დადებით წევრებს იწოდებენ, უბრალოდ, დადებითი მწკრივი ეწოდება.

შევადგინოთ კერძო ჯამი S_n და განვიხილოთ კერძო ჯამების მიმდევრობა

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

რადგანაც

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n,$$

მიმდევრობა (S_n) ზრდადია. თუ მოვიგონებთ თეორემას მონოტონური მიმდევრობის შესახებ (ნაწ. I, თავი XIII, § 4, n2), მივიღებთ დადებითი მწკრივების კრებადობის და განშლადობის პირობებს:

თეორემა 1. დადებითი მწკრივი კრებადია, თუ მისი კერძო ჯამების მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია და დადებითი მწკრივი განშლადია, თუ მისი კერძო ჯამების მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არაა.

დადებითი მწკრივების კრებადობის ან განშლადობის ყველა ნიშანი ამ მარტივ თეორემაზეა დამყარებული.

მაგალითად, ავიღოთ ჰარმონიული მწკრივი (ეს მწკრივი ჩვენთვის ცნობილია)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

ამ მწკრივის პირველი და მეორე წევრი უკუუვადლოთ (ამით მწკრივის კრებადობა და განშლადობა არ დაირღვევა) და დავალაგოთ ისე, რომ თითოეულში იყოს 2^k წევრი:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_2; \quad \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2}; \quad \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{2^3}; \dots, \\ & \dots, \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^n}; \dots \end{aligned}$$

ამ წევრებით მივიღებთ კერძო ჯამებს, S_{2^n} ადვილი შესაძენვეია, რომ

$$S_{2^n} > n \frac{1}{2};$$

რადგანაც

$$\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

მაშასადამე, პარმონიული მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არაა. პარმონიული მწკრივი განშლადია.

1-ელ თეორემას დიდი თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს, რადგანაც ხშირად კერძო ჯამების გამოსახულება იმდენად რთულია, რომ მათი ზღვრის მოძებნა მეტად ძნელია და ზოგჯერ შეუძლებელიცაა. მაგრამ ზოგჯერ შეიძლება კერძო ჯამების მიმდევრობის შეფასება თუნდაც უხეშად, ამ შეფასებით გამოვარკვევთ მწკრივის კრებადობას. ამის მაგალითი იყო ზემოთ განხილული პარმონიული მწკრივი. კერძო ჯამები უხეშად შევაფასეთ, $S_{2^n} > n \cdot \frac{1}{2}$, რითაც დავადგინეთ პარმონიული

მწკრივის განშლადობა.

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი.

გამოვარკვეოთ

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^n + 1} + \dots$$

მწკრივის კრებადობა.

ამ შემთხვევაში

$$S_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

ამრიგად, კერძო ჯამების მიმდევრობა (S_n) ზრდადია და შემოსაზღვრული. მაშასადამე, ადებული მწკრივი კრებადია.

2. მწკრივთა შედარების თეორემები. დადებითი მწკრივის კრებადობას ან განშლადობას ხშირად ადვილად ადგენენ სხვა ცნობილ მწკრივთან შედარებით. ცხადია, ამ მეორე მწკრივის განშლადობა ან კრებადობა ცნობილია.

ქვემოთ მწკრივთა შედარების შესახებ დავამტკიცებთ თეორემას.

ვთქვათ, მოცემულია დადებითი მწკრივები

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (v)$$

სიმარტივისათვის ეს მწკრივები (u) და (v) ასოებით აღვნიშნოთ და ვუწოდოთ (u) მწკრივი და (v) მწკრივი.

თეორემა 2. თუ რომელიმე k ნომრიდან დაწყებული (u) და (v) მწკრივებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$u_n \leq v_n \quad (2)$$

და (v) მწკრივი კრებადია, მაშინ კრებადია (u) მწკრივიც და თუ (u) მწკრივი განშლადია, განშლადი იქნება (v) მწკრივიც.

დამტკიცება. პირველი პარაგრაფის 1-ლი თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია, მივიღოთ, რომ (2) პირობა სრულდება $k=1$ -დან, წინააღმდეგ შემთხვევაში (u) და (v) მწკრივებიდან უკუგაგდებთ იმ წევრებს, რომელთათვისაც (2) პირობა არ სრულდება. ამით (u) და (v) მწკრივების კრებადობა ან განშლადობა არ დაირღვევა.

ვთქვათ, (v) მწკრივი კრებადია. მაშინ 1-ლი თეორემის საფუძველზე (v) მწკრივის კერძო ჯამების (V_n) მიმდევრობა ზემოდან იქნება შემოსაზღვრული:

$$V_n \leq L, \quad n = 1, 2, \dots$$

მაგრამ (2) პირობის საფუძველზე ადვილი მისახვედრია, რომ (u) მწკრივის კერძო ჯამების (U_n) მიმდევრობა აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$U_n \leq V_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

ამ უტოლობის წინა უტოლობასთან შედარება მოგვცემს

$$U_n \leq L, \quad n = 1, 2, \dots$$

მაშასადამე, (U_n) მიმდევრობა (ზრდადი) ზემოდან შემოსაზღვრულია, რაც ამტკიცებს თეორემის პირველ ნაწილს.

თეორემის მეორე ნაწილის ქვემარტებაში ადვილად დავრწმუნდებით.

განვიხილოთ მაგალითი.

გამოვარკვეოთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{2^n} \quad (3)$$

მწკრივის კრებადობა, სადაც x ნებისმიერი რიცხვია.

13. გ. კომლოძე

რადგანაც

$$\left| \frac{\sin^2 nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

და

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

მწკრივი კრებადია, (3) მწკრივიც კრებადია.

თეორემა 3. თუ (u) და (v) მწკრივებისათვის არსებობს სასრული და ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = K, \quad (4)$$

მაშინ (u) და (v) მწკრივები ერთდროულად კრებადია ან განშლადია.

დამტკიცება. თეორემაში იგულისხმება, რომ $v_n \neq 0$. (4) პირობა ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} | (\forall n > N) \Rightarrow \left(K - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < K + \varepsilon \right),$$

ანუ

$$(K - \varepsilon) v_n < u_n < (K + \varepsilon) v_n, \quad n > N \quad (5)$$

ყოველი n -სათვის, რომელიც მეტია N -ზე, N — სასრულია.

თუ (v) მწკრივი კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება მწკრივი, რომელიც მიიღება მისი $(K + \varepsilon)$ -ზე გამრავლებით. მაშინ (5) უტოლობიდან დავასკვნით, რომ (u) მწკრივიც კრებადია.

თუ (u) მწკრივი კრებადია, მაშინ (5) უტოლობის პირველი ნაწილიდან დავასკვნით $(K - \varepsilon)(v)$ მწკრივი კრებადი იქნება და, მაშასადამე, (v) მწკრივიც კრებადი იქნება (ε ისე ავიღოთ, რომ $\varepsilon < K$).

ამგვარად, ვაჩვენეთ, რომ, თუ (u) და (v) მწკრივებისათვის (4) პირობა სრულდება მაშინ (u) და (v) მწკრივები ერთდროულად კრებადია.

თუ (v) მწკრივი განშლადია, (5) უტოლობის პირველი ნაწილიდან დავასკვნით, რომ (u) მწკრივიც განშლადია, ხოლო თუ (u) მწკრივი განშლადია, მაშინ იმავე უტოლობის მეორე ნაწილიდან დავასკვნით, რომ (v) მწკრივიც განშლადი იქნება.

ამით თეორემა დამტკიცდა.

ახლა ვთქვათ (u) და (v) მწკრივები ასეთ პირობას აკმაყოფილებდნენ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

იგულისხმება u_n, v_n ნულისაგან განსხვავდებიან, მაშინ

$$\frac{u_2}{u_1} \leq \frac{v_2}{v_1}, \quad \frac{u_3}{u_2} \leq \frac{v_3}{v_2}, \dots, \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}}$$

უტოლობათა გადამრავლებით მივიღებთ

$$\frac{u_n}{u_1} \leq \frac{v_n}{v_1},$$

ანუ

$$u_n \leq \frac{u_1}{v_1} v_n. \quad (7)$$

თუ (v) მწკრივი კრებადია, $\frac{u_1}{v_1}(v)$ მწკრივიც კრებადი იქნება და (7)

უტოლობის საფუძველზე დავასკვნით, რომ (u) მწკრივიც კრებადი იქნება. ასევე, თუ (u) მწკრივი განშლადია, მაშინ $\frac{u_1}{v_1}(v)$ მწკრივიც განშლადი იქნება და, მაშასადამე, (v) მწკრივიც განშლადი იქნება.

ამგვარად, მართებულია შემდეგი თეორემა

თეორემა 4. თუ (u) და (v) მწკრივებისათვის რომელიმე $n > N$ -ისათვის, N სასრულია, სრულდება უტოლობა

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

მაშინ, თუ (v) მწკრივი კრებადია, (u) მწკრივიც კრებადი იქნება და თუ (u) მწკრივი განშლადია, მაშინ (v) მწკრივიც განშლადი იქნება.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. გამოვარკვიოთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ მწკრივის კრებადობა.

რადგანაც

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$$

და პარმონიული მწკრივი განშლადია, მწკრივთა შედარების თეორემის

საფუძველზე მწკრივიც $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ განშლადია.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{n^k} \quad (8)$$

კრებალობა.

ადგილი შესამჩნევია

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}, \quad n > 3.$$

მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^k} = 2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \right)$$

კრებალია, მაშინ, ცხადია, (8) მწკრივი კრებალია.

3. მწკრივთა კრებალობის საკმარისი პირობები. დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5. დადებით წევრებიანი (u) მწკრივისათვის რომელიმე წევრიდან დაწყებული ადგილი აქვს უტოლობას

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1, \quad (9)$$

მაშინ (u) მწკრივი კრებალია. ხოლო, თუ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q > 1, \quad (10)$$

მაშინ (u) მწკრივი განშლადია (მწკრივის კრებალობის დაღმარების ნიშანი).

დამტკიცება: ვთქვათ (9) უტოლობას ადგილი აქვს პირველი წევრიდან, მაშინ უტოლობების

$$\frac{u_2}{u_1} \leq q, \quad \frac{u_3}{u_2} \leq q, \dots, \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q$$

გადამრავლებით მივიღებთ

$$\frac{u_n}{u_1} \leq q^n,$$

ანუ

$$u_n \leq u_1 q^n. \quad (11)$$

$$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \dots + u_1 q^n + \dots$$

ეს მწკრივი კრებალია, თუ $0 \leq q < 1$. რადგანაც (u) და გეომეტრიული მწკრივებისათვის ადგილი აქვს (11) პირობას, მაშინ მწკრივთა შედარების მე-2 თეორემის საფუძველზე (11) პირობიდან მივიღებთ, რომ (u) მწკრივი კრებალია.

სიტყვა-სიტყვით ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის გამეორებით (10) უტოლობიდან მივიღებთ

$$u_n \geq u_1 q^n.$$

თუ გეომეტრიულ მწკრივში $q \geq 1$, მაშინ გეომეტრიული მწკრივი განშლადია, და, ცხადია, ამ პირობის საფუძველზე, (u) მწკრივიც განშლადი იქნება.

მწკრივის კრებალობის დაღმარების ნიშანს შეიძლება მივცეთ პრაქტიკულად უფრო გამოსაყენებელი სახე.

ვთქვათ, რომ (u) მწკრივისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \quad (12)$$

თუ $l < 1$, მაშინ მწკრივი კრებალია; თუ $l > 1$, მაშინ მწკრივი განშლადია; თუ $l = 1$, მაშინ გვაქვს სიუჟეო მდგომარეობა.

მართლაც, ზღვრის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

განმარტების თანახმად

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid (n > N) \Rightarrow \left(l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon \right). \quad (13)$$

ε იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ $q = l + \varepsilon < 1$, მაშინ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q < 1,$$

როცა $n > N$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ (u) მწკრივი კრებალია.

თუ $l > 1$, მაშინ ε იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ $q = l - \varepsilon > 1$. ამ შემთხვევაში (13) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > q > 1.$$

ე. ი. მივიღეთ (10) უტოლობა. მაშასადამე, (u) მწკრივი განშლადია.

განვიხილოთ შემთხვევა $q=1$. ავიღოთ 1-ელ პარაგრაფში შესწავლილი მწკრივი (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

და პარმონიული მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

პირველი მწკრივისათვის

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

ასევე, პარმონიული მწკრივისათვის

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

ორივე მწკრივისათვის $l=1$, მაგრამ პირველი მწკრივი კრებადია, ხოლო პარმონიული მწკრივი განშლადი. ამიტომ ამბობენ: გვაქვს საექვო მდგომარეობა. ამ შემთხვევაში მწკრივის კრებადობა სხვა მეთოდით უნდა გამოვარკვიოთ.

თეორემა 6. თუ დადებითი (u) მწკრივისათვის დაწყებული რომელიმე წევრიდან ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1,$$

მაშინ მწკრივი კრებადია: თუ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sqrt[n]{u_n} \geq q > 1,$$

მაშინ მწკრივი განშლადია (მწკრივის კრებადობის კოშის ნიშანი).

ეს თეორემა მე-5 თეორემის ანალოგიურად დამტკიცდება. საქმარისაა: (u) მწკრივი შევადაროთ გეომეტრიულ მწკრივს, $u_n \leq q^n$, $q < 1$.

პრაქტიკულად უფრო გამოსაყენებელია მწკრივის კრებადობის კოშის ნიშანი შემდეგი სახით:

ვთქვათ, (u) მწკრივისათვის არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

თუ $l < 1$, მაშინ მწკრივი კრებადია; $l > 1$, მაშინ მწკრივი განშლადია; და, თუ $l=1$, საექვო მდგომარეობა გვაქვს.

შევნიშნოთ, რომ, როცა (u) მწკრივისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

და $l=1$, არც მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანი და არც კოშის ნიშანი მწკრივის კრებადობას ვერ არკვევს. მაგრამ მაინც იბადება კითხვა: მწკრივის კრებადობის ამ ორი ნიშნიდან რომელია უფრო ძლიერი? ამისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი წინადადება:

თუ არსებობს $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, მაშინ არსებობს $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ და კეშმარიტია ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l. \quad (14)$$

წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი დამხმარე წინადადება. (ამ წინადადებას დამოუკიდებელი მნიშვნელობაც აქვს): თუ დადებითი რიცხვთა $(a_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობას აქვს ზღვარი, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, მაშინ ამ რიცხვთა საშუალო გეომეტრიულსაც აქვს ზღვარი და ეს ზღვარი l -ის ტოლია,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = l.$$

მართლაც, $(b_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობის ლოგარითმზე გამოვიყენოთ კოშის თეორემა (ნაწ. I, თავი XIII, § 6, მე-7 თეორემა), გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln l.$$

(ეს ტოლობა სამართლიანია $l=0$ -თვისაც, $l=0$, $\ln l = -\infty$). ლოგარითმული ფუნქციის უწყვეტობის საფუძველზე მივიღებთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = e^{\ln l} = l.$$

ამით დამხმარე წინადადების კეშმარიტება დამტკიცდა.

ახლა ავიღოთ მიმდევრობა

$$a_1 = u_1, \quad a_2 = \frac{u_2}{u_1}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}, \quad \dots$$

¹ В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, Основы математического анализа, т. I, М., 1982, стр. 422.

პირობის თანახმად $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = l$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_1 \cdot \frac{u_2}{u_1} \dots \frac{u_n}{u_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

ამით დამტკიცდა, რომ, თუ სრულდება მწკრივის კრებადობის დალამბერის პირობა, მაშინ სრულდება მწკრივის კრებადობის კოშის პირობა. შეზღუდული წინადადება არაა ჭეშმარიტი. მართლაც, მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}$$

კრებადია კოშის ნიშნით,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

როცა აღებული მწკრივისათვის $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ არ არსებობს.

ამრიგად, მწკრივის კრებადობის კოშის ნიშანი უფრო ძლიერია, ვიდრე მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანი.

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი. გამოვარკვეოთ ე. წ. განზოგადებული ჰარმონიული მწკრივის კრებადობა:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = 1 + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a} + \dots \quad (15)$$

ეს მწკრივი განშლადია, როცა $a \leq 1$, რადგანაც

$$\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$$

და ჰარმონიული მწკრივი განშლადია. ხოლო $a > 1$ -სათვის ვერც ერთი მწკრივის ამკრებადობის პირობიდან ვერ განსაზღვრავს განზოგადებული ჰარმონიული მწკრივის კრებადობას.

ქვემოთ განვიხილავთ მწკრივის კრებადობის უფრო ზოგად ნიშანს ე. წ. მწკრივის კრებადობის ინტეგრალურ — კოში-მ-აკლო-რენის ნიშანს, საიდანაც, როგორც კერძო შემთხვევა დავასკვნით, რომ განზოგადებული ჰარმონიული მწკრივი კრებადია, თუ $a > 1$.

4. მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი. განვიხილავთ მწკრივის კრებადობის ნიშანს, რომელიც დაფუძნებულია მწკრივითა და არასაკუთრივ ინტეგრალთა შედარებაზე.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $1 \leq x < +\infty$ შუალედში, ამასთან ამ შუალედში დადებითი და კლებადია. შევადგინოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათაგან მწკრივი

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots \quad (16)$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ მწკრივის კრებადობასა და არასაკუთრივ ინტეგრალის

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \quad (17)$$

კრებადობას შორის არსებობს პირდაპირი კავშირი. ამისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7. თუ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ყველა $x \geq 1$ -სთვის, არაუარყოფითია და

კლებადი, მაშინ მწკრივის $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი არასაკუთრივ

ინტეგრალის $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ კრებადობა (მწკრივის

კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი).

დამტკიცება. განვიხილოთ Oxy კოორდინატთა სისტემაზე

$y=f(x)$ წირი (ნახ. 1). რადგანაც

$f(x)$ ფუნქცია $[k, k+1]$ სეგმენტზე კლებადია, გვექნება

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1), \quad k=1, 2, \dots;$$

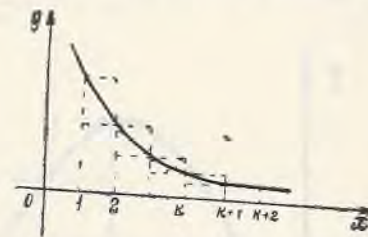
ინტეგრირებით $[k, k+1]$ სეგმენტზე მივიღებთ:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1),$$

$$k=1, 2, \dots;$$

შევკრიბოთ ეს უტოლობანი $k=1$ -დან $k=n$ -მდე,

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1).$$



ნახ. 1

რადგანაც (16) მწკრივის კერძო ჯამია

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k),$$

გვექნება

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq S_{n+1} - f(1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

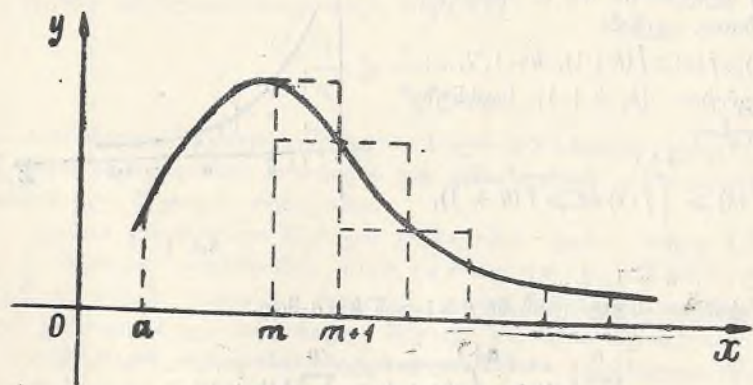
თუ (17) ინტეგრალი კრებადია, მაშინ (16) მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა, (18) პირობის საფუძველზე, შემოსაზღვრულია ზემოდან. ეს კი გვიჩვენებს, რომ (16) მწკრივი კრებადია.

თუ (16) მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი კერძო ჯამების მიმდევრობა კრებადია; ყოველი n -სათვის, $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq S$. (18) უტოლობის ძალით მივიღებთ

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq S. \quad (19)$$

მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია (19) ინტეგრალი, ზრდადი და ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშასადამე, ინტეგრალი (17) კრებადია.

თუ (16) მწკრივის წევრები მხოლოდ რომელიმე $u_m = f(m)$ წევრიდანაა კლებადი, როგორც ნაჩვენებია მე-2 ნახაზზე, მაშინ (16) მწკრივი



ნახ. 2

უნდა განვიხილოთ $f(m)$ წევრიდან და ნაცვლად (18) უტოლობისა გვექნება:

$$S_n \geq \int_m^{n+1} f(x) dx \geq S_{n+1} - f(m), \quad n=m, m+1, \dots, \quad (20)$$

ხოლო (19) უტოლობის ნაცვლად უტოლობა

$$\int_m^{n+1} f(x) dx \leq S. \quad (21)$$

ამ უტოლობათა საშუალებით დავადგენთ,

$$f(m) + f(m+1) + \dots$$

მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი

$$\int_m^{+\infty} f(x) dx$$

ინტეგრალის კრებადობა.

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 3. გამოვიკვლიოთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots, \quad a > 0. \quad (15)$$

მწკრივის კრებადობა.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \frac{1}{x^a}$$

შუალედში $1 \leq x < \infty$. ეს ფუნქცია დადებითია და კლებადი, რადგანაც $a > 0$. (15) მწკრივის კრებადობას გამოვარკვევთ

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}. \quad (22)$$

არასაკუთრივი ინტეგრალით. ამ არასაკუთრივი ინტეგრალის გამოთვლა მოგვცემს

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-\alpha} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{1-\alpha} - 1).$$

თუ $1-\alpha < 0$, მაშინ არასაკუთრის ინტეგრალი (22) კრებადია.

ამრიგად, (15) მწკრივი კრებადია, თუ $\alpha > 1$.

დამტკიცებული მე-7 თეორემიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ ნაშთისათვის

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = f(n+1) + f(n+2) + \dots$$

მივიღებთ

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{\infty} f(x) dx = F(\infty) - F(n), \quad (23)$$

სადაც

$$F'(x) = f(x).$$

ზემოთ განხილული განზოგადებული (15) ჰარმონიული მწკრივის ნაშთი შევადგათ. გვექნება

$$R_n \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_n^m \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} [\lim_{m \rightarrow \infty} m^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}] = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}},$$

რადგანაც

$$1-\alpha < 0.$$

ამრიგად, მივიღეთ განზოგადებული ჰარმონიული მწკრივის ნაშთის შეფასება

$$R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \quad \alpha > 1. \quad (24)$$

5. მწკრივის კრებადობის რააბეს ნიშანი. ჩვენ ქვემოთ (თავი XI, § II) გამოვიყენებთ მწკრივის კრებადობის რააბეს (I. L. Raabe) ნიშანს, რომელიც მიიღება განზოგადებული ჰარმონიული მწკრივის კრებადობის ნიშნიდან. ამასთან რააბეს ნიშანი უფრო ძლიერია, ვიდრე კოშისა და დალამბერის ნიშნები. მწკრივის კრებადობის რააბეს ნიშანი შემდეგი თეორემით ჩამოყალიბდება:

თეორემა 8. თუ (u) მწკრივისათვის დაწყებული რომელიმე N ნომრიდან, $n > N$ -ისთვის სრულდება უტოლობა

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq r > 1, \quad (25)$$

მაშინ მწკრივი კრებადია, ხოლო, თუ რომელიმე N ნომრიდან, $n > N$ -თვის, სრულდება უტოლობა

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad (26)$$

მაშინ (u) მწკრივი განშლადია.

დამტკიცება. პირობის თანახმად შეგვიძლია ისეთი რიცხვი N ავიღოთ, რომ $n > N$ -თვის

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > r > 1. \quad (27)$$

ასეთ N -ს ქვემოთ განვსაზღვრავთ. (27)-დან ცხადია

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}. \quad (28)$$

ავარჩიოთ ისეთი $\sigma > 0$, რომ $1 + \sigma < r$ და, მაშინ ისეთი n ავიღოთ, რომ

$$\frac{r}{n} > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1+\sigma} - 1, \quad (29)$$

ახუ

$$\frac{r}{n} - \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1+\sigma} - 1 \right] > 0. \quad (30)$$

ამისათვის $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1+\sigma}$ გავშალოთ $x = \frac{1}{n}$ -ის მიმართ $x=1$ -ის მახლობლობაში ტეილორის მწკრივად და შევჩერდეთ მესამე წევრზე:

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1+\sigma} = 1 + \frac{1}{n} \frac{(1+\sigma)}{1!} + \frac{1}{n^2} \frac{(1+\sigma)\sigma}{2!} \left(1 + \frac{\theta}{n} \right)^{\sigma-1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

მაშინ

$$\frac{r}{n} - \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1+\sigma} - 1 \right] = \frac{r - (1+\sigma)}{n} - \frac{1}{n^2} \frac{(1+\sigma)\sigma}{2} \left(1 + \frac{\theta}{n} \right)^{\sigma-1}. \quad (31)$$

ამ გამოსახულების ნიშანი განისაზღვრება $\frac{r - (1+\sigma)}{n}$ -ის ნიშნით. ასე რომ, ისეთი დიდი n შეგვიძლია ავიღოთ, რომ (31) გამოსახულება დადებითი იყოს. სწორედ, n -ის ეს მნიშვნელობა მივიღოთ N -ის მნიშვნელობად.

ამრიგად, ისეთი ნატურალური რიცხვი N შევარჩიეთ, რომ სრულდება (30) უტოლობა და, მაშასადამე, (29) და (28) პირობები. ამ უტოლობებიდან დავასკვნით

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\sigma} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1+\sigma},$$

საიდანაც

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\sigma} = \frac{1}{\frac{(n+1)^{1+\sigma}}{n^{1+\sigma}}}.$$

მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრია $\frac{1}{n^{1+\sigma}}$ (განზოგადებული პარმონიული მწკრივი, $\sigma > 0$), კრებადია. მაშასადამე, იმ მწკრივისათვის, რომლისთვისაც დაწყებული რომელიმე N ნომრიდან სრულდება (25) პირობა, კრებადია.

თუ (u) მწკრივისათვის დაწყებული N ნომრიდან სრულდება (26) პირობა, მაშინ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრია $\frac{1}{n}$ (პარმონიული მწკრივი), განშლადია. მაშასადამე, (u) მწკრივი ამ შემთხვევაში განშლადია.

რეაბეს ნიშანი უმეტესად გამოიყენება ზღვრული ფორმით: თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = r > 1,$$

მწკრივი კრებადია და, თუ $r \leq 1$, მწკრივი განშლადია.

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 4. გამოვარკვიოთ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}, \quad (2n-3)!! = (2n-3)(2n-1)\dots 3 \cdot 1; \quad (2n)!! = 2n(2n-2)\dots 2; \quad (32)$$

მწკრივის კრებადობა.

რეაბეს ნიშნით გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{2(n+1)}{2n-1} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2} > 1.$$

მაშასადამე, (32) მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 5. გამოვარკვიოთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \quad (33)$$

მწკრივის კრებადობა.

რეაბეს ნიშნით გვექნება

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n}{\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - 1 \right). \end{aligned}$$

აღვნიშნოთ $\frac{1}{n} = x$; $(n \rightarrow \infty) \Rightarrow (x \rightarrow 0)$, მაშინ მივიღებთ $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1+x)^{-\frac{1}{x}} - 1}{x}.$$

ლოპიტალის წესის გამოყენება მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \frac{\left(e(1+x)^{-\frac{1}{x}} - 1 \right)'}{x'} &= \frac{e \left((1+x)^{-\frac{1}{x}} \right)'}{1} = \\ &= e(1+x)^{-\frac{1}{x}} \left(\left(-\frac{1}{x} \right)' \ln(1+x) - \frac{1}{x} \frac{(1+x)'}{1+x} \right) = \\ &= e(1+x)^{-\frac{1}{x}} \frac{(1+x) \ln(1+x) - x}{x^2(1+x)}. \end{aligned}$$

მიღებული ნამრავლის მეორე მამრავლზე ორჯერ გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი, გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e(1+x)^{-\frac{1}{x}} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+6x} = \frac{1}{2} < 1.$$

ამრიგად, (33) მწკრივი განშლადია.

აღვილი მისახედრია, რომ (32) და (33) მწკრივების კრებადობას მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშნით ვერ გამოვარკვევდით.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 11.

გამოარკვეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ (განშ.);
2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \sqrt{\ln k}}$ (განშ.);
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ (კრ.);
4. $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) q^k$, $0 < q < 1$ (კრ.);
5. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{\pi}{3^k}$ (კრ.);
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k^2 + 2}{k^2 + 1}$ (კრ.);
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2 - 3}{4k^4 + 3k}$ (კრ.);
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k + 4}{6k^2 - 2k}$ (განშ.).

§ 3. ნიშანცვლადი მწკრივი. კრებადობის ლაიბნიცის ნიშანი.
ნაშთის შეფასება

მწკრივს, რომლის წევრები რიგრიგობით ნიშანს იცვლიან, ნიშანცვლადი მწკრივი ეწოდება.

ნიშანცვლადი მწკრივის ზოგადი სახეა

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \quad u_n > 0. \quad (1)$$

ნიშანცვლადი მწკრივის შესახებ მართებულია ლაიბნიცის შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ ნიშანცვლადი (1) მწკრივის წევრები აბსოლუტურ სიდიდით კლებადია,

$$u_{n+1} < u_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad (3)$$

მაშინ (1) მწკრივი კრებადია.

დამტკიცება. ლუწი რიგის კერძო ჯამი S_{2n} ასე ჩაწერთ:

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

რადგანაც ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებანი (2) პირობის გამო დადებითია, (S_{2n}) მიმდევრობა ზრდადია.

იგივე S_{2n} ჯამი ასე ჩაწერთ:

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ ყველა S_{2n} ზემოდან შემოსაზღვრულია,

$$S_{2n} < u_1.$$

გამოვიყენოთ ზემოდან შემოსაზღვრული ზრდადი მიმდევრობის კრებადობის თეორემა და გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S.$$

ახლა ავიღოთ კენტი კერძო ჯამები: S_{2n-1} ,

$$S_{2n+1} = u_1 - u_2 + \dots - u_{2n} + u_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}.$$

(3) პირობის თანახმად

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0.$$

გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = S.$$

ამგვარად, S არის (1) მწკრივის ჯამი. ამით ჩამოყალიბებული თეორემა დამტკიცდა.

კენტი რიგის ჯამი ასე ჩაწერთ:

$$S_{2n+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2n} - u_{2n+1}).$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ S_{2n+1} ისე მიისწრაფვის S -კენ, რომ კლებულობს. თუ მხედველობაში მივიღებთ S_{2n} -ის ზრდადობას, გვექნება

$$S_{2n} < S < S_{2n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

საიდანაც

$$0 < S < u_1.$$

ეს უტოლობა საშუალებას მოგვცემს შევაფასოთ (1) მწკრივის ნაშთი.

მართლაც,

$$R_{2n} = u_{2n+1} - u_{2n+2} + \dots$$

(4) უტოლობის საფუძველზე მივიღებთ

$$0 < R_{2n} < u_{2n+1}.$$

R_{2n-1} -სათვის გვექნება

$$R_{2n-1} = -u_{2n} + u_{2n+1} - \dots$$

საიდანაც

$$R_{2n-1} < 0, \quad |R_{2n-1}| < u_{2n}.$$

ამრიგად, ნიშანცვლადი (1) მწკრივის ნაშთს R_{2n-1} , R_{2n} -ს აქვს სათანადოდ u_{2n} , u_{2n+1} -ის ნიშანი და აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლებია ამ წევრზე.

მწკრივს, რომელიც ლაიბნიცის თეორემაში ჩამოყალიბებულ პირობებს აკმაყოფილებს, ეწოდება ლაიბნიცის ტიპის მწკრივი.

მაგალითად, ლაიბნიცის ტიპის მწკრივებია

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots$$

ამ მწკრივთა კრებადობა გამომდინარეობს ლაიბნიცის თეორემიდან.

§ 4. მწკრივის აბსოლუტურად და პირობით კრებადობა. აბსოლუტურად კრებადი მწკრივის თვისებები. მწკრივთა გაშლადობა.

1. მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობა. განვიხილოთ ისეთი მწკრივი, რომლის წევრები სხვადასხვა ნიშნისაა. ამ შემთხვევაში მწკრივის კრებადობის დადგენა არც კოშის და არც დალამბერის ნიშნით არ შეიძლება. ამის გამო მწკრივებიდან უნდა გამოვყოთ კლასი ისეთი მწკრივებისა, რომელთა კრებადობის საკითხი აღნიშნული ნიშნებით შეისწავლება.

ჩვენ ზემოთ გავცანით, თუ როგორი მარტივი ნიშნებით შეისწავლება დადებითი მწკრივის კრებადობის საკითხი.

შემოვიღოთ ორი ცნება: მწკრივის აბსოლუტურად კრება-

დობა და უბრალოდ, ანუ პირობით კრებადობა. ავიღოთ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

ეს მწკრივი (u) ასოთი აღვნიშნოთ. მწკრივს აბსოლუტურად კრებადი ეწოდება, თუ კრებადია ამ მწკრივის წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილი მწკრივი:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

დამატებით თეორემა

თეორემა 1. თუ (1) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი იყოს, ე. ი. (2) მწკრივი კრებადი იყოს, მაშინ (1) მწკრივიც კრებადი იყოს.

ამ თეორემის დამტკიცება ადვილია, თუ გამოვიყენებთ მწკრივის კრებადობის კოშის აუცილებელ და საკმარის პირობას.

რადგანაც

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|$$

და (2) მწკრივი კრებადია, მაშინ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon : n > N, p \in \mathbb{N}.$$

ამ ორი დამოკიდებულებებიდან მივიღებთ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon : n > N, p \in \mathbb{N}.$$

შეშასაღამე, (1) მწკრივიც კრებადია.

(1) მწკრივს ეწოდება პირობით კრებადი, თუ მწკრივი კრებადია, მაგრამ აბსოლუტურად კრებადი არაა.

მაგალითად, მწკრივი

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} + \dots$$

აბსოლუტურად კრებადია, რადგანაც მისი წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილი მწკრივი

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

კრებადია, ხოლო ლაიბნიცის ტიპის მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

პირობით კრებადია, რადგანაც იგი კრებადია, მაგრამ მისი წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილი მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

განშლადია.

მწკრივი

$$1 - 1 + 1 - \dots$$

არც აბსოლუტურად კრებადია, არც პირობით კრებადია, არამედ განშლადია, რადგანაც ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ.

კრებადი მწკრივების ორ კლასად გაყოფას: აბსოლუტურად კრებად და პირობით კრებად მწკრივებად, დიდი მნიშვნელობა აქვს, რადგანაც აბსოლუტურად კრებად მწკრივებს აქვს თვისებები, რომლებიც არ გააჩნია პირობით კრებად მწკრივებს.

ავილოთ (u) მწკრივი, რომლის წევრები ზოგი დადებითია და ზოგი უარყოფითი, ცხადია, როგორც დადებითი წევრები, ისე უარყოფითი წევრები უსასრულოა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ერთ-ერთი ამათგანი, რომ სასრული იყოს, მაგალითად, უარყოფითი წევრები იყოს სასრული რაოდენობის, მაშინ შეგვიძლია იმდენად დიდი ავილოთ N , რომ წევრები

$$u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$$

დადებითი იქნება. მწკრივიდან წინა წევრების ჩამოცილებით, როგორც ვიცით, მწკრივის კრებადობა არ ირღვევა. ამ შემთხვევაში მივაღწეოთ ნიშნის მწკრივებზე.

(u) მწკრივის დადებით წევრთაგან შედგენილი მწკრივი იყოს

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots, \quad (p)$$

ხოლო უარყოფით წევრთა აბსოლუტურ სიდიდესთან შედგენილი მწკრივი იყოს

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n + \dots \quad (q)$$

დავამტკიცოთ

თეორემა 2. თუ (u) აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ მისი დადებით წევრთაგან შედგენილი (p) მწკრივი და უარყოფით წევრთა აბსოლუტურ მნიშვნელობათაგან შედგენილი (q) მწკრივი კრებადია. ამასთან

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$$

თუ (u) მწკრივი პირობით კრებადია, მაშინ მისი დადებით წევრთაგან შედგენილი (p) მწკრივი და უარყოფით წევრთაგან შედგენილი (q) მწკრივი განშლადია.

დაამტკიცება. განვიხილოთ $(|u|)$ მწკრივი. პირობის თანახმად იგი კრებადია, ცხადია, (p) მწკრივის კერძო ჯამი P_n ზრდადია. ამასთან m იმდენად დიდი შეგვიძლია ავილოთ, რომ $(|u|)$ მწკრივის კერძო ჯამი შეიცავდეს (p) კერძო ჯამის ყველა წევრს და, მაშინ

$$P_n = \sum_{k=1}^n p_k \leq S_m = \sum_{k=1}^m |u_k| < \sigma = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

მაშასადამე, კერძო ჯამის მიმდევრობა (P_n) ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრულია, (P_n) მიმდევრობას აქვს სასრული ზღვარი. ეს ზღვარი P ასოთი აღვნიშნოთ,

ამგვარადვე დავამტკიცებთ (q) მწკრივის კრებადობას,

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{n_2} q_k = P_{n_1} - Q_{n_2}, \quad n_1 + n_2 = n,$$

მხედველობაში მივიღოთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n_1} = P, \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} Q_{n_2} = Q,$$

გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} P_{n_1} - \lim_{n_2 \rightarrow \infty} Q_{n_2},$$

ანუ

$$S = P - Q.$$

ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცდა. თეორემის მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ: თუ (u) მწკრივი პირობით კრება-

დია, მაშინ (p) და (q) მწკრივები თუ კრებადია, კრებადრ იქნებოდა (u) აბსოლუტურად, რადგანაც

$$\sum_{k=1}^n |u_k| = P_{n_1} + Q_{n_2}, \quad n_1 + n_2 = n,$$

და მაშინ $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = P + Q$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

თუ (u) მწკრივის ერთ-ერთი მწკრივთაგანი კრებადი იქნებოდა, ხოლო მეორე განშლადი იქნებოდა, მაშინ (u) მწკრივი განშლადი იქნებოდა, რადგანაც ამ შემთხვევაში $n \rightarrow \infty$ -თვის გვექნებოდა:

$$\sum_{k=1}^n u_k = P_{n_1} - Q_{n_2} \rightarrow \infty.$$

ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

სასარგებო რაოდენობის შესაყრებათა ჯამის ძირითადი თვისებებია: ჯამი არ იცვლება შესაყრებათა გადანაცვლებით. აღნიშნული თვისება ჭეშმარიტია თუ არა კრებადი მწკრივისათვის? ამისათვის ავიღოთ ლაიბნიცის მწკრივი:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$$

ამ მწკრივის წევრები ასე გადავადგილოთ

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი 2-ჯერ ნაკლებია ლაიბნიცის მწკრივის ჯამზე.

მართლაც, ვთქვათ, აღებული მწკრივების კერძო ჯამებია

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right), \quad S'_{2n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right).$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$S'_{2n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right).$$

ცხადია,

$$S'_{2n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}; \quad S'_{2n-1} = \frac{1}{2} S_{2n} + \frac{1}{4n},$$

$$S'_{2n-2} = S'_{2n-1} + \frac{1}{4n-2}.$$

რადგანაც $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_{2n} = \frac{1}{2} S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S'_{2n-1} = \frac{1}{2} S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S'_{2n-2} = \frac{1}{2} S.$$

ამრიგად, ლაიბნიცის მწკრივის წევრთა ურთიერთადგილმონაცვლებით

მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია $\frac{1}{2} S$.

რაც გვიჩვენებს, რომ ლაიბნიცის მწკრივში წევრთა ურთიერთადგილმონაცვლება არ შეიძლება. ლაიბნიცის მწკრივი პირობით კრებადი მწკრივია.

პირობით კრებადი მწკრივისათვის ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3. პირობით კრებადი მწკრივის წევრთა გადანაცვლებით შეიძლება მივიღოთ მწკრივი, რომლის ჯამი წინასწარ მოცემული რიცხვია ან განშლადი მწკრივია. (რიმანის თეორემა).

დამტკიცება. ვთქვათ, (u) მწკრივი პირობით კრებადია,

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u)$$

მაშინ მხოლოდ დადებითი წევრებისაგან შედგენილი მწკრივი (p) და უარყოფითი წევრებისაგან შედგენილი მწკრივი (q) განშლადია. ავიღოთ რაიმე რიცხვი A . (u) მწკრივის დადებითი წევრებისაგან შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k > A. \quad (3)$$

ეს შესაძლებელია, რადგანაც (p) მწკრივი განშლადია $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$. ნომე-

რი n_1 ისეთი იყოს, რომ აღებული ჯამი p_{n_1} წევრის გარეშე არ იყოს A -ზე მეტი. (3) ჯამს დავემატოთ (u) მწკრივის უარყოფითი წევრები, შევექმნათ ახალი ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k < A. \quad (4)$$

¹ ბერნარდ რიმანი (1826—1866), გერმანელი მათემატიკოსი.

ნომერი m_1 , ისეთი იყოს, რომ q_{m_1} წევრის გარეშე (4) ჯამი არ იყოს ნაკლები A რიცხვზე. მიღებულ (4) ჯამს კვლავ დაემატოთ (p) მწკრივის წევრები, ისე რომ

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > A.$$

ასევე დაემატოთ (u) მწკრივის უარყოფითი წევრები ისე, რომ

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} q_k < A.$$

n_2 და m_2 ისე ავარჩიოთ, როგორც n_1 და m_1 და ასე შემდეგ. მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} q_k + \dots \quad (5)$$

ეს მწკრივი მხოლოდ (u) მწკრივის წევრთა გადაადგილებითაა მიღებული. დავამტკიცოთ, რომ (5) მწკრივის ჯამი A -ს ტოლია. მართლაც, (5) მწკრივის წევრები მხოლოდ (u) მწკრივის წევრებისაგანაა შედგენილი. კერძო ჯამი S'_n მეტია A -ზე, ხან ნაკლები, მაგრამ ისე, რომ

$$0 < S'_n - A < p_{n_k}, \quad 0 < A - S'_n < q_{m_k}.$$

ამრიგად,

$$|S'_n - A| < |u_e|,$$

სადაც (u) მწკრივის კრებადობის გამო $\lim_{e \rightarrow \infty} u_e = 0$, რაც მოგვცემს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = A.$$

ამით თეორემის ერთი ნაწილი დამტკიცდა. რომ მივიღოთ განშლადი მწკრივი, რიგ-რიგობით ავიღოთ (u) მწკრივის დადებითი და უარყოფითი წევრები, ისე რომ

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_1} p_k &> 1, & \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1, \\ \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k &> 2, & \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - q_2, \\ &\dots & \dots \end{aligned}$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ მწკრივს

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - q_2 + \dots, \quad (6)$$

რომლის n -ური კერძო ჯამი უსასრულოდ იზრდება და, მაშასადამე, მწკრივი განშლადი მწკრივია. ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4. თუ (u) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ (u) მწკრივის წევრთა ნებისმიერი გადაადგილებით მიღებული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია და მისი ჯამი (u) მწკრივის ჯამის ტოლია (კოშის თეორემა).

დამტკიცება. ვთქვათ, (u) მწკრივის ჯამია S ,

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u)$$

მწკრივი (u) აბსოლუტურად კრებადია. (u) მწკრივში რომელიმე გადაწვევებით წევრებისა მივიღეთ მწკრივი (u') ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k. \quad (u')$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ (u') მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია და მისი ჯამი არის S . ამ უკანასკნელისათვის საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის მოიწიხება ისეთი ნომერი N რომლისთვისაც

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - S \right| < \varepsilon, \quad \text{როცა } n > N. \quad (7)$$

ავიღოთ ε -ის რაიმე მნიშვნელობა. რადგანაც (u) მწკრივი კრებადია აბსოლუტურად და მისი ჯამი არის S , არჩეული ε -სათვის მოიწიხება ისეთი N_0 რომ

$$\sum_{k=N_0}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (8)$$

და

$$\left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

ცხადია, აღებული უტოლობანი უნდა დაგწეროთ სხვადასხვა N -სათვის და შემდეგ ავიღოთ მათგან უდიდესი მნიშვნელობა N_0 .

მე-(7) უტოლობაში ავიღოთ იმდენად დიდი N , რომ (u') მწკრივის კერძო ჯამი S'_n , სადაც $n > N$, შეიცავდეს ყველა პირველ N_0 წევრს (u) მწკრივიდან. შევაფასოთ სხვაობა

$$\sum_{k=1}^n u'_k - S = \left(\sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right). \quad (10)$$

ცხადია,

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - S \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right|. \quad (11)$$

ავიღოთ სხვაობა

$$\sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k. \quad (12)$$

N_0 -ის არჩევის გამო $n \geq N > N_0$ სხვაობა (12) მოგვცემს $n - N_0$ წევრის ჯამს (u) მწკრივის წევრებიდან, რომელთა ნომერი აღემატება N_0 -ს. თუ ავიღებთ ისეთ ნატურალურ რიცხვს p -ს, რომ $N_0 + p > n - N_0$, მაშინ ჰემ-მარიტი იქნება უტოლობა

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| \leq \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|.$$

ამ უტოლობიდან (8) უტოლობის საფუძველზე დავასკვნით

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \left| \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ხოლო, რაც შეეხება (11) უტოლობის მეორე შესაკრებლს იგი ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$ -ზე (9) პირობის თანახმად. ამრიგად,

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - S \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N\text{-თვის,}$$

ანუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u'_k = S.$$

დაგვჩა დაგვამტკიცოთ: (u') მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. ამ წინადადების დამტკიცებისათვის საკმარისია გამოვიყენოთ თეორემის წინა ნაწილის დამტკიცება მწკრივებისათვის

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u'_k|$$

ამით დამტკიცდება $\sum_{k=1}^{\infty} |u'_k|$ მწკრივის ჯამი S -ის ტოლია, რაც მოგვცემს

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u'_k| \text{ მწკრივის კრებადობას. ამრიგად მივიღებთ, რომ } (u') \text{ აბსოლუ-}$$

ტურად კრებადია. თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

2. მწკრივთა აბსოლუტური კრებადობის ზოგიერთი საკმარისი ნიშანი.

ავიღოთ

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u)$$

მწკრივის წევრთა აბსოლუტურ მნიშვნელობათაგან შედგენილი მწკრივი

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (|u|)$$

თუ $(|u|)$ მწკრივი კრებადია, ვიტყვი, (u) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. (u) მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობისათვის საკითხის გასარჩევად შეგვიძლია, გამოვიყენოთ დადებითი მწკრივების კრებადობის ყველა ნიშანი.

თეორემა 5. თუ (u) მწკრივისათვის არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l.$$

თუ $l < 1$, მაშინ (u) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, თუ $l > 1$, მაშინ (u) მწკრივი განშლადია. თუ $l = 1$, მაშინ (u) მწკრივი შეიძლება იყოს აბსოლუტურად კრებადი ან შეიძლება იყოს განშლადი (მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობის დალამბერის ნიშანი ზღვრის ფორმით).

თეორემა 6. თუ (u) მწკრივისათვის არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l.$$

თუ $l < 1$, მაშინ (u) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, თუ $l > 1$, მაშინ (u) მწკრივი განშლადია. თუ $l = 1$, მაშინ (u) მწკრივი შეიძლება იყოს აბსოლუტურად კრებადი ან შეიძლება იყოს განშლადი (მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობის კოშის ნიშანი ზღვრის ფორმით).

თეორემა 7. თუ (u) მწკრივის წევრები დაწყებული რაიმე N_0 ნომრიდან არ აღემატება დადებითი კრებადი (v) მწკრივის წევრებს აბსოლუტური მნიშვნელობით,

$$|u_n| \leq v_n, \quad n \geq N_0.$$

მაშინ (u) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია (მწკრივთა შედარების პრინციპი).

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. გამოვარკვიოთ x -ის რა მნიშვნელობისათვისაა კრებადი მწკრივი

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (13)$$

გამოვიყენოთ მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანი

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0, \quad l < 1.$$

მაშასადამე (13) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, $-\infty < x < +\infty$.

მაგალითი 2. გამოვარკვიოთ მწკრივის

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots \quad (14)$$

კრებადობა.

გამოვიყენოთ მწკრივის კრებადობის კოშის ნიშანი. გვექნება

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad l < 1$$

მაშასადამე, (14) მწკრივი კრებადია აბსოლუტურად.

მაგალითი 3. გამოვარკვიოთ მწკრივის კრებადობა

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots \quad (15)$$

გამოვიყენოთ შედარების პრინციპი. ჩვენთვის ცნობილია მწკრივის

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

კრებადობა:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad S_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2. \end{aligned}$$

გამოვიყენოთ უტოლობა

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)}, \quad (16)$$

რაც გვიჩვენებს (15) მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობას.

3. მწკრივთა ნამრავლი. ორი (u) და (v) მწკრივის

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \quad (u)$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots \quad (v)$$

ნამრავლი კოშის აზრით ან უბრალოდ ნამრავლი ეწოდება მწკრივს

$$w_0 + w_1 + \dots + w_n + \dots, \quad (w)$$

სადაც ზოგადი წევრი $w_n, n=0, 1, \dots$, განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0.$$

თუ (u) და (v) მწკრივები პირობით კრებადია, მაშინ მწკრივთა ნამრავლი შეიძლება განშლადი იყოს. ამისათვის განვიხილოთ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + \dots \quad (17)$$

მწკრივის თავისთავზე ნამრავლი. ამ ნამრავლის ზოგადი წევრი იქნება

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \cdot 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \dots + 1 \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right). \end{aligned}$$

აქედან, ცხადია,

$$|w_n| > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

მაშასადამე, (17) მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ. (17) მწკრივის თავისთავზე ნამრავლი მწკრივი განშლადია.

დამატებით შემდეგი თეორემა.

თეორემა 8. თუ (u) და (v) მწკრივები კრებადია და მათი ჯამებია სათანადოდ S და Q , ამასთან (u) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ ნამრავლი მწკრივი (w) კრებადია და მისი ჯამი SQ -ს ტოლია (მერტენსის თეორემა),

$$P = SQ.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ კერძო ჯამები:

$$S_n = \sum_{i=0}^n u_i, \quad Q_n = \sum_{i=1}^n v_i, \quad P_n = \sum_{i=0}^n w_i.$$

გამოვთვალოთ P_n :

$$P_n = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots + \\ + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0) = u_0 (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \dots + \\ + u_n v_0 = u_0 Q_n + u_1 Q_{n-1} + \dots + u_n Q_0 = \sum_{i=1}^n u_i Q_{n-i}.$$

რადგანაც

$$Q_{n-i} = Q + (Q_{n-i} - Q),$$

მაშინ

$$P_n = \sum_{i=0}^n u_i (Q + (Q_{n-i} - Q)) = Q S_n + K_n, \quad (18)$$

სადაც

$$K_n = \sum_{i=0}^n u_i (Q_{n-i} - Q). \quad (19)$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = 0.$$

რადგანაც (v) მწკრივი კრებადია, $\lim_{p \rightarrow \infty} Q_p = 0$, მაშინ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \left| Q_p - Q \right| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall p > N_0 \text{ სათვის,} \quad (20)$$

სადაც (u) მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობის გამო $M = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

ამავე (u) მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობის გამო არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $v \geq N_0$, რომ

$$\sum_{i=v+1}^{\infty} u_i < \frac{\varepsilon}{2M_1}, \quad (21)$$

სადაც

$$M_1 = \sup_{0 \leq i < \infty} |Q_i - Q|.$$

ახლა, ვთქვათ, $n > 2v$, მაშინ (20) და (21) უტოლობათა საფუძველზე მივიღებთ

$$|K_n| \leq \sum_{i=0}^v |u_i| \cdot |Q_{n-i} - Q| + \sum_{i=v+1}^n |u_i| \cdot |Q_{n-i} - Q| < \\ < \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{i=0}^v |u_i| + M_1 \sum_{i=v+1}^{\infty} |u_i| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ამრიგად,

$$|K_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > 2v.$$

ამის გამო (18) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = QS.$$

ჩამოყალიბებული თეორემა დამტკიცდა.

თუ მე-8 თეორემაში მოვიტხოვდით (u) და (v) მწკრივების აბსოლუტურად კრებადობას, მაშინ მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} w'_n, \quad (22)$$

სადაც

$$w'_n = |u_0 v_n| + |u_1 v_{n-1}| + \dots + |u_n v_0|,$$

ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად, კრებადია. მაშასადამე, მწკრივი (ა) აბსოლუტურად კრებადია. მერტენსის თეორემა ამ შემთხვევაში ასე ჩამოყალიბდება:

თეორემა 8. თუ (u) და (v) მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ მათი ნამრავლი მწკრივიც აბსოლუტურად კრებადია¹.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 12.

1. გამოარკვეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

$$1) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (1 + \sqrt{k})}{\sqrt{k^2 - 2}} \quad (\text{პირობით კრ.});$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k^k}{(2k+1)^k} \quad (\text{აბს. კრ.});$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{\pi}{\sqrt{k}} \quad (\text{პირობით კრ.});$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^k}{(2k+1)} \quad (\text{აბს. კრ.});$$

$$5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \quad (\text{პირობით კრ.});$$

$$6) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2} \quad (\text{აბს. კრ.});$$

$$7) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3k+2}{5k-1} \right)^{3k-1} \quad (\text{აბს. კრ.});$$

$$8) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{k+2} \right)^{-k+1} \quad (\text{კრ.});$$

$$9) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot k!}{k^k} \quad (\text{კრ.}).$$

¹ ვლ. ჭელიძე, ე. წითლანაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I, თბილისი, 1971, გვ. 149—152.

(ისარგებლეთ სტირლინგის ფორმულით

$$k! = \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e} \right)^k e^{\frac{\theta}{12k}}, \quad 0 < \theta < 1,$$

შემდეგ გამოიყენეთ კოშის ნიშანი, ან გამოიყენეთ თავიდანვე რააბეს ნიშანი).

2. ისარგებლეთ მწკრივთა შედარების პრინციპით ან რააბეს ნიშნით და გამოარკვეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k-3} \quad (\text{განშ.}); \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad (\text{კრ.});$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3+2} \quad (\text{კრ.}); \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3} \quad (\text{განშ.}).$$

3. ისარგებლეთ დალამბერის ნიშნით და გამოარკვეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{3^n} \quad (\text{კრ.}); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad (\text{განშ.});$$

$$3) \sum \frac{n^3}{3^n} \quad (\text{კრ.}); \quad 4) \frac{(3n+1)!}{9^n n^2} \quad (\text{განშ.}).$$

4. ისარგებლეთ კოშის ნიშნით და გამოარკვეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n \quad (\text{კრ.}); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n^2} \quad (\text{განშ.});$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \quad (\text{კრ.}); \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{2n-3} \right)^{2n} \quad (\text{კრ.}).$$

ფუნქციონატა მწკრივები

§ 1. ფუნქციონატა მწკრივები. კრებადობის არა. თვისებები

1. ფუნქციონატა მწკრივები. ჩვენ შევისწავლეთ მიმდევრობანი და მათი ზღვრები, რიცხვითი მწკრივები და მათი ჯამები. ვაჩვენეთ, რომ მიმდევრობა წარმოიდგინება მწკრივით და, პირიქით, მწკრივი წარმოიდგინება მიმდევრობით. როგორც მწკრივთა ისე მიმდევრობათა წევრები იყო მუდმივები. თუმცა ზოგჯერ მწკრივის ან მიმდევრობის წევრები ცვლადები იყო, მაგრამ მათ ყოველთვის მიეწერებოდა სრულად გარკვეული მნიშვნელობა. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ მიმდევრობის

$$\left(\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right)_{n \geq 1}$$

ზღვარი არის e^x . ასევე, მწკრივის ჯამი

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{n x^n}{n} + \dots$$

არის $\ln(1+x)$. მაგრამ აქ x იყო მუდმივი. მიმდევრობის წევრთა ფუნქციური ბუნება მიმდევრობის ზღვარში მხედველობაში არ იყო მიღებული.

ვთქვათ, ფუნქციები $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ განსაზღვრულია ერთსა და იმავე E არეში — სიმრავლეში. ეს არე შეიძლება იყოს სეგმენტი, ინტერვალი, ნახევარინტერვალი ან მთლიანად ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. ვთქვათ, x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის E არიდან მიმდევრობას

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (1)$$

აქვს ზღვარი. ცხადია, ეს ზღვარი x -ის მნიშვნელობის მიხედვით განისაზღვრება — x -ის ფუნქციად, $x \in E$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

ამ $f(x)$ ფუნქციის (1) მიმდევრობის ზღვარი ეწოდება. ჩვენ გვაინტერესებს (1) მიმდევრობის ზღვარი არა მარტო x -ის ყოველი მნიშვნე-

ნელობისათვის, არამედ მიმდევრობის ზღვარის $f(x)$ -ის ფუნქციური თვისებები. მაგალითად, ვთქვათ, (1) მიმდევრობის წევრები უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე $[a, b]$ სეგმენტზე. ამ მიმდევრობის ზღვარი $f(x)$ უწყვეტი ფუნქცია იქნება $[a, b]$ სეგმენტზე?

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 1. $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$. ცხადია, თუ $x < 1$, მაშინ $f(x) = 0$; თუ $x = 1$, მაშინ $f(1) = 1$. ფუნქცია $f(x)$ განიცდის წყვეტას $x = 1$ წერტილში.

მაგალითი 2. $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$, $0 \leq x \leq 1$. ცხადია, თუ $x > 0$ მაშინ $f(x) = 0$; თუ $x = 0$, მაშინ $f(0) = 1$. ფუნქცია $f(x)$ განიცდის წყვეტას $x = 0$ წერტილში.

მაგალითი 3. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$. ცხადია, $f(x) = 0$ ფუნქცია ყველგან უწყვეტია. — $-\infty < x < +\infty$.

ბუნებრივია დაგვებადება კითხვა. რა პირობებში ($f_n(x)$) მიმდევრობის ზღვარი $f(x)$ შეინარჩუნებს $f_n(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის თვისებას? ამ საკითხს ქვემოთ გაეარკვევთ.

ახლა განვიხილოთ მწკრივი, რომლის წევრები ერთი და იგივე x ცვლადის ფუნქციებია, $x \in E$,

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (2)$$

ასეთ მწკრივს ფუნქციონატა მწკრივი ეწოდება. ავიღოთ x -ის რაიმე x_0 მნიშვნელობა, $x_0 \in E$, და განვიხილოთ მწკრივი

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots \quad (3)$$

მივიღეთ რიცხვითი მწკრივი. (3) მწკრივი კრებადია ან განშლადი. ვთქვათ, (3) მწკრივი კრებადია, ეს ჯამი აღენიშნოთ $S(x_0)$ სიმბოლოთი,

$$S(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots \quad (4)$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით ფუნქციონატა მწკრივი (2) კრებადია x_0 წერტილში.

ვითყვით, რომ (2) ფუნქციონატა მწკრივი კრებადია E არეში, თუ იგი კრებადია E არის ყოველ წერტილში. E არეს ეწოდება (2) ფუნქციონატა მწკრივის კრებადობის არე.

(4) ტოლობის საფუძველზე ადვილად დავადგენთ, რომ, თუ (2) მწკრივის კრებადობის არეა E მისი ჯამი იქნება x -ის ფუნქცია, $S(x)$, $x \in E$, რაც ასე ჩაიწერება

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (5)$$

ისე, როგორც რიცხვითი მწკრივისათვის, აქაც (5) ტოლობა ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad (6)$$

სადაც $S_n(x)$ -ს ეწოდება (2) ფუნქციითა მწკრივის n -ური კერძო ჯამი,

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x),$$

ხოლო $R_n(x)$ -ს (2) ფუნქციითა მწკრივის ნაშთი,

$$R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$$

(2) ფუნქციითა მწკრივის E არეში კრებადობის განსაზღვრის თანახმად

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad (7)$$

მაშინ (6) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\lim_{x \rightarrow 0} R_n(x) = 0.$$

(7) ტოლობა ნიშნავს: მხოლოდ x -ის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის E არედან, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს N ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომ ყველა $n > N$ -სათვის

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

აქ სწორედ ის x -ია, რომელიც წინასწარ შევარჩიეთ. თუ სხვა x -ს ავიღებთ, $x \in E$, მაშინ სხვა $S_n(x)$ მიმდევრობას მივიღებთ და იმავე ε -თვის მონახული N შეიძლება აღარ გამოდგეს ამ ახალი მიმდევრობისათვის; ახლა N უფრო დიდი მნიშვნელობის უნდა ავიღოთ. ასე რომ, იცვლება x , სათანადოდ იცვლება ნატურალური რიცხვი N . ამის გამო შეგვიძლია, ვთქვათ, N არის ε -სა და x -ის ფუნქცია: $N(\varepsilon, x)$, $x \in E$. აქ დაისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ისეთი N , რომელიც გამოდგება ($S_n(x)$) ყველა მიმდევრობისათვის? ამის პასუხს ქვემოთ განხილული მაგალითებიდან მივიღებთ. ახლა კი განვსაზღვროთ მწკრივის თანაბრად კრებადობა.

ვიტყვი, რომ ფუნქციითა მწკრივის,

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots, \quad (2)$$

რომელიც კრებადია E არის ყოველ x წერტილში, ეწოდება თანაბრად კრებადი E არეში, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x -გან და-

მოუკიდებლად ისეთი ნატურალური რიცხვი N , რომ ყოველი $n > N$ -სათვის სრულდება უტოლობა

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

სადაც $S_n(x)$ მოცემული ფუნქციითა მწკრივის n -ური კერძო ჯამია.

ამრიგად, ფუნქციითა მწკრივი (2) თანაბრად კრებადია მისი კრებადობის E არეში, თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} | (\forall n > N) \Rightarrow (|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon). \quad (8)$$

ეს დამოკიდებულება (6) ტოლობის საფუძველზე ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ: ფუნქციითა მწკრივი (2) თანაბრად კრებადია მისი კრებადობის E არეში, თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} | (\forall n > N) \Rightarrow (|R_n(x)| < \varepsilon).$$

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციითა მწკრივი

$$x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) + \dots + \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-1}}{n-1}\right) + \dots \quad (9)$$

$0 \leq x \leq 1$ სეგმენტზე თანაბრად კრებადია.

(9) მწკრივისათვის

$$S_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = 0.$$

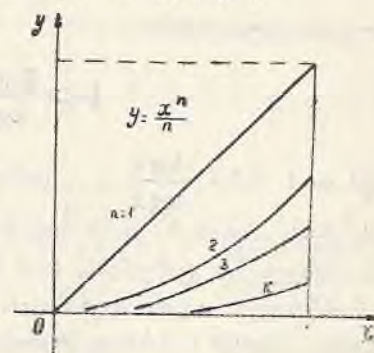
ე. ი. (9) მწკრივი კრებადია $0 \leq x \leq 1$ სეგმენტზე (ნახ. 1). ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია, $0 \leq x \leq 1$ სეგმენტზე.

რადგანაც (9) მწკრივი კრებადია, ამიტომ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(x, \varepsilon) | (\forall n > N) \Rightarrow \Rightarrow \left(\left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon \right).$$

მაგრამ

$$(\forall x \in [0, 1]) \Rightarrow \left(\frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n} \right). \quad (10)$$



ნახ. 1

თუ N -ს ავიღებთ იმდენად დიდს, რომ N ტოლი იყოს $\frac{1}{\varepsilon}$ -ის მთელი ნაწილისა (N არაა x -ზე დამოკიდებული),

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right],$$

მაშინ, ცხადია,

$$(\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow \left(\frac{1}{n} < \varepsilon \right)$$

და, მაშასადამე, (10) პირობით გვექნება:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow \left(\left| \frac{x^n}{n} \right| < \varepsilon \right).$$

ეს პირობა კი (9) მწკრივის თანაბრად კრებადობას გვიჩვენებს.

მაგალითი 2. გამოვარკვიოთ ფუნქციითა მწკრივის

$$x + (x^2 - x) + \dots + (x^n - x^{n-1}) + \dots \quad (11)$$

კრებადობა $0 \leq x \leq 1$ შუალედში.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $S_n(x) = x^n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

უტოლობა

$$x^n < \varepsilon$$

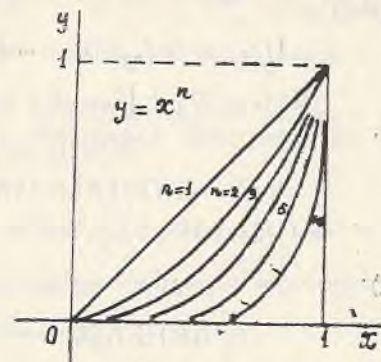
ტოლფასია უტოლობისა

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}.$$

როცა $x \rightarrow 1$, მაშინ $\frac{\log \varepsilon}{\log x} \rightarrow \infty$ და, ცხადია, x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, $x \rightarrow 1$, არავითარი n არ არსებობს, რომ $x^n < \varepsilon$ უტოლობას აკმაყოფილებდეს. ეს გვიჩვენებს, რომ მიმდევრობა $(S_n(x))$ თანაბრად არ მიისწრაფვის თავის ზღვრისაკენ. მაშასადამე, მწკრივი (11) კრებადია $0 \leq x \leq 1$, მაგრამ თანაბრად კრებადი არაა. მიღებული კერძო ჯამების —

$y = x^n$ ფუნქციის გრაფიკი n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ნაჩვენებია მე-2 ნახაზზე. უტოლობა $x^n < \varepsilon$ შეუძლებელია ყველა $x < 1$ -სათვის, როცა $\varepsilon < 1$. ეს იქიდან ჩანს, რომ $x^n \rightarrow 1$ (ფიქსირებული n -სათვის) თუ $x \rightarrow 1$. ნახაზი იძლევა შესაძლებლობას წარმოვიდგინოთ თანაბრად კრებადობის დარღვევა. ზღვრული ფუნქცია წყვეტას განიკდის.

როგორც ამ მაგალითიდან ჩანს, უწყვეტ ფუნქციასთან შედგენილი მწკრივის ჯამი შეიძლება იყოს უწყვეტი და შეიძლება იყოს წყვეტილიც. იმ დროს როდესაც უწყვეტ ფუნქციასთან სასრული ჯამი უწყვეტი ფუნქციაა.



ნახ. 2

თუ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ფუნქციითა მწკრივი თანაბრად კრებადია E სიმ-

რავლეში და მის ყოველ წევრს გაგამრავლებთ იმავე E სიმრავლეში განსაზღვრულ $v(x)$ ფუნქციაზე, მაშინ მიღებული ფუნქციითა მწკრივი თანაბრად კრებადია იმავე E სიმრავლეში.

2. ფუნქციითა მწკრივის თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადობის ვაიერშტრასის ნიშანი.

თეორემა 1. თუ E სიმრავლეში ფუნქციითა მწკრი-

ვის $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ წევრები აბსოლუტური მნიშვნელო-

ბით არ აღემატება სათანადოდ კრებადი დადებითი (v) რიცხვითი მწკრივის წევრებს,

$$|f_n(x)| \leq v_n. \quad (12)$$

მაშინ ფუნქციითა მწკრივი E სიმრავლეში კრებადია აბსოლუტურად და თანაბრად (ვაიერშტრასის თეორემა).

მართლაც, რადგანაც $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ მწკრივი დადებითი კრებადი მწკრი-

ვია, მაშინ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} | (\forall p \in \mathbb{N} \wedge \forall n > N) \Rightarrow \\ \Rightarrow (v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+p} < \varepsilon). \quad (13)$$

რადგანაც

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| \leq \\ \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)|,$$

მაშინ (12) უტოლობის საფუძველზე (13) პირობიდან მივიღებთ, რომ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} | (\forall p \in \mathbb{N} \wedge \forall n > N) \Rightarrow \\ \Rightarrow (|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)| < \varepsilon).$$

ამ უტოლობიდან დავასკვნით: ფუნქციითა მწკრივი

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

კრებადია თანაბრად და ამასთანავე აბსოლუტურად E სიმრავლეში. ამით გამოთქმული თეორემა დამტკიცდა.

3. ფუნქციითა მწკრივის ჯამის უწყვეტობა. წინა პუნქტში გვქონდა E არეში უწყვეტ ფუნქციითა თანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამი უწყვეტი ფუნქცია იყო იმავე E არეში (მაგალითი 1), ხოლო უწყვეტ ფუნქციითა არათანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამი წყვეტილი ფუნქცია (მაგალითი 2). მაგრამ ეს კიდევ იმას არ ნიშნავს, რომ უწყვეტ ფუნქციითა არათანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამი ყოველთვის წყვეტილი ფუნქციაა.

შემდეგი თეორემა გვაძლევს, რომ უწყვეტ ფუნქციითა მწკრივის თანაბრად კრებადობა საკმარისი პირობაა ფუნქციითა მწკრივის ჯამის უწყვეტობისათვის.

თეორემა 2. თუ თანაბრად კრებადი ფუნქციითა მწკრივის

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (2)$$

წევრები E არეში უწყვეტია, მაშინ ამ მწკრივის ჯამი $S(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა E არეში.

დამტკიცება: ვთქვათ, $x_0 \in E$, რადგანაც (1) მწკრივი თანაბრად კრებადია, მაშინ შეგვიძლია ავიღოთ $\varepsilon > 0$, ისე, რომ ამ ε -თვის

$$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} | (\forall x \in E \wedge \forall n \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (|R_n(x)| < \varepsilon).$$

ახლა ავიღოთ $n_0 > N$ და $S(x)$ წარმოვადგინოთ ჯამად:

$$S(x) = S_{n_0}(x) + R_{n_0}(x).$$

განვიხილოთ სხვაობა $S(x) - S(x_0)$. ცხადია,

$$|S(x) - S(x_0)| = |S_{n_0}(x) + R_{n_0}(x) - S(x_0) - R_{n_0}(x_0)| \leq \\ \leq |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |R_{n_0}(x)| + |R_{n_0}(x_0)|. \quad (14)$$

n_0 სასრული რიცხვია. $S_{n_0}(x)$ უწყვეტ ფუნქციითა სასრული ჯამია და, მაშასადამე, უწყვეტია. ამის გამო გვექნება

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 | (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}).$$

ამასთან

$$|R_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, |R_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ამ უტოლობათა საფუძველზე (14) მოგვცემს

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 | (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon).$$

ამრიგად, E არეში უწყვეტ ფუნქციითა თანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამი უწყვეტი ფუნქციაა იმავე E არეში.

4. ფუნქციითა მწკრივის ინტეგრება. ინტეგრალურ აღრიცხვაში დამტკიცეთ თეორემა: ინტეგრებად ფუნქციითა სასრულ შესაკრებთა ჯამი ინტეგრებადია და ინტეგრებად ფუნქციითა ჯამის ინტეგრალი შესაკრებთა ინტეგრალების ჯამის ტოლია. ეს თეორემა არ ვრცელდება ნებისმიერ კრებად ფუნქციითა მწკრივზე.

შემდეგი თეორემა იძლევა საკმარისი პირობას, როდესაც მწკრივის ჯამის ინტეგრალი არსებობს და შეიძლება მწკრივის ჯამის ინტეგრალი მწკრივის წევრობრივი ინტეგრებით გამოითვალოს ისე, როგორც სასრულ შესაკრებთა ჯამისათვის გამოითვლება.

თეორემა 3. თუ $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე ფუნქციითა მწკრივი

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (2)$$

თანაბრად კრებადია და მწკრივის წევრები უწყვეტია, მაშინ ამ სეგმენტზე მწკრივის ჯამი $S(x)$ ინტეგრებადია და ჯამის ინტეგრალი ტოლია მწკრივის წევრთა ინტეგრალების ჯამისა.

დამტკიცება: შევნიშნოთ, რომ $\int_a^b f_n(x) dx$ და $\int_a^b S(x) dx$

არსებობენ, რადგანაც $f_n(x)$ ფუნქცია, პირობის თანახმად, უწყვეტია $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე და ამავე სეგმენტზე $S(x)$ ფუნქცია, როგორც უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მწკრივის ჩამი, უწყვეტია.

ამრიგად, უნდა დავამტკიცოთ მხოლოდ მართებულობა

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx + \dots \quad (15)$$

ტოლობისა.

რადგანაც (2) მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid (\forall x \in [a, b] \wedge n > N) \Rightarrow \left(|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \right). \quad (16)$$

$S(x)$ ჩამი ასე წარმოვადგინოთ:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad n > N(\varepsilon). \quad (17)$$

მიღებულ შესაკრებთაგან $S_n(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, რადგანაც იგი $[a, b]$ სეგმენტზე სასრული შესაკრები უწყვეტი ფუნქციების ჩამია, ხოლო მეორე შესაკრები $R_n(x)$ უწყვეტია, შემდეგი პირობის გამო

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x).$$

ამის გამო (17)-დან მივიღებთ

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b S_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx,$$

საიდანაც

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b R_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_n(x)| dx.$$

ამ უკანასკნელიდან (16) პირობით გვექნება

$$\forall n > N(\varepsilon) \left| \int_a^b |R_n| dx \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow \left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| < \varepsilon,$$

ანუ

$$\int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

ეს კი გვიჩვენებს (15) ტოლობის მართებულობას.

5. ფუნქციათა მწკრივის გაწარმოება. დიფერენციალურ აღრიცხვაში მტკიცდება, რომ წარმოებად ფუნქციათა სასრულ შესაკრებთა ჩამი წარმოებად ფუნქციაა და ფუნქციათა ჩამის წარმოებული ტოლია შესაკრებ ფუნქციათა წარმოებულების ჩამისა.

ქვემოთ დავამტკიცებთ თეორემას, რომელიც იძლევა ფუნქციათა მწკრივის ჩამის გაწარმოების საკმარის პირობას.

თეორემა 4. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე კრებადი ფუნქციათა მწკრივის

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (2)$$

წევრებს აქვთ უწყვეტი წარმოებულები $f_n'(x)$ და ამ წარმოებულთაგან შედგენილი მწკრივი თანაბრად კრებადია იმავე $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამავე სეგმენტზე (2) მწკრივის $S(x)$ ჩამი წარმოებადია და მწკრივის ჩამის წარმოებული ტოლია მწკრივის წევრების წარმოებულთა მწკრივის ჩამისა:

$$S'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x) + \dots \quad (18)$$

დამტკიცება. წარმოებულთა მწკრივის ჩამი აღვნიშნოთ $\sigma(x)$,

$$\sigma(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x) + \dots \quad (19)$$

პირობის თანახმად ეს მწკრივი $[a, b]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებადია. მაშასადამე, წარმოებულთაგან შედგენილი (19) მწკრივის ინტეგრება შეიძლება გვექნება

$$\int_a^x \sigma(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(x) dx, \quad (20)$$

სადაც

$$x \in [a, b].$$

მაგრამ

$$\int_a^x f'_n(x) dx = f_n(x) - f_n(a).$$

ამის გამო (20) მოგვცემს:

$$\int_a^x \sigma(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_n(a)].$$

თუ მოვიგონებთ თეორემას კრებად მწკრივთა შეკრების (გამოკლების) შესახებ, გვექნება

$$\int_a^x \sigma(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = S(x) - S(a),$$

საიდანაც

$$S(x) = S(a) + \int_a^x \sigma(x) dx. \quad (21)$$

ამ შესაყრებთანგან თითოეული წარმოებულადია:

$$\frac{dS(a)}{dx} = 0, \quad \frac{d}{dx} \int_a^x \sigma(x) dx = \sigma(x).$$

ამის გამო (21) მოგვცემს

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[S(a) + \int_a^x \sigma(x) dx \right] = \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

მაშასადამე, მართებულია (18) ტოლობა. ეს კი გამოთქმულ თეორემას ამტკიცებს.

6. მაგალითი უწყვეტი ფუნქციისა, რომელსაც არც ერთ წერტილში არ აქვს წარმოებული^{1,2}. მე-19 საუკუნის მეორე ნახევრამდე მათემატიკოსებს ეგონათ, რომ უწყვეტ ფუნქციას მისი განსაზღვრის სიმრავლის ყოველ წერტილში აქვს წარმოებული, გარდა ზოგიერთი განსაკუთრებული წერტილისა. ასეთ წერტილთა სიმრავლე სასრულია. ასეთი შეხედულება მცდარი აღმოჩნდა. ვაიერშტრასმა³ ააგო უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც მისი განსაზღვრის არც ერთ წერტილში წარმოებული არ აქვს. ასეთი ფუნქციაა

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad (22)$$

სადაც $0 < a < 1$, ხოლო b კენტი ნატურალური რიცხვია, ამასთან $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. (22) მწკრივის წევრები აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება შემდეგი რიცხვითი მწკრივის წევრებს

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n, \quad 0 < a < 1.$$

მაშასადამე, (22) მწკრივი თანაბრად კრებადია და მისი ჯამი $f(x)$ ყველგან $-\infty < x < +\infty$ უწყვეტი ფუნქციაა. ვაიერშტრასმა დიდი შრომის შედეგად დაამტკიცა, რომ $f(x)$ ფუნქციას არც ერთ წერტილში $-\infty < x < +\infty$ არ აქვს წარმოებული.

ქვემოთ განვიხილავთ უფრო მარტივ ფუნქციას, რომელიც ვან დერ ვან დემა⁴ ააგო. არსებითად ეს ფუნქცია ვაიერშტრასის იდეაზეა აგებული: $\cos ax$ შეცვლილია რყევადი ტეხილით.

აღვნიშნოთ $u_0(x)$ -ით ფუნქცია, რომელიც გამოსახავს x რიცხვსა და მის უახლოეს მთელ რიცხვს შორის სხვაობას აბსოლუტური მნიშვნელობით,

$$u_0(x) = \begin{cases} x - [x], & x \geq [x], \\ [x] - x, & x \leq [x], \end{cases}$$

¹ Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М.—Л. 948, стр. 502.

² ვლ. ჭელიძე, ე. წიშლიანაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. II, თბილისი, 1975, გვ. 26.

³ კარლ ვაიერშტრასი (1815—1897), გერმანელი მათემატიკოსი.

⁴ ბარტელ ლენდერტ ვარდენი (1903, ვან დერ ვარდენ — B. L. van der Warden, წარმოშობით ჰოლანდიელი) მათემატიკოსი, ამსტერდამის (1948 წლიდან), ციურხის (1951 წლიდან) უნივერსიტეტების პროფესორი.

სადაც $[x]$ არის x რიცხვის უახლოესი მთელი რიცხვი. $u_0(x)$ წრფივი ფუნქციაა ყოველ $\left[\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$ სეგმენტზე, სადაც s მთელი რიცხვია (ნახ. 3).

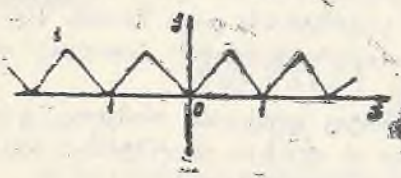
იგი უწყვეტი პერიოდული ფუნქციაა პერიოდით 1. $u_0(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ტეხილია, რომლის საკუთხო კოეფიციენტები ± 1 -ის ტოლია.

განვიხილოთ ფუნქციათა მიმდევრობა $(u_k(x))_{k \geq 1}$,

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}, \quad (23)$$

ეს ფუნქცია სეგმენტზე $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$, სადაც s მთელი რიცხვია, წრფივი ფუნქციაა. იგი უწყვეტი და პერიოდული ფუნქციაა პერიოდით $\frac{1}{4^k}$.

მე-4 ნახაზზე გამოსახულია $u_1(x)$ ფუნქცია. $u_1(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ტეხილია, მაგრამ უფრო ხშირი და მცირე ზომის რგოლებით, ვიდრე $u_0(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. ამ გრაფიკის საკუთხო კოეფიციენტები ტოლია ± 1 -ის.



ნახ. 3



ნახ. 4

განვსაზღვროთ $f(x)$ ფუნქცია მთელ $-\infty < x < \infty$ შუალედში,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x). \quad (24)$$

რადგანაც $0 \leq u_k(x) \leq \frac{1}{2 \cdot 4^k}$, $k = 0, 1, \dots$, მოცემული (24) მწკრივის წევრები არ აღემატება შემდეგი კრებადი რიცხვითი მწკრივის წევრებს:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k}$$

მაშასადამე, (24) მწკრივი თანაბრად კრებადია და მისი ჯამი $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა ყველგან $-\infty < x < +\infty$ შუალედში.

დავამტკიცოთ, რომ (24) მწკრივის ჯამი $f(x)$ არც ერთ წერტილში არაა წარმოებადი.

ავილოთ x -ის რაიმე x_0 მნიშვნელობა. გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა $\frac{1}{2 \cdot 4^n}$ სიზუსტით (მოვიხმაროთ არქიმედეს აქსიომა. იხ. ნაწ. I თავი III, § 2),

$$S_n \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^n} \leq x < (S_n + 1) \frac{1}{2 \cdot 4^n},$$

სადაც S_n მთელი რიცხვია. ადვილი შესამჩნევია, რომ სეგმენტები

$$\Delta_n = \left[\frac{S_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{S_n + 1}{2 \cdot 4^n} \right]$$

ჩაღაბებულ სეგმენტთა სისტემაა: $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$

ცხადია, ყოველ Δ_n სეგმენტში მოიძებნება ისეთი x_n წერტილი, რომელიც x_0 წერტილიდან დაშორებულია Δ_n სეგმენტის სიგრძის ნახევრით,

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}.$$

შევადგინოთ შეფარდება

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}. \quad (25)$$

აქ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) $k > n$. რადგანაც $u_{n+1}(x), u_{n+2}(x), \dots$ ფუნქციების პერიოდებია სათანადოდ $\frac{1}{4^{k+1}}, \frac{1}{4^{k+2}}, \dots$, მაშინ $\frac{1}{4^k}$ ჯერაღია ამ პერიოდების, გვექნება

$$u_k(x_n) = u_k(x_0), \quad k > n,$$

და (25) მწკრივის წევრები $k > n$ -თვის ნულის ტოლია. ასე რომ, გვექნება:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^n \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}. \quad (26)$$

2) $k \leq n$. რადგანაც $u_k(x)$ ფუნქცია წრფივია Δ_k სეგმენტზე, ამასთან

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

გვექნება

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{n=0}^n (\pm 1).$$

ეს შეფარდება ლუწი რიცხვის ტოლია, თუ n კენტი და კენტი რიცხვის ტოლია, თუ n ლუწია. აქედან ცხადია $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ არ მიისწრაფვის არავითარი სასრული რიცხვისაკენ, როდესაც $n \rightarrow \infty$.

ამრიგად, (24) მწკრივით განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციას არ აქვს წარმოებული არც ერთ წერტილში $-\infty < x < +\infty$.

ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 13.

1. გამოიკვლიეთ $0 \leq x \leq 1$ სეგმენტზე შემდეგი მწკრივის კრებალობა:

$$\frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n-1} \right) + \dots$$

თუ კრებადია, როგორი სახის კრებალობაა? (თანაბარი, $S(x)=0$).

2. გამოიკვლიეთ $[0, 1]$ სეგმენტზე შემდეგი მწკრივის კრებალობა:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \dots; (S(x)=0).$$

3. გამოიკვლიეთ $[-1, 1]$ სეგმენტზე მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ კრებალობა.

იკრიბება თუ არა სეგმენტის ბოლო წერტილებში?

4. გამოიკვლიეთ $[-1, 1]$ სეგმენტზე

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

მწკრივის კრებალობა. (თანაბარი $-1 < x < 1$ ინტერვალში, $S(x) = \frac{1}{1-x^2}$).

5. გამოიკვლიეთ $[-1, 1]$ სეგმენტზე

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots + \frac{x^n}{n^n} + \dots$$

მწკრივის კრებალობა. ($-1 \leq x \leq 1$ -ზე თანაბრად კრებადია).

6. დაამტკიცეთ მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^n},$$

კრებადია, მაგრამ $[-1, 1]$ ნებისმიერ შუალედში არაა თანაბრად კრებადი (აღებული შუალედი შეიცავს $x=0$ წერტილს. მწკრივის ჯამი $S(x)=1$, $x \neq 0$; ხოლო, $x=0$ -ისათვის მწკრივის ჯამი $S(x)=0$).

7. დაამტკიცეთ, რომ მწკრივი

$$\frac{x^2}{1} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \dots + (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots$$

კრებადია თანაბრად და აბსოლუტურად მთელ X ლერძზე. აბსოლუტურ მნიშვნელობისაგან შედგენილი მწკრივი არა თანაბრად კრებადია ყველა იმ შუალედში, რომელიც $x=0$ წერტილს შეიცავს (იხ. წინა მაგალითი)!

8. გამოიკვლიეთ მწკრივის

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n}$$

კრებალობა. (რადგანაც $\sin x < |x|$, მაშინ $\frac{1}{n} < \arcsin \frac{1}{n}$. აქედან, ცხადია,

აღებული მწკრივი განშლადია; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ჰარმონიული მწკრივია).

9. გამოიკვლიეთ მწკრივის

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$$

კრებალობა.

10. გამოიკვლიეთ მწკრივის

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^3}}$$

კრებალობა. (რადგანაც $\frac{1}{\sqrt{n^3 + x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, ხოლო მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

კრებადია, ცხადია, მოცემული მწკრივიც კრებადია).

¹ Сборник задач по математике для вузов ч. 2, под редакцией А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича, М., 1986. стр. 209, №№ 12.152, 12.153.

1. კრებადობის არე. ფუნქციითა მწკრივს

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ მუდმივებია, ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივი.

$$1 + 1! x + 2! x^2 + \dots + n! x^n + \dots$$

კრებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილში, ხოლო მწკრივი

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

კრებადია ყველა ნამდვილი x რიცხვისათვის, $-\infty < x < +\infty$.

დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განვსაზღვროთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე.

თეორემა 1. თუ ხარისხოვანი მწკრივი

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

კრებადია $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის, მაშინ იგი აბსოლუტურად კრებადია x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x| < |x_0|$. თუ (1) ხარისხოვანი მწკრივი განშლადია $x=x_0$ -სათვის, მაშინ იგი განშლადია ყველა x -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x| > |x_0|$ (აბელის თეორემა).

დამტკიცება. ვთქვათ, (1) ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის, ე. ი. მწკრივი

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

კრებადია. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობით გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ მიმდევრობა $(a_n x_0^n)$ შემოსაზღვრულია

$$|a_n x_0^n| \leq M, \quad n = 0, 1, \dots$$

¹ ნილს ჰენრიკ აბელი (1802—1829), ნორვეგიელი მათემატიკოსი.

განვიხილოთ მწკრივი

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (2)$$

რადგანაც

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \quad (3)$$

და $|x| < |x_0|$, ადვილად წარმოვიდგენთ, რომ მწკრივი

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (4)$$

კრებადია. შევადაროთ (2) და (4) მწკრივი. ამ მწკრივთა წევრებს შორის არსებობს (3) დამოკიდებულება. მწკრივთა შედარების პრინციპის თანახმად მივიღებთ, რომ (2) მწკრივი კრებადია. ეს კი ნიშნავს (1) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყველა x -თვის, თუ $|x| < |x_0|$.

ვთქვათ, (1) მწკრივი განშლადია $x=x_0$ -სათვის. მაშინ მწკრივი განშლადია ყველა x -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|x| > |x_0|$. მართლაც, (1) მწკრივი რომ კრებადია იყოს $x=x_1$ -სათვის, $|x_1| > |x_0|$, მაშინ თეორემის შემოთღამტკიცებული ნაწილიდან მივიღებთ, რომ (1) მწკრივი კრებადია $x=x_0$ -სათვის, რაც დაშვებულ პირობას ეწინააღმდეგება. თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

რომ განვსაზღვროთ x -ის მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლისათვისაც (1) მწკრივი კრებადია, შემდეგნაირად მოვიქცეთ.

თუ $x_0 < +\infty$, მაშინ $\forall x, x > 0$, რომლისთვისაც (1) მწკრივი კრებადია, მოთავსებულია 0-სა და x_0 -ს შორის. ე. ი. სიმრავლე იმ $x > 0$ წერტილებისა, რომელთათვისაც (1) მწკრივი კრებადია, შემოსაზღვრულია. ვთქვათ, ამ წერტილების სიმრავლის ნამდვილი ზედა საზღვარია $r \geq 0$.

თუ $r > 0$, მაშინ აბელის თეორემის თანახმად, (1) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია $]-r, r[$ ინტერვალში და განშლადია ამ ინტერვალის გარეთ. რაც შეეხება $x=-r$, $x=r$ წერტილებში (1) მწკრივის კრებადობის შესახებ არაფერია დასკვნა არ შეგვიძლია გავაკეთოთ. პირდაპირ უნდა შევამოწმოთ $x=-r$, $x=r$ -სათვის მწკრივის კრებადობა.

r რიცხვს ეწოდება (1) მწკრივის კრებადობის რადიუსი, ხოლო $]-r, r[$ ინტერვალს — მწკრივის კრებადობის ინტერვალს.

თუ $r=0$, მაშინ (1) მწკრივის კრებადობის წერტილთა სიმრავლე ერთი წერტილისაგან შედგება, $x=0$. თუ (1) მწკრივი კრებადია x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, $-\infty < x < +\infty$, მაშინ ვიტყვი (1) მწკრივის კრებადობის რადიუსი უსასრულობის ტოლია, $r=+\infty$.

მაგალითად.

$$1 + 1! x + 2! x^2 + 3! x^3 + \dots + n! x^n + \dots$$

მწკრივის კრებადობის რადიუსი $r=0$, ხოლო

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

მწკრივის კრებადობის რადიუსი $r=+\infty$.

გამოვთვალოთ $(a_n x^n)$ მწკრივის კრებადობის რადიუსი (ხარისხოვანი მწკრივი შემდეგში $(a_n x^n)$ -ით აღვნიშნოთ).

გამოვიყენოთ მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანი:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| l,$$

სადაც

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (5)$$

ვთქვათ, $0 < l < +\infty$. მაშინ მწკრივის კრებადობის დალამბერის პირობიდან მივიღებთ, რომ ხარისხოვანი მწკრივი $(a_n x^n)$ კრებადია ყველა x -სათვის, სადაც $|x| < 1$, $|x| < \frac{1}{l}$ და განშლადია $|x| > 1$, $|x| > \frac{1}{l}$. როდესაც $0 < l < x$, მაშინ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი $r = \frac{1}{l}$.

თუ $l=0$, მაშინ $|x|=0$, მწკრივი კრებადია ყოველი x -სათვის $-\infty < x < +\infty$. ე. ი. $r=+\infty$.

თუ $l=+\infty$, მაშინ ყოველი ნულისაგან განსხვავებული x -სათვის $|x| > +\infty$, ე. ი. არ არსებობს $x \neq 0$, რომ მწკრივი კრებადია იყოს, $r=0$.

ამრიგად, მივიღეთ $(a_n x^n)$ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის განსაზღვრის შემდეგი წესი: თუ $(a_n x^n)$ ხარისხოვანი მწკრივის წევრების კოეფიციენტები ისეთია, რომ არსებობს სასრული ან უსასრულო

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l,$$

მაშინ მწკრივის კრებადობის რადიუსი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$r = \begin{cases} \frac{1}{l}, & \text{როდესაც } 0 < l < +\infty, \\ +\infty, & \text{როდესაც } l = 0, \\ 0, & \text{როდესაც } l = +\infty. \end{cases} \quad (6)$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

მწკრივის კრებადობის რადიუსი.

(6) ფორმულიდან მივიღებთ

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

მაშასადამე, $r=1$.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

მწკრივის კრებადობის რადიუსი.

(6) ფორმულიდან მივიღებთ

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

მაშასადამე,

$$r = +\infty.$$

დავუბრუნდეთ ისევ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის განსაზღვრას.

თუ გამოვიყენებთ მწკრივის კრებადობის კოშის ნიშანს, მივიღებთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| l, \quad l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

თუ გავიმეორებთ (6) ტოლობის მიღების მსჯელობას გვექნება:

თუ $(a_n x^n)$ ხარისხოვანი მწკრივის წევრების კოეფიციენტები ისეთია, რომ არსებობს სასრული ან უსასრულო

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

მაშინ მწკრივის კრებადობის რადიუსი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$r = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 < l < +\infty, \\ +\infty, & l = 0, \\ 0, & l = +\infty. \end{cases} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)^2} = -\frac{x_2}{(2 \cdot 1)^2} + \frac{x^2}{(2 \cdot 2)^2} - \frac{x^3}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{(2 \cdot n)^2} + \dots$$

მწკრივის კრებადობის რადიუსი.

(7) ფორმულით გვექნება

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{(2n)^n}} = \frac{1}{e^0} = 1.$$

მაშასადამე, $r=1$.

2. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის განსაზღვრა კოში — ადამარის ფორმულით.

ქვემოთ განსაზღვრავთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსს, რომელიც კოში — ადამარის ფორმულის სახელწოდებითაა ცნობილი. ეს ფორმულა ადრე მიღებული იყო კოშის¹ მიერ, მაგრამ შემდეგში მივიწყებულ იქნა. ადამარმა² ხელახლა მიიღო იგი და მიუთითა მასი მთავარი გამოყენების შესახებ.

განვიხილოთ მიმდევრობა

$$l_1 = |a_1|, \quad l_2 = \sqrt{|a_2|}, \quad l_3 = \sqrt[3]{|a_3|}, \quad \dots, \quad l_n = \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \dots$$

აღვნიშნოთ ამ მიმდევრობის უდიდესი ზედა ზღვარი l ასეთი,

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი გამოითვლება ფორმულით

$$r = \frac{1}{l}, \quad \text{სადაც } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (8)$$

ვიღრე (8) ფორმულის გამოყენას შევუდგებოდეთ, კარგად გავერკვეთ მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრის არსში³.

როგორც ჩვენთვის ცნობილია, ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია (ნაწ. 1, თავი მე-13, § 3, პ 2). შებრუნებული წინადადება არაა ჭეშმარიტი: ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობა არაა კრებადი. მაგალითად, მიმდევრობა $x_n = (-1)^n$, $n=1, 2, \dots$ შემოსაზღვრულია, მაგრამ

არაა კრებადი. მაგრამ ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია.

მართლაც, ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა (x_n) შემოსაზღვრულია. მაშინ არსებობს ისეთი სეგმენტი $[a, b]$, რომელშიაც მოთავსებულია აღებული (x_n) მიმდევრობა, $a \leq x_n \leq b$, $n=1, 2, \dots$ ეს სეგმენტი გავყოთ შუაზე და ის ქვესეგმენტი ავიღოთ, რომელიც აღებული მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს შეიცავს. თუ ორივე ქვესეგმენტი (x_n) მიმდევრობის ელემენტთა უსასრულო სიმრავლეს შეიცავს, მაშინ ერთ-ერთი ქვესეგმენტთაგანი ავიღოთ. ეს სეგმენტი $[a_1, b_1]$ -ით აღვნიშნოთ. ახლა სეგმენტი $[a_1, b_1]$ გავყოთ შუაზე და ის ქვესეგმენტი ავიღოთ, რომელიც მოცემული (x_n) მიმდევრობის ელემენტთა უსასრულო სიმრავლეს შეიცავს და ა. შ. პირველ ქვესეგმენტში ავიღოთ რომელიმე ელემენტი $x_{n_1} \in (x_n)$. მეორე სეგმენტში ავიღოთ ელემენტი $x_{n_2} \in (x_n)$ და ა. შ.

სეგმენტთა მიმდევრობა $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობაა; $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$, სადაც $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n, b_n| = 0$. მიღებულ სეგმენტთა მიმდევრობას აქვს მხოლოდ ერთი

წერტილი, რომელიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის. ცხადია, $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ მიმდევრობის ზღვარი $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$.

თუ (x_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრული არაა, ვთქვათ, შემოსაზღვრული არაა ზემოდან, მაშინ ამ მიმდევრობაში მოიძებნება ისეთი x_{n_1} წევრი, რომ $x_{n_1} > 1$. ცხადია, სიმრავლე (x_n) მიმდევრობის ელემენტებისა, რომელთათვისაც $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots$ ზემოდან შემოუსაზღვრავია, ამიტომ შეგვიძლია მოვნახოთ ისეთი x_{n_2} , რომ $x_{n_2} > 2$ და ა. შ. მივიღებთ მიმდევრობას

$$x_{n_1} > 1, \quad x_{n_2} > 2, \dots, \quad x_{n_k} > n_k, \dots$$

აქედან, ცხადია,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty.$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ

თეორემა 2. ნებისმიერი შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს კრებადი ქვემიმდევრობა, ხოლო შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს უსასრულოდ დიდი

¹ ჯოჰანსტენ ლეი კოში (1789—1857), ფრანგი მათემატიკოსი.

² ჟაკ ადამარი (1865—1963), ფრანგი მათემატიკოსი.

³ Л. Д. Кудрявцев, Курс математического анализа, т. I, М., 1981.

მიმდევრობა, რომლის ზღვარი გარკვეული ნიშნის უსასრულობაა (ბოლცანო — ვაიერშტრასის თეორემა).

ბოლცანო — ვაიერშტრასის თეორემა საშუალებას იძლევა, გამოიყოს ყოველი მიმდევრობიდან ქვემიმდევრობა — კერძო მიმდევრობა, რომლის ზღვარი სასრულია ან უსასრულობაა გარკვეული ნიშნის.

მოცემული (x_n) მიმდევრობის ქვემიმდევრობის სასრულ ზღვარს ან უსასრულობას გარკვეული ნიშნით, ეწოდება (x_n) მიმდევრობის კერძო ზღვარი.

ბოლცანო — ვაიერშტრასის თეორემა ამტკიცებს, რომ ყოველ მიმდევრობას ერთი კერძო ზღვარი მაინც აქვს. შეგვიძლია განვიხილოთ (x_n) მიმდევრობის კერძო ზღვართა სიმრავლის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა. ეს მნიშვნელობანი სათანადოდ შემდეგი სიმბოლოებით აღინიშნება:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ ან } \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ ან } \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3. ყოველ (x_n) მიმდევრობას აქვს როგორც უდიდესი ზღვარი, ისე უმცირესი ზღვარი.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ, რომ (x_n) მიმდევრობას აქვს უდიდესი ზღვარი. მიმდევრობისათვის გაუარჩიოთ ორი შემთხვევა: ან იგი შემოსაზღვრულია ზემოდან, ან არაა შემოსაზღვრული ზემოდან. თუ (x_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრული არაა ზემოდან, მაშინ $+\infty$ არის მისი კერძო ზღვარი და იგი უდიდესია, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

თუ (x_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან, აქაც შეგვიძლია გავარჩიოთ ორი შემთხვევა: სასრული ზღვრების სიმრავლე არაა ცარიელი ან ცარიელია. სასრული ზღვრების სიმრავლე A ასოთი აღვნიშნოთ. თუ (x_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და A სიმრავლე ცარიელი არაა, შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს სასრული ზედა საზღვარი. მაგალითად, $\sup A = b$. ვაჩვენოთ, რომ $b \in A$. მართლაც, თუ $b \notin A$, მაშინ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ შუალედში შეიცავს (x_n) მიმდევრობის სასრული რაოდენობის წევრებს და, კერძოდ, არ შეიცავს

¹ კარლ თედორ ვილჰელმ ვაიერშტრასი (1815—1897), გერმანელი მათემატიკოსი.

² ბერნარდ ბოლცანო (1781—1848), ჩეხი მათემატიკოსი, ლოგიკოსი, ფილოსოფოსი, თეოლოგი.

(x_n) მიმდევრობის არც ერთ წევრს, რაც ეწინააღმდეგება b -ს განსაზღვრას. ამრიგად, $b = \sup A \in A$. ამიტომ $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა: A სიმრავლე ცარიელია. რადგანაც მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია და აქვს კერძო მიმდევრობანი, რომელთაც არა აქვთ სასრული ზღვარი, ბოლცანო — ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად უნდა ჰქონდეს ზღვარი. დარჩა ერთი შესაძლებლობა, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. ე. ი. მთელი სიმრავლე (x_n) მიმდევრობის კერძო ზღვრებისა შედგება მხოლოდ ერთი ელემენტისაგან — $-\infty$, რომელიც ითვლება უდიდეს ელემენტად ამ სიმრავლეში, გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

სრულიად ასევე დამტკიცდება უმცირესი (სასრული ან უსასრულო) ზღვრის არსებობა ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისათვის.

თუ დავაკვირდებით (x_n) მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრის განსაზღვრას შევამჩნევთ, რომ ჰეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4. (x_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი რომ იყოს რამე a რიცხვი, აუცილებელია და საკმარისი ყოველი $\varepsilon > 0$ -სათვის შესრულდეს შემდეგი პირობები:

1) არსებობდეს ისეთი ნომერი n_ε , რომ ყველა $n > n_\varepsilon$ -თვის ჰეშმარიტი იყოს უტოლობა $x_n < a + \varepsilon$;

2) ნებისმიერი n_0 ნომრისათვის არსებობდეს ისეთი n' (ε და n_0 -ზე დამოუკიდებელი), რომ $n' > n_0$ -თვის $x_{n'} > a - \varepsilon$.

მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ მას აქვს ზედა ზღვარი რამე a რიცხვი. ცხადია, $x_n \geq a + \varepsilon$, $n < n_\varepsilon$, სადაც $x_n \geq a + \varepsilon$ შეიცავს მხოლოდ მოცემული მიმდევრობის წევრების სასრულ რაოდენობას. ხოლო $x_{n'} > a - \varepsilon$, როდესაც $n' > n_0$, შეიცავს უსასრულო სიმრავლეს (x_n) მიმდევრობის წევრებისას.

აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ და

ვთქვათ, $\varepsilon > 0$ ფიქსირებული რიცხვია. თუ $[a + \varepsilon, +\infty[$ შუალედში (x_n) მიმდევრობის წევრთა რაოდენობა უსასრულოა, მაშინ უნდა არსებობდეს ქვემიმდევრობა ამ შუალედში, რომელსაც ექნება სასრული ან უსასრულო ზღვარი. აღვნიშნოთ ეს ზღვარი b ასოთი. ცხადია, $b \geq a + \varepsilon$, რაც ეწინააღმდეგება a -ს განსაზღვრას.

ამით 1-ლი პირობა დამტკიცდა.

რადგანაც a ზედა ზღვარი (x_n) მიმდევრობის კერძო ზღვარია, მაშინ არსებობს მიმდევრობა (x_{n_k}) , რომ $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ და, მაშასადამე, არსებობს (x_n) მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლე, რომლის ელემენტები მეტია $a - \varepsilon$ -ზე. ამით მე-2 პირობა დამტკიცდა.

საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, a რიცხვი აკმაყოფილებს თეორემის 1-ლ და მე-2 პირობას. ვაჩვენოთ, რომ a არის (x_n) მიმდევრობის კერძო ზღვარი. ავიღოთ $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$ ყოველი ნატურალური k -თვის არსებობს ისეთი ნომერი n_k , რომ თეორემის 1-ლი პირობის თანახმად $x_{n_k} < a + \frac{1}{k}$, ხოლო მე-2 პირობის თანახმად $x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$, ანუ

$$a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k}.$$

და რადგანაც ყოველი k -სათვის (x_n) მიმდევრობიდან ელემენტების სიმრავლე, რომელიც ამ უტოლობას აკმაყოფილებს, უსასრულოა, n_k ნომერი ისე შეგვიძლია ავირჩიოთ, რომ $n_{k_1} < n_{k_2}$, როდესაც $k_1 < k_2$, ამის შედეგად მივიღებთ ისეთ ქვე მიმდევრობას, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|a - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$, რაც გვიჩვენებს $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. ამრიგად, a არის (x_n) მიმდევრობის კერძო ზღვარი.

ვაჩვენოთ, რომ a რიცხვი (x_n) მიმდევრობის უდიდესი ზღვარია. მართლაც, თუ არსებობს მიმდევრობის სხვა კერძო ზღვარი b ისეთი, რომ $b > a$, მაშინ შეგვიძლია ისეთი $\varepsilon > 0$ ავირჩიოთ, რომ $b > a + \varepsilon$ და მაშინ, ცხადია, $]a + \varepsilon, +\infty[$ შუალედში მოთავსდება (x_n) მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობა, რაც 1-ლ პირობას ეწინააღმდეგება.

ამრიგად, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ, თუ (x_n) მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვარი ტოლია, მაშინ მიმდევრობა კრებადია.

მართლაც, დამტკიცებული თეორემის თანახმად,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} | (\forall n > N) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \varepsilon < x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon).$$

მაგრამ (x_n) მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრები ტოლია. ამის გამო

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

ახლა დავამტკიცოთ კოში — ადამარის ფორმულის კეშმარტება.

დაეუშვათ, $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. ვთქვათ, $l = 0$. ავიღოთ რაიმე მნიშვნელობა $x \neq 0$ და ისეთი ε ავირჩიოთ, რომ $0 < \varepsilon < 1$. ამ შემთხვევაში ვაჩვენოთ: ხარისხოვანი მწკრივი $(a_n x^n)$ კრებადია x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

რადგანაც $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, არსებობს ისეთი $N \in \mathbb{N}$, რომ $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{|x|}$ x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, $n > N$. აქედან, ცხადია,

$$|a_n x^n| < \varepsilon^n, \quad n > N. \quad (9)$$

თუ გამოვიყენებთ მწკრივთა შედარების პრინციპს, (9)-დან დავასკვნით, რომ $(a_n x^n)$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. მაშასადამე, $r = +\infty$.

ახლა, ვთქვათ, $l = +\infty$. ამ შემთხვევაში ვაჩვენოთ, რომ $(a_n x^n)$ მწკრივი განშლადია ნებისმიერი $x \neq 0$ -სათვის. მართლაც, არსებობს n_k , $k = 1, 2, \dots$, მიმდევრობა, რომლისათვისაც

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty.$$

ამიტომ ნებისმიერი $x \neq 0$ -სთვის არსებობს ისეთი ნომერი k , რომ

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \frac{1}{|x|}, \quad \text{ანუ } |a_{n_k} x^{n_k}| \geq 1.$$

ამრიგად, არ სრულდება მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა ყოველი $x \neq 0$ მნიშვნელობისათვის. $x \neq 0$ მნიშვნელობისათვის $(a_n x^n)$ ხარისხოვანი მწკრივი განშლადია. ე. ი. $r = 0$.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა $0 < l < +\infty$. ვაჩვენოთ, რომ $|x| < \frac{1}{l}$ -

სთვის ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია, ხოლო $|x| > \frac{1}{l}$ -სთვის მწკრივი განშლადია.

ავიღოთ ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ

$$|x| < \frac{1}{l + \varepsilon},$$

რისთვისაც, საკმარისია, ავიღოთ $\varepsilon < \frac{1}{|x|} - l$ და, მაშინ $q = (l + \varepsilon) |x| < 1$.

მე-4 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი ნომერი N_1 , რომ $n \geq N_1$ -სთვის

$$\sqrt[n]{|a_n|} < l + \varepsilon$$

და, მაშინ

$$|x| \sqrt[n]{|a_n|} < |x| (l + \varepsilon),$$

საიდანაც

$$|a_n x^n| < q^n.$$

მწკრივთა შედარების პრინციპით ამ უტოლობიდან დავასკვნით, რომ,

მწკრივი $(a_n x^n)$ კრებადია. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $|x| > \frac{1}{l}$ -სთვის მწკრივი განშლადია. ამისათვის ავარჩიოთ $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ

$$|x| > \frac{1}{l - \varepsilon} > 0,$$

საიდანაც

$$|x| (l - \varepsilon) > 1. \quad (10)$$

მე-4 თეორემის საფუძველზე, არსებობს ქვემიმდევრობა n_k , $k = 1, 2, \dots$ ნატურალური რიცხვებისა, რომელთათვისაც

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > l - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

(10) და (11) უტოლობებიდან მივიღებთ

$$|x| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > |x| (l - \varepsilon) > 1,$$

ანუ

$$|a_{n_k} x^{n_k}| > 1,$$

ამრიგად, (1) ხარისხოვანი მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ და ამის გამო $|x| > \frac{1}{l}$ -სთვის ხარისხოვანი მწკრივი განშლადია.

ამით დავამტკიცეთ კოში — ადამარის ფორმულის ჭეშმარიტება: ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $|x| < \frac{1}{l}$ -სთვის და განშლადია $|x| > \frac{1}{l}$ -სთვის, სადაც $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი

$$r = \frac{1}{l}.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ

$$x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2k+1} + \dots$$

მწკრივის კრებადობის რადიუსი.

ცხადია:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{თუ } n \text{ კენტია,} \\ 0, & \text{თუ } n \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

ამიტომ

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } n \text{ კენტია,} \\ 0, & \text{თუ } n \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

ვევქნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \quad r = 1.$$

3. ხარისხოვანი მწკრივის თანაბრად კრებადობა. განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

ვთქვათ, ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსია r . ავიღოთ $0 < \rho < r$ რიცხვი. რადგანაც ρ ნაკლებია (1) მწკრივის კრებადობის რადიუსზე, აბელის თეორემის თანახმად კრებადია მწკრივი

$$|a_0| + |a_1 \rho| + |a_2 \rho^2| + \dots + |a_n \rho^n| + \dots \quad (8)$$

(1) და (8) მწკრივის შორის არსებობს დამოკიდებულება

$$|a_n x^n| \leq |a_n \rho^n|$$

ამის გამო ვაიერშტრასის თეორემის საფუძველზე მივიღებთ, რომ (1) მწკრივი $[-\rho, \rho]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებადია.

ამგვარად, მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. ხარისხოვანი მწკრივი

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

თანაბრად კრებადია ნებისმიერ $[-\rho, \rho]$ სეგმენტზე, რომელსაც $]-r, r[$ ინტერვალში შეიცავს.

თუ მოვიგონებთ ფუნქციას $a_n x^n$ მწკრივის ჯამის უწყვეტობის თეორემას, მაშინ მე-2 თეორემიდან ადვილად მიიღება შემდეგი:

შედეგი 1. (1) ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი უწყვეტია მისი კრებადობის $]-r, r[$ ინტერვალში.

ფუნქციითა მწკრივის ინტეგრალის თეორემა დასაბუთდება

შედეგი 2. ხარისხოვანი მწკრივის $S(x)$ ჯამი ინტეგრებადია ყოველ სეგმენტზე, რომელიც ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის ინტერვალშია მოთავსებული და ამასთან ადგილზე აქვს ტოლობას

$$\int_0^x S(x) dx = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots + \frac{a_{n-1} x^n}{n} + \dots \quad (13)$$

ადგილი შესაძენევი, რომ (1) ხარისხოვანი მწკრივის ინტეგრებით მიღებული (13) მწკრივის კრებადობის რადიუსი r -ის ტოლია.

მართლაც, (13) მწკრივისათვის გვექნება

$$l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{a_n}{n+1} \right| : \left| \frac{a_{n-1}}{n} \right| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \right) = 1 \cdot l = l,$$

საიდანაც, ცხადია, (13) მწკრივის კრებადობის რადიუსი (1) მწკრივის კრებადობის რადიუსის ტოლია:

$$r_1 = \frac{1}{l_1} = \frac{1}{l} = r.$$

ახლა ავიღოთ (1) მწკრივის წევრობრივი გაწარმოებით მიღებული მწკრივი

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \quad (14)$$

გამოვთვალოთ კრებადობის რადიუსი:

$$l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = 1 \cdot l = l,$$

საიდანაც

$$r_1 = \frac{1}{l_1} = \frac{1}{l} = r.$$

მაშასადამე, (1) ხარისხოვანი მწკრივის წევრობრივი გაწარმოებით მიღებული (14) მწკრივის კრებადობის რადიუსი (1) მწკრივის კრებადობის რადიუსის ტოლია.

ამრიგად, ჭეშმარიტია

შედეგი 3. (1) ხარისხოვანი მწკრივის $S(x)$ წარმოებადია კრებადობის ინტერვალის ყოველ წერტილში, ამასთან (1) მწკრივის ჯამის წარმოებული მიიღება მისი წევრობრივი გაწარმოებით. წევრობრივი გაწარმოებით მიღებული (14) მწკრივის კრებადობის რადიუსი ემთხვევა (1) მწკრივის კრებადობის რადიუსს.

ისევე, როგორც (1) მწკრივიდან მივიღეთ (14) მწკრივი, რომლის კრებადობის რადიუსი ემთხვევა (1) მწკრივის კრებადობის რადიუსს, (14) მწკრივიდანაც გაწარმოებით მივიღებთ ახალ მწკრივს, რომლის კრებადობის რადიუსი (14) მწკრივის კრებადობის რადიუსს ემთხვევა და ა. შ.

ამის გამო მართებულია:

შედეგი 4. ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი მისი კრებადობის ინტერვალში ნებისმიერ რიცხვჯერ შეიძლება გავაწარმოოთ, ამასთან, მწკრივის ჯამის წარმოებული ტოლია მოცემული მწკრივის წევრობრივი გაწარმოებით მიღებული მწკრივის ჯამსა.

ასეთივე შედეგი იქნება მართებული ხარისხოვანი მწკრივის ნებისმიერ რიცხვჯერ ინტეგრების შესახებ.

4. ტეილორის მწკრივი. მაკლორენის მწკრივი. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია a წერტილის $]a-r, a+r[$ მიდამოში შეიძლება გაიშალოს ხარისხიან მწკრივად

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots, \quad (15)$$

მაშინ ასეთი მწკრივი ერთადერთია. მართლაც, თუ (15) ტოლობა ჭეშმარიტია a წერტილის მიდამოში, მაშინ იმავე მიდამოში ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობა

$$f^{(k)}(x) = a_k \cdot k! + a_{k+1}(k+1)k \dots 2(x-a) + \dots,$$

საიდანაც

$$f^{(k)}(a) = a_k \cdot k!.$$

ამ ტოლობიდან განვსაზღვროთ კოეფიციენტები

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (16)$$

კოეფიციენტთა ეს მნიშვნელობანი შევიტანოთ (15) ტოლობაში. მივიღებთ:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (17)$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოთავსებულ მწკრივს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი a წერტილის მიდამოში. ეს მწკრივი ერთადერთია. (17) ტოლობაში დავუშვათ $x=a$, მივიღებთ

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (18)$$

მიღებულ მწკრივს ეწოდება მაკლორენის მწკრივი.

¹ ბრუკ ტეილორი (1685—1731), ინგლისელი მათემატიკოსი.

² კოლინ მაკლორენი (1688—1746), შოტლანდიელი მათემატიკოსი.

ქვემოთ, ყველგან (17) და (18) მწკრივებს მოვიხსენიებთ, როგორც ტეილორის მწკრივს, მაგრამ (18) მწკრივის შემთხვევაში ვიგულისხმებთ მაკლორენის მწკრივს.

(17) და (18) ტოლობების საფუძველზე დავასკვნით, რომ ჭეშმარიტია

შედეგი 5. თუ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილის მიდამოში გაიშლება ტეილორის მწკრივად, მაშინ ასეთი მწკრივი ერთადერთია.

სავარჯიშო 14.

1. მონახეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობის ინტერვალი. გამოარკვეთ კრებადობის ინტერვალის ბოლოებზე მწკრივის კრებადობა

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k^2}, \quad (r=1, \text{ კრებადია } x=1, -1);$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} 3^{k^2} x^{k^2}; \quad \left(r = \frac{1}{3}, \text{ განშლადია } x = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right);$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad (r = \infty);$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2} x^k, \quad (r=1, \text{ განშლადია } x=1, -1);$$

$$5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k x^k}{k!}, \quad (r = \infty);$$

$$6) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k-3)2k}, \quad (r=1, \text{ კრებადია } x=1, -1).$$

2. მონახეთ შემდეგი მწკრივების ჯამები:

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \left(S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right);$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k+1}}{k+1}, \quad \left(S(x) = \ln |1-x| + \frac{x}{1-x}\right).$$

§ 3. ფუნქციის ხარისხთან მჭიდროდ გაშლა

1. **ტეილორის ფორმულა.** ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას $x=0$ წერტილის მიდამოში 0 წერტილის ჩათვლით აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებული, მაშინ ამ მიდამოს ნებისმიერი x წერტილისათვის შეგვიძლია დავწეროთ ტეილორის ფორმულა

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x),$$

სადაც

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, მაშინ მივიღებთ $f(x)$ ფუნქციის მწკრივად გაშლას

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (1)$$

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისათვის შეგვიძლია შევადგინოთ ტეილორის მწკრივი, თუ ამ ფუნქციას აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებული. მაგრამ აქედან ის არ გამომდინარეობს, რომ მიღებული მწკრივი აუცილებლად მოცემული $f(x)$ ფუნქციისავენ იკრიბება; მწკრივი შეიძლება იყოს განშლადი, შეიძლება იყოს კრებადი, მაგრამ არ იკრიბებოდეს მოცემული ფუნქციისაკენ. მაგალითად, ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, უწყვეტია $x=0$ წერტილში,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

აქვს წარმოებულები $x=0$ წერტილში,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0.$$

ასევე, $x \neq 0$ -სათვის გვექნება

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^3}{e^{t^2}} = 0.$$

გამოვთვალთ მეორე რიგის წარმოებული

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^4}{e^{t^2}} = 0.$$

ასევე, $x \neq 0$ -სათვის გვექნება

$$f''(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' = -\frac{6}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}}; \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0$$

და ასე შემდეგ.

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციას აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებული $f^{(n)}(x)$, სადაც $f^{(n)}(0) = 0$. ამ $f(x)$ ფუნქციისათვის გვექნება ტეილორის შემდეგი მწკრივი:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (3)$$

მიღებული მწკრივი კრებადია x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, $-\infty < x < +\infty$. რადგანაც (3) მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულია,

მწკრივი იკრებება ნულისაკენ. მაგრამ, როცა $x \neq 0$, მაშინ $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$. მაშასადამე, (2) ფუნქცია არაა თავისი ტეილორის (3) მწკრივის ჯამი.

უნდა გვახსოვდეს, რომ (1) ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f(x)$ ფუნქციის ნაშთითი წევრი

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1. \quad (4)$$

მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \rightarrow \infty$, ყველა x -სათვის აღებული შუალედიდან.

ამგვარად, მოცემული $f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებული, რომ ვაგშალოთ ტეილორის მწკრივად, წინასწარ უნდა შევადგინოთ ტეილორის მწკრივი, განვსაზღვროთ მწკრივის კრებადობის ინტერვალი, შემდეგ ამ ინტერვალთან ის წერტილები უნდა ავარჩიოთ, რომლებშიდაც $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის ფორმულის ნაშთი მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \rightarrow \infty$. სწორედ ამ წერტილებში გვექნება, რომ $f(x)$ ფუნქცია თავისი ტეილორის მწკრივის ჯამია.

თუ $f(x)$ ფუნქციას 0 წერტილის რაიმე g მიდამოში აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებული და ეს წარმოებულები ერთი და იმავე M რიცხვითაა შემოსაზღვრული,

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

მაშინ (4) ფორმულიდან g მიდამოს ყოველი წერტილისათვის მივიღებთ

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

რადგანაც მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{|x|^n}{n!},$$

კრებადია $x \in g$ -ს ყოველი მნიშვნელობისათვის (ადვილად დაერწმუნდეთ

ბით დალამბერის ნიშნით). $\forall x \in g$ -სთვის $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M|x|^n}{n!} = 0$, ამის გამო

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

ეს კი გვაძლევს, რომ g მიდამოს ყოველი წერტილისათვის

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

მაშასადამე, მართებულია შემდეგი

თეორემა: თუ 0 წერტილის რაიმე g მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებული და ყველა ეს წარმოებული აბსოლუტური მნიშვნელობით ერთი და იმავე M რიცხვითაა შემოსაზღვრული,

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

მაშინ g მიდამოში $f(x)$ ფუნქცია გაიშლება ტეილორის მწკრივად.

ფუნქციას $f(x)$ ეწოდება ანალიზური 0 წერტილში, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო $|x| < r$, $r > 0$, რომ ამ მიდამოში $f(x)$ წარმოიდგინება ტეილორის მწკრივით. (2) ფუნქცია ანალიზური არაა 0 წერტილში (თ. VII, § 3).

განვიხილოთ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქცია.

1) $f(x) = \sin x$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივად გაშლა.

როგორც $\sin x$, ისე $(\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$, 0 წერტილის

ნებისმიერ მიდამოში შემოსაზღვრულია,

$$\left| \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)_{x=0} \right| \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \quad (5)$$

ასევე,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots \quad (6)$$

2) მაჩვენებელიანი e^x ფუნქცია. რადგანაც

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \quad (e^x)_{x=0}^{(n)} = 1,$$

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta n}, \quad |x| < \infty,$$

მივიღებთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

თუ გამოვიყენებთ ზემოთ დამტკიცებულ თეორემას, გვექნება

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (7)$$

3) ლოგარითმული $\ln(1+x)$ ფუნქცია. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიიდან $|x| < 1$ გვექნება,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots \quad (8)$$

ხარისხოვანი მწკრივის ინტეგრების საფუძველზე (8) მწკრივიდან მივიღებთ

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx - \dots + (-1)^{n-1} \int_0^x x^{n-1} dx + \dots,$$

ანუ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (9)$$

სადაც მიღებული მწკრივის კრებადობის ინტერვალი ემთხვევა (8) მწკრივის კრებადობის ინტერვალს, $-1 < x < 1$.

$x=1$ -სათვის (9) მწკრივი კრებადია,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

ხოლო $x=-1$ -სათვის განშლადია, რადგანაც გვექნება ჰარმონიული მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

(9) ფორმულაში x შევცვალოთ $(-x)$ -ით, გვექნება

$$\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \quad (10)$$

(9) მწკრივიდან (10) მწკრივის გამოკლებით მივიღებთ

$$\ln \frac{1-x}{1+x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right), \quad (11)$$

სადაც $|x| < 1$.

ვთქვათ,

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{p}{q},$$

სადაც p და q ნატურალური რიცხვებია. აქედან

$$x = \frac{p-q}{p+q},$$

მაშინ (11) ფორმულა მოგვცემს

$$\ln \frac{p}{q} = 2 \left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^5 + \dots \right] \quad (12)$$

ამ ფორმულით ადვილად გამოითვლება ნებისმიერი რიცხვის ლოგარითმი.

თუ $p=2$, $q=1$, მაშინ

$$\ln 2 = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^5 + \dots \right].$$

თუ $p=3$, $q=2$, მაშინ

$$\ln 3 = \ln 2 + 2 \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^5 + \dots \right].$$

თუ $p=4$, $q=3$, მაშინ

$$\ln 4 = \ln 3 + 2 \left[\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{7} \right)^5 + \dots \right].$$

და ა. შ.

საზოგადოდ,

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right] \quad (13)$$

ეს გამოსახულებანი ადრე გვქონდა მიღებული (ნაწ. 1, თავი XV, § 3).

4) ბინომის გაშლა. გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად ბინომი $(1+x)^\alpha$, სადაც α ნამდვილი რიცხვია.

გამოვთვალოთ წარმოებულები:

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \dots, \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

საიდანაც

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha, \dots, \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

$(1+x)^\alpha$ -სათვის ტეილორის მწკრივი იქნება

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (14)$$

განვსაზღვროთ (14) მწკრივის კრებადობის რადიუსი:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} : \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \right| = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1.$$

მაშასადამე, (14) მწკრივი კრებადია, როცა $|x| < 1$ და განშლადია, თუ $|x| > 1$. მწკრივის კრებადობას $x=1$ -სათვის არ განვიხილავთ.

დავამტკიცოთ, რომ $|x| < 1$ -სათვის დამატებითი წევრი ბინომისა მი-
ისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \rightarrow \infty$.

ამ მიზნით დამატებითი წევრი ავიღოთ კოშის სახით:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) = \\ = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)},$$

საიდანაც

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} \right| \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n |1+\theta x|^{\alpha-1}. \quad (15)$$

დავაკვირდეთ (15) გამოსახულების მესამე მამრავლს. იგი მოთავსებულია $(1-|x|)^{\alpha-1}$ -სა და $(1+|x|)^{\alpha-1}$ -ს შორის. მეორე მამრავლი, თუ $0 \leq x < 1$, ნაკლებია 1-ზე,

$$\left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| < 1.$$

თუ $-1 < x < 0$, მაშინ $1+\theta x = 1-\theta|x|$. ამ შემთხვევაშიდაც

$$\left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| < 1.$$

რაც შეეხება (15) გამოსახულების პირველ მამრავლს, იგი $-1 < x < 1$ შუალედში კრებადი მწკრივის

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1}$$

ზოგადი წევრია, რაშიდაც ადვილად დავრწმუნდებით დალამბერის პირობით. მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} = 0,$$

საიდანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

ამრიგად, $|x| < 1$ -სათვის მართებულია ტოლობა

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \dots \quad (16)$$

თუ $\alpha = n$ მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ $f^{(n)}(x) = n!$, ხოლო $f^{(n+1)}(x) = 0$. მაშასადამე, $(1+x)^n$ -ის ტეილორის მწკრივში ბოლო ნული-
საგან განსხვავებული წევრი იქნება x^n -ის შემცველი წევრი:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n.$$

თუ $\alpha = -1$, მაშინ სათანადოდ გვექნება

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots \quad -1 < x < 1, \quad (17)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad -1 < x < 1. \quad (18)$$

მივიღეთ ჩვენთვის კარგად ცნობილი უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია, რომელიც კრებადია მხოლოდ $-1 < x < 1$ შუალედში.

(16) ფორმულაში დაფუძნებით $\alpha = \frac{1}{2}$, მივიღებთ

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \quad (19)$$

ასევე, $\alpha = -\frac{1}{2}$ -სათვის მივიღებთ:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots \quad (20)$$

4) $\operatorname{arctg} x$ -ის გაშლა. ავიღოთ ტოლობა

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

ეს ტოლობა მართებულია $|x| < 1$ -სათვის. ამ არეში ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოთავსებული მწკრივის ინტეგრება შეიძლება, ამიტომ გვექნება

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad (21)$$

სადაც $|x| < 1$.

5) $\arcsin x$ -ის გაშლა. (20) ტოლობაში x შევცვალოთ $-x^2$ -ით. გვექნება

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2! 2^2} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! 2^3} x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4! 2^4} x^8 + \dots$$

უკანასკნელიდან $[0, x]$, $|x| < 1$, შუალედში ინტეგრებით მივიღებთ

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2! 2^2} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! 2^3} \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4! 2^4} \frac{x^9}{9} + \dots \quad (22)$$

2. ეილერის ფორმულები. ამ წიგნის პირველ ნაწილში (თავი III, § 8) კომპლექსური რიცხვი წარმოვადგინეთ მაჩვენებლიანი ფუნქციით $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, რომლის საფუძველზედაც მივიღებთ $\cos \varphi$ და $\sin \varphi$ -ის მაჩვენებლიანი ფუნქციის გამოსახვა. იგივე ფორმულები უფრო ზოგადად შეგვიძლია მივიღოთ მწკრივების საშუალებით. ეს ფორმულები დაგვჭირდება დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში.

ვთქვათ z ნამდვილი ცვლადია, ხოლო i წარმოსახვითი ერთეული. e^{iz} ფუნქცია, ბუნებრივია, უნდა განვსაზღვროთ e^x -ის ტეილორის მწკრივის საშუალებით, სადაც x -ის ნაცვლად ავიღებთ iz -ს.

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right). \end{aligned}$$

(5) და (6) ფორმულების საფუძველზე მივიღებთ

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (23)$$

ამრიგად, კომპლექსური რიცხვი $\cos z + i \sin z$ წარმოვადგინეთ მაჩვენებლიანი ფუნქციით.

(23) ფორმულაში z შევცვალოთ $-z$ -ით, გვექნება

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (24)$$

(23) და (24) ფორმულიდან განვსაზღვროთ $\cos z$ და $\sin z$, მივიღებთ

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (25)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (26)$$

ამრიგად, კვლავ მივიღეთ ჩვენთვის ცნობილი (23)–(26) ეილერის ფორმულები (იხ. ნაწ. I, თავი III, § 8).

3. ჰიპერბოლური ფუნქციები. სინუსჰიპერბოლური და კოსინუსჰიპერბოლური განისაზღვრება შემდეგი დამოკიდებულებებით (იხ. ნაწ. I თავი XIV, § 4, n7)

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

თუ e^x და e^{-x} ფუნქციის მწკრივებად გავშლით და შევასრულებთ მწკრივებზე აღნიშნულ მოქმედებებს, მივიღებთ

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (27)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (28)$$

ამ მწკრივთა კრებადობის ინტერვალია $-\infty < x < \infty$

4. რაციონალური ფუნქციის ტეილორის მწკრივად გაშლა. იმისათვის, რომ რაციონალური ფუნქცია $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, სადაც $m < n$, გავშალოთ ტეილორის მწკრივად, რაციონალური ფუნქცია უნდა დავშალოთ უმარტივეს წილადებად და თითოეული წილადი ცალ-ცალკე წარმოვადგინოთ გეომეტრიული მწკრივის საშუალებით. მწკრივთა კრებადობის ინტერვალი განისაზღვრება შესაბამის მწკრივთა ინტერვალების გადაკვეთით.

მაგალითად, გავშალოთ ტეილორის მწკრივად რაციონალური ფუნქცია

$$\frac{1}{2-3x+x^2}$$

ჯერ დავშალოთ უმარტივეს წილადებად:

$$\frac{1}{2-3x+x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}},$$

თითოეული წილადი ცალკე გავშალოთ მწკრივად:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^2} + \dots$$

პირველი მწკრივის კრებადობის ინტერვალია $-1 < x < 1$, ხოლო მეორე მწკრივის $-2 < x < 2$. ორივე მწკრივის კრებადობის ინტერვალია $-1 < x < 1$.

მოცემული რაციონალური ფუნქციის ტეილორის მწკრივად გაშლა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-3x+2} &= (1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots) - \\ &- \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) x + \left(1 - \frac{1}{2^3} \right) x^2 + \dots + \\ &+ \dots + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n + \dots \end{aligned}$$

ს ა გ ა რ ჯ ი შ ო 15.

1. გაშალოთ ტეილორის მწკრივებად შემდეგი ფუნქციები:

- 1) $\sin^2 x$, 2) $\cos 2x$, 3) e^{x^2} , 4) e^{-x} ,
5) e^{-x^2} , 6) $\sqrt{1-x^2}$, 7) $\sqrt[3]{1-x^3}$, 8) $\arcsin 2x$,
9) $\arctg 2x$, 10) $\ln \frac{2+x}{2-x}$, 11) $\frac{x}{x^2-4x+3}$, 12) $\frac{x+1}{x^2-5x+4}$,

2. ისარგებლეთ $\arctg x$ -ის ტეილორის გამწკრივებით და გამოთვალეთ π რიცხვის მნიშვნელობა 10^{-4} -ის სიზუსტით.

3. ისარგებლეთ $\ln \frac{p}{q}$ -ის ტეილორის გამწკრივებით და გამოთვალეთ $\ln 2$, $\ln 3$ 10^{-4} სიზუსტით.

4. ისარგებლეთ e^x -ის გამწკრივებით და გამოთვალეთ e -ს მნიშვნელობა 10^{-4} სიზუსტით.

5. ისარგებლეთ e^{-x^2} -ის გამწკრივებით და გამოთვალეთ $\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx$,
 $\alpha = 0$, $\beta = 1$; $\alpha = -1$, $\beta = 1$; მნიშვნელობა 10^{-5} სიზუსტით.

§ 4. პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალები

1. თანაბრად კრებადი მიმდევრობანი, თვისებები¹. ვთქვათ, ფუნქციები $u_n(x)$, $n=1, 2, \dots$, განსაზღვრულია რაიმე X სიმრავლეში. შევადგინოთ მწკრივი

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ყოველ (1) მწკრივს შეესაბამება ფუნქციათა მიმდევრობა $(f_n(x))_{n \geq 1}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

¹ Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М.—Л. 1948, гл. 665.

და, პირიქით, ყოველ მიმდევრობას $(f_n(x))_{n \geq 1}$ შეესაბამება სათანადო მწკრივი (1), სადაც

$$u_1(x) = f_1(x), u_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \dots, u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \dots$$

თუ (1) მწკრივი კრებადია, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad (3)$$

ამრიგად, ფუნქციათა მიმდევრობის $(f_n(x))$ ზღვარი და სათანადო მწკრივის ჯამი ერთდროულად არსებობს. (3) ტოლობა ნიშნავს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) := \forall \varepsilon > 0 \exists N(x, \varepsilon) \mid (\forall n > N(x, \varepsilon)) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

რადგანაც $x \in X$, მაშინ $N(x, \varepsilon)$ ლებულობს მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლეს. მაგრამ, თუ არსებობს ერთი $N(\varepsilon)$, რომელიც გამოდგება ყველა x -თვის, $x \in X$, მაშინ ვიტყვი $(f_n(x))$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია x სიმრავლეში,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) := \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \mid (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

ვაჩვენეთ, რომ, თუ (1) მწკრივი თანაბრად კრებადია X სიმრავლეში, მისი წევრები $u_n(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია X სიმრავლეში, მაშინ მწკრივის ჯამიც $f(x)$ უწყვეტია იმავე X სიმრავლეში (§ 1, თეორემა 2).. განვაზოგადოთ ეს თეორემა.

თეორემა 1. თუ თითოეულ $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, ფუნქციას აქვს სასრული ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = c_n \quad (4)$$

და (1) მწკრივი თანაბრად კრებადია X სიმრავლეში, მაშინ მწკრივი

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ კრებადია,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C, \quad (5)$$

(1) მწკრივის ჯამს აქვს ზღვარი $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ და ქეშმეშარი ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C. \quad (6)$$

დამტკიცება. რადგანაც (1) მწკრივი თანაბრად კრებადია,

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x), \quad (7)$$

მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი $N(\varepsilon)$, რომ ქეშმარიტია უტოლობა

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon, \quad n > N, \quad p \in \mathbb{N}.$$

ავიღოთ p წევრის ჯამი,

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x).$$

აქ შეგვიძლია ზღვარზე გადასვლა, p სასრული რიცხვია. (4) პირობიდან მივიღებთ

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+p}| < \varepsilon, \quad n > N, \quad p \in \mathbb{N}.$$

ასე რომ, (5) მწკრივისათვის კრებადობის პირობა სრულდება. შეგვიძლია დავწეროთ

$$C = C_n + r_n, \quad (8)$$

სადაც C_n არის (5) მწკრივის k -ე წევრი, ხოლო r_n ნაშთი. (7) ტოლობას წევრობრივ გამოვაცლოთ (8) ტოლობა,

$$f(x) - C = (f_n(x) - C_n) + R_n(x) - r_n,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$|f(x) - C| \leq |f_n(x) - C_n| + |R_n(x)| + |r_n|.$$

რადგანაც (1) მწკრივი თანაბრად კრებადია, მაშინ $\forall \varepsilon > 0$ -სათვის ისეთი $N(\varepsilon)$ შეგვიძლია ავარჩიოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული n -სათვის, $n > N$ და $\forall x \in X$ -სათვის (ცხადია, $x \rightarrow a$ -თვის) შესრულდეს უტოლობანი

$$|f_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |r_n| < \varepsilon.$$

ასე რომ, გვექნება

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \mid (n > N(\varepsilon)) \Rightarrow (|f(x) - C| < \varepsilon),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C.$$

რაც უნდა გვეჩვენებინა. ამ თეორემით დავამტკიცეთ, რომ, თუ X სიმ-
რავლეში თანაბრად კრებადი მწკრივის წევრებს აქვს ზღვარი, $\lim_{x \rightarrow a} u_n =$
 $= c_n$, მაშინ მწკრივის ჯამის ზღვარი ტოლია მწკრივის წევრთა ზღვრების
მწკრივის ჯამისა ან სხვა სიტყვებით: ფუნქციითა თანაბრად
კრებად მწკრივში შეიძლება წევრობრივად ზღვა-
რზე გადასვლა.

ჩავწეროთ (6) ტოლობა გაშლილად:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x); \quad C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow a} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^n u_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x), \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x). \quad (9)$$

მიღებული (9) ტოლობა საშუალებას გვაძლევს დამტკიცებული თეორემა
ასეც ჩამოვაყალიბოთ:

თეორემა 2. თუ ფუნქციითა მიმდევრობა $(f_n(x))_{n \geq 1}$
თანაბრად კრებადი X სიმრავლეში,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in X,$$

ღა

$$\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = C_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

მაშინ არსებობს ორივე ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$$

და ჭეშმარიტია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

დამტკიცებული თეორემა იძლევა პირობას ორი ცვლადის ფუნქციის
 $f_n(x) \equiv f(x, n)$ განმეორებითი ზღვრების არსებობისა და ტოლობის შე-
სახება.

არ მოგვეჩვენოს (9) ტოლობა უბრალოდ ზღვრების გადასმა. კარგად
განვასხვაოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვრისაგან (ნაწ. I, თავი XVI,
§ 1, n 3):

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = c &: = \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 (|x - a| < \eta \wedge |y - b| < \eta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (|f(x, y) - c| < \varepsilon). \end{aligned}$$

მაგალითად, გამოვთვალოთ ზღვარი $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(x \sin \frac{1}{y} \right)$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(x \sin \frac{1}{y} \right) = 0,$$

რადგანაც

$$\left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x|.$$

მაგრამ

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{y} \right) = 0,$$

ხოლო

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{y} \right)$$

არ არსებობს. ასე რომ, განმეორებითი ზღვრების ნიშნების ადგილმონაც-
ვლება ფაქტზე ყურადღებას მოითხოვს და მხოლოდ თეორემაში ჩამოყა-
ლიბებულ პირობებში შეიძლება.

ანალოგიურად მე-2 თეორემისა ფუნქციითა მწკრივის ინტეგრების
საფუძველზე ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3. თუ ფუნქციითა მიმდევრობის $(f_n(x))_{n \geq 1}$
წევრები რაიმე $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი

ფუნქციები და $(f_n(x))_{n \geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად იკრიბება $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ზღვრისაკენ, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია და ჭეშმარიტია ტოლობა

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx,$$

ანუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx. \quad (10)$$

ამგვარად, გვაქვს პირობა ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვრისა და ინტეგრალის ადგილმონაცვლების შესახებ.

ფუნქციათა მიმდევრობის წევრობრივი გაწარმოების შესახებ ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4. თუ ფუნქციათა კრებადი $(f_n(x))_{n \geq 1}$ მიმდევრობის წევრები $f_n(x)$ წარმოებადი ფუნქციები იკრიბება $[a, b]$ სეგმენტზე, წარმოებულითა მიმდევრობა თანაბრად კრებადია, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \sigma(x)$, მაშინ $f(x)$ -ის წარმოებული სათვის, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, ჭეშმარიტია ტოლობა

$$f'(x) = \sigma(x)$$

ანუ

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

მიღებული ფორმულა ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$D \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ D f_n(x) \}. \quad (12)$$

ამრიგად, მიმდევრობის ზღვარი და წარმოებული შეგვიძლია ურთიერთ შევცვალოთ, თუ თეორემაში მოცემული პირობები შესრულდება.

ყველგან, (9)–(12) ფორმულებში ძირითადია $(f_n(x))_{n \geq 1}$ მიმდევრობის ან $(f'_n(x))_{n \geq 1}$ მიმდევრობის თანაბრად კრებადობა. შევისწავლოთ ეს საკითხი დაწვრილებით.

2. ზღვრული ფუნქციისაკენ თანაბრად კრებადობა. განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია $f(x, y)$. ეს ფუნქცია განსაზღვრული იყოს x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე და y -ის ყველა მნიშვნელობისათვის $c \leq y \leq d$ სეგმენტზე. ვთქვათ, y -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის Y -დან, $Y = \{y | c \leq y \leq d\}$ ფუნქცია $f(x, y)$ ინტეგრებადია $X = \{x | a \leq x \leq b\}$ სეგმენტზე, საკუთრივი ან არასაკუთრივი აზრით,

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (13)$$

ცხადია, ინტეგრალი (13) დამოკიდებულია y დამხმარე ცვლადზე ან, როგორც იტყვიან, y პარამეტრზე. წინა პუნქტში პარამეტრი იყო n ნატურალური რიცხვი. შემდეგი საკითხების გარკვევაში გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს თანაბრად კრებადობას. განსაზღვროთ თანაბრად კრებადობა ზოგადად.

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ორგანზომილებიან არეში $M = X \times Y$, სადაც X და Y სიმრავლეები x -სა და y -ის სათანადოდ ცვლილების სიმრავლეებია. ვთქვათ, აგრეთვე, y ცვლადის ზღვრული წერტილია y_0 (y_0 ზღვრული წერტილია, თუ y_0 -ის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს Y სიმრავლის წერტილების უსასრულო სიმრავლეს). y_0 სასრული რიცხვია.

1) თუ $f(x, y)$ ფუნქციისათვის, როდესაც $y \rightarrow y_0$ არსებობს სასრული ზღვრული ფუნქცია $\varphi(x)$,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad (14)$$

2) ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოინახვება x -ზე დამოუკიდებელი $\delta(\varepsilon) > 0$, რომ

$$(|y - y_0| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow (|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon) \quad (15)$$

ყველა x -სათვის, $x \in X$, მაშინ ვიტყვი, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია მიიწრაფვის $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ თანაბრად x -ის მიმართ X სიმრავლეში.

თუ y_0 არასაკუთრივი რიცხვია, მაგალითად, $+\infty$, მაშინ თანაბრად კრებადობის განსაზღვრა x -ის მიმართ, $x \in X$, $\lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) = \varphi(x)$ შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) = \varphi(x) &:= \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 (\forall y > N(\varepsilon) \wedge \forall x \in X) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (16)$$

ამ N ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, რომელიც x -ზე დამოუკიდებელია. მიღებული თანაბრად კრებადობის განსაზღვრა (16) მოიცავს 1-ელი პუნქტის დასაწყისში $f_n(x)$ ფუნქციითა მიმდევრობის თანაბრად კრებადობის განსაზღვრას, $f_n(x) \equiv f(x, n)$. იქ N რიცხვი ნატურალური რიცხვი იყო. ამ შენიშვნის გამო, შემდეგში, y_0 საკუთრივი რიცხვი იქნება თუ არასაკუთრივი რიცხვი, დიდ მნიშვნელობას არ მივანიჭებთ. ყოველთვის დავწერთ y_0 -ს, მაგრამ მის ქვეშ ვიგულისხმებთ არასაკუთრივ რიცხვსაც, სადაც მხედველობაში მივიღებთ (16) განსაზღვრას.

ფუნქციითა თანაბრად კრებადობის შემთხვევაში ზემოაღნიშნული მიმდევრობათა შესახებ კოშის თეორემის (იხ. ნაწ. 1, თავი XIII, § 4, n 3) ანალოგიური თეორემა:

თეორემა 5. ცვლადი $y \rightarrow y_0$ -ისათვის $f(x, y)$ ფუნქცია თავისი $\varphi(x)$ ზღვრისაკენ რომ მიისწრაფვოდეს თანაბრად x -ის მიმართ X სიმრავლეში, აუცილებელია და საკმარისი: ყოველი ε დადებითი რიცხვისათვის არსებობდეს x -საგან დამოუკიდებელი რიცხვი $\delta(\varepsilon) > 0$, რომ უტოლობა

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon \quad (17)$$

შესრულდეს ყველა x -სათვის X სიმრავლიდან, თუ

$$|y - y_0| < \delta, |y' - y_0| < \delta, y, y' \in Y. \quad (18)$$

(თუ $y_0 = +\infty$, მაშინ (18) პირობის ნაცვლად გვექნება

$$y > N, y' > N,$$

სადაც N დამოუკიდებელია x -საგან, $N = N(\varepsilon)$).

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x, y) \rightarrow \varphi(x)$ თანაბრად ყველა x -სათვის, $x \in X$. მაშინ $\varepsilon > 0$ -სათვის $y \rightarrow y_0$ მოიძებნება ისეთი $\delta(\varepsilon) > 0$, რომ ყოველი y და y' -ისათვის, $|y - y_0| < \delta$, $|y' - y_0| < \delta$,

$$|f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\varphi(x) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ნებისმიერი x -სათვის X სიმრავლიდან. აქედან, ცხადია,

$$|f(x, y') - f(x, y)| \leq |f(x, y') - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

საკმარისობა. ვთქვათ, (17), (18) პირობები სრულდება. ავიღოთ y -ის რაიმე მნიშვნელობა ისე, რომ სრულდებოდეს (18) პირობა. მაშინ ზღვრუ-

ლი $\varphi(x)$ ფუნქციის არსებობა ცხადია. გადავიდეთ (17) უტოლობაში ზღვარზე, როცა $y' \rightarrow y$, გვექნება

$$|\varphi(x) - f(x, y)| \leq \varepsilon,$$

რაც გვიჩვენებს $f(x, y)$ ფუნქციის $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ თანაბრად კრებადობას. დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც დაავკვირებს ფუნქციის თანაბრად კრებადობას ფუნქციითა მიმდევრობის თანაბრად კრებადობასთან.

თეორემა 6. იმისათვის, რომ $y \rightarrow y_0$ -სათვის $f(x, y)$ ფუნქცია თანაბრად მიისწრაფვოდეს $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ x -ის მიმართ X სიმრავლეში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ მიისწრაფვოდეს ყოველი მიმდევრობა $(f(x, y_n))_{n \geq 1}$, სადაც y_n ნებისმიერი მიმდევრობაა, $y_n \rightarrow y_0$ (y_n) $_{n \geq 1}$ მკუთხედის Y სიმრავლეს.

აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია თანაბრად მიისწრაფვის $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ, როდესაც $y \rightarrow y_0$. (15) განსაზღვრის თანახმად ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის მოიძებნება ისეთი $\delta(\varepsilon)$, რომ $(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon)$. გადავზომოთ y -ები, რომლებიც ამ უტოლობას აკმაყოფილებენ $|y_n - y_0| < \delta$. შეიძლება განისაზღვროს ისეთი $N(\varepsilon)$, რომ $\forall n > N$ -სათვის $|y_n - y_0| < \delta$. მაგრამ, მაშინ (15) განსაზღვრის თანახმად ყველა x -სათვის, $x \in X$,

$$(n > N(\varepsilon)) \Rightarrow (|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon).$$

ამრიგად, $(f(x, y_n))_{n \geq 1}$ მიმდევრობის თანაბრად კრებადობა დამტკიცდა.

საკმარისობა. ვთქვათ, ყველა $(f(x, y_n))$ მიმდევრობა თანაბრად იკრებება $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ. ვაჩვენოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია თანაბრად იკრებება $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ, როდესაც $y \rightarrow y_0$. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ რომელიმე $\varepsilon > 0$ -სათვის, როგორც გინდა იყოს $\delta = \delta'$, მოინახება $y = y' \in Y$ სიმრავლიდან $|y' - y_0| < \delta'$. მაგრამ $x = x'$ -ის ერთი მნიშვნელობისათვის მაინც X სიმრავლიდან შესრულდება უტოლობა $|f(x', y') - \varphi(x')| \geq \varepsilon$.

აზლა ავიღოთ მიმდევრობა (δ_n) , $\delta_n > 0$, $\delta_n \rightarrow 0$. ყოველ δ_n -ს შევვიძლია შევუსაბამოთ ორი მნიშვნელობა x_n და y_n ისეთი, რომ

$$|y_n - y_0| < \delta_n, \text{ მაგრამ } |f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon.$$

ამრიგად, $(f(x, y_n))$ მიმდევრობა თანაბრად არ იკრებება $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ. რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება. ამით ჩამოყალიბებული თეორემა დამტკიცდა.

მე-6 თეორემა ანალოგიურია იმ წინადადებისა, სადაც ვამტკიცებთ ფუნქციის ზღვარი კოშის აზრით და ჰაინეს აზრით ეკვივალენტურია (იხ. ნაწ. I, თავი XIII, § 7, პ. 1. ზღვრების სხვადასხვა განსაზღვრის ურთიერთეკვივალენტურობა ცალკე თეორემად გამოყოფილი არაა გვ. 676).

ზემოთ დამტკიცებული მე-3 თეორემა ფუნქციითა მიმდევრობის ინტეგრების შესახებ მე-6 თეორემის საფუძველზე ასე განზოგადდება:

თეორემა 3'. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ნებისმიერი y -სათვის Y სიმრავლიდან უწყვეტია (ინტეგრებადია) x -ით $X = \{x | a \leq x \leq b\}$ სეგმენტზე და $y \rightarrow y_0$ -სათვის თანაბრად იკრიბება $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია (ინტეგრებადია) X სეგმენტზე.

3. განმეორებითი ზღვრების ურთიერთადგილობრივობა. მე-2 თეორემა მე-6 თეორემის საფუძველზე ასეთ სახეს მიიღებს:

თეორემა 7. თუ ყოველი x -სათვის X სიმრავლიდან არსებობს მარტივი ზღვარი

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x).$$

ასევე, ყოველი y -სათვის Y სიმრავლიდან არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y).$$

ამასთან $f(x, y)$ ფუნქცია თანაბრად იკრიბება $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ x -ის მიმართ X სიმრავლიდან, როდესაც $y \rightarrow y_0$, მაშინ არსებობს ორივე განმეორებითი ზღვარი და ჰეშმარიტია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y). \quad (19)$$

4. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა. დავამტკიცოთ თეორემა:

თეორემა 8. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია y_0 -ის რაიმე მიღებული ნებისმიერი y -სათვის ინტეგრებადია $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე და x -სათვის $f(x, y)$ ფუნქცია თანაბრად მიისწრაფვის თავისი ზღვრისაკენ, $\varphi(x)$ -კენ, როდესაც $y \rightarrow y_0$, მაშინ

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (20)$$

დამტკიცება. მე-7 თეორემით $\varphi(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა ცხადია. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და მოვნახოთ $\delta > 0$ ისე, რომ $(|y - y_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon)$, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x, y) - \varphi(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| dx < \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

რაც უნდა გვეჩვენებინა. (20) ფორმულა ასე გადავწეროთ

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx. \quad (21)$$

ამ თეორემიდან ადვილი მისაღებია

შედეგი. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტი მართკუთხედში $[a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$, მაშინ ინტეგრალი

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (22)$$

უწყვეტია y პარამეტრის მიმართ $c \leq y \leq d$ სეგმენტზე.

მართლაც, სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია (იხ. ნაწ. I, თავი XIII, § 12, n3), მაშინ

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(|x'' - x'| < \delta \wedge |y'' - y'| < \delta \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon). \end{aligned}$$

დაეუშვათ, კერძოდ, $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y$, მაშინ $|y - y_0| < \delta$ -ათვის და ნებისმიერი x -სათვის $a \leq x \leq b$ სეგმენტიდან გვექნება

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

ამრიგად, უწყვეტი $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრალი x -ით, $a \leq x \leq b$, y პარამეტრის უწყვეტი ფუნქციაა,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx. \quad (23)$$

წ. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ პარამეტრით გაწარმოება. მივმართოთ ისევ (22) ინტეგრალს. დავსვათ კითხვა: შეიძლება თუ არა y პარამეტრით $I(y)$ ფუნქციის გაწარმოება? ამის პასუხს მივიღებთ მე-3 თეორემიდან, თუ გამოვიყენებთ მე-6 თეორემას.

თეორემა 9. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია მართკუთხედში $[a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$, უწყვეტია x -ით $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე ყოველი y -სათვის $c \leq y \leq d$ სეგმენტიდან. ამასთან არსებობს $f'_y(x, y)$ წარმოებული, უწყვეტი ორივე ცვლადის მიმართ აღებული მართკუთხედში, მაშინ ქვეშაო-რითა ფორმულა:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx. \quad (24)$$

გ. ი. შეიძლება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ პარამეტრით გაწარმოება.

დამტკიცება. განვიხილოთ გამოსახულება

$$\frac{\Delta I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx.$$

გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა

$$\frac{\Delta I(y)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y + \theta \Delta y) dx, \quad 0 < \theta < 1.$$

თეორემის პირობის თანახმად $f'_y(x, y)$ წარმოებული უწყვეტი ფუნქციაა. გამოვიყენოთ (23) ფორმულა, გვექნება

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta y} = \int_a^b \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f'_y(x, y + \theta \Delta y) dx = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

რაც უნდა გვეჩვენებინა.

მიღებული გამოსახულება ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$D_y \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b D_y f(x, y) dx. \quad (25)$$

ამრიგად, თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის კერძო წარმოებული პარამეტრით უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ ქვეშაო-რითა (25) ფორმულა; ინტეგრალქვეშ შეიძლება პარამეტრით გაწარმოება.

6. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ პარამეტრით ინტეგრება. განვიხილოთ (22) ტოლობით განსაზღვრული $I(y)$ ფუნქციის ინტეგრების საკითხი $c \leq y \leq d$ სეგმენტზე. დავსვათ კითხვა: როდის შეიძლება ქვეშაო-რითი იყოს ტოლობა

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx.$$

ეს ტოლობა ასე ჩაიწერება

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (26)$$

დავამტკიცოთ თეორემა:

თეორემა 10. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$ მართკუთხედში, მაშინ ქვეშაო-რითა (26) ფორმულა.

წინასწარ დავამტკიცოთ უფრო ზოგადი ფორმულა

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y) dy, \quad (27)$$

სადაც $c \leq \eta \leq d$.

(27) გამოსახულების ორივე მხარეში η ცვლადის ფუნქციები გვაქვს. გამოვთვალოთ ტოლობის როგორც მარცხენა ნაწილის, ისე მარჯვენა ნაწილის წარმოებულები η ცვლადით. მარცხენა ნაწილში ინტეგრალის ქვეშ

გვაქვს y ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია $\int_a^b f(x, y) dx$ მე-8 თეორემის შედეგის საფუძველზე. გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{d}{d\eta} \int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, \eta) dx. \quad (28)$$

(27) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს

$$\int_a^b \varphi(x, \eta) dx, \text{ სადა } \varphi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y) dy.$$

ფუნქცია $\varphi(x, \eta)$ უწყვეტია x -ის მიმართ, გარემოებით მივიღებთ

$$\frac{d}{d\eta} \int_a^b \varphi(x, \eta) dx = \int_a^b \frac{d}{d\eta} \varphi(x, \eta) dx = \int_a^b f(x, \eta) dx. \quad (29)$$

თუ შევადარებთ (28) და (29) წარმოებულებს, გვექნება

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y) dy + C.$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $\eta=c$, გვექნება $C=0$. ამრიგად, (27) ტოლობა ჭეშმარიტია. თუ (27) ტოლობაში ჩავსვამთ $\eta=d$, მივიღებთ (26) ტოლობას.

7. ინტეგრალის პარამეტრით წარმოებულის გამოთვლა¹. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I(y) = \int_{x_0}^X f(x, y) dx. \quad (30)$$

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია $[a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$ მართკუთხედში აკმაყოფილებს მე-9 თეორემის პირობებს: $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია x -ით $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე ყოველი y -სათვის $c \leq y \leq d$ სეგმენტიდან, წარმოებული $f'_y(x, y)$ უწყვეტია მთელ მართკუთხედში, მაშინ

$$\frac{dI(y)}{dy} = \int_{x_0}^X f'_y(x, y) dx, \quad a \leq x_0 \leq X \leq b. \quad (31)$$

ახლა, ვთქვათ, ინტეგრალის საზღვრები y — ცვლადის ფუნქციებია

$$x_0 = \varphi_1(y), \quad X = \varphi_2(y), \quad (32)$$

¹ Э. Гурса, Курс математического анализа, т. I, М.—Л, 1936, стр. 203.

აც $a \leq x_0 \leq X \leq b$. განვიხილოთ ნაზრდი

$$\begin{aligned} \Delta I(y) &= I(y + \Delta y) - I(y) = \int_{x_0 + \Delta x_0}^{X + \Delta X} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{x_0}^X f(x, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^X (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) dx + \int_X^{X + \Delta X} f(x, y + \Delta y) dx - \\ &\quad - \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x_0} f(x, y + \Delta y) dx. \end{aligned}$$

პირველ ინტეგრალში გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა, ხოლო მეორე და მესამე ინტეგრალებში საშუალო მნიშვნელობის ფორმულები, გვექნება

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{x_0}^X f'_y(x, y + \theta \Delta y) \Delta y dx + \Delta X \cdot f(\xi_1, y + \Delta y) - \Delta x_0 \cdot f(\xi_2, y + \Delta y), \\ 0 &< \theta < 1, \quad X < \xi_1 < X + \Delta X, \quad x_0 < \xi_2 < x_0 + \Delta x_0. \end{aligned} \quad (33)$$

ვიგულისხმობთ (32) ფუნქციები წარმოებადია და $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ფუნქციაა სათანადოდ თავისი განსაზღვრის არეში, მაშინ (33)-დან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta I(y)}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_{x_0}^X f'_y(x, y + \theta \Delta y) dx + \\ &+ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta X}{\Delta y} f(\xi_1, y + \Delta y) \right) - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x_0}{\Delta y} f(\xi_2, y + \Delta y) \right). \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ თითოეული შესაყრები ცალ-ცალკე:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_{x_0}^X f'_y(x, y + \theta \Delta y) dx &= \int_{x_0}^X \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx = \int_{x_0}^X f'_y(x, y) dx, \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta X}{\Delta y} f(\xi_1, y + \Delta y) \right) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta y} \lim_{\substack{\xi_1 \rightarrow X \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(\xi_1, y + \Delta y) = \frac{dX(y)}{dy} f(X, y), \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x_0}{\Delta y} f(\xi_2, y + \Delta y) \right) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x_0}{\Delta y} \lim_{\substack{\xi_2 \rightarrow x_0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(\xi_2, y + \Delta y) = \frac{dx_0(y)}{dy} f(x_0, y). \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\frac{d}{dy} \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y) dx = \int_{x_0(y)}^{X(y)} f'_y(x, y) dx + \frac{dX(y)}{dy} f(X, y) - \frac{dx_0(y)}{dy} f(x_0, y). \quad (34)$$

ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების ფორმულა ზოგჯერ შეიძლება გამოვიყენოთ ინტეგრალის გამოსათვლელად. მაგალითად, გამოვთვალოთ

$$I_n(y) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y)^n}, \quad y > 0.$$

რადგანაც

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{y}},$$

გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{dI_1}{dy} = (-1) \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y)^2} = (-1)^1 I_2,$$

$$\frac{d^2 I_1}{dy^2} = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y)^3} = (-1)^2 2! I_3,$$

$$\frac{d^{n-1} I_1}{dy^{n-1}} = (-1)^{n-1} (n-1)! I_n,$$

საიდანაც

$$I_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1} I_1}{dy^{n-1}},$$

ანუ

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{y}} \right), \quad y > 0. \quad (35)$$

შევნიშნოთ, რომ (25) და (26) ფორმულას ყურადღებით მოჰყრობა

ესაჭიროება. თუ მე-9 თეორემის პირობა დაირღვა, მაშინ (25) ფორმულა ძალას კარგავს, მართლაც, განვიხილოთ მაგალითი

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y dx}{y^2 + x^2} = \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right]_0^1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{y}.$$

ცხადია,

$$\lim_{y \rightarrow 0-0} F(y) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{y \rightarrow 0+0} F(y) = \frac{\pi}{2}.$$

ამრიგად, $F(y)$ ფუნქცია წყვეტილია $y=0$ წერტილში. ეს იმის გამო, რომ ფუნქცია $f(x, y)$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{y^2 + x^2}, & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0, \end{cases}$$

წყვეტილია $x=0, y=0$ წერტილში და ეს წერტილი ეკუთვნის ინტეგრების საზღვარს. სწორედ ამის გამო არის (35) მაგალითში მოთხოვნილი $y > 0$.

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0. \end{cases} \quad (36)$$

ამ ფუნქციის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{4}.$$

თუ ინტეგრალს გამოვთვლით შებრუნებული რიგით, მივიღებთ

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

ამრიგად, (26) ფორმულა ამ შემთხვევაში ჰეშმარიტი არაა. ეს იმის გამო, რომ (36) ფუნქცია წყვეტილია $x=0, y=0$ წერტილში და ეს წერტილი ეკუთვნის ინტეგრების საზღვარს.

8. პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალები. არასაკუთრივი ინტეგრალები ზემოთ განვიხილეთ (თავი II, § 8), სადაც გამოვთვალეთ ზოგიერთი შესანიშნავი ინტეგრალი.

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია მოცემულია ყველა მნიშვნელობისათვის $x \geq a$ და რაიმე Y სიმრავლიდან y -ის ყველა მნიშვნელობისათვის. დავუშვათ, რომ ყოველი y -სათვის Y სიმრავლიდან არსებობს ინტეგრალი

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx. \quad (37)$$

არასაკუთრივი ინტეგრალის განსაზღვრის თანახმად

$$\int_a^\infty f(x, y) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x, y) dx$$

ამრიგად, ინტეგრალი

$$F(\beta, y) = \int_a^\beta f(x, y) dx \quad (38)$$

ორი ცვლადის ფუნქციაა y -ის და β -სი, სადაც y მნიშვნელობებს ღებულობს Y სიმრავლიდან, ხოლო $\beta \rightarrow \infty$, რომელსაც აქვს ზღვარი

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta, y) = I(y). \quad (39)$$

იმისათვის, რომ გავავრცელოთ პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალების ზემოთ შესწავლილი თეორია პარამეტრზე დამოკიდებულ არასაკუთრივ ინტეგრალზეზე, დაგვჭირდება არასაკუთრივი ინტეგრალის თანაბრად კრებადობის ცნება y პარამეტრის მიმართ.

თუ (39) ზღვარი მიიღება თანაბარი მისწრაფებით y -ის მიმართ Y

სიმრავლიდან, მაშინ ვიტყვით $\int_a^\infty f(x, y) dx$ ინტეგრალი თანაბრად კრებადი y -ის მიმართ Y სიმრავლეში, ანუ

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta, y) = I(y) := \forall \varepsilon > 0 \exists \beta_0(\varepsilon) | (\forall y \in Y) \wedge (\beta > \beta_0(\varepsilon)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^\beta f(x, y) dx \right| < \varepsilon. \quad (40)$$

ამრიგად, ინტეგრალი $\int_a^\infty f(x, y) dx$ თანაბრად კრებადი, თუ არსებობს

ყოველი $\varepsilon > 0$ -ისთვის ისეთი $\beta_0 \geq a$ დამოუკიდებლად y -საგან Y სიმრავლიდან, $\beta_0 = \beta_0(\varepsilon)$, რომ უტოლობა

$$\left| \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^\beta f(x, y) dx \right| = \left| \int_\beta^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

შესრულება $\beta > \beta_0$ -სათვის $\forall y \in Y$.

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვარკვიოთ y -სათვის რა შუალედშია თანაბრად კრებადი ინტეგრალი

$$\int_0^\infty y e^{-xy} dx \quad (41)$$

ეს ინტეგრალი კრებადი ყოველი მუდმივი $y \geq 0$ -სათვის. თუ $y = 0$, მაშინ

ყოველი β -სათვის $\int_\beta^\infty y e^{-xy} dx$ ნულის ტოლია. $y > 0$ -სათვის, ჩასვით

$xy = t$ მივიღებთ

$$\int_\beta^\infty y e^{-xy} dx = \int_{\beta y}^\infty e^{-t} dt = e^{-\beta y}.$$

უტოლობა $e^{-\beta y} < \varepsilon$ შესრულება $\beta > \beta_0$, სადაც $\beta_0 = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{y}$. ამრიგად, β_0 დამოკიდებულია y -ზე. ავიღოთ შუალედი $[c, d]$, სადაც $c > 0$, მაშინ

$$e^{-\beta y} \leq e^{-\beta c} < \varepsilon, \quad c \leq y \leq d.$$

ამ უტოლობიდან განესაზღვროთ β_0 . გვექნება

$$\beta_0 = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{c}.$$

ამრიგად, ინტეგრალი (41) თანაბრად კრებადია $[c, d]$ სეგმენტზე. მაგრამ, თუ ავიღებთ $[0, d]$ სეგმენტს, ამ სეგმენტზე (41) ინტეგრალი თანაბრად

კრებადი არაა. ეს მდგომარეობა იჭიდანაა ცხადი, რომ $\beta_0 = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{y}$, როგორც დიდი მნიშვნელობისა ან უნდა ავიღოთ β_0 , $e^{-\beta y}$ მიისწრაფვის 1-საკენ, როცა $y \rightarrow 0$ -საკენ. ასე რომ, საკმარისად მცირე y -ის მნიშვნელობისათვის $e^{-\beta y}$ მეტი იქნება ყოველ $\varepsilon < 1$ -ზე.

მ. არასაკუთრივი ინტეგრალის თანაბრად კრებადობა. მე-5 თეორემაში გვქონდა აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია თანაბრად მიისწრაფვოდეს $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ, როდესაც $y \rightarrow +\infty$. ადვილი წარმოსადგენია, რომ (37) ინტეგრალის თანაბრად კრებადობისათვის ჭეშმარიტი იქნება შემდეგი თეორემა:

თეორემა II. ინტეგრალის

$$\int_a^\infty f(x, y) dx \quad (37)$$

თანაბრად კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ -სათვის მოიხაზოს ისეთი β_0 , დამოუკიდებლად y -ისა Y სიმრავლიდან, რომ უტოლობა

$$\left| \int_a^{\beta_1} f(x, y) dx - \int_a^{\beta_2} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{\beta_2}^{\beta_1} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (42)$$

შესრულდეს ყოველი β_1 და β_2 -ისათვის მხოლოდ მაშინ, თუ $\beta_1 > \beta_2 > \beta_0$.

იმისათვის, რომ მივიღოთ არასაკუთრივი ინტეგრალის თანაბრად კრებადობის საკმარისი პირობა მივმართოთ მე-2 თავის მე-3 პარაგრაფის მე-4 თეორემას.

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია x -ით ყოველ სასრულ შუალედში $[a, \beta]$, $\beta \geq a$. ინტეგრებადობა აქ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც საკუთრივი აზრით ისე არასაკუთრივი აზრით. ამ მე-4 თეორემის საფუძველზე ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 12. თუ არსებობს მხოლოდ x -ზე დამოკიდებული ფუნქცია $\varphi(x)$, ინტეგრებადი $[a, +\infty]$ შუალედში, ისეთი, რომ y -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის Y სიმრავლიდან სრულდება უტოლობა

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x), \quad (43)$$

მაშინ (37) ინტეგრალი თანაბრად კრებადია y -ის მიმართ იმ Y სიმრავლიდან, სადაც y განსაზღვრული.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია, გამოვიყენოთ (43) უტოლობა

$$\left| \int_{\beta_2}^{\beta_1} f(x, y) dx \right| \leq \int_{\beta_2}^{\beta_1} \varphi(x) dx.$$

(43) პირობის შემთხვევაში იტყვიან, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია მაჟორირდება (ინტეგრალური მაჟორანტა) $\varphi(x)$ ფუნქციით ან ინტეგრალი (37) მაჟორირდება პარამეტრზე დამოუკიდებელი კრებადი ინტეგრალით

$$\int_a^\infty \varphi(x) dx. \quad (44)$$

განვიხილოთ ფუნქციათა ნამრავლის არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) g(x, y) dx, \quad (45)$$

სადაც $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია x -ით ნებისმიერ $[a, \beta]$, $\beta \geq a$, სეგმენტზე, ხოლო $\varphi(x, y)$ ფუნქცია მონოტონურია x -ით.

ჩამოვაყალიბოთ (45) ინტეგრალის თანაბრად კრებადობის საკმარისი პირობა.

თეორემა 13. თუ ინტეგრალი

$$\int_a^\beta f(x, y) dx$$

თანაბრად შემოსაზღვრულია β -სა და y -ის მიმართ,

$$\left| \int_a^\beta f(x, y) dx \right| \leq k, \quad \beta \geq a, \quad y \in Y, \quad k - \text{მუდმივია},$$

და ფუნქცია $g(x, y) \rightarrow 0$, როდესაც $x \rightarrow \infty$, თანაბრად y -ის მიმართ, $y \in Y$, მაშინ ინტეგრალი

$$\int_a^\infty f(x, y) g(x, y) dx$$

თანაბრად იკრიბება y -ის მიმართ Y სიმრავლეში.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ (42) პირობა. ავიღოთ ისეთი β_1 და β_2 , რომ $\beta_1 > \beta_2 \geq a$. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ყოველ $a \leq x \leq \beta$, $\beta < \infty$, სეგმენტზე და $y \in Y$ ამავე არეში $g(x, y)$ ფუნქცია ნიშანს არ იცვლის, $g(x, y) \geq 0$. ამ მოთხოვნებით თეორემის პირობები შესრულდება (ამ წინადადების შებრუნება არ შეიძლება).

გამოვიყენოთ ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა

$$\int_{\beta_2}^{\beta_1} f(x, y) g(x, y) dx = f(\xi, y) \int_{\beta_2}^{\beta_1} g(x, y) dx, \quad \beta_2 < \xi < \beta_1.$$

ამ დამოკიდებულებიდან ყოველი $\varepsilon > 0$ -თვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\beta_0(\varepsilon)$, რომ ყოველი $\beta_1 > \beta_2 > \beta_0$ -სათვის შესრულდეს უტოლობა

$$\left| \int_{\beta_2}^{\beta_1} f(x, y) g(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

რაც თეორემას ამტკიცებს.

10. არასაკუთრივ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა. არასაკუთრივ ინტეგრალის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის საკმარისი პირობა მოცემულია შემდეგ თეორემაში:

თეორემა 14. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია x -ით საკუთრივ აზრით ყოველი $y \in Y$ -სთვის და ნებისმიერი β -სათვის $a \leq x \leq \beta < \infty$ სეგმენტზე; ყოველი ასეთი შუალედისათვის $f(x, y)$ ფუნქცია $y \rightarrow y_0$ -სათვის თანაბრად მიისწრაფვის x -ის მიმართ $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ, ამასთან ინტეგრალნი

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx \quad (46)$$

თანაბრად კრებადია y -ის მიმართ Y სიმრავლეში, მაშინ ქვეშ მარტივია ტოლობა

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \varphi(x) dx. \quad (47)$$

ამ თეორემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ (20) ფორმულა

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y, \beta) = \int_a^\beta \varphi(x) dx.$$

მაგრამ

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta, y) = \int_a^\infty f(x, y) dx,$$

რაც მოგვცემს

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta, y) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow y_0} F(\beta, y) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta \varphi(x) dx = \int_a^\infty \varphi(x) dx,$$

ანუ

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \varphi(x) dy.$$

საკუთრივ ინტეგრალში ზღვარზე გადასვლისაგან განსხვავებით (თეორემა 8), არასაკუთრივ ინტეგრალში მოთხოვნილია თვით (46) ინტეგრალის თანაბრად კრებადობა.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x > 0, \quad n=1, 2, \dots, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $f_n(x)$ ფუნქცია მაქსიმუმს აღწევს $x = \sqrt{\frac{n}{3}}$

წერტილში და მაქსიმალური მნიშვნელობაა $\frac{3\sqrt{3}}{n} e^{-\frac{3}{2}}$. აქედან ცხადია,

ფუნქცია $f_n(x)$, როდესაც $n \rightarrow \infty$, თანაბრად მიისწრაფვის $\varphi(x) = 0$ ფუნქციისაკენ. საიდანაც მივიღებთ

$$\int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{-\frac{n}{2x^2}} \right]_{x=0}^{x=\infty} = 1.$$

აღებულ $f_n(x)$ ფუნქციისათვის არასაკუთრივ ინტეგრალში ზღვარზე გადასვლა არ შეიძლება. აქ დარღვეულია (46) ინტეგრალის თანაბრად კრებადობა. მართლაც, ნებისმიერი β -სათვის

$$\int_{\beta}^{\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = \left[e^{-\frac{n}{2x^2}} \right]_{x=\beta}^{x=\infty} = 1 - e^{-\frac{n}{2\beta^2}}.$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ, როგორც გინდ იყოს β რიცხვი, $\beta > \beta_0$, უტოლობა

$$1 - e^{-\frac{n}{2\beta^2}} < \varepsilon$$

შესრულდება, თუ $e^{-\frac{n}{2\beta_0^2}} = 1 - \varepsilon$, საიდანაც

$$\beta_0^2 = \frac{-n}{2 \ln(1 - \varepsilon)}.$$

ამრიგად, β_0 დამოკიდებულია n -ზე. ინტეგრალი $\int_0^{\infty} f_n(x) dx$ თანაბრად

კრებადი არაა n -ის მიმართ.

11. პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალის უწყვეტობა და გაწარმოება. როგორც მე-14 თეორემის დამტკიცების დროს ვაჩვენეთ, $f(x, y)$ ფუნქციის x -ით არასაკუთრივ ინტეგრალში ზღვარზე პარამეტრით გადასვლა, დამატებით საკუთრივი ინტეგრალისა, მოითხოვს თვით

$$I(y) = \int_a^x f(x, y) dx$$

ინტეგრალის თანაბრად კრებადობას. ძნელი წარმოსადგენი არაა შემდეგი თეორემების ჭეშმარიტება:

თეორემა 15. ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია, როგორც ორი ცვლადის ფუნქცია, განსაზღვრულია და უწყვე-

ტი x და y -ის მნიშვნელობებისათვის: $x \geq a$, $y \in Y = \{y | c \leq y \leq d\}$. თუ ინტეგრალი

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx \quad (46)$$

თანაბრად კრებადი y -ის მნიშვნელობებისათვის Y სეგმენტიდან, მაშინ იგი უწყვეტი ფუნქციაა y ცვლადისა Y სეგმენტიდან,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} f(x, y_0) dx. \quad (48)$$

მართლაც, (47) ფორმულიდან გვექნება

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} f(x, y_0) dx = I(y_0).$$

თეორემა 16. ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია, როგორც ორი ცვლადის ფუნქცია, განსაზღვრულია $x \geq a$ -სათვის და y -სათვის Y სეგმენტიდან, $c \leq y \leq d$; ამ მნიშვნელობათათვის $f(x, y)$ ფუნქცია და $f'_y(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია. თუ ყოველი y სათვის Y სეგმენტიდან (46) ინტეგრალი კრებადი და ინტეგრალი

$$I'(y) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx \quad (49)$$

თანაბრად კრებადი y -ის მიმართ Y სეგმენტიდან, მაშინ ჭეშმარიტია ტოლობა:

$$D_y \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} D_y f(x, y) dx. \quad (50)$$

ამ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია, განვიხილოთ $y = y_0$ -სათვის

$$\frac{\Delta I(y_0)}{\Delta y} = \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^{\infty} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx$$

და გამოვიყენოთ (49) პირობა. გვექნება

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^\infty \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \int_a^\infty f'_y(x, y_0) dx.$$

12. არასაკუთრივი ინტეგრალის პარამეტრით ინტეგრება. მე-14 თეორემის პირობებში ჭეშმარიტია თეორემა:

თეორემა 17. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია $x \geq a$ -თვის და ყოველი y -ისათვის Y სეგმენტიდან, ინტეგრალი

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

თანაბრად კრებადია ყოველი y -ის მიმართ Y სეგმენტიდან, მაშინ ჭეშმარიტია ტოლობა

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (51)$$

მართლაც, მე-10 თეორემის თანახმად ნებისმიერი $\beta \geq a$ -სათვის ჭეშმარიტია ტოლობა

$$\int_c^d dy \int_a^\beta f(x, y) dx = \int_a^\beta dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (52)$$

რადგანაც ფუნქცია

$$F(y, \beta) = \int_a^\beta f(x, y) dx$$

თანაბრად იკრება თავის ზღვრისაკენ, როდესაც $\beta \rightarrow \infty$. თეორემის პირობის თანახმად, გვექნება

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_c^d dy \int_a^\beta f(x, y) dx = \int_c^d dy \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x, y) dx = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y) dx.$$

ამრიგად, (52) ტოლობის მარცხენა მხარეს აქვს ზღვარი, როდესაც $\beta \rightarrow \infty$.

ამ შემთხვევაში არსებობს (52) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოთავსებული გამოსახულების ზღვარი, როდესაც $\beta \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

ამრიგად, ჭეშმარიტია ტოლობა

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

დამტკიცებული მე-17 თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია ორი ინტეგრალის ურთიერთადგილმონაცვლება. აქედან ერთი ინტეგრალი სასრული საზღვრებითაა, ხოლო მეორე ინტეგრალი არასასრული საზღვრებით. ხშირად გვხვდება ისეთი ინტეგრალების ადგილმონაცვლება, რომლებსაც არასრული საზღვრები აქვს. ამ საკითხს განვიხილავთ მეტად მარტივი შემთხვევისათვის. ძნელი დასამტკიცებელი არაა შემდეგი თეორემა:

თეორემა 18. ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია $x \geq a$ -თვის და $y \geq c$ -თვის. დავუშვათ ორივე ინტეგრალი

$$\int_a^\infty f(x, y) dx, \quad \int_c^\infty f(x, y) dy \quad (53)$$

თანაბრად კრებადია: პირველი y -ის მიმართ და მეორე x -ის მიმართ, ნებისმიერ სასრულ შუალედში. თუ არსებობს ერთ-ერთი განმეორებითი ინტეგრალი

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty |f(x, y)| dx, \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x, y)| dy,$$

მაშინ არსებობს განმეორებითი ინტეგრალები და ეს ინტეგრალები ტოლია,

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y) dy. \quad (54)$$

13. პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის თეორემის განზოგადება. მწკრივებთან კავშირი. ზემოთ დამტკიცეთ მე-8 თეორემა, რომელიც ეხებოდა შემდეგი ტოლობის ქვემარტივებს:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx. \quad (55)$$

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია სასრულ $a \leq x \leq b$ შუალედში ყოველი y -სათვის რაიმე Y სიმრავლიდან. ვთქვათ, აგრეთვე $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია x ცვლადით a -დან b -მდე (საკუთრივი ან არასაკუთრივი აზრით) ყოველი y მუდმივისათვის, $y \in Y$. მაშინ ინტეგრალი

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad (56)$$

იქნება საკუთრივი თუ არასაკუთრივი, წარმოადგენს

$$F(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx, \quad \eta > 0, \quad (57)$$

ფუნქციის ზღვარს, როდესაც $\eta \rightarrow 0$. თუ $F(\eta, y)$ -ის მისწრაფება $I(y)$ ფუნქციისაკენ, როდესაც $\eta \rightarrow 0$, თანაბარია y ცვლადის მიმართ Y სიმრავლეში, მაშინ ვიტყვი, რომ ინტეგრალი (56) თანაბრად კრებადია y -ის მიმართ Y სიმრავლეში. ეს ნიშნავს, ყოველი $\varepsilon > 0$ -სათვის მოიძებნება y -საგან დამოუკიდებლად $\delta(\varepsilon) > 0$, რომ, როდესაც $\eta < \delta(\varepsilon)$, მაშინ უტოლობა

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (58)$$

შესრულდება $\forall y$ -სათვის Y სიმრავლიდან.

ძნელი წარმოსადგენი არაა, თუ როგორ ჩამოყალიბდება განზილულ შემთხვევაში (56) ინტეგრალისათვის თანაბრად კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} F(\eta, y) := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid (0 < \eta_2 < \eta_1 < \delta(\varepsilon) \wedge \forall y \in Y) \Rightarrow \Rightarrow \left(\left| \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \right). \quad (59)$$

მე-14 თეორემის სრული ანალოგიით დამტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა 19. ვთქვათ, ფუნქცია $f(x, y)$ ყოველი $y \in Y$ -სათვის ინტეგრებადია $a \leq x \leq b-\eta$ სეგმენტზე ყოველი $0 < \eta < b-a$ -სათვის და ყოველ ასეთ სეგმენტზე, როდესაც $y \rightarrow y_0$ ფუნქცია $f(x, y)$ თანაბრად მისწრაფვის თავის ზღვრისაკენ, $\varphi(x)$ -კენ. თუ ამასთან ინტეგრალი

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

თანაბრად იკრიბება ($x=b$ -თვის) y -ის მიმართ $y \in Y$, მაშინ ქვემარტივია ტოლობა:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (60)$$

სრულიად ასე განზოგადდება სხვა თეორემები პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალების შესახებ, როდესაც $f(x, y)$ ფუნქციას განსაკუთრებულობა აქვს $x=b$ წერტილში. ცხადია, $f(x, y)$ ფუნქციას განსაკუთრებულობა $x=a$ — წერტილშიც შეიძლება ჰქონდეს ან ასეთი წერტილი სეგმენტზე რამდენიმე იყოს.

არასაკუთრივი ინტეგრალი უსასრულო საზღვრებით

$$\int_a^\infty f(x, y) dx \quad (61)$$

უკვე დავაყვამირეთ $F(\beta, y)$ ფუნქციასთან (თეორემა 11)

$$F(\beta, y) = \int_a^\beta f(x, y) dx, \quad (62)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta, y) = \int_a^\infty f(x, y) dx.$$

თუ მოვიგონებთ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრას ჰაინეს აზრით, შეგვიძლია ვთქვათ: $F(\beta, y)$ ფუნქციის (61) ინტეგრალისაკენ თანაბარი მისწრა-

ფებისათვის, როდესაც $\beta \rightarrow +\infty$, აუცილებელია და საკმარისი (61) ინტეგრალისავე თანაბრად მიისწრაფოდეს ფუნქციითა ყოველი მიმდევრობა $(F(\beta_n, y))_{n \geq 1}$ ნებისმიერი უსასრულოდ ზრდადი β_n მიმდევრობისათვის.

თუ $(F(\beta_n, y))_{n \geq 1}$ მიმდევრობიდან გადავალთ მწკრივზე

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\beta_{n-1}}^{\beta_n} f(x, y) dx, \quad \beta_0 = a, \beta_n \geq a, \quad (63)$$

მაშინ $(F(\beta_n, y))_{n \geq 1}$ ფუნქციითა მიმდევრობის თანაბრად კრებადობა y -ის მიმართ, როდესაც $\beta_n \rightarrow +\infty$, ტოლფასი იქნება ყველა (63) მწკრივის თანაბრად კრებადობისა y -ის მიმართ, სადაც β_n ნებისმიერი ცვლადია, $\beta_n \rightarrow +\infty$.

14. მაგალითები. 1) ვისარგებლოთ e^x -ის მწკრივად გაშლით, წარმოვადგინოთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 e^x \ln x dx$$

მწკრივის ჯამად და გამოვთვალოთ.

ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ფუნქციას განსაკუთრებულობა აქვს $x=0$ წერტილში. ფუნქცია e^x წარმოვადგინოთ მწკრივით

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

გამოვარკვიოთ $\int_0^1 x^n \ln x dx, n=0, 1, \dots$ ინტეგრალების კრებადობა.

გვექნება

$$\int_0^1 \ln x dx = (x \ln x)_{x=1} - \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) - \int_0^1 x (\ln x)' dx = -1,$$

$$\int_0^1 x^k \ln x dx = \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x \right)_{x=1} - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x \right) -$$

$$- \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1} (\ln x)' dx = - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

ამრიგად ინტეგრალი $\int_0^1 x^n \ln x dx, n=0, 1, 2, \dots$, კრებადია. ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ

$$S_n = \int_0^1 \ln x \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \right) dx = \int_0^1 \ln x dx + \int_0^1 \sum_{k=1}^n \ln x \frac{x^k}{k!} dx =$$

$$= -1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)! (k+1)},$$

საიდანაც

$$\int_0^1 e^x \ln x dx = - \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)! (n+1)} \right\}. \quad (64)$$

2) გამოვარკვიოთ ინტეგრალის

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (65)$$

კრებადობა და გამოვთვალოთ.

რადგანაც ფუნქცია $\sin x$ არგუმენტის ზრდის დროს, როდესაც გაივლის $x=\pi k, k=1, 2, \dots$, წერტილებს, ნიშნის იცვლის. ბუნებრივია ინტეგრალი წარმოვადგინოთ შემდეგი მწკრივით

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (66)$$

აგიღოთ ზოგადი წევრი u_n და შევცვალოთ ცვლადი $x=n\pi+t$. მივიღებთ

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt.$$

ამრიგად, (66) მწკრივი ნიშანცვლადი მწკრივია და წევრები მონოტონურად კლებადი. ამასთან

$$|u_n| = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt < \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} dt = \frac{1}{n}.$$

მწკრივი (65) ლაიბნიცის ტიპის მწკრივია და, ძაძასადაძე, კრებადი. ამ მწკრივის ჯამი K ასოთი აღენიშნოთ. შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx = K.$$

ინტეგრალი (65) კრებადია არა აბსოლუტურად. მართლაც,

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt,$$

მაგრამ

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt > \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

და მწკრივი

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

განშლადია.

გამოვიყენოთ ფორმულა, რომლითაც გამოვიტვლით აღებული (65) ინტეგრალის მნიშვნელობას. ფორმულის გამოყენა უფრო მეტად ფორმალურ მხარეს ატარებს (ფორმულა სათანადოდ მიღებული იქნება ქვემოთ, თავი XV, § 4, n 10, ფორმულა (40))¹.

განვიხილოთ ლოგარითმული მწკრივი

$$\ln(1-z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1. \quad (67)$$

დავუშვათ, z კომპლექსური ცვლადია, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$, მაშინ

$$1-z = (1-r \cos \theta) - i r \sin \theta = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

სადაც

$$\rho = \sqrt{(1-r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{1-2r \cos \theta + r^2},$$

$$\varphi = - \operatorname{arctg} \frac{r \sin \theta}{1-r \cos \theta}.$$

¹ უფრო დავწვრილებით იხ. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М.—Л. 1948, стр. 559, 633, 706.

ჩავსვათ (67) მწკრივში $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, სადაც გამოვიყენოთ მუდგარის ფორმულა და ამასთან $\ln z = \ln \rho + i \varphi$. მიღებული ტოლობის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების სათანადო გატოლებით მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \ln(1-2r \cos \theta + r^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos n\theta}{n}, \quad (68)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{r \sin \theta}{1-r \cos \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin n\theta}{n}. \quad (69)$$

ვთქვათ, $0 < \theta \leq \pi$. რადგანაც $r=1$ -სათვის მიღებული მწკრივები კრებადია, შეგვიძლია ზღვარზე გადასვლა, როდესაც $r \rightarrow 1$, გვექნება

$$\ln 2 \sin \frac{\theta}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}, \quad (70)$$

$$\frac{\pi - \theta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}. \quad (71)$$

გამოსათვლელი K ინტეგრალის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$K = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (72)$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx$. ვისარგებლოთ ინტეგრალის

განსაზღვრით (ინტეგრალი არსებობს $[0, \beta]$ შუალედის ნებისმიერი დანაწილებისათვის)

$$\int_0^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{mk} \frac{\sin nh}{nh} h,$$

სადაც

$$h = \frac{\pi}{k}, \quad \beta = m\pi; \quad n=1, 2, \dots, \frac{\beta}{h} = mk,$$

k და m ნატურალური რიცხვებია. გამოვიყენოთ მე-14 თეორემა (ფორმულა (47)), მივიღებთ

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{mk} \frac{\sin nh}{nh} h = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{mk} \frac{\sin nh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (73)$$

ამრიგად,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3) ეილერ-პასონის ინტეგრალი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

ჩვენთვის ცნობილია ამ ინტეგრალის კრებადობა (იხილეთ თავი 11, § 3, n 4). დავუშვათ $x=yt$, სადაც y ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. გვექნება

$$I = y \int_0^{\infty} e^{-y^2 t^2} dt.$$

გავამრავლოთ ეს გამოსახულება $e^{-y^2} dy$ -ზე და ავიღოთ ინტეგრალი 0-დან ∞ -მდე y ცვლადით,

$$I \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} y e^{-y^2} dy \int_0^{\infty} e^{-y^2 t^2} dt.$$

შევამოწმოთ მე-18 თეორემის პირობები:

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)y^2} y dt = e^{-y^2} \int_0^{\infty} e^{-y^2 t^2} d(yt) = e^{-y^2} I,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)y^2} y dy = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2};$$

არსებობს განმეორებითი ინტეგრალი

$$\int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)y^2} y dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

ახე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)y^2} y dt = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)y^2} y dy = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (74)$$

4) გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-kx} dx,$$

სადაც $\alpha, k > 0$.

გავაწარმოთ α ცვლადით,

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^{\infty} \sin \alpha x e^{-kx} dx,$$

საიდანაც ორჯერ ნაწილობითი ინტეგრებით ($u=e^{-kx}$, $dv=\sin \alpha x dx$) მივიღებთ

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^{\infty} \sin \alpha x e^{-kx} dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}. \quad (75)$$

განვსაზღვროთ I ინტეგრალი,

$$I = \int \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2} d\alpha + C = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + k^2) + C.$$

რადიანთა $I|_{\alpha=0} = 0$, გვექნება

$$C = -\frac{1}{2} \ln k^2.$$

ამრიგად

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-kx} dx = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2} \right). \quad (76)$$

5) გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx. \quad (77)$$

ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\int_0^\infty e^{-xu^2} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

საიდანაც

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-xu^2} du. \quad (78)$$

ნაცვლად (77) ინტეგრალისა განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} e^{-kx} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-kx} \sin x dx \int_0^\infty e^{-xu^2} du, \quad (79)$$

სადაც $\frac{1}{\sqrt{x}}$ შეცვლილია (78) მნიშვნელობით. (79) ინტეგრალში სრულდება ინტეგრალთა ადგილმონაცვლების ყველა პირობა. შევუცვალოთ ინტეგრალს ადგილები. მივიღებთ

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} e^{-kx} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(k+u^2)x} \sin x dx.$$

ვისარგებლოთ (75) ფორმულით,

$$\int_0^\infty e^{-(k+u^2)x} \sin x dx = \frac{1}{1 + (k+u^2)^2}.$$

გვექნება

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} e^{-kx} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{1 + (k+u^2)^2}.$$

მიღებულ ინტეგრალში ზღვარზე გადასვლის პირობა სრულდება. ინტეგრალის ზღვარი $k \rightarrow 0$ -სათვის მოგვცემს

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^4}.$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^4}.$$

ჩასმით $u = \frac{1}{t}$, მივიღებთ:

$$I = \int_0^\infty \frac{t^2}{1 + t^4} dt.$$

აქედან, ცხადია,

$$I = \int_0^\infty \frac{t^2 + 1}{1 + t^4} dt - \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^4},$$

საიდანაც

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^2 + 1}{1 + t^4} dt.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი ასე გადავწეროთ:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}} dt.$$

ცვლადის შეცვლით

$$t - \frac{1}{t} = z, \quad \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = dz, \quad t^2 + \frac{1}{t^2} = z^2 + 2; \quad t = 0, \quad z = -\infty; \\ t = \infty, \quad z = +\infty,$$

მივიღებთ

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \pi.$$

ამრიგად,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (80)$$

6) გამოვთვალოთ ინტეგრალები (ფრენელის ინტეგრალები):

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx.$$

ჩასმით $x^2 = t$ მივიღებთ

$$x = \sqrt{t}, \quad dx = \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

გამოვიყენოთ (80) ფორმულა, გვექნება

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

ასეთი მნიშვნელობა აქვს მეორე ინტეგრალსაც $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$.

ამრიგად,

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (81)$$

7) ეილერის ინტეგრალები. მათემატიკურ ანალიზში

დიდი გამოყენება აქვს ე. წ. ეილერის პირველი და მეორე გვარის ინტეგრალებს.^{1,2}

ეილერის პირველი გვარის ინტეგრალი ეწოდება შემდეგი სახის ინტეგრალს:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx. \quad (82)$$

ხოლო მეორე გვარის ინტეგრალი შემდეგი სახის ინტეგრალს:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx. \quad (83)$$

მეორე გვარის ინტეგრალში ინტეგრირების საზღვრებია: $0 \leq x \leq +\infty$.

პირველი გვარის ინტეგრალს შემოკლებით „ბეტა“ ინტეგრალი ეწოდება, ხოლო მეორე გვარის ინტეგრალს „გამა“ ინტეგრალი.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ მეორე გვარის ინტეგრალი კრებადია, თუ $p > 0$, ხოლო განშლადია, თუ $p \leq 0$. პირველი გვარის ინტეგრალი განშლადია, თუ p და q -დან ერთი მაინც არადადებითია, წინააღმდეგ შემთხვევაში კრებადია. ამიტომ ორივე გვარის ინტეგრალებისათვის ვიგულისხმებთ, რომ $p > 0$, $q > 0$ (დამტკიცება იხილეთ მე-14 პუნქტის 29-ე მაგალითში).

ვთქვათ, $p > 1$. (83) ინტეგრალში გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრირების ხერხი:

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = - \int_0^{\infty} x^{p-1} de^{-x} = [-x^{p-1} e^{-x}]_0^{\infty} + \\ &+ (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} e^{-x} dx = (p-1) \Gamma(p-1). \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1). \quad (84)$$

ამ ფორმულით $\Gamma(p)$ ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა დაიყვანება ისეთი $\Gamma(p)$ ფუნქციის გამოთვლაზე, სადაც $0 < p < 1$.

¹ ა. ხარაძე, ე. ჭელიძე, ზ. ხვედელიძე, ი. ქარცივაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. II, თბილისი, 1950, გვ. 217.

² დ. ვაშაქიძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. II, თბილისი, 1975, გვ. 389.

ცხადია, თუ $p=n$ მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$\Gamma(n) = (n-1)! \Gamma(1),$$

სადაც

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

ამრიგად,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (85)$$

ახლა გამოვიყენოთ ფორმულა, რომელიც დააკავშირებს ბეტა და გამა ინტეგრალებს. ამისათვის $\Gamma(p)$ ინტეგრალში შევცვალოთ ცვლადი $x=at$, $a>0$. გვექნება

$$\Gamma(p) = a^p \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-at} dt.$$

საიდანაც

$$\frac{1}{a^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-at} dt. \quad (86)$$

ახლა $B(p, q)$ ინტეგრალში ჩავსვათ $x = \frac{t}{1+t}$. გვექნება

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt. \quad (87)$$

თუ (86) ტოლობაში p -ს შევცვლით $(p+q)$ -თი, ხოლო a -ს $(1+y)$ -ით, მივიღებთ

$$\frac{1}{(1+y)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} t^{p+q-1} e^{-(1+y)t} dt.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $y^{p-1} dy$ -ზე და ავიღოთ ინტეგრალი 0-დან $+\infty$ -მდე. გვექნება

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} y^{p-1} dy \int_0^{\infty} t^{p+q-1} e^{-(1+y)t} dt.$$

შევცვალოთ ინტეგრების რიგი. მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy &= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} y^{p-1} t^{p+q-1} e^{-(1+y)t} dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} t^{p+q-1} e^{-t} dt \int_0^{\infty} y^{p-1} e^{-ty} dy. \end{aligned}$$

გამოვიყენოთ (86) ტოლობა

$$\int_0^{\infty} y^{p-1} e^{-ty} dy = \frac{\Gamma(p)}{t^p}.$$

გვექნება

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy &= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} t^{p+q-1} e^{-t} dt \cdot \frac{\Gamma(p)}{t^p} dt = \\ &= \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} t^{q-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \end{aligned}$$

მიღებული გამოსახულება (87) ფორმულის საფუძველზე მოგვცემს

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (88)$$

ასეთია დამოკიდებულება ეილერის პირველსა და მეორე გვარის ინტეგრალებს შორის. (88) ფორმულის საფუძველზე ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$B(p, q) = B(q, p). \quad (89)$$

თუ $B(p, q)$ ინტეგრალში $q>1$, მაშინ (88) და (84) ფორმულებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\Gamma(p) (q-1) \Gamma(q-1)}{(p+q-1) \Gamma(p+q-1)} = \\ &= \frac{q-1}{p+q-1} \frac{\Gamma(p) \Gamma(q-1)}{\Gamma(p+q-1)}, \end{aligned}$$

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} \frac{\Gamma(p) \Gamma(q-1)}{\Gamma(p+q-1)}. \quad (90)$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს შევამციროთ q , როდესაც $q > 1$ და მივაღწიოთ, q ნაკლები იყოს 1-ზე.

სრულიად ასევე გვექნება, როდესაც $p > 1$,

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q). \quad (91)$$

როდესაც q ნატურალური რიცხვია, $q = n$, მაშინ (90) ფორმულის $(n-1)$ -ჯერ გამოყენება მოგვცემს

$$B(p, n) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)\dots(p+1)} B(p, 1).$$

მაგრამ

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}.$$

ამრიგად,

$$B(p, n) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)\dots(p+1)p}, \quad p > 1. \quad (92)$$

ეილერის ინტეგრალის $\Gamma(p)$ გამოყენებისათვის წინასწარ გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad (93)$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ სათანადოდ m და n ხარისხის მრავალწევრებია, $m \leq n-2$ და $Q(x)$ მრავალწევრს მხოლოდ მარტივი ნულები აქვს,

$$Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

რაციონალური ფუნქცია დაიშლება ელემენტარულ წილადებად (იხ. ნაწ. I, თავი V, § 4)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{x-x_k}. \quad (94)$$

განვსაზღვროთ A_k . ამისათვის (94) ტოლობა გავამრავლოთ $(x-x_k)$ -ზე, ჩვილებთ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A_k + \left(\sum_{s=1}^{k-1} \frac{A_s}{x-x_s} + \sum_{s=k+1}^n \frac{A_s}{x-x_s} \right) (x-x_k).$$

ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $x \rightarrow x_k$, გვექნება:

$$A_k = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)}. \quad (95)$$

შევიტანოთ A_k -ს მნიშვნელობა (94) ფორმულაში, მაშინ (93) ინტეგრალი ასე წარმოიდგინება:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{k=1}^n A_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-x_k}.$$

ვთქვათ, n ლუწია, $n = 2s$, და x_k კომპლექსური რიცხვია,

$$x_k = a_k + i b_k.$$

გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-x_k} &= \frac{1}{(x-a_k)-i b_k} = \frac{(x-a_k)+i b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2} = \\ &= \frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+b_k^2} + i \frac{b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}. \end{aligned}$$

ამის გამო

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{+l} \frac{dx}{x-x_k} &= \int_{-l}^{+l} \frac{(x-a_k) dx}{(x-a_k)^2+b_k^2} + i \int_{-l}^{+l} \frac{b_k dx}{(x-a_k)^2+b_k^2} = \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln((x-a_k)^2+b_k^2) + i \operatorname{arctg} \frac{x-a_k}{b_k} \right]_{-l}^{+l} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(l-a_k)^2+b_k^2}{(l+a_k)^2+b_k^2} + i \left[\operatorname{arctg} \frac{l-a_k}{b_k} - \operatorname{arctg} \frac{-l-a_k}{b_k} \right]. \end{aligned}$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $l \rightarrow \infty$, მივიღებთ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - x_k} = \begin{cases} i\pi, & \text{თუ } b_k > 0, \\ -i\pi, & \text{თუ } b_k < 0. \end{cases}$$

ამ ტოლობის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = i\pi \sum_{k=1}^n (\pm A_k), \quad (96)$$

სადაც უნდა ავიღოთ პლუს ნიშანი, თუ $b_k > 0$ და მინუს ნიშანი, თუ $b_k < 0$. (94) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ x -ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $x \rightarrow \infty$. რადგანაც $P(x)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი $n \leq m-2$, სადაც m არის $Q(x)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი, გვექნება

$$0 = \sum_{k=1}^n A_k,$$

ანუ

$$\sum_k^{(+)} A_k + \sum_k^{(-)} A_k = 0, \quad (97)$$

სადაც სიმბოლო $\sum_k^{(+)} A_k$ აღნიშნავს იმ A_k რიცხვების ჯამს, როდესაც

$b_k > 0$. ხოლო $\sum_k^{(-)} A_k$ იმ A_k რიცხვების ჯამს, როდესაც $b_k < 0$.

(97) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\sum_k^{(+)} A_k = - \sum_k^{(-)} A_k.$$

ამის გამო (96) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_k^{(+)} A_k. \quad (98)$$

ამ ფორმულის საფუძველზე გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} dx,$$

სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია, $m \leq 2n-1$. თანახმად (95) ფორმულის მივიღებთ:

$$A_k = \frac{x_k^{2m-1}}{2n x_k^{2n-1}} = \frac{x_k^m}{2n x_k^{2n}},$$

სადაც x_k არის $1+x^{2n}=0$ განტოლების ამონახსნები:

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

ცხადია, $x_k^{2n} = -1$. ამის გამო

$$\begin{aligned} A_k &= -\frac{x_k^m}{2n} = -\frac{1}{2n} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)^m = \\ &= -\frac{1}{2n} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n} \right)^{(2k+1)m} = -\frac{1}{2n} x_0^{(2k+1)m}, \end{aligned}$$

სადაც

$$x_0 = \left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n} \right),$$

x_k -დან

$$b_k = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

ცხადია,

$$b_k > 0, \quad \text{თუ } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

ამის გამო

$$\begin{aligned} \sum_k^{(+)} A_k &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(2k+1)m} = -\frac{1}{2n} \frac{x_0^m - x_0^{(2n+1)m}}{1 - x_0^{2m}} = \\ &= -\frac{1}{2n} \frac{x_0^m (1 - x_0^{2mn})}{1 - x_0^{2m}} = -\frac{1}{2n} \frac{x_0^m [1 - (x_0^{2n})^m]}{1 - x_0^{2m}} = -\frac{1}{2n} \frac{1 - (-1)^m}{x_0^{-m} - x_0^m}. \end{aligned}$$

$$x_0^m = \cos \frac{m\pi}{2n} + i \sin \frac{m\pi}{2n},$$

$$x_0^{-m} = \cos \frac{m\pi}{2n} - i \sin \frac{m\pi}{2n},$$

ამის გამო

$$x_0^{-m} - x_0^m = -2i \sin \frac{m\pi}{2n} \text{ და } \sum_k^{(+1)} A_k = \frac{1 - (-1)^m}{i 4 \pi \sin \frac{m\pi}{2n}}.$$

(98) ფორმულის საფუძველზე გვექნება

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} dx = \begin{cases} 0, & \text{თუ } m \text{ ლუწია,} \\ \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{2n}}, & \text{თუ } m \text{ კენტია,} \end{cases}$$

საიდანაც, თუ m -ს შევცვლით $2m+1$ -ით, მივიღებთ

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n \sin \frac{2m+1}{2n} \pi}, \quad m < n. \quad (99)$$

ახლა გამოვიყენოთ ე. წ. დამატებითი ფორმულა. (88) ფორმულაში დავუშვათ $q=1-p$, სადაც $0 < p < 1$ და გავითვალისწინოთ (87) ფორმულა. გვექნება

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt. \quad (100)$$

გამოვთვალოთ

$$I(p) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt.$$

ჯერ ვიგულისხმოთ p -ს აქვს სახე $\frac{2m+1}{2n}$, სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია, ამასთან $m < n$. I ინტეგრალი $t=x^{2n}$ ჩასმით მოგვცემს:

$$I(p) = 2n \int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx.$$

(99) ფორმულით გვექნება:

$$I(p) = \frac{\pi}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi} = \frac{\pi}{\sin p \pi}.$$

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი ფორმულა:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi}, \quad (101)$$

სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია, $m < n$.

ახლა განვიხილოთ $I(p)$ ფუნქცია $0 < p < 1$ შუალედში. ეს ფუნქცია თანაბრად კრებადია $[p_1, p_2]$ შუალედში, $0 < p_1 < p_2 < 1$ და უწყვეტი. ყოველ p -ს შეიძლება მივუახლოვდეთ $\frac{2m+1}{2n}$ რიცხვებით. (101) ტოლობის საფუძველზე გვექნება

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \lim_{\frac{2m+1}{2n} \rightarrow p} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t} dt = \lim_{\frac{2m+1}{2n} \rightarrow p} \frac{\pi}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi} = \frac{\pi}{\sin p \pi},$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (100) ტოლობას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p \pi}. \quad (102)$$

მივიღეთ ე. წ. დამატებითი ფორმულა. ვთქვათ, $p = \frac{1}{2}$, მაშინ (102) ფორმულა მოგვცემს

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 = \pi,$$

საიდანაც

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

ანუ

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}.$$

უკანასკნელ ინტეგრალში ჩასმით $t=x^2$, მივიღებთ

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ეს კი, ჩვენთვის კარგად ცნობილი, ეილერ-პუასონის ინტეგრალია.

ქვემოთ გარჩეული მაგალითები პარამეტრზე დამოკიდებულ ფუნქციათა შესახებ.

8) კარგად დავაკვირდეთ შემდეგ ფუნქციებს:

$$a) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის განმეორებითი ზღვრები. გვექნება:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1.$$

ამ ფუნქციის ორჯერადი ზღვარი არ არსებობს. ამისათვის საკმარისია, ავიღოთ $y=kx$. გვექნება

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-kx}{x+kx} = \frac{1-k}{1+k}.$$

k -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} f(x, y)$ სხვადასხვა მნიშვნელობას ღებულობს. მაშასადამე, არ არსებობს

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y).$$

$$b) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}.$$

ამ ფუნქციის განმეორებითი ზღვრები, როდესაც $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, არსებობს,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

მაგრამ ორჯერადი ზღვარი $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ არ არსებობს. ამის საჩვენებლად, საკმარისია, ავიღოთ $y=x$ და $y=0$; გვექნება

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x}} f(x, y) = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(x, y) = 0.$$

$$b) f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$$

ამ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, არსებობს,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0,$$

ხოლო განმეორებითი ზღვრები არ არსებობს.

განმეორებითი ზღვრების ადგილმონაცვლებისათვის დავამტკიცეთ

თეორემა 7. თუ ყოველი x -სათვის არსებობს ზღვარი $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$, $x \in X$, ასევე, ყოველი y -სათვის არსებობს ზღვარი $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$, $y \in Y$. ამასთან,

როდესაც $y \rightarrow y_0$, ფუნქცია $f(x, y)$ თანაბრად იკრებება $\varphi(x)$ ფუნქციისაკენ x -ის მიმართ, $x \in X$, მაშინ არსებობს ორივე განმეორებითი ზღვარი და ქვეშეშარიტია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

იგულისხმება $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ სიმრავლეში, სადაც X და Y რაიმე სიმრავლეებია. $f(x, y)$ ფუნქცია (x_0, y_0) წერტილში, $(x_0, y_0) \in M$, შეიძლება განსაზღვრული არ იყოს. პირველ მაგალითში $\varphi(x) = 1$,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} = 1.$$

აქ თანაბრად კრებადობის პირობა დარღვეულია:

$$\left| \frac{x-y}{x+y} - 1 \right| = \left| \frac{-2y}{x+y} \right| = \frac{2y}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

პირობა $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, რომ ყველა x -სათვის, $x \rightarrow 0$,

$$\frac{2y}{x+y} < \frac{2y}{x} < \varepsilon$$

არ სრულდება. მართლაც, $x=y < \varepsilon$ ($\delta=\varepsilon$)-ისათვის, გვექნება

$$\frac{2y}{x+y} = 1.$$

რაც წინასწარ აღებულ $\varepsilon > 0$ ნაკლები არაა.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$, რომლის შესახებაც თეორე-
მაშია საუბარი, იქნება ორჯერადი ზღვარი;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x \in X}} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y).$$

მართლაც, თუ ყოველი x -თვის, $x \in X$ არსებობს მარტივი ზღვარი
 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ და ეს მისწრაფება თანაბარია $x \in X$ -ისათვის და, თუ

ყოველი y -სათვის, $y \in Y$, არსებობს მარტივი ზღვარი $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$

ე. ი. ყოველი $\varepsilon > 0$ -ისათვის არსებობს x -საგან დამოუკიდებლად $\delta > 0$,
რომ

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon, \quad (104)$$

როცა $|y - y_0| < \delta$, $|y' - y_0| < \delta$, სადაც $y \in Y$, $y' \in Y$, მაშინ ფიქსი-
რებული x -სათვის, $|y - y_0| < \delta$, გადავალთ ზღვარზე (104) უტოლობაში
როცა $y' \rightarrow y_0$, მივიღებთ

$$|\varphi(x) - f(x, y)| < \varepsilon \quad (105)$$

ყოველი x -სათვის, $x \in X$. ცხადია, (105) უტოლობა შესრულდება, როცა
 $x \rightarrow x_0$. ამრიგად, $\forall \varepsilon > 0$ -სათვის მოიძებნა ისეთი $\delta > 0$, რომ, როცა $x \rightarrow x_0$
 $x_0 \in X$, მაშინ

$$|A - f(x, y)| < \varepsilon,$$

ანუ

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

თუ $x \rightarrow \infty$ ან $y \rightarrow \infty$ ან ორივე ერთად $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$, თანაბრად კრე-
ბადობა უნდა გამოვარკვეოთ $x > N$ ან $y > N$, სადაც N ნებისმიერი დადე-
ბითი რიცხვია. სწორედ ამ საკმარისი პირობით შეგვიძლია ვისარგებლოთ
ორჯერადი ზღვრების გამოთვლის დროს. ქვემოთ მოტანილი მაგალითები
ამოღებულია უმეტესად წიგნებიდან: Б. П. Демидович, Сборник задач
и упражнений по математическому анализу, М., 1977; Г. Н. Берман,
Сборник задач по курсу математического анализа, М., 1985.

9) გამოთვალეთ შემდეგი ორჯერადი ზღვრები:

$$\text{ა) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\operatorname{tg} xy}{x}, \quad \text{ბ) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}, \quad \text{გ) } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

$$\text{დ) } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}, \quad \text{ე) } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}, \quad \text{ვ) } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2)^{-(x+y)},$$

$$\text{ზ) } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}, \quad \text{თ) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{ი) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}.$$

10) გამოთვალეთ განმეორებითი ზღვრები:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{x \rightarrow b} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y),$$

$$\text{ა) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^2}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$$

$$\text{ბ) } f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^4}, \quad a = \infty, \quad b = 0;$$

$$\text{გ) } f(x, y) = \frac{\sin \pi x}{2x + y}, \quad a = \infty, \quad b = \infty.$$

განვიხილოთ ინტეგრალის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის საკითხი, როდესაც
ინტეგრების საზღვრები და ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მოთავსებული
ფუნქცია პარამეტრზეა დამოკიდებული:

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx.$$

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტი არეში

$$D = \{(x, y) \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), \quad c \leq y \leq d\},$$

ფუნქციები $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$, როცა $c \leq y \leq d$, უწყვეტია, მაშინ ჰერმი-
ტიტი ტოლობა

$$I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx. \quad (106)$$

მართლაც, ყოველი y_0 -ისათვის, $c \leq y_0 \leq d$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y) dx,$$

საიდანაც

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx,$$

რადგანაც

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right| \leq M |\beta(y) - \beta(y_0)|,$$

$$\left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx \right| \leq M |\alpha(y) - \alpha(y_0)|,$$

სადაც

$$M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)|,$$

ხოლო

$$\lim_{y \rightarrow y_0} |\beta(y) - \beta(y_0)| = 0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} |\alpha(y) - \alpha(y_0)| = 0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (106) ფორმულა შეიძლება განზოგადდეს. ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია მართკუთხედში

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \},$$

ფუნქციები $\alpha(y)$, $\beta(y)$, როცა $c \leq y \leq d$, არ გამოდიან $a \leq x \leq b$ სეგმენტებიდან, $f(x, y)$ ფუნქცია, ყოველი მუდმივი y -სათვის $c \leq y \leq d$ სეგმენტებიდან, ინტეგრებადია x ცვლადით, $a \leq x \leq b$, ყოველი $y \rightarrow y_0$ -სათვის $f(x, y)$ მიისწრაფვის თავის $\varphi(x)$ ზღვრისაკენ თანაბრად x -ის მიმართ $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე და არსებობს ზღვრები

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \alpha(y) = A \geq a, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \beta(y) = B \leq b,$$

მაშინ ჭეშმარიტია ტოლობა

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_A^B \varphi(x) dx. \quad (107)$$

მიღებული ფორმულების საფუძველზე გამოვთვალოთ

$$11) \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

გვეძნება

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1+y) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} y = 0,$$

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

აქ კრებადობა თანაბარია x -ის მიმართ, $|x| < \infty$, $\frac{1}{1+x^2+y^2} < \frac{1}{1+x^2}$.

თუმცა თანაბრად კრებადობას შემოწმება არც უნდა, ფუნქცია $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ უწყვეტია $|x| < \infty$ და $|y| < \infty$ -თვის. ცხადია,

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

ამრიგად,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

12) გამოვთვალოთ:

$$a) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{2-\alpha} x^2 \cos \alpha x dx, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}.$$

13) შეიძლება თუ არა ინტეგრალის

$$\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$$

ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა, $y \rightarrow 0$?

14) იპოვეთ

$$F(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3 + y^2}}$$

ფუნქციის განსაზღვრის არე და გამოვთვალოთ ინტეგრალი.

15) ფუნქცია $f(x) = \operatorname{sign} x$,

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

შეგვიჩვენა $x=0$ წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$F(y) = \int_0^1 f(x-y) dx$$

უწყვეტია $(-\infty < y < 0, F(y) = 1; 0 \leq y \leq 1, F(y) = 1 - 2y; 1 < y < +\infty, F(y) = -1)$.

16) ისარგებლეთ ტოლობით

$$\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a} \ln(1+ab) \quad (108)$$

და პარამეტრით გაწარმოებით გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_0^b \frac{xdx}{(1+ax)^2}.$$

(108) ტოლობის ორივე ნაწილის a პარამეტრით გაწარმოებით მივიღებთ

$$-\int_0^b \frac{xdx}{(1+ax)^2} = -\frac{1}{a^2} \ln(1+ab) + \frac{1}{a} \frac{b}{1+ab},$$

საიდანაც

$$\int_0^b \frac{xdx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln(1+ab) - \frac{b}{a(1+ab)}.$$

(ადვილი შესამოწმებელია, რომ (108) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოთავსებული ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოება a პარამეტრით შეიძლება).

17) ისარგებლეთ ტოლობით

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0,$$

და გამოთვალეთ ინტეგრალი პარამეტრით გაწარმოებით

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2} dx.$$

18) პარამეტრით გაწარმოებით გამოთვალეთ ინტეგრალები

$$a) F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx, \quad \alpha > 0, \quad b) F(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha \cos x + \alpha^2) dx,$$

$$c) F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 x) dx, \quad d) F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

გამოითვლება თუ არა აღებული ინტეგრალები ნაწილობითი ინტეგრებით (იხ. მაგალითი 4).

19) გამოთვალეთ $F'(\alpha)$, თუ

$$a) F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha^2} e^{-ax^2} dx, \quad b) F(\alpha) = \int_{\alpha+\alpha}^{\alpha+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

20) დაამტკიცეთ, რომ ბესელის ფუნქცია

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi,$$

სადაც n მთელი რიცხვია, აკმაყოფილებს ბესელის განტოლებას:

$$x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) + (x^2 - n^2) I_n(x) = 0.$$

21) წინასწარ გამოარკვეთ ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების შესაძლებლობა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ და პარამეტრით გაწარმოებით გამოთვალეთ ინტეგრალები, სათანადო ნებისმიერი მუდმივი C გამოთვალეთ $F(\alpha)$ მნიშვნელობით, $\alpha=0$, თუ $F(\alpha)$ მოცემულია შემდეგი გამოთვლებებით:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x e^x} dx, \quad \alpha > -1; \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x e^{x^2}} dx, \quad \alpha > -1;$$

$$b) \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + \alpha \cos x)}{\cos x} dx, \alpha^2 < 1; \quad \text{დ) } \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \alpha^2 < 1.$$

22) გამოვთვალოთ ინტეგრალი (იხ. მაგალითი 2)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (109)$$

ნაცვლად აღებული ინტეგრალის განვიხილოთ ინტეგრალი $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$.

მაგრამ ამ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოებით მიღებული ინტეგრალი $\int_0^{\infty} \cos \alpha x dx$ განშლადია. ამიტომ შემოვიტანოთ ისეთი მამრავლი, რომელიც უზრუნველყოფს α პარამეტრით გაწარმოებით მიღებული ინტეგრალის კრებადობას.

ავიღოთ ინტეგრალი (იხ. მაგალითი 4).

$$I = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \alpha > 0. \quad (110)$$

ამ ინტეგრალისათვის სრულდება მე-15 თეორემის პირობები, $x \geq 0$ -სათვის და $\alpha > 0$ -სათვის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მოთავსებული ფუნქციის $f(x, \alpha)$ -ს წარმოებული α ცვლადით უწყვეტია,

$\int_0^{\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx$ არსებობს და კრებადია თანაბრად α ცვლადის მიმართ,

$$\left| \int_0^{\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx \right| = \left| \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos \alpha x dx \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-kx} dx,$$

არ შეიცავს α ცვლადს და

$$\int_0^{\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx = \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos \alpha x dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}.$$

ამრიგად,

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{k}{\alpha^2 + k^2},$$

საიდანაც

$$I = \int \frac{k d\alpha}{\alpha^2 + k^2} + C = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} + C.$$

(110)-დან $I|_{\alpha=0} = 0$, ამიტომ

$$I = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k}.$$

მაგრამ, როგორც (110) გამოსახულება გვიჩვენებს, I ინტეგრალი $\alpha = \text{const}$ -სათვის k ცვლადის ფუნქციაა და იგი თანაბრად კრებადია $k \geq 0$ -სათვის. ამის გამო I ინტეგრალი k ცვლადის უწყვეტი ფუნქციაა და შეგვიძლია I ინტეგრალის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0+0} \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx &= \int_0^{\infty} \lim_{k \rightarrow 0+0} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{k \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

ამ მსჯელობის შემდეგ ადვილი წარმოსადგენია, რომ

$$D(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha \quad (\text{დირიხლეს ინტეგრალი}).$$

კერძოდ, $\alpha = 1$ -ისათვის მივიღებთ (109) ინტეგრალის მნიშვნელობას:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

23) გამოვიყენოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ინტეგრება და გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

ცხადია,

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy, \quad 0 < x < 1.$$

ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy &= \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \\ &= \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln(y+1) \Big|_{y=a}^{y=b} = \ln \frac{b+1}{a+1}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

24) გამოიყენეთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ინტეგრება და გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

25) ისარგებლეთ ტოლობით

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$$

და გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

26) ისარგებლეთ ტოლობით

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-y(1+x^2)} dy$$

და გამოთვალეთ ლაპლასის ინტეგრალი

$$L(x) = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$$

27) ისარგებლეთ ეილერ — ჰუასონის ინტეგრალით

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

და გამოთვალეთ ინტეგრალები

$$a) \int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+2bx+c)} dx, \quad a > 0, \quad ac - b^2 > 0;$$

$$b) \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

28) ფუნქციები: ინტეგრალური სინუსი, ინტეგრალური კოსინუსი, ინტეგრალური ლოგარითმი, ინტეგრალური მაჩვენებლიანი ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულებით

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad x \geq 0; \quad Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad x > 0;$$

$$Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, \quad x > 0; \quad Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt, \quad x < 0.$$

მხედველობაში მიიღეთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მოთავსებული ფუნქციების ყოფაქცევა და მიახლოებით ააგეთ ამ ფუნქციათა გრაფიკები.

29) განვიხილოთ ორი საკითხი: ა) ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი

$$\Gamma(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad \text{კრებალია, თუ } p > 0 \text{ და } q > 0.$$

მართლაც, $p-1 < 0$ და $q-1 < 0$ -ისათვის ინტეგრალქვეშა ფუნქციის შემოუსაზღვრელობის წერტილებია $x=0$ და $x=1$. $\Gamma(p, q)$ ინტეგრალი

ორი ინტეგრალის ჯამად წარმოვადგინოთ: $\Gamma(p, q) = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$. პირველი

ინტეგრალი მოგვცემს:

$$\int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \leq \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} (1-x)^{q-1} \int_0^{1/2} x^{p-1} dx = \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} (1-x)^{q-1} \cdot \frac{x^p}{p} \Big|_0^{1/2}.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ პირველი ინტეგრალი $x \in [0, \frac{1}{2}]$ კრებადია, თუ

$p > 0$. ასევე დავასკვნით, რომ მეორე ინტეგრალი $\int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$

კრებადია, თუ $q > 0$. ამრიგად $\Gamma(p, q)$ ინტეგრალი კრებადია, თუ ერთ-დროულად $p > 0$ და $q > 0$.

ბ) ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ კრებადია თუ

$p > 0$.

მართლაც, ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ორი ინტეგრალის ჯამად:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 + \int_1^\infty. \text{ პირველი ინტეგრალისათვის განსაკუთრებული წერტილია}$$

$$x=0, \text{ თუ } p-1 < 0. \text{ გვექნება: } \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{x^p}{p} \Big|_0^1, \text{ საი-}$$

დანაც დავასკვნით, რომ პირველი ინტეგრალი კრებადია, თუ $p > 0$. მეორე ინტეგრალისათვის როგორც გინდა იყოს λ , $\lambda > 1$, გვექნება $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\lambda+p-1} e^{-x} = 0$.

ასე რომ, $\lambda > 1$ -სათვის $x^{\lambda+p-1} e^{-x} \leq M < +\infty$, ანუ $x^{p-1} e^{-x} \leq \frac{M}{x^\lambda}$, რაც

$$\text{მოგვცემს } \int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \leq M \int_1^\infty \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} dx. \text{ ეს კი გვიჩვენებს, რომ ინტეგრალი}$$

$$\int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \text{ კრებადია. ამრიგად ინტეგრალი } \Gamma(p) \text{ კრებადია, თუ } p > 0.$$

30) ისარგებლოთ ეილერის ინტეგრალების განსაზღვრით

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x > 0;$$

$$\Gamma(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \Gamma(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, x > 0, y > 0,$$

და აჩვენეთ $\Gamma(x)$ ინტეგრალს აქვს ნებისმიერი რიგის უწყვეტი წარმოებულის $x > 0$ არეში. ასევე $\Gamma(x, y)$ -ს აქვს ნებისმიერი რიგის უწყვეტი წარმოებულები $x > 0, y > 0$ არეში.

31) ეილერის ინტეგრალების საშუალებით გამოთვალეთ ინტეგრალები:

$$ა) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx; \quad ბ) \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx;$$

$$გ) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx; \quad დ) \int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x^2)^2} dx.$$

32) დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების ჰერმიტიტება:

$$ა) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{\pi}{4};$$

$$ბ) \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

განყოფილება V

დიფერენციალური განტოლებანი

თავი VII

დიფერენციალური განტოლებანი. ზოგადი ცნებანი. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

§ 1. ამოცანები, რომლებსაც მიჰყავართ დიფერენციალური განტოლებანი.
ზოგადი ცნებანი

1. ამოცანები, რომლებსაც მიჰყავართ დიფერენციალური განტოლებანი. მათემატიკის, ფიზიკის, ქიმიის, ტექნიკის, ეკონომიკის და სხვა დარგის ბევრი ამოცანის ამოხსნის დროს ყოველთვის არაა შესაძლებლობა დაემაყაროთ ფუნქციონალური დამოკიდებულება საძიებელ და მოცემულ ცვლადებს შორის. მაგრამ შეიძლება შევადგინოთ ისეთი განტოლება, რომელიც აკავშირებს დამოუკიდებელ ცვლადს, საძიებელ ფუნქციას და საძიებელი ფუნქციის წარმოებულს. ასეთ განტოლებას დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ცხადად არ შეიცავდეს დამოუკიდებელ ცვლადს და საძიებელ ფუნქციას, მაგრამ საძიებელი ფუნქციის წარმოებულს აუცილებლად უნდა შეიცავდეს.

მაგალითად, განტოლებანი

$$y' + x = 0, \quad y'' + y' \sin x = e^x, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = 0,$$

$$dy - ydx = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

დიფერენციალური განტოლებანია.

განტოლებას, რომელიც დამოუკიდებელი ცვლადებისა და უცნობი ფუნქციების გარდა, შეიცავს უცნობი ფუნქციების წარმოებულებს ან დიფერენციალებს, ეწოდება დიფერენციალური განტოლება.

თუ დიფერენციალურ განტოლებაში მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელი ცვლადია, მაშინ დიფერენციალურ განტოლებას ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. თუ განტოლებაში ერთზე მეტი დამოუკიდებელი ცვლადია, მაშინ განტოლება შეიცავს უცნობი ფუნქციის კერძო წარმოებულებს, ასეთ დიფერენციალურ განტოლებას კერძოწარმოებულებანი განტოლება ეწოდება. მაგალითად, განტოლება

$$y' + 3xy' + y = x + 1$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა, ხოლო განტოლება

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

კერძო წარმოებულებანი განტოლებაა.

განვიხილოთ ამოცანები.

ამოცანა 1. მოვძებნოთ წირი, რომლის ნებისმიერ წერტილში მხების საკუთხო კოეფიციენტი ამ წერტილის გაორკეცებული აბსცისის ტოლია.

საძიებელი წირის რაიმე $M(x, y)$ წერტილში გატარებული მხების საკუთხო კოეფიციენტი y' . ამოცანის პირობის თანახმად,

$$y' = 2x.$$

მივიღოთ განტოლება, რომელიც შეიცავს საძიებელი y ფუნქციის y' წარმოებულს.

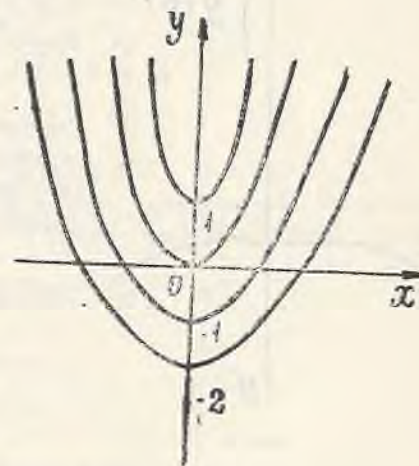
მიღებული განტოლებიდან აღვილი მისახედრია, რომ

$$y = x^2 + C, \quad (2)$$

C ნებისმიერი მუდმივია.

ამრიგად, ისეთი წირი, რომლის ნებისმიერ წერტილში გაწვეალი მხების საკუთხო კოეფიციენტი შეხების წერტილის გაორკეცებული აბსცისის ტოლია, პარაბოლია. C -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ავაგოთ ეს წირები (ნახ. 1). (2) ფორმულიდან ცხადია, რომ (1) განტოლებას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. ე. ი.

ამოცანაში აღებულ პირობებს აკმაყოფილებს არა მხოლოდ ერთი წირი, არამედ წირთა უსასრულო სიმრავლე.



ნახ. 1

ამოცანის ერთ ამონახსნს, ე. ი. ერთ განსაზღვრულ წირს მივიღებთ, თუ მოცემული იქნება ერთი (x_0, y_0) წერტილი, რომელზედაც უნდა გაიაროს ამოცანის საძიებელმა წირმა.

მაგალითად, ვიპოვოთ წირი, რომელიც ამოცანაში აღებულ პირობას აკმაყოფილებს და M_0 (1, 2) წერტილზე გაივლის. ე. ი. თუ $x=1$, მაშინ $y=2$.

გვექნება: $2=1^2+C$, $C=1$.

(2) წირთა სიმრავლიდან, რომელიც (1, 2) წერტილზე გაივლის არის წირი

$$y = x^2 + 1.$$

ამოცანა 2. მატერიალური წერტილი სიძიმის ძალის გავლენით ვარდება. განვსაზღვროთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ საწყისი სიჩქარეა v_0 .

ვერტიკალური წრფე, რომელზედაც წერტილი მოძრაობს დედამიწისაკენ, მივიღოთ y ღერძად. ღერძის სათავე იყოს იქ, საიდანაც წერტილი იწყებს მოძრაობას: $t=0$, $y=0$ (ნახ. 2). გავილილი გზა y არის t დროის

ფუნქცია. უნდა ვიპოვოთ y ფუნქცია.

მექანიკიდან ცნობილია, რომ ვარდნილი სხეულის აჩქარება მუდმივია, $g \approx 9,81$ მ/წმ². მეორე მხრივ, ცნობილია, რომ აჩქარება გზის მეორე რიგის წარმოებულის y'' -ის ტოლია, ე. ი.

$$y'' = g. \quad (3)$$

მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება. ეს განტოლება შეიცავს საძიებელი ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს: $y'' = (y')'$. რადგანაც

$$(y')' = g,$$

გვექნება

$$y' = gt + C_1, \quad (4)$$

ხოლო

$$y = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2. \quad (5)$$

მივიღეთ (3) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ეს ზოგადი ამონახსნი ორ ნებისმიერ მუდმივს შეიცავს. ამგვარად, (3) განტოლების ამონახსნი 2 ნებისმიერ მუდმივზე დამოკიდებული (5) ფუნქციათა სიმრავლეა. განვსაზღვროთ მუდმივები. პირობის თანახმად, $t=0$, მაშინ $y=0$, ამის გამო ამ მნიშვნელობათა ჩასმით (5)-ში, მივიღებთ $C_2=0$. ახლა (4) ფორმულა-

ში ჩავსვათ $t=0$, $v_0=y'(0)$. გვექნება $C_1=v_0$. შევიტანოთ C_1 და C_2 -ის მნიშვნელობანი (5) ფორმულაში, გვექნება

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_0t. \quad (6)$$

სწორედ ეს ფუნქცია იძლევა ამოცანის ამონახსნს: მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონს, როდესაც საწყისი მდებარეობაა $y=0$, საწყისი სიჩქარეა v_0 და მოძრაობა წარმოებს ვერტიკალურ წრფეზე.

ამოცანა 3. შემნახველ სალაროში შეტანილია u_0 მანეთი ფული. ფულის u რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე (u -ს ემატება u -ს პროცენტი) t დროსთან შეფარდებით პროპორციულია u რაოდენობისა.

რამდენ მანეთს მიიღებს მესამე t დროის შემდეგ?

ამოცანის შინაარსიდან, ცხადია,

$$\frac{du}{dt} = k. \quad (7)$$

$k>0$, რადგან სალაროში შეტანილი ფულის რაოდენობა იზრდება. (7) განტოლების ამონახსნია

$$u = Ce^{kt}.$$

საწყისი პირობის თანახმად, $t=0$, $u=u_0$, გვექნება

$$u_0 = Ce^{k \cdot 0}, \quad C = u_0.$$

მაშასადამე, t დროის შემდეგ მესამე მიიღებს

$$u = u_0 e^{kt} \quad (8)$$

მანეთს.

რა მნიშვნელობა შეიძლება ჰქონდეს k -ს?

როგორც ცნობილია, ხელუხლებელი ფონდისათვის შემოსავალია 2%. ასე რომ, $t=1$ წლისათვის (t წლებში იყოს მოცემული) მესამე მიიღებს

$$u_0 + 2\% u_0 = 1,02 u_0$$

მანეთს.

