

გ. ჯომალაძე

უბაღლესი
გათეგანება

ზოგადი ჯიშის
ნაწილი

I

გ. კოშლაძე

უმაღლესი მათემატიკა

ზოგადი კურსი

ნაწილი I

სსსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური
განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია
სახელმძღვანელოდ საინჟინრო-ტექნოლოგიური
ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თ ბ ი ლ ი ს ი 1987

22.1
517(075.3)
კ 716

სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების საინჟინრო-ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე ყველა ეკონომიკური სპეციალობისა და უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებს.

რედაქტორი — პროფ. მ. ბაშელეიშვილი
რეცენზენტები — დოც. ა. ლურსმანაშვილი
დოც. თ. შარაშენიძე



© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1987

К 1* 02000000
М 608 (06) 87

ვუძღვნი ერთადერთი შვილის გია (გიორგი)
გიორგის ძე კომლაცის ხსოვნას

წინასიტყვაობა

წიგნი შედგენილია უმაღლესი სასწავლებლების საინჟინრო-ეკონომიკური ფაკულტეტის სპეციალობებისათვის უმაღლესი მათემატიკის ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით, მაგრამ იგი გამოადგება აგრეთვე ეკონომიკური ფაკულტეტის ყველა სპეციალობის, როგორც დასწრებულს, ისე დაუსწრებელი სწავლების, სტუდენტს. წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ იმ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებსაც, სადაც უმაღლეს მათემატიკას დათმობილი აქვს 300—400 საათი.

ამჟამად უმაღლესი სასწავლებლების სტუდენტების უმეტეს ნაწილს მათემატიკა საშუალო სკოლაში შესწავლილი აქვს ახალი პროგრამით, სადაც მათემატიკური ანალიზისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტებია შეტანილი. ამ სტუდენტებს საშუალო სკოლა დამთავრებული აქვთ 1977 და მის მომდევნო წლებში. მაგრამ რაოდენობა იმ სტუდენტებისა, რომლებსაც საშუალო სკოლაში მათემატიკა ძველი პროგრამით აქვთ შესწავლილი, საკმარისად დიდია და ასე იქნება უახლოეს მომავალშიც. ამის გამო წიგნი შედგენილია ისე, რომ არ მოითხოვს მათემატიკური ანალიზისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტების ცოდნას.

უმაღლესი მათემატიკა თანამედროვე ინჟინრის, ეკონომისტის, ინჟინერ-ეკონომისტისა და სხვა ტექნიკური დარგის სპეციალისტის მომზადებაში ერთ-ერთი მთავარი საგანია. ნებისმიერი წარმოების დაგეგმვისა და მართვისათვის, ნებისმიერი შენობის, ხიდის, თვითმფრინავის, კოსმოსური რაკეტის აგებისათვის, ნებისმიერი ხელსაწყო დამზადებისათვის საჭიროა გამოთვლები, რომელთა შესრულება მხოლოდ უმაღლესი მათემატიკის ცოდნით შეიძლება. ამასთან სასწავლო საგნების დიდი ნაწილი, რომელიც მაღალკვალიფიცირებული სპეციალისტის მომზადებისთვისაა გათვალისწინებული, ეყრდნობა უმაღლეს მათემატიკას. მაგრამ წიგნის მიზანია სტუდენტებს შესწავლოს მათემატიკის არა მარტო ის ნაწილი, რომელიც მას პრაქტიკულ მოღვაწეობაში დასჭირდება, არამედ გაუვითაროს ლოგიკური და მათემატიკური აზროვნებაც და გაუფართოოს მათემატიკური თვალსაწიერი. მათემატიკა ხომ ისეთი სასწავლო საგანია, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს საერთო განათლების ყველა საფეხურზე; მათემატიკა ადამიანში აყალიბებს პიროვნებას და უმუშევრებს აზროვნების ტექნიკას. ამის გამო წიგნში ზოგიერთ თეორემათა მტკიცე-

ბანი სათანადო სიმკაცრითაა მოცემული. მაგრამ მკვლევარი ინჟინერ-ეკონომისტი სათვის ეს წიგნი საკმარისი არაა. მკითხველს, რომელიც დაინტერესდება მათემატიკის ღრმად შესწავლით, შეუძლია ისარგებლოს წიგნის ბოლოში მითითებული ლიტერატურით.

წიგნის შესავალში მოცემულია მათემატიკური ლოგიკისა და სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები, რომლებიც შემდეგ გამოიყენება ლოგიკის ელემენტებში გარჩეულია თეორემათა სახეები და მათი დამტკიცების მეთოდები. ანალიზური გეომეტრიის საწყისები შესწავლილია მიმართული მონაკვეთის ცნების საფუძველზე. წიგნში დიდი ყურადღება აქვს მიქცეული წრფივ ალგებრას, რადგანაც მას დიდი გამოყენება აქვს მართვის ეკონომიკურ ამოცანებში.

დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა შესწავლილია ტრადიციული მიმდევრობით. დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის გამოყენებით გარჩეულია ზოგიერთი გეომეტრიული და ეკონომიკური ამოცანა.

წიგნი გაყოფილია ორ ნაწილად. თითოეული ნაწილი დაყოფილია განყოფილებებად.

1-ელ ნაწილში მოთავსებულია:

შესავალი — მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები და სიმრავლეთა თეორიის ის უმცირესი ნაწილი, რომელიც ამ კურსისთვისაა აუცილებელი, კომბინატორიკის ელემენტები, რაციონალური ფუნქციები.

I განყოფილება — დეტერმინანტები და წრფივ განტოლებათა სისტემები, ანალიზური გეომეტრია, ვექტორული ალგებრა, წრფივი ალგებრის ელემენტები.

II განყოფილება — დიფერენციალური აღრიცხვა: ფუნქციები, ზღვარი, ფუნქციის უწყვეტობა, წარმოებული და დიფერენციალი, მრავალი ცვლადის ფუნქციები.

2-ე ნაწილში გათვალისწინებულია:

III განყოფილება — ინტეგრალური აღრიცხვა: განუსაზღვრელი ინტეგრალი, განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი გამოყენება, ჯერადი ინტეგრალები და მათი გამოყენება ზოგიერთი გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნაში.

IV განყოფილება — მწკრივები: რიცხვითი მწკრივები, ფუნქციონალური მწკრივები, ხარისხოვანი მწკრივები.

V განყოფილება — დიფერენციალური განტოლებანი, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებანი, წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი.

VI განყოფილება — მიახლოებითი გამოთვლები: სიდიდეთა მიახლოებითი მნიშვნელობანი, ცდომილებანი, მიახლოებით რიცხვებზე მოქმედებანი, განტოლებათა მიახლოებით ამოხსნა, ფუნქციათა ინტერპოლირება, ფუნქციათა მიახლოებით გაწარმოება და ინტეგრება.

თავდაპირველად წიგნის ხელნაწერის წაკითხვა დაიწყო პროფესორმა ელიზბარ წითლანაძემ, მაგრამ უდროო სიკვდილმა დაწყებული საქმე შეაწყვეტინა. ხელნაწერის წაკითხულ ნაწილზე პროფ. ე. წითლანაძის მიერ გამოთქმული სურვილები მხედველობაში მივიღე.

შემდეგში ხელნაწერები წაკითხეს პროფესორმა ფილიპე ხარშილაძემ და პროფესორმა პლატონ კოლონიამ, რომელთაგანაც ბევრი სასარგებლო შენიშვნა მივიღე. ყველა შენიშვნა სათანადოდ იქნა გათვალისწინებული.

წიგნის ხელნაწერი წაკითხა და მის მთლიანად სრულყოფაში დიდი დახმარება გამიწია პროფესორმა მიხეილ ბაშელეიშვილმა. ყველა ზემოთ მოხსენებულ პროფესორს გულწრფელ მადლობას მოვახსენებ.

მკითხველის ყველა საქმიან შენიშვნას სიამოვნებით მივიღებ. შენიშვნები გათვალისწინებული იქნება სახელმძღვანელოს შემდგომ გამოცემაში.

შესავალი

თავი I

მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

§ 1. გამოთქმათა აღზარა

1. ზოგადი შენიშვნები. ყოველი მეცნიერული თეორია მიზნად ისახავს ჭეშმარიტი წინადადებების დადგენას იმ ობიექტების მიმართ, რომლებსაც ის შეისწავლის. წინადადებათა ჭეშმარიტება ზოგჯერ ექსპერიმენტით ან დაკვირვებით მტკიცდება, ზოგჯერ კი გამოიყვანება აქსიომებიდან, რომლებიც წინასწარაა ჩამოყალიბებული, და სხვა წინადადებებიდან, რომელთა ჭეშმარიტება აღრეა დამტკიცებული. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წინადადების ჭეშმარიტება ლოგიკური დასკვნითაა დამტკიცებული. ლოგიკური დასკვნა მათემატიკაში ჭეშმარიტების დადგენის ერთადერთი საშუალებაა.

ვიდრე მათემატიკური ლოგიკის შესახებ რაიმეს ვიტყვოდეთ, გავმცნოთ ზოგადად აქსიომატიკურ მეთოდს, რომელიც წინ უსწრებდა მათემატიკური ლოგიკის განვითარებას. აქსიომატიკური მეთოდის წყაროდ ითვლება ნიკოლოზ ივანეს ძე ლობაჩევსკის მიერ შექმნილი არაევკლიდური გეომეტრია. აქსიომატიკურმა მეთოდმა სხვა იდეებთან ურთიერთობაში წარმოშვა არა მარტო ახალი მეთოდები მათემატიკაში, არამედ თობაში წარმოშვა არა მარტო ახალი პრინციპები. აქსიომატიკური შექმნა მათემატიკური აზროვნების ახალი პრინციპები. აქსიომატიკური მეთოდის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ თავისებური ხერხით განსაზღვრავს მათემატიკურ ობიექტებს და მიმართებებს მათ შორის. შემოაქვს რაღაც მათემატიკურ ობიექტებს და მიმართებებს მათ შორის (მაგალითად, რა არის სახავე. ამასთან არ განისაზღვრება არც ობიექტი (მაგალითად, რა არის წერტილი), არც მიმართებანი მათ შორის (მაგალითად, რა არის წერტილისა და წერტილის შორის), არც თვისებები ობიექტების მიმართ, არა ტილი ეკუთვნის წრფეს) და არც თვისებები ობიექტების მიმართ, არამედ გამოითქმება სხვადასხვა წინადადებანი ობიექტებისა და მათი თვისებების შესახებ, რომლებიც უნდა შესრულდეს. ეს წინადადებანი ობი-

ექტთა სისტემიდან გამოყოფენ ისეთ ობიექტებს, რომელთათვისაც აღნიშნული წინადადებანი სრულდება.

თუ ობიექტთა რაიმე სისტემისათვის ჩამოყალიბებული აქსიომები ჭეშმარიტია, მაშინ ამბობენ, რომ ობიექტთა ეს სისტემა აკმაყოფილებს ჩამოყალიბებულ აქსიომებს. აქსიომებით ლოგიკური დასკვნების საფუძველზე დამტკიცდება თეორემები, რომლებიც ჭეშმარიტი იქნება ყველა იმ ობიექტთა სისტემისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ აღებულ აქსიომებს.

იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ აქსიომათა სისტემით, აუცილებელია გვეჩვენოს ისეთი ობიექტები, რომელთა თვისებები და მიმართებანი მათ შორის წარმოადგენენ აღებულ აქსიომათა სისტემის ზუსტ ინტერპრეტაციას.

მაგალითის სახით განვიხილოთ გეომეტრიის აქსიომათა სისტემა¹. ამ სისტემაში ძირითადი ცნებები იყოფა ორ ჯგუფად: ძირითადი ობიექტები — საგნები და ძირითადი მიმართებანი. ძირითადი ობიექტებია: „წერტილი“, „წრფე“ და „სიბრტყე“. ძირითადი მიმართებანია: „ეკუთვნის“ — გაივლის, მდებარეობს, „შორის“, „კონგრუენტულია“ — ტოლია, „პარალელური“, „უწყვეტი“. ზუსტი და მათემატიკური მიზნებისათვის ამ მიმართებათა სრული აღწერა მოცემულია აქსიომებში. გეომეტრიის აქსიომები გაყოფილია ხუთ ჯგუფად:

- I. ეკუთვნის აქსიომები, სულ რვა აქსიომა;
- II. დალაგების აქსიომები, სულ ოთხი აქსიომა;
- III. კონგრუენტობის აქსიომები, სულ ხუთი აქსიომა;
- IV. უწყვეტობის აქსიომები, სულ ორი აქსიომა;
- V. პარალელობის აქსიომა.

მაგალითად, I-ლი ჯგუფის I-ლი აქსიომა შემდეგნაირადაა ჩამოყალიბებული: ნებისმიერი ორი A და B წერტილისათვის არსებობს a წრფე, რომელიც გაივლის თითოეულ A და B წერტილზე.

აღნიშნული აქსიომები ეკუთვნის დ. ჰილბერტს².

აქ არ შევუდგებით ამ აქსიომათა სისტემის მთლიან გადმოცემას. ამ აქსიომებში ჩამოყალიბებულია ყველა ის წინადადება, რომლებიც ცხადი თუ არაცხადი სახით გამოიყენებიან გეომეტრიის თეორემების დამტკიცების დროს.

ახლა შევეხებით მათემატიკური ლოგიკის საკითხებს.

ლოგიკა მეცნიერებაა მსჯელობაში გამოსაყენებელი ხერხების შესახებ. სიტყვა ლოგიკა — *logikē*, რომელიც წარმოშობილია ძველბერძნული სიტყვიდან *lógos*, თანამედროვე გაგებით უფრო ფართო მნიშვნელობით გამოიყენება. ისტორიულად ლოგიკის საგანი შემოისაზღვრებო-

¹ Д. Гильберт, Основания геометрии, ОГИЗ, М.-Л. 1942, стр. 56.

² დავით ჰილბერტი (1862—1943), გერმანელი მათემატიკოსი.

1 ნ. ი. ლობაჩევსკი (1792—1856), რუსი მათემატიკოსი.

და მსჯელობის ისეთი ხერხების შესწავლით, რომლებიც ჰეშმარიტი მსჯელობიდან ჰეშმარიტი დასკვნის მიღების საშუალებას იძლეოდნენ. თანამედროვე ლოგიკა გარკვეული აზრით ტრადიციული ლოგიკის გაგრძელებაა, მაგრამ მისთვის დამახასიათებელია ლოგიკური მსჯელობის — ე. წ. ლოგიკური აღრიცხვის სხვადასხვა თეორიის აგება. ლოგიკურმა აღრიცხვამ ლოგიკური მსჯელობანი მკაცრი ანალიზის საგანი გახადა. თანამედროვე ლოგიკა იყენებს მათემატიკურ მეთოდებს. ამით, როგორც ამბობენ, იგი იქცა მათემატიკურ ლოგიკად (საგნით ლოგიკა, ხოლო მეთოდით — მათემატიკა). მათემატიკური ლოგიკის ინტენსიური განვითარებით — მათემატიკა მე-19 საუკუნის ბოლოდან და კვლავც წარმატებით გრძელდება. ამის მიზეზია მათემატიკის საფუძვლების დრმა კვლევა, რომელიც გასულ საუკუნეში დაიწყო. მათემატიკური ლოგიკა ჩვენთვის მათემატიკურ დამტკიცებათა მეთოდებსა და თეორიას წარმოადგენს, მაგრამ მათემატიკური ლოგიკის მნიშვნელობა მთლიანად ამით არ ამოიწურება, რადგან მათემატიკური ლოგიკის მნიშვნელობა და სათანადო მტკიცებანი ყველა მეცნიერება-განაც მკაცრი მსჯელობა და სათანადო მტკიცებანი ყველა მეცნიერება-შია საჭირო. ამის გამო მათემატიკური ლოგიკა შეიძლება დახასიათდეს როგორც ლოგიკა თანამედროვე ეტაპზე¹.

ჰეშმართ გავეცნობით მათემატიკური ლოგიკის ელემენტებს. დავიწყებთ მათემატიკური ლოგიკის უმარტივესი ნაწილით, რომელსაც გამო-ნათქვამთა ალგებრას უწოდებენ. შემდეგ გავეცნობ პრედიკატთა ლოგიკას, რომელიც გამონათქვამთა ალგებრის განვითარებას წარმოადგენს. განვიხილავთ მათემატიკური ლოგიკის ელემენტარულ გამოყენებას.

2. **გამონათქვამი.** ცნება „გამონათქვამი“ საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსიდანაა ცნობილი.

მაგალითად, გამონათქვამებია შემდეგი წინადადებანი:

1) თბილისი საქართველოს საბჭოთა სოციალისტური რესპუბლიკის დედაქალაქია;

2) დედაქალაქი მზის გარშემო ბრუნავს;

3) 2, 3, 5, 7 მარტივი რიცხვებია;

4) $3 < 7$;

5) $4 + 2 = 6$;

6) აქლემი ფრინველია;

7) მდინარე მტკვარი შავ ზღვაში ჩადის.

ჩამოთვლილი წინადადებებიდან 1-ლიდან მე-4-მდე ჩათვლით ჰეშმარიტი (მართალი) გამონათქვამებია, დანარჩენი კი მცდარი (ყალბი) გამონათქვამებია.

¹ ე. ხაჩილაძე, მათემატიკური ლოგიკა, თბილისი, 1978.

² ე. ხაჩაძე, სიმრავლეთა თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები, თბილისი, 1978.

ცხადია, ყოველი წინადადება ან არის გამონათქვამი. მაგალითად, უნივერსიტეტში სტუდენტად ჩარიცხვა ადვილია; $x > 0$; $x^2 - 3x + 2$; რიცხვი 13 არაბუნდური რიცხვია; იმდერე; მატარებელი წავიდა?; დიახ; ოპ, ოპ! — არაა გამონათქვამები.

გამონათქვამი თითქმის იმას ნიშნავს, რასაც გრამატიკაში თბრობით წინადადებას უწოდებენ. მაგრამ გამონათქვამი ლოგიკური ცნებაა და წინადადებიდან სათანადო აბსტრაქციის შედეგადაა მიღებული. გამო-ნათქვამი რაღაც ინფორმაციას გვატყობინებს. ეს ინფორმაცია შეიძლება ჰეშმარიტი იყოს, შეიძლება მცდარი. გამონათქვამის ცნებას არ ვაზუსტებთ, მაგრამ გამონათქვამების განხილვის დროს დავუშვებთ, რომ

1) ყოველი გამონათქვამი ან ჰეშმარიტია ან მცდარი (მესამე შესაძლებლობის გამორიცხვის კანონი);

2) არავითარი გამონათქვამი არაა ერთდროულად ჰეშმარიტი ან მცდარი (არათავსებადობის — შეუთავსებლობის კანონი).

ზემოთ მოტანილი მაგალითები ამ ორ დაშვებას აკმაყოფილებენ.

ყოველი გამონათქვამი, რომელიც რაიმე ინფორმაციას გვატყობინებს, ყოველთვის აღბრავს კითხვას: ჰეშმარიტია თუ არა ის, რასაც გამონათქვამი გვატყობინებს? მაგალითად, გამონათქვამი „დედაქალაქი მზის გარშემო ბრუნავს“ — გვატყობინებს ჰეშმარიტებას, რომელიც მეცნიერებმა თავდადებული და ხანგრძლივი შრომით დაამტკიცეს. „თბილისი საქართველოს სსრ დედაქალაქია“ — აქ მხოლოდ ჰეშმარიტი ფაქტია აღნიშნული.

გამონათქვამები ლათინური დიდი ასოებით აღინიშნება: $A, B, C, \dots$ ან ასოებით, რომელთა ინდექსები მთელი დადებითი რიცხვებია: $A_1, A_2, A_3, \dots$

ავიღოთ სიმრავლე ისეთი წინადადებებისა, რომლებიც ჰეშმარიტ ან მცდარ ინფორმაციას იძლევიან. ამასთან ეს წინადადებანი არ უნდა იშლებოდეს უფრო მარტივ წინადადებებად, რომლებიც ცალკე ჰეშმარიტ ან მცდარ ინფორმაციას იძლევიან. ასეთ წინადადებათა სახელწოდებად ვიხმართ „ელემენტარული გამონათქვამი“ ან „ატომი“ (როგორი დამოკიდებულებაცაა მოლოკულსა და ატომს შორის, ისეთივე დამოკიდებულებაა რთულ გამონათქვამებსა და ელემენტარულ გამონათქვამს შორის).

ელემენტარულ გამონათქვამთა სიმრავლეს S ასოთი აღვნიშნავთ,

$$S = \{P_1, P_2, \dots\},$$

სადაც $P_1, P_2, \dots$ ელემენტარული გამონათქვამებია.

ზემოთ მოტანილი ორი დაშვება მათემატიკურად ასე გამოიხატება: როგორიც არ უნდა იყოს გამონათქვამთა სიმრავლე S , მასზე განსაზღვრულია რაღაც ფუნქცია ორი მნიშვნელობით:

{„ჰეშმარიტი“, „მცდარი“},

ჩვენთვის ხელსაყრელი იქნება ამ სიმრავლის ელემენტები აღვხედოთ სიმბოლოებით 1 — „ჭეშმარიტი“, 0 — „მცდარი“. ამგვარად, გვუძნება გამონათქვამთა S სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე

$$\{1, 0\}.$$

ავიღოთ რაიმე გამონათქვამი A . განვსაზღვროთ ამ გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა. თუ A ჭეშმარიტი გამონათქვამია, მაშინ მისი მნიშვნელობა იყოს 1, თუ მცდარი გამონათქვამია, მისი მნიშვნელობა იყოს 0:

$$|A| = \begin{cases} 1, & \text{თუ } A \text{ ჭეშმარიტია,} \\ 0, & \text{თუ } A \text{ ყალბია.} \end{cases}$$

$|A|$ სიმბოლო აღნიშნავს A გამონათქვამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას.

გამონათქვამთა ლოგიკის ძირითადი ამოცანაა შეისწავლოს გამონათქვამებზე ლოგიკური მოქმედებანი, რომლებიც რაღაც ახალ გამონათქვამებს იძლევიან. ამ ახალ გამონათქვამთა ჭეშმარიტული მნიშვნელობა განისაზღვრება მხოლოდ მოცემული გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობებით.

ვთქვათ, გვაქვს n გამონათქვამი: $A_1, A_2, \dots, A_n$. ამ n გამონათქვამზე α მოქმედებით შევადგინოთ გამონათქვამი, რომელიც ზემოთ ჩამოყალიბებულ პირობას აკმაყოფილებს. ცხადია, ეს გამონათქვამი ცალსახად დახასიათდება რომელიმე $f_\alpha(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ისეთი ფუნქციით, რომ ნებისმიერი $A_1, A_2, \dots, A_n$ გამონათქვამებისათვის

$$|f_\alpha(A_1, A_2, \dots, A_n)| = f_\alpha(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ყოველი $X_i, i = \overline{1, n}$ ლებულობს 0 ან 1 მნიშვნელობებს სიმრავლიდან $\{0, 1\}$. ამ $X_1, X_2, \dots, X_n$ მნიშვნელობებს ცალსახად შეესაბამება $\{0, 1\}$ სიმრავლის ელემენტები f_α ფუნქციის საშუალებით:

$$f_\alpha: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}.$$

ე. ი. ფუნქცია f_α განსაზღვრულია ნულებისა და ერთების ყველა n -ეულზე და ლებულობს მნიშვნელობებს 0 ან 1.

ცხადია, ყოველი f_α ფუნქცია შეიძლება მოცემულ იქნეს შემდეგი სახის ცხრილით:

X_1	X_2	$\dots$	X_n	$f_\alpha(X_1, X_2, \dots, X_n)$
0	0	$\dots$	0	$f_\alpha(0, 0, \dots, 0)$
1	0	$\dots$	0	$f_\alpha(1, 0, \dots, 0)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	$\dots$	1	$f_\alpha(1, 1, \dots, 1)$

f_α ფუნქციებს ჭეშმარიტული ფუნქციები ეწოდება.

3. **ლოგიკური მოქმედებანი.** მოცემული მარტივი გამონათქვამებით შეიძლება შევადგინოთ რთული გამონათქვამები, თუ ამ მარტივ გამონათქვამებს დავაკავშირებთ სიტყვებით: „და“, „ან“, „თუ...“, „მაშინ“, „...მაშინ და მხოლოდ მაშინ“, „როდესაც...“, „...არა“

განვიხილოთ თეორემა, რომლის დამტკიცებაც გვიჩვენებს, თუ როგორ მიიღება მოცემული მარტივი გამონათქვამებით რთული გამონათქვამები — მოლეკულები.

თეორემა: ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.

ვიღრე თეორემას დავამტკიცებდეთ, მოვიგონოთ მარტივი და შედგენილი რიცხვების განსაზღვრა.

1-საგან განსხვავებულ ნატურალურ p რიცხვს ეწოდება მარტივი, თუ მას გაყოფებად აქვს მხოლოდ 1 და p .

1-ისა და მარტივი რიცხვებისაგან განსხვავებულ ყველა ნატურალურ რიცხვს ეწოდება შედგენილი რიცხვი.

ცხადია, ყოველ შედგენილ q რიცხვს გამოყოფებად აქვს 1-ისა და q -ს გარდა სხვა ნატურალური რიცხვი, წინააღმდეგ შემთხვევაში q რიცხვი მარტივი რიცხვი იქნებოდა.

მოტანილი განსაზღვრებები საშუალებას გვაძლევს, ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე გავყოთ სამ კლასად: ერთი კლასი შევადგინოთ ყველა მარტივი რიცხვისაგან, მეორე — ყველა შედგენილი რიცხვისაგან, მესამე — ერთადერთი რიცხვისაგან 1, რომელიც არც მარტივია და არც შედგენილი. ამ კლასებს არა აქვთ საერთო რიცხვები.

ამგვარად, ერთისაგან განსხვავებული ნატურალური რიცხვი არ შეიძლება იყოს ერთდროულად შედგენილიც და მარტივიც.

ახლა დავამტკიცოთ ჩამოყალიბებული თეორემა.

დამტკიცება. ვთქვათ, რომ ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულოა და შედგება რიცხვებისაგან

$$2, 3, 5, \dots, p. \quad (1)$$

სადაც p უდიდესი მარტივი რიცხვია, განვიხილოთ რიცხვი

$$q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1. \quad (2)$$

ცხადია, q რიცხვი 1-ზე მეტია და, მაშასადამე, იგი შედგენილია ან მარტივი.

თუ q რიცხვი შედგენილია, მაშინ შედგენილი რიცხვის განსაზღვრის თანახმად, იგი (1) რიცხვებიდან ერთ-ერთ რიცხვზე მაინც უნდა გაიყოს. ვთქვათ, ეს გამყოფი რიცხვია k , $k > 1$.

თუ q რიცხვი მარტივია, მაშინ იგი (1) რიცხვებიდან ერთ-ერთის ტოლი უნდა იყოს. ვთქვათ, ეს რიცხვია l , $l > 1$.

q რიცხვი გაიყოფა k -ზე ან l -ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სათანადო გაყოფით მიღებული ნაშთი ნულის ტოლია. მაგრამ, როგორც (2) ტოლობა გვიჩვენებს, q რიცხვის k -ზე ან l -ზე გაყოფით მიიღება ნაშთი 1.

მაშასადამე, q ნატურალური რიცხვი, $q > 1$, არც მარტივია და არც შედგენილი. ეს კი შეუძლებელია. მივიღეთ წინააღმდეგობა, რომელიც გვიჩვენებს, რომ ჭეშმარიტი არაა დაშვება: ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულოა.

თეორემის დამტკიცებამ გვიჩვენა, თუ როგორ მიიღება მარტივი გამონათქვამებიდან რთული გამონათქვამი.

განვიხილოთ ლოგიკური მოქმედებანი.

1) **გამონათქვამთა კონიუნქცია.** ავიღოთ ორი გამონათქვამი, რომლებიც სათანადოდ A და B ასოებით აღვნიშნოთ:

A — „ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულოა“.

B — „ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე შედგება 2, 3, ..., p რიცხვებისაგან, სადაც p უდიდესი მარტივი რიცხვია“.

შევადგინოთ წინადადება:

„ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულოა და შედგება რიცხვებისაგან 2, 3, ..., p , სადაც p უდიდესი მარტივი რიცხვია“.

ბისაგან 2, 3, ..., p , სადაც p უდიდესი მარტივი რიცხვია“.

მიღებული წინადადება გამონათქვამია. თეორემის დამტკიცებით გამოირკვა, რომ ეს ახალი გამონათქვამი მცდარია.

ახალ (3) გამონათქვამს A და B გამონათქვამების კონიუნქცია ეწოდება. კონიუნქცია — ბინარული (ორადგილიანი — ორწინადადებიანი) ლოგიკური მოქმედებაა, რომელსაც ჩვეულებრივ ენაში „და“ კავშირი შეესაბამება.

A და B გამონათქვამთა კონიუნქცია ასე აღინიშნება: $A \wedge B$ და წაიკითხება „ A და B “.

A და B გამონათქვამთა კონიუნქცია განსაზღვრით არის გამონათქვამი, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A გამონათქვამიც და B გამონათქვამიც ჭეშმარიტია. ამ განსაზღვრით A და B გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობებისათვის გვექნება 1-ლი ცხრილი. ამ ცხრილით გამონათქვამი $A \wedge B$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ A გამონათქვამიც ჭეშმარიტია და B გამონათქვამიც ჭეშმარიტია, სხვა შემთხვევაში $A \wedge B$ გამონათქვამი მცდარია.

მაგალითად, გამონათქვამი „ $2 < 3$ და ყოველი მართკუთხედი პარალელოგრამია“ ჭეშმარიტია, ხოლო გამონათქვამი „ $2 > 3$ და $4 \cdot 5 = 20$ “ მცდარია.

2) **გამონათქვამთა დიზიუნქცია.** განვიხილოთ გამონათქვამები:

A — „რიცხვი $q = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p + 1$ მარტივი რიცხვია, სადაც p უდიდესი მარტივი რიცხვია“;

B — „რიცხვი $q = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p + 1$ შედგენილი რიცხვია, სადაც p უდიდესი მარტივი რიცხვია“.

ახლა განვიხილოთ წინადადება:

„რიცხვი $q = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p + 1$ მარტივი რიცხვია ან შედგენილი, სადაც p უდიდესი მარტივი რიცხვია“.

განხილული (4) წინადადება გამონათქვამია. ამ გამონათქვამს A და

ცხრილი 2

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ქცის ცხრილი (ცხრილი 2). მე-2 ცხრილი გვიჩვენებს, რომ A და B გამონათქვამთა დიზიუნქცია ჭეშმარიტია მაშინ, როდესაც A და B გამონათქვამებიდან ერთი გამონათქვამი მაინც ჭეშმარიტია.

ცხრილი 1

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

B გამონათქვამების დიზიუნქცია ეწოდება.

A და B გამონათქვამთა დიზიუნქცია ბინარული მოქმედებაა, რომელსაც ჩვეულებრივ ენაში „ან“ კავშირი შეესაბამება.

A და B გამონათქვამთა დიზიუნქცია $A \vee B$ სიმბოლოთი აღინიშნება და წაიკითხება „ A ან B “.

A და B გამონათქვამთა დიზიუნქცია განსაზღვრის თანახმად $A \vee B$ არის გამონათქვამი, რომელიც მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A -ც მცდარია და B -ც მცდარია. ამ განსაზღვრის თანახმად ადვილი შესადგენია A და B გამონათქვამთა დიზიუნქცია.

ზემოთ დაწერილი (4) გამონათქვამი: „რიცხვი $q=2 \cdot 3 \dots p+1$ მარტივი ან შედგენილი რიცხვია, სადაც p უდიდესი მარტივი რიცხვია“ მცდარია, რადგანაც ორივე გამონათქვამი მცდარია. თეორემის დამტკიცების დროს სწორედ ამ გამონათქვამის მცდარობა ვაჩვენეთ.

გამონათქვამი „ყოველი სამკუთხედის ფართობი მისი ფუძისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია ან ყოველ სამკუთხედში ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი მესამე გვერდის სიგრძეზე ნაკლები არაა“, ჭეშმარიტია, რადგანაც ამ ორი გამონათქვამიდან მეორე გამონათქვამი ჭეშმარიტია.

3) გამონათქვამთა იმპლიკაცია. განვიხილოთ ორი A და B გამონათქვამი:

A — „რიცხვი $q=2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p+1$, სადაც p არის უდიდესი მარტივი რიცხვი, შედგენილი რიცხვია“;

B — „რიცხვი $q=2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p+1$, სადაც p არის უდიდესი მარტივი რიცხვი, გაყოფა მარტივი $2, 3, 5, \dots, p$ რიცხვებიდან ერთ-ერთზე მაინც“, ახლა შევადგინოთ წინადადება:

„თუ q რიცხვი, $q=2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p+1$, შედგენილია, მაშინ q რიცხვი გამოიყოფა $2, 3, 5, \dots, p$ რიცხვებიდან ერთ-ერთზე მაინც“.

(5) ეს წინადადება გამონათქვამია, რადგანაც იგი გარკვეულ ინფორმაციას იძლევა. მიღებულ (5) გამონათქვამს A და B გამონათქვამთა იმპლიკაცია ეწოდება. ეს გამონათქვამი $A \Rightarrow B$ სიმბოლოთი აღინიშნება და წაიკითხება „თუ A , მაშინ B “ ან „ A -დან გამომდინარეობს B “.

A და B გამონათქვამთა იმპლიკაცია (გამომდინარეობა) განსაზღვრით არის გამონათქვამი, რომელიც მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A ჭეშმარიტია და B მცდარია. ამ განსაზღვრის საფუძველზე ადვილი შესადგენია $A \Rightarrow B$ იმპლიკაციის მნიშვნელობათა ცხრილი (ცხრილი 3).

მე-3 ცხრილში მოცემულია, რომ $A \Rightarrow B$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ A ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ხოლო B მცდარი. სხვა შემთხვევაში გამონათქვამი $A \Rightarrow B$ ჭეშმარიტია.

ზემოთ შედგენილი (5) გამონათქვამი ჭეშმარიტია, რადგანაც A -ც და B -ც ორივე ჭეშმარიტი გამონათქვამებია.

A გამონათქვამს ეწოდება პირობა და B გამონათქვამს დასკვნა.

$A \Rightarrow B$ გამონათქვამის აზრით იხმარება შემდეგი წინადადება: „ A გამონათქვამი არის საკმარისი პირობა B გამონათქვამისათვის“, „ B არის აუცილებელი პირობა A -სათვის“.

ცხრილი 3

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ჩვენ განვიხილეთ $A \Rightarrow B$ გამონათქვამის უმარტივესი შემთხვევა. საზოგადოდ, გამონათქვამს „ $A \Rightarrow B$ “ A და B გამონათქვამების კონიუნქციისა და დიზიუნქციისაგან განსხვავებით ჩვეულებრივ ენასთან ნაკლები კავშირი აქვს.

მაგალითად, გამონათქვამი „თუ ბატი ცხოველია, მაშინ თევზი აქლემია“ იმპლიკაციის განსაზღვრით ჭეშმარიტია. თუმცა ასეთი წინადადება უფრო უაზრობაა, ვიდრე ჭეშმარიტი, როგორც ეს იმპლიკაციის განსაზღვრითაა მიღებული. ჩვეულებრივ საუბარში აღნიშნული წინადადებით იმის თქმა უნდათ, რომ ბატი არაა ცხოველი. ეს ჭეშმარიტებაა.

ასევე, მაგალითად, „თუ ყოველი ცოცხალი არსება ფრინველია, მაშინ თბილისი ქალაქია“. ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტია, რადგანაც მეორე გამონათქვამი ჭეშმარიტია. თუმცა ასეთი წინადადება ჩვეულებრივ საუბარში ალბათ, ღიმილს გამოიწვევს.

გამოდის, რომ მათემატიკური ლოგიკის ენა დაშორებულია ჩვეულებრივი სასაუბრო ენისაგან. ე. ი. გვაქვს სხვადასხვა ენა. აქ არავითარი წინააღმდეგობა არაა. განა ყოველი სამეტყველო წინადადება აზრიანია! საეჭვოა, მოიძებნოს ორი ისეთი ადამიანი, რომლებიც ყოველ სიტყვას ერთი და იმავე მნიშვნელობით ხმარობდნენ. ერთი და იგივე სიტყვაც კი ერთი ადამიანის მეტყველებაშიც ზოგჯერ სხვადასხვა აზრისაა, და რა გასაკვირია, მათემატიკური ლოგიკის ენა რომ განსხვავებული იყოს ჩვეულებრივი ენისაგან.

4) გამონათქვამთა ეკვივალენტურობა. განვიხილოთ გამონათქვამები:

A — „რიცხვი $q=2 \cdot 3 \dots p+1$, სადაც p უდიდესი მარტივი რიცხვია, k რიცხვზე, სადაც k ერთ-ერთი მარტივი რიცხვია, იყოფა.

B — „ q რიცხვის k რიცხვზე გაყოფით მიღებული ნაშთი ნულის ტოლია“.

ახლა განვიხილოთ წინადადება:

„რიცხვი $q=2 \cdot 3 \dots p+1$, სადაც p უდიდესი მარტივი რიცხვია, k რიცხვზე, სადაც k ერთ-ერთი მარტივი რიცხვია, იყოფა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც q რიცხვის k რიცხვზე გაყოფით მიღებული ნაშთი ნულის ტოლია“.

(6)

ეს ახალი წინადადება მიღებულია წინა ორი A და B წინადადებიდან და სრულიად ახალ ინფორმაციას იტყობინება A და B წინადადებებისაგან განსხვავებით.

ამ ახალ წინადადებას A და B გამონათქვამთა ეკვივალენტურობა ეწოდება. A და B წინადადებათა ეკვივალენტურობა აღინიშნება $A \Leftrightarrow B$ და წაიკითხება: „ A გამონათქვამი ეკვივალენტურია B გამონათქვამისა“, ან მოკლედ: „ A ეკვივალენტურია B -სი“.



განსაზღვრის თანახმად $A \iff B$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ A და B გამონათქვამებს ერთნაირი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა აქვთ. სხვა შემთხვევაში $A \iff B$ მცდარია (ცხრილი 4).

ცხრილი 4

A	B	$A \iff B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ზემოთ მოცემული (6) გამონათქვამი ჭეშმარიტია. ასევე, გამონათქვამი

$$(2 < 3) \iff (4 \cdot 5 = 20)$$

ჭეშმარიტია, რადგანაც ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია. გამონათქვამი

$$(ძალს 6 ფეხი აქვს) \iff (2 \cdot 3 = 9)$$

ჭეშმარიტია, რადგანაც ორივე გამონათქვამი მცდარია. გამონათქვამი

$$(მთვარე ღელამიწის თანამგზავრია) \iff$$

$$(კურღლეული ფრინველია)$$

მცდარია, რადგანაც მეორე გამონათქვამი მცდარია.

გამონათქვამი $A \iff B$ ასეც წაიკითხება:

„ A სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება B “ ან „იმისათვის, რომ A სრულდებოდეს, აუცილებელია და საკმარისი სრულდებოდეს B “.

ზემოთ A და B გამონათქვამებზე ოთხი ლოგიკური მოქმედება განვიხილოთ:

$$A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \iff B.$$

ამ გამონათქვამთა ჭეშმარიტული მნიშვნელობა („ჭეშმარიტი“ — 1; „მცდარი“ — 0) მთლიანად განისაზღვრება A და B გამონათქვამთა ჭეშმარიტული მნიშვნელობებით და არ გვესაჭიროება იმის ცოდნა, თუ რა ინფორმაციას გვატყობინებს A გამონათქვამი და რა ინფორმაციას — B გამონათქვამი. საკმარისია, ვიცოდეთ A და B გამონათქვამების ჭეშმარიტული მნიშვნელობანი $|A|$ და $|B|$.

5) გამონათქვამთა უარყოფა. ავიღოთ წინადადება:

A — „ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულოა“.

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ

„ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე არაა სასრულო“.

ეს უანასკენი წინადადება ასე ჩაიწერება: $\bar{A}$ ან $\neg A$ და წაიკითხება „არა A “.

A გამონათქვამის უარყოფის $\bar{A}$ განსაზღვრის თანახმად არის გამო-
ნათქვამი, რომელიც ჭეშმარიტია, როდესაც A მცდარია და $\bar{A}$ მცდარია, თუ A ჭეშმარიტია (ცხრილი 5).

ცხრილი 5

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

4. გამონათქვამთა ალგებრის ფორმულები. თვისებები. განვიხილოთ გამოსახულება:

$$(1 + 5) \cdot (9 - 7) + 8 \cdot \sqrt{11} - 2 \cdot \sqrt[3]{6^3 - 2}. \quad (8)$$

ეს გამოსახულება რიცხვებზე ალგებრული მოქმედების შედეგადია მიღებული. მისი რიცხვითი მნიშვნელობა სათანადოდ გამოითვლება. (8) გამოსახულებას ალგებრულ გამოსახულებას უწოდებენ. რიცხვებზე ალგებრულ გამოსახულებაში აღწერილია ის მოქმედებანი, რომლებიც უნდა შესრულდეს, რომ მივიღოთ აღებული ალგებრული გამოსახულების მნიშვნელობა.

განვიხილოთ გამოსახულება: $x^2 - 3x + 2$. აქ x -ის შენაცვლება რაიმე რიცხვით მოგვცემს გარკვეულ რიცხვს. ამ გამოსახულებას აღწერილობითი (სახელდებით) ფუნქცია ან, მოკლედ, ფუნქცია ეწოდება.

ავიღოთ ელემენტარული გამონათქვამები P, Q, R, T .

შევადგინოთ გამოსახულება (სიტყვა)

$$(((P \vee Q) \wedge R) \Rightarrow (\bar{T})). \quad (9)$$

ეს გამოსახულება ლოგიკურ მოქმედებათა საფუძველზეა შედგენილი. თუ (9) გამოსახულებაში თითოეული გამონათქვამის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ, მივიღებთ მის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. (9) გამოსახულება რთული გამონათქვამია. ცხადია, (9) გამონათქვამზე კვლავ შეგვიძლია ვაწარმოოთ ლოგიკური მოქმედება.

P, Q, R, T გამონათქვამებს აქვთ გარკვეული მნიშვნელობანი: 0 ან 1. ამის გამო ამ გამონათქვამებს მუდმივი ელემენტარული გამონათქვამები ეწოდებათ.

ახლა ავიღოთ სიმბოლოები $X, Y, Z, \dots$ ვთქვათ, ეს სიმბოლოები ჭეშმარიტ ან მცდარ გამონათქვამებს აღნიშნავენ. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ვაქვს ცვლადი გამონათქვამები.

შევადგინოთ გამოსახულებანი:

$$(X \vee Y), ((X \wedge Y) \Rightarrow Z), ((X \wedge (\neg Y)) \iff Z). \quad (10)$$

ამ გამოსახულებათა ჭეშმარიტული მნიშვნელობა განსაზღვრული არ არის. ეს ჭეშმარიტული მნიშვნელობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორ ელემენტარულ გამონათქვამებს ჩავსვამთ X, Y, Z ცვლადების მაგივრად.

ცხადია, $P, Q, \dots$ და $X, Y, \dots$ შორის ის განსხვავებაა, რომ $P, Q, \dots$ აღნიშნავენ რომელიმე ელემენტარულ კონკრეტულ გამონათქვამებს, ხოლო $X, Y, \dots$ ელემენტარულ გამონათქვამებს ზოგადად. P -ს, Q -ს და X -ს შორის ისეთი განსხვავებაა, როგორიც საკუთარ სახელსა და საზოგადო სახელს შორის (მაგალითად, პეტრე — P , ეკატერინე — Q ... ადამიანი — X).

2. გ. კომლაძე

$A, B, \dots; P, Q, \dots$ -ს პროპოზიციული მუდმივები ეწოდება, ხოლო $X, Y, \dots$ -ს პროპოზიციული ცვლადები (ცვლადი, რომლის მნიშვნელობა გამონათქვამია).

პროპოზიციული ცვლადები ზოგადად (მოლეკულები) $X, Y, Z, \dots$ ან $X_1, X_2, \dots$ სიმბოლოებით აღნიშნება.

(9) და (10) გამოსახულებებს ლოგიკური ფორმულები ან, მოკლედ, ფორმულები ეწოდება.

ფორმულა ინტუიციურად ასე განისაზღვრება:

1) სიმბოლოები 0, 1 და ყოველი პროპოზიციული ცვლადი X არის ფორმულა;

2) თუ A და B არის ფორმულა, მაშინ $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\bar{A})$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ აგრეთვე ფორმულებია.

3) გამოსახულება მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ფორმულა, როდესაც ეს დადგენილი იქნება 1-ლ და მე-2 პუნქტებში მოცემული განსაზღვრებით, მაგალითად, თუ X_1, X_2, X_3 პროპოზიციული ცვლადებია, მაშინ

$$(X_1), ((X_1) \vee (X_2)), ((X_2) \Rightarrow (X_3)), ((0) \Rightarrow (X_1)), ((1) \Leftrightarrow (X_2))$$

ფორმულებია.

თუ მივცემთ მნიშვნელობებს პროპოზიციულ ცვლადებს, რომლებიც ფორმულაშია, მაშინ ფორმულა მოგვცემს გარკვეულ მნიშვნელობას — ჰეშმარიტ გამონათქვამს ან მცდარ გამონათქვამს. ამგვარად, ყოველი ფორმულა განსაზღვრავს რომელიმე ჰეშმარიტულ ფუნქციას, ან მოკლედ, ფუნქციას, რომლის არგუმენტებია პროპოზიციული ცვლადები, ხოლო მნიშვნელობანია 0 ან 1. ე. ი. ყოველი ფორმულა ჰეშმარიტი ან მცდარი გამონათქვამია.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი ცვლილება ფორმულის ჩაწერის მიმართ.

თუ A არის ფორმულა, ეწეროს (A) . ეს ნიშნავს, რომ A საზოგადოდ რთული გამონათქვამია. თუ A ელემენტარული გამონათქვამია, შეიძლება ფრჩხილები არ ვიხმაროთ. შევთანხმდეთ, რომ A გამონათქვამისათვის ფრჩხილები არ ვიხმაროთ მაშინაც, როდესაც A რთული გამონათქვამია. ასევე ფრჩხილები არ ვიხმაროთ $(A \wedge B)$ -თვის. ეს უკანასკნელი ასე ჩაწერით: $A \wedge B$. ასევე ფრჩხილები არ ვიხმაროთ ზემოთ განხილული ლოგიკური მოქმედებებისათვის.

ფრჩხილების რიცხვი უფრო შეგვიძლია შევამციროთ, თუ ჩავთვლით, რომ ლოგიკური კავშირი $\Leftrightarrow$ უფრო ძლიერია, ვიდრე კავშირი $\Rightarrow$; იმპლიკაციის კავშირი $\Rightarrow$ უფრო ძლიერია, ვიდრე $\vee$; ლოგიკური კავშირი $\vee$

უფრო ძლიერია, ვიდრე $\wedge$; ხოლო ლოგიკური კავშირი $\wedge$ უფრო ძლიერია, ვიდრე უარყოფის ნიშანი $\neg$. რაც უფრო ძლიერია ლოგიკური ნიშანი, მით უფრო დიდია მისი მოქმედების არე.

მაგალითად, ფორმულა

$$((A \wedge B) \vee C)$$

შეგვიძლია ასე ჩაწეროთ:

$$A \wedge B \vee C \text{ ან } AB \vee C.$$

ფორმულა

$$(((A \wedge \bar{B}) \vee C) \Rightarrow (A \wedge D)) \Leftrightarrow (A \vee B).$$

ასე შეგვიძლია ჩაწეროთ:

$$A \wedge \bar{B} \vee C \Rightarrow A \wedge D \Leftrightarrow A \vee B.$$

და ა. შ.

ადვილი შესაძენებია, რომ გამონათქვამთა აღრიცხვის სიმბოლოები სამი კატეგორიისაა:

1) პირველი კატეგორიის სიმბოლოები: 0, 1 და ასოები, რომლებიც პროპოზიციულ მუდმივებს ან ცვლადებს აღნიშნავენ. ამ სიმბოლოთა საერთო სახელწოდებაა პროპოზიციული ცვლადები.

2) მეორე კატეგორიის სიმბოლოებია

$$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg,$$

რომელთა საერთო სახელწოდებაა ლოგიკური კავშირები;

3) მესამე კატეგორიის სიმბოლოებია (), რომელთა სახელწოდებაა ფრჩხილთა წყვილები.

სიმბოლოთა ამ სისტემას ეწოდება გამონათქვამთა აღრიცხვის ალფაბეტი.

გამონათქვამთა აღრიცხვის ფორმულები წარმოადგენს ჩამოთვლილი სიმბოლოების სასრულო მიმდევრობას. ფორმულათა აღნიშვნისათვის ვხმარობთ ლათინურ ასოებს. ეს ასოები არ არიან გამონათქვამთა აღრიცხვის სიმბოლოები. ისინი პირობით აღნიშნავენ საზოგადოდ ფორმულას. ცხადია, ლათინური ასოების ნაცვლად სხვა ასოებიც შეგვიძლია ვიხმაროთ.

გამოვთვალოთ (9) ფორმულის ჰეშმარიტული მნიშვნელობა, თუ P, R, T გამონათქვამები ჰეშმარიტია, ხოლო Q — მცდარი.

პირველ ფრჩხილში ჰეშმარიტი გამონათქვამია. შემდეგ ფრჩხილში $(P \vee Q) \wedge R$ ჰეშმარიტი გამონათქვამია, $\bar{T}$ — მცდარი. იმპლიკაციის განსაზღვრის თანახმად $(P \vee Q) \wedge R \Rightarrow \bar{T}$ ჰეშმარიტია. მაშასადამე, (9) ფორმულის ჰეშმარიტული მნიშვნელობა 1-ია.

განვიხილოთ ფორმულა $X \vee Y$, სადაც X და Y პროპოზიციული ცვლადებია. ეს ფორმულა A ასოთი აღვნიშნოთ

$$A \equiv (X \vee Y). \quad (11)$$

19

1 Э. М. Медельсон. Введение в математическую логику. Изд. М., 1971, стр. 36, 54. П. С. Новиков. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977, стр. 12, 13.

თუ X -ს შევცვლით (X -ის მაგივრად ჩავსვათ) რომელიმე ჭეშმარიტი გამონათქვამით, ხოლო Y -ს შევცვლით მცდარი გამონათქვამით, მაშინ A ფორმულა ჭეშმარიტ გამონათქვამს იძლევა:

$$|X| = 1, |Y| = 0, |A| = 1.$$

საერთოდ (11) ფორმულიდან შესაძლებელია 4 შემთხვევა:

1) X -ს შევცვლით ჭეშმარიტი გამონათქვამით, Y -ს ჭეშმარიტი გამონათქვამით, მაშინ $|A| = 1$;

2) X -ს ჭეშმარიტით, Y -ს მცდრით, მაშინ $|A| = 1$;

3) X -ს მცდრით, Y -ს ჭეშმარიტით, მაშინ $|A| = 1$;

4) X -ს მცდრით, Y -ს მცდრით, მაშინ $|A| = 0$.

ახლა განვიხილოთ ორი ფორმულა:

$$A \equiv (X \Rightarrow Y), \quad (12)$$

$$B \equiv (\bar{X} \vee Y). \quad (13)$$

თუ (12) ფორმულაში ცვლადებს მიმდევრობით შევცვლით ჭეშმარიტი და მცდარი გამონათქვამებით, მაშინ (12) ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობანი მოგვეცემს მე-3 ცხრილს.

ცხრილი 6

X	$\bar{X}$	Y	$\bar{X} \vee Y$
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1

ახლა ავიღოთ (13) ფორმულა. შევცვალოთ X და Y სათანადოდ ჭეშმარიტი და მცდარი გამონათქვამებით. მივიღებთ მე-6 ცხრილს. მე-6 და მე-3 ცხრილთა შედარება გვიჩვენებს, რომ როგორც გინდ გამონათქვამი ჩავსვათ X და Y ცვლადების მაგივრად (12) და (13) ფორმულებში, ორივე ფორმულა ერთნაირი ჭეშმარიტული მნიშვნელობების გამონათქვამებს იძლევა. ამის გამო შეიძლება ვთქვათ, რომ (12) და (13) ფორმულების ჭეშმარიტული მნიშვნელობანი ერთი და იგივეა და ჩავწერთ:

$$|A| \equiv |B| \text{ ან } |X \Rightarrow Y| = |\bar{X} \vee Y|.$$

ეს ასე წაიკითხება: „ჭეშმარიტული მნიშვნელობა $X \Rightarrow Y$ ფორმულისა იგივეა, რაც $\bar{X} \vee Y$ ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა“.

აქედან არ გამოდინარეობს, რომ ფორმულები (12) და (13) ერთნაირია, მაგრამ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობანი ერთი და იგივეა (12) და (13) ფორმულების შესახებ ვიტყვი, რომ ფორმულები (12) და

(13) ტოლფასია, ან ტოლძალღანია. ფორმულათა ტოლფასობა ასე ჩაიწერება:

$$(X \Rightarrow Y) \equiv (\bar{X} \vee Y) \text{ ან } X \Rightarrow Y \equiv \bar{X} \vee Y \quad (14)$$

და წაიკითხება: „ფორმულა $X \Rightarrow Y$ ტოლფასია $\bar{X} \vee Y$ ფორმულასა“. განვიხილოთ ფორმულა

$$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X). \quad (15)$$

თუ X და Y ორივე ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ან ორივე მცდარი, მაშინ

$$X \Rightarrow Y \text{ და } Y \Rightarrow X$$

ფორმულების ჭეშმარიტული მნიშვნელობანი ერთი და იგივეა. ამ შემთხვევაში (15) ფორმულა ჭეშმარიტია.

თუ X ჭეშმარიტი გამონათქვამია და Y — მცდარი, მაშინ გამონათქვამი $X \Rightarrow Y$ მცდარია. გამონათქვამი $Y \Rightarrow X$ კი ჭეშმარიტია. ამის გამო (15) გამონათქვამი მცდარია.

თუ X მცდარი გამონათქვამია, ხოლო Y ჭეშმარიტი, მაშინ $X \Rightarrow Y$ ჭეშმარიტია, ხოლო $Y \Rightarrow X$ მცდარი. ამ შემთხვევაში (15) გამონათქვამი მცდარია.

თუ (15) ფორმულის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას შევადარებთ $X \Leftrightarrow Y$ ფორმულის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას (ცხრილი (4)), მივიღებთ, რომ ამ ფორმულათა ჭეშმარიტული მნიშვნელობანი ერთი და იგივეა. ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(X \Rightarrow Y \wedge Y \Rightarrow X) \equiv (X \Leftrightarrow Y). \quad (16)$$

(14)-ს საფუძველზე მივიღებთ:

$$Y \Rightarrow X \equiv \bar{Y} \vee X. \quad (17)$$

(16)-ში შევითანოთ $X \Rightarrow Y$ ფორმულის ტოლფასი ფორმულა $\bar{X} \vee Y$ და $Y \Rightarrow X$ ფორმულის ტოლფასი $\bar{Y} \vee X$ ფორმულა, გვექნება

$$X \Leftrightarrow Y \equiv (\bar{X} \vee Y) \wedge (\bar{Y} \vee X). \quad (18)$$

ამგვარად, ცნობილი ტოლფასი ფორმულებიდან რომელიმე ნაწილის სათანადოდ ტოლფასი ფორმულით შევცვლით მის ახალ ტოლფას ფორმულებს მივიღებთ.

განვსაზღვროთ ფორმულათა ტოლფასობის ცნება ზოგადად. ვთქვათ, ლოგიკის A ფორმულაში მონაწილეობენ $X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n$ პროპოზიციული ცვლადები, ხოლო B ფორმულაში $X_1, X_2, \dots, X_k, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ პროპოზიციული ცვლადები. მაშასადამე, A და B ფორმულ-

ლებს საერთო აქვთ $X_1, X_2, \dots, X_n$ ცვლადები. შეიძლება აღმოჩნდეს $k = 0$ ე. ი. **A** და **B** ფორმულებს საერთო ცვლადები შეიძლება არ ჰქონდეს.

განვიხილოთ ელემენტარულ გამონათქვამთა ისეთი S სიმრავლე, სადაც განსაზღვრულია როგორც $X_1, \dots, X_n$, ისე $Y_1, \dots, Y_m$ ცვლადები. ჩავეწეროთ $X_1, \dots, X_n$ და $Y_1, \dots, Y_m$ ცვლადების ადგილას S სიმრავლიდან ნებისმიერი ელემენტარული გამონათქვამები, მაშინ **A** და **B** ფორმულები გარკვეულ ჰეშმარიტულ მნიშვნელობებს მიიღებენ. თუ **A** და **B** ფორმულების ჰეშმარიტული მნიშვნელობანი ერთნაირია, როგორც გინდ იყოს ელემენტარულ გამონათქვამთა ჰეშმარიტული მნიშვნელობანი, მაშინ ვიტყვი, **A** ფორმულა **B** ფორმულის ტოლფასია — ტოლძალვანია და ვწერთ $A \approx B$.

განვიხილოთ ფორმულები:

$$A \equiv X_1 \vee X_2, \quad B \equiv X_2 \vee X_1.$$

ჩავეწეროთ X_1 და X_2 -ის ნაცვლად სხვადასხვა ჰეშმარიტული მნიშვნელობის გამონათქვამები, მაშინ **A** და **B** ფორმულების ჰეშმარიტულ მნიშვნელობათათვის მივიღებთ მე-7 ცხრილს. ამ ცხრილით ადვილი შესამჩნევია, რომ **A** და **B** ფორმულები ტოლფასია:

$$X_2 \vee X_1 \approx X_1 \vee X_2.$$

ჩამოვწეროთ მნიშვნელოვანი ტოლფასი ფორმულები:

- 1) $\bar{X} \approx X$ (ორმაგი უარყოფის კანონი);
- 2) $X \wedge Y \approx Y \wedge X$ (კონიუნქციის გადანაცვლებადობის კანონი);
- 3) $(X \wedge Y) \wedge Z \approx X \wedge (Y \wedge Z)$ (კონიუნქციის ჯუფთებადობის კანონი);
- 4) $X \vee Y \approx Y \vee X$ (დიზიუნქციის გადანაცვლებადობის კანონი);
- 5) $(X \vee Y) \vee Z \approx X \vee (Y \vee Z)$ (დიზიუნქციის ჯუფთებადობის კანონი);
- 6) $X \vee (Y \wedge Z) \approx (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ (დიზიუნქციის კონიუნქციასთან განრიგებადობის კანონი);
- 7) $X \wedge (Y \vee Z) \approx (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ (კონიუნქციის დიზიუნქციასთან განრიგებადობის კანონი);
- 8) $X \vee (X \wedge Y) \approx X$;
- 9) $X \wedge (X \vee Y) \approx X$;
- 10) $\overline{X \vee Y} \approx \bar{X} \wedge \bar{Y}$ (დე მორგანის კანონი);

1) ოგანტეს დე მორგანი (1806—1871), შოტლანდიელი მათემატიკოსი და ლოგიკოსი.

$$11) \overline{X \wedge Y} \approx \bar{X} \vee \bar{Y} \text{ (დე მორგანის კანონი);}$$

$$12) X \vee X \approx X;$$

$$13) X \vee \bar{X} \approx 1;$$

$$14) X \wedge X \approx X;$$

$$15) X \wedge \bar{X} \approx 0;$$

$$16) X \wedge 1 \approx X;$$

$$17) X \vee 0 \approx X;$$

$$18) X \Rightarrow Y \approx \bar{X} \vee Y;$$

$$19) X \Leftrightarrow Y \approx (\bar{X} \vee Y) \wedge (Y \vee X).$$

ბოლო მე-18 და მე-19 ტოლფასობა გვიჩვენებს, რომ $X \Rightarrow Y$ ფორმულის ტოლფასია $\bar{X} \vee Y$ ფორმულა. ასევე $X \Leftrightarrow Y$ ფორმულის ტოლფასია $(\bar{X} \vee Y) \wedge (Y \vee X)$ ფორმულა. ამგვარად, ლოგიკური მოქმედებანი $\Rightarrow$ და $\Leftrightarrow$ გამოისახება $\vee$, $\wedge$ და $\neg$ -ის საშუალებით.

თუ მე-11-ს დავაკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ

$$X \wedge Y \approx \overline{\bar{X} \vee \bar{Y}}$$

ე. ი. მოქმედება $\wedge$ გამოისახება $\vee$ და $\neg$ -ის საშუალებით, ასე რომ, შეგვიძლია გამოვიღეთ ლოგიკური მოქმედებებიდან $\vee$, $\neg$ და განესაზღვროთ სხვა დანარჩენი $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ლოგიკური მოქმედებანი.

თუ გამოვალთ მე-10 ტოლფასი ფორმულიდან, მივიღებთ

$$X \vee Y \approx \overline{\bar{X} \wedge \bar{Y}},$$

ე. ი. მოქმედება $\vee$ გამოისახება $\wedge$ და $\neg$ -ის საშუალებით, ასე რომ, შეგვიძლია გამოვიღეთ ლოგიკური მოქმედებებიდან $\wedge$, $\neg$ და განესაზღვროთ სხვა დანარჩენი მოქმედებანი. თუ მართა ორი $\vee$, $\neg$ ან $\wedge$, $\neg$ ლოგიკური ოპერაციით ვისარგებლებდით, მაშინ, როგორც ადვილი შესამჩნევია, მიღებულ ფორმულებში გაცილებით უფრო გრძელი იქნება, ვიდრე ფორმულები, სადაც გამოყენებული იქნება ყველა ლოგიკური მოქმედება. ამასთან, ფორმულის ჰეშმარიტულობის განსაზღვრისათვის დაგვიჭირდება ჰეშმარიტულობის ცხრილის შედგენა; ცხრილის შედგენა კი ძნელდება, როცა ცვლადთა რიცხვი სამს აღემატება.

ზემოთ განესაზღვრეთ **A** და **B** გამონათქვამთა ეკვივალენტობა, $A \Leftrightarrow B$. ახლა კი შემოვიღეთ ცნება ფორმულათა ტოლფასობა. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ორ ცნებას შორის არსებობს შემდეგი კავშირი: თუ **A** და **B** ფორმულები ტოლფასია, მაშინ ფორმულა $A \Leftrightarrow B$ დეზიუნქციის ჰეშმარიტ მნიშვნელობას **A** და **B** ფორმულებში შემაჯავლი პრო-

პოზიციული ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და პირობით: თუ ფორმულა $A \iff B$ ღებულობს ჭეშმარიტ მნიშვნელობას, მაშინ A ფორმულა და B ფორმულა ერთდროულად მცდარ და ჭეშმარიტ მნიშვნელობებს ღებულობენ. ე. ი. A ფორმულა B ფორმულის ტოლფასია.

5. იგივეურად ჭეშმარიტი ფორმულები. ლოგიკური ფორმულებიდან გამოვეყოთ ე. წ. იგივეურად ჭეშმარიტი ფორმულები. თუ ფორმულაში შემაჯალი პროპოზიციული ცვლადების მაგივრად ნებისმიერი ელემენტარული გამონათქვამის ჩაწერით ფორმულა მხოლოდ ჭეშმარიტ მნიშვნელობას ღებულობს, მაშინ მას იგივეურად ჭეშმარიტი ფორმულა ეწოდება.

მაგალითად, $X \Rightarrow X$ იგივეურად ჭეშმარიტი ფორმულაა, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით გამონათქვამთა იმპლიკაციის განსაზღვრით.

ასევე, იგივეურად ჭეშმარიტი ფორმულებია $X \vee \bar{X}$, $X \wedge \bar{X}$. იგივეურად ჭეშმარიტ ფორმულას სხვანაირად უდავო ფორმულას (ტავტოლოგიას) უწოდებენ.

იმის აღსანიშნავად, რომ A ფორმულა იგივეურად ჭეშმარიტია, იხმარება სიმბოლო $\models A$.

მაგალითად, ფორმულა $X \vee X$ რომ იგივეურად ჭეშმარიტია, ასე ჩაიწერება: $\models X \vee \bar{X}$.

უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ როგორც გინდ იყოს A , B , C ფორმულები

$$\models \bar{A} \Rightarrow (A \Rightarrow B); \quad (20)$$

$$\models A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B; \quad (21)$$

$$\models \bar{B} \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \bar{A}; \quad (22)$$

$$\models \bar{A} \wedge (A \vee B) \Rightarrow B; \quad (23)$$

$$\models A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B); \quad (24)$$

$$\models A \wedge B \Rightarrow B; \quad (25)$$

$$\models A \Rightarrow A \vee B; \quad (26)$$

$$\models A \wedge B \iff B \wedge A; \quad (27)$$

$$\models A \wedge (A \vee B) \iff A; \quad (28)$$

$$\models A \vee (A \wedge B) \iff A; \quad (29)$$

$$\models \overline{A \vee B} \iff \bar{A} \wedge \bar{B}. \quad (30)$$

შევამოწმოთ $\bar{A} \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ იგივეურად ჭეშმარიტობა.

$$\bar{A} \Rightarrow (A \Rightarrow B) \approx \bar{A} \Rightarrow \bar{A} \vee B \approx A \vee (\bar{A} \vee B) \approx (A \vee \bar{A}) \vee B \approx 1 \vee B.$$

ეს უკანასკნელი კი, როგორც გინდ იყოს B გამონათქვამი, ჭეშმარიტია. ახლა ჭეშმარიტულობის ცხრილით შევამოწმოთ, რომ $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ იგივეურად ჭეშმარიტი ფორმულაა. შევადგინოთ ჭეშმარიტულობის ცხრილი (ცხრილი 8).

ცხრილი 8

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

მე-8 ცხრილის ბოლო სვეტში მოცემულია $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ ფორმულის ჭეშმარიტულობის მნიშვნელობანი. როგორც გინდ იყოს A და B გამონათქვამები, $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ ფორმულა ღებულობს მხოლოდ ჭეშმარიტ მნიშვნელობას.

6. ბულის¹ ალგებრა². როგორც მე-4 პუნქტის მე-18 და მე-19 ტოლფასობები გვიჩვენებს, ლოგიკური იმპლიკაციისა და ეკვივალენტურობის ნიშნები შეიძლება შეიცვალოს სათანადოდ დიზიუნქციის, კონიუნქციის და უარყოფის ნიშნებით. ე. ი. ფორმულები, რომლებიც მიღებულია იმპლიკაციისა $\Rightarrow$ და ეკვივალენტურობის $\iff$ ნიშნებით, შეიძლება შეიცვალოს სათანადოდ ისეთი ტოლფასი ფორმულებით, რომლებიც მიღებულია დიზიუნქციის $\vee$, კონიუნქციის $\wedge$ და უარყოფის $\neg$ ნიშნებით.

ელემენტარული ისეთი სისტემა, სადაც განსაზღვრულია სამი მოქმედება: დიზიუნქცია, კონიუნქცია და უარყოფა, რომლებიც აკმაყოფილებენ მე-4 პუნქტის დამოკიდებულებებს 1-ლიდან მე-17-ის ჩათვლით, ეწოდება ბულის ალგებრას. ამ ელემენტებს ბულის ფორმულები ეწოდებათ. ამგვარად, თუ A და B ბულის ფორმულებია, მაშინ $\bar{A}$, $A \vee B$, $A \wedge B$ აგრეთვე ბულის ფორმულებია და ეს მოქმედებანი აკმაყოფილებენ 1-ლიდან მე-17-ის ჩათვლით დამოკიდებულებებს.

¹ ჯორჯ ბული (1815—1864), ინგლისელი მათემატიკოსი და ლოგიკოსი.
² Р. Сикорский, Булевы алгебры, Мнр, М., 1969.

26

ფორმა აღმნიშვნავს ორგანოების კანცელარიაშიც იხმარება, სადაც საჭიროების შემთხვევაში ცარიელ ადგილს რომელიმე კაცის გვარით დასახელით ავსებენ. აღებულ ფორმაში ცარიელ ადგილზე x ასო დავსახელით ავსებენ. აღებულ ფორმაში x კვემდებარება. თუ წერით, მივიღებთ „ x აღამიანია“ ამ წინადადებაში x კვემდებარება. თუ ფორმაში „ x აღამიანია“ x ცვლადს რომელიმე კაცის სახელით შევცვლით, მივიღებთ მართალ გამონათქვამებს; თუ x -ის ადგილზე ცხოველის ან უსულს საგნის სახელწოდებას ჩავწერთ, მივიღებთ მცდარ გამოთქვამს. ასეთ ფორმას გამოთქვამის ეწოდება.

გამონათქვამისებური ფორმა არის ცვლადზე დამოკიდებული ისეთი წინადადება, რომელიც გამონათქვამს მოგვცემს, თუ ცვლადის ადგილას რომელიმე გარკვეული ობიექტის სახელს ჩავწერთ (ჩავსვამთ). გამონათქვამისებური ფორმა მათემატიკაში ჩვეულებრივი მოვლენაა. მაგალითად, $x^2 - 4 = 0$ განტოლება გამონათქვამისებური ფორმაა, რადგანაც, თუ x -ის ნაცვლად 2-ს ჩავსვამთ, მივიღებთ ჭეშმარიტ გამონათქვამს, ხოლო თუ ჩავსვამთ $x=3$, მივიღებთ მცდარ გამონათქვამს.

გამონათქვამისებური ფორმა „ x აღამიანია“ ერთ ცვლადს შეიცავს. ეს გამონათქვამისებური ფორმა განსაზღვრავს ერთი ცვლადის ფუნქციას, რომელიც სათანადო ობიექტს — ინდივიდს გარკვეულ გამონათქვამებს უშესაბამებს. ამ ფუნქციას პრედიკატი ეწოდება. ამგვარად, პრედიკატი „ x აღამიანია“ პროპოზიციულ ფუნქციას განსაზღვრავს, რომელიც მნიშვნელობანი გამონათქვამების სიმრავლეს შეადგენს. პრედიკატის მნიშვნელობანი აღნიშნით. მაგალითად, თუ $P(x)$ მათემატიკურ პრედიკატს „ $x > 5$ “ აღნიშნავს, მაშინ $P(3)$ არის გამონათქვამი $3 > 5$, რომელიც მცდარია, $P(x)$ -ს ეწოდება ერთადგილიანი პრედიკატი. მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა

{ჭეშმარიტი, მცდარი}, ანუ {1, 0}

ავიღოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე N . ვთქვათ, $P(x)$ პრედიკატი განსაზღვრულია ცვლადიანი წინადადებით „ x მარტივი რიცხვია“. ეს ცვლადიანი წინადადება გახდება გამონათქვამი, თუ x -ს შევცვლით რომელიმე ნატურალური რიცხვით. მაგალითად, $x=4$. $P(4)$ ნიშნავს „4 მარტივი რიცხვია“, $x=5$ -სათვის გვექნება $P(5)$, რაც ნიშნავს „5 მარტივი რიცხვია“ და ა. შ.

ვთქვათ, $P(x, y)$ პრედიკატი განსაზღვრულია ცვლადებიანი წინადადებით „ x ნაკლებია y -ზე“, ანუ „ $x < y$ “. ეს ცვლილებანი წინადადება გახდება გამონათქვამი, თუ x -ს და y -ს შევცვლით რიცხვებით. მაგალითად, $x=5$, $y=3$. გვექნება „5 ნაკლებია 3-ზე“ ან $x=7$, $y=9$. მაშინ გვექნება „7 ნაკლებია 9-ზე“. $P(x, y)$ -ს ეწოდება ორადგილიანი პრედიკატი.

ვთქვათ, გვაქვს $x_1, x_2, \dots, x_n$ ელემენტთა სიმრავლე $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ნებისმიერი $n \geq 0$ დამოუკიდებელი $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების შემცველ ყოველ

გარ გამონათქვამისებურ ფორმას, ანუ ყოველგვარ $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ პროპოზიციულ ფუნქციას ეწოდება პრედიკატი, თუ იგი ნებისმიერ $x_1, x_2, \dots, x_n$ n -ეულს $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ ელემენტთა სიმრავლიდან შეუსაბამებს გარკვეულ გამონათქვამს.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების მნიშვნელობებს ეწოდება ობიექტები ან ინდივიდები, ხოლო თვით x_i -ს საგნობრივი ცვლადი, $i = \overline{1, n}$.

თუ $n=0$, მაშინ პრედიკატი მუდმივი გამონათქვამია, ანუ, უბრალოდ, გამონათქვამია (ზღვრული შემთხვევა); თუ $n=1$, მაშინ პრედიკატი ობიექტის თვისებას იძლევა (გამონათქვამია თვით ქვემდებარეზე); თუ $n=2$, მაშინ პრედიკატი ბინარული მიმართებაა და ა. შ.

ზადგანაც ყოველი განსაზღვრული გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია — (1), ან ყალბი — (0), მაშინ პრედიკატი $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ აღნიშნავს, რომ ყოველ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ს შეესაბამება ერთ-ერთი მნიშვნელობათაგანი 0 ან 1 {0, 1} სიმრავლიდან.

ამგვარად, თუ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -ეული ლებულობის მნიშვნელობებს M სიმრავლიდან, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ლებულობის მნიშვნელობებს 0 ან 1.

ისევე, როგორც გამონათქვამთა ალგებრაში, პრედიკატთა ალრიცხვაშიც შემოვიღოთ ფორმულის ცნება.

როგორც ვინდ იყოს მოცემული n ადგილიანი, $n \geq 0$, პრედიკატი $P(-, -, \dots, -)$ და ცვლადები $x_1, x_2, \dots, x_n$, გამოსახულება $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ არის ფორმულა.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ ობიექტთა სიმბოლოები $a, b, c, \dots$ არიან ფორმულები. მაგრამ $P(a), F(a, b), \dots$ ფორმულებია, სადაც $P, F, \dots$ პრედიკატებია. გამონათქვამები $P(a), F(a, b), \dots$ ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი.

მუდმივ გამონათქვამებს 0-ადგილიანი პრედიკატი ეწოდება. გამონათქვამთა ალრიცხვაში რთული გამონათქვამები — გამონათქვამები $A, B, C, \dots$ სიმბოლოებით აღნიშნეთ, ელემენტარული გამონათქვამები $P, Q, R, \dots$ სიმბოლოებით. გამონათქვამთა ალრიცხვაში აღნიშნული ასოებით ფორმულებია აღნიშნული. ეს ასოები ფორმულებია პრედიკატთა ალრიცხვაშიც. $P, Q, R, \dots$ -ს ეწოდება ელემენტარული ფორმულები.

პრედიკატთა ფორმულები ინდუქციურად შემდეგნაირად განისაზღვრება:

1) ყოველი ელემენტარული ფორმულა ფორმულაა;

2) თუ A და B ფორმულებია, მაშინ ყოველი გამოსახულება:

$\bar{A}, A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ ფორმულებია;

3) ყოველი გამოსახულება ფორმულაა, თუ იგი მიიღება მხოლოდ 1-ლი და მე-2 განსაზღვრების საფუძველზე.

განვიხილოთ გამოსახულება $A \vee P(x)$, სადაც A გამონათქვამია, ხოლო $P(x)$ პრედიკატი. ცხადია, $A \vee P(x)$ გამოსახულება x -ის მნიშვნელობების მიხედვით

ნელობისათვის განსაზღვრავს გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტი ან მცდარი იქნება. ამრიგად, $A \vee P(x)$ განსაზღვრავს რომელიმე პრედიკატს და, მაშასადამე, $A \vee P(x)$ ფორმულა.

ვთქვათ, $P(x)$ და $Q(y)$ პრედიკატებია. მაშინ $P(x) \Leftrightarrow Q(y)$ ფორმულაა, რომელიც განსაზღვრავს ორადგილიან პრედიკატს. სრულიად ასევე შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ $P(x) \Rightarrow Q(y)$, $\bar{P}(x)$, $P(x) \wedge Q(y)$, $P(x) \vee Q(y)$ ფორმულებია.

ამგვარად, თუ პრედიკატებზე ვაწარმოებთ ადრე განხილულ ლოგიკურ მოქმედებებს, მივიღებთ ფორმულებს, რომლებიც თავის მხრივ განსაზღვრავენ პრედიკატებს.

§ 3. კვანძობები

1. **ზოგადობის კვანძობი.** ვთქვათ, $P(x)$ სრულიად განსაზღვრული პრედიკატია, რომელიც M სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის იძლევა გარკვეულ გამონათქვამს, ჭეშმარიტს ან მცდარს. განვიხილოთ გამოსახულება

$$\forall x P(x), x \in M. \quad (1)$$

ამ გამოსახულების ქვეშ ვგულისხმობთ გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია, როდესაც $P(x)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია M სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის და მცდარი წინააღმდეგ შემთხვევაში. $\forall x P(x)$ არაა დამოკიდებული x -ზე.

(1) გამოსახულება ასე წაიკითხება: „ M სიმრავლის ყოველი x -ისათვის $P(x)$ ჭეშმარიტია“ ან ასე: „ M სიმრავლის ყოველი x -ისათვის სრულდება $P(x)$ თვისება“.

ახლა განვიხილოთ პრედიკატთა ლოგიკის ფორმულა $A(x)$. ფორმულა $A(x)$ შეიძლება x -ის გარდა სხვა ცვლადებსაც შეიცავდეს. თუ ფორმულაში $A(x)$ შევცვლით x -ს (სხვა ცვლადებს არ ვეხებოთ) საგნებით, მივიღებთ მხოლოდ x -ზე დამოკიდებულ კონკრეტულ პრედიკატს. ამ შემთხვევაში ფორმულა

$$\forall x A(x).$$

იქნება სრულიად განსაზღვრული გამონათქვამი, რომელიც ჭეშმარიტია ან მცდარი ყველა x -ისათვის.

$\forall x A(x)$ ფორმულა სრულიად განსაზღვრულია სხვა ცვლადებით გარდა x -ისა და, მაშასადამე, x -ზე არაა დამოკიდებული. (1) გამოსახულებაში

$\forall x$ ნაწილს ეწოდება ზოგადობის კვანძობი.

2. **არსებობის კვანძობი, ერთადერთის არსებობის კვანძობი.** ავთლოთ $P(x)$ პრედიკატი, რომელიც განსაზღვრულია $M = \{x\}$ სიმრავლეში

$P(x)$ -თან დავაკავშიროთ ფორმულა $\exists x P(x)$, რომელიც განსაზღვრავს ლოგიკურ ჭეშმარიტი გამონათქვამი, თუ არსებობს M სიმრავლეში ისეთი x ელემენტი, რომ $P(x)$ ჭეშმარიტია და როგორც მცდარი გამონათქვამი წინააღმდეგ შემთხვევაში. $\exists x$ ნაწილს $\exists x P(x)$ გამოსახულებაში ეწოდება არსებობის კვანძობი.

თუ განვიხილავთ პრედიკატთა ლოგიკის ფორმულას $A(x)$, $x \in M$, მაშინ $\exists x A(x)$ ფორმულა სრულიად განსაზღვრულია: იგი ჭეშმარიტი გამონათქვამია, თუ არსებობს M სიმრავლეში ისეთი x ელემენტი, რომ $A(x)$ ჭეშმარიტი გამონათქვამია და მცდარი გამონათქვამია, თუ ასეთი x ელემენტი არ არსებობს M სიმრავლეში.

მაგალითად, ვთქვათ, $P(x)$ არის პრედიკატი $(x-1)^2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$ ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლეს, მაშინ $\forall x P(x)$ ყალბია, ხოლო $\exists x P(x)$ ჭეშმარიტია; თუ $P(x)$ არის პრედიკატი $(x-1)^2 \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, მაშინ $\forall x P(x)$ და $\exists x P(x)$ ორივე ჭეშმარიტი გამონათქვამია. თუ $P(x)$ არის პრედიკატი $x^2 + 1 < 0$, $x \in \mathbb{R}$, მაშინ $\forall x P(x)$ -იც და $\exists x P(x)$ -იც ორივე მცდარი გამონათქვამებია.

განვიხილოთ მაგალითი, რომელიც არ შეიძლება დასაბუთებულ იქნეს გამონათქვამთა ალგებრაში.

„ყოველი ოთხფეხი ცხოველია. მაშასადამე, ცხვრის თავი არის ცხოველის თავი“.

დასკვნა, რომელიც ამ წინადადებაშია მიღებული, დამოკიდებულია იმა მართო შემაჯავ წინადადებათა ურთიერთკავშირზე, არამედ წინადადებათა შიდა სტრუქტურაზე და სიტყვების „ყოველი“ და „არის“ გაგებაზე.

ვთქვათ, $P(x)$ აღნიშნავს „ x არის ოთხფეხი“, $Q(x)$ — „ x არის ცხოველი“, $f(x)$ — „თავი x -ის“

(2) მსჯელობის პირველი წინადადება ასე ჩაიწერება:

$$\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

მეორე წინადადება „ცხვრის თავი არის ცხოველის თავი“, შეიცავს ფართულ წინადადებებსაც „ცხოველს აქვს თავი და ცხოველი ოთხფეხია“, „ცხვარს აქვს თავი და ცხვარი ოთხფეხია“, ასე ჩაიწერება

$$\exists y (x = f(y) \wedge P(y)) \Rightarrow \exists y (x = f(y) \wedge Q(y)).$$

მოტიანად კი (2) წინადადება ასე ჩაიწერება

$$\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$\forall x (\exists y (x = f(y) \wedge P(y)) \Rightarrow \exists y (x = f(y) \wedge Q(y)))$$

ამ გამოსახულებაში ვისარგებლეთ საგნობრივი ცვლადებით x, y ; პრედიკატული ასოებით P, Q ; ფუნქციონალური ასოთი f ; ლოგიკური კავშირებით და კვანძობებით.

ყველა საგნობრივი ცვლადი, საგნობრივი მუდმივი და ფუნქციური ტერმინია, უფრო ზუსტად, ტერმი შემდეგნაირად განისაზღვრება:

1) ყველა საგნობრივი მუდმივი ან საგნობრივი ცვლადი არის ტერმი.
2) თუ f_n^i ფუნქციონალური ასოა და $t_1, \dots, t_n$ — ტერმები, მაშინ $f_n^i(t_1, t_2, \dots, t_n)$ არის ტერმი.

3) რაიმე გამოსახულება ტერმია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ იგი გამომდინარეობს 1-ლ და მე-2 პუნქტების საფუძველზე.
თუ პრედიკატულ ასოებს ტერმებზე გამოვიყენებთ, მივიღებთ ფორმულებს. უფრო ზუსტად: თუ A_i^j პრედიკატული ასოა, ხოლო $t_1, t_2, \dots, t_n$ ტერმები, მაშინ $A_i^j(t_1, \dots, t_n)$ ფორმულას მოგვცემს. მაგალითად, წინადადება $(x-1)^2 > 0$ ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$A_1^1(t_1, t_2, t_3, t_4).$$

აქ რიცხვი 4 მიუთითებს ტერმების რიცხვზე. t_1 -ით აღნიშნულია x ცვლადი, t_2 -ით მუდმივი 1, t_3 -ით მუდმივი 2, t_4 -ით მუდმივი 0, ხოლო A_1^1 აღნიშნავს პრედიკატს, რომელიც „ $>$ “ ნიშნით გამოიხატება. $\forall x A(x)$ გამოსახულებაში $A(x)$ -ს ეწოდება $\forall x$ კვანძორის მოქმედების არე. შეიძლება A არ შეიცავდეს x -ს. ამ შემთხვევაში $\forall(x) A$ გამოსახავს A -ს აზრს. ასეთივე აზრით განვიხილავთ $\exists x A$ ფორმულასაც, როდესაც A არ შეიცავს x -ს.

განვიხილოთ ფორმულა¹.

$$(\exists x \forall y (P(y) \Rightarrow x = y)).$$

თუ მოვიგონებთ, რომ $P(y) \Rightarrow x = y$ მცდარია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x = y$ მცდარია და $P(y)$ ჭეშმარიტია და მხედველობაში მივიღებთ $\forall y P(y)$ და $\exists x P(x)$ ჭეშმარიტობის პირობას, დავასკვნით, რომ აღებული ფორმულა გამოსახავს გამონათქვამს: „არსებობს არა უმეტეს ერთი x -ისა, ისეთი, რომ $P(x)$ “.

განვიხილოთ ფორმულის საფუძველზე დავასკვნით, რომ ფორმულა

$$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$$

გამოსახავს შემდეგ გამონათქვამს: „არსებობს ისეთი x , რომ $P(x)$ და ეს x ერთადერთია“.

უკანასკნელი ცნება იმდენად ფართოდაა გავრცელებული, რომ მოკლედ შეგვიძლია ფორმულა $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$ მოკლედ ასე ჩაწეროთ:

$$\exists ! x P(x).$$

ზემოთ განხილული (2) მაგალითი იმის მაჩვენებელია, თუ რა გარსხვავებაა გამონათქვამთა ლოგიკასა და პრედიკატთა ლოგიკის შორის.

¹ С. Клиш, Математическая логика, Мир, М., 1973, стр. 184.

პრედიკატთა ლოგიკა რომ გამონათქვამთა ლოგიკის განვითარებაა, ამის შესახებ ზემოთ იყო ნათქვამი. აქ, პრედიკატთა ლოგიკაში, წინადადებას განაწილებთ ტერმად — სუბიექტის დასახელებად, რომელზედაც ლაპარაკია წინადადებაში, და პრედიკატად, რომელიც აღნიშნავს, თუ რა არის ნათქვამი სუბიექტზე. ამასთან პრედიკატთა ლოგიკაში განიხილება კვანტორები.

§ 4. ფორმულათა ტოლფასობა.

ვთქვათ, A და B ფორმულები განსაზღვრულია რაიმე M სიმრავლეში. თუ ამ ფორმულებში შევცვლით ცვლად პრედიკატებს რომელიმე კონკრეტული პრედიკატებით და ცვლად გამონათქვამებს რომელიმე კონკრეტული გამონათქვამებით მოცემული M სიმრავლიდან, A და B ფორმულები სრულიად გარკვეულ მნიშვნელობას მიიღებენ $\{0, 1\}$ ჭეშმარიტულობის სიმრავლიდან. თუ ნებისმიერი ასეთი შეცვლით A და B ფორმულები ერთსა და იმავე ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებს ღებულობენ, მაშინ ვიტყვით: A ფორმულა B ფორმულის ტოლფასია. ისევე, როგორც გამონათქვამთა ლოგიკაში, აქაც, პრედიკატთა ლოგიკაშიც, შეგვიძლია ტოლფასი ფორმულების ურთიერთშეცვლა, რაც საშუალებას მოგვცემს გავამარტივოთ პრედიკატთა ფორმულები. ცხადია, გამონათქვამთა ლოგიკის ფორმულათა ყველა ტოლფასოვნება გადიტანება პრედიკატთა ლოგიკაშიც.

მაგალითად,

$$A \Rightarrow B \approx \bar{A} \wedge B.$$

$$\bar{\bar{A}} \approx A$$

და ა. შ.

§ 5. ინფერენციის მეთოდი.

კარგად დავაკვირდეთ, თუ რას ნიშნავს $P(x)$ პრედიკატისათვის

- 1) $\forall x P(x)$, 2) $\exists x P(x)$, $x \in M$.

1-ლი ნიშნავს, რომ $P(x)$ პრედიკატის ჭეშმარიტების სიმრავლეა M სიმრავლე. მაშასადამე, თუ $P(x)$ თუნდაც ერთი x მნიშვნელობისათვის, $x \in M$, მცდარია, მაშინ გამონათქვამი $\forall x P(x)$ მცდარია. მე-2 ნიშნავს, რომ $P(x)$ -ის ჭეშმარიტების სიმრავლე ცარიელი არაა. მაშასადამე, მე-2 გამონათქვამი $\exists x P(x)$ მცდარია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $P(x)$ მცდარია ყველა x -სათვის.

ამ შენიშვნების საფუძველზე ადვილი წარმოსადგენია, რომ $\forall x P(x)$ გამონათქვამის მცდარობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვიპოვოთ ისე-

მ. ჯ. კოშლაძე

თი ერთი a ელემენტი, რომლისთვისაც $P(a)$ მცდარია. ისეთ a ელემენტს, რომლისთვისაც გამონათქვამი $P(a)$ მცდარია, ეწოდება $\forall x P(x)$ გამონათქვამისათვის კონტრამგალითი.

ვთქვათ, $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ — ნატურალურ რიცხვათა სიმრავლეს, არის წინადადება „ $n^2 + n + 41$ — მარტივი რიცხვია“. $P(n)$ ჭეშმარიტი გამონათქვამია, თუ $n = 1, 2, \dots$, მაგრამ გამონათქვამი $\forall n P(n)$, ე. ი. გამონათქვამი „ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის $n^2 + n + 41$ მარტივია“ არაა ჭეშმარიტი. ამის დასამტკიცებლად საკმარისია ერთი ისეთი n ნატურალური რიცხვის პოვნა, რომ $P(n)$ იყოს შედგენილი. ასეთი რიცხვია $n = 40$ მართლაც, $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = (40 + 1) \cdot 41$ შედგენილი რიცხვია. მაშასადამე, $\forall n P(n)$ არაა ჭეშმარიტი გამონათქვამი.

იმისათვის, რომ დაერწმუნდეთ $\forall x P(x)$, $x \in M$, გამონათქვამი ჭეშმარიტია, აუცილებელია შევამოწმოთ $P(x)$ -ის ჭეშმარიტება ყოველი x -სათვის, $x \in M$. იმ შემთხვევაში, თუ M სიმრავლე შეიცავს ელემენტთა მცირე რაოდენობას, შეიძლება უშუალო შემოწმებით გავიგოთ $P(x)$ -ის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა ყოველი x -სათვის M სიმრავლიდან. მაგრამ, თუ M უსასრულო სიმრავლეა, ან შეიცავს იმდენად დიდი რაოდენობის ელემენტებს, რომ $P(x)$ -ის ჭეშმარიტების შემოწმება შეუძლებელია, $\forall x P(x)$ გამონათქვამის ჭეშმარიტება უნდა დამტკიცდეს ლოგიკური მსჯელობით.

ვთქვათ, $P(n)$ პრედიკატი მოცემულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, $n \in \mathbb{N}$. მაშინ $\forall n P(n)$ გამონათქვამი რომ ჭეშმარიტია, ზოგჯერ შეგვიძლია დავამტკიცოთ ე. წ. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

გამონათქვამი $P(n)$ ჭეშმარიტია ყველა n -სათვის, $n \in \mathbb{N}$, თუ შესრულებულია ორი პირობა:

1) გამონათქვამი $P(n)$ ჭეშმარიტია $n=1$ -სათვის;

2) იმ დამატებით, რომ $P(n)$ ჭეშმარიტია $n=k$ -სათვის, k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, $P(n)$ ჭეშმარიტია n -ის შემდეგი მნიშვნელობისათვის, $n=k+1$.

ამ საკითხს უფრო დაწვრილებით გავარჩევთ მე-2 თავის მე-4 პარაგრაფის მე-3 პუნქტში.

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით $\forall n P(n)$ -ის დამტკიცება შემდეგში მდგომარეობს: ჯერ უნდა დაერწმუნდეთ $P(1)$ -ის ჭეშმარიტებაში, შემდეგ დავუშვათ, $P(k)$ გამონათქვამი ჭეშმარიტია და დავამტკიცოთ $P(k+1)$ გამონათქვამის ჭეშმარიტება. თუ დამტკიცდა, რომ $P(k+1)$ ჭეშმარიტია, მაშინ დავასკვნით, რომ გამონათქვამი ჭეშმარიტია ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის.

მაგალითად, ვაჩვენოთ, რომ ტოლობა

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

ჭეშმარიტია ნებისმიერი n -სათვის, $n \in \mathbb{N}$. აღვნიშნოთ $P(n)$ -ით ეს წინადადება. $n=1$ -სათვის გვექნება

$$1) \quad 1 = \frac{1+1}{2} \cdot 1$$

ე. ი. $P(1)$ ჭეშმარიტია.

2) დავუშვათ, რომ $P(k)$ ჭეშმარიტია, ე. ი. ჭეშმარიტია ტოლობა:

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{1+k}{2} \cdot k.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატოთ $k+1$, გვექნება

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{1+k}{2} k + (k+1).$$

ამ ტოლობის მეორე მხარე გავამარტივოთ:

$$\begin{aligned} \frac{1+k}{2} \cdot k + (k+1) &= (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = (k+1) \frac{k+2}{2} = \\ &= \frac{1+(k+1)}{2} (k+1). \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{1+(k+1)}{2} (k+1).$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ $P(k+1)$ გამონათქვამი ჭეშმარიტია.

მაშასადამე, $P(n)$ ჭეშმარიტია ნებისმიერი n -სათვის. ამით დამტკიცდა, რომ ტოლობა

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

ჭეშმარიტია, ნებისმიერი n -სათვის, $n \in \mathbb{N}$.

ზოგჯერ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს იყენებენ არა ყველა ნატურალური რიცხვისათვის $P(n)$ წინადადების ჭეშმარიტობის დასამტკიცებლად, არამედ იმ ნატურალური რიცხვისათვის, რომელიც მეტია

რომელიც m ნატურალურ რიცხვზე. ამ შემთხვევაში პირველად $P(n)$ -ის ჭეშმარიტებას ამოწმებენ $n=m$ მნიშვნელობისათვის, ხოლო შემდეგ ნებისმიერი k -სათვის.

მაგალითად, $P(n)$ იყოს შემდეგი წინადადება

$$2^n > n^2 + 4n + 5.$$

უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით, რომ $P(n)$ მცდარია, თუ $n=1, \dots, 6$, ხოლო $P(7)$ ჭეშმარიტია:

$$2^7 = 7^2 + 4 \cdot 7 + 5,$$

ანუ

$$128 > 82.$$

ამგვარად, გვაქვს

1) $P(7)$ ჭეშმარიტია.

ახლა კი განვიხილოთ მათემატიკური ინდუქციის მე-2 პირობა,

2) დავუშვათ, $P(k)$ ჭეშმარიტია, k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია:

$$2^k > k^2 + 4k + 5.$$

ამ უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ 2-ზე. მივიღებთ

$$2^{k+1} > 2k^2 + 8k + 10.$$

გარდავჭმნათ ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილი. გვექნება:

$$(k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + k^2 + 2k.$$

ცხადია,

$$(k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + k^2 + 2k > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5.$$

ამგვარად,

$$2^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5.$$

მაშასადამე, გამონათქვამი $P(k+1)$ ჭეშმარიტია, რაც ამტკიცებს, რომ უტოლობა

$$2^n > n^2 + 4n + 5$$

ჭეშმარიტია $n \geq 7$ ნატურალური რიცხვისათვის.

§ 6. ლოგიკური გამომდინარეობა. თეორემათა დამტკიცების მეთოდები.

1. ლოგიკური გამომდინარეობა. ვთქვათ, A არის შემდეგ გამონათქვამთა კონიუნქცია:

„ყოველი წრფისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც ამ წრფეს ეკუთვნის და წერტილები, რომლებიც არ ეკუთვნის მას“.

„ყოველ ორ წერტილზე შეიძლება გაივლოს მხოლოდ ერთი წრფე“. ვთქვათ, B არის შემდეგი გამონათქვამი:

„ორი სხვადასხვა წრფე ან არ გადაკვეთს ერთმანეთს, ან გადაკვეთს მხოლოდ ერთ წერტილში“.

A გამონათქვამი გეომეტრიის ცნობილი აქსიომებია. ამ აქსიომათა საფუძველზე დავამტკიცოთ, რომ B გამონათქვამი ჭეშმარიტია. ანუ, როგორც ამბობენ, დავამტკიცოთ თეორემა: „ორი სხვადასხვა წრფე ან არ გადაკვეთს ერთმანეთს, ან გადაკვეთს მხოლოდ ერთ წერტილში“.

დამტკიცება: წრფე აღენიშნოთ იმ ორი წერტილით, რომლებიც წრფეზე მდებარეობენ. ავიღოთ ორი წრფე CD და KL . რადგანაც ორ წერტილზე მხოლოდ ერთი წრფის გატარება შეიძლება, მაშინ ორი სხვადასხვა წრფე ან არ გადაკვეთება, ან იკვეთება მხოლოდ ერთ წერტილში. ვთქვათ, ეს წერტილია P . თუ ორ სხვადასხვა CD და KL წრფეს ექნებოდა ორი საერთო სხვადასხვა გადაკვეთის წერტილი P და Q , მაშინ ამ ორ სხვადასხვა წერტილზე ორი სხვადასხვა წრფე გაივლიდა. ეს კი შეუძლებელია.

ამრიგად, B გამონათქვამი ჭეშმარიტია. ამ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ A გამონათქვამიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს B გამონათქვამი. ამის გამო ამბობენ, რომ მათემატიკა დედუქციური მეცნიერებაა. დედუქცია გამოყვანას ნიშნავს. მათემატიკის დედუქციურობა იმას ნიშნავს, რომ მათემატიკური წინადადებების ჭეშმარიტება ლოგიკურად გამოიყვანება საწყისად მიღებული წინადადებებიდან—აქსიომებიდან. ზემოთ მოცემული თეორემის დამტკიცება სწორედ ლოგიკური გამომდინარეობის მაგალითია.

განვსაზღვროთ, თუ რას ნიშნავს ლოგიკური გამომდინარეობა.

ვიტყვი, რომ ლოგიკის A ფორმულიდან გამომდინარეობს B ფორმულა, თუ ელემენტარულ გამონათქვამთა ისეთი ჭეშმარიტული მნიშვნელობისათვის, რომლისთვისაც A ფორმულა ჭეშმარიტ მნიშვნელობას ღებულობს, B ფორმულაც ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას ღებულობს. უფრო მეტი თვალსაჩინოებისათვის უნდა შევადგინოთ A და B ფორმულებისათვის ჭეშმარიტულობის ცხრილი, სადაც A ფორმულას თავისი სვეტი აქვს და B ფორმულას თავისი. თუ ყველგან, სადაც A ფორმულის სვეტში წერია 1 და მის გასწვრივ B ფორმულის სვეტშიც წერია 1, მაშინ ვიტყვი: A ფორმულიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს B ფორმულა.

თუ A ფორმულიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს B ფორმულა, წერენ: $A \models B$.

თუ B ფორმულა $A_1, A_2, \dots, A_n$ ფორმულათა ლოგიკური შედეგია, მაშინ წერენ $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$. თუ $n=0$, მაშინ, ცხადია, B ფორმულა იგივერად ჭეშმარიტი ფორმულა იქნება, იგი სხვა ფორმულიდან არ მიიღება. ასე რომ, $n=0$ შემთხვევაში შეგვიძლია დავწეროთ: $\models B$ — ფორმულა B იგივერად ჭეშმარიტია.

2. თეორემები. დამტკიცებათა მეთოდები. თეორემები მათემატიკაში, როგორც წესი, ჩამოყალიბდება (ან შეიძლება ჩამოყალიბდეს) შემდეგი სახით:

M სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის $A(x)$ წინადადების ჭეშმარიტებიდან გამომდინარეობს $B(x)$ წინადადების ჭეშმარიტება:

$$A(x) \Rightarrow B(x), \quad x \in M. \quad (1)$$

თუ აღებული თეორემა ჭეშმარიტია ნებისმიერ სიმრავლეში, მაშინ (1) თეორემა ასე ჩაიწერება:

$$A(x) \Rightarrow B(x). \quad (2)$$

შეგვიძლია (2) თეორემასთან ერთად განვიხილოთ თეორემა

$$B(x) \Rightarrow A(x). \quad (3)$$

(2) და (3) თეორემებს ურთიერთშებრუნებელი თეორემები ეწოდება. ერთ-ერთს ამ თეორემიდან ეწოდება პირდაპირი და მეორეს — შებრუნებელი თეორემა.

ურთიერთშებრუნებელი (2) და (3) თეორემებისათვის გვექნება სამი შემთხვევა:

- 1) ერთ-ერთი თეორემა ჭეშმარიტია;
- 2) ორივე თეორემა ჭეშმარიტია;
- 3) ორივე თეორემა მცდარია.

განვიხილოთ თეორემა.

თეორემა 1. თუ ოთხკუთხედი მართკუთხედი, მაშინ მისი დიაგონალები ტოლია.

ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა იქნება: თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლია, მაშინ ოთხკუთხედი მართკუთხედი. ეს თეორემა მცდარია.

განვიხილოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. თუ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ მისი დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფს.

მოკლედ: პარალელოგრამის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფს. ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა იქნება:

თეორემა 3. თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფს, მაშინ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

მე-2 და მე-3 თეორემები ურთიერთშებრუნებელი თეორემებია და ორივე ჭეშმარიტია.

განვიხილოთ შემდეგი ურთიერთშებრუნებელი თეორემები:

თეორემა 4. თუ ორი შესაკრებიდან ერთ-ერთი იყოფა 2-ზე, მაშინ მათი ჯამიც იყოფა 2-ზე.

თეორემა 5. თუ ორი შესაკრების ჯამი იყოფა 2-ზე, მაშინ ერთ-ერთი შესაკრები მაინც იყოფა 2-ზე.

ორივე, მე-4 და მე-5 თეორემა, მცდარია.

თეორემათა ჩამოყალიბების დროს ხშირად ვსარგებლობთ სიტყვებით: „საკმარისია“, „აუცილებელია“, „აუცილებელია და საკმარისია“.

თუ თეორემა $A(x) \Rightarrow B(x)$ ჭეშმარიტია, მაშინ $A(x)$ -ს ეწოდება საკმარისი პირობა $B(x)$ დასკვნისათვის, ხოლო $B(x)$ დასკვნას ეწოდება აუცილებელი პირობა $A(x)$ პირობისათვის.

1-ლი თეორემა ჭეშმარიტია. იმისათვის, რომ ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლი იყოს, საკმარისია, ოთხკუთხედი იყოს მართკუთხედი.

იმისათვის, რომ ოთხკუთხედი მართკუთხედი იყოს, აუცილებელია ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლი იყოს (მაგრამ ეს პირობა არ კმარა). თუ ჭეშმარიტია არა მარტო თეორემა $A(x) \Rightarrow B(x)$, არამედ მისი შებრუნებული თეორემა $B(x) \Rightarrow A(x)$, მაშინ $A(x)$ არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა $B(x)$ -თვის, და პირიქით, $B(x)$ არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა $A(x)$ -თვის. ამ განსაზღვრის საფუძველზე მე-2 და მე-3 თეორემები ერთად ასე შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ:

თეორემა 6. ოთხკუთხედი რომ პარალელოგრამი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, მისი დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფდეს.

იმ შემთხვევაში, როდესაც თეორემაში ნათქვამია: $A(x)$ აუცილებელია და საკმარისი $B(x)$ -თვის, მაშინ თეორემა შედგება ორი თეორემისაგან: პირდაპირი და შებრუნებული თეორემებისაგან. ეს თეორემები ცალ-ცალკე უნდა დამტკიცდეს. წინააღმდეგ შემთხვევაში, როგორც 1-ლი თეორემა გვიჩვენებს, პირდაპირი თეორემის ჭეშმარიტებიდან არ გამომდინარეობს მისი შებრუნებული თეორემის ჭეშმარიტება.

განვიხილოთ მაგალითები, საიდანაც ადვილი მისახვედრი იქნება სიტყვების — „აუცილებელია“, „საკმარისია“ „აუცილებელია და საკმარისია“ — მნიშვნელობა.

1) იმისათვის, რომ იყიდო საქონელი, აუცილებელია გქონდეს ფული (მარტო ფულის ქონება არ კმარა, უნდა იყოს საქონელიც).

იმისათვის, რომ ლატარიაში მოიგო, აუცილებელია გქონდეს ლატარიის ერთი ბილეთი მაინც.

რიცხვი რომ 10-ზე იყოფოდეს, აუცილებელია რიცხვი იყოფოდეს 5-ზე.

ცხადია, ამ წინადადებებში სიტყვას „აუცილებელია“ ვერ შევცვლით სიტყვით „საკმარისია“, რადგანაც, მაშინ მივიღებთ მცდარ წინადადებას — მცდარ გამონათქვამს.

2) იმისათვის, რომ რიცხვი 5-ზე გაიყოს, საკმარისია ის 10-ზე იყოფოდეს; სამკუთხედი რომ ტოლფერდა იყოს, საკმარისია სამკუთხედი ტოლგვერდა იყოს; რიცხვთა ჯამი რომ ლუწი იყოს, საკმარისია თითოეული შესაკრები ლუწი იყოს.

ცხადია, ამ წინადადებებში სიტყვას „საკმარისია“ ვერ შევცვლით სიტყვით „აუცილებელია“, რადგანაც მაშინ მივიღებთ მცდარ გამონათქვამებს.

3) რიცხვი რომ ნ-ზე გაიყოს, აუცილებელია და საკმარისი ეს რიცხვი იყოფოდეს 2-ზე და 3-ზე.

$A(x) \Rightarrow B(x)$ თეორემასთან ერთად შეგვიძლია განვიხილოთ თეორემა

$$\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}. \quad (4)$$

ამ თეორემას პირდაპირი თეორემის საწინააღმდეგო თეორემა ეწოდება.

განვიხილოთ თეორემა: თუ მართკუთხედი რომბია, მაშინ მისი დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია. ამ თეორემის საწინააღმდეგო თეორემა იქნება: თუ მართკუთხედი რომბი არაა, მაშინ მისი დიაგონალები პერპენდიკულარული არ იქნება. ეს თეორემა მცდარია. მაგალითად, ისეთი ნებისმიერი ორი ურთიერთპერპენდიკულარული მონაკვეთის ბოლო წერტილების შეერთებით, რომლებიც ერთმანეთს შუაზე არ კვეთენ, მივიღებთ ოთხკუთხედს, რომელიც რომბი არ იქნება.

ახლა განვიხილოთ თეორემა:

$$\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)} \quad (5)$$

ამ თეორემას $A(x) \Rightarrow B(x)$ თეორემის საწინააღმდეგო შებრუნებული თეორემა ეწოდება.

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ

$$A(x) \Rightarrow B(x) \equiv \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)},$$

ე. ი. ფორმულები:

$$A(x) \Rightarrow B(x), \quad \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)},$$

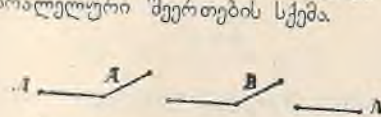
ერთდროულად ჭეშმარიტია ან ერთდროულად მცდარი. ამის გამო, რომ დავამტკიცოთ თეორემა $A(x) \Rightarrow B(x)$, საკმარისია დავამტკიცოთ თეორემა $\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$. თეორემის დამტკიცების ეს მეთოდი ცნობილია, როგორც დამტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით. სწორედ ამ მეთოდით დავამტკიცეთ 1-ლ პარაგრაფში თეორემა მარტივ რიცხვთა სიმრავლის შემოუსაზღვრელობის შესახებ.

§ 7. გამონათქვამთა ალგებრის გამოყენება ფიზიკაში

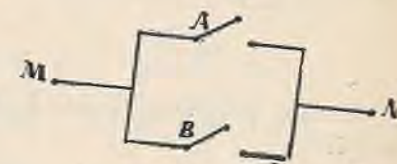
გამონათქვამთა ალგებრა ფართოდ გამოიყენება ფიზიკური სქემების აგების დროს. განვიხილოთ გადამრთველი სქემა.

გადამრთველი სქემის ქვეშ გვესმის რაიმე მოწყობილობა, რომელსაც აქვს გადამრთველის ორი მდგომარეობა. 1) ჩაკეტილი (დენი გადის) და

2) ღია (დენი არ გადის). გადამრთველ სქემასა და გამონათქვამთა ალგებრას შორის კავშირი შემდეგნაირად დავამყაროთ. ყოველ ჩაკეტილ გადამრთველს შეესაბამოთ ჭეშმარიტი გამონათქვამი, ხოლო ღია გადამრთველს მცდარი გამონათქვამი. სქემაზე გადამრთველები იმავე ასოებით აღვნიშნოთ, რომლითაც აღვნიშნეთ ლოგიკური გამონათქვამები. 1-ლ ნახაზზე ნაჩვენებია გადამრთველების მიმდევრობითი შეერთების სქემა, ხოლო მე-2 ნახაზზე გადამრთველების პარალელური შეერთების სქემა.



ნახ. 1



ნახ. 2

გადამრთველებს, რომლებიც შეერთებული არიან მიმდევრობით, შეესაბამება გამონათქვამთა კონიუნქცია. ცხადია, თუ მიმდევრობითი გადამრთველები ერთდროულად ჩაკეტილია (მაშინ წრედში დენი გადის), მას შეესაბამება გამონათქვამთა კონიუნქცია, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყველა გამონათქვამი ჭეშმარიტია.

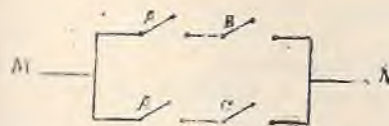
გადამრთველებს, რომლებიც შეერთებული არიან პარალელურად, შეესაბამება გამონათქვამთა დიზიუნქცია. ცხადია, თუ პარალელური გადამრთველებიდან ერთი მაინც ჩაკეტილია (მაშინ წრედში დენი გადის), მას შეესაბამება გამონათქვამთა დიზიუნქცია, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ, თუ ერთი მაინც გამონათქვამთაგან ჭეშმარიტია.

თუ გვაქვს სხვადასხვა სქემა, ბუნებრივია, ამ სქემებიდან ის უფრო მარტივი იქნება, რომელიც უმცირეს გამონათქვამებს შეიცავს.

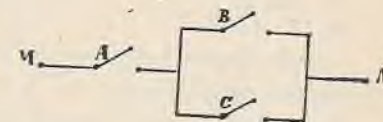
მაგალითად, ლოგიკურ გამონათქვამთა ტოლფას ფორმულებს

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \equiv A \wedge (B \vee C)$$

(კონიუნქციის განრიგებადობის კანონი) შეესაბამება მე-3 (ტოლფასობის მარცხენა ნაწილი) და მე-4 (ტოლფასობის მარჯვენა ნაწილი) ნახაზზე გამოსახული სქემები. ცხადია, მე-4 სქემა უფრო მარტივია, ვიდრე მე-3 სქემა.

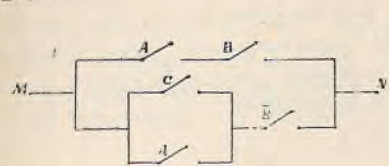


ნახ. 3

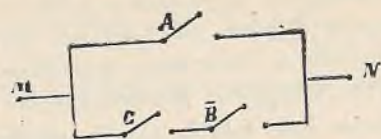


ნახ. 4

მაგალითი. გავმარტივოთ სქემა, რომელიც მე-5 ნახაზზეა მოცემული.



ნახ. 5



ნახ. 6

ნახაზზე მოცემულ სქემას შეესაბამება შემდეგი ლოგიკური გამოთქვამი:

$$(A \wedge B) \vee ((A \vee C) \wedge \bar{B}).$$

ამ გამონათქვამის მიმდევრობითი გამარტივება მოგვცემს

$$(A \wedge B) \vee ((A \wedge \bar{B}) \vee (C \wedge \bar{B})) \approx ((A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B})) \vee (C \wedge \bar{B}) \approx (A \wedge (B \vee \bar{B})) \vee (C \wedge \bar{B}).$$

რადგანაც

$$B \vee \bar{B} \approx 1, \quad A \wedge (B \vee \bar{B}) \approx A.$$

გვექნება

$$(A \wedge B) \vee ((A \vee C) \wedge \bar{B}) \approx A \vee (C \wedge \bar{B}).$$

მე-6 ნახაზზე ნაჩვენებია მე-5 სქემის გამარტივებით მიღებული სქემა.

ს ა ე რ ჯ ი შ 1.

1. შემდეგი წინადადებებიდან გამოყავით გამონათქვამები და დაადგინეთ ჭეშმარიტია ისინი თუ მცდარი:

1) რუსთავი ქალაქია;

2) მთვარე დედამიწის ხელოვნური თანამგზავრია;

3) $3 > \sqrt{2}$;

4) $2 \geq 4,5$;

5) $x \leq 2$;

6) $15 : 4 = 2$;

7) ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი დადებითია;

8) მყინვარი მაღალია;

9) იალბუზი ყველა მთაზე მაღალია კავკასიაში;

10) დაყვანილი კვადრატული განტოლების ამონახსნების ჯამი სამის ტოლია;

11) ყოველი კვადრატული განტოლების ამონახსნების ჯამი სამის ტოლია;

12) არსებობს კვადრატული განტოლება, რომლის ამონახსნების ჯამი სამის ტოლია;

2. მოცემულია გამონათქვამები: A — „621 იყოფა 3-ზე“, B — „მატარებელი გადის 8 საათზე“. წაიკითხეთ შემდეგი გამონათქვამები და დაადგინეთ: გამონათქვამი მცდარია, თუ ჭეშმარიტი, თუ A ჭეშმარიტია და B მცდარი.

1) $A \vee B$;

2) $A \wedge B$;

3) $(A \vee B) \wedge \bar{A}$;

4) $\overline{A \vee B}$;

5) $\bar{A} \vee \bar{B}$;

6) $\overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$;

7) $\overline{A \wedge B}$;

8) $\bar{A} \wedge \bar{B}$;

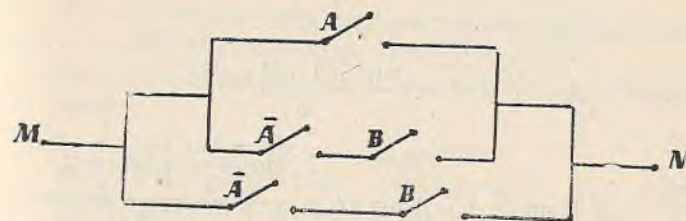
9) $\bar{A} \vee B$;

10) $A \Rightarrow B$;

11) $A \Leftrightarrow B$;

12) $\bar{A} \Leftrightarrow B$.

3. გამარტივეთ მე-7 ნახაზზე გამოსახული სქემა და დახაზეთ გამარტივებული სქემა.



ნახ. 7

4. x და y -ის რა მნიშვნელობისათვის არის ჭეშმარიტი შემდეგი წინადადება:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - 3y = -2; \end{cases}$

2) $\{x^2 + y^2 < 4$;

3) $y \leq x + 1$.

5. მოცემულია განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 2x - \alpha y = 1, \\ x + y = \alpha. \end{cases}$$

α -ს რა მნიშვნელობისათვის არის ჭეშმარიტი შემდეგი გამონათქვამები:

1) α -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის განტოლებათა სისტემას ერთი ამონახსნი მაინც აქვს;

2) არსებობს ისეთი α , რომ განტოლებათა სისტემას ერთი ამონახსნი მაინც აქვს.

6. დაამტკიცეთ თეორემა: თუ ოთხკუთხედში ორი მოპირდაპირე გვერდი ტოლია და პარალელური, მაშინ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. გამოიყენეთ ლოგიკური სიმბოლოები.

7. დაამტკიცეთ თეორემა: თუ წრეწირში ორი ქორდა ტოლია, მაშინ მათ მიერ მოჭიმული რკალებიც ტოლია. დაამტკიცეთ ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა. გამოიყენეთ ლოგიკური სიმბოლოები.

8. დაამტკიცეთ თეორემა: 3-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ იყოფა რიცხვი, როდესაც მისი ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე.

9. რიცხვი რომ 6-ზე გაიყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი იყოფოდეს 2-ზე და 3-ზე.

10. დაამტკიცეთ თეორემა: თუ პარალელოგრამი მართკუთხედია, მაშინ მისი დიაგონალები ტოლია. განიხილეთ ამ თეორემის შებრუნებული, საწინააღმდეგო, საწინააღმდეგო — შებრუნებული თეორემები. ამ თეორემათაგან რომელი თეორემაა ჭეშმარიტი?

11. მათემატიკური ინდუქციით დაამტკიცეთ:

$$1) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2;$$

$$2) 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$3) \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}};$$

$$4) (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \quad \alpha > -1, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

12. ლოგიკური $\forall$ და $\exists$ ნიშნებით ჩაწერეთ შემდეგი გამოთქვები.

1) როგორც გინდ იყოს ნატურალური x რიცხვი, მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი y , რომ $x+y$ იქნება მარტივი რიცხვი.

2) როგორც გინდ იყოს ნატურალური რიცხვი y , შეიძლება მოიხსნოს ისეთი ნატურალური რიცხვი x , რომ $x^2 - y^2 < 100$;

3) ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი იყოფა 3-ზე;

4) ყველა ნატურალური რიცხვი ლუწია;

5) ყოველი x და y რიცხვებისათვის ჭეშმარიტია ფორმულა

$$\log(xy) = \log x + \log y, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

13. ჩამოაყალიბეთ თეორემები $A \Rightarrow B$, თუ A და B გამოთქვამები განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

1) A — „რიცხვი x ნულის ტოლია“;

B — „ნამრავლი xy ნულის ტოლია“.

2) A — „წრფეები a და b ერთ სიბრტყეშია“;

B — „ a და b წრფეები პარალელურია“.

3) A — „ ABC სამკუთხედში BC ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია“;

B — „ ABC სამკუთხედი ტოლფერდაა“.

4) A — „ Q ოთხკუთხედი რომბია“;

B — „ Q ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია“.

5) A — „ ABC სამკუთხედში a წრფე, რომელიც არ გადის არც ერთ წვეროზე, ერთ გვერდს გადაკვეთს“.

B — „ a წრფე ABC სამკუთხედში მეორე გვერდს გადაკვეთს“.

14. ჩამოაყალიბეთ თეორემები $A \Leftrightarrow B$ და დაამტკიცეთ:

1) A — „ n ნატურალური რიცხვი იყოფა 3-ზე“;

B — „ n ნატურალური რიცხვის ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე“.

2) A — „ $ABCD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია“;

B — „ $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფს“.

3) A — „ ABC სამკუთხედი მართკუთხაა“;

B — „ ABC სამკუთხედში ორი გვერდის კვადრატების ჯამი მესამე გვერდის კვადრატის ტოლია“.

4) A — „ ABC სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა“;

B — „ ABC სამკუთხედში ორი გვერდის კვადრატების ჯამი მესამე გვერდის კვადრატზე მეტია“.

15. ჩამოაყალიბეთ თეორემა „ A რომ... აუცილებელია B “:

1) A — „ n ნატურალური რიცხვი 4-ზე გაიყოფა“;

B — „ n ნატურალური რიცხვი 2-ზე გაიყოფა“.

2) A — „ ABC სამკუთხედი ტოლგვერდაა“;

B — „ ABC სამკუთხედი ტოლფერდაა“.

16. ჩამოაყალიბეთ თეორემა: „ A რომ... საკმარისია B “:

1) A — „ a და b შესაკრებთა ჯამი იყოფა 5-ზე“;

B — „ a და b შესაკრები იყოფა 5-ზე“.

2) A — „მონაკვეთები AC და BD ურთიერთპერპენდიკულარულია“;

B — „ $ABCD$ ოთხკუთხედი რომბია“.

სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

§ 1. სიმრავლე-ქვესიმრავლე

1. სიმრავლეები¹. მათემატიკის ერთ-ერთი საწყისი ცნებაა სიმრავლის ცნება. ამ ცნებას გავეცნოთ კონკრეტული მაგალითებით. მაგალითად, ვამბობთ: წიგნების კოლექცია, სტუდენტთა ჯგუფი, მატარებლის შემადგენლობა, ცხვრის ფარა, მათემატიკური საზოგადოება, მუშათა კლასი, მომღერალთა გუნდი და სხვა. სიტყვები: კოლექცია, ჯგუფი, კლასი და სხვა სპეციალურ ელფერს აძლევენ ხსენებულ საგნებს. ჩვენთვის საგნები იმდენად მნიშვნელოვანი არაა, რამდენადაც ის, რაც მათ საერთო აქვთ. მათემატიკაში საგანს ვუწოდებთ ყველაფერს, რაზედაც შეგვიძლია სრული გარკვეულობით ვიმსჯელოთ. ჩვენ საქმე გვქონდა არა თვით საგნებთან, არამედ მათ აღმნიშვნელ სიმბოლოებთან, ე. ი. საგნობრივ ასოებთან — ტერმებთან, თუ ვიტყვით „ a საგანი“, ვიგულისხმებთ საგანს, რომელიც a ტერმითაა აღნიშნული.

როდესაც ვამბობთ „საგანთა სიმრავლე“, ვგულისხმობთ საგანთა კრებულს — ობიექტთა კრებულს, ე. ი. ვგულისხმობთ იმ ობიექტებს, რომლებითაც სიმრავლეა მოცემული. სიმრავლე მოცემულია, თუ მისი ობიექტები დასახელებულია. იმ სიმრავლეს, რომლის ობიექტებია a, b, c , ასე აღნიშნავენ:

$$\{a, b, c\}.$$

იმ ობიექტებს, რომლებითაც განსაზღვრულია სიმრავლე, ეწოდება სიმრავლის ელემენტები. სიმრავლე $\{a, b, c\}$ შეგვიძლია აღვნიშნოთ ერთი ასოთი, მაგალითად, A ასოთი, $A = \{a, b, c\}$. ამ შემთხვევაში A ამ სიმრავლის აღმნიშვნელი ასოა. როცა ვიტყვით „ A სიმრავლე“, ვგულისხმობთ იმ სიმრავლეს, რომელიც A ასოთია აღნიშნული. სიმრავლეები, საზოგადოდ, ლათინური დიდი ასოებით აღნიშნება, ხოლო

¹ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1976; К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств, Мир, М., 1970; ვლ. კეილიძე, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციის თეორია, თბილისი, 1964.

მათი ელემენტები მცირე ასოებით. წინადადება „ a საგანი არის A სიმრავლის ელემენტი“ ასე ჩაიწერება:

$$a \in A,$$

ხოლო წინადადება „ a საგანი არ არის A სიმრავლის ელემენტი“ ასე ჩაიწერება:

$$a \notin A \text{ ან } a \notin A.$$

ზოგჯერ მოცემულია საგნის რაიმე თვისება, რომლითაც განსაზღვრულია, საგანი ეკუთვნის თუ არა სიმრავლეს, მაგრამ ცნობილი არაა არსებობს თუ არა ასეთი საგანი, ამ შემთხვევაში უნდა დავადგინოთ აღნიშნული თვისების მქონე საგნის არსებობა და შემდეგ შევადგინოთ სიმრავლე. მაგალითად, სიმრავლე $x^2 - 3x + 2 = 0$ განტოლების ამონახსნებისა არის $\{2, 3\}$. ეს ასე შეგვიძლია ჩავეწეროთ:

$$M = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

განვიხილოთ სიმრავლე $2x + 1 = 0$ განტოლების ამონახსნებისა. ადვილი შესაძლებელია, რომ ადებულ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს. მაშასადამე, $2x + 1 = 0$ განტოლების ამონახსნების სიმრავლეს ელემენტი არ გააჩნია. ასეთ სიმრავლეს ცარიელ სიმრავლეს ეწოდება. ცარიელ სიმრავლეს $\emptyset$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. $2x + 1 = 0$ განტოლების ამონახსნების სიმრავლე რომ ცარიელია, ასე ჩაიწერება:

$$\{x | 2x + 1 = 0\} = \emptyset.$$

ცარიელი სიმრავლის განსაზღვრის თანახმად, როგორც გინდ იყოს x საგანი

$$x \notin \emptyset.$$

ახლა გავარჩიოთ A სიმრავლის B სიმრავლესთან ტოლობა:

$$A = B.$$

A აღნიშნავს სიმრავლეს, რომელიც შედგება სრულიად გარკვეული საგნებისაგან. ასევე B სიმრავლეს შედგება სრულიად გარკვეული საგნებისაგან. თუ ვწერთ $A = B$, ეს ნიშნავს A ასო იმას აღნიშნავს, რასაც B ასო, ასე რომ, თუ რაიმე a საგანი ეკუთვნის A სიმრავლეს, $a \in B$, და პირიქით, თუ რაიმე a საგანი ეკუთვნის B სიმრავლეს, იგივე a საგანი ეკუთვნის A სიმრავლეს.

შევთანხმდეთ, რომ $A = B$ ვწერთ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ყოველი x ელემენტი, რომელიც A სიმრავლეს ეკუთვნის, აგრეთვე ეკუთვნის B სიმრავლესაც და, პირიქით, ყოველი x ელემენტი, რომელიც B სიმრავლეს ეკუთვნის, აგრეთვე A სიმრავლესაც ეკუთვნის.

ადგილი შესამჩნევია, რომ აღნიშნული შეთანხმება გვიჩვენებს, რომ სიმრავლე განსაზღვრულია მხოლოდ თავისი ელემენტებით.

ამრიგად, სიმრავლე მოცემულია, თუ ჩამოთვლილია ყველა მისი ელემენტი, ან მითითებულია მისი ელემენტების ისეთი თვისება, რომლის საშუალებითაც შეგვიძლია განვსაზღვროთ აღებული საგანი ეკუთვნის თუ არა სიმრავლეს.

შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ ჩანაწერი

$$A = \{a, b, c, \dots\},$$

აღნიშნავს სიმრავლეს, რომელიც შედგენილია $a, b, c, \dots$ ელემენტებისაგან და იმ სხვა ელემენტებისაგან, რომლებიც მოცემულია იმ ხერხით, რომლითაც მოცემულია a, b, c ელემენტები, ან შეიძლება მოცემულია სხვა ხერხით.

თუ A სიმრავლე შედგენილია იმ x ელემენტისაგან, რომლებსაც აქვთ გარკვეული თვისება, მაშინ ვწერთ $A = \{x: \dots\}$ ან $A = \{x | \dots\}$; სადაც ფიგურულ ფრჩხილებში ორ წერტილის (ხაზის) შემდეგ x ელემენტის თვისების მაჩვენებელია ჩაწერილი. მაგალითად, თუ a და b ნამდვილი რიცხვებია და $[a, b]$ აღნიშნავს სიმრავლეს ყველა იმ x ნამდვილი რიცხვებისას, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a \leq x \leq b$, ასე ჩაიწერება:

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

საზოგადოდ, თუ A სიმრავლე შედგენილია იმ x საგნებისაგან, რომლებისთვისაც რაიმე $S(x)$ გამონათქვამი ჰქმნარს, ასე აღინიშნება:

$$A = \{x | S(x)\}.$$

ზოგჯერ შესაძლებელია დავწეროთ

$$A = \{x\}.$$

ამ შემთხვევაში x წარმოადგენს A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტის ზოგად აღნიშვნას.

თუ A სიმრავლე შედგენილია x_α საგნებისაგან, სადაც α გაირბენს ინდექსითა რომელიმე სიმრავლეს K -ს, მაშინ დავწერთ

$$A = \{x_\alpha | \alpha \in K\}$$

ან, თუ რაიმე გაუგებრობა არ იქნება, დავწერთ

$$A = \{x_\alpha\}.$$

ჩვენთვის ზოგიერთი სიმრავლე განსაკუთრებულად მნიშვნელოვანია. ამის გამო მათთვის შემოღებულია სტანდარტული აღნიშვნები:

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე — N ,

მთელ რიცხვთა სიმრავლე — Z ,

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე — Q ,

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე — R .

ამას გარდა განსაკუთრებული ნიშნებით აღინიშნება წერტილთა და რიცხვთა სხვა სიმრავლეები. მაგალითად, AB წრფე აღინიშნება (AB)



ნახ. 1

სიმბოლოთი (ნახ. 1), სხივი AB , რომლის სათავეს წერტილია A , აღი-



ნახ. 2

ნიშნება $[AB]$ (ნახ. 2); ab სეგმენტი აღინიშნება $[a, b]$ სიმბოლოთი (ნახ. 3).



ნახ. 3

ab ინტერვალი აღინიშნება $]a, b[$ სიმბოლოთი (ნახ. 4),



ნახ. 4

ნახევარსეგმენტი ანუ ნახევარინტერვალი $[a, b[$ განისაზღვრება შემდეგი უტოლობით: $a \leq x < b$ (ნახ. 5),



ნახ. 5

ასევე, ნახევარსეგმენტი $]a, b]$ განისაზღვრება შემდეგი უტოლობით: $a < x \leq b$ (ნახ. 6),



ნახ. 6

2. **ქვესიმრავლე.** ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე შეიცავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს: ამ შემთხვევაში იტყვიან: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ეს წინადადება სიმბოლურად ასე აღინიშნება

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \text{ ან } \mathbb{R} \supset \mathbb{N}$$

და იკითხება „ $\mathbb{N}$ ჩართულია $\mathbb{R}$ -ში“ ან „ $\mathbb{R}$ მოიცავს $\mathbb{N}$ -ს“.

საზოგადოდ ვიტყვით, რომ A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა, თუ A სიმრავლის ყველა ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს:

$$A \subset B.$$

ჩართვის სიმბოლო $\subset$ იხმარება ისეთ გამოსახულებათა — ტერმთა შორის, რომლებიც სიმრავლეებს აღნიშნავენ.

ცხადია, თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ $A = B$.

აგრეთვე ცხადია, რომ $\emptyset$ სიმრავლე ყველა სიმრავლეს ეკუთვნის. რაიმე $B = \{x\}$ სიმრავლიდან ქვესიმრავლის გამოყოფა ხდება B სიმრავლის ელემენტთა რომელიმე თვისების მითითებით. ვთქვათ, ეს თვისება გამოისახება $P(x)$ -ით, მაშინ B სიმრავლის ქვესიმრავლე ასე განისაზღვრება:

$$\{x | P(x), x \in B\}.$$

მაგალითად,

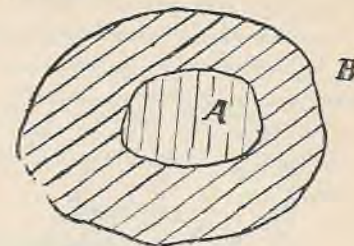
$$A = \{x | x^2 - 4 = 0, x \in \mathbb{R}\},$$

არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლე. ცხადია,

$$A = \{-2, 2\}.$$

A სიმრავლე რომ B სიმრავლის ქვესიმრავლეა შეიძლება გამოისახოს ეილერის¹ ან ვენის² წრეების საშუალებით (ნახ. 7).

ქვესიმრავლის განსაზღვრის თანახმად ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ყოველი A, B და C სიმრავლეთათვის ქვეშარიტია შემდეგი გამონათქვამები:



ნახ. 7

$A \subset A$ — რეფლექსურობის თვისება;

$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ — ტრანზიტულობის თვისება;

ამრიგად, ჩართვის დამოკიდებულებას აქვს შემდეგი თვისებები: ნებისმიერი A, B და C სიმრავლისათვის ქვეშარიტია გამონათქვამები:

- 1) $\emptyset \subset A$;
- 2) $A \subset A$;
- 3) $((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Rightarrow (A = B)$;
- 4) $((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow (A \subset C)$.

თუ A და B სიმრავლეებს შორის ადვილი აქვს ასეთ დამოკიდებულებას:

$$A \subset B, \text{ მაგრამ } A \neq B.$$

მაშინ A სიმრავლეს B სიმრავლის წესიერი ნაწილი ან საკუთარი ქვესიმრავლე ეწოდება.

რადგანაც ყოველი A სიმრავლისათვის $A \subset A$ და $\emptyset \subset A$, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ყოველ არაცარიელ A სიმრავლეს ორი ქვესიმრავლე მაინც აქვს: A სიმრავლე და $\emptyset$ — ცარიელი სიმრავლე.

A სიმრავლეს და $\emptyset$ სიმრავლეს A სიმრავლის არასაკუთრივი ქვესიმრავლეები ეწოდება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა, მაშინ A ტოლია B სიმრავლისა ან A ჩართულია B -ში. ეს დამოკიდებულება $A \subseteq B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვთქვათ, A სიმრავლე შედგება ხუთი ელემენტისაგან, ეს ასე აღინიშნება $m(A) = 5$.

ცარიელი სიმრავლის განსაზღვრის თანახმად

$$m(\emptyset) = 1.$$

¹ ლეონარდ ეილერი (1707—1783), მათემატიკოსი, წარმოშობით შვეიცარიელი, პეტერბურგის აკადემიის წევრი. თავისი სიცოცხლის უმეტესი ნაწილი გაატარა რუსეთში.

² ჯონ ვენი (1834—1921), ინგლისელი მათემატიკოსი და ლოგიკოსი.

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ ელემენტთა რიცხვი სიმრავლეში $\{\emptyset\}$ არის 1, რადგანაც $\{\emptyset\}$ სიმრავლე შედგენილია ერთი ელემენტისაგან და ეს ელემენტი ცარიელი სიმრავლეა.

ავიღოთ რაიმე A სიმრავლე და განვიხილოთ მხოლოდ ამ სიმრავლის ქვესიმრავლეები. ქვესიმრავლეთა სიმრავლე სრულიად გარკვეული სიმრავლეა. A სიმრავლის ქვესიმრავლეებია სიმრავლეები $\emptyset$ (სიმრავლე) და A (სიმრავლე).

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებლებია ბ. ბოლცანო¹ და გ. კანტორი².

§ 2. სიმრავლეთა მოქმედებანი.

1. სიმრავლეთა გაერთიანება. ვთქვათ, გვაქვს A და B სიმრავლეები:

$$A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d, e\}.$$

შევადგინოთ სიმრავლე

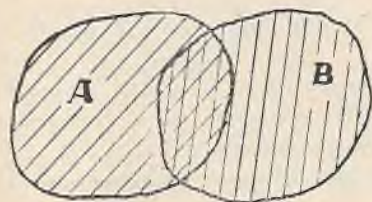
$$\{a, b, c, d, e\}.$$

ეს სიმრავლე C ასეთი აღნიშნოთ. როგორც ვხედავთ:

$$a \in A, a \notin B; b \in A, b \in B; c \in A, c \in B;$$

$$d \notin A, d \in B; e \notin A, e \in B.$$

C სიმრავლეს ეწოდება A და B სიმრავლეთა გაერთიანება.



$A \cup B$

ნახ. 8

A და B სიმრავლეთა გაერთიანება ასე აღნიშნება: $A \cup B$

განსაზღვრით A და B სიმრავლეთა გაერთიანება — $A \cup B$ ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთ სიმრავლეს მაინც ეკუთვნის (ნახ. 8).

A, B და C სიმრავლეთა

გაერთიანება განსაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C.$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ სიმრავლეთა გაერთიანებას აქვს შემდეგი თვისებები:

$$1) A \cup \emptyset = A;$$

$$2) A \cup A = A;$$

¹ ბერნარდ ბოლცანო (1781—1848), ჰეზი მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი.

² გეორგ კანტორი (1845—1919), გერმანელი მათემატიკოსი.

$$3) A \cup B = B \cup A;$$

$$4) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). \quad (\text{ნახ. 9}).$$

მე-4 ტოლობა დამტკიცდება შემდეგი მსჯელობით:

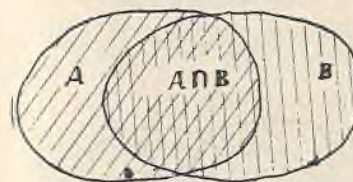
თუ $x \in (A \cup B) \cup C$, მაშინ x ეკუთვნის A, B და C სიმრავლიდან ერთ-ერთს მაინც და, მაშასადამე, ეკუთვნის $A \cup (B \cup C)$. პირიქით, თუ x ეკუთვნის $A \cup (B \cup C)$, მაშინ x ეკუთვნის A, B და C სიმრავლიდან ერთ-ერთს, და, მაშასადამე, ეკუთვნის $(A \cup B) \cup C$.

ქვესიმრავლის განსაზღვრის საფუძველზე შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი გამოთქვამის ჭეშმარიტება:

თუ $((A \cup B) = B) \wedge (A \neq B)$ ჭეშმარიტია, მაშინ A სიმრავლე B სიმრავლის წესიერი ნაწილია.

2. სიმრავლეთა გადაკვეთა. A და B სიმრავლეებიდან ავიღოთ ყველა ის ელემენტი, რომლებიც A სიმრავლესაც და B სიმრავლესაც ეკუთვნიან. ასეთი ელემენტებით შედგენილ სიმრავლეს A და B სიმრავლეთა გადაკვეთა ეწოდება (ნახ. 10).

A და B სიმრავლეთა გადაკვეთა $A \cap B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.



ნახ. 10

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

ამრიგად, A და B სიმრავლეთა გადაკვეთა ეწოდება ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც ორივე A და B სიმრავლეს ეკუთვნის.

სამი A, B და C სიმრავლის გადაკვეთა განსაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C.$$

სიმრავლეთა გადაკვეთის განსაზღვრის საფუძველზე ადვილი დასადგენია სიმრავლეთა გადაკვეთის შემდეგი თვისებების ჭეშმარიტება:

$$1) A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$2) A \cap A = A;$$

$$3) A \cap B = B \cap A;$$

- 4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
 5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
 6) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

დავამტკიცოთ, მაგალითად, მე-5 თვისების კერძობა.

თუ $x \in ((A \cup B) \cap C)$, მაშინ $x \in C$ და x ეკუთვნის A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც. მაგალითად, $x \in A$. და, რადგანაც $x \in C$ და $x \in A$ -ს, მაშინ $x \in (A \cap C)$. და, მაშინ, ცხადია, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

სრულიად ასევე დავამტკიცებთ, რომ, თუ, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, მაშინ $x \in ((A \cup B) \cap C)$.

ასევე შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ: A სიმრავლე B სიმრავლის წესიერი ნაწილია, თუ გამოვსაზღვრებთ

$$A \cup B = B, \quad A \cap B = A \quad \text{და} \quad A \neq B$$

კერძობა.

3. **სიმრავლეთა სხვაობა.** A და B სიმრავლის სხვაობა ეწოდება A -ს ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან (ნახ. 11).

A და B სიმრავლის სხვაობა $A \setminus B$ სიმბოლოთი აღინიშნება,

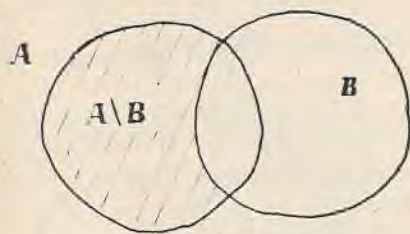
$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

ცხადია,

$$((A = B) \vee (A \subset B)) \Rightarrow \\ \Rightarrow ((A \setminus B) = \emptyset)$$

ანუ

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (A \setminus B) = \emptyset.$$



ნახ. 11

აღვილი შესაძრწმებელია შემდეგი წინადადების კერძობა (ნახ. 12):

$$(A \cup B) = ((A \setminus B) \cup \\ \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)).$$

მაგალითად,

$$A = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\},$$

მაშინ,

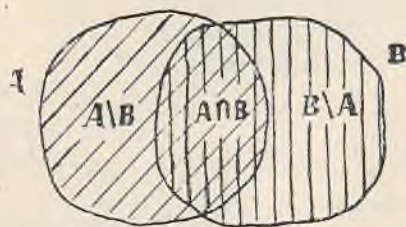
$$A \setminus B = \{1, 2\},$$

$$A \cap B = \{3, 4\}, \quad B \setminus A = \{5, 6\},$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

ცხადია,

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\}.$$



ნახ. 12

4. **დამატება.** ვთქვათ A სიმრავლე მოიცავს B სიმრავლეს (ნახ. 13), მაშინ A სიმრავლისა და B სიმრავლის სხვაობას ეწოდება B სიმრავლის დამატება A სიმრავლის მიმართ. B სიმრავლის დამატება A სიმრავლის მიმართ $C_A B$ სიმბოლოთი აღინიშნება:

$$C_A B = (A \setminus B) \cup (A \supset B)$$

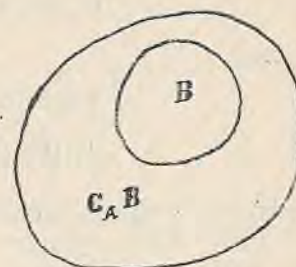
ანუ

$$C_A B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

მაგალითად,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{3, 4, 6\};$$

$$C_A B = \{1, 2, 5\}.$$



ნახ. 13

კენტ რიცხვთა სიმრავლე S და ლუწ

რიცხვთა სიმრავლე P ურთიერთდამატებითი სიმრავლეებია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$S = N \setminus P, \quad P = N \setminus S.$$

5. **სიმრავლეთა ბულის ალგებრა.** 1-ლი თავის 1-ლ პარაგრაფში განვიხილეთ ბულის ალგებრა, სადაც იყო ნათქვამი, რომ გამოვსაზღვრებთ და ძირითადი ლოგიკური მოქმედებანი $\vee$, $\wedge$, $\neg$ წარმოადგენს ბულის ალგებრას.

ახლა განვიხილოთ სიმრავლეთა ბულის ალგებრა.

ავიღოთ რაიმე E სიმრავლე და განვიხილოთ მხოლოდ მისი ქვესიმრავლეები. ამ ქვესიმრავლეთა სიმრავლე $\pi(E)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. გაერთიანების, თანაკვეთის და სხვაობის განსაზღვრის თანახმად $\pi(E)$ სიმრავლის ყოველ A და B სიმრავლეს შეესაბამება $A \cup B$, $A \cap B$ და $A \setminus B$. ამასთან

$$(A \subseteq B) \Rightarrow A \setminus B = \emptyset, \quad A \setminus \emptyset = A.$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ეს მოქმედებანი $\forall A, \forall B, \forall C \in \pi(E)$ -თვის კმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- 1) $A \cup A = A, \quad A \cap A;$
- 2) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$
- 3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$
- 4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$
- 5) $E \setminus (E \setminus A) = A$ ანუ $E \setminus C_E A = A;$
- 6) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ ანუ $C_C (A \cup B) = C_C A \cap C_C B;$
- 7) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ ანუ $C_C (A \cap B) = C_C A \cup C_C B.$

ცხადია,

$$(E \setminus (E \setminus A)) = A \Rightarrow (A \cap (E \setminus A)) = \emptyset.$$

ასევე,

$$(E \setminus (E \setminus A)) = A \Rightarrow (A \cup (E \setminus A)) = E.$$

ამის გამო,

$$A \cup (B \cap (E \setminus B)) = A,$$

$$A \cap (B \cup (E \setminus B)) = A.$$

სისტემას, რომელიც შედგება $\pi(E)$ სიმრავლისა და მასზე განსაზღვრული გაერთიანების, თანაკვეთის და სხვაობის მოქმედებებისაგან, უწოდებენ სიმრავლეთა ბულის ალგებრას ან, მოკლედ, სიმრავლეთა ალგებრას. სიმრავლეთა ალგებრაში სრულდება შემოთაქმებული წინადადებანი.

6. ცარიელი სიმრავლე. უნივერსუმი. სიმრავლეთა ალგებრაში ცარიელი $\emptyset$ ასრულებს განსაკუთრებულ როლს. ნებისმიერი A სიმრავლისათვის ადვილი აქვს ტოლობებს:

$$A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

ასე რომ, $\emptyset$ სიმრავლეთა ალგებრაში ასრულებს იმ როლს, რასაც 0 ჩვეულებრივ რიცხვთა ალგებრაში:

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0.$$

როგორ განესაზღვროთ ისეთი სიმრავლე, რომელსაც ერთეულის თვისება აღმოაჩნდება. ასეთი სიმრავლე I ნიშნით აღვნიშნოთ. უნდა გვქონდეს:

$$A \cap I = A. \quad (1)$$

ამგვარად, I სიმრავლე უნდა შეიცავდეს ყველა სიმრავლის ელემენტებს. ცხადია, ასეთი სიმრავლის შერჩევას შეგძლებოდა, თუ ავიღებთ განსაზღვრულ სიმრავლეთა გაერთიანებას. მაგალითად, თუ ნამდვილ რიცხვების სიმრავლეთაგან გვაქვს საქმე, ერთეული სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა მთელი სიმრავლე იქნება. თუ სიმრავლის წერტილთა სიმრავლესთან გვაქვს საქმე, ერთეული სიმრავლე მთელი სიმრავლის წერტილთა სიმრავლე იქნება.

ერთეულ სიმრავლეს უნივერსალური სიმრავლე ეწოდება (უნივერ-

სუმი). ერთეული სიმრავლის განსაზღვრიდან ადვილი მისახვედრია შემდეგი თვისებების კომპარტება (ნახ. 14):

$$A \cap I = A, \quad A \cup I = I.$$

განვიხილოთ A სიმრავლის დამატება უნივერსუმის მიმართ:

$$C_I A = I \setminus A. \quad (2)$$

ეს კი გვიჩვენებს

$$(C_I A) \cup A = I. \quad (3)$$

ე. ი. $C_I A$ და A სიმრავლეები ურთიერთდამატებაა I -ს მიმართ. ელემენტები, რომლებიც A სიმრავლეს ეკუთვნის, $C_I A$ -ს არ ეკუთვნის. ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ:

$$C_I A = \bar{A},$$

$$\bar{A} \cup A = I. \quad (4)$$

$\bar{\emptyset}$ განსაზღვრის თანახმად არის უნივერსუმის იმ ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც არ ეკუთვნიან $\emptyset$ სიმრავლეს. მაგრამ $\emptyset$ სიმრავლეს არც ერთი ელემენტი არ ეკუთვნის, მაშასადამე

$$\bar{\emptyset} = I. \quad (5)$$

აქედან ცხადია,

$$\emptyset = \bar{I}.$$

თუ (4) ტოლობაში ჩავსვათ $A = I$, მივიღებთ,

$$\bar{I} \cup I = I.$$

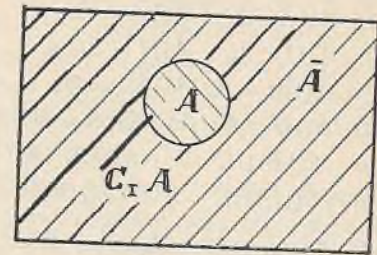
ასევე, თუ (4) — ტოლობაში ჩავსვათ $A = \emptyset$, მივიღებთ

$$\bar{\emptyset} \cup \emptyset = I.$$

უნივერსუმის თვისება სიმრავლეთა ალგებრაში განსხვავდება ერთეულის — 1 თვისებებისაგან რიცხვთა ალგებრაში:

$$A \cap I = A, \quad a \cdot 1 = a;$$

$$A \cup I = I, \quad a + 1 \neq 1, \quad \text{თუ } a \neq 0.$$



ნახ. 14

7. თვისებები. ზემოთ მიღებული განსაზღვრების საფუძველზე $\pi(I)$ სიმრავლეში შემართია შემდეგი ტოლობები:

- 1) $A \cup A = A, A \cap A = A;$
 $A \cup I = I, A \cap I = A;$
 $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset;$
- 2) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$
- 3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$
- 4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$
- 5) $\overline{\overline{A}} = A, \overline{\emptyset} = I, \overline{I} = \emptyset;$
- 6) $C_c(A \cup B) = C_c A \cap C_c B,$
 $I \setminus (A \cup B) = (I \setminus A) \cap (I \setminus B)$ ანუ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$
- 7) $C_c(A \cap B) = C_c A \cup C_c B,$
 $I \setminus (A \cap B) = (I \setminus A) \cup (I \setminus B)$ ანუ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

8. სიმრავლეთა კლასებად დაყოფა. სხვადასხვა საკითხებში გვჭირდება სიმრავლეთა დაყოფა წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად. მაგალითად, სტუდენტთა სიმრავლე შეგვიძლია დავანაწილოთ წლოვანების მიხედვით, სიმაღლის მიხედვით, კურსების მიხედვით და სხვ. მიღებულ ქვესიმრავლეებს საერთო ელემენტები არ ექნებათ. მაგალითად, ერთსა და იმავე სტუდენტს ორი წლოვანება არ ექნება. თუ უნივერსიტეტის სტუდენტთა სიმრავლეს დავანაწილებთ კურსების მიხედვით, გვექნება

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5,$$

სადაც A_1 — პირველი კურსის სტუდენტთა სიმრავლეა, A_2 — მეორე კურსის სტუდენტთა სიმრავლეა და ა. შ. ამასთან, არც ერთი ქვესიმრავლე ცარიელი არაა.

თუ რაიმე წესით A სიმრავლე წარმოიდგინება წყვილ-წყვილი არაგადამკვეთ არაცარიელ ქვესიმრავლეთა ჯამად, მაშინ ამბობენ, რომ სიმრავლე დაყოფილია კლასებად.

მაგალითად, მთელ რიცხვთა სიმრავლე Z შეგვიძლია დავყოთ ორ კლასად: კენტ რიცხვთა ქვესიმრავლე — P და ლუწ რიცხვთა ქვესიმრავლე — S ,

$$Z = P \cup S, P \cap S = \emptyset.$$

ჩვეულებრივ, A სიმრავლის დაყოფას კლასებად ამა თუ იმ მიმართების დასახელებით ვაწარმოებთ. დასახელებული მიმართებით A სიმრავლის ელემენტებს ვაერთიანებთ სათანადო კლასებში. მიმართებანი, რომლის მიხედვით მოცემული სიმრავლე იყოფა კლასებად, შეიძლება სხვადასხვა ბუნების იყოს, მაგრამ საესებით ნებისმიერი არ შეიძლება იყოს. მაგალი-

თად, ვთქვათ, გვინდა დავყოთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე კლასებად შემდეგნაირად: b რიცხვი მივაკუთვნოთ იმავე კლასს, რომელსაც a რიცხვი ეკუთვნის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $b > a$. ცხადია, ამ შემთხვევაში არ გვექნება რაციონალურ რიცხვთა დაყოფა კლასებად. მართლაც, თუ $b > a$, მაშინ b მიეკუთვნება იმ კლასს, რომელსაც ეკუთვნის a . მაგრამ $a < b$, ე. ი. a არ უნდა მიეკუთვნოს იმ კლასს, რომელსაც ეკუთვნის b . ამასთან a არ აღემატება a -ს, ამიტომ a არ უნდა მივაკუთვნოთ იმ კლასს, რომელსაც ეკუთვნის a რიცხვი.

მოვიტანოთ კიდევ მაგალითი. აუდიტორიაში მყოფ სტუდენტთა სიმრავლე დავყოთ კლასებად შემდეგი პირობით. ორი სტუდენტი მივაკუთვნოთ ერთსა და იმავე კლასს, თუ ეს სტუდენტები მეგობრებია. ცხადია, აუდიტორიაში მყოფ სტუდენტთა სიმრავლის კლასებად დაყოფა ამ მიმართებით შეუძლებელია. რადგანაც, თუ a სტუდენტი და b სტუდენტი მოხვდნენ ერთ კლასში, a და b მეგობრებია. თუ b და c სტუდენტები მოხვდნენ ამავე კლასში, b და c მეგობრებია. მაგრამ a და c შეიძლება მეგობრები არ არიან. ე. ი. ამავე კლასში მოხვდნენ ისეთი სტუდენტებიც, რომლებიც მეგობრები არ არიან. ეს კი შეუძლებელია.

ამრიგად, რაიმე A სიმრავლის კლასებად დაყოფა ისეთი მიმართებით უნდა წარმოებდეს, რომ მიღებული A_i ქვესიმრავლეები აკმაყოფილებდნენ შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A \bigcup_{i=1}^n A_i$$

ან

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i; A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ თუ } i \neq j.$$

მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე დავყოთ კლასებად შემდეგი მიმართებით: პირველ კლასში მოვათავსოთ რიცხვი 1. შემდეგ, მეორე კლასში მოვათავსოთ რიცხვები, რომლებიც შეიცავენ მამრავლად 2-ს, მესამე კლასში მოვათავსოთ რიცხვები, რომლებიც შეიცავენ მამრავლად 3-ს (აქ უკვე არ იქნება ის რიცხვები, რომლებიც შეიცავენ მამრავლად 2-ს, ასეთი რიცხვები უკვე ამოწერილია). შემდეგ კლასში მოვათავსოთ რიცხვები, რომლებიც შეიცავენ მამრავლად 5-ს და ა. შ. მივიღებთ

$$N = \{1\} \cup \{2, 4, 6, \dots\} \cup \{3, 9, 15, \dots\} \cup \{5, 35, \dots\} \cup \dots$$

არც ერთი ქვესიმრავლე ცარიელი არაა.

¹ ვლ. შვლიძე, ნაშრომი ცვლადის ფუნქციითა თეორია, თბილისი, 1964, გვ. 29—30.

ზემოთგანხილული მაგალითები გვიკარნახებს იმ პირობებს, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს მიმართება სიმრავლის კლასებად დაყოფის შე-სახე, რომ მივიღოთ

$$A = \bigcup A_i, \quad A_i \neq \emptyset, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j; \quad i, j \in N.$$

ამისათვის საჭიროა განვიხილოთ A სიმრავლის ელემენტებს შო-რის ისეთი მიმართება, რომელიც იქნება რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული. ზოგადად მიმართება განსაზღვრული იქნება მე-3 პარაგ-რაფში.

9. კორტეჟი. ვთქვათ, გვაქვს სიმრავლეები $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$. სიმ-რავლეს, რომელიც შედგენილია ორი ელემენტისაგან $\{x, y\}$, $x \in X$, $y \in Y$, ეწოდება x და y ელემენტთა წყვილი.

შემდეგი სახის წყვილს $\{x\}$, $\{x, y\}$ ეწოდება x და y ელემენტთა დალაგებული წყვილი. ამ სიმრავლის ელემენტთაგან $\{x\}$ განსაზღვ-რავს, თუ რომელი ელემენტი $\{x, y\}$ დაულაგებელი სიმრავლიდან ჩათვ-ლილია „პირველ“ ელემენტად. დალაგებული წყვილი $\{x\}$, $\{x, y\}$ აღი-ნიშნება (x, y) სიმბოლოთი.

ინტუიციით მოსაზრებული დალაგებული წყვილი — ეს უბრალოდ ორი საგნისაგან შედგენილი სიმრავლეა, რომლის საგნები გარკვეული რიგითაა განლაგებული. როცა ამ ცნებით ვსარგებლობთ მათემატიკაში, დავუშვათ, რომ დალაგებულ წყვილს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) ყოველი ნებისმიერი x და y საგნებისათვის არსებობს სიმრავლე, რომელიც შეიძლება (x, y) -ით აღინიშნოს და, რომელიც ცალსახად განი-საზღვრება x და y საგნებით.

2) თუ (x, y) და (u, v) დალაგებული წყვილებია, ეს წყვილები მხო-ლოდ მაშინაა ტოლი, $(x, y) = (u, v)$, როდესაც $x = u$ და $y = v$.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ზემოთ მოტანილი განსაზღვრის საფუძ-ველზე (x, y) წყვილი აკმაყოფილებს ჩამოთვლილ ორ პირობას¹. მართლაც, პირველი პირობა იმით სრულდება, რომ სიმრავლე — (x, y) ცალსახად განსაზღვრება x და y ელემენტებით. დავამტკიცოთ მე-2 პირობა. ვთქვათ, $(x, y) = (u, v)$.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1⁰ $u = v$. მაშინ $(u, v) = \{u\}$, $\{u, v\} = \{u\}$. მაშასადამე, $\{x\}$, $\{x, y\} = \{u\}$, საიდანაც $\{x\} = \{x, y\} = \{u\}$. აქედან კი თავის მხრივ გამოდინარეობს: $x = u$, $y = v$.

2⁰ შემთხვევა $u \neq v$. მაშინ $\{u\} \neq \{u, v\}$ და $\{x\} \neq \{u, v\}$. მაგრამ $\{x\} \subset \{u\}$, $\{u, v\}$, მაშინ $\{x\} = \{u\}$ და, მაშასადამე, $x = u$. ასევე, $\{u, v\} \subset \{x\}$, $\{x, y\}$ და $\{u, v\} \neq \{x\}$, მაშინ $\{u, v\} = \{x, y\}$. ამგვარად, $\{x\} \neq \{x, y\}$, $x \neq y$, $y \neq u$. საბოლოოდ,

$$((x, y) = (u, v)) \wedge (x = u) \wedge (x \neq y) \wedge (y \neq u) \Rightarrow (y = v).$$

¹ Роберт Р. Столл, Множества. Логика. Аксиоматические теории. «Про-свещение», М., 1968, стр. 36.

დალაგებული სამეული შეგვიძლია განვსაზღვროთ დალაგებული წყვილის საფუძველზე. თუ x, y, z ელემენტები გვაქვს, მაშინ ამ ელე-მენტთა დალაგებული სამეული (x, y, z) განისაზღვრება როგორც $((x, y), z)$ დალაგებული წყვილი:

$$((x, y), z) = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}.$$

თუ განსაზღვრულია $(n-1)$ ელემენტთა დალაგებული $(n-1)$ -ეული, მაშინ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ელემენტთა დალაგებული n -ეული $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ განი-საზღვრება შემდეგი დამოკიდებულებით

$$((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n) = \{\{x_1, \dots, x_{n-1}\}, \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}\}.$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ელემენტთა დალაგებულ n -ეულს ეწოდება $x_1, x_2, \dots, x_n$ ელე-მენტთა კორტეჟი ან n -განზომილებიანი ვექტორი. $x_1, x_2, \dots, x_n$ ელე-მენტებს ეწოდება $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ დალაგებული n -ეულის კოორდინატები ან კომპონენტები. n — ნატურალური რიცხვს ეწოდება n -ეულის სიგრძე.

10. სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი. შევადგინოთ (x, y) წყვილ-თა სიმრავლე, რომლის x კომპონენტი ეკუთვნის X სიმრავლეს, ხოლო y კომპონენტი Y სიმრავლეს. ამგვარად შედგენილი ყველა ასეთი წყვი-ლის სიმრავლეს, სადაც $x \in X$ და $y \in Y$, ეწოდება X და Y სიმრავ-ლეთა დეკარტის ნამრავლი.

X და Y სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი აღინიშნება $X \times Y$ სიმ-ბოლოთი. X და Y სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლს არა აქვს გადანაცვლებადობის თვისება. მართლაც, ვთქვათ,

$$X = \{2, 3\}, \quad Y = \{a, b, c\}. \quad (6)$$

მაშინ,

$$X \times Y = \{(2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}.$$

ხოლო

$$Y \times X = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\}.$$

$X \times Y$ ნამრავლის ელემენტი $(2, a)$ არ ეკუთვნის $Y \times X$ ნამრავლს. ამგვარად,

$$X \times Y \neq Y \times X.$$

რომ დავთვალოთ X და Y სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლის ელე-მენტები, მიზანშეწონილია ნამრავლის ელემენტები დავალაგოთ მართ-

კუთხოვანი ცხრილის სახით. ზემოთ მოტანილი სიმრავლეების ნამრავლის ელემენტებისათვის გვექნება შემდეგი ცხრილი:

(2, a), (2, b), (2, c),

(3, a), (3, b), (3, c).

მიღებულ მართკუთხა ცხრილში იმდენი სტრიქონია, რამდენი ელემენტიცაა X სიმრავლეში, ხოლო იმდენი სვეტია, რამდენი ელემენტიცაა Y სიმრავლეში. ცხადია, (6) სიმრავლეთა $X \times Y$ ნამრავლში არის 6 ელემენტი:

$$|X \times Y| = 2 \cdot 3 = 6.$$

საზოგადოდ,

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|. \quad (7)$$

კერძოდ, (7) ფორმულა ტეშმარიტია მაშინაც, როდესაც X ან Y ცარიელი სიმრავლეა.

§ 3. ელემენტთა მიმართება. ფუნქცია

1. ელემენტთა მიმართება. ზემოთ ბევრჯერ ვიხმარეთ ტერმინი „მიმართება“ და გამოვიყენეთ კიდევ მიმართების ცნება. მიმართების ცნება მათემატიკის საშუალო სკოლის კურსიდანაც საკმარისადაა ცნობილი. ახლა განვიხილოთ მიმართების ცნება უფრო დაწვრილებით.

რომ გავეცნოთ, თუ რა არის მიმართება, განვიხილოთ მაგალითები: ვთქვათ გვაქვს სიმრავლეები $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$. X სიმრავლის ელემენტები იყოს გ, დ, თ, ე, სადაც გ აღნიშნავდეს გიას, დ — დავითს, თ — თამარს, ე — ეკას:

$$X = \{გ, დ, თ, ე\}.$$

Y სიმრავლის ელემენტები იყოს 2, 4, 5, 7, სადაც 2 აღნიშნავდეს 2 წიგნი, 4 — 4 რგვეული, 5 — 5 ჟურნალი, 7 — 7 გაზეთი:

$$Y = \{2, 4, 5, 7\}.$$

ვთქვათ, გიას 2 წიგნი აქვს. ეს წინადადება გ და 2-ის წყვილით შეგვიძლია ჩავწეროთ (გ, 2), დავითს 4 რგვეული აქვს. ეს წინადადება შეგვიძლია (დ, 4) წყვილით ჩავწეროთ და ა. შ.

წყვილებით (გ, 2), (დ, 4), (თ, 3), (ე, 7) განისაზღვრება მიმართება X და Y სიმრავლეთა ელემენტებს შორის. ეს მიმართებაა „ x აქვს y “. $x \in X$, $y \in Y$. ამგვარად, (x, y) წყვილის საშუალებით განისაზღვრება სრულიად გარკვეული მიმართება „ x აქვს y “.

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი:

ვთქვათ, X არის რომელიმე ქალაქში მცხოვრებ მოსწავლეთა სიმრავლე, Y არის ამ ქალაქში სკოლების სიმრავლე. მიმართება „ x სწავლობს y -ში“, $x \in X$, $y \in Y$, განისაზღვრება (x, y) წყვილით.

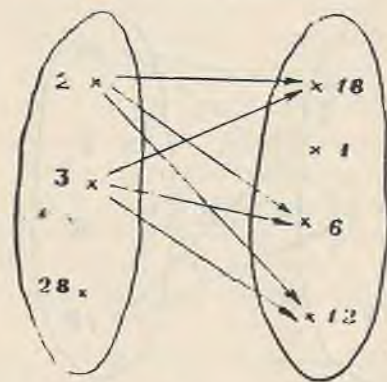
ამგვარად, წყვილი (x, y) , $x \in X$ და $y \in Y$ ელემენტთა უბრალო დალაგება კი არაა, არამედ გამოსახავს იმ მიმართებას, რომელ მიმართებაშიც არის X სიმრავლის x ელემენტი Y სიმრავლის y ელემენტთან, ანუ (x, y) წყვილი გამოსახავს იმ მიმართებას, რომელშიც არის X სიმრავლე Y სიმრავლესთან. ამ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ აღნიშნული მიმართება განსაზღვრულია სიმრავლეთა (X, Y) წყვილზე.

განვიხილოთ $X \times Y$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე $\pi(X \times Y)$. სიმრავლეთა (X, Y) წყვილზე განსაზღვრული მიმართება ვუწოდოთ $\pi(X \times Y)$ სიმრავლის ყოველ ელემენტს.

ამ განსაზღვრით სიმრავლეთა (X, Y) წყვილზე განსაზღვრული მიმართება არის $X \times Y$ დეკარტის ნამრავლის ქვესიმრავლე. ვთქვათ, P არის (X, Y) წყვილზე განსაზღვრული მიმართება. ეს ნიშნავს, რომ P არის (x, y) წყვილთა რაიმე სიმრავლე, სადაც $x \in X$, $y \in Y$. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ X სიმრავლის x ელემენტი P მიმართებაშია Y სიმრავლის y ელემენტთან.

X სიმრავლის x ელემენტი რომ P მიმართებაშია Y სიმრავლის y ელემენტთან ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ: xPy ან $P(x, y)$.

ავიღოთ ორი სიმრავლე $X = \{2, 3, 28\}$, $Y = \{18, 1, 6, 12\}$. განვიხილოთ მიმართება „ნაკლებია“ X და Y სიმრავლეთა ელემენტებს შორის. ამისათვის შევადაროთ X სიმრავლის ყოველი ელემენტი Y — სიმრავლის ყველა ელემენტს. დავიწყოთ 2-დან. $2 < 18$ — ტეშმარიტია, $2 < 1$ — მცდარია, $2 < 6$ — ტეშმარიტია, $2 < 12$ — ტეშმარიტია. მაშასადამე, 2 „ნაკლებობის“ მიმართებაშია Y სიმრავლის 18, 6 და 12 — ელემენტებთან. მიმართება „2 ნაკლებია y -ზე“, $y = 18, 6, 12$ ნაჩვენებია მე-15 ნახაზზე ისრებით, რომლებიც იწყება X სიმრავლის ელემენტებიდან 2-დან და მიმართულია ელემენტებისაკენ 18, 6, 12. ასევე



ნახ. 15

3 — ელემენტებთან. მიმართება „2 ნაკლებია y -ზე“, $y = 18, 6, 12$ ნაჩვენებია მე-15 ნახაზზე ისრებით, რომლებიც იწყება X სიმრავლის ელემენტებიდან 2-დან და მიმართულია ელემენტებისაკენ 18, 6, 12. ასევე

გაჩვენებთ, რომ X სიმრავლის ელემენტი 3 „ნაკლებობის“ მიმართებაში, Y სიმრავლის ელემენტებთან 18, 6, 12: $3 < 18$, $3 < 6$, $3 < 12$. ხოლო $28 > y$, სადაც $y = 18, 1, 6, 12$, მცდარია. მე-15 ნახაზით გრაფიკულად წარმოდგენილია მიმართება „ $x < y$ “. მე-15 ნახაზს ეწოდება მიმართების „ $x < y$ “, $x \in X$, $y \in Y$, გრაფი და ამბობენ: მე-15 ნახაზზე გამოსახულია მიმართების „ $x < y$ “ გრაფი. თუ განვიხილავთ მიმართებას აღვნიშნავთ P_1 -ით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$P_1 = \{(2, 18), (2, 6), (3, 18), (3, 6), (3, 12), (2, 12)\}.$$

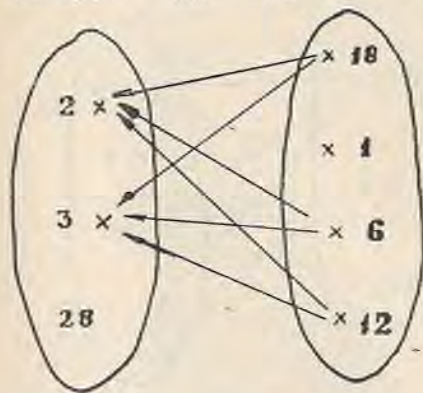
აღვლი წარმოსადგენია, რომ P_1 სიმრავლე არის $X \times Y$ დეკარტის ნამრავლის ქვესიმრავლე: $P_1 \subset (X \times Y)$.

თუ აღმოჩნდება, რომ ორი მიმართება სათანადო დეკარტის ნამრავლის ერთი და იგივე ქვესიმრავლით გამოისახება, მაშინ ამ ორ მიმართებას ერთმანეთისაგან არ ვანსხვავებთ.

ეთქვას, $X = \{2, 3, 28\}$, $Y = \{18, 1, 6, 12\}$. განვიხილოთ ამ სიმრავლეთა ელემენტებს შორის მიმართება „ x -ზე იყოფა უნაშთოდ“. ეს მიმართება აღვნიშნავთ P_2 . ადვილად მივიღებთ, რომ

$$P_2 = \{(2, 18), (2, 6), (2, 12), (3, 18), (3, 6), (3, 12)\}.$$

თუ P_1 და P_2 -ს შევადარებთ, მივიღებთ $P_1 = P_2$. ამ ორ მიმართებას ერთმანეთისაგან არ ვანსხვავებთ. ამგვარად, რაიმე X და Y სიმრავლეების ელემენტთა შორის მიმართება განისაზღვრება არა იმ სიტყვებით, რომლებითაც ის დახასიათებულია, არამედ სიმრავლეთა $X \times Y$ დეკარტის ნამრავლის იმ ქვესიმრავლით, რომლითაც ეს მიმართება ხასიათდება.



ნახ. 16

2. შექცეული მიმართება

მე-15 ნახაზზე გამოსახულია X და Y სიმრავლეების ელემენტთა შორის P მიმართება: „ $x < y$ “, $x \in X$, $y \in Y$. თუ შევცვლით ყოველი ისრის მიმართულებას, მივიღებთ სხვა მიმართებას — მიმართებას Y და X სიმრავლეების ელემენტებს შორის (ნახ. 16). ამ მიმართებას ეწოდება P მიმართების შექცეული მიმართება და აღვნიშნავთ P^{-1} სიმბოლოთ.

$$P^{-1} = \{(18, 2), (18, 3), (6, 2), (6, 3), (12, 2), (12, 3)\}.$$

Y და X სიმრავლეების ელემენტთა შორის მიმართებას P^{-1} -ს ეწოდება X და Y სიმრავლეების ელემენტთა შორის მიმართების P -ის შექცეული მიმართება, თუ Y ელემენტი, $y \in Y$, იყოფება x ელემენტთან,

$x \in X$, P^{-1} მიმართებაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც x ელემენტი იყოფება y ელემენტთან P მიმართებაში. ამ განსაზღვრით ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ P მიმართება განისაზღვრება $X \times Y$ დეკარტის ნამრავლის ქვესიმრავლით, მაშინ P^{-1} მიმართება განისაზღვრება $Y \times X$ ნამრავლის ქვესიმრავლით.

რიცხვთა შორის მიმართების „ x მეტია y -ზე“ შექცეული მიმართება იქნება „ y ნაკლებია x -ზე“.

თუ განვიხილავთ ტოლ სიმრავლეებს, მაშინ $(X \times X)$ სიმრავლეთა წყვილით განისაზღვრება თვით X სიმრავლის ელემენტთა შორის მიმართება.

3. სიმრავლეთა დალაგება. თვისებები. ავიღოთ რიცხვთა სიმრავლეზე მიმართება „ტოლი არის“, ასეთ მიმართებას იძლევა რიცხვთა ყველა წყვილი (x, x) . ე. ი. ისეთი წყვილები, რომელთა პირველი და მეორე კომპონენტები ტოლია, მაგალითად, $(1, 1)$, $(-4, -4)$, $(5, 5)$. მიმართების რიცხვთა (x, x) წყვილით განოსახულ თვისებას ეწოდება რეფლექსურობა. რეფლექსურობის თვისება აქვს არა მარტო მიმართებას „ტოლი“, არამედ სხვა მიმართებასაც. მაგალითად, მიმართებას — „გამყოფია“ აქვს რეფლექსურობის თვისება, რადგანაც რიცხვი თავის თავის გამყოფიცაა, თუ იგი ნულისაგან განსხვავებულია.

რიცხვთა X სიმრავლეზე განსაზღვრული P მიმართებას აქვს რეფლექსურობის თვისება, თუ X სიმრავლის ყოველი ელემენტი თავისთავთან P მიმართებაშია. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ მიმართებას „გამყოფი არის“ აქვს რეფლექსურობის თვისება. მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული მიმართება „მოპირდაპირეა“ არა აქვს რეფლექსურობის თვისება, რადგანაც გამონათქვამი — „ყოველი რიცხვი თავისი მოპირდაპირეა“ — მცდარია.

ახლა განვიხილოთ მიმართების სიმეტრიულობის თვისება.

ეთქვას, X არის სამკუთხედთა სიმრავლე. X სიმრავლის ელემენტებისათვის ავიღოთ მიმართება „კონგრუენტულია“. ამ მიმართებას აქვს სიმეტრიულობის თვისება. მართლაც, თუ „ x სამკუთხედი კონგრუენტულია y სამკუთხედის“ კეშმარიტი გამონათქვამია, მაშინ „ y სამკუთხედი კონგრუენტულია x სამკუთხედის“ გამონათქვამიც კეშმარიტია. ამ შეთხვევაში ვიტყვი მიმართებას „კონგრუენტული არის“ აქვს სიმეტრიულობის თვისება.

ვიტყვი, რომ X სიმრავლეზე განსაზღვრულ P მიმართებას აქვს სიმეტრიულობის თვისება, თუ x ელემენტი X სიმრავლიდან P მიმართებაშია y ელემენტთან, მაშინ y ელემენტიც P მიმართებაშია x ელემენტთან:

$$xPy = yPx.$$

თუ X სიმრავლეზე განსაზღვრულ P მიმართებას აქვს თვისება

$$xPy \neq yPx,$$

მაშინ P მიმართებას ასიმეტრიული ეწოდება. მაგალითად, რიცხვთა შორის მიმართება „ნაკლებია“ ასიმეტრიულია, თუ $x < y$ ჰქმნის, მაშინ $y < x$ მცდარია.

ვთქვათ, X სიმრავლეში განსაზღვრულ P მიმართებას აქვს თვისება: თუ ჰქმნის y ელემენტი x ელემენტი P მიმართებაშია y ელემენტთან და y ელემენტი იმავე მიმართებაშია z ელემენტთან, გამოდინარეობს, რომ ჰქმნის x ელემენტი P მიმართებაშია z ელემენტთან, მაშინ ვიტყვი, P მიმართებას აქვს ტრანზიტულიობის თვისება.

მაგალითად, რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრულია მიმართება „ნაკლებია“, მაშინ უტოლობებიდან $x < y$, $y < z$ გამოდინარეობს $x < z$.

მაშასადამე, რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრულ მიმართებას „ნაკლებია“ აქვს ტრანზიტულობის თვისება.

ახლა განვსაზღვროთ სიმრავლის დალაგებულობა.

თუ X სიმრავლეში განსაზღვრულია ისეთი P მიმართება, რომელსაც აქვს რეფლექსურობის, ასიმეტრიულობის და ტრანზიტულობის თვისებები, მაშინ X სიმრავლე დალაგებულია P მიმართებით.

მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე დალაგებულია, რადგანაც ამ სიმრავლეში განსაზღვრულია მიმართება „ნაკლებია ან ტოლია“, რომელსაც აქვს რეფლექსურობის, ასიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები.

4. სიმრავლეთა გადასახვა. ფუნქციის ცნება. ვთქვათ, მოცემულია ორი სიმრავლე X და Y . ზემოთ განვსაზღვრეთ საზოგადოდ X და Y სიმრავლეთა ელემენტებს შორის P მიმართება: ესაა ნებისმიერი დალაგებული (x, y) წყვილთა სიმრავლე P , რომლის პირველი ელემენტიცაა x , $x \in X$. სიმრავლეს X ეწოდება P მიმართების განსაზღვრის სიმრავლე, ხოლო (x, y) წყვილის მეორე ელემენტიცაა სიმრავლეს Y -ს ეწოდება P მიმართების მნიშვნელობათა სიმრავლე. ახლა განვიხილოთ ერთე კერძო სახის მიმართება f .

დავუშვათ, რომ სიმრავლეთა (X, Y) წყვილზე განსაზღვრულ მიმართება f -ს აქვს შემდეგი თვისება: თუ (x, y_1) და (x, y_2) წყვილები f მიმართებას ეკუთვნის, მაშინ $y_1 = y_2$. ე. ი. X სიმრავლის არც ერთი ელემენტი Y სიმრავლის ერთ ელემენტზე მეტ ელემენტთან არაა აღებული მიმართებაში. ასეთ მიმართებას ცალსახა მიმართება ეწოდება. თუ ცალსახა მიმართებას ისრებით წარმოვადგენთ, მივიღებთ, რომ X სიმრავლის არც ერთი ელემენტიდან არ იწყება ერთზე მეტი ისარი. ზოგი ელემენტიდან არც ერთი ისარი არ იწყება (ნახ. 17). ასეთ მიმართებას ფუნქციური მიმართება ან, მოკლედ, ფუნქცია ეწოდება. ამ შემთხვევაში ამბობენ: f ფუნქცია X სიმრავლეს Y სიმრავლეში გადასახავს (ასახავს) და ასე წერენ:

$$f: X \rightarrow Y.$$

სიმრავლეთა (X, Y) წყვილზე განსაზღვრულ ცალსახა მიმართებას f -ს, სადაც X სიმრავლის ყოველ x ელემენტისათვის არსებობს არაუმეტეს ერთი წყვილი (x, y) , $y \in Y$, ეწოდება სიმრავლეთა (X, Y) წყვილზე განსაზღვრული ფუნქცია.

ამგვარად, f ფუნქცია $X \times Y$ სიმრავლის ქვესიმრავლეა. ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, $X \times Y$ სიმრავლის f ქვესიმრავლე სიმრავლეთა (X, Y) წყვილზე განსაზღვრული ფუნქცია იქნება, თუ ყოველი x ელემენტისათვის f ქვესიმრავლეში არსებობს არაუმეტეს ერთი (x, y) წყვილისა, რომლის პირველი ელემენტიცაა x . ელემენტს y -ს ეწოდება x ელემენტის სახე ან შესაბამისი მნიშვნელობა Y სიმრავლიდან. ამ y ელემენტს $f(x)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ, $y = f(x)$. თვით x ელემენტს კი y ელემენტის წინა სახე ეწოდება.

X სიმრავლის იმ x ელემენტებს, რომელთათვისაც განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე (სიმრავლე) და აღნიშნება $D(f)$ ან X_f სიმბოლოთი, ხოლო $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს Y სიმრავლიდან, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არე (სიმრავლე) და აღნიშნება $E(f)$ ან Y_f სიმბოლოთი.