(8) ფორმულიდან მივიღებთ

$$1,02 u_0 = u_0 e^k,$$

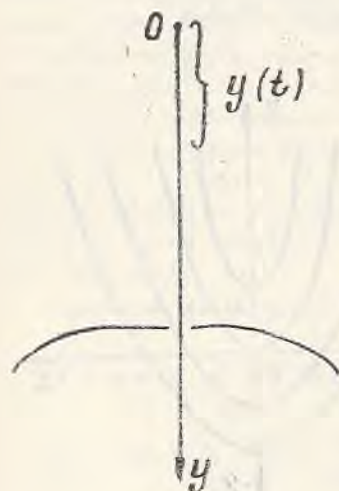
საიდანაც

$$k = \ln 1,02.$$

ამის გამო (8) ფორმულა მოგვცემს:

$$u = u_0 e^{t \ln 1,02} = 1,02^t u_0.$$

მაშასადამე, t წლის შემდეგ მესამე მიიღებს, რომელმაც სალაროში შეიტანა u_0 მანეთი, მიიღებს $1,02^t u_0$ მანეთს.



ნახ. 2

სრულიად ასევე ამოიხსნება ამოცანა რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის შესახებ: მოვძებნათ დამოკიდებულება რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის დაწყებიდან გავლილ დროსა და ამ დროის განმავლობაში დაშლილი ნივთიერების რაოდენობას შორის, თუ დაშლის დაწყების მომენტში დაუშვლელი ნივთიერების რაოდენობა იყო M_0 და დაშლის სიჩქარე დასაშვლელი ნივთიერების პროპორციულია.

თუ დაუშვლელი ნივთიერების რაოდენობა t მომენტშია $M(t)$, მაშინ

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M. \quad (9)$$

— $\lambda < 0$, რადგანაც ტოლობის მარცხენა მხარეში უარყოფითი სიდიდე გვაქვს,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t};$$

დაშლის შედეგად ნივთიერების რაოდენობა მცირდება $M(t + \Delta t) < M(t)$.

(9) განტოლების ამონახსნია

$$M = M_0 e^{-\lambda t},$$

რაც ასახავს რადიოაქტიური დაშლის პროცესს.

სრულიად ასევე ამოიხსნება ამოცანა ტემპერატურის ცვლილების შესახებ, როცა სხეული ცივდება, ბაქტერიათა გამრავლების შესახებ, როცა ბაქტერიების გამრავლება დამოუკიდებელია ერთ მომენტში ერთი-მეორისაგან და ა. შ.

2. ზოგადი ცნებანი. ქვემოთ მხოლოდ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს განვიხილავთ. თუ განტოლებაში შემავალი საძიებელი ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულია n , მაშინ განტოლებას n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. მაგალითად, განტოლება

$$xy'' - x^2 y' + y = x^2 + 1$$

მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებაა,

$$y^2 y''' - xy'' + x = 0$$

მესამე რიგის დიფერენციალური განტოლებაა.

ვთქვათ, x დამოკიდებული ცვლადია, ხოლო საძიებელი x ცვლადის ფუნქცია $y = y(x)$. n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (10)$$

თუ რაიმე ფუნქცია $y = \varphi(x)$ აკმაყოფილებს (10) დიფერენციალურ გან-

ტოლებას, ე. ი. (10) განტოლება გადაიქცევა იგივეობად, როდესაც y -ს შევცვლით $\varphi(x)$ -ით, y' -ს $\varphi'(x)$ -ით და ა. შ. $y^{(n)}$ -ს შევცვლით $\varphi^{(n)}(x)$ -ით, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქციას ეწოდება (10) განტოლების ამონახსნი.

პირველი რიგის განტოლების ამონახსნი მივიღეთ ამონახსნი, რომელიც მოიცავს ყველა ამონახსნთა სიმრავლეს. ასეთი ამონახსნი შეიცავს ნებისმიერ მუდმივს, რომლის სათანადოდ შერჩევით მივიღებთ ყველა კერძო ამონახსნს. ასე რომ, დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც C ნებისმიერ მუდმივს შეიცავს, გამოსახავს ე. წ. ზოგად ამონახსნს. სრულიად ასევე (10) განტოლების ამონახსნი შეიცავს n ნებისმიერ მუდმივს,

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (11)$$

ნებისმიერ $C_1, C_2, \dots, C_n$ მუდმივთა სათანადო შერჩევით მივიღებთ (10) განტოლების ყოველ კერძო ამონახსნს.

(10) განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება განისაზღვროს არაკბადი სახითაც

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \quad (12)$$

როგორც აღვნიშნეთ, ზოგადი ამონახსნიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კერძო ამონახსნი. ყოველი კერძო ამონახსნის გრაფიკს ეწოდება დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი.

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნიდან, რომ გამოვყოთ რომელიმე კერძო ამონახსნი. უნდა გვქონდეს საწყისი პირობები. საწყისი პირობები ამა თუ იმ ამოცანისათვის საწყისი პროცესია, მაგალითად, მე-2 ამოცანისათვის საწყისი პირობები იყო: მატერიალური წერ-

ტილის საწყისი მდებარეობა, $y(0) = y_0$ და საწყისი სიჩქარე $\frac{dy(0)}{dt} = v_0$.

ზოგადად, (10) განტოლებისათვის საწყისი პირობები იქნება:

თუ $x = x_0$, მაშინ $y = y_0$, $y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$. სულ n პირობაა.

ზოგჯერ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს განსაკუთრებული ამონახსნები, რომლებიც არ შედიან ზოგად ამონახსნებში.

მაგალითად, განტოლებას

$$y = xy' - y'^2 \quad (13)$$

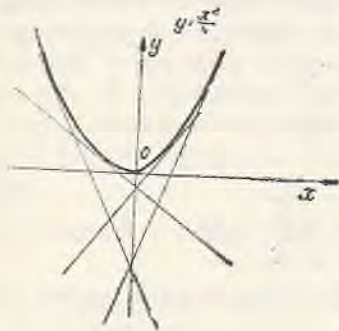
აქვს ზოგადი ამონახსნი

$$y = Cx - C^2, \quad (14)$$

C -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ეს ამონახსნი იძლევა წრეებს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ (13) განტოლების ამონახსნია აგრეთვე

$$y = \frac{x^2}{4}, \quad (15)$$

რომელიც არ მიიღება (14) ზოგადი ამონახსნიდან. (14) და (15) რომ (13) განტოლების ამონახსნია, უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით. $y = \frac{x^2}{4}$



ნახ. 3

ამონახსნის ყოველ წერტილზე ვადის მეორე ამონახსნი $y = Cx - C^2$ (ნახ. 3).

შემდეგში ნაცვლად სიტყვებისა „დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი“, „დიფერენციალური განტოლების ამონახსნა“, ვიხმართ სიტყვებს „დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი“, „დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება“.

3. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება. ავიღოთ ზოგადი სახის დიფერენციალური განტოლება

$$F(x, y, y') = 0, \quad (16)$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, y საძიებელი ფუნქცია, ხოლო y' საძიებელი ფუნქციის წარმოებული. იმ არეში, სადაც განსაზღვრულია $F(x, y, y')$ ფუნქცია, თუ სრულდება არაცხადი ფუნქციის არსებობის პირობები, შეგვიძლია განვსაზღვროთ y' ,

$$y' = f(x, y). \quad (17)$$

შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ (16) განტოლებიდან ყოველთვის განისაზღვრება y' .

ამრიგად გვულისხმობთ, რომ (16) ტოლობიდან განისაზღვრება უწყვეტი $y' = f(x, y)$ ფუნქცია (x_0, y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში, ამასთან $f(x_0, y_0) = y'_0$.

განვიხილოთ x და y ცვლადები, როგორც Oxy სიბრტყეზე წერტილის დეკარტის კოორდინატები.

ვთქვათ, $y = \varphi(x)$ არის (17) განტოლების ამონახსნი. ეს ნიშნავს, რომ თუ (17) განტოლებაში y -ის ნაცვლად ჩავსვათ $\varphi(x)$ ფუნქციას, y' -ის მაგივრად — $\varphi'(x)$ წარმოებულს, მივიღებთ იგივეობას

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)). \quad (18)$$

ავიღოთ $y = \varphi(x)$ წირზე $M(x, y)$ წერტილი (ნახ. 4) და გავატაროთ ამ წერტილზე წირის მხები. წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობიდან გვექნება

$$\varphi'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (19)$$

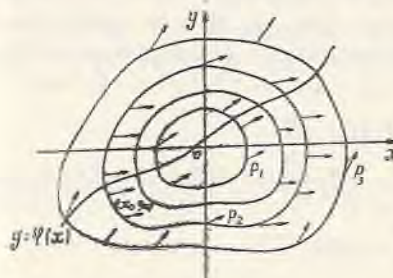
სადაც α მხების Ox ღერძთან დახრის კუთხეა. (18) და (19) მოგვცემს

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, \varphi(x)) = f(x, y).$$

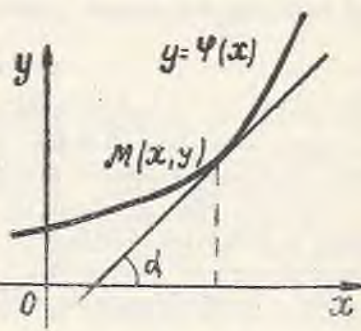
ამგვარად, ინტეგრალური წირი ყოველ $M(x, y)$ წერტილში, მხების საკუთხო კოეფიციენტი (17) განტოლების მარჯვენა ნაწილის $f(x, y)$ -ის მნიშვნელობის ტოლია. ეს გვიჩვენებს, რომ (17) დიფერენციალური განტოლება განსაზღვრავს ინტეგრალური წირის ყოველ წერტილში გატარებული მხების საკუთხო კოეფიციენტს.

ამრიგად, გვაქვს რა (17) დიფერენციალური განტოლება, ჩვენ გვაქვს ე. წ. მიმართულება — ველი და (17) განტოლების ინტეგრების ამოცანა მდგომარეობს ისეთ წირთა სიმრავლის მონახვაში, რომელთა ნებისმიერ წერტილში გატარებული მხების მიმართულება ემთხვევა ამ წერტილში მოცემული ველის მიმართულებას.

დიფერენციალური განტოლების ასეთი წარმოდგენა საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება (17) ე. წ. **იზოკლი-**



ნახ. 5



ნახ. 4

ნების მეთოდით. ამისათვის XOY სიბრტყეზე ავაგოთ წირები, რომლებზედაც $f(x, y)$ ფუნქცია რაიმე მუდმივ მნიშვნელობას ღებულობს, $f(x, y) = P$. ამ წირს (17) განტოლების ინტეგრალური წირი ისე გადაკვეთს, რომ გადაკვეთის წერტილში ინტეგრალური წირის მხების საკუთხო კოეფიციენტი ტოლია ველის მიმართულებისა ამ წერტილში (ნახ. 5),

$$\operatorname{tg} \alpha = P = f(x, y).$$

მეცეთ P -ს სხვადასხვა მნიშვნელობა, მივიღებთ სხვადასხვა **იზოკლინს** (წირებს, რომელთა მხებების საკუთხო კოეფიციენტები ყოველ წერტილში ერთი და იგივეა — ერთნაირად დახრილი წირები). იმისათვის, რომ მივიღოთ მიახლოებით ამონახსნის გრაფიკი (17) განტოლებისა

საწყისი პირობით: $x=x_0$, $y=y_0$. უნდა გამოვიდეთ (x_0, y_0) წერტილიდან და გავატაროთ წირი ისე, რომ სათანადო იზოკლინის გადაკვეთაში მხებს ჰქონდეს ისრით ნაჩვენები მიმართულება.

§ 2. კოშის ამოცანა. ბილერის ბაზილი

1. კოშის ამოცანა¹. წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ (კერძო მაგალითებზე), რომ დიფერენციალურ განტოლებას

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე $y = \varphi(x, C)$. ამ სიმრავლიდან რომ გამოვყოთ ერთ-ერთი ამონახსნი (ინტეგრალური წირი) უნდა გვქონდეს ერთი რომელიმე წერტილი, რომელზედაც გავიღის ინტეგრალური წირი.

ამრიგად, უნდა გვქონდეს (1) დიფერენციალური განტოლების საძიებელი y ამონახსნის მნიშვნელობა y_0 , როცა $x=x_0$. ამ მნიშვნელობებს (1) დიფერენციალური განტოლების საწყისი პირობები ვუწოდებთ. საწყისი პირობები ჩვეულებრივად ასე ჩაიწერება:

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0 \text{ ან } y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

ზემოთ არაფერი გვითქვამს (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობის შესახებ და, თუ არსებობდა ამონახსნი, იყო თუ არა იგი ერთადერთი. წინა პარაგრაფის (13) განტოლებას ორი ამონახსნი ჰქონდა. ამ საკითხს უფრო დაწვრილებით შევხებით.

როგორც ვიცით, $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილის განსაზღვრას რაიმე $[a, b]$ შუალედში, მივყავართ უმარტოვეს დიფერენციალურ განტოლებაზე

$$y' = f(x).$$

თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ ამ განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება ფორმულით

$$y = \int_{x_0}^x f(t) dt + C, \quad x_0, x \in [a, b].$$

უნდა აღინიშნოს, რომ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა არსებითია. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წყვეტის წერტილი, მაგალითად, პირველი გვარის, მაშინ

აღებულ განტოლებას $y' = f(x)$ არ აქვს ამონახსნი. მართლაც, განვიხილოთ $[-1, 1]$ შუალედში ფუნქცია

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & -1 < x < 0, \end{cases}$$

ამ ფუნქციას $[-1, 1]$ შუალედში პირველყოფილი არ აქვს და, მაშასადამე, განტოლებას $y' = f(x)$ არ აქვს ამონახსნი $[-1, 1]$ შუალედში.

განხილული განტოლება დაგვაფიქრებს შემდეგ საკითხზე: როგორი უნდა იყოს $f(x, y)$ ფუნქცია, რომ განტოლებას $y' = f(x, y)$ ჰქონდეს ამონახსნი? ეს საკითხი უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ.

ისეთი დიფერენციალური განტოლების შესახებ, რომელთა ამონახსნი ელემენტარულ ფუნქციებში გამოისახება, ასეთი საკითხი არ დგას. მაგრამ ისეთი დიფერენციალური განტოლების შესახებ, რომელთა ინტეგრების ხერხი არ გვაქვს, წარმოიშვება კითხვები: 1) არსებობს ამონახსნი? 2) თუ ამონახსნი არსებობს, იგი ისეთია, რომ აკმაყოფილებს საწყისს პირობებს? 3) ეს ამონახსნი ერთადერთია? 4) შეიძლება თუ არა აღებულ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის აგება თუ ზუსტად არა, მიახლოებით მაინც?

სწორედ ამ საკითხს ეხება ქვემოთ მოტანილი დიფერენციალური განტოლების $y' = f(x, y)$ ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა, რომლის პირველი დამტკიცება ეკუთვნის კოშს. ქვემოთ მოვიტანთ კოშის თეორემის დამტკიცებას მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. დამტკიცება ეკუთვნის პიკარს¹. პიკარის დამტკიცება იძლევა არა მარტო $y' = f(x, y)$ განტოლების ამონახსნის არსებობას, არამედ ყველა იმ ოთხი კითხვის პასუხს, რომელიც ზემოთ ჩამოვყალიბეთ.

თეორემა 1. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

საწყისი პირობით: როდესაც $x=x_0$, მაშინ $y=y_0$,

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

$f(x, y)$ ფუნქციის მიმართ დავუშვებთ:

1) $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ორივე ცვლადის მიმართ $\bar{R}$ ჩაკეტილ არეში,

$$\bar{R}: x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

სადაც a და b რაღაც დადებითი რიცხვებია.

¹ ემილ პიკარი (1856—1941), ფრანგი მათემატიკოსი.

¹ В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, М., 1959, стр.57.

ამ პირობიდან გამომდინარეობს: არსებობს ისეთი $M > 0$, რომ $\bar{R}$ არის ყოველ წერტილში

$$|f(x, y)| \leq M.$$

2) ჩაკეტილ $\bar{R}$ არეში $f(x, y)$ ფუნქცია y არგუმენტის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის¹ პირობას: არსებობს ისეთი რიცხვი $A > 0$, რომ y -ის ნებისმიერი ორი y' და y'' მნიშვნელობისათვის $|y' - y| \leq b$, $|y'' - y| \leq b$ და ნებისმიერი x -თვის, $|x - x_0| \leq a$, სრულდება უტოლობა

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq A|y' - y''|. \quad (3)$$

მოცემულ პირობებში $[x_0 - h, x_0 + h]$ სეგმენტზე არსებობს უწყვეტი, ერთადერთი $y = Y(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (1) განტოლებას და (2) საწყისს პირობას, სადაც

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

მოიხსნის (1) განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც (2) საწყისს პირობას აკმაყოფილებს, ეწოდება კოშის ამოცანა.

ვიდრე თეორემის დამტკიცებას შევუდგებოდეთ, შევნიშნოთ, რომ ლიფშიცის პირობა შესრულდება, თუ $f(x, y)$ ფუნქციას $\bar{R}$ არის ყოველ წერტილში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებული $f'_y(x, y)$, $|f'_y(x, y)| \leq A$. მართლაც ლაგრანჟის თეორემის თანახმად

$$f(x, y') - f(x, y'') = (y' - y'') f'_y(x, y' + \theta(y'' - y')), \quad 0 < \theta < 1.$$

აქედან მიიღება (3) უტოლობა. მაგრამ (3) უტოლობა სრულდება მაშინაც, როდესაც $f'_y(x, y)$ არ არსებობს. მაგალითად, $y = |y|$ ფუნქციას $y = 0$ წერტილში არ აქვს წარმოებული, მაგრამ ჰევმარიტია უტოლობა

$$\|y' - y''\| \leq |y' - y''|,$$

სადაც $A = 1$. ამრიგად, $|f'_y| \leq A$ უფრო მეტი მოთხოვნაა, ვიდრე ლიფშიცის პირობა.

დიფერენციალური განტოლება (1) საწყისი პირობით (2) ეკვივალენტ-

¹ ლიფშიცის (1832—1903), გერმანელი მათემატიკოსი.

ტურია შემდეგი ინტეგრალური განტოლებისა (საძიებელი ფუნქცია ინტეგრალის ქვეშაა):

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx. \quad (4)$$

მართლაც, ვთქვათ, $y = Y(x)$ არის (4) განტოლების ამონახსნი. მაშინ ჰევმარიტია იგივეობა

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y(x)) dx.$$

ამ იგივეობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{dY(x)}{dx} = f(x, Y(x)).$$

ე. ი. $Y(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (1) განტოლებას (2) საწყისი პირობით, $Y(x_0) = y_0$.

ახლა, ვთქვათ, $Y(x)$ არის (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი (2) საწყისი პირობით,

$$\frac{dY(x)}{dx} = f(x, Y(x)).$$

ამ იგივეობის ორივე ნაწილის ინტეგრებით მივიღებთ

$$Y(x) - Y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, Y(x)) dx.$$

რადგანაც $Y(x_0) = y_0$ გვექნება

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y(x)) dx.$$

რაც გვიჩვენებს, რომ $Y(x_0)$ აკმაყოფილებს (3) ინტეგრალურ განტოლებას.

ამრიგად, თეორემის დამტკიცება მიყვანილია (3) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის დამტკიცებაზე.

2. ამონახსნის არსებობის დამტკიცება. (3) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნის პირველ მიახლოებით მნიშვნელობად მივიღოთ y_0 , ხოლო შემდეგი მიახლოებითი მნიშვნელობანი $[x_0-h, x_0+h]$ შუალედში განსაზღვრეთ ფორმულებით:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx, \\ &\dots \dots \dots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (5)$$

დავრწმუნდეთ, რომ $[x_0-h, x_0+h]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტ ფუნქციითა ($y_n(x)$) მიმდევრობა გვაქვს. რადგანაც $f(x, y_0)$ უწყვეტია $[x_0-h, x_0+h]$ სეგმენტზე, მაშინ, ცხადია, ინტეგრალიც $\int_{x_0}^x f(x, y_0) dx$ უწყვეტი ფუნქციაა $[x_0-h, x_0+h]$ სეგმენტზე. $y_1(x)$ -სათვის გვექნება:

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_0)| dx \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b.$$

რადგანაც $x \in [x_0-h, x_0+h]$, მაშინ $y_0-b \leq y_1(x) \leq y_0+b$ და, მაშასადამე; $(x, y_1(x))$ წერტილი ეკუთვნის $\bar{R}$ არეს. $\bar{R}$ არეში $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია და $f(x, y_1(x))$ ფუნქცია, როგორც x ცვლადის რთული ფუნქცია, უწყვეტი ფუნქციაა და უწყვეტია ინტეგრალიც $\int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx$

სეგმენტზე $[x_0-h, x_0+h]$. ამის გამო $y_2(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[x_0-h, x_0+h]$ სეგმენტზე,

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx.$$

საიდანაც

$$|y_2(x) - y_0| \leq Mh \leq b.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ, რომ $y_n(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[x_0-h, x_0+h]$ სეგმენტზე, სადაც

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx \right| \leq M|x - x_0|.$$

რაც გვიჩვენებს

$$|y_n(x) - y_0| \leq b.$$

ე. ი. $y(x)$ ფუნქციის n -ური მიახლოება $y_n(x)$ არ გამოდის $\bar{R}$ არიდან.

ამრიგად, დამტკიცდა, რომ მიმდევრობა $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$ უწყვეტია $[x_0-h, x_0+h]$ სეგმენტზე და $y_n(x)$, $n=1, 2, \dots$ ფუნქციები განსაზღვრულია $\bar{R}$ არეში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ არსებობს ($y_n(x)$) მიმდევრობის ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x). \quad (6)$$

რომ დავამტკიცოთ ($y_n(x)$) მიმდევრობის ზღვრის არსებობა, საკმარისია, დავამტკიცოთ

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots \quad (7)$$

მწკრივის კრებადობა, რადგანაც ამ მწკრივის n -ური კერძო ჯამი $y_n(x)$ -ის ტოლია,

$$S_n(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_n(x).$$

შევაფასოთ (7) მწკრივის წევრები აბსოლუტური მნიშვნელობით. გვექნება

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_0)| dx \right| \leq M|x - x_0|.$$

ახლა შევაფასოთ

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^x (f(x, y_1) - f(x, y_0)) dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_1) - f(x, y_0)| dx \right|.$$

გამოვიყენოთ ლიფშიცის პირობა, გვექნება

$$|y_2 - y_1| \leq A \left| \int_{x_0}^x |y_1 - y_0| dx \right| = MA \frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

ასევე მივიღებთ

$$|y_3 - y_2| \leq M \frac{A^2 |x - x_0|^3}{3!}.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$|y_n - y_{n-1}| \leq M \frac{A^{n-1} |x - x_0|^n}{n!}, \quad (8)$$

რომ დავამტკიცოთ (8) უტოლობის ჭეშმარიტება ნებისმიერი n -სათვის, საკმარისია, მივიღოთ, რომ ჭეშმარიტია (8) უტოლობა და გამოვიყენოთ სათანადო უტოლობა $(n+1)$ -თვის. მართლაც, სათანადო გამოთვლა მოგვცემს

$$\begin{aligned} |y_{n+1} - y_n| &= \left| \int_{x_0}^x (f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})) dx \right| \leq \\ &\leq A \left| \int_{x_0}^x |y_n - y_{n-1}| dx \right| \leq A \cdot \frac{MA^{n-1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}. \end{aligned}$$

ამრიგად, (8) უტოლობა ჭეშმარიტია ნებისმიერი n -სათვის.

შევცვალოთ (8) უტოლობაში $|x - x_0|$ მისი უდიდესი მნიშვნელობით, გვექნება

$$|y_n - y_{n-1}| \leq M \frac{A^{n-1} h^n}{n!}. \quad (9)$$

ცხადია, (7) მწკრივის წევრები აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება შემდეგი რიცხვითი მწკრივის წევრებს (y_0 წევრიდან დაწყებული):

$$Mh + M \frac{Ah^2}{2!} + M \frac{A^2 h^3}{3!} + \dots + M \frac{A^{n-1} h^n}{n!} + \dots \quad (10)$$

ეს რიცხვითი მწკრივი კრებადია, რაშიდაც ადვილად დაგვრწმუნდებით, თუ გამოვიყენებთ მწკრივის კრებადობის დალამბერის პირობას (თავი V, § 2, n 3). (10) მწკრივის კრებადობის საფუძველზე დავასკვნით, რომ (7) ფუნქციური მწკრივი თანაბრად კრებადია. მაშასადამე, (7) მწკრივის ჯამი $Y(x)$, როგორც უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამი, უწყვეტი ფუნქციაა $[x_0 - h, x_0 + h]$ შუალედში. ადვილი შესამჩნევია, რომ მიღებული $Y(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს საწყისს (2) პირობას. მართლაც,

$$Y(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x_0) = y_0.$$

დავამტკიცოთ, რომ $Y(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (3) ინტეგრალურ განტოლებას.

რადგანაც ნებისმიერი n -სათვის $[x_0 - h, x_0 + h]$ სეგმენტზე გვაქვს $|y_n(x) - y_0| \leq b$, მაშინ ზღვრული $Y(x)$ ფუნქციისათვის ჭეშმარიტია

$$|Y(x) - y_0| \leq b. \quad \text{ამის გამო არსებობს ინტეგრალი } \int_{x_0}^x f(x, Y(x)) dx$$

ყველა x -სათვის $[x_0 - h, x_0 + h]$ სეგმენტზე. ამასთან შეიძლება დავრწმუნდეთ

$$\int_{x_0}^x f(x, Y(x)) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx. \quad (11)$$

მართლაც, ავიღოთ $\varepsilon > 0$. ლიფშიცის პირობით გვექნება

$$|f(x, Y(x)) - f(x, y_n(x))| \leq A |Y(x) - y_n(x)|. \quad (12)$$

მაგრამ (7) მწკრივი თანაბრად კრებადია $[x_0 - h, x_0 + h]$ სეგმენტზე, მაშინ მოინახება ისეთი N ნომერი, რომ ყოველი $n \geq N$ -სათვის და ყველა x -სათვის $[x_0 - h, x_0 + h]$ სეგმენტიდან

$$|Y(x) - y_n(x)| < \varepsilon.$$

ამ უტოლობის გამო (12) უტოლობა მოგვცემს

$$|f(x, Y(x)) - f(x, y_n(x))| < A\varepsilon.$$

აქედან კი დავასკვნით, რომ $n > N$ და ყოველი x -სათვის $[x_0 - h, x_0 + h]$ სეგმენტიდან

$$\left| \int_{x_0}^x f(x, Y(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx \right| = \left| \int_{x_0}^x (f(x, Y(x)) - f(x, y_n(x))) dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, Y(x)) - f(x, y_n(x))| dx \right| < A\varepsilon |x - x_0| \leq A\varepsilon h.$$

ეს კი (11) ტოლობას ამტკიცებს.

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n) dx$$

ტოლობაში, როდესაც $n \rightarrow \infty$, გვექნება

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y(x)) dx,$$

ანუ $Y(x)$ არის (3) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი.

3. ერთადერთობის დამტკიცება. დავამტკიცოთ, რომ $Y(x)$ ფუნქცია არის ერთადერთი ამონახსნი (3) ინტეგრალური განტოლებისა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ არსებობს მეორე ამონახსნი $Z(x)$, რომელიც იმავე პირობებს აკმაყოფილებს, რომლებსაც $Y(x)$ ამონახსნი განვიხილოთ ფუნქცია $|Y(x) - Z(x)|$. ეს ფუნქცია ნულის ტოლია $x = x_0$ წერტილში. ავიღოთ მცირე რიცხვი $\varepsilon > 0$ და განვიხილოთ $|Y(x) - Z(x)|$ ფუნქცია $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$ სეგმენტზე. ეს ფუნქცია ამ სეგმენტზე ყველგან ნული არაა, თუ ამ სეგმენტზე სხვაობა $Y(x) - Z(x)$ ყველგან ნულია, გამოსავალ წერტილად $x'_0 = x_0 - \varepsilon$ ან $x'_0 = x_0 + \varepsilon$ წერტილი ავიღოთ. ამ წერტილისათვის ავიღოთ $\varepsilon_1 > 0$ და განვიხილოთ სხვაობა $|Y(x) - Z(x)|$ $[x'_0 - \varepsilon_1, x'_0 + \varepsilon_1]$ სეგმენტზე. ასე რომ, ზოგადობის შეუზღუდავად მივიღოთ $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ სეგმენტზე სხვაობა $Y(x) - Z(x)$ ყველგან ნული არაა. ვისარგებლოთ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისებით: სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია მიაღწევს თავის უდიდეს მნიშვნელობას. ვთქვათ, ფუნქცია $|Y(x) - Z(x)|$ რომელიმე $\xi \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ წერტილში აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას M -ს. გვექნება

$$|Y(\xi) - Z(\xi)| = M \leq \left| \int_0^\xi |f(x, Y(x)) - f(x, Z(x))| dx \right| \leq A \left| \int_{x_0}^\xi |Y(x) - Z(x)| dx \right|, \quad \xi \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

უკანასკნელი უტოლობა, თუ ინტეგრალს ქვეშ სხვაობას შევცვლით მისი უდიდესი მნიშვნელობით, $M = \max |Y(x) - Z(x)|$ და ინტეგრების შუალედს $[x_0, \xi]$ შევცვლით შუალედით $[x_0, \varepsilon]$, გაძლიერდება. მივიღებთ

$$M < A\varepsilon M. \quad (13)$$

პირობის თანახმად $M \neq 0$. ამის შედეგად (13) უტოლობა მოგვცემს

$$1 < A\varepsilon,$$

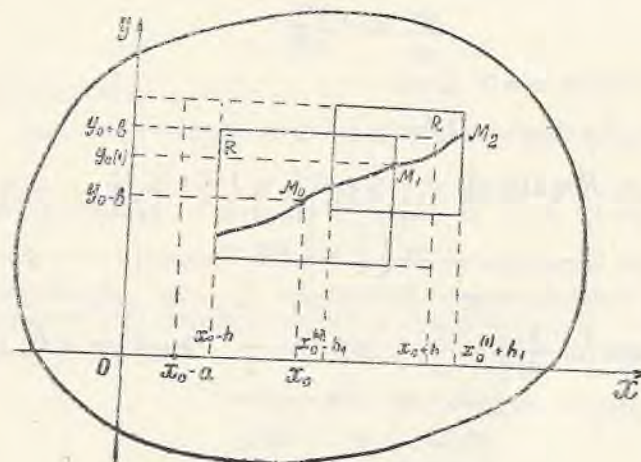
რაც შეუძლებელია, რადგანაც ε შეგვიძლია ავიღოთ რაგინდ მცირე, კერძოდ, $\varepsilon = \frac{1}{A}$. ამრიგად, იმის დაშვებამ, რომ არსებობს (3) ინტეგრალური განტოლების მეორე ამონახსნი, რომელიც იმავე პირობებს აკმაყოფილებს, როგორსაც პირველი ამონახსნი, მიგვიყვანა წინააღმდეგობამდე. მაშასადამე, (3) ინტეგრალური განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი.

ამრიგად, (1) დიფერენციალურ განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი, რომელიც (2) საწყის პირობას აკმაყოფილებს. კოშის თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

4. ამონახსნის გაგრძელება. ჩვენ დავამტკიცეთ (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობა I სეგმენტზე,

$$I = \{x \mid x_0 - h \leq x \leq x_0 + h\}.$$

მაგრამ თუ არ გამოვედით იმ $\bar{D}$ არიდან, რომელშიდაც $f(x, y)$ ფუნქციაა განსაზღვრული, უწყვეტია და აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას (ნახ. 6), მიღებული ამონახსნი შეიძლება გაეაგრძელოთ. მართლაც, ვთქვათ, წერტილი, რომლის კოორდინატებია $x_0^{(1)} = x_0 + h$, $y_0^{(1)} = Y(y_0)$, მდებარეობს $\bar{D}$ არეში.



ნახ. 6

მაშინ მოინახება მართკუთხედი $\bar{R}_1$,

$$\bar{R}_1 = \{(x, y) | x_0^{(1)} - a_1 \leq x \leq x_0^{(1)} + a_1, y_0^{(1)} - b_1 \leq y \leq y_0^{(1)} + b_1\},$$

რომელიც მთლიანად მდებარეობს $\bar{D}$ არეში. მაშინ კოშის თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი ფუნქცია $Y_1(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს (1) დიფერენციალურ განტოლებას $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})$ საწყისი პირობით I_1 სეგმენტზე,

$$I_1 = \{x | x_0^{(1)} - h_1 \leq x \leq x_0^{(1)} + h_1\},$$

სადაც $h_1 = \min \left\{ a_1, \frac{b_1}{M_1} \right\}$ და $\bar{R}_1$ არეში $|f(x, y)| \leq M_1$.

I_1 სეგმენტის შუა წერტილი ემთხვევა I სეგმენტის ბოლო წერტილს. ამ წერტილში $Y(x)$ და $Y_1(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობანი ტოლია. ამონახსნის ერთადერთობის გამო ორივე ამონახსნი თანამთხვეულია I და I_1 სეგმენტების საერთო ნაწილში. I სეგმენტის გარეთ მოთავსებულია I_1 სეგმენტის ნახევარი $[x_0^{(1)}, x_0^{(1)} + h_1]$, რომელზედაც განსაზღვრულია $Y_1(x)$ ფუნქცია. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, $Y_1(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს $Y(x)$ ფუნქციის გაგრძელებას $[x_0^{(1)}, x_0^{(1)} + h_1]$ სეგმენტზე. თუ ამ პროცესს გაგრძელებით, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ მივალთ $\bar{D}$ არის საზღვრამდე და სათანადოდ ავაგებთ (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს $Y(x)$ მთელ $\bar{D}$ არეში (x_0, y_0) საწყისი პირობით.

5. მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1) ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad (14)$$

საწყისი პირობით: $x_0 = 0, y_0 = 0$.

$\bar{R}$ არე განვსაზღვროთ შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$\bar{R} = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

ცხადია, $a=1, b=1$. ამ არეში $|f(x, y)| \leq 2$. მაშასადამე, $M=2$.

$\bar{R}$ არეში სრულდება ლიფშიცის პირობა, რადგანაც $f = x^2 + y^2$ ფუნქციას აქვს შემოსაზღვრული წარმოებული $f'_y = 2y$. განვსაზღვროთ h . რადგანაც $\min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} = \frac{1}{2}$. გვქვია $h = \frac{1}{2}$. მოცემული (14) განტოლება შევცვალოთ ინტეგრალური განტოლებით:

$$y = \int_0^x (x^2 + y^2) dx, \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

გამოვთვალოთ მიმდევრობით:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = y_0 + \int_0^x (x^2 + y_0^2) dx = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x (x^2 + y_1^2) dx = \int_0^x \left(x^2 + \left(\frac{x^3}{3} \right)^2 \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3 = \int_0^x \left(x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \right)^2 \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

გამოვთვალოთ y_2 -ის მნიშვნელობა $y = \frac{1}{2}$ -სათვის. მივიღებთ $y_2 = 0,04179$. ადვილი შესაძენეა, რომ y_3 უკეთესი სიზუსტით არ მიიღება, რადგანაც იგი შეიცავს x^{11} და x^{15} -ს და პირველი ხუთი ათწილადი ნიშანი y_2 -ის მნიშვნელობისა გამოვრდება და ასე გვექნება y_4 -ის მიახლოებითი მნიშვნელობისათვისაც. ასე რომ, საძიებელი ამონახსნი მიღებული მნიშვნელობა $y \left(\frac{1}{2} \right) = 0,04179$ ზუსტია ხუთი ათწილადი ნიშნით.

2) ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (15)$$

საწყისი პირობით $x_0 = 0, y_0 = 1$.

ავიღოთ

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}; \quad a=1, b=1, M=2, h= \\ &= \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

შევცვალოთ (15) დიფერენციალური განტოლება შემდეგი ინტეგრალური განტოლებით

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(x) dx.$$

$$y_0 = 1, y_1 = 1 + \int_0^x 1 \cdot dx = 1 + x,$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x (1 + x) dx = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!},$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right) dx = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

და ასე შემდეგ

$$y_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

ზღვარში მივიღებთ

$$Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

ამრიგად, (15) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი $Y(x)$ საწყისი $y(0)=1$ პირობით არის e^x , სადაც $|x| \leq \frac{1}{2}$, მაგრამ e^x არის (15) განტოლების ამონახსნი არა მარტო $|x| \leq \frac{1}{2}$ -თვის, არამედ $-\infty < x < +\infty$ შუალედისათვის. რადგანაც $f(x, y) = y$ ფუნქციისათვის სრულდება კოშის თეორემის პირობები მთელ Oxy სიბრტყეზე, $y=e^x$ ფუნქცია გაგრძელდა $|x| \leq \frac{1}{2}$ შუალედიდან მთელ Ox ღერძზე, $-\infty < x < +\infty$.

3) ამოვხსნათ განტოლება

$$y' = \frac{y}{x} \quad (16)$$

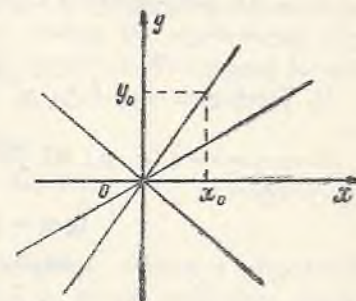
საწყისი პირობით (x_0, y_0) . საწყისი პირობა აღებულია ზოგადად. განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = Cx,$$

ხოლო საწყისი პირობით (x_0, y_0) ამონახსნი იქნება

$$y = \frac{y_0}{x_0} x. \quad (17)$$

მთელ Oxy სიბრტყის ყოველ (x_0, y_0) წერტილზე ($x_0 \neq 0$) გაივლის მხოლოდ ერთი წრფე — (16) განტოლების ინტეგრალური წირი, ხოლო კოორდინატთა სათავეზე გადის უსასრულო სიმრავლე (16) განტოლების ამონახსნებისა (ნახ. 7). OY ღერძზე ($x_0=0$), გარდა კოორდინატთა სათავეისა, არ გადის არც ერთი წრფე — (17) ამონახსნი. კოორდინატთა სათავეზე რომ გადის (16) განტოლების ინტეგრალურ წირთა უსასრულო სიმრავლე და ამ წერტილის გარდა Y -ღერძებზე არც ერთი ინტეგრალური წირი არ გადის, იმის გამოა, რომ, $(0, y)$ წერტილი

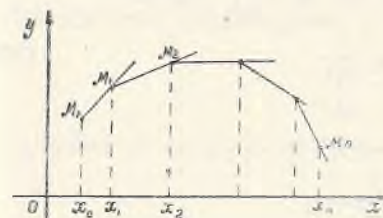


ნახ. 7

$f(x, y) = \frac{y}{x}$ -ფუნქციის განსაკუთრებული წერტილია. OY ღერძზე დარღვეულია კოშის თეორემის პირობები:

$$f(x, y) = \frac{y}{x}, \quad f'_y(x, y) = \frac{1}{x} \text{ შემოუსაზღვრავია.}$$

2. ეილერის ტეხილი. 1-ელ პარაგრაფში მოცემული იყო პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირის აგება იზოკლინების საშუალებით. ეს მეთოდი იძლევა ინტეგრალურ წირს მიახლოებით. ახლა განვიხილოთ ინტეგრალური წირის აგების სხვა მიახლოებითი მეთოდი. ეს მეთოდი ეილერს ეკუთვნის.



ნახ. 8

ვთქვათ, უნდა ამოვხსნათ

$$y' = f(x, y) \quad (18)$$

დიფერენციალური განტოლება

$$y(x_0) = y_0 \quad (19)$$

საწყისი პირობით. ინტეგრალური წირი ავაგოთ რაიმე $[x_0, b]$ სეგმენტზე. იგულისხმება, ამ სეგმენტზე (18) განტოლებას აქვს ამონახსნი. $[x_0, b]$ სეგმენტი დავყოთ $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ წერტილებით ქვესეგმენტებად (ნახ. 8).

გამოვთვალოთ $f(x, y)$ -ის მნიშვნელობა $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში. სა-

ძიებელი ინტეგრალური წირის M_0 წერტილზე გატარებული მხების საკუთხო კოეფიციენტი

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f(x_0, y_0).$$

გავატაროთ M_0 წერტილზე ამ საკუთხო კოეფიციენტით წრფე x_1 წერტილზე გატარებული Ox ღერძის პერპენდიკულარული წრფის გადაკვეთამდე. ამ გადაკვეთაში მიღებული წერტილი M_1 -ით აღვნიშნოთ, გავზომოთ M_1 წერტილის ორდინატი y_1 . ეს მნიშვნელობა, ცხადია, მიახლოებითია.

გამოვთვალოთ $f(x_1, y_1)$. M_1 წერტილზე გავატაროთ წრფე, საკუთხო კოეფიციენტით

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f(x_1, y_1).$$

x_2 წერტილზე x ღერძის პერპენდიკულარის გადაკვეთაში მიღებულ წერტილი აღვნიშნოთ M_2 -ით. ამ წერტილის ორდინატის გაზომვით მივიღებთ y_2 -ს და ა. შ. ავაგებთ $M_0, M_1, \dots, M_n$ ტეხილს. ამ ტეხილს ეწოდება ეილერის ტეხილი.

ცხადია, ეილერის ტეხილი (18) დიფერენციალური განტოლების (x_0, y_0) წერტილზე გამავალი ინტეგრალური წირის მიახლოებითი მნიშვნელობაა $[x_0, b]$ სეგმენტზე.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ $M_1, M_2, \dots, M_n$ წერტილები საზოგადოდ (18) განტოლების ინტეგრალურ წირს არ ეკუთვნის.

განვიხილოთ ამოცანები:

ამოცანა 1. აკმაყოფილებს თუ არა $y = \frac{1}{x^2}$ ფუნქცია

$$xy' + y = -\frac{1}{x^2} \quad (20)$$

განტოლებას?

გამოვთვალოთ y' .

$$y' = -\frac{2}{x^3}.$$

(20) განტოლებაში ჩასმა მოგვცემს

$$x \left(-\frac{2}{x^3} \right) + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

მაშასადამე, $y = \frac{1}{x^2}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (20) განტოლებას.

ამოცანა 2. შეადგინეთ ისეთი დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამონახსნია $y = Ce^{2x}$ ფუნქცია.

ჩერ $y = Ce^{2x}$ ფუნქცია გავაწარმოთ. გვექნება

$$y' = 2Ce^{2x}.$$

შემდეგ მოცემული $y' = 2Ce^{2x}$ და $y = Ce^{2x}$ -დან გამოვიტყვოთ C . მივიღებთ:

$$y' = 2y.$$

ამგვარად, $y = Ce^{2x}$ ფუნქცია

$$y' = 2y$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია.

ამოცანა 3. მოვინახოთ

$$y = C_1 e^x + C_2 \sin x \quad (21)$$

წირთა სიმრავლიდან ისეთი წირი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 3. \quad (22)$$

(21) ფუნქცია გავაწარმოთ. გვექნება:

$$y' = C_1 e^x + C_2 \cos x. \quad (23)$$

(21) და (23) გამოსახულებებში ჩავსვათ $x=0$ და გამოვიყენოთ (22) პირობა, მივიღებთ:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 \sin 0 = 1, \\ C_1 e^0 + C_2 \cos 0 = 3. \end{cases}$$

ამ სისტემიდან განვსაზღვროთ C_1 და C_2 . გვექნება:

$$C_1 = 1,$$

$$C_2 = 2.$$

შევიტანოთ C_1 და C_2 -ის მნიშვნელობანი (21)-ში, მივიღებთ:

$$y = e^x + 2 \sin x.$$

ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს ამოცანაში მოთხოვნილ პირობებს.

ამოცანა 4. 100 ლიტრი ტევადობის აუზი სავსეა მარილიანი წყლით, რომელშიც 10 კგ მარილია გახსნილი. აუზში ყოველ წუთში სამი ლიტრი სუფთა წყალი ჩადის და აუზიდან ყოველ წუთში 3 ლიტრი ნარევი გამოდის. რამდენი მარილი დარჩება ერთი საათის შემდეგ ნარევში?

ვთქვათ, t წუთის შემდეგ მარილწყალში დარჩენილი მარილის რაოდენობაა x კგ. მაშინ ნარევში მარილის კონცენტრაცია იქნება

$$k = \frac{x}{100}.$$

Δt წუთში აუზში $3\Delta t$ ლიტრი სუფთა წყალი ჩავა და გამოვა $3\Delta t$ ლიტრი ნარევი, რომელშიც $3k\Delta t$ კგ მარილია. ამგვარად, აუზში მარილის რაოდენობის Δx ცვლილება იქნება ($\Delta x < 0$)

$$\Delta x = -3k\Delta t,$$

საიდანაც

$$\frac{dx}{dt} = -3k,$$

ანუ

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{100}.$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა მოგვცემს

$$x = Ce^{-\frac{3}{100}t}. \quad (24)$$

ამოცანაში მოცემულია, რომ $t=0$ -სათვის $x=10$ კგ. ამის გამო (24) მოგვცემს

$$10 = Ce^{-0.03 \cdot 0},$$

საიდანაც

$$C = 10.$$

ასე რომ, t წუთის შემდეგ სითხეში მარილის რაოდენობა იქნება

$$x = 10e^{-0.03t} \text{ კგ},$$

ხოლო 1 საათის შემდეგ სითხეში დარჩება მარილი

$$x = 10 \cdot e^{-0.03 \cdot 60} \text{ კგ} = 10 \cdot e^{-1.8} \text{ კგ} = 1,654 \text{ კგ}.$$

ს ა ვ ა რ გ ი შ ი 16.

1. შეამოწმეთ: არის თუ არა y ფუნქცია მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

$$1) xy' = 2y, \quad y = 5x^2; \quad 2) y' = x^2 - y^2, \quad y = \frac{1}{x};$$

$$3) \sin x \cdot y'' - \cos^2 x = -1, \quad y = \sin x; \quad 4) y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{2x};$$

$$5) y'' - 2y' + y = 0, \quad y = (C_1 + C_2 x) e^x;$$

2. მონახეთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათათვის კოშის ამოცანის ამონახსნი.

$$1) y' = \frac{x}{2} + 1, \quad y(1) = 1; \quad 2) y' = 2y, \quad y(1) = 2;$$

$$3) 2yy' = 9x, \quad y(0) = 3; \quad 4) xdx + ydy = 0, \quad y(1) = 1.$$

$$5) \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0; \quad y(1) = 1. \quad 6) y' = -2xe^{-x^2}, \quad y(0) = 1.$$

$$7) y' = \cos^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}; \quad 8) dy - \operatorname{ctg} y dx = 0, \quad y(0) = 1.$$

3. $y=x^2$ და მისი წარმოებული $2x$ $x=2$ -სათვის აკმაყოფილებს განტოლებას $y'=y$.

შეიძლება თუ არა დამტკიცდეს, რომ ამ განტოლების ამონახსნია $y=x^2$?

4. თუ $y=f(x)$ არის $y'=F(x, y)$ განტოლების ამონახსნი (x_0, y_0) წერტილის მახლობლობაში. შეიძლება თუ არა დამტკიცდეს, რომ $y=f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში?

5. შეადგინეთ ისეთი დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამონახსნია სიბრტყეზე ყველა წრფე.

6. შეადგინეთ ისეთი დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამონახსნია სიბრტყეზე ყველა წრფიერი.

7. ამოხსენით $y'=x$ განტოლება და ააგეთ ამონახსნის გრაფიკი, შეუფარდეთ ამონახსნი $x=k$ იზოკლინებს.

8. $y'=-x$ განტოლება ამოხსენით იზოკლინების დახმარებით (ააგეთ ამონახსნის გრაფიკი).

9. $y'=x^2+y^2$ განტოლება ამოხსენით იზოკლინების დახმარებით. ააგეთ ამონახსნის გრაფიკი $x_0=0, y_0=0$ საწყისი პირობით.

§ 3. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

1. განტოლება, რომლის მარცხენა მხარე სრული დიფერენციალია. განვიხილოთ განტოლება

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (1)$$

სადაც $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე D არეში.

თუ (1) განტოლების მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს,

$$du(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (2)$$

მაშინ

$$u(x, y) = C \quad (3)$$

იქნება (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამგვარად, თუ (1) განტოლების მარცხენა ნაწილი რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის დიფერენციალია, მაშინ განტოლების ინტეგრება დაიყვანება

$u(x, y)$ ფუნქციის მოძებნაზე. ასეთ განტოლებას ეწოდება განტოლება, რომლის მარცხენა მხარე სრული დიფერენციალია ან, მოკლედ, განტოლება სრულ დიფერენციალში¹.

ავილოთ D არის რაიმე (x_0, y_0) წერტილი, მაშინ უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ, თუ $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, D არეში, მაშინ ჯამი

$$\int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt \quad (4)$$

წარმოადგენს ისეთ ფუნქციას, რომლის კერძო წარმოებული x -ით იძლევა $P(x, y)$, ხოლო y -ით წარმოებული $Q(x, y)$ ფუნქციას. მართლაც,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, \tau) d\tau \right) &= P(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, \tau) d\tau \right) &= \int_{x_0}^x \frac{\partial P(t, y)}{\partial y} dy + Q(x_0, y) = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial Q(t, y)}{\partial t} dt + Q(x_0, y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + Q(x_0, y) = Q(x, y). \end{aligned}$$

მაშასადამე, (4) გამოსახულება წარმოადგენს ისეთ $u(x, y)$ ფუნქციას, რომ

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

(1) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$\int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, \tau) d\tau = C. \quad (5)$$

მაგალითი 1. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$ydx + xdy = 0. \quad (6)$$

შევამოწმოთ პირობა

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (7)$$

აღებული განტოლებისათვის გვექნება

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1,$$

მაშასადამე, (7) პირობა სრულდება.

ფუნქციები

$$P(x, y) = y, \quad Q(x, y) = x$$

განსაზღვრულია მთელ Oxy სიბრტყეში. ამ სიბრტყეში ავილოთ ნებისმიერი (x_0, y_0) . მაგალითად, $(0, 0)$ წერტილი, მაშინ (5) ფორმულით მივიღებთ:

$$\int_0^x y dt + \int_0^y 0 d\tau = C,$$

ანუ

$$yx = C.$$

2. განტოლება განცალკეული ცვლადებით. განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$f_1(x) dx + f_2(y) dy = 0, \quad (8)$$

რომელსაც ეწოდება განტოლება განცალკეული ცვლადებით. ეს განტოლება ზემოთ განხილული განტოლების კერძო შემთხვევაა,

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(y)}{\partial x}.$$

(8) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\int f_1(x) dx + \int f_2(y) dy = C.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$x dx + y dy = 0.$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\int x dx + \int y dy = C_1,$$

ანუ

$$x^2 + y^2 = C,$$

სადაც

$$C = 2C_1.$$

¹ Н. А. Фролов, Курс математического анализа, ч. 2, М., 1959, стр. 232-252, 265-278.

3. განტოლება განცალკეული ცვლადებით. განტოლებას

$$f_1(x) \varphi_1(y) dx + f_2(x) \varphi_2(y) dy = 0, \quad (9)$$

სადაც

$$\varphi_1(y) f_2(x) \neq 0,$$

ეწოდება განტოლება განცალკეული ცვლადებით. (9) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = 0,$$

მივიღეთ განტოლება განცალკეული ცვლადებით. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი განისაზღვრება ტოლობით

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = C. \quad (10)$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება

$$x(1+y^2) dx + (1+x^2) y dy = 0 \quad (11)$$

(11) განტოლება რომ მივიყვანოთ განტოლებაზე განცალკეული ცვლადებით, განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $(1+x^2) \times (1+y^2)$ -ზე, გვექნება

$$\frac{x}{1+x^2} dx + \frac{y}{1+y^2} dy.$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი მიიღება განტოლების ორივე ნაწილის ინტეგრებით,

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = C,$$

ანუ

$$\ln(1+x^2) + \ln(1+y^2) = 2C.$$

2 C-ს ნაცვლად ავიღოთ $\ln C$, მაშინ გვექნება:

$$\ln(1+x^2) + \ln(1+y^2) = \ln C,$$

საიდანაც (11) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$(1+x^2)(1+y^2) = C$$

4. ერთგვაროვანი განტოლება. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y), \quad (12)$$

მაშინ ამ ფუნქციას ეწოდება α ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია.

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია ნულ ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციაა, მაშინ t შევცვალოთ $\frac{1}{x}$ -ით, მივიღებთ

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^0 f(x, y),$$

ანუ

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (13)$$

ამგვარად, თუ $f(x, y)$ ნულ ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციაა, მაშინ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ $\frac{y}{x}$ -ის ფუნქციად.

განვიხილოთ განტოლება

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (14)$$

თუ $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ ფუნქცია ერთი და იგივე ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციაა, განტოლებას პირველი რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება

(14) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (15)$$

სადაც მარჯვენა მხარეში ნულ ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციაა. (15) განტოლება (13) ტოლობის საფუძველზე ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (16)$$

შემოვიღოთ ახალი ფუნქცია $u = \frac{y}{x}$.

განვსაზღვროთ y და მისი წარმოებული:

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} x + u.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (16) განტოლებაში, გვექნება

$$\frac{du}{dx} x + u = \varphi(u),$$

ანუ

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - \varphi(u)} = 0. \quad (17)$$

ამ განტოლებიდან მივიღებთ

$$\ln u = - \int P(x) dx + \ln |C|,$$

ანუ

$$u = C e^{- \int P(x) dx}.$$

აქედან ერთ-ერთი ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნია

$$u = e^{- \int P(x) dx}. \quad (4)$$

(3) განტოლებიდან გვექნება

$$uv' = Q(x),$$

საიდანაც

$$dv = Q(x) e^{\int P(x) dx} dx.$$

ამ განტოლების ინტეგრება მოგვცემს

$$v = C + \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx. \quad (5)$$

(4) და (5) მნიშვნელობანი შევიტანოთ (2) გამოსახულებაში, მივიღებთ

(1) განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$y = e^{- \int P(x) dx} \left(C + \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx \right). \quad (6)$$

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$y' + y \sin x = 2x e^{\cos x}. \quad (7)$$

გამოვიყენოთ (6) ფორმულა. სადაც შევასრულოთ ნაწილ-ნაწილ გა-
მოთვლა:

$$\int P(x) dx = \int \sin x dx = -\cos x + C; \int Q(x) dx = -\cos x; e^{\int P(x) dx} = e^{-\cos x}.$$

$$\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int 2x e^{\cos x} \cdot e^{-\cos x} dx = \int 2x dx = x^2 + C.$$

(6) ფორმულაში სათანადო ჩასმა მოგვცემს (7) განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$y = e^{\cos x} (C + x^2).$$

§ 5. ბერნულის განტოლება

განტოლებას

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (1)$$

სადაც $n \neq 0$, $n \neq 1$, ეწოდება ბერნულის განტოლება. როდესაც $n=0$ (1) განტოლება იძლევა წრფივ განტოლებას, ხოლო, როდესაც $n=1$, განტოლება იძლევა განტოლებას განცალკეადი ცვლადებით.

ბერნულის განტოლება მიიყვანება პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე.

მართლაც, (1) ტოლობის y^n -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$y^{-n} y' + P(x) y^{1-n} = Q(x). \quad (2)$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $y^{1-n} = z$, მაშინ

$$z' = (y^{1-n})' = (1-n) y^{-n} y', \quad y^{-n} y' = \frac{1}{1-n} z'.$$

(2) განტოლება ჩასმის შემდეგ მოგვცემს

$$\frac{1}{1-n} z' + P(x) z = Q(x),$$

ანუ

$$z' + (1-n) P(x) z = (1-n) Q(x). \quad (3)$$

მივიღეთ z -ის მიმართ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y' + 2xy = 4x \sqrt{y}. \quad (4)$$

ამ განტოლების $\sqrt{y}$ -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$y^{-\frac{1}{2}} y' + 2xy^{-\frac{1}{2}} = 4x. \quad (5)$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $z = y^{\frac{1}{2}}$, მაშინ

$$z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y', \quad y^{-\frac{1}{2}} y' = 2z'.$$

(5) განტოლებაში ჩასმა მოგვცემს:

$$2z' + 2xz = 4x, \quad (6)$$

ანუ

$$z' + xz = 2x.$$

ამოვხსნათ მიღებული განტოლება:

$$P(x) = x, \quad Q(x) = 2x$$

$$\int P(x) dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C; \quad \int P(x) dx = \frac{x^2}{2}; \quad e^{\int P(x) dx} = e^{\frac{x^2}{2}};$$

$$\int Q(x) e^{\int P(x) dx} = 2 \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = 2 e^{\frac{x^2}{2}} + C.$$

ამგვარად, (6) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$z = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C + 2 e^{\frac{x^2}{2}} \right) = C e^{-\frac{x^2}{2}} + 2,$$

ხოლო (4) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\sqrt{y} = C e^{-\frac{x^2}{2}} + 2.$$

§ 6. ბანტოლუბანი, რომელიც არ ამოიხსნება წარმოვადგენს მისი

1. განტოლება, რომელიც x -ს არ შეიცავს, მაგრამ ამოიხსნება y -ის მიმართ:

$$y = f\left(\frac{dy}{dx}\right). \quad (1)$$

დავუშვათ

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

მაშინ

$$y = f(p). \quad (2)$$

თუ შევძლებთ ახლა x გამოვსახოთ p -ს საშუალებით, მაშინ გვექნება x და y მხოლოდ ერთი p ცვლადის ფუნქცია, ე. ი. გვექნება (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი პარამეტრული ფორმით, სადაც p პარამეტრია. x გამოვსახვა p -ს საშუალებით ძნელი არაა. მართლაც,

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad dx = \frac{dy}{p}.$$

dy გამოვთვალოთ (2) ტოლობიდან,

$$dy = f'(p) dp.$$

ამის გამო dx -ს ექნება შემდეგი სახე:

$$dx = \frac{f'(p) dp}{p},$$

საიდანაც

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C.$$

(1) განტოლების ამონახსნი პარამეტრულად იქნება:

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C, \quad (3)$$

$$y = f(p).$$

თუ (3) სისტემიდან p -ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ (1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს $F(x, y, C) = 0$.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$y\sqrt{y'-1} = 2 - y' \quad (4)$$

დავუშვათ $y' = p$ და (4) განტოლებიდან განვსაზღვროთ y ,

$$y = \frac{2-p}{\sqrt{p-1}}.$$

უკანასკნელიდან

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p} d \frac{2-p}{\sqrt{p-1}} = \frac{\sqrt{p-1} - (2-p) \frac{1}{2\sqrt{p-1}}}{p(p-1)} dp =$$

$$= -\frac{dp}{2(p-1)^{\frac{3}{2}}},$$

საიდანაც

$$x = - \int \frac{dp}{2(p-1)^{\frac{3}{2}}} + C = \frac{1}{\sqrt{p-1}} + C.$$

მაშასადამე,

$$x = \frac{1}{\sqrt{p-1}} + C,$$

$$y = \frac{2-p}{\sqrt{p-1}}.$$

თუ ამ სისტემიდან p -ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ (4) განტოლების ამონახსნს ზოგადი სახით:

$$y = x - C - \frac{1}{x - C}.$$

2. განტოლება, რომელიც y -ს არ შეიცავს, მაგრამ ამოხსნადია x -ის მიმართ:

$$x = f\left(\frac{dy}{dx}\right). \quad (5)$$

ამ განტოლების ინტეგრება ანალოგიურია (1) განტოლების ინტეგრებისა:

$$dx = f'(p) dp,$$

$$dy = \frac{dy}{dx} dx = p dx = p f'(p) dp,$$

$$y = \int p f'(p) dp + C,$$

(5) განტოლების ამონახსნი პარამეტრული სახით იქნება:

$$x = f(p),$$

$$y = \int p f'(p) dp + C.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$x \sqrt{1 + y'^2} = y' \quad (6)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{dy}{dx} = p$, მაშინ

$$x = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$dx = \frac{\sqrt{1 + p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1 + p^2}}}{1 + p^2} dp = \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dy = p dx = \frac{p dx}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = \int \frac{p dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} + C = -\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} + C.$$

აბგვარად

$$x = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} + C.$$

თუ ამ სისტემიდან p -ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ (6) განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$y = C - \sqrt{1 - x^2}.$$

3. განტოლება ამოხსნადია y -ის მიმართ.

$$y = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right). \quad (7)$$

თუ ლავუშევთ $\frac{dy}{dx} = p$, მივიღებთ

$$y = f(x, p), \quad (8)$$

საიდანაც

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx},$$

ანუ

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

მიღებული განტოლება p -ს მიმართ პირველი რიგის განტოლებაა. ვთქვათ, ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$p = \varphi(x, C).$$

თუ ამ განტოლებიდან და (8) განტოლებიდან გამოვრიცხავთ p -ს მივიღებთ (7) განტოლების ზოგად ამონახსნს არა ცხადი სახით,

$$F(x, y, C) = 0. \quad (9)$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება

$$y = x f\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right). \quad (10)$$

ამ განტოლებას ლავრანჩის განტოლება ეწოდება.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{dy}{dx} = p$, მაშინ მივიღებთ

$$y = x f(p) + \varphi(p). \quad (11)$$

გავარმოთ x -ით

$$\frac{dy}{dx} = f(p) + x f'(p) \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dy}{dx},$$

ანუ

$$p = f(p) + [x f'(p) + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx}.$$

ამ განტოლებაში x განვიხილოთ, როგორც საძიებელი ფუნქცია. განტოლება ასე გადავწეროთ

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p} x = \frac{\varphi'(p)}{p - f(p)}.$$

მივიღოთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება x -ის მიმართ. თუ $f(p) \neq p$, მაშინ მიღებული განტოლების ამოხსნით გვექნება:

$$x = \varphi(p, C). \quad (11)$$

(10) და (11) გამოსახულება იძლევა (9) განტოლების ამონახსნს პარამეტრული სახით

$$\begin{aligned} x &= \varphi(p, C), \\ y &= x f(p) + \varphi(p). \end{aligned}$$

p პარამეტრის გამორიცხვით, მივიღებთ (9) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება

$$y = x \frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right). \quad (12)$$

ამ განტოლებას კლეროს განტოლება ეწოდება. კლეროს განტოლება მიიღება ლაგრანჟის განტოლებიდან, თუ $f(p) = p$.

დავუშვათ, $\frac{dy}{dx} = p$, მაშინ (12) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$y = xp + \varphi(p). \quad (13)$$

ამ განტოლების ორივე ნაწილის x -ით გავარმოებთ მივიღებთ

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx},$$

ანუ

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

მიღებული განტოლება დაიშლება ორ განტოლებად:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad (14)$$

და

$$x + \varphi'(p) = 0. \quad (15)$$

(14) განტოლებიდან

$$p = C.$$

შევიტანოთ (13) განტოლებაში, გვექნება

$$y = Cx + \varphi(C). \quad (16)$$

მივიღეთ კლეროს განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ვისარგებლოთ (15) განტოლებით, მივიღებთ

$$x = -\varphi'(p).$$

თუ x -ის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (13)-ში, მივიღებთ კლეროს განტოლების კიდევ ერთ ამონახსნს:

$$\begin{aligned} x &= -\varphi'(p), \\ y &= -\varphi'(p)p + \varphi(p). \end{aligned} \quad (17)$$

(17) ამონახსნი არ შედის კლეროს განტოლების (16) ზოგად ამონახსნში. იგი არ მიიღება ზოგადი ამონახსნიდან. ამიტომ ამ ამონახსნს ეწოდება კლეროს განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ კლეროს განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი მიიღება $y = Cx + \varphi(C)$ განტოლების C -თი გაწარმოებით და C -ს გამორიცხვით. ამ შემთხვევაში p პარამეტრის მაგივრად გვექნება C პარამეტრი:

$$\begin{aligned} y &= Cx + \varphi(C), \\ x + \varphi'(C) &= 0. \end{aligned}$$

განვიხილოთ მაგალითი.

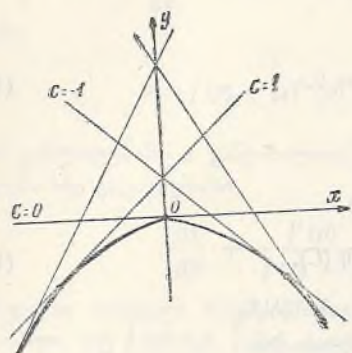
ამოვხსნათ განტოლება

$$y = xy' + y'^2. \quad (18)$$

y' შევცვალოთ C -თი, მივიღებთ (18) განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$y = Cx + C^2. \quad (19)$$

რომ მოვნახოთ განსაკუთრებული ამონახსნი, ზოგადი ამონახსნი გავაწარმოთ C -თი, გვექნება



ნახ. 9

ტილში გადის (18) განტოლების ორი ამონახსნი: (19) წრე და თვით (20) პარაბოლა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 17.

1. ამოხსენით განტოლებანი:

- 1) $y' = \cos^2 y$, 2) $y' = \sin y$, 3) $y' = \operatorname{ctg} y$,
- 4) $dy - \operatorname{tg} y dx = 0$, 5) $dy - y \ln y dx = 0$, 6) $y' - y^2(1 + y^2) = 0$,
- 7) $(x + 1) dx + (y - 1) dy = 0$, 8) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$,
- 9) $y^2(1 + xy) dx + x^2(1 - xy) dy = 0$, 10) $xy' + 2y + x = 0$,
- 11) $(y - x) dx = (y + x) dy$, 12) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$.

2. იპოვეთ მოცემულ წერტილზე გამავალი ინტეგრალური წირი:

- 1) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$, $M(1; 0)$; 2) $(x + 2y) dx - x dy = 0$, $M(2; 0)$
- 3) $y' - y - 2x = 0$, $M(0; 0)$ 4) $y' + 2xy = x e^{-x^2}$, $M(0; 1)$.

3. ამოხსენით განტოლებანი:

- 1) $y' - y + y^2 \cos x = 0$; 2) $y' + \frac{2}{x} y = \frac{2}{\cos^2 x} \sqrt{y}$;
- 3) $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$; 4) $xy' + y = y^2 \ln x$;
- 5) $y' + 2xy = 2x^2 y^3$; 6) $(x^3 + 3xy^2) dx + (y^3 + 3x^2 y) dy = 0$;
- 7) $\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \frac{2y dy}{x} = 0$; 8) $(3x^2 y - 2x^3 + y^3) dx - (2y^3 - 3xy^2 - x^3) dy = 0$;
- 9) $xy' \cos y + \sin y = 0$; 10) $(xe^y + e^x) y' + e^y + ye^x = 0$.

4. ამოხსენით განტოლებანი, რომლებიც წარმოებულის მიმართ არ ამოიხსნება:

- 1) $yy'^2 + 2xy' = y$; 2) $xy' + y'^2 - x^2 = 0$; 3) $x^3 + y'^2 = x^2$,
- 4) $y \sqrt{1 + y'^2} = y'$; 5) $y = y'^2 e^{y'}$ 6) $y = xy'^2 + 2y'$;
- 7) $y = 2xy' + y'^2$; 8) $y = xy'^2 + y'^3$; 9) $y = xy' + \arcsin y'$;
- 10) $y = xy' - y'^2$.

მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

§ 1. მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

1. ზოგადი შენიშვნები: მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ზოგადად აქვს სახე

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

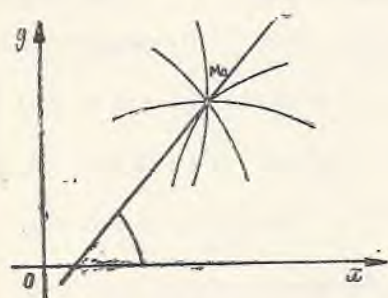
თუ ეს განტოლება ამოიხსნება y'' -ის მიმართ, გვექნება

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (1)$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y = \varphi(x_1, C_1, C_2) \quad (2)$$

შეიცავს ორ ნებისმიერ C_1 და C_2 მუდმივს. გეომეტრიულად (2) ამონახსნი წარმოადგენს ინტეგრალურ წირთა უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც ორ ურთიერთდამოუკიდებელ C_1 და C_2 პარამეტრს შეიცავს. საზოგადოდ Oxy



ნახ. 1

სიბრტყის ყოველ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გადის ინტეგრალურ წირთა კონა (ნახ. 1).

ამის გამო ინტეგრალურ წირთა სიმრავლიდან რომ გამოვყოთ ერთი ინტეგრალური წირი, არ კმარა მარტო ვიცოდეთ ერთი $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი, რომელზედაც ინტეგრალური წირი გაივლის, არამედ უნდა ვიცოდეთ ამავე წერტილში ინტეგრალური წირის მხედის საკუთხო კოეფიციენტი

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0.$$

ამგვარად, მივიღოთ (1) დიფერენციალური განტოლების საწყის პირობები: როცა $x = x_0$, მაშინ

$$y = y_0, \quad y' = y'_0. \quad (3)$$

(2) ზოგადი ამონახსნით მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, C_2), \\ y'_0 &= \varphi'_x(x_0, C_1, C_2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან შეიძლება განვსაზღვროთ C_1 და C_2 . მიღებული მნიშვნელობების y -ის გამოსახულებაში ჩასმით მივიღებთ (1) განტოლების კერძო ამონახსნს $y = \psi(x)$. ეს ამონახსნი აკმაყოფილებს (1) განტოლებას და (3) საწყის პირობებს

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y' \Big|_{x=x_0} = y'_0.$$

(1) განტოლებით y'' განსაზღვრულია x, y, y' ცვლადების მიმართ.

ვთქვათ, მოცემულია ჩაკეტილი $\bar{D} = \{x, y, y'\}$ არე, რომელშიდაც განსაზღვრულია $f(x, y, y')$ ფუნქცია. თუ $l(x, y, y')$ უწყვეტია და აქვს უწყვეტი წარმოებულები y და y' -ის მიმართ, მაშინ არსებობს $y'' = f(x, y, y')$ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს წინასწარ მოცემულ პირობებს, როცა $x = x_0$, მაშინ $y = y_0$ და $y' = y'_0$, სადაც $(x_0, y_0, y'_0) \in \bar{D}$ (კოშის ამოცანა).

2. კოშის ამოცანა განტოლებათა სისტემისათვის. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხს უფრო დაწვრილებით გავეცნოთ. ჯერ განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_m}{dx} &= f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \end{aligned} \quad (5)$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ — საძიებელი ფუნქციები, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ — მოცემული ფუნქციები, m — საძიებელ ფუნქციათა რიცხვი. (5) განტოლებათა სისტემას ეწოდება პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ნორმალური სახით. ვთქვათ,

f ფუნქციები განსაზღვრულია რაიმე ჩაკეტილ $\bar{D}$ არეში, $\bar{D} = \{x, y_1, \dots, y_m\}$.

ამ არეში ვეძებთ (5) განტოლებათა სისტემის ისეთი ამონახსნი $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, რომელიც დააკმაყოფილებს საწყის პირობებს

$$y_1 \Big|_{x=x_0} = y_1^{(0)}, \quad y_2 \Big|_{x=x_0} = y_2^{(0)}, \dots, y_m \Big|_{x=x_0} = y_m^{(0)}. \quad (6)$$

ჩამოვყალიბოთ ის პირობები, რომელთა შესრულება უზრუნველყოფს (5) განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობას და ამონახსნის ერთადერთობას, ამასთან შესრულება (6) საწყისი პირობები.

თეორემა 1. ვთქვათ, 1) f ფუნქციები უწყვეტია $\bar{R}$ არეში,

$$\bar{R} = \{x, y_1, \dots, y_m \mid x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_i^{(0)} - b \leq y_i \leq y_i + b, i = \overline{1, m}\}, \quad (7)$$

სადაც a და b რაიმე რიცხვებია, $\bar{R} \subset D$.

ცხადია, (7) პირობის შესრულების შემთხვევაში არსებობს ისეთი $M > 0$, რომ

$$|f_i| \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

2) $\bar{R}$ არეში $f_i(x, y_1, \dots, y_m)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ $y_1, y_2, \dots, y_m$ ცვლადების მიმართ ლიფშიცის პირობებს: ე. ი. x -ის მოცემული მნიშვნელობისათვის არსებობს ისეთი $A > 0$ რიცხვი, რომ

$$|f_i(x, y'_1, \dots, y'_m) - f_i(x, y''_1, \dots, y''_m)| < A(|y'_1 - y''_1| + \dots + |y'_m - y''_m|), \quad i = \overline{1, m}.$$

ლიფშიცის პირობა შესრულება, თუ $f_i, i = 1, 2, \dots, m$, ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\bar{R}$ ჩაკეტილ არეში,

$$\frac{\partial f_i(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k}, \quad i, k = \overline{1, \dots, m}.$$

ამ ორი პირობის შესრულების შემთხვევაში არსებობს (5) განტოლებათა სისტემის ერთადერთი ამონახსნი $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ შუალედში

$$x_0 - h \leq x \leq x_0 + h,$$

სადაც $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. ამასთან სრულდება საწყისი პირობები (6),

$$y_i \Big|_{x=x_0} = y_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

ეს თეორემა დამტკიცდება პირველი რიგის $y' = f(x, y)$ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის დამტკიცების სრული ანალოგიით (§ 2).

3. კოშის ამოცანა მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის. განვიხილოთ განტოლება

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (9)$$

სადაც F ფუნქცია უწყვეტია თავისი არგუმენტების მიმართ რაიმე $\bar{D}$ არეში, $\bar{D} = \{x, y, y', \dots, y^{(n)}\}$. ამ არეში ავიღოთ რომელიმე წერტილი $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n)}_0)$. ვთქვათ, ამ წერტილის მიდამოში კმაყოფილდება უცხადო ფუნქციის — $y^{(n)}$ -ის მიმართ შემდეგი პირობები (იხ. ნაწ. 1, თავი XVI, § 2, n 6):

$$F(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n)}_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots, y^{(n-1)}=y^{(n-1)}_0} \neq 0,$$

მაშინ (9) განტოლება ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (10)$$

ამ განტოლების ამონახსნის მიმართ საწყისი პირობები იქნება

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y' \Big|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)} \Big|_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0. \quad (11)$$

თუ შემოვიღებთ $(n-1)$ დამხმარე ფუნქციებს

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-1},$$

რომლებიც y — ფუნქციასთან შემდეგნაირად იქნებიან დაკავშირებული:

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \dots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}. \quad (12)$$

ცხადია,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{d^3 y}{dx^3}, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

მაშინ (10) განტოლების ნაცვლად გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ &\dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}), \end{aligned} \quad (13)$$

საწყისი პირობით

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (14)$$

ამ შემთხვევაში (9) განტოლებისათვის შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება კოშის თეორემა:

თეორემა 2. თუ $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ფუნქცია რაიმე $\bar{D}$ არეში, $\bar{D} = \{x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\}$, უწყვეტია და $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ცვლადების მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, მაშინ $\bar{D}$ არეში არსებობს

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y(x)$ რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს: როცა $x=x_0$ მაშინ

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

4. ზოგიერთი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება რიგის დაწვეის საშუალებით. ჯერ განვიხილოთ მარტივი დიფერენციალური განტოლებანი: 1)

$$y'' = f(x). \quad (15)$$

მიმდევრობით ინტეგრებით მივიღებთ

$$y' = \int f(x) dx + C_1, y = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2,$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

2)

$$y'' = f(y). \quad (16)$$

დავუშვათ $y' = p$, მაშინ

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

ამით (16) მოგვცემს განტოლებას:

$$p \frac{dp}{dy} = f(y)$$

განტოლებას განცალკეადი ცვლადებით. უკანასკნელიდან მივიღებთ

$$p dp = f(y) dy,$$

საიდანაც

$$\frac{p^2}{2} = \int f(y) dy + \frac{C_1}{2}.$$

აქედან კი

$$p = \pm \sqrt{2 \int f(y) dy + C_1},$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{2 \int f(x) dy + C_1}.$$

ცვლადთა განცალკეებით გვექნება:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} = \pm (x + C_2).$$

3)

$$y'' = f(y'). \quad (17)$$

თუ დავუშვებთ $y' = p$, მაშინ

$$y'' = \frac{dp}{dx},$$

ანუ

$$\frac{dp}{dx} = f(p).$$

აქედან კი

$$\int \frac{dp}{f(p)} = x + C.$$

გამოვთვლით რა ტოლობის მარცხენა მხარეში მყოფ ინტეგრალს, მივიღებთ ტოლობას, საიდანაც განვსაზღვრავთ p -ს, $\frac{dy}{dx} = p$, აქედან კი ვიპოვიტ y -ს.

განვიხილოთ მაგალითები
მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' = y^{-3}. \quad (18)$$

დავუშვათ $y' = p$, მაშინ

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

ჩავსვათ (18) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$p \frac{dp}{dy} = y^{-3},$$

საიდანაც

$$p dp = y^{-3} dy.$$

ინტეგრებით გვექნება:

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2},$$

საიდანაც

$$p = \pm \sqrt{C_1 - y^{-2}}, \quad C_1 > 0,$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y},$$

საიდანაც

$$\frac{y dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm dx.$$

უკანასკნელი განტოლებიდან ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\sqrt{C_1 y^2 - 1} = \pm (C_1 x + C_2).$$

აქედან კი გვექნება:

$$C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' = \sqrt{y'}. \quad (19)$$

აღვნიშნოთ $y' = p$, მივიღებთ: $y'' = \frac{dp}{dx}$. (19) განტოლება ამ ჩასმით

მოგვცემს

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{p},$$

ანუ

$$\frac{dp}{\sqrt{p}} = dx.$$

საიდანაც ინტეგრებით მივიღებთ

$$2\sqrt{p} = x + 2C_1,$$

ამ უკანასკნელიდან სათანადო ინტეგრებით მივიღებთ

$$y = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2} + C_1 \right)^3 + C_2.$$

4)

$$y'' = f(y, y'). \quad (20)$$

ამ განტოლებაში ისე, როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევებში, მივიღებთ $y' = p$, საიდანაც

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p,$$

მაშინ (20) განტოლება მოგვცემს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას p -ს მიმართ,

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

5)

$$y'' = f(x, y') \quad (21)$$

დავუშვათ $y' = p$, მაშინ $y'' = \frac{dp}{dx}$ (21) განტოლებაში ჩასმით გვექნება,

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება p -ს მიმართ.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება

$$xy'' = x + y'. \quad (22)$$

საწყისი პირობებით:

$$y \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad y' \Big|_{x=1} = 1. \quad (23)$$

(22) განტოლებიდან ჩასმით $y' = p$ და $y'' = \frac{dp}{dx}$ გვექნება:

$$x \frac{dp}{dx} = 2x - p.$$

ამრიგად, მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x} p = 1, \quad (24)$$

საწყისი პირობით

$$p \Big|_{x=1} = 1.$$

ამოვხსნათ (24) განტოლებას.

$$p = e^{\int x \left(C_1 + \int 1 \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right)} = x \left(C_1 + \int \frac{dx}{x} \right) = x (C_1 + \ln x).$$

საწყისი პირობით $p \Big|_{x=1} = 1$, მივიღებთ

$$C_1 = 1.$$

ამგვარად, (24) განტოლების კერძო ამონახსნია

$$p = x (1 + \ln x),$$

ანუ

$$dy = x (1 + \ln x) dx.$$

ამ განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$y = \int (x + x \ln x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C_2.$$

საწყისი პირობით $y \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$, გვქვია:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + C_2,$$

საიდანაც

$$C_2 = \frac{1}{4}.$$

ამგვარად, (22) განტოლების ამონახსნი (23) საწყისი პირობით არის

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4}.$$

§ 2. მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება.
ზოგადი ამონახსნი

1. წრფივი დიფერენციალური განტოლება. თვისებები.
განტოლებას

$$L(y) \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} + k_1(x) \frac{dy}{dx} + k_2(x) y = f(x), \quad (1)$$

სადაც $k_1(x)$, $k_2(x)$ და $f(x)$ ცნობილი ფუნქციებია, ეწოდება მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებას.

(1) განტოლებაში საძიებელი ფუნქცია და მისი წარმოებულები $\frac{dy}{dx}$ და $\frac{d^2 y}{dx^2}$ მხოლოდ პირველ ხარისხშია, ამიტომ განტოლებას წრფივი განტოლება ეწოდება.

(1) განტოლების მარცხენა ნაწილი აღვნიშნეთ $L(y)$ -ით. L -ს წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი ეწოდება. წრფივი ოპერატორის საშუალებით (1) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$L(y) = f(x).$$

თუ (1) განტოლებაში $f(x)$ ნულის ტოლია, მივიღებთ განტოლებას

$$L(y) = 0, \quad (2)$$

რომელსაც ერთგვაროვანი მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

წრფივი L ოპერატორის აქვს შემდეგი თვისებები:

$$1) \quad L(Cy) = CL(y).$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} L(Cy) &= \frac{d^2(Cy)}{dx^2} + k_1(x) \frac{d(Cy)}{dx} + k_2(x) Cy = \\ &= C \frac{d^2 y}{dx^2} + k_1(x) C \frac{dy}{dx} + k_2(x) Cy = \\ &= C \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + k_1(x) \frac{dy}{dx} + k_2(x) y \right) = CL(y). \end{aligned}$$

$$2) \quad L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= \frac{d^2}{dx^2} (y_1 + y_2) + k_1(x) \frac{d}{dx} (y_1 + y_2) + k_2(x) (y_1 + y_2) = \\ &= \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{d^2 y_2}{dx^2} + k_1(x) \frac{dy_1}{dx} + k_1(x) \frac{dy_2}{dx} + k_2(x) y_1 + k_2(x) y_2 = \\ &= \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} + k_1(x) \frac{dy_1}{dx} + k_2(x) y_1 \right) + \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2} + k_1(x) \frac{dy_2}{dx} + k_2(x) y_2 \right) = \\ &= L(y_1) + L(y_2). \end{aligned}$$

ცხადია, 1-ლი და მე-2 თვისება შეიძლება გავაერთიანოთ:

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2).$$

ამ თვისებათა საფუძველზე აღვილი დასამტკიცებელია

თეორემა 1. თუ y_1 ფუნქცია (2) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია, მაშინ იმავე განტოლების ამონახსნი იქნება $C y_1$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია,

მართლაც, თუ y_1 არის (2) განტოლების ამონახსნი,

$$L(y_1) = 0,$$

მაშინ

$$L(C y_1) = C L(y_1) = 0.$$

მაშასადამე,

$$L(C y_1) = 0.$$

სრულიად ასევე დამტკიცდება:

თეორემა 2. თუ y_1 და y_2 ფუნქცია (2) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია, მაშინ $C_1 y_1 + C_2 y_2$ იქნება იმავე ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივია.

2. წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი. (2) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს ორ ნებისმიერ მუდმივს, ამიტომ უნდა მოველოდეთ, რომ ფუნქცია

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (3)$$

სადაც y_1 და y_2 ერთგვაროვანი (2) განტოლების ამონახსნებია, უნდა იძლეოდეს განტოლების ზოგად ამონახსნს. მაგრამ ეს ყოველთვის ასე არაა. მაგალითად, თუ y_1 ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია, 1-ელი თეორემით, იმავე განტოლების ამონახსნი იქნება $y_2 = 3y_1$. ამ შემთხვევაში ამონახსნი

$$y = G y_1 + C_2 3 y_1 = (C_1 + 3 C_2) y_1 = C y_1,$$

სადაც $C = C_1 + 3 C_2$, ერთ ნებისმიერ მუდმივს შეიცავს.

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (3) ჯამი (2) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს არ იძლევა.

სრულიად კანონიერია, დავსვათ კითხვა: რა შემთხვევაში იძლევა (2) განტოლების კერძო ამონახსნები ზოგად ამონახსნს?

რომ ვუპასუხოთ ამ კითხვაზე, უნდა გამოვიდეთ ზოგადი ამონახსნის თვისებიდან. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ გამოსახავს ზოგად ამონახსნს, როდესაც მისგან მიიღება ყოველი კერძო ამონახსნი. ვთქვათ,

გვინდა ვიპოვოთ (2) განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომლის საწყისი პირობებია

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y'_0, \end{aligned} \quad (4)$$

მაშინ ნებისმიერი მუდმივები C_1 და C_2 ისე უნდა შეირჩეს, რომ

$$\begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} &= y_0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} &= y'_0, \end{aligned} \quad (5)$$

სადაც

$$y_{i0} = y_i(x_0), \quad y'_{i0} = y'_i(x_0), \quad i = 1, 2.$$

ეს პირობა კი მოითხოვს, რომ (5) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებული იყოს ნულისაგან.

გ. ი. თუ

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (6)$$

მაშინ (5) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი C_1 და C_2 . ამ C_1 და C_2 -ით განისაზღვრება ამონახსნი $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, რომელიც მოცემულ საწყის პირობას აკმაყოფილებს. (6) დეტერმინანტს ეწოდება ვრონსკის¹ დეტერმინანტი ან ვრონსკიანა.

ერთგვაროვანი (2) განტოლების ამონახსნების y_1 და y_2 სისტემას, რომლის $W(y_1, y_2)$ ვრონსკის დეტერმინანტი $[a, b]$ ინტერვალში ნული-საგან განსხვავებულია, ეწოდება ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნების ფუნდამენტალური სისტემა.

ამგვარად დამტკიცებულია შემდეგი

თეორემა 3. თუ y_1 და y_2 წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური (2) განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნებია, მაშინ იმავე განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

3. ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებლობა. ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებლობა ამ კუროსის პირველი ნაწილიდანაა ჩვენთვის ცნობილი². ფუნქციებს $y_1(x)$ და $y_2(x)$ წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება $[a, b]$ ინტერვალში, თუ ტოლობა

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \quad (7)$$

¹ იუზეფ ვრონსკი (გიონე — ვრონსკი, 1776—1856), პოლონელი მათემატიკოსი.

² ნაწ. I, თავი XII, § 2, პ. 2.

სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც C_1 და C_2 ორივე ნულის ტოლია.

თუ (7) ტოლობა სრულდება, ისე რომ ერთი მუდმივი მაინც ნულის ტოლი არაა, მაშინ $y_1(x)$ და $y_2(x)$ ფუნქციებს წრფივად დამოკიდებული ეწოდება.

მაგალითად, x და x^2 წრფივად დამოკიდებელია, რადგანაც ტოლობა

$$C_1 x + C_2 x^2 = 0$$

იგივერად სრულდება, თუ C_1 და C_2 ნულის ტოლია. ფუნქციები $\sin^2 x$

და $\frac{1 - \cos 2x}{2}$ წრფივად დამოკიდებულია, რადგანაც ტოლობა

$$C_1 \sin^2 x + C_2 \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0$$

იგივერად სრულდება, თუ $C_1 = 1$, $C_2 = -2$.

ორი y_1 და y_2 ფუნქციის წრფივად დამოკიდებულება ნიშნავს, რომ ერთი ფუნქცია მეორე ფუნქციის პირდაპირპროპორციულია.

მართლაც, თუ $C_1 \neq 0$, მაშინ

$$y_1 = -\frac{C_2}{C_1} y_2.$$

ანუ

$$y_1 = k y_2, \quad k = -\frac{C_2}{C_1}, \quad (8)$$

k პროპორციულობის კოეფიციენტი.

ცხადია, თუ y_1 და y_2 -ს შორის არსებობს (8) დამოკიდებულება, მაშინ y_1 და y_2 წრფივად დამოკიდებულია. (8) ტოლობას შეგვიძლია მივცეთ (7) სახე:

$$y_1 - k y_2 = 0, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = -k.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ y_1 და y_2 -დან ერთ-ერთი ნულის ტოლია, მაშინ ეს ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია. მაგალითად $y_1 = 0$, მაშინ

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$$

ტოლობას ადგილი აქვს $C_1 \neq 0$ და $C_2 = 0$ ე. ი. წრფივად დამოკიდებულების ტოლობას ადგილი აქვს, როდესაც C_1 , C_2 -დან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

ქვემოთ დავამტკიცებთ ორ თეორემას, რომლებიც მოგვცემენ ფუნქციათა წრფივად დამოკიდებულების პირობას.

თეორემა 4. თუ $y_1(x)$ და $y_2(x)$ ფუნქციებს $[a, b]$ ინტერვალში აქვს წარმოებული და წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ვრონსკის დეტერმინანტი

$$W(y_1, y_2) = 0, \quad x \in [a, b].$$

ვთქვათ, y_1 და y_2 წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ მოინახება ისეთი C_1 და C_2 რიცხვი, რომელთაგან ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავდება:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0, \quad x \in [a, b].$$

ამ იგივეობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$C_1 y_1' + C_2 y_2' = 0, \quad x \in [a, b]$$

ავიღოთ $[a, b]$ ინტერვალის ერთი რომელიმე x და განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0, \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' = 0, \end{cases} \quad (9)$$

C_1 და C_2 -ის მიმართ. (9) განტოლებათა სისტემა წრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემაა, რომელსაც აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, რადგანაც უკვე ვიცით C_1 და C_2 -დან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ამ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია (ნაწ. I, თავი VI, § 3, n2), (9) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლი უნდა იყოს. მაგრამ (9) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

ვრონსკის დეტერმინანტია, ე. ი. ვრონსკის დეტერმინანტი ნებისმიერად არჩეულ წერტილში ნულის ტოლია.

მაშასადამე, როდესაც y_1 , y_2 წრფივად დამოკიდებულია $[a, b]$ ინტერვალში, მაშინ ვრონსკის დეტერმინანტი ნულის ტოლია იმავე ინტერვალში:

$$W(y_1, y_2) = 0, \quad x \in [a, b].$$

თეორემა 5. თუ მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების

$$L(y) = 0 \quad (2)$$

y_1 და y_2 ამონახსნი წრფივად დამოკიდებულია $[a, b]$ ინტერვალში, მაშინ ამ ამონახსნთა ვრონსკის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება $[a, b]$ ინტერვალის ყოველ წერტილში:

$$W(y_1, y_2) \neq 0, \quad x \in [a, b].$$

ეთქვათ, ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნები y_1, y_2 წრფივად დამოუკიდებელია და დავუშვათ ამ ამონახსნთა ეროვნის დეტერმინანტი, ყოველ შემთხვევაში, ერთ x_0 წერტილში მაინც ნულის ტოლია,

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0.$$

შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა C_1, C_2 -ის მიმართ

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

ამ სისტემის დეტერმინანტია ეროვნის დეტერმინანტი, რომელიც ნულის ტოლია, მაშასადამე, სისტემას ექნება არანულოვანი ამონახსნი.

$$C_1 = \bar{C}_1, C_2 = \bar{C}_2.$$

ამ $\bar{C}_1$ და $\bar{C}_2$ -ით შევადგინოთ $L(y) = 0$ განტოლების ახალი ამონახსნი

$$\bar{y} = \bar{C}_1 y_1 + \bar{C}_2 y_2. \quad (11)$$

ცხადია, ეს ამონახსნი (10) სისტემის საფუძველზე აკმაყოფილებს პირობას:

$$y(x_0) = \bar{C}_1 y_1(x_0) + \bar{C}_2 y_2(x_0) = 0,$$

$$y'(x_0) = \bar{C}_1 y_1'(x_0) + \bar{C}_2 y_2'(x_0) = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია

$$\tilde{y} \equiv 0$$

ერთგვაროვანი $L(y) = 0$ განტოლების ამონახსნია და აკმაყოფილებს საწყის პირობებს $\tilde{y}(x_0) = 0, \tilde{y}'(x_0) = 0$. რადგანაც მეორე რიგის წრფივ ერთგვაროვან განტოლებას მოცემული საწყისი პირობებით ერთადერთი ამონახსნი აქვს, გვექნება

$$\bar{y} \equiv \tilde{y}_0,$$

ანუ

$$\bar{y} = 0, \quad x \in]a, b[$$

ამის გამო (11) მოგვცემს

$$\bar{C}_1 y_1 + \bar{C}_2 y_2 = 0, \quad x \in]a, b[,$$

სადაც $\bar{C}_1$ და $\bar{C}_2$ -დან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ე. ი. y_1 და y_2 წრფივად დამოკიდებულია, რაც ეწინააღმდეგება თეორემაში მოცემულ პირობას.

ამგვარად, იმის შესახებ დაშვებამ, რომ (2) განტოლების წრფივად დამოკიდებული y_1, y_2 ამონახსნებისათვის რაიმე $x_0 \in]a, b[$ წერტილში ეროვნის დეტერმინანტი $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$, წინააღმდეგობამდე მიგვიყვანა.

ამით თეორემა დამტკიცდა.

ამ ორი თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ ეროვნის დეტერმინანტი $W(y_1, y_2)$, შედგენილი $L(y) = 0$ განტოლების კერძო ამონახსნებისაგან, $]a, b[$ ინტერვალის რომელიმე ერთ წერტილში ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ ეროვნის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებული იქნება $]a, b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში.

მართლაც, თუ $x = x_0$ -სათვის ეროვნის დეტერმინანტი $W(y_1, y_2) \neq 0$, მაშინ y_1, y_2 ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია $]a, b[$ ინტერვალში, რადგანაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მე-4 თეორემით გვექნებოდა $W(y_1, y_2) = 0$ $]a, b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში. მეორეს მხრივ, y_1, y_2 -ის წრფივად დამოუკიდებლობიდან, მე-5 თეორემით, ეროვნის დეტერმინანტი $]a, b[$ ინტერვალის არც ერთ წერტილში ნულის ტოლი არაა.

თუ მხედველობაში მივიღებთ ამ შენიშვნას და ზემოთ დამტკიცებულ მე-4 და მე-5 თეორემებს, გვექნება

შედეგი: იმისათვის რომ ერთგვაროვანი $L(y) = 0$ განტოლების $]a, b[$ ინტერვალში კერძო ამონახსნები y_1 და y_2 იყოს წრფივად დამოუკიდებელი, აუცილებელია და საკმარისი ეროვნის დეტერმინანტი $W(y_1, y_2)$ ნულისაგან განსხვავებული იყოს $]a, b[$ ინტერვალის თუნდაც ერთ წერტილში.

ამგვარად, რომ შევადგინოთ ერთგვაროვანი $L(y) = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რაიმე საშუალებით უნდა ვიპოვოთ კერძო ამონახსნები, y_1, y_2 და შევამოწმოთ $W(y_1, y_2) \neq 0$, $]a, b[$ ინტერვალის რომელიმე x_0 წერტილში. მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივია.

4. ოსტროგრადსკის ფორმულა. განვიხილოთ მეორე რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k_1(x) \frac{dy}{dx} + k_2(x) y = 0. \quad (12)$$

დავსვათ ასეთი კითხვა. ხომ არ შეიძლება (12) განტოლების ერთი ცნობილი $y_1(x)$ ამონახსნით ავავოთ მისგან წრფივად დამოუკიდებელი $y_2(x)$ ამონახსნი? სწორედ ამ კითხვის პასუხს იძლევა ქვემოთ მიღებული ოსტროგრადსკის ფორმულა.

¹ მიხეილ ვასილის ძე ოსტროგრადსკი (1801—1861), რუსი მათემატიკოსი, 25. გ. კოზლადე

ვთქვათ, y_1 და y_2 ფუნქციები (12) განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნებია, მაშინ გვექნება იგივეობანი

$$\begin{aligned} y_1'' + k_1(x) y_1' + k_2(x) y_1 &= 0, \\ y_2'' + k_1(x) y_2' + k_2(x) y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

ეს ტოლობანი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც განტოლებათა სისტემა $k_1(x)$ და $k_2(x)$ -ის მიმართ. ამ სისტემის დეტერმინანტი,

$$\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = -w(y_1, y_2),$$

ვრონსკის დეტერმინანტია შებრუნებული ნიშნით. იგი ნულისაგან განსხვავებულია, რადგან y_1 და y_2 ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია. ამოცხსნათ განტოლებათა სისტემა (13) $k_1(x)$ -ის მიმართ

$$k_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} -y_1'' & y_1 \\ -y_2'' & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{y_2'' y_1 - y_1'' y_2}{-w} = \frac{(y_1 y_2' - y_1' y_2)'}{-w} = \frac{w'}{-w},$$

საიდანაც

$$\frac{dw}{w} = -k_1(x) dx.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ

$$\ln w = - \int_{x_0}^x k_1(x) dx + \ln C,$$

ანუ

$$w = C e^{- \int_{x_0}^x k_1(x) dx}, \quad (14)$$

სადაც

$$C = w(y_1, y_2) \Big|_{x=x_0} \neq 0.$$

ამ ფორმულას ოსტროგრადსკის ფორმულა ეწოდება. (14) ფორმულით ავაგებთ (12) განტოლების მეორე ამონახსნს, როდესაც ცნობილია y_1 ამონახსნი. მართლაც, (14) ფორმულიდან გვექნება, რომ ნებისმიერი y_2 ამონახსნი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 = C e^{- \int k_1(x) dx}$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ y_1^2 -ზე, $y_1 \neq 0$, მივიღებთ

$$\frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{C}{y_1^2} e^{- \int k_1(x) dx},$$

ანუ

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{C}{y_1^2} e^{- \int k_1(x) dx},$$

საიდანაც

$$\frac{y_2}{y_1} = C \int \frac{1}{y_1^2} e^{- \int k_1(x) dx} dx + C'.$$

ჩვენთვის საკმარისია ამ ინტეგრალიდან მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა. ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ $C' = 0$. გვექნება

$$y_2 = C y_1(x) \int \frac{1}{(y_1(x))^2} e^{- \int k_1(x) dx} dx.$$

მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია $C=1$ ავიღოთ. ასე რომ, გვექნება

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{1}{(y_1(x))^2} e^{- \int k_1(x) dx} dx. \quad (15)$$

(12) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = y_1 \left(C_1 + C_2 \int \frac{1}{(y_1(x))^2} e^{- \int k_1(x) dx} dx \right).$$

ამრიგად, თუ გვაქვს ერთი ამონახსნი (12) ერთგვაროვანი განტოლებისა y_1 , მეორე ამონახსნი y_2 მიიღება (15) ფორმულით.

§ 3. მუდმივკოეფიციენტებიანი წარმოშობის დიფერენციალური განტოლებანი

ქვემოთ განვიხილავთ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას. ამით ზოგადობას არ ვზღუდავთ. იგივე მეთოდი, რომლითაც ამოვხსნით მეორე რიგის განტოლებას, უცვლელად გამოიყენება მაღალი რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისათვის.

ავიღოთ ერთგვაროვანი განტოლება

$$L(y) \equiv y'' + k_1 y' + k_2 y = 0. \quad (1)$$

სადაც k_1 და k_2 მუდმივებია. (1) განტოლებას აქვს ერთადერთი უწყვეტი ამონახსნი, რომელიც მოცემული x_0 -სათვის ღებულობს მოცემულ y_0

მნიშვნელობას, $y|_{x_0} = y_0$, $-\infty < x < +\infty$ ინტერვალში.

(1) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებთ მაჩვენებლიანი e^{rx} ფუნქციით, სადაც r მუდმივი სიდიდეა, რომელიც უნდა განისაზღვროს. (1) განტოლების ამონახსნისადმი ასეთი მიდგომა იმითაა გამართლებული, რომ e^{rx} -ის წარმოებული e^{rx} -საგან განსხვავებულია მხოლოდ მუდმივით. ამის გამო r -ის სათანადო არჩევით $L(e^{rx})$ შეიძლება გახდეს ნულის ტოლი.

გავაწარმოოთ $y = e^{rx}$, მივიღებთ

$$y' = (e^{rx})' = r e^{rx}, \quad y'' = (e^{rx})'' = r^2 e^{rx}.$$

ეს მნიშვნელობანი შევიტანოთ (1) განტოლების მარცხენა ნაწილში, გვექნება:

$$L(e^{rx}) = e^{rx} (r^2 + k_1 r + k_2).$$

რადგანაც $e^{rx} \neq 0$, იგივეობა $L(e^{rx}) = 0$ შესრულება, თუ r არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$$F(r) \equiv r^2 + k_1 r + k_2 = 0. \quad (2)$$

ამგვარად, e^{rx} ფუნქცია (1) განტოლების ამონახსნი იქნება, თუ r არის (2) განტოლების ამონახსნი.

(2) განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი (1) განტოლების მახასიათებელი განტოლება.

შეიძლება მახასიათებელ განტოლებას კომპლექსური ამონახსნები ჰქონდეს და, მაშინ e^{rx} კომპლექსური ფუნქცია იქნება, მაგრამ ამ ფუნქციის წარმოებული შემდეგი ფორმულით მიიღება

$$(e^{rx})' = r e^{rx}.$$

მართლაც, $r = \alpha + i\beta$, მაშინ ეილერის ფორმულით მივიღებთ:

$$e^{rx} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

გაწარმოებით გვექნება:

$$\begin{aligned} (e^{rx})' &= (e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x))' = (e^{\alpha x})' (\cos \beta x + i \sin \beta x) + \\ &+ e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)' = \alpha e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + \\ &+ e^{\alpha x} (-\beta \sin \beta x + i \beta \cos \beta x) = \alpha e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + \\ &+ e^{\alpha x} (i^2 \beta \sin \beta x + i \beta \cos \beta x) = \alpha e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + \\ &+ i \beta e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = (\alpha + i \beta) e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = \\ &= (\alpha + i \beta) e^{(\alpha + i \beta)x}. \end{aligned}$$

ამრიგად, გაწარმოების ფორმულა $(e^{rx})' = r e^{rx}$ მართებულია მაშინაც, როდესაც r კომპლექსურია. ამ შემთხვევაში მახასიათებელი განტოლების სახე უცვლელია.

განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევა.

1) მახასიათებელი განტოლების ამონახსნები ნამდვილი და ურთიერთგანსხვავებული რიცხვებია, $r_1 \neq r_2$.

ამ შემთხვევაში, $y_1 = e^{r_1 x}$ და $y_2 = e^{r_2 x}$, ვაჩვენოთ, რომ y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია.

შევადგინოთ ვრონსკის დეტერმინანტი

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = \\ &= e^{(r_1 + r_2)x} (r_2 - r_1). \end{aligned}$$

რადგანაც $r_1 \neq r_2$, ვრონსკის დეტერმინანტი $]-\infty, +\infty[$ ინტერვალში არსად არ ხდება ნულის ტოლი, იმის მაჩვენებელია, რომ $y_1 = e^{r_1 x}$ და $y_2 = e^{r_2 x}$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია.

ამის გამო, ერთგვაროვანი (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \quad (3)$$

ჯერ შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

ამ განტოლების ამონახსნებია $r_1 = 2$, $r_2 = 1$. მაშასადამე,

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^x.$$

(3) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

2) მახასიათებელი განტოლების ამონახსნი ჯერადია, $r_1 = r_2$. ამ შემთხვევაში $y = e^{rx}$ იძლევა ერთ ამონახსნს $y = e^{r_1 x}$. მეორე ამონახსნი ვეძებთ $y = u e^{r_1 x}$ სახით, სადაც u ისე განვსაზღვროთ, რომ $u e^{r_1 x}$ იყოს ერთგვაროვანი (1) განტოლების ამონახსნი. სათანადო გაწარმოებით მივიღებთ

$$y = e^{r_1 x} u,$$

$$y' = r_1 e^{r_1 x} u + u' e^{r_1 x},$$

$$y'' = r_1^2 e^{r_1 x} u + 2r_1 u' e^{r_1 x} + u'' e^{r_1 x}.$$

მიღებული ტოლობანი მიმდევრობით გავამრავლოთ k_2 , k_1 და 1-ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} L(u e^{r_1 x}) &= u e^{r_1 x} (k_2 + k_1 r_1 + r_1^2) + u' e^{r_1 x} (k_2 + 2r_1 k_1) + u'' e^{r_1 x} = \\ &= u e^{r_1 x} F(r_1) + u' e^{r_1 x} F'(r_1) + u'' e^{r_1 x} \frac{F''(r_1)}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

ამ გამოსახულების პირველი შესაკრები ნულის ტოლია, $F(r_1) = 0$. რადგანაც $F(r) = 0$ განტოლების ჯერადი ამონახსნია r_1 , მაშინ

$$F'(r_1) = 0.$$

ამის გამო (4) მოგვცემს

$$L(u e^{r_1 x}) = u'' e^{r_1 x} \frac{F''(r_1)}{2}.$$

ეს გამოსახულება ნულის ტოლი იქნება, თუ u ისეთი ფუნქციაა, რომლის მეორე რიგის წარმოებული ნულის ტოლია, ასეთია, მაგალითად, $u = x$.

ამგვარად, მივიღეთ ერთგვაროვანი განტოლების მეორე ამონახსნი $y_2 = x e^{r_1 x}$. ვაჩვენოთ, რომ $y_1 = e^{r_1 x}$ და $y_2 = x e^{r_1 x}$ წრფივად დამოუკიდებელია.

მართლაც, შევადგინოთ ვრონსკის დეტერმინანტი

$$\begin{aligned} W(e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}) &= \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & x e^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & e^{r_1 x} + x r_1 e^{r_1 x} \end{vmatrix} = \\ &= e^{2r_1 x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ r_1 & 1 + x r_1 \end{vmatrix} = e^{2r_1 x} (1 + x r_1 - r_1 x) = e^{2r_1 x} \neq 0. \end{aligned}$$

მაშასადამე, $y_1 = e^{r_1 x}$ და $y_2 = x e^{r_1 x}$ ერთგვაროვანი (2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ამიტომ განტოლების ზოგადი ამონახსნი $]-\infty, +\infty[$ შუალედში იქნება

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} = e^{r_1 x} (C_1 + C_2 x). \quad (5)$$

3) მახასიათებელ განტოლებას აქვს კომპლექსური ამონახსნები

ვთქვათ, $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, მაშინ

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

გამოვიყენოთ ეილერის ფორმულა

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x,$$

მივიღებთ, რომ

$$y_1 = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

წარმოადგენენ (2) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნებს. მე-2 პარაგრაფში დამტკიცებული 1-ელი და მე-2 თეორემის თანახმად, იმავე ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი იქნება

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

ე. ი.

$$Y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad Y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (6)$$

ერთგვაროვანი (2) განტოლების კერძო ამონახსნებია.

ვაჩვენოთ, რომ Y_1 და Y_2 წრფივად დამოუკიდებელია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

მართლაც, შევადგინოთ ვრონსკის დეტერმინანტი

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x, & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x, & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \cos \beta x, & \sin \beta x \\ \alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x, & \alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x} (\alpha \cos \beta x \sin \beta x + \beta \cos^2 \beta x - \alpha \cos \beta x \sin \beta x + \beta \sin^2 \beta x) = \beta e^{2\alpha x}.$$

ეს უკანასკნელი კი $]-\infty, +\infty[$ შუალედში არ უდრის ნულს, რადგანაც $\beta \neq 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში $F(r) = 0$ განტოლებას კომპლექსური ამონახსნები არ ექნებოდა).

მაშასადამე, (6) ფუნქციები (2) ერთგვაროვანი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ამ შემთხვევაში (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (7)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' - 4y' + 13y = 0. \quad (8)$$

შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება:

$$r^2 - 4r + 13 = 0,$$

საიდანაც

$$r_1 = 2 + 3i, \quad r_2 = 2 - 3i.$$

(7) ფორმულით (8) განტოლების ამონახსნია

$$y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ ის, რაც მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე ითქვა, სიტყვა-სიტყვით გადაიტანება $n > 2$ რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე.

მართლაც, განვიხილოთ n რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება

$$L(y) \equiv y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + \dots + k_n y = 0.$$

ამ განტოლების ამონახსნი ვეძებთ $y = e^{rx}$ სახით, სადაც r უნდა განისაზღვროს ისე, რომ e^{rx} აკმაყოფილებდეს $L(y) = 0$ განტოლებას. სათანადო გაწარმოება მოგვცემს

$$y' = r e^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}, \dots, y^{(n)} = r^n e^{rx}.$$

შევიტანოთ $L(y) = 0$ განტოლებაში, მივიღებთ

$$L(e^{rx}) \equiv e^{rx} F(r) = 0,$$

სადაც

$$F(r) \equiv r^n + k_1 r^{n-1} + \dots + k_n.$$

მაგრამ $e^{rx} \neq 0$. მაშასადამე, r უნდა იყოს ისეთი, რომ დააკმაყოფილოს განტოლება

$$F(r) \equiv r^n + k_1 r^{n-1} + \dots + k_n = 0.$$

მივიღეთ n ხარისხის ალგებრული განტოლება r ცვლადის მიმართ. ამრიგად, e^{rx} მაშინ იქნება $L(y) = 0$ განტოლების ამონახსნი, როდესაც r იქნება $F(r) = 0$ — მახასიათებელი განტოლების ამონახსნი.

ვთქვათ, $F(r) = 0$ განტოლების ამონახსნებია $r_1, r_2, \dots, r_n$. ეს ამონახსნები იყოს მარტივი $r_i \neq r_k, i \neq k$, მაშინ გვექნება $L(y) = 0$ განტოლების ამონახსნები:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}.$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია. ამისათვის შევადგინოთ ამ ამონახსნთა ვრონსკის დეტერმინანტი

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \dots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \dots & r_n e^{r_n x} \\ r_1^2 e^{r_1 x} & r_2^2 e^{r_2 x} & \dots & r_n^2 e^{r_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

მივიღეთ ე. წ. ვანდერმონდეს დეტერმინანტი. გამოვთვალოთ ეს დეტერმინანტი. ამისათვის n -ური სტრიქონის ელემენტებს სათანადოდ გამოვაკლოთ $(n-1)$ სტრიქონის ელემენტები გამრავლებული r_i -ზე. ასევე $(n-1)$ სტრიქონის ელემენტებს სათანადოდ გამოვაკლოთ $(n-2)$ სტრიქონის ელემენტები გამრავლებული r_i -ზე და ა. შ. მეორე სტრიქონის ელემენ-

ტებს გამოვავლოთ სათანადოდ პირველი სტრიქონის ელემენტები გამრავლებული r_1 -ზე. მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & r_2 - r_1 & \dots & r_n - r_1 \\ 0 & r_2^2 - r_1 r_2 & \dots & r_n^2 - r_1 r_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & r_2^{n-1} - r_1 r_2^{n-2} & \dots & r_n^{n-1} - r_1 r_n^{n-2} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) \dots (r_n - r_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_2 & r_3 & \dots & r_n \\ r_2^2 & r_3^2 & \dots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2^{n-2} & r_3^{n-2} & \dots & r_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ამგვარი მოქმედების გაგრძელებით მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) \dots (r_n - r_1) (r_3 - r_2) \dots (r_n - r_2) \dots (r_n - r_{n-1}).$$

რადგანაც $r_i \neq r_k$, $i \neq k$, ვანდერმონდეს დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება და, მაშასადამე $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ ფუნქციათა ვრონსკის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება. ამრიგად, $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია. $L(y) = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x},$$

სადაც $C_1, C_2, \dots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.

ახლა, ვთქვათ, $F(r) = 0$ განტოლების ამონახსნები ჯერადია. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია მივიღოთ, r_1 ამონახსნი k ჯერადობისაა და r_2 ამონახსნი q ჯერადობისა. დანარჩენი ამონახსნები კი მარტივი ამონახსნები იყოს. მაშინ დავამტკიცოთ, რომ $L(y) = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები იქნება

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, x e^{r_2 x}, \dots, x^{q-1} e^{r_2 x}, e^{r_{k+q+1} x}, \dots, e^{r_n x}.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო: ეს ამონახსნები წრფივად დამოკიდებულია. ე. ი. არსებობს ისეთი მუდმივები $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_q, C_{k+q+1}, \dots, C_n$, რომ ჰეშმარიტია ტოლობა

$$(A_1 + A_2 x + \dots + A_k x^{k-1}) e^{r_1 x} + (B_1 + B_2 x + \dots + B_q x^{q-1}) e^{r_2 x} + \dots + C_{k+q+1} e^{r_{k+q+1} x} + \dots + C_n e^{r_n x} = 0,$$

სადაც, დავუშვათ, $k \geq q$ და $(k-1)$ ხარისხის მრავალწევრის ერთი კოეფიციენტი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ამასთან კოეფიციენტებიდან $B_2, \dots, B_q$ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს, თუ r_2 მარტივი ამონახსნია. ტოლობის ორივე მხარე $e^{r_2 x}$ -ზე გავყოთ. მივიღებთ

$$(A_1 + A_2 x + \dots + A_k x^{k-1}) e^{(r_1 - r_2) x} + (B_1 + B_2 x + \dots + B_q x^{q-1}) + \dots + C_{k+q+1} e^{(r_{k+q+1} - r_2) x} + \dots + C_n e^{(r_n - r_2) x}.$$

ტოლობის ორივე მხარე გავაწარმოთ q -ჯერ. $e^{(r_1 - r_2) x}$ -ის კოეფიციენტი $(k-1)$ ხარისხის მრავალწევრია,

$$(r_1 - r_2)^q P_{k-1}(x) e^{(r_1 - r_2) x} + q P_{k-1}'(x) (r_1 - r_2)^{q-1} e^{(r_1 - r_2) x} + \dots + P_{k-1}^{(q)}(x) e^{(r_1 - r_2) x} + \dots + C_n (r_n - r_2)^q e^{(r_n - r_2) x} = 0, P_{k-1}(x) = A_1 + A_2 x, \dots, A_{k-1} x^{k-1}.$$

ეს ტოლობა უნდა შესრულდეს იგივეურად. ეს კი შეუძლებელია, რადგანაც $e^{(r_1 - r_2) x} \neq 0$. და პირველი კოეფიციენტი $(k-1)$ ხარისხის მრავალწევრია, რომლის ერთი კოეფიციენტი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. მაშასადამე, $L(y)$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, x e^{r_2 x}, \dots, x^{q-1} e^{r_2 x}, e^{r_{k+q+1} x}, \dots, e^{r_n x}.$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = (C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) e^{r_1 x} + (C_{k+1} + C_{k+2} x + \dots + C_{k+q} x^{q-1}) e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

განვიხილოთ განტოლებანი.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$r^3 - r^2 - r + 1 = 0.$$

განტოლების მარცხენა მხარე დავშალოთ მამრავლებად

$$r^2(r-1) - (r-1) = (r^2-1)(r-1) = (r-1)^2(r+1).$$

მივიღებთ

$$(r-1)^2(r+1)=0;$$

საიდანაც

$$r_1=r_2=1, \quad r_3=-1.$$

(9) განტოლების კერძო ამონახსნებია

$$y_1=e^x, \quad y_2=xe^x, \quad y_3=e^{-x}.$$

ზოგადი ამონახსნი კი იქნება

$$y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{-x}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ამოვხსნათ განტოლება

$$y^{IV}+8y''+16y=0. \quad (10)$$

შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება:

$$r^4+8r^2+16=0.$$

ცხადია, ეს განტოლება მოგვცემს

$$(r^2+4)^2=0,$$

საიდანაც

$$r_{1,2}=2i, \quad r_{3,4}=-2i.$$

მახასიათებელი განტოლების ამონახსნები ორჯერადია, $\alpha=0$, $\beta=2$.

$$y_1=\cos 2x, \quad y_2^*=x \cos 2x, \quad y_3=\sin 2x, \quad y_4=x \sin 2x.$$

ამის გამო (10) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=C_1\cos 2x+C_2x \cos 2x+C_3\sin 2x+C_4x \sin 2x,$$

ანუ

$$y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 18.

1. ამოხსენით განტოლებანი:

- | | |
|---|---|
| 1) $y''-4y'=0$, | 2) $y''-5y'+6y=0$, |
| 3) $3y''+y'-2y=0$, | 4) $y''+6y'+13y=0$, |
| 5) $y''+y=0$, | 6) $y''-4y'+2y=0$, |
| 7) $3y''-y=0$, | 8) $4y''-8y'+5y=0$, |
| 9) $y^{IV}-13y''+36y=0$, | 10) $y''' + 9y' = 0$, |
| 11) $y^{IV}+2y''' + y'' = 0$, | 12) $y^{IV}-8y''-16y=0$, |
| 13) $y'''-4y''+4y'-y=0$, | 14) $y^{IV}+y=0$. |
| 15) $y^{IV}-4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$. | 16) $y^{IV}+2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$. |

2. ამოხსენით განტოლებანი სათანადო საწყისი პირობით:

- 1) $y''-4y'+3y=0$, $y|_{x=0}=6$, $y'|_{x=0}=10$;
- 2) $4y''+4y'+y=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=0$;
- 3) $y''' + y' = 0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=0$, $y''|_{x=0}=-1$;
- 4) $y^{IV}-16y=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=2$, $y''|_{x=0}=0$, $y'''|_{x=0}=-8$;

§ 4. მეორე რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

1. ზოგადი ამონახსნის შედგენა. განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$L(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + k_1(x) \frac{dy}{dx} + k_2(x)y = f(x), \quad (1)$$

სადაც $k_1(x)$, $k_2(x)$ და $f(x)$ ცნობილი ფუნქციებია.

თუ (1) განტოლებაში მარჯვენა ნაწილს შევცვლით 0-ით, მივიღებთ ერთგვაროვან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას,

$$L(y) = 0. \quad (2)$$

არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის აგებულების შესახებ დავამტკიცოთ

თეორემა. არაერთგვაროვანი (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ტოლია არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნის ჯამისა.

ვთქვათ, (1) განტოლების $]a, b[$ ინტერვალში რაიმე ამონახსნია Y და იმავე ინტერვალში (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნია z ,

$$z=C_1y_1+C_2y_2,$$

მაშინ

$$L(Y) = f(x), \quad L(z) = 0.$$

წრფივი $L(y)$ ოპერატორის თვისებით გვექნება

$$L(Y+z) = L(Y) + L(z),$$

საიდანაც

$$L(Y+z) = f(x).$$

ეს კი ნიშნავს, (1) განტოლების ამონახსნია

$$y = Y + z = Y + C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (3)$$

მიღებული ფორმულა იძლევა არაერთგვაროვანი (1) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

მართლაც, ვთქვათ გვინდა ვიპოვოთ (1) განტოლების კერძო ამონახსნ-ნი საწყისი პირობით

$$y \Big|_{x=0} = y_0, \quad y' \Big|_{x=0} = y'_0, \quad (4)$$

მაშინ (3) გამოსახულებაში C_1 და C_2 ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ

$$Y(x_0) + C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0,$$

$$Y'(x_0) + C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y'_0,$$

ანუ

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - Y(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y'_0 - Y'(x_0). \end{cases} \quad (5)$$

ამ სისტემას კი ნამდვილად აქვს ამონახსნი, რადგანაც სისტემის დეტერმინანტი ვრონსკის $W(y_1, y_2)$ დეტერმინანტია,

$$W(y_1, y_2) \neq 0, \quad x \in]a, b[,$$

რადგანაც y_1, y_2 წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია $]a, b[$ ინტერვალში.

(5) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით განვსაზღვრავთ $\overline{C}_1$ და $\overline{C}_2$ და მაშინ

$$y = Y + \overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2$$

ფუნქცია $L(y) = f(x)$ განტოლების ამონახსნი იქნება (4) საწყისი პირობით.

მაშასადამე, (3) გამოსახულება იძლევა არაერთგვაროვანი (1) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს.

2. კერძო ამონახსნის მოძებნა მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით. რომ შევადგინოთ არაერთგვაროვანი (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, უნდა ვიცოდეთ (1) განტოლების კერძო ამონახსნები.

(1) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებთ (2) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის სახით: $C_1 y_1 + C_2 y_2$, სადაც მუდმივებს

ვცვლით (ვარიაცია) ცვლადებით, ე. ი. ვივარაუდოთ $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$,

$$Y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \quad (6)$$

სადაც $y_1(x)$ და $y_2(x)$ (2) ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნებია.

შევარჩიოთ (6) გამოსახულება ისე, რომ იგი აკმაყოფილებდეს (1) განტოლებას.

(6) გამოსახულების გაწარმოებით მივიღებთ

$$Y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' + C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2. \quad (7)$$

ავარჩიოთ $C_1(x)$ და $C_2(x)$ ისე, რომ

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \quad (8)$$

მაშინ (7) მოგვცემს

$$Y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'. \quad (9)$$

ვიპოვოთ მეორე რიგის წარმოებული:

$$Y'' = C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2'' + C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2'. \quad (10)$$

(6), (9) და (10) მნიშვნელობანი შევიტანოთ (1) განტოლებაში, გვექნება

$$L(Y) \equiv C_1(x) L(y_1) + C_2(x) L(y_2) + C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x).$$

მაგრამ $L(y_1) = 0$, $L(y_2) = 0$, ამიტომ

$$C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \quad (11)$$

(8) და (11) განტოლებანი გვაძლევს სისტემას $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ -ის მიმართ:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases} \quad (12)$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი ვრონსკის დეტერმინანტია, $W(y_1, y_2)$, სადაც y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია, ამიტომ

$$W(y_1, y_2) \neq 0.$$

მაშასადამე, (12) განტოლებათა სისტემა ამოიხსნება $C_1'(x)$ და $C_2'(x)$ -ის მიმართ. მათი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int C_1'(x) dx + c_1, \\ C_2(x) &= \int C_2'(x) dx + c_2. \end{aligned} \quad (13)$$

c_1 და c_2 -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის (13) გამოსახულება აკმაყოფილებს (1) განტოლებას. ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ $c_1=0$, $c_2=0$.

ამრიგად, (1) განტოლების კერძო ამონახსნი იქნება

$$Y = y_1 \int C_1'(x) dx + y_2 \int C_2'(x) dx.$$

თუ ამ გამოსახულებას შევაჯამებთ (2) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნთან, მივიღებთ (1) არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს,

$$y = y_1 \int C_1'(x) dx + y_2 \int C_2'(x) dx + C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (14)$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$xy'' - y' = x^2. \quad (15)$$

საიდანაღო ერთგვაროვანი განტოლება იქნება

$$xy'' - y' = 0, \quad (16)$$

ანუ

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x},$$

საიდანაც

$$\ln y' = \ln x + \ln 2C_1,$$

ანუ

$$y' = 2C_1 x.$$

აქედან კი

$$y = C_1 x^2 + C_2.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (16) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = 1.$$

(16) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$Y = C_1(x) x^2 + C_2(x) \cdot 1 \quad (17)$$

აქედან

$$Y' = C_1(x) (x^2)' + C_2(x) \cdot 1' + C_1'(x) x^2 + C_2'(x) \cdot 1.$$

თუ

$$C_1'(x) x^2 + C_2'(x) \cdot 1 = 0,$$

მაშინ

$$Y' = 2x \cdot C_1(x), \quad (18)$$

ზოლო

$$Y'' = 2C_1(x) + 2x C_1'(x). \quad (19)$$

(17)–(19)-ს ჩასმა (15) განტოლებაში მოგვცემს

$$x(2C_1(x) + 2x C_1'(x)) - 2x C_1(x) = x^2,$$

ანუ

$$2x^2 C_1'(x) = x^2,$$

საიდანაც

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}.$$

ამგვარად, მივიღეთ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} x^2 C_1'(x) + C_2'(x) &= 0, \\ C_1'(x) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}, \quad C_2'(x) = -\frac{x^2}{2}.$$

აქედან კი

$$C_1(x) = \frac{x}{2} + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{6} + C_2.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი (17)-ში, მივიღებთ

$$Y = \frac{x}{2} \cdot x^2 - \frac{x^3}{6} + 1.$$

ზოლო ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 x^2 + C_2 = \frac{x^3}{3} + C_1 x^2 + C_2.$$

§ 5. მემორა რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებისა არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

ავიღოთ არაერთგვაროვანი წრფივი განტოლება

$$L(y) \equiv y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x), \quad (1)$$

სადაც k_1 , k_2 მუდმივებია.

26. გ. კომლაძე

C_1 და C_2 -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის (13) გამოსახულება აკმაყოფილებს (1) განტოლებას. ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ $C_1=0$, $C_2=0$.

ამრიგად, (1) განტოლების კერძო ამონახსნი იქნება

$$Y = y_1 \int C'_1(x) dx + y_2 \int C'_2(x) dx.$$

თუ ამ გამოსახულებას შევავსებთ (2) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნთან, მივიღებთ (1) არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს,

$$y = y_1 \int C'_1(x) dx + y_2 \int C'_2(x) dx + C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (14)$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$xy'' - y' = x^2. \quad (15)$$

საი ანადო ერთგვაროვანი განტოლება იქნება

$$xy'' - y' = 0, \quad (16)$$

ანუ

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x},$$

საიდანაც

$$\ln y' = \ln x + \ln 2C_1,$$

ანუ

$$y' = 2C_1 x.$$

აქედან კი

$$y = C_1 x^2 + C_2.$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ (16) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = 1.$$

(16) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$Y = C_1(x) x^2 + C_2(x) \cdot 1 \quad (17)$$

აქედან

$$Y' = C_1(x) (x^2)' + C_2(x) \cdot 1' + C'_1(x) x^2 + C'_2(x) \cdot 1.$$

თუ

$$C'_1(x) x^2 + C'_2(x) \cdot 1 = 0,$$

მაშინ

$$Y' = 2x \cdot C_1(x), \quad (18)$$

ზოლო

$$Y'' = 2C_1(x) + 2xC'_1(x). \quad (19)$$

(17)–(19)-ს ჩასმა (15) განტოლებაში მოგვცემს

$$x(2C_1(x) + 2xC'_1(x)) - 2xC_1(x) = x^2,$$

ანუ

$$2x^2 C'_1(x) = x^2,$$

საიდანაც

$$C'_1(x) = \frac{1}{2}.$$

ამგვარად, მივიღეთ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} x^2 C'_1(x) + C'_2(x) &= 0, \\ C'_1(x) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია

$$C'_1(x) = \frac{1}{2}, \quad C'_2(x) = -\frac{x^2}{2}.$$

აქედან კი

$$C_1(x) = \frac{x}{2} + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{6} + C_2.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი (17)-ში, მივიღებთ

$$Y = \frac{x}{2} \cdot x^2 - \frac{x^3}{6} \cdot 1.$$

ზოლო ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 x^2 + C_2 = \frac{x^3}{3} + C_1 x^2 + C_2.$$

§ 5. მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებისა და არამუდმივკოეფიციენტებისა მქონე დიფერენციალური განტოლება

ავიღოთ არაერთგვაროვანი წრფივი განტოლება

$$L(y) \equiv y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x), \quad (1)$$

სადაც k_1 , k_2 მუდმივებია.

26. გ. კომლაძე

401

რადგანაც $k_2=0$, Y ვეძებთ მესამე ხარისხის მრავალწევრით

$$Y = x (A_0 x^2 + A_1 x + A_2),$$

ანუ

$$Y = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x.$$

გამოვთვალოთ წარმოებულები:

$$Y' = 3 A_0 x^2 + 2 A_1 x + A_2,$$

$$Y'' = 6 A_0 x + 2 A_1.$$

Y , Y' , Y'' -ის მნიშვნელობანი შევიტანოთ (8) განტოლებაში. გვექნება:

$$6 A_0 x + 2 A_1 + 3 A_0 x^3 + 2 A_1 x + A_2 = x^2,$$

ანუ

$$3 A_0 x^2 + (6 A_0 x + 2 A_1) x + (2 A_1 + A_2) = x^2,$$

საიდანაც

$$3 A_0 = 1,$$

$$6 A_0 + 2 A_1 = 0,$$

$$2 A_1 + A_2 = 0.$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

$$A_0 = \frac{1}{3}, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = 2.$$

ამგვარად,

$$Y = \frac{1}{3} x^3 - x^2 + 2x.$$

ახლა ამოვხსნათ (9) ერთგვაროვანი განტოლება.

შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება.

$$r^2 + r = 0,$$

საიდანაც $r_1=0$, $r_2=1$.

(9) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$z = C_1 + C_2 e^x.$$

მაშასადამე, (8) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = \frac{1}{3} x^3 - x^2 + 2x + C_1 + C_2 e^x.$$

2)

$$f(x) = P_m(x) e^{ax}.$$

(1) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$Y = Q_m(x) e^{ax},$$

თუ a არ არის მახასიათებელი განტოლების ამონახსნი. თუ a არის მახასიათებელი განტოლების p ჯერადობის ამონახსნი, მაშინ Y ვეძებთ შემდეგი სახით

$$Y = x^p Q_m(x) e^{ax}.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' - 2y' = x e^{2x}. \quad (10)$$

ჯერ მოვნახოთ ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი:

$$y'' - 2y' = 0. \quad (11)$$

მახასიათებელი განტოლების

$$r^2 - 2r = 0$$

ამონახსნებია $r_1=0$, $r_2=2$.

(11) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$z = c_1 + c_2 e^{2x}.$$

(10) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით

$$Y = x (A_0 x + A_1) e^{2x} = (A_0 x^2 + A_1 x) e^{2x}.$$

გამოვთვალოთ წარმოებულები

$$Y' = (2A_0 x + A_1) e^{2x} + 2(A_0 x^2 + A_1 x) e^{2x},$$

$$Y'' = 2A_0 e^{2x} + 2(2A_0 x + A_1) 2 \cdot e^{2x} + (A_0 x^2 + A_1 x) \cdot 4e^{2x}.$$

შევიტანოთ Y , Y' და Y'' მნიშვნელობანი (10) განტოლებაში, გვექნება:

$$2A_0 e^{2x} + 4(2A_0 x + A_1) e^{2x} + 4(A_0 x^2 + A_1 x) e^{2x} - 2(2A_0 x + A_1) e^{2x} - 4(A_0 x^2 + A_1 x) e^{2x} = x e^{2x}.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$4A_0 x + 2(A_0 + A_1) = x,$$

საიდანაც

$$4A_0 = 1, \quad A_0 = \frac{1}{4};$$

$$A_0 + A_1 = 0, \quad A_1 = -A_0 = -\frac{1}{4}.$$

ამრიგად, (10) განტოლების კერძო ამონახსნია:

$$Y = \frac{1}{4} x(x-1)e^{2x},$$

ზოლო ზოგადი ამონახსნია:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x}{4} (x-1)e^{2x}.$$

3) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$. ამ შემთხვევაში, თუ $\alpha + \beta i$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ამონახსნი, (1) არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$y = e^{\alpha x} (Q_{1,m}(x) \cos \beta x + Q_{2,m}(x) \sin \beta x), \quad (12)$$

სადაც $Q_{1,m}(x)$ და $Q_{2,m}(x)$ -ის კოეფიციენტები უნდა განისაზღვროს (1) განტოლებიდან (12) გამოსახულების სათანადო ჩასმის შემდეგ.

აღვილი შესამჩნევია, რომ მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი მეორე რიგის არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნის მეთოდი უცვლელად გადაიტანება n -ური რიგის, $n \geq 2$, მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ განტოლებაზე. თუ $\alpha \pm \beta i$ არის სათანადო მახასიათებელი განტოლების p ჯერადობის ამონახსნი, მაშინ მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y = e^{\alpha x} x^p (Q_{1,m} \cos \beta x + Q_{2,m} \sin \beta x).$$

აეილოთ განტოლება უფრო ზოგადი სახით:

$$L(y) = P_{1,m}(x)e^{a_1 x} \cos \beta_1 x + P_{2,m}(x)e^{a_2 x} \cos \beta_2 x.$$

ამ განტოლების კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ ჯამით

$$y = y_1 + y_2,$$

სადაც y_1 არის

$$L(y_1) = P_{1,m}(x)e^{a_1 x} \cos \beta_1 x$$

განტოლების კერძო ამონახსნი, ზოლო y_2

$$L(y_2) = P_{2,m}(x)e^{a_2 x} \cos \beta_2 x$$

განტოლების კერძო ამონახსნი.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y'' + 9y = \cos 2x. \quad (13)$$

მახასიათებელი განტოლებაა:

$$r^2 + 9 = 0,$$

საიდანაც

$$r_{1,2} = \pm 3i.$$

ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია:

$$z = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

(13) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$Y = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

გამოვთვალოთ წარმოებულები:

$$Y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x,$$

$$Y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

შევიტანოთ (13) განტოლებაში, გვექნება:

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 9(A \cos 2x + B \sin 2x) = \cos 2x,$$

ანუ

$$5A \cos 2x + 5B \sin 2x = \cos 2x,$$

საიდანაც

$$5A = 1, \quad 5B = 0.$$

აქედან კი

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = 0.$$

ამრიგად,

$$Y = \frac{1}{5} \cos 2x.$$

(13) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = \frac{1}{5} \cos 2x + C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

§ 6. დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრირება მწკრივების საშუალებით

1. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება. განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება¹

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

¹ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, М.—Л. 1951, стр. 134.

ვიპოვოთ ამ განტოლების ამონახსნი, საწყისი პირობით

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0. \quad (2)$$

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს (x_0, y_0) წერტილის მიდამოში ტეილორის მწკრივად

$$f(x, y) = \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik} (x-x_0)^i (y-y_0)^k. \quad (3)$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვი, $f(x, y)$ ფუნქცია ანალიზური ფუნქციაა (x_0, y_0) წერტილში. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ანალიზურია (x_0, y_0) წერტილში, მაშინ არსებობს (1) დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც ანალიზური ფუნქციაა x_0 წერტილში და აკმაყოფილებს (2) საწყის პირობას. ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots \quad (4)$$

ამ მწკრივის პირველი წევრი $y(x_0)$ განისაზღვრება (2) საწყისი პირობით, $y \Big|_{x=x_0} = y_0$. მეორე წევრის კოეფიციენტი განისაზღვრება თვით $f(x, y)$ ფუნქციიდან,

$$y'(x_0) = f(x, y) \Big|_{x=x_0, y=y_0}$$

მესამე წევრის კოეფიციენტი განისაზღვრება (1) განტოლებიდან,

$$y''(x_0) = \frac{d}{dx} f(x, y) \Big|_{x=x_0, y=y_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right) \Big|_{x=x_0, y=y_0}$$

და ა. შ. ცხადია, ამრიგად შედგენილი (4) მწკრივის ჯამი $y(x)$ მწკრივის კრებადობის არეში $|x-x_0| < R$ დააკმაყოფილებს (1) დიფერენციალურ განტოლებას, ამასთან $y(x)$ ფუნქცია $x=x_0$ -სათვის მიიღებს y_0 მნიშვნელობას.

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია y -ის მიმართ წრფივი ფუნქციაა, მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ე. წ. განსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდი. საძიებელი $y(x)$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი მწკრივით

$$y(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \quad (5)$$

რომლის კოეფიციენტები სათანადოდ უნდა განისაზღვროს. ამისათვის ჩავსვათ y -ის მნიშვნელობა (5) ტოლობიდან (1) განტოლებაში და $(x-x_0)$ -ის ერთი და იგივე ხარისხის კოეფიციენტები ტოლობის ორივე მხარეში ერთმანეთს გავუტოლოთ. მივიღებთ განტოლებათა სისტემას $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ კოეფიციენტთა მიმართ. შემდეგ უნდა ვაჩვენოთ, რომ მიღებული მწკრივი კრებადია აბსოლუტურად x_0 -ის რაიმე მიდამოში, საიდანაც დავადგენთ კრებადობის რადიუსის სიდიდეს. კოეფიციენტთა განსაზღვრიდან აღვილი მისახვედრია, რომ მიღებული მწკრივის ჯამი აკმაყოფილებს (1) დიფერენციალურ განტოლებას და სათანადო საწყის პირობას. მეთოდის ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი.

ამოცხსნათ განტოლება

$$y' = 2xy + 1 \quad (6)$$

საწყისი პირობით: $y \Big|_{x=0} = 1$.

ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი მწკრივის ჯამით

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (7)$$

$y(x)$ -ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (6) განტოლებაში, მივიღებთ

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots = 1 + 2x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots)$$

x -ის ერთი და იმავე ხარისხების კოეფიციენტთა განტოლებით მივიღებთ:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & a_1 = 1, \\ x^1 & 2a_2 = 2a_0, \\ x^2 & 3a_3 = 2a_1, \\ x^3 & 4a_4 = 2a_2, \\ \dots & \dots \\ x^n & (n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1} \\ \dots & \dots \end{array}$$

ყოველი მომდევნო განტოლება მომდევნო ერთი უცნობი კოეფიციენტით მეტს შეიცავს. a_0 ნებისმიერია. იგი მივიღოთ $y \Big|_{x=0}$ -ის ტოლად. შემდეგი კოეფიციენტების გამოთვლა მოგვცემს:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \\
a_2 &= a_0 = y \Big|_{x=0} = 1, \\
a_3 &= \frac{2}{3} a_1 = \frac{2}{3}, \\
a_4 &= \frac{2}{4} a_2 = \frac{1}{2!}, \\
a_5 &= \frac{2}{5} a_3 = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5}, \\
a_6 &= \frac{2}{6} a_4 = \frac{1}{3!}, \\
&\dots \dots \dots \\
a_{2n} &= \frac{1}{n!}, \\
a_{2n+1} &= \frac{2^n}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.
\end{aligned}$$

კოეფიციენტთა მნიშვნელობების შეტანით (7) მწკრივი მოგვცემს

$$\begin{aligned}
y(x) &= 1 + x + \frac{1}{1!} x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2!} x^4 + \dots + \\
&+ \frac{1}{n!} x^{2n} + \frac{2^n}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)} x^{2n+1} + \dots
\end{aligned} \quad (8)$$

მიღებული მწკრივი კრებადია $-1 < x < 1$ -ში, მისი ჯამი აკმაყოფილებს (8) დიფერენციალურ განტოლებას და როცა $x=0$, მაშინ $y=1$.

2. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლება. განვიხილოთ ამოცანა: ვიპოვოთ

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (9)$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y' \Big|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)} \Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (10)$$

თუ $f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ ფუნქცია ანალიზური ფუნქციაა $(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ წერტილის რაიმე მიდამოში, მაშინ (9) განტოლების ამონახსნი შეიძლება გაიშალოს ტეილორის მწკრივად

$$\begin{aligned}
y(x) &= y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \\
&+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots
\end{aligned} \quad (11)$$

ამ მწკრივის კოეფიციენტებში $y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ მნიშვნელობანი განისაზღვრება (10) საწყისი პირობებით

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

ხოლო დანარჩენი სიდიდეები განისაზღვრება $f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ ფუნქციით და მისი წარმოებულებით:

$$y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}),$$

$$y^{(n)}(x_0) = \frac{d}{dx} f \Big|_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} \right) \Big|_{x=x_0}$$

და ა. შ. ამრიგად, შეგვიძლია ავაგოთ (11) მწკრივი, რომლის ჯამიც დააკმაყოფილებს (9) დიფერენციალურ განტოლებას და სათანადო საწყისი (10) პირობას.

ისევე, როგორც პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების დროს, აქაც შეგვიძლია ვისარგებლოთ განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით. (9) განტოლების ამონახსნი (10) საწყისი პირობით ვეძებოთ შემდეგი მწკრივის ჯამით

$$\begin{aligned}
y(x) &= y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots + \\
&+ \frac{y^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + a_n (x-x_0)^n + \dots,
\end{aligned} \quad (12)$$

რომლის კოეფიციენტები $a_n, a_{n+1}, \dots$ განისაზღვრება, თუ (12) მწკრივის ჯამს ჩავსვამთ (9) განტოლებაში. იგულისხმება $f(x, \dots, y^{(n-1)})$ ფუნქცია წრფივია $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ -ის მიმართ. გამოთვლების ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ

$$y'' = e^{x^2} + y + 2xy' \quad (13)$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს

$$y \Big|_{x=0} = 1, \quad y' \Big|_{x=0} = 0. \quad (14)$$

განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი მწკრივის ჯამით

$$y = 1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (15)$$

შევიტანოთ აღებული მნიშვნელობა (13) განტოლებაში. მივიღებთ

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + \dots = \left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots\right) + \\ + (1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots) + 2x(2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots).$$

x -ის ერთი და იმავე ხარისხის კოეფიციენტთა გატოლებით გვექნება:

x^0	$2 \cdot 1a_2 = 2,$	$a_2 = 1$
x^1	$3 \cdot 2a_3 = 0,$	$a_3 = 0$
x^2	$4 \cdot 3a_4 = \frac{1}{1!} + a_2 + 4a_2,$	$a_4 = \frac{1}{2!}$
x^3	$5 \cdot 4a_5 = a_3 + 2 \cdot 3a_3,$	$a_5 = 0$
x^4	$6 \cdot 5a_6 = \frac{1}{2!} + a_4 + 2 \cdot 4a_4,$	$a_6 = \frac{1}{3!}$
x^5	$7 \cdot 6a_7 = a_5 + 2 \cdot 5a_5,$	$a_7 = 0$
x^6	$8 \cdot 7a_8 = \frac{1}{3!} + a_6 + 2 \cdot 6a_6,$	$a_8 = \frac{1}{4!}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$

ამრიგად,

$$y = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots = e^{x^2}. \quad (16)$$

აღვილი წარმოსადგენია, რომ (16) მწკრივის ჯამი დააკმაყოფილებს (13) განტოლებას სათანადო (14) საწყისი პირობით.

შევნიშნოთ შემდეგი. როდესაც განტოლების ამონახსნს ვეძებთ (15) მწკრივით, ვგულისხმობთ მწკრივი კრებადია თანაბრად და მისი წევრობრივი გაწარმოება შეიძლება. რადგანაც (15) მწკრივი ხარისხოვანი მწკრივია, მისი წევრობრივი გაწარმოება შეიძლება მისი კრებადობის წრის შიგნით.

ასე რომ, საკმარისია, (15) მწკრივის აგების შემდეგ კრებადობის შემოწმება, რომლის საფუძველზედაც გამოვარკვევთ მწკრივის კრებადობის რადიუსის სიდიდეს.

8. წრფივი დიფერენციალური განტოლება. მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, საზოგადოდ, არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში. ამის გამო ხელსაყრელია საძიებელი ამონახსნის წარმოდგენა ხარისხოვან მწკრივად ან განზოგადებულ ხარისხოვან მწკრივად.

ამ ცნებას ქვემოთ გავცნობით. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (16)$$

მაგრამ განხილული ხერხი უცვლელად გამოიყენება მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად. ვთქვათ, $p(x)$ და $q(x)$ ანალიზური ფუნქციებია $x=0$ წერტილში:

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots$$

$$q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots$$

(16) განტოლების ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი მწკრივის ჯამით

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (17)$$

ჩავსვათ y -ის მნიშვნელობა (16) განტოლებაში,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

გადავამრავლოთ მწკრივები, შევკრიბოთ მსგავსი წევრები და x^n -ის, $n=0, 1, 2, \dots$, კოეფიციენტები გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ

x^0	$2 \cdot 1a_2 + p_0a_1 + q_0a_0 = 0,$	
x^1	$3 \cdot 2a_3 + 2p_0a_2 + p_1a_1 + q_0a_1 + q_1a_0 = 0,$	
x^2	$4 \cdot 3a_4 + 3p_0a_3 + 2p_1a_2 + p_2a_1 + q_0a_2 + q_1a_1 + q_2a_0 = 0,$	(18)
$\dots$	$\dots$	
x^n	$(n+2)(n+1)a_{n+2} + Q_n(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$	
$\dots$	$\dots$	

სადაც $Q_n(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})$ პირველი ხარისხის მრავალწევრია თავისი არგუმენტების მიმართ. (18) განტოლებათა სისტემის მეორე განტოლებიდან დაწყებული შეიცავს ერთით მეტ საძიებელ კოეფიციენტს, გიღრე წინა განტოლება. პირველი განტოლებიდან განისაზღვრება a_2 კოეფიციენტი, ხოლო a_0 და a_1 ნებისმიერია. მეორე განტოლებიდან განისაზღვრება a_3 და ა. შ. a_0 და a_1 -ის მნიშვნელობად მივიღოთ $a_0=1$ და $a_1=0$. ამით განისაზღვრება სათანადოდ $a_2, a_3, \dots$ კოეფიციენტები. კოეფიციენთა ეს მნიშვნელობანი შევიტანოთ (17) მწკრივში, მიღებული მწკრივის ჯამი აღვნიშნოთ y_1 -ით. ახლა ავიღოთ $a_0=0, a_1=1$. ამით მივიღებთ (18) განტოლებათა სისტემიდან კოეფიციენტთა სხვა მნიშვნელობებს, რის შედეგ-

გადაც (17) მწკრივი მოგვეცემს y -ის სხვა მნიშვნელობას. ეს მნიშვნელობა y_2 -ით აღვნიშნოთ. ადვილი შესამჩნევია, რომ y_1 და y_2 აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს

$$y_1 \Big|_{x=0} = 1, \quad y_1' \Big|_{x=0} = 0;$$

$$y_2 \Big|_{x=0} = 0, \quad y_2' \Big|_{x=0} = 1.$$

თუ (16) განტოლების ამონახსნისათვის გვექნება საწყისი პირობები

$$y \Big|_{x=0} = y_0, \quad y' \Big|_{x=0} = y'_0. \quad (19)$$

მაშინ, ცხადია, (16) განტოლების ამონახსნი იქნება

$$y = y_0 y_1 + y'_0 y_2,$$

რომელიც დააქმაყოფილებს (19) საწყის პირობებს.

ზემოთ განვიხილეთ ხარისხოვანი მწკრივები $x_0=0$ წერტილის მიდამოში. ცხადია, შეგვეძლო განგვეხილა ნებისმიერი $x_0 \neq 0$ წერტილის მიდამო და გვეჩვენებოდა $(x-x_0)$ -ის მიმართ ხარისხოვანი მწკრივები.

აგ. 12-ით არაერთგვაროვანი განტოლება

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (20)$$

სადაც $p(x)$, $q(x)$ და $f(x)$ ფუნქციები $x=0$ წერტილში ანალიზური ფუნქციებია, ამ განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებთ ისევ (17) მწკრივით. შეტყობნით y -ის მნიშვნელობა (17) გამოსახულებიდან (20) განტოლებაში, x -ის ერთდროივად ხარისხის კოეფიციენტები მიღებული განტოლების კარივე მხარეში გავუტოლოთ ერთმანეთს. გვექნება (18) განტოლება, სისტემის ანალოგიური განტოლებათა სისტემა, საიდანაც განისაზღვრება (17) მწკრივის კოეფიციენტები.

აქვე ხსნათ განტოლება:

$$(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0. \quad (21)$$

ვიზრეთ ამ განტოლების ამონახსნი (17) მწკრივით, სადაც მივიღოთ $a_0 = 1, a_1 = 0$. გვექნება

$$(1-x^2) \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

საიდანაც შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 1 \cdot 2 \cdot 1 a_2 + a^2 a_0 = 0, \\ x^1 & 3 \cdot 2 a_3 - 1 \cdot a_1 + a^2 a_1 = 0, \\ x^2 & 4 \cdot 3 a_4 - 2 \cdot 1 a_2 - 2 a_2 + a^2 a_2 = 0, \\ ... & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x^n & (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n + a^2 a_n = 0, \\ ... & . \end{array}$$

გამოთვლები მოგვცემს:

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -\frac{a^2}{2}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{(a^2 - 4)}{4 \cdot 3} a_2, a_5 = 0, \dots$$

საერთაშორისო

$$a_{n+2} = -\frac{(a^2 - n^2)a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 2, 4, \dots$$

მიღებულ კორექტივებთან (17) მწკრივში შეტანა მოგვცემს

$$y_1 = 1 - \frac{a^2}{2!} x^2 + \frac{a^2(a^2 - 2^2)}{4!} x^4 - \frac{a^2(a^2 - 2^2)(a^2 - 4^2)}{6!} x^6 + \dots \quad (22)$$

სრულიად ასევე, $a_0=0$, $a_1=1$ მოგვცემს

$$y_2 = x - \frac{a^2-1}{3!}x^3 + \frac{(a^2-1)(a^2-3^2)}{5!}x^5 - \frac{(a^2-1)(a^2-3^2)(a^2-5^2)}{7!}x^7 + \dots \quad (23)$$

გამოვთვალათ მიღებულ მწკრივთა კრებადობის რადიუსი. (22) მწკრივისათვის გვექნება

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{a^2(a^2-2^2)\dots[a^2-(2n)^2]}{(2n+2)!} : \frac{a^2(a^2-2^2)\dots[a^2-(2n-2)^2]}{(2n)^2} =$$

$$= \frac{a^2-(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)},$$

საიდრანოც)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^2 - (2n)^2}{(2n+1)(2n+2)} \right| = 1; \quad R = 1.$$

ასევე მივიღებთ (23) მწკრივისათვის, $R=1$.

ამრიგად, მიღებული მწკრივები კრებადია $|x| < 1$ -სათვის.

(21) განტოლებაში y'' -ის კოეფიციენტი $k_0(x) = 1 - x^2$. ამ ფუნქციის ნულებია 1, -1. მიღებული (22) და (23) მწკრივების კრებადობის რადიუსებია $R = 1$. ამრიგად, (22) და (23) მწკრივების კრებადობის რადიუსი დაემთხვა $k_0(x)$ ფუნქციის ნულების მოდულს. ეს შემთხვევითი არაა. მტკიცდება, რომ

$$k_0(x) y'' + k_1(x) y' + k_2(x) y = 0. \quad (24)$$

განტოლების ამონახსნთა მწკრივის კრებადობის რადიუსი ტოლია $R_0(x)$ ფუნქციის ნულთაგან მოდულით უმცირესი მნიშვნელობისა¹.

4. ამონახანის გაშლა განზოგადებულ ხარისხოვან მწკრივად. ახლა დავსვათ საკითხი: როგორ ამოვხსნათ განტოლება (24), თუ $k_0(x) = 0$ განტოლების ამონახანია $x = 0$. ამისათვის განვიხილოთ განტოლება

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \quad (25)$$

სადაც $p(x)$ და $q(x)$ ფუნქციები ანალიზური ფუნქციებია $x=0$ წერტილში. (25) განტოლება განსხვავდება (20) განტოლებისაგან. (20) განტოლებაში y'' -ის კოეფიციენტი 1-ის ტოლია. თუ (25) განტოლებას x^2 -ზე გავყოფთ, მაშინ y' -ის კოეფიციენტს მნიშვნელში x ექნება, ხოლო y -ის კოეფიციენტს x^2 . ამ შემთხვევაში ვიტყვი: y' -ის კოეფიციენტისათვის $x=0$ არის პირველი რიგის პოლუსი, ხოლო y -ის კოეფიციენტისათვის მეორე რიგის პოლუსი (რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი).

(25) განტოლების ამონახსნი ვეძებთ ანა უბრალოდ (17) მწკრივი, არამედ (17) მწკრივი გავამრავლოთ x^2 -ზე.

$$y = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (26)$$

სადაც უნდა განისაზღვროს. ასეთ მწკრივს ეწოდება განზოგადებული ხარისხოვანი მწკრივი. (26) მწკრივის პირველი კოეფიციენტი მიწოდებულია უნდა იყოს განსხვავებული, წინააღმდეგ შემთხვევაში ხარისხის მაჩვენებელი p განუსაზღვრელი იქნება. ჩავსვათ (26) გამოსახულება (25) განტოლებაში, გვექნება

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\rho + n)(\rho + n - 1) a_n x^{\rho + n + 2} + x \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (\rho + n) a_n x^{\rho + n + 1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\rho + n} = 0, \quad (27)$$

¹ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, М.-Л. 1951, стр. 347, (гл. V, теорема 1 и др.).

საბუნაოც მივლინებთ

[illegible]

აქ $Q_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ -ით აღნიშნულია თავისი არგუმენტების მიმართ ერთ-გვაროვანი მრავალწევრი. ვივსულისხმეთ, რომ $p(x)$ და $q(x)$ ფუნქციების ტელიორის მქცრეები თავისუფალ წევრებს შეიცავს, $p_0 \neq 0$, $q_0 \neq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში (25) განტოლება x -ზე შეიკვეცებოდა. აკოფიციენტი ნებისმიერია — ნებისმიერი მუღმივის რთოს ასრულებს. შეგვიძლია, მივიღოთ $a_0 = 1$.

(28) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ

$$F(\rho) \equiv \rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = 0, \quad (29)$$

სიადნაც განისაზღვრება ρ , ამ განტოლებას (25) განტოლების განმსაზღვრელი განტოლება ეწოდება. ეოქვათ, (29) განტოლების ამონახსნებია ρ_1 და ρ_2 , $\rho_1 \neq \rho_2$. დავაკვირდეთ (28) განტოლებათა სისტემას. a_n კოეფიციენტის მამრავლია $F(\rho + n)$,

$$F(p+n) \equiv (p+n)(p+n-1) + p_0(p+n) + q_0.$$

თუ $F(p+n) \neq 0$, მაშინ p_1 -სთვის პივილებით a_n^* -ს და p_2 -სთვის a_n'' კოეფიციენტთა მნიშვნელობებს. ამ კოეფიციენტებით შევადგენთ (25) განტოლების ამონახსნებს:

$$y_1 = x^{0_1} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n, \quad a'_0 \neq 0, \quad (30)$$

$$y_2 = x^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n'' x^n, \quad a_0'' \neq 0. \quad (31)$$

ამ ფორმულებში მოთავსებული მწკრივები კრებადი $x=0$ -ის შიდაშოში. კრებადობის რადიუსი განისაზღვრება $p(x)$ და $q(x)$ ფუნქციების ანალიზობის რადიუსით.

გამოვარკვევით, როგორი კოეფიციენტები უნდა ჰქონდეს დიფერენციალურ განტოლებაში,

$$y'' + k_1(x)y' + k_2(x)y = 0, \quad (32)$$

y' -სა და y -ს, რომ მისი ამონახსნები (30) და (31) ფორმულებით გამოისახოს.

ვთქვათ, y_1 და y_2 ანალიზური და წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია. ავავთ დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამონახსნებიც ეს ფუნქციებია. ამისათვის საკმარისია, რომ გვქონდეს იგივეობანი (იხ. § 2, n 4)

$$y_1'' + k_1(x)y_1' + k_2(x)y_1 = 0,$$

$$y_2'' + k_1(x)y_2' + k_2(x)y_2 = 0.$$

აქედან განვსაზღვროთ კოეფიციენტები

$$k_1(x) = -\frac{y_2''y_1 - y_1''y_2}{y_2'y_1 - y_1'y_2} = -\frac{(y_2'y_1 - y_1'y_2)'}{(y_2'y_1 - y_1'y_2)^2} = -\frac{W'(x)}{W(x)}, \quad (33)$$

$$k_2(x) = -\frac{y_1''}{y_1} - k_1(x)\frac{y_1'}{y_1}, \quad (34)$$

სადაც $W(x)$ ვრონსკის დეტერმინანტია,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

შემდეგში $P_k(x)$ -ით აღნიშნოთ იმ ტეილორის მწკრივის ჯამი, რომლის თავისუფალი წევრი ნულისაგან განსხვავებულია. ამ აღნიშვნით (30) და (31) ასე ჩაიწერება

$$y_1 = x^{\rho_1} P_1(x), \quad y_2 = x^{\rho_2} P_2(x).$$

ამის გამო გვექნება

$$\frac{y_2}{y_1} = x^{\rho_2 - \rho_1} P_2(x), \quad (35)$$

რადგანაც ორი მწკრივის შეფარდება, რომელთა თავისუფალი წევრები ნულისაგან განსხვავებულია, ისევე ისეთი მწკრივია, რომლის თავისუფალი წევრები ნულისაგან განსხვავებულია. შემდეგ:

$$W(x) = y_2'y_1 - y_1'y_2 = y_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = x^{2\rho_1} P_4(x) [x^{\rho_2 - \rho_1} P_2(x)]' = \\ = x^{2\rho_1} P_4(x) [(\rho_2 - \rho_1) x^{\rho_2 + \rho_1 - 1} P_2(x) + x^{\rho_2 - \rho_1} P_2'(x)] = x^{\rho_1 + \rho_2 - 1} P_5(x). \quad (36)$$

ამ გამოსახულების გაწარმოებით მივიღებთ

$$W'(x) = (\rho_1 + \rho_2 - 1) x^{\rho_1 + \rho_2 - 2} P_5(x) + x^{\rho_1 + \rho_2 - 1} P_5'(x). \quad (37)$$

შევიტანოთ (36), (37) მნიშვნელობანი (33) გამოსახულებაში, გვექნება:

$$k_1(x) = -\frac{W'(x)}{W} = \frac{1 - \rho_1 - \rho_2}{x} + \frac{P_5'(x)}{P_5(x)} = \frac{p(x)}{x}. \quad (38)$$

ამრიგად, $k_1(x)$ რაციონალური ფუნქციაა, რომელიც მნიშვნელში შეიცავს x -ს პირველ ხარისხში ($x=0$ პირველი რიგის პოლუსია).

დავაკვირდეთ y_1 -ის გამოსახულებას, $y_1 = x^{\rho_1} P_1(x)$. მისი გაწარმოებით მივიღებთ

$$y_1' = \rho_1(\rho_1 - 1)x^{\rho_1 - 2} + 2\rho_1 x^{\rho_1 - 1} p_1'(x) + x^{\rho_1} P_1'(x) = x^{\rho_1 - 2} P_3(x).$$

შეფარდება $\frac{y_1'}{y_1}$ მოგვცემს რაციონალურ ფუნქციას, რომელიც მნიშვნელში შეიცავს x^2 -ს ($x=0$ მეორე რიგის პოლუსია). ამის გამო (34) ფორმულიდან დავასკვნით

$$k_2(x) = \frac{p_1(x)}{x^2} \equiv \frac{q(x)}{x^2}.$$

საბოლოოდ მივიღეთ, რომ ისეთ მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ამონახსნებია (30) და (31) ფუნქციები, აქვს სახე

$$y'' + \frac{p(x)}{x} y' + \frac{q(x)}{x^2} y = 0, \quad (39)$$

სადაც $p(x)$ და $q(x)$ ანალიზური ფუნქციებია $x=0$ -ის მიდამოში, $p(0) \neq 0$, $q(0) \neq 0$.

ვიტყვი, რომ (32) განტოლების კოეფიციენტთა რეგულარულ განსაკუთრებულ წერტილს ეწოდება განტოლების რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი, თუ ამ განტოლების ამონახსნები წარმოადგენს (30) და (31) ფორმულებით. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის საფუძველზე ადვილი მისახვედრია, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

თეორემა. იმისათვის, რომ $x=0$ წერტილი იყოს

$$y'' + k_1(x)y' + k_2(x)y = 0$$

განტოლების რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი, აუცილებელია და საკმარისი $x=0$ იყოს

$k_1(x)$ კოეფიციენტისათვის არა უმეტეს პირველი რიგის პოლუსი, ხოლო $k_2(x)$ კოეფიციენტისათვის არა უმეტეს მეორე რიგის პოლუსი, ე. ი. განტოლებას უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე

$$y'' + \frac{p(x)}{x} y' + \frac{q(x)}{x^2} y = 0,$$

სადაც $p(x)$ და $q(x)$ ანალიზური ფუნქციებია $x=0$ წერტილში და $p(0) \neq 0$, $q(0) \neq 0$.

დაეუბრუნდეთ (28) განტოლებათა სისტემას. პირველი განტოლებიდან მივიღეთ

$$F(\rho) \equiv \rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = 0, \quad p_0 \neq 0, \quad q_0 \neq 0.$$

ამ განტოლების ამონახსნებია ρ_1 და ρ_2 . ვთქვათ, $\rho_1 = \rho_2$ და $F(\rho_1 + n) \neq 0$, მაშინ

$$a_n F(\rho_1 + n) + a_{n-1} F(\rho_1 + n-1) + \dots + a_0 F(\rho_1) = 0$$

განტოლებიდან განისაზღვრება a_n და შეგვიძლია ავაგოთ ერთი ამონახსნი y_1 . ახლა ვთქვათ, $F(\rho) = 0$ განტოლების ამონახსნებს შორის ასეთი კავშირია: $\rho_1 = \rho_2 + m$, სადაც m რომელიმე მთელი დადებითი რიცხვია. მაშინ $F(\rho_2 + m) = F(\rho_1) = 0$ და a_m -ს ვერ განვსაზღვრავთ. ასე რომ, თუ $F(\rho) = 0$ განტოლების ამონახსნთა შორის სხვაობა ნულია ან მთელი დადებითი რიცხვი, (25) განტოლების მხოლოდ ერთი ამონახსნის განსაზღვრა შეგვიძლია (28) განტოლებათა სისტემის საშუალებით. რაც შეეხება მეორე ამონახსნს, იგი განვსაზღვროთ ოსტროგრადსკის ფორმულის საფუძველზე (იხ. § 2, n 4, (15)),

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y^2} e^{-\int k_1(x) dx} dx. \quad (40)$$

(38) ფორმულიდან

$$k_1(x) = \frac{1}{x} p(x) = \frac{1}{x} (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots) = \frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \dots,$$

საიდანაც

$$\int k_1(x) dx = \ln x^{p_0} + C_1 + p_1 x + \frac{p_2 x^2}{2} + \dots,$$

რაც მოგვცემს

$$\frac{1}{e^{-\int k_1(x) dx}} = x^{-p_0} P_B(x).$$

რადგანაც $y_1 = x^{\rho_1} P_2(x)$, გვექნება

$$y_1^2 = x^{2\rho_1} P_2(x).$$

ასე რომ, (40) ინტეგრალის ქვეშ მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\frac{1}{y_1^2} e^{-\int k_1(x) dx} = x^{-p_0-2\rho_1} P_{10}(x).$$

მაგრამ ρ_1 და ρ_2 ამონახსნებია $F(\rho) = 0$ განტოლებისა, ამიტომ $\rho_1 + \rho_2 \equiv 1 - p_0$. რადგანაც $\rho_1 = \rho_2 + m$, გვექნება

$$\begin{aligned} -p_0 - 2\rho_1 &= -p_0 - \rho_1 - \rho_1 = -p_0 - \rho_1 - (\rho_2 + m) = \\ &= -p_0 - (\rho_1 + \rho_2) - m = -(1 + m). \end{aligned}$$

ამრიგად, (40) გამოსახულების ინტეგრალის ქვეშ გვექნება

$$x^{-(1+m)} P_{10}(x).$$

გამოვიყენოთ რაციონალური ფუნქციის ელემენტარული წილადების ჯამად წარმოდგენა (იხ. ნაწ. I, თავი V, § 4, n 2), გვექნება

$$\begin{aligned} x^{-(1+m)} P_{10}(x) &= \frac{\gamma_{-(m+1)}}{x^{m+1}} + \dots + \frac{\gamma_{-1}}{x} + \\ &+ \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_m x^m + \dots, \quad \gamma_{-(m+1)} \neq 0. \end{aligned}$$

ამ გამოსახულების ინტეგრირებით, სათანადო გაერთმნიშვნელობებით და $y_1 = x^{\rho_1} P_1(x)$ მნიშვნელობაზე გამრავლებით, მივიღებთ (40) ინტეგრალის მნიშვნელობას

$$y_2 = x^{-m} P_{11}(x) \cdot x^{\rho_1} P_1(x) + \gamma_{-1} y_1 \ln x.$$

მაგრამ $\rho_2 + m = \rho_1$, გვექნება

$$y_2 = x^{\rho_2} P_{12}(x) + \gamma_{-1} y_1 \ln x, \quad (41)$$

სადაც $P_{12}(x)$ ტეილორის მწკრივია, რომლის თავისუფალი წევრი ნული-საგან განსხვავდება, $P_{12}(0) \neq 0$.

ამრიგად, თუ $\rho_2 + m = \rho_1$, სადაც m მთელი არაუარყოფითი რიცხვია, ავაგეთ ამონახსნები (30) და (41), რომლებიც ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$y_2 = b y_1 \ln x + x^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

ამ ფორმულებით, ცხადია, ნათელი გახდა იმ საკმარისი პირობის ჭეშმარიტება, რომელიც ჩამოყალიბებულია ზემოთ მოტანილ თეორემაში.

შევიწინოთ, რომ $\gamma=1$, საზოგადოდ, განსხვავებულია ნულისაგან, მაგრამ შეიძლება ნულის ტოლი გახდეს. ამ შემთხვევაშიც მიიღება მეორე ამონახსნი, რომელიც დამახასიათებელია რეგულარული განსაკუთრებული წერტილისათვის. თუ p_1 და p_2 მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია და ამასთან მეორე ამონახსნი არ შეიცავს ლოგარიტმს, $\gamma=1$, მაშინ ამონახსნებს რეგულარულ განსაკუთრებულ წერტილში არავითარი განსაკუთრებულება არ აქვთ. მაგალითად, განტოლების

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$$

սմոնանքնց՝ $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

ისიც შეგნიშნოთ, რომ თუ $\rho_1 = \rho_2$, მაშინ $\gamma_{-1} \neq 0$.

ნ. ზესელიძის განტოლება. ბესელის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - s^2) y = 0. \quad (42)$$

ასეთი განტოლება გვხვდება ბევრი ტექნიკური საკითხების გადაწყვეტის დროს. განმსაზღვრელი განტოლებებია

$$\rho(\rho-1) + \rho - s^2 = 0, \quad \text{и} \quad \rho^2 - s^2 = 0.$$

ამ განტოლების ამონახსნებია $\rho_1 = s$, $\rho_2 = -s$.

ბესელის განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ განზოგადებული ხარის-
ხოვანი მწკრივით

$$y = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (43)$$

შევიტანოთ (43) მნიშვნელობა (42) განტოლებაში, გვექნება

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} - s^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0.$$

x -ის სხვადასხვა ხარისხის კოეფიციენტის ნულოვან გატოლება მოგვცემს:

$$\begin{array}{l|l}
 n=0, x^s & s(s-1)a_0 + sa_0 - s^2a_0 = 0, \quad \text{объ } (s^2 - s^2)a_0 = 0, \\
 n=1, x^{s+1} & (s+1)sa_1 + (s+1)a_1 - s^2a_1 = 0, \quad \text{объ } [(s+1)^2 - s^2]a_1 = 0, \\
 n=2, x^{s+2} & (s+2)(s+1)a_2 + (s+2)a_2 - s^2a_2 + a_0 = 0, \quad \text{объ } \\
 & [(s+2)^2 - s^2]a_2 + a_0 = 0, \\
 n=3, x^{s+3} & (s+3)(s+2)a_3 + (s+3)a_3 - s^2a_3 + a_1 = 0, \quad \text{объ } \\
 & [(s+3)^2 - s^2]a_3 + a_1 = 0, \\
 n=4, x^{s+4} & (s+4)^2a_4 - s^2a_4 + a_2 = 0, \quad \text{объ } 4(2s+4)a_4 + a_2 = 0, \\
 \cdot & \cdot \\
 x^{s+n} & n(2s+n)a_n + a_{n-2} = 0 \\
 \cdot & \cdot
 \end{array} \tag{44}$$

ავიღოთ $a_0 = 1$ და გამოვთვალოთ კოეფიციენტები. მივიღებთ

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \dots$$

$$a_2 = -\frac{1}{2(2s+2)}, \quad a_4 = \frac{1}{2(2s+2) \cdot 4(2s+4)}, \quad (45)$$

$$a_6 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2s+2)(2s+4)(2s+6)}, \dots$$

ჩავსვით კოეფიციენტთა (45) მნიშვნელობანი (43) გამოსახულებაში.

$$y_1 = x^s \left[1 - \frac{x^2}{2(2s+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2s+2)(2s+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2s+2)(2s+4)(2s+6)} + \dots \right] \quad (46)$$

ანალოგიურად წინა შემთხვევისა $\rho = -s$ -თვის მივიღებთ

$$y_2 = x^{-s} \left[1 - \frac{x^2}{2(-2s+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2s+2)(-2s+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(-2s+2)(-2s+4)(-2s+6)} + \dots \right] \quad (47)$$

განმსაზღვრელი განტოლების ამონახსნთა სხვაობაა $2s$ და, მაშასადამე, მიღებული y_1 და y_2 ბესელის განტოლების ამონახსნები იქნება, თუ s არაა მთელი რიცხვი ან კენტი რიცხვის ნახევარი. ხარისხოვანი მწკრი-

ვები, რომლებიც (47) და (46) გამოსახულებებშია, კრებადია x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, რისთვისაც საკმარისია გამოვიყენოთ ურებადობის დალამბერის პირობა. (46) ფუნქცია რომელიმე ნებისმიერ მუდმივადე მამრავლის სიზუსტით იძლევა ე. წ. s — რიგის ბესელის ფუნქციას, რომელსაც ჩვეულებრივად J_s -ით აღნიშნავენ. ამრიგად, თუ s არაა მთელი რიცხვი ან კენტი რიცხვის ნახევარი, მაშინ ბესელის განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 I_s(x) + C_2 J_{-s}(x).$$

დაეუშვათ $s = m$ მთელი რიცხვია, მაშინ (46) ფუნქცია ამონახსნად რჩება, ხოლო (47) აზრს კარგავს, რადგანაც $s = m$ -ის მნიშვნელობისათვის მნიშვნელში ნულს მივიღებთ.

მთელი დადებითი $s = m$ მნიშვნელობისათვის ბესელის ფუნქცია განისაზღვრება (46) ფუნქციით, რომელიც გავამრავლოთ $\frac{1}{2^m m!}$ -ზე,

$$J_m = \frac{x^m}{2^m m!} \left[1 - \frac{x^2}{2(2m+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2m+2)(2m+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2m+2)(2m+4)(2m+6)} + \dots \right]. \quad (48)$$

ამ გაშლის ზოგადი წევრია

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{x^{m+2n}}{2^m m! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2n(2m+2)(2m+n) \dots (2m+2n)} = \\ = (-1)^n \frac{x^{m+2n}}{2^m m! 2^n n! 2^n (m+1) \dots (m+n)} = \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{m+2n} \end{aligned}$$

ამის გამო (48) ფუნქცია ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$J_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{m+2n}. \quad (49)$$

ბესელის განტოლების (48) ამონახსნთან ერთად მეორე ამონახსნი (41) ფორმულის საფუძველზე იქნება

$$K_m = b J_m \ln x + x^{m/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \quad (50)$$

ეს ამონახსნი უსასრულობაა $x=0$ წერტილში. $s=m$ -თვის ბესელის განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 J_m(x) + C_2 K_m(x). \quad (51)$$

ვთქვათ, s არის კენტი რიცხვის ნახევარი, $s = \frac{2m+1}{2}$. ამ შემთხვევაში ორივე (46) და (47) ამონახსნი ძალაშია. ეს ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც მწკრივებს წინ აქვთ მამრავლები $x^{\frac{2m+1}{2}}$, $x^{-\frac{2m+1}{2}}$,

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{\frac{2m+1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y_2 &= x^{-\frac{2m+1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \end{aligned} \quad (52)$$

და მათი შეფარდება მუდმივი არაა.

ცალკე განვიხილოთ განტოლება

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0. \quad (53)$$

რადგანაც ამ განტოლებაში $s=0$, პირველი ამონახსნი იქნება J_0 ,

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^6 + \dots \end{aligned}$$

მეორე ამონახსნი ვეძებთ მწკრივით

$$y_2' = b J_0 \ln x + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \quad (54)$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (53) განტოლებაში. მიღებული განტოლებათა სისტემიდან კოეფიციენტთა მიმართ განისაზღვრება კოეფიციენტები. b კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავდება, რომელიც მივიღოთ 1-ის ტოლად. ამონახსნი იქნება შემდეგი სახის:

$$K_0(x) = J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots$$

ამ ფუნქციას ეწოდება ბესელის მეორე გვარის ნულოვანი რიგის ფუნქცია.

სავარჯიშო 19.

1. ამოხსენით განტოლებანი:

- 1) $y'' - 3y' + 2y = 2x$, 2) $y''' + y = x + 1$,
- 3) $y''' - y = x^2$, 4) $y'' + y' - 6y = (4x - 1)e^x$,
- 5) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, 6) $y'' - 6y' + 9y = (1 - x)e^{3x}$,
- 7) $y'' + y = \sin x$; 8) $y'' + 4y = \sin 2x$;
- 9) $y'' + 6y' + 9y = x \sin 3x$; 10) $y'' - 4y = e^{2x}$;
- 11) $y'' + y = 2x \cos x$; 12) $y'' + y = 2x \sin x$.
- 13) $y''' + y = y - 2yx^2 = 8$; 14) $y''' + y = 2xe^x(12 + 18x + 6x^2 + x^3)$

2. ამოხსენით განტოლებანი სათანადო საწყისი პირობებით:

- 1) $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.
- 2) $y'' + 4y = x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
- 3) $y^{(4)} - 6y = xe^{2x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$,
- 4) $y'' - 2y' + y = e^x \cos$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

3. მწკრივების საშუალებით ამოხსენით შემდეგი განტოლებანი (დაწერეთ მწკრივის რამდენიმე წევრი):

- 1) $y'' + xy = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$;
- 2) $y' + y^2 - x^2 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$;
- 3) $y' - y^2 + x = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$;
- 4) $y' - y^3 + x = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$;
- 5) $y'' - yy' + x^2 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$;
- 6) $y'' - x^2y = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$.

განყოფილება VI

გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდები

თავი IX

გამოთვლების საშუალებანი და ხერხები

§ 1. გამოთვლითი მათემატიკის საბანი

როგორც ცნობილია, მეცნიერების სხვადასხვა დარგში და ტექნიკაში გვხვდება ისეთი მათემატიკური ამოცანები, რომელთა ზუსტი ამონახსნის მიღება კლასიკური მეთოდებით შეუძლებელია, ან ამონახსნი მიიღება ისეთი რთული სახით, რომ მისი გამოყენება პრაქტიკულად შეუძლებელია. მაგალითად, ხშირად გვხვდება ასეულუცნობიანი წრფივი ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ან მაღალი ხარისხის ალგებრული განტოლების ამოხსნა, ან ისეთი დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნა, რომელთა ამონახსნი ელემენტარულ ფუნქციებში არ გამოისახება და სხვ. ამ შემთხვევაში მივმართავთ მიახლოებითი გამოთვლების მეთოდებს. მიახლოებითი გამოთვლების მეთოდები განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია იმის გამოც, რომ საწყისი მნიშვნელობანი, როგორც წესი, არაა ზუსტი, ან არაა ზუსტი თანადობა მათემატიკურ კანონსა და ფიზიკურ მოვლენას შორის. ამიტომ, ცხადია, სათანადო ამოცანის ამონახსნი ზუსტი არ იქნება.

მიახლოებითი მეთოდებით ამოცანის ამონახსნი მიახლოებით მიიღება, მაგრამ საკმარისად ზუსტია. რიცხვით ან გრაფიკულად ამონახსნის მიღება შრომატევადია და შრომის შესამსუბუქებლად იყენებენ მათემატიკურ მანქანებს.

ჩამოთვლილი მიზეზების გამო უკანასკნელ დროს ჩამოყალიბდა მათემატიკის დარგი, რომელიც შეისწავლის სხვადასხვა მათემატიკური ამოცანების რიცხვითი ამონახსნების მიღების მეთოდებს და გამოთვლების სხვადასხვა საშუალებებს. მათემატიკური მეცნიერების ამ ნაწილმა მიიღო გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდების (რიცხვითი მეთოდების) სახელწოდება.

მიახლოებითი მეთოდები მათემატიკაში ყურადღებას იქცევდნენ მათემატიკის ისტორიის დასაწყისიდან. მის შექმნაში და დამუშავებაში მო-

ნაწილებდნენ გამოჩენილი მათემატიკოსები: ისააკ ნიუტონი (1642—1727), ლეონარდ ეილერი (1707—1783), ნიკოლოზ ლობაჩევსკი (1793—1856), კარლ ფრიდრიხ გაუსი (1777—1855) და სხვ.

მიახლოებითი გამოთვლების მეთოდებს დიდი ადგილი უჭირავს პ. ლ. ჩემიშევის (1821—1894) შრომებში. განსაკუთრებით აღსანიშნავია მისი შედეგები ფუნქციის ინტერპოლაციის, რიცხვითი ინტეგრებისა და საუკეთესო მიახლოების თეორიებში. შემდეგში საუკეთესო მიახლოების თეორია განავითარა ს. ნ. ბერნშტეინმა (1880—1968). მიახლოებით მეთოდებში კრებადობისა და სიზუსტის საკითხებზე ყურადღებას იპყრობს ა. ა. მარკოვის (1856—1922), ვ. ა. სტეკლოვის (1863—1926), ა. ნ. კრილოვის (1863—1945) შრომები.

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ა. ნ. კრილოვის დამსახურება ისეთი მიახლოებითი მეთოდების შექმნასა და დაზუსტებაში, როგორიცაა ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა კრებადობის გაუმჯობესება, დიფერენციალურ განტოლებათა რიცხვითი და მექანიკური ინტეგრება და სხვა. აგრეთვე მათემატიკაში მიახლოებითი მეთოდების მნიშვნელობის ამაღლებასა და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში მიახლოებითი მეთოდების ფართო გამოყენებაში.

დიდად მნიშვნელოვანია გამოჩენილი მექანიკოსების ს. ა. ჩაპლიგინისა (1869—1942) და მ. გ. გალიორკინის (1871—1945) შრომები მიახლოებით გამოთვლებში. მათ საბელთანაა დაკავშირებული დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის მეთად გავრცელებული მიახლოებითი მეთოდები.

ქართველი მათემატიკოსებიდან მიახლოებითი გამოთვლების თეორიაში დიდი დამსახურება აქვს შ. ე. მიქელაძეს (1895—1976). მის მრავალრიცხოვან შრომებში მოცემულია: კერძო წარმოებულნიან განტოლებათა სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის მეთოდები, რიცხვითი ანალიზის მეთოდები, დიფერენციალურ და ინტეგრალურ განტოლებათა მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდები, რიცხვითი განტოლებების ამოხსნები და სხვ.

§ 2. გამოთვლითი მანქანების განვითარების ისტორიული მიმოხილვა

ცნობილია, რომ ძველი დროიდან ვსწრაფოდნენ გამოთვლების მექანიკურად შესრულებას. ისტორიამ შემოგვინახა ძეგლები, რომლებიც ამოწმებენ, რომ ბერძნები და რომაელები ძველ დროში არითმეტიკულ გამოთვლებს აწარმოებდნენ სპეციალური სათვლელი დაფების საშუალებით, რომლებსაც აბაკს ეძახდნენ. შემდეგში ეს დაფები გავრცელდა დასავლეთ ევროპაში, სადაც იყენებდნენ მე-18 საუკუნემდე.

1617 წელს, თავისი სიცოცხლის უკანასკნელ წელს, შოტლანდიელმა

მათემატიკოსმა დ. ნეპერმა (1550—1617) შეადგინა ლოგარიტმების ცხრილი და გამოიგონა სპეციალური ხელსაწყო ე. წ. „ნეპერის ჩხირები“, რომელიც დიდხანს იხმარებოდა მრავალნიშნა რიცხვების გამრავლებისათვის.

მე-16 საუკუნეში რუსეთში არსებობდა ახლანდელი „რუსული საანგარიშის“ მაგვარი ხელსაწყო, რომელსაც მე-18 საუკუნეში გარკვეული სრულყოფის შემდეგ ეწოდა საგარიშო. იგი წარმოადგენდა გამოთვლების მექანიზაციის ერთადერთ საშუალებას რუსეთში ვაჭრებისა და მოხელეებისათვის. ეს ხელსაწყო დღესაც წარმატებით გამოიყენება თავისი სიმარტივის გამო.

1641 წელს, ფრანგმა მათემატიკოსმა, ფიზიკოსმა და ფილოსოფოსმა პ. პასკალმა (1623—1662) 18 წლის ასაკში მოაწყო პირველი სათვლელი მანქანა: მრავალნიშნა რიცხვების შეჯამებისათვის.

1664 წელს, გერმანელმა მათემატიკოსმა, ფილოსოფოსმა გ. ვ. ლეიბნიცმა (1646—1716) ააგო სათვლელი მანქანა არითმომეტრი, რომელიც ყველა არითმეტიკულ მოქმედებას ასრულებდა.

პირველი არითმომეტრი, რომელიც ყველა ქვეყანაში სწრაფად გავრცელდა, და რომელიც ახლაც წარმატებით გამოიყენება, ესაა არითმომეტრი, რომელიც გამოგონებულ იქნა 1874 წელს პეტერბურგელი ინჟინრის ვ. ტ. ოდნევის მიერ. ოდნევის არითმომეტრის გამოშვება დაიწყო 1891 წ. ქ. პეტერბურგში.

1878 წელს, ცნობილმა მათემატიკოსმა პ. ლ. ჩემიშევიმ შექმნა შემაჯამებელი მანქანა, რომელსაც ოთხი წლის შემდეგ ვაფუთა სპეციალური ხელსაწყო, რომლითაც ავტომატურად სრულდებოდა გამრავლება და გაყოფა. ამ ხელსაწყოს პრინციპი უმეტესად გამოყენებულია თანამედროვე ავტომატურ კლავიშიან მანქანებში.

ცნობილმა რუსმა მათემატიკოსმა ვ. ი. ბუნიაკოვსკიმ (1804—1889) ააგო შეკრებისა და გამოკლებისათვის ხელსაწყო, რომელიც კარგად გამოიყენებოდა წლიური და თვიური საშუალო ტემპერატურისა და პაერის წნევის გამოსაანგარიშებლად.

მათემატიკური მანქანების თეორიაში დიდი დამსახურება მიუძღვის ა. ნ. კრილოვს. მსოფლიოში პირველად კრილოვმა შექმნა სპეციალური მანქანა ზოგიერთი რთული მათემატიკური ამოცანის ამოხსნისათვის.

დამსახურებით 100 წლის წინათ, ინგლისელმა მათემატიკოსმა ჩარლზ ბებიჯმა წამოაყენა აზრი „ანალიზური მანქანის“ შესახებ. ბებიჯის აზრით მანქანას უნდა შეეძლოს: შეასრულოს არითმეტიკული მოქმედებანი; დაიმასსოვროს საწყისი პირობები, შუალედური მნიშვნელობანი და გამოთვლის შედეგები; მიმდევრობით შეასრულოს გამოთვლის პროგრამის ბრძანებები და მოგვეცეს გამოთვლის შედეგები. მანქანას უნდა ჰქონდეს უნარი შეწყვიტოს მუშაობა გარკვეული პირობის შესრულების შემდეგ. ბებიჯის მანქანა შეიკადა პროგრამირების ელემენტებს.

1937 წლამდე გამოთვლითი ტექნიკა უმთავრესად სრულყოფდა მაგი-
დის მექანიკურ და ელექტრომექანიკურ მანქანებს და აღაროვებდა ე. წ.
სათვლელ ანალიზური მანქანების შესაძლებლობას. სათვლელი — ანა-
ლიზური მანქანების თავისებურება ისაა, რომ მოცემული რიცხვები სა-
თანადო მნიშვნელობით იწერება ქაღალდის სქელ ფურცელზე — პერ-
ფორაციულ ბარათზე (პერფორაბარათზე) ჩაჩხვლეტილ პერფორაბარათი მოძ-
რაობს ლითონის ჯაგრისსა და ელექტროსაკონტაქტო ღერძს შორის.
როცა ჯაგრისი მოხვდება პერფორაბარათის ხვრელში, შეიკვრება ელექტ-
რული წრელი, წინააღმდეგ შემთხვევაში არ მოხდება ღერძის გაღება, წრე-
ლის შეკვრით მოხდება პერფორაბარათის „წაქითხვა“ და, მაშასადამე, სათა-
ნადო მოქმედების შესრულება.

სათვლელ-ანალიზურ მანქანებში მთლიანად არ ხერხდება გამოთვ-
ლითი პროცესის ავტომატიზაცია, ხელით მუშაობისათვისაც საკმარისად
დიდი ნაწილი რჩება შესასრულებელი.

მათემატიკური მანქანების ისტორიაში მოხდა გამოგონების გამეო-
რება 1937 წელს. ჰოვარდ აიკენმა კვლავ „აბმოაჩინა“ ბეზიჯის
იდეა, ხოლო 1938 წელს, ინგლისელმა მათემატიკოსმა ტიუჩინგმა
წამოაყენა აზრი უნივერსალური მანქანის შექმნის შესახებ. აიკენის ხელ-
მძღვანელობით 1944 წელს პირველად აიგო რელეურ-ციფრული გამოთ-
ვლითი მანქანა. ამ მანქანის პროგრამა იწერებოდა პერფორაბარათზე. მან-
ქანას შეეძლო შეესრულებინა აირითმეტიკული და სხვა მოქმედებანი იმ
დროისათვის საკმარისად მაღალი სიჩქარით, მაგალითად, 23 თანრიგის
ორი რიცხვის შეკრებას აწარმოებდა 0,3 წამში, გამრავლებას — 6 წამში,
გაყოფას — 11,4 წამში.

აიკენის მანქანის მართვისა და ექსპლოატაციის დროს გამოიყენებოდა
ელექტრომექანიკური რელეს ნაკლი: საჭირო იყო კონტაქტების ხშირა
გასუფთავება და მომართვა, რის გამოც მანქანას აღმოაჩნდა გამოთვლე-
ბის წარმოების დაბალი სიჩქარე.

აიკენის მანქანის შექმნის დროს კონსტრუქტორები წააწყდნენ სიბ-
ნელეს: შეედგინათ რელეთა მოცემული რიცხვის მიხედვით ეკონომიკუ-
რად საუკეთესო რელეთა სქემა. ამერიკელმა შენონმა ამ ამოცანის
გადასაწყვეტად გამოიყენა გამონათქვამთა ალგებრა — ბუ-
ლის ალგებრა.

შენონმა აჩვენა, რომ რელეურ-კონტაქტური სქემების ანალიზებისა
და სინთეზისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ბულის ალგებრა.

შენონისაგან დამოუკიდებლად 1941 წ. რელეურ-კონტაქტური სქემის
თეორიაში ბულის ალგებრის გამოყენების იდეა წამოაყენა საბჭოთა ფი-
ზიკოსმა ე. ი. შესტაკოვმა.

1946 წელს პენსილვანიის უნივერსიტეტში ააგეს ელექტრონული

¹ ჯოჯ ბული (1815—1864), ინგლისელი მათემატიკოსი.

ციფრული გამოთვლითი მანქანა „ЭНИАК“. ამ ახალი იყო ელექტრონუ-
ლი რელეს გამოყენება. ჩვეულებრივი რადიონათურების სხვა რადიოდ-
ტალბთან შეერთებით შეიძლება მივიღოთ ისეთი რელე, რომ გადართვის
სიჩქარეები და მუშაობის საიმედოობა ათეულ და ასეულჯერ აღარბებს
ელექტრომექანიკურ რელეს მუშაობას, კარგი ელექტრონული რელე
წამში მხოლოდ გადართვას აწარმოებს.

მანქანა „ЭНИАК“-ში მოთავსებული იყო 18000 ელექტრონული
მილაკი და 1500 ელექტრომექანიკური რელე. ამ მანქანას ჰქონდა დიდი
დამახსოვრება და დიდი სიჩქარე, ერთი წამის განმავლობაში აწარმოებდა
5000 მოქმედებას. მანქანის მართვა ხდებოდა პროგრამით. პროგრამის
შედგენა წარმოებდა ხელით, მრავალრიცხოვან საკომუტაციო დაფაზე და
გადამრთველებზე. ამისათვის საჭირო იყო დიდი დრო. ის დიდი სიჩქარე,
რომელიც მანქანას ჰქონდა, გამოთვლის ჩატარების შესრულებაში ვერ
იძლეოდა პრაქტიკულად დროის მოგებას. აღმნიშნავ ვერ მიჰყვებოდა მან-
ქანას: მანქანა გამოიანგარიშებს და ელოდება აღმნიშნავ, ვიდრე იგი არ
გადასცემს მას შემდეგ პროგრამას. ეს შეუსაბამობა მოხსნა ცნობილმა
მათემატიკოსმა ჯონ ფონ ნეიშმა 1947 წელს. ნეიშის იდეა
იმაში მდგომარეობდა, რომ მათემატიკური ამოცანის ამოხსნის მართვის
პროგრამა უნდა შედგეს რიცხვების სახით და შევიტანოთ მანქანის დამ-
მახსოვრებელ მოწყობილობაში, რომლის შემდეგაც მანქანა მიმდევრო-
ბით შესრულებს მთლიანად მოცემულ მოქმედებებს.

„ЭНИАК“-ზე მიღებული გამოცდილების შემდეგ იწყება ელექტრო-
ნული ციფრული მანქანების ტექნიკის განვითარება. გიგანტური მანქანე-
ბიდან გადავიდნენ მცირე ზომის მანქანების შექმნაზე.

პირველი ელექტრონული გამოთვლითი მანქანა საბჭოთა კავშირში
შეიქმნა აკად. ა. ს. ლეხედევის ბელმსლენელობით, უკრაინის მეც-
ნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტში. ეს იყო МЭСМ (малая
электронная счетная машина) და პირველი ამოცანათაგანი, რომელიც
ამ მანქანით იქნა ამოხსნილი 1951 წელს, იყო კუბიშევი — მოსკოვის
ხაზზე ელექტროენერგიის გადაცემის ამოცანა.

ამჟამად ჩვენში გამოშვებულია და წარმატებით მუშაობს როგორც
დიდი, ისე მცირე სხვადასხვა გამოთვლელი ელექტრონული მანქანა.

§ 2. ზამთრულით დათვაბივის მეთოდი. მიახლოების ცნება

ზემთ ჩატარებულ მსჯელობიდან აღვიღო წარმოსადგენია, თუ რა
არის გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდი. შევჩერდეთ ამ საკითხზე დაწე-
რილებით.

¹ Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I, М., 1966;
Култыгин И. Н., Численные методы, М., 1978; Бахвалов Н. С., Числен-
ные методы, т. I, М., 1975.

თუ მოთხოვნილია, განსაზღვროთ რომელიმე y სიდიდე მოცემული x -სათვის. ეს ამოცანა სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$y = A(x). \quad (1)$$

აქ x -იც და y -იც შეიძლება იყოს რიცხვები, რიცხვთა სიმრავლეები, ერთი ან რამდენიმე ცვლადის ფუნქციები, ფუნქციათა სიმრავლეები და სხვ. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, A ოპერატორის სიმბოლოა. ჩვენი მიზანია არა მარტო მოცემული x -ით y -ის განსაზღვრა, არამედ მოცემული y -თაც x -ის განსაზღვრა. თანამედროვე მათემატიკის მეთოდებით სასრული რაოდენობის მოქმედებებით ყოველთვის არ შეგვიძლია (1) ამოცანის ამოხსნა. ამ შემთხვევაში მივმართავთ გამოთვლით მათემატიკას. ზოგჯერ ამოცანა ზუსტად ამოიხსნება, მაგრამ ამონახსნის მიღება მეტად შრომატევადია. ამ შემთხვევაში გამოთვლითი მათემატიკის ამოცანაა, გაარჩიოს ის ხერხები და მითითებები, რომლებიც აღებული ამოცანის ამონახსნს ნაკლები შრომით მოგვცემს.

ძირითადი მეთოდი, რომლითაც (1) ამოცანა გამოთვლით მათემატიკაში ამოიხსნება ისაა, რომ სიმრავლე R_1 , სადაც განსაზღვრულია x , სიმრავლე R_2 , სადაც განსაზღვრულია y , და ოპერატორი A შევცვალოთ სხვა $\bar{R}_1$ და $\bar{R}_2$ სიმრავლეებით და $\bar{A}$ ოპერატორით, რომელთა საშუალებით გამოთვლების ჩატარება მარტივია და საძიებელი y მიახლოებითი $\bar{y}$ -ით სათანადო სიზუსტით მიიღება.

ამრიგად, ნაცვლად (1) ამოცანისა უნდა ამოვხსნათ ამოცანა

$$\bar{y} = \bar{A}(\bar{x}). \quad (2)$$

ამასთან, ამ ამოცანის ამონახსნი რაიმე აზრით ახლოს უნდა იყოს (1) ამოცანის ამონახსნთან.

მაგალითად, გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$y = \int_a^b x(t) dt, \quad (3)$$

სადაც $x(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა $a \leq t \leq b$ შუალედში. ცხადია,

$$A(x) = \int_a^b x(t) dt.$$

ინტეგრალი (3) მიახლოებით ასე შეგვიძლია გამოვთვალოთ: ფუნქცია $x(t)$ შევცვალოთ n ხარისხის მრავალწევრით $P_n(t)$. როგორც ვიცით მრავალწევრის ინტეგრალის გამოთვლა მეტად მარტივია. მრავალწევრი იმდენად დიდი ხარისხის შეგვიძლია ავიღოთ, რომ $a \leq t \leq b$ -თვის

მაშინ

$$|x(t) - P_n(t)| < \varepsilon, \quad (4)$$

$$\bar{y} = \int_a^b P_n(t) dt.$$

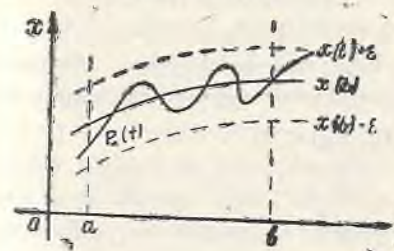
ამ შემთხვევაში ოპერატორი A არ შეცვლილა,

$$A(P) = \int_a^b P_n(t) dt.$$

უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელსაც $x(t)$ ფუნქცია ეკუთვნის, შევცვალოთ მრავალწევრთა სიმრავლით, რომელსაც $P_n(t)$ მრავალწევრი ეკუთვნის,

$$x(t) - \varepsilon < P_n(t) < x(t) + \varepsilon.$$

ამრიგად, ნაცვლად $x(t)$ ფუნქციისა ავიღეთ $P_n(t)$ მრავალწევრი. ეს მრავალწევრი ისეთი ხარისხისაა, რომ მრავალწევრი მოთავსებულია $x(t) - \varepsilon$, $x(t) + \varepsilon$ ზოლში (ნახ. 1).



ნახ. 1

იგივე (3) ინტეგრალი ინტეგრალის განსაზღვრის საფუძველზე შეგვიძლია გამოვთვალოთ:

$$\int_a^b x(t) dt \approx \sum_{k=1}^n x(t_k) \Delta t_k.$$

აქ n იმდენად დიდი შეგვიძლია ავიღოთ, რომ სხვაობა

$$\left| \int_a^b x(t) dt - \sum_{k=1}^n x(t_k) \Delta t_k \right|$$

ნაკლები იყოს სათანადოდ აღებულ ε რიცხვზე. ამ შემთხვევაში

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^n x(t_k) \Delta t_k.$$

აქ A ოპერატორი შევცვალოთ $\bar{A}$ ოპერატორით.

განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ (3) ინტეგრალი ორი მეთოდით შეიძლება გამოითვალოს. აქ დავისმის საკითხი: რომელი მეთოდი

უფრო ხელსაყრელია, რომელი მეთოდი უფრო მარტივია ან რომელი მეთოდი უფრო ზუსტ შედეგს იძლევა.

ზემოთ ვიხმარეთ სიტყვა „სათანადო სიზუსტით“. ეს ცნება გამოვიყენეთ $x(t)$ ფუნქციისათვის (4) უტოლობით, როცა ორ რიცხვს ავიღებთ x_1 და x_2 და $|x_1 - x_2| < \varepsilon$, მაშინ ვიტყვით x_1 ტოლია x_2 -ის ε სიზუსტით, ასე რომ წერტილთა ურთიერთმანახლობლა გასაგებია. მაგრამ ფუნქციათა მანახლობლა შეგვიძლია განვიხილოთ სხვადასხვა ხერხით. ეს საკითხი განიხილება ფუნქციონალურ ანალიზში. ფუნქციონალური ანალიზის ზოგიერთ ცნებას ახლა გავცნობით.

ნებისმიერ ელემენტთა სიმრავლეს ეწოდება მ ე ტ რ ი კ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ე ს, თუ ამ სიმრავლეში შემოტანილია სივრცის ცნება $\rho(x_1, x_2)$ ნებისმიერ ელემენტთა წყვილისათვის (x_1, x_2), რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

- 1) $\rho(x_1, x_2)$ არაუარყოფითი რიცხვია, $\rho(x_1, x_2) \geq 0$,
- 2) $\rho(x_1, x_2) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x_1 = x_2$,
- 3) $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$ — სიმეტრიის აქსიომა,
- 4) $\rho(x_1, x_3) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3)$ — სამკუთხედის აქსიომა.

მეტრიკული სივრცის ელემენტთა მიმდევრობა $(x_n)_{n \geq 1}$ იკრიბება (მეტრიკით) x ელემენტისაკენ, თუ $(n \rightarrow \infty) \Rightarrow (\rho(x_n, x) \rightarrow 0)$.

მიმდევრობას (x_n) ფუნდამენტური მიმდევრობა ეწოდება, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N , რომ

$$(\forall n, m < N) \Rightarrow (\rho(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება ს რ უ ლ ი, თუ ამ სივრცის ნებისმიერი ფუნდამენტური მიმდევრობა იკრიბება ამავე სივრცის ელემენტთან. არასრული მეტრიკული სივრცის მაგალითია რაციონალური რიცხვების სიმრავლე მეტრიკით $\rho = |x_1 - x_2|$. როგორც ვიცით რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობას $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ აქვს ზღვარი, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, მაგრამ e ირაციონალური რიცხვია, e არ ეკუთვნის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს.

თუ x და y ცვლადები ეკუთვნიან არასრულ სიმრავლეს, მაშინ რიცხვითი მეთოდების კრებადობის დაფუძნება მეტად ძნელია. მაშინაც კი, როდესაც მტკიცდება: $x_n \rightarrow x$ შემთხვევაში მიმდევრობა (y_n) ფუნდამენტურია, რადგანაც აქედან არ გამომდინარეობს რომ იგი იკრიბება მოცემული სიმრავლის ელემენტისაკენ.

ქვემოთ განხილულ სიმრავლეთა ელემენტები იქნება რიცხვები, ვექტორები, მატრიცები, ფუნქციები და ა. შ. თვით სიმრავლეები წ რ ფ ი ვ რ ც ე სი.

წ რ ფ ი ვ რ ც ე სი

ნორმირებული სივრცე იქნება, რადგანაც განხილულ სიმრავლეებში განსაზღვრული იქნება ელემენტთა ჯამი და რიცხვზე ნამრავლი და შემოღებული იქნება ყოველი ელემენტის ნორმა $\|x\|$, ამასთან უნდა შესრულდეს შემდეგი აქსიომები:

- 1) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ — გადანაცვლებადობა;
- 2) $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ — ჯუფთებადობა;
- 3) სიმრავლეში არსებობს ერთადერთი ელემენტი ისეთი, რომ სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის, $x + 0 = x$;
- 3) სიმრავლეში არსებობს ყოველი x ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი x' , რომ $x + x' = 0$;
- 4) ნებისმიერი α რიცხვისათვის და სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის არსებობს ისეთი y , რომ $\alpha x = y$, ამასთან

$$\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, 1 \cdot x = x, 0 \cdot x = 0;$$

5) $\|x\| \geq 0$ ნამდვილი რიცხვია; $\|x\| = 0$ მხოლოდ $x = 0$ -თვის;

$$6) \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$$

$$7) \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|.$$

წ რ ფ ი ვ რ ც ე სი ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი ს ი ვ რ ც ე კერძო შემთხვევაა მეტრიკული სივრცისა. ნორმა განისაზღვრება მეტრიკით $\|x\| = \|x - 0\| = \rho(x, 0)$. სრულ ნორმირებულ წრფივ სივრცეს ბ ა ნ ა ხ ის ს ი ვ რ ც ე ეწოდება. პრაქტიკულად სიდიდეები, რომლებზედაც ვიმოქმედებთ, ბანახის სივრცის ელემენტები იქნება, ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ნორმით $\|x\| = |x|$ ბანახის სივრცეა, $0 \leq t \leq 1$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე ნორმით $\|x\| = \max |x(t)|$ ბანახის სივრცეა.

პირობა $0 \leq t \leq 1$ არსებითი არაა. ასე აღებული სეგმენტი უფრო მოსახერხებელია ფუნქციები შეგვიძლია განვიხილოთ ნებისმიერ სეგმენტზე.

უწყვეტ ფუნქციათა კლასს უფრო კუმშავენ, დაადებენ რა უწყვეტ ფუნქციებზე დამატებით პირობებს: ლიფშიც — უწყვეტობას, ერთგვარად ან მრავალგვარად დიფერენცირებადობას და სხვ.

ფუნქციას $x(t)$ -ს სეგმენტზე თ ა ნ ა ბ რ ა დ უ წ ყ ვ ე ტ ი ე წოდება, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის არსებობს ისეთი δ , რომ $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ სეგმენტის ნებისმიერი წყვილისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|t_1 - t_2| < \delta$. სიდიდეს ω ეწოდება $x(t)$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული. როგორც ვიცით, $a \leq t \leq b$ სეგმენტზე უწყვეტი

¹ უფრო დაწვრილებით აღნიშნულ საკითხზე იხილეთ წინამდებარე წიგნის ნაწ. I, თავი XII, § 5.

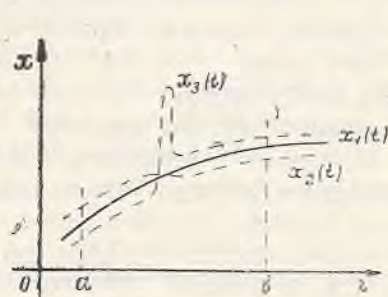
¹ სტეფან ბანახა (1892—1945), პოლონელი მათემატიკოსი, თანამედროვე ფუნქციონალური ანალიზის ერთ-ერთი ფუძემდებელი.

ფუნქცია შემოსაზღვრულია და თანაბრად უწყვეტი (კანტორის თეორემა). ამრიგად, სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა კლასი C შემოსაზღვრულია და თანაბრად უწყვეტი. თუ $\omega(\delta) \leq k\delta$, სადაც k რომელიმე მუდმივია, მაშინ ფუნქციას ლიპშიცის პირობით უწყვეტი ეწოდება. ძნელი არაა იმის დამტკიცება, რომ, თუ ფუნქციას აქვს შემოსაზღვრული წარმოებული, მაშინ იგი ლიპშიცის პირობით უწყვეტია და, მაშინ $k = \sup |x'(t)|$.

განვიხილოთ $0 \leq t \leq 1$ სეგმენტზე განსაზღვრული $x(t)$ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც მოდულით p ხარისხში ინტეგრებადია, ამასთან $x(t)$ ფუნქციათა ნორმა განსაზღვრულია ტოლობით

$$\|x\|_{L_p} = \left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (5)$$

ასეთ სივრცეს ეწოდება L_p სივრცე. $(x_n(t))$ ფუნქციათა მიმდევრობის (5) ნორმით კრებადობას ეწოდება $(x_n(t))$ მიმდევრობის საშუალოდ კრებადობა p მაჩვენებლით, ანუ



ნახ. 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p dt = 0.$$

L_2 სივრცეს ეწოდება ჰილბერტის სივრცე, ხოლო ამ სივრცეში კრებადობას ეწოდება ფუნქციის საშუალოდ კვადრატული კრებადობა. მე-2 ნახაზზე ნაჩვენებია: ფუნქცია $x_2(t)$ თანაბრად ახლოსაა $x_1(t)$ ფუნქციასთან, ხოლო $x_3(t)$

ფუნქცია საშუალოდ ახლოსაა $x_1(t)$ ფუნქციასთან, ე. ი. $x_3(t)$ ფუნქცია მოცემული სეგმენტის უმეტეს ნაწილზე მცირედ განსხვავდება $x_1(t)$ ფუნქციისაგან, ხოლო მცირე ნაწილზე შეიძლება ძალიან განსხვავდებოდეს. ამის გამო მეტრიკული სივრცის არჩევა უნდა განისაზღვროს ფიზიკური ან მათემატიკური მოსაზრებით, რომ ამ სივრცეში შესაძლებელი იყოს სხვადასხვა ფაქტების დადგენა, მაგალითად, კრებადობის დამტკიცება. თვითმფრინავის სიბრტყის გამოთვლის დროს საჭიროა მიახლოებითი ამონახსნის თანაბრად კრებადობა ზუსტი ამონახსნისაგან, რადგანაც ზოგიერთ ნაწილში დიდ არასიზუსტეს შეუძლია მთლიანად დაარღვიოს თვითმფრინავის კონსტრუქცია. ხოლო სით-

ბური ნაკადით სხეულის გათბობისას საკმარისია L_1 ნორმა, რადგანაც სხეულის ტემპერატურა განისაზღვრება სიბრტყის ნაკადის ინტეგრალით — ჯამით დროში.

ვაჩვენოთ, რომ $x(t)$ ფუნქციისათვის, რომელიც განსაზღვრულია $0 \leq t \leq 1$ შუალედში, სხვადასხვა ნორმებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება

$$\|x(t)\|_{L_1} \leq \|x(t)\|_{L_2} \leq \dots \leq \|x(t)\|_{L_\infty}$$

მართლაც,

$$\|x(t)\|_{L_p}^p = \int_0^1 |x(t)|^p dt \leq \int_0^1 \max |x(t)|^p dt = \max |x(t)|^p = \|x(t)\|_{L_\infty}^p.$$

მაშასადამე, თანაბრად კრებადობიდან გამომდინარეობს საშუალოდ კრებადობა და, კერძოდ — საშუალოდ კვადრატული კრებადობა. ამის გამო თანაბრად კრებადობა უფრო ძლიერია, ვიდრე საშუალოდ კვადრატული კრებადობა.

განვიხილოთ ისეთ წერტილთა სიმრავლე, რომლის კოორდინატებია თვლადია $x = (x_1, x_2, \dots)$. ასეთ სიმრავლეს კოორდინატულ უსასრულო სიმრავლეს უწოდებენ. ასეთ სიმრავლეში ნორმა შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება

$$\|x\|_c = \sup |x_i|$$

ან

$$\|x\|_{l_p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

ასეთ სივრცეს სათანადოდ ეწოდება c ან l_p სივრცე. სასრულგანზომილებიანი სივრცისათვის $c^{(n)}$, $l_p^{(n)}$, რომელთა ელემენტებია $x = (x_1, \dots, x_n)$, ნორმა განისაზღვრება ტოლობით:

$$\|x\|_p = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$l_2^{(n)}$ სივრცეს უწოდებენ ევკლიდეს სივრცეს.

სასრულგანზომილებიანი ვექტორებისათვის ადვილად შემოწმდება შემდეგი დამოკიდებულება

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_c \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_1.$$

საზოგადოდ თანაბრად კრებადობა უზრუნველყოფს სხვა ნორმით კრებადობას.

კვადრატულ მატრიცაში სივრცეში იხმარება შემდეგი ნორმები:

$$\|A\|_1 = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right), \quad \|A\|_2 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right),$$

$$\|A\|_M = n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|, \quad \|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|A\|_3 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i},$$

სადაც n კვადრატული მატრიცის რიგია, ხოლო λ_i A^*A მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია (A^* მატრიცა პერმიტის შეუღლებული მატრიცაა A -ს მიმართ). A მატრიცის ნორმას ეწოდება x ვექტორის ნორმასთან შეთანხმებული, თუ $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. უმცირესი მატრიცის ნორმათაგან, რომლებიც შეთანხმებულია მოცემული ვექტორის ნორმასთან: $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, ეწოდება მოცემული ვექტორის ნორმაზე დაქვემდებარებული მატრიცის ნორმა.

§ 4. გამოთვლითი მათემატიკის აზოდანა. ზოგადი მითითებაანი

დაეუბრუნდეთ ისევ (1, § 3) ამოცანას.

შეეჩინეთ R სიმრავლის $\bar{R}$ სიმრავლით შეცვლაზე. ზოგჯერ შესაძლებელია R სიმრავლეში მოინახოს ელემენტთა სასრული

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$$

სიმრავლე, რომლებიც კარგად უახლოვდებიან — აპროქსიმირებენ R სიმრავლის ყოველ ელემენტს და გამოთვლებისათვის საგმარისად მარტივია. ამ შემთხვევაში $\bar{R}$ სიმრავლეს შევადგენთ სასრული რაოდენობის $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ელემენტებისაგან და $\varphi \in R$ ელემენტს შევუხამებთ ერთ-ერთ უახლოეს $\varphi_i \in \bar{R}$ ელემენტს.

თუ ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობას შევაჯამებთ, მივიღებთ, რომ გამოთვლითი მათემატიკის წინაშე დგას შემდეგი ძირითადი ამოცანები:

1) მოცემულ R სიმრავლისათვის ისეთი სასრული $\bar{R}$ სიმრავლე უნდა ავაგოთ, რომელიც შეიცავს $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ელემენტებს და შეიძლება დეს R სიმრავლის ყოველი ელემენტის აპროქსიმაცია;

2) მოცემულ R სიმრავლეში განსაზღვრული A ოპერატორის $\bar{R}$ სიმრავლეში განსაზღვრული $\bar{A}$ ოპერატორით მიახლოება;

3) ამოცანის ამოხსნის რაციონალური ალგორითმებისა და მეთოდების დამუშავება და არჩევა გამოთვლითი მანქანების გამოყენების პირობებში.

კონკრეტული ამოცანის ამოხსნის დროს მხედველობაში უნდა მივიღოთ გამოთვლების ის საშუალებანი — მათემატიკური მანქანები, რომლებიც ჩვენს განკარგულებაშია. სწორედ გამოთვლითი მეთოდის ლირებულება იმის მიხედვით შეფასდება, თუ რამდენად ზორციელდება ის მანქანაზე. გამოთვლების მეთოდებისა და საშუალებათა მიხედვით განისაზღვრება ამოცანების კლასი. შეიძლება ერთი მეთოდით ამოცანა მარტივად ამოხსნას რაიმე მანქანის საშუალებით, ხოლო იგივე მეთოდით სხვა ამოცანის ამოხსნა შეიძლება მეტად რთული იყოს ან სრულდებოდეს არ შეიძლებაოდეს მისი ამოხსნა.

მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ციფრულ მანქანას შეუძლია რამდენიმე არითმეტიკული მოქმედებისა და ზოგიერთი ლოგარითმიკული მოქმედების შესრულება. ამიტომ მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა განხორციელდება ისეთი ალგორითმით (ალგორითმი — იმ მოქმედებათა რიგის აღწერა, რომლითაც მიიღება ერთი და იგივე ტიპის ამოცანათა ამონახსნი), რომელიც საშუალებას მოგვცემს ამოცანის ამოხსნა დაფიქვანოთ არითმეტიკულ მოქმედებათა ერთგვაროვან მიმდევრობაზე ან ციფრულ პროცესებზე, სადაც შედეგი მიიღება და იმავე უმარტივესი ალგორითმების მრავალჯერ გამეორებით. რაც უფრო სრულყოფილია გამოთვლითი ტექნიკა, მით უფრო რთული ამოცანების ამოხსნა შეგვიძლია. ბევრი ამოცანა, რომელთა რიცხვითი ამოხსნის მიღება შეუძლებელი იყო ცოტა ხნის წინ, ახლა, გამოთვლითი მანქანებისა და გამოთვლითი მეთოდების სრულყოფის შემდეგ მათი ამოხსნა შესაძლებელი გახდა.

გამოთვლითი სამუშაოს შესრულებაში მთავარია, მისი კარგად დაგეგმვა, მეთოდისა და ალგორითმის შერჩევა, მისი განხორციელების კარგი სქემის — პროგრამის შედგენა; ეს უზრუნველყოფს ამოცანის სწრაფად ამოხსნას და ნაკლებ ცდომილებას.

ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის საუკეთესო რაციონალური ალგორითმის არჩევის საკითხი რთულია და დღემდე არ არსებობს ზოგადი თეორია ამის შესახებ. ეს საკითხი კერძო ამოცანის ამოხსნის დროს უნდა გადაიჭრას.

ყოველ გამოთვლებაში მოსალოდნელია ცდომილება¹. ეს ცდომილება განისაზღვრება ე. წ. აპროქსიმაციის ცდომილებით — $|A(x) - \bar{A}(x)|$, ე. წ. დამახინჯების ცდომილებით — $|\bar{A}(x) - \bar{A}(\bar{x})|$; x სიდიდე შეიცვლება მისი მიახლოებით $\bar{x}$ მნიშვნელობით. ეს ცდომილება გამოწვეული იქნება $x(t)$ ფუნქციის $\bar{x}(t)$ ფუნქციით შეცვლით. მაგა-

¹ С. Г. Михлин, Погрешности вычислительных процессов, Тбилиси, 1983, стр. 10—13.

ლითად, $\bar{x}(t) = P_n(t)$ ან x რიცხვის მისი მიახლოებითი მნიშვნელობით შეცვლით, მაგალითად, $\pi = 3,14$; $\frac{1}{3} = 0,33$ და სხვ. $(\bar{x})$ მნიშვნელობა უნდა გამოითვალოს რაიმე ალგორითმით, რომლის შედეგად მიღებული მნიშვნელობა $\bar{x}(t)$ საზოგადოდ განსხვავებული იქნება $\bar{x}(t)$ -საგან. ასე რომ, გვექნება ცდომილება $|\bar{A}(\bar{x}) - \bar{A}(\bar{x})|$, რომელსაც ალგორითმის ცდომილება ეწოდება. პრაქტიკულად, ნებისმიერი ალგორითმი შეიცავს მოქმედებებს, რომელთა შესრულების დროს გვექნება ცდომილებანი. ეს ცდომილებანი გამოწვეული იქნება, მაგალითად, ცხრილებით სარგებლობით ან რიცხვთა სათანადო დამრგვალებით. ამ ცდომილებას გამოთვლითი ცდომილება ეწოდება. ამრიგად, ნაცვლად $\bar{x}$ -სა გვექნება $\bar{x}$ და ამით გვექნება ცდომილება $|A(\bar{x}) - \bar{A}(\bar{x})|$. საბოლოოდ, ნაცვლად $A(x)$ სიდიდისა მივიღებთ $\bar{A}(\bar{x})$. მთლიანი ცდომილება ასეთი სიდიდის იქნება:

$$|A(x) - \bar{A}(\bar{x})| \leq |A(x) - \bar{A}(x)| + |\bar{A}(x) - \bar{A}(\bar{x})| + |\bar{A}(\bar{x}) - \bar{A}(\bar{x})| + |\bar{A}(\bar{x}) - \bar{A}(\bar{x})|.$$

ყველა ზემოთ ჩამოთვლილ ცდომილებას ბუნებრივი ცდომილება ეწოდება. ცხადია, ყოველ ამოცანაში არ გვექნება ყველა ჩამოთვლილი ცდომილება. ცდომილებათა გამოშვები მიზეზის რაოდენობა დამოკიდებულია ამოცანის სირთულეზე.

გამოთვლებში გარდა ბუნებრივი ცდომილებისა, მოსალოდნელია შემთხვევითი ცდომილება. შემთხვევითი ცდომილება მიიღება გამოთვლების გადაღლით ან მანქანის არაწესიერი მუშაობით. ამიტომ საჭიროა, გამოთვლების დაპროგრამების დროს გაითვალისწინოთ გამოთვლებისადმი მუდმივი კონტროლი, რათა დროულად უკუვაგდოთ შემთხვევითი ცდომილება.

გამოთვლითი მანქანები და კერძოდ ციფრული ელექტრონული მანქანები დიდ როლს ასრულებს ადამიანის მოღვაწეობაში: ტექნიკური გამოთვლები, თეორიული ფიზიკის გამოკვლევები, დაზგების მუშაობის მართვა, წარმოების ორგანიზაცია, ფიზიოლოგია, მედიცინა, ეკონომიკა, ლინგვისტიკა და სხვა დარგები დღეს თითქმის წარმოუდგენელია გამოთვლითი მანქანების გარეშე. მანქანის შესაძლებლობის ცოდნა და დაპროგრამება გახდა ადამიანის კულტურული ცხოვრების ნაწილი. ამიტომ გამოთვლების მეთოდების შესწავლას დავიწყებთ ზოგადად მათემატიკური მანქანების გაცნობით. ზოგი მანქანა მოქმედებულობს, ასეთი მანქანები უფრო მექანიკურია, მაგრამ დღესაც წარმატებით გამოიყენება სახალხო მეურნეობაში. ამ მანქანებს ისტორიულა მნიშვნელობაც აქვთ. შევხებით გამოთვლების გრაფიკულ მეთოდებს და კერძოდ ნომოგრამებით გამოთვ-

ლების წარმოებას. ნომოგრამები დღესაც დიდი წარმატებით გამოიყენება პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნებში. შევისწავლით მიახლოებით რიცხვებზე მოქმედებებს, რათა წარმოადგენა გვექნოდეს მანქანით მიღებული შედეგის სიზუსტეზე. ზოგჯერ წინასწარ უნდა განვსაზღვროთ ის სიზუსტე, რომელიც აღებული ამოცანის ამოხსნაში მიიღება და ეს შეტანილი უნდა იქნეს ამოცანის სათანადოდ ამოხსნის პროგრამაში. შეიძლება ამოცანის ამოხსნის სიზუსტის განსაზღვრა სათანადოდ ამოცანის ამოხსნის პროგრამაში შევიტანოთ, მაგრამ ასეთი მიდგომა ამოცანის ამოხსნის პროგრამას ართულებს. შევისწავლით აგრეთვე ცხრილების შედგენისა და სარგებლობის საკითხებს და შემდეგ გადავალთ მიახლოებითი მეთოდების გაცნობაზე.

§ 2. გამოთვლების საშუალებანი

მათემატიკური გამოთვლების საშუალებანია: ცხრილები, გრაფიკები, ნომოგრამები, საანგარიშო მანქანები და სხვ.

მათემატიკური ცხრილები უძველესი დროიდანაა ცნობილი. ცხრილები სხვადასხვა სიზუსტისაა. მეტად გავრცელებულია: ლოგარიტმების, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების, კვადრატების, კუბების, შებრუნებული სიდიდეების, გამრავლების, პროცენტების და სხვა ცხრილები.

საანგარიშო ხელსაწყოებიდან მეტად გავრცელებულია რუსული საანგარიშო და ლოგარიტმული სახაზავი. ლოგარიტმული სახაზავი გამოიგონა ოქსფორდის უნივერსიტეტის პროფესორმა ე. გუტენტრამ (1581—1626) 1620 წელს. ჩვეულებრივი ზომის (25 სმ) ლოგარიტმული სახაზავი შედგეს იძლევა 3—4 ნიშნადი ციფრით. ამ ხელსაწყოზე სრულდება მრავალი მოქმედება. მოქმედებანი მეტად მექანიზებულია და შედეგი სწრაფად მიიღება.

ნომოგრამები წარმოადგენს გამოთვლების სპეციალურ საშუალებას. ყოველი ნომოგრამა შედგენილია სათანადოდ ერთი ფორმულისათვის და შედეგს იძლევა არგუმენტებისათვის შემოსაზღვრულ არეში, ნომოგრამა შედეგს იძლევა 2—3 ნიშნადი ციფრით.

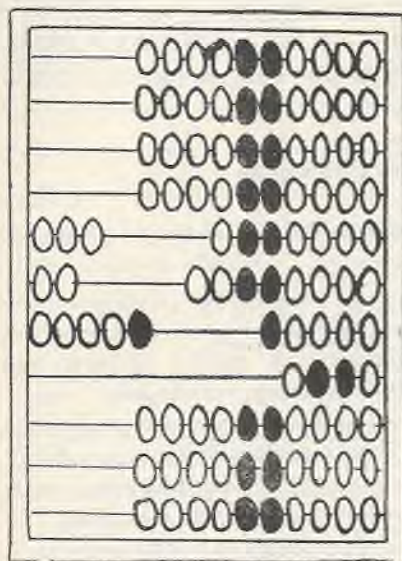
განვიხილოთ ზემოთ ჩამოთვლილი გამოთვლების საშუალებებიდან თითოეული ცალ-ცალკე.

§ 3. რუსული საანგარიშო

რუსული საანგარიშო წარმოადგენს ხის ჩარჩოს პარალელური მავთულებით (ნახ. 3). მავთულთა რიცხვი ჩვეულებრივად 15-ია. თითოეულ მავთულზე, გარდა მეოთხე მავთულისა, ათ-ათი კოჭია. მეოთხე მავთულზე ოთხი კოჭია. ყოველ მავთულზე თვალის ჰიგიენისათვის შუა კოჭები

შავი ფერისაა. თითოეული მავთული შეესაბამება გარკვეულ თანრიგს, ხოლო თითოეული კოჭი გამოსახავს სათანადო თანრიგის ერთეულს.

თანრიგების რიგი იწყება ქვემოთიდან. პირველი მავთული — პირველი თანრიგისაა, მეორე მავთული — მეორე თანრიგის და ა. შ. მეოთხე მავთული მხედველობაში არ მოიღება, მეოთხე მავთულის კოჭებით აიღება მთელის მეოთხედი ნაწილები ან იგი იხმარება ძველი ზომისათვის — ათე-



ნახ. 3

ული ფუნტების ასაღებად. მეოთხე მავთული საზღვრავს იხმარება. მის ზემოთ აიღება მთელი რიცხვები, ხოლო ქვემოთ — წილადები: მეთათედი, მეთასედი და მეთასედი. ზოგიერთი ახალი კონსტრუქციის საანგარიშოზე მეოთხე მავთულზედაც ათი კოჭია.

საანგარიშოზე რიცხვის ასაღებად საჭიროა სათანადო კოჭები გავიტანოთ მარცხენა ნაპირზე. კოჭების გატანას ვიწყებთ უფროსი თანრიგიდან. ამ მოქმედებას „ჩასვლა“, ანუ „გასვლა“ ეწოდება.

დაწვრილებით განვიხილოთ არითმეტიკული მოქმედებანი.

შეკრება. იმისათვის, რომ ორი რიცხვი შევკრიბოთ, საჭიროა ჯერ პირველი რიცხვი ჩავიდეთ, შემდეგ მეორე და ა. შ. რიცხვების ჩას-

ვლა უნდა დავიწყოთ მაღალი თანრიგის ერთეულებიდან. თუ მეორე შესაყრების ადების დროს რომელიმე მავთულზე არ კმარა კოჭები, მაშინ საჭიროა შემდეგი თანრიგის მავთულზე ავიღოთ ერთი კოჭი, ხოლო იმ მავთულზე, რომელზედაც კოჭები არ გვყოფ, მარჯვნივ გამოვიტანოთ („გამოსვლა“) იმდენი კოჭი, რამდენიც აკლია ჩასასვლელ რიცხვს ათამდე.

მაგალითად,

$$573 + 284 = (500 + 70 + 3) + 200 + 84 = (700 + 70 + 3) + (100 - 20) + 4 = 800 + (70 - 20) + (3 + 4) = 857.$$

გამოკლება. გამოკლების შესასრულებლად საჭიროა ჯერ ჩავიდეთ საკლები და შემდეგ გამოვიდეთ მკლები (სიტყვა გამოსვლის მაგიერ არამართებულად ხმარობენ სიტყვას „გასვლა“. საერთოდ ხმარობენ:

მიმატების დროს „ჩასვლას“ და გამოკლების დროს „გასვლას“). გამოსვლასაც მაღალი თანრიგის ერთეულებიდან ვიწყებთ.

მაგალითად,

$$768 - 234 = (700 + 60 + 8) - 234 = (700 - 200) + (60 - 30) + (8 - 4) = 534.$$

თუ გამოკლებისას რომელიმე მავთულზე არ კმარა მკლები შესაბამისი თანრიგის ციფრისათვის კოჭები, მაშინ ზედა მავთულზე გამოვიდეთ ერთი კოჭი, ხოლო აღებულ მავთულზე ჩავიდეთ იმდენი კოჭი, რამდენიც მკლების სათანადო ციფრს აკლია ათამდე.

მაგალითად,

$$637 - 283 = (600 + 30 + 7) - 200 - 83 = (400 + 30 + 7) - 80 - 3 = (400 - 100 + 30 + 7) + 20 - 3 = 300 + 50 + (7 - 3) = 354.$$

გამოკლება. გამრავლება მოიცავდება შეკრებაზე:

$$a \cdot b = a + a + \dots + a,$$

ე. ი. საჭიროა სიმრავლე a გავიმეოროთ იმდენჯერ შესაყრებად, რამდენი ერთეულიცაა b მამრაველში. ასევე მოვიქცევით მაშინაც, როდესაც ათწილადები გვაქვს მამრავლებად. წინასწარ კი უნდა განვსაზღვროთ ათწილადის ნიშნების რაოდენობა ნამრაველში, რომელსაც გამრავლების შემდეგ გამოვეყოფთ ნამრავლიდან.

მიუხედავად იმისა, რომ აღნიშნული ზერბით გამრავლების ჩატარება საანგარიშოზე შესაძლებელია, ამ ზერბს იყენებენ მხოლოდ ერთნიშნა რიცხვზე გამრავლებისას.

ვთქვათ, a მრავალნიშნაა:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

ხოლო b ერთნიშნა რიცხვია, მაშინ

$$ab = a_n b \cdot 10^n + a_{n-1} b \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 b \cdot 10 + a_0 b.$$

გამრავლება ასე შესრულებს: პირველად ვიპოვოთ $a_n b$ (ერთნიშნა რიცხვების ნამრავლი) და ჩავიდეთ პირველი თანრიგის მავთულზე. შემდეგ ვიპოვოთ $a_{n-1} b$ და ჩავიდეთ ერთი თანრიგით მაღალი რიგის მავთულზე $a_{n-1} b$ -სთან შედარებით ($a_{n-1} b \cdot 10$) და ა. შ. ვიპოვოთ $a_n b$ და ჩავიდეთ n -ური თანრიგის მავთულზე ($a_n b \cdot 10^n$). თანრიგის აღვიღოთ რომ არ დავავიწყდეს საანგარიშოზე, საჭიროა მარცხენა ზელის ცერი მოვიხმაროთ. როცა $a_n b$ -ს ვიღებთ, ცერი მოვათავსოთ პირველი თანრიგის მავთულზე, შემდეგ როცა $a_{n-1} b$ -ს ვიღებთ, ცერი მოვათავსოთ მეორე თანრიგის მავთულზე და ა. შ.

მაგალითად,

$$523 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 4 \cdot 10 + 3 \cdot 4 = 3 \cdot 4 + (2 \cdot 4) \times \\ \times 10 + (5 \cdot 4) 10^2 = 12 + 8 \cdot 10 + 20 \cdot 10^2 = 2092.$$

აღვილი შესამჩნევია მრავალნიშნა რიცხვების გამრავლება დაიყვანება ერთნიშნა რიცხვების გამრავლებაზე.

მაგალითად,

$$523 \cdot 46 = 523 \cdot 40 + 523 \cdot 6.$$

ცხადია, ჯერ ვიპოვოთ $523 \cdot 6$, შემდეგ მივუმატებთ $523 \cdot 40$. ამისათვის $523 \cdot 40$ -ის აღებას მეორე თანრიგის მავთულიდან დაიწყებთ. ასევე შესრულდება სამნიშნა რიცხვზე გამრავლება; მაგალითად,

$$523 \cdot 746 = 523 \cdot 6 + 523 \cdot 40 + 523 \cdot 700.$$

გ ა ყ ო ფ ა. საანგარიშოზე გაყოფა დაიყვანება გასაყოფიდან გამოყოფის მიმდევრობით გამოკლებაზე.

მაგალითად, $72 : 825 : 25$.

რიცხვი $72 : 825$ ავიღოთ საანგარიშოზე. მარცხენა ხელის ცერით გამოვყოთ მე-4 და მე-5 მავთულზე 72 . ამ რიცხვიდან მიმდევრობით გამოვიღეთ 25 . ორჯერ 25 -ის გამოსვლა 72 -დან მოგვცემს 22 .

ზემოდან პირველ მავთულზე ჩავიდეთ 2 კოჭი. ახლა ავიღოთ 228 . ცერი მოვათავსოთ ერთი მავთულით ქვემოთ. მიმდევრობით გამოვიღეთ 25 . რამდენჯერაც გამოვალთ 25 -ს, იმდენი კოჭი ჩავიდეთ ზემოდან მეორე მავთულზე. ამ მავთულზე მივიღებთ 9 კოჭს, ხოლო 228 -ის ადგილას დავტყუებთ 3 . ახლა ავიღოთ 32 . ცერი კვლავ ჩავწიოთ ერთი მავთულით ქვემოთ. გამოვიღეთ ამ რიცხვიდან მიმდევრობით 25 . რამდენჯერაც 25 -ს გამოვალთ 32 -დან, იმდენი კოჭი ჩავიდეთ მესამე მავთულზე. მესამე მავთულზე მივიღებთ 1 კოჭს, ხოლო 32 -ის ადგილას დავტყუებთ 7 . ახლა ავიღოთ 75 . ცერი კვლავ ერთი მავთულით ჩანოვწიოთ. 75 -დან სამჯერ 25 -ის გამოსვლით დამთავრდება გაყოფა. სამი კოჭი ავიღოთ ზემოდან მეოთხე მავთულზე. ამგვარად, განაყოფში მივიღებთ 2913 .

აღვილი შესამჩნევია, რომ გაყოფა ასეთი მიმდევრობით შევასრულეთ:

$$72825 : 25 = 72000 : 25 + 825 : 25 = 2000 + 22000 : 25 + 825 : \\ : 25 = 2000 + 22800 : 25 + 25 : 25 = 2000 + 900 + 300 : 25 + \\ + 25 : 25 = 2000 + 900 + 320 : 25 + 5 : 25 = 2000 + 900 + \\ + 10 + 70 : 25 + 5 : 25 = 2000 + 900 + 10 + 75 : 25 = 2000 + \\ + 200 + 10 + 3 = 2913.$$

ცხადია, ის გამარტივებული, რომლებსაც ვიყენებთ ზეპირი გამრავლების დროს შეგვიძლია გამოვიყენოთ საანგარიშოზედაც:

$$a \cdot 9 = a(10 - 1) = 10a - a,$$

$$a \cdot 5 = \frac{a \cdot 10}{2},$$

$$a \cdot 25 = \frac{a \cdot 100}{4},$$

$$a : 5 = a : \frac{10}{2} = \frac{2a}{10},$$

$$a : 25 = a : \frac{100}{4} = \frac{4a}{100} \text{ და სხვ.}$$

ძნელი არ არის იმის წარმოდგენა, თუ როგორი სიმარტივე აქვს აგებულიებით რუსულ საანგარიშოს, განსაკუთრებით მარტივად სრულდება მასზე შეკრება და გამოკლება. სწორედ ამ მიზეზით აიხსნება დღესაც მისი ფართო გამოყენება გამოთვლებში.

§ 7. ლოგარითული სახაზავი

1. ძირითადი სქალები

1. საანგარიშო სახაზავი ან, ჩვეულებრივად, როგორც მას ეძახიან, ლოგარითული სახაზავი^{1,2} (მიშმა) წარმოადგენს ორი ერთნაირი ლოგარითული სკალის ერთობლიობას. ეს სკალები მიღებულია მაჩვენებლიანი ფუნქციის,

$$y = 10^x, \quad (1)$$

გრაფიკის დახმარებით, როცა x იცვლება $[0; 1]$ სეგმენტზე, მაშინ y იცვლება $[1; 10]$ სეგმენტზე. Oy ღერძზე ავიღოთ სკალები

$$OY = mx, \quad OY = m \lg x.$$

m -ს ეწოდება სკალის შოდული (რიცხვით ერთეულს ნახაზე შეესაბამება m სიგრძის მონაკვეთი). ავიღოთ $m = 250$ მმ, მაშინ Oy ღერძზე გვექნება სკალები:

$$OY = 250x, \quad x = 0; 0,1; \dots; 0,9; 1;$$

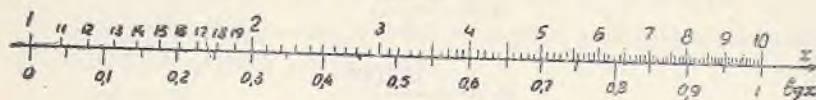
$$OY = 250 \lg x, \quad x = 1, 2, \dots, 9, 10. \quad (2)$$

სკალები ისეა განლაგებული, რომ x -ის მნიშვნელობებს, რომელიც მო-

¹ Я. С. Безякович, Приближенные вычисления, М.—Л., 1949.