მაგალითად, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ -სათვის (ნახ. 18):

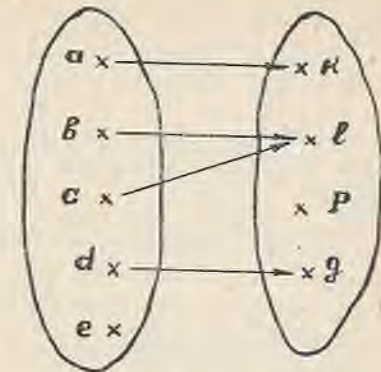
$$D(f) = \{x | -1 \leq x \leq 1\},$$

$$E(f) = \{y | 0 \leq y \leq 1\}.$$

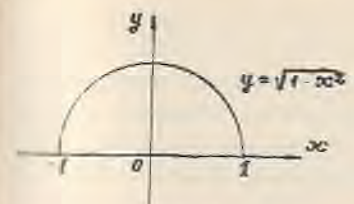
ჩვეულებრივად X სიმრავლის f მიმართებით ყოველი x ელემენტისათვის განსაზღვრავენ Y სიმრავლის y ელემენტს, $y = f(x)$ და განიხილავენ $(x, f(x))$ წყვილთა სიმრავლეს. ამ სიმრავლეს ეწოდებენ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, რომელსაც Γ ასოთი აღნიშნავენ.

$$\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}.$$

ამ განსაზღვრით ფუნქციის ცნება და ფუნქციის გრაფიკის ცნება გაიგივებულია.



ნახ. 17



ნახ. 18

ჩვეულებრივ ფუნქციას შემდეგნაირად განსაზღვრავენ:

თუ ცნობილია f კანონი, რომლის საშუალებითაც $X=\{x\}$ სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება არაუმეტეს ერთი ელემენტისა მეორე $y=\{y\}$ სიმრავლიდან, მაშინ ამბობენ, რომ y არის x -ის ფუნქცია და წერენ $y=f(x)$.

ამ ნახშირია სიტყვა „კანონი“. ძნელი არაა იმის შემჩნევა, რომ ეს სიტყვა იმ ცალსახა მიმართებას გამოსახავს, რომელიც ზემოთ განვსაზღვრეთ.

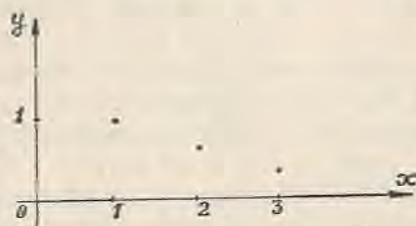
y რომ x -ის ფუნქციაა, ამას ასეც აღნიშნავენ:

$$x \rightarrow f_x \text{ ან } x \rightarrow y.$$

უფრო დაწვრილებით ფუნქციის ცნებას მე-13 თავის 1 პარაგრაფში განვიხილავთ.

ხშირად შეგვხვდება ცნება „მიმდევრობა“.

მიმდევრობა ეწოდება ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე.



ნახ. 19

$1 \rightarrow x_1, 2 \rightarrow x_2, \dots, n \rightarrow x_n, \dots$
ანუ

$$\forall n (n \in \mathbb{N}) \rightarrow x_n.$$

მაგალითად

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ეს ფუნქცია მოცემულია მე-19 ნახაზზე:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

5. დალაგების სტრუქტურა. სიმრავლის ელემენტთა შორის დალაგების P მიმართება ამყარებს გარკვეულ წესრიგს, თუ სიმრავლის x და y ელემენტთაგან რომელს მივანიჭოთ პირველი ადგილი და რომელს მეორე. თუ ჰქვია xPy , მაშინ X სიმრავლეში x ელემენტს პირველი ადგილი უჭირავს (წინ უსწრებს), ხოლო y -ს შემდეგი ადგილი. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისათვის დალაგების ცნობილი მიმართებანია $<, >, \geq, \leq$. სიმრავლეთა სისტემისათვის დალაგების მიმართებანია $\subset, \supset$. შემდეგში P -ს საშუალებით აღნიშნული იქნება სიმბოლო $\leq$ ან $\geq$. თუ $x \leq y$ და $x \neq y$, მაშინ დავწერთ $x < y$ და ვიტყვით: x ნაკლებია y -ზე ან x წინ უსწრებს y -ს. შეგვიძლია $x \leq y$ -ის ან $x < y$ ჩანაწერის ნაცვლად ვისწავროთ $y \geq x$ ან $y > x$.

შესაძლებელია X სიმრავლეში ყოველი x და y ელემენტი შედარებული არ იყოს. ეს მაშინ მოხდება, როდესაც არც (x, y) და არც (y, x) წყვილი P მიმართებით განსაზღვრულ წყვილთა სიმრავლეს არ ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში ვიტყვით: X სიმრავლის ელემენტთა შორის P არის ჩაწილობრივ დალაგების მიმართება, ან P მიმართებით X ნაწილობრივ დალაგებულია.

თუ X სიმრავლის ელემენტთა ყოველი (x, y) წყვილისათვის ჰქვია xPy ან yPx , მაშინ ვიტყვით: X სიმრავლე P მიმართებით მთლად დალაგებულია ან X სიმრავლის ელემენტთა შორის P მთლად დალაგების მიმართებაა. დალაგების მიმართება სიმრავლეში გამოიყენება ელემენტთა რიგის დამყარებისათვის. პრაქტიკაში რომელიმე X სიმრავლისათვის დალაგების მიმართება განისაზღვრება ან ქსოვრულად ან თვით სიმრავლის რაიმე სტრუქტურული მახასიათებლის დამტკიცებით. სხვა სიტყვებით: ზოგჯერ X სიმრავლის განსაკუთრებული აგებულება საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ X -ის ელემენტისათვის რიგის მიმართება. სიმრავლის დალაგებულობა საშუალებას აძლევს შევისწავლოთ სიმრავლის სხვადასხვა თვისებები. ამიტომ საჭიროა სპეციალური ცნება იმ სიმრავლისათვის, სადაც განსაზღვრულია დალაგების მიმართება. ნაწილობრივ დალაგებული სტრუქტურა — ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლე ეწოდება არა ცარიელი X სიმრავლისა და მის ელემენტთა ნაწილობრივ დალაგებულ P მიმართების დალაგებულ წყვილს (X, P) . ამ განსაზღვრით (X, P) სტრუქტურის ელემენტებია X სიმრავლის ელემენტები, რომელთა დალაგების მიმართებაა P . მაგალითად, $X = \{a, b, c\}$. ვთქვათ, X სიმრავლის ელემენტების დალაგების მიმართება შემდეგნაირადაა განსაზღვრული

$$P = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (b, b), (c, c)\}. \quad (1)$$

(X, P) სტრუქტურა არის $X = \{c, b, a\}$ სიმრავლისა და P მიმართების დალაგებული წყვილი, სადაც P განისაზღვრება (1) სიმრავლით.

განვიღოთ (X, P) სტრუქტურა მთლად დალაგებული სტრუქტურაა. მთლად დალაგებული (X, P) სტრუქტურა ნიშნავს, რომ X სიმრავლის ყოველი x და y ელემენტთათვის, $x \neq y$, მოიძებნება ისეთი $x_1, x_2, \dots, x_n$ ელემენტები X სიმრავლიდან, რომ

$$x = x_1 < x_2 < \dots < x_n = y.$$

ეს მთლად დალაგებული სტრუქტურა (X, P) არის ჭაჭკვი. ეს განსაზღვრება საშუალებას გვაძლევს ზოგჯერ (X, P) სტრუქტურა წარმოვიდგინოთ სტრუქტურად. მაგალითად, $X = \{a, b, c\}$ და განსაზღვრულია (1) სიმრავლით. X სიმრავლის ელემენტთა ურთიერთგანლაგება P მიმართებით მოგვცემს მე-20 ნახაზზე გამოსახულ სქემას. ნახაზზე X სიმრავ-

ლის ელემენტები ქვემოთაა ზემოთაა განლაგებული პირობით $x < y$. ელემენტი y მოთავსებულია x ელემენტის ზემოთ, თუ $x < y$. აქ დალაგების მიმართება აკავშირებს X სიმრავლის ელემენტებს. ელემენტები გამოსახულია წერტილებით, რომლებიც ურთიერთდაკავშირებულია აღმავალი ტენილით.



ნახ. 20

სტრუქტურა (X, P) , სადაც X მთელ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო P რიცხვთა სიდიდის მიმართებაა ($x \leq y$). მთლად დალაგებული სტრუქტურაა.

ახლა ავიღოთ სამელემენტიანი $\{a, b, c\}$ სიმრავლის ელემენტთა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე:

$$X = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

მიმართება იყოს სიმრავლის ჩართვა $\subseteq$ და განვიხილოთ სტრუქტურა (X, P) . გამოვსახოთ ეს სტრუქტურა სქემატურად (ნახ. 21). ყველაზე დაბლა მოთავსებული წერტილი გამოსახავდეს ცარიელ სიმრავლეს $\{\emptyset\}$.

მეორე რიგში მოთავსებული წერტილები გამოსახავდეს ერთელემენტიანი სიმრავლეებს $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, მესამე რიგში მოთავსებული წერტილები გამოსახავდეს ორელემენტიანი სიმრავლეებს $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$, ხოლო მეოთხე რიგში მყოფი წერტილი (აქ ერთი წერტილი) გამოსახავდეს სამელემენტიანი სიმრავლეს $\{a, b, c\}$. მიმართება $A \subseteq B$ ისრებითაა ნაჩვენებ.

განხილული (X, P) ნაწილობრივად დალაგებული სტრუქტურაა.

საერთოდ, სქემებით შეგვიძლია ვისარგებლოთ არა მხოლოდ მოცემული (X, P) სტრუქტურის გამოსახვისათვის; სქემით შეიძლება მოცემული იყოს ის მიმართება, რომელიც განსაზღვრულია X სიმრავლეში. ამ შემთხვევაში P მიმართება გამოსახება ისრებით, რომლებიც აკავშირებენ მოცემული სიმრავლის ელემენტებს.

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი: ვთქვათ, $X = \{a, b, c\}$, ხოლო

$$P_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}.$$

სტრუქტურა (X, P_1) მთლად დალაგებული სტრუქტურა არაა. კიდევ ერთი, დალაგების (X, P_1) სტრუქტურაში არავითარი წესრიგი არაა: ყოველი ელემენტი მხოლოდ თავის თავისადმი P_1 მიმართებაში და სხვა ელემენტთან შედარებადი არაა, მაგალითად $(a, c) \notin P_1$, $(b, c) \notin P_1$ და ა. შ.



ნახ. 21

როგორც (1) და (2) მიმართება გვიჩვენებს, (X, P) და (X, P_1) დალაგების სხვადასხვა სტრუქტურაა. ასევე დალაგების სხვადასხვა სტრუქტურას მივიღებთ, თუ X სიმრავლეს შევცვლით. მაგალითად, $(X, P) \neq (X_1, P)$, თუ $X_1 \neq X$. ასე რომ, შეგვიძლია განვიხილოთ დალაგების სტრუქტურათა სიმრავლე. დალაგების სტრუქტურათა სიმრავლიდან ისეთ დალაგების (X, P) სტრუქტურებს გამოვყოფთ, სადაც P დალაგების მიმართება რეფლექსური, ტრანზიტული და ასიმეტრიულია; X ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა და P ნებისმიერი ქვესიმრავლეა $X^2 = X \times X$ სიმრავლისა. ასეთი დალაგების სტრუქტურათა სიმრავლეს O გვარის სტრუქტურას ვუწოდებთ (გერმანულად *Ordnung* — წესრიგი).

შემდეგში დაგვიჩვენება O გვარის სტრუქტურასთან დაკავშირებული რამდენიმე ცნება, რომლებსაც ახლა გავცნობთ.

6. დალაგებული სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრები. ავიღოთ O გვარის რაიმე (X, P) სტრუქტურა. Y სიმრავლე იყოს X სიმრავლის ქვესიმრავლე.

ვთქვათ, Y სიმრავლის ელემენტთა შორის ისეთივე მიმართებაა, რაც X სიმრავლის ელემენტთა შორის. განვსაზღვროთ Y სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრები.

Y სიმრავლე (X, P) სტრუქტურაში ქვემოთაა შემოსაზღვრულია, თუ არსებობს (X, P) სტრუქტურის ისეთი a ელემენტი, რომელიც არ აღემატება Y სიმრავლის არც ერთ ელემენტს, $\forall y \in Y (aPy)$. მაგალითად, დადებით რიცხვთა სიმრავლე ქვემოთაა შემოსაზღვრულია, მისი ქვედა საზღვრებია $0, -1, -2$ და ა. შ. შეიძლება Y სიმრავლე (X, P) სტრუქტურაში არ იყოს შემოსაზღვრული. მაგალითად, არადადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\{x | -\infty < x \leq 0\}$ ქვემოთაა შემოსაზღვრულია.

Y სიმრავლე (X, P) სტრუქტურაში ზემოთაა შემოსაზღვრულია, თუ არსებობს (X, P) სტრუქტურის ისეთი b ელემენტი, რომელიც არაა ნაკლები Y სიმრავლის არც ერთ ელემენტზე, $\forall y \in Y (yPb)$. უარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე ზემოთაა შემოსაზღვრულია, მისი ზედა საზღვარია ნებისმიერი დადებითი მთელი რიცხვი. Y სიმრავლე (X, P) სტრუქტურაში შემოსაზღვრულია, თუ (X, P) სტრუქტურაში Y სიმრავლეს აქვს როგორც ზედა საზღვარი, ისე ქვედა საზღვარი. -1 -სა და 1 -ს შორის მოთავსებული რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

(X, P) სტრუქტურის a ელემენტს ეწოდება Y სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი (ინფიმუმ $Y = \inf Y$), თუ Y სიმრავლის ქვედა საზღვართა სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება a -ს. $\forall a (aPa)$. მაგალითად, დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარია 0 . სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი აღებული

სტრუქტურა (X, P_1) იზომორფულია (A, P) დალაგების სტრუქტურისა. A სიმრავლის კლასს ვუწოდოთ A სიმრავლის კარდინალური რიცხვი. ეს რიცხვი $m(A)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. ამ საკითხს შემდეგ პარაგრაფში უფრო დაწვრილებით გავარჩევთ.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ დალაგებულ სტრუქტურათა იზომორფულობას აქვს შემდეგი თვისებები: თუ (X_1, P_1) , (X_2, P_2) , (X_3, P_3) ნებისმიერი იზომორფული სტრუქტურებია, მაშინ

- 1) ყოველი სტრუქტურა თავისთვის იზომორფულია (რეფლექსურობა);
- 2) (X_1, P_1) იზომორფულია (X_2, P_2) -ის, მაშინ (X_2, P_2) იზომორფულია (X_1, P_1) -ის (სიმეტრიულობა);
- 3) თუ (X_1, P_1) იზომორფულია (X_2, P_2) -ის და (X_2, P_2) იზომორფულია (X_3, P_3) -ის, მაშინ (X_1, P_1) იზომორფულია (X_3, P_3) (ტრანზიტულობა).

§ 4. სიმრავლეთა ეკვივალენტურობა. ნაბუხალური რიცხვები. თვლადი სიმრავლენი. კონტინუუმი.

1. **სიმრავლეთა ეკვივალენტურობა.** ავიღოთ ორი სიმრავლე $X = \{x\}$ და $Y = \{y\}$. სიმრავლეთა თეორიაში განვიხილავთ საგანთა სიმრავლეს საგნების რიგისაგან და საგნების ბუნებისაგან დამოუკიდებლად. მაშ, რით შეიძლება განსხვავდებოდნენ ეს სიმრავლეები ერთმანეთისაგან? ეს სიმრავლეები შეიძლება ერთნაირად ბევრი ელემენტებისაგან შედგებოდნენ ან არა. ამ საკითხის გასარკვევად განვსაზღვროთ მიმართება „ x დატყუებულია y -თან“.

ავიღოთ X სიმრავლის რომელიმე ელემენტი x . ასევე ავიღოთ Y სიმრავლის რომელიმე ელემენტი y და განვიხილოთ სიმრავლე $\{x, y\}$. ამ ორელემენტის სიმრავლეს ვუწოდოთ „ x და y ელემენტთა ტყუბი“. ეს სიმრავლე $\{x, y\}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ.

x ელემენტებისაგან, $x \in X$, და y ელემენტისაგან, $y \in Y$, შედგენილ ორელემენტის სიმრავლეს ვუწოდოთ x და y ელემენტთა ტყუბი, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

- 1) ყოველ ნებისმიერ x და y ელემენტისათვის, $x \in X$, $y \in Y$, არსებობს სიმრავლე, რომელიც შეიძლება $\{x, y\}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოს და, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება შემდეგნაირად: $[x, y] = [u, v]$, თუ $x = u$, და $y = v$, სადაც $u \in X$, $v \in Y$;
- 2) ყოველი $[x, y]$ და $[u, v]$ ტყუბებისათვის, $x, u \in X$ და $y, v \in Y$,

$$[x, y] \cap [u, v] = \emptyset.$$

ე. ი. როგორც გინდ იყოს ტყუბები $[x, y]$, $[u, v]$: $x, u \in X$, $y, v \in Y$; არა აქვთ საერთო ელემენტი.

მაგალითად, $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$. ამ ორი სიმრავლის ელემენტთაგან შედგენილ ტყუბთა სიმრავლე იქნება

$$\{[1, a], [2, b]\}.$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვი: ელემენტები c და d დარჩენილია ტყუბების გარეშე.

შევვიძლია ავიღოთ

$$\{[1, c], [2, b]\}.$$

ამ შემთხვევაში ტყუბების გარეშე დარჩენილია a და d ელემენტები.

განვიხილოთ სიმრავლე $\{\{x\}, [x, y]\}$, სადაც $\{x\}$ სიმრავლე გვიჩვენებს, თუ რომელი ელემენტია $[x, y]$ სიმრავლეში პირველი. ამ სიმრავლეს ვუწოდოთ დალაგებული ტყუბი და აღვნიშნოთ $\langle x, y \rangle$ სიმბოლოთი.

X და Y სიმრავლეთა ელემენტებისაგან შედგენილ დალაგებულ ტყუბთა $\{\langle x, y \rangle\}$ სიმრავლე აღვნიშნოთ $\langle X, Y \rangle$ სიმბოლოთი.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ $\langle x, y \rangle \subset X \times Y$.

მაგალითად, $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$. მაშინ

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d),$$

$$(2, a), (2, b), (2, c), (2, d)\}.$$

რადგანაც X სიმრავლეში მხოლოდ ორი ელემენტია, ტყუბთა რაოდენობა იქნება მხოლოდ ორი. მაგალითად, $(1, a)$ და $(2, b)$. შეიძლება სხვა ტყუბებიც ავიღოთ, მაგრამ მხოლოდ ორი ტყუბი უნდა იყოს:

$$\{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle\} \subset X \times Y.$$

თუ X და Y სიმრავლეები ისეთია, რომ ამ სიმრავლეთა ყველა ელემენტისათვის განისაზღვრება დალაგებული დატყუბება $\langle x, y \rangle$. ამასთან, არც ერთ სიმრავლეში არ ჩნდება ელემენტი ტყუბის გარეშე, მაშინ ვიტყვი: X და Y სიმრავლეები ეკვივალენტურია. ცხადია, თუ X და Y სიმრავლეები ეკვივალენტურია, მაშინ X სიმრავლე Y სიმრავლეზე აისახება და, პირიქით, Y სიმრავლე X სიმრავლეზე აისახება.

X სიმრავლე რომ Y სიმრავლის ეკვივალენტურია, სიმბოლურად ასე ჩაეწეროთ $X \approx Y$.

მაგალითად,

$$X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c\}.$$

შვედადგინოთ მოცემული სიმრავლეების ელემენტთა ტყუბების სიმრავლე

$$\{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, c \rangle\}.$$

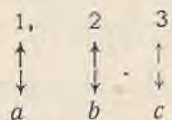
(1)

მიღებული (1) სიმრავლე გვიჩვენებს, რომ X და Y სიმრავლეები ეკვივალენტურია.

მოცემულ X და Y სიმრავლეებს ელემენტთა შორის ეკვივალენტურობა სიმბოლურად ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$1 \longleftrightarrow a, \quad 2 \longleftrightarrow b, \quad 3 \longleftrightarrow c$$

ან



და წავიკითხოთ: ელემენტი 1 დატყუებულია ელემენტ a -სთან ან ელემენტები 1 და a ურთიერთცალსახა ასახვაში (შესაბამისობაში).

ადვილი წარმოსადგენია, რომ ნებისმიერ X, Y, Z სიმრავლეთა ეკვივალენტურობის მიმართებას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $X \approx X$ (რეფლექსურობა);
2. თუ $X \approx Y$, მაშინ $Y \approx X$ (სიმეტრიულობა);
3. თუ $X \approx Y$ და $Y \approx Z$, მაშინ $X \approx Z$ (ტრანზიტულობა).

ამრიგად, სიმრავლეთა ეკვივალენტურობის მიმართება რეფლექსუარია, სიმეტრიული და ტრანზიტული.

მაგალითად, ლუწ რიცხვთა სიმრავლე და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ეკვივალენტურია.

მართლაც,

$$P = \{x | x = 2n, \quad n \in N\}.$$

ცხადია,

$$(n \rightarrow 2n, \quad 2n \rightarrow n) \Rightarrow (x \longleftrightarrow n),$$

მაშასადამე, $N \approx P$.

კარგად დაეკვირდეთ ამ შედეგს: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ლუწ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია. მაგრამ ლუწ რიცხვთა სიმრავლე ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეა — საკუთრივი ნაწილია. ეს თვისება გამოიყენოთ შემდეგი განსაზღვრისათვის:

სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ იგი თავისი საკუთრივი ნაწილის ეკვივალენტურია.

ამ განსაზღვრით ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა, რადგანაც იგი თავისი წესიერი ნაწილის — ლუწ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია.

ვაჩვენოთ, რომ მთელ რიცხვთა სიმრავლე ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე ასე წარმოვიდგინოთ:

$$Z = \left\{ x \mid x = (-1)^n \left[\frac{n}{2} \right], \quad n \in N \right\},$$

სადაც $\left[\frac{n}{2} \right]$ არის $\frac{n}{2}$ -ის უდიდესი მთელი ნაწილი, მაგალითად,

$$n = 1, \quad x = (-1)^1 \left[\frac{1}{2} \right] = 0; \quad n = 2, \quad x = (-1)^2 \left[\frac{2}{2} \right] = 1;$$

$$n = 3, \quad x = (-1)^3 \left[\frac{3}{2} \right] = -1; \quad n = 4, \quad x = (-1)^4 \left[\frac{4}{2} \right] = 2 \text{ და ა. შ.}$$

ამგვარად, ყოველი x მთელ რიცხვსა და სათანადო n ნატურალურ რიცხვს შორის ადვილი აქვს მიმართებას $x \longleftrightarrow n$. მაშასადამე, $Z \approx N$. აქედან გამომდინარეობს, რომ მთელ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.

უსასრულო სიმრავლის ზემოთ ჩამოყალიბებული განსაზღვრა ეკუთვნის რიჰარდ დედეკინდს¹.

სიმრავლეს ეწოდება სასრულო, თუ იგი უსასრულო არაა. ე. ი. სიმრავლე სასრულია, თუ არ არსებობს მისი საკუთრივი ნაწილი, რომელიც მთელი სიმრავლის ეკვივალენტურია.

ქ სასრული სიმრავლე უსასრულო სიმრავლის უარყოფითაა განსაზღვრული.

სიმრავლეთა ეკვივალენტურობის განსაზღვრით შემოვიტანეთ სიმრავლის უსასრულობისა და სიმრავლის სასრულობის ცნება.

ახლა განვიხილოთ საკითხი, თუ როგორ შემოვიტანოთ რიცხვის ცნება.

2. კარდინალური რიცხვები. სიმრავლეთა ეკვივალენტურობის მიმართების რეფლექსურობა, სიმეტრიულობა და ტრანზიტულობა, შესაძლებლობას იძლევა ის სიმრავლე, სადაც განსაზღვრულია რაიმე მიმართება აღნიშნული თვისებებით, დაიყოს ამ მიმართების მიხედვით ქვესიმრავლეებად — კლასებად. მაგალითად, პარალელურობის მიმართების მიხედვით წრფეთა სიმრავლე კლასებად დანაწილდება. თითოეულ კლასში შევა ურთიერთპარალელური წრფეები. ამ საშუალებით შეიძლება შემოვიღოთ ახალი ცნება — მიმართულებისა, რომელიც განსაზღვრული იქნება, როგორც პარალელური წრფეების საერთო თვისება. ასევე, ფიგურების მსგავსების მიმართება ფიგურების სიმრავლეს ჰყოფს კლასებად. თითოეულ კლასში მოთავსებულ იქნება ურთიერთმსგავსი ფიგურები. ამით შეგვიძლია შემოვიღოთ ახალი ცნება გეომეტრიული ფორმისა, როგორც ურთიერთმსგავსი ფიგურების საერთო თვისება.

¹ რიჰარდ დედეკინდი (1831—1916), გერმანელი მათემატიკოსი.

სწორედ ასეთი გზითაა განსაზღვრული მთელი რიგი მათემატიკური ცნებებისა: როგორც საერთო თვისება იმ საგნებისა, რომელნიც რეფლექსურ, სიმეტრიულ და ტრანზიტულ მიმართებაში არიან.

განვიხილოთ სხვადასხვა სასრული და უსასრულო სიმრავლე. ამ სიმრავლეებს, ცხადია, ეკუთვნის ცარიელი სიმრავლე $\emptyset$. ცარიელ სიმრავლეს არავითარი სხვა სიმრავლე ცალსახად არ აისახება. ე. ი. არ არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს საგნებს და ცარიელი სიმრავლის ელემენტებთან ტყუპდება. ცარიელი სიმრავლე ცალკე კლასად გამოიყოფა აღებული სიმრავლეებიდან. იმ თვისების გამო, რომ არ არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტები $\emptyset$ სიმრავლის ელემენტებთან ტყუპდებოდნენ, ვიტყვით, რომ გვაქვს ცარიელ სიმრავლეთა კლასი. ჩაწერა ნიშნავს, რომ ცარიელ სიმრავლეთა კლასში ელემენტი არაა. ახლა ავიღოთ a საგანი. ე. ი. საგანი, რომელიც a ასოთი არის აღნიშნული. ასეთი საგანი შეიძლება $\{a\}$ -ც იყოს. განვიხილოთ სიმრავლე $\{a\}$. ცხადია, ნებისმიერი $\{b\}$ სიმრავლის ელემენტი შეგვიძლია დავა-ტყუპოთ a საგანთან. სიმრავლეები, რომლებიც ეკვივალენტურია $\{a\}$ სიმრავლესთან, ცალკე კლასად გამოვყოთ. ამ კლასის ნებისმიერი $\{b\}$ სიმრავლისათვის დავწეროთ:

$$m(\{a\}) = m(\{b\}).$$

ეს ტოლობა სწორედ იმას ნიშნავს, რომ აღებულ კლასში ნებისმიერი $\{b\}$ სიმრავლე $\{a\}$ სიმრავლესთან შეიძლება დატყუპდეს. ვუწოდოთ ამ კლასს რიცხვი ერთი და აღვნიშნოთ სიმბოლოთი 1, $m(\{a\}) = 1$ და ა. შ.

ამრიგად, აღებულ სიმრავლეებს ეკვივალენტურობის მიმართებით კლასებად დავყოფთ. თითოეული კლასი ცალსახა მიმართებაშია $m(\{a, b, \dots\})$ ობიექტთან. ამ ახალ ობიექტს კარდინალური რიცხვი ვუწოდოთ. ამრიგად, I სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლისათვის განვსაზღვრეთ კარდინალური (რაოდენობრივი) რიცხვები:

$$m(\emptyset) = 0, \quad m(\{a\}) = 1, \quad m(\{a, b\}) = 2, \dots$$

კარგად დაავსებოდა უკანასკნელ ჩაწერას. აქ შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ ნატურალური რიცხვის ცნება გამოვიყენოთ და ნატურალური რიცხვი ჭარბობით არ განვსაზღვრავს. სინამდვილეში კი აქ მხოლოდ გამოყენებულია სიტყვები: „სიმრავლეში ელემენტი არაა“, ეს ჩაწერით სიმბოლოდ 0 . გამოყენებულია სიტყვა „ერთი“. იგი სიმბოლოდ ჩაწერით 1 (ჩხირი). გამოყენებულია სიტყვა „ორი“. იგი სიმბოლოდ ჩაწერით 2 . სიტყვა „ორი“ შეგვიძლია ჩაგვეწერა სიმბოლოდ 11 (ჩხირი და ჩხირი) და ა. შ.

სიტყვები „ერთი“, „ორი“ და სხვა სასაუბრო ენის სიტყვათა აუცილებელ ფონდს ეკუთვნის და სიმრავლეთა თვისებების დახასიათებისათვის

თვის მათი გამოყენება ისევე შეიძლება, როგორც ყველა სხვა სიტყვის გამოყენება. აი როგორ შენიშვნას აკეთებს ელმუნდ ლანდაუ! ამის შესახებ.

...ერთი რიცხვი, არც ერთი რიცხვი, ორი შემთხვევა, მოცემული სიმრავლიდან ყველა საგანი და სხვა ამისთანა, ეს ყველაფერი — ნათელი ენობრივი სიტყვათწარმოებაა, თეორემა 1, თეორემა 2, ..., თეორემა 301 (და ანალოგიურად აქსიომებისათვის, განსაზღვრებისათვის, თავებისათვის, პარაგრაფებისათვის) ან 1); 2) და სხვა ამისთანა სხვადასხვა შემთხვევად გაყოფისას — ესენი მხოლოდ ნიშნებია, რომლებიც ერთი მეორისაგან ანსხვავებენ თეორემებს, აქსიომებს, ..., შემთხვევებს და, რომლებიც დამოწმებების დროს უფრო ხელსაყრელია, ვიდრე, მაგალითად, ვთქვათ, ლიცისფერი თეორემა, მუქილურჯი თეორემა და სხვა.²

ასე რომ, ჭარბობით ყველა ხმარებული რიცხვი მხოლოდ სიმბოლური აღნიშვნაა იმ სიტყვებისა, რომლებსაც ჩვეულებრივ სასაუბრო ენაში ვხმარობთ.

3. ნატურალური რიცხვები. დავუბრუნდეთ კარდინალური რიცხვის განსაზღვრას.^{3,4}

ცარიელ სიმრავლეთა კლასს ვუწოდებთ 0 , $m(\emptyset) = 0$; $\{a\}$ კლასს ვუწოდებთ ერთი და აღვნიშნებთ 1 , $m(\{a\}) = 1$ და ა. შ. I სიმრავლის ქვესიმრავლეები დავყავით კლასებად, რომლებიც დავატყუპებთ $\{a, b, \dots\}$ სიმრავლეთა ელემენტებთან და ეს კლასი იმდენი ჩხირით აღვნიშნებთ, რამდენი ასოცაა სიმრავლეში. ამასთან ეს სიმრავლეები გადაინომრება ჩხირების საშუალებით. ასე რომ, ამ კლასიფიკაციით სიმრავლეთათვის განვსაზღვრავთ ტოლობას (კარდინალურ რიცხვს) და რიცხს (ორდინალურ რიცხვს) იმისდა მიხედვით, თუ რომელი სიმრავლე უფრო დიდზე შეგვხვდება კლასიფიკაციის დროს და რომელი უფრო გვიან. ძნელი არაა იმის შემჩნევა, რომ სიმრავლეთა აღებულმა კლასიფიკაციამ სიგვიყვანა კარდინალურ რიცხვთა სიმრავლეში შემდეგი მიმართების განხილვამდე: „ a ელემენტი წინამორბედი უშუალოდ b ელემენტისა“ ან „ a ელემენტის უშუალოდ მომდევნოა b ელემენტი“. ეს დამოკიდებულება ასე შეგვიძლია ჩაწეროთ:

$$a' = b \quad \text{ან} \quad S(a) = b.$$

ვთქვათ, N კარდინალურ რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა და S ამ სიმრავლის ელემენტთა მიმართება, რომელთაც აქვთ შემდეგი თვისებები: P_1) ელემენტი 1 ეკუთვნის N სიმრავლეს (წაიკითხება: ერთი);

¹ ე. ლანდაუ (1877—1938), გერმანელი მათემატიკოსი.

² Э. Ландау, Основы анализа, ИЛ, М., 1947, стр. 7.

³ იქვე, გვ. 17.

⁴ ე. ზარსკილაძე, მათემატიკის საბოლოო კურსის თანამედროვე საფუძვლები, თბილისი, 1981, გვ. 73.

P_2) S მიმართება არის ფუნქციური, რომელიც N სიმრავლეშია განსაზღვრული და მისი მნიშვნელობაც N სიმრავლეში მიიღება, $S: N \rightarrow N$.

სიტყვიერად: N სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის არსებობს მომდევნო ელემენტი. ეს ელემენტი აღინიშნება x' .

$$S(x) = x', \quad x' \in N.$$

რადგანაც ყოველი რიცხვისათვის მომდევნოა მხოლოდ და მხოლოდ ერთი რიცხვი, მაშინ ტოლობიდან $x=y$ გამომდინარეობს $x'=y'$.

P_3) ელემენტი 1 არ ეკუთვნის $\{S(x)\}$ სიმრავლეს: ყოველი x ელემენტისათვის N სიმრავლიდან $x' \neq 1$. ე. ი. არც ერთი ელემენტი 1 -ის წინამორბედი არაა.

P_4) S მიმართება უკუცალსახაა. ე. ი. თუ $x' = y'$, მაშინ $x = y$.

P_5) ვთქვათ, M არის N სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $1 \in M$,

2) თუ x ეკუთვნის M -ს და x' -ც ეკუთვნის M -ს, მაშინ M სიმრავლე ემთხვევა N სიმრავლეს.

ბოლო აქსიომას ინდუქციის პრინციპი ეწოდება.

სიმრავლეში საწყის ელემენტად შემოტანილია 1 . შეგვეძლო საწყის ელემენტად სხვა ელემენტი შემოგვეტანა. მაგალითად, 0 .

ჩამოთვლილი აქსიომები პეანოს¹ აქსიომათა სისტემის სახელწოდებითაა ცნობილი,

მათემატიკურ სტრუქტურას. $(N, 1, S)$ სადაც N და S პეანოს აქსიომათა სისტემას აკმაყოფილებენ, ნატურალურ მწკრივს უწოდებენ, ხოლო მის ელემენტებს ნატურალური რიცხვებს.

პეანოს პირველი აქსიომით $1 \in N$. მეორე აქსიომით $1' \in N$. ელემენტი 1 აღვნიშნოთ 2 -ით. ასევე, ელემენტი $2' \in N$ და იგი აღვნიშნოთ 3 -ით და ა. შ. N სიმრავლეში ელემენტი 1 არც ერთი ელემენტის მომდევნო არაა. ასე რომ, $(N, 1, S)$ სტრუქტურის ელემენტთა სიმრავლეა

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

N -სიმრავლეს ნატურალური რიცხვთა სიმრავლეს უწოდებენ. პეანოს აქსიომათა სისტემის საფუძველზე შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემები:

¹ ჟუზეპე პეანო (1858—1932), იტალიელი მათემატიკოსი.

თეორემა 1. ყოველი x და y ნატურალური რიცხვისათვის

$$(x \neq y) \Rightarrow (x' \neq y').$$

მართლაც, თუ დავუშვებთ დასამტკიცებელის საწინააღმდეგოს $x' = y'$, მაშინ მე-3 აქსიომის საფუძველზე მივიღებთ $x = y$, რაც მოცემულობას ეწინააღმდეგება,

ამგვარად, გამოთქმული თეორემა ჭეშმარიტია.

თეორემა 2. ყოველი x ნატურალური რიცხვისათვის $x' \neq x$.

ეს თეორემა დავამტკიცოთ ინდუქციის მეთოდით.

ვთქვათ,

$$M = \{x\}, \quad M \subset N.$$

1⁰. მეორე აქსიომით $\forall x' \neq 1, x \in N$. ავიღოთ $x = 1$, მაშინ, $1' \neq 1$. ამიტომ $1 \in M$.

2⁰. ვთქვათ, ჭეშმარიტია უტოლობა $x \neq x', x \in M$, ვაჩვენოთ, რომ მაშინ $(x')' \neq x'$ და, მაშინ $x' \in M$

მართლაც, 1-ლი თეორემით

$$(x' \neq x) \Rightarrow ((x')' \neq x').$$

მაშასადამე, $x' \in M$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ $x' \neq x$ ჭეშმარიტია მთელ N სიმრავლეში.

თეორემა 3. ყოველ x და y ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი $x + y$ (წავიკითხოთ პლუს) ისე, რომ ყოველი x -სათვის, $x \in N$,

$$x + 1 = x' \quad (2)$$

და ყოველი x და y -სათვის

$$x + y' = (x + y)' \quad (3)$$

დამტკიცება: ჯერ ვაჩვენოთ: ყოველი x -სათვის შეიძლება განისაზღვროს $x + y$ ისე, რომ

$$x + 1 = x'$$

და ყველა y -სათვის

$$x + y' = (x + y)'.$$

ვთქვათ, M არის ისეთი x -ების სიმრავლე, რომლებიც ამ ტოლობებს აკმაყოფილებენ.

ავიღოთ $x = 1$, მაშინ

$$x + 1 = 1' = x', \quad x + y' = (y')' = (x + y)'$$

ამგვარად, $1 \in M$.

მ. გ. კომლაძე

ახლა ვაჩვენოთ, რომ, თუ ნებისმიერი x -სათვის ჭეშმარიტია (2) და (3) ტოლობა ჭეშმარიტი იქნება x' -სათვისაც. ე. ი. თუ $x \in M$, მაშინ $x' \in M$.

თუ $x \in M$, მაშინ $x + y$ განსაზღვრულია ყველა y -სათვის. x' -სათვის გვექნება

$$x' + 1 = (x + 1)' = (x')'$$

და

$$x' + y' = (x + y)' = ((x + y)')' = (x' + y)'$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ $x' \in M$.

მაშასადამე, $M = N$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ, თუ ფიქსირებული x -სათვის განსაზღვრეთ $x + y$ ისე, რომ შესრულდეს (2) და (3) ტოლობები, მაშინ $x + y$ განისაზღვრება ცალსახად.

მართლაც, ფიქსირებული x -სათვის და $y = 1$ -სათვის

$$x + 1 = x'$$

$$x + y' = x + 1' = x + 1 + 1 = x' + 1 = (x')' = (x + 1)',$$

ე. ი. $y = 1$ -სათვის

$$x + y' = (x + y)'$$

ამგვარად, $y = 1$ -სათვის $x + y$ ცალსახად განისაზღვრება.

ვთქვათ, M_1 არის სიმრავლე იმ y -ებისა, რომელთათვისაც $x + y$ ცალსახად განისაზღვრება (2) და (3) ტოლობებით. ვაჩვენოთ, რომ y' -იც ეკუთვნის M_1 სიმრავლეს.

მართლაც,

$$x + (y')' = (x + y')' = ((x + y)')' = (x' + y)'$$

x' ცალსახად განისაზღვრება ფიქსირებული x -სათვის. პარობის თანახმად, y -სათვის $x' + y$ -იც ცალსახად განისაზღვრება. ამასთან,

$$x' + 1 = (x')'$$

ამრიგად, $y' \in M$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ $x + y$ ცალსახად განისაზღვრება ყველა y -სათვის. ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

ამრიგად, ყოველი ნატურალური რიცხვის x და y წყვილს შეესაბამება ერთადერთი ნატურალური რიცხვი $x + y$ ისე, რომ

$$x + 1 = x',$$

$$x + y' = (x + y)'$$

$x + y$ -ს ეწოდება x და y ნატურალური რიცხვთა ჯამი.

თეორემა 4. ყოველი x და y ნატურალური რიცხვისათვის

$$x \neq x + y. \quad (4)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, x ფიქსირებულია. ავიღოთ $y = 1$, მაშინ

$$x \neq x + 1, \text{ ანუ } x \neq x'$$

უტოლობა ჭეშმარიტია მე-2 თეორემით.

ავიღოთ იმ y -ების სიმრავლე M , რომელთათვისაც (4) უტოლობა ჭეშმარიტია. დავამტკიცოთ, რომ $y' \in M$.

მართლაც,

$$x + y' = (x + y)' = x' + y.$$

მე-2 თეორემით

$$(x + y)' \neq x + y.$$

მაგრამ y ისეთია, რომ

$$x \neq x + y.$$

საიდანაც დავასკვნით:

$$x \neq x + y'.$$

ამგვარად, $y' \in M$. ეს კი ამტკიცებს, რომ (4) უტოლობა ჭეშმარიტია მთელ N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

ინდუქციის მეთოდით შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი x, y, z ნატურალური რიცხვებისათვის ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 5. $x + y = y + x$ — შესაკრებთა გადანაცვლება დობის კანონი.

თეორემა 6. $(x + y) + z = x + (y + z)$ — შესაკრებთა ჯუფდობა დობის კანონი.

ვაჩვენოთ, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 7. ყოველი x, y და z ნატურალური რიცხვისათვის

$$(y \neq z) \Rightarrow (y + x \neq z + x).$$

მართლაც, ავიღოთ ფიქსირებული y და z ისეთი, რომ $y \neq z$, მაშინ $x = 1$ -სათვის გვექნება

$$y + 1 \neq z + 1.$$

ეს უტოლობა რომ ჭეშმარიტი არ იყოს, მაშინ უნდა გვექონდეს $y + 1 = z + 1$, ანუ $y' = z'$, მაგრამ მაშინ $y = z$. რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება.

ამგვარად, $x = 1$ -სათვის თეორემა ჭეშმარიტია.

ვთქვათ, $M = \{x\}$ იმ x -ების სიმრავლეა, რომლებსთვისაც თეორემა ჰეშმარიტია, ვაჩვენოთ, რომ $x' \in M$.

რადგანაც

$$y + x' = (y + x)', \quad z + x' = (z + x)'. \quad (5)$$

და, რადგანაც, პირობის თანახმად,

$$y + x \neq z + x,$$

უნდა მივიღოთ

$$(y + x)' \neq (z + x)',$$

ანუ

$$y + x' \neq z + x',$$

რაც გვიჩვენებს $x' \in M$. ამგვარად, თეორემა ჰეშმარიტია ნებისმიერი x -სათვის.

თეორემა 8. ნებისმიერი x და y -სათვის სამი უტოლობიდან

$$x = y, \quad (5)$$

$$x = y + u, \quad (6)$$

$$y = x + v. \quad (7)$$

ჰეშმარიტია ერთ-ერთი.

მართლაც, მე-7 თეორემით (5) და (6) ტოლობანი შეუძლებელია. ასევე შეუძლებელია (5) და (7) ტოლობანიც. (6) და (7) ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$x = x + u + v.$$

ეს ტოლობაც არაა ჰეშმარიტი მე-7 თეორემით. მაშასადამე, ამ სამი ტოლობიდან მხოლოდ ერთი ტოლობაა ჰეშმარიტი.

ვთქვათ, x ფიქსირებულია. y -ს მივცეთ მნიშვნელობა 1. მაშინ, თუ (5) ჰეშმარიტია,

$$x = 1 = y.$$

ჰეშმარიტი არ იქნება არც ტოლობა (6)

$$1 = 1 + u$$

და არც ტოლობა (7)

$$1 = 1 + v.$$

ახლა ავიღოთ $M = \{y\}$, რომელთათვისაც (5)–(7) ტოლობებიდან ერთი ტოლობაა ჰეშმარიტი. ვაჩვენოთ $y' \in M$.

მართლაც, თუ

$$x = y',$$

მაშინ ტოლობა (6) მოგვცემს

$$x = y' + u. \quad (8)$$

ეს ტოლობა ჰეშმარიტი არაა მე-7 თეორემის საფუძველზე. ტოლობა (7) მოგვცემს

$$y' = x + v.$$

აქედან (8) ტოლობით მივიღებთ

$$y' = y' + u + v.$$

ეს ტოლობაც შეუძლებელია მე-7 თეორემით. მაშასადამე, $y' \in M$. ამრიგად, თეორემა ჰეშმარიტია ნატურალურ რიცხვთა მთელ სიმრავლეში.

განვსაზღვროთ ნატურალურ რიცხვთა შორის რიგის — დალაგების მიმართება.

თუ

$$x = y + u,$$

მაშინ

$$x > y. \quad (9)$$

თუ

$$y = x + v,$$

მაშინ

$$y > x. \quad (10)$$

(9) და (10) ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$y < x, \quad x < y. \quad (11)$$

მე-8 თეორემის საფუძველზე, ადვილი წარმოსადგენია, რომ ჰეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 9. ნებისმიერი x და y ნატურალური რიცხვისათვის ჰეშმარიტია მხოლოდ ერთი დამოკიდებულება სამი დამოკიდებულებიდან

$$x = y, \quad x > y, \quad x < y.$$

ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით ადვილად დაეამტკიცებთ შემდეგი თეორემის ჰეშმარიტებას:

თეორემა 10. ნებისმიერი x, y და z ნატურალური რიცხვისათვის

$$(x < y) \Rightarrow (x + z < y + z).$$

თეორემა 11. ნებისმიერი x, y და z ნატურალური რიცხვისათვის

$$(x < y, y < z) \Rightarrow (x < z) \quad (\text{ტრანზიტულობის კანონი}).$$

დამტკიცება თეორემის პირობის თანახმად არსებობენ ისეთი u და v , რომ

$$y = x + u, \quad z = y + v.$$

საიდანაც

$$z = x + u + v.$$

ეს კი გვიჩვენებს

$$x < z.$$

თეორემა 12. ნებისმიერი x, y და z ნატურალური რიცხვისათვის

$$(x \leq y, y < z) \Rightarrow (x < z) \quad \text{ან} \quad (x < y, y \leq z) \Rightarrow (x < z).$$

ეს თეორემა ადვილად დამტკიცდება წინააღმდეგობის დაშვების მეთოდით.

მე-3 თეორემის დამტკიცების ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 13. ნატურალური რიცხვთა x და y წყვილს შეესაბამება ერთადერთი ნატურალური რიცხვი $x \cdot y$ (წავიკითხოთ $x \cdot y$ -ჯერ) ისე, რომ ყოველი x -სათვის

$$x \cdot 1 = x$$

და ყოველი x და y -სათვის

$$x \cdot y' = x \cdot y + x.$$

ამგვარად განსაზღვრულ ნატურალურ რიცხვს xy -ს ეწოდება x -ის y -ზე ნამრავლი. როგორც წესი, გამრავლების ნიშანს $\times$ ან $\cdot$ არ ვსვამთ.

ამ განსაზღვრის საფუძველზე ინდუქციის მეთოდით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 14. ყოველი x და y ნატურალური რიცხვისათვის $xy = yx$ (გამრავლების გადანაცვლებადობის კანონი).

თეორემა 15. ყოველი x, y და z ნატურალური რიცხვისათვის $(xy)z = x(yz)$ (გამრავლების დაჯგუფებადობის კანონი).

თეორემა 16. ყოველი x, y და z ნატურალური რიცხვისათვის $x(y+z) = xy + xz$ (გამრავლების განრიგებადობა შეკრების მიმართ).

დამტკიცება. ავიღოთ ფიქსირებული x, y და $z = 1$, გვექნება

$$x(y+1) = xy' = xy + x = xy + x \cdot 1.$$

მაშასადამე, $z = 1$ -სათვის თეორემა ჭეშმარიტია. ვთქვათ, $M\{z\}$ z -ების ისეთი სიმრავლეა, რომელთათვისაც თეორემა ჭეშმარიტია. ვაჩვენოთ, რომ $z' \in M$.

ავიღოთ z -ის ნაცვლად z' . გვექნება

$$x(y+z') = x((y+z)') = x((y+z) + 1) =$$

$$= x(y+z) + x = (xy + xz) + x = xy + (xz + x) = xy + xz'.$$

ამგვარად, $z' \in M$, რაც გვიჩვენებს, თეორემა ჭეშმარიტია ნებისმიერი x, y, z -სათვის.

სრულიად ასევე დავამტკიცებთ:

თეორემა 17. ყოველი x, y და z ნატურალური რიცხვისათვის თუ $x < y$ ან $x = y$, მაშინ $xz < yz$ ან $xz = yz$.

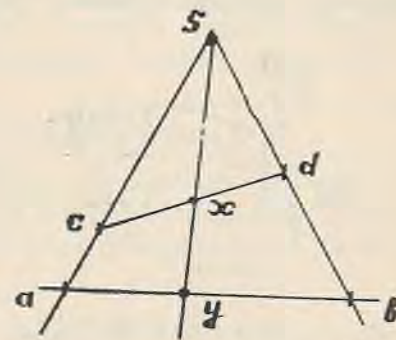
4. სიმრავლის სიმძლავრე. ავიღოთ ორი A და B სიმრავლე. ვთქვათ, ეს სიმრავლეები ეკვივალენტურია. ამ შემთხვევაში ვიტყვი: A და B სიმრავლეები ტოლი სიმძლავრისაა. სიტყვა „სიმძლავრე“ იგივე მნიშვნელობა აქვს, რაც სიტყვას „ერთნაირადღვერობას“ ან, სასრული სიმრავლისათვის, „ელემენტთა რაოდენობას“.

ამ განსაზღვრით ლუწ რიცხვთა სიმრავლეს, კენტ რიცხვთა სიმრავლეს, მთელ რიცხვთა სიმრავლეს ტოლი სიმძლავრე აქვთ.

ვაჩვენოთ, რომ ორი ნებისმიერი მონაკვეთის წერტილთა სიმრავლეები ტოლი სიმძლავრისაა. ამისათვის ავიღოთ მონაკვეთები $[a, b]$ და $[c, d]$ (ნახ. 23). მონაკვეთთა ბოლო წერტილებზე გავატაროთ წრფეები ურთიერთგადაკვეთამდე. გადაკვეთით მიღებულ S წერტილზე გატარებული წრფე მოგვცემს მოცემულ მონაკვეთთა ურთიერთცალსახა ასახვას $x \longleftrightarrow y$.

ეს კი გვიჩვენებს, რომ $[a, b]$ მონაკვეთის წერტილთა სიმრავლე და $[c, d]$ მონაკვეთის წერტილთა სიმრავლე ტოლი სიმძლავრისაა.

ამ მსჯელობიდან დავასკვნით, რომ ატომგულის რადიუსს და აქედან უშორეს ვარსკვლავამდე წრფის მონაკვეთის ტოლი რაოდენობის წერტილები აქვთ.



ნახ. 23

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტი და $[a, b[$ ინტერვალის სიმძლავრისაა.
განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის წერტილების მიმდევრობა:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3, x_4, \dots, x_n, \dots \quad (12)$$

ცხადია,

$$x_3, x_4, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$$

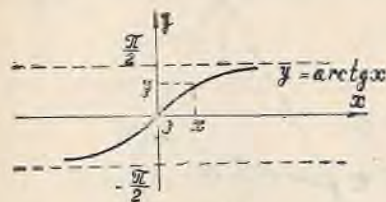
წერტილები მდებარეობს $[a, b]$ ინტერვალში. ამავე ინტერვალში მდებარეობს $[a, b]$ სეგმენტის ის წერტილები, რომლებიც (12) მიმდევრობაში არ მოხვდნენ.

დავამყაროთ $[a, b]$ სეგმენტის და $[a, b]$ ინტერვალის წერტილებს შორის შემდეგი შესაბამისობა:

$$x_1 \longleftrightarrow x_3, \quad x_2 \longleftrightarrow x_4, \dots, x_n \longleftrightarrow x_{n+2}, \dots$$

ყველა ის წერტილი, რომელიც (12) მიმდევრობაში არ მოხვდა, თავის თავს შევეუსაბამოთ. $y \longleftrightarrow y$. ეს შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა, რაც გვიჩვენებს $[a, b]$ სეგმენტისა და $[a, b]$ ინტერვალის სიმძლავრეთა ტოლობას.

ახლა ვაჩვენოთ: ინტერვალები $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $] -\infty, \infty [$ ტოლი სიმძლავრისაა. ამისათვის საკმარისია, განვიხილოთ 24-ე ნახაზი. ნახაზიდან ადვილად დავასკვნით, რომ ყოველი x სათანადო y -თან. $-\infty < x < \infty$,



ნახ. 24

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \quad \text{დატყუებუ-}$$

ლია — ცალსახა შესაბამისობაშია. ეს კი გვიჩვენებს, რომ ინტერვალე-

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad] -\infty, \infty [$$

ტოლი სიმძლავრისაა.

ამგვარად, ნებისმიერ ინტერვალს, ნებისმიერ სეგმენტს, ნახევარღერძს და მთელ რიცხვთა ღერძს ერთი და იგივე სიმძლავრე აქვს.

სამი წლის განმავლობაში (1871—1874) კანტორი ცდილობდა დამტკიცებინა, რომ კვადრატის წერტილთა და მონაკვეთის წერტილთა ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეუძლებელია. ვაჟიდა რამდენიმე წელი და მოულოდნელად დამტკიცდა სრულიად საწინააღმდეგო: კვადრატში იმდენივე წერტილია, რამდენიც კვადრატის გვერდზე. მართლაც, ერთეულ

მონაკვეთზე ავაგოთ კვადრატი (ნახ. 25). მივიღოთ, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი $0 < a < 1$ წარმოიდგინება ერთადერთი უსასრულო ათწილადით. კვადრატის წერტილთა სიმრავლე (x, y) წყვილთა სიმრავლეა, სადაც

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

ვაჩვენოთ, რომ (x, y) წყვილთა სიმრავლე ეკვივალენტურია

$$\{a \mid 0 < a < 1\}$$

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისა.

ვთქვათ, (x, y) წყვილი აღნიშნავს P წერტილს, სადაც, მაგალითად,

$$x = 0,5200608500064973 \dots$$

$$y = 0,0034700645300568 \dots$$

ამ რიცხვების წილადი ნაწილები ასე ჩაწეროთ

$$5 \ 2 \ 006 \ 08 \ 0006 \ 4 \ 9 \ 7 \ 3 \dots$$

$$003 \ 4 \ 7 \ 006 \ 4 \ 5 \ 3 \ 005 \ 6 \ 8 \dots$$

რიცხვები ჯგუფებითაა ჩაწერილი. თითო ჯგუფში ნულისაგან განსხვავებული მხოლოდ ერთი ციფრია. პირველი რიცხვის ჯგუფებში მიმდევრობით მოვითავსოთ მეორე რიცხვის ჯგუფები. მიღებულ რიცხვს წინ 0 დავუწეროთ, გვექნება

$$a = 0,500324006708006540006543900536 \dots$$

ცხადია, ეს რიცხვი 1-ზე ნაკლებია და, თუ სათანადო ჯგუფებს ამოვწერთ, შეგვიძლია შევადგინოთ x და y რიცხვები. მაშასადამე, დავამყაროთ a წერტილისა და P წერტილს შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა:

$$\{(x, y) \mid 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\} \sim \{a \mid 0 < a < 1\}.$$

ამგვარად, კვადრატის წერტილთა სიმრავლე და კვადრატის გვერდის წერტილთა სიმრავლე ურთიერთცალსახა შესაბამისობაშია. აქედან ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ XY სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლე და X ნამდვილ რიცხვთა ღერძის წერტილთა სიმრავლე ტოლი სიმძლავრისაა. ისევე, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ სამგანზომილებიანი სივრცის და ნამდვილ რიცხვთა ღერძის წერტილთა სიმრავლეები ტოლი სიმძლავრისაა.

5. **თვლადი სიმრავლეები. თვისებები.** სიმრავლეს ეწოდება თვლადი, თუ იგი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია. ვთქვათ, $M = \{a, b, c, \dots\}$ სიმრავლე ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის ეკვივალენტურია, ეს ნიშნავს, რომ M სიმრავლის ელემენტები N სიმრავლის ელემენტებთან ურთიერთკალსხა თანადობაშია. მაგალითად, $a \longleftrightarrow 1, b \longleftrightarrow 2, \dots$

ელემენტი a აღნიშნოთ x_1 -ით, ელემენტი b აღნიშნოთ x_2 -ით და ა. შ. მივიღებთ $M = \{x_1, x_2, \dots\}$.

ამგვარად, თვლადი სიმრავლის ელემენტები შეიძლება გადანიშნოს. ამის გამო თვლადი სიმრავლე ასეც შეიძლება განისაზღვროს:

უსასრულო სიმრავლეს ეწოდება თვლადი, თუ მისი ელემენტების გადანომვრა შეუძლებელია.

სიმრავლის თვლადობის განსაზღვრის შემდეგ ცხადია, ლუწ რიცხვთა სიმრავლე, კენტ რიცხვთა სიმრავლე, რაიმე a რიცხვის ჯერად რიცხვთა სიმრავლე, მთელ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

თვლადი სიმრავლის სიმძლავრე აღვნიშნოთ A ან $\aleph_0$ -ით (ძველი ებრა-
ული ანბანის პირველი ასო $\aleph$ -აღუფ).

$$\mathfrak{m}(M) = \mathfrak{K}_0.$$

ფორმა 1. თვლადი სიმრავლისა და სასრული სიმრავლის
გაერთიანება თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}.$$

განვიხილოთ შემთხვევა $A \cap B = \emptyset$. მაშინ პირველად დავწეროთ B სიმრავლის ელემენტები, ხოლო შემდეგ მივუწეროთ A სიმრავლის ელემენტები, მაგრამ a_1 აღვნიშნოთ b_{k+1} -ით, a_2 აღვნიშნოთ b_{k+2} -ით და ა. შ. გვექნება

$$A \cup B = \{b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots\}.$$

ამგვარად, $A \cup B$ სიმრავლის ელემენტები გადაეწერათ. ამით, როდესაც $A \cap B = \emptyset$, თეორემა დამტკიცდა.

თუ $A \cap B \neq \emptyset$, მაშინ ვისარგებლოთ დამოკიდებულებით $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, სადაც $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. მაშინ მეორე შემთხვევა დაყვანილია პირველ შემთხვევაზე, $A \cup (B \setminus A)$ სიმრავლე თვლადია, და ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თვლადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ნაწი-
ლი თვლადია.

დამტკიცება: ვთქვათ, A რიმე თვლიდი სიმრავლეა, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. ავიღოთ ამ სიმრავლიდან B უსასრულო სიმრავლე. B სიმრავლე A სიმრავლეში დაიკავებს გარკვეულ ნაწილს. ვთქვათ, a_{n_1} არის B სიმრავლის პირველი ელემენტი, $b_1 = a_{n_1}$, მეორე ელემენტი $b_2 = a_{n_2}$ და ა. შ. ეს პროცესი შეგვიძლია გავაგრძელოთ უსაზღვროდ, რადგანაც B სიმრავლე უსასრულოა, გვექნება $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m, \dots\}$.

ამგვარად, B სიმრავლის ელემენტების გადანომვრა შეეძლება. ეს კი გამოთქმულ თეორემას ამტკიცებს.

ამ თეორეშიდან ცხადია, რომ მართებულია

შედეგი: თვლად სიმრავლეს თუ გამოვაცლებთ
სასრულ სიმრავლეს, დარჩენილი სიმრავლე თვლად
იქნება.

თეორემა 3. წყვილწყვილად არაგადამკვეთ სასრულ სიმრავლეთა თვლადი სისტემის გაერთიანება თვლადი სიმრავლეა.

აგილოთ წყვილი არაგადამკვეთი სასრული სიმრავლეები:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}\},$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n_n}\},$$

$$A_m = \{a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn_m}\}.$$

სადაც პირველი ინდექსი გვიჩვენებს სიმრავლის ნომერს, მეორე ინდექსი კი — ელემენტის ნომერს აღებულ სიმრავლეში. ამ სიმრავლეთა გაერთიანების $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup \dots$ ელემენტები ასე დავაჯავით:

$$A = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n_2}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn_m}, \dots\}.$$

თუ სათანადო აღნიშვნებს შემოვიღებთ, გვექნება:

$$a_{11} = b_1, a_{12} = b_2, \dots, a_{1n_1} = b_{n_1},$$

$$a_{21} = b_{n_1+1}, a_{22} = b_{n_1+2}, \dots, a_{2n_2} = b_{n_1+n_2},$$

.....

$$a_{m1} = b_{n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1} + 1}, a_{m2} = b_{n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1} + 2}, \dots$$

ამგვარად, სიმრავლის ელემენტების გადანომრა შეიძლება. ამით თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 4. თვლად სიმრავლეთა თვლადი სისტემის გაერთიანება თვლადია.

დამტკიცება: ავიღოთ სიმრავლეები:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots, a_{1n}, \dots\} \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots, a_{2n}, \dots\} \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots, a_{3n}, \dots\} \\ A_4 &= \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \dots, a_{4n}, \dots\} \end{aligned}$$

შევადგინოთ სიმრავლეები მოცემულ სიმრავლეთა ელემენტებისაგან:

$$B_1 = \{a_{11}\}, B_2 = \{a_{12}, a_{21}\}, B_3 = \{a_{31}, a_{22}, a_{13}\},$$

$$B_4 = \{a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}\}, \dots, B_{2m} = \{a_{1,2m}, a_{2,2m-1}, \dots, a_{2m,1}\}, \dots$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ B_2 სიმრავლის ელემენტები a_{12}, a_{21} მოთავსებულია ელემენტთა შემდეგი ცხრილის დიაგონალზე (დიაგონალი ისრითა ნაჩვენებია):

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ & \searrow \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

ამ დიაგონალს ელემენტთა საერთო ცხრილის მეორე დიაგონალი ეუწოდოთ. პირველი დიაგონალი თვით a_{11} ელემენტი იყოს. ცხადია, B_{2m} სიმრავლის ელემენტები ელემენტთა საერთო ცხრილის $2m$ -რ დიაგონალზეა მოთავსებული. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots;$$

$B_i, i = 1, 2, \dots$ სიმრავლის ელემენტები ასე აღვნიშნოთ:

$$B_1 = \{b_1\}, B_2 = \{b_2, b_3\}, B_3 = \{b_4, b_5, b_6\}; B_4 = \{b_7, b_8, b_9, b_{10}\}, \dots$$

ამით $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ სიმრავლის ელემენტები გადაინომრა, სადაც $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

ვთქვათ, $A_i \cap A_j \neq \emptyset, i \neq j$, მაშინ განვიხილოთ სიმრავლეები

$$E_1 = A_1, E_2 = A_2 \setminus E_1, E_3 = A_3 \setminus (E_1 \cup E_2), \dots, E_m = A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} E_k, \dots$$

ცხადია,

$$A = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m \cup \dots$$

სადაც

$$E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j.$$

ამით ეს მეორე შემთხვევა წინა შემთხვევაზე დავიყვანეთ. ამგვარად, თეორემა მართებულია ორივე შემთხვევაში.

ზემოთ ვახსენეთ: რომელი მეტ ელემენტებს შეიცავს, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თუ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე?

თეორემა 5. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

მართლაც, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ასე წარმოვადგინოთ:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p = 0, -1, 1, -2, 2, \dots; q = 1, 2, \dots \right\},$$

სადაც p -სა და q -ს საერთო მამრავლი არა აქვთ.

აღვნიშნოთ An -ით სიმრავლე იმ რაციონალური რიცხვებისა, რომელთათვისაც $|p| + q = n$,

$$A_1 = \left\{ \frac{0}{1} \right\}, A_2 = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, A_3 = \left\{ -\frac{2}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1} \right\},$$

$$A_4 = \left\{ -\frac{3}{1}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1} \right\}, \dots$$

ასე რომ,

$$Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

აქედან კი მე-4 თეორემის საფუძველზე დავასკვნით: დასამტკიცებელი თეორემა ჭეშმარიტია.

ავიღოთ განტოლება

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

სადაც კოეფიციენტები მთელი რიცხვებია. ასეთი განტოლების ამონახსნებს ეწოდება ალგებრული რიცხვები. თუ მხედველობაში მივიღებთ ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობას, შევამჩნევთ, რომ მართებულია

თეორემა 6. ალგებრული რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

6. კონტინუუმის სიმძლავრე. იმის შემდეგ, როდესაც დავამტკიცეთ თეორემა რაციონალურ რიცხვთა თვლადობის შესახებ, შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეც თვლადია. უფრო მეტიც, ყველა სიმრავლე თვლადი ხომ არაა?¹

თეორემა 7. $[0, 1]$ ინტერვალის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არათვლადია.

¹ ვლ. ჰელიძე, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციითა თეორია, თბილისი, 1964, გვ. 130.

დამტკიცება: თეორემის დამტკიცება დაფუძნებულია იმ დაშვებაზე, რომ ნამდვილ რიცხვსა და უსასრულო ათწილადს (პერიოდული ან არაპერიოდული ათწილადი) შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. იმ შემთხვევაში, როდესაც ორი ათწილადი ერთსა და იმავე რიცხვს გამოსახავს, ვიგულისხმებთ ერთ-ერთს. მაგალითად: $0,500 = 0,499...$ ვიგულისხმებთ $0,500...$

დავუშვათ თეორემის საწინააღმდეგო, რომ რაიმე გზით გადავნიშნოთ $0 < x < 1$ ინტერვალის რიცხვები:

$$a_n = 0, x_{1n} x_{2n} \dots x_{mn} \dots; n, m = 1, 2, \dots; x_{mn} \text{ ციფრები}$$

განვიხილოთ რიცხვი

$$a = 0, \xi_1, \xi_2 \dots \xi_m \dots,$$

სადაც

$$\xi_m = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x_{mn} \neq 1, \\ 2, & \text{თუ } x_{mn} = 1. \end{cases}$$

ცხადია, $a \in [0, 1]$. რადგანაც $\xi_m \neq x_{mn}$, ამიტომ $a \neq a_m$ და, მაშასადამე, a არ ეკუთვნის $\{a_n/n \in N\}$ სიმრავლეს, ე. ი. a -ს არა აქვს ნომერი. რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ ყველა რიცხვი $[0, 1]$ ინტერვალში გადანიშნულია და არც ერთი რიცხვი ნომრის გარეშე დარჩენილი არაა. ამგვარად, $[0, 1]$ ინტერვალში მოთავსებული ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე თვლადი არაა. ცხადია, $[0, 1]$ სეგმენტის წერტილთა სიმრავლეც თვლადი არაა, რადგანაც $[0, 1] \supset [0, 1]$.

$[0, 1]$ ინტერვალის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრეს კონტინუუმის სიმძლავრე ეწოდება. კონტინუუმის სიმძლავრე $\mathfrak{c}$ ან $\aleph$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვითყვი, რომ A სიმრავლის სიმძლავრე მეტია B სიმრავლის სიმძლავრეზე, თუ ამ სიმრავლეთა სიმძლავრეები ტოლი არაა და, თუ არსებობს A სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე A' , რომლის სიმძლავრეც B სიმრავლის სიმძლავრის ტოლია:

$$m(A) \neq m(B), m(A_1) = m(B), A_1 \subset B.$$

ამ განსაზღვრის თანახმად ადვილად დავასკვნით, რომ $\aleph_0 < \aleph$.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი A და B სიმრავლე, რომელთაც საერთო ელემენტები არა აქვთ, $A \cap B = \emptyset$, მაშინ ამ სიმრავლეთა გაერთიანების $A \cup B$ სიმძლავრე ეწოდება A და B სიმრავლეების სიმძლავრეთა ჯამს:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

თუ A სიმრავლე თვლადია, $m(A) = \aleph_0$, B სიმრავლე სასრულოა, $m(B) = k$, ამასთან $A \cap B = \emptyset$, მაშინ I -ლი თეორემის თანახმად მივიღებთ

$$\aleph_0 + k = \aleph_0.$$

ამგვარად, უსასრულო კარდინალურ რიცხვს რომ სასრულო კარდინალური რიცხვი დაემატოთ, ახალ კარდინალურ რიცხვს ვერ მივიღებთ.

ასევე, წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ თვლად სიმრავლეთა გაერთიანება თვლადია, ამის გამო

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0 = \aleph_0.$$

მე-4 თეორემის საფუძველზე მივიღებთ

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0 + \dots = \aleph_0.$$

ე. ი. უსასრულო კარდინალური რიცხვისათვის უსასრულო კარდინალური რიცხვების დამატებაც არ იძლევა ახალ კარდინალურ რიცხვს.

ზემოთ ვაჩვენეთ $\aleph_0 < \aleph$. კანტორის დროიდან დგას შემდეგი ამოცანა: არსებობს თუ არა ისეთი კარდინალური რიცხვი, რომელიც $\aleph_0$ და $\aleph$ რიცხვებს შორისაა მოთავსებული? ამ ამოცანას კონტინუუმ — პრობლემა ეწოდება. კონტინუუმ — პრობლემის პასუხი ე. წ. კონტინუუმ — ჰიპოთეზით ყალიბდება: $\aleph_0$ -ის უახლოესი კარდინალური რიცხვია $\aleph$. ეს წინადადება ჯერჯერობით მხოლოდ ჰიპოთეზაა.

სიმძლავრეები, დაწყებული $\aleph_0$ -დან, ასე აღვნიშნოთ:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$$

ქვემოთ დავამტკიცებთ თეორემებს სხვადასხვა სიმძლავრის უსასრულო სიმრავლის არსებობის შესახებ.

თეორემა 8. ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად ვისარგებლოთ თვლის ორობითი სისტემით. $[0; 1]$ ნახევარსეგმენტის,

$$[0, 1] = \{x | 0 \leq x < 1\}$$

ყოველი x რიცხვი გამოისახება ორწილადით

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

სადაც $a_1, a_2, \dots$ ციფრები 0-ის ან 1-ის ტოლია.

განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეები:

1) ცარიელი სიმრავლე $\emptyset$. მას შევუსაბამოთ კორტეჟი $(0, 0, 0, \dots)$, ხოლო ამ კორტეჟს შევუსაბამოთ ორწილადით ჩაწერილი რიცხვი $0,000\dots$

2) ერთელემენტური სიმრავლეები $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \dots$ თითოეულ ამ ქვესიმრავლეს სათანადოდ შევუსაბამოთ კორტეჟები

$$(1, 0, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots), (0, 0, 0, 1, 0, \dots),$$

ხოლო ამ კორტეჟებს შევუსაბამოთ ორწილადები

0,10000...; 0,01000...; 0,00100...; 0,000100...;

3) ორელემენტური ქვესიმრავლეები {1, 2}, {1, 3}, {2, 4} თითოეულ ამ ქვესიმრავლეს სათანადოდ შევუსაბამოთ კორტეჟები

(1, 1, 0, 0, 0, ...), (1, 0, 1, 0, 0, ...), (0, 1, 0, 1, 0, 0, ...),

ამ კორტეჟებს შევუსაბამოთ ორწილადები

0,11000...; 0,10100...; 0,010100...

და ასე შემდეგ.

ამრიგად, ნატურალურ რიცხვთა ყოველ ქვესიმრავლეს შეესაბამება $[0, 1[$ შუალედის რაიმე რიცხვი. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$m(\pi(N)) \leq m\{x | 0 \leq x < 1\}, \quad (13)$$

სადაც $m(\pi(N))$ აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა ქვესიმრავლეთა $\pi(N)$ სიმრავლის სიმძლავრეს, ხოლო $m\{x | 0 \leq x < 1\}$ $[0, 1[$ შუალედის წერტილთა სიმრავლის სიმძლავრეს.

ახლა ავიღოთ რაიმე წესიერი წილადი. მაგალითად, 0, 1011000100... ამ ორწილადს შევუსაბამოთ კორტეჟი (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ...). ამ კორტეჟს კი შევუსაბამოთ ქვესიმრავლე {1, 3, 4, 8}.

ამგვარად, ყოველ წესიერ წილადს შევუსაბამეთ ნატურალურ რიცხვთა რაიმე ქვესიმრავლე. ამიტომ

$$m\{x | 0 \leq x < 1\} \leq m(\pi(N)). \quad (14)$$

მიღებული (13) და (14) უტოლობებიდან დავასკვნით

$$m(\pi(N)) = m\{x | 0 \leq x < 1\}.$$

თუ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე n ელემენტს შეიცავს, მაშინ მის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე შეიცავს 2^n ელემენტს. ანალოგიურად აღვნიშნოთ ყველა ნატურალური რიცხვის ქვესიმრავლეთა სიმრავლის სიმძლავრე

$$m(\pi(N)) = 2^{\aleph_0}.$$

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს: ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლის სიმძლავრე ნაკლებია მის ყველა ქვესიმრავლის სიმრავლის სიმძლავრეზე,

$$m(N) < m(\pi(N)).$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს თვისება ჭეშმარიტია ნებისმიერი სიმრავლისათვის.

თეორემა 9. ყოველი სიმრავლის სიმძლავრე ნაკლებია მისი ყველა შესაძლო ქვესიმრავლის სიმრავლის სიმძლავრეზე¹.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე სიმრავლე A და მის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე B . თუ A ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ მის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე შეიცავს ერთ ელემენტს $\{\emptyset\}$. $m(\emptyset) = 0$, $m(\{\emptyset\}) = 1$. გამოთქმული თეორემა ამ შემთხვევაში ჭეშმარიტია. თუ A არა ცარიელი სიმრავლეა, ავიღოთ ამ სიმრავლის ერთელემენტური ქვესიმრავლეები. ეს სიმრავლეები აღვნიშნოთ B_1 -ით. სიმრავლე B_1 წესიერი ნაწილია B სიმრავლისა. ცხადია, $A \approx B_1$. ამის გამო $m(A) \leq m(B)$.

ახლა ვაჩვენოთ $m(A) \neq m(B)$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო $m(A) = m(B)$. ე. ი. $A \approx B$. ამ შემთხვევაში A სიმრავლე ორ კლასად გავყოთ. პირველ კლასში, რომელიც A_1 -ით აღვნიშნოთ, მოვათავსოთ ის ელემენტები, რომლებიც B სიმრავლის აღებულ B_1 ქვესიმრავლეში არაა, ხოლო მეორე კლასში ის ელემენტები, რომლებიც B_1 ქვესიმრავლეშია. მეორე კლასი A_2 -ით აღვნიშნოთ. არც ერთი კლასი ცარიელი არ იქნება. პირველ კლასში მოთავსდება A სიმრავლის ცარიელი ქვესიმრავლე. ცარიელი სიმრავლე A სიმრავლის ელემენტებს არ შეიცავს. მთელი A სიმრავლეც პირველ კლასში შედის. B_1 სიმრავლის და A სიმრავლის საერთო ელემენტები მეორე კლასს ეკუთვნის.

დაშვებული პირობის თანახმად A და B სიმრავლეთა შორის არსებობს ურთიერთცალკეა თანადობა. ავიღოთ A_1 სიმრავლე. რადგანაც A_1 სიმრავლე A სიმრავლის ქვესიმრავლეა, იგი ეკუთვნის B სიმრავლეს და პირობის თანახმად მას შეესაბამება A სიმრავლის რომელიმე a ელემენტი. a ელემენტი ეკუთვნის რომელიმე კლასს: ან A_1 -ს ან A_2 -ს. ვთქვათ, a პირველი კლასის ელემენტია. რადგანაც B_1 სიმრავლე A სიმრავლის ერთელემენტური ქვესიმრავლეებია, $a \in B_1$ და მაშინ $a \in A_1$. მაგრამ A_1 შეიცავს A -ს ყველა ელემენტს. მაშასადამე, $a \in A_1$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. თუ a მეორე კლასს ეკუთვნის, მაშინ მეორე კლასის არცერთი ელემენტი პირველ კლასს არ ეკუთვნის, მაგრამ A_1 კლასს ყველა A სიმრავლის ელემენტი ეკუთვნის და, მაშასადამე, a -ც ეკუთვნის. მივიღეთ კვლავ წინააღმდეგობა. ეს წინააღმდეგობანი მიგვითითებენ იმის შესაბამისად, რომ ჭეშმარიტი არაა დაშვება $m(A) = m(B)$.

ამგვარად, $m(A) < m(B)$.

თუ განვიხილავთ B სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს, დამტკიცებული თეორემის საფუძველზე დავასკვნით: B სიმრავლის სიმძლავრე ნაკლებია B -ს ქვესიმრავლეთა სიმრავლის სიმძლავრეზე.

¹ А. Н. Колмогоров, С. М. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1976, стр. 29.

აღნიშნული მოქმედების გამოვრება მიგვიყვანს იმ დასკვნამდე, რომ არ არსებობს უდიდესი სიმძლავრის სიმრავლე. თუ გამოვალთ იმ დამოკიდებულებიდან, რომ

$$x_0 < 2^{x_0},$$

მივიღებთ სიმძლავრეთა ზრდად უსასრულო მიმდევრობას:

$$x_0 < 2^{x_0} < 2^{2^{x_0}} < \dots$$

სიმრავლეები, დაწყებული x_0 -დან, ასე აღვნიშნეთ

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

განზოგადებული კონტინუუმ — პიპოთეზა ეწოდება შემდეგ წინადადებას: ყოველი α -სათვის

$$2^{x_\alpha} = x_{\alpha+1}.$$

საეარჯიშო 2.

1. რამდენი ქვესიმრავლე აქვს თითოეულ სიმრავლეს:

$$\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}.$$

2. რამდენი საკუთრივი ქვესიმრავლე აქვს თითოეულ სიმრავლეს

$$\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}.$$

3. არსებობს თუ არა სიმრავლე, რომელსაც მხოლოდ ერთი არასაკუთრივი ქვესიმრავლე აქვს?

4. ინტუიციის შეთოდით დაამტკიცეთ, რომ n -ელემენტიან სიმრავლეს 2^n ქვესიმრავლე აქვს.

5. ჩაწერეთ სიმრავლე იმ x ელემენტებისა, რომელთათვისაც სრულდება პირობა $R(x)$.

6. წაიკითხეთ $\{y | ((2y-1)^2 + 1) : 2, y \in \mathbb{N}\}$, ($:$ — იყოფა).

7. $\forall$ და $\exists$ სიმბოლოებით ჩაწერეთ განტოლებისა და იგივეობის განსაზღვრა.

8. $\forall$ და $\exists$ სიმბოლოებით ჩაწერეთ: A სიმრავლე B სიმრავლის საკუთრივი ნაწილია.

9. შეადგინეთ $\{x | x^2 - x - 20 < 0, x \in \mathbb{R}\}$ სიმრავლის მთელ რიცხვთა ქვესიმრავლე.

10. შეადგინეთ $\{x | \lg x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$ სიმრავლის მთელ რიცხვთა ქვესიმრავლე.

11. დაამტკიცეთ

$$(A \subset B) \Rightarrow (A \setminus B = \emptyset).$$

12. როდისაა ქვეშარიტი ტოლობა $(A \cup B) \setminus A = B$?

13. აჩვენეთ, ქვეშარიტია თუ არა შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$1) (A \subset B) \cap (C \subset D) \Rightarrow ((A \cup C) \subset (B \cup D)),$$

$$2) (A \subset B) \cap (C \subset D) \Rightarrow ((A \cap C) \subset (B \cap D)),$$

$$3) (A \subset B) \cap (C \subset D) \Rightarrow ((A \setminus D) \subset (B \setminus C)).$$

$$4) ((A \cup B) \cap (A \cup D)) \cup ((A \cup B) \cap (B \cup D)) = (A \cup B),$$

$$5) ((A \cap B) \cup (A \cap D)) \cap ((A \cap B) \cup (B \cap D)) = (A \cap B).$$

14. დაამტკიცეთ:

$$1) ((A \cup B = A) \cap (A \cap B = A)) \Rightarrow (A = B),$$

$$2) (A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A) \cap (A \cup B = B),$$

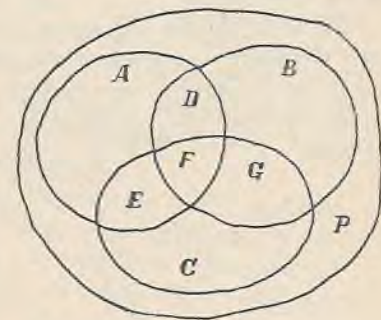
$$3) (A \cap B = A) \Rightarrow (A \subset B), (A \cup B = B) \Rightarrow (A \subset B).$$

15. 100 სტუდენტიდან მხოლოდ გერმანულ ენას სწავლობს 18 სტუდენტი; გერმანულს, მაგრამ არა ინგლისურს სწავლობს — 23; გერმანულს და ფრანგულს — 8; გერმანულს — 26; ფრანგულს — 48; ინგლისურს და ფრანგულს — 8; არც ერთ ენას არ სწავლობს 24 სტუდენტი.

რამდენი სტუდენტი სწავლობს ინგლისურ ენას, ფრანგულს, გერმანულს?

რამდენი სტუდენტი სწავლობს ინგლისურს და ფრანგულს, ინგლისურს და გერმანულს, გერმანულს და ფრანგულს, სამივე ენას?

ამოხსნა: სიმრავლე სტუდენტებისა, რომლებიც სწავლობენ სათანადოდ მხოლოდ გერმანულს, მხოლოდ ფრანგულს, მხოლოდ ინგლისურს აღვნიშნოთ A, B, C ასოებით (ნახ. 19). ნახაზის მიხედვით ადვილი მისახვედრია, რომ სტუდენტთა სიმრავლე D სწავლობს გერმანულს და ფრანგულს, სტუდენტთა სიმრავლე E სწავლობს გერმანულს და ინგლისურს და ა. შ. არც ერთ ენას არ სწავლობს სტუდენტთა სიმრავლე P . სტუდენტთა სიმრავლე $A \cup D \cup F \cup E = A + D + F + E$ სწავლობს გერმანულს და ა. შ.



ნახ. 26

$$A + D + B + E + F + G + C + P = 100,$$

$$A = 18,$$

$$A + D = 23,$$

$$D + F = 8,$$

$$A + D + E + F = 26,$$

$$D + B + F + G = 48,$$

$$F + G = 8,$$

$$P = 24.$$

საიდანაც

$$A = 18, P = 24, F = 3, E = 0, D = 5, G = 5, B = 35, C = 10.$$

16. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი უსასრულო M სიმრავლისათვის და თვლადი N სიმრავლისათვის, თუ $M \supset N$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$M \cup N = M, M \cap N \text{ თვლადია.}$$

17. განსაზღვრეთ $y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$ არსებობისა და მნიშვნელობის სიმ-

რავლე.

18. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები ნატურალური რიცხვებია, თვლადია.

19. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს თვლად სიმრავლეს.

20. სეგმენტი $[0, 1]$ გავყოთ სამ ტოლ ნაწილად. აქედან შუა ინტერვალის ამოვადლოთ. დარჩენილი სეგმენტები სამ-სამ ტოლ ნაწილად გავყოთ და იქიდანაც შუა ინტერვალეები ამოვადლოთ და ა. შ. მივიღებთ წერტილთა სიმრავლეს. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული სიმრავლე არათვლადია.

თ ა ვ ი III

რიცხვითი სისტემები

§ I. რიცხვის ცნების გაფართოება

1. მიმართების ცნების განზოგადება¹. ბინარული მიმართება იძლევა ორი საგნის ურთიერთობის მათემატიკურ დახასიათებას: იგი წარმოიქმნება ორი სიმრავლის დეკარტის ნამრავლის ქვესიმრავლით. განვაზოგადოთ დეკარტის ნამრავლი სამი სიმრავლისათვის. X_1, X_2, X_3 სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი $X_1 \times X_2 \times X_3$ ეწოდება $X_1 \times X_2$ სიმრავლისა და X_3 სიმრავლის დეკარტის ნამრავლს,

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3.$$

X_1, X_2, X_3 სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი $(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2), x_3)$ ეწოდება სიმრავლეა, სადაც $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_3 \in X_3$.

სამი საგნის ურთიერთობის დასახასიათებლად გამოიყენება ტერნარული მიმართების ცნება. მაგალითად, სამი ადამიანის ურთიერთობა, რომელთაგან პირველი დედაა (x), მეორე მამა (y), მესამე შვილი (z) დასახითდება სამეულით (x, y, z) . ამ მიმართებას ტერნარული მიმართება ეწოდება. მიმართება „დედა, მამა, შვილი“ S ასოთი აღვნიშნოთ. თუ კარგად წარმოვიდგენთ, რა არის S მიმართება და რა არის დეკარტის ნამრავლი $X_1 \times X_2 \times X_3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_3 \in X_3, 1\}$, მაშინ დავრწმუნდებით, რომ ყოველი ტერნარული მიმართება და მათ შორის მიმართებაც $X_1 \times X_2 \times X_3$ ნამრავლის ქვესიმრავლეა.

ყოველთვის, $X_1 \times X_2 \times X_3$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია რაიმე ფუნქცია, რომელიც ამ ნამრავლს Y სიმრავლეში ასახავს. ასეთ ფუნქციას ტერნარული ფუნქცია — სამი ცვლადის ფუნქცია ეწოდება. ამ განსაზღვრის თანახმად ტერნარული ფუნქცია არის ბინარული ფუნქციის მიმართება, რომელიც განისაზღვრება $(X_1 \times X_2 \times X_3, Y)$ წყვილით. ტერნარული ფუნქციის მნიშვნელობას y -ს $X_1 \times X_2 \times X_3$ ნამრავლის (x_1, x_2, x_3) ელემენტზე აღნიშნავენ $f(x_1, x_2, x_3)$ -ით,

$$y = f(x_1, x_2, x_3).$$

¹ ვ. ხარშილაძე, მათემატიკის სასკოლო კურსის თანამედროვე საფუძვლები, თბილისი, 1981, გვ. 31.

ცხადია, ტერნარული ფუნქცია ოთხეულთა, ოთხ ელემენტს შორის, მიმართებაა. ეს მიმართება ოთხი სიმრავლის X_1, X_2, X_3, Y დეკარტის ნამრავლის $X_1 \times X_2 \times X_3 \times Y$ ქვესიმრავლეა, სადაც

$$X_1 \times X_2 \times X_3 \times Y = (X_1 \times X_2 \times X_3) \times Y.$$

ვთქვათ, $X_1 = X_2 = X_3 = X$, მაშინ $X \times X \times X$ აღნიშნოთ X^3 . იმ f ფუნქციას, რომელიც X^3 ნამრავლს Y სიმრავლეში ასახავს, X სიმრავლეზე განსაზღვრული ტერნარული ფუნქცია ეწოდება,

$$f: X^3 \rightarrow Y.$$

საზოგადოდ, n სიმრავლის დეკარტის ნამრავლი $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ განისაზღვრება ინდუქციის წესით:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

ამ ნამრავლის ქვესიმრავლეს n -არული მიმართება ეწოდება. თუ $n=1$ ვღებულობთ უნარულ მიმართებას, $n=2$ — ბინარულ მიმართებას და ა. შ. თუ $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია რაიმე f ფუნქცია, რომელიც ამ ნამრავლს Y სიმრავლეში ასახავს, ასეთ ფუნქციას n -არული ფუნქცია — n ცვლადის ფუნქცია ეწოდება. თუ $n=1$, მაშინ f ფუნქციას უნარული ფუნქცია — ერთი ცვლადის ფუნქცია ეწოდება. თუ $n=2$, მაშინ ფუნქციას ბინარული ფუნქცია — ორი ცვლადის ფუნქცია ეწოდება და ა. შ.

განსაზღვრის თანახმად n -არული ფუნქცია არის ბინარულ ფუნქციური მიმართება, რომელიც განისაზღვრება $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, Y)$ წყვილით. n -არული ფუნქციის მნიშვნელობას $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ სიმრავლეში $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ელემენტზე აღნიშნავენ $f(x_1, \dots, x_n)$ სიმბოლოთი,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

ცხადია, n -არული ფუნქცია არის $(n+1)$ -ეული მიმართება. ეს მიმართება $(n+1)$ სიმრავლის დეკარტის ნამრავლის $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \times Y$ ქვესიმრავლეა.

f ფუნქციას, რომელიც X^n ნამრავლს Y სიმრავლეში ასახავს, X სიმრავლეზე განსაზღვრული n -არული ფუნქცია ეწოდება,

$$f: X^n \rightarrow Y.$$

იმ კერძო შემთხვევაში, თუ $Y=X$, მაშინ X^n სიმრავლის ასახვა X სიმრავლეში არის n -არული მოქმედება — ოპერაცია. ე. ი. X სიმრავლეში განსაზღვრული n -არული მოქმედება არის X^n სიმრავლის ასახვა X სიმრავლეში.

ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეში განსაზღვრული შეკრება $x+y=z$, $z=f(x, y)$ არის ბინარული მოქმედება ნატურალურ რიცხვებში.

სიმრავლეში, $f: N^2 \rightarrow N$. აგრეთვე, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრული მოქმედება გამრავლება $x \cdot y$ არის ბინარული მოქმედება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

2. ნატურალურ რიცხვთა სისტემა. მე-2 თავის მე-4 პარაგრაფის მე-3 პუნქტში განვსაზღვრეთ, რომ $(N, 1, S)$ სტრუქტურას ეწოდება ნატურალურ რიცხვთა მწკრივი, ხოლო ამ სტრუქტურის ელემენტებს — ნატურალური რიცხვები. პეანოს აქსიომათა საფუძველზე დავადგინეთ

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

N -ს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრეთ ნატურალურ რიცხვთა შეკრება $x+y$, გამრავლება xy და დალაგება $x \leq y$. გავარკვეთ, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრული მოქმედებანი შეკრება და გამრავლება ფუნქციური მიმართებანია N^2 სიმრავლიდან N სიმრავლეში, ანუ N^2 სიმრავლის ქვესიმრავლე.

ადვილი საჩვენებელია: მოცემული a და b ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $a < b$, არსებობს ერთადერთი x , რომ

$$a + x = b. \quad (1)$$

შართლაც, ფიქსირებული a -სთვის, თუ $b=a'$, მაშინ $x=1$ და (1) ტოლობა ჭეშმარიტია,

$$a + 1 = b.$$

ვთქვათ, M არის ისეთი b რიცხვების სიმრავლე, რომელთათვისაც (1) ტოლობა ჭეშმარიტია ერთადერთი ნატურალური x რიცხვისათვის. ვაჩვენოთ, $b' \in M$.

b' -ის განსაზღვრის თანახმად

$$(a + x)' = b', \text{ ანუ } a + x' = b'.$$

x -ის ერთადერთობიდან გამომდინარეობს x' ერთადერთობა (P_1 აქსიომა). მაშასადამე, $b' \in M$. რაც ამტკიცებს: ყოველი a და b -თვის არსებობს ისეთი x , რომ (1) ტოლობა ჭეშმარიტია, თუ $a < b$.

(1) ტოლობიდან გამომდინარეობს: ყოველი დალაგებული წყვილი (a, b) , სადაც $a < b$, განსაზღვრავს ერთადერთ x რიცხვს, $x \in N$. ამ რიცხვს b და a რიცხვების სხვაობას უწოდებენ. ხოლო (1) ტოლობას x -ის მიმართ — პირველი ხარისხის ერთეულ ცნობიან განტოლებას. b და a რიცხვების სხვაობას $b - a$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

ამგვარად დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა I. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, განტოლებას $a+x=b$, თუ $a < b$, აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ეს თეორემა ასეც შეგვიძლია გამოვთქვათ:
ნატურალურ რიცხვთა დალაგებული წყვილი (a, b) , თუ $a < b$, ერთადერთ ნატურალურ რიცხვს $b-a$ -ს განსაზღვრავს.

განსაზღვროთ b რიცხვის ჯერადობა a -ს მიმართ.

b რიცხვს ეწოდება a რიცხვის ჯერადი, თუ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n , რომ $b=an$. მაგალითად, 6 არის 2-ის ჯერადი, $6=2 \cdot 3$.

I-ლი თეორემის ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. თუ b არის a -ს ჯერადი, მაშინ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განტოლებას $ax=b$ აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

x რიცხვს წილადი (განაყოფი) ეწოდება და $\frac{b}{a}$ ან $b:a$ სიმბოლოთი აღინიშნება, $x = \frac{b}{a}$.

მე-2 თეორემა ასეც შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ:

თუ b ნატურალური რიცხვი a რიცხვის ჯერადია, მაშინ დალაგებული წყვილი (a, b) ერთადერთ ნატურალურ რიცხვს $b:a$ -ს განსაზღვრავს.

a და b რიცხვების დალაგებული წყვილით განისაზღვრება a და b რიცხვების შეკრება, რომელიც ასე აღვნიშნოთ $(a, b)^+$. ამავე რიცხვების დალაგებული წყვილით განისაზღვრება გამოკლება, რომელიც ასე აღვნიშნოთ $(a, b)^-$. ამავე წყვილებით განისაზღვრება ამ რიცხვების გამრავლება და გაყოფა, რომლებიც სათანადოდ ასე აღვნიშნოთ: $(a, b)^{\times}$ (a, b) .

შემდეგში დავვირდება ნატურალურ რიცხვთა სისტემის (მწკრივის) გაფართოება, ამისათვის ზემოთ ჩამოყალიბებული განსაზღვრა მისი ტოლფასი განსაზღვრით შევცვალოთ.

ნატურალურ რიცხვთა სისტემა, ანუ ნატურალურ რიცხვთა დალაგებული ნახევარგოლი, ეწოდება სიმრავლეთა $(N, 1, +, \times, \leq)$ ისეთ ხუთეულს, სადაც განსაზღვრულია შემდეგი მოქმედებანი და დალაგების მიმართება:

I. შეკრება: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტების ყოველ (x, y) წყვილს შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი z იმავე სიმრავლიდან; რომელსაც ეწოდება x და y ელემენტთა ჯამი და აღინიშნება $x+y$ -ით; ისე, რომ სრულდება შემდეგი პირობები—აქსიომები:

1) $x+y = y+x$, $\forall x, \forall y \in N$ — შეკრების მოქმედება გადანაცვლებადია;

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x, \forall y, \forall z \in N$ — შეკრების მოქმედება დაჯგუფებადია;

II. გამრავლება: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტების ყოველ (x, y) წყვილს შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი z იმავე სიმრავლიდან, რომელსაც x და y ელემენტთა ნამრავლი ეწოდება და აღინიშნება xy -ით; ისე, რომ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) $xy = yx$, $\forall x, \forall y \in N$ — გამრავლების მოქმედება გადანაცვლებადია;

2) $(xy)z = x(yz)$, $\forall x, \forall y, \forall z \in N$ — გამრავლების მოქმედება დაჯგუფებადია;

3) N სიმრავლეში არსებობს ელემენტი 1 — ერთეული, რომ ყოველი x ელემენტისათვის $x \cdot 1 = x$ — ნებისმიერი ელემენტის ერთეულზე გამრავლებით ელემენტი არ იცვლება;

4) ყოველი x, y, z -სათვის N სიმრავლიდან ქვეშაირითა ტოლობა $(x+y)z = xz + yz$ — გამრავლება განრიგებადია შეკრების მიმართ;

III. დალაგების მიმართება: ყოველი ორი ელემენტისათვის N სიმრავლიდან ქვეშაირითა $x \leq y$ ან $y \leq x$ ისე, რომ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) ყოველი x ელემენტისათვის N სიმრავლიდან $x \leq x$ — დალაგების მიმართება რეფლექსურია; თუ $x \leq y$ და $y \leq x$, მაშინ $y = x$.

2) თუ $x \leq y$, $y \leq z$, მაშინ $x \leq z$ — დალაგების მიმართება ტრანზიტულია;

3) $x \leq y$, მაშინ $x+z \leq y+z$ — დალაგების მიმართება მონოტონურია შეკრების მიმართ;

4) თუ $x \leq y$, მაშინ $xz \leq yz$ — დალაგების მიმართება მონოტონურია გამრავლების მიმართ.

3. მთელ რიცხვთა და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეები. დავაკვირდეთ ზემოთ დამტკიცებულ I-ლ თეორემას:

N სიმრავლის ელემენტთა ყოველი (a, b) წყვილისათვის, თუ $a < b$ არსებობს ისეთი x ელემენტი N სიმრავლეში, რომ $a+x=b$ ე. ი. წყვილი $(a, b)^-$ განსაზღვრავს ნატურალურ რიცხვს x -ს, რომელსაც $b-a$ სიმბოლოთი აღინიშნება, $x=b-a$.

განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა ისეთი $(a, b)^-$ წყვილებიც, როცა $a \geq b$. ასეთ წყვილთა სიმრავლეს არადადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება.

განტოლება $a+x=a$ განსაზღვრავს $(a, a)^-$ წყვილს, $x=a-a$. თუ ავიღებთ ისეთ A სიმრავლეს, რომლის სიმძლავრეა a , $m(A)=a$, და ამ სიმრავლეს თვით A სიმრავლეს გამოვაკლებთ, მივიღებთ ცარიელ სიმრავლეს, $A \setminus A = \emptyset$, $m(\emptyset)=0$. ამიტომ $a-a$ აღვნიშნოთ 0-ით (ნულით); $a-a=0$. ასე რომ, $a+0=a$.

ამგვარად, 0 ისეთი ელემენტია, რომელიც რიცხვთან შეკრებით რიცხვს არ ცვლის.

ახლა ავიღოთ წყვილი $(a, 0)^-$. ეს წყვილი განსაზღვრულია $a + x = 0$ ტოლობით. წყვილი $(a, 0)^-$ აღნიშნით $-a$ სიმბოლოთი, $a + (-a) = 0$. $-a$ ელემენტს a რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი ეწოდება (წაიკითხება: მინუს a).

ამგვარად, $(a, 0)^-$ წყვილით განსაზღვრა a რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი $(-a)$.

სიმრავლეს $\{0, x, -x | x \in N\}$ მთელ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება და აღინიშნება Z ასოთი,

$$Z = \{0, x, -x | x \in N\}.$$

სიმრავლეს $\{0, x | x \in N\}$ ეწოდება არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო სიმრავლეს $\{0, -x | x \in N\}$ ეწოდება არადადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე. 0 არც დადებითი და არც უარყოფითი რიცხვია. 0 -ს ნეიტრალური რიცხვი ეწოდება.

ახლა დავავიკრდეთ ზემოთდამტკიცებულ მე-2 თეორემას. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტების დალაგებული (a, b) წყვილისათვის, თუ b ელემენტი a -ს ჯერადია, მოინახება ისეთი x ელემენტი ნატურალურ რიცხვებში, რომ $ax = b$. ახლა ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვები: a და b . ამ რიცხვთა დალაგებული წყვილი (a, b) . განსაზღვრავს $ax = b$ განტოლების ამონახსნს. ამ (a, b) : წყვილით განსაზღვრული x აღინიშნება $\frac{b}{a}$ სიმბოლოთი და ეწოდება წილადი.

წილადებს $\frac{x_1}{x_2}$ და $\frac{y_1}{y_2}$ ეწოდება ეკვივალენტური წილადები, თუ $x_1 y_2 = x_2 y_1$. ადვილი წარმოსადგენია, რომ წილადთა ეკვივალენტურობის მიმართება რეფლექსურია $-\frac{x_1}{x_2} \approx \frac{x_1}{x_2}$, სიმეტრიულია $\frac{x_1}{x_2} \approx \frac{y_1}{y_2} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} \approx \frac{x_1}{x_2}$ და ტრანზიტული $-\left(\frac{x_1}{x_2} \approx \frac{y_1}{y_2}\right) \wedge \wedge \left(\frac{y_1}{y_2} \approx \frac{z_1}{z_2}\right) \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} \approx \frac{z_1}{z_2}$.

რაციონალური რიცხვი ეწოდება ისეთ წილადთა სიმრავლეს, რომლებიც ეკვივალენტურია რომელიმე ფიქსირებული წილადისა. ე. ი. წილადთა ისეთ კლასს, რომლებიც რომელიმე ფიქსირებული წილადის ეკვივალენტურია, ეწოდება რაციონალური რიცხვი.

ორი რაციონალური რიცხვი ტოლია, თუ ტოლია ის სიმრავლეები, რომლებიც ამ რიცხვებს განსაზღვრავენ.

რაციონალური რიცხვის განსაზღვრის საფუძველზე, განსაზღვროთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე

$$\left\{ x | x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N \right\}.$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე Q ასოთი აღინიშნება:

$$Q = \left\{ x | x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N \right\}.$$

ცხადია, $Z \supset N$ და $Q \supset Z$.

4. მთელ რიცხვთა სისტემა. მთელ რიცხვთა სისტემა — მთელ რიცხვთა მინიმალური რგოლი ნატურალურ რიცხვთა სისტემის გაფართოებით მიიღება. სიტყვა „გაფართოება“ შემდეგნაირად უნდა გავიგოთ: მთელ რიცხვთა სისტემა მთლიანად მოიცავს ნატურალურ რიცხვთა სისტემას, იგი განსაზღვრება ნატურალურ რიცხვთა სისტემის სრული ანალოგიით, N სიმრავლის მაგივრად ნატურალურ რიცხვთა სისტემაში უნდა ავიღოთ Z სიმრავლე. ამასთან იმ განსხვავებით, რომ შეკრების აქსიომებს დაემატება (გაფართოვდება) შემდეგი აქსიომები:

3) Z სიმრავლეში არსებობს ისეთი ელემენტი 0 , რომ ყოველი x -ათვის Z სიმრავლიდან

$$x + 0 = x;$$

4) ყოველი x -ათვის Z სიმრავლიდან არსებობს y ელემენტი Z სიმრავლეში ისეთი, რომ $x + y = 0$;

$$y = 0 - x = 0 + (-x) = (-x) + 0 = -x.$$

x -ს და $(-x)$ ურთიერთმოპირდაპირე ელემენტები ეწოდება.

გაფართოვდება დალაგების მე-4 აქსიომა:

4) თუ $0 \leq x$, $0 \leq y$, მაშინ $0 \leq xy$.

ამ აქსიომებიდან გამომდინარეობს:

თუ $x \leq y$, მაშინ ყოველი $z > 0$ -სათვის $xz \leq yz$.

მართლაც, თუ $x \leq y$, მაშინ ამ უტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ (x) (დალაგების მიმართება მონოტონურია შეკრების მიმართ), გვექნება

$$x - x \leq y - x, \text{ ანუ } 0 \leq y - x.$$

თუ $0 \leq y - x$ და $0 < z$ -სათვის გამოვიყენებთ მე-4₁ აქსიომას, მაშინ $0 \leq (y - x)z$, ანუ $0 \leq yz - xz$.

თუ უკანასკნელი უტოლობის ორივე ნაწილს დავუმატებთ xz -ს, მივიღებთ

$$xz \leq yz.$$

ნატურალურ რიცხვთა სისტემის ამგვარი გაფართოებით მივიღებთ მთელ რიცხვთა სისტემას.

ვაჩვენოთ,

$$0 \cdot x = 0.$$

მართლაც

$$0 \cdot x + 1 \cdot x = (0 + 1)x = 1 \cdot x = x.$$

ასევე,

$$0 \cdot x + 1 \cdot x = 0 \cdot x + x.$$

ამ ორი ტოლობის შედარება მოგვცემს

$$0 \cdot x + x = x.$$

აქედან კი, თუ ტოლობის ორივე მხარეს $(-x)$ -ს დავუმატებთ, მივიღებთ

$$0 \cdot x + x + (-x) = x + (-x), \text{ ანუ } 0 \cdot x = x - x.$$

საიდანაც

$$0 \cdot x = 0.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\forall x \in Z$.

$$-x = (-1)x.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე სხვადასხვაგვარად განისაზღვრება, ამიტომ ამ ტოლობის ჭეშმარიტება ნებისმიერი x -სათვის უნდა შევამოწმოთ.

განსაზღვრით

$$(-1)x + x = [(-1) + 1]x = 0 \cdot x = 0,$$

ანუ

$$(-1)x + x = 0.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ $-x$, მივიღებთ

$$(-1)x = -x.$$

ამის გამო მთელ რიცხვებზე მოქმედებანი ასე ჩატარდება:

$$\begin{aligned} 2 - 3 &= 2 + (-3) \cdot 1 = 2 + ((-2) + (-1)) \cdot 1 = 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = \\ &= 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = (2 + (-2)) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 + (-1) \cdot 1 = -1; \end{aligned}$$

$$(-2) \cdot 3 = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = (-1) \cdot 6 = -6.$$

განსაზღვრის თანახმად x და $-x$ ურთიერთმომპირდაპირე რიცხვებია. აქედან, თუ $x > 0$, მაშინ $-x < 0$ და პირიქით, თუ $x < 0$, მაშინ $-x > 0$. გამოვთვალოთ $(-x)(-y)$, სადაც $x \geq 0$, $y \geq 0$. გვექნება

$$(-x)(-y) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot y = (-1)((-1)xy).$$

განსაზღვრის თანახმად, თუ $x \geq 0$, $y \geq 0$, მაშინ $xy \geq 0$. ამ რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი იქნება $-(xy) = (-1)xy \leq 0$. ახლა ავიღოთ $(-1)xy$ რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი $-((-1)xy)$. ეს კი მეტია ან ტოლი ნულის,

$$-((-1)xy) \geq 0.$$

ამგვარად, ორი არადადებითი რიცხვის ნამრავლი დადებითია.

5. **რაციონალურ რიცხვთა სისტემა.** რაციონალურ რიცხვთა სისტემა $(Q, 0, 1, +, \times, \leq)$ მთელ რიცხვთა სისტემის გაფართოებით მიიღება. სიტყვა „გაფართოების“ ქვეშ გვესმის შემდეგი: მთელ რიცხვთა სისტემა მთლიანად ჩართულია რაციონალურ რიცხვთა სისტემაში. იგი განისაზღვრება მთელ რიცხვთა სისტემის სრული ანალოგიით, Z -ის ნაცვლად მთელ რიცხვთა სისტემაში უნდა ავიღოთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე Q . ამასთან იმ განსხვავებით, რომ გაფართოვდება გამრავლების აქსიომები:

5) ყოველი x ელემენტისათვის Q სიმრავლიდან არსებობს u ელემენტი Q სიმრავლეში, რომ $ux = 1$, თუ $x \neq 0$.

ამ აქსიომიდან განსაზღვრული u ასე ჩაიწერება $u = \frac{1}{x}$. ელემენტებს

x და $\frac{1}{x}$ ურთიერთ შებრუნებული ელემენტები ეწოდება, $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

$y \cdot \frac{1}{y}$ ნამრავლი $\frac{y}{x}$ წილადით ჩაიწერება.

რაციონალურ რიცხვთა სისტემაში მოქმედებანი შემდეგნაირად სრულდება:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} &= \frac{x_1 y_2}{y_1 y_2} + \frac{x_2 y_1}{y_2 y_1} = x_1 y_2 \cdot \frac{1}{y_1 y_2} + x_2 y_1 \cdot \frac{1}{y_2 y_1} = \\ &= (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot \frac{1}{y_2 y_1} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1 y_2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} &= \left(x_1 \cdot \frac{1}{y_1} \right) \left(x_2 \cdot \frac{1}{y_2} \right) = (x_1 x_2) \cdot \left(\frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2} \right) = \\ &= (x_1 \cdot x_2) \cdot \frac{1}{y_1 y_2} = \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}. \end{aligned}$$

აქ გამოვიყენეთ ტოლობა:

$$\frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_1 y_2}.$$

დავამტკიცოთ ამ ტოლობის ჭეშმარიტება.
განსაზღვრის თანახმად

$$y_1 \cdot \frac{1}{y_1} = 1, \quad y_2 \cdot \frac{1}{y_2} = 1.$$

ამ ტოლობათა გადამრავლებით მივიღებთ

$$\left(y_1 \cdot \frac{1}{y_1}\right) \left(y_2 \cdot \frac{1}{y_2}\right) = 1, \quad \text{ანუ} \quad (y_1 y_2) \left(\frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2}\right) = 1.$$

ე. ი. $y_1 y_2$ -ის შებრუნებულია $\frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2}$. მაგრამ $y_1 y_2$ -ის შებრუნებულია $\frac{1}{y_1 y_2}$.
ამგვარად,

$$\frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_1 y_2}.$$

8. რაციონალურ რიცხვთა თვისებები. ზემოთ ვაჩვენეთ, $x \cdot 0 = 0$. ამის გამო ტოლობა $0 \cdot x = 1$ არც ერთი x -სათვის არაა ჭეშმარიტი. ამგვარად, 0-ს შებრუნებული რიცხვი არაა აქვს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ნულზე გაყოფა არ შეიძლება.

ავიღოთ გამოსახულება $xy = 0$. ვთქვათ, $x \neq 0$, მაშინ $\frac{1}{x}$ -ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{x} (xy) = \frac{1}{x} \cdot 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

ე. ი., თუ რიცხვთა ნამრავლი ნულის ტოლია, მაშინ ერთი მამრავლი მაინც ნულის ტოლია.

თეორემა 1. ყოველ ორ რაციონალურ რიცხვს შორის არსებობს უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა.

დამტკიცება. ვთქვათ, a და b რაციონალური რიცხვებია, $a < b$. ავიღოთ ამ რიცხვების საშუალო არითმეტიკული $\frac{a+b}{2} = c$, მაშინ

$$a < c < b.$$

ახლა ავიღოთ a, c და c, b რიცხვების საშუალო არითმეტიკული რიცხვები $\frac{a+c}{2} = d_1$, $\frac{c+b}{2} = d_2$. ცხადია,

$$a < d_1 < c < d_2 < b.$$

ეს პროცესი უსასრულოდ შეიძლება გაავარძელოთ. ამით გამოთქმული თეორემა დამტკიცდა.

მე-2 თავის მე-3 პარაგრაფის მე-6 პუნქტში განვსაზღვრეთ (X, P) სტრუქტურის Y ქვესიმრავლის შემოსაზღვრულობა, ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვრები. ცხადია, თუ Y სიმრავლეში არსებობს უდიდესი ელემენტი, ეს ელემენტი Y სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი იქნება. მაგალითად, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $0 < r \leq 1$, შემოსაზღვრულია. ამ სიმრავლის ელემენტი 1 უდიდესი ელემენტია და ამ სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარია. უმცირესი ელემენტი აღებულ სიმრავლეს არა აქვს. მართლაც, თუ რაიმე r რიცხვი უმცირესი დადებითი რიცხვია, მაშინ $\frac{r}{2}$ ისეთი რიცხვია, რომ $0 < \frac{r}{2} < r$.

ე. ი. r არ არის $[0, 1]$ შუალედში მოთავსებული რაციონალური რიცხვების უმცირესი რიცხვი. მაგრამ ამ შუალედში მოთავსებულ რაციონალურ რიცხვებს აქვთ ზუსტი ქვედა საზღვარი. ეს საზღვარია ნული.

ამრიგად, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს $A = \{r \mid 0 < r \leq 1\}$ აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი, $\sup A = 1$, აქვს ზუსტი ქვედა საზღვარი, $\inf A = 0$, რომელთაგანაც $\sup A \in A$, $\inf A \notin A$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა შემოსაზღვრულ სიმრავლეს ყოველთვის არა აქვს რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში ზუსტი ქვედა ან ზუსტი ზედა საზღვარი. ამისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არსებობს ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლე, რომელსაც არა აქვს რაციონალური ზუსტი ზედა საზღვარი.

დამტკიცება. ავიღოთ ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვების სიმრავლე, რომელთა კვადრატი 2-ს არ აღემატება $A = \{r \mid r^2 \leq 2\}$. ეს სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია რიცხვით 2: $2^2 = 4 > 2$.

ვაჩვენოთ, რომ არ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს ისეთი წილადი $\frac{p}{q}$, p და q -ს საერთო მამრავლი არა აქვთ, და $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

აქედან $p^2 = 2q^2$. მაშასადამე, p ლუწია, $p = 2p_1$. თუ ამ სიდიდეს ჩავსვამთ p -ს ადგილზე აღებულ წილადში, გვექნება $(2p_1)^2 = 2q^2$. საიდანაც $q^2 = 2p_1^2$.

ეს კი გვიჩვენებს: $q=2q_1$. მივიღოთ: p -სა და q -ს აქვთ საერთო მამრავლი 2. ეს კი დაშვებას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, არ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრეტი ორის ტოლია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ A სიმრავლეში არჩეულ r რიცხვზე მეტი რიცხვი არსებობს, რომლის კვადრეტი 2-ზე ნაკლებია. ავიღოთ რიცხვი $r_1 = r + \frac{1}{n}$, სადაც n რომელიმე, ჯერჯერობით ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. პირობა $r_1^2 < 2$ ასე ჩავწერთ:

$$\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2. \quad (1)$$

ამ უტოლობიდან მივიღებთ

$$r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 \iff \frac{1}{n} \left(2r + \frac{1}{n}\right) < 2 - r^2,$$

საიდანაც

$$n > \frac{2r + \frac{1}{n}}{2 - r^2} \quad (2)$$

თუ n -ს ისე ავირჩევთ, რომ

$$n > \frac{2r + 1}{2 - r^2},$$

(n -ის არჩევა შეიძლება), მაშინ შესრულდება (2) უტოლობა და, მით უმეტეს, (1) უტოლობა. ამგვარად, როგორც გინდა იყოს A სიმრავლის r რიცხვი, ყოველთვის მოიძებნება მასზე მეტი r_1 რიცხვი, რომლის კვადრეტი 2-ზე ნაკლებია. ე. ი. A სიმრავლეში არ არსებობს ზუსტი ზედა საზღვარი. ამით დავამტკიცეთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არსებობს ისეთი ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლე, რომელსაც არა აქვს რაციონალური ზუსტი ზედა საზღვარი.

ახლა გავცნოთ უწყვეტად დალაგებულ სიმრავლის ცნებას.

დალაგებულ X სიმრავლეს ეწოდება უწყვეტად დალაგებული სიმრავლე, თუ ამ სიმრავლის ყველა ზემოდან შემოსაზღვრული Y ქვესიმრავლეს X სიმრავლეში აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი.

ცხადია, უწყვეტად დალაგებული სიმრავლე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ქვემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვრის საშუალებით.

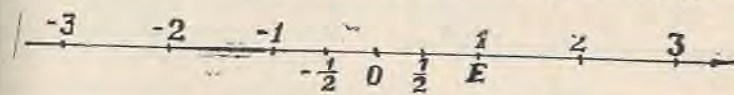
მე-2 თეორემის თანახმად რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არ წარმოადგენს უწყვეტად დალაგებულ სიმრავლეს. ამის გამო საჭიროა რაცი-

ონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე გავაფართოოთ ისეთ მინიმალურ R სიმრავლედ, რომელიც შეიცავს Q სიმრავლეს, R სიმრავლის ელემენტებზე მოქმედებანი და დალაგების მიმართება განისაზღვრებოდეს Q სიმრავლეში განსაზღვრული აქსიომებით, მაგრამ R სიმრავლეში დამატებით ისეთი აქსიომები უნდა სრულდებოდეს, რომლების საშუალებით დამტკიცდება: R სიმრავლეში ზემოდან შემოსაზღვრულ ყოველ სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი.

Q სიმრავლის ყველა შესაძლო გაფართოებიდან R სიმრავლე მინიმალურია, თუ R სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე M , რომელიც შეიცავს Q სიმრავლეს და R სიმრავლის ყოველ ზემოდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს თავისი ზუსტი ზედა საზღვრით, ემთხვევა R სიმრავლეს.

რაციონალურ რიცხვთა გაფართოების აუცილებლობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ ცხადად, თუ რაციონალურ რიცხვებს ავსახავთ წრფეზე წერტილებით.

ავიღოთ წრფე (ნახ. 1). წრფეზე აღვნიშნოთ რაიმე წერტილი. ეს წერტილი მივიღოთ საწყის წერტილად და ამ წერტილს დავაწეროთ 0.



ნახ. 1

წრფეზე 0 წერტილიდან მარჯვნივ მიმართულება მივიღოთ დადებითი მიმართულებად. შემდეგ, წრფეზე ავიღოთ რაიმე მონაკვეთი OE და მივიღოთ ამ მონაკვეთის სიგრძე 1-ის ტოლად. გადავზომოთ მიმდევრობით OE -ს ტოლი მონაკვეთები 0 წერტილიდან მარჯვნივ და მიღებულ წერტილებს დავაწეროთ 1, 2, 3, ... იგივე OE -ს ტოლი მონაკვეთები გადავზომოთ 0 წერტილიდან მარცხნივ და მიღებულ წერტილებს დავაწეროთ -1, -2, -3, ... ახლა ავიღოთ რაიმე ნატურალური რიცხვი q და OE

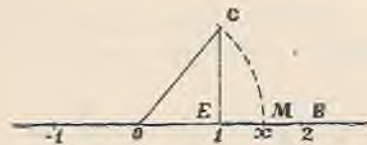
მონაკვეთის $\frac{1}{q}$ ნაწილი გადავზომოთ მარჯვნივ და მარცხნივ, ამ გადაზომვით მივიღებთ წერტილებს, რომელთაც შეესაბამება რიცხვები: $\pm \frac{1}{q}, \pm \frac{2}{q}, \dots, \pm \frac{p}{q}$, სადაც p ნატურალური რიცხვია. თუ p და q მივიღებთ ყველა მარტივი რიცხვის მნიშვნელობას, ასეთი გადაზომვით მივიღებთ ყველა წილადის $\pm \frac{p}{q}$ -ს შესაბამის წერტილს. ამგვარად, წრფეზე ავაგებთ წერტილებს, რომელთაც რაციონალური რიცხვები შეესაბამე-

ბათ. ამ წერტილებს რაციონალური წერტილები ვუწოდოთ.

წრფეს, რომელზედაც არჩეულია საწყისი წერტილი, დადებითი მიმართულება და ერთეული მონაკვეთი, ეწოდება რიცხვთა ღერძი.

ამგვარად, რიცხვთა ღერძზე აღწერილი წესით ყოველ რაციონალურ რიცხვს შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი. მაგრამ მცდარი იქნება, თუ ვიფიქრებთ: რიცხვითი ღერძის ყოველ წერტილს შეესაბამება რაიმე რაციონალური რიცხვი, რომელიც გამოსახავს მანძილს საწყისი წერტილიდან ამ წერტილამდე. ვაჩვენოთ, რომ წრფეზე არსებობს წერტილი, რომელსაც არ შეესაბამება რაციონალური რიცხვი.

განვიხილოთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტი ერთეული მონაკვეთია (ნახ. 2). გადავზომოთ საწყისი 0 წერტილიდან ამ სამკუთხედის ჰიპოტენუზა რიცხვით ღერძზე. ღერძზე მივიღებთ რომელიმე წერტილს. ეს წერტილი M ასოთი აღვნიშნოთ. ცხადია, $OM^2 = OC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.



ნახ. 2

M წერტილის შესაბამისი რიცხვი x ისეთია, რომ $x^2 = 2$. ზემოთ დავამტკიცეთ: არ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია, ამრიგად, რიცხვთა ღერძის M წერტილს რაციონალური რიცხვი არ შეესაბამება. რიცხვთა ღერძზე არარაციონალური წერტილების რაოდენობა რაგინდ დიდია. მაგალითად, OM მონაკვეთის გადაზომით რიცხვთა ღერძზე საწყისი 0 წერტილიდან არარაციონალურ წერტილებს მივიღებთ. ასევე, OM მონაკვეთის ნებისმიერ n ნაწილად გაყოფით, სადაც n ნატურალური რიცხვია, მივიღებთ არარაციონალურ წერტილებს. მაშასადამე, რაციონალური წერტილები რიცხვთა ღერძს სულმთლიანად — მიჯრით არ ავსებენ.

7. თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა. წინა პუნქტში ვაჩვენეთ: ვანტოლებას $x^2 = 2$ არა აქვს რაციონალური რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი, $x = \sqrt{2}$ არ არის რაციონალური რიცხვი. ავიღოთ რიცხვთა შუალედი $[1; 2]$. ამ შუალედშია მოთავსებული x , $1 < x < 2$, რადგანაც $1^2 < x^2 < 2^2$. $[1; 2]$ შუალედის სიგრძე აღვნიშნოთ Δ_1 -ით, $\Delta_1 = |[1; 2]| = 2 - 1 = 1$.

ახლა ავიღოთ რიცხვები: 1, 0; 1, 1; 1, 2; ...; 1, 9; 2, 0. ამ რიცხვების შემოწმება მოგვცემს

$$1,4^2 < 2 < 1,5^2.$$

$\sqrt{2}$ -ის მნიშვნელობად შეგვიძლია ავიღოთ 1,4-იც და 1,5-იც. შუალედის $[1,4; 1,5]$ სიგრძე $\Delta_2 = 1,5 - 1,4 = 10^{-1}$.

თუ ავიღებთ რიცხვებს 1, 41; 1, 42; ...; 1, 49, ამ რიცხვების კვადრატ-ში ახარისხებით დავადგენთ

$$1,41^2 < 2 < 1,42^2.$$

აქ $\Delta_3 = 10^{-2}$. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$1,4142136^2 < 2 < 1,4142137^2.$$

ამ პროცესის უსასრულოდ გაგრძელებით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$x = 1,4142136 \dots$$

ეს წილადი პერიოდული არაა. ეს წილადი რომ პერიოდული იყოს, მივიღებდით x რაციონალურ რიცხვს, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. ეს კი შეუძლებელია. ამგვარად, x უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით გამოისახება.

ჩვენ განვიხილეთ სიმრავლეები $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$, $\{x | 1,4 \leq x \leq 1,5\}$, ... ამ სიმრავლეებს სეგმენტებს უწოდებენ. განხილული რაციონალური სეგმენტები (სეგმენტის ბოლო წერტილები რაციონალური რიცხვებით გამოისახება)

$$[1; 2] \supset [1,4; 1,5] \supset [1,41; 1,42] \supset \dots$$

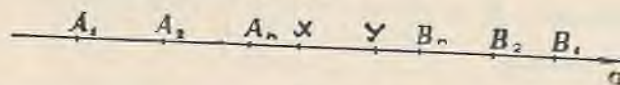
ერთადერთ წერტილს განსაზღვრავს. ამ წერტილის შესაბამისი არარაციონალური რიცხვი $\sqrt{2}$ -ით აღვნიშნოთ, $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$.

განვიხილოთ სეგმენტები ზოგადად ასე აღვნიშნოთ $[A_n, B_n]$, $n=1, 2, \dots$ ამ სეგმენტებს აქვთ შემდეგი თვისებები:

1) ყოველი წინა სეგმენტი მომდევნო სეგმენტს შეიცავს

$$[A_n, B_n] \supset [A_{n+1}, B_{n+1}], \quad n=1, 2, \dots$$

2) n იმდენად დიდი შეგვიძლია ავიღოთ, რომ სეგმენტის $[A_n, B_n]$ სიგრძე $\Delta_n = 10^{-n}$ ნებისმიერ რიცხვზე ნაკლები გახდება.



ნახ. 3

ამ პირობებში არსებობს მხოლოდ ერთი წერტილი, რომელიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის. მართლაც, თუ არსებობს ორი X და Y წერტილი, რომლებიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის (ნახ. 3), მაშინ რომელიმე

n -სათვის $[A_n, B_n] \supset [X, Y]$ და $\Delta_n \geq |[X, Y]|$ არ შეიძლება ნებისმიერ რიცხვზე ნაკლები გახდეს. ეს კი ეწინააღმდეგება მე-2 პირობას.

ფაქტიურად $[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots$ სეგმენტების მიმართ გამოვიყენეთ

კანტორის აქსიომა: ვთქვათ, რომელიმე a წრფეზე აღებულია $[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots$ სეგმენტების მიმდევრობა, რომელთაგან ყოველი წინა სეგმენტი მომდევნოს მოიცავს, $[A_n, B_n] \supset [A_{n+1}, B_{n+1}]$, ამასთან არ არსებობს სეგმენტი, რომელიც მდებარეობს აღებული მიმდევრობის ყველა სეგმენტის შიგნით, მაშინ არსებობს ისეთი X წერტილი, რომელიც $[A_1, A_2], [A_2, A_3], \dots$ მიმდევრობის ყველა სეგმენტზე მდებარეობს.

ამ აქსიომიდან გამომდინარეობს, რომ A_n წერტილები X წერტილის ერთი მხრიდან უახლოვდებიან, ხოლო B_n წერტილები მეორე მხრიდან. ამასთან X წერტილი ერთადერთია. მართლაც, თუ ორი X და Y წერტილი არსებობს, რომლებიც ყველა სეგმენტზე მდებარეობენ, მაშინ X და Y წერტილებს შორის მოთავსებული წერტილებიც ყველა სეგმენტზე მდებარეობენ; A_n წერტილი გამოყოფილია ყველა B_n წერტილებსაგან X და Y წერტილებით. მაშასადამე, $[X, Y]$ სეგმენტი ყველა სეგმენტზე მდებარეობს, რაც აქსიომას ეწინააღმდეგება.

სეგმენტთა ისეთ მიმდევრობას, რომელიც კანტორის აქსიომის პირობებს აკმაყოფილებს, ეწოდება თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა ან კანტორის სეგმენტთა მიმდევრობა.

რომ დაგვედგინა, M წერტილი რაციონალური იყო თუ არარაციონალური (ნახ. 2), გეომეტრიულად შემდეგი მოქმედება ჩავატარეთ. ჯერ დავადგინეთ, რომ M წერტილი მდებარეობს E -სა და B წერტილს შორის ($OB = 2 \cdot OE$)

$$1 \cdot OE < OM < 2 \cdot OE, \text{ ანუ } 1 < x < 2.$$

შემდეგ OB მონაკვეთი გავყავით 10 კონგრუენტულ — ტოლ ნაწილად. გამოვარკვეთ, რომელ მონაკვეთს ეკუთვნოდა M წერტილი. აღმოჩნდა

$$14 \cdot \frac{OE}{10} < OM < 15 \cdot \frac{OE}{10} \text{ ანუ } 1,4 < x < 1,5.$$

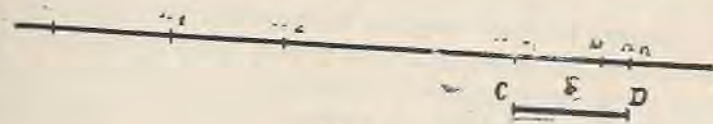
შემდეგ მონაკვეთი $\left[14 \cdot \frac{OE}{10}, 15 \cdot \frac{OE}{10} \right]$ კიდევ გავყავით 10 ტოლ ნაწილად და აღმოჩნდა

$$141 \cdot \frac{OE}{10^2} < OM < 142 \cdot \frac{OE}{10^2}, \text{ ანუ } 1,41 < x < 1,42$$

და ა. შ.

თუ დავაკვირდებით ჩატარებულ მსჯელობას, შევამჩნევთ, რომ ვისარგებლეთ შემდეგი აქსიომით:

არქიმედეს აქსიომა: თუ AB და CD ორი რომელიმე მონაკვეთთა, მაშინ AB წრფეზე არსებობს ისეთი $A_1, A_2, \dots, A_n$ წერტილების სასრულო რიცხვი (ნახ. 4), რომლებიც დასაგებული არიან ისე, რომ A_1 წერტილი მდებარეობს A და A_2 წერტილებს შორის, A_2 წერტილი მდებარეობს A_1 და A_3 წერტილებს შორის და ა. შ. ამასთან $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ მონაკვეთები CD მონაკვეთის კონგრუენტულია და B წერტილი მდებარეობს A და A_n -ს შორის.



ნახ. 4

თუ რაიმე მონაკვეთს ერთეულად მივიღებთ (სიგრძის ერთეული), არქიმედეს აქსიომა საშუალებას იძლევა ყოველ მონაკვეთს ცალსახად შევუსაბამოთ რაღაც რიცხვი, რომელსაც მონაკვეთის სიგრძე ეწოდება. თუ მონაკვეთის ერთი ბოლო წერტილი 0 წერტილშია, ხოლო მეორე ბოლო წერტილი M წერტილში (ნახ. 5), OM მონაკვეთის სიგრძით განვსაზღვრავთ M წერტილის შესაბამის რიცხვს x , რომელსაც რიცხვთა ლერძზე M წერტილის კოორდინატი ეწოდება. x რომ M წერტილის კოორდინატი, ასე ჩავწერთ: $M(x)$.

შესაძლებელი რომ იყოს შესაბამებული შესაბამისობის $x \leftrightarrow M$

დადგენა, უნდა გამოვიყენოთ კანტორის აქსიომა. თუ ავარჩევთ

საოპერაციო OE მონაკვეთს, რომლის სიგრძე ერთეულის ტოლად ჩავთვალოთ, მაშინ კანტორის აქსიომის საშუალებას იძლევა, ყოველ

დადებით რიცხვს შევუსაბამოთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძეც ეს რიცხვია.

ამგვარად, არქიმედეს და კანტორის აქსიომათა საფუძველზე დავადგინოთ, რომ რიცხვთა ლერძის M წერტილსა და სათანადო x რიცხვს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $x \leftrightarrow M$.

თუ OE მონაკვეთის მაგივრად რაიმე y სიდიდეს (მაგალითად, ამ მონაკვეთის სიგრძეს) ავიღებთ, ხოლო OM მონაკვეთის მაგივრად M წერტილის x კოორდინატს, მაშინ არქიმედეს აქსიომა ასე ჩამოყალიბდება:

როგორც გინდა იყოს $y > 0$ და x რიცხვები, არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი n , რომ $(n-1)y \leq x < ny$.

იმის გამო, რომ რიცხვთა ლერძის წერტილებსა და შესაბამის x რიცხვებს შორის არსებობს ცალსახა დამოკიდებულება $M \leftrightarrow x$, კანტორის

აქსიომის საშუალებას იძლევა, ყოველ დადებით რიცხვს შევუსაბამოთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძეც ეს რიცხვია.

ამგვარად, არქიმედეს და კანტორის აქსიომათა საფუძველზე დავადგინოთ, რომ რიცხვთა ლერძის M წერტილსა და სათანადო x რიცხვს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $x \leftrightarrow M$.

თუ OE მონაკვეთის მაგივრად რაიმე y სიდიდეს (მაგალითად, ამ მონაკვეთის სიგრძეს) ავიღებთ, ხოლო OM მონაკვეთის მაგივრად M წერტილის x კოორდინატს, მაშინ არქიმედეს აქსიომა ასე ჩამოყალიბდება:

როგორც გინდა იყოს $y > 0$ და x რიცხვები, არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი n , რომ $(n-1)y \leq x < ny$.

იმის გამო, რომ რიცხვთა ლერძის წერტილებსა და შესაბამის x რიცხვებს შორის არსებობს ცალსახა დამოკიდებულება $M \leftrightarrow x$, კანტორის



ნახ. 5

რის აქსიომა ასეც ჩამოყალიბდება: თუ გვაქვს სეგმენტთა მიმდევრობა $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots$ რომელთაგან ყოველი წინა სეგმენტი მომდევნოს შეიცავს, $[x_n, y_n] \supset [x_{n+1}, y_{n+1}]$, და არ არსებობს ორი x და y რიცხვი, $x \neq y$, რომლებიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნიან, მაშინ არსებობს ისეთი x რიცხვი, რომელიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის.

§ 2. ნამდვილ რიცხვთა სისტემა

1. ნამდვილ რიცხვთა სისტემა. ზემოთ განხილული რიცხვითი სისტემები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ნამდვილ რიცხვთა სისტემა. ახლა უკვე კერძოდ კი არ განვსაზღვრავთ რომელიმე ნამდვილ რიცხვს, როგორც განვსაზღვრეთ არარაციონალური — რაციონალური რიცხვი $\sqrt{2}$, არამედ მთლიანად განვსაზღვრავთ ნამდვილ რიცხვთა სისტემას, როგორც ელემენტთა სიმრავლეს, სადაც სრულდება სათანადო მოქმედებანი და მიმართება. მოქმედებანი და მიმართების თვისებები მოქმედებანი და მიმართება. მოქმედებანი და მიმართების თვისებები მოქმედებანი და მიმართება.

ნამდვილ რიცხვთა სისტემა¹ ეწოდება $x, y, z, \dots$ ელემენტთა R სიმრავლეს, თუ ამ სიმრავლის ელემენტებისათვის განსაზღვრულია შემდეგი მოქმედებანი, დალაგების მიმართება და უწყვეტობა:

I. შეკრების მოქმედება: ელემენტთა ყოველ x და y წყვილს შეესაბამება ერთადერთი z ელემენტი R სიმრავლიდან, რომელსაც ეწოდება x და y ელემენტთა ჯამი და აღინიშნება $x+y$ -ით; ისე, რომ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) $x+y = y+x$ — შეკრების გადანაცვლებადობის აქსიომა;

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ — შეკრების ჯუფთებადობის აქსიომა;

3) R სიმრავლეში არსებობს ისეთი ელემენტი 0 (ნული), რომ ყოველი x -ათვის R სიმრავლიდან

$$x+0 = x;$$

4) R სიმრავლის x ელემენტისათვის არსებობს ისეთი y ელემენტი, რომელსაც x -ის მოპირდაპირე ელემენტი ეწოდება, რომ

$$x+y = 0,$$

$$y = 0 - x = 0 + (-x) = (-x) + 0 = -x.$$

II. გათავლების მოქმედება: ელემენტთა ყოველ x და y წყვილს R სიმრავლიდან შეესაბამება ერთადერთი z ელემენტი R სიმრავლიდან; რომელსაც ეწოდება x და y ელემენტთა ნამრავლი და აღინიშნება xy -ით; ისე, რომ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) $xy = yx$ — გამრავლების გადანაცვლებადობის აქსიომა;

2) $(xy)z = x(yz)$, $\forall z \in R$, გამრავლების ჯუფთებადობის აქსიომა; ამ აქსიომით გამოსახულებას xyz აქვს ცალსახა მნიშვნელობა.

3) R სიმრავლეში არსებობს ისეთი ელემენტი 1 (ერთეული), რომ ყოველი x -ათვის R სიმრავლიდან $x \cdot 1 = x$;

4) R სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის, $x \neq 0$, R სიმრავლეში არსებობს u ელემენტი, რომელსაც x ელემენტის შებრუნებული ელემენტი ეწოდება, ისეთი, რომ $xu = 1$; ელემენტი u ასე ჩაიწერება:

$$u = \frac{1}{x}, \quad x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

$y \cdot \frac{1}{x}$ ნამრავლი $\frac{y}{x}$ წილადით ჩაიწერება, $y \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x}$.

5) ყოველი x, y, z ელემენტისათვის R სიმრავლიდან ჭეშმარიტია ტოლობა $(x+y)z = xz+yz$ — გამრავლების შეკრების მიმართ განრიგებადობის აქსიომა;

III. დალაგების მიმართება: ყოველი ორი x და y ელემენტისათვის R სიმრავლიდან ჭეშმარიტია $x \leq y$ ან $y \leq x$ ისე, რომ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) ყოველი x ელემენტისათვის R სიმრავლიდან $x \leq x$ — დალაგების მიმართების რეფლექსურობის აქსიომა. თუ $x \leq y$ და $y \leq x$, მაშინ $y = x$.

2) თუ $x \leq y$, $y \leq z$, მაშინ $x \leq z$ — დალაგების მიმართების ტრანზიტულობის აქსიომა;

3) თუ $x \leq y$, მაშინ ყოველი z ელემენტისათვის R სიმრავლიდან $x+z \leq y+z$ — დალაგების მიმართების შეკრების მიმართ მონოტონურობის აქსიომა;

4) თუ $0 \leq x$, $0 \leq y$, მაშინ $0 \leq xy$ — დალაგების მიმართების გამრავლების მიმართ მონოტონურობის აქსიომა;

IV. უწყვეტად დალაგების მიმართება: R სიმრავლის ელემენტებს შორის ისეთი დამოკიდებულებაა, რომ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) ყოველი $y > 0$ და x ელემენტებისათვის არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი n , რომ $(n-1)y \leq x < ny$ — არქიმედეს აქსიომა;

¹ Г. Е. Шиллов, Математический анализ, функции одного переменного, части 1—2, М., 1969, т. I.

სადაც

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

მაშასადამე, $\{[a_n, b_n]\}$ მიმდევრობა თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობაა, ამიტომ კანტორის, აქსიომის ძალით არსებობს ერთადერთი ელემენტი, რომელიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის. ვთქვათ, ეს ელემენტი L ,

$$a_n \leq L \leq b_n.$$

დავამტკიცოთ, რომ L არის E სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. ვთქვათ, L არ არის E სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს სხვა ელემენტი L' , რომელიც L -ზე ნაკლებია და არაა ნაკლები E სიმრავლის ელემენტებზე.

$L - L' \neq 0$, ამიტომ შეგვიძლია n იმდენად დიდი ავიღოთ, რომ

$$b_n - a_n < L - L'. \quad (1)$$

მაგრამ $L \leq b_n$. თუ (1) უტოლობაში L -ს შევცვლით b_n -ით, უტოლობა გაძლიერდება,

$$b_n - a_n < b_n - L',$$

საიდანაც

$$a_n > L'$$

ეს კი, L' -ის განსაზღვრის თანახმად, შეუძლებელია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ E სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არაა L -ზე მეტი.

ვთქვათ, $a' \in E$ და $a' > L$. რადგანაც $a' - L \neq 0$, ამიტომ შეგვიძლია n იმდენად დიდი ავიღოთ, რომ

$$b_n - a_n < a' - L. \quad (2)$$

მაგრამ $a_n \leq L$. თუ (2) უტოლობაში L -ს შევცვლით a_n -ით, უტოლობა გაძლიერდება,

$$b_n - a_n < a' - a_n,$$

საიდანაც

$$a' > b_n.$$

ეს კი b_n -ის განსაზღვრას ეწინააღმდეგება, b_n მეტია E სიმრავლის ყოველ ელემენტზე.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ყოველ ქვემოთაა ნიშნავს, რომ არსებობს სხვა ელემენტი L' , რომელიც L -ზე ნაკლებია და არაა ნაკლები E სიმრავლის ელემენტებზე.

თეორემა 2. თუ $y > 1$ და $x > 0$, მაშინ არსებობს ისეთი მთელი მაჩვენებელი n , რომ

$$y^{n-1} \leq x < y^n. \quad (3)$$

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ $y > 1$ -სათვის ყველა მთელი p რიცხვისათვის $y^p \leq x$. განვიხილოთ სიმრავლე $A = \{y^p \mid y^p \leq x, p \in \mathbb{Z}\}$. ეს სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ 1-ლი თეორემის თანახმად ნამდვილ რიცხვთა A სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი, $\sup A = \xi$. ე. ი. ყველა მთელი p რიცხვისათვის $y^p \leq \xi$. რადგანაც $y > 1$, მაშინ $\frac{\xi}{y} < \xi$ და

$\frac{\xi}{y}$ უკვე აღარ იქნება A სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. ამის გამო არ-

სებობს A სიმრავლეში ისეთი y^p ელემენტი, რომელიც მეტია $\frac{\xi}{y}$ -ზე, ე. ი.

$\frac{\xi}{y} < y^p$. საიდანაც $\xi < y^{p+1}$. მაშასადამე, ξ არ არის A სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ არსებობს ისეთი p მთელი რიცხვი, რომ $y^p > x$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი q , რომ $y^q < x$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო: რომ ყველა მთელი q რიცხვისათვის $y^q \geq x$. განვიხილოთ სიმრავლე $A = \{y^q \mid y^q \geq x, q \in \mathbb{Z}\}$. მაშინ არსებობს A სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი $\inf A = \xi$. ცხადია, ყველა q მთელი რიცხვისათვის $y^q \geq \xi$. რადგანაც $y > 1$, მაშინ $y\xi > \xi$ და $y\xi$ უკვე აღარ იქნება A სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი. მაშინ არსებობს A სიმრავლეში ისეთი ელემენტი y^q , რომ $y^q < y\xi$, საიდანაც $y^{q-1} < \xi$. მაშასადამე, ξ არ არის A სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს:

არსებობს ისეთი q მთელი რიცხვი, რომლისათვისაც $y^q < x$.

ამგვარად, არსებობს ისეთი მთელი რიცხვები q და p , რომ

$$y^q < x < y^p.$$

ამ უტოლობიდან, ცხადია, $q \leq p$.

ახლა შევადგინოთ მთელ რიცხვთა წყვილები $(q, q+1)$, $(q+1, q+2)$, ..., $(p-1, p)$. ამ წყვილებში მოინახება ისეთი $(n-1, n)$ წყვილი, რომ

$$y^{n-1} \leq x < y^n. \quad (4)$$

ამით თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 3. თუ $x > 0$, $y > 0$, მაშინ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n , რომ $\frac{x}{n} < y$.

დამტკიცება: ჯერ არქიმედის აქსიომაში მივიღოთ $y=1$. გვექნება

$$n-1 \leq x < n,$$

სადაც n გარკვეული მთელი რიცხვია. პირობის თანახმად $x > 0$, $y > 0$.

მაშასადამე, $\frac{x}{y} > 0$. ამ სიდიდისათვის გამოვიყენოთ უკანასკნელი უტოლობა,

გვექნება $\frac{x}{y} < n$, სადაც n ნატურალური რიცხვია. ეს უტოლობა გავამრავ-

ლოთ $\frac{y}{n}$ -ზე, მივიღებთ $\frac{x}{n} < y$. ამით თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს: ნებისმიერი $x > 0$ -სათვის

$$\inf \left\{ \frac{x}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\} = 0. \quad (5)$$

მართლაც, ამ სიმრავლის ყველა ელემენტი დადებითია. მაშასადამე, ამ სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი უარყოფითი არ იქნება. მაგრამ მე-3 თეორემით ზუსტი ქვედა საზღვარი არც დადებითი იქნება, რადგანაც $\frac{x}{n}$ ნაკლებია ნებისმიერ დადებით რიცხვზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ (5) ტოლობა ჭეშმარიტია.

მე-3 თეორემიდან აგრეთვე გამომდინარეობს შემდეგი: ნახევარსებ-მენტთა სისტემის

$$\left] 0, x \right[\supset \left] 0, \frac{x}{2} \right[\supset \dots \supset \left] 0, \frac{x}{n} \right[\supset \dots, \quad (6)$$

სადაც $x > 0$, გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

მართლაც, აღებულ ნახევარსებმენტთა სისტემას საერთო რიცხვი არ შეიძლება 0-საგან განსხვავებული ჰქონდეს, რადგანაც $\frac{x}{n}$ ნებისმიერ დადებით რიცხვზე ნაკლებია, მაგრამ 0 არ ეკუთვნის აღებულ შუალედ-თა სისტემას. მაშასადამე, (6) შუალედთა სისტემის გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

ასევე, ცხადია, შუალედთა სისტემის

$$\left] a, a+x \right[\supset \left] a, a+\frac{x}{2} \right[\supset \dots \supset \left] a, a+\frac{x}{n} \right[\supset \dots \quad (7)$$

გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

2. თვლის ათობითი სისტემით ნამდვილი რიცხვის ჩაწერა. თვლის ათობითი სისტემის ნიშნებია (ციფრებია) 0, 1, ..., 9. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი მხოლოდ ამ ნიშნებით ჩაიწერება.

დავუშვათ, $9+1$ ასე ჩაიწერება: 10. ავიღოთ $x > 0$, მაშინ მე-2 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი p მთელი რიცხვი, რომ

$$10^p \leq x < 10^{p+1}. \quad (8)$$

ავიღოთ რიცხვთა წყვილები

$$(1 \cdot 10^p, 2 \cdot 10^p), (2 \cdot 10^p, 3 \cdot 10^p), \dots, (9 \cdot 10^p, 10 \cdot 10^p).$$

ამ წყვილების შემოწმებით მივიღებთ, რომ, რომელიმე მნიშვნელობისათვის 1, 2, ..., 9-დან (8) უტოლობა ჭეშმარიტია. ეს მნიშვნელობა θ_0 -ით აღვნიშნოთ,

$$\theta_0 \cdot 10^p \leq x < (\theta_0 + 1) \cdot 10^p.$$

ამ უტოლობის ყველა წევრს დავუმატოთ $-\theta_0 \cdot 10^p$, მივიღებთ

$$0 \leq x - \theta_0 \cdot 10^p < 10^p. \quad (9)$$

ახლა ავიღოთ რიცხვთა წყვილები

$$(0 \cdot 10^{p-1}, 1 \cdot 10^{p-1}), (1 \cdot 10^{p-1}, 2 \cdot 10^{p-1}), \dots, (9 \cdot 10^{p-1}, 10 \cdot 10^{p-1}).$$

შემოწმებით მივიღებთ, რომ რომელიმე მნიშვნელობისათვის 0, 1, ..., 9-დან (9) უტოლობა ჭეშმარიტია. ეს მნიშვნელობა აღვნიშნოთ θ_1 -ით,

$$\theta_1 \cdot 10^{p-1} \leq x - \theta_0 \cdot 10^p < (\theta_1 + 1) \cdot 10^{p-1},$$

საიდანაც

$$\theta_0 \cdot 10^p + \theta_1 \cdot 10^{p-1} \leq x < \theta_0 \cdot 10^p + (\theta_1 + 1) \cdot 10^{p-1}.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$\theta_0 \cdot 10^p + \theta_1 \cdot 10^{p-1} + \dots + \theta_q \cdot 10^{p-q} \leq x < \theta_0 \cdot 10^p + \theta_1 \cdot 10^{p-1} + \dots + (\theta_q + 1) \cdot 10^{p-q}. \quad (10)$$

ეს პროცესი შეგვიძლია უსასრულოდ გავაგრძელოთ. (8) ასე ჩაიწეროთ:

$$\theta_0 \theta_1 \dots \theta_p, \theta_{p+1} \dots \theta_{p+k} \leq x < \theta_0 \theta_1 \dots \theta_p, \theta_{p+1} \dots (\theta_{p+k} + 1), \quad (11)$$

სადაც θ_p, θ_{p+1} -ს შორის მოვათავსეთ მძიმე, რაც გვიჩვენებს x -ის იმ ნაწილს, სადაც 10-ის ხარისხის მაჩვენებელი $p \geq 0$.

თუ $p < 0$, მაგალითად, $p = -t$, $t > 0$, მაშინ პირველი $\theta_1 \neq 0$ ნიშნის წინ დაწეროთ t რაოდენობის ნულებს, სადაც თავიდან ამ ნულებში მძიმით ერთ ნულს გამოვყოფთ. მაგალითად, 0,00 $\theta_3 \theta_4 \dots$, $\theta_3 \neq 0$. ამგვარად, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ციფრთა მიმდევრობა

$$\theta_0 \theta_1 \dots \theta_p, \theta_{p+1} \dots \theta_{p+k} \dots$$

θ_0 და θ_1 განსაზღვრულია უტოლობებიდან

$$\theta_0 10^p \leq x < (\theta_0 + 1) 10^p,$$

$$\theta_0 10^p + \theta_1 10^{p-1} \leq x < \theta_0 10^p + (\theta_1 + 1) 10^{p-1}$$

და ა. შ.

აღებული x რიცხვი (11) უტოლობით ასე ჩაიწერება:

$$x = \theta_0 \theta_1 \dots \theta_p \theta_{p+1} \dots$$

სადაც $\theta_0, \theta_1, \dots$ ციფრებია, რომლებიც ლეზულობენ $0, 1, \dots, 9$ მნიშვნელობებს.

ამგვარად, ვაჩვენეთ: ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი $0, 1; \dots, 9$ ნიშნებით შეიძლება ჩაიწეროს.

ცხადია, შეგვიძლია ავიღოთ თვლის ნებისმიერი სისტემა g ფუძით. სადაც ციფრები იქნება: $0, 1, 2, \dots, g-1$. თუ $g=2$, მაშინ ციფრები იქნება 0 და 1 . რიცხვი ორი სიმბოლურად ასე ჩაიწერება: 10 . თვლის ორობით სისტემაში რიცხვი ხუთი ასე ჩაიწერება: 101 . რიცხვი ექვსი ასე ჩაიწერება: 110 . რიცხვი $10, 01$ ორობით სისტემაში აღნიშნავს რიცხვს

$$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}.$$

დავუბრუნდეთ თვლის ათობით სისტემას.

ყოველი რაციონალური რიცხვი, მაგალითად $5, \frac{7}{3}, \frac{9}{1000}$ თვლის

ათობით სისტემაში ასე ჩაიწერება:

$$5 = 5,00\dots,$$

$$\frac{7}{3} = 2,33\dots,$$

$$\frac{9}{10^3} = 0,00900\dots$$

ვაჩვენოთ, რომ (11) სიმბოლოებში არ შეიძლება რომელიმე ადგილიდან სულ ცხრიანები იყოს მოთავსებული.

მართლაც, თუ მძიმედან n ციფრის შემდეგ (11) გამოსახულებაში სულ 9 -იანებია, მაშინ გვექნებოდა

$$a + 9 \cdot 10^{-n} \leq x < a + (9 + 1) 10^{-n} = a + 10^{-(n-1)},$$

$$a + 9 \cdot 10^{-n} + 9 \cdot 10^{-n-1} \leq x < a + 9 \cdot 10^{-n} + (9 + 1) 10^{-n-1} =$$

$$= a + 9 \cdot 10^{-n} + 10^{-n} = a + (9 + 1) 10^{-n} = a + 10^{-(n-1)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a + 9 \cdot 10^{-n} + 9 \cdot 10^{-n-1} + \dots + 9 \cdot 10^{-n-k} \leq x < a + 10^{-(n-1)}$$

და ა. შ.

ამ შუალედებს აქვთ (7) თვისება. ეს კი გვიჩვენებს

$$[a + 9 \cdot 10^{-n}, a + 10^{-n+1}] \supset [a + 9 \cdot 10^{-n} + 9 \cdot 10^{-n-1}, a + 6 \cdot 10^{-n+1}] \supset \dots$$

და ამ შუალედების გადაკვეთის წერტილთა სიმრავლე ცარიელია. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ციფრთა ნებისმიერი მიმდევრობა, სადაც მძიმე გარკვეულ ადგილასაა მოთავსებული, ყველა ციფრი ნული არაა და მძიმედან რაგინდ დაშორებული ციფრები ცხრიანებისაგან განსხვავებულია, გამოსახავს ნამდვილ რიცხვს.

ზოგადობას არ დავარღვევთ, თუ ავიღებთ ციფრების შემდეგ გამოსახულებას:

$$\theta_0 \theta_1 \dots \theta_p, \theta_{p+1} \theta_{p+2} \dots \theta_{p+q} \dots \quad (13)$$

ვთქვათ, θ_m ნულისაგან განსხვავებული პირველი ციფრია (13) გამოსახულებაში.

θ_m იმყოფება ან მძიმედან მარჯვნივ $q \geq 1$ ციფრის შემდეგ, ან მძიმედან მარცხნივ s ციფრის შემდეგ, $s = -q, q < 0$.

დავუშვათ,

$$\xi = \sup_k \{ \theta_m 10^q + \theta_{m+1} 10^{q-1} + \dots + \theta_{m+k} 10^{q-k} \}. \quad (14)$$

ვაჩვენოთ: თუ ამ რიცხვს თვლის ათობითი სისტემით ჩავწერთ, მივიღებთ (13) გამოსახულებას.

ავიღოთ რაიმე ფიქსირებული s და შევარჩიოთ $r > s$ ისე, რომ $\theta_{m+r} \leq 8$. და, ვთქვათ, $k > r$.

გამოვთვალოთ შემდეგი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი

$$\begin{aligned} & \theta_{m+s+1} 10^{q-(s+1)} + \dots + \theta_{m+r} 10^{q-r} + \dots + \theta_{m+k} 10^{q-k} \leq \\ & \leq 9 \cdot 10^{q-(s+1)} + \dots + 9 \cdot 10^{q-r} + \dots + 9 \cdot 10^{q-k} = 10^{q-r} = \\ & = 9 \cdot \frac{10^{q-(s+1)} - 10^{q-(k+1)}}{1 - 10^{-1}} - 10^{q-r} < 10^{q-s} - 10^{q-r}, \end{aligned}$$

ამის გამო (14) მოგვცემს

$$\begin{aligned} \xi &= \sup_k \{ \theta_m 10^q + \theta_{m+1} 10^{q-1} + \dots + \theta_{m+s} 10^{q-s} + \dots + \theta_{m+k} 10^{q-k} \} \leq \\ & \leq \theta_m 10^q + \theta_{m+1} 10^{q-1} + \dots + \theta_{m+s} 10^{q-s} + 10^{q-s} - 10^{q-r} < \\ & < \theta_m 10^q + \theta_{m+1} 10^{q-1} + \dots + (\theta_{m+s} + 1) 10^{q-s}. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$\begin{aligned} \theta_m 10^q + \theta_{m+1} 10^{q-1} + \dots + \theta_{m+s} 10^{q-s} &\leq \xi < \theta_m 10^q + \\ &+ \theta_{m+1} 10^{q-1} + \dots + (\theta_{m+s} + 1) 10^{q-s}, \end{aligned}$$

მივცეთ s -ს მნიშვნელობანი $0, 1, 2, \dots$ და მხედველობაში მივიღოთ p -სა და m -ს შორის დამოკიდებულება. დავასკენით, რომ (14) რიცხვი თვლის ათობითი სისტემით (13) სახით წარმოიდგინება.

მართლაც, $s = 0$ -სათვის გვექნება

$$\theta_m 10^q \leq \xi < (\theta_m + 1) 10^q,$$

საიდანაც $\theta_m = \theta_0$ და $q = p$.

$s = 1$ -სათვის გვექნება

$$\theta_m 10^q + \theta_{m+1} 10^{q-1} \leq \xi < \theta_m 10^q + (\theta_{m+1} + 1) 10^{q-1},$$

საიდანაც $\theta_{m+1} = \theta_1$ და ა. შ.

თუ $\xi < 0$, მაშინ განვიხილავთ $-\xi$, რაც განსაზღვრის თანახმად არსებობს. გვექნება

$$\xi = -\theta_0 \theta_1 \dots \theta_p, \theta_{p+1} \dots$$

თუ $\xi = 0$, მაშინ, დავუშვათ,

$$\xi = 0,00 \dots$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ: ყოველი ნამდვილი რიცხვი წარმოიდგინება თვლის ათობით სისტემაში ერთადერთი (13) გამოსახულებით და ნებისმიერი ათწილადი ნიშნების მიმდევრობა, სადაც მძიმე გარკვეულ ადგილასაა მოთავსებული, ერთადერთ ნამდვილ რიცხვს გამოსახავს.

ცხადია, ასეთი დასკვნა შეგვიძლია გავაკეთოთ თვლის ნებისმიერი $g \geq 2$ სისტემისათვისაც.

3. ნებისმიერი დადებითი რიცხვიდან მთელი დადებითი ხარისხის ფესვის არსებობა. ინდუქციის მეთოდით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$(x+a)^n = x^n + n x^{n-1} a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} a^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-(n-1))}{1 \cdot 2 \dots n} a^n. \quad (15)$$

(იხ. მე-4 თავი).

ვისარგებლოთ ამ ფორმულით და დავამტკიცოთ:

თეორემა 1. ნებისმიერი x დადებითი ნამდვილი რიცხვისათვის და ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ერთადერთი y დადებითი ნამდვილი რიცხვი, რომ $y^n = x$.

ეს y რიცხვი ასე აღინიშნება: $\sqrt[n]{x}$ (n ხარისხის ფესვი x რიცხვიდან).

დამტკიცება: განვიხილოთ სიმრავლე $A = \{z \mid z^n \leq x\}$. ეს სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან. თუ $x \leq 1$, მაშინ $z \leq 1$; თუ $x > 1$, მაშინ $z < x$.

დავუშვათ,

$$y = \sup A.$$

ვაჩვენოთ, რომ $y^n = x$.

(16)

ვთქვათ, $y^n < x$. დავამტკიცოთ, რომ ეს უტოლობა კეშმარტი არაა. განვიხილოთ სხვაობა $x - y^n = \varepsilon$. ნებისმიერი $h \leq 1$ -სათვის (15) ფორმულით გვექნება:

$$\begin{aligned} (y+h)^n &= y^n + n y^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2} h^2 + \dots + h^n = \\ &= y^n + h \left[n y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2} h + \dots + h^{n-1} \right] \leq \\ &\leq y^n + h \left[n y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2} + \dots + 1 \right] = \\ &= y^n + h [(y+1)^n - y^n]. \end{aligned}$$

h შეგვიძლია ავიღოთ $\frac{\varepsilon}{(y+1)^n - y^n}$ -ზე ნაკლები, მაშინ

$$(y+h)^n \leq y^n + \varepsilon = x$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა y -ის განსაზღვრის მიმართ (16).

მაშასადამე, $y^n > x$. ვთქვათ, $y^n > x$, $y^n - x = \varepsilon$.

ნებისმიერი $h \leq 1$ -სათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} (y-h)^n &= y^n - n y^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2} h^2 - \dots \pm h^n = \\ &= y^n - h \left[n y^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2} h + \dots \right] \geq \\ &\geq y^n - h \left[n y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2} + \dots \right] = \\ &= y^n - h [(y+1)^n - y^n]. \end{aligned}$$

თუ ავიღებთ

$$h < \frac{\varepsilon}{(y+1)^n - y^n},$$

მაშინ

$$(y-h)^n \geq y^n - \varepsilon = x.$$

რაც ავრთვე ეწინააღმდეგება (16) განსაზღვრას.

4. კომლამე

მაშასადამე, $y^n = x$ კეშმარიტია. y -ის ერთადერთობა გამოდინარეობს იქიდან, რომ, თუ გვექნებოდა ორი მნიშვნელობა $y_1^n = x$ $y_2^n = x$ და $0 < y_1 < y_2$, მაშინ $y_1^n < y_2^n$.

ნამდვილი დადებითი რიცხვიდან $n > 0$ მთელი ხარისხის ფესვის განსაზღვრის შემდეგ ადვილი საჩვენებელია

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}.$$

მართლაც, ვთქვათ $\sqrt[n]{x} = \alpha$, $\sqrt[n]{y} = \beta$, მაშინ $x = \alpha^n$, $y = \beta^n$ და $xy = \alpha^n \beta^n$. მაგრამ $(\alpha\beta)^n = \alpha^n \beta^n = xy = \gamma^n$, საიდანაც $\gamma = \alpha\beta$ ანუ $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$.

ასევე დამტკიცდება, ნებისმიერი m, n — ნატურალური რიცხვები — სათვის და $x > 0$ ნამდვილი რიცხვისათვის

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}.$$

4. გაფართოებულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. უმაღლეს მათემატიკაში ფუნქციების შესწავლისას საჭირო ხდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს დაემატოთ ორი არასაკუთრივი ელემენტი $+\infty$ (პლუს უსასრულობა) და $-\infty$ (მინუს უსასრულობა), რომლებიც, განსაზღვრის ძალით, აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) ყოველი x ნამდვილი რიცხვისათვის $-\infty < x < +\infty$.

ამ პირობის საფუძველზე ვწერთ $-\infty < +\infty$.

2) ყოველი x ნამდვილი რიცხვისათვის.

$$(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty; (-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty;$$

$$(\pm\infty) \cdot x = x(\pm\infty) = \pm\infty, \text{ თუ } x > 0;$$

$$(\pm\infty) \cdot x = x(\pm\infty) = \mp\infty, \text{ თუ } x < 0.$$

$$3) (+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, რომელიც შევსებულია $+\infty$ და $-\infty$ ელემენტებით, გაფართოებულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, ანუ გაფართოებულ რიცხვთა ღერძს უწოდებენ და აღნიშნავენ $\bar{R}$ -ით.

§ 3. ნამდვილი რიცხვის მოდული

ავიღოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ორი ელემენტი x და y . ვთქვათ, $x \leq y$. x -ს ეწოდება x და y ელემენტებიდან მინიმალური და აღინიშნება $x = \min\{x, y\}$, ხოლო y -ს მაქსიმალური და აღინიშნება $y = \max\{x, y\}$.

ით. ინლუქციით განისაზღვრება ნებისმიერი სასრული $x_1, x_2, \dots, x_n$ ელემენტებიდან მინიმალური ელემენტი $\min\{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ და მაქსიმალური ელემენტი

$$\max\{\max\{x_1, \dots, x_{n-1}\}, x_n\} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

x ელემენტის მოდული, ანუ აბსოლუტური მნიშვნელობა ეწოდება $\max\{x, -x\}$ და აღინიშნება $|x|$ -ით. ცხადია,

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

თუ განვიხილავთ არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს $R_1 = \{x | x \geq 0, x \in R\}$, მაშინ განსაზღვრის თანახმად x -ის მოდული არის ფუნქცია $|x| : R \rightarrow R_1$ ნებისმიერი x -სათვის $|x|$ არაუარყოფითია; $|-x| = |x|$.

$$x \leq |x|, \quad -|x| \leq x,$$

საიდანაც

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

მაშასადამე, მართებულია

თეორემა 1. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერი x ელემენტი აკმაყოფილებს უტოლობას

$$-|x| \leq x \leq |x|. \quad (1)$$

თუ (1) უტოლობის ყველა წევრს დაემატებთ y -ს, $y \in R$, მივიღებთ

$$-|x| + y \leq x + y \leq |x| + y. \quad (2)$$

ახლა ავიღოთ უტოლობა $-|y| \leq y$ და ამ უტოლობის ორივე ნაწილს დაემატოთ $-|x|$, მივიღებთ

$$-|x| - |y| \leq -|x| + y. \quad (3)$$

(2) და (3) უტოლობების შედარება მოგვცემს $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + y$. თუ ამ უტოლობაში y -ს შევცვლით $|y|$ -ით, $y \leq |y|$, უტოლობა გაძლიერდება:

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

ანუ

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|. \quad (4)$$

თუ $x + y \geq 0$, მაშინ $|x + y| = x + y$. ამის გამო (4) უტოლობა მოგვცემს

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (5)$$

თუ $x + y < 0$, მაშინ $|x + y| = -(x + y)$. ამის გამო (4) უტოლობა მოგვცემს

$$-(|x| + |y|) \leq -|x + y|,$$

საიდანაც მივიღებთ ისევ (5) უტოლობას. ეს კი გვიჩვენებს, რომ მართებულია

თეორემა 2. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერი x და y ელემენტის ჯამის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება შესაკრებთა აბსოლუტურ მნიშვნელობათა ჯამს.

ეს თეორემა ადვილად განზოგადდება შესაკრებთა სასრული რიცხვისათვის:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \quad (6)$$

განვიხილოთ გამოსახულება

$$x = (x - y) + y,$$

საიდანაც

$$|x| \leq |x - y| + |y|,$$

ანუ

$$|x| - |y| \leq |x - y|. \quad (7)$$

თუ x -სა და y -ს ადგილებს შევუცვლით, მივიღებთ

$$|y| - |x| \leq |y - x|. \quad (8)$$

(7) და (8) უტოლობებიდან ცხადია, რომ

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

ამგვარად, მართებულია

თეორემა 3. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერი x და y ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \quad (9)$$

ახლა ავიღოთ დამოკიდებულებანი:

$$|x| = \pm x, \quad |y| = \pm y.$$

ამ უტოლობათა სათანადო გადამრავლება მოგვცემს

$$|x| |y| = \pm xy. \quad (10)$$

აქედან გამომდინარეობს $\pm xy > 0$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ $\pm xy$ არის

xy -ის აბსოლუტური მნიშვნელობა, $|xy| = \pm xy$. ამის გამო (10) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$|xy| = |x| |y|. \quad (11)$$

ამგვარად, მართებულია

თეორემა 4. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერი x და y ელემენტის ნამრავლის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია თანამამრავლთა აბსოლუტურ მნიშვნელობათა ნამრავლისა.

ავიღოთ გამოსახულება $z = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$. აქედან გვექნება $x = yz$. ამ ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$|z| = \left| \frac{x}{y} \right|, \quad |x| = |y| |z|.$$

თუ ამ ორი ტოლობიდან $|z|$ -ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}. \quad (12)$$

ამგვარად, მართებულია

თეორემა 5. ნამდვილ რიცხვთა შეფარდების აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია მრიცხველის და მნიშვნელის აბსოლუტურ მნიშვნელობათა შეფარდებისა.

§ 4. კომპლექსური რიცხვთა სისტემა

1. კომპლექსური რიცხვთა სიმრავლე. როგორც ცნობილია, ყველა კვადრატულ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არ აქვს ამონახსნი. მაგალითად, უმარტივეს კვადრატულ განტოლებას $x^2 + 1 = 0$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არ აქვს ამონახსნი. ახლა შევისწავლით ისეთ სიმრავლეს, სადაც ადებულ განტოლებას აქვს ამონახსნი.

ავიღოთ ნამდვილი რიცხვების დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე $\{(a, b), (c, d), \dots\}$. ამ სიმრავლის ელემენტები აღვნიშნოთ ასოებით $\alpha, \beta, \dots$ წყვილთა ამ სიმრავლეში განვსაზღვროთ წყვილთა ტოლობა და შეკრება.

ორი დალაგებული წყვილი (a, b) და (c, d) ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$a = c, \quad b = d. \quad (1)$$

ორი დალაგებული წყვილის ჯამი $(a, b) + (c, d)$ ეწოდება წყვილს $(a + c, b + d)$,

$$\alpha + \beta = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \quad (2)$$

ვაჩვენოთ, რომ (2) ტოლობით განსაზღვრული შეკრება აკმაყოფილებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის შეკრების ყველა აქსიომას:

$$1) \alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

$$2) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

$$3) \text{ ყოველი ორი } \alpha \text{ და } \beta \text{ წყვილისათვის}$$

$$\alpha + z = \beta$$

განტოლებას აქვს ამონახსნი და მასთან ერთად ერთი.

მართლაც, ნამდვილ რიცხვთა წყვილების შეკრებისა და წყვილების ტოლობის განსაზღვრის თანახმად (a, b) და (x, y) წყვილებისათვის გვექნება

$$(a, b) + (x, y) = (c, d), \quad (3)$$

ანუ

$$(a + x, b + y) = (c, d),$$

საიდანაც

$$a + x = c, \quad b + y = d.$$

ამ განტოლებებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში აქვთ სათანადოდ ამონახსნები:

$$x = c - a, \quad y = d - b.$$

მაშასადამე, (x, y) წყვილი აკმაყოფილებს (3) ტოლობას და ეს წყვილი ერთადერთია.

ანევე დამტკიცდება პირველი და მეორე აქსიომის მართებულობა.

მე-3 აქსიომიდან გამომდინარეობს ნულ-წყვილის არსებობა $0 = (0, 0)$,

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

და ყოველი (a, b) წყვილისათვის მოპირდაპირე წყვილის არსებობა

$$(a, b) + (c, d) = (0, 0), \quad (c, d) = (-a, -b) = -(a, b).$$

ნამდვილი რიცხვების დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეში განვსაზღვროთ გამრავლება შემდეგი ტოლობით:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (4)$$

ვაჩვენოთ, რომ (4) ტოლობით განსაზღვრული წყვილების გამრავლება აკმაყოფილებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრული გამრავლების ყველა აქსიომას

$$4) \alpha\beta = \beta\alpha,$$

$$5) (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma),$$

6) არსებობს ერთადერთი წყვილი $(1, 0)$, რომელსაც აქვს თვისება

$$(a, b)(1, 0) = (a, b),$$

$$7) (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

8) ყოველი $\alpha = (a, b) \neq (0, 0)$ წყვილისათვის არსებობს ერთადერთი წყვილი (c, d) , ისეთი, რომ

$$(a, b)(c, d) = (1, 0).$$

(c, d) წყვილს (a, b) -ს შებრუნებული წყვილი ეწოდება.

ჩამოთვლილი აქსიომები ადვილი შესამოწმებელია.

შევამოწმოთ, მაგალითად, მე-8 აქსიომა.

ავიღოთ ნებისმიერი წყვილი $(a, b) \neq (0, 0)$ და შევადგინოთ წყვილი

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

სათანადოდ გამრავლება მოგვცემს

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) &= \\ &= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right) = \\ &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ba}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0). \end{aligned}$$

ნამდვილი რიცხვების წყვილთა სიმრავლეს, სადაც განსაზღვრულია წყვილთა ტოლობა (1) ტოლობით, წყვილთა შეკრება (2) ტოლობით) და გამრავლება (4) ტოლობით, ეწოდება კომპლექსური რიცხვთა სისტემა, ანუ კომპლექსური რიცხვთა ველი. კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა აღინიშნება $\mathbb{C}$ ასოთი.

შემდეგში, როდესაც ვიტყვით „კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე“, ვიგულისხმებთ კომპლექსურ რიცხვთა სისტემას.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ჩაერთვება ურთიერთცალსახად კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში შემდეგი ასახვით

$$x \mapsto (x, 0), \quad (5)$$

ამასთან უცვლელია შეკრებისა და გამრავლების მოქმედებანი, რადგანაც

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0), \quad (x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0).$$

ამის გამო კომპლექსურ რიცხვს $(x, 0)$ უწოდებენ ნამდვილ რიცხვს და წერენ

$$x = (x, 0). \quad (6)$$

ცხადია, კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრული ერთეული $e_1 = (1, 0)$ (6) აღნიშვნით მოგვცემს

$$e_1 = (1, 0) = 1. \quad (7)$$

ახლა განვიხილოთ კომპლექსური რიცხვი $e_2 = (0, 1)$. გამოვთვალოთ ამ რიცხვის კვადრეტი

$$e_2^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

საიდანაც

$$e_2^2 + 1 = 0.$$

ამგვარად, განტოლებას $x^2 + 1 = 0$ კომპლექსურ რიცხვთა ველში აქვს ამონახსნი $x = (0, 1)$. ეს კომპლექსური რიცხვი აღინიშნება i ასოთი,

$$i = (0, 1). \quad (8)$$

კომპლექსურ რიცხვს $(0, 1)$ ეწოდება წარმოსახვითი ერთეული. ამის გამო კომპლექსურ რიცხვს $(1, 0)$ ეწოდება ნამდვილი ერთეული.

თუ მხედველობაში მივიღებთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ნამდვილი ერთეულისა და წარმოსახვითი ერთეულის განსაზღვრას, ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვი (x, y) ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (1, 0) + (y, 0) + (0, 1) = x + iy.$$

(x, y) კომპლექსური რიცხვი z ასოთი აღვნიშნოთ, მაშინ

$$z = x + iy. \quad (9)$$

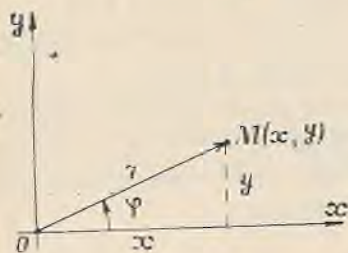
x -ს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი, ხოლო y -ს კომპლექსური რიცხვის წარმოსახვითი ნაწილი.

(9) გამოსახულებით წარმოდგენილ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება კომპლექსური რიცხვი ალგებრული სახით.

ავიღოთ მარჯვენა კოორდინატთა სისტემა Oxy (ნახ. 7), ამ სისტემაში კომპლექსურ რიცხვს (x, y) შევუსაბამოთ M წერტილი კოორდინატებით (x, y) . ცხადია, ამ მიმართებით (x, y) კომპლექსურ

რიცხვსა და M წერტილს შორის დამყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა

$$(x, y) \longleftrightarrow M.$$



ნახ. 7

ბუნებრივია, კომპლექსურ რიცხვთა სისტემას მივიღებთ, თუ განვიხილავთ xy სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლეს, სადაც განვსაზღვრავთ წერტილთა შეკრებას და გამრავლებას ზემოთ ჩამოთვლილი 8 აქსიომით.

M წერტილის მდებარეობა Oxy სიბრტყეზე ცალსახად განისაზღვრება OM რადიუს-ვექტორით, ანუ OM მონაკვეთის სიგრძით r და იმ φ კუთხით, რომელიც მოთავსებულია Ox ღერძის დადებით მიმართულებასა და კოორდინატთა სათავედან M წერტილისაკენ გატარებულ წრფეს შორის. რიცხვი r არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვია, იგი ნულის ტოლია მხოლოდ კოორდინატთა სათავეში. კუთხე φ ითვლება დადებითად, თუ იგი ათვლილია საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. როდესაც კუთხეები ერთიმეორისაგან განსხვავდებიან 2π -ის ჯერადით, მაშინ შესაბამისი წერტილები ერთიმეორეს ემთხვევიან. სიბრტყის წერტილთა სიმრავლისა და (r, φ) წყვილთა სიმრავლის ურთიერთცალსახობისათვის შევთანხმდეთ, რომ $0 \leq \varphi < 2\pi$.

ნახაზიდან ადვილი მისაღებია, რომ (x, y) და (r, φ) წყვილებს შორის ადვილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (10)$$

საიდანაც

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (11)$$

(9) და (10) ფორმულების საფუძველზე მივიღებთ

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ამ გამოსახულებას ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე. r -ს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის მოდული, $r = |z|$, ხოლო φ -ს კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი, $\varphi = \arg z$. მაგალითად,

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3}.$$

2. მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე. კომპლექსურ რიცხვთა შეკრება განისაზღვრება (2) ტოლობით,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \quad (13)$$

კომპლექსურ რიცხვთა გამოკლება განისაზღვრება მე-3 აქსიომის საფუძველზე:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i. \quad (14)$$

კომპლექსურ რიცხვთა გამრავლება განისაზღვრება (4) ტოლობით:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \quad (15)$$

$z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის შებრუნებული რიცხვი განისაზღვრება მე-8 აქსიომის საფუძველზე:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i. \quad (16)$$

ამ განსაზღვრით კომპლექსურ რიცხვთა გაყოფა მიიყვანება გამრავლებას:

$$\begin{aligned} \frac{c + di}{a + bi} &= (c + di) \frac{1}{a + bi} = (c + di) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \right) = \\ &= \left(\frac{ac}{a^2 + b^2} + \frac{bd}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{ad}{a^2 + b^2} - \frac{bc}{a^2 + b^2} i \right) = \\ &= \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i. \end{aligned} \quad (17)$$

$z = a + bi$ და $\bar{z} = a - bi$ რიცხვებს ეწოდება ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური რიცხვები. ურთიერთშეუღლებულ კომპლექსურ რიცხვთათვის, ცხადია,

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2a, \quad z - \bar{z} = 2bi, \\ z\bar{z} &= a^2 + b^2. \end{aligned} \quad (18)$$

აქედან z_1 და z_2 კომპლექსური რიცხვები ტრიგონომეტრიული სახით,

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

ამ რიცხვების გამრავლება მოგვცემს:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &+ i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)], \end{aligned}$$

ანუ

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (19)$$

ეს გამოსახულება გვიჩვენებს:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, \\ \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned} \quad (20)$$

z კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული $\bar{z}$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე იქნება

$$\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

ანუ

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z. \quad (21)$$

აღვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \\ \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

§ 5. კომპლექსური რიცხვის აბარისება.

მუ ა ბ რ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა

გამოვიდეთ განსაზღვრიდან:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1.$$

მაშინ გვექნება

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad (1)$$

სადაც k მთელი რიცხვია.

მაგალითად,

$$i^{13} = i^{4 \cdot 3 + 1} = i, \quad i^{-17} = i^{-20} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i.$$

წინა პარაგრაფის (20) გამოსახულებიდან ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \dots z_n &= r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + \\ &+ i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)]. \end{aligned} \quad (2)$$

თუ (2) ტოლობაში დავუშვებთ

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

გვექნება

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (3)$$

მიღებული ფორმულა მუავერის¹ სახელს ატარებს.

¹ ა ბ რ ა მ დ ე მ უ ა ვ რ ი (1667—1754), ინგლისელი მათემატიკოსი, წარმოშობით ფრანგი.

მუეერის ფორმულიდან ადვილად მიიღება ჯერადი კუთხის სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობანი მარტივი კუთხის სინუსისა და კოსინუსის საშუალებით.

მართლაც, თუ (3) ფორმულაში ჩავსვამთ $r=1$ და გამოვიყენებთ ნიუტონის ბინომის ფორმულას, გვექნება:

$$\begin{aligned} \cos n \varphi + i \sin n \varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos^n \varphi + i C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + \\ &+ i^2 C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + i^3 C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + i^4 C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + \\ &+ i^5 C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi + \dots + i^n \sin^n \varphi, \end{aligned}$$

ანუ

$$\begin{aligned} \cos n \varphi + i \sin n \varphi &= (\cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \\ &+ C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots) + i (C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \\ &+ C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots), \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\cos n \varphi = \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots \quad (4)$$

$$\sin n \varphi = C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots \quad (5)$$

მაგალითად,

$$\cos 4 \varphi = \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi,$$

$$\sin 4 \varphi = 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi.$$

§ 6. კომპლექსური რიცხვიდან n -ური ხარისხის ფუნქცია

ავიღოთ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული სახით $z=r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ და, ვთქვათ,

$$\sqrt[n]{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1)$$

ეს ნიშნავს

$$[\rho(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

მუეერის ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\rho^n(\cos n \theta + i \sin n \theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

საიდანაც

$$\rho^n = r, \quad n \theta = \varphi + 2 k \pi.$$

აქედან კი მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt[n]{r}, \\ \theta &= \frac{\varphi + 2 k \pi}{n}. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$\sqrt[n]{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2 \pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2 \pi k}{n} \right), \quad (2)$$

სადაც k მთელი რიცხვია.

ვაჩვენოთ, რომ (2) ტოლობიდან $\sqrt[n]{z}$ -ის ურთიერთგანსხვავებული მნიშვნელობანი მიიღება $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ -ისათვის.