² В. С. Кушечко, Логарифмическая линейка, М., 1958.

თავსებულია ღერძის ზემოთ, შეესაბამება $\lg x$ -ის მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია ღერძის ქვემოთ (ნახ. 4).



ნახ. 4

ამ სკალეებით შეგვიძლია არაუმეტეს სამნიშნა რიცხვის ლოგარიტმის მოძებნა და, პირიქით, თუ ვიცით რაიმე x რიცხვის ლოგარიტმი, შეგვიძლია მოვნახოთ x .

მაგალითად,

$$\lg 248 = \lg 2,48 + \lg 100 = 0,395 + 2 = 2,395.$$

$$\lg 0,0248 = \lg 2,48 - \lg 100 = 0,395 - 2 = \overline{2},395.$$

ვიპოვოთ x , თუ

$$\lg x = 0,542.$$

მე-4 ნახაზიდან მივიღებთ

$$x = 3,48.$$

ვთქვათ, გვაქვს

$$\lg x = 4,542.$$

ეს უკანასკნელი ასე წარმოვადგინოთ:

$$\lg \frac{x}{10^4} = 4,542 - 4 = 0,542.$$

საიდანაც

$$\frac{x}{10^4} = 3,48;$$

აქედან გვიქნება

$$x = 3480.$$

2. ლოგარიტმულ სახაზავს ემაჩიან 25 სმ, 12,5 სმ, 50 სმ-იანს იმის მიხედვით, თუ რას უდრის ლოგარიტმული სკალის მოდული.

ორი ლოგარიტმული სკალიდან, რომელთაც ურთიერთისადმი მოძრაობა შეუძლიათ, ერთს ეწოდება მცოცი. მცოცა სახაზავის კილოებშია მოთავსებული, შეიძლება მისი ამოღებაც. ლოგარიტმული სახაზავის წინა

ნაწილზე მოთავსებულია სკალეები: K, A, B, R, C, D, L (ნახ. 5). თითოეული სკალის მნიშვნელობას თანდათანობით გავეცნობით.



ნახ. 5

ჯერ გავეცნოთ C და D სკალეებს. ეს ორივე სკალა ერთნაირია, ისინი წარმოადგენენ (2) სკალას:

$$OY = 250 \lg x.$$

ამ სკალაზე პირველი კატეგორიის ციფრებია:

$$1, 2, \dots, 9, 10.$$

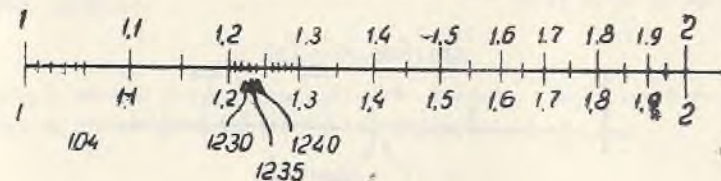
1-დან 2-მდე მეორე კატეგორიის დანაყოფებზე აწერია (ნახ. 6):

$$1,1; 1,2; \dots; 1,9.$$

ყოველ მეორე კატეგორიის დანაყოფებს შორის მოთავსებულია მე-სამე კატეგორიის 10 მონაკვეთი. მონაკვეთზე [1, 2] შეიძლება მოინახოს სამნიშნა რიცხვები:

$$100, 101, 102, \dots, 199, 200.$$

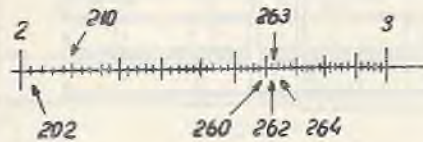
მაგალითად 123-ის შესაბამისი წერტილი მოთავსებულია 12-ის შემდეგ მესამე კედზე. ხოლო 1235 მოთავსებული იქნება 123-ისა და 124-ის შუაში. 5-ის შესაბამისი კდე თვალდათვალ უნდა მოვნახოთ.



ნახ. 6

ამგვარად, D სკალის 1-სა და 2-ს შორის ზუსტად მოიძებნება მხოლოდ სამნიშნა რიცხვი, რომელიც 1-ით იწყება. სკალაზე ვკითხულობთ ციფრებით. მაგალითად, 123, ერთი — ორი — სამი.

სკალის [2, 3] და [3, 4] მონაკვეთები ერთნაირადაა დანუხსნული. (ნახ. 7): თითოეულზე მეორე კატეგორიის 10 მონაკვეთია; ჰდეებზე ციფრები არ არის დაწერილი. მეორე კატეგორიის თითოეული მონაკვეთი დაყოფილია მესამე კატეგორიის 5 მონაკვეთად. ასე რომ, მესამე კატეგორიის მონაკვეთის ფასია 2.



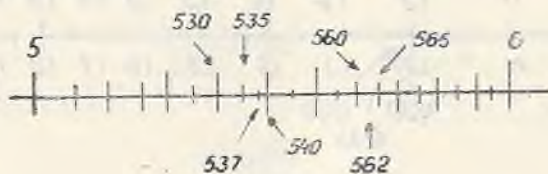
ნახ. 7

რიცხვი 263-ის შესაბამისი წერტილი მოთავსებულია 262-ისა და 264-ის ჰდეზე შუაზე. ეს წერტილი უნდა განესაზღვროთ თვალდათვალ. სკალის 4-დან 10-მდე ყველა მონაკვეთი ერთნაირადაა დანუხსნული (ნახ. 8): პირველი კატეგორიის ყოველი მონაკვეთი დაყოფილია 10 მეორე კატეგორიის მონაკვეთად. მეორე კატეგორიის მონაკვეთები დაყოფილია ორ-ორ მესამე კატეგორიის მონაკვეთად, ე. ი. მესამე კატეგორიის მონაკვეთის ფასია 5.

მაგალითად, ვიპოვოთ 5, 35.

ამ რიცხვის შესაბამისი წერტილი მოთავსებულია 5-ის შემდეგ. გადავთვალოთ სამი მეორე კატეგორიის მონაკვეთი 5-ის შემდეგ. 5, 35 მოთავსებულია მესამე კატეგორიის მეოთხე მონაკვეთის შუაზე.

5, 37-ის შესაბამისი წერტილი უნდა განესაზღვროთ თვალდათვალ. 535-ის შესაბამისი ჰდის შემდეგ მოთავსებული მესამე კატეგორიის მონაკვეთი თვალდათვალ უნდა გავყოთ 5-ზე და ავიღოთ 2 მეხუთედი ნაწილი. ასევე მოიძებნება ნებისმიერი სამნიშნა რიცხვი, რომლის პირველი ციფრია 4, 5, 6, 7, 8, 9.



ნახ. 8

ლოგარითმულ სახაზავზე რიცხვის აღებაზე და წაკითხვაში დიდად დაგვეხმარება რბოა (მუშა ლითონის ჩარჩოში), რომელზედაც გავლებულია ს ა ნ ი შ ნ ო (სათვალთვალ) ხაზი.

3. ლოგარითმული სახაზავის საშუალებით რიცხვთა გამრავლება სრულდება ლოგარითმის შემდეგი თვისების საფუძველზე:

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b.$$

მაგალითად, 2, 3.

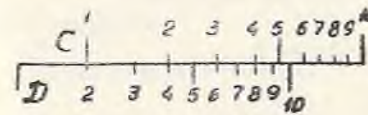
სკალაზე ავიღოთ რიცხვი 2 (სანიშნო ხაზი მოვათავსოთ 2-ზე), (ნახ. 9). გავწიოთ მცოცი მარჯვნივ ისე, რომ C სკალის 1 შეუთავსდეს D სკალის 2-ს. მოვძებნოთ C სკალაზე 3. დავტოვოთ მცოცი უძრავად და სათვალთვალო ხაზი გადავიტანოთ C სკალის 3-ზე. 3-ის ქვეშ მოთავსებულია 6. ე. ი. $2 \cdot 3 = 6$.

მართლაც,

$$2 = m \lg 2, \quad 3 = m \lg 3.$$

შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= m \lg 2 + m \lg 3 = \\ &= m (\lg 2 + \lg 3) = m \lg (2 \cdot 3) = \\ &= m \lg 6 = 6. \end{aligned}$$



ნახ. 9

ახლა ავიღოთ 243 · 32,5.

D სკალაზე ვიპოვოთ წერტილი

— ორი — ოთხი — სამი.

მის თავზე მოვათავსოთ C სკალის 1. C სკალაზე მოვძებნოთ წერტილი სამი — ორი — ხუთი.

ამ წერტილის ქვეშ D სკალაზე ვკითხულობთ:

შვიდი — რვა — ნული.

მიღებული ციფრიდან შეგვიძლია შევადგინოთ რიცხვები:

$$780, 0,780, 7800, \dots$$

დაწერილი რიცხვებიდან რომელი გამოსახავს 243-ის 32,5-ზე ნამრავლს? ამისათვის მოვიგონოთ, რომ, თუ a რიცხვის რიგი არის n_1 , მაშინ გვექნება

$$\lg a = (n_1 - 1), l_1,$$

სადაც l_1 არის a რიცხვის ლოგარითმის მანტისა. ასევე თუ b რიცხვის რიგია n_2 და ლოგარითმის მანტისა l_2 , გვექნება:

$$\lg b = (n_2 - 1), l_2.$$

ამ ორი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b = (n_1 + n_2 - 2), (l_1 + l_2) \quad (3)$$

თუ 0, $(l_1 + l_2)$ არ არის 1-ზე მეტი, მაშინ ab რიცხვის რიგი N იქნება:

$$N = n_1 + n_2 - 1.$$

სწორედ ასეთი შემთხვევა გვაქვს აღებულ მაგალითში:

$$N = 3 + 2 - 1 = 4.$$

ამიტომ

$$243 \cdot 32,5 = 7800.$$

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი:

$$0,0125 \cdot 0,352.$$

სათანადოდ მივიღებთ წერტილს

ოთხი — სამი — ცხრა.

რადგანაც

$$(-1) + 0 - 1 = -2,$$

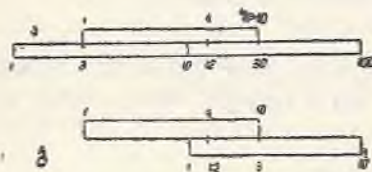
ამიტომ გვექნება

$$0,0125 \cdot 0,352 = 0,00439.$$

გავარჩიოთ ნამრავლი $3 \cdot 4$.

D სკალაზე ავიღოთ 3, ხოლო C სკალაზე — 4. მცოცის 1-ს მოვათავსებთ D სკალის 3-ზე. მაშინ C სკალის 4 გამოდის D სკალის გარეთ. ცხადია, თუ D სკალა სიგრძით ორჯერ მეტი იქნებოდა, მაშინ მეორე ნაწილში მოათავსდებოდა 10-დან 100-მდე რიცხვების ლოგარიტმები. ამის გამო ამ მეორე ნაწილში პირველი კატეგორიის ჰდეები ასეთი აღნიშვნით გვექნებოდა (ნახ. 10 ა):

10, 11, 12, ..., 99, 100.



ნახ. 10

ასეთ ლოგარიტმულ სახაზავზე 3-ის 4-ზე ნამრავლს C სკალის 4-ის ქვეშ მყოფი წერტილი 12 მოგვცემდა.

ამგვარად, 3-ის 4-ზე ნამრავლი მოგვცემნით ისეთ ლოგარიტმულ სკალაზე, რომელიც ორი ნაწილისაგან შედგება:

[1, 10], [10, 100].

თუ ასეთ ლოგარიტმულ შიმშას მოვაცილებთ პირველ ნაწილს, მივიღებთ მცოცის ისეთ მდგომარეობას, რომელიც მე-10 ბ ნახაზზეა ნაჩვენები. აქ D სკალის 3-ის თავზე მოთავსებულია C სკალის 10, ხოლო C სკალის 4-ის ქვეშ მოთავსებულია 12; $3 \cdot 4 = 12$. აქ ნამრავლში ორი ციფრია, ე. ი. ნამრავლის რიგი ტოლია თანამამრავლთა რიცხვების ჯამისა. აქ ისეთი შემთხვევა გვაქვს, რომ (3) გამოსახულების 0, $(l_1 + l_2)$ ერთზე მეტია, ამის

გამო 0, $(l_1 + l_2)$ -დან მიღებული 1 მთელი დაემატება $n_1 + n_2 - 2$ -ს, რომელიც მოგვცემს $n_1 + n_2 - 1$. ამიტომ ნამრავლის რიგია

$$N = n_1 + n_2,$$

ე. ი. ნამრავლის რიგი თანამამრავლთა რიცხვების ჯამის ტოლია.

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი: $625 \cdot 746$. ნამრავლის რიგი განისაზღვრება ტოლობით

$$N = 3 + 3 = 6,$$

ხოლო სათანადო ნამრავლი გვაძლევს:

ოთხი, ექვსი და ექვსი.

ამიტომ გვექნება:

$$625 \cdot 746 = 466000.$$

თუ დავაკვირდებით როგორც პირველ, ისე მეორე შემთხვევას, შევამჩნევთ ნამრავლის რიგის განსაზღვრის შემდეგ წესს: ნამრავლის რიგი ტოლია თანამამრავლთა რიცხვების ჯამისა, თუ მცოცი გაწეულია მარცხნივ, და ტოლია თანამამრავლთა რიცხვების ჯამისა ერთის გამოკლებით, თუ მცოცი გაწეულია მარჯვნივ.

4. გაყოფა გამრავლების შებრუნებული მოქმედებაა. ამის გამო D სკალაზე უნდა მოვქმედოთ გასაყოფი, მის თავზე მოვათავსოთ გამყოფი, ხოლო განაყოფი მოთავსდება C სკალის 1-ის ან 10-ის ქვეშ. განაყოფის რიგის განსაზღვრისათვის ასეთი წესი გვექნება: თუ განაყოფი მიიღება 10-ის ქვეშ, მაშინ განაყოფის რიგი ტოლია გასაყოფისა და გამყოფის რიგთა სხვაობისა, და განაყოფის რიგი ტოლია გასაყოფისა და გამყოფის რიგთა სხვაობისა ერთის მიმატებით, თუ განაყოფი მიიღება 1-ის ქვეშ.

მაგალითად,

$$625 : 3,26.$$

განაყოფში ვკითხულობთ

ერთი — ცხრა — ორი.

რიგი ასე განისაზღვრება:

$$N = 3 - 1 + 1 = 3.$$

ამიტომ

$$625 : 3,26 = 192.$$

ამგვარად, განაყოფის რიგი უდრის გასაყოფისა და გამყოფის რიგთა სხვაობას, თუ მცოცი მარცხნივაა გაწეული; და უდრის რიგთა სხვაობას, ერთის მიმატებით, თუ მცოცი მარჯვნივაა გაწეული.

ნამრავლისა და გამყოფის რიგთა დათვლის წესი შეიძლება გავაერთიანოთ.

თუ მოქმედება სრულდება მცოცის მარცხენა ნაპირით, მაშინ გამყოფის რიგი ტოლია ერთით გადიდებული მოცემული რიცხვების რიგთა სხვაობისა, ხოლო ნამრავლის რიგი ტოლია ერთით შემცირებული რიგთა ჯამისა. თუ მოქმედება სრულდება მცოცის მარჯვენა ნაპირზე, მაშინ შედეგის რიგი ტოლია რიგთა ჯამისა (გამრავლების დროს) ან რიგთა სხვაობისა (გაყოფის დროს).

ამის გამო ლოგარითმულ სახაზავზე მარცხნივ აწერია $Q + 1$, ხოლო მარჯვნივ $P - 1$.

5. ლოგარითმული შიშშით შეიძლება გამოითვალოს $\frac{ab}{c}$. ამისათვის

ჯერ უნდა შევასრულოთ გაყოფა $\frac{a}{c}$ და შემდეგ მიღებული განაყოფი გავამრავლოთ b -ზე. რიგი უნდა გამოითვალოს თითოეული მოქმედების შემდეგ.

მაგალითად, $\frac{3 \cdot 5}{2}$. ეს მოქმედება ასე შესრულდება: D სკალაზე ვიღებთ სანიშნო ხაზით 3-ს. C სკალას ისე ვამოძრავებთ, რომ C სკალის 2 მოხვდეს სანიშნო ხაზზე. 3-ის 2-ზე განაყოფი მოთავსებული იქნება C სკალის 1-ის ქვეშ. ამ შემდეგ არ ვკითხულობთ, მხოლოდ ვიმასოვრებთ, რომ ამ განაყოფის რიგია 1. შემდეგ სანიშნო ხაზით C სკალაზე მოვძებნოთ 5; 5-ის ქვეშ ვკითხულობთ: შეილი, ხუთი, ნული. 5-ზე გამრავლების შემდეგად ნამრავლის რიგია 1. ამიტომ პასუხი იქნება 7, 50.

თუ გვექნებოდა $\frac{abd}{ce}$, მაშინ მოქმედების ასეთი რიგით შევასრულებდით:

$$\frac{abd}{ce} = \{[(a : c) \cdot b] : e\} \cdot d.$$

მოვიგონოთ ის, რომ განაყოფის რიგი ტოლია მოცემული რიცხვების რიგთა სხვაობისა ერთის მიმატებით, თუ მცოცის მარჯვნივ გავწიეთ, ხოლო ნამრაველში რიგი ტოლია რიგთა ჯამისა ერთის გამოკლებით. ამის გამო $\frac{ab}{c}$ -ში, თუ მოქმედება მარცხნიდან მარჯვნივ გაწეული მცოცით სრულდება, რიგი უდრის მრიცხველში მყოფი რიცხვების რიგთა ჯამს, შემცირებულს მნიშვნელის რიგით. თუ მოქმედება შესრულდება მარტო მარცხნივ გაწეული მცოცით, მაშინაც კომბინირებული მოქმედების $\frac{ab}{c}$ -ს რიგი უდრის მრიცხველში მყოფი რიცხვების რიგთა ჯამს, შემცირებულს მნიშვნელის რიგით. მაგრამ, თუ მოქმედება არ სრულდება ერთი მიმდევ-

რობით, მაშინ დაგვეჭირდება მცოცის მარცხნივ ან მარჯვნივ გადატანა (მცოცის გადასროლა). ამით მრიცხველისა და მნიშვნელის რიგების სხვაობას მოემატება ან მოაკლებს 1. და, კერძოდ, თუ მცოცის გადასროლა დაგვეჭირდა მარცხნივ, მაშინ მიემატება 1 და, თუ გადასროლა დაგვეჭირდა მარჯვნივ, მაშინ გამოაკლებს 1.

ამგვარად, $\frac{abd}{cet}$ წილადის რიგი რომ მივიღოთ, ამისათვის ამ წი-

ლადის მრიცხველის თანამამრავლთა რიგების ჯამს გამოვავლოთ მნიშვნელის თანამამრავლთა რიგების ჯამი მივუმატოთ იმდენი ერთეული, მცოცის რამდენი გადასროლა დაგვეჭირდა მარცხნივ, და გამოვავლოთ იმდენი ერთეული, რამდენი გადასროლა დაგვეჭირდა მარჯვნივ.

$$\text{მაგალითად, } \frac{5,25 \cdot 9,65 \cdot 10,3}{4,26 \cdot 12,7}.$$

ამ მაგალითის გამოთვლის დროს დაგვეჭირდება მცოცის გადასროლა მარცხნივ 9,65-ზე გამრავლების დროს (+1) და გადასროლა მარჯვნივ 10,3-ზე გამრავლების დროს (-1), ამიტომ წილადის რიგი

$$N = (1 + 1 + 2) - (1 + 2) + 1 - 1 = 1.$$

მოქმედების შედეგად ვკითხულობთ:

ცხრა, ექვსი და ხუთი.

მაშასადამე,

$$\frac{5,25 \cdot 9,65 \cdot 10,3}{4,26 \cdot 12,7} = 9,65.$$

6. მოქმედება 1: a -ზე შეიძლება შესრულდეს, როგორც მარცხნივ გაწეული მცოცით, ისე მარჯვნივ გაწეული მცოცით, შევთანხმდეთ, რომ ეს მოქმედება შევასრულოთ მარცხნივ გაწეული მცოცით.

$$\text{მაგალითად, } \frac{1}{6,21} = 0,160 \quad (N = 1 - 1 = 0).$$

7. განვიხილოთ ლოგარითმის მანტისების სკალა — L . სკალაზე პირველი კატეგორიის ჰდეებს აწერია (0), 1, 2, ..., 9, (10).

პირველი კატეგორიის მონაკვეთები დაყოფილია ათ-ათ ნაწილად (მეორე კატეგორიის მონაკვეთები). მეორე კატეგორიის მონაკვეთები დაყოფილია ხუთ-ხუთ ნაწილად, ე. ი. მესამე კატეგორიის მონაკვეთის ფასი ორია, ასე რომ სკალაზე წერტილი სამი ნიშნადი ციფრით წაიკითხება.

L სკალით ასე უნდა ვისარგებლოთ: მოცემული a რიცხვი მოვნახოთ D სკალაზე სანიშნო ხაზის საშუალებით და L სკალაზე სანიშნო ხაზის ქვეშ მოთავსებული ჰდე მოგვცემს a რიცხვის ლოგარითმის მანტისას.

მახასიათებელი კი, როგორც ცნობილია, მოცემული რიცხვის რიგით განისაზღვრება.

მაგალითად, ვიპოვოთ $\lg 5,27$.

მოვნახოთ D სკალაზე სანიშნე ხაზით ხუთი — ორი — შვიდი. სკალაზე სანიშნე ხაზის ქვეშე ვკითხულობთ:

შვიდი — ორი — ორი.

მახასიათებელი ტოლია ნულის.

ამგვარად,

$$\lg 5,27 = 0,722.$$

ცხადია, თუ მოცემული გვექნება რიცხვის ლოგარითმი, შეგვიძლია განვსაზღვროთ თვით რიცხვი. ამისათვის საკმარისია L სკალაზე მოვნახოთ ლოგარითმის მანტისა და სანიშნე ხაზით სათანადო წერტილი განვსაზღვროთ D სკალაზე. რიცხვის რიგი, როგორც ცნობილია, მახასიათებლის საშუალებით განისაზღვრება.

მაგალითად, ვიპოვოთ a , თუ

$$\lg a = 2,155.$$

სკალაზე ვკითხულობთ:

ერთი, ოთხი, სამი.

მაშასადამე, გვექნება

$$a = 0,0143.$$

8. ლოგარითმული სახაზავის ზედა ნაწილში მოთავსებულია რიცხვთა კვადრატების A და კუბების K სკალები.

თუ რაიმე რიცხვს ავიღებთ D სკალაზე, მაშინ მისი კვადრატი მოთავსდება სანიშნე ხაზის ქვეშ A სკალაზე (შეგვიძლია ავიღოთ C და B სკალა). A სკალა გაყოფილია ორ ნაწილად $[1, 10]$, $[10, 100]$. პირველ ნაწილში a რიცხვის კვადრატის რიგი ტოლია $2n-1$, ხოლო მეორე ნაწილში კვადრატის რიგი ტოლია $2n$, სადაც n მოცემული a რიცხვის რიგია.

მაგალითად, ვიპოვოთ $25,6^2$.

D სკალის წერტილი: ორი, ხუთი და ექვსი A სკალაზე იძლევა წერტილს: ექვსი, ხუთი და ხუთი. რადგანაც A სკალაზე მიღებული წერტილი იმყოფება A სკალის პირველ ნაწილში, ამიტომ $25,6^2$ -ის რიგი ტოლია $2 \cdot 2 - 1 = 3$. ამიტომ გვექნება:

$$25,6^2 = 655.$$

ვიპოვოთ $0,0675^2$.

სკალაზე მეორე ნაწილში ვკითხულობთ: ოთხი, ხუთი, ექვსი. რიგი კი ტოლია $2 \cdot (-1) = -2$.

მაშასადამე, გვექნება:

$$0,0675^2 = 0,00456.$$

ცხადია, A და D სკალის საშუალებით შეგვიძლია რიცხვიდან კვადრატული ფესვი მოვნახოთ. მაგრამ შეეთანხმდეთ, თუ რიცხვის რიგი ერთია, იგი ავიღოთ A სკალის პირველ ნაწილში, ხოლო, თუ ორია — ავიღოთ მეორე ნაწილში. ორივე შემთხვევაში კვადრატული ფესვის რიგი ერთის ტოლია. თუ კვადრატულ ფესვქვეშ რიცხვის რიგი 1-საგან ან 2-საგან განსხვავებულია, იგი მარტივი გარდაქმნით ამ შემთხვევებზე მიიყვანება.

მაგალითად, ვიპოვოთ $\sqrt{527}$. ეს მაგალითი ასე გადავწეროთ:

$$\sqrt{527} = 10 \sqrt{52,7}.$$

ფესვქვეშ მყოფი რიცხვის რიგი 2-ის ტოლია, ამიტომ $52,7$ ავიღოთ სკალის მეორე ნაწილში. D სკალაზე სათანადოდ მივიღებთ: შვიდი, ორი და ექვსი. ამიტომ გვექნება:

$$\sqrt{527} = 10 \cdot 7,26 = 72,6.$$

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი. ვიპოვოთ $\sqrt{0,0526}$. ეს მაგალითი ასე გარდავქმნათ:

$$\sqrt{0,0526} = 10^{-1} \sqrt{5,26}.$$

$5,26$ მოვძებნოთ A სკალის პირველ ნაწილში. D სკალაზე სათანადოდ მივიღებთ წერტილს: ორი — ორი — ცხრა.

გვექნება:

$$\sqrt{0,0526} = 10^{-1} \cdot 2,29 = 0,229.$$

განვიხილოთ რიცხვთა კუბების სკალა — K .

კუბების სკალა გაყოფილია სამ ნაწილად, $[1, 10]$, $[10, 100]$, $[100, 1000]$. D სკალაზე ავიღოთ მოცემული a რიცხვი, a^3 მოინახება კუბების სკალაზე. თუ a^3 -ს K სკალის პირველ ნაწილში მივიღებთ, მაშინ მისი რიგი

$$N = 3n - 2.$$

თუ a^3 მეორე ნაწილში მივიღებთ, მაშინ

$$N = 3n - 1,$$

ხოლო, თუ მესამე ნაწილში —

$$N = 3n,$$

სადაც n არის მოცემული a რიცხვის რიგი.

მაგალითად,

$$19,8^3=776 \cdot 10, \quad N=3 \cdot 2 - 2=4 \text{ (პირველ ნაწილში);}$$

$$2,46^3=14,9, \quad N=3 \cdot 1 - 1=2 \text{ (მეორე ნაწილში);}$$

$$0,00685^3=0,321 \cdot 10^{-8}, \quad N=3(-2)=-6 \text{ (მესამე ნაწილში).}$$

ცხადია, K და D სკალის საშუალებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ კუბური ფესვი.

კუბური ფესვი ყოველთვის ისე შეგვიძლია გარდავქმნათ, რომ ფესვქვეშა რიცხვის რიგი იყოს 1,2 ან 3. თუ ფესვქვეშა რიცხვის რიგი არის 1, მაშინ იგი მოვწახოთ K სკალის პირველ ნაწილში, თუ რიგი არის 2, მოვძებნოთ K სკალის მეორე ნაწილში, ხოლო თუ ფესვქვეშა რიცხვის რიგი არის 3, მაშინ მოვძებნოთ მესამე ნაწილში. სამივე შემთხვევაში კუბური ფესვის რიგი ერთის ტოლია.

მაგალითად, ვიპოვოთ: $\sqrt[3]{6750}$, $\sqrt[3]{0,0224}$, $\sqrt[3]{0,000415}$. გვექნება:

$$\sqrt[3]{6750}=10\sqrt[3]{6,75}=10 \cdot 1,89=18,9 \text{ (პირველ ნაწილში);}$$

$$\sqrt[3]{0,0224}=10^{-1} \cdot \sqrt[3]{22,4}=10^{-1} \cdot 2,82=0,282 \text{ (მეორე ნაწილში);}$$

$$\sqrt[3]{0,000415}=10^{-3} \sqrt[3]{415}=10^{-3} \cdot 7,46=0,00746 \text{ (მესამე ნაწილში).}$$

9. C და D სკალები ნებისმიერად ერთმანეთს შევუთავსოთ. დავაკვირდეთ წერტილებს. შევამჩნევთ, რომ

$$\overline{c_1} \cdot \overline{c_2} = \overline{d_1} \cdot \overline{d_2}$$

ანუ

$$\overline{c_2} = \overline{c_1} \cdot \overline{d_2} / \overline{d_1}.$$

ე. ი.

$$m \lg c_2 - m \lg c_1 = m \lg d_2 - m \lg d_1,$$

საიდანაც გვექნება:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1}.$$

ეს ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$\frac{d_1}{c_1} = \frac{d_2}{c_2}.$$

აქედან ცხადია, თუ ამ ოთხი სიდიდიდან სამი ცნობილია, მეოთხე სიდიდე საზნაუვის საშუალებით განისაზღვრება.

მაგალითად, ვიცით d_1 , d_2 , c_1 , მაშინ c_2 -ის განსაზღვრავად ასე უნდა მოვიქცეთ: D სკალაზე სანიშნო ხაზი მოვათავსოთ d_1 წერტილზე, შემდეგ მცოცი ისე ვამოძრაოთ, რომ c_1 მოხვდეს სანიშნო ხაზზე. მცოცი უძრავად

დავტოვოთ, ხოლო სანიშნო ხაზი გადავიტანოთ D სკალის d_2 წერტილზე. C სკალაზე, d_2 წერტილის თავზე მოთავსებული იქნება c_2 .

თუ მცოცის გადასროლა არ დაგვჭირდა, მაშინ (4)-დან რიგის განსაზღვრისათვის გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$n_1 - p_1 = n_2 - p_2.$$

აქედან n_1 , n_2 , p_1 , p_2 სათანადოდ c_1 , c_2 , d_1 , d_2 -ის რიგია.

მაგალითად, ვიპოვოთ x , რომელიც შემდეგ პროპორციას აკმაყოფილებს:

$$\frac{252}{1,96} = \frac{31,5}{x}.$$

2,52 მოვწახოთ D სკალაზე; მის თავზე მოვათავსოთ C სკალის 1,96. შემდეგ D სკალაზე ვიპოვოთ 3,15. მაშინ 3,15-ის თავზე, C სკალაზე წავიკითხავთ:

ორი — ოთხი — ხუთი.

x -ის რიგისათვის გვექნება:

$$N_x - 2 = 1 - 3;$$

საიდანაც

$$N_x = 1 - 3 + 2 = 0.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$x = 0,245.$$

ავილოთ კიდევ მაგალითი:

$$\frac{2,15}{94,5} = \frac{348}{x}$$

D სკალაზე მოვწახოთ 2,15. მის თავზე მოვათავსოთ C სკალის 94,5. D სკალაზე ავილოთ 348. მიღებული წერტილის თავზე, C სკალაზე არ არის მცოცი. ამიტომ დავიმახსოვროთ მცოცის 10-ანის მდებარეობა სანიშნო ხაზით. გადავისროლოთ მცოცი მარჯვნივ, მაშინ D სკალის 348-ის თავზე მოთავსდება: ერთი, ხუთი და სამი. რადგანაც მცოცის ერთი გადასროლა იყო მარჯვნივ (—1), მაშინ x -ის რიგი ასე განისაზღვრება:

$$N_x - 3 - 1 = 2 - 1,$$

საიდანაც

$$N_x = 3 - 2 - 1 - 1 = 5.$$

ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$x = 15300.$$

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი:

$$\frac{465}{2,24} = \frac{1,63}{x}$$

D სკალის 465-ის თავზე მოვათავსოთ C სკალის 2,24. D სკალის 1,63-ის თავზე C სკალა აღარ არის. ამიტომ მცოცი გადავისროლოთ მარცხნივ (—1). მაშინ x -ის რიგი ასეთ დამოკიდებულებას მოგვცემს:

$$N_x - 1 - 1 = 1 - 3,$$

საიდანაც

$$N_x = -2.$$

მცოცის მარცხნივ გადასროლის შემდეგ 1,63-ის თავზე ვკითხულობთ შვიდი, რვა და ხუთი.

საბოლოოდ მივიღებთ

$$x = 0,00785.$$

10. B და C სკალების შორის მოთავსებულია ე. წ. შებრუნებული სკალა R . ეს სკალა C სკალაა, მაგრამ მასზე C სკალა წარმოდგენილია შებრუნებული რიგით:

$$10, 9, 8, \dots, 2, 1.$$

ძველი ნიშნის სახაზავებზე ეს სკალა არ არის; 1948 წლიდან გამოშვებულ ლოგარითულ სახაზავებზე ეს სკალა წითელი ჭდეებითაა აღნიშნული, რის გამოც შებრუნებულ სკალას „წითელ“ სკალასაც უწოდებენ.

შებრუნებული სკალით შეიძლება შესრულდეს გამრავლება.

D სკალაზე ავიღოთ a ჭდე და მის მოპირდაპირედ მდებარე ჭდე b — წითელ სკალაზე. თუ წარმოვიდგენთ, რომ b ჭდე გამოსახავს 10-დან b -მდე 1გ b -ს, მაშინ 10-ის ქვემოთ D სკალაზე ჭდე p მოგვცემს ab ნამრავლს.

$$p = ab.$$

ნამრავლის რიგს ასე განესაზღვრავთ.

თუ ნამრავლი C სკალის 10-ის ქვეშაა, ნამრავლის რიგი ტოლია თანამრაველთა რიგების ჯამისა ერთის გამოკლებით. თუ ნამრავლი C სკალის 1-ის ქვეშაა, მაშინ ნამრავლის რიგი ტოლია თანამრაველთა რიგების ჯამისა.

თუ დავაკვირდებით რიცხვებს, რომლებსაც R და A სკალებზე ურთიერთმოპირდაპირე მდებარეობა აქვთ, მივიღებთ, რომ მცოცის ნებისმიერ მდებარეობაში ადგილი აქვს ტოლობას:

$$r\sqrt{a} = d, \quad (5)$$

სადაც r, a, d სათანადოდ R, A და D სკალაზე აღებული რიცხვებია. ასევე, თუ შევადარებთ რიცხვებს, რომელთა R და K სკალებზე ურთიერთმოპირდაპირე მდებარეობა აქვთ, მივიღებთ:

$$r\sqrt{k} = d, \quad (6)$$

სადაც r, k, d სათანადოდ რიცხვებია R, K და D სკალებზე. ცხადია, მიღებული (5) და (6) ფორმულებით ისეთი ამოცანები ამოიხსნება, სადაც r, d, a (r, d, k) სიდიდეებიდან ცნობილი იქნება, სათანადოდ, ორი სიდიდე.

2. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სკალები

1. მცოცის უკანა მხარეზე მოთავსებულია ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სკალები: $\sin x$ (S), $\sin x \approx \operatorname{tg} x$ (ST) და $\operatorname{tg} x$ (T).

გადავებრუნოთ მცოცი და მოვათავსოთ სახაზავის კილოებში (ნახ. 11).

ST სკალა დანუსხულია $0', 35', 40', 50', 1^\circ, \dots, 5^\circ 30', 5^\circ 40', 5^\circ 45'$; S სკალაზე დანუსხვა იწყება $5^\circ 45', 5^\circ 50', 6^\circ, \dots, 90^\circ$ -მდე, ხოლო T სკალაზე — $5^\circ 45', 5^\circ 50', 6^\circ, \dots, 45^\circ$ -მდე. ამ სკალებისა და D სკალის ურთიერთშესაბამისობა მოგვცემს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნატურალურ მნიშვნელობებს.

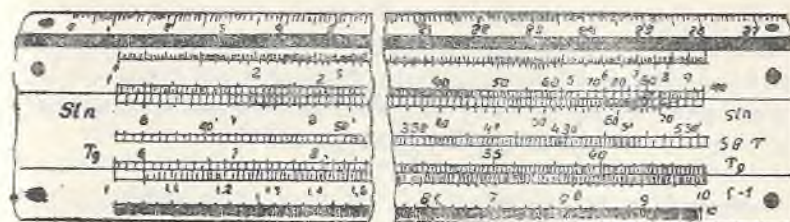
მაგალითად,

$$\sin 0^\circ 40' = 0,0116; \sin 0^\circ 35' = 0,0102; \sin 3^\circ 30' = 0,0610;$$

$$\sin 5^\circ 30' = 0,0963; \sin 5^\circ 40' = 0,0992; \sin 5^\circ 50' = 0,102.$$

ამგვარად, ST სკალის საშუალებით მიღებულ ნიშნად ციფრებს წინ უნდა დაეწეროს 0,0.

ახლა განვიხილოთ $\sin x$ -ის მნიშვნელობანი, როცა x მეტია $5^\circ 50'$ -ზე. $\sin 6^\circ = 0,145$; $\sin 12^\circ 30' = 0,216$; $\sin 25^\circ 20' = 0,428$ და ა. შ.



ნახ. 11

ამგვარად, S სკალით $\sin x$ -ის მნიშვნელობის მისაღებად განსაზღვრულ ნიშნად ციფრებს წინ ეწერება 0. ასევე მივიღებთ $\operatorname{tg} x$ -ის მნიშვნელობას T სკალის საშუალებით:

$\operatorname{tg} 10^{\circ}20' = 0,182$; $\operatorname{tg} 35^{\circ}30' = 0,713$. $\operatorname{tg} 43^{\circ}30' = 0,949$ და ა. შ.

2. ცხადია, თუ გვეცოდინება $\sin x$ და $\operatorname{tg} x$ -ის მნიშვნელობა, მაშინ S , T და ST სკალების საშუალებით განვსაზღვრავთ სათანადოდ x -ის მნიშვნელობას. ამისათვის საკმარისია $\sin x$ -ის მნიშვნელობა მოვნახოთ D სკალაზე და სათანადო x -ის მნიშვნელობა ავთვალოთ S სკალაზე.

3. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სკალა ცვლის C სკალას, ამიტომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების სკალებით და D სკალით შეგვიძლია ყველა ის მოქმედება ვაწარმოოთ, რაც C და D სკალებით ვაწარმოვით.

მაგალითად, $\sin 3^{\circ}30' \cdot 3,45 = 0,564$.

რადგანაც პასუხი მიიღება მარცხნივ გაწეული მცოცით, ამიტომ ნამრავლის რიგი

$$N = (-1) + 1 = 0.$$

გამოვთვალოთ $\sin^2 31^{\circ}20'$.

სკალაზე ვკითხულობთ: ორი, შვიდი და ნული. რადგანაც საძებნა რიცხვი მოხვდა A სკალის მეორე ნაწილში, ამიტომ $\sin^2 31^{\circ}20'$ -ის რიგი ტოლია $2 \cdot 0 = 0$. მაშასადამე, მივიღებთ:

$$\sin^2 31^{\circ}20' = 0,270.$$

გამოვთვალოთ $\lg \sin 55^{\circ}40'$;

L სკალაზე $\sin 55^{\circ}40'$ -ის პირდაპირ ვკითხულობთ:

ცხრა — ერთი — შვიდი.

რადგანაც $\sin 55^{\circ}40'$ -ში ნიშნად ციფრამდე ერთი 0-ია, ამიტომ მახასიათებელი ტოლია $\overline{1}$ -ის.

$$\lg \sin 55^{\circ}40' = \overline{1},917.$$

გამოვთვალოთ $\operatorname{tg} 35^{\circ} \cdot \sin 38^{\circ}$.

D სკალაზე დავიხატოვროთ მაჩვენებელი ხაზით $\operatorname{tg} 35^{\circ}$. შემდეგ გაწეოთ მცოცი ისე, რომ მაჩვენებელ ხაზზე მოხვდეს მცოცის ბოლო. მცოცი დავტოვოთ უძრავად და მასზე მოვძებნოთ მაჩვენებელი ხაზით $\sin 38^{\circ}$. მაჩვენებელი ხაზით ქვეშ D სკალაზე ვკითხულობთ:

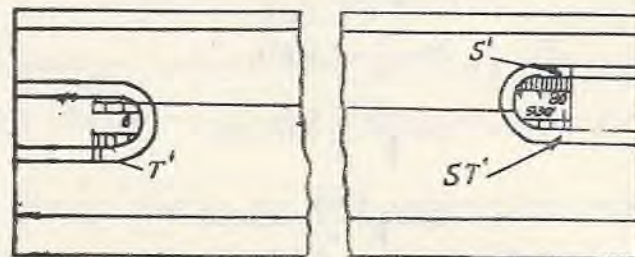
ოთხი — სამი — ერთი.

ნამრავლის $\operatorname{tg} 35^{\circ} \cdot \sin 38^{\circ}$ -ის რიგი იქნება ნული, ამიტომ მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} 35^{\circ} \cdot \sin 38^{\circ} = 0,431.$$

4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობანი შეიძლება განვსაზღვროთ მცოცის გაღებულების გარეშე. ამისათვის უნდა ვისარგებლოთ ლოგარითული შიშის ზურგზე მოთავსებული ამონაჭრებით (ნახ. 12).

მარჯვენა ამონაჭერზე მოთავსებულია ორი ჯგუფი: ზედა ჯგუფი ეყრდნობა სინუსის S სკალას და ქვედა — სინუსისა და ტანგენსის ST სკალას. მარცხენა ამონაჭერზე მოთავსებულია ერთი ჯგუფი, რომელიც ეყრდნობა ტანგენსის T სკალას. ეს ჯგუფები აღენიშნოთ S' , ST' , T' -ით.



ნახ. 12

ვისარგებლოთ ამ ჯგუფებით. ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ $\sin 14^{\circ}20'$ -ის მნიშვნელობა. გადავებრუნოთ ლოგარითული სახაზავი და გამოვწიოთ მცოცი მარჯვნივ — მანამდე, ვიდრე S' ჯგუფი არ შეუთავსდება S სკალის $14^{\circ}20'$ -ს. შემოვებრუნოთ ლოგარითული შიშის პირით ჩვენკენ და D სკალის 10-ის თავზე წავიკითხავთ:

ორი — ოთხი — რვა.

ამ ნაწილზე $\sin x$ -ის რიგია 0, ამიტომ გვექნება:

$$\sin 14^{\circ}20' = 0,248.$$

რატომ მივიღეთ ასეთი მოქმედებით $\sin 14^{\circ}20'$ -ის მნიშვნელობა? როგორც ვიცით, მახვილი კუთხის მნიშვნელობა x უნდა ავიღოთ S -ის სკალაზე, მაშინ კუთხის მნიშვნელობის პირდაპირ D სკალაზე მივიღებთ $\sin x$ -ის მნიშვნელობას. მაგრამ D და C სკალები ერთი და იგივეა, ამის გამო $\sin x$ -ის მნიშვნელობა იმყოფება S სკალის უკან C სკალაზე. სხვა-ნაირად, მცოცი რომ გამჭვირვალე ყოფილიყო, მაშინ x -ის ქვეშ C სკალაზე წავიკითხავდით $\sin x$ -ის მნიშვნელობას. რადგანაც S' ჯგუფი ემთხვევა D სკალის 10-ს, ამიტომ როცა კუთხის მნიშვნელობა მოთავსდება S' -ზე, მაშინ $\sin x$ -ის მნიშვნელობას მივიღებთ C სკალაზე D სკალის 10-ის პირდაპირ. ზუსტად ასევე გვექნება ST სკალისათვის, მაგრამ მხედველობაში მივიღოთ, რომ ST -ზე $\sin x$ და $\operatorname{tg} x$ -ის რიგია (-1) .

$\operatorname{tg} x$ -ის მნიშვნელობას მივიღებთ, თუ T' -ს მოვათავსებთ სათანადო x კუთხეზე და ნიშნად ციფრებს წავიკითხავთ C სკალაზე D სკალისათვის წერტილის პირდაპირ. $\operatorname{tg} x$ -ის რიგი არის 0, $0 \leq x \leq 45^{\circ}$.

მაგალითად, $\operatorname{tg} 30^{\circ}30' = 0,589$.

3. განსაკუთრებული აღნიშვნები ლოგარითმულ სახაზავზე

ტექნიკური ამოცანების ამოხსნების შემთხვევაში დიდი მნიშვნელობა აქვს ზოგიერთ მუდმივ სიდიდეს. ეს მუდმივი სიდიდეებია:

$$\pi = 3,14159;$$

$$M = \frac{1}{\pi} = 0,31831;$$

$$C = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,12838;$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = 3,56825;$$

$$\rho^0 = 57,296 \text{ რადიანი გრადუსებით};$$

$$\rho' = 3437,7 \text{ „ წუთებით};$$

$$\rho'' = 206265 \text{ „ წამებით}.$$

ეს სიდიდეები ლოგარითმული სახაზავის სკალაზე აღნიშნულია განსაკუთრებული ჭდეებით.

ამ განსაკუთრებული ჭდეებით ამოვხსნათ რამდენიმე ამოცანა.

1. წრის დიამეტრი $d = 5,21$ მ. რას უდრის წრეწირის სიგრძე l და წრის ფართობი S ?

როგორც ცნობილია,

$$l = \pi d.$$

π მოვნახოთ D სკალაზე, d მოვნახოთ C სკალაზე, l მიიღება D სკალაზე: ერთი, ექვსი, ოთხი, ექვსი. π -ის რიგია 1, d -ს რიგიც 1-ია, ამიტომ l -ის რიგი იქნება 2.

საბოლოოდ მივიღებთ $l = 16,36$ მ.

ფართობის განსაზღვრისათვის უნდა ვისარგებლოთ ფორმულით

$$S = \pi R^2 = \frac{(2R)^2}{4} = \left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

D და C სკალების საშუალებით ვიპოვოთ $\frac{d}{c}$.

ამ შეფარდებას D სკალაზე წაკითხვა არ ესაჭიროება, მხოლოდ ვიცოდეთ, რომ $\frac{d}{c}$ მიიღება მცოცის მარცხენა ნაპირით, ამიტომ $\frac{d}{c}$ -ს რიგი

$$N = 1 - 1 + 1 = 1.$$

$\frac{d}{c}$ -ს თავზე A სკალაზე მეორე ნაწილში ვკითხულობთ:

ორი, ერთი და სამი.

საბოლოოდ გვექნება:

$$S = 21,3 \text{ მ}^2.$$

ლოგარითმულ სახაზავზე მყოფი ჭდე $c_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}}$ იხმარება წრის ფართობის განსაზღვრავად, მაგრამ ამ ჭდით ვსარგებლობთ მეტად იშვიათად.

ჭდე $M = \frac{1}{\pi}$ იხმარება ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელად სანიშნო ხაზის დაყენებით. მართლაც, ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია

$$S = \pi dh = \frac{dh}{\frac{1}{\pi} M},$$

სადაც d ცილინდრის ფუძის დიამეტრია, ხოლო h სიმაღლე.

S -ის გამოთვლა ასე შესრულდება:

$$S = (d : M) \cdot h.$$

მაგალითად, ვიპოვოთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი დიამეტრი 4,85 მ-ია და სიმაღლე — 6,35 მ.

D სკალაზე ვიპოვოთ $d = 4,85$ მ. მის თავზე მოვათავსოთ C სკალის M . დავტოვოთ უძრავად მცოცი (ამ მაგალითში მცოცის გადასროლა არ გვჭირდება) და C სკალაზე მოვნახოთ $h = 6,35$. მის ქვეშ D სკალაზე ვკითხულობთ:

ცხრა — ექვსი — ექვსი.

ამ კომბინირებული მოქმედების რიგი იქნება

$$N = 1 + 1 - 0 = 2.$$

ამგვარად, საბოლოოდ გვექნება:

$$S = 96,6 \text{ მ}^2.$$

გრადუსის რადიანებში და, პირიქით, რადიანების გრადუსებში გადაყვანისათვის არსებობს ჭდეები ρ^0 , ρ' , ρ''

$$\rho^0 = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,296^\circ;$$

$$\rho' = \frac{360 : 60'}{2\pi} = 3437,7';$$

$$\rho'' = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60''}{2\pi} = 20626,5'',$$

ჯერ განვიხილოთ რადიანის გრადუსებში გადაყვანა.

მაგალითად, გამოვსახოთ 0,645 რადიანი გრადუსებში.

ამისათვის საკმარისია 0,645 ჩვეულებრივად გავამრავლოთ ρ° -ზე.

D სკალაზე ვკითხულობთ:

სამი — ექვსი — ცხრა.

ნამრავლის რიგი ტოლია: $0 + 2 = 2$, მაშასადამე, 0,645 რადიანი უდრის $36,9^\circ = 36^\circ 54'$.

ცხადია, ასევე შესრულდება 0,645 რადიანის გამოსახვა წუთებში (ρ') და წამებში (ρ''). ამ რიცხვების რიგებია, სათანადოდ, 4 და 6.

ამოვხსნათ შებრუნებული ამოცანა. რამდენ რადიანს უდრის $10^\circ 15' 20''$?

აქ დაგვჭირდება შემდეგი განაყოფების გამოთვლა: $\frac{10^\circ}{\rho^\circ}, \frac{15'}{\rho'}, \frac{20''}{\rho''}$:

$$\frac{10^\circ}{\rho^\circ} = 0,1745, N = 2 - 2 = 0 \text{ (მცოცი მარცხნივა),}$$

$$\frac{15'}{\rho'} = 0,00438, N = 2 - 4 = -2,$$

$$\frac{20''}{\rho''} = 0,000097, N = 2 - 6 = -4.$$

სათანადო შეკრება მოგვცემს: $10^\circ 15' 20''$ ტოლია 0,1790 რადიანს.

§ 8. მათემატიკური ცხრილები

1. გამოთვლით პრაქტიკაში იხმარება სხვადასხვა ცხრილები. ცხრილების საშუალებით მარტივდება გამოთვლითი სამუშაო და იძლევა დროის დიდ ეკონომიას.

შეტად გავრცელებულია ერთი ცვლადის ფუნქციის ცხრილები. ასეთია რიცხვთა კვადრატების, კუბების, შებრუნებული სიდიდეების, ლოგარითმების, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების, ცილინდრული ფუნქციების ცხრილები და სხვ.

არსებობს სპეციალური ცხრილები, რომლებიც იძლევიან რიცხვთა ნამრავლებს და განაყოფს, ასეთი ცხრილები შეიძლება გაიყოს ორ კლასად. პირველ კლასს მიეკუთვნება ცხრილები, რომლებიც უშუალოდ იძლევიან ნამრავლს, ხოლო მეორე კლასს, რომლებიც იძლევიან ნამრავლს გარკვეული გარდაქმნის შემდეგ. მეორე კლასს მიეკუთვნება რიცხვთა ლოგარითმების ცხრილები. ამ ცხრილებით რიცხვთა გამრავლება დაიყვანება რიცხვთა შეკრებაზე.

ცხრილების სიზუსტე განისაზღვრება ცხრილში ნიშნად ციფრთა რაოდენობით (იხ. თ. X, § 2, ნიშნადი ციფრი). მაგალითად, ბ. ი. სეგალის და კ. ა. სემენდიავის „ხუთნიშნა მათემატიკური ცხრილები“, ვ. მ. ბრადისის „ოთხნიშნა ცხრილები“ და სხვ. ყველა ამ ცხრილში ფუნქციის მნიშვნელობა მიახლოებითია, ფუნქციის მნიშვნელობა დამრგვალებულია სათანადო რაოდენობის ნიშნად ციფრამდე.

ზუსტ მნიშვნელობათა ცხრილებს წარმოადგენენ ო'რურკის „გამრავლების ცხრილები“. ამ ცხრილებში მოთავსებულია 11-დან 1000-მდე ორნიშნა რიცხვების ნამრავლი. მამრავლი მოთავსებულია ყოველი ცხრილის თავზე.

მაგალითად ვიპოვოთ $34769 \cdot 2454$.

მოქმედება ასე ჩავწეროთ:

$$34700 \cdot 2400 = 83280000$$

$$34700 \cdot 54 = 1873800$$

$$69 \cdot 2400 = 165600$$

$$69 \cdot 54 = 3726$$

$$34769 \cdot 2454 = 85323126.$$

გამრავლების ცხრილით შეგვიძლია შევასრულოთ გაყოფაც. თუ ვასაყოფი გამოყოფის ჯერადი არაა, განაყოფი მიახლოებითი იქნება.

მაგალითად, ვიპოვოთ $3499878 : 347$.

347-ის ნამრავლების ცხრილში უდიდესი ნამრავლი ხუთნიშნაა. თუ 3499878 -სა და ცხრილში მოთავსებულ უახლოეს ნაკლებ რიცხვს შორის სხვაობა 347-ზე ნაკლებია, მაშინ ავიღებთ ამ ხუთნიშნა რიცხვს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ავიღებთ ორნიშნა რიცხვს. გაყოფა მთლიანად ასე შესრულდება:

$$3499878 : 347 = 1086, 1037.$$

$$\begin{array}{r} 3470 \\ - \end{array}$$

$$29878$$

$$\begin{array}{r} 29842 \\ - \end{array}$$

$$3600$$

$$\begin{array}{r} 3470 \\ - \end{array}$$

$$13000$$

$$\begin{array}{r} 12839 \\ - \end{array}$$

$$161$$

2. გავარჩიოთ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილის შედგენა:

ვიდრე დავიწყებდეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლას რაიმე ფორმულით, უნდა შევადგინოთ ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლის 30. გ. კოშლამე

პროგრამა (სქემა): მოვიფიქროთ მოქმედებათა შესრულების რიგი და შეაღებდეთ გამოთვლების ჩაწერის ფორმა.

ფორმულით მოცემული გამოსახულება უნდა დაეანაწილოთ ელემენტარულ მოქმედებებად. შედეგის ჩასაწერად უნდა მოვაშალოთ ბლანკი, სადაც თითოეული სვეტი განიკუთვნება ცალკეული შედეგების ჩასაწერად. თუ გამოვიყენებთ გამოთვლების საშუალებებს, მაშინ შესაძლებელია შევადგინოთ რამდენიმე ელემენტარული მოქმედება. მაგალითად, თუ გამოთვლებს გამოვთვლით მანქანით ვაწარმოებთ, მაშინ აღგებრული ჯამი შეგვიძლია მივიღოთ შეაღებდეთ გამოთვლების გარეშე. შეაღებდეთ გამოთვლების შედეგებს თვითონ მანქანა ინახავს.

ფუნქციის ცხრილის შედგენის ნათესაყოფად განვიხილოთ მაგალითი. შევადგინოთ

$$y = \frac{ax^3 + b\sqrt{x}}{cx^2 + d} \quad (1)$$

ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი $a \leq x \leq b$ შეაღებდეთ $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ მნიშვნელობებისათვის.

თუ გვინდა ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა არგუმენტების ტოლად დაშორებულ მნიშვნელობათათვის, მაშინ $[a, b]$ შეაღებდეთ დავყოთ ტოლ ნაწილებად და ავიღოთ

$$x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = a + nh = b, \text{ სადა } h = \frac{b-a}{n}, n \text{ დავყოფს}$$

რიცხვია, h -ს ცხრილის ბიჯი ეწოდება.

გამოთვლებისათვის გვექნება შემდეგი სქემა:

	x	x^2	x^3	ax^3	$\sqrt{x}$	$b\sqrt{x}$	$ax^3 + b\sqrt{x}$	cx^2	$cx^2 + d$	y
n		$[1]^2$	$[1]^3$	$a \cdot [3]$	$\sqrt{[1]}$	$b \cdot [5]$	$[4] + [6]$	$c \cdot [3]$	$[8] + d$	$[7] : [9]$
	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[6]$	$[7]$	$[8]$	$[9]$	
1										
2										

თუ (1) ფუნქციის ცხრილს შევადგენთ საანგარიშო მანქანისა და ცხრილების დახმარებით, სადაც მოცემული იქნება რიცხვთა კვადრატები, კუბები და კვადრატული ფესვები, მაშინ შეგვიძლია გამოვტოვოთ $[3]$, $[5]$, $[6]$ და პირდაპირ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ცხრილებით.

გამოთვლები უნდა ჩავატაროთ სვეტების მიხედვით.

ცხადია, ცხრილებით და საანგარიშო მანქანებით მიღებული ფუნქციის მნიშვნელობანი უფრო ზუსტია ვიდრე ლოგარითმული სახაზავით, მაგრამ ლოგარითმული სახაზავი წარმატებით გამოიყენება იმ დარგებში, სადაც დიდი სიზუსტე საჭირო არაა. მაგალითად, სატყეო მეურნეობაში, მიწის მიწათმოქმედებაში და სხვ.

§ 9. თვლის სისტემა

გამომთვლელი მანქანების კონსტრუქცია და გამოთვლელ მანქანებზე ამოცანების ამოხსნის დაპროგრამება დიდათაა დაკავშირებული თვლის სისტემებთან — რიცხვების ჩაწერის ზერებთან.

თვლის სისტემები ორ ჯგუფად იყოფა: არაპოზიციური და პოზიციური სისტემები. პოზიციურ სისტემაში ერთი და იგივე ციფრი სხვადასხვა ადგილზე სხვადასხვა მნიშვნელობისაა. არაპოზიციურ სისტემაში კი ყოველ ნიშანს ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს ყოველ ადგილზე. არაპოზიციური სისტემა ე. წ. რომაული სისტემაა. ამ სისტემაში გამოყენებულია ლათინური ასოები. ასო I აღნიშნავს ერთს, ასო V აღნიშნავს ხუთს, ასო X — ათს, ასო L — ორმოცდაათს, ასო C — ასს, ასო D — ხუთასს, ასო M — ათასს და ა. შ. მაგალითად, ათას ხუთას ორმოცდა ექვსი ასე ჩაიწერება: MDXXXVI.

შემდეგში რომაულ სისტემაში შეტანილ იქნა ცვლილებები: რომ შევამციროთ რიცხვი, ამ რიცხვს წინ უნდა მივუწეროთ სათანადო რიცხვი, ხოლო, რომ გავადიდოთ, რიცხვს შემდეგ უნდა მივუწეროთ სათანადო რიცხვი. მაგალითად, ცხრა ასე გამოისახება: IX, თერთმეტი ასე გამოისახება: XI. XL გამოსახავს ორმოცს, XC გამოსახავს ოთხმოცდაათს, CM გამოსახავს ცხრაასს. ათას ცხრაას ოთხმოცდაექვსი ასე გამოისახება: MCMXXXVI.

ადვილი შესამჩნევია არაპოზიციური სისტემის ნაკლი: დიდი რიცხვების ჩასაწერად არ კმარა ადებული ნიშნები, საჭიროა დიდი რიცხვებისათვის ახალი და ახალი ნიშნები. მაგრამ რამდენი ახალი ნიშანიც არ უნდა ავიღოთ, მაინც არ იქნება საკმარისი დიდი რიცხვების გამოსახვისათვის.

სხვაგვარადაა საქმე პოზიციურ სისტემაში. ამ სისტემაში გვაქვს გარკვეული რაოდენობის ნიშნები (ციფრები), სადაც ყოველი ნიშანი ადგილმდებარეობის მიხედვით გამოსახავს სათანადო რიცხვს. ათობით სისტემაში ათი ციფრია: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. მაგალითად, ასთერთმეტი ასე გამოისახება: III. თითოეულ I-იანს სხვადასხვა ადგილის (პოზიციის) სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვს.

პოზიციური სისტემა შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი ფუძით, ძველ ბაბილონში გამოყენებული იყო სამოცობითი სისტემა. ამის დამადასტურებელია დღესაც შემორჩენილი საათის ან გრაღუსის სამოც ნაწილად

გაყოფა, წუთის სამოც ნაწილად გაყოფა და ა. შ. დღესაც გვხვდება თორმეტობითი სისტემა, ამის მაჩვენებელია დუჟინობით თვლა.

ათობით სისტემაში რიცხვი შემდეგნაირად წარმოდგინება:

$$g_5 g_4 g_3 g_2 g_1 g_0 = g_5 10^5 + g_4 10^4 + g_3 10^3 + g_2 10^2 + g_1 10 + g_0 10^0,$$

$$\text{მაგალითად, } 2475 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

განვიხილოთ თვლის ერთი სისტემიდან მეორე სისტემაში გადასვლის ხერხი. ავიღოთ თორმეტობითი სისტემა, სადაც ციფრებია

0, 1, 2, 3, ..., 9, α (ათი), β (თერთმეტი).

მაგალითად, $(9\alpha 43\beta)_{12}$ გამოსახავს:

$$9 \cdot 12^4 + \alpha \cdot 12^3 + 4 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12^1 + \beta \cdot 12^0 = 204\,491.$$

რიცხვი, რომელიც ათობით სისტემაშია მოცემული, თორმეტობითი სისტემაში მიმდევრობითი გაყოფით წარმოვადგინოთ: მაგალითად, 1711.

$$\begin{array}{r|l} 1711 & 12 \\ \hline 12 & 142 \\ \hline 51 & 12 \\ \hline 48 & 22 \\ \hline 31 & 12 \\ \hline 24 & 10 (= \alpha) \\ \hline 7 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \\ 12 \\ 11 (= \beta) \end{array}$$

ამრიგად,

$$(1711)_{10} = 11 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12 + 7 \cdot 12^0 = (\beta \alpha 7)_{12}.$$

ინდექსი 10 გვიჩვენებს რიცხვი 1171 მოცემულია ათობით სისტემაში, ხოლო ინდექსი 12 გვიჩვენებს თორმეტობითი სისტემას.

რიცხვის გამომთვლელ მანქანაში გამოსახულება დამოკიდებულია თვლის აღებულ სისტემაზე. მაგალითად, რუსულ საანგარიშოზე აღებულია 10 კოჭი ყოველ მავთულზე. მექანიკური გამომთვლელი მანქანები უმეტესად ათობით სისტემაზეა აგებული. მაგალითად, არითმომეტრი მუშაობს ათასობითი სისტემით. ყოველი ბორბალი, რომელიც რომელიმე თანრიგის ციფრებისათვისაა გათვალისწინებული, შეიცავს 10 კბილს, რომლებიც ყოველ 360°-ზეა განლაგებული.

მექანიკურ გამომთვლელ მანქანებში დიდი მნიშვნელობა არ აქვს, თუ რომელი სისტემაა აღებული. მაგალითად, თუ ხუთობითი თვლის სისტემა ავიღოთ, მაშინ საანგარიშოს ყოველ მავთულზე ხუთი კოჭი უნდა ავიღოთ. სწორედ ასეა ჩინურ საანგარიშოზე. ყოველ მავთულზე ხუთ-ხუთი კოჭია.

ელექტრონულ გამომთვლელ მანქანებში სხვა მდგომარეობა გვაქვს. ელექტრონულ ელემენტებს ორი მდგრადი მდგომარეობა აქვს. ელექტრო-ძეკანიკური რელე ან ჩაკეტილია ან ღიაა, კონდენსატორი ან დამუხტულია ან განმუხტულია, ელექტრონული ნათურა ან გაატარებს დენს ან არა. ნახევრად გამტარი ელექტრულ დენს მხოლოდ ერთი მიმართულებით ატარებს.

გამოყენებით რა ისეთ ელემენტებს, რომლებსაც მხოლოდ ორი მდგრადი მდგომარეობა აქვთ, უნდა ავირჩიოთ ისეთი თვლის სისტემა, რომელსაც ორი ციფრი აქვს. ასეთია თვლის ორობითი სისტემა. თვლის ორობითი სისტემაში გვაქვს ორი ციფრი: 0 და 1. ელემენტის ერთი მდგომარეობა მიღებულია 0-ის გამოსახვისათვის, ხოლო მეორე მდგომარეობა 1-ის გამოსახვისათვის.

როგორც ვხედავთ, ორობითი სისტემით გამოსახული რიცხვი მგზავდ კარგად წარმოდგინება ელექტრონული ელემენტებით. თვლის ორობითი სისტემას გამოთვლებში დიდი უპირატესობა აქვს სხვა სისტემებთან შედარებით.

განვიხილოთ მოქმედებანი თვლის ორობითი სისტემაში¹.

1) რიცხვის ორობითი სისტემიდან ათობით სისტემაზე გადაყვანა. მაგალითად, ორობითი სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი $(110101)_2$ გადავიყვანოთ ათობით სისტემაში. გვექნება

$$(110101)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 53.$$

თუ გვინდა ათობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი რომ წარმოვადგინოთ ორობითი სისტემით, უნდა შევასრულოთ მიმდევრობითი გაყოფა. მაგალითად, 43 წარმოვადგინოთ ორობითი სისტემით. გვექნება:

$$\begin{aligned} 43 &= 21 \cdot 2 + 1 = (10 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = ((5 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = \\ &= (((2 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = (((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + \\ &+ 1 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = (101011)_2. \end{aligned}$$

ამრიგად, ათობითი სისტემით წარმოდგენილი რიცხვი, რომ ჩაწეროთ ორობითი სისტემაში, უნდა ეწარმოოთ მიმდევრობითი გაყოფა — 2-ზე. ბოლო განყოფი და ბოლოდან მიღებული ნაშთები მოგვცემს ორობითი სისტემაში ჩაწერილ რიცხვს.

2) შეკრება. ერთ ციფრიანი რიცხვების შეკრებას აქვს შემდეგი სახე:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 10.$$

ფაქტიურად გვაქვს ჰეშმარიტი გამონათქვამის — 1 და მცდარი გამონათქვამის — 0 დიზიუნქცია.

¹ დაწვრილებითი იხ. გ. კოშლაძე, ელემენტარული მათემატიკის სპეციალური კურსი, არითმეტიკა, თბილისი, 1967, გვ. 205—219.

მრავალნიშნა ორობითი რიცხვების შეკრება შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$\begin{array}{r} + 1010011 \\ 11010 \\ \hline 1101101. \end{array}$$

ანალოგიურად შეიკრიბება წილადი რიცხვები:

$$\begin{array}{r} + 1011,101 \\ 1101,11 \\ \hline 11001,011. \end{array}$$

3) გამრავლება. რადგანაც რიცხვის 1-ზე გამრავლება რიცხვს არ ცვლის, ამის გამო გამრავლება სამრავლის გადაადგილებაზე და სათანადოდ შეკრებაზე მიიყვანება.

მაგალითად,

$$\begin{array}{r} \times 10101 \\ 110 \\ \hline + 10101 \\ 10101 \\ \hline 1111110; \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 10011 \\ 1001 \\ \hline + 10011 \\ 10011 \\ \hline 10101011. \end{array}$$

ასევე მარტივად სრულდება გამოკლებაც და გაყოფაც:

$$\begin{array}{r} 100110 \\ - 10101 \\ \hline 10001; \end{array} \quad \begin{array}{r} 11001 : 101 = 101; \\ 101 \\ \hline 101 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 : 11 = 0,0101... \\ 100 \\ - 11 \\ \hline 100 \\ - 11 \\ \hline 1 \end{array}$$

4) ათწილადის ორწილადში გადაყვანა. განვიხილოთ 1-ზე ნაკლები რიცხვი. მაგალითად, 0,625. ჩავწერთ ეს რიცხვი ორობითი სისტემაში. რადგანაც ორობითი სისტემაში მთელი ნაწილის შემდეგ მარჯვნივ ციფრების მნიშვნელობაა $2, 2^2, 2^3$ და ა. შ. აღებული რიცხვი გავყოთ და გავამრავლოთ 2-ზე და გამოვყოთ შესაყრები $\frac{\alpha}{2}$, სადაც $\alpha=0$ ან 1. გვექნება

$$0,625 = \frac{1}{2} \cdot 0,625 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,25.$$

სრულიად ასევე მოვიქცეთ 0,25-თვის და ეს პროცესი გავაგრძელოთ. მივიღებთ

$$\begin{aligned} 0,625 &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 0,25 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 0,5 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 0 + \frac{1}{2^2} \cdot 0,5 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 0 + \frac{1}{2^3} \cdot 0,5 \cdot 2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 0 + \frac{1}{2^3} \cdot 1 = (0,101)_2. \end{aligned}$$

ათწილადის ორწილადში გადაყვანის პროცესი შემდეგი ცხრილით შევასრულოთ

0,	$\times \frac{625}{2}$
1,	$\times \frac{250}{2}$
0,	$\times \frac{500}{2}$
1,	000

საიდანაც მივიღებთ

$$0,625 = (0,101)_2.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ განხილული ზერხით შეგვიძლია 1-ზე ნაკლები ნებისმიერ თვლის სისტემაში მოცემული რიცხვი გადავიყვანოთ თვლის სხვა სისტემაში.

თუ გვექნება შერეული რიცხვი, მაშინ ამ რიცხვის მთელი ნაწილი ცალკე უნდა გადავიყვანოთ თვლის სხვა სისტემაში და წილადი ნაწილი ცალკე.

5) თვლის შერეული სისტემები. თუ რიცხვს წარმოვადგენთ თვლის რომელიმე სისტემაში და შემდეგ ყოველ ციფრს ორობითი სისტემაში, მაშინ მიღებულ ჩანაწერს ეწოდება რიცხვის ჩაწერა თვლის შერეული სისტემაში. პრაქტიკულად გამოიყენება ორობით-რვაობითი და ორობით-ათობითი თვლის სისტემები.

რვაობით სისტემაში ციფრი 7 უდიდესია. იგი ორობითი სისტემაში გამოისახება III-ით. ასე რომ რვაობითი სისტემის ყოველი ციფრისათვის საკმარისია ორობითი სისტემის სამი თანრიგი. ასეთ თანრიგებს სამეულები — ტრიადები ეწოდება. მაგალითად, რვაობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი 76543210 ორობით-რვაობით სისტემაში ასე ჩაიწერება:

$$76543210 = 111 \ 110 \ 101 \ 100 \ 011 \ 010 \ 001 \ 000.$$

აქ სამეულების განცალკევება საჭირო არაა. შეიძლება განცალკევების

გარეშე დაეწეროთ, მაგრამ უნდა ვიცოდეთ, რომ მარჯვნიდან მარცხნისაკენ ყოველი სამეული რვაობითი სისტემის ერთ ციფრს გამოსახავს.

ადვილი შესამჩნევია, რომ სამეულების ყველა თანრიგი გამოყენებულია ორობით-რვაობით სისტემაში.

თვლის ორობით-რვაობით სისტემაში მოქმედება ისე წარმოებს, როგორც ორობით სისტემაში. რვაობით სისტემაში

$$77 + 46 = 145.$$

ორობით-რვაობით სისტემაში გვექნება

$$\begin{array}{r} 77 = 111 \ 111 \\ + 46 = 100 \ 110 \\ \hline 1100 \ 101 = 145. \end{array}$$

ახლა განვიხილოთ ორობით-ათობითი თვლის სისტემა. ათობით სისტემაში უდიდესი ციფრია 9. ეს რიცხვი ორობით სისტემაში გამოისახება 1001-ით. ამრიგად, ათობითი სისტემის ყოველი ციფრი გამოისახება ორობითი სისტემის ოთხი თანრიგით. მაგალითად, რიცხვი 9876543210 ორობით-ათობით სისტემაში ასე ჩაიწერება:

$$1001 \ 1000 \ 0111 \ 0110 \ 0101 \ 0100 \ 0011 \ 0010 \ 0001 \ 0000.$$

ორობითი სისტემის ოთხ თანრიგს ოთხეული — ტეტრაღები ეწოდება. თექვსმეტი შესაძლო ოთხეულიდან გამოიყენება მხოლოდ ათი. ექვს ოთხეულს რიცხვითი მნიშვნელობა არ აქვს ათობით სისტემაში. ამის გამო არითმეტიკული მოქმედებანი ორობით-ათობით სისტემაში გაძნელებულია.

როგორც აღვნიშნეთ, ელექტრონულ მანქანაში რიცხვი ჩაიწერება ორობითი სისტემით. მაგრამ მოცემული მნიშვნელობანი ათობითი სისტემით იქნება წარმოდგენილი. მანქანაში შეტანის წინ ათობით სისტემით მოცემულ რიცხვს ჩაწერენ ორობით-ათობითი სისტემით და შეიტანენ მანქანაში. თანამედროვე მანქანებში პირდაპირ შეიტანება ათობითი სისტემით ჩაწერილი რიცხვი. ამ რიცხვს თვით ელექტრონული მანქანა გადაიყვანს ორობით-ათობით სისტემაში და შემდეგ აწარმოებს მოქმედებებს მასზე. შემდეგ მანქანა ორობით-ათობით სისტემაში ჩაწერილ რიცხვს გადაიყვანს ათობით სისტემაში და მოგვცემს სათანადო პასუხს.

6) რიცხვის ჩაწერა. რიცხვები 3,14; 27,035; 0,0078 ჩაწერილია ბუნებრივი — ფიქსირებული ფორმით (ფიქსირებული მძიმით). მაგრამ რიცხვები $0,24 \cdot 10^2$; $2,56 \cdot 10^{-3}$; $0,015 \cdot 10^5$ ჩაწერილია ნორმალური ფორმით (მეტრაფი — მოძრავი მძიმით). როგორც მაგალითები გვიჩვენებს, ნორმალური ფორმით რიცხვის ჩაწერა ერთადერთი არაა. ამ ნაკლის უგულებელყოფისათვის შევთანხმდეთ, რომ ავიღოთ 0 მთელი და მისი მომდევნო ციფრი იყოს ნული-

საგან განსხვავებული. მაგალითად, $0,1804 \cdot 10^5$; $0,743 \cdot 10^{-3}$. ჩაწერის ასეთ ფორმას ნორმალიზებული მეტრაფი ფორმით ჩაწერა ეწოდება. შევთანხმდეთ, რომ ასეთ ფორმას, შემოკლებით, ნორმალიზებული ფორმა ეწოდება.

ამრიგად, მოცემული x რიცხვის ნორმალიზებული ფორმით ჩაწერა ნიშნავს, მის წარმოდგენას შემდეგი სახით

$$x = x_0 \cdot 10^p, \quad (1)$$

სადაც

$$\frac{1}{10} \leq |x_0| < 1, \quad (2)$$

p დადებითი ან უარყოფითი რიცხვია. x_0 -ს ეწოდება x რიცხვის მანტიისა, ხოლო p -ს x რიცხვის რიგი. ადვილი წარმოსადგენია, რომ თუ $x > 1$, მისი რიგი p ტოლია მთელ ნაწილში თანრიგების რაოდენობისა, თუ $x \leq 1$, მაშინ $p < 0$ და $|p|$ ტოლია ნულთა რაოდენობისა პირველ ნიშნად ციფრამდე x რიცხვის წილად ნაწილში.

ზემოთ დაწერილი გამოსახულებანი (1), (2) ჰქვამარტია თვლის ნებისმიერ სისტემაში. 10 თვლის ნებისმიერი სისტემის ფუძეა. ორობით სისტემაში მანტისა ნახევარზე ნაკლები არაა, ხოლო რვაობით სისტემაში — ერთ მეგრედზე ნაკლები. შევნიშნოთ, რომ ელექტრონულ მანქანაში შესატანი რიცხვის რიგი ყოველთვის ორთანრიგა უნდა იყოს. MK—56 მანქანაში რიცხვთა შეტანა და გამოტანა თვლის ათობითი სისტემითაა. მანტისა რვა თანრიგაა, რიცხვის რიგი ორი თანრიგით გამოისახება. თუ $1 \leq |x| \leq 99999999$, მაშინ x რიცხვი ფიქსირებული ფორმით ჩაიწერება. თუ $1 \cdot 10^{-9} \leq |x| < 1$ ან $99999999 < |x| \leq 9,9999999 \cdot 10^9$, მაშინ რიცხვი x ჩაიწერება ნორმალური ფორმით. ყოველ ელექტრონულ გამოთვლელ მანქანას აქვს მითითება რიცხვთა სიდიდისა და მისი ჩაწერის ფორმის შესახებ.

ს ა ე ა რ ჯ ი შ ო 20.

რ უ ს უ ლ ი ს ა ა ნ გ ა რ ი შ ო

1. შეკრიბეთ მოცემული რიცხვები ჯერ სტრიქონებით და შემდეგ სვეტებით. მიღებულ სიდიდეთა ტოლობა გამოიყენეთ როგორც გამოთვლების სისწორის შემოწმება:

3578	6547	4361	6315	4508
4326	7643	5643	3253	6738
5617	3428	9688	4968	9857
4982	9316	1526	5347	8975
3251	6425	6798	9368	7893

2. გამოთვალეთ სხვადასხვა მიმდევრობით და შედეგების ტოლობა გამოიყენეთ, როგორც შემოწმება:

$$\begin{aligned} &69862 - 2981 + 32143 - 2147; \\ &- 6759 + 76438 - 4569 + 27486; \\ &+ 17241 - 2756 + 87852 - 9654; \\ &- 1235 + 49863 - 3617 + 45696. \end{aligned}$$

3. გამოთვალეთ ნამრავლი მამრავლის მარტივ თანამამრავლებად დაშლის საშუალებით:

$$21589 \cdot 12; \quad 6847 \cdot 15; \quad 23458 \cdot 24; \quad 3694 \cdot 54.$$

4. გამოთვალეთ ნამრავლი:

$$\begin{aligned} &2647 \cdot 26; \quad 2879 \cdot 37; \quad 649 \cdot 327; \quad 498 \cdot 461; \\ &357 \cdot 843; \quad 649 \cdot 271; \quad 235 \cdot 752; \quad 632 \cdot 748. \end{aligned}$$

5. შეასრულეთ მიმდევრობითი გამოსვლის საშუალებით გაყოფა:

$$\begin{aligned} &23125 : 37; \quad 19182 : 23; \quad 15120 : 42; \\ &630756 : 126; \quad 713700 : 234; \quad 259080 : 635. \end{aligned}$$

ლოგარითმული სახაზავი

6. შეასრულეთ გამრავლება: $16,35 \cdot 4,78$; $19,23 \cdot 0,647$; $0,425 \cdot 0,0645$; $6,55 \cdot 2,42$; $5,25 \cdot 324$;

7. შეასრულეთ გაყოფა: $6,25 : 4,2$; $11,35 : 0,264$; $14,3 : 4,68$; $8,15 : 6,45$; $9,85 : 2,82$; $0,0247 : 0,1675$;

$$\begin{aligned} &8. \text{ გამოთვალეთ: } \frac{4,6 \cdot 5,25 \cdot 9,5}{3,75 \cdot 7,42}; \\ &\quad \frac{2,24 \cdot 0,648 \cdot 25,5}{0,248 \cdot 8,35}. \end{aligned}$$

9) იპოვეთ x_1, x_2, x_3, x_4 , თუ

$$\frac{3,14}{1,42} = \frac{x_1}{2,24} = \frac{x_2}{6,45} = \frac{x_3}{5,15} = \frac{x_4}{8,45}.$$

10. გამოთვალეთ: $2,46^2$; $0,485^2$; $8,95^2$; $0,105^2$; $0,985^2$.

11. გამოთვალეთ: $1,62^3$; $0,0715^3$; $0,645^3$; $9,85^3$.

12. გამოთვალეთ: $\sqrt{2,55}$; $\sqrt{46,5}$; $\sqrt{965}$.

13. გამოთვალეთ: $\sqrt[3]{1,55}$; $\sqrt[3]{48,5}$; $\sqrt[3]{745}$.

14. პორიზონტალურ მიმართულებასთან გზა ეშვება $2^\circ 35'$ კუთხით, რა სიღრმეზე ეშვება გზა 200 მეტრის ბოლოს.

15. რას უდრის მინის გადატეხის მაჩვენებელი ჰაერთან, თუ სხივის მინაზე დაცემის კუთხეა $\alpha = 35^\circ$, ხოლო გადატეხის კუთხეა $\gamma = 21^\circ$

$$\left(\mu = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right).$$

16. 45 მეტრი სიმაღლის ანძა ხუთ ტოლად დაშორებულ ადგილას დაბმულია მომჭიმავი თოკებით. რა სიგრძის თოკია გამოყენებული ანძის დასაბმელად, თუ თოკის მიბმის ადგილი ანძის ფუძიდან 15 მეტრითაა დაშორებული?

17. რამდენჯერ გაიზრდება ქარხნის პროდუქცია 2 წლის შემდეგ, თუ ყოველ წელს ქარხნის პროდუქცია იზრდება 1,108-ჯერ.

18. ქარხნის პროდუქციის ნამატი ყოველ ნახევარ წელიწადში გეგმით გათვალისწინებულია 15,4%. რამდენჯერ გაიზრდება ქარხნის პროდუქცია ერთ, ორ და სამ წელიწადში?

(თუ ქარხნის პროდუქციის ნამატი 15,4%, მაშინ ნამატის ტემპია $100\% + 15,4\% = 115,4\%$. ე. ი. 1,154-ჯერ იზრდება ქარხნის პროდუქცია ნახევარ წელში, მთელ წელში პროდუქციის ნაზარდი იქნება 1,154² და ა. შ.).

19. ყოველ კვარტალში თვითღირებულების შემცირება გათვალისწინებულია 2,5%-ით. როგორი იქნება თვითღირებულების დონე 1 წლის შემდეგ? (პირველი კვარტლის ბოლოს თვითღირებულება იქნება $100\% - 2,5\% = 97,5\% = 0,975$ ნაწილი I კვარტლის თვითღირებულების დონისა, მეორე კვარტლის ბოლოს იქნება $0,975^2$ — I კვარტლის საწყისი დონის, და ა. შ.).

20. წარმოების პროდუქცია 2 წელში გაიზარდა 1,84-ჯერ. როგორია წარმოების პროდუქციის საშუალო ზრდა წელიწადში?

(თუ წლიურად პროდუქციის ზრდაა x , მაშინ მეორე წლის ბოლოს პროდუქციის ზრდა იქნება x^2).

ამოცანის პირობით $x = 1,84$ და ა. შ.).

21. კარის 100 ცალი მონიკელებული საკეტის დასამზადებლად დახარჯული მასალა და ელექტრული ენერგია მოცემულია 1-ელ ცხრილში.

ცხრილი 1

	დანახარჯი	ზომის ერთ.	განგ. ნორმა 100 ცალზე	ფასი მანეთებით	ჯამი
1	2	3	4	5	6
1	ფურცლოვანი ფოლადი 1—2 მმ	კგ	19,330	0,125	
2	მავთული 1—2 მმ	"	9,500	0,155	
3	გოგირდმჟავა ნატრიუმი	"	0,013	0,136	
4	გოგირდმჟავა მაგნიუმი	"	0,005	0,370	
5	ქლორიანი ნატრიუმი	"	0,0017	2,02	

გ ა რ ძ ე ლ ე ბ ა

1	2	3	4	5	6
6	გოგირდმჟავა ნიკელი	"	0,030	0,625	
7	გოგირდმჟავა (აქუშულატორის)	"	0,0084	0,750	
8	მწვევე ნატრიუმი	"	0,098	0,025	
9	ქენის რგოლები	ცალი	0,0086	6,05	
10	ბამბეულის რგოლები	"	0,096	0,203	
11	ზუმფარა	კვ	0,068	0,250	
12	თხევადი მინა	"	0,120	0,320	
13	საპრიალებელი პასტა	"	0,230	0,640	
14	სტეარინი	"	0,005	1,05	
15	თმის ჯაგრისი	ცალი	0,140	0,310	
16	ქალაღი	კვ	0,270	0,350	
17	ნიკელის ანოდი	"	0,265	2,950	
18	ვიკარტი	"	1,40	0,880	
19	ელექტროენერგია	კვს	1,000	0,015	

განსაზღვრეთ ერთი საცეცის ღირებულება (გამოთვლები აწარმოეთ საანგარიშოზე).

ა რ ი თ მ ო მ ე ტ რ ი, ს ა ა ნ გ ა რ ი შ ო

22. ГГК ტიპის დაზგის დასამზადებლად დანახარჯები მოცემულია მე-2 ცხრილში.

ც ხ რ ი ლ ი 2

	დინახარჯის კალკულაციური მუხლები	დინახარჯი მანეთებში		დინახარჯები %-ში მთლიან დინახარჯებთან	
		1982	1983	1982	1983
1	ნედლეული და ძირითადი მასა-				
2	ლები	511,4	474,8		
3	დამხმარე მასალები	74,7	70,2		
4	სათბობი	15,1	11,8		
5	ელექტროენერგია და ორთქლი	32,4	37,6		
6	ხელფასი	385,7	359,8		
7	დანაჯარგი	21,4	10,5		
8	დაზღვევის ორგანოების გადანა-	38,8	36,0		
9	რიცხი				
10	სამშრომლების გასაფასო	92,4	97,6		
	საერთო საქარხნო გასაფასო	62,0	59,5		
	არასაწარმოო ხარჯები	13,8	14,4		

გ ა მ ო თ ვ ა ლ ე თ: 1) სრული თვითღირებულება 1982 და 1983 წლებისათვის. 2) თითოეული დინახარჯის მთელ ღირებულებასთან შეფარდება %-ში 1982 და 1983 წლებისათვის.

23. ფაბრიკამ გამოუშვა ბითუმი ღირებულებით სამი სახის ქსოვილი.

ქსოვილის ხარისხი	I	II	III
ქსოვილის რაოდენობა მეტრებში	a=3822	b=1073	c=214
ფასი მანეთებში	m=50	n=47	p=40

გამოთვალეთ 1 მეტრი ქსოვილის სარეალიზაციო ფასი.

(სარეალიზაციო ფასი — აწონილი საშუალო არითმეტიკული: $\frac{am + bn + cp}{a + b + c}$).

24. შეადგინეთ ცხრილი შემდეგი ფუნქციისათვის

$$y = \frac{ax^2 + b\sqrt{x}}{cx + d\sqrt{x} + e},$$

სადაც $1 \leq x \leq 2$, $h=0,1$ და a, b, c, d, e -ს მნიშვნელობანი მოცემულია მე-3 ცხრილში.

ც ხ რ ი ლ ი 3

a	b	c	d	e
6,534	4,765	3,427	5,246	9,861
4,217	5,612	8,652	3,261	7,944
2,312	3,231	5,328	4,178	6,842
1,708	4,154	6,265	9,564	8,234
3,276	6,783	9,143	2,437	5,643

ყოველი მოქმედების შედეგი დაამრგვალეთ ოთხნიშნად ციფრამდე. ისარგებლეთ სათანადო ოთხნიშნადი ცხრილებით.

25. გადაიყვანეთ ორობითი სისტემით ჩაწერილი რიცხვები ათობით სისტემაში: $1011_2, 11011_2, 1010_2, 1001_2, 111110_2, 101110_2, 110110111_2, 110011111_2, 110111101_2, 100000000_2, 110101010001_2, 100100100100_2$.

26. გადაიყვანეთ რვაობით სისტემით ჩაწერილი რიცხვები ათობით სისტემაში: $6_8, 7_8, 12_8, 20_8, 70_8, 342_8, 471_8, 1082_8, 10107_8, 7777_8$.

27. 25-ე მაგალითში მოთავსებული რიცხვები გადაიყვანეთ რვაობით სისტემაში.

28. ათობითი სისტემით ჩაწერილი რიცხვები (მიმდევრობით გაყოფით) გადაიყვანეთ ორობითი სისტემაში:

32, 43, 54, 64, 120, 642, 1098, 4986, 5495, 67543.

29. 26-ე მაგალითში მოთავსებული რიცხვები გადაიყვანეთ ორობითში ($421_8 = 100\ 010\ 001$; $342_8 = 011\ 100\ 010$).

30. გადაიყვანეთ რვაობით სისტემაში:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{11}{64}, \frac{5}{64}, \frac{10}{64}, \frac{1}{256}, \frac{4}{256},$$

$$100 \frac{33}{256}, 124 \frac{251}{256} \cdot \left(\frac{1}{8} = 0,1_8; \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = 0,4_8 \right).$$

31. გადაიყვანეთ რვაობით სისტემაში:

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{8}{9}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{4}{13}, \frac{7}{16}, \frac{9}{20}, \frac{11}{32}, \frac{7}{29},$$

$$\frac{13}{30}, \frac{1}{17}, \frac{9}{19}, \frac{7}{18}, \frac{1}{20}.$$

$$\left(\frac{1}{3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{8} \left(2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{3} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8^2} \left(5 + \frac{1}{3} \right) \right),$$

$\frac{1}{3}$ გამოვრდა, ამიტომ გვქმნება:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{1}{8^2} \cdot \frac{1}{3} = 0,2525\dots_8.$$

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{8} \cdot \frac{24}{10} = \frac{1}{8} \left(2 + \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8^2} \cdot \frac{16}{5} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8^2} \left(3 + \frac{1}{5} \right) =$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{1}{8^3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{1}{8^3} \left(1 + \frac{3}{5} \right) = \frac{2}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{1}{8^3} +$$

$$+ \frac{1}{8^3} \cdot \frac{3}{5}; \quad \frac{3}{5} = \frac{1}{8} \cdot \frac{24}{5} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8^2} \cdot \frac{32}{5} =$$

$$= \frac{4}{8} + \frac{6}{8^2} + \frac{1}{8^2} \cdot \frac{2}{5}.$$

$\frac{2}{5}$ გამოვრდა.

$$\text{ამგვარად, } \frac{3}{10} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{4}{8^4} + \frac{6}{8^5} + \frac{1}{8^5} \cdot \frac{2}{5} =$$

$$= 0,231463146\dots = 0,2(3146)_8.$$

32. გადაიყვანეთ ორობით სისტემაში, $0,24_8$; $0,164_8$; $0,(246)_8$, $0,26475_8$, $0,1040151_8$.

$$(0,2_8 = 0,010_2; 0,24_8 = 0,010\ 100_2; 0,345_8 = 0,011\ 100\ 101_2).$$

§ 10. ელემენტარული გამოთვლური მანქანები

1. ზოგადი შენიშვნები. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამოცანის ამოხსნა და სათანადო სიზუსტით ამონახსნის დროულად მიღება მეტად მნიშვნელოვანი საკითხია. ამოცანის ამოხსნა შრომატევადია, ამის გამო მიემართება გამოთვლების სხვადასხვა საშუალებას, კერძოდ გამოთვლელ მანქანებს. ამოცანის ამოხსნელად ჩვეულებრივად ვაღგენთ ე. წ. ამოცანის ამოხსნის პროგრამას, რომელსაც შეძლებისდაგვარად სხვადასხვა საშუალებით ვასრულებთ. სტუდენტს, რომელსაც აქვს ამოცანის ამოხსნის ასეთი ჩვევა, შემდეგში ე. წ. ალგორითმული ენის დაუფლება მეტად გაუადვილებს, რომელიც მას აუცილებლად დასჭირდება, თუ დიდ და ერთგვაროვან გამოთვლებთან ექნება საქმე.

ძნელი წარმოსადგენი არაა გამოთვლითი ტექნიკის ცოდნის აუცილებლობა. გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენება დღითი დღე იზრდება. სახალხო მეურნეობის განვითარების თანამედროვე დონე ხასიათდება გამოთვლითი ტექნიკის ფართო გამოყენებით. ამის გამო ყოველგვარი საშუალება უნდა ეხმაროდ გამოთვლითი ტექნიკის დაუფლებისათვის.

ზოგადად გავცნოთ ელექტრონულ გამოთვლელ მანქანას.

2. ელექტრონული გამოთვლელი მანქანის ძირითადი მოწყობილობა. გამოთვლითი პროცესი, რომელსაც ადამიანი აწარმოებს, შემდეგი თვისებებით ხასიათდება:

1) ინფორმაციის შენახვა. აქ სიტყვა „ინფორმაციის“ ქვეშ ვგულისხმობთ მოცემულ მნიშვნელობებს, გამოთვლების შუალედურ და საბოლოო შედეგს. ასევე ვგულისხმობთ გამოთვლების ალგორითმს და მმართველ პროგრამას. მმართველი პროგრამა უზრუნველყოფს ალგორითმის შესრულებას. ალგორითმი, ესაა გამოთვლის ხერხი, რომლითაც მოცემული ამოცანა ამოიხსნება. ინფორმაციას ადამიანი იმახსოვრებს, ნაწილობრივად ქაღალდზე სწერს. ინფორმაციის ნაწილი სხვადასხვა ცნობარიდან, ცხრილებიდან ამოიღება. ადამიანის მეხსიერება, ქაღალდი, ცნობარები, ცხრილები დამახსოვრების — მეხსიერების მოწყობილობათა სხვადასხვა სახეა.

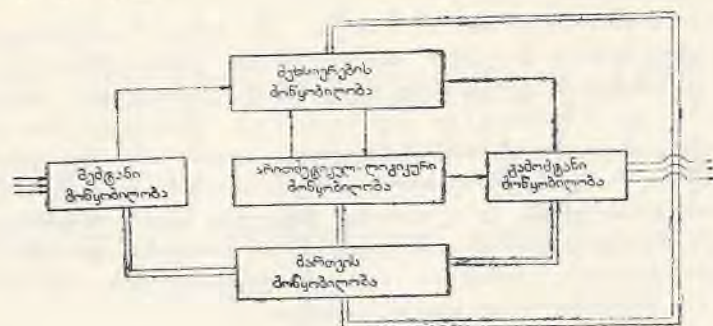
2) ინფორმაციის დამუშავება. ეს გამოთვლითი პროცესისათვის ნიშნავს: რიცხვებზე არითმეტიკულ და ლოგიკურ მოქმედებათა შესრულებას. ინფორმაციის დამუშავება წარმოებს ხელით (გონებით) ან სათანადო ხელსაწყოების საშუალებით (მანქანების, ცხრილების, ნახაზების და სხვ.). ამ დროს იცვლება ინფორმაციები დამახსოვრებელ ხელსაწყოებსა და არითმეტიკულ მოქმედებათა შემსრულებელ ხელსაწყოებს შორის: მონაცემები აიღება ქაღალდის ფურცლიდან და გადაეცემა მანქანას (მანქანაში შეიტანება), შემდეგ გამოთვლის შედეგი ან ქაღალდზე ჩაიწერება ან ადამიანი დაიმახსოვრებს.

3) გამოთვლითი პროცესის მართვა სათანადო ალგორითმის საფუძველზე გამომთვლელი აწარმოებს გარკვეული მიმდევრობით გამოთვლებს: ყოველთვის განსაზღვრავს, რომელი რიცხვი რა შემთხვევაში აიღოს, რა მოქმედება უნდა აწარმოოს, შედეგი ქაღალდზე ჩაწეროს, თუ გარკვეული პირობით ისევ მანქანაში შეიტანოს.

პროგრამით მომუშავე გამომთვლელი მანქანა ისე უნდა იყოს მოწყობილი, რომ გამოთვლითი პროცესის ყველა ჩამოთვლილი ელემენტი განხორციელდეს, რაც შეიძლება, გამომთვლელის ჩარევის გარეშე. ამ მოთხოვნების გამო გამომთვლელი მანქანა უნდა შეიცავდეს ისეთ მოწყობილობებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ გამოთვლითი პროცესის მთლიანად ჩატარებას. ამ მხრივ ელექტრომექანიკურ მანქანებთან შედარებით უფრო სრულყოფილია ელექტრონული გამოთვლელი მანქანები.

ელექტრონული გამომთვლელი მანქანის ძირითადი ნაწილებია:

- 1) დამახსოვრების მოწყობილობა (მეხსიერება),
- 2) არითმეტიკულ-ლოგიკური მოწყობილობა (პროცესორი),
- 3) მართვის მოწყობილობა (მართვა),
- 4) შეტანისა და გამოტანის მოწყობილობა (შეტანა და გამოტანა).



ნახ. 13

გამოთვლითი პროცესისთვის საფუძველზე ადვილი წარმოსადგენია ელექტრონული გამომთვლელი მანქანის თითოეული ნაწილის დანიშნულება¹.

ელექტრონული გამომთვლელი მანქანის ნაწილებს შორის კავშირი ნაჩვენებია მე-13 ნახაზზე.

¹ Е. А. Жоголов, Н. П. Трифонов, Курс программирования, М., 1971.

§ 11. ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლის პროგრამა

ვიდრე აღებული ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლას შევუდგებოდეთ, უნდა შევადგინოთ გამოთვლის სქემა, ანუ უნდა შევადგინოთ ე. წ. ფუნქციის გამოთვლის განრიგი — პროგრამა. ცხადია, გამოთვლის განრიგის სახე დამოკიდებულია ფუნქციის სახეზე. მაგალითად, შევადგინოთ

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

ფუნქციის გამოთვლის განრიგი. ამისათვის შევადგინოთ ცხრილი შემდეგნაირად: პირველ სტრიქონში მოვათავსოთ სვეტების ნომრები, რომლებიც კვადრატულ ფორმულაშია ჩასმული (ცხრილი 1): [0], [1], ..., [5]. მეორე სტრიქონში [0]-ის ქვეშ მოვათავსოთ x , მის გვერდით კი x^2 . მაგრამ, რადგანაც $x^2 = x \cdot x$, პირობით ეს მნიშვნელობა ასე ჩავწეროთ: [0] · [0]. ამ პირობითი ჩაწერით მოჩანს, თუ რა მოქმედება უნდა შევასრულოთ [0]-ის სვეტის ელემენტზე, რომ მივიღოთ [1]-ის სვეტის ელემენტი. [2]-ის ქვეშ უნდა ჩავწეროთ ax^2 , მაგრამ მის ადგილზე ჩავწეროთ [1] · a . ასეთი პირობითი აღნიშვნებით შევაგებოთ მთელ ცხრილს. ადვილი წარმოსადგენია, რომ მე-[5] სვეტში გვაქვს

ცხრილი 1

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
x	[0] · [0]	[1] · a	[0] · b	[2] + [3]	[4] + c	
4	16	32	12	44	39	

$$a=2, b=3, c=-5$$

$$[4] + c = [2] + [3] + c = [1] \cdot a + [0] \cdot b + c,$$

ანუ

$$ax^2 + bx + c = f(x).$$

ცხრილის მესამე სტრიქონში $x=4$ -სათვის $f(x)$ მნიშვნელობაა გამოთვლილი:

$$f(4) = 2x^2 + 3x - 5 = 39; a=2, b=3, c=-5.$$

1-ლი ცხრილის მეორე სტრიქონში (1) კვადრატული ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლის პროგრამაა შედგენილი. პროგრამა შედგება ე. წ. ბრძანებებისაგან. ბრძანება მხოლოდ ერთ მოქმედებას შეიცავს. მაგალითად, აქ ბრძანებებია:

$$[0] \cdot [0], [1] \cdot a, [0] \cdot b, [2] + [3], [4] + c.$$

§ 12. ელექტრონული გამოთვლელი მანქანების მახასიათებელი
დაწინაშეობა

მანქანის მუშაობის დანიშნულებაა შეინახოს ამოცანის ამოხსნის
სრული ინფორმაცია. ე. ი. შეინახოს მოცემული მნიშვნელობანი, შეინა-
ხოს გამოთვლის პროგრამა და გამოთვლის როგორც შედეგად, ისე
საბოლოო შედეგი. ამისათვის ელექტრონულ გამოთვლელ მანქანას გა-
აჩნია სპეციალური უჯრედები. ამ უჯრედებს აქვთ ნომრები — მისამარ-
თები. ელექტრონული გამოთვლელი მანქანები იმით განსხვავდებიან
ერთიმეორისაგან, რომ მათ აქვთ სხვადასხვა რაოდენობის
უჯრედები მონაცემთა შენახვისათვის და უჯრედები სხვა-
დასხვა ბრძანებათა შენახვისათვის. მონაცემთა შენახვის გან-
კუთვნილ უჯრედებს აღმრიცხველებს — რეგისტრებს უწო-
დებენ. ამრიგად, ელექტრონულ გამოთვლელი მანქანის მუშაობაში
ინახება არა მარტო რიცხვითი მონაცემები, არამედ გამოთვლების სრული
პროგრამა, რომელიც სპეციალური ფორმით ჩაიწერება.

§ 13. მანქანის მუშაობის დანიშნულება MK-56.

1. მიკროკალკულატორის ზოგადი აღწერილობა¹. რიცხვების აღება.
გვეცნოთ ერთ-ერთ მცირე ელექტრონულ გამოთვლელ მანქანას — მიკ-
როკალკულატორს „ელექტრონიკა MK-56“-ს. ამ მანქანაზე არა მარტო
ხელით შეიძლება მუშაობა, არამედ მანქანას შეუძლია დაპროგრამებულ
რეჟიმშიც იმუშაოს. ისეთი ამოცანები, რომლებიც ამ კალკულატორზე
დაპროგრამებული რეჟიმით ამოიხსნება, ძალიან მცირეა, მაგრამ მანქანით
მანძი კარგი წარმოდგენა შეიქმნება ელექტრონულ გამოთვლელი მანქა-
ნის დაპროგრამებული მუშაობის შესახებ და თვით პროგრამის შედგენის
შესახებ.

მიკროკალკულატორ „MK-56“-ს წინხედის ლილაკთა სიმბოლიკა და
განლაგება ნაჩვენებია მე-14 ნახაზზე. ლილაკებს აწერია ციფრები 0, 1, ..., 9.
ცალკე გამოყოფილია რიცხვის მთელი ნაწილისა და წილადი ნაწილის
გამომყოფი ნიშანი — მძიმე [·]. ჩავთვით მიკროკალკულატორი ელემ-
ტროქსელში. ინდიკატორზე გამოჩნდება 0. ეს ნიშნავს მიკროკალკულა-
ტორი მზადაა მუშაობისათვის.

თუ x რიცხვი აკმაყოფილებს უტოლობას $1 \leq |x| \leq 999\,999\,99$ (§ 9),
მაშინ იგი ბუნებრივი ფორმით ჩაიწერება. ხოლო თუ x რიცხვი აკმაყო-
ფილებს უტოლობას

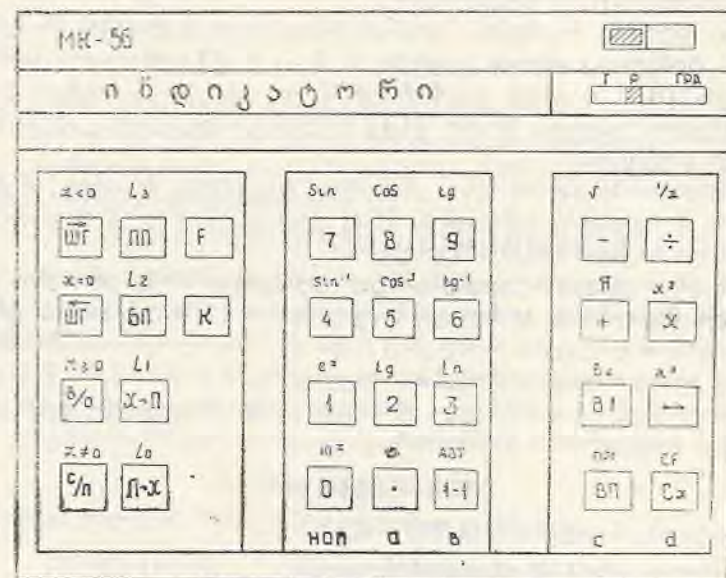
$$1 \cdot 10^{-99} \leq |x| < 1.$$

¹ Микрокалькулятор «Электроника МК-56», Инструкция
Л. Ю. Астанин, Ю. Д. Дорский, А. А. Костылев, Применение
программируемых калькуляторов для инженерных и научных расчетов, Л. 1986;
В. П. Дьяконов, Справочник по расчетам на микрокалькуляторах, М. 1986.

ან

$$999\,999\,99 < |x| \leq 9,999\,999\,9 \cdot 10^{99}$$

მაშინ იგი ნორმალური ფორმით $x = x_0 \cdot 10^p$ ჩაიწერება, x_0 -ს ეწოდება x
რიცხვის მანტიისა, ხოლო p -ს x რიცხვის რიგი.



ნახ. 14

ავიღოთ რიცხვი 125,07. მანქანის ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით
დავაჭიროთ: [1] [2] [5] [·] [0] [7]. ინდიკატორზე მივიღებთ 125,07.

ავიღოთ რიცხვი 12,56 · 10⁶⁵. ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით
დავაჭიროთ: [1] [2] [·] [5] [6] [BII] [6] [5]. ინდიკატორზე მივიღებთ 12,56
65. რაც ნიშნავს: 12,56 · 10⁶⁵.

ახლა ავიღოთ რიცხვი — 25,36891. ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით
დავაჭიროთ [2] [5] [·] [3] [6] [8] [9] [1] [·] [—/]. ინდიკატორზე მივიღებთ
— 25,36891.

იმისათვის, რომ ინდიკატორზე გამოვსახოთ რიცხვი — 64, 78 · 10⁻³,
ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით უნდა დავაჭიროთ:

$$[6] [4] [·] [7] [8] [·] [—/] [BII] [3] [·] [—/].$$

ინდიკატორზე მივიღებთ: — 64,78 — 03, ანუ — 64,78 · 10⁻³.

მთლიანად ინდიკატორზე თავსდება 12 თანრიგი: 8 თანრიგი მანტი-სისათვის, 2 თანრიგი რიცხვის რიგისათვის და ორი თანრიგი რიცხვისა და რიცხვის რიგის ნიშნებისათვის.

ინდიკატორზე რიცხვის წასაშლელად — გასაუქმებლად იხმარება ლი-ლაკი $[Cx]$. ამით ინდიკატორზე მხოლოდ ერთი 0 მიიღება. ინდიკატორი განთავისუფლებულია რიცხვისაგან.

ინდიკატორზე რიცხვების შეტანით გასაგებია იმ ლილაკების მნიშვნე-ლობა, რომელთაც აწერია ციფრები 1, 2, ..., 9. $[.]$ ათწილადის ნიშნის ლილაკია, $[BH]$ რიცხვის რიგის ჩაწერის ლილაკია, $[/-/]$ რიცხვის ნიშ-ნის შეცვლის ლილაკია, ხოლო $[Cx]$ ლილაკით ინდიკატორზე აღებული რიცხვი გაუქმდება.

ინდიკატორზე გამოისახება ერთ-ერთი რეგისტრის შინაარსი. ამ რე-გისტრს X რეგისტრს უწოდებენ. $[Cx]$ ლილაკი სწორედ X რეგისტრში შეტანილი რიცხვის გაუქმების ლილაკია.

2. ერთი ცვლადის ელემენტარულ ფუნქციათა მნიშვნელობების გა-მოთვლა. მაგალითად, გვინდა გამოვთვალოთ $\sin 2,34$. ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ ლილაკები, რომლებიც F და $\sin$ სიმბოლოებითაა აღნიშნუ-ლი. აქ კუთხე რადიანულ ზომებშია მოცემული, ამიტომ მანქანის წინხედ-ზე მოთავსებული გადამრთველი P ასოსთან უნდა მოთავსდეს. ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ.

$[2] [.] [3] [4] [F] [\sin]$.

ინდიკატორზე მივიღებთ 7, 184648 — 0,1.

ამრიგად, $\sin 2,34 = 0,7184648$.

საერთოდ, „MK-56“ მანქანით მიღებული ტრიგონომეტრიული ფუნ-ქციის მნიშვნელობის ცდომილება მე-7 ათწილად ნიშნშია, ამიტომ მიღე-ბული შედეგი მე-6 ათწილად ნიშნამდე უნდა დავამრგვალოთ, გვექნება $\sin 2,34 = 0,718465$.

თუ გვინდა გამოვთვალოთ $\sin 32^\circ$. გადამრთველი Γ ასოს ქვეშ მოვა-თავსოთ. ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ $[3] [2] [F] [\sin]$. ინდიკატორზე მივიღებთ 5,299 1926 — 01.

ამრიგად, $\sin 32^\circ = 0,5299 19$.

სრულიად ასევე გამოითვლება $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

$\frac{1}{x}$, x^2 , 10^x , e^x , $\sqrt{x}$, $\ln x$, $\lg x$ ფუნქციათა მნიშვნელობანი. ჯერ ავიღოთ არგუმენტი x ციფრებით აღნიშნულ ლილაკებზე. დავაჭიროთ F -ით აღნიშ-ნულ ლილაკს და სათანადო ფუნქციის აღმნიშვნელ ლილაკს. ინდიკატორ-ზე მივიღებთ სათანადო ფუნქციის მნიშვნელობას. ამ ფუნქციებიდან ყვე-ლაზე მეტი ცდომილება აქვს $\sqrt{x}$ -ს. მისი ცდომილებაა $1 \cdot 10^{-4}$. ასევე დიდი ცდომილება აქვს $\ln x$ -ს, მისი ცდომილებაა $5 \cdot 10^{-6}$.

3. ორი ცვლადის ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x, y) = x^y$. მანქანაში უნდა შევიტანოთ ორი რიცხვი x და y . ვისარგებლოთ $[B\uparrow]$ და $[F]$ ლილაკებით. მაგალითად, გამოვთვალოთ $2,51^{3,62}$. ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ:

$[3] [.] [6] [2]$	ინდიკატორზე მიიღება	3,62
$[B\uparrow]$	"	3,62
$[2] [.] [1] [5] [1]$	"	2,51
$[F] [X^y]$	"	27, 97813.

ლილაკი $B\uparrow$ საშუალებით X რეგისტრში ჩაწერილი მნიშვნელობა გადაე-ცემა მეორე რეგისტრს, რომელიც პირობით Y -ით აღვნიშნოთ.

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვთვალოთ $6,279 + 24,6798$. ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ

$[6] [.] [2] [7] [9] [B\uparrow] [2] [4] [.] [6] [7] [9] [8] [+]$.

ინდიკატორზე გამოჩნდება რიცხვი 30,9588. თუ მოცემული რიცხვები მიახლოებითია, უნდა ვისარგებლოთ მიახლოებით რიცხვთა შეკრებით, გვექნება

$$6,279 + 24,6798 = 30,959.$$

ასევე შესრულდება $a - b$, $a \times b$, $a : b$.

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვთვალოთ

$$(36,42 + 6,5298) \cdot 4,1258.$$

ამისათვის ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ

$[3] [6] [.] [4] [2]$	ინდიკატორზე მიიღება	36,42
$[B\uparrow]$	"	36,42
$[6] [.] [5] [2] [9] [8]$	"	6,5298
$[+]$	"	42,9498
$[4] [.] [1] [2] [5] [8]$	"	4,1258
$[X]$	"	177,20228.

თუ მოცემული რიცხვები მიახლოებითია, მაშინ მიახლოებითი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების საფუძველზე დავასკვნით

$$(36,42 + 6,5298) \cdot 4,1258 = 177,2.$$

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი. გამოვთვალოთ

$$a = \frac{1}{\frac{1}{5,2} + \frac{1}{4,7} + \frac{1}{9,4}}. \quad (1)$$

მოქმედება შემდეგი მიმდევრობით ჩავატაროთ

$[5] [.] [2] [F] [1/X] [4] [.] [7] [F] [1/X] [+]$ $[9] [.] [4] [F] [1/X] [+]$ $[F] [1/X]$.

ინდიკატორზე მიიღება 1,9552. თუ რიცხვები შიხლოებითაა, მაშინ შედეგში ზუსტია ორი ნიშნადი ციფრი. გვექნება

$$a = \frac{1}{\frac{1}{5,2} + \frac{1}{4,7} + \frac{1}{9,4}} = 2,0.$$

როგორც გამოთვლილი მაგალითები გვიჩვენებენ, $[F]$ ლილაკით ვსარგებლობთ მეორე ლილაკთან ერთად, მაგრამ იგი მეორე ლილაკის წინ იხმარება. ამის გამო $[F]$ ლილაკს თავსართი ლილაკი — პრეფიქსი ლილაკი ეწოდება.

თუ X რეგისტრში შეცდომა მოგვივიდა და იგივე შეცდომა Y რეგისტრს გადავეცით, მისი გაუქმებისათვის დავაჭიროთ $[Cx]$ ლილაკს. ამით X რეგისტრი განთავისუფლდება შეტანილი რიცხვისაგან. შემდეგ დავაჭიროთ უკუქცევის ლილაკს $[←]$ ამით Y რეგისტრში შეტანილი რიცხვი გადაეცემა — უკან დაუბრუნდება X რეგისტრს და $[Cx]$ ლილაკზე დაჭერით X რეგისტრი განთავისუფლდება ამ ბოლო რიცხვისაგან. $[←]$ ლილაკის დანიშნულებაა X და Y რეგისტრებში შენახულ რიცხვთა ურთიერთგაცვლა.

კალკულატორის წინხედზე მოთავსებულია ლილაკი, რომელსაც აწერია π . ამ რიცხვის მნიშვნელობის მისაღებად საკმარისია $[F]$ თავსართ ლილაკსა და $[\pi]$ ლილაკს დავაჭიროთ, ინდიკატორზე მივიღებთ 3,1415926.

ე რიცხვის მნიშვნელობის მისაღებად გამოვიყენოთ e^* ფუნქციის მნიშვნელობის მონახვის ზეახი $x=1$ -სათვის. ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ $[1]$ $[F]$ $[e^*]$. ინდიკატორზე მივიღებთ 2,7182818.

4. რეგისტრები: $RG0, \dots, RGd$. მიკროკალკულატორში საწყის მნიშვნელობათა და შუალედური გამოთვლების შესანახად გათვალისწინებულია სათანადო რეგისტრები. ასეთი რეგისტრები სულ 14-ია. მათი მისამართებია $RG0, RG1, \dots, RG9, RGa, \dots, RGd$. მოცემული x რიცხვის ჩაწერა — შეტანა, მაგალითად, $RG0$ რეგისტრში, შემდეგი მოქმედებით წარმოებს: ჯერ ავკრიფთ x რიცხვი მიკროკალკულატორის ციფრულ ლილაკებზე, შემდეგ დავაჭიროთ $[X \rightarrow \Pi]$ ლილაკს და შემდეგ რეგისტრის ლილაკს, რომლის მისამართია $RG9$. მაგალითად, რიცხვი 3,141527 შევიტანოთ $RG9$ რეგისტრში, ამისათვის მიმდევრობით დავაჭიროთ შემდეგ ლილაკებს:

$[3]$ $[.]$ $[1]$ $[4]$ $[1]$ $[5]$ $[B\Pi]$ $[2]$ $[7]$ ინდიკატორზე მიიღება 3,1415 27
 $[X \rightarrow \Pi]$ $[9]$ „ 3,1415 27.

შევამოწმოთ, არის თუ არა $RG9$ რეგისტრში აღებული რიცხვი?
 ამისათვის ჯერ გავაუქმოთ X რეგისტრში შეტანილი რიცხვი $[Cx]$ ლილაკით. შემდეგ თითო დავაჭიროთ $[\Pi \rightarrow X]$ და $[9]$ ლილაკებს:
 $[\Pi \rightarrow X]$ $[9]$. ინდიკატორზე მიიღება 3,1415 27.

ამრიგად, $[X \rightarrow \Pi]$ ლილაკი იხმარება რეგისტრულ მუხსიერებაში მონაცემთა შესანახად, ხოლო $[\Pi \rightarrow X]$ ლილაკი იხმარება რეგისტრულ მუხსიერებიდან მონაცემთა გამოსახატვად.

განხილული რეგისტრების საშუალებით გამოვთვალოთ წრფივი ფუნქციის $f(x) = 4x + 5$ მნიშვნელობა x -ის მოცემული მნიშვნელობისათვის. ამ ფუნქციის გამოსათვლელად გვექნება შემდეგი ცხრილი.

ცხრილი 2

0	1	2
x	$4 \cdot [0]$	$[1] + 5$

ავიღოთ x . მანქანისთვის ეს ნიშნავს x იმყოფება რომელიმე რეგისტრში, მაგალითად, RGa რეგისტრში, და იგი უნდა გამოვიყიბოთ RGa რეგისტრიდან. სიმბოლურად ეს ბრძანება ასე ჩაიწერება: $[\Pi \rightarrow X]$ $[a]$. რიცხვი x უნდა გამრავლდეს 4-ზე. ამისათვის X რეგისტრიდან x რიცხვი უნდა გადაეცეს Y რეგისტრს. ეს ბრძანება $[B\uparrow]$ სიმბოლოთი აღნიშნება. შემდეგ ავიღოთ რიცხვი 4. ეს რიცხვი მანქანის წინხედზე $[4]$ სიმბოლოთია მონიშნული. ამის შემდეგ უნდა შესრულდეს ბრძანება $x \cdot 4$. ამისათვის საკმარისია, 4-ის აღების შემდეგ შესრულდეს ბრძანება $[X]$.

მიღებული მნიშვნელობა უნდა შეიკრიბოს 5-თან. ამისათვის უნდა ავიღოთ რიცხვი 5, რომელიც $[5]$ სიმბოლოთი აღნიშნული, და შესრულდეს ბრძანება, რომელიც $[+]$ სიმბოლოთი აღნიშნული.

მთლიანად $f(x) = 4x + 5$ ფუნქციის გამოთვლის პროგრამა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

ცხრილი 3

$[\Pi \rightarrow X]$ $[a]$
 $[B\uparrow]$
 $[4]$
 $[X]$
 $[5]$
 $[+]$

ამის შემდეგ გამოთვლები უნდა შეწყდეს, მანქანა უნდა გაჩერდეს.

5. მანქანაში პროგრამის შეტანა. შევიტანოთ რეგისტრულ (ძირითად) მუხსიერებაში მე-3 ცხრილით მოცემული პროგრამა. ამისათვის დავაჭიროთ ლილაკებს $[F]$ $[\Pi\Pi]$. ამით მანქანა გადაიყვანება პროგრამის ჩაწერის რეჟიმში. ინდიკატორზე გამოჩნდება $\square 00$. ეს ნიშნავს მანქანა მზადაა ბრძანების მისაღებად და მისი ნომერი იქნება 00 (მისამართი იქნება 00). შემდეგ დავაჭიროთ ლილაკებს $[\Pi \rightarrow X]$, $[a]$. ინდიკატორზე მივიღებთ

9— 01 ; |

ამ ინდიკატორზე აღნიშნულია, რომ პირველი რიცხვი $[II-X]$ $[a]$ ბრძანების კოდია — პირობითი ნიშანი, ხოლო მეორე რიცხვი 01 შემდეგი ბრძანების მისამართია. შემდეგ დავაჭიროთ $[B+]$ ლილას. ინდიკატორზე მივიღებთ

OE 6— 02 .

აქ პირველი გამოსახულება EO ბრძანების კოდია, მეორე წინა ბრძანების კოდია (ამ ნიშანში გადაინაცვლა მარჯვნივ), მესამე რიცხვი კი შემდეგი ბრძანების მისამართია.

დავაჭიროთ ლილას [4]. ინდიკატორზე მივიღებთ

04 OE 6— 03 .

პირველი რიცხვი კოდია ბრძანების „ავილოთ 4“, მეორე — წინა ბრძანებისა, მესამე — წინა მეორე ბრძანებისა, ხოლო მეოთხე რიცხვი მომდევნო ბრძანების მისამართია. ასე რომ, ინდიკატორზე მოთავსებულია სულ ოთხი ნიშანი. აქედან პირველი სამი აღებული ბრძანებისა და მის წინ მდებარე ბრძანებათა (ორი ბრძანების) კოდია, ხოლო მეოთხე — შემდეგი ბრძანების მისამართია.

გავაგრძელოთ მე-3 ცხრილით მოცემული პროგრამის შეტანა მანქანაში. მივიღებთ მე-4 ცხრილს.

ცხრილი 4			
ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილავი)	აღწერა	ინდიკატორის ჩვენება
00	$[II-X]$ $[a]$	RGa რეგისტრიდან x-ის გამოძახება	6— 01
01	$[B+]$	x-დან y-ში x-ის გადაცემა	OE 6— 02
02	[4]	რიცხვის 4-ის ჩაწერა x რეგისტრში	04 OE 6— 03
03	$[X]$	x და y-ში მოთავსებულ რიცხვთა გამრავლება და x-ში ჩაწერა	12 04 OE 04
04	[5]	რიცხვის 5-ის ჩაწერა x რეგისტრში (წინა მნიშვნელობა y-შია გადატანილი)	05 12 04 05
05	$[+]$	x და y-ში მოთავსებულ რიცხვთა შეკრება და x-ში ჩაწერა	10 05 12 06
06	$[C/II]$	მანქანის გაჩერება (გამოთვლების შეწყვეტა)	50 10 05 07

ამ პროგრამის მანქანაში შეტანის შემდეგ მანქანის $[F]$ და $[ABT]$ ლილავებზე დაჭერით მანქანას ავტომატური მუშაობის რეჟიმში გადავიყვანთ. ინდიკატორზე მივიღებთ 0-ს. ამის შემდეგ RGa რეგისტრში შევიტანოთ x-ის მნიშვნელობა. მაგალითად, 6. ამისათვის დავაჭერთ ლილავებს [6], $[X \rightarrow II]$, $[a]$. ინდიკატორზე გამოჩნდება 6.

დავაჭიროთ $[B/0]$ ლილას. ამით მანქანა პროგრამის შესრულებას 00 მისამართიდან დაიწყებს. დავაჭიროთ გაშვება — გაჩერების $[C/II]$ ლილას. მანქანა დაიწყებს პროგრამის შესრულებას. შესრულებს გამოთვლას და გაჩერდება. ინდიკატორზე გამოჩნდება რიცხვი 29,

$$4 \cdot 6 + 5 = 29.$$

ამრიგად, მე-3 ცხრილის მანქანის მეხსიერებაში შეტანის შემდეგ $x=6$ -სათვის $f(x)=4x+5$ მნიშვნელობის მისაღებად თითო დავაჭერით ლილავებს შემდეგი მიმდევრობით:

$[F]$, $[ABT]$, [6], $[X \rightarrow II]$, $[a]$, $[B/0]$, $[C/II]$

და ინდიკატორზე მივიღეთ რიცხვი 29.

8. მანქანაში შეტანილი პროგრამის შემოწმება. ყოველთვის უნდა შემოწმდეს მანქანაში შეტანილი პროგრამის სისწორე. ამისათვის კვლავ დავაჭიროთ ლილავებს $[F]$, $[IIIF]$. ინდიკატორზე მივიღებთ ბოლო ბრძანებას, 06-ს:

50 10 05 07

მიმდევრობით დავაჭიროთ $[III]$ ლილას და ინდიკატორზე გამოჩნდება მიმდევრობით ყველა ის რიცხვი, რომლებიც პროგრამის მე-4 ცხრილის მიხედვით იყო მიღებული. თუ რომელიმე ბრძანება შეცდომითაა შეტანილი, მისგან ორი მისამართით ადრე, $[III]$ ლილავზე ორჯერ დაჭერის შემდეგ, გამოჩნდება ორი ბრძანება. აქედან ხელახლა შევიტანოთ სათანადო ბრძანებები. ამით წინ დაშვებული შეცდომა სათანადოდ გაუქმდება. $[III]$ ლილავით ინდიკატორზე ნაჩვენები რიცხვები მარჯვნიდან მარცხნივ გადაადგილდება.

ამრიგად, $[F]$, $[IIIF]$ ლილავებზე დაჭერის შემდეგ $[III]$ ლილავზე დაჭერით ინდიკატორზე მოთავსებული გამოსახულება გადაადგილდება მარჯვნიდან მარცხნივ — ბრძანებების მისამართების ნომრები მცირდება, ხოლო $[III]$ ლილავზე დაჭერით ინდიკატორზე მოთავსებული გამოსახულება გადაადგილდება მარცხნიდან მარჯვნივ — ბრძანებათა ნომრები იზრდება.

7. პროგრამის გაშართვა. მანქანის მეხსიერებაში სწორად შეტანილი პროგრამა იმის პირობას არ იძლევა, რომ ამოცანის პასუხი შეტანილი პროგრამით ზუსტად მიიღება. შეიძლება თვით პროგრამა არაა კარგად შედგენილი. მანქანიდან მიღებული შედეგი შეიძლება მცდარი, შეიძლება შედეგი სრულიადაც არ მიიღება, მანქანა გაუთავებლად მუშაობს. ამი-

ტომ, ვიდრე შედგენილი პროგრამით დაეწეებდეთ გამოთვლას, პროგრამა უნდა გაიმართოს. პროგრამის გამართვით წარმოებს პროგრამის სისწორის შემოწმება. პროგრამის გამართვა მეტად შრომატევადი საქმეა. მაგრამ მეტად პასუხსაგები, რადგანაც პროგრამაში დაშვებულ უმნიშვნელო შეცდომას შეუძლია გამოიწვიოს ამოცანის ამოხსნაში დიდი შეცდომა ან შეიძლება სულაც ვერ მივიღოთ პასუხი.

პროგრამის სისწორის დამტკიცება რთული საქმეა. დღეისათვის პროგრამის გამართვის შემდეგი მეთოდია მიღებული.

უნდა ავიღოთ ისეთი ამოცანა, რომელიც გასამართავი პროგრამით ამოიხსნება და ამოხსნათ ისე, როგორც პროგრამა მოითხოვს. შევიტანოთ ამოხსნილი ამოცანის მონაცემები მანქანაში და მანქანა გადავიყვანოთ ავტომატური მართვის რეჟიმზე ისე, რომ შეგვეძლოს ყოველი ბრძანების შესრულება შევადაროთ ჩვენ მიერ ამოხსნილი ამოცანის ბრძანებების შესრულებას, ამისათვის მიმდევრობით დავაჭიროთ შემდეგ ლილაკებს

[F], [ABT], [B/O], [ΠΠ].

ერთეერ [ΠΠ] ლილაკზე თითის დაჭერა ერთი ბრძანების შესრულებას იძლევა.

აღებული ამოცანის ხელით ამოხსნის ვარიანტს ამოცანის ამოხსნის შედარების ნიშნულს — ტესტს (ეტალონს) უწოდებენ.

ცხრილი 5

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
...	...	...
10	(X)	12
11	[ΠΠ]	53
12	[2] [5]	25
13	[B+]	0E
...	...	...
25	[+]	10
26	2	02
27	[B/O]	52

ჭერით ხორციელდება იმ ქვეპროგრამაზე გადასვლა, რომლის მისამართიც პროგრამაში უშუალოდ [ΠΠ]-ს მოსდევს. მე-5 ცხრილში ნაჩვენებ-

მანქანით ამოცანის ამოხსნის მიმდინარე შედეგი თუ დავითხვა ამოცანის შედარების ნიშნულს მიმდინარე შედეგს, მაშინ ვიტყვი ამოცანის ამოხსნის პროგრამა გაიმართულია. თუ ასეთი დამთხვევა არ მოხდა, მაშინ ამოცანის ამოხსნის პროგრამა სათანადოდ უნდა შესწორდეს ან მთლიანად უნდა შეიცვალოს.

ცხადია, ამოცანის ამოხსნის პროგრამის გამართვა გაადვილდება, თუ ამოცანის ამოხსნის პროგრამას ქვეპროგრამებად დავანაწილებთ.

8. ქვეპროგრამაზე გადასვლა.

გავეცნოთ [ΠΠ] ლილაკის სხვა დანიშნულებას. [ΠΠ] ლილაკის და-

ბია [ΠΠ] ლილაკის გამოყენება. მანქანა ავტომატური მეშაობის რეჟიმში გადავა 25-ე ბრძანების შესრულებაზე და შესრულდება ყველა ბრძანება [B/O] ბრძანებამდე. ამ ბრძანებით მანქანა დაუბრუნდება 25-ე ბრძანების მომდევნო ბრძანების შესრულებას.

ამრიგად, [ΠΠ] ბრძანებით მთავარი პროგრამა გადავა ქვეპროგრამაზე, რომლის მისამართი უშუალოდ [ΠΠ]-ს მოსდევს და მანქანა უკან დაუბრუნდება [ΠΠ] ბრძანების შემდეგ მეორე ბრძანების შესასრულებლად [B/O] ბრძანებით.

9. პირობითი, უპირობო და ირიბი გადასვლის ბრძანებები. ამ ბრძანებათა აზრის გასაგებად განვიხილოთ ე. წ. ვარდნაცვლებათა რიცხვის

$$n! = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \quad (2)$$

გამოთვლის პროგრამა. პროგრამა მოცემულია მე-6 ცხრილით. (2) ფორმულაში ძირითადი ისაა, რომ წინა რიცხვი მრავლდება $(n-1)$ -ზე, შემ-

ცხრილი 6

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
00	[K] [Π→X] [3]	73	06	[Π→X] [5]	65
01	[Π→X] [3]	63	07	[X]	12
02	[F] [X=0]	5E	08	[X→Π] [5]	45
03	[0] [6]	06	09	[BΠ]	51
04	[Π→X] [5]	65	10	[0] [0]	00
05	[C/Π]	50			

დეგ კი ამ რიცხვის 1-ით ნაკლებ რიცხვზე $(n-2)$ და ა. შ. ამიტომ უნდა გამოვიყენოთ ისეთი ბრძანება, რომელიც რომელიმე რეგისტრში შენახულ რიცხვს (შინაარსს — კონტენტს) 1-ით შემაციერებს. ასეთი ბრძანებაა

[K] [Π→X] [3].

ამ ბრძანებით RG3 რეგისტრში შენახული რიცხვი 1-ით შემცირდება. შემდეგ ამ რეგისტრში დარჩენილი რიცხვი გამოვიძახოთ X რეგისტრზე (ბრძანება [Π→X] [3]) და შევამოწმოთ, ეს რიცხვი ნული ზომ არაა. ამისათვის გამოვიყენოთ ნულზე შემოწმების ბრძანება [F] [X=0]. თუ RG3 რეგისტრში ნული არაა, მაშინ განხორციელდება

ბრძანება, რომელიც უშუალოდ $[F] [X=0]$ ბრძანებას მოსდევს. ჩვენ შემთხვევაში ასეთია ბრძანება $[0] [6]$. ამ ბრძანებაში კი მოთავსებულია $[II \rightarrow X] [5]$, რომელიც გამოიძახებს რიცხვს RG5 რეგისტრიდან (06). შემდეგ მას გაამრავლებს (07) წინა X რეგისტრში დარჩენილ რიცხვზე და ამ ნამრავლს გააგზავნის ისევ RG5-ში (08). ამის შემდეგ მოთავსებულია $[BI]$ უპირობო გადასვლის ბრძანება (09), რომელიც განაზოცრელებს (00) ბრძანებაზე გადასვლას. ამით წრედი შეიქმნება; მოქმედება გამეორდება. და ეს გამეორება მოხდება მანამდე, ვიდრე მე-3 რეგისტრში გამოკლებათა შედეგად 0-ს არ მივიღებთ. თუ მე-3 რეგისტრში წელი მივიღეთ, მაშინ შესრულდება $[F] [X=0]$ -ის შემდეგ მოთავსებული მეორე ბრძანება (04), რომელიც გამოიძახებს მე-5 რეგისტრში მიღებულ საბოლოო მნიშვნელობას ინდიკატორზე (04) და მანქანა გაჩერდება $[C/II]$ (ბრძანება 05).

შევიტანოთ მანქანაში (2) ფორმულის გამოთვლის პროგრამა. წინასწარ დაეპირათ ლილავს $[B/0]$, რომლითაც პროგრამულ პრიცხველში ადრე შეტანილი ინფორმაცია გაუქმდება შემდეგ დაეპირათ ლილავებს $[F] [PII]$, რომლითაც მანქანა გადავა პროგრამული რეჟიმით მუშაობაზე. ინდიკატორზე გამოჩნდება 00, რომლიდანაც უნდა შევიტანოთ პროგრამა: მე-6 ცხრილის „ოპერაცია“. ბოლოს დაეპირათ ლილავებს $[F] [ABT]$. მანქანა გადავიდა ავტომატური რეჟიმით მუშაობაზე. მანქანა უკვე მზადაა n -ის მნიშვნელობის მისაღებად.

მაგალითად, გვინდა გამოვთვალოთ 6!

ლილავებს შემდეგი მიმდევრობით დაეპირათ:

$[6] [X \rightarrow II] [3] [X \rightarrow II] [5] [B/0] [C/II]$.

ინდიკატორზე მივიღებთ 720. მაშასადამე, $6! = 720$.

პირობით გადასვლის ბრძანების $[x=0]$ ანალოგიურად გამოიყენება $[x \neq 0]$, $[x \geq 0]$, $[x < 0]$ პირობით გადასვლის ბრძანებები. ეს ბრძანებები ხორციელდება $[F]$ თავსართი ლილავის საშუალებით: $[F] [x \neq 0]$, $[F] [x \geq 0]$, $[F] [x < 0]$.

შევჩერდეთ გამოძახებების ირიბი ინდიკაციის ბრძანებაზე. იგი ხორციელდება $[K] [II \rightarrow X]$ ლილავებით და ძირითადი რეგისტრების ნომრების ლილავებით. ამასთან, თუ აქ მონაწილეობს რეგისტრები RG0, RG1, RG2, RG3, მაშინ ამ რეგისტრების შინაარსი ერთით მცირდება, თუ მონაწილეობს რეგისტრები RG4, RG5, RG6, მაშინ ამ რეგისტრების შინაარსი ერთით იზრდება, ხოლო, თუ მონაწილეობს რეგისტრები RG7, ..., RGd, მაშინ ამ რეგისტრების შინაარსი არ იცვლება.

ამ ბრძანების მოქმედება ვაჩვენოთ მაგალითზე. შევიტანოთ რეგისტრებში რიცხვები და სათანადო ბრძანების შესრულების შედეგი გამოჩნდება ინდიკატორზე (იხ. მე-7 ცხრილი).

ცხრილი 7

ლილავები	ინდიკაცია	აღწერა
$[8] [X \rightarrow II] [3]$	8	რიცხვი 8 შევიტანეთ RG3-ში.
$[1] [9] [5] [X \rightarrow II] [7]$	195	რიცხვი 195 შევიტანეთ RG7-ში.
$[2] [8] [7] [X \rightarrow II] [6]$	287	რიცხვი 287 შევიტანეთ RG6-ში.
$[K] [II \rightarrow X] [3]$	195	RG3-ში მოდიფიცირებული რიცხვია $8-1=000000\ 07$. ინდიკატორზე გამოჩნებულია RG7-ის ქონება 195.
$[II \rightarrow X] [3]$	000 000 07	
$[K] [II \rightarrow X] [3]$	287	
$[II \rightarrow X] [3]$	000 000 06	$7-1=000\ 000\ 06$.

ცხრილი 8

ლილავები	ინდიკაცია	აღწერა
$[1] [4]$	14	რიცხვი 14 შევიტანეთ X რეგისტრში
$[X \rightarrow II] [0]$	14	14 ჩაწერეთ RG0 რეგისტრში
$[K] [X \rightarrow II] [0]$	14	RG0 რეგისტრში კოდის მოდიფიკაცია და 14-ის RGd რეგისტრში ჩაწერა
$[II \rightarrow X] [0]$	000 000 13	RG0 რეგისტრში ჩაწერილი რიცხვი
$[II \rightarrow X] [d]$	14	RGd რეგისტრში ჩაწერილი რიცხვი
$[5]$	5	5 ჩაწერეთ X რეგისტრში
$[K] [X \rightarrow II] [0]$	5	RG0 რეგისტრში კოდის მოდიფიკაცია და 5-ის RGc რეგისტრში ჩაწერა
$[II \rightarrow X] [0]$	000 000 12	RGc რეგისტრში ჩაწერილი რიცხვი
$[II \rightarrow X] [c]$	5	RG0 რეგისტრში ჩაწერილი რიცხვი

რეგისტრში ირიბი ჩაწერის ბრძანება ხორციელდება დილაკებით $[K]$, $[X \rightarrow \Pi]$ და დილაკით, რომელიც სიმბოლურად გამოსახავს სათანადო რეგისტრის მისამართს. ამ ბრძანებით მოდიფიცირდება აღებული რეგისტრში შენახული რიცხვი და X რეგისტრში აღებული რიცხვი ჩაიწერება იმ რეგისტრში, რომლის კოდი სათანადოდ მოდიფიცირებულია.

რეგისტრში ირიბი ჩაწერის ბრძანების მოქმედება ავტომატური მუშაობის რეჟიმში ნაჩვენებია მე-8 ცხრილში.

ბრძანება უპირობო ირიბი გადასვლის შესახებ ხორციელდება დილაკებით $[K]$ $[B\Pi]$ და დილაკით, რომელიც სიმბოლურად გამოსახავს სათანადო რეგისტრის მისამართს ($RG0$ ან $RG1 - RGd$). ამ ბრძანებით მოდიფიცირდება ის მისამართი, რომელიც ბრძანებაში აღებული რეგისტრშია და მანქანა გადავა იმ ბრძანების შესრულებაზე, რომლის მისამართი ეს მოდიფიცირებული მისამართია.

მაგალითად, $RG3$ რეგისტრში მოთავსებულია რიცხვი 21 (რამე ბრძანების მისამართი), $RG4$ რეგისტრში 33, RGa რეგისტრში 15, მაშინ მანქანა, რომელიც ავტომატურ რეჟიმში მუშაობს, ბრძანებით

$[K]$ $[B\Pi]$ $[3]$

შესრულებს არა მის მომდევნო ბრძანებას, არამედ მე-20 ბრძანებას ბრძანებით

$[K]$ $[B\Pi]$ $[4]$

შესრულებს არა მისი მომდევნო ბრძანება, არამედ ბრძანება, რომლის მისამართია 34.

ბრძანებით

$[K]$ $[B\Pi]$ $[a]$

პროგრამაში შესრულება არა მისი მომდევნო ბრძანება, არამედ ბრძანება, რომლის მისამართია 15. ამ ბრძანებით RGa რეგისტრში მოთავსებული ბრძანების მისამართი არ იცვლება.

პირობით ირიბი გადასვლის ბრძანებები ხორციელდება დილაკით $[K]$ და პირობის დილაკით $[x=0]$ (ან $[x \neq 0]$, $[x \geq 0]$, $[x < 0]$) და სათანადო რეგისტრის დილაკით $[0]$, $[1]$ ან $[2]$, ..., $[9]$, ..., $[d]$. ამ ბრძანებით შემოწმდება X რეგისტრში (პროგრამაში ამ ბრძანების უშუალოდ წინ მდებარე ბრძანების შედეგი, რომელიც ჩვეულებრივ X რეგისტრში — ინდიკატორზე მიიღება) მიღებული აკმაყოფილებს თუ არა აღებულ პირობას. მაგალითად,

$[K]$ $[X=0]$ $[0]$.

თუ X რეგისტრში $x=0$ პირობა არ სრულდება, მაშინ $RG0$ რეგისტრში მოთავსებული რიცხვი (მისამართი) მოდიფიცირდება და ამ მოდიფიცირებული მისამართის ბრძანება შესრულება.

თუ X რეგისტრში $x=0$ პირობა სრულდება, მაშინ პროგრამაში ამ ბრძანების $[K]$ $[X=0]$ $[0]$ უშუალოდ მომდევნო ბრძანება შესრულება. ამასთან $RG0$ რეგისტრში მოთავსებული მისამართი არ მოდიფიცირდება.

ქვეპროგრამაზე ირიბი გადასვლის ბრძანება ხორციელდება დილაკებით $[K]$, $[\Pi\Pi]$ და იმ დილაკით, რომელიც გამოსახავს სათანადო რეგისტრის მისამართს, რომელშიდაც მოთავსებულია რომელიმე ბრძანების მისამართი.

მაგალითად, პროგრამაში მოთავსებულია ბრძანება $[K]$ $[\Pi\Pi]$ $[7]$. ამ ბრძანებით შეინახება სპეციალურ რეგისტრში (ე.წ. დაბრუნების სტეკში) უშუალოდ მომდევნო ბრძანების მისამართი და მანქანა გადავა რეგისტრში მოთავსებული მოდიფიცირებული ბრძანების შესრულებაზე. შემდეგ შესრულება ამ ახალი ბრძანების მომდევნო ყველა ბრძანება და $[B/0]$ ბრძანებით მანქანა დაუბრუნდება $[K]$ $[\Pi\Pi]$ $[7]$ ბრძანების უშუალოდ მომდევნო ბრძანების შესრულებას. ყველაფერი ეს ნაჩვენებია მე-9 ცხრილში.

ცხრილი 9

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (დილაკი)	კოდი
00	$[2]$	02
01	$[5]$	05
02	$[X \rightarrow \Pi]$ $[7]$	47
03	$[K]$ $[\Pi\Pi]$ $[7]$	—7
04	$[+]$	
...	...	...
23	$[X \rightarrow \Pi]$ $[2]$	42
24	$[C/\Pi]$	50
25	$[\Pi \rightarrow X]$ $[a]$	6—
...	...	...
35	$[\Pi \rightarrow X]$ $[d]$	6d
36	$[5]$	05
37	$[B/0]$	52

როგორც სავარჯიშო შევადგინოთ კვადრატული განტოლების

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ამოხსნის პროგრამა

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a},$$

პროგრამა მოცემულია მე-10 ცხრილში.

ცხრილი 10

ბმ. მს.	ოპერაცია (ლილაქი)	კოდი	ბმ. მს.	ოპერაცია (ლილაქი)	კოდი	ბმ. მს.	ოპერაცია (ლილაქი)	კოდი
	$[B/0][F][\Pi P \Gamma]$	00	14	$[\Pi \rightarrow X][1]$	61	29	$[+]$	10
00	$[\Pi \rightarrow X][b]$	6L	15	$[-]$	11	30	$[X \rightarrow \Pi][6]$	46
01	$[\Pi \rightarrow X][a]$	6—	16	$[F][X \geq 0]$	59	31	$[C/\Pi]$	50
02	$[\div]$	13	17	$[3][2]$	32	32	$[/-/]$	0L
03	$[X \rightarrow \Pi][0]$	40	18	$[F][\sqrt{\quad}]$	21	33	$[F][\sqrt{\quad}]$	21
04	$[\Pi \rightarrow X][C]$	6C	19	$[X \rightarrow \Pi][3]$	43	34	$[X \rightarrow \Pi][7]$	47
05	$[\Pi \rightarrow X][a]$	6—	20	$[\Pi \rightarrow X][2]$	62	35	$[C/\Pi]$	50
06	$[\div]$	13	21	$[+]$	10		ზითობა	
07	$[X \rightarrow \Pi][1]$	41	22	$[X \rightarrow \Pi][4]$	44		$[F][ABT]$	
08	$[\Pi \rightarrow X][0]$	60	23	$[\Pi \rightarrow X][2]$	62		$a[X \rightarrow \Pi][a]$	
09	$[2]$	02	24	$[\Pi \rightarrow X][3]$	63		$b[X \rightarrow \Pi][b]$	
10	$[\div]$	13	25	$[-]$	11		$c[X \rightarrow \Pi][C]$	
11	$[/-/]$	0L	26	$[X \rightarrow \Pi][5]$	45		$[B/0][C/\Pi]$	
12	$[X \rightarrow \Pi][2]$	42	27	$[\Pi \rightarrow X][2]$	62			
13	$[F][X^*]$	22	28	$[\Pi \rightarrow X][3]$	63			

იმის შემდეგ, როდესაც მანქანა დაამთავრებს მუშაობას, გამოვიძახოთ GR7 რეგისტრიდან რიცხვი,

$$[\Pi \rightarrow X][7].$$

თუ ინდიკატორზე წელია, მაშინ $[\Pi \rightarrow X][5]$ ინდიკატორზე მოგვცემს x_1 და $[\Pi \rightarrow X][6]$ ინდიკატორზე მოგვცემს x_2 . თუ $[\Pi \rightarrow X][7]$ ინდიკატორზე წელიწადიდან განსხვავებული რიცხვია, მაშინ $[\Pi \rightarrow X][2]$ მოგვცემს a -ს, ხოლო $[\Pi \rightarrow X][7]$ მოგვცემს β -ს. მივიღებთ $x = a \pm i\beta$.

ამოვხსნათ განტოლება $2x^2 + 3x - 5 = 0$. დავაჭიროთ ლილაქებს $[F][ABT]$. მანქანა გადაიყვანოთ ავტომატური მუშაობის რეჟიმში. მანქანაში შევიტანოთ მონაცემები. ამისათვის მიმდევრობით დავაჭიროთ შემდეგ ლილაქებს:

$$[2][X \rightarrow \Pi][a] [3][X \rightarrow \Pi][b] [5][/-/][X \rightarrow \Pi][c].$$

გამოთვლა უნდა დაეწყოს პროგრამის 00 ბრძანებიდან, ამისათვის დავაჭიროთ ლილაქს $[B/0]$. გავუშვათ მანქანა გამოთვლაზე. ამისათვის დავაჭიროთ ლილაქს $[C/\Pi]$.

მანქანა მცირე დროის შემდეგ გაჩერდება. გამოვიძახოთ RG7-დან რიცხვი: დავაჭიროთ ლილაქებს $[\Pi \rightarrow x][7]$. ინდიკატორზე წელია. მაშასადამე, მოცემულ განტოლების ნამდვილი ამონახსნები აქვს. გამოვიძახოთ რეგისტრიდან RG5, RG6 რიცხვები. ინდიკატორზე სათანადოდ მივიღებთ — 2,5 და 1-ს. ამრიგად, აღებული განტოლების ამონახსნებია

$$x_1 = -2,5; \quad x_2 = 1.$$

კიდევ ამოვხსნათ განტოლება

$$x^2 + 4x + 13 = 0. \quad (3)$$

შევიტანოთ მანქანაში რიცხვები $a=1$, $b=4$, $c=13$. ამისათვის მიმდევრობით დავაჭიროთ შემდეგ ლილაქებს:

$$[1][X \rightarrow \Pi][a] [4][X \rightarrow \Pi][b] [1] [3][X \rightarrow \Pi][c]; [B/0] [C/\Pi].$$

მანქანა მცირე დროის შემდეგ გაჩერდება. გამოვიძახოთ რიცხვი RG7 რეგისტრიდან: ინდიკატორზე მივიღებთ 3-ს.

გამოვიძახოთ რიცხვი RG2 რეგისტრიდან. ინდიკატორზე მივიღებთ — 2-ს.

ამრიგად, (3) განტოლების ამონახსნებია $x_1 = -2 + 3i$, $x_2 = -2 - 3i$.

10. ციკლის ბრძანებები. ციკლის ორგანიზაციის ბრძანებაა $[F][L_0]$ (ან $[L_1]$, $[L_2]$, $[L_3]$). ამ ბრძანების შესრულებით ვღებულობთ შემდეგს: RG0 რეგისტრის შინაარსს გამოაქვდება 1 და შემოწმდება ამ რეგისტრში წელი მივიღეთ თუ არა. თუ ერთჯერ დაჭერილ ლილაქებზე $[F][L_0]$ აღებულ რეგისტრში წელი არაა, მაშინ შესრულებდა ბრძანება, რომელიც უშუალოდ ამ ბრძანებას მოსდევს, წინააღმდეგ შემთხვევაში შესრულებდა ამ ბრძანებიდან მეორე ბრძანება.

განვიხილოთ მაგალითი.

შევადგინოთ პროგრამა შემდეგი ჯამის გამოსათვლელად:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

ვთქვათ, RG0 რეგისტრში შეტანილია რიცხვი n . გამოვიძახოთ რიცხვი ამ რეგისტრიდან, ბრძანება 01,

01 $[\Pi \rightarrow X]$ [0] 60.

გამოძახებული რიცხვი ავიყვანოთ კვადრატში, ბრძანება 01,

02 $[F]$ $[X^2]$ 22

და ასე შემდეგ. მთლიანი პროგრამა მოცემულია მე-11 ცხრილში.

ცხრილი 11

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
	$[B/O]$ $[F]$ $[\Pi \Gamma]$	00
00	$[X \rightarrow \Pi]$ [0]	40
01	$[\Pi \rightarrow X]$ [0]	60
02	$[F]$ $[X^2]$	22
03	$[F]$ $[1/X]$	23
04	$[\Pi \rightarrow X]$ [5]	65
05	$[+]$	10
06	$[X \rightarrow \Pi]$ [5]	45
07	$[F]$ $[L_0]$	5Γ
08	[0] [1]	01
09	$[C/\Pi]$	50
	$[F]$ $[ABT]$	

მაგალითად, გამოთვალეთ S_4 . ამისათვის მიმდევრობით დავაჭიროთ შემდეგ ლილაკებს:

$[F]$ $[ABT]$ [4] $[B/O]$ $[C/\Pi]$.

ინდიკატორზე მივიღებთ 1,4236111.

რადგანაც ამ რიცხვში ცდომილება მეშვიდე ათწილად ნიშანშია, შეგვიძლია დავწეროთ

$$S_4 = 1,423611.$$

11. **არაკორექტული მოქმედებანი.** ზოგჯერ გამოთვლების შესრულების დროს მანქანაში მიიღება ისეთი რიცხვები, რომლებზედაც ზოგიერთი მოქმედება არ სრულდება. ამ შემთხვევაში ინდიკატორზე გამოჩნდება სიგნალი „ЕГГОГ“. ასეთ მოქმედებას არაკორექტული მოქმედება ეწოდება. არაკორექტული მოქმედებანია 0-ზე გაყოფა, $x^{\#}$, თუ $x=0$, $y \geq 0$, უარყოფითი რიცხვიდან კვადრატული ფესვი, უარყოფითი რიცხვის ლოგარითმი, $\arcsin x$ და $\arccos x$, როდესაც $x > 1$. სიგნალი „ЕГГОГ“ გამოჩნდება მაშინაც, როცა მანქანაში მიღებული რიცხვი მანქანის შესაძლებლობას გადააჭარბებს ან მის შესაძლებლობაზე მცირეა. ამ ბოლო შემთხვევაში ინდიკატორზე მხოლოდ ნულები გამოჩნდება. სიგნალი „ЕГГОГ“ არ წარმოადგენს მანქანისათვის შეფერხებას. მის შემდეგ ჩვეულებრივად გაგრძელდება მოქმედება. მაგალითად, შეიძლება გამოთვლის დროს შემდეგი მდგომარეობა შეიქმნეს:

ლილაკები	ინდიკაცია
[9] $[/ - /]$	—9
$[F]$ $[V]$	ЕГГОГ
[1] [5]	15

აღნიშნული სიგნალის გამოჩენის შემდეგ გამოთვლის გაგრძელება შეიძლება.

12. **საერთო ცნობები.** მიკროკალკულატორი პროგრამულ რეჟიმში მუშაობაზე გადადის $[F]$ და $[\Pi \Gamma]$ ლილაკებზე დაჭერით. ამ დროს მოქმედებანი, ბრძანებათა და ციფრთა კოდი, რომელიც ლილაკს ან ლილაკთა ჯგუფს მიენიჭება, ჩაიწერება პროგრამის სპეციალურ მეხსიერებაში (მოქმედებათა და ბრძანებათა კოდი, ცხრილი 12).

ბრძანებათა და მოქმედებათა მიმდევრობა, რომლებიც აუცილებელია ამოცანის ამოსახსნელად, წარმოადგენს ამოცანის ამოხსნის პროგრამას.

გამომთვლელ MK-56 მანქანას მეხსიერებისათვის აქვს 98 უჯრა. უჯრებს აქვთ ნომრები — მისამართები 00-დან დაწყებული 97-ის ჩათვლით.

მანქანაში ჩაწერის მიმდევრობისათვის და ბრძანებათა შესრულების მართვისათვის არის სპეციალური უჯრა — აღმრიცხველი, რომლის შინაარსი ყოველი ახალი ბრძანების შეტანით ერთი ერთეულით იზრდება.

ლილავი	კოდი	ლილავი	კოდი	ლილავი	კოდი	ლილავი	კოდი
[·]	0	F 1/X	23	K НОП	54	K X ≥ 0 1	91
/—/	OL	" ↔	24	K БП 0	80	K X ≥ 0 9	99
БП	OC	" ∑	25	" " 1	81	" " a	9
CX	OG	F X < 0	5c	K БП 9	89	" " b	9L
B†	OE	" X = 0	5E	" " a	8—	" " c	9C
0	00	" X ≠ 0	57	" " b	8L	" " d	9Г
1	01	" X ≥ 0	59	" " c	8C	K X ≠ 0 0	70
.....	...	F L3	5—	" " d	8Г	" " 1	71
9	09	" L2	58	K ПП 0	—0		...
+	10	" L1	5L	" " 1	—1	K X ≠ 0 9	79
—	11	" L0	5Г		...	" " a	7—
×	12	X → Π 0	40	K ПП 9	—9	" " b	7L
÷	13	" 1	41	" " a	—	" " c	7C
→	14		...	" " b	—L	" " d	7Г
F 10 ^x	15	X → Π 9	49	" " c	—C	K X → Π 0	L0
" e ^x	16	" a	4—	" " d	—Г	" " 1	L1
" lg	17	" b	4L	K X = 0 0	EO		...
" ln	18	" c	4C	" " 1	E1	K X → Π 9	L9
" sin ⁻¹	19	" d	4Г	K X = 0 9	E9	" " a	L—
" cos ⁻¹	1—	Π → X 0	60	K X < 0 0	CO	" " b	LL
" tg ⁻¹	1L	" 1	61	" " 1	C1	" " c	LC
" sin	1C		...	K X < 0 9	C9	" " d	LГ
" cos	1Г	Π → X 9	69	" " a	C—	K Π → X 0	Г0
" tg	1E	" a	—6	" " b	CL	" " 1	Г1
" Fπ	20	" b	6L	" " c	CC	" " a	Г—
" √	21	" c	6C	" " d	CG	" " b	ГL
" X ²	22	" d	6Г	K X ≥ 0 0	90	" " c	ГC
C/Π	50	БП	51	B/O	52	" " d	ГГ
						F BX	O
						ПП	53

ზემოთ განვიხილეთ ზოგიერთი ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილის შედგენის და განტოლების ამოხსნის პროგრამა. შეიძლება აღნიშნული გამოთვლები დაპროგრამების გარეშე ჩავეყარებინა. მაგრამ უბრალო დაკვირვებითაც ადვილი შესამჩნევია, თუ როგორ ამარტივებს გამოთვლებს და რა მცირე დროში ეღებულობთ სათანადო მნიშვნელობას. ეს მაშინ უფრო შესამჩნევია, როდესაც გვევლინება განტოლების ამოხსნა კომპიუტერითა სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

§ 14. ნაბიჯიანი სიზუსტით გაყოფა

მიკროკალკულატორით „МК-56“ შეიძლება არაუმეტეს რვანიშნად-ციფრიანი რიცხვების გაყოფა და განაყოფიც რვანიშნადი ციფრით მიიღება. მაგალითად გამოვთვალოთ $\sqrt{2} : \pi$.

ლილავებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ:

$$[2] [F] [\sqrt{\quad}] \uparrow [F] [\pi] [=].$$

ინდიკატორზე მივიღებთ 4,5015814 —01. მაგრამ კალკულატორის ინსტრუქციის თანახმად აქ მხოლოდ ოთხ ნიშნადი ციფრია სანდო. ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0,4502.$$

ახლა დავსვათ კითხვა: შეიძლება თუ არა განაყოფის უფრო მაღალი სიზუსტით მიღება, როდესაც მოცემული რიცხვები ზუსტია ან მაღალი სიზუსტისაა?

ამისათვის მოვიგონოთ გაყოფა ნებისმიერი სიზუსტით:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{10} \cdot \frac{10r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{10} \left[a_1 + \frac{r_1}{q} \right] = a_0 + \\ &+ \frac{1}{10} \left[a_1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{10r_1}{q} \right] = a_0 + \frac{1}{10} \left[a_1 + \frac{1}{10} \left(a_2 + \frac{r_2}{q} \right) \right] = \dots = a_0 + \\ &+ \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots \end{aligned}$$

ანუ

$$\frac{p}{q} = a_0, a_1, a_2, \dots, \quad (1)$$

სადაც a_0 მთელი რიცხვია, ხოლო $a_1, a_2, \dots$ ციფრები: 0, 1, ..., 9. მიღებული (1) გამოსახულებიდან ცხადია,

¹ А. Н. Цветков, В. А. Епанечников, Прикладные программы для микроэвм «Электроника ВЗ-34», «Электроника МК-56», «Электроника МК-54», М. 1984.

$$r_0 = p - a_0 q, \frac{10r_0}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q}, r_1 = 10r_0 - a_1 q, \dots$$

ზოგადად გვექნება

$$r_{i+1} = 10r_i - a_i q, \quad i=0, 1, \dots \quad (2)$$

(1) ფორმულის დაპროგრამებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ გამოძახების ორიზი ინდიკაციის ბრძანება. მაგალითად, $[K] [\Pi \rightarrow X] [0]$ ლილაკებით ხორციელდება ბრძანება, რომლითაც სრულდება RGO რეგისტრის ქონების მოდიფიკაცია და ამ მოდიფიცირებული რიცხვის მისამართის რეგისტრის ქონების ინდიკაცია.

მაგალითად, RGO რეგისტრში შევიტანოთ რიცხვი 13,439 285 და შემდეგ შევასრულოთ ბრძანება RGO რეგისტრიდან გამოძახების ორიზი ინდიკაციის შესახებ. ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ

$[1] [3] [\cdot] [4] [3] [9] [2] [8] [5] [X \rightarrow \Pi] [0]$.

ინდიკატორზე მივიღებთ 13,439 285-ს. შემდეგ დავაჭიროთ ლილაკებს $[K] [\Pi \rightarrow X] [0]$. ინდიკატორზე მივიღებთ 0-ს. RGC რეგისტრის მოდიფიცირებული მისამართია 000000012 და ამ რეგისტრში რიცხვი არ შეგვიტანია; ამ რეგისტრის ქონება 0-ია. RGO რეგისტრში არის მოდიფიცირებული რიცხვი. მართლაც, ლილაკებზე $[\Pi \rightarrow X] [0]$ დაჭერით ინდიკატორზე მივიღებთ 000000012. თუ გვინდა CRO რეგისტრში მოდიფიცირებული რიცხვი 13 იყოს, ცხადია, ამ რეგისტრში დამატებით 1 უნდა შევიტანოთ.

(1) რიცხვის გამოთვლის პროგრამა მოცემულია მე-13 ცხრილში.

ცხრილი 13

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
00	$[X \rightarrow \Pi] [0]$	40	10	$[\Pi \rightarrow X] [1]$	61
01	$[\leftrightarrow]$	14	11	$[C/\Pi]$	50
02	$[X \rightarrow \Pi] [2]$	42	12	$[\Pi \rightarrow X] [0]$	60
03	$[\Pi \rightarrow X] [0]$	60	13	$[X]$	12
04	$[\div]$	13	14	$[-]$	11
05	$[1]$	01	15	$[1]$	01
06	$[+]$	10	16	$[0]$	00
07	$[X \rightarrow \Pi] [1]$	41	17	$[X]$	12
08	$[K] [\Pi \rightarrow x] [1]$	Γ1	18	$[\Pi]$	51
09	$[\Pi \rightarrow X] [2]$	62	19	$[0] [2]$	02

გამოთვლის პროგრამა შემდეგნაირადაა შედგენილი. ვიგულისხმობთ, რომ რიცხვები p და q შეტანილია მანქანაში:

$[B/O] p [B \uparrow] q$.

ბრძანებებით 00—02 p რიცხვი შეტანილია RG2 რეგისტრში, ხოლო q რიცხვი RGO რეგისტრში. ინდიკატორზე p რიცხვი. გამოვიძახოთ ინდიკატორზე q რიცხვი. p გადაეცა Y რეგისტრს. ეს შესრულდა 03 ბრძანებით. შემდეგ p გავყავთ q -ზე (ბრძანება 04) და მიღებულ რიცხვს დავუმატოთ 1. ეს რიცხვი შევიტანოთ GR1 რეგისტრში (ბრძანება 05—07). ახლა გამოვიყენოთ გამოძახების ორიზი ინდიკაციის ბრძანება

08 $[K] [\Pi \rightarrow X] [1] \Gamma 1$.

ამ ბრძანების შესრულებით მოდიფიცირდება RG1 რეგისტრში რიცხვი— მიღება RG1 რეგისტრში მყოფი რიცხვის მხოლოდ მთელი ნაწილი და 1-ით შემცირდება. ინდიკატორზე კი მივიღებთ ამ მოდიფიცირებული მისამართის რეგისტრში მყოფ რიცხვს, მაგალითად, a .

გამოვიძახოთ RG2 და RG1 რეგისტრებიდან რიცხვები (ბრძანებები 09, 10). ამით ინდიკატორზე მყოფი რიცხვი (X რეგისტრში მყოფი რიცხვი) გადაეცემა Y რეგისტრს, ხოლო Y რეგისტრის რიცხვი მომდევნო რეგისტრს, რომელიც Z ასოთი აღვნიშნოთ. აღვნიშნოთ წარმოსადგენია, რომ რიცხვები რეგისტრებში შემდეგი მიმდევრობითაა განლაგებული:

Z რეგისტრში რიცხვი x

Y რეგისტრში რიცხვი p

X რეგისტრში — ინდიკატორზე რიცხვი a_0 a_0

რადგანაც ინდიკატორზე მოთავსებულია p რიცხვის q რიცხვზე განყოფილი a_0 მთელი ნაწილი, მანქანა უნდა გაჩერდეს და ეს განყოფილი ამოვწეროთ. მანქანის გაჩერების ბრძანებაა

11 $[C/\Pi] 50$.

ამის შემდეგ მიღებული რიცხვი გავამრავლოთ q -ზე და ეს ნამრავლი გამოვავლოთ p რიცხვს. ამისათვის გამოვიძახოთ RGO რეგისტრიდან q რიცხვი (ბრძანება 12). ეს რიცხვი ინდიკატორზე მოთავსდება, ხოლო რიცხვები, რომლებიც წინა რეგისტრებში იყო მოთავსებული შემდეგი რიცხვით დალაგდება:

T	p
Z	p
Y	a_0
X	q

აქ გამოვიყენოთ Z რეგისტრის მომდევნო რეგისტრი, რომელიც T ასოთი აღვნიშნეთ. გამრავლების შემდეგ $X-T$ რეგისტრებში რიცხვები შემდეგი მიმდევრობით განლაგდება:

T	p
Z	p
Y	p
X	$a_0 q$

ხოლო გამოკლების შემდეგ მიმდევრობით:

T	p
Z	p
Y	p
X	$p - a_0 q$

ეს სამი მოქმედება განხორციელდება ბრძანებებით 12—14. ამ ბრძანებათა შესრულების შედეგად ინდიკატორზე მივიღებთ $p - a_0 q = r_0$. ეს რიცხვი 10-ზე უნდა გავამრავლოთ და მიღებული რიცხვი ისევ q -ზე უნდა გავყოთ. ე. ი. P რიცხვის ადგილი $10r_0$ რიცხვმა დაიჭირა. პროცესი უნდა გამეორდეს. ამისათვის გამოვიყენოთ უპირობო გადასვლის ბრძანება 02 ბრძანებაზე:

18 [BΠ] 51

19 [0] [2] 02.

ამ ბრძანებით და მომდევნო ბრძანებებით შესრულდება შემდეგი: ინდიკატორზე მყოფი რიცხვი გადაეცემა GR2 რეგისტრს, RG0 რეგისტრიდან გამოიძახება რიცხვი q , რომელზედაც გაიყოფა ინდიკატორზე მყოფი რიცხვი $10r_0$ და ა. შ.

მაგალითად, გამოვთვალოთ $935 : 3,14$.

ამისათვის დავაჭიროთ ლილაკებს [B/O] [F] [ΠPF]. შემდეგ შევიტანოთ მე-13 ცხრილის „ოპერაცია (ლილაკი)“. ამის შემდეგ დავაჭიროთ ლილაკებს [F] [ABT] [B/O], ხოლო შემდეგ ლილაკებს

[9] [3] [5] [B↑] [3] [-] [1] [4] [C/Π].

მანქანის პირველი გაჩერებისას ინდიკატორზე მივიღებთ 297-ს. დავაჭიროთ [C/Π] ლილაკს, ინდიკატორზე გაჩერების შემდეგ მივიღებთ 7-ს. კვლავ დავაჭიროთ [C/Π] ლილაკს. მანქანის გაჩერებისას ინდიკატორზე მივიღებთ 7 ს და ა. შ. გვექნება: 297; 7, 7, 0, 7, 0, 0, 6, 3, 6, 9, ...

ამრიგად

$$395 : 3,14 = 297, 7707006369...$$

მანქანაზე ჩვეულებრივი გაყოფით მივიღებთ

$$395 : 3,14 = 297, 7707.$$

§ 15. მახსოვრების უახლოესი რეგისტრების გამოყენება

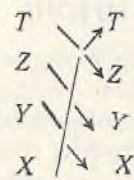
ზემოთ შეგვხვდა მახსოვრების უახლოესი რეგისტრები (სტიკური რეგისტრები). ეს რეგისტრებია ე. წ. X, Y, Z, T რეგისტრები. ჩავთვოთ მიკროკალკულატორი ელემენტროქსელში. მახსოვრების უახლოესი რეგისტრები ნულოვან მდგომარეობაშია — რეგისტრებში მხოლოდ ნულებია:

T	0
Z	0
Y	0
X	0

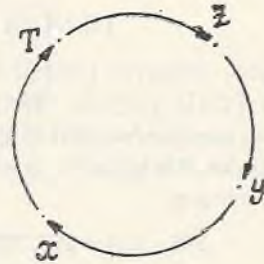
რიცხვების შეტანა უახლოეს რეგისტრებში წარმოებს X რეგისტრით. [B↑] ლილაკზე ყოველი დაჭერა იწვევს X -დან Y -ზე რიცხვის გადაცემას, ასევე, Y -დან Z -ზე და Z -დან T -ზე რიცხვის გადაცემას. T რეგისტრში მოთავსებული რიცხვი გაქრება — მის ადგილზე Z რეგისტრში მყოფი რიცხვი მოთავსდება. სქემატურად ასე შეგვიძლია გამოვსახოთ:

$T \nearrow Z$
 $Z \nearrow Y$
 $Y \nearrow X$
 $X \nearrow X.$

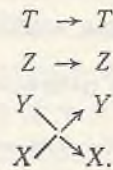
თუ დავაჭერთ ლილაკებს $[F][\bar{C}]$, მაშინ უახლოესი რეგისტრების ქონება წრიულად გადაადგილდება, როგორც ეს ნაჩვენებია სქემაზე:



ანუ



თუ დავაჭერთ ლილაკს $[\leftrightarrow]$ მაშინ X და Y რეგისტრებში მყოფი რიცხვების ურთიერთგაცვლა მოხდა:



ადვილი წარმოსადგენია, თუ როგორ უნდა გავანთავისუფლოთ უახლოესი რეგისტრები შეტანილი რიცხვებისაგან. ჯერ დავაჭიროთ ინდიკატორზე რიცხვის გაუქმების ლილაკს $[Cx]$. შემდეგ მიმდევრობით დავაჭიროთ ზემოთ გადაცემის ლილაკს $[B\uparrow]$. ამით X რეგისტრზე აღებული 0 მიმდევრობით გადაეცემა მომდევნო რეგისტრებს. ეს მოქმედება ნაჩვენებია სქემაზე:

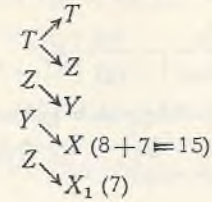
$T d$	$T c$	$T C$	$T 0$
$[Cx] Z c$	$[B\uparrow] Z b$	$[B\uparrow] Z 0$	$[B\uparrow] Z 0$
$Y b$	$Y 0$	$Y 0$	$Y 0$
$X 0$	$X 0$	$X 0$	$X 0$

(1)

განვიხილოთ მოქმედებანი მეხსიერების უახლოესი რეგისტრების გამოყენებაზე. მაგალითად, გამოვთვალოთ $8+7$. ამისათვის ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ:

$[8] [B\uparrow] [7] [+]$.

სქემატურად აღებულ რიცხვთა შეკრება შემდეგნაირად გამოისახება:



(2)

ამ მონაწილეობს დამატებით რეგისტრი, რომელიც X_1 -თაა აღნიშნული. ეს რეგისტრიც მეხსიერების უახლოეს რეგისტრებს ეკუთვნის. ამ რეგისტრს — წინ შესრულებული შედეგის რეგისტრს უწოდებენ. მართლაც, თუ დავაჭერთ $[F]$, $[Bx]$ ლილაკებს, მივიღებთ იმ რიცხვს, რომელიც ადრე ინდიკატორზე იყო გამოსახული — რიცხვი 7. ამ ბოლო სქემით ადვილი შესამჩნევია, რომ ყოველი მოქმედების შედეგი მოთავსდება X რეგისტრში — ინდიკატორზე, X რეგისტრში მოთავსებული რიცხვი გადაეცემა X_1 რეგისტრს, Y რეგისტრში მოთავსდება Z რეგისტრის რიცხვი, ხოლო Z რეგისტრში მოთავსდება T რეგისტრის რიცხვი. ეს ბოლო რიცხვი T რეგისტრშიდაც დარჩება (2).

განვიხილოთ მაგალითი უახლოესი (სტეკური) მეხსიერების გამოყენების შესახებ.

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases} \quad (3)$$

გამოვიყენოთ ე. წ. გაუსის მეთოდი. ვთქვათ, $a_{11} \neq 0$. (3) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ a_{11} -ზე.

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}. \quad (4)$$

ამ განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ a_{21} -ზე და სათანადოდ გამოვკლოთ მეორე განტოლების ორივე ნაწილს, მივიღებთ

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} \right) x_2 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{21}.$$

საიდანაც

$$x_2 = \frac{b_2 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{21}}{a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}}. \quad (5)$$

მიღებული x_2 -ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (4) ვანტოლებში, საიდანაც

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2. \quad (6)$$

შევადგინოთ (5) და (6) ფორმულების გამოთვლის პროგრამა. ვთქვათ, a_{11} და a_{21} კოეფიციენტები შევიტანეთ მანქანის ძირითად რეგისტრებში შემდეგი მიმდევრობით:

$$a_{21} [B \uparrow] a_{11} [B/O] [C/\Pi].$$

ამ კოეფიციენტებისათვის ავარჩიოთ $RG7$ და $RG6$ რეგისტრები. რასაკვირველია, სხვა რეგისტრებიც შეგვიძლია ავიღოთ, მაგრამ რეგისტრების ამ არჩევის აზრს ქვემოთ გავიგებთ. პროგრამის შედგენა ასე დავიწყეთ:

$$00 [X \rightarrow \Pi] [6] \quad 46,$$

$$01 [\leftarrow] \quad 14,$$

$$02 [X \rightarrow \Pi] [7] \quad 47.$$

დანარჩენი კოეფიციენტებისათვის გამოვიყენოთ $RG5$ — $RG2$ რეგისტრები.

შევიტანოთ რიცხვი 6 $RG1$ რეგისტრში, რათა შემდეგ გამოვიყენოთ ბრძანება რიცხვის რეგისტრში ირიბი ჩაწერის შესახებ. როგორც ვიცით ეს ბრძანება ხორციელდება ღილაკებით $[K] [X \rightarrow \Pi] [1]$.

დავაკვირდეთ (5) ფორმულის მრიცხველსა და მნიშვნელს. მრიცხველშია მნიშვნელის გამოსახულება, რომელშიდაც a_{22} შეცვლილია b_2 -ით, ხოლო a_{12} შეცვლილია b_1 -ით. ამის გამო პროგრამა ისე უნდა იყოს შედგენილი, რომ მოხდეს სათანადო გამეორება და შედეგები სათანადო რეგისტრებში უნდა იქნეს შეტანილი. გამეორებისათვის გამოვიყენოთ $RG0$ რეგისტრი, რომელშიდაც შევიტანოთ რიცხვი 2. პროგრამა შემდეგნაირად გაგრძელდება:

$$03 [6] \quad 06,$$

$$04 [x \rightarrow \Pi] [1] \quad 41,$$

$$05 [2] \quad 02,$$

$$06 [X \rightarrow \Pi] [0] \quad 40.$$

ამის შემდეგ მანქანა უნდა გაჩერდეს შემდეგი კოეფიციენტების შესატანად,

$$07 [C/\Pi] \quad 50.$$

შევიტანოთ კოეფიციენტები

$$a_{22} [B \uparrow] a_{12} [C/\Pi].$$

მანქანა გააგრძელებს გამოთვლებს. ინდიკატორზე გამოძახებული უნდა იქნეს a_{11} , რომელზედაც გაიყოფა a_{12} . მიღებული განაყოფი შეიტანება

$RG5$ რეგისტრში. ამისათვის გამოვიყენება რიცხვის რეგისტრში ირიბი ჩაწერის ბრძანება. დაპროგრამება შემდეგნაირად გაგრძელდება:

$$08 [\Pi \rightarrow X] [6] \quad [66]$$

$$09 [\div] \quad 13$$

$$10 [K] [X \rightarrow \Pi] [1] \quad L 1.$$

ხოლო მე-10 ბრძანებით $RG1$ რეგისტრში მყოფი რიცხვი 6 ერთით შემცირდება, $6-1=5$ და $RG5$ რეგისტრში შეიტანება განაყოფი $\frac{a_{12}}{a_{11}}$.

ინდიკატორზე — X რეგისტრშია განაყოფი $\frac{a_{12}}{a_{11}}$, ხოლო Y რეგისტრშია a_{22} . გამოვიძახოთ $RG7$ რეგისტრიდან რიცხვი a_{21} ,

$$11 [\Pi \rightarrow x] [7] \quad 67.$$

ამ ბრძანებით რიცხვი a_{21} მოთავსდება X რეგისტრში, $\frac{a_{11}}{a_{12}}$ მოთავსდება Y რეგისტრში, ხოლო a_{22} მოთავსდება Z რეგისტრში. დაპროგრამება შემდეგნაირად გაგრძელდება:

$$12 [x] \quad 12$$

$$13 [-] \quad 11$$

ამ ბრძანებათა შესრულების შედეგად ინდიკატორზე მივიღებთ $a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}$. ეს რიცხვი შევიტანოთ $RG4$ რეგისტრში, რისთვისაც გამოვიყენოთ ბრძანება

$$14 [K] [X \rightarrow \Pi] [1] \quad L 1.$$

ამრიგად, $RG4$ რეგისტრში მოთავსებულია

$$a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}.$$

როგორც ვახსენეთ, (5) გამოსახულების მრიცხველი განსხვავდება მნიშვნელისაგან იმით, რომ a_{22} შეცვლილია b_2 -ით, ხოლო a_{12} შეცვლილია b_1 -ით. ასე რომ, წინა პროცესი გამეორდება. ამისათვის გამოვიყენოთ ბრძანება ციკლის ორგანიზაციის შესახებ. ეს ბრძანება ხორციელდება $[F] [L_0]$ (ან $[L_1] - [L_2]$) ღილაკებით. ამ ღილაკებზე დაჭერით $RG0$ რეგისტრში შენახულ რიცხვს, 2-ს, გამოაყლდება 1 და მიღებული სიდიდე შემოწმდება წელი არის თუ არა. თუ წელი არაა, მაშინ შესრულდება $[F] [L_0]$ ბრძანების მომდევნო ბრძანება, ჩვენ შემთხვევაში ბრძანება 07. დაპროგრამება შემდეგნაირად გაგრძელდება:

$$15 [F] [L 0] \quad 51$$

$$16 [0] [7] \quad 07.$$

ამ ბრძანებათა შედეგად შესრულება ბრძანება 07. ამ ბრძანებით მანქანა გაჩერდება. ახლა შევიტანოთ (3) განტოლებათა სისტემის თავისუფალი წევრები

$$b_2 [B \uparrow] \mid b_1 [C/\Pi].$$

მანქანა დაიწყებს გამოთვლებს და მივა შე-15 ბრძანებამდე, სადაც მოთავსებულია ბრძანება ციკლის ორგანიზაციის შესახებ. ამ ბრძანებით შემოწმდება RGO რეგისტრში მყოფი რიცხვისა და 1-ის სხვაობა ნული არის თუ არა. ამ შემთხვევაში ეს სხვაობა ნულია, მაშინ უნდა შესრულდეს მომდევნო ბრძანებები:

$$17 \quad [\Pi \rightarrow x] \quad [4] \quad 64$$

$$18 \quad [\div] \quad 13.$$

ამ ბრძანებების შედეგად ინდიკატორზე მიიღება

$$\begin{array}{r} b_2 \leftarrow \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \\ a_{22} \leftarrow \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} \end{array}$$

ეს მნიშვნელობა კი (5) ფორმულით საძიებელი x_2 -ის მნიშვნელობაა. ამ შემთხვევაში მანქანა უნდა გაჩერდეს და მიღებული მნიშვნელობა უნდა ამოვწეროთ. გამოვიძახოთ RG5 რეგისტრიდან $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ -ს მნიშვნელობა, რომელზედაც უნდა გამრავლდეს x_2 -ს მნიშვნელობა, რომელიც X რეგისტრშია შეტანილი. ადვილი მისახვედრია, რომ რიცხვი $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ მოთავსებულია

RG3 რეგისტრში. გამოვიძახოთ ეს რიცხვი ინდიკატორზე და, მაშინ $\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2$ მნიშვნელობა გადაეცემა Y რეგისტრს. თუ შევასრულებთ ბრძანებას: გამოკლება [—]. მივიღებთ x_1 -ის მნიშვნელობას შებრუნებული ნიშნით. თუ უკანასკნელს ნიშანს შევუცვლით, მივიღებთ საძიებელი x_1 -ის მნიშვნელობას.

ამრიგად, დაპროგრამება შემდეგნაირად გაგრძელდება:

$$\begin{array}{lll} 19 & [G/\Pi] & 50 \\ 20 & [\Pi \rightarrow X] [5] & 65 \\ 21 & [\times] & 12 \\ 22 & [\Pi \rightarrow X] [3] & 63 \\ 23 & [—] & 11 \\ 24 & [/-/] & OL \\ 25 & [C/\Pi] & 50 \end{array}$$

თუ ყველა ზემოთ ჩამოთვლილს შევაერთებთ, მივიღებთ მე-14 ცხრილს.

ცხრილი 14

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
00	[X→Π] [6]	46	14	[K] [X→Π] [1]	L1
01	[←→]	14	15	[F] [L0]	5Γ
02	[X→Π] [7]	47	16	[0] [7]	07
03	[6]	06	17	[Π→X] [4]	64
04	[X→Π] [1]	41	18	[÷]	13
05	[2]	02	19	[C/Π]	50
06	[X→Π] [0]	40	20	[Π→X] [5]	65
07	[C/Π]	50	21	[×]	12
08	[Π→X] [6]	66	22	[Π→X] [3]	63
09	[÷]	13	23	[—]	11
10	[K] [X→Π] [1]	L1	24	[/-/]	OL
11	[Π→X] [7]	67	25	[C/Π]	50
12	[×]	12			
13	[—]	11			

განხილული პროგრამით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 28. \end{array} \right\}$$

ამისათვის დაეჭიროთ ლილაკებს $[B/O] [F] [PII]$. შემდეგ მანქანაში შევიტანოთ (3) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პროგრამა — მე-14 ცხრილის ოპერაცია (ლილაკი). ამის შემდეგ მანქანა გადავიყვანოთ ავტომატური რეჟიმით მუშაობაზე, რისთვისაც დაეჭიროთ ლილაკებს $[F] [ABT]$. შევიტანოთ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტები სვეტების მიხედვით ქვემოლან ზემოთ შემდეგი მიმდევრობით

$$[5] [B \uparrow] [3] [B/O] [C/II].$$

მანქანა დაიწყებს მუშაობას და შემდეგ გაჩერდება. შევიტანოთ შემდეგი კოეფიციენტები

$$[16] [B \uparrow] [2] [C/II].$$

მანქანა ამუშავდება და შემდეგ გაჩერდება. შევიტანოთ თავისუფალი წევრები

$$[2] [8] [B \uparrow] [1] [2] [C/II].$$

მანქანა დაიწყებს მუშაობას და გაჩერდება. ინდიკატორზე მივიღებთ 3-ს. ეს x_2 -ის მნიშვნელობაა, $x_2=3$. დავაჭიროთ $[C/II]$ ლილაკს. მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება. ინდიკატორზე მივიღებთ 2-ს. ეს x_1 -ის მნიშვნელობაა, $x_1=2$.

როგორც (4) და (5) გამოსახულებანი გვიჩვენებს, განხილული პროგრამით ამოხსნება ისეთი განტოლებათა სისტემა, რომლისთვისაც $a_{11} \neq 0$

და განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. თუ ეს ასე

არაა, მაშინ ინდიკატორზე გამოჩნდება სიმბოლო „ЕГГОГ“, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ განტოლებათა სისტემა ასე არ ამოხსნება. ამის გამო წინასწარ უნდა შემოწმდეს მოცემული განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია თუ არა ნულისაგან. თუ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ განტოლებათა სისტემა ისე გადავწეროთ, რომ სისტემის პირველი განტოლების პირველი კოეფიციენტი განსხვავებული იყოს ნულისაგან.

ცხადია, (3) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პროგრამა ისე შეგვიძლია შევადგინოთ, რომ მანქანაში კოეფიციენტები ბუნებრივი რიგით შევიტანოთ: $a_{11}, a_{12}, a_{13}; a_{21}, a_{22}, a_{23}; a_{31}=b_1, a_{32}=b_2$.

პირველი კოეფიციენტი a_{11} შევიტანოთ RGd რეგისტრში, ხოლო მომდევნო კოეფიციენტები a_{12}, a_{13} სათანადო X რეგისტრში. ამისათვის რიცხვი 7 შევიტანოთ $RG1$ რეგისტრში და ეს რეგისტრი გამოვიყენოთ მოქმედებათა აღრიცხვისათვის. ასევე მოქმედებათა აღრიცხვისათვის — ციკლისათვის გამოვიყენოთ $RG0$ რეგისტრი, რომელშიდაც შევიტანოთ

რიცხვი 2. განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პროგრამა მოცემულია მე-15 ცხრილში. ბრძანებები, რომელთა მისამართებია 00—10, ანხორციელებს მანქანაში a_{11} -ის შეტანას, $[B/O], a_{11}, [C/II]; [X \rightarrow II] [d]$, შემდეგ a_{12} და a_{13} კოეფიციენტების შეტანას: $a_{12} [C/II]; a_{13} [C/II]$. ამის შემდეგ ეს კოეფიციენტები სათანადოდ გაიყოფა a_{11} -ზე და მიღებული $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ და $\frac{a_{13}}{a_{11}}$

მნიშვნელობანი შეიტანება $RG6$ და $RG5$ რეგისტრებში. ახლა ავიღოთ (5) გამოსახულების მნიშვნელი

$$a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}. \quad (7)$$

ეს გამოსახულება რომ დაეპროგრამოთ, უნდა შევიტანოთ მანქანაში კოეფიციენტები a_{21} და a_{22} და გამოვიყენოთ $RG6$ რეგისტრში მოთავსებული

მნიშვნელობა $\frac{a_{12}}{a_{11}}$, რომელიც უნდა გავამრავლოთ a_{21} -ზე. ასევე უნდა მოვიქცეთ (5) გამოსახულების მრიცხველის

$$a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} \quad (8)$$

დასაპროგრამებლად. უნდა შევიტანოთ a_{23} მნიშვნელობა $\frac{a_{13}}{a_{11}}$, რომელიც

მოთავსებულია $RG5$ რეგისტრში, უნდა გავამრავლოთ a_{21} -ზე. რადგანაც ამ გამოთვლებისათვის უნდა გამოვიყენოთ რეგისტრები $RG6, RG5$, რიცხვი 7 შევიტანოთ $RG2$ რეგისტრში. რადგანაც მოქმედებათა გამეორება დაგვირდება a_{12} -სა და a_{13} -სათვის, რიცხვი 2 შევიტანოთ $RG0$ რეგისტრში. ეს ბოლო ორი მოქმედება დაპროგრამებულია მე-11—24-ე ბრძანებებით. ადვილი მისახვედრია, რომ (7) გამოსახულების მნიშვნელობა შეიტანება $RG4$ რეგისტრში, ხოლო (8) გამოსახულების მნიშვნელობა შეიტანება $RG3$ რეგისტრში. ამის შემდეგ ადვილი მისახვედრია, რომ ამ მნიშვნელობათა სათანადო განაყოფი შეიტანება $RG2$ რეგისტრში (ბრძ. მისამართი 27). ეს მნიშვნელობაა x_3 . ამის შემდეგ გამოითვლება x_1 (ბრძ. 28—32) და მანქანა გაჩერდება (ბრძ. 34). ამრიგად, $RG1$ რეგისტრშია x_1 მნიშვნელობა და $RG2$ რეგისტრში x_2 მნიშვნელობა.

ადვილი შესამჩნევია, რომ a_{21} -სათვის გამოვიყენეთ $RG3$ რეგისტრი და ეს რეგისტრი შემდეგ გამოვიყენეთ (8) გამოსახულებისათვისაც. რადგანაც რიცხვი a_{21} შემდეგში აღარ გვჭირდება, ცხადია, მისთვის გამოყოფილი რეგისტრი შემდეგ მოქმედებისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ. ასევე გამოვიყენეთ ბოლოს $RG1$ და $RG2$ რეგისტრები x_1 და x_2 მნიშვნელობათა შესანახად.

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
00	[X→II] [d]	4Γ	18	[K] [II→X] [2]	Γ2
01	[7]	07	19	[II→X] [3]	63
02	[X→II] [1]	41	20	[X]	12
03	[2]	02	21	[—]	11
04	[X→II] [0]	40	22	[K] [X→II] [1]	L1
05	[C/II]	50	23	[F][L0]	5Γ
06	[II→X] [d]	6Γ	24	[1] [7]	17
07	[÷]	13	25	[II→X] [4]	64
08	[K] [X→II] [1]	L1	26	[÷]	13
09	[F] [L0]	5Γ	27	[X→II] [2]	42
10	[0] [5]	05	28	[II→X] [6]	66
11	[7]	07	29	[X]	12
12	[X→II] [2]	42	30	[II→X] [5]	65
13	[2]	02	31	[↔]	14
14	[X→II] [0]	40	32	[—]	11
15	[C/II]	50	33	[X→II] [1]	41
16	[X→II] [3]	43	34	[C/II]	50
17	[C/II]	50			

განვიხილოთ მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 65, \\ 2x_1 + 7x_2 &= 80. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

მე-15 ცხრილის (ოპერაცია (ლილაკი)) მანქანაში შეტანის შემდეგ დავაჭიროთ ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით:

[F] [ABT] [B/O] [3] [C/II], [5] [C/II], [6] [5] [C/II], [2] [C/II],
[7] [C/II], [8] [0] [C/II].

როდესაც მანქანა გაჩერდება, ინდიკატორზე მივიღებთ x_1 მნიშვნელობას, $x_1 = 5$. შემდეგ დავაჭიროთ ლილაკებს [II→X] [2], ინდიკატორზე მივიღებთ x_2 მნიშვნელობას, $x_2 = 10$.

თუ დავაკვირდებით მე-15 ცხრილს, შევამჩნევთ, რომ შეგვეძლო გამოგვეყენებოდა ქვეპროგრამები. სწორედ ქვეპროგრამების გამოყენებით დავაპროგრამებთ წრფივ სამცვლადიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნას.

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = a_{14}, \quad (10)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = a_{24}, \quad (11)$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = a_{34}, \quad (12)$$

ეს განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ გაუსის მეთოდით. (10) განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ a_{11} -ზე, $a_{11} \neq 0$, მივიღებთ

$$x_1 + a'_{12} x_2 + a'_{13} x_3 = a'_{14}, \quad (13)$$

სადაც

$$a'_{1i} = \frac{a_{1i}}{a_{11}}, \quad i=2, 3, 4, \quad (14)$$

მიღებული (13) განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ a_{21} -ზე და სათანადოდ გამოვაკლოთ (11) განტოლებას, მივიღებთ

$$a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 = a'_{24}, \quad (15)$$

სადაც

$$a'_{2i} = a_{2i} - a'_{1i} \cdot a_{21}, \quad i=2, 3, 4. \quad (16)$$

(15) განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ a'_{22} -ზე, $a'_{22} \neq 0$, $a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} \neq 0$, მივიღებთ

$$x_2 + a''_{23} x_3 = a''_{24}, \quad (17)$$

სადაც

$$a''_{2i} = \frac{a'_{2i}}{a'_{22}}, \quad i=3, 4. \quad (18)$$

ახლა (12) განტოლებიდან გამოვრიცხოთ x_1 და x_2 . ამისათვის ჯერ გამოვრიცხოთ x_1 . (13) განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ a_{31} -ზე და სათანადოდ გამოვკლოთ (12) განტოლებას, მივიღებთ

$$a'_{32} x_2 + a'_{33} x_3 = a'_{31}, \quad (19)$$

სადაც

$$a'_{3i} = a_{3i} - a'_{1i} a_{31}, \quad i=2, 3, 4. \quad (20)$$

გამოვრიცხოთ x_2 . ამისათვის (17) განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ a'_{32} -ზე და სათანადოდ გამოვკლოთ (19) განტოლებას, მივიღებთ

$$a'_{33} x_3 = a'_{31} \quad (21)$$

სადაც

$$a'_{3i} = a_{3i} - a'_{2i} a'_{32}, \quad i=3, 4. \quad (22)$$

განვსაზღვრავთ რა a'_{33} -ს (21) განტოლებიდან,

$$x_3 = a'_{34} : a'_{33}, \quad (23)$$

(17) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ x_2 -ს,

$$x_2 = a'_{24} - a'_{23} x_3 \quad (24)$$

ხოლო (13) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ x_1 -ს,

$$x_1 = a_{14} - a'_{12} x_2 - a'_{13} x_3 = \overline{a_{14}} - a'_{13} x_3, \quad (25)$$

სადაც

$$\overline{a_{14}} = a_{14} - a'_{12} x_2. \quad (26)$$

(15) და (19) განტოლებანი ერთი და იგივე აგებულებისაა — კოეფიციენტები (16) და (20) ერთი და იგივე მოქმედებითაა მიღებული, ამიტომ ამ კოეფიციენტთა დაპროგრამებისათვის ერთი და იგივე ქვეპროგრამა უნდა გამოვიყენოთ. ასეთივე მდგომარეობა გვექნება (22), (24) და (26) გამოსახულებებისათვის.

აღებული განტოლებათა სისტემის ამოხსნის დაპროგრამება იმით დავიწყეთ, რომ შევიტანოთ (10) განტოლების კოეფიციენტები მანქანაში ისე, რომ სათანადო კოეფიციენტები (14) მოთავსდეს RGc , RGb , RGa რეგისტრებში. a_{11} -სათვის გამოვიყენოთ RGd რეგისტრი. შემდეგ შევადგინოთ ქვეპროგრამა, რომლითაც სათანადოდ (16) კოეფიციენტები შეიტანება $RG9-RG7$ რეგისტრებში, ხოლო (20) კოეფიციენტები $RG6-RG4$ რეგისტრებში. შემდეგ $RG8$, $RG7$ რეგისტრებში უნდა შევიტანოთ (17) განტოლების კოეფიციენტები (18).

მთლიანად (10)-(12) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პროგრამა მოცემულია მე-16 ცხრილში. თვით ცხრილში მოცემულია ის შედეგი, თუ რას გვაძლევს პროგრამის გარკვეული ნაწილი. ეს შედეგები კვადრატული ფრჩხილებითაა გამოყოფილი.

მისამართი ბრძანების	ოპერაცია (ლილაქი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაქი)	კოდი
	$a_{11} [C/II]$		$RG 7; a_{24} - a'_{14} a_{21} = a'_{24}$		
00	$[X \rightarrow II] [d]$	4Γ	$a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 = a'_{24}$		
01	[1]	01	14	[III]	53
02	[3]	03	15	[5] [9]	59
03	$[X \rightarrow II] [1]$	41	$a_{11} [C/II]; a_{22} [C/II], a_{33} [C/II]$		
04	[3]	03	$a_{34} [C/II]$		
05	$[X \rightarrow II] [0]$	40	$RG6; a_{32} - a'_{12} a_{31} = a'_{32}$		
06	$[C/II]$	50	$RG5; a_{33} - a'_{13} a_{31} = a'_{33}$		
$a_{12} [C/II], a_{13} [C/II], a_{14} [C/II]$			$RG4; a_{14} - a'_{14} a_{31} = a'_{14}$		
07	$[II \rightarrow X] [d]$	6Γ	16	$[II \rightarrow X] [8]$	68
08	[÷]	13	17	$[II \rightarrow X] [9]$	69
09	$[K] [X \rightarrow II] [1]$	L1	18	[÷]	13
10	$[F] [L0]$	5Γ	19	$[X \rightarrow II] [8]$	48
11	[0] [6]	06	$RG 8; \frac{a'_{23}}{a'_{22}} = a'_{23}$		
$RG 12 \equiv RGc; \frac{a_{12}}{a_{11}} = a'_{12}$			20	$[II \rightarrow X] [7]$	67
$RG11 \equiv RGb; \frac{a_{13}}{a_{11}} = a'_{13}$			21	$[II \rightarrow X] [9]$	69
$RG 10 \equiv RGa; \frac{a_{14}}{a_{11}} = a'_{14}$			22	[÷]	13
$x_1 + a'_{12} x_2 + a'_{13} x_3 = a'_{14}$			23	$[X \rightarrow II] [7]$	47
12	[III]	53	$RG 7; \frac{a'_{24}}{a'_{22}} = a'_{24}$		
13	[5] [9]	59	24	[2]	02
$a_{21} [C/II]; a_{22} [C/II], a_{23} [C/II]$			25	$[X \rightarrow II] [0]$	40
	$a_{24} [C/II]$		26	[6]	06
$RG9; a_{22} - a'_{12} a_{21} = a'_{22}$			27	$[X \rightarrow II] [1]$	41
$RG 8; a_{23} - a'_{13} a_{21} = a'_{23}$					

ცხრილი 16 (გაგრძელება)

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
28	$[X \rightarrow \Pi] [2]$	42	48	$[\Pi \rightarrow X] [a]$	6—
29	$[9]$	09	49	$[\Pi \rightarrow X] [3]$	63
30	$[X \rightarrow \Pi] [3]$	43	50	$[\Pi \rightarrow X] [b]$	6L
31	$[K] [\Pi \rightarrow X] [1]$	71	51	$[\times]$	12
32	$[K] [\Pi \rightarrow X] [3]$	73	52	$[-]$	11
33	$[\Pi \rightarrow X] [6]$	66	53	$[\Pi \rightarrow X] [c]$	6C
34	$[\times]$	12	54	$[\Pi \rightarrow X] [2]$	62
35	$[-]$	11	55	$[\times]$	12
36	$[K] [X \rightarrow \Pi] [2]$	L2	56	$[-]$	11
37	$[F] [L0]$	57	57	$[X \rightarrow \Pi] [1]$	41
38	$[3] [1]$	31	58	$[C/\Pi]$	50
$RG5; a'_{33} - a''_{23} \quad a'_{33} = a''_{33}$			$RG1; a'_{14} - a'_{23} x_3 -$		
$RG4; a'_{34} - a''_{24} \quad a'_{32} = a''_{34}$			$- a'_{12} x_2 = x_1$		
$a''_{33} x_3 = a''_{34}$			59	$[1]$	01
39	$[\Pi \rightarrow X] [5]$	65	60	$[3]$	03
40	$[\div]$	13	61	$[X \rightarrow \Pi] [2]$	42
41	$[X \rightarrow \Pi] [3]$	43	62	$[3]$	03
42	$[\Pi \rightarrow X] [7]$	67	63	$[X \rightarrow \Pi] [0]$	40
43	$[\Pi \rightarrow X] [9]$	68	64	$[C/\Pi]$	50
44	$[\Pi \rightarrow X] [3]$	63	65	$[X \rightarrow \Pi] [d]$	47
45	X	12	66	$[C/\Pi]$	50
46	$-$	11	67	$[K] [\Pi \rightarrow X] [2]$	72
47	$[X \rightarrow \Pi] [2]$	42	68	$[\Pi \rightarrow X] [d]$	67
$RG3; x_3$			69	$[\times]$	12
$RG2; x_2$			70	$[-]$	11

ცხრილი 16 (გაგრძელება)

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
71	$[K] [X \rightarrow \Pi] [1]$	L1	$x_1: [\Pi \rightarrow X] [1]$		
72	$[F] [L0]$	57	$x_2: [\Pi \rightarrow X] [2]$		
73	$[6] [6]$	66	$x_3: [\Pi \rightarrow X] [3]$		
74	$[B/O]$	52			

ამოვხსნათ შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -21, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -26, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 20. \end{cases}$$

ჯერ შევიტანოთ მანქანაში მე-16 ცხრილით მოცემული პროგრამა. ამისათვის დავაჭიროთ ლილაკებს $[B/O]$, $[F]$, $[\Pi \Gamma]$. ინდიკატორზე მივიღებთ ბრძანების მისამართს 00. ამ ნომრიდან მანქანაში შევიტანოთ „ოპერაციის“ სვეტში მოთავსებული ბრძანებები 00-დან დაწყებული 72 მისამართის ჩათვლით. ამის შემდეგ დავაჭიროთ ლილაკებს $[F]$, $[ABT]$ მანქანა გადავა პროგრამული რეჟიმით მუშაობაზე. დავაჭიროთ ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით

$[B/O] [2] [C/\Pi]$, $[3] [/ - /] [C/\Pi]$, $[4] [C/\Pi]$, $[2] [1] [/ - /] [C/\Pi]$,
 $[3] [C/\Pi]$, $[4] [-] [C/\Pi]$, $[5] [C/\Pi]$, $[2] [6] [-] [C/\Pi]$,
 $[1] [C/\Pi]$, $[2] [C/\Pi]$, $[3] [/ - /] [C/\Pi]$, $[2] [0] [C/\Pi]$.

ლილაკზე ყოველი დაჭერის შემდეგ მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება. მანქანის საბოლოო გაჩერების შემდეგ ლილაკებით $[\Pi \rightarrow x] [1]$ ინდიკატორზე მიიღება x_1 მნიშვნელობა, $x_1 = 2$. ლილაკებით $[\Pi \rightarrow x] [2]$ ინდიკატორზე მიიღება x_2 მნიშვნელობა, $x_2 = 3$. ხოლო ლილაკებით $[\Pi \rightarrow x] [3]$ მიიღება x_3 მნიშვნელობა, $x_3 = -4$.

§ 16. შედგენილი პროგრამის გარჩევა

ეთქვათ, გვაქვს რაიმე მნიშვნელობისათვის გამოთვლის პროგრამა. საჭიროა გავცნოთ პროგრამის შინაარსს. კერძოდ, გავცნოთ მეთოდს და გამოთვლების მიმდევრობას, რომლითაც სათანადო მნიშვნელობა მიიღება. ამრიგად, დავისახოთ ასეთი მიზანი: მოცემული პროგრამით გამოვარკვიოთ დაბროგრამების ალგორითმი და გამოთვლების მიმდინარეობა სა-

ბოლო შედეგის მიღებისათვის. ივთლისხმება, რომ გამოთვლელი მანქანის ლილაკების მნიშვნელობანი ცნობილია მე-12 ცხრილის მიხედვით. საკითხის ნათელყოფისათვის განვიხილოთ მაგალითები.

1. ვაჭვათ, მოცემულია მეორე რიგის დეტერმინანტის

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (1)$$

მნიშვნელობის გამოთვლის პროგრამა მე-17 ცხრილით.

ცხრილი 17

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
00	[C/Π]	50	04	[C/Π]	50
01	[C/Π]	50	05	[X]	12
02	[X]	12	06	[↔]	14
03	[↔]	14	07	[—]	11
			08	[C/Π]	50

მითითება: $[B/O] a_{11} [C/Π], a_{12} [C/Π], a_{21} [C/Π], a_{22} [C/Π]$.
ინდიკატორზე D-ს მნიშვნელობა.

გამოვარკვევით პროგრამით (1) დეტერმინანტის გამოთვლის მიმდინარეობა.

ამოხსნა. როგორც ვიცით, როდესაც ინდიკატორზე a რიცხვია, ე. ი. X რეგისტრში a რიცხვია, მაშინ ყოველი მოქმედებით, მაგალითად, $[C/Π]$ ლილაკზე დაჭერით, რიცხვი a გადაეცემა X რეგისტრის მომდევნო Y რეგისტრს (მეხსიერების უახლოეს რეგისტრება). მე-17 ცხრილის ბოლოში მოთავსებულია მითითება. ამ მითითებით სათანადო ლილაკებზე დაჭერით პირველად (1) დეტერმინანტის a_{11} ელემენტი შეიტანება: $[B/O] a_{11} [C/Π]$. მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება. მთლიანად ეს მოქმედება ცხრილის მიხედვით ასე ჩატარდება:

$[B/O] a_{11} [C/Π],$
00 $[C/Π]$ 50.

ამ ბოლო ბრძანებით მანქანა გაჩერდება. ამის შემდეგ მანქანაში a_{12} ელემენტი უნდა შევიტანოთ, $a_{12} [C/Π]$. მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება. ასევე უნდა შევიტანოთ a_{21} ელემენტი. ეს სამი ელემენტი მანქანის

მეხსიერების უახლოეს რეგისტრებში შემდეგი სქემის მიხედვით განლაგდება:

T
 $Z a_{11},$
 $Y a_{12},$
 $X a_{21}.$

თუ ახლა გამრავლების ლილაკს დავაჭერთ,

02 $[X]$ 12

მეხსიერების უახლოეს რეგისტრებში მივიღებთ:

T
 Z
 $Y a_{11},$
 $X a_{12} \cdot a_{21}.$

ცხრილის მიხედვით X და Y რეგისტრებში მოთავსებულმა რიცხვებმა ურთიერთ აღვილი უნდა შეიცვალოს,

03 $[↔]$ 14.

ამ ბრძანების შესრულების შემდეგ რეგისტრებში რიცხვები შემდეგი სქემით განლაგდება:

T
 Z
 $Y a_{12} \cdot a_{21},$
 $X a_{11}.$

ამის შემდეგ მანქანა გაჩერდება. მანქანაში შევიტანოთ დეტერმინანტის a_{22} ელემენტი, $a_{22} [C/Π]$, და მანქანა ამუშავდება. ამუშავების წინ რიცხვები მეხსიერების უახლოეს რეგისტრებში შემდეგი სქემით განლაგდება:

T
 $Z a_{12} \cdot a_{21},$
 $Y a_{11},$
 $X a_{22}$

ცხრილის მიხედვით შემდეგ უნდა შესრულდეს გამრავლება,

05 $[X]$ 12.

ამ ბრძანების შესრულების შემდეგ მეხსიერების უახლოეს რეგისტრებში გვექნება:

T

Z

$Y \ a_{12} \cdot a_{21}$

$X \ a_{11} \cdot a_{22}$

თუ გამოკლების ლილავს დავაჭერთ:

07 $[-]$ 11

X რეგისტრში მივიღებთ:

$$-(a_{12} \ a_{21} - a_{11} \ a_{22}) = a_{11} \ a_{22} - a_{12} \ a_{21}.$$

ამრიგად, ინდიკატორზე მიიღება D დეტერმინანტის მნიშვნელობა.

ადვილი მისახვედრია, რომ შედგენილი პროგრამის გარჩევით პროგრამის სისწორეც შევამოწმეთ. ასე რომ, პროგრამის სისწორის შემოწმებისათვის პროგრამა უნდა გაეარჩიოთ.

2. ვთქვათ, მოცემულია მესამე რიგის დეტერმინანტის

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

გამოთვლის პროგრამა მე-18 ცხრილში.

ცხრილი 18

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილავი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილავი)	კოდი
00	$[X \rightarrow \Pi] \ [4]$	44	07	$[K] \ [X \rightarrow \Pi] \ [B \uparrow]$	LE
01	$[2]$	02	08	$[F] \ [L0]$	5Γ
02	$[X \rightarrow \Pi] \ [0]$	40	09	$[0] \ [4]$	04
03	$[X \rightarrow \Pi] \ [3]$	43	10	$[\Pi \rightarrow X] \ [0]$	60
04	$[C/\Pi]$	50	11	$[C/\Pi]$	50
05	$[\Pi \rightarrow X] \ [4]$	64	12	$[X \rightarrow \Pi] \ [0]$	40
06	$[\div]$	13	13	$[\Pi \rightarrow X] \ [2]$	62

ცხრილი 18 (გაგრძელება)

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილავი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილავი)	კოდი
14	$[X]$	12	25	$[\leftarrow \rightarrow]$	14
15	$[C/\Pi]$	50	26	$[X \rightarrow \Pi] \ [0]$	40
16	$[-]$	11	27	$[F] \ [L3]$	25
17	$[X]$	12	28	$[X]$	12
18	$[\Pi \rightarrow X] \ [0]$	60	29	$[\Pi \rightarrow X] \ [0]$	60
19	$[\Pi \rightarrow X] \ [1]$	61	30	$[-]$	11
20	$[X]$	12	31	$[\Pi \rightarrow X] \ [4]$	64
21	$[C/\Pi]$	50	32	$[X]$	12
22	$[-]$	11	33	$[X \rightarrow \Pi] \ [d]$	4Γ
23	$[F] \ [L3]$	5—	34	$[C/\Pi]$	50
24	$[1] \ [1]$	11			

მითითება: $[B/O] \ a_{11}$, $[C/\Pi] \ a_{12} \ [C/\Pi] \ , \dots \ , \ a_{33} \ [C/\Pi]$. $RG0-RG4$ რეგისტრები შუალედური მოქმედებისა. D მიიღება ინდიკატორზე — RGd .

გამოვარკვეით მოცემული პროგრამით მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის მიმდინარეობა.

თუ ცხრილს დავაკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ ყველა ბრძანება ჩვენთვის ცნობილია, გარდა 07 ბრძანებისა,

07 $[K] \ [X \rightarrow \Pi] \ [B \uparrow] \ LE$.

ეს ბრძანება მე-12 ცხრილში არაა. გამოვარკვეით, რა შედეგი აქვს ამ ბრძანების შესრულებას. ცხრილიდან შევამჩნევთ, რომ გამოიყენება $RG1$ და $RG2$ რეგისტრები (ბრძ. 13 და 19) ამ რეგისტრებში ჩვენ ცხრილით რიცხვები არ შეგვიტანია. მაშასადამე, $RG1$ და $RG2$ რეგისტრების ქონებებს კავშირი აქვს 07 ბრძანებასთან. ამის გამოსარკვევად მანქანაში შევიტანათ შემდეგი ბრძანებები (ცხრილი 18 ა):

ამ ბრძანებათა შეტანის შემდეგ მანქანა გადავიყვანოთ ავტომატურ რეჟიმში მუშაობაზე, რისთვისაც დავაჭიროთ ლილავებს $[F]$, $[ABT]$. შემდეგ მიმდევრობით შევიტანოთ რიცხვები

$[B/O] \ [5] \ [C/\Pi]$, $[1] \ [0] \ [C/\Pi]$, $[1] \ [5] \ [C/\Pi]$, $[2] \ [2] \ [C/\Pi]$.

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
00	$[X \rightarrow \Pi] [6]$	46
01	$[3]$	03
02	$[X \rightarrow \Pi] [0]$	40
03	$[C/\Pi]$	50
04	$[\Pi \rightarrow X] [6]$	66
05	$[\div]$	13
06	$[K] [X \rightarrow \Pi] [B+]$	LE
07	$[F] [L0]$	5Γ
08	$[0] [3]$	03
09	$[C/\Pi]$	50

გამოვარკვეოთ, სად მოთავსდა სათანადო განაყოფები. სათანადო ლილაკებზე დაჭერით მივიღებთ:

ლილაკები	ინდიკატორის ჩვენება
$[\Pi \rightarrow X] [0]$	00000001
$[\Pi \rightarrow X] [1]$	4, 4 (22 : 5)
$[\Pi \rightarrow X] [2]$	3 (15 : 5)
$[\Pi \rightarrow X] [3]$	2 (10 : 5)

ამრიგად, 06 ბრძანებით, $[K] [X \rightarrow \Pi] [B+]$, შეიქმნა ციკლი. გამოვრებათა რიცხვი, ცხრილის მიხედვით, სამია. პირველი მოქმედებით RG0 რეგისტრში შეტანილ რიცხვს აკლდება 0, მეორე მოქმედებით (გამოვრებით) RG0 რეგისტრში შეტანილ რიცხვს აკლდება 1 და მესამე მოქმედებით აკლდება 2. შემდეგ მანქანა გადადის მომდევნო ბრძანების შესრულებაზე, 09 ბრძანებაზე. 06 ბრძანებით ინდიკატორზე მიღებული რიცხვი — განაყოფი გადაეცემა GR1 რეგისტრს (ბოლო შედეგი); RG2 რეგისტრს გადაეცემა ბოლო შედეგიდან მეორე, ხოლო RG3 რეგისტრს პირველი შედეგი.

მაშასადამე, მე-18 ცხრილით მოცემული 07 ბრძანების შესრულების შედეგად RG2 რეგისტრში მოთავსდება პირველი განაყოფი, RG1 რეგისტრში მეორე განაყოფი, ხოლო RG0 რეგისტრში დარჩება მოდიფიცირებული ერთეული, 000 000 01.

ამ ახსნა-განმარტების შემდეგ ადვილი წარმოსადგენია, რომ (2) დე-

ტერმინანტის ელემენტი a_{11} შეტანილია RG4 რეგისტრში და შეფარდებანი $\frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\frac{a_{13}}{a_{11}}$ სათანადოდ შეტანილია RG2 და RG1 რეგისტრებში

(ბრძანებები 00—08). შემდეგ GR0 რეგისტრიდან გამოიძახება რიცხვი 1. ეს რიცხვი ინდიკატორზეა. მანქანა გაჩერდება, რის შემდეგაც მანქანაში შეიტანება (2) დეტერმინანტის ელემენტი a_{21} , რომელიც გადაეცემა GR0 რეგისტრს. ცხადია, წინა რიცხვი 1 მოთავსდება მეხსიერების უახლოეს Y რეგისტრში, ხოლო ინდიკატორზეა რიცხვი a_{21} . გამოიძახება RG2 რე-

გისტრში მყოფი რიცხვი $\frac{a_{12}}{a_{11}}$, რომელზედაც გამრავლდება a_{21} რიცხვი.

ეს ნამრავლი მოთავსდება X რეგისტრში — ინდიკატორზე. მანქანა გაჩერდება. ამ გაჩერების შემდეგ შეიტანება მანქანაში a_{22} ელემენტი. ეს ელემენტი გამოაყლდება წინა ნამრავლს და ინდიკატორზე მივიღებთ

$\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} - a_{22}$. ამ შედეგს აქლევთ ბრძანებანი 11—17. ასეთივე პროცე-

სით ინდიკატორზე მივიღებთ $\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} - a_{23}$ (ბრძანებანი 18—22). მთელი

ეს მოქმედებანი გამეორდება მესამე რიგის დეტერმინანტის მესამე სტრიქონისათვის. ასე რომ, 00—24 ბრძანებების შესრულებით (2) დეტერმინანტი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} 1, \frac{a_{12}}{a_{11}}, & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0, \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} - a_{22}, & \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} - a_{23} \\ 0, \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31} - a_{32}, & \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31} - a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

ვიღრე (3) დეტერმინანტის $\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31} - a_{33}$ ელემენტი გამოითვლებოდა,

გამოითვლება ნამრავლი (ბრძ. 17)

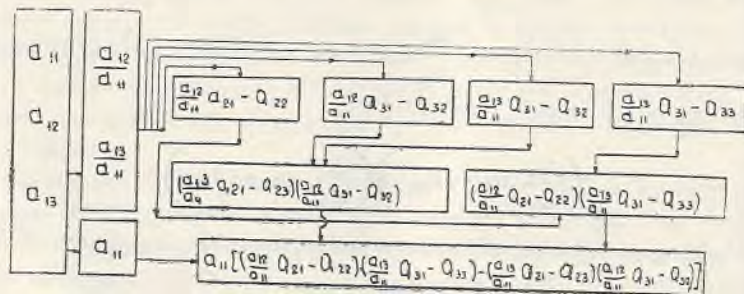
$$\left(\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31} - a_{32} \right) \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} - a_{23} \right).$$

ამრიგად, მეხსიერების უახლოეს რეგისტრებში მიღებული მნიშვნელობანი შემდეგი სქემით განლაგდება:

$$\begin{array}{l}
 T \quad 1 \\
 Z \quad \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} - a_{22} \\
 Y \quad \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31} - a_{32} \right) \cdot \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} - a_{23} \right) \\
 X \quad \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31} - a_{33}
 \end{array}$$

შემდეგ სრულდება X და Y რეგისტრების ქონებათა ურთი-
ერთადგილშონაცვლების ბრძანება (ბრძ. 25). X რეგისტრის ქონება
 $\left(\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31} - a_{32} \right) \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} - a_{23} \right)$ გაიზავენება $RG0$ რეგისტრში (ბრძ. 26).
მოხდება რა უახლოეს რეგისტრებში ციკლური გადაადგილება (ბრძ. 27),
 X რეგისტრში მოთავსდება $\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} - a_{22}$, ხოლო Y რეგისტრში $\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31} - a_{33}$.
ამ მნიშვნელობათა გადამრავლებით (ბრძ. 28) X რეგისტრში მივიღებთ
 $\left(\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} - a_{22} \right) \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31} - a_{33} \right)$. უკანასკნელს გამოვაცლოთ $RG0$ რეგისტ-
რის ქონება $\left(\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31} - a_{32} \right) \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} - a_{23} \right)$ (ბრძ. 30) და გავამრავ-
ლოთ $RG4$ რეგისტრის ქონებაზე a_{11} -ზე (ბრძ. 32), ინდეკატორზე მივი-
ღებთ (3) დეტერმინანტის მნიშვნელობას. შემდეგ მანქანა მიღებულ
მნიშვნელობას გადასცემს RGd რეგისტრს და გაჩერდება.

მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა მოცემულია მე-15 ნახაზზე
გამოსახული ე. წ. ბლოკ-სქემით. ამ სქემით ადვილი წარმოსადგენია, თუ



ნახ. 15

როგორი მიმდევრობით გამოითვლება (3) დეტერმინანტის მნიშვნელობა
მე-18 ცხრილში მოცემული პროგრამით.

როგორც საფარჯიმო შეგვიძლია გავარჩიოთ მეოთხე რიგის

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (4)$$

დეტერმინანტის გამოთვლის პროგრამა, რომელიც მოცემულია მე-19
ცხრილში.

ცხრილი 19

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
00	[X→Π] [a]	4—	16	[7] [7]	77
01	[C/Π]	50	17	[X→Π] [3]	43
02	[X→Π] [b]	4L	18	[ΠΠ]	53
03	[C/Π]	50	19	[7] [2]	72
04	[X→Π] [c]	4C	20	[Π→X] [4]	44
05	[C/Π]	50	21	[Π→X] [c]	6C
06	[X→Π] [d]	4F	22	[ΠΠ]	53
07	[ΠΠ]	53	23	[7] [7]	77
08	[7] [2]	72	24	[X→Π] [5]	45
09	[X→Π] [1]	41	25	[Π→X] [d]	6Γ
10	[Π→X] [c]	6C	26	[ΠΠ]	53
11	[ΠΠ]	53	27	[7] [7]	77
12	[7] [7]	77	28	[X→Π] [6]	46
13	[X→Π] [2]	42	29	[ΠΠ]	53
14	[Π→X] [d]	6Γ	30	[7] [2]	72
15	[ΠΠ]	53	31	[X→Π] [7]	47

ცხრილი 19 (გავარდნები)

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (დილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (დილაკი)	კოდი
32	$[\Pi \rightarrow X]$ [c]	6C	57	$[-]$	11
33	$[\Pi\Pi]$	53	58	$[\Pi \rightarrow X]$ [4]	64
34	[7] [7]	77	59	$[\Pi \rightarrow X]$ [5]	68
35	$[X \rightarrow \Pi]$ [8]	48	60	$[X]$	12
36	$[\Pi \rightarrow X]$ [a]	6Γ	61	$[\Pi \rightarrow X]$ [5]	65
37	$[\Pi\Pi]$	53	62	$[\Pi \rightarrow X]$ [7]	67
38	[7] [7]	77	63	$[X]$	12
39	$[X \rightarrow \Pi]$ [9]	49	64	$[-]$	11
40	$[\Pi \rightarrow X]$ [5]	65	65	$[\Pi \rightarrow X]$ [3]	63
41	$[X]$	12	66	$[X]$	12
42	$[\Pi \rightarrow X]$ [6]	66	67	$[+]$	10
43	$[\Pi \rightarrow X]$ [8]	68	68	$[\Pi \rightarrow X]$ [a]	6—
44	$[X]$	12	69	$[X]$	12
45	$[-]$	11	70	$[+/-]$	OL
46	$[\Pi \rightarrow X]$ [1]	61	71	$[X \rightarrow \Pi]$ [d]	4Γ
47	$[X]$	12	72	$[C/\Pi]$	50
48	$[\Pi \rightarrow X]$ [9]	69	73	$[\Pi \rightarrow X]$ [a]	6—
49	$[\Pi \rightarrow X]$ [4]	64	74	$[\div]$	13
50	$[X]$	12	75	$[X \rightarrow \Pi]$ [c]	40
51	$[\Pi \rightarrow X]$ [6]	66	76	$[\Pi \rightarrow X]$ [b]	6L
52	$[\Pi \rightarrow X]$ [7]	67	77	$[\Pi \rightarrow X]$ [c]	60
53	$[X]$	12	78	$[X]$	12
54	$[-]$	11	79	$[C/\Pi]$	50
55	$[\Pi \rightarrow X]$ [2]	62	80	$[-]$	11
56	$[X]$	12	81	$[B/0]$	52

მითითება: (4) ლეტერმინატის ელემენტები შევიტანოთ მიმდევრობით სტრიქონების მიხედვით. $a_{11} [B/0] [C/\Pi], \dots, a_{44} [C/\Pi]$. $[\Pi \rightarrow X] [d]$ მოგვცემს D-ს.

§ 17. მაგალითები

1. რთული პროცენტების ფორმულა. ვთქვათ, მეანაბრეს ბანკში შეტანილი აქვს k მანეთი r რთულ პროცენტად წელიწადში. რამდენ მანეთს მიიღებს მეანაბრე n წლის შემდეგ.

ამოხსნა. მეანაბრეს ბანკში შეტანილი აქვს k მანეთი r რთულ პროცენტად, ეს ნიშნავს, რომ მეანაბრეს წლის ბოლოს ბანკში ექნება არა k მანეთი, არამედ $k + k \cdot r \cdot \frac{1}{100} = k \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ მანეთი. მეორე წლის ბოლოს მეანაბრეს ბანკში ექნება $k \left(1 + \frac{r}{100}\right) + k \left(1 + \frac{r}{100}\right) \frac{r}{100} = k \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$. ე. ი. მეორე წლის ბოლოს მოგება იანგარიშება არა k მანეთიდან, არამედ $k \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ მანეთიდან. ამრიგად, მეორე წლის ბოლოს მეანაბრეს ბანკში ექნება

$$k \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \text{ მანეთი.}$$

აღვილი წარმოსადგენია, რომ, თუ განხილულ მოქმედებას გავაგრძელებთ, n წლის შემდეგ მეანაბრეს ბანკში უნდა გადაუხადოს Q მანეთი,

$$Q = k \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \quad (1)$$

ამ ფორმულაში მონაწილეობს ოთხი პარამეტრი k, r, n, Q . თუ ამ პარამეტრებიდან სამი ცნობილია, მეოთხე პარამეტრი განისაზღვრება. გავალოგარიტმით (1) გამოსახულება, მივიღებთ

$$\ln Q = \ln k + n \ln \left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

ამ ფორმულიდან ადვილად განვსაზღვრავთ

$$n = \frac{\ln \frac{Q}{k}}{\ln \left(1 + \frac{r}{100}\right)} \quad (2)$$

ასევე განსაზღვრავთ

$$k = Q \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{-n}, \quad (3)$$

$$r = \left[\left(\frac{Q}{k} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \cdot 100. \quad (4)$$

ამრიგად, გვაქვს ოთხი ფორმულა (1)–(4), რომლებიც განსაზღვრავენ

k — დაგროვილი თანხის საწყის მნიშვნელობას,

Q — დაგროვილი თანხის საბოლოო მნიშვნელობას,

n — დროის პერიოდის რიცხვს (მაგალითად, წლების რაოდენობას),

r — აღებულ პერიოდში პროცენტის სიდიდეს.

ეს სიდიდეები რეგისტრების მიხედვით შემდეგნაირად გავანაწილოთ:

n — RG2, r — RG3, K — RG4, Q — RG5.

აღებული ფორმულებისათვის შევადგინოთ ერთი პროგრამა.

დავიწყეთ $1 + \frac{r}{100}$ სიდიდის გამოანგარიშებით. ამ სიდიდის გამოთვლები მოვათავსოთ ქვეპროგრამაში 46 მისამართიდან დაწყებული (ცხრილი 20).

$1 + \frac{r}{100}$ -ის განსაზღვრა

ცხრილი 20

46	[Π-X] [3]	63	52	[+]	10
47	[1]	01	53	[B+]	0E
48	[0]	00	54	[Π→X] [2]	62
49	[0]	00	55	[←→]	14
50	[÷]	13	56	[B/0]	52
51	[1]	01			

ამის შემდეგ გამოვიანგარიშოთ $\ln \left(1 + \frac{r}{100} \right)$ და შევინახოთ RG6 რეგისტრში. გამოვიძახოთ RG5 რეგისტრიდან Q , ხოლო RG4 რეგისტრიდან k . ამ სიდიდეებიდან Q გავყოთ k -ზე და ავიღოთ ამ განაყოფის ლოგარითმი, $\ln \frac{Q}{k}$. გამოვიძახოთ RG6 რეგისტრიდან $\ln \left(1 + \frac{r}{100} \right)$ და მასზე გავყოთ $\ln \frac{Q}{k}$ მივიღებთ $\ln \frac{Q}{k} : \ln \left(1 + \frac{r}{100} \right) = n$, რომელიც შევიტანოთ RG2 რეგისტრში.

ამრიგად, RG2 რეგისტრში მივიღეთ (2) ფორმულით განსაზღვრული n -ის მნიშვნელობა (ცხრილი 21).

n-ის განსაზღვრა

ცხრილი 21

00	[ΠΠ]	53	06	[÷]	13
01	[4] [6]	46	07	[F] [Ln]	18
02	[F] [Ln]	18	08	[Π→X] [6]	66
03	[X→Π] [6]	46	09	[÷]	13
04	[Π→X] [5]	65	10	[X→Π] [2]	42
05	[Π→X] [4]	64	11	[C/Π]	

ახლა შევადგინოთ (4) ფორმულით განსაზღვრული r -ის გამოსათვლელი პროგრამა. ვივულისხოთ, დანარჩენი სიდიდეები სათანადოდ ცნობილია და შენახულია სათანადო რეგისტრებში. Q გამოვიძახოთ RG5 რეგისტრიდან, ხოლო RG4 რეგისტრიდან k . ამ სიდიდეებიდან Q გავყოთ k -ზე. გამოვიძახოთ n -ის მნიშვნელობა RG2 რეგისტრიდან. ავიღოთ $\frac{1}{n}$ და ამ ხარისხში ავახარისხოთ განაყოფი $\frac{Q}{k}$. ამ განაყოფს გამოვაკლოთ 1 და ეს სხვაობა გაგამრავლოთ 100-ზე. მთლიანად გვექნება 22-ე ცხრილში მოცემული პროგრამა.

12	$[\Pi \rightarrow X]$ [5]	65	21	[1]	01
13	$[B \vdash]$	OE	22	$[-]$	11
14	$[\Pi \rightarrow X]$ [4]	64	23	[1]	01
15	$[\div]$	13	24	[0]	00
16	$[B \vdash]$	OE	25	[0]	00
17	$[\Pi \rightarrow X]$ [2]	62	26	$[\times]$	12
18	$[F]$ [1/X]	23	27	$[X \rightarrow \Pi]$ [3]	43
19	$[\leftrightarrow]$	14	28	$[C/\Pi]$	50
20	$[F]$ $[X^Y]$	24			

სრულიად ასევე შევადგენთ k -ს განსაზღვრის და Q -ს განსაზღვრის პროგრამებს (ცხრილი 23, ცხრილი 24).

29	$[\Pi \Pi]$	53	34	$[\Pi \rightarrow X]$ [5]	65
30	[4] [6]	46	35	$[\times]$	12
31	$[F]$ $[X^Y]$	24	36	$[X \rightarrow \Pi]$ [4]	44
32	$[F]$ [1/X]	23	37	$[C/\Pi]$	50
33	$[B \vdash]$	OE			

38	$[\Pi \Pi]$	53	42	$[\Pi \rightarrow X]$ [4]	64
39	[4] [6]	46	43	$[\times]$	12
40	$[F]$ $[X^Y]$	24	44	$[X \rightarrow \Pi]$ [5]	45
41	$[B \vdash]$	OE	45	$[C/\Pi]$	50

ამრიგად, მთლიანი პროგრამა რთული პროცენტების შესახებ მიიღება 00 მისამართიდან 56 მისამართის ჩათვლით, ცხრილი 21—24 და ცხრილი 20. შევიტანოთ ამ მიმდევრობით პროგრამა მანქანაში და გადავიყვანოთ მანქანა ავტომატური მართვის რეჟიმში მუშაობაზე ლილაკებით $[F]$, $[ABT]$, $[B/0]$. შემდეგ შევიტანოთ მოცემული სამი სიდიდე n , r , k , Q სიდიდეებიდან. $RG2-5$ ლილაკით და სათანადო მისამართზე უპირობო გადასვლის ბრძანების ლილაკზე დაჭერის შემდეგ მანქანა გავუშვათ გამოთვლაზე.

მაგალითად, რა რაოდენობის თანხას მივიღებთ 2 375 მანეთიდან, თუ იგი შეტანილია ბანკში 5%-ად 7 წლის ვადით.

პირობის თანახმად $k=2\,375$, $r=5$, $n=7$. უნდა განვსაზღვროთ Q . მანქანაში სათანადო პროგრამის 00-დან 56 მისამართის შეტანის შემდეგ უნდა დავაჭიროთ ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით:

$[F]$, $[ABT]$, $[B/0]$;

[7] $[X \rightarrow \Pi]$ [2]; [5] $[X \rightarrow \Pi]$ [3];

[2] [3] [7] [5] $[X \rightarrow \Pi]$ [4], [6/ Π] [3]; [8], $[C/\Pi]$.

მანქანა ამუშავდება და გარკვეული დროის შემდეგ გაჩერდება. ინდიკატორზე მივიღებთ 3341,8634. რადგანაც ფულის ზომის უმცირესი ერთეულია მანეთის მეასედი ნაწილი, ამის გამო მიღებული რიცხვი უნდა დავამრგვალოთ მეასედამდე. ამრიგად, მივიღებთ $Q=3341,86$.

შეიძლება რთული პროცენტების გამოანგარიშების პროგრამა კვლავ რატულ ცხრილში მოვათავსოთ. პირველ პერიზონტალურ სტრიქონში მოვათავსოთ ერთეულები, ხოლო პირველ სვეტში ათეულები. მათ გადაკეთაში მოვათავსოთ სათანადო ბრძანება, ხოლო მათ ქვეშ სათანადო კოდი (ცხრილი 25).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	ΠΠ 53	46 46	F ln 18	X→Π6 46	Π→X5 65	Π→X4 64	÷ 13	F Ln 18	Π→X6 66	÷ 13
1	X→Π2 42	C/Π 50	Π→X5 65	B† OE	Π→X4 64	÷ 13	B† OE	Π→X2 62	F1/X 23	← 14
2	FX ^Y 24	1 01	— 11	1 01	0 00	0 00	× 12	X→Π3 43	C/Π 50	ΠΠ 53
3	46 46	FX ^Y 24	F1/X 23	B† OE	Π→X5 65	× 12	X→Π4 44	C/Π 50	ΠΠ 53	46 46
4	FX ^Y 24	B† OE	Π→X4 64	× 12	X→Π5 45	C/Π 50	Π→X3 63	1 01	0 00	0 00
5	÷ 13	1 01	+ 10	B† OE	Π→X2 62	← 14	B/0 52			

მითითება: თუ მოცემულია r, k, Q , მაშინ $r[3], K[4], Q[5], [B/0] [C/Π];$
 $RG2: n.$

თუ მოცემულია n, K, Q , მაშინ $n[2], K[4], Q[5], [B/Π] [1] [2],$
 $[C/Π]; RG3: r.$ თუ მოცემულია n, r, Q , მაშინ $n[2], r[3], Q[5], [B/Π] [2] [9],$
 $[C/Π]; RG4: K.$ თუ მოცემულია n, r, K , მაშინ $n[2], r[3], K[4], [B/Π] [3] [8],$
 $[C/Π]; RG5: Q.$

2. ხელფასის ანაზღაურება — გადახდის უწყისი.

ჩვეულებრივად ხელფასი თვეში ორჯერ გაიცემა: ე. წ. გეგმიური ავანსი თვის 16—17 რიცხვებში და ხელფასი მომდევნო თვის დასაწყისის 2—3 რიცხვებში. ხელფასის უწყისში მოცემულია მთელი ინფორმაცია მუშა-მოსამსახურის შესახებ: გვარი, სახელი, მამის სახელი, თანამდებობა, ნამუშევარი დღეების რაოდენობა, თვიური ხელფასი, დამატებითი სამუშაოს ღირებულება, მთლიანი თვიური ხელფასი, ავანსი, საშემოსავლო გადასახადი, უშვილობის გადასახადი, სხვადასხვა სახის გადასახადები. მაგალითად, მაღაზიიდან განვადებით გამოტანილი ნივთის თვიური გადასახადი და სხვა. უწყისში მოცემულია გადასახადთა მთლიანი ჯამი, რომელზეც უნდა გამოაკლდეს ავანსი, და დარჩენილი ნაწილი, რომელიც უნდა მიეცეს მოსამსახურეს ხელზე.

თუ i -ური მოსამსახურის თვიური ხელფასის რაოდენობას აღვნიშნავთ P_{i0} -ით (მანეთებში), k -ური გადასახადის კოეფიციენტი a_{ik} -ით

(უფრო მეტად პროცენტებშია მოცემული), ხოლო k -ური გადასახადის სიდიდეს b_{ik} ასოთი, $k=1, n$, გვექნება

$$b_{ik} = a_{ik} P_{i0}, k=1, \dots, n. \quad (5)$$

ავანსად გაცემული თანხა, როგორც წესი, თვიური ხელფასის გარკვეული ნაწილია, თუ საავანსო კოეფიციენტი $a_{i, n+1}$ ასოთი აღვნიშნავთ, გვექნება:

$$b_{i, n+1} = a_{i, n+1} P_{i0}. \quad (6)$$

ამრიგად, მოსამსახურეს დაერიცხება (მანეთებში)

$$Q_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} P_{i0} \quad (7)$$

და ხელზე მიეცემა (მანეთებში)

$$S_i = a_{i, n+1} P_{i0} - \sum_{k=1}^n a_{ik} P_{i0}. \quad (8)$$

შეიძლება დარიცხვები განსაზღვრული თანხით წარმოებდეს. მაგალითად, მაღაზიიდან განვადებით გამოტანილი ნივთისათვის გადასახადი ნივთის ღირებულების პროპორციულია. ამიტომ ნაცვლად (8) ფორმულისა შეგვიძლია დავწეროთ უფრო ზოგადი ფორმულა:

$$S_i = a_{i, n+1} P_{i0} - \left(b_{i1} + b_{i2} + \dots + b_{in} + \sum_{k=n+1}^n a_{ik} P_{i0} \right). \quad (9)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა. თუ მოსამსახურის ხელფასია P_{i0} , უშვილობათვის უშვილობის გადასახადის კოეფიციენტი $a_{i1} = 0,06$, ხოლო შვილიანათვის $a_{i1} = 0$. ასე რომ,

$$b_{i1} = a_{i1} P_{i0} = \begin{cases} 0,06 P_{i0} \\ 0 \end{cases}$$

მაღაზიის გადასახადია b_{i2} . საშემოსავლო გადასახადის კოეფიციენტი $a_{i3} = 0,13$, ასე რომ,

$$b_{i3} = 0,13 P_{i0}$$

საავანსო კოეფიციენტი $a_{i4} = 0,5$, ამიტომ

$$b_{i4} = 0,5 P_{i0}. \quad (10)$$

ამრიგად, მოსამსახურის ხელზე გასაცემი თანხისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა

$$S_i = b_{i4} - Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

სადაც b_{i4} განისაზღვრება (10) ფორმულით, ხოლო

$$Q_i = a_{i1} P_{i0} + b_{i2} + 0,13 P_{i0}. \quad (12)$$

დავაპროგრამოთ (11) ფორმულა.