მართლაც, ვთქვათ, $k=nq+s$, $0 \leq s \leq n-1$, მაშინ

$$\frac{\varphi + 2 \pi k}{n} = \frac{\varphi + 2 \pi (nq + s)}{n} = \frac{\varphi + 2 \pi s}{n} + 2 \pi q.$$

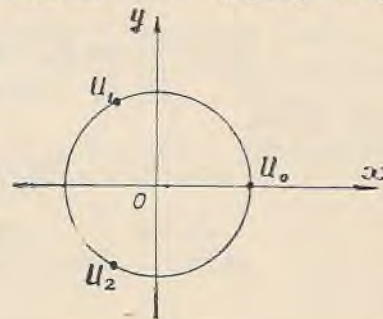
ე. ი. კომპლექსური რიცხვიდან n -ური ხარისხის ფუნქცია რაოდენობაა s , $0 \leq s \leq n-1$. (2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\sqrt[n]{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2 \pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2 \pi k}{n} \right), \quad (3)$$

$$k=0, 1, \dots, n-1.$$

ამგვარად, z კომპლექსური რიცხვიდან n -ური ხარისხის ფუნქციის ამოცანა ყოველთვის შეიძლება და ვღებულობთ n სხვადასხვა მნიშვნე-

ლობას, $\sqrt[n]{z} = u_k$, $k=0, 1, \dots, n-1$. ამ რიცხვებს ერთი და იგივე მოდული აქვთ. ამის გამო u_k წერტილები მოთავსდება ერთსა და იგივე წრეწირზე, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით $\sqrt[n]{r}$. წერტილები u_k წრეწირს გაყოფს n ტოლ ნაწილად (ნახ. 8; $n=3$).



ნახ. 8

ნამდვილი a რიცხვისათვის

$$a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

სადაც $\varphi=0$, თუ $a > 0$; $\varphi=\pi$, თუ $a < 0$, გვექნება

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\varphi + 2 \pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2 \pi k}{n} \right), \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

მაგალითად,

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2 \pi k}{2} + i \sin \frac{2 \pi k}{2}, \quad k=0, 1;$$

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2}, \quad k = 0, 1;$$

$$\varepsilon_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \quad \varepsilon_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{2} = -i$$

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§ 7. კომპლექსური რიცხვის მოდულის თვისებები

ვთქვათ, კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ტრიგონომეტრიული სახით

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

მაშინ

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)).$$

აქედან, ცხადია,

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2, \quad \arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2}, \quad \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \varphi_1 - \varphi_2,$$

ანუ

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad (1)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2. \quad (2)$$

მიღებული ფორმულების გეომეტრიული აზრი ადვილი წარმოსადგენია. მე-9 ნახაზზე ნაჩვენებია z_1 და z_2 კომპლექსურ რიცხვთა ნამრავლი, ხოლო მე-10 ნახაზზე კომპლექსურ რიცხვთა შეფარდება.

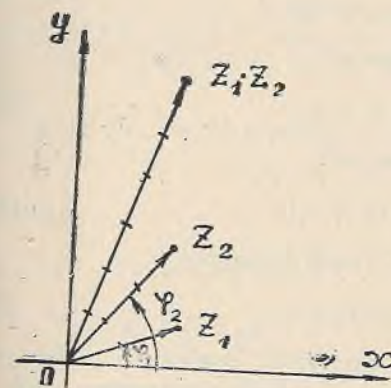
კომპლექსურ რიცხვთა ჯამის მოდული განესაზღვროთ კომპლექსურ რიცხვთა ტრიგონომეტრიული სახიდან:

$$z_1 + z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = R (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

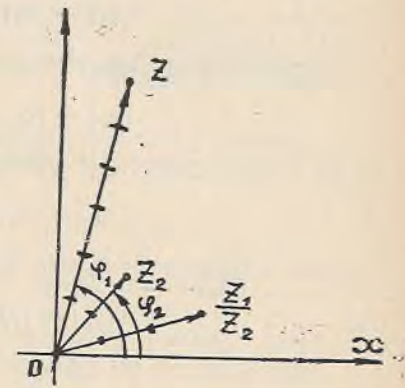
შევკრიბოთ სათანადოდ ამ კომპლექსური რიცხვების ნამდვილი ნაწილები და წარმოსახვითი ნაწილები ცალ-ცალკე:

$$r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2 = R \cos \varphi,$$

$$r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2 = R \sin \varphi.$$



ნახ. 9



ნახ. 10

გაშოვებული z_1 და z_2 კომპლექსური რიცხვების ჯამის მოდული R , ამისათვის პირველი ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $\cos \varphi$ -ზე, ხოლო მეორე ტოლობის ორივე ნაწილი $\sin \varphi$ -ზე და შევკრიბოთ,

$$r_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi + r_2 \cos \varphi_2 \cos \varphi + r_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi + r_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi = R \cos^2 \varphi + R \sin^2 \varphi,$$

ანუ

$$r_1 (\cos (\varphi_1 - \varphi) + \cos (\varphi_2 - \varphi)) = R. \quad (3)$$

რადგანაც

$$|\cos (\varphi_1 - \varphi)| \leq 1, \quad |\cos (\varphi_2 - \varphi)| \leq 1,$$

ნამდვილ რიცხვთა ჯამის მოდულის საფუძველზე (3) ტოლობა მოგვცემს

$$|r_1 \cos (\varphi_1 - \varphi) + r_2 \cos (\varphi_2 - \varphi)| \leq |r_1 \cos (\varphi_1 - \varphi)| + |r_2 \cos (\varphi_2 - \varphi)| \leq r_1 + r_2,$$

ანუ

$$R \leq r_1 + r_2.$$

ამგვარად,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (4)$$

მეორე მხრივ,

$$z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2).$$

რადგანაც $|-z_2| = |z_2|$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$|z_1| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|,$$

საიდანაც

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

სრულიად ასევე შეგვიძლია დავწეროთ

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 + z_1|. \quad (6)$$

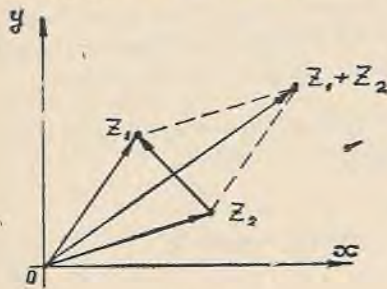
(5) და (6) უტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \quad (7)$$

თუ z_2 -ს შევცვლით $(-z_2)$ -ით, მაშინ (7)-დან მივიღებთ

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (8)$$

ცხადია, (4) და (8) უტოლობანი შეგვიძლია დავწეროთ საშუალო სკოლის გეომეტრიის კურსიდან ცნობილი სამკუთხედის გვერდთა თვისების საფუძველზე: სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი არაა ნაკლები მესამე გვერდის სიგრძეზე და ორი გვერდის სიგრძეთა სხვაობა არაა მეტი მესამე გვერდის სიგრძეზე. კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული წარმოდგენით კოორდინატთა სათავე და z_1, z_2 წერტილები წარმოადგენს სამკუთხედის წვეროებს (ნახ. 11). ამ სამკუთხედიდან ადვილად მივიღებთ (4) და (8) უტოლობებს.



ნახ. 11

კომპლექსურ რიცხვთა (4)

თვისება ადვილად განზოგადდება შესაყრებთა ორზე მეტი რიცხვისათვის:

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |(z_1 + z_2) + z_3| \leq |z_1 + z_2| + |z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

§ 8. კომპლექსური რიცხვის მარეკენალიანი სახით წარმოდგენა

განვიხილოთ გამოსახულება $z = x + iy$, სადაც x და y ნამდვილი ცვლადებია. ამ გამოსახულებას კომპლექსური ცვლადი

ეწოდება. ავიღოთ გამოსახულება $e^x (\cos y + i \sin y)$ და იგი აღვნიშნოთ e^z სიმბოლოთი

$$\left(e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2,718281 \dots \right),$$

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1)$$

თუ $y=0$, მაშინ $z=x$ ნამდვილი ცვლადია და (1) იძლევა ნამდვილი ცვლადის მაჩვენებლიან ფუნქციას. ამის გამო (1) გამოსახულებას ეწოდება მაჩვენებლიანი ფუნქცია კომპლექსური მაჩვენებლით.

ვაჩვენოთ, რომ (1) ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (2)$$

მართლაც,

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1 + iy_1} \cdot e^{x_2 + iy_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \times$$

$$\times e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{x_1 + x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} = e^{z_1 + z_2}.$$

მაჩვენებლიანი ფუნქცია ნული არ ხდება z -ის არც ერთი მნიშვნელობისათვის.

მართლაც, თუ (2) გამოსახულებაში ჩავსვათ $z_1 = z, z_2 = -z$, მაშინ

$$e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1.$$

საიდანაც

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ, თუ რომელიმე $z = z_0$ -სათვის $e^{z_0} = 0$, მაშინ e^{-z_0} გამოსახულებას აზრი არა აქვს, რაც შეუძლებელია, რადგან e^z ფუნქცია განსაზღვრულია z -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის და, კერძოდ, $z = -z_0$ მნიშვნელობისათვისაც.

(1) გამოსახულებაში ჩავსვათ $x = 0, y = \varphi$, მივიღებთ

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (3)$$

ამ ფორმულის საფუძველზე კომპლექსური რიცხვი ასე ჩაიწერება:

$$z = r e^{i\varphi}.$$

ეს ფორმულა იძლევა კომპლექსურ რიცხვს მაჩვენებლიანი სახით.

$\cos \varphi - i \sin \varphi$ კომპლექსური რიცხვის მაჩვენებლიანი სახე იქნება.

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi. \quad (5)$$

10. გ. კომლიძე

(3) და (5) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi,$$

საიდანაც

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}. \quad (6)$$

ასევე, (3) და (5) ტოლობების გამოკლებით მივიღებთ

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi,$$

საიდანაც

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (7)$$

(6) და (7) ფორმულები იძლევა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მაჩვენებლიანი ფუნქციით წარმოდგენას.

ზემოთ მიღებულ (3), (5), (6), (7) ფორმულებს ეილერის ფორმულები ეწოდება.

ამ საკითხს დაწვრილებით მჭკრივთა თეორიაში შევისწავლით.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 3.

1. დამტკიცეთ, რომ ყოველი მთელი რიცხვი ნატურალურ რიცხვთა სხვაობაა,

$(\forall a \in \mathbb{Z}) \exists k, l \in \mathbb{N} | a = k - l$. ამასთან $k - l = k' - l' \Rightarrow k + l' = k' + l$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: M იყოს $\mathbb{Z}$ მთელ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომლის ელემენტები ნატურალურ რიცხვთა სხვაობით გამოისახება:

$$1) \forall n \in \mathbb{N} | (n+1) - 1 \in M,$$

$$2) \forall a, b \in M \exists k, l, m, n \in \mathbb{N} | a = k - l \wedge b = m - n.$$

აქედან

$$a - b = (k - l) - (m - n) = (k + n) - (m + l) \in M.$$

თუ

$$\mathbb{Z} \setminus M = A \neq \emptyset, \text{ მაშინ } x \in A | x \neq m - n.$$

საიდანაც

$$x + n \neq m \in \mathbb{Z}.$$

ე. ი. $x + n$ არაა მთელი რიცხვი და ეკუთვნის $\mathbb{Z}$ -ს. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, $\mathbb{Z} \setminus M = \emptyset$.

ამოცანის მეორე ნაწილი მთელ რიცხვთა დალაგებულობის აქსიომებით დამტკიცდება.

2. აჩვენეთ, რომ $x^2 = 2y^2$ განტოლებას მთელ რიცხვებში მხოლოდ $(0, 0)$ ამონახსნი აქვს.

3. აჩვენეთ, რომ განტოლება $3x = 1$ არ ამოიხსნება მთელ რიცხვებში.

4. განტოლება $x^2 = 4y^2$ ამოხსენით მთელ რიცხვებში.

5. აჩვენეთ, რომ a მთელი რიცხვისათვის და b ნატურალური რიცხვისათვის მოინახება ერთადერთი წყვილი მთელი რიცხვებისა (q, r) , რომ შესრულდეს ტოლობა

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

6. ისარგებლეთ ნამდვილი რიცხვის უსასრულო ათწილადით წარმოდგენით და განსაზღვრეთ მოქმედებანი ნამდვილ რიცხვებზე.

მითითება: $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, $\beta = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$

1) $\alpha = \beta$, თუ $a_i = b_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$

2) $\alpha > \beta$, თუ არსებობს ისეთი k რიცხვი, რომ

$$a_i = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1; \quad a_k > b_k.$$

3) $\alpha + \beta = \gamma$, თუ $\forall n \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის

$$\underline{\alpha}_n + \underline{\beta}_n \leq \gamma_n < \overline{\alpha}_n + \overline{\beta}_n,$$

სადაც

$$\underline{\alpha}_n = a_0, a_1 \dots a_n; \quad \overline{\alpha}_n = \underline{\alpha}_n + 10^{-n}.$$

ასევე განსაზღვრეთ $\alpha \cdot \beta$; $\frac{1}{\beta}$; α^k ; $\sqrt[k]{\alpha}$; $k \in \mathbb{N}$.

7. დამტკიცეთ: α და β ნამდვილ რიცხვთა ჯამი არსებობს და განისაზღვრება ცალსახად.

მითითება: ისარგებლეთ კანტორის პრინციპით

$$[\underline{\alpha}_1 + \underline{\beta}_1, \overline{\alpha}_1 + \overline{\beta}_1] \supset [\underline{\alpha}_2 + \underline{\beta}_2, \overline{\alpha}_2 + \overline{\beta}_2] \supset \dots$$

$$|[\underline{\alpha}_n + \underline{\beta}_n, \overline{\alpha}_n + \overline{\beta}_n]| \rightarrow 0, \quad \gamma = \sup_{n \rightarrow \infty} (\underline{\alpha}_n + \underline{\beta}_n) = \inf_{n \rightarrow \infty} (\overline{\alpha}_n + \overline{\beta}_n).$$

8. დამტკიცეთ: ნამდვილ რიცხვთა ნამრავლი არსებობს და განისაზღვრება ცალსახად.

9. დამტკიცეთ: ნამდვილი რიცხვი მთელ დადებით ხარისხში არსებობს და განისაზღვრება ცალსახად.

10. დამტკიცეთ: α^β , $\alpha > 1$, $\beta > 1$ განისაზღვრება ტოლობით

$$\alpha^\beta = \sup \underline{\alpha}_k^{\underline{\beta}_n} = \inf \overline{\alpha}_k^{\overline{\beta}_n}.$$

მოითუება: $\alpha > 1$ და $\beta > 1$ -თვის გვექნება

$$\alpha_k^{\beta_n} \leq \alpha^\beta < \alpha_k^{\beta_n}.$$

11. შეასრულეთ მოქმედებანი:

1) $(2+3i) + (5-2i)$, 2) $(1-i) - (2+i)$, 3) $(3+2i)(4-i)$,
4) $(1+2i)^3$, 5) $(1-i)^4$, 6) $(2+i)^4$, 7) $(1-2i)^4$

8) $\frac{1}{1+i}$, 9) $\frac{1}{2-i}$, 10) $\frac{1}{1+i}$, 11) $\frac{1+i}{1-i}$,

12) $\frac{2-i}{2+i}$, 13) $\frac{1-2i}{1+2i}$, 14) $\frac{(1-i)^2}{(1+i)^3}$, 15) $\frac{(1+i)^3}{(2-i)^2}$.

12. ამოხსენით განტოლებანი:

1) $x^2 - 2x + 2 = 0$, 2) $x^2 - 6x + 10 = 0$,
3) $x^2 - 4x + 8 = 0$, 4) $x^2 + 8x + 41 = 0$.

13. ამოხსენით განტოლებანი, სადაც $z = x + iy$:

1) $z^2 + 2z + 2 = 0$, 2) $z^2 - 2z - 3 = 0$, 3) $z^2 + 2z + 10 = 0$.

14. წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული სახით შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:

1) $z = 2$, 2) $z = -2$, 3) $z = i$, 4) $z = -i$,
5) $z = 1 + i$, 6) $z = 1 - i$, 7) $z = 1 + \sqrt{3}i$,
8) $z = -1 + \sqrt{3}i$, 9) $z = -1 - \sqrt{3}i$, 10) $z = 2 - 2i$.

15. ააგეთ შემდეგი სიბრავლები:

1) $|z| \leq 2$, 2) $|z| > 2$, 3) $1 \leq |z| \leq 4$, 4) $2 \leq |z| \leq 4$, $-\pi \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$.

16. მიიყვანეთ ტრიგონომეტრიულ სახეზე და გამოთვალეთ:

1) $(1+i)^5$, 2) $(1-i)^4$, 3) $(\sqrt{3}+i)^3$, 4) $\sqrt[3]{1+i}$, 5) $\sqrt[4]{1-i}$.

17. ამოხსენით განტოლებანი:

1) $z^3 - 8 = 0$, 2) $z^3 + 8 = 0$, 3) $z^4 - 16 = 0$,
4) $z^4 + 16 = 0$, 5) $27z^3 - 8 = 0$, 6) $64z^3 - 27 = 0$.

თ ა ვ ი V

კომბინატორიკის ელემენტები

§ 1. კომბინატორიკის საბანი

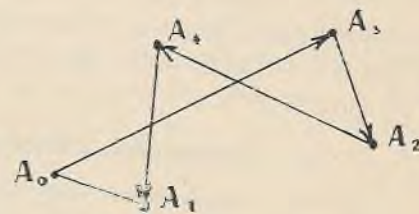
სხვადასხვა სპეციალობის მუშაკებს უხდებოდა განიხილონ ასოების, ციფრების და, საზოგადოდ, სხვადასხვა საგნების შეერთებანი (კორტეჟები, კომბინაციები). მაგალითად, საამქროს უფროსმა უნდა გაანაწილოს დაზვერვებზე სამუშაოები, ბრიგადირმა უნდა გაანაწილოს მიწის ნაკვეთები სხვადასხვა სასოფლო-სამეურნეო კულტურების დასათესად, სკოლის სასწავლო ნაწილის გამგემ უნდა შეადგინოს გაკვეთილების ცხრილი, ქიმიკოსმა უნდა შეადგინოს ქიმიური ელემენტებით ნაერთები და სხვ.

მათემატიკის იმ ნაწილს, რომელიც შეისწავლის საკითხებს, თუ რამდენი კომბინაცია შეიძლება შედგეს მოცემული საგნებისაგან ამა თუ იმ პირობით, ეწოდება კომბინატორიკა.

მაგალითად, კომბინატორიკა შეისწავლის ასეთ ამოცანას: პურის ქარხანა ამარაგებს ოთხ მალაზიას. ქარხანა მღებარეობს A_0 წერტილში, ხოლო მალაზიები A_1 , A_2 , A_3 , A_4 წერტილებში (ნახ. 1). A_1 -დან A_4 -მდე პურის მიტანის ხარჯები არის a_{ij} . როგორი მარშრუტი ავარჩიოთ, რომ ქარხნიდან გასულმა პურის მანქანამ უმცირესი დანახარჯებით მოამარაგოს ოთხივე მალაზია და დაბრუნდეს ქარხანაში.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად უნდა დავადგინოთ ყველა შესაძლო მარშრუტი, გამოვიანგარიშოთ მარშრუტებზე ხარჯები და ამ ხარჯებიდან უმცირესი. უმცირესი ხარჯების შესაბამისი მარშრუტი იქნება ამოცანის პასუხი.

კომბინატორიკა წარმოიშვა მე-16 საუკუნეში. საზოგადოების ზედა ფენები გატაცებული იყვნენ ბანქოსა და კამათლის თამაშით. თამაშობ-



ნახ. 1

დენე არა მარტო ოქროზე, ბრილიანტზე, ფულზე, არამედ სასახლეებზე, მამულებზე და სხვ. ცხადია, კომბინატორიკის პირველი ამოცანა იყო აზარტული თამაშების საკითხები: რამდენი ხერხით შეიძლება მივიღოთ დასახელებული ქულა კამათლის ორჯერ ან სამჯერ გაგორებით ან ბანქოს თამაშით. კამათლის თამაშით სხვადასხვა კომბინაციის რაოდენობას სწავლობდა იტალიელი მათემატიკოსი ტარტალია¹. მან შეადგინა სათანადო ცხრილები, თუ რამდენი შესაძლებლობით მიიღება კამათლებზე ქულათა r ჯამი. კომბინატორიკის თეორიული საფუძვლები შეისწავლეს პასკალმა² და ფერმა³. პასკალმა ამოხსნა ამოცანა: როგორ გავყოთ ფსონი მოთამაშეთა შორის, თუ ერთ მოთამაშეს მოგვებამდე დარჩა r პარტია, ხოლო მეორეს s პარტია. ეს ამოცანა პასკალს დაუსვა მისმა მეგობარმა, გატაცებულმა მოთამაშემ, დე მერე⁴.

კომბინატორიკის შემდეგი განვითარება დაკავშირებულია იაკ. ბერნული⁵, ლაიბნიცი⁶ და ეილერის⁷ სახელებთან. გოტფრიდ ვილჰელმ ლაიბნიცი ერთ-ერთი პირველთაგანი იყო, რომელმაც იხმარა სიტყვა „კომბინატორული“. ლაიბნიცი 20 წლის იყო, რომ გამოაქვეყნა „დისერტაცია კომბინატორულ ხელოვნებაზე“. ეს იყო 1666 წელს. ლაიბნიცი შენიშნავდა: კომბინატორიკა უნდა სწავლობდეს ერთგვაროვანსა და სხვადასხვას, მსგავსსა და არამსგავსს, აბსოლუტურსა და ფარდობითს, როცა ჩვეულებრივ მათემატიკა სწავლობს დიდსა და მცირეს, ერთეულსა და ბევრს, მთელსა და ნაწილს.

კომბინატორიკის მეთოდები ფართოდ გამოიყენება ეკონომიკაში: ტრანსპორტის ამოცანა, წარმოების გეგმის შედგენა, გამოთვლადი პრობლემების რეალიზაცია და ანალოგიური საკითხების გადაწყვეტა კომბინატორიკის მეთოდით წარმოებს. და, ბოლოს, კომბინატორიკა გამოიყენება ელექტრონულ გამოთვლელ მანქანებში.

§ 2. კომბინატორიკა განუყოფელია ელემენტარული

1. წყობანი. განვიხილოთ რაიმე $a, b, c, d, \dots$ ელემენტთა სიმრავლე M . M სიმრავლე შეგვიძლია შემდეგნაირად დავალაგოთ. $\{a, b, \dots, k, e\}$. ე. ი. დავალაგოთ ისე, რომ a ელემენტს მივანიჭეთ პირველი ადგილი, b ელემენტს მეორე ადგილი და ა. შ. ნებისმიერი სიმრავლე, რომლის ელემენტთა რიცხვი სასრულია, ყოველთვის შეგვიძლია დავალაგოთ: გადავწეროთ სიმრავლის ელემენტები რაიმე რიგით და თითოეულ ელემენტს

¹ ნიკოლო ტარტალია (1499—1557), იტალიელი მათემატიკოსი.

² ბლზე პასკალი (1623—1662), ფრანგი მათემატიკოსი.

³ პიერ ფერმა (1601—1665), ფრანგი მათემატიკოსი.

⁴ იაკობ ბერნული (1654—1705), შვეიცარიელი მათემატიკოსი (ბერნულეზი — შვეიცარიელ მეცნიერთა ოჯახი, რომელიც გადმოსახლდა პოლანდიდან).

⁵ გოტფრიდ ვილჰელმ ლაიბნიცი (1646—1716), გერმანელი მათემატიკოსი, ფილოსოფოსი, ლოგიკოსი, ფიზიკოსი, ისტორიკოსი, იურისტი და სხვ.

მიუწეროთ ის ნომერი, რომელი ადგილიც ელემენტს ამ რიგში უჭირავს. ცხადია, სიმრავლე, რომლის ელემენტთა რიცხვი 1-ზე მეტია, შეგვიძლია დავალაგოთ არა მარტო ერთი ხერხით (წესით). მაგალითად, სიმრავლე ელემენტებით a და b შეგვიძლია დავალაგოთ ორი ხერხით:

$$\{a, b\}, \{b, a\}.$$

ავილოთ M სიმრავლის დალაგებული ქვესიმრავლეები. მაგალითად, $M = \{a, b, c\}$ ამ სიმრავლის დალაგებული ორელემენტური ქვესიმრავლეები:

$$\{a, b\}, \{b, a\}, \{a, c\}, \{c, a\}, \{b, c\}, \{c, b\}. \quad (1)$$

ქვესიმრავლეები განსხვავდებიან ან ელემენტებით ან ქვესიმრავლეში ელემენტთა დალაგებით. (1) ქვესიმრავლეები ასე ჩაეწეროთ:

$$ab, ba, ac, ca, bc, cb.$$

ვთქვათ, M სიმრავლეში m ელემენტია. ავილოთ ამ სიმრავლის დალაგებული n -ელემენტური ქვესიმრავლეები, $n \leq m$.

m -ელემენტური სიმრავლის n -ელემენტური დალაგებული ქვესიმრავლეებს m ელემენტიდან n -ელემენტიანი წყობანი ეწოდება.

(1) სიმრავლეები სამი ელემენტიდან ორელემენტური წყობანია. როგორც (1) გვიჩვენებს: სამი ელემენტიდან ორელემენტური წყობათა რაოდენობაა 6.

განვიხილოთ მაგალითი: რამდენი ორციფრიანი რიცხვი შეგვიძლია შევადგინოთ 4 ნულისაგან განსხვავებული ციფრისაგან, სადაც ციფრები არ მეორდება.

ეს ციფრები აღვნიშნოთ a, b, c, d ასოებით. გვექნება სიმრავლე $\{a, b, c, d\}$. შევადგინოთ ამ სიმრავლის ელემენტებისაგან ორელემენტური დალაგებული ქვესიმრავლეები:

$$ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc.$$

შეგარად, ოთხი ნულისაგან განსხვავებული ციფრისაგან 12 ორციფრიანი (ორნიშნა) რიცხვის შედგენა შეიძლება. ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ აქ იმას კი არ გვეკითხებიან, თუ რა რიცხვების შედგენა შეიძლება, არამედ, იმას, თუ რამდენი ორნიშნა რიცხვების შედგენა შეიძლება 4 ციფრისგან. შეიძლებოდა ასეთი ამოცანა განგვეხილა: რამდენნაირად შეგვიძლია დავალაგოთ 4 წიგნი, თუ წიგნების თაროზე მხოლოდ 2 წიგნის ადგილია დარჩენილი. იმავე გამოთვლებით მივიღებთ, რომ 4 წიგნიდან თაროზე დარჩენილ ადგილზე 2 წიგნი შეიძლება მოთავსდეს 12 ხერხით. ამრიგად, M სიმრავლის m ელემენტიდან n -ელემენტიანი წყობათა რაოდენობა დამოკიდებულია არა M სიმრავლის

$a, b, \dots, l$ ელემენტებზე, არამედ M სიმრავლის ელემენტთა m რიცხვზე და დალაგებულ ქვესიმრავლეში ელემენტთა რაოდენობა n -ზე.

4 ელემენტიდან 2-ელემენტიან წყობათა რაოდენობა A_m^2 -ით აღინიშნება. გავივით m ელემენტისაგან n -ელემენტიან წყობათა რაოდენობა A_m^n . ვისარგებლოთ ინდუქციის მეთოდით.

M სიმრავლის m ელემენტთაგან 1-ელემენტიან წყობათა რაოდენობაა m ,

$$A_m^1 = m.$$

ახლა შევადგინოთ 2-ელემენტიანი წყობანი. ამისათვის M სიმრავლის პირველ ელემენტს, a -ს, მივუწეროთ მეორე ელემენტი b . შემდეგ იმავე a ელემენტს მივუწეროთ შემდეგი ელემენტი c და ა. შ. მივიღებთ

$$ab, ac, \dots, al.$$

ახლა ავიღოთ მეორე ელემენტი b და მას მივუწეროთ სხვა დანარჩენი ელემენტები M სიმრავლიდან, მივიღებთ

$$ba, bc, \dots, bl.$$

და ა. შ. ბოლოს მივიღებთ შემდეგ წყობებს

$$la, lb, \dots, lk.$$

ასე რომ, გვექნება შემდეგი წყობანი

$$ab, ac, \dots, al,$$

$$ba, bc, \dots, bl,$$

$$\dots$$

$$ka, kb, \dots, kl,$$

$$la, lb, \dots, lk$$

ამ ცხრილში m სტრიქონი და n სვეტია. სულ 2-ელემენტიანი წყობათა რიცხვია $m(m-1)$,

ანუ

$$A_m^2 = A_m^1 \cdot (m-1).$$

დავუშვათ, რომ

$$A_m^n = A_m^{n-1} \cdot (m - (n-1)).$$

ვაჩვენოთ

$$A_m^{n+1} = A_m^n (m - n).$$

მართლაც, M სიმრავლის m ელემენტისაგან შევადგინოთ $(n+1)$ -ელემენტიანი წყობანი. ამისათვის ავიღოთ M სიმრავლის m ელემენტისაგან

n -ელემენტიანი რომელიმე ერთი წყობა. მას მივუწეროთ M სიმრავლეში დარჩენილი $m-n$ ელემენტიდან თითო ელემენტი. მივიღებთ $m-n$ წყობას, სადაც თითო წყობაში $n+1$ ელემენტია. ასევე გავიმეორებთ A_m^n წყობიდან თითოეული წყობისათვის. მივიღებთ $A_m^n (m-n)$ წყობას. ამგვარად,

$$A_m^{n+1} = A_m^n (m - n).$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ ფორმულა

$$A_m^n = A_m^{n-1} (m - (n-1))$$

ქვეშარტიან ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის. თუ ამ ფორმულაში n -ს მივცემთ მნიშვნელობებს $n=1, 2, \dots, n-1$ მივიღებთ

$$A_m^1 = m, \quad A_m^2 = A_m^1 (m-1) = m(m-1), \quad A_m^3 = m(m-1)(m-2)$$

და ა. შ.

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1)). \quad (2)$$

მაგალითად, გამოვიანგარიშოთ, რამდენაირად შეიძლება კრების თავმჯდომარე და მდივანი ავირჩიოთ, თუ კრებას 25 კაცი ესწრება.

ამოცანის პირობის თანახმად $m=25$, $n=2$. ამიტომ გვექნება

$$A_{25}^2 = 25 \cdot 24 = 600.$$

ამრიგად, თუ კრებას 25 კაცი ესწრება, კრების თავმჯდომარე და მდივანი აირჩევა 600 ხერხით.

2. გადანაცვლებანი. ავიღოთ n ელემენტიანი $M=\{a, b, \dots, l\}$ სიმრავლე. ამ სიმრავლის ელემენტებისაგან შევადგინოთ დალაგებული n -ელემენტიანი ქვესიმრავლეები: $ab \dots l, ba \dots l, \dots$

n -ელემენტიანი M სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილ დალაგებულ n -ელემენტიან ქვესიმრავლეებს ეწოდება n -ელემენტიანი გადანაცვლებანი. ცხადია, ეს ქვესიმრავლეები განსხვავდებიან მხოლოდ ელემენტთა დალაგებით.

ამ განსაზღვრიდან, ცხადია, n ელემენტისაგან n -ელემენტიან წყობებს ეწოდება n -ელემენტიანი გადანაცვლებანი. n -ელემენტისაგან გადანაცვლებათა რიცხვი აღვნიშნოთ P_n -ით,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots 2 \cdot 1. \quad (3)$$

(3) ასეც ჩაიწერება

$$P_n = n!$$

და იკითხება „ n ფაქტორიალი“.

მაგალითად, a, b, c ელემენტებისაგან 3-ელემენტისადმი გადანაცვლებანი იქნება

$abc, acb, cab,$

$cba, bca, bac.$

სამი ელემენტისაგან შედგენილი გადანაცვლებათა რიცხვია $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. განვიხილოთ ამოცანები.

ამოცანა. რამდენი ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს 4 ციფრისაგან, რომელშიც ერთი 0-ია, ციფრების გამეორების გარეშე.

4 ციფრისაგან, თუ ციფრები ნულისაგან განსხვავებულია, შეიძლება დაიწეროს ოთხნიშნა რიცხვი $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. რადგანაც ამ 4 ციფრში ერთი ციფრი 0-ია, ის რიცხვები, რომლებიც 0-ით იწყება, სამნიშნაა. ასეთი რიცხვები ოთხნიშნა რიცხვებიდან უნდა გამოვრიცხოთ. ასეთი რიცხვების რაოდენობა კი არის $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. ამგვარად, 4 ციფრისაგან, რომელშიც ერთი ციფრი ნულია, შეიძლება დაიწეროს

$$P_4 - P_3 = 24 - 6 = 18$$

ოთხნიშნა რიცხვი, სადაც ციფრები გამეორებული არ იქნება.

თუ აღებულ 4 ციფრში ორი ციფრი 0-ია, მაშინ ოთხნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც ამ ციფრებით შეიძლება დაიწეროს, იქნება

$$P_4 - 2P_3 = 24 - 2 \cdot 6 = 12.$$

3. ჯუფთებანი. განვიხილოთ ამოცანა. რამდენი წრფის გატარება შეიძლება ოთხ A, B, C, D წერტილზე?

ცხადია, წრფეები განისაზღვრება $A, B; A, C; A, D; B, D; C, D$ წერტილებით. A, B და B, A წერტილები ერთსა და იმავე წრფეს განსაზღვრავს. ქვესიმრავლეები $\{A, B\}$ და $\{B, A\}$ ერთი და იგივე სიმრავლეა და ერთ ჯუფთებას განსაზღვრავს.

m -ელემენტისადმი სიმრავლის ნებისმიერ n -ელემენტისადმი ქვესიმრავლეს ეწოდება m ელემენტისაგან n -ელემენტისადმი ჯუფთება.

ამ განსაზღვრიდან ცხადია, ორი ჯუფთება განსხვავებულია, თუ ერთი ჯუფთება ერთ ელემენტს მაინც შეიცავს, რომელიც მეორეში არაა. მაგალითად, $\{a, b, c\}$ და $\{b, c, a\}$ ერთი და იგივე ჯუფთებაა, $\{a, b, c\}$ და $\{a, b, d\}$ სხვადასხვა ჯუფთებებია. n -ელემენტისადმი გადანაცვლებანი ერთ ჯუფთებას ქმნის.

მაგალითად, a, b, c ელემენტებისაგან შედგენილი გადანაცვლებანი

$abc, acb, cab, bac, bca, cba$

ერთ ჯუფთებას ქმნის.

m ელემენტისაგან n -ელემენტისადმი ყოველგვარ ჯუფთებათა რიცხვი აღენიშნოთ C_m^n -ით.

m ელემენტისაგან n -ელემენტისადმი ჯუფთებათა რიცხვის გამოთვლა შეიძლება შემდეგი მსჯელობით: ყოველი m ელემენტისაგან შედგენილი n -ელემენტისადმი ჯუფთება შეიძლება დავალაგოთ P_n ხერხით (n -ელემენტისადმი ყოველგვარი გადანაცვლება ერთ ჯუფთებას ქმნის). ამით მივიღებთ m ელემენტისაგან n -ელემენტისადმი ყოველგვარ წყობას:

$$C_m^n \cdot P_n = A_m^n,$$

საიდანაც

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}, \quad (4)$$

ანუ

$$C_m^n = \frac{m(m-1) \cdots [m-(n-1)]}{n!}. \quad (5)$$

თუ (5) გამოსახულების მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ $(m-n) \times (m-n-1) \cdots 2 \cdot 1$, მივიღებთ ჯუფთებათა რიცხვის შემდეგ ფორმულას:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \quad (6)$$

$n! = n(n-1)!$ ფორმულა რომ მართებული იყოს $n=1$ -სათვისაც, $1! = 1 \cdot 0!$, ბუნებრივია, დავუშვათ $0! = 1$, მაშინ გვექნება:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1, \quad C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1, \quad C_0^0 = \frac{0!}{0!0!} = 1. \quad (7)$$

(6) ფორმულაში n -ის მაგიერ თუ ჩავსვამთ $(m-n)$ -ს, მივიღებთ:

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}. \quad (8)$$

თუ (6) და (8) ფორმულებს შევადარებთ, გვექნება

$$C_m^n = C_m^{m-n}. \quad (9)$$

ვისარგებლოთ (6) ფორმულით და გამოვთვალოთ ჯამი $C_m^{n-1} + C_m^n$. გვექნება:

$$\begin{aligned} C_m^{n-1} + C_m^n &= \frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!} + \frac{m!}{n!(m-n)!} = \\ &= \frac{m!}{(n-1)!(m-n)!} \left(\frac{1}{m-n+1} + \frac{1}{n} \right) = \\ &= \frac{m!(m+1)}{(n-1)(m-n)!(m-n+1)n} = \frac{(m+1)!}{n!(m+1-n)!} = C_{m+1}^n \end{aligned}$$

ამგვარად, მივიღეთ შემდეგი ტოლობა:

$$C_m^{n-1} + C_m^n = C_{m+1}^n \quad (10)$$

დაუბრუნდეთ პირველ პარაგრაფში დასმულ ამოცანას.

ცხრილი 1

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_0	0	10	14	23	17
A_1	10	0	8	19	16
A_2	14	8	0	7	9
A_3	23	19	7	0	11
A_4	17	16	9	11	0

1234	1324	1342	1243	1423	1432
	2143	2413	2314	2134	
		3124	3214		

გამოვიანგარიშოთ თითოეულ მარშრუტზე ხარჯი.

ავილოთ, მაგალითად, გადანაცვლება 1342. ამ გადანაცვლებას შესაბამება მარშრუტი $A_0 A_1 A_3 A_4 A_2 A_0$. ამ მარშრუტის ხარჯი იქნება

$$a_{01} + a_{13} + a_{34} + a_{42} + a_{20} = 10 + 19 + 11 + 9 + 14 = 63$$

სრულიად ასე გამოვიანგარიშებთ ყველა მარშრუტის ხარჯებს. სათანადო მარშრუტებზე ხარჯების რაოდენობა მოცემულია მე-2 ცხრილში.

ცხრილი 2

მარშრუტი	1234	1324	1342	1243	1423	1432	2143	2413	2314	2134
ხარჯი	53	62	63	61	65	58	68	81	73	69
მარშრუტი	3124	3214								
ხარჯი	76	71								

ვთქვათ, მიმოსვლის ხარჯები უბნების მიხედვით ასეთია: $A_0 A_1$ -ზე $a_{01} = 10$, $A_1 A_2$ -ზე $a_{12} = 8$ და ა. შ. (მანეთებში) (ცხრილი 1).

რადგანაც მარშრუტი იწყება A_0 წერტილიდან და მთავრდება ისევ A_0 წერტილში, დაგვირდება გადანაცვლებანი მხოლოდ A_1, A_2, A_3, A_4 ელემენტებისა და, რადგანაც $a_{ij} = a_{ji}$, ამიტომ უნდა შევამოწმოთ $\frac{P_4}{2} = \frac{4!}{2}$

რაოდენობის გადანაცვლებანი. ნაცვლად, მაგალითად, $A_1 A_3 A_4 A_2$ გადანაცვლებისას ვწერთ 1342 გადანაცვლებას, გვექნება გადანაცვლებანი:

როგორც ცხრილი გვიჩვენებს, უმცირესი მნიშვნელობაა 1234 გადანაცვლებაზე—53. ამ გადანაცვლებას შესაბამება მარშრუტი $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_0$.
ამგვარად, ამოცანის პასუხია მარშრუტი $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_0$, რომელზედაც გადატანის ხარჯია 53.

§ 3. ნიუტონის ბინომის ფორმულა

1. ნიუტონის ბინომი. მიმდევრობით გამოვთვალოთ ბინომების (ორწევრების) ხარისხები:

$$(x+a)^1 = C_1^0 x + C_1^1 a,$$

$$(x+a)^2 = C_2^0 x^2 + C_2^1 x a + C_2^2 a^2,$$

$$(x+a)^3 = (C_2^0 x^2 + C_2^1 x a + C_2^2 a^2)(x+a) = C_2^0 x^3 + C_2^1 x^2 a + C_2^2 x a^2 + C_2^0 x^2 a + C_2^1 x a^2 + C_2^2 a^3 = C_2^0 x^3 + (C_2^0 + C_2^1) x^2 a + (C_2^1 + C_2^2) x a^2 + C_2^2 a^3.$$

(1)

თუ გამოვიყენებთ წინა პარაგრაფის (7), (10) ტოლობებს, გვექნება:

$$C_2^0 = C_1^0, \quad C_2^0 + C_2^1 = C_3^1, \quad C_2^1 + C_2^2 = C_3^2, \quad C_2^2 = C_3^3.$$

მაშინ (1) ტოლობა მოგვცემს

$$(x+a)^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2 a + C_3^2 x a^2 + C_3^3 a^3.$$

დავუშვათ, რომ

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + C_n^n a^n \quad (2)$$

დავამტკიცოთ ამ ფორმულის მართებულობა ნებისმიერი n -სათვის.

გამოვიანგარიშოთ $(x+a)^{n+1}$. ამისათვის გამოვიყენოთ (2) ფორმულა:

$$\begin{aligned} (x+a)^{n+1} &= (x+a)^n (x+a) = C_n^0 x^{n+1} + C_n^1 x^n a + C_n^2 x^{n-1} a^2 + \dots + C_n^{n-1} x^2 a^{n-1} + C_n^n x a^n + \\ &+ C_n^0 x^n a + C_n^1 x^{n-1} a^2 + \dots + C_n^{n-2} x^2 a^{n-1} + C_n^{n-1} x a^n + C_n^n a^{n+1} = \\ &= C_n^1 x^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) x^n a + (C_n^1 + C_n^2) x^{n-1} a^2 + \dots + \\ &+ (C_n^{n-2} + C_n^{n-1}) x^2 a^{n-1} + (C_n^{n-1} + C_n^n) x a^n + C_n^n a^{n+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

თუ ვისარგებლებთ წინა პარაგრაფის (7) და (10) ტოლობებით, მაშინ (3) ტოლობა მოგვცემს

$$\begin{aligned} (x+a)^{n+1} &= C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n a + C_{n+1}^2 x^{n-1} a^2 + \\ &+ \dots + C_{n+1}^{n-1} x^2 a^{n-1} + C_{n+1}^n x a^n + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1}. \end{aligned}$$

ამგვარად, (2) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი n -სათვის. (2) ფორმულას ეწოდება ნიუტონის ბინომის ფორმულა.

2. ბინომური კოეფიციენტების თვისებები. რადგანაც

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

ამიტომ, ცხადია,

1) ნიუტონის ბინომის ფორმულაში თავიდან და ბოლოდან ტოლად დაშორებული კოეფიციენტები ტოლია.

(2) ფორმულაში ჩავსვათ $x=1$, $a=1$, მივიღებთ:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (4)$$

ეს ტოლობა კი გვაძლევს:

2) ნიუტონის ბინომის ყველა კოეფიციენტის ჯამი უდრის 2^n -ს.

თუ (2) ფორმულაში ჩავსვათ $x=1$, $a=-1$, მივიღებთ

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0,$$

საიდანაც

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots = C_n^1 + C_n^2 + \dots \quad (5)$$

რადგანაც (4) შედგება ორი ტოლი სიდიდისაგან, ამიტომ

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}. \quad (6)$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ

3) ნიუტონის ბინომის კენტი ადგილზე მდგომი წევრების კოეფიციენტების ჯამი ლუწ ადგილზე მდგომი წევრების კოეფიციენტების ჯამის ტოლია და უდრის 2^{n-1} -ს.

დავამტკიცოთ იგივეობა

$$4) \quad C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \dots + C_n^p C_m^0 = C_{m+n}^p. \quad (7)$$

დამტკიცება. ავიღოთ ტოლობა

$$(x+1)^n (x+1)^m = (x+1)^{m+n} \quad (8)$$

და გავშალოთ თითოეული ბინომი ცალ-ცალკე:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n,$$

$$(x+1)^m = C_m^0 x^m + C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} + \dots + C_m^m.$$

თუ (8) ტოლობის მარცხენა მხარეში გამოვითვლით x^{n+m-p} -ის კოეფიციენტს, გვექნება

$$C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \dots + C_n^p C_m^0.$$

ხოლო (8) ტოლობის მარჯვენა მხარეში იგივე x^{n+m-p} -ის კოეფიციენტი იქნება C_{m+n}^{n+m-p} ან, რაც იგივეა, C_{m+n}^p . (8) იგივეობაში x^{n+m-p} -ის კოეფიციენტი ტოლობა მოგვცემს მე-4 თვისების მართებულობას.

თუ (7) ტოლობაში დავუშვებთ, რომ $m=n=p$, გვექნება

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots + C_n^n C_n^0 = C_{2n}^n. \quad (9)$$

თუ გამოვიყენებთ (9) ტოლობაში $C_n^0 = C_n^n$, $C_n^{n-1} = C_n^1$, ... მივიღებთ

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n. \quad (10)$$

ე. ი. მართებულია შემდეგი თვისება:

5) ნიუტონის ბინომის კოეფიციენტთა კვადრატების ჯამი ტოლია C_{2n}^n -ის.

§ 4. კომბინატორიკა განმარტებული აღმნიშვნებით

მე-2 პარაგრაფში განვიხილეთ წყობანი, გადანაცვლებანი და ჯუფთები. n -ელემენტისაგან შედგენილი k -ელემენტიანი წყობათა რიცხვი განისაზღვრება ფორმულით:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1). \quad (1)$$

n ელემენტისაგან შედგენილი k -ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი კი გამოისახება ფორმულით:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

k ელემენტაგან გადანაცვლებათა რიცხვი განისაზღვრება ფორმულით:

$$p_k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k = k! \quad (3)$$

ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის ამოცანები:

1. ინსტიტუტი უშვებს 8 სპეციალობის კადრს, თითოეული სპეციალობის 25 კაცს. რამდენაირად შეგვიძლია ამ კადრების განაწილება — არჩევა. მაგალითად, შეგვიძლია ავირჩიოთ: ერთი სპეციალობის 7 კაცი, მეორე სპეციალობის 15 კაცი, მესამე სპეციალობის 3 კაცი, მე-4 სპეციალობის არც ერთი კაცი, ან ერთი სპეციალობის ყველა 25 კაცი და არც ერთი სხვა სპეციალობისა და ა. შ. (ერთი სპეციალობის 25 კაცზე მეტი არ აირჩევა, რადგანაც ერთი სპეციალობის 25 კაცზე მეტი არ არის).

ამ ამოცანის პასუხს (1)–(3) ფორმულებით ვერ მივიღებთ.

2. სამი სპეციალობის 35 კაცი, მაგალითად, მათემატიკოსები, ფიზიკოსები და ქიმიკოსები, რამდენაირად შეგვიძლია გავანაწილოთ, რომ თითო ჯგუფში შედიოდეს 12 მათემატიკოსი, 10 ფიზიკოსი და 13 ქიმი-

კოსი, მაგალითად, ერთი განაწილება შეიძლება იყოს: 8 მათემატიკოსი, 2 ფიზიკოსი, 10 ქიმიკოსი, 4 მათემატიკოსი, 3 ქიმიკოსი, 8 ფიზიკოსი; უფრო ცხადად: მაგალითად, 8 მათემატიკოსის მასწავლებელი მე-5 კლასის, 2 ფიზიკოსის მასწავლებელი მე-6 კლასის, 10 ქიმიკოსის მასწავლებელი მე-8 კლასის, 4 მათემატიკოსის მასწავლებელი მე-7 კლასის, 3 ქიმიკოსის მასწავლებელი მე-9 კლასის, 8 ფიზიკოსის მასწავლებელი მე-10 კლასის.

ვერც ამ ამოცანის პასუხს მივიღებთ (1)–(3) ფორმულებიდან.

3. გვყავს 25 სპეციალისტი. რამდენადაა შეიძლება ამ სპეციალისტების განაწილება 7 რაიონში. მაგალითად, გავანაწილოთ ერთ რაიონში 8 სპეციალისტი, მეორეში — 3, მესამეში არც ერთი, მეოთხეში — 2, მეხუთეში 4, მეექვსეში — 7, მეშვიდეში — 1.

ცხადია, ამ ამოცანის პასუხიც არ მიიღება ზემოთ განხილული ფორმულებიდან.

აღებული ამოცანებისათვის აღრე ნახმარი სიტყვების: „წყობანი“, „გადაანაცვლებანი“, „ჯუფთებანი“ ნაცვალად ეიხმართ სიტყვები „წყობანი განმეორებით“, „გადაანაცვლებანი განმეორებით“, „ჯუფთებანი განმეორებით“.

პირველ ამოცანაში გვაქვს 26 ელემენტისაგან 8-ელემენტიანი წყობანი განმეორებით (რადგანაც 25 კაცისაგან აირჩევა ან 0, ან 1, ან 2, ... ან 25 კაცი. ე. ი. გვაქვს 26 შესაძლებლობა). მეორე ამოცანაში გვაქვს გადაანაცვლებანი განმეორებით: პირველი ელემენტი (მათემატიკოსი) მეორდება 12-ჯერ, მეორე ელემენტი (ფიზიკოსი) — 10-ჯერ, მესამე ელემენტი (ქიმიკოსი) — 13-ჯერ. მესამე ამოცანაში გვაქვს 25 ელემენტისაგან 7-ელემენტიანი ჯუფთებანი განმეორებით.

§ 5. წყობანი განმეორებით

ავილოთ სამი ელემენტი a, b, c და შევადგინოთ ყოველგვარი ორ-ელემენტისაგან წყობანი განმეორებით:

$$aa, ab, ba, bb, ac, ca, bc, cb, cc.$$

მოცემული n ელემენტისაგან k -ელემენტისაგან წყობანი განმეორებით ეწოდება ყოველგვარ k -კოორდინატიან კორტეჟს (ვექტორს) ამ n ელემენტისაგან.

გამოვიყენოთ ფორმულა n ელემენტისაგან, $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, k -ელემენტისაგან განმეორებით წყობათა რაოდენობისათვის. ფორმულა გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდით. ამისათვის k -ს მივცეთ სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობანი. თუ $k=1$, მაშინ n ელემენტისაგან მივიღებთ

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (1)$$

წყობას,

$$A(n, 1) = n. \quad (2)$$

თუ (1) წყობის ყოველ ელემენტს მივუწერთ რიგ-რიგობით $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ -ის ყველა ელემენტს, მივიღებთ:

$$a_1 a_1, a_1 a_2, \dots, a_1 a_n,$$

$$a_2 a_1, a_2 a_2, \dots, a_2 a_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n a_1, a_n a_2, \dots, a_n a_n.$$

აქ განმეორებით წყობათა რიცხვია

$$A(n, 2) = n^2. \quad (3)$$

ვთქვათ, (3) გამოსახულებას ადგილი აქვს k -სათვის,

$$A(n, k) = n^k. \quad (4)$$

ავილოთ n ელემენტისაგან შემდგარი k -ელემენტისაგან წყობანი განმეორებით და მივუწერთ პირველი, a_1 ელემენტი M სიმრავლიდან. მივიღებთ n^k წყობას განმეორებით. იმავე n ელემენტისაგან შემდგარ k -ელემენტისაგან წყობებს განმეორებით მივუწერთ a_2 ელემენტი. მივიღებთ ისევ n^k წყობას. თუ M სიმრავლის ყველა ელემენტს მივუწერთ რიგ-რიგობით k -ელემენტისაგან წყობებს განმეორებით, გვექნება წყობათა რაოდენობა n -ჯერ:

$$A(n, k+1) = A(n, k)n,$$

ანუ

$$A(n, k+1) = n^{k+1}.$$

მაშასადამე, (4) ფორმულა მართებულია k -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, $k \in N$.

მაგალითი 1. რამდენი სამნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს 5 ციფრისაგან: 1, 2, 3, 4, 5.

(4) ფორმულა მოგვცემს

$$A(5, 3) = 5^3 = 125.$$

მაგალითი 1. რამდენი სამნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებისაგან: 0, 1, 2, 3, 4.

მოცემული ციფრებიდან ავილოთ ორციფრიანი წყობანი განმეორებით და ყოველ წყობას მივუწერთ წინ 0. ამით სამციფრიანი რიცხვების რაოდენობა, რომელიც 0-ით იწყება (ფაქტიურად ორნიშნა რიცხვები) იქნება $A(5, 2)$.

5 ციფრისაგან შედგენილი სამციფრიანი რიცხვების რაოდენობა იქნება 5^3 . აქედან უნდა გამოვრიცხოთ 0-ით დაწყებული რიცხვები, რომელთა რაოდენობაა

$$A(5, 2) = 5^2.$$

|| გ. კომლაძე

ამგვარად, 5 ციფრისაგან, რომელშიც ერთი ციფრი ნულია, შედგენილ სამნიშნა რიცხვთა რაოდენობა განისაზღვრება სხვაობით:

$$A(5,3) - A(5,2) = 5^3 - 5^2 = 125 - 25 = 100.$$

მე-4 პარაგრაფის პირველი ამოცანის ამოსახსნელად ასე მოვიქცეთ: გადავწეროთ მოცემული პროფესიები რაიმე რიგით. 1-დან 8-ის ჩათვლით. ეთქვას, პირველი პროფესიის სპეციალისტი აირჩევა P_1 რაოდენობით. P_1 -ს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობანი 0, 1, ..., 25; $P_1=0$ -ს, თუ არც ერთი პირველი პროფესიის სპეციალისტი არ აირჩევა. ასევე, ეთქვას, მეორე პროფესიის სპეციალისტი აირჩევა P_2 რაოდენობით და ა. შ. მე-8 პროფესიის სპეციალისტი — P_8 რაოდენობით. მაშინ რაიმე განაწილებას შეესაბამება 26 ელემენტისაგან (0, 1, ..., 25) შედგენილი

$$P_1 P_2 P_3 \dots P_8$$

8-ელემენტიანი წყობანი განმეორებით. ამგვარად, კადრები შეიძლება განაწილდეს $A(26, 8)$ -ნაირად. მაგრამ აქედან გამოირიცხება წყობა 0, 0, ..., 0, რაც ნიშნავს, რომ არც ერთი პროფესიის სპეციალისტი არ განაწილდება — არ აირჩევა. მაშასადამე, ამოცანის პასუხია

$$A(26, 8) - 1 = 26^8 - 1.$$

§ 6. გადანაცვლებანი განმეორებით

ავიღოთ ელემენტები a, b, c . შევადგინოთ ისეთი კორტეჟები, სადაც a განმეორდება ორჯერ, c — ერთხელ, b — ორჯერ:

$aabbc \quad aabcb \quad aacbb \quad abacb \quad ababc$
 $abbac \quad abbca \quad abcab \quad abcba \quad acabb$
 $acbab \quad acbba \quad baabc \quad baacb \quad babac$
 $babca \quad bacab \quad bacba \quad bbaac \quad bbaca$
 $bbcaa \quad bcaab \quad bcaba \quad bcbaa \quad caabb$
 $cabab \quad cabba \quad cbaab \quad cbaba \quad cbbaa$

აქ მთავარია შეზღუდვა, თუ რამდენჯერაა განმეორებული ესა თუ ის ელემენტი. მაგალითად, პირველი ელემენტი მეორდება ორჯერ, მეორე ელემენტი მეორდება ორჯერ, მესამე ელემენტი მეორდება ერთხელ.

გადანაცვლებანი განმეორებით $(a, b, c, \dots, l)$ ელემენტებისაგან, რომელშიც a განმეორდება α -ჯერ, b განმეორდება β -ჯერ, და ა. შ. l განმეორდება γ -ჯერ, სადაც $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ მოცემული რიცხვებია, $\alpha + \beta + \dots + \gamma = m$, ეწოდება ყოველ m კოორდინატიან კორტეჟს, შედგენილს $a, b, c, \dots, l$ ელმ-

მენტებისაგან, რომელშიც მოცემული a ელემენტი განმეორდება α -ჯერ, b ელემენტი განმეორდება β -ჯერ და ა. შ. l ელემენტი განმეორდება γ -ჯერ.

რიცხვს $m = \alpha + \beta + \dots + \gamma$ ეწოდება გადანაცვლების რიგი.

გამოვიყენოთ m რიგის, $P(m; \alpha, \beta, \dots, \gamma)$, განმეორებით გადანაცვლების რიცხვის ფორმულა. ამისათვის განვიხილოთ მაგალითი.

ეთქვას, a მეორდება 4-ჯერ, b მეორდება 3-ჯერ, c მეორდება ერთხელ, d მეორდება 2-ჯერ. ავიღოთ რომელიმე გადანაცვლება განმეორებით

$$a, b, c, a, d, a, d, b, a, b.$$

ამ გადანაცვლების ელემენტები გადავწეროთ:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}. \quad (1)$$

ეს ელემენტები რომ ერთმანეთისაგან განსხვავებული იყოს, მაშინ ამ 10 ელემენტიდან მივიღებდით 10 გადანაცვლებას განმეორების გარეშე. მაგრამ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$ და a_1, a_2, a_3 და a_6 -ის ადგილმონაცვლება არ მოგვცემს განსხვავებულ გადანაცვლებას. ასევე, $a_5 = a_6 = a_{10} = b$ და ამ ელემენტების ადგილმონაცვლეობა არ მოგვცემს ახალ გადანაცვლებას. ასევე გვექნება c და d ელემენტისათვის.

ამგვარად, (1) სიმრავლის ელემენტებით შედგენილ 10-ელემენტიან კორტეჟებში ტოლია $4! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2!$ კორტეჟები. ზოლო კორტეჟების საერთო რიცხვია $10!$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ მე-10 რიგის განმეორებით გადანაცვლებათა რიცხვი, $4 + 3 + 1 + 2 = 10$, განისაზღვრება დამოკიდებულებით:

$$P(10; 4, 3, 1, 2) = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2!}.$$

სრულიად ასევე m რიგის გადანაცვლებათათვის განმეორებით გვექნება

$$a_1, a_2, \dots, a_\alpha, a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, \dots, a_{\alpha+\beta}, a_{\alpha+\beta+1}, \dots, a_m.$$

ამ ელემენტებისაგან შედგება m გადანაცვლებანი განმეორების გარეშე. ეს ელემენტები ერთმანეთისაგან განსხვავებული რომ იყოს. მაგრამ $a_1 = a_2 = \dots = a_\alpha = a$, ამიტომ $a_1, a_2, \dots, a_\alpha$ ელემენტების გადანაცვლება ახალ კორტეჟს არ იძლევა. ასეთი კორტეჟების რიცხვია $\alpha!$. ასევე შეგვიძლია ვთქვათ $b_{\alpha+1} = b_{\alpha+2} = \dots = b_{\alpha+\beta} = b$ ელემენტებზედაც, $\beta!$ კორტეჟი არ იძლევა ახალ კორტეჟს და ა. შ. გვექნება

$$\alpha! \beta! \dots \gamma! P(m; \alpha, \beta, \dots, \gamma) = m!,$$

სადაც

$$P(m; \alpha, \beta, \dots, \gamma) = \frac{m!}{\alpha! \beta! \dots \gamma!}. \quad (2)$$

მე-4 პარაგრაფში განხილული მეორე ამოცანისათვის გვექნება $\alpha=12$, $\beta=10$, $\gamma=13$, რის გამოც (2) ფორმულით მივიღებთ

$$P(35; 12, 10, 13) = \frac{35!}{12! 10! 13!} = 35 \cdot 34 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 29 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 11 = 5,4552452 \cdot 10^{14}.$$

§ 7. ჯუფთებადი განმეორებით

ავიღოთ სიმრავლე $\{a, b, c\}$ და ამ სიმრავლის ელემენტებისაგან შევადგინოთ 5-ელემენტიანი შემდეგი სახის კორტეჟები

$$\begin{aligned} &aaaaa, aaab, aaabb, aabbb, abbbb, bbbbbb, \\ &aaaac, aaacc, aaccc, acccc, ccccc, \\ &aaabc, aabbc, abbbc, bbbbc, aabcc, \\ &abccc, bcccc, bbbcc, bbccc, bcccc. \end{aligned} \quad (1)$$

ამ ელემენტთა რიგს მნიშვნელობა არა აქვს. ამ კორტეჟებს ეწოდება 3 ელემენტისაგან შედგენილი 5-ელემენტიანი ჯუფთებიანი განმეორებით. კორტეჟები

$$\begin{aligned} &aaabb, aabba, abbaa, bbaaa, \\ &aabab, abaab, baaab, baaba, babaa \end{aligned}$$

გამოსახავს ერთსა და იგივე ჯუფთებას განმეორებით.

ჯუფთებაში ელემენტის განმეორების რიცხვს ეწოდება ელემენტის ჯერადობა. მაგალითად, (1)-ის პირველ ჯუფთებაში განმეორებით a ელემენტის ჯერადობაა 5, b და c ელემენტების ჯერადობაა 3. მესამე ჯუფთებაში განმეორებით a ელემენტის ჯერადობაა 3, b ელემენტის ჯერადობაა 2 და a . შ.

ავიღოთ n -ელემენტიანი სიმრავლე $\{a, b, \dots, l\}$ და შევადგინოთ k -ელემენტიანი ჯუფთებიანი განმეორებით. ამ ჯუფთებაში განმეორებით ყოველ ელემენტს შევუსაბამოთ არაუარყოფითი მთელი რიცხვი, რომელიც აღებული ელემენტის ჯერადობის ტოლია ამ ჯუფთებაში. ვთქვათ, a ელემენტის ჯერადობაა α , b ელემენტის ჯერადობაა β და a . შ. l ელემენტის ჯერადობაა γ . ამ რიცხვების ჯამს, $\alpha + \beta + \dots + \gamma = k$, ეწოდება ჯუფთებათა რიგი.

მოცემული n -ელემენტიანი სიმრავლისაგან k -ელემენტიანი ჯუფთებიანი განმეორებით ეწოდება აღებული სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილ ისეთ კორტეჟებს, რომ თითოეულ კორტეჟში ყველა ელემენტის ჯერადობის ჯამი k -ს ტოლია.

გამოვიყვანოთ განმეორებით ჯუფთებათა რიცხვის ფორმულა.

ავიღოთ k -ელემენტიანი ჯუფთება. ვთქვათ, ამ ჯუფთებაში a მეორდება α -ჯერ, b მეორდება β -ჯერ და a . შ. l მეორდება γ -ჯერ. ამ ჯუფთების შევუსაბამოთ შემდეგი სიმბოლო

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1. \\ \alpha\text{-ჯერ} & & \beta\text{-ჯერ} & & \gamma\text{-ჯერ} & & & & & & & & & & & & \end{array} \quad (2)$$

თუ რომელიმე ელემენტი არ მონაწილეობს ჯუფთებაში, მისი ჯერადობა არის 0 და მის მაგიერ ვწერთ 0-ს; ორი ელემენტი ერთიმეორისაგან 0-თაა გამოყოფილი.

მაგალითად, ჯუფთებებს

$$aabbcc, aaabc, aaaaa, bbbccc$$

შესაბამება სიმბოლოები

$$1101101, 1110101, 1111100, 0110111$$

და პირიქით, სიმბოლოებს

$$0110111, 1011011, 0011111$$

შესაბამება ჯუფთებანი

$$bbccc, abbcc, ccccc.$$

(2) სიმბოლოებში 1-იანი გვხვდება k -ჯერ, 0 გვხვდება $(n-1)$ -ჯერ. (2) აღნიშვნით დამყარდა ურთიერთცალსახა შესაბამისობა განმეორებით ჯუფთებებსა და სათანადო სიმბოლოებს შორის. ეს სიმბოლოები შედგენილია 2 ელემენტისაგან $\{0, 1\}$, სადაც 0 მეორდება $(n-1)$ -ჯერ, ხოლო 1 მეორდება k -ჯერ. ე. ი. გვაქვს 2-ელემენტიანი გადანაცვლებანი განმეორებით, სადაც 0 მეორდება $(n-1)$ -ჯერ, ხოლო 1 მეორდება k -ჯერ. ამგვარი გადანაცვლების რიცხვია

$$P(n-1+k; n-1, k) = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)! k!} = C_{n+k-1}^k.$$

მაგვარად, n ელემენტისაგან k -ელემენტიანი განმეორებით ჯუფთებათა რიცხვია

$$C(n, k) = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)! k!}. \quad (3)$$

მე-4 პარაგრაფის მესამე ამოცანა ამოიხსნება (3) ფორმულით: $n=7$ და $k=25$, გვექნება

$$\begin{aligned} C(7; 25) &= \frac{(7-1+25)!}{(7-1)! 25!} = \frac{(6+25)!}{6! 25!} = \frac{31!}{6! 25!} = \\ &= 31 \cdot 29 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 7 = 736281. \end{aligned}$$

ვიღებთ, 25 სპეციალისტი 7 რაიონში გაიგზავნება 736 281-ნაირად.

§ 8. მრავალწევრის ახარისხება. პოლინომური თეორემა
განვიხილოთ ბინომების ნამრავლი:

$$(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n).$$

გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდი.

$$(x + a_1)(x + a_2) = x^2 + (x_1 + x_2)x + a_1 a_2.$$

დავუშვათ,

$$(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n \quad (1)$$

სადაც

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ p_2 &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_2 a_n + \dots + a_{n-1} a_n, \\ p_3 &= a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \dots + a_1 a_2 a_n + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n, \\ &\dots \\ p_n &= a_1 a_2 \dots a_n. \end{aligned} \quad (2)$$

ვაჩვენოთ (1) ფორმულის მართებულობა ნებისმიერი n -ისთვის.

(1) გამოსახულების ორივე მხარე გადავამრავლოთ $(x + a_{n+1})$ -ზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)(x + a_{n+1}) &= x^{n+1} + (p_1 + a_{n+1})x^n + \\ &+ (p_2 + p_1 a_{n+1})x^{n-1} + (p_3 + p_2 a_{n+1})x^{n-2} + \dots + p_n a_{n+1}, \end{aligned}$$

ანუ

$$(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_{n+1}) = x^{n+1} + q_1 x^n + q_2 x^{n-1} + \dots + q_{n+1}. \quad (3)$$

თუ (3) კოეფიციენტებს გამოვითვლით, გვექნება:

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}, \\ q_2 &= p_2 + p_1 a_{n+1} = a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n + a_1 a_{n+1} + \dots + a_n a_{n+1}, \\ q_3 &= p_3 + p_2 a_{n+1} = a_1 a_2 a_3 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n + \dots + a_{n-1} a_n a_{n+1}, \\ &\dots \\ q_{n+1} &= p_n a_{n+1} = a_1 a_2 + \dots + a_n a_{n+1}. \end{aligned}$$

უკანასკნელი გამოსახულება გვიჩვენებს, რომ (3) გამოსახულების კოეფიციენტები ისეთივე აგებულებისაა, როგორც (2) კოეფიციენტები მაშასადამე, (1) ფორმულა მართებულია $(n+1)$ -სათვის.

თუ $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, მაშინ (2) გამოსახულება მოგვცემს

$$p_1 = na,$$

$$p_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n$$

წარმოადგენს ყოველგვარ ორეგულარულ ნამრავლთა ჯამს $a_1, a_2, \dots, a_n$ ელემენტებისაგან (რიგს მნიშვნელობა არ აქვს), ამიტომ

$$p_2 = C_n^2 a^2.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$p_k = C_n^k a^k.$$

ამგვარად, (2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$(x + a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + a^n. \quad (4)$$

ეს კი ნიუტონის ბინომის ფორმულაა.

დავამტკიცოთ პოლინომური თეორემა.

თეორემა. $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)$ მრავალწევრის n -ური ხარისხი გამოსახება ფორმულით

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k}, \quad (5)$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ დებულობენ არაუარყოფით მთელ მნიშვნელობებს ისე, რომ მათი ჯამი უდრის n -ს.

ნიუტონის ბინომის ფორმულა ამ თეორემის კერძო შემთხვევაა: $n = 2$,

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} x_1^{n-k} x_2^k. \quad (6)$$

(6) გამოსახულება ასე გადაწეროთ:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}. \quad (7)$$

ახლა ავიღოთ

$$[(x_1 + x_2) + x_3]^n = \sum_{\alpha + \alpha_3 = n} \frac{n!}{\alpha! \alpha_3!} x^{\alpha} x_3^{\alpha_3}, \quad (8)$$

სადაც

$$x = x_1 + x_2.$$

(7) ტოლობის ძალით (8) ტოლობა მოგვცემს

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{\alpha + \alpha_3 = n} \frac{n!}{\alpha! \alpha_3!} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}.$$

აქედან კი გვექნება:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}.$$

სრულიად ასევე გადავალთ k -დან $(k+1)$ -ზე და მივიღებთ (5) ფორმულის მართებულობას.

(5) ფორმულის პოლონომიური ფორმულა ეწოდება, მაგალითად, გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} (x + y + z)^4 &= \frac{4!}{4!0!0!} x^4 + \frac{4!}{0!4!0!} y^4 + \frac{4!}{0!0!4!} z^4 + \\ &+ \frac{4!}{3!1!0!} x^3 y + \frac{4!}{3!0!1!} x^3 z + \frac{4!}{1!3!0!} x y^3 + \\ &+ \frac{4!}{1!0!3!} x z^3 + \frac{4!}{0!1!3!} y z^3 + \frac{4!}{2!2!0!} x^2 y^2 + \\ &+ \frac{4!}{2!0!2!} x^2 z^2 + \frac{4!}{0!2!2!} y^2 z^2 + \frac{4!}{1!1!2!} x y z^2 + \\ &+ \frac{4!}{1!2!1!} x y^2 z + \frac{4!}{2!1!1!} x^2 y z = x^4 + y^4 + z^4 + \\ &+ 4(x^3 y + x^3 z + y^3 z + y z^3 + x y^3 + x z^3) + \\ &+ 6(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) + 12(x y^2 z + x^2 y z + x y z^2). \end{aligned}$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო. 1. რამდენგვარად შეგვიძლია შევადგინოთ სია 7 სტუდენტისაგან?

2. 10 სტუდენტმა უნდა მიიღოს 10 სხვადასხვა წიგნი. რამდენგვარად შეიძლება წიგნების განაწილება?

3. 4 ციფრისაგან, რომელშიც 0 არის, უნდა შევადგინოთ ციფრების გამეორების გარეშე ოთხნიშნა რიცხვები (თუ ნიშნადი ციფრების წინ ნულაა, რიცხვი სამნიშნად ითვლება). რამდენი რიცხვი შეიძლება მივიღოთ?

4. 1, 2, 3, 4 ციფრებისაგან შევადგინოთ ოთხნიშნა რიცხვები, რომლებშიც ციფრები არ მეორდება. რამდენი რიცხვი შეიძლება შედგეს ისეთი, სადაც ბოლო ციფრები 2 და 1-ია?

5. ამოხსენით განტოლებანი

$$1) \frac{P_n}{P_{n+2}} = \frac{1}{30}, \quad 2) A_n^5 = 18 A_{n-2}^4, \quad 3) C_n^2 + A_n^3 = 30.$$

6. ჯგუფში 25 სტუდენტი. რამდენი სურათია საჭირო, რომ ყოველ სტუდენტს ყველა დანარჩენი სტუდენტის სურათი ჰქონდეს?

7. რამდენნიშნად შეიძლება აირჩეს 15-კაციანი კრებიდან თავმჯდომარე და მდივანი?

8. რამდენნიშნად შეიძლება გაიგზავნოს 25 კაციანი კოლექტივიდან 2 სხვადასხვა სანატორიუმში 2 კაცი? — ორ ერთნაირ სანატორიუმში 2 კაცი?

9. მონახეთ $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ -ის გაშლაში ის წევრი, რომელიც არ შეიცავს x -ს, თუ მეოთხე და მეცამეტე წევრის კოეფიციენტები ტოლია.

10. იპოვეთ ნიუტონის ბინომის $(1+x)^n$ მაჩვენებელი n , თუ მე-5, მე-6 და მე-7 წევრები აღგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

11. განსაზღვრეთ ნიუტონის ბინომის $(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}})^n$ მაჩვენებელი n , თუ ბინომის გაშლაში თავიდან მე-7 წევრის ბოლოდან მე-7 წევრთან შეფარდება $\frac{1}{6}$ -ის ტოლია.

12. განსაზღვრეთ ნიუტონის ბინომის $(a+x)^n$ მაჩვენებელი, თუ გაშლის შესამე წევრის კოეფიციენტის $\frac{14}{9}$, მე-4 და მე-5 წევრების კოეფიციენტები აღგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

13. რამდენი სამნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს 1, 2, 3, 4 ციფრებისაგან?

14. რამდენი სამნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს 0, 1, 2 ციფრებისაგან?

მ ი თ ი თ ე ბ ა: 1, 2, ..., 9 ნიშნადი ციფრებია. 201—სამნიშნაა, 001—ერთნიშნაა, 200—სამნიშნაა.

15. რამდენი ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს 1, 2, 3, 4, 5 ციფრებისაგან ისე, რომ 1-იანი გამეორდეს 2-ჯერ, 2-იანი გამეორდეს 1-ჯერ, 3-იანი — 2-ჯერ, 4-იანი — 1-ჯერ, 5-იანი — 2-ჯერ?

მ ი თ ი თ ე ბ ა: $a=1, \alpha=2; b=2, b=1; c=3, \gamma=2; d=4, \delta=1; e=5, \eta=2. m=2+1+2+1+2=8.$

16. რამდენი თავიჯული შეიძლება გაკეთდეს 3 სხვადასხვა ფერის ვარდისაგან, თუ თავიჯულში უნდა იყოს 5 ვარდი?

17. ვაგონთა რამდენი შემადგენლობა შეიძლება შედგეს 3 სხვადასხვა დანიშნულების ვაგონებისაგან, თუ შემადგენლობაში 15 ვაგონი უნდა იყოს?

18. გამოთვალეთ ნამრავლები:

$$\begin{aligned} 1) (x+1)(x-2)(x+3), & \quad 2) (x-1)(x+1)(x-2), \\ 3) (x^2-1)(x^2+2)(x^2-3), & \quad 4) (x-1)(x+2)(x-3)(x+4), \\ 5) (a+b+c)^3, & \quad 6) (x+y+z+t)^3. \end{aligned}$$

რაციონალური ფუნქციები

§ 1. მრავალწევრები. მოკლედ აღვნიშნავთ მრავალწევრებად

1. მრავალწევრები. განვიხილოთ x კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (1)$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_n$ ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვებია, $a_0 \neq 0$, ხოლო n — მთელი არაუარყოფითი რიცხვი. ეს ფუნქცია x ცვლადის ხარისხებისა და სათანადო რიცხვთა ნამრავლების ჯამს წარმოადგენს. (1) ფუნქციას n ხარისხის მრავალწევრი (პოლინომი) ეწოდება, ხოლო $a_0, a_1, \dots, a_n$ რიცხვებს მრავალწევრის კოეფიციენტები. თუ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი n ნულის ტოლია, მრავალწევრს ნული ხარისხის მრავალწევრი ეწოდება, $a_0 x^0 = a_0$. ნული ხარისხის მრავალწევრი ნულისაგან განსხვავებული რიცხვებია. თუ $a_0 = 0$ ნულის ტოლია, მრავალწევრს ნულმრავალწევრი ეწოდება. ამგვარად, 0-იც მრავალწევრია, მაგრამ ერთადერთი, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი არაა განსაზღვრული, ნებისმიერია.

მრავალწევრის ჩასაწერად იხმარება სიმბოლოები $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ და ა. შ.

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n. \quad (2)$$

მრავალწევრის ჩასაწერად იხმარება აგრეთვე სიმბოლო $P_n(x)$, სადაც P -ს ინდექსი n მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელია.

(2) მრავალწევრის შესახებ ამბობენ, რომ იგი ჩაწერილია x ცვლადის კლებადი (დაღმავალი) ხარისხების მიხედვით. მრავალწევრი შეიძლება ჩაიწეროს ზრდადი (აღმავალი) ხარისხების მიხედვით

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0. \quad (3)$$

მრავალწევრი (2) ისეა ჩაწერილი, რომ კოეფიციენტის ინდექსისა და x ცვლადის ხარისხის მაჩვენებლის ჯამი n -ის ტოლია, $a_i x^{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n$; $i + (n - i) = n$. (3) სახით ჩაწერილ მრავალწევრში კოეფიციენტის ინდექ-

სა x ცვლადის ხარისხის მაჩვენებლის ტოლია. ქვემოთ ვისარგებლებთ როგორც (2), ისე (3) სახით ჩაწერილი მრავალწევრებით.

განვიხილოთ ორი ფუნქცია $k(x)$ და $s(x)$, რომელთაც ერთი და იგივე განსაზღვრის სიმრავლე აქვთ:

$$D(k) = D(s) = X.$$

ამ ორი ფუნქციის ერთიმეორესთან ტოლობა შემდეგნაირად განისაზღვრება:

ორი $k(x)$ და $s(x)$ ფუნქცია ტოლია (ან იგივეურად ტოლია), თუ x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, $x \in X$, ამ ფუნქციების მნიშვნელობანი სათანადოდ ტოლია. ამ განსაზღვრის თანახმად, $k(x)$ ფუნქცია ნულის ტოლია, თუ x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $k(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია მრავალწევრია. $f(x)$ მრავალწევრი ნულის ტოლია (იგივეურად ნულის ტოლია), თუ x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $f(x)$ ნულის ტოლია. ეს კი მაშინაა შესაძლებელი, თუ $f(x)$ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია. მართლაც, თუ $f(x)$ მრავალწევრის ერთი რომელიმე კოეფიციენტი ნულის ტოლი არაა, მაგალითად, $a_0 \neq 0$, მაშინ $a_0 x^n$ -ის მნიშვნელობა x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის ნულის ტოლი არ იქნება. ადვილი წარმოსადგენია, პირიქითაც, თუ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მრავალწევრი იგივეურად ნულის ტოლია. იგივეურად ნულის ტოლი მრავალწევრი ნულმრავალწევრია.

ნულმრავალწევრის განსაზღვრის საფუძველზე განისაზღვრება ორი მრავალწევრის

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n.$$

ტოლობა. ამისათვის განვიხილოთ მრავალწევრი

$$\varphi(x) = (a_0 - b_0) x^n + (a_1 - b_1) x^{n-1} + \dots + (a_n - b_n).$$

ეს მრავალწევრი ნულის ტოლია, თუ კოეფიციენტები $a_i - b_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, ნულის ტოლია და, პირიქით, კოეფიციენტები ნულის ტოლია, თუ მრავალწევრი ნულის ტოლია. ამგვარად, ორი მრავალწევრი ერთიმეორის ტოლია, თუ ერთი და იგივე ხარისხის მაჩვენებლიანი ცვლადის კოეფიციენტები ერთიმეორის ტოლია. ეს დასკვნა საშუალებას გვაძლევს n ხარისხის მრავალწევრი განვიხილოთ, როგორც ფორმალური გამოსახულება (2), რომელიც ცალსახად განისაზღვრება რიცხვთა (კოეფიციენტთა) დალაგებული სიმრავლით $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

$\varphi(x)$ მრავალწევრს, რომლის კოეფიციენტები $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა მოპირდაპირე რიცხვებია, $(-a_i)$, $i=0, 1, \dots, n$, ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის მოპირდაპირე მრავალწევრი.

$$\varphi(x) = -a_0 x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_n. \quad (4)$$

ცხადია, თუ $f(x)$ მრავალწევრი ნულმრავალწევრი არაა, ყოველთვის არსებობს მისი მოპირდაპირე მრავალწევრი.

2. მოქმედებანი მრავალწევრებზე. ავიღოთ ორი მრავალწევრი

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{s-1} x^{s-1} + b_s x^s.$$

ამ მრავალწევრთა ჯამი ეწოდება შემდეგ მრავალწევრს

$$F(x) = f(x) + g(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n,$$

სადაც c_i არის x ცვლადის i -ური ხარისხის კოეფიციენტი ჯამში,

$$c_i = a_i + b_i, \quad i=0, 1, \dots, n.$$

თუ $s < n$, კოეფიციენტები $b_{s+1}, \dots, b_n$ ნულის ტოლი იქნება. მრავალწევრთა ჯამის ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატება შესაკრები მრავალწევრებიდან უდიდეს ხარისხის მაჩვენებელს. თუ $a_n = -b_n$, მაშინ მრავალწევრთა ჯამის ხარისხის მაჩვენებელი ნაკლები იქნება შესაკრები მრავალწევრების ხარისხის მაჩვენებელზე.

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ნამრავლი ეწოდება შემდეგ მრავალწევრს:

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_{n+s-1} x^{n+s-1} + d_{n+s} x^{n+s},$$

სადაც კოეფიციენტები განისაზღვრება ტოლობებით

$$d_0 = a_0 b_0, \quad d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots, \quad d_{n+s} = a_n b_s,$$

ანუ

$$d_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l, \quad i=0, 1, \dots, n+s. \quad (5)$$

ამ ტოლობებიდან, ცხადია, $d_{n+s} \neq 0$. ეს კი გვიჩვენებს: მრავალწევრთა ნამრავლის ხარისხის მაჩვენებელი ტოლია თანამამრავლი მრავალწევრების ხარისხების მაჩვენებელთა ჯამისა. აქედან ისიც გამომდინარეობს, თუ მრავალწევრები ნულმრავალწევრები არაა, მრავალწევრთა ნამრავლიც ნულმრავალწევრი არ იქნება, ე. ი. ნულისაგან განსხვავებულ მრავალწევრთა ნამრავლი ნულის ტოლი არ იქნება.

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა სხვაობა $f(x)$ მრავალწევრისა და $g(x)$ მრავალწევრის მოპირდაპირე მრავალწევრთა ჯამით განისაზღვრება:

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x)) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n.$$

მრავალწევრთა ჯამისა და ნამრავლის განსაზღვრიდან ადვილი შემსწრეა, რომ მრავალწევრთა ჯამს და ნამრავლს აქვს გადანაცვლებადობისა და ჭუფთებადობის თვისებები.

მაგალითად, შევამოწმოთ, მრავალწევრთა ნამრავლს აქვს თუ არა ჭუფთებადობის თვისება. ამისათვის $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებთან ერთად ავიღოთ მრავალწევრი

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{t-1} x^{t-1} + c_t x^t.$$

$[f(x) g(x)] \varphi(x)$ ნამრავლის x^i -ის კოეფიციენტი, $i=0, 1, \dots, n+s+t$, იქნება

$$\sum_{j+m=i} \left(\sum_{k+l=j} a_k b_l \right) c_m = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m,$$

ხოლო $f(x) [g(x) \varphi(x)]$ ნამრავლის x^i -ის კოეფიციენტი იქნება

$$\sum_{k+j=i} a_k \left(\sum_{l+m=j} b_l c_m \right) = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m.$$

ამ გამოსახულებათა შედარება მოგვცემს მრავალწევრთა გამრავლების ჭუფთებადობის თვისების მართებულობას.

მრავალწევრთა შეკრების მიმართ გამრავლების განრიგებადობის თვისების,

$$[f(x) + g(x)] \varphi(x) = f(x) \varphi(x) + g(x) \varphi(x),$$

მართებულობა გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობიდან

$$\sum_{k+l=i} (a_k + b_k) c_l = \sum_{k+l=i} a_k c_l + \sum_{k+l=i} b_k c_l.$$

მრავალწევრთა სიმრავლეში ნულის როლს ასრულებს რიცხვი ნული, რომელიც გამოსახავს ნულმრავალწევრს,

$$f(x) + 0 = f(x),$$

ხოლო ერთეულის როლს რიცხვი 1, რომელიც ნულ ხარისხის მრავალწევრია კოეფიციენტით 1, $1 \cdot x^0 = 1$.

გამოვარკვევით, მრავალწევრთა სიმრავლეში $f(x)$ მრავალწევრს აქვს თუ არა შეზღუდული მრავალწევრი, ე. ი. არსებობს თუ არა ისეთი მრავალწევრი $f^{-1}(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$f(x)f^{-1}(x) = 1. \quad (6)$$

ამ ტოლობას მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, თუ $f(x)$ ნულ ხარისხის მრავალწევრია. მართლაც, თუ $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი არის $n \geq 1$ და $f^{-1}(x)$ მრავალწევრი არსებობს, მაშინ $f(x)f^{-1}(x)$ ნამრავლის ხარისხის მაჩვენებელი არაა ნაკლები 1-ზე, იმ დროს, როდესაც (6) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი გვაქვს.

აქედან გამომდინარეობს, რომ მრავალწევრთა სიმრავლეში მრავალწევრთა გამრავლების შეზღუდული მოქმედება არ სრულდება. ეს მოგვაგონებს მთელ რიცხვთა სისტემას. მრავალწევრთა სიმრავლეს, სადაც განსაზღვრულია მრავალწევრთა შეკრება და გამრავლება სათანადო აქსიომებით (არსებობს ნულმრავალწევრი, არსებობს მრავალწევრის მოპირდაპირე მრავალწევრი, არსებობს ერთეული მრავალწევრი, სრულდება გადანაცვლებადობის აქსიომა და სხვ.), ეწოდება მრავალწევრთა რგოლი.

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. ნებისმიერი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის მოიძებნება ერთადერთი წყვილი მრავალწევრები $q(x)$ და $r(x)$, რომელთათვისაც სრულდება ტოლობა

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad (7)$$

სადაც $r(x)$ -ის ხარისხის მაჩვენებელი ნაკლებია $g(x)$ -ის ხარისხის მაჩვენებელზე ან $r(x) = 0$.

ჯერ დავამტკიცოთ $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრთა ერთადერთობა. ვთქვათ, არსებობს კიდევ სხვა წყვილი $q_1(x)$ და $r_1(x)$ მრავალწევრებისა, რომელიც აკმაყოფილებს (7) ტოლობას:

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x). \quad (8)$$

(7) და (8) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x).$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მყოფი მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი ნაკლებია $g(x)$ -ის ხარისხის მაჩვენებელზე. მარცხენა მხარეში კი ხარისხის მაჩვენებელი $g(x)$ ხარისხის მაჩვენებელზე ნაკლები არაა, თუ $q(x) - q_1(x) \neq 0$. ამიტომ უნდა გვქონდეს $q(x) - q_1(x) = 0$. ე. ი. $q(x) = q_1(x)$. ამის გამო $r_1(x) - r(x) = 0$, საიდანაც $r_1(x) = r(x)$.

ამოკად, $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრები ერთადერთია.

ახლა მოვინახოთ $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრები.

ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრი n ხარისხისაა, ხოლო $g(x)$ მრავალწევრი s ხარისხისაა. თუ $n < s$, მაშინ $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$. ვთქვათ, $n \geq s$. $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები დაეწეროთ დაღმავალი ხარისხებით

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

$$g(x) = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_{s-1} x + b_s, \quad b_0 \neq 0.$$

$g(x)$ მრავალწევრი გავამრავლოთ $\frac{a_0}{b_0} x^{n-s}$ -ზე და გამოვაკლოთ $f(x)$ -ს, მიღებული მრავალწევრი აღვნიშნოთ $f_1(x)$ -ით

$$f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-s} g(x) = f_1(x). \quad (9)$$

$f_1(x)$ -ის ხარისხი აღვნიშნოთ n_1 -ით. ცხადია, $n_1 < n$. სრულიად ისე, როგორც განესაზღვრეთ $f_1(x)$, განესაზღვროთ $f_2(x)$. ამისათვის $f_1(x)$ მრავალწევრს გამოვაკლოთ $\frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1-s} g(x)$, სადაც a_{10} არის $f_1(x)$ -ის უფროსი კოეფიციენტი, გვექნება

$$f_1(x) - \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1-s} g(x) = f_2(x). \quad (10)$$

ასევე მივიღებთ

$$f_2(x) - \frac{a_{20}}{b_0} x^{n_2-s} g(x) = f_3(x), \quad (11)$$

სადაც $f_2(x)$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი a_{20} , ხოლო ხარისხის მაჩვენებელია n_2 .

რადგანაც $f_1(x), f_2(x), \dots$ მრავალწევრების ხარისხები კლებადია, $n > n_1 > n_2 > \dots$, აღწერილი მოქმედების გამეორებით სასრულო k რიცხვჯერ, მივაღწიეთ მრავალწევრამდე, რომლის ხარისხი n_k ნაკლები იქნება $g(x)$ მრავალწევრის s ხარისხზე:

$$f_{k-1}(x) - \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-s} g(x) = f_k(x).$$

შევკრიბოთ ტოლობანი (9), (10) და ა. შ. მივიღებთ:

$$f(x) - \left(\frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1-s} + \dots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-s} \right) g(x) = f_k(x),$$

საიდანაც გვექნება

$$f(x) = \left(\frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1-s} + \dots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-s} \right) g(x) + f_k(x). \quad (12)$$

(12) ტოლობის (7) ტოლობასთან შედარებით დავრწმუნდებით:

$$q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n-1-s} + \dots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n-k-1-s},$$

$$r(x) = f_k(x),$$

რომლებიც (7) ტოლობას აკმაყოფილებენ. ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

3. **გაყოფადობის ცნება.** ვთქვათ, მოცემულია ნულისაგან განსხვავებული მრავალწევრები $f(x)$ და $\varphi(x)$. თუ $f(x)$ -ის $\varphi(x)$ -ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი $r(x)$ ნულის ტოლია, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ იყოფა $\varphi(x)$ -ზე.

თეორემა 2. $f(x)$ მრავალწევრი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრზე, თუ არსებობს ისეთი მრავალწევრი $\psi(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას:

$$f(x) = \varphi(x) \psi(x). \quad (13)$$

მართლაც, თუ $f(x)$ -ის გამყოფია $\varphi(x)$, მაშინ $\psi(x)$ -ად უნდა ავიღოთ $f(x)$ -ის $\varphi(x)$ -ზე განაყოფი. პირიქით, თუ არსებობს $\psi(x)$ მრავალწევრი, რომელიც აკმაყოფილებს (13) ტოლობას, მაშინ 1-ლი თეორემის თანახმად, $r(x)$ ნაშთი ნულის ტოლია.