თვეური ხელფასისათვის (P_{i0}) გამოვეყენოთ RG0 რეგისტრი, უშვილობის გადასახადისათვის (b_{i1}) RG1 რეგისტრი, მალაზიის გადასახადისათვის (b_{i2}) RG2 რეგისტრი, საშემოსავლო გადასახადისათვის (b_{i3}) RG3 რეგისტრი, ავანსისათვის (b_{i4}) RG4 რეგისტრი, მთლიანი დარიცხვისათვის (Q_i) RG5 რეგისტრი, ხელზე გასაცემი თანხისათვის (S_i) RG6 რეგისტრი.

ვიგულისხმობთ, რომ P_{i0} შეტანილია RG0 რეგისტრში, უშვილობის კოეფიციენტი RG1 რეგისტრში, ხოლო მალაზიის გადასახადი შეტანილია RG2 რეგისტრში.

მოსამსახურეთა ხელფასების მთლიანი ჯამისათვის გამოვეყენოთ RG7 რეგისტრი, უშვილობის გადასახადთა საერთო ჯამისათვის RG8, მალაზიის გადასახადთა ჯამისათვის RG9, საშემოსავლო გადასახადთა ჯამისათვის RGA, ავანსთა ჯამისათვის RGb, მთელი დარიცხულთა ჯამისათვის RGC, ხელზე გასაცემი თანხათა ჯამისათვის RGd რეგისტრი.

(11) ფორმულით გამოთვლის პროგრამა მოცემულია 26-ზე ცხრილში.

ცხრილი 26

პრამანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაქი)	კოდი	პრამანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაქი)	კოდი
00	[ΠΠ]	53	06	[Π→X] [1]	61
01	[3] [1]	31	07	[Π→X] [8]	68
02	[Π→X] [0]	60	08	[+]	10
03	[Π→X] [7]	67	09	[X→Π] [8]	48
04	[+]	10	10	[Π→X] [2]	62
05	[X→Π] [7]	47	11	[Π→X] [9]	69

ცხრილი 26 (გაგრძელება)

პრამანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაქი)	კოდი	პრამანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაქი)	კოდი
12	[+]	10	29	[X→Π] [4]	4Γ
13	[X→Π] [9]	49	30	[C/Π]	50
14	[Π→X] [3]	63	31	[Π→X] [0]	60
15	[Π→X] [a]	6—	32	[Π→X] [1]	61
16	[+]	10	33	[X]	12
17	[X→Π] [a]	4—	34	[X→Π] [1]	41
18	[Π→X] [4]	64	35	[C/Π]	50
19	[Π→X] [b]	6L	36	[Π→X] [2]	62
20	[+]	10	37	[C/Π]	50
21	[X→Π] [b]	4L	38	[+]	10
22	[Π→X] [5]	65	39	[X→Π] [5]	45
23	[Π→X] [c]	6c	40	[Π→X] [0]	60
24	[+]	10	41	[0]	00
25	[X→Π] [c]	4C	42	[+]	0—
26	[Π→X] [6]	66	43	[1]	01
27	[Π→X] [d]	6Γ	44	[3]	03
28	[+]	10	45	[X]	12

ცხრილი 26 (გაგრძელება)

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
46	$[X \rightarrow \Pi]$ [4]	44	55	$[X]$	12
[47	$[C/\Pi]$	50	56	$[C/\Pi]$	50
48	$[\Pi \rightarrow X]$ [5]	65	57	$[X \rightarrow \Pi]$ [4]	44
49	$[+]$	10	58	$[\Pi \rightarrow X]$ [5]	65
50	$[X \rightarrow \Pi]$ [5]	45	59	$[C/\Pi]$	50
51	$[\Pi \rightarrow X]$ [0]	60	60	$[-]$	11
52	$[0]$	00	61	$[C/\Pi]$	50
53	$[.]$	0—	62	$[X \rightarrow \Pi]$ [6]	46
54	$[5]$	05	63	$[B/0]$	52

მითითება: $[F]$ $[ABT]$ $[B/0]$, P_{i0} $[X \rightarrow \Pi]$ [0], a_{i1} $[X \rightarrow \Pi]$ [1], b_{i2} $[X \rightarrow \Pi]$ [2], $[B/0]$ $[C/\Pi]$.

ამოწმებით: I C/Π —უშვილობის გადასახადი, II C/Π —მაღაზიის გადასახადი, III C/Π —საშემოსავლო გადასახადი, IV C/Π —ავანსი, V C/Π —სულ დაერიცხა, VI C/Π —ხელზე ეძლევა. კვლავ დავაჭიროთ $[C/\Pi]$.

ინდიკატორზე $\sum_{j=1}^i S_j$, ამის შემდეგ შევიტანოთ $i+1$ მოსამსახურის მონაცემები $P_{i+1,0}$, $a_{i+1,1}$, $b_{i+1,2}$ და წინა პროცესი გავიმეოროთ. ინდიკატორზე მივიღებთ $\sum_{j=1}^{i+1} S_j$. როდესაც ყველა მონაცემი შეიტანება მანქანაში

ნაში $P_{i,0}$, $a_{i,1}$, $b_{i,2}$, $j=\overline{1,n}$, ბოლოს რეგისტრზე მიიღება $\sum_{i=1}^n S_i$.

დავაჭიროთ მიმდევრობით ლილაკებს

$$\begin{array}{llll}
 [\Pi \rightarrow X] [7] & \text{ინდიკატორზე მიიღება} & \sum_{i=1}^n P_{i0}, \\
 [\Pi \rightarrow X] [8] & " & \sum_{i=1}^n b_{i1}, \\
 [\Pi \rightarrow X] [9] & " & \sum_{i=1}^n b_{i2}, \\
 [\Pi \rightarrow X] [a] & " & \sum_{i=1}^n b_{i3}, \\
 [\Pi \rightarrow X] [b] & " & \sum_{i=1}^n b_{i4}, \\
 [\Pi \rightarrow X] [c] & " & \sum_{i=1}^n Q_i, \\
 [\Pi \rightarrow X] [d] & " & \sum_{i=1}^n S_i.
 \end{array}$$

პროგრამის ჭეშმარიტების შესამოწმებლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ მანქანის მეორე გაჩერების შემთხვევაში ინდიკატორზე b_{i2} მნიშვნელობის მიღება, რომელიც ადრე შევიტანეთ მანქანაში. ასევე შემოწმებისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჯამები S_i , $\sum_{j=1}^r S_j, \dots, \sum_{j=1}^i S_j, \dots, \sum_{i=1}^n S_i$,

რომლებიც სათანადოდ ყოველი ახალი მონაცემის შეტანის წინ მიიღება ინდიკატორზე.

ხელფასის უწყისი, რომელიც შედგენილია 26-ე ცხრილში მოცემული პროგრამით, მოცემულია 27-ე ცხრილში. გამოთვლების გასაგებად ცხრილის პირველ სტრიქონში რეგისტრების მისამართებია ჩაწერილი $GR0-GR6$. ასევე ცხრილის ბოლო სტრიქონშიც რეგისტრების მისამართებია ჩაწერილი, $RG7-RG9$, RGa , RGb , RGc , RGd , რომლებშიდაც

შენახულია სათანადო ჯამების მნიშვნელობანი, $\sum_{i=1}^8 P_{i0}, \dots, \sum_{i=1}^8 S_i$.

პირველ სვეტში გვარის, სახელის და მამის სახელის გვერდით მიწერილია უშვილობის გადასახადის კოეფიციენტის მნიშვნელობანი.

ცხრილი 27

თვის I ნახევარი ხელფასის უწყისი

პირველი	გვარი, სახელი და მამის სახელი	თანამდებობა	ნამუშევარი დღე	თვეური ხელფასი	უშვილობის კოეფიციენტი	უშვილობის გადასახადი	მალაზია	საშემოსულო გადასახადი	ავანსი	სულ ერთგება	ხელზე ეძლევა	უმომწეობა	მომღების ხელმოწერა
				RG0		RG1	RG2	RG3	RG4	RG5	RG6		
1				200	0,06	12	21,50	26	100	59,50	40,50	40,5	
2				150	0	0	15,35	19,50	75	34,85	40,15	80,65	
3				140	0	0	10,65	18,20	70	28,85	41,15	121,80	
4				120	0	0	9,40	15,60	60	25	35	156,80	
5				85	0	0	4,50	11,05	42,30	15,35	26,95	183,75	
6				75	0,06	4,50	6,10	9,75	37,50	20,35	17,15	200,90	
7				80	0,06	4,80	3,20	10,40	40	18,40	21,60	222,50	
8				90	0,06	5,40	6,30	11,70	45	23,40	21,60	244,10	
სულ				940			23,90	77	122,20	470	225,90	244,10	
				RG7		RG8	RG9	RGa	RGb	RGc	RGd		

ანლა გავარჩიოთ თვის მეორე ნახევრის ხელფასის უწყისი.

თვის მეორე ნახევრის ხელფასში უნდა გათვალისწინდეს ყველაფერი ის, რაც ავანსად მიიღო მოსამსახურემ, რაც გამოიმუშავა მთელი თვის განმავლობაში და რაც უნდა მიიღოს. აქ ძირითადია, თუ რამდენი დღე იმუშავა მოსამსახურემ და რას უდრის მისი დღიური ხელფასი. გამოვიტყუოთ რა, თუ რა თანხა უნდა მიიღოს მოსამსახურემ, ამ თანხას უნდა გამოაყლდეს ავანსად მიღებული თანხა. ამასთან უნდა დაეკეთოს ის, რაც თვის პირველ ნახევარში არ დაეკეთა. ასეთია, მაგალითად, სოციალური დაზღვევისა და პროფესიული კავშირის გადასახადი. ასე რომ, მოსამსახურის ხელფასი თვის მეორე ნახევარში შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$S'_i = a'_{i0} P_{i0} - Q'_i, \quad (13)$$

ზღადაც

$$a'_{i0} = \frac{m_i}{26,5}$$

m_i — თვეში i -ური მოსამსახურის ნამუშევარ დღეთა რაოდენობა, 26,5 თვეში საშუალოდ სამუშაო დღეთა რაოდენობა, ხოლო

$$a'_i = b'_{i0} + 0,01 P_{i0} + b_{i4}, \quad (14)$$

სადაც b'_{i0} — სოციალური დაზღვევის გადასახადი, 0,01 P_{i0} — პროფესიული კავშირის გადასახადი, b_{i4} — თვის პირველ ნახევარში i -ური მოსამსახურის მიერ მიღებული ავანსი.

დავაპროგრამოთ (13) ფორმულა.

თვიური P_{i0} ხელფასისათვის გამოვყოთ RG0 რეგისტრი, ნამუშევარ დღეთა რაოდენობისათვის RG1 რეგისტრი, b'_{i0} სოციალური დაზღვევისათვის RG2 რეგისტრი, b_{i4} ავანსისათვის RG4 რეგისტრი. მთლიანად დარიცხული Q'_i თანხისათვის გამოვყოთ RG5 რეგისტრი, მოსამსახურის ხელზე გასაცემი თანხისათვის RG6 რეგისტრი. საჭიროა ვიცოდეთ უწყისში შეტანილ მოსამსახურეთა საერთო ხელფასი, რისთვისაც გამოვყოთ RG7 რეგისტრი. უნდა ვიცოდეთ უწყისში შეტანილ მოსამსახურეთა მიერ გამოიმუშავებული ხელფასების საერთო ჯამი, რისთვისაც გამოვყოთ RG8 რეგისტრი. სოციალურ გადასახადთა საერთო ჯამისათვის გამოვყოთ RG9 რეგისტრი. ავანსთა ჯამისათვის გამოვყოთ RGa რეგისტრი, მთლიანად დარიცხულთა ჯამისათვის RGc რეგისტრი, მთლიანად გასაცემი თანხისათვის RGd რეგისტრი. პროფსაწევროსათვის RG3 და მთლიანი ჯამისათვის RGb რეგისტრი. მთლიანად (13) ფორმულისათვის გვექნება შემდეგი პროგრამა (ცხრილი 28).

შევიტანოთ რა პროგრამას შემდეგ დილაქებით:

[F] [ABT], P_{i0} [X→Π] [0], m_i [X→Π] [1], b_{i0} [X→Π] [2], [B/0] [C/Π],

შევიტანოთ მონაცემებს, მანქანა დაიწყებს გამოთვლებს. გამოთვლების შესრულების შემდეგ მანქანა გაჩერდება ინდიკატორზე მიღებული მნიშვნელობა იქნება დღიური ხელფასი, რომელიც უნდა ჩაეწეროს დღიური ხელფასის სვეტში. შემდეგ [C/Π] დილაქზე დაჭერით მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება ინდიკატორზე მიღებული მნიშვნელობა ჩაეწეროს მთლიანი ხელფასის სვეტში (სულ ერგება). აღნიშნული პროცესის გამეორებით მივიღებთ სოციალური დაზღვევის, პროფესიული კავშირის საწევროს, ავანსის, მთლიანი დარიცხვის და ხელზე გასაცემი თანხის რაოდენობას, რომლებიც სათანადოდ უწყისის სვეტებში უნდა ჩაიწეროს. ამის შემდეგ [C/Π] დილაქზე დაჭერით მანქანა ამუშავდება და გარკვეულ

ლი დროის შემდეგ გაჩერდება. ინდიკატორზე მივიღებთ მოსამსახურისათვის ხელზე გასაცემი თანხის რაოდენობას. შემდეგ შევტანთ $(i+1)$ მოსამსახურის მონაცემებს და წინა შემთხვევის ანალოგიურად შევავსებთ უწყისის მომდევნო სტრიქონს. ასე გავაგრძელებთ ბოლომდე და ბოლოს, როდესაც მივიღებთ უწყისის მიხედვით ყველა მოქალაქისათვის ხელზე გასაცემ თანხათა რაოდენობას, ლილაკებზე $[\Pi \rightarrow X]$ [7], $[\Pi \rightarrow X]$ [8], $[\Pi \rightarrow X]$ [b], $[\Pi \rightarrow X]$ [a], $[\Pi \rightarrow X]$ [d] დაჭერით, ინდიკატორზე მივიღებთ:

თვითურ ხელფასთა ჯამს $\sum_{i=1}^n P_{i0}$, რაც ნამდვილად გამოიმუშავებს $\sum_{i=1}^n a'_{i0} P_{i0}$,

სოციალური დაზღვევის გადასახდელთა ჯამს $\sum_{i=1}^n b_{i2}$, ავანსთა ჯამს $\sum_{i=1}^n b_{i4}$, პრო-

ფესული კავშირის წვერობის გადასახდელთა ჯამს $\sum_{i=1}^n 0,01 \cdot P_{i0}$, ღარიცხულ

თანხათა ჯამს $\sum_{i=1}^n a_i$ და ხელზე გადასაცემ თანხათა ჯამს $\sum_{i=1}^n S_i$,

ცხრილი 28

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
00	[ΠΠ]	53	08	[+]	10
01	[3] [1]	31	09	[X→Π] [8]	48
02	[Π→X] [0]	60	10	[Π→X] [2]	62
03	[Π→X] [7]	67	11	[Π→X] [9]	69
04	[+]	10	12	[+]	10
05	[X→Π] [7]	47	13	[X→Π] [9]	14
06	[Π→X] [1]	61	14	[Π→X] [3]	63
07	[Π→X] [8]	68	15	[Π→X] [a]	6—

ცხრილი 28 (გაგრძელება)

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
16	[+]	10	33	[6]	06
17	[X→Π] [a]	4—	34	[,]	0—
18	[Π→X] [4]	64	35	[5]	05
19	[Π→X] [b]	6L	36	[÷]	13
20	[+]	10	37	[C/Π]	50
21	[X→Π] [b]	4L	38	[Π→X] [1]	61
22	[Π→X] [5]	65	39	[X]	12
23	[Π→X] [c]	6C	40	[C/Π]	50
24	[+]	10	41	[X→Π] [1]	41
25	[X→Π] [c]	4C	42	[Π→X] [2]	62
26	[Π→X] [6]	66	43	[C/Π]	50
27	[Π→X] [d]	6Γ	44	[0]	00
28	[+]	10	45	[+]	10
29	[X→Π] [d]	4Γ	46	[X→Π] [5]	45
30	[C/Π]	50	47	[Π→X] [1]	61
31	[Π→X] [0]	60	48	[0]	00
32	[2]	02	49	[·]	0—

ცხრილი 28 (გაგრძელება)

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
50	[0]	00	63	$[X \rightarrow II]$ [4]	44
51	[1]	01	64	$[C/\Pi]$	50
52	[X]	12	65	$[\Pi \rightarrow X]$ [5]	65
53	$[X \rightarrow \Pi]$ [3]	43	66	[+]	10
54	$[C/\Pi]$	50	67	$[X \rightarrow \Pi]$ [5]	45
55	$[\Pi \rightarrow X]$ [5]	65	68	$[C/\Pi]$	50
56	[+]	10	69	$[\Pi \rightarrow X]$ [1]	61
57	$[X \rightarrow \Pi]$ [5]	45	70	$[\leftrightarrow]$	14
58	$[\Pi \rightarrow X]$ [0]	60	71	[—]	11
59	[0]	00	72	$[C/\Pi]$	50
60	[·]	0—	73	$[X \rightarrow \Pi]$ [6]	46
61	[5]	05	74	$[B/0]$	52
62	[X]	12			

მითითება: $[F]$ $[ABT]$ $[B/0]$, $P_{i0} [X \rightarrow \Pi]$ [0], $m_i [X \rightarrow \Pi]$ [1],
 $b_{i2} [X \rightarrow \Pi]$ [2], $[B/0]$ $[C/\Pi]$.

თეორიული ხელფასისათვის $RG0$, სულ ერგება $RG1$, სოცდაზღვევა $RG2$, პროფსაწევრო $RG3$, ავანსი $RG4$, სულ დაერიცხა $RG5$, ხელზე მიეცემა $RG6$. ჯამი თვ. ხელფასების $RG7$, ჯამი სულ ერგება $RG8$, ჯამის სოცდაზღვევის გადასახადების $RG9$, ჯამი პროფსაწევროს გადასახადების GRa , ჯამი ავანსების RGb , ჯამი მთლიანად დარიცხულთა RGc , ჯამი მთლიანად ხელზე გასაცემი თანხის RGd .

თვის მეორე ნახევრის ხელფასის უწყისი, რომელიც შედგენილია

28-ე ცხრილში მოცემული პროგრამით, ნაჩვენებია 29-ე ცხრილში. უწყისი შედგენილია 2 მოსამსახურისათვის, რაც ზოგადობას არ არღვევს.

ცხრილი 29

თვის მეორე ნახევარი ხელფასის უწყისი

პ. რიგზე	გვარი, სახელი და მამის სახელი	თანამდებობა	თეორიული ხელფასი	დღიური ხელფასი	ნამუშევრის დღეთა რაოდენობა	სულ ერგება	სოცდაზღვევის გადასახადი	პროფსაწევრო	ავანსი	მთლიანად დარიცხა	ხელზე მიეცემა	შემოწმება	მიმღების ხელმოწერა
		$RG0$				$RG1$	$RG2$	$RG3$	$RG4$	$RG5$	$RG6$		
1		200	7,55	25	188,75	15,40	1,89	100	117,29	71,46	71,46		
2		150	5,66	23	130,18	8,50	1,30	75	84,80	45,38	116,84		
		350			318,93	23,90	3,19	175	202,09	116,84			
		$RG7$			$RG8$	$RG9$	RGa	RGb	RGc	RGd			

3. ფუნქციის ზღვრის გამოთვლა. ჩვენთვის ცნობილია $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრა x_0 წერტილში. b რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ყოველი დადებითი ε -სათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ ყოველი x -სათვის x_0 წერტილის η მიდამოდან სრულდება უტოლობა

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \quad (15)$$

თუ მოვიგონებთ მიმდევრობის კრებადობის კოშის პირობას, $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში შეგვიძლია ასე გამოვთვალოთ: ავიღოთ $\Delta x > 0$ სიდიდე და განვიხილოთ უტოლობა

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)| < \varepsilon. \quad (16)$$

Δx ისე ვამცირებთ, რომ (16) უტოლობა დაკმაყოფილდეს. ამისათვის საკმარისია, ავიღოთ $\frac{\Delta x}{n}$ და n სათანადოდ ვზარდოთ მანამდე, ვიდრე (16)

უტოლობა არ შესრულდება. ამ შემთხვევაში ε სიზუსტით შეგვიძლია მივიღოთ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x)}{2}.$$

ასე რომ, შეგვიძლია დავასახელოთ $\varepsilon > 0$. ავიღოთ ისეთი Δx , რომ $f(x_0 \pm \Delta x)$ არსებობდეს. შევადგინოთ უტოლობა

$$\varepsilon - \left| f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{n}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{n}\right) \right| \geq 0. \quad (17)$$

იმდენად დიდი n ავიღოთ, $n \in \mathbb{N}$, რომ შესრულდეს (17) უტოლობა. ε -ის სათანადო შემცირებით, მივიღებთ $f(x)$ ზღვარს აღებულ x_0 წერტილში სათანადო სიზუსტით. სწორედ $f(x)$ ფუნქციის x_0 წერტილში ზღვრის გამოთვლის პროგრამა მოცემული 30-ე ცხრილში. $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლის ქვეპროგრამა მოთავსებულია 42 მისამართიდან. მანქანაში შეგვაქვს x_0 მნიშვნელობა RG0 რეგისტრში, Δx მნიშვნელობა RG1 რეგისტრში. ავიღებთ ε -ს და $[B/O]$, $[e/\Pi]$ ლილაკებზე დაჭერით მანქანა დაიწყებს მუშაობას. მანქანა გარკვეული დროის შემდეგ გაჩერდება და ინდიკატორზე გამოჩნდება სათანადო სიზუსტით $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი.

განვიხილოთ მაგალითი:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

$x_0 = 0$; $\Delta x = 0,1$; $\varepsilon = 0,1$. მივიღებთ 0,99998958.

$x_0 = 0$; $\Delta x = 0,01$; $\varepsilon = 0,01$. მივიღებთ 0,99999575.

$x_0 = 0$; $\Delta x = 0,001$; $\varepsilon = 0,001$. მივიღებთ 0,99999995.

$x_0 = 0$; $\Delta x = 0,0001$; $\varepsilon = 0,0001$. მივიღებთ 1.

მივიღეთ ჩვენთვის კარგად ცნობილი დამოკიდებულება

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
00	$[x \rightarrow \Pi]$ [2]	42
01	$[\Pi \rightarrow x]$ [1]	61
02	[2]	02
03	$[\div]$	13
04	$[x \rightarrow \Pi]$ [1]	41
05	$[\Pi \rightarrow x]$ [1]	61
06	[K] $[\Pi \rightarrow x]$ [4]	Γ4
07	$[\div]$	13
08	$[x \rightarrow \Pi]$ [5]	45
09	$[\Pi \rightarrow x]$ [0]	60
10	[+]	10
11	$[x \rightarrow \Pi]$ [6]	46
12	$[\Pi \rightarrow x]$ [0]	60
13	$[\Pi \rightarrow x]$ [5]	65
14	[—]	11
15	$[x \rightarrow \Pi]$ [7]	47
16	$[\Pi \rightarrow x]$ [6]	66
17	$[x \rightarrow \Pi]$ [b]	4L
18	[III]	53
19	[4] [2]	42
20	$[x \rightarrow \Pi]$ [8]	48
21	$[\Pi \rightarrow x]$ [7]	67
22	$[x \rightarrow \Pi]$ [b]	4L

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
23	[III]	53
24	[4] [2]	42
25	$[x \rightarrow \Pi]$ [9]	49
26	$[\Pi \rightarrow x]$ [8]	68
27	[—]	11
28	[E] $[x^2]$	22
29	[F] $[\sqrt{\cdot}]$	21
30	$[\Pi \rightarrow x]$ [2]	62
31	[—]	11
32	$[1-1]$	0L
33	[F] $[x \geq 0]$	59
34	[0] [5]	05
35	$[\Pi \rightarrow x]$ [8]	68
36	$[\Pi \rightarrow x]$ [9]	69
37	[+]	10
38	[2]	02
39	$[\div]$	13
40	$[x \rightarrow \Pi]$ [a]	4—
41	[C/II]	50
42	[F] [C/II]	1C
43	$[\Pi \rightarrow x]$ [b]	6L
44	$[\div]$	13
45	[B/0]	52

მითითება: [F] [ABT], x_0 $[x \rightarrow \Pi]$ [0], Δx $[x \rightarrow \Pi]$ [1], ε [B/0] [C/II].

პასუხი: ინდიკატორზე და $[\Pi \rightarrow x]$ [a].

4. **ჩაქვური წილადები**¹. პრაქტიკაში ზოგჯერ გვჭირდება მოცემული წილადი შევცვალოთ ისეთი მიახლოებითი წილადით, რომლის მნიშვნელი მოცემული წილადის მნიშვნელზე ნაკლებია და სათანადო ცდომილება არ აღემატება წინასწარ აღებულ სიდიდეს. აღმოჩნდა, რომ ე. წ. მახლოვანი წილადი უფრო ახლოსაა ე. წ. ჩაქვური წილადის მნიშვნელობასთან, ვიდრე რომელიმე სხვა წილადი.

ჩაქვური წილადის წარმოშობა დაკავშირებულია გამოჩენილი დანიელი მექანიკოსის, ფიზიკოსის და მათემატიკოსის ქრისტიან ჰიუგენსის (1629—1695) სახელთან. ჰიუგენსი მზიური სისტემის მოდელის შექმნის დროს წააწყდა თავისებურ წინააღმდეგობას; იმისათვის, რომ ორი კბილანა ბორბლით გამოცხადოთ ორი ციური პლანეტის მოძრაობა, საჭიროა ამ ბორბალთა კბილანების რიცხვების შეფარდება ტოლი იყოს პლანეტების მზის გარშემო ბრუნვის პერიოდების შეფარდებისა. მაგრამ ეს შეფარდება იმდენად დიდი რიცხვების შეფარდებით გამოისახება, რომ სათანადო კბილანების მქონე ბორბლების დამზადება ტექნიკურად შეუძლებელია. ამიტომ იძულებული ვართ დავკმაყოფილოდეთ მიახლოებითი წილადით. ეს წილადი ისეთი უნდა იყოს, რომ შეიძლებოდეს სათანადო კბილანების მქონე ბორბლების დამზადება და, ამასთანავე, კარგად გამოისახავდეს პლანეტების მზის გარშემო ბრუნვის პერიოდების შეფარდებას. ასეთი შეფარდების წარმოდგენაში უპირატესობა ეკუთვნის ჩაქვურ წილადებს.

განვიხილოთ წილადი $\frac{154}{29}$. გამოვყოთ ამ წილადიდან მთელი ნაწილი

$$\frac{154}{29} = 5 + \frac{9}{29}.$$

წილადი $\frac{9}{29}$ ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{9}{29} = \frac{1}{\frac{29}{9}}.$$

მოდებელი წილადის მნიშვნელობიდან კვლავ გამოვყოთ მთელი ნაწილი:

$$\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9}.$$

¹ გ. კომლაცე, ჩაქვური წილადები და განუსაზღვრელი განტოლებანი, გამომცემლობა „ცოდნა“, თბილისი, 1962.

წილადი კვლავ შევცვალოთ $\frac{2}{9} = \frac{1}{\frac{9}{2}}$ და $\frac{9}{2}$ -დან კვლავ გამოვყოთ მთელი ნაწილი, გვექნება:

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}.$$

მიღებულ $\frac{1}{2}$ წილადს ვედარ გარდავქმნით. რადგანაც 2-ის წარმოდგენა

$2 = 1 + \frac{1}{2}$ სახით, არაფერს ახალს არ გვაძლევს. საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{154}{29} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}, \text{ ან } \frac{154}{29} = 5 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარეში მყოფ წილადს ეწოდება **ჩაქვური**, ანუ **უწყვეტი** წილადი. შემოკლებულად აღებული უწყვეტი წილადი ასე ჩაიწერება:

$$\frac{154}{29} = (5; 3, 4, 2).$$

აღვილი წარმოსადგენია, რომ ყოველი ჩვეულებრივი წილადი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ჩაქვური წილადით

$$\frac{A}{B} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} \equiv (a_1; a_2, \dots, a_n), \quad (18)$$

სადაც

$$\frac{A}{B} = a_1 + \frac{r_1}{B}, \quad (19)$$

r_1 ნაშთია, $r_1 < B$. ასევე

$$\frac{B}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}. \quad (20)$$

თუ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ $r_1, r_2, \dots$, სადაც

$$B > r_1 > r_2 > \dots$$

ვთქვათ, $r_n = 1$, ე. ი.

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{a_n},$$

სადაც a_n ნატურალური რიცხვია, რომელიც 1-ს აღემატება, მაშინ

$$a_n = r_{n-1} > r_n = 1.$$

(19) და (20) ტოლობებიდან ცხადია, რომ a_1 მთელი ნაწილია $\frac{A}{B}$ წილადის, a_2 მთელი ნაწილია $\frac{B}{r_1}$ წილადის და ა. შ. ანუ

$$a_1 = E\left[\frac{A}{B}\right], \quad a_2 = E\left[\frac{1}{\frac{A}{B} - a_1}\right], \quad a_3 = E\left[\frac{1}{\frac{1}{\frac{A}{B} - a_1} - a_2}\right], \dots \quad (21)$$

დავაპროგრამოთ (21) ფორმულები. ამ ფორმულებში მოცემულია სათანადო წილადიდან მთელი ნაწილის გამოყოფა. ვთქვათ, $\frac{A}{B}$ წილადი შეტანილია ინდიკატორზე (ცხადია, წილადი უკვე ათწილადითაა წარმოდგენილი). ამ რიცხვიდან უნდა გამოვყოთ მთელი ნაწილი. ამისათვის ამ რიცხვს დავამატოთ 1 და შევიტანოთ სხვა რეგისტრში, მაგალითად RGO რეგისტრში. თუ გამოვიყენებთ ბრძანებას, რომელიც $[K]$, $[\Pi \rightarrow x]$, $[0]$ ლილაკებით სრულდება (RGO რეგისტრში მოთავსებული რიცხვი 1-ით შემცირდება და მოდიფიცირდება. ამ მოდიფიცირებული მისამართის რეგისტრში მოთავსებული რიცხვი გამოიძახება ინდიკატორზე —X რეგისტრში). თუ რიცხვი $\frac{A}{B}$ შეტანილი იყო RGO რეგისტრში იგი გამოვიძახოთ ინდიკატორზე (შემდეგი მოქმედების შესასრულებლად). ინდიკატორზე გამოვიძახოთ RGO რეგისტრში მოთავსებული მთელი რიცხვი (ამ რეგისტრში კი $\frac{A}{B}$ წილადის მთელი ნაწილია) და მანქანა გავაჩეროთ, რათა ამოვწეროთ $\frac{A}{B}$ რიცხვის მთელი ნაწილი, $a_1 = E\left[\frac{A}{B}\right]$. შემდეგ გამოვთვალოთ $\frac{A}{B} - a_1$. ავიღოთ ამ რიცხვის შებრუნებული სიდიდე და ბროცესი თავიდან გავიმეოროთ. გამოვყოთ $\frac{1}{\frac{A}{B} - a_1}$ რიცხვიდან მთელი ნაწილი და ა. შ. გამოთვლების მთლიანი პროგრამა მოცემულია 31-ე ცხრილში.

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
00	$[x \rightarrow \Pi]$ [1]	41
01	[1]	01
02	[+]	10
03	$[x \rightarrow \Pi]$ [0]	40
04	[K] $[\Pi \rightarrow x]$ [0]	70
05	$[\Pi \rightarrow x]$ [1]	61

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი
06	$[\Pi \rightarrow x]$ [0]	60
07	[C/ Π]	50
08	[—]	11
09	[F] $[1/x]$	23
10	[B/ Π]	51
11	[0] [0]	00

მითითება: პროგრამის შეტანის შემდეგ დავაჭიროთ ლილაკებს $[F]$, $[ABT]$, შემდეგ შევიტანოთ $\frac{A}{B} = b$ რიცხვი, $[B/O]$, b , $[C/\Pi]$. პირველი გაჩერების შემდეგ ამოვწეროთ a_1 . შემდეგ კვლავ დავაჭიროთ $[C/\Pi]$. მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება. ამოვწეროთ a_2 . შემდეგ კვლავ დავაჭიროთ ლილაკს $[C/\Pi]$. მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება, ამოვწეროთ a_3 და ა. შ.

მაგალითად, რიცხვი 3,8 წარმოვადგინოთ ჯაჭვური წილადით.

30-ე ცხრილიდან პროგრამის შეტანის შემდეგ ლილაკებს დავაჭიროთ:

[3] [-] [8] [B/O] [C/ Π]

მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება. ინდიკატორზე მივიღებთ 3-ს. დავაჭიროთ ლილაკს $[C/\Pi]$. მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება. ინდიკატორზე მივიღებთ 1-ს. კვლავ დავაჭიროთ ლილაკს $[C/\Pi]$ მანქანის შემდეგი გაჩერებისას ინდიკატორზე მივიღებთ 4-ს. დავაჭიროთ კიდევ ლილაკს $[C/\Pi]$. მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება. ინდიკატორზე მივიღებთ „ЕГГОГ“. ეს ნიშნავს $a_4 = \infty$ და a_3 ჯაჭვური წილადის ბოლო ელემენტია.

ამრიგად, $3,8 = (3; 1, 4)$.

საზოგადოდ, როდესაც ინდიკატორზე გამოჩნდება ნიშანი „ЕГГОГ“ ნიშნავს, გამოთვლები დამთავრებულია და ჯაჭვური წილადის ბოლო ელემენტია „ЕГГОГ“-ის გამოჩენამდე ინდიკატორზე მიღებული რიცხვი.

რიცხვი 3,7 წარმოვადგინოთ ჯაჭვური წილადით. ამ რიცხვის მანქანაში შეტანისა და მანქანის სათანადოდ ამუშავებისა და გაჩერების შემდეგ ინდიკატორზე მიმდევრობით მივიღებთ

3, 1, 2, 2, 1, 1666666.

მოთვლები დამთავრებულია. რიცხვი 1:1666666 მივიღოთ ნულის ტოლად.

გვექნება

$$3,7 = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+0},$$

ანუ

$$3,7 = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1}.$$

ამრიგად, $3,7 = (3; 1, 2, 3)$.

წარმოვადგინოთ რიცხვი π ჯაჭვური წილადით.

ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ

$$[F] [\pi] [B/O] [C/II].$$

მანქანის სათანადო გაჩერებებით მივიღებთ 3, 7, 15, 1, 244, 1, 2, 2, 1, ... პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება, ამრიგად, $\pi = (3; 7, 15, 1, 244, 1, 2, \dots)$

წარმოვადგინოთ $\sqrt{2}$ ჯაჭვური წილადით. გამოვიყენოთ ლილაკები

[2] [F] [$\sqrt{1}$] [B/O] [C/II]. მივიღებთ: $\sqrt{2} = (1; 2, 2, 2, \dots)$.

წარმოვადგინოთ რიცხვი 1393:972 ჯაჭვური წილადით.

გამოვიყენოთ ლილაკები

$$[F] [ABT] [1] [3] [9] [3] [B \uparrow] [9] [7] [2] [\div] [B/O] [C/II].$$

მანქანის მიმდევრობით ამუშავება — გაჩერებით ინდიკატორზე მივიღებთ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 18, ... აქედან სანდოა ექვსი მნიშვნელობა.

ამრიგად, $1393:972 = (1; 2, 3, 4, 5, 6)$.

ახლა განვიხილოთ საკითხი: ჯაჭვური წილადის ათწილადად წარმოდგენის შესახებ.

ავიღოთ ჯაჭვური წილადი $(2; 3, 5, 4, 2)$ შევადგინოთ ამ წილადის ელემენტებისაგან შემდგარი ჯაჭვური წილადები

$$(2), (2; 3), (2; 3, 5), (2; 3, 5, 4). \quad (22)$$

გადავაქციოთ ეს წილადები ჩვეულებრივ წილადებად. გვექნება

$$(2) = 2,$$

$$(2; 3) = 2 + \frac{1}{3} = 2 \frac{1}{3},$$

$$(2; 3, 5) = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{5}} = 2 \frac{5}{16},$$

$$(2; 3, 5, 4) = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{4}{21}} = 2 + \frac{21}{67} = 2 \frac{21}{67},$$

$$(2; 3, 5, 4, 2) = 2 \frac{47}{150}.$$

დავალაგოთ ეს წილადები ზრდადობით:

$$2 < 2 \frac{5}{16} < 2 \frac{47}{150} < 2 \frac{21}{67} < 2 \frac{1}{3},$$

ანუ

$$(2) < (2; 3, 5) < (2; 3, 5, 4, 2) < (2; 3, 5, 4) < (2; 3) \quad (23)$$

ამრიგად, ჯაჭვური $(2; 3, 5, 4, 2)$ წილადი მოთავსებულია (22) წილადებს შორის. (22) წილადებს ეწოდება $(2; 3, 5, 4, 2)$ წილადის მახლოვადი წილადები.

ავიღოთ ზოგადად ჯაჭვური წილადი $(a_1; a_2, a_3, \dots, a_n)$.

შევადგინოთ მახლოვადი წილადები.

$$a_1 = \frac{a_1}{1},$$

$$(a_1; a_2) = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2},$$

$$(a_1; a_2, a_3) = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_1 \left(a_2 + \frac{1}{a_3} \right) + 1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1}$$

თუ მესამე რიგის მახლოვად წილადს აღვნიშნავთ

$$(a_1; a_2, a_3) = \frac{P_3}{Q_3},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_2 a_3 + P_1}{Q_2 a_3 + Q_1},$$

၆၁၅၁၄

$$P_3 = P_2 a_3 + P_1, \quad Q_3 = Q_2 a_3 + Q_1.$$

თუ ასეთი გამოთვლებს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$P_k = P_{k-1} a_k + P_{k-2}, \quad Q_k = Q_{k-1} a_k + Q_{k-2}, \quad (24)$$

სადაც

$$P_0=1, \quad P_1=a_1, \quad Q_0=0, \quad Q_1=1; \quad (25)$$

$$P_2 = P_1 a_2 + P_0, \quad Q_2 = Q_1 a_2 + Q_0; \quad (25)$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{P_n}{Q_n} \quad (26)$$

ქაჭვეური წილადის ათწილადებში გამოსახვის პროგრამა მოცემულია 32-ე ცხრილში. ქაჭვეური წილადის ყოველი ელემენტის შეტანის შემდეგ მან-ქანა სათანადოდ გაჩერდება და ინდიკატორზე მივიღებთ ქაჭვეური წილადის მნიშვნელობას.

၂၆၈၀၉၀ ၃၂

ბრძანების მისამართი	ოპერაცია (ლილაკი)	კოდი	ბრძანების მისამართი	ოპერაცია ლილაკი	კოდი
00	$[x \rightarrow \Pi] [2]$	42	12	$[x \rightarrow \Pi] [3]$	43
01	$[0]$	00	13	$[\times]$	12
02	$[x \rightarrow \Pi] [0]$	40	14	$[+]$	10
03	$[B\Pi]$	0C	15	$[x \rightarrow \Pi] [2]$	42
04	$[x \rightarrow \Pi] [3]$	43	16	$[\Pi \rightarrow x] [0]$	60
05	$[x \rightarrow \Pi] [1]$	41	17	$[\Pi \rightarrow x] [4]$	64
06	$[\div]$	13	18	$[\Pi \rightarrow x] [1]$	61
07	$[C/\Pi]$	50	19	$[x \rightarrow \Pi] [0]$	40
08	$[x \rightarrow \Pi] [4]$	44	20	$[\times]$	12
09	$[\Pi \rightarrow x] [3]$	63	21	$[+]$	10
10	$[\Pi \rightarrow x] [4]$	64	22	$[B\Pi]$	51
11	$[\Pi \rightarrow x] [2]$	62	23	$[0] [5]$	05

მიითითება; [F] [ABT] [B/O] a_1 [C/II], a_2 [C, II],... ინდიკატორზე მი-
იღება (a_1) , $(a_1; a_2)$,...

მაგალითად, მოცემულია ჯამგური წილადი (1; 2, 3, 4, 5, 6). გამოვ-
თვალოთ სათანადო ათწილადი. გვექნება 1; 1,5; 1,4285714; 1,4333333;
1,433121; 1,4331275.

32-ე ცხრილში ყველა სიმბოლოს მნიშვნელობა ჩვენთვის ცნობილია, გარდა $B\Gamma$ სიმბოლოსა. ლილაკით $[B\Gamma]$ მზადდება ინდიკატორი რიცხვის რიგის შესატანად, თუ ინდიკატორზე 0-ია, მაშინ $[B\Gamma]$ ლილაკზე დაშვებით ინდიკატორზე მიიღება 1 00, ამ ლილაკით ხორციელდება (22) სიდიდეთა სათანადოდ მანქანაში შეტანა (იხ. § 13, n1).

§ 18. ღაპრობრაზიზის ელემენტები ბინიგის ენაზე

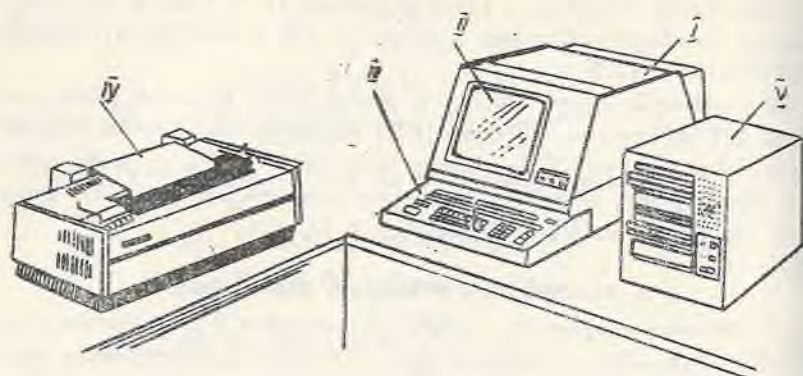
1. ძირითადი ნაწილები. საკმარისად გავეცანით მცირე გამოთვლულ მანქანას „МК—56“, ამ მანქანის „ენას“, რომლის საშუალებითაც დავპროგრამეთ რამდენიმე მათემატიკური და ეკონომიკური ამოცანა. ეს მხოლოდ მცირე ნაწილია იმისა, რაც შეიძლება შესრულდეს МК მჭიდვის მანქანებზე (Микрокалькулятор «Электроника МК—56», «МК—54», «МК—64», «БЗ—21», «БЗ—34» და სხვ.)¹

გამოთვლების შესრულების შესაძლებლობის მიხედვით ელექტრონული გამოთვლელი მანქანები (ეგმ) პირობით დაიყოფა: დიდი, მინი და მიკროელექტრონულ გამოთვლელ მანქანებად¹. დღეისათვის მეტად გავრცელებულია შედარებით მცირე მოცულობის მქონე (თავსდება ჩვეულებრივ სასწავლო მაგიდაზე) «Электроника», «Искра» და სხვა სერიის მიკრო ეგმ. ქვემოთ მხედველობაში გვქვანება მიკრო ეგმ «Искра 226» (ნახ. 16). მანქანა მუშაობს დიალოგურ რეჟიმში: ადამიანი — მანქანა. ამისათვის მანქანას აქვს ინფორმაციის ხედვითი გამოსახვის საშუალება — დისპლეი. ესაა ეკრანი, რომელზედაც გამოისახება ინფორმაცია ასოებით, ციფრებით, პირობითი ნიშნებით, გრაფიკულად (II) და დიაგრამით, რომლითაც შეიტანება მონაცემები და მართვის ბრძანებათა სისტემა (III). მიღებული შედეგები გამოთვლელის სურვილის მიხედვით გამოიტანება ეკრანზე ან დაიბეჭდება საბეჭდავი მოწყობილობით (IV). ამოცანის ამოხსნის პროგრამა შეიტანება ეკრანზე და მისი განხორციელება შეიძლება პირდაპირ ეკრანზე შეტანილით ან შეიძლება ჩაიწეროს ღრეკად მაგნიტურ ფირფიტაზე, რომელიც მოთავსებულია სპეციალურ მოწყობილობაში — გარე მეხსიერებაში (V). მანქანა

¹ Л. Ю. Астанин, Ю. Д. Дорский, А. А. Костылев, Применение программируемых калькуляторов для инженерных и научных расчетов, Л., 1986; В. П. Дьяконов, Справочник по расчетам на микрокалькуляторах, М., 1986.

В. М. Заварыкин, В. Г. Житомирский, М. П. Лапчик, Техника вычислений и алгоритмизация, М., 1987;
И. М. Булко и др., Диалоговая система программирования ДИСП, М., 1981.

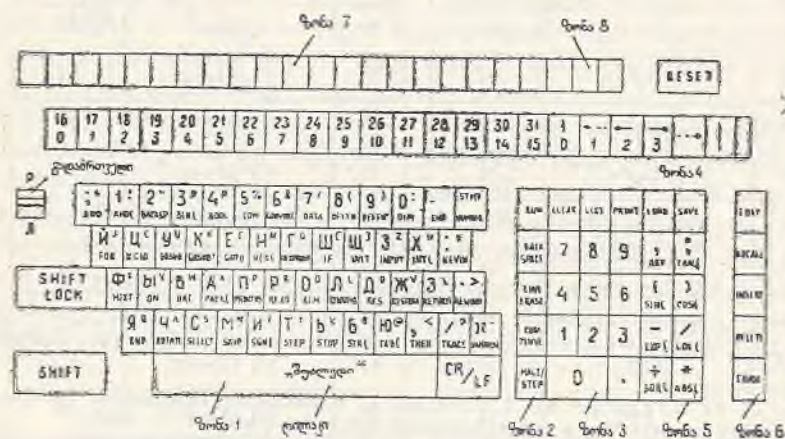
გამოთვლებს აწარმოებს სპეციალური მოწყობილობით ე. წ. პ რ ო ც ე-ს ო რ ა ი თ — გამოთვლელთ (I).



ნახ. 16

2. ბეისიკის ანბანი. ბეისიკის¹ ალგორითმული ენის (შემოკლებით ბეისიკის ენის) დანიშნულებაა მათემატიკური და საინჟინრო-ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნა დიდი რაოდენობით „დადამიანი-მანქანა“. ბეისიკის ენაზე შედგენილი პროგრამა შეიძლება განხორციელდეს მიკრო ეგზის მანქანებზე: «Электроника-60», «Искра-226» და სხვ.

გამოთვლელი მანქანის „МК-56“-ის ცოდნა დიდად დაგეგმვარება ბეისიკის ენის შესწავლაში. ბეისიკის ანბანი წარმოდგენილია დისპლეის ლილაკებზე (ნახ. 17)



ნახ. 17

¹ Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code—BASIC: დამწყებთათვის საერთო დანიშნულების სიმბოლურ ინსტრუქციის კოდი.

ბეისიკის ანბანი შედგება შემდეგი ჯგუფებისაგან:

- 1) ლათინური მთავრული ასოები A, B, C, ..., Z;
- 2) რუსული მთავრული ასოები A, B, B, ..., X (ამ ჯგუფში არ შედის E, B).

3) ციფრები 0, 1, ..., 9 („Искра-226“ მანქანაზე გამოიყენება როგორც ათობითი სისტემა, ისე თექვსმეტობითი სისტემა: 0, 1, ..., 9, A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15;

4) არითმეტიკულ მოქმედებათა ნიშნები:

↑ ახარისხება (აღინიშნება აგრეთვე $\wedge$ სიმბოლოთი),

* — გამრავლება,

+ — შეკრება,

— — გამოკლება;

5) შედარების ნიშნები: ტოლობა =, მეტია >, ნაკლებია <, მეტია ან ტოლია >=, ნაკლებია ან ტოლი <=, არაა ტოლი <>;

6) სპეციალური სიმბოლოები: ., : " ' () [] ! ? %;

7) მომსახურებითი სიმბოლოები «п. р» (пробел), «в. к» (возврат каретки);

8) ასო π, რომლის მნიშვნელობაა 3,14159265359 (ეკრანზე #PI)

ანბანის ყოველ ლილაკზე დაჭერით დისპლეის ეკრანზე გამოჩნდება სათანადო ასო (ნიშანი). ახალ სტრიქონზე გადასასვლელად კი საჭიროა დაჭერით ლილაკს [CR/LF]—გაშვება—დაბრუნების ლილაკი («B·K»).

3. რიცხვები. ბეისიკის ენა სარგებლობს როგორც მთელი რიცხვებით, ისე ნამდვილი რიცხვებით (ათწილადებით). წილადი ნაწილი მთელი ნაწილისაგან გამოიყოფა წერტილით.

მთელი რიცხვები

ნამდვილი რიცხვები

10
659
— 324

.01
— 1.25
42.5 E—5

აქ ნული უნდა გადავხაზოთ, რომ განვსხვავოთ 0 ასოსაგან. ასო E ნიშნავს 10-ის ხარისხს: $42.5 E-5 = 0.000425$. ნამდვილ რიცხვში ნული მთელი არ იწერება, $0.00325 = .00325 = .325 E-2$.

4. არითმეტიკული გამოხატულება. გამოხატულება შედგება ანბანის ასოებისაგან, ციფრებისაგან, არითმეტიკული ნიშნებისაგან და მრგვალი ფრჩხილებისაგან. მოქმედებათა რიგი ემთხვევა ალგებრაში ჩვეულებრივ მოქმედებათა რიგს. მაგალითად,

ჩვეულებრივი ჩაწერა

$$3x+y$$

$$ax^2+bx+c$$

$$a_i(x^2+5.7y)$$

$$x \geq 0$$

$$\ln x = 2 \sin \frac{x}{2}$$

ჩაწერა ბეისიკზე

$$3 * X + Y$$

$$A * X \uparrow 2 + B * X + C$$

$$A(I) * (X \uparrow 2 + 5.7 * Y(J))$$

$$X >= 0$$

$$\text{LOG}(X) = 2 * \text{SIN}(X/2)$$

არითმეტიკულ გამოსახულებებს მიეკუთვნება სტანდარტული ფუნქციები:

ფუნქციები

ჩაწერა ბეისიკზე

$\sin x$	$\text{SIN}(X)$
$\cos x$	$\text{COS}(X)$
$\text{tg } x$	$\text{TAN}(X)$
$\arcsin x$	$\text{ARCSIN}(X)$
$\arccos x$	$\text{ARCCOS}(X)$
$\text{arctg } x$	$\text{ARCTAN}(X)$
$abc \ x$ — აბსოლუტური მნიშ. x -ის	$\text{ABC}(X)$
$E(x)$ — მთელი ნაწილი x -ის	$\text{INT}(X)$
$\text{sign } x$ — ნიშანი x -ის	$\text{SGN}(X)$
e^x	$\text{EXP}(X)$
$\ln x$	$\text{LOG}(X)$
$\sqrt{x}$	$\text{SQR}(X)$

ფუნქციის არგუმენტად ჩაითვლება ყველაფერი, რაც მოთავსდება მრგვალ ფრჩხილებში. ტრიგონომეტრიული ფუნქციის არგუმენტის X -ის ზომა შეიძლება იყოს გრადუსი, რადიანი ან გრადი ($1 \text{ გრადი} = \pi/200$). ამ მიზნით უნდა ვისარგებლოთ აღმწერი — ოპერატორით **SELECT**. **SELECT D** — გრადუსები, **SELECT R** — რადიანები, **SELECT G** — გრადები. ლილაკი **SELECT** მოთავსებულია 1-ელ ზონაში ბოლო სტრიქონის მარცხნიდან მესამე ადგილზე (იკითხება სელექტ).

ნ. ცვლადები. რიცხვითი ცვლადები ბეისიკის ენაზე აღინიშნება ანბანის ნებისმიერი ლათინური ასოთი ან ასოთი, რომელსაც მოსდევს ერთი ციფრი. მაგალითად,

A I X5 B2

ასოების და ციფრების ლათინურს, რომლებიც ცვლადს აღნიშავენ, ეწოდება ცვლადის სახელი ანუ იდენტიფიკატორი. ცვლადები შე-

იძლება იყოს როგორც მთელი, ისე ათწილადი. მთელი ცვლადების მნიშვნელობანი მთელია და წილადი ცვლადების მნიშვნელობანი წილადებია. მთელი ცვლადის მაჩვენებელია სიმბოლო $\%$ -ის მიწერა, მაგალითად,

$$A\%, I\%, X2\%$$

ასეთ ცვლადებს მარტივი ან არაინდექსიანი ცვლადები ეწოდება. ცვლადები შეიძლება იყოს ინდექსიანი. ინდექსიანი ცვლადებით აღინიშნება მასივების ელემენტები (მატრიცების ელემენტები). მასივის სახელი შეიძლება იყოს ნებისმიერი მარტივი ცვლადი, რომლის შემდეგ მოთავსებულია რიცხვითი ან ასოითი ინდექსები. მაგალითად,

$$A(3), B\% (1;3), X5 (2 * I, J)$$

ბეისიკის ენაში გამოიყენება მხოლოდ ერთგანზომილებიანი ან ორგანზომილებიანი მასივები (მატრიცები).

6. მინიჭების ბრძანება. გამოთვლების პროგრამაში ძირითადია, ცვლადს მიენიჭოს რაიმე მნიშვნელობა, მაგალითად,

ცვლადს, რომლის სახელია $I\%$, მიენიჭოს მნიშვნელობა 5, ბეისიკის ენაზე ასე ჩაიწერება:

$$\text{LET } I\% = 5$$

LET (ლეთ) მინიჭების ოპერატორია, რომელიც ზოგადად ასე ჩაიწერება: **LET** <ცვლადი> = <არითმეტიკული გამოსახულება>

(თუ „MK—56“-ზე დაპროგრამებას მოვიგონებთ (§ 13, n 9), **LET** უბირობით მინიჭების ბრძანებაა. მაგალითად, [2] $[X \rightarrow II] [a]$. Y ნამდვილ ცვლადს მიენიჭოს მნიშვნელობა $3 \ln 5$ — **LET** $Y = 3 * \text{LOG } 5$; Z ნამდვილ ცვლადს მიენიჭოს მნიშვნელობა $\sin \frac{x}{y}$, სადაც x და y მიმდინარე მნიშვნელობებს ღებულობს — **LET** $Z = \text{SIN}(X/Y)$. (1)

7. საწყისი მნიშვნელობების შეტანა მანქანაში და მიღებული შედეგების გამოტანა. (1) ბრძანებაში გახსენით, რომ x და y მიმდინარე მნიშვნელობებს ღებულობს. ეს მნიშვნელობანი სათანადოდ უნდა იქნას ეგმ-ში შეტანილი. ამისათვის იხმარება ოპერატორი **INPUT** (ინპუტ). ეს ბრძანება ასე განხორციელდება:

$$\text{INPUT} < \text{ცვლადთა სია} >.$$

მაგალითად,

$$\text{INPUT } X, Y$$

როდესაც მანქანა ასრულებს პროგრამას, ოპერატორ **INPUT**-თან შეხვედრისას მანქანა ჩერდება და ეკრანზე გამოჩნდება ნიშანი? შევეჩინო რა სათანადო მნიშვნელობებს, იმდენს, რამდენი ცვლადიცაა **INPUT**-ის

მარჯვნივ, დავაჭერთ ღილაკს [CR/LF]. მივიღებთ გამოთვლის შედეგს. მაგრამ პროგრამაში უნდა იყოს შედეგის გამოტანის ბრძანება. ეს ხოლო, ციელდება ოპერატორით PRINT (პრინტი), მაგალითად,

PRINT „X = “ ; X , „Y = “ ; Y

მანქანა ეკრანზე გამოიტანს X-ის და Y-ის მნიშვნელობებს, მაგალითად,

X=3.141592653589793 Y=0.476845982

ოპერატორი INPUT მოთავსებულია 1-ელ ზონაში ზემოდან მეორე სტრიქონში მარჯვნიდან მესამე ადგილზე. ეს ოპერატორი ასრულებს იმავე როლს რასაც ბრძანება X [X→Π] ა „MK—56“-ში. ოპერატორი PRINT მოთავსებულია მე-4 ზონის პირველ სტრიქონში ზემოდან. ეს ოპერატორი ასრულებს იმავე როლს, რასაც ბრძანება [Π→X] ა „MK—56“-ში.

8. პროგრამის შედგენა ბეისიკის ენაზე. წარმოვდგენა რომ მივიღოთ „Искра — 226“ საარგებლობის შესახებ შევადგინოთ შემდეგი ამოცანის ამოხსნის პროგრამა.

მოცემულია ცილინდრის ფუძის დიამეტრი D და სიმაღლე H. გამოვთვალოთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი S და ცილინდრის მოცულობა V.

ამოცანის ამოხსნის მიიღება ფორმულებით

$$S = \frac{\pi D^2}{2} + \pi DH, V = \frac{\pi D^2}{4} H.$$

პროგრამა S და V-ს გამოთვლის შესახებ, როცა მოცემულია D და H, შეიძლება ასეთი სახე ჰქონდეს (ცხრილი 1)

ცხრილი 1

- 10 REM ЦИЛИНДР
- 20 INPUT D, H
- 30 LET S=π * D † 2/2 + π * D * H
- 40 LET V=π * D † 2 * H/4
- 50 PRINT "S = " ; S, "V = " ; V
- 60 END

პროგრამა შედგება 6 სტრიქონისაგან. პირველ სტრიქონში მოთავსებულია ოპერატორი REM (რემ). ეს ოპერატორი ბრძანების ტიპის არაა. იგი მხოლოდ ამოცანის სახელწოდებაა და აქვე შეიძლება მოთავსებული იქნეს ამოცანის ამოხსნის მიმდინარეობა ახსნა-განმარტებით (კომენტარები).

ოპერატორი REM მოთავსებულია 1-ელ ზონაში ზემოდან მესამე სტრიქონში და მარჯვნიდან მე-6 ადგილზე. პროგრამა მოთავსდება ოპერატორით END (ენდ), რაც მანქანის მუშაობის დამთავრების ნიშანია, მანქანა გაჩერდება. იგი მოთავსებულია 1-ელი ზონის ზემოდან პირველ სტრიქონში მარჯვნიდან მეორე ადგილზე. ოპერატორ END-ის შემდეგ გამოჩნდება რიცხვი, რომელიც მეხსიერებაში თავისუფალი ადგილების მანველებელია.

9. პროგრამის მანქანაში შეტანა, შემოწმება და გაშვება. მანქანის ელექტრო ქსელში ჩართვის შემდეგ ეკრანზე გამოჩნდება

READ Y (რიდ Y) (2)
: —

ეს ნიშნავს ეგმ არ აწარმოებს არავითარ მოქმედებას და მზადაა ინფორმაციის მისაღებად. მიმთითებელი ნიშანი (კურსორი — გაანთებული წერტილი) პოულობს მორაგი შესატანის (ასოს ან ასოების ჯგუფის ან ციფრის) ადგილს. პროგრამის ტექსტის შესატანად უნდა ვისარგებლოთ ღილაკებით, რომლებზედაც მოთავსებულია ბეისიკის ენის ნიშნები.

პროგრამის შეტანა ეგმ-ის მეხსიერებაში სწარმოებს სტრიქონების მიხედვით (ღილაკზე დაჭერა იწვევს ეკრანზე სათანადო ნიშნის გამოჩენას). დასაწყისში უნდა ავიღოთ რაიმე ნომერი. ეს ნომერი მანქანაში შეიტანება სათანადოდ ციფრების ღილაკებზე დაჭერით. მაგრამ არსებობს სპეციალური ღილაკი [STMT NUMBER] (statement number — ინსტრუქციის ნომერი) ამ ღილაკზე დაჭერით ეკრანზე გამოჩნდება 10 და ყოველი შემდეგი დაჭერით წინა რიცხვი იზრდება 10-ით, ღილაკი [STMT NUMBER] მოთავსებულია 1-ელ ზონაში ზემოდან პირველი სტრიქონის ბოლოს. გადანომრის ამ სისტემას ის უპირატესობა აქვს ჩვეულებრივთან, რომ, თუ დაგვჭირდება ახალი სტრიქონის ჩამატება, გამოვიყენებთ გამოტოვებულ ნომრებს. პროგრამის სტრიქონის ეკრანზე გადატანის შემდეგ უნდა დავაჭიროთ ღილაკი [CR/LF] და დაიწყება ეკრანის ახალი სტრიქონი. იგულისხმება პროგრამის ერთ სტრიქონში მოთავსებული ნიშნები მოთავსდება ეკრანის ერთ სტრიქონში. შეიძლება პროგრამის სტრიქონში მოთავსდეს ბრძანება იყოს, რომლებიც : -ით გამოიყოფიან, მაგრამ პროგრამის ერთი სტრიქონი უნდა მოთავსდეს ეკრანის არაუმეტეს სამ სტრიქონზე. ეკრანის ყოველი სტრიქონის ახალ სტრიქონზე გადასასვლელად საჭიროა დავაჭიროთ ღილაკი [CR/LF].

ამრიგად, როდესაც ეკრანზე (2) ნიშნებია, დავაჭერთ ღილაკს [STMT NUMBER]. ეკრანზე გამოჩნდება 10. შემდეგ დავაჭერთ ღილაკს [REM]. ამის შემდეგ რუსული მთავრული ასოებით დავწერთ პროგრამის სახელწოდებას და, თუ საჭიროა, სათანადო ახსნა-განმარტებას დაპროგრამებუ-

ლი საკითხის შესახებ, ვიდრე ახალ სტრიქონზე გადავიდოდეთ, უნდა შევამოწმოთ სტრიქონში შეტანილი წინადადების სისწორე. ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ მე-6 ზონის ლილაკები. მაგალითად, სტრიქონშია

$$80 X = 3 + SOC (2 -$$

აქ შეცდომაა. ნაცვლად $\cos$ წერია $\sin$. ამისათვის დავაჭერთ ლილაკს [BACK SPACE] (ბეკ სპეის). რადგანაც მიმთითებული მოთავსებული იყო 2-ის ქვეშ მარჯვნივ, წაიშლება ბოლოდან ერთი ასო. შემდეგი დაჭერით მეორე ასო და ა. შ. ვიდრე არ მივაღწეოთ სწორად ჩაწერილ ასომდე, ამის შემდეგ დავაჭერებთ სათანადო ჩაწერას და შევავსებთ მთელ სტრიქონს. თუ მთელი სტრიქონი შეცდომითაა ჩაწერილი, მაშინ დავაჭერთ ლილაკს [LINE ERASE] (ლაინ ერეზ) და მთელი სტრიქონი წაიშლება. მთელ სტრიქონს თავიდან შევიტანთ.

თუ სტრიქონი მესხიერებაშია შეტანილი, ე. ი. უკვე დაჭერილია [CR/LF] ლილაკზე, შეიძლება სტრიქონი უკვე აღარაა ეკრანზე, მაშინ დავაჭირდება სტრიქონის ეკრანზე გამოძახება ამ შემთხვევაში უნდა შევიტანოთ ეკრანზე გამოსაძახებელი სტრიქონის ნომერი და დავაჭიროთ [EDIT] ლილაკს. რის შემდეგაც ეკრანზე ნომრის გვერდით გამოჩნდება ვარსკვლავი. ამის შემდეგ დავაჭიროთ ლილაკს [RECALL] და (რიკალ) და მთელი გამოსაძახებელი სტრიქონი გამოჩნდება ეკრანზე. ეს სტრიქონი უნდა შევამოწმოთ. ამ EDIT რეჟიმში უნდა ვისარგებლოთ ლილაკით [DELETE] (დილიტ). ამ ლილაკზე დაჭერით წაიშლება მიმთითებლის თავზე მოთავსებული ნიშანი. ამავე დროს სტრიქონის ნაწილი მიმთითებლისა და მარჯვნივ გაიწევა. თავისუფალ ადგილზე სასურველი ასო უნდა ჩავწეროთ. თუ ვიხმართ ლილაკს [ERASE], წაიშლება მიმთითებლისა და სტრიქონის მარჯვენა ნაწილი. თუ ვიხმართ ლილაკს [INSERT] (ინსერტ), მიმთითებლის თავზე მოთავსებული სტრიქონის მარჯვენა ნაწილი ისევ გაიწევა, რომ მოთავსდეს ერთი სიმბოლო.

მიმთითებლის სწრაფად მოძრაობისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ მე-4 ზონის თავზე მოთავსებული ლილაკები, ლილაკით [→] მიმთითებელი გადაადგილდება მარჯვნივ ერთ ნიშანზე. ლილაკით [←] მიმთითებელი გადაადგილდება 5 ნიშანზე მარჯვნივ. ასევე მოქმედებს ლილაკები [←], [←←] მარცხნივ. მიმთითებლის სათანადოდ ზევით და ქვევით გადაადგილებისათვის გამოვიყენება ლილაკები [↑], [↓], მაგრამ არაუმეტეს სამი სტრიქონისა. სტრიქონის მთლიანად შეცვლისათვის, რომელიც მესხიერებაშია შეტანილი, უნდა ავიღოთ შესაცვლელი სტრიქონის ნომერი, შემდეგ ეკრანზე უნდა ჩავწეროთ ახალი სტრიქონი და, შემდეგ, დავაჭიროთ ლილაკს [CR/LF]. ამით ძველი სტრიქონის ადგილს დაიჭერს ახალი სტრიქონი. თუ შეტანილი სტრიქონი მესხიერებიდან გვინდა ამოვიღოთ, საჭიროა ავიღოთ გასაუქმებელი სტრიქონის ნომერი და დავაჭიროთ ლილაკს [CR/LF]. ამით აღნიშნული სტრიქონი მესხიერებაში წაიშლება.

ყოველი შესწორებული სტრიქონი უნდა შევიტანოთ მესხიერებაში, ამისათვის უნდა დავაჭიროთ ლილაკს [CR/LF].

მანქანაში შეტანილი პროგრამით რომ შევასრულოთ გამოთვლები, მაგალითად, შევიტანთ 1-ელი ცხრილით მოცემული პროგრამა, და გვინდა სათანადოდ D -ს და H -ის მნიშვნელობისათვის მივიღოთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი და ცილინდრის მოცულობა, საჭიროა დავაჭიროთ ლილაკს [RUN] და სათანადოდ სტრიქონის ნომერი ავიღოთ. ამის შემდეგ დავაჭიროთ [CR/LF] ლილაკს. მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება ოპერატორ INPUT-თან. ეკრანზე გამოჩნდება ნიშანი ?, შევიტანთ ორი ციფრს. ბრძანებაში

20 INPUT D, H

შედის ორი რიცხვი, D და H . ეკრანზე შევიტანთ

0.6, 1

მანქანა მოგვცემს პასუხს

$$S = 2.450442698 \quad V = .282473339923$$

თუ გვინდა S და V მნიშვნელობანი სხვა D და H -ის მნიშვნელობათვის, მოქმედება თავიდან უნდა გავიმეოროთ. მაგრამ, თუ გვინდა მართო მოცემული მნიშვნელობის შეტანა და სათანადოდ პასუხის მიღება, უნდა გამოვიყენოთ უპირობო გადასვლის ბრძანება GOTO (გოტოუ);

GOTO < სტრიქონის ნომერი >.

ამ ახალი ბრძანებით ნაცვლად 1-ელი პროგრამისა გვექნება შემდეგი პროგრამა (ცხრილი 2).

ცხრილი 2

10 REM ЦИЛИНДРЫ

20 INPUT D, H

$$30 S = \pi \cdot D \cdot H / 2 + \pi \cdot D \cdot H$$

$$40 V = \pi \cdot D^2 \cdot H / 4$$

50 PRINT "S = "; S, "V = "; V

60 GOTO 20

ამ პროგრამის მანქანაში შეტანის შემდეგ მიმდევრობით დავაჭიროთ ლილაკებს:

[CR/LF] [RUN] 10 [CR/LF] (ეკრანზე გამოჩნდება) ?.

¹ შემდეგში გადახაზული D -ის ნაცვლად ვიხმართ ჩვეულებრივ 0-ს.

² მანქანაში „Искра-226“ მიკროთერმისტის ოპერატორზე LET შეიძლება არ ჩავწეროთ.

შევიტანოთ რიცხვები: 6,1 ლილაჲ [CG/LF]-ზე დაჭერის შემდეგ მივიღებთ:

$$S = 2.450442698 \quad V = .282743339923$$

შევიტანოთ ახალი რიცხვები: 1,4,2,3 ლილაჲ [CG/LF]-ზე დაჭერის შემდეგ მივიღებთ

$$S=13.194 \ 689 \ 145 \ 08 \quad V=3.540 \ 574 \ 920 \ 595$$

და ა. შ.

შეიძლება ამ შემთხვევაში გამოთვლების ისეთი მიმდევრობით აღება, რომ ყველა რიცხვი ერთად შევიტანოთ მანქანაში და გამოთვლის შედეგები ერთად მივიღოთ. რასაკვირველია, თუ შესატანი რიცხვების რაოდენობა დიდი არაა. ამისათვის არსებობს სპეციალური ბრძანება, რომელიც ოპერატორებით DATA (დებით) და READ (რიდ) ხორციელდება:

DATA < რიცხვების სია >

READ < ცვლადების სია >

იმ სტრიქონში, რომელშიდაც მოთავსდება ოპერატორი READ, უნდა ჩამოვთვალოთ ცვლადები,

READ A, B, C, D

ხოლო იმ სტრიქონში, რომელშიდაც მოთავსდება ოპერატორი DATA, უნდა ჩამოვთვალოთ რიცხვები

DATA A, B, C, D

ოპერატორი DATA არავითარ მოქმედებას არ აწარმოებს, იგი შეიძლება მოთავსებული იქნეს ნებისმიერ ადგილზე ოპერატორ READ-ის შემდეგ. პროგრამის შესრულების დროს, როდესაც შეგვხვდება ოპერატორი READ, მოინახება ოპერატორი DATA და მიენიჭება ცვლადებს რიგის მიხედვით ის რიცხვითი მნიშვნელობანი, რომლებიც მოთავსებულია DATA-ს შემდეგ. შესრულება რა, მაგალითად, ერთ რიცხვთა წყვილზე მოქმედება, მიიღება სათანადო შედეგი, შემდეგ შესრულება იგივე მოქმედება შემდეგ წყვილზე და ა. შ. ვიდრე არ ამოიწურება ყველა წყვილი DATA ოპერატორში. ამ ოპერატორების შეტანით მე-2 ცხრილში, მივიღებთ ახალ პროგრამას (ცხრილი 3).

ცხრილი 3

```

10 REM ЦИЛИНДРЫ
20 READ D, H
30 S = π * D ↑ 2/2 + π * D * H
40 V = π * D ↑ 2 * H/4
50 PRINT "S = "; S, "V = "; V
60 GOTO 20
70 DATA 6, 1, 1.4, 2.3, .9, 11.2

```

მანქანაში ამ პროგრამის შეტანის შემდეგ დავაჭერთ მიმდევრობით ლილაჲებს

[CR/LF] [RUN] [CR/LF]

მივიღებთ ეკრანზე პასუხებს:

$$S=2.450 \ 442 \ 269 \ 8 \quad V=.282 \ 743 \ 339 \ 923$$

$$S=13.194 \ 698 \ 145 \ 08 \quad V=3.540 \ 574 \ 920 \ 595$$

$$S=32.939 \ 598 \ 728 \ 9 \quad V=7.125 \ 132 \ 138 \ 343.$$

10. განშტოების დაპროგრამება. ჩვენთვის ცნობილია, თუ როგორ ხორციელდება პირობით გადასვლის ბრძანება (§ 13, n9). ბეისიკის ენაზე ამისათვის გამოიყენება შემდეგი ოპერატორი IF... THEN (იფ ... ზენ) — თუ ..., მაშინ —

IF < პირობა >, THEN < სტრიქონის ნომერი >

ეს ბრძანება გამოიყენოთ ორი რიცხვიდან უდიდესის არჩევის პროგრამის შედგენისათვის (ცხრილი 4)

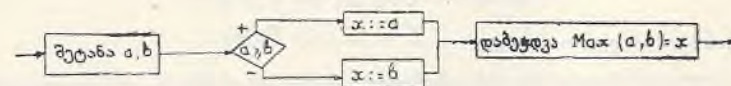
ცხრილი 4

```

10 REM MAX (A, B)
20 INPUT A, B
30 IF A > B THEN 50
40 X=B: GOTO 60
50 X=A
60 PRINT "MAX ( „ ; A ; “ , “ B ; “ ) = “ ; X
70 GOTO 20

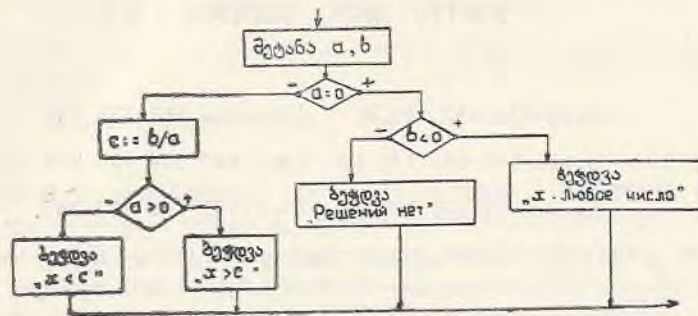
```

ამ პროგრამის სქემა ნაჩვენებია მე-18 ნახაზზე. ნახაზზე პლუს ნიშანი პირობის შესრულების მაჩვენებელია, მინუსი კი პირობა არ სრულდება.



ნახ. 18

შევადგინოთ პროგრამა $ax > b$ უტოლობის ამოხსნის შესახებ. ამ უტოლობის ამოხსნის სქემა ნაჩვენებია მე-19 ნახაზზე.



ნახ. 19

პროგრამა შევადგინოთ ამ სქემის მიხედვით (ცხრილი 5)

ცხრილი 5

```

10 REM AX > B
20 INPUT A, B
30 PRINT "НЕРАВЕНСТВО" ; A ; " * X > " ; B
40 IF A = 0 THEN 90
50 C=B/A : PRINT "РЕШЕНИЕ"
60 IF A > 0 THEN 80
70 PRINT "X < " ; C ; GOTO 120
80 PRINT "X > " ; C ; GOTO 120
90 IF B < 0 THEN 110
100 PRINT "РЕШЕНИЙ НЕТ" : GOTO 120
110 PRINT "X - ЛЮБОЕ ЧИСЛО"
120 GOTO 20

```

მოცემული a და b რიცხვისათვის რომ მივიღოთ $ax > b$ უტოლობის ამონახსნი, საჭიროა ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ:

[CR/LF] [RUN] [a] [b] [CR/LF]

ეკრანზე მივიღებთ პასუხს.

თუ გვინდა რაიმე ამოცანის პროგრამის ამოხსნა, რომელიც ეკრანზეა მოთავსებული, საჭიროა ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ:

[LIST] [/] [0] [C] [CR/LF]

თუ გვინდა შემდეგი დავბეჭდოთ საჭიროა ლილაკებს შემდეგი მიმდევრობით დავაჭიროთ:

[SELECT] [PRINT] [0] [C] [CR/LF]

ბეჭდვის შემდეგ რომ გადავრთოთ შემდეგს გამოტანა ეკრანზე უნდა დავაჭიროთ ლილაკებს

[SELECT] [PRINT] [0] [5] [CR/LF]

რომ გავანთავისუფლოთ შეტანილი პროგრამისაგან მეხსიერება უნდა დავაჭიროთ ლილაკებს

[CLEAR] [CR/LF]

11. ციკლური გამოთვლების დაპროგრამება. ჩვენთვის ცნობილია წრიული — ციკლური გამოთვლების დაპროგრამება (§ 13, n10). მოვიგონოთ ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნის ხერხი. უნდა შევადაროთ მოცემული რიცხვები a და b . თუ ეს რიცხვები ტოლია, ცხადია, უდიდესი საერთო გამყოფი $x = a = b$. თუ $a > b$, მაშინ ავიღოთ $c = a - b$ და შევადაროთ c და b . თუ $c > b$, მაშინ ავიღოთ $d = c - b$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ავიღოთ $d = b - c$ და ა. შ. ვიდრე მაკლები არ გახდება სხვაობის ტოლი. ეს რიცხვი იქნება საძიებელი საერთო გამყოფი. ამ ხერხითაა დაპროგრამებული უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნა (ცხრილი 6).

ცხრილი 6

```

10 REM НОД (A, B)
20 INPUT A, B
30 X=A : Y=B
40 IF X=Y THEN 80
50 IF X>Y THEN 70
60 Y=Y-X : GOTO 40
70 X=X-Y : GOTO 40
80 PRINT "НОД ( " ; A ; " , " ; B ; " ) = " ; X
90 GOTO 20

```

მოცემული A და B რიცხვისათვის ეკრანზე გამოჩნდება

НОД (A, B) = X.

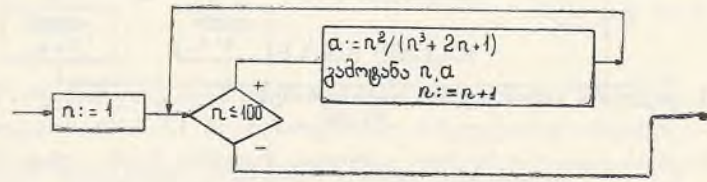
რომ შენახულ იქნეს მოცემული მნიშვნელობანი პასუხისათვის, თავიდანვე გადაეცა მოცემული მნიშვნელობანი მიმდინარე ცვლადებს X -ს და Y -ს და ამ ცვლადებზე ვაწარმოეთ მოქმედებანი, ხოლო A და B ხელუხლებელი დარჩა.

ახლა დავაპროგრამოთ შემდეგი ამოცანის ამოხსნა.
ვიპოვოთ მიმდევრობის

$$a_n = \frac{n^2}{n^3 + 2n + 1} \quad (3)$$

მნიშვნელობანი, 1, 2, ..., 100.

მიმდევრობის მნიშვნელობათა გამოთვლის სქემა ნაჩვენებია მე-20 ნახაზზე.



ნახ. 20

(3) მიმდევრობის მნიშვნელობათა გამოთვლის პროგრამა მოცემულია მე-7 ცხრილში

```

10 REM A=N↑2/(N↑3+2*N+1)
20 N=1
30 IF N>100 THEN 80
40 A=N↑2/(N↑3+2*N+1)
50 PRINT "A ( "; N; " ) = "; A
60 N=N+1
70 GOTO 30
80 END
  
```

ცხრილი 7

შევადგინოთ პროგრამა შემდეგი ამოცანის ამოხსნისათვის.
ვიპოვოთ მწკრივის

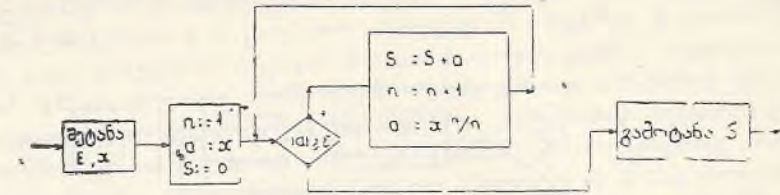
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (4)$$

ჯამი მოცემული x -სათვის მოცემული ε სიზუსტით.

მწკრივი (4) კრებადია თუ $|\varepsilon| < x < 1$. სიზუსტე განესაზღვროთ და-
მოკიდებულებით

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| < \varepsilon.$$

გამოთვლის სქემა ნაჩვენებია 21-ე ნახაზზე.



ნახ. 21

(4) მწკრივის ჯამის გამოთვლის პროგრამა მოცემულია მე-8 ცხრილში.

ცხრილი 8

```

10 REM СУММА РЯДА
20 INPUT E, X
30 N = 1 : S = 0 : A = X
40 IF ABS (A) < E THEN 70
50 S = S + A : N = N + 1
60 A = X↑N/N : GOTO 40
70 PRINT " S = "; S
80 END
  
```

მანქანის ეკრანზე მე-8 ცხრილის გადატანის შემდეგ დავაჭერთ ლი-
ლაკებს

[CR / LF] [RUN] [CR / LF]

მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება. შემდეგ დავაჭერთ ლილაკებს (შევი-
ტანთ ε -ის და x -ის მნიშვნელობებს)

[E] [X] [CR / LF]

მანქანა ამუშავდება და გაჩერდება. ეკრანზე მივიღებთ (4) მწკრივის ჯამს
მოცემული ε და x -ის მნიშვნელობებისათვის.

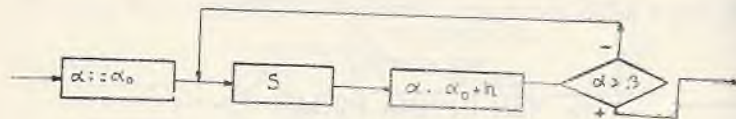
ადვილი წარმოსადგენია, რომ მე-8 პროგრამის ანალოგიურად შედ-
გება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების e^x , $\ln(1+x)$ მწკრივთა ჯამების
გამოსათვლელი პროგრამები.

კარგად დავაკვირდეთ მე-7 და მე-8 პროგრამებს.

მოცემული რაიმე საწყისი a_0 მნიშვნელობისათვის გამოითვლება სა-
თანადო S ფუნქციის მნიშვნელობა s_0 . შემდეგ ავიღებთ a_1 -ს და გამოითვ-
ლება s_1 და ა. შ. a_n -სათვის s_n . მაგრამ გამოთვლების დროს შემოწმდება
 n პარამეტრი მეტია თუ არა წინასწარ მოცემულ β რიცხვზე.

ზოგადად შეგვიძლია გავარჩიოთ შემდეგი საკითხი.

მოცემულია α პარამეტრის საწყისი მნიშვნელობა α_0 და გამოვთვალოთ რაიმე S ფუნქციის მნიშვნელობა, რომელიც ამ α პარამეტრზეა დამოკიდებული. შემდეგ ავიღოთ $\alpha_1 = \alpha_0 + h$, სადაც h პარამეტრის ბიჯია. ეს რიცხვი წინასწარაა დასახელებული. შევამოწმოთ უტოლობა $\alpha_1 > \beta$, სადაც β რიცხვი წინასწარაა არჩეული. თუ ეს უტოლობა არ შესრულდა, მაშინ გამოვთვალოთ S_1 . შემდეგ ავიღოთ $\alpha_2 = \alpha_1 + h$ და შევამოწმოთ უტოლობა $\alpha_2 > \beta$. ეს უტოლობა თუ არ შესრულდა კვლავ გამოვთვალოთ S და ა. შ. გამოთვლის მთელი პროცესი ნაჩვენებია 22-ე ნახაზზე.



ნახ. 22

ბეისიკის ენაზე, განსხვავებით წინა ციკლური პროცესების ოპერატორისა, არსებობს სპეციალური ოპერატორები:

FOR (ფო) <მარტივი ცვლადი> = <არით. გამოსახულება> TO (თუ) <არით. გამოსახულება> STEP (სტეპ) <არით. გამოსახულება>. გამოთვლა დაიწყება ოპერატორით FOR და გრძელდება ოპერატორამდე NEXT (ნექსტ). ოპერატორი NFXT ასრულებს შემდეგ მოქმედებას: გაზრდის α პარამეტრის მნიშვნელობას h -ით, $\alpha + h$, შეამოწმებს $\alpha + h > \beta$ უტოლობას, თუ არ შესრულდა, გადავა იმ სტრიქონის შესრულებაზე, რომელშიდაც მოთავსებულია ოპერატორი FOR და მთელი პროცესი გაიმეორდება. თუ აღნიშნული უტოლობა შესრულდება, შესრულდება ოპერატორ NEXT-ის შემდეგ მოთავსებული ბრძანება.

მე-7 ცხრილში მოთავსებული პროგრამა ამ FOR—NEXT ოპერატორით შემდეგ სახეს მიიღებს (ცხრილი 9):

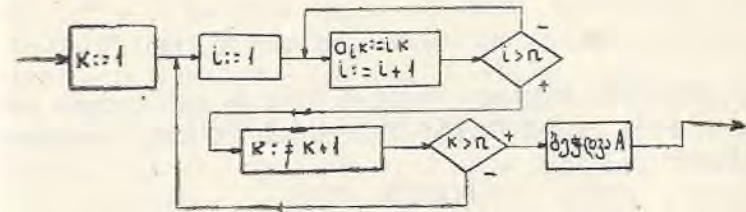
ცხრილი 9

```

10 REM A = N ↑ 2 / (N ↑ 3 + 2 * N + 1)
20 REM FOR — NEXT
30 FOR N = 1 TO 100 STEP 1
40 A = N ↑ 2 / (N ↑ 3 + 2 * N + 1)
50 PRINT "A ( " ; N ; ") = " ; A
60 NEXT N
70 END
  
```

თუ ბიჯი $+1$ -ის ტოლია, მაშინ h სიდიდის მაჩვენებელი STEP h შეიძლება არ დაიწეროს.

შევადგინოთ პითაგორას ცხრილის პროგრამა. ცხრილის შედგენისათვის გამოვიყენოთ სქემა (ნახ. 23), სადაც $a_{ik} = i \cdot k$ და $1 \leq i \leq 10$, $1 \leq k \leq 10$.



ნახ. 23

პროგრამაში გამოვიყენებთ ოპერატორს DIM (DIMENSION) (დიმენზ). ამ ოპერატორით ის მატრიცა, რომელსაც ერთი ინდექსი აქვს, მაგალითად, $[a_1, a_2, \dots, a_{100}]$ ჩაიწერება ასე: DIM A (100), რაც გვიჩვენებს მესხიერებაში გამოყოფილია 100 ადგილი (უჯრა), ხოლო მატრიცა, რომელიც შემდეგნაირადაა ჩაწერილი,

DIM A (10, 10)

გვიჩვენებს A მატრიცისათვის გამოყოფილია მესხიერებაში 10 * 10 ადგილი.

პითაგორას ცხრილის გედგენის პროგრამა მოცემულია მე-10 ცხრილში. აქ გამოყენებულია ოპერატორი MATPRINT A, რომელიც სტრიქონების მიხედვით გამოიღებს ეკრანზე რიცხვთა ნამრავლებს.

ცხრილი 10

```

10 REM ТАБЛИЦА ПИФАГОРА
20 DIM A (10, 10)
30 FOR K = 1 TO 10
40 FOR I = 1 TO 10
50 A (I, K) = I * K
60 NEXT I
70 NEXT K
80 MATPRINT A
90 END
  
```

ადგილი წარმოსადგენია, თუ როგორ უნდა შედგეს მატრიცა ნამრავლის პროგრამა.

მე-10 ცხრილის შედეგად მიიღება შემდეგი მნიშვნელობანი:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ეგმ „Искра-226“ მიღებული შედეგები შეიძლება დამრგვალდეს. ამისათვის არსებობს ოპერატორი ROUND (რაუნდ), რომელიც შემდეგნაირად მოქმედებს:

ROUND (X, n)

X დასამრგვალე სიდიდეა, n დამრგვალეული ზომა. თუ $n > 0$, რიცხვი დამრგვალდება ისე, რომ მასში დარჩება n ათწილადი ნიშანი. მაგალითად,

$$\text{ROUND}(6.3579, 2) = 6.36.$$

თუ $n = 0$, მაშინ რიცხვი დამრგვალდება მთელ ნაწილამდე. მაგალითად,

$$\text{ROUND}(-5.685, 0) = -5.$$

თუ $n < 0$, მაშინ რიცხვი დამრგვალდება ისე, რომ მასში უკუგდებულ იქნება დამრგვალეების წესით |n| რაოდენობის ციფრები მთელ ნაწილში:

$$\text{ROUND}(25862.6, -1) = 25860.$$

მაგალითად, მე-3 ცხრილში დაეუშვათ, რომ მოცემული სიდიდეები ზუსტია 4 ნიშნადი ციფრით. მაშინ შედეგში ზუსტი იქნება არაუმეტეს 4 ნიშნადი ციფრისა. შედეგში რომ ოთხ ნიშნადი ციფრი გვქონდეს, უნდა ავიღოთ $n=2$. ამის გამო შეგვიძლია, დავწეროთ:

50 PRINT " S = " ; ROUND (S, 2), " V = " ; ROUND (V, 2)
შედეგში მივიღებთ:

$$\begin{aligned} S &= 2.45 & V &= .28 \\ S &= 13.19 & V &= 3.54 \\ S &= 32.94 & V &= 7.13. \end{aligned}$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 21.

1. გამოთვალეთ: $23,1598 + 78,6548$; $456,123 + 98,5736$; $765,345 - 34,875$; $675,489 - 234,512$; $456,23 \times 6,984$; $78,4 \times 23,36$; $987,345 \times 87,475$; $18,345 : 456,3481$; $0,234 : 678,234$; $3,145 : 6,497$.

2. გამოთვალეთ: $234,456 + 674,358 + 241,468 + 923,367$; $398,234 + 23,457 + 45,789 + 23,894 + 123,345$; $8^7,345 - 123,432 - 234,875$;

$$65,45 \times 45,456 + 23,456 \times 12,234; \quad 653,453 - 23,456 - 231,534; \\ 23,34 \times 34,75 : 12,24 \times 65,75 : 34,27; \quad 345,241 - 34,24 \times 65,32 + 23,45,$$

$$3. \text{ გამოთვალეთ: } 0,12354 \cdot 10^{15} + 0,2347 \cdot 10^{15} - 0,987 \cdot 10^{15} \cdot 0,236 \cdot 10^{15}; \\ 0,345 \cdot 10^{10} + 23,234 \cdot 10^9 - 346,24 \cdot 10^8; \quad 76,34 \cdot 10^{11} + 34,24 \cdot 10^9 - \\ - 45,21 \cdot 10^8; \quad ((265,24 + 11,249) \cdot 25,65 - 18,13 \cdot 8,45 + 12,89) : 8,34; \\ ((945,37 + 18,213) \cdot 13,78 - 6,45 \cdot 24,01 + 2478,34) : 12,47.$$

$$4. \quad 64,625 - 13 : 18 + 9 : 26 : 5 + 9 : 7; \quad 45,645 : (2,78 - 28,62 \cdot 7,47); \\ (((356,37 - 12,987) \cdot 23,12 + 23,45) - 36,72) : 45,23 + 78,34 \cdot 12,89 + \\ + 15,23; \quad ((18,45 \cdot 10^8 - 2,35 \cdot 10^8) \cdot 32,42 \cdot 10^7 + 56,25 \cdot 10^7) : 32,89 \cdot 10^8.$$

$$5. \text{ გამოთვალეთ: } \sqrt{26,78}, \sqrt{45,34}, \sqrt{67,89}, \sqrt{23,14}, \sqrt{234,789} \cdot \sqrt{125,876}.$$

$$6. \text{ გამოთვალეთ } \sin \text{ შემდეგი რიცხვებისა: } 1,25; 2,15; 3,54; 10,5.$$

$$7. \text{ გამოთვალეთ } \cos \text{ შემდეგი რიცხვებისა: } \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{30}.$$

$$8. \text{ გამოთვალეთ } \lg \text{ შემდეგი რიცხვებისა: } 15,25; 248,75; 675,84.$$

$$9. \text{ გამოთვალეთ } e^{0,1}, e^1, e^{1,5}, e^2, e^{2,5}.$$

$$10. \text{ გამოთვალეთ } \arcsin \frac{1}{10}, \arccos \frac{1}{5}, \arctg 1, \arctg 10.$$

$$11. \text{ დაპროგრამეთ } s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ და გამოთვალეთ } s, \\ \text{თუ } a=4,57; b=5,68; c=6,42.$$

$$12. \text{ დაპროგრამეთ } y = ax^2 + bx + c \text{ და გამოთვალეთ } y, \text{ თუ } a=2,45; \\ b=4,32; c=6,18; x=4,625; x=65,15.$$

$$13. \text{ დაპროგრამეთ } c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} \text{ და გამოთვალეთ } c, \text{ თუ } \\ a=10,25; b=15,36; \gamma=35^\circ 15'.$$

$$14. \text{ დაპროგრამეთ } ax^2 + bx + c = 0 \text{ განტოლების ამოხსნა და გამოთ-} \\ \text{ვალეთ ამონახსნები, თუ } a=4,25; b=7,75; c=-14,45.$$

$$15. \text{ დაპროგრამეთ } y = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ გამოთვალეთ } y, \text{ თუ } a= \\ 7,375; b=4,125; c=2,857; d=16,42; x=2,45; x=5,75.$$

თ ა ვ ი x

მიახლოებითი რიცხვები

§ 1. აბსოლუტური და უარყოფითი ცდომილებანი

1. აბსოლუტური ცდომილება. განვიხილოთ სხვაობა

$$\Delta a = x - a, \quad (1)$$

სადაც x რაიმე სიდიდის ზუსტი მნიშვნელობაა, ხოლო a მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა. (1) სხვაობას ეწოდება მიახლოებითი a რიცხვის ცდომილება. მაგალითად.

$$3,14 < \pi < 3,15, \quad (2)$$

მაშინ

$$\Delta a = \pi - 3,14 > 0,$$

თუ π -ს მიახლოებითი მნიშვნელობად მივიღებთ 3,14; ხოლო

$$\Delta a = \pi - 3,15 < 0,$$

თუ π -ს მიახლოებითი მნიშვნელობად მივიღებთ 3,15. თუ $x > a$ მაშინ a -ს ეწოდება x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობით, ხოლო, თუ $x < a$, მაშინ a -ს ეწოდება x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეტობით.

(1) გამოსახულებას თეორიული ხასიათი აქვს¹, რადგანაც x -ის მნიშვნელობა უმეტეს შემთხვევაში არაა ცნობილი. აგრეთვე უმეტეს შემთხვევაში არ ვიცით Δa -ს ნიშანიც. მაშინ მიზანშეწონილია განვიხილოთ მიახლოებითი a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება.

x სიდიდის მიახლოებითი a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება ეწოდება x სიდიდისა და a რიცხვის შორის სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობას,

$$\Delta a = |x - a|. \quad (3)$$

მიახლოებითი a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილებაც ისევ Δa ასოთი აღვნიშნეთ.

¹ Я. С. Безикович, Приближенные вычисления, М.-Л. 1949.

მიუხედავად იმისა, რომ x -ის მნიშვნელობა უმეტეს შემთხვევაში არ ვიცით, მაინც შეგვიძლია დავადგინოთ ის საზღვარი, რომელსაც არ აღემატება Δa . ამ საზღვრის დადგენა შეიძლება იმ ხერხით, რა ხერხითაც განისაზღვრება a რიცხვი. თუ რაიმე მონაცემთა სიგრძე, მაგალითად, რკეულის სიგრძე, გავზომეთ მოსწავლის სახაზავით, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მიღებული სიგრძის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება 0,5 მმ-ს. თუ გავზომავს ვაწარმოებთ მიკრომეტრით, მაშინ შეგვიძლია მივიღოთ, რომ Δa არ აღემატება 0,01 მმ. ასევე, თუ ირაციონალურ რიცხვს შევცვლით სასრული წილადით, ყოველთვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ სიდიდე, რომელსაც არ აღემატება აღებული სასრული წილადის აბსოლუტური ცდომილება. მაშასადამე, პრაქტიკულად ყოველთვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ ის სიდიდე, რომელსაც არ აღემატება მიახლოებითი a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება. ამიტომ ნაცვლად თეორიული (3) სიდიდისა შემოვიტანოთ ზღვრული აბსოლუტური ცდომილების ცნება.

მიახლოებითი a რიცხვის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება ეწოდება იმ შესაძლებლად მცირე რიცხვს, რომელსაც არ აღემატება a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება.

ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებას a ასოთი აღვნიშნავთ

$$\Delta a \leq \alpha. \quad (4)$$

ზემოგანმარტებაში ვიხმარებთ სიტყვა „შესაძლებლად მცირე რიცხვი“, რადგანაც პრაქტიკულად არ შეგვიძლია დავადგინოთ Δa სიდიდის ზედა საზღვართა ნამდვილი ჯგუფი საზღვარი, ამიტომ ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებად შეგვიძლია ავიღოთ ერთ-ერთი Δa -თაგან, რომელიც საკმარისად ახლოსაა „უმცირეს“ Δa -სთან.

(4) უტოლობიდან ცხადია

$$a - \alpha \leq x \leq a + \alpha. \quad (5)$$

ეს კი იმას გვიჩვენებს, რომ $a - \alpha$ იქნება x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობით, ხოლო $a + \alpha$ იქნება x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეტობით.

(5) უტოლობა ასევე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$x = a(\pm \alpha). \quad (6)$$

ეს გამოსახულება ასე წაიკითხება: „ x მიახლოებითი ეტოლება a -ს α ცდომილებით“.

მაგალითად, (2) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\Delta a = |\pi - a| < 0,01.$$

სწორედ, 0,01 იქნება α -სთვის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება, თუ π -ს უფრო ზუსტი მნიშვნელობა არ ვიცით.

ცხადია, თუ x -ის ქვედა A და ზედა B საზღვრები ვიცით, მაშინ α -ს მნიშვნელობად ამ საზღვრების ნახევარი ჯამი ავიღოთ,

$$a = \frac{A+B}{2}. \quad (7)$$

მაშინ, ადვილი შესამჩნევია,

$$\alpha = \frac{B-A}{2}. \quad (8)$$

(2) მაგალითისთვის $A=3,14$; $B=3,15$ გვექნება

$$a = \frac{3,14 + 3,15}{2} = 3,145,$$

ხოლო

$$\alpha = \frac{3,15-3,14}{2} = 0,005.$$

ე. ი. თუ π -ს მიახლოებით მნიშვნელობად 3,145 მივიღებთ, მაშინ ზღვრული აბსოლუტური მნიშვნელობა იქნება 0,005.

2. ფარდობითი ცდომილება. არც აბსოლუტური და არც ზღვრული ცდომილება არ ასახავს გაზომვის სიზუსტეს, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ გაზომვის შედეგს.

მართლაც, რვეულის სიგანის გაზომვის დროს თუ 0,5 სმ მხედველობაში არ მივიღებთ, მაშინ, ცხადია, გაზომვა მეტად უპასუხისმგებლოდ გვიწარმოვბია. ასევე, თუ 5 გ სხეულის აწონის დროს 1 გ-ს მხედველობაში არ მივიღებთ, მაშინაც, ცხადია, მეტად უხეშად გვიწარმოვბია აწონა. ამგვარად, აბსოლუტური ცდომილება არ ახასიათებს გაზომვის ხარისხს. ამ გარემოებას უნდა დაემატოს ისიც, რომ აბსოლუტური ცდომილება სახელდებული რიცხვია, რის გამოც მისი მნიშვნელობა შეიცვლება, თუ ზომის ერთეული ვცვალებთ. ამ მიზეზთა გამო აუცილებელია შემოვიღოთ ცდომილების დამახასიათებლად სხვა სიდიდე. ეს სიდიდეა ფარდობითი ცდომილება.

x სიდიდის მიახლოებითი a რიცხვის ფარდობითი ცდომილება ეწოდება a -ს აბსოლუტური ცდომილების შეფარდებას თვით a რიცხვთან:

$$\nabla a = \frac{\Delta a}{a}. \quad (9)$$

∇ იკითხება — ნაბლა.

მაგალითად,

$$x = 40 (\pm 1) \text{ სმ},$$

მაშინ

$$\nabla a = \frac{1}{40} = 0,025 = 2,5\%.$$

პრაქტიკაში ფარდობითი ცდომილება პროცენტებში ($1\% = 0,01$) ან მილებში ($1\text{‰} = 0,001$) გამოისახება.

მაგალითად,

$$x = 25 (\pm 3) \text{ გ},$$

მაშინ

$$\nabla a = \frac{3}{25} = 0,12 = 12\%.$$

ის, რაც აბსოლუტური ცდომილების მიმართ ითქვა, აქაც გავიმეორებთ: ფარდობითი ცდომილება ზუსტად არ განისაზღვრება, ამიტომ პრაქტიკაში განიხილება ზღვრული ფარდობითი ცდომილება.

ზღვრული ფარდობითი ცდომილება ეწოდება შესაძლებლად მცირე δ რიცხვს, რომელსაც არ აღემატება მიახლოებითი რიცხვის ფარდობითი ცდომილება ∇a ,

$$\nabla a \leq \delta. \quad (10)$$

რადგანაც

$$\Delta a \leq \alpha,$$

გვექნება

$$\frac{\Delta a}{a} \leq \frac{\alpha}{a}.$$

ე. ი.

$$\delta = \frac{\alpha}{a}. \quad (11)$$

(5) უტოლობა უკანასკნელი ტოლობის საფუძველზე მოგვცემს:

$$a - \alpha \leq x \leq a + \alpha,$$

ანუ

$$x = a(1 \pm \delta). \quad (12)$$

ზოგიერთ შემთხვევაში ფარდობით ცდომილებას განიხილავენ შემდეგი სახით:

$$\nabla' a = \frac{\nabla a}{x}.$$

მაგრამ ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\nabla'a$ მცირე სიდიდით განსხვავდება ∇a -საგან.

მართლაც,

$$\nabla a - \nabla'a = \frac{\nabla a}{a} - \frac{\Delta a}{x}.$$

მაგრამ

$$\left| \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a}{x} \right| = \left| \frac{(x-a)\Delta a}{ax} \right| = \left| \frac{(\Delta a)^2}{ax} \right| = \left| \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 \frac{1}{1 \pm \delta} \right| = \delta^2 \frac{1}{1 \pm \delta}.$$

გ. ო. სხვაობა

$$|\nabla a - \nabla'a| = \frac{\delta^2}{1 \pm \delta}.$$

ეს კი მცირე სიდიდეა ბ-სთან შედარებით.

ზემოთ (9)–(12) გამოსახულებებში ვგულისხმობდით $x > 0$, მაგრამ, თუ $x < 0$, მაშინ ნაცვლად (9) განმარტებისა, გვექნება:

x სიდიდის მიახლოებითი a რიცხვის ფარდობითი ცდომილება ეწოდება a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილების შეფარდებას $|a|$ რიცხვთან,

$$\nabla a = \frac{\Delta a}{|a|}. \quad (13)$$

ცხადია, ყველა (9)–(11) გამოსახულებაში a სიდიდე უნდა შეცვალოთ $|a|$ სიდიდით.

შემდეგში საქმე გვექნება ზღვრულ აბსოლუტურ და ზღვრულ ფარდობით ცდომილებებთან, ამიტომ სიტყვა „ზღვრულს“ უკუვადებთ და განვიხილავთ აბსოლუტურ და ფარდობით ცდომილებებს, მაგრამ ვიგულისხმებთ ზღვრულ აბსოლუტურ და ზღვრულ ფარდობით ცდომილებებს. ამასთან ხშირად ვიხმარებთ აღნიშვნებს: Δa და δa -ს.

§ 2. ნიშნადი ციფრები. რიცხვთა დამრგვალება

1. ნიშნადი ციფრები. ავიღოთ რიცხვი 0,002304. ამ რიცხვში ექვსი ათობითი (ათწილადი) ნიშანია და ოთხი ნიშნადი ციფრი.

ათობითი (ანუ ათწილადი) ნიშანი ეწოდება ყველა ციფრს, რომელიც რიცხვში მთელი ნაწილის მარჯვნივაა მოთავსებული.

განმარტოთ ნიშნადი ციფრი.

მიახლოებითი რიცხვის ნიშნადი ციფრი ეწოდება ყველა ციფრს 1, 2, ..., 9. 0-იც ნიშნადი ციფ-

რია, თუ იგი მოთავსებულია სხვა ნიშნადი ციფრის მარჯვნივ და არ უჭირავს უკუგდებულ ციფრის ადგილი.

მაგალითად, 3,1 შეიცავს ორ ნიშნად ციფრს და ერთ ათწილად ნიშანს.

ავიღოთ რაიმე სიდიდე და გავზომოთ. ვთქვათ, მივიღეთ რიცხვი 2,0103. ამ რიცხვში ხუთი ნიშნადი ციფრია. ვთქვათ, ეს რიცხვი დავამრგვალოთ — ბოლო ციფრი 3 უკუვადებთ, მივიღებთ 2,010. აქ გვაქვს 4 ნიშნადი ციფრი. ძნელი არ უნდა იყოს იმის წარმოდგენა, რომ თუ ავიღებთ 2,01, რასაკვირველია რიცხობრივად იგივე 2,010-ია, მაგრამ, ცდომილება 2,01-ში უფრო დიდია, ვიდრე 2,010-ში. შევთანხმდეთ, რომ თუ ათწილადში მარჯვნივ ნიშნადი ციფრის შემდეგ ნულეები წერია, ეს ნულეებიც ნიშნადია. ამ შენიშვნის შემდეგ ნიშნადი ციფრის განმარტება ასე შეგვიძლია:

ნიშნადი ეწოდება ყველა ციფრს, რომელიც მოთავსებულია რიცხვში პირველი ნულისაგან განსხვავებული ციფრის მარჯვნივ ამ ციფრის ჩათვლით.

მაგალითად, 4,1600-ში ხუთი ნიშნადი ციფრია. ავიღოთ რიცხვი 5402 და 2 ერთეული უკუვადებთ, მივიღებთ 5400, აქ 0 წერია 2-ის მაგივრად. მიღებულ რიცხვში სამი ნიშნადი ციფრია. რომ ავიცდინოთ 0-ს ხმარება, ეს რიცხვი ასე ჩავწერთო:

$$5400 = 540 \cdot 10 = 0,540 \cdot 10^4 = 5,40 \cdot 10^3 \text{ და ა. შ.}$$

ამ ჩანაწერით შეგვიძლია ვიმსჯელოთ რიცხვის სიზუსტეზე. რომ 540 · 10-ში ცდომილება ნაკლებია 1 · 10-ზე (თუ არ ვიცით როგორ დავამრგვალოთ რიცხვი).

საზოგადოდ მიახლოებითი რიცხვის ჩაწერის დროს უნდა ვიხელმძღვანელოთ აკად. ა. ნ. კრილოვის პრინციპით:^{1,2}

„ყოველგვარი გამოთვლისა და გაზომვის შედეგი გამოისახება რიცხვით; შევთანხმდეთ ეს რიცხვები ისე ვწეროთ, რომ ამ ჩანაწერით შეიძლება დავსაზუსტოთ ხარისხზე მსჯელობა, ამისათვის საკმარისია, წესად მივიღოთ: ვწეროთ რიცხვი ისე, რომ მასში ყველა ნიშნადი ციფრი, გარდა უკანასკნელისა, იყოს სანდო და მხოლოდ უკანასკნელი ციფრი შეიძლება იყოს საექვევო, ამასთანავე საშუალოდ არა უმეტეს ერთი ერთეულია“.

¹ А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. III, Математика, М.-Л. 1949, стр. 15.

² В. М. Брадис, Устный и письменный счет. Вспомогательные средства вычислений, Энциклопедия элементарной математики, кн. I, М., 1951, стр. 407.

აქ დამატებულია სიტყვა „საშუალოდ“, რადგანაც, საზოგადოდ, ბოლო ციფრში ცდომილების დადგენა შეუძლებელია. ან ბოლო ციფრში ცდომილება, შეიძლება, ერთ ერთეულზე მეტია, მაგრამ მისი შენარჩუნება ზოგჯერ აუცილებელია.

2. რიცხვთა დამრგვალება. გავარჩიოთ რიცხვთა დამრგვალება.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

წრეწირის სიგრძის თავის დიამეტრთან შეფარდება გამოისახება რიცხვით:

$$\pi = 3,14 \ 159 \ 263 \ 589 \ 793 \ 238 \ 462 \ 38 \dots$$

პრაქტიკული თვალსაზრისით სრულიად საკმარისია, ავიღოთ:

$$\pi = 3,14.$$

წელიწადში 365,242 199... დღე-ღამეა, მაგრამ პრაქტიკულად ხმარობენ 365,25 დღე-ღამეს და უფრო ზშირად — 365 დღე-ღამეს.

ზშირად საჭიროა მოცემული რიცხვი შეიცვალოს სხვა ისეთი რიცხვით, რომელიც მოცემულ რიცხვთან ახლოსაა, წარმოსათქმელად და ჩასაწერადაც ადვილია. მაგალითად, ტყის ნაკვეთზე 25 327 ძირი ზეა. ამ შემთხვევაში ვიტყვით — ტყის ნაკვეთზე 25 ათასი ძირი ზეა. რიცხვის ასეთ შეცვლას რიცხვთა დამრგვალება ეწოდება.

გავარჩიოთ რიცხვთა დამრგვალება დაწვრილებით.

ავიღოთ რიცხვი 658,3724. თუ ამ რიცხვის მაგივრად ავიღებთ 658,372-ს, მაშინ ვიტყვით, მოცემული რიცხვი დამრგვალებულია სიზუსტით ერთ მეთასედამდე. აქ რიცხვის დამრგვალება ნაკლებობითაა შესრულებული, მოცემული რიცხვის მაგივრად ავიღოთ 658,4. მაშინ ვიტყვით — რიცხვი დამრგვალებულია სიზუსტით ერთ მეთადამდე; დამრგვალება მეტობითაა შესრულებული. აქ პირველი უკუგდებული ციფრია 7. მეორე — 2 და მესამე — 4.

საზოგადოდ, რიცხვთა დამრგვალებას შემდეგი ხერხით ვაწარმოებთ: თუ პირველი უკუგდებული ციფრი 5-ზე ნაკლებია, მაშინ ბოლო დატოვებულ ციფრს არ ვცვლით; თუ პირველი უკუგდებული ციფრი 5-ზე მეტია ან ტოლი, მაგრამ მომდევნო ციფრებიდან ზოგიერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ბოლო დატოვებულ ციფრს ერთი ერთეულით ვზრდით, თუ უკუგდებული პირველი ციფრი 5-ის ტოლია და შემდეგი ციფრები კი ნულებია, მაშინ ბოლო დატოვებულ ციფრს არ ვცვლით, თუ ის ლუწია, ხოლო ვზრდით ერთი ერთეულით, თუ კენტია.

მაგალითად,

$$568354 \approx \begin{cases} 568350 = 5,6835 \cdot 10^5 \\ 568400 = 5,684 \cdot 10^5 \\ 568000 = 5,68 \cdot 10^5 \\ 570000 = 5,7 \cdot 10^5 \end{cases} \quad 8,76503 \approx \begin{cases} 8,7650 \\ 8,765 \\ 8,77 \\ 8,8 \end{cases}$$

აღნიშნული ხერხით რიცხვთა დამრგვალებას ეწოდება რიცხვთა დამრგვალება დამატებითი წესით.

ავიღოთ 5,4 და 5,42. პირველი რიცხვი მიღებულია მეორე რიცხვიდან შეათეადმდე დამრგვალებით. უკუგდებულია 0,02, ე. ი. მიახლოებითი რიცხვი 5,4 შეიცავს შეცდომას, რომელიც ტოლია 0,02. ამ შემთხვევაში ვიტყვით — დამრგვალებით დაშვებული ცდომილება 0,02-ის ტოლია. ცხადია, თუ ავიღებთ 5,41; 5,43; 5,45-ს და დავამრგვალებთ შეათეადმდე, მაინც 5,4-ს მივიღებთ. აქ ცდომილებანი სათანადოდ ტოლია: 0,01; 0,03; 0,05-ის.

ასევე, თუ ავიღებთ 5,35; 5,36; 5,37; 5,39, მაშინ ცდომილებანი სათანადოდ იქნება: 0,05; 0,04; 0,03; 0,01. მიღებული ცდომილებებიდან უდიდესია 0,05.

ცხადია, თუ ცნობილია, მიახლოებითი რიცხვი 5,4 მიღებულია დამრგვალების შედეგად, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ: ცდომილება არ აღემატება 0,05-ს, ე. ი. ცდომილება არ აღემატება 0,1-ის ნახევარს.

ზოგჯერ, ნაცვლად იმისა, რომ ვთქვათ: რიცხვი დავამრგვალოთ რაიმე თანრიგის ერთეულამდე, ვიტყვით: რიცხვი დავამრგვალოთ სათანადო რაოდენობის ნიშნად ციფრამდე.

მაგალითად, რიცხვი 527,685 დავამრგვალოთ ოთხნიშნად ციფრამდე, მივიღებთ: 527,685 $\approx$ 527,7.

ზოგჯერ რიცხვთა დამრგვალებას ვაწარმოებთ უბრალოდ: n -ური ნიშნად ციფრის შემდეგ ყველა ციფრს უკუვადებთ და დატოვებულ ბოლო ციფრს არ ვცვლით. მაგალითად,

$$52,357 \approx 52,3; \quad 634,78 \approx 600 = 6 \cdot 10^2.$$

პირველ მაგალითში უკუგდებულია ციფრები 5 და 7, ხოლო მეორეში ციფრები 3, 4, 7 და 8.

ზოგჯერ ამოცანის ხასიათის მიხედვით აუცილებელია რიცხვთა დამრგვალება ვაწარმოოთ მეტობით ან ნაკლებობით.

მაგალითად, 10,9305 დავამრგვალოთ მეტობით ოთხნიშნად ციფრამდე. მივიღებთ 10,9305 $\approx$ 10,94.

დავამრგვალოთ რიცხვი 6,875 ნაკლებობით ორნიშნად ციფრამდე. მივიღებთ

$$6,875 \approx 6,8.$$

ავილოთ მიახლოებითი რიცხვი

$$a = a_m g^m + a_{m-1} g^{m-1} + \dots + a_{m-n+1} g^{m-n+1}, \quad (1)$$

სადაც g თვის სისტემის ფუძეა, კოეფიციენტები a_i , $a \leq a_i \leq g-1$, ციფრებია, $a_m \neq 0$ პირველი ციფრია, n რიცხვში ციფრების რაოდენობაა, მაგალითად, რიცხვში

$$86,5324 = 8 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4}$$

$$g = 10, m = 1, n = 6.$$

ვიტყვი, რომ მიახლოებით a რიცხვში k -ური ციფრი, a_{m-k+1} , სანდოა, თუ a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება

$$\Delta a \leq \omega g^{m-k+1}, \quad (2)$$

სადაც ω დადებითი, ერთზე არა უმეტესი რიცხვია, $0 < \omega \leq 1$. ციფრები ითვლება მარცხნიდან მარჯვნივ.

თუ მიახლოებითი რიცხვში ცდომილება არაა მითითებული, მაშინ მიახლოებითი რიცხვში ყველა ციფრი სანდოა. თუ მიახლოებითი რიცხვში რამდენიმე საეჭვო ციფრია, მაშინ რიცხვი სათანადოდ უნდა დავამრგვალოთ. რიცხვთა დამრგვალებას მივმართავთ მაშინაც, როდესაც რიცხვში დიდი რაოდენობის ნიშნადი ციფრებია. ეს გვაიძულებს განვსაზღვროთ ω -ს მნიშვნელობა, რომელიც (2) გამოსახულებაშია.

თუ მოცემული x რიცხვი n ნიშნად ციფრამდე დავამრგვალოთ, მიღებულ a დამრგვალებულ რიცხვში ცდომილება შეიძლება იყოს $\frac{1}{2} g^{m-n+1}$.

მაშინ, ცხადია, ω არ შეიძლება იყოს $\frac{1}{2}$ -ზე ნაკლები. რადგანაც მოინახე-

ბა ისეთი რიცხვები, რომელთა დამრგვალება ნებისმიერ ნიშნად ციფრამდე ყოველთვის მოგვცემს საეჭვო ციფრს. მაგალითად, $x = 5,5555$ დავამრგვალოთ ოთხნიშნად ციფრამდე. მივიღებთ $a = 5,556$; $\Delta a = 0,0005$. ეს

რიცხვი არაა ნაკლები $\frac{1}{2} \cdot 0,001$ -ზე. ამრიგად, a რიცხვში ციფრი n საეჭ-

ვია, $\omega < \frac{1}{2}$. ასეთივე მდგომარეობა გვექნება შემდეგ ციფრამდე (მესამე,

მეორე) დამრგვალების შემთხვევაშიც.

ავილოთ რიცხვი $x = 5,5555 \pm 0,0005$. ბოლო ნიშნადი ციფრი 5 სანდოა როგორც $\omega = \frac{1}{2}$, ისე, $\omega = 1$ -სათვის. დავამრგვალოთ აღებული x

რიცხვი ოთხ ნიშნად ციფრამდე. მივიღებთ $x = 5,556 \pm 0,00055$. აქ ბოლო ნიშნადი ციფრი 6 სანდო არაა $\omega = \frac{1}{2}$ -სათვის. ეს მაგალითი გვიჩვენებს,

რომ $\omega = \frac{1}{2}$ ყოველთვის არ შეგვიძლია ავილოთ. აღებული x რიცხვი

მოცემული იყო მიახლოებითი მნიშვნელობით და სათანადო ცდომილებით Δa . ახალი დამრგვალების შემთხვევაში მიღებული მიახლოებითი რიცხვის ცდომილება ტოლია მოცემული Δa ცდომილებისა და ახალი დამრგვალებით გამოწვეული ცდომილების ჯამისა. ასეთივე მდგომარეობა გვექნება მათემატიკური ცხრილებით სარგებლობის შემთხვევაშიც.

საერთოდ, მათემატიკურ ცხრილებში მოცემულ მნიშვნელობათა ცდომილებანი არ აღემატება შენარჩუნებული ბოლო ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს. მაგალითად, გამოვთვალოთ ოთხნიშნად მათემატიკური ცხრილებით 2,999² (იხ. ვ. ბრადისი, ოთხნიშნად მათემატიკური ცხრილები, თბილისი, 1985). გვექნება

$$\begin{array}{r} 2,99^2 \dots 8,940 \\ 9 \dots 0,053 \\ \hline 2,999^2 = 8,993. \end{array}$$

გამოვთვალოთ ცდომილება:

$$\Delta a = 2,999^2 - 8,993 = 8,994 - 8,993 = 0,001.$$

ამრიგად, $a = 8,993$ შეიცავს ცდომილებას, რომელიც a რიცხვის ბოლო ციფრის თანრიგის ერთეულის ტოლია. ეს ბუნებრივია, რადგანაც გვაქვს ორი მიახლოებითი რიცხვის ჯამი: $8,940 + 0,053$, სადაც თითოეული რიცხვი შეიცავს ცდომილებას 0,0005 და ამ მიახლოებითი რიცხვთა ჯამში გვექნება ცდომილება

$$0,0005 + 0,0005 = 0,001.$$

ეს მდგომარეობა გვიკარნახებს, რომ (2) გამოსახულებაში უნდა ავილოთ $\omega = 1$. ამის გამო გვექნება შემდეგი განსაზღვრა:

მიახლოებითი a რიცხვში k -ური ნიშნადი ციფრი a_{m-k+1} სანდოა, თუ a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება k -ური ციფრის თანრიგის ერთეულს, ანუ

მიახლოებითი რიცხვის ყოველი ნიშნადი ციფრი სანდოა, თუ მიახლოებითი რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება ნიშნადი ციფრის თანრიგის ერთეულს.

სწორედ $\omega = 1$ ეთანხმება კრილოვის პრინციპით მიახლოებითი რიცხვის ჩაწერას, რომელიც ასე შეგვიძლია გამოვთქვათ: მიახლოებითი რი-

ცხვი ისე უნდა ჩაეწეროს, რომ ყველა ნიშნადი ციფრი იყოს სანდო.

თუ ციფრში არ ვიცით ცდომილების სიდიდე, მაშინ ეს ციფრი უნდა უქუევადღოთ, რიცხვი სათანადოდ უნდა დაეამრგვალოთ.

შემდეგში, როცა ყველა ციფრი სანდოა მიახლოებით რიცხვში, ასე ჩაეწეროს

$$x \approx a,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება ბოლო ციფრის თანრიგის ერთეულს.

თუ რიცხვი უშუალოდ ცხრილიდანაა აღებული, მაშინ ცდომილება არ აღემატება რიცხვში დატოვებული ბოლო ციფრის ერთეულის ნახევარს. მაგალითად,

$$\pi = 3,1416; \Delta < 0,00002; \sqrt{2} = 1,4142; \Delta < 0,000014.$$

ზოგჯერ შეიძლება მიახლოებითი რიცხვი დიდი რაოდენობის ნიშნადი ციფრით მივიღოთ, მაგალითად, რვა და რვაზე მეტი ათწილადი ნიშნით, თუ გამოთვლებს ელექტრონული გამოთვლელი მანქანით ვაწარმოებთ, შედეგში ისეთი ნიშნადი ციფრები დატოვოთ, სადაც ცდომილება დატოვებული ციფრით თანრიგის ერთეულის ნახევარს არ აღემატება. ამ შემთხვევაში მიახლოებითი რიცხვში სანდოა ნიშნადი ციფრი, თუ მიახლოებითი რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება ნიშნადი ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს, $\omega = \frac{1}{2}$.

ქვემოთ, თუ საწინააღმდეგო არ იქნა ნათქვამი, ყოველთვის ვიგულისხმებთ სანდო ნიშნადი ციფრის ქვეშ (2) განსაზღვრას, როდესაც $\omega = 1$.

ცნობა იმის შესახებ, რომ x რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობაა a რიცხვი Δa ცდომილებით, ასე ჩაიწერება (იხ. § 1, (5), (6)):

$$x = a \pm \Delta a,$$

ანუ

$$a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a.$$

აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებანი ჩაიწერება ერთი ან ორი ნიშნადი ციფრით. მიახლოებითი რიცხვი a და მისი ცდომილება ერთი და იგივე რაოდენობის ათწილადი ნიშნებით უნდა ჩაიწეროს. მაგალითად,

$$x = 3,1414 \pm 0,0002; x = 5,64340 \pm 0,00016.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ფარდობითი ცდომილების განსაზღვრას, $\delta a = \frac{\Delta a}{a}$, მაშინ შეგვიძლია დაეწეროთ (იხ. § 1, (12)):

$$x = a(1 \pm \delta a).$$

მაგალითად, თუ $a = 0,4341$ და $\delta a = 0,046\%$, მაშინ შეგვიძლია დაეწეროთ

$$x = 0,4341 (1 \pm 0,046\%),$$

რაც ნიშნავს

$$0,4341 (1 - 0,046\%) \leq x \leq 0,4341 (1 + 0,046\%).$$

პრაქტიკული თვალსაზრისით, როდესაც საჭიროა რაიმე ამოცანის ამონახსნის მონახვა რომელიმე სიზუსტით, მაგალითად, 10^{-5} , ამონახსნი დამაკმაყოფილებლად ჩაითვლება მაშინაც, თუ იგი მივიღეთ სიზუსტით $2 \cdot 10^{-5}$.

§ 4. ფარდობით ცდომილებასა და სანდო ციფრთა შორის კავშირი

მე-2 პარაგრაფში ვაჩვენეთ (ფორმულები (7), (8)), რომ a რიცხვი x რიცხვის მნიშვნელობაა n სანდო ციფრით დამატებითი წესით, თუ a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება n -ური ნიშნადი ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს არ აღემატება, ხოლო a რიცხვი x -ის მნიშვნელობაა n სანდო ციფრით დამატებითი წესის გარეშე, თუ a -ს აბსოლუტური ცდომილება n -ური ნიშნადი ციფრის თანრიგის ერთეულს არ აღემატება. ეთქვათ, x რიცხვში 10 -ის უდიდესი ხარისხი m -ია:

$$x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_{m-n+1} 10^{m-n+1} + a_{m-n} 10^{m-n} + \dots + a_0, \quad (1)$$

სადაც $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0$ ციფრებია.

დავამრგვალოთ x რიცხვი n ნიშნად ციფრამდე დამატებითი წესით, გვექნება:

$$\bar{a} = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \bar{a}_{m-n+1} 10^{m-n+1}, \quad (2)$$

სადაც $\bar{a}_{m-n+1}$ მიღებულია a_{m-n+1} -დან შესწორებით. რადგანაც დამრგვალებით დატოვებულია $\bar{a}_{m-n+1}$, ამიტომ a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება Δa არ აღემატება სიდიდეს:

$$\alpha = \frac{1}{2} 10^{m-n+1}. \quad (3)$$

ხოლო, თუ დამრგვალებულია დამატებითი წესის გარეშე, მაშინ Δa არ აღემატება სიდიდეს

$$\alpha = 10^{m-n+1}. \quad (4)$$

გამოვთვალოთ a რიცხვის ფარდობითი ცდომილება. (2) ფორმულის

საფუძველზე გვეჩვენება, რომ a რიცხვის ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება სიდიდეს:

$$\frac{\frac{1}{2} 10^{m-n+1}}{a_m 10^m} = \frac{1}{2a_m 10^{n-1}},$$

ანუ

$$\delta \leq \frac{1}{2a_m 10^{n-1}}. \quad (5)$$

ამ ფორმულის მისაღებად გამოვიყენოთ აშკარა უტოლობა:

$$a = a_m 10^m + \dots + \overline{a_{m-n+1}} 10^{m-n+1} \geq a_m 10^m. \quad (6)$$

თუ დავამრგვალოთ დამატებითი წესის გარეშე, მაშინ (4) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\delta \leq \frac{1}{a_m 10^{n-1}}. \quad (7)$$

ამგვარად, თუ a რიცხვი x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობაა n სანდო ციფრით, მაშინ a -ს ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება $\frac{1}{2a_m 10^{n-1}}$ -ს (დამატებითი წესით დამრგვალების შემთხვევაში) ან $\frac{1}{a_m 10^{n-1}}$ (დამრგვალების წესის გარეშე), სადაც a_m არის a -ს პირველი ნიშნადი ციფრი.

მაგალითად, თუ π -ს მნიშვნელობად მივიღებთ 3,14-ს, მაშინ, ცხადია,

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 10^{3-1}} < 0,0017,$$

ანუ

$$\delta < 0,17\%.$$

ამგვარად, მიახლოებითი a რიცხვის პირველ ნიშნადი a_m ციფრით და სანდო ციფრების რაოდენობით n -ით შეგვიძლია (5) ფორმულის საშუალებით გამოვიანგარიშოთ სათანადო ფარდობითი ცდომილება. ცხადია, იმავე ფორმულით შეგვიძლია შევადგინოთ ცხრილი, საიდანაც მოცემული $\overline{a_m}$ -ითა და n -ით მზამზარეულად მივიღებთ ფარდობით ცდომილებას პროცენტებში. ამისათვის a_m -ს მივცეთ მნიშვნელობანი: 1, 2, ..., 9, ხოლო n -ს 1, 2, 3, 4, 5. a_m -ის მნიშვნელობანი დავწეროთ პირველ სვეტში, n -ის მნიშვნელობანი — პირველ სტრიქონში, ხოლო სათანადო ფარდობითი ცდომილება a_m -ის სტრიქონისა და n -ის სვეტის გადაკვეთაში.

მაგალითად, $n=3$, $a_m=1$, მაშინ ფარდობითი ცდომილება განისაზღვრება უტოლობით:

$$\delta < \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 10^{3-1}} = \frac{1}{200} = 0,005 = 0,5\%.$$

რიცხვი 0,5% მოვითავსოთ პირველი სტრიქონისა და მესამე სვეტის გადაკვეთაში. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მაშინ a_m -ისა და n -ის დამუშავებული მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ 1-ლ ცხრილს.

ცხრილი 1

$n \backslash a_m$	1	2	3	4	5
1	50	5,0	0,50	0,050	0,0050
2	25	2,5	0,25	0,025	0,0025
3	17	1,7	0,17	0,017	0,0017
4	12	1,2	0,12	0,012	0,0012
5	10	1,0	0,10	0,010	0,0010
6	8,3	0,83	0,083	0,0083	0,00083
7	7,1	0,71	0,071	0,0071	0,00071
8	6,3	0,63	0,063	0,0063	0,00063
9	5,6	0,56	0,056	0,0056	0,00056

§ 5. ფარდობითი ცდომილებით სანდო ციფრთა რაოდენობის განსაზღვრა

აქამდე მიახლოებითი a რიცხვის ფარდობით ცდომილებას განვსაზღვრავდით a რიცხვში n სანდო ციფრითა და პირველი ნიშნადი a_m ციფრის საშუალებით. ახლა შევისწავლოთ ფარდობითი ცდომილების საშუალებით სანდო ციფრთა რაოდენობის განსაზღვრა. (1, § 1) ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$a = a_m 10^m + 10^m \left(\frac{a_{m-1}}{10} + \frac{a_{m-2}}{10^2} + \dots + \frac{a_{m-n+1}}{10^{n-1}} \right). \quad (1)$$

მიღებული გამოსახულების ფრჩხილებში მოთავსებული სიდიდე წესიერი წილადია, რადგანაც

$$a_i < 10, (i = m-1, m-2, \dots).$$

მართლაც,

$$\frac{a_{m-1}}{10} \leq \frac{9}{10}, \quad \frac{a_{m-2}}{10^2} \leq \frac{9}{100}, \dots$$

უკანასკნელიდან მივიღებთ:

$$\frac{a_{m-1}}{10} + \frac{a_{m-2}}{10^2} + \dots + \frac{a_{m-n+1}}{10^{n-1}} \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots = 0,99 \dots 9.$$

ე. ი.

$$\frac{a_{m-1}}{10} + \frac{a_{m-2}}{10^2} + \dots + \frac{a_{m-n+1}}{10^{n-1}} < 1.$$

ამ უტოლობის საფუძველზე (1) გამოსახულება მოგვცემს:

$$a < a_m 10^m + 10^m.$$

ხოლო უკანასკნელი უტოლობა (6, § 4) უტოლობასთან ერთად მოგვცემს:

$$a_m 10^m \leq a < 10^m (a_m + 1). \quad (2)$$

თუ a ითვლება რაიმე x სიდიდის მიახლოებით მნიშვნელობად δ ფარდობითი ცდომილებით, მაშინ

$$|x - a| \leq a \delta.$$

ვისარგებლოთ (2) უტოლობით, მაშინ უკანასკნელიდან მივიღებთ:

$$|x - a| \leq 10^m (a_m + 1) \delta. \quad (3)$$

თუ აღვიღო აქვს უტოლობას:

$$(a_m + 1) \delta \leq 10^{-s},$$

სადაც s რაიმე მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ (3) უტოლობა მოგვცემს:

$$\alpha = 10^{m-s}.$$

ამ უტოლობით (4, § 4) ტოლობასთან შედარება მოგვცემს:

$$-n + 1 = -s,$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$n = s + 1, \quad (4)$$

ე. ი. თუ s ისეთი მთელი დადებითი რიცხვია, რომ

$$(a_m + 1) \delta \leq 10^{-s}, \quad (5)$$

მაშინ a იქნება x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა $s + 1$ სანდო ციფრით მაინც.

მაგალითად, ვიპოვოთ მიახლოებით a რიცხვში სანდო ციფრთა რაოდენობა, თუ $\delta = 1\%$ და $a_m = 1$.

(5) ფორმულით გვექნება:

$$(1 + 1) 0,01 = 10^{-s},$$

ანუ

$$0,02 = 10^{-s},$$

საიდანაც

$$10^s = 50.$$

უკანასკნელიდან მივიღებთ

$$1 < s < 2,$$

ანუ

$$2 < n < 3.$$

ე. ი. a რიცხვი ორი სანდო ციფრით მაინც უნდა იყოს მოცემული, რომ ზემოთ მოთხოვნილი პირობა შესრულდეს.

(5) გამოსახულების საფუძველზე შეგვიძლია შევადგინოთ ცხრილი, სადაც მოცემული a_m -ისა და δ -ს საშუალებით განისაზღვრება სანდო ციფრთა რაოდენობა მიახლოებით რიცხვში. ამისათვის პირველ სვეტში (ცხრილი 2) მოვათავსოთ a_m -ის მნიშვნელობანი, პირველ სტრიქონში δ -ს მნიშვნელობანი, ხოლო სათანადო სვეტისა და სტრიქონის გადაკვეთაში შესაბამისი სანდო ციფრთა რაოდენობა.

ცხრილი 2

$\delta \backslash a_m$	10%	5%	1%	0,5%	0,1%	0,05%
1	1	2	2	3	3	4
2	1	2	2	3	3	4
3	1	1	2	2	3	3
4	1	1	2	2	3	3
5	1	1	2	2	3	3
6	1	1	2	2	3	3
7	1	1	2	2	3	3
8	1	1	2	2	3	3
9	1	1	2	2	3	3

ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითში $\delta = 1\%$, $a_m = 1$, $n = 2$. სწორედ 1-ის სტრიქონისა და 1%-ის სვეტის გადაკვეთაში წერია ციფრი 2.

მაგალითი. რამდენი სანდო ციფრი უნდა ავიღოთ $\sqrt{5}$ -ის მიახლოებით მნიშვნელობაში, რომ $\delta = 0,5\%$?

$\sqrt{5}$ -ის პირველი ნიშნადი ციფრია 2. სანდო ციფრთა რაოდენობა მოთვსებულია 2-ის სტრიქონის და $0,5\%$ -ის სვეტის გადაკვეთაში: $n=3$.

ამგვარად, $\sqrt{5}$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა უნდა ავიღოთ სამი სანდო ციფრით, რომ ფარდობითი ცდომილება არ აღემატებოდეს $0,5\%$ -ს.

§ 6. მიახლოებითი რიცხვთა ჯამის ცდომილება

ქვემოთ დაგვიჩვენება აბსოლუტური მნიშვნელობათა შემდეგი თვისებებით სარგებლობა:

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|, \quad (1)$$

$$|xy| = |x| \cdot |y|, \quad (2)$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}. \quad (3)$$

ვთქვათ, მოცემულია a_1 -ისა და a_2 -ის აბსოლუტური ცდომილებანი:

$$\Delta a_1 = |x_1 - a_1| \leq \alpha_1, \quad (4)$$

$$\Delta a_2 = |x_2 - a_2| \leq \alpha_2.$$

გამოვთვალოთ $(a_1 + a_2)$ -ის აბსოლუტური ცდომილება:

$$\Delta(a_1 + a_2) = |(x_1 + x_2) - (a_1 + a_2)| = |(x_1 - a_1) + (x_2 - a_2)|.$$

თუ ვისარგებლებთ (1) თვისებით, მივიღებთ

$$|(x_1 + x_2) - (a_1 + a_2)| \leq |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|.$$

საიდანაც (4) ტოლობის გამოყენებით გვექნება:

$$\Delta(a_1 + a_2) \leq \Delta a_1 + \Delta a_2. \quad (5)$$

აქედან კი ვღებულობთ

$$\alpha \leq \alpha_1 + \alpha_2. \quad (6)$$

სადაც α ჯამის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილებაა:

ამრიგად, მიახლოებითი რიცხვთა ჯამის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება შესაქრებთა ზღვრული აბსოლუტური ცდომილებათა ჯამს.

ისე, როგორც I პარაგრაფში შევნიშნეთ, აქაც ყველგან ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებაზე გვექნება საუბარი, მაგრამ სიტყვა „ზღვრულს“ არ ვიხმართ. ამასთან, (6)-ში ტოლობა შეგვიძლია ვიგულისხმოთ.

მაგალითი. მოცემულია

$$x_1 = 5,7 (\pm 0,05), \quad x_2 = 4,1 (\pm 0,05).$$

ვიპოვოთ

$$a_1 + a_2.$$

ამოხსნა:

$$5,7 + 4,1 = 9,8; \quad 0,05 + 0,05 = 0,1.$$

ამიტომ

$$a_1 + a_2 = 9,8; \quad \alpha = 0,1; \quad x_1 + x_2 = 9,8 (\pm 0,1).$$

გამოვთვალოთ ჯამის ფარდობითი ცდომილება.

(5) გამოსახულება მოგვცემს:

$$\delta = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \delta_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2} \delta_2.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\delta = \frac{a_1}{a} \delta_1 + \frac{a_2}{a} \delta_2,$$

ანუ

$$\delta = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \delta_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2} \delta_2. \quad (7)$$

δ_1 და δ_2 -დან უდიდესი აღვნიშნოთ δ_0 -ით. მაშინ (7) მოგვცემს:

$$\delta \leq \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right) \delta_0,$$

ანუ

$$\delta \leq \delta_0. \quad (8)$$

ამრიგად, მიახლოებითი რიცხვთა ჯამის ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება შესაქრებთა უდიდეს ფარდობით ცდომილებას.

(7)-დან ადვილი შესამჩნევია, რომ δ -ს სიდიდეზე გავლენას ახდენს უდიდესი შესაქრები. მოვიფიქროთ, რომ ფარდობითი ცდომილება განსაზღვრავს ნიშნადი ციფრთა რაოდენობას. ამიტომ, თუ შესაქრებთა რაოდენობა არც თუ ისე დიდია, მაშინ ჯამში შეინარჩუნება უდიდესი შესაქრების ნიშნადი ციფრთა რაოდენობა, თუ დანარჩენ შესაქრებთა სიზუსტე არ არის ნაკლები უდიდესი შესაქრების სიზუსტეზე.

შემოთ განხილული მაგალითები გვიჩვენებს, თუ როგორ უნდა შეეკრიბოთ მიახლოებითი რიცხვები.

$$\begin{array}{r} 1,271 \\ + 4,321 \\ \hline 2,732 \\ + 0,053 \\ \hline 8,377 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,273 \\ + 4,321 \\ \hline 2,735 \\ + 0,054 \\ \hline 8,383 \end{array} \quad \begin{array}{r} 246,32 \\ + 42,562 \\ \hline 3,2463 \\ + 0,42124 \\ \hline 292,55 \end{array} \quad \begin{array}{r} = 246,32 \\ \approx 42,56 \\ \approx 3,25 \\ \approx 0,42 \\ \hline 292,55 \end{array}$$

ამგვარად, მიახლოებითი რიცხვთა ჯამში იქნება იმდენი სანდო ციფრი ან ერთი ნაკლები, რამდენიც უდიდეს შესაჯრებშია, თუ დანარჩენი შესაჯრების სიზუსტე არაა ნაკლები უდიდესი შესაჯრების სიზუსტეზე.

§ 7. სხვაობის ცდომილება

გამოვთვალოთ $(a_1 - a_2)$ -ის აბსოლუტური ცდომილება.

$$\Delta(a_1 - a_2) = |(x_1' - x_2) - (a_1 - a_2)| = |(x_1 - a_1) - (x_2 - a_2)|.$$

გამოვიყენოთ (1, § 6) თვისება, გვექნება:

$$\Delta(a_1 - a_2) \leq |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|,$$

ანუ

$$\Delta(a_1 - a_2) \leq \Delta a_1 + \Delta a_2.$$

საიდანაც შეგვიძლია მივიღოთ:

$$\alpha \leq \alpha_1 + \alpha_2, \quad (1)$$

სადაც α სხვაობის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილებაა.

ამრიგად, მიახლოებითი რიცხვთა სხვაობის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება საკლებისა და მაკლების აბსოლუტურ ცდომილებათა ჯამს.

მაგალითად, მოვწახოთ $a_1 - a_2$, თუ $x_1 = 15,26 (\pm 0,005)$, $x_2 = 6,1 (\pm 0,05)$. გვექნება: $15,26 - 6,1 = 9,16$. $0,005 + 0,05 = 0,055$.

აქედან

$$a_1 - a_2 = 9,16; \alpha = 0,055.$$

მავრამ სხვაობაში ციფრი 6 სანდო არ არის, ამიტომ შედეგი უნდა დავამრგვალოთ. გვექნება:

$$x_1 - x_2 = 9,2 (\mp 0,1).$$

ახლა გამოვთვალოთ სხვაობის ფარდობითი ცდომილება:

(1)-დან გვექნება:

$$\alpha\delta = \alpha_1 + \alpha_2,$$

სადაც

$$a = a_1 - a_2, \quad \delta = \frac{\alpha}{a_1 - a_2}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\delta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{a_1 - a_2}. \quad (2)$$

ამ ტოლობიდან ცხადია, რომ, თუ საკლები და მაკლები ერთიმეორისაგან მცირედ განსხვავდებიან, მაშინ ფარდობითი ცდომილება დიდია. ამის გამო სხვაობაში ნიშნად ციფრთა რაოდენობა მეტად მცირდება.

მაგალითად:

$$a_1 = 3,1425, \quad \alpha_1 = 0,00005,$$

$$a_2 = 3,1413, \quad \alpha_2 = 0,00005,$$

მაშინ სხვაობის ფარდობითი ცდომილება იქნება:

$$\frac{0,00005 + 0,00005}{3,1425 - 3,1413} = \frac{0,0001}{0,0012} = \frac{1}{12}.$$

თუ ვისარგებლებთ (5, § 5) ფორმულით, გვექნება

$$(1 + 1) \frac{1}{12} = 10^{-s},$$

საიდანაც

$$\frac{1}{6} = 10^{-s},$$

ანუ

$$10^s = 6.$$

აქედან კი მივიღებთ:

$$0 < s < 1,$$

საიდანაც

$$1 < n < 2.$$

ამგვარად, სხვაობაში ნიშნად ციფრთა რაოდენობა არ აღემატება ორ ერთეულს, ე. ი. სხვაობაში სიზუსტე გაცილებით ნაკლებია, ვიდრე მოცემულ რიცხვებში.

ამიტომ, სადაც ეს შესაძლებელია, უნდა ავიცილოთ გამოკლება. მაგალითად, საჭიროა გავიგოთ მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია ორ სფეროს შორის, თუ სფეროებს საერთო ცენტრი აქვთ და მცირე სფეროს რადიუსია r , ხოლო სფეროების რადიუსებს შორის სხვაობაა α .

§ 8. კომლაძე

593

საძიებელი მოცულობა გამოისახება ფორმულით

$$v = \frac{4}{3} \pi [(r + \alpha)^3 - r^3],$$

საიდანაც

$$v = \frac{4}{3} \pi (3r^2\alpha + 3r\alpha^2 + \alpha^3).$$

ამგვარად, სათანადო სხვაობა შეიცვალა ჯამით.

ზოგჯერ შესაძლებელია მონაცემები ავიღოთ უფრო მეტი სანდო ნიშნადი ციფრით. მაგალითად, თუ $x_1 - x_2$ სხვაობაში იკარგება პირველი m ციფრი და საჭიროა სხვაობაში n ციფრის შენარჩუნება, x_1 და x_2 უნდა ავიღოთ $m+n$ სანდო ნიშნადი ციფრით.

§ 8. ნამრავლის ცდომილება

ვთქვათ,

$$x_1 = a_1 (\pm \Delta a_1),$$

$$x_2 = a_2 (\pm \Delta a_2),$$

მაშინ სათანადო გადამრავლებით მივიღებთ:

$$x_1 \cdot x_2 = a_1 a_2 \pm a_1 \Delta a_2 \pm a_2 \Delta a_1 \pm \Delta a_1 \cdot \Delta a_2.$$

რადგანაც $\Delta a_1 \cdot \Delta a_2$ ძალიან მცირეა Δa_1 და Δa_2 -თან შედარებით, იგი შეგვიძლია უკუვავდოთ. მივიღებთ:

$$x_1 \cdot x_2 = a_1 a_2 \pm a_1 \Delta a_2 \pm a_2 \Delta a_1,$$

ანუ

$$x_1 x_2 = a_1 a_2 \pm (a_1 \Delta a_2 + a_2 \Delta a_1),$$

საიდანაც

$$\Delta(a_1 a_2) = a_1 \Delta a_2 + a_2 \Delta a_1. \quad (1)$$

თუ უკანასკნელი გამოსახულების ორივე მხარეს გავყოფთ $a_1 a_2$ -ზე, გვექნება:

$$\frac{\Delta(a_1 a_2)}{a_1 a_2} = \frac{\Delta a_2}{a_2} + \frac{\Delta a_1}{a_1},$$

ანუ

$$\delta(a_1 a_2) = \delta a_1 + \delta a_2. \quad (2)$$

ამრიგად, მიახლოებით რიცხვთა ნამრავლის ფარდობითი ცდომილება ტოლია თანამამრავლთა ფარდობითი ცდომილებების ჯამისა.

ცხადია, ეს შედეგი გავრცელდება სასრული რაოდენობის მიახლოებითი რიცხვების ნამრავლის მიმართ:

$$\delta(a_1 a_2 \dots a_n) = \delta a_1 + \delta a_2 + \dots + \delta a_n.$$

§ 9. განაყოფის ცდომილება

განვიხილოთ სხვაობა:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} &= \frac{a_1 \pm \Delta a_1}{a_2 \pm \Delta a_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2(a_1 \pm \Delta a_1) - a_1(a_2 \pm \Delta a_2)}{a_2(a_2 \pm \Delta a_2)} = \\ &= \frac{\pm a_2 \Delta a_1 \pm a_1 \Delta a_2}{a_2^2 \left(1 \pm \frac{\Delta a_2}{a_2}\right)}. \end{aligned}$$

რადგანაც Δa_2 მცირეა, მაშინ $\frac{\Delta a_2}{a_2}$ უფრო მცირე იქნება, ამიტომ შეგვიძლია მივიღოთ:

$$1 \pm \frac{\Delta a_2}{a_2} \approx 1.$$

მაშინ გვექნება:

$$\frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2 \Delta a_1 \pm a_1 \Delta a_2}{a_2^2},$$

ანუ

$$\Delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \frac{a_2 \Delta a_1 \pm a_1 \Delta a_2}{a_2^2}.$$

მიღებული ტოლობა გავყოთ $\frac{a_1}{a_2}$ -ზე გვექნება:

$$\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \delta_1 + \delta_2. \quad (1)$$

ამრიგად, მიახლოებით რიცხვთა განაყოფის ფარდობითი ცდომილება ტოლია განაყოფისა და გამყოფის ფარდობითი ცდომილებათა ჯამისა.

§ 10. საზღვართა საშუალო არითმეტიკული და მისი ცდომილება

1-ელ პარაგრაფში ვახსენეთ: თუ რაიმე x სიდიდის ქვედა საზღვარი A და ზედა საზღვარი B განსაზღვრულია, მაშინ x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობად შეგვიძლია მივიღოთ ნებისმიერი მნიშვნელობა $[A, B]$ შუალედის შიგნით. ამ მნიშვნელობათაგან ავიღოთ A და B რიცხვების საშუალო არითმეტიკული:

$$a = \frac{A+B}{2}.$$

ეს რიცხვი ისე უნდა დავამრგვალოთ, რომ საექვო იყოს მხოლოდ მისი ბოლო ციფრი. A და B -ს მიმართ მოვთხოვთ შემდეგი:

1) სხვაობა $A-B$ რაც შეიძლება მცირე იყოს;

2) ქვედა საზღვარი A დავამრგვალოთ მხოლოდ ნაკლებობით და ზედა საზღვარი B მხოლოდ მეტობით.

შემდეგში ვაჩვენებთ, რომ A და B რიცხვების საშუალო არითმეტიკული x -ის უკეთესი მიახლოებითი მნიშვნელობაა, ვიდრე სხვა მნიშვნელობა $[A, B]$ შუალედიდან (§ 14).

განვიხილოთ მაგალითი:

$$2,90 < x < 3,27.$$

სათანადო საშუალო არითმეტიკული ტოლი იქნება 3,085.

$$\frac{2,90 + 3,27}{2} = 3,085,$$

ხოლო საშუალო არითმეტიკულის გადახრა ტოლი იქნება 0,185,

$$\alpha = \frac{3,27 - 2,90}{2} = 0,185.$$

სწორედ α იქნება საშუალო არითმეტიკულის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება.

ამგვარად,

$$x = 3,085 (\pm 0,185).$$

დავამრგვალოთ საშუალო არითმეტიკული ისე, რომ მასში დარჩეს ერთი საექვო ციფრი. ამისათვის ცდომილება დავამრგვალოთ მეტობით ერთ ნიშნად ციფრამდე:

$$\alpha \approx 0,2.$$

ცხადია, საშუალო არითმეტიკულშიც უნდა შევინარჩუნოთ მხოლოდ ერთი ათობითი ნიშანი. გვექნება:

$$3,085 \approx 3,1.$$

ამგვარად, საბოლოოდ გვექნება:

$$x = 3,1 (\pm 0,2).$$

§ 11. გამოთვლების ცდომილებათა საშუალებით

წინა პარაგრაფში გავცანით ცდომილებებზე არითმეტიკულ მოქმედებებს. გამოვიყენოთ მიღებული შედეგები მიახლოებითი გამოთვლების ჩასატარებლად. ამისათვის განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი. გამოვთვალოთ ორი სხვადასხვა ლითონის ნაჭრის მასა, თუ პირველის მოცულობა $v_1 = 35 (\pm 0,1)$ სმ³, სიმკვრივე $\rho_1 = 7,83 (\pm 0,005) \frac{\text{გ}}{\text{სმ}^3}$, ხოლო მეორე ნაჭრის მოცულობა $v_2 = 17 (\pm 0,1)$ სმ³,

$$\text{სიმკვრივე } \rho_2 = 8,49 (\pm 0,005) \frac{\text{გ}}{\text{სმ}^3}.$$

ამოხსნა. რადგანაც

$$m = \rho v,$$

გვექნება

$$\alpha(m) = \alpha(\rho v) = \rho \alpha(v) + v \alpha(\rho),$$

სადაც $\alpha(m)$, $\alpha(v)$ და $\alpha(\rho)$ სათანადოდ m -ის, v -ის და ρ -ს ზღვრული აბსოლუტური ცდომილებებია.

გამოთვლები მოგვცემს:

$$\alpha(m_1) = 7,83 \cdot 0,1 + 35 \cdot 0,005 = 0,783 + 0,175 = 0,958.$$

$$\alpha(m_2) = 8,49 \cdot 0,1 + 17 \cdot 0,005 = 0,849 + 0,085 = 0,934.$$

$$\alpha(m) = \alpha(m_1) + \alpha(m_2) = 0,958 + 0,934 = 1,892 \approx 2.$$

$$m_1 = 7,83 \cdot 35 \approx 274.$$

$$m_2 = 8,49 \cdot 17 \approx 144.$$

$$m = m_1 + m_2 \approx 274 + 144 = 418.$$

შრიგად,

$$m = 418 (\pm 2) \text{ გ.}$$

§ 12. ფუნქციის ცდომილება. ცდომილების ზოგადი ფორმულა

ზემოთ ჩამოთვლილი არითმეტიკულ მოქმედებათა ცდომილებანი, რომლებიც ელემენტარული მსჯელობით მივიღეთ, შეგვიძლია ფუნქციის დიფერენციალით განვსაზღვროთ.

განვიხილოთ x და y ცვლადის ფუნქცია

$$z = f(x, y). \quad (1)$$

ვთქვათ, x და y შეიცავს სათანადო ცდომილებებს Δx და Δy . ეს ცდომილებანი იმდენად მცირეა, რომ $(\Delta x)^2$ და $(\Delta y)^2$ შეგვიძლია უქუთუბოდ მოვინახოთ სხვაობა:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y. \end{aligned}$$

ეს სხვაობა შედგება ორი ნაწილისაგან: პირველი —

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

და მეორე, მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირისაგან¹. ეს მეორე ნაწილი უკუუვადოთ, ამის გამო გვექნება:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y,$$

საიდანაც

$$|f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right|.$$

აქედან კი შეგვიძლია დავწეროთ მიახლოებითი ტოლობა:

$$\Delta f(x, y) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y. \quad (2)$$

თუ გვექნებოდა მრავალცვლადის ფუნქცია:

$$z = f(x, y, \dots, u),$$

მაშინ მივიღებდით შემდეგ მიახლოებითი ტოლობას:

$$\Delta f(x, y, \dots, u) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \Delta u. \quad (3)$$

მაგალითად,

$$z = xy.$$

მაშინ

$$\Delta(xy) = y \Delta x + x \Delta y.$$

ეს ფორმულა ელემენტარული გზით ადრეც გვექონდა მიღებული.

(3) ტოლობის ორივე მხარის $|f|$ -ზე გაყოფით მივიღებ ფარდობითი ცდომილების გამოსახულებას ფუნქციისათვის:

$$\delta f = \frac{\Delta f(x, y, \dots, u)}{|f(x, y, \dots, u)|} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \frac{\Delta x}{|f|} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \frac{\Delta y}{|f|} + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \frac{\Delta u}{|f|}. \quad (4)$$

ავიღოთ წილადი:

$$z = \frac{x}{y}.$$

(4) ფორმულა მოგვცემს:

$$\delta \left(\frac{x}{y} \right) = \left| \frac{1}{y} \right| \frac{\Delta x}{\left| \frac{x}{y} \right|} + \left| \frac{x}{y^2} \right| \frac{\Delta y}{\left| \frac{x}{y} \right|},$$

¹ ნაწ. I, თავი XVI, § 7, გვ. 890.

ანუ

$$\delta \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}.$$

ეს ფორმულაც ადრე გვექონდა მიღებული.

მაგალითი. ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციის ფარდობითი ცდომილება:

$$z = \frac{a^3 \sqrt[4]{b}}{(c+k)^5}.$$

გამოვთვალოთ სათანადო კერძო წარმოებულები და შეფარდებანი:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial a} : z &= \frac{3a^2 \sqrt[4]{b}}{(c+k)^5} : \frac{a^3 \sqrt[4]{b}}{(c+k)^5} = \frac{3}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial b} : z = \frac{a^3 b^{-\frac{3}{4}}}{4(c+k)^5} : \frac{a^3 \sqrt[4]{b}}{(c+k)^5} = \frac{1}{4b}, \\ \frac{\partial z}{\partial c} : z &= -\frac{5}{c+k}, \quad \frac{\partial z}{\partial k} : z = -\frac{5}{c+k}. \end{aligned}$$

მიღებული გამოსახულებანი ჩავსვათ (4) ფორმულაში, გვექნება:

$$\begin{aligned} \delta z &= \frac{3\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{4|b|} + \frac{5\Delta c}{|c+k|} + \frac{5\Delta k}{|c+k|} = \\ &= 3\delta a + \frac{1}{4}\delta b + 5\delta(c+k). \end{aligned}$$

§ 13. სანდო ციფრთა რაოდენობის განსაზღვრა ზოგადი ელემენტარულ ფუნქციებში

1) გამრავლება და გაყოფა¹.

განვიხილოთ მაგალითი, სადაც სრულდება გამრავლება და გაყოფა k -ჯერ. (4, § 12) ფორმულიდან ასეთი გამოსახულების ცდომილება განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n, \quad (1)$$

სადაც δ_i არის i -ური სიდიდის ფარდობითი ცდომილება.

ვთქვათ, თითოეულ მიახლოებით სიდიდეში n არის სანდო ციფრთა რაოდენობა, მაშინ i -ური სიდიდის ფარდობითი ცდომილება განისაზღვრება ტოლობით:

$$\delta_i = \frac{1}{a_i 10^{n-1}}, \quad (2)$$

სადაც a_i სათანადო რიცხვის პირველი ნიშნადი ციფრია.

¹ Дж. Скарборо, Численные методы материалистического анализа, М.-Л. 1934.

უკანასკნელი გამოსახულების (1)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$\delta = \frac{1}{a_1} \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{a_2} \frac{1}{10^{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_k} \frac{1}{10^{n-1}}.$$

ამ გამოსახულების (a_m+1) -ზე გამრავლება მოგვცემს

$$(a_m+1)\delta = (a_m+1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \right) \frac{1}{10^{n-1}}, \quad (3)$$

სადაც a_m შედეგის პირველი ნიშნადი ციფრია.

ამ ფორმულით ადვილად განვსაზღვრავთ სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობას ნამრავლში და განაყოფში.

ვთქვათ, $k=10$, მაშინ (3)-ის მარჯვენა მხარეს უდიდესი მნიშვნელობა ექნება, თუ $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ და $a_m = 9$.

ამ შემთხვევაში (3) გამოსახულება მოგვცემს:

$$(a_m+1)\delta \leq 10 \cdot 10 \frac{1}{10^{n-1}}.$$

ანუ

$$(a_m+1)\delta \leq \frac{1}{10^{n-3}}.$$

თუ გამოვიყენებთ (4, § 5) ფორმულას მივიღებთ

$$s+1 = n-2,$$

ე. ი. ნამრავლში $(n-2)$ სანდო ნიშნადი ციფრი მაინცაა, თუ მამრავლებში უმცირესი რაოდენობის n სანდო ნიშნადი ციფრია.

ცხადია, თუ $k < 10$ და $a_1, \dots, a_n$ ერთზე მეტია, მაშინ (3)-ის მარჯვენა მხარე უფრო მცირე იქნება, ვიდრე განხილულ შემთხვევაში, ამიტომ ნიშნად ციფრთა რაოდენობა ნამრავლსა და განაყოფში $n-1$ იქნება.

ამგვარად, თუ მიმდევრობით სრულდება გამრავლება და გაყოფა, მაშინ შემდეგში სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობა ერთი ან ორი ერთეულით მცირეა, ვიდრე მოცემული რიცხვებიდან უმცირესი სიზუსტის რიცხვში.

ცხადია, თუ საჭიროა ნამრავლი ან განაყოფი n სანდო ნიშნადი ციფრით მივიღოთ, აუცილებელია თითოეული რიცხვი მოცემული იყოს $n+2$ ან $n+1$ სანდო ნიშნადი ციფრით.

2) ახარისხება და ფესვის ამოღება.
განვიხილოთ ფუნქცია

$$y=x^p.$$

თუ გამოვიყენებთ (1) ფორმულას, გვექნება:

$$\delta x^p = p \delta x, \quad (4)$$

ე. ი. მიახლოებითი რიცხვის p ხარისხის ფარდობითი ცდომილება p -ჯერ მეტია მოცემული რიცხვის ფარდობით ცდომილებაზე.

თუ $p = \frac{1}{r}$, მაშინ (4)-დან მივიღებთ:

$$\delta \sqrt[r]{x} = \frac{1}{r} \delta x. \quad (5)$$

ე. ი. r ხარისხის ფესვის ფარდობითი ცდომილება r -ჯერ ნაკლებია ფესვქვეშა გამოსახულების ფარდობით ცდომილებაზე.

თუ x -ში ნიშნად ციფრთა რაოდენობაა n , მაშინ (3) ფორმულა (4)-სათვის მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(a_m+1)\delta = (a_m+1) \frac{p}{a_1 \cdot 10^{n-1}}, \quad (6)$$

სადაც a_1 არის x -ის პირველი ნიშნადი ციფრი, a_m არის x^p -ს პირველი ნიშნადი ციფრი. ამ გამოსახულებიდან ცხადია, თუ $p > 10$ -ზე, $a_m = 9$, $a_1 = 1$, მაშინ x^p -ს სანდო ციფრთა რაოდენობა 2 ერთეულით მცირეა x -ის სანდო ციფრთა რაოდენობაზე.

(5)-სათვის (6) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(a_m+1)\delta = (a_m+1) \frac{1}{ra_1} \cdot \frac{1}{10^{n-1}}, \quad (7)$$

სადაც a_1 ფესვქვეშა გამოსახულების პირველი ნიშნადი ციფრია, ხოლო a_m — ფესვის პირველი ნიშნადი ციფრი.

თუ უხეშად შევაფასებთ: $a_m = 9$, $r = 2$, $a_1 = 1$, გვექნება

$$(a_m+1) \frac{1}{ra_1} \leq (9+1) \frac{1}{2 \cdot 10} = \frac{1}{2}.$$

მაშინ (7) მოგვცემს:

$$(a_m+1)\delta \leq \frac{1}{2 \cdot 10^{n-1}}.$$

ე. ი. ფესვის სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობა $(n-1)$ -ის ტოლი მაინც არის.

მაგალითი. გამოვიანგარიშოთ $\sqrt[4]{0,3862}$.

$$\sqrt[4]{0,3862} \approx 0,78832.$$

გამოვთვალოთ მიღებულ რიცხვში სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობა

$$\delta = \frac{1}{4} \cdot \frac{0,00005}{0,3862} = \frac{1}{4} \cdot 0,00013 = 0,000032.$$

სათანადო აბსოლუტური ცდომილება ტოლი იქნება:

$$0,78832 \cdot 0,000032 = 0,000026.$$

ე. ი. 0,78832-ში ოთხი ნიშნადი ციფრია სანდო. ამიტომ

$$\sqrt[4]{0,3862} \approx 0,7883.$$

3) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

(3, § 12) ფორმულიდან ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისათვის მივიღებთ:

$$\Delta \sin x = |\cos x| \Delta x, \quad \Delta \cos x = |\sin x| \Delta x,$$

$$\Delta \operatorname{tg} x = \frac{\Delta x}{\cos^2 x}, \quad \Delta \operatorname{ctg} x = \frac{\Delta x}{\sin^2 x}. \quad (8)$$

რადგანაც

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1,$$

გვექნება:

$$\Delta \sin x \leq \Delta x, \quad \Delta \cos x \leq \Delta x. \quad (9)$$

$\sin x$ -ის ფარდობითი ცდომილება განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\delta \sin x = \frac{|\cos x| \Delta x}{|\sin x|} = |x \operatorname{ctg} x| \frac{\Delta x}{|x|} = |x \operatorname{ctg} x| \delta x,$$

ანუ

$$\delta \sin x = |x \operatorname{ctg} x| \delta x. \quad (10)$$

ასევე განვსაზღვრავთ $\cos x$ -ის ფარდობით ცდომილებას.

$$\delta \cos x = |x \operatorname{tg} x| \delta x. \quad (11)$$

მაგალითი. განვსაზღვროთ ცდომილება $\sin 25^\circ 18'$, თუ კუთხე გაზომილია $1'$ -ის სიზუსტით.

რადგან $\Delta x = 1' = 0,0003$ რადიანს, მაშინ (9) ფორმულიდან გვექნება:

$$\Delta \sin 25^\circ 18' < 0,0003.$$

ხოლო (10)-დან მივიღებთ:

$$\delta \sin 25^\circ 18' = \operatorname{ctg} 25^\circ 18' \cdot 0,0003 = 2,703 \cdot 0,0003 \approx 0,0008 < 10^{-3}.$$

საიდანაც განვსაზღვრავთ, რომ სანდო ციფრთა რაოდენობა $\sin 25^\circ 18'$ -ში იქნება 4,

$$s + 1 = 3 + 1 = 4.$$

4) ლოგარითმი და ანტილოგარითმი.
რადგანაც

$$y = \lg x = 0,43429 \ln x,$$

ამიტომ გვექნება

$$\Delta y = 0,43429 \frac{\Delta x}{x}, \quad (12)$$

საიდანაც

$$\Delta y < \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{x}.$$

ამგვარად, მიახლოებითი რიცხვის ათობითი ლოგარითმის აბსოლუტური ცდომილება ნაკლებია ამ რიცხვის ფარდობითი ცდომილების ნახევარზე.

(12)-დან მივიღებთ:

$$\Delta x = \frac{x \Delta y}{0,43429} \approx 2,3026 x \Delta y. \quad (13)$$

ამგვარად, ანტილოგარითმის აბსოლუტური ცდომილება 2,3-ჯერ მეტია ლოგარითმის აბსოლუტურ ცდომილებაზე.

გამოვარკვეით, როგორია ცდომილება ლოგარითმების სხვადასხვა ცხრილებით სარგებლობის დროს.

პრაქტიკაში ვსარგებლობთ სამ, ოთხ, ხუთ და შვიდნიშნა ლოგარითმების ცხრილებით.

ვიცით, რომ n ნიშნა ლოგარითმების ცხრილში აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება n -ურ ადგილზე მყოფი ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს:

$$\Delta y \leq \frac{1}{2} \frac{1}{10^n}.$$

ამის გამო (13)-დან მივიღებთ:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{0,43429} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^n \cdot 0,43429}.$$

უკანასკნელი გამოსახულება დაახლოებით 10^{-n} -ის ტოლია. თუ ვისარგებლებთ მე-2 ცხრილით, დავასკვნით: $n=3$ -თვის, x რიცხვის ფარდობითი ცდომილება განისაზღვრება 10^{-3} , ე. ი. x რიცხვში სამი სანდო ნიშნადი ციფრია.

ასევე, ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილით x რიცხვის ფარდობითი ცდომილებაა 10^{-4} , ე. ი. რიცხვი ოთხი სანდო ნიშნადი ციფრით განისაზღვრება.

ამგვარად, ლოგარითმების ცხრილებით გამოთვლების ჩატარების შემთხვევაში აუცილებელია ვისარგებლოთ იმდენ ნიშნა ლოგარითმების ცხრილით, რამდენი სანდო ნიშნადი ციფრიცაა მოცემული რიცხვში.

თუ ლოგარითმების ცხრილში არ არის მოცემული რიცხვის ლოგარითმი, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ ლოგარითმების თვისებით: თუ ლოგარითმის ფუძე ერთზე მეტია, მაშინ მეტ რიცხვს მეტი ლოგარითმი შეესაბამება (ამ საკითხს მე-16 პარაგრაფში დაწვრილებით გავარჩევთ).

ვთქვათ, ცხრილშია x და $(x+1)$ -ის ლოგარითმები. ჩვენ გვინდა $(x+h)$ -ის ლოგარითმი, სადაც $h < 1$. შევადგინოთ პროპორცია

$$\frac{\lg(x+h) - \lg x}{\lg(x+1) - \lg x} \approx h; \quad (14)$$

საიდანაც

$$\lg(x+h) = \lg x + h[\lg(x+1) - \lg x]. \quad (15)$$

მაგალითად, ვიპოვოთ $\lg 243,2$ ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილის საშუალებით (არ ვისარგებლოთ დამატებითი ცხრილით, სადაც მეოთხე ნიშნის შესწორებაა). გვექნება $h=0,2$, $x=243$.

$$\begin{aligned} \lg 243,2 &= \lg 243 + 0,2(\lg 244 - \lg 243) = \\ &= 2,3856 + 0,2(2,3874 - 2,3856) = \\ &= 2,3856 + 0,2 \cdot 0,0018 = 2,3856 + 0,0004 = 2,3860. \end{aligned}$$

მიღებული შედეგი ზუსტად ემთხვევა დამატებითი ცხრილით გამოთვლილ $\lg 243,2$ -ის მნიშვნელობას.

ლოგარითმების საშუალებით გამოვთვალოთ:

$$z = \frac{\sin x}{\lg y}.$$

თუ

$$x = 18^\circ 18' (\pm 1'), \quad y = 527,6 (\pm 0,1).$$

გამოთვლები შევასრულოთ ოთხნიშნა ლოგარითმების ცხრილით.

$$\lg z = \lg \sin 18^\circ 18' - \lg \lg 527,6 = \overline{1,4969} - 0,4349 = \overline{1,0620},$$

საიდანაც

$$z = 0,1153.$$

გამოვთვალოთ ფარდობითი ცდომილება.

$$\delta z = \delta \sin x + \delta \lg y = \operatorname{ctg} x \cdot \Delta x + \frac{0,43429 \cdot \Delta y}{y \lg y}.$$

ამ გამოსახულებაში შევიტანოთ მნიშვნელობანი:

$$\Delta x = 1' = 0,0003 \text{ რად. } \Delta y = 0,1; \quad \operatorname{ctg} 18^\circ 18' = 3,024.$$

გვექნება:

$$\delta z = 3,024 \cdot 0,0003 + \frac{0,4343 \cdot 0,1}{527,6 \cdot 2,7223} = a + b,$$

$$a = 3,024 \cdot 0,0003 = 0,0009072.$$

b შესაყრები გამოვთვალოთ ისევ ლოგარითმების საშუალებით:

$$\begin{array}{r} + \lg 527,6 = 2,7223 \\ \lg 2,7223 = 0,4349 \\ \hline 3,1572 \end{array} \quad \begin{array}{r} \lg 0,04343 = \overline{2,6378} \\ - 3,1572 \\ \hline \overline{5,4806} \end{array}$$

$$b = 0,00003024,$$

ამგვარად,

$$\begin{array}{r} \delta z = 0,0009072 \\ + 0,00003024 \\ \hline 0,00093744 \approx 0,0009, \end{array}$$

საიდანაც $\Delta z = 0,1153 \cdot 0,0009 = 0,00010377 \approx 0,0001$, ე. ი. $0,1153$ -ში მხოლოდ მეოთხე ნიშნადი ციფრია საეჭვო:

$$z = 0,1153 (\pm 0,0001).$$

§ 14. საშუალო არითმეტიკული. ცნება ცდომილების ალგებრაში შეფასების შესახებ

1. წინა პარაგრაფში სიდიდის მიახლოებით მნიშვნელობად გაზომვის შედეგების საშუალო არითმეტიკული მივიღეთ. ახლა შევისწავლოთ საშუალო არითმეტიკულის ზოგიერთი თვისება.

ვთქვათ, გაწარმოეთ გაზომვა n -ჯერ და მივიღეთ მნიშვნელობანი:

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (1)$$

ამ მნიშვნელობათა მიმართ დავუშვათ:

1) მათ შორის მეტად განსხვავებული მნიშვნელობა არ არსებობს.

2) მათ შორის ერთი ნაწილი მეორეზე მეტია. მეტ მნიშვნელობათა და ნაკლებ მნიშვნელობათა რაოდენობა ტოლია.

3) მათ შორის ყველა ერთნაირადაა ზანდო.

ეს მოთხოვნები ბუნებრივია: თუ რომელიმე x_i სხვა მნიშვნელობისაგან მეტად განსხვავებულია, იგი უკუვადვით; გაზომვა ერთი და იმავე გამომთვლელისაგან წარმოებს ერთი და იმავე იარაღით და ამიტომ ყველა ერთნაირადაა მოსალოდნელი. თუ საკმარისად დიდი რაოდენობით ვაწარმოებთ გაზომვას, მაშინ მეტი და ნაკლები მნიშვნელობები თანაბარა რაოდენობითაა მოსალოდნელი.

დავსვათ საკითხი: როგორ შევადგინოთ (1) მიმდევრობიდან ისეთი სიდიდე, რომელიც ყველაზე უკეთესად იძლევა საძიებელ სიდიდეს.

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა უმცირეს კვადრატთა ზერხი, რომლის თანახმადაც საძიებელი სიდიდის ყველაზე უკეთეს მიახლოებას იძლევა ის რიცხვი, რომლისთვისაც ცდომილებათა კვადრატების ჯამი უმცირესია. ეს მოთხოვნა ბუნებრივია, რადგანაც ცდომილებანი ნამდვილი რიცხვებია, მათი კვადრატები დადებითია და, თუ ამ დადებით სიდიდეთა ჯამი მცირე იქნება, მაშინ თვით ცდომილებაც მცირე იქნება.

დავუშვათ, რომ არსებობს საუკეთესო მნიშვნელობა x , რომელიც შედგენილია (1) მიმდევრობისაგან. იგი, ცხადია, (1) მიმდევრობით ყველა წევრის ფუნქციაა: $x = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

ზემოხსენებულ მოთხოვნილ პირობათა საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ f ფუნქციის მიმართ შემდეგი პირობები სრულდება.

1) f დამოუკიდებელია x_i -ს ათვლის წერტილის მდებარეობაზე, ე. ი.

$$f(x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + h,$$

სადაც h ათვლის წერტილის გადაადგილების სიდიდეა.

2) f ფუნქცია სიმეტრიულია $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ის მიმართ:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n),$$

3) f ფუნქცია უწყვეტია $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ის მიმართ და აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

4) შეფარდება

$$\frac{f}{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

დამოუკიდებელია იმ ზომის ერთეულზე, რომლითაც f და x_i არის გაზომილი, ე. ი.

$$\frac{f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n)}{x_i k} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_i},$$

სადაც k ნებისმიერი რიცხვია.

უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = kf(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

თუ $k=0$, მაშინ გვექნება:

$$f(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (3)$$

$f(kx_1, \dots, kx_n)$ -ის მიმართ გამოვიყენოთ სასრული ნაზრდის ფორმულა¹, გვექნება:

$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = f(0, 0, \dots, 0) + kx_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + kx_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + kx_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

სადაც $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ არის f -ის კერძო წარმოებულის მნიშვნელობა საშუალო ξ_i ($i=1, 2, \dots, n$) წერტილში, $\xi_i = k\theta_i x_i$,

$$0 < \theta_i < 1.$$

თუ გამოვიყენებთ (2) და (3) ტოლობებს, უკანასკნელიდან მივიღებთ:

$$kf(x_1, x_2, \dots, x_n) = kx_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + kx_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + kx_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

თუ ამ გამოსახულებას k -ზე შევკვეცავთ, გვექნება:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad (4)$$

თუ $k \rightarrow 0$, მაშინ მე-3 პირობის თანახმად

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \rightarrow A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც A_i გარკვეული რიცხვია.

¹ ამ ფორმულას ადვილად მივიღებთ, თუ გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის და შევჩერდებით პირველი რიგის კერძო წარმოებულებზე (იხ. ნაწ. I, თავი XVI, § 7).

ამგვარად, (4)-დან გვექნება:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n. \quad (5)$$

რადგანაც f სიმეტრიულია $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ის მიმართ, ამიტომ (5) მოგვცემს:

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = A.$$

ამგვარად,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(x_1 + x_2 + \dots + x_n). \quad (6)$$

თუ ჩავსვამთ x_i -ის მაგივრად $x_i + h$, მაშინ (6)-დან მივიღებთ:

$$f(x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h) = A(x_1 + h + x_2 + h + \dots + x_n + h).$$

აქედან 1-ელი პირობის მიხედვით მივიღებთ:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) + h = A(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + Anh,$$

საიდანაც (6) ტოლობით გვექნება:

$$Anh = h.$$

მაშასადამე,

$$An = 1,$$

საიდანაც

$$A = \frac{1}{n}.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ გვექნება:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (7)$$

შევამოწმოთ, რომ მიღებული საშუალო არითმეტიკულისათვის გამოსახულებას

$$\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2, \quad \Delta x_i = x - x_i, \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = x,$$

აქვს უმცირესი მნიშვნელობა.

მართლაც, თუ x -ის მაგივრად ავიღებთ $\bar{x}$ -ს,

$$\bar{x} = x + h,$$

მაშინ საშუალო არითმეტიკულიდან x_i -ს ახალი გადახრები Δx_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), ასე განისაზღვრება.

$$\Delta \bar{x}_i = \bar{x} - x_i = x + h - x_i = \Delta x_i + h.$$

საიდანაც გვექნება:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta \bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \Delta x_i h + \sum_{i=1}^n h^2. \quad (8)$$

რადგანაც 1-ელი პირობის საფუძველზე

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0,$$

(8)-დან მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta \bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 + nh^2.$$

ეს გამოსახულება უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს, თუ $h=0$. გვექნება:

$$\min \sum_{i=1}^n (\Delta \bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2.$$

ამრიგად, $\sum_{i=1}^n (\Delta \bar{x}_i)^2$ აღწევს უმცირეს მნიშვნელობას და ეს უმცირესი მნიშვნელობაა $\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2$.

გამოსახულებას

$$m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2} \quad (9)$$

ეწოდება x საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული ცდომილება.

თუ მე-2 პირობის შესრულებას არ მოვითხოვთ, მაშინ, ნაცვლად (7) გამოსახულებისა გვექნება:

$$x = \sum_{i=1}^n A_i x_i, \quad \sum A_i = 1, \quad A_i > 0. \quad (10)$$

ამ გამოსახულებას ეწოდება $x_1, x_2, \dots, x_n$ მიმდევრობის აწონილი საშუალო არითმეტიკული, ხოლო გამოსახულებას

$$m = \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i (x - x_i)^2} \quad (11)$$

ეწოდება x აწონილი საშუალო არითმეტიკულის აწონილი საშუალო კვადრატული ცდომილება. აღვნიშნოთ, აწონილი საშუალო არითმეტიკული (10) უმცირეს მნიშვნელობას ანიჭებს აწონილ საშუალო კვადრატულ ცდომილებას (11)-ს. ამისათვის საკმარისია, $\frac{dm}{dx} = 0$ განტოლებიდან განვსაზღვროთ x . ამრიგად, (1) მნიშვნელობებიდან განსაზღვრული x -ის უაღბათესი (საუკეთესო) მნიშვნელობანია (7) და (10).

2. ვთქვათ, გვაქვს n შესაყრება ჯამი:

$$u = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (12)$$

მაშინ მიახლოებით რიცხვთა ჯამის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილების თანახმად, თუ

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \dots = \Delta a_n = \Delta,$$

გვექნება

$$\Delta u \leq n\Delta. \quad (13)$$

მიღებული ფორმულა (13) იძლევა შესაძლებელ უდიდეს მნიშვნელობას, თუ

1) ყველა შესაყრების ცდომილება (12)-ში უდიდესია,

2) ყველა ცდომილებას აქვს ერთი და იგივე ნიშანი. მაგრამ ასეთი არასასურველი შემთხვევა შესაყრებათა დიდი რაოდენობის დროს ნაკლებად მოსალოდნელი — ნაკლებად ალბათია. ფაქტიურად შესაყრებათა ცდომილებანი, როგორც წესი, სხვადასხვა ნიშნისაა და, მაშასადამე, ნაწილობრივად ერთმანეთს აბათილებენ და მიახლოებით რიცხვთა ჯამის ცდომილება გაცილებით ნაკლებია თეორიულად გამოთვლილ ჯამის ცდომილებაზე. ამის გამო მიახლოებით რიცხვთა ჯამის თეორიულ ცდომი-

ლებასთან ერთად უნდა განვიხილოთ პრაქტიკული ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება.

განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა. ვთქვათ, გვაქვს n მიახლოებით რიცხვი, რომელთა აბსოლუტური ცდომილებანია $\Delta a_i, i = \overline{1, n}$. ეს ცდომილებანი ურთიერთდამოკიდებულია და ემორჩილებიან ე. წ. ნორმალურ კანონს ერთი და იმავე სიზუსტის ზომით. ალბათობათა თეორიაში მტკიცდება, რომ აღებულ მიახლოებით რიცხვთა ჯამის აბსოლუტური ცდომილება $|\Delta u| \leq \Delta \sqrt{n}$, სადაც $\Delta a_i \leq \Delta, i = \overline{1, n}$. აქედან, ცხადია, მიახლოებით რიცხვთა ჯამის ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებად შეგვიძლია ავიღოთ

$$\Delta^* u = \Delta \sqrt{n}. \quad (14)$$

მაგალითად, 100 რიცხვის ჯამის ცდომილება, თუ თითოეული შესაყრების ცდომილებაა 0,1, თეორიულად იქნება

$$100 \cdot 0,1 = 10.$$

ფაქტიურად კი უნდა მოველოდეთ, რომ ამ 100 რიცხვის ჯამის ცდომილება (14) ფორმულით იქნება

$$10 \cdot \sqrt{100} = 100.$$

თუ მოვიგონებთ მიახლოებით რიცხვთა ნამრავლის ფარდობით ცდომილებას

$$\delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = \delta a_1 + \delta a_2 + \dots + \delta a_n,$$

ანალოგიურად (14) ფორმულისა, გვექნება

$$\delta^*(a_1, a_2, \dots, a_n) = \delta \sqrt{n}, \quad (15)$$

სადაც

$$\delta a_i \leq \delta, \quad i = \overline{1, n}.$$

(14) და (15) ფორმულებით გამოსახულ სიდიდეებს სათანადოდ პრაქტიკული ზღვრული აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებანი ან ალბათური ცდომილებანი ეწოდება.

§ 15. ცდომილებათა თეორიის შავთაშუალი ამოცანა

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ცდომილებათა თეორიის შექცეული ამოცანა: როგორი უნდა იყოს არგუმენტთა აბსოლუტური ცდომილება, რომ ფუნქციის ცდომილება არ აღემატებოდეს მოცემულ სიდიდეს.

ეს ამოცანა მათემატიკურად განუსაზღვრელია, რადგანაც ფუნქციის მოცემული ცდომილება შეგვიძლია მივიღოთ არგუმენტების სხვადასხვა ცდომილებით.

შეშტებული ამოცანის უმარტოვესი ამოხსნა მიიღება ე. წ. ტოლგავლენათა პრინციპით. ამ პრინციპის თანახმად დაიშვება, რომ

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ფუნქციის ცდომილებაზე ერთნაირ გავლენას ახდენს ყველა კერძო დიფერენციალი

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x_i.$$

ამის გამო u ფუნქციის ცდომილების ფორმულაში გვექნება:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 = \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 = \dots = \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \Delta x_n = \frac{\Delta u}{n},$$

საიდანაც

$$\Delta x_i = \frac{\Delta u}{n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

მაგალითად, ცილინდრის ფუძის რადიუსი $R \approx 2$ მ, სიმაღლე $H \approx 3$ მ როგორი აბსოლუტური ცდომილებით უნდა განესაზღვროთ R და H , რომ ცილინდრის მოცულობა გამოეთვალოთ $0,1$ მ³ ცდომილებით? გვექნება

$$v = \pi R^2 H.$$

დავუშვათ, $R = 2$ მ, $H = 3$ მ, $\pi = 3,14$, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{\partial v}{\partial \pi} = R^2 H = 12, \quad \frac{\partial v}{\partial R} = 2\pi R H = 37,7; \quad \frac{\partial v}{\partial H} = \pi R^2 = 12,6;$$

$$\Delta \pi = \frac{0,1}{3 \cdot 12} < 0,003,$$

$$\Delta R = \frac{0,1}{3 \cdot 37,7} < 0,001,$$

$$\Delta H = \frac{0,1}{3 \cdot 12,6} < 0,003.$$

ამგვარად, ცილინდრის მოცულობა რომ გამოითვალოს $0,1$ მ³ სიზუსტით, საჭიროა თითოეული სიდიდე: R , H და π გამოთვლილი იყოს სამი ათწილადი ნიშნით მაინც.

ვთქვათ, საჭიროა შედეგი n სანდო ციფრით მივიღოთ.

ცხადია, თუ მოცემული რიცხვები n -ზე მეტ ნიშნად ციფრს არ შეიცავს, მაშინ შედეგში n სანდო ნიშნად ციფრს ვერ მივიღებთ. ამის გამო რიცხვები მოცემული უნდა იყოს n -ზე მეტი სანდო ნიშნადი ციფრით, მაგრამ, თუ საკმარისად დიდი რაოდენობის ნიშნადი ციფრები ავიღეთ, მაშინ გამოთვლები მეტად შრომატევადი გახდება, ჯადაც შრომის გარკვეული ნაწილი უსარგებლოდ დაიკარგება. პრაქტიკული ცხოვრებისა-

თვის მეტად დიდი რაოდენობის ნიშნადციფრებიანი რიცხვები საჭირო არ არის.

მოვიგონოთ ის, რომ შეკრებისა და გამოკლების შემთხვევებში სიზუსტეს ათობითი ნიშნების რაოდენობით ვაფასებთ, ხოლო გამრავლებისა და გაყოფის შემთხვევაში — ნიშნად ციფრთა რაოდენობით. ამიტომ შეკრება-გამოკლების შემთხვევაში შედეგის n ათობითი ნიშნით მიღებისათვის, აუცილებელია, რიცხვები მოცემული იყოს $(n+1)$ ათობითი ნიშნით, ხოლო გამრავლება-გაყოფით n ნიშნადი ციფრით შედეგის მიღებისათვის აუცილებელია, რიცხვები $(n+1)$ ან $(n+2)$ ნიშნადი ციფრით იყოს მოცემული.

თუ ორივე საფეხურის მოქმედებით გვინდა შედეგი n ნიშნადი ციფრით მივიღოთ, მაშინ რიცხვები იმდენი ათობითი ნიშნით უნდა ავიღოთ, რამდენიც უზრუნველყოფს შედეგში n ნიშნადი ციფრის მიღებას.

მაგალითად, რამდენი ნიშნადი ციფრით უნდა ავიღოთ $\frac{2}{3}$ და $\frac{5}{7}$, რომ გამრავლში ორი სანდო ციფრი მივიღოთ. ამისათვის საკმარისია მამრავლები სამ-სამი ნიშნადი ციფრით ავიღოთ:

$$\frac{2}{3} \approx 0,667; \quad \frac{5}{7} \approx 0,714.$$

მაშინ გვექნება:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \approx 0,667 \cdot 0,714;$$

გამრავლება შევასრულოთ მარცხნიდან მარჯვნივ:

$$\begin{array}{r} \times \quad 0,667 \\ \quad 0,714 \\ \hline \quad 4669 \\ + \quad 66 \\ \quad 24 \\ \hline 0,4759 \approx 0,48. \end{array}$$

ზუსტი გამოთვლით მივიღებთ:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21} = \frac{10:21}{100} \approx 0,476$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ - \quad 84 \\ \hline 160 \\ - \quad 147 \\ \hline 130 \\ - \quad 126 \\ \hline 4 \end{array}$$

ე. ი. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \approx 0,48$, რაც ზუსტად ემთხვევა ზემოთ შესრულებულ მიახლოებით გამოთვლის შედეგს.

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი.

როგორი სიზუსტით უნდა ავიღოთ მოცემული გამოსახულების მდგენელები, რომ შედეგი სამი ნიშნადი ციფრით მივიღოთ?

$$x = \frac{0,56(5) + 2, (4)}{0, (3) - 0,33(2)}.$$

აქ საბოლოო მოქმედება გაყოფაა. პასუხში რომ სამი ნიშნადი ციფრი მოვიღოთ, საჭიროა მრიცხველი და მნიშვნელი იყოს მოცემული ოთხ-ოთხი ნიშნადი ციფრით.

მრიცხველში ნიშნადი ციფრი 0 მთელის შემდეგ იწყება, ე. ი. ნიშნადი ციფრთა რაოდენობა და ათობით ნიშანთა რაოდენობა ტოლია. ამიტომ მრიცხველის შესაჯრებები ასე უნდა ავიღოთ:

$$0,56(5) \approx 0,5656; \quad 0,2(4) \approx 0,2444,$$

მაშინ გვექნება:

$$\begin{array}{r} + \quad 0,56(5) \approx 0,5656 \\ \quad 0,2(4) \approx 0,2444 \\ \hline 0,8100 \end{array}.$$

თუ მნიშვნელშიაც სიდიდეებს ოთხ-ოთხი ათობითი ციფრით ავიღებთ, გვექნება:

$$\begin{array}{r} - \quad 0, (3) \approx 0,3333 \\ \quad 0,33(2) \approx 0,3322 \\ \hline 0,0011 \end{array}.$$

ე. ი. მნიშვნელი ორ ნიშნადი ციფრით მივიღეთ. მაშასადამე, ოთხმა ათობითმა ნიშანმა ვერ უზრუნველყო სხვაობის მოცემა სასურველი რაოდენობის ნიშნადი ციფრებით. ადვილი შესამჩნევია, რომ სხვაობაში სამი ნიშნადი ციფრის მისაღებად, აუცილებელია მნიშვნელში სიდიდეები ექვს-ექვსი ათობითი ნიშნით ავიღოთ. გვექნება:

$$\begin{array}{r} - \quad 0, (3) \approx 0,333333 \\ \quad 0,33(2) \approx 0,332222 \\ \hline 0,001111 \end{array}.$$

ამგვარად,

$$\frac{0,8100}{0,001111} = \frac{8100 \ 00 : 1111}{7777} = 729,07.$$

$$\begin{array}{r} 7777 \\ 323 \ 0 \\ \hline 222 \ 2 \\ 100 \ 80 \\ \hline 99 \ 99 \\ \hline 8100 \\ \hline 7777 \\ \hline 323 \end{array}$$

მაშასადამე,

$$x \approx 729.$$

უბრალო შემოწმება გვიჩვენებს, რომ შედეგში მიღებული ციფრები ყველა სანდოა.

§ 16. მათემატიკური ცხრილების შედგენა

მე-8 პარაგრაფში (თ. IX) მოთხრობილი იყო მათემატიკური ცხრილების მნიშვნელობის შესახებ. ახლა გავცნოთ ცხრილის აგებულებას და შედგენას. სიმარტივისთვის განვიხილოთ რიცხვთა კვადრატების ცხრილები. რიცხვთა კვადრატების ცხრილები წარმოადგენს ე. წ. სამშესავლიან ცხრილს. ცხრილის შინაარსის გაცნობის შემდეგ გასაგები გახდება ცხრილის სახელწოდება.

ცხრილი შედგენილია 1,000-დან 9,999-ის კვადრატებისათვის (ცხრილი 3). რიცხვის ორი ციფრი მოთავსებულია პირველ სვეტში, მესამე ციფრი პირველ სტრიქონში, ხოლო მეოთხე ციფრი მოთავსებულია მარჯვნივ დამატებით ცხრილში (ცხრილი 3).

ცხრილი 3

N°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	2	4	6	8	10	13	15	17	19
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	2	5	7	9	11	14	16	18	21
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932	3	5	8	12	13	16	19	22	24

მაგალითად, ვიპოვოთ $1,256^2$. ჯერ ვიპოვოთ $1,25^2$. ამისათვის ავიღოთ რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია 1,2-ის სტრიქონსა და 5-ის სვეტის გა-

დაკეთაში — 1,563 და დავუმატოთ დამატებითი ცხრილიდან 6-ის ქვეშ მყოფი რიცხვი, რომელიც 1,2-ის სტრიქონზეა მოთავსებული — 0,015. გვექნება:

$$1,256^2 = 1,578.$$

ცხადია,

$$1256^2 = (1,256 \cdot 10^3)^2 = 1,578 \cdot 10^6 = 1,578 \cdot 10^6.$$

პასუხი მივიღეთ ოთხი სანდო ნიშნადი ციფრით.

ამგვარად, აღნიშნული ცხრილით შეგვიძლია ყველა ოთხნიშნა რიცხვის კვადრატის მოძებნა. შევისწავლოთ მე-3 ცხრილის შედგენის პრინციპი.

განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულების კვადრატი:

$$(n + 0,01)^2 = n^2 + 0,02n + 0,0001.$$

ამგვარად, n -ის მომდევნო რიცხვის $(n + 0,01)$ -ის კვადრატი მოიძებნება n^2 -ის საშუალებით. მაგალითად, ვიპოვოთ $1,01^2$.

$$1,01^2 = 1^2 + 2 \cdot 0,01 + 0,0001 = 1,0201 \approx 1,020.$$

ასე მიმდევრობით მოიძებნება ყველა სამნიშნა რიცხვის კვადრატი 1,00-დან 10,00-მდე.

შევისწავლოთ მეოთხე ციფრასათვის მარჯვნივ მდებარე ცხრილის შედგენა.

მაგალითად, ვიპოვოთ $1,011^2$.

ამისათვის $1,011^2$ ასე წარმოვიდგინოთ:

$$1,011^2 = (1,01 + 0,001)^2 = 1,01^2 + 2 \cdot 1,01 \cdot 0,001 + 0,000001 = 1,0201 + 0,002021.$$

ამგვარად, $1,011^2$ ტოლია $1,01^2$ -ისა და $0,002021$ -ის ჯამისა. მიღებულ $0,002021$ -ს შესწორება ეწოდება.

გამოვთვალოთ მიმდევრობით შესწორებანი. გვექნება:

$1,011^2$ -ის	შესწორება	ტოლია	$0,002021$
$1,021^2$ -ის	"	"	$0,002041$
$1,031^2$ -ის	"	"	$0,002061$
$1,041^2$ -ის	"	"	$0,002081$
$1,051^2$ -ის	"	"	$0,002101$
$1,061^2$ -ის	"	"	$0,002121$
$1,071^2$ -ის	"	"	$0,002141$
$1,081^2$ -ის	"	"	$0,002161$
$1,091^2$ -ის	"	"	$0,002181$

ამგვარად, ყველა ჩამოთვლილი რიცხვის შესწორება დამრგვალებით ტოლია $0,002$. ამიტომაც, რომ რიცხვი 2 წერია მარჯვენა მე-3 ცხრილში

1-ის ქვეშ 1,0-ის სტრიქონზე. ასევე მოიძებნება რიცხვის კვადრატის შესწორება მეოთხე ციფრის 2-სათვის: $0,004$. რიცხვი 4 წერია მარჯვნივ ცხრილში 2-ის ქვეშ, 1,0-ის სტრიქონზე და ა. შ.

გავიგოთ ცხრილში ოთხნიშნა რიცხვების კვადრატების ცდომილება.

ცხრილში მოთავსებული სამნიშნა რიცხვის კვადრატი შეიცავს ცდომილებას, რომელიც დატოვებული ბოლო ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს არ აღემატება. ოთხნიშნა რიცხვის კვადრატი შეიცავს მეორე ცდომილებას, რომელიც სათანადო მეოთხე ციფრის შესწორების დამრგვალებითაა გამოწვეული. ეს ცდომილებაც დატოვებული ბოლო ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარს არ აღემატება. ამრიგად, ოთხნიშნა ცხრილში მოთავსებული ოთხნიშნა რიცხვის კვადრატი შეიცავს ცდომილებას, რომელიც დატოვებული ციფრის თანრიგის ერთეულს არ აღემატება.

შესწორებანი ზოგჯერ უმჯობესია გამოვავლოთ და არ მივუმატოთ. მაგალითად, $1,328^2$ რომ ვიპოვოთ, უნდა ვიპოვოთ $1,32^2$ და მივუმატოთ 8-ის შესწორება $0,022$:

$$1,328^2 = 1,32^2 + 1,022 = 1,742 + 0,022 = 1,764;$$

$1,328^2$ უმჯობესია ასე მოვძებნოთ: ჯერ მოვძებნოთ $1,33^2$ და გამოვავლოთ 2-ის შესწორება $0,005$:

$$1,328^2 = 1,33^2 - 0,005 = 1,769 - 0,005 = 1,764.$$

ცხადია, განხილული ცხრილით შეგვიძლია ნებისმიერი ოთხნიშნა რიცხვის კვადრატი მოვძებნოთ. ამისათვის საკმარისია მოცემული რიცხვი სათანადოდ წარმოვადგინოთ.

მაგალითად:

$$0,001234 = 1,234 \cdot 10^{-3}; \quad 1234578 \approx 1,235 \cdot 10^6,$$

მაშინ გვექნება:

$$0,001234^2 = 1,234^2 \cdot 10^{-6}; \quad 1234578^2 \approx 1,235^2 \cdot 10^{12}.$$

§ 17. საზღვართა ხმაბი, ზოგადი შენიშვნანი
გამოთვლების შესახებ

§ 12-ში მიღებული იყო ფუნქციის ცდომილების ზოგადი ფორმულა (3). ეს ფორმულა მიახლოებითაა, რადგანაც უკუვადგენ ნაშთითი წევრი — მაღალი რიგის უსასრულო მცირე. ზოგჯერ საჭიროა ვიცოდეთ ფუნქციის ცდომილების ზუსტი საზღვრები, როდესაც ცნობილია არგუმენტების ცდომილების საზღვრები.

ვთქვათ, ფუნქცია

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

უწყვეტად წარმოებადია ყოველი $x_i, i=1, 2, \dots, n$, არგუმენტის მიმართ რაიმე G არეში და მონოტონური, ამისათვის კი საჭიროა, კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ინარჩუნებდეს მუდმივ ნიშანს G არეში.

G არეში ავიღოთ პარალელუპიპედი

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

ვთქვათ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქცია ზრდადია, მაშინ

$$f(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) < f(x_1, x_2, \dots, x_n) < f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

გამოვთვალოთ რა $f(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$ და $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ -ს, გვეცოდინება

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის საზღვრები. შევნიშნოთ, რომ f სიდიდეზე მოქმედების დროს ქვედა საზღვარი $f(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$ უნდა დავამრგვალოთ ნაკლებ

ბოძის, ხოლო ზედა საზღვარი $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ — მეტობით, წინააღმდეგ შემთხვევაში შესაძლებელია $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ის მნიშვნელობა გამოვიდეს (1) არედან.

თუ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ მნიშვნელობანი ცნობილია, მაშინ ამ სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკულით განესაზღვრავთ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ის მნიშვნელობას.

აღნიშნულ ხერხს ეწოდება საზღვართა ხერხი.

საზღვართა ხერხით ფუნქციის მნიშვნელობის განსაზღვრის ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი.

ვიპოვოთ

$$u = \frac{\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_3}{x_4}}{(x_5 + x_6) x_7}.$$

ფუნქციის მნიშვნელობა, თუ

$$\begin{aligned} 6,41 < x_1 < 6,43; \quad 4,22 < x_2 < 4,24. \quad 1,23 < x_3 < 1,25; \\ 2,66 < x_4 < 2,68; \quad 3,20 < x_5 < 3,22; \quad 4,26 < x_6 < 4,28; \\ 5,21 < x_7 < 5,23. \end{aligned}$$

გამოთვლები ჩავატაროთ შემდეგი მიმდევრობით:

$$1) \quad \frac{6,41}{4,24} < \frac{x_1}{x_2} < \frac{6,43}{4,22}.$$

აქედან

$$1,511 < \frac{x_1}{x_2} < 1,527.$$

$$2) \quad \frac{1,23}{2,68} < \frac{x_3}{x_4} < \frac{1,25}{2,66},$$

საიდანაც

$$0,4589 < \frac{x_3}{x_4} < 0,4702.$$

$$3) \quad 1,511 - 0,4702 < \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_3}{x_4} < 1,527 - 0,4589$$

ანუ

$$1,041 < \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_3}{x_4} < 1,068.$$

$$4) \quad 3,20 + 4,26 < x_5 + x_6 < 3,22 + 4,28.$$

აქედან მივიღებთ

$$4,46 < x_5 + x_6 < 7,50.$$

$$5) \quad 7,46 \cdot 5,21 < (x_5 + x_6) x_7 < 7,50 \cdot 5,23.$$

გამოთვლები მოგვცემს

$$38,86 < (x_5 + x_6) x_7 < 39,23.$$

$$6) \quad \frac{1,041}{39,23} < u < \frac{1,068}{38,86},$$

ანუ

$$0,0255 < u < 0,0275.$$

საიდანაც

$$u = \frac{0,0275 + 0,0255}{2} = 0,0265,$$

$$\Delta u = \frac{0,0275 - 0,0255}{2} = 0,0010.$$

ამგვარად,

$$u = 0,0265 (\pm 0,0010) = 0,027 (\pm 0,001).$$

საზღვართა ხერხი შეგვიძლია გამოვიყენოთ § 15-ში განხილული არაპირდაპირი მეთოდით ჩატარებული გამოთვლებისათვის.

ზემოთ განვიხილეთ (§ 12) ზღვრული აბსოლუტური ცდომილების შეფასება, სადაც დავუშვიტ, რომ ყოველი მოქმედების შედეგად ცდომილება იზრდება, რაც პრაქტიკულად ძალიან იშვიათად გვხვდება.

მასიური გამოთვლების შემთხვევაში, როდესაც შედარებით ნაკლები სიზუსტეა საჭირო, უნდა ვისარგებლოთ შემდეგი წესით:

1) მიახლოებითი რიცხვების შეკრების და გამოკლების შედეგში უნდა შევინარჩუნოთ იმ მოცემული რიცხვის ათწილადის ნიშანთა რაოდენობა, რომელშიც ათწილადის ნიშანთა რაოდენობა უმცირესია.

2) მიახლოებითი რიცხვების ნამრავლში და განაყოფში უნდა შევინარჩუნოთ იმ მოცემული რიცხვის ნიშნად ციფრთა რაოდენობა, რომელშიც სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობა უმცირესია.

3) კვადრატში და კუბში ახარისხების დროს შედეგში უნდა შევინარჩუნოთ იმდენი ნიშნადი ციფრი, რამდენი სანდო ნიშნადი ციფრითაა ასახარისხებულ რიცხვში.

4) კვადრატული ან კუბური ფესვის ამოღების დროს შედეგში უნდა შევინარჩუნოთ იმდენი ნიშნადი ციფრი, რამდენი სანდო ნიშნადი ციფრითაა ფესვგვეყ.

5) თუ გამოთვლები ლოგარითმებით წარმოგვს, უნდა ავიღოთ მოცემულთაგან უმცირესი ნიშნად ციფრთა რაოდენობა და ვისარგებლოთ ისეთი ლოგარითმების ცხრილით, რომლის ათწილადის ნიშანთა რაოდენობა ერთით მეტია ამ ნიშნად ციფრთა რაოდენობაზე. საბოლოო შედეგში ბოლო ციფრი უკუვაგდოთ.

6) შეუღებულ გამოთვლებისათვის საჭიროა შევინარჩუნოთ ერთი ციფრით მეტი (სათადარიგო ციფრი) და საბოლოო შედეგში ეს ციფრი უკუვაგდოთ. თუ მოცემული რიცხვები შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი სიზუსტით და საჭიროა n სანდო ნიშნადი ციფრით შედეგის მიღება, მაშინ გამოთვლები უნდა ჩავატაროთ $n+1$ ან $n+2$ (მაგალითად, თუ შესაკრებთა რიცხვი ათზე მეტია) ნიშნადი ციფრებით და საბოლოო შედეგში n სანდო ნიშნადი ციფრი შევინარჩუნოთ.

7) თუ მოცემული სიდიდეები სხვადასხვა სიზუსტისაა (სხვადასხვა ათწილად ნიშანთა რაოდენობას ან სხვადასხვა სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობას შეიცავს), მაშინ ყველა მონაცემი დავამრგვალოთ ისე, რომ შევინარჩუნოთ ერთი ციფრით მეტი (სათადარიგო ციფრი), გიღრე უმცირესი სიზუსტის სიდიდეშია. საბოლოო შედეგში ეს სათადარიგო ციფრი უკუვაგდოთ.

8) თუ მასიური გამოთვლებია ჩასატარებელი, ცდომილების შეფასებისათვის ვისარგებლოთ ცდომილების ალბათური ფორმულით და საძიებელ მნიშვნელობად ავიღოთ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული (5 14, (14), (15) ფორმულები).

ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 22.

1. მოცემული მიახლოებითი რიცხვებიდან რომელი უფრო ზუსტია: 3,5; 3,50; 3,500?

2. როგორ ჩავწერთ რიცხვები: 65 000, 65000, 65000, 0-ების გარეშე?

3. როგორ ჩავწერთ 15000 გ, 24300 კმ, 2700 სმ, 5400 მ 0-ების გარეშე?

4. სხვადასხვა მოსწავლემ აწონა რკინის ნაპერი და მიიღო (გ-ში), 52,17; 51,65; 52,25; 51,83.

რას უდრის რკინის ნაპრის ალბათური მასა?

5. რიცხვი 492,305643 დამრგვალეთ სხვადასხვა თანრიგამდე.

6. რა რიცხვების დამრგვალებით მიიღება: $63 \cdot 10^2$; $19,634 \cdot 10^3$; 0,657?

7. ჩაწერეთ წილადები $\frac{9}{13}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{1}{17}$ მიახლოებით ერთი, ორი, სამი ნიშნადი ციფრით.

8. დაწერეთ π -ს მნიშვნელობა 4 ათობითი ნიშნით.

9. დაწერეთ $\frac{2}{11}$, $\frac{5}{17}$ მიახლოებით ერთი, ორი, სამი ათობითი ნიშნით.

10. იპოვეთ x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა,

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64},$$

სამი ათობითი ნიშნით და შეადარეთ ზუსტ მნიშვნელობას.

11. მონახეთ x -ის მნიშვნელობა,

$$x = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{8 \cdot 9}$$

სამი ათობითი ნიშნით და შეადარეთ ზუსტ მნიშვნელობას.

12. გამოიანგარიშეთ:

$$5,125 + 35,24 + 0,6079 + 3,4263;$$

$$0,34 + 0,567 + 6,3; \quad 65,27 + 0,003 + 0,692 + 2,5;$$

$$3,8 + 4,3586 + 12,462 + 8,72 + 0,3 + 16,5 + 0,5782.$$

13. გამოიანგარიშეთ:

$$3,518 - 1,143; \quad 52,832 - 9,41;$$

$$6,354 - 5,13; \quad 25,6 - 4,9834;$$

$$45,77 - 2,3765; \quad 24,65 - 13,27874;$$

$$7,74587 - 2,84632; \quad 12,031 - 5,67.$$

14. გამოიანგარიშეთ სხვაობა იმ სიზუსტით, რომელიც მოცემულ ათწილადშია:

$$5 \frac{1}{9} - 3,7815; \quad 4 \frac{5}{7} - 2,1245; \quad 15,236 - 10 \frac{5}{13}, \quad 6 \frac{5}{14} - 4,257.$$

15. გამოთვალეთ:

$$38,475 + 49,88 - 8,6743 - 20,5;$$

სადაც 49,88 და 20,5 ზუსტი რიცხვებია.

16. გამოთვალეთ:

$$30,252 \cdot 5,373; \quad 2,785 \cdot 0,3623; \quad 0,158 \cdot 0,12; \quad 23,3 \cdot 6,4.$$

17. გამოთვალეთ ორი ნიშნადი ციფრით:

$$15,278 \cdot 9,64; \quad 3,278 \cdot 5,634; \quad 2,78 \cdot 6,2485; \quad 24,6 \cdot 3,4.$$

18. ერთი ლიტრი რძე იწონის 0,93 კგ. მონახეთ 3,78 ლ რძის წონა.

19. მონახეთ:

$$1 : 0,009675; \quad 38,56 : 1,2; \quad 9,1 : 0,009.$$

20. მონახეთ ნამრავლი $\sqrt{74} \cdot \sqrt{5}$ სამი ნიშნადი ციფრით.

21. გამოთვალეთ სამი ნიშნადი ციფრით:

$$\frac{\left(7 \frac{5}{6} - 6 \frac{7}{8}\right) \cdot 13 \frac{1}{3}}{3 \frac{11}{12}}; \quad \frac{7 \frac{1}{3} + 8 \frac{1}{6}}{5 \frac{1}{2} - 1 \frac{7}{12}} \cdot 10 \frac{3}{7}.$$

22. მონახეთ სხეულის სიმკვრივე, თუ სხეულის მასაა 491 გ და მისი მოცულობა 63,4 სმ³.

23. მონახეთ სხეულის მოცულობა, თუ მისი მასაა 540 გ და სიმკვრივე $7,8 \frac{\text{გ}}{\text{სმ}^3}$.

24. რამდენი მარცვალაა ერთ ფუთ ხორბალში, თუ 660 მარცვლის მასაა 20 გ და ფუთში 16,38046 კგ-ია?

25. რას უდრის იმ ოთახში მოთავსებული ჰაერის მასა, რომლის განზომილებანია: 400 სმ, 350 სმ, 370 სმ, თუ ერთი ლიტრი ჰაერის მასაა 1,293 გ.

26. ერთი კგ=2,4419 გირვანქას, რამდენი კგ-ია 1 გირვანქაში?

27. ერთი ვერსი შეიცავს 500 საყენს, საყენი უდრის 84 დიუმს, 1 ჰმ=46,869 საყენს. გამოსახეთ კმ ვერსებში და დიუმში მილიმეტრებში.

28. მალაზიამ გაყიდა 72 წყვილი ფეხსაცმელი ფასდამატებით, წყვილი — 100,1 მანეთად. ამით მალაზიამ მოიგო იმდენი, რამდენიც ღირდა 6 წყვილი ფეხსაცმელი. რა ღირდა ფეხსაცმელი?

29. ჰექტარი=0,9153 დესეტინას, გამოსახეთ დესეტინა არებში.

30. კასრში 403 ვედროა, ედროში — 12,3 ლ. გამოსახეთ ჰექტოლიტრი ვედროებში და 403 ვედრო დეკალიტრებში.

31. უნდა შეიკეროს უწყვეტი ღვედი სიგრძით 3,285 მ. ამისათვის გვაქვს სამი ნაჭერი სიგრძით: 1,213 მ, 0,925 მ და 2,012 მ. ნაკერზე იხარჯება 0,1 ნაწილი მთელი ღვედის სიგრძისა. განსაზღვრეთ, რა ნაწილი უნდა ჩამოვაჭრათ ერთი ნაჭრიდან, რომ შევკეროთ ღვედი.

32. ერთი ატმოსფერო უდრის 1,033 კგ/სმ². ორთქლის წნევა ქვაბში 12,5 ატმ. რა წნევაა ქვაბის დამცველ სარქველზე, რომლის რადიუსია 4,52 სმ?

33. ატმოსფერული ჰაერი შეიცავს 0,04% ნახშირჟანგს. საცხოვრებელ ბინაში არ უნდა იყოს 0,1%-ზე მეტი ნახშირჟანგისა. ერთ საათში ადამიანი გამოჰყოფს 22,6 ლ ნახშირჟანგს. როგორი უნდა იყოს ჰაერის ცვლა ერთ საათში, თუ ერთ კაცზე მოდის ბინის 25 მ³?

34. ერთი ხსნარი შეიცავს 22,5% სიმკვარეს, მეორე 30 %-ს. შეურიეთ პირველი ხსნარის 6 ლ და მეორე ხსნარის 4 ლ. რამდენი პროცენტია სიმკვარე შერეულ ხსნარში?

35. მუხის ყუთის გარეგანი განზომილებანია $0,8 \times 0,4 \times 0,3$ მ. მისი კედლის სისქეა 12,5 მმ. ამ ყუთით უნდა გაიგზავნოს შაბიამანი. მუხის

სიმკვრივეა $0,8 \frac{\text{გ}}{\text{სმ}^3}$, შაბიამნის $5,6 \frac{\text{გ}}{\text{სმ}^3}$. კილოგრამის გაგზავნა ღირს 26 კაპ.

შაბიამნის ნატეხებს შორის თავისუფალი ადგილია მთელი მოცულობის 1%. რა ეღირება ამ ყუთით შაბიამნის გაგზავნა?

36. შეადგინეთ ცხრილი წაყვითილი კონუსის თითო სანტიმეტრიანი პორიზონტალური კვეთების მოცულობისა, რომლის ქვედა ფუძის რადიუსია $R=3,38$ სმ-ს, ზედა ფუძის რადიუსია $r=2,12$ სმ-ს და სიმაღლე $h=10,00$ სმ-ს.

37. მონახეთ ორ კონცენტრულ წრეწირს შორის მოთავსებული ფართობი, თუ ერთი წრის დიამეტრი $d_1=12,64$ სმ-ს, ხოლო მეორე წრის დიამეტრი $d_2=10,42$ სმ-ს.

38. იპოვეთ წრის რადიუსი სამი ნიშნადი ციფრით, თუ წრის იმ ნაწილის ფართობი, რომლის ცენტრალური კუთხე $74^{\circ}44'$ -ია, ტოლია 534,2 სმ-ის.

39. ცილინდრული ფორმის რკინის ნაჭრის, რომლის დიამეტრია $r=6,1$ სმ და სიმაღლე $h=7,1$ სმ, გაქლიბვით უნდა მივიღოთ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმი. განსაზღვრეთ დაკარგული მასალის მასა, თუ რკინის სიმკვრივეა $7,80 \frac{\text{გ}}{\text{სმ}^3}$.

40. საქანის რხევის პერიოდი T განისაზღვრება ფორმულით:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

სადაც l საქანის სიგრძეა სმ-ში, g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა. რა სიზუსტით უნდა გაიზომოს საქანის სიგრძე l , რომ T უდრიდეს 1 წმ, თუ $g=982$ სმ/წმ²?

41. სამკუთხედის გვერდებია $a=21,7 (\pm 0,05)$ სმ, $b=37,2 (\pm 0,05)$ სმ და კუთხე $A=28^{\circ}20' (\pm 5')$. ვიპოვოთ B კუთხე.

42. გამოთვალეთ ცილინდრის მოცულობის საზღვრები, თუ ფუძის r რადიუსი და სიმაღლე h შემდეგ უტოლობებს აკმაყოფილებს:

$$25,5 < r < 25,7, \quad 6,42 < h < 6,44.$$

43. წრეწირის l სიგრძის გაზომვით აღმოჩნდა, რომ იგი ნაკლებია 89,5 სმ-ზე და მეტია 89,0 სმ-ზე, ხოლო d დიამეტრის სიგრძე ნაკლებია 28,5 სმ-ზე და მეტია 28,0 სმ-ზე. გამოთვალეთ წრეწირის სიგრძის შეფარდება თავის დიამეტრთან.

44. განსაზღვრეთ რკინის ნაჭრის მასის საზღვრები, თუ მისი მოცულობა და სიმკვრივე ρ აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს:

$$31 \text{ სმ}^3 < v < 33 \text{ სმ}^3, \quad 7,7 \frac{\text{გ}}{\text{სმ}^3} < \rho < 7,9 \frac{\text{გ}}{\text{სმ}^3}.$$

45. კოშკის ძირამდე მიუსვლელად სიმაღლის გასაგებად საკმარისია მიწაზე გაიზომოს კოშკის მიმართულებით AB მონაკვეთი და ის α და β კუთხეები, რომლითაც A და B წერტილიდან კოშკის წვერო მოწანს. გავივით კოშკის სიმაღლეს, თუ

$$\begin{aligned} 10,5 \text{ მ} &< AB < 10,7 \text{ მ}, \\ 29^\circ &< \alpha < 31^\circ, \\ 54^\circ &< \beta < 56^\circ. \end{aligned}$$

წიშნად ციფრთა რაოდენობის გასაგებად კუთხის გრადუსული ზომა გადაიყვანეთ რადიანულში, ხოლო $\sin x$ -ის საზღვრების დასადგენად ისარგებლეთ თვისებით: კუთხის გაზრდით $\sin x$ -იც იზრდება.

46. რამდენი მეტრი რკინის მავთული დაიხარჯა საშუალოდ ბადის დასამზადებლად, რომლის მასა m , მავთულის დიამეტრი d და რკინის სიმკვრივე ρ აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს:

$$\begin{aligned} 2,175 \text{ კგ} &< m < 2,185 \text{ კგ}, \\ 2,65 \text{ მმ} &< d < 2,75 \text{ მმ}, \\ 7,75 \frac{\text{გ}}{\text{სმ}^3} &< \rho < 7,85 \frac{\text{გ}}{\text{სმ}^3}. \end{aligned}$$

47. ბურთი H სიმაღლიდან თავისი სიმძიმით დაცემის დროს ხტება h სიმაღლეზე, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\frac{3}{5} H < h < \frac{4}{5} H.$$

რა სიმაღლეზე ახტება ბურთი საშუალოდ სამი დაცემის შემდეგ, თუ იგი ჩამოქარდა 12 მ სიმაღლიდან?

48. მასის ერთეული ფუთი მოთავსებულია 16,3 კგ-სა და 16,4 კგ-ს შორის. რას უდრის ტვირთის ალბათური მასა, რომლის მასა მოთავსებულია 15,26 ფუთსა და 15,28 ფუთს შორის?

49. რა შუალედში იქნება მოთავსებული იმ ოთახის ჰაერის მასა, თუ ოთახის განზომილებანი a , b , c და ერთი კუბური ჰაერის მასა m აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს:

$$\begin{aligned} 3,75 \text{ მ} &< a < 3,77 \text{ მ}; & 3,73 \text{ მ} &< c < 3,75 \text{ მ}; \\ 4,66 &< b < 4,68 \text{ მ}; & 1,28 \text{ კგ} &< m < 1,30 \text{ კგ}. \end{aligned}$$

50. ხის H სიმაღლის გასაგებად უნდა გაიზომოს ხის ჩრდილი a და ცნობილი h სიმაღლის სარკის ჩრდილი b . რა შუალედშია მოთავსებული H , თუ გაზომვის შედეგად აღმოჩნდება:

$$12,6 \text{ მ} < a < 12,8 \text{ მ}, \quad 141 \text{ სმ} < L < 145 \text{ სმ}, \quad 164 \text{ სმ} < b < 168 \text{ სმ}?$$

51. ხის ნაჭერს, რომლის მასაა m , აქვს მართკუთხა პარალელებების ფორმა. მისი განზომილებებია a , b , c . განსაზღვრეთ ხის ნაჭრის სიმკვრივე საშუალოდ, თუ ცნობილია:

$$\begin{aligned} 156,2 \text{ გრ} &< m < 156,4 \text{ გ}, & 7,2 \text{ სმ} &< b < 7,4 \text{ სმ}, \\ 6,3 \text{ სმ} &< a < 6,5 \text{ სმ}, & 8,0 \text{ სმ} &< c < 8,2 \text{ სმ}. \end{aligned}$$

52. ოთახის სიგრძე რამდენჯერმე გაიზომეს და მიიღეს საშუალოდ 5,23 მ. განსაზღვრეთ სათანადო აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება.

53. სხეული აწონეს და მხედველობაში არ მიიღეს 0,01 კგ-ზე ნაკლები სიდიდე. რას უდრის აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება, თუ სხეულის მასა $m = 2,56$ კგ-ია.

54. დაწერეთ π რიცხვი 4 სანდო ციფრით და განსაზღვრეთ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება.

55. რამდენი ციფრი უნდა იყოს სიმძიმის ძალით გამოწვეული აჩქარება g -ში, რომ ფარდობითი ცდომილება 0,05%-ს არ აღემატებოდეს. რეკ სათანადო ფორმულით გამოთვალეთ და შემდეგ მე-2 ცხრილით შეამოწმეთ.

56. რას უდრის ფარდობითი ცდომილება, თუ შედეგად 4 სანდო ნიშნადი ციფრითაა მოცემული

$$\sqrt[3]{781,5} \approx 9,211.$$

რეკ გამოთვალეთ სათანადო ფორმულით და შემდეგ შეამოწმეთ 1 ცხრილით.

57. ფოტორიანი ეავონის მასაა $8,6 (\pm 0,1)$ ტ, ხოლო მისაბმელი ვაგონის — $7,8 (\pm 0,2)$ ტ. განსაზღვრეთ მთელი შემადგენლობის მასა, აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება, თუ შემადგენლობაში 9 ვაგონია. იგივე მაგალითი ამოხსენით საზღვართა ხერხით და შედეგები შეადარეთ.

დარწმუნდით, რომელი უფრო რაციონალური გამოთვლაა.

58. მავთულიდან, რომლის სიგრძეა $9,56 (\pm 0,01)$ მ, ჩამოვჭრათ $3,42 (\pm 0,01)$ მ. განსაზღვრეთ დარჩენილი ნაწილის სიგრძე, აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებით.

შეადგინეთ საზღვრები და საზღვართა ხერხით გამოთვალეთ სხვაობა. შეადარეთ, რომელი უფრო რაციონალური გამოთვლაა.

59. გამოთვალეთ რკინის ნაჭრის მოცულობა, თუ მისი მასაა

45 (± 1) კგ, ხოლო სიმკვრივე 7,8 ($\pm 0,05$). გამოთვალეთ რკინის ნაჭრის მოცულობის ფარდობითი და აბსოლუტური ცდომილება.

60. სპილენძის მავთულის სიგრძეა $l=62,1$ ($\pm 0,05$) მ, მასა $m=280$ ($\pm 0,5$) გ. განსაზღვრეთ მავთულის დიამეტრი, თუ მისი სიმკვრივე $\rho=8,9$ ($\pm 0,05$).

61. იპოვეთ იმ ნივთიერების სიმკვრივე, რომლისგანაც გაკეთებულია ბირთვი, თუ მისი მასა $m=34,6$ ($\pm 0,03$) კგ, ხოლო დიამეტრი $d=25,1$ ($\pm 0,05$) სმ.

62. გავიგოთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობის ფარდობითი და აბსოლუტური ცდომილება, თუ ფუძის რადიუსი $r=18,34$ ($\pm 0,1$) სმ, ხოლო მსახველი $l=15,23$ ($\pm 0,01$) სმ.

63. გავიგოთ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობის ფარდობითი და აბსოლუტური ცდომილება, თუ ფუძის რადიუსი 24 ($\pm 0,5$) სმ, ხოლო მსახველი აღვეს ფუძესთან $24^\circ 24'$ ($\pm 1'$)-იან კუთხეს.

64. განსაზღვრეთ სფეროს რადიუსის ფარდობითი ცდომილება და სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობა, თუ სფეროს ფართობი $S=155,2$ ($\pm 0,05$) დმ².

65. განსაზღვრეთ ბირთვის რადიუსის ფარდობითი ცდომილება და სანდო ციფრთა რაოდენობა, თუ ბირთვის მოცულობა $V=1524,4$ ($\pm 0,1$) სმ³.

66. სიკარიელში ვარდება სხეული. განსაზღვრეთ ვარდნის დრო, თუ ვარდნის სიმაღლე $12,50$ ($\pm 0,01$) მ, $g=9,8094$ მ/წმ².

67. სამკუთხედის კუთხეები $\alpha=85$ ($\pm 0,2$) სმ, $\beta=38$ ($\pm 0,5$) სმ. განსაზღვრეთ პიპოტენუსი, კუთხეები და სათანადო აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებანი.

68. თვლის დიამეტრია 87 ($\pm 0,5$) სმ. მონახეთ თვლის ფართობი და თვლის წრეწირის სიგრძე.

69. ჭურჭელს ცილინდრის ფორმა აქვს. მისი ფუძის წრეწირის სიგრძე $l=365$ (± 1) სმ, ხოლო სიმაღლე $h=25$ ($\pm 0,05$) სმ. განსაზღვრეთ, რამდენი ლიტრი სითხე ჩაეტევა ჭურჭელში, თუ სითხის სიმკვრივე $\rho=0,80$ ($\pm 0,01$).

70. რკინის ორი ნაჭერი, სიგრძით $l_1=5,25$ ($\pm 0,03$) მ და $l_2=3,37$ ($\pm 0,03$) მ, მიღებულია ბოლოებით ერთმანეთზე და მეორე ბოლოები მყარადაა ჩამაგრებული კედელში. რა სიგრძის ცარიელი ადგილი უნდა იყოს მათ შორის, რომ სხეული არ გაიღუნოს გაფართოების გამო. რკინის წრფივი გაფართოების კოეფიციენტი იცვლება შუალედში: $11,0 \cdot 10^{-6} < \alpha < 13,0 \cdot 10^{-6}$, ხოლო ტემპერატურა t იცვლება 15° ($\pm 0,1^\circ$)-სა და 45° ($\pm 0,1^\circ$)-ს შორის;

71. სპილენძის მილი, რომელიც მდებარე წყალს ატარებს, დატანებულია კედელში. რა სიდიდის ცარიელი ადგილი უნდა იყოს მილის გარშემო, რომ კედელი არ დაინგრეს, თუ 15° ($\pm 0,1$) ტემპერატურის დროს

მილის წრეწირის სიგრძე 163 ($\pm 0,05$) სმ-ია? სპილენძის წრფივი გაფართოების კოეფიციენტი იცვლება $16,2 \cdot 10^{-6}$ -დან $16,7 \cdot 10^{-6}$ -მდე.

72. გამოთვალეთ $\frac{1}{1,012}$, $\frac{1}{0,994}$, $\frac{1}{1005}$ -ის მნიშვნელობანი მიახლოებითი ფორმულით და გამოარკვიეთ სანდო ნიშნად ციფრთა რაოდენობა.

73. გამოთვალეთ $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{128}$, $\sqrt{521}$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობანი და მიღებული შედეგი შეადარეთ ოთხნიშნა ცხრილებით მიღებულ შედეგს. გამოარკვიეთ ცდომილებათა სიდიდე.

74. გამოთვალეთ მიახლოებითი ფორმულებით (ფუნქციის ნაზრდით) $\sin 30^\circ 30'$, $\sin 45^\circ 40'$, $\lg 30^\circ 15'$; მიღებული შედეგი შეადარეთ ოთხნიშნა ცხრილით მიღებულ შედეგს. რამდენი სანდო ციფრით მივიღეთ შედეგი?

75. გამოთვალეთ $\frac{\sqrt{5} \sin 10^\circ 12'}{\lg 1,1 - \sin 15^\circ 24'}$ მნიშვნელობა: 1) მიახლოებითი ფორმულების საშუალებით, 2) გაორგარიზმების საშუალებით და პირველი შედეგი შეადარეთ მეორეს. რამდენი სანდო ნიშნადი ციფრით მიიღება პირველი გამოთვლის შედეგი?

76. რა სიდიდით შეიცვლება წაკვეთილი კონუსის მოცულობა, თუ მისი ქვედა ფუძის რადიუსი $r=15,25$ სმ და ზედა ფუძის რადიუსი $R=18,19$ სმ. ერთდროულად გადიოდა $2,53$ სმ, ხოლო მსახველის მიერ ფუძესთან შედგენილი კუთხე $\alpha=15^\circ 36'$ შემცირდა $1^\circ 25'$ -ით. განიხილეთ ორი შემთხვევა: 1) მოცემულობანი ზუსტია და 2) მოცემულობანი მიახლოებითია.

77. ქვემოთ მოცემულია 12 გაზომვის შედეგი:

253,2	253,3	252,6
253,4	253,5	253,0
253,1	252,8	253,5
252,9	252,7	252,5

ვიპოვოთ გასაზომი სიდიდის ალბათური ზომა და ალბათური ზომის საშუალო კვადრატული ცდომილება.

78. ქვემოთ მოცემულია გაზომვის შედეგი სათანადო წონით, წონა ფრჩხილებშია:

469,2 (2); 468,3 (1); 471,1 (3); 470,2 (5); 470,6 (4); 470,7 (2).

მოვწახოთ სიდიდის აწონილი ალბათური ზომა და აწონილი ალბათური ზომის საშუალო კვადრატული ცდომილება (a სიდიდის წონაა 2, a (2), ნიშნავს a სიდიდე ორჯერაა მიღებული).

ფუნქციის ინტერპოლირება

§ 1. სასრული სხვაობანი¹

ვთქვათ მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი $[a, b]$ შუალედში $x_v=x_0+vh$ წერტილებისათვის

$$y_v=f(x_v), \quad v=0, 1, \dots, n,$$

სადაც $h=\Delta x$ — არგუმენტის ნაზრდი (ბიჯი) მუდმივი სიდიდეა. გამოსახულებას

$$\Delta f(x_0+vh)=f(x_0+(v+1)h)-f(x_0+vh) \quad (1)$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველი რიგის სასრული სხვაობა ან პირველი სხვაობა x_0+vh წერტილში.

მაგალითად,

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0),$$

$$\Delta f(x_0+h)=f(x_0+2h)-f(x_0+h).$$

განვიხილოთ პირველი რიგის სხვაობების სხვაობა

$$\Delta^2 f(x_0+h)-\Delta f(x_0).$$

პირველი რიგის სხვაობების სხვაობას ეწოდება მეორე რიგის სასრული სხვაობა ან მეორე სხვაობა:

$$\Delta^2 f(x_0)=\Delta f(x_0+h)-\Delta f(x_0).$$

მეორე სხვაობების სხვაობით განმარტავთ მესამე რიგის სხვაობას:

$$\Delta^3 f(x_0)=\Delta^2 f(x_0+h)-\Delta^2 f(x_0).$$

საზოგადოდ, n რიგის სასრული სხვაობა განმარტდება დამოკიდებულებით:

$$\Delta^n f(x_0)=\Delta(\Delta^{n-1} f(x_0)). \quad (2)$$

ამასთანავე თვით $f(x_0+vh)$ -ს, ფუნქციის მნიშვნელობას x_0+vh წერტილში, განვსაზღვრავთ როგორც ნულოვანი რიგის სხვაობას.

$$\Delta^0 f(x_0+vh)=f(x_0+vh).$$

სიმბოლო Δ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ოპერატორი, რომელიც $f(x)$ ფუნქციის შეუსაბამებს ფუნქციას, სადაც Δx მუდმივი სიდიდეა.

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x). \quad (3)$$

ადგილი შესამოწმებელია Δ ოპერატორის შემდეგი თვისებები:

$$1) \Delta(u+v)=\Delta u+\Delta v,$$

$$2) \Delta(cu)=c\Delta u, \text{ სადაც } c \text{ მუდმივი სიდიდეა,}$$

$$3) \Delta^m(\Delta^n y)=\Delta^{m+n} y.$$

გამოვთვალოთ $y=x^3$ -ის სხვაობები.

$$\Delta x^3=(x+h)^3-x^3=3x^2h+3xh^2+h^3.$$

$$\Delta^2 x^3=\Delta(\Delta x^3)=3(x+h)^2h+3(x+h)h^2+h^3-(3x^2h+3xh^2+h^3)=6xh^2+6h^3,$$

$$\Delta^3 x^3=\Delta 6xh^2=6h^2\Delta x=6h^3,$$

$$\Delta^4 x^3=\Delta 6h^3=0.$$

ამგვარად, x^3 -ის მესამე სხვაობა მუდმივია, ხოლო მეოთხე სხვაობა ნულია.

საზოგადოდ, ადგილი შესამოწმებელია, რომ $P_n(x)$ -თვის, n -ური ხარისხის მრავალწევრისათვის,

$$\Delta^n P_n(x)=n! h^n,$$

$$\Delta^m P_n(x)=0, \quad m>n.$$

სხვადასხვა რიგის სასრული სხვაობები ხელსაყრელია დავალაგოთ ცხრილის სახით. ამისათვის ფუნქციის მნიშვნელობანი მოვათავსოთ სვეტში, ხოლო პირველი რიგის სხვაობა მოვათავსოთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სვეტის გვერდით სათანადო ფუნქციის მნიშვნელობათა შორის. მეორე რიგის სხვაობანი მოვათავსოთ პირველი რიგის სხვაობათა სვეტის გვერდით, სათანადო პირველი რიგის სხვაობათა შორის და ა. შ. მივიღებთ შემდეგ ცხრილს (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

x	$f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0		
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 x_0$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_3$	
x_5	y_5			

¹ Ш. Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа, М. 1953;

В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, М. 1963.

გამოთვლების მსვლელობაზე წარმოდგენის მისაღებად შევადგინოთ სხვაობათა ცხრილი $f(x) = \sqrt{x}$ -თვის (ცხრილი 2).

ცხრილი 2					
x	$\sqrt{x}$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
400	20.0000000	1246118			
405	20.1246118	1238449	-7669	141	
410	20.2484567	1230921	-7528	134	-7
415	20.3715488	1223527	-7394		-1
420	20.4939015	1216266	-7261	133	
425	20.6155281				

ამ ცხრილში ამოღებულია პირველ ნიშნად ციფრამდე მდგომი ყველა ნული. ასე, მაგალითად, ნაცვლად — 0,0007669-ის წერია — 7669, ნაცვლად 0,0000141-ისა წერია 141 და ა. შ.

დავაკვირდეთ მე-2 ცხრილში პირველი რიგის სხვაობათა ჯამს:

$$\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4 = y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + y_4 - y_3 + y_5 - y_4 = y_5 - y_0.$$

მივიღეთ, რომ პირველი სხვაობის ჯამი ტოლია ფუნქციის ბოლო და პირველი მნიშვნელობების სხვაობისა.

ასევე, თუ ავიღებთ მეორე რიგის სხვაობათა ჯამს, მივიღებთ

$$\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_0.$$

ე. ი. მეორე რიგის სხვაობათა ჯამი ტოლია ბოლო და პირველი სხვაობების სხვაობისა და ა. შ. ცხრილის ეს თვისება შეიძლება გამოვიყენოთ სხვაობათა ცხრილის შესამოწმებლად.

გამოვთვალოთ $\Delta^n f(x)$ ფუნქციის

$$y_v = f(x + v\Delta x), \quad v = 0, 1, \dots, n,$$

მნიშვნელობებით. ამისათვის (3) ტოლობიდან განვსაზღვროთ $f(x + \Delta x)$,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x).$$

აქ Δ განვიხილოთ სიმბოლურ მამრავლად, მივიღებთ:

$$f(x + \Delta x) = (1 + \Delta) f(x). \quad (4)$$

თუ n -ჯერ გამოვიყენებთ ამ დამოკიდებულებას, მოგვცემს

$$f(x + n\Delta x) = (1 + \Delta)^n f(x). \quad (5)$$

ვისარგებლოთ ნიუტონის ბინომის ფორმულით, გვექნება

$$f(x + n\Delta x) = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \Delta^v f(x), \quad (6)$$

სადაც

$$\binom{n}{v} = \frac{n(n-1)\dots[n-(v-1)]}{1 \cdot 2 \dots v},$$

ბინომური კოეფიციენტი.

დავამტკიცოთ (6) ფორმულის სამართლიანობა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

დავუშვათ, რომ (6) სამართლიანია, შევამოწმოთ მისი სამართლიანობა $(n+1)$ -თვის.

მივიღებთ

$$\begin{aligned} f(x + (n+1)\Delta x) &= (1 + \Delta) \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \Delta^v f(x) = \\ &= \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \Delta^v f(x) + \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \Delta^{v+1} f(x) = \\ &= \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \Delta^v f(x) + \sum_{v=1}^{n+1} \binom{n}{v-1} \Delta^v f(x). \end{aligned}$$

თუ პირველი ჯამიდან გამოვყოფთ პირველ წევრს, ხოლო მეორე ჯამიდან ბოლო წევრს, გვექნება

$$\begin{aligned} f(x + (n+1)\Delta x) &= \binom{n}{0} f(x) + \sum_{v=1}^n \binom{n}{v} \Delta^v f(x) + \\ &+ \sum_{v=1}^n \binom{n}{v-1} \Delta^v f(x) + \binom{n}{n} \Delta^{n+1} f(x). \quad (7) \end{aligned}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ბინომური კოეფიციენტების თვისებებს

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \binom{n+1}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1, \\ \binom{n}{v} + \binom{n}{v-1} &= \binom{n+1}{v}, \end{aligned}$$

მაშინ (7) დამოკიდებულება მოგვცემს

$$f(x + (n+1)\Delta x) = \binom{n+1}{0} f(x) + \sum_{v=1}^n \binom{n+1}{v} \Delta^v f(x) + \binom{n+1}{n+1} \Delta^{n+1} f(x),$$

ანუ

$$f(x + (n+1)\Delta x) = \sum_{v=0}^{n+1} \binom{n+1}{v} \Delta^v f(x).$$

მაშასადამე, (6) ფორმულა სამართლიანია $(n+1)$ -თვისაც. ვისარგებლოთ იგივეებით

$$\Delta = (1 + \Delta) - 1,$$

მაშინ

$$\Delta^n f(x) = [(1 + \Delta) - 1]^n f(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} (1 + \Delta)^{n-v} f(x).$$

თუ გამოვიყენებთ (5) ტოლობას

$$(1 + \Delta)^{n-v} f(x) = f(x + (n-v)\Delta x),$$

მაშინ გვექნება

$$\Delta^n f(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} f(x + (n-v)\Delta x). \quad (8)$$

ამ ფორმულით $f(x)$ ფუნქციის n -ური რიგის სასრულო სხვაობა $\Delta^n f(x)$ გამოითვლება $f(x)$ ფუნქციის $f(x + n\Delta x)$, $f(x + (n-1)\Delta x)$, ..., $f(x)$ მნიშვნელობით.

მაგალითად,

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

$$\Delta^2 f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x),$$

$$\Delta^3 f(x) = f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x)$$

და ა. შ.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის აქვს n რიგის უწყვეტი წარმოებული x , $x + n\Delta x$ -ის შემცველ $[a, b]$ შუალედში, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x + \theta n \Delta x), \quad 0 < \theta < 1. \quad (9)$$

ეს ფორმულა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

მართლაც, $n=1$ -თვის მივიღებთ სასრული ნაზრდის ლაგრანჟის ფორმულას:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x), \quad 0 < \theta < 1. \quad (10)$$

ვთქვათ (9) ფორმულა სამართლიანია n -თვის, მაშინ

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} f(x) &= \Delta [(\Delta x)^n f^{(n)}(x + \theta n \Delta x)] = (\Delta x)^n \Delta f^{(n)}(x + \theta n \Delta x) = \\ &= (\Delta x)^n [f^{(n)}(x + \theta n \Delta x + \Delta x) - f^{(n)}(x + \theta n \Delta x)]. \end{aligned} \quad (11)$$

გამოვიყენოთ ლაგრანჟის (10) ფორმულა $f^{(n)}(x + \theta n \Delta x)$ -თვის, მივიღებთ

$$\Delta f^{(n)}(x + \theta n \Delta x) = \Delta x f^{(n+1)}(x + \theta n \Delta x + \theta_1 \Delta x),$$

სადაც $0 < \theta_1 < 1$. დავუშვათ,

$$\frac{\theta n + \theta_1}{n + 1} = \theta_2,$$

მაშინ

$$\Delta f^{(n)}(x + \theta n \Delta x) = \Delta x f^{(n+1)}(x + \theta_2 (n + 1) \Delta x),$$

სადაც $0 < \theta_2 < 1$. ამ გამოსახულებით (11) ფორმულა მოგვცემს

$$\Delta^{n+1} f(x) = (\Delta x)^{n+1} f^{(n+1)}(x + (n + 1) \theta_2 \Delta x), \quad 0 < \theta_2 < 1,$$

რითაც (9) ფორმულის სამართლიანობა ნებისმიერი n -თვის დამტკიცდა. (9) ფორმულიდან მივიღებთ

$$f^{(n)}(x + \theta n \Delta x) = \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n},$$

საიდანაც ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f^{(n)}(x + \theta n \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n},$$

ანუ

$$f^{(n)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}. \quad (12)$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ Δx -ის მცირე მნიშვნელობისათვის ადგილი აქვს დამოკიდებულებას:

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}. \quad (13)$$

§ 2. ცდომილებათა განაწილება სხვაობათა ცხრილში

სხვაობათა ცხრილის შედგენის დროს შესაძლებელია გამომთვლელი-საგან დაიშვას შემთხვევითი ცდომილება (არასწორი ჩაწერა, არასწორი გამოთვლა და სხვ.). განვიხილოთ საკითხი: როგორ გავლენას ახდენს ცდომილება სხვაობათა ცხრილზე.

ვთქვათ, $\tilde{f}(x_0 + ih)$ აღნიშნავს $f(x_0 + ih)$ ფუნქციის მიახლოებას მნიშვნელობას ε_i ცდომილებით,

$$\tilde{f}(x_0 + ih) - f(x_0 + ih) = \varepsilon_i.$$

ამ უკანასკნელიდან მივიღებთ:

$$\Delta^n f(x_0) - \Delta^n \tilde{f}(x_0) = \Delta^n \varepsilon_0.$$

(8, § 1) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\Delta^n \varepsilon_0 = \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} \varepsilon_{n-v}. \quad (1)$$

ამ ფორმულიდან მოჩანს, რომ სხვაობის რიგის ზრდასთან ერთად შემთხვევითი ცდომილების გავლენა სხვაობებზე იზრდება.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $f(x)$ ყველა მნიშვნელობა $f(x_0)$, $f(x_0 + h)$, $f(x_0 + 3h)$, $f(x_0 + 4h)$ ზუსტია, გარდა ერთადერთი $f(x_0 + 2h)$ მნიშვნელობისა, $\tilde{f}(x_0 + 2h) = f(x_0 + 2h) + \varepsilon$, მაშინ სხვაობათა ცდომილებებისათვის მივიღებთ მე-3 ცხრილს.

$f(x)$ -ის ცდომილება		ცხრილი 3			
		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
$\tilde{f}(x_0)$	0				
$\tilde{f}(x_0 + h)$	0	0			
$\tilde{f}(x_0 + 2h)$	ε	ε	$-\varepsilon$	-3ε	
$\tilde{f}(x_0 + 3h)$	0	$-\varepsilon$	ε	3ε	$-\varepsilon$
$\tilde{f}(x_0 + 4h)$	0	0			

მე-3 ცხრილი გვიჩვენებს, რომ სხვაობის უდიდესი აბსოლუტური ცდომილებანი მდებარეობენ ერთსა და იმავე სტრუქტურაში, კერძოდ, მცდარად აღებული $f(x_0 + 2h)$ -ის სტრუქტურაში.

ხშირ შემთხვევაში ფუნქციის სხვაობათა ცხრილის მაღალი რიგის სხვაობების სვეტში ვლტებულობთ სიდიდეებს, რომელთა შორის განსხვავება არ აღემატება დამრგვალებით გამოწვეულ აბსოლუტურ ცდომილებას, თუ ფუნქციას მაღალი რიგის უწყვეტი წარმოებულები აქვს. ასეთი ფუნქციის სხვაობები პრაქტიკულად მუდმივია. უფრო მაღალი რიგის სხვაობებს ამ შემთხვევაში არ გამოვთვლით. გამოვთვლით სასრულ სხვაობებს იმ რიგამდე, სადაც სხვაობები პრაქტიკულად მუდმივია. ამით მივიღებთ ე. წ. სხვაობათა წესიერ ცხრილს. წესიერი ცხრილი იძლევა

ცხრილის კონტროლის შესაძლებლობას. თუ სხვაობათა ცხრილი წესიერია ყველგან, გარდა რაიმე უბნისა, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფუნქციის მნიშვნელობები ცდომილებას შეიცავს.

განვიხილოთ მაგალითი.

ფუნქციის სხვაობანი მოცემულია მე-4 ცხრილში.

შევასწოროთ ცხრილი, თუ ფუნქციის მნიშვნელობა ცდომილებას შეიცავს.

ცხრილი 4			
x	$f(x)$	Δ	Δ^2
400	0,050000		
401	0,049938	-62	0
402	0,049876	-62	30
403	0,049844	-32	-60
404	0,049752	-92	30
405	0,049690	-62	1
406	0,049629	-61	

როგორც მე-4 ცხრილი გვიჩვენებს, დასაწყისში და ბოლოში პირველი სხვაობები თითქმის ერთნაირია, ხოლო შუაში შესამჩნევად იცვლება. ასევე დიდად განსხვავებული მნიშვნელობანია მეორე სხვაობების სვეტში. თუ მე-4 ცხრილს მე-3 ცხრილს შევადარებთ, მივიღებთ, რომ მე-4 ცხრილში უდიდესი ცდომილებაა $f(403)$ -ის სტრუქტურის გასწვრივ:

$$-2\varepsilon \approx -60 \cdot 10^{-6},$$

საიდანაც

$$\varepsilon \approx 30 \cdot 10^{-6}.$$

ასე რომ, $f(403)$ -ის მნიშვნელობა უნდა იყოს

$$0,049844 - 0,000030 = 0,049814.$$

ამ შესწორების შემდეგ მე-4 ცხრილი მიიღებს შემდეგ სახეს (ცხრილი 5).

ცხრილი 5			
x	$f(x)$	Δ	Δ^2
400	0,050000		
401	0,049938	-62	0
402	0,049876	-62	0
403	0,049814	-62	0
404	0,049752	-62	0
405	0,049690	-62	1
406	0,049629	-61	

არ უნდა დავივიწყოთ, რომ, თუ შესაძლებლობა გვაქვს, უმნიშვნელოდ უნდა შევამოწმოთ ფუნქციის საეჭვო მნიშვნელობა, რადგანაც ცხრილში წესიერების დარღვევა შეიძლება გამოწვეული იყოს თვით ფუნქციის ყოფაქცევით.

საზოგადოდ, ყველა ფუნქციას არა აქვს სხვაობათა წესიერობა ცხრილი. ასე რომ, სხვაობათა ცხრილის წესიერობა ყოველთვის არ გამოდგება ცხრილის შესამოწმებლად.

§ 3. პირველი სხვაობანი

ვთქვათ, ცნობილია $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი $f(x_v)$, $v=0, 1, \dots, n$, და ჭირჭერობით დაეუშვათ, რომ x_v წერტილები ურთიერთგანსხვავებულია.

გამოსახულებას

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \quad (1)$$

ეწოდება პირველი რიგის გაყოფილი სხვაობა და აღინიშნება $f(x_0, x_1)$ -ით.

საზოგადოდ,

$$f(x_i, x_k) = \frac{f(x_i) - f(x_k)}{x_i - x_k}. \quad (2)$$

პირველი რიგის გაყოფილი სხვაობებით შევადგინოთ გამოსახულება

$$\frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}.$$

ამ გამოსახულებას ეწოდება მეორე რიგის გაყოფილი სხვაობა და აღინიშნება $f(x_0, x_1, x_2)$ -ით,

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}.$$

ამ განმარტებით ადვილი შესამჩნევია, რომ n -ური რიგის გაყოფილი სხვაობა განისაზღვრება შემდეგი შეფარდებით

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - f(x_1, \dots, x_n)}{x_0 - x_n}. \quad (3)$$

გაყოფილი სხვაობანი ასეც აღინიშნება:

$$[x_0, x_1], [x_0, x_1, x_2], \dots, [x_0, x_1, \dots, x_n].$$

ისევე როგორც სასრული სხვაობისათვის, შევადგინოთ გაყოფილი სხვაობების ცხრილი:

ფუნქციის მნიშვნელობათა სვეტის გვერდით მოვათავსოთ პირველი რიგის გაყოფილი სხვაობები ისე, რომ გაყოფილ სხვაობას ეჭიროს სათა-

ვადო ფუნქციის მნიშვნელობათა შორის ადგილი, მაგალითად $f(x_0, x_1)$ მოთავსდება $f(x_0)$ -სა და $f(x_1)$ -ს შორის,

$$\begin{array}{cc} f(x_0) & f(x_0, x_1) \\ f(x_1) & \end{array}$$

შთლანად გაყოფილი სხვაობების ცხრილი შემდეგ სახეს მიიღებს (ცხრილი 6):

ცხრილი 6

x	$f(x)$				
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$			

მაგალითად, შევადგინოთ $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის გაყოფილი სხვაობების ცხრილი. მივიღებთ მე-7 ცხრილს.

ცხრილი 7

x	$\sqrt{x}$				
10	2.1544347				
12	2.2894285	674969			
13	2.3513347	619142	-17942	602	
14	2.4101423	588076	-15533	585	-3
16	2.5198421	548499	-13192		

ვაჩვენოთ, რომ გაყოფილი სხვაობანი წარმოიდგინება ჯამის სახით, სადაც თითოეულ შესაქმნელში შევა ფუნქციის მნიშვნელობა ერთ წერტილში.

მაგალითად, პირველი რიგის გაყოფილი სხვაობა მოგვცემს

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

მეორე რიგის გაყოფილი სხვაობისათვის გვექნება

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2) &= \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2} = \\ &= \frac{\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} - \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} - \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}}{x_0 - x_2} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

საზოგადოდ, ინდუქციის მეთოდით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^n \frac{f(x_v)}{(x_v - x_0) \dots (x_v - x_{v-1})(x_v - x_{v+1}) \dots (x_v - x_n)}. \quad (4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა;

$$\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (5)$$

მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$(x_v - x_0) \dots (x_v - x_{v-1})(x_v - x_{v+1}) \dots (x_v - x_n) = \Pi'(x_v).$$

ამის შედეგად (4) ფორმულა მოგვცემს:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^n \frac{f(x_v)}{\Pi'(x_v)}. \quad (6)$$

გაყოფილი სხვაობის განმარტებიდან ადვილი შესამჩნევია გაყოფილი სხვაობის თვისებები:

1) ფუნქციითა ჯამის გაყოფილი სხვაობა ტოლია შესაყრებ ფუნქციითა გაყოფილი სხვაობების ჯამისა,

2) მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ გაყოფილი სხვაობის ნიშნის გარეთ.

(4) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

3) გაყოფილი სხვაობა თავისი არგუმენტების სიმეტრიული ფუნქციაა:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_0, \dots, x_n) = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0).$$

გამოვთვალოთ x^n -ის პირველი გაყოფილი სხვაობა. მივიღებთ

$$f(x_i, x_k) = \frac{f(x_i) - f(x_k)}{x_i - x_k} = x_i^{n-1} + x_i^{n-2} x_k + \dots + x_k^{n-1}.$$

ეს გამოსახულება გვიჩვენებს, რომ x^n -ის პირველი რიგის გაყოფილი სხვაობა $(n-1)$ ხარისხის მრავალწევრია.

თუ შემდეგი რიგის გაყოფილ სხვაობებს გამოვთვლით, მივიღებთ, რომ x^n -ის n -ური რიგის გაყოფილი სხვაობა ერთის ტოლია, ხოლო n -ური ხარისხის მრავალწევრის n -ური რიგის გაყოფილი სხვაობა x^n -ის კოეფიციენტის ტოლია.

ტოლად დაშორებული არგუმენტებისათვის გაყოფილ სხვაობებს შემდეგი სახე ექნებათ:

$$f(x_0, x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h},$$

$$\begin{aligned} f(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) &= \frac{f(x_0 + h, x_0 + 2h) - f(x_0, x_0 + h)}{2h} = \\ &= \frac{\Delta f(x_0 + h) - \Delta f(x_0)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2}. \end{aligned}$$

საზოგადოდ,

$$f(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n}. \quad (7)$$

თუ ავიღებთ $f(x_0, x_0 - h, \dots, x_0 - nh)$ გაყოფილ სხვაობას და გამოვიყენებთ სიმეტრიულობის თვისებას

$$f(x_0, x_0 - h, \dots, x_0 - nh) = f(x_0 - nh, \dots, x_0),$$

მივიღებთ

$$f(x_0, x_0 - h, \dots, x_0 - nh) = \frac{\Delta^n f(x_0 - nh)}{n! h^n}. \quad (8)$$

(7) და (8) ფორმულები იძლევიან ტოლად დაშორებული არგუმენტებისათვის გაყოფილ სხვაობებსა და სასრულ სხვაობებს შორის კავშირს.

ზემოთ დაფუძნებით, რომ $x_v, v=0, 1, \dots, n$, არგუმენტები ყველა განსხვავებული იყო. როდესაც არგუმენტების ყველა მნიშვნელობანი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ (7) გამოსახულებაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $h \rightarrow 0$ და, თუ მხედველობაში მივიღებთ (12, § 1) ფორმულას, გვექნება (იგულისხმება $f(x)$ ფუნქციის n რიგის უწყვეტი წარმოებული აქვს $[a, b]$ შუალედში)

$$f(x_0, x_0, \dots, x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (9)$$

თუ არგუმენტები ყველა არაა განსხვავებულნი, მაშინ გაყოფილ სხვაობათა გამოთვლას მივყავართ $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნაზე. ამ შემთხვევაში გაყოფილ სხვაობას განვმარტავთ როგორც არათანამთხვეული არგუმენტების გაყოფილი სხვაობის ზღვარს.

მაგალითად,

$$f(x_0, x_1, x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \varepsilon, x_1, x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon, x_1) - f(x_1, x_0)}{\varepsilon}.$$

გამოვიყენოთ ფორმულა, რომლის საშუალებითაც გამოვთვალოთ განმეორებული არგუმენტებისთვის გაყოფილ სხვაობას განუზღვრელობის გახსნის გარეშე.

(4) ფორმულიდან გვექნება

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f(x)}{\Pi(x)} - \sum_{v=0}^n \frac{f(x_v)}{(x - x_v) \Pi'(x_v)}, \quad (10)$$

სადაც $\Pi(x)$ განისაზღვრება (5) ტოლობით,

$$\Pi(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) = \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

აეილოთ $\frac{1}{\Pi(x)}$.

რადგანაც $\Pi(x)$ მართივ მამრავლებად იშლება,

$$\frac{1}{\Pi(x)} = \sum_{v=0}^n \frac{1}{(x - x_v) \Pi'(x_v)}.$$

ამის შედეგად (10) მოგვცემს:

$$\begin{aligned} f(x, x_0, \dots, x_n) &= \sum_{v=0}^n \frac{f(x)}{(x - x_v) \Pi'(x_v)} - \sum_{v=0}^n \frac{f(x_v)}{(x - x_v) \Pi'(x_v)} = \\ &= \sum_{v=0}^n \frac{f(x) - f(x_v)}{(x - x_v) \Pi'(x_v)}, \end{aligned}$$

ანუ

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^n \frac{f(x, x_v)}{\Pi'(x_v)}. \quad (11)$$

ამ ფორმულიდან გამოვთვალოთ $f(x, x, x_1, \dots, x_n)$,

$$f(x, x, x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_0 \rightarrow x} f(x, x_0, \dots, x_n).$$

ამისათვის (11) გამოსახულების მარჯვენა მხრიდან გამოვყოთ $f(x, x_0)$ შესაყრები:

$$\begin{aligned} f(x, x_0, \dots, x_n) &= \frac{f(x, x_0)}{\Pi'(x_0)} + \sum_{v=1}^n \frac{f(x, x_v)}{\Pi'(x_v)} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0) \Pi'(x_0)} + \sum_{v=1}^n \frac{f(x, x_v)}{\Pi'(x_v)}. \end{aligned}$$

ცხადია, თუ $f(x)$ -ს აქვს უწყვეტი წარმოებული $[a, b]$ შუალედში, მაშინ

$$f(x, x, x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_0 \rightarrow x} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0) \Pi'(x_0)} - \sum_{v=1}^n \frac{f(x, x_v)}{(x_0 - x_v) \prod_{k=1, k \neq v}^n (x_v - x_k)} \right),$$

საიდანაც

$$f(x, x, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x, x)}{\prod_{k=1}^n (x - x_k)} - \sum_{v=1}^n \frac{f(x, x_v)}{(x - x_v) \prod_{k=1, k \neq v}^n (x_v - x_k)}. \quad (12)$$

სადაც

$$f(x, x) = \lim_{x_0 \rightarrow x} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x).$$

თუ $f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ შუალედში აქვს m რიგის უწყვეტი წარმოებული, მაშინ სრული მათემატიკური ინდუქციით ადვილად დავამტკიცებთ, რომ

$$f(x, x, \dots, x, x_1, \dots, x_n) = \frac{\overbrace{f(x, x_1, \dots, x)}^{m\text{-ჯერ}}}{\prod_{k=1}^n (x - x_k)} - \sum_{v=1}^n \frac{\overbrace{f(x, \dots, x, x_v)}^{m-1}}{(x - x_v) \prod_{k=1, k \neq v}^n (x_v - x_k)}. \quad (13)$$

გამოვთვალოთ განმეორებული არგუმენტებისათვის ზოგიერთი გაყოფილი სხვაობანი (13) ფორმულის საფუძველზე.

$$f(x, x, a) = \frac{f(x, x) - f(x, a)}{x - a} = \frac{f'(x) - f(x, a)}{x - a}.$$

$$f(x, x, x, a) = \frac{f(x, x, x) - f(x, x, a)}{x - a} = \frac{f'(x)}{2! (x - a)} - \frac{f'(x) - f'(x, a)}{(x - a)^2}$$

§ 4. ფუნქციონალური აპროქსიმაცია

ფუნქციონალური აპროქსიმაციის მე-9 თავში (§ 2—§ 4) ზოგადად გავიყურებით. ამ საკითხს ახლა დაწვრილებით შევისწავლით.

1. **ამოცანის დასმა.** ვთქვათ, y სიდიდე x სიდიდის ფუნქციაა. ეს ნიშნავს, x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის მისი განსაზღვრის სიმრავლიდან, მაგალითად, $[a, b]$ სეგმენტისა, არსებობს y -ის სათანადო მნიშვნელობა, მაგრამ ეს დამოკიდებულება ყოველთვის ცნობილი $y=f(x)$ ფუნქციით არ გამოისახება. ზოგჯერ შეიძლება ეს დამოკიდებულება გამოისახოს $y=f(x)$ -ით, მაგრამ $f(x)$ იმდენად რთული იყოს, რომ გამოთვლებისათვის არ გამოდგეს ან, შეიძლება, გამოდგეს, მაგრამ გამოთვლები მეტად შრომატევადი იყოს. ამ მიზეზთა გამო გაერთელებულია და პრაქტიკულად მეტად მნიშვნელოვანი, როდესაც x -სა და y -ს შორის დამოკიდებულება მოცემულია ცხრილებით. ეს ნიშნავს, რომ x არგუმენტის დისკრეტულ მნიშვნელობებს $\{x_v\}$, $v=0, 1, \dots, n$, შეესაბამება y -ის მნიშვნელობები, $\{y_v\}$, $v=0, 1, \dots, n$. საზოგადოდ, y -ის მნიშვნელობები მიიღება გამოთვლებით ან ცდების — ექსპერიმენტის საშუალებით. პრაქტიკაში ხშირად გვჭირდება y -ის მნიშვნელობანი არა მარტო მოცემულ x_v წერტილებში, არამედ მისგან განსხვავებულ წერტილებში. მაგრამ, როგორც აღვნიშნეთ, ამ ახალ წერტილებში y -ის მნიშვნელობანი ხშირად ძალიან რთული, მეტად შრომატევადი გამოთვლებით ან ძვირადღირებული ცდებით მიიღება.

ამრიგად, დროისა და გამოთვლების საშუალებათა ეკონომიის თვალსაზრისით, ჩვენ მივდივართ იქამდე, რომ ცხრილში მოცემული y -ის მნიშვნელობებით გამოვთვალოთ x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის აღებული არედან y -ის მნიშვნელობა. ამ მიზანს ემსახურება მოცემული $f(x)$ ფუნქციის მიახლოებით რომელიმე $\varphi(x)$ ფუნქციით შეცვლა — აპროქსიმაცია ისე, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციის $f(x)$ ფუნქციიდან გადახრა (რაიმე აზრით) მოცემულ არეში იყოს უმცირესი. $f(x)$ ფუნქციას აპროქსიმებული, ხოლო $\varphi(x)$ ფუნქციას მაპროქსიმებული (სააპროქსიმაციო) ფუნქცია ეწოდება. რაც შეეხება ცნებას „გადახრა“ ქვემოთ იქნება განსაზღვრული.

პრაქტიკაში მნიშვნელოვანია, თუ როგორ ფუნქციას ავიღებთ მაპროქსიმებელ ფუნქციად. ჩვეულებრივად, მაპროქსიმებელ ფუნქციებად ვიღებთ მრავალწევრებს, ტრიგონომეტრიულ მრავალწევრებს და სხვა მარტივ ფუნქციებს. მაგალითად, ავიღოთ მრავალწევრი

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \quad (1)$$

ასე შევარჩიოთ $a_0, a_1, \dots, a_n$ კოეფიციენტები, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე $\varphi(x)$ მრავალწევრის $f(x)$ ფუნქციიდან გადახრა იყოს უმცირესი. ამ შემთხვევაში გადახრის ზომად შეგვიძლია ავიღოთ ინტეგრალი

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx. \quad (2)$$

გავუტოლოთ ნულს ამ ინტეგრალის კერძო წარმოებულები ყველა a_k -ს მიმართ, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას a_k -ს მიმართ (იხ. § 12).

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

ამოვხსნით რა (3) განტოლებათა სისტემას $a_0, a_1, \dots, a_n$ მიმართ, ჩავსვით ეს მნიშვნელობანი (1) გამოსახულებაში, მივიღებთ $f(x)$ ფუნქციის საპროქსიმებელ $\varphi(x)$ მრავალწევრს.

თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე აიგება დისკრეტული (x_v, y_v) წერტილებით, ასეთ აპროქსიმაციას ეწოდება დისკრეტული წერტილებით აპროქსიმაცია ან, მოკლედ, დისკრეტული აპროქსიმაცია. თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია აგებული იქნება წერტილთა უწყვეტ სიმრავლეზე — მთელ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციით, ასეთ აპროქსიმაციას უწყვეტი ან ინტეგრალური აპროქსიმაცია ეწოდება. ზემოთ (1) მრავალწევრი ინტეგრალური აპროქსიმაციით ავაგეთ.

2. **ინტერპოლირება.** დისკრეტული აპროქსიმაციის ერთ-ერთი ძირითადი ტიპია ინტერპოლირება. მოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის ავაგებთ (1) მრავალწევრს ისე, რომ მისი მნიშვნელობანი მოცემულ x_v წერტილში ემთხვეოდეს $f(x_v)$ მნიშვნელობას.

$$\varphi(x_v) = f(x_v), \quad v = 0, 1, \dots, n. \quad (4)$$

ამასთან მოვითხოვთ, რომ $x_i \neq x_k$, $i \neq k$ -თვის. (4) განტოლებათა სისტემიდან განსაზღვრავთ $a_0, a_1, \dots, a_n$ კოეფიციენტებს. აღებულ $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებს ეწოდება კვანძითი წერტილები — ინტერპოლირების წერტილები. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ინტერპოლირებული ფუნქცია, ხოლო $\varphi(x)$ ფუნქციას საინტერპოლაციო ფუნქცია (მაინტერპოლირებელი ფუნქცია).

შემდეგში ნათქვამი იქნება, რომ საინტერპოლაციო მრავალწევრის $f(x)$ ფუნქციიდან გადახრა განისაზღვრება ზომით (§ 5)

$$\|f(x) - \varphi(x)\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \varphi(x)|. \quad (5)$$

დამტკიცებული იქნება

$$f(x) - \varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad a < \xi < b.$$

ცხადია, ეს სხვაობა მიიწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $n \rightarrow \infty$, თუ $\forall n \in \mathbb{N}$ -თვის $|f^{(n)}(x)| \leq M$. რადგანაც

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M,$$

მაშინ ადვილი შესამჩნევია, რომ $\forall \varepsilon > 0$ -თვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ n ,

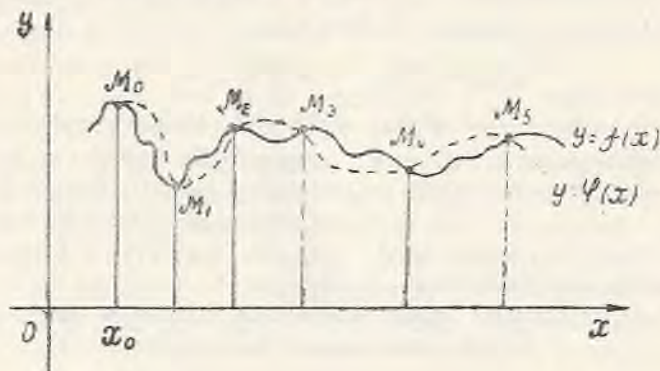
$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M < \varepsilon.$$

ამრიგად, $\varepsilon > 0$ -სათვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ n და, მაშასადამე, საინტერპოლაციო წერტილების რიცხვი ისე, რომ

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon. \quad (6)$$

ε -ის შემცირებასთან ერთად იზრდება $\varphi(x)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი n , რაც ყოველთვის სასურველი არაა. რადგანაც, მაშინ იზრდება $\varphi(x)$ -ის კოეფიციენტთა რიცხვი და, მაშასადამე, განტოლებათა რიცხვი (4) განტოლებათა სისტემაში. შემდეგში (§ 9) ნაჩვენები იქნება $[a, b]$ სეგმენტზე $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილების ისეთი განლაგება, რომ მოცემული n -სათვის $|f(x) - \varphi(x)|$ გამოსახულებას უმცირესი მნიშვნელობა ჰქონდეს.

გეომეტრიულად ინტერპოლირების ამოცანა მდგომარეობს ისეთი $y = \varphi(x)$ წირის აგებაში, რომელიც $y = f(x)$ წირის $M_v(x_v, y_v)$, $v = 0, 1, \dots, n$, წერტილებზე გაივლოს (ნახ. 1).



ნახ. 1

ზოგადი სახით ინტერპოლირების ამოცანას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. მაგრამ, თუ მაინტერპოლირებელი ფუნქცია n ხარისხის მრავალწევრია, მაშინ ინტერპოლირების ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

მართლაც, თუ არსებობს $P_n(x)$ და $Q_n(x)$ მრავალწევრები, $P_n(x) \neq Q_n(x)$, რომლებიც (4) პირობას აკმაყოფილებენ, მაშინ n ხარისხის განტოლებას

$$P_n(x) - Q_n(x) = 0$$

ექნება $x = x_v, v = 0, 1, \dots, n$, ამონახსნები, ე. ი. n ხარისხის განტოლებას $n+1$ ამონახსნი აქვს, რაც შეუძლებელია. ამრიგად, $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.

შევნიშნოთ, რომ ცხრილით მოცემული მნიშვნელობანი $y_v = f(x_v)$ შეიცავს ცდომილებას. ისეთი საინტერპოლაციო $y = \varphi(x)$ მრავალწევრის აგება, რომლის გრაფიკი აუცილებლად გაივლოს საინტერპოლაციო $(x_v, f(x_v))$, $v = 0, 1, \dots, n$, წერტილებზე, არაა მიზანშეწონილი, რადგანაც ის ცდომილება, რაც აქვს $f(x_v)$ -ს, გადაეცემა ზუსტად აგებულ საინტერპოლაციო მრავალწევრს. ამ შემთხვევაში ზუსტი $\varphi(x)$ -ის ნაცვლად უნდა ავაგოთ ისეთი მრავალწევრი, რომელიც გარკვეული მოსაზრებით ახლოსაა $(x_v, f(x_v))$ წერტილებთან. სწორედ ამ მოსაზრებით განვიხილოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით $\varphi(x)$ ფუნქციის აგება (ნაწ. I, თავი XVI, § 10). ამ შემთხვევაში $\varphi(x)$ მრავალწევრის ხარისხი $m \leq n$. თუ $m = n$, გვექნება ინტერპოლირება. პრაქტიკაში ლეზულობენ $m = 1, 2, 3$. გადახრის ზომაა

$$S = \sum_{v=0}^n [f(x_v) - \varphi(x_v)]^2,$$

რომლის მინიმალური მნიშვნელობით განვსაზღვრავთ $\varphi(x)$ მრავალწევრის $a_0, \dots, a_m$ კოეფიციენტებს.

საინტერპოლაციო $\varphi(x)$ ფუნქციით ესარგებლობთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობის გამოსათვლელად, როდესაც $x \in [c, d]$, სადაც $c = \min x_v$, $d = \max x_v$. ამ ოპერაციას ინტერპოლირება ეწოდება. თუ გვინდა $f(x)$ გამოვთვალოთ იმ x -თვის, რომელიც არ ეკუთვნის $[c, d]$ სეგმენტს, ამ მნიშვნელობის განსაზღვრას ეწოდება ექსტრაპოლირება. შემდეგში სიტყვა „ინტერპოლირებაში“ ვიგულისხმებთ როგორც ინტერპოლირებას, ისე ექსტრაპოლირებას.

ზ. თანაბრად აპროქსიმაცია. დავაკვირდეთ (6) გამოსახულებას. იგი გვიჩვენებს $\varphi(x)$ ფუნქციის აგებას ისე, რომ ყოველი x -სათვის $a \leq x \leq b$

სეგმენტიდან $\varphi(x)$ ფუნქციის გადახრა $f(x)$ ფუნქციიდან ნაკლები იყოს წინასწარ აღებულ დადებით ε რიცხვზე,

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b. \quad (7)$$

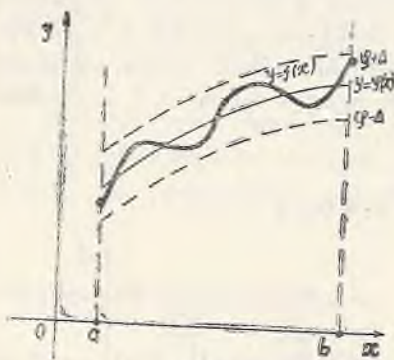
ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ $\varphi(x)$ მრავალწევრი $[a, b]$ სეგმენტზე თანაბრად უახლოვდება ε სიზუსტით $f(x)$ ფუნქციას. ცხადია, $\varphi(x)$ ფუნქციის გადახრა $f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური ცდომილებაა მთელ $[a, b]$ სეგმენტზე (ნახ. 2),

$$\Delta\varphi = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \varphi(x)|. \quad (8)$$

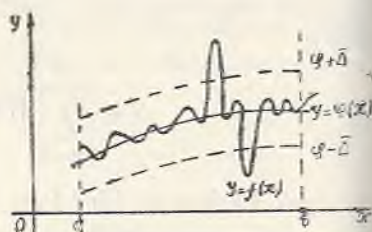
შემოვიღოთ საშუალო კვადრატული გადახრის ცნება. $\varphi(x)$ ფუნქციის საშუალო კვადრატული გადახრა $f(x)$ ფუნქციიდან განისაზღვრება ტოლობით (ნახ. 3)

$$\bar{\Delta}\varphi = \sqrt{\frac{S}{n+1}}. \quad (9)$$

მე-2 და მე-3 ნახაზების შედარებით, ადვილად შევამჩნევთ მე-(8) და მე-(9) განსაზღვრებებს შორის პრინციპულ განსხვავებას.



ნახ. 2



ნახ. 3

შემდეგში (§ II) დამტკიცებული იქნება $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის $n(\varepsilon)$ ხარისხის მრავალწევრით ε სიზუსტით თანაბრად მიახლოების შესაძლებლობა.

კერძოდ, თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე გაიშლება თანაბრად კრებად მწკრივად, მაშინ მამართქსიმირებელ $\varphi(x)$ ფუნქციად შეგვიძლია ავიღოთ მწკრივის კერძო წევრი. ამ მეთოდით გამოითვლება ელემენტარულ

ფუნქციათა მნიშვნელობანი. მაგალითად, $\sin x$ -ის გამოთვლა შეგვიძლია სხვადასხვა სიზუსტით შემდეგი მწკრივის საშუალებით

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (10)$$

შემდეგში ნაჩვენები იქნება, თუ რამდენი წევრი უნდა ავიღოთ (10) მწკრივიდან, თითოეული წევრი როგორი სიზუსტით უნდა ავიღოთ და რამდენ ნიშნად ციფრამდე უნდა დავამრგვალოთ მიღებული წამი, რომ შედეგი სათანადო სიზუსტით მივიღოთ (თავი XII, § 3).

აპროქსიმაციის საკითხები დაწვრილებით განიხილება მომდევნო პარაგრაფებში.

§ 5. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულა

1. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი. ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: ავაგოთ n ხარისხის მრავალწევრი $P_n(x)$, რომელიც საინტერპოლაციო $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებში მიიღებს $y_v = f(x_v)$, $v=0, 1, \dots, n$, მნიშვნელობებს.

ცხადია, $P_n(x)$ ხარისხის მრავალწევრის აგების მეთოდს მნიშვნელობა არა აქვს, რადგანაც, როგორც წინა პარაგრაფის ბოლოში იყო შენიშნული, n ხარისხის მრავალწევრები, რომლებიც ერთსა და იმავე x_v წერტილზე ერთსა და იმავე მნიშვნელობებს ღებულობენ, იგივეურად ტოლებია.

ვთქვათ საძიებელ მრავალწევრს აქვს სახე:

$$P_n(x) = \sum_{v=0}^n A_v (x - x_0) \dots (x - x_{v-1}) (x - x_{v+1}) \dots (x - x_n), \quad (1)$$

სადაც A_v კოეფიციენტები ჯერჯერობით უცნობია.

(1) ტოლობაში ჩავსვათ $x = x_v$, მივიღებთ

$$y_v = A_v (x_v - x_0) \dots (x_v - x_{v-1}) (x_v - x_{v+1}) \dots (x_v - x_n), \quad (2)$$

რადგანაც სხვა შესაძლებლობები ნულის ტოლი იქნება.

(2)-დან განვსაზღვროთ A_v , გვექნება

$$A_v = \frac{y_v}{(x_v - x_0) \dots (x_v - x_{v-1}) (x_v - x_{v+1}) \dots (x_v - x_n)}. \quad (3)$$

ამგვარად, (1) მრავალწევრს ექნება სახე:

$$P_n(x) = \sum_{v=0}^n \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{v-1}) (x - x_{v+1}) \dots (x - x_n)}{(x_v - x_0) \dots (x_v - x_{v-1}) (x_v - x_{v+1}) \dots (x_v - x_n)} y_v. \quad (4)$$

(4) გამოსახულებას ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი ეწოდება, ხოლო (3) კოეფიციენტებს — ლაგრანჟის კოეფიციენტები.

მაგალითად, შევადგინოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი, თუ კვანძითი წერტილები და ფუნქციების მნიშვნელობანი მოცემულია მე-8 ცხრილში.

ცხრილი 8

v	0	1	2	3
x	1,2	1,4	1,5	1,7
y	0,3624	0,7000	0,0707	-0,1258

გამოვთვალოთ კოეფიციენტები.

$$A_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{0,3624}{((1,2 - 1,4)(1,2 - 1,5)(1,2 - 1,7))} = -12,08;$$

$$A_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad A_1 = 28,33;$$

$$A_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad A_2 = -11,78;$$

$$A_3 = \frac{y_3}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \quad A_3 = -4,293.$$

ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრს ექნება სახე:

$$P_3(x) = -12,08(x - 1,4)(x - 1,5)(x - 1,7) + 28,33(x - 1,2) \times \\ \times (x - 1,5)(x - 1,7) - 11,78(x - 1,2)(x - 1,4) \times (x - 1,7) - \\ - 4,293(x - 1,2)(x - 1,4)(x - 1,5). \quad (5)$$

თუ გვინდა $f(1,24)$ -ის მნიშვნელობის განსაზღვრა, (5) ფორმულაში უნდა ჩავსვათ $x=1,24$. გამოთვლის შედეგად მივიღებთ $f(1,24)$ -ის მიახლოებით მნიშვნელობას.

(4) ფორმულის ჩაწერა შეიძლება უფრო კომპაქტურად. ამისათვის ვისარგებლოთ აღნიშვნით

$$\Pi(x) = \prod_{v=0}^n (x - x_v),$$

მაშინ

$$\Pi'(x_v) = \prod_{k=0, k \neq v}^n (x_v - x_k).$$

ამის შედეგად (4) გამოსახულება მოგვეცემს

$$P_n(x) = \Pi(x) \sum_{v=0}^n \frac{y_v}{(x - x_v) \Pi'(x_v)}. \quad (6)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც საინტერპოლაციო წერტილები თანაბრად არიან დაშორებული,

$$x_v = x_0 + vh, \quad v = 0, 1, \dots, n,$$

მაშინ x -ის მაგივრად შემოვიღოთ ახალი ცვლადი t ,

$$x = x_0 + th.$$

გამოვთვალოთ $x - x_v$, $\Pi(x)$, $x_v - x_k$, $\Pi'(x_v)$. გვექნება

$$x - x_v = (t - v)h.$$

$$\Pi(x) = t(t-1)\dots(t-n)h^{n+1} = \Pi^*(t)h^{n+1}, \quad x_v - x_k = (v-k)h,$$

$$\Pi'(x_v) = v(v-1)\dots(v-(v-1))(v-(v+1))\dots(v-n)h^n,$$

ანუ

$$\Pi'(x_v) = (-1)^{n-v} v! (n-v)! h^n.$$

ამის შედეგად (6) ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$P_n(x_0 + th) = \Pi^*(t) \sum_{v=0}^n \frac{(-1)^{n-v} y_v}{(t-v) \cdot v! \cdot (n-v)!}. \quad (7)$$

ლაგრანჟის (6) საინტერპოლაციო მრავალწევრი იძლევა $[a, b]$ შუალედის კვანძით x_v წერტილებში $f(x)$ ფუნქციის ზუსტ მნიშვნელობებს: $y_v = f(x_v)$, ხოლო სხვა წერტილებში მიახლოებით მნიშვნელობას. $f(x) \approx P_n(x)$.

2. ინტერპოლირების სიზუსტე.

განვიხილოთ სხვაობა

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \quad (8)$$

იგი წარმოადგენს $P_n(x)$ -ის ნამდვილ ცდომილებას. განვსაზღვროთ $R_n(x)$.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ შუალედში $(n+1)$ -ჯერ დიფერენცირებადია, მაშინ $R_n(x)$ -ს ასეთი სახე ექნება:

$$R_n(x) = \frac{\Pi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (9)$$

სადაც $\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, ხოლო ξ რაღაც წერტილია $[a, b]$ შუალედში; ξ საზოგადოდ x -ზეა დამოკიდებული. მართლაც, ვთქვათ

$$R_n(X) = K\Pi(X),$$

სადაც X ფიქსირებული რიცხვია, K — ჯერჯერობით უცნობი.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Phi(x) = R(x) - K\Pi(x). \quad (10)$$

$\Phi(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ შუალედში აქვს $n+2$ წერტილი: $x=x_0, \dots, x_n, x=X$. როლის თეორემის თანახმად $\Phi'(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ შუალედში $(n+1)$ წერტილი მაინც ექნება, ხოლო $\Phi''(x)$ -ს n წერტილი მაინც ექნება და ა. შ. $\Phi^{(n+1)}(x)$ -ს ერთი წერტილი მაინც ექნება იმავე შუალედში.

მ. ი.

$$\Phi^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

(10) გამოსახულებიდან გვექნება

$$\Phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P_n^{(n+1)}(\xi) - K\Pi^{(n+1)}(\xi).$$

მაგრამ

$$P_n^{(n+1)}(\xi) = 0, \quad \Pi^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$$

ამიტომ

$$f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0,$$

საიდანაც

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

ამ მნიშვნელობის შეტანის შემდეგ $R_n(x)$ -ის გამოსახულებაში, მივიღებთ (9) ფორმულას.

(7) ფორმულისთვის ნაშთი მიიღებს სახეს

$$R_n(x_0 + th) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi). \quad (11)$$

(8) გამოსახულებიდან მივიღებთ

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \quad (12)$$

(12) ფორმულას ეწოდება ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულა.

ამრიგად, თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე $(n+1)$ -ჯერ დიფერენცირებადია, მაშინ $P_n(x)$ მრავალწევრით, $P_n(x_v) = f(x_v)$, $v=\overline{0, n}$, მიახლოებით გამოისახება $f(x)$ ფუნქცია,

$$f(x) \approx P_n(x),$$

$|R_n(x)|$ ცდომილებით,

$$|R_n(x)| \leq \frac{M \max |\Pi(x)|}{(n+1)!},$$

სადაც

$$M = \max |f^{(n+1)}(x)|, \quad a \leq x \leq b.$$

ახლა აღვნიშნოთ შემდეგი გარემოება.

საინტერპოლაციო ფორმულის აგების დროს ჩვენთვის ცნობილია ინტერპოლირებული $f(x)$ ფუნქციის არა ზუსტი მნიშვნელობანი, არამედ მიახლოებითი მნიშვნელობანი. ამის შედეგად წარმოიშობა ცდომილება (აუცილებელი ცდომილება). ეს ცდომილება განისაზღვრება ტოლობით

$$\Delta P_n = \tilde{P}_n(x) - P_n(x),$$

სადაც $P_n(x)$ $f(x)$ -ის ზუსტი მნიშვნელობებით აგებული მრავალწევრია, ხოლო $\tilde{P}_n(x)$ $f(x)$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობებით აგებული მრავალწევრია. (7) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\Delta P_n = \Pi(x) \sum_{v=0}^n \frac{\Delta y_v}{(x-x_v) \Pi'(x_v)},$$

სადაც Δy_v მოცემული y_v -ს ცდომილებაა.

თუ y_v -ს ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებას α_v ასეთი აღვნიშნავთ, მაშინ საინტერპოლაციო მრავალწევრის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება იქნება

$$\alpha(x) = \sum_{v=0}^n \left| \alpha_v \frac{\Pi(x)}{(x-x_v) \Pi'(x_v)} \right| \Big|_{\max} = \bar{\alpha} A(x), \quad (13)$$

$$\bar{\alpha} = \max(\alpha_0, \dots, \alpha_n).$$

$A(x)$ სიდიდის გამოკვლევა წერტილების ნებისმიერი განლაგების დროს საერთოდ ძნელია.

ტოლად დაშორებული არგუმენტებისათვის (7) ფორმულიდან გვექნება

$$A = |t(t-1)\dots(t-n)| \sum_{v=0}^n \frac{1}{|t-v| \cdot v! (n-v)!}. \quad (14)$$

განვიხილოთ მაგალითი.

როგორი სიზუსტით გამოითვლება $\sqrt[3]{39}$, თუ საინტერპოლაციო წერტილებად ავიღებთ

$$x_0 = 30, x_1 = 32, x_2 = 40.$$

გამოვიყენოთ $y = \sqrt[3]{x}$ ფუნქციის წარმომადგენლები;

$$y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}, y'' = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}}, y''' = \frac{10}{27} x^{-\frac{8}{3}}.$$

$$M_3 = |y'''|_{\max} = \frac{10}{27} \frac{1}{30^{8/3}} = \frac{10}{27 \cdot 30^2 \cdot 9,6548}.$$

გამოვიყენოთ R_n -ის ფორმულა $n=3$ -ისათვის:

$$|R_3| \leq \frac{1}{3!} \frac{10}{27 \cdot 30^2 \cdot 9,6548} |39 - 30| |39 - 32| |39 - 40| < 10^{-3}.$$

ამგვარად, თუ საინტერპოლაციო წერტილებად ავიღებთ 30, 32, 40-ს, მაშინ მესამე ხარისხის ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრით გამოთვლილი $\sqrt[3]{39}$ -ის ცდომილება არ აღემატება 10^{-3} -ს.

3. ეიტკინის წრფივი ინტერპოლირების სქემა. საინტერპოლაციო მრავალწევრი, რომელიც $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებითაა აგებული, აღვნიშნოთ $P_{0,1}, \dots, P_{n-1,n}(x)$ -ით.

x_0 და x_1 წერტილებისათვის საინტერპოლაციო მრავალწევრი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$P_{0,1}(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0},$$

სრულიად ასევე გვექნება x_0, x_2 და x_1, x_2 წერტილებისათვის მრავალწევრები:

$$P_{0,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0},$$

$$P_{1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}.$$

შევადგინოთ გამოსახულება

$$Y(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}.$$

(15)

აღვილი შესამჩნევია, რომ (15) გამოსახულება მეორე ხარისხის მრავალწევრია, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს

$$Y(x_0) = y_0, Y(x_1) = y_1, Y(x_2) = y_2.$$

მაშასადამე, (15) გამოსახულება მეორე ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრია,

$$Y(x) = P_{0,1,2}(x).$$

ამგვარად, $P_{0,1}(x)$ და $P_{1,2}(x)$ გამოსახულებათა წრფივი ინტერპოლაციით მიიღება მეორე ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრი $P_{0,1,2}(x)$.

იგივე შედეგს მივიღებთ შემდეგი ფორმულებიდან

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_1 - x \\ P_{0,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}, P_{0,1,2} = \frac{\begin{vmatrix} P_{0,2}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2}(x) & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}.$$

ეს პროცესი შეიძლება გაავარძელოთ.

$P_{0,1,2}(x)$ და $P_{1,2,3}(x)$ მრავალწევრების წრფივი ინტერპოლირებით მივიღებთ მესამე ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრს

$$P_{0,1,2,3}(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_{0,1,2}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,3}(x) & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_3 - x_0}.$$

იგივე მრავალწევრს მივიღებთ $P_{0,2,3}(x)$, $P_{0,1,3}(x)$ და $P_{0,2,3}(x)$, $P_{1,2,3}(x)$ მრავალწევრებით. მესამე ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრების წრფივი ინტერპოლირებით მივიღებთ მეოთხე ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრს

$$P_{0,1,2,3,4}(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_{0,1,2,3}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,3,4}(x) & x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} P_{0,1,2,3}(x) & x_3 - x \\ P_{0,1,2,4}(x) & x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_3} = \dots$$

ამაში მდგომარეობს წრფივი ინტერპოლირების ეიტკინის მეთოდი, რომელიც ეიტკინის სქემის სახელწოდებითაა ცნობილი.

წრფივი ინტერპოლირების ეიტკინის მეთოდის მიმდევრობით გამოყენება გვაძლევს საინტერპოლაციო მრავალწევრებს, რომელთა ხარისხები იზრდება. ამის გამო ეიტკინის მეთოდი ძალიან ხელსაყრელია ცალკეულ წერტილებში ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის და, კერძოდ, ცხრილებით მუშაობის შემთხვევაში.

ეიტკინის მეთოდით გამოთვლები მიზანშეწონილია დავალავოთ შემდეგი სქემით (ცხრილი 9):

ცხრილი 9					
x_0	y_0				$x_0 \rightarrow x$
x_1	y_1	$P_{0,1}(x)$			$x_1 \rightarrow x$
x_2	y_2	$P_{0,2}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$		$x_2 \rightarrow x$
x_3	y_3	$P_{0,3}(x)$	$P_{0,1,3}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$	$x_3 \rightarrow x$
x_4	y_4	$P_{0,4}(x)$	$P_{0,1,4}(x)$	$P_{0,1,2,4}(x)$	$x_4 \rightarrow x$

მე-9 ცხრილში $P_{0,1}$ მოთავსებულია x_1 და y_1 -ის სტრიქონში, მისი მნიშვნელობაა $\frac{y_0(x_1-x) - y_1(x_0-x)}{x_1-x_0}$, ე. ი. მეორე სვეტის ორი ელემენტი და ბოლო სვეტის ორი ელემენტით ვადგენთ დეტერმინანტს, ვყოფთ ამ დეტერმინანტის მნიშვნელობას (x_1-x_0) -ზე — პირველი სვეტის ორი სათანადო ელემენტის სხვაობაზე და შედეგს, $P_{0,1}(x)$, ვწერთ x_1 და y_1 -ის სტრიქონის მესამე სვეტში. ასევე ვადგენთ

$$\begin{vmatrix} P_{0,1}(x), x_1-x \\ P_{0,2}(x), x_2-x \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტს და ვყოფთ (x_2-x_1) -ზე — პირველი სვეტის ორი სათანადო ელემენტის სხვაობაზე; მიღებულ სიდიდეს, $P_{0,1,2}(x)$ ვწერთ x_2, y_2 -ის სტრიქონის მეოთხე სვეტში და ა. შ.

მე-9 ცხრილის მნიშვნელობის ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი.

ვიპოვოთ $\sin 0,676$, თუ მოცემულია $\sin x$ -ის მნიშვნელობანი $x = 0,65; 0,66; \dots 0,70$ -თვის. გამოთვლების შედეგები მოცემულია მე-10 ცხრილში.

ცხრილი 10 ¹						
x	y	$P_{0,1}$	$P_{0,1,2}$	$P_{0,1,2,3}$	$P_{0,1,2,3,4}$	x_4-x
0,65	0,60519					-0,026
0,66	0,61312	0,625808				-0,016
0,67	0,62099	0,625730	0,6256832			-0,006
0,68	0,62879	0,625643	0,6256760	0,6256789		0,004
0,69	0,63654	0,625567	0,6256797	0,6256821	0,6256776	0,014
0,70	0,64422	0,625486	0,6256790	0,6256824	0,6256782	0,024

როგორც ცხრილი გვიჩვენებს $\sin 0,676 = 0,62568$. აქ მიახლოებითი ტოლობა იგულისხმება. შემდეგში, როდესაც დავწერთ $f(x) = P_n(x)$, ვგულისხმებთ მიახლოებით ტოლობას.

§ 6. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულები

1. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა არატოლად დაშორებული წერტილებისათვის.

გამოვიღეთ გაყოფილი სხვაობებიდან

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x, x_0),$$

$$\frac{f(x, x_0) - f(x_0, x_1)}{x - x_1} = f(x, x_0, x_1),$$

$$\frac{f(x, x_0, x_1) - f(x_0, x_1, x_2)}{x - x_2} = f(x, x_0, x_1, x_2),$$

$$\frac{f(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_n)}{x - x_n} = f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$$

და მიმღევრობით განვსაზღვროთ $f(x), f(x, x_0), \dots, f(x, x_0, \dots, x_{n-1})$, მივიღებთ

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x, x_0),$$

$$f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + (x - x_1) f(x, x_0, x_1),$$

$$f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2) f(x, x_0, x_1, x_2),$$

$$f(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x - x_n) f(x, x_0, \dots, x_n).$$

თუ პირველ ტოლობაში ჩავსვამთ $f(x, x_0)$ -ის მნიშვნელობას მეორე ტოლობიდან, მიღებულ ტოლობაში ჩავსვამთ $f(x, x_0, x_1)$ -ის მნიშვნელობას მესამე ტოლობიდან და ა. შ. მივიღებთ

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \\ & + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f(x, x_0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1)$$

(1) გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში ბოლო წევრის გარეშე გვაქვს n ხარისხის მრავალწევრი. დავწეროთ ეს გამოსახულება შემდეგი სახით

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0) \dots (x - x_n) f(x, x_0, \dots, x_n). \quad (2)$$

თუ (2) ფორმულაში ჩავსვამთ მიმღევრობით $x = x_0, x_1, \dots, x_n$, მივიღებთ

$$f(x_n) = P_n(x_n), \quad v = 0, 1, \dots, n.$$

¹ Математический практикум, под ред. Г. Н. Положего, М. 1960, стр. 114.

ეს კი გვიჩვენებს, რომ $P_n(x)$ მრავალწევრი,

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})f(x_0, \dots, x_n) \quad (3)$$

წარმოადგენს საინტერპოლაციო მრავალწევრს $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც აგებულია $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებისათვის. ნაშთის უკუგდებით (2) მოგვცემს

$$f(x) \approx f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (4)$$

(3) მრავალწევრს ეწოდება ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრი, ხოლო (1) ფორმულას ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა აბრევიატურად დაწვრილებული წერტილებისათვის.

n ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრობის ერთადერთობიდან გამომდინარეობს, რომ ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრი მიიღება ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრისაგან წევრთა მარტივი გადაჯგუფებით და, პირიქით, ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი მიიღება ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრიდან წევრთა მარტივი გადაჯგუფებით.

ლაგრანჟის ფორმულისაგან ნიუტონის ფორმულა იმით განსხვავდება, რომ k -ური წევრი ნიუტონის მრავალწევრში დამოკიდებულია მხოლოდ პირველ k წერტილებზე და ფუნქციის მნიშვნელობებზე ამ წერტილებში. ამგვარად, ახალი საინტერპოლაციო წერტილის დამატება (1) ფორმულაში იწვევს მხოლოდ ერთი წევრის დამატებას და არ იწვევს წინა წევრების ცვლას. სწორედ ესაა არსებითი უპირატესობა ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრისა ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრის მიმართ.

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს $(n+1)$ რიგამდე უწყვეტი წარმოებულები $[a, b]$ შუალედში, მაშინ (2) გამოსახულების ნაშთითი წევრი შეგვიძლია დავწეროთ (9, § 4) ფორმულით,

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (5)$$

სადაც ξ რაღაც წერტილია $[a, b]$ შუალედში.

(5) გამოსახულების (2) ფორმულის $(x-x_0)\dots(x-x_n)f(x, x_0, \dots, x_n)$ წევრთან შედარება მოგვცემს

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \quad (6)$$

განვიხილოთ მაგალითი.

ფუნქციის მნიშვნელობანი მოცემულია მე-11 ცხრილით.

ცხრილი 11

x	20	22	23	25
$f(x)$	4.47214	4.69042	4.79583	5.00000

ვიპოვოთ $f(21)$ -ის მნიშვნელობა.

შევადგინოთ გაყოფილი სხვაობების ცხრილი (ცხრილი 12).

ცხრილი 12

x	$f(x)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
20	4,47314			
22	4,69042	10914		
23	4,79583	10541	-124	
25	5,00000	10208	-111	3

ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრს ექნება სახე

$$P_3(x) = f(20) + (x-20)f(20, 22) + (x-20)(x-22)f(20, 22, 23) + (x-20)(x-22)(x-23)f(20, 22, 23, 25),$$

ანუ

$$P_3(x) = 4,47214 + (x-20) \cdot 0,10914 + (x-20)(x-22) \cdot (-0,00124) + (x-20)(x-22)(x-23) \cdot 0,00003.$$

ჩავსვათ ამ ფორმულაში $x=21$, მივიღებთ

$$f(21) = 4,58258.$$

2. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულები ტოლად დაშორებული წერტილებისათვის

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საინტერპოლაციო წერტილები ტოლდაა დაშორებული (ბიჯი მუდმივია) და განლაგებულია x_0 წერტილიდან მარჯვნივ:

$$x_v = x_0 + v h, \quad v = 0, 1, \dots, n.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x = x_0 + t h,$$

მაშინ

$$x - x_v = (t - v) h.$$

გამოვიყენოთ გაყოფილ სხვაობებსა და სასრულ სხვაობათა შორის (7, § 3) დამოკიდებულება

$$f(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + vh) = \frac{\Delta^v f(x_0)}{v! h^v},$$

მაშინ (4) გამოსახულება მოგვცემს

$$f(x_0 + th) = f(x_0) + \frac{t}{1!} \Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-(n-1))}{n!} \Delta^n f(x_0) + R_n, \quad (7)$$

სადაც ნაშთითი წევრია:

$$R_n = \frac{t(t-1)\dots(t-n) h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (8)$$

(8) ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$R_n = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h), \quad (9)$$

სადაც θ მოთავსებულია 0, t და n -დან უმცირესსა და უდიდეს მნიშვნელობათა შორის.

თუ მოვიგონებთ სხვაობების მე-4 ცხრილის აგებულებას, შევამჩნევთ, რომ (7) ფორმულაში გამოყენებულია სხვაობები, რომლებიც $f(x_0)$ -დან დაბლა ეშვება. ამიტომ (7) ფორმულას ეწოდება ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა და ღმ ა ვ ა ლ ი ს ხ ვ ა ო ბ ე ბ ი თ.

განვიხილოთ მაგალითი.

ვიპოვოთ $\sin 21^\circ 6'$, თუ $\sin x$ -ის მნიშვნელობანი და სათანადო სხვაობანი მოცემულია მე-13 ცხრილში.

x	$\sin x$	Δ	Δ^2	Δ^3	ცხრილი 13 Δ^4
21	0,35837				
22	0,37461	1624			
23	0,39073	1612	-12		
24	0,40674	1601	-11	1	
25	0,42262	1592	-9	2	1

ცხრილის მიხედვით $h=1^\circ$, $x_0 + th = 21^\circ + t \cdot 1^\circ = 21^\circ 6'$, საიდანაც $t = 0,1$.

საინტერპოლაციო ფორმულას ექნება სახე:

$$\sin(21^\circ + th) = 0,35837 + \frac{t}{1!} 0,01624 + \frac{t(t-1)}{2!} (-0,00012) + \dots + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} 0,00001 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} 0,00001.$$

$t=0,1$ ჩასმით და გამოთვლით უკანასკნელიდან მივიღებთ

$$\sin 21^\circ 6' = 0,36000.$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საინტერპოლაციო წერტილები x_0 წერტილიდან მარცხნივაა განლაგებული:

$$x_v = x_0 - vh, \quad v = 0, 1, \dots, n.$$

მაშინ

$$x - x_v = (t + v)h.$$

გამოვიყენოთ გაყოფილ სხვაობებსა და სასრულ სხვაობათა შორის დამოკიდებულება

$$f(x_0, x_0 - h, \dots, x_0 - vh) = \frac{\Delta^v f(x_0 - vh)}{v! h^v},$$

მაშინ (3) ფორმულა მოგვცემს:

$$f(x_0 + th) = f(x_0) + \frac{t}{1!} \Delta f(x_0 - h) + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f(x_0 - 2h) + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+(n-1))}{n!} \Delta^n f(x_0 - nh) + R_n, \quad (10)$$

სადაც

$$R_n = \frac{t(t+1)\dots(t+n) h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (11)$$

ξ მოთავსებულია $[a, b]$ შუალედში.

R_n ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$R_n = \frac{t(t+1)\dots(t+n) h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 - \theta h), \quad (12)$$

სადაც θ მოთავსებულია 0, n , t -ს უდიდესსა და უმცირეს მნიშვნელობათა შორის.

(10) ფორმულას ეწოდება ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა ღმ ა ვ ა ლ ი ს ხ ვ ა ო ბ ე ბ ი თ.

მაგალითად, ვიპოვოთ $\sin 24^\circ 54'$, თუ $\sin x$ -ის მნიშვნელობანი მოცემულია მე-13 ცხრილით.

ცხრილის მიხედვით $h=1^\circ$; $x_0+th=25^\circ+t\cdot 1^\circ=24^\circ 54'$, საიდანაც $t=-0,1$.

საინტერბოლაციო ფორმულის ექნება სახე:

$$\sin(25^\circ+th)=0,42262+\frac{t}{1!}0,01592+\frac{t(t+1)}{2!}(-0,00009)+$$

$$+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}0,00002+\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}0,00001.$$

$t=-0,1$ ჩასმა და გამოთვლით უკანასკნელიდან მივიღებთ

$$\sin 24^\circ 54'=0,42104.$$

§ 7. გაუსის, სტირლინგის, ჰესელის საინტერპოლაციო ფორმულები

(2, § 6) ფორმულაში მივიღოთ

$$x=x_0+th, x_1=x_0+h, x_2=x_0-h, x_3=x_0+2h, x_4=x_0-2h, \dots$$

გვექნება

$$f(x_0+th)=f(x_0)+thf(x_0, x_0+h)+t(t-1)h^2f(x_0, x_0+h, x_0-h)+$$

$$+t(t-1)(t+1)h^3f(x_0, x_0+h, x_0-h, x_0+2h)+$$

$$+t(t-1)(t+1)(t-2)h^4f(x_0, x_0+h, x_0-h, x_0+2h, x_0-2h)+\dots \quad (1)$$

გაყოფილი სხვაობები შევცვალოთ სასრული სხვაობებით

$$f(x_0, x_0+h)=\frac{\Delta f(x_0)}{h}, f(x_0, x_0+h, x_0-h)=\frac{\Delta^2 f(x_0-h)}{2!h^2},$$

$$f(x_0, x_0+h, x_0-h, x_0+2h)=\frac{\Delta^3 f(x_0-h)}{3!h^3},$$

$$f(x_0, x_0+h, x_0-h, x_0+2h, x_0-2h)=\frac{\Delta^4 f(x_0-2h)}{4!h^4}$$

და ა. შ. მივიღებთ

$$f(x_0+th)=f(x_0)+t\Delta f(x_0)+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0-h)+\frac{t(t^2-1)}{3!}\Delta^3 f(x_0-h)+$$

$$+\frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 f(x_0-2h)+\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)}{5!}\Delta^5 f(x_0-2h)+\dots \quad (2)$$

ამ ფორმულას ეწოდება გაუსის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულა.

თუ (2, § 6) ფორმულაში მივიღებთ, რომ

$$x_1=x_0-h, x_2=x_0+h, x_3=x_0-2h, x_4=x_0+2h, \dots$$

მაშინ ნაცვლად (2) ფორმულისა, გვექნება

$$f(x_0+th)=f(x_0)+t\Delta f(x_0-h)+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f(x_0-h)+$$

$$+\frac{t(t^2-1)}{3!}\Delta^3 f(x_0-2h)+\frac{t(t^2-1)(t+2)}{4!}\Delta^4 f(x_0-2h)+\dots \quad (3)$$

ამ ფორმულას ეწოდება გაუსის მეორე საინტერპოლაციო ფორმულა.

თუ დავაკვირდებით გაუსის ფორმულებს, შევამჩნევთ, რომ ორივე ფორმულაში მონაწილეობენ ცენტრალური სხვაობები, მაგრამ დამატებით პირველში მონაწილეობენ ცენტრალური ხაზის ქვემოთ მდებარე სხვაობები, ხოლო მეორე ფორმულაში მონაწილეობენ ცენტრალური ხაზის ზემოთ მდებარე სხვაობები (იხ. ცხრილი 14).

ცხრილი 14

$x_0-3h=x_{-3}$	f_{-3}	Δf_{-3}	$\Delta^2 f_{-3}$	$\Delta^3 f_{-3}$	$\Delta^4 f_{-3}$	$\Delta^5 f_{-3}$	$\Delta^6 f_{-3}$
$x_0-2h=x_{-2}$	f_{-2}	Δf_{-2}	$\Delta^2 f_{-2}$	$\Delta^3 f_{-2}$	$\Delta^4 f_{-2}$	$\Delta^5 f_{-2}$	$\Delta^6 f_{-2}$
$x_0-h=x_{-1}$	f_{-1}	Δf_{-1}	$\Delta^2 f_{-1}$	$\Delta^3 f_{-1}$	$\Delta^4 f_{-1}$	$\Delta^5 f_{-1}$	$\Delta^6 f_{-1}$
$x_0=x_0$	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$	$\Delta^5 f_0$	$\Delta^6 f_0$
$x_0+h=x_1$	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$	$\Delta^5 f_1$	$\Delta^6 f_1$
$x_0+2h=x_2$	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$	$\Delta^4 f_2$	$\Delta^5 f_2$	$\Delta^6 f_2$
$x_0+3h=x_3$	f_3						

შევკრიბოთ (2) და (3) გამოსახულებანი და გავყოთ ორზე, მივიღებთ

$$f(x_0+th)=f_0+t\frac{\Delta f_0+\Delta f_{-1}}{2}+\frac{t^2}{2!}\Delta^2 f_{-1}+$$

$$+\frac{t(t^2-1)}{3!}\frac{\Delta^3 f_{-1}+\Delta^3 f_{-2}}{2}+\frac{t^2(t^2-1)}{4!}\Delta^4 f_{-2}+$$

$$+\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)}{5!}\frac{\Delta^5 f_{-2}+\Delta^5 f_{-3}}{2}+\frac{t^2(t^2-1)(t^2-2^2)}{6!}\Delta^6 f_{-3}+\dots \quad (4)$$

(4) ფორმულაში მონაწილეობენ გაუსის ორივე ფორმულის სხვაობები.

სტირლინგის ფორმულის გამოყენება ხელსაყრელია მაშინ, როდესაც გვინდა გავიგოთ ფუნქციის მნიშვნელობა ცხრილის ცენტრალურა წერტილის ახლოს. ამ შემთხვევაში უნდა ავიღოთ კენტი რაოდენობის წერტილ-

თა რიცხვი. მაგალითად, მე-14 ცხრილში 7 წერტილია აღებული და სათანადო საინტერპოლაციო ფორმულაში მიიღებს $\Delta^6 f_{-3}$ მონაწილეობას.

თუ (4) ფორმულაში $(2k+1)$ საინტერპოლაციო წერტილს ავიღებთ, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} f(x_0 + th) = & f_0 + t \frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 f_{-1} + \\ & + \frac{t(t^2-1)}{3!} \frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \frac{t^2(t^2-1)}{4!} \Delta^4 f_{-2} + \dots + \\ & + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\dots(t^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!} \frac{\Delta^{2k-1} f_{-(k-1)} + \Delta^{2k-1} f_{-k}}{2} + \\ & + t^2 \frac{(t^2-1)(t^2-2^2)\dots(t^2-(k-1)^2)}{(2k)!} \Delta^{2k} f_{-k} + R_{2k+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

სადაც

$$R_{2k+1} = \frac{t(t^2-1)\dots(t^2-k^2)h^{2k+1}}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(\xi), \quad (6)$$

ხოლო ξ მოთავსებულია $x_0 + th$, $x_0 - kh$, $x_0 + kh$ -დან უდიდესსა და უმცირეს მნიშვნელობათა შორის.

განვიხილოთ მაგალითი.

მე-13 ცხრილის საშუალებით ვიპოვოთ $\sin 23^\circ 12'$.

მივიღოთ $x_0 = 23^\circ$.

რადგანაც $h = 1^\circ$, ამიტომ $x_0 + th = 23^\circ 12'$, საიდანაც $t = 0,2$.

(5) საინტერპოლაციო ფორმულას ექნება სახე:

$$\begin{aligned} f(x_0 + th) = & f_0 + t \frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 f_{-1} + \\ & + \frac{t(t^2-1)}{3!} \frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \frac{t^2(t^2-1)}{4!} \Delta^4 f_{-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 23^\circ 12' = & 0,39073 + \frac{0,2}{1} \frac{0,01612 + 0,01602}{2} + \frac{0,2^2}{2!} (-0,00011) + \\ & + \frac{0,2(0,2^2-1)}{3!} \frac{0,00001 + 0,00002}{2} + \frac{0,2^2(0,2^2-1)}{4!} 0,00001. \end{aligned}$$

გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ

$$\sin 23^\circ 12' = 0,39394.$$

ბესელის საინტერპოლაციო ფორმულის მისაღებად გამოვიდეთ ისევ

$$\begin{aligned} (2, \S 6) \text{ ფორმულიდან და საწყის წერტილად ავიღოთ } \bar{x}_0 = x_0 + h, \text{ შემდეგ} \\ \bar{x}_1 = x_0, \bar{x}_2 = x_0 + 2h, \bar{x}_3 = x_0 - h, \bar{x}_4 = x_0 + 3h, \bar{x}_5 = x_0 - 2h, \dots, \\ x = x_0 + th. \end{aligned}$$

მაშინ

$$x - \bar{x}_0 = (t-1)h, \quad x - \bar{x}_1 = th,$$

$$x - \bar{x}_2 = (t-2)h, \quad x - \bar{x}_3 = (t+1)h, \dots$$

$$f(\bar{x}_0, \bar{x}_1) = f(x_0 + h, x_0) = \frac{\Delta f(x_0)}{h},$$

$$f(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = f(x_0 + h, x_0, x_0 + 2h) = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2}, \dots$$

(2, § 6) ფორმულა ამ გამოთვლების შედეგად მოგვცემს

$$\begin{aligned} f(x_0 + th) = & f_1 + (t-1)\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 f_{-1} + \\ & + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!} \Delta^4 f_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t-3)}{5!} \Delta^5 f_{-2} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

თუ (7) და (2) (გაუსის პირველი ფორმულა) გამოსახელებებს შევკრებთ და გავყოფთ ორზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} f(a+th) = & \frac{f_1 + f_0}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 f_0 + \Delta^2 f_{-1}}{2} + \\ & + \frac{t(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{3!} \Delta^3 f_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!} \frac{\Delta^4 f_{-1} + \Delta^4 f_{-2}}{2} + \\ & + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{5} \Delta^5 f_{-2} + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

ამ ფორმულას ეწოდება ბესელის საინტერპოლაციო ფორმულა.

ბესელის ფორმულაში გამოყენებული სხვაობანი დალაგებულია შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{ccccccc} f_0 & \Delta f_0 & \Delta^2 f_{-1} & \Delta^3 f_{-1} & \Delta^4 f_{-2} & \Delta^5 f_{-2} & \Delta^6 f_{-3} \\ f_1 & \Delta^2 f_0 & \Delta^3 f_{-1} & \Delta^4 f_{-1} & \Delta^5 f_{-2} & \Delta^6 f_{-2} & \Delta^7 f_{-3} \end{array}$$

ბესელის ფორმულა ხელსაყრელია გამოვიყენოთ მაშინ, როდესაც საძიებელია ფუნქციის მნიშვნელობა ორი საინტერპოლაციო წერტილის შუა წერტილში ან ამ წერტილის მახლობლობაში. ბესელის ფორმულაში, ბუნებრივია, ავიღოთ საინტერპოლაციო წერტილთა ლუწი რიცხვი:

$$x_0 - kh, x_0 - (k-1)h, \dots, x_0 - h, x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + kh, x_0 + (k+1)h.$$

ამ შემთხვევაში (8) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$f(x_0+th) = \frac{f_1+f_0}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 f_0 + \Delta^2 f_{-1}}{2} +$$

$$+ \frac{t(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{3!} \Delta^3 f_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!} \frac{\Delta^4 f_{-1} + \Delta^4 f_{-2}}{2} +$$

$$+ \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{5!} \Delta^5 f_{-2} +$$

$$+ \dots + \frac{(t+(k-1)) \dots (t+1)t(t-1)(t-2) \dots (t-k)}{(2k)!} \frac{\Delta^{2k} f_{-k} + \Delta^{2k} f_{-(k+1)}}{2} +$$

$$+ \frac{(t+(k-1)) \dots (t+1)t(t-1)(t-2) \dots (t-k)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{(2k+1)!} \Delta^{2k+1} f_{-k} + R_{2k+1}, \quad (9)$$

სადაც

$$R_{2k+1} = \frac{(t+(k-1)) \dots (t+1)t(t-1)(t-2) \dots (t-k)(t-k-1)h^{2k+2}}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\xi). \quad (10)$$

ξ მოთავსებულია x_0+th , x_0-kh , $x_0+(k+1)h$ -დან უმცირესსა და უდიდესს შორის.

თუ ბესელის ფორმულაში ავიღებთ $t = \frac{1}{2}$ მაშინ (9) ფორმულა მარტივდება: კენტი რიგის სასრული სხვაობიანი წევრები აღარ გვქვდება.

განვიხილოთ მაგალითი.

ვიპოვოთ $\sin 23^\circ 30'$, თუ $\sin x$ -ის მნიშვნელობანი მოცემულია მე-13 ცხრილში.

მე-13 ცხრილიდან მივიღებთ:

$$x_0 = 23^\circ, \quad h = 1', \quad x_0+th = 23^\circ 30', \quad t = \frac{1}{2}.$$

ბესელის ფორმულა ჩვენი ამოცანისთვის მიიღებს სახეს:

$$f(x_0+th) = \frac{f_1+f_0}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 f_0 + \Delta^2 f_{-1}}{2} +$$

$$+ \frac{t(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{3!} \Delta^3 f_{-1}.$$

ამ ფორმულაში $t = \frac{1}{2}$ -ის ჩასმით მეორე და მეოთხე წევრების კოეფიციენტები ნულის ტოლი გახდება:

$$f(x_0+th) = \frac{f_0+f_1}{2} + \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 f_0 + \Delta^2 f_{-1}}{2}.$$

ამის შედეგად მე-13 ცხრილიდან მივიღებთ:

$$\sin 23^\circ 30' = \frac{0,39073 + 0,40674}{2} +$$

$$+ \frac{0,5(0,5-1)}{2!} \frac{-0,00011 - 0,00009}{2},$$

საიდანაც

$$\sin 23^\circ 30' = 0,39875.$$

შევჩერდეთ ზემოთ მიღებული ფორმულების გამოყენების საკითხზე. ამის შესახებ ყოველი ფორმულის შემდეგ მოკლედ უკვე იყო მოთხრობილი.

მუდმივბიჯიანი ცხრილით მოცემული ფუნქციის ინტერპოლირებისათვის უნდა ვისარგებლოთ შემდეგი წესით:

შევადგინოთ ფუნქციის სასრულ სხვაობათა ცხრილი და განვსაზღვროთ სხვაობათა უდიდესი რიგი, რომელი რიგის სხვაობებიც წესიერია. ეს ნიშნავს შემდეგს: თუ ფუნქციის საკმარისად მაღალი რიგის უწყვეტი წარმოებული აქვს, ე. ი. ფუნქცია საკმარისად გლუვია, სხვაობათა რიგის ზრდასთან ერთად სხვაობები მცირდება და სათანადო მაღალი რიგის სხვაობები თითქმის მუდმივია. ამ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ აღებული რიგის სხვაობები წესიერია.

ჩვეულებრივად ფუნქციის მნიშვნელობანი ცხრილში მიახლოებითია. თუ ფუნქციის მნიშვნელობების აბსოლუტური ცდომილება ცხრილში მოცემული ბოლო ციფრის ერთეულის ნახევარია, მაშინ პირველი რიგის სხვაობაში აბსოლუტური ცდომილება ბოლო ციფრის ერთეულის ტოლია, მეორე რიგის სხვაობაში აბსოლუტური ცდომილება ორი ერთეულის ტოლია, მესამე რიგის სხვაობაში ოთხი ერთეულის ტოლია (ცხრილი 6) და ა. შ. ამით ცხრილის წესიერება ირღვევა და სათანადო მაღალი რიგის სხვაობები შესაძლებელია განსხვავდება ერთიმეორისაგან. ცხადია, აღებული რიგის სხვაობებით სარგებლობა არ შეიძლება.

განვსაზღვრავთ რა სხვაობათა იმ რიგს, რომლითაც შეიძლება ვისარგებლოთ ინტერპოლირებისათვის, შემდეგ უნდა შევარჩიოთ საინტერპოლაციო ფორმულა. თუ x -ის საძიებელი მნიშვნელობა მოთავსებულია $[x_i, x_{i+1}]$ შუალედში და ეს მნიშვნელობა ფუნქციის ცხრილის შუაშია,

უნდა ვისარგებლოთ სტირლინგის ან ბესელის ფორმულით. მაგრამ საწყის წერტილად უნდა ავიღოთ x_i ან x_{i+1} , იმის მიხედვით, თუ რომელ წერტილთან უფრო ახლოსაა x . თუ $|t| \leq \frac{1}{4}$, უნდა ვისარგებლოთ სტირლინგის ფორმულით და, თუ შესაძლებლობა გვაქვს, შევჩერდეთ ლუწი რიგის სასრულო სხვაობაზე, როგორც ამას (5) ფორმულა გვიჩვენებს.

თუ $\frac{1}{4} < |t| < \frac{3}{4}$, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ ბესელის ფორმულით და, როგორც (8) ფორმულა გვიჩვენებს, შევჩერდეთ კენტი რიგის სასრულო სხვაობაზე, თუ ამის შესაძლებლობა გვაქვს.

თუ x ახლოსაა ცხრილის დასაწყისთან, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ ნიუტონის პირველი ფორმულით, ხოლო თუ x ახლოსაა ცხრილის ბოლოსთან, უნდა ვისარგებლოთ ნიუტონის მეორე ფორმულით.

საზოგადოთ კი ფუნქციის ინტერპოლირებისათვის ისეთი ფორმულით უნდა ვისარგებლოთ, რომელიც გვაძლევს მაქსიმალური რიგის სასრული სხვაობების გამოყენების შესაძლებლობას.

§ 8. ნიუტონის განზოგადებული საინტერპოლაციო ფორმულა

როგორც მე-6 პარაგრაფში ვაჩვენეთ, არათანაბრად დაშორებული საინტერპოლაციო წერტილებისათვის ნიუტონის ფორმულას აქვს სახე:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f(x, x_0, \dots, x_n). \quad (1)$$

ვთქვათ, დასმულია იგივე საინტერპოლაციო მოთხოვნა. $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია $[a, b]$ შუალედში. ამასთანავე $y_i^{(j)}$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის j -ური რიგის წარმოებულის მნიშვნელობას x_i წერტილში — $f^{(j)}(x_i)$. ვივლით შემთხვევით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ყველა საჭირო რიგის წარმოებული უწყვეტია. $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებთან ერთად განვიზილავთ $[a, b]$ შუალედის

$$x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)}$$

წერტილებს, სადაც ჯერჯერობით ყველა წერტილი ურთიერთგანსხვავებულია, ამ შემთხვევაში ნიუტონის (1) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_0^{(1)}) + (x-x_0)(x-x_0^{(1)})f(x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}) + \dots + (x-x_0)(x-x_0^{(1)})\dots(x-x_0^{(\alpha_0-1)})f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1) +$$

$$+ (x-x_0)(x-x_0^{(1)})\dots(x-x_0^{(\alpha_0-1)})(x-x_1)f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1, x_1^{(1)}) + \dots + (x-x_0)(x-x_0^{(1)})\dots(x-x_0^{(\alpha_0-1)})(x-x_1)\dots(x-x_1^{(\alpha_1-1)}) \times \\ \times f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(\alpha_0-1)}, x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(\alpha_1-1)}, x_2) + \dots + (x-x_0) \times \\ \times (x-x_0^{(1)})\dots(x-x_n^{(\alpha_n-2)})f(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)}) + \\ (x-x_0)(x-x_0^{(1)})\dots(x-x_n^{(\alpha_n-1)})f(x, x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_n^{(\alpha_n-1)}).$$

გადავიდეთ ამ უკანასკნელ ფორმულაში ზღვარზე, როდესაც $x_i^{(j)} \rightarrow x_i$ მივიღებთ:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_0) + (x-x_0)^2f(x_0, x_0, x_0) + \dots + (x-x_0)^{\alpha_0-1} \underbrace{f(x_0, \dots, x_0)}_{\alpha_0\text{-ჯერ}} + (x-x_0)^{\alpha_0} \underbrace{f(x_0, \dots, x_0, x_1)}_{\alpha_0\text{-ჯერ}} + \\ + (x-x_0)^{\alpha_0} (x-x_1) f(x_0, \dots, x_0, x_1, x_1) + \dots + \\ + (x-x_0)^{\alpha_0} (x-x_1)^{\alpha_2} \dots (x-x_n)^{\alpha_n-1} f(x_0, x_0, \dots, x_0, \dots, x_n, \dots, x_n) + \\ + (x-x_0)^{\alpha_0} (x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_n)^{\alpha_n} f(x, x_0, \dots, x_0, \dots, x_n, \dots, x_n), \quad (2)$$

სადაც

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m.$$

(2) ფორმულის პირველი m წევრი მოგვცემს საინტერპოლაციო მრავალწევრს, რომელიც $H_m(x)$ -ით აღვნიშნოთ, ხოლო ბოლო წევრი — ნაშთს.

ვაჩვენოთ, რომ $H_m(x)$ აკმაყოფილებს საინტერპოლაციო პირობებს. მართლაც, $H_m(x)$ -ის აგებულებიდან აღვილი შესამჩნევია, რომ

$$H_m(x_0) = f(x_0), \\ H'_m(x_0) = f(x_0, x_0) = f'(x_0), \\ H''_m(x_0) = 2! f(x_0, x_0, x_0) = f''(x_0), \\ \dots \\ H_m^{(\alpha_0-1)}(x_0) = (\alpha_0-1)! \underbrace{f(x_0, \dots, x_0)}_{\alpha_0\text{-ჯერ}} = f^{(\alpha_0-1)}(x_0).$$

მეორე მხრივ, საინტერპოლაციო მრავალწევრის ერთადერთობიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ დავიწყებდით საინტერპოლაციო მრავალწევრს x_1

წერტილიდან, საბოლოოდ მივიღებდით იმავე მრავალწევრს, ოღონდ სხვა ფორმით დაწერილს. ასე რომ, გვექნება:

$$H_m(x) = f(x_1) + (x-x_1)f(x_1, x_1^{(1)}) + \dots + (x-x_1)(x-x_1^{(1)}) \dots (x-x_1^{(\alpha_1-1)}) f(x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(\alpha_1-1)}, x_0) + \dots,$$

საიდანაც

$$H_m(x_1) = f(x_1),$$

$$H_m'(x_1) = f(x_1, x_1) = f'(x_1),$$

$$\dots$$

$$H_m^{(\alpha_1-1)}(x_1) = (\alpha_1-1)! f(x_1, \dots, x_1, x_1) = f^{(\alpha_1-1)}(x_1).$$

ამგვარად, $H_m(x)$ მრავალწევრი აკმაყოფილებს საინტერპოლაციო მოთხოვნას, ამიტომ (2) ფორმულა ასე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x) = H_m(x) + R_m(x).$$

ამ ფორმულას ეწოდება ნიუტონის განზოგადებული საინტერპოლაციო ფორმულა, სადაც

$$R_m(x) = (x-x_0)^{\alpha_0} (x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_n)^{\alpha_n} f(x, x_0, \dots, x_0, x_1, \dots, x, \dots, x_n). \quad (3)$$

§ 9. უნივერსალური საინტერპოლაციო ფორმულების ცდომილებათა შესახებ. ნაპოვნის მრავალწევრები

როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ $(n+1)$ საინტერპოლაციო წერტილით ერთადერთი საინტერპოლაციო n ხარისხის მრავალწევრი განისაზღვრება. ამიტომ საინტერპოლაციო მრავალწევრების სახის მიუხედავად ცდომილება

$$R_n(x) = \Pi(x) f(x, x_0, \dots, x_n) \quad (1)$$

ფორმულით განისაზღვრება, სადაც

$$\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n), \quad (2)$$

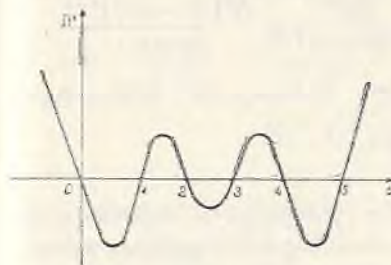
ხოლო $f(x, x_0, \dots, x_n)$ $n+1$ რიგის გაყოფილი სხვაობაა, $x_0, x_1, \dots, x_n$ მოცემული წერტილებია.

როგორც $R_n(x)$ -ის გამოსახულება გვიჩვენებს, ცდომილებით შეფასება წარმოებს $f(x, x_0, \dots, x_n)$ გაყოფილი სხვაობის შეფასებით და $\Pi(x) = (x-x_0) \dots (x-x_n)$ მრავალწევრის მნიშვნელობის გამოთვლით x -ის ადებული მნიშვნელობისათვის. თუ საინტერპოლაციო წერტილები ტო-

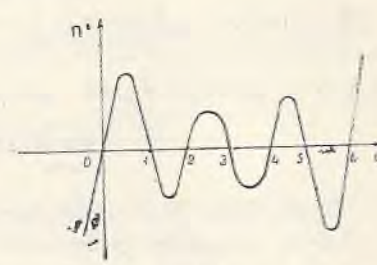
ლად დაშორებულია, $x = x_0 + th$, $x_n = x_0 + nh$, მაშინ $\Pi(x) = h^{n+1} \Pi^*(t)$, სადაც $\Pi^*(t) = t(t-1) \dots (t-n)$. მე-4 და მე-5 ნახაზებზე ნაჩვენებია ფუნქციები

$$\Pi^* = t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5),$$

$$\Pi^* = t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)(x-6).$$



ნახ. 4



ნახ. 5

იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x)$ ფუნქციის ანალიზური სახე ცნობილი არაა, ძნელია საინტერპოლაციო ფორმულის განსაზღვრა. სიძნელე დაკავშირებულია $f(x, x_0, \dots, x_n)$ სიდიდის შეფასებასთან. ტოლად დაშორებული საინტერპოლაციო წერტილების შემთხვევაში, თუ $n+1$ რიგის სხვაობები ნელა იცვლებიან და შეიძლება ეს სხვაობები მუდმივად ჩავთვალოთ, მაშინ მივიღებთ

$$f(x, x_0, \dots, x_n) \approx \frac{\Delta^{n+1} f(x_0)}{(n+1)! h^{n+1}}. \quad (3)$$

თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციას აქვს $n+1$ რიგის წარმოებული, მაშინ (6, § 6)

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in [a, b], \quad (4)$$

და, მაშინ

$$R_n(x) = \Pi(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \quad (5)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ შუალედში აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებული, ამასთან $|f^{(n)}(x)|$ იზრდება არაუმეტეს გეომეტრიული პროგრესიის u_n წევრი, მაშინ საინტერპოლაციო წერტილების რაოდენობის გაზრდასთან ერთად საინტერპოლაციო მრავ-

ვალწევრის ცდომილება აბსოლუტური მნიშვნელობით გახდება ნებისმიერად მცირე. მართლაც, ვთქვათ, არსებობს რიცხვები M და q ისეთი, რომ

$$|f^{(n)}(x)| \leq Mq^n, \quad (6)$$

მაშინ ყოველი x -სათვის $[a, b]$ შუალედიდან გვექნება

$$|R_n(x)| \leq |x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n| \frac{Mq^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M[(b-a)q]^{n+1}}{(n+1)!}.$$

აქედან კი გამომდინარეობს გამოთქმული წინადადების ჭეშმარიტება,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ საინტერპოლაციო წერტილების მიმართ $[a, b]$ სეგმენტზე არავითარი დაშვება არ გვქონია. თუ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (6) პირობას, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი სიზუსტით აპროქსიმაცია შეიძლება ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრით მთელ $[a, b]$ სეგმენტზე მაშინაც კი, როდესაც n -ის ზრდასთან ერთად საინტერპოლაციო წერტილები $[a, b]$ სეგმენტის ერთ რომელიმე წერტილისაკენ მიისწრაფვის. მაგრამ იმ შემთხვევაში, როდესაც ფუნქციას აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებული და არ სრულდება (6) პირობა, მაშინ შეიძლება ავადგოთ საინტერპოლაციო პოლინომი, რომელიც არ მიისწრაფვის $f(x)$ ფუნქციისაკენ, როდესაც $n \rightarrow \infty$. ამ შემთხვევაში საინტერპოლაციო წერტილებად უნდა ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის n ტოლ ნაწილად დამყოფი წერტილები.

იმის შემდეგ, როდესაც შეფასებულია $f(x, x_0, \dots, x_n)$, ბუნებრივია, დავსვათ კითხვა: როგორ ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტზე საინტერპოლაციო წერტილები $x_0, x_1, \dots, x_n$, რომ $|\Pi(x)|$ იყოს უმცირესი, ან ასე: ავადგოთ $f(x)$ ფუნქციისათვის საუკეთესო მიახლოების პოლინომი.

გარკვეულობისათვის მივიღოთ, რომ საინტერპოლაციო სეგმენტია იყოს $[-1, 1]$, რადგანაც გარდაქმნით $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z$ სეგმენტი $a \leq x \leq b$ გადაისახება $-1 \leq z \leq 1$ სეგმენტზე.

$\Pi(x)$ მრავალწევრი $(n+1)$ ხარისხისა, უფროსი წევრის კოეფიციენტი ერთის ტოლია. ამგვარად, ჩვენი ამოცანაა: $(n+1)$ ხარისხის მრავალწევრებს შორის, რომელთა უფროსი კოეფიციენტი ერთის ტოლია, მოვინახოთ ისეთი მრავალწევრი, რომელსაც $[-1, 1]$ შუალედში ნულისაგან უმცირესი გადახრა ექნება.

ასეთი თვისება აქვს მრავალწევრებს, რომლებიც შემოიღო ბ. ლ. ჩე-

n ხარისხის ჩებიშევის მრავალწევრს აქვს სახე:

$$T_n(x) = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}}. \quad (7)$$

რომ დავრწმუნდეთ, რომ (7) ტოლობით განსაზღვრულია n ხარისხის მრავალწევრი, დავუშვათ $\theta = \arccos x$, მაშინ

$$T_n(x) = \frac{\cos n \theta}{2^{n-1}} = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2 \cdot 2^{n-1}} = \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^n + (\cos \theta - i \sin \theta)^n}{2^n} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2^n}.$$

თუ გამოვიყენებთ ნიუტონის ბინომის ფორმულას, მრიცხველში მოიხსნება რადიკალები და დავგრძელებ n ხარისხის მრავალწევრი.

გამოვთვალოთ x^n -ის კოეფიციენტი

$$a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{T_n(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n}{2^n} = 1$$

ამგვარად, ჩებიშევის მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი ერთის ტოლია.

ვაჩვენოთ, რომ ჩებიშევის მრავალწევრის ყველა ნული — $T_n(x) = 0$ განტოლების ამონახსნი, ნამდვილია და მოთავსებულია $[-1, 1]$ შუალედში.

მართლაც,

$$T_n(x) = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}} = 0$$

გვაძლევს

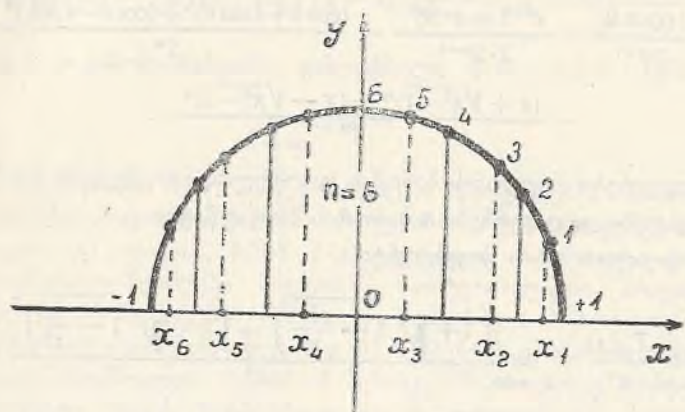
$$n \arccos x = m\pi - \frac{\pi}{2}.$$

საიდანაც $T_n(x)$ მრავალწევრის ნულები იქნება:

$$x_n^m = \cos \frac{(2m-1)\pi}{2n}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

იმისათვის, რომ ავადგოთ x_n^m გრაფიკულად, საკმარისია შემოვხაზოთ $[-1, 1]$ დიამეტრით ნახევარწრეწირი (ნახ. 6). ეს ნახევარწრეწირი გავ-

ყოთ $2n$ ნაწილად და დაგვეგმილოთ წრეწირის დაყოფის კენტი ნომრის წერტილები $[-1, 1]$ მონაკვეთზე. მიღებული წერტილები გადავწოდოთ მარჯვნიდან მარცხნივ. მივიღებთ $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^n$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $T_n(x)$ -ის ნულები არათანაბრად და დაშორებული და გროვდება შუალედის ბოლო წერტილებისაკენ.



ნახ. 6

განვსაზღვროთ $T_n(x)$ -ის ექსტრემალური მნიშვნელობანი. ამისათვის გამოვთვალოთ $T_n'(x)$ და გავუტოლოთ ნულს,

$$\sin n \arccos x = 0,$$

საიდანაც

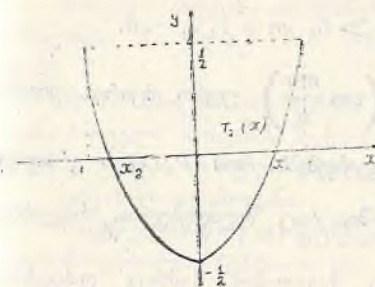
$$x_n^m = \cos \frac{m\pi}{n}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

მიღებულ (8) წერტილებში $T_n(x)$ -ის მნიშვნელობა იქნება

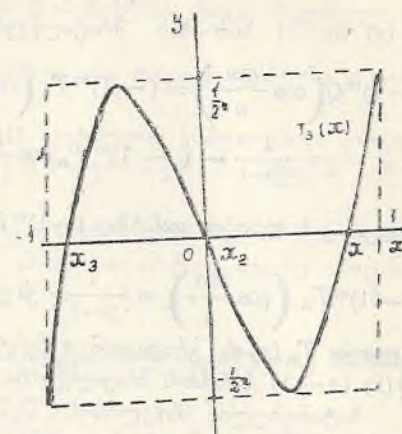
$$T_n\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^m}{2^{n-1}}. \quad (9)$$

ამგვარად, $T_n(x)$ ფუნქციის ყველა მაქსიმუმი ტოლია $\frac{1}{2^{n-1}}$, ხოლო მინიმუმი — $-\frac{1}{2^{n-1}}$.

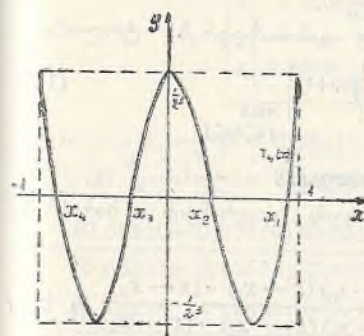
მე-7 — მე-10 ნახაზებზე ნაჩვენებია $T_n(x)$, $n=2, 3, 4, 5$, გრაფიკები.



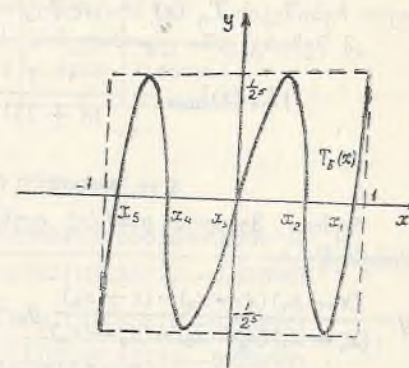
ნახ. 7



ნახ. 8



ნახ. 9



ნახ. 10

$T_n(x)$ -ის ნულიდან გადახრაა $\frac{1}{2^{n-1}}$.

ვაჩვენოთ, რომ n ხარისხის ყველა მრავალწევრიდან, რომელთა უფროსი კოეფიციენტი ერთი ტოლია, ნულიდან უმცირეს გადახრას იძლევა ჩებიშევის $T_n(x)$ მრავალწევრი.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ არსებობს სხვა $P_n(x)$ მრავალწევრი, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი ერთია და გადახრა ნულიდან $\frac{1}{2^{n-1}}$ -ზე ნაკლებია $[-1, 1]$ შუალედში.

განვიხილოთ სხვაობა

$$Q(x) = T_n(x) - P_n(x).$$

$$Q(x) \text{ (} n-1 \text{) ხარისხის მრავალწევრია და აქვს } n \text{ ფიქსირებული პირობა}$$

$$(-1)^m Q\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right) = (-1)^m T_n\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right) - (-1)^m P_n\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} - (-1)^m P_n \cos \frac{m\pi}{n} > 0, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

რადგანაც 1 პირობის თანახმად $(-1)^m P_n\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right)$ უფრო მცირეა, ვიდრე

$$(-1)^m T_n\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}. \text{ ეს კი გვიჩვენებს, რომ } P_n(x) \text{-ის გრაფიკი იკვეთება } T_n(x) \text{-ის გრაფიკთან } n \text{ წერტილში, რაც შეუძლებელია, რადგანაც } Q(x) \text{ (} n-1 \text{) ხარისხის მრავალწევრია.}$$

ჩატარებული მსჯელობის შემდეგ მივიღებთ შემდეგ დასკვნას: $[-1, 1]$ შუალედში $f(x)$ ფუნქციის საინტერპოლაციო მრავალწევრის ცდომილება იქნება უმცირესი, თუ საინტერპოლაციო წერტილებად ავიღებთ ჩებიშევის $T_n(x)$ მრავალწევრის ნულებს.

ამ შემთხვევაში ცდომილების სიდიდე განისაზღვრება ტოლობით

$$|R_n(x)|_{\max} = \frac{1}{(n+1)! 2^{n-1}} \left| f^{(n+1)} \right|_{\max} \quad (10)$$

$-1 \leq x \leq 1$

§ 10. ზამთრული ინტერპოლირება

ზემოთ მივიღეთ $y=f(x)$ ფუნქციისათვის ლაგრანჟის n ხარისხის მრავალწევრი

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 +$$

$$+ \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n. \quad (1)$$

ეს ფორმულა იძლევა x და y ცვლადებს შორის დამოკიდებულებას. ამ ცვლადებიდან ერთ-ერთი შეგვიძლია განვიხილოთ დამოუკიდებელ ცვლადად, ხოლო მეორე დამოკიდებელ ცვლადად. მაგალითად, y შეგვიძლია მივიღოთ დამოუკიდებელ ცვლადად, ხოლო x y -ის ფუნქციით: $x=\varphi(y)$. ამის გამო (1) ფორმულაში x და y -ის ადგილები შეგვიძლია შევცვალოთ.

$$x = \frac{(y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\dots(y_0-y_n)} x_0 + \frac{(y-y_0)(y-y_2)\dots(y-y_n)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)\dots(y_1-y_n)} x_1 +$$

$$+ \dots + \frac{(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)\dots(y_n-y_{n-1})} x_n. \quad (2)$$

ამ ორი ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია განვიხილოთ ორი ამოცანა:

1) ვიპოვოთ $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა მოცემულია x არგუმენტის მნიშვნელობა.

2) ვიპოვოთ x არგუმენტის მნიშვნელობა, როცა მოცემულია y ფუნქციის მნიშვნელობა.

პირველი ამოცანა ამოიხსნება (1) ფორმულის საშუალებით. პირველ ამოცანას პირდაპირი ინტერპოლირების ამოცანა ეწოდება.

მეორე ამოცანა ამოიხსნება (2) ფორმულის დახმარებით. მეორე ამოცანა პირველი ამოცანის შექცეული ამოცანაა, ამიტომ მეორე ამოცანას შექცეული ინტერპოლირების ამოცანა ეწოდება.

განვიხილოთ ამოცანა.

მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის (ლოგარითმული ფუნქციის) მნიშვნელობანი ცხრილით (ცხრილი 15).

ცხრილი 15

x	4,50	4,52	4,55	4,56
y	0,65321	0,65514	0,65801	0,65896

ვიპოვოთ x , თუ $y = 0,65610$.

(2) ფორმულით მივიღებთ

$$x = \frac{(0,65610 - 0,65514)(0,65610 - 0,65801)(0,65610 - 0,65896)}{(0,65321 - 0,65514)(0,65321 - 0,65801)(0,65321 - 0,65896)} \cdot 4,50 +$$

$$+ \frac{(0,65610 - 0,65321)(0,65610 - 0,65801)(0,65610 - 0,65896)}{(0,65514 - 0,65321)(0,65514 - 0,65801)(0,65514 - 0,65896)} \cdot 4,52 +$$

$$+ \frac{(0,65610 - 0,65321)(0,65610 - 0,65514)(0,65610 - 0,65896)}{(0,65801 - 0,65321)(0,65801 - 0,65514)(0,65801 - 0,65896)} \cdot 4,55 +$$

$$+ \frac{(0,65610 - 0,65321)(0,65610 - 0,65514)(0,65610 - 0,65801)}{(0,65896 - 0,65321)(0,65896 - 0,65514)(0,65896 - 0,65801)} \cdot 4,56.$$

სათანადო გამოთვლები მოგვცემს

$$x \approx 4,53.$$

ამგვარად, არათანაბრად დაშორებული წერტილებისათვის გამოვიყენეთ ლაგრანჟის ფორმულა და ამოვხსენით ინტერპოლირების შექცეული ამოცანა.

ტოლად დაშორებული წერტილების შემთხვევაში შექცეული ინტერპოლირების ამოცანის ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ტოლად დაშორებული წერტილებით ინტერპოლირების ფორმულები, მაგალითად, ნიუტონის პირველი ფორმულა:

$$y = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-(n-1))}{n!} \Delta^n y_n.$$

ამ განტოლებაში უცნობია t . ამოვხსნათ ეს განტოლება. ამისათვის გამოვიყენოთ მიმდევრობითი მიახლოებების (იტერაციის) მეთოდი¹. ეს მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს:

ნიუტონის პირველი ფორმულიდან განვსაზღვროთ t ,

$$t = F(t), \quad (3)$$

სადაც

$$F(t) = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0} - \dots - \frac{t(t-1)\dots(t-(n-1))}{n!} \frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0}. \quad (4)$$

t -ს საწყის — ნულოვან მიახლოებით მნიშვნელობად მივიღოთ

$$t_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0},$$

ხოლო შემდეგი მნიშვნელობა t_1 განვსაზღვროთ (3)-დან,

$$t_1 = F(t_0).$$

შემდეგი მნიშვნელობა t_2 განვსაზღვროთ t_1 საშუალებით და ა. შ.

$$t_{m+1} = F(t_m).$$

თუ t_{m+1} -ის მნიშვნელობა დამთხვევა t_m -ს სათანადო სიზუსტით, მაშინ t_m -ის მნიშვნელობა უნდა მივიღოთ t -ს საძიებელ მნიშვნელობად.

ამ მეთოდის ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი.

მოცემულია $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ფუნქციის სხვაობათა ცხრილი (ცხრილი 16).

ცხრილი 16

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
550	0,0426401	—773		
552	0,0425628	—769	4	0
554	0,0424859	—765	4	1
556	0,0424094	—760	5	
558	0,0423334			

ვიპოვოთ x , თუ $y = 0,0426014$

¹ დაწვრილებით იტერაციის მეთოდის შესახებ იხ. თავი XIII, § 6.

ჩადგანაც საძიებელი x მოთავსებულია 550 და 552-ს შორის, გამოვიყენოთ ნიუტონის დაღმავალ სხვაობიანი საინტერპოლაციო ფორმულა. საინტერპოლაციო ფორმულას ექნება სახე:

$$y = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0,$$

საიდანაც

$$t = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0}. \quad (5)$$

მე-16 ცხრილიდან მივიღებთ:

$$y - y_0 = 0,0426014 - 0,0426401 = -387 \cdot 10^{-7},$$

$$\Delta y_0 = -773 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta^2 y_0 = 4 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta^3 y_0 = 0 \cdot 10^{-7},$$

$$\frac{y - y_0}{\Delta y_0} = 5006468 \cdot 10^{-7}, \quad \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} = -0,0051746 = -51746 \cdot 10^{-7}.$$

$$\frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0} = 0.$$

ამ რიცხვების (5) ფორმულაში ჩასმით გვექნება:

$$t = 5006468 \cdot 10^{-7} + \frac{t(t-1)}{2} \cdot 51746 \cdot 10^{-7}.$$

მივიღოთ

$$t_0 = 5006468 \cdot 10^{-7},$$

მაშინ

$$t_1 = 4999999,8 \cdot 10^{-7} = 0,5.$$

t -ს შემდეგი მნიშვნელობის გამოთვლა მოგვცემს, რომ იგი იქნება $5000000 \cdot 10^{-7}$. საბოლოოდ შეგვიძლია მივიღოთ $t = 0,5$. ამის შედეგად

$$x = a + th = 550 + 0,5 \cdot 2 = 551.$$

ამგვარად, თუ $y = 0,0426014$, მაშინ $x = 551$.

თუ საძიებელი x -ის მნიშვნელობა ახლოს იქნება ცხრილის შუა მნიშვნელობასთან, მაშინ გამოვიყენებთ ცენტრალურ სხვაობიან ფორმულას.

შევნიშნოთ, რომ

$$f(x) = 0$$

განტოლების ამოხსნა შეიძლება მივიყვანოთ შექცეული ინტერპოლირების ამოცანაზე. ამისათვის საჭიროა გამოვთვალოთ $y = f(x)$ ფუნქ-

ციის მნიშვნელობანი, რომელიც ახლოსაა $f(x)=0$ მნიშვნელობასთან, შემდეგ შევადგინოთ სათანადო საინტერპოლაციო ფორმულა და გამოვიყენოთ შექცეული ინტერპოლირება: მოვნახოთ x -ის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $y=0$ მნიშვნელობას.

ამ საკითხს დაწვრილებით გავეცნობით ქვემოთ, მე-13 თავში, § 7.

§ 11. მაიერზბრასის თეორემაში პარამეტრების შესახებ

1. ზოგადი შენიშვნები. როგორც აღინიშნა, $f(x)$ ფუნქციის ინტერპოლირება მდგომარეობს იმაში, რომ იგი შევცვალოთ გარკვეული თვისებების მქონე სათანადო $p(x)$ ფუნქციით, ამასთან $p(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი მოცემულ x_i წერტილებში უნდა ემთხვეოდეს $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს x_i წერტილებში. თუ ინტერპოლირებას ვაწარმოებთ მრავალწევრებით, საინტერპოლაციო წერტილების რიცხვის ზრდასთან ერთად იზრდება $P_n(x)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი. მაგრამ საინტერპოლაციო წერტილთა რიცხვის ზრდა ყოველთვის არ იწვევს $f(x)$ ფუნქციის მიახლოებითი წარმოდგენის გაუმჯობესებას აღებულ $[a, b]$ სეგმენტზე¹.

როგორიც გინდა იყოს ინტერპოლაციის წერტილთა მიმდევრობა

$$(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}), \quad n = 1, 2, \dots$$

ყოველთვის შეგვიძლია მოვნახოთ ისეთი უწყვეტი ფუნქცია, რომლისთვისაც აგებული ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომების მიმდევრობა $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ საინტერპოლაციო წერტილებით იქნება განშლადი². მაგრამ არსებობენ მრავალწევრები, რომლებითაც წარმატებით გადაწყდება აღებული ამოცანა.

სწორედ ამ საკითხს ეხება ქვემოთ დამტკიცებული ვაიერშტრასის თეორემა.

ავიღოთ $P_n(x)$ მრავალწევრი, სადაც n წინასწარ მოცემულია. დავსვათ ამოცანა: განვსაზღვროთ მრავალწევრი $P_n(x)$ — განვსაზღვროთ $P_n(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები ისე, რომ $P_n(x)$ მრავალწევრის $f(x)$ ფუნქციიდან გადახრა $[a, b]$ სეგმენტზე, $\max |f(x) - P_n(x)|$, იყოს უმცირესი. ამ ამოცანაში დასმულია საკითხი $f(x)$ ფუნქციისათვის საუკეთესო მიახლოებითი მრავალწევრის $P_n(x)$ აგების შესახებ. ეს ამოცანა მთლიანი ზოგადობით ჩებიშევმა დასვა და წარმატებით გადაწყვიტა. ჩებიშევის მრავალწევრებს მე-9 პარაგრაფში გავეცანი.

2. ძირითადი ლემები. ქვემოთ დავამტკიცებთ თეორემას: ყოველი $\varepsilon > 0$ -სათვის მოინახება ისეთი $n(\varepsilon)$ ხარისხის მრავალწევრი $P_n(x)$, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში იმავე სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციისათვის $|f(x) - P_n(x)|$ ნაკლები იყოს ამ ε რიცხვზე. ეს კი ვაიერშტრასის პირველი თეორემაა, რომელიც ზუსტად ასე ჩამოყალიბდება:

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია $[a, b]$ შუალედში, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ -ისათვის არსებობს ისეთი $n = n(\varepsilon)$ ხარისხის მრავალწევრი, რომ $[a, b]$ შუალედის ყოველი წერტილისათვის ადვილი აქვს უტოლობას

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

ამ თეორემას დავამტკიცებთ ლებეგის მეთოდით¹. წინასწარ საჭიროა დავამტკიცოთ ორი ლემა.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\lambda(x) = \mu \frac{x - \xi + |x - \xi|}{2}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1)$$

ეს ფუნქცია ნულის ტოლია, თუ $x \leq \xi$, ხოლო

$$\lambda(x) = \mu(x - \xi),$$

თუ $x > \xi$.

ამისათვის საკმარისია (1) ფუნქციაში ჩავსვათ

$$|x - \xi| = -(x - \xi), \quad \text{თუ } x \leq \xi; \quad \text{ხოლო, თუ } x > \xi, \quad |x - \xi| = x - \xi.$$

(1) ფუნქციის ეწოდება ელემენტარული პოლიგონური ფუნქცია (ნახ. 11).

$[a, b]$ შუალედში ავიღოთ წერტილები

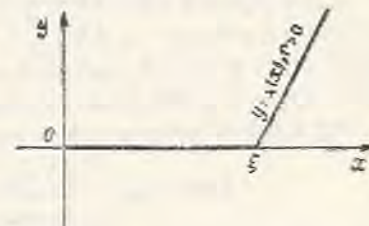
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$$

და რაიმე რიცხვები

$$y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, \dots, y_n$$

განვიხილოთ $L(x)$ ფუნქცია,

$$L(x) = y_{k-1} + (y_k - y_{k-1}) \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

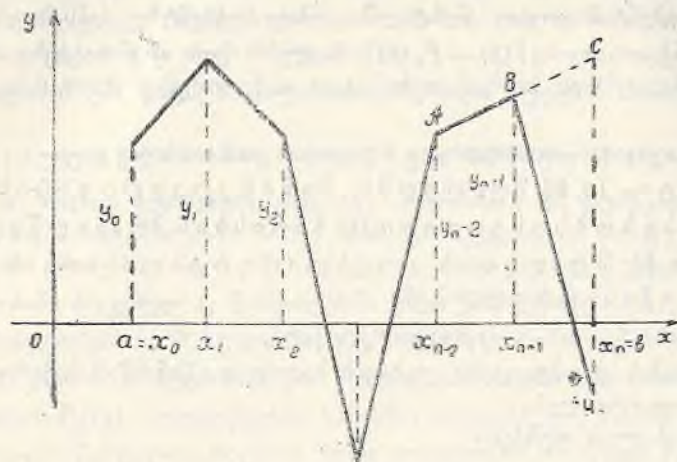


ნახ. 11

¹ В. Немыцкий, М. Слудская, А. Чекасов, Курс математического анализа, т. II, М.-Л. 1944. стр. 74—81.

¹ Г. Н. Положий и др., Математический практикум, М. 1960, стр. 168.
² В. Л. Гончаров, Интерполирование и приближение функций, М.-Л. 1934, стр. 98.

$L(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ტეხილია (ნახ. 12).



ნახ. 12

$L(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ შუალედში უწყვეტია. ამ $L(x)$ ფუნქციას ეწოდება პოლიგონური ფუნქცია.

დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა 1. ყოველი პოლიგონური $L(x)$ ფუნქცია $a \leq x \leq b$ შუალედში შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს რაიმე მუდმივისა და ელემენტარული პოლიგონური ფუნქციების სასრული რიცხვის ჯამით. ამასთან ელემენტარულ ფუნქციათა რიცხვი ტოლია ტეხილის რგოლთა რიცხვისა.

ეს ლემა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

თუ $L(x)$ -ის გრაფიკი ერთი რგოლისაგან შედგება, მაშინ

$$L(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{b - a} (x - a), \quad a \leq x \leq b.$$

ეს კი გვიჩვენებს

$$L(x) = y_0 + \lambda_1(x),$$

სადაც

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \leq a, \\ \frac{y_1 - y_0}{b - a} (x - a), & \text{თუ } x > a. \end{cases}$$

ამგვარად, $n=1$ -თვის ლემა სამართლიანია

ვთქვათ ლემა სამართლიანია $(n-1)$ რგოლისათვის.

ავიღოთ n რგოლი და ვთქვათ, $L(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (2) ტოლობით. ავავთ $L^*(x)$ ფუნქცია, რომელიც $L(x)$ -ს ემთხვევა $a \leq x \leq x_{n-1}$ -ში, ხოლო $x_{n-1} \leq x \leq x_n = b$ შუალედში განსაზღვრულია განტოლებით

$$L^*(x) = y_{n-2} + \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} (x - x_{n-2}).$$

(ტეხილის რგოლი, რომელიც მოცემულია $x_{n-2} \leq x \leq x_{n-1}$ შუალედში, გაგვრძელდება $x_{n-1} \leq x \leq x_n$ შუალედში). მაგრამ ეს $L^*(x)$ ემთხვევა $L(x)$ -ს $x_{n-2} \leq x \leq x_{n-1}$ -ში. ასე რომ, $L^*(x)$ -ის გრაფიკი შედგება $(n-1)$ რგოლისაგან: $(n-2)$ რგოლი $a \leq x \leq x_{n-2}$ შუალედში და ერთი რგოლი $x_{n-2} \leq x \leq x_{n-1}$ შუალედში. $L^*(x)$ -თვის, პირობის თანახმად, ლემა სამართლიანია, ე. ი.

$$L^*(x) = y_0 + \lambda_1(x) + \dots + \lambda_{n-1}(x), \quad a \leq x \leq b.$$

ახლა ავიღოთ ელემენტარული პოლიგონური ფუნქცია

$$\lambda_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \leq x_{n-1}, \\ \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{b - x_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \right) (x - x_{n-1}), & \text{თუ } x > x_{n-1}. \end{cases}$$

ცხადია, $a \leq x \leq x_{n-1}$ შუალედში გვაქვს

$$L(x) = L^*(x) + \lambda_n(x).$$

(3)

განვიხილოთ $L^*(x) + \lambda_n(x)$ ჯამი $x_{n-1} \leq x \leq x_n$ შუალედში.

$$\begin{aligned} L^*(x) + \lambda_n(x) &= y_{n-2} + \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} (x - x_{n-2}) + \\ &+ \frac{y_n - y_{n-1}}{b - x_{n-1}} (x - x_{n-1}) - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} (x - x_{n-1}) = \\ &= y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{b - x_{n-1}} (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

ამ უკანასკნელის (3)-თან შედარება მოგვცემს

$$L^*(x) + \lambda_n(x) = L(x), \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n = b.$$

ამგვარად, მთელ შუალედში $a \leq x \leq b$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$L(x) = L^*(x) + \lambda_n(x),$$

ანუ

$$L(x) = y_0 + \lambda_1(x) + \dots + \lambda_n(x).$$

ამით პირველი ლემა მთლიანად დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა

ლემა 2. ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტი $a \leq x \leq b$ შუალედში, მაშინ როგორც უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი, ყოველთვის მოიძებნება იმავე შუალედში განსაზღვრული ისეთი პოლიგონური ფუნქცია $L(x)$, რომ

$$|f(x) - L(x)| < \varepsilon,$$

$a \leq x \leq b$ შუალედის ყოველი x -თვის.

დამტკიცება. პირობის თანახმად $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე¹, ე. ი. მოცემული ε -თვის მოიძებნება ისეთი δ , რომ

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ნებისმიერი x_1, x_2 -თვის, $x_1, x_2 \in [a, b]$, თუ

$$|x_1 - x_2| < \delta.$$

დავყოთ $[a, b]$ შუალედი $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ წერტილებით ისე, რომ

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$x_k - x_{k-1} < \delta, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

ავიღოთ x_k -ს შესაბამისი სათანადო მნიშვნელობანი

$$y_k = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

ავაგოთ (2) ტეხილი წირი $L(x)$ და განვიხილოთ სხვაობა $|f(x) - L(x)|$. რადგანაც $L(x_k) = f(x_k)$, ამიტომ $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ შუალედში გვექნება

$$|f(x) - L(x)| = |f(x) - f(x_k) + L(x_k) - L(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |L(x_k) - L(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |L(x_k) - L(x_{k+1})|,$$

ანუ

$$|f(x) - L(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_{k+1})|,$$

საიდანაც

$$|f(x) - L(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ამით მეორე ლემა დამტკიცდა.

¹ იხ. ნაწ. I, თავი XIII, § 12, n3.

3. ვაიერშტრასის პირველი თეორემის დამტკიცება. ავიღოთ ფუნქცია $\sqrt{1+t}$, რომელიც $|t| < 1$ -თვის გაიშლება მწკრივად

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} t^n + \dots \quad (4)$$

(4) მწკრივი თანაბრად კრებალია $-1 < t < 1$ შუალედში. ავიღოთ მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} + \dots \quad (5)$$

რომლის წევრებსაც აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება (4) მწკრივის წევრები. გამოვარკვიოთ (5) მწკრივის კრებალობა. თუ გამოვიყენებთ მწკრივის კრებალობის რაბეის ნიშანს (იხ. თავი V, § 2, n5) მივიღებთ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{2(n+1)}{2n-1} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2} > 1.$$

მაშასადამე, (5) მწკრივი კრებალია.

ამის შედეგად მივიღებთ, რომ (4) მწკრივი თანაბრად კრებალია $-1 \leq t \leq 1$ შუალედში. (4) მწკრივის წევრები უწყვეტია, ამიტომ მწკრივის ჯამიც უწყვეტია და $-1 \leq t \leq 1$ შუალედის შიგნით იგი ტოლია $\sqrt{1+t}$. მაგრამ $\sqrt{1+t}$ შუალედის $[-1, 1]$ ბოლოებშიაც უწყვეტია. ამიტომ გვექნება: (4) მწკრივი $[-1, 1]$ შუალედის ყოველ წერტილში თანაბრად იკრება $\sqrt{1+t}$ -სკენ. მხედველობაში მივიღოთ, რომ $\sqrt{1+t}$ -ს განვიხილავთ დადებითი ნიშნით. ამიტომ, თუ დავუშვებთ $t = u^2 - 1$, მაშინ $\sqrt{1+t} = \sqrt{u^2} = |u|$.

თუ $-1 \leq u \leq 1$, მაშინ $0 \leq t \leq 1$. ასე რომ, თუ t -ს მაგვირად (4) მწკრივში ჩავსვათ $t = u^2 - 1$, მწკრივის კრებალობა არ დაირღვევა. გვქნება

$$|u| = 1 + \frac{1}{2}(u^2 - 1) - \frac{1}{8}(u^2 - 1)^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} (u^2 - 1)^n + \dots \quad (6)$$

ავიღოთ $-N \leq x \leq N$ შუალედი, სადაც N ნებისმიერი, მაგრამ ფიქსირებული რიცხვია. დავუშვათ $x = Nu$, მაშინ $u = \frac{x}{N}$, სადაც $|u| \leq 1$.

(6) მწკრივში ჩავსვათ $u = \frac{x}{N}$, მივიღებთ

$$|x| = N \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{N^2} - 1 \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x^2}{N^2} - 1 \right)^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-3}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left(\frac{x^2}{N^2} - 1 \right)^n + \dots \right\}. \quad (7)$$

(7) მწკრივი (6) მწკრივის საფუძველზე თანაბრად კრებადია. ვთქვათ, მოცემულია $a \leq x \leq b$ შუალედი. ავიღოთ N იმდენად დიდი, რომ $a \leq x \leq b$ შუალედი მოთავსდეს $-N \leq x \leq N$ შუალედში. ე. ი. ნებისმიერ $a \leq x \leq b$ შუალედში (7) მწკრივი თანაბრად იკრებება $|x|$ ფუნქციისავე.

ცხადია, თუ x -ის ნაცვლად ავიღებთ $x - \xi$, მაშინ $|x - \xi|$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ თანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამით,

$$|x - \xi| = N \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{(x - \xi)^2}{N^2} - 1 \right] - \frac{1}{8} \left[\frac{(x - \xi)^2}{N^2} - 1 \right]^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left[\frac{(x - \xi)^2}{N^2} - 1 \right]^n + \dots \right\}, \quad (8)$$

რისთვისაც საკმარისია N იმდენად დიდი ავიღოთ, რომ შუალედი $[\xi - N, \xi + N]$, რომელშიაც (8) მწკრივი კრებადია, შეიცავდეს $[a, b]$ შუალედს.

მოვიგონოთ ელემენტარული პოლიგონური ფუნქცია (1).

$$\lambda(x) = \mu \frac{(x - \xi) + |x - \xi|}{2}.$$

ეს ფუნქცია $|x - \xi|$ -გან განსხვავდება მარავლით $\frac{\mu}{2}$ და შესაყრებით $\frac{\mu(x - \xi)}{2}$, ამიტომ $\lambda(x)$ ფუნქცია გაიშლება მრავალწევრთა თანაბრად

კრებადი მწკრივის ჯამად. პირველი ლემის თანახმად პოლიგონური ფუნქცია $L(x)$ წარმოიდგინება ელემენტარული პოლიგონური ფუნქციების ჯამად:

$$L(x) = y_0 + \lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \dots + \lambda_n(x), \quad a \leq x \leq b;$$

და, რადგანაც თითოეული $\lambda_i(x)$ გაიშლება პოლინომთა თანაბრად კრებად მწკრივად,

$$\lambda_i(x) = P_{i,1}(x) + P_{i,2}(x) + \dots + P_{i,k}(x) + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$a \leq x \leq b$ შუალედში, ცხადია, $L(x)$ გაიშლება მრავალწევრთა თანაბრად კრებად მწკრივად $a \leq x \leq b$ შუალედში.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$P_0 = y_0, \quad P_1(x) = \sum_{i=1}^n P_{i,1}(x), \quad P_2(x) = \sum_{i=1}^n P_{i,2}(x), \dots, \quad P_k(x) = \sum_{i=1}^n P_{i,k}(x), \dots,$$

მაშინ გვექნება:

$$L(x) = P_0(x) + P_1(x) + \dots + P_k(x) + \dots, \quad (9)$$

სადაც (9) მწკრივი თანაბრად კრებადია $a \leq x \leq b$ შუალედში.

დავუბრუნდეთ მეორე ლემას. როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი, მოიძებნება ისეთი პოლიგონური ფუნქცია $L(x)$, რომ

$$|f(x) - L(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(2) ტოლობიდან იმავე $\varepsilon > 0$ -სათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი n , რომ

$$\left| L(x) - \sum_{k=0}^n P_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ ორი უტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n P_k(x) \right| = |f(x) - L + (L - \sum_{k=0}^n P_k)| \leq$$

$$\leq |f(x) - L| + \left| L - \sum_{k=0}^n P_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ამით ვაიერშტრასის პირველი თეორემა დამტკიცდა.

4. ვაიერშტრასის მეორე თეორემა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია. ბუნებრივია, დავსვათ საკითხი, შეიძლება თუ არა $f(x)$ ფუნქციის მიხსლოება უმარტივესი პერიოდული ფუნქციებით.

თუ $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია l , $f(x+l) = f(x)$, მაშინ $x = \frac{l}{2\pi}t$ გარ-

დაქმნით $f(x)$ ფუნქცია გარდაიქმნება ფუნქციად, რომლის პერიოდია 2π . მართლაც,

$$f\left[\frac{l}{2\pi}(t + 2\pi)\right] = f\left(\frac{l}{2\pi}t + l\right) = f\left(\frac{l}{2\pi}t\right).$$

ამის გამო $f(x)$ ფუნქციის პერიოდად ვიგულისხმებთ 2π -ს.

გამოსახულებას

$$Q(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ქვემოთ n რიგის ტრიგონომეტრიული მრავალწევრი ტრიგონომეტრიული მრავალწევრი ეკუთვნის უმარტივეს პერიოდულ ფუნქციას კლასს.

ზემოთ დასმული საკითხის პასუხს იძლევა ვაიერშტრასის მეორე თეორემა:

თეორემა 2. უწყვეტი და პერიოდული $f(x)$ ფუნქცია, რომლის პერიოდია 2π , შეიძლება გაიშალოს $[-\pi, \pi]$ შუალედში თანაბრად კრებადი ტრიგონომეტრიული მრავალწევრების მწკრივად.

ამ თეორემას დავამტკიცებთ ვალე-პუსენის მეთოდით¹.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ლუწი ფუნქციაა, $f(-x) = f(x)$.

დავუშვათ $x = \arccos t$, როცა t უწყვეტად იცვლება $-1 \leq t \leq 1$ შუალედში, მაშინ x -იც უწყვეტად იცვლება. $\pi \geq x \geq 0$ შუალედში.

ამის გამო $f(\arccos t)$ ფუნქცია t -ს უწყვეტი ფუნქციაა $-1 \leq t \leq 1$ შუალედში. გამოვიყენოთ ამ $f(\arccos t)$ ფუნქციისათვის ვაიერშტრასის პირველი თეორემა: ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $P_n(t)$ მრავალწევრი, რომ

$$|f(\arccos t) - P_n(t)| < \varepsilon, \quad (10)$$

ყოველი t -თვის, $t \in [-1, 1]$.

თუ დავუბრუნდებით x ცვლადს, მივიღებთ

$$|f(x) - P_n(\cos x)| < \varepsilon$$

ყოველი x -თვის, $x \in [0, \pi]$, სადაც

$$P_n(\cos x) = \gamma_0 + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos^2 x + \dots + \gamma_n \cos^n x. \quad (11)$$

მაგრამ მათემატიკური ინდუქციით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\cos^n x$ წარმოიდგინება ტრიგონომეტრიული მრავალწევრით

$$\cos^n(x) = \sum_{p=0}^n \alpha_p \cos px, \quad (12)$$

მართლაც $n=1$, გვაქვს

$$\cos^1 x = \cos x.$$

$n=2$ -თვის გვაქვს

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

ვთქვათ, (12) ტოლობა სამართლიანია n -თვის. მაშინ $n+1$ -თვის გვექნება

$$\cos^{n+1} x = \sum_{p=0}^n \alpha_p \cos px \cdot \cos x = \sum_{p=0}^n \frac{\alpha_p}{2} [\cos(p-1)x + \cos(p+1)x]$$

ე. ი.

$$\cos^{n+1} x = \sum_{p=0}^{n+1} \alpha'_p \cos px,$$

სადაც α'_p მუდმივია.

ამის გამო (11)-დან, თუ $\cos^k x$ ხარისხებს შევცვლით ტრიგონომეტრიული მრავალწევრებით, გვექნება: $P_n(x)$ წარმოადგენს n რიგის ტრიგონომეტრიულ მრავალწევრს.

ამგვარად, დავამტკიცეთ ვაიერშტრასის თეორემა ლუწი $f(x)$ ფუნქციისათვის.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია ნებისმიერი პერიოდული ფუნქციაა 2π პერიოდით.

ვანვიხილოთ დამხმარე ფუნქციები

$$\varphi(x) = f(x) + f(-x),$$

$$\psi(x) = [f(x) - f(-x)] \sin x.$$

ეს ფუნქციები უწყვეტი და პერიოდული ფუნქციებია 2π პერიოდით. ამასთანავე ლუწი ფუნქციებია. თუ გამოვიყენებთ ლუწი ფუნქციისათვის უკვე დამტკიცებულ თეორემას, მივიღებთ

$$|\varphi(x) - P(\cos x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\psi(x) - Q(\cos x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ყოველი x -თვის $x \in [-\pi, \pi]$.

აქედან გვექნება

$$|\varphi(x) \sin^2 x - P(\cos x) \sin^2 x| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\psi(x) \sin x - Q(\cos x) \sin x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

¹ Ch. de la Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions, Paris, 1919.
686

$$| [\varphi(x) \sin^2 x + \psi(x) \sin x] - [P(\cos x) \sin^2 x + Q(\cos x) \sin x] | < \varepsilon. \quad (13)$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ

$$P(\cos x) \sin^2 x + Q(\cos x) \sin x$$

წარმოადგენს ტრიგონომეტრიულ მრავალწევრს, რაც $Q_1(x)$ -ით აღვნიშნოთ, ხოლო

$$\begin{aligned} \varphi(x) \sin^2 x + \psi(x) \sin x &= f(x) \sin^2 x + f(-x) \sin^2 x + \\ &+ f(x) \sin^2 x - f(-x) \sin^2 x = 2f(x) \sin^2 x. \end{aligned}$$

ამის გამო (13) უტოლობა მოგვცემს:

$$| 2f(x) \sin^2 x - Q_1(x) | < \varepsilon. \quad (14)$$

თუ ამავე მსჯელობას გამოვიყენებთ $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ -თვის, მივიღებთ:

$$| 2f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 x - Q_2(x) | < \varepsilon, \quad (15)$$

სადაც $Q_2(x)$ ტრიგონომეტრიული მრავალწევრია.

(15) უტოლობაში x შევცვალოთ $x - \frac{\pi}{2}$ -ით, მაშინ $Q_2(x)$ ტრიგონომეტრიული მრავალწევრი გადავა სხვა ტრიგონომეტრიულ $Q_3(x)$ მრავალწევრში, მივიღებთ:

$$| 2f(x) \cos^2 x - Q_3(x) | < \varepsilon. \quad (16)$$

(14) და (16) უტოლობებიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{Q_1(x) + Q_2(x)}{2} \right| &= \left| \left[f(x) \sin^2 x - \frac{Q_1(x)}{2} \right] + \left[f(x) \cos^2 x - \frac{Q_2(x)}{2} \right] \right| \leq \\ &\leq \left| f(x) \sin^2 x - \frac{Q_1(x)}{2} \right| + \left| f(x) \cos^2 x - \frac{Q_2(x)}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

გ. ი.

$$| f(x) - Q(x) | < \varepsilon,$$

სადაც

$$Q(x) = \frac{Q_1(x) + Q_2(x)}{2}$$

ტრიგონომეტრიული მრავალწევრია. ამით ვაიერშტრასის მეორე თეორემა დამტკიცდა.

1. ფუნქციათა ჩებიშევის სისტემა. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ნამდვილი ფუნქციების რაიმე სიმრავლე R და ამ სიმრავლიდან ავიღოთ საკმარისად მარტივი ფუნქციების სასრული ანთელადი $\{\varphi_i(x)\}$ სიმრავლე. დავუშვათ, რომ ამ $\{\varphi_i(x)\}$ სიმრავლის ელემენტთა სისტემის სასრული სისტემა წარმოადგენს დამოუკიდებელია $[a, b]$ სეგმენტზე-პრაქტიკაში $\{\varphi_i(x)\}$ -ად ლებულოვნ x -ის ხარისხების მიმდევრობას¹,

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

ან ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მიმდევრობას,

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$$

ან მაჩვენებლიან ფუნქციათა მიმდევრობას,

$$1, e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots,$$

სადაც (a_i) ურთიერთგანსხვავებული ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობაა. ავიღოთ $\{\varphi_i(x)\}$ სიმრავლიდან $(n+1)$ ელემენტი. შევადგინოთ ნამდვილი a_i კოეფიციენტებით ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია

$$\varphi(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x). \quad (1)$$

ამ $\varphi(x)$ ფუნქციას ეწოდება $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ფუნქციათა სისტემაში განსაზღვრული განზოგადებული მრავალწევრი. $\varphi(x)$ ფუნქციებშიან R სიმრავლის ელემენტთა წრფივ ქვესიმრავლეს, რომელიც R_n -ით აღვნიშნოთ, $R_n \in R$.

დავსვათ ამოცანა: მივუახლოვდეთ $f(x)$ ფუნქციას $\varphi(x)$ განზოგადებული მრავალწევრით.

ცხადია, ყოველ კერძო შემთხვევაში უნდა ვიცოდეთ ხერხი, რომლის საშუალებითაც $f(x) \in R$ ფუნქციას შევსაბამებთ $\varphi(x) \in R_n$ განზოგადოებულ მრავალწევრს. ეს $\varphi(x)$ ფუნქცია მივიღოთ $f(x)$ ფუნქციის მიახლოებით ფუნქციად.

$\varphi(x)$ ფუნქციის აგება სხვადასხვა ხერხით შეიძლება. მაგალითად, $[a, b]$ შუალედში შეგვიძლია ავიღოთ ურთიერთგანსხვავებული $n+1$ ფიქსირებული x_k წერტილი, $k=0, 1, \dots, n$ და ავარჩიოთ ისეთი n ხარისხის მრავალწევრი, რომელიც x_k წერტილში ლებულობს $f(x_k)$ მნიშვნელობას, $\varphi(x_k) = f(x_k)$. ამ ხერხით იქნა მიღებული ლაგრანჟის და ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრები. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ წარმოება-

¹ И. С. Березин, В. И. Жидков, Методы вычислений, т. I, М. 1966, стр. 48.

დი ფუნქციებია, ზოგჯერ არა მარტო $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციათა ტოლობაა საჭირო, არამედ ამ ფუნქციათა წარმოებულთა ტოლობაც. ამ გზით მივიღეთ ნიუტონის განზოგადებული საინტერპოლაციო მრავალწევრი.

საინტერპოლაციო წერტილებს და $\varphi_i(x)$ ფუნქციებს ისეთი პირობები დაედოთ, რომ მოცემული x_k წერტილებისათვის ყოველ $f(x) \in R$ ფუნქციას შეესაბამებოდეს ერთადერთი განზოგადებული $\varphi(x) \in \bar{R}_n$ მრავალწევრი.

ფუნქციათა $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ სისტემას ეწოდება ფუნქციათა ჩეზიშევის სისტემა $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ამ სისტემით განზოგადებულ ყოველ (1) მრავალწევრს, რომლის ერთი a_i კოეფიციენტი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, $[a, b]$ სეგმენტზე აქვს არაუმეტეს n ნულისა.

ვაჩვენოთ, რომ $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ სისტემა ქმნის ჩეზიშევის სისტემას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2)$$

$[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ ურთიერთ განსხვავებულ $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებისათვის.

მართლაც, თუ ნებისმიერი $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებისთვის $[a, b]$ სეგმენტიდან $\Delta \neq 0$, მაშინ ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც იმავე $[a, b]$ შუალედშია განსაზღვრული, განტოლებათა სისტემას

$$a_0 \varphi_0(x_k) + a_1 \varphi_1(x_k) + \dots + a_n \varphi_n(x_k) = f(x_k), \quad k=0, 1, \dots, n \quad (3)$$

ექნება ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. ამ a_i კოეფიციენტებით შევადგენთ განზოგადებულ (1) მრავალწევრს

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x).$$

ამ შემთხვევაში $\{\varphi_i(x)\}$ ფუნქციები ქმნიან ჩეზიშევის სისტემას. მართლაც, თუ რაიმე $x_0, \dots, x_n$ წერტილებზე $\Delta = 0$, მაშინ მის სვეტებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება

$$\sum_{i=0}^n b_i \varphi_i(x_k) = 0, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

სადაც b_i კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ეს კი ნიშნავს განზოგადებულ მრავალწევრს

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n b_i \varphi_i(x)$$

$[a, b]$ შუალედში ექნება $n+1$ ნული და, მაშასადამე, $\{\varphi_i(x)\}$ ფუნქციები არ ქმნიან ჩეზიშევის სისტემას.

პირიქით, თუ $\{\varphi_i(x)\}$ ფუნქციათა სისტემა არაა ჩეზიშევის სისტემა, მაშინ მოიძებნება ისეთი განზოგადებული მრავალწევრი

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x),$$

რომელსაც $[a, b]$ შუალედში აქვს $n+1$ ნული მაინც, ე. ი.

$$\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x_k) = 0, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

სადაც ერთი c_i მაინც არ უდრის ნულს. ეს კი ნიშნავს, რომ $\Delta = 0$.

ამრიგად დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. ფუნქციათა სისტემა $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ რომ ქმნიდეს ფუნქციათა ჩეზიშევის სისტემას, აუცილებელია და საკმარისი მახასიათებელი დეტერმინანტი არ უდრიდეს ნულს,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ ურთიერთ განსხვავებულ $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებში.

ჩვენ ზემოთ (§ 4) ვაჩვენეთ საინტერპოლაციო მრავალწევრის არსებობა და ერთადერთობა. ახლა ვაჩვენოთ შემდეგი თეორემის ჭეშმარიტება.

თეორემა 2. $[a, b]$ შუალედში განსაზღვრული ყოველი $f(x)$ ფუნქციისათვის და აღებულ ურთიერთ-

განსხვავებული $x_i, i=1, n$, წერტილებისათვის არსებობს ამ შუალედში ჩებიშევის ფუნქციითა სისტემით განსაზღვრული განზოგადებული მრავალწევრი $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x),$$

და ეს მრავალწევრი ერთადერთია.

მართლაც, ჩებიშევის $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ფუნქციითა სისტემისათვის Δ დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი $\{f(x_i)\}, i=0, 1, \dots, n$, მნიშვნელობისათვის $x_i \in [a, b]$, (3) განტოლებათა სისტემას ექნება ერთადერთი ამონახსნი

$$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i=0, 1, \dots, n.$$

ამ ამონახსნებით შევადგინოთ განზოგადებული მრავალწევრი

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta_i}{\Delta} \varphi_i(x) \quad (4)$$

და ეს მრავალწევრი იქნება ერთადერთი.

ამგვარად, (4) ტოლობით განსაზღვრული განზოგადებული მრავალწევრი ერთადერთი განზოგადებული საინტერპოლაციო მრავალწევრი იქნება მოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის და $[a, b]$ შუალედში აღებული ურთიერთგანსხვავებული $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებისათვის.

თუ მხედველობაში მივიღებთ Δ_i მნიშვნელობას,

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0), \dots, f(x_0), \dots, \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1), \dots, f(x_1), \dots, \varphi_n(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_0(x_n), \dots, f(x_n), \dots, \varphi_n(x_n) \end{vmatrix},$$

მაშინ Δ_i დეტერმინანტის i -ური სვეტის ელემენტების ალგებრულ დამატებებად დაშლით მივიღებთ:

$$\Delta_i = \sum_{j=0}^n f(x_j) \Delta_{ji}.$$

შევიტანოთ Δ_i -ს მნიშვნელობა (4)-ში, გვექნება:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{\Delta} \sum_{j=0}^n f(x_j) \Delta_{ji} \varphi_i(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \sum_{i=0}^n \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} \varphi_i(x). \quad (5)$$

გამოსახულება

$$\Phi_j(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} \varphi_i(x)$$

წარმოადგენს $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ ფუნქციითა წრფივ კომბინაციას, რომელიც არაა დამოკიდებული $f(x)$ ფუნქციაზე, იგი დამოკიდებულია $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილთა სისტემაზე. მართლაც, (5) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Phi_i(x). \quad (6)$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის შევსებად $\varphi(x)$ განზოგადებული მრავალწევრი. რადგანაც (6) ფუნქცია x_k წერტილებში გვაძლევს $f(x_k)$ მნიშვნელობას, გვექნება

$$f(x_k) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Phi_i(x_k), \quad k=0, 1, \dots, n.$$

აქედან მივიღებთ

$$\Phi_j(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } k \neq j, \\ 1, & \text{თუ } k = j. \end{cases}$$

$\Phi_j(x_k)$ ფუნქციის ამ თვისებით ადვილად დავასკვნით, რომ (6) ფორმულით განსაზღვრული განზოგადებული მრავალწევრი ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრია (4, § 4).

მოთხოვნა $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ფუნქციითა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა აუცილებელი პირობაა, რომ ეს სისტემა იყოს ჩებიშევის სისტემა.

განვიხილოთ საკმარისი პირობა, რომლის შესრულების დროსაც $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ფუნქციითა სისტემა იძლევა ჩებიშევის სისტემას.

დავუშვათ, რომ $\varphi_i(x)$ ფუნქციებს $[a, b]$ შუალედში აქვთ $n+1$ რიგის წარმოებულები. დავამტკიცოთ შემდეგი.

თეორემა 3. თუ $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ფუნქციები $(n+1)$ -ჯერ წარმოებადი ფუნქციები $[a, b]$ შუალედში და გრონსკის ყველა დეტერმინანტი

$$W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi_0'(x), \varphi_1'(x), \dots, \varphi_k'(x) \\ \varphi_0''(x), \varphi_1''(x), \dots, \varphi_k''(x) \\ \vdots \\ \varphi_0^{(k)}(x), \varphi_1^{(k)}(x), \dots, \varphi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix}, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

ამავე შუალედში განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ფუნქციები ქმნიან ჩებიშევის სისტემას.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ ფუნქციათა $\varphi_i(x)$, $i=0, 1, \dots, n$ სისტემა არ ქმნის ჩებიშევის სისტემას, ე. ი. მოიძებნება ისეთი წრფივი კომბინაცია

$$\varphi(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x), \quad (7)$$

სადაც ერთი c_i მაინც არ უდრის ნულს და $[a, b]$ შუალედში $\varphi(x)$ -ს $(n+1)$ ნული მაინც აქვს.

განვიხილოთ ვრონსკის დეტერმინანტი

$$W(x) = W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi] = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{n-1}(x) & \varphi(x) \\ \varphi'_0(x) & \varphi'_1(x) & \dots & \varphi'_{n-1}(x) & \varphi'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0^{(n)}(x) & \varphi_1^{(n)}(x) & \dots & \varphi_{n-1}^{(n)}(x) & \varphi^{(n)}(x) \end{vmatrix}. \quad (8)$$

ვაჩვენოთ, რომ, თუ $\varphi(x)$ ფუნქციას $n+1$ ნული მაინც აქვს $[a, b]$ შუალედში, მაშინ ერთ ξ წერტილში მაინც

$$W(\xi) = 0.$$

შევადგინოთ გამოსახულება

$$L_{k+1}[\varphi] = \frac{W[\varphi_0, \dots, \varphi_k, \varphi]}{W[\varphi_0, \dots, \varphi_k]}, \quad (9)$$

სადაც $\varphi(x)$ ნებისმიერი $(k+1)$ -ჯერ წარმოებადი ფუნქციაა $[a, b]$ შუალედში. $L_{k+1}[\varphi]$ ოპერატორი $k+1$ რიგის წრფივი დიფერენციალური ოპერატორია, რომლის უფროსი წევრის $\varphi^{(k+1)}(x)$ -ის კოეფიციენტი ერთის ტოლია.

აღვიღოთ შესაძენევა, რომ

$$L_{k+1}[\varphi_j] = 0, \quad j=0, 1, \dots, k.$$

ე. ი. $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ ფუნქციები

$$L_{k+1}[\varphi] = 0$$

დიფერენციალური განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნებია.

გამოვიანგარიშოთ

$$\frac{d}{dx} L_k[\varphi] - b_k(x) L_k[\varphi] \quad (10)$$

მნიშვნელობა, თუ

$$b_k = \frac{\frac{d}{dx} L_k[\varphi_k]}{L_k[\varphi_k]}, \quad L_k[\varphi_k] \neq 0.$$

ცხადია, $\varphi = \varphi_k$ -სთვის (10) ნულის ტოლია. სწორედ ასეა შერჩეული b_k , ხოლო, როდესაც $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$, მივიღებთ.

$$\begin{aligned} W[\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}] \frac{d}{dx} W[\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi] - W[\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi] \frac{d}{dx} W[\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}] \\ = \frac{W^2[\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}]}{W[\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi]} \frac{d}{dx} W[\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}] \\ - b_k(x) L_k[\varphi] = \frac{W[\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi] \frac{d}{dx} W[\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}]}{W^2[\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}]} \end{aligned}$$

ეს გამოსახულება ნულის ტოლია $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ -თვის, რადგანაც იგი შეიცავს $W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi]$ მაშვლს.

ამრიგად,

$$\frac{d}{dx} L_k[\varphi] - b_k(x) L_k[\varphi] = 0. \quad (11)$$

დიფერენციალური განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნებია

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x).$$

ასეთივე ამონახსნები აქვს განტოლებას

$$L_{k+1}[\varphi] = 0.$$

ამ განტოლების და (11) განტოლების პირველი კოეფიციენტები 1-ის ტოლია, ამიტომ

$$L_{k+1}[\varphi] \equiv \frac{d}{dx} L_k[\varphi] - b_k(x) L_k[\varphi], \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (12)$$

თუ $\varphi(x)$ ფუნქციას (7) ტოლობით განვსაზღვრავთ, მაშინ მას $[a, b]$ შუალედში $(n+1)$ ნული მაინც აქვს დაშვების თანახმად.

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$-\int_a^x b_0(x) dx$$

$$\psi_1(x) = \varphi(x) e^{\int_a^x b_0(x) dx},$$

რომელსაც, ცხადია, $[a, b]$ შუალედში $(n+1)$ ნული მაინც აქვს. მისი გაწარმოებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi_1(x) &= \left[\frac{d}{dx} \varphi(x) - b_0(x) \varphi(x) \right] e^{\int_a^x b_0(x) dx} = \\ &= L_1[\varphi_1(x)] e^{\int_a^x b_0(x) dx}. \end{aligned}$$

რადგანაც $\frac{d}{dx} \psi_1(x)$ -ს n ნული მაინც აქვს $[a, b]$ სეგმენტზე, ცხადია, $L_1[\varphi(x)]$ ფუნქციას n ნული მაინც ექნება $[a, b]$ სეგმენტზე. შემდეგ განვიხილოთ ფუნქცია

$$\psi_2(x) = L_1[\varphi(x)] e^{-\int_a^x b_1(x) dx},$$

რომელიც მოგვცემს

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi_2(x) &= \left\{ \frac{d}{dx} L_1[\varphi(x)] - b_1(x) L_1[\varphi(x)] \right\} e^{-\int_a^x b_1(x) dx} = \\ &= L_2[\varphi(x)] e^{-\int_a^x b_1(x) dx}. \end{aligned}$$

აქედან კი დავასკვნით, რომ $L_2[\varphi(x)]$ ფუნქციას $(n-1)$ ნული მაინც აქვს $[a, b]$ სეგმენტზე და ა. შ. მივიღებთ, რომ რომელიღაც $\xi \in [a, b]$ წერტილში

$$L_n[\varphi(\xi)] = 0.$$

მაგრამ (9) ტოლობიდან,

$$L_n[\varphi(x)] = \frac{w[\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi]}{w[\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}]},$$

დავასკვნით, რომ $w[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi]$ ნული გახდება ერთ $\xi \in [a, b]$ წერტილში მაინც, რადგანაც

$$w[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}] \neq 0$$

ნებისმიერ $x \in [a, b]$ წერტილში.

თუ მხედველობაში მივიღებთ $\varphi(x)$ -ის მნიშვნელობას (7) ტოლობიდან გვექნება, რომ

$$w[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi] = c_n w[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n] = 0$$

ერთ $\xi \in [a, b]$ წერტილში მაინც. მაგრამ

$$w[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n] \neq 0$$

ნებისმიერ $x \in [a, b]$ წერტილში. მაშასადამე,

$$c_n = 0.$$

ამის შედეგად (7) მოგვცემს: მოიძებნება ისეთი $(n+1)$ სხვადასხვა წერტილი $[a, b]$ შუალედში, რომლებზედაც

$$\varphi(x) = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \dots + c_{n-1} \varphi_{n-1}$$

გახდება ნულის ტოლი. გამოვიყენებთ რა ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობას, დავასკვნით, რომ $L_{n-1}[\varphi(x)]$ გახდება ნულის ტოლი ერთ წერტილში მაინც. მივიღებთ

$$c_{n-1} = 0$$

და ა. შ. ამრიგად, გვექნება ყველა $c_i = 0$. ეს კი ეწინააღმდეგება დამკვეთს (ერთი c_i მაინც განსხვავდება ნულისაგან).

ამრიგად დავამტკიცეთ, რომ ფუნქციათა სისტემა $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, რომელთაგან შედგენილი ვრონსკის დეტერმინანტი (8) $[a, b]$ სეგმენტზე განსხვავებულია ნულისაგან, ქმნის ჩებიშევის ფუნქციათა სისტემას ამ სეგმენტზე.

2. მაპროქსიმებული ფუნქციის აგება. იმის შემდეგ, როდესაც ცნობილია ფუნქციათა ჩებიშევის სისტემა $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, დავისამოცანა: როგორ შევუსაბამოთ (ავგოთ ფუნქცია)

$$\varphi(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) \quad (13)$$

მოცემულ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე. ინტერპოლირების თეორიაში ამ ამოცანის პასუხს იძლევა ზემოთ დამტკიცებული მე-2 თეორემა. სიმარტივისათვის ავიღოთ ხარისხიდან ფუნქციათა სისტემა

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = x, \dots, \varphi_n = x^n.$$

ცხადია, ეს სისტემა ჩებიშევის მრავალწევრთა სისტემაა. ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისათვის $[a, b]$ სეგმენტზე ავიღებთ ურთიერთგანსხვავებულ წერტილთა სისტემას. $\varphi(x)$ ფუნქცია ისე ავარჩიოთ, რომ აღებულ წერტილებში $\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლი იყოს; $P_n(x) = \varphi(x)$. ამით მივიღებთ განტოლებათა სისტემას $a_0, a_1, \dots, a_n$ კოეფიციენტების მიმართ:

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (14)$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან სათანადოდ განსაზღვრება $a_0, a_1, \dots, a_n$ კოეფიციენტები. ეს კოეფიციენტები ერთადერთია და ამ კოეფიციენტებით შევადგენთ (13) განზოგადებულ მრავალწევრს.

ვიგულისხმოთ, რომ R სიმრავლე $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტ ფუნქციათა წრფივი ნორმირებული სივრცეა. $f(x)$ ფუნქციის ნორმა განვსაზღვროთ ტოლობით

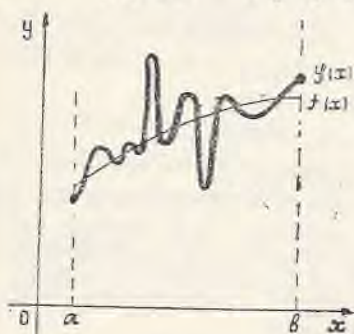
$$\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (15)$$

მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქციის $f(x)$ ფუნქციასთან მიახლოების ზომა განისაზღვრება ტოლობით

$$\|f - \varphi\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)|. \quad (16)$$

როგორც ზემოთ იქნა აღნიშნული, საინტერპოლაციო ფორმულის ცდომილება დამოკიდებულია აღებულ საინტერპოლაციო წერტილთა რიცხვზე (5.9) და საინტერპოლაციო წერტილების განლაგებაზე. n ხარისხის პოლინომებიდან ყველაზე უკეთეს მიახლოებას იძლევა $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული n ხარისხის ჩებიშევის პოლინომი.

შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის მრავალწევრებით ინტერპოლირების დროს საინტერპოლაციო წერტილების რიცხვის გაზრდით იზრდება მრავალწევრის ხარისხი, რაც იწვევს (13) განტოლებათა რიცხვისა და სათანადო ცვლადთა რიცხვის ზრდას. მაგრამ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებლის და სათანადოდ საინტერპოლაციო წერტილების რიცხვის ზრდა ყოველთვის არ უზრუნველყოფს მოცემული $f(x)$ ფუნქციის მოცემულ შუალედში უკეთესად წარმოდგენას. საინტერპოლაციო წერტილებში $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების თანამხებევა არაა ყოველთვის შესაძლებელი. მაგალითად, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი საინტერპოლაციო წერტილებში განისაზღვრება ზოგჯერ ექსპერიმენტით და საზოგადოდ არაზუსტად. მაშინ, ცხადია, უნდა ავიღოთ $f(x)$ ფუნქციის ისეთი



ნახ. 13

მიახლოებული $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელზედაც ექსპერიმენტით მიღებული ცდომილებანი გავლენას არ ახდენს. ამ შემთხვევაში წარმოიშობა ამოცანა: $f(x)$ ფუნქციის მივუახლოვდეთ ისეთ $\varphi(x)$ ფუნქციით, რომელიც $f(x)$ ფუნქციას მთლიანად $[a, b]$ შუალედში ახასიათებს და მხედველობაში არ მიიღება ზოგიერთ კერძო წერტილში $f(x)$ ფუნქციის $f(x)$ ფუნქციიდან გადახრა (ნახ. 13).

ამრიგად, მივედით შემდეგ ამოცანაზე: მოვნახოთ ისეთი განზოგადოებული პოლინომი $\varphi(x)$, რომელიც მთლიანად წარმოადგენს $f(x)$ -ს მისი განსაზღვრის $[a, b]$ სეგმენტზე. ქვემოთ განვსაზღვრავთ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების მიახლოების ისეთ ზომას, რომელიც საშუალებას მოგვცემს მისაახლოებელ ფუნქციათა კლასი გავაფართოოთ. ზემოთ განხილული ფუნქციათა კლასი უწყვეტ ფუნქციათა კლასი იყო, ხოლო $\varphi(x)$ ფუნქციათა კლასი უფრო ვიწრო (წარმოებდა ფუნქციათა)

კლასი იყო $f(x) \in R$, $\varphi(x) \in \bar{R}$, $\bar{R} \subset R$.

3. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი დისკრეტული წერტილებისათვის. $\varphi(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციასთან მიახლოების ზომად მივიღოთ

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \quad (17)$$

ან

$$\sum_{i=0}^m [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2. \quad (18)$$

ჩვენი ამოცანაა: ისე განვსაზღვროთ $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომ (17) ინტეგრალი იყოს რაც შეიძლება მცირე. ისეთ $\Phi_0(x)$ ფუნქციას, რომლისთვისაც (17) ინტეგრალი აღწევს უმცირეს მნიშვნელობას, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის საშუალო კვადრატული მიახლოება $[a, b]$ სეგმენტზე. აქვე დაისმის კითხვა: არსებობს ასეთი $\Phi_0(x)$ ფუნქცია და იგი ერთადერთია? ამ კითხვას თვით $\Phi_0(x)$ ფუნქციის აგების დროს გავცემა პასუხი.

თუ ინტეგრალი (17) უმცირესია, ეს არ ნიშნავს, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში $\varphi(x)$ ფუნქცია $f(x)$ ფუნქციასთან ახლოსაა, არამედ იმას ნიშნავს, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია $f(x)$ ფუნქციასთან საშუალოდ, უმეტეს ნაწილში, ურთიერთახლოსაა, მაგრამ ზოგიერთ წერტილში (წერტილთა თვლად სიმრავლეზე) შეიძლება საკმარისად შორს იყოს.

სიდიდეს

$$\Delta = \sqrt{\frac{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx}{b-a}} \quad (19)$$

ან

$$\Delta_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^m [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2}{m+1}} \quad (20)$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის $\varphi(x)$ ფუნქციიდან $[a, b]$ სეგმენტზე საშუალო კვადრატული გადახრა. ეს გადახრა არ გვიჩვენებს, რომ ყოველ x წერტილში, $x \in [a, b]$, ცდომილება

$$\alpha(x) = |f(x) - \varphi(x)|$$

სათანადოდ მცირეა. ეს არაფერს ამბობს საშუალო კვადრატული მიახლოების გამოყენების საწინააღმდეგოდ. პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ ფუნქ-

ცია $\varphi(x)$, რომელიც უმცირეს კვადრატთა მეთოდითაა აგებული, უფრო ნამდვილი სახით წარმოგვიდგენს $f(x)$ ფუნქციას, ვიდრე საინტერპოლაციო მრავალწევრები.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანია (ზუსტი ან არაზუსტი) მოცემული $y_i = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, m$. დავსვათ ასეთი ამოცანა: მოვნახოთ ისეთი მრავალწევრი n ხარისხისა, $n < m$,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad (21)$$

რომელიც უმცირეს მნიშვნელობას მიანიჭებს შემდეგ გამოსახულებას

$$S(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^m (y_i - P_n(x_i))^2. \quad (22)$$

ასეთი $P_n(x)$ მრავალწევრის არსებობა ექვს არ იწვევს, რადგანაც (22) გამოსახულება მეორე ხარისხის მრავალწევრია $a_0, a_1, \dots, a_n$ სიდიდეების მიმართ, ამასთან $S \geq 0$. $P_n(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის ამ მეთოდს უმცირეს კვადრატთა მეთოდი ეწოდება. ეს მეთოდი ყოველგვარი დაფუძნების გარეშე განვიხილეთ ამ წიგნის I-ელ ნაწილში (თავი XVI, § 10, n3).

კოეფიციენტთა განსაზღვრისათვის მოვნახოთ $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებები a_k -ს მიმართ და ნულს გავუტოლოთ. მივიღებთ:

$$\sum_{i=0}^m (y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots - a_n x_i^n) x_i^k = 0, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

ანუ

$$a_0 \sum_{i=0}^m x_i^k + a_1 \sum_{i=0}^m x_i^{k+1} + \dots + a_n \sum_{i=0}^m x_i^{k+n} = \sum_{i=0}^m y_i x_i^k, \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (23)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$c_k = \sum_{i=0}^m x_i^k, \quad d_k = \sum_{i=0}^m y_i x_i^k, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

მაშინ (23) განტოლებათა სისტემა მოგვცემს

$$\begin{aligned} c_0 a_0 + c_1 a_1 + \dots + c_n a_n &= d_0, \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + \dots + c_{n+1} a_n &= d_1, \\ &\vdots \\ c_n a_0 + c_{n+1} a_1 + \dots + c_{2n} a_n &= d_n. \end{aligned} \quad (24)$$

ვანვენოთ, რომ (24) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი D_{n+1} ნული-საგან განსხვავდება,

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix}. \quad (25)$$

განვიხილოთ შემდეგი მრავალწევრი

$$Y_n(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \quad (26)$$

გავამრავლოთ $Y_n(x_i)$ მრავალწევრი x_i^k -ზე, $k < n$, და შევაჯამოთ i ინდექსით $i=0$ -დან $i=m$. მივიღებთ

$$\sum_{i=0}^m x_i^k Y_n(x_i) = \sum_{i=0}^m \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ x_i^k & x_i^{k+1} & \dots & x_i^{k+n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ \sum_{i=0}^m x_i^k & \sum_{i=0}^m x_i^{k+1} & \dots & \sum_{i=0}^m x_i^{k+n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ c_k & c_{k+1} & \dots & c_{k+n} \end{vmatrix} = 0,$$

რადგანაც $k < n$.

ამრიგად, მივიღეთ

$$\sum_{i=0}^m x_i^k Y_n(x_i) = 0, \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

ცია $\Phi(x)$, რომელიც უმცირეს კვადრატთა მეთოდითაა აგებული, უფრო ნამდვილი სახით წარმოგვიდგენს $f(x)$ ფუნქციას, ვიდრე საინტერპოლაციო მრავალწევრები.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანია (ზუსტი ან არაზუსტი) მოცემული $y_i = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, m$. დავსვათ ასეთი ამოცანა: მოვნახოთ ისეთი მრავალწევრი n ხარისხისა, $n < m$,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad (21)$$

რომელიც უმცირეს მნიშვნელობას მიანიჭებს შემდეგ გამოსახულებას:

$$S(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^m (y_i - P_n(x_i))^2. \quad (22)$$

ასეთი $P_n(x)$ მრავალწევრის არსებობა ეჭვს არ იწვევს, რადგანაც (22) გამოსახულება მეორე ხარისხის მრავალწევრია $a_0, a_1, \dots, a_n$ სიდიდეების მიმართ, ამასთან $S \geq 0$. $P_n(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის ამ მეთოდს უმცირეს კვადრატთა მეთოდი ეწოდება. ეს მეთოდი ყოველგვარი დაფუძნების გარეშე განვიხილეთ ამ წიგნის I-ელ ნაწილში (თავი XVI, § 10, n3).

კოეფიციენტთა განსაზღვრისათვის მოვნახოთ $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები a_k -ს მიმართ და ნულს გავუტოლოთ. მივიღებთ:

$$\sum_{i=0}^m (y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots - a_n x_i^n) x_i^k = 0, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

ანუ

$$a_0 \sum_{i=0}^m x_i^k + a_1 \sum_{i=0}^m x_i^{k+1} + \dots + a_n \sum_{i=0}^m x_i^{k+n} = \sum_{i=0}^m y_i x_i^k, \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (23)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$c_k = \sum_{i=0}^m x_i^k, \quad d_k = \sum_{i=0}^m y_i x_i^k, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

მაშინ (23) განტოლებათა სისტემა მოგვცემს

$$\begin{aligned} c_0 a_0 + c_1 a_1 + \dots + c_n a_n &= d_0, \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + \dots + c_{n+1} a_n &= d_1, \\ &\vdots \\ c_n a_0 + c_{n+1} a_1 + \dots + c_{2n} a_n &= d_n. \end{aligned} \quad (24)$$

გაჩვენოთ, რომ (24) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი D_{n+1} ნული-საგან განსხვავდება,

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix}. \quad (25)$$

განვიხილოთ შემდეგი მრავალწევრი

$$Y_n(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \quad (26)$$

გავამრავლოთ $Y_n(x_i)$ მრავალწევრი x_i^k -ზე, $k < n$, და შევაჯამოთ i ინდექსით $i=0$ -დან $i=m$. მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m x_i^k Y_n(x_i) &= \sum_{i=0}^m \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ x_i^k & x_i^{k+1} & \dots & x_i^{k+n} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ \sum_{i=0}^m x_i^k & \sum_{i=0}^m x_i^{k+1} & \dots & \sum_{i=0}^m x_i^{k+n} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ c_k & c_{k+1} & \dots & c_{k+n} \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

რადგანაც $k < n$.

ამრიგად, მივიღეთ

$$\sum_{i=0}^m x_i^k Y_n(x_i) = 0, \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

მეორე მხრივ, $Y_n(x_i)$ გავამრავლოთ x_i^n -ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\sum_{i=0}^m x_i^n Y_n(x_i) = D_{n+1}, \quad (27)$$

გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{i=0}^m Y_n^2(x_i) = \sum_{i=0}^m Y_n(x_i) \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & x_i & \dots & x_i^n \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ \sum_{i=0}^m Y_n(x_i) & \sum_{i=0}^m x_i Y_n(x_i) & \dots & \sum_{i=0}^m x_i^n Y_n(x_i) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 0 & 0 & \dots & D_{n+1} \end{vmatrix} = D_{n+1} D_n. \end{aligned} \quad (28)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ M_n კვადრატების ჯამია, მაშინ (28)-დან გვექნება

$$M_n = D_{n+1} D_n \geq 0,$$

მაგრამ M_n მხოლოდ მაშინაა ნულის ტოლი, როდესაც

$$Y_n(x_0) = Y_n(x_1) = \dots = Y_n(x_m) = 0. \quad (29)$$

პირობის თანახმად, $n < m$. ამ შემთხვევაში $Y_n(x)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი n ნაკლებია $Y_n(x)$ მრავალწევრის ნულთა რიცხვზე m -ზე. (29) ტოლობანი მაშინაა შესაძლებელი, თუ $Y_n(x)$ მრავალწევრი იგივეურად ნულის ტოლია, $Y_n(x) \equiv 0$.

ამრიგად, მივიღეთ

$$M_n = D_{n+1} D_n > 0, \quad \text{თუ } Y_n(x) \neq 0. \quad (30)$$

ეს უკანასკნელი კი იმას ნიშნავს, რომ $M_n \neq 0$ მხოლოდ მაშინ, თუ $Y_n(x)$ -ის ერთი კოეფიციენტი მაინც განსხვავდება ნულისაგან.

ვთქვათ, $n=1$. მაშინ (26)-დან მივიღებთ

$$Y_1(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = c_0 x - c_1 = (m+1)x - c_1.$$

რადგანაც $Y_1(x) \neq 0$ ($c_0 = m+1 \neq 0$), (30)-დან მივიღებთ $M_1 > 0$, ანუ $D_1 D_2 > 0$. მაგრამ (25)-დან, ცხადია, $D_1 = c_0 = m+1 > 0$. უკანასკნელი უტოლობის თანახმად გვექნება $D_2 > 0$.

ახლა, დავუშვათ $n=2$, მაშინ (26)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} Y_2(x) &= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\ &= D_2 x^2 - x \begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

აქედან, ცხადია, $Y_2(x) \neq 0$ (x^2 -ის კოეფიციენტი $D_2 > 0$). (30) პირობიდან მივიღებთ $M_2 > 0$ და, მაშასადამე,

$$D_3 D_2 > 0.$$

საიდანაც გვექნება $D_3 > 0$. ამ პროცესის გამეორებით დავასკვნით,

$$D_{n+1} > 0.$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ (24) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი D_{n+1} არ უდრის ნულს. ამოვხსნით რა (24) განტოლებათა სისტემას, მივიღებთ $a_0, a_1, \dots, a_n$ -ის მნიშვნელობებს. ამით ავაგებთ (21)-ით განსაზღვრულ $P_n(x)$ მრავალწევრს, რომელიც მიაღწევს უმცირეს მნიშვნელობას (22) ჯამს.

როგორც აღვნიშნეთ, როდესაც $f(x_i)$ სიდიდეები განისაზღვრება ექპერიმენტით, არის საფუძველი, რომ განხილული აპროქსიმაციით მიღებული ფუნქცია $\varphi(x)$ უკეთესია, ვიდრე მოცემული $f(x)$ ფუნქცია, რადგანაც უმცირეს კვადრატთა მეთოდს აქვს მიდრეკილება შეასწოროს შემთხვევითი ცდომილებანი.

საშუალო კვადრატული გადახრა $f(x)$ ფუნქციისა $\varphi(x)$ ფუნქციიდან განისაზღვრება (20) ფორმულით,

$$\Delta_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^m [f(x_i) - P_n(x_i)]^2}{m+1}}.$$

აქ $P_n(x)$ განზოგადებული პოლინომია, მიღებული უმცირეს კვადრატთა მეთოდით. თუ n -ის ერთი მნიშვნელობისათვის არ იძლევა სათანადო სი-

ზუსტეს, მაშინ n -ის სათანადო გაზრდით მივალწევთ იმას, რომ საშუალო კვადრატული გადახრა სათანადოდ მცირე სიდიდე იყოს.

განვიხილოთ მაგალითი.

უშვირეს კვადრატთა მეთოდით ავაგოთ კვადრატული მრავალწევრი. ფუნქციის მნიშვნელობანი მოცემულია ცხრილში (ცხრილი 17).

ცხრილი 17

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y	0,101	0,040	0	-0,020	-0,020	0	0,041

კვადრატული მრავალწევრი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

შევადგინოთ გამოსახულება

$$s(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^6 [y_i - P_2(x_i)]^2.$$

ვიპოვოთ $s(a_0, a_1, a_2)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial s}{\partial a_0} = - \sum_{i=0}^6 2[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)],$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_1} = - \sum_{i=0}^6 2[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)] x_i,$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_2} = - \sum_{i=0}^6 2[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)] x_i^2.$$

ეს კერძო წარმოებულები გაუტოლოთ ნულს, საიდანაც მივიღებთ

$$\begin{aligned} c_0a_0 + c_2a_1 + c_2a_2 &= d_0 \\ c_1a_0 + c_2a_1 + c_3a_2 &= d_1, \\ c_2a_0 + c_3a_1 + c_4a_2 &= d_2, \end{aligned} \quad (31)$$

სადაც

$$c_0 = \sum_{i=0}^6 x_i^0, \quad c_1 = \sum_{i=0}^6 x_i, \quad c_2 = \sum_{i=0}^6 x_i^2, \quad c_3 = \sum_{i=0}^6 x_i^3, \quad c_4 = \sum_{i=0}^6 x_i^4;$$

$$d_0 = \sum_{i=0}^6 y_i x_i^0, \quad d_1 = \sum_{i=0}^6 y_i x_i, \quad d_2 = \sum_{i=0}^6 y_i x_i^2;$$

ანუ

$$c_j = \sum_{i=0}^6 x_i^j, \quad j=0, 1, 2, 3, 4; \quad d_j = \sum_{i=0}^6 y_i x_i^j, \quad j=0, 1, 2.$$

გამოთვლები ჩავატაროთ შემდეგი ცხრილით (ცხრილი 18):

ცხრილი 18

i	0	1	2	3	4	5	6	Σ	
x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	2,1	c_1
x^2	0,00	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,91	c_2
x^3	0,000	0,001	0,008	0,027	0,064	0,125	0,216	0,441	c_3
x^4	0,0000	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625	0,1296	0,2275	c_4
y	0,101	0,040	0,000	-0,020	-0,020	0,000	0,041	0,142	d_0
xy	0,000	0,004	0,000	-0,006	-0,008	0,000	0,0246	0,0146	d_1
x^2y	0,0000	0,0004	0,0000	-0,0018	-0,0032	0,0000	0,0148	0,0102	d_2

მიღებული რიცხვები შევიტანოთ (31) განტოლებათა სისტემაში, გვექნება

$$7a_0 + 2,1a_1 + 0,91a_2 = 0,142;$$

$$2,1a_0 + 0,91a_1 + 0,441a_2 = 0,0146;$$

$$0,91a_0 + 0,441a_1 + 0,2275a_2 = 0,0102.$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით (შეგვიძლია ვისარგებლოთ მე-9 თავის მე-18 პარაგრაფში მოთავსებული ცხრილით, სადაც დაპროგრამებულია სამცვლადიანი სამი განტოლების ამოხსნა და გამოვიყენოთ მიკროკალკულატორი MK-56) მივიღებთ

$$a_0 = 0,1011; \quad a_1 = -0,7100; \quad a_2 = 1,0167$$

გამოთვლები ჩატარებულია ოთხი ათწილადი ნიშნით.

45 გ. კომლაძე

საძიებელ კვადრატულ მრავალწევრს ექნება სახე:

$$P_2(x) = 0,1011 - 0,7100x + 1,0167x^2. \quad (32)$$

გამოთვალთ მნიშვნელობანი:

$$\begin{aligned} P_2(0) &= 0,1011; & P_2(0,1) &= 0,0408; & P_2(0,2) &= -0,0004; \\ P_2(0,3) &= -0,0204; & P_2(0,4) &= -0,0202; & P_2(0,5) &= 0,0003; \\ P_2(0,6) &= 0,0410. \end{aligned}$$

გამოთვალთ ცდომილებანი. გვექნება:

$$\begin{aligned} |P_2(0) - y(0)| &= 0,0001; & |P_2(0,1) - y(0,1)| &= 0,0008; \\ |P_2(0,2) - y(0,2)| &= 0,0004; & |P_2(0,3) - y(0,3)| &= 0,0004; \\ |P_2(0,4) - y(0,4)| &= 0,0002; & |P_2(0,5) - y(0,5)| &= 0,0003; \\ |P_2(0,6) - y(0,6)| &= 0,0000. \end{aligned}$$

ამრიგად, უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული (32) მრავალწევრის მნიშვნელობათა და მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობათა შორის სათანადო სხვაობა არ აღემატება 0,001-ს.

ზემოთ მიღებული (22) ჯამის შედგენის დროს ყველა წერტილი ერთ-სა და იმავე როლს ასრულებდა. მაგრამ შეიძლება მოხდეს, რომ ზოგიერთი $y_i = f(x_i)$ ტოლობას უფრო დიდი ნდობით მოვეყრეთ, ზოგიერთს ნაკლები ნდობით. მაგალითად, თუ გაზომვები იარაღებითაა მიღებული, მაშინ იმ შედეგს უფრო მეტი „წონა“ აქვს, რომელიც უფრო ზუსტი იარაღითაა მიღებული. მათემატიკურად ეს ნიშნავს, რომ S ჯამი ავიღოთ უფრო ზოგადი სახით

$$S = \sum_{i=0}^m \rho_i [y_i - P_n(x_i)]^2, \quad (33)$$

სადაც ყოველი ρ_i სპეციალურადაა არჩეული. იგი დადებითი რიცხვია. ρ_i -ს ეწოდება x_i წერტილში y ფუნქციის წონა. გამოთვლები (33) ჯამის სათვის უცვლელად ჩატარდება. ზოგიერთ შემთხვევაში ρ_i სიდიდეები ისე აირჩევა (ნორმირდება), რომ მათი ჯამი ერთეულის ტოლი იყოს

$$\sum_{i=0}^m \rho_i = 1. \quad (34)$$

წონის შემოტანის შემთხვევაში, ნაცვლად (17) ინტეგრალისა, გვექნება

$$\int_a^b \rho(x) [f(x) - \varphi(x)]^2 dx, \quad (35)$$

ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\int_a^b \rho(x) [f(x) - \varphi(x)]^2 dx}{b-a}}, \quad (36)$$

$$\Delta_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^m \rho(x_i) [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2}{m+1}}. \quad (37)$$

4. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი ზუალედის შემთხვევაში. ვთქვათ, $y = f(x)$ მოცემულია არა ცალკეულ წერტილებში, როგორც მე-2 პუნქტში განვიხილეთ, არამედ მთელ $[a, b]$ სეგმენტზე. ვთქვათ აგრეთვე, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია ჩებიშევის ფუნქციათა სისტემა $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$. შევადგინოთ განზოგადებული მრავალწევრი

$$\varphi(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x).$$

დავსვათ ასეთი ამოცანა: განვსაზღვროთ $\varphi(x)$ ფუნქცია — განვსაზღვროთ კოეფიციენტები $a_0, a_1, \dots, a_n$ ისე, რომ ინტეგრალმა

$$I = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \quad (38)$$

მიიღოს უმცირესი მნიშვნელობა.

(38) ინტეგრალის უმცირესი მნიშვნელობისათვის აუცილებელია, მისი $a_0, a_1, \dots, a_n$ -ით კერძო წარმოებულით ნულოვან ტოლობა:

$$2 \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] \varphi_k(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

ანუ

$$\int_a^b [f(x) - (a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x))] \varphi_k(x) dx = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$a_0 \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_k(x) dx + a_1 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_k(x) dx + \dots + a_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = \\ = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

ეს უკანასკნელი ასე გადავწეროთ:

$$\sum_{i=0}^n a_i b_{ik} = d_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (39)$$

სადაც

$$b_{ik} = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx, \quad d_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx.$$

(39) განტოლებათა სისტემა წრფივ განტოლებათა სისტემაა $a_0, a_1, \dots, a_n$ -ის მიმართ, რომლის დეტერმინანტი ე. წ. გრამის დეტერმინანტია,

$$G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix},$$

სადაც

$$(\varphi_i, \varphi_k) = b_{ik}.$$

ვაჩვენოთ, რომ გრამის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება. ამისათვის კი დაევამტიკოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4. ფუნქციათა სისტემა $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, განსხვავებული $[a, b]$ სეგმენტზე, წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც გრამის დეტერმინანტი ნულის ტოლია,

$$G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0.$$

ახეილებლობის დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ, თუ ფუნქციები $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ გრამის დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

მართლაც, თუ $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ არსებობს რიცხვთა ისეთი სისტემა $a_0, a_1, \dots, a_n$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ჰუმარიტია ტოლობა:

$$a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n = 0.$$

გავამრავლოთ ეს ტოლობა მარცხნიდან მიმდევრობით $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ -ზე და ავიღოთ

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx,$$

მივიღებთ;

$$\begin{aligned} a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_0, \varphi_1) + \dots + a_n(\varphi_0, \varphi_n) &= 0, \\ a_0(\varphi_1, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) + \dots + a_n(\varphi_1, \varphi_n) &= 0, \\ \vdots & \vdots \\ a_0(\varphi_n, \varphi_0) + a_1(\varphi_n, \varphi_1) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_n) &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

განტოლებათა სისტემას $a_0, a_1, \dots, a_n$ -ის მიმართ. ამ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ეს კი მოგვცემს, (40) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, $G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$.

საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, $G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$ და ვაჩვენოთ $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. განვიხილოთ (40) განტოლებათა სისტემა, რომლის დეტერმინანტი ნულის ტოლია. მაშინ არსებობს რიცხვთა სისტემა $a_0, a_1, \dots, a_n$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია და აკმაყოფილებს (40) განტოლებათა სისტემას. ვთქვათ, ეს ამონახსნებია $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$. ავიღოთ R სიმრავლიდან $\mu(x)$ ფუნქცია,

$$\bar{a}_0 \varphi_0 + \bar{a}_1 \varphi_1 + \dots + \bar{a}_n \varphi_n = g(x).$$

მაშინ, ცხადია,

$$(\varphi_0, g) = 0, (\varphi_1, g) = 0, \dots, (\varphi_n, g) = 0.$$

ამის გამო

$$\int_a^b g(x) g(x) dx = \int_a^b (\bar{a}_0 \varphi_0 + \bar{a}_1 \varphi_1 + \dots + \bar{a}_n \varphi_n) g(x) dx = 0.$$

შეასაღამე,

$$\int_a^b g^2(x) dx = 0, \quad \text{საიდანაც } g(x) = 0,$$

$$\bar{a}_0 \varphi_0 + \bar{a}_1 \varphi_1 + \dots + \bar{a}_n \varphi_n = 0,$$

სადაც $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n$ -დან ერთი მინც განსხვავებულია ნულისაგან.

მაშასადამე, $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. ამით თეორემა დამტკიცდა.

(39) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი $G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციათა სისტემის გრამის დეტერმინანტია. დამტკიცებული თეორემის საფუძველზე ეს დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია და, მაშასადამე, (39) განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნი და ეს ამონახსნი ერთადერთია. თუ ფუნქციათა სისტემა $[a, b]$ სეგმენტზე ორთოგონალურია, მაშინ ყოველგვარი გამოთვლები, რომლებიც (39) სისტემასთანაა დაკავშირებული, მარტივდება. მართლაც,

$$b_{ik} = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad i \neq k,$$

მაშინ (39) განტოლებათა სისტემა მოგვცემს

$$a_k b_{kk} = d_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

საიდანაც

$$a_k = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x) dx}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (41)$$

რიცხვები რომლებიც განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქციისათვის (41) ფორმულით, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ ორთოგონალურ ფუნქციათა სისტემის მიმართ.

ორთოგონალურ ფუნქციათა სისტემის მაგალითად შეგვიძლია ავიღოთ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები (უფრო დაწვრილებით იხ. თ. XV, § 4.):

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx.$$

ბდეილი გამოსათვლელია შემდეგი ინტეგრალები:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin kx dx &= \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi, & k = m = 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin kx dx &= 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos kx dx &= \begin{cases} 0, & k = m, \\ \pi, & k = m \neq 0, \\ 2\pi, & k = m = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

რომელთა საფუძველზედაც (41) ფორმულით მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (43)$$

ეს ფორმულები $f(x)$ ფუნქციის ცნობილი ფურიეს კოეფიციენტებია. განზოგადებული $\varphi(x)$ მრავალწევრს ექნება შემდეგი სახე:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

სადაც კოეფიციენტები განისაზღვრება (43) ფორმულებით.

ვთქვათ, მოცემულია უწყვეტი პერიოდული $f(x)$ ფუნქცია პერიოდით 2π . თუ $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი რაიმე l რიცხვია, მაშინ ცვლადთა შეცვლით $t = \frac{l}{2\pi} x$, მივიღებთ $F(t)$ ფუნქციას, რომლის პერიოდი იქნება 2π . $f(x)$ ფუნქციის აპროქსიმაცია ტრიგონომეტრიული n რიგის პოლინომით მოგვცემს

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (44)$$

სადაც კოეფიციენტები განისაზღვრება (43) ფორმულებით.

კერძოდ, თუ $f(x)$ ლუწია, $f(-x) = f(x)$, მაშინ

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k=1, 2, \dots, n; \\ b_k &= 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (45)$$

ზოლო, თუ კენტია, მაშინ

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_k = 0, \quad k=1, 2, \dots, n; \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (46)$$

მაგალითად, მოვნახოთ

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ x(\pi + x), & -\pi \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (47)$$

ფუნქციის მე-11 რიგის ტრიგონომეტრიული მახროქსიმებული პოლინომი.

(47) ფუნქცია კენტია, ამიტომ ვისარგებლოთ (46) ფორმულებით:

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin kx dx = -\frac{4}{\pi k^3} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi k^3} [1 - (-1)^k].$$

ამ ფორმულებიდან, ცხადია,

$$b_{2k} = 0, \quad b_{2k-1} = \frac{8}{\pi (2k-1)^3}.$$

თუ შევჩერდებით მე-11 წევრზე, გვექნება

$$\begin{aligned} T_{11}(x) &= \frac{8}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{27} \sin 3x + \frac{1}{125} \sin 5x + \frac{1}{343} \sin 7x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{729} \sin 9x + \frac{1}{1221} \sin 11x \right]. \end{aligned}$$

ტრიგონომეტრიული მრავალწევრებით შეიძლება არაპერიოდული ფუნქციის აპროქსიმაცია, მაგრამ ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქცია მიახლო-

ებით წარმოდგინება მხოლოდ $[-\pi, \pi]$ შუალედში (44) ფორმულის საშუალებით.

შევნიშნოთ, რომ ისევე, როგორც მე-2 პუნქტში განვიხილეთ ზოგადი შემთხვევა (35), აქაც შეგვიძლია განვიხილოთ. ამ შემთხვევაში ფუნქცია-თა ორთოგონალური სისტემა $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ აირჩევა $\rho(x)$ წონით,

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad i \neq k,$$

ხოლო კოეფიციენტები განისაზღვრება ფორმულით

$$a_k = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) \varphi_k(x) dx}{\int_a^b \rho(x) \varphi_k^2(x) dx}, \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (48)$$

5. სპეციალური მრავალწევრებით აპროქსიმაცია. უმცირეს კვადრატ-თა მეთოდით აპროქსიმაციისათვის ხშირად ირჩევენ სპეციალურ მრავალწევრებს, მაგალითად, ლეჟანდრის, ჩებიშევის, იაკობის და სხვ.

ლეჟანდრის n ხარისხის მრავალწევრი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (49)$$

ამ ფორმულაში მიმდევრობით ჩავსვათ $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} X_0(x) &= 1, \\ X_1(x) &= x, \\ X_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ X_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ X_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ X_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \quad (50)$$

ვისარგებლოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით, მაშინ (49) გამო-სახულებიდან მივიღებთ

$$\int_{-1}^1 X_i(x) X_k(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ \frac{2}{2k+1}, & i = k. \end{cases}$$

ამრიგად, ლეჟანდრის მრავალწევრები ქმნიან ორთოგონალურ სისტემას $[-1, 1]$ სეგმენტზე.

განვიხილოთ მაგალითი. ავადგოთ $f(x) = |x|$ ფუნქციის მახროქსიმებელი მეოთხე ხარისხის ლეჟანდრის მრავალწევრი $[-1, 1]$ შუალედში. ვისარგებლოთ (41) ფორმულით:

$$a_k = \frac{\int_{-1}^1 |x| X_k(x) dx}{\frac{2}{2k+1}}, \quad k=0, 1, 2, 3, 4. \quad (51)$$

ჩავსვათ (50) მრავალწევრები მიმდევრობით (51) ფორმულაში, მივიღებთ

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{5}{8}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{3}{16}.$$

ამრიგად, $[-1, 1]$ შუალედში $f(x) = |x|$ ფუნქციის მახროქსიმებელი მრავალწევრი იქნება

$$P_4(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{8 \cdot 2} (3x^2 - 1) - \frac{3}{16 \cdot 8} (35x^4 - 30x^2 + 3). \quad (52)$$

იმავე $f(x) = |x|$ ფუნქციის $[-1, 1]$ შუალედში $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ წონით მეოთხე ხარისხის მახროქსიმებელი მრავალწევრი ავადგოთ ჩებიშევის მრავალწევრებით.

განვიხილოთ მრავალწევრი:

$$\dot{T}_n(x) = \cos n \arccos x. \quad (53)$$

იგი განსხვავდება ადრე განხილული ჩებიშევის მრავალწევრისაგან $\frac{1}{2^{n-1}}$ მამრავლით (1, § 9). ჩამოვწეროთ მრავალწევრები:

$$\begin{aligned} \dot{T}_0(x) &= 1, \\ \dot{T}_1(x) &= x, \\ \dot{T}_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ \dot{T}_3(x) &= 4x^2 - 3x, \\ \dot{T}_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ \dot{T}_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned} \quad (54)$$

ცვლადთა გარდაქმნით, $\arccos x = t$, ადვილად მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_k(x) T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 0, \quad k \neq i; \\ \int_{-1}^1 \frac{T_k^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \begin{cases} \pi, & k=0, \\ \frac{\pi}{2}, & k=1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (55)$$

მაშასადამე, ჩებიშევის მრავალწევრები წონით $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ სეგმენტზე $[-1, 1]$ ქმნიან ორთოგონალურ ფუნქციათა სისტემას.

ჩვენი მიზანია, ავადგოთ $f(x) = |x|$ ფუნქციის შესაბამისი განზოგადებული მრავალწევრი — მეოთხე ხარისხის მრავალწევრი

$$P_4(x) = a_0 \dot{T}_0(x) + a_1 \dot{T}_1(x) + a_2 \dot{T}_2(x) + a_3 \dot{T}_3(x) + a_4 \dot{T}_4(x). \quad (56)$$

(48) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{|x| dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{|x| \dot{T}_k(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad k=1, 2, \dots \quad (57)$$

ჩავსვათ რა (54) მნიშვნელობებს (57) ფორმულაში, გვექნება

$$a_0 = \frac{2}{\pi}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{2}{\pi}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{4}{15\pi}.$$

შევიტანოთ კოეფიციენტთა მნიშვნელობანი (56) ფორმულაში, გვექნება

$$P_4(x) = \frac{2}{15\pi} (3 + 36x^2 - 16x^4). \quad (58)$$

6. სპლაინებით აპროქსიმაცია¹. ამ ბოლო დროს ფართოდ ვრცელდება ე. წ. სპლაინ ფუნქციებით აპროქსიმაცია. ეს ფუნქციები თვითოვლ ქვესეგმენტზე წინასწარ არჩეული რომელიმე ხარისხის მრავალწევრებია, რომლებიც უწყვეტად შეერთებულია — გადაჯაჭვულია მთელ სეგმენტზე. ამ ფუნქციებს, შემოკლებით, სპლაინები ან ჯაჭვური მრავალწევრები ვუწოდოთ.

¹ Н. С. Бахвалов, Численные методы, I, М., 1973, стр. 256. Л. И. Турьяк, Основы численных методов, М., 1987, стр. 51.

ნაცვლად $[a, b]$ სეგმენტისა სიმარტივისათვის ავიღოთ $[0, 1]$ სეგმენტი. ეს სეგმენტი წერტილებით $x_i, i=0, 1, \dots, n$, დავანაწილოთ ქვესეგმენტებად: $[x_{i-1}, x_i], i=1, 2, \dots, n$. ვთქვათ, ცნობილია $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (59)$$

განვიხილოთ $[0, 1]$ სეგმენტზე $s(x)$ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე S_1 , რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (60)$$

$$I_1(s) = \int_0^1 (s'(x))^2 dx < \infty. \quad (61)$$

დავსვათ ასეთი ამოცანა: მოვნახოთ ისეთი ფუნქცია $s_1(x) \in S_1$, რომელიც ანიჭებს (61) ფუნქციონალს მინიმალურ მნიშვნელობას,

$$\inf_{s_1 \in S_1} I_1(s_1).$$

ფუნქციონალი ეწოდება სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობა განისაზღვრება ერთი ან რამდენიმე ფუნქციით. მაგალითად, ფუნქციონალია სიბრტყეზე ორი $A(x_0, y_0)$ და $B(x_1, y_1)$ წერტილის შემაერთებელი წირის რკალის სიგრძე $l(y)$,

$$l(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

სადაც $y=y(x)$ არის A და B წერტილების შემაერთებელი წირის განტოლება.

დასმული ამოცანის პასუხი მიიღება მათემატიკური ანალიზის ცნობილი ეილერის განტოლებიდან $s''(x)=0$. ჩვენ არ მივმართავთ მათემატიკური ანალიზის იმ ნაწილს, სადაც შეისწავლება დასმული ამოცანის ანალიზური ამოცანები (ვარაუდითაა აღრიცხვა). დასმულ ამოცანას დამოუკიდებლად შევისწავლით.

ვთქვათ, არსებობს ისეთი $[0, 1]$ სეგმენტზე უწყვეტი $s_1(x)$ ფუნქცია, რომელსაც $[x_{i-1}, x_i], i=1, \dots, n$, სეგმენტზე აქვს მეორე რიგის წარმოებული და ანიჭებს (61) ინტეგრალს უმცირეს მნიშვნელობას. დავუშვათ, რომ გვაქვს $[0, 1]$ სეგმენტზე ნებისმიერ რიცხვჯერ წარმოებადი $\psi(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\psi(x_0) = \psi(x_1) = \dots = \psi(x_n) = 0. \quad (62)$$

განვიხილოთ ფუნქცია $F(t)$,

$$F(t) = \int_0^1 (s'_1(x) + t\psi'(x))^2 dx = \int_0^1 (s'_1(x))^2 dx + 2t \int_0^1 s'_1(x) \psi'(x) dx + t^2 \int_0^1 (\psi'(x))^2 dx.$$

ცხადია, $F(t) \geq 0$, მაშინ

$$F'(0) = 2 \int_0^1 s'_1(x) \psi'(x) dx = 0. \quad (63)$$

ეს ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ჯამით

$$\int_0^1 s'_1(x) \psi'(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} s'_{1i}(x) \psi'(x) dx, \quad s'_{1i}(x) = s'_1(x), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (64)$$

გამოვთვალოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით (64) ინტეგრალი,

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} s'_{1i}(x) \psi'(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} s'_{1i}(x) d\psi(x) = s'_{1i}(x) \psi(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \\ &- \int_{x_{i-1}}^{x_i} s''_{1i}(x) \psi(x) dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} s''_{1i}(x) \psi(x) dx, \end{aligned}$$

რადგანაც (62) პირობით $\psi(x_i) = 0, i=0, 1, \dots, n$.

შევნიშნოთ, რომ (63) ინტეგრალში არ შეგვეძლო ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენება, რადგანაც x_i წერტილებში $s_1(x)$ ფუნქციის წარმოებულის ყოფაქცევა არ ვიცით.

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობა (64) ჯამში, გვექნება

$$\int_0^1 s'_1(x) \psi'(x) dx = - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} s''_{1i}(x) \psi(x) dx = - \int_0^1 s''_1(x) \psi(x) dx. \quad (65)$$

(63) პირობით (65) ინტეგრალი ნულის ტოლია. ამრიგად, მივიღეთ

$$\int_0^1 s''_1(x) \psi(x) dx = 0,$$

სადაც $\psi(x)$ ნებისმიერი ფუნქციაა. საიდანაც დავსკვნით $s_1''(x)=0$, რაც მოგვცემს

$$s_{1i}''(x) = 0, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ამრიგად, $s_1(x)$ ისეთი ფუნქციაა, რომელიც ყოველ $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ სეგმენტზე წრფივია, ამასთან მთელ სეგმენტზე უწყვეტი ტენილია. $s_1(x)$ პირველი რიგის ჯაჭვური მრავალწევრია — პირველი რიგის სპლაინია,

$$s_{1i}(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (66)$$

სულ გვაქვს $2n$ კოეფიციენტი. ეს კოეფიციენტები განისაზღვრებიან (59) პირობით. ჩავსვათ მნიშვნელობანი $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_i &= y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ a_i + b_i h_i &= y_i, \quad h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (67)$$

სულ გვაქვს $2n$ განტოლება $2n$ საძიებელი a_i , b_i სიდიდით. საიდანაც

$$\begin{aligned} a_i &= y_{i-1}, \\ b_i &= \frac{y_i - a_i}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

ამრიგად, (66) ფუნქციის მომდევნო კოეფიციენტი მიიღება წინა კოეფიციენტის დახმარებით.

მოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის სეგმენტზე $[0, 1]$ ავაგეთ მაპროქსიმებული ფუნქცია. ეს ფუნქციაა პირველი რიგის ჯაჭვური მრავალწევრი (66). მიახლოების სიზუსტე გაიზრდება, თუ გამოვიყენებთ მაღალი რიგის ჯაჭვურ მრავალწევრებს.

მაპროქსიმებული ფუნქცია მოვნახოთ მაღალი სიგლუვის (მაღალი რიგის წარმოებულის მქონე) ფუნქციებში. მაგალითად, ავიღოთ $[0, 1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტად წარმოებადი $s(x)$ ფუნქციების S_2 სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} s(x_i) &= f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n; \\ I_2(s) &= \int_0^1 (s''(x))^2 dx < \infty. \end{aligned} \quad (68)$$

უნდა მოვნახოთ ისეთი ფუნქცია $s_2(x) \in S_2$, რომელიც ანიჭებს $I_2(s)$ ინტეგრალს უმცირეს მნიშვნელობას,

$$\inf_{s_2 \in S_2} I_2(s_2)$$

როგორც წრფივი ჯაჭვური მრავალწევრების შემთხვევაში, აქაც დავუშვებთ, რომ არსებობს $[0, 1]$ სეგმენტზე უწყვეტწარმოებულიანი $s_2(x)$ ფუნქცია, რომელსაც ყოველ $[x_{i-1}, x_i]$ სეგმენტზე აქვს მეოთხე რიგის წარმოებული და ანიჭებს (68) ინტეგრალს უმცირეს მნიშვნელობას. ვთქვათ, გვაქვს ისეთივე $\psi(x)$ ფუნქცია, რომელიც ზემოთ განვსაზღვრეთ და აკმაყოფილებს (62) პირობას. შევადგინოთ ფუნქცია

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^1 (s_2''(x) + t\psi''(x))^2 dx = \int_0^1 (s_2''(x))^2 dx + \\ &+ 2t \int_0^1 s_2''(x)\psi''(x) dx + t^2 \int_0^1 (\psi''(x))^2 dx. \end{aligned}$$

რადგანაც $F(t) \geq 0$, გვექნება

$$F'(0) = 2 \int_0^1 s_2''(x)\psi''(x) dx = 0. \quad (69)$$

წარმოვადგინოთ (69) ინტეგრალი ჯამით

$$\frac{F'(0)}{2} = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} s_{2i}''(x)\psi''(x) dx. \quad (70)$$

ნაწილობითი ინტეგრების ორჯერ გამოყენებით გვექნება

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} s_{2i}''(x)\psi''(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} s_{2i}'(x)\psi'(x) dx + (s_{2i}''(x)\psi'(x) - s_{2i}'(x)\psi(x)) \times \\ &\times \psi(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} s_{2i}'(x)\psi(x) dx + s_{2i}''(x_i)\psi'(x_i) - s_{2i}''(x_{i-1})\psi'(x_{i-1}). \end{aligned}$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობა (70) გამოსახულებაში:

$$\frac{F'(0)}{2} = \int_0^1 s_{2i}'(x)\psi(x) dx + \sum_{i=1}^n s_{2i}''(x_i)\psi'(x_i) -$$

$$-\sum_{i=1}^n s_{2i}''(x_{i-1}) \psi'(x_{i-1}) = \int_0^1 s_2^{IV}(x) \psi(x) dx + \sum_{i=1}^{n-1} s_{2i}''(x_i) \psi'(x_i) +$$

$$+ s_{2n}(x_n) \psi'(x_n) - \sum_{i=2}^n s_{2i}''(x_{i-1}) \psi'(x_{i-1}) - s_{2i}''(x_0) \psi'(x_0),$$

სადაც

$$s_2(x) = s_{2i}(x), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

მეორე ჯამში ინდექსი $i-1$ შევცვალეთ i -ით,

$$\sum_{i=2}^n s_{2i}''(x_{i-1}) \psi'(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} s_{2(i+1)}''(x_i) \psi'(x_i).$$

ამის გამო გვექნება

$$\frac{F'(0)}{2} = \int_0^1 s_2^{IV}(x) \psi(x) dx + \sum_{i=1}^{n-1} (s_{2i}''(x_i) - s_{2(i+1)}''(x_i)) \psi'(x_i) +$$

$$+ s_{2n}(x_n) \psi'(x_n) - s_{21}''(x_0) \psi'(x_0).$$

მიღებული გამოსახულება ნულის ტოლია $\psi(x)$ -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, ამიტომ

$$s_2^{IV}(x) = 0;$$

$$s_{2i}''(x_i) - s_{2(i+1)}''(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (71)$$

$$s_{2n}''(x_n) = 0, \quad s_{21}''(x_0) = 0. \quad (72)$$

რადგანაც $s_2^{IV}(x) = 0$ მოელ $[0,1]$ სეგმენტზე, მაშინ $s_{2i}^{IV}(x) = 0$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. მაშასადამე, $s_{2i}(x)$ მესამე ხარისხის მრავალწევრია $[x_{i-1}, x_i]$ სეგმენტზე,

$$s_{2i}(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3.$$

მოცემული $f(x)$ ფუნქციის მახროქსიმებული $s_2(x)$ ფუნქციის — მე-სამე რიგის ჯაჭვური მრავალწევრის განსაზღვრისათვის, საჭიროა განისაზღვროს a_i, b_i, c_i, d_i , $i = 1, 2, \dots, n$, კოეფიციენტები. სულ $4n$ სიდიდე. რადგანაც $s_2(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადი, სათანადო ჩასმით $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, გვექნება

$$s_2(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$s_2(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

გავწარმოთ $s_2(x)$ და x_i წერტილში ერთმანეთს გავუტოლოთ მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულები. გვექნება:

$$s_{2i}'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$s_{2i}'(x_i - 0) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2;$$

$$s_{2(i+1)}'(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

$$s_{2(i+1)}'(x_i + 0) = b_{i+1};$$

$$s_{2i}'(x_i - 0) = s_{2(i+1)}'(x_i + 0),$$

ანუ

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

მეორე წარმოებულებისათვის გვაქვს (71) ტოლობა,

$$s_{2i}''(x_i) = s_{2(i+1)}''(x_i). \quad (73)$$

გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებულები,

$$s_{2i}''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), \quad s_{2(i+1)}''(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i)$$

და გამოვიყენოთ (73) ტოლობა. გვექნება

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

მიღებულ განტოლებებს დავუმატოთ (72) ტოლობანი

$$s_{2n}''(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n = 0, \quad s_{21}''(x_0) = 2c_1 = 0.$$

ამრიგად, მივიღეთ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$a_i = y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (74)$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (75)$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (76)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (77)$$

$$c_1 = 0; \quad (78)$$

$$c_n + 3d_n h_n = 0. \quad (79)$$

სულ $4n$ განტოლება $4n$ საძიებელი სიდიდით. ეს განტოლებათა სისტემა შეიძლება ამოიხსნას მე-13 თავის მე-7 პარაგრაფში განხილული წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდით. შეიძლება ამოიხსნას ელექტრონული გამოთვლელი მანქანითაც. მანქანური მეხსიერებისა და გამოთვლის დროის ეკონომიისათვის მიღებულ განტოლებათა სისტემას მივცეთ უფრო მარტივი სახე. (74) სისტემიდან, ცხადია, $a_i = y_{i-1}$. (77) და (79) განტოლებებიდან მივიღებთ

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad d_n = -\frac{c_n}{3h_n}. \quad (80)$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი და აგრეთვე $a_i = y_{i-1}$ მნიშვნელობა (75)-ში, მივიღებთ

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3} (c_{i+1} + 2c_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3} h_n c_n. \quad (81)$$

შევიტანოთ (80) და (81) მნიშვნელობანი (76) განტოლებაში. გვექნება c_i -ს მიმართ განტოლებათა სისტემა (ინდექსებში გვექნება $i+2$, შევამცირებთ 1-ით. ამასთან შემოვიტანოთ $c_{n+1} = 0$):

$$c_1 = 0,$$

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} = 3 \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \right), \quad (82)$$

$$i = 2, 3, \dots, n,$$

$$c_{n+1} = 0.$$

ამ განტოლებათა კოეფიციენტების მატრიცაში სამი დიაგონალის ელემენტებია ნულისაგან განსხვავებული: მთავარ დიაგონალზე და მის ორ მეზობელ დიაგონალზე. (82) განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ ე. წ. ჯაჭვური მეთოდი (იხ. თავი XIV, § 8).

ს ა ვ ა რ გ ი შ ი 23.

1. გამოთვალეთ $\Delta^3(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5)$, $\Delta^4(3x^5 - 7x^2 + 2)$, Δ^5x^5 , $\Delta^7(x^6 + 3x^5 + 1)$, $\Delta \frac{1}{x}$, $\Delta \frac{1}{x+1}$, $\Delta^2 \sin x$, $\Delta \operatorname{tg} x$, $\Delta(\sin 2x \cos 5x)$, $\Delta^2 \cos 2x$, $\Delta \sin^2 x$.

2. მოცემულია ფუნქციათა მნიშვნელობანი მე-19 ცხრილში. შეადგინეთ სასრულ სხვაობათა ცხრილები მე-5 რიგამდე. ცხრილები შეადგინეთ სვეტების მიხედვით.

ც ხ რ ი ლ ი 19

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
500	2000000	580	8,3395509	670	0,0386334
501	1996008	585	3634466	672	5758
502	92032	590	3872065	674	5186
503	88072	595	4108326	676	4615
504	84127	600	4343267	678	4048
505	80198	605	4576906	680	3482
506	76285	610	4809261	682	2920

3. მე-19 ცხრილის მიხედვით შეადგინეთ მესამე რიგის სხვაობათა ცხრილები და იპოვეთ (4) ფორმულით (§ 6) $f(504,5)$, $f(505,3)$, $f(601)$, $f(607)$, $f(671)$, $f(677)$, $f(681)$.

4. მე-19 ცხრილის სხვაობათა მიხედვით (4) ფორმულის საფუძველზე იპოვეთ $f(501,5)$, თუ გამოსავალ მნიშვნელობად მივიღებთ $f(505)$. იპოვეთ $f(581)$, თუ გამოსავალ მნიშვნელობად მივიღებთ $f(610)$.

5. ჰევმით მოყვანილ მე-20 ცხრილებში ცდომილებანია. სათანადო სხვაობათა ცხრილის საშუალებით იპოვეთ ცდომილება და შეასწორეთ (§ 2).

ც ხ რ ი ლ ი 20

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
560	23,6643	15	0,06667	30	5,47223	90	4,4814047
565	7692	16	6250	31	56776	91	4979414
570	8446	17	5882	32	65685	92	5143574
575	9702	18	5592	33	74450	93	5306500
580	0832	19	5263	34	83095	94	5468359
585	1868	20	5000	35	91608	95	5629026
590	2899	21	4762	36	6,00000	96	5788570

6. შეადგინეთ გაყოფილ სხვაობათა ცხრილი იმ ფუნქციათა მნიშვნელობებისათვის, რომელიც 21-ე ცხრილშია მოცემული.

ც ხ რ ი ლ ი 21

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
2	0,50700	30	5,47723	0,5	0,2500	0,1	0,00000
3	33333	31	56776	0,51	601	0,2	30103
4	25000	33	74456	0,52	704	0,3	47712
5	20000	34	83095	0,53	809	0,4	60206
6	16667	37	6,08276	0,54	916	0,5	69897
7	12286	39	24500	0,55	0,3025	0,6	77815
8	12500	40	32455	0,56	136	0,7	84510
9	11111	42	48074	0,57	249	0,8	90309
10	10000	45	70204	0,58	364	0,9	95424

7. ფუნქციათა მნიშვნელობანი მოცემულია 22-ე ცხრილში. შეადგინეთ ლაგრანჟის მრავალწევრები და იპოვეთ $f(3)$, $f(66)$, $f(91)$, $f(7,9)$.

ცხრილი 22

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	1,0000	65	8,06226	90	4,4814047	7,5	0,87506
2	2599	67	18535	92	5143574	7,7	88649
4	5874	68	24621	93	5306549	7,8	89209
6	8171	70	36600	95	5629026	8,0	90309

8. ფუნქციათა მნიშვნელობანი მოცემულია 23-ე ცხრილში, შეადგინეთ ნიუტონის სათანადო მრავალწევრები და იპოვეთ $f(10,3)$, $f(10,7)$ (§ 40-ის (51) ფორმულით), $f(50,5)$, $f(54,3)$, $f(10^{\circ}30'')$, $f(10^{\circ}4'45'')$, $f(20^{\circ}10'15'')$, $f(20^{\circ}14'20'')$ (ნიუტონის პირველი და მეორე ფორმულით).

ცხრილი 23

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
10,0	1,00000	50	1,69897	10°0'	0,17365	20°10'	0,34475
10,2	860	51	70757	1'	393	11'	503
10,4	2119	52	71600	2'	422	12'	530
10,6	2531	53	72428	3'	451	13'	557
10,8	3342	54	73239	4'	479	14'	584
10,0	3743	55	74036	5'	508	15'	612

9. ბესელის და სტირლინგის ფორმულების გამოყენებით 23-ე ცხრილიდან მონახეთ $f(52,5)$, $f(10^{\circ}2'45'')$, $f(10^{\circ}2'15'')$, $f(20^{\circ}12'30'')$, $f(20^{\circ}13'20'')$.

10. 22-ე ცხრილის პირველ სვეტში მოცემულია $\sqrt[3]{x}$ -ის მნიშვნელობანი. იპოვეთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულით $\sqrt[3]{5,47}$ -ის მნიშვნელობა ცდომილების შეფასებით.

11. 23-ე ცხრილის მეორე სვეტში მოცემულია $\lg x$ -ის მნიშვნელობანი. იპოვეთ $\lg 5,43$ და $\lg 5,01$ -ის მნიშვნელობანი ცდომილების სათანადო შეფასებით.

12. 23-ე ცხრილის მესამე და მეოთხე სვეტში მოთავსებულია $\sin x$ -ის მნიშვნელობანი. იპოვეთ $\sin 10^{\circ}2'35''$ და $\sin 20^{\circ}12'25''$ სათანადო ცდომილების შეფასებით.

13. განსაზღვრეთ $f(x) = \sqrt{|x|}$ ფუნქციის მაპროქსიმირებელი ჩებიშევის მეორე ხარისხის მრავალწევრი $[-1, 1]$ სეგმენტზე წონით $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. განსაზღვრეთ $\sqrt[3]{x}$ ფუნქციის მაპროქსიმირებელი ლეჟანდრის მეოთხე ხარისხის პოლინომი $[-1, 1]$ სეგმენტზე წონით $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. განსაზღვრეთ $f(x) = \sin x + \sin^3 x$ ფუნქციის მაპროქსიმირებელი ტრიგონომეტრიული მრავალწევრები.

16. მოვნახოთ $f(x) = \arcsin(\sin x)$, $f(x) = \arccos(\cos x)$ ფუნქციების მაპროქსიმირებელი ტრიგონომეტრიული მრავალწევრები.

17. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით ავაგოთ კვადრატული მრავალწევრი თუ x და y ცვლადების მნიშვნელობანი მოცემულია 24-ე ცხრილში.

ცხრილი 24

x	1,34	0,78	0,21	0,01	-0,50	-0,95
y	2,65	1,22	0,32	0,07	0,37	1,03

18. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით ავაგოთ კუბური მრავალწევრი, თუ x და y ცვლადების მნიშვნელობანი მოცემულია 25-ე ცხრილში.

ცხრილი 25

x	-0,32	-0,01	0,78	1,52	2,37	3,05
y	-4,27	-2,32	-0,35	0,93	1,64	2,38

ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა

§ 1. მრავალწევრის მნიშვნელობის გამოთვლა ჰორნერის სქემით¹

ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა ჩვეულებრივად დაიწყება არითმეტიკულ მოქმედებათა მიმდევრობაზე. არითმეტიკული მოქმედებანი, როგორც ზემოთ გავარჩიეთ, შეიძლება შესრულდეს გამოთვლითი მანქანების საშუალებით. მანქანის მეხსიერება შემოსაზღვრულია, ამიტომ სასურველია ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა სრულდებოდეს გაუორებითი მოქმედებით. ამის გამო, ცხადია, ხელსაყრელია ფუნქციის ისეთი ანალიზური გამოსახულება შევადგინოთ, რომელიც საშუალებას მოგვცემს პრაქტიკულად, რაც შეიძლება მარტივად, განვახორციელოთ ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა.

ამ მოსაზრების ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ საჭიროა გამოვთვალოთ

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \quad (1)$$

მრავალწევრის მნიშვნელობა $x=a$ მნიშვნელობისათვის.

მოცემული (1) მრავალწევრი ასე წარმოვადგინოთ:

$$P_n(x) = (\dots((a_0 x + a_1)x + a_2)x + \dots + a_{n-1})x + a_n. \quad (2)$$

ეს კი მოგვცემს საშუალებას გამოვთვალოთ $P_n(a)$ შემდეგი მიმდევრობით:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= b_0 a + a_1, \\ b_2 &= b_1 a + a_2, \\ &\dots \\ b_{n-1} &= b_{n-2} a + a_{n-1}, \\ b_n &= b_{n-1} a + a_n \end{aligned} \quad (3)$$

სადაც, ადვილი შესამჩნევია,

$$b_n = P_n(a).$$

¹ ამ საკითხს ადრე ნაწილობრივად გავყვანიეთ. იხ. ნაწ. I, თავი V, § 1.

ამგვარად, $P_n(x)$ მრავალწევრის (1) და (2) გამოსახულებანი ტოლძალოვანია, მაგრამ (2) გამოსახულება გამოთვლებისათვის უფრო ხელსაყრელია, რადგანაც იგი იძლევა $P_n(a)$ -ს ერთნაირი მოქმედებით.

(3) მოქმედება შემდეგი სქემით შეგვიძლია დავალაგოთ

$$\begin{array}{r|rrrrrr} + & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ & b_0 a & b_1 a & \dots & b_{n-2} a & b_{n-1} a & \\ \hline a & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{array}$$

ამ სქემას ჰორნერის სქემა ეწოდება. პირველ სტრიქონში მოთავსებულია $P_n(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები $a_0, a_1, \dots, a_n$, მესამე სტრიქონში ჩამოტანილია $a_0 = b_0$ კოეფიციენტი. b_0 კოეფიციენტი გამრავლებულია a -ზე (a იმყოფება b_0 -ის წინ) მოთავსებულია a_1 კოეფიციენტის ქვეშ, მეორე სტრიქონში. ჯამი $a_1 + b_0 a$, რომელიც გვაძლევს b_1 -ს, მოთავსებულია მესამე სტრიქონში $b_0 a$ -ის ქვეშ. ასევე ნამრავლი $b_1 a$ მოთავსებულია მეორე სტრიქონში a_2 -ის ქვეშ, ხოლო $a_2 + b_1 a$, რომელიც გვაძლევს b_2 -ს, მოთავსებულია $b_1 a$ -ის ქვეშ, მესამე სტრიქონში. ბოლოს a_n -ის ქვეშ, მესამე სტრიქონში, მოთავსებულია $a_n + b_{n-1} a = b_n = P_n(a)$ -ის მნიშვნელობა.

მაგალითად, ვიპოვოთ

$$P_4(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1.$$

მრავალწევრის მნიშვნელობა $x=2$ -სათვის.

ჰორნერის სქემა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ & & 3 \cdot 2 & 4 \cdot 2 & 9 \cdot 2 & 14 \cdot 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 9 & 14 & 29 \end{array},$$

საიდანაც გვექნება

$$P_4(2) = 29.$$

(1) მრავალწევრი $(x-a)$ -ზე გაყოფით ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$P_n(x) = (x-a)P_{n-1}(x) + R, \quad (4)$$

საიდანაც $x=a$ -ს ჩასმით მივიღებთ (ზეზუს თეორემა)

$$R = P_n(a). \quad (5)$$

ასე, რომ, b_n სიდიდე, რომელიც ზემოთ მივიღეთ, $P_n(x)$ -ის $(x-a)$ -ზე გაყოფით მიღებული ნაშთია¹.

¹ იხ. ნაწ. I, თავი V, § 1, n5.

განვსაზღვროთ $P_{n-1}(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები,

$$P_{n-1}(x) = \beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}.$$

შევიტანოთ $P_{n-1}(x)$ -ის გამოსახულება (4) გამოსახულებაში. გვექნება

$$P_n(x) = \beta_0 x^n + (\beta_1 - \beta_0 a) x^{n-1} + (\beta_2 - \beta_1 a) x^{n-2} + \dots + (\beta_{n-1} - \beta_{n-2} a) x + (\beta_n - \beta_{n-1} a), \beta_n = R.$$

შევადაროთ ეს მნიშვნელობა (1) მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \beta_0 &= a_0, \\ \beta_1 - \beta_0 a &= a_1, \\ \beta_2 - \beta_1 a &= a_2, \\ &\dots \\ \beta_{n-1} - \beta_{n-2} a &= a_{n-1}, \\ \beta_n - \beta_{n-1} a &= a_n, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} \beta_0 &= a_0, \\ \beta_1 &= \beta_0 a + a_1, \\ \beta_2 &= \beta_1 a + a_2, \\ &\dots \\ \beta_{n-1} &= \beta_{n-2} a + a_{n-1}, \\ \beta_n &= \beta_{n-1} a + a_n. \end{aligned}$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ

$$\beta_i = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

სადაც

$$\beta_n = R.$$

ამგვარად, (3) ტოლობებით განსაზღვრული კოეფიციენტები $P_{n-1}(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები ყოფილა.

(3) გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ $P_{n-1}(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები განისაზღვრება გაყოფის გარეშე.

თუ დავუბრუნდებით ჰორნერის სქემას, მივიღებთ, რომ $P_n(x)$ მრავალწევრის $(x-a)$ -ზე გაყოფით მიღებული განაყოფის კოეფიციენტები და ნაშთი მოთავსებულია მესამე სტრიქონში.

განხილული მაგალითისათვის გვექნება

$$P_4(x) = (x-2)P_3(x) + R,$$

სადაც

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 3x^3 + 4x^2 + 9x + 14, \\ R &= 29. \end{aligned}$$

ვთქვათ, საჭიროა $P_n(x)$ მრავალწევრი წარმოვადგინოთ $(x-a)$ -ს ხარისხების მიხედვით,

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_n(x-a)^n. \quad (6)$$

განვსაზღვროთ A_i კოეფიციენტები მიმდევრობით.

$$A_0 = P_n(a).$$

ამ გამოსახულების (5)-თან შედარება გვიჩვენებს, რომ A_0 კოეფიციენტი $P_n(x)$ მრავალწევრის $(x-a)$ -ზე გაყოფით მიღებული ნაშთია:

$$A_0 = R_0 = P_n(a). \quad (7)$$

(6) გამოსახულებიდან მივიღებთ:

$$P_n(x) = A_0 + (x-a)[A_1 + A_2(x-a) + \dots + A_n(x-a)^{n-1}],$$

ანუ

$$P_n(x) = A_0 + (x-a)P_{n-1}(x), \quad (8)$$

სადაც

$$P_{n-1}(x) = A_1 + A_2(x-a) + \dots + A_n(x-a)^{n-1}. \quad (9)$$

(8) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $P_{n-1}(x)$ წარმოადგენს $P_n(x)$ მრავალწევრის $(x-a)$ -ზე განაყოფს. $P_{n-1}(x)$ -ის კოეფიციენტები (3) გამოსახულებიდან მიიღება.

(9) დამოკიდებულებიდან გვექნება

$$A_1 = P_{n-1}(a). \quad (10)$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ A_1 კოეფიციენტი $P_{n-1}(x)$ მრავალწევრიდან განისაზღვრება:

$$A_1 = R_1 = P_{n-1}(a).$$

(9) გამოსახულება ასე წარმოვადგინოთ

$$P_{n-1}(x) = A_1 + (x-a)P_{n-2}(x),$$

სადაც

$$P_{n-2}(x) = A_2 + A_3(x-a) + \dots + A_n(x-a)^{n-2}.$$

აქედან კი მივიღებთ

$$A_2 = R_2 = P_{n-2}(a)$$

და ა. შ. თუ ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობას შევავაშებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} A_0 &= P_n(a) = R_0, \\ A_1 &= P_{n-1}(a) = R_1, \\ A_2 &= P_{n-2}(a) = R_2, \\ &\dots \\ A_n &= P_0(a) = R_n, \end{aligned} \quad (11)$$

სადაც მომღებო $P_{n-i}(x)$ მიიღება წინა $P_{n-(i-1)}(x)$ მრავალწევრის $(x-a)$ -ზე გაყოფით.

თუ $P_{n-(i-1)}(x)$ მრავალწევრიდან შემდეგი $P_{n-i}(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტების გამოსათვლელად ჰორნერის სქემით ვისარგებლებთ, $= 0, 1, \dots, n$, მიიღებთ შემდეგ სქემას

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
	$b_0 a$	$b_1 a$	$\dots$	$b_{n-3} a$	$b_{n-2} a$	$b_{n-1} a$	
a	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-2}	b_{n-1}	$b_n = P_n(a) = A_0$
	$c_0 a$	$c_1 a$	$\dots$	$c_{n-3} a$	$c_{n-2} a$		
	c_0	c_1	c_2	$\dots$	c_{n-2}	$c_{n-1} = P_{n-1}(a) = A_1$	
	$d_0 a$	$d_1 a$	$\dots$	$d_{n-3} a$			
	d_0	d_1	d_2	$\dots$	$d_{n-2} = P_{n-2}(a) = A_2$		
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
	$l_0 = P_0(a) = A_n$						

ამ სქემას ჰორნერის განზოგადებული სქემა ეწოდება. მაგალითად,

$$P_4(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$$

წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$P_4(x) = A_0 + A_1(x-2) + A_2(x-2)^2 + A_3(x-2)^3 + A_4(x-2)^4.$$

ამ შემთხვევაში ჰორნერის განზოგადებული სქემა შემდეგ სახეს მიიღებს:

	3	-2	1	-4	1
		3·2	4·2	9·2	14·2
2	3	4	9	14	29 = A_0
		6	20	58	
	3	10	29	72 = A_1	
		6	32		
	3	16	61 = A_2		
		6			
	3	22 = A_3			
	3 = A_4				

საიდანაც განისაზღვრება A_i კოეფიციენტები. $P_4(x)$ ასე წარმოიღვინება:

$$P_4(x) = 29 + 72(x-2) + 61(x-2)^2 + 22(x-2)^3 + 3(x-2)^4.$$

თუ მოვიგონებთ ტეილორის ფორმულას მრავალწევრისათვის¹

$$P_n(x) = P_n(a) + \frac{P'_n(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''_n(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (12)$$

შევამჩნიეთ, რომ (6) გამოსახულება $P_n(x)$ მრავალწევრის ტეილორის ფორმულით წარმოდგენას:

$$\frac{P^i(a)}{i!} = A_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (13)$$

ასე რომ, მრავალწევრის ტეილორის ფორმულით წარმოდგენა წარმოებულის გამოყენების გარეშე შეგვიძლია ჰორნერის განზოგადებული სქემის დახმარებით.

მაგალითად, წარმოვადგინოთ ტეილორის ფორმულით $(x+1)$ -ის ხარისხებზე $P_5(x)$ მრავალწევრი,

$$P_5(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1.$$

შევადგინოთ ჰორნერის განზოგადებული სქემა

	1	0	-1	2	-3	1
		-1	1	0	-2	5
-1	1	-1	0	2	-5	6 = $P_5(-1)$
		-1	2	-2	0	
	1	-2	2	0		$-5 = \frac{P'_5(-1)}{1!}$
		-1	3	-5		
	1	-3	5	-5		$\frac{P''_5(-1)}{2!}$
		-1	4			
	1	-4	9			$\frac{P'''_5(-1)}{3!}$
		-1				
	1		-5			$\frac{P^{IV}_5(-1)}{4!}$
	1					$\frac{P^V_5(-1)}{5!}$

$P_5(x)$ -ის ტეილორის ფორმულით გაშლა მოგვცემს:

$$P_5(x) = 6 - 5(x+1) - 5(x+1)^2 + 9(x+1)^3 - 5(x+1)^4 + (x+1)^5.$$

¹ იხ. ნაწ. 1, თავი XV, § 3, n1.

§ 2. რაციონალური ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა
რაციონალური ფუნქცია ეწოდება გამოსახულებას

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad (1)$$

სადაც $P_n(x)$ და $Q_m(x)$ მრავალწევრებია:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m.$$

რომ გამოვთვალოთ $R(x)$ -ის მნიშვნელობა $x=a$ -თვის, საჭიროა გამოვთვალოთ $P_n(a)$ და $Q_m(a)$. ორივე ეს მნიშვნელობა გამოითვლება ჰორნერის სქემით და სათანადო მნიშვნელობანი $P_n(a)$ და $Q_m(a)$ შევაფარდოთ.

§ 3. რიცხვითი მწკრივების ჯამის მიახლოებით მნიშვნელობათა გამოთვლა

ავიღოთ რიცხვითი მწკრივი

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

როგორც ვიცით, (1) მწკრივი კრებადია, თუ კერძო ჯამების (S_n) მიმდევრობა კრებადია.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (2)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

S რიცხვს ეწოდება (1) მწკრივის ჯამი.

(2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$S = S_n + R_n, \quad (3)$$

სადაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

R_n -ს ეწოდება მწკრივის ნაშთი.

კრებადი (1) მწკრივის S ჯამის მოცემული ε სიზუსტით პოვნისათვის საჭიროა, n იმდენად დიდი ავიღოთ, რომ შესრულდეს

$$|R_n| < \varepsilon$$

უტოლობა. მაშინ კერძო ჯამი S_n შეიძლება მიღებულ იქნეს (1) მწკრივის ჯამის მნიშვნელობად ε სიზუსტით.

შევნიშნოთ, რომ პრაქტიკულად a_i სიდიდეები განისაზღვრებიან მიახლოებით. a_i -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა $\bar{a}_i$ ასოთი აღვნიშნოთ. ასე რომ, ნაცვლად S_n სიდიდისა გვექნება

$$\bar{S}_n = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i,$$

მიღებული $\bar{S}_n$ სიდიდე ჩვეულებრივად უნდა დავამრგვალოთ სათანადო ათწილად ნიშნამდე, რაც მოგვცემს $\bar{\bar{S}}$.

ამგვარად გვექნება

$$S \approx \bar{\bar{S}}_n. \quad (4)$$

შევაფასოთ ცდომილება: $S - \bar{\bar{S}}_n$. ეს სხვაობა ასე გადავწეროთ:

$$S - \bar{\bar{S}}_n = (S - S_n) + (S_n - \bar{S}_n) + (\bar{S}_n - \bar{\bar{S}}_n),$$

საიდანაც

$$|S - \bar{\bar{S}}_n| \leq |S - S_n| + |S_n - \bar{S}_n| + |\bar{S}_n - \bar{\bar{S}}_n|. \quad (5)$$

თუ თითოეული შესაკრების აბსოლუტური ცდომილებას სათანადოდ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ -ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$|S - \bar{\bar{S}}_n| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon.$$

ცხადია, $\bar{\bar{S}}_n$ -ის საშუალებით S რომ მივიღოთ ε სიზუსტით, საჭიროა

$$\varepsilon_1 = \alpha\varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \beta\varepsilon, \quad \varepsilon_3 = \gamma\varepsilon,$$

სადაც

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 1. \quad (6)$$

ამისათვის კი საჭიროა: 1) წვერთა რიცხვი n ავიღოთ იმდენად დიდი, რომ

$$|S - S_n| = R_n \leq \alpha\varepsilon. \quad (7)$$

2) ყოველი შესაკრები a_i გამოვთვალოთ ზღვრული აბსოლუტური ცდომილებით, რომელიც არ აღემატება $\frac{\beta\varepsilon}{n}$,

$$|a_i - \bar{a}_i| \leq \frac{\beta\varepsilon}{n}, \quad (8)$$

$$|S - \bar{S}_n| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - \bar{a}_i| \leq \beta \varepsilon.$$

3) $\bar{S}_n$ ჯამი დავამრგვალოთ იმდენ ათწილად ნიშნამდე, რომ

$$|\bar{S}_n - \bar{S}_n| \leq \gamma \varepsilon. \quad (9)$$

ჩვეულებრივად ავიღებთ

$$\alpha \leq \frac{1}{4}, \quad \beta \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma \leq \frac{1}{4}.$$

საკითხის ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (10)$$

მწკრივის ჯამი სამი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით.

(10) მწკრივისათვის

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n},$$

$$R_n = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \frac{1}{2^n}.$$

შევარჩიოთ n ისე, რომ

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{10^{-3}}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{4},$$

საიდანაც

$$\frac{1}{2^{n-3}} \leq 10^{-3},$$

ანუ

$$2^{n-3} \geq 10^3,$$

აქედან

$$n-3 \geq \frac{3}{\lg 2} \approx \frac{3}{0,3010} \approx 10.$$

ამგვარად,

$$n \geq 13.$$

ახლა გამოვარკვიოთ, რამდენი ათწილადი ნიშნით უნდა ავიღოთ (10) მწკრივის წევრები, რომ 13 წევრის ცდომილებამ მოგვცეს არა უმეტეს

$\frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-3}}{2}$ -ისა ($\beta = \frac{1}{2}$). ამისათვის საკმარისია, (10) მწკრივის თითოეული წევრი ავიღოთ 10^{-5} სიზუსტით. მართლაც, თითოეული წევრის ცდომილება იქნება $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, მაშინ 13 წევრის ცდომილება მოგვცემს

$13 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, რაც ცხადია, აკმაყოფილებს პირობას

$$\sum_{i=1}^{13} |a_i - \bar{a}_i| = 13 \cdot \frac{10^{-5}}{2} = 0,13 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-3}}{2}.$$

(10) მწკრივის 13 წევრის შეკრების შედეგად ჯამში გვექნება ხუთი ათწილადი ნიშანი. ეს ჯამი დავამრგვალოთ ოთხ ათწილად ნიშნამდე, მივიღებთ

$\bar{S}$ -ს. სადაც ცდომილება ტოლია $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

$$\gamma \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}, \quad \gamma = \frac{1}{10}.$$

(10) მწკრივის 13 წევრის შეკრების შედეგად, თუ თითოეული წევრი გამოთვლილია ხუთი ათწილადი ნიშნით, მივიღებთ S -ის მნიშვნელობას,

სადაც ცდომილება არ აღემატება $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$ -ს. მართლაც,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0,85 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

ასე რომ, (10) მწკრივის 13 წევრის ჯამი, თუ თითოეული წევრი გამოითვლება ხუთი ათწილადი ნიშნით, მოგვცემს ამ მწკრივის ჯამს სამი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით მაინც. ცხადია, ცდომილება $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$

მეტად უხეშად შევაფასეთ, რადგანაც, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ცდომილება სხვადასხვა ნიშნისაა და შეკრების დროს ერთმანეთს აბათილებს. სინამდვილეში ცდომილება გაცილებით ნაკლებია.