(13) ტოლობიდან ცხადია, რომ $\varphi(x)$ მრავალწევრიც $f(x)$ -ის გამყოფია. ისიც ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრებია, $\psi(x)$ -იც ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი იქნება. მაგრამ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრს გამყოფად შეიძლება ჰქონდეს არანამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრები. მაგალითად,

$$x^2 + 1 = (x-i)(x+i).$$

4. **მრავალწევრის ნულის ცნება.** თუ $f(x)$ რაიმე მრავალწევრი

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (14)$$

ხოლო c რაიმე რიცხვი, მაშინ $f(c)$ რიცხვს,

$$f(c) = a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + \dots + a_n,$$

რიცხვს, რომელიც მიიღება (14)-დან, როცა x -ს შევცვლით c -თი, ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის მნიშვნელობა, როცა $x=c$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ

$$f(x) = \varphi(x) + g(x), \quad h(x) = \varphi(x) g(x),$$

მაშინ

$$f(c) = \varphi(c) + g(c), \quad h(c) = \varphi(c) g(c).$$

თუ $f(x)$ მრავალწევრი $x=c$ -სათვის ნულის ტოლი ხდება, $f(c)=0$, მაშინ c რიცხვს ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის ნული (ფესვი).

მრავალწევრი $f(x)$ გაყოფით $(x-c)$ -ზე, მაშინ გაყოფით მიღებული ნაშთი r იქნება მუდმივი,

$$f(x) = (x-c)q(x) + r. \quad (15)$$

თუ (15) ტოლობაში ჩავსვამთ $x=c$, მივიღებთ

$$f(c) = (c-c)q(c) + r,$$

საიდანაც

$$r = f(c). \quad (16)$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3. $f(x)$ მრავალწევრის $(x-c)$ -ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი r ტოლია $f(x)$ მრავალწევრის მნიშვნელობისა, როცა $x=c$.

5. **ბეზუს¹ თეორემა.** (16) ტოლობის საშუალებით დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4. $f(x)$ მრავალწევრი რომ გაიყოს $x-c$ სხვაობაზე, აუცილებელია და საკმარისი c იყოს $f(x)$ მრავალწევრის ნული.

ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $x-c$ სხვაობაზე, მაშინ $r=0$ და (16) ტოლობის ძალით გვექნება

$$f(c) = 0.$$

ე. ი. $f(x)$ მრავალწევრის ნული არის c . ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცდება.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, c არის $f(x)$ მრავალწევრის ნული, $f(c)=0$. მაშინ უნდა დავამტკიცოთ: $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $x-c$ სხვაობაზე. რადგანაც $f(c)=0$, მაშინ (16) ტოლობის საფუძველზე $r=0$ და ამის გამო (15) ტოლობა მოგვცემს

$$f(x) = (x-c)q(x),$$

ე. ი. $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $(x-c)$ სხვაობაზე. ამით პირობის საკმარისობა დამტკიცდა.

5. **ჰორნერის სქემა.** გამოვთვალოთ $f(x)$ მრავალწევრის $(x-c)$ -ზე გაყოფით მიღებული განაყოფი $q(x)$ და ნაშთი r .

$q(x)$ მრავალწევრი $n-1$ ხარისხისაა,

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}.$$

¹ ეტიენ ბეზუ (1730—1783), ფრანგი მათემატიკოსი.

ვიპოვოთ ამ მრავალწევრის კოეფიციენტთა მნიშვნელობანი. ამისათვის (15) ტოლობა დავწეროთ გაშლილად:

$$\begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n &= \\ = (x-c)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}) + r. \end{aligned} \quad (17)$$

შევადართო x -ის ერთი და იგივე ხარისხის კოეფიციენტები (17) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0, \\ a_1 &= b_1 - c b_0, \\ a_2 &= b_2 - c b_1, \\ &\dots \\ a_{n-1} &= b_{n-1} - c b_{n-2}, \\ a_n &= r - c b_{n-1}. \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_k &= c b_{k-1} + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ r &= c b_{n-1} + a_n. \end{aligned} \quad (18)$$

(18) ფორმულები იძლევა მეთოდს, რომლის საშუალებითაც მიმდევრობით განისაზღვრება $q(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები და ნაშთი r .

(18) ფორმულებით $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ კოეფიციენტების და ნაშთის გამოთვლა შემდეგი სქემით ჩაიწერება:

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
c	b_0	$b_1 = c b_0 + a_1$	$b_2 = c b_1 + a_2$	$\dots$	$b_{n-1} = c b_{n-2} + a_{n-1}$	$r = c b_{n-1} + a_n$

პირველ სტრიქონში მოვათავსოთ $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები მიმდევრობით $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. მეორე სტრიქონის წინ დავწეროთ c , შემდეგ a_0 -ის ქვეშ დავწეროთ b_0 , a_1 -ის ქვეშ დავწეროთ $b_1 = c b_0 + a_1$, ამისათვის b_0 გავამრავლოთ c -ზე და შევკრიბოთ a_1 -თან. a_2 -ის ქვეშ დავწეროთ $b_2 = c b_1 + a_2$. ამისათვის, საკმარისია, b_1 გავამრავლოთ c -ზე და შევკრიბოთ a_2 -თან და ა. შ. ამ პროცესის გაგრძელებით a_n -ის ქვეშ მივიღებთ $r = f(c)$ -ს.

მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფით მიღებული განაყოფის კოეფიციენტებისა და ნაშთის განსაზღვრის განხილულ ხერხს ჰორნერის¹ სქემას უწოდებენ.

მაგალითად, მრავალწევრი $2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 6$ გავყოთ $(x-2)$ -ზე.

¹ უილიამ ჯორჯ ჰორნერი (1786—1837), ინგლისელი მათემატიკოსი.

სათანადო გამოთვლები ჩავატაროთ შემდეგი სქემით:

	2	0	-3	4	0	-6
2	2	$2 \cdot 2 + 0 = 4$	5	14	28	$50 = r$

მივიღეთ

$$q(x) = 2x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 14x + 28.$$

თუ $f(x)$ მრავალწევრის ნულია c რიცხვი, მრავალწევრი იყოფა $(x-c)$ -ზე. მაგრამ შეიძლება $f(x)$ მრავალწევრი გაიყოს $(x-c)^k$ -ზე, სადაც k ნატურალური რიცხვია. ამ შემთხვევაში

$$f(x) = (x-c)^k q(x).$$

თუ k ისეთი ნატურალური რიცხვია, რომ $q(x)$ აღარ იყოფა $(x-c)$ -ზე, მაშინ k -ს ეწოდება c -ს ჯერადობის მაჩვენებელი, ხოლო c -ს $f(x)$ მრავალწევრის k ჯერადობის ნული.

§ 2. ალგებრის ძირითადი თეორემა

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ მრავალწევრის ნულები. მაგრამ არ დავვისვამს კითხვა: ყოველ მრავალწევრს აქვს ნული? ჩვენთვის ცნობილია, რომ e^x და $|x|+1$ ფუნქციებს ნულები არა აქვთ, არც ნამდვილი და არც კომპლექსური. მრავალწევრს x^2+1 არა აქვს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ნული, ხოლო კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში მისი ნულებია $+i, -i$. მაგრამ შეიძლება არსებობდეს ისეთი კომპლექსურკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, რომელსაც კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში არა აქვს ნული? სინამდვილეში კი ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

ნებისმიერ რიცხვით კოეფიციენტებიან მრავალწევრს, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი 1-ზე ნაკლები არაა, ერთი ნული მაინც აქვს, ზოგადად შემთხვევაში კომპლექსური.

ეს თეორემა მეტად მნიშვნელოვანია და დიდი გამოყენება აქვს მათემატიკის სხვადასხვა დარგში. ამ თეორემას, როგორც აღრე, „ალგებრის ძირითად თეორემას“ უწოდებენ. ეს თეორემა მე-18 საუკუნის დასასრულს დაამტკიცა გაუსმა¹.

¹ კარლ ფრიდრიხ გაუსი (1777—1855), გერმანელი მათემატიკოსი.

ამ თეორემის დამტკიცებისათვის წინასწარ შევისწავლოთ მრავალწევრის ზოგიერთი თვისება¹. ამ თვისებებს მათემატიკის საშუალო სკოლის კურსიდან ნაწილობრივ ცნობილ ცნებათა საფუძველზე შევისწავლით. უფრო დაწვრილებით კი გამოყენებული ცნებები დაწვრილებით ქვემოთ იქნება გარჩეული.

ვიგულისხმობთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები კომპლექსური რიცხვებია და x -იც ლებულობს მნიშვნელობებს კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლიდან:

$$C = \{x \mid x = \xi + i\eta, \xi \in R, \eta \in R\},$$

მაშინ

$$f(x) = u + iv.$$

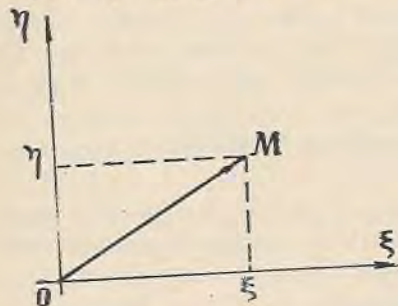
მაგალითად,

$$f(x) = (2-i)x^2 + (1-3i)x + (4+2i).$$

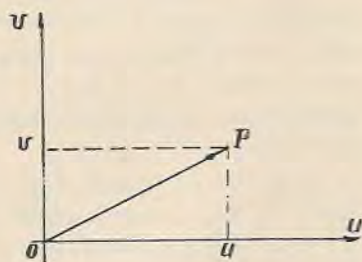
თუ $x = 1 + i$, მაშინ

$$f(1+i) = (2-i)(1+i)^2 + (1-3i)(1+i) + (4+2i) = 10 + 4i.$$

x ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას, $x = \xi + i\eta$, შეესაბამება (ξ, η) სიბრტყეზე ერთადერთი M წერტილი ξ, η კოორდინატებით (ნახ. 1). ასევე $f(x)$ ფუნქციის ყოველ მნიშვნელობას (u, v) სიბრტყეზე შეესაბამება ერთადერთი P წერტილი კოორდინატებით u, v (ნახ. 2). (ზემოთ (თავი III, § 4—§ 8) კომპლექსური რიცხვი z ასოთი აღვნიშნეთ, $z = x + iy$. აქ კი x ასოთი აღვნიშნეთ ცვლადი, რომელიც საზოგადოდ კომპლექსურ მნიშვნელობებს ლებულობს, $x \in C$).



ნახ. 1



ნახ. 2

x -ს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა C სიმრავლიდან, ან, როგორც ამბობენ, x იცვლება (ξ, η) კომპლექსურ სიბრტყეზე, ხოლო $f(x)$ ფუნქცია სათანადოდ იცვლება (u, v) კომპლექსურ სიბრტყეზე.

¹ გ. მ. შიპიროვ, უმაღლესი ალგებრა, თბილისი, 1949, გვ. 122; А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, М. 1971, стр. 147.

1-ლ პარაგრაფში ვაჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $f(x)$ მრავალწევრისათვის

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (1)$$

და ნებისმიერი c რიცხვისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$f(x) = r_0 + (x-c)q_0(x), \quad (2)$$

სადაც $q_0(x)$ მრავალწევრის,

$$q_0(x) = b_0^{(0)} x^{n-1} + b_1^{(0)} x^{n-2} + \dots + b_{n-2}^{(0)} x + b_{n-1}^{(0)},$$

კოეფიციენტები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით (ჰორნერის სქემა)

$$b_0^{(0)} = a_0, \quad b_1^{(0)} = c b_0^{(0)} + a_1, \dots, \quad b_{n-1}^{(0)} = c b_{n-2}^{(0)} + a_{n-1},$$

$$r_0 = c b_{n-1}^{(0)} + a_n = f(c).$$

თუ $q_0(x)$ მრავალწევრსაც კვლავ შემდეგი ტოლობით წარმოვადგენთ

$$q_0(x) = r_1 + (x-c)q_1(x), \quad (3)$$

მივიღებთ

$$q_1(x) = b_0^{(1)} x^{n-2} + b_1^{(1)} x^{n-3} + \dots + b_{n-2}^{(1)},$$

სადაც

$$b_0^{(1)} = b_0^{(0)}, \quad b_1^{(1)} = c b_0^{(1)} + b_1^{(0)}, \dots, \quad b_{n-2}^{(1)} = c b_{n-3}^{(1)} + b_{n-2}^{(0)},$$

$$r_1 = c b_{n-2}^{(1)} + b_{n-1}^{(1)} = q_0(c),$$

და ა. შ.

$$q_{n-2}(x) = r_{n-1} + (x-c)q_{n-1}(x),$$

სადაც

$$q_{n-1}(x) = b_0^{(n-1)} = a_0 = r_n,$$

ხოლო

$$r_{n-1} = q_{n-2}(c).$$

თუ (2)-ში ჩავსვამთ $q_0(x)$ -ის მნიშვნელობას (3) ტოლობიდან, მივიღებთ

$$\begin{aligned} f(x) &= r_0 + (x-c)[r_1 + (x-c)q_1(x)] = \\ &= r_0 + r_1(x-c) + (x-c)^2 q_1(x). \end{aligned}$$

თუ ამ უკანასკნელში $q_1(x)$ მნიშვნელობას ჩავსვამთ, გვექნება.

$$f(x) = r_0 + r_1(x-c) + r_2(x-c)^2 + (x-c)^3 q_2(x)$$

და ა. შ. ამ პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ

$$f(x) = r_0 + r_1(x-c) + r_2(x-c)^2 + \dots + r_n(x-c)^n, \quad (4)$$

სადაც კოეფიციენტები სრულიად გარკვეული რიცხვებია:

$$r_0 = f(c), r_1 = q_0(c), \dots, r_n = a_0.$$

(4) ფორმულა ე. წ. ტეილორის ფორმულა მრავალწევრისათვის (იხ. თავი XV, § 3, n 1).

განვიხილოთ სხვაობა

$$f(x) - r_0 = f(x) - f(c).$$

(4) ფორმულიდან ცხადია,

$$f(x) - f(c) = r_1(x-c) + r_2(x-c)^2 + \dots + r_n(x-c)^n,$$

თუ ვისარგებლებთ კომპლექსურ რიცხვთა ჯამის მოდულის თვისებით (თავი III, § 7), შეგვიძლია დავწეროთ

$$|f(x) - f(c)| \leq |r_1||x-c| + |r_2||x-c|^2 + \dots + |r_n||x-c|^n. \quad (5)$$

ვთქვათ, $x-c$ სხვაობის მოდულია r ,

$$|x-c| = r,$$

ხოლო $|r_1|, |r_2|, \dots, |r_n|$ მოდულებიდან უდიდესია H , მაშინ (5) უტოლობიდან მივიღებთ

$$|f(x) - f(c)| \leq H(r + r^2 + \dots + r^n) = \frac{H(r - r^{n+1})}{1 - r}.$$

დავუშვათ, $r = |x-c| < 1$, მაშინ

$$|f(x) - f(c)| \leq \frac{Hr}{1 - r}.$$

ახლა, ვთქვათ, ε ისეთი დადებითი რიცხვია, რომ

$$\frac{Hr}{1 - r} < \varepsilon. \quad (6)$$

მაშინ $f(x) - f(c)$ სხვაობის მოდული ნაკლები იქნება ε -ზე. უკანასკნელი უტოლობა ამოცხსნათ r -ის მიმართ:

$$r < \frac{\varepsilon}{H + \varepsilon}.$$

სილიდე $\frac{\varepsilon}{H + \varepsilon}$ აღვნიშნოთ δ ასოთი, გვექნება

$$r < \delta. \quad (7)$$

(6) უტოლობაში ჩვენ ხელთ არის r . ეს სილიდე შეგვიძლია ნებისმიერად მცირე ავიღოთ. ასე რომ, ε ნებისმიერად მცირე სილიდეა, რომლის შესაბამისად განისაზღვრება δ .

ამგვარად მივიღეთ შემდეგი დასკვნა:

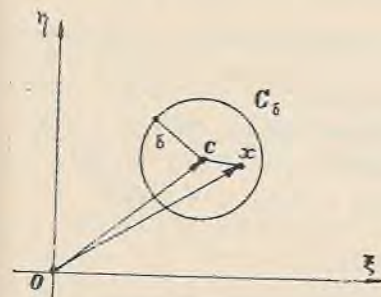
ყოველი ε დადებითი რიცხვისათვის განისაზღვრება ისეთი δ დადებითი რიცხვი, რომ, როცა სრულდება (7) უტოლობა, მაშინ სრულდება $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ უტოლობა. ე. ი.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|x-c| = r < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(c)| < \varepsilon). \quad (8)$$

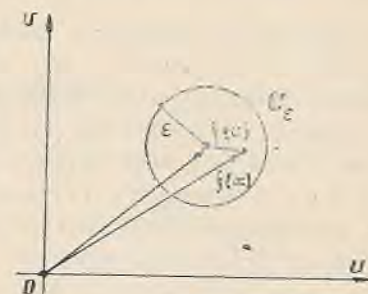
როგორც საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსიდანაა ცნობილი, $f(x)$ ფუნქციის ამ თვისებას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის c წერტილში უწყვეტობა (იხ. თავი XIII, § 10, n 1).

(8) დამოკიდებულებით დავამტკიცეთ, რომ ყოველი $f(x)$ მრავალწევრი (წ, η) სიბრტყის ნებისმიერ $x = \xi + i\eta$ წერტილში უწყვეტია.

(8) დამოკიდებულება შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ გეომეტრიულად. (წ, η) სიბრტყეზე ავიღოთ ნებისმიერი c (წ, η) წერტილი (ნახ. 3). ძნელი მისახედრი არაა, რომ $|x-c|$ მოდული გამოსახავს CX მონაკვე-



ნახ. 3



ნახ. 4

თის სიგრძეს. სიმრავლე ყველა იმ წერტილისა, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x-c| < \delta$, იძლევა იმ წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილებს, რომლის ცენტრია C წერტილი და რადიუსია δ .

ასევე, სიმრავლე ყველა (u, v) წერტილისა, $f(x) = u + iv$, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, წარმოადგენს (u, v) სიბრტყეში იმ წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილებს, რომლის ცენტრია $f(c)$ წერტილი და რადიუსია ε (ნახ. 4), $f(c) = u(c) + iv(c)$.

$f(x)$ მრავალწევრის (8) თვისება ნიშნავს: ყოველი x წერტილისათვის, რომელიც ეკუთვნის იმ C_δ წრეს, რომლის ცენტრია C წერტილი და რადიუსია δ , შესაბამისი $f(x) = u(x) + iv(x)$ წერტილი მოთავსებული იქნება იმ C_ε წრეში, რომლის ცენტრია $f(c)$ წერტილი, $f(c) = u(c) +$

$+iv(c)$, და რადიუსია ε . თუ x მიისწრაფის C წერტილისაკენ, მაშინ $f(x) = u(x) + iv(x)$ წერტილი მიისწრაფის $f(c) = u(c) + iv(c)$ წერტილისაკენ.

თუ ვისარგებლებთ $|f(x)| - |f(c)|$ მოდულების სხვაობისათვის კომპლექსურ რიცხვთა სხვაობის მოდულის თვისებით (თავი III, § 7), გვექნება:

$$||f(x)| - |f(c)|| \leq |f(x) - f(c)|.$$

ეს უკანასკნელი კი (8) თვისებით მოგვცემს:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|x - c| = r < \delta) \Rightarrow (||f(x)| - |f(c)|| < \varepsilon), \quad (9)$$

ანუ $f(x)$ ფუნქციის მოდული $|f(x)|$ უწყვეტი ფუნქციაა (§ 7) სიბრტყის ნებისმიერ x წერტილში, $x = \xi + i\eta$.

ვთქვათ, x ცვლადი მხოლოდ ნამდვილ მნიშვნელობებს ღებულობს და $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ (8) დამოკიდებულება ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (c - \delta < x < c + \delta) \Rightarrow (f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon). \quad (10)$$

ამგვარად, თუ $f(c) \neq 0$, მაშინ ყოველთვის შეიძლება განვსაზღვროთ ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $c - \delta < x < c + \delta$ შუალედის ყოველი x წერტილისათვის $f(x)$ ფუნქცია ინარჩუნებს $f(c)$ -ს ნიშანს.

კერძოდ, თუ $c=0$, მაშინ (1) ტოლობიდან მივიღებთ $f(0) = a_n$. ვთქვათ, $a_n \neq 0$, მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $-\delta < x < \delta$ შუალედში $f(x)$ მრავალწევრის ჰეონდეს a_n -ის ნიშანი.

დავამტკიცოთ $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის მოდულის შესახებ შემდეგი ლემა:

ლემა 1. n ხარისხის, $n \geq 1$, ყოველი $f(x)$ მრავალწევრისათვის,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

არსებობს x ცვლადის მოდულის ისეთი მნიშვნელობა, რომ ნებისმიერი ნამდვილი k დადებითი რიცხვისათვის ჰეშმარიტია უტოლობა

$$|a_0 x^n| > k |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n|. \quad (11)$$

ანუ ნებისმიერი ნამდვილი $k > 0$ -სათვის მოიძებნება ისეთი $N > 0$, რომ ყოველი $|x| > N$ -სათვის სრულდება (11) უტოლობა.

მართლაც, თუ a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, კოეფიციენტების მოდულებიდან უდიდესია A ,

$$A = \max \{ |a_1|, |a_2|, \dots, |a_n| \},$$

მაშინ

$$\begin{aligned} |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| &\leq |a_1| |x|^{n-1} + |a_2| |x|^{n-2} + \dots + |a_n| \leq \\ &\leq A (|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + 1) = A \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}. \end{aligned}$$

დავუშვათ, $|x| > 1$, მაშინ

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| < A \frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

ასე რომ, (11) უტოლობა შესრულდება, თუ $|x| > 1$ -თან ერთად შესრულდება უტოლობა

$$kA \frac{|x|^n}{|x| - 1} \leq |a_0| |x|^n.$$

აქედან კი

$$|x| \geq \frac{kA}{|a_0|} + 1. \quad (12)$$

ცხადია, N რიცხვი რომ ავიღოთ $\frac{kA}{|a_0|} + 1$ -ის ტოლად, მაშინ $|x| > N$ -სათვის შესრულდება (12) უტოლობა და, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის მოდული $|a_0 x^n|$ აკმაყოფილებს (11) უტოლობას.

ახლა დავამტკიცოთ ლემა $f(x)$ მრავალწევრის მოდულის შესახებ.

ლემა 2. $|x|$ -ის საკმარისად დიდი მნიშვნელობისათვის ყოველი $f(x)$ მრავალწევრის მოდული $|f(x)|$ მეტი იქნება ყოველ წინასწარ ადებულ M დადებით რიცხვზე. ანუ ყოველი ნამდვილი როგორიც გინდა დიდი იყოს $M > 0$, რიცხვი, მოიძებნება ისეთი ნამდვილი დადებითი N რიცხვი, რომ ყოველი $|x| > N$ -სათვის $|f(x)| > M$.

მართლაც, $f(x)$ წარმოვადგინოთ, როგორც ორი შესაკრების ჯამი

$$f(x) = a_0 x^n + (a_1 x^{n-1} + \dots + a_n),$$

საიდანაც კომპლექსურ რიცხვთა სხვაობის მოდულის თვისებით მივიღებთ

$$|f(x)| \geq |a_0 x^n| - |a_1 x^{n-1} + \dots + a_n|. \quad (13)$$

ავიღოთ (12) უტოლობაში $k=2$,

$$|x| \geq \frac{2A}{|a_0|} + 1, \quad (14)$$

$$\frac{A|x|^n}{|x|-1} \leq \frac{1}{2} |a_0 x^n|.$$

ამგვარად, x -ის იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს (14) უტოლობას

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| < \frac{1}{2} |a_0 x^n|.$$

ამის გამო (13) უტოლობა მოგვცემს

$$|f(x)| > |a_0 x^n| - \frac{1}{2} |a_0 x^n| = \frac{1}{2} |a_0 x^n|. \quad (15)$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს რაიმე $M > 0$ ნამდვილი რიცხვი, მაშინ ისეთი x -თვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\frac{1}{2} |a_0 x^n| > M,$$

ანუ

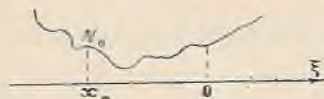
$$|x| > \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}},$$

გვექნება

$$|f(x)| > M.$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ: მოცემული ნებისმიერად დიდი $M > 0$ -თვის განისაზღვრება $N = \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}$ ნამდვილი რიცხვი ისეთი, რომ, თუ $|x| > N$, მაშინ $|f(x)| > M$.

ამ ლემის აზრით უფრო გასაგები გახდება შემდეგი გეომეტრიული წარმოდგენით. (წ, η) კომპლექსური სიბრტყის ყოველი $x_0 = \xi_0 + i\eta_0$ წერტილიდან აღვმართოთ პერპენდიკულარი, სიგრძით $f(x)$ მრავალწევრის მოდულის $|f(x_0)|$ ტოლი. უწყვეტობის გამო ამ პერპენდიკულართა ბოლო წერტილები აღწერს უწყვეტ ზედაპირს. მე-5 ნახაზზე ნაჩვენებია მხოლოდ ξ ღერძზე $|f(x)|$ მოდულის მნიშვნელობანი (ქრი-ლი). რაც უფრო შორს არის x_0 წერტილი 0 წერტილიდან, მით უფრო



ნახ. 5

შორს იქნება ξ ღერძიდან. ახლა ავიღოთ სიმრავლე $\{x\}$ წერტილებისა, სადაც $|x| \leq \delta$. ასეთი წერტილები შეადგენს იმ წრეს წრეწირის ჩათვლით, რომლის ცენტრია კოორდინატთა სათავე (წ, η) სიბრტყეში და რადიუსი δ -ს

ტოლია. ამ წრის ყოველი x წერტილიდან აღვმართოთ პერპენდიკულარები (წ, η) სიბრტყისადმი სიგრძით $|f(x)|$. გეომეტრიულად, ცხადია, არსებობს ერთი მაინც უმდაბლესი წერტილი. ე. ი. არსებობს ისეთი M_1 წერტილი, $|x_1 M_1| = |f(x_1)|$, რომ $|f(x_1)|$ მცირეა ვიდრე $|f(x)|$ -ის მნიშვნელობა სხვა წერტილებში (ყოველ შემთხვევაში არაა მეტი, ვიდრე $|f(x)|$ -ის მნიშვნელობა მეზობელ წერტილებში, ამ x_1 წერტილს ეწოდება $|f(x)|$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი C_0 დახურულ წრეში. ამგვარად, ყოველი მრავალწევრის მოდული $|f(x)|$ დახურულ ნებისმიერ C_δ წრეში აღწევს თავის მინიმუმს (სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისება. იხ. თავი XII, § 11, n 1). აქ გვაქვს ე. წ. ვაიერშტრასის განზოგადებული თეორემა.

თეორემის დამტკიცებას, რომ $n \geq 1$ ხარისხის მრავალწევრს, $f(x)$ -ს, ერთი ნული მაინც აქვს, ზოგად შემთხვევაში კომპლექსური, გაუსზე აღრე შეეცადა დალამბერის¹. მართალია, დალამბერის მსჯელობა არ იყო მთლიანად მკაცრი, მაგრამ მან, პირველმა, დაამტკიცა ლემა, რომელიც საფუძვლად შეიძლება დაედოს აღნიშნული თეორემის მკაცრ დამტკიცებას. დალამბერის ლემა შემდეგში მდგომარეობს:

ლემა 3. თუ $n \geq 1$ ხარისხის მრავალწევრი $f(x)$ x_0 წერტილში განსხვავდება ნულისაგან, $f(x_0) \neq 0$, მაშინ მოინახება ისეთი h , საზოგადოდ კომპლექსური, რომ

$$|f(x_0 + h)| < |f(x_0)|.$$

დამტკიცება. $f(x)$ მრავალწევრი წარმოვადგინოთ ტეილორის (4) ფორმულით:

$$f(x) = f(c) + r_1(x-c) + \dots + r_n(x-c)^n.$$

ვთქვათ, $r_1 = r_2 = \dots = r_{k-1} = 0$, $r_k \neq 0$, მაშინ გვექნება

$$f(x) = f(c) + r_k(x-c)^k + \dots + r_n(x-c)^n. \quad (16)$$

არ შეიძლება ყველა $r_1, r_2, \dots, r_n$ ნულის ტოლი იყოს, რადგანაც, მაშინ გვექნებოდა $f(x) = f(c)$. ე. ი. $f(x)$ მრავალწევრი იქნებოდა მუდმივი, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება; მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებელი $n \geq 1$.

ავიღოთ $x_1 = x_0 + h$, $c = x_0$, მაშინ (16) მოგვცემს

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + r_k h^k + \dots + r_n h^n. \quad (17)$$

პირობის თანახმად $f(x_0) \neq 0$. (17) ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $f(x_0)$ -ზე:

$$\frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} = 1 + A_k h^k + \dots + A_n h^n, \quad (18)$$

¹ ჟან ლარონ დალამბერი (1717—1783), ფრანგი მათემატიკოსი.

$$A_k = \frac{r_k}{f(x_0)}, \quad A_{k+1} = \frac{r_{k+1}}{f(x_0)}, \dots, \quad A_n = \frac{r_n}{f(x_0)}.$$

h -ის მნიშვნელობა ისე შევარჩიოთ, რომ $A_k h^k$ იყოს ნამდვილი და უარყოფითი რიცხვი. ამისათვის საკმარისია, ავიღოთ A_k და h ტრიგონომეტრიული სახით

$$A_k = R_k (\cos \theta_k + i \sin \theta_k),$$

$$h = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

აქ A_k მოცემულია, მაშასადამე, R_k და θ_k შეგვიძლია განვსაზღვროთ, ხოლო ρ და φ არაა ცნობილი. გამოვთვალოთ ნამრავლი

$$\begin{aligned} A_k h^k &= R_k (\cos \theta_k + i \sin \theta_k) \cdot \rho^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) = \\ &= R_k \rho^k (\cos(\theta_k + k\varphi) + i \sin(\theta_k + k\varphi)). \end{aligned}$$

თუ დავუშვებთ

$$\theta_k + k\varphi = \pi,$$

ე. ი.

$$\varphi = \frac{\pi - \theta_k}{k}, \quad (19)$$

მაშინ

$$A_k h^k = R_k \rho^k (\cos \pi + i \sin \pi) = -R_k \rho^k. \quad (20)$$

R_k და ρ , დადებითი რიცხვებია, მაშასადამე, $A_k h^k$ უარყოფითი რიცხვია. მოდული ρ ჯერჯერობით განსაზღვრული არაა. იგი ისე ავარჩიოთ, რომ

$$R_k \rho^k < 1.$$

აქედან, ცხადია,

$$\rho < \sqrt[k]{\frac{1}{R_k}}. \quad (21)$$

ამის გამო

$$1 + A_k h^k = 1 - R_k \rho^k > 0. \quad (22)$$

(18) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\left| \frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} \right| \leq |1 + A_k h^k| + |A_{k+1} h^{k+1}| + \dots + |A_n h^n|.$$

(22) დამოკიდებულების საფუძველზე გვექნება

$$\left| \frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} \right| \leq 1 - R_k \rho^k + |A_{k+1}| |h|^{k+1} + \dots + |A_n| |h|^n.$$

რადგანაც $|h| = \rho$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left| \frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} \right| \leq 1 - \rho^k (R_k - |A_{k+1}| \rho - \dots - |A_n| \rho^{n-k}).$$

აქ ფრჩხილებში მოთავსებულია ρ -ს მიმართ მრავალწევრი, რომლის თავისუფალი წევრი პირობის თანახმად განსხვავებულია ნულისაგან,

$$r_k \neq 0, \quad f(x_0) \neq 0, \quad \left| \frac{r_k}{f(x_0)} \right| = |A_k| = R_k \neq 0.$$

ρ იმდენად მცირე შეგვიძლია ავიღოთ, რომ მრავალწევრს

$$\varphi(\rho) = R_k - |A_{k+1}| \rho - \dots - |A_n| \rho^{n-k}$$

ჰქონდეს R_k -ს ნიშანი, $R_k > 0$.

ამრიგად,

$$\forall \varepsilon < 0 \exists \delta > 0 \mid (-\delta < \rho < \delta) \Rightarrow (R_k - \varepsilon < \varphi(\rho) < R_k + \varepsilon). \quad (23)$$

ამის გამო

$$\frac{|f(x_0 + h)|}{|f(x_0)|} \leq 1 - \rho^k \varphi(\rho) < 1,$$

საიდგნაც

$$|f(x_0 + h)| < |f(x_0)|. \quad (24)$$

ჩვენ დავუშვით h -ის მიმართ, რომ $\arg h = \varphi$ აკმაყოფილებდეს (19) პირობას, ხოლო $|h| = \rho$ აკმაყოფილებდეს პირობებს

$$\rho < \sqrt[k]{\frac{1}{R_k}}, \quad \rho < \delta.$$

ეს ორი პირობა ზემოდან ზღუდავს ρ -ს და არ უშლის ხელს, რომ ρ ავარჩიოთ რაგინდ მცირე და შესრულდეს (23) პირობა. აქედან კი გამომდინარეობს (24) უტოლობა. ამით დალამბერის ლემა დამტკიცდა.

ახლა დავამტკიცოთ ალგებრის ძირითადი

თეორემა. ყოველ n ხარისხის მრავალწევრს, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი 1-ზე ნაკლები არაა, ერთი ნული მაინც აქვს, ზოგად შემთხვევაში კომპლექსური.

დამტკიცება. ავიღოთ n ხარისხის მრავალწევრი

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

ცხადია, $f(0) = a_n$ და $a_n \neq 0$. თუ $f(0) = 0$, მაშინ თეორემის ჰეშმა-რიტება ნათელია. ვთქვათ, $M = f(0)$, მაშინ მე-2 ლემის საფუძველზე ამ M რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი N რიცხვი, რომ $|x| > N$ -სათვის $|f(x)| > |f(0)|$. ავიღოთ C_N წრე, რომლის ცენტრია კოორდინატთა სათავე (ξ, η) სიბრტყეში და რადიუსი N -ის ტოლია. ამ C_N წრეში განვიხილოთ ნებისმიერი ჩაკეტილი $\bar{E}$ წრე. ამ $\bar{E}$ ჩაკეტილ წრეში $f(x)$ ფუნქციის მო-ღუწილი $|f(x)|$ აღწევს თავის მინიმუმს (გაიერშტრასის განზოგადოებული თეო-რემა ჩაკეტილი არისათვის). ასეთ ნებისმიერ $\bar{E}$ წრეში $|f(x)|$ ფუნქციის აქვს მინიმუმი. ახლა $\bar{E}$ წრედ ისეთი ჩაკეტილი $\bar{E}^0$ წრე ავიღოთ, რომლის ცენტრიც კოორდინატთა სათავეშია მოთავსებული. ვთქვათ, ამ $\bar{E}^0$ წრეში x_1 არის $|f(x)|$ -ის მინიმუმის წერტილი. მაშინ, ცხადია, $|f(x_1)| \leq |f(0)|$.

თუ x_1 წერტილი $\bar{E}^0$ -ს კონტურზეა—წრეწირზეა, მაშინ M რიცხვი შემდეგი პირობით განესაზღვროთ $M = \max \{|f(0)|, |f(x_1)|\}$. M რიცხვის შესაბამის N რიცხვისათვის გვექნება $(|x| > N) \Rightarrow |f(x)| > M$.

$\bar{E}^0$ წრის რადიუსი სწორედ ამ N რიცხვის ტოლი ავიღოთ, მაშინ $(|x| > N) \Rightarrow |f(x)| > M$ და $|f(x_1)| < |f(x)|$ ყოველი $x \in \bar{E}^0$ კონტურს. x_1 წერტილი იქნება $|f(x)|$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი მთელ (ξ, η) კომპლექსურ სიბრტყეზე. თუ x_2 მდებარეობს $\bar{E}^0$ -ის გარეთ, მაშინ x_2 -სათვის გვექნება

$$|f(x_2)| > |f(0)| \geq |f(x_1)|.$$

აქედან გამომდინარეობს $f(x_1) = 0$. თუ $f(x_1) \neq 0$, მაშინ დალამბერის ლემის თანახმად, მოიძებნება ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$|f(x_0)| < |f(x_1)|.$$

რაც ეწინააღმდეგება x_1 -ის განსაზღვრას.

ამგვარად, არსებობს ისეთი x_1 წერტილი (ξ, η) კომპლექსურ სიბრტყეზე, $x = \xi + i\eta$, რომ $f(x_1) = 0$. ამით თეორემა დამტკიცდა.

§ 3. მრავალწევრის წრფივ მამრავლებად დაშლა

1. წრფივ მამრავლებად დაშლა. განვიხილოთ $n \geq 1$ ხარისხის მრავალწევრი

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n. \quad (1)$$

გაუთხის თეორემის თანახმად ამ მრავალწევრს ერთი ნული მაინც აქვს ვთქვათ, ეს ნულია x_1 , მაშინ ბეზუს თეორემის თანახმად

$$f(x) = (x - x_1) q_1(x). \quad (2)$$

სადაც $q_1(x)$ არის $n-1$ ხარისხის მრავალწევრი. ამ მრავალწევრსაც ერთი ნული მაინც აქვს. მრავალწევრის ეს ნული იყოს x_2 , მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$q_1(x) = (x - x_2) q_2(x),$$

სადაც $q_2(x)$ არის $n-2$ ხარისხის მრავალწევრი. თუ ამ პროცესს გა-ვაგრძელებთ, მივიღებთ

$$q_{n-1}(x) = a_0 (x - x_n).$$

თუ (2) ტოლობაში მიმდევრობით ჩავსვათ $q_1(x), q_2(x), \dots, q_{n-1}(x)$ მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$f(x) = a_0 (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n). \quad (3)$$

a_0 კოეფიციენტი (3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში იმის გამო გვაქვს, რომ (3) ტოლობა ჰეშმარიტია x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. თუ მარჯვენა ნაწილში ფრჩხილებს გავხსნით, გვექნება n ხარისხის მრავალწევრი, რომლის კოეფიციენტები სათანადოდ $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტების ტოლი უნდა იყოს. რადგანაც (3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში x^n -ის კოეფიციენტი a_0 , ასევე a_0 უნდა იყოს (3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში x^n -ის კოეფიციენტი.

შეიძლება $x_1, x_2, \dots, x_n$ რიცხვებიდან ზოგიერთი ერთიმეორის ტოლი იყოს, მაშინ (3) ტოლობის ნაცვლად გვექნება

$$f(x) = a_0 (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n. \quad (4)$$

ამ შემთხვევაში x_1 -ს ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის α_1 ჯერადობის ნული, x_2 -ს α_2 ჯერადობის ნული და ა. შ.

$f(x)$ მრავალწევრის (3) სახით წრფივ მამრავლებად დაშლა ერთადერთია.

მართლაც, თუ $f(x)$ მრავალწევრი სხვა წრფივ მამრავლებად დაიშალა (მამრავლების რიცხ მნიშვნელობა არა აქვს)

$$f(x) = a_0 (x - y_1) (x - y_2) \dots (x - y_n), \quad (5)$$

მაშინ (3) და (5) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$(x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n) = (x - y_1) (x - y_2) \dots (x - y_n).$$

ამ ტოლობაში ჩავსვათ $x = y_1$, მაშინ მარჯვენა მხარეში ნულს მივიღებთ, ხოლო მარცხენა მხარეში ნულისაგან განსხვავებულ სიდიდეს, თუ $y_1 \neq x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, რომელიმე y_k , $k = 1, \dots, n$, რომელიმე x_i -ის, $i = 1, \dots, n$, ტოლი უნდა იყოს.

(4) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. $n \geq 1$ ხარისხის ყოველ მრავალწევრს აქვს n ნული, თუ მრავალწევრის ყოველ ჯერად ნულს ჩავთვლით იმდენ ნულად, რასაც უდრის მრავალწევრის ნულის ჯერადობა,

$$f(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_k)^{\alpha_k},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n. \quad (6)$$

2. ვიეტიის ფორმულები. ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი 1-ია,

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n, \quad (6)$$

მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის მამრავლებად გაშლა იქნება

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n). \quad (7)$$

გადავამრავლოთ (7) გამოსახულების მამრავლები, შეგვკრიბოთ x -ის ერთი და იმავე ხარისხის კოეფიციენტები და გავუტოლოთ x^i -ის სათანადო კოეფიციენტებს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} p_1 &= -(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \\ p_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n \\ p_3 &= -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_1 x_2 x_n + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n), \\ &\dots \\ p_{n-1} &= (-1)^{n-1} (x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \dots + x_2 x_3 \dots x_n), \\ p_n &= (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n. \end{aligned} \quad (8)$$

ამ ფორმულებს ვიეტიის ფორმულები ეწოდება.

თუ $n=2$, მაშინ (8) ფორმულებიდან მივიღებთ ჩვენთვის კარგად ცნობილ ფორმულებს საშუალო სკოლის კურსიდან

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

3. ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრები. ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია და მისი ნულია $\alpha + i\beta$, მაშინ $f(x)$ -ში სათანადო ჩასმა $x = \alpha + i\beta$ მოგვცემს

$$f(\alpha + i\beta) = A + iB = 0, \quad (9)$$

საიდანაც

$$A = 0, \quad B = 0.$$

¹ ფრანსუა ვიეტი (1540—1603), ფრანგი მათემატიკოსი.

ახლა ავიღოთ $x = \alpha - i\beta$. რადგანაც $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ x -ის შეცვლით $\alpha - i\beta$ გამოსახულებით $f(x)$ მრავალწევრში კოეფიციენტები არ შეიცვლება. i შეიცვლება მხოლოდ $(-i)$ -ით. მაგალითად,

$$(\alpha + i\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + i2\alpha\beta, \quad (\alpha - i\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2) - i2\alpha\beta.$$

ამის გამო ნაცვლად (9) გამოსახულებისა მივიღებთ

$$f(\alpha - i\beta) = A - iB.$$

და, რადგანაც $A=0$, $B=0$, გვექნება

$$f(\alpha - i\beta) = 0.$$

ამრიგად, მართებულია შემდეგი

თეორემა 2. თუ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ნულია $\alpha + i\beta$, მაშინ ამავე მრავალწევრის ნულია $\alpha - i\beta$.

თუ მრავალწევრი კენტი ხარისხისაა, $n=2k+1$, მაშინ, ურთიერთ-შეუღლებული კომპლექსური ნულების ლუწი რიცხვი გვექნება, თუ მრავალწევრის კომპლექსური ნულები აქვს და წყვილის გარეშე დარჩება ერთი ნული. ეს ნული $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ნული იქნება. მაგალითად, $x^3 + 1$ მრავალწევრის ნულებია:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ავიღოთ $f(x)$ მრავალწევრის ურთიერთშეუღლებული ნულები: $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. სათანადო ბინომების ნამრავლი მოგვცემს

$$\begin{aligned} [x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] &= (x - \alpha)^2 + \beta^2 = \\ &= x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2) = x^2 + px + q, \end{aligned}$$

სადაც $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$. ამის გამო ნაცვლად (5) გამოსახულებისა მივიღებთ

$$f(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_\mu)^{\alpha_\mu} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_\nu x + q_\nu)^{\beta_\nu},$$

სადაც

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\mu + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_\nu = n.$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3. ყოველი ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი წარმოიდგინება მისი უფროსი კოეფიციენტისა და ნამდვილკოეფიციენტებიანი

პირველი და მეორე ხარისხის დაუყვანადი მრავალწევრების ნამრავლის სახით.

მაგალითად,

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

$x - a$ და $x^2 + px + q$ მრავალწევრებს, სადაც $p^2 - 4q < 0$, ეწოდება დაუყვანადი მრავალწევრები ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში.

§ 4. წილადრაციონალური ფუნქცია. უმარტივეს წილადებად დაშლა

1. წილადრაციონალური ფუნქცია. ავიღოთ ორი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრის შეფარდება $\frac{f(x)}{g(x)}$, შეფარდებას $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$,

სადაც $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებია, ეწოდება წილადრაციონალური (რაციონალური) ფუნქცია. ამ ფუნქციებზე შეიძლება შევასრულოთ ისეთივე მოქმედებანი, როგორიც რაციონალურ რიცხვებზე. სიმარტივისათვის განვიხილავთ ნამდვილკოეფიციენტებიან რაციონალურ ფუნქციებს. მსჯელობის დროს ადვილი შესამჩნევია იქნება, რომ ყველა შედეგი, რაც მიღებული იქნება ნამდვილკოეფიციენტებიანი წილადრაციონალური ფუნქციებისათვის, გადაიტანება კომპლექსურკოეფიციენტებიან წილადრაციონალურ ფუნქციებზე.

თუ $f(x)$ მრიცხველს და $g(x)$ მნიშვნელს საერთო მამრავლი აქვს, მაშინ წილადრაციონალური ფუნქცია ამ მამრავლზე უნდა შეიკვეცოს. ამიტომ, ცხადია, ყოველი წილადრაციონალური ფუნქცია რაიმე უკვეცი წილადის ტოლია, რომელიც განსაზღვრულია ცალსახად მრიცხველისა და მნიშვნელის მუდმივ მამრავლამდე სიზუსტით:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

მაშინ

$$f(x) = c\varphi(x), \quad g(x) = c\psi(x).$$

წილადრაციონალურ ფუნქციას ეწოდება წესიერი, თუ მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე.

მაგალითად, წილადრაციონალური ფუნქცია

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{5x^3 - 4x^2 + 9x + 3}.$$

წესიერი წილადრაციონალური ფუნქციაა, რადგანაც მრიცხველში მეორე ხარისხის მრავალწევრია, ხოლო მნიშვნელში — მესამე ხარისხის მრავალწევრი.

2. წილადრაციონალური ფუნქციის დაშლა

თეორემა 1. ყოველი წილადრაციონალური ფუნქცია ერთადერთი სახით წარმოიდგინება მრავალწევრისა და წესიერი წილადრაციონალური ფუნქციის ჯამით.

მართლაც, ავიღოთ წილადი $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$. ვისარგებლოთ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებისათვის გაყოფადობის თეორემით (§ 1, თეორემა 1)

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x). \quad (1)$$

$q(x)$ და $r(x)$ ერთდერთი შესაძლებლობით განისზღვრება. რადგანაც $g(x) \neq 0$, (1)-ის $g(x)$ -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \quad (2)$$

რაც გამოთქმული თეორემის მართებულობას ამტკიცებს.

მაგალითად,

$$\frac{4x^3 - 9x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 1} = 4x + 3 + \frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 1}.$$

წესიერ წილადრაციონალურ ფუნქციას ეწოდება უმარტივესი წესიერი წილადრაციონალური ფუნქცია, თუ მნიშვნელი წარმოადგენს დაუყვანადი მრავალწევრების ხარისხს.

მაგალითად,

$$\frac{1}{x-2}, \quad \frac{x+1}{x^2+x+1}, \quad \frac{3x-5}{(x^2-x+1)^2},$$

უმარტივესი წილადრაციონალური ფუნქციებია.

თეორემა 2. ყოველი წესიერი წილადრაციონალური ფუნქცია $\frac{f(x)}{g(x)}$, სადაც

$$g(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x^2+px+q)^\mu \dots (x^2+lx+s)^\nu, \quad (3)$$

ერთადერთი უმარტივესი წილადრაციონალური ფუნქციათა ჯამით წარმოიდგინება:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \\ &+ \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta}{x-b} + \dots + \\ &+ \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}} + \dots + \\ &+ \frac{M_\mu x + N_\mu}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{P_1 x + \theta_1}{(x^2 + lx + s)^\nu} + \\ &+ \frac{P_2 x + \theta_2}{(x^2 + lx + s)^{\nu-1}} + \dots + \frac{P_\nu x + \theta_\nu}{x^2 + lx + s}, \end{aligned} \quad (4)$$

სადაც $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, B_1, \dots, B_\beta, P_\nu, \theta_\nu$ გარკვეული მუდმივებია.
და მტკიცება. ვთქვათ,

$$g(x) = (x-a)^\alpha g_1(x),$$

სადაც $g_1(a) \neq 0$. წილადი $\frac{f(x)}{g(x)}$ წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f(x) - A g_1(x)}{(x-a)^\alpha g_1(x)}, \quad (5)$$

სადაც A ნულისაგან განსხვავებული მუდმივია. (5) ტოლობა მართებულია A -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. შევარჩიოთ A ისე, რომ $f(x) - A g_1(x)$ გამოსახულება გაიყოს $x-a$ სხვაობაზე. ამისათვის ბეჭდს თეორემის თანახმად, აუცილებელია და საკმარისი

$$f(a) - A g_1(a) = 0 \quad (6)$$

ტოლობა შესრულდეს. რადგანაც $f(a) \neq 0$ და $g(a) \neq 0$, (6) ტოლობიდან გვექნება

$$A = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

A -ს მიღებული მნიშვნელობა A_1 -ით აღვნიშნოთ. A_1 -სათვის $f(x) - A_1 g_1(x)$ იყოფა $x-a$ სხვაობაზე. მივიღებთ

$$f(x) - A_1 g_1(x) = (x-a) f_1(x). \quad (7)$$

თუ (7) მნიშვნელობას შევიტანთ (5)-ში და სათანადოდ $(x-a)$ -ზე შევკვეთავთ, გვექნება

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} g_1(x)}. \quad (8)$$

წესიერ წილადზე $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} g_1(x)}$ შევასრულოთ ზემოთ ჩატარებული მოქმედება, მაშინ (8)-დან მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} g_1(x)}.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, გვექნება

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{g_1(x)}. \quad (9)$$

ახლა ავიღოთ

$$g(x) = (x^2 + px + q)^\mu g_1(x).$$

წილადი $\frac{f(x)}{g(x)}$ წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{f(x) - (Mx + N) g_1(x)}{(x^2 + px + q)^\mu g_1(x)}. \quad (10)$$

ეს ტოლობა მართებულია ნებისმიერი M -ისა და N -სათვის. M და N ისე შევარჩიოთ, რომ $f(x) - (Mx + N) g_1(x)$ გაიყოს $x^2 + px + q$ კვადრატულ სამწევრზე. ამისათვის უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$f(\alpha + \beta i) - [M(\alpha + \beta i) + N] g_1(\alpha + \beta i) = 0, \quad (11)$$

სადაც

$$x^2 + px + q = [x - (\alpha + \beta i)] [x - (\alpha - \beta i)].$$

(11) ტოლობიდან მივიღებთ

$$M(\alpha + \beta i) + N = \frac{f(\alpha + \beta i)}{g(\alpha + \beta i)},$$

ანუ

$$M(\alpha + \beta i) + N = P + \theta i.$$

ორი კომპლექსური რიცხვის ტოლობის გამო გვექნება:

$$M\alpha + N = P, \quad M\beta = \theta.$$

აქედან

$$M = \frac{\theta}{\beta}, \quad N = \frac{P\beta - \theta\alpha}{\beta}.$$

მიღებული მნიშვნელობანი აღნიშნოთ M_1 -ითა და N_1 -ით. ამ რიცხვები-
სათვის გვექნება

$$f(x) - (M_1x + N_1)g_1(x) = (x^2 + px + q)f_1(x).$$

მიღებული გამოსახულება შევიტანოთ (10)-ში, საიდანაც, $x^2 + px + q$ -ზე
შეკვეცის შედეგად მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{f_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}g_1(x)}.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{M_\mu x + N_\mu}{x^2 + px + q}. \quad (12)$$

(9) და (12) ტოლობები გამოთქმულ თეორემას ამტკიცებს.

განვიხილოთ მაგალითი. დავშალოთ უმარტივესი წილადების ჯამად
წილადი:

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 + x^3 - x - 1}.$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ მნიშვნელი მამრავლებად დაიშლება ასე:

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

(4) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\frac{x^2 + 1}{(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1},$$

საიდანაც

$$x^2 + 1 = A(x - 1)(x^2 + x + 1) + B(x + 1)(x^2 + x + 1) + (Mx + N)(x + 1)(x - 1).$$

სათანადო გამარტივება მოგვცემს

$$x^2 + 1 = (A + B + M)x^3 + (2B + N)x^2 + (2B - M)x + (B - N - A).$$

x -ის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტთა შეფარდებით მივიღებთ
შემდეგს:

$$A + B + M = 0, \quad 2B + N = 1, \quad 2B - M = 0, \quad B - N - A = 1.$$

ამ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი

$$A = -1, \quad B = \frac{1}{3}, \quad M = \frac{2}{3}, \quad N = \frac{1}{3}.$$

ამის გამო მოცემული წილადი ასე დაიშლება:

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 + x^3 - x - 1} = \frac{-1}{x + 1} + \frac{\frac{1}{3}}{x - 1} + \frac{\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x + 1}.$$

სავარჯიშო 5.

1. შესარულეთ მოქმედებანი: 1) $(x^2 + 3x + 9)(x^2 + 2x - 1)$, 2) $(2x^2 - 3x + 1)(x^3 + 3x^2 - 2)$, 3) $3x^4 + 4x^3 - 5x + 1$ გაყავით $x^2 + 2x - 3$ -ზე, 4) $5x^4 - 3x^2 + 6$ გაყავით $x^3 + 3x + 1$ -ზე. 5) იპოვეთ $3x^4 - 5x^2 + 7x - 2$ მრავალწევრის $x + 2$ -ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი. 6) იპოვეთ $5x^3 - 3x^4 + 2x^2 - 5$ -ის $x^2 - 1$ -ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი.

2. ჰორნერის სქემით იპოვეთ $3x^4 - 2x + 1$ მრავალწევრის $x + 1$ -ზე გაყოფით მიღებული განაყოფი და ნაშთი.

3. ჰორნერის სქემით იპოვეთ $2x^5 - 3x^2 + 2x - 1$ მრავალწევრის $x - 2$ -ზე გაყოფით მიღებული განაყოფი და ნაშთი.

4. შეარჩიეთ თავისუფალი წევრის მამრავლებიდან მთელი x_1 ამონახსნი, გაყავით მრავალწევრი $x - x_1$ და შემდეგ იპოვეთ სხვა ამონახსნები შემდეგი განტოლებებისა:

$$1) x^4 - x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0, \quad 2) x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0,$$

$$3) x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0, \quad 4) x^5 - x^3 + 2x^2 - 2 = 0.$$

5. დაშალეთ მარტივ მამრავლებად:

$$1) x^4 + x^3 + 2x - 4, \quad 2) 4x^3 - 4x^2 + 9x - 9,$$

$$3) 3x^3 - 2x^2 + 2x - 3, \quad 4) x^3 + 8x^2 + 15x + 8.$$

6. დაშალეთ მარტივი წილადების ჯამად:

$$1) \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}, \quad 2) \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 1}, \quad 3) \frac{x}{x^4 - 1}, \quad 4) \frac{x^2 + 3}{x^3 - 2x + 3},$$

$$5) \frac{x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

განყოფილება I

დეტერმინანტები და წრფივ განტოლებათა სისტემები. ანალიზური გეომეტრია სივრცეზე. ვექტორული ალგებრა. წრფივი ალგებრის ელემენტები

თავი VI

დეტერმინანტები და წრფივ განტოლებათა სისტემები

§ 1. განტოლება. განტოლებათა სისტემა. წრფივ განტოლებათა სისტემა.
გაუსის მეთოდი

1. განტოლება. ექვივალენტური განტოლებანი. განვიხილოთ $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციები მათი განსაზღვრის საერთო D არეში (სიმრავლეში), იგულისხმება ფუნქციათა განსაზღვრის საერთო არე ცარიელი არაა.

განტოლება ეწოდება ტოლობას

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

რომელიც გამოხატავს შემდეგ წინადადებას: $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ტოლია $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის მნიშვნელობისა. F_1 და F_2 ფუნქციათა განსაზღვრის საერთო არეს ეწოდება (1) განტოლების განსაზღვრის არე. იმ $x_1, x_2, \dots, x_n$ რიცხვებს D არიდან, რომელთათვისაც (1) ტოლობა ჭეშმარიტია, ეწოდება (1) განტოლების ამონახსნი. ე. ი. იმ $a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვებს, რომელთათვისაც $F_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ტოლია $F_2(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -ის, ეწოდება (1) განტოლების ამონახსნი. თუ (1) განტოლების განსაზღვრის D არეში არ არსებობს ისეთი რიცხვები $a_1, a_2, \dots, a_n$, რომელთათვისაც (1) ტოლობა ჭეშმარიტია (რომლებიც (1) განტოლებას აკმაყოფილებენ), მაშინ ვიტყვი, (1) განტოლებას არ აქვს ამონახსნი ან (1) განტოლება არაა თავისებადი D არეში. თუ (1) განტოლება კმაყოფილება D არის ნებისმიერი $x_1, x_2, \dots, x_n$ რიცხვებისათვის, მაშინ ვიტყვი, (1) განტოლება იგივეობაა D არეში. ცხადია, (1) განტოლების ამონახსნები $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - F_2(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის ნულებია D არეში. არგუმენტებს $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ს ეწოდება (1) გან-

ტოლების ცვლადები. ამოვხსნათ (1) განტოლება ნიშნავს, მოვნახოთ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადთა მნიშვნელობანი, რომლებიც (1) განტოლებას აკმაყოფილებენ.

(1) განტოლებას ეწოდება ალგებრული, თუ F_1 და F_2 ფუნქციები მრავალწევრებია.

(1) განტოლებას ეწოდება რაციონალური, თუ F_1 და F_2 ფუნქციები რაციონალურია. ცხადია, რაციონალური განტოლების კერძო სახეა ალგებრული განტოლება. (1) განტოლებას ეწოდება ირაციონალური (ირაციონალურ — ალგებრული), თუ F_1 და F_2 ფუნქციები ალგებრული გამოსახულებანია, მაგრამ ერთ-ერთი მაინც შეიცავს ცვლადს წილადი მაჩვენებლით. განტოლებებს, რომლებიც შეიცავენ ცვლადის ტრიგონომეტრიულ, ლოგარითმულ, მაჩვენებლიან (არაალგებრულ) ფუნქციებს ეწოდება ტრანსცენდენტური განტოლებანი.

თუ ნაცვლად (1) ტოლობისა გვაქვს ტოლობათა სიმრავლე

$$F_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

სადაც F_{1i} და F_{2i} ფუნქციებს აქვთ განსაზღვრის საერთო არაცარიელი არე, რომლებიც გამოხატავენ წინადადებებს: $F_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის მნიშვნელობა სათანადოდ ტოლია $F_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის მნიშვნელობისა, ეწოდება განტოლებათა სისტემა. ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი განსაზღვრა შეეხება აგრეთვე განტოლებათა სისტემას, სადაც ნაცვლად სიტყვისა „განტოლება“ უნდა ვთქვათ „განტოლებათა სისტემა“.

განვიხილოთ მაგალითები.

1) განტოლება

$$x^2 - xy = y^2$$

ალგებრულია.

2) განტოლებას

$$x^2 + y^2 = 0$$

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში აქვს ამონახსნი $x=0, y=0$. კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში კი აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა $x = \pm iy$, სადაც y ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

3) განტოლებას

$$|x| + |y| = -1$$

არ აქვს ამონახსნი არც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში და არც კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში.

4) განტოლება $\sqrt{x} + 2xy - 5 = 0$ ირაციონალურია.

5) განტოლება $\frac{x+y}{x^2+y-1} - 3 = 0$ რაციონალურია.

6) განტოლება

$$2^{x+y} - 1 = 0$$

ტრანსცენდენტურია.

7) განტოლება

$$x + \sin x - y = 0$$

ტრანსცენდენტურია.

განსაზღვრეთ განტოლებათა ურთიერთეკვივალენტურობა ა. ავიღოთ განტოლებანი

$$F_1(x) = F_2(x), \quad (3)$$

$$\Phi_1(x) = \Phi_2(x). \quad (4)$$

განტოლებებს ეწოდება ურთიერთეკვივალენტური, თუ ეს განტოლებანი შეიცავენ ერთსა და იგივე ცვლადებს, აქვთ განსაზღვრის ერთი და იგივე არე და ერთი განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ტოლია მეორე განტოლების ამონახსნთა სიმრავლისა; ამასთან, თუ განტოლების ამონახსნი ჭერადია, ერთი განტოლების ამონახსნთა ჭერადობის მაჩვენებელი ტოლია მეორე განტოლების ამონახსნთა ჭერადობის მაჩვენებლისა.

მაგალითად, განტოლება $x^2 - 1 = 0$ ეკვივალენტურია განტოლებისა $x^4 - 1 = 0$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, ხოლო კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ეს განტოლებანი ურთიერთეკვივალენტური არაა. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამ განტოლებათა ამონახსნებია $x = \pm 1$; ხოლო კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში მეორე განტოლების ამონახსნებია $x = \pm i$, ასეთი ამონახსნები პირველ განტოლებას არა აქვს.

განტოლებები $x - 1 = 0$, $(x - 1)^2 = 0$ ურთიერთეკვივალენტური არაა, რადგანაც პირველი განტოლების ამონახსნი $x = 1$ მეორე განტოლებისათვის ორჯერადი ამონახსნია, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

განტოლებები $x^2 + 1 = 0$, $x^4 + 1 = 0$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ურთიერთეკვივალენტურია, რადგანაც ამ განტოლებებიდან არც ერთს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს; ხოლო კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ეს განტოლებანი ურთიერთეკვივალენტური არაა.

თეორემა 1. განტოლებანი

$$F_1(x) = F_2(x), \quad (5)$$

$$F_1(x) + \omega(x) = F_2(x) + \omega(x). \quad (6)$$

ურთიერთეკვივალენტურია, თუ $\omega(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $F_1(x)$ და $F_2(x)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეში,

მაართლაც, თუ $x = a$ არის (5) განტოლების ამონახსნი, მაშინ

$$F_1(a) = F_2(a).$$

ამ ტოლობის ორივე მხარეს დავემატოთ $\omega(a)$, რომელსაც აზრი აქვს თეორემის პირობის თანახმად, მივიღებთ

$$F_1(a) + \omega(a) = F_2(a) + \omega(a). \quad (7)$$

ეს კი ამტკიცებს, რომ $x = a$ არის (6) განტოლების ამონახსნი, ახლა, ვთქვათ, $x = a$ არის (6) განტოლების ამონახსნი, მაშინ ჭეშმარიტია (7) ტოლობა. ამ ტოლობის ორივე მხარეს დავემატოთ $-\omega(a)$. გვექნება

$$F_1(a) = F_2(a).$$

ამრიგად, $x = a$ არის (5) განტოლების ამონახსნიც. ამით (5) და (6) განტოლებათა ურთიერთეკვივალენტურობა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან ადვილი მისაღებია

შედეგი 1. განტოლების ერთი მხრიდან რაიმე შესაქრები გადაიტანება განტოლების მეორე მხარეში შებრუნებული ნიშნით.

მაგალითად, (5) განტოლების ორივე მხარეს დავემატოთ $-F_2(x)$. მივიღებთ

$$F_1(x) - F_2(x) = 0.$$

მიღებული განტოლება (5) განტოლების ეკვივალენტურია.

ახლა განვიხილოთ განტოლებათა სისტემები:

$$F_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

$$\Phi_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

განტოლებათა სისტემების ურთიერთეკვივალენტურობა ისევე განისაზღვრება, როგორც ორი განტოლების ურთიერთეკვივალენტურობა.

განტოლებათა ორი სისტემა ურთიერთეკვივალენტურია, თუ განტოლებათა სისტემები შეიცავენ ერთსა და იგივე ცვლადებს და ერთსა და იგივე რაოდენობის განტოლებებს, ორივე სისტემა განსაზღვრულია ერთსა და იგივე არაცარიელ არეში, განტოლებათა ერთი სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ტოლია განტოლებათა მეორე სისტემის ამონახსნთა სიმრავლისა; ამასთან, თუ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ჭერადია, განტოლებათა ერთი სისტემის ამონახსნის ჭერადობის მაჩვენებელი ტოლია განტოლებათა მეორე სისტემის ამონახსნის ჭერადობის მაჩვენებლისა.

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} F_1(x) &= F_2(x), \\ \Phi_1(x) &= \Phi_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ამ განტოლებათა სისტემის მეორე განტოლება გავამრავლოთ $k \neq 0$ რიცხვზე და შევკრიბოთ პირველ განტოლებასთან, მივიღებთ

$$F_1(x) + k\Phi_1(x) = F_2(x) + k\Phi_2(x)$$

ადვილი შესამოწმებელია, განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} F_1(x) &= F_2(x), \\ F_1(x) + k\Phi_1(x) &= F_2(x) + k\Phi_2(x) \end{aligned} \right\}$$

ექვივალენტურია (10) განტოლებათა სისტემისა.

თეორემა 2. განტოლებანი

$$F_1(x) = F_2(x), \quad (11)$$

$$F_1(x) \omega(x) = F_2(x) \omega_2(x) \quad (12)$$

ურთიერთეკვივალენტურია, თუ $\omega(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (11) განტოლების განსაზღვრის არეში და ნულისაგან განსხვავებულია.

მართლაც, თუ (11) განტოლების ამონახსნია $x=a$, მაშინ

$$F_1(a) = F_2(a). \quad (13)$$

ამ ტოლობის $\omega(a)$ -ზე გამრავლებით მივიღებთ

$$F_1(a) \omega(a) = F_2(a) \omega(a). \quad (14)$$

ეს ტოლობა კი გვიჩვენებს, $x=a$ (12) განტოლების ამონახსნია. თუ (12) განტოლების ამონახსნია $x=a$, მაშინ (14) ტოლობის $\frac{1}{\omega(a)}$ -ზე გამრავლებით მივიღებთ

$$F_1(a) = F_2(a),$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, $x=a$ არის (11) განტოლების ამონახსნი. განტოლებანი

$$x^2 = 1$$

$$x^2(x^2 + 1) = 1 \cdot (x^2 + 1).$$

ურთიერთეკვივალენტურია ნამდვილ რიცხვთა არეში. განტოლებანი

$$x^2 = x,$$

$$x^2(x-2) = x(x-2)$$

ურთიერთეკვივალენტური არაა, რადგანაც $\omega = x-2$ ფუნქცია ნულის ტოლი ხდება, როდესაც $x=2$.

დამტკიცებული თეორემის საფუძველზე დავასკვნით, რომ მართებულია

შედეგი 2. განტოლების ორივე მხარე შეიძლება გავამრავლოთ ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე.

დამტკიცებული შედეგების საფუძველზე მოცემული განტოლება შეიძლება მივიყვანოთ უფრო მარტივ სახეზე.

ცალკე განვიხილოთ (3) და (4) განტოლებანი. ამ განტოლებათა ქვეშ ვიგულისხმებთ აგრეთვე განტოლებათა სისტემებსაც.

(4) განტოლებას ეწოდება (3) განტოლების შედეგი, თუ (3) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ქვესიმრავლეა (4) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლისა. მაგალითად, $x^2=1$ განტოლება შედეგია $x=1$ განტოლებისა, რადგანაც $x=1$ განტოლების ამონახსნი 1 არის ქვესიმრავლე $x^2=1$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლის $\{1, -1\}$.

თუ (4) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ M_{Φ} , ხოლო M_F (3) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეს, გვქვია $M_F \in M_{\Phi}$.

იმ ამონახსნებს, რომლებიც (4) განტოლების ამონახსნებია და არ აკმაყოფილებენ (3) განტოლებას, ეწოდება (3) განტოლების გარეშე ამონახსნები. ჩვეულებრივ (4) განტოლების ყველა ამონახსნი უნდა შევამოწმოთ: აკმაყოფილებს თუ არა (3) განტოლებას. და ის ამონახსნები, რომლებიც (3) განტოლებას არ აკმაყოფილებენ, უნდა უქვეყნდეთ.

მაგალითად,

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

განტოლებათა სისტემის შედეგია განტოლება

$$\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

სადაც λ_1 და λ_2 ნულისაგან განსხვავებული რიცხვებია.

მართლაც, უკანასკნელ განტოლებას აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემის ამონახსნები, მაგრამ ეს განტოლება არაა ეკვივალენტური მოცემული განტოლებათა სისტემისა. განტოლებათა სისტემის ამონახსნია (x, y) ერთადერთი წყვილი (ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები), თუ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, ხოლო შედეგი განტოლება $\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ ორცვლადიანი ერთი განტოლებაა, რომელსაც აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა (ამ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები).

შეიძლება $M_F = M_{\Phi}$, მაშინ (3) და (4) განტოლებანი ურთიერთეკვივალენტურია.

2. ორცვლადიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა. განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

აქ კოეფიციენტებს ორი ინდექსი აქვს: პირველი ინდექსი გვიჩვენებს, თუ რომელ განტოლებას ეკუთვნის კოეფიციენტი, ხოლო მეორე ინდექსი

სი გვიჩვენებს, თუ რომელი ცვლადის კოეფიციენტი. მაგალითად, a_{21} , არის მეორე განტოლებაში პირველი ცვლადის, x_1 -ის კოეფიციენტი. ამოვხსნათ (15) განტოლებათა სისტემა, მივიღებთ

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \quad (16)$$

მიღებულ გამოსახულებათა მნიშვნელოვანი Δ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ,

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \quad (17)$$

დავაკვირდეთ Δ -ს. ორივე შესაკრებში პირველი ინდექსები ბუნებრივი რიგითაა დალაგებული: 1, 2. მეორე ინდექსები პირველ შესაკრებში ბუნებრივი რიგითაა დალაგებული, ხოლო მეორე შესაკრებში რიგი დარღვეულია: 2, 1. ამ შემთხვევაში ვიტყვი: გადანაცვლებაში 2, 1 ელემენტი 2 ქმნის ინვერსიას ელემენტ 1-თან (ელემენტი 2 წინ უსწრებს ელემენტს 1-ს). გადანაცვლებაში 1, 2 ინვერსიათა რიცხვი ნულია, ხოლო გადანაცვლებაში 2, 1 ინვერსიათა რიცხვი 1.

გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვი აღვნიშნოთ s -ით. (17) გამოსახულება ასე შეგვიძლია ჩაეწეროს:

$$\Delta = (-1)^s a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (-1)^s a_{1\alpha} a_{2\beta}. \quad (18)$$

ახლა განვიხილოთ (15) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტთაგან შედგენილი ცხრილი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

ამ ცხრილს ეწოდება მეორე რიგის კვადრატული მატრიცა. (18) გამოსახულებას ეწოდება (19) მატრიციდან შედგენილი მეორე რიგის დეტერმინანტი.

მეორე რიგის დეტერმინანტი ასე აღვნიშნოთ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

a_{ij} , $i, j=1, 2$, რიცხვებს ეწოდება დეტერმინანტის ელემენტები. a_{11} და a_{12} მოთავსებულია პირველ სტრიქონში. a_{21} და a_{22} მოთავსებულია მეორე სტრიქონში. a_{11} და a_{21} მოთავსებულია პირველ სვეტში, ხოლო a_{12} და a_{22} მოთავსებულია მეორე სვეტში. მთავარ დიაგონალზე, ხოლო a_{21} და a_{12} მოთავსებულია არამთავარ დიაგონალზე.

თუ (17) გამოსახულებას დავაკვირდებით, შევამჩნევთ: მეორე რიგის დეტერმინანტი უდრის მთავარი დიაგონალის ელემენტთა ნამრავლსა და არამთავარი დიაგონალის ელემენტთა ნამრავლის სხვაობას.

დავაკვირდეთ (16) გამოსახულებათა მრიცხველებს. შევამჩნევთ, რომ x_1 -ის მრიცხველი მიიღება (20) დეტერმინანტისაგან, თუ პირველი სვეტის ელემენტებს (15) განტოლებების თავისუფალი წევრებით შევცვლით. ეს გამოსახულება Δ_1 სიმბოლოთი აღვნიშნოთ,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

სრულიად ასევე, თუ (20) დეტერმინანტში მეორე სვეტის ელემენტებს შევცვლით თავისუფალი წევრებით, მივიღებთ x_2 -ის მრიცხველს. ეს გამოსახულება Δ_2 სიმბოლოთი აღვნიშნოთ,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

ამ აღნიშვნებით (16) ამონახსნები ასე ჩაიწერება:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (21)$$

მიღებული ფორმულები კრამერის¹ სახელს ატარებს.

თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ (15) განტოლებათა სისტემას ერთნაირი ამონახსნი აქვს. ეს ამონახსნი (21) ფორმულით მიიღება.

თუ $\Delta = 0$, ხოლო Δ_1 და Δ_2 დეტერმინანტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ (15) განტოლებათა სისტემას არა აქვს ამონახსნი.

მართლაც, განვიხილოთ ტოლობანი, რომლებიც მიიღება (21)-დან

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1, \quad \Delta \cdot x_2 = \Delta_2. \quad (22)$$

რადგანაც $\Delta = 0$, მაშინ (22) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$0 \cdot x_1 = \Delta_1, \quad 0 \cdot x_2 = \Delta_2.$$

არ არსებობს x_1 და x_2 -ის ისეთი მნიშვნელობანი, რომელთათვისაც ეს ტოლობანი შესრულდეს. ამრიგად, (15) განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არა აქვს, თუ $\Delta = 0$ და Δ_1 და Δ_2 -დან ერთ-ერთი მაინც $\neq 0$ -ს.

თუ $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ მაგრამ a_{ij} -დან, $i, j=1, 2$, ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ (15) განტოლებათა სისტემას ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვს.

¹ გაბრიელ კრამერი (1704—1752), შვეიცარიელი მათემატიკოსი.

მართლაც, ვთქვათ $a_{11} \neq 0$. მაშინ $\Delta = 0$ და $\Delta_1 = 0$ ტოლობებიდან მივიღებთ

$$a_{22} = \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}, \quad b_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1. \quad (23)$$

აღვნიშნოთ $\frac{a_{21}}{a_{11}} = k$, მაშინ (23) ტოლობებიდან გვექნება:

$$a_{21} = k a_{11}, \quad a_{22} = k a_{12}, \quad b_2 = k b_1.$$

შევიტანოთ კოეფიციენტთა ეს მნიშვნელობანი განტოლებათა (15) სისტემაში:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1, \\ k a_{11} x_1 + k a_{12} x_2 = k b_1.$$

ამ განტოლებათა სისტემის მეორე განტოლება მიიღება პირველი განტოლების k რიცხვზე გამრავლებით. ე. ი. განტოლებანი ურთიერთეკვივარეენტურია, თუ $k \neq 0$. განტოლებიდან

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$

განესაზღვროთ x_1 ,

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2}{a_{11}}. \quad (24)$$

აქ x_2 ნებისმიერია. ამ შემთხვევაში (15) განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

თუ ყველა კოეფიციენტი ნულია, მაშინ გვექნება

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0.$$

ამ განტოლებასაც აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე. ამგვარად, ორივე შემთხვევაში (15) განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 1, \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned} \right\}$$

გამოვთვალოთ დეტერმინანტები:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

თუ გამოვიყენებთ კრამერის ფორმულებს, მივიღებთ

$$x_1 = \frac{10}{5} = 2, \quad x_2 = \frac{5}{5} = 1.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &= 4, \\ 6x_1 - 4x_2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

გამოვთვალოთ დეტერმინანტები:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = (-3)(-4) - 6 \cdot 2 = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -27.$$

რადგანაც $\Delta = 0$, ხოლო $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, მოცემულ განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4, \\ 3x_1 - 6x_2 &= 12. \end{aligned} \right\}$$

გამოვთვალოთ დეტერმინანტები:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

რადგანაც Δ , Δ_1 , $\Delta_2 = 0$, ამიტომ განტოლებათა სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი. ცხადია, ეს ორი განტოლება დაიყვანება ერთ განტოლებაზე:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4, \\ 3(x_1 - 2x_2) &= 3 \cdot 4. \end{aligned}$$

აგიღოთ განტოლება

$$x_1 - 2x_2 = 4.$$

ამ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ

$$x_1 = 2x_2 + 4,$$

სადაც x_2 ნებისმიერია.

განვიხილოთ ე. წ. ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 - a_{12} x_2 &= 0, \\ a_{21} x_1 - a_{22} x_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ამ სისტემას, ცხადია, აკმაყოფილებს $x_1 = 0$ და $x_2 = 0$. თუ $\Delta \neq 0$, ეს ამონახსნი იქნება ერთადერთი. თუ $\Delta = 0$, მაშინ (24) განტოლებათა სისტემას ექნება უამრავი ამონახსნი, რადგანაც $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$.

14. გ. კომლაძე

მაგალითად,

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნი

$$x_1 = 2x_2,$$

სადაც x_2 ნებისმიერია.

მ. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით. განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა. სიმარტივისათვის ავიღოთ ოთხი განტოლება ოთხი ცვლადით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4. \end{cases} \quad (25)$$

განტოლებათა სისტემა (25) ამოვხსნათ ცვლადთა მიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდით. ამ მეთოდს გაუსის მეთოდს უწოდებენ.

ვთქვათ, $a_{11} \neq 0$. ამ კოეფიციენტს წამყვანი ელემენტი (წამყვანი კოეფიციენტი) ეწოდება. გავყოთ (25) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლების ყველა კოეფიციენტი a_{11} -ზე. მივიღებთ

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = b_1^{(1)}, \quad (26)$$

სადაც

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad j \geq 2. \quad (27)$$

გამოვრიცხოთ (25) განტოლებათა სისტემის მე-2, მე-3 და მე-4 განტოლებიდან x_1 ცვლადი. ამისათვის საკმარისია (26) განტოლება გავამრავლოთ მიმდევრობით $(-a_{21})$, $(-a_{31})$, $(-a_{41})$ -ზე და დავუმატოთ სათანადოდ (25) განტოლებათა სისტემის მე-2, მე-3 და მე-4 განტოლებებს. მივიღებთ

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = b_3^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = b_4^{(1)}, \end{cases} \quad (28)$$

სადაც კოეფიციენტები $a_{ij}^{(1)}$, $i, j \geq 2$ განისაზღვრებიან შემდეგი ტოლობებით

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}^{(1)}a_{i1}, \\ b_i^{(1)} = b_i - b_1^{(1)}a_{i1}, \quad i, j \geq 2. \end{cases} \quad (29)$$

ახლა განვიხილოთ (28) განტოლებათა სისტემა.

ვთქვათ, $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (წამყვანი ელემენტი). სრულიად ისევე როგორც მივიღეთ (28) განტოლებათა სისტემა (25) განტოლებათა სისტემიდან, გვქმნება:

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = b_2^{(2)}, \quad (30)$$

სადაც

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad j \geq 3. \quad (31)$$

გამოვრიცხოთ x_2 ცვლადი (28) განტოლებათა სისტემის მეორე და მესამე განტოლებიდან. ამისათვის საკმარისია, (30) განტოლება გავამრავლოთ $(-a_{32}^{(1)})$ -ზე და დავუმატოთ (28) განტოლებათა სისტემის მეორე განტოლებას, ხოლო (30) განტოლება გავამრავლოთ $(-a_{42}^{(1)})$ -ზე და დავუმატოთ (28) განტოლებათა სისტემის მესამე განტოლებას. გვქმნება:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = b_3^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = b_4^{(2)}. \end{cases} \quad (32)$$

სადაც

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(1)}a_{i2}^{(1)}, \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - b_2^{(1)}a_{i2}^{(1)}, \quad i, j \geq 3. \end{cases} \quad (33)$$

ვთქვათ, $a_{33}^{(2)} \neq 0$ (წამყვანი ელემენტი). სათანადოდ (32) განტოლების $a_{33}^{(2)}$ -ზე გავყოფა მოგვცემს

$$x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 = b_3^{(3)}, \quad (34)$$

სადაც

$$a_{34}^{(3)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \quad b_3^{(3)} = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}. \quad (35)$$

(32) სისტემის მეორე განტოლებიდან x_3 ცვლადის გამორიცხვა მოგვცემს

$$a_{44}^{(3)}x_4 = b_4^{(3)}, \quad (36)$$

სადაც

$$\begin{cases} a_{44}^{(3)} = a_{44}^{(2)} - a_{34}^{(2)}a_{43}^{(2)}, \\ b_4^{(3)} = b_4^{(2)} - b_3^{(2)}a_{43}^{(2)}. \end{cases} \quad (37)$$

(36) განტოლებიდან გვქმნება

$$x_4 = b_4^{(4)}. \quad (38)$$

ამგვარად, ცვლადების მიმდევრობითი გამორიცხვით მივიღეთ განტოლებანი (26), (30), (34), (38):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = b_1^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = b_2^{(2)}, \\ x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 = b_3^{(3)}, \\ x_4 = b_4^{(4)}. \end{cases} \quad (39)$$

სადაც კოეფიციენტები მიმდევრობით განისაზღვრებიან (27), (29), (31), (33), (35)... ფორმულების საშუალებით.

(39) განტოლებათა სისტემიდან აღვიღად განისაზღვრებიან ცვლადები x_4, x_3, x_2 და x_1 :

$$\begin{aligned}x_4 &= b_4^{(4)}, \\x_3 &= b_3^{(3)} - a_{34}^{(3)} x_4, \\x_2 &= b_2^{(2)} - a_{24}^{(2)} x_4 - a_{23}^{(2)} x_3, \\x_1 &= b_1^{(1)} - a_{14}^{(1)} x_4 - a_{13}^{(1)} x_3 - a_{12}^{(1)} x_2.\end{aligned}$$

ამგვარად, წრფივ განტოლებათა (25) სისტემის ამოხსნის გაუსის მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს: (25) განტოლებათა სისტემის ყველა განტოლებიდან, გარდა პირველი განტოლებისა, თუ $a_{11} \neq 0$, გამოვრიცხოთ x_1 ცვლადი. შემდეგ მეორე, მესამე და ა. შ. განტოლებათა სისტემიდან, გარდა მეორე განტოლებისა, თუ $a_{22}^{(1)} \neq 0$, გამოვრიცხოთ x_2 ცვლადი და ა. შ. ამ გარდაქმნებით (25) განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტურ განტოლებათა სისტემას მივიღებთ. ამ (39) ე. წ. „სამკუთხოვან“ განტოლებათა სისტემიდან მიმდევრობით განვსაზღვრავთ ცვლადებს x_4, x_3, x_2, x_1 .

ახლა განვიხილოთ n -ცვლადიანი m განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m.\end{aligned} \right\} \quad (40)$$

განტოლებათა ეს სისტემა ამოვხსნათ გაუსის მეთოდით. თუ $a_{11} \neq 0$, მაშინ მოცემული განტოლებათა სისტემა ისე გარდაქმნათ, რომ მივიღოთ მოცემული განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტური შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\left. \begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\a_{21}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\&\vdots \\a_{m1}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)}.\end{aligned} \right\}$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, შეიძლება მივიღოთ ისეთი განტოლებები, რომლის მარცხენა ნაწილში ცვლადების კოეფიციენტები ნულის ტოლია. თუ ამ განტოლების თავისუფალი წევრიც ნულის ტოლია, მაშინ განტოლება დაკმაყოფილდება ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. ამ განტოლების უქუდადებით, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას, რომელიც თავიდან აღებული განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტურია. თუ

თავისუფალი წევრი ნულის ტოლი არაა, მაშინ აღნიშნული განტოლება არ დაკმაყოფილდება ცვლადთა არავითარი მნიშვნელობისათვის. ამ შემთხვევაში გარდაქმნით მიღებული განტოლებათა სისტემა და, ცხადია, მოცემულ განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არა აქვს — თავსებადი არაა.

ამგვარად, გაუსის მეთოდით გამოიყენება ნებისმიერ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდი. მაგრამ განტოლებათა სისტემა თავსებადი არ იქნება, თუ გარდაქმნის პროცესში ისეთ განტოლებას მივიღებთ, რომლის ცვლადთა კოეფიციენტები ნულის ტოლია, ხოლო თავისუფალი წევრი ნულისაგან განსხვავდება. თუ მივიღებთ ისეთ განტოლებას, რომელშიც ცვლადთა კოეფიციენტები ნულის ტოლია და თავისუფალი წევრიც ნულის ტოლია, ასეთ განტოლებას უქუდადებთ. ვთქვათ, სასრული რაოდენობის გარდაქმნის შემდეგ მივიღეთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\a_{21}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n &= b_2^{(1)}, \\&\vdots \\a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \dots + a_{r,n}^{(r-1)}x_n &= b_r^{(r-1)}.\end{aligned}$$

განტოლებათა ეს სისტემა შეიცავს r განტოლებას n ცვლადით, $r \leq n$. თუ $r < n$, მაშინ ყველა წევრი, რომელიც შეიცავს $x_{r+1}, \dots, x_n$ -ს გადავითანთ განტოლებათა მარჯვენა ნაწილში

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\a_{21}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2r}^{(1)}x_r &= b_2^{(1)} - a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} - \dots - a_{2n}^{(1)}x_n, \\&\vdots \\a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} &= b_r^{(r-1)} - a_{r,r+2}^{(r-1)}x_{r+2} - \dots - a_{r,n}^{(r-1)}x_n.\end{aligned}$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ $x_r, x_{r-1}, \dots, x_1$ მიმართ, ეს ამონახსნები დამოკიდებული იქნება $x_{r+1}, \dots, x_n$ -ზე. ცვლადები $x_{r+1}, \dots, x_n$ ნებისმიერია. ამგვარად, ამ შემთხვევაში განტოლებათა სისტემას აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა: $n-r$ ცვლადი ნებისმიერ მნიშვნელობას ღებულობს, ხოლო $x_1, \dots, x_r$ ამ ცვლადებზეა დამოკიდებული.

ცალკე განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც წრფივ განტოლებათა სისტემის თავისუფალი წევრები ნულის ტოლია. ასეთ განტოლებათა სისტემას ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა ეწოდება. ცხადია, ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აქვს ნულოვანი ამონახსნები

$$a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \dots + a_{in} \cdot 0 = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

მაშასადამე, ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა თავსებადია. მაგრამ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას n ცვლადით და m განტოლებით, $m < n$, მიიყვანება ისეთ განტოლებათა სისტემაზე, სადაც განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია ცვლადთა რიცხვზე,

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= -a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}^{(1)}x_1 + \dots + a_{2r}x_r &= -a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} - \dots - a_{2n}^{(1)}x_n, \\ &\vdots \\ a_{r1}^{(r-1)}x_1 + \dots + a_{rr}^{(r-1)}x_r &= -a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} - \dots - a_{rn}^{(r-1)}x_n. \end{aligned} \right\}$$

ამ განტოლებათა სისტემას ნულოვან ამონახსნების გარდა აქვს არანულოვანი ამონახსნებიც. $x_{r+1}, \dots, x_n$ ცვლადების მნიშვნელობანი ნებისმიერია და, მაშასადამე, ნულისაგან განსხვავებულიც იქნება. დანარჩენი $x_1, x_2, \dots, x_r$ ამონახსნები დამოკიდებული იქნება $x_{r+1}, \dots, x_n$ -ზე.