მართლაც, გამოთვლები მოგვცემს

$$\frac{1}{2} = 0,50000$$

$$\frac{1}{2^4} = 0,06250$$

$$\frac{1}{2^3} = 0,25000$$

$$\frac{1}{2^5} = 0,03125$$

$$\frac{1}{2^2} = 0,12500$$

$$\frac{1}{2^6} = 0,01562$$

$$\frac{1}{2^7} = 0,00781$$

$$\frac{1}{2^8} = 0,00391$$

$$\frac{1}{2^9} = 0,00195$$

$$\frac{1}{2^{10}} = 0,00098$$

$$\frac{1}{2^{11}} = 0,00049$$

$$\frac{1}{2^{12}} = 0,00024$$

$$\frac{1}{2^{13}} = 0,00012$$

$$\sum_{i=1}^{13} \frac{1}{2^i} = 0,99987$$

მიღებული მნიშვნელობა

$$\sum_{i=1}^{13} \frac{1}{2^i} = 0,99987$$

იძლევა $S=1$ -ის მნიშვნელობას სამი ათწილადი ნიშნით. $\Delta s = 0,13 \cdot 10^{-3}$ რაც გაცილებით მცირეა, ვიდრე $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$. მწკრივის ჯამის გამოთვლისათვის რაიმე გზით უნდა შევაფასოთ მწკრივის R_n ნაშთი.

მოვიგონოთ მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი (თავი V, § 2, n4):

თუ გვაქვს დადებითი $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ მწკრივი და მოიძებნება ისეთი დადებითი, კლებადი, უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია x -ის ყოველი დადებითი მნიშვნელობისათვის და აკმაყოფილებს პირობას

$$f(i) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

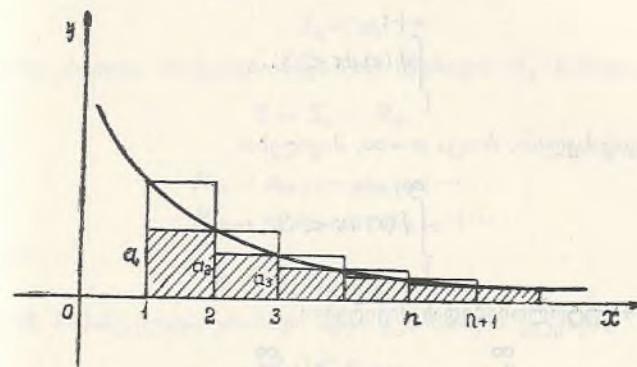
მაშინ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ მწკრივი კრებადია, თუ კრებადია არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$I = \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

ხოლო მწკრივი განშლადია, თუ განშლადია I ინტეგრალი.

განვიხილოთ კოორდინატა Oxy სისტემაში წერტილები (x_i, y_i) , სადაც $x_i = i$, $y_i = a_i$ (ნახ. 1). ვთქვათ, არსებობს ისეთი $y = f(x)$ კლებადი და უწყვეტი $1 \leq x < \infty$ შუალედში, რომელიც x_i წერტილებში აღებულ a_i მნიშვნელობებს. მაშინ $S_n - a_1$,

$$S_n - a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=2}^n y_i \Delta x_i, \quad \Delta x_i = 1,$$



ნახ. 1

ნაკლები იქნება, ვიდრე ინტეგრალი $\int_1^n f(x) dx$. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$S_n - a_1 < \int_1^n f(x) dx,$$

ანუ

$$S_n < a_1 + \int_1^n f(x) dx. \quad (11)$$

საიდანაც, ზღვარზე გადასვლით, როცა $n \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$S < a_1 + \int_1^{\infty} f(x) dx. \quad (12)$$

თუ ავიღებთ ჯამს

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n y_i \Delta x_i, \quad \Delta x_i = 1,$$

იგი მეტი იქნება, ვიდრე

$$\int_1^{n+1} f(x) dx, \quad \int_1^{n+1} f(x) dx < S_n. \quad (13)$$

ზღვარზე გადასვლით, როცა $n \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < S. \quad (14)$$

(12) და (14) უტოლობებიდან მივიღებთ:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < S < a_1 + \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

ანუ

$$\int_1^{n+1} f(x) dx + \int_{n+1}^{\infty} f(x) dx < S_n + R_n < a_1 + \int_1^n f(x) dx + \int_n^{\infty} f(x) dx,$$

საიდანაც¹ (11) და (13)-ის საფუძველზე მივიღებთ

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx < R_n < \int_n^{\infty} f(x) dx. \quad (15)$$

თუ მწკრივი ნიშანცვლადია, $a_n < a_{n+1}$ და $a_n \rightarrow 0$, მაშინ მწკრივი კრებადია (ლაიბნიცის თეორემა). მწკრივი

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2k} + a_{2k+1} - \dots, \quad (16)$$

¹ იხ. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, М., 1963, стр. 83.

მოგვეძახოს

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k}),$$

$$S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1},$$

რაც გვიჩვენებს, რომ მიმდევრობა (S_n) (კენტია თუ ლუწი) ზრდადია. მაგრამ, თუ ზემოთ კერძო ჯამებს წარმოვიდგენთ შემდეგი სახით:

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k},$$

$$S_{2k+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - (a_{2k} - a_{2k+1}),$$

გვეჩვენება, რომ (S_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია,

$$S_n < a_1.$$

სრულიად ასეთივე თვისებები აქვს (16) მწკრივის R_n ნაშთსაც,

$$S = S_n + R_n,$$

სადაც

$$R_{2k} = a_{2k+1} - a_{2k+2} + \dots \\ - R_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} + \dots$$

გვეჩვენება

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

ასე რომ, ნიშანცვლადი კრებადი მწკრივებისათვის გვეჩვენება

$$|R_n| < a_{n+1}, \quad (17)$$

და R_n -ის ნიშანი a_{n+1} -ის ნიშნისაა:

$$\text{sign } R_n = \text{sign } a_{n+1}.$$

მაგალითად, ვიპოვოთ მწკრივის

$$\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{n^5} + \dots \quad (18)$$

ჯამი 10^{-2} სიზუსტით, $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$,

(18) მწკრივის ნაშთისათვის გვეჩვენება უტოლობა

$$R_n \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{4n^4}.$$

ავარჩიოთ ისე n , რომ

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4n^4} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{10^{-2}}{2} \quad \left(\alpha = \frac{1}{4} \right),$$

საიდანაც

$$n^4 \geq 2 \cdot 10^2$$

ანუ

$$n \geq \sqrt[3]{200} \approx 3,8.$$

წევრთა რიცხვი ავიღოთ $n=4$.

გამოვარკვეოთ, რამდენი ათწილადი ნიშნით უნდა ავიღოთ (18) მწკრივის წევრები, რომ

$$\varepsilon = 4 \cdot \frac{10^{-k}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \quad \left(\beta = \frac{1}{4} \right).$$

აქედან მივიღებთ:

$$10^{-k} = \frac{1}{16} 10^{-2} < 10^{-3}.$$

ასე რომ, თითოეული შესაყრები უნდა ავიღოთ $k \geq 3$ ათწილადი ნიშნით, ე. ი. 4 ათწილადი ნიშნით, შეგვკრიბოთ ოთხი წევრი, სადაც ცდომილება არ იქნება მეტი, ვიდრე

$$4 \cdot \frac{10^{-4}}{2} = 2 \cdot 10^{-4} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

დავამრგვალოთ მიღებული ჯამი სამ ათწილად ნიშნამდე. ეს მოგვცემს $\overline{S}_5$ -ს. სადაც ცდომილება არ აღემატება $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10^{-2}}{2}$, $\gamma = \frac{1}{10}$ -ს.

ასე რომ, მთელ გამოთვლებში ცდომილება არ იქნება მეტი, ვიდრე $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}.$$

(18) მწკრივისათვის ჩავატაროთ გამოთვლები:

$$\frac{1}{1^5} = 1,0000$$

$$\frac{1}{2^5} = 0,0312$$

$$\frac{1}{3^5} = 0,0041$$

$$\frac{1}{4^5} = 0,0010$$

$$\overline{S}_4 = 1,0363, \quad \overline{S}_4 = 1,04.$$

$$S \approx 1,04.$$

ანუ

აღებული შესამჩნევია, რომ, თუ აღებულ ჯამს დაეუმატებდით $\frac{1}{5^5} = 0,0003$,

მივიღებდით $\overline{S}_5 = 1,0366$, რაც S_4 ჯამში ცვლილებას არ იწვევს.

§ 4. ანალიზური ფუნქციის მნიშვნელობის გაანთხილება

ნამდვილი x ცვლადის ნამდვილ $f(x)$ ფუნქციას a წერტილის რაიმე $g = \{x | (x-a) < \delta\}$ მიდამოში ეწოდება ანალიზური, თუ a წერტილის ამ მიდამოში $f(x)$ ფუნქცია გაიშლება ტეილორის მწკრივად:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots \quad (1)$$

ცხადია, (1) მწკრივი მიიღება ტეილორის ფორმულიდან

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x), \quad (2)$$

თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

ჩვენთვის ცნობილია (ნაწ. I, თავი XV, § 3, $n=2$) ნაშთის სახე

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1} (1-\theta)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1, \quad (3)$$

საიდანაც, თუ $p=1$, მივიღებთ ნაშთის კოშის სახეს,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1} (1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1, \quad (4)$$

თუ $p=n+1$, მივიღებთ ნაშთს ლაგრანჟის სახით,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1, \quad (5)$$

თუ a წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)$ ფუნქცია აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებულთა და ეს წარმოებულები შემოსაზღვრულია ერთი და იმავე რიცხვით,

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad n=1, 2, \dots$$

აღებული წერტილის მიდამოში, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია გაიშლება აღებული წერტილის მიდამოში ტეილორის მწკრივად (თავი VI, § 3, $n1$). მართლაც, ავიღოთ ნაშთი ლაგრანჟის სახით, მივიღებთ

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

საიდანაც a წერტილის ადებულ მიდამოში

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

თუ (2) ფორმულაში $a=0$, მაშინ მივიღებთ მაკლორენის ფორმულას

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad (6)$$

სადაც $R_n(x)$ მიიღება (3)–(5) ფორმულებიდან, თუ ჩავსვამთ $a=0$:

$$R_n = \frac{x^{n+1} (1-\theta)^{n-p+1}}{n! P} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (7)$$

(შლემილზის სახით),

$$R_n = \frac{x^{n+1} (1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (8)$$

(კოშის სახით),

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (9)$$

(ლაგრანჟის სახით).

წარმოვადგინოთ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქცია (6) ფორმულით და გამოვთვალოთ სათანადო მნიშვნელობა.

1. ბინომის გაშვრთვა: $f(x) = (1+x)^a$.

სათანადო გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^a, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= a(1+x)^{a-1}, & f'(0) &= a, \\ f''(x) &= a(a-1)(1+x)^{a-2}, & f''(0) &= a(a-1), \\ &\vdots & & \\ f^{(n)}(x) &= a(a-1)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}, \\ f^{(n)}(0) &= a(a-1)\dots(a-n+1). \end{aligned}$$

(6) ფორმულაში ჩასმა მოგვცემს

$$\begin{aligned} (1+x)^a &= 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + \\ &+ \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta)^{a-n+1}. \end{aligned} \quad (10)$$

მაგალითად, ამ ფორმულით $\sqrt{1+x}$ -თვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2!}\frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{1\cdot 3}{2^3}x^3 - \\ &- \frac{1}{4!}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}x^4 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{2^n}x^n + \\ &+ (-1)^n\frac{1}{(n+1)!}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots 2n-1}{2^{n+1}}x^{n+1}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-(n+1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

მაგალითად გამოვთვალოთ $\sqrt{8}$.

$$\sqrt{8} = \sqrt{9-1} = 3\sqrt{1-\frac{1}{9}}.$$

(11) ფორმულაში ჩავსვათ $x = -\frac{1}{9}$ და შევჩერდეთ მეოთხე წევრზე,

მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \sqrt{8} &= 3\left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{2!}\frac{1}{2^2}\frac{1}{9^2} - \frac{1}{3!}\frac{1\cdot 3}{2^3}\frac{1}{9^3} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{4!}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\frac{1}{9^4}\right] + R_4, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{1}{5!}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5\cdot 9^5}\left(1-\theta\cdot\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}-5} = \\ &= \frac{3\cdot 5\cdot 7}{5!2^5\cdot 9^5}\frac{9^{9/2}}{(9-\theta)^{9/2}} < \frac{7}{4\cdot 2\cdot 2^5\cdot 9^{1/2}\cdot 8^{9/2}}, \end{aligned}$$

ანუ

$$R_4 < \frac{1}{4\cdot 2\cdot 2^5\cdot 8^4}\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{4\cdot 2\cdot 2^5\cdot 2^{12}}\cdot 8\cdot \frac{1}{2}.$$

ამგვარად,

$$R_4 < \frac{1}{2^{18}} < 0,000\,004. \quad (13)$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ, თუ (11) გამოსახულებაში ოთხ შესაყრებს ავიღებთ, $\sqrt{8}$ -ის მნიშვნელობა შეგვიძლია ხუთი ათწილადი სიზუსტით მივიღოთ.

დავუშვათ, (12)-ის ცდომილებაა

$$\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5},$$

გამოვარკვევით, რა $\frac{1}{2} 10^{-k}$ ცდომილებით უნდა ავიღოთ თითოეული შესაყრები, რომ ოთხი შესაყრების ცდომილება ε_2 ,

$$\varepsilon_2 = 4 \cdot \frac{10^{-k}}{2},$$

არ აღმატებოდეს $\frac{1}{4}$ -ს.

ე. ი.

$$4 \cdot \frac{10^{-k}}{2} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{10^{-5}}{2}.$$

საიდანაც

$$16 \cdot 10^5 \leq 10^k.$$

ეს კი მოგვცემს

$$k \geq 7.$$

ამგვარად, (12) გამოსახულების თითოეული წევრა 7 ათწილადი ნიშნით მაინც უნდა ავიღოთ, რომ მათ ჯამში ცდომილება არ აღმატებოდეს $\frac{1}{4} \cdot \frac{10^{-5}}{2}$ -ს.

თუ ოთხი წევრის ჯამს დაეამრგვალებთ 6 ათწილად ნიშნამდე, მივიღებთ S , სადაც ცდომილება განისაზღვრება ტოლობით

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 &= 4 \cdot \frac{1}{2} 10^{-6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} = \\ &= 10^{-5} \left(\frac{2}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20} \right) = 0,375 \cdot 10^{-5} < 0,4 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ შვიდი ათწილადი ნიშნით გამოთვლილი (12) გამოსახულება ხუთი ათწილადი ნიშნით მაინც გვაძლევს $\sqrt{8}$ -ის მნიშვნელობას.

გამოთვლები მოგვცემს

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} &= 0,0555556, \\ \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{9^2} &= 0,0015432, \\ + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^3} \cdot \frac{1}{9^3} &= 0,0000857, \\ \frac{1}{4!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4} \cdot \frac{1}{9^4} &= 0,0000060, \end{aligned}$$

$$0,0571905$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0,0571905 \\ 0,9428095 \\ \hline 3 \\ 2,8284285 \end{array}$$

$$\sqrt{8} \approx 2,8284285 \approx 2,82843$$

$\sqrt{n}$ -ის ცხრილებში მოთავსებული მნიშვნელობაა

$$\sqrt{8} = 2,8284271 \dots$$

ამგვარად, (12) გამოსახულებით მიღებული $\sqrt{8}$ -ის მნიშვნელობა ცხრილში მოცემულ მნიშვნელობას ხუთი ათწილადი ნიშნით ემთხვევა (რაც მოსალოდნელი იყო):

$$\sqrt{8} = 2,82843 \left(\pm \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \right).$$

2. მაჩვენებლიანი ფუნქციის გამწკრივება. $f(x) = e^x$.

სათანადო გაწარმოებით მივიღებთ

$$(e^x)^{(k)} = e^x, (e^x)_{x=0}^{(k)} = 1, k = 0, 1, 2, \dots$$

ამიტომ e^x -ის გამწკრივება მოგვცემს

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, 0 < \theta < 1. \quad (14)$$

გამოვთვალოთ e -ს მნიშვნელობა. ამისათვის (14)-ში ჩავსვათ $x = 1$, მივიღებთ

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}, 0 < \theta < 1. \quad (15)$$

მაგრამ (15) გამოსახულებაში შედარებით ბევრი წევრების აღება დავუჭირდება, რომ e -ს მნიშვნელობა სათანადო სიზუსტით მივიღოთ.

ავიღოთ $x = \frac{1}{10}$ და მიღებული შედეგი მეათე ხარისხში ავახარისხოთ, გვექნება

$$e^{0,1} = 1 + \frac{1}{1!} 0,1 + \frac{1}{2!} 0,01 + \frac{1}{3!} 0,001 + \dots + \frac{1}{n!} 0, \dots 1 e^{0,1\theta}. \quad (16)$$

ავიღოთ ნაშთი

$$\frac{1}{n!} 10^{-n} e^{0,1\theta} < \frac{1}{n!} 10^{-n \cdot 3}.$$

n ავიღოთ ისე, რომ საბოლოო შედეგში მე-10 ხარისხში ახარისხების შემდეგ, 10 ათწილადი ნიშანი მაინც იყოს სანდო. ამისათვის (16) მწკრივიდან თითოეული წევრი 11 ათწილადი ნიშნით ავიღოთ. უტოლობიდან

$$\frac{1}{n!} 10^{-n \cdot 3} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-11}$$

განვსაზღვროთ n .

ავიღოთ $n=8$ და გამოვიანგარიშოთ

$$\frac{3}{8!} 10^{-8} = \frac{1}{13440} 10^{-8} < 10^{-4} \cdot 10^{-8} = 10^{-12}.$$

ამგვარად, შედეგში რომ 11 ათწილადი ნიშნით მივიღოთ სიზუსტე, საჭიროა (16) მწკრივში ავიღოთ $n=8$. თითოეული წევრი გამოვიანგარიშოთ ისე, რომ 8 წევრის ცდომილება

$$8 \cdot \frac{10^{-k}}{2} \leq \frac{1}{4} \frac{10^{-12}}{2}.$$

საიდანაც $k \geq 14$.

ე. ი. (16) მწკრივის თითოეული წევრი 14 ათწილადი ნიშნით მაინც უნდა ავიღოთ, რომ ჯამის ცდომილება არ აღემატებოდეს $\frac{1}{8} 10^{-12}$ -ს.

გამოვიანგარიშოთ საერთო ცდომილება:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-11}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{10^{-12}}{2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-13}.$$

საიდანაც

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{252}{400} \cdot 10^{-11}$$

$(e^{0.1})^{10}$ -ის გამოსახულებაში ცდომილება იქნება

$$\varepsilon = 10 \varepsilon_4 = \frac{252}{400} \cdot 10 \cdot 10^{-11},$$

საიდანაც

$$\varepsilon < \frac{3}{40} 10^{-10}.$$

ამგვარად, თუ (16) მწკრივში 9 წევრს (პირველი წევრის ჩათვლით) ავიღებთ, თითოეულ წევრს 14 ათწილადი ნიშნით გამოვთვლით, შევკრებთ ამ რიცხვებს და ჯამს მეათე ხარისხში ავახარისხებთ, მივიღებთ e -ს მნიშვნელობას, სადაც ცდომილება არ აღემატება მეათე ათწილადი ნიშნის

$$\frac{3}{40}-ს.$$

გამოთვლები მოგვცემს

$$1 = 1,00\ 000\ 000\ 000\ 000$$

$$\frac{1}{1!} 10^{-1} = 0,10\ 000\ 000\ 000\ 000$$

$$\frac{1}{2!} 10^{-2} = 0,00\ 500\ 000\ 000\ 000$$

$$\frac{1}{3!} 10^{-3} = 0,00\ 016\ 666\ 666\ 667$$

$$\frac{1}{4!} 10^{-4} = 0,00\ 000\ 416\ 666\ 667$$

$$\frac{1}{5!} 10^{-5} = 0,00\ 000\ 008\ 333\ 333$$

$$\frac{1}{6!} 10^{-6} = 0,00\ 000\ 000\ 138\ 889$$

$$\frac{1}{7!} 10^{-7} = 0,00\ 000\ 000\ 001\ 984$$

$$\frac{1}{8!} 10^{-8} = 0,00\ 000\ 000\ 000\ 024$$

$$e^{0.1} \approx 1,10\ 517\ 091\ 807564$$

მიღებული ჯამის მე-10 ხარისხში ახარისხება მოგვცემს

$$(e^{0.1})^{10} \approx 2,7182818285$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევადარებთ ცხრილებში მიღებულ e -ს მნიშვნელობას,

$$e = 2,718281828459045...,$$

შევამჩნევთ, რომ ზემოთ მიღებული მნიშვნელობა ცხრილში მიღებულ მნიშვნელობას ემთხვევა ათი ათწილადი ნიშნით.

e^x -ის ნაშთის მნიშვნელობა ასეც შეგვიძლია განვსაზღვროთ,

$$|x| < 1,$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left[1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right],$$

საიდანაც

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left[1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+2)} + \frac{|x|^3}{(n+2)(n+2)(n+2)} + \dots \right]$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიაა, $q = \frac{|x|}{n+2} < 1$, ამიტომ.

$$|R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n+2}} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+2 - |x|}.$$

მაგრამ, $|x| < 1$, ამიტომ

$$\frac{n+2}{n+2-x} < \frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}.$$

გვექნება

$$R_n < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n},$$

ანუ

$$|R_n| < \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{|x|}{n} = |u_n| \cdot \frac{|x|}{n},$$

სადაც u_n მწკრივში შენარჩუნებული ბოლო წევრია.

თუ ε ცდომილება მოცემულია, მაშინ წევრთა რიცხვი n უნდა განვსაზღვროთ უტოლობიდან

$$\frac{|x|^{n+1}}{n!n} < \varepsilon,$$

ხოლო თითოეული წევრის გამოთვლის სიზუსტე განვსაზღვროთ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის საფუძველზე.

მაგალითად, გამოვთვალოთ $\sqrt[3]{e}$ სიზუსტით 10^{-4} .

გვექნება

$$u_n = \frac{x^n}{n!} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!}$$

$$R_n < \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n!n} < \frac{1}{4} \cdot \frac{10^{-4}}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{4}.$$

ავიღოთ $n=6$, გვექნება

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^6}{5!5} = \frac{1}{4320} \cdot \frac{1}{2187} < \frac{1}{4000} \cdot \frac{1}{2000} = \frac{1}{8} 10^{-6}.$$

ასე რომ, $n=6$ აღებულ პირობას აკმაყოფილებს.

მწკრივის თითოეული წევრი 6 ათწილადი ნიშნით გამოვთვალოთ, მაშინ

$$S_6 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \frac{1}{2!} + \frac{1}{3^3} \frac{1}{3!} + \frac{1}{3^4} \frac{1}{4!} + \frac{1}{3^5} \frac{1}{5!} + \frac{1}{3^6} \frac{1}{6!} \quad (18)$$

ჯამში ცდომილება იქნება $6 \cdot \frac{10^{-6}}{2}$. მიღებული ჯამის 5 ათწილად ნიშნამ-

დე დამრგვალებით გამოწვეული ცდომილებაა $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, ასე რომ, გვექნება

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{8} 10^{-6} + \frac{5 \cdot 10^{-6}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} = \\ &= 10^{-5} \left(\frac{1}{80} + \frac{5}{20} + \frac{1}{2} \right) = \frac{61}{80} 10^{-5} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

ამგვარად მიღებულ შედეგში 4-ათწილადი ნიშანი მაინც იქნება სანდო. გამოთვლები მოგვცემს

$$1 = 1,000\ 000$$

$$\frac{1}{3} = 0,333\ 333$$

$$\frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{2!} = 0,055\ 556$$

$$\frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{3!} = 0,006\ 173$$

$$\frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{4!} = 0,000\ 514$$

$$\frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{5!} = 0,000\ 034$$

$$\frac{1}{3^6} \cdot \frac{1}{6!} = 0,000\ 002$$

$$1,395\ 612 \approx 1,3956$$

ცხრილით $\sqrt[3]{e} = 1,395614\dots$, რასაც (18) ჯამით მიღებული მნიშვნელობა ემთხვევა ხუთი ნიშნადი ციფრით.

§. ლოგარითმული ფუნქცია. $\ln(1+x)$ -თვის, $|x| < 1$, ტეილორის გამწკრივება მოგვცემს:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (19)$$

ჩავსვათ ამ გამწკრივებაში x -ის მაგივრად $-x$, მივიღებთ

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \quad (20)$$

(19) მწკრივიდან (20) მწკრივის გამოკლებით მივიღებთ

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right). \quad (21)$$

დავუშვათ

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{p}{q},$$

სადაც p და q ნატურალური რიცხვებია. აქედან

$$x = \frac{p-q}{p+q}.$$

ამის შედეგად (21) მწკრივი მოგვცემს:

$$\ln \frac{p}{q} = 2 \left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^5 + \dots \right].$$

ამ ფორმულით გამოვიყენოთ ნებისმიერი p რიცხვის ლოგარითმს, თუ ვიცით q რიცხვის ლოგარითმი,

$$\ln p = \ln q + 2 \left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^5 + \dots \right]. \quad (22)$$

მაგალითად, გამოვთვალოთ $\ln 2$.

(22) ფორმულაში $p=2$, $q=1$ -ის ჩასმით მივიღებთ

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^{2n-1}} + \dots \right). \quad (23)$$

შევჩერდეთ (23) გამოსახულებაში $2n-1$ წევრზე:

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^{2n-1}} \right). \quad (24)$$

გამოვთვალოთ (24) მწკრივში ნაშთის სიდიდე

$$R_n = 2 \left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{3^{2n+3}} + \dots \right). \quad (25)$$

ცხადია,

$$\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2n+k}, \quad k=1, 2, \dots$$

ამიტომ, თუ შევცვლით (25) გამოსახულებაში $\frac{1}{2n+k}$ -ს $\frac{1}{2n+1}$ -ით, გვექნება

$$R_n < 2 \left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+3}} + \dots \right),$$

ანუ

$$R_n < \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots \right),$$

საიდანაც

$$R_n < \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}}.$$

ეს კი მოგვცემს

$$R_n < \frac{1}{4(2n+1)} \cdot \frac{1}{3^{2n-1}}. \quad (26)$$

თუ (24) გამოსახულებაში ავიღებთ $2n-1=9$, $n=5$, მაშინ ცდომილება იქნება

$$R_5 < \frac{1}{4 \cdot 11} \cdot \frac{1}{3^9},$$

ანუ

$$R_5 < 0,0000115.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ, თუ (24)-ის თითოეულ შესაყრებს სათანადოდ მაღალი სიზუსტით გამოვთვალოთ, მაშინ $\ln 2$ -ის მნიშვნელობა ხუთი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით მაინც მიიღება.

განვსაზღვროთ თითოეული შესაყრების გამოთვლის სიზუსტე 10^{-k} ისე, რომ

$$5 \cdot 10^{-k} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} 10^{-5},$$

საიდანაც გვექნება

$$k \geq 7.$$

ამგვარად, (24) გამოსახულების თითოეული შესაყრები 7 ათწილადი ნიშნით მაინც უნდა ავიღოთ, რომ 5 წევრის ჯამის ცდომილება $\frac{1}{8} \cdot 10^{-5}$ -ს არ აღემატებოდეს.

გამოთვლები მოგვცემს

$$\frac{1}{3} = 0,333333$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} = 0,0123457$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} = 0,0008230$$

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} = 0,0000653$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} = 0,0000056$$

$$\begin{array}{r} 0,333333 \\ \times 0,0123457 \\ \hline 0,6931458 \end{array}$$

საიდანაც

$$\ln 2 \approx 0,693\ 146.$$

მიღებული მნიშვნელობისათვის ცდომილება არ აღემატება (უხეში შეფასება)

$$\frac{1}{4 \cdot 11} \cdot \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} < 0,3 \cdot 10^{-5}.$$

ამის გამო შემდეგში უნდა შევინარჩუნოთ ხუთი ათწილადი ნიშანი, გვექნება

$$\ln 2 = 0,69315.$$

თუ გვინდა გამოვიანგარიშოთ $\lg_{10}^2$, მაშინ $\ln 2$ უნდა გავამრავლოთ

$$\frac{1}{\ln 10} = 0,4242945 \dots$$

მივიღებთ $0,6931458 \cdot 0,4242945 = 0,3010297 \dots$

საიდანაც

$$\lg_{10}^2 = 0,30103, \text{ (ყველა ციფრი სანდოა).}$$

დავუბრუნდეთ (22) ფორმულას.

აღვილი შესამჩნევია, რომ თუ p და q ნატურალური რიცხვებია, $p > q \geq 1$, მაშინ

$$\frac{p-q}{q+q} \leq \frac{1}{3}.$$

ამიტომ (26) შეფასება გამოდგება ნებისმიერი $p > q \geq 1$ ნატურალური რიცხვებისათვის.

ამგვარად, თუ (22) მწკრივში $2n-1$ წევრზე შევჩერდებით

$$\ln p = \ln q + 2 \left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^5 + \dots + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{2n-1} \right] \quad (27)$$

მაშინ ცდომილება იქნება

$$R_n \leq \frac{1}{4(2n+1)} \frac{1}{3^{2n-1}}.$$

მაგრამ ცდომილების ეს შეფასება უხეშია. ცდომილება გაცილებით მცირეა, თუ $n \geq 3$, $p > q \geq 2$. ამიტომ ცდომილების შეფასება უნდა ავიღოთ დამოკიდებულებით

$$R_n < \frac{2 \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2}. \quad (28)$$

მართლაც, ნაცვლად (25) გამოსახულებისა, გვექნება

$$R_n = \frac{2}{2n+1} \left[\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{2n+3} + \dots \right] < \\ < \frac{2}{2n+1} \left[1 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^4 + \dots \right] \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{2n+1}.$$

ეს უკანასკნელი კი გვაძლევს უსასრულოდ კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას, რადგანაც $p > q \geq 1$ -თვის

$$\frac{p-q}{p+q} < 1.$$

რიცხვთა ათობითი ლოგარითმებისთვის გვექნება ფორმულა

$$\lg_{10} p = \lg_{10} q + M \left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{2n-1} \right], \quad (29)$$

სადაც $M = 0,434294481903252 \dots$

4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვლა.
 $\sin x$ -ის გამწკრივებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (30)$$

ამ მწკრივის ნაშთია

$$R_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin \left(\theta x + (2n+1) \frac{\pi}{2} \right), \quad 0 < \theta < 1,$$

საიდანაც

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (31)$$

ამრიგად, თუ (30) გამოსახულებაში n შესაყრებს ავიღებთ, აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაშთი არ აღემატება პირველი უკუგდებული წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობას.

$\cos x$ -ის გამწკრივებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad (32)$$

ნაშთითი წევრია

$$R_n = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \left(\theta x + (2n+2) \frac{\pi}{2} \right), \quad 0 < \theta < 1,$$

საიდანაც

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

ამრიგად, თუ (32) გამოსახულებაში n შესაყრებს ავიღებთ, აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაშთი არ აღემატება პირველი უაღმდეგესი წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობას.

(30) და (32) ფორმულები ხელსაყრელია გამოვიყენოთ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ -თვის, თუ $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. მაშინ ვისარგებლოთ დამოკიდებულებით

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos z, \\ \cos x &= \sin z,\end{aligned}$$

სადაც

$$z = \frac{\pi}{2} - x.$$

$\operatorname{tg} x$ -თვის, $|x| < \frac{\pi}{2}$ ადგილი აქვს მწკრივად გაშლას¹

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots \quad (33)$$

$\operatorname{tg} x$ -ის გაშლის კოეფიციენტები ე. წ. ბერნულის რიცხვებს წარმოადგენენ.

ცხადია, $\operatorname{tg} x$ -ის გამოთვლისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ $\sin x$ -ის და $\cos x$ -ის მნიშვნელობანი,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

მაგალითად, ვიპოვოთ $\operatorname{tg} 20^\circ$ ათი ათწილადი ნიშნით.

წინასწარ გამოვიანგარიშოთ $\sin 20^\circ$ და $\cos 20^\circ$ ათ-ათი ათწილადი ნიშნით.

$$\begin{aligned}x = \operatorname{arc} 20^\circ &= \frac{20}{180} \cdot 3,14159253589793\dots = \\ &= 0,3490658373219922\dots\end{aligned}$$

$\sin x$ -ის გამწკრივებაში წევრთა რიცხვი n განვსაზღვროთ (31) ფორმულით

$$|R_n| \leq \frac{(0,34\dots)^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-10}. \quad (34)$$

უხეში შეფასებით მივიღებთ

$$\frac{0,4^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-8}.$$

¹ იხ. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления т. II, М., Л. 1948, გვ. 517—520.

ავიღოთ $2n+1=11$. გვექნება

$$\frac{4^{11}}{10^{11} \cdot 11!} = \frac{32768}{255150 \cdot 10^{11}} < 0,13 \cdot 10^{-12}.$$

ეს კი აკმაყოფილებს (34) უტოლობას

$$1,3 \cdot 10^{-11} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-10}.$$

ამგვარად, თუ (30) ფორმულაში შევინარჩუნებთ $2n-1=9$ ხარისხიან წევრს, $n=5$, შეგვიძლია მივადწიოთ $\frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$ სიზუსტეს.

ახლა გამოვიანგარიშოთ, თუ როგორი სიზუსტით, 10^{-k} -ით, უნდა ავიღოთ თითოეული შესაყრები, რომ ხუთი შესაყრების ჯამის ცდომილება ნაკლები იყოს $\frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$ -ზე,

$$5 \cdot 10^{-k} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-10},$$

საიდანაც

$$k > 10.$$

ასე რომ, (30) გამოსახულებაში თითოეული წევრი ($n=5$) თერთმეტი ათწილადი ნიშნით მაინც უნდა ავიღოთ, რომ ხუთი წევრის ჯამის ცდომილება ნაკლები იყოს $\frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$ -ზე. მხედველობაში მივიღოთ ის, რომ საქმე ახარისხებასთან გვაქვს, ამიტომ ერთი ათწილადი კიდევ დავამატოთ (5 8; 2). ასე რომ, ყველა შესაყრები 12 ათწილადი ნიშნით უნდა გამოვსვალოთ.

$\cos x$ -ის გამწკრივებაშიაც 5 წევრის ჯამის აღება დაგვჭირდება პირველი წევრის გარდა. გვექნება

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}, \quad (35)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}. \quad (36)$$

წინასწარ გამოვიანგარიშოთ

$$\frac{x^i}{i!}, \quad i=1, 2, \dots, 11.$$

დამატებითი წევრი გამოთვლების სიზუსტისთვის ავიღეთ.

$$|R_5| \leq \frac{x^{11}}{11!}.$$

$$x=0,349065837322$$

$$\frac{x^2}{2!}=0,060923793927$$

$$\frac{x^3}{3!} = 0,007\ 088\ 768\ 449$$

$$\frac{x^4}{4!} = 0,000\ 618\ 595\ 719$$

$$\frac{x^5}{5!} = 0,000\ 043\ 186\ 127$$

$$\frac{x^6}{6!} = 0,000\ 002\ 124\ 569$$

$$\frac{x^7}{7!} = 0,000\ 000\ 125\ 805$$

$$\frac{x^8}{8!} = 0,000\ 000\ 005\ 467$$

$$\frac{x^9}{9!} = 0,000\ 000\ 000\ 212$$

$$\frac{x^{10}}{10!} = 0,000\ 000\ 000\ 074$$

$$\frac{x^{11}}{11!} = 0,000\ 000\ 000\ 002$$

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ &= 0,349\ 065\ 837\ 322 - 0,007\ 088\ 768\ 449 + \\ &+ 0,000\ 043\ 186\ 127 - 0,000\ 000\ 125\ 805 + \\ &+ 0,000\ 000\ 000\ 212 = \\ &= 0,349\ 109\ 023\ 449 - 0,007\ 088\ 894\ 254 = \\ &= 0,342\ 020\ 129\ 195. \end{aligned}$$

$\sin 20^\circ$ -ის მნიშვნელობაში ცდომილება (31)-ის მიხედვით არ აღემატება

$$\frac{x^{11}}{11!} = 0,2 \cdot 10^{-12},$$

თუ ყველა შესაყრები ზუსტადაა გამოთვლილი.

$$\begin{aligned} \cos 20^\circ &= 1 - 0,060\ 923\ 793\ 927 + 0,000\ 618\ 595\ 719 - \\ &- 0,000\ 002\ 124\ 569 + 0,000\ 000\ 005\ 467 - \\ &- 0,000\ 000\ 000\ 074 = \\ &= 1 - 0,060\ 925\ 918\ 670 + 0,000\ 618\ 601\ 186 = \\ &= 0,939\ 692\ 682\ 516. \end{aligned}$$

გამოთვალთ $\cos 20^\circ$ -ის ცდომილება:

$$5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-12} + 0,2 \cdot 10^{-12} = 2,7 \cdot 10^{-12}.$$

აბე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sin 20^\circ = 0,342\ 020\ 129\ 20 \left(\pm \frac{1}{2} \cdot 10^{-11} \right),$$

$$\cos 20^\circ = 0,939\ 692\ 682\ 52 \left(\pm \frac{1}{2} \cdot 10^{-11} \right).$$

გამოვიანგარიშოთ $\operatorname{tg} 20^\circ$. მივიღებთ

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{0,342\ 020\ 129\ 195}{0,939\ 692\ 682\ 516} = 0,363\ 970\ 195\ 805.$$

ამ შედეგში ათი ათწილადი ნიშნით მაინცაა სიზუსტე. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\operatorname{tg} 20^\circ = 0,363\ 970\ 195\ 8 \left(\pm \frac{1}{2} \cdot 10^{-10} \right).$$

5. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. $f(x) = \arcsin x$. ფუნქცია $\arcsin x$ ტეილორის მწკრივად გაშალოთ ხარისხიანი მწკრივის ინტეგრების საფუძველზე (იხ. თავი VI, § 3):

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ წარმოვადგინოთ ტეილორის მწკრივად,

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}x^{2n} + \dots \quad (37)$$

ეს ტოლობა სამართლიანია $x \in]-1, 1[$ -თვის.

ხარისხიანი მწკრივის (37) წევრობრივი ინტეგრებით 0-დან x -მდე, $-1 < x < 1$, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

ამ ფორმულით შეგვიძლია ვისარგებლოთ π რიცხვის ნებისმიერი სიზუსტით გამოთვლისათვის.

მართლაც, $x = \frac{1}{2}$ -თვის (38) ფორმულა მოგვცემს

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} + \dots$$

საიდანაც

$$\pi \approx 6 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \right]. \quad (39)$$

ამ შემთხვევაში ცდომილება იქნება

$$R_n = 6 \left[\frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \cdot \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{2^{2n+3}} + \dots \right] = 6 \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \cdot \frac{1}{2^{2n+3}} \left[\frac{1}{2n+3} + \frac{2n+3}{2n+4} \cdot \frac{1}{2n+5} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots \right] < 6 \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \cdot \frac{1}{2^{2n+3}} \cdot \frac{1}{2n+3} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots \right).$$

ამ უტოლობიდან მივიღებთ

$$R_n < 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \cdot \frac{1}{2^{2n+3}} \cdot \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{2n+3}.$$

თუ $2 \cdot 4 \dots (2n+2)$ -ს შევცვლით $2^{n+1} \cdot (n+1)!$ -ით, $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) = (2n+1)!!$

გვექნება

$$R_n < \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!(2n+3)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}. \quad (40)$$

ამ ფორმულიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ (39) მწკრივის წევრთა რიცხვი n , რომ π -ს მნიშვნელობა სათანადო სიზუსტით მივიღოთ.

მაგალითად, ვიპოვოთ π -ს მნიშვნელობა ოთხი ათწილადი ნიშნით.

$n=5$ -თვის (40)-დან გვექნება:

$$R_5 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 2^{16}} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{13 \cdot 2^{20}} = \frac{231}{13 \cdot 1048576},$$

საიდანაც უხეში შეფასებით მივიღებთ

$$R_5 < 1,8 \cdot 10^{-5},$$

$n=5$ -თვის (39)-დან მივიღებთ:

$$\pi \approx 6 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{11}} \right].$$

თითოეული შესაკრები გამოვთვალოთ ექვსი ათწილადი ნიშნით. გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0,500 \ 000 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} &= 0,020 \ 833 \\ \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} &= 0,002 \ 344 \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} &= 0,000 \ 349 \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} &= 0,000 \ 059 \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{11}} &= 0,000 \ 010 \\ \hline &0,523 \ 596 \\ \times &6 \\ \hline &3,141 \ 576 \end{aligned}$$

ცდომილება არ აღემატება სიდიდეს

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-6} + 1,8 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} = 2,1 \cdot 10^{-5}.$$

ამის გამო π -ის მნიშვნელობა ოთხი ათწილადი ნიშნით იქნება

$$\pi \approx 3,1416.$$

π -ს ოთხ ათწილად ნიშნამდე დამრგვალების შემდეგ ცდომილება იქნება

$$3,1416 - 3,141592... = 0,000\ 007...$$

თუ (38) მწკრივში n -ურ წევრზე შევჩერდებით, მივიღებთ

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \\ + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

სადაც

$$|R_n| \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots 2^n} \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 4 \dots 2n(2n+2)} \frac{|x|^{2n+5}}{2n+5} + \dots = \\ = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} |x|^{2n+3} \left(\frac{1}{2n+3} + \frac{2n+3}{2n+2} \frac{|x|^2}{2n+5} + \dots \right).$$

ამ უტოლობიდან, ცხადია,

$$|R_n| < \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} (1 + |x|^2 + |x|^4 + \dots),$$

ანუ

$$|R_n| < \frac{(2n+1)!!}{(n+1)! 2^{n+1}} \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \frac{1}{1-x^2}. \quad (41)$$

$f(x) = \arctg x$. გავშალოთ ფუნქცია $\arctg x$ ტეილორის მწკრივად. ავიღოთ დამოკიდებულება

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

რადგანაც $|x| < 1$ -თვის გვაქვს

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

ამიტომ წევრობრივი ინტეგრებით 0-დან x -მდე, $|x| < 1$ -თვის, მივიღებთ

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (42)$$

ეს ფორმულა სამართლიანია $x = \pm 1$ -თვისაც, რადგან ჩასმით $x = \pm 1$ ვღებულობთ ნიშანცვლად მწკრივებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ლაიბნიცის თეორემის პირობებს.

¹ იხ. თავი V, § 3.

(42) გამწკრივებისათვის ნაშთი იძლევა

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} + \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} + \dots,$$

საიდანაც

$$|R_n| < \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{1-x^2}. \quad (43)$$

§ 5. მიახლოებითი მიახლოების მეთოდით ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა

ვთქვათ, მოცემული x -სათვის საძიებელია y -ის მნიშვნელობა, რომელიც არაცხადად განისაზღვრება

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

ტოლობიდან. ამ შემთხვევაში (1) დამოკიდებულება განტოლებაა y -ის მიმართ. საჭიროა ეს განტოლება ამოიხსნას. (1) განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$y = \varphi(x, y).$$

განვიხილოთ ერთი ხერხი, რომლის საშუალებითაც (1) განტოლება $y = f(x, y)$ ფორმით წარმოიდგინება¹.

ვთქვათ, $F(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე g არეში. ამ არეში იგი უწყვეტია და აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებული $F'_y(x, y) \neq 0$. ავიღოთ y -ის რაიმე მიახლოებითი მნიშვნელობა y_0 , მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$F(x, y_0) = F(x, y_0) - F(x, y).$$

გამოვიყენოთ ლავრანეს თეორემა y -ის მიმართ, გვექნება

$$F(x, y_0) = (y_0 - y) F'_y(x, y), \quad y \in [y_0, y],$$

საიდანაც

$$y = y_0 - \frac{F(x, y_0)}{F'_y(x, y)}.$$

შეგვიძლია მივიღოთ

$$\varphi(x, y) = y - \frac{F(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (2)$$

ვთქვათ, რაიმე საშუალებით ვიპოვოთ y -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა y_0 (1) ტოლობიდან. შემდეგი მიახლოებითი მნიშვნელობა განვსაზღვროთ y_0 -ით,

$$y_1 = \varphi(x, y_0).$$

¹ უფრო დამწკრივებით იხილეთ თავი XIII, § 8.

შემდეგი მნიშვნელობა განესაზღვროთ y_1 -ის საშუალებით,

$$y_2 = \varphi(x, y_1)$$

და ა. შ.

$$y_{n+1} = \varphi(x, y_n) \quad (3)$$

თუ (y_n) მიმდევრობა კრებალია, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \xi$. ვიგულისხმობთ $\varphi(x, y)$ უწყვეტი

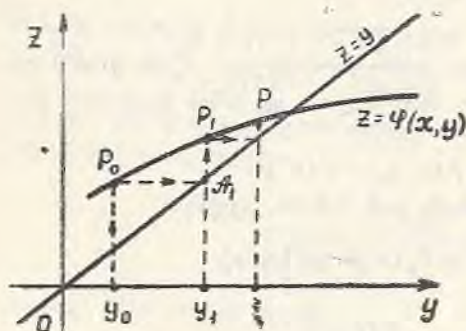
ფუნქციაა x არეში, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \varphi(x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n), \text{ ანუ } \xi = \varphi(x, \xi).$$

ამრიგად, მოცემული x -ის მნიშვნელობისათვის $y = \xi$ მნიშვნელობა აკმაყოფილებს (1) განტოლებას. (3) ფორმულით ξ შეიძლება გამოითვალოს ნებისმიერი სიზუსტით. ამ მეთოდს მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი ან იტერაციის მეთოდი ეწოდება.

გეომეტრიულად იტერაციის მეთოდი შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ.

Oyz სიბრტყეზე მოცემული $\bar{x}$ -ის მნიშვნელობისათვის ავაგოთ $z = \varphi(\bar{x}, y)$ და $z = y$ ფუნქციების გრაფიკები (ნახ. 2).



ნახ. 2

რისია P_0 წერტილიდან გაერთიანებით აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფე $z = y$ წრფის გადაკვეთამდე. გადაკვეთაში მიღებული A_1 წერტილის აბსცისა იქნება y_1 . ამ y_1 -ზე გატარებული აბსცისათა ღერძის პერპენდიკულარი $z = \varphi(\bar{x}, y)$ წირთან მოგვეცემს P_1 წერტილს, რომლის ორდინატა $z_2 = \varphi(\bar{x}, y_1) = y_2$. ასე ავაგებთ (P_n) წერტილთა მიმდევრობას, რომელიც ზღვარში მოგვეცემს P წერტილს, რომლის აბსცისა ξ წარმოადგენს (y_n) მიმდევრობის ზღვარს.

ადვილი მისახვედრია, რომ P წერტილის მისაღებად საკმარისია $P_0 A_1 P_1 \dots$ ტეხილის აგება.

ამგვარად, ნებისმიერი $P_0(y_0, \varphi(\bar{x}, y_0))$ წერტილიდან ავაგებთ საფუძვრებიან ტეხილს $P_0 A_1 P_1 A_2 P_2 \dots$, რომლის წვეროები $P_0, P_1, P_2, \dots$ მდებარეობენ $z = \varphi(\bar{x}, y)$ წირზე, $A_1, A_2, \dots$ წვეროები $z = y$ წრფეზე, ხოლო $P_0 A_1, P_1 A_2, \dots$ რგოლები აბსცისათა ღერძის პარალელურია, $A_1 P_1, A_2 P_2, \dots$ რგოლები კი ორდინატთა ღერძის პარალელურია. როდესაც $|A_n P_n|$ გახდება ნულის ტოლი, მივიღებთ $z = \varphi(\bar{x}, y)$ წირის და $z = y$ წრფის გადაკვეთის P წერტილს. P წერტილის აბსცისაა (y_n) მიმდევრობის ზღვარი.

გამოვარკვეით $\{y_n\}$ მიმდევრობის კრებადობის პირობა.

ვთქვათ, $\varphi(x, y)$ ფუნქცია x -ის მოცემული მნიშვნელობებისათვის განსაზღვრულია $a \leq y \leq b$ სეგმენტზე, უწყვეტია y -ის მიმართ და აქვს წარმოებული $\varphi'_y(x, y)$, $|\varphi'_y(x, y)| \leq M$.

ავიღოთ ორი მიმდევრობითი მიახლოება

$$y_n = \varphi(\bar{x}, y_{n-1}), y_{n+1} = \varphi(\bar{x}, y_n),$$

რომლებსაც აზრი აქვს პირობის თანახმად. შევადგინოთ სხვაობა

$$y_{n+1} - y_n = \varphi(\bar{x}, y_n) - \varphi(\bar{x}, y_{n-1}).$$

გამოვიყენოთ ლაგრანჟის თეორემა, მივიღებთ:

$$y_{n+1} - y_n = (y_n - y_{n-1}) \varphi'_y(\bar{x}, \bar{y}_n).$$

სადაც $\bar{y}_n$ საშუალო მნიშვნელობაა, $\bar{y}_n \in [a, b]$. ამ ტოლობიდან გვექნება

$$|y_{n+1} - y_n| \leq |y_n - y_{n-1}| M, \quad (4)$$

სადაც

$$|\varphi'_y(\bar{x}, y)| \leq M, \quad y \in [a, b].$$

თუ (4) უტოლობაში მივცემთ n -ს მნიშვნელობას 1, 2, ..., მივიღებთ

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &\leq |y_1 - y_0| M, \\ |y_3 - y_2| &\leq |y_2 - y_1| M, \\ &\dots \\ |y_{n+1} - y_n| &\leq |y_n - y_{n-1}| M. \end{aligned}$$

ამ უტოლობათა გადამრავლება მოგვცემს

$$|y_{n+1} - y_n| \leq |y_1 - y_0| M^n. \quad (5)$$

შევადგინოთ მწკრივი

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + (y_{n+1} - y_n) + \dots \quad (6)$$

ამ მწკრივის კერძო ჯამი იძლევა y_n -ს,

$$S_n = y_0 + (y_1 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_n.$$

ასე რომ, (6) მწკრივის ჯამი S .

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

მოგვეძიოთ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ -ს, თუ (6) მწკრივი კრებალია.

(6) მწკრივის წევრები აბსოლუტური მნიშვნელობით დაწყებული მეორე წევროდან (5) პირობით არ აღემატება შემდეგი მწკრივის წევრებს:

$$|y_1 - y_0| + |y_1 - y_0| M + \dots + |y_1 - y_0| M^n + \dots$$

ეს მწკრივი კრებალია, თუ $M < 1$, ამის გამო (6) მწკრივი კრებალია აბსოლუტურად და თანაბრად.

მაშასადამე, არსებობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \xi.$$

ცხადია,

$$\xi \in [a, b].$$

რადგანაც $\varphi(x, y)$ უწყვეტია, ამიტომ

$$y_n = \varphi(\bar{x}, y_{n-1})$$

ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \varphi(\bar{x}, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}),$$

ანუ

$$\xi = \varphi(\bar{x}, \xi).$$

ამგვარად დავამტკიცეთ

თეორემა: თუ $\varphi(x, y)$ ფუნქცია $\bar{x}$ -ის აღებულ მნიშვნელობისათვის განსაზღვრულია და უწყვეტია იმ $a \leq y \leq b$ შუალედში, სადაც მოთავსებულია y -ის მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$y = \varphi(x, y),$$

წარმოებდა y -ით და

$$|\varphi'_y(x, y)| \leq M < 1, \quad y \in [a, b],$$

მაშინ იტერაციის პროცესი

$$y_n = \varphi(x, y_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

კრებალია დამოუკიდებლად y_0 -ისა, $y_0 \in [a, b]$, და ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \xi$$

აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\xi = \varphi(x, \xi).$$

ზოგჯერ $F(x, y) = 0$ განტოლებას შეგვიძლია ისეთი $y = \varphi(x, y)$ სახე მივცეთ, რომ

$$|\varphi'_y(x, y)| \leq M < 1.$$

განვიხილოთ ფუნქციები: 1. შებრუნებული ფუნქცია

$$y = \frac{1}{x}. \quad (7)$$

გარკვეულობისათვის მივიღოთ $x > 0$, მაშინ, ცხადია, $y > 0$. (7) ფორმულა

გადავწეროთ არაცხადი სახით $F(x, y) = x - \frac{1}{y}$, საიდანაც

$$F'_y(x, y) = \frac{1}{y^2}.$$

ვისარგებლოთ (2) ფორმულით, გვექნება

$$\varphi(x, y) = y - \frac{x - \frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}},$$

საიდანაც

$$\varphi(x, y) = y(2 - xy).$$

ამრიგად, ნაცვლად (7) გამოსახულებისა შეგვიძლია, ავიღოთ

$$y = y(2 - xy). \quad (8)$$

უკანასკნელი გამოსახულება ნაკლებად დასაჯერებელია (2) ფორმულა მკაცრად არაა მიღებული). ვაჩვენოთ, რომ (7) და (8) განტოლებანი ეკვივალენტურია. მართლაც, (7) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$1 - xy = 0.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ 1-ს და გავამრავლებთ y -ზე, $y > 0$, მივიღებთ სწორედ (8) ტოლობას.

გამოვარკვეით, სრულდება თუ არა კრებადობის პირობა. გამოვთვალოთ

$$\Phi'_y(x, y) = [y(2 - xy)]'_y = 2(1 - xy).$$

მიმდევრობითი მიახლოების პროცესის

$$y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1}), \quad n=1, 2, \dots \quad (9)$$

კრებადობისათვის საჭიროა

$$2|1 - xy| < 1,$$

ანუ

$$|1 - xy| < \frac{1}{2}.$$

საიდანაც

$$-\frac{1}{2x} < \frac{1}{x} - y < \frac{1}{2x}. \quad (10)$$

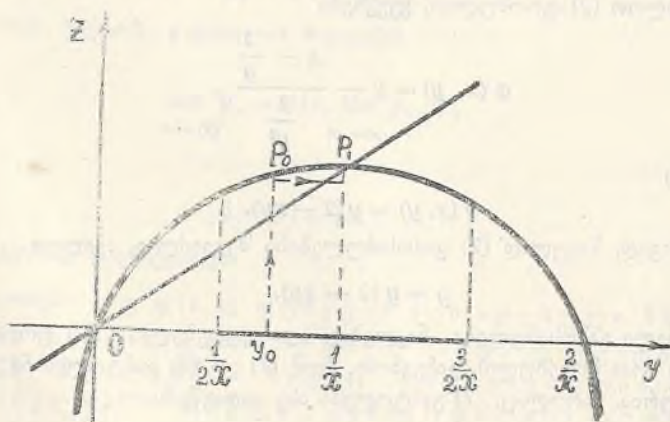
ე. ი. თუ მოცემული x -ის მნიშვნელობისათვის y აკმაყოფილებს (10) უტოლობას, მაშინ (9) პროცესი კრებადია y_0 -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ამ შუალედში.

(9) ფორმულით $\frac{1}{x}$ -ის მნიშვნელობა გამოითვლება გამრავლებით (გაყოფის გარეშე).

თუ ავაგებთ x -ის აღებული მნიშვნელობისათვის

$$z = y, \quad z = y(2 - xy)$$

წირებს მივიღებთ მე-3 ნახაზს. $z = y(2 - xy)$ -ის გრაფიკი წარმოადგენს პა-



ნახ. 3

რაბოლას, რომლის სიმეტრიის ღერძია $y = \frac{1}{x}$. პარაბოლის წვერო მო-

თავსებულია $(\frac{1}{x}, \frac{1}{x})$ წერტილში. პარაბოლა Oy ღერძს გადაკვეთს

$y=0$, $y = \frac{2}{x}$ წერტილებში.

(10)-დან მივიღებთ

$$\frac{1}{2x} < y < \frac{3}{2x},$$

ანუ

$$\frac{1}{2} < xy < \frac{3}{2}.$$

ავიღოთ ამ შუალედის პირველი ნახევარი $\frac{1}{2} < xy < 1$.

თუ მოცემული x -სათვის ისეთ y_0 -ს ავარჩევთ, რომ

$$\frac{1}{2} < xy_0 < 1, \quad (11)$$

მაშინ (y_n) მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული.

მართლაც, შევადგინოთ სხვაობა $\frac{1}{x} - y_n$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - y_n &= \frac{1}{x} - 2y_{n-1} + xy_{n-1}^2 = x \left(\frac{1}{x^3} - 2\frac{1}{x}y_{n-1} + y_{n-1}^2 \right) = \\ &= x \left(\frac{1}{x} - y_{n-1} \right)^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

საიდანაც

$$y_n \leq \frac{1}{x}.$$

ახლა შევადგინოთ სხვაობა $y_{n+1} - y_n$.

$$y_{n+1} - y_n = (y_n - y_{n-1})^2 (1 - xy_n),$$

სადაც y საშუალო მნიშვნელობაა y_n და y_{n-1} -ს შორის. რადგანაც (12)-ის თანახმად $1 - xy_n \geq 0$ ყოველი y_n -თვის, ამიტომ

$$\text{sign}(y_{n+1} - y_n) = \text{sign}(y_n - y_{n-1}).$$

ავიღოთ y_1 .

$$y_1 = y_0(2 - xy_0).$$

(11) პირობიდან გვექნება ($x > 0 \Rightarrow y_0 > 0$):

$$\frac{3}{2} > 2 - xy_0 > \frac{1}{2}.$$

ამის გამო

$$y_1 - y_0 > 0.$$

რადგანაც

$$\text{sign}(y_{n+1} - y_n) = \text{sign}(y_n - y_{n-1}) = \dots = \text{sign}(y_1 - y_0) > 0,$$

გვექნება

$$y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < \dots < \frac{1}{x}.$$

ამგვარად, (y_n) მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული. y_0 -ის განსაზღვრისათვის ასე მოვიქცეთ: x წარმოვადგინოთ 2-ის ხარისხების მიხედვით, $x = 2^m x_1$, სადაც $\frac{1}{2} \leq x_1 < 1$, ხოლო m მთელი რიცხვია, მაშინ y_0 -ად ავიღოთ 2^{-m} . ამ შემთხვევაში (11) პირობა შესრულდება:

$$\frac{1}{2} < 2^m \cdot x_1 \cdot 2^{-m} < 1.$$

ცხადია, y_0 -ის ასე არჩევის შემთხვევაში (y_n) მიმდევრობა სწრაფად შეიკრიბება, y_0 ახლოსაა $\frac{1}{x}$ -თან.

თუ $x = 2^m$, მაშინ მისი შებრუნებული მნიშვნელობა უბრალოდ გამოითვლება

$$\frac{1}{2^m} = \frac{5^m}{2^m \cdot 5^m} = \frac{5^m}{10^m} = 5^m \cdot 10^{-m}.$$

(12) ფორმულაში n -ს მივცეთ მნიშვნელობანი $n = 1, 2, \dots$, მივიღებთ

$$\frac{1}{x} - y_1 = x \left(\frac{1}{x} - y_0 \right)^2,$$

$$\frac{1}{x} - y_2 = x \left(\frac{1}{x} - y_1 \right)^2 = x \left[x \left(\frac{1}{x} - y_0 \right)^2 \right]^2 = x^{2^2-1} \left(\frac{1}{x} - y_0 \right)^{2^2},$$

$$\frac{1}{x} - y_3 = x \left[x^{2^2-1} \left(\frac{1}{x} - y_0 \right)^{2^2} \right]^2 = x^{2^3-1} \left(\frac{1}{x} - y_0 \right)^{2^3}$$

და ა. შ.

$$\frac{1}{x} - y_n = x^{2^n-1} \left(\frac{1}{x} - y_0 \right)^{2^n},$$

ანუ

$$R_n = \frac{1}{x} - y_n = \frac{1}{x} (1 - xy_0)^{2^n}. \quad (13)$$

ამ ფორმულიდან გამოვიყვანოთ ნებისმიერი x -თვის შეფასება. რადგანაც y_0 ისეა შერჩეული, რომ

$$0 < 1 - xy_0 < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{x} < 2y_0,$$

მაშინ (13) ფორმულიდან გვექნება

$$R_n \leq \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \leq 2y_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n}. \quad (14)$$

განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ $\frac{1}{7}$.

შევარჩიოთ y_0 ისე, რომ დაკმაყოფილდეს (11) დამოკიდებულება,

$$\frac{1}{2} < xy_0 < 1.$$

რადგანაც $x = 7 = 2^3 \cdot \frac{7}{8}$, ცხადია, $x_1 = \frac{7}{8}$, $y_0 = 2^{-3} = 0,125$.

ამრიგად, $y_0 = 0,125$. გამოვთვალოთ y_1 .

$$y_1 = y_0 (2 - xy_0),$$

$$y_1 = 0,125 (2 - 7 \cdot 0,125),$$

საიდანაც

$$y_1 = 0,140625.$$

შემდეგი გამოთვლები მოგვცემს

$$y_2 = 0,140625 (2 - 7 \cdot 0,140625);$$

$$y_3 = 0,14282226;$$

$$y_4 = 0,14285713;$$

$$y_5 = 0,14285714.$$

ცდომილება გამოვთვალოთ (13) ფორმულით

$$R_4 = \frac{1}{7} \left(1 - 7 \cdot \frac{1}{8} \right)^{2^4} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8^{16}}.$$

აქედან ადვილად დავასკვნით, რომ y_4 -ში ყველა ციფრი ზუსტია.

$$\frac{1}{7} = 0,14285714.$$

შეცნიშნოთ შემდეგი: გამოთვლების შედეგს ცდომილების — R_n -ის ფორმულით ვაფასებთ. იგულისხმება, ყველა გამოთვლა ზუსტად წარმოებს. თუ გამოთვლებს რომელიმე მანქანით ვაწარმოებთ, მაგალითად, „MK-56“ დახმარებით, მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის ცდომილება, რომელსაც მოქმედების შესრულების დროს მანქანა დაუშვებს. მაგალითად, აღნიშნული მანქანა გაყოფის დროს შეცდომას მარცხნიდან მე-7 თანრიგის ერთეულში დაუშვებს $1 \cdot 10^{-7}$. ამრიგად, R_n -ით შედეგის ის ნიშნადი ციფრები უნდა შევაფასოთ, რომლებიც გამოთვლების შედეგად ნდობას იმსახურებენ.

2. კვადრატული ფესვის გამოთვლა.

ავიღოთ

$$y = \sqrt{x}, \quad x > 0. \quad (15)$$

ამ ტოლობის კვადრატში ახარისხება მოგვცემს $y^2 = x$. ეს დამოკიდებულება ასე გადავწეროთ

$$y = \frac{x}{y}.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ y და შემდეგ ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ 2-ზე, მივიღებთ

$$y = \frac{1}{2} \left(y + \frac{x}{y} \right). \quad (16)$$

ამგვარად, ნაცვლად (15) ფუნქციისა, შეგვიძლია განვიხილოთ (16) ფუნქცია. მიმდევრობითი მიახლოება მოგვცემს (ჰერონის პროცესი):

$$y_n = \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}} \right). \quad (17)$$

შევამოწმოთ (17) პროცესის კრებადობის პირობა.

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \left(y + \frac{x}{y} \right)$$

ფუნქციის y -ით გაწარმოებით მივიღებთ

$$\varphi_y'(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{y^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{y^2 - x}{y^2},$$

საიდანაც (17) პროცესის კრებადობის პირობა იქნება

$$\frac{|y^2 - x|}{y^2} < 1. \quad (18)$$

ამგვარად, ყველა იმ y -თვის, რომელიც (18) უტოლობას აკმაყოფილებს, (17) პროცესი კრებადია. (18) უტოლობა შესრულდება, თუ

$$y^2 - x > 0, \quad x > 0. \quad (19)$$

ვაჩვენოთ, რომ, თუ

$$y_0^2 - x > 0, \quad x > 0, \quad y_0 > 0, \quad (20)$$

მაშინ, (18) უტოლობა შესრულდება და (y_n) მიმდევრობა კლებადი, ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა იქნება.

მართლაც, განვიხილოთ $y_n - \sqrt{x}$ სხვაობა.

$$\begin{aligned} y_n - \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}} \right) - \sqrt{x} = \\ &= \frac{1}{2 y_{n-1}} (y_{n-1}^2 - 2 \sqrt{x} y_{n-1} + x), \end{aligned}$$

ანუ

$$y_n - \sqrt{x} = \frac{1}{2 y_{n-1}} (y_{n-1} - \sqrt{x})^2. \quad (21)$$

აქედან $n=1$ -თვის მივიღებთ

$$y_1 - \sqrt{x} = \frac{1}{2 y_0} (y_0 - \sqrt{x})^2.$$

ეს გვიჩვენებს, თუ $y_0 > 0$, მაშინ

$$y_1 - \sqrt{x} > 0.$$

ამ უტოლობიდან გვექნება: y_1 დადებითია, რადგანაც $x > 0$,

$$y_1 > \sqrt{x}.$$

თუ ავიღებთ $n=2$, (21) დამოკიდებულებიდან მივიღებთ

$$y_2 - \sqrt{x} = \frac{1}{2 y_1} (y_1 - \sqrt{x})^2.$$

საიდანაც y_2 დადებითია,

$$y_2 > \sqrt{x}$$

და ა. შ. გვექნება

$$y_n - \sqrt{x} \geq 0,$$

ანუ

$$y_n^2 - x \geq 0.$$

ტოლობას ექნება ადგილი, თუ $y_0 = \sqrt{x}$.

ახლა შევადგინოთ სხვაობა $y_{n-1} - y_n$.

$$y_{n-1} - y_n = y_{n-1} - \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}} \right) = \frac{y_{n-1}^2 - x}{2 y_{n-1}},$$

საიდანაც $n=2$ -თვის გვექნება

$$y_1 - y_2 = \frac{y_1^2 - x}{2y_0}.$$

ეს კი (20) პირობის თანახმად, $y_0^2 - x > 0$, დადებითია:

$$y_1 - y_2 \geq 0.$$

ასევე $n=3$ -თვის გვექნება $y_2 - y_3 \geq 0$ და ა. შ.

$$y_{n-1} - y_n \geq 0.$$

ამგვარად, მივიღებთ

$$y_0 \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq \dots \geq \sqrt{x}.$$

ახლა შევაფასოთ n მიახლოების

$$y_n = \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}} \right),$$

შედგო.

(21)-ის ანალოგიურად მივიღებთ

$$y_n + \sqrt{x} = \frac{1}{2y_{n-1}} (y_{n-1} + \sqrt{x})^2. \quad (22)$$

(21) და (22) გამოსახულებათა შეფარდება მოგვცემს

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}} \right)^2,$$

საიდანაც მიმდევრობითი ჩასმით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}} \right)^{2^n}.$$

თუ

$$\frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}} = q,$$

მაშინ გვექნება

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = q^{2^n},$$

საიდანაც

$$y_n - \sqrt{x} = 2\sqrt{x} \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^n}}.$$

შესაღებამე,

$$R_n = 2\sqrt{x} \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^n}}, \quad (23)$$

სადაც q ,

$$q = \frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}} = \frac{y_0^2 - x}{(y_0 + \sqrt{x})^2} = \frac{y_0^2 - x}{y_0^2 + 2\sqrt{x}y_0 + x},$$

(20) პირობის თანახმად, $1-q$ ნაკლებია.

თუ x -ს წარმოვადგენთ ნამრავლით $2^m x_1$, სადაც $\frac{1}{2} \leq x_1 < 1$, m მთელი

რიცხვია, მაშინ y_0 -ად შეგვიძლია ავიღოთ $2^{m/2}$. ცხადია, ამ შემთხვევაში $y_0^2 - x > 0$ პირობა შესრულდება,

$$(2^{m/2})^2 - 2^m x_1 > 0,$$

რადგანაც

$$x_1 < 1.$$

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვთვალოთ $y = \sqrt{3}$.

გვექნება

$$x = 3 = 2^2 \cdot \frac{3}{4}; \quad x_1 = \frac{3}{4}.$$

შეგვიძლია ავიღოთ $y_0 = 2^{2/2} = 2$. (17) ფორმულა მოგვცემს

$$y_1 = \frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{x}{y_0} \right), \quad y_1 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right),$$

$$y_1 = 1,75;$$

$$y_2 = 1,73 \ 214 \ 28;$$

$$y_3 = 1,73 \ 205 \ 08;$$

$$y_4 = 1,73 \ 205 \ 08.$$

გამოვთვალოთ ცდომილება:

$$q = \frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}} < \frac{2 - 1,73}{2 + 1,73} = \frac{0,27}{3,73} = 0,072 =$$

$$R_3 = 2(1,73 \dots) \frac{q^8}{1 - q^8} < 2 \cdot 1,74 \cdot 10^{-8}.$$

ამრიგად, y_3 -ში ყველა ციფრი სანდოა,

$$\sqrt{3} = 1,7320508.$$

3. კუბური ფუნქციის გამოთვლა. $\sqrt[3]{x}$ -ის ანალოგიურად გამოვთვლით $y = \sqrt[3]{x}$, $x > 0$. ამ დამოკიდებულებიდან მივიღებთ $F(x, y) = y^3 - x$, საიდანაც $F'_y = 3y^2$. გამოვიყენოთ (12) ფორმულა, მივიღებთ

$$y = \frac{1}{3} \left(2y + \frac{x}{y^2} \right). \quad (24)$$

ეს განტოლება იმპევალენტურია მოცემული $y = \sqrt[3]{x}$ განტოლებისა. მართლაც, $y = \sqrt[3]{x}$ ასე გადაწეროთ: $y = \frac{x}{y^2}$, ამ ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ $2y$ და შემდეგ გავყოთ 3 -ზე. მივიღებთ (24) განტოლებას.

(24) განტოლება ამოვხსნათ მიმდევრობითი მიახლოებით:

$$y_n = \frac{1}{3} \left(2y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}^2} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

გამოვარკვევით, კრებადობის პირობა თუ სრულდება. ამისათვის გამოვთვალოთ

$$\Phi'_y = \frac{1}{3} \left(2y + \frac{x}{y^2} \right)'_y = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{2x}{y^3} \right) = \frac{2}{3} \frac{y^3 - x}{y^3}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\left| \frac{y^3 - x}{y^3} \right| < 1,$$

თუ $x > 0$, $y^3 - x > 0$.

ამრიგად, (24) პროცესი კრებადია, თუ $x > 0$, $y_0^3 > x$.

ვაჩვენოთ, თუ როგორ იკრებება (y_n) მიმდევრობა მოცემული x -სათვის.

y_0 ისე ავიარჩიოთ, რომ $y_0^3 > x$, $x > 0$. გამოვთვალოთ y_1 . გვექნება:

$$y_1 = \frac{1}{3} \left(3y_0 + \frac{x}{y_0^2} \right).$$

ახლა გამოვთვალოთ სხვაობა $y_0 - y_1$,

$$y_0 - y_1 = y_0 - \frac{1}{3} \left(2y_0 + \frac{x}{y_0^2} \right) = \frac{1}{3y_0^3} (3y_0^3 - 2y_0^3 - x) = \frac{y_0^3 - x}{3y_0^3}.$$

ეს სხვაობა დადებითია, რადგანაც, პირობის თანახმად, $y_0^3 - x > 0$.

სრულიად ასევე გამოვთვალოთ სხვაობა $y_1 - \sqrt[3]{x}$.

$$\begin{aligned} y_1 - \sqrt[3]{x} &= y_0 - \sqrt[3]{x} - (y_0 - y_1) = y_0 - \sqrt[3]{x} - \frac{y_0^3 - x}{3y_0^3} = \\ &= (y_0 - \sqrt[3]{x}) \left(1 - \frac{y_0^3 + y_0 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^3}}{3y_0^3} \right) = \\ &= \frac{y_0 - \sqrt[3]{x}}{3y_0^3} (3y_0^3 - y_0^3 - y_0 \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^3}) = \\ &= \frac{y_0 - \sqrt[3]{x}}{3y_0^3} [y_0^3 - (\sqrt[3]{x})^3 + y_0(y_0 - \sqrt[3]{x})]. \end{aligned}$$

ეს სხვაობაც დადებითია, რადგანაც პირობის თანახმად $y_0^3 - x > 0$. ამრიგად, მივიღეთ

$$y_0 - y_1 > 0, \quad y_1 - \sqrt[3]{x} > 0,$$

საიდანაც, ცხადია,

$$y_0 > y_1 > \sqrt[3]{x}.$$

ახლა, თუ გამოსავალ მნიშვნელობად ავიღებთ y_1 -ს, მაშინ გვექნება

$$y_1 > y_2 > \sqrt[3]{x}$$

და ა. შ. მივიღეთ კლებადი ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა.

$$y_0 > y_1 > y_2 > \dots > y_n > \sqrt[3]{x}.$$

ამრიგად, მოცემული x -სათვის და სათანადოდ არჩეული y_0 -სათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(2y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}^2} \right) = \frac{1}{3} \left(2y - \frac{x}{y^2} \right),$$

ანუ

$$y = \frac{1}{3} \left(2y + \frac{x}{y^2} \right).$$

აქედან კი დავასკვნით, $y_3 = x$ და, მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt[3]{x}.$$

4. ნებისმიერი ხარისხის ფუნქციის გამოთვლა. $y = \sqrt[k]{x}$ -სთვის გვექნება (24) ფორმულის ანალოგიური ფორმულა

$$y_k = \frac{1}{k} \left[(k-1)y + \frac{x}{y^{k-1}} \right].$$

აქედან

$$y_n = \frac{1}{k} \left[(k-1) y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}^{k-1}} \right], \quad k=1, 2, \dots \quad (26)$$

ეს პროცესი კრებადი იქნება, თუ

$$\varphi_y = \frac{k-1}{k} \frac{y^k - x}{y^k}, \quad |\varphi_y| < 1.$$

ამრიგად, (26) პროცესი კრებადი იქნება, თუ ისეთ y_0 ავირჩევთ, რომ

$$\left| \frac{y_0^k - x}{y_0^k} \right| < 1.$$

ამისათვის კი საკმარისია

$$y_0^k - x > 0 \quad x > 0.$$

§ 5. ინტერპოლაციის საშუალებით ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა

ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქციისათვის $[a, b]$ შუალედში h ბიჯით შედგენილია m ათწილადი ნიშნით ცხრილი. შევადგინოთ ამ ფუნქციისათვის სასრულო სხვაობათა ცხრილი. როგორც ვიცით¹, თუ ფუნქციას k რიგის წარმოდგენა აქვს, მაშინ

$$|\Delta^k y| \leq M_k h^k,$$

სადაც

$$M_k = |f^{(k)}(x)|_{\max},$$

თუ

$$M_k h^k < 10^{-m},$$

მაშინ

$$|\Delta^k y| < 10^{-m}.$$

ე. ი. $|\Delta^k y|$ ნაკლებია ცხრილის უდაბლესი თანრიგის ერთეულზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყველა სხვაობა $\Delta^k y$ ნულის ტოლი უნდა იყოს. სინამდვილეში კი, როგორც წესი, $\Delta^k y$ ნულისაგან განსხვავდება. ეს იმის გამო, რომ სხვაობათა ცხრილი ცდომილებას შეიცავს (რიცხვთა დამრგვალების გამო).

მაგალითად, ფუნქციის ცდომილება m -ათწილადიან ცხრილში არ აღემატება m -ური ათწილადი ნიშნის ერთეულის ნახევარს (რიცხვთა დამრგვალება დამატებითი წესითაა შესრულებული). ფუნქციის პირველი რიგის სხვაობა $f(x+h)-f(x)$ m ათწილადი ნიშნის ერთეულის ტოლ ცდომილებას შეიცავს, მეორე რიგის სხვაობა კი m ათწილადი ნიშნის 2 კრძალულს² და ა. შ. $\Delta^k y$ -ში ცდომილება იქნება m -ური ათწილადი ნიშნის თანრიგის 2^{k-1} ერთეული;

$$\alpha = 2^{k-1} \cdot 10^{-m}. \quad (1)$$

განვიხილოთ მაგალითი.

შევადგინოთ e^x -ის სხვაობათა ცხრილი (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

x	e^x	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7
0,0	1,0000	1052						
0,1	1,1052	1162	110					
0,2	1,2214	1285	123	13				
0,3	1,3499	1419	134	11	-2			
0,4	1,4918	1569	150	16	5	7		
0,5	1,6487	1734	165	15	-1	4	-13	23
0,6	1,8221	1917	183	18	3	-4	-8	-18
0,7	2,0138	2117	200	17	-1			
0,8	2,2255							

1-ლი ცხრილის პირველ სვეტში ცდომილებაა $\frac{1}{2}10^{-4}$, მეორე სვეტ-

ში, Δe^x -ის სვეტში, ცდომილებაა 10^{-4} , $\Delta^2 e^x$ -ის სვეტში ცდომილებაა $2 \cdot 10^{-4}$, $\Delta^3 e^x$ -ის სვეტში ცდომილებაა $4 \cdot 10^{-4}$. ასე რომ, $\Delta^3 e^x$ -ის სვეტით სარგებლობა არ შეიძლება, რადგანაც ამ სვეტში ცდომილება შესამჩნევია $8 \cdot 10^{-4}$. ამიტომ Δ^3 -ის სვეტის შემდეგ სხვაობანი 1-ლ ცხრილში უკუ-ვაგდოთ.

ყოველი ცხრილი იძლევა ფუნქციის მნიშვნელობას მხოლოდ ცხრილში მოცემული არგუმენტის მნიშვნელობისათვის. არგუმენტის სხვა მნიშვნელობისათვის ფუნქციის მნიშვნელობა, როგორც წესი, განისაზღვრება შიდალოებით ინტერპოლაციის ფორმულებით. ამისათვის უნდა ავიღოთ საინტერპოლაციო მრავალწევრი იმ ხარისხის, რომლის ცდომილება არ აღემატება ცხრილის უმცროსი თანრიგის ერთეულს,

$$\frac{1}{(n+1)!} M_{n+1} |t(t-1)(t-2)\dots(t-n)| < 10^{-m}. \quad (2)$$

ამ უტოლობიდან უნდა განესაზღვროთ n .

ამისათვის შევნიშნოთ, რომ გამოსახულება

$$g_n(t) = |t(t-1)\dots(t-n)|$$

სიმეტრიულია $t = \frac{n}{2}$ -ის მიმართ, მართლაც

$$g_n(t) = g_n(n-t).$$

მაშასადამე,

$$\max_{0 \leq t \leq n} g_n(t) = \max_{0 \leq t \leq \frac{n}{2}} g_n(t).$$

¹ იხ. გვ. 632, 633.

(1) და (2)-სთან ამ ტოლობების შედარება მოგვცემს (ნიშნამდე სიზუსტით)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^m} \cdot a_n^{(m)}, \\ b_n &= \frac{1}{n^m} \cdot b_n^{(m)}, \end{aligned} \quad (4)$$

რაც გვიჩვენებს, რომ a_n და b_n უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე $\frac{1}{n^m}$ უსასრულოდ მცირე.

უბნობრივ უწყვეტი $f^m(x)$ ფუნქციისათვის (3) ტოლობის საფუძველზე გვაქვს

$$|a_n^{(m)}| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right| \leq \frac{1}{\pi} M \frac{2\pi}{n}.$$

ე. ი. $a_n^{(m)}$ კოეფიციენტი $\frac{1}{n}$ -ის რიგის უსასრულოდ მცირეა. ასევე გვაქვს $b_n^{(m)}$ -თვისაც.

ამის გამო (4)-დან მივიღებთ

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

ანუ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები m -ზე მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეებია $\frac{1}{n}$ -ის მიმართ, თუ $f(x) \in C^{(m)}[-\pi, \pi]$.

ეს აზრი წარმოადგენს ფურიეს მწკრივების კრებადობის გაუმჯობესების საფუძველს, რომელიც აკად. ა. ნ. კრილოვისა და ნ. ნ. კრილოვის მიერა.

2. ფურიეს მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება კრილოვის მეთოდით. გავცნოთ ფურიეს მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესების კრილოვის მეთოდს ზოგადად.

ვთქვათ, $[-\pi, \pi]$ შუალედში $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და აქვს უბნობრივ უწყვეტი წარმოებულები $f^{(i)}(x)$, $i=1, 2, \dots, m$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია თავის უწყვეტობის წერტილებში გაიშლება ფურიეს მწკრივად

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5)$$

სადაც კოეფიციენტები განისაზღვრება დამოკიდებულებით

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ზოგად შემთხვევაში a_n და b_n -ის ნულისაქენ მისწრაფება ნელია,

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ამის გამო გამოთვლებისათვის (5) მწკრივის გამოყენება გაძნელებულია და მისი წევრობრივი გაწარმოებაც არ შეიძლება.

ა. ნ. კრილოვის მეთოდის აზრი (5) მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესებაში იმაში მდგომარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციიდან გამოვყოთ ისეთი $g(x)$ ელემენტალური ფუნქცია, რომლის წარმოებულებსაც $g^{(i)}(x)$, $i=0, 1, 2, \dots, m$, ისეთივე წყვეტა აქვს, რაც $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულებს $f^{(i)}(x)$, $i=0, 1, 2, \dots, m$. ამასთან $f^{(i)}(-\pi+0) - g^{(i)}(-\pi+0) = f^{(i)}(\pi-0) - g^{(i)}(\pi-0)$, $i=0, 1, \dots, m$. ამ შემთხვევაში სხვაობა

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$

მიეკუთვნება პერიოდულობის $C^{(m)}$ კლასს.

გავშალოთ $\varphi(x)$ ფურიეს მწკრივად, მაშინ გვაქვს

$$f(x) = g(x) + \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \right], \quad (6)$$

სადაც α_n და β_n ფურიეს კოეფიციენტები m -ზე მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეებია $\frac{1}{n}$ -ის მიმართ,

$$\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right),$$

$$\beta_n = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$\max g_n(t) \leq \frac{n!}{4}. \quad (3)$$

ეს უტოლობა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. $n=1$ -თვის (3) უტოლობა მართებულია. ვთქვათ, (3) უტოლობა მართებულია რომელიმე n -თვის. ვაჩვენოთ მისი მართებულება $(n+1)$ -თვის. მართლაც,

$$\max_{0 \leq t \leq n+1} g_{n+1}(t) = \max [g_n(t)(t-(n+1))] \leq \frac{n!}{4}(n+1) = \frac{(n+1)!}{4}.$$

მაშასადამე, (3) უტოლობა მართებულია.

(3) უტოლობის გამო (2) უტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)} < 10^{-m}. \quad (4)$$

ამ უტოლობიდან განვსაზღვრავთ n -ს.

მაგალითად, რომელი ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრია უნდა ავიღოთ, რომ 1-ლი ცხრილით მივიღოთ e^x -ის მნიშვნელობანი $x=0,01; 0,02; \dots, 0,09$ წერტილებში ცხრილის სიზუსტით?

1-ლ ცხრილში

$$m=4, M_{n+1} = \max_{0 \leq x \leq 0,4} e^x = 2,23.$$

(4) უტოლობა მოგვცემს

$$\frac{2,23 \cdot 0,1^{n+1}}{4(n+1)} < 10^{-4}. \quad (5)$$

ცხადია, $n=3$ -თვის (5) უტოლობა შესრულდება.

ამგვარად, მესამე ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრით შეგვიძლია განვსაზღვროთ e^x -ის მნიშვნელობანი, $x=0,01; 0,02; \dots, 0,09$ -თვის; მესამე ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრად შეგვიძლია ავიღოთ ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრი:

$$f(a+th) = f(a) + t \Delta f(a) + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f(a) + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 f(a).$$

$e^{0,01}$ -თვის 1-ელი ცხრილიდან გვექნება $x = a + th$, $t = 0,1$

$$e^{0,01} = 1,0000 + 0,1 \cdot 0,1052 + \frac{0,1(0,1-1)}{2!} 0,0110 + \frac{0,1(0,1-1)(0,1-2)}{3!} 0,0013.$$

სათანადო გამოთვლები მოგვცემს: $e^{0,01} = 1,0101$, სადაც სანდო ყველა ციფრი, სრულიად ასე გამოვთვლით e^x -ის სხვა მნიშვნელობებს.

¹ შედარეთ მე-3 პარაგრაფში გარჩეულ საკითხს.

საეარჯიშო 24.

1) გამოთვალეთ ჰორნერის სქემით შემდეგი მრავალწევრების მნიშვნელობანი:

$5x^3 - 2x^2 + 6x - 1$, როცა $x=2$; $4x^4 - x^3 + 2x^2 - 2$, როცა $x=-1$;
 $3x^5 - 6x^2 + 7x - 3$, როცა $x=-2$; $x^6 - x^5 + 2x^4 + 1$, როცა $x=3$.

2) გაშალეთ ჰორნერის განზოგადებული სქემით შემდეგი მრავალწევრები:

$4x^5 - 2x + 9$ ($x-1$)-ის ხარისხების ჯამად.

$3x^5 - 2x^4 + x^2 - 5$ ($x-2$)-ის ხარისხების ჯამად.

$5x^6 - 3x^3 + 4x^2 - 6x$ ($x+2$)-ის ხარისხების ჯამად.

3) გამოიანგარიშეთ შემდეგი მწკრივების S_n ჯამების მნიშვნელობები ნათანადო შეფასებით:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots S_{10} \quad 5 \text{ ათწილადი ნიშნით,}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots S_{10} \quad \text{რვა ათწილადი ნიშნით,}$$

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots S_{12} \quad 10 \text{ ათწილადი ნიშნით. (ამ ჯამის გამოთვლა ორნაირად შეიძლება, გამოიყენეთ ეს მდგომარეობა ჯამის სიზუსტის შესამოწმებლად).}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4!}{3^3} + \dots S_{10} \quad \text{თორმეტი ათწილადი ნიშნით.}$$

4) გამოთვალეთ 7 ათწილადი ნიშნით $\sin x$, $x = 5^\circ, 10^\circ, 12^\circ, 17^\circ$;
 $\cos x$, $x = 2^\circ, 4^\circ, 8^\circ, 10^\circ$; $\operatorname{tg} x$, $x = 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ$.
 (ამ უკანასკნელში $\operatorname{tg} 45^\circ$ მნიშვნელობა გამოიყენეთ მიღებული შედეგის სიზუსტის შემოწმებისათვის).

5) გამოთვალეთ ხუთი ათწილადი ნიშნით e^x , $x = 0,314; -0,214; 1,127; -2,145$.

6) შეადგინეთ ნატურალური ლოგარიტმების 7-ნიშნა ცხრილი 1-დან 10-მდე რიცხვებისათვის.

7) გამოთვალეთ ხუთი ათწილადი ნიშნით $\sqrt{11}, \sqrt{17}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[5]{27}, \sqrt[5]{35}, \sqrt[6]{68}, \sqrt[4]{19}, \sqrt[4]{90}, \sqrt[6]{252}, \sqrt[9]{516}, \sqrt[9]{658}$.

8) გამოთვალეთ 6 ათწილადი ნიშნით

$\arcsin x$, $x = 0,05; 0,5; 0,55$.

$\operatorname{arccos} x$, $x = 0,25; 0,3; 0,45$.

$\operatorname{arctg} x$, $x = 0,15; 0,35; 0,4$.

9) გამოთვალეთ π -ს მნიშვნელობა 7 ათწილადი ნიშნით.

10) გამოიანგარიშეთ 6 ათწილადი ნიშნით მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით $\frac{1}{0,425}, \frac{1}{2,9852}, \frac{3}{9,865}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{e}$.

11) გამოიანგარიშეთ ათი ათწილადი ნიშნით $\sqrt[4]{2,6435}, \sqrt[3]{5,247}, \sqrt[4]{6,4217}$.

12) გამოიანგარიშეთ 8 ათწილადი ნიშნით $\sqrt[4]{e}, \sqrt[3]{\pi}$.

13) გამოიანგარიშეთ $\frac{1}{\sqrt{2,4236}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3,142}}, \frac{1}{\sqrt[4]{5,3781}}$, მესამე

ათწილადი ნიშნით.

14) გამოიანგარიშეთ შვიდი ათწილადი ნიშნით $\frac{1}{e}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{e}}$,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

15) გამოიანგარიშეთ ხუთი ათწილადი ნიშნით $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{10}}, \frac{\sqrt[4]{14}}{\sqrt[2]{20}}, \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[3]{e}}$,

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{4}}.$$

16) 1-ლ ცხრილში მოცემულია e^x -ის მნიშვნელობანი. იპოვეთ e^x -ის მნიშვნელობანი $x=0,11; 0,12, \dots, 1,19$ -ისათვის ოთხი ათწილადი ნიშნით (Δ^3 -ის შემდეგ სხვაობანი ცხრილში უკუაგდეთ).

თ ა ვ ი X I I I

ალგებრულ და ტრანსცენდენტულ განტოლებათა მიახლოებით ამოხსნა

§ 1. ამონახსნთა განსაზღვრა

1. ზოგადი შენიშვნები¹. განვიხილოთ განტოლება

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

თუ $f(x)$ არის n ხარისხის მრავალწევრი, $n \geq 1$, $f(x) = P_n(x)$,

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

მაშინ განტოლებას ალგებრული განტოლება ეწოდება. თუ $f(x)$ ფუნქცია შეიცავს x ცვლადზე რაიმე ტრანსცენდენტულ მოქმედებას, მაშინ განტოლებას ეწოდება ტრანსცენდენტული განტოლება.

მოვიგონოთ ალგებრის ძირითადი თეორემის საფუძველზე დამტკიცებული შემდეგი თეორემა²: n ხარისხის ალგებრულ განტოლებას აქვს n ნამდვილი ან კომპლექსური ამონახსნი, იმ პირობით, თუ ამონახსნი ითვლება იმდენ ამონახსნად, რამდენიცაა მისი ჯერადობა. ეს თეორემა ასეც გამოითქმის: n ხარისხის მრავალწევრს აქვს n ნული, ნამდვილი ან კომპლექსური.

თუ ალგებრული განტოლების კოეფიციენტები ნამდვილია, მაშინ განტოლების კომპლექსური ამონახსნი წყვილ-წყვილად შეუღლებულია, ე. ი. თუ განტოლების ამონახსნია $\alpha + i\beta$, მაშინ მისი ამონახსნი იქნება $\alpha - i\beta$. ამ ამონახსნთა მოდულები — აბსოლუტური მნიშვნელობანი ტოლია:

$$|\alpha + i\beta| = |\alpha - i\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

ცხადია, კენტი ხარისხის ალგებრულ განტოლებას ერთი ნამდვილი ამონახსნი მაინც აქვს. ქვემოთ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ალგებრული განტოლების კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია.

¹ Ш. Е. Микеладзе, Решение численных уравнений, Тбилиси, 1965.
² იხ. ნაწ. 1, თავი V, § 3, თეორემა 2.

2. ამონახსნთა საზღვრები. იმ შემთხვევაში, როდესაც განტოლების ამონახსნის ფორმულები არ არსებობს, ანდა თუ არსებობს, მაგრამ გამოთვლებისათვის რთულია, მიმართავენ განტოლებათა ამონახსნის მიახლოებით მეთოდებს.

განტოლების მიახლოებითი ამონახსნისათვის აუცილებელია ამონახსნის პირველი მიახლოების ცოდნა, რომელიც შემდეგ უნდა დაზუსტდეს. ალგებრული განტოლების პირველი ამონახსნის დადგენაში დავვყავართ განტოლების ამონახსნთა ზედა საზღვარი M , $|x| < M$.

$$M = 1 + \frac{A}{|a_0|} \quad (2)$$

სადაც a_0 არის ალგებრული განტოლების პირველი კოეფიციენტი, ხოლო A დანარჩენი კოეფიციენტების მოდულების ზედა საზღვარი.

ვაჩვენოთ, რომ ალგებრული განტოლების ამონახსნების ზედა საზღვარი (2) გამოსახულება.

მართლაც, ვთქვათ $|x| > 1$, მაშინ

$$\begin{aligned} |f(x)| &\geq |a_0 x^n| - (|a_1 x^{n-1}| + |a_2 x^{n-2}| + \dots + |a_n|) \geq \\ &\geq |a_0| |x|^n - A(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + 1) = \\ &= |a_0| |x|^n - A \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}. \end{aligned}$$

ამ უტოლობის მარჯვენა მხარეში ბოლო შეესაყრება თუ უკუვაგდება, უტოლობა გაძლიერდება.

$$|f(x)| > |a_0| |x|^n - \frac{A|x|^n}{|x| - 1} = \left(|a_0| - \frac{A}{|x| - 1} \right) |x|^n.$$

აქედან, თუ

$$|a_0| - \frac{A}{|x| - 1} \geq 0,$$

მაშინ

$$f(x) > 0.$$

ზედა უტოლობიდან მივიღებთ

$$|x| \geq 1 + \frac{A}{|a_0|}.$$

ამგვარად, თუ

$$|x| \geq 1 + \frac{A}{|a_0|},$$

მაშინ $|f(x)|$ არ გახდება ნულის ტოლი, ე. ი. ალგებრული $f(x) = 0$ განტოლების ამონახსნი არ შეიძლება $1 + \frac{A}{|a_0|}$ -ზე მეტი ან ტოლი იყოს. მაშასადამე, ალგებრული განტოლების ამონახსნი აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|x| < 1 + \frac{A}{|a_0|}.$$

ახლა გამოვარკვიოთ ალგებრული განტოლების ამონახსნის ქვედა საზღვრის სიდიდე. ამისათვის ავიღოთ $x = \frac{1}{y}$, მაშინ

$$f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^n} [a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n] = 0.$$

ამ შემთხვევაში y ამონახსნთა ზედა საზღვარი იქნება M_1 , $|y| < M_1$,

$$M_1 = 1 + \frac{A_1}{|a_n|},$$

სადაც A_1 წარმოადგენს $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ კოეფიციენტების მოდულების მაქსიმუმს. თუ დავებრუნდებით x ამონახსნს, მივიღებთ

$$|x| > \frac{1}{M_1}.$$

ამგვარად, ალგებრული განტოლების ამონახსნისათვის გვექნება უტოლობა

$$\frac{1}{1 + \frac{A_1}{|a_n|}} < |x| < 1 + \frac{A}{|a_0|}.$$

თუ ამ ბოლო უტოლობას ნახაზზე წარმოვადგენთ, მივიღებთ, რომ ალგებრული განტოლების ამონახსნები მოთავსებული იქნება წრიულ რგოლში (ნახ. 1).

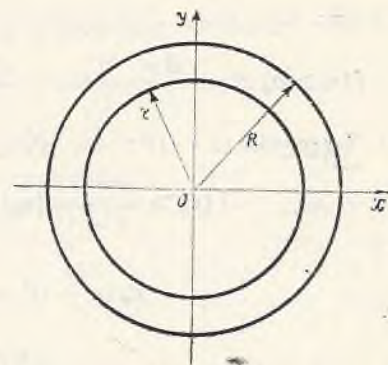
$$r < |x| < R,$$

სადაც

$$r = \frac{1}{M_1}, \quad R = M.$$

ცხადია, თუ ცალ-ცალკე განვიხილავთ ალგებრული განტოლების დადებით და უარყოფით ამონახსნებს, მივიღებთ, რომ დადებითი ამონახსნების საზღვრებია r და R ,

$$r < x < R$$



ნახ. 1

ხოლო უარყოფითი ამონახსნების საზღვრებია

$$-R < x < -r.$$

მაგრამ M ჩვეულებრივად, მეტად შორსაა ამონახსნიდან. ნამდვილ-
კოეფიციენტებიან ალგებრული განტოლების დადებით ამონახსნთა ზუსტი
საზღვარი N შემდეგნაირად გამოისახება:

$$N = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \quad (3)$$

სადაც B უარყოფითი კოეფიციენტების აბსოლუტური მნიშვნელობებიდან
უდიდესია, k პირველი უარყოფითი კოეფიციენტის რიგი, $a_0 > 0$.

მართლაც, თუ დავეშვებით, რომ $x > 1$ და $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ კოეფიციენ-
ტებს შევცვლით ნულებით, ხოლო $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ -ს B რიცხვით, მაშინ $f(x)$
მრავალწევრის მნიშვნელობა მხოლოდ შემცირდება;

$$f(x) \geq a_0 x^n - B(x^{n-k} + \dots + x + 1) = a_0 x^n - B \frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1}.$$

თუ ბოლო შესაკრებს უკუვაგდებთ, უტოლობა გაძლიერდება:

$$f(x) > a_0 x^n - \frac{B x^{n-k+1}}{x - 1} = \frac{x^{n-k+1}}{x - 1} [a_0 x^{k-1} (x - 1) - B].$$

x^{k-1} შევცვალოთ $(x - 1)^{k-1}$ -ით, უტოლობა გაძლიერდება:

$$f(x) > \frac{x^{n-k+1}}{x - 1} [a_0 (x - 1)^k - B]. \quad (4)$$

თუ

$$a_0 (x - 1)^k - B \geq 0,$$

ე. ი.

$$x \geq 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}, \quad (5)$$

მაშინ (4) მოგვცემს, რომ $f(x)$ -ის მნიშვნელობა მკაცრად დადებითია.
ამგვარად (5) უტოლობის დამაკმაყოფილებელი x -ის მნიშვნელობა არ იქ-
ნება $f(x) = 0$ განტოლების ამონახსნი. მაშასადამე, ნამდვილკოეფიციენ-
ტებიანი (2) განტოლების ამონახსნის ზედა საზღვარია

$$N = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი (1) განტოლების
დადებით ამონახსნთა ქვედა საზღვარი არის $\frac{1}{N_1}$, სადაც N_1 არის

$$\varphi(x) \equiv f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

განტოლების დადებით ამონახსნთა ზედა საზღვარი. მართლაც, თუ
 $\varphi(x) = 0$ განტოლების α ამონახსნის ზედა საზღვარია N_1 ,

$$\alpha < N_1,$$

მაშინ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ განტოლების ამონახსნი იქნება $\frac{1}{\alpha}$, რომელიც დაკმა-

ყოფილებს უტოლობას

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{N_1}.$$

ასევე ვაჩვენებთ უარყოფით ამონახსნთა საზღვრებს

$$-N_2 < x < -\frac{1}{N_2},$$

სადაც N_2 არის

$$\varphi(x) \equiv f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

განტოლების დადებით ამონახსნთა ზედა საზღვარი, ხოლო N_2 —

$$\varphi(x) \equiv f(-x) = 0$$

განტოლების დადებით ამონახსნთა ზედა საზღვარი.

3. ამონახსნთა განცალკევება. ვიგულისხმობთ, რომ $f(x) = 0$ განტოლების
ამონახსნი განცალკევებულია, ე. ი. მოძებნილია ისეთი შუალედი, სადაც
განტოლებას ერთზე მეტი ამონახსნი არა აქვს. საზოგადოდ, $f(x) = 0$ გან-
ტოლების ამონახსნთა განცალკევებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ შემდე-
გი თეორემა:

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და
სეგმენტის კიდურ წერტილებში საწინააღმდეგო
ნიშნის მნიშვნელობებსღებულობს, მაშინ $[a, b]$
სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერ-
ტილი, რომელშიდაც $f(\xi) = 0$.

ამ თეორემის (დამტკიცება იხ. ნაწ I, თავი XIII, § 12, თეორემა 3)
ვეშვარტება გეომეტრიულად ცხადია, რადგანაც Oxy კოორდინატთა
სისტემაში $y = f(x)$ წირს წერტილები Ox ღერძის მიმართ სხვადასხვა მხა-
რეს მდებარეობს, მაშინ წირმა Ox ღერძი a და b წერტილებს შორის
ერთხელ მაინც უნდა გადაჰყვეთოს.

გადაკვეთის წერტილი ξ მოგვცემს საძიებელ ამონახსნს.

ალგებრული განტოლების $f(x) = 0$ ამოხსნა უნდა დავიწყოთ $f(x)$
ფუნქციის არსებობის $[a, b]$ შუალედის ბოლო წერტილებზე ფუნქციის
ნიშნის განსაზღვრით. შემდეგ შუალედი გავყოთ c წერტილით და გამო-

გარკვეით $f(x)$ ფუნქციის ნიშანი c წერტილში. თუ აღმოჩნდა, რომ a და c წერტილებზე $f(x)$ ფუნქციას სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ $[a, b]$ შუალედში $f(x)=0$ განტოლების ერთი ამონახსნი მაინც არსებობს. შემდეგ $[a, c]$ შუალედს კიდევ შუაზე გაყოფთ d წერტილით და აქაც შევამოწმებთ $f(x)$ ფუნქციის ნიშანს, თუ $f(a)$ და $f(d)$ სხვადასხვა ნიშნისაა, მაშინ აქ განტოლებას ერთი ამონახსნი მაინც აქვს და ა. შ. ასევე ავიღებთ მეორე ქვეშუალედს $[c, b]$ და ჩავატარებთ იგივე მოქმედებას.

საზოგადოდ, $[a, b]$ სეგმენტს დავყოფთ 2, 4, ... ქვეშუალედებად და ქვეშუალედის ბოლო წერტილებში შევამოწმებთ $f(x)$ -ის ნიშნებს. თუ ამ შუალედების ბოლო წერტილებში $f(x)$ ფუნქციის ნიშანთა ცვლა n -ის ტოლია, მაშინ, ცხადია, თითო შუალედში თითო ამონახსნია და ამონახსნები განცალკევებულია. $[a, b]$ შუალედის განსაზღვრა შეიძლება სინჯვით, ავიღებთ რაღაც a და b რიცხვებს. განვსაზღვრავთ $f(a)$ და $f(b)$ -ს ნიშნებს, თუ a და b სასურველ შედეგს არ იძლევა, ავიღებთ სხვა რიცხვებს.

მაგალითად, განვაცალოთ

$$f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0 \quad (6)$$

განტოლების ამონახსნები. (6) განტოლების ამონახსნთა რიცხვი სამზე მეტი არ არის. სათანადო ჩასმები მოგვცემს ცხრილს:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	4	$+\infty$
$f(x)$	—	—	+	+	—	+	+	+

მაშასადამე, (6) განტოლებას აქვს სამი ნამდვილი ამონახსნი, რომელიც მოთავსებულია შუალედებში: $(-3, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$.

4. შტურმის მეთოდი. ამონახსნთა განცალკევების სრულყოფილი მეთოდია შტურმის მეთოდი. მაგრამ იგი შედარებით შრომატევადია.

რადგანაც $f(x)=0$ განტოლების ჯერადი ამონახსნები არის $f(x)=0$ და $f'(x)=0$ განტოლებათა საერთო ამონახსნები, ამიტომ შეგვიძლია $f(x)$ ისე გარდავქმნათ, რომ მიღებულ განტოლებას ჰქონდეს მხოლოდ მარტივი ამონახსნები (იხ. n 5).

რაიმე $[a, b]$ შუალედში ამონახსნთა რაოდენობის განსაზღვრა შტურმის მეთოდით შემდეგში მდგომარეობს: შევადგინოთ მიმდევრობა

$$f(x), f'(x), R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x), \quad (7)$$

სადაც $R_1(x)$ არის $f(x)$ -ის $f'(x)$ -ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი შებრუნებული ნიშნით, $R_2(x)$ არის $f'(x)$ -ის $R_1(x)$ -ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი შებრუნებული ნიშნით და ა. შ. $R_m(x) = R_m$ მუდმივია. გამოვთვალოთ მიმდევრობათა მნიშვნელობები:

$$f(a), f'(a), R_1(a), R_2(a), \dots, R_m(a), \quad (8)$$

$$f(b), f'(b), R_1(b), R_2(b), \dots, R_m(b). \quad (9)$$

დაეთვალოთ ნიშანთა შეცვლის რაოდენობა (8) და (9) მიმდევრობაში — $S(a), S(b)$. როგორც აღგებრიდანაა ცნობილი, თუ $a < b$, არც a და არც b არ არის $f(x)=0$ განტოლების ამონახსნი, მაშინ $S(a) \geq S(b)$ და სხვაობა $w = S(a) - S(b)$ იძლევა $[a, b]$ შუალედში ნამდვილ ამონახსნთა რიცხვს.

ცხადია, ნიშანთა ცვლა w არ შეიცვლება თუ მიმდევრობათა წევრებს დადებითი მამრავლებზე გავამრავლებთ. ამ თვისებით სარგებლობა დიდად ამარტივებს გამოთვლებს.

განვიხილოთ მაგალითი:

$$f(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 1 = 0. \quad (10)$$

გვექნება

$$\frac{1}{3} f'(x) = x^2 + 2x, \quad R_1(x) = 2x + 1, \quad R_2 = 3.$$

გამოვთვალოთ (10) განტოლების ფესვთა საზღვრები. მივიღებთ შუალედს $(-4, 1)$. შევადგინოთ ნიშანთა ცხრილი შემდეგი მიმდევრობისათვის: $f(x), f'(x), R_1(x), R_2(x), S(x)$ გვექნება:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$	$S(x)$
-4	—	+	—	+	3
1	+	+	+	+	0

$(-4, 1)$ შუალედში სამი ნამდვილი ამონახსნია, რადგანაც $W = S(-4) - S(1) = 3$.

თუ $(-4, 1)$ შუალედს გაგანაწილებთ: $(-4, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(0, 1)$ შუალედებად, აღმოჩნდება, რომ (10) განტოლების თითოეული ამონახსნი მოთავსდება შუალედებში: $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

5. განტოლების ისეთ განტოლებაზე მიყვანა, რომელსაც მხოლოდ მარტივი ამონახსნი აქვს. თუ $f(x)$ მრავალწევრის ნულებია $x_1, x_2, \dots, x_n$, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრი ასე წარმოიდგინება:

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ნულების ჯერადობას, მაშინ $f(x)$ ასე წარმოიდგინება:

$$f(x) = a_0 (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_m)^{\alpha_m},$$

სადაც α_1 არის x_1 -ის ჯერადობის მაჩვენებელი, α_2 x_2 -ის ჯერადობის მაჩვენებელი და ა. შ.,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n.$$

ნაცვლად $f(x)=0$ განტოლებისა შეგვიძლია განვიხილოთ ისეთი განტოლება $f_1(x)=0$, რომელსაც $f(x)=0$ განტოლების მხოლოდ მარტივი ამონახსნი ექნება.

მართლაც, $f(x)$ -ის წარმოებული მოგვცემს:

$$f'(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1-1}(x-x_2)^{\alpha_2-1} \dots (x-x_m)^{\alpha_m-1} Q(x),$$

სადაც $Q(x)$ ისეთი მრავალწევრია, რომ

$$Q(x_k) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

ამის გამო მრავალწევრი

$$F(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1-1}(x-x_2)^{\alpha_2-1} \dots (x-x_m)^{\alpha_m-1}$$

წარმოადგენს $f(x)$ და $f'(x)$ -ის უდიდეს საერთო გამყოფს.

უდიდესი საერთო გამყოფი შეგვიძლია მოვხაოთ ევკლიდეს ალგორითმის მიხედვით: $f(x)$ გავყოთ $f'(x)$ -ზე, მივიღებთ განაყოფს $q_1(x)$ და ნაშთს $r_1(x)$,

$$f(x) = f'(x)q_1(x) + r_1(x).$$

$f'(x)$ გავყოთ $r_1(x)$ -ზე, მივიღებთ განაყოფს $q_2(x)$ და ნაშთს $r_2(x)$,

$$f'(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x).$$

პირველი ნაშთი გავყოთ მეორე ნაშთზე,

$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x)$$

და ა. შ. გაყოფა გავაგრძელოთ მანამდე, სანამ რომელიმე $r_k(x)$ ნაშთი ნულის ტოლი არ გახდება. მაშინ ნულისაგან განსხვავებული ნაშთი $r_{k-1}(x)$ იქნება $f(x)$ და $f'(x)$ -ის უდიდესი საერთო გამყოფი,

$$f(x) = Q_1(x)r_{k-1}(x),$$

$$f'(x) = Q_2(x)r_{k-1}(x).$$

შევადგინოთ შეფარდება $f(x) : r_{k-1}(x)$. მოგვცემს

$$\bar{f}_1(x) = \frac{f(x)}{r_{k-1}(x)} = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m.$$

თუ $\bar{f}_1(x)$ -ს გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ

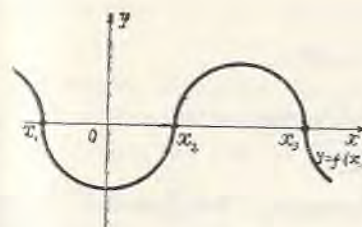
$$\bar{f}_1(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

რომელსაც ექნება ყველა ამონახსნი $f(x)=0$ განტოლებისა და ეს ამონახსნები მარტივი ამონახსნებია.

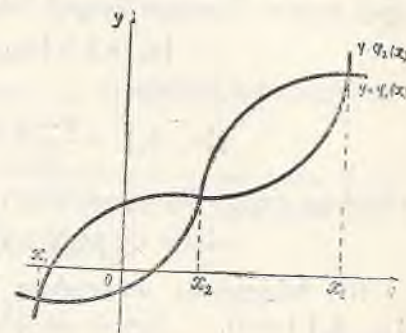
ამრიგად ავაგეთ ისეთი განტოლება $f_1(x)=0$, რომლის ამონახსნებაც $f(x)=0$ განტოლების ყველა მარტივი ამონახსნებია.

8. განტოლების ამონახსნთა გეომეტრიული წარმოდგენა. ამოვხსნათ $f(x)=0$ განტოლება გეომეტრიულად ნიშნავს, ვიპოვოთ $y=f(x)$ წირისა და Ox ღერძის გადაკვეთის წერტილები (ნახ. 2). ამ წერტილთა აბსცისებში იქნება $f(x)=0$ განტოლების ამონახსნები.

ზოგჯერ შეიძლება $f(x)=0$ განტოლება წარმოვადგინოთ $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ ტოლობით. ამ შემთხვევაში $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ განტოლების ამოხსნა ნიშნავს, ვიპოვოთ $y=\varphi_1(x)$ და $y=\varphi_2(x)$ წირების გადაკვეთის წერტილები (ნახ. 3). ამ წერტილთა აბსცისები იქნება აღებული $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ განტოლების ამონახსნები.



ნახ. 2



ნახ. 3

შენიშვნა. ზემოთ $f(x)$ განტოლების ფესვთა განცალკევება განეხილეთ მხოლოდ ალგებრული განტოლებისათვის. ახლა განვიხილოთ ზოგადად. $f(x)=0$ განტოლება ალგებრულია ან არაალგებრული. გავიხსენოთ ფუნქციის მონოტონურობის პირობა: $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია მონოტონურია, თუ ამ სეგმენტზე $f'(x) \neq 0$ (ნაწ. I, თავი XV, § 4, n1). ამრიგად, $f(x)=0$ განტოლების ამონახსნთა განცალკევებისათვის ისეთი $[a, b]$ სეგმენტი უნდა განვსაზღვროთ, სადაც $f(a)$ და $f(b)$ სხვადასხვა ნიშნისაა და

$$f'(x) \neq 0 \quad (f'(x) > 0 \text{ ან } f'(x) < 0, \quad x \in [a, b]).$$

ქვემოთ განვიხილავთ განტოლებათა ამოხსნის ზოგიერთ მეთოდს.

§ 2. შუალედთა განახმავრების მეთოდი

ვიპოვოთ $f(x)=0$ განტოლების ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა. ამისათვის განვიხილოთ ე. წ. **შუალედთა განახმავრების მეთოდი**. ამ მეთოდის შესახებ წინა პარაგრაფში უკვე გვქონდა მსჯელობა. ვთქვათ, განვსაზღვრეთ $[a, b]$ შუალედი, რომლის შიგნით მოთავსებულია $f(x)=0$ განტოლების ერთი ამონახსნი, ე. ი. $f(a)$ და $f(b)$ სხვა-

დასტავა ნიშნისაა. ეს კი გვიჩვენებს $f(a)f(b) < 0$. ვთქვათ, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. ავიღოთ $[a, b]$ შუალედის შუა წერტილი და გავიგოთ ამ შუა წერტილზე $f(x)$ -ის ნიშანი. თუ $f(x)$ ამ წერტილზე უარყოფითია, მაშინ $[a, b]$ შუალედის მარცხენა ნახევარი ავიღოთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში მარჯვენა ნახევარი. ეს შუალედი $[a_1, b_1]$ -ით აღვნიშნოთ. $[a_1, b_1]$ შუალედი კვლავ შუაზე გავყოთ. გამოვარკვიოთ $f(x)$ -ის ნიშანი ამ შუა წერტილზე. თუ ამ შუა წერტილზე $f(x)$ -ის ნიშანი $f(a_1)$ -ის საწინააღმდეგოა, მაშინ ავიღოთ $[a_1, b_1]$ შუალედის მარცხენა ნახევარი, წინააღმდეგ შემთხვევაში — მარჯვენა ნახევარი და ა. შ. მივიღებთ მიმდევრობას

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n], \dots, a_0 = a, b_0 = b, \quad (1)$$

სადაც ყოველი შუალედი შეიცავს მის მომდევნო შუალედს,

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}],$$

ხოლო შუალედის სიგრძეა

$$| [a_n, b_n] | = \frac{b-a}{2^n}, \quad n=0, 1, \dots$$

ამასთანავე ყოველი შუალედის ბოლო წერტილებისათვის

$$f(a_n)f(b_n) < 0.$$

(1) მიმდევრობა თავმოყრილ შუალედთა მიმდევრობაა, სადაც $| [a_n, b_n] | \rightarrow 0$. ამიტომ არსებობს ერთი X , რომელიც ყველა შუალედს ეკუთვნის,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = X.$$

$f(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ შუალედში უწყვეტობის შედეგად

$$\lim_{a_n \rightarrow X} f(a_n) = \lim_{b_n \rightarrow X} f(b_n) = f(X).$$

ამის გამო $f(a_n)f(b_n) < 0$ უტოლობა მოგვცემს

$$[f(X)]^2 = 0,$$

საიდანაც

$$f(X) = 0.$$

რადგანაც აღებულ შუალედში $f(x) = 0$ განტოლების ერთი ამონახსნია, ცხადია, ეს X იქნება საძიებელი ამონახსნი.

თუ $|b_n - a_n|$ ნაკლებია წინასწარ აღებულ დადებით ε რიცხვზე, მაშინ a_n ან b_n შეგვიძლია მივიღოთ $f(x) = 0$ განტოლების ამონახსნად ε სიზუსტით. ასე რომ, n მოქმედების შეფასება იქნება

$$0 \leq |a_n - X| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

აღწერილი მეთოდი გამოსადეგია, როგორც ალგებრული, ასევე ტრანსცენდენტული განტოლების ამონახსნულად.

შუალედის განახევრების მეთოდი პრაქტიკულად ვარგისია ამონახსნის უხეში მიახლოებისათვის, რადგანაც სიზუსტის ზრდასთან ერთად ისრდება გამოთვლითი სამუშაოს მოცულობა.

§ 3. წარფივი ინტერპოლირების მეთოდი

წარფივი ინტერპოლირების მეთოდს, ჰორდათა მეთოდს, ან ყალბი მდებარეობის (regula falsi) მეთოდსაც ეძახიან. ეს მეთოდი უძველესი მეთოდია.

ვთქვათ,

$$f(x) = 0$$

განტოლების ამონახსნი X მოთავსებულია $[a, b]$ შუალედში,

$$a < X < b.$$

განტოლების ამონახსნის პირველ მიახლოებად მივიღოთ $x_1 = a$. შემდეგი მიახლოებითი მისაღებად $y = f(x)$ წირი $[a, b]$ შუალედში შევეცდეთ ქორდით AB (ნახ. 4). ქორდის განტოლება იქნება:

$$\frac{y - f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{b - x_1}.$$

ქორდის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის მისაღებად ამ განტოლებაში ჩავსვათ $y = 0$. მივიღებთ

$$\frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{b - x_1},$$

საიდანაც

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} (b - x_1).$$

x -ის ეს მნიშვნელობა მივიღოთ ამონახსნის მეორე მიახლოებით მნიშვნელობად — x_2 .

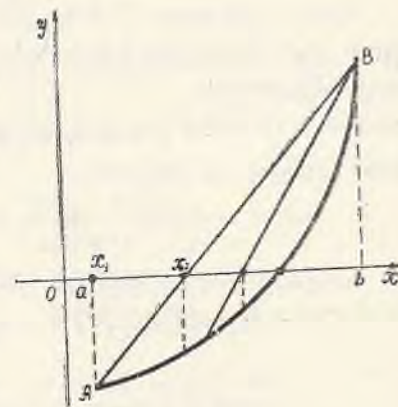
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} (b - x_1).$$

თუ $x_2 - x_1$ -ს აღვნიშნავთ h_1 -ით, მაშინ

$$x_2 = x_1 + h_1.$$

ცხადია,

$$h_1 = -\frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} (b - x_1).$$



ნახ. 4

გამოთვალეთ $f(x_2)$. თუ $f(x_2)$ და $f(b)$ -ს სხვადასხვა ნიშანი აქვს, ავიღებთ $[x_2, b]$ შუალედს და გავიმეორებთ წინა პროცესს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ავიღებთ $[x_1, x_2]$ შუალედს. ვთქვათ, $f(x_2)$ -ს და $f(b)$ -ს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ, მაშინ x_2 -ის ანალოგიურად განვსაზღვრავთ x_3 -ს:

$$x_3 = x_2 + h_2,$$

სადაც

$$h_2 = -\frac{f(x_2)}{f(b) - f(x_2)}(b - x_2).$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ მიმდევრობით მივიღებთ

$$x_{n+1} = x_n + h_n,$$

სადაც

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n),$$

ანუ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n). \quad (1)$$

ზემოთ განხილულ შემთხვევაში (იხ. ნახ. 3) b წერტილი უძრავია, ხოლო (x_n) წერტილთა მიმდევრობა ქმნის ზრდად, ზემოდან შემოსაზღვრულ მიმდევრობას,

$$a = x_1 \leq a_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots < b$$

(წირი ჩაზნექილია). არსებობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X.$$

რადგანაც $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია აღებულ $a \leq x \leq b$ შუალედში, ამიტომ დამოკიდებულებიდან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \right]$$

მივიღებთ

$$X = X - \frac{f(X)}{f(b) - f(X)}(b - X),$$

საიდანაც

$$f(X) = 0.$$

რადგანაც აღებულ შუალედში $f(x) = 0$ განტოლების ერთი ამონახსნი ნია მოთავსებული, ეს X იქნება საძიებელი ამონახსნი.

სრულიად ასევე დამტკიცდება, რომ თუ a უძრავი წერტილია, ხოლო $(\bar{x}_n)$ წერტილები ქმნის მიმდევრობას (ნახ. 5), $b = \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2 \geq \dots > a$,

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f(\bar{x}_n) - f(a)}(\bar{x}_n - a), \quad n = 1, 2, \dots,$$

(წირი ჩაზნექილია), მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = X$$

(რადგანაც $(\bar{x}_n)$ მიმდევრობა კლებადი, ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა) მოგვეცეს ამონახსნს $[a, b]$ შუალედში.

აღვილი შესამჩნევია (ნახ. 4, 5), რომ ორივე განხილულ შემთხვევაში $y = f(x)$ წირები ჩაზნექილია, ე. ი. მთელ $[a, b]$ შუალედში მეორე რიგის წარმოებული $f'(x)$ ნიშანს არ იცვლის, მაშინ როგორც (x_n) ,

ისე $(\bar{x}_n)$ მიმდევრობა კრებადია.

განვსაზღვროთ $|x_{n+1} - x_n|$ -ის საშუალებით $|X - x_{n+1}|$ ცდომილების მნიშვნელობა.

თუ მხედველობაში მივიღებთ $f(X) = 0$, მაშინ (1) დამოკიდებულება მოგვეცეს:

$$f(X) - f(x_n) = \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}(x_{n+1} - x_n).$$

გამოვიყენოთ სასრული ნაზრდის ფორმულა, მივიღებთ

$$(X - x_n) f'(\xi) = f'(\xi)(x_{n+1} - x_n),$$

სადაც

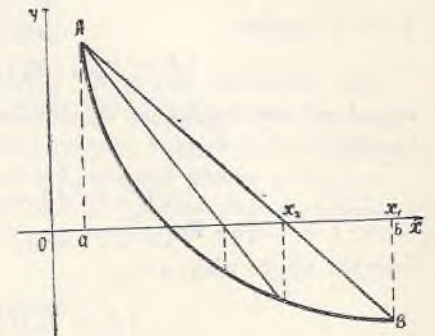
$$x_n < \xi < X, \quad x_n < \bar{\xi} < b.$$

ამ დამოკიდებულებიდან გვექნება

$$|X - x_{n+1}| = \frac{|f'(\bar{\xi}) - f'(\xi)|}{|f'(\xi)|} |x_{n+1} - x_n|.$$

რადგანაც $f'(x)$ ინარჩუნებს ნიშანს $[a, b]$ შუალედში, ამასთან $\xi \in [a, b]$, $\bar{\xi} \in [a, b]$, მაშინ, ცხადია,

$$|f'(\bar{\xi}) - f'(\xi)| \leq M - m.$$



ნახ. 5

ამის გამო გვექნება

$$|X - x_{n+1}| \leq \frac{M-m}{m} |x_{n+1} - x_n|,$$

სადაც M და m სათანადო $|f'(x)|$ -ის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა $[a, b]$ შუალედში. თუ $[a, b]$ შუალედი იმდენად მცირეა, რომ

$$M \leq 2m,$$

მაშინ მივიღებთ

$$|X - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n|.$$

ამგვარად, თუ მივიღებთ, რომ ორ მიახლოებას x_{n+1} და x_n შორის სხვაობა

$$|h_n| = |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon,$$

სადაც ε წინასწარ მოცემული დადებითი რიცხვია, მაშინ $|X - x_{n+1}|$ -იც ნაკლები იქნება იმავე ε -ზე,

$$|X - x_{n+1}| < \varepsilon. \quad (2)$$

მაგალითად, ვიპოვოთ ამონახსნი შემდეგი განტოლებისა:

$$f(x) = x - 1 - 3 \sin x = 0. \quad (3)$$

აღვილო შესამოწმებელია $f(1) = -2,5245$; $f(2) = -1,7258$; $f(3) = 1,5815$. ამგვარად, აღებული (3) განტოლების ამონახსნი მოთავსებულია ორსა და სამს შორის.

გამოთვლები შევასრულოთ (1) ფორმულით.

$$\begin{aligned} x_1 = 2, \quad h_1 &= \frac{-f(2)}{f(3) - f(2)} (3 - 2) = \frac{1,7258 \cdot 1}{1,5815 + 1,7258} = \\ &= \frac{1,7258}{3,3073} = 0,5233. \end{aligned}$$

ავილოთ $x_2 = 2 + 0,5233 = 2,5233$ და გამოვთვალოთ $f(x_2)$, $f(2,5233) = -0,2197$.

გავაგრძელოთ გამოთვლები.

[2,5233; 3]

$$h_2 = -\frac{f(x_2)}{f(b) - f(x_2)} (b - x_2), \quad h_2 = \frac{0,2197}{1,5815 + 0,2197} (3 - 2,5233) = 0,0588;$$

$$x_3 = x_2 + h_2, \quad x_3 = 2,5233 + 0,0588 = 2,5821;$$

$$f(x_3) = 2,5821 - 1 - 3 \sin 2,5821 = -0,0115.$$

[2,5821; 3]

$$h_3 = -\frac{f(x_3)}{f(b) - f(x_3)} (b - x_3), \quad h_3 = \frac{0,0115}{1,5815 + 0,0115} = 0,0031;$$

$$x_4 = x_3 + h_3, \quad x_4 = 2,5852;$$

$$f(x_4) = 2,5852 - 1 - 3 \sin 2,5852 = 0,0171.$$

ამგვარად, აღებული განტოლების ამონახსნი იმყოფება შუალედში $2,5821 < x < 2,5852$.

პროცესის გაგრძელება უფრო ზუსტად მოგვცემს ამონახსნს. ჩვენ მიერ ჩატარებული გამოთვლებით $x = 2,584$, ეს მნიშვნელობა ზუსტია სამი ციფრით, შეცდომას შეიცავს მეოთხე ციფრი, რადგანაც $h_3 = 0,003$.

ცხადია, თუ წრფივი ინტერპოლირების მეთოდთან ერთად გამოვიყენებთ შუალედის განახევრების მეთოდს, მაშინ განტოლების ამონახსნს უფრო სწრაფად მივიღებთ.

§ 4. მახათა მეთოდი

მხებთა მეთოდი პირველად განიხილა ნიუტონმა. ამ მეთოდს ნიუტონის მეთოდი ეწოდება.

ვთქვათ, $[a, b]$ შუალედში იმყოფება $f(x) = 0$ განტოლების ერთი მარტივი ამონახსნი, ამიტომ $f'(x) \neq 0$. დავუშვათ, რომ $f''(x) \neq 0$. სიმარტივისათვის მივიღოთ $f''(x) > 0$.

გავატაროთ $y = f(x)$ წირის მხები $P_1(x_1, f(x_1))$ წერტილზე (ნახ. 6), $x_1 = a$.

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

ამ წრფის X ღერძთან გადაკვეთა მოგვცემს;

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

ეს მნიშვნელობა მივიღოთ საძიებელი ამონახსნის მეორე მიახლოებად:

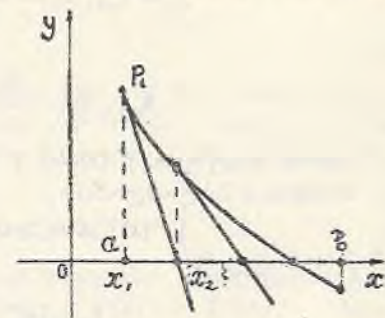
$$x_2 = x_1 + h_1,$$

სადაც

$$h_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

თუ მხებს $P_2(x_2, f(x_2))$ წერტილზე გავატარებთ და ვიპოვიოთ Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილს, მივიღებთ საძიებელი ამონახსნის მესამე მიახლოებას:

$$x_3 = x_2 + h_2,$$



ნახ. 6

სადაც

$$h_2 = - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

ცხადია, ამ პროცესის გაგრძელებით გვექნება

$$x_{n+1} = x_n + h_n,$$

სადაც

$$h_n = - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

გავარკვეთ პროცესის კრებადობის ნიშანი.

ვთქვათ, h_n ისეთი შესწორებაა, რომ $x_n + h_n = X$ იძლევა $f(x) =$ განტოლების ამონახსნს. გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა:

$$f(X) = f(x_n + h_n) = f(x_n) + h_n f'(x_n) + \frac{h_n^2}{2} f''(\xi) = 0,$$

$$\xi \in (x_n, X),$$

აქედან

$$h_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = - \frac{h_n^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}.$$

მხედველობაში მივიღოთ $h_n = X - x_n$, მაშინ (3) მოგვცემს:

$$X - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = - \frac{h_n^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}.$$

უკანასკნელი ტოლობა (1) ტოლობის საფუძველზე მოგვცემს:

$$X - x_{n+1} = - \frac{h_n^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)},$$

ანუ

$$h_{n+1} = - \frac{h_n^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}.$$

ზემოთ დაუშვით, $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$; ახლა ვთქვათ, რომ საძიებელი ამონახსნის მახლობლობაში

$$|f'(x)| \geq m > 0, |f''(x)| \leq M,$$

მაშინ (4) მოგვცემს:

$$|h_{n+1}| \leq \frac{h_n^2}{2} \frac{M}{m}.$$

თუ ამ უტოლობაში ჩავსვამთ მიმდევრობით $n=1, 2$ და ა. შ., მივიღებთ

$$|h_{n+1}| < \left[(b-a) \frac{M}{2m} \right]^{2^n} \frac{2m}{M},$$

სადაც

$$h_1 < b-a.$$

როგორც (5) უტოლობა გვიჩვენებს, პროცესის კრებადობისათვის უნდა შესრულდეს პირობა:

$$C = (b-a) \frac{M}{2m} < 1.$$

(5) უტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$h_{n+1} < C^{2^n} \frac{2m}{M}. \quad (6)$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ მიმდევრობა (h_n) მით უფრო სწრაფად იკრება, რაც უფრო მცირეა M , რაც უფრო დიდია m , და, ამასთანავე, რაც უფრო მოკლეა შუალედი $[a, b]$.

დავსვათ ახლა საკითხი: როგორ ავარჩიოთ x_1 წერტილი $[a, b]$ შუალედიდან, სადაც $f(a)$ და $f(b)$ სხვადასხვა ნიშნისაა, ე. ი. $f(a)f(b) < 0$, რომ x_1 -დან დაწყებული (x_n) მიმდევრობა.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (7)$$

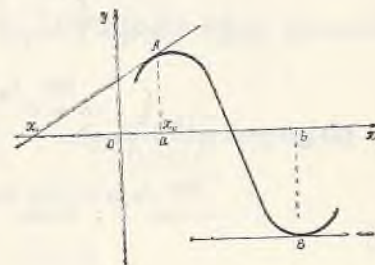
კრებადი იყოს. როგორც მე-7 ნახაზი გვიჩვენებს, თუ საწყის წერტილებად a ან b წერტილის ავიღებთ. მომდევნო წერტილი სრულებითაც არაა $[a, b]$ შუალედში. ჩამოვყალიბოთ საკმარისი პირობა იმისა, რომ არჩეული x_1 წერტილი „კარგი“ წერტილი იყოს (7) მიმდევრობისათვის;

აღებულ $[a, b]$ შუალედში, სადაც $f(a)f(b) < 0$, ამასთან $f'(x)$ და $f''(x)$ ნულისაგან განსხვავებულია და ინარჩუნებენ გარკვეულ ნიშანს მთელ შუალედში, იმ საწყისი x_1 -ით დაწყებული (7) მიმდევრობა იქნება კრებადი, სადაც

$$f(x_1)f''(x_1) > 0. \quad (8)$$

ამ წინადადების დასამტკიცებლად ზოგადობის შეუზღუდავად განვიხილოთ მე-6 ნახაზზე აღებული შემთხვევა: $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$. მათემატიკური ინდუქციით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ყველა x_n ნაკლებია საძიებელ X -ზე, $f(X) = 0$. მართლაც, $x_1 = a < X$ და მივიღოთ $x_n < X$, მაშინ $X = x_n + (X - x_n)$ -სათვის გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა

$$0 = f(X) = f(x_n) + f'(x_n)(X - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(X - x_n)^2, \quad \xi \in [x_n, X],$$



ნახ. 7

რადგანაც $f''(x) > 0$, უკანასკნელიდან ცხადია,
საიდანაც $f(x_n) + f'(x_n)(X - x_n) < 0$,

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (X - x_n) > 0,$$

აქედან კი

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < X,$$

ანუ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < X.$$

ამრიგად, ყველა $x_n < X$. (9) უტოლობიდან გამომდინარეობს

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < X.$$

მაშასადამე, გვაქვს ზრდადი ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა (x_n) ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{X}.$$

(7) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

ანუ

$$\bar{X} = \bar{X} - \frac{f(\bar{X})}{f'(\bar{X})}.$$

აქედან, ცხადია, $f(\bar{X}) = 0$. რაც გვიჩვენებს $\bar{X}$ საძიებელი ამონახსნია.
 $\bar{X} = X$.

ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ აღებულ $[a, b]$ შუალედში, სადაც მოთვსებულია $f(x) = 0$ განტოლების ამონახსნი, სადაც $f'(x)$ და $f''(x)$ ნულისაგან განსხვავებულია და ინარჩუნებენ გარკვეულ ნიშანს მთელ შუალედში, ის x_1 არის „კარგი“ საწყისი პირობა, რომლისთვისაც

$$f(x_1)f''(x_1) > 0.$$

დამტკიცებული საკმარისი პირობიდან გამომდინარეობს: რომ ეძიოვოთ მხებთა მეთოდით (7) ამონახსნი $f(x) = 0$ განტოლებისა, ჯერ უნდა განვსაზღვროთ $[a, b]$ შუალედი, სადაც $f(a)f(b) < 0$, შემდეგ ვამცირებთ $[a, b]$ შუალედი ისე, რომ $f'(x)$ და $f''(x)$ ამ შემცირებულ შუალედში ნიშანს არ იცვლიდეს. შემდეგ ამ შუალედის ის წერტილი ავიღოთ x_1 საწყის წერტილად, სადაც $f(x_1)f''(x_1) > 0$.

განვიხილოთ მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება

$$x - \cos x = 0. \quad (10)$$

აღვილი წარმოსადგენია, ამ განტოლების ამონახსნი მოთვსებული იქნება

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ შუალედში. შევამოწმოთ } f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0.$$

$$f'(x) = 1 + \sin x \neq 0,$$

$$f''(x) = \cos x \neq 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ შუალედში.}$$

ავარჩიოთ x_1 ისე, რომ $0 \leq x_1 < \pi/2$ და (8) პირობა შესრულდეს,

$$f(x_1)f''(x_1) = (x_1 - \cos x_1)\cos x_1 > 0.$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ ეს პირობა შესრულდება, თუ $x_1 = 1$.

გამოვთვალოთ: h_1 .

$$h_1 = -\frac{f(1)}{f'(1)} = -\frac{1 - \cos 1}{1 + \sin 1} = -\frac{1 - 0,5415}{1 + 0,8414} = -0,2489$$

$$x_2 = x_1 + h_1, \quad x_2 = 1 - 0,2489 = 0,7511$$

$$h_2 = -\frac{0,7511 - \cos 0,7511}{1 + \sin 0,7511} = -0,0191$$

$$x_3 = 0,7511 - 0,0191 = 0,7320$$

$$h_3 = -\frac{f(0,7320)}{f'(0,7320)} = -\frac{0,7320 - \cos 0,7320}{1 + \sin 0,7320} = 0,0071$$

$$x_4 = 0,7320 + 0,0071 = 0,7391$$

$$h_4 = -\frac{f(0,7391)}{f'(0,7391)} = -\frac{0,0001}{1,6736} = -0,00005 \dots$$

ამგვარად, (10) განტოლების ამონახსნია 0,7391. ეს ამონახსნი ზუსტია უკანასკნელ ციფრამდე.

§ 5. შებენიანი მეთოდი

მეტად მიზანშეწონილია ვაწარმოოთ გამოთვლები ჭორდათა და მხებთა მეთოდით ერთდროულად. ამ მეთოდს შევერთებთ (კომბინირებული) მეთოდი ეწოდება. შეერთებული მეთოდით საშუალება გვაქვს

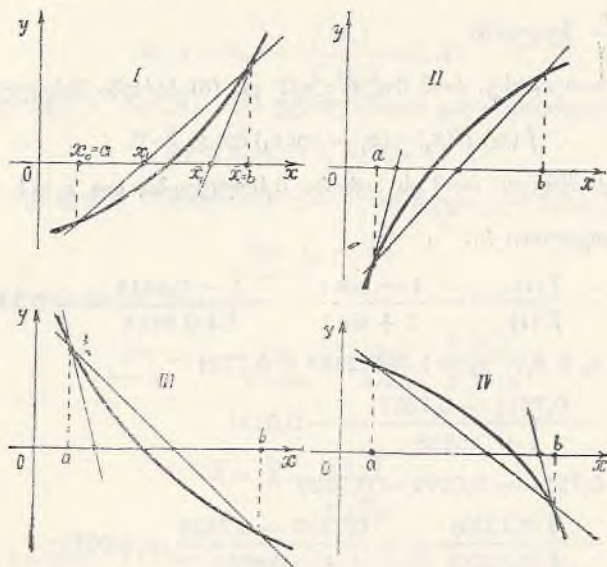
შევადგინოთ ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობათა ორი მიმდევრობა. ერთი — (x_n) ნაკლებობით და მეორე — $(\bar{x}_n)$ მეტობით.

ვთქვათ, $[a, b]$ შუალედში მოთავსებულია $f(x)=0$ განტოლების ამონახსნი. $[a, b]$ შუალედი შეგვიძლია იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ ადგილი ექნეს ერთ-ერთ შემთხვევას ოთხი შესაძლებლობიდან (ნახ. 8).

$$f'(x) > 0, f''(x) > 0; \quad f'(x) > 0, f''(x) < 0;$$

$$f'(x) < 0, f''(x) > 0; \quad f'(x) < 0, f''(x) < 0.$$

ყველა შემთხვევა აკმაყოფილებს პირობას: $f(x) f''(x) > 0$.



ნახ. 8

შევნიშნოთ, რომ ყველა ეს შემთხვევა შეიძლება მივიყვანოთ პირველ შემთხვევამდე, თუ $f(x)=0$ განტოლებას შევცვლით მისი ტოლფასი განტოლებებით:

$$-f(x) = 0, \quad \pm f(-x) = 0.$$

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა:

$$f'(x) > 0, f''(x) > 0.$$

შუალედის მარცხენა მხრიდან გამოვიყენოთ ჭორდათა მეთოდი და განვსაზღვროთ x_1 ,

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a),$$

რაც სიმეტრიულობისათვის ასე ჩავწერთ:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(\bar{x}_0) - f(x_0)} (\bar{x}_0 - x_0).$$

მარჯვენა მხრიდან გამოვიყენოთ მხებთა მეთოდი და განვსაზღვროთ $\bar{x}_1$,

$$\bar{x}_1 = x_0 - \frac{f(\bar{x}_0)}{f'(\bar{x}_0)}.$$

ცხადია, საძიებელი X მოთავსებული იქნება შუალედში:

$$x_1 < X < \bar{x}_1.$$

ახლა ავიღოთ შუალედი $(x_1, \bar{x}_1)$ და ისევ მარცხნიდან გამოვიყენოთ ჭორდათა მეთოდი, ხოლო მარჯვნიდან მხებთა მეთოდი. მივიღებთ:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(\bar{x}_1) - f(x_1)} (\bar{x}_1 - x_1), \quad \bar{x}_2 = x_1 - \frac{f(\bar{x}_1)}{f'(\bar{x}_1)}.$$

აქაც ადვილი შესამჩნევია, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$x_2 < X < \bar{x}_2.$$

ასეთი პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ

$$x_n < X < \bar{x}_n,$$

სადაც

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(\bar{x}_{n-1}) - f(x_{n-1})} (\bar{x}_{n-1} - x_{n-1}),$$

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} - \frac{f(\bar{x}_{n-1})}{f'(\bar{x}_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

თუ ამონახსნის აბსოლუტური ცდომილება ε დაშვებულია წინასწარ, მაშინ გამოთვლით პროცესს შევაჩერებთ იქ, სადაც

$$|\bar{x}_n - x_n| < \varepsilon$$

და ამონახსნის მნიშვნელობად ავიღოთ საშუალო არითმეტიკული,

$$X = \frac{x_n + \bar{x}_n}{2}.$$

§ 8. მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი

ზემოთ, მე-12 თავის მე-5 პარაგრაფში ნაწილობრივად განვიხილეთ მიმდევრობითი მიახლოების — იტერაციის მეთოდი. მოცემული

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

განტოლება უნდა შევცვალოთ მისი ეკვივალენტური განტოლებით

$$x = \varphi(x). \quad (2)$$

მაგრამ $\varphi(x)$ ფუნქცია ნებისმიერი არაა. $\varphi(x)$ ისეთი უნდა იყოს, რომ აღებულ $[a, b]$ შუალედში ან (1) განტოლების ამონახსნის რაიმე მიღამოში,

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1.$$

ვაჩვენოთ $\varphi(x)$ ფუნქციის არჩევის ერთი ხერხი.

ვთქვათ, $[a, b]$ შუალედში, სადაც (1) განტოლებას აქვს ამონახსნი, $f(x)$ ფუნქციას აქვს შემოსაზღვრული წარმოებული,

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1. \quad (3)$$

თუ წარმოებული $f'(x) < 0$, მაშინ $f(x) = 0$ განტოლების ნაცვლად ავიღოთ — $f(x) = 0$ განტოლება. შევცვალოთ (1) განტოლება მისი ეკვივალენტური განტოლებით

$$x = x - \lambda f(x), \quad \lambda > 0.$$

ცხადია, აქ $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$. შევარჩიოთ λ პარამეტრი ისე, რომ დაკმაყოფილდეს პირობა

$$0 \leq \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leq q < 1. \quad (4)$$

(3) უტოლობის საფუძველზე მივიღებთ

$$0 \leq 1 - \lambda M_1 \leq 1 - \lambda m_1 \leq q.$$

თუ ავიღებთ

$$\lambda \leq \frac{1}{M_1} \quad \text{და} \quad q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1,$$

მაშინ (4) უტოლობა შესრულდება. ამრიგად,

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{M_1} f(x). \quad (5)$$

მაგალითად, $f(x) = x^2 + 12x + 20 = 0$ გადავწეროთ (2) სახით.

ადგილი შესამოწმებელია $f(0) = 20 > 0$, $f(-5) = -15 < 0$. ავიღოთ $[-5; 0]$ შუალედი. ამ შუალედში $f'(x) = 2x + 12$ წარმოებულის მინიმუ-

შია $f'(-5) = 2$, ხოლო მაქსიმუმი $f'(0) = 12$. ასე რომ, შეგვიძლია ავიღოთ

$$\lambda = \frac{1}{12}. \quad \text{გვექნება}$$

$$x = x - \frac{1}{12} (x^2 + 12x + 20).$$

ცხადია, $|\varphi'(x)| = \left| -\frac{1}{6}x \right|$ შუალედში $[-5; 0]$ ნაკლებია 1-ზე.

დამტკიცებული საკმარისი პირობის საფუძველზე ნაცვლად $f(x) = 0$ განტოლებისა განვიხილოთ $x = \varphi(x)$ განტოლება, რომლისთვისაც

$$0 \leq |\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (6)$$

სათანადოდ შერჩეულ $[a, b]$ შუალედში,

საწყის x_0 მნიშვნელობად ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი $]a, b[$ ინტერვალდან, მაშინ $x = \varphi(x)$ განტოლების ამონახსნის შემდეგი მიახლოებითი მნიშვნელობა განისაზღვრება ტოლობიდან

$$x_1 = \varphi(x_0). \quad (7)$$

შემდეგი მიახლოებითი მნიშვნელობა ტოლობიდან

$$x_2 = \varphi(x_1) \quad (8)$$

და ა. შ.

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \quad (9)$$

აქ ადვილად გამოვარკვევთ კრებადობის პირობას.

ამონახსნის ნამდვილი მნიშვნელობა X აკმაყოფილებს (2) ტოლობას, მაშინ (2) და (7) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$X - x_1 = \varphi(X) - \varphi(x_1),$$

საიდანაც ლაგრანჟის ფორმულით მივიღებთ:

$$X - x_1 = (X - x_0) \varphi'(\xi_0), \quad \xi_0 \in (x_0, X).$$

(2) და (8) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$X - x_2 = (X - x_1) \varphi'(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_1, X)$$

და ა. შ.

$$X - x_n = (X - x_{n-1}) \varphi'(\xi_{n-1}), \quad \xi_{n-1} \in (x_{n-1}, X). \quad (10)$$

თუ მიღებულ ტოლობებს გადავამრავლებთ, მივიღებთ:

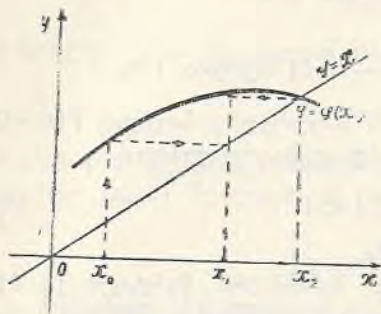
$$X - x_n = (X - x_0) \varphi'(\xi_0) \varphi'(\xi_1) \dots \varphi'(\xi_{n-1}). \quad (11)$$

თუ $|\varphi'(x)|$ -ის მაქსიმუმს აღვნიშნავთ M , მაშინ (11) მოგვცემს:

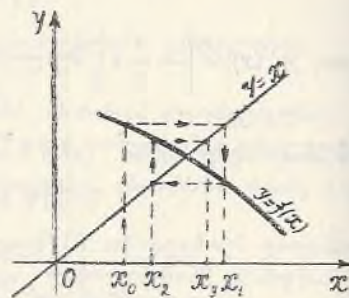
$$|X - x_n| \leq |X - x_0| M^n. \quad (12)$$

ამგვარად, თუ საძიებელი ამონახსნის მახლობლობაში $|\varphi'(x)| < 1$, მაშინ პროცესი კრებალია.

იტერაციის ხერხის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ზოგადად ნაჩვენებია მე-9 და მე-10 ნახაზებზე.



ნახ. 9



ნახ. 10

პროცესი განშლადია, თუ $|\varphi'(x)| \geq 1$. ეს შემთხვევა ნაჩვენებია მე-11 ნახაზზე, სადაც ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობანი შორდებიან ამონახსნის ზუსტ მნიშვნელობას.

შევაფასოთ $(n+p)$ რიგის მიახლოება.

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|.$$

თუ (10) ფორმულას გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}| M,$$

სადაც

$$M = |\varphi'(x)|_{\max}, x \in [a, b].$$

თუ n -ს მივცემთ მნიშვნელობებს 1, 2, ..., მივიღებთ

$$|x_2 - x_1| \leq |x_1 - x_0| M$$

$$|x_3 - x_2| \leq |x_1 - x_0| M^2$$

$$|x_{n+p} - x_{n+p-1}| \leq |x_1 - x_0| M^{n+p-1}.$$

ამის გამო გვქვია

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_1 - x_0| M^{n+p-1} + |x_1 - x_0| M^{n+p-2} + \dots + |x_1 - x_0| M^n,$$

საიდანაც

$$|x_{n+p} - x_n| \leq M^n |x_1 - x_0| (1 + M + \dots + M^{p-1}),$$

ნუ

$$|x_{n+p} - x_n| \leq M^n |x_1 - x_0| \frac{1 - M^p}{1 - M} < \frac{M^n}{1 - M} |x_1 - x_0|.$$

თუ $p \rightarrow \infty$, მაშინ $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{n+p} = X$, ამიტომ

$$|X - x_n| \leq \frac{M^n}{1 - M} |x_1 - x_0|. \quad (13)$$

აქედან ვხედავთ, რომ იტერაციის პროცესი, მით უფრო სწრაფად იკრება, რაც უფრო მცირეა M .

ახლა შევაფასოთ $|x_n - x_{n-1}|$ -ის მნიშვნელობით $|X - x_n|$ -ის მნიშვნელობა.

ავიღოთ

$$X - \varphi(X) = f(X)$$

და მხედველობაში მივიღებთ $f(X) = 0$, მაშინ

$$x_n - \varphi(x_n) = f(x_n) - f(X) = (x_n - X) f'(\bar{x}_n),$$

$\bar{x}_n$ სათანადო საშუალო მნიშვნელობაა, მაგრამ

$$f'(x) = 1 - \varphi'(x) \geq 1 - M.$$

ამის გამო მივიღებთ

$$|x_n - \varphi(x_n)| \geq (1 - M) |x_n - X|,$$

საიდანაც

$$|x_n - X| \leq \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1 - M},$$

ანუ

$$|x_n - X| \leq \frac{|x_n - x_{n+1}|}{1 - M}.$$

მაგრამ

$$|x_{n+1} - x_n| \leq M |x_n - x_{n-1}|.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$|x_n - X| \leq \frac{M}{1 - M} |x_n - x_{n-1}|. \quad (14)$$

ამგვარად, $|x_n - x_{n-1}|$ სხვაობით შეგვიძლია ვანვსაზღვროთ $|x_n - X|$ ცდომილება.

$$\text{კერძოდ, თუ } M \leq \frac{1}{2}, \text{ მაშინ } \frac{M}{1 - M} \leq 1.$$

ამის გამო მივიღებთ

$$|x_n - X| \leq |x_n - x_{n-1}|. \quad (15)$$

ამგვარად, თუ გვინდა ε სიზუსტით საძიებელი $x = \varphi(x)$ განტოლების ამონახსნის პოვნა, $M \leq \frac{1}{2}$, საჭიროა იმდენი იტერაცია მოვახდინოთ,

რომ $|x_n - x_{n-1}|$ გახდეს ε -ზე ნაკლები.

განვიხილოთ მაგალითი:

ამოვხსნათ განტოლება

$$x \lg x - 1,25 = 0 \quad (16)$$

უკანასკნელი ასე გადავწეროთ:

$$x = x(1 - \lg x) + 1,25. \quad (17)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ მოცემული განტოლების ამონახსნი მოთავსებულია $[2, 3]$ შუალედში. ამ შუალედში შევამოწმოთ კრებადობის პირობა:

$$\varphi(x) = x(1 - \lg x) + 1,25;$$

$$\varphi'(x) = 1 - \lg x - \lg e = 1 - \lg x - 0,4343 < 0,6 - \lg x.$$

პროცესის კრებადობისათვის საჭიროა:

$$|0,6 - \lg x| < 1.$$

ამ პირობას კი აკმაყოფილებს x -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $0,6 < \lg x < 1,6$. ჩვენთვის საჭირო შუალედში $[2, 3]$ ეს პირობა შესრულებულია.

(17) განტოლების ამონახსნის ნულოვან მიახლოებად მივიღოთ 1. გამოთვლების (9) ფორმულით ჩატარება მოგვცემს:

$$x_0 = 1;$$

$$x_1 = 1(1 - \lg 1) + 1,25 = 2,25;$$

$$x_2 = 2,25(1 - \lg 2,25) + 1,25 = 2,25(1 - 0,3522) + 1,25 = 2,708;$$

$$x_3 = 2,708(1 - \lg 2,708) + 1,25 = 2,708(1 - 0,4327) + 1,25 = 2,786;$$

$$x_4 = 2,786(1 - \lg 2,786) + 1,25 = 2,786(1 - 0,4449) + 1,25 = 2,797;$$

$$x_5 = 2,797(1 - \lg 2,797) + 1,25 = 2,797(1 - 0,4467) + 1,25 = 2,798;$$

$$x_6 = 2,798(1 - \lg 2,798) + 1,25 = 2,798(1 - 0,4469) + 1,25 = 2,798.$$

ამრიგად, (16) განტოლების ამონახსნია 2,798 სიზუსტით უკანასკნელ ციფრამდე.

§ 7. განტოლებათა სისტემის ამონახსნის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი

1. ორცვლადიანი ორი განტოლების სისტემა. განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

დავუშვათ, რომ ამ სისტემას აქვს განცალგებული ამონახსნი. ამონახსნის უხეში მიახლოება შეიძლება განისაზღვროს $f_1(x, y) = 0$ და $f_2(x, y) = 0$ ე. წ. მიახლოებითი წირების გადაკვეთის წერტილით.

ვთქვათ რაიმე საშუალებით განვსაზღვრეთ საძიებელი ამონახსნის მიახლოებითი (x_0, y_0) მნიშვნელობა.

(1) განტოლებათა სისტემა ასე წარმოვადგინოთ:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y), \\ y = \varphi_2(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

საძიებელი ამონახსნის შემდეგი მიახლოებითი მნიშვნელობანი განვსაზღვროთ დამოკიდებულებით

$$\begin{cases} x_n = \varphi_1(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n = \varphi_2(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{cases} \quad (3)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

თუ ეს პროცესი კრებადია

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Y$$

და დავუშვებთ (2) ფუნქციები უწყვეტია, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_1(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_2(x_{n-1}, y_{n-1})$$

ტოლობები მოგვცემს

$$X = \varphi_1(X, Y),$$

$$Y = \varphi_2(X, Y).$$

ე. ი. X და Y (2) განტოლებათა სისტემის ამონახსნია.

გამოვიყენოთ (3) პროცესის კრებადობის პირობა.

დავუშვათ, რომ $\varphi_1(x, y)$ და $\varphi_2(x, y)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ლაგრანჟის თეორემის პირობებს იმ D არეში, სადაც მოთავსებულია საძიებელი X და Y ამონახსნი.

შევადგინოთ სხვაობები:

$$X - x_n = \varphi_1(X, Y) - \varphi_1(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$Y - y_n = \varphi_2(X, Y) - \varphi_2(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

გამოვიყენოთ ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის ფორმულა, მივიღებთ

$$X - x_n = \frac{\partial \varphi_1(\xi_1, \eta_1)}{\partial x} (X - x_{n-1}) + \frac{\partial \varphi_1(\xi_2, \eta_2)}{\partial y} (Y - y_{n-1}),$$

$$Y - y_n = \frac{\partial \varphi_2(\xi_3, \eta_3)}{\partial x} (X - x_{n-1}) + \frac{\partial \varphi_2(\xi_4, \eta_4)}{\partial y} (Y - y_{n-1}),$$

სადაც $\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_4, \eta_4$ სათანადო საშუალო მნიშვნელობანია. ამ ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} |X - x_n| &\leq \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| |X - x_{n-1}| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| |Y - y_{n-1}|, \\ |Y - y_n| &\leq \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| |X - x_{n-1}| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| |Y - y_{n-1}|. \end{aligned} \quad (4)$$

თუ ამ ტოლობებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} |X - x_n| + |Y - y_n| &\leq \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| \right\} |X - x_{n-1}| + \\ &+ \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \right\} |Y - y_{n-1}|. \end{aligned} \quad (5)$$

ავიღოთ $\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|$ სიდიდეებიდან უდიდესი, რომელიც M -ით აღვნიშნოთ, მაშინ (5) უტოლობა მოგვცემს

$$|X - x_n| + |Y - y_n| \leq M \{|X - x_{n-1}| + |Y - y_{n-1}|\}. \quad (6)$$

მივიღოთ n -ს მნიშვნელობაში 1, 2, ..., მაშინ (6)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} |X - x_1| + |Y - y_1| &\leq M \{|X - x_0| + |Y - y_0|\}, \\ |X - x_2| + |Y - y_2| &\leq M \{|X - x_1| + |Y - y_1|\} \leq M^2 \{|X - x_0| + |Y - y_0|\} \\ &\text{და ა. შ.} \end{aligned}$$

$$|X - x_n| + |Y - y_n| \leq M^n \{|X - x_0| + |Y - y_0|\}. \quad (7)$$

ეს გვიჩვენებს, რომ, თუ $M < 1$, მაშინ (3) პროცესი კრებადია,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= X, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= Y. \end{aligned}$$

ამრიგად დავამტკიცეთ

თეორემა. თუ რაიმე ჩაკეტილ $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ არეში, სადაც მოთავსებულია

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x, y), \\ y &= \varphi_2(x, y) \end{aligned}$$

განტოლებათა სისტემის ერთადერთი ამონახსნი, მოცემული ფუნქციები $\varphi_1(x, y)$ და $\varphi_2(x, y)$ უწყვეტ-

ტია და აქვეთ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები, ამასთან უდიდესი

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \quad (8)$$

მნიშვნელობათაგან $M < 1$, მაშინ მიმდევრობანი $(x_n), (y_n)$,

$$\begin{aligned} x_n &= \varphi_1(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n &= \varphi_2(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, (x_n, y_n) \in D, \end{aligned}$$

კრებადია,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Y$$

და X და Y აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned} X &= \varphi_1(X, Y), \\ Y &= \varphi_2(X, Y). \end{aligned}$$

2. n ცვლადიანი n განტოლებათა სისტემა. ადვილი შესამჩნევია, რომ დამტკიცებული თეორემა განზოგადდება

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

განტოლებათა სისტემისათვის:

(9) განტოლებათა სისტემის $D\{(x_i) | a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$ არეში, სადაც მოთავსებულია ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი, მიმდევრობანი $(x_i^{(n)})$, $i = 1, 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned} x_i^{(n)} &= \varphi_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_m^{(n-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x_i^{(n)} &\in D, \quad \text{კრებადია,} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = X_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

თუ ამ D არეში ფუნქციები $\varphi_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, 2, \dots, m$, უწყვეტია და აქვეთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$, $i, k = 1, \dots, m$, და $M < 1$ სადაც M უდიდესია შემდეგ მნიშვნელობათაგან:

$$\sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \right|, \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \right|, \dots, \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} \right|. \quad (10)$$

დაეუბრუნდეთ (4) უტოლობას.

ვთქვათ, $|X - x_{n-1}|$ და $|Y - y_{n-1}|$ -დან უდიდესია $|X - x_{n-1}|$. მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} |X - x_n| &\leq \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \right\} |X - x_{n-1}|, \\ |Y - y_n| &\leq \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \right\} |X - x_{n-1}|, \end{aligned} \quad (11)$$

საიდანაც მიმდევრობითი ჩასმით მივიღებთ

$$\begin{aligned} |X - x_n| &\leq \bar{M}^n |X - x_0|, \\ |Y - y_n| &\leq \bar{M}^n |X - x_0|, \end{aligned} \quad (12)$$

სადაც $\bar{M}$ უდიდესია

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \text{ და } \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \text{ -დან.} \quad (13)$$

(12) დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ, თუ $\bar{M} < 1$, მაშინ (x_n) და (y_n) მიმდევრობანი კრებადია X და Y -კენ. ასე რომ, ზემოთ ჩამოყალიბებულ თეორემა ძალაში რჩება, თუ ნაცვლად (8) სიდიდეებისა ერთზე ნაკლებია (13) სიდიდეები.

ამის გამო (9) განტოლებათა სისტემისთვის ნაცვლად (10) სიდიდეებისა შეგვიძლია ავიღოთ

$$\sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} \right|, \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} \right|, \dots, \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} \right| \quad (14)$$

სიდიდეებიდან უდიდესი $\bar{M}$, თუ $\bar{M} < 1$, მაშინ ზემოთ ჩამოყალიბებულ თეორემა ძალაში დარჩება.

ამ შემთხვევაშიც n მიახლოების შედეგი ისევ (13, § 6) ფორმულით შეფასდება,

$$|X_i - x_i^{(n)}| \leq \frac{\bar{M}^n}{1 - \bar{M}} |x_k^{(1)} - x_k^{(0)}|, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (15)$$

სადაც $\bar{M}$ უდიდესია (14) სიდიდეებიდან, ხოლო $|x_k^{(1)} - x_k^{(0)}|$ უდიდესია $|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|$, $i = 1, 2, \dots, m$, სიდიდეებიდან. $|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}|$ სიდიდის საშუალებით ცდომილებანი $|x_i^{(n)} - X_i|$ შეფასდება (14, § 6) ფორმულით,

$$|x_i^{(n)} - X_i| \leq \frac{\bar{M}}{1 - \bar{M}} |x_k^{(n)} - x_k^{(n-1)}|, \quad (16)$$

სადაც $|x_k^{(n)} - x_k^{(n-1)}|$ უდიდესია $|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}|$, $i = 1, 2, \dots, m$, სიდიდეებიდან.

ასე რომ, თუ n იმდენად დიდი შევარჩიეთ, რომ

$$\frac{\bar{M}}{1 - \bar{M}} |x_k^{(n)} - x_k^{(n-1)}| < \varepsilon, \quad (17)$$

მაშინ $x_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, m$, მნიშვნელობა მოგვეცემს (9) განტოლებათა სისტემის X_i , $i = 1, 2, \dots, m$, ამონახსნის მნიშვნელობას ε სიზუსტით.

3. წრფივ განტოლებათა სისტემა. განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა $AX = B$,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (18)$$

დავუშვათ, რომ დიაგონალური კოეფიციენტები

$$a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

განესაზღვროთ (18) სისტემის პირველი განტოლებიდან x_1 , მეორე განტოლებიდან x_2 და ა. შ. მივიღებთ

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1m}x_m, \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2m}x_m, \\ &\vdots \\ x_m &= \beta_m + \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mm}x_m, \end{aligned} \quad (19)$$

სადაც

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{ii}}, \quad i \neq k; \quad a_{ii} = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, m. \quad (20)$$

(19) განტოლებათა სისტემიდან მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით მივიღებთ

$$\begin{aligned} x_i^{(n)} &= \beta_i + \alpha_{i1}x_1^{(n-1)} + \alpha_{i2}x_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_{im}x_m^{(n-1)}, \\ i &= 1, 2, \dots, m; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

სადაც

$$x_i^{(0)} = \beta_i.$$

(21) ფორმულებისათვის (14) გამოსახულება მოგვეცემს:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| &= |\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \dots + |\alpha_{im}| = M_i, \\ i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (22)$$

თუ

$$M = \max_i \{M_i\} < 1,$$

მაშინ (21) პროცესი კრებადია.

(20) ფორმულების საფუძველზე აღვილი წარმოსადგენია, რომ, თუ (18) ალგებრული განტოლებათა სისტემის დიაგონალური $|a_{ii}|$ კოეფიციენტები მეტია, ვიდრე თითოეული i -ური განტოლების კოეფიციენტების აბსოლუტურ მნიშვნელობათა ჯამი, მაშინ $M < 1$ და პროცესი მით უფრო სწრაფად შეიკრებიება, რაც უფრო M ნაკლებია 1-ზე.

n -ური მიახლოების შედეგი ისევ (15) ფორმულით შეფასდება

$$|X_i - x_i^{(n)}| \leq \frac{M^n}{1-M} |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (23)$$

სადაც $|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|$ უდიდესია $|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|$ სიდიდეებიდან.
 $|x_k^{(n)} - x_k^{(n-1)}|$ სიდიდის საშუალებით შეფასდება სიზუსტე:

$$|X_i - x_i^{(n)}| \leq \frac{M}{1-M} |x_k^{(n)} - x_k^{(n-1)}| < \varepsilon. \quad (24)$$

ამგვარად, თუ n იმდენად დიდი ავიღეთ, რომ (24) უტოლობა შესრულდა, მაშინ $x_i^{(n)}$ მოგვცემს X_i -ს მნიშვნელობას ε სიზუსტით.

(24) ფორმულებით მიღებული შეფასება მეტად გაზრდილია, სინამდვილეში კი, როგორც პრაქტიკული მაგალითები გვიჩვენებს, გაცილებით მცირეა.

ცხადია, თუ რომელიმე p მოქმედების დროს $x_i^{(p)}$ -ში შეცდომა მივიღეთ, ეს არ მოახდენს საბოლოო შედეგზე გავლენას, რადგანაც ეს $x_i^{(p)}$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც ახალი $x_i^{(0)}$ მნიშვნელობა. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია გაიზარდოს მოქმედებათა რიცხვი.

ზოგჯერ შეიძლება მოცემული წრფივი განტოლებათა სისტემა (18) შეიცვალოს ეკვივალენტური განტოლებათა სისტემით

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (25)$$

სადაც

$$\max_i \left\{ \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| \right\} = M < 1. \quad (26)$$

ამისათვის, დავუშვათ, რომ მოცემულ წრფივ განტოლებათა სისტემაში ერთი მაინც გვაქვს დადებითკოეფიციენტებიანი განტოლება ან, ვთქვათ, განტოლებათა რაიმე წრფივი კომბინაციით ამის მიღწევა შეიძლება.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია მივიღოთ, რომ (18) სისტემის პირველი განტოლება დადებითკოეფიციენტებიანი,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1.$$

გავამრავლოთ ამ განტოლების ორივე მხარე რაიმე λ რიცხვზე და სათანადოდ დავუმატოთ მეორე განტოლებას, მივიღებთ

$$(a_{21} + \lambda a_{11})x_1 + (a_{22} + \lambda a_{12})x_2 + \dots + (a_{2m} + \lambda a_{1m})x_m = b_1 + \lambda b_2. \quad (27)$$

ავიღოთ მეორე განტოლების უარყოფითი კოეფიციენტები $a_{2p}, a_{2q}, \dots, a_{2s}$, და ამ უარყოფითი კოეფიციენტებიდან ავარჩიოთ

$$l = \max \left\{ \frac{|a_{2p}|}{a_{1p}}, \frac{|a_{2q}|}{a_{1q}}, \dots, \frac{|a_{2s}|}{a_{1s}} \right\},$$

მაშინ

$$a_{2i} + \lambda a_{1i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

ამ λ მაგრავლის მნიშვნელობის ჩასმით (27) განტოლებაში, მივიღებთ განტოლებას, რომლის ყველა კოეფიციენტი არაუარყოფითი იქნება. ასეთი მოქმედება გავაგრძელოთ (18) განტოლებათა სისტემის ყველა დანარჩენ განტოლებებზე.

ამრიგად, ზოგჯერ შეგვიძლია, ავიღოთ ისეთი განტოლებათა სისტემა, რომლის ყველა კოეფიციენტი დადებითია,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \quad a_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, m \quad (28)$$

ნაცვლად (28) განტოლებათა სისტემისა ავიღოთ მისი ეკვივალენტური განტოლებათა სისტემა

$$x_i = x_i - \lambda (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m - b_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (29)$$

სადაც

$$\lambda = \frac{1}{P}, \quad P = \max_i \left\{ \sum_{k=1}^m a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m \right\} \quad (30)$$

ცხადია,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - \lambda (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m - b_i)) = \\ &= 1 - \lambda \sum_{k=1}^m a_{ik} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

ეს პირობა კი გვაძლევს, რომ მიმდევრობანი $(x_i^{(n)})$, რომელიც მიიღება (29) განტოლებათა სისტემიდან, კრებადია,

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - \lambda (a_{i1}x_1^{(n)} + a_{i2}x_2^{(n)} + \dots + a_{im}x_m^{(n)} - b_i), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

შადაც შეგვიძლია ავიღოთ

$$x_i^{(0)} = b_i \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ნაცვლად (26) პირობისა შეგვიძლია ავიღოთ

$$\max_k \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, \dots, m \right\} = M < 1 \quad (31)$$

და, მაშინ (30) პირობა უნდა შევცვალოთ პირობით

$$\lambda = \frac{1}{P}, \quad P = \max_k \left\{ \sum_{i=1}^m a_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (32)$$

განვიხილოთ მაგალითი.

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} 30x_1 - 7x_2 - 9x_3 &= 8, \\ -3x_1 + 14x_2 - 9x_3 &= 0, \\ -3x_1 + 7x_2 + 27x_3 &= 3. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ეს განტოლებათა სისტემა ასე გადავწეროთ

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0,2(6) + 0,2(3)x_2 + 0,3x_3, \\ x_2 &= 0,2(142\ 857)x_1 + 0,6(428\ 571)x_3, \\ x_3 &= 0, (1) + 0, (1)x_1 - 0, (259)x_2. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

(34) განტოლებათა სისტემაში კოეფიციენტები 8 ათწილადი ნიშნით დავტოვოთ. მივიღოთ

$$x_1^{(0)} = 0,26\ 666\ 667$$

$$x_2^{(0)} = 0,$$

$$x_3^{(0)} = 0,11\ 111\ 111$$

გამოთვლებისათვის შევადგინოთ გამოსახულებანი:

$$x_i^{(n)} = \beta_i + y_i^{(n)}, \quad y_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

შევადგინოთ ცხრილი (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

k	k	1	2	3	4
1.	α_{1k}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_1
2.	α_{2k}	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_2
3.	α_{3k}	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β_3
4. (n)	$x_k^{(n)}$	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	
5.	$\alpha_{1k} x_k^{(n)}$	$\alpha_{11} x_1^{(n)}$	$\alpha_{12} x_2^{(n)}$	$\alpha_{13} x_3^{(n)}$	$y_1^{(n+1)}$
6.	$\alpha_{2k} x_k^{(n)}$	$\alpha_{21} x_1^{(n)}$	$\alpha_{22} x_2^{(n)}$	$\alpha_{23} x_3^{(n)}$	$y_2^{(n+1)}$
7.	$\alpha_{3k} x_k^{(n)}$	$\alpha_{31} x_1^{(n)}$	$\alpha_{32} x_2^{(n)}$	$\alpha_{33} x_3^{(n)}$	$y_3^{(n+1)}$
8, (n+1)	$x_k^{(n+1)} = \beta_k + y_k^{(n+1)}$	$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$	$x_3^{(n+1)}$	

1-ლი ცხრილის პირველ სამ სტრიქონში ამოწერილია მოცემული განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები. მე-4 სტრიქონში x_k -ს n -ური მიახლოების მნიშვნელობანი, მე-5 სტრიქონში ჩაწერილია $\alpha_{1k} x_k^{(n)}$ — პირველ სტრიქონში მოთავსებულ კოეფიციენტთა სათანადოდ $x_k^{(n)}$ -ზე ნამრავლების მნიშვნელობანი. მე-5 სტრიქონის გასწვრივ, მე-4 სვეტში, მოთავსებულია ამ სტრიქონში მოთავსებულ სიდიდე-

თა ჯამი $y_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x_k^{(n)}$. ასევე მე-6 სტრიქონში და მე-7 სტრიქონში

მოთავსებულია $\alpha_{2k} x_k^{(n)}$ და $\alpha_{3k} x_k^{(n)}$ -ის მნიშვნელობანი, ხოლო სტრიქონის ბოლოში $y_2^{(n+1)}$ და $y_3^{(n+1)}$ -ის მნიშვნელობანი. მე-8 სტრიქონში მოთავსებულია $x_k^{(n+1)} = \beta_k + y_k^{(n+1)}$. მე-9 სტრიქონში მოთავსდება მე-5 სტრიქონის ანალოგიური სიდიდეები და ა. შ.

(34) განტოლებათა სისტემისთვის 1-ელი ცხრილი მიიღებს მე-2 ცხრილის სახეს.

ცხრილი 2

$k \backslash N(n)$	1	2	3	4
1	0	0,23333333	0,30000000	0,26666667
2	0,21428571	0	0,64285714	0,00000000
3	0,11111111	-1,25925926	0	0,11111111
4(0)	0,26666667	0,00000000	0,11111111	
5	0	0,00000000	0,03333333	0,03333333
6	0,05714286	0	0,07142857	0,12857143
7	0,02962963	0,00000000	0	0,02962963
8(1)	0,30000000	0,12857143	0,14074074	
9	0	0,03000000	0,04222222	0,07222222
10	0,06428571	0	0,09047619	0,15476190
11	0,03333333	-0,03333333	0	0,00000000
12(2)	0,33888889	0,15476190	0,11111111	
13	0	0,03611111	0,03333333	0,06944444
14	0,07261905	0	0,07142857	0,14404762
15	0,03765432	-0,04012346	0	-0,00246914
16(3)	0,33611111	0,14404762	0,10864197	
17	0	0,03361111	0,03295295	0,06656406
18	0,07202381	0	0,06984126	0,14186507
19	0,03734466	-0,03734568	0	0,00000000
20(4)	0,33323073	0,14186507	0,11111111	
21	0	0,03310185	0,03333333	0,06643518
22	0,07140325	0	0,07142875	0,14283182
23	0,03702564	-0,03677983	0	0,00024581
24(5)	0,33310185	0,14283182	0,11135692	
25	0	0,03332742	0,03334708	0,06673450
26	0,07137768	0	0,07144437	0,14280205
27	0,03701132	-0,03703047	0	0,00001915

ცხრილი 2 გაგრძელება

$k \backslash N(n)$	1	2	3	4
28(6)	0,33340117	0,14280205	0,11109196	
29	0	0,03332048	0,03332759	0,06664807
30	0,07144311	0	0,07141626	0,14285937
31	0,03704457	-0,03702275	0	0,00002182
32(7)	0,33331474	0,14285937	0,11113293	
33	0	0,03333385	0,03333988	0,06667373
34	0,07142459	0	0,07144260	0,14285719
35	0,03703497	-0,03703761	0	-0,00000264
36(8)	0,33334040	0,14285719	0,11110847	
37	0	0,03333334	0,03333254	0,06666588
38	0,07143008	0	0,07142687	0,14285695
39	0,03703782	-0,03703705	0	0,00000077
40(9)	0,33333255	0,14285695	0,11111188	
41	0	0,03333329	0,03333356	0,06666685
42	0,07142840	0	0,07142875	0,14285697
43	0,03703695	-0,03703699	0	-0,00000004
44(10)	0,33333352	0,14285697	0,11111107	

შევაფასოთ, თუ რა სიზუსტით მივიღეთ ამონახსნები

$$x_1 = 0,33 \ 333 \ 4;$$

$$x_2 = 0,14 \ 285 \ 7;$$

$$x_3 = 0,11 \ 111 \ 1.$$

(35)

ამისათვის გამოვიყენოთ (24) ფორმულა

$$|X_i - x_i^{(n)}| \leq \frac{M}{1-M} |x_k^{(n)} - x_k^{(n-1)}|_{\max},$$

სადაც

$$M = \max_i [|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + |\alpha_{i3}|], \quad i=1, 2, 3.$$

ჩვენი შემთხვევისათვის

$$M \approx 0,85 \ 714 \ 288 \approx 0,86$$

$$n=10, |x_k^{(10)} - x_k^{(9)}|_{\max} \leq 0,00 \ 000 \ 097 < 10^{-6}.$$

გვექნება

$$|x_i - x_i^{(10)}| < \frac{0,86}{1-0,86} \cdot 10^{-6} \leq \frac{0,86}{0,14} \cdot 10^{-6}, \ i=1, 2, 3,$$

საიდანაც

$$|x_i - x_i^{(10)}| < 6,2 \cdot 10^{-6}, \ i=1, 2, 3.$$

ამ ცდომილება გაზრდილია. სინამდვილეში კი ცდომილება შედარებით ნაკლებია.

მართლაც, თუ (35) ამონახსნებს (33) განტოლებათა სისტემის ზუსტ ამონახსნებს

$$x_1 = 0,33 \ 333 \ 333 \dots,$$

$$x_2 = 0,14 \ 285 \ 714 \dots,$$

$$x_3 = 0,11 \ 111 \ 111 \dots$$

შევიდარებთ, მივიღებთ, რომ (35) ამონახსნებში ცდომილება ბოლო ციფრის თანრიგის ერთეულის ნახევარზე ნაკლებია.

4. წრფივი განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზოგადი განხილვა. ავიღოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა¹

$$Ax=b, \quad (36)$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} =$$

$$= [x_1, x_2, \dots, x_m]^T = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

ნიშანი T მატრიცის ტრანსპონირების მაჩვენებელია, x მატრიცა — სვეტია. განტოლებათა სისტემა (36) ასე გარდაექმნათ

$$x = Bx + c. \quad (37)$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი მოვძებნოთ იტერაციის მეთოდით

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c, \quad (38)$$

სადაც

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}), \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_m).$$

ცხადია, განტოლებათა ყოველი სისტემა

$$x = x - D(Ax - b) \quad (39)$$

ექვივალენტურია (36) განტოლებათა სისტემისა, თუ $\det D \neq 0$. (39) განტოლებათა სისტემა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ (37) სახით. რისთვისაც, საკმარისია, ავიღოთ

$$E - DA = B,$$

საიდანაც

$$D = (E - B)A^{-1},$$

E — ერთეული მატრიცაა.

გავიხსენოთ მოცემულ x ვექტორის ნორმაზე დაქვემდებარებული A მატრიცის ნორმის განსაზღვრა (თავი IX, § 3),

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

თუ x -ის ნორმის განსაზღვრავთ დამოკიდებულებით

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|,$$

მაშინ

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \max_i \left| \sum_{k=1}^m a_{ik} x_k \right| \leq \max_i \left(\sum_k |a_{ik}| \max_k |x_k| \right) \leq \\ &\leq \max_i \left(\sum_k |a_{ik}| \right) \cdot \max_k |x_k| = \max_i \left(\sum_k |a_{ik}| \right) \cdot \|x\|_1, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_i \left(\sum_k |a_{ik}| \right). \quad (40)$$

ეთქვას, $\max_i \left(\sum_k |a_{ik}| \right)$ აღწევს $i=l$ -თვის. ვექტორისათვის

$$x = (\text{sign } a_{l1}, \text{sign } a_{l2}, \dots, \text{sign } a_{lm})$$

გვექნება $\|x\|=1$, მაშინ

$$\|Ax\|_1 \geq \left| \sum_k a_{lk} x_k \right| = \max_i \left(\sum_k |a_{ik}| \right) \|x\|_1,$$

საიდანაც

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \geq \max_i \left(\sum_k |a_{ik}| \right). \quad (41)$$

¹ Н. С. Бахвалов, Численные методы, I, М., 1973, гл. VI.

მიღებული (40) და (41) დამოკიდებულებებიდან დავასკვნით

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{k=1}^m |a_{ik}| \right). \quad (42)$$

სწორედ ასე განესაზღვრეთ (22) დამოკიდებულებით წრფივი განტოლებათა სისტემის (21) იტერაციის კრებადობის ნიშანი, $\|A\|_1 = C < 1$.

თუ x ვექტორის ნორმას განესაზღვრავთ დამოკიდებულებით

$$\|x\|_2 = \sum_{i=1}^m |x_i|,$$

მაშინ

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2 &= \sum_i \left| \sum_{k=1}^m a_{ik} x_k \right| \leq \sum_i \sum_k |a_{ik}| \cdot |x_k| = \\ &= \sum_k \left(\sum_i |a_{ik}| \right) |x_k| \leq \max_k \left(\sum_i |a_{ik}| \right) \sum_k |x_k| = \\ &= \max_k \left(\sum_i |a_{ik}| \right) \|x\|_2, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \max_k \left(\sum_i |a_{ik}| \right). \quad (43)$$

ვთქვათ, $\max_k \left(\sum_i |a_{ik}| \right)$ აღწევს $k=L$ -სათვის. იმ x ვექტორისათვის,

რომლის მხოლოდ ერთი x_L კოორდინატი განსხვავდება ნულისაგან, გვექნება

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2 &= \sum_i \left| \sum_k a_{ik} x_k \right| = \sum_i |a_{iL}| |x_L| = \left(\sum_i |a_{iL}| \right) |x_L| = \\ &= \max_k \left(\sum_i |a_{ik}| \right) \sum_k |x_k| = \\ &= \max_k \left(\sum_i |a_{ik}| \right) \cdot \|x\|_2. \end{aligned} \quad (44)$$

მიღებული (43) და (44) დამოკიდებულებებიდან დავასკვნით

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq k \leq m} \left(\sum_{i=1}^m |a_{ik}| \right). \quad (45)$$

სწორედ ასეთი შეფასება გვექნება (10) გამოსახულებაში, $\|A\|_2 = M < 1$,

$$\begin{aligned} \max_k \left(\sum_i \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| \right) &= \max_k \left(\sum_i \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{im} x_m) \right| \right) = \\ &= \max_k \left(\sum_i |a_{ik}| \right). \end{aligned}$$

ასლა x ვექტორის ნორმა განესაზღვროთ დამოკიდებულებით

$$\|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i|^2} = \sqrt{(x, x)}.$$

მაშინ

$$\|A\|_3 = \sup_x \frac{\|Ax\|_3}{\|x\|_3} = \sup_x \sqrt{\frac{(Ax, Ax)}{(x, x)}} = \sqrt{\sup_x \frac{(Ax, Ax)}{(x, x)}}. \quad (46)$$

ვთქვათ, A ნამდვილკოეფიციენტებიანი სიმეტრიული მატრიცაა, $a_{ik} = a_{ki}$, მაშინ A მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი ნამდვილია (იხ. ნაწ. I, თავი XII, § 4, $n=1$, თ. 1, თ. 2; $n=3$, თ. 3; $n=4$, თ. 4, თ. 5, თ. 6). ვისარგებლოთ შემდეგი თეორემით (აღნიშნული მე-4 თეორემიდან).

ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმა (Ax, x) ნებისმიერი $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორისათვის აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\mu(x, x) \leq (Ax, x) \leq M(x, x), \quad (47)$$

სადაც μ უმცირესი საკუთრივი რიცხვია A მატრიცისა, ხოლო M — უდიდესი საკუთრივი რიცხვი.

თუ A მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია,

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

მაშინ A მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი დადებითია, $\lambda_i(A) > 0$,

$$0 < \mu \leq \lambda_i(A) \leq M < \infty. \quad (48)$$

მოვიგონოთ, რომ A მატრიცის პერმიტის შეუღლებული A^* მატრიცა განისაზღვრება შემდეგი დამოკიდებულებით: $A^* = [a_{ik}^*]$, $i, k = 1, 2, \dots, m$; $a_{ik}^* = \bar{a}_{ki}$, $i, k = 1, 2, \dots, m$; სადაც $\bar{a}_{ik}$ ელემენტი a_{ki} -ის შეუღლებული (კომპლექსური) რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ნამდვილელემენტებიანი A მატრიცისათვის ნამრავლი $A^*A = [c_{ik}]$, $i, k = 1, 2, \dots, m$, სიმეტრიული მატრიცაა, $c_{ik} = c_{ki}$. მართლაც,

$$c_{ik} = a_{i1}^* a_{1k} + a_{i2}^* a_{2k} + \dots + a_{im}^* a_{mk} = a_{1i} a_{1k} + a_{2i} a_{2k} + \dots + a_{mi} a_{mk},$$

$$c_{ki} = a_{k1}^* a_{1i} + a_{k2}^* a_{2i} + \dots + a_{km}^* a_{mi} = a_{1k} a_{1i} + a_{2k} a_{2i} + \dots + a_{mk} a_{mi}.$$

ამ ელემენტების შედარებით მივიღებთ $c_{ik} = c_{ki}$.

აღვიღი წარმოსადგენია, რომ სკალარული ნამრავლი

$$(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) > 0, x \neq 0. \quad (49)$$

ამის გამო A^*A მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი დადებითია, $\lambda(A^*A) > 0$. ზემოთ მიღებული (47) დამოკიდებულება ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\mu \leq \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leq M. \quad (50)$$

ამ ახსნა-განმარტების შემდეგ A მატრიცის (46) ნორმა ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq m} \lambda_i(A^*A)}. \quad (51)$$

სწორედ ასე იყო განსაზღვრული A მატრიცის ნორმა $\|A\|_2$ მე-9 თავის მე-3 პარაგრაფში. აღვნიშნოთ მატრიცის (51) ნორმის შესანიშნავი კერძო შემთხვევა. თუ A სიმეტრიული მატრიცაა, მაშინ $\lambda(A^*A) = \lambda(A^2) = |\lambda(A)|^2$ ამის გამო

$$\|A\|_2 = \max_i |\lambda_i(A)|.$$

ახლა დავამტკიცოთ

თეორემა. თუ $\|B\| < 1$, მაშინ

$$x = Bx + C \quad (37)$$

განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და მიმდევრობა

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + C, \quad n = 0, 1, \dots \quad (38)$$

კრებადია გეომეტრიული პროგრესიის კრებადობის სიჩქარით (კრებადობის საკმარისი ნიშანი).

დამტკიცება. (37) ტოლობიდან გვექნება

$$\|x\| \leq \|B\| \cdot \|x\| + \|C\|,$$

საიდანაც

$$\|x\| (1 - \|B\|) \leq \|C\|.$$

აქედან მივიღებთ

$$\|x\| \leq (1 - \|B\|)^{-1} \|C\|.$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას $x = Bx$ აქვს ერთი ამონახსნი და ეს ამონახსნი $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ და, მაშასადამე, (37) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ვთქვათ, (37) განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნი X , მაშინ (37) და (38) განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ

$$r^{(n+1)} = Br^{(n)}, \quad (52)$$

სადაც $r^{(n)} = x^{(n)} - X$. ამ (52) უტოლობიდან ადვილად მივიღებთ

$$r^{(n)} = B^n r^{(0)},$$

საიდანაც

$$\|r^{(n)}\| \leq \|B\|^n \|r^{(0)}\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

რადგანაც $\|B\| < 1$. მიღებული დამოკიდებულება ჩამოყალიბებულ თეორემას ამტკიცებს.

დავაკვირდეთ (52) გამოსახულებას. იგი გვიჩვენებს, რომ (38) პროცესი კრებადია, თუ B მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი 1-ზე ნაკლებია.

ახლა განვიხილოთ $Ax = b$ განტოლებათა სისტემა. ცხადია, ეს სისტემა ეკვივალენტურია შემდეგი განტოლებათა სისტემისა

$$x = x - \alpha(Ax - b), \quad \alpha \neq 0. \quad (53)$$

თუ (53) განტოლებათა სისტემას შევადარებთ (37) განტოლებათა სისტემას, გვექნება

$$B = E - \alpha A, \quad (54)$$

საიდანაც

$$\max_i |\lambda_i(B)| = \max_i |1 - \alpha \lambda_i(A)|.$$

განვიხილოთ ის კერძო შემთხვევა, როცა ყველა $\lambda_i(A) > 0$. ცხადია, $\lambda_i(A)$ მნიშვნელობა მეტად იშვიათ შემთხვევაშია ცნობილი, მაგრამ ტიპური ის შემთხვევა, როცა A მატრიცის საკუთრივი რიცხვთა საზღვრები შეიძლება გავიგოთ. მართლაც, $Ax = \lambda x$ -დან გვექნება

$$\|A\| \cdot \|x\| \geq \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

ამ დამოკიდებულებებიდან დავასკვნით: A მატრიცის ნებისმიერი $\lambda(A)$ საკუთარი რიცხვის მოდული არ აღემატება A მატრიცის ნებისმიერ ნორმას,

$$|\lambda(A)| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

ამოვხსნათ (53) განტოლებათა სისტემა იტერაციის მეთოდით,

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \alpha(Ax^{(n)} - b). \quad (55)$$

კრებადობის სიჩქარე დამოკიდებულია

$$\rho(\alpha) = \max_{\mu \leq \lambda \leq M} |1 - \alpha\lambda| \quad (56)$$

სიდიდეზე, სადაც μ და M სიდიდეები (48) პირობიდანაა განსაზღვრული. $\min_{\alpha} \rho(\alpha)$ -ს შეფასებისათვის დავაკვირდეთ α -ს. თუ $\alpha \leq 0$, მაშინ $\rho(\alpha) \geq 0$.

მაგრამ $0 < \alpha \leq M-1$ -თვის ფუნქცია $1 - \alpha\lambda$ არაუარყოფითია და მონოტონურად მცირდება $[\mu, M]$ სეგმენტზე. ამიტომ $\rho(\alpha) = 1 - \alpha\mu$, თუ $M^{-1} < \alpha$, მაშინ $1 - \alpha M$ სიდიდე უარყოფითი ხდება და მისი მოდული α -ს ზრდასთან ერთად იზრდება. ცხადია, დადგება ისეთი მომენტი, რომ $\alpha = \alpha_0$ -თვის $1 - \alpha_0\mu = -(1 - \alpha_0 M)$ და, მაშინ $\rho(\alpha_0) = |1 - \alpha_0\mu|$. თუ $\alpha < \alpha_0$, მაშინ

$$\rho(\alpha) = 1 - \alpha\mu > 1 - \alpha_0\mu = \rho(\alpha_0), \text{ თუ } \alpha > \alpha_0, \text{ მაშინ } \rho(\alpha) \geq |1 - \alpha M| = M\alpha - 1 \geq M\alpha_0 - 1 = \rho(\alpha_0).$$

ამრიგად, $\alpha = \alpha_0$ მნიშვნელობა ისეთია, რომ $\rho(\alpha)$ დებულობს უმცირეს მნიშვნელობას. განვსაზღვროთ α_0 განტოლებიდან

$$1 - \alpha_0\mu = -(1 - \alpha_0 M).$$

გვექნება

$$\alpha_0 = \frac{2}{M+\mu}, \quad \rho(\alpha_0) = 1 - \frac{2\mu}{M+\mu} = \frac{M-\mu}{M+\mu}. \quad (57)$$

ამრიგად, ვაჩვენეთ, რომ (55) პროცესი კრებადია, თუ A მატრიცა სიმეტრიულია და დადებითად განსაზღვრული — $A > 0$.

საზოგადოდ, ყოველი $Ax = b$ სისტემა, $\det A \neq 0$, შეიძლება მივიყვანოთ ისეთ სისტემაზე, რომლის კოეფიციენტთა მატრიცა დადებითია. ამისათვის საკმარისია, $Ax = b$ განტოლების ორივე მხარე მარცხნიდან გავამრავლოთ A^* მატრიცაზე. მივიღებთ

$$A^*Ax = A^*b, \quad (58)$$

სადაც A^*A მატრიცა სიმეტრიულია და დადებითად განსაზღვრული

$$(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) > 0, \quad x \neq 0.$$

მაგრამ განტოლებათა სიმეტრიზაცია — (58) სიმეტრიულ განტოლებათა სისტემაზე მიყვანა, ყოველთვის არ აღემატება განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შესაძლებლობას. (58) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტები საკმარისად იზრდება და განტოლებათა სისტემაში ნულოვანი კოეფიციენტები თითქმის არ გვხვდება.

§ 8. გრაფიკული მეთოდი

1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმი. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია. ჩვენთვის ცნობილია ორი ცვლადის $z = f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნის ხერხი. (იხ. ნაწ. 1, თავი XVI, § 7). ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობიდან,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

განვსაზღვრავთ (x_0, y_0) კრიტიკულ წერტილს. კრიტიკული წერტილის მიდამოში $f(x, y)$ ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის ფორმულით

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 \right)_{(x_0, y_0)} \quad (2)$$

სიდიდეები h და k იმდენად მცირე შეგვიძლია ავიღოთ, რომ h^2 , hk , k^2 -ზე მაღალი რიგის სიდიდეები უგულებელვყოთ. ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 \right)_{(x_0, y_0)}. \quad (3)$$

მიღებული კვადრატული ფორმა, თუ დადებითად განსაზღვრულია (x_0, y_0) წერტილში, რისთვისაც საკმარისია

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{(x_0, y_0)} > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right)_{(x_0, y_0)} > 0, \quad (4)$$

მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში აქვს მინიმუმი. თუ კვადრატული ფორმა უარყოფითად განსაზღვრულია, მაშინ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი (x_0, y_0) წერტილში. თუ კვადრატული ფორმა ნიშანს იცვლის, მაშინ ფუნქციას აქვს მინიმუმი — (x_0, y_0) წერტილი უნაგირა წერტილია. თუ (2) გამოსახულებაში მეორე რიგის წარმოებულები ნულის ტოლია, უნდა ავიღოთ მაღალი რიგის წარმოებულები და მაღალი რიგის წარმოებულებით უნდა განვსაზღვროთ ფუნქციის ექსტრემუმი. ამ შემთხვევას არ განვიხილავთ, რადგანაც ეს შემთხვევა ახალს არაფერს იძლევა. თუ

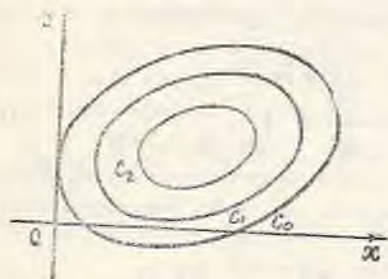
¹ Н. С. Бахвалов, Числительные методы, М. 1973;
Н. Н. Калиткин, Численные методы, М. 1978;
Л. И. Турчак, Основы численных методов, 1987.

$f(x, y)$ ისეთია, რომ კვადრატული ფორმა (3) ნიშანს არ იცვლის, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციის დონის წირები, საზოგადოდ, ელიფსებია, $f(x, y) = c_1$. ამასთან კვადრატული ფორმა მცირე მნიშვნელობას ელიფსის შიგნით ღებულობს (ნახ. 12). თუ $f(x, y)$ ფუნქცია გლუვია — მეორეის უწყვეტად დიფერენცირებადია, მინიმუმის წერტილში ფუნქცია მცირედ იცვლება, როდესაც ცვლადები x და y შეიძლება საკმარისად იცვლებოდეს. ამასთან ისიც შესაძლებელია, რომ ფუნქციის განსაზღვრის მცირე შიდა-მოში რამდენიმე მაქსიმუმის, მინიმუმისა და უნაგირა წერტილი ჰქონდეს. მაგალითად,

$$f(x, y) = (1 + \sin^2 x)(1 + \sin^2 y)$$

ფუნქციის მინიმუმის წერტილებია $(\pi k, \pi l)$, ხოლო მაქსიმუმის

$(\pi k + \frac{\pi}{2}, \pi l + \frac{\pi}{2})$, $k, l \in \mathbb{Z}$ (ნახ. 13). ამის გამო ფუნქციის ექსტრემუმს



ნახ. 12



ნახ. 13

შესწავლა დიდ ყურადღებას მოითხოვს. ფუნქციის მინიმუმის მოძებნის ყველა ეფექტურ მეთოდს მიეყვარა ისეთი წირის — მინიმიზაციის წირის აგებაზე, რომლის გასწვრივ ფუნქციის მნიშვნელობანი მცირდება. მინიმუმის მოძებნის მეთოდები მხოლოდ იმით განსხვავდებიან ერთიმეორისაგან, რომ სხვადასხვა ბერბით აგებენ ფუნქციის მინიმიზაციის წირებს.

ფუნქციის კრიტიკული წერტილის მონახვისათვის უნდა ამოიხსნას (1) განტოლებათა სისტემა. საზოგადოდ, (1) განტოლებათა სისტემას ამოიხსნა ძნელია. ამიტომ მივმართავთ მიახლოებით მეთოდებს. მაგალითად,

$\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციები წარმოვადგინოთ წრფივი ფუნქციებით ან გო-

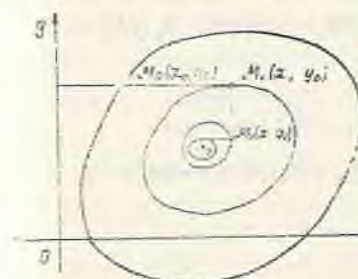
მოვიყენოთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი და სხვ. მაგრამ პრაქტიკულ ამოცანებში ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობათა მიმდევრობისი კრებადია იმდენად მცირე მიდამოში, რომ ამ მიდამოში საწყისი წერტილის არჩევა ყოველთვის არ შეგვიძლია. ამ შემთხვევაში უფრო ეფექტურია ფუნქციის მინიმუმის წერტილს მივუახლოვდეთ კოორდინატთა ღერ-

ძების მიმართულებით. ამ მეთოდს დაშვების — დაქანების (დაწევის) მეთოდი ეწოდება. განვიხილოთ ეს მეთოდი დაწერის მეთოდით.

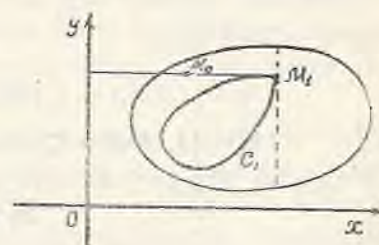
ავიღოთ $f(x, y)$ ფუნქციის განსაზღვრის G არიდან რაღაც (x_0, y_0) წერტილი. $f(x, y)$ ფუნქციაში y -ს მივცეთ y_0 -ის მნიშვნელობა და განვიხილოთ $f_1(x) = f(x, y_0)$ ფუნქცია. ვიპოვოთ ამ $f_1(x)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. ვთქვათ, ეს წერტილია x_1 . ასე რომ, $f(x, y)$ ფუნქცია Ox ღერძის პარალელურ $y = y_0$ წრფეზე მინიმუმს ღებულობს (x_1, y_0) წერტილში (ნახ. 14). ახლა განვიხილოთ $f_2(y) = f(x_1, y)$ ფუნქცია და ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. ვთქვათ, ეს წერტილია y_1 . ფუნქცია $f(x, y)$ წრფეზე $x = x_1$ ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას $f(x_1, y_1)$. ამით დამთავრდა ერთი შემოვლა — ერთი ციკლი. გამოვიდით (x_0, y_0) წერტილიდან და მივედით (x_1, y_1) წერტილში. ახლა გამოვიდით (x_1, y_1) წერტილიდან. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x, y_1)$. ამ ფუნქციის მინიმუმში განვსაზღვროთ. ვთქვათ, $f(x, y_1)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილია x_2 . განვიხილოთ $f(x_2, y)$ ფუნქცია. ვთქვათ, ამ ფუნქციის მინიმუმის წერტილია y_2 . ცხადია, $f(x, y)$ ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას $y = y_2$ წრფეზე ღებულობს (x_2, y_2) წერტილში და ა. შ. მივიღეთ მიმდევრობა $(f(x_n, y_n))$, სადაც

$$f(x_0, y_0) > f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2) > \dots \quad (5)$$

ის წერტილი, რომლის შემდეგ $f(x, y)$ ფუნქცია აღარ ღებულობს წინა მნიშვნელობაზე ნაკლებ მნიშვნელობას, უნდა იყოს $f(x, y)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. ყოველ დაქანებაზე $f(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობა არ იზრდება, $f(x_1, y_1) \geq f(x_{1+1}, y_{1+1})$, მაგრამ გვეჩვენა ტოლობა რომელიმე წერტილში? მივალწევთ აღნიშნული მოქმედებით მინიმუმს? ეს, რასაკვირველია, დამოკიდებულია თვით ფუნქციაზე და საწყისი (x_0, y_0) წერტილის არჩევაზე. მე-15 ნახაზზე ნაჩვენებია, რომ, თუ გამოვალთ (x_1, y_1)



ნახ. 14



ნახ. 15

წერტილიდან $f(p)$ -ის მნიშვნელობა მეტია წინა მნიშვნელობაზე. დონის-წირებია $f = c_0, f = c_1, c_0 > c_1$. $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე გატარებული $x = x_1$ წრფე არ მიგვიყვანს $f(x, y)$ ფუნქციის მინიმუმზე. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია-

გლუვია, (5) მიმდევრობა კრებადია. ეს იგივეა, რომ $(f_x(x_n, y_n))$ და $(f_y(x_n, y_n))$ მიმდევრობანი კრებადია:

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &> f_x(x_1, y_1) > \dots \\ f_y(x_0, y_0) &> f_y(x_1, y_1) > \dots \end{aligned} \quad (6)$$

ჩვენი მიზანია, სწორედ (6) მიმდევრობის კრებადობის დამტკიცება. ვთქვათ, G არეში, სადაც განსაზღვრულია $f(x, y)$ ფუნქცია, (3) კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია. ამისათვის საკმარისია, რომ G არეში სრულდებოდეს

$$f_{xx}(x, y) \geq A > 0, f_{yy}(x, y) \geq C > 0, |f_{xy}(x, y)| \leq B, AC > B^2. \quad (7)$$

აქედან, ცხადია,

$$f_{xx}B \geq A|f_{xy}|, \quad (8)$$

$$f_{yy}B \geq C|f_{xy}|. \quad (9)$$

განვიხილოთ ერთი შემოვლა $M_0 M_1 M_2$ (ნახ. 14).

დავუშვათ,

$$|f_x(M_0)| = \xi_1 \neq 0, f_y(M_0) = 0,$$

$$|f_y(M_1)| = \eta \neq 0, f_x(M_1) = 0.$$

ცხადია,

$$\xi_1 = |f_x(M_0)| = |f_x(M_0) - f_x(M_1)| = f_{xx}(\bar{M}_0) |x_1 - x_0|,$$

$$\eta = |f_y(M_1)| = |f_y(M_0) - f_y(M_1)| = |f_{xy}(\bar{M}_0)| \cdot |x_1 - x_0|,$$

სადაც $f_{xx}(\bar{M}_0)$ საშუალო მნიშვნელობაა $[M_0 M_1]$ მონაკვეთზე. თუ გამოვალთ (8) უტოლობიდან, გვექნება

$$B\xi_1 \geq A\eta. \quad (10)$$

ახლა ავიღოთ M_1, M_2 წერტილები:

$$f_x(M_1) = 0, |f_x(M_2)| = \xi_2 \neq 0, |f_y(M_1)| = \eta \neq 0, f_y(M_2) = 0.$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\eta = |f_y(M_1) - f_y(M_2)| = f_{yy}(\bar{M}_1) |y_0 - y_1|,$$

$$\xi_2 = |f_x(M_2) - f_x(M_1)| = |f_{xy}(\bar{M}_1)| \cdot |y_0 - y_1|.$$

გამოვიყენოთ (9) უტოლობა, მივიღებთ

$$B\eta > E\xi_2 \quad (11)$$

(10) და (11) უტოლობების შედეგად გვექნება

$$C\xi_2 \leq B\eta, A\eta \leq B\xi_1,$$

საიდანაც

$$\frac{C}{B}\xi_2 \leq \frac{B}{A}\xi_1,$$

ანუ

$$\xi_2 \leq q\xi_1,$$

სადაც

$$q = \frac{B^2}{AC} < 1.$$

ამრიგად, ერთი შემოვლით $M_0 M_1 M_2$ f_x მცირდება q -ჯერ, $q < 1$ სრულიად ასევე, თუ გამოვალთ M_1 წერტილიდან $M_1 M_2 M_3$ შემოვლაზე f_y -იც შემცირდება q -ჯერ, $q < 1$. ცხადია, თუ შემოვლათა რიცხვი n -ჯერ გაიზარდება, მაშინ

$$|f_x(x, y)|_n \leq q^n |f_x(x, y)|_0,$$

საიდანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_x(x, y)|_n = 0.$$

სრულიად ასევე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_y(x, y)|_n = 0.$$

ამრიგად, პირველი რიგის წარმოებულები ერთდროულად ნულის ტოლი ხდება, რაც გვიჩვენებს (6) მიმდევრობანი კრებადია. კოორდინატთა დაქანებაზე $f(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობა მისწრაფვის უმცირესი მნიშვნელობისაკენ და ეს მისწრაფება მით უფრო სწრაფია, რაც უფრო მცირეა q . ძნელი არ უნდა იყოს იმის შემჩნევა, რომ (7) პირობა შესრულებდა $f(x, y)$ ფუნქციის განსაზღვრის საკმარისად მცირე მიდამოში. მაგრამ, თუ $f(x, y)$ ფუნქცია დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფუნქციაა, მაშინ კოორდინატთა დაქანების მეთოდით მიღებული $(f_x)_{n \geq 1}$ და $(f_y)_{n \geq 1}$ მიმდევრობანი კრებადია ნებისმიერი საწყისი მიახლოებისათვის.

2. გრადიენტთა მეთოდით ფუნქციის მინიმუმის განსაზღვრა. ზემოთ განხილული კოორდინატთა ღერძების მიმართულებით დაქანების მეთოდი ძნელი გამოსაყენებელია, როცა კოორდინატთა რიცხვი 2-ზე მეტია. ამ შემთხვევაში დაქანება ვაწარმოოთ რაიმე წრფის მიმართულებით. ვთქვათ, რაიმე საშუალებით ვიცით $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, ფუნქციის მნიშვნელობა მცირდება $x = x^{(0)} + a^{(0)}t$ წრფის მიმართულებით, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$, $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, \dots, a_m^{(0)})$, t — პარამეტრი — სკალარული სიდიდე. მაშინ შეგვიძლია, განვიხილოთ $f(x_0 + a^{(0)}t) = \varphi(t)$ ფუნქცია და ვიპოვოთ ამ $\varphi(t)$ ფუნქციის მინიმუმი. ამისათვის უნდა ამოვხსნათ განტოლება $\varphi'(t) = 0$. ამ

განტოლების ამონახსნით $t = t_1$ განვსაზღვროთ $x^{(0)}$ -ის შემდეგი $x^{(1)}$ წერტილი, $x^{(1)} = x^{(0)} + a^{(0)} t_1$, და შევამოწმოთ $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$. თუ ეს პირობა შესრულდა, შემდეგ რაიმე საშუალებით განვსაზღვროთ ის $a^{(1)}$ -ის მიმართულება, რომ $x = x^{(1)} + a^{(1)} t$ წრფის მიმართულებით $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა მცირდებოდეს და ა. შ.

როგორც ვიცი, $f(x)$ ფუნქცია ყველა მიმართულებაზე სწრაფად მცირდება — $\text{grad } f(x)$ -ის მიმართულებით (იხ. ნაწ. I, თავი XV, § 4, n2). ასე რომ, ჯერ უნდა განვსაზღვროთ საწყისი წერტილი $x^{(0)}$. ეს წერტილი განვსაზღვროთ $f(x) = c$ განტოლებიდან, სადაც c რაიმე რიცხვია. ფაქტიურად უნდა განვიხილოთ $f(x) = c_i, i=0, 1, \dots$, დონის ზედაპირები, სადაც $c_0 > c_1 > \dots > c_k$. ამ დონის ზედაპირებიდან ავიღოთ ერთი დონის ზედაპირი და ამ ზედაპირზე ავიღოთ რაიმე წერტილი $x^{(0)}$. შემდეგ განვსაზღვროთ

$$a^{(0)} = -\text{grad } f \Big|_{x=x_0}.$$

შევადგინოთ წრფის განტოლება

$$x = x^{(0)} + a^{(0)} t$$

და ამ წრფეზე ვიპოვოთ t_1 წერტილი, რომელზედაც $\varphi(t) = f(x^{(0)} + a^{(0)} t)$ ფუნქციას აქვს მინიმუმი. ამისათვის ამოცხსნათ განტოლება $\varphi'(t) = 0$. მიღებული $t = t_1$ ამონახსნით განვსაზღვროთ $x^{(1)}$ წერტილი. $x^{(1)} = x^{(0)} + a^{(0)} t_1$. გამოვთვალოთ $a^{(1)} = -\text{grad } f(x^{(1)})$ და შევადგინოთ წრფის განტოლება, $x = x^{(1)} + a^{(1)} t$. შემდეგ ვიპოვოთ $f(x^{(1)} + a^{(1)} t) = \varphi(t)$ და მოვნახოთ მინიმუმის $t = t_2$ წერტილი $\varphi'(t) = 0$ განტოლებიდან. და ა. შ. მივიღებთ წერტილთა მიმდევრობას $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots$, რომელთათვისაც გვექნება

$$f(x^{(0)}) > f(x^{(1)}) > \dots > f(x^{(n)}) > \dots$$

თუ მიმდევრობანი $(x^{(n)})$ და $(f(x^{(n)}))$ კრებადია, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = X$, მაშინ

$$\min_n f(x^{(n)}) = f(X).$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია ლაღებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა,

$$f(x) = (Ax, x) - 2(b, x), \quad (12)$$

მაშინ $\text{grad } f(x)$ -ის განსაზღვრა ძნელი არაა,

$$\text{grad } f(x) = 2(Ax - b) \quad (13)$$

და $(x^{(n)})$ მიმდევრობა კრებადია. შევჩერდეთ ამ საკითხზე.

ვთქვათ, გვაქვს $x^{(n)}$ და გამოვთვალოთ $x^{(n+1)}$. ავიღოთ $x = x^{(n)} + a^{(n)} t$ წრფე. ამ წრფეზე (12) ფუნქცია კვადრატული ფუნქციაა t -ს მიმართ,

$$\varphi(t) = f(x^{(n)} + a^{(n)} t) = (A(x^{(n)} + a^{(n)} t), (x^{(n)} + a^{(n)} t)) - 2(b, (x^{(n)} + a^{(n)} t)) = (Ax^{(n)}, x^{(n)}) + 2(Ax^{(n)}, a^{(n)})t + (Aa^{(n)}, a^{(n)})t^2 - 2(b, x^{(n)}) - 2(b, a^{(n)})t.$$

ანუ

$$\varphi(t) = (Ax^{(n)}, x^{(n)}) - 2(b, x^{(n)}) + 2(Ax^{(n)} - b, a^{(n)})t + (Aa^{(n)}, a^{(n)})t^2,$$

ამ ფუნქციის გაწარმოებით და ნულთან გატოლებით მივიღებთ

$$2(Ax^{(n)} - b, a^{(n)}) + 2t(Aa^{(n)}, a^{(n)}),$$

საიდანაც

$$t = -\frac{(Ax^{(n)} - b, a^{(n)})}{(Aa^{(n)}, a^{(n)})}.$$

შევიტანოთ მიღებული t მნიშვნელობა, $t = t_1$, $x = x^{(n)} + a^{(n)} t$ წრფის განტოლებაში, რაც მოგვცემს $x^{(n)}$ -ის შემდეგ მნიშვნელობას $x^{(n+1)}$ -ს,

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - a^{(n)} \frac{(Ax^{(n)} - b, a^{(n)})}{(Aa^{(n)}, a^{(n)})},$$

სადაც $a^{(n)}$ განისაზღვრება (13) ფორმულით,

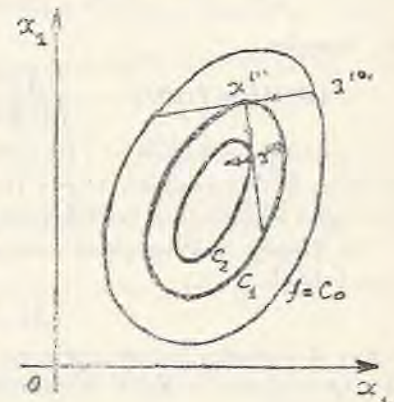
$$a^{(n)} = -\text{grad } f(x^{(n)}) = -2(Ax^{(n)} - b). \quad (14)$$

სათანადო ჩასმით $x^{(n+1)}$ -ის გამოსახულებაში მივიღებთ

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - (Ax^{(n)} - b) \frac{(Ax^{(n)} - b, Ax^{(n)} - b)}{(A(Ax^{(n)} - b), Ax^{(n)} - b)}. \quad (15)$$

ვთქვათ, აგებული გვაქვს დონის წირები $f(x) = c_i, i=0, 1, 2$. (ნახ. 16). გამოვიღეთ $x^{(0)}$ წერტილიდან. $f(x)$ ფუნქციის უსწრაფესი შემცირება $x^{(0)}$ -ის მიმართულებით $x^{(1)}$ წერტილშია — $x^{(0)}$ წერტილი მდებარეობს $f(x) = c_0$ დონის წირზე. $x^{(0)}$ -ის წრფე $f(x) = c_0$ წირის $x^{(0)}$ წერტილზე გატარებული მხების პერპენდიკულარია ($f(x) = c_0$ წირის $x^{(0)}$ წერტილში გატარებული ნორმალა). ასეთივე მდებარეობა აქვს $x^{(1)}$ $x^{(2)}$ წრფეს $f(x) = c_1$ დონის წირისადმი. და ა. შ.

გამოვარკვეით $\frac{(Ax^{(n)} - b, Ax^{(n)} - b)}{(A(Ax^{(n)} - b), Ax^{(n)} - b)}$ -ის მნიშვნელობა. ვისარგებ-



ნახ. 16

ლოთ წინა პარაგრაფის (47) დამოკიდებულებით (Ax, x) კვადრატული ფორმისათვის

$$\mu(x, x) \leq (Ax, x) \leq M(x, x),$$

საიდანაც

$$\frac{1}{M} \leq \frac{(x, x)}{(Ax, x)} \leq \frac{1}{\mu}.$$

აეილოთ უტოლობის საზღვრების საშუალო არითმეტიკული

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\mu} \right), \quad (16)$$

მაშინ (15) ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \alpha(Ax^{(n)} - b). \quad (17)$$

როგორც წინა პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, (17) პროცესის კრებადობისათვის საჭიროა

$$\max_{\lambda} |1 - \alpha \lambda(A)| < 1,$$

სადაც $0 < \mu \leq \lambda(A) \leq M$. გვექნება

$$\max_{\lambda} (1 - \alpha \lambda) = 1 - \frac{\mu}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\mu} \right) = \frac{M - \mu}{2M} < 1, \quad (18)$$

რაც გვიჩვენებს (17) იტერაციის კრებადობას. (18) უტოლობის საფუძველზე დავასკვნით, რომ მიმდევრობა $(x^{(n)})$, რომელიც (15) იტერაციით მიიღება, კრებადია. შევიტანოთ t -ს მნიშვნელობა $f(x^{(n)} + a^{(n)}t)$ ფუნქციაში, მივიღებთ

$$f(x^{(n+1)}) = f(x^{(n)}) - \frac{(Ax^{(n)} - b, Ax^{(n)} - b)^2}{(A(Ax^{(n)} - b), Ax^{(n)} - b)}. \quad (19)$$

(15) ფორმულით მივიღებთ $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილების მიახლოებით მნიშვნელობებს, ხოლო (19) ფორმულით თვით $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმის მიახლოებით მნიშვნელობებს.

3. წრფივი განტოლებათა სისტემა. განვიხილოთ წრფივი განტოლებათა სისტემა

$$Ax = b, \quad (20)$$

სადაც A მატრიცა სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრულია, $A > 0$. ამ განტოლებათა სისტემას შევუსაბამოთ კვადრატული ფორმა

$$f(x) = (Ax, x) - 2(b, x).$$

ამ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი განვსაზღვროთ მიმდევრობითი მიახლოებით

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \alpha(Ax^{(n-1)} - b), \quad n=1, 2, \dots, \quad (21)$$

სადაც

$$\alpha = \frac{(Ax^{(n)} - b, Ax^{(n)} - b)}{(A(Ax^{(n)} - b), Ax^{(n)} - b)}.$$

(20) განტოლებათა სისტემა ეკვივალენტურია შემდეგი განტოლებათა სისტემისა

$$x = x - \alpha(Ax - b). \quad (22)$$

ამ სისტემის ამონახსნი განისაზღვრება მიმდევრობითი მიახლოებით (21) ფორმულით. წინა პუნქტში ნაჩვენები იყო $(x^{(n)})$ მიმდევრობის კრებადობა,

$$\alpha = \frac{M + \mu}{2M\mu}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = X.$$

შევაფასოთ (21) მიმდევრობიდან მიღებული ამონახსნის სიზუსტე, $\|X - x^{(n)}\|$. (21) და (22) განტოლებათა სისტემიდან ადვილი მისაღებია

$$X - x^{(n)} = (E - \alpha A)(X - x^{(n-1)}), \quad (23)$$

საიდანაც

$$\|X - x^{(n)}\| = \|E - \alpha A\| \cdot \|X - x^{(n-1)}\|.$$

თუ გამოვიყენებთ (18) უტოლობას, გვექნება

$$\|X - x^{(n)}\| \leq \max |1 - \alpha \lambda(A)| \cdot \|X - x^{(n-1)}\|,$$

საიდანაც

$$\|X - x^{(n)}\| \leq \frac{M - \mu}{2M} \|X - x^{(n-1)}\|. \quad (24)$$

ეს უტოლობა გვიჩვენებს (21) პროცესის კრებადობის სიჩქარეს. (23) ტოლობა ასე წარმოვადგინოთ:

$$X - x^{(n)} = (E - \alpha A)((X - x^{(n)}) - (x^{(n)} - x^{(n-1)})).$$

ამ გამოსახულების გამარტივებით მივიღებთ

$$\alpha A(X - x^{(n)}) = (E - \alpha A)(x^{(n)} - x^{(n-1)}),$$

საიდანაც

$$\|\alpha A\| \cdot \|X - x^{(n)}\| = \|E - \alpha A\| \cdot \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|.$$

ამ უტოლობიდან ადვილი მისაღებია

$$\alpha \mu \|X - x^{(n)}\| \leq \|E - \alpha A\| \cdot \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|,$$

საიდანაც

$$\alpha \mu \|X - x^{(n)}\| \leq \frac{M - \mu}{2M} \|x^{(n-1)} - x^{(n)}\|.$$

აქედან კი გვექნება

$$\|X - x^{(n)}\| \leq \frac{M - \mu}{M + \mu} \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|. \quad (25)$$

ამრიგად, ცდომილება $\|X - x^{(n)}\|$ შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|$ სიდიდით. თუ სიდიდე $\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|$ ნაკლებია წინასწარ დასახელებულ ε -ზე, მაშინ (20) განტოლების ამონახსნი X მიიღება ε სიზუსტით.

4. არაწრფივი განტოლებათა სისტემა. ახლა განვიხილოთ არაწრფივი განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0, \end{aligned}$$

ან მატრიცული სახით

$$g(x) = 0, \quad (26)$$

სადაც $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, g მატრიცა — სვეტია, $g = [g_1, g_2, \dots, g_m]^T$. დაეუშვათ, რომ ყველა $g_i, i=1, 2, \dots, m$, ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია მათი განსაზღვრის საერთო G არეში. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \sum_{i=1}^m (g_i(x))^2 = g(x), \quad g(x). \quad (27)$$

ცხადია, (26) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი $f(x)=0$ განტოლების ამონახსნია და, პირიქით, $f(x)=0$ განტოლების ამონახსნი (26) განტოლებათა სისტემის ამონახსნია. განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმი

$$x = x^{(n)} - \text{grad } f(x^{(n)}) t \quad (28)$$

წრფის გასწვრივ, სადაც $x^{(n)}$ წერტილი განსაზღვრულია n მოქმედების შედეგად,

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \text{grad } f(x^{(n-1)}) t.$$

(28) მნიშვნელობის $f(x)$ ფუნქციაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ

$$f(x^{(n)} - \text{grad } f(x^{(n)}) t) = \varphi(t),$$

ანუ

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^m (g_i(x^{(n)} - \text{grad } f(x^{(n)}) t))^2. \quad (29)$$

ვიპოვოთ $\varphi(t)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m (g_i(x^{(n)} - \text{grad } f(x^{(n)}) t))^2 = 0. \quad (30)$$

ამ განტოლების უმცირესი დადებითი ამონახსნი t მოგვცემს t -ს შემდეგ მნიშვნელობას, $t = t_{n+1}$.

საზოგადოდ (30) განტოლება რთულია, ამის გამო მივმართავთ მიახლოებით ამონახსნის მეთოდს. ვიგულისხმობთ, რომ t მნიშვნელობა მცირეა და უგულებელვყავთ t^2 -ს. გავშალოთ $t=0$ -ის მიახლოებაში g_i ფუნქცია ტეილორის ფორმულით,

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^m \left(g_i(x^{(n)}) - t \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} f(x^{(n)}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} g_i(x^{(n)}) \right)^2$$

ანუ

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^m \left(g_i(x^{(n)}) - t \left(\text{grad } f(x^{(n)}), \frac{\partial}{\partial x} g_i(x^{(n)}) \right) \right)^2.$$

აქედან კი მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= -2 \sum_{i=1}^m \left(g_i(x^{(n)}) - t \left(\text{grad } f(x^{(n)}), \frac{\partial}{\partial x} g_i(x^{(n)}) \right) \right) \times \\ &\times \left(\text{grad } f(x^{(n)}), \frac{\partial}{\partial x} g_i(x^{(n)}) \right) = 0. \end{aligned}$$

ამ განტოლებიდან განვსაზღვროთ $t = t_{n+1}$,

$$t_{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^m g_i(x^{(n)}) \cdot \left(\text{grad } f(x^{(n)}), \frac{\partial}{\partial x} g_i(x^{(n)}) \right)}{\sum_{i=1}^m \left(\text{grad } f(x^{(n)}), \frac{\partial}{\partial x} g_i(x^{(n)}) \right)^2}, \quad (31)$$

სადაც

$$\frac{\partial}{\partial x} g_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}, \frac{\partial g_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g_i}{\partial x_m} \right), \quad \text{grad } f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T,$$

ხოლო

$$\frac{\partial}{\partial x} g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \frac{\partial g_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}, \frac{\partial g_m}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} = W(x).$$

$W(x)$ მატრიცა g ვექტორ-ფუნქციის იაკობის მატრიცაა. რადგანაც

$$(\text{grad } f)_{x_h} = \frac{\partial}{\partial x_h} f = \frac{\partial}{\partial x_h} \sum_{i=1}^m (g_i(x))^2 = 2 \sum_{i=1}^m g_i(x) \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_h},$$

გვექნება

$$\text{grad } f = 2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m g_i(x) \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_1} \\ \sum_{i=1}^m g_i(x) \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_2} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m g_i(x) \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix} = 2 W^T g,$$

სადაც W^T მიიღება W მატრიცის ტრანსპონირებით. ამ გამოთვლების შედეგად მივიღებთ

$$t_{n+1} = \frac{(g(x^{(n)}), W(x^{(n)}) W^T(x^{(n)}) g(x^{(n)}))}{2 (W(x^{(n)}) W^T(x^{(n)}) g(x^{(n)}), W(x^{(n)}) W^T(x^{(n)}) g(x^{(n)}))}. \quad (32)$$

ამრიგად, თუ ვიცით (26) განტოლებათა სისტემის ამონახსნის n -ური მიახლოება, $n+1$ მიახლოება განისაზღვრება ტოლობით

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \text{grad } f(x^{(n)}) t_{n+1}, \quad (33)$$

სადაც t_{n+1} განისაზღვრება (32) ტოლობით.

§ 9. ლობაჩევსკის მეთოდი

ამ პარაგრაფში გავცნობთ ალგებრულ განტოლებათა ამონახსნის მეთოდს — ლობაჩევსკის მეთოდს. ამ მეთოდის დამახასიათებელია სიმარტივე და იძლევა საშუალებას მოვნახოთ როგორც ნამდვილი, ისე კომპლექსური ამონახსნები (მეთოდი პირველად განხილული იყო ნ. ი. ლობაჩევსკის მიერ 1834 წელს „ალგებრაში“, შემდეგ კი ხელახლა განიხილა ციურხელმა პროფესორმა გრეფემ 1837 წელს).

1. ნამდვილი ამონახსნები. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც n -ური ხარისხის ალგებრულ განტოლებას აქვს ნამდვილი ამონახსნები (ცნობილია ხერხი, რომლის საშუალებითაც ალგებრული განტოლება მიიყვანება

ესეთ განტოლებაზე, რომელსაც აქვს მხოლოდ მარტივი ამონახსნები, § 1 n 5). ავიღოთ განტოლება

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (1)$$

დავუშვათ, რომ ამ განტოლების ამონახსნები დალაგებულია შემდეგი მიმდევრობით

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > \dots > |x_n|. \quad (2)$$

ვთქვათ, ავაგეთ ისეთი ახალი განტოლება

$$F(y) = y^{(n)} + A_1 y^{n-1} + \dots + A_{n-1} y + A_n = 0 \quad (3)$$

რომელიც ამონახსნებია

$$y_1 = -x_1^m, y_2 = -x_2^m, \dots, y_n = -x_n^m.$$

მაშინ ადგილი ექნება დამოკიდებულებას

$$\left. \begin{aligned} x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m &= A_1, \\ x_1^m x_2^m + x_1^m x_3^m + \dots + x_{n-1}^m x_n^m &= A_2, \\ x_1^m x_2^m x_3^m + x_1^m x_2^m x_4^m + \dots + x_{n-2}^m x_{n-1}^m x_n^m &= A_3, \\ \dots &\dots \\ x_1^m x_2^m \dots x_n^m &= A_n. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) დამოკიდებულებანი ასე გადავწეროთ:

$$\left. \begin{aligned} x_1^m \left[1 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^m + \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^m + \dots + \left(\frac{x_n}{x_1} \right)^m \right] &= A_1, \\ x_1^m x_2^m \left[1 + \left(\frac{x_1 x_3}{x_1 x_2} \right)^m + \left(\frac{x_1 x_n}{x_1 x_2} \right)^m + \dots + \left(\frac{x_{n-1} x_n}{x_1 x_2} \right)^m \right] &= A_2, \\ x_1^m x_2^m x_3^m \left[1 + \left(\frac{x_1 x_2 x_4}{x_1 x_2 x_3} \right)^m + \dots + \left(\frac{x_{n-2} x_{n-1} x_n}{x_1 x_2 x_3} \right)^m \right] &= A_3, \\ \dots &\dots \\ x_1^m x_2^m x_3^m \dots x_n^m &= A_n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

თუ m საკმარისად დიდია, მაშინ (2) უტოლობების გამო (5) გამოსახულების პირველი შესაყრები გაცილებით დიდი იქნება სხვა შესაყრებთან, ამიტომ პირველი შესაყრების გარდა სხვა შესაყრები უქუევადლო, მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} x_1^m &\approx A_1, \\ x_1^m x_2^m &\approx A_2, \\ x_1^m x_2^m x_3^m &\approx A_3, \\ x_1^m x_2^m \dots x_n^m &\approx A_n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ამ ტოლობებიდან მიმდევრობით განვსაზღვრავთ

$$|x_1| \approx A_1^{1/m}, |x_2| \approx \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{1/m}, \dots, |x_n| \approx \left(\frac{A_n}{A_{n-1}} \right)^{1/m}. \quad (7)$$

ამონახსნთა ნიშნებს კი განვსაზღვრავთ უშუალო ჩასმით მოცემულ (1) განტოლებაში.

ამგვარად, (1) განტოლების ამოხსნა მიყვანილია (3) განტოლების აგებაზე. m იმდენად დიდი უნდა ავიღოთ, რომ სათანადო სიზუსტით უკუგავდეთ (5) გამოსახულების ყველა შესაყრები გარდა პირველი შესაყრებისა.

(3) განტოლება ავავთ მიმდევრობით.

ჯერ ავავთ განტოლება, რომლის ამონახსნები იქნება მოცემული (1) განტოლების ამონახსნების კვადრატები შებრუნებული ნიშნით,

$$-x_1^2, -x_2^2, \dots, -x_n^2.$$

შემდეგ კი მიღებული განტოლებისთვის გავიმეოროთ ჩატარებული მოქმედება, მივიღებთ ახალ განტოლებას, რომლის ამონახსნები იქნება მოცემული (1) განტოლების ამონახსნების მეოთხე ხარისხები შებრუნებული ნიშნით,

$$-x_1^4, -x_2^4, \dots, -x_n^4$$

და ა. შ.

ჩვენთვის საინტერესო განტოლება შემდეგნაირად ავავთ: მოცემული (1) განტოლება წარმოვადგინოთ ნამრავლით

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + x_{n-1} x + a_n = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0. \quad (8)$$

ამ განტოლებაში x შევცვალოთ $-x$ -ით და გამოვთვალოთ $(-1)^n f(-x)$,

$$(-1)^n f(-x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n). \quad (9)$$

მიღებული (8) და (9) გამოსახულებანი გადავამრავლოთ,

$$(-1)^n f(x) f(-x) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \dots (x^2 - x_n^2).$$

ამ გამოსახულებაში ჩავსვათ $y = -x^2$ და გავამრავლოთ $(-1)^n$ -ზე, მივიღებთ

$$f(x) f(-x) = F_1(y) = (y + x_1^2)(y + x_2^2) \dots (y + x_n^2) = 0. \quad (10)$$

ამ განტოლების ამონახსნებია

$$y_1 = -x_1^2, y_2 = -x_2^2, \dots, y_n = -x_n^2.$$

ამრიგად, განტოლება $F_1(y) = 0$ წარმოადგენს საძიებელ განტოლებას,

$$F_1(y) = y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \dots + A_n = 0. \quad (11)$$

ამ განტოლების კოეფიციენტების გამოსათვლელად უშუალოდ გადავამრავლოთ $f(x)$ და $(-1)^n f(-x)$. მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \times \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_n}{x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \dots + (-1)^n a_n} \\ & \frac{x^{2n} + (1 \cdot a_1 - 1 \cdot a_1) x^{2n-1} + (1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_2 - a_1^2) x^{2n-2} + (1 \cdot a_3 - 1 \cdot a_3 + a_1 a_2 - a_2 a_1) x^{2n-3} + (1 \cdot a_4 + 1 \cdot a_4 - a_1 a_3 + a_2^2) x^{2n-2} + \dots + (-1)^n a_n^2}{\dots} \end{aligned}$$

ანუ

$$f(x) (-1)^n f(-x) = x^{2n} - (a_1^2 - 2a_2) x^{2(n-1)} + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) x^{2(n-2)} + \dots + (-1)^n a_n^2 = 0.$$

ამ გამოსახულებაში ჩავსვათ $y = -x^2$ და გავამრავლოთ $(-1)^n$ მივიღებთ

$$F_1(y) = y^n + (a_1^2 - 2a_2) y^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) y^{n-2} + (a_3^2 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a_5 - 2a_6) y^{n-3} + \dots + a_n^2 = 0. \quad (12)$$

(11) და (12)-ის შედარება მოგვცემს

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1^2 - 2a_2 a_2 \\ A_2 &= a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4 a_4 \\ A_3 &= a_3^2 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a_5 - 2a_6 a_6 \\ &\dots \\ A_n &= a_n^2 \end{aligned} \quad (13)$$

სადაც $a_0 = 1$.

ამ ფორმულებიდან აღვიღო შესამჩნევია A_i კოეფიციენტების შედგენის კანონი:

$$A_i = a_i^2 - 2a_{i-1} a_{i+1} + 2a_{i-2} a_{i+2} - \dots \pm 2a_0 a_{2i}. \quad (14)$$

ე. ი. ყოველი A_i კოეფიციენტი ტოლია a_i კოეფიციენტის კვადრატს გამოკლებულით გაორკეცებული ნამრავლი a_i კოეფიციენტის წინა a_{i-1} და a_i კოეფიციენტის შემდეგი კოეფიციენტის a_{i+1} -ის, მივუმატოთ გაორკეცებული ნამრავლი a_{i-2} რა a_{i+2} კოეფიციენტებისა და ა. შ. თუ სათანადო a_{i-1} ან a_{i+1} , a_{i-2} , a_{i+2} კოეფიციენტები არაა $f(x) = 0$ განტოლებაში, მაშინ მის მაგივრად (14) ფორმულაში უნდა ჩავსვათ ნული.

მაგალითად, განტოლება

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (15)$$

გარდავქმნათ ისეთ განტოლებად, რომლის ამონახსნები იქნება მოცემული განტოლების ამონახსნების კვადრატები შებრუნებული ნიშნით.

ვიპოვოთ კოეფიციენტები $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$

მოცემულია: $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -5$, $a_3 = 6$. ვვუქნება

$$A_1^{(1)} = a_1^2 - 2a_0 a_2 = (-2)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (-5) = 4 + 10 = 14,$$

$$A_2^{(1)} = a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4 = (-5)^2 - 2 \cdot (-2) \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot 0 = 49,$$

$$A_3^{(1)} = a_3^2 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a_5 - 2a_0 a_6 = 6^2 = 36.$$

მივიღებთ

$$F_1(y) = y^3 + 14y^2 + 49y + 36 = 0.$$

ამ განტოლებაში y -ის მაგივრად ისევ x ვწეროთ

$$F_1(x) = x^3 + 14x^2 + 49x + 36 = 0 \quad (16)$$

(16) განტოლებიდან მივიღებთ ახალ განტოლებას

$$F_2(x) = x^3 + A_1^{(2)}x^2 + A_2^{(2)}x + A_3^{(2)} = 0,$$

სადაც

$$A_1^{(2)} = 14^2 - 2 \cdot 1 \cdot 49 = 98,$$

$$A_2^{(2)} = 49^2 - 4 \cdot 14 \cdot 36 = 1396,$$

$$A_3^{(2)} = 36^2 = 1296,$$

გვექნება

$$F_2(x) = x^3 + 98x^2 + 1396x + 1296 = 0. \quad (17)$$

ამ განტოლების ამონახსნია $-x^4$, სადაც x (15) განტოლების ამონახსნია.

შემდეგი განტოლება, რომელიც (17) განტოლების გარდაქმნით მიიღება, იქნება

$$F_3(a) = x^3 + A_1^{(3)}x^2 + A_2^{(3)}x + A_3^{(3)} = 0,$$

სადაც

$$A_1^{(3)} = 98^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1396 = 9604 - 2792 = 6812,$$

$$A_2^{(3)} = 1396^2 - 2 \cdot 98 \cdot 1296 = 1694800,$$

$$A_3^{(3)} = 1296^2 = 1679616.$$

ასე რომ, გვექნება

$$F_3(x) = x^3 + 6812x^2 + 1694800x + 1679616 = 0. \quad (18)$$

მეოთხე გარდაქმნის შედეგად მიღებული განტოლების კოეფიციენტები იქნება

$$A_1^{(4)} = 6812^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1694800 = 430137,44 \cdot 10^2;$$

$$A_2^{(4)} = 1694800^2 - 2 \cdot 6812 \cdot 1679616 = 28494,6 \cdot 10^8;$$

$$A_3^{(4)} = 1679616^2 = 2821109907456 = 28211,1 \cdot 10^8.$$

გამოთვლები ვაწარმოოთ 6 ნიშნადი ციფრით, ამიტომ ავიღოთ

$$A_1^{(4)} = 430137 \cdot 10^2;$$

$$A_2^{(4)} = 28494,6 \cdot 10^8;$$

$$A_3^{(4)} = 28211,1 \cdot 10^8$$

მიღებული კოეფიციენტების საშუალებით გამოვთვლით შემდეგ $F_5(x) = 0$ განტოლების კოეფიციენტებს და ა. შ.