ამგვარად, ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას, თუ $m < n$, აქვს როგორც ნულოვანი ამონახსნები, ისე ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები. თუ $m = n$ და $a_{11} \neq 0, a_{22}^{(1)} \neq 0, \dots, a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$, მაშინ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნები:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

განვიხილოთ მაგალითები გაუსის მეთოდის გამოყენების შესახებ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 15, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 15, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 24. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ჯერ გამოვრიცხოთ x_1 ცვლადი მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლებათა სისტემიდან. ამისათვის საკმარისია პირველი განტოლება გავყოთ 2-ზე და გამოვაკლოთ დანარჩენ განტოლებებს. მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= \frac{15}{2}, \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= \frac{15}{2}, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 &= \frac{25}{2}, \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4 &= \frac{33}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

შემდეგი გამოთვლების გასამარტივებლად (42) განტოლებათა სისტემის მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლებანი გავანთავისუფლოთ წილადებისაგან:

$$\left. \begin{aligned} x_2 + 3x_3 + x_4 &= 15, \\ -x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 25, \\ x_2 + x_3 + 7x_4 &= 33. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

(43) სისტემის მეორე და მესამე განტოლებიდან გამოვრიცხოთ x_3 . ამისათვის საკმარისია, პირველი განტოლება დავამატოთ მეორეს და გამოვაკლოთ მესამე განტოლებას. გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} x_2 + 3x_3 + x_4 &= 15, \\ 8x_3 + 4x_4 &= 40, \\ -2x_3 + 6x_4 &= 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_2 + 3x_3 + x_4 &= 15, \\ 2x_3 + x_4 &= 10, \\ -x_3 + 3x_4 &= 9. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

ავიღოთ (44) განტოლებათა სისტემის მეორე და მესამე განტოლებანი და x_3 გამოვრიცხოთ მესამე განტოლებიდან. ამისათვის მეორე განტოლება გავყოთ 2-ზე და დავუმატოთ მესამე განტოლებას:

$$\left. \begin{aligned} x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= 5, \\ \frac{7}{2}x_4 &= 14. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= 5, \\ x_4 &= 4 \end{aligned} \right\}.$$

ამგვარად, მივიღეთ განტოლებათა სისტემა:

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{15}{2},$$

$$x_2 + 3x_3 + x_4 = 15,$$

$$x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 5,$$

$$x_4 = 4.$$

საიდანაც,

$$x_4 = 4,$$

$$x_3 = 5 - \frac{1}{2}x_4 = 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 3,$$

$$x_2 = 15 - x_4 - 3x_3 = 15 - 4 - 3 \cdot 3 = 2,$$

$$x_1 = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_2 = \frac{15}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{3}{2} \cdot 2 = 1.$$

უკანასკნელი გამოთვლები შეგვიძლია ავიცილოთ, თუ მივმართავთ ე. წ. ცვლადთა სრული გამორიცხვის მეთოდს. ამ მეთოდს ჟორდანი-გაუსის მეთოდი ეწოდება. ეს მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს. (26) განტოლების დახმარებით x_1 ცვლადს გამოვრიცხავთ (25) განტოლებათა სისტემის მე-2, მე-3 და მე-4 განტოლებებიდან. მივიღებთ (28) განტოლებათა სისტემას. რადგანაც $a_{22}=0$, (28) სისტემის პირველ განტოლებას გადავწერთ (30) სახით. (30) განტოლებიდან გამოვრიცხოთ x_2 ცვლადი, როგორც (28) განტოლებათა სისტემის მეორე და მესამე განტოლებიდან, ისე (26) განტოლებიდან, მივიღებთ

$$\begin{aligned} x_1 + a_{13}^{(2)} x_3 + a_{14}^{(2)} x_4 &= b_1^{(2)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 &= b_2^{(2)}, \\ a_{13}^{(2)} x_3 + a_{14}^{(2)} x_4 &= b_3^{(2)}, \\ a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 &= b_4^{(2)}, \end{aligned} \quad (45)$$

სადაც

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - a_{1i}^{(1)} a_{1j}^{(1)}, \quad j = 3, 4, \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - b_1^{(1)} a_{1i}^{(1)}. \end{aligned}$$

ავიღოთ (45) განტოლებათა სისტემის მესამე და მეოთხე განტოლებანი. ვთქვათ $a_{33} \neq 0$, მაშინ (45) სისტემის მესამე განტოლება ასე გადავწერთ:

$$x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 = b_3^{(2)}. \quad (34)$$

გამოვრიცხოთ x_3 ცვლადი (45) განტოლებათა სისტემის პირველი, მეორე და მეოთხე განტოლებიდან, გვექნება:

$$\begin{aligned} x_1 + a_{14}^{(2)} x_4 &= b_1^{(2)}, \\ x_2 + a_{24}^{(2)} x_4 &= b_2^{(2)}, \\ x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 &= b_3^{(2)}, \\ a_{24}^{(2)} x_4 &= b_4^{(2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

თუ $a_{24}^{(2)} \neq 0$, მაშინ (46) სისტემის ბოლო განტოლებიდან განვსაზღვროთ x_4 ,

$$x_4 = b_4^{(4)}, \quad (47)$$

და გამოვრიცხოთ (46) განტოლებათა სისტემის დანარჩენი განტოლებებიდან x_4 ცვლადი. ამისათვის საკმარისია, (47) განტოლება გავამრავლოთ მიმდევრობით $a_{14}^{(2)}$, $a_{24}^{(2)}$ და $a_{34}^{(2)}$ -ზე და სათანადოდ გამოვაკლოთ (46) განტოლებათა სისტემის პირველ, მეორე და მესამე განტოლებას. მივიღებთ

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1^{(4)}, \\ x_2 &= b_2^{(4)}, \\ x_3 &= b_3^{(4)}, \\ x_4 &= b_4^{(4)}, \end{aligned} \quad (48)$$

სადაც

$$b_i^{(4)} = b_i^{(3)} - b_4^{(3)} a_{i4}^{(3)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

ამგვარად, ცვლადთა სრული გამორიცხვის მეთოდით პირდაპირ მივიღეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები.

ცვლადთა სრული გამორიცხვის მეთოდით ამოვხსნათ (41) განტოლებათა სისტემა. მოქმედებანი ჩავატაროთ მატრიცების (ცხრილების) საშუალებით.

შევადგინოთ (41) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტთაგან შემდგენი მატრიცა: ჯერ ჩამოვწეროთ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტები და შემდეგ მივუწეროთ თავისუფალი წევრები,

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 20 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 24 \end{array} \right\|. \quad (49)$$

მიღებულ (49) მატრიცზე მოქმედება ჩავატაროთ შემდეგი მიმდევრობით:

1) (49) მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტები გავყოთ 2-ზე და სათანადოდ გამოვაკლოთ დანარჩენი სტრიქონის ელემენტებს:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 20 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 24 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{33}{2} \end{array} \right\|. \quad (50)$$

შემდეგი გამოთვლების გასამარტივებლად (50) მატრიცა გავანთავისუფლოთ წილადებისგან, ამისათვის ყველა სტრიქონის ელემენტი გავამრავლოთ 2-ზე, მივიღებთ

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 33 \end{array} \right\|. \quad (51)$$

¹ მ ა რ ი ე დ მ ო ნ კ ა მ ი ლ ჟ ო რ დ ა ნ ი (1838—1922), ფრანგი მათემატიკოსი.

2) (51) მატრიცის მეორე სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ 3-ზე და გამოვაკლოთ პირველი სტრიქონის ელემენტებს. იგივე სტრიქონის ელემენტები დავუმატოთ მესამე სტრიქონის ელემენტებს და გამოვაკლოთ მეოთხე სტრიქონის ელემენტებს, მივიღებთ:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -8 & -2 & -30 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 40 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 18 \end{array} \right\| \quad (52)$$

მესამე სტრიქონის ელემენტებს აქვთ გამყოფი 4. გავყოთ 4-ზე მესამე სტრიქონის ელემენტები. ასევე, მეოთხე სტრიქონის ელემენტები გავყოთ 2-ზე. გვექნება:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -8 & -2 & -30 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 9 \end{array} \right\| \quad (53)$$

3) (53) მატრიცის მესამე სტრიქონის ელემენტები გავყოთ 2-ზე და სათანადოდ: გავამრავლოთ 8-ზე და მივუმატოთ პირველი სტრიქონის ელემენტებს, გავამრავლოთ 3-ზე და გამოვაკლოთ მეორე სტრიქონის ელემენტებს, დავუმატოთ მეოთხე სტრიქონის ელემენტებს. მივიღებთ (ყველა სტრიქონი გაერთმნიშვნელობითაა დაწერილი):

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & -30 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 28 \end{array} \right\| \quad (54)$$

(54) მატრიცის მეოთხე სტრიქონის ელემენტები გავყოთ 7-ზე. მიღებული ელემენტები გავამრავლოთ 2-ზე და გამოვაკლოთ პირველი სტრიქონის ელემენტებს. იგივე სტრიქონის ელემენტები 7-ზე გავყოფილი მივუმატოთ მეორე სტრიქონის ელემენტებს და გამოვაკლოთ მესამე სტრიქონის ელემენტებს, მივიღებთ

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right\| \quad (55)$$

(55) მატრიციდან პირველი, მეორე და მესამე სტრიქონის 2-ზე გავყოფით მივიღებთ

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right\|$$

ამგვარად, $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 6.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2,$$

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1,$$

$$2) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1,$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

$$3) \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2,$$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3,$$

$$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0.$$

$$4) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0,$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 13.$$

$$5) \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5,$$

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3,$$

$$6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1,$$

$$8x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7,$$

$$x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5.$$

§ 2. მესამე რიგის დეტერმინანტი. ძირითადი თვისებები

1. მესამე რიგის დეტერმინანტი. ავიღოთ a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, ელემენტებისაგან შედგენილი შემდეგი ცხრილი

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right\|.$$

ამ ცხრილს ეწოდება მესამე რიგის კვადრატული მატრიცა.

ავილოთ ელემენტთა შემდეგი ნამრავლი

$$a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}$$

სადაც $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, მაგრამ ისე, რომ თუ $\alpha=1$, მაშინ β და γ -ს არ შეიძლება ჰქონდეს 1-ის მნიშვნელობა. ასევე სხვა მნიშვნელობათა შესახებ. დავთვალოთ ინვერსიათა რიცხვი $\alpha\beta\gamma$ განაცხადებებში:

1, 2, 3	ინვერსიათა რიცხვი	0,
2, 1, 3	"	1,
2, 3, 1	"	2,
1, 3, 2	"	1,
3, 1, 2	"	2,
3, 2, 1	"	3.

თვითეულ $a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}$ ნამრავლს მივუწეროთ $(-1)^s$, სადაც s ინვერსიათა რიცხვია, და შევადგინოთ ასეთი ნამრავლების ჯამი. გვექნება:

$$\Delta = (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31}. \quad (1)$$

ამ ჯამს ეწოდება მესამე რიგის დეტერმინანტი, შედგენილი A მატრიციდან.

მესამე რიგის დეტერმინანტი ასე აღინიშნება:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ამრიგად, მესამე რიგის დეტერმინანტი ასე განისაზღვრება:

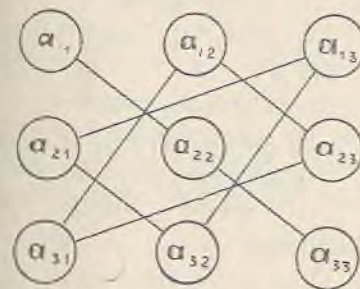
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 (-1)^s a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}. \quad (2)$$

როგორც (1) გამოსახულება გვიჩვენებს, თითოეულ ჯგუფში (შესაკრებში) შედის 3 ელემენტი, რომლებიც სხვადასხვა სვეტსა და სტრიქონს ეკუთვნის.

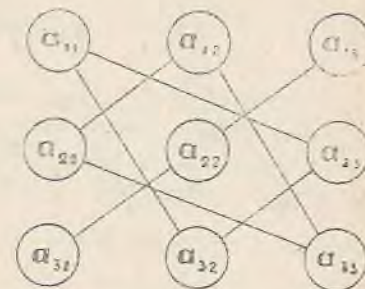
(2) გამოსახულების გამოყენებით გამოვთვალოთ შემდეგი დეტერმინანტის მნიშვნელობა:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 3 - 27 + 12 - 4 + 6 - 2 = 21 - 33 = -12.$$

მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა ასეც შეიძლება: ავილოთ მთავარ დიაგონალზე მოთავსებულ ელემენტთა ნამრავლი $a_{11} a_{22} a_{33}$. შემდეგ ავილოთ ნამრავლები $a_{12} a_{23} a_{31}$, $a_{13} a_{21} a_{32}$. ისინი ისეთი სამკუთხედების წვეროებზე მოთავსებულ ელემენტთა ნამრავლია, რომელთა ფუძეები მთავარი დიაგონალის პარალელურია (ნახ. 1). აღნიშნული ნამრავლები ავილოთ თავიანთი ნიშნით.



ნახ. 1



ნახ. 2

ახლა ავილოთ ნამრავლი $a_{13} a_{22} a_{31}$. ეს ელემენტები მოთავსებულია არამთავარ დიაგონალზე. შემდეგი ორი ნამრავლის $a_{11} a_{23} a_{32}$, $a_{12} a_{21} a_{33}$ ელემენტები მოთავსებულია ისეთი სამკუთხედების წვეროებზე, რომელთა ფუძეები არამთავარი დიაგონალის პარალელურია (ნახ. 2). აღნიშნული სამი ნამრავლი ავილოთ შებრუნებული ნიშნით. ორივე ნახაზის სქემით შედგენილი ნამრავლების ჯამი მოგვცემს მესამე რიგის დეტერმინანტის მნიშვნელობას. მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის ამ წესს ეწოდება სამკუთხედების წესი.

მესამე რიგის დეტერმინანტის მნიშვნელობა შეიძლება ასეთი სქემითაც გამოითვალოს: ავილოთ სამი სვეტისა და სამი სტრიქონისაგან შედგენილი ცხრილი. დავუმატოთ ამ ცხრილს მარჯვნივ გვერდიდან პირველი ორი სვეტი და ავავოთ შემდეგი სქემა: ამოვწეროთ მთავარ დიაგონალზე და მის პარალელურ ორ დიაგონალზე მოთავსებული სამ-სამი ელემენტი და გადავამრავლოთ ერთმანეთზე. ეს ნამრავლები ავილოთ თავიანთი ნიშნებით,

$$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}. \quad (3)$$

ასევე ამოვწეროთ არამთავარ დიაგონალზე და მის პარალელურ ორ დიაგონალზე მოთავსებული სამ-სამი ელემენტი. ამ სამ-სამი ელემენტის ნამრავლები ავილოთ შებრუნებული ნიშნით.

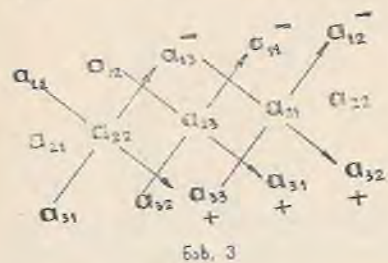
$$-a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}. \quad (4)$$

(3) და (4) გამოსახულებების ჯამი მოგვცემს მესამე რიგის დეტერმინანტის მნიშვნელობას.

მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის აქ განხილულ წესს ეწოდება სარუსის წესი. სარუსის წესით, მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის სქემა ნაჩვენებია მე-3 ნახაზზე.

მესამე რიგის დეტერმინანტის (1) განსაზღვრა ადვილად განზოგადდება.

ავიღოთ n სვეტისა და n სტრიქონისაგან შედგენილი ცხრილი:



ნახ. 3

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

ამ ცხრილს ეწოდება n რიგის კვადრატული მატრიცა.

ავიღოთ შემდეგი ნამრავლი

$$a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{nl}$$

სადაც $\alpha, \beta, \gamma, \dots, l$ რაიმე გარდანაცვლებაა, მიღებული $1, 2, \dots, n$ ელემენტებისაგან. ამ ელემენტთაგან შედგენილ გარდანაცვლებათა რიცხვია $n!$. დავთვალოთ თვითნებური $\alpha, \beta, \gamma, \dots, l$ გარდანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვი. გარდანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვი აღვნიშნოთ s -ით. შევადგინოთ

$(-1)^s a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{nl}$ ნამრავლთა ჯამი

$$\sum_{\alpha, \beta, \dots, l=1}^n (-1)^s a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{nl}.$$

ამ ჯამს ეწოდება n -ური რიგის დეტერმინანტი, შედგენილი A მატრიციდან. n -ური რიგის დეტერმინანტი ასე ჩაიწერება:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ n -ური რიგის დეტერმინანტის მნიშვნელობას Δ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, მაშინ განსაზღვრის თანახმად გვქვნება:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha, \beta, \dots, l=1}^n (-1)^s a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{nl}. \quad (6)$$

სადაც s არის ინვერსიათა რიცხვი $\alpha, \beta, \dots, l$ გარდანაცვლებაში. $\alpha, \beta, \dots, l$ ელემენტებს მნიშვნელობებს $1, 2, \dots, n$. მაგრამ ისე, რომ თუ $\alpha=1$ -ს.

მაშინ $\beta, \gamma, \dots, l$ არ შეუძლიათ მიიღონ 1-ის მნიშვნელობა. ასევე, თუ $\beta=2$ -ს, მაშინ $\alpha, \gamma, \dots, l$ არ შეუძლიათ მიიღონ 2-ის მნიშვნელობა. (6) გამოსახულების ყოველ შესაყრებში ყოველი სვეტიდან და ყოველი სტრიქონიდან Δ დეტერმინანტის მხოლოდ თითო ელემენტი შედის.

2. დეტერმინანტის თვისებები. 1. თუ დეტერმინანტში სტრიქონებს შევცვლით სათანადოდ იმავე ნომრის სვეტებით და სვეტებს შევცვლით იმავე ნომრის სტრიქონებით, დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება.

მართლაც, სტრიქონის ელემენტების და სვეტის ელემენტების ურთიერთ გადანაცვლებით, (2) გამოსახულების მეორე ინდექსები დალაგდება ბუნებრივი რიგით, ხოლო პირველი ინდექსები მოგვცემს ინვერსიებს, ამით შესაყრების მნიშვნელობა არ შეიცვლება. მაგალითად,

$$(-1)^s a_{11} a_{23} a_{32} = (-1)^s a_{11} a_{32} a_{23}, \quad (-1)^s a_{12} a_{21} a_{33} = (-1)^s a_{21} a_{12} a_{33}.$$

თუ ყოველ შესაყრებში ასეთ გადაადგილებას მოვახდენთ, ამით დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება. ამ შემთხვევაში დეტერმინანტი ასე ჩაიწერება:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ი. ი. მართებულია ტოლობა

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2) დეტერმინანტის ორი სტრიქონის ან ორი სვეტის ურთიერთ ადგილმონაცვლებით დეტერმინანტი ნიშანს იცვლის.

მართლაც, ორი სვეტის ურთიერთ ადგილმონაცვლებით (1) გამოსახულების ყოველ შესაყრებში მოხდება მეორე ინდექსების კენტი ადგილმონაცვლება, ამით ინვერსიათა რიცხვი გარდანაცვლებაში შეიცვლება (გაიზრდება ან შემცირდება) კენტი რიცხვით, რაც ყველა შესაყრებს ნიშანს შეუცვლის და ამით მთელი ჯამიც ნიშანს შეიცვლის.

3. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებს აქვს საერთო მამრავლი, მაშინ ეს მამრავლი დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ შეგვიძლია გადავიტანოთ.

მართლაც, ვთქვათ, მეორე სტრიქონის ელემენტები შეიცავს k მამრავლს, მაშინ გვექნება

$$\Delta = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 (-1)^s a_{1\alpha} (k a_{2\beta}) a_{3\gamma} = a_{11} (k a_{22}) a_{33} - a_{11} (k a_{23}) a_{32} +$$

$$+ a_{12} (k a_{23}) a_{31} - a_{12} (k a_{21}) a_{33} + a_{13} (k a_{21}) a_{32} - a_{13} (k a_{22}) a_{31} =$$

$$= k \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 (-1)^s a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}.$$

რაც გამოთქმულ თვისებას ამტკიცებს.

4) თუ დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონი (სვეტი) სათანადოდ ერთმანეთის ტოლ ელემენტებს შეიცავს, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

მართლაც, თუ გადავადგილებთ იმ სტრიქონებს, რომლებსაც ტოლი ელემენტები აქვთ, ამით დეტერმინანტი არ შეიცვლება, მაგრამ, მე-2 თვისების თანახმად, დეტერმინანტი ნიშნის შეიცვლის. ეს კი მაშინაა შესაძლებელი, თუ დეტერმინანტი ნულის ტოლია: $\Delta = -\Delta \Rightarrow \Delta = 0$.

მე-3 და მე-4 თვისებების საფუძველზე ადვილი მისაღებია შემდეგი თვისება:

5) თუ ორი სტრიქონის ან ორი სვეტის ელემენტები პროპორციულია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

დეტერმინანტის განსაზღვრის (2) გამოსახულების თანახმად, ცხადია, თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის ან სტრიქონის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

6) თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყოველი ელემენტი სათანადოდ ორი შესაპრების ჯამს წარმოადგენს, მაშინ დეტერმინანტი დაიშლება ორი დეტერმინანტის ჯამად.

ვთქვათ, მეორე სტრიქონის ელემენტები წარმოადგენს ორ-ორი ელემენტის ჯამს, მაშინ, (2) ტოლობის თანახმად, მივიღებთ

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 (-1)^s a_{1\alpha} (a'_{2\beta} + a''_{2\beta}) a_{3\gamma} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 (-1)^s a_{1\alpha} a'_{2\beta} a_{3\gamma} +$$

$$+ \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 (-1)^s a_{1\alpha} a''_{2\beta} a_{3\gamma}.$$

ანუ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a'_{22} + a''_{22} & a'_{23} + a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7) დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს სათანადოდ დავუმატებთ სხვა სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს, გამრავლებულს ერთსა და იმავე სიდიდით.

ამ თვისების დასამტკიცებლად საკმარისია, რომელიმე სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ ერთსა და იმავე რიცხვზე და დავუმატოთ სხვა სტრიქონის ელემენტებს. მიღებული დეტერმინანტისათვის გამოვიყენოთ ჯერ მე-6 თვისება და შემდეგ მე-5 თვისება. მაგალითად, მესამე სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ k -ზე და დავუმატოთ მეორე სტრიქონის ელემენტებს:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{31}k & a_{22} + a_{32}k & a_{23} + a_{33}k \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}k & a_{32}k & a_{33}k \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. დეტერმინანტის მინორებად დაშლა. ალგებრული დამატებანი. მივიღოთ მესამე რიგის დეტერმინანტი (2). დავაჯგუფოთ ორ-ორი შესაპრები ისე, რომ ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ a_{11} , $-a_{12}$ და a_{13} . მივიღებთ

$$\Delta = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}),$$

ანუ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (7)$$

(7) გამოსახულება ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\Delta = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13}, \quad (8)$$

18. გ. კომლაძე

სადაც

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

თუ დავაკვირდებით M_{11} -ს, შევამჩნევთ, რომ იგი წარმოადგენს A მატრიციდან პირველი სვეტის და პირველი სტრიქონის ამოშლით მიღებულ მეორე რიგის დეტერმინანტს. ასევე, M_{12} მეორე რიგის დეტერმინანტია, რომელიც მიიღება A მატრიციდან მეორე სვეტის და პირველი სტრიქონის ამოშლით. ასევე მიიღება A -დან სათანადო სვეტისა და სტრიქონის ამოშლით M_{13} . M_{11} , M_{12} , M_{13} დეტერმინანტებს ეწოდება Δ დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ელემენტების შესაბამისი მინორები.

საზოგადოდ, Δ დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის მინორი M_{ij} ეწოდება დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება A დეტერმინანტიდან i -ური სტრიქონისა და j -ური სვეტის ელემენტების ამოშლით.

(8) გამოსახულება ასე ჩაგწეროთ:

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}, \quad (10)$$

სადაც

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}. \quad (11)$$

A_{ij} -ს ეწოდება Δ დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება.

თუ (2) გამოსახულებაში ორ-ორ შესაყრებს ისე დავაჯგუფებთ, რომ ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ $-a_{21}$, a_{22} , $-a_{23}$, მაშინ (10) ტოლობის ნაცვლად მივიღებთ

$$\Delta = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}. \quad (12)$$

სრულიად ასევე მივიღებთ

$$\Delta = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}. \quad (13)$$

ზემოთ მიღებული (10), (12), (13) ტოლობანი გვიჩვენებს, რომ მართებულია დეტერმინანტის შემდეგი თვისება:

8) თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტებს გავამრავლებთ თავის ალგებრულ დამატებაზე და შევკრებთ, მივიღებთ დეტერმინანტის მნიშვნელობას,

$$\Delta = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + a_{3j} A_{3j}, \quad j = 1, 2, 3; \quad (14)$$

$$\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

9) თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტებს გავამრავლებთ შესაბამისად სხვა სვეტის (სტრიქონის) ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე, მაშინ ასეთი ნამრავლების ჯამი ნულის ტოლია.

მაგალითად,

$$a_{11} A_{12} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{32} = 0. \quad (16)$$

მართლაც, ავიღოთ გამოსახულება

$$\Delta = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}. \quad (17)$$

ვთქვათ,

$$a_{12} = a_{11}, \quad a_{22} = a_{21}, \quad a_{32} = a_{31},$$

მაშინ (17) გამოსახულება მოგვცემს

$$a_{11} A_{12} + a_{21} A_{22} + a_{31} A_{32}. \quad (18)$$

ეს გამოსახულება კი წარმოადგენს ისეთ დეტერმინანტს, რომელიც შეიცავს ორ ტოლელემენტებიან სვეტს. ამიტომ (18) გამოსახულება ნულის ტოლია. ეს კი (16) ტოლობას ამტკიცებს.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ მე-8 და მე-9 თვისებას ადვილი აქვს ნებისმიერი რიგის დეტერმინანტისათვის.

$$\Delta = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (19)$$

$$\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (20)$$

$$0 = a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \dots + a_{in} A_{kn}, \quad i, k = \overline{1, n}, \quad i \neq k; \quad (21)$$

ზემოთ ნაჩვენებ თვისებათა საფუძველზე ადვილია დეტერმინანტის გამოთვლა. მაგალითად, ავიღოთ მე-4 რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

მე-2 სვეტიდან დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ გავიტანოთ მამრავლი 2, მივიღებთ:

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

მესამე სტრიქონის ელემენტები მიმდევრობით გავამრავლოთ 2-ზე და 3-ზე და გამოვაკლოთ პირველი და მეორე სტრიქონის ელემენტებს, ხოლო მესამე სტრიქონის ელემენტები დავემატოთ მე-4 სტრიქონის ელემენტებს, გვექნება:

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 & -10 \\ -8 & 0 & -5 & -10 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

მიღებული დეტერმინანტი დავშალოთ მეორე სვეტის ალგებრული დამატების მიხედვით:

$$\Delta = (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot 1 \begin{vmatrix} -4 & 1 & -10 \\ -8 & -5 & -10 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

მესამე სვეტიდან გავიტანოთ მამრავლი 5. მივიღებთ:

$$\Delta = -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -8 & -5 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 8 & -5 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

მიღებული დეტერმინანტის მესამე სტრიქონი გავამრავლოთ 2-ზე და დავემატოთ პირველ და მეორე სტრიქონს, მივიღებთ:

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 6 & 13 & 0 \\ 10 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 10 \cdot 1 \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 10(6 \cdot 7 - 13 \cdot 10) = -880.$$

§ 3. სამცხლადიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

1. არაერთგვაროვანი წრფივი განტოლებების სისტემა. განვიხილოთ სამცხლადიანი სამი წრფივი განტოლების სისტემა

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \quad (1)$$

აქ x_1, x_2, x_3 ცვლადებია, $a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$, კოეფიციენტები. ამოვხსნათ (1) განტოლებათა სისტემა, ავიღოთ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტთაგან შედგენილი მატრიცა:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ვთქვათ, A -დან შედგენილი მესამე რიგის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

(1) სისტემის განტოლებები გავამრავლოთ შესაბამისად Δ დეტერმინანტის პირველი სვეტის ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე A_{11}, A_{21}, A_{31} . გვექნება:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11}x_1 + a_{12}A_{11}x_2 + a_{13}A_{11}x_3 &= b_1A_{11}, \\ a_{21}A_{21}x_1 + a_{22}A_{21}x_2 + a_{23}A_{21}x_3 &= b_2A_{21}, \\ a_{31}A_{31}x_1 + a_{32}A_{31}x_2 + a_{33}A_{31}x_3 &= b_3A_{31}. \end{aligned}$$

ამ განტოლებათა შეკრებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})x_2 + \\ + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})x_3 &= b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}. \end{aligned} \quad (3)$$

თუ გამოვიყენებთ მე-8 და მე-9 თვისებებს, გვექნება, რომ x_1 -ის კოეფიციენტი Δ -ს ტოლია, ხოლო x_2 -ის და x_3 -ის კოეფიციენტები ნულის ტოლია. ამის გამო (3) ტოლობა მოგვცემს

$$\Delta x_1 = \Delta_1.$$

სრულიად ასევე, თუ (1) სისტემის განტოლებებს სათანადოდ გავამრავლებთ Δ დეტერმინანტის მეორე სვეტის ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე და შევკრებთ, მივიღებთ

$$\Delta x_2 = \Delta_2.$$

ანალოგიურად Δ დეტერმინანტის მესამე სვეტის ელემენტების ალგებრული დამატებების დახმარებით მივიღებთ

$$\Delta x_3 = \Delta_3.$$

ამგვარად, გვექნება (1) განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \Delta_1, \\ \Delta x_2 &= \Delta_2, \\ \Delta x_3 &= \Delta_3,\end{aligned}\quad (4)$$

სადაც Δ_i , $i = 1, 2, 3$, დეტერმინანტი მიიღება Δ დეტერმინანტისაგან i -ური სვეტის ელემენტების b_1, b_2, b_3 თავისუფალი წევრებით შეცვლით.

რადგანაც $\Delta \neq 0$, განტოლებათა (4) სისტემიდან განვსაზღვრავთ

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (5)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1)-ში, დავრწმუნდებით, რომ იგი დაკმაყოფილდება.

ამგვარად, თუ $\Delta \neq 0$, (1) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

(5) ფორმულებს ეწოდება კრამერის¹ ფორმულები.

კრამერის ფორმულებით ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4.\end{aligned}\quad (6)$$

ჯერ გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = -1.$$

Δ დეტერმინანტში პირველი სტრიქონის ელემენტები დავამატეთ მე-2 და მე-3 სტრიქონის ელემენტებს. ახლა გამოვთვალოთ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, გვექნება:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 2 - 9 \cdot 1) = -1. \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 9 - 5 \cdot 5) = -2.\end{aligned}$$

¹ იხ. გვ. 207.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 4 - 5 \cdot 5) = -3.$$

კრამერის ფორმულებით მივიღებთ

$$x_1 = \frac{-1}{-1} = 1, \quad x_2 = \frac{-2}{-1} = 2, \quad x_3 = \frac{-3}{-1} = 3.$$

თუ $\Delta = 0$ და Δ_i , $i = 1, 2, 3$, დეტერმინანტებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ არ არსებობს ისეთი მნიშვნელობანი x_1, x_2, x_3 , რომლებიც დააკმაყოფილებენ (4) განტოლებათა სისტემას, ანუ განტოლებათა სისტემა (1) თავისებური არაა.

2. ერთგვაროვანი წრფივი განტოლებათა სისტემა. განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0.$$

ასეთ განტოლებათა სისტემას ერთგვაროვანი წრფივი განტოლებათა სისტემა ეწოდება.

გამოვიღეთ დამოკიდებულებიდან $\Delta x_i = \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$. ადვილი შემჩნევია $\Delta_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, რადგანაც ამ დეტერმინანტებში ერთ-ერთი სვეტის ელემენტები ნულის ტოლია. თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ მივიღებთ $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. ამრიგად, (7) განტოლებათა სისტემას მხოლოდ ნულის ტოლი ამონახსნები აქვს, თუ $\Delta \neq 0$. თუ $\Delta = 0$, მაშინ განტოლებანი $0 \cdot x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, დაკმაყოფილდება არა მარტო როდესაც $x_i = 0$, არამედ იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. ამრიგად, (7) განტოლებათა სისტემას ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი აქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც სისტემის დეტერმინანტი $\Delta = 0$. ვთქვათ, (7) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

მაგრამ ამ დეტერმინანტის მეორე რიგის მინორებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ვთქვათ, ასეთი მინორია M_{33} , $M_{33} = A_{33} \neq 0$.

განვიხილოთ დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება Δ დეტერმინანტიდან, თუ მესამე სვეტის ელემენტებს გავამრავლებთ x_3 -ზე და მას დავუმატებთ სათანადოდ პირველი სვეტის ელემენტებს, გამრავლებულს x_1 -ზე და მეორე სვეტის ელემენტებს, გამრავლებულს x_2 -ზე:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

სადაც x_1 , x_2 და x_3 ნებისმიერი სიდიდეებია. ამ დეტერმინანტიდან დეტერმინანტთა მე-6 და მე-3 თვისების საფუძველზე მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = 0.$$

აქედან კი, თუ ყველა დეტერმინანტს მესამე სვეტის ელემენტების მიმართ დავუშლით, გვექნება

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)A_{13} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)A_{23} + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)A_{33} = 0,$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= -\frac{A_{13}}{A_{33}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) - \\ &= -\frac{A_{23}}{A_{33}}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3). \end{aligned} \quad (8)$$

მიღებული ტოლობა გვიჩვენებს, რომ (7) სისტემის მესამე განტოლების მარცხენა მხარე დანარჩენი ორი განტოლების მარცხენა მხარეთა წრფივი ფუნქციაა. (8) ტოლობიდან ცხადია: x_1 , x_2 , x_3 -ის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელთათვისაც (7) განტოლებათა სისტემის პირველი და მეორე განტოლება კმაყოფილდება, მესამე განტოლებაც დაკმაყოფილდება. ამრიგად, თუ (7) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტთაგან შედგენილი $\Delta = 0$ და $A_{33} \neq 0$, მაშინ საკმარისია ამოვხსნათ პირველი და მეორე განტოლება.

ამოვხსნათ (7) განტოლებათა სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0.$$

გვექნება:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{A_{33}}x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{A_{33}}x_3 = \frac{A_{31}}{A_{33}}x_3, \quad x_2 = \frac{A_{32}}{A_{33}}x_3, \quad (9)$$

საიდანაც

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{A_{32}}{A_{33}}.$$

აქედან კი

$$\frac{x_1}{A_{31}} = \frac{x_2}{A_{32}} = \frac{x_3}{A_{33}}.$$

თუ ამ გამოსახულებას გავუტოლებთ t -ს,

$$\frac{x_1}{A_{31}} = \frac{x_2}{A_{32}} = \frac{x_3}{A_{33}} = t,$$

მაშინ

$$x_1 = A_{31}t, \quad x_2 = A_{32}t, \quad x_3 = A_{33}t, \quad (10)$$

სადაც t ნებისმიერია.

ამგვარად, თუ (7) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტთაგან შედგენილი $\Delta = 0$ და a_{33} -ის ალგებრული დამატება ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ განტოლებათა სისტემას აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა. ეს ამონახსნები მიიღება Δ დეტერმინანტის მესამე სტრიქონის ელემენტების ალგებრული დამატებების საშუალებით:

$$x_1 = A_{31}t, \quad x_2 = A_{32}t, \quad x_3 = A_{33}t.$$

აქ ყველა ამონახსნი ერთ ნებისმიერ მუდმივზე, t -ზეა დამოკიდებული.

შემოვიღოთ მატრიცის რანგის ცნება.

ავიღოთ (7) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტთაგან შედგენილი მატრიცა

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

თუ A მატრიციდან შედგენილი მესამე რიგის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ ვიტყვით, A მატრიცის რანგი ტოლია 3-ის, $r=3$. თუ A მატრიციდან შედგენილი მესამე რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ხოლო მეორე რიგის დეტერმინანტიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ვიტყვით, A მატრიცის რანგი ორის ტოლია,

$r=2$. თუ A -დან შედგენილი ყველა მეორე რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ხოლო პირველი რიგის დეტერმინანტიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან (ერთი კოეფიციენტი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან), მაშინ ვიტყვით, A მატრიცის რანგი ერთის ტოლია, $r=1$.
დავუბრუნდეთ (9) ფორმულებს. აქ x_1 და x_2 დამოკიდებულია x_3 -ზე, სადაც x_3 ნებისმიერია,

$$x_1 = \frac{A_{31}}{A_{33}} x_3, \quad x_2 = \frac{A_{32}}{A_{33}} x_3.$$

ეს ფორმულები მიღებულია იმ პირობით, რომ $\Delta = 0$ და $A_{33} \neq 0$. ე. ი. A მატრიცის რანგი $r=2$.

ამრიგად, თუ (7) განტოლებათა სისტემის A მატრიცის რანგი 2-ის ტოლია, მაშინ განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე. ამასთან ერთი ამონახსნი ნებისმიერია, ხოლო ორი დანარჩენი ნებისმიერი ამონახსნის წრფივი ფუნქციებია.

ვთქვათ, A მატრიცის რანგი $r=1$ (მაგალითად, $a_{11} \neq 0$). განვიხილოთ დეტერმინანტები

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{31} & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{vmatrix}.$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ ეს დეტერმინანტები ნულის ტოლია. მართლაც, ამ დეტერმინანტებიდან მივიღებთ

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{31} & a_{31} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3.$$

ყველა მეორე რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ამის გამო $D_1 = 0$, $D_2 = 0$.

დავშალოთ D_1 და D_2 მეორე სვეტის ალგებრულ დამატებებად, გვექნება

$$a_{11}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) - a_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = 0,$$

$$a_{11}(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) - a_{31}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = 0,$$

საიდანაც

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3),$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3).$$

ეს ტოლობანი გვაძლევს: x_1 , x_2 და x_3 -ის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელთათვისაც კმაყოფილდება (7) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება, დაკმაყოფილდება აგრეთვე მეორე და მესამე განტოლებებიც.

ამგვარად, თუ A მატრიცის რანგი 1-ის ტოლია, მაშინ საკმარისია ამოვხსნათ (7) განტოლებათა სისტემიდან ერთი განტოლება. ამ ერთი განტოლებიდან განისაზღვრება ერთი ცვლადი, როგორც დანარჩენი ორი ცვლადის წრფივი ფუნქცია. ეს ორი ცვლადი ნებისმიერია. მაგალითად, პირველი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$x_1 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3. \quad (11)$$

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

შევადგინოთ მატრიცა

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

ცხადია, $\det A = 0$, რადგანაც პირველი სვეტის ელემენტები მესამე სვეტის ელემენტების პროპორციულია. ავიღოთ A_{33} ,

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

ამოვწეროთ (12) სისტემიდან პირველი და მეორე განტოლება

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0,$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 = 0,$$

საიდანაც

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3x_3 & 2 \\ -6x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9x_3}{-3} = -3x_3.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3x_3 \\ 2 & -6x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-3} = 0.$$

ამგვარად: $x_1 = -3x_3$, $x_2 = 0$, x_3 ნებისმიერია.

3. ზოგადი შემთხვევა. განვიხილოთ არაერთგვაროვან განტოლებათა (1) სისტემა:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \quad (1)$$

შევადგინოთ მატრიცა

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}.$$

ამ მატრიცას (1) განტოლებათა სისტემის გაფართოებული მატრიცა ეწოდება.

გაფართოებული მატრიცა B მიიღება (i) განტოლებათა სისტემის A მატრიციდან თავისუფალი წევრების სვეტის დამატებით.

(1) განტოლებათა სისტემის თავსებადობას ეხება კრონეკერისა¹ და კაპელი² თეორემა.

თეორემა: წრფივი განტოლებების სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც გაფართოებული მატრიცის რანგი განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგის ტოლია.

თუ განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგი $r=3$, მაშინ გაფართოებული მატრიცის რანგიც სამის ტოლი იქნება (1) განტოლებათა სისტემის თავისუფალი წევრების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ამ შემთხვევაში (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები x_1, x_2, x_3 ერთადერთი იქნება, რომლებიც კრამერის ფორმულებით მიიღება:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3.$$

თუ (1) განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგი ორის ტოლია და გაფართოებული მატრიცის რანგი სამის ტოლია, მაშინ განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

თუ (1) განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგი და გაფართოებული მატრიცის რანგი ორის ტოლია, მაშინ განტოლებათა სისტემიდან ამოვწეროთ ორი განტოლება და მარცხენა ნაწილში ის ცვლადები დავტოვოთ, რომელთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ნუ-

¹ ლეჟოლდ კრონეკერი (1823—1891), გერმანელი მათემატიკოსი.

² ალფრედო კაპელი (1858—1916), იტალიელი მათემატიკოსი.

ლისაგან განსხვავდება, დანარჩენი გადავიტანოთ მარჯვენა ნაწილში. მაგალითად, თუ

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

(1) განტოლებათა სისტემიდან ამოვწეროთ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 - a_{13}x_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 - a_{23}x_3, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$x_1 = \frac{1}{A_{33}} \begin{vmatrix} b_1 - a_{13}x_3 & a_{12} \\ b_2 - a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{A_{33}} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 - a_{13}x_3 \\ a_{21} & b_2 - a_{23}x_3 \end{vmatrix}.$$

x_1 და x_2 ამონახსნები x_3 -ზე დამოკიდებული, x_3 ნებისმიერია.

თუ (1) განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგი და გაფართოებული მატრიცის რანგი ერთის ტოლია, მაშინ ამოვწეროთ ერთი განტოლება.

მაგალითად, $a_{11} \neq 0$,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

საიდანაც

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3),$$

სადაც x_2 და x_3 ნებისმიერია.

კრონეკერისა და კაპელის თეორემას, რომელიც აქ დაუმტკიცებლად მოვიტანეთ, შემდეგში კვლავ დავუბრუნდებით (იხ. წრფივი ალგებრის ელემენტები, თავი XII, § 2, n. 3, თ. 8).

სავარჯიშო 7.

1. გამოთვალეთ.

$$1) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix},$$

$$4) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad 5) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

$$7) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad 8) \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}, \quad 9) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 16 & 64 \end{vmatrix},$$

$$10) \begin{vmatrix} -a & 1 & a \\ 0 & -a & -1 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix},$$

$$12) \begin{vmatrix} a+b & a-b & b \\ d+b & 2d-b & b \\ b & -b & b \end{vmatrix},$$

$$14) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix},$$

$$16) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$11) \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$13) \begin{vmatrix} x+y & z+4 & 2 \\ x-y & z-4 & 2 \\ x & z & 1 \end{vmatrix},$$

$$15) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$11) \begin{cases} x+y+z=0, \\ x-y+z=0, \\ x+y-z=0. \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 2x-y-2z=0, \\ x-2y-z=0, \\ -x+3y+z=0. \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x-y-z=2, \\ 2x+3y+2z=3, \\ -x+2y+z=1. \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x+2y-3z=1, \\ 2x+3y-z=2, \\ 3x+5y-4z=3. \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ 4x-2y+6z=2, \\ -2x+y-3z=-1. \end{cases}$$

2. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

$$1) \begin{cases} x-y+z=2, \\ -2x+y+z=-2, \\ x+y+z=4. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x-y+z=-1, \\ x+y-2z=-4, \\ -x-y+z=2. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x-y+2z-u=7, \\ x+y-z+u=-1, \\ 3x-2y-2z+u=-8, \\ -3x+y+z-2u=4. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x-2y+3z=1, \\ 2x-4y+z=2, \\ -x+2y-z=3. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x+2y+3z+4u=1, \\ 2x+3y+4z+5u=2, \\ 2x+4y+5z+6u=1, \\ 3x+6y+7z+8u=2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x-3y+z=4, \\ x+y-z=0, \\ 3x-y+2z=11. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y+z+u=0, \\ 2x-y+z-u=7, \\ x-y-z+u=-2, \\ x+2y-2z+3u=-11. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x-2y+z-u=6, \\ 2x-y+z+u=7, \\ x-2y-2z+2u=-4, \\ 2x+y-2z-u=-2. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x+2y-4z=3, \\ 2x+y-2z=-1, \\ 3x-y+2z=2. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x+y=0, \\ x+y+z=1, \\ y+z+u=-1, \\ z+u=0. \end{cases}$$

კოორდინატთა სისტემაში. უმარტივესი ამოცანები

§ 1. მიმართული მონაკვეთი. მომენტური მონაკვეთი

1. მიმართული მონაკვეთი ღერძზე. ზემოთ განსაზღვრეთ ნამდვილ რიცხვთა ღერძი. ნამდვილ რიცხვთა ღერძი ეწოდება წრფეს, რომელზედაც რაიმე O წერტილი მიღებულია საწყის წერტილად, რაიმე OE მონაკვეთის სიგრძე — სიგრძის ერთეულად (მასშტაბი) და წრფეზე მდებარე O წერტილიდან ორი სხვადასხვა მხარეს მიმართული სხივიდან ერთ-ერთი სხივის მიმართულება მიღებულია წრფეზე დადებით მიმართულებად (ნახ. 1). ღერძი ორი ასოთი Ox ან, შემოკლებით, ერთი ასოთი X -ით აღინიშნება. Ox ღერძზე ავიღოთ ორი წერტილი A და B . ეს წერტილები ღერძზე განსაზღვრავს მონაკვეთს. ვთქვათ, A წერტილი ამ მონაკვეთის საწყისი წერტილია, ხოლო B წერტილი ბოლო წერტილი. ღერძის მონაკვეთს, რომელზედაც მითითებულია საწყისი და ბოლო წერტილები, ეწოდება მიმართული მონაკვეთი. ის მიმართული მონაკვეთი, რომლის საწყისი წერტილია A წერტილი და ბოლო წერტილია B წერტილი, ასე აღინიშნება



ნახ. 54

ლილ გზას, მაშინ $\overline{BA}$ იქნება B წერტილიდან A წერტილამდე გავლილი გზა, $\overline{BA} = -\overline{AB}$. განვიხილავთ აგრეთვე $\overline{AA}$ მიმართულ მონაკვეთს, ე. ი. მონაკვეთს, რომლის საწყისი წერტილი ემთხვევა ბოლო წერტილს. ასეთ მონაკვეთს შემოკლებით ნულმონაკვეთს უწოდებენ.

ყოველი მიმართულების მონაკვეთს შეესაბამება რიცხვი, რომელსაც მიმართული მონაკვეთის სიდიდე ეწოდება. $\overline{AB}$ მიმართული მონაკვეთის სიდიდე ეწოდება რიცხვს, რომელიც ტოლია $|\overline{AB}|$ მონაკვეთის

¹ П. С. Александров, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры М. 1979; В. А. Ильин, Э. Г. Позня, Аналитическая геометрия 1971. 240

სიგრძისა დადებითი ნიშნით, თუ $\overline{AB}$ მონაკვეთის მიმართულება ემთხვევა Ox ღერძის მიმართულებას, და უარყოფითი ნიშნით, თუ $\overline{AB}$ მიმართული მონაკვეთი Ox ღერძის მიმართულების საწინააღმდეგო მიმართულებისაა. ყველა ნულმონაკვეთის სიდიდე ნულის ტოლია. $\overline{AB}$ მიმართული მონაკვეთის სიდიდე AB სიმბოლოთი აღინიშნება:

$AB = |\overline{AB}|$, თუ $\overline{AB}$ -ს და Ox ღერძს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ; $AB = -|\overline{AB}|$, თუ $\overline{AB}$ -ს და Ox ღერძს სხვადასხვა მიმართულება აქვთ.

ცხადია,

$$\begin{aligned} AA &= BB = 0, \\ BA &= -AB. \end{aligned}$$

(1)

2. მოკმდებანი მიმართულ მონაკვეთზე. განვიხილავთ Ox ღერძზე მდებარე მიმართულ მონაკვეთებს და ნაცვლად სიტყვებისა „მიმართული მონაკვეთი“ ვიხმართ სიტყვას „მონაკვეთი“, მაგრამ ვიგულისხმებთ მიმართულ მონაკვეთს.



ნახ. 2

ორ მიმართულ მონაკვეთს ეწოდება ურთიერთტოლი, თუ მონაკვეთების საწყისი წერტილების თანამთხვევით ბოლო წერტილებიც ერთმანეთს დაემთხვევა. ცხადია, ორი მონაკვეთის ურთიერთტოლობისათვის აუცილებელია და საკმარისი მონაკვეთთა სიდიდეების ურთიერთ-ტოლობა. მე-2 ნახაზზე ნაჩვენებია.

$$\overline{AB} = \overline{CD} \iff AB = CD.$$

$\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ მიმართული მონაკვეთების ჯამის განსაზღვრისათვის $\overline{CD}$ მონაკვეთის საწყისი წერტილი C შევუთავსოთ $\overline{AB}$ მონაკვეთის ბოლო B წერტილს. მივიღებთ $\overline{AD}$ მიმართულ მონაკვეთს, რომელსაც $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ მიმართული მონაკვეთების ჯამი ეწოდება და აღინიშნება $\overline{AB} + \overline{CD}$ სიმბოლოთი (ნახ. 3).



ნახ. 3

დავამტკიცოთ თეორემა:

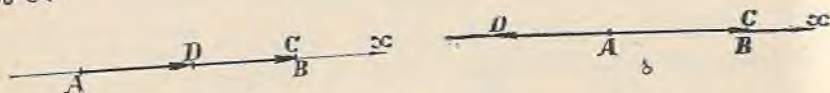
თეორემა 1. მიმართული მონაკვეთების ჯამის სიდიდე ტოლია შესაბამის მიმართულ მონაკვეთთა სიდიდეების ჯამისა.

ამ თეორემის დამტკიცებისათვის განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევა.

ვთქვათ, მოცემული $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ მონაკვეთებიდან ერთი მაინც ნულ-მონაკვეთი არაა და ორივე მონაკვეთი თანამიმართულია (ნახ. 3), მაშინ ჭეშმარიტია ტოლობა

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}. \quad (2)$$

ამ შემთხვევაში $\overline{AD}$ მონაკვეთის მიმართულება ემთხვევა $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ მონაკვეთების მიმართულებას. თუ $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ მონაკვეთები სხვადასხვა მიმართულებისაა, მაშინ $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ აქვთ სხვადასხვა ნიშანი. ამის გამო $\overline{AD}$ მონაკვეთის სიგრძე ტოლია $|\overline{AB} + \overline{CD}|$. რადგანაც $\overline{AD}$ მონაკვეთის მიმართულება ემთხვევა $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ მონაკვეთებიდან უდიდესი სიგრძის მონაკვეთის მიმართულებას (ნახ. 4 ა, ბ), $\overline{AD}$ მონაკვეთის სიდიდე ნიშნით ემთხვევა $\overline{AB} + \overline{CD}$ მონაკვეთის სიდიდეს, ამიტომ $\overline{AD}$ მონაკვეთის სიდიდე ტოლია $\overline{AB} + \overline{CD}$ ჯამისა. ამრიგად, (2) ტოლობა ჭეშმარიტია ამ შემთხვევაშიც. ამით თეორემა დამტკიცდა.



ნახ. 4

თუ განვიხილავთ $\overline{AB}$ და $\overline{BC}$ მონაკვეთებს, მაშინ (2) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

ამრიგად, მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. ღერძზე A, B და C წერტილების ნებისმიერი მდებარეობისათვის $\overline{AB}, \overline{BC}$ და $\overline{AC}$ მიმართული მონაკვეთების სიდიდეები აკმაყოფილებენ ტოლობას

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \quad (3)$$

(შალის¹ თეორემა).

¹ შალის¹ შალი (1793—1880), ფრანგი მათემატიკოსი და მათემატიკის ისტორიკოსი.

თუ ერთ-ერთი მონაკვეთი ნულმონაკვეთია, მაგალითად, $\overline{BC}$ ნულმონაკვეთია, მაშინ B წერტილი ემთხვევა C წერტილს,

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{CC} = \overline{AC}. \quad (4)$$

მაშასადამე, (3) ტოლობა მართებულია მაშინაც, როდესაც ერთ-ერთი მონაკვეთი ნულმონაკვეთია.

$\overline{AB}$ მიმართული მონაკვეთის რაიმე α რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება მიმართულ მონაკვეთს, $\overline{AB}\alpha$, რომლის სიგრძე $|\overline{AB}\alpha|$ ტოლია $|\alpha| |\overline{AB}|$ და მიმართულია $\overline{AB}$ -ს მიმართულებით, თუ $\alpha > 0$ და მიმართულია $\overline{AB}$ -ს საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $\alpha < 0$;

$$\overline{AB} \cdot \alpha = \alpha \overline{AB}.$$

მე-5 ნახაზზე ნაჩვენებია

$$\overline{AB} \cdot 2 = \overline{CD}, \quad \overline{AB} \cdot (-2) = \overline{KL}.$$



ნახ. 5

თეორემა 3. ღერძზე მდებარე ნებისმიერი მიმართული $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ მონაკვეთებისათვის არსებობს ისეთი a რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს $\overline{CD} = a \overline{AB}$ ტოლობას, სადაც $\overline{AB}$ არ არის ნულმონაკვეთი.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად განვიხილოთ სამი შემთხვევა: 1) $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ თანამიმართული მონაკვეთებია, $\overline{AB} \uparrow \overline{CD}$. 2) $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ურთოურთ საწინააღმდეგო მიმართულებისაა, $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$. 3) $\overline{CD}$ ნულმონაკვეთია.

პირველ შემთხვევაში $\alpha = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AB}|}$, რადგანაც $\overline{CD} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AB}|} \overline{AB}$. მეორე შემთხვევაში $\alpha = -\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AB}|}$, რადგანაც $\overline{CD} = -\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AB}|} \overline{AB}$. მესამე შემთხვევაში $\alpha = 0$, რადგანაც $\overline{CD} = 0 \cdot \overline{AB}$.

ამრიგად, სამივე შემთხვევაში თეორემა ჭეშმარიტია.

ამ თეორემის საფუძველზე შემოვიღოთ ერთ ღერძზე მდებარე ორი მიმართული მონაკვეთის შეფარდების ცნება.

$\overline{CD}$ მიმართული მონაკვეთის $\overline{AB}$ მიმართულ მონაკვეთთან შეფარდება, $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$, თუ $\overline{AB}$ ნულმონაკვეთი არაა, ეწოდება ისეთ α რიცხვს, რომ $\overline{CD} = \alpha \overline{AB}$. მე-3 თეორემით ასეთი α რიცხვი არსებობს, თუ $\overline{AB}$ ნულმონაკვეთი არაა. მე-5 ნახაზის მიხედვით $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 2$, $\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}} = -2$. ცხადია,

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{CD}{AB}.$$

3. წერტილის კოორდინატი. როგორც ვიცით, Ox ღერძის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა

$$M \longleftrightarrow x, OM = x.$$

მოცემულ X ღერძზე M წერტილის x კოორდინატი ეწოდება OM მონაკვეთის სიდიდეს X ღერძზე. x რომ M წერტილის კოორდინატია X ღერძზე, ასე ჩაიწერება: $M(x)$.

გაჩვენოთ, რომ $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთის სიდიდე M_1M_2 მოცემული M_1 და M_2 წერტილების კოორდინატებით ასე გამოითვლება:

$$M_1M_2 = x_2 - x_1, \quad (6)$$

სადაც M_1 წერტილის კოორდინატია x_1 , ხოლო M_2 წერტილის კოორდინატი x_2 .

მართლაც, (3) ძირითადი ტოლობის საფუძველზე გვექნება

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

საიდანაც

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1$$

ანუ

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

ამით (6) ტოლობა დამტკიცდა.

$\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთის სიგრძე d ასეთი აღენიშნოთ, $|\overline{M_1M_2}| = d$, ცხადია, $d = |x_2 - x_1|$. (7)

მაგალითად, გამოვთვალოთ მანძილი M_1 (3) და M_2 (-5) წერტილებს შორის.

(7) ფორმულით მივიღებთ:

$$d = |-5 - 3| = |-8| = 8.$$

4. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით. ვთქვათ, მოცემულია მონაკვეთი $\overline{M_1M_2}$, სადაც M_1 წერტილის კოორდინატია x_1 , ხოლო M_2 წერტილის კოორდინატია x_2 . მოვნახოთ $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთზე ისეთი $M(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \lambda, \quad (8)$$

სადაც λ წინასწარ მოცემული რიცხვია.

$\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთის ისეთი M წერტილის მოვნახვას, რომელიც (8) პირობას აკმაყოფილებს, ეწოდება $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთის λ ფარდობით გაყოფა (ნახ. 6).

ვიპოვოთ M წერტილის x კოორდინატი. (8) ტოლობიდან გვექნება

$$M_1M = MM_2 \cdot \lambda.$$

(6) ტოლობის თანახმად, უკანასკნელიდან მივიღებთ

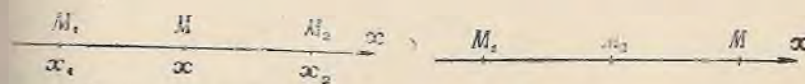
$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1),$$

საიდანაც

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (9)$$

ამგვარად, იმ M წერტილის კოორდინატი, რომელიც $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთს λ ფარდობით ყოფს, განისაზღვრება (9) ფორმულით.

ცხადია, თუ λ უარყოფითია, მაშინ M წერტილი $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთის გარეთ იქნება. მართლაც, მაშინ M_1M და MM_2 სხვადასხვა ნიშნის იქნება. ეს კი შესრულებდა, თუ M წერტილი $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთის გარეთაა (ნახ. 7).



ნახ. 6

ნახ. 7

თუ M წერტილი მისწრაფის M_2 წერტილისაკენ, $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთის შიგნიდან, მაშინ $\lambda \rightarrow +\infty$, ხოლო თუ M მისწრაფის M_2 წერტილისაკენ $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთის გარედან, მაშინ $\lambda \rightarrow -\infty$.

თუ M წერტილი $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთის შუა წერტილია, მაშინ

$$\frac{M_1M}{MM_2} = 1, \quad \lambda = 1,$$

ამ შემთხვევაში (9) ფორმულა მოგვცემს

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (10)$$

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთის $M_1 M_2$ და $|\overline{M_1 M_2}|$, თუ მოცემულია წერტილები M_1 (3), M_2 (-8).

(6) ფორმულის ძალით გვექნება

$$M_1 M_2 = -8 - 3 = -11.$$

(7) ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$|\overline{M_1 M_2}| = |-8 - 3| = |-11| = 11.$$

მაგალითი 2. $\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთი გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. ვიპოვოთ გამყოფი წერტილების კოორდინატები, თუ მოცემულია წერტილები M_1 (10), M_2 (-2).

ჯერ ვიპოვოთ $\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთის სიგრძე. $|\overline{M_1 M_2}| = |-2 - 10| = |-12| = 12$. $\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთის პირველი M_3 წერტილისათვის $\lambda = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

გვექნება

$$x_3 = \frac{10 + \frac{1}{2}(-2)}{1 + \frac{1}{2}} = 6.$$

მეორე M_4 წერტილისათვის გვექნება: $\lambda = \frac{8}{4} = 2$, ამიტომ

$$x_4 = \frac{10 + 2(-2)}{1 + 2} = 2.$$

$\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთი M_3 (6) და M_4 (2) წერტილებით იყოფა სამ ტოლ ნაწილად (ნახ. 8). მართლაც,

$$|\overline{M_1 M_3}| = |6 - 10| = 4, \quad |\overline{M_3 M_4}| = |2 - 6| = 4,$$

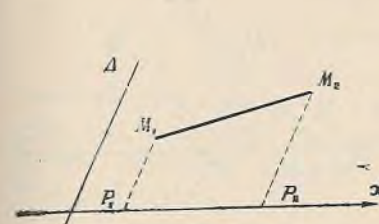
$$|\overline{M_4 M_2}| = |2 - (-2)| = 4.$$



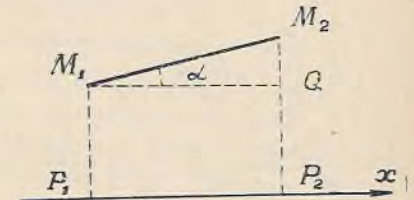
ნახ. 8

§ 2. კოორდინატთა სისტემები

1. მონაკვეთის გეგმილი ღერძზე. ავიღოთ X ღერძის გარეთ $\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთი და X ღერძის არაპარალელური Δ წრფე (ნახ. 9). გავატაროთ M_1 წერტილზე Δ წრფის პარალელური წრფე X ღერძის გადაკვეთამდე.



ნახ. 9



ნახ. 10

x ღერძზე მიღებულ P_1 წერტილის ეწოდება M_1 წერტილის Δ წრფის პარალელური გეგმილი X ღერძზე:

$$P_1 = \text{გეგ}_X M_1, \quad M_1 P_1 \parallel \Delta.$$

თუ Δ წრფე ღერძის პერპენდიკულარულია, მაშინ P_1 წერტილის ეწოდება M_1 წერტილის მართობული (ორთოგონალური) გეგმილი X ღერძზე, ან, უბრალოდ, გეგმილი X ღერძზე (ნახ. 10)

$$P_1 = \text{გეგ}_X M_1.$$

თუ

$$P_1 = \text{გეგ}_X M_1, \quad P_2 = \text{გეგ}_X M_2,$$

მაშინ $\overline{P_1 P_2}$ მონაკვეთის სიდიდეს ეწოდება $\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთის გეგმილი X ღერძზე

$$P_1 P_2 = \text{გეგ}_X \overline{M_1 M_2}.$$

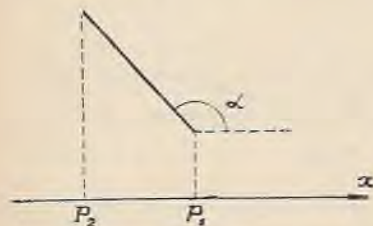
თუ განვიხილავთ $M_1 Q M_2$ სამკუთხედს, სადაც X ღერძსა და $\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთს შორის კუთხეა α , მივიღებთ:

$$P_1 P_2 = |\overline{M_1 M_2}| \cos \alpha. \quad (2)$$

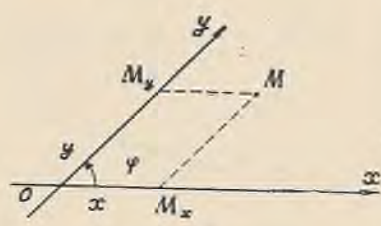
ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, მაშინ $P_1 P_2 \geq 0$. თუ

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, მაშინ $P_1 P_2 < 0$ (ნახ. 11).

2. დეკარტის¹ კოორდინატთა სისტემა. საშუალო სკოლიდან ჩვენთვის ცნობილია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ახლა განვიხილავთ კოორდინატთა სისტემებს ზოგადად. სიბრტყეზე ავიღოთ ორი რიცხვთა ღერძი X და Y , რომლებიც რომელიმე O წერტილში რაიმე $\varphi \neq 0$ კუთხით



ნახ. 11



ნახ. 12

იკვეთებიან (ნახ. 12). სიბრტყეზე ავიღოთ M წერტილი და ვიპოვოთ Ox და Oy ღერძებზე M წერტილის სათანადოდ ღერძთა პარალელური გვეგზავნილები M_x და M_y :

$$M_x = \text{გვგ}_x M, M, MM_x \parallel Oy; M_y = \text{გვგ}_y M, MM_y \parallel Ox.$$

M წერტილის x და y კოორდინატები ეწოდება მიმართული $\overline{OM_x}$ და $\overline{OM_y}$ მონაკვეთების სიდიდეებს: $x = OM_x$, $y = OM_y$.

ცხადია, აღებული სიბრტყის, სადაც არჩეულია Ox და Oy ღერძები, ყოველ წერტილსა და ნამდვილ რიცხვთა ყოველ დალაგებულ წყვილს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა: $M \longleftrightarrow (x, y)$. x და y რომ M წერტილის კოორდინატებია, ასე ჩაიწერება: $M(x, y)$.

x -ს ეწოდება M წერტილის აბსცისა, ხოლო y -ს — ორდინატი.

Ox ღერძს ეწოდება აბსცისთა ღერძი, Oy ღერძს ორდინატთა ღერძი.

განხილული კოორდინატთა სისტემა Oxy -ით ან, შემოკლებით, XY -ით აღინიშნება.

თუ მოცემულია რაიმე წესი, რომლითაც სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება რიცხვებით, მაშინ ვიტყვი, რომ სიბრტყეზე შემოღებულია კოორდინატთა სისტემა. ზემოთ განხილულ კოორდინატთა სისტემას ეწოდება დეკარტის კოორდინატთა სისტემა. თუ ღერძებს შორის კუთხე $\varphi = \frac{\pi}{2}$, მაშინ

კოორდინატთა სისტემას ეწოდება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 13) და საკოორდინატო ღერძები მთელ სიბრტყეს ყოფს ოთხ მეოთხედად:

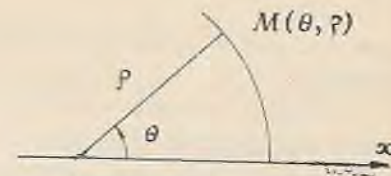
- $x > 0, y > 0$ პირველი მეოთხედის წერტილებისათვის,
- $x < 0, y > 0$ მეორე მეოთხედის წერტილებისათვის,
- $x < 0, y < 0$ მესამე მეოთხედის წერტილებისათვის,
- $x > 0, y < 0$ მეოთხე მეოთხედის წერტილებისათვის.

ნახაზიდან ადვილი შესამჩნევია, თუ როგორ ვიპოვოთ მოცემული (x, y) კოორდინატებით სათანადო M წერტილი. ჯერ ვიპოვოთ M_x და M_y წერტილები: $OM_x = x$, $OM_y = y$. შემდეგ M_x და M_y წერტილებზე სათანადოდ ღერძების პარალელურ წრფეებს გავატარებთ. ამ წრფეთა თანაკვეთა მოგვცემს $M(x, y)$ წერტილს.

3. პოლარული კოორდინატების სისტემა. სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის იხმარება აგრეთვე ე. წ. პოლარული კოორდინატების სისტემა. სიბრტყეზე ავიღოთ რომელიმე O წერტილი.



ნახ. 13



ნახ. 14

ამ წერტილზე გავატაროთ Ox სხივი. ამ სხივზე რაიმე OE მონაკვეთის სიგრძე მივიღოთ სიგრძის ერთეულად. O წერტილის გარშემო ბრუნვის დადებით მიმართულებად მივიღოთ საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულება. O წერტილს ეწოდება პოლუსი, ხოლო სათანადოდ განსაზღვრული O წერტილიდან გამომავალ სხივს პოლარული ღერძი (ნახ. 14), ავიღოთ სიბრტყეზე რაიმე M წერტილი. O წერტილიდან M წერტილამდე მანძილი აღვნიშნოთ ρ ასოთი,

$$|\overline{OM}| = \rho.$$

Ox ღერძსა და $\overline{OM}$ მონაკვეთს შორის დადებითი მიმართულებით კუთხე აღვნიშნოთ θ ასოთი,

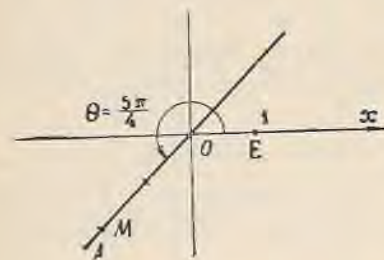
$$\angle XOM = \theta.$$

ნახაზიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ M წერტილს შეესაბამება ერთადერთი წყვილი რიცხვებისა (θ, ρ) , სადაც $0 \leq \theta < 2\pi$ და $0 < \rho < \infty$. ρ -ს ეწოდება

¹ რენე დეკარტე (კარტეზიუსი, 1596—1650), ფრანგი მათემატიკოსი, ფილოსოფოსი, ფიზიკოსი, ფიზიოლოგი, ანალიზური გეომეტრიის შემქმნელი.

რადიუს-ვექტორი, ხოლო θ -ს პოლარული კუთხე. (θ, ρ) რიცხვთა წყვილს ეწოდება M წერტილის პოლარული კოორდინატები.

თუ მოცემული გვაქვს რიცხვთა წყვილი (θ, ρ) , სადაც $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 < \rho < \infty$ და გვინდა სათანადო M წერტილი ვიპოვოთ, უნდა გავატაროთ OA სხივი, რომელიც OA ღერძთან θ კუთხეს ადგენს, შემდეგ OA სხივზე მოვზომოთ $\rho |OE| = |OM|$. მიღებული M წერტილი სწორედ ის წერტილია, რომლის კოორდინატებიცაა მოცემული (θ, ρ) კოორდინატები. მე-15 ნახაზზე ნაჩვენებია იმ M წერტილის აგება, რომლის კოორ-



ნახ. 15

დინატებიცაა $(\frac{5\pi}{4}, 2)$. განხილულ კოორდინატთა სისტემას პოლარული კოორდინატების სისტემა ეწოდება.

სიბრტყეზე განსაზღვრული პოლარულ კოორდინატთა სისტემა ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას რიცხვთა დაღებულ (θ, ρ) წყვილსა და სიბრტყის წერტილებს შორის იმ პირობით, რომ $0 \leq \theta <$

2π , $0 < \rho < \infty$ გამონაკლისია მხოლოდ პოლუსი, სადაც $\rho = 0$, ხოლო θ ნებისმიერია.

ბრუნებითი მოძრაობის შემთხვევაში პოლარულ კუთხეს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობა $-\infty < \theta < +\infty$. თუ რომელიმე წერტილის პოლარული კუთხეა θ , მაშინ იგი გამოისახება ტოლობით $\theta = \theta_0 + 2\pi k$, სადაც $-\pi < \theta_0 \leq \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. მაგალითად,

$$\theta = -\frac{9}{4}\pi = -\frac{1}{4}\pi + 2\pi(-1).$$

როგორც აღინიშნა, პოლარულ კოორდინატთა სისტემით სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება ნამდვილი რიცხვების (θ, ρ) ერთადერთი წყვილი, სადაც $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 < \rho < \infty$, მაგრამ სიბრტყეზე არ არსებობს წერტილი, რომლის პოლარული კოორდინატებიცა, მაგალითად, $(-\frac{\pi}{4}, -2)$,

შემდეგში, როდესაც წირს შევისწავლით პოლარულ კოორდინატებში, დაგვირდება, რომ θ და ρ იცვლებოდეს $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. განხილულ კოორდინატთა სისტემა კი ამის საშუალებას არ იძლევა. ეს მდგომარეობა გვაიძულებს განვაზოგადოთ განხილულ კოორდინატთა სისტემა.

ეთქვათ, (θ, ρ) ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი წყვილია. თუ $\rho > 0$, მაშინ ეს წყვილი განსაზღვრავს რაიმე M წერტილს. თუ $\rho < 0$, მაშინ

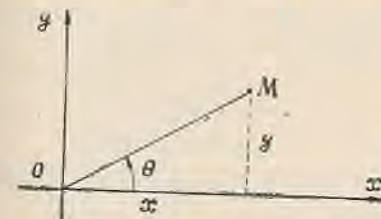
ჩავთვალოთ, რომ რიცხვთა წყვილი განსაზღვრავს წერტილს M -ს, რომელიც სიმეტრიულია $N(\theta, |\rho|)$ წერტილისა O პოლუსის მიმართ. მაგალითად, რიცხვთა წყვილი $(-\frac{\pi}{4}, -2)$ განსაზღვრავს M წერტილს, რომელიც სიმეტრიულია N წერტილისა კოორდინატებით $(-\frac{\pi}{4}, 2)$ (ნახ. 16).

ამავე ნახაზზე ნაჩვენებია $M_1(\frac{9}{4}\pi, -1)$, $M_2(\frac{\pi}{4}, -2)$ წერტილები

ბის მდებარეობა. წერტილის პოლარული კოორდინატების ამგვარად განსაზღვრით დავსაყენით: ნებისმიერი რიცხვთა წყვილი (θ, ρ) , $-\infty < \theta < \infty$, $-\infty < \rho < +\infty$ განსაზღვრავს ერთადერთ წერტილს (θ, ρ) პოლარული კოორდინატებით.

ზემოთგანხილულ პირობებში განსაზღვრულ პოლარულ კოორდინატთა სისტემას განზოგადებული პოლარული კოორდინატების სისტემა ეწოდება. შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ განზოგადოებულ პოლარულ კოორდინატთა სისტემას, მაგრამ სიტყვას „განზოგადებული“ არ ვიხმართ.

4. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემასა და პოლარულ კოორდინატთა სისტემას შორის დამოკიდებულება. ჩვენ გავეცანით დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემასა და პოლარულ კოორდინატთა სისტემას. ახლა გამოვიყვანოთ ფორმულები, რომლებიც აკავშირებენ წერტილის (x, y) კოორდინატებს იმავე წერტილის (θ, ρ) კოორდინატებთან.



ნახ. 16

ავაგოთ მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემა (ნახ. 17) და პოლარული ღერძი შევეუთავსოთ Ox ნახევარღერძს. ავიღოთ რაიმე M წერტილი, რომლის დეკარტის კოორდინატებიცაა (x, y) , ხოლო იმავე M წერტილის პოლარული კოორდინატები (θ, ρ) . ნახაზიდან ცხადია,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (3)$$

ეს ფორმულები საშუალებას იძლევა მოცემული (θ, ρ) კოორდინატებით ვიპოვოთ სათანადო (x, y) .

(3)-დან ცხადია,

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ეს ფორმულები საშუალებას იძლევა მოცემული x და y კოორდინატებით ვიპოვოთ სათანადო ρ და θ . მაგრამ θ -ს განსაზღვრის დროს მხედველობაში უნდა მივიღოთ x -ისა და y -ის ნიშნები. თუ ორივე დადებითია,

მაშინ M წერტილი სიბრტყის პირველ მეოთხედშია და $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. თუ

x და y უარყოფითია, მაშინ M წერტილი სიბრტყის მესამე მეოთხედშია და ა. შ. ყოველგვარი გაურკვევლობის თავიდან ასაცილებლად უნდა მივმართოთ (3) ფორმულებს.

მაგალითად, $M(1, -1)$ წერტილის პოლარული კოორდინატები შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\ 1 &= \sqrt{2} \cos \theta, \\ -1 &= \sqrt{2} \sin \theta. \end{aligned}$$

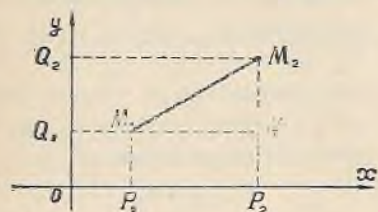
უქანსკენელი ტოლობიდან ცხადია, $\theta = -\frac{\pi}{4}$. ამგვარად, $M(1; -1)$

წერტილის პოლარული კოორდინატები იქნება $(-\frac{\pi}{4}; \sqrt{2})$, ანუ

$$(\frac{7}{4}\pi; \sqrt{2}).$$

5. უმარტივესი ამოცანები სიბრტყეზე. ა) ორ წერტილს შორის მანძილი.

ავიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემა და $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთი სათანადოდ დავაგეგმილოთ Ox და Oy ღერძებზე (ნახ. 18) გვექნება:



ნახ. 18

$$P_1P_2 = \text{გვერდი } \overline{M_1M_2},$$

$$Q_1Q_2 = \text{გვერდი } \overline{M_1M_2}.$$

თუ P_1P_2 -ს აღვნიშნავთ X -ით, ხოლო Q_1Q_2 -ს Y -ით, გვექნება

$$\begin{aligned} X &= x_2 - x_1, \\ Y &= y_2 - y_1, \end{aligned} \quad (5)$$

სადაც

$$OP_1 = x_1, \quad OP_2 = x_2, \quad OQ_1 = y_1, \quad OQ_2 = y_2,$$

X -სა და Y -ს ეწოდება $\overline{M_1M_2}$ მონაკვეთის კოორდინატები Oxy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

$M_1N M_2$ სამკუთხედიდან გვექნება

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{|\overline{M_1N}|^2 + |\overline{NM_2}|^2}.$$

აქედან კი (5) ფორმულების საფუძველზე მივიღებთ, რომ მანძილი M_1 -სა და M_2 -ს შორის გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$d_{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (6)$$

მაგალითად, $M_1(-1; 5)$ და $M_2(2; 1)$ წერტილებს შორის მანძილი იქნება

$$d = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

ბ) მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით. ვიპოვოთ M_1M_2 მონაკვეთზე ისეთი M წერტილი, რომ ადგილი ექნეს შემდეგ ტოლობას (ნახ. 19):

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda, \quad (7)$$

სადაც M_1M და MM_2 სათანადოდ $\overline{M_1M}$ და $\overline{MM_2}$ მონაკვეთების სიდიდეებია იმ u ღერძის გასწვრივ, რომელზედაც ეს მონაკვეთები მდებარეობენ. ნახაზიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2},$$

ანუ

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda,$$

საიდანაც

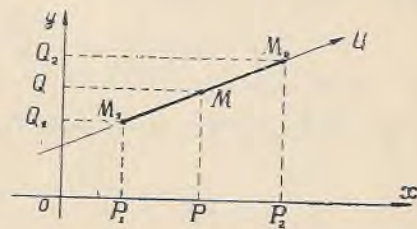
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda. \quad (8)$$

სრულიად ასევე მივიღებთ, რომ

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda. \quad (9)$$

(8) და (9) ტოლობანი სათანადო გამარტივების შემდეგ მოგვცემს:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{aligned} \quad (10)$$



ნახ. 19

ამგვარად, $\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთის λ ფარდობით გამყოფი M წერტილის კოორდინატები განისაზღვრება (10) ფორმულებით.

კერძოდ, თუ M წერტილი $\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთის შუა წერტილია, გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

მაგალითი. ვიპოვოთ იმ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, რომლის წვეროებია $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

AB გვერდის $D(x_4, y_4)$ შუა წერტილის კოორდინატები განისაზღვრება (11) ფორმულებით (ნახ. 20):

$$x_4 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_4 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (12)$$

DC მედიანაზე მედიანების გადაკვეთის $E(x, y)$ წერტილი აკმაყოფილებს პირობას

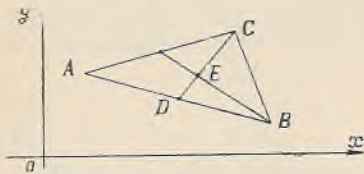
$$\frac{CE}{CD} = \frac{2}{1}, \quad \lambda = 2.$$

გვექნება:

$$x = \frac{x_3 + 2x_4}{1 + 2}, \quad y = \frac{y_3 + 2y_4}{3}.$$

თუ (12) მნიშვნელობებს უკანასკნელ ტოლობებში შევიტანთ, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \\ y &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$



ნახ. 20

გ) სამკუთხედის ფართობი. ვთქვათ, მოცემულია სამკუთხედი წვეროებით $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. ვიპოვოთ სამკუთხედის ფართობი S_{ABC} .

ვთქვათ, A წვერო კოორდინატა სათავეშია: $x_1 = 0_1$, $y_1 = 0$. (ნახ. 21) ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$S_{ABC} = S_{ADC} + S_{DEBC} - S_{AEB},$$

ანუ

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC + \frac{1}{2} (DC + EB) DE - \frac{1}{2} AE \cdot EB,$$

საიდანაც

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} [x_3 y_3 + (y_3 + y_2) \times (x_2 - x_1) - x_2 y_2].$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_3 y_2]. \quad (14)$$

თუ $A(0, 0)$ წერტილის მაგივრად ავიღებთ $A(x_1, y_1)$ წერტილს, მაშინ x_2 და y_2 უნდა შევცვალოთ სხვაობებით $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$. ასევე უნდა შევცვალოთ x_3 და y_3 : $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$. ამის შედეგად (14) მოგვცემს

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \quad (15)$$

თუ წერტილებს $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, $B(x_3, y_3)$ მიმდევრობით ავიღებთ, მაშინ (15) ტოლობის ნაცვლად გვექნება

$$S_{ABC} = -\frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \quad (16)$$

(15) და (16) ტოლობიდან, ცხადია,

$$S = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \quad (17)$$

ასეთია სამკუთხედის ფართობი, როდესაც ცნობილია სამკუთხედის წვეროები. ABC სამკუთხედის ფართობის ფორმულა ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (18)$$

თუ დეტერმინანტი დადებითია, მაშინ დეტერმინანტის წინ დადებითი ნიშანი უნდა ავიღოთ, ხოლო, თუ დეტერმინანტი უარყოფითია, მაშინ დეტერმინანტის წინ უარყოფითი ნიშანი უნდა ავიღოთ.

(18) ფორმულა ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

მაგალითი. ვიპოვოთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებია
 $A(1; 1), B(-3; 5), C(4; -6)$.

(18) ფორმულით გვექნება

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 5-1 \\ 4 & -1 & -6-1 \end{vmatrix} = (-4)(-7) - 3 \cdot 4 = 28 - 12 = 16.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$$

§ 3. კოორდინატთა გარდაქმნები

გეომეტრიული ობიექტების მდებარეობა ანალიზურ გეომეტრიაში რაიმე კოორდინატთა სისტემის მიმართ განიხილება. ცხადია, ერთსა და იმავე ობიექტს სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემაში სხვადასხვა მდებარეობა აქვს და სხვადასხვაგვარად გამოისახება. ამიტომ ერთი და იგივე ობიექტი შეიძლება ორ სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემაში შევისწავლოთ. მაგრამ შეიძლება კოორდინატთა ერთი სისტემა, რაიმე მოსაზრებით, უფრო ხელსაყრელი იყოს მეორე სისტემის მიმართ. მაშინ ზოგჯერ საჭიროა ვიპოვოთ წერტილის კოორდინატები კოორდინატთა ერთ სისტემაში, როდესაც ცნობილია იმავე წერტილის კოორდინატები მეორე კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ამ მიზანს ემსახურება ე. წ. კოორდინატთა გარდაქმნები.

1. კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანა. ვთქვათ, მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა ორი სისტემა კოორდინატთა სხვადასხვა სათავეთი O და O' , ხოლო ღერძების მიმართულებანი უცვლელია. უცვლელია მასშტაბიც. ერთი კოორდინატთა სისტემა აღვნიშნოთ Oxy -ით და მას სიმარტივისათვის ძველი კოორდინატთა სისტემა დავარქვათ. მეორე კოორდინატთა სისტემა $x'O'y'$ -ით აღვნიშნოთ და მას ახალი კოორდინატთა სისტემა დავარქვათ (ნახ. 22). O' წერტილის კოორდინატები Oxy სისტემის მიმართ იყოს (a, b) . ადვილი შესაძლებელია, პირველი კოორდინატთა სისტემა დაემთხვევა მეორე კოორდინატთა სისტემას, თუ პირველ კოორდინატთა სისტემას გადავიტანთ OO' მიმართული მონაკვეთის გასწვრივ პარალელურად ისე, რომ O წერტილი დაემთხვეს O' წერტილს. ამ შემთხვევაში ვიტყვი: ახალი კოორდინატთა სისტემა მიიღება ძველი კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანით.

სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები ძველ — Oxy სისტემაში იყოს (x, y) , ხოლო ახალ — $O'x'y'$ სისტემაში — (x', y') :

$$OM_x = x, \quad OO'_x = a;$$

$$OM_y = y, \quad OO'_y = b.$$

ნახაზიდან ცხადია,

$$OM_x = OO'_x + O'_x M_x,$$

$$OM_y = OO'_y + O'_y M_y,$$

ანუ

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{cases} \quad (1)$$

მივიღეთ M წერტილის ძველ (x, y) და ახალ (x', y') კოორდინატებს შორის დამოკიდებულება.

(1)-დან გვექნება

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \quad (2)$$

ე. ი. დეკარტის კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანის შემთხვევაში წერტილის აბსცისას აკლდება ის a სიდიდე, რა სიდიდეზედაც კოორდინატთა სათავე Ox ღერძის მიმართ გადაადგილდა, ხოლო ორდინატს აკლდება ის b სიდიდე, რა სიდიდეზედაც კოორდინატთა სათავე Oy ღერძის მიმართ გადაადგილდა.

2. ღერძთა შემობრუნება. ვთქვათ, ძველი კოორდინატთა სისტემისა და ახალი კოორდინატთა სისტემის სათავე ერთიმეორეს ემთხვევა, ხოლო Ox -სა და Ox' -ს ღერძებს შორის კუთხე არის α (ნახ. 23).

სიბრტყის M წერტილის კოორდინატებისათვის გვექნება:

$$x = OM_x, \quad y = MM_x,$$

$$x' = OM_{x'}, \quad y' = MM_{x'}.$$

ნახაზიდან ცხადია, რომ

$$x = |\overline{OM}| \cos \gamma, \quad y' = |\overline{OM}| \sin \gamma, \quad (3)$$

$$x' = |\overline{OM}| \cos \beta, \quad y' = |\overline{OM}| \sin \beta. \quad (4)$$

რადიანად $\alpha + \beta = \gamma$, (3)-დან გვექნება:

$$\begin{aligned} x &= |\overline{OM}| \cos(\alpha + \beta) = |\overline{OM}| (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= |\overline{OM}| \cos \beta \cos \alpha - |\overline{OM}| \sin \beta \sin \alpha. \end{aligned}$$

თუ (4) მნიშვნელობებს შევიტანთ, მივიღებთ:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha.$$

სრულიად ასევე მივიღებთ

$$\begin{aligned} y &= |\overline{OM}| \sin(\alpha + \beta) = |\overline{OM}| \cos \beta \sin \alpha + |\overline{OM}| \sin \beta \cos \alpha = \\ &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

ამგვარად, გვექნება

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

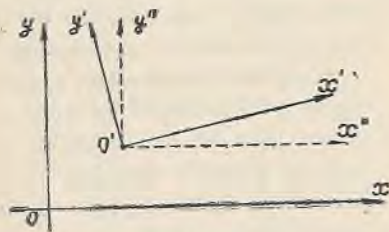
ამ ფორმულებით მივიღებთ M წერტილის ძველ კოორდინატებს ახალი კოორდინატების საშუალებით. თუ M წერტილის ძველი კოორდინატებით გვინდა გამოვსახოთ ახალი კოორდინატები, საკმარისია (5) ფორმულები განვიხილოთ როგორც განტოლებათა სისტემა x', y' -ის მიმართ და ამოვხსნათ. მაგრამ საძიებელ დამოკიდებულებებს მივიღებთ, თუ ძველი კოორდინატების მაგიერ ვიგულისხმებთ ახალ კოორდინატებს

და ღერძებს მოვაბრუნებთ ($-\alpha$) კუთხით:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(-\alpha) - y \sin(-\alpha), \\ y' &= x \sin(-\alpha) + y \cos(-\alpha), \end{aligned}$$

ანუ

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$



ნახ. 24

ნახ. 24. ვთქვათ, ახალი კოორდინატთა სისტემის სათავე მოთავსებულია $O'(a, b)$ წერტილში და $O'x'$ ღერძი Ox ღერძთან α კუთხეს ადგენს. ვიპოვოთ დამოკიდებულებანი ძველ კოორდინატთა და ახალ კოორდინატთა სისტემებს შორის, ამისათვის ავაგოთ დამხმარე კოორდინატთა სისტემა $O'x''y''$, სადაც $O'x'' \parallel Ox$, $O'y'' \parallel Oy$ (ნახ. 24). Oxy და $O'x''y''$ სისტემებს შორის დამოკიდებულებას მივიღებთ (1) ფორმულებით:

$$\begin{aligned} x &= a + x'', \\ y &= b + y''. \end{aligned} \quad (7)$$

ხოლო $O'x''y''$ -სა და $O'x'y'$ -ს შორის დამოკიდებულებას (5) ფორმულებით:

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y'' &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

(7) და (8) ფორმულებით მივიღებთ Oxy და $O'x'y'$ კოორდინატთა სისტემებს შორის დამოკიდებულებას:

$$\begin{aligned} x &= a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

თუ ამ დამოკიდებულებიდან განვსაზღვრავთ x' და y' -ს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x' &= (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha, \\ y' &= -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

ს ა ვ ა რ ჟ ი შ ი 8. 1. რიცხვთა ღერძზე ააგეთ წერტილები $A (-7)$, $B (+3)$, $C (-5)$. იპოვეთ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ მონაკვეთების სიგრძეები და სი-
ლოდებები. შეამოწმეთ

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

2. ააგეთ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A (5; 2)$, $B (-4; 6)$, $C (-1; -8)$. განსაზღვრეთ $|\overline{AB}|$, $|\overline{BC}|$, $|\overline{AC}|$. იპოვეთ მესამე-
ბის სიგრძეები და მესამეების გადაკვეთის წერტილი.

3. განსაზღვრეთ სამკუთხედის სახე, თუ მისი წვეროებია $A (-3; -2)$, $B (0; -1)$, $C (-2; 5)$.

4. $A (5; 3)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილებია კოორდინატთა
ღერძების მიმართ B და C . ააგეთ ABC სამკუთხედი, განსაზღვრეთ სამ-
კუთხედის სახე და იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

5. მოცემულია $A (4; 3)$, $B (-3; 2)$ და $C (1; -6)$ წერტილები. იპო-
ვეთ ამ სამ წერტილზე გატარებული წრეწირის ცენტრი და რადიუსი.

6. მონახეთ ფართობი იმ თხემკუთხედისა, რომლის წვეროებია $A (3; 1)$, $B (4; 6)$, $C (6; 3)$ და $D (5; -2)$.

7. მოცემულია წერტილები $A (1; 2)$ და $B (4; 4)$. X ღერძზე იპოვეთ
ისეთი C წერტილი, რომ ΔABC ფართობი 5 კვადრატული ერთეული
იყოს.

სიბრტყეში წირის განტოლება

§ 1. წირის განტოლება

1. წირის განტოლების ცნება. ზემოთ ნაჩვენები იყო, რომ კოორდინატთა მეთოდით მყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა გეომეტრიულ ობიექტებსა — წერტილებსა და ალგებრულ ობიექტებს — რიცხვებს შორის.

რიცხვთა ღერძის ყოველ წერტილს შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი და, პირიქით, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი წერტილი. ასევე, კოორდინატთა სიბრტყეზე ყოველ წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული ერთადერთი წყვილი. პირიქით, ყოველ დალაგებულ ნამდვილ რიცხვთა წყვილს შეესაბამება კოორდინატთა სიბრტყეზე ერთადერთი წერტილი. ამ შესაბამისობით სიბრტყის წერტილთა რაიმე ურთიერთდამოკიდებულება მიიყვანება სათანადო ალგებრულ დამოკიდებულებაზე და ამით გეომეტრიული ამოცანები მიიყვანება ალგებრულ ამოცანებზე.