დავსვათ კითხვა. სად შევწყვიტოთ გამოთვლები. რამდენი გარდაქმნა უნდა შევასრულოთ, რომ მივიღოთ ამონახსნები სათანადო სიზუსტით? k გარდაქმნის შემდეგ მივაღოთ

$$F_k(y) = y^n + A_1^{(k)}y^{n-1} + A_2^{(k)}y^{n-2} + \dots + A_k^{(k)} = 0 \quad (19)$$

განტოლებამდე, რომლის ამონახსნი იქნება

$$y = -x^m,$$

სადაც

$$m = 2^k.$$

ვთქვათ, k მოქმედების შემდეგ სრულდება (6) ტოლობანი სათანადო სიზუსტით

$$x_1^{2^k} \approx A_1^{(k)},$$

$$(x_1, x_2)^{2^k} \approx A_2^{(k)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^{2^k} \approx A_n^{(k)},$$

(20)

მაშინ (20) ტოლობანი შესრულება $(k+1)$ გარდაქმნის შემდეგაც

$$x_1^{2^{k+1}} \approx A_1^{(k+1)},$$

$$(x_1, x_2)^{2^{k+1}} \approx A_2^{(k+1)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^{2^{k+1}} \approx A_n^{(k+1)}.$$

(21)

თუ (20) და (21) გამოსახულებებს შევადარებთ, მივიღებთ

$$A_1^{(k+1)} \approx x_1^{2^{k+2}} = (x_1^{2^k})^2 \approx (A_1^{(k)})^2,$$

$$A_2^{(k+1)} \approx (x_1, x_2)^{2^{k+2}} = ((x_1, x_2)^{2^k})^2 \approx (A_2^{(k)})^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n^{(k+1)} \approx (x_1, x_2, \dots, x_n)^{2^{k+2}} \approx (A_n^{(k)})^2.$$

ამგვარად, თუ k გარდაქმნის შემდეგ $F_k(y) = 0$ და $F_{k+1}(y) = 0$ განტოლების კოეფიციენტებს შორის მოცემული სიზუსტით მივიღებთ დამოკიდებულებას

$$A_i^{(k+1)} \approx [A_i^{(k)}]^2, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (19) განტოლების ამონახსნი y მოგვცემს საძიებელი ამონახსნის x^{2^k} -ის მნიშვნელობას

$$|x| = y^{\frac{1}{2^k}}.$$

თუ გამოთვლებს ვაწარმოებთ ლოგარითმების საშუალებით, მაშინ გამოთვლებს შევწყვეტთ იქ, სადაც სათანადო კოეფიციენტების ლოგარითმები წინა განტოლების კოეფიციენტების გაორკეცებით მიიღება.

ამის შემდეგ განვსაზღვრავთ ამონახსნებს

$$|x_1| \approx A_1^{1/m}, |x_2| \approx \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/m}, \dots, |x_n| \approx \left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^{1/m},$$

სადაც $m=2^k$.

ამონახსნთა ნიშნებს კი ავარჩევთ სათანადო განტოლებაში უშუალო ჩასმით.

ჩვენ მიერ აღებული (15) განტოლებისათვის გავაგრძელოთ გამოთვლები. გამოთვლები ჩავატაროთ მე-3 ცხრილის მიხედვით, სადაც შეტანილია (14) კოეფიციენტების,

$$F_i(y)=0, i=1, 2, \dots$$

განტოლების კოეფიციენტების მნიშვნელობანი.

ცხრილი 3

გარდაქმნის რიგი	A_1	A_2	A_3
	$a_1^2 - 2a_2$	$a_1^2 - 2a_1a_3$	a_3^2
	-2	-5	6
1	$(-2)^2 - 2(-5) = 14$	$(-5)^2 - 2(-2) \cdot 6 = 49$	$6^2 = 36$
2	$14^2 - 2 \cdot 49 = 98$	$49^2 - 2 \cdot 14 \cdot 37 = 1396$	$36^2 = 1296$
3	$98^2 - 2 \cdot 1396 = 6812$	$1396^2 - 2 \cdot 98 \cdot 1296 = 1694800$	$1296^2 = 1679616$
4	$6812^2 - 2 \cdot 1694800 = 430137,44 \cdot 10^2$	$1694800^2 - 2 \cdot 6812 \times 1679616 = 28494,6 \cdot 10^8$	$1679616^2 = 28211,1 \cdot 10^2$
5	$A_1^{(5)} = 0,185302 \cdot 10^{16}$	$A_1^{(5)} = 7,95866 \cdot 10^{24}$	$A_3^{(5)} = 7,95866 \cdot 10^{24}$
6	$A_1^{(6)} = 0,0343368 \cdot 10^{32}$	$A_2^{(6)} = 63,3403 \cdot 10^{48}$	$A_3^{(6)} = 63,3403 \cdot 10^{48}$

აღვილი შესამჩნევია, რომ

$$A_i^{(6)} = (A_i^{(5)})^2, i=1, 2, 3,$$

6 ნიშნადი ციფრით. ამიტომ გამოთვლები შეგვიძლია შევწყვიტოთ გვექნება

$$x_1^{32} \approx A_1^{(5)} \approx 0,185302 \cdot 10^{16};$$

$$x_2^{32} \approx \frac{A_2^{(5)}}{A_1^{(5)}} \approx \frac{7,95866}{0,185302} \cdot 10^8;$$

$$x_3^{32} \approx \frac{A_3^{(5)}}{A_2^{(5)}} \approx \frac{7,95866}{7,95866}.$$

მიმდევრობით კვადრატული ფესვის ამოღების შედეგად, მივიღებთ

$$x_1^2 \approx 0,89999999 \cdot 10; |x_1| = 3,00000;$$

$$x_2^4 \approx 1,60000000 \cdot 10; |x_2| = 2,00000;$$

$$x_3 \approx 1,00000000; |x_3| = 1,00000.$$

საბოლოოდ, სათანადოდ განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$x_1 = 3,$$

$$x_2 = -2,$$

$$x_3 = 1.$$

2. კომპლექსური ამონახსნები. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც (1) აღგებრულ განტოლებას აქვს კომპლექსური ამონახსნები.

ჯერ განვიხილოთ ერთი წყვილი კომპლექსური ამონახსნი

$$x_2 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = u + iv,,$$

$$x_3 = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = u - iv.$$

ვთქვათ, აღვილი აქვს უტოლობას:

$$|x_1| > |x_2| = |x_3| > |x_4| > \dots > |x_n|.$$

მოვიგონოთ კომპლექსური რიცხვის ახარისხება

$$x_{2,3}^m = r^m(\cos m\varphi \pm i \sin m\varphi), x_2^m \cdot x_3^m = r^{2m},$$

მაშინ (5) ტოლობანი ასე ჩავწერთ:

$$A_1 = x_1^m + \alpha_1,$$

$$A_2 = 2x_1^m r^m \cos m\varphi + \alpha_2,$$

$$A_3 = x_1^m r^{2m} + \alpha_3,$$

$$A_4 = x_1^m r^{2m} x_0^m + \alpha_4,$$

$$\dots$$

$$A_n = x_1^m r^{2m} x_4^m \dots x_4^m + \alpha_n$$

(22)

სადაც α_i ($i \neq 2$) საკმარისად დიდი $m = 2^k$ -თვის შეგვიძლია უგულებელვყოთ. თუ გამოთვლის სიზუსტე მიღწეულია, მაშინ მომდევნო განტოლების ყველა კოეფიციენტი სათანადო წინა განტოლების კოეფიციენტის კვადრატით გახდება, გარდა მეორე $A_2^{(k)}$ კოეფიციენტისა, რომელიც $\cos m \varphi$ -ს შეიცავს. ამ მამრავლის გამო $A_2^{(k)}$ ნიშანს იცვლის (ეს მდგომარეობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ნიშანი განტოლების კომპლექსური ამონახსნის არსებობის შესახებ).

(22) განტოლებათა სისტემიდან განვსაზღვრავთ ნამდვილი ამონახსნების აბსოლუტურ მნიშვნელობებს და კომპლექსური ამონახსნების მოდულს:

$$x_1^m \approx A_1, r^{2m} \approx \frac{A_3}{A_1}, x_4^m \approx \frac{A_4}{A_3}, \dots, x_n^m \approx \frac{A_n}{A_{n-1}}. \quad (23)$$

ცხადია, თუ კომპლექსური ამონახსნების მოდული მოთავსებულია $|x_i|$ და $|x_{i+2}|$ -ს შორის, მაშინ, ნაცვლად (23)-ის მივიღებთ

$$x_1^m \approx A_1, x_2^m \approx \frac{A_2}{A_1}, \dots, x_j^m \approx \frac{A_j}{A_{j-1}}, r^{2m} \approx \frac{A_{j+2}}{A_j}, x_{j+3}^m \approx \frac{A_{j+3}}{A_{j+2}}, \dots, x_n^m \approx \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

ახლა განვსაზღვროთ კომპლექსური ამონახსნის არგუმენტი φ .

ვისარგებლოთ ამონახსნებსა და კოეფიციენტებს შორის დამოკიდებულებით

$$-a_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_j + 2r \cos \varphi + x_{j+1} + \dots + x_n.$$

ამ დამოკიდებულებიდან განვსაზღვრავთ უშუალოდ φ -ს ან $\cos \varphi$ -ს, რის შედეგადაც ვიპოვიან $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$.

8. ორი წყვილი კომპლექსური ამონახსნი. ვთქვათ, (1) ალგებრულ განტოლებას აქვს ორი წყვილი კომპლექსური ამონახსნი:

$$x_{2+3} = r_1 (\cos \varphi_1 \pm i \sin \varphi_1), \\ x_{4+5} = r_2 (\cos \varphi_2 \pm i \sin \varphi_2),$$

სადაც ადგილი აქვს უტოლობებს

$$|x_1| \geq |x_2| = |x_3| > |x_4| = |x_5| > |x_6| > \dots > |x_n|.$$

მაშინ მივიღებდით

$$A_1 = x_1^m + \alpha_1, \\ A_2 = 2 x_1^m r_1^m \cos m \varphi_1 + \alpha_2, \\ A_3 = x_1^m r_1^{2m} + \alpha_3, \\ A_4 = 2 x_1^m r_1^m r_2^m \cos m \varphi_2 + \alpha_4, \\ A_5 = x_1^m r_1^m r_2^{2m} + \alpha_5, \\ \dots \\ A_n = x_1^m r_6^m r_2^{2m} \dots x_n^{2m},$$

საიდანაც სათანადო სიზუსტით, α_i -ს უკუგდების შემდეგ, მიმდევრობით განვსაზღვრავთ

$$x_1^m \approx A_1, r_1^{2m} \approx \frac{A_3}{A_1}, r_2^{2m} \approx \frac{A_5}{A_3}, \dots, x_n^m \approx \frac{A_n}{A_{n-1}}. \quad (25)$$

ამ ტოლობებში A_2 და A_4 არ მონაწილეობს.

(25) ტოლობებიდან ვიპოვიან კომპლექსური ამონახსნების მოდულს r_1 და r_2 .

ახლა განვსაზღვროთ კომპლექსური ამონახსნების არგუმენტები. ამისათვის განვიხილოთ ერთ-ერთი წერხი.

შევადგინოთ ნამრავლი

$$[x - (u + iv)] [x - (u - iv)] = x^2 - px + r^2, \quad (26)$$

სადაც

$$p = 2u, \quad r^2 = u^2 + v^2.$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ p .

მოცემული $f(x)$ მრავალწევრი გავყოთ $x^2 - px + r^2$ -ზე. ნაშთში მივიღებთ

$$R = Px + Q,$$

სადაც P და Q წარმოადგენენ p -ს მიმართ მრავალწევრებს. რადგანაც $f(x)$ მრავალწევრი უნაშთოდ უნდა გაიყოს $x^2 - px + r^2$ -ზე, ამიტომ გვექნება

$$P(p) = 0, \quad Q(p) = 0.$$

ამგვარად p წარმოადგენს ამ ორი განტოლების საერთო ამონახსნს.

ცხადია, სრულიად ასევე მოვიქცევით სხვა წყვილი კომპლექსური ამონახსნებისათვისაც.

განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, ვიპოვეთ, რომ განტოლებას

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 8 = 0 \quad (27)$$

აქვს კომპლექსური ამონახსნები მოდულებით $r_1 = 1$, $r_2 = 2\sqrt{2}$. შევადგინოთ (26) გამოსახულება $r = 1$ -თვის: $x^2 - px + 1$.

გავყოთ ამ გამოსახულებაზე (27) გამოსახულებიდან $f(x)$, ნაშთში მივიღებთ:

$$R = (p^3 - 4p^2 + 7p)x + (4p - p^2),$$

საიდანაც

$$p^3 - 4p^2 + 7p = 0, \quad 4p - p^2 = 0.$$

ამ განტოლებების საერთო ამონახსნია $p = 0$, ამის გამო $u = 0$. მაგრამ

$$u = r \cos \varphi$$

საიდანაც

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

ამგვარად, (27) განტოლების ამონახსნი იქნება

$$x_{1,2} = \pm i.$$

სრულიად ასევე (27) გამოსახულებიდან $f(x)$ -ს, თუ გავყოფთ $x^2 - px + 8$ -ზე, ნაშთში მივიღებთ

$$R = (p^3 - 4p^2 - 7p + 28)x + (-8p^2 + 32p),$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} p^3 - 4p^2 - 7p + 28 &= 0, \\ -8p^2 + 32p &= 0. \end{aligned}$$

ამ მეორე განტოლების ამონახსნია $p=0$, $p=4$. ამონახსნი $p=0$ არ აკმაყოფილებს პირველ განტოლებას, ხოლო $p=4$ -ს აკმაყოფილებს. მაშასადამე, $p=4$ ამ ორი განტოლების საერთო ამონახსნია. მაგრამ $p=2u$, საიდანაც $u=2$. რადგანაც $u^2 + v^2 = r^2$, გვექნება

$$v = \sqrt{r^2 - u^2} = \sqrt{8 - 4} = 2.$$

ამის გამო (27) განტოლების ამონახსნი იქნება

$$x_{3,4} = 2 \pm 2i.$$

ამგვარად, როგორი მარტივი ამონახსნებიც უნდა ჰქონდეს $f(x)=0$ განტოლებას: ნამდვილი თუ კომპლექსური, მაინც გამოვითვლით $A_1^{(k)}, \dots, A_n^{(k)}$ კოეფიციენტებს. k -ს ავიღებთ იმდენად დიდს, რომ მოცემული სიზუსტით აღვიღო ქონდეს ტოლობას

$$A_i^{(k+1)} = (A_i^{(k)})^2.$$

ამ ტოლობიდან გამოვრიცხოთ ის ტოლობები, რომლებიც ნიშანს იცვლიან. დარჩენილი ტოლობებით განვსაზღვრავთ $|x_i|$ მნიშვნელობებს. უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით, თუ რომელი x_i , $i=1, 2, \dots, n$ აკმაყოფილებს $f(x)=0$ განტოლებას. ის x_i , რომელიც არ აკმაყოფილებს აღებულ განტოლებას, მოგვცემს კომპლექსური ამონახსნის მოდულს,

$$|x_i| = r_i.$$

ამის შემდეგ ზემოთ აღწერილი ხერხით განვსაზღვრავთ კომპლექსური ამონახსნის გაორკეცებულ ნამდვილ ნაწილს, $P_i = 2u_i$ და, მაშასადამე, წარმოსახვით v_i ნაწილსაც,

$$v_i = \sqrt{r_i^2 - u_i^2}.$$

4. ამონახსნები ტოლი მოდულით. ზემოთ ყველგან დავუშვიტ, რომ განტოლების ამონახსნები მოდულებით განსხვავდებიან. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ორი ამონახსნის აბსოლუტური მნიშვნელობანი თითქმის ტოლია. მაგალითად $|x_2| \neq |x_3|$, მაშინ (4) ტოლობანი $m=2^k$ გარდაქმნის შემდეგ მოგვცემს:

$$\begin{aligned} A_1^{(k)} &= x_1^m + \alpha_1, \\ A_2^{(k)} &= 2x_1^m x_2^m + \alpha_2, \\ A_3^{(k)} &= x_1^m x_2^{2m} + \alpha_3, \\ A_4^{(k)} &= x_1^m x_2^{3m} + \alpha_4, \\ &\dots \dots \dots \\ A_n^{(k)} &= x_1^m x_2^{2m} x_4^m \dots x_n^m + \alpha_n, \end{aligned} \quad (28)$$

ხოლო შემდეგი გარდაქმნით მივიღებთ

$$\begin{aligned} A_1^{(k+1)} &= x_1^{2m} + \alpha'_1, \\ A_2^{(k+1)} &= 2x_1^{2m} x_2^{2m} + \alpha'_2, \\ A_3^{(k+1)} &= x_1^{2m} x_2^{4m} + \alpha'_3, \\ A_4^{(k+1)} &= x_1^{2m} x_2^{6m} + \alpha'_4, \\ &\dots \dots \dots \\ A_n^{(k+1)} &= x_1^{2m} x_2^{4m} x_4^{2m} \dots x_n^{2m} + \alpha'_n. \end{aligned}$$

ამ ორი გარდაქმნის შედარებით გვექნება

$$A_1^{(k+1)} = (A_1^{(k)})^2, A_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(A_2^{(k)})^2, A_3^{(k+1)} = (A_3^{(k)})^2, \dots, A_n^{(k+1)} = (A_n^{(k)})^2.$$

ეს ტოლობანი გვიჩვენებს, რომ, თუ ამონახსნების აბსოლუტური მნიშვნელობა ახლოსაა ერთმანეთთან, მაშინ A_2 კოეფიციენტი რამდენიმე მიმდევრობითი გარდაქმნის შემდეგ წინა გარდაქმნის სათანადო კოეფიციენტის კვადრატის ნახევრის ტოლი გახდება.

(28) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} x_1^m &\approx A_1^{(k)}, x_2^{2m} \approx x_3^{2m} \approx \frac{A_2^{(k)}}{A_1^{(k)}} \left(\text{ან } \frac{A_2^{(k)}}{2A_1^{(k)}} \right), \\ x_4^m &\approx \frac{A_4^{(k)}}{A_3^{(k)}}, \dots, x_n^{(m)} \approx \frac{A_n}{A_{n-1}}. \end{aligned} \quad (29)$$

თუ განტოლების q ამონახსნის $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+q-1}$ აბსოლუტური მნიშვნელობები ზუსტად ან დაახლოებით ტოლია; მაშინ $A_i^{(k+1)}$ კოეფიციენტი ტოლი გახდება სათანადო სიზუსტით $\frac{1}{q} (A_i^{(k)})^2$ კოეფიციენტისა. ეს შეგვიძლია მივიღოთ იმის ნიშნად, რომ განტოლების ამონახსნები აბსოლუტური მნიშვნელობებით ზუსტად ან დაახლოებით ტოლია.

(24) ტოლობებიდან ავიღოთ

$$A_3^{(k)} \approx x_1^m r_1^{2m}, \quad A_4^{(k)} \approx 2x_1^m r_1^{2m} r_2^m \cos m \varphi_3, \quad A_4^{(k)} \approx x_1^m r_1^{2m} r_2^{2m}.$$

თუ ვისარგებლებთ აღებრულებით განტოლების ამონახსნით თვისებით, შევამჩნევთ, რომ

$$x_{3,4} = r_2^m (\cos m\varphi \pm i \sin m\varphi) = y$$

წარმოადგენს

$$A_3^{(k)} y^2 - A_4^{(k)} y + A_5^{(k)} = 0$$

განტოლების ამონახსნს. ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ A_4 კოეფიციენტი, რომელიც ნიშანს იცვლის, კვადრატული განტოლების შუა კოეფიციენტი.

საზოგადოდ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $f(x) = 0$ განტოლების კომპლექსური ამონახსნის m ხარისხი სათანადო სიზუსტით აკმაყოფილებს კვადრატულ განტოლებას

$$A_{l-1}^{(k)} y^2 + A_l^{(k)} y + A_{l+1}^{(k)} = 0, \quad (30)$$

სადაც $A_l^{(k)}$ k -ს ცვლილების დროს ნიშანს იცვლის. (30) განტოლებიდანაც შეგვიძლია განვსაზღვროთ აღებული განტოლების კომპლექსური ამონახსნი.

განვიხილოთ მაგალითი, ამოვხსნათ განტოლება

$$f(x) = x^3 - 100x^2 - 100x - 101 = 0. \quad (31)$$

გამოთვლები ჩავატაროთ მე-4 ცხრილის მიხედვით.

ცხრილი 4

k	$A_1 = a_1^2 - 2a_2$	$A_2 = a_2^2 - 2a_1 a_3$	$A_3 = a_3^2$
a	-100	-100	-101
1	$(-100)^2 + 2 \cdot 100 = 10200$	$(-100)^2 - 2 \cdot 100 \cdot 101 = -10200$	$(-101)^2 = 10201$
2	$10200^2 - 2(-10200) \approx 10406 \cdot 10^4$	$(-10200)^2 - 2 \cdot 101 \approx 8322,0 \cdot 10^4$	$10201^2 \approx 10406 \cdot 10^4$
	$(10406 \cdot 10^4)^2 - 2 \times 8322,0 \cdot 10^4 \approx 10828 \times 10^{12} - 16644 \cdot 10^4 \approx 10828 \cdot 10^{12}$	$(8322,0 \cdot 10^4)^2 - 2 \times (10406 \cdot 10^4)^2 \approx 6925,6 \cdot 10^{12} - 21656 \times 10^{12} \approx -14730 \cdot 10^{12}$	$(10406 \cdot 10^4)^2 \approx 10828 \cdot 10^{12}$

როგორც ცხრილი გვიჩვენებს, $A_2^{(k)}$ ნიშანცვლიდა, მაშასადამე, აღებულ განტოლებას აქვს კომპლექსური ამონახსნი.

გვექნება

$$x_1^4 \approx 10406 \cdot 10^4, \quad r_1^{2,4} \approx \frac{A_3^{(2)}}{A_1^{(2)}} \approx 1,0000,$$

საიდანაც

$$x_1 \approx +101,00; \quad r_2^2 \approx 1,0000.$$

ვიპოვოთ კომპლექსური ამონახსნი $u + iv$.

მრავალწევრი $f(x) = x^3 - 100x^2 - 100x - 101$ გავყოთ $x^2 - px + 1$ -ზე, ნაშთში მივიღებთ

$$R = (p^2 - 100p - 101)x - p - 1,$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} p^2 - 100p - 101 &= 0, \\ -p - 1 &= 0. \end{aligned}$$

ამ სისტემის საერთო ამონახსნია $p = -1$, მაგრამ $p = 2u$, $v = \sqrt{r^2 - u^2}$. აქედან კი გვექნება

$$u = -\frac{1}{2}, \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ამგვარად, (31) განტოლების ამონახსნებია:

$$x_1 = 101, \quad x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§ 10. განტოლებათა გრაფიკული ამოხსნა

1. მასშტაბის გამსწვლვების მეთოდი. არსებობს გრაფიკული მეთოდები, რომელთა საშუალებით შეიძლება მოინახოს განტოლებათა ამონახსნები მაღალი სიზუსტით. მაგალითად, ასეთ მეთოდს ეკუთვნის მასშტაბის გამსწვლვების მეთოდი. განვიხილოთ ეს მეთოდი. ვთქვათ, $y = f(x)$ წირის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი მოვწახეთ 2 ნიშნადი ციფრით. ავავოთ საძიებელი წერტილის მახლობლობაში $y = f(x)$ წირი უფრო დიდი მასშტაბით. მიღებულ ნახაზზე შეიძლება $f(x) = 0$ განტოლების ამონახსნის მნიშვნელობა განისაზღვროს კიდევ ერთი დამატებითი ციფრით. შემდეგ კვლავ ავავოთ ეს წირი მიღებული მნიშვნელობის მახლობლობაში უფრო მსხვილი მასშტაბით. ამ წირით ამონახსნი შეგვიძლია მივიღოთ უფრო ზუსტად და ა. შ.

განვიხილოთ ეს ტერხი მაგალითზე

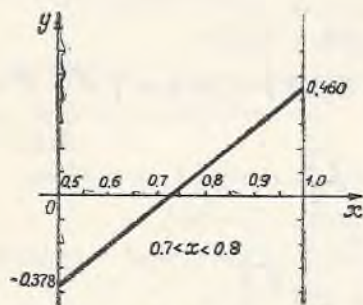
$$f(x) = x - \cos x = 0. \quad (1)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (1) განტოლების ამონახსნი მოთავსებულია 0,5-სა და 1-ს შორის. მართლაც,

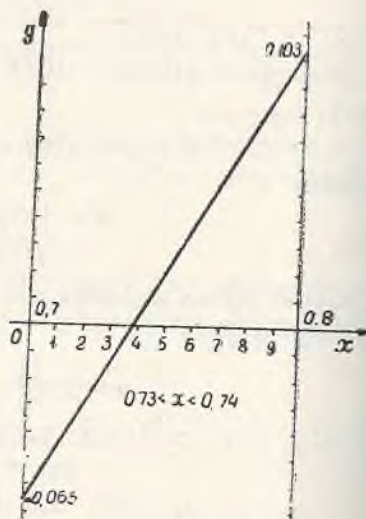
$$f(0,5) = 0,5 - \cos 0,5 = 0,5 - 1,878 = -0,378;$$

$$f(1) = 1 - \cos 1 = 1 - 0,540 = 0,460.$$

ავიღოთ შუალედი $[0,5; 1]$. გავყოთ ეს შუალედი 5 ნაწილად: 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. ავაგოთ წერტილები (0,5; -0,378) და (1; 0,460). ამ წერტილთა შემაერთებელი წრფე Ox ღერძს გადაკვეთს 0,7 და 0,8-ს შორის (ნახ. 17).



ნახ. 17



ნახ. 18

ახლა ავიღოთ და გამოვთვალოთ $f(0,7)$ და $f(0,8)$.

$$f(0,7) = 0,7 - \cos 0,7 = 0,7 - 0,765 = -0,065;$$

$$f(0,8) = 0,8 - \cos 0,8 = 0,8 - 0,697 = 0,103.$$

ავიღოთ შუალედი 0,7 და 0,8 წერტილებს შორის, ავაგოთ (0,7; -0,065) და (0,8; 0,103) წერტილები. მათი შემაერთებელი წრფე Ox ღერძს გადაკვეთს 0,73 და 0,74 წერტილებს შორის (ნახ. 18). ახლა ავიღოთ $[0,73; 0,74]$ შუალედი, გამოვთვალოთ:

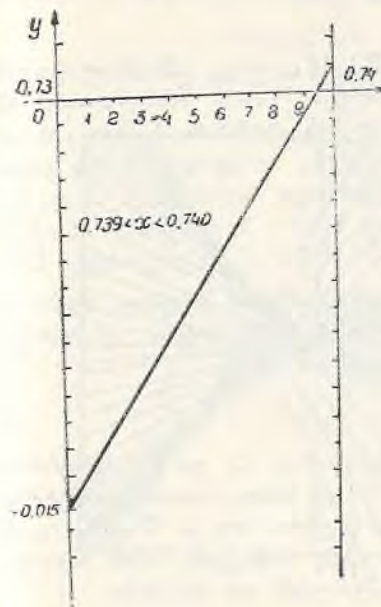
$$f(0,73) = 0,73 - \cos 0,73 = 0,73 - 0,745 = -0,015;$$

$$f(0,74) = 0,74 - \cos 0,74 = 0,74 - 0,739 = 0,01.$$

ავაგოთ ეს წერტილები. მათი შემაერთებელი წრფე Ox ღერძს გადა-

კვეთს 0,739 და 0,740-ს შორის (ნახ. 19). ამგვარად, (1) განტოლების ამონახსნი ვიპოვეთ სამი ნიშნადი ციფრით:

$$x \approx 0,739.$$



ნახ. 19



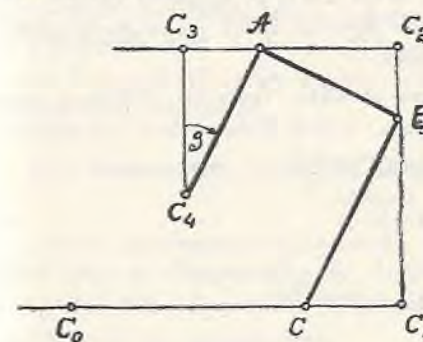
ნახ. 20

2. ლილის ზერხი (ლილი — ფრანგი ინჟინერი). ამ ზერხით ნამდვილკოეფიციენტებიან ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნა მეტად მარტივად ხდება. განვიხილოთ, მაგალითად, მესამე ხარისხის განტოლება:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0. \quad (2)$$

ავიღოთ $C_0C_1 = a_0$ (ნახ. 21).

C_0C_1 -ისაღმე პერპენდიკულარულად გადავზომოთ a_1 , თუ $a_1 > 0$, C_0C_1 -ისაღმე მარცხნივ, ხოლო მარჯვნივ, თუ $a_1 < 0$, $C_1C_2 = a_1$. ასევე C_1C_2 -ისაღმე პერპენდიკულარულად გადავზომოთ a_2 , $C_2C_3 = a_2$. ასევე



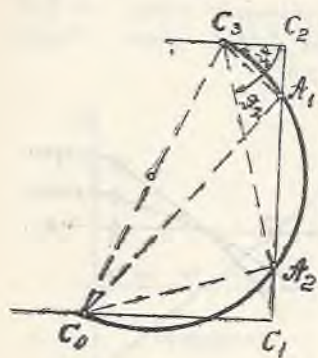
ნახ. 21

C_2C_3 -საღმე პერპენდიკულარულად გადავზომოთ $C_3C_4 = a_3$.

თუ x -ს განვსაზღვრავთ შეფარდებით:

$$\frac{C_3 A}{C_3 C_4} = \operatorname{tg} \theta = x$$

და A წერტილიდან გაავატარებთ $AB \perp AC_4$. ასევე B წერტილიდან, $BC \perp AB$, მივიღებთ $C_0 C$, რომელიც იძლევა $f(x)$ -ის მნიშვნელობას (2) ტოლობიდან. რომ ვიპოვოთ (2) განტოლების ამონახსნი, საჭიროა θ ისე შევარჩიოთ, რომ C დაემთხვეს C_0 წერტილს. პრაქტიკულად θ -ს განსაზღვრა გაადვილდება, თუ ავიღებთ გამკვირვალე მილიმეტრულას და დავადებთ $f(x)$ -ის სქემას. მილიმეტრულას ხაზები შეუთავსდება $C_3 ABC$ ტეხილს. ვაბრუნოთ მილიმეტრულა მანამ, სანამ C არ დაემთხვევა C_0 -ს.



ნახ. 22

თუ $C_2 C_1$ წრფეს წრეწირი შეეხება, მაშინ $x = \operatorname{tg} \theta$, გვექნება ჯერადი ამონახსნი. თუ წრეწირი $C_2 C_1$ წრფეს არ შეეხება, მაშინ კვადრატულ განტოლებას ექნება კომპლექსური ამონახსნი.

3. ნომოგრამებით განტოლებათა ამოხსნა. როდესაც საჭიროა ერთი და იმავე ტიპის განტოლებათა ამოხსნა, მაშინ წარმატებით გამოიყენება ნომოგრამები. მაგალითად, გვინდა განტოლების

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (4)$$

ამონახსნები სხვადასხვა a და b -სათვის. ამ განტოლებაში x იყოს პარამეტრი და a და b — ცვლადები. ცხადია, (4) განტოლება aOb სისტემაში მოგვცემს წრფეთა ოჯახს. ავავოთ

$$b = -ax - x^3$$

განსაკუთრებით მარტივად ხდება აღნიშნული ხერხით ამოხსნა კვადრატული განტოლებისა:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0. \quad (3)$$

წერტილები C_3 და C_0 შევავროთ (ნახ. 22) და მასზე, როგორც დიამეტრზე, ავავოთ წრეწირი. თუ ეს წრეწირი გადაკვეთს $C_2 C_1$ მონაკვეთს, მაშინ მივიღებთ (3) განტოლების ორ ამონახსნს:

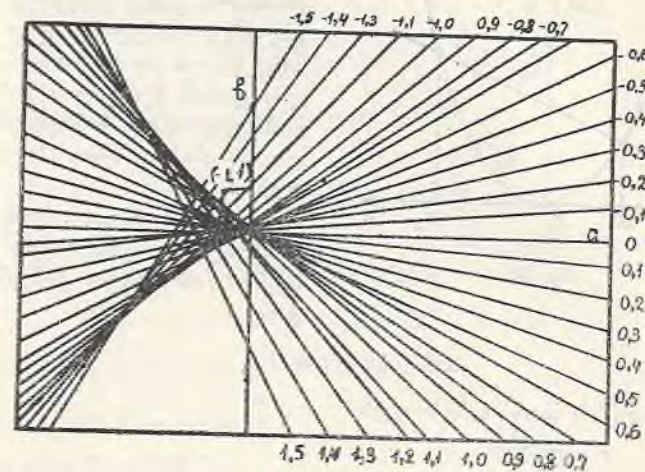
$$x_1 = \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} A_1 C_3 C_2,$$

$$x_2 = \operatorname{tg} \theta_2 = \operatorname{tg} A_2 C_3 C_2.$$

წრფე x -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის,

$$x = 0; \pm 0,1; \pm 0,2; \dots; \pm 1,5.$$

a და b ლერძებზე ავიღოთ ჩვეულებრივი სკალა (ნახ. 23).



ნახ. 23

თუ გვინდა, მაგალითად,

$$x^3 - x + 1 = 0 \quad (5)$$

განტოლების ამონახსნის პოვნა, საჭიროა ავავოთ წრფე, რომელიც გაივლის წერტილზე $a = -1$, $b = 1$. აღებული წრფის შესაბამისი x -ის მნიშვნელობა მოგვცემს (5) განტოლების ნამდვილი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობას, $x \approx -1,32$.

§ 11. კვადრატული, კუბური და მეოთხე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნა

ავიღოთ კვადრატული განტოლება

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

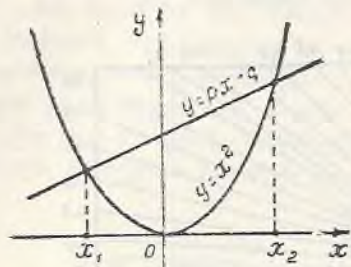
ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$x^2 = px + q,$$

სადაც

$$p = -\frac{b}{a}, \quad q = -\frac{c}{a}.$$

ცხადია, საძიებელი ამონახსნი $y=x^2$ პარაბოლისა და $y=px+q$ წრფის გადაკვეთის წერტილის აბსცისა იქნება (ნახ. 24).



ნახ. 24

ადვილი შესამჩნევია, რომ $y=x^2$ წირი უცვლელია. იგი უნდა დაიხაზოს ცალკე გამჭვირვალე ქაღალდზე, რომელიც ადრე დახაზულ წრფეს $y=px+q$ გადაკვეთს. გადაკვეთის წერტილის მიხედვით ვიმსჯელებთ, თუ რამდენი ნამდვილი ამონახსნი აქვს (1) განტოლებას.

იმავე ხერხით, რომლითაც კვადრატული განტოლება ამოვხსენით, ამოიხსნება კუბური განტოლება:

$$ax^3 + bx + c = 0 \quad (2)$$

ამ განტოლებას ასეთი სახე მივცეთ:

$$x^3 = px + q,$$

სადაც

$$p = -\frac{b}{a}, \quad q = -\frac{c}{a}.$$

საკმარისია, წინასწარ აგებული გვექონდეს წირი

$$y = x^3. \quad (3)$$

ამ წირისა და

$$y = px + q. \quad (4)$$

წრფის გადაკვეთით მივიღებთ (2) განტოლების ამონახსნებს (ნახ. 25), თუ კუბურ განტოლებას აქვს სახე:

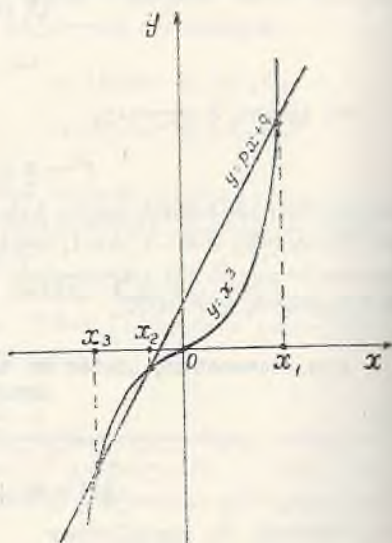
$$x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

მაშინ ეს განტოლება ჩასმით

$$x = t - \frac{a_2}{3}$$

მიიყვანება (2) სახეზე.

ცხადია, თუ (3) პარაბოლას (4) წრფესთან აქვს ერთი გადაკვეთის და მეორე შეხების წერტილი, მაშინ (2) განტოლებას ერთი ამონახსნი ექნება



ნახ. 25

მარტივი და მეორე — ორჯერადი. თუ საერთო აქვს მხოლოდ ერთი წერტილი, მაშინ განტოლებას ექნება ერთი ნამდვილი ფესვი.

ძნელი არ უნდა იყოს იმის წარმოდგენა, რომ, როგორი მდებარეობაც არ უნდა ჰქონდეს წრფეს, მას არ შეუძლია (3) პარაბოლა არ გადაკვეთოს, ამიტომ კუბურ განტოლებას ერთი ნამდვილი ამონახსნი მაინც აქვს. ეს შედეგი ჩვენთვის კარგადაა ცნობილი (ნაწ. I, თავი V, § 2, n3).

აგიღოთ მეოთხე ხარისხის განტოლება:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (5)$$

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y &= 0, \\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ამ სისტემის α , β , r ისე შევარჩიოთ, რომ იგი იძლეოდეს (5) განტოლებას. (6) სისტემის მეორე განტოლება მოგვცემს:

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r^2 = 0.$$

შევიტანოთ ამ განტოლებაში $y = x^2$. მივიღებთ:

$$x^4 + (1 - 2\beta)x^2 + (-2\alpha)x + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

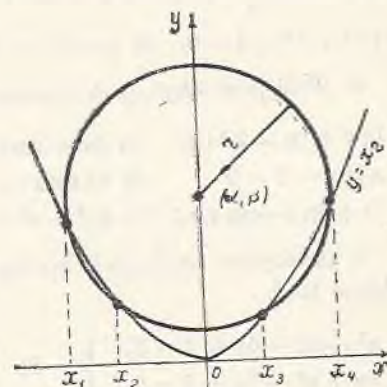
თუ ამ განტოლებას შევადარებთ (5) განტოლებას, გვექნება

$$\begin{aligned} 1 - 2\beta &= a, \\ -2\alpha &= b, \\ \alpha^2 + \beta^2 - r^2 &= c. \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\alpha = -\frac{b}{2}, \quad \beta = \frac{1-a}{2},$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}.$$



ნახ. 26

ამგვარად, (6) განტოლებათა სისტემა (5)-ის ტოლფასია. (6) სისტემის ამოსახსნელად საკმარისია ავაგოთ პარაბოლა

$$y = x^2$$

და წრეწირი

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

გადაკვეთის წერტილების აბსცისები მოგვცემს (5) განტოლების ამონახსნებს (ნახ. 26).

პარაბოლისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილების რაოდენობით უნდა ვიმსჯელოთ (5) განტოლების ნამდვილი ამონახსნების რაოდენობისა და ჯერადობის შესახებ.

ს ა ე ა რ ჭ ი შ ო 25.

1. ამოხსენით გრაფიკულად შემდეგი განტოლებანი (შედეგი განსაზღვრეთ სამი ნიშნადი ციფრით):

- 1) $\cos \pi x - x^2 = 0$, 2) $e^{-x} + x^2 - 4 = 0$, 3) $2(x+1)^2 - e^x = 0$,
 4) $x - \sin x = 1$, 5) $\sqrt{x-1} - x^2 = 0$, 6) $\lg^2 x - \frac{1}{1+x^2} = 0$,
 7) $\sqrt{x} - (x-1)^2 = 0$; 8) $\sin^2 x - (x-2)^2 = 0$, 9) $\cos^2 \pi x - x^2 = 0$,

2. შემდეგი განტოლებანი ამოხსენით ან მხეთა მეთოდით, ან ჭორდათა მეთოდით, ან შეერთებული მეთოდით 10^{-4} სიზუსტით:

- 1) $2x - \sin 2x = 0$, 2) $x^2 - 4 \sin x = 0$, 3) $\sqrt{2x} - 2 \cos \pi x = 0$,
 4) $\sqrt{x} - \cos \frac{2}{3}x = 0$, 5) $2^x - x^2 + 1 = 0$, 6) $2 \ln x - \frac{1}{x} = 0$,
 7) $e^{-x} + x^2 - 3 = 0$, 8) $x - 2^x - 1 = 0$, 9) $x \sin x - x + 1 = 0$.

3. ამოხსენით იტერაციის მეთოდით სიზუსტით 10^{-5} :

- 1) $\ln x + (x-2)^3 = 0$ 2) $5x - \cos x - 3 = 0$ 3) $4x + \lg 2x - 0,5 = 0$
 4) $x \lg x - 2 = 0$ 5) $6x \sin x - 1 = 0$ 6) $8x + \ln x = 0$
 7) $7x + \sin x - \cos x = 0$ 8) $e^{-x} + x^2 - x = 0$ 9) $5x^2 + \sin x = 0$

4. ამოხსენით იტერაციის მეთოდით განტოლებათა სისტემები სიზუსტით 10^{-4} :

- 1) $\begin{cases} x^2 - xy - 6x + 1 = 0, \\ xy + y^2 - 7y + 2 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2 + \sin(x+y) - 3 = 0, \\ 9y^2 - \cos(x-y) + 5 = 0. \end{cases}$
 3) $\begin{cases} x^6 - 2xy + 7 = 0, \\ y^7 - 3xy^2 - 5 = 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5y + \lg x - y^2 = 0, \\ 3x - x^2 + \sin y = 0. \end{cases}$

5. ამოხსენით იტერაციის მეთოდით წრფივი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 5,123x_1 + 0,347x_2 + 1,278x_3 - 0,428x_4 = 2,427, \\ 0,245x_1 + 6,176x_2 - 0,254x_3 + 1,051x_4 = -3,254, \\ 0,431x_1 - 0,279x_2 - 9,521x_3 + 0,725x_4 = -2,726, \\ -0,694x_1 + 0,275x_2 + 0,864x_3 + 8,276x_4 = 3,491. \end{cases}$$

6. ლობაჩევსკის მეთოდით ამოხსენით განტოლებანი 10^{-4} სიზუსტით:

- 1) $5x^3 + 2x^2 - 15x - 6 = 0$,
 2) $1,5x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 0,5x^2 - 2x - 2 = 0$,
 3) $x^6 - 7x^5 + 3x^4 + x^3 - x^2 - 0,5x - 2 = 0$,
 4) $128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 = 0$.

7. ლობაჩევსკის მეთოდით ამოხსენით 10^{-6} სიზუსტით:

- 1) $x^3 - 19,7997x^2 + 28,9378x + 562,833 = 0$,
 2) $0,6786x^4 + 2,7432x^3 - 10,3531x^2 + 35,3519x + 100,324 = 0$,
 3) $x^5 + 0,478625x^4 - 12,9621x^3 + 50,7295x^2 - 57,8098x = 0$,
 4) $4,64235x^3 - 8,47843x^2 + 1,37642x - 6,24357 = 0$,
 5) $6,07142x^4 + 12,2764x^3 - 8,7042x^2 + 10,8113 = 0$.

თავი XIV

წიგნი ალგებრულ განტოლებათა სისტემების მიახლოებითი ამოხსნა. ცდომილებათა შეფასება

წინამდებარე წიგნის 1-ელ ნაწილში გავეცანით დეტერმინანტთა თეორიის (თ. VI) და მატრიცათა თეორიის (თ. XII) ელემენტებს. დაწვრილებით შევისწავლეთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის კრამერის ფორმულები და გაუსის მეთოდი (თ. VI, § 6). ქვემოთ დაგვიჩვენებდა წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ცდომილების შეფასება. ამონახსნთა ცდომილება განისაზღვრება იმ არითმეტიკულ მოქმედებათა რიცხვით, რომელიც საჭიროა ამონახსნის მისაღებად. ამის გამო ქვემოთ მოკლედ შევეხებით ჩვენთვის უმეტესად ნაცნობ საკითხებს, რათა ნათელი წარმოდგენა შეგვექმნას არითმეტიკულ მოქმედებათა იმ რაოდენობაზე, რომლითაც მიიღება განტოლებათა სისტემის სათანადო ამონახსნი¹.

§ 1. განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. კრამერის ფორმულები. მატრიცები. გაუსის მეთოდი

1. განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. ვთქვათ, მოცემულია m განტოლებათა სისტემა n ცვლადით

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \quad (1)$$

ანუ

$$Ax = b, \quad (2)$$

სადაც

$$A = [a_{ik}] \quad i=1, 2, \dots, m; \quad k=1, 2, \dots, n; \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = (x_1, x_2, \dots, x_n), \\ b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T = (b_1, b_2, \dots, b_m);$$

¹ Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, М., 1963, гл. VII, VIII.

x და b მატრიცა—სვეტებია, T —ტრანსპონირების მაჩვენებელი. მოვიგონოთ წრფივი ალგებრიდან, რომ, თუ A მატრიცა n რიგის კვადრატული მატრიცაა და ამ მატრიციდან შედგენილი დეტერმინანტი

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

მაშინ (1) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ამონახსნი.

მართლაც, ვისარგებლოთ დეტერმინანტის ძირითადი თვისებით:

$$\begin{aligned} a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} &= \Delta, \\ a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \dots + a_{ni}A_{ni} &= 0, \quad i \neq k, \end{aligned}$$

ანუ

$$\sum_{s=1}^n a_{si}A_{si} = \begin{cases} \Delta, & i = k \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad (3)$$

სადაც A_{si} არის a_{si} ელემენტის ალგებრული დამატება.

(1) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ i -ური სვეტის a_{1i} ელემენტის A_{1i} ალგებრულ დამატებაზე, მეორე განტოლება A_{2i} -ზე და ა. შ. n -ური განტოლება A_{ni} -ზე და მიღებული ტოლობანი შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \left(\sum_{s=1}^n a_{si}A_{si} \right) x_i + \left(\sum_{s=1}^n a_{s2}A_{si} \right) x_2 + \dots + \left(\sum_{s=1}^n a_{sn}A_{si} \right) x_n + \\ + \dots + \left(\sum_{s=1}^n a_{sn}A_{si} \right) x_n = \sum_{s=1}^n b_s A_{si}. \end{aligned}$$

მიღებულ გამოსახულებაში (3) თვისების თანახმად ყველა $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ -ის კოეფიციენტი ნულის ტოლია, ხოლო x_i -ს კოეფიციენტი Δ -ს ტოლია, ამიტომ გვექნება

$$\left(\sum_{s=1}^n a_{si}A_{si} \right) x_i = \sum_{s=1}^n b_s A_{si},$$

საიდანაც

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

ხოლო

$$\Delta_i = \sum_{s=1}^n b_s A_{si}. \quad (5)$$

მივიღეთ ჩვენთვის კარგად ცნობილი კრამერის ფორმულები, რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ, თუ $\det A \neq 0$, განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

2. მატრიცები. მოვიგონოთ მატრიცათა თეორიიდან ზოგიერთი ცნება (იხ. ნაწილი I, თავი XII).

მატრიცას, რომლის მხოლოდ დიაგონალზე მყოფი ელემენტები განსხვავდება ნულისაგან, ეწოდება დიაგონალური მატრიცა,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

თუ დიაგონალზე ელემენტები ერთეულის ტოლია, $a_{ii}=1$, ეწოდება ერთეული მატრიცა,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცა,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ეწოდება ისეთ მატრიცას, რომელიც A მატრიცაზე გამრავლებით გვაძლევს ერთეულ მატრიცას,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = J.$$

ცხადია,

$$AJ = JA = A.$$

ორი $A = [a_{ik}]_{m,p}$ და $B = [b_{ih}]_{p,n}$ მატრიცის ნამრავლი $C = [c_{ik}]_{m,n}$ განისაზღვრება შემდეგი დამოკიდებულებით

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk}.$$

გავამრავლოთ $Ax = b$ ტოლობის ორივე მხარე A^{-1} მატრიცაზე, მივიღებთ

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$

ანუ

$$x = A^{-1}b. \quad (6)$$

(4) გამოსახულება (5) ტოლობის საფუძველზე ასე ჩაიწერება:

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^n A_{si} b_s, \quad (7)$$

ანუ

$$x = \frac{1}{\Delta} \bar{A} b, \quad (8)$$

სადაც

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\bar{A}$ მატრიცას A მატრიცის საურთიერთო მატრიცა ეწოდება.

(6) და (8) ტოლობების შედარება მოგვცემს

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \bar{A}. \quad (9)$$

ეს ფორმულა გვაძლევს A მატრიცის შებრუნებული მატრიცის გამოსახულებას.

ამრიგად, A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა არსებობს, თუ $\det A \neq 0$.

მაგალითად, ვიპოვოთ A მატრიცის,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

შებრუნებული მატრიცა.

ამისათვის გამოვთვალოთ

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot 9 + 2(-5) + 3(-11) = -34 \neq 0.$$

(9) ფორმულით გვექნება

$$A^{-1} = -\frac{1}{34} \begin{bmatrix} 9 & -1 & -13 \\ -5 & -7 & 11 \\ -11 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

თუ ავიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

მივიღებთ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{34} \begin{bmatrix} 9 & -1 & -13 \\ -5 & -7 & 11 \\ -11 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

საიდანაც

$$x_1 = -\frac{1}{34} (9 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 13 \cdot (-3)) = -\frac{46}{34},$$

$$x_2 = -\frac{1}{34} (-5 \cdot 1 - 7 \cdot 2 + 11 \cdot (-3)) = \frac{52}{34},$$

$$x_3 = -\frac{1}{34} (-11 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-3)) = -\frac{8}{34}.$$

3. გაუსის მეთოდი. (1) განტოლებათა სისტემაში მივიღოთ, რომ განტოლებათა რიცხვი ცვლადთა რიცხვის ტოლია, $m=n$. თავისუფალი წევრები $a_{i,n+1}$ ასობით აღვნიშნოთ,

$$b_i = a_{i,n+1}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ გაუსის მეთოდით.

აეილოთ (1) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება და გავყოთ a_{11} -ზე, $a_{11} \neq 0$. მივიღებთ

$$x_1 + c_{12}^{(1)} x_2 + c_{13}^{(1)} x_3 + \dots + c_{1n}^{(1)} x_n = c_{1,n+1}^{(1)}, \quad (11)$$

სადაც

$$c_{1k}^{(1)} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad k=2, 3, \dots, n+1. \quad (12)$$

გამოვრიცხოთ (1) განტოლებათა სისტემის მე-2, მე-3 და ა. შ. n -ური განტოლებიდან x_1 . ამისათვის (11) განტოლება მიმდევრობით გავამრავლოთ a_{21} -ზე, a_{31} -ზე და ა. შ. a_{n1} -ზე და გამოვაკლოთ სათანადოდ (1) განტოლებათა სისტემის მე-2, მე-3 და ა. შ. n -ურ განტოლებას. მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + a_{24}^{(1)} x_4 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n &= a_{2,n+1}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + a_{34}^{(1)} x_4 + \dots + a_{3n}^{(1)} x_n &= a_{3,n+1}^{(1)}, \\ &\vdots \\ a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_3 + a_{n4}^{(1)} x_4 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n &= a_{n,n+1}^{(1)}, \end{aligned} \quad (13)$$

სადაც

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - a_{i1} c_{1k}^{(1)}, \quad \begin{aligned} i &= 2, 3, \dots, n, \\ k &= 2, 3, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (14)$$

ახლა ავიღოთ (13) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება და გავყოთ $a_{22}^{(1)}$ -ზე, $a_{22}^{(1)} \neq 0$, მივიღებთ

$$x_2 + c_{23}^{(2)} x_3 + c_{24}^{(2)} x_4 + \dots + c_{2n}^{(2)} x_n = c_{2,n+1}^{(2)}, \quad (15)$$

სადაც

$$c_{2k}^{(2)} = \frac{a_{2k}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad k=3, 4, \dots, n+1. \quad (16)$$

გამოვრიცხოთ (13) განტოლებათა სისტემის მე-2, მე-3 და ა. შ. n -ური განტოლებიდან x_2 . ამისათვის (15) განტოლება მიმდევრობით გავამრავლოთ $a_{32}^{(1)}$ -ზე, $a_{42}^{(1)}$ -ზე და ა. შ. $a_{n2}^{(1)}$ -ზე და სათანადოდ გამოვაკლოთ (13) განტოლებათა სისტემის მე-2, მე-3 და ა. შ. n -ურ განტოლებას. მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n &= a_{3,n+1}^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 + \dots + a_{4n}^{(2)} x_n &= a_{4,n+1}^{(2)}, \\ &\vdots \\ a_{n3}^{(2)} x_3 + a_{n4}^{(2)} x_4 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n &= a_{n,n+1}^{(2)}, \end{aligned} \quad (17)$$

სადაც

$$a_{ik}^{(2)} = a_{ik}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} c_{2k}^{(2)}, \quad i = 3, 4, \dots, n, \quad k = 3, 4, \dots, n+1, \quad (18)$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$a_{nn}^{(n-1)} x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)}, \quad (19)$$

სადაც

$$a_{nn}^{(n-1)} = a_{nn}^{(n-2)} - a_{n,n-1}^{(n-2)} c_{n-1,n}^{(n-1)}, \quad (20)$$

$$a_{n,n+1}^{(n-1)} = a_{n,n+1}^{(n-2)} - a_{n,n-1}^{(n-2)} a_{n-1,n+1}^{(n-1)},$$

(19) განტოლებიდან განვსაზღვროთ x_n ,

$$x_n = c_{n,n+1}^{(n)}, \quad (21)$$

სადაც

$$c_{n,n+1}^{(n)} = \frac{a_{n,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}. \quad (22)$$

ამგვარად მივიღეთ (1) განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტური (11), (15) და ა. შ. (21) განტოლებათა სისტემა

$$x_1 + c_{12}^{(1)} x_2 + c_{13}^{(1)} x_3 + c_{14}^{(1)} x_4 + \dots + c_{1n}^{(1)} x_n = c_{1,n+1}^{(1)},$$

$$x_2 + c_{23}^{(2)} x_3 + c_{24}^{(2)} x_4 + \dots + c_{2n}^{(2)} x_n = c_{2,n+1}^{(2)},$$

$$x_3 + c_{34}^{(3)} x_4 + \dots + c_{3n}^{(3)} x_n = c_{3,n+1}^{(3)},$$

$$\dots$$

$$x_n = c_{n,n+1}^{(n)},$$

სადაც კოეფიციენტები მიმდევრობით განისაზღვრება (12), (14), (16) და ა. შ. (22) ფორმულებიდან

$$c_{1k}^{(1)} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad k = 2, 3, \dots, n+1;$$

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - a_{i1} c_{1k}^{(1)}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad k = 2, 3, \dots, n+1;$$

$$a_{ik}^{(2)} = a_{ik}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} c_{2k}^{(2)}, \quad i = 3, 4, \dots, n; \quad k = 3, 4, \dots, n+1$$

და ა. შ.,

ანუ

$$c_{pk}^{(p)} = \frac{a_{pk}^{(p-1)}}{a_{pp}^{(p-1)}}, \quad k = p+1, p+2, \dots, n+1;$$

$$a_{ik}^{(p)} = a_{ik}^{(p-1)} - a_{ip}^{(p-1)} c_{pk}^{(p)}, \quad i = p+1, \dots, n, \quad k = p+1, \dots, n+1,$$

სადაც

$$p = 1, 2, \dots, n; \quad a_{ik}^{(0)} = a_{ik}.$$

სისტემა

სისტემა	0	x _k				b _i = a _{i5}	5 Σ a _{ik} = a _{i6} n=1
		1	2	3	4	5	6
1	a _{1k} : a ₁₁	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃	a ₁₄	a ₁₅	a ₁₆
2	a _{2k} - a ₂₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₂₁	a ₂₂	a ₂₃	a ₂₄	a ₂₅	a ₂₆
3	a _{3k} - a ₃₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₃₁	a ₃₂	a ₃₃	a ₃₄	a ₃₅	a ₃₆
4	a _{4k} - a ₄₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₄₁	a ₄₂	a ₄₃	a ₄₄	a ₄₅	a ₄₆
5	a _{5k} : a ₅₅ ⁽²⁾	1	1	c ₅₃ ⁽²⁾	c ₅₄ ⁽²⁾	c ₅₅ ⁽²⁾	c ₅₆ ⁽²⁾
6	a _{6k} - a ₆₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₆₁	a ₆₂	a ₆₃	a ₆₄	a ₆₅	a ₆₆
7	a _{7k} - a ₇₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₇₁	a ₇₂	a ₇₃	a ₇₄	a ₇₅	a ₇₆
8	a _{8k} - a ₈₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₈₁	a ₈₂	a ₈₃	a ₈₄	a ₈₅	a ₈₆
9	a _{9k} - a ₉₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₉₁	a ₉₂	a ₉₃	a ₉₄	a ₉₅	a ₉₆
10	a _{10k} - a ₁₀₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₁₀₁	a ₁₀₂	a ₁₀₃	a ₁₀₄	a ₁₀₅	a ₁₀₆
11	a _{11k} - a ₁₁₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₁₁₁	a ₁₁₂	a ₁₁₃	a ₁₁₄	a ₁₁₅	a ₁₁₆
12	a _{12k} - a ₁₂₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₁₂₁	a ₁₂₂	a ₁₂₃	a ₁₂₄	a ₁₂₅	a ₁₂₆
13	a _{13k} - a ₁₃₁ c _{1k} ⁽¹⁾	a ₁₃₁	a ₁₃₂	a ₁₃₃	a ₁₃₄	a ₁₃₅	a ₁₃₆

(23) განტოლებათა სისტემიდან მიმდევრობით გამოვთვლით

$$\begin{aligned} x_n &= c_{n,n+1}^{(n)} \\ x_{n-1} &= c_{n,n+1}^{(n-1)} - c_{n,n}^{(n-1)} x_n \\ x_{n-2} &= c_{n,n+1}^{(n-2)} - c_{n-1,n}^{(n-2)} x_n - c_{n-1,n-1}^{(n-2)} x_{n-1} \\ &\vdots \\ x_1 &= c_{1,n+1}^{(1)} - c_{1,n}^{(1)} x_n - c_{1,n-1}^{(1)} x_{n-1} - \dots - c_{1,2}^{(1)} x_2. \end{aligned} \quad (25)$$

ოთხუცნობიანი ოთხი წრფივი განტოლების ამონახსნი მოცემულია 1-ლი ცხრილის ბოლოში, მე-5 სვეტში,

$$x_4 = \bar{c}_{45}^{(3)}, x_3 = \bar{c}_{35}^{(3)}, x_2 = \bar{c}_{25}^{(3)}, x_1 = \bar{c}_{15}^{(3)}.$$

გამოთვლების სიზუსტის კონტროლისათვის 1-ელ ცხრილში მოთავსებულია სვეტი $\sum = a_{i5}$,

$$\sum_{k=1}^5 a_{ik} = a_{i5}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

თუ a_{i5} -ზე მოვახდენთ იგივე გარდაქმნას, რომელსაც ვასრულებთ a_{ik} -ზე, მაშინ i -ურ სტრიქონში მოთავსებული გარდაქმნილ a_{ik} სიდიდეთა ჯამი ტოლი უნდა იყოს a_{i5} გარდაქმნით მიღებული სიდიდისა, თუ გამოთვლები ცდომილებას არ შეიცავს. მაგრამ საზოგადოდ, გამოთვლებს სათანადო სიზუსტით ვაწარმოებთ, ამიტომ $\sum_{k=1}^6 a_{ik}$ ტოლი უნდა იყოს a_{i5} -ისა

ნაღო სიზუსტით ვაწარმოებთ, ამიტომ $\sum_{k=1}^6 a_{ik}$ ტოლი უნდა იყოს a_{i5} -ისა აღებული სიზუსტით.

§ 2. დეტერმინანტის მნიშვნელობის გამოთვლა გაუსის მეთოდით

სიმარტივისათვის ავიღოთ მეოთხე რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

დავაკვირდეთ 1-ელ ცხრილს. ცხრილში მოთავსებულია დეტერმინანტი $\Delta^{(1)}$,

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & c_{12}^{(1)} & c_{13}^{(1)} & c_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{vmatrix},$$

რომელიც მიიღება (1) დეტერმინანტიდან, თუ პირველი სტრიქონიდან a_{11} -ს გავიტანთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ და მიღებული დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ელემენტებს მიმდევრობით გავამრავლებთ a_{21} -ზე, a_{31} -ზე, a_{41} -ზე და სათანადოდ გავმოვაკლებთ მეორე, მესამე და მეოთხე სტრიქონის ელემენტებს. ეს უკანასკნელი მოქმედება, დეტერმინანტის თვისების თანახმად, არ ცვლის დეტერმინანტის მნიშვნელობას, ამიტომ გვექნება

$$\Delta = a_{11} \Delta^{(1)} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

იმავე 1-ელი ცხრილიდან ცხადია, რომ

$$\Delta^{(1)} = a_{22}^{(1)} \begin{vmatrix} 1 & c_{23}^{(2)} & c_{24}^{(2)} \\ 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{vmatrix},$$

ანუ

$$\Delta^{(1)} = a_{22}^{(1)} \Delta^{(2)}$$

სადაც

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

ამის შედეგად (2) მოგვცემს

$$\Delta = a_{11} a_{22}^{(1)} \Delta^{(2)},$$

თუ ამ პროცესს გავავრცელებთ n -ური რიგის დეტერმინანტისათვის, მივიღებთ

$$\Delta = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)} \Delta^{(n)};$$

სადაც

$$\Delta^{(n)} = 1.$$

ამგვარად, Δ -თვის გვექნება გამოსახულება

$$\Delta = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)}. \quad (3)$$

ეს გამოსახულება გვიჩვენებს: დეტერმინანტის მნიშვნელობა ტოლია გაუსის სქემის „მთავარი“ ელემენტების ნამრავლისა. ამ შემთხვევაში თავისუფალი წევრების გამოთვლა საჭირო არაა.

§ 3. გაუსის მეთოდით მიღებულ ამონახსნთა დაზუსტება

გაუსის მეთოდით წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი მიახლოებით მიიღება. ცდომილება გამოწვეულია გამოთვლების შედეგების დამრგვალებით და ზოგიერთი უზუსტობით, რომლებიც გამოთვლების

დროს შეიძლება შეგვხვდეს. მიახლოებითი ამონახსნები უნდა დაეაზუსტოთ.

ვთქვათ,

$$Ax = b$$

განტოლებათა სისტემის ზუსტი ამონახსნია X , ხოლო მიახლოებითი ამონახსნი $X^{(0)}$,

$$X = X^{(0)} + \alpha,$$

სადაც α შესწორებაა (მატრიცა — სვეტი),

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$A(X^{(0)} + \alpha) = b.$$

აქედან, ცხადია,

$$A\alpha = \varepsilon,$$

სადაც

$$\varepsilon = b - AX^{(0)}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n).$$

(1) განტოლებას ისევ 1-ელი ცხრილით ამოვხსნით, იმ განსხვავებით, რომ შეიცვლება მხოლოდ განტოლების თავისუფალი წევრები. ასე რომ, მხოლოდ ε სვეტის გამოთვლა დაგვჭირდება. ε სვეტის გამოთვლები ნაჩვენებია მე-2 ცხრილში.

ცხრილი 2

$c_{15}^{(1)} = \varepsilon_1 : a_{11}$
$a_{25}^{(1)} = \varepsilon_2 - a_{21} c_{15}^{(1)}$
$a_{35}^{(1)} = \varepsilon_3 - a_{31} c_{15}^{(1)}$
$a_{45}^{(1)} = \varepsilon_4 - a_{41} c_{15}^{(1)}$
$c_{25}^{(2)} = a_{25}^{(1)} : a_{22}^{(1)}$
$a_{35}^{(2)} = a_{35}^{(1)} - a_{32}^{(1)} c_{25}^{(2)}$
$a_{45}^{(2)} = a_{45}^{(1)} - a_{42}^{(1)} c_{25}^{(2)}$
$c_{35}^{(3)} = a_{35}^{(2)} : a_{33}^{(2)}$
$a_{45}^{(3)} = a_{45}^{(2)} - a_{43}^{(2)} c_{35}^{(3)}$
$c_{45}^{(4)} = a_{45}^{(3)} : a_{44}^{(3)}$

ამ ცხრილით მივიღებთ

$$\alpha_4 = c_{45}^{(4)},$$

$$\alpha_3 = c_{35}^{(3)} - c_{34}^{(3)} \alpha_4,$$

$$\alpha_2 = c_{25}^{(2)} - c_{24}^{(2)} \alpha_4 - c_{23}^{(2)} \alpha_3,$$

$$\alpha_1 = c_{15}^{(1)} - c_{14}^{(1)} \alpha_4 - c_{13}^{(1)} \alpha_3 - c_{12}^{(1)} \alpha_2.$$

§ 4. გაუსის მეთოდით განტოლებათა სისტემის ამონახსნით მიღებისათვის არითმეტიკულ მოქმედებათა რიცხვი

თუ დავაყვრებთ 1-ელ ცხრილს, ადვილად განვსაზღვრავთ მოქმედებათა რიცხვს, რომელიც საჭიროა n -ცვლადიანი n განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის.

ავიღოთ 1-ელი ცხრილის პირველი მოქმედების სტრიქონი. ამ სტრიქონში სრულდება a_{11} -ზე გაყოფა 5-ჯერ, 5-ჯერ — შეკრება.

$$\sum_{k=1}^5 a_{ik} = a_{i6}.$$

მეორე მოქმედების სტრიქონში სრულდება 5-ჯერ გამრავლება და ამდენჯერვე გამოკლება.

ასევე გვქმნება მესამე და მეოთხე მოქმედების სტრიქონში. სულ 20-ჯერ (4 · 5) შესრულდება გამრავლება და გაყოფა და ამდენჯერვე — შეკრება და გამოკლება.

ასე რომ, n -უცნობიანი n განტოლებათა სისტემის პირველი გამარტივებისათვის საჭიროა $n(n+1)$ -ჯერ გამრავლება და გაყოფა და ამდენჯერვე შეკრება და გამოკლება.

შემდეგი მოქმედება სრულდება $(n-1)$ უცნობიან $n-1$ განტოლებათა სისტემაზე. აქ დაგვჭირდება $(n-1)n$ -ჯერ გამრავლება და გაყოფა, ამდენივე შეკრება და გამოკლება.

თუ ასეთ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ, რომ (1, § 1) განტოლებათა სისტემის მთლიანი გამარტივებისათვის, ე. ი. (25, § 1) განტოლებათა სისტემის სახეზე მიყვანისათვის დაგვჭირდება

$$\begin{aligned} & [n(n+1) + (n-1)n + \dots + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2] \cdot \text{ჯერ} \\ & \text{გამრავლებისა და გაყოფის შესრულება. უკანასკნელიდან მივიღებთ} \\ & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n + n(n+1) = 1(1+1) + 2(2+1) + \\ & \quad + \dots + n(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + 1 + 2 + \dots + n = \\ & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} + 1 \right) = \\ & = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \end{aligned}$$

მივიღებთ რა (23, § 1) განტოლებათა სისტემას, გამოთვლებს ვიწყებთ x_n -დან და ვლბულობთ (25, § 1) ფორმულებს. (25 § 1) ფორმულებში

გამრავლების რიცხვია $\frac{n(n-1)}{2}$, ამდენივეა გამოკლების რიცხვი.

ასე რომ, გაუსის მეთოდით n უცნობიანი n განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის დაგეგმირდება

$$N = \frac{2n(n+1)(n+2)}{3} + n(n-1) \quad (1)$$

არითმეტიკული მოქმედების ჩატარება. ეს უკანასკნელი კი ნაკლებია n^2 -ზე, თუ $n > 7$.

ამგვარად, n უცნობიანი განტოლების ამოხსნისათვის საჭიროა n^3 მოქმედება. თუ ვიცით ერთი მოქმედების შესრულების დრო, ადვილად განვსაზღვრავთ, თუ რა დრო დაგვჭირდება განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის (ცხადია, თუ სხვა მოქმედების შესრულება არ გვჭირდება). თუ განტოლებათა სისტემის ამოხსნას ელექტრონული მანქანით ვაწარმოებთ, მაშინ სისტემის ამოხსნის დრო, რომელიც (1) ფორმულით განისაზღვრება, არ იცმარებს, რადგანაც განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პროგრამა შეიცავს ლოგიკურსა და სხვა მოქმედებას, რომლებიც (1) ფორმულაში არაა გათვალისწინებული.

ოთხეულიანი წრფივი განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის საჭიროა 92 არითმეტიკული მოქმედება; $n=4$,

$$N = \frac{2 \cdot 4 \cdot (4+1)(4+2)}{3} + 4(4-1) = 92.$$

§ 5. გაუხის მეთოდით შეგროვებული მატრიცის შედგენა

1-ელ პარაგრაფში განვსაზღვრეთ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა. A^{-1} მატრიცა A მატრიცის შებრუნებული მატრიცაა, თუ

$$A \cdot A^{-1} = E, \quad (1)$$

სადაც E ერთეული მატრიცაა.

ვთქვათ, მოცემულია A მატრიცა

$$A = \|a_{ik}\|, \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

ჩემდღის

$$\det A \neq 0.$$

თუ A^{-1} -ის ელემენტებს აღვნიშნავთ x_{ik} ,

$$A^{-1} = \|x_{ik}\|, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

მაშინ (1) დამოკიდებულება მოგვცემს

$$\sum_{s=1}^n a_{is} x_{sk} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

სადაც

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

(4) გამოსახულება განტოლებათა სისტემა x_{ik} , $i, k = 1, 2, \dots, n$ უცნობით. უცნობთა და განტოლებათა რიცხვი ტოლია და უდრის n^2 -ს.

ამოვეწროთ (2) განტოლებათა სისტემიდან განტოლებები, რომელიც შეიცავს $x_{11}, x_{21}, x_{31}, \dots, x_{n1}$ -ს. ასეთია განტოლებანი

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} + \cdots + a_{1n}x_{n1} &= 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} + \cdots + a_{2n}x_{n1} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + a_{n3}x_{31} + \dots + a_{nn}x_{n1} = 0.$$

განტოლებანი, რომელიც შეიცავს A^{-1} მატრიცის მეორე სვეტის ელემენტებს $x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}$ ისე, (3) განტოლებათა სისტემაა, ოღონდ შეცვლილი თავისუფალი წევრები:

$$\begin{aligned} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} + \dots + a_{1n}x_{n2} &= 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} + \dots + a_{2n}x_{n2} &= 1, \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} + \dots + a_{3n}x_{n2} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + a_{n3}x_{n2} + \dots + a_{nn}x_{n2} = 0.$$

საე რომ, გვეძნება ერთი და იგივე განტოლებათა სისტემა სხვადასხვა თანდართული წევრებით. ამ განტოლებათა სისტემას ამოცნაოთ ერთი და იმავე გაუსის სტეშიო, ოღონდ დაემატება სათანადო სვეტები (3), (4) და 6. შ. განტოლებების თაქისუფალი წევრებისათვის.

გამოთვლების მიმდინარეობის ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი.
შევადგინოთ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა A^{-1} .

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

x_{1k}, x_{2k}, x_{3k} -სთვის გვექნება განტოლებათა სისტემა

$$Ax_k = B_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

பாடல்கள்

$$x_h = \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \\ x_{3h} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

გამოთვლები ჩავატარეთ მე-3 ცხრილის მიხედვით.

სტანდარტული ფორმები	მომდებელი	$k \backslash i$		x_k		$b_{11}=a_{14}$	$b_{12}=a_{15}$	$b_{13}=a_{16}$	$\sum = a_{17}$
		1	2	3					
0		1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	a_{17}
		2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	a_{27}
		3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	a_{37}
1	$a_{1k} : a_{11}$	1	1	$c_{12}^{(1)}$	$c_{13}^{(1)}$	$c_{14}^{(1)}$	$c_{15}^{(1)}$	$c_{16}^{(1)}$	$c_{17}^{(1)}$
2	$a_{2k} - a_{21} c_{1k}^{(1)}$	2		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$	$a_{27}^{(1)}$
3	$a_{3k} - a_{31} c_{1k}^{(1)}$	3		$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$	$a_{37}^{(1)}$
4	$a_{2k}^{(1)} : a_{22}^{(1)}$	2		1	$c_{23}^{(2)}$	$c_{24}^{(2)}$	$c_{25}^{(2)}$	$c_{26}^{(2)}$	$c_{27}^{(2)}$
5	$a_{3k}^{(1)} - a_{32}^{(1)} c_{2k}^{(2)}$	3			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$	$a_{37}^{(2)}$
6	$a_{3k}^{(2)} : a_{33}^{(2)}$	3			1	$c_{34}^{(3)}$	$c_{35}^{(3)}$	$c_{36}^{(3)}$	$c_{37}^{(3)}$
7	$c_{2,3+k}^{(3)} - c_{23}^{(3)} c_{3k}^{(3)}$	2		1		$c_{24}^{(2)}$	$c_{25}^{(2)}$	$c_{26}^{(2)}$	$c_{27}^{(2)}$
	$c_{1,3+k}^{(1)} - c_{13}^{(1)} c_{3k}^{(1)}$	1				$c_{14}^{(1)}$	$c_{15}^{(1)}$	$c_{16}^{(1)}$	$c_{17}^{(1)}$

სტანდარტული ფორმები	მომდებელი	$k \backslash i$		x_k		$b_{11}=a_{14}$	$b_{12}=a_{15}$	$b_{13}=a_{16}$	$\sum = a_{17}$
		1	2	3					
0		1	3	4	1	1	0	0	9
		2	$\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$	6	5	0	1	0	14
		3	1	2	3	0	0	1	7
1	$a_{1k} : a_{11}$	1	1	1,33333	0,33333	0,33333	0	0	3
2	$a_{2k} - a_{21} c_{1k}^{(1)}$	2		3,33334	4,33334	-0,666666	1	0	8
3	$a_{3k} - a_{31} c_{1k}^{(1)}$	3		0,66667	2,66667	-0,33333	0	1	4
4	$a_{2k}^{(1)} : a_{22}^{(1)}$	2		1	1,30000	-0,20000	0,29999	0	2,39995
5	$a_{3k}^{(1)} - a_{32}^{(1)} c_{2k}^{(2)}$	3			1,80000	-0,14000	-0,19994	1	2,53994
6	$a_{3k}^{(2)} : a_{33}^{(2)}$	3			1	-0,07778	-0,01111	0,55556	
7	$c_{2,3+k}^{(3)} - c_{23}^{(3)} c_{3k}^{(3)}$	2		1		0,21133	0,28555	-0,72223	
8	$c_{1,3+k}^{(1)} - c_{13}^{(1)} c_{3k}^{(1)}$	1		1		-0,07108	-0,37703	0,77779	

მე-3 ცხრილზე დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ b_{11} -ის სვეტში მიიღება x_{11} -ის მნიშვნელობანი. მაგალითად, მე-6 მოქმედების სტრიქონისა ($i=3$) და b_{11} -ის სვეტის გადაკვეთები მიიღება x_{31} . მე-7 მოქმედების სტრიქონისა ($i=2$) და b_{11} -ის სვეტის გადაკვეთაში მიიღება x_{21} და ა. შ. მთლიანად კი ცხრილის ქვედა კუთხეში გვექნება A^{-1} -ის ელემენტები. A^{-1} -ის მისაღებად საჭიროა სტრიქონების სათანადო გადაადგილება:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{14}^{(1)} & \bar{c}_{15}^{(1)} & \bar{c}_{16}^{(1)} \\ \bar{c}_{24}^{(2)} & \bar{c}_{25}^{(2)} & \bar{c}_{26}^{(2)} \\ \bar{c}_{34}^{(3)} & \bar{c}_{35}^{(3)} & \bar{c}_{36}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

(5) მატრიცისათვის ჩატარებული გამოთვლები მოგვცემს მე-4 ცხრილს.

მე-4 ცხრილის მიხედვით

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,07108; & -0,37703; & 0,77779 \\ 0,21133; & 0,28555; & -0,72223 \\ -0,07778; & -0,01111; & 0,55556 \end{bmatrix}.$$

§ 6. შანიშვანები გაუსის მეთოდის შესახებ. შორღანის სქემა

თუ გამოთვლებს არ ვაწარმოებთ ავტომატური გამოთვლელი მანქანით, მაშინ გამოთვლების ჩატარება გაუსის მეთოდით ძნელია. ამ შემთხვევაში უმჯობესია გამოთვლები ჩავატაროთ ე. წ. მთავარი ელემენტების არჩევით.

მოცემულ განტოლებათა სისტემიდან ავარჩიოთ აბსოლუტური მნიშვნელობით უდიდესი a_{ih} კოეფიციენტი — მთავარი ელემენტი. ამ ელემენტით ზუსტად იგივე მოქმედება უნდა ჩავატაროთ, რაც a_{11} -ით ჩავატარეთ 1-ლ ცხრილში, მაგრამ გამოთვლების ჩატარება ასეც შეგვიძლია:

$$-\frac{a_{1h}}{a_{11}} = m_1, \quad -\frac{a_{rh}}{a_{11}} = m_r, \dots, \quad -\frac{a_{nh}}{a_{11}} = m_n.$$

ამ m_i სიდიდეებზე, $i = 1, 2, \dots, n$, მიმდევრობით გავამრავლოთ i -ური განტოლება (განტოლება, რომელშიაც მთავარი ელემენტი მოთავსებული) და შევკრიბოთ სათანადოდ პირველ, მეორე და ა. შ. განტოლებებთან. მივიღებთ განტოლებათა სისტემას, რომელშიაც არ შევა x_h სიდიდე, თუ i -ურ განტოლებას არ ავიღებთ.

ამგვარად, გვექნება ($n-1$) განტოლება ($n-1$) უცნობით. ამ $n-1$ განტოლებათა სისტემას ისევ მთავარი ელემენტით დავიყვანოთ $n-2$ განტოლებათა სისტემაზე $n-2$ უცნობით და ა. შ.

მოქმედება	k		x_h						$b_i = a_{16}$	$\sum a_{1h} = a_{16}$
	i	m_i	1	2	3	4	5	6		
			a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}		
1	$a_{14} : a_{34} = m_1$	1	m_1						a_{15}	a_{16}
2	$a_{24} : a_{34} = -m_2$	2	m_2	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{15}	a_{16}
3	$a_{44} : a_{34} = -m_4$	3		a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{15}	a_{16}
4	$a_{1h} + a_{3h} \cdot m_1$	4	a_{11}	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$				$a_{15}^{(1)}$	$a_{16}^{(1)}$
5	$a_{2h} + a_{3h} \cdot m_2$	2	$m_2^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$				$a_{15}^{(1)}$	$a_{16}^{(1)}$
6	$a_{4h} + a_{3h} \cdot m_4$	4	$m_4^{(1)}$	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$				$a_{15}^{(1)}$	$a_{16}^{(1)}$
7	$a_{33} : a_{13}^{(1)} = -m_3^{(1)}$	2								
8	$a_{13}^{(1)} : a_{13}^{(1)} = -m_1^{(1)}$	4								
9	$a_{2h}^{(1)} + a_{1h}^{(1)} \cdot m_2^{(1)}$	2	$m_2^{(2)}$	$a_{22}^{(2)}$					$a_{15}^{(2)}$	$a_{16}^{(2)}$
10	$a_{4h}^{(1)} + a_{1h}^{(1)} \cdot m_4^{(1)}$	4	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$					$a_{15}^{(2)}$	$a_{16}^{(2)}$
11	$a_{31}^{(2)} : a_{41}^{(2)} = -m_3^{(2)}$	2								
12	$a_{2h}^{(2)} + a_{4h}^{(2)} \cdot m_3^{(2)}$	2							$a_{15}^{(3)}$	$a_{16}^{(3)}$
13	$a_{2h}^{(3)} : a_{2h}^{(3)}$	2		1					$a_{15}^{(4)}$	$x_{26}^{(4)}$
14	$(a_{4h}^{(2)} - a_{4h}^{(3)} x_2) : a_{41}^{(2)}$	4	1						$a_{15}^{(5)}$	$a_{16}^{(5)}$
15	$(a_{1h}^{(1)} - a_{1h}^{(2)} x_2 - a_{1h}^{(3)} x_1) : a_{13}^{(1)}$	1			1				$a_{15}^{(6)}$	$a_{16}^{(6)}$
16	$(a_{35} - a_{35} x_2 - a_{31} x_1 - a_{35} x_3) : a_{34}$	4				1			$a_{15}^{(7)}$	$a_{16}^{(7)}$

მთავარი ელემენტით გამოთვლის სქემა ოთხუცნობიანი განტოლებათა სისტემისათვის მოცემულია მე-5 ცხრილში, სადაც, მაგალითად, $|a_{31}|$ მეტია ყველა კოეფიციენტის აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე. ეს კოეფიციენტი ქვემოდან გახაზულია. ასევე მთავარი კოეფიციენტი $a_{12}^{(1)}$, $a_{11}^{(2)}$, $a_{22}^{(3)}$.

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ

$$x_2 = a_{25}^{(4)}, \quad x_1 = a_{15}^{(5)},$$

$$x_3 = a_{15}^{(6)}, \quad x_4 = a_{35}^{(7)}.$$

გამოთვლების ჩატარების შემდეგ (მე-12 მოქმედების შემდეგ) საძიებელი სიდიდეები უკუსვლით განისაზღვრება: ჯერ ბოლო განტოლებიდან განესაზღვრავთ საძიებელ ერთ სიდიდეს (მე-13 მოქმედება იძლევა x_2 -ს), შემდეგ მის წინ მდებარე ორუცნობიანი განტოლებიდან მეორე საძიებელ სიდიდეს (აქედან ერთი სიდიდე უკვე ცნობილია) და ა. შ.

გაუსის მეთოდი განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს იძლევა უძუსვლით. ეს ბოლო გამოთვლები საკმარისად შრომატევადია. ბოლო გამოთვლები გამარტივდება, თუ ვისარგებლებთ ე. წ. ჟორდანის სქემით.

გაუსის სქემის მიხედვით ყოველ ნაბიჯზე განტოლებათა რიცხვი ერთით მცირდება. ჟორდანის სქემით კა ყველა განტოლებას ვტოვებთ, ვთქვათ, ავირჩიეთ a_{11} კოეფიციენტი და გავყოთ (1, § 1) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება ამ a_{11} -ზე ($a_{11} \neq 0$). მივიღებთ

$$x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(2)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \quad (1)$$

სადაც

$$a_{1k}^{(1)} = a_{1k} : a_{11}, \quad (2)$$

გავამრავლოთ (1) განტოლება სათანადოდ a_{21} , a_{31} , ..., a_{n1} -ზე და გამოვაკლოთ მეორე, მესამე და ა. შ. n -ური განტოლებიდან, მივიღებთ

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(2)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n &= a_{1,n+1}^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n &= a_{2,n+1}^{(1)}, \\ &\vdots \\ a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n &= a_{n,n+1}^{(1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

სადაც

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - a_{i1} a_{1k}^{(1)} \quad i, k = 2, 3, \dots, n. \quad (4)$$

ახლა ავიღოთ, მაგალითად, $a_{22}^{(1)}$ და მასზე გავყოთ (3) სისტემის მე-2 განტოლება. მივიღებთ

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2,n+1}^{(2)},$$

სადაც

$$a_{2k}^{(2)} = a_{2k}^{(1)} : a_{22}^{(1)}.$$

ცხრილი 6

მთავარი ელემენტი	k				x _k				b _i = a _{i5}		Σ = a _{i6}	
	i											
	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6		
0												
1	$a_{11} : a_{11}$				a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}		
2	$a_{21} - a_{21} a_{11}^{(1)}$				a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}		
3	$a_{31} - a_{31} a_{11}^{(1)}$				a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}		
4	$a_{41} - a_{41} a_{11}^{(1)}$				a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}		
5	$a_{51} : a_{51}^{(1)}$				1	$a_{52}^{(1)}$	$a_{53}^{(1)}$	$a_{54}^{(1)}$	$a_{55}^{(1)}$	$a_{56}^{(1)}$		
6	$a_{12}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{52}^{(1)}$					1	$a_{13}^{(2)}$	$a_{14}^{(2)}$	$a_{15}^{(2)}$	$a_{16}^{(2)}$		
7	$a_{22}^{(1)} - a_{22}^{(1)} a_{52}^{(1)}$						1	$a_{23}^{(2)}$	$a_{24}^{(2)}$	$a_{25}^{(2)}$		
8	$a_{32}^{(1)} - a_{32}^{(1)} a_{52}^{(1)}$							1	$a_{33}^{(3)}$	$a_{34}^{(3)}$		
9	$a_{42}^{(1)} - a_{42}^{(1)} a_{52}^{(1)}$								1	$a_{43}^{(4)}$		
10	$a_{23}^{(1)} - a_{23}^{(1)} a_{53}^{(1)}$					1				$a_{26}^{(3)}$		
11	$a_{13}^{(1)} - a_{13}^{(1)} a_{53}^{(1)}$						1			$a_{16}^{(3)}$		
12	$a_{43}^{(1)} - a_{43}^{(1)} a_{53}^{(1)}$							1		$a_{46}^{(3)}$		
13	$a_{14}^{(1)} - a_{14}^{(1)} a_{54}^{(1)}$								1	$a_{16}^{(4)}$		
14	$a_{24}^{(1)} - a_{24}^{(1)} a_{54}^{(1)}$									$a_{26}^{(4)}$		
15	$a_{34}^{(1)} - a_{34}^{(1)} a_{54}^{(1)}$									$a_{36}^{(4)}$		
16	$a_{44}^{(1)} - a_{44}^{(1)} a_{54}^{(1)}$									$a_{46}^{(4)}$		

(5) განტოლება გაუმარავლოთ მიმდევრობით $a_{12}^{(1)}, a_{23}^{(1)}, \dots, a_{n2}^{(1)}$ -ზე და გამოვაკლოთ სათანადოდ (3) განტოლებათა სისტემის პირველს, მესამეს, მეოთხეს და ა. შ. n -ურ განტოლებას, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x_1 + a_{13}^{(2)} x_3 + a_{14}^{(2)} x_4 + \dots + a_{1n}^{(2)} x_n &= a_{1, n+1}^{(2)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n &= a_{2, n+1}^{(2)}, \\ a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n &= a_{3, n+1}^{(2)}, \\ &\vdots \\ a_{n3}^{(2)} x_3 + a_{n4}^{(2)} x_4 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n &= a_{n, n+1}^{(2)}, \end{aligned}$$

სადაც

$$a_{ik}^{(2)} = a_{ik}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot a_{2k}^{(2)}, \quad i = 1, 3, 4, \dots, n; \quad k = 3, 4, \dots, n.$$

მოქმედების ამგვარი გაგრძელებით მივიღებთ განტოლებათა სისტემას,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{1, n+1}^{(n)} \\ x_2 &= a_{2, n+1}^{(n)} \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n, n+1}^{(n)} \end{aligned} \quad (6)$$

რომელსაც უკვე აღარ ესაჭიროება არავითარი უკუსვლა. ამონახსნები პირდაპირაა მიღებული.

(1, § 1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნის სქემა $n=4$ -თვის სათანადოდ (2), (4) ფორმულების საფუძველზე ნაჩვენებია მე-6 ცხრილში. ცხადია, ჟორდანის სქემით შეგვიძლია შექცეული მატრიცის შედგენაც, მაგრამ თავისუფალი წევრებისათვის ერთი სვეტის ნაცვლად უნდა ავიღოთ n სვეტი ერთეული მატრიცით, ისე, როგორც მე-2 ცხრილში გვექონდა.

§ 7. ავადრატული ფაქტის მეთოდი

1. ავიღოთ $m \times n$ რიგის მატრიცა

$$A = [a_{ik}], \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

ვთქვათ, $m \leq n$. ამ მატრიცით შეგვიძლია შევადგინოთ დეტერმინანტები არა უმეტეს m რიგისა. ეს დეტერმინანტები შემოკლებით ასე აღვნიშნოთ:

$$A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ k_1, k_2, \dots, k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_p} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \dots & a_{i_2 k_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \dots & a_{i_p k_p} \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq m, \\ 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_p \leq n. \end{aligned}$$

ამ დეტერმინანტებს ეწოდება A მატრიცის p რიგის მინორები¹.

¹ Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, М. 1967, ч. I, гл. I, II.

გაუსის მეთოდით

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

ვახტოლებათა სისტემის ამონახსნა, თუ

$$\det A = \det [a_{ik}] = \Delta \neq 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n;$$

მიიყვანება შემდეგი განტოლებათა სისტემის ამონახსნაზე:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n &= a_{1, n+1}, \\ a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n &= a_{2, n+1}^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n &= a_{3, n+1}^{(2)}, \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(n-1)} x_n &= a_{n, n+1}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (2)$$

სადაც

$$\begin{aligned} a_{ik}^{(1)} &= a_{ik} - a_{i1} \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad k = 2, 3, \dots, n+1 \\ a_{ik}^{(2)} &= a_{ik}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \frac{a_{2k}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad i = 3, 4, \dots, n; \quad k = 3, 4, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (3)$$

და ა. შ.

ზოგადად, გამორიცხვის შემდეგ მიღებული კოეფიციენტები განისაზღვრება დამოკიდებულებით

$$a_{ik}^{(p)} = a_{ik}^{(p-1)} - a_{ip}^{(p-1)} \frac{a_{pk}^{(p-1)}}{a_{pp}^{(p-1)}}, \quad \begin{aligned} p &= 1, 2, \dots, n, \\ i &= p+1, p+2, \dots, n, \\ k &= p+1, p+2, \dots, n+1, \end{aligned} \quad (4)$$

სადაც

$$a_{11} \neq 0, a_{22}^{(1)} \neq 0, \dots, a_{pp}^{(p-1)} \neq 0, \quad p \leq n, \quad a_{ik}^{(0)} = a_{ik}.$$

p ოპერაციის შემდეგ მიღებული განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტთა მატრიცა აღვნიშნოთ G_p -თი,

$$G_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} & a_{1, p+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2p}^{(1)} & a_{2, p+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{pp}^{(p-1)} & a_{p, p+1}^{(p-1)} & \dots & a_{pn}^{(p-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{p+1, p+1}^{(p)} & \dots & a_{p+1, n}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n, p+1}^{(p)} & \dots & a_{nn}^{(p)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

881

რადგანაც (10) განტოლებათა სისტემის თავისუფალი წევრები ისე განისაზღვრება, როგორც სხვა კოეფიციენტები, გვექნება

$$a_{i,n+1}^{(p)} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & i \\ 1 & 2 & \dots & p & n+1 \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix}}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r.$$

ამ შემთხვევაში (12) თავსებადობის პირობა მოგვცემს

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & i \\ 1 & 2 & \dots & r & n+1 \end{pmatrix} = 0, \quad i = r+1, r+2, \dots, n,$$

ან, რაც იგივეა,

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & r+j \\ 1 & 2 & \dots & r & n+1 \end{pmatrix} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-r. \quad (13)$$

3. ცხადია, თავსებადობის პირობა არ შეიცვლება, თუ უცნობთა რიცხვი განტოლებათა რიცხვის ტოლი არაა.

ასე რომ, არაერთგვაროვანი წრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემის

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = a_{i,n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

თავსებადობის პირობაა

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & r+j \\ 1 & 2 & \dots & r & n+1 \end{pmatrix} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-r, \quad (14)$$

სადაც r განტოლებათა სისტემის $\|a_{ik}\|$ მატრიცის რანგია. ამით მივიღეთ უმაღლესი ალგებრიდან კარგად ცნობილი არაერთგვაროვანი წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის თავსებადობის პირობა — კრონეკერ-კაპელის თეორემა (ნაწ. I, თ. 12).

თუ მხედველობაში მივიღებთ ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობას, გვექნება: არაერთგვაროვანი წრფივი ალგებრულ განტოლებათა სისტემას ამოხსნისათვის ჯერ უნდა განვსაზღვროთ განტოლებათა სისტემის რანგი r , შემდეგ შევამოწმოთ თავსებადობის (14) პირობა. თუ თავსებადობის პირობა შესრულებულია, მაშინ განტოლებათა სისტემიდან ამოვწეროთ ისეთი r განტოლებათა სისტემა, რომლის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება. ამ განტოლებათა სისტემიდან განვსაზღვროთ საძიებელი n უცნობიდან r უცნობი დანარჩენი $n-r$ უცნობის მიმართ, სადაც ეს $n-r$ უცნობი ნებისმიერ მნიშვნელობებს დებულობს.

4. შემდეგში დავვჭირდება ორი მატრიცის ნამრავლის მინორის ფორმულა.

ავიღოთ ორი მატრიცა

$$A = \|a_{ik}\|, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$B = \|b_{ik}\|, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

მაშინ მათი ნამრავლი C იქნება კვადრატული m რიგის მატრიცა

$$C = AB = \|c_{ik}\|, \quad i, k = 1, 2, \dots, m, \quad (15)$$

სადაც

$$c_{ik} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sk}.$$

C მატრიციდან შეიძლება შედგეს უმაღლესი რიგის m რიგის დეტერმინანტი. A და B მატრიცებიდან m რიგის მინორები შეიძლება შედგეს, თუ $m \leq n$. ვიგულისხმობთ, რომ ეს პირობა შესრულებულია.

ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას (კოში-ბინეს ფორმულა)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n} \begin{vmatrix} a_{1,k_1} & \dots & a_{1,k_m} \\ a_{2,k_1} & \dots & a_{2,k_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,k_1} & \dots & a_{m,k_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{k_1,1} & \dots & b_{k_1,m} \\ b_{k_2,1} & \dots & b_{k_2,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k_m,1} & \dots & b_{k_m,m} \end{vmatrix}.$$

ან, მეორეგვარი აღნიშვნით,

$$C \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ k_1 k_2 \dots k_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1 k_2 \dots k_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}. \quad (16)$$

მართლაც, (15) ფორმულის თანახმად

$$\det C = \begin{vmatrix} \sum_{\alpha_1=1}^n a_{1,\alpha_1} b_{\alpha_1,1} & \dots & \sum_{\alpha_m=1}^n a_{1,\alpha_m} b_{\alpha_m,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{\alpha_1=1}^n a_{m,\alpha_1} b_{\alpha_1,1} & \dots & \sum_{\alpha_m=1}^n a_{m,\alpha_m} b_{\alpha_m,m} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m=1}^n \begin{vmatrix} a_{1,\alpha_1} & b_{\alpha_1,1} & \dots & a_{1,\alpha_m} & b_{\alpha_m,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,\alpha_1} & b_{\alpha_1,1} & \dots & a_{m,\alpha_m} & b_{\alpha_m,m} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m=1}^n \begin{vmatrix} a_{1,\alpha_1} & \dots & a_{1,\alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,\alpha_1} & \dots & a_{m,\alpha_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{\alpha_1,1} & b_{\alpha_2,2} & \dots & b_{\alpha_m,m} \end{vmatrix} \quad (17)$$

მიღებულ ჯამში ნულის ტოლი იქნება ყველა ის შესაყრები, რომელშიაც რომელიმე, თუნდაც ორი, ინდექსი $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ -დან მეორდება. ყველა დანარჩენი შესაყრები დავაჯუფოთ ისე, რომ თითოეულ ჯგუფში შედიოდეს ერთი და იგივე $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ჯგუფში $m!$ შესაყრები იქნება. მაშინ ერთ-ერთი ასეთი ჯგუფი მოგვცემს

$$\sum A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix} (-1)^N b_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} =$$

$$= A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix} \sum (-1)^N b_{\alpha_1 \dots \alpha_m},$$

სადაც N ინდექსების ტრანსპოზიციათა რიცხვია $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ გადაწყველებაში. ამის გამო (17) ტოლობის მეორე მამრავლი მოგვცემს

$$B \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, გვექნება

$$C \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}.$$

თუ $m > n$, მაშინ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ რიცხვებში მოიძებნება ურთიერთტოლი რიცხვები. ამის გამო (17) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში ნული გვექნება. ასეთივე მდგომარეობა გვექნება მარცხენა მხარეშიც. ამგვარად, თუ $m < n$, (17) ტოლობაში ვიგულისხმოთ ნულები. ამით (16) ტოლობა ყველა შემთხვევისთვის $m > n$, $m \leq n$ დამტკიცდა.

5. განვმარტოთ სამკუთხოვანი მატრიცა.

მატრიცას, რომლის მთავარი დიაგონალის ერთ მხარეს ელემენტები ნულებია, ეწოდება სამკუთხოვანი მატრიცა:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

გაუსის მეთოდით წრფივ ალგებრული განტოლებათა სისტემის ამოხსნაში მიგვიყვანა ზედა სამკუთხოვანი მატრიცაზე

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

როდესაც

$$a_{11} \neq 0, \quad a_{22}^{(1)} \neq 0, \dots, \quad a_{rr}^{(r-1)} \neq 0.$$

ახლა წარმოადგინოთ A მატრიცა B და C სამკუთხოვანი მატრიცების ნამრავლით:

$$A = BC,$$

სადაც C ზედა სამკუთხოვანი მატრიცაა, ხოლო B — ქვედა სამკუთხოვანი მატრიცა.

ვისარგებლოთ (16) ფორმულით

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & l \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k} B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & l \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k \\ 1, 2, \dots, k-1, k \end{pmatrix}. \quad (18)$$

რადგანაც C ზედა სამკუთხოვანი მატრიცაა, პირველი k სვეტი შეიცავს მხოლოდ ერთ k რიგის მინორს, ნულისაგან განსხვავებულს,

$$C \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

ამის გამო (18) ტოლობა მოგვცემს

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & l \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & l \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix} =$$

$$= b_{11} b_{22} \dots b_{k-1, k-1} b_{lk} c_{11} c_{22} \dots c_{kk}. \quad (19)$$

დავუშვათ, $l = k$, მაშინ

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} = b_{11} b_{22} \dots b_{kk} c_{11} c_{22} \dots c_{kk}, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (20)$$

თუ ამ ფორმულაში k -ს მივცემთ მიმდევრობით $1, 2, \dots, r$ -ის მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$b_{11} c_{11} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_{22} c_{22} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \dots, b_{rr} c_{rr} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 \\ 1 & 2 & \dots & r-1 \end{pmatrix}}. \quad (21)$$

აქედან ვღებულობთ, რომ B და C მატრიცის დიაგონალების ელემენტები შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად, ოღონდ დაკმაყოფილდეს (21) ტოლობანი.

(20) ტოლობის გამო (19) ტოლობა მოგვცემს

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & l \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix} = \frac{b_{lk}}{b_{kk}} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix},$$

საიდანაც

$$b_{lk} = b_{kk} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & l \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}, \quad l = k, k+1, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (22)$$

სრულიად ასევე განვსაზღვრავთ

$$c_{kl} = c_{kk} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & l \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}, \quad l = k, k+1, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (23)$$

თუ $r < n$, მაშინ B მატრიცის ბოლო $n-r$ სტრიქონის ელემენტები მრავლდება C მატრიცის ბოლო $n-r$ სვეტის ელემენტზე. ამიტომ B მატრიცის $n-r$ სტრიქონის ელემენტები შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად, ხოლო C მატრიცის ბოლო $n-r$ სვეტის ელემენტებად — ნულები, და პირიქით. ცხადია, ამით BC მატრიცათა ნამრავლი არ შეიცვლება.

ამგვარად დავამტკიცეთ

თეორემა 1. ყოველი კვადრატული $A = [a_{ik}]_n^r$ მატრიცა, რომლის რანგია r და პირველი მთავარი მინორების მიმდევრობა

$$D_k = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

შეგვიძლია წარმოვადგინოთ B ქვედა და C ზედა

სამკუთხოვანი მატრიცების ნამრავლით, სადაც მთავარი დიაგონალის ელემენტები b_{ii}, c_{ii} შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად ისე, რომ შესრულდეს პირობა

$$b_{11} c_{11} = D_1, \quad b_{22} c_{22} = \frac{D_2}{D_1}, \dots, b_{rr} c_{rr} = \frac{D_r}{D_{r-1}}, \quad (21)$$

დანარჩენი ელემენტები განისაზღვრება ტოლობებით

$$b_{lk} = b_{kk} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & l \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}, \quad (22)$$

$$c_{lk} = c_{kk} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & l \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}, \quad l = k, k+1, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (23)$$

თუ $r < n$, მაშინ B მატრიცის ბოლო $n-r$ სტრიქონის ელემენტები შეგვიძლია ავიღოთ ნულის ტოლად, ხოლო C მატრიცის ბოლო $n-r$ სვეტის ელემენტები ნებისმიერად და, პირიქით, C მატრიცის ბოლო $n-r$ სვეტის ელემენტები ავიღოთ ნულის ტოლად და B მატრიცის $n-r$ სტრიქონის ელემენტები — ნებისმიერად.

ცხადია, აღნიშნული B და C მატრიცები ერთადერთი იქნება, თუ წინასწარ შევზღუდავთ B ან C მატრიცას. მაგალითად, B მატრიცის დიაგონალის ელემენტები ერთის ტოლად ავიღოთ. ასევე შეგვიძლია ავიღოთ 1-ის ტოლად ბოლო $n-r$ სტრიქონის ელემენტები. ამ შემთხვევაში A მატრიცის ორ სამკუთხოვან მატრიცად დაშლა ერთადერთი იქნება.

6. ჩვენ გვაინტერესებს A მატრიცის დაშლა სამკუთხოვან მატრიცებად, როდესაც A მატრიცა სიმეტრიულია: $a_{ik} = a_{ki}$. ვთქვათ, A მატრიცის რანგი r -ის ტოლია და

$$D_k = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (24)$$

მაშინ (22) და (23) ტოლობებით მივიღებთ

$$b_{lk} = c_{kl} \quad l = k, k+1, \dots, n;$$

ე. ი. B და C ურთიერთტრანსპონირებული მატრიცებია,

$$C = B',$$

(B' -ს ეწოდება B მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა, თუ B' მატრიცის ყველა სვეტის ელემენტები B მატრიცის სათანადო სტრიქონის ელემენტებს წარმოადგენს,

$$B' = \| b'_{ik} \|, \quad b'_{ik} = b_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

ამის გამო მივიღებთ

$$A = BB'.$$

(21) ფორმულები მოგვცემს

$$b_{kk}^2 = \frac{D_k}{D_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad D_0 = 1,$$

საიდანაც

$$b_{kk} = \frac{D_k}{\sqrt{D_k D_{k-1}}} = \sqrt{\frac{D_k}{D_{k-1}}}, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (25)$$

(25) ფორმულებიდან b_{kk} -ს მნიშვნელობის (22) ფორმულაში შეტანით, მივიღებთ B სამკუთხოვანი მატრიცის ელემენტებს

$$b_{lk} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & l \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{\sqrt{D_k D_{k-1}}}, \quad l = k, k+1, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (26)$$

ხოლო დანარჩენი b_{lk} , $k > r$, ელემენტები ნულის ტოლია.

როგორც (26) ფორმულა გვიჩვენებს, A მატრიცის ელემენტების ნამდვილი მნიშვნელობებისათვის შეიძლება მივიღოთ b_{lk} ელემენტებისათვის წმინდა წარმოსახვითი მნიშვნელობანი. მაგრამ ეს b_{lk} ელემენტების გამოთვლებს არ ართულებს. მაგრამ, თუ A მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ ვისარგებლოთ მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობის თეორემით (ნაწ. I, თ. XII, § 4, თეორემა 7¹):

თეორემა 2. ნამდვილ ელემენტებიანი სიმეტრიული მატრიცა $A = [a_{ik}]_n^a$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის დადებითად განსაზღვრული, როდესაც მთავარი მინორები დადებითია,

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

(ამ თეორემას სხვა სახეც აქვს¹).

¹ Р. Беллман, Введение в теорию Матриц, М. 1969, стр. 80.

ამგვარად, ნამდვილ ელემენტებიანი სიმეტრიული მატრიცა დაიშლება ერთადერთი სახით ორი სამკუთხოვანი ტრანსპონირებული მატრიცის ნამრავლად,

$$A = BB'.$$

7. ეთქვათ მოცემულია განტოლებათა სისტემა

$$Ax = b, \quad (27)$$

სადაც A სიმეტრიული მატრიცაა. მივიღოთ რომ რანგი $r = n$. A მატრიცა დაეშალოს B და B' სამკუთხოვანი ტრანსპონირებული მატრიცების ნამრავლად, მაშინ გვექნება

$$BB'x = b.$$

ეს განტოლებათა სისტემა ეკვივალენტურია შემდეგი განტოლებათა სისტემისა

$$B'x = y,$$

$$By = b.$$

ამგვარად, რომ ამოვხსნათ $Ax = b$ განტოლებათა სისტემა, ჯერ უნდა A მატრიცა დაეშალოს BB' მატრიცების ნამრავლად, შემდეგ ამოვხსნათ $By = b$ განტოლებათა სისტემა, ხოლო შემდეგ $B'x = y$ განტოლებათა სისტემა.

(27) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ამ მეთოდს ეწოდება კვადრატული ფესვის მეთოდი.

სამკუთხოვანი მატრიცის ელემენტები მიმდევრობით გამოვთვალოთ. ამისათვის (25) და (26) ფორმულებში მიმდევრობით ჩავსვათ $k = 1, 2, \dots$ მივიღებთ

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad b_{1l} = \frac{A \begin{pmatrix} l \\ 1 \end{pmatrix}}{b_{11}} = \frac{a_{1l}}{b_{11}}, \quad l = 2, 3, \dots, n;$$

$$b_{22} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} = \sqrt{\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}} = \sqrt{a_{22} - \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2} = \sqrt{a_{22} - b_{12}^2},$$

$$b_{2l} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & l \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{D_2 D_1}} = \frac{a_{11}a_{2l} - a_{12}a_{21}}{\sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \cdot D_1} = \frac{a_{2l} - b_{11}b_{12}}{b_{22}}, \quad l = 3, \dots, n;$$

$$b_{33} = \sqrt{\frac{D_3}{D_2}} = \sqrt{\frac{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) - a_{31}(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} = \sqrt{a_{33} - b_{13}^2 - b_{23}^2},$$

$$b_{l3} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & l \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{D_3 D_2}} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & l \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{D_3}{D_2} D_2}} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & l \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}}{D_2 b_{33}} = (a_{l3} - b_{11} b_{31} - b_{12} b_{32}) : b_{33},$$

$$l = 4, 5, \dots, n.$$

ზოგადად მივიღეთ შემდეგი რეკურენტული ფორმულები:

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad b_{1l} = a_{1l} : b_{11}, \quad l = 2, 3, \dots, n;$$

$$b_{kh} = \sqrt{a_{kh} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{j1}^2 b_{jh}^2}, \quad 1 < k \leq n;$$

$$a_{kh} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{j1} b_{jh}$$

$$b_{kl} = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} b_{jl} b_{jh}}{b_{kh}}, \quad 1 < k \leq n, \quad k < l. \quad (28)$$

ამ ფორმულებით მიმდევრობით პირველი სტრიქონიდან დაწყებული გამოვითვლით სამკუთხა მატრიცის ელემენტებს:

$$B' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

შევადგინოთ $By = b$ და $B'x = y$ განტოლებანი. მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} b_{11} y_1 &= b_1, \\ b_{12} y_1 + b_{22} y_2 &= b_2, \\ \dots & \dots \\ b_{1n} y_1 + b_{2n} y_2 + \dots + b_{nn} y_n &= b_n; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \dots + b_{1n} x_n &= y_1, \\ b_{22} x_2 + \dots + b_{2n} x_n &= y_2, \\ \dots & \dots \\ b_{nn} x_n &= y_n, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

საიდანაც მიმდევრობით განვსაზღვრავთ

$$y_1 = \frac{b_1}{b_{11}},$$

$$b_i - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki} y_k$$

$$y_i = \frac{\quad}{b_{ii}}, \quad 1 < i \leq n. \quad (31)$$

$$x_n = \frac{y_n}{b_{nn}},$$

$$y_{n-i} - \sum_{j=0}^{i-1} b_{n-i, n-j} x_{n-j}$$

$$x_{n-i} = \frac{\quad}{b_{n-i, n-i}}; \quad 1 \leq i < n. \quad (32)$$

კვადრატული ფესვის მეთოდი მეტად ხელსაყრელია. იგი არ მოითხოვს ბევრ ჩაწერას. n განტოლებათა სისტემის ამოხსნის დროს საჭიროა ფესვის ამოღება n -ჯერ, გაყოფა n -ჯერ,

$$\text{გამრავლება } \frac{n^3 + 9n^2 + 2n}{6} \text{-ჯერ.}$$

კვადრატული ფესვის მეთოდით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა (სიმეტრიულობის გამო მატრიცის ზედა ნაწილია ამოწერილი)¹

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ & 4 & -5 & 1 & -3 \\ & & 3 & -2 & 2 \\ & & & 5 & 3 \\ & & & & 4 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0,5 \\ 5,4 \\ 5,0 \\ 7,5 \\ 3,3 \end{array} \right\|. \quad (33)$$

(28) ფორმულებით გამოთვლები მოგვეცემს:

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1, \quad b_{12} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$b_{1l} = \frac{a_{1l}}{b_{11}}, \quad l > 1. \quad b_{13} = \frac{-2}{1} = -2,$$

¹ Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, М., 1963, стр. 289.

ამგვარად, (34) განტოლებათა სისტემას აკმაყოფილებს $\bar{x}_k = x_k + 1$. ასე რომ, თუ გამოთვლებს Σ სვეტის მონაცემების მიხედვით ჩაეტარებთ, უნდა მივიღოთ $\bar{x}_k$, რომელიც x_k -სგან 1-ით განსხვავდება. x_k და $\bar{x}_k$ ცხრილის ბოლოში მოთავსებული, სადაც $\bar{x}_k \approx x_k + 1$ სამი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით.

§ 8. ჯაპვური მეთოდი

მე-11 თავის მე-12 პარაგრაფის მე-6 პუნქტში (განტოლებათა სისტემა (82)) მივიღეთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} b_1 x_1 + c_1 x_2 &= d_1, \\ a_2 x_2 + b_2 x_3 + c_2 x_4 &= d_2, \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 &= d_3, \\ &\vdots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n &= d_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n &= d_n. \end{aligned} \quad (1)$$

ეს განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ ჯაპვური მეთოდით, ანუ, როგორც უწოდებენ, განდევნის მეთოდით (Метод прогонки). ეს მეთოდი წარმოადგენს გაუსის მეთოდის სახეცვლილებას. (1) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტთა მატრიცაა

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n & 0 \end{bmatrix},$$

სადაც b_i ელემენტთაგან ყველა ნულის ტოლი არაა.

ჯაპვური მეთოდით (1) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა შემდეგნაირად წარმოებს:

1. პირდაპირი სვლა. პირველი განტოლებიდან განვსაზღვროთ x_1 ,

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1}. \quad (2)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$-\frac{c_1}{b_1} = A_1, \quad \frac{d_1}{b_1} = B_1, \quad (3)$$

მივიღებთ

$$x_1 = A_1 x_2 + B_1. \quad (4)$$

შევიტანოთ მეორე განტოლებაში,

$$a_2 (A_1 x_2 + B_1) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2.$$

საიდანაც

$$x_2 = -\frac{c_2}{a_2 A_1 + b_2} + \frac{d_2 - a_2 B_1}{a_2 A_1 + b_2}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$e_2 = a_2 A_1 + b_2, \quad (5)$$

მივიღებთ

$$x_2 = -\frac{c_2}{e_2} x_3 + \frac{d_2 - a_2 B_1}{e_2},$$

ანუ

$$x_2 = A_2 x_3 + B_2, \quad (6)$$

სადაც

$$A_2 = -\frac{c_2}{e_2}, \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{e_2}. \quad (7)$$

სრულიად ასევე, (6) გამოსახულების (1) განტოლებათა სისტემის მესამე განტოლებაში შეტანით გვექნება

$$x_3 = A_3 x_4 + B_3,$$

სადაც

$$A_3 = -\frac{c_3}{e_3}, \quad B_3 = \frac{d_3 - a_3 B_2}{e_3}, \quad e_3 = a_3 A_2 + b_3.$$

ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad (8)$$

სადაც

$$A_i = -\frac{c_i}{e_i}, \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{e_i}, \quad e_i = a_i A_{i-1} + b_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (9)$$

საბოლოოდ გვექნება

$$x_n = A_n x_{n+1} + B_n,$$

სადაც $c_n = 0$. ამრიგად,

$$x_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n}. \quad (10)$$

2. უკუხვლა ვიციოთ რა x_n , შეგვიძლია, განვსაზღვროთ (8) ფორმულით $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ -სათვის გვექნება

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1}.$$

ამრიგად, განვსაზღვრეთ (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

§ 9. შენიშვნები წარმომადგენელ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის შესახებ

წარმომადგენელ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის მეთოდები ძირითადად შეგვიძლია გავყოთ ორ ჯგუფად: პირდაპირი მეთოდები და იტერაციის მეთოდები. პირდაპირი მეთოდებით სასრული რაოდენობის მოქმედებით მიიღება წარმომადგენელ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი. პირდაპირი მეთოდები (კრამერის, გაუსის ფორმულები) მატრიცა და უნივერსალური. ისინი გამოიყენებიან განტოლებათა სისტემის ფართო კლასისათვის. მაგრამ პირდაპირი მეთოდს ბევრი ნაკლი აქვს. როგორც წესი, ელემენტარულ-გამომთვლელი მანქანის ოპერატიულ მეხსიერებაში საჭიროა თავიდანვე მთლიანად შევიტანოთ სათანადო მატრიცები, რომელთათვისაც საჭიროა მანქანის ოპერატიულ მეხსიერებაში დიდი ადგილი. ამასთან სრულებით არ მიიღება მხედველობაში მატრიცის თავისებურება. მატრიცაში არის თუ არა ნულოვანი ელემენტები, მნიშვნელობა არ აქვს, მათზე მაინც უნდა ჩატარდეს არითმეტიკული მოქმედებანი. ამასთან, შედეგი სასრული რაოდენობის მოქმედებით მიიღება, მაგრამ მოქმედებათა რიცხვი საკმარისად დიდია. ამის ნათესაყოფად შეგვიძლია ავიღოთ ხუთეცლადიანი ხუთი განტოლების სისტემა და დავთვალოთ, თუ რამდენი დეტერმინანტის გამოთვლა დაგვიჩირდება. ყველა დეტერმინანტისათვის ოპერატიულ მეხსიერებაში საჭიროა სათანადო ადგილი. პირდაპირი მეთოდების არსებითი ნაკლია ისიც, რომ ყოველი შემდეგი გამოთვლისათვის ვსარგებლობთ წინა შედეგით და, ბუნებრივია, წინა შედეგის ცდომილება გადადის მომდევნო შედეგში და სათანადოდ იზრდება. ცდომილება იზრდება განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულთან ახლოს (ცუდად შეპირობებული ამოცანა). ამის გამო პირდაპირი მეთოდს ხშირად შეუძლებელია გამოყენება განტოლებათა სისტემისათვის (დაახლოებით 200-ზე ნაკლები განტოლებათა რაოდენობისათვის) და განტოლებათა სისტემის მატრიცის დეტერმინანტის მნიშვნელობა ნულთან ახლოს არ უნდა იყოს.

პირდაპირი მეთოდებს ზუსტ მეთოდებსაც უწოდებენ, რადგანაც განტოლებათა სისტემის ამონახსნები ზუსტი ფორმულებით მიიღება. მაგრამ ზუსტი ამონახსნი მიიღება უსასრულო თანრიგთა საშუალებით. პრაქტიკა-

კულად გარკვეული რაოდენობის თანრიგზე ვზერდებით. ეგზე-თ ყოველი შემდეგი მიიღება წინასწარ განსაზღვრული რაოდენობის თანრიგებით. ამის გამო ზუსტი მეთოდით მიღებული შედეგი სათანადო ცდომილებას შეიცავს.

იტერაციის მეთოდი შედეგს იძლევა მიახლოებით. გამოთვლების დაწყებისათვის საჭიროა გამოსათვლელი მნიშვნელობის წინასწარი ე. წ. ნულოვანი მიახლოება და შემდეგ ეს მნიშვნელობა უნდა დაზუსტდეს. ეს ხდება მიმდევრობით. ჯერ ერთი პროცესი შესრულებდა, შემდეგ მეორე და ასე შემდეგ. ე. ი. პროცესი ციკლურად სრულდება. იტერაცია სრულდება შედეგის სათანადო სიზუსტით მიღებამდე. ამ შემთხვევაში მოქმედებათა რაოდენობის განსაზღვრა ძნელია. მიუხედავად ამისა იტერაციის მეთოდი ბევრ შემთხვევაში უფრო სასარგებლოა, ვიდრე პირდაპირი მეთოდი. ზოგჯერ მატრიცის შეტანა მანქანის მეხსიერებაში და შენახვა საჭირო არაა, იგი მანქანაში შეგვიძლია შევიტანოთ საჭიროების მიხედვით. ცდომილება იტერაციის მეთოდის გამოყენების დროს არ იზრდება, რადგანაც ყოველი წინა შედეგი შემდეგ ზუსტდება. იტერაციის მეთოდი წარმატებით გამოიყენება მაშინაც, როდესაც განტოლებათა სისტემა ცუდად შეპირობებულია. იტერაციის პროცესში მთავარია, შესრულდეს კრებადობის პირობა, რისთვისაც საჭიროა, წინასწარ ჩატარდეს ასეთი გარდაქმნა, რომ მიღებული განტოლებათა სისტემა ამოიხსნას იტერაციის მეთოდით. იტერაციის მეთოდში მთავარი ისაა, რომ პროცესი მეორდება, პროცესი ციკლურია, რაც ამცირებს მანქანის მეხსიერებაში დაკავებულ ადგილების რაოდენობას. იტერაციის პროცესი გამოიყენება მაშინაც, როცა პირდაპირი მეთოდით მიღებული ამონახსნი დასაზუსტებელია.

ეს შენიშვნები უნდა გავითვალისწინოთ ყოველი კონკრეტული წარმომადგენელ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის დროს.

სავერჯიშო 26.

1. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები კრამერის ფორმულით:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \quad 2) \quad 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = -1, \\ & -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3, \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 11, \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 9, \quad 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 3x_5 = -14, \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -2, \quad 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 = -5, \\ & \quad \quad \quad 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 - 7x_5 = 46. \end{aligned}$$

2. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები გაუსის მეთოდით:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 6x_1 - 0,3x_2 + 0,2x_3 + 0,6x_4 - 0,5x_5 = 2,4; \\ & 0,4x_1 - 9x_2 - 0,3x_3 + 0,5x_4 - 0,6x_5 = 3,5; \\ & 0,7x_1 - 0,6x_2 + 7x_3 - 0,1x_4 + 0,8x_5 = 1,8; \\ & 0,5x_1 + 0,2x_2 - 0,7x_3 + 6x_4 - 0,2x_5 = 2,9; \end{aligned}$$

$$0,9x_1 - 0,3x_2 + 0,4x_3 - 0,8x_4 + 5x_5 = 5,2 \text{ სიზუსტით } \frac{1}{2} 10^{-8}.$$

10. ამოხსენით კვადრატული ფესვის მეთოდით შემდეგ განტოლებათა სისტემები ოთხი ათწილადი ნიშნით:

- 1) $9x_1 - 0,2x_2 - 0,5x_3 + 0,4x_4 = 1,5;$
 $0,2x_1 + 8x_2 - 0,3x_3 - 0,5x_4 = 2,3;$
 $-0,5x_1 - 0,3x_2 + 10x_3 + 0,1x_4 = 3,7;$
 $0,4x_1 - 0,5x_2 + 0,1x_3 + 5x_4 = 2,6.$
- 2) $0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 + 8x_4 = 2,8;$
 $0,2x_1 + 0,8x_2 + 9x_3 + 0,6x_4 = 1,4;$
 $0,4x_1 + 9x_2 + 0,3x_3 + 0,1x_4 = 3,5;$
 $8x_1 + 0,6x_2 + 0,1x_3 + 0,5x_4 = 4,1.$
- 3) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1,$
 $3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$
 $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3.$

თ ა ზ ი XV

მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება

§ 1. რიცხვითი მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება¹

1. ნიშანცვლადი მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება. რიცხვით მწკრივებში ხშირად საქმე გვაქვს ნელად კრებად მწკრივებთან. მაგალითად, ლაიბნიცის მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \dots \quad (1)$$

ნელად კრებადია.

ფაქტად, გვინდა (1) მწკრივის ჯამი ეიპოვოთ $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ სიზუსტით.

მოვიგონოთ ნიშანცვლადი მწკრივის თვისება

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq a_{n+1}, \\ \text{sign } R_n &= \text{sign } a_{n+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

მაშინ (1) მწკრივისთვის გვექნება

$$|R_n| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4},$$

საიდანაც

$$n+1 \geq 2 \cdot 10^4$$

ამგვარად, რომ ეიპოვოთ (1) მწკრივის ჯამი $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ სიზუსტით,

დაგვჭირდება 20 ათასი წევრის აღება, რაც პრაქტიკულად თითქმის შეუძლებელია, თუ გამოთვლებს ვაწარმოებთ ხელით სათვლელ მანქანაზე.

თუ მოვიგონებთ $\ln(1+x)$ -ის გამწკრივებას,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

¹ Я. С. Безикович. Приближенные вычисления, М.-Л. 1946;

Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М.-Л. 1962.

მაშინ ამ მწკრივში $x=1$ -ის ჩასმით მივიღებთ

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ასე რომ, ამ ფორმულით $\ln 2$ -ის მნიშვნელობა რომ ვიპოვოთ ოთხი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით, დაგვჭირდება შეგვარიბოთ 20 ათასი წევრი. რაც პრაქტიკულად თითქმის შეუძლებელია.

ამიტომ, ცხადია, კრებადი მწკრივი ისე უნდა გარდავექმნათ, რომ მცირე რაოდენობის წევრების შეკრებით მივიღოთ სასურველი სიზუსტის შედეგი.

განვიხილოთ ნიშანცვლადი მწკრივი,

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots \quad (3)$$

სადაც

$$a_n > 0, a_n > a_{n+1}, n = 1, 2, \dots$$

ეს მწკრივი გარდავექმნათ უფრო სწრაფადკრებად მწკრივად. ადვილი შესაძლებელია, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n + S_{n-1}}{2}$$

ასე რომ, ნაცვლად S_n კერძო ჯამების მიმდევრობისა, შეგვიძლია განვიხილოთ T_n კერძო ჯამების მიმდევრობა,

$$T_n = \frac{S_n + S_{n-1}}{2}$$

გამოვთვალოთ T_{2n} . ამისათვის ავიღოთ

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$S_{2n-1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n-2} + a_{2n-1}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$T_{2n} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} - \frac{a_2 - a_3}{2} + \dots + \frac{a_3 - a_4}{2} - \dots - \frac{a_{2n-2} - a_{2n-1}}{2} + \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{2}$$

სრულიად ასევე მივიღებთ

$$T_{2n+1} = T_{2n} - \frac{a_{2n} - a_{2n+1}}{2},$$

$$T_{2n+2} = T_{2n+1} + \frac{a_{2n+1} - a_{2n+2}}{2}$$

ასე რომ,

$$T_{2n+1} - T_{2n} = -\frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}, \quad T_{2n+2} - T_{2n+1} = \frac{a_{2n+1} - a_{2n+2}}{2}$$

ამგვარად, ნაცვლად (3) მწკრივისა, შეგვიძლია განვიხილოთ მწკრივი

$$\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} (a_1 - a_2) - \frac{1}{2} (a_2 - a_3) + \frac{1}{2} (a_3 - a_4) - \dots - \frac{1}{2} (a_{2n} - a_{2n+1}) + \frac{1}{2} (a_{2n+1} - a_{2n+2}) - \dots \quad (4)$$

ეს მწკრივი ნიშანცვლადი მწკრივია და შეგვიძლია კვლავ გარდავექმნათ:

$$\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} (A_1 - A_2) - \frac{1}{2} (A_2 - A_3) + \dots, \quad (5)$$

სადაც

$$A_1 = \frac{1}{2} (a_1 - a_2), \quad A_2 = \frac{1}{2} (a_2 - a_3), \dots$$

ძნელი არ უნდა იყოს იმის შემჩნევა, რომ (4) მწკრივი უფრო სწრაფად კრებადია, ვიდრე (3) მწკრივი.

გამოვიყენოთ აღწერილი გარდაქმნა ლაიბნიცის მწკრივისათვის. პირველი გარდაქმნით გვექნება

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \dots - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right),$$

ანუ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots - \frac{1}{2 \cdot 2n(2n+1)} + \frac{1}{2(2n+1)(2n+2)} - \dots \quad (6)$$

გამოვთვალოთ, თუ რამდენი წევრი უნდა ავიღოთ (6) მწკრივიდან,

რომ მიღებული ჯამის ცდომილება არ აღემატებოდეს $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ -ს.

$$\text{შევიჩერდეთ } \frac{1}{2 \cdot 2n(2n+1)} \text{ წევრზე. გვქნება}$$

$$S > S_{2n},$$

რადგანაც პირველი უკუგდებული წევრი (6) მწკრივში დადებითია,

$$\frac{1}{2(2n+1)(2n+2)} > 0.$$
 თუ ამ წევრსაც დავმატებთ, მივიღებთ

$$S < S_{2n} + \frac{1}{2(2n+1)(2n+2)},$$

რადგანაც, ამ შემთხვევაში პირველი უკუგდებული წევრი უარყოფითია:

$$\frac{1}{2(2n+2)(2n+3)}.$$
 ასე რომ, გვექნება:

$$S_{2n} < S < S_{2n} + \frac{1}{2(2n+1)(2n+2)}. \quad (7)$$

ეს კი გვიჩვენებს (იხ. მე-10 თავის § 10).

$$S \approx S_{2n} + \frac{1}{4(2n+1)(2n+2)} \left(\pm \frac{1}{4(2n+1)(2n+2)} \right). \quad (8)$$

სრულიად ასევე მივიღებთ

$$S \approx S_{2n-1} - \frac{1}{4 \cdot 2n(2n+1)} \left(\pm \frac{1}{4 \cdot 2n(2n+1)} \right).$$

n ავარჩიოთ ისე, რომ

$$\frac{1}{4(2n+1)(2n+2)} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^4}. \quad (9)$$

ამ უტოლობიდან გვექნება

$$(2n+1)(2n+2) \geq \frac{1}{2} \cdot 10^4.$$

ცხადია, ეს უტოლობა შესრულდება, თუ

$$(2n+1)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot 10^4.$$

ანუ

$$2n+1 \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10^2.$$

საიდანაც, თუ

$$2n+1 = 71,$$

მაშინ (9) უტოლობა შესრულდება.

ასე რომ, თუ (6) მწკრივში შევჩერდებით წევრზე

$$\frac{1}{2 \cdot 70 \cdot 71},$$

მაშინ ცდომილება არ აღემატება $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$. მაგრამ (6) მწკრივში მაინც ბევრი შესაყრების (70 შესაყრების) აღება დაგვჭირდება. ამიტომ (6) მწკრივი კვლავ გარდავქმნათ. მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots \right] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

ანუ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots - \frac{1}{2 \cdot 2n(2n+1)(2n+2)} + \\ + \frac{1}{2(2n+1)(2n+2)(2n+3)} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

თუ ამ მწკრივში შევჩერდებით უარყოფით წევრზე $\frac{-1}{2 \cdot 2n(2n+1)(2n+2)}$,
 მაშინ ანალოგიურად (7) უტოლობისა, მივიღებთ

$$S_{2n} < S < S_{2n} + \frac{1}{2(2n+1)(2n+2)(2n+3)},$$

საიდანაც

$$S \approx S_{2n} + \frac{1}{4(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \left(\pm \frac{1}{4(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \right).$$

გამოვარკვეით, თუ რამდენი წევრი უნდა ავიღოთ (10) მწკრივში,
 რომ ცდომილება არ აღემატებოდეს $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ -ს.

გვექნება

$$\frac{1}{4(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4},$$

საიდანაც

$$(2n+1)(2n+2)(2n+3) \geq \frac{1}{2} \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^3.$$

ამ უტოლობას დააკმაყოფილებს $n=8$, მართლაც

$$17 \cdot 18 \cdot 19 = 5814 > 5 \cdot 10^3.$$

რომ მივიღოთ აღნიშნული სიზუსტე (10) მწკრივში უნდა შევჩერდეთ

$$-\frac{1}{2 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18} \text{ წევრზე და დავუმატოთ } \frac{1}{4 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}, \text{ ე. ი. უნდა ავიღოთ}$$

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} - \frac{1}{2 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18} + \frac{1}{4 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19} \quad (11)$$

(11) გამოსახულებაც ბევრ შესაყრებს — 18 შესაყრებს შეიცავს. ამიტომ (10) მწკრივი კვლავ გარდაუქმნათ, მივიღებთ

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) - \frac{1}{2 \cdot 2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \right) + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2} \left(\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} \right) - \dots = \frac{5}{8} + \frac{1}{24} + \frac{3}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{3}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots - \frac{3}{4 \cdot 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)} +$$

ანუ

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \dots - \frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)} - \dots \right) \quad (12)$$

თუ შევჩერდებით

$$-\frac{3}{4 \cdot 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$$

წევრზე, მაშინ

$$S_{2n} < S < S_{2n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4 \cdot (2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)},$$

ხოლო თუ შევჩერდებით

$$\frac{3}{4 \cdot (2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$

წევრზე, მაშინ

$$S_{2n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4 \cdot (2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)} < S < S_{2n+1}.$$

სათანადო სიზუსტისათვის წევრთა რიცხვი განვსაზღვროთ

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4 \cdot (2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$

უტოლობიდან.

თუ (12) გამოსახულებაში შევჩერდებით წევრზე

$$\frac{3}{4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10},$$

მაშინ

$$S \approx S_7 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}.$$

ცდომილება იქნება

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{1}{21120} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

ე. ი. შემდეგში 4 ათწილადი ნიშანი მაინც იქნება სანდო.

ამის გამო (12)-დან ავიღებთ შემდეგი წევრების ჯამს:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} \right).$$

გამოთვლები მოგვცემს (გამოთვლები ჩავატაროთ ექვსი ათწილადი ნიშნით)

$$S = \frac{2}{3} + 0,75(\alpha - \beta).$$

$$\frac{2}{3} = 0,666667.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0,041667$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 0,002778$$

$$+ \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 0,000595$$

$$\frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 0,000142$$

$$\alpha = 0,045182$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 0,008333$$

$$\frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 0,001190$$

$$+ \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 0,000331$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} = 0,000063$$

$$\beta = 0,009918$$

$$\alpha = 0,045182$$

$$\beta = 0,009918$$

$$(\alpha - \beta) \cdot 0,75 = 0,035264 \cdot 0,75 = 0,026448.$$

აღებული მწკრივის ჯამი იქნება

$$S \approx 0,693115,$$

რაც ზუსტია ოთხი ათწილადი ნიშნით

$$S \approx 0,6931$$

2. კუმერის გარდაქმნა. განვიხილოთ მწკრივი¹

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (13)$$

გამოვარკვევით, რამდენი წევრი უნდა ავიღოთ, რომ

$$R_n \leq 10^{-5}.$$

ამისათვის მოვიგონოთ, რომ (თავი XII, § 3, (15))

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < R_n < \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{1}{n+1} < R_n < \frac{1}{n}.$$

პირობის თანახმად გვქმნება

$$\frac{1}{n} < 10^{-5},$$

საიდანაც

$$n > 10^5.$$

ამგვარად, (13) მწკრივის ჯამი რომ ვიპოვოთ 10^{-5} სიზუსტით, დაგვჭირდება 100 000 წევრის აღება. (13) მწკრივის ამ რაოდენობის წევრების შეკრება თითქმის შეუძლებელია. ამიტომ შევეცადოთ (13) მწკრივი ისე გარდავქმნათ, რომ რაც შეიძლება ცოტა წევრების აღება დაგვჭირდეს.

¹ Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, М. 1963. стр. 199.

განვიხილოთ გარდაქმნა, რომელიც კუმერს ეკუთვნის. ავიღოთ რიცხვითი მწკრივი

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (14)$$

ზევარჩიოთ ისეთი მწკრივი

$$B = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots, \quad b_n \neq 0, \quad (15)$$

რომლის ჯამი ცნობილია და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha,$$

მაშინ

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} b_i + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - \alpha b_i). \quad (16)$$

ამგვარად (14) მწკრივის ჯამის გამოთვლა მივიყვანეთ

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - \alpha b_i) \quad (17)$$

მწკრივის ჯამის გამოთვლაზე.

კუმერის გარდაქმნის ძირითადი სიძნელე სათანადო (15) მწკრივის არჩევაში მდგომარეობს.

(13) მწკრივისათვის ავიღოთ მწკრივი

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

რომლის კერძო ჯამია

$$S_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ამიტომ

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

α-სთვის მივიღებთ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} : \frac{1}{n(n+1)} \right] = 1.$$

ამის გამო (16) გამოსახულება მოგვცემს

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}. \quad (18)$$

ეს ახალი მწკრივი უფრო სწრაფად კრებადია მოცემულ (13) მწკრივზე. (18) მწკრივისათვის კვლავ გამოვიყენოთ კუმერის მეთოდი.

დამხმარე მწკრივად ავიღოთ მწკრივი

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots, \quad (19)$$

რომლის ჯამი $\frac{1}{4}$ -ია. მაროლატ, აღვილი შესამჩნევია

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right),$$

საიდანაც

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2 \cdot 2!} = \frac{1}{4}.$$

გამოვთვალოთ α ,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2(n+1)} : \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right] = 1.$$

ამის გამო (18) მწკრივისათვის მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

ცხადია, ეს მწკრივი უფრო სწრაფად კრებადია, ვიდრე (18) მწკრივი.

გამოვთვალოთ (20) მწკრივის ნაშთი:

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)(x+2)} < R_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)(x+2)}.$$

საიდანაც მივიღებთ

$$R_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)(x+2)} < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3n^3}.$$

თუ ავიღებთ $n=10$ -ს, გვექნება

$$R_{10} < \frac{1}{3 \cdot 10^3} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

ასე რომ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} + R_{10}.$$

3. სტირლინგის მეთოდი. ვთქვათ, (14) მწკრივის ზოგადი წევრი

n -ის რაციონალური ფუნქციაა $a_n = \frac{\alpha_0 n^p + \alpha_1 n^{p-1} + \dots + \alpha_p}{\beta_0 n^q + \beta_1 n^{q-1} + \dots + \beta_q},$

... $n=1, 2, \dots$, სადაც p და q მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია. მწკრივის კრებადობისათვის საკმარისია, $q \geq p+2$. ვისარგებლოთ სტირლინგის იდეით და წარმოვადგინოთ a_n შემდეგი სახით

$$a_n = \frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n(n+1)\dots(n+m)} + a_n^{(m)}, \quad (21)$$

სადაც $A_1, A_2, \dots, A_m$ კოეფიციენტები ჯერჯერობით განუსაზღვრელია. შევარჩიოთ A_i კოეფიციენტები ისე, რომ

$$a_n^{(m)} = O\left(\frac{1}{n^{2+m}}\right),$$

ე. ი.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{(m)}}{\frac{1}{n^{2+m}}} = c \neq \infty.$$

$a_n^{(m)}$ და $\frac{1}{n^{2+m}}$ ერთი და იმავე რიგის უსასრულო მცირეებია.

(21) დამოკიდებულებიდან გვექნება

$$A_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n(n+1),$$

$$A_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n - \frac{A_1}{n(n+1)} \right] n(n+1)(n+2),$$

.....

$$A_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{A_i}{n(n+1) \dots (n+i)} \right] n(n+1) \dots (n+m). \quad (22)$$

დამხმარე მწკრივად შეგვიძლია ავიღოთ, სადაც თითოეული შესაყრები (19) მწკრივის ჯამის ანალოგიურად გამოითვლება:

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n(n+1) \dots (n+m)} \right] = \frac{A_1}{1 \cdot 1!} + \frac{A_2}{2 \cdot 2!} + \dots + \frac{A_m}{m \cdot m!}. \quad (23)$$

(21) გამოსახულებიდან ცხადია, რომ

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)}. \quad (24)$$

ეს ბოლო მწკრივი უფრო სწრაფად კრებადია, ვიდრე მოცემული მწკრივი, მაგრამ, საზოგადოდ, სწრაფად კრებადობა აღმოჩნდება საკმარისად დიდი n -თვის. მაშინ, პრაქტიკულად უმჯობესია, გარდაქმნა დავიწყოთ რაიმე a_{p+1} წევრიდან.

გვექნება

$$S = \sum_{n=1}^p a_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = S_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n.$$

დავშალოთ მეორე შესაყრები, მივიღებთ

$$S = S_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \left[\frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n(n+1) \dots (n+m)} + a_n^{(m)} \right]$$

$$\begin{aligned} &= S_p + A_1 \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{A_2}{2} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) + \dots + \\ &+ \frac{A_m}{m} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1) \dots (n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+m)} \right) + \\ &+ \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n^{(m)} = S_p + \frac{A_1}{1} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{A_2}{2} \cdot \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \dots + \\ &+ \frac{A_m}{m} \cdot \frac{1}{(p+1) \dots (p+m)} + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n^{(m)}. \end{aligned}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ თუ $m \rightarrow \infty$, $a_n^{(m)} \rightarrow 0$, გვექნება

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^p a_n + \frac{A_1}{p+1} + \frac{A_2}{2(p+1)(p+2)} + \dots + \\ &+ \frac{A_m}{m(p+1) \dots (p+m)} + \dots \quad (25) \end{aligned}$$

ამ უკანასკნელს სტირლინგის მეთოდით გაშლა ეწოდება. მაგალითად, ვიპოვოთ

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 1} \quad (26)$$

მწკრივის ჯამი $\frac{1}{2}$ 10—4 სიზუსტით.

(22) ფორმულებით მივიღებთ:

$$A_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n+1) a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n+1) \frac{1}{n^2 + 3n + 1} = 1$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n - \frac{A_1}{n(n+1)} \right] n(n+1)(n+2) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2 + 3n + 1} - \frac{1}{n(n+1)} \right] n(n+1)(n+2) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n-1}{(n^2 + 3n + 1)n(n+1)} \cdot n(n+1)(n+2) = -2. \end{aligned}$$

(21)-დან გვექნება

$$\begin{aligned} a_n^{(2)} &= \frac{1}{n^2 + 3n + 1} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) - (n^2 + 3n + 1)(n+2) + 2(n^2 + 3n + 1)}{(n^2 + 3n + 1)n(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n+2}{(n^2 + 3n + 1)n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n^2 + 3n + 1)n(n+1)}. \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ B .

(23) ფორმულით მივიღებთ

$$\begin{aligned} B &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \\ &- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 1!} - \frac{2}{2 \cdot 2!} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(24) ფორმულით გვექნება

$$S = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 3n + 1)n(n+1)}. \quad (27)$$

გამოვარკვევით, თუ რამდენი წევრი უნდა ავიღოთ, რომ მივიღოთ

$$R_n \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4},$$

ვისარგებლოთ ფორმულით

$$R_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3x + 1)(x+1)x} < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^4}.$$

პირობიდან

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^4} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

მივიღებთ

$$n \geq 10.$$

ამგვარად, თუ (27) მწკრივში ავიღებთ $n=10$, მივიღებთ საძიებელი
(26) მწკრივის ჯამს სიზუსტით $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

დამხმარე B მწკრივად შეიძლება გამოვთვალოთ:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \frac{\pi^6}{975} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \dots$$

საზოგადოდ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{(-1)^{p-1}}{2} \cdot \frac{B_{2p} (2\pi)^{2p}}{(2p)!},$$

სადაც B_n , $n=1, 2, \dots$, ბერნულის რიცხვებია, რომლებიც განისაზღვრებულია სიმბოლური ტოლობით

$$(B+1)^n - B^n = 0.$$

რომელშიდაც B^n მიღებულია B_n -ად. მაგალითად, $n=2$ -თვის გვექნება

$$(B+1)^2 - B^2 = 0$$

საიდანაც

$$B_1 = -\frac{1}{2}.$$

$n=3$ -თვის გვექნება

$$(B+1)^3 - B^3 = 0,$$

საიდანაც

$$B_2 = -\frac{3B_1 + 1}{3} = -\frac{3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

და ა. შ.

§ 2. ხარისხოვანი მწკრივის კრეალობის გაუმჯობესება
ვილერ-აბელის მეთოდით

ჩვენ აქამდე ვიხილავდით რიცხვით მწკრივებს, ახლა განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივები.

ვთქვათ გვაქვს კრებადი ხარისხოვანი მწკრივი

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1)$$

სადაც $f(x)$ მწკრივის ჯამია. თუ ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსი $r \neq 1$, მაშინ გარდაქმნით

$$t = \frac{x}{r}$$

მივიღებთ მწკრივს t -ს მიმართ, რომლის კრებადობის რადიუსი ერთის ტოლი იქნება. ამიტომ შემდეგში ვიგულისხმებთ (1) მწკრივის კრებადობის $r=1$.

(1) მწკრივი ასე წარმოადგინოთ:

$$f(x) = a_0 + x \varphi(x), \quad (2)$$

სადაც

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n. \quad (3)$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $(1-x)$ -ზე, მივიღებთ

$$(1-x)\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}.$$

უკანასკნელი შესაყრები ასე ჩავწეროთ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

გვექნება:

$$\begin{aligned} (1-x)\varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n - \\ &- \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^n - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) x^n, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-x} a_0 + \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n, \quad |x| < 1,$$

სადაც

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

პირველი რიგის სასრული სხვაობაა.

$\varphi(x)$ -ის მნიშვნელობის შეტანით (2) გამოსახულებაში მივიღებთ

$$f(x) = a_0 + \frac{x}{1-x} a_0 + \frac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n,$$

ანუ

$$f(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n. \quad (4)$$

ამგვარად, (1) ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი გამოითვლება

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n$$

ხარისხოვანი მწკრივის საშუალებით.

ამ გარდაქმნას ეწოდება ეილერ-აბელის გარდაქმნა.

ცხადია, $f_1(x)$ ხარისხოვანი მწკრივი კვლავ შეგვიძლია გარდაქმნათ

$$f_1(x) = \frac{\Delta a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n = \frac{\Delta a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} f_2(x),$$

სადაც

$$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n).$$

$f_2(x)$ მწკრივის ეილერ-აბელის გარდაქმნით კვლავ მივიღებთ

$$f_2(x) = \frac{\Delta^2 a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} f_3(x)$$

და ა. შ. თუ ამ ოპერაციას p -ჯერ შევასრულებთ, საბოლოოდ გვექნება

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} \left\{ \frac{\Delta a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} \left[\frac{\Delta^2 a_0}{1-x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x}{1-x} \left(\Delta^3 a_0 + \dots + \frac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p a_n x^n \dots \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

ანუ

$$f(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} \Delta a_0 + \frac{x^2}{(1-x)^3} \Delta^2 a_0 + \dots + \frac{x^{p-1}}{(1-x)^p} \Delta^{p-1} a_0 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p a_n x^n. \quad (5)$$

ცხადია, (5) გარდაქმნა გამოსადეგია, თუ $\Delta^p a_n$ კოეფიციენტები სწრაფად მიისწრაფვის ნულისაკენ n -ის უსასრულოდ ზრდასთან ერთად.

კერძოდ, თუ $a_n = P(n)$ ($p-1$) ხარისხის მრავალწევრია, მაშინ $\Delta^p P_n = 0$ და (5) ფორმულა იძლევა სასრულ ჯამს.

მაგალითად, ვიპოვოთ შემდეგი მწკრივის ჯამი

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n + 3 \right) x^n.$$

გამოვთვალოთ სასრული სხვაობანი

$$a_n = \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n + 3, \quad \Delta n = (n+1) - n = 1,$$

$$\Delta a_n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + 1, \quad \Delta^2 a_n = n + 2, \quad \Delta^3 a_n = 1, \quad \Delta^4 a_n = 0.$$

$n=0$ ჩასმით მივიღებთ

$$a_0 = 3, \quad \Delta a_0 = 1, \quad \Delta^2 a_0 = 2, \quad \Delta^3 a_0 = 1, \quad \Delta^4 a_0 = 0.$$

ამის გამო (5) ფორმულა მოგვცემს

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n + 3 \right) x^n = \frac{3}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x^3}{(1-x)^4}, \quad |x| < 1.$$

(5) გამწკრივება კარგავს აზრს, თუ $x=1$. ამ შემთხვევაში შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=-t$. გვექნება

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n t^n = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k [(-1)^n a_n]_{n=0} \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} + \left(\frac{t}{1-t}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p [(-1)^n a_n] t^n.$$

თუ დაუზღუდებთ ისევ x -ს, მივიღებთ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \Delta^k [(-1)^n a_n]_{n=0} \frac{x^k}{(1+x)^{k+1}} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p} \Delta^p [(-1)^n a_n] x^n. \quad (6)$$

ამგვარად, თუ $-1 \leq x < 1$, ვისარგებლებთ (5) ფორმულით, ხოლო, თუ $-1 < x \leq 1$, ვისარგებლებთ (6) ფორმულით.

განვიხილოთ მაგალითი.

გამოვარკვეოთ: რამდენი წევრი უნდა ავიღოთ

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots + \frac{x^n}{n+1} + \dots \quad (7)$$

მწკრივის გარდაქმნის შემდეგ, რომ მისი ჯამი 4 ათწილადი ნიშნით მივიღოთ $x=-1$ -თვის.

(7) მწკრივიდან გვაქვს:

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad \Delta a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\Delta^2 a_n = (-1) \left(\frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{(-1)^2 \cdot 1 \cdot 2}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\Delta^3 a_n = \frac{(-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

საზოგადოდ,

$$\Delta^p a_n = \Delta^p \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)(n+2) \dots (n+p+1)}.$$

(5) ფორმულით მივიღებთ:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{2(1-x)^2} + \frac{x^2}{3(1-x)^3} - \dots + \frac{(-1)^{p-1} x^{p-1}}{p(1-x)^p} + (-1)^p p! \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2) \dots (n+p+1)}. \quad (8)$$

ამ ფორმულაში $x = -1$ -ის ჩასმით მივიღებთ

$$f(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{p \cdot 2^p} +$$

$$+ \frac{p!}{2^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2) \dots (n+p+1)} \quad (9)$$

(9) ფორმულიდან გვეჩვენება:

$$R_n < \int_n^{\infty} \frac{p!}{2^p (x+1) \dots (x+p+1)} dx < \frac{p!}{2^p} \cdot \frac{1}{p(n+1)^p} = \frac{(p-1)!}{(2n+2)^p}$$

პირობის თანახმად უნდა გვქონდეს

$$\frac{(p-1)!}{(2n+2)^p} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^4}$$

საიდანაც შეგვიძლია ავიღოთ

$$n=5, p=6.$$

ამის გამო (9) ფორმულიდან უნდა ავიღოთ წევრები:

$$f(-1) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{6 \cdot 2^6} +$$

$$+ \frac{6!}{2^6} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} - \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} \right),$$

საიდანაც

$$f(-1) \approx 0,6931469.$$

შემდეგში სანდოა 4 ათწილადი ნიშანი, ამიტომ გვეჩვენება

$$f(-1) = 0,6931.$$

§ 2. ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობის კრიტერიუმები

წინა პარაგრაფებში განვიხილეთ რიცხვითი და ხარისხოვანი მწკრივები. ახლა განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული მწკრივები.

ვთქვათ გვაქვს კრებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

საჭიროა გამოვთვალოთ ჯამი $S(x)$ წინასწარ მოცემული სიზუსტით.

ცხადია, რაც უფრო სწრაფად იკრიბება a_n და b_n კოეფიციენტები ნულისაკენ, მით უფრო მცირე შესაგრებთა რიცხვის აღება დაგვჭირდება მწკრივიდან. ამიტომ ვიღრე დავიწყებდეთ მწკრივის ჯამის მნიშვნელობის გამოთვლას, წინასწარ შევეცადოთ გავაუმჯობესოთ მწკრივის კრებადობა. ამისთვის (1) მწკრივიდან გამოვყოთ ისეთი წევრები, რომელთა ჯამი წინასწარ ცნობილია და დარჩენილი მწკრივი, რაც შეიძლება, სწრაფად კრებადი იყოს.

ვთქვათ, ასეთი მწკრივია

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx), \quad (2)$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$S(x) = g(x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx, \quad (3)$$

სადაც

$$A_n = a_n - \alpha_n, \quad B_n = b_n - \beta_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

უმარტივეს შემთხვევაში $g(x)$ მწკრივად იღებენ (იხ. § 4, § 5)

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \equiv \sigma_0(x), \quad 0 < x < 2\pi,$$

$$\left(\frac{\pi-x}{2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \equiv -\sigma_1(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

$$\frac{2\pi^2 x - 3\pi x^2 + x^3}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \equiv -\sigma_2(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

და ა. შ.

აღწერილი მეთოდით შევისწავლოთ შემდეგი მწკრივი:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} \cos nx + \frac{1}{n^3+2} \sin nx \right). \quad (4)$$

დამხმარე მწკრივებად ავიღოთ

$$-\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx, \quad -\sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

მაშინ (4) მწკრივიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} S(x) &= -\sigma_1(x) - \sigma_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2} \right) \cos nx + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n^3+2} - \frac{1}{n^3} \right) \sin nx \right] = -\sigma_1(x) - \sigma_2(x) - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n^2+1)n^2} \cos nx + \frac{2}{(n^3+2)n^3} \sin nx \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

რადგანაც

$$\left| \frac{1}{(n^2+1)n^2} \cos nx \right| < \frac{1}{n^4},$$

და

$$\left| \frac{1}{(n^3+2)n^3} \sin nx \right| < \frac{1}{n^6},$$

(5)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{(i^2+1)i^2} \cos ix \right| + 2 \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{(i^3+2)i^3} \sin ix \right| < \\ &< \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{(i^2+1)i^2} + 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{(i^3+2)i^3} < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^4} + 2 \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^6} = \frac{1}{3n^3} + \frac{2}{5n^5}. \end{aligned}$$

თუ გვინდა ვიპოვოთ (4) მწკრივის ჯამი 10^{-3} სიზუსტით, მაშინ

$$|R_n| < \frac{1}{3n^3} + \frac{2}{5n^5} < \frac{1}{2} 10^{-3},$$

საიდანაც $n \geq 10$.

ამგვარად, რომ ვიპოვოთ (4) მწკრივის ჯამი 10^{-3} სიზუსტით, საკმარისია, (5) მწკრივში ავიღოთ ათი წევრი.

§ 4. ფურიეს მწკრივები

1. ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი. კოეფიციენტთა ფორმულები. მეცნიერებასა და ტექნიკაში ხშირად გვაქვს საქმე პერიოდულ სიდიდეებთან. მაგალითად, ცვლადი დენის ძაბვა, ორთქლის მანქანის ბრუნვითი მოძრაობის სიჩქარე და სხვა. გარკვეული T პერიოდის შემდეგ ეს სიდიდეები უბრუნდებიან თავიანთ წინა მნიშვნელობას¹:

$$\varphi(t+T) = \varphi(t).$$

თუ $\varphi(t)$ ფუნქციის პერიოდია რაიმე T სიდიდე, მაშინ იგი გარდაქმნით

$$x = \frac{2\pi}{T} t \quad (1)$$

მოგვცემს ფუნქციას, რომლის პერიოდი იქნება 2π . ასე რომ, ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული პერიოდული ფუნქციის პერიოდია 2π .

უმარტივესი პერიოდულ ფუნქციათაგანია (თუ არ ჩავთვლით მუდმივს) სინუსოიდური ფუნქცია

$$y = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (2)$$

სადაც ω სიხშირეა,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

უმარტივესი პერიოდული ფუნქციებიდან შეიძლება შედგენილ იქნეს უფრო რთული პერიოდული ფუნქციები, მაგრამ ამ ფუნქციებს უნდა ჰქონდეთ განსხვავებული სიხშირეები. რადგან ერთი და იგივე სიხშირის მქონე სინუსოიდური ფუნქციების ჯამი იძლევა სინუსოიდურ ფუნქციას იმავე სიხშირით.

¹ Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, М.-Л. 1949, стр. 500.

პირველად, თუ შევკრებთ რამდენიმე პერიოდულ ფუნქციას,
 $y_0 = A_0, y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), y_2 = A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) \dots$
 რომელთა სისწორეებია (თუ არ ჩავთვლით მუდმივს)

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \dots,$$

ხოლო პერიოდებია

$$\frac{2\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{2\omega}, \frac{2\pi}{3\omega}, \dots$$

მივიღებთ პერიოდულ ფუნქციას პერიოდით $T = \frac{2\pi}{\omega}$. მიღებული პერიოდული ფუნქცია არსებითად განსხვავებულია შესაქრები პერიოდული ფუნქციებისაგან. ამის ნათელსაყოფად, საეპარისია, ავიღოთ ფუნქციები $\sin t, \frac{1}{2} \sin 2t$ და გრაფიკულად შევკრიბოთ. მივიღებთ ფუნქციას 2π პერიოდით, რომელიც სრულიად განსხვავებული იქნება შესაქრები ფუნქციებისაგან.

ახლა, ბუნებრივია, დავსვათ შებრუნებული კითხვა: შეიძლება თუ არა მოცემული პერიოდული ფუნქცია, რომლის პერიოდია 2π , წარმოვადგინოთ როგორც სასრული ან თუნდაც უსასრულო შემდეგი ფუნქციების სიმრავლის ჯამი:

$$A_n \sin(nx + \alpha_n), \dots, n = 0, 1, 2, \dots$$

ან, რაც იგივეა,

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ფუნქციებისა, სადაც

$$a_n = A_n \sin \alpha_n, b_n = A_n \cos \alpha_n.$$

ამ კითხვის პასუხს იძლევა მე-II თავის მე-II პარაგრაფში დამტკიცებული ვაიერშტრასის შემდეგი

თეორემა 1. უწყვეტი და პერიოდული ფუნქცია $\varphi(x)$, რომლის პერიოდია 2π , შეიძლება ვაიშალოს თანაბრად კრებადი ტრიგონომეტრიული მრავალწევრების მწკრივად $-\pi \leq x \leq \pi$ სეგმენტზე.

ცხადია, ფუნქცია $\varphi(x)$, რომელიც არაუმეტეს k რიგის ტრიგონომეტრიული მრავალწევრების ჯამია, წარმოადგენს k რიგის ტრიგონომეტრიულ მრავალწევრს. ამის გამო ფუნქცია $\varphi(x)$ წარმოადგინება შემდეგი

$$\varphi(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (3)$$

გამოვსახოთ კოეფიციენტების მნიშვნელობანი $\varphi(x)$ ფუნქციის საშუალებით. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტი გავყოთ $2k+1$ ტოლ ნაწილად. დაყოფის წერტილები აღვნიშნოთ ξ_i ასობით,

$$\xi_i = i\lambda, i = -k, -k+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k-1, k. \lambda = \frac{2\pi}{2k+1}.$$

ჩავსვათ (3) ტოლობაში $x = \xi_i$, გვექნება

$$a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n \xi_i + b_n \sin n \xi_i) = \varphi(\xi_i), i = -k, k. \quad (4)$$

მივიღოთ a_0, a_n, b_n -ის, $n = -k, k$, მიმართ $(2k+1)$ განტოლებათა სისტემა: ამოვხსნათ (4) განტოლებათა სისტემა. ამისათვის უნდა ვისარგებლოთ შემდეგი იგივეობით

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \cos ih = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)h}{2 \sin \frac{1}{2}h}. \quad (5)$$

ამ იგივეობის დასამტკიცებლად ჯამი

$$\frac{1}{2} + \cos h + \cos 2h + \dots + \cos kh$$

გავამრავლოთ და გავყოთ $2 \sin \frac{1}{2}h$ -ზე და გამოვიყენოთ ტოლობა

$$2 \sin \frac{1}{2}h \cdot \cos ih = \sin\left(i + \frac{1}{2}\right)h - \sin\left(i - \frac{1}{2}\right)h.$$

შევკრიბოთ წევრობრივ (4) ტოლობანი, $i = -k, k$. რადგანაც $\sin x$ კენტი ფუნქციაა, b_k კოეფიციენტის მამრავლი ნულის ტოლი იქნება.

$$\sum_{i=-k}^k \sin n \xi_i = 0.$$

ავიღოთ a_n კოეფიციენტის მამრავლი

$$\sum_{i=-k}^k \cos n \xi_i = 1 + 2 \sum_{i=1}^k \cos in \lambda = 2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \cos in \lambda \right). \quad (6)$$

თუ (5) ტოლობაში ჩავსვამთ $h=n\lambda=\frac{2n\pi}{2k+1}$, მაშინ, ცხადია, მარცხენა მხარეში მივიღებთ (6) ჯამს, რაც ნულის ტოლია,

$$\sum_{i=-k}^k \cos n \xi_i = 1 + 2 \sum_{i=1}^n \cos in\lambda = 0. \quad (7)$$

ამრიგად, b_n კოეფიციენტის მამრავლიც ნულის ტოლია. ამის გამო (4) ტოლობათა წევრობრივი შეკრებით მივიღებთ

$$(2k+1) a_0 = \sum_{i=-k}^k \varphi(\xi_i),$$

საიდანაც

$$a_0 = \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k \varphi(\xi_i) \quad (8)$$

რომ განსაზღვროთ a_m , $1 \leq m \leq n$, კოეფიციენტი, გავამრავლოთ (4) ტოლობანი მიმდევრობით $\cos m \xi_i$ -ზე, $i = -k, k$, და შევკრიბოთ წევრობრივ. a_0 კოეფიციენტის მამრავლი (7) ტოლობის საფუძველზე ნულის ტოლია. ასევე ნულის ტოლია b_n კოეფიციენტის მამრავლიც, რადგანაც $\sin x$ კენტი ფუნქციაა. რაც შეეხება a_n კოეფიციენტის მამრავლს, იგი ასე წარმოვადგინოთ:

$$\sum_{i=-k}^k \cos n \xi_i \cos m \xi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=-k}^k \cos(n+m) \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=-k}^k \cos(n-m) \xi_i. \quad (9)$$

თუ $n \neq m$, მაშინ (7) ტოლობის საფუძველზე, (9) გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში ორივე ჯამი ნულის ტოლია. ხოლო, როცა $n=m$, მაშინ პირველი ჯამი ნულის ტოლია, ხოლო მეორე ჯამი $\frac{2k+1}{2}$ -ის ტოლია. ამრიგად, მხოლოდ a_m -ის კოეფიციენტი განსხვავდება ნულისაგან,

$$\frac{2k+1}{2} a_m = \sum_{i=-k}^k \varphi(\xi_i) \cos m \xi_i, \quad 1 \leq m \leq n,$$

საიდანაც

$$a_m = \frac{2}{2k+1} \sum_{i=-k}^k \varphi(\xi_i) \cos m \xi_i, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

სრულიად ასევე, თუ (4) ტოლობებს მიმდევრობით გავამრავლებთ $\sin m \xi_i$ -ზე და სათანადოდ შევკრებთ, მიღებული ტოლობიდან განვსაზღვრავთ

$$b_m = \frac{2}{2k+1} \sum_{i=-k}^k \varphi(\xi_i) \sin m \xi_i, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

როგორც ვხედავთ, (4) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები განისაზღვრება (8), (10) და (11) ფორმულებით. განტოლებათა სისტემის მარჯვენა ნაწილების ცვლილება იწვევს ამონახსნეთა სათანადო ცვლილებას, რაც იმას გვიჩვენებს, რომ (4) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება. ამრიგად, (4) განტოლებათა სისტემა სრულიად განსაზღვრულია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი k რიგის ტრიგონომეტრიული მრავალწევრი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე წარმოიდგინება (3) უმარტივესი ტრიგონომეტრიული მრავალწევრების ჯამით და ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

ახლა ავიღოთ უწყვეტი პერიოდული ფუნქცია $f(x)$, რომლის პერიოდია 2π . ავაგოთ ისეთი საინტერპოლაციო k რიგის ტრიგონომეტრიული პოლინომი $\varphi(x)$, რომელიც $[-\pi, \pi]$ სეგმენტის ξ_i წერტილებში, $\xi_i = i\lambda = i \frac{2\pi}{2k+1}$, $i = -k, k$, ემთხვევა $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს,

$$\varphi(x_i) = f(x_i) \quad i = -k, k.$$

ამით მივიღებთ k რიგის ტრიგონომეტრიულ პოლინომს (3), რომლის კოეფიციენტები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$a_0 = \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k f(\xi_i), \quad (12)$$

$$a_n = \frac{2}{2k+1} \sum_{i=-1}^n f(\xi_i) \cos n \xi_i, \quad (13)$$

$$b_n = \frac{2}{2k+1} \sum_{i=-k}^k f(\xi_i) \sin n \xi_i, \quad (14)$$

თუ k -ს გავზრდით, მაშინ ტრიგონომეტრიული პოლინომი $\varphi(x)$ -იც შეიცვლება, მაგრამ ისე, რომ $\varphi(x)$ დაემთხვევა $f(x)$ ფუნქციას უფრო მეტ და მეტ წერტილებში. (3) პოლინომის შესაყრება რიცხვი სათანადოდ გაიზრდება და კოეფიციენტებიც სათანადოდ შეიცვლება. კოეფიციენტები, მაგალითად, a_n ასე გადავწეროთ:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-k}^k f(\xi_i) \cos n \xi_i \Delta \xi_i, \quad (15)$$

სადაც

$$\Delta \xi_i = \frac{2\pi}{2k+1} = \lambda.$$

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ (15) ჯამი $f(x) \cos kx$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამია, შეგვიძლია დავწეროთ

$$a_n = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=-k}^k f(\xi_i) \cos n \xi_i \Delta \xi_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

თუ $n \rightarrow \infty$, მაშინ (3) ჯამი მოგვცემს

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (16)$$

სადაც კოეფიციენტები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \quad (17)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (18)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (19)$$

(16) მწკრივს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი, ხოლო (17)–(19) კოეფიციენტებს ფურიეს კოეფიციენტები (ეილერ-ფურიეს კოეფი-

ციენტები). ის ფაქტი, რომ $f(x)$ -სათვის ფურიეს მწკრივია (16) მწკრივი, ასე ჩაიწერება:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (20)$$

განხილული პროცესი მხოლოდ იმას გვიჩვენებს, რომ საინტერესო-ლაღიო ტრიგონომეტრიული მრავალწევრი (3) „ზღვარში“ თითქმის გადადის ფურიეს მწკრივში. (20) ფორმულა არაფერს არ ამტკიცებს, არ იძლევა $f(x)$ ფუნქციასა და სათანადო ფურიეს მწკრივს შორის კავშირს. იგი სიმბოლური ჩაწერაა იმისა, რომ $f(x)$ ფუნქციას შეესაბამება ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომლის კოეფიციენტებიც ფურიეს კოეფიციენტებია. მაგრამ (16) მწკრივი საბაზს გვაძლევს იმისას, რომ ამ მწკრივს უფრო მეტი ინტერესით შევხედოთ. ქვემოთ შევისწავლით ფურიეს მწკრივს სხვადასხვა კლასის ფუნქციებისათვის. ფურიეს კოეფიციენტებს უფრო მარტივი მეთოდით განვსაზღვრავთ.

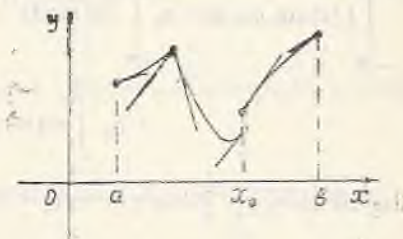
განვსაზღვროთ უბნობრივ უწყვეტი და უბნობრივ წარმოებადი (უბნობრივ გლუვი) ფუნქციები.

$f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ შუალედში უბნობრივ უწყვეტი ფუნქცია ეწოდება¹ თუ $f(x)$ ფუნქცია ყველგან უწყვეტია, გარდა სასრულო რაოდენობის წერტილებისა, სადაც ფუნქციას აქვს სასრული სიდიდის წყვეტა. ამ განსაზღვრის საფუძველზე $[a, b]$ შუალედი შეიძლება დანაწილდეს ისეთ ქვეშუალედებად, სადაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია. შეიძლება ფუნქცია უწყვეტი რყოს ქვეშუალედის ბოლო წერტილებშიც, თუ ფუნქციის მნიშვნელობას შევცვლით ზღვრული მნიშვნელობით ბოლო წერტილში (ივლისსმება ცალმხრივი ზღვარი). ცხადია, შუალედში უწყვეტი ფუნქცია უბნობრივ უწყვეტი ფუნქციაა. ფუნქციის მნიშვნელობა წყვეტის წერტილებში უნდა დადგინდეს გარკვეული წესით.

უბნობრივ უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უბნობრივ წარმოებადი ფუნქცია $[a, b]$ შუალედში, თუ ეს შუალედი შეიძლება დანაწილდეს სასრული რაოდენობის ისეთ ქვეშუალედებად, სადაც $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია. ქვეშუალედების ბოლო წერტი-

ლებში არსებობს ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებულები (ნახ. 1).

ვთქვათ, რომ პერიოდული $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ან უბნობრივ



ნახ. 1

¹ Б. М. Будаг, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, М. 1965, гл. II.

უწყვეტი $[-\pi, \pi]$ შუალედში. ამასთან დავუშვათ, რომ $[-\pi, \pi]$ შუალედში გაიშლება თანაბრად კრებად ტრიგონომეტრიულ მწკრივად:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (21)$$

(21) მწკრივის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right]. \quad (22)$$

ადვილი შესამჩნევია

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left. \frac{\sin nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\left. \frac{\cos nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

ამიტომ (22) ტოლობაში ჯამის ქვეშ ყველა შესაყრები ნულის ტოლია. გვექნება

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

გამოვთვალოთ a_m კოეფიციენტი. ამისათვის (21) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $\cos mx$ -ზე შემდეგ მოვახდინოთ ინტეგრება $-\pi$ -დან π -მდე. მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right]. \end{aligned}$$

მაგრამ პირველი შესაყრები ნულის ტოლია. შემდეგ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x - \sin(n-m)x] dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = 0,$$

თუ $m \neq n$, ხოლო

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} dx = \pi.$$

ამის გამო გვექნება

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \pi a_m,$$

საიდანაც

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx.$$

სრულიად ასევე, თუ (21) ტოლობას გავამრავლებთ $\sin mx$ -ზე და მოვახ-

დნთ ინტეგრებას, ყველა შესაყრები გარდა $b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx$ -ისა,

$$b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = b_m \pi,$$

გახდება ნულის ტოლი. გვექნება

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx.$$

ამრიგად, (21) მწკრივში კოეფიციენტები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ნაცვლად (21) მწკრივისა, თუ ავიღებთ მწკრივს

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (23)$$

მაშინ კოეფიციენტები განისაზღვრება ფორმულებით (a_0 მიიღება a_n -დან $n=0$ -სათვის)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots \quad (24)$$

მეთოდი, რომლითაც (24) კოეფიციენტები განისაზღვრეთ, ეილერ-ფურიეს მეთოდის სახელწოდებითაა ცნობილი. ეილერმა აღნიშნული მეთოდი გამოიყენა მე-18 საუკუნის დასასრულში, ხოლო ფურიემ, ეილერისაგან დამოუკიდებლად, მე-19 საუკუნის დასაწყისში.

ამგვარად, ვაჩვენეთ, რომ, თუ $f(x)$ გაიშლება (23) თანაბრად კრებად მწკრივად, მაშინ კოეფიციენტები გამოისახება (24) ფორმულებით. ანუ, თუ $f(x)$ ფუნქცია გაიშლება თანაბრად კრებად ტრიგონომეტრიულ (23) მწკრივად, მაშინ (23) მწკრივი აუცილებლად ფურიეს მწკრივი იქნება.

2. ფურიეს მწკრივის კერძო წამი. გამოვთვალოთ ფურიეს მწკრივის კერძო წამი x_0 წერტილში,

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0).$$

ჩავსვათ კოეფიციენტების მნიშვნელობანი (24) გამოსახულებებიდან. მივიღებთ

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \, du + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u) [\cos mu \cos x_0 + \sin mu \sin mx_0] \, du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u - x_0) \right] \, du. \end{aligned}$$

ვისარგებლოთ (5) ფორმულით

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u - x_0) = \frac{\sin(2n+1) \frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}},$$

გვექნება

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}} \, du. \quad (25)$$

თუ ინტეგრალქვეშ უბნობრივ უწყვეტი 2π პერიოდით პერიოდული ფუნქცია გვაქვს, მაშინ

$$\int_0^{2\pi} F(u) \, du = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u) \, du, \quad (26)$$

ე. ი. ინტეგრალი არაა დამოკიდებული საინტეგრო შუალედის მდებარეობაზე, დამოკიდებულია ინტეგრების შუალედის სიგრძეზე.

მართლაც,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u) \, du = \int_{\alpha}^0 F(u) \, du + \int_0^{2\pi} F(u) \, du + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(u) \, du.$$

თუ ბოლო ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $u=2\pi+t$, მაშინ

$$\int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(u) \, du = \int_0^{\alpha} F(t+2\pi) \, dt = \int_0^{\alpha} F(u) \, du,$$

რაც პირველი შესაყრებისაგან ნიშნით განსხვავდება, ამით (26) ტოლობა დამტკიცდა.

(26) თვისების გამო ფურიეს კოეფიციენტები შეგვიძლია ავიღოთ სხვა საზღვრებით ისე, რომ შუალედის სიგრძე იყოს 2π . მაგალითად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

(26) ტოლობის საფუძველზე $S_n(x_0)$ ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}} \, du.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი $t = u - x_0$ აღნიშვნით მოგვცემს

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

ეს ინტეგრალი ასე წარმოვადგინოთ:

$$\int_{-\pi}^0 f(x_0 + t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt + \int_0^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

თუ პირველ ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $t = -\tau$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 f(x_0 + t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt &= - \int_{\pi}^0 f(x_0 - \tau) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}} d\tau = \\ &= \int_0^{\pi} f(x_0 - t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის გამო $S_n(x_0)$ შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt. \quad (27)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $S_n(x_0)$ დამოკიდებულია n -ზე, რომელიც ინტეგრალ ქვეშაა. ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალ ქვეშ, როცა $n \rightarrow \infty$, არ შეიძლება. ამისათვის (27) ინტეგრალი უნდა გამოვიკვლიოთ.

3. ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტთა თვისებები. ძირითადი ლემა. ვიდრე გამოვიკვლიოთ (27) ინტეგრალს, წინასწარ დავამტკიცოთ ლემა. თუ $g(t)$ ფუნქცია უბნობრივ წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin pt \, dt = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos pt \, dt = 0$$

(ძირითადი ლემა). ლემა გეშმარტია მაშინაც, თუ $g(t)$ ფუნქცია $[a, b]$ -ზე აბსოლუტურად ინტეგრებადია, ე. ი. არასაკუთრივი ინტეგ-

$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty.$$

მართლაც, რაიმე სასრული $[a, b]$ შუალედისათვის ადვილი აქვს უტოლობას

$$\left| \int_a^b \sin pt \, dt \right| = \left| \frac{\cos pa - \cos pb}{p} \right| \leq \frac{2}{p}. \quad (28)$$

$[a, b]$ შუალედი დავყოთ n ნაწილად

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b.$$

მაშინ

$$\int_a^b g(t) \sin pt \, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \sin pt \, dt.$$

$g(t)$ -ს უმცირესი მნიშვნელობა $[t_i, t_{i+1}] = \Delta t_i$ შუალედში აღვნიშნოთ m_i , მაშინ ბოლო გამოსახულება ასე გადავწეროთ:

$$\int_a^b g(t) \sin pt \, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t) - m_i] \sin pt \, dt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin pt \, dt,$$

საიდანაც (28) უტოლობის თანახმად მივიღებთ

$$\left| \int_a^b g(t) \sin pt \, dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i + \frac{2}{p} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|,$$

სადაც ω_i ფუნქციის რხევაა Δt_i შუალედში,

$$\omega_i = g(t) - m_i = g'(\xi_i) \Delta t_i, \quad \xi_i \in [t_i, t_{i+1}].$$

ავიღოთ ნებისმიერად $\varepsilon > 0$. ავირჩიოთ $[a, b]$ შუალედის ისეთი დანაწილება, რომ

$$\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

(თუ ფუნქციას სასრული რაოდენობის წყვეტის წერტილები აქვს, წყვეტის წერტილები $[a, b]$ შუალედის დაყოფის წერტილებად უნდა ავიღოთ), მაშინ

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta t_i < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{2}.$$

იმის შემდეგ რაც არჩეულია m_i , შეგვიძლია იმდენად დიდი p_0 ავიღოთ, რომ

$$\frac{2}{p_0} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

საბოლოოდ გვქნება, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ ისეთი p_0 ავარჩიოთ, რომ ყოველი $p > p_0$ -თვის

$$\left| \int_a^b g(t) \sin pt \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

სრულიად ასევე დამტკიცდება

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos pt \, dt = 0.$$

თუ მოვიგონებთ ფურიეს კოეფიციენტების გამოსახულებას, მაშინ დამტკიცებული ლემის საფუძველზე უზნობრივ წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

ზემოთ მიღებული (27) ინტეგრალი წარმოადგენს ორი ინტეგრალის ჯამად,

$$\int_0^{\pi} = \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}, \quad 0 < \delta < \pi.$$

ავიღოთ მეორე შესაყრები

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \, dt.$$

რადგანაც შუალედში $0 < \delta \leq t \leq \pi$ $\sin \frac{t}{2} \neq 0$, ამიტომ ინტეგრალქვეშ მყოფი ფუნქცია

$$\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

უზნობრივ წარმოებადია. თუ გამოვიყენებთ ძირითად ლემას, მივიღებთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \, dt = 0$$

ამის გამო გვქნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \, dt.$$

ეს კი გვიჩვენებს შემდეგი თეორემის მართებულობას.

თეორემა 2. $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის ჯამის ყოფაქცევა რაიმე x_0 წერტილში დამოკიდებულია მხოლოდ x_0 წერტილის რაც შეიძლება მცირე მახლობლობაში $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობაზე.

4. ფუნქციის ფურიეს მწკრივად გაშლის საკმარისი პირობები. ეთქვას, $f(x)$ ფუნქცია უზნობრივ წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ ჰეშმარიტია უფრო ზოგადი თეორემა.

თეორემა 3. თუ პერიოდული $f(x)$ ფუნქცია, რომლის პერიოდია 2π , $[-\pi, \pi]$ შუალედში უზნობრივ წარმოებადია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ყოველ x_0 წერტილში კრებადია და ამ მწკრივის ჯამია

$$S_0 = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

ცხადია, ეს ჯამი $f(x_0)$ -ის ტოლია, თუ $f(x)$ x_0 წერტილში უწყვეტია, ხოლო შუალედის ბოლო წერტილებში $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$.

დამტკიცება: (27) ტოლობას,

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt,$$

ადგილი აქვს ყოველი უზნობრივ წარმომადე $f(x)$ ფუნქციისათვის. ცხადია, ამ ტოლობას ექნება ადგილი $f(x) \equiv 1$, მაშინ, $S_n(x_0) \equiv 1$.

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

ეს ტოლობა გავამრავლოთ S_0 -ზე და გამოვავლოთ ზედა ტოლობას. მივიღებთ

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (29)$$

გამოვთვალოთ მიღებული ინტეგრალის ზღვარი. ეს ინტეგრალი ასე ჩავწერთ:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt,$$

სადაც

$$g(t) = \left[\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t} \right] \frac{1}{2} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

ვაჩვენოთ რომ $g(t)$ ფუნქცია $[0, \pi]$ სეგმენტზე აბსოლუტურად ინტეგრებადია.

ცხადია, $g(t)$ ფუნქცია $[0, \pi]$ შუალედში საზოგადოდ უწყვეტია, გარდა სასრულო რაოდენობის წერტილებისა, სადაც მას შეიძლება ჰქონდეს სასრული წყვეტის წერტილები ($t > 0$, $f(x)$ უზნობრივ წარმომადეა). გამოვთვალოთ

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t).$$

$g(t)$ ფუნქციის მეორე მამრავლის ზღვარი, როცა $t \rightarrow 0$, არის 1. ავიღოთ პირველი მამრავლი

$$\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t}.$$

ვთქვათ, ჰერჯერობით x_0 შუალედის შიგნითაა $0 < x_0 < \pi$, სადაც $f(x)$ ფუნქცია წარმომადეა, მაშინ (ნახ. 2) $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ და

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = f'(x_0), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t} = f'(x_0),$$

რაც გვაძლევს

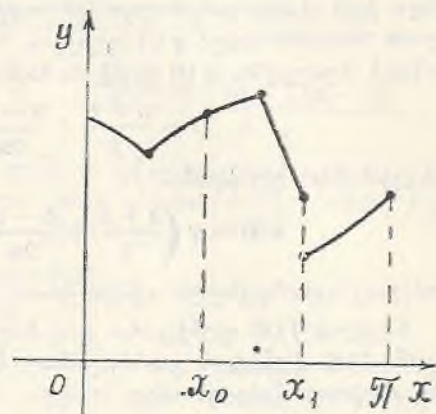
$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 2f'(x_0).$$

თუ x_0 წერტილზე $f(x)$ ფუნქცია წარმომადეა არაა, მას ექნება x_0 -ის მარჯვნიდან და მარცხნიდან წარმოებულის სხვადასხვა მნიშვნელობა (ნახ. 3),

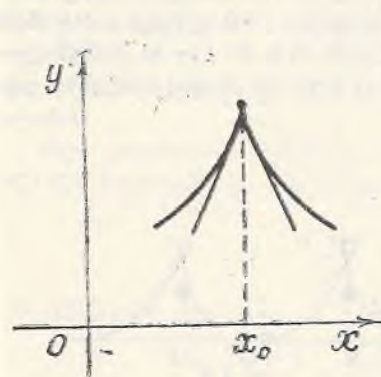
$f'(x_0 + 0) \neq f'(x_0 - 0)$ და, მაშასადამე, $g(+0) \neq g(-0)$, $g(t)$ განიცდის სასრულ წყვეტას. თუ x_0 წერტილი წყვეტის წერტილია (ნახ. 4), მაშინ

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0).$$

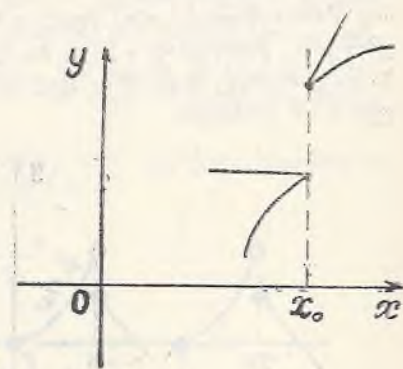
ასევე $f'(x_0 + 0) \neq f'(x_0 - 0)$ და აქაც $g(t)$ განიცდის სასრულ წყვეტას.



ნახ. 2



ნახ. 3



ნახ. 4

აქედან ადვილად დავასკვნით, რომ $g(t)$ ფუნქცია $[0, \pi]$ შუალედში აბსოლუტურად ინტეგრებადი ფუნქციაა. გამოვიყენებთ რა (29) ტოლობის ინტეგრალზე ძირითად ლემას, მივიღებთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(x_0) - S_0) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S.$$

ამ ტოლობით ჩამოყალიბებული თეორემა დამტკიცდა.

5. ნებისმიერ სეგმენტზე მოცემული ფუნქციის ფურიეს მწკრივად გაშლა. ჩვენ აქამდე განვიხილეთ პერიოდული ფუნქცია. ახლა, ჯერ განვიხილოთ არაპერიოდული $\varphi(t)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე $a < t \leq b$ შუალედში. $\varphi(t)$ ფუნქცია ჩასმით

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi} x \quad (90)$$

მოგვცემს $f(x)$ ფუნქციას,

$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi} x\right) \equiv f(x), \quad (31)$$

რომელიც განსაზღვრული იქნება $[-\pi, \pi]$ შუალედში.

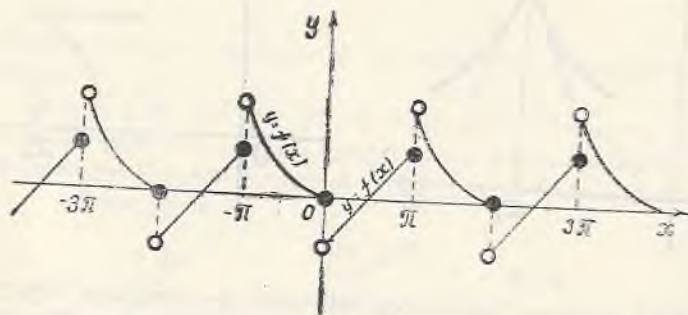
ნაცვლად $f(x)$ ფუნქციისა განვიხილოთ მთელ $-\infty < x < \infty$ შუალედში $f(x)$ ფუნქციის გაგრძელებით მიღებული $F(x)$ ფუნქცია. $F(x)$ განსაზღვრეთ შემდეგნაირად:

$$F(x) = f(x), \quad -\pi < x \leq \pi,$$

$$F(-\pi) = F(\pi) = f(\pi),$$

$$F(x+2\pi) = F(x).$$

ამგვარად განსაზღვრული $F(x)$ ფუნქცია იქნება პერიოდული და უზნობრივ წარმომადგენელ $[-\pi, \pi]$ შუალედში, რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია, პირობით უზნობრივ წარმომადგენელ $[-\pi, \pi]$ შუალედში (ნახ. 5). $f(-\pi)$ მნიშვნელობა ნებისმიერად შეგვიძლია ავიღოთ, რაც ფურიეს კოეფიციენტებზე გავლენას არ მოახდენს.



ნახ. 5

შემოთ დამტკიცებული თეორემა გამოვიყენოთ $F(x)$ ფუნქციაზე. თუ x_0 წერტილი ეკუთვნის $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის შუალედს, მა-

შინ $F(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი მოგვცემს $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობას x_0 წერტილში. $F(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები გამოითვლება $f(x)$ ფუნქციის საშუალებით.

შუალედის ბოლო წერტილებში S_0 მნიშვნელობა იქნება

$$S_0 = \frac{F(\pi+0) + F(\pi-0)}{2} = \frac{F(-\pi+0) + F(-\pi-0)}{2} = \frac{F(-\pi+0) + F(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}.$$

ამრიგად, მოცემული $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტიც რომ იყოს $x = \pm\pi$ წერტილებში, თუ ის პერიოდული არაა, $f(\pi) \neq f(-\pi)$, მაშინ $F(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის ჯამი იქნება რიცხვი

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2},$$

რაც განსხვავებულია როგორც $f(-\pi)$ -სგან, ისე $f(\pi)$ -სგან. ამ შემთხვევაში ფურიეს მწკრივად გაშლას ადგილი აქვს მხოლოდ $-\pi < x < \pi$ შუალედში.

შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია $[-\pi, \pi]$ შუალედის გარეთ ფურიეს მწკრივად გაშლისთვის გავაგრძელოთ პერიოდულად $F(x)$ ფუნქციით:

$F(x) \neq f(x)$ $[-\pi, \pi]$ შუალედის გარეთ. ამიტომ, ცხადია, ფურიეს მწკრივი არ მოგვცემს, საზოგადოდ, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობას; ფურიეს მწკრივის ჯამი $S(x)$ პერიოდული ფუნქციაა, $S(x+2\pi) = S(x)$. ჯამი $S(x)$ მხოლოდ $]-\pi, \pi[$ შუალედში იძლევა $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობას.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\varphi(t)$ ფუნქცია მოცემულია $a \leq t \leq b$ შუალედში და მის გარეთ, მაშინ ჩასმა

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi} x$$

$\varphi(t)$ ფუნქციაში მოგვცემს

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi} x\right) \equiv f(x).$$

$f(x)$ ფუნქციისათვის გვექნება:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

თუ დავუბრუნდებით ისევ t ცვლადს, მივიღებთ

$$dx = \frac{2\pi}{b-a} dt, \quad a \leq t \leq b,$$

$$f\left(\frac{2t-a-b}{b-a}\pi\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\left(\frac{2t-a-b}{b-a}\pi\right) + b_n \sin n\left(\frac{2t-a-b}{b-a}\pi\right) \right],$$

სადაც

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f\left(\frac{2t-a-b}{b-a}\pi\right) \cos n\left(\frac{2t-a-b}{b-a}\pi\right) dt, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f\left(\frac{2t-a-b}{b-a}\pi\right) \sin n\left(\frac{2t-a-b}{b-a}\pi\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

ანუ

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2t-a-b}{b-a} n\pi + b_n \sin \frac{2t-a-b}{b-a} n\pi \right], \quad (32)$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \varphi(t) \cos \frac{2t-a-b}{b-a} n\pi dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \varphi(t) \sin \frac{2t-a-b}{b-a} n\pi dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

(32) გამოსახულებაში ტოლობა გვექნება $a < t < b$ შუალედის $\varphi(t)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილებში.

კერძოდ, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $-l \leq x \leq l$ შუალედში, მაშინ $-l < x < l$ -სათვის $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილებში მივიღებთ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (34)$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

6. კენტი და ლუწი ფუნქციებისათვის ფურიეს მწკრივები. თუ $[-\pi, \pi]$ შუალედში მოცემული $f(x)$ ფუნქცია ლუწი ფუნქციაა, $f(-x) = -f(x)$, მაშინ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0,$$

რის გამოც ყველა b_n კოეფიციენტი ნულის ტოლი იქნება, ხოლო

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

ამ შემთხვევაში ფურიეს მწკრივს ექნება სახე

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (36)$$

სადაც

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

მაშასადამე, ლუწი ფუნქციისთვის ფურიეს მწკრივი მხოლოდ კოსინუსებს შეიცავს.

თუ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა, მაშინ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0,$$

ხოლო

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

ამის გამო ფურიეს მწკრივი მიიღებს სახეს

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (38)$$

სადაც

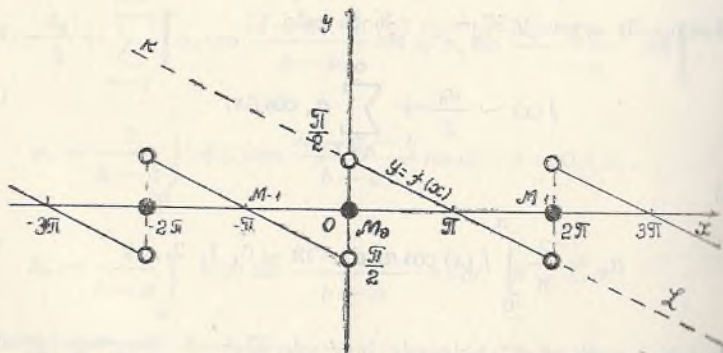
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (39)$$

მაშასადამე, კენტი ფუნქციისათვის ფურიეს მწკრივი მხოლოდ სინუსებს შეიცავს.

7. მაგალითები. 1) გავშალოთ ფურიეს მწკრივად ფუნქცია (ნახ. 6)

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

$0 < x < 2\pi$ შუალედში.



ნახ. 6

რადგანაც $f(x)$ კენტი ფუნქციაა, ამიტომ იგი გაიშლება სინუსების მწკრივად,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = -\frac{1}{\pi} (\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}.$$

აღებული ფუნქციის ფურიეს მწკრივს ექნება სახე

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi. \quad (40)$$

როცა $x=0$, $\sin x=0$, ხოლო მარცხენა მხარეში გვაქვს $\frac{\pi}{2}$.

ამგვარად, (40) ტოლობა $x=0$ -თვის ირღვევა. ასევე ირღვევა ტოლობა $x=2\pi$ -თვის. (40) მწკრივის ჯამის

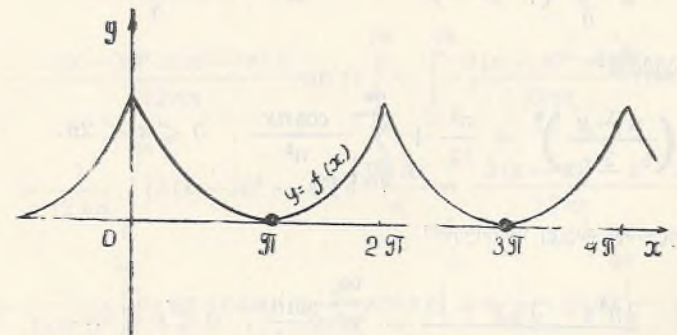
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

გრაფიკი წარმოადგენს KL წრფის პარალელურ მონაკვეთებს და $M_0, M_1, M_{-1}, \dots$ წერტილებს.

2) გავშალოთ ფუნქცია

$$f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2} \right)^2.$$

$[0, 2\pi]$ შუალედში ფურიეს მწკრივად (ნახ. 7).



ნახ. 7

ცხადია,

$$f(\pi) = 0, \quad f(0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2, \quad f(2\pi) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

$f(x)$ უწყვეტია $0 \leq x \leq 2\pi$ შუალედში. $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც $0 \leq x \leq 2\pi$ შუალედში ტოლია $f(x)$ -ის და შემდეგ გაგრძელებულია პერიოდულად $F(x+2\pi) = F(x)$, უწყვეტი პერიოდული ფუნქციაა. $f(x)$ ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ მთლიან $0 \leq x \leq 2\pi$ შუალედში. ეს ფუნქცია ლუწია. მასხადამე გაიზლება კოსინუსების ჯამად.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 \cos nx \, dx.$$

ორჯერ ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 \frac{d \sin nx}{n} = \frac{2}{\pi n} \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 \sin nx \Big|_0^\pi +$$

$$+ \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \frac{2(\pi-x)}{4} \sin nx \, dx = -\frac{1}{\pi n^2} \int_0^\pi (\pi-x) d \cos nx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2} (\pi-x) \cos nx \Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi n^2} \int_0^\pi \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 dx = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi-x)^3}{3 \cdot 2^2} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{6}.$$

ამიტომ გვქვამება

$$\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (41)$$

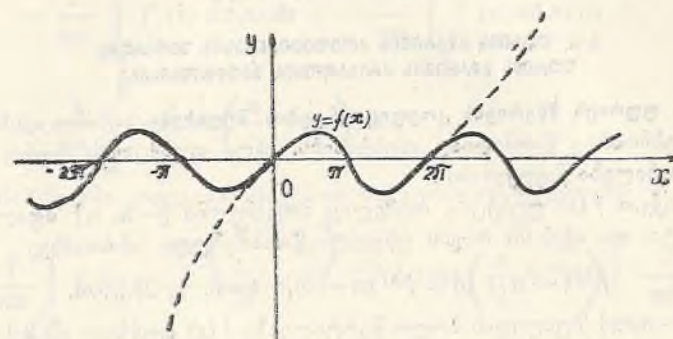
სრულიად ასევე მივიღებთ

$$\frac{2\pi^2 x - 3\pi x^2 + x^3}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (42)$$

რადგანაც აღებული ფუნქცია სიმეტრიულია $x=\pi$ წერტილის მიმართ $0 \leq x \leq 2\pi$ შუალედში (ნახ. 8),

$$f(x) = \frac{(x-\pi)^3 + \pi^3 - \pi^2 x}{12},$$

ფორმის a_n კოეფიციენტები ნულის ტოლია.



ნახ. 8

b_n კოეფიციენტისათვის გვექვამება:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^3 + \pi^3 - \pi^2 x}{12} \sin nx \, dx.$$

სამჯერ ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{12\pi} \int_0^{2\pi} [(x-\pi)^3 + \pi^3 - \pi^2 x] d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= -\frac{(x-\pi)^3 + \pi^3 - \pi^2 x}{12\pi n} \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{3(x-\pi)^2 - \pi^2}{12\pi n} \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{12\pi n} \int_0^{2\pi} [3(x-\pi)^2 - \pi^2] d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{3(x-\pi)^2 - \pi^2}{12\pi n} \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ \frac{1}{12\pi n^2} \int_0^{2\pi} 6x \sin nx \, dx = \frac{x}{2n^2\pi} \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n^2\pi} \cos nx \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2n^3\pi} = \frac{1}{n^3}.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$\frac{2\pi^2 x - 3\pi x^2 + x^3}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

წინა პარაგრაფის ბოლო ნაწილში სწორედ (40)–(42) მწკრივების ჯამები იყო $\sigma_0(x)$, $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ -ით აღნიშნული.

§ 5. ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების შეფასება.
ფურიეს მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება

1. ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების შეფასება. აქამდე ვიხილავდით უბნობრივ წარმოებად ფუნქციებს. ახლა ფუნქციებს უფრო მეტი მოთხოვნილება წავუყენოთ¹.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულია $[-\pi, \pi]$ შუალედში, უწყვეტია და აქვს m რიგის უწყვეტი წარმოებული. ამასთანავე

$$f^{(k)}(-\pi+0) = f^{(k)}(\pi-0), \quad k=0, 1, 2, \dots, m.$$

ე. ი. $[-\pi, \pi]$ შუალედის ბოლო წერტილებზე $f(x)$ ფუნქცია და მისი პირველი m -ური რიგის წარმოებულების მნიშვნელობანი სათანადოდ ერთმანეთს ემთხვევა. ასეთ ფუნქციებზე იტყვიან, რომ ისინი ეკუთვნიან პერიოდული ფუნქციების $C^{(m)}$ კლასს (პერიოდულობის $C^{(m)}$ კლასს).

ცხადია, თუ $f(x)$ ფუნქცია $[-\pi, \pi]$ შუალედში ეკუთვნის პერიოდულობის $C^{(m)}$ კლასს, მაშინ მისი პერიოდული გაგრძელებაც ეკუთვნის იმავე $C^{(m)}$ კლასს.

ვაჩვენოთ პერიოდული ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტთა შემდეგი თვისება:

თუ $f(x) \in C^{(m)}$, $-\pi \leq x \leq \pi$, ე. ი. თუ $f(x)$ ფუნქცია ეკუთვნის $C^{(m)}$ პერიოდულობის $C^{(m)}$ კლასს $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, მაშინ ასეთი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები a_n, b_n არის m -ზე მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე $\frac{1}{n}$ -ის მიმართ:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^m}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^m}\right).$$

მართლაც, ავიღოთ ერთ-ერთი კოეფიციენტთაგანი

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

ამ ინტეგრალში შევასრულოთ ნაწილობითი ინტეგრება:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{\pi n} f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \\ &\quad - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos \left(\frac{\pi}{2} + nx \right) dx, \end{aligned}$$

ამ უკანასკნელში კიდევ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრება:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) d \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + nx \right)}{n} = f'(x) \sin \left(\frac{\pi}{2} + nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi n^2} - \\ &\quad - \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \sin \left(\frac{\pi}{2} + nx \right) dx = \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + nx \right) dx, \end{aligned}$$

თუ ამ ოპერაციას აღებულ ინტეგრალზე m -ჯერ გამოვიყენებთ, გვექნება

$$a_n = \frac{1}{\pi n^m} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) \cos \left(m \frac{\pi}{2} + nx \right) dx. \quad (1)$$

ასევე მივიღებთ:

$$b_n = \frac{1}{\pi n^m} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) \sin \left(m \frac{\pi}{2} + nx \right) dx. \quad (2)$$

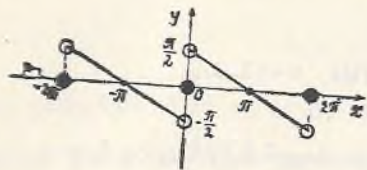
თუ $f^{(m)}(x)$ უბნობრივ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ $f^{(m)}(x)$ ფუნქციის $a_n^{(m)}, b_n^{(m)}$ ფურიეს კოეფიციენტები მისწრაფვის ნულისაკენ, მიუხედავად იმისა, კრებადია თუ არა $f^{(m)}(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი (§ 4, n 6).

$$\begin{aligned} a_n^{(m)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n^{(m)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

¹ Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, М. 1963, стр. 210.

გ. ი. (6) მწკრივი სწრაფად კრებალია. მისი გაწარმოება $(m-2)$ -ჯერ მაინც შეიძლება.

ვაჩვენოთ პრაქტიკულად $g(x)$ ფუნქციის აგება. ამისათვის ავაგებთ $\sigma_0(x)$, $\sigma_1(x)$, ..., $\sigma_m(x)$ ფუნქციებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:



ნახ. 9

პირობებს:

$$\sigma_k^{(+)}(x) - \sigma_k^{(-)}(x) = \pi,$$

$$k = 0, 1, \dots, m.$$

ამასთანავე $\sigma_k^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, უწყვეტია $[-2\pi, 2\pi]$ შუალედში და $\sigma_k^{(k)}(x) = \sigma_0(x)$.

$\sigma_0(x)$ ასე ავაგოთ (ნახ. 9)

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} -\frac{\pi-x}{2}, & \text{თუ } -2\pi < x < 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & \text{თუ } 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{თუ } x = -2\pi, 0, 2\pi. \end{cases} \quad (7)$$

$\sigma_0(x)$ კენტი ფუნქციაა, ამიტომ იგი გაიშლება მარტო ჯერადი რეალის სინუსების ჯამად.

(40, § 4) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ

$$\sigma_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad (8)$$

ცხადია,

$$\sigma_0(+0) - \sigma_0(-0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

გ. ი. $\sigma_0(x)$ ფუნქციას $[-\pi, \pi]$ შუალედში აქვს ერთადერთი წყვეტის წერტილი, სადაც წყვეტის სიდიდეა π .

ავიღოთ $\psi(x)$ ფუნქცია,

$$\psi(x) = \sigma_0(x - x_0), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad -\pi \leq x_0 \leq \pi.$$

ამ ფუნქციას x_0 წერტილზე ისეთივე წყვეტა აქვს, რაც $\sigma_0(x)$ ფუნქციას.

$$\psi(x_0 + 0) - \psi(x_0 - 0) = \pi.$$

$\psi(x)$ ფუნქციის ეს x_0 წერტილი ერთადერთი წერტილია $[-\pi, \pi]$ შუალედში.

$\sigma_1(x)$ ფუნქცია განესაზღვროთ დამოკიდებულებით

$$\sigma_1(x) = C_1 + \int_0^x \sigma_0(x) dx,$$

სადაც C_1 რაღაც ნებისმიერი მუდმივია.

(8) მწკრივის ინტეგრება მოგვცემს

$$\sigma_1(x) = C_1 + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} dx = C_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}. \quad (9)$$

შევარჩიოთ C_1 ისე, რომ (9) მწკრივში თავისუფალი წევრი არ გვქონდეს,

$$C_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

საიდანაც

$$C_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

გამოვთვალოთ C_1 . ამისათვის ავიღოთ $\int_0^x \sigma_0(x) dx$ ფუნქცია,

$0 < x < 2\pi$. ამ შუალედში ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{\pi-x}{2} = \sigma_0(x).$$

ამიტომ

$$\int_0^x \sigma_0(x) dx = \int_0^x \frac{\pi-x}{2} dx.$$

ცხადია, მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ წარმოადგენს $\int_0^x \sigma_0(x) dx$ -ის ფურობს გამწკრივების

თავისუფალ წევრს, გ. ი.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx \int_0^x \frac{\pi-x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$C_1 = -\frac{\pi^2}{6}.$$

ამის გამო

$$\sigma_1(x) = -\frac{\pi^2}{6} + \int_0^x \sigma_0(x) dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

მაგრამ, თუ მხედველობაში მივიღებთ $\sigma_0(x)$ -ის მნიშვნელობას (7)-დან, გვექნება: $0 \leq x \leq 2\pi$ -თვის

$$\sigma_1(x) = -\frac{\pi^2}{6} + \int_0^x \frac{\pi-x}{2} dx = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{(\pi-x)^2}{4} \Big|_0^x = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\pi-x)^2}{4},$$

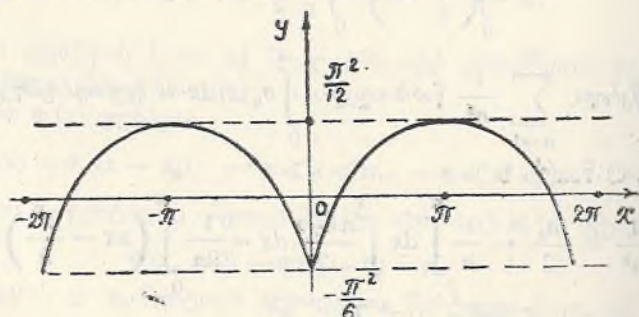
ხოლო $-2\pi \leq x \leq 0$ -თვის

$$\sigma_1(x) = -\frac{\pi^2}{6} - \int_0^x \frac{\pi+x}{2} dx = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{(\pi+x)^2}{4} \Big|_0^x = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\pi+x)^2}{4}.$$

ამრიგად,

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\pi-x)^2}{4}, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\pi+x)^2}{4}, & -2\pi \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

$\sigma_1(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ნაჩვენებია მე-10 ნახაზზე.



ნახ. 10

$\sigma_1(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა,

$$\sigma_1'(x) = \sigma_0(x)_0$$

წარმოებული $\sigma_1'(x)$ განიცდის წყვეტას $x=0$ წერტილში,

$$\sigma_1'(+0) - \sigma_1'(-0) = \sigma_0(+0) - \sigma_0(-0) = \pi.$$

სრულიად ასევე განესაზღვრავთ

$$\sigma_2(x) = C_2 + \int_0^x \sigma_1(x) dx,$$

$$\sigma_3(x) = C_3 + \int_0^x \sigma_2(x) dx,$$

$$\sigma_m(x) = C_m + \int_0^x \sigma_{m-1}(x) dx,$$

სადაც C_k სიდიდეები ისე უნდა ავარჩიოთ, რომ $\sigma_k(x)$ ფუნქციის ფურცლები მჭკრივ თვისუფალ წვერს a_0 -ს არ შეიცავდეს,

$$\int_0^\pi \left[C_k + \int_0^x \sigma_{k-1}(x) dx \right] dx = 0, \quad k=1, 2, \dots, m.$$

ფუნქციები $\sigma_k(x)$ და მათი წარმოებულები $(k-1)$ რიგამდე უწყვეტია $[-2\pi, 2\pi]$ შუალედში, ხოლო

$$\sigma_k^{(k)}(+0) - \sigma_k^{(k)}(-0) = \pi, \quad k=0, 1, \dots, m,$$

რადგანაც

$$\sigma_k^{(k)}(x) = \sigma_0(x).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\psi_k(x)$ ფუნქციას,

$$\psi_k(x) = \sigma_k(x - x_0), \quad x, x_0 \in [-\pi, \pi],$$

x_0 წერტილში ისეთივე თვისება აქვს, როგორც $\sigma_k(x)$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში. $\psi_k(x)$ ფუნქცია მიიღება $\sigma_k(x)$ ფუნქციის x_0 სიდიდით გადაადგილებით.

დავუბრუნდეთ C_2 სიდიდეების განსაზღვრას. მაგალითად, განვსაზღვროთ C_2 .

პირობის თანახმად $\sigma_2(x)$ ფუნქცია მიიღება $\sigma_1(x)$ ფუნქციის ინტეგრებით, $\int_0^{\pi} \sigma_1(x) dx$. მაგრამ $\sigma_1(x)$ ლუწი ფუნქციაა, მისი ინტეგრალი კი კენტი ფუნქციაა. კენტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივის თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_2(x) dx = 0.$$

საიდანაც

$$C_2 = 0.$$

გამოვთვალოთ $\sigma_2(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა,

$$\sigma_2(x) = \int_0^x \sigma_1(x) dx.$$

შუალედში $0 \leq x \leq 2\pi$ გვექნება

$$\begin{aligned} \sigma_2(x) &= \int_0^x \left[\frac{\pi^2}{12} - \frac{(\pi-x)^2}{4} \right] dx = \left[\frac{\pi^2 x}{12} + \frac{(\pi-x)^3}{12} \right] \bigg|_0^x = \\ &= -\frac{2\pi^2 x - 3\pi x^2 + x^3}{12}. \end{aligned}$$

ასევე, $[-2\pi, 0]$ შუალედისათვის გვექნება

$$\begin{aligned} \sigma_2(x) &= \int_0^x \left[\frac{\pi^2}{12} - \frac{(\pi+x)^2}{4} \right] dx = \left[\frac{\pi^2 x}{12} - \frac{(\pi+x)^3}{12} \right] \bigg|_0^x = \\ &= -\frac{2\pi^2 x + 3\pi x^2 + x^3}{12}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\sigma_2(x) = \begin{cases} -\frac{2\pi^2 x - 3\pi x^2 + x^3}{12}, & -2\pi \leq x \leq 0; \\ -\frac{2\pi^2 x + 3\pi x^2 + x^3}{12}, & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad (11)$$

ვთქვათ, x_0 წერტილი წარმოადგენს $f(x)$ -ის და მისი წარმოებულების წყვეტის წერტილს

$$f^{(i)}(x_0 + 0) - f^{(i)}(x_0 - 0) = h^i, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (12)$$

განვსაზღვროთ $g(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$g(x) = \frac{h^{(0)}}{\pi} \sigma_0(x - x_0) + \frac{h^{(1)}}{\pi} \sigma_1(x - x_0) + \dots + \frac{h^{(m)}}{\pi} \sigma_m(x - x_0). \quad (13)$$

თუ დავაკვირდებით ამ $g(x)$ ფუნქციას, შევამჩნევთ, რომ მას აქვს შემდეგი თვისებები:

1) x_0 წერტილი $g(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილია და წყვეტის სიდიდე (ნახტომი) $h^{(0)}$ -ის ტოლია,

$$\begin{aligned} g(x_0 + 0) - g(x_0 - 0) &= \frac{h^{(0)}}{\pi} [\sigma_0(x_0 + 0 - x_0) - \\ &- \sigma_0(x_0 - 0 - x_0)] = \frac{h^{(0)}}{\pi} \cdot \pi = h^{(0)}. \end{aligned}$$

ფუნქციები $\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში.

2) $g(x)$ ფუნქციის წარმოებული $g^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, განიცდის წყვეტას x_0 წერტილში,

$$\begin{aligned} g^{(i)}(x_0 + 0) - g^{(i)}(x_0 - 0) &= \frac{h^{(i)}}{\pi} [\sigma_i^{(i)}(x_0 + 0 - x_0) - \sigma_i^{(i)}(x_0 - 0 - x_0)] = \\ &= \frac{h^{(i)}}{\pi} \pi = h^{(i)}, \end{aligned}$$

ჩაღვანაც

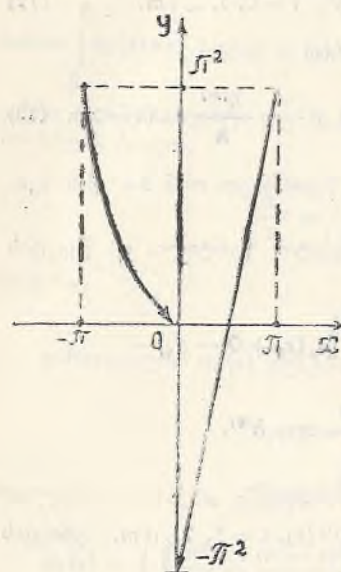
$$\sigma_i^{(i)} = \sigma_0(x).$$

3) $x \neq x_0$ -თვის ფუნქცია $g(x)$ -ს აქვს ყველა რიგის წარმოებული. ამგვარად განსაზღვრული $g(x)$ ფუნქციის საშუალებით გვექნება

$$f(x) = g(x) + \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \right],$$

რომელიც უფრო სწრაფად კრებადი, ვიდრე სათანადო $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

$\varphi(x) = f(x) - g(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივად გაშლისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ დამოკიდებულებებით



ნახ. 11

$$\sigma_0(x-x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-x_0)}{n},$$

$$\sigma_1(x-x_0) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-x_0)}{n^2}, \quad (14)$$

$$\sigma_2(x-x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-x_0)}{n^3}.$$

და ა. შ.

განვიხილოთ მაგალითი. გავშალოთ ფურიეს მწკრივად ფუნქცია (ნახ. 11)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi(2x - \pi), & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad (15)$$

და გავაუმჯობესოთ მწკრივის კრებადობა. (15) ფუნქცია წყვეტს განიხილის მხოლოდ $x=0$ წერტილში, $f(+0) - f(-0) = -\pi^2$. გავშალოთ (15) ფუნქცია ფურიეს მწკრივად:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 x^2 dx + \int_0^{\pi} \pi(2x - \pi) dx \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^0 + \pi(x^2 - \pi x) \Big|_0^{\pi} \right\} = \frac{\pi^2}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x^2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} (2x - \pi) \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \sin nx}{n^3} \right]_0^{\pi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left[\frac{(2x - \pi) \sin nx}{n} + \frac{2 \cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{n^3} (2 \cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^3} [2(-1)^n - 1], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x^2 \sin nx dx + \int_0^{\pi} (2x - \pi) \sin nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2x \sin nx}{n^2} + \frac{2 \cos nx}{n^3} \right]_{-\pi}^0 - \\ &- \left[\frac{(2x - \pi) \cos nx}{n} + \frac{2 \sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{2[1 - (-1)^n]}{n^3} - \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(15) ფუნქციის ფურიეს მწკრივს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n^3} [2(-1)^n - 1] \cos nx + \right. \\ &\left. + \left[\frac{1}{\pi} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n^3} - \frac{\pi}{n} \right] \sin nx \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

მიღებული მწკრივის კრებადობა ცუდია,

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ამიტომ $f(x)$ ფუნქციიდან გამოვეყოთ $g(x)$ ფუნქცია. ამისათვის გამოვთვალოთ ნახტომები (წყვეტის სიდიდეები)

$$h^{(0)} = f(+0) - f(-0) = -\pi^2,$$

$$h^{(1)} = f'(+0) - f'(-0) = 2\pi \Big|_{x=+0} - 2x \Big|_{x=0} = 2\pi,$$

$$h^{(2)} = f''(+0) - f''(-0) = 0 \Big|_{x=+0} - 2 \Big|_{x=0} = -2.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი (13) ფორმულაში, გვექნება

$$g(x) = -\frac{\pi^2}{\pi} \sigma_0(x-0) + \frac{2\pi}{\pi} \sigma_1(x-0) - \frac{2}{\pi} \sigma_2(x-0),$$

ანუ

$$g(x) = -\pi \sigma_0(x) + 2 \sigma_1(x) - \frac{2}{\pi} \sigma_2(x). \quad (17)$$

ნახტომთა ფუნქცია $g(x)$ ასე განსაზღვროთ:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k_0} \frac{h_j^{(0)}}{\pi} \sigma_0(x - x_j^{(0)}) + \sum_{j=1}^{k_1} \frac{h_j^{(1)}}{\pi} \sigma_1(x - x_j^{(1)}) + \dots + \sum_{j=1}^{k_m} \frac{h_j^{(m)}}{\pi} \sigma_m(x - x_j^{(m)}). \quad (20)$$

ამრიგად, განსაზღვრულ $g(x)$ ფუნქციას ისეთივე თვისებები აქვს, როგორიც აქვს ზემოთ აგებულ (13) ფუნქციას:

1) წერტილებში $x_j^{(0)}$, $j=1, 2, \dots, k_0$, $g(x)$ ფუნქცია წყვეტილია და წყვეტის წერტილებში ნახტომთა სიდიდე $f(x)$ ფუნქციის ნახტომთა სიდიდის ტოლია იმავე წერტილებში:

$$g(x_j^{(0)} + 0) - g(x_j^{(0)} - 0) = \frac{h_j^{(0)}}{\pi} [\sigma_0(x_j^{(0)} + 0 - x_j^{(0)}) - \sigma_0(x_j^{(0)} - 0 - x_j^{(0)})] = \frac{h_j^{(0)}}{\pi} \cdot \pi = h_j^{(0)}.$$

2) აგებულ $g(x)$ ფუნქციის წარმოებულებიც განიცდიან წყვეტას $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულების წყვეტის წერტილებში:

$$g^{(i)}(x_j^{(i)} + 0) - g^{(i)}(x_j^{(i)} - 0) = \frac{h_j^{(i)}}{\pi} [\sigma_i(x_j^{(i)} + 0 - x_j^{(i)}) - \sigma_i(x_j^{(i)} - 0 - x_j^{(i)})] = \frac{h_j^{(i)}}{\pi} \cdot \pi = h_j^{(i)}.$$

3) $x \neq x_j^{(i)}$ წერტილებში $g(x)$ ფუნქციას აქვს ყველა რიგის უწყვეტი წარმოებული.

განვიხილოთ სხვაობა

$$\varphi(x) = f(x) - g(x).$$

ცხადია, $\varphi(x)$ ფუნქციას $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებში აქვს უწყვეტი წარმოებულები

$$\varphi^{(i)}(x_j^{(i)} + 0) - \varphi^{(i)}(x_j^{(i)} - 0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m;$$

ე. ი.

$$\varphi(x) \in C^{(m)} [-\pi, \pi].$$

ვისარგებლებოთ რა $\varphi(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივად გამწკრივებით, ავაგებოთ $f(x)$ ფუნქციისათვის სწრაფად კრებად ფურიეს მწკრივს

$$f(x) = g(x) + \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \sin nx),$$

სადაც ვისარგებლებოთ ფორმულებით

$$\sigma_0(x - x_j^{(0)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - x_j^{(0)})}{n},$$

$$\sigma_1(x - x_j^{(1)}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x - x_j^{(1)})}{n^2},$$

$$\sigma_2(x - x_j^{(2)}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - x_j^{(2)})}{n^3}$$

და ა. შ.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 27.

1. კუმერის მეთოდით გააუმჯობესეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

2. სტირლინგის მეთოდით გააუმჯობესეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+5}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2n-1}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n+1)^2(2n+1)^2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+1}.$$

3. გააუმჯობესეთ მწკრივის კრებადობა და იპოვეთ მწკრივების ჯამები:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3n+2} \text{ სიზუსტით } \frac{1}{2} \cdot 10^{-4};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \text{ სიზუსტით } \frac{1}{2} \cdot 10^{-5};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} \text{ სიზუსტით } 10^{-7};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ სიზუსტით } 10^{-8}.$$

4. გააუმჯობესეთ ვილერ-აბელის მეთოდით მწკრივთა კრებადობა და იპოვეთ მწკრივის ჯამი:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad \text{სიზუსტით } 10^{-5};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x=1, \quad \text{სიზუსტით } 10^{-5};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} x^{2n}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad \text{სიზუსტით } 10^{-6};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1}}, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad \text{სიზუსტით } 10^{-6}.$$

5. გააუმჯობესეთ ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობა:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+3} \sin nx, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2} \cos nx,$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+n} \sin nx, \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \sin nx,$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n+1)} \cos nx, \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2} \cos nx.$$

6. გაშალეთ ფუნქციის მწკრივად ფუნქციები $-\pi < x < \pi$ შუალედში და ააგეთ გრაფიკები:

$$1) x^2; \quad 2) e^x; \quad 3) e^{-x}; \quad 4) |x|; \quad 5) \sin kx; \quad 6) \cos kx;$$

$$7) x-\pi; \quad 8) x+\pi; \quad 9) x^3; \quad 10) |x^3|; \quad 11) |\sin x|; \quad 12) \sin x + \cos x,$$

$$13) \begin{cases} x^3, & 0 \leq x < \pi, \\ -x, & -\pi < x \leq 0; \end{cases} \quad 14) \begin{cases} x^3+1, & -\pi < x < 0, \\ -x^3-1, & 0 < x < \pi; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi, \\ x^2-1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

7. ფუნქცია $f(x) = \frac{\pi}{4}$ მოცემულია $(0, \pi)$ შუალედში. გაშალეთ

ეს ფუნქცია ჯერადი კუთხის კოსინუსების მწკრივად ან ჯერადი კუთხის სინუსების მწკრივად (რისთვისაც ფუნქცია $f(x)$ გააგრძელებთ $(-\pi, 0)$ ინტერვალში როგორც ლუწი, ან როგორც კენტი ფუნქცია).

8. $f(x) = \frac{\pi}{4}$ ფუნქციის $(0, \pi)$ შუალედში ჯერადი კუთხის სინუსების მწკრივად გაშლით ისარგებლეთ შემდეგი მწკრივების ჯამის გამოსათვლელად:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \quad 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

9. გაშალეთ $f(x) = x^2$ ფუნქცია ჯერადი კუთხის სინუსების მწკრივად და მიღებული მწკრივით იპოვეთ შემდეგი მწკრივების ჯამები:

1) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$; 2) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots$

10. ა. ნ. კრილოვის მეთოდით გააუმჯობესეთ შემდეგი ფუნქციების ფურიეს მწკრივების კრებადობა:

1) $\begin{cases} -x, & -\pi < x < 0, \\ x+1, & 0 < x < \pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+1, & -\pi < x < 0, \\ x^2-1, & 0 < x < \pi; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x+1, & -\pi < x < 0, \\ x^3, & 0 < x < \pi; \end{cases}$

თ ა ვ ი XV

ფუნქციათა მიახლოებით გაწარმოება და ინტეგრება

§ 1. რიცხვითი გაწარმოების ამოცანა

რიცხვით გაწარმოებას მივმართავთ, მაშინ, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით ან ფუნქციის სახე რთულია. პირველ შემთხვევაში დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდები არ გამოდგება, მეორე შემთხვევაში კი მათი გამოყენება დიდ სიძნელეს იწვევს.

ამ შემთხვევაში მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას აღებულ $[a, b]$ შუალედში ცვლიან მიახლოებულ $f(x)$ ფუნქციით (უფრო ხშირად მრავალწევრით). ცხადია, $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $\varphi(x)$ ფუნქციით მიახლოება გარკვეული ცდომილებებით.

$f(x)$ ფუნქცია $\varphi(x)$ ფუნქციით ასე ჩაიწერება:

$$f(x) = \varphi(x) + R(x), \quad (1)$$

სადაც $R(x)$ ნაშთითი წევრია. თუ დავუშვებთ, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს აქვთ k რიგის წარმოებულები, მაშინ, (1) იგივეობის k -ჯერ გაწარმოება მოგვცემს:

$$f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + R^{(k)}(x).$$

რადგანაც $\varphi^{(k)}(x)$ -ის მნიშვნელობა მიიღება $f^{(k)}(x)$ -ის მნიშვნელობად, მაშინ, ცხადია, სათანადო ცდომილება $R^{(k)}(x)$ იქნება. (1) ფორმულაში დავუშვით, რომ $R(x)$ საკმარისად მცირეა, მაგრამ ეს იმას არ ნიშნავს, რომ $R^{(k)}(x)$ -იც საკმარისად მცირე იქნება, რადგანაც მცირე ფუნქციის წარმოებული შეიძლება გახდეს საკმარისად დიდი. მართლაც, განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[a, b]$ შუალედში, შევცვალოთ იგი იმავე შუალედში უწყვეტად წარმოებადი სხვა $\varphi(x)$ ფუნქციით ისე, რომ

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{n} \sin n^2(x-a).$$

ცხადია, საკმარისად დიდი n -თვის

$$|R(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin n^2(x-a) \right| \leq \frac{1}{n}.$$

ავილოთ წარმოებული

$$f'(x) = \varphi'(x) + n \cos n^2(x-a),$$

აქ ნაშთის წარმოებული

$$|R'(x)| = |n \cos n^2(x-a)|$$

n -ის საკმარისად დიდი მნიშვნელობისათვის იძლევა საკმარისად დიდ მნიშვნელობას. მაშასადამე, $|R(x)|$ -ის სიმცირე ყოველთვის არ იძლევა $|R'(x)|$ -ის სიმცირეს. ამის გამო გაწარმოების ამოცანა განსაკუთრებულ ყურადღებას საჭიროებს: წინასწარ უნდა ვიცოდეთ არა მარტო $|f(x) - \varphi(x)|$, არამედ $|f^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)|$ სიდიდეც. განხილული მგვალითის გამო იტყვიან, რომ გაწარმოების ამოცანა არაკორექტულია უწყვეტ ფუნქციითა სივრცეში. რიცხვითი გაწარმოების ამოცანის არაკორექტულობა გამოწვეულია რიცხვითი გაწარმოების ფორმულების მცირე სიზუსტით. რიცხვითი გაწარმოების ფორმულების მცირე სიზუსტე დიდ გავლენას ახდენს არაკორექტული ამოცანის ამონახსნის მნიშვნელობაზე.

§ 2. რიცხვითი გაწარმოების ფორმულები არათანაბრად დაჯგოფებული წერტილებისათვის

1. ავილოთ ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა არათანაბარი შუალედებისათვის¹

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

ან შემოკლებით

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{k=0}^i u_k f(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}) + R_n(x), \quad (2)$$

სადაც

$$R_n(x) = \Pi_n(x) f(x, x_0, \dots, x_n), \quad (3)$$

$$u_k = x - x_k, \quad \Pi_n(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n).$$

(2) გამოსახულების გაწარმოება მოგვცემს

$$f'(x) = \sum_{i=0}^n \frac{d}{dx} \prod_{k=0}^i u_k f(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}) + R'_n(x), \quad (4)$$

¹ აბ. И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, М. 1966, стр. 150.
968

სადაც

$$R'_n(x) = \frac{d}{dx} [\Pi_n(x) f(x, x_0, \dots, x_n)] = \frac{d\Pi_n(x)}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n) + \Pi_n(x) \frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n). \quad (5)$$

თუ $R'_n(x)$ -ს უკუვაგდებთ, $f'(x)$ -ის მიახლოებით მნიშვნელობად გვექნება

$$f'(x) = f(x_0, x_1) + (u_0 + u_1)f(x_0, x_1, x_2) + (u_0 u_1 + u_0 u_2 + u_1 u_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots + (u_0 u_1 \dots u_{n-2} + u_0 u_1 \dots u_{n-3} u_{n-1} + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (6)$$

მეორე რიგის წარმოებულისათვის გვექნება:

$$f''(x) = \sum_{i=0}^n \frac{d^2}{dx^2} \prod_{k=0}^i u_k f(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}) + R''_n(x). \quad (7)$$

თუ უკუვაგდებთ $R''_n(x)$ -ს, მივიღებთ

$$f''(x) = 2f(x_0, x_1, x_2) + 2(u_0 + u_1 + u_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) + 2(u_0 u_1 + u_0 u_2 + u_0 u_3 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) + \dots + 2(u_0 u_1 \dots u_{n-3} + u_0 u_2 u_3 \dots u_{n-3} u_{n-2} + \dots + u_2 u_3 \dots u_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (8)$$

$R''(x)$ -ის გამოსახულება იქნება

$$R''(x) = \frac{d^2 \Pi_n(x)}{dx^2} f(x, x_0, \dots, x_n) + 2 \frac{d \Pi_n(x)}{dx} f'(x, x_0, \dots, x_n) + \Pi_n(x) f''(x, x_0, \dots, x_n) \quad (9)$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$f^{(k)}(x) = k! [f(x_0, x_1, \dots, x_k) + (u_0 + u_1 + \dots + u_k)f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) + (u_0 u_1 + u_0 u_2 + \dots + u_k u_{k+1})f(x_0, x_1, \dots, x_{k+2}) + \dots + (u_0 u_1 \dots u_{n-k} + \dots + u_{k+1} u_{k+2} \dots u_{n-1})f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (10)$$

სადაც ცდომილება განისაზღვრება ტოლობით

$$R^{(k)}(x) = \frac{d^k \Pi_n(x)}{dx^k} f(x, x_0, \dots, x_n) + \frac{k}{1!} \frac{d^{k-1} \Pi_n(x)}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n) + \frac{k(k-1)}{2!} \frac{d^{k-2} \Pi_n(x)}{dx^{k-2}} \frac{d^2}{dx^2} f(x, x_0, \dots, x_n) + \dots + \Pi_n(x) \frac{d^k}{dx^k} f(x, x_0, \dots, x_n). \quad (11)$$

გავამარტივოთ ცდომილება $R_n^k(x)$. ამისათვის ჯერ გამოვთვალოთ

$$\frac{d}{dx} f(x, x_0, x_1, \dots, x_n), \text{ გვეჩვენება}$$

$$\frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n) = \lim_{x \rightarrow x} \frac{f(\bar{x}, x_0, x_1, \dots, x_n) - f(x, x_0, \dots, x_n)}{\bar{x} - x} =$$

$$= f(x, x, x_0, \dots, x_n),$$

თუ

$$\lim_{x \rightarrow x} \frac{f(\bar{x}, x_0, x_1, \dots, x_n) - f(x, x_0, \dots, x_n)}{\bar{x} - x} = \lim_{x \rightarrow x} f(\bar{x}, x, x_0, \dots, x_n) =$$

$$= f(x, x, x_0, x_1, \dots, x_n)$$

არსებობს (თავი IX, § 3).

ასევე

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x, x_0, \dots, x_n) = \lim_{x \rightarrow x} \frac{f(\bar{x}, \bar{x}, x_0, \dots, x_n) - f(x, x, x_0, \dots, x_n)}{\bar{x} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x} \frac{f(\bar{x}, \bar{x}, x_0, \dots, x_n) - f(\bar{x}, x, x_0, \dots, x_n)}{\bar{x} - x} +$$

$$+ \lim_{x \rightarrow x} \frac{f(\bar{x}, x, x_0, \dots, x_n) - f(x, x, x_0, \dots, x_n)}{\bar{x} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x} f(\bar{x}, \bar{x}, x, x_0, \dots, x_n) + \lim_{x \rightarrow x} f(\bar{x}, x, x_0, \dots, x_n) =$$

$$= 2f(x, x, x_0, \dots, x_n).$$

ინდუქციის მეთოდით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ¹

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x, x_0, \dots, x_n) = k! \overbrace{f(x, x, \dots, x, x_0, \dots, x_n)}^{(k+1)\text{-ჯერ}}. \quad (12)$$

ამის გამო (11) მოგვცემს

$$R_n^{(k)}(x) = \frac{d^k \Pi_n(x)}{dx^k} f(x, x_0, \dots, x_n) +$$

$$+ \frac{k!}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} \Pi_n(x)}{dx^{k-1}} f(x, x, x_0, \dots, x_n) +$$

¹ Ш. Е. Микеладзе, Численные методы матем. анализа, М. 1953, стр. 41.

$$+ \frac{k!}{(k-2)!} \frac{d^{k-2} \Pi_n(x)}{dx^2} f(x, x, x, x_0, \dots, x_n) + \dots +$$

$$+ \frac{k!}{k!} \Pi_n(x) f(x, x, \dots, x, x_0, \dots, x_n)$$

ანუ

$$R_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!} \frac{d^{k-j} \Pi_n(x)}{dx^{k-j}} \underbrace{f(x, x, \dots, x_1, x_0, \dots, x_n)}_{j+1\text{-ჯერ}}. \quad (13)$$

თუ ვისარგებლებთ მე-9 თავის მე-6 პარაგრაფის (6) ფორმულით და მე-8 პარაგრაფის (3) ფორმულით

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

$$\underbrace{f(x, x, \dots, x, x_0, \dots, x_n)}_{j+1\text{-ჯერ}} = \frac{f^{(n+j+1)}(\xi_j)}{(n+j+1)!},$$

სადაც ξ_j მოთავსებულია $x_1, x_0, \dots, x_n$ -დან უდიდესსა და უმცირეს მნიშვნელობათა შორის, მაშინ (13) ფორმულა მოგვცემს

$$R_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)! (n+j+1)!} \Pi_n^{(k-j)}(x) f^{(n+j+1)}(\xi_j), \quad (14)$$

სადაც ξ_j რალც წერტილებია ($j=0, 1, \dots, k$) $x, x_0, \dots, x_n$ რიცხვებიდან უდიდესსა და უმცირეს მნიშვნელობათა შორის. იგულისხმება $f(x)$ ფუნქციას აღებულ შუალედში $(n+k+1)$ რიგის წარმოებული აქვს.

თუ x წერტილი იმ შუალედის გარეთაა, სადაც მოთავსებულია $x_0, \dots, x_n$ წერტილები, მაშინ ნაშთი $R_n^{(k)}(x)$ შეიძლება გამარტივდეს, ამისათვის მე-9 თავის მე-8 პარაგრაფის ანალოგიურად განვიხილოთ ფუნქცია

$$Q(x) = L_n(x) + C \Pi_n(x),$$

სადაც $L_n(x)$ საინტერპოლაციო n ხარისხის მრავალწევრია. $Q(x)$ ფუნქცია ემთხვევა $f(x)$ ფუნქციას $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებში. შევარჩიოთ C ისე, რომ x' წერტილში, სადაც გვინდა შევაფასოთ ნაშთი, ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$Q^{(k)}(x') = L_n^{(k)}(x') + C \Pi_n^{(k)}(x') = f^{(k)}(x'). \quad (15)$$

ეს შესაძლებელია, რადგანაც $\Pi_n^{(k)}(x)=0$ განტოლების ამონახსნები მოთავსებულია იმ უმცირეს შუალედში, სადაც მოთავსებულია $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილები.

შევადგინოთ დამხმარე ფუნქცია

$$P(x) = f(x) - L_n(x) - C \Pi_n(x). \quad (16)$$

ეს ფუნქცია $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებში მაინც ხდება ნულის ტოლი. ამის გამო $P(x)$ ფუნქცია იმ უმცირეს შუალედში, სადაც მოთავსებულია $x_0, x_1, \dots, x_n$ ყოველ შემთხვევაში n -ჯერ მაინც ხდება ნულის ტოლი. ხოლო $P(x)$ ფუნქციის k რიგის წარმოებული $(n+1-k)$ -ჯერ მაშინ გახდება ნულის ტოლი იმავე შუალედში. მაგრამ (15) პირობით $P^{(k)}(x')=0$. ამგვარად, $P^{(k)}(x)$ ნულის ტოლი ხდება $n+2-k$ წერტილში. თუ გავგრძელებთ მსჯელობას, როლის თეორემის საფუძველზე მივიღებთ, რომ $P^{(n+1)}(x)$ ერთ ξ წერტილში მაინც გახდება ნულის ტოლი.

$$P^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

მაგრამ $P(x)$ n ხარისხის მრავალწევრია, ხოლო Π_n არის $(n+1)$ ხარისხის მრავალწევრი, ამიტომ (16)-დან მივიღებთ

$$P^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)! = 0,$$

საიდანაც

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

შევიტანოთ C -ს მნიშვნელობა (15)-ში, მივიღებთ

$$f^{(k)}(x') = L_n^{(k)}(x') + \frac{\Pi_n^{(k)}(x')}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

ამგვარად, მივიღეთ $f(x)$ ფუნქციის რიცხვითი გაწარმოების ფორმულა, სადაც ნაშთის სახე (14) ფორმულასთან შედარებით მარტივია,

$$R^{(k)}(x) = \frac{\Pi_n^{(k)}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (17)$$

სადაც x მოთავსებულია $x_0, x_1, \dots, x_n$ მნიშვნელობიდან უმცირესსა და უდიდეს მნიშვნელობათა გარეთ.