სიბრტყეზე წირი განიხილება როგორც სიბრტყის (x, y) წერტილთა სიმრავლე, რომელსაც გარკვეული თვისება აქვს. წერტილთა სიმრავლის ეს თვისება შეიძლება გამოისახოს x -სა და y -ის მიმართ რაიმე განტოლებით. თუ M წერტილი აღებულ სიმრავლეს ეკუთვნის, მაშინ M წერტილის კოორდინატები (x, y) აკმაყოფილებენ ამ განტოლებას. M წერტილს მიმდინარე ან ცვლადი წერტილი ეწოდება, ხოლო M წერტილის კოორდინატებს (x, y) მიმდინარე კოორდინატები.

განვიხილოთ მაგალითები.

შევადგინოთ Oxy კოორდინატთა სისტემაში პირველი საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის განტოლება.

რადგანაც კუთხის ბისექტრისის წერტილები ტოლი მანძილითაა დაშორებული კუთხის გვერდებიდან, ბისექტრისის ნებისმიერი M წერტილისათვის გვექნება (ნახ. 1)

$$|MA| = |MB|, \quad |MA| = y, \quad |MB| = x,$$

საიდანაც

$$y = x,$$

(1)

მევიღეთ Oxy კოორდინატთა სისტემაში პირველი საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის განტოლება.

შევადგინოთ მეორე საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის განტოლება.

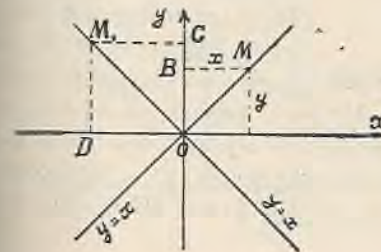
მეორე საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$|M_1C| = |M_1D|, \quad |M_1C| = -x, \quad |M_1D| = y,$$

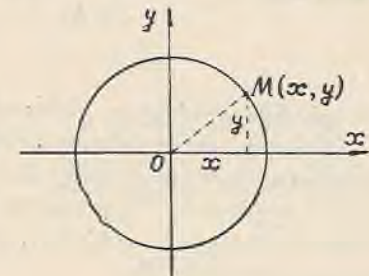
საიდანაც

$$y = -x.$$

სრულიად ასევე შეგვიძლია შევადგინოთ წრე წირის განტოლება.



ნახ. 1



ნახ. 2

წრეწირი ეწოდება სიბრტყის ისეთ წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც ტოლი მანძილებითაა დაშორებული მოცემული წერტილიდან. ამ წერტილს ეწოდება წრეწირის ცენტრი, ხოლო წრეწირის ცენტრიდან წრეწირის წერტილამდე მანძილს — რადიუსი.

ვთქვათ, წრეწირის ცენტრია კოორდინატთა სათავე $O(0,0)$ (ნახ. 2). წრეწირის ნებისმიერი წერტილი იყოს $M(x,y)$. წრეწირის ცენტრიდან M წერტილამდე მანძილი იყოს r . წრეწირის განსაზღვრის თანახმად $|OM| = r$. თუ ვისარგებლებთ ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულით, მივიღებთ

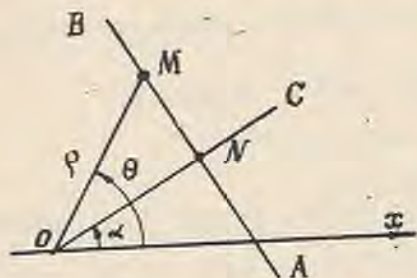
$$\sqrt{x^2 + y^2} = r,$$

საიდანაც

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2)$$

მევიღეთ განტოლება იმ წრეწირისა, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია და რადიუსი r -ის ტოლია.

ახლა სიბრტყეზე ავიღოთ პოლარულ კოორდინატთა სისტემა. ამ სიბრტყეზე გავატაროთ AB წრფე, რომელიც OC წრფის პერპენდიკულარულია (ნახ. 3). ვთქვათ, OC წრფე OX პოლარულ ღერძთან ადგენს α კუთხეს



ნახ. 3

და პოლარული სათავიდან AB წრფემდე მანძილი l -ის ტოლია. წრფეზე ავიღოთ ნებისმიერი $M(\rho, \theta)$ წერტილი. აღვიღო შესამჩნევია გვერდი $\overline{OM} = \overline{ON}$, $NM \perp OC$, ანუ

$$\rho \cos(\theta - \alpha) = l. \quad (3)$$

პოლარულ კოორდინატებში მივიღეთ წრფის განტოლება. წრფე გატარებულია O პოლუსიდან l მანძილზე იმ OC სხივს

ვის პერპენდიკულარულად, რომელიც პოლარულ ღერძთან α კუთხეს ადგენს. ამრიგად, კოორდინატთა სიბრტყეზე წირი განესაზღვრეთ როგორც წერტილთა სიმრავლე, რომლებსაც გარკვეული თვისება აქვს და ამ თვისების საფუძველზე შევადგინეთ წირის განტოლება. ე. ი. შევადგინეთ ისეთი განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებენ წირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები.

შემდეგში დავგვირდება წირისა და წირის განტოლების უფრო ზუსტი განსაზღვრა.

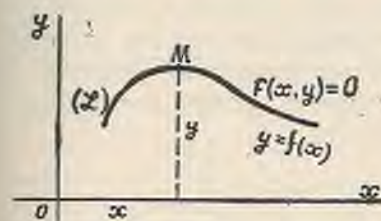
ვთქვათ, π სიბრტყეზე მოცემულია Oxy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და ამ სისტემაში L წირი (ნახ. 4). განვიხილოთ $F(x, y) = 0$ განტოლება, რომელიც აკავშირებს x და y ცვლადებს. განტოლებას $F(x, y) = 0$ ეწოდება L წირის განტოლება მოცემულ კოორდინატთა სისტემის მიმართ π სიბრტყეზე. თუ ამ განტოლებას აკმაყოფილებს L წირის ნებისმიერი წერტილის (x, y) კოორდინატები და არ აკმაყოფილებს L წირზე არამდებარე წერტილის კოორდინატები. მაგალითად, $y - x = 0$ განტოლებას აკმაყოფილებს π სიბრტყის მხოლოდ პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის წერტილები. მაშასადამე, განტოლება $y - x = 0$ პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის განტოლებაა. წირის განტოლების განსაზღვრიდან ცხადია, რომ L წირი π სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეა — გეომეტრიულად გილია, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ $F(x, y) = 0$ განტოლებას.

განტოლებით წირის განსაზღვრა მკიდროდა დაკავშირებული ფუნქციის გრაფიკის ცნებასთან. მართლაც, ვთქვათ, $F(x, y) = 0$ არის L წირის

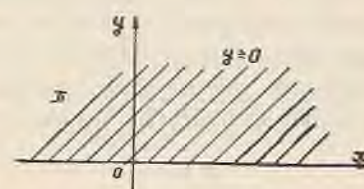
განტოლება. ზოგჯერ შესაძლებელია ამ განტოლების ამოხსნა y -ის მიმართ, $y = f(x)$. თუ $F(x, y) = 0$ და $y = f(x)$ ურთიერთგვერდიან განტოლებანია, მაშინ L წირი იქნება $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

შეიძლება განტოლება $F(x, y) = 0$ განსაზღვრავდეს ერთ წერტილს. მაგალითად, განტოლება $x^2 + y^2 = 0$ განსაზღვრავს მარტო ერთ წერტილს $(0, 0)$. განტოლება $x^2 + y^2 + 1 = 0$ კი არაერთარ წერტილს არ განსაზღვრავს.

წირის ზემოთმოტანილი განსაზღვრა მეტად ფართოა და ბევრ შემთხვევაში ამ განსაზღვრით შეიძლება მივიღოთ ისეთ წერტილთა სიმრავლე, რომელიც წირის თვალსაჩინო წარმოდგენას არ ეთანხმება. მაგალითად, წერტილთა სიმრავლე, რომელიც განსაზღვრულია $y - |y| = 0$ განტოლებით, მთლიანად $y \geq 0$ ნახევარსიბრტყეა (ნახ. 5).



ნახ. 4



ნახ. 5

შემოვიღოთ წერტილის მიდამოს ცნება. M წერტილის მიდამო ეწოდება სიბრტყეზე ნებისმიერ წრეს ცენტრით M წერტილში.

რომ განესაზღვროთ $F(x, y) = 0$ განტოლებით წირი, $F(x, y)$ ფუნქცია უნდა შევზღუდოთ, ასეთი შეზღუდვა: თუ M წერტილი ეკუთვნის $F(x, y) = 0$ განტოლებით განსაზღვრულ L წირს, მაშინ M წერტილის ნებისმიერი მიდამო ისეთ წერტილებსაც უნდა შეიცავდეს, რომელთა კოორდინატები არ აკმაყოფილებენ $F(x, y) = 0$ განტოლებას. ამისათვის უნდა მოვითხოვოთ, რომ არსებობდეს ისეთი უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქცია, რომელიც იგივერად აკმაყოფილებს $F(x, y) = 0$ განტოლებას და ამასთან $F(x, y) = 0$ და $y = f(x)$ განტოლებანი ურთიერთგვერდიან განტოლებას იყოს. ამ საკითხზე დაწვრილებით საუბარი გვქვანება მე-11 თავში.

ქვემოთ განვიხილავთ ისეთ წირებს, რომელთა განტოლებანია $F(x, y) = 0$, სადაც $F(x, y)$ ფუნქცია პირველი ან მეორე ხარისხის მრავალწევრია. ასეთ წირებს ალგებრული წირები (პირველი ან მეორე რიგის) ეწოდება.

შემდეგში $F(x, y) = 0$ ან $y = f(x)$ განტოლებით განსაზღვრული წირის შესახებ მოკლედ ვიტყვი: „ $F(x, y)$ წირი“ ან „ $f(x)$ წირი“.

ანალიზურ გეომეტრიაში განიხილება შემდეგი ამოცანები: 1) მოცემულია წერტილთა სიმრავლე და შევადგინოთ ისეთი განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს ამ სიმრავლეს.

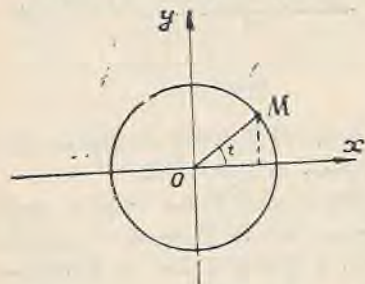
მელსაც აკმაყოფილებს ამ სიმრავლის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები; 2) მოცემულია განტოლება, გამოვიკვლიოთ იმ წერტილთა სიმრავლის თვისებები, რომლის წერტილთა კოორდინატები ამ განტოლებას აკმაყოფილებენ და ავაგოთ სათანადო წირი.

2. წირის პარამეტრული განტოლებანი. შეიძლება წირი მოცემული იყოს განტოლებებით

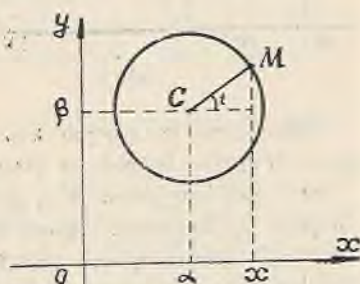
$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases} \quad (4)$$

სადაც t ცვლადია. t -ს ცვლილებით იცვლება x და y და, ცხადია, $M(x, y)$ წერტილი მოგვცემს წერტილთა სიმრავლეს — წირს. (4)-ს ეწოდება წირის პარამეტრული განტოლებანი, ხოლო t -ს ცვლადი პარამეტრი.

თუ (4) განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ t ცვლადს, მივიღებთ განტოლებას, რომელიც აკავშირებს კოორდინატებს x -სა და y -ს. ეს განტოლება იქნება $F(x, y) = 0$ სახის. მაგალითად, შევადგინოთ წრეწირის პარამეტრული განტოლებანი. ვთქვათ, წრეწირის ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, ხოლო რადიუსია r .



ნახ. 6



ნახ. 7

პარამეტრად ავიღოთ $\overline{OM}$ -სა და x ღერძს შორის კუთხე (ნახ. 6). ნახაზიდან ცხადია,

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t. \end{cases} \quad (5)$$

ეს არის იმ წრეწირის პარამეტრული განტოლებანი, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია. თუ წრეწირის ცენტრი რომელიმე $C(\alpha, \beta)$ წერტილშია, მაშინ, საკმარისია, $\overline{CM}$ დავაგვამილოთ Ox და Oy ღერძზე (ნახ. 7). ნაცვლად (5) განტოლებებისა გვექნება

$$\begin{cases} x - \alpha = r \cos t, \\ y - \beta = r \sin t, \end{cases} \quad (6)$$

საიდანაც მივიღებთ წრეწირის პარამეტრულ განტოლებას ზოგადი სახით

$$\begin{cases} x = \alpha + r \cos t, \\ y = \beta + r \sin t. \end{cases} \quad (7)$$

(6) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t . ამისათვის (6) განტოლებები კვადრატში ავიყვანოთ და შევკრიბოთ

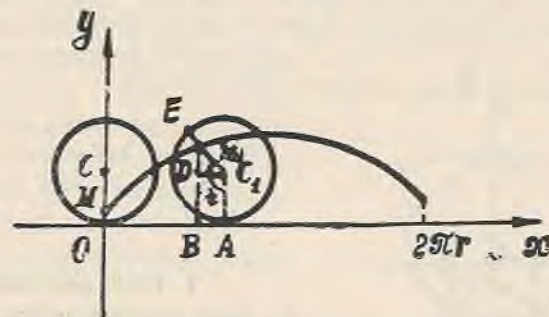
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

მივიღებთ განტოლებას, რომელსაც წრეწირის ნორმალური განტოლება ეწოდება.

განვიხილოთ ამოცანა.

ვთქვათ, წრე უსრიალოდ გორავს წრეწივს. შევადგინოთ წრის ნებისმიერი წერტილის მიერ აღწერილი წირის განტოლება.

ვთქვათ, r რადიუსიანი წრეწირი გორავს Ox ღერძზე და გორვა იწყება კოორდინატთა სათავიდან (ნახ. 8). წრეზე ავიღოთ რომელიმე



ნახ. 8

M წერტილი, $|\overline{CM}| = r$. განვიხილოთ წრის მდებარეობა, როდესაც წრის ცენტრი იქნება C_1 წერტილში, მაშინ $\overline{OA}$ მონაკვეთის სიგრძე და $\overline{AE}$ რკალის სიგრძე, უსრიალოდ გორვის გამო, ტოლი უნდა იყოს, $|\overline{OA}| = |\overline{AE}| = rt$, თუ წრეწირის ის წერტილი, რომელიც კოორდინატთა სათავეში იყო, გადაინაცვლებს E წერტილში, ამ შემთხვევაში M წერტილი გადაინაცვლებს M_1 წერტილში. M_1 წერტილის მდებარეობა დახასიათდება წრეწირის ცენტრის C_1 გარშემო მობრუნების $\widehat{C_1A}, \widehat{C_1E} = t$ კუთხით. M_1 წერტილის კოორდინატები იყოს (x, y) .

ნახაზიდან ცხადია,

$$Ox, \widehat{C_1M_1} = \frac{3}{2}\pi - t, \quad Oy, \widehat{C_1M} = \pi - t. \quad (8)$$

გამოვთვალოთ M_1 წერტილის კოორდინატები:

$$x = OB = OA + AB = r + |\overline{C_1 M_1}| \cos O\widehat{x}, \quad (9)$$

$$y = B_1 M_1 = BD + DM_1 = r + |\overline{C_1 M_1}| \cos O\widehat{y}, \quad (9)$$

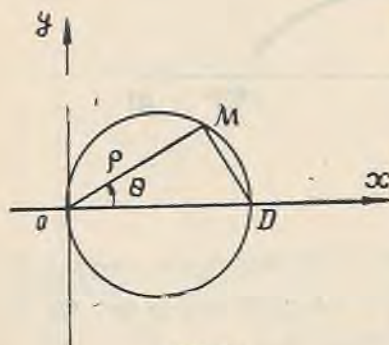
თუ მხედველობაში მივიღებთ კუთხეების მნიშვნელობებს (8), მაშინ (9) ტოლობები მოგვცემს

$$\begin{aligned} x &= r + a \sin t, \\ y &= r + a \cos t, \end{aligned}$$

ანუ

$$\left. \begin{aligned} x &= r \left(1 + \frac{a}{r} \sin t \right), \\ y &= r \left(1 + \frac{a}{r} \cos t \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

მივიღებთ საძიებელი წირის პარამეტრული განტოლებანი. (14) განტოლებებით გამოსახულ წირს ეწოდება ციკლოიდა. თუ M წერტილი წრეწირზე მდებარეობს, მაშინ მიღებულ წირს ეწოდება ჩვეულებრივი ციკლოიდა, $a=r$. თუ M წერტილი მდებარეობს წრეწირის შიგნით, მაშინ აღწერილ წირს ეწოდება დამოკლებული ციკლოიდა, $a < r$. თუ M წერტილი მდებარეობს წრეწირის გარეთ, $a > r$, მაშინ მიღებულ წირს ეწოდება დაგრძელებული ციკლოიდა.



ნახ. 9

წრეწირზე ავიღოთ M წერტილი. შევადგინოთ M წერტილი პოლუსთან და OD დიამეტრის ბოლო წერტილთან წრფის მონაკვეთებით. M წერტილის კოორდინატები იქნება $\overline{OM}$ მონაკვეთის სიდიდე, $OM=r$ და $\angle xOM=\theta$. გამოვიყენოთ წრეწირის თვისება: წრეწირში დიამეტრზე დაყრდნობილი ყველა ჩახაზული კუთხე მართია. ამის გამო გვექნება

$$OM = \text{გვერდი } \overline{OD},$$

ანუ

$$\rho = 2r \cos \theta. \quad (11)$$

მივიღებთ წრეწირის საძიებელი განტოლება პოლარულ კოორდინატებში.

2) შევადგინოთ იმ $M(\theta, \rho)$ წერტილთა სიმრავლის განტოლება, რომლის რადიუს-ვექტორი ρ პროპორციულია θ პოლარული კუთხისა.

ვთქვათ, a არის პროპორციულობის კოეფიციენტი, $a > 0$, მაშინ საძიებელი განტოლება იქნება

$$\rho = a\theta.$$

თუ θ -ს მივცემთ რიცხვით მნიშვნელობებს და გამოვთვალოთ ρ -ს, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	...	2π	...
ρ	0	$a \frac{\pi}{6}$	$a \frac{2\pi}{6}$	$a \frac{3\pi}{6}$	...	$a \cdot 2\pi$	...

წერტილების აგვებით და ამ წერტილების სათანადო შეერთებით, მივიღებთ წირს (ნახ. 10). ამ წირს ეწოდება არქიმედის ხელი.

თუ θ -ს მივცემთ უარყოფით მნიშვნელობებს, მაშინ ρ -ც მიიღებს უარყოფით მნიშვნელობებს. ასე რომ, გვექნება წერტილები $(-\theta, -\rho)$. ამ წერტილების აგვებით მივიღებთ წირს, რომელიც ნახაზზე წყვეტილი წირითაა აღნიშნული.



ნახ. 10

ვთქვათ, $\rho = f(\theta)$ რაიმე წირის პოლარული განტოლებაა. იგივე წირი განისაზღვრება შემდეგი პარამეტრული განტოლებებით:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\theta) \cos \theta, \\ y &= f(\theta) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

რომ მივიღოთ ეს განტოლებები, საკმარისია $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ ფორმულებში ρ შევცვალოთ $f(\theta)$ ფუნქციით.

(12) განტოლებები არქიმედის ხეისათვის მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x = a\theta \cos \theta, \quad y = a\theta \sin \theta.$$

ამ განტოლებებში პარამეტრია θ .

4. **აღებრული წირები.** ანალიზური გეომეტრია შეისწავლის ძირითადად ისეთ წირებს, რომლებიც დეკარტის კოორდინატთა მიმართ განი-

საზღვრებიან ალგებრული განტოლებებით. ამ განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$Ax + By + C = 0, \quad (13)$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (14)$$

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ly + K = 0, \quad (15)$$

სადაც $A, B, C, \dots$ კოეფიციენტებია.

(13) განტოლებას ეწოდება ორცვლადიანი პირველი ხარისხის ზოგადი განტოლება. ამ განტოლებაში უნდა მოვითხოვოთ, A და B ერთდროულად ნულის ტოლი არ იყოს. (14) განტოლებას ორცვლადიანი მეორე ხარისხის ზოგადი განტოლება ეწოდება. აქაც უნდა მოვითხოვოთ A, B, C კოეფიციენტები ერთდროულად ნულის ტოლი არ იყოს, წინააღმდეგ შემთხვევაში არ გვექნება მეორე ხარისხის განტოლება.

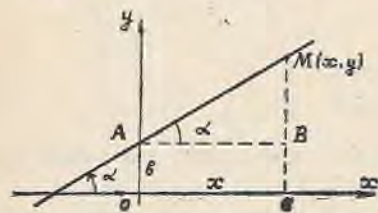
(15) განტოლებას ეწოდება მესამე ხარისხის ზოგადი განტოლება და ა. შ. საზოგადოდ, წირს, რომელიც დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში გამოისახა n ხარისხის ალგებრული განტოლებით, ეწოდება n რიგის ალგებრული წირო.

არაალგებრული წირების მაგალითებია:

$$\begin{aligned} y - \sin x &= 0, & y - a^x &= 0, \\ y - \log_a x &= 0, & y - \arcsin x &= 0. \end{aligned}$$

§ 2. წრფის სხვადასხვა სახის განმარტება

1. წრფის საკუთხოკოეფიციენტიანი განტოლება. ვთქვათ, მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში რაიმე წრფე,



ნახ. 11

რომელიც ორდინატთა ღერძის პარალელური არაა (ნახ. 11). ამ წრფის Ox ღერძთან დადებითი მიმართულებით შედგენილი კუთხე აღენიშნოთ α ასოთი, ხოლო α კუთხის ტანგენსი k ასოთი,

$$\operatorname{tg} \alpha = k.$$

α კუთხეს ეწოდება მოცემული წრფის x ღერძთან დახრის კუთხე, k -ს საკუთხო კოეფიციენტი.

წრფის მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის OA -ს სიდიდე b ასოთი აღენიშნოთ,

$$OA = b.$$

ცხადია, წრფე განსაზღვრულია, თუ კოორდინატთა სისტემაში ცნობილია $A(0, b)$ წერტილი, რომელზედაც წრფე გაივლის და მიმართულების მაჩვენებელი α კუთხე, ანუ, თუ ცნობილია, b და k .

შევადგინოთ წრფის განტოლება, თუ ცნობილია წრფის საკუთხო კოეფიციენტი k და y ღერძზე წრფის მიერ ჩამოჭრილი მონაკვეთის სიდიდე b . წრფეზე ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი $M(x, y)$. ნახაზზე.

$$OC = x, \quad CM = y.$$

A წერტილზე გავატაროთ MC -ს პერპენდიკულარი AB . მივიღებთ ABM მართკუთხა სამკუთხედს. ამ სამკუთხედიდან, ცხადია,

$$\frac{BM}{AB} = \operatorname{tg} \alpha,$$

ანუ

$$\frac{y - b}{x} = k, \quad (1)$$

საიდანაც გამარტივებით მივიღებთ

$$y = kx + b. \quad (2)$$

ამგვარად, ვაჩვენეთ: იმ წრფის ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები (x, y) , რომელიც Oy ღერძზე ჩამოჭრის b სიდიდის მონაკვეთს და Ox ღერძთან ადგენს α კუთხეს, $\operatorname{tg} \alpha = k$, აკმაყოფილებს (2) განტოლებას. ე. ი. ვაჩვენეთ, რომ წრფე გამოისახება (2) განტოლებით. ცხადია, პირიქითაც, (2) განტოლება გამოსახავს წრფეს, რომელიც Oy -ს ჩამოჭრის მონაკვეთს OA , $OA = b$, და Ox ღერძთან ადგენს α კუთხეს, $\operatorname{tg} \alpha = k$.

მართლაც, (2) გადავწეროთ (1) სახით, სადაც $k = \operatorname{tg} \alpha$. წერტილთა ის სიმრავლე $\{M\}$, რომელიც (1) განტოლებას აკმაყოფილებს, შეიცავს $A(0, b)$ წერტილს. A წერტილზე გავატაროთ x ღერძის პარალელური წრფე. ამ წრფეზე ავიღოთ ნებისმიერი $B(x, b)$ წერტილი. წერტილი $M(x, y)$, რომელიც (1) განტოლებას აკმაყოფილებს, A და B წერტილებთან ქმნის ABM მართკუთხა სამკუთხედს, სადაც AM ჰიპოტენუზა AB კათეტთან ადგენს α კუთხეს, $\operatorname{tg} \alpha = k$.

ამრიგად, M წერტილთა ის სიმრავლე $\{M\}$, რომელიც აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, მდებარეობს წრფეზე, რომელიც $A(0, b)$ წერტილზე გაივლის და x ღერძთან ადგენს α კუთხეს, $\operatorname{tg} \alpha = k$.

(2) განტოლებას ეწოდება წრფის საკუთხოკოეფიციენტიანი განტოლება ან წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით. (2) განტოლებაში y არის x -ის წრფივი ფუნქ-

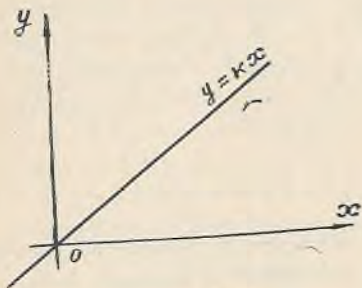
ცია. (2) განტოლებასა და წრფეს შორის დამოკიდებულების გამო ვიტყვით: წრფე წარმოადგენს წრფივი ფუნქციის გრაფიკს. განვიხილოთ (2) განტოლების კერძო შემთხვევები. თუ $b=0$, მაშინ (2) განტოლება მოგვცემს (ნახ. (12))

$$y = kx. \quad (3)$$

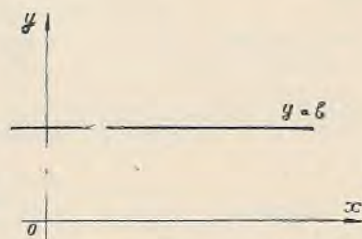
(3) განტოლება გამოსახავს კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრფეს. თუ $k=0$, მაშინ (2) განტოლება მოგვცემს

$$y = b. \quad (4)$$

ეს წრფე Ox ღერძის პარალელურია (ნახ. 13).



ნახ. 12

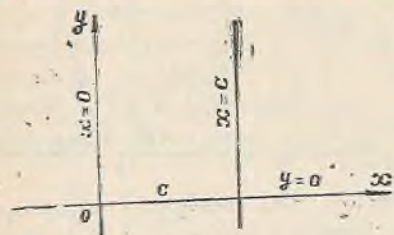


ნახ. 13

ცხადია, Ox ღერძის განტოლებაა $y=0$, ხოლო Oy ღერძის განტოლებაა $x=0$. ავიღოთ განტოლება

$$x = c. \quad (5)$$

ამ განტოლებაში y ნებისმიერია. ყველა ამ y -ებისათვის x ერთადერთია. ამის გამო, ცხადია, (5) განტოლება გამოსახავს y ღერძის პარალელურ წრფეს (ნახ. 14).



ნახ. 14

2. წრფის ზოგადი განტოლება. დადგენილია, რომ

$$Ax + By + C = 0 \quad (6)$$

განტოლება გამოსახავს წრფეს.

მართლაც, (6) განტოლებაში

მივიღოთ $B \neq 0$, მაშინ ეს განტოლება ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \quad (7)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$-\frac{A}{B} = k, \quad -\frac{C}{B} = b, \quad (8)$$

მაშინ (7) განტოლება მოგვცემს

$$y = kx + b.$$

ეს კი წარმოადგენს (2) განტოლებას. (2) განტოლების შესახებ კი ვიცით, რომ იგი გამოსახავს წრფეს. მაშასადამე, (6) განტოლება გამოსახავს წრფეს. (6) განტოლებას ეწოდება წრფის ზოგადი განტოლება.

3. წრფის ზოგადი განტოლების გამოკვეთვა. ავიღოთ წრფის განტოლება ზოგადი სახით. ამ განტოლებაში მივიღოთ, რომ $C=0$, გვექნება

$$Ax + By = 0. \quad (9)$$

მიღებული განტოლება კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფის განტოლებაა, რადგანაც იგი კმაყოფილდება, თუ $x=0$ და $y=0$.

ცხადია, თუ (9) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ y -ს და გამოვიყენებთ (8) აღნიშვნებს, მივიღებთ (3) განტოლებას,

თუ (6) განტოლებაში მივიღებთ $A=0$, მაშინ გვექნება

$$By + C = 0, \quad (10)$$

საიდანაც, თუ განვსაზღვრავთ y -ს და გამოვიყენებთ (8) აღნიშვნებს, მივიღებთ (4) განტოლებას,

$$y = b.$$

მაშასადამე, (10) განტოლება იძლევა Oy ღერძის პარალელურ წრფეს.

თუ (6) განტოლებაში მივიღებთ $B=0$, მაშინ გვექნება

$$Ax + C = 0. \quad (11)$$

ამ განტოლებიდან განვსაზღვროთ x და გამოვიყენოთ აღნიშვნა $-\frac{C}{A}=c$, მივიღებთ

$$x = c.$$

ამგვარად, (11) განტოლება იძლევა Ox ღერძის პარალელურ წრფეს.

ახლა ავიღოთ $A=0$ და $C=0$, მაშინ (6) განტოლება მოგვცემს

$$By = 0,$$

ანუ

$$y = 0$$

ე. ი. წრფე ემთხვევა Ox ღერძს.

თუ $B=0$ და $C=0$, მაშინ (6) განტოლება მოგვცემს

$$Ax = 0,$$

ანუ

$$x = 0.$$

ე. ი. წრფე ემთხვევა Oy ღერძს.

თუ $A=0$ და $B=0$, მაშინ (6) განტოლებიდან მივიღებთ $C=0$. ამ შემთხვევაში გვექნება იგივეობა $O \cdot x + O \cdot y = 0$ და, ცხადია, (6) განტოლება არ გამოსახავს განსაზღვრულ წრფეს, რადგანაც იგი კმაყოფილება სიბრტყის ნებისმიერი წერტილისათვის.

4. წრფის განტოლება მონაკვეთებში. ავიღოთ წრფის ზოგადი განტოლება

$$Ax + By + C = 0, \quad (6)$$

სადაც არც ერთი კოეფიციენტი ნულის ტოლი არაა. გადავიტანოთ თავისუფალი წევრი განტოლების მარჯვენა ნაწილში,

$$Ax + By = -C.$$

მიღებული განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ $-C$ -ზე, გვექნება

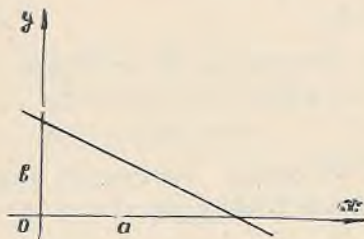
$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$-\frac{A}{C} = \frac{1}{a}, \quad -\frac{B}{C} = \frac{1}{b},$$

მაშინ უკანასკნელი განტოლება მოგვცემს

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (12)$$



ნახ. 15

მიღებულ (12) განტოლებაში a და b სიდიდეს აქვს მარტივი გეომეტრიული აზრი.

მართლაც, ადვილი შესამჩნევია, რომ წრფე (12) გაივლის $(a, 0)$ და $(0, b)$ წერტილებზე. ეს კი გვიჩვენებს: a წარმოადგენს იმ მონაკვეთის სიდიდეს, რომელსაც წრფე (12) ჩამოაჭრის Ox ღერძს, ხოლო b წარმოადგენს იმ მონაკვეთის სიდიდეს, რომელსაც წრფე (12) ჩამოაჭრის Oy ღერძს (ნახ. 15).

a და b სიდიდის გეომეტრიული მნიშვნელობის გამო (12) განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება მონაკვეთებში.

მაგალითად, მოცემულია წრფის განტოლება ზოგადი სახით

$$2x - 3y - 6 = 0$$

მივიყვანოთ განტოლებაზე მონაკვეთებში.

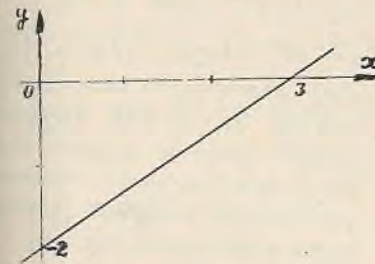
განტოლების მარჯვენა ნაწილში თავისუფალი წევრის გადატანით და მასზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1.$$

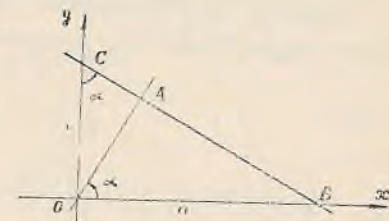
ამ განტოლებით გამოსახული წრფის ასაგებად საკმარისია, Oy ღერძზე მოვზომოთ -2 ერთეულის ტოლი მონაკვეთი, Ox ღერძზე 3 ერთეულის ტოლი მონაკვეთი და მიღებულ წერტილებზე გავატაროთ წრფე (ნახ. 16).

5. წრფის ნორმალური განტოლება.

ვთქვათ, წრფე მოცემულია (12) განტოლებით (ნახ. 17).



ნახ. 16



ნახ. 17

კოორდინატთა სათავიდან წრფეზე დავეშვათ OA პერპენდიკულარი. ამ მონაკვეთის სიგრძე აღვნიშნოთ p ასოთი,

$$|OA| = p,$$

ხოლო OA მონაკვეთის მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხე α ასოთი,

$$\angle BOA = \alpha.$$

OBA სამკუთხედიდან ცხადია,

$$a = \frac{p}{\cos \alpha}.$$

ანუ, OAC სამკუთხედიდან გვექნება

$$b = \frac{p}{\sin \alpha}.$$

შევიტანოთ მიღებული a -სა და b -ს მნიშვნელობა (12) განტოლებაში:

$$\frac{\frac{x}{p}}{\cos \alpha} + \frac{\frac{y}{p}}{\sin \alpha} = 1,$$

ანუ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (13)$$

მიღებულ განტოლებას ეწოდება წრფის ნორმალური სახის განტოლება.

მაგალითად,

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2 = 0 \quad (14)$$

წარმოადგენს წრფის განტოლებას ნორმალური სახით:

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p = -2.$$

აღვილად დავრწმუნდებით, რომ $\alpha = 120^\circ$. ამიტომ, ცხადია, (14) წრფის ასაგებად საკმარისია, გავატაროთ წრფე კოორდინატთა სათავეზე ისე, რომ მან Ox ღერძთან შეადგინოს

$\alpha = 120^\circ$ კუთხე და გავატაროთ ამ წრფის პერპენდიკულარი, რომელიც კოორდინატთა სათავედან დაშორებულია 2 ერთეულით (ნახ. 18).

6. წრფის ზოგადი განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე. ავიღოთ წრფის განტოლება ზოგადი სახით

$$Ax + By + C = 0. \quad (16)$$

გავამრავლოთ ამ განტოლების ორივე ნაწილი λ მუდმივ მამრავლზე:

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0 \quad (15)$$

შევარჩიოთ λ ისე, რომ მიღებულმა განტოლებამ მოგვცეს განტოლება ნორმალური სახით. ამისათვის საჭიროა (15) განტოლებაში გვქონდეს:

$$\lambda A = \cos \alpha, \quad \lambda B = \sin \alpha, \quad \lambda C = -p. \quad (16)$$

(16) განტოლებებიდან ადვილად განვსაზღვრავთ λ -ს და p -ს.

მართლაც, (16)-დან პირველი და მეორე ტოლობის კვადრატში ახარისხებით და შეკრებით მივიღებთ

$$\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha,$$

ანუ

$$\lambda^2 (A^2 + B^2) = 1,$$

საიდანაც

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (17)$$

λ -ს ორი მნიშვნელობიდან ის მნიშვნელობა ავიღოთ, რომელიც (16) ტოლობათა მესამე ტოლობას დააკმაყოფილებს. ამისათვის საკმარისია λ ავიღოთ C -ს საწინააღმდეგო ნიშნით.

როგორც (16)-ს მესამე ტოლობა გვიჩვენებს, თუ $C=0$, მაშინ λ -ს ნიშანი ნებისმიერად შეგვიძლია ავიღოთ, $\lambda C = -p$.

λ -ს ეწოდება მანორმალური მამრაველი.

შევიტანოთ λ -ს მნიშვნელობა (17)-დან (6) განტოლებაში, გვექნება

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \quad (18)$$

ამგვარად, წრფის ზოგადი განტოლება რომ დავიყვანოთ ნორმალურ სახეზე, საკმარისია, ზოგადი სახის განტოლება გავამრავლოთ λ -მამრავლზე.

მაგალითად, წრფის ზოგადი სახის განტოლება

$$2x - 3y + 7 = 0 \quad (19)$$

დავიყვანოთ ნორმალურ სახეზე.

მანორმალური მამრავლი განვსაზღვროთ (17) ფორმულიდან:

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\pm \sqrt{13}}.$$

რადგანაც C დადებითია, λ ავიღოთ უარყოფითი ნიშნით,

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

მიღებულ სიდიდეზე (19) განტოლების გამრავლებით მივიღებთ

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{7}{\sqrt{13}} = 0,$$

მივიღეთ ნორმალური სახის განტოლება.

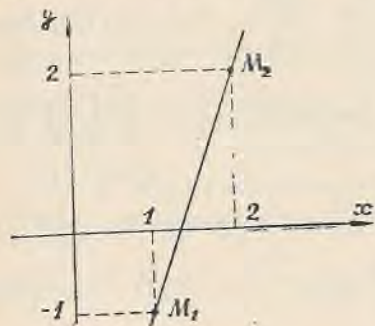
7. განტოლებით წრფის აგება. წრფე რომ ავაგოთ მოცემული განტოლებით, საკმარისია, კოორდინატთა სიბრტყეზე ვიპოვოთ წრფის ორი სებისმიერი წერტილი. წრფის წერტილის განსაზღვრისათვის უნდა დავასახელოთ x -ის ან y -ის მნიშვნელობა და ვიპოვოთ წერტილის მეორე კოორდინატი წრფის მოცემული განტოლებიდან.

ნახ. 18

მაგალითად. ავაგოთ წრფე, რომლის განტოლებაცაა

$$3x - y - 4 = 0. \quad (20)$$

მივცეთ x -ს მნიშვნელობა, მაგალითად, $x = 1$, მაშინ y განვსაზღვროთ განტოლებიდან



ნახ. 19

$$3 - y - 4 = 0.$$

მივიღებთ

$$y = -1.$$

ამგვარად, ვიპოვეთ წერტილი $(1, -1)$, რომელიც მდებარეობს (20) წრფეზე. ანალოგიურად, $x = 2$ -ისათვის მივიღებთ $y = 2$.

ამგვარად, განვსაზღვრეთ წერტილები $M(1; -1)$, $M_2(2; 2)$, რომლებიც მდებარეობენ (20) წრფეზე.

ზე. ამ წერტილებზე გამავალი წრფე გამოსახულია მე-19 ნახაზზე. ს ა ე ა რ ჯ ი შ ო 9.

1. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომლის ცენტრი $C(3, 4)$ წერტილშია, ხოლო $r = 5$. სად მდებარეობენ $A(6, 4)$, $B(-3, 4)$, $C(6, 8)$, $D(-2; -5)$ წერტილები ამ წრფის მიმართ.

2. დაწერეთ იმ $M(x, y)$ წერტილის ტრანქტორიის განტოლება, თუ წერტილი ისე მოძრაობს, რომ $A(0; 9)$ წერტილიდან 3-ჯერ უფრო შორსაა, ვიდრე $B(0; 1)$ წერტილიდან.

3. დაწერეთ საკოორდინატო კუთხეების განტოლებანი.

4. დაწერეთ იმ წერტილთა სიმრავლის განტოლება, რომლებიც თანაბარი მანძილით არიან დაშორებული $M(3; 3)$ წერტილიდან და y ღერძიდან.

5. შეადგინეთ იმ წერტილთა სიმრავლის განტოლება, რომლებიც x ღერძიდან 2-ჯერ უფრო შორს არიან, ვიდრე y ღერძიდან.

6. მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში წერტილები განტოლებებით. რას გამოსახავს

$$1) \rho = a; \quad 2) \theta = \frac{\pi}{4}; \quad 3) \rho = 4 \cos \theta.$$

7. მოცემულია სამკუთხედი წვეროვებით $A(0, 0)$, $B(\theta_1, \rho_1)$, $C(\theta_2, \rho_2)$. გამოთვალეთ ABC სამკუთხედის ფართობი.

8. ააგეთ წირი $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. $[a < b$, დახაზეთ ორი წრე-წირი a და b რადიუსებით. ააგეთ წერტილები $(a \cos t, b \sin t)$, t ცვლიდა].

9. განსაზღვრეთ $\rho = \frac{\pi}{\theta}$ განტოლებით მოცემული წირის სახე.

10. ააგეთ წირი $\rho = a \cos 2\theta$. [ოთხფურცელა. a სიგრძის მონაკვეთი თავისი ბოლოებით მოძრაობს კოორდინატა ღერძებზე. კოორდინატა სათაეიდან ამ მონაკვეთზე დავუშვებთ პერპენდიკულარს. ამ პერპენდიკულარის მონაკვეთთან თანაკვეთის წერტილი აღწერს აღებულ წირს].

§ 3. ძირითადი ამოცანები წრფეზე

1. ორ წრფეს შორის კუთხე. ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფე განტოლებებით

$$y = k_1 x + b_1, \quad (1)$$

$$y = k_2 x + b_2. \quad (2)$$

(1) და (2) წრფეს შორის კუთხე ეწოდება იმ θ კუთხეს, რომლითაც უნდა მოვებრუნოთ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით (1) წრფე, რომ იგი დაემთხვეს (2) წრფეს (ნახ. 20),

$$\theta = (1), (2).$$

წრფის საკუთხო კოეფიციენტის განსაზღვრის თანახმად,

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების ძალით გვექნება

$$\alpha_1 + \theta = \alpha_2,$$

საიდანაც

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

აქედან, ცხადია,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

თუ ამ გამოსახულებაში შევცვლით $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$ და $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (3)$$

ამ ფორმულით გამოითვლება წრფეთა შორის კუთხე, როდესაც წრფეების განტოლებანი მოცემულია საკუთხო კოეფიციენტებით.

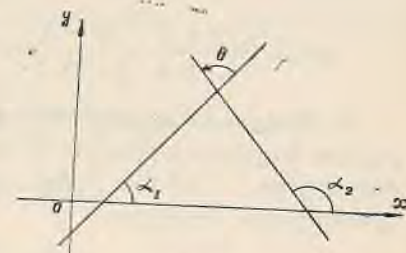
თუ წრფეები მოცემულია ზოგადი განტოლებებით

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad (4)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \quad (5)$$

მაშინ წინასწარ განვსაზღვროთ საკუთხო კოეფიციენტები:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2} \quad (6)$$



ნახ. 20

და შევიტანოთ (3) ფორმულაში, გვექნება

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}},$$

საიდანაც, გამარტივებით შემდეგ მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \quad (7)$$

მაგალითად, განვსაზღვროთ კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:

$$6x - 2y + 3 = 0, \quad (8)$$

$$4x + 2y + 5 = 0. \quad (9)$$

ვისარგებლოთ (7) ფორმულით. მივიღებთ

$$\operatorname{tg} (8), (9) = \frac{6 \cdot 2 - 4(-2)}{6 \cdot 4 + (-2) \cdot 2} = 1, \quad \text{საიდანაც } (8), (9) = \frac{\pi}{4}.$$

2. წრფეთა პარალელურობისა და პერპენდიკულარულობის პირობები. ვთქვათ, მოცემულია წრფეები (1) და (2) განტოლებით. თუ წრფეები პარალელურია, მაშინ მათ შორის კუთხე ნულის ტოლია. ამის გამო (3) ფორმულიდან მივიღებთ

$$k_2 - k_1 = 0,$$

საიდანაც

$$k_2 = k_1. \quad (10)$$

ამგვარად, წრფეთა პარალელურობის პირობაა საკუთხო კოეფიციენტების ტოლობა.

თუ წრფეების განტოლებანი ზოგადი სახითაა მოცემული, მაშინ პარალელულობის პირობის მისაღებად (6) ფორმულებით უნდა ვისარგებლოთ, გვექნება:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}, \quad \text{ანუ } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (11)$$

ახლა გამოვიყენოთ წრფეთა პერპენდიკულარულობის პირობა.

თუ (1) და (2) წრფე ურთიერთპერპენდიკულარულია, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, მაშინ

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2},$$

საიდანაც

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1},$$

ანუ

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (12)$$

უკანასკნელი კარგავს აზრს, როდესაც $k_1 = 0$, მაშინ k_2 არ არსებობს. ამ შემთხვევაში (2) წრფე არ შეიძლება მოცემულ იქნეს კუთხური კოეფიციენტით.

(12) პირობა ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$k_1 k_2 = -1. \quad (13)$$

ამგვარად, ორი წრფის ურთიერთპერპენდიკულარულობისათვის, თუ ერთ-ერთი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათი საკუთხო კოეფიციენტების ნამრაველი 1-ის ტოლი იყოს.

თუ წრფეები ზოგადი სახის განტოლებებითაა მოცემული, მაშინ (6) ფორმულების დახმარებით მივიღებთ

$$\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1,$$

ანუ

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (14)$$

მაგალითად, წრფეები

$$2x - 3y + 9 = 0,$$

$$6x - 9y + 1 = 0,$$

პარალელურია, რადგანაც

$$\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9}.$$

ხოლო წრფეები

$$2x - 3y + 9 = 0,$$

$$9x + 6y + 1 = 0$$

ურთიერთპერპენდიკულარულია, რადგანაც

$$2 \cdot 9 + (-3) \cdot 6 = 0.$$

3. მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. ვთქვათ, მოცემულია წერტილი $M, (x_1, y_1)$, რომელზედაც მოცემული მიმართულების წრფე გაივლის. ამ წრფის კუთხური კოეფიციენტი იყოს $k = \operatorname{tg} \alpha$.

მოცემულ წერტილზე გამავალი მოცემული მიმართულების წრფის განტოლება ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$y = kx + b. \quad (15)$$

ამ განტოლებაში უცნობია b . იგი განვსაზღვროთ იმ პირობიდან, რომ (15) წრფე უნდა გაიაროს M წერტილზე. ეს ნიშნავს, რომ მიმდინარე კოორდინატების ნაცვლად თუ ჩავსვამთ x_1 -სა და y_1 -ს, (15) განტოლება დაკმაყოფილდება:

$$y_1 = kx_1 + b.$$

ამ ტოლობიდან განვსაზღვროთ b და შევიტანოთ (15)-ში, მივიღებთ

$$y = kx + y_1 - kx_1,$$

ანუ

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (16)$$

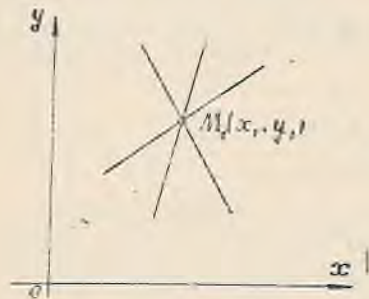
ამგვარად, (16) განტოლება იძლევა M წერტილზე გამავალ მოცემული მიმართულების წრფეს. თუ k განსაზღვრული არაა, მაშინ k -ს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა. ამის გამო გვექნება არა ერთი წრფე, არამედ წრფეთა უსასრულო რაოდენობა. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (16) განტოლება არის მოცემულ M წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება (ნახ. 21). (16) განტოლებიდან

არ მიიღება მოცემულ M წერტილზე გამავალი y ღერძის პარალელური წრფის განტოლება. იმ წერტილს, რომელზედაც გადის წრფეთა კონა, ეწოდება კონის ცენტრი.

ზოგჯერ მოცემულია არა კონის ცენტრი, არამედ ამ კონის ორი წრფე. ვთქვათ ამ წრფეთა განტოლებანია,

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (17)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (18)$$



ნახ. 21

ამ შემთხვევაში შეგვიძლია, ვიპოვოთ წრფეთა კონის ცენტრი მოცემულ განტოლებათა ამოხსნით და შემდეგ შევადგინოთ წრფეთა კონის განტოლება, მაგრამ შეგვიძლია, წრფეთა კონის ცენტრის პოვნის გარეშე შევადგინოთ წრფეთა კონის განტოლება.

მართლაც, შევადგინოთ განტოლება

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (19)$$

სადაც λ ნებისმიერი მუდმივია.

(19) განტოლება წრფის განტოლებაა, რადგანაც იგი წრფეა. ამასთან იგი იმ წერტილში კმაყოფილდება, სადაც ერთდროულად გამოსახულებანი

$$A_1x + B_1y + C_1, A_2x + B_2y + C_2$$

ნულის ტოლი ხდება. ე. ი. წრფე (19) გადის (17) და (18) წრფეების გადაკვეთის წერტილზე.

მაშასადამე, (19) განტოლება წრფეთა კონის განტოლებაა, რადგანაც λ ნებისმიერია. ამ კონის ცენტრია (17) და (18) წრფეების გადაკვეთის წერტილი.

თუ λ -ს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, (19) წრფეთა კონიდან მივიღებთ სხვადასხვა წრფეს. მაგრამ სიბრტყის ნებისმიერ წერტილზე გაივლის თუ არა (19) წრფეთა კონიდან წრფე? ე. ი., შეიძლება თუ არა λ -ს ისე შერჩევა, რომ (19) წრფეებიდან წრფემ გაიაროს სიბრტყის ნებისმიერ წერტილზე?

ავილოთ წრფეთა კონის ცენტრისაგან განსხვავებული $M(a, b)$ წერტილი. (19) წრფეებიდან რომ წრფემ გაიაროს $M(a, b)$ წერტილზე, უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$A_1a + B_1b + C_1 + \lambda(A_2a + B_2b + C_2) = 0,$$

საიდანაც

$$\lambda = - \frac{A_1a + B_1b + C_1}{A_2a + B_2b + C_2}.$$

λ -ს ექნება გარკვეული მნიშვნელობა, თუ $A_2a + B_2b + C_2 \neq 0$; ე. ი., თუ M წერტილი არ მდებარეობს (18) წრფეზე.

ამგვარად, (19) განტოლება გამოსახავს კონის ყველა წრფეს, გარდა (18) წრფისა.

ცხადია, ნაცვლად (19) განტოლებისა, შეგვიძლია ავიღოთ შემდეგი განტოლება

$$A_2x + B_2y + C_2 + \lambda(A_1x + B_1y + C_1) = 0, \quad (20)$$

ეს განტოლება იძლევა (17) და (18) წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გამავალ ყველა წრფეს, გარდა (17) წრფისა.

წრფეთა კონის განტოლება ასეც შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1) + \nu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (21)$$

სადაც μ და ν ნებისმიერი მუდმივებია.

(21) წრფეთა კონიდან მიიღება (17) წრფე, თუ $\nu=0$, და მიიღება (18) წრფე, თუ $\mu=0$.

4. **ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.** ვთქვათ მოცემულია ორი წერტილი $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$. შევადგინოთ ამ ორ

წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. ამისათვის ჯერ დავწეროთ M_1 წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (22)$$

შევარჩიოთ k ისე, რომ (22) წრფემ გაიაროს M_2 წერტილზე. ე. ი. უნდა შესრულდეს პირობა

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

საიდანაც

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (22)-ში, გვექნება

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

ანუ

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (23)$$

მივიღეთ ორ $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.

მაგალითად, $M_1(3; 2)$ და $M_2(-5; -3)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება იქნება

$$\frac{y - 2}{-3 - 2} = \frac{x - 3}{-5 - 3}.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$5x - 8y + 1 = 0.$$

5. წერტილიდან წრფემდე მანძილი. გამოვთვალოთ მოცემული $M_0(x_0, y_0)$ წერტილიდან L წრფემდე მანძილი, თუ წრფის განტოლება მოცემულია ნორმალური სახით (ნახ. 22)

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (24)$$

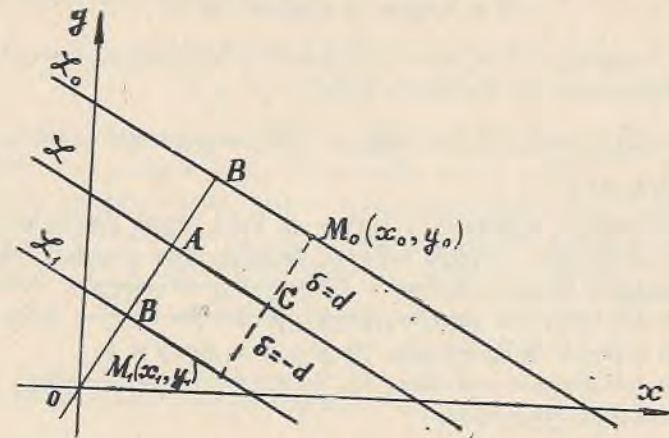
ნახაზზე

$$\overline{OA} \perp L, |\overline{OA}| = p.$$

M_0 წერტილიდან L წრფემდე მანძილი აღვნიშნოთ d ასოთი.

განვსაზღვროთ წრფიდან წერტილის გადახრა. მოცემული L წრფიდან M_0 წერტილის გადახრა ეწოდება M_0 წერტილიდან L წრფემდე მანძილს,

$\delta = d$, თუ M_0 წერტილი და კოორდინატა სათავე L წრფიდან სხვადასხვა მხარესაა, და მანძილს M_0 წერტილიდან L წრფემდე უარყოფითი ნიშნით, თუ



ნახ. 22

M_0 წერტილი L წრფიდან კოორდინატა სათავეს მხარესაა, $\delta = -d$. ცხადია, $\delta = 0$, თუ წერტილი მოცემულ წრფეზე მდებარეობს.

ამგვარად,

$$\delta = \pm d.$$

აქედან

$$d = |\delta|. \quad (25)$$

გამოვთვალოთ L წრფიდან M_0 წერტილის გადახრა.

M_0 წერტილზე გავატაროთ L წრფის პარალელური L_0 წრფე. L_0 წრფემდე კოორდინატა სათავედან მანძილი იქნება $|\overline{OB}|$, სადაც $\overline{OB} \perp L_0$ მაშინ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - |\overline{OB}| = 0,$$

L_0 წრფის განტოლება იქნება. რადგანაც L_0 წრფე გაივლის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე, გვექნება

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - |\overline{OB}| = 0,$$

საიდანაც

$$|\overline{OB}| = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha.$$

ნახაზიდან ცხადია:

$$\delta = |\overline{CM_0}| = |\overline{OB}| - |\overline{OA}| = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p.$$

ამგვარად, L წრფიდან M_0 წერტილის გადახრა გამოისახება ფორმულით:

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p.$$

თუ მოცემული წერტილი L წრფიდან კოორდინატთა სათავეს მხარესაა, მაგალითად, M_1 წერტილი, მაშინ

$$\delta = -|\overline{CM_1}| = -|\overline{AB_1}| = |\overline{OB_1}| - |\overline{OA}| = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p,$$

სადაც $M_1 B_1 \parallel L$.

გამოსახულება $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$ წარმოადგენს წრფის ნორმალური (24) განტოლების მარცხენა ნაწილის მნიშვნელობას, როდესაც მიმდინარე კოორდინატების ნაცვლად ჩასმულია წერტილის კოორდინატები. მაშასადამე, წრფიდან M_0 წერტილის გადახრა ტოლია წრფის ნორმალური განტოლების მარცხენა ნაწილის მნიშვნელობისა, როცა $x = x_0$ და $y = y_0$.

(25) განსაზღვრის თანახმად, M_0 წერტილიდან (24) წრფემდე მანძილი გამოისახება ტოლობით

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|. \quad (26)$$

თუ წრფის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით $Ax + By + C = 0$, მაშინ ამ განტოლების ნორმალურ განტოლებაზე დაყვანით გვექნება

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (27)$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (28)$$

მაგალითად, ვიპოვოთ მანძილი $M(5; -4)$ წერტილიდან

$$3x - 4y + 19 = 0 \quad (29)$$

წრფემდე.

ჯერ განვსაზღვროთ M წერტილიდან გადახრა (29) წრფემდე.

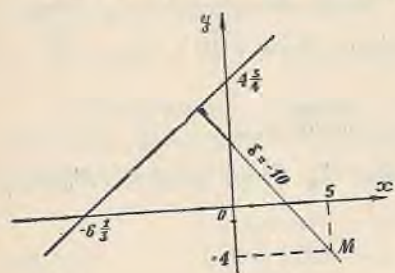
(27) ფორმულით გვექნება

$$\delta = \frac{3 \cdot 5 - 4(-4) + 19}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} = -10.$$

რადგანაც გადახრა (29) წრფემდე უარყოფითია, ამიტომ წერტილი და

წრფემდე მანძილი d იქნება (ნახ. 23).

$$d = |-10| = 10.$$



ნახ. 23

კოორდინატთა სათავე (29) წრფის ერთ მხარესაა. M წერტილიდან (29) წრფემდე მანძილი d იქნება (ნახ. 23).

6. ორი წრფის ურთიერთმდებარეობა. ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფე ზოგადი სახის განტოლებებით

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad (30)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \quad (31)$$

ვიპოვოთ ამ წრფეთა ურთიერთგადაკვეთის $M(x, y)$ წერტილი. რადგანაც წერტილი ერთდროულად მდებარეობს ორივე წრფეზე, ამიტომ M წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს ორივე განტოლებას. აქედან, ცხადია, (30) და (31) წრფეთა გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად საკმარისია შემდეგ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა;

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (32)$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მოგვცემს

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (33)$$

სადაც

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

თუ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

მაშინ (32) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ანუ (30) და (31) წრფეებს აქვთ ერთადერთი გადაკვეთის წერტილი.

თუ

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ხოლო

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ (32) განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არ აქვს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ წრფეებს საერთო წერტილი არ აქვთ, ე. ი. წრფეები პარალელურია.

თუ დეტერმინანტები $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$, მივიღებთ $\Delta_2 = 0$,

$$\left(\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \right) \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

ამ შემთხვევაში (32) განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, ე. ი. (30) და (31) ერთი და იმავე წრფის განტოლებაა, ანუ წრფეები (30) და (31) თანამთხვეულია.

მართლაც, Δ და Δ_1 დეტერმინანტების ნულთან ტოლობით მივიღებთ

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0, \quad B_1 C_2 - B_2 C_1 = 0,$$

ანუ

$$A_1 B_2 = A_2 B_1, \quad B_1 C_2 = B_2 C_1,$$

საიდანაც გვექნება

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (34)$$

ამრიგად, თუ (30) და (31) განტოლებების კოეფიციენტები სათანადოდ ურთიერთპროპორციულია, მაშინ ეს განტოლებანი ერთი და იმავე წრფის განტოლებანია ანუ წრფეები (30) და (31) თანამთხვეულია.

თუ შევაჯამებთ ზემოთჩატარებულ მსჯელობებს, გვექნება: თუ წრფეთა განტოლებების პირველი და მეორე კოეფიციენტები პროპორციული არაა, მაშინ წრფეებს აქვთ ერთი საერთო წერტილი. თუ განტოლებების პირველი და მეორე კოეფიციენტები პროპორციულია, ხოლო მესამე კოეფიციენტები პროპორციული არაა, მაშინ წრფეები პარალელურია. თუ განტოლებათა სამივე კოეფიციენტი პროპორციულია, მაშინ წრფეები თანამთხვეულია.

მაგალითად, წრფეები

$$\begin{aligned} x - y + 1 &= 0, \\ x + y - 3 &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

ერთადერთ წერტილში იკვეთება, რადგანაც

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2 \neq 0.$$

გამოვთვალოთ დეტერმინანტები

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

კრამერის ფორმულებით მივიღებთ

$$x = \frac{2}{2} = 1, \quad y = \frac{4}{2} = 2.$$

მაშასადამე, (35) წრფეების გადაკვეთის წერტილია $M(1; 2)$.

ახლა ავიღოთ წრფეები

$$2x - 3y + 1 = 0,$$

$$4x - 6y - 3 = 0.$$

ეს წრფეები პარალელურია, რადგანაც

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{1}{-3}.$$

წრფეები

$$x - y + 1 = 0,$$

$$2x - 2y + 2 = 0$$

თანამთხვეულია, რადგანაც

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

7. ამოცანები. ამოცანა 1. მოცემულია სამკუთხედი, რომლის წვეროებია: $A(4; 4)$, $B(5; -4)$, $C(0; -2)$. შევადგინოთ A წერტილიდან გავლებული სიმაღლის განტოლება.

ამოხსნა: ჯერ შევადგინოთ BC გვერდის განტოლება:

$$\frac{y + 4}{-2 + 4} = \frac{x - 5}{0 - 5}.$$

გამარტივებით მივიღებთ

$$y = -\frac{2}{5}x - 2.$$

ახლა შევადგინოთ A წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომელიც BC გვერდის პერპენდიკულარულია:

$$y - 4 = \frac{5}{2}(x - 4).$$

გამარტივებით მივიღებთ

$$y = \frac{5}{2}x - 6.$$

მივიღეთ ABC სამკუთხედის A წვეროდან დაშვებული სიმაღლის განტოლება.

ამოცანა 2. მოცემულია სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. ვიპოვოთ ამ სამკუთხედის ფართობი S .

ეს ამოცანა ზემოთაც (თავი VII, §—2, n 5.) ამოვხსენით. ახლა ეს ამოცანა ამოვხსნათ წერტილიდან წრფემდე მანძილის ფორმულის დახმარებით.

ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია (ნახ. 24).

$$S = \frac{BC \cdot AD}{2} \quad (36)$$

ორ წერტილის შორის მანძილის განსაზღვრით

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (37)$$

ვიპოვოთ AD . ამისათვის შევადგინოთ B და C წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება

$$\frac{y - y_2}{y_3 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2},$$

საიდანაც გვექნება

$$(y_3 - y_2)x + (x_2 - x_3)y + (y_2 x_3 - x_2 y_3) = 0.$$

A წერტილიდან BC გვერდამდე მანძილი გამოისახება ფორმულით

$$AD = \frac{|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + (y_2 x_3 - x_2 y_3)|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \quad (38)$$

შევიტანოთ (37) და (38) მნიშვნელობა (36) ფორმულაში, მივიღებთ

$$S = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

ე. ი.

$$S = \pm \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

აღვილი მისახვედრია, რომ უკანასკნელი ფორმულა ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (39)$$

თუ A, B, C წერტილები განლაგებულია მარცხენა შემოვლით, მაშინ დეტერმინანტი დადებით რიცხვს მოგვცემს და (39) გამოსახულებაში უნდა ავიღოთ დადებითი ნიშანი. თუ A, B, C წერტილები განლაგებულია

ლია მარჯვენა შემოვლით, მაშინ დეტერმინანტი უარყოფითია და (39)-ში უნდა ავიღოთ უარყოფითი ნიშანი, რომ ფართობი გამოვიდეს დადებითი.

(39) ფორმულიდან აღვილი მისაღებია სამი წერტილის ერთ წრფეზე მდებარეობის პირობა.

მართლაც, სამი წერტილის $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ ერთ წრფეზე მდებარეობისათვის აუცილებელია და საკმარისი $\Delta M_1 M_2 M_3$ ფართობი ნულის ტოლი იყოს. (39) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (40)$$

მიღებული ტოლობა წარმოადგენს სამი წერტილის ერთ წრფეზე მდებარეობის პირობას.

მაგალითად, წერტილები $M_1(3; 0)$, $M_2(0; 2)$, $M_3(6; -2)$ ერთ წრფეზე მდებარეობს, რადგანაც

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

ამოცანა 3. მოცემულ $M_1(3; 6)$ წერტილზე გავატაროთ წრფე, რომელიც $M_2(-4; 2)$ და $M_3(1; -5)$ წერტილიდან ტოლი მანძილითაა დაშორებული.

ამოხსნა. დავწეროთ M_1 წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება

$$y - 6 = k(x - 3). \quad (41)$$

შევარჩიოთ k ისე, რომ (41) წრფე ტოლად იყოს დაშორებული M_2 და M_3 წერტილიდან. ამისათვის (41) განტოლება მივიყვანოთ ნორმალურ სახეზე:

$$\frac{kx - y + (6 - 3k)}{\pm \sqrt{k^2 + 1}} = 0. \quad (42)$$

მოცემული წერტილებიდან (42) წრფემდე მანძილები იქნება

$$d_1 = \frac{|k(-4) - 2 + (6 - 3k)|}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad d_2 = \frac{|k \cdot 1 - 1 \cdot (-5) + (6 - 3k)|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

ამოცანის პირობის თანახმად,

$$\frac{-4k - 2 + 6 - 3k}{\sqrt{k^2 + 1}} = \pm \frac{k + 5 + 6 - 3k}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

k -ს მიმართ მივიღეთ ორი განტოლება:

$$-7k + 4 = +(-2k + 11), \quad -7k + 4 = -(-2k + 11)$$

ამ განტოლებათა ამოხსნით მივიღებთ:

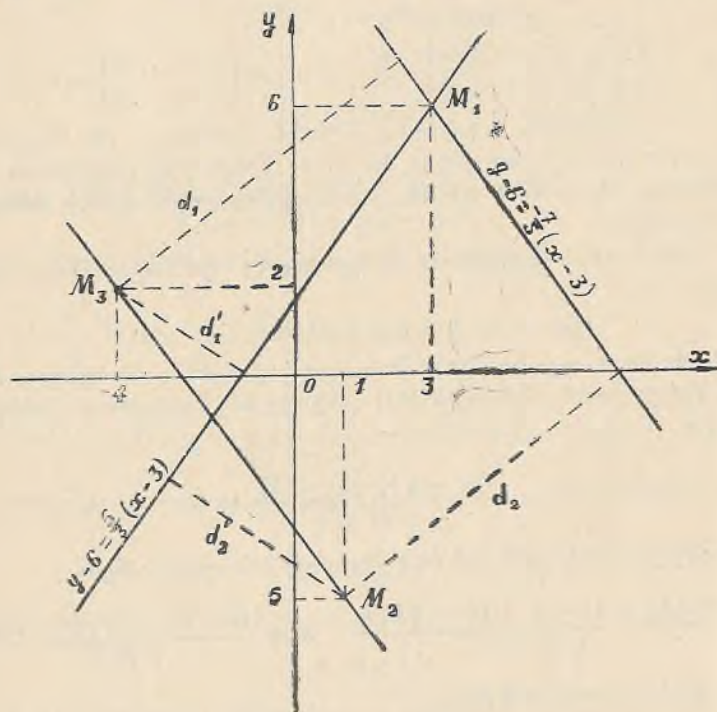
$$k_1 = -\frac{7}{5}, \quad k_2 = \frac{5}{3}.$$

საძიებელი წრფეების განტოლებანია

$$y - 6 = -\frac{7}{5}(x - 3), \quad (43)$$

$$y - 6 = \frac{5}{3}(x - 3). \quad (44)$$

აქედან (43) წრფე M_2 და M_3 წერტილზე გამავალი წრფის პარალელურია (ნახ. 25).



ნახ. 25

ამოცანა 4. შევადგინოთ წრფეებს შორის კუთხის ბისექტრისის განტოლება.

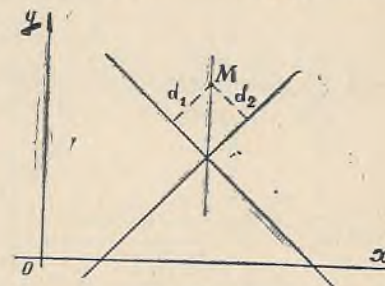
ვთქვათ, მოცემულია წრფეების განტოლებანი ნორმალური სახით

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0,$$

$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0.$$

განვიხილოთ ამ წრფეებს შორის ერთ-ერთი კუთხის ბისექტრისა (ნახ. 26). ბისექტრისაზე მდებარე რომელიმე წერტილი $M(x, y)$ -ით აღენიშნოს. M წერტილი თანაბრადა გადახრილი ორივე წრფიდან, ამიტომ გვექნება

$$d_1 = \pm d_2,$$



ნახ. 26

ანუ

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = \pm (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2),$$

სადაც პლუს ნიშანი ეთანადება წრფეთა შორის იმ კუთხის ბისექტრისას, რომელშიაც კოორდინატა სათავეა მოთავსებული, ხოლო მინუს ნიშანი წინააღმდეგ შემთხვევაში.

თუ წრფეების განტოლებანი მოცემულია ზოგადი სახით

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

მაშინ წინასწარ განტოლებანი მივიყვანოთ ნორმალურ სახეზე და შემდეგ შევადგინოთ ამ წრფეთა შორის კუთხეების ბისექტრისების განტოლებანი:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

მაგალითად, წრფეების განტოლებანია

$$2x + 3y - 6 = 0,$$

$$-2x + 3y - 6 = 0.$$

ამ წრფეებს შორის კუთხეების ბისექტრისების განტოლებანი იქნება

$$2x + 3y - 6 = +(-2x + 3y - 6),$$

$$2x + 3y - 6 = -(-2x + 3y - 6).$$

ამართლებების შემდეგ მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$x = 0, \quad y = 2.$$

ამოცანა 5. გამოვიყვანოთ სამი წრფის

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad (45)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \quad (46)$$

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0, \quad (47)$$

ერთ წერტილში გადაკვეთის პირობა.

ჯერ ვიპოვოთ (46) და (47) წრფის გადაკვეთის წერტილი:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

სადაც

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -C_2 & B_2 \\ -C_3 & B_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_2 & -C_2 \\ A_3 & -C_3 \end{vmatrix}.$$

მიღებული (x, y) წერტილი უნდა აკმაყოფილებდეს (45) განტოლებას,

$$A_1 \frac{\begin{vmatrix} -C_2 & B_2 \\ -C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} + B_1 \frac{\begin{vmatrix} A_2 & -C_2 \\ A_3 & -C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} + C_1 = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$A_1 \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (48)$$

ამგვარად, მიღებული დეტერმინანტის ნულთან ტოლობა წარმოადგენს სამი წრფის ერთ წერტილში გადაკვეთის პირობას.

§ 4. მარტივი ეკონომიკური ამოცანები

1. ტვირთის გადატანის ხარჯები. განვიხილოთ შემდეგი

ამოცანა: ტვირთის გადატანა მოცემული ქალაქიდან 100 კმ-ით დაშორებულ პუნქტში ღირს 25 მანეთი, ხოლო 300 კმ-ით დაშორებულ პუნქტში ღირს 45 მანეთი. რა ეღირება იმავე ტვირთის გადატანა რაიმე x მანძილზე მოცემული ქალაქიდან თუ მხედველობაში არ მივიღებთ გზის სახეს (აღმართი, დაღმართი, მიხვეულ-მოხვეული გზა ერთნაირად ითვლება).

რადგანაც გზის სახე მხედველობაში არ მიიღება, ტვირთის გადატანის ხარჯი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მანძილის წრფივი ფუნქცია. თუ მანძილს x -ით აღვნიშნავთ (ასეულ კმ-ში), ხოლო გადატანის ხარჯებს y -ით (მანეთებში), გვექნება, რომ უნდა შევადგინოთ წრფივი ფუნქცია

$$y = kx + b, \quad (1)$$

სადაც k არის პროპორციულობის კოეფიციენტი (მან/100 კმ-ზე — მძღოლის ხელფასი, საწვავის ღირებულება და სხვ.). b — მანძილზე დამოუკიდებელი ხარჯები — დატვირთვა, გადმოტვირთვა, ტვირთის მიღების გაფორმება და სხვ.

ამგვარად, უნდა შევადგინოთ (1) წრფის განტოლება. ზირობის თანახმად (1) გაივლის $(1; 25)$, $(3; 45)$ წერტილებზე. ამის გამო წრფის საძიებელი განტოლება იქნება (ნახ. 27)

$$\frac{y - 25}{45 - 25} = \frac{x - 1}{3 - 1}.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$y = 10x + 15. \quad (2)$$

მიღებული ფუნქცია იძლევა ტვირთის გადატანის ხარჯებს x მანძილზე. მაგალითად, 250 კმ-ზე ტვირთის გადატანის ხარჯები იქნება

$$10 \cdot 2,50 + 15 = 25 + 15 = 40 \text{ (მანეთი)}$$

2. ტვირთის გადატანის ხელსაყრელი საშუალებების არჩევა. ვთქვათ, ტვირთის გადატანის ერთი საშუალებით ხარჯები გამოისახება (2) ფორმულით, ხოლო მეორე საშუალებით შემდეგი ფორმულით

$$y = 6x + 25. \quad (3)$$

რომელი საშუალებით უფრო ხელსაყრელია ტვირთის გადატანა?

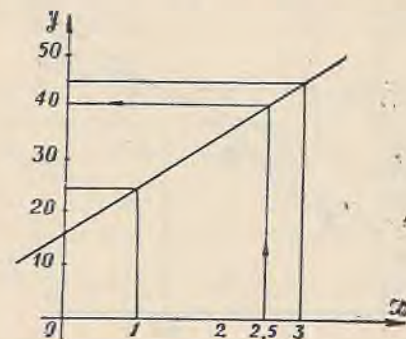
ამ ამოცანის ამონახსნი მიიღება, თუ ამოვხსნით შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$\left. \begin{aligned} y &= 10x + 15, \\ y &= 6x + 25. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ი. ი. უნდა ვიპოვოთ (2) და (3) წრფეების გადაკვეთის წერტილი.

(4) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ადვილად მიიღება შემდეგი განტოლებიდან:

$$10x + 15 = 6x + 25,$$



ნახ. 27

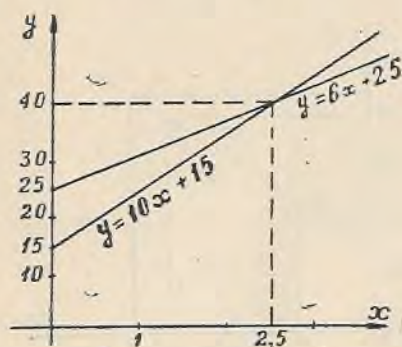
საიდანაც

$$x = 2, 5,$$

ხოლო

$$y = 40$$

(ნახ. 28). ადვილი შესამჩნევია, რომ პირველი საშუალებით ტვირტის გადაზიდვა ხელსაყრელია მოცემული ქალაქიდან 250 კმ-მდე, ხოლო მეორე საშუალებით მოცემული ქალაქიდან 250 კმ-ის შემდეგ.



ნახ. 28

მოცემული ქალაქიდან 250 კმ მანძილზე ტვირტის გადატანა კი ერთი და იგივე ღირებულებისაა.

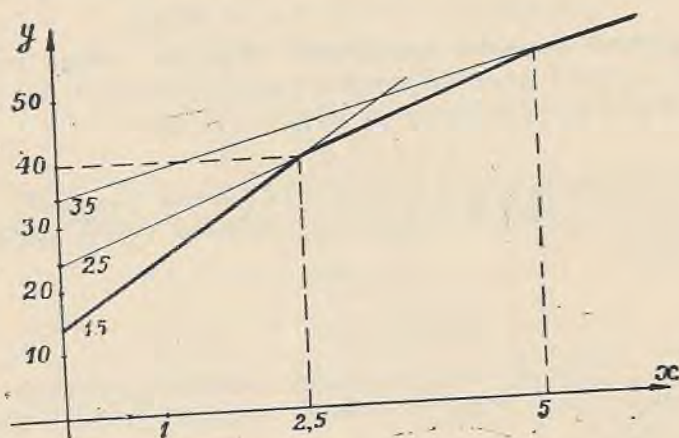
სრულიად ანალოგიურად აირჩევა ტვირტის გადატანის ხელსაყრელი საშუალება, როცა გადატანის საშუალებათა რიცხვი 2-ზე მეტია. მაგალითად, ტვირტის გადატანის საშუალებათა რიცხვია სამი:

$$y = 10x + 15,$$

$$y = 6x + 25,$$

$$y = 4x + 35.$$

(ნახ. 29). თუ განტოლებებს წყვილ-წყვილად ამოვხსნით, მივიღებთ წერტილებს (2,5 : 40), (5;55), რაც გვიჩვენებს, რომ პირველი საშუალებით



ნახ. 29

ტვირტის გადატანა ხელსაყრელია მოცემული ქალაქიდან 250 კმ-მდე, მეორე საშუალებით ხელსაყრელია 250 კმ-დან 500 კმ-მდე, ხოლო მესამე საშუალებით — 500 კმ-ის შემდეგ.

ს ა გ ა რ ჯ ი შ ი 10.

1. მოცემულია სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A (-14; 6)$, $B (-2; 1)$, $C (1; 5)$. მონახეთ გვერდების სიგრძეები, სამკუთხედის ფართობი; შეადგინეთ გვერდების განტოლებანი, A წერტილზე გატარებული სიმაღლის განტოლება, AB გვერდის მედიანის განტოლება, C კუთხის ბისექტრისის განტოლება; განსაზღვრეთ B კუთხის სიდიდე, შეადგინეთ სამკუთხედის შიგაწერტილთა სიმრავლისათვის უტოლობანი. ააგეთ ნახაზი.

2. მოცემულია პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლებანი $x - y - 1 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$ და დიაგონალთა გადაკვეთის წერტილი $p (2; -2)$. შეადგინეთ დანარჩენი გვერდების განტოლებანი. ააგეთ ნახაზი.

3. $\overline{AB}$ მონაკვეთს, $A (5; 0)$, $B (1; 4)$, ჰკვეთს $x - 2y + 3 = 0$ წრფე. მონახეთ წრფით მიღებული $\overline{AB}$ მონაკვეთის ნაწილების სიგრძეები. ააგეთ ნახაზი.

4. მოცემულია ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის განტოლება $3x - y + 7 = 0$ და მართკუთხის წვერო $C (3; -2)$, შეადგინეთ სამკუთხედის კათეტების განტოლებანი. ააგეთ ნახაზი.

5. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც $A (1; -2)$ წერტილზე გაივლის და ამ წრფის კოორდინატთა ღერძებს შორის მონაკვეთი A წერტილში შუაზე იყოფა. ააგეთ ნახაზი.

6. მოცემულია სამკუთხედის ორი გვერდის განტოლებანი $5x - 2y - 5 = 0$, $3x - 2y - 7 = 0$ და მესამე გვერდის შუაწერტილი $M (-1; 1)$. შეადგინეთ მესამე გვერდის განტოლება. ააგეთ ნახაზი.

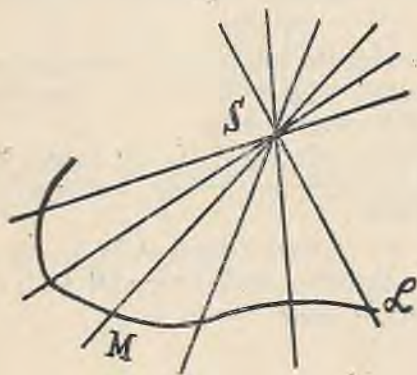
მეორე რიგის წირები. ძირითადი თვისებები

§ 1. კონუსური კვეთები

საშუალო სკოლის გეომეტრიის კურსიდან ცნობილია კონუსური ზედაპირი. კონუსური ზედაპირი ანუ კონუსი ეწოდება ისეთ ზედაპირს, რომელზედაც არსებობს S წერტილი შემდეგი თვისებით: ზედაპირის S წერტილისაგან განსხვავებული ყოველ M წერტილთან ერთად SM წრფე ეკუთვნის ამ ზედაპირს. S წერტილს ეწოდება

კონუსის წვერო, ხოლო S წერტილზე გამავალ წრფეს, რომელიც კონუსს ეკუთვნის — კონუსის მსახველი¹.

კონუსური ზედაპირი შეიძლება შეიქმნას შემდეგნაირად. ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია რომელიმე S წერტილი და L წირი, რომელიც S წერტილზე არ გადის. გავატაროთ S წერტილზე და L წირის რომელიმე M წერტილზე წრფე (ნახ. 1). ის ზედაპირი, რომელიც შეიქმნება იმ ყველა წრფით SM , როდესაც M წერტილი L წირის ყველა წერტილის მდებარეობას მი-



ნახ. 1

იღებს, კონუსური ზედაპირია. L წირს ეწოდება კონუსური ზედაპირის მიმართველი.

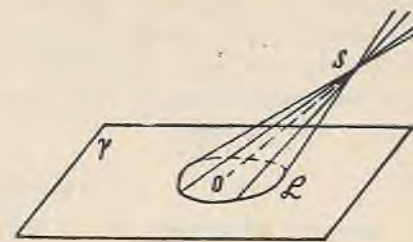
ვთქვათ, L წირი რომელიმე γ სიბრტყეში მდებარე წრეწირია. მაშინ კონუსური ზედაპირს წრიული კონუსი ეწოდება (ნახ. 2). თუ S წერ-

ტილს ისეთი მდებარეობა აქვს, რომ მისი პერპენდიკულარული გეგმილი γ სიბრტყეზე წრეწირის ცენტრია, მაშინ კონუსს მართკონუსი ეწოდება. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ მართკონუსს და მოკლედ ვუწოდებთ კონუსს.

წრფეს, რომელიც გადის კონუსის წვეროში და წრეწირის ცენტრში (SO). ეწოდება კონუსის ღერძი.

კონუსი გადაკვეთით რომელიმე სიბრტყით. კონუსური კვეთა ეწოდება წირს, რომელზედაც სიბრტყე კონუსს

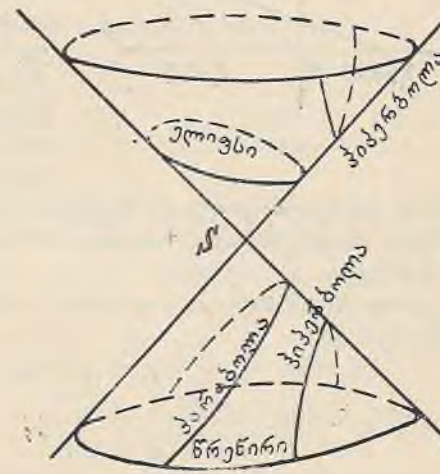
გადაკვეთს (ნახ. 3). თუ კონუსის წვეროზე გაივლის სიბრტყე ისე, რომ კონუსს სხვა წერტილში არ გადაკვეთს, მაშინ, ცხადია, კონუსური კვეთა მხოლოდ ერთი წერტილი იქნება. კონუსური კვეთებს ბევრი შესანიშნავი თვისება აქვს. ზოგიერთს ქვემოთ გავეცნობით.



ნახ. 2



ნახ. 3



ნახ. 4

კონუსის სიმეტრიის ცენტრია კონუსის წვერო. კონუსის წვერო კონუსს ორ ნაწილად ჰყოფს. თითოეულ ნაწილს კონუსის კალთა ეწოდება.

ჩვენ გავეცანით მეორე რიგის წირს — წრეწირს (თავი VIII § 1, n 1). წრეწირი კონუსური კვეთაა, თუ სიბრტყეს გავატარებთ კონუსის ღერძის პერპენდიკულარულად. თუ სიბრტყეს ისე გავატარებთ, რომ გადაკვეთს კონუსის მხოლოდ ერთ კალთას მსახველის არაპარალელურად, მიღებულ წირს ელიფსი ეწოდება (ნახ. 4).

¹ С. В. Бахвалов, Л. И. Бабушкин, В. П. Иваницкая, Аналитическая геометрия, М. 1962; И. И. Привалов, Аналитическая геометрия, М.—Л., 1952.

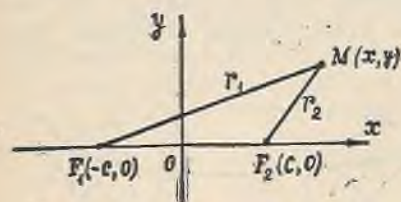
თუ სიბრტყეს გავატარებთ მსახველის პარალელურად, მიღებულ წირს ეწოდება პარაბოლა.

თუ სიბრტყეს გავატარებთ კონუსის ღერძის პარალელურად, კონუსურ კვეთაში მიღებულ წირს ეწოდება ჰიპერბოლა.

ამ წირებს სიბრტყეზე წერტილთა სიმრავლის საშუალებით შევისწავლით. სიბრტყეზე ავიღებთ ისეთ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთაც გარკვეული თვისება აქვთ.

§ 2. ელიფსი

1. ელიფსის განტოლება. ელიფსი ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისცა ორ მოცემულ წერტილამდე მანძილების ჯამი მუდმივია.



ნახ. 3

მოცემული წერტილები აღვნიშნოთ ასეობით F_1 და F_2 . ეს წერტილები Ox ღერძზე კოორდინატთა სათავეს სიმეტრიულად ავიღოთ. F_1 და F_2 წერტილებს შორის მანძილი იყოს $2c$. ელიფსის ნებისმიერი წერტილი იყოს $M(x, y)$, სათანადო მანძილების ჯამი $|F_1M| + |F_2M|$ იყოს $2a$ (ნახ. 5). F_1F_2M სამკუთხედიდან ცხადია $r_1 + r_2 \geq |F_1F_2|$.

ანუ $2a \geq 2c$, საიდანაც $a \geq c$. მივიღეთ ელიფსის არსებობის პირობა. $a = c$ შემთხვევას არ განვიხილავთ, რადგანაც, მაშინ $F_1M + MF_2 = F_1F_2$, ელიფსი F_1F_2 მონაკვეთია.

ელიფსის განსაზღვრის თანახმად ნებისმიერი M წერტილისათვის გვექნება

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

ანუ

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (1)$$

მივიღეთ ელიფსის განტოლება Oxy კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

გავამარტივოთ (1) განტოლება. ამისათვის (1) განტოლების მარცხენა მხარე გავამრავლოთ და გავყოთ $(r_1 - r_2)$ -ზე. გვექნება

$$\frac{4cx}{r_1 - r_2} = 2a,$$

საიდანაც

$$r_1 - r_2 = 2 \frac{c}{a} x. \quad (2)$$

მივიღეთ განტოლებათა სისტემა (1), (2) r_1 -ისა და r_2 -ის მიმართ.

ამ განტოლებათა სისტემიდან ამოვხსნათ r_1 . მივიღებთ

$$r_1 = a + \frac{c}{a} x.$$

ამ ტოლობის კვადრატში ახარისხებით მივიღებთ

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2,$$

საიდანაც

$$\left[1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right] x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

რადგანაც $a > c$, შეგვიძლია შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$a^2 - c^2 = b^2. \quad (3)$$

მაშინ წინა განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილს $a^2 b^2$ -ზე გავყოფით მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4)$$

(3) განტოლებას ეწოდება ელიფსის კანონიკური განტოლება.

2. ელიფსის აგება. ელიფსის (4) განტოლება შეიცავს მიმდინარე კოორდინატების კვადრატებს. ამიტომ (x, y) — წერტილთან ერთად (4) განტოლებას აკმაყოფილებს $(\pm x, \pm y)$ წერტილები, ე. ი. კოორდინატთა ღერძების მიმართ (4) ელიფსი სიმეტრიულადაა განლაგებული.

F_1 და F_2 წერტილებს ელიფსის ფოკუსები ეწოდება. ღერძის, რომელზედაც ელიფსის ფოკუსებია მოთავსებული, ელიფსის ფოკუს-

სური ღერძი ეწოდება. $\overline{F_1M}$ და $\overline{F_2M}$ მონაკვეთებს ელიფსის M წერტილის ფოკუსური რადიუსები ეწოდება. r_1 და r_2 რიცხვები სათანადოდ ფოკუსური რადიუსების სიგრძეებია. r_1 და r_2 რიცხვებსაც შემოკლებით ელიფსის M წერტილის ფოკუსურ რადიუსებს უწოდებენ.

გამოვარკვეოთ, თუ სად გადაკვეთს ელიფსი კოორდინატთა ღერძებს. ამისათვის ელიფსის (4) განტოლებაში ჩავსვათ $y = 0$, მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2} = 1,$$

საიდანაც

$$x = \pm a.$$

ასევე, თუ (4) განტოლებაში ჩავსვამთ $x=0$, მივიღებთ

$$y = \pm b.$$

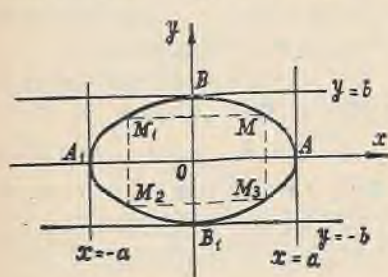
ამგვარად, ელიფსი, რომლის განტოლებაა (4), კოორდინატა ღერძებს