§ 3. რიცხვითი გაწარმოების ფორმულაში თანაბრად დაშორებული წერტილებისათვის

თუ საინტერპოლაციო წერტილები ტოლდაა დაშორებული, მაშინ ხელსაყრელია ვისარგებლოთ სათანადო ტოლად დაშორებული წერტილებისათვის საინტერპოლაციო ფორმულებით.

1. ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულით

$$f(x) = f_0 + \frac{t}{1!} \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n f_0 + R_n(x), \quad (1)$$

სადაც

$$x = x_0 + th, \quad f_0 = f(x_0),$$

გამოთვალათ მიმდევრობითი წარმოებულები

$$f'(x) = \frac{df}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{1}{h}; \quad f''(x) = \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dt} \frac{1}{n} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d^2 f}{dt^2} \cdot \frac{1}{h^2}$$

და ა. შ. ამის გამო (1) ფორმულა მოგვცემს

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!} \Delta^4 f_0 + \dots \right], \quad (2)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f_0 + \frac{6t-6}{3!} \Delta^3 f_0 + \frac{12t^2-36t+22}{4!} \Delta^4 f_0 + \dots \right],$$

$$f'''(x) = \frac{1}{h^3} \left[\Delta^3 f_0 + \frac{24t-36}{4!} \Delta^4 f_0 + \dots \right].$$

თუ (2) ფორმულაში ჩავსვათ $t=0$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 f_0 + \dots \right], \\ f''(x_0) &= \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 f_0 - \dots \right], \\ f'''(x_0) &= \frac{1}{h^3} \left[\Delta^3 f_0 - \frac{3}{2} \Delta^4 f_0 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

ცდომილება შევაფასოთ წინა პარაგრაფის (14) ფორმულით.

$$\begin{aligned} R_n'(x) &= \frac{1}{n} \frac{d}{dt} [t(t-1)\dots(t-n) h^{n+1}] f^{(n+1)}(\xi_0) \frac{1}{(n+1)!} + \\ &+ h^{n+1} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi_1). \end{aligned}$$

რადგანაც

$$\frac{d}{dt} [t(t-1)\dots(t-n)]_{t=0} = (-1)(-2)\dots(-n) = (-1)^n n!$$

გვექნება

$$R'_n(x_0) = \frac{(-1)^n h^n}{(n+1)} f^{(n+1)}(\xi_0). \quad (4)$$

თუ ვისარგებლებთ მიახლოებითი გამოსახულებით

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} f_0}{h^{n+1}},$$

მივიღებთ

$$R'_n(x_0) = \frac{(-1)^n \Delta^{n+1} f_0}{h(n+1)}.$$

$R''_n(x)$ -თვის გვექნება

$$\begin{aligned} R''_n(x) = & \frac{1}{h^2} \frac{d^2}{dt^2} [t(t-1)\dots(t-n) h^{n+1}] f^{(n+1)}(\xi_0) + \\ & + 2 \frac{1}{n} \frac{d}{dt} [t(t-1)\dots(t-n) h^{n+1}] \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} + \\ & + 2t(t-1)\dots(t-n) h^{n+1} \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}. \end{aligned}$$

ჩასმა $t=k$ მოგვცემს

$$\begin{aligned} R''_n(x_k) = & h^{n-1} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^2}{dt^2} [t(t-1)\dots(t-n)] \Big|_{t=k} f^{(n+1)}(\xi_0) + \\ & + 2h^n \frac{1}{(n+2)!} \frac{d}{dt} [t(t-1)\dots(t-n)] \Big|_{t=k} f^{(n+2)}(\xi_1). \quad (5) \end{aligned}$$

მაგალითად, ვიპოვოთ $(\operatorname{tg} x)'$, $x=15^\circ$ და $x=14^\circ 30'$, თუ $\operatorname{tg} x$ -ის მნიშვნელობანი და სათანადო სხვაობანი მოცემულია 1-ელ ცხრილში.

ცხრილი 1

x	$\operatorname{tg} x$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
15°	0,26795	1880			
16°	0,28675	1898	18		
17°	0,30573	1919	21	3	
18°	0,32492	1941	22	1	-2
19°	0,34433	1964	23	1	0
20°	0,36397				

ავიღოთ ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულა, სადაც შევჩერდეთ $\Delta^2 f$ -ზე, რადგანაც $\Delta^4 f$ შეიცავს დიდ ცდომილებას. ცდომილება რიცხვითა დამრგვალებითაა გამოწვეული. გვექნება¹

$$f(x) = f_0 + t \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0.$$

აღებული მაგალითისათვის

$$x_0 = 15^\circ, x = x_0 + th, h = 1^\circ \approx 0,01745; \frac{1}{h} = 57,29578;$$

$$t_1 = 0, t_2 = -\frac{1}{2}.$$

წარმოებულის გამოსათვლელად გვექნება ფორმულა

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left(\Delta f_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 f_0 \right) \quad (8)$$

ჩავსვათ $t=0$. მივიღებთ

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)'_{15^\circ} = & 57,29578 \left(0,01880 - \frac{1}{2} \cdot 0,00018 \right) = \\ = & 57,29578 \cdot 0,01871 = 1,072004. \end{aligned}$$

შევაფასოთ ცდომილება. ვისარგებლოთ (6) ფორმულით:

$$R'_2(15^\circ) = \frac{(-1)^2 \Delta^3 f_0}{h \cdot 2} = \frac{0,00003}{3} \cdot 57,29578 = 0,0005729578.$$

ამრიგად, $R'_2(15^\circ) = 0,0006$. საძიებელი მნიშვნელობისათვის მივიღებთ:

$$(\operatorname{tg} x)'_{15^\circ} = 1,072 (\pm 0,0006). \quad (9)$$

თუ შევადარებთ მიღებულ მნიშვნელობას ზუსტ მნიშვნელობას

$$(\operatorname{tg} x)'_{15^\circ} = \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = \frac{1}{0,96573^2} = 1,07223,$$

დავრწმუნდებით, რომ (9) მნიშვნელობაში ყველა ციფრი ზუსტია, რასაც ცდომილება ვერ აღასტურებს: $R = 0,0006$. შეფასება უხეშია, რადგანაც

$$f'''(\xi) \text{ შეეცვალეთ } \frac{\Delta^3 f_0}{h^3} \text{-ით.}$$

¹ როდესაც $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა მოცემულია საინტერპოლაციო მრავალწევრით $f(x) = P_n(x)$, ყველგან მიახლოებითი ტოლობა იგულისხმება, $f(x) \approx P_n(x)$.

$t = -\frac{1}{2}$ სათვის (8) ფორმულა მოგვცემს $\left(\frac{1}{h} (\Delta f_0 - \Delta^2 f_0)\right)$:

$$(\lg x)'_{x=14^{\circ}30'} = 57,29578 (0,01880 - 0,00018) = 1,0668474.$$

მიღებული მნიშვნელობის ცდომილება შევაფასოთ წინა პარაგრაფის (17) ფორმულით:

$$R'_2(x) = \frac{1}{h} \frac{d}{dt} (t(t-1)(t-2)) h^3 \frac{\Delta^3 f_0}{3! h^3} = \frac{1}{h} \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!} \Delta^3 f_0;$$

$$R'_2(14^{\circ}15') = 57,29578 \cdot \frac{2t^2 - 6t + 2}{3!} \Big|_{t=-\frac{1}{4}} 0,00003 = 0,00165$$

ცხადია, $R'_2 = 0,002$.

ამრიგად, გვექნება

$$(\lg x)'_{x=14^{\circ}30'} = 1,067 (\pm 0,002).$$

2. ცენტრალურ სხვაობიანი ფორმულა ე. წ. სტირლინგის საინტერპოლაციო ფორმულა. ვთქვათ, გვაქვს ტოლად დაშორებული წერტილები $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$, სადაც ბიჯის სიგრძეა, $h = x_{i+1} - x_i$, $x = x_0 + th$, მაშინ სტირლინგის ფორმულა მიიღებს სახეს

$$f(x) = f_0 + \frac{t}{1!} \frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 f_{-1} + \frac{t(t^2-1)}{3!} \frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \\ + \frac{t^2(t^2-1)}{4!} \Delta^4 f_{-2} + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)}{5!} \frac{\Delta^5 f_{-2} + \Delta^5 f_{-3}}{2} + \\ + \frac{t^2(t^2-1)(t^2-2^2)}{6!} \Delta^6 f_{-3} + \dots + R_n, \quad (10)$$

სადაც R_n განისაზღვრება ტოლობით

$$R_n = t(t^2-1)(t^2-2^2)\dots(t^2-n^2) h^{2n+1} f(x, x_0, x_{-1}, x_1, \dots, x_{-n}, x_n). \quad (11)$$

(10) ფორმულიდან მიმდევრობითი გაწარმოებით მივიღებთ

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + t \Delta^2 f_{-1} + \frac{3t^2-1}{6} \frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \right. \\ + \frac{2t^3-t}{12} \Delta^4 f_{-2} + \frac{5t^5-15t^3+4}{120} \frac{\Delta^5 f_{-2} + \Delta^5 f_{-3}}{2} + \\ \left. + \frac{3t^5-10t^3+4t}{360} \Delta^6 f_{-3} + \dots \right]. \quad (12)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f_{-1} + t \frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \frac{6t^2-1}{12} \Delta^4 f_{-2} + \right. \\ + \frac{2t^3-3t}{12} \frac{\Delta^5 f_{-2} + \Delta^5 f_{-3}}{2} + \frac{15t^4-30t^2+4}{360} \Delta^6 f_{-3} + \dots \quad (13)$$

კერძოდ, თუ $t=0$, მივიღებთ

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} - \frac{1}{6} \frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \right. \\ + \frac{1}{30} \frac{\Delta^5 f_{-2} + \Delta^5 f_{-3}}{2} + \dots \quad (14)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 f_{-2} + \frac{1}{90} \Delta^6 f_{-3} + \dots \right] \quad (15)$$

თუ ნასარგებლები სხვაობის უდიდესი მაჩვენებელია $2n$, მაშინ ცდომილებანი შეფასდება ფორმულებით:

$$R'(x) = h^{2n} \frac{d}{dt} [t(t^2-1)\dots(t^2-n^2)] \frac{f^{(2n+1)}(\xi_1)}{(2n+1)!} + \\ + h^{2n+1} t(t^2-1)\dots(t^2-n^2) \frac{f^{(2n+2)}(\xi_2)}{(2n+2)!}. \quad (16)$$

$$R''(x) = h^{2n-1} \frac{d^2}{dt^2} [t(t^2-1)\dots(t^2-n^2)] \frac{f^{(2n+1)}(\xi_1)}{(2n+1)!} + \\ + 2 h^{2n} \frac{d}{dt} [t(t^2-1)\dots(t^2-n^2)] \frac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(2n+2)!} + \\ + 2 h^{2n+1} t(t^2-1)\dots(t^2-n^2) \frac{f^{(2n+3)}(\xi_3)}{(2n+3)!}.$$

ξ_i რაღაც მნიშვნელობანია $x, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{-n}$ -დან უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობათა შორის.

თუ ნასარგებლები სხვაობის უდიდესი მაჩვენებელია $2n+1$, მაშინ ეს ფორმულები იმით შეიცვლება, რომ $2n$ -ის მაგივრად $2n+1$ ჩაიწერება და დამატება მამრავლი $t-(n+1)$

მაგალითად, ვიპოვოთ $f'(1)$ და $f''(1)$ იმ ფუნქციისა, რომლის მნიშვნელობანი და სხვაობანი მოცემულია მე-2 ცხრილში.

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8
6	0,166667								
7	0,142857	-23810							
8	0,125000	-17857	5953						
9	0,111111	-13889	3968	-1985					
10	0,100000	-11111	2778	-1190	795				
11	0,090909	-09091	2020	-0758	432	-363			
12	0,083333	-07576	1515	-0505	253	-179	184		
13	0,076923	-06410	1166	-0349	156	-097	082	-102	
14	0,071429	-05494	0916	-0250	099	-067	030	-052	050

(12) ფორმულით მივიღებთ

$$f'(10) = \frac{1}{1} \left[\frac{-0,011111 - 0,009091}{2} - \frac{1}{6} \frac{-0,000758 - 0,000505}{2} + \frac{1}{30} \frac{-0,000179 - 0,000097}{2} \right] = -0,010101 + 0,000105 - 0,000005,$$

საიდანაც

$$f'(10) = -0,010001. \quad (18)$$

$$f''(10) = \frac{1}{12} \left[0,002020 - \frac{1}{12} 0,000253 + \frac{1}{90} 0,000082 \right] = 0,002020 - 0,000021 + 0,000001,$$

საიდანაც

$$f''(10) = 0,002000. \quad (19)$$

შევადგათ მიღებული მნიშვნელობანი. (16) ფორმულით მივიღებთ (ბოლო შესაყრები პირველ შესაყრებთან შედარებით საკმარისად მცირეა)

$$R'(10) = h^8 \frac{d}{dt} [t(t^2-1)(t^2-2^2)(t^2-3^2)]_{t=0} \frac{\Delta^7 f_0}{7! h^7}.$$

თუ მივიღებთ $\Delta^7 f_0 = -0,0001$ ($|\Delta^7 f|$ მცირდება, როგორც ცხრილში გვიჩვენებს) გვექნება

$$R'(10) = -\frac{0,0001}{140} \approx -0,000001.$$

ასე რომ, (18) გამოსახულებაში ზუსტია ყველა ათწილადი ნიშანი, გარდა ბოლო ათწილადი ნიშნისა. ასევე შევამოწმებთ, რომ (19) გამოსახულება ცდომილებას შეიცავს ბოლო ათწილად ნიშანში.

§ 4. რიცხვითი გაწარმოება ფუნქციის მნიშვნელობებით

ზოგჯერ რიცხვითი გაწარმოების ფორმულები საჭიროა გამოისახოს უშუალოდ ფუნქციის მნიშვნელობებით. ასეთი ფორმულების მისაღებად გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა

$$f(x) = t(t-1)\dots(t-n) \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{(i-i) \cdot i! (n-i)!} f(x_i) + \\ = h^{n+1} t(t-1)(t-n) f(x, x_0, \dots, x_n). \quad (1)$$

გაეწარმოთ ერთჯერ, მივიღებთ

$$f'(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i! (n-i)!} f(x_i) \frac{d}{dt} \left[\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} \right] + R'(x), \quad (2)$$

სადაც ცდომილება განისაზღვრება ტოლობით

$$R'(x) = h^n f(x, x_0, \dots, x_n) \frac{d}{dt} [t(t-1)\dots(t-n)] + \\ + h^{n+1} f(x, x, x_0, \dots, x_n) t(t-1)\dots(t-n).$$

თუ გვინდა წარმოებულის მნიშვნელობა $t=k$ წერტილში, $x_k = x_0 + kh$,(2) ფორმულაში უნდა ჩავსვათ $t=k$,

$$f'(x_k) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i! (n-i)!} f(x_i) \frac{d}{dt} \left[\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} \right]_{t=k}.$$

მეორე რიგის წარმოებულისათვის მივიღებთ

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i! (n-i)!} f(x_i) \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} \right]. \quad (3)$$

ცდომილებისათვის გვექნება

$$R''(x) = h^{n-1} f(x, x_0, \dots, x_n) \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} \right] + \\ + 2h^n f(x, x, x_0, \dots, x_n) \frac{d}{dt} \left[\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} \right] + \\ + 2h^{n+1} f(x, x, x, x_0, \dots, x_n) \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i}. \quad (4)$$

$f''(x_k)$ გამოთვლისათვის საკმარისია (3) ფორმულაში ჩავსვათ $t=k$. ასევე, სათანადო შეფასებისთვის საკმარისია (4) ფორმულაში ჩავსვათ $t=k$.

შევადგინოთ წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულები n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. თუ ავიღებთ $n=2$ და მიმდევრობით ჩავსვათ (2) ფორმულაში $t=0, 1, 2$ მივიღებთ

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f_0 + 4f_1 - f_2] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi),$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h} [-f_0 + f_2] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi),$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h} [f_0 - 4f_1 + 3f_2] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi).$$

ავიღოთ $n=3$, მივიღებთ

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h} [-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3] - \frac{h^3}{4} f^{IV}(\xi),$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h} [-2f_0 - 3f_1 + 2f_2 - f_3] + \frac{h^3}{12} f^{IV}(\xi),$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h} [f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3] - \frac{h^3}{12} f^{IV}(\xi),$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{6h} [-2f_0 + 9f_1 - 18f_2 + 11f_3] + \frac{h^3}{4} f^{IV}(\xi).$$

ცხადია, n -ის ზრდასთან ერთად იზრდება რიცხვითი გაწარმოების ფორმულების სიზუსტე.

მეორე რიგის წარმოებულისათვის, $n=2$, გვექნება

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f_0 - 2f_1 + f_2] - h f'''(\xi_1) + \frac{h^2}{6} f^{IV}(\xi_2),$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} [f_0 - 2f_1 + f_2] - \frac{h^2}{12} f^{IV}(\xi),$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2} [f_0 - 2f_1 + f_2] + h f'''(\xi_1) - \frac{h^2}{6} f^{IV}(\xi_2).$$

$n=3$ -თვის გვექნება

$$f''(x_0) = \frac{1}{6h^2} [12f_0 - 30f_1 + 24f_2 - 6f_3] + \frac{11}{12} h^2 f^{IV}(\xi_1) - \frac{h^3}{10} f^{IV}(\xi_2),$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{6h^2} [6f_0 - 12f_1 + 6f_2] - \frac{1}{12} h^2 f^{IV}(\xi_1) - \frac{h^3}{30} f^{IV}(\xi_2),$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{6h^2} [6f_1 - 12f_2 + 6f_3] - \frac{1}{12} h^2 f^{IV}(\xi_1) - \frac{h^3}{30} f^{IV}(\xi_2),$$

$$f''(x_3) = \frac{1}{6h^2} [-6f_0 + 24f_1 - 30f_2 + 12f_3] + \frac{11}{12} h^2 f^{IV}(\xi_1) - \frac{h^3}{10} f^{IV}(\xi_2).$$

ასევე შეგვიძლია შევადგინოთ წარმოებულის ფორმულები $n=4$ -თვის. წერტილები ასე დავალაგოთ $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$. მივიღებთ

$$f''(x_0) = \frac{1}{24h^2} [-2f_{-2} + 32f_{-1} - 60f_0 + 32f_1 - 2f_2] + \frac{h^4}{90} f^{VI}(\xi)$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{24h^2} [-2f_{-2} + 8f_{-1} + 12f_0 - 40f_1 + 22f_2] -$$

$$- \frac{1}{12} h^3 f^{IV}(\xi_1) + \frac{h^4}{60} f^{VI}(\xi_2),$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{24h^2} [22f_{-2} - 112f_{-1} + 228f_0 - 208f_1 + 70f_2] +$$

$$+ \frac{5}{6} h^3 f^{IV}(\xi_1) - \frac{h^4}{15} f^{VI}(\xi_2).$$

$f''(x_{-1})$ და $f''(x_{-2})$ -ის მისაღებად საკმარისია $f''(x_1)$ და $f''(x_2)$ -ში ყველა მნიშვნელობა შევცვალოთ მისი სიმეტრიულით, მაგალითად, f_2 -ის მაგივრად დავწეროთ f_{-2} , f_{-1} -ის მაგივრად f_1 და პირიქით.

ასევე შეგვიძლია მივიღოთ მაღალი რიგის რიცხვითი წარმოებულის ფორმულები.

შეგვიძლია მივიღოთ გაწარმოების ფორმულები საინტერპოლაციო წერტილთა ნებისმიერი განლაგებისათვის. ამისათვის, რასაკვირველია, უნდა მივმართოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულას, მაგრამ მოგვიხდება დიდი გამოთვლების ჩატარება. უმჯობესია გამოვიყენოთ ვ. წ. განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდი.

რიცხვითი გაწარმოების საძიებელი ფორმულა ასე ჩავწეროთ

$$f^{(k)}(x_j) = \sum_{i=0}^n c_i f_i + R(f).$$

შევარჩიოთ c_i კოეფიციენტები ისე, რომ $R(f)$ უდრიდეს ნულს, როდესაც $f(x)=1, x, \dots, x^n$. მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$c_0 + c_1 + \dots + c_n = 0,$$

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0,$$

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 + \dots + c_n x_n^2 = 0,$$

$$c_0 x_0^{k-1} + c_1 x_1^{k-1} + \dots + c_n x_n^{k-1} = 0, \quad (5)$$

$$c_0 x_0^k + c_1 x_1^k + \dots + c_n x_n^k = k!$$

$$c_0 x_0^{k+1} + c_1 x_1^{k+1} + \dots + c_n x_n^{k+1} = (k+1)! x_j$$

$$c_0 x_0^n + c_1 x_1^n + \dots + c_n x_n^n = n(n-1)\dots(n-k+1)x_j^{n-k},$$

რომლის დეტერმინანტი ვან დერ მონდის დეტერმინანტია (იხ. თავი VII, § 3),

$$w = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^k & x_1^k & \dots & x_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0, \quad i, j=0, 1, \dots, n,$$

(5) სისტემიდან განისაზღვრება $c_0, c_1, \dots, c_n$.

§ 5. გრაფიკული განმარტება

გრაფიკული გაწარმოების ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ავაგოთ $Y=f'(x)$ გრაფიკის სათანადო l მასშტაბით (ნახ. 1). $f'(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად გამოვიყენოთ ფუნქციის წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობა: $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული გეომეტრიულად იძლევა $y=f'(x)$ წირის (x, y) წერტილში მატარებელი მხები წრფის საკითხის კოეფიციენტს.

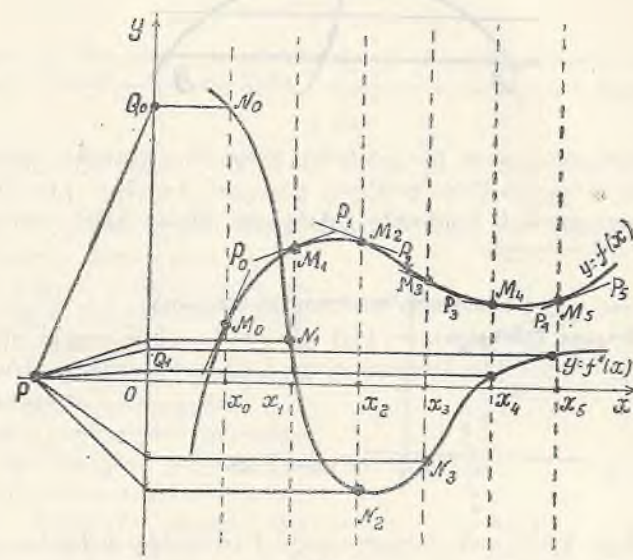
$y=f(x)$ წირზე ავიღოთ საკმარისად ურთიერთახლო მდებარე წერტილები $M_0, M_1, M_2, \dots$ ამ წერტილებზე გავატაროთ მხები M_0P_0, M_1P_1 და ა. შ. x_0 წერტილში აღმართულ ორდინატზე უნდა მოვზომოთ $y_0' = \operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0)$ -ის მნიშვნელობა. ამისათვის საკმარისია Ox ღერძის უარყოფით მიმართულებაზე ავიღოთ $P(-l, 0)$ წერტილი და ამ წერტილზე გავატაროთ M_0P_0 წრფის პარალელური Y ღერძის გადაკვეთამ-

დე. Oy ღერძზე მივიღებთ Q_0 წერტილს. ამ Q_0 წერტილის ორდინატი იქნება y_0' . მართლაც, ΔPOQ_0 -დან მივიღებთ

$$OQ_0 = OP \operatorname{tg} \alpha_0.$$

მაგრამ $OP=l, \operatorname{tg} \alpha_0=f'(x_0)$, ამიტომ გვექნება

$$OQ_0 = l f'(x_0).$$

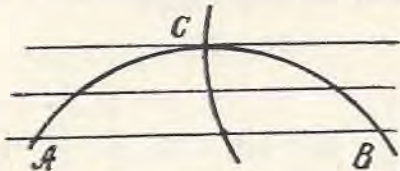


ნახ. 1

ამგვარად, OQ_0 გამოსახავს $l'(x_0)$ -ის მნიშვნელობას აღებული მასშტაბით. თუ Q_0 წერტილზე გავატარებთ Ox ღერძის პარალელურ წრფეს x_0 წერტილზე აღმართული ორდინატის გადაკვეთამდე, მივიღებთ N_0 წერტილს, რომლის კოორდინატებია (x_0, y_0') . ასევე მივიღებთ $N_1(x_1, y_1')$ წერტილს. P წერტილზე გავატარებთ M_1P_1 წრფის პარალელური Oy ღერძის გადაკვეთამდე. Oy ღერძზე მიღებულ Q_1 წერტილზე გავატაროთ Ox ღერძის პარალელური x_1 წერტილზე აღმართული ორდინატის გადაკვეთამდე, მივიღებთ $N_1(x_1, y_1')$ წერტილს და ა. შ.

შეიკეთოთ $N_0, N_1, N_2, \dots$ წერტილები წირით, სადაც მხედველობაში მივიღოთ $y=t(x)$ წირის სხვა წერტილებში, მივიღებთ $y=f'(x)$ წირს მოცემული l მასშტაბით. თუ $l=1$, მაშინ წირი მიიღება ნატურალური მასშტაბით.

საზოგადოდ, წირისადმი მხების გატარება ძნელია, რადგანაც მხების მცირე გადახრა იძლევა დიდ ცდომილებას, ამიტომ გავატაროთ წირის ქორდა სასურველი AB მიმართულებით (ნახ. 2). შემდეგ გავატაროთ ამ ქორდის პარალელური ქორდები ისე, რომ ქორდის სიგრძე ნულისაყენ



ნახ. 2

მისწრაფოდეს. ავიღოთ ქორდების შუა წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. იგი მოგვცემს წირს, რომელიც გადაკვეთს მოცემულ $f(x)$ წირს. წირის გადაკვეთის C წერტილზე გატარებულ მხებს ექნება აღებული ქორდის მიმართულება¹.

§ 6. ფუნქციის მიახლოებითი ინტეგრირება

1. ზოგადი შემთხვევა. თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ შუალედში უწყვეტია და ცნობილია მისი პირველყოფილი $F(x)$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1)$$

მაგრამ ბევრ შემთხვევაში პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქციის მონახვა ელემენტარული საშუალებებით შეუძლებელია ან საკმაოდ რთულია, რის გამოც (1) ფორმულის გამოყენება პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდება, ამას ისიც უნდა დავმატოვოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია პრაქტიკულად შეიძლება მოცემული იყოს ცხრილის საშუალებით, რის გამოც $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილის ცნება აზრს კარგავს. ამის გამო დიდი მნიშვნელობა აქვს განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის მიახლოებითი მეთოდებს, განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ინტეგრალის გამოთვლის რიცხვითი მეთოდები.

ერთგვარადი ინტეგრალის რიცხვით გამოთვლას ეწოდება მექანიკური კვადრატურა, ხოლო ორგვარადი ინტეგრალის გამოთვლას — მექანიკური კუბატურა. სათანადო ფორმულებს ეწოდება მექანიკური კვადრატურის ფორმულები ან კუბატურის ფორმულები.

¹ К. Рунге, Графические методы математических вычислений, М.-Л. 1933, гл. III, § 14.
984

შეიძლება განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x) dx$ შევცვალოთ ინტეგრალური ჯამით

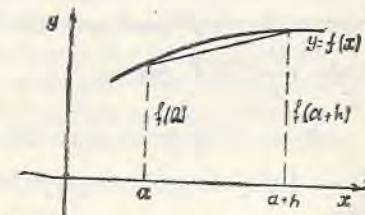
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i,$$

მაგრამ ეს ინტეგრალური ჯამი არ იძლევა იმ ხერხს, რომლის საშუალებითაც უზრუნველყოფილ იქნება ინტეგრალის სათანადო სიზუსტით გა-

მოთვლა. ამასთანავე S_n ნელა იკრებება $\int_a^b f(x) dx$ ინტეგრალისაკენ.

ასე რომ, განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა მისი განმარტების საფუძველზე მიუღებელია. ქვემოთ განვიხილავთ განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის რამდენიმე ხერხს.

2. კვადრატურის უმარტივესი ფორმულები. გამოვიყენოთ მექანიკური კვადრატურის უმარტივესი ფორმულები. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ზრდადი, მაშინ $[a, a+h]$ შუალედში ადგილი აქვს უტოლობას (ნახ. 3)



ნახ. 3

$$h f(a) < \int_a^{a+h} f(x) dx < h f(a+h).$$

ცხადია, შეგვიძლია ავიღოთ მიახლოებითი ტოლობები

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = h f(a), \quad \int_a^{a+h} f(x) dx = h f(a+h).$$

ამ ფორმულებს მარტკუთხედის ფორმულები ეწოდება.

თუ $f(x)$ ფუნქცია კლებადია, აღებული უტოლობა საწინააღმდეგო უტოლობით შეიცვლება.

განვსაზღვროთ მარტკუთხედის ფორმულების ცდომილება. ამისათვის ავიღოთ სასრული ნაზრდის ფორმულა

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(\xi_1), \quad a < \xi_1 < x.$$

ამ ფორმულიდან მივიღებთ

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = hf(a) + \int_a^{a+h} (x-a) f'(\xi_1) dx.$$

რადგანაც $x-a \geq 0$ $[a, a+h]$ შუალედში, შეგვიძლია გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა, გვექნება

$$\int_a^{a+h} (x-a) f'(\xi_1) dx = \frac{h^2}{2} f'(\xi).$$

ამის გამო მივიღებთ

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = hf(a) + \frac{h^2}{2} f'(\xi) \quad a < \xi < a+h.$$

ამგვარად, მართკუთხედის ფორმულით სარგებლობის შემთხვევაში ცდომილება $\frac{h^2}{2} f'(\xi)$ -ის ტოლია.

თუ $[a, b]$ შუალედს დავყოფთ n ტოლ ნაწილად $h = \frac{b-a}{n}$ და თვითნაწილისათვის გამოვიყენებთ მართკუთხედის ფორმულას, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f_i + \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i), \quad f_i = f(a+ih).$$

თუ გამოვიყენებთ ტოლობას

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) = f'(\xi), \quad a < \xi < b,$$

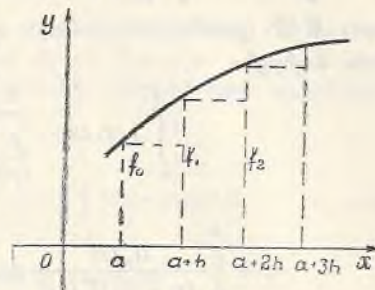
მაშინ გვექნება

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f_i + \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi).$$

ამ ფორმულის გამოყენების დროს ვიგულისხმებთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია

ცია ზრდადია ან კლებადი მთელ $[a, b]$ შუალედში (ნახ. 4). თუ $f(x)$ ფუნქცია ამ პირობას არ აკმაყოფილებს, მაგრამ $[a, b]$ შუალედში ფუნქციას აქვს სასრული რაოდენობის მაქსიმუმები და მინიმუმები, მაშინ

შუალედი დავყოფთ სასრული რაოდენობის ქვეშუალედებად, სადაც თვითნაწილ ქვეშუალედში ფუნქცია ზრდადია ან კლებადი იქნება. ამიტომ ყოველი $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელსაც აქვს უწყვეტი წარმოებული, შეგვიძლია გამოვიყენოთ მართკუთხედის ფორმულა. მაგრამ მართკუთხედის ფორმულა დიდ ცდომილებას იძლევა: $\frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi)$. ცდომილება



ნახ. 4

შემცირდება თუ n -ს გავზრდით. ეს კი გამოთვლების რაოდენობას ზრდის.

3. **კვადრატურა საინტერპოლაციო ფორმულებით.** მექანიკური კვადრატურის ჩვეულებრივი მეთოდია ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ შუალედში მისი საინტერპოლირებელი $\varphi(x)$ ფუნქციით შეცვლა. $\varphi(x)$ -ს უფრო მარტივი სახე აქვს, ვიდრე $f(x)$ ფუნქციას. მაგალითად, $\varphi(x)$ ფუნქციად ჩვეულებრივად მრავალწევრს ვიღებთ. შემდეგ დავუშვათ, რომ

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (2)$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია ანალიზურია, ვსვამთ საკითხს (2) ტოლობის ცდომილების შეფასების შესახებ.

ვთქვათ, ცნობილია $x_0, x_1, \dots, x_n$ წერტილებში $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი $f_i = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$. გამოვიყენოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Pi_n(x)}{(x-x_i) \Pi'_n(x_i)} f_i, \quad (3)$$

სადაც

$$\Pi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

შევცვალოთ $f(x)$ ფუნქცია $P_n(x)$ მრავალწევრით, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n \frac{\Pi_n(x)}{(x-x_i) \Pi'_n(x_i)} f_i dx + R(f) \quad (4)$$

სადაც $R(f)$ ცდომილება — ნაშთია. თუ (4) ფორმულაში უკუვაგდებთ ნაშთს, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f_i, \quad (5)$$

სადაც

$$A_i = \int_a^b \frac{\Pi_n(x)}{(x-x_i) \Pi'_n(x_i)} dx, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6)$$

თუ a და b წერტილები ინტერპოლირების წერტილებია, მაშინ (5) ფორმულას ეწოდება ჩაკეტილი ტიპის კვადრატურის ფორმულა, წინააღმდეგ შემთხვევაში ღია ტიპის კვადრატურის ფორმულა.

ადვილი შესამჩნევია, რომ A_i კოეფიციენტები დამოუკიდებელია $f(x)$ ფუნქციის სახეზე. ასე რომ, ეს კოეფიციენტები შეიძლება გამოვიტვალოთ n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ერთჯერ და სამუდამოდ. (4) ფორმულა ზუსტ მნიშვნელობას იძლევა, თუ $f(x)$ ფუნქცია n ხარისხის მრავალწევრია, $f(x) = P_n(x)$. ცხადია, $R_n(x^k) = 0$, $k=0, 1, \dots, n$. ამ თვისებებით ვისარგებლოთ A_i კოეფიციენტების გამოსათვლელად.

(5) ფორმულაში მიმდევრობით ჩავსვათ $f(x)=1, x, \dots, x^n$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_{i=0}^n A_i, \\ I_1 &= \sum_{i=0}^n A_i x_i, \\ I_2 &= \sum_{i=0}^n A_i x_i^2, \\ &\vdots \\ I_n &= \sum_{i=0}^n A_i x_i^n, \end{aligned} \quad (7)$$

სადაც

$$I_k = \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (8)$$

(7) განტოლებათა სისტემა წრფივი ალგებრული სისტემაა $A_0, A_1, \dots, A_n$ კოეფიციენტთა მიმართ. ამ სისტემის ამოხსნა შეიძლება $A_0, A_1, \dots, A_n$ -ის მიმართ, რადგანაც სისტემის დეტერმინანტი ვანდერმონდის დეტერმინანტია,

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0.$$

მაგალითად, $n=1$, $a=0$, $b=h$, $x_0=0$, $x_1=n$, მაშინ

$$I_0 = \int_0^h x^0 dx = h, \quad I_1 = \int_0^h x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{h^2}{2}.$$

ამის გამო (7) ფორმულები მოგვცემს

$$A_0 + A_1 = h,$$

$$A_0 \cdot 0 + A_1 h = \frac{h^2}{2},$$

საიდანაც

$$A_0 = \frac{h}{2}, \quad A_1 = \frac{h}{2}.$$

გვექნება

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1), \quad (9)$$

სადაც

$$f(0) = f_0, \quad f(h) = f_1.$$

ამ ფორმულას ტრაპეციის ფორმულა ეწოდება. (9) ფორმულა კვადრატურის ჩაკეტილი ტიპის ფორმულაა.

თუ $n=2$, $x_0=0$, $x_1=\frac{h}{2}$, $x_2=h$, მაშინ (7) ფორმულები მოგვცემს:

$$I_0 = \int_0^h x^0 dx = h, \quad I_1 = \int_0^h x dx = \frac{h^2}{2}, \quad I_2 = \int_0^h x^2 dx = \frac{h^3}{3}.$$

ამის გამო გვექნება:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= h, \\ A_0 \cdot 0 + A_1 \frac{h}{2} + A_2 h &= \frac{h^2}{2}, \\ A_0 \cdot 0^2 + A_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + A_2 h^2 &= \frac{h^3}{3}, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$A_0 = \frac{1}{6} h, \quad A_1 = \frac{4}{6} h, \quad A_2 = \frac{1}{6} h.$$

ამის გამო (5) კვადრატურის ფორმულა მოგვცემს

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{6} [f_0 + 4f_1 + f_2]. \quad (10)$$

ამ ფორმულას სიმპსონის ფორმულა ეწოდება. ეს ფორმულაც კვადრატურის ჩაკეტილი ტიპის ფორმულაა.

გამოვიყენოთ კვადრატურის ღია ტიპის ფორმულები.

მაგალითად, გამოვიყენოთ კვადრატურის ფორმულა, რომელსაც ექნება შემდეგი სახე

$$\int_0^h f(x) dx = A_0 f_{1/4} + A_1 f_{3/4}, \quad (11)$$

საიდანაც

$$f_{1/4} = f\left(\frac{h}{4}\right), \quad f_{3/4} = f\left(\frac{3h}{4}\right).$$

ამისათვის გამოვთვალოთ

$$I_0 = \int_0^h x^0 dx = h, \quad I_1 = \int_0^h x dx = \frac{h^2}{2}.$$

(7) სისტემა მოგვცემს

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= h, \\ A_0 \frac{1}{4} h + A_1 \frac{3}{4} h &= \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

საიდანაც

$$A_0 = \frac{h}{2}, \quad A_1 = \frac{h}{2}.$$

ამის გამო მიახლოებითი ინტეგრების ფორმულა იქნება

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{2} [f_{1/4} + f_{3/4}]. \quad (12)$$

ეს ფორმულა ღია ტიპის ფორმულაა.

4. ტრაპეციისა და სიმპსონის ფორმულების ცდომილებათა სიდიდეები. გამოვარკვეოთ მიღებული ფორმულების ცდომილებათა სიდიდეები.

(9) ტრაპეციის ფორმულაში მონაწილეობს $[0, h]$ შუალედის წერტილები $x_0=0$, $x_1=h$. ამ შემთხვევაში ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის ნაშთით,

$$(x-x_0)(x-x_1)f(x, x_0, x_1) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\xi), \quad \xi \in [0, h],$$

მივიღებთ

$$R(f) = \int_0^h \frac{x(x-h)}{2!} f''(\xi) dx,$$

საიდანაც

$$|R(f)| \leq \int_0^h \left| \frac{x(x-h)}{2!} f''(\xi) \right| dx \leq \int_0^h \frac{M}{2} x(h-x) dx, \quad M = \max_{0 \leq x \leq h} |f''(x)|.$$

ინტეგრებით მივიღებთ

$$|R(f)| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{x^2 h}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^h = \frac{Mh^3}{12}. \quad (13)$$

ავიღოთ $[a, b]$ შუალედი. დავანაწილოთ ქვესეგმენტებად წერტილებით $x_i = a + ih$, $i=0, 1, \dots, n$, სადაც $h = \frac{b-a}{n}$, n რაიმე ნატურალური

რიცხვია. თვითეული ქვეშუალედისათვის გამოვიყენოთ (9) ტრაპეციის ფორმულა, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n), \quad (14)$$

სადაც

$$f_0 = f(a), \quad f_1 = f(a+h), \dots, \quad f_n = f(a+nh) = f(b),$$

ხოლო ცდომილება განისაზღვრება დამოკიდებულებით

$$|R(f)| \leq n \frac{(b-a)^3}{12n^3} M = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M. \quad (15)$$

სიმპსონის ფორმულა ავიღოთ $[0, 2h]$ შუალედისათვის,

$$\int_0^{2h} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2). \quad (16)$$

ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის ნაშთით

$$R(f) = \int_0^{2h} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6h^3} f(x, x_0, x_1, x_2) dx. \quad (17)$$

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის აქვს $[a, b]$ შუალედში მეოთხე რიგის უწყვეტი წარმოებული, მაშინ (17) ფორმულიდან ნაწილობითი ინტეგრებით გვექნება:

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_0^{2h} (x^3 - 3hx^2 + 2h^2x) f(x, 0, h, 2h) dx = \\ &= \int_0^{2h} f(x, 0, h, 2h) \times d\left(\frac{x^4}{4} - x^3h + x^2h^2\right) = f(x, 0, h, 2h) \times \\ &\times \left(\frac{x^4}{4} - x^3h + x^2h^2\right) \Big|_0^{2h} - \int_0^{2h} \left(\frac{x^4}{4} - x^3h + x^2h^2\right) \frac{d}{dx} f(x, 0, h, 2h) dx. \quad (18) \end{aligned}$$

ამ გამოსახულებაში პირველი შესაკრები ნულის ტოლია, ხოლო ინტეგრალს ქვეშ გვაქვს

$$\frac{d}{dx} f(x, 0, h, 2h) = f(x, x, 0, h, 2h) = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}, \quad \xi \in [0, 2h],$$

რომლის საშუალებითაც (18) მოგვეცემს:

$$R(f) = - \int_0^{2h} \left(\frac{x^4}{4} - x^3h + x^2h^2\right) \frac{f^{IV}(\xi)}{4!} dx.$$

რადგანაც ინტეგრალ ქვეშ მრავალწევრი ნიშანს არ იცვლის,

$$\frac{x^4}{4} - x^3h + x^2h^2 = \frac{x^2}{4} (x^2 - 4xh + 4h^2) = \frac{x^2}{4} (x - 2h)^2,$$

შეგვიძლია გამოვიყენოთ ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა

$$\begin{aligned} R(f) &= - \frac{f^{IV}(\xi_1)}{4!} \int_0^{2h} \left(\frac{x^4}{4} - x^3h + x^2h^2\right) dx = \\ &= - \left(\frac{x^5}{4 \cdot 5} - \frac{x^4h}{4} + \frac{x^3h^2}{3}\right) \Big|_0^{2h} \frac{f^{IV}(\xi_1)}{4!} = \\ &= - \frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi_1), \quad \xi_1 \in [0, 2h]. \end{aligned}$$

ამრიგად, $[0, 2h]$ შუალედში სიმპსონის ფორმულის ნაშთია

$$R(f) = - \frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi_1), \quad \xi_1 \in [0, 2h]. \quad (19)$$

თუ სიმპსონის ფორმულას გამოვიყენებთ მთელ $[a, b]$ შუალედისათვის,

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_i = a + ih; \quad i = 0, 1, \dots, 2n; \quad f(a + ih) = f_i,$$

გვექნება

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + f_{2n}) + R(f), \quad (20)$$

სადაც

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M, \quad M = \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|. \quad (21)$$

§ 7. ნიუტონ — კოტანის ფორმულები

ავიღოთ მიახლოებით ინტეგრების ფორმულა

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f_i,$$

სადაც

$$A_i = \int_a^b \frac{\Pi(x)}{(x-x_i)\Pi'(x_i)} dx, \quad i=0, 1, \dots, n.$$

დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n ტოლ ნაწილად, $a, a+h, \dots, a+nh$, და წერტილები ასე გადავწოთ

$$x=x_0+th, \quad x_0=a, \quad x_i=a+ih, \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad x_n=b,$$

მაშინ A_i კოეფიციენტები ასე გამოითვლება:

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dx.$$

მოვახდინოთ ცვლადთა შეცვლა: $x = x_0 + th, \quad dx = hdt$, მაშინ A_i კოეფიციენტი ასე ჩაიწერება:

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dt, \quad i=0, 1, \dots, n,$$

ანუ

$$A_i = \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dt, \quad i=0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dt, \quad (2)$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე მიახლოებით ინტეგრირების ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i f_i, \quad (3)$$

(2) სიდიდეებს ეწოდება ნიუტონ — კოტესის ჩაკეტილი ტიპის კოეფიციენტები, ხოლო (3) ფორმულას ნიუტონ — კოტესის ჩაკეტილი ტიპის კვადრატურის ფორმულა.

თუ (3) ფორმულაში ჩავსვათ $a=0, b=1, f(x)=1$, მივიღებთ

$$\sum_{i=0}^n H_i = 1. \quad (4)$$

აღვილი შესამოწმებელია (2) ფორმულიდან, რომ

$$H_{n-i} = H_i. \quad (5)$$

მართლაც,

$$H_{n-i} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-n+i} dt.$$

შევცვალოთ ცვლადი $t=n-z$, მაშინ

$$dt = -dz, \quad t-1 = n-1-z, \dots, t-n = -z,$$

მივიღებთ

$$H_{n-i} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \int_n^0 \frac{(n-z)(n-1-z)\dots(-z)(-dz)}{i-z},$$

ანუ

$$H_{n-i} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n+i}}{(n-i)!i!} \int_0^n \frac{z(z-1)\dots(z-n)}{z-i} dz = H_i,$$

გამოვთვალოთ H_i -ს მნიშვნელობანი i -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

$$n=1; H_0 = - \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t-0} dt = - \left(\frac{t^2}{2} - t \right)_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$H_1 = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t-1} dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(3) ფორმულა მოგვცემს

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1),$$

ეს კი, როგორც ვიცით, ტრაპეციის ფორმულაა.

$$n=2; H_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t} dt = \frac{1}{2} \left(t^3 - \frac{3t^2}{2} + 2t \right)_0^2 = \frac{1}{6},$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \int_0^2 t(t-2) dt = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 t(t-1) dt = \frac{1}{6},$$

ამის გამო (3) ფორმულა მოგვცემს

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{6} [f_0 + 4f_1 + f_2].$$

ეს კი, როგორც ვიცით, სიმპსონის ფორმულაა.

ასევე შეგვიძლია n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის შევადგინოთ ნიუტონ-კოტესის სათანადო ფორმულები.

გამოთვლილი კოეფიციენტების შესამოწმებლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ (4) თვისება.

მე-3 ცხრილში მოცემულია ჩაკეტილი ტიპის კვადრატურის ნიუტონ-კოტესის კოეფიციენტთა H_i , $i=1, \dots, 10$, მნიშვნელობანი^{1,2}. ცხრილის შემოკლებისათვის კოეფიციენტთა (5) სიმეტრიულობის გამო ამოწერილია კოეფიციენტთა პირველი ნახევარი, მაგრამ ამოწერილია კოეფიციენტთა მხოლოდ მრიცხველები. მნიშვნელები მოთავსებულია ბოლო სვეტში.

ცხრილი 3

კვადრატურის ჩაკეტილი ტიპის ფორმულების კოეფიციენტები

$i \backslash n$	0	1	2	3	4	5	მნიშვნელო
1	1						2
2	1	4					6
3	1	3					8
4	7	32	12				90
5	19	75	50				288
6	41	216	27	272			840
7	751	3577	1323	2989			17280
8	989	5888	-928	10496	-4540		28350
9	2857	15741	1080	19344	5778		89600
10	16067	106300	-48525	272400	-260550	427368	598752

¹ III, E. Микеладзе, Численные методы математического анализа, М. 1953, стр. 311, 317.

² И. С. Вережин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, М. 1966, стр. 176

ლაგრანჟის მრავალწევრის საინტერპოლაციო წერტილებად ავიღოთ $[a, b]$ შუალედის $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ წერტილები, $a_0 = x_0$, $x_1 = x_0 + h, \dots, x_{n-1} = x_0 + (n-1)h$, $x_n = x_0 + nh = b$. მაშინ მივიღებთ

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Pi(x)}{(x-x_i)\Pi'(x)} f_i + \Pi(x) f(x, x_1, \dots, x_{n-1}),$$

სადაც

$$\Pi(x) = (x-x_1) \dots (x-x_{n-1})$$

$$\Pi'(x_i) = (x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_{n-1}).$$

რიცხვითი ინტეგრებისათვის გვექნება ფორმულა

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} A_i f_i, \quad (6)$$

სადაც

$$A_i = \int_a^b \frac{\Pi(x)}{(x-x_i)\Pi'(x_i)} dx. \quad (7)$$

(6) ფორმულა ღია ტიპის კვადრატურის ფორმულაა. ნაცვლად ამ ფორმულისა, შეგვიძლია ავიღოთ ზოგადი ფორმულა

$$\int_{a+\alpha h}^{b-\beta h} f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f_i, \quad (8)$$

სადაც $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$,

$$A_i = \int_{a+\alpha h}^{b-\beta h} \frac{\Pi(x)}{(x-x_i)\Pi'(x_i)} dx.$$

თუ $\alpha = \beta = 1$, მაშინ მივიღებთ ჩაკეტილი ტიპის კვადრატურის ფორმულას, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება ღია ტიპის კვადრატურის ფორმულა.

მაგალითად, მართკუთხედის ფორმულები

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = hf_0, \quad \int_a^{a+h} f(x) dx = hf_1$$

ღია ტიპის კვადრატურის ფორმულებია.

(8) ფორმულიდან შეგვიძლია სხვადასხვა ფორმულა მივიღოთ. განვიხილოთ ლია ტიპის კვადრატურის (6) ფორმულა. დავუბრუნდეთ აღნიშვნას

$$x_i = x_0 + ih, \quad x = x_0 + th,$$

მაშინ

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= h^{n-1} (t-1)(t-2)\dots(t-n+1), \\ \Pi'(x_i) &= (i-1)(i-2)\dots 1(-1)(-2)\dots(-n+1+i)h^{n-1} = \\ &= (i-1)!(n-1-i)!(-1)^{n-1-i}h^{n-1}. \end{aligned}$$

ამის გამო (7) მოგვცემს

$$A_i = \frac{(-1)^{n-1-i}}{(i-1)!(n-1-i)!} \int_{x_0}^{x_n} \frac{(t-1)\dots(t-n+1)}{t-i} dx.$$

თუ ამ ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $x = x_0 + th$, მაშინ მივიღებთ

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-1-i}}{(i-1)!(n-1-i)!} \int_0^n \frac{(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)}{t-i} dt,$$

ანუ

$$A_i = (b-a) \bar{H}_i,$$

სადაც

$$\bar{H}_i = \frac{(-1)^{n-1-i}}{n(i-1)!(n-1-i)!} \int_0^n \frac{(t-1)\dots(t-n+1)}{t-i} dt, \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$\bar{H}_i$ სიდიდეებს ნიუტონ-კოტესის ლია ტიპის ფორმულების კოეფიციენტები ეწოდება.

გამოვიანგარიშოთ $\bar{H}_i$ კოეფიციენტთა მნიშვნელობანი n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

$$n = 2; \quad i = 1.$$

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{2} \int_0^2 dt = 1.$$

ამის გამო გვექნება

$$\int_0^{2h} f(x) dx = 2h f(h) \quad (10)$$

ამ ფორმულას ტრაპეციის ლია ტიპის ფორმულა ეწოდება.

$$n = 3; \quad i = 1, 2.$$

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{3} \frac{(-1)^{3-1-1}}{(1-1)!(3-1-1)!} \int_0^3 \frac{(t-1)(t-2)}{t-1} dt = \frac{1}{2},$$

$$\bar{H}_2 = \frac{1}{3} \frac{(-1)^{3-1-2}}{(2-1)!(3-2-1)!} \int_0^3 \frac{(t-1)(t-2)}{t-2} dt = \frac{1}{2}.$$

ამის გამო გვექნება

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \frac{3h}{2} [f(h) + f(2h)], \quad (11)$$

$$n = 4; \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{4} \frac{(-1)^{4-1-1}}{(1-1)!(4-1-1)!} \int_0^4 (t-2)(t-3) dt = \frac{2}{3}.$$

$$\bar{H}_2 = \frac{1}{4} \frac{(-1)^{4-1-2}}{(2-1)!(4-1-2)!} \int_0^4 (t-1)(t-3) dt = -\frac{1}{3}, \quad \bar{H}_3 = \bar{H}_1.$$

ინტეგრების ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\int_0^{4h} f(x) dx = \frac{4h}{3} [2f(h) - f(2h) + 2f(3h)]. \quad (12)$$

ეს ფორმულა მილნის სახელს ატარებს.

$\bar{H}_i$ კოეფიციენტებს იგივე თვისებები აქვს, რაც H_i კოეფიციენტებს. მართლაც, თუ (56) ფორმულაში ჩავსვათ $f(x) \equiv 1$, მივიღებთ

$$\int_a^b dx = \sum_{i=1}^{n-1} A_i,$$

საიდანაც

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i}{b-a} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \bar{H}_i = 1. \quad (13)$$

როგორც H_i -თვის შევამოწმეთ, (9) ფორმულიდან აღვიღალ შემოწმდება:

$$\bar{H}_{n-i} = \bar{H}_i. \quad (14)$$

კვადრატურის ღია ტიპის კოეფიციენტთა მნიშვნელობანი მოცემულია მე-4 ცხრილში. მხედველობაშია მიღებული კოეფიციენტთა სიმეტრიულობა (14) ფორმულის საფუძველზე^{1,2}.

კვადრატურის ღია ტიპის ფორმულების კოეფიციენტები $\bar{H}_i$

ცხრილი 4

$i \backslash n$	1	2	3	4	5	მნიშვნელო
2	1					1
3	1					2
4	2	-1				3
5	11	1				24
6	11	-14	26			20
7	611	-453	562			1440
8	460	-954	2196	-2459		945
9	1787	-2803	4967	-1711		4480
10	4045	-11690	33340	-55070	67822	9072
11	2752447	-6603199	-15673880	-17085616	8891258	7257600

როგორც მე-3 და მე-4 ცხრილები გვიჩვენებს n -ის ზრდასთან ერთად $|H_i|$ კოეფიციენტები სწრაფად იზრდება, რ. თ. კუზმინმა მკაცრად დაამტკიცა, რომ n -ის ზრდასთან ერთად $|H_i|$ კოეფიციენტები საკ-

მარისად იზრდება. მაგრამ (4) თვისების გამო $\left(\sum_{i=0}^n H_i = 1\right) H_i$ კოე-

ფიციენტები სხვადასხვა ნიშნის იქნება. ასე რომ, საკმე გვექნება სხვადასხვა ნიშნიან დიდ რიცხვებთან. ამასთანავე n -ის ზრდასთან ერთად იზრ-

¹ Ш. Е. Микеладзе, Численные методы матем. анализа, М. 1953; 324-325.

² И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, М. 1966; стр. 176.

დება $\sum_{i=0}^n f_i A_i$ ჯამის ცდომილება. ამიტომ ნიუტონ — კოტესის ფორ-

მულით სარგებლობა ორდინატთა დიდი რიცხვისათვის არაა მიზანშე-

ჯ 8. მამანიჭური კვადრატურის ფორმულების ცდომილებათა შეფასება

შევაფასოთ ნიუტონ — კოტესის ფორმულების ნაშთითი წევრი. ნაშთითი წევრი ავიღოთ ზოგადად

$$R(f) = \int_{a+ah}^{b-ah} (x-x_1) \dots (x-x_{n-1}) f(x, x_1, \dots, x_{n-1}) dx, \quad (1)$$

სადაც

$$a = x_0, x_1 = x_0 + h, \dots, x_{n-1} = x_0 + (n-1)h, b = x_n = x_0 + nh.$$

თუ (1)-ში მოვახდენთ ჩასმას $x = x_0 + th$. მივიღებთ

$$R(f) = h \int_a^{n-a} (t-1)(t-2) \dots (t-n+1) f(x, x_1, \dots, x_{n-1}) dt. \quad (2)$$

თუ $\alpha=1$ მივიღებთ ჩაკეტილ კვადრატურის ფორმულის ნაშთს, თუ $\alpha=0$ მივიღებთ ღია ტიპის კვადრატურის ფორმულის ნაშთს.

ჩვენი მიზანია შევაფასოთ $R(f)$.

ამისათვის ამოვწეროთ ინტეგრალქვეშა ორწევრების ნამრავლი

$$\Pi(t) = (t-1)(t-2) \dots (t-n+1).$$

1. ვთქვათ, n ლუწი რიცხვია, $n=2m$ ე. თ. აბსცისათა რიცხვი კენტია, $x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}$,

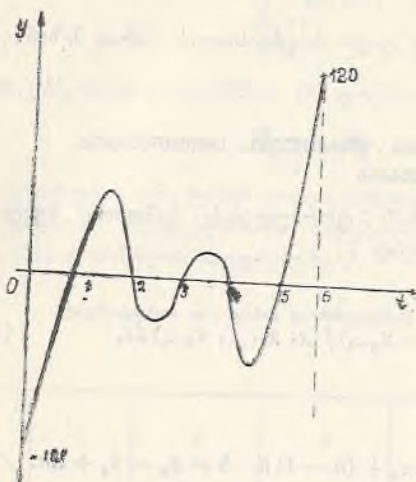
$$\Pi_{2m-1}(t) = (t-1)(t-2) \dots (t-2m+1).$$

სიმარტივისათვის ავიღოთ

$$\Pi_5(t) = (t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5),$$

¹ И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, М. 1966; стр. 176.

ამ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია მე-5 ნახაზზე.
 $y = \Pi_5(t)$ წირის სიმეტრიის წერტილია $t=3$.



ნახ. 5

ზოგადად $\varphi_{2m-1}(i, x)$ ფუნქციას აქვს თვისება:

$$|\varphi_{2m-1}(i, i+1)| > |\varphi_{2m-1}(i+1, i+2)|,$$

როცა i იზრდება 0-დან $m-2$ -მდე.
 მართლაც,

$$\varphi_{2m-1}(i+1, i+2) = \int_{i+1}^{i+2} \Pi_{2m-1}(t) dt.$$

მოვახდინოთ ცვლადთა შეცვლა $t = z+1$, მაშინ

$$\varphi_{2m-1}(i+1, i+2) = \int_i^{i+1} z(z-1)\dots(z-2m+2) dz = \int_i^{i+1} \frac{t \Pi_{2m-1}(t)}{t-2m+1} dt$$

რადგანაც $\Pi_{2m-1}(t)$ ფუნქცია ნიშანს არ იცვლის $[i, i+1]$ შუალედში, მაშინ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$\varphi_{2m-1}(i+1, i+2) = \frac{\xi}{\xi-2m+1} \int_i^{i+1} \Pi_{2m-1}(t) dt = \frac{\xi}{\xi-2m+1} \varphi_{2m-1}(i, i+1),$$

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$\varphi_{2m-1}(i, x) = \int_{t_i}^x \Pi_{2m-1}(t) dt.$$

ნახაზზე აღებული წირისათვის გვექნება

$$\varphi_5(i, x) = \int_{t_i}^x \Pi_5(t) dt,$$

$$i=0, 1, \dots, 5; 0 \leq x \leq 6.$$

ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობის საფუძველზე ადვილი შესაძრევია, რომ

$$|\varphi_5(0, 1)| > |\varphi_5(1, 2)| > |\varphi_5(2, 3)|.$$

სადაც $i < \xi < i+1$. მაგრამ

$$\left| \frac{\xi}{\xi-2m+1} \right| < \frac{m}{|m-1-2m+1|} = 1,$$

ამიტომ

$$|\varphi_{2m-1}(i+1, i+2)| < |\varphi_{2m-1}(i, i+1)|.$$

ასე, რომ გვექნება კლებადი მიმდევრობა

$$|\varphi_{2m-1}(0, 1)| > |\varphi_{2m-1}(1, 2)| > \dots > |\varphi_{2m-1}(m-1, m)|.$$

რადგანაც $\Pi_{2m+1}(t)$ სიმეტრიულია $t=m$ -ის მიმართ, ამიტომ

$$\varphi_{2m-1}(0, 1) = -\varphi_{2m-1}(2m-1, 2m),$$

$$\varphi_{2m-1}(1, 2) = -\varphi_{2m-1}(2m-2, 2m-1)$$

და ა. შ. ამ თვისების გამო გვექნება

$$|\varphi_{2m-1}(m, m+1)| < |\varphi_{2m-1}(m+1, m+2)| < \dots < |\varphi_{2m-1}(2m-1, 2m)|.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $]0, 2m[$ ინტერვალში $\varphi_{2m-1}(0, x)$ არსად არ უდრის ნულს,

$$\varphi_{2m-1}(0, x) \neq 0, x \in]0, 2m[.$$

ხოლო

$$\varphi_{2m-1}(0, 0) = 0, \varphi_{2m-1}(0, 2m) = 0.$$

ე. ი. $\varphi_{2m-1}(0, x)$ მთელ $[0, 2m]$ შუალედში ნიშანს არ იცვლის. ასევე ნიშანს არ იცვლის $\varphi_{2m-1}(1, x)$ მთელ $[1, 2m-1]$ შუალედში. ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\varphi_{2m-1}(\alpha, x) \neq 0, x \in]\alpha, 2m-\alpha[; \quad (3)$$

$$\varphi_{2m-1}(\alpha, \alpha) = 0, \varphi_{2m-1}(\alpha, 2m-\alpha) = 0. \quad (4)$$

ავიღოთ ზოგადი კვადრატურის ფორმულის ნაშთი

$$\begin{aligned} R_{2m-1} &= h^{2m} \int_{\alpha}^{2m-\alpha} (t-1)(t-2)\dots(t-2m+1) f(x, x_1, \dots, x_{2m-1}) dt = \\ &= h^{2m} \int_{\alpha}^{2m-\alpha} f(x, x_1, \dots, x_{2m-1}) d\varphi_{2m-1}(\alpha, t). \end{aligned}$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრება, მივიღებთ

$$R_{2m-1} = h^{2m} \varphi_{2m-1}(\alpha, t) f(x, x_1, \dots, x_{2m-1}) \Big|_{\alpha}^{2m-\alpha} - h^{2m} \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \varphi_{2m-1}(\alpha, t) \frac{d}{dt} f(x, x_1, \dots, x_{2m-1}).$$

გამოვიყენოთ (4) ტოლობები და შემდეგი ტოლობა

$$\frac{d}{dt} f(x, x_1, \dots, x_{2m-1}) = \frac{d}{dx} f(x, x_1, \dots, x_{2m-1}) \frac{dx}{dt} = hf(x, x, x_1, \dots, x_{2m-1}),$$

გვექნება

$$R_{2m-1} = -h^{2m+1} \int_{\alpha}^{2m+\alpha} \varphi_{2m-1}(\alpha, t) f(x, x, x_1, \dots, x_{2m-1}) dt.$$

მაგრამ $\varphi_{2m-1}(\alpha, t)$ ნიშანს არ იცვლის (3) პირობის თანახმად. გამოვიყენოთ ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა, გვექნება

$$R_{2m-1} = -h^{2m+1} f(\xi, \xi, x_1, \dots, x_{2m-1}) \int_{\alpha}^{2m+\alpha} \varphi_{2m-1}(\alpha, t) dt.$$

თუ ვისარგებლებთ დამოკიდებულებით

$$f(\xi, \xi, x_1, \dots, x_{2m-1}) = \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}, \quad \xi \in]a, b[,$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$R_{2m-1} = -\frac{h^{2m+1}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi) \int_{\alpha}^{2m+\alpha} \varphi_{2m-1}(\alpha, t) dt, \quad (5)$$

სადაც

$$\varphi_{2m-1}(\alpha, t) = \int_{\alpha}^t (t-1)(t-2)\dots(t-2m+1) dt.$$

მივიღეთ კენტაბსციისიანი კვადრატურის ფორმულის ნაშთითი წევრი,

თუ $\alpha=0$ მივიღებთ ღია ტიპის კვადრატურის ფორმულის ნაშთს

$$R_{2m-1} = -\frac{h^{2m+1}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi) \int_0^{2m} \varphi_{2m-1}(0, t) dt \quad (6)$$

შევალითად, თუ $m=1$, მაშინ გვექნება ტრაპეციის ღია ტიპის ფორმულის ნაშთი

$$R_1 = -\frac{h^3}{2!} f''(\xi) \int_0^2 \varphi_1(0, t) dt,$$

სადაც

$$\varphi_1(0, t) = \int_0^t (t-1) dt = \frac{t^2}{2} - t.$$

სათანადო გამოთვლა მოგვცემს

$$R_1 = -\frac{h^3}{2!} f''(\xi) \int_0^2 \left(\frac{t^2}{2} - t \right) dt = \frac{h^3}{3} f''(\xi),$$

სადაც ξ რალა მნიშვნელობაა, $0 < \xi < 2$.

ამგვარად, ღია ტიპის ტრაპეციის ფორმულას შეფასებით აქვს სახე:

$$\int_0^{2n} f(x) dx = 2h f(n) + \frac{h^3}{3} f''(\xi) \quad (7)$$

თუ (6) ფორმულაში ჩავსვათ $m=2$, მივიღებთ (მილნის ფორმულის ნაშთითი წევრი)

$$R_3 = -\frac{h^5}{4} f^{(4)}(\xi) \int_0^4 \varphi_3(0, t) dt,$$

სადაც

$$\varphi_3(0, t) = \int_0^t (t-1)(t-2)(t-3) dt = \frac{t^4}{4} - 2t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 6t.$$

გამოთვალათ

$$\int_0^4 \varphi_3(0, t) dt = \left[\frac{t^5}{5 \cdot 4} - \frac{2t^4}{4} + \frac{11t^3}{2 \cdot 3} - \frac{6t^2}{2} \right]_0^4 = -\frac{112}{15}.$$

შევიტანოთ R_3 -ის მნიშვნელობაში, გვექნება

$$R_3 = \frac{14}{45} h^5 f^{(IV)}(\xi).$$

ამგვარად, მილნის ფორმულას ნაშთით ექნება სახე

$$\int_0^{4h} f(x) dx = \frac{4h}{3} [2f(h) - f(2h) + 2f(2h)] + \frac{14}{45} h^5 f^{(IV)}(\xi).$$

(5) ფორმულიდან, თუ $\alpha=1$, მივიღებთ ჩაკეტილი ტიპის კვადრატურის ფორმულის ნაშთს

$$R_{2m-1} = -\frac{h^{2m+1}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi) \int_1^{2m-1} \varphi_{2m-1}(1, t) dt, \quad (8)$$

სადაც

$$\varphi_{2m-1}(1, t) = \int_1^t (t-1)(t-2) \dots (t-2m+1) dt.$$

დავუბრუნდეთ (3, § 6) ფორმულას, სადაც ინტეგრირების წერტილებია $x_0, x_1, \dots, x_n$; n ლუწია, $n=2m$. ამის შედეგად (8) ფორმულა მოგვცემს

$$R_{2m+2} = -\frac{h^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \int_0^{2m} \varphi_{2m+1}(0, t) dt, \quad (9)$$

სადაც

$$\varphi_{2m+1}(0, t) = \int_0^t t(t-1) \dots (t-2m) dt. \quad (10)$$

მაგალითად, თუ $m=1$, მივიღებთ სიმპსონის ფორმულის ნაშთს, სადა თანადო გამოთვლები მოგვცემს:

$$\varphi_3(0, t) = \int_0^t t(t-1)(t-2) dt = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2;$$

$$\int_0^2 \left(\frac{t^4}{4} - t^3 + t^2 \right) dt = \frac{4}{15},$$

ამ მნიშვნელობათა შეტანით, (9) ფორმულიდან მივიღებთ

$$R_3 = -\frac{h^5}{4!} \frac{4}{15} f^{(IV)}(\xi) = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi);$$

ამრიგად, სიმპსონის ფორმულას ნაშთით ექნება შემდეგი სახე

$$\int_0^{2h} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(0) + 4f(h) + f(2h)] - \frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi). \quad (11)$$

2. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა კვადრატურის ფორმულაში აბსცისათა რიცხვი ლუწია: $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$; $n=2m+1$, მაშინ (1) ნაშთისათვის გვექნება

$$R_{2m} = \int_{a+ah}^{b-ah} (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{2m}) f(x, x_1, \dots, x_{2m}) dx = h^{2m+1} \int_a^{2m+1-\alpha} (t-1)(t-2) \dots (t-2m) f(x, x_1, \dots, x_{2m}) dt. \quad (12)$$

უკანასკნელი ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ორი ინტეგრალის ჯამად:

$$\int_a^{2m+1-\alpha} \Pi_{2m}(t) f(x, x_1, \dots, x_{2m}) dt = \int_a^{2m-\alpha} + \int_{2m-\alpha}^{2m+1-\alpha} \quad (13)$$

გაყოფილი სხვაობა $f(x, x_1, x_2, \dots, x_{2m})$ შევცვალოთ მისი მნიშვნელობით

$$f(x, x_1, x_2, \dots, x_{2m}) = \frac{f(x, x_1, \dots, x_{2m-1}) - f(x_1, \dots, x_{2m})}{x - x_{2m}},$$

საიდანაც

$$(t-2m) f(x, x_1, \dots, x_{2m}) = \frac{1}{h} [f(x, x_1, \dots, x_{2m-1}) - f(x_1, \dots, x_{2m})].$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (13) ჯამის პირველ შესაყრებში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{2m-\alpha} (t-1) \dots (t-2m+1) [(t-2m)f(x, x_1, \dots, x_{2m})] dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \Pi_{2m-1}(t) f(x, x_1, \dots, x_{2m-1}) dt - \\ & - \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \Pi_{2m-2}(t) f(x_1, \dots, x_{2m}) dt. \end{aligned}$$

რადგანაც (იხ. ნახ. 5)

$$\int_{\alpha}^{2m-\alpha} \Pi_{2m-1}(t) dt = 0,$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \Pi_{2m}(t) f(x, x_1, \dots, x_{2m}) dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \Pi_{2m-1}(t) f(x, x_1, \dots, x_{2m-1}) dt. \end{aligned}$$

ეს უკანასკნელი მოგვცემს (იხ. (5))

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \Pi_{2m}(t) f(x, x_1, \dots, x_{2m}) dt = - \\ & - \frac{1}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi_1) \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \varphi_{2m-1}(\alpha, t) dt, \end{aligned} \quad (14)$$

სადაც

$$\varphi_{2m-1}(\alpha, t) = \int_{\alpha}^t (t-1) \dots (t-2m+1) dt.$$

ახლა ავიღოთ (13) გამოსახულების მეორე შესაყრები

$$\int_{2m-\alpha}^{2m+1-\alpha} (t-1)(t-2) \dots$$

$$\dots (t-2m) f(x, x_1, \dots, x_{2m}) dt.$$

რადგანაც ფუნქცია $\Pi_{2m}(t) = t(t-1) \dots$

$\dots (t-2m)$ შუალედში $[2m-\alpha, 2m+1-\alpha]$ ნიშნს არ იცვლის (იხ. ნახ. 6, სადაც ნაჩვენებია $n=7$ შემთხვევა), შეგვიძლია გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა:

$$\begin{aligned} & \int_{2m-\alpha}^{2m+1-\alpha} \Pi_{2m}(t) f(x, x_1, \dots, x_{2m}) dt = f(\xi, x_1, \dots, x_{2m}) \int_{2m-\alpha}^{2m+1-\alpha} \Pi_{2m}(t) dt = \\ &= \frac{1}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi_2) \int_{2m-\alpha}^{2m+1-\alpha} \Pi_{2m}(t) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

(14) და (15) მნიშვნელობის შეტანით (13)-ში, მივიღებთ

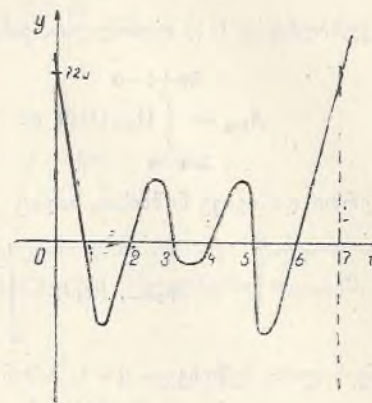
$$R_{2m} = \frac{h^{2m+1}}{(2m)!} \left[f^{(2m)}(\xi_1) \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \varphi_{2m-1}(\alpha, t) dt + f^{(2m)}(\xi_2) \int_{2m-\alpha}^{2m+1-\alpha} \Pi_{2m}(t) dt \right], \quad (16)$$

სადაც ξ_1, ξ_2 საშუალო მნიშვნელობებია,

$$a < \xi_1 < b, \quad a < \xi_2 < b.$$

(16) ფორმულაში $f^{(2m)}(x)$ წარმოებული ორ სხვადასხვა ξ_1 და ξ_2 წერტილზეა აღებული. ამიტომ ეს ფორმულა ისე გარდავექმნათ, რომ შეიცავდეს წარმოებულს მხოლოდ ერთ წერტილში. ამისათვის ავიღოთ R_{2m} -ის სიდიდე აბსოლუტური მნიშვნელობით, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$|R_{2m}| \leq \frac{h^{2m+1}}{(2m)!} M \left[\left| \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \varphi_{2m-1}(\alpha, t) dt \right| + \left| \int_{2m-\alpha}^{2m+1-\alpha} \Pi_{2m}(t) dt \right| \right],$$



ნახ. 6

სადაც

$$M = \max |f^{(2m)}(x)|, \quad x \in [a, b].$$

დავუბრუნდეთ (15) ფორმულას. ვაჩვენოთ, რომ

$$A_{1,\alpha} = \int_{2m-\alpha}^{2m+1-\alpha} \Pi_{2m}(t) dt \quad \text{და} \quad A_{2,\alpha} = - \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \Phi_{2m-1}(\alpha, t) dt$$

ერთი და იგივე ნიშნისაა, სადაც

$$\Phi_{2m-1}(\alpha, t) = \int_{\alpha}^t \Pi_{2m-1}(t) dt.$$

განვიხილოთ შემთხვევა $\alpha=1$. მაშინ

$$A_{1,1} = \int_{2m-1}^{2m} (t-1) \dots (t-2m) dt < 0.$$

$$\left(\text{მე-6 ნახაზზე, ადვილი შესამჩნევია, } \int_5^6 (t-1) \dots (t-6) dt < 0 \right).$$

$$\Phi_{2m-1}(1, t) = \int_1^t (t-1) \dots (t-2m-1) dt$$

ნიშანს არ იცვლის $1 < t < 2m-1$ ინტერვალში (ნახ. 5). ეს ფუნქცია $1 < t < 2$ -ისთვის დადებითია. მაშასადამე, იგი დადებითი იქნება ყველა იმ t -თვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $1 < t < 2m-1$. მაშინ $A_{2,1}$ უარყოფითი იქნება. ე. ი. $A_{1,1}$ და $A_{2,1}$ ერთი და იგივე ნიშნისაა.

ვთქვათ, $\alpha=0$. გვექნება

$$A_{1,0} = \int_{2m}^{2m+1} (t-1) \dots (t-2m) dt > 0,$$

რადგანაც ინტეგრალქვეშა გამოსახულება $2m < t \leq 2m+1$ შუალედში

დადებითია (მე-6 ნახაზზე, ადვილი შესამჩნევია, $\int_6^7 (t-1) \dots (t-6) dt > 0$).

ავიღოთ $A_{2,0}$,

$$A_{2,0} = \int_0^{2m} \Phi_{2m-1}(0, t) dt.$$

ფუნქცია

$$\Phi_{2m-1}(0, t) = \int_0^t (t-1) \dots (t-2m+1) dt$$

არ იცვლის ნიშანს $0 \leq t < 2m$ შუალედში (ნახ. 5), იგი უარყოფითია $0 \leq t < 1$ შუალედში. მაშასადამე, $0 \leq t < 2m$ შუალედში $\Phi_{2m-1}(0, t)$ უარყოფითია. ამის გამო

$$A_{2,0} = - \int_0^{2m} \Phi_{2m-1}(0, t) dt > 0.$$

ამგვარად, $A_{1,0}$ და $A_{2,0}$ ერთი და იგივე ნიშნისაა. ასე რომ, $A_{1,\alpha}$ -ს და $A_{2,\alpha}$ -ს ერთი და იგივე ნიშანი აქვს.

ვისარგებლოთ უწყვეტი ფუნქციის თვისებით. $f^{(2m)}(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. იგი ლებულობს ყველა მნიშვნელობას $A_{1,\alpha}$ და $A_{2,\alpha}$ -ს შორის. $A_{1,\alpha}$ და $A_{2,\alpha}$ ერთი და იგივე ნიშნისაა. (16)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} R_{2m} &= \frac{h^{2m+1}}{(2m)!} [f^{(2m)}(\xi_1) A_{2,\alpha} + f^{(2m)}(\xi_1) A_{1,\alpha}] = \\ &= \frac{h^{2m+1}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi) [A_{2,\alpha} + A_{1,\alpha}]. \end{aligned}$$

ამგვარად, თუ $n=2m+1$ (კვადრატურის ფორმულის აბსცისთა რიცხვი ლუწია, $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$), მაშინ ნაშთითი წევრი იქნება

$$R_{2m} = \frac{h^{2m+1}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi) \left[- \int_{\alpha}^{2m-\alpha} \Phi_{2m-1}(\alpha, t) dt + \int_{2m-\alpha}^{2m+1-\alpha} \Pi_{2m}(t) dt \right], \quad (17)$$

სადაც

$$a + \alpha h < \xi < b - \alpha h, \quad h = \frac{b-a}{2m+1}.$$

(17) ფორმულაში, თუ $\alpha=1$, გვექნება ჩაკეტილი ტიპის ფორმულის ნაშთი

$$R_{2m} = \frac{h^{2m+1}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi) \left[- \int_1^{2m-1} \varphi_{2m-1}(1, t) dt + \int_{2m-1}^{2m} \Pi_{2m}(t) dt \right], \quad (18)$$

სადაც

$$\varphi_{2m-1}(1, t) = \int_1^t \Pi_{2m-1}(t) dt.$$

აქ საინტერბოლაციო წერტილებია $x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}$. თუ დავუბრუნდებით $x_0, x_1, \dots, x_n$ საინტერბოლაციო წერტილებს, $n=2m+1$, $m=0, 1, \dots$ მაშინ (18) ფორმულა მოგვცემს

$$R_{2m+2} = \frac{h^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \left[- \int_0^{2m} \varphi_{2m+1}(0, t) dt + \int_{2m}^{2m+1} t(t-1)\dots(t-2m-1)dt \right], \quad (19)$$

სადაც $\varphi_{2m+1}(0, t)$ შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება:

$$\varphi_{2m+1}(0, t) = \int_0^t t(t-1)\dots(t-2m)dt \quad (20)$$

თუ $\alpha=0$, მაშინ (17) ფორმულიდან მივიღებთ ღია ტიპის კვადრატის ფორმულის ნაშთს

$$R_{2m} = \frac{h^{2m+1}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi) \left[- \int_0^{2m} \varphi_{2m-1}(0, t) dt + \int_{2m}^{2m+1} \Pi_{2m}(t) dt \right], \quad (21)$$

სადაც

$$\varphi_{2m-1}(0, t) = \int_0^t \Pi_{2m-1}(t) dt.$$

მაგალითად, $m=1$, მაშინ $n=2m+1=3$. შუალედი გაიყოფა სამ ნაწილად, გაყოფის წერტილები იქნება x_0, x_1, x_2, x_3 .

ღია ტიპის კვადრატურის ფორმულას ექნება შემდეგი სახე:

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \frac{3h}{2} [f(h) + f(2h)] + R_2, \quad (22)$$

სადაც

$$R_2 = \frac{h^3}{2!} f''(\xi) \left[- \int_0^2 \varphi_1(0, t) dt + \int_2^3 \Pi_2(t) dt \right]. \quad (23)$$

გამოვიანგარიშოთ:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, t) &= \int_0^t (t-1) dt = \frac{t^2}{2} - t; \quad \int_0^2 \varphi_1(0, t) dt = \left[\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = -\frac{2}{3}; \\ \int_2^3 \Pi_2(t) dt &= \int_2^3 (t-1)(t-2) dt = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი (23) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$R_2 = \frac{3h^3}{4} f''(\xi).$$

ამის შედეგად (22) ღია ტიპის კვადრატურის ფორმულას ნაშთით ექნება სახე

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \frac{3h}{2} [f(h) + f(2h)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi).$$

ჩაკეტილი ტიპის ტრაპეციის ფორმულის ნაშთის მისაღებად (19) ფორმულაში ჩავსვათ $m=0$. გვექნება

$$R_2 = \frac{h^3}{2!} f''(\xi) \int_0^1 t(t-1) dt = -\frac{h^3}{12} f''(\xi). \quad (24)$$

$m=1$ -თვის (19) ფორმულა მოგვცემს:

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h)] + R_4,$$

$$R_4 = \frac{h^5}{4!} f^{IV}(\xi) \left[- \int_0^2 \varphi_2(0, t) dt + \int_2^3 t(t-1)(t-2)(t-3) dt \right],$$

$$\varphi_2(0, t) = \int_0^t t(t-1)(t-2) dt.$$

გამოთვლები მოგვცემს

$$\varphi_2(0, t) = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2;$$

$$\int_0^2 \varphi_2(0, t) dt = \left[\frac{t^5}{20} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{15},$$

$$\int_2^3 t(t-1)(t-2)(t-3) dt = \int_2^3 (t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) dt =$$

$$= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{6t^4}{4} + \frac{11t^3}{3} - \frac{6t^2}{2} \right]_2^3 = -\frac{19}{30}.$$

R_4 -ში ამ მნიშვნელობათა შეტანით მივიღებთ:

$$R_4 = -\frac{3h^5}{80} f^{IV}(\xi).$$

ამგვარად, მივიღეთ კვადრატურის შემდეგი ფორმულები:

1) ჩაკეტილი ტიპის ფორმულები. საინტერპოლაციო წერტილებია $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i f_i + R_{n+1},$$

სადაც $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(a + ih)$.

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dt, \quad i=0, 1, \dots, n.$$

თუ n ლუწია, $n=2m$, საინტერპოლაციო წერტილების რიცხვი კენტიია: $x_0, x_1, \dots, x_{2m}$, მაშინ

$$R_{2m+1} = -\frac{h^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \int_0^{2m} \varphi_{2m}(0, t) dt,$$

სადაც

$$\varphi_{2m}(0, t) = \int_0^t t(t-1)\dots(t-2m) dt.$$

თუ n კენტიია, $n=2m+1$, საინტერპოლაციო წერტილების — $x_0, x_1, \dots, x_{2m+1}$ -ის რიცხვი ლუწია,

$$R_{2m+2} = -\frac{h^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \left[\int_0^{2m} \varphi_{2m}(0, t) dt - \int_{2m}^{2m+1} t(t-1)\dots(t-2m) dt \right].$$

2) ღია ტიპის ფორმულები. საინტერპოლაციო წერტილებია $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$;

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=1}^{n-1} \bar{H}_i f_i + R_{n-1}.$$

სადაც $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(a + ih)$,

$$\bar{H}_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-1-i}}{(i-1)!(n-1-i)!} \int_0^n \frac{(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)}{t-i} dt,$$

$$i = 1, \dots, n-1.$$

თუ $n=2m$, საინტერპოლაციო წერტილების $x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}$ რიცხვი კენტიია, მაშინ

$$R_{2m-1} = -\frac{h^{2m+1}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi) \int_0^{2m} \varphi_{2m-i}(0, t) dt,$$

სადაც

$$\varphi_{2m-1}(0, t) = \int_0^t (t-1) \dots (t-2m+1) dt.$$

თუ $n=2m+1$ საინტეგრაციო წერტილების $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$ რიცხვი ლუწია, მაშინ

$$R_{2m} = -\frac{h^{2m+1}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi) \left[\int_0^{2m} \varphi_{2m-1}(0, t) dt - \int_{2m}^{2m+1} (t-1) \dots (t-2m) dt \right].$$

მიღებული ფორმულების საფუძველზე აღვილი შესამჩნევია, რომ იმ $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვლა შეიძლება, რომელსაც $[a, b]$ შუალედში აქვს $(n+1)$ რიგის უწყვეტი წარმოებული, სადაც n საინტეგრაციო წერტილთა რიცხვია.

ქვემოთ მოცემულია უფრო გავრცელებული კვადრატურების ფორმულები სათანადო შეფასებით:

$$\int_0^h f(x) dx = hf(0) + \frac{h^2}{2} f'(\xi),$$

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{2} [f(0) + f(h)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi),$$

$$\int_0^{2h} f(x) dx = 2hf(h) + \frac{h^3}{3} f''(\xi),$$

$$\int_0^{2h} f(x) dx = \frac{2h}{6} [f(0) + 4f(h) + f(2h)] - \frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi),$$

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \frac{3h}{2} [f(h) + f(2h)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi),$$

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h)] - \frac{3h^5}{80} f^{IV}(\xi),$$

$$\int_0^{4h} f(x) dx = \frac{4h}{3} [2f(h) - f(2h) + 2f(3h)] + \frac{14h^5}{45} f^{IV}(\xi),$$

$$\int_0^{4h} f(x) dx = \frac{4h}{90} [7f(0) + 32f(h) + 12f(2h) + 32f(3h) + 7f(4h)] - \frac{8}{945} h^7 f^{VI}(\xi),$$

$$\int_0^{5h} f(x) dx = \frac{5h}{24} [11f(h) + f(2h) + f(3h) + 11f(4h)] + \frac{95}{144} h^5 f^{IV}(\xi),$$

$$\int_0^{5h} f(x) dx = \frac{5h}{288} [19f(0) + 75f(h) + 50f(2h) + 50f(3h) + 75f(4h) + 19f(5h)] - \frac{275}{12096} h^7 f^{VI}(\xi),$$

$$\int_0^{6h} f(x) dx = \frac{6h}{20} [11f(h) - 14f(2h) + 26f(3h) - 14f(4h) + 11f(5h)] + \frac{41}{140} h^7 f^{VI}(\xi),$$

$$\int_0^{6h} f(x) dx = \frac{6h}{840} [41f(0) + 216f(h) + 27f(2h) + 272f(3h) + 27f(4h) + 216f(5h) + 41f(6h)] - \frac{9h^9}{1400} f^{VIII}(\xi).$$

§ 9. მართკუთხედის, ტრაპეციისა და სივსოხის ფორმულები

1. მე-6 პარაგრაფში გამოვიყენეთ მართკუთხედის ფორმულა შეფასებით

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = hf(a) + \frac{h^2}{2} f'(\xi), \quad a < \xi < a+h,$$

თუ $[a, b]$ შუალედს დავყოფთ n ტოლ ნაწილად, $b-a=nh$, მაშინ თითოეული ქვეშუალედისათვის გამოვიყენოთ მართკუთხედის ფორმულა, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f_i + \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i), \quad x_i < \xi_i < x_{i+1},$$

ანუ

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f_i + \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i). \quad (1)$$

თუ $f'(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $a \leq x \leq b$ შუალედში, მაშინ საშუალო არითმეტიკული

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)$$

მოთავსებული იქნება $f'(x)$ -ის მინიმუმებსა და მაქსიმუმებს შორის,

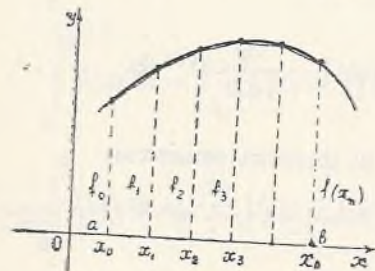
$$m \leq \mu \leq M.$$

ასე რომ, აღგილი ექნება ტოლობას

$$\mu = f'(\xi), \quad a < \xi < b.$$

ამის შედეგად (1) ტოლობა მოგვცემს

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f_i + \frac{(b-a)h}{2} f'(\xi). \quad (2)$$



ნახ. 7

ამ ფორმულას ეწოდება მართკუთხედის ზოგადი ფორმულა ნაშთით.

2. ავიღოთ ტრაპეციის ჩაკეტილი ტიპის ფორმულა (ნახ. 7)

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = \frac{h}{2} [f_0 + f_1] - \frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad a < \xi < a+h.$$

შუალედისათვის გამოვიყენოთ ტრაპეციის ჩაკეტილი ტიპის ფორმულა, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{f_0}{2} + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right] - \frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i). \quad (3)$$

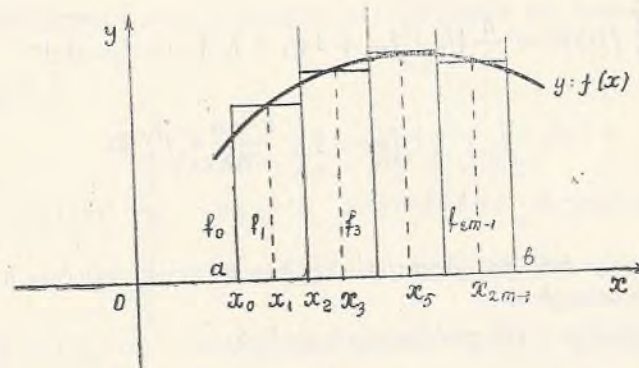
თუ $f''(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ გვექნება

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = f''(\xi), \quad a < \xi < b.$$

ამის შედეგად (3) ფორმულა მოგვცემს

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{f_0}{2} + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi). \quad (4)$$

ამ ფორმულას ეწოდება ტრაპეციის ჩაკეტილი ტიპის ზოგადი ფორმულა.



ნახ. 8

3. სრულიად ასევე მივიღებთ ტრაპეციის ღია ტიპის (7, § 8) ფორმულას დახმარებით (ნახ. 8)

$$\int_a^b f(x) dx = 2h [f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1}] + \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\xi), \quad (5)$$

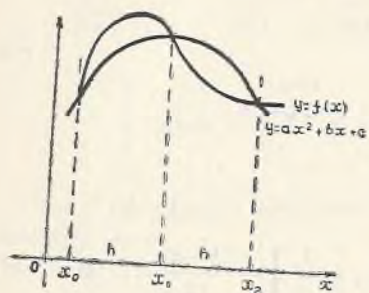
სადაც

$$b-a=2mh.$$

$[a, b]$ შუალედი დავყოფთ n ტოლ ნაწილად, $b-a=nh$ და თითოეული

ამ ფორმულას ტრაპეციის ლია ტიპის ზოგადი ფორმულა ან საშუალო მართკუთხედის ზოგადი ფორმულა ეწოდება.

4. $[a, b]$ შუალედი ისევ $2m$ ნაწილად დავყოთ, $b-a=2mh$, და ყოველი ორი შუალედისათვის გამოვიყენოთ სიმპსონის ფორმულა



ნახ. 9

შუალედისათვის გამოვიყენოთ სიმპსონის ფორმულა, მივიღებთ:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f_0 + f_{2m} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2})] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{IV}(\xi). \quad (6)$$

ამ ფორმულას სიმპსონის ზოგადი ფორმულა ეწოდება.

5. შედეგი რომ მოცემული ε სიზუსტით მივიღოთ, საჭიროა h სათანადოდ განვსაზღვროთ.

მართკუთხედის (2) ფორმულიდან გვექნება

$$\frac{(b-a)h}{2} M_1 < \varepsilon,$$

სადაც

$$M_1 = |f'(x)|_{\max} = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

უკანასკნელიდან მივიღებთ

$$h < \frac{2\varepsilon}{(b-a)M_1}. \quad (7)$$

ტრაპეციის (4) ფორმულიდან მივიღებთ

$$h < 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{3(b-a)M_2}}, \quad (8)$$

სადაც

$$M_2 = |f''(x)|_{\max}.$$

სიმპსონის (6) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$h < \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}}, \quad (9)$$

სადაც

$$M_4 = |f^{IV}(x)|_{\max} \quad x \in [a, b].$$

6. თუ გვინდა, მაგალითად, სიმპსონის ფორმულით მიღებული მნიშვნელობის დაზუსტება და სათანადოდ ცდომილების შეფასება, შეიძლება ვისარგებლოთ რუნგე-რომბერგის ხერხით.

დავუშვათ, $f^{IV}(x)$ წარმოებული $[a, b]$ შუალედში ნელა იცვლება, მაშინ (6) ფორმულიდან

$$R = Mh^4 + O(h^5),$$

სადაც, დაშვების თანახმად, M მუდმივი სიდიდეა, ხოლო $O(h^5)$ მე-5 რი-

გის უსასრულოდ მცირე. გამოვთვალოთ $\int_a^b f(x) dx$ ზიჯით h -ით და rh -ით,

მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_h + Mh^4 + O(h^5),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{rh} + M(rh)^4 + O((rh)^5),$$

სადაც $\sum_h, \sum_{rh}$ (6) გამოსახულების სათანადო ჯამებია. უკანასკნელიდან მივიღებთ

$$Mh^4 = \frac{\sum_h - \sum_{rh}}{r^4 - 1}.$$

ამის შედეგად გვექნება

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_h + \frac{\sum_h - \sum_{rh}}{r^4 - 1} + O(h^5).$$

1 Н. Н. Калиткин, Численные методы, М., 1978, стр. 74.

მიღებული გამოსახულების მეორე შესაყრები ცდომილების მთავარი წევრია. ამრიგად, მეორე გამოთვლა საშუალებას გვაძლევს, შევაფასოთ ინტეგრალის პირველი გამოთვლის ცდომილება უფრო მაღალი სიზუსტით. ამასთან პირველი და მეორე შესაყრები ჯამში იძლევა ინტეგრალის მნიშვნელობას მაღალი რიგის სიზუსტით (შესწორებით), ვიდრე მართო პირველი შესაყრები.

განვიხილოთ მაგალითი.

გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad (10)$$

შევადგინოთ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ -ის მნიშვნელობათა ცხრილი $0 \leq x \leq 1$ -თვის $h=0,05$ ბიჯით (ცხრილი 4).

ცხრილი 4					
i	x	$f(x)$	i	x	$f(x)$
0	0,00	1,0000000	11	0,55	0,7677544
1	0,05	0,9975062	12	0,60	0,7352941
2	0,10	0,9900990	13	0,65	0,7029873
3	0,15	0,9779951	14	0,70	0,6711409
4	0,20	0,9615385	15	0,75	0,6400001
5	0,25	0,9411765	16	0,80	0,6097561
6	0,30	0,9174312	17	0,85	0,5805516
7	0,35	0,8908686	18	0,90	0,5524862
8	0,40	0,8620690	19	0,95	0,5256242
9	0,45	0,8316008	20	1,00	0,5000000
10	0,50	0,8000000			

გამოვთვალოთ აგრეთვე წარმოებულები

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = 2 \frac{-1+3x^2}{(1+x^2)^3}, \quad f'''(x) = 24 \frac{x-x^3}{(1+x^2)^4},$$

$$f^{IV}(x) = 24 \frac{1-10x^2+24x^4}{(1+x^2)^5}.$$

ავიღოთ ტრაპეციის ჩაკეტილი ტიპის ფორმულა:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,05 \left[\frac{1,0000000+0,5000000}{2} + 0,9975062 + \dots + 0,5256242 \right] = 0,05 \cdot 15,7079698 = 0,78539349$$

ამგვარად,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,78539349. \quad (11)$$

(4) ფორმულით გამოვთვალოთ ცდომილება

$$|R_2| \leq \frac{b-a}{12} h^3 |f''(x)|_{\max},$$

გვცქნება:

$$|f''(x)|_{\max} < \frac{1}{4}.$$

ამის გამო

$$|R_2| < \frac{1 \cdot 0,05^3}{12} \cdot \frac{1}{4} \approx 0,0000052$$

ე. ი. $I=0,78539849$ მნიშვნელობა ცდომილებას შეიცავს მე-6 ათწილად ნიშანში, მაგრამ არაუმეტეს ამ ათწილადი ნიშნის 6 ერთეულისა. ამგვარად, $I=0,78540$. თუ ამ მნიშვნელობას შევადარებთ ზუსტ მნიშვნელობას

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0,78539815... \quad (12)$$

მივიღებთ, რომ ჩვენ მიერ გამოთვლილ მნიშვნელობაში ყველა ციფრი სანდოა.

ახლა იგივე ინტეგრალის მნიშვნელობა გამოვთვალოთ სიმპსონის (6) ფორმულით:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \frac{0,05}{3} [1,0000000 + 0,5000000 + \\ &+ 4(0,9975062 + 0,9779951 + 0,9411765 + 0,8908686 + 0,8316008 + 0,7677544 + 0,7029873 + 0,6400001 + 0,5805516 + 0,5256242) \\ &+ 2(0,9900990 + 0,9615385 + 0,9174312 + 0,8620690 + 0,8000000 + 0,6711409 + 0,6097561 + 0,6097561 + 0,5524862)] = \\ &= 0,0166667 (1,5000000 + 4 \cdot 7,3569648 + 2 \cdot 7,0993152) = \end{aligned}$$

$$= 1,01\,66\,667(1,50\,000\,00 + 31,4242\,592 + 14,19\,96\,304) = 0,01\,66\,667 \cdot 47,12\,38\,896 = 0,78\,53\,98\,15\,99\,69.$$

ამგვარად,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,78\,53\,98\,15\,99\,69. \quad (13)$$

ცდომილება გამოვთვალოთ ფორმულით

$$|R_3| \leq \frac{b-a}{180} h^4 |f^{(4)}(x)|_{\max}.$$

გვექნება

$$|f^{(4)}(x)|_{\max} = 24 \left[\frac{1-10x^2+24x^4}{(1+x^2)^5} \right]_{\max} = 24 \cdot \frac{15}{32} = 11,25$$

$$|R_3| \leq \frac{0,054}{180} 11,25 < 4 \cdot 10^{-7}.$$

ე. ი. (13) მნიშვნელობაში 7 ათწილადი ნიშანი მაინც არის სანდო. მაგრამ (13) მნიშვნელობის ზუსტ (12) მნიშვნელობასთან შედარება გვაძლევს, რომ (13) მნიშვნელობაში 8 ათწილადი ნიშანი სანდოა (ცდომილება უბეშადაა შეფასებული):

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,78\,53\,98\,16.$$

§ 10. რიცხვითი ინტეგრების გაუსის ფორმულები

1. ნიუტონ-კოტესის რიცხვითი ინტეგრების ფორმულები მიღებული იყო ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქციის საინტერპოლაციო მრავალწევრით შეცვლის საფუძველზე. საინტერპოლაციო მრავალწევრი აგებული იქნა ტოლად დაშორებული საინტერპოლაციო-კვანძით წერტილებისათვის. კვადრატურის ფორმულის ცდომილება $R(f)$ შეიცავს მოცემული $f(x)$ ფუნქციის n -ური რიგის წარმოებულს

$$R(f) = \int_a^b (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) f(x, x_1, \dots, x_n) dx =$$

$$= \frac{1}{n!} \int_a^b (x-x_1)\dots(x-x_n) f^{(n)}(\xi) dx.$$

ცხადია, თუ $f(x)$ ფუნქცია არაუმეტეს $n-1$ ხარისხის მრავალწევრია, მაშინ $R(f)=0$. მაგრამ, თუ კვანძითი წერტილების $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 1, 2, \dots, n$, რიცხვი კენტი, მაშინ n ხარისხის მრავალწევრისათვისაც $R(f)=0$. უნდა ვიფიქროთ, რომ კვანძითი წერტილების სხვაგვარი განლაგების დროს მრავალწევრის ხარისხი შეიძლება გაიზარდოს, მაგრამ $R(f)=0$. თუ ვისარგებლებთ ერთი და იგივე რაოდენობის კვანძითი წერტილებით, მაშინ კვადრატურის ის ფორმულა უფრო ზუსტია, რომლისთვისაც სათანადო ხარისხის მაჩვენებელი n უფრო დიდია.

ნიუტონ-კოტესის ფორმულების ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ სხვა სახის კვადრატურის ფორმულები.

ავიღოთ $\int_{-1}^1 f(x) dx$ და წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = C_1^{(n)} f(x_1) + C_2^{(n)} f(x_2) + \dots + C_n^{(n)} f(x_n) + R(f), \quad (1)$$

სადაც $C_i^{(n)}$ მუდმივი კოეფიციენტებია, $x_1, x_2, \dots, x_n$ კვადრატურის ფორმულის კვანძითი წერტილებია, რომლებიც დამოუკიდებელია $f(x)$ -საგან, $R(f)$ ნაშთითი წევრია.

ჩვენი მიზანია, განვსაზღვროთ კვანძითი წერტილები და კოეფიციენტები იმგვარად, რომ ნაშთითი წევრი გახდეს ნული, რაც შეიძლება მაღალი ხარისხის მრავალწევრისათვის. ასეთი სახის (1) ფორმულებს ეწოდება გაუსის ფორმულები.

ავიღოთ m ხარისხის ნებისმიერი მრავალწევრი

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad (2)$$

და ჩავსვათ (1) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$a_0 \int_{-1}^1 dx + a_1 \int_{-1}^1 x dx + \dots + a_m \int_{-1}^1 x^m dx =$$

$$= C_1^{(n)} [a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_1^m] +$$

$$+ C_2^{(n)} [a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_m x_2^m] +$$

$$+ \dots +$$

$$+ C_n^{(n)} [a_0 + a_1 x_n + \dots + a_m x_n^m].$$

რადგანაც a_i კოეფიციენტები ნებისმიერია, გვექნება

$$\begin{aligned} C_1^{(n)} + C_2^{(n)} + \dots + C_n^{(n)} &= \mu_0, \\ C_1^{(n)} x_1 + C_2^{(n)} x_2 + \dots + C_n^{(n)} x_n &= \mu_1, \\ &\dots \\ C_1^{(n)} x_1^m + C_2^{(n)} x_2^m + \dots + C_n^{(n)} x_n^m &= \mu_m, \end{aligned} \quad (3)$$

სადაც

$$\mu_k = \int_{-1}^1 x^k dx, \quad k=0, 1, \dots, m. \quad (4)$$

მივიღეთ განტოლებათა სისტემა $m+1$ განტოლებით, სადაც უცნობებია $x_1, x_2, \dots, x_n$ და $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots, C_n^{(n)}$. სულ $2n$ უცნობი. აქედან გამომდინარეობს, რომ m -ის უდიდესი მნიშვნელობაა $m=2n-1$. ამგვარად, (1) ტოლობა ყოველი მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება $2n-1$ -ს, იძლევა ფორმულას:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = C_1^{(n)} f(x_1) + C_2^{(n)} f(x_2) + \dots + C_n^{(n)} f(x_n). \quad (5)$$

მაგრამ უშუალოდ (3) განტოლებათა სისტემის გამოკვლევა ძნელია. ამიტომ ჩვენ ავარჩევთ სხვა ხერხს.

მივიღოთ, რომ ცნობილია $x_1, x_2, \dots, x_n$ კვანძითი წერტილები და განვსაზღვროთ $C_i^{(n)}$ კოეფიციენტები. ამისათვის შევადგინოთ მრავალწევრი

$$\Pi_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n). \quad (6)$$

განვიხილოთ მრავალწევრი

$$\varphi_{k,n}(x) = \left[\frac{\Pi_n(x)}{x-x_k} \right]^2. \quad (7)$$

ეს მრავალწევრი $2n-2$ ხარისხისაა, მისთვის ჰემმარიტია (5) ტოლობა:

$$\int_{-1}^1 \varphi_{k,n}(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} \varphi_{k,n}(x_i).$$

მაგრამ $\varphi_{k,n}(x)$ მრავალწევრის გამოსახულებიდან აღვილი დასადგენია, რომ

$$\begin{aligned} \varphi_{k,n}(x_i) &= 0, \quad i \neq k, \\ \varphi_{k,n}(x_k) &= [\Pi_n'(x_k)]^2. \end{aligned}$$

ამიტომ გვექნება

$$\int_{-1}^1 \varphi_{k,n}(x) dx = C_k^{(n)} [\Pi_n'(x_k)]^2,$$

საიდანაც

$$C_k^{(n)} = \frac{\int_{-1}^1 \varphi_{k,n}(x) dx}{[\Pi_n'(x_k)]^2},$$

ანუ

$$C_k^{(n)} = \int_{-1}^1 \left[\frac{\Pi_n(x)}{(x-x_k) \Pi_n'(x_k)} \right]^2 dx, \quad k=1, \dots, n. \quad (8)$$

ამგვარად, $C_k^{(n)}$ -სათვის მივიღეთ ფორმულა, სადაც მონაწილეობს მარტო $\Pi_n(x)$ ფუნქცია.

2. ავაგოთ $\Pi_n(x)$ ფუნქცია, ამისათვის გამოვიყვანოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ (1) ფორმულა იყოს ზუსტი ($2n-1$) ხარისხის მრავალწევრისათვის.

ვთქვათ, (1) ფორმულა ზუსტია ყველა იმ მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება $(2n-1)$ -ს. დაშვებით $\Pi_n(x)$ -ის ნულებია (1) ფორმულის კვანძები. ნამრავლი $\Pi_n(x) q(x)$, სადაც $q(x)$ ნებისმიერი არაუმატეს $n-1$ ხარისხის მრავალწევრია, წარმოადგენს მრავალწევრს, რომელიც აღნიშნულ პირობას აკმაყოფილებს,

$$R[\Pi_n(x) q(x)] = 0.$$

ამის გამო

$$\int_{-1}^1 \Pi_n(x) q(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} \Pi_n(x_i) q(x_i).$$

მაგრამ (6) პირობით

$$\Pi_n(x_i) = 0.$$

ამიტომ გვექნება

$$\int_{-1}^1 \Pi_n(x) q(x) dx = 0.$$

ამრიგად, თუ (1) ფორმულა ზუსტია, $R(f)=0$, ყველა იმ $f(x)$ მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება $(2n-1)$ -ს, მაშინ $x_1, x_2, \dots, x_n$ კვანძითი წერტილები იმ $\Pi_n(x)$ მრავალწევრის ნულებია,

$$\Pi_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

რომელიც ნებისმიერი $n-1$ ხარისხის $q(x)$ მრავალწევრისათვის აკმაყოფილებს პირობას:

$$\int_{-1}^1 \Pi_n(x) q(x) dx = 0. \quad (9)$$

ახლა ვაჩვენოთ, პირიქით, თუ გვაქვს $\Pi_n(x)$ მრავალწევრი, რომელსაც $[-1,1]$ სეგმენტზე აქვს n სხვადასხვა ნული $x_1, x_2, \dots, x_n$ და ნებისმიერი $q(x)$ მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება $(n-1)$ -ს, აკმაყოფილებს (9) პირობას, მაშინ (1) ფორმულა, რომლის კვანძითი წერტილები იმ $\Pi_n(x)$ მრავალწევრის ნულებია, ზუსტია, $R(f)=0$, ყოველი $f(x)$ მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება $(2n-1)$ -ს.

მართლაც, თუ $f(x)$ მრავალწევრია, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი $(2n-1)$ -ზე მეტი არაა, მაშინ

$$f(x) = \Pi_n(x) q(x) + r(x), \quad (10)$$

სადაც $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრებია, რომელთა მაჩვენებელი $(n-1)$ -ს არ აღემატება.

ამ ტოლობიდან გვექნება

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \Pi_n(x) q(x) dx + \int_{-1}^1 r(x) dx.$$

აქედან კი (9) პირობით მივიღებთ

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 r(x) dx. \quad (11)$$

მაგრამ $r(x)$ -ის ხარისხი $(n-1)$ -ს არ აღემატება, ამიტომ

$$\int_{-1}^1 r(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} r(x_i).$$

(10) ტოლობიდან გვექნება

$$f(x_i) = \Pi_n(x_i) q(x_i) + r(x_i) = r(x_i).$$

ამიტომ

$$\int_{-1}^1 r(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} f(x_i).$$

ამ ტოლობის საფუძველზე (11) ტოლობა მოგვცემს

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} f(x_i).$$

ამრიგად, თუ (1) ფორმულის კვანძითი წერტილები იმ $\Pi_n(x)$ მრავალწევრის ნულებია, რომელიც აკმაყოფილებს (9) პირობას, მაშინ (1) ფორმულა ზუსტია, $R(f)=0$, ყველა იმ $f(x)$ მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება $(2n-1)$ -ს.

გამოვიყენოთ (9) პირობა $\Pi_n(x)$ მრავალწევრის ასაგებად.

ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Pi_n(x) q(x) dx &= \int_{-1}^1 q(x) d\varphi_1(x) = \\ &= \left[q(x) \varphi_1(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \varphi_1(x) q'(x) dx, \end{aligned}$$

სადაც

$$\varphi_1(x) = \int_{-1}^x \Pi_n(x) dx.$$

თუ გავაგრძელებთ ნაწილობით ინტეგრებას, მივიღებთ

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 \Pi_n(x) q(x) dx = \left[q(x) \varphi_1(x) - q'(x) \varphi_2(x) + q''(x) \varphi_3(x) - \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} q^{(n-1)}(x) \varphi_n(x) \right]_{-1}^1, \end{aligned} \quad (12)$$

სადაც

$$\varphi_1(x) = \int_{-1}^x \Pi_n(x) dx, \quad \varphi_2(x) = \int_{-1}^x \varphi_1(x) dx, \dots, \varphi_n(x) = \int_{-1}^x \varphi_{n-1}(x) dx. \quad (13)$$

აღვილი შესამჩნევია

$$\varphi_1(-1) = \varphi_2(-1) = \dots = \varphi_n(-1) = 0.$$

ამის გამო (12) მოგვცემს

$$[q(x)\varphi_1(x) - q'(x)\varphi_2(x) + \dots + (-1)^n q^{(n-1)}(x)\varphi_n(x)]_{x=-1} = 0.$$

მაგრამ $q(x)$ ნებისმიერი მრავალწევრია, ამიტომ გვექნება

$$\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = \dots = \varphi_n(1) = 0.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ $\varphi_n(x)$ -ს აქვს n ჯერადი ნულები: $x=-1$, $x=1$. ამიტომ გვექნება

$$\varphi_n(x) = C(x-1)^n(x+1)^n,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

(13) დამოკიდებულებებიდან ცხადია,

$$\Pi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \varphi_n(x).$$

საიდანაც

$$\Pi_n(x) = C \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] = C \left(\frac{(2n)!}{n!} x^n - \dots \right).$$

რადგანაც $\Pi_n(x)$ -ში x -ის უმაღლესი ხარისხის კოეფიციენტი 1-ია, ამიტომ C ისე ავარჩიოთ, რომ

$$C \frac{(2n)!}{n!} = 1.$$

საიდანაც

$$C = \frac{n!}{(2n)!},$$

ასე რომ, $\Pi_n(x)$ -სათვის გვექნება

$$\Pi_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]. \quad (14)$$

ვაჩვენოთ, რომ $\Pi_n(x)$ აქვს ურთიერთგანსხვავებული ნამდვილი n ნული, რომლებიც $]-1, 1[$ ინტერვალშია მოთავსებული.

ამისათვის ავიღოთ $\varphi_n(x)$, სადაც

$$\varphi_n(x) = \int_{-1}^x \varphi_{n-1}(x) dx, \quad \varphi_n(-1) = 0, \quad \varphi_n(1) = 0.$$

გამოვიყენოთ როლის თეორემა. მივიღებთ

$$\varphi'_n(\xi_1^{(n)}) = 0,$$

ანუ

$$\varphi_{n-1}(\xi_1^{(n)}) = 0, \quad -1 < \xi_1^{(n)} < 1.$$

მაგრამ

$$\varphi_{n-1}(-1) = 0, \quad \varphi_{n-1}(1) = 0.$$

ასე რომ, გვექნება

$$\varphi_{n-1}(-1) = 0, \quad \varphi_{n-1}(\xi_1^{(n)}) = 0, \quad \varphi_{n-1}(1) = 0.$$

აქედან კი $[-1, \xi_1^{(n)}]$ და $[\xi_1^{(n)}, 1]$ შუალედებისათვის ისევ როლის თეორემიდან მივიღებთ

$$\varphi'_{n-1}(\xi_1^{(n-1)}) = 0, \quad \varphi'_{n-1}(\xi_2^{(n-1)}) = 0, \quad -1 < \xi_1^{(n-1)} < \xi_1^{(n)} < \xi_2^{(n-1)} < 1,$$

ანუ

$$\varphi_{n-2}(\xi_1^{(n-1)}) = 0, \quad \varphi_{n-2}(\xi_2^{(n-1)}) = 0.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$\varphi_1(-1) = 0, \quad \varphi_1(\xi_1^{(2)}) = 0, \quad \varphi_1(\xi_2^{(2)}) = 0, \dots, \varphi_1(\xi_{n-1}^{(2)}) = 0, \quad \varphi_1(1) = 0.$$

აქედან კი მივიღებთ

$$\varphi'_1(\xi_1^{(1)}) = 0, \quad \varphi'_1(\xi_2^{(1)}) = 0, \dots, \varphi'_1(\xi_n^{(1)}) = 0,$$

სადაც

$$-1 < \xi_1^{(1)} < \xi_2^{(1)} < \dots < \xi_n^{(1)} < 1.$$

ანუ

$$\Pi_n(x_i) = 0, \quad x_i = \xi_i^{(1)}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

ამგვარად, $\Pi(x)=0$ განტოლებას აქვს n სხვადასხვა ნამდვილი ამონახსნი, რომლებიც მოთავსებულია $]-1, 1[$ ინტერვალში.

რადგანაც $\varphi_n(x)$ არის $2n$ ხარისხის მრავალწევრი,

$$\varphi_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} (x^2-1)^n = \frac{n!}{(2n)!} \left(x^{2n} - \frac{n}{1!} x^{2(n-1)} + \dots + (-1)^n \right),$$

მისი n -რიგის წარმოებული n ხარისხის მრავალწევრია,

$$\Pi_n(x) = x^n - a_1 x^{n-2} + \dots \pm a_n,$$

სადაც $a_n = 0$, თუ n კენტია და $a_n \neq 0$, თუ n ლუწია. აქედან ცხადია, რომ $\Pi_n(x)$ მრავალწევრის ნულები სიმეტრიულადაა დალაგებული $x=0$ -ის მიმართ; თუ გადავნიშნავთ მარცხნიდან მარჯვნივ გვექნება

$$-x_1 = x_n, \quad -x_2 = x_{n-1}, \dots, x_{\frac{n-1}{2}},$$

სადაც $x_{\frac{n-1}{2}} = 0$, თუ n კენტია.

გამოვთვალოთ $\Pi_n(1)$ და $\Pi_n(-1)$. ამისათვის $\Pi_n(x)$ ასე ჩავეწერთ:

$$\Pi_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \left\{ [(x-1)^n]^{(n)} (x+1)^n + \frac{n}{1!} [(x-1)^n]^{(n-1)} [(x+1)^n]' + \dots + (x-1)^n [(x+1)^n]^{(n)} \right\}.$$

აქედან

$$\Pi_n(1) = \frac{n!}{(2n)!} \{ [(x-1)^n]^{(n)} (x+1)^n \}_{x=1} = \frac{n! \cdot n!}{(2n)!} 2^n,$$

ანუ

$$\Pi_n(1) = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}. \quad (15)$$

ასევე,

$$\Pi_n(-1) = \frac{n!}{(2n)!} \{ (x-1)^n [(x+1)^n]^{(n)} \}_{x=-1} = \frac{n!}{(2n)!} (-2)^n n!,$$

ანუ

$$\Pi_n(-1) = (-1)^n \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}. \quad (16)$$

3. გავამარტივოთ (8) კოეფიციენტები

$$C_k^{(n)} = \int_{-1}^1 \left[\frac{\Pi_n(x)}{(x-x_k) \Pi'_n(x_k)} \right]^2 dx, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრება.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\Pi_n^2(x)}{(x-x_k)^2} dx &= \int_{-1}^1 \Pi_n^2(x) d\left(-\frac{1}{x-x_k}\right) = \\ &= -\left[\frac{\Pi_n^2(x)}{x-x_k} \right]_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x) \Pi'_n(x)}{x-x_k} dx. \end{aligned}$$

(15) და (16) ფორმულებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\Pi_n^2(x)}{(x-x_k)^2} dx &= \frac{\Pi_n^2(-1)}{-1-x_k} - \frac{\Pi_n^2(+1)}{1-x_k} + 2 \int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x) \Pi'_n(x)}{x-x_k} dx = \\ &= \left[\frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!} \right]^2 \left(-\frac{1}{1+x_k} - \frac{1}{1-x_k} \right) + 2 \int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x) \Pi'_n(x)}{x-x_k} dx = \\ &= \left[\frac{n! 2^n}{(2n)!} \right]^2 \frac{(-2)}{1-x_k^2} + 2 \int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x) \Pi'_n(x)}{x-x_k} dx. \quad (17) \end{aligned}$$

მაგრამ $\frac{\Pi_n(x) \Pi'_n(x)}{x-x_k}$ მრავალწევრი $(2n-2)$ ხარისხისაა, ამიტომ

$$\int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x) \Pi'_n(x)}{x-x_k} dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} \frac{\Pi_n(x_i) \Pi'_n(x_i)}{x_i-x_k} = C_k^{(n)} [\Pi'_n(x_k)]^2. \quad (18)$$

(17) და (18) ფორმულების საფუძველზე $C_k^{(n)}$ კოეფიციენტებისთვის გვექნება

$$C_k^{(n)} = \frac{1}{[\Pi'_n(x_k)]^2} \left\{ \left[\frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!} \right]^2 \frac{(-2)}{1-x_k^2} + 2 C_k^{(n)} [\Pi'_n(x_k)]^2 \right\},$$

საიდანაც

$$C_k^{(n)} = \left[\frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!} \right]^2 \frac{2}{(1-x_k^2) [\Pi'_n(x_k)]^2},$$

ანუ

$$C_k^{(n)} = \frac{(n!)^4 2^{2n+1}}{[(2n)!]^2 (1-x_k^2) [\Pi'_n(x_k)]^2}, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

ამგვარად, მივიღეთ $C_k^{(n)}$ კოეფიციენტების საბოლოო ფორმულა.

რადგანაც x_k ამონახსნები სიმეტრიულადაა დალაგებული $x=0$ -ის მიმართ,

$$x_k = -x_{n-k+1},$$

(19)-დან მივიღებთ

$$C_k^{(n)} = C_{n-k+1}^{(n)}.$$

n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის შეგვიძლია ერთხელ და სამუდამოდ გამოვთვალოთ როგორც $\Pi_n(x)$ მრავალწევრის ნულები, ისე $C_k^{(n)}$ კოეფიციენტები.

მაგალითად, $n=1$ -თვის გვექნება $\Pi_1(x)=x$
 $x_1=0, C_1^{(1)}=1.$

$$n=2; \Pi_2(x) = \frac{2!}{(2 \cdot 2)!} \frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{3}(3x^2-1);$$

$$-x_1=x_2=\sqrt{\frac{1}{3}}=0,577350269; C_1^{(2)}=C_2^{(2)}=\frac{1}{2};$$

$$n=3; \Pi_3(x) = \frac{3!}{(2 \cdot 3)!} \frac{d^3}{dx^3}[(x^2-1)^3] = \frac{3!}{6!} 6 \cdot 4 \cdot (5x^3-3x);$$

$$-x_1=x_3=\sqrt{\frac{3}{5}}=0,774596669, x_2=0;$$

$$C_1^{(3)}=C_3^{(3)}=\frac{5}{18}, C_2^{(3)}=\frac{4}{9}.$$

4. გამოვთვალოთ გაუსის ფორმულის ცდომილება.

ვისარგებლოთ ნიუტონის განზოგადოებული საინტერპოლაციო ფორმულით.

ავაგოთ საინტერპოლაციო მრავალწევრი, რომელიც $\Pi_n(x)=0$ განტოლების ამონახსნებში $x_1, x_2, \dots, x_n$ ლებულობს $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ მნიშვნელობებს და ამავე წერტილებში მრავალწევრის წარმოებულები ტოლია $f'(x_1), f'(x_2), \dots, f'(x_n)$ -ის:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) + (x-x_1)f(x_1, x_2) + (x-x_1)^2 f(x_1, x_1, x_2) + \\ &+ (x-x_1)^2(x-x_2)f(x_1, x_1, x_2, x_2) + (x-x_1)^2(x-x_2)^2 f(x_1, x_1, x_2, x_2, x_2) + \\ &+ \dots + (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_n) f(x_1, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) + \\ &+ (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_n)^2 f(x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n), \end{aligned}$$

ანუ

$$f(x) = P_{2n-1}(x) + R(f), \quad (20)$$

სადაც $P_{2n-1}(x)$ $(2n-1)$ ხარისხის მრავალწევრია.

(20)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \sum_{i=1}^n A_i P_{2n-1}(x_i) + \int_{-1}^1 \Pi_n^2(x) f(x, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \int_{-1}^1 \Pi_n^2(x) f(x, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) dx. \end{aligned}$$

ამგვარად

$$R(f) = \int_{-1}^1 \Pi_n^2(x) f(x, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) dx.$$

რადგანაც $\Pi_n^2(x)$ ალბულის $[-1,1]$ შუალედში ნიშანს არ იცვლის, საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$R(f) = f(\xi_1, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) \int_{-1}^1 \Pi_n^2(x) dx, \quad -1 < \xi_1 < 1. \quad (21)$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრება, გვექნება

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Pi_n(x) \Pi_n(x) dx &= \int_{-1}^1 \Pi_n(x) d\varphi_1(x) = \\ &= [\Pi_n(x) \varphi_1(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \Pi_n'(x) \varphi_1(x) dx = - \int_{-1}^1 \Pi_n'(x) \varphi_1(x) dx, \end{aligned}$$

სადაც

$$\varphi_1(x) = \int_{-1}^x \Pi(x) dx, \quad \varphi_1(-1) = \varphi_1(1) = 0.$$

თუ ნაწილობით ინტეგრებას გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Pi_n(x) \Pi(x) dx &= - \int_{-1}^1 \Pi'(x) \varphi_1(x) dx = \int_{-1}^1 \Pi''(x) \varphi_2(x) dx = \\ &= \dots = (-1)^n \int_{-1}^1 \Pi^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx = (-1)^n n! \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx. \end{aligned} \quad (22)$$

ჩავსვათ $\varphi_n(x)$ -ის მნიშვნელობა,

$$\varphi_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} (x^2-1)^n,$$

და კვლავ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx &= \frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x+1)^n (x-1)^n dx = \frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x-1)^n \frac{d(x+1)^{n+1}}{n+1} = \\ &= \frac{n!}{(2n)!} \left[\frac{(x-1)^n (x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^1 - \frac{n!n}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} dx = \\ &= \frac{-n!n}{(2n)!(n+1)(n+2)} \int_{-1}^1 (x-1)^{n-1} d(x+1)^{n+2} = \\ &= \frac{(-1)^2 n!n(n-1)}{(2n)!(n+1)(n+2)} \int_{-1}^1 (x-1)^{n-2} (x+1)^{n+2} dx = \dots = \\ &= \frac{(-1)^n n!n!}{(2n)!(n+1) \dots 2n} \int_{-1}^1 (x+1)^{2n} dx = \\ &= \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!(n+1) \dots 2n} \left[\frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{(-1)^n (n!)^2}{[(2n)!]^2} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

ამ ფორმულის შედეგად (22) გამოსახულება მოგვცემს

$$\int_{-1}^1 \Pi^n(x) dx = (-1)^n n! \frac{(-1)^n (n!)^2}{[(2n)!]^2} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)} = \frac{(n!)^4 2^{2n+1}}{[(2n)!]^2 (2n+1)}.$$

გამოვიყენოთ ტოლობა

$$f(\xi_1, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad -1 < \xi < 1,$$

მაშინ (21) გამოსახულება მოგვცემს:

$$R(f) = \frac{(n!)^4 2^{2n+1}}{(2n)!^3 (2n+1)} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1. \quad (23)$$

ეს ფორმულა $n=1$ -თვის მოგვცემს

$$R_1 = \frac{1}{3} f''(\xi).$$

$n=2$ -თვის გვექნება

$$R_2 = \frac{(2!)^4 2^{2 \cdot 2+1}}{(4!)^3 (2 \cdot 2+1)} f^{IV}(\xi) = \frac{1}{135} f^{IV}(\xi)$$

და ა. შ.

5. გაუსის ფორმულისათვის შევადგინოთ მე-5 ცხრილი¹, სადაც n -ის მოცემული მნიშვნელობისათვის გვექნება როგორც კვანძითი წერტილები, ისე კოეფიციენტები და სათანადო შეფასებები. კვანძითი წერტილების სიმეტრიულობის გამო ამოწერილია უარყოფითი კვანძითი წერტილები. ასევე კოეფიციენტების მართო პირველი ნაწილია ამოწერილი.

ცხრილი 5

n	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0				
2	-0,577350269				
3	-0,774596669	0			
4	-0,861136312	-0,339981044			
5	-0,906179846	-0,538469310	0		
6	-0,932469514	-0,661209387	-0,238619186		
7	-0,949107912	-0,741531186	-0,405845151	0	
	$C_1^{(n)}$	$C_2^{(n)}$	$C_3^{(n)}$	$C_4^{(n)}$	R
1	1				$\frac{1}{3} f''(\xi)$
2	$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{135} f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$			$\frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi)$
4	0,173927423	0,326072577			$\frac{1}{3472875} f^{(8)}(\xi)$
5	0,118463443	0,239314335	0,284444444		$\frac{1}{1237732650} f^{(10)}(\xi)$
6	0,085662246	0,180380787	0,233956967		$\frac{1}{648984486150} \times f^{(12)}(\xi)$
7	0,064742483	0,130852696	0,190915025	0,208979582	$\frac{1}{47005019211500} \times f^{(14)}(\xi)$

¹ И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, М, 1966; стр. 183-199.

თუ გვაქვს არა $[-1, 1]$ შუალედი, არამედ $[a, b]$ შუალედი, მაშინ ჩასმა

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

მოგვცემს

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt.$$

გამოვიყენოთ უკანასკნელ ინტეგრალზე გაუსის ფორმულა, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} f(x_i),$$

სადაც

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i,$$

ხოლო t_i გაუსის კვანძითი წერტილებია $-1 < t < 1$ შუალედში. ნაშთით წევრს კი ექნება შემდეგი სახე

$$R = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} f^{(2n)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

როგორც მე-5 ცხრილი გვიჩვენებს i კოეფიციენტები და x_i კვანძითი წერტილები ბევრ ნიშნად ციფრებს შეიცავენ, ამიტომ გაუსის ფორმულით სარგებლობა ხელით გამოთვლების შემთხვევაში არაა ხელსაყრელი. გაუსის ფორმულებით უნდა ეისარგებლოთ მაშინ, როდესაც საჭიროა დიდი სიზუსტე და ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა არგუმენტის ბევრი მნიშვნელობებისათვის გაძნელებულია.

§ 11. ჩაბიშვების ფორმულები

პ. ლ. ჩებიშევიმა წამოაყენა მოსაზრება, რომ კვადრატურის ფორმულა

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n) + R(f) \quad (1)$$

ზუსტი იყოს ყველა $f(x) = P(x)$ მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი რაც შეიძლება მაღალია და კოეფიციენტები A_i , $i = 1, 2, \dots, n$

იყოს ურთიერთ ტოლი. ეს უკანასკნელი არსებითია, როდესაც $f(x_i)$ შეიცავს შემთხვევით ცდომილებებს. მაშინ გამოსახულებას

$$A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n),$$

სადაც

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

ფიქსირებულია, ექნება უმცირესი შემთხვევითი ცდომილება, თუ

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n.$$

(1) ფორმულა აღნიშნული მოთხოვნებით მოგვცემს

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] + R(f). \quad (2)$$

აქ განსაზღვრავი გვაქვს $n+1$ სიდიდე, ამიტომ $P(x)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი n -ზე ნაკლები არ უნდა იყოს:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = A[P_n(x_1) + P_n(x_2) + \dots + P_n(x_n)]:$$

ამ ფორმულიდან A ადვილი გამოსათვლელია. საკმარისია, ავიღოთ $P_n(x) \equiv 1$. გვექნება

$$\int_{-1}^1 dx = An,$$

საიდანაც

$$A = \frac{2}{n}.$$

ამის გამო (2) ტოლობა მოგვცემს

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = \frac{2}{n} [P_n(x_1) + P_n(x_2) + \dots + P_n(x_n)]. \quad (3)$$

ეს ტოლობა უნდა შესრულდეს ნებისმიერი n ხარისხის მრავალწევრისათვის,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

$P_n(x)$ -ის (3) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \dots \right) = \frac{2}{n} [(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n) + (a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_2^n) + \dots + (a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n)].$$

ეს ტოლობა უნდა შესრულდეს ნებისმიერი $a_0, a_1, \dots, a_n$ -ის მნიშვნელობისათვის, ამიტომ გვქვია

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 &= \frac{n}{3}, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3 &= 0, \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_n^4 &= \frac{n}{5}, \\ &\dots \dots \dots \\ x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots + x_n^n &= \frac{n[1 - (-1)^{n+1}]}{2(n+1)}. \end{aligned} \quad (4)$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან უნდა განვსაზღვროთ $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობანი. თუ $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (2) ფორმულაში, მივიღებთ ჩებიშევის ფორმულას

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] + R(f) \quad (5)$$

ამგვარად, ჩებიშევის ფორმულით სარგებლობისათვის საჭიროა ვიცოდეთ (4) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები.

ნაცვლად $x_1, x_2, \dots, x_n$ ამონახსნების მონახვისა, შევადგინოთ ის მრავალწევრი, რომლის ამონახსნებიც $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ია და შემდეგ მოვძებნოთ $x_1, x_2, \dots, x_n$.

ვთქვათ, საძიებელი მრავალწევრია

$$\begin{aligned} \Pi_n(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \\ &= x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n. \end{aligned} \quad (6)$$

მრავალწევრის კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის გავაწარმოოთ (6) გამოსახულება, მივიღებთ

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\Pi_n(x)}{x - x_i} \quad (7)$$

გამოვყავართ (7) გამოსახულების მარჯვენა მხარე, ამისათვის ცალკე გამოვყავართ

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_n(x)}{x - x_i} &= x^{n-1} + (A_1 + x_i) x^{n-2} + (A_2 + A_1 x_i + x_i^2) x^{n-3} + \dots + \\ &+ (A_{n-1} + A_{n-2} x_i + \dots + A_1 x_i^{n-2} + x_i^{n-1}). \end{aligned}$$

ამ გამოსახულების საფუძველზე (7) ტოლობა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} n x^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} + (n-2) A_2 x^{n-3} + \dots + A_{n-1} &= \\ = n x^{n-1} + (n A_1 + S_1) x^{n-2} + (n A_2 + A_1 S_1 + S_2) x^{n-3} + \\ + (n A_3 + A_2 S_1 + A_1 S_2 + S_3) x^{n-4} + \dots + \\ + (n A_{n-1} + A_{n-2} S_1 + A_{n-3} S_2 + A_{n-4} S_3 + \dots + A_1 S_{n-2} + S_{n-1}), \end{aligned}$$

სადაც

$$S_1 = \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \dots, S_{n-1} = \sum_{i=1}^n x_i^{n-1}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} (n-1) A_1 &= n A_1 + S_1, \\ (n-2) A_2 &= n A_2 + A_1 S_1 + S_2, \\ (n-3) A_3 &= n A_3 + A_2 S_1 + A_1 S_2 + S_3, \\ &\dots \dots \dots \\ A_{n-1} &= n A_{n-1} + A_{n-2} S_1 + A_{n-3} S_2 + \dots + A_1 S_{n-2} + S_{n-1}. \end{aligned}$$

გამარტივება მოგვცემს

$$\begin{aligned} A_1 + S_1 &= 0, \\ 2A_2 + A_1 S_1 + S_2 &= 0, \\ 3A_3 + A_2 S_1 + A_1 S_2 + S_3 &= 0, \\ 4A_4 + A_3 S_1 + A_2 S_2 + A_1 S_3 + S_4 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (4) ტოლობებს, გვქვია

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ 2A_2 + \frac{n}{3} &= 0, \\ A_3 &= 0, \\ 4A_4 + \frac{n}{3} A_2 + \frac{n}{5} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (8)$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან მიმდევრობით განვსაზღვრავთ $A_1, A_2, A_3 \dots$ კოეფიციენტებს.

(8) განტოლებათა სისტემიდან ცხადია, $A_1 = A_3 = \dots = 0$. ვთქვათ n კენტი, $n = 2k + 1$, მაშინ

$$\Pi_n(x) = x^{2k+1} + A_2 x^{2k-1} + \dots + A_{2k} x, \quad (9)$$

ხოლო, თუ n ლუწია, $n = 2k$, მაშინ

$$\Pi_n(x) = x^{2k} + A_2 x^{2k-2} + \dots + A_{2k}. \quad (10)$$

ამგვარად, თუ n ლუწია $\Pi_n(x) = 0$ განტოლების ამონახსნები წყვილწყვილად აბსოლუტურად ტოლია და ნიშნებით სხვადასხვაა. თუ n კენტი, მაშინაც ასეთივე მდგომარეობა გვაქვს, მაგრამ ემატება ამონახსნი $x = 0$.

მივცეთ n -ს სხვადასხვა მნიშვნელობანი.

$n = 1$. მაშინ (9)-დან მივიღებთ

$$\Pi_1(x) = x, \quad x = 0$$

გვექნება

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2f(0).$$

მივიღეთ ტრაპეციის ღია ტიპის კვადრატურის ფორმულა.

$n = 2$. მაშინ (8)-დან მივიღებთ

$$2A_2 + \frac{2}{3} = 0,$$

საიდანაც

$$A_2 = -\frac{1}{3};$$

$$\Pi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

$$-x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773503.$$

$n = 3$. მაშინ (8)-დან მივიღებთ

(3)

$$A_1 = 0,$$

$$2A_2 + \frac{3}{3},$$

$$A_3 = 0,$$

საიდანაც

$$A_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\Pi_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x = 0;$$

$$-x_1 = x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071068, \quad x_2 = 0.$$

$n = 4$. მაშინ (8)-დან მივიღებთ

$$2A_2 + \frac{4}{3} = 0,$$

$$4A_4 + \frac{4}{3}A_2 + \frac{4}{5} = 0.$$

საიდანაც

$$A_2 = -\frac{2}{3}, \quad A_4 = \frac{1}{45};$$

$$\Pi_4(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45} = 0,$$

$$-x_1 = x_4 = 0,794654, \quad -x_2 = x_3 = 0,187592.$$

ასევე, $n = 5$ -თვის მივიღებთ

$$2A_2 + \frac{5}{3} = 0, \quad 4A_4 + \frac{5}{3}A_2 + \frac{5}{5} = 0,$$

საიდანაც

$$A_2 = -\frac{5}{6}, \quad A_4 = \frac{7}{72};$$

$$\Pi_5(x) = x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{72}x = 0,$$

$$-x_1 = x_5 = 0,832498$$

$$-x_2 = x_4 = 0,347541;$$

$$x_3 = 0.$$

ჩებიშევის ფორმულების აბსცისები მოცემულია მე-6 ცხრილში.

ცხრილი 6

n	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
1	0				
2	0,577 350				
3	0,707 107	0			
4	0,794 654	0,187 592			
5	0,832 498	0,374 541	0		
6	0,866 247	0,422 519	0,266 635		
7	0,883 862	0,529 657	0,323 912	0	
8	0,911 589	0,610 019	0,528 762	0,167 906	0

სიმეტრიულობის გამო ცხრილში ამოწერილია მხოლოდ უარყოფითი აბსცისები. მაგალითად, $n=6$ -თვის

$$-x_1=x_6, \quad -x_2=x_5, \quad -x_3=x_4.$$

$n=7$ -თვის

$$-x_1=x_7, \quad -x_2=x_6, \quad -x_3=x_5, \quad x_4=0.$$

ს. 5. ბერნშტეინმა აჩვენა, რომ $n=8, n \geq 10$ $\Pi_n(x)=0$ განტოლებას აქვს კომპლექსური ამონახსნები და, მაშასადამე, ჩებიშევის ფორმულები არ შეიძლება გამოვიყენოთ $n=8$ და $n \geq 10$ -თვის.

თუ გვინდა ჩებიშევის ფორმულით ვისარგებლოთ $[a, b]$ შუალედისათვის, საჭიროა შევასრულოთ გარდაქმნა, როგორც ეს ზემოთ შევასრულეთ,

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t,$$

მაშინ

$$-1 \leq t \leq 1, \\ x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i,$$

სადაც t_i ჩებიშევის ფორმულების აბსცისებია $-1 \leq t \leq 1$ -თვის.

მაგალითად, გამოვთვალოთ

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \quad (= \pi).$$

ჩასმით

$$x = 1 + t, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad dx = dt,$$

მივიღებთ

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dt = \frac{2}{n} [f(x_1) + \dots + f(x_n)].$$

ავიღოთ $n=6$. გვექნება

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2}{6} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_6)].$$

გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} x_1 = 1 + t_1 = 1 - 0,8662 &= 0,1338 & x_1^2 &= 0,017902 \\ x_2 = 1 + t_2 = 1 - 0,4225 &= 0,5775 & x_2^2 &= 0,333506 \\ x_3 = 1 + t_3 = 1 - 0,2666 &= 0,7334 & x_3^2 &= 0,537876 \\ x_4 = 1 + t_4 = 1 + 0,2666 &= 1,2666 & x_4^2 &= 1,604276 \\ x_5 = 1 + t_5 = 1 + 0,4225 &= 1,4225 & x_5^2 &= 2,023501 \\ x_6 = 1 + t_6 = 1 + 0,8662 &= 1,8662 & x_6^2 &= 3,482702 \end{aligned}$$

$$\sqrt{4-x_1^2} = \sqrt{3,9821} = 1,9955$$

$$\sqrt{4-x_2^2} = \sqrt{3,6665} = 1,9148$$

$$\sqrt{4-x_3^2} = \sqrt{3,4623} = 1,8507$$

$$\sqrt{4-x_4^2} = \sqrt{2,3957} = 1,5478$$

$$\sqrt{4-x_5^2} = \sqrt{1,9765} = 1,4058$$

$$\sqrt{4-x_6^2} = \sqrt{0,5173} = 0,7197$$

$$9,4338$$

მივიღებთ

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = 3,14$$

2. შევადგათ ჩებიშევის ფორმულის ნაშთითი წევრი.

ვისარგებლოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულით

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\Pi_n(x)}{(x-x_i) \Pi'_n(x_i)} + \Pi_n(x) f(x, x_1, \dots, x_n), \quad (11)$$

სადაც

$$\Pi_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ჩებიშევის კვადრატურის ფორმულის აბსცისებია. (11)-დან მივიღებთ

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x)}{(x - x_i) \Pi'_n(x_i)} dx + R_n(f), \quad (12)$$

სადაც

$$R_n(f) = \int_{-1}^1 \Pi_n(x) f(x, x_1, x_2, \dots, x_n) dx. \quad (13)$$

ცხადია,

$$\int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x)}{(x - x_i) \Pi'_n(x_i)} dx = \frac{2}{n}.$$

გავამარტივოთ $R_n(f)$

განვიხილოთ შემთხვევა $n = 2m + 1$. მაშინ

$$\Pi_{2m+1}(x) = x(x^2 - x_1^2) \cdots (x^2 - x_m^2),$$

სადაც

$$-1 < -x_m < -x_{m-1} < \cdots < -x_1 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m < 1.$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_{-1}^{-x_m} \Pi_{2m+1}(x) dx = \int_{x_m}^1 \Pi_{2m+1}(x) dx.$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x) = \int_{-1}^x \Pi_{2m+1}(x) dx.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია ნიშანს არ იცვლის $[-1, 1]$ -ში

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0.$$

გამოვიყენოთ (13) გამოსახულებაში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა, მივიღებთ

$$\begin{aligned} R_{2m+1}(f) &= \int_{-1}^1 \varphi'(x) f(x, x_0, x_1, \dots, x_m) dx = \\ &= \left[\varphi(x) f(x, x_0, \dots, x_m) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \varphi(x) f(x, x, x_0, x_1, \dots, x_m) dx = \\ &= - \int_{-1}^1 \varphi(x) f(x, x, x_0, x_1, \dots, x_m) dx. \end{aligned}$$

გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა:

$$R_{2m+1} = -f(\xi, \xi, x_0, x_1, \dots, x_m) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx.$$

თუ გაყოფილ სხვაობას შევცვლით სათანადო წარმოებულთ, გვექნება

$$R_{2m+1} = -\frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^x \Pi_{2m+1}(t) dt.$$

შევცვალოთ ინტეგრების რიგი, მივიღებთ

$$R_{2m+1}(f) = -\frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \int_{-1}^1 dt \int_t^1 \Pi_{2m+1}(t) dx,$$

ანუ

$$R_{2m+1}(f) = -\frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \int_{-1}^1 \Pi_{2m+1}(x) (1-x) dx. \quad (14)$$

თუ $n = 2m$, მაშინ

$$\Pi_{2m}(x) = (x^2 - x_1^2) \cdots (x^2 - x_m^2).$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_{-1}^{-x_m} \Pi_{2m}(x) dx = - \int_{-x_m}^{-x_{m-1}} \Pi_{2m}(x) dx = \cdots = \int_{-x_1}^0 \Pi_{2m}(x) dx.$$

ამის გამო

$$\varphi(x) = \int_{-1}^x \Pi_{2m}(x) dx$$

აკმაყოფილებს პირობას

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 0.$$

ხოლო

$$\varphi_1(x) = \int_{-1}^x \varphi(x) dx$$

ნიშნის არ იცვლის $-1 \leq x \leq 1$ შუალედში და

$$\varphi_1(-1) = \varphi_1(1) = 0$$

ამის გამო (13) ფორმულა ორჯერ ნაწილობითი ინტეგრებით მოგვცემს

$$R_{2m}(f) = \int_{-1}^1 2f(x, x, x, x_1, -x_1, \dots, x_m) \varphi_1(x) dx,$$

საიდანაც საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$R_{2m}(f) = 2f(\xi, \xi, \xi, x_1, -x_1, \dots, x_m) \int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx,$$

ანუ

$$R_{2m}(f) = \frac{2f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx. \quad (15)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ $\varphi_1(x)$ -ის მნიშვნელობას, გვექნება

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^x \varphi(t) dt.$$

შევცვალოთ ინტეგრების რიგი, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx &= \int_{-1}^1 dt \int_t^1 \varphi(t) dx = \int_{-1}^1 (1-t) \varphi(t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 dt \int_{-1}^t (1-t) \Pi_{2m}(x) dx. \end{aligned}$$

კვლავ შევცვალოთ ინტეგრების რიგი, მივიღებთ

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx = \int_{-1}^1 dx \int_x^1 (1-t) \Pi_{2m}(x) dt = \int_{-1}^1 \Pi_{2m}(x) \frac{(1-x)^2}{2} dx.$$

ამის შედეგად (15) მოგვცემს

$$R_{2m}(f) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \int_{-1}^1 \Pi_{2m}(x) (1-x)^2 dx. \quad (16)$$

გამოვთვალოთ $R_n(f)$ n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. $n=1$.

(14) ფორმულაში ჩავსვათ $m=0$, მივიღებთ

$$R_1(f) = -\frac{f''(\xi)}{2!} \int_{-1}^1 x(1-x) dx = -\frac{f''(\xi)}{2!} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1.$$

საიდანაც

$$R_1(f) = \frac{1}{3} f''(\xi).$$

$n=3$. ავიღოთ (14) ფორმულა და ჩავსვათ $m=1$. მივიღებთ

$$R_3 = -\frac{f^{IV}(\xi)}{4!} \int_{-1}^1 \Pi_3(x) (1-x) dx,$$

სადაც

$$\Pi_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x.$$

გამოთვლები მოგვცემს

$$R_3 = \frac{1}{360} f^{IV}(\xi).$$

$n=5$. მივიღებთ

$$R_5 = -\frac{f^{VI}(\xi)}{6!} \int_{-1}^1 \Pi_5(x) (1-x) dx,$$

სადაც

$$\Pi_5(x) = x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{72}x.$$

გამოთვლები მოგვცემს

$$R_5 = \frac{13}{544 \cdot 320} f^{VI}(\xi).$$

$n=2$. ავიღოთ (16) ფორმულა და ჩავსვათ $m=1$, მივიღებთ

$$R_2 = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!} \int_{-1}^1 (1-x)^2 \Pi_2(x) dx, \quad \Pi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

გამოთვლები მოგვცემს

$$R_2 = \frac{1}{135} f^{IV}(\xi).$$

$n=4$ -თვის მივიღებთ

$$R_4 = \frac{f^{VI}(\xi)}{6!} \int_{-1}^1 \Pi_4(x) (1-x)^2 dx,$$

სადაც

$$\Pi_4(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45}.$$

გამოთვლები მოგვცემს

$$R_4 = \frac{2}{42 \cdot 525} f^{VI}(\xi).$$

$n=6$ -თვის მივიღებთ

$$R_6 = \frac{f^{VI}(\xi)}{8!} \int_{-1}^1 (1-x)^2 \Pi_6(x) dx,$$

სადაც

$$\Pi_6(x) = x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{105}.$$

გამოთვლები მოგვცემს

$$R_6 = \frac{1}{3 \cdot 969 \cdot 000} f^{VIII}(\xi).$$

სრულიად ასევე გამოვიყენოთ

$$R_7 = \frac{281}{1 \cdot 959 \cdot 552 \cdot 000} f^{VIII}(\xi), \quad R_9 = \frac{74 \cdot 747}{11 \cdot 200 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 1} f^{10}(\xi) = \frac{74 \cdot 747 f^{10}(\xi)}{1005 \cdot 651 \cdot 360 \cdot 000}.$$

§ 12. რიცხვითი ინტეგრირების პერიოდის ფორმულა

ვთქვათ, $P(x) > 0$ ფიქსირებული ფუნქციაა, შევადგინოთ რიცხვითი ინტეგრირების ფორმულა

$$\int_{-1}^1 p(x) f(x) dx = C_1^{(n)} f(x_1) + C_2^{(n)} f(x_2) + \dots + C_n^{(n)} f(x_n) + R(f), \quad (1)$$

სადაც $C_i^{(n)}$ მუდმივი კოეფიციენტებია, $x_1, x_2, \dots, x_n$ — კვადრატურის ფორმულის კვანძითი წერტილებით, რომლებიც $f(x)$ -ზე დამოუკიდებელია, $R(f)$ ნაშთითი წევრია.

$p(x)$ ფუნქციას წონითი ფუნქცია ეწოდება. თუ $p(x) \equiv 1$, გვექნება გაუსის ფორმულა. ამიტომ (1) ფორმულასაც გაუსის ფორმულა ეწოდება. თუ მოვითხოვთ, რომ $R(f)$ გახდეს ნულის ტოლი რაც შეიძლება მაღალი ნებისმიერი m ხარისხის მრავალწევრისათვის,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m,$$

მაშინ მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_0 \int_{-1}^1 p(x) dx + a_1 \int_{-1}^1 p(x) x dx + a_2 \int_{-1}^1 p(x) x^2 dx + \dots + a_m \int_{-1}^1 p(x) x^m dx = \\ = C_1^{(n)} [a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_1^m] + \\ + C_2^{(n)} [a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_m x_2^m] + \\ + \dots + C_n^{(n)} [a_0 + a_1 x_n + \dots + a_m x_n^m], \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\left. \begin{aligned} C_1^{(n)} + C_2^{(n)} + \dots + C_n^{(n)} &= \mu_0, \\ C_1^{(n)} x_1 + C_2^{(n)} x_2 + \dots + C_n^{(n)} x_n &= \mu_1, \\ \dots &\dots \\ C_1^{(n)} x_1^m + C_2^{(n)} x_2^m + \dots + C_n^{(n)} x_n^m &= \mu_m, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

სადაც

$$\mu_k = \int_{-1}^1 p(x) x^k dx. \quad (3)$$

მივიღოთ $(m+1)$ განტოლებათა სისტემა $2n$ უცნობთა, $C_1^{(n)}, \dots, C_n^{(n)}, x_1, \dots, x_n$, განსაზღვრავად. აქედან გამომდინარეობს, რომ m -ის უდიდესი მნიშვნელობა იქნება $2n-1$.

ისევე, როგორც მე-10 პარაგრაფში აღვნიშნეთ, (2) განტოლებათა სისტემის გამოკვლევა რთულია. ამიტომ ნაცვლად $x_1, x_2, \dots, x_n$ სიდიდეების განსაზღვრისა, ავაგებთ n ხარისხის მრავალწევრს

$$\Pi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

სადაც $x_1, x_2, \dots, x_n$ საძიებელი კვანძითი წერტილებია.

ისევე, როგორც მე-10 პარაგრაფში დავამტკიცეთ, აქაც შეგვიძლია დავამტკიცოთ: (1) ფორმულაში $R(f)$ რომ იყოს ნულის ტოლი ნებისმიერი არაუმეტეს $2n-1$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ კვანძითი წერტილები $x_1, x_2, \dots, x_n$ იყოს იმ $\Pi_n(x)$ მრავალწევრის ნულები, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\int_{-1}^1 p(x) \Pi_n(x) q(x) dx = 0, \quad (4)$$

სადაც $q(x)$ ნებისმიერი არაუმეტეს $n-1$ ხარისხის მრავალწევრია.

ამრიგად, (1) ფორმულის კვანძითი წერტილები იმ $\Pi_n(x)$ მრავალწევრის ნულებია, რომელიც $p(x)$ წონით ორთოგონალურია ნებისმიერი არაუმეტეს $n-1$ ხარისხის $q(x)$ მრავალწევრისა. ორთოგონალური მრავალწევრების აგების საკითხს ზოგადად არ შევეხებით. ქვემოთ განვიხილავთ ერთ კერძო შემთხვევას.

ვთქვათ, $\Pi_n(x)$ მრავალწევრი ავაგეთ. მაშინ $2n-2$ ხარისხის მრავალწევრისათვის $\left[\frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} \right]^2$ (1) ფორმულა ზუსტი იქნება:

$$\int_{-1}^1 p(x) \left[\frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} \right]^2 dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} \left[\frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} \right]^2_{x=x_i}.$$

მაგრამ

$$\left[\frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} \right]^2_{x=x_i} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } i \neq k, \\ (\Pi_n'(x_k))^2, & \text{თუ } i = k. \end{cases}$$

ამის გამო გვექნება

$$\int_{-1}^1 p(x) \left[\frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} \right]^2 dx = C_k^{(n)} (\Pi_n'(x_k))^2,$$

საიდანაც

$$C_k^{(n)} = \frac{\int_{-1}^1 p(x) \left[\frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} \right]^2 dx}{(\Pi_n'(x_k))^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

ცხადია, ყველა $C_k^{(n)}$ დადებითია.

სრულიად ისევე, როგორც მე-10 პარაგრაფში (21) ფორმულა მივიღეთ, გვექნება

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 p(x) \Pi_n^2(x) dx. \quad (6)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში

$$\Pi_n(x) = T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad (7)$$

სადაც $T_n(x)$ ჩებიშევის n ხარისხის მრავალწევრია (თ. XI, § 9).

ამისათვის საკმარისია შევამოწმოთ (4) ტოლობა x^k ფუნქციისთვის,

$$q(x) = x^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

ავიღოთ ინტეგრალი

$$\int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x) x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

და ჩავსვათ $x = \cos \varphi$, მივიღებთ

$$\int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x) x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^\pi \cos n\varphi \cos^k \varphi d\varphi.$$

მაგრამ აღვილი შესამოწმებელია, რომ $\cos^k \varphi$ გამოისახება $\cos i \varphi$ -ის ჯამით, $i = 0, 1, \dots, k$,

$$\cos^k \varphi = A_0 + A_1 \cos \varphi + \dots + A_k \cos k\varphi.$$

გვექნება

$$\int_0^\pi \cos n\varphi \cos i\varphi d\varphi = 0, \quad i \leq n-1.$$

მაშასადამე,

$$\int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x) x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

ამგვარად, $\Pi_n(x)$ ფუნქცია ჩებიშევის n ხარისხის პოლინომია. კვადრატურის ფორმულის აბსცისები იქნება

$$T_n(x) = 0$$

განტოლების ამონახსნები

$$x_{i-n+1}^{(n)} = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

გამოეთვალეთ $C_i^{(n)}$ კოეფიციენტთა მნიშვნელობანი.

წინასწარ გამოეთვალეთ μ_k -ს მნიშვნელობანი (3) ფორმულით.

$$\mu_0 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi;$$

$$\mu_1 = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0;$$

$$\mu_2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

ზავსეთ $x = \cos \varphi$, მაშინ

$$\mu_2 = \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$\mu_3 = \int_{-1}^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

რადგანაც ინტეგრალქვეშ კენტი ფუნქციაა.

$$\mu_4 = \int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

ზავსით $x = \cos \varphi$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \int_0^\pi \cos^4 \varphi d\varphi = \int_0^\pi \left[\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right]^2 d\varphi = \int_0^\pi \frac{1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4} d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \frac{1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2}}{4} d\varphi = \frac{3\pi}{8}; \end{aligned}$$

$$\mu_5 = 0;$$

$$\mu_6 = \int_0^\pi \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{5}{8} \pi, \quad \mu_7 = 0 \quad \text{და ა. შ.}$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ -ის მიმართ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n &= \pi, \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + \dots + C_n x_n &= 0, \\ C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + C_3 x_3^2 + \dots + C_n x_n^2 &= \frac{\pi}{2}, \\ C_1 x_1^3 + C_2 x_2^3 + C_3 x_3^3 + \dots + C_n x_n^3 &= 0, \\ C_1 x_1^4 + C_2 x_2^4 + C_3 x_3^4 + \dots + C_n x_n^4 &= \frac{3\pi}{8}, \\ C_1 x_1^5 + C_2 x_2^5 + C_3 x_3^5 + \dots + C_n x_n^5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ჩებიშევის მრავალწევრების

$$T_1 = x,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (2x^2 - 1),$$

$$T_3 = \frac{1}{2^2} (4x^3 - 3x),$$

$$T_4 = \frac{1}{2^3} (8x^4 - 8x^2 + 1),$$

$$T_5 = \frac{1}{2^4} (16x^5 - 80x^3 + 5x),$$

$$T_6 = \frac{1}{2^5} (32x^6 - 24x^4 + 18x^2 - 1),$$

$$\dots$$

ამონახსნების თვისებას, (9) განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = \frac{\pi}{n}.$$

ამგვარად (1) ფორმულა მოგვცემს

$$\int_{-1}^1 P(x) f(x) dx = \frac{\pi}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] + R(f), \quad (10)$$

სადაც $x_1, x_2, \dots, x_n$ ჩებიშევის n ხარისხის მრავალწევრის ნულებია

$$x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

(10) ფორმულას, რომელიც გაუსის ფორმულის კერძო შემთხვევაა, ეწოდება რიცხვითი ინტეგრების ჰერმიტის ფორმულა. (10) ფორმულის ნაშთითი წევრი იქნება

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{\cos(n \arccos x)}{2^{n-1}} \right]^2 dx. \quad (12)$$

თუ კიდევ გავამარტივებთ, მივიღებთ

$$R(f) = \frac{\pi}{(2n)! 2^{n-1}} f^{(2n)}(\xi), \quad (13)$$

§ 18. არასაკუთრივი ინტეგრალების მიახლოებით გამოთვლა

შევისწავლოთ არასაკუთრივი ინტეგრალების მიახლოებით გამოთვლის მეთოდები. ვიდრე არასაკუთრივი ინტეგრალის გამოთვლას დავიწყებდეთ, წინასწარ უნდა დავრწმუნდეთ ალღებული არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობაში.

არასაკუთრივი ინტეგრალი, უსასრულო საზღვრებით ცვლადთა გარდაქმნით, ყოველთვის შეგვიძლია მივიყვანოთ არასაკუთრივ (ზოგჯერ საკუთრივ) ინტეგრალზე სასრული საზღვრებით. ზოგჯერ კი არასაკუთრივი ინტეგრალი უსასრულო საზღვრებით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ისეთი ორი ინტეგრალის ჯამად, რომ ერთი ინტეგრალი იყოს ინტეგრალი სასრული საზღვრებით, ხოლო მეორე — წინასწარ ალღებულ სათანადო რიცხვზე ნაკლები. ცხადია, პირველი ინტეგრალი შეგვიძლია გამოვთვალოთ სათანადო კვადრატურის ფორმულებით. ასე რომ, არასაკუთრივი ინტეგრალი უსასრულო საზღვრებით შეგვიძლია წინასწარ მოცემული სიზუსტით გამოვთვალოთ. ამის გამო არასაკუთრივ ინტეგრალზე უსასრულო საზღვრებით არ შევჩერდებით.

შევჩერდეთ სასრული საზღვრებით არასაკუთრივი ინტეგრალის გამოთვლაზე.

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

სადაც $f(x)$ ფუნქცია განიციდის უსასრულო წვეტას $[a, b]$ შუალედის ერთ ან რამდენიმე წერტილში.

წარმოვადგინოთ $f(x)$ ფუნქცია ნამრავლის სახით

$$f(x) = \varphi(x) p(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ შუალედში საკმარისად მაღალი რიგის უწყვეტი წარმომადგენელი აქვს, ხოლო $p(x) > 0$. ფუნქცია $p(x)$ განვიხილოთ როგორც წონადი ფუნქცია, მაშინ I ინტეგრალი შეგვიძლია გამოვთვალოთ კვადრატურის ჩვეულებრივი ფორმულებით, სადაც საინტეგრაციო ფუნქცია $f(x)$ ფუნქცია იქნება.

მაგალითად, გამოვთვალოთ

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x+x^2}{1-x}} dx. \quad (2)$$

ეს ინტეგრალი ასე გადავწეროთ:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1+x^3} dx.$$

გამოვიყენოთ ჰერმიტის ფორმულა $n=5$ -თვის გვექნება

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^3} dx = \frac{\pi}{5} \sum_{i=1}^5 \sqrt{1+x_i^3},$$

სადაც x_i ჩებიშევის მეხუთე ხარისხის მრავალწევრის ნულებია:

$$-x_1 = x_5 = 0,832498; \quad -x_2 = x_4 = 0,374541; \quad x_3 = 0.$$

გამოვთვალოთ მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x_1^3} &= \sqrt{1-0,8325^3} = \sqrt{1-0,57697} = \sqrt{0,42303} = 0,64038; \\ \sqrt{1+x_2^3} &= \sqrt{1-0,3745^3} = \sqrt{1-0,05252} = \sqrt{0,94748} = 0,97340; \\ + \sqrt{1+x_3^3} &= \sqrt{1-0^3} = 1; \\ \sqrt{1+x_4^3} &= \sqrt{1-x_2^3} = \sqrt{1+0,05252} = \sqrt{1,05252} = 1,02591; \\ \sqrt{1+x_5^3} &= \sqrt{1-x_1^3} = \sqrt{1+0,57697} = \sqrt{1,57697} = 1,20558 \\ &\quad 4,84527 \\ &\quad \times \frac{\pi}{5} = 0,62831 \\ &\quad 29,44249 \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x+x^2}{1-x}} dx \approx 29,442, \quad (3)$$

ცდომილება მიღებულ (3) მნიშვნელობაში მე-3 ათწილად ნიშანშია. ცდომილება არ აღემატება 0,0005-ს.

ზოგჯერ შესაძლებელია ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $f(x)$ წარმოვადგინოთ ისეთი ორი ფუნქციის ჯამით

$$f(x) = g(x) + \psi(x), \quad (4)$$

სადაც $g(x)$ ფუნქციას არ აქვს განსაკუთრებულობა და აქვს მაღალი

რიგის უწყვეტი წარმოებული, ხოლო $\int_a^b \psi(x) dx$ შეიძლება გამოვ-

თვალოთ ინტეგრალური აღრიცხვის ზუსტი მეთოდებით.

იმისათვის, რომ წარმოვადგინოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია (4) სასარგებლო ჯამით, მოვიხმაროთ ლ. ვ. კანტოროვიჩის ხერხი¹. ავაგოთ ისეთი ელემენტარული ფუნქცია, რომელსაც ისეთივე განსაკუთრებულობა აქვს, რაც $f(x)$ ფუნქციას. თუ $f(x)$ ფუნქციას გამოვაცლებთ ავებულ ელემენტარულ ფუნქციას, მივიღებთ ფუნქციას, რომელსაც აღარ ექნება განსაკუთრებულობა. აღნიშნულ ელემენტარულ ფუნქციად შეგვიძლია ავიღოთ ტეილორის მწკრივის მონაკვეთი.

ეთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას აქვს სახე

$$f(x) = (x-c)^\sigma \varphi(x),$$

სადაც $0 > \sigma > -1$, $c \in [a, b]$. $\varphi(x)$ ფუნქცია შეიძლება გავშალოთ $[a, b]$ მონაკვეთზე c წერტილის მახლობლობაში ტეილორის მწკრივად:

$$\varphi(x) = \varphi(c) + (x-c)\varphi'(c) + \frac{(x-c)^2}{2!}\varphi''(c) + \dots + \frac{(x-c)^k}{k!}\varphi^{(k)}(c) + R,$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ (4) ჯამით, სადაც

$$g(x) = \varphi(c)(x-c)^\sigma + \frac{\varphi'(c)}{1!}(x-c)^{\sigma+1} + \frac{\varphi''(c)}{2!}(x-c)^{\sigma+2} + \dots + \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{\sigma+k},$$

$$\psi(x) = (x-c)^\sigma \left[\varphi(x) - \varphi(c) - \frac{\varphi'(c)}{1!}(x-c) - \dots - \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \right].$$

პირველი $g(x)$ ფუნქცია ხარისხოვანი ფუნქციაა და ადვილად გამოითვლება ამ ფუნქციის ინტეგრალი. მეორე $\psi(x)$ ფუნქცია ნულას

¹ Л. В. Канторович, О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей, Матем. сб. т. 41, 1934, 235-245.

ტოლი ხდება c წერტილზე როგორც თვით, ისე მისი წარმოებულები k რიგის ჩათვლით. მაშასადამე, $\psi(x)$ ფუნქციის არ აქვს განსაკუთრებულობა და მისი ინტეგრება შეიძლება მექანიკური კვადრატურის ფორმულებით.

განსაკუთრებულობის გამოყოფის ეს ხერხი ადვილად განზოგადოვდება

$$f(x) = (x-c_1)^{\sigma_1} (x-c_2)^{\sigma_2} \dots (x-c_n)^{\sigma_n} \varphi(x)$$

ფუნქციისათვის, სადაც $0 > \sigma_i > -1$, $c_i \neq c_j$, $c_i \in [a, b]$ და $\varphi(x)$ ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს ტეილორის მწკრივად $[a, b]$ შუალედში. ამისთვის ჯერ გამოვყოთ განსაკუთრებულობა c_1 წერტილში:

$$f(x) = (x-c_1)^{\sigma_1} [a_0^{(1)} + a_1^{(1)}(x-c_1) + \dots + a_{k_1}^{(1)}(x-c_1)^{k_1}] + \psi_1(x),$$

სადაც $\psi_1(x)$ ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს ტეილორის მწკრივად c_1 წერტილის მახლობლობაში. $\psi_1(x)$ ფუნქციიდან გამოვყოფთ განსაკუთრებულობას c_2 წერტილში,

$$\psi_1(x) = (x-c_2)^{\sigma_2} [a_0^{(2)} + a_1^{(2)}(x-c_2) + \dots + a_{k_2}^{(2)}(x-c_2)^{k_2}] + \psi_2(x),$$

სადაც $\psi_2(x)$ ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს ტეილორის მწკრივად c_2 წერტილის მახლობლობაში. ასევე ავაგებთ $\psi_3(x)$ ფუნქციას. ამ პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} (x-c_j)^{\sigma_j+i} + \psi_n(x), \quad (5)$$

სადაც $\psi_n(x)$ ფუნქციას არ აქვს განსაკუთრებულობა $[a, b]$ სეგმენტზე.

§ 14. გრაფიკული ინტეგრება

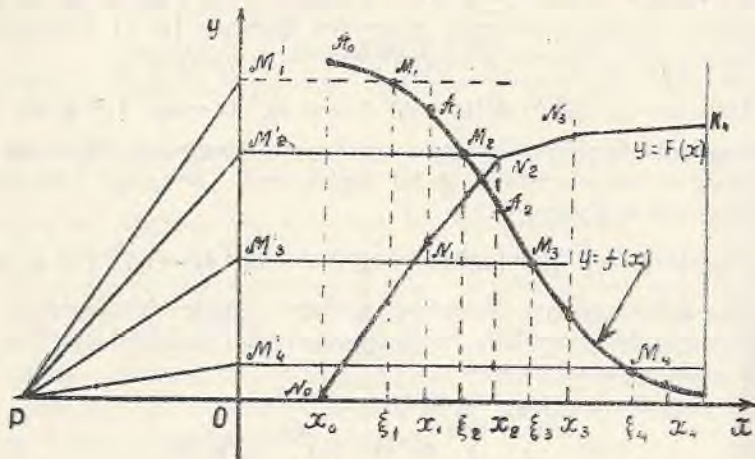
ზოგჯერ გვჭირდება ინტეგრალის $\int_{x_0}^x f(x) dx$ გამოთვლა ზედა სა-

ზღვრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. ამ შემთხვევაში შეიძლება ვისარგებლოთ გრაფიკული ინტეგრების მეთოდით. ამ მეთოდის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ავაგოთ ისეთი $y = F(x)$ წირი, რომლის ორდინატები x_k წერტილებში, $k = 1, 2, \dots$, ტოლია ან პროპორციულია მოცემული ინტეგრალის მნიშვნელობისა x_k წერტილებში:

$$F(x_k) = \int_{x_0}^{x_k} f(x) dx, \quad x_k > x_0. \quad (1)$$

როგორც ვიცი (1) ინტეგრალი გამოსახავს იმ ფიგურის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, Ox ღერძით, $x=x_0$ და $x=x_k$ წრფეებით. ამის შედეგად (1) ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ისეთი $Y=F(x)$ წირის აგებმაზე, რომლის ორდინატები x_k წერტილებში პროპორციულია (1) ინტეგრალით განსაზღვრული ფართობებისა.

$Y=F(x)$ წირის მიახლოებით აგებისათვის დავყოთ $y=f(x)$ წირით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეცია (ნახ. 10) ვიწრო ზოლებად



ნახ. 10

(ტრაპეციებად) $x_0 x_1 A_1 A_0, x_1 x_2 A_2 A_1, \dots$ შევცვალოთ (შეძლებისდაგვარად) ეს ზოლები მათი ტოლიდრი მართკუთხედებით, რომელთაც ფუძეებად ისევ $x_0 x_1, x_1 x_2, \dots$ მონაკვეთები ექნებათ. ე. ი.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}),$$

$f(\xi_k)$ მნიშვნელობანი გადავიტანოთ ორდინატთა ღერძზე

$$OM'_k = f(\xi_k), \quad k=1, 2, \dots$$

$Y=F(x)$ წირის აგებას შემდეგნაირად შევასრულებთ.

ავილოთ x_0 წერტილი, ცხადია,

$$F(x_0)=0.$$

შემდეგ ავილოთ x_1 წერტილი და ამ წერტილში აღვმართოთ ორდინატი $F(x_1)$, რომელიც ტოლი იქნება $f(\xi_1) (x_1 - x_0)$. ამისათვის საკმარისია Ox ღერძზე, ავილოთ P წერტილი, $OP=1$ და შევეერთოთ P წერტილი M'_1

წერტილთან. $N_0 \equiv x_0$ წერტილიდან გავატაროთ PM'_1 -ის პარალელური წრფე $x=x_1$ წრფის გადაკვეთამდე. მიღებული N_1 წერტილი სწორედ $F(x)$ -ის წერტილია, სადაც $x=x_1$. მართლაც,

$$x_1 N_1 = (x_1 - x_0) \frac{OM'_1}{OP} = (x_1 - x_0) f'(\xi_1).$$

სრულიად ასევე N_1 წერტილიდან გავატაროთ PM'_2 -ის პარალელური $x=x_2$ წრფის გადაკვეთამდე, მივიღებთ N_2 წერტილს,

$$x_2 N_2 = (x_2 - x_1) \frac{OM'_2}{OP} = (x_2 - x_1) f'(\xi_2)$$

და ა. შ. აგავებთ $N_3, N_4, \dots, N_n$ წერტილებს.

ტეხილი $N_0 N_1 N_2 \dots N_n$ იძლევა $y=F(x)$ წირის მიახლოებით მნიშვნელობას. ტეხილის სიზუსტის გასაზრდელად აუცილებლად უნდა ჩავრთოთ $[a, b]$ შუალედში სიანტეგრაციო ფუნქციის ნულები, გადაღუნვის და ექსტრემუმის წერტილები.

გრაფიკული ინტეგრება საზოგადოდ ნაკლებად ზუსტია, ამიტომ გრაფიკული ინტეგრება სასარგებლოა მაშინ გამოვიყენოთ, როდესაც საჭიროა $F(x)$ ფუნქციაზე საერთო წარმოდგენა გვექონდეს, ანდა $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია გრაფიკულად და მისი ანალიზური სახე არაა ცნობილი.

§ 15. შენიშვნები კვადრატურის ფორმულების შესახებ

1. ზემოთ მიღებულ კვადრატურის ფორმულების ზოგადი სახეა

$$\int_a^b f(x) dx \approx C_1^{(n)} f(x_1^{(n)}) + C_2^{(n)} f(x_2^{(n)}) + \dots + C_n^{(n)} f(x_n^{(n)}).$$

ასე რომ, ყოველ $\int_a^b f(x) dx$ -ს შეესაბამება მიმდევრობა

$$L_n(f) = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} f(x_i^{(n)}),$$

სადაც $C_i^{(n)}$ აირჩევა

$$\begin{matrix} C_1^{(1)} \\ C_1^{(2)}, C_2^{(2)} \\ C_1^{(3)}, C_2^{(3)}, C_3^{(3)} \\ \dots \end{matrix}$$

უსასრულო სამკუთხა მატრიციდან, ხოლო $x_i^{(n)}$ აირჩევა მეორე უსასრულო მატრიციდან

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)} \end{matrix}$$

$x_i^{(n)} \in [a, b]$.

ცხადია, აქ დაისმება საკითხი. რა პირობები უნდა დაედგას $C_i^{(n)}$ და $x_i^{(n)}$ სიდიდეებს, რომ ნებისმიერი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

ვაჩვენოთ, რომ ზემოაღნიშნული შემდეგი

თეორემა: თუ (1) ტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი მრავალწევრისათვის და ნებისმიერი n -თვის

$$\sum_{i=1}^n |C_i^{(n)}| < M, \quad (2)$$

სადაც M სასრული სიდიდეა, მაშინ (1) ტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი $[a, b]$ შუალედში უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის.

ვისარგებლოთ ვაიერშტრასის თეორემით (თ. XI, § 11) $[a, b]$ შუალედში ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის: ყოველი $\varepsilon > 0$ -სათვის შეიძლება მოიხაზოს ისეთი $P_n(x)$ მრავალწევრი, რომ $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ ყოველი $x \in [a, b]$.

განვიხილოთ სხვაობა

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - L_n(f) &= \int_a^b [f(x) - P_n(x)] dx + \left[\int_a^b P_n(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - L_n(P_n) \right] = L_n(f - P_n). \end{aligned} \quad (3)$$

ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის შეგვიძლია ისეთი ნატურალური რიცხვი N ავიღოთ, რომ $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$, როცა $x \in [a, b]$ და $n > N$. ამის გამო

$$\left| \int_a^b [f(x) - P_n(x)] dx \right| < \varepsilon(b-a).$$

ასევე,

$$L_n(f - P_n) = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} [f(x_i) - P_n(x_i)]$$

(2) პირობის საფუძველზე მოგვცემს:

$$|L_n(f - P_n)| < \varepsilon M.$$

რადგანაც (1) ტოლობა მართებულია ნებისმიერი მრავალწევრისათვის, ამიტომ

$$\left| \int_a^b P_n(x) dx - L_n(P_n) \right| < \varepsilon.$$

ამ უტოლობათა საფუძველზე (3) ტოლობა მოგვცემს

$$\left| \int_a^b f(x) dx - L_n(f) \right| < \varepsilon[(b-a) + 1 + M], \quad \forall n > N_n\text{-სათვის,}$$

რაც გამოთქმული თეორემის მართებულობას გვიჩვენებს.

თეორემაში ჩამოთვლილი პირობები აუცილებელი პირობაცაა¹.

თეორემის (1) პირობას ადგილი აქვს ყველა მრავალწევრისთვის, ე. ი. ყველა მრავალწევრისათვის ზემოთ მიღებული კვადრატურის ფორმულები კრებად მიმდევრობას იძლევა. თუ $f(x) \equiv 1$, მაშინ

$$\sum_{i=1}^n C_i^{(n)} = \int_a^b dx = b - a.$$

აქედან, ცხადია, რომ (2) პირობა შესრულდება, თუ ყველა $C_i^{(n)}$ კოეფიციენტი დადებითია:

$$\sum_{i=1}^n C_i^{(n)} = b - a < M.$$

ამის გამო მივიღებთ, რომ ის კვადრატურის ფორმულა იძლევა კრებად $L_n(f)$ მიმდევრობას, რომლის კოეფიციენტებიც დადებითია. ასეთია გაუსის ფორმულები. ამგვარად, გაუსის ფორმულები ყოველთვის იძლევა კრებად $L_n(f)$ მიმდევრობას.

¹ იხ. И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, М. 1966; 33. 215.

ვიცით, რომ ნიუტონ-კოტესის ფორმულებში კოეფიციენტები n -ის შანს იცვლიან, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ნიუტონ-კოტესის ფორმულებისთვის (2) პირობა არ სრულდება. ჩებიშევის ფორმულისთვის კი კრებადობის საკითხის დასმა არ შეიძლება, რადგანაც $n=8$, $n \geq 10$ ჩებიშევის ფორმულები არ არსებობს.

2. n -ის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის, ტოლად დაშორებული კვანძით წერტილებისათვის მივიღეთ სხვადასხვა ფორმულა. ასეთია ტრაპეციის ($n=1$), სიმპსონის ($n=2$) და ნიუტონ-კოტესის მაღალი რიგის ფორმულები. n -ის ფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის მივიღეთ აგრეთვე ტოლკოეფიციენტებიანი ფორმულები, მაგალითად, ჩებიშევის, ჰერმიტის, ასევე შეგვიძლია მივიღოთ n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის გაუსის ფორმულები. ბუნებრივია დავსვათ კითხვა, რომელი კვადრატურის ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ ამა თუ იმ კერძო შემთხვევაში?

ამ კითხვის პასუხი დამოკიდებულია მთელ რიგ გარემოებაზე: ინტეგრალქვეშ ფუნქციის მოცემის ხერხზე, ინტეგრალქვეშა ფუნქციის თვისებებზე, მოთხოვნილ სიზუსტეზე, გამოთვლების საშუალებებზე და სხვ.

თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ცხრილითაა მოცემული, მაშინ ის კვადრატურის ფორმულა ავიღოთ, რომელშიც ფუნქციის მოცემული მნიშვნელობები გამოიყენება. თუ ფუნქცია მოცემულია გრაფიკულად ან აქვს შემთხვევითი ცდომილებანი, მაშინ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ტოლკოეფიციენტიანი კვადრატურის ფორმულები, რადგანაც ფუნქციის მნიშვნელობათა წრფივ ჯამს ექნება უმცირესი შემთხვევითი ცდომილება.

თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას არა აქვს მაღალი რიგის წარმოებულობა, მაშინ არა აქვს აზრი გამოვიყენოთ ის კვადრატურის ფორმულა, რომლის ნაშთითი წევრიც უფრო მაღალი რიგის წარმოებულს შეიცავს, ვიდრე მოცემულ ფუნქციას აქვს.

თუ კარგად გავარჩევთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ყოფაქცევას $[a, b]$ შუალედის ყველა უბანზე, მაშინ $[a, b]$ შუალედი დავყოთ ისეთ ქვეშუალედებად, სადაც თითოეული ქვეშუალედისათვის შეგვეძლება ისეთი კვადრატურის ფორმულა გამოვიყენოთ, რომელიც უფრო კარგ შედეგს ნაკლები გამოთვლებით მოგვცემს.

თუ ხელით ვაწარმოებთ გამოთვლებს, მაშინ უმჯობესია უფრო მარტივი — მცირე რაოდენობის კოეფიციენტებიანი კვადრატურის ფორმულებით ვისარგებლოთ. თუ გამოთვლებს თანამედროვე ავტომატური ციფრულა მანქანებით ვაწარმოებთ, მაშინ $[a, b]$ შუალედის სხვადასხვა უბანზე სხვადასხვა ფორმულის გამოყენება არაა სასურველი, რადგანაც, მაშინ რთულდება სათანადო პროგრამის შედგენა.

3. კვადრატურის ფორმულების შეფასებით უნდა ვიმსჯელოთ ფორ-

მულების უპირატესობაზე. $R(f) = O(h^n)$, $h = \frac{b-a}{n}$. როგორც ვიცით ტრაპეციის ფორმულის ცდომილება განისაზღვრება ტოლობით

$$R(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi),$$

სიმპსონის ფორმულის ცდომილებაა

$$R(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

ცხადია, სიმპსონის ფორმულა უფრო ზუსტია, რადგანაც სიმპსონის ფორმულისთვის

$$R(f) = O(h^4),$$

ხოლო ტრაპეციის ფორმულისთვის

$$R(f) = O(h^2).$$

ფორმულის უპირატესობა გამოჩნდება მაშინ, როდესაც h საკმარისად მცირეა.

აქედან სრულებით არ გამომდინარეობს, რომ შედარებით ნაკლებად ზუსტი კვადრატურის ფორმულას არ შეუძლია მოგვცეს ზოგიერთ კონკრეტულ შემთხვევაში უფრო უკეთესი შედეგი, ვიდრე ზუსტ ფორმულას.

მაგალითად, ავიღოთ¹

$$f(x) = -8 + 45x^2 - 25x^4$$

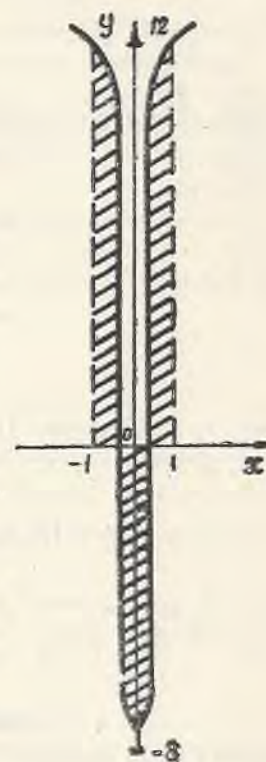
(ნახ. 11). გამოვთვალოთ

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2(-8 + 15 - 5) = 4.$$

ტრაპეციის ფორმულით $h=1$ -თვის მივიღებთ

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = h \left[\frac{f(-1)}{2} + f(0) + \frac{f(+1)}{2} \right] = 6 - 8 + 6 = 4.$$

¹ Б. П. Демидовичи И. А. Марон, Основы вычислительной математики, М. 1963, гл. 605.



ნახ. 11

სიმბსონის ფორმულით გვექნება

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)] = \frac{1}{3} [12 - 32 + 12] = -\frac{8}{3}.$$

რაც ზუსტი მნიშვნელობის ნიშანსაც ვერ იძლევა.

კვადრატურის ფორმულის სიზუსტე, რომელშიც ფიქსირებულია კვანძითი წერტილების რაოდენობა, არსებითად დამოკიდებულია კვანძითი წერტილების განლაგებაზე. თუ კვანძითი წერტილები სათანადოდ არაა განლაგებული, შეიძლება უფრო ზუსტმა ფორმულამ უფრო ცუდი შედეგი მოგვცეს.

კვადრატურის ფორმულით გამოთვლილი შედეგის ცდომილება განისაზღვრება არა მარტო $R(f)$ ნაშთითი წევრით, არამედ მას უნდა დაემატოს შეჯამების ცდომილება

$$R_1 = \sum_{i=1}^n C_i \varepsilon_i,$$

სადაც ε_i წარმოადგენს $f(x_i)$ -ის ცდომილებას. თუ ε ამ ცდომილებიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით უდიდესია, მაშინ

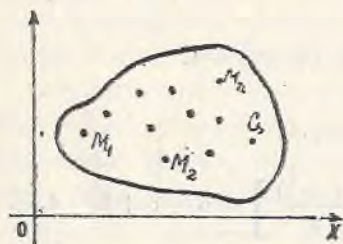
$$|R_1| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n C_i = \varepsilon (b-a).$$

ასე რომ, კვადრატურის ფორმულით მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობის ცდომილება იქნება

$$|R(f)| + |R_1|.$$

§ 16. რიცხვითი კუბატურის ფორმულები

ავიღოთ $f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია და უწყვეტია რაიმე G არეში (ნახ. 12). ვთქვათ, უნდა გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალი



ნახ. 12

შევიჩერდეთ რიცხვითი კუბატურის ზოგიერთ მეთოდზე.

$$\iint_G f(x, y) dx dy.$$

ფორმულებს, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება ორჯერადი ინტეგრალის რიცხვითი მნიშვნელობა, ეწოდება რიცხვითი კუბატურის ფორმულები.

1. G არეში ავიღოთ წერტილთა სიმრავლე $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალი, დავუშვათ რაიმე A_i რიცხვებისათვის

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N A_i f(x_i, y_i) \quad (1)$$

ტოლობა ჭეშმარიტია ყველა იმ ორცვლადიანი მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება მოცემულ n -ს,

$$f(x, y) = P_n(x, y) = \sum_{k+j \leq n} b_{kj} x^k y^j.$$

შევიტანოთ $f(x, y) = x^k y^j$ (1) ტოლობაში. მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^N A_i x_i^k y_i^j = \iint_G x^k y^j dx dy = I_{kj}, \quad k + j \leq n.$$

ამრიგად, იმ A_i , $i = 1, 2, \dots, N$, კოეფიციენტების მიმართ, რომელთა საფუძველზედაც შედგენილია (1) ტოლობა, გვექნება წრფივი განტოლებათა სისტემა

$$\sum_{i=1}^N A_i x_i^k y_i^j = I_{kj}, \quad k, j = 0, 1, \dots, n, \quad k + j \leq n. \quad (2)$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან რომ განისაზღვროს A_i კოეფიციენტები, აუცილებელია, A_i კოეფიციენტთა რიცხვი N იყოს განტოლებათა რიცხვის ტოლი,

$$N = 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

ცხადია, აქ ლიად რჩება ძნელი საკითხი მოცემული G არიდან წერტილების რაციონალურად არჩევის შესახებ.

განვიხილოთ შემთხვევები: $n = 1$. შევადგინოთ ფორმულა

$$\int_0^h \int_0^h f(x, y) dx dy = A_1 f(0, 0) + A_2 f(h, 0) + A_3 f(0, h), \quad (3)$$

რომელიც ზუსტია n მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება 1-ს. ჩავსვათ (3) ფორმულაში მიმდევრობით $P_n(x, y) = 1, x, y$. მივიღებთ

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= h^2, \\ A_2 h &= \frac{h^3}{2}, \\ A_3 h &= \frac{h^3}{2}, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$A_1 = 0, A_2 = A_3 = \frac{h^2}{2}.$$

ამრიგად, გვექნება ფორმულა

$$\int_0^h \int_0^h f(x, y) dx dy = \frac{h^2}{2} (f(0, h) + f(h, 0)). \quad (4)$$

ახლა ავიღოთ $n=2$. შევადგინოთ ფორმულა

$$\begin{aligned} \int_0^{2h} \int_0^{2h} f(x, y) dx dy &= A_1 f(0, 0) + A_2 f(2h, 0) + A_3 f(2h, 2h) + \\ &+ A_4 f(0, 2h) + A_5 f(h, h). \end{aligned}$$

ამ ფორმულაში ჩავსვათ:

$$P_n(x, y) = 1, x, y, xy, x^2, y^2.$$

მიღებულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მოგვცემს

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \frac{h^2}{3}, \quad A_5 = \frac{8h^2}{3}.$$

გვექნება

$$\int_0^{2h} \int_0^{2h} f(x, y) dx dy = \frac{h^2}{3} (f(0, 0) + f(2h, 0) + f(2h, 2h) + f(0, 2h) + 8f(h, h)). \quad (5)$$

ასევე შეგვიძლია n -ის სხვა მნიშვნელობისათვის კუბატურის სხვა ფორმულების აგება. აქ, ყველგან, ღიადაა საკითხი წერტილთა ოპტიმალურად არჩევის შესახებ.

2. კუბატურის ფორმულები შეგვიძლია შევადგინოთ განმეორებით ინტეგრების საფუძველზე (ნახ. 13)

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned} \quad (6)$$

ცალკე გამოვთვალოთ

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

ამისათვის ავიღოთ $x = x_k$,

$$F(x_k) = \sum_{i=1}^{m_k} f(x_k, y_i) B_{ki},$$

სადაც

$$y_{m_k} = \varphi_2(x_k), y_1 = \varphi_1(x_k),$$

ხოლო B_{ki} მუდმივებია. ამის შედეგად (6) მოგვცემს

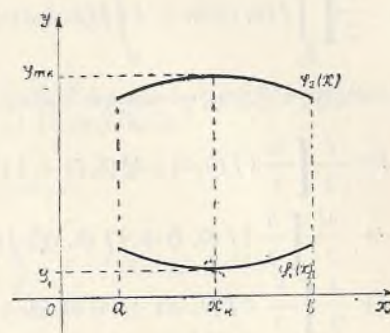
$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_a^b F(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k F(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} A_k B_{kj} f(x_k, y_j). \end{aligned} \quad (7)$$

მაგალითად, შევადგინოთ მექანიკური კუბატურის ფორმულა

$$I = \int_0^{2h} \int_0^{2h} f(x, y) dx dy \text{-თვის.}$$

ავიღოთ $F(x) = \int_0^{2h} f(x, y) dy$ და გამოვიყენოთ სიმპსონის ფორმულა

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{l}{3} \left[f(x, 0) + 4f(x, l) + f(x, 2l) \right] - \frac{l^5}{90} \frac{\partial^4 f(x, \eta)}{\partial y^4}, \\ &\eta \in]0, 2l[, \quad x \in [0, 2h]. \end{aligned}$$



ნახ. 13

ამის გამო (7) მოგვცემს

$$I = \frac{l}{3} \left[\int_0^{2h} f(x, 0) dx + 4 \int_0^{2h} f(x, l) dx + \int_0^{2h} f(x, 2l) dx \right] - \frac{l^5}{90} \int_0^{2h} \frac{\partial^4 f(x, \eta)}{\partial y^4} dx.$$

თითოეული შესაკრებისათვის გამოვიყენოთ სიმპსონის ფორმულა,

$$I = \frac{l}{3} \left[\frac{h}{3} (f(0, 0) + 4f(h, 0) + f(2h, 0)) - \frac{h^5}{90} \frac{\partial^4 f(\xi_1, 0)}{\partial x^4} \right] + \\ + \frac{4l}{3} \left[\frac{h}{3} (f(0, l) + 4f(h, l) + f(2h, l)) - \frac{h^5}{90} \frac{\partial^4 f(\xi_2, l)}{\partial x^4} \right] + \\ + \frac{l}{3} \left[\frac{h}{3} (f(0, 2l) + 4f(h, 2l) + f(2h, 2l)) - \frac{h^5}{90} \frac{\partial^4 f(\xi_3, 2l)}{\partial x^4} \right] - \\ - \frac{l^5}{90} \left[\frac{h}{3} \left(\frac{\partial^4 f(0, \eta)}{\partial y^4} + 4 \frac{\partial^4 f(h, \eta)}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f(2h, \eta)}{\partial y^4} \right) - \frac{h^5}{90} \frac{\partial^8 f(\xi, \eta)}{\partial x^4 \partial y^4} \right].$$

ნაშთითი წევრები ამოვწეროთ

$$R(f) = -\frac{h^5}{90} \frac{l}{3} \left[\frac{\partial^4 f(\xi_1, 0)}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial^4 f(\xi_2, l)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(\xi_3, 2l)}{\partial x^4} \right] - \\ - \frac{l^5}{90} \frac{h}{3} \left[\frac{\partial^4 f(0, \eta)}{\partial y^4} + 4 \frac{\partial^4 f(h, \eta)}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f(2h, \eta)}{\partial y^4} \right] + \frac{l^5 h^5}{90 \cdot 90} \frac{\partial^8 f(\xi, \eta)}{\partial x^4 \partial y^4}$$

ვიგულისხმობთ, რომ ამ გამოსახულებაში ყველა წარმოებული უწყვეტია არეში $0 \leq x \leq 2h$, $0 \leq y \leq 2l$ და ვისარგებლებთ დახურულ შუალედში უწყვეტი ფუნქციის თვისებით, მაშინ გვექნება

$$R(f) = -\frac{h^5}{90} 2l \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial x^4} - \frac{l^5}{90} 2h \frac{\partial^4 f(\xi_2, \eta_2)}{\partial y^4} + \frac{h^5}{90} \frac{l^5}{90} \frac{\partial^8 f(\xi, \eta)}{\partial x^4 \partial y^4}. \quad (8)$$

ამგვარად მივიღეთ კუბატურის სიმპსონის ფორმულა

$$\int_0^{2h} \int_0^{2l} f(x, y) dx dy = \frac{h}{3} \frac{l}{3} \{ [f(0, 0) + 4f(h, 0) + f(2h, 0)] + 4[f(0, l) + \\ + 4f(h, l) + f(2h, l)] + [f(0, 2l) + 4f(h, 2l) + f(2h, 2l)] \} + R(f) \quad (9)$$

სადაც $R(f)$ განისაზღვრება (8) ფორმულით.

3. კუბატურის ფორმულები შეგვიძლია მივიღოთ, თუ ინტეგრალ-ქვეშა ფუნქციის შევცვლით რომელიმე საინტერპოლაციო მრავალწევრით.

ვთქვათ, G არე მართკუთხედი: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის წერტილები

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_4 = b;$$

ასევე $[c, d]$ სეგმენტის წერტილები

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

და შევადგინოთ საინტერპოლაციო ფორმულა

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\Pi_n(x) \Pi_m(y)}{(x-x_i)(y-y_j) \Pi'_n(x_i) \Pi'_m(y_j)} f(x_i, y_j) + R(f), \quad (10)$$

ამ ფორმულიდან ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m C_{ij} f(x_i, y_j) + R(f), \quad (11)$$

სადაც

$$C_{ij} = \int_a^b \int_c^d \frac{\Pi_n(x) \Pi_m(y) dx dy}{(x-x_i)(y-y_j) \Pi'_n(x_i) \Pi'_m(y_j)} = \\ = \int_a^b \frac{\Pi'_n(x)}{(x-x_i) \Pi'_n(x_i)} dx \int_c^d \frac{\Pi_m(y)}{(y-y_j) \Pi'_m(y_j)} dy, \quad (12)$$

$$R(f) = \int_a^b \int_c^d R_{mn}(x, y) dx dy.$$

მაგალითად, შევადგინოთ საინტერპოლაციო ფორმულა

$$f(x, y) = \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{x_0-x_1 y_0-y_1} f(x_0, y_0) + \frac{(x-x_0)(y-y_1)}{(x_1-x_0)(y_0-y_1)} f(x_1, y_0) + \\ + \frac{(x-x_1)(y-y_0)}{(x_0-x_1)(y_1-y_0)} f(x_0, y_1) + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x_1-x_0)(y_1-y_0)} f(x_1, y_1) + R_{11}(x, y),$$

სადაც

$$R_{11}(x, y) = (x-x_0)(x-x_1) f(x, y) + (y-y_0)(y-y_1) f(x, y) - \\ - (x-x_0)(x-x_1)(y-y_0)(y-y_1) + (x, x_0, x_1; y, y_0, y_1) = \\ = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} \frac{\partial^2 f(\xi, y)}{\partial x^2} + \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{2!} \frac{\partial^2 f(x, \eta)}{\partial y^2} - \\ - \frac{(x-x_0)(x-x_1)(y-y_0)(y-y_1)}{2!} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta)}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

გამოვთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_0^h \int_0^h f(x, y) dx dy, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = h; \quad y_0 = 0, \quad y_1 = h.$$

გამოვთვლები მოგვცემს

$$C_{00} = \int_0^h \int_0^h \frac{(x-h)(y-h)}{(-h)(-h)} dx dy = \frac{h^2}{4}, \quad C_{10} = \int_0^h \int_0^h \frac{x(y-h)}{h(-h)} dx dy = \frac{h^2}{4}, \quad (13)$$

$$C_{01} = C_{11} = \frac{h^2}{4}.$$

$$R(f) = \int_0^h \int_0^h \frac{x(x-h)}{2!} \frac{\partial^2 f(\xi, y)}{\partial x^2} dx dy + \int_0^h \int_0^h \frac{y(y-h)}{2!} \frac{\partial^2 f(x, \eta)}{\partial y^2} dx dy - \\ - \int_0^h \int_0^h \frac{x(x-h)y(y-h)}{(2!)^2} \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy,$$

$$\xi, \xi_1 \in \{0 < x < h\}, \quad \eta, \eta_1 \in \{0 < y < h\}.$$

რადგანაც წარმოებულების წინ მდგომი მაპრავლები ნიშანს არ იცვლის, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა. მივიღებთ

$$R(f) = \int_0^h \int_0^h R(f) dx dy = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1)}{\partial x^2} \left(-\frac{h^4}{6} \right) + \\ + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2)}{\partial y^2} \left(-\frac{h^4}{6} \right) - \frac{1}{(2!)^2} \frac{\partial^4 f(\bar{\xi}_3, \bar{\eta}_3)}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{h^8}{36} \right). \quad (14)$$

ამრიგად, (13)-დან გვექნება

$$\int_0^h \int_0^h f(x, y) dx dy = \frac{h^2}{4} [f(0, 0) + f(h, 0) + f(0, h) + f(h, h)] + R(f), \quad (15)$$

სადაც $R(f)$ განისაზღვრება (14) ფორმულით.

სრულიად ასევე შეგვიძლია მივიღოთ კუბატურის სხვა ფორმულები, ანალოგიური მეთოდებით შეგვიძლია შევადგინოთ მაღალი რიგის ჯერადი ინტეგრირების რიცხვითი ფორმულები.

ს ა ვ ა რ გ ი შ ი 28.

1. $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის მოცემული ცხრილით მონახეთ წარმოებულთა მნიშვნელობანი $x = 1,2; 1,3; 1,9; 2,0; 2,75; 2,8$ -თვის.

x	$\sqrt{x}$
1,2	1,0995
1,4	1,1833
1,6	1,2644
1,8	1,3442
2,0	1,4142
2,2	1,4832
2,4	1,5492
2,6	1,6125
2,8	1,6733

2. $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის მოცემული ცხრილით მონახეთ მეორე რიგის წარმოებულთა მნიშვნელობანი $x = 1,1; 1,15; 1,5; 1,53; 1,9; 2,0$ -თვის:

x	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
1,1	0,909090	1,6	0,625000
1,2	0,833333	1,7	0,588235
1,3	0,769231	1,8	0,555556
1,4	0,714286	1,9	0,526316
1,5	0,666667	2,0	0,500000

3. მოცემულია $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ მნიშვნელობანი ცხრილით. შეადგინეთ სათანადო სასრულსხვაობიანი ცხრილი და მონახეთ პირველი რიგის წარმოებულები $x = 3,70; 3,73; 3,75; 3,77$ -თვის, ხოლო მეორე რიგის წარმოებულები $x = 3,70; 3,705; 3,73; 3,77$ -თვის:

x	y	x	y
3,70	0,519875	3,74	0,517088
3,71	0,519174	3,75	0,516398
3,72	0,518476	3,76	0,515026
3,73	0,517780	3,77	0,514345

4. ფუნქციის მნიშვნელობანი მოცემულია ცხრილით, განსაზღვრეთ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და მინიმალური მნიშვნელობა სასრულ-სხვაობიანი ცხრილით:

x	$f(x)$
0,1	0,98321
0,2	0,89356
0,3	0,67893
0,4	0,67347
0,5	0,86435
0,6	0,97825

5. გამოთვალეთ ინტეგრალის მნიშვნელობა a -დან b -მდე ტრაპეციის და სიმპსონის ფორმულებით, თუ ფუნქციის მნიშვნელობა მოცემულია ცხრილით

x	$\sqrt[3]{x}$	x	$\sqrt[3]{x}$
8000	20,00000	8005	20,004166
8001	20,000833	8006	20,004999
8002	20,001667	8007	20,005832
8003	20,002500	8008	20,006664
8004	20,003333	8009	20,007497
		8010	20,008330

6. გამოთვალეთ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x \sin^2 x} \, dx$ ტრაპეციის და სიმპსონის

ფორმულებით, $h = \frac{\pi}{9}$.

7. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x \sin^2 x} \, dx$$

გაუსის და ჩეზიშევის ფორმულებით $n=5$ -თვის.

8. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 \lg(\cos x + 1) \, dx$$

ნებისმიერი ფორმულით.

9. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

პერმიტის ფორმულით, $n=10$.

10. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$$

ჩეზიშევის ფორმულით, $n=5$.

11. მიახლოებით გამოთვალეთ ინტეგრალები

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}, \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

12. მიახლოებით გამოთვალეთ ინტეგრალები

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

ლიტერატურა

1. ა. ბენაშვილი, ცდომილებათა თეორია, თბილისი, 1965.
2. დ. უაიკიძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ნაწილი I, თბილისი, 1972; ნაწილი II, თბილისი, 1975; ნაწილი III, თბილისი, 1964.
3. ნ. თევზაძე, განზომილი ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, თბილისი, 1960; უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, თბილისი, 1964.
4. ი. მეცხვარიშვილი პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებანი, თბილისი, 1966; წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებისა და n-ური რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ელემენტები, თბილისი, 1962.
5. შ. შიქელაძე, ინტეგრირების თეორია და პრაქტიკა, თბილისი, 1966.
6. ა. რუხაძე, უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტ. I, თბილისი, 1970; ტ. II, თბილისი, 1973.
7. თ. ცხადაია, მიახლოებითი გამოთვლები საშუალო სკოლაში, თბილისი, 1984.
8. ე. წითლანაძე, ფუნქციონალური ანალიზის საფუძვლები, თბილისი, 1964; მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. III, თბილისი, 1981.
9. ელ. კელიძე, ე. წითლანაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I, თბილისი, 1971; ტ. II, თბილისი, 1975.
10. ა. ხარაძე, ვ. კელიძე, ბ. ხვედელიძე, ი. ქარცივაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I, თბილისი, 1948; ტ. II, თბილისი, 1950.
11. ი. ხაქელია, დიფერენციალური განტოლებანი, თბილისი, 1974.
12. ი. ქარცივაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I, თბილისი, 1982.
13. გ. კომლაძე, ელემენტარული მათემატიკის სპეციალური კურსი, არითმეტიკა, თბილისი, 1967; ელემენტარული მათემატიკის სპეციალური კურსი, ალგებრა, თბილისი, 1971; მიახლოებითი გამოთვლების ელემენტები, 1986; რაციონალური რიცხვთა არითმეტიკა, თბილისი, 1962.
14. Ахвезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации, М., 1966.
15. Бабенко К. И. Основы численного анализа, М., 1986.
16. Бахвалов Н. С. Численные методы, I, М., 1973.
17. Беллман Р. Введение в теорию матриц, ИЛ, М., 1969.
18. Безикович Я. С. Приближенные вычисления, Л.-М., 1949.
19. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I, М., 1966 г. т. II, М., 1960.
20. Бредис В. М., Средства и способы элементарных вычислений, М., 1954; Устный и письменный счет. Вспомогательные средства вычислений, ЭЗМ, I, М.-Л., 1951.
21. Брудно А. Л., Программирование в содержательных обозначениях, М., 1968; АЛГОЛ, М., 1971 г.
22. Будаг Б. М., Фомян С. В. Краткие интегралы и ряды, М., 1965.
23. Вергасов В. А. и др. Вычислительная математика, М., 1976.
24. Воеводин В. В., Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы, М., 1966.
25. Гавури М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971.
26. Гантмахер Ф. Г., Теория матриц, М., 1967.

27. Гассе С., Линейное программирование, М., 1961.
28. Гельфман И. М., Лекции по линейной алгебре, М., 1951.
29. Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М.-Л., 1952.
30. Годунов С. К., Рябенский В. С., Введение в теорию разностных схем, М., 1977.
31. Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М., 1954.
32. Гурса Э., Курс математического анализа, т. I, М.-Л., 1933; т. II, М.-Л., 1933.
33. Гутер Р. С., Овчинский Б. В., Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, М., 1970.
34. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, М., 1963.
35. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З., Численные методы анализа, М., 1967.
36. Домогад А. П., Численные и графические методы решения уравнений, ЭЗМ, II, Алгебра, М.-Л., 1951.
37. Жоголов Е. А., Трифонов Н. П., Курс программирования, М., 1971.
38. Зельдович Я. Б., Мышкин А. Д., Элементы прикладной математики, М., 1965.
39. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х., Математический анализ, М., 1979.
40. Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. I, М., 1982; II, М., 1973; Линейная алгебра, М., 1974.
41. Калиткин Н. Н., Численные методы, М., 1978.
42. Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, М.-Л., 1962.
43. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, М., 1977.
44. Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1986.
45. Коллати Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, М., 1969.
46. Коробов Н. М., Теоретико-числовые методы в приближенном анализе, М., 1963.
47. Копченкова Н. В., Марон И. А., Вычислительная математика в примерах и задачах, М., 1972.
48. Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, М., 1953.
49. Крылов В. И., Приближенные вычисления интегралов, М., 1959.
50. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И., Вычислительные методы, т. I, М., 1976; т. II, М., 1977.
51. Кудрявцев Л. Д., Современная математика и ее преподавание, М., 1980.
52. Ланкестер П. А., Теория матриц, М., 1978.
53. Лавров С. С., Универсальный язык программирования, М., 1967.
54. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М., 1965.
55. Ляпунов А. А., О логических схемах алгоритмов, М., 1958.
56. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М., 1970.
57. Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, М., 1980.
58. Микеладзе Ш. Е., Численные методы математического анализа, М., 1953; Решение численных уравнений, Тбилиси, 1965.
59. Милн В. Э., Численный анализ, М., 1951.
60. Михельсон В. С., Элементы вычислительной математики, М., 1966.
61. Мысовских И. П., Лекции по методам вычислений, М., 1962.
62. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А., Курс математического анализа, т. I, т. II, М., 1944.
63. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1973.
64. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.-Л., 1952.
65. Пянов Д. Ю., Счетная линейка, М., 1953.
66. Положий Г. Н., Пахарова И. А., Степаненко И. З., Бондаренко П. С., Великованенко Н. М., Математический практикум, М., 1960.

67. Рунге К., Графические методы математических вычислений, М.-Л., 1932.
68. Сальвадори М. Дж., Численные методы в технике, М., 1955.
69. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; Теория разностных схем, М., 1977.
70. Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1976.
71. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. I, М.-Л., 1952; т. II, М.-Л., 1951; т. III, ч. I, М.-Л., 1951; т. III, ч. II, М.-Л., 1951.
72. Соболев С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974.
73. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, М., 1953.
74. Стеффенсен И. Ф., Теория интерполяции, М.-Л., 1935.
75. Скарборо Дж., Численные методы математического анализа, М.-Л., 1934.
76. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П., Вводные лекции по прикладной математике, М., 1984.
77. Трифонов Н. П., Мартынюк В. В., Любимский Э. З., Программирование, М., 1980.
78. Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, М., 1962.
79. Турчак Л. И., Основы числовых методов, М., 1987.
80. Уваренков И. М., Маллер М. З., Курс математического анализа, т. I, М., 1966; т. II, М., 1976.
81. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III, М.-Л., 1948, 1948, 1949.
82. Хемминг Р. В., Численные методы, М., 1968.
83. Шилов Г. Е., Математический анализ, ч. I, 2, М., 1969; ч. 3, М., 1978; Математический анализ, Конечномерные линейные пространства, М., 1969; Математический анализ, Специальный курс, М., 1960; Математический анализ, второй специальный курс, М., 1965.
84. Эльсгольц Л. Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1954.
85. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование, М., 1963.

შენიშვნები

წინასიტყვაობა

განმარტება III

ინტეგრალური აღრიცხვა

თავი I

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§ 1. პირველწიფი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი	6
1. პირველწიფი ფუნქცია (6). 2. პირველწიფი ფუნქციის თვისებები (2).	
3. განუსაზღვრელი ინტეგრალი (10). 4. განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები (14). 5. ელემენტარულ ფუნქციათა ინტეგრალების ცხრილი (15).	
§ 2. უშუალო ინტეგრება. მაგალითები	18
სავარჯიშო 1	20
§ 3. ინტეგრება ცვლადთა შეცვლის მეთოდით	21
§ 4. ნაწილობითი ინტეგრება	24
§ 5. ინტეგრალთა უმარტივესი ტიპები	26
1. რაციონალურ ფუნქციათა ინტეგრება (26). 2. ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება (31). 3. ეილერის ჩასმები (33) 4. მაგალითები (37).	
სავარჯიშო 2	40
§ 6. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ინტეგრება	43
§ 7. შენიშვნები. ინტეგრალის სხვადასხვა პასუხის შესახებ	47
სავარჯიშო 3.	48

თავი II

განსაზღვრული ინტეგრალი

§ 1. ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებამდე	49
1. მრუდწიფი ტრაპეციის ფართობი (49), 2. მატერიალური წერტილის მიერ გავლილი მანძილი (51).	
§ 2. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება. თვისებები	52
1. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული და მექანიკური მნიშვნელობანი (52). 2. ფუნქციის ინტეგრებადობის აუცილებელი პირობა (55).	
§ 3. განსაზღვრული ინტეგრალის არსებობა	56
1. დარმუს ჯამები (56). თეორემები სეგმენტზე ფუნქციის ინტეგრებადობის შესახებ (69).	
§ 4. განსაზღვრული ინტეგრალის ძირითადი თვისებები	65
§ 5. თეორემა სეგმენტზე ფუნქციის ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის შესახებ	69
§ 6. განსაზღვრული ინტეგრალის ზედა საზღვრით წარმოდგენილი. ნიუტონ-ლიბნიცის ფორმულა	72

1. განსაზღვრული ინტეგრალის ზედა საზღვრით, წარმოებული (72).	2. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა (74).	
ს ა ე რ ა რ ჯ ი შ ი 4		76
§ 7. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის მეთოდები		77
1. ცვლადის შეცვლა (77).	2. ნაწილობითი ინტეგრება (80).	3. ვალისის ფორმულა (2).
§ 8. არასაკუთრივი ინტეგრალები		84
1. არამეშისაზღვრული ფუნქციების არასაკუთრივი ინტეგრალები (84);		
2. არასაკუთრივი ინტეგრალი უსასრულო საზღვრებით (89).	3. შენიშენები (93).	4. ეილერ-პუასონის ინტეგრალი (95).
ს ა ე რ ა რ ჯ ი შ ი 5.		86

07530 III

განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება

§ 1. ფართობის გამოთვლა	100
1. დეკარტის კოორდინატებში ფართობის გამოთვლა (100). 2. პოლარულ კოორდინატებში ფართობის გამოთვლა (103).	
§ 2. ბრტყელი წირის რკალის სიგრძე	105
§ 3. ბრტყელი ზედაპირის ფართობი	108
§ 4. პარალელური კვეთის ფართობებით სხეულის მოცულობის განსაზღვრა და გამოთვლა	110
სავარჯიშო 6.	113

0230 IV

സർവ്വേശ്വരൻ ചെങ്കുണ്ടൻ

§ 1. გეომეტრიული და ფიზიკური ამოცანები, რომლებსაც მიეყვანათ ორჭერადი ინტეგრალის ცნებამდე	116
1. ფართობადი ფიგურები (116). 2. ცილინდრული სხეულის მოცულობის განსაზღვრა (121). 3. თხელი ფირფიტის მასის განსაზღვრა (122).	
§ 2. ორჭერადი ინტეგრალის განსაზღვრა	122
§ 3. ორჭერადი ინტეგრალის თვისებები	125
§ 4. ორჭერადი ინტეგრალის არსებობა	128
§ 5. ორჭერადი ინტეგრალის გამოთვლა	135
1. მართკუთხოვანი არე (135). 2. ნებისმიერი ფართობადი არე (144). 3. უწყვეტი ფუნქციის ორჭერადი ინტეგრალის გამოთვლა (148).	
სავარჯიშო 7.	154
§ 6. ცალკეა შეცვლა ორჭერად ინტეგრალში	155
§ 7. ორჭერადი ინტეგრალის გამოთვლა პოლარულ კოორდინატებში	158
1. ორჭერადი ინტეგრალი პოლარულ კოორდინატებში (158). 2. ფართობის გამოთვლა (161).	
სავარჯიშო 8.	163
§ 8. ორჭერადი ინტეგრალის გამოყენება გეომეტრიული და ფიზიკური ამოცანების ამოსახსნელად	163
1. ზედაპირის ფართობი (163). 2. ბრტყელი ფიგურის ინერციის მომენტი (167). 3. ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრი (170). 4. ზედაპირის ინერციის მომენტი (172). 5. ზედაპირის სიმძიმის ცენტრი (174).	
სავარჯიშო 9.	178

განყოფილება IV

ॐ नमो भगवते वासुदेवाय

၈၂၃၇ v

სივსტოთა მწკრივები

§ 1. რაღებთა მწკრივები, კრებადობა და განშლადობა. ძირითადი თვისებები	180
1. კრებადობა და განშლადობა (180). 2. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი დი საკმარისი პირობა (184). 3. ძირითადი თვისებები (186).	
სავარჯიშო 10.	189
§ 2. დაღებითი მწკრივები	191
1. დაღებითი მწკრივების კრებადობის და განშლადობის საკმარისი პირობები (191). 2. მწკრივთა შედარების თეორემები (192). 3. მწკრივთა კრებადობის საკმარისი პირობები (196). 4. მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი (200). 5. მწკრივის კრებადობის რაბეს ნიშანი	204
სავარჯიშო 11.	208
§ 3. ნაშანცვლადი მწკრივი, კრებადობის ლაიზნიცის ნიშანი. ნაშთის შეფასება	208
§ 4. მწკრივის აბსოლუტური და პირობითი კრებადობა. აბსოლუტურად კრებადი მწკრივის თვისებები, მწკრივთა გამრავლება	210
1. მწკრივთა აბსოლუტურად კრებადობა (210). 2. მწკრივთა აბსოლუტურად კრებადობის ზოგიერთი საკმარისი ნიშანი (210). 3. მწკრივთა ნაშრავლი (221).	
სავარჯიშო 12.	224

၈၃၃၇ VI

თუნიქციათა მწკრივები

§ 1. ფუნქციათა მწკრივები, კრებადობის არე. თვისებები	226
1. ფუნქციათა მწკრივები (226). 2. ფუნქციათა მწკრივის თანაბარი და აბსოლუტური კრებადობის ვიკრატის ნიშანი (231). 3. ფუნქციათა მწკრივის ჭამის უწყვეტობა (232). 4. ფუნქციათა მწკრივის ინტეგრება (233). 5. ფუნქციათა მწკრივის გაწარმოება (235). 6. მაგალითი უწყვეტი ფუნქციისა, რომელსაც არც ერთ წერტილში არა აქვს წარმოებული (237).	
სავარჯიშო 13.	240
§ 2. ხარისხიანი მწკრივები	242
1. კრებადობის არე (242) 2. ხარისხიანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის განსაზღვრა კოზი-ადამარის ფორმულით (246). 3. ხარისხიანი მწკრივის თანაბრად კრებადობა (253). 4. ტილორის მწკრივი, მაკლორენის მწკრივი (255).	
სავარჯიშო 14.	256
§ 3. ფუნქციის ხარისხიან მწკრივად გაშლა	257
1. ტილორის ფორმული (257). 2. ეილერის ფორმულები (264). 3. მიხეობი-ლური ფუნქციები (265). 4. რაციონალური ფუნქციის ხარისხიან მწკრივად გაშლა (266).	
სავარჯიშო 15.	267
§ 4. პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრლები	268
1. თანაბრად კრებადი მიმდევრობანი (268). 2. ზღვრული ფუნქციისაგან თანაბარი კრებადობა (273). 3. განმეორებითი ზღვრების უთიერთადიგლომონი-ცელება (276). 4. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასლა (276). 5. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ პარამეტრით გაწარმოება (278). 6. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ პარამეტრით ინტეგრება (279). 7. ინტეგრალის პარამეტრით	

წარმოებულის გამოთვლა 280). 8. პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალები (283). 9. არასაკუთრივი ინტეგრალის თანაბრად კრებადობა (286). 10. არასაკუთრივი ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა (289). 11. პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალის უწყვეტობა და გაწარმოება (290). 12. არასაკუთრივი ინტეგრალის პარამეტრით ინტეგრება (292). 13. პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის თეორემის განზოგადება (294). 14. მაგალითები 296

- 1) $\int_0^{\infty} e^x \ln x dx$ (261). 2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (262). 3) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ — ეილერ-პოასონის ინტეგრალი (300). 4) $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ax}{x} e^{-bx} dx$ (301). 5) $\int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{Vx} dx$ (302). 6) $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$, $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$ — ფრენელის ინტეგრალები (304). 7) ეილერის ინტეგრალები (306).

განყოფილება V

დიფერენციალური განტოლებანი

თაბი VII

დიფერენციალური განტოლებანი. ზოგადი ცნებანი.

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

- § 1. ამოცანები, რომლებსაც მიყვავართ დიფერენციალურ განტოლებამდე. ზოგადი ცნებანი 328
1. ამოცანები, რომლებსაც მიყვავართ დიფერენციალურ განტოლებამდე (328). 2. ზოგადი ცნებანი (332). 3. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება (334).
§ 2. კოშის ამოცანა. ეილერის ტეხილი 336
1. კოშის ამოცანა (336). 2. ამონახსნის არსებობის დამტკიცება (340). 3. ერთადერთობის დამტკიცება (344). 4. ამონახსნის გაგრძელება (345). 5. მაგალითები (346). 6. ეილერის ტეხილი (349).
საჯარჯიშო 16. 352
§ 3. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი 353
1. განტოლება, რომლის მარცხენა მხარე სრული დიფერენციალურია 353
2. განტოლება განცალკევებული ცვლადებით (355). 3. განტოლება განცალკევებული ცვლადებით (356). 4. ერთგვაროვანი განტოლება (356).
§ 4. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება 359
§ 5. ბერნულის განტოლება 361
§ 6. განტოლებანი, რომლებიც არ ამოიხსნებიან წარმოებულის მიმართ 362
1. განტოლება, რომელიც x -ს არ შეიცავს, მაგრამ ამოიხსნება y -ის მიმართ (362). 2. განტოლება, რომელიც y -ს არ შეიცავს, მაგრამ ამოიხსნება x -ის

მიმართ (364). 3. განტოლება ამოიხსნის y -ის მიმართ. ლაგრანჟის განტოლება, კლერის განტოლება (366).
საჯარჯიშო 17. 368

თაბი VIII

მალალი რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

- § 1. მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებანი 370
1. ზოგადი შენიშვნები (370). 2. კოშის ამოცანა განტოლებათა სისტემისთვის (371). 3. კოშის ამოცანა მალალი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის (373). 4. ზოგიერთი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება რიგის დაწვევის საშუალებით (374).
§ 2. მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. ზოგადი ამონახსნი 378
1. წრფივი დიფერენციალური განტოლება. თვისებები (378). 2. წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი (380). 3. ფუნქციითა წრფივად დამოუკიდებლობა (381). 4. ისტროგრადისკის ფორმულა (385).
§ 3. მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი 388
საჯარჯიშო 18. 396
§ 4. მეორე რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება 397
1. ზოგადი ამონახსნის შედგენა (397). 2. კერძო ამონახსნის მოძებნა მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით (398).
§ 5. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება 401
§ 6. დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება მწკრივების საშუალებით 407
1. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება (407). 2. მალალი რიგის დიფერენციალური განტოლება (410). 3. წრფივი დიფერენციალური განტოლება (412). 4. ამონახსნის გაშლა განზოგადებულ ხარისხიან მწკრივად (416). 5. ზესელის განტოლება (422).
საჯარჯიშო 19. 426

განყოფილება VI

გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდები

თაბი IX

გამოთვლების საშუალებანი და ზერხები

- § 1. გამოთვლითი მათემატიკის საგანი 427
§ 2. გამოთვლითი მანქანების განვითარების ისტორიული მიმოხილვა 428
§ 3. გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდი. მიახლოების ცნება 431
§ 4. გამოთვლითი მათემატიკის ამოცანა. ზოგადი მითითებანი 438
§ 5. გამოთვლების საშუალებანი 441
§ 6. რუსული საანგარიშო 441
§ 7. ლოგარითმული სახაზავი 445
1. ძირითადი სკალები (445). 2. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციითა სკალები (459). 3. განსაკუთრებული აღნიშვნები ლოგარითმულ სახაზავზე (462).
§ 8. მათემატიკური ცხრილები 464
§ 9. თვლის სისტემები 467
საჯარჯიშო 20. 473
§ 10. ელექტრონული გამოთვლელი მანქანები 479

1. ზოგადი შენიშვნები (479). 2. ელექტრონული გამოთვლელი მანქანის ძირითადი მოწყობილობა (479).	
§ 11. ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლის პროგრამა	481
§ 12. ელექტრონული გამოთვლელი მანქანების მესხიერების დანიშნულება	482
§ 13. მაკროალკულატორი ალგებრული MK — 56*	482
1. მაკროალკულატორის ზოგადი აღწერილობა (482). 2. ერთი ცვლადის ელემენტარული ფუნქციითა და მნიშვნელობების გამოთვლა (484). 3. ორი ცვლადის ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა (485). 4. რეგისტრები RG6, RG1, ..., RGd (486). 5. მანქანაში პროგრამის შეტანა (487). 6. მანქანაში შეტანილი პროგრამის შემოწმება (489). 7. პროგრამის გამართვა (489). 8. ქვეპროგრამაზე გადასვლა (490). 9. პირობითი, უპირობო და ირიბი გადასვლის ბრძანებები (491). 10. ციკლის ბრძანებები (497). 11. არაკორექტული მოქმედებანი (499). 12. საერთო ცნობები (499).	
§ 14. ნებისმიერი სიზუსტით გაყოფა	501
§ 15. შეხსიერების უახლოესი რეგისტრების გამოყენება	505
§ 16. შედგენილი პროგრამის გარჩევა	519
§ 17. მაგალითები	529
1. რთული პროცენტების ფორმულა (529). 2. ხელფასის ანაზღაურება-გადახდის უწყისი (534). 3. ფუნქციის ზღვრის გამოთვლა (545). 4. ჯამური წილადები (548).	
§ 18. დამპროგრამების ელემენტები ზეისიკის ენაზე	555
1. ძირითადი ნაწილები (555). 2. ზეისიკის ანბანი (556). 3. რიცხვები (557). 4. არითმეტიკული გამოსახულება (557). 5. ცვლადები (558). 6. მიწვევების ბრძანება (559). 7. საწყისი მნიშვნელობების შეტანა მანქანაში და მიღებული შედეგების გამოტანა (559). 8. პროგრამის შედგენა ზეისიკის ენაზე (560). 9. პროგრამის მანქანაში შეტანა, შემოწმება და გაშვება (561). 10. განშტოების დამპროგრამება (565). 11. ციკლური გამოთვლების დამპროგრამება (567).	
საქართველო 21	572

თაზი X

მიახლოებითი რიცხვები

§ 1. აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებანი	574
1. აბსოლუტური ცდომილება (574). 2. ფარდობითი ცდომილება (576).	
§ 2. ნიშნადი ციფრები, რიცხვითი დამრგვალება	578
1. ნიშნადი ციფრები (578). 2. რიცხვითი დამრგვალება (580).	
§ 3. სანდო ციფრები	582
§ 4. ფარდობითი ცდომილებანი და სანდო ციფრთა შორის კავშირი	585
§ 5. ფარდობითი ცდომილებით სანდო ციფრთა რაოდენობის განსაზღვრა	587
§ 6. მიახლოებითი რიცხვითი გამოთვლის ცდომილებანი	590
§ 7. სხვაობის ცდომილებანი	592
§ 8. ნამრავლის ცდომილებანი	594
§ 9. განაყოფის ცდომილებანი	595
§ 10. საზღვართა საშუალო არითმეტიკული და მისი ცდომილება	595
§ 11. გამოთვლები ცდომილებათა საშუალებით	596
§ 12. ფუნქციის ცდომილება. ცდომილების ზოგადი ფორმულა	597
§ 13. სანდო ციფრთა რაოდენობის განსაზღვრა ზოგიერთ ელემენტარულ ფუნქციაში	599
§ 14. საშუალო არითმეტიკული. ცნება ცდომილების აღზაფხურობის შესახებ	605

§ 15. ცდომილებათა თეორიის შეტყუელი ამოცანა	611
§ 16. მათემატიკური ცხრილების შედგენა	615
§ 17. სასლავართა ზეისიკი. ზოგადი შენიშვნები გამოთვლების შესახებ	617
საქართველო 22.	620

თაზი XI

ფუნქციითი ინტერპოლირება

§ 1. სასრული სხვაობანი	628
§ 2. ცდომილებათა განაწილება სხვაობათა ცხრილებში	633
§ 3. გაყოფილი სხვაობანი	636
§ 4. ფუნქციითი აპროქსიმაცია	642
1. ამოცანის დასმა (642). 2. ინტერპოლირება (643). 3. თანაბრად აპროქსიმაცია (645).	
§ 5. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულა	647
1. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი (647). 2. ინტერპოლირების სიზუსტე (649). 3. ეიტკენის წრფივი ინტერპოლირების სქემა (651).	
§ 6. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულები	655
1. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულა არაბრუნებულ წერტილებთან (655). 2. ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულები ტოლად დამოკიდებული წერტილებთან (657).	
§ 7. გაუსის, სტირლინგის, ბესელის საინტერპოლაციო ფორმულები	660
§ 8. ნიუტონის განზოგადებული საინტერპოლაციო ფორმულა	666
§ 9. შენიშვნები საინტერპოლაციო ფორმულების ცდომილებათა შესახებ, ჩებოშევის მრავალწევრები	668
§ 10. შეტყუელი ინტერპოლირება	674
§ 11. ვაიერშტრასის თეორემები აპროქსიმაციის შესახებ	678
1. ზოგადი შენიშვნები (678). 2. ძირითადი ლემები (679). 3. ვაიერშტრასის პირველი თეორემის დამტკიცება (683). 4. ვაიერშტრასის მეორე თეორემა (685).	
§ 12. აპროქსიმაციის ზოგადი ამოცანა	689
1. ფუნქციითი ჩებიშევის სისტემა (689). 2. მაპროქსიმებული ფუნქციის აგება (697). 3. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი დისკრეტული წერტილებისათვის (699). 4. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი შუალედის შემთხვევაში (707). 5. სპეციალური მრავალწევრებით აპროქსიმაცია (713). 6. სპლინებით აპროქსიმაცია (715).	
საქართველო 23.	722

თაზი XII

ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა

§ 1. მრავალწევრის მნიშვნელობის გამოთვლა პორნერის სქემით	726
§ 2. რაციონალური ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლა	732
§ 3. რიცხვითი მწკრივების ჯამის მნიშვნელობათა გამოთვლა	732
§ 4. ანალიზური ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა	741
1. ბინომის გამწვანება (742). 2. მაგენბლინი ფუნქციის გამწვანება (745). 3. ლოგარითმული ფუნქცია (749). 4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვლა (753). 5. შეტყუელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები (757).	
§ 5. მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა	761
1. შეტყუებული ფუნქცია (765). 2. კვადრატული ფესვის გამოთვლა (770).	

3. კუბური ფესვის გამოთვლა (774). 4. ნებისმიერი ხარისხის ფესვის გამოთვლა (775). 5. ინტერპოლირების საშუალებით ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა (776).
ს ა ე ა რ ჭ ი შ ო 24. 779

თ ა ზ ი X III

ალგებრულ და ტრანსცენდენტულ განტოლებათა მიახლოებითი ამოხსნა

§ 1. ამონახსნთა განცალკევება	781
1. ზოგადი შენიშვნები (781). 2. ამონახსნთა საზღვრები (782). 3. ამონახსნთა განცალკევება (785). 4. შტურმის მეთოდი (786). 5. განტოლების ისეთ განტოლებებზე მიყვანა, რომელსაც მხოლოდ მარტოვი ამონახსნი აქვს (787). 6. განტოლების ამონახსნთა გეომეტრიული წარმოდგენა (789).	
§ 2. შუალედთა განაზევრების მეთოდი	789
§ 3. წრფივი ინტერპოლირების მეთოდი	791
§ 4. მხეზთა მეთოდი	795
§ 5. შევრთვული მეთოდი	799
§ 6. მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი	802
§ 7. განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით	806
1. ორცვლიანი ორი განტოლების სისტემა (806). 2. n-ცვლიანი n განტოლებათა სისტემა (809). 3. წრფივი განტოლებათა სისტემა (811). 4. წრფივი განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზოგადი განხილვა (810).	
§ 8. გრადიენტთა მეთოდი	825
1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმი (825). 2. გრადიენტთა მეთოდით ფუნქციის მინიმუმის განსაზღვრა (829). 3. წრფივი განტოლებათა სისტემა (832). 4. არაწრფივი განტოლებათა სისტემა (834).	
§ 9. ლობაჩევსკის მეთოდი	836
1. ნამდვილი ამონახსნები (836). 2. კომპლექსური ამონახსნები (843). 3. ორი წყვილი კომპლექსური ამონახსნი (844). 4. ამონახსნები ტოლი შოდულით (847).	
§ 10. განტოლებათა გრაფიკული ამოხსნა	849
1. მასშტაბის გამსწორების მეთოდი (849). 2. ლილის ხერხი (851). 3. ნომოგრაფებით განტოლებათა ამოხსნა (852).	
§ 11. კვადრატული, კუბური და მეოთხე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნა	853
ს ა ე ა რ ჭ ი შ ო 25. 856	

თ ა ზ ი X IV

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების მიახლოებითი ამოხსნა

ცდომილებათა შეფასება

§ 1. განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, კრამერის ფორმულები. მატრიცები. გაუსის მეთოდი	858
1. განტოლებათა სისტემის ამოხსნა (858). 2. მატრიცები (860). 3. გაუსის მეთოდი (862).	
§ 2. დეტერმინანტის მნიშვნელობის გამოთვლა გაუსის მეთოდით	864
§ 3. გაუსის მეთოდით მიღებულ ამონახსნთა დაზუსტება	867
§ 4. გაუსის მეთოდით განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა მიღებისათვის არითმეტიკული მოქმედებათა რიცხვი	869
§ 5. გაუსის მეთოდით შეზღუდული მატრიცის შედგენა	870
§ 6. შენიშვნები გაუსის მეთოდის შესახებ. ჟორდანის სქემა	874
§ 7. კვადრატული ფესვის მეთოდი	878

§ 8. ჯავერთა მეთოდი	894
§ 9. შენიშვნები წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შესახებ	896
ს ა ე ა რ ჭ ი შ ო 26. 897	

თ ა ზ ი X V

მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება

§ 1. რიცხვითი მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება	901
1. ნიშნაცვლიანი მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება (901). 2. კუშერის გარდაქმნა (908). 3. სტირლინგის მეთოდი (911).	
§ 2. ხარისხიანი მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება ეილერ-ამელის მეთოდით	915
§ 3. ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობის გაუმჯობესება	920
§ 4. ფურიეს მწკრივები	923
1. ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტთა ფორმულები (923). 2. ფურიეს მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება (932). 3. ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტთა თვისებები. ძირითადი ლემა (934). 4. ფუნქციის ფურიეს მწკრივად გაშლის საკმარისი პირობა (937). 5. ნებისმიერ სეგმენტზე მოცემული ფუნქციის ფურიეს მწკრივად გაშლა (940). 6. კენტი და ლუწი ფუნქციებისათვის ფურიეს მწკრივები (943). 7. შვალელები (944).	
§ 5. ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების შეფასება, ფურიეს მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება	948
1. ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების შეფასება (948). 2. ფურიეს მწკრივის კრებადობის გაუმჯობესება კრილოვის მეთოდით (950).	
ს ა ე ა რ ჭ ი შ ო 27. 963	

თ ა ზ ი X VI

ფუნქციათა მიახლოებითი გაწარმოება და ინტეგრება

§ 1. რიცხვითი გაწარმოების ამოცანა	967
§ 2. რიცხვითი გაწარმოების ფორმულები არათანაბრად დაშორებული წერტილებისათვის	968
§ 3. რიცხვითი გაწარმოების ფორმულები თანაბრად დაშორებული წერტილებისათვის	972
§ 4. რიცხვითი გაწარმოება ფუნქციის მნიშვნელობათ	979
§ 5. გრაფიკული გაწარმოება	982
§ 6. ფუნქციის მიახლოებითი ინტეგრება	984
1. ზოგადი შენიშვნები (984). 2. კვადრატურის უმარტივესი ფორმულები (985). 3. კვადრატურა სინტეზობლივით ფორმულებით (987). 4. ტრაპეციისა და სიმპსონის ფორმულების ცდომილებათა სიდიდეები (991).	
§ 7. ნიუტონ-კოტესის ფორმულები	993
§ 8. მეტაბოლიკი კვადრატურის ფორმულების ცდომილებათა შეფასება	1000
1. ჩაქვალ ტიპის ფორმულები (1014). 2. ლი ტიპის ფორმულები (1015).	
§ 9. მარკოვსკის, ტრაპეციის და სიმპსონის ფორმულები	1017
§ 10. რიცხვითი ინტეგრების გაუსის ფორმულები	1024
§ 11. ჩეპიშევის ფორმულები	1033
§ 12. რიცხვითი ინტეგრების ჰერმიტის ფორმულები	1051
§ 13. არასაკუთრივი ინტეგრირების მიახლოებითი გამოთვლა	1056
§ 14. გრაფიკული ინტეგრება	1059
§ 15. შენიშვნები კვადრატურის ფორმულების შესახებ	1061
§ 16. რიცხვითი კუბატურის ფორმულები	1066
ს ა ე ა რ ჭ ი შ ო 28. 1073	
ლი ტ ბ რ ა ტ უ რ ა 1076	

КОМЛАДЗЕ ГЕОРГИЙ МАЛАКИЕВИЧ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Общий курс

Часть II

(на грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси 1990

გამომცემლობის რედაქტორი ნ. ბეროზაშვილი

სამხატვრო რედაქტორი ი. ჩიქვინიძე

ტექნიკური რედაქტორი თ. ფირცხელანი

მხატვარი ო. ვარვარიძე

კორექტორი ე. წერეთელი

სბ 1571

გადაეცა წარმოებას 28.07.88. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 7.05.90. საბეჭ-
დო ქაღალდი 60×84¹/₁₆. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 73,4. სააღრ.-საგამომც.
თაბახი 55,73. ტირაჟი 2 000 შეკვეთის № 1705.
ფასი 2 მან. 50 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. Чавчавадзе, 14.

საქართველოს სსრ ბეჭდვითი სიტყვის სახელმწიფო კომიტეტის თბილისის
ი. ჭავჭავაძის სახ. წიგნის ფაბრიკა, გრიგოლ რობაქიძის გამზირი № 7.

Тбилисская книжная фабрика им. И. Чавчавадзе Государственного
комитета по печати Грузинской ССР, пр. Гр. Робакидзе № 7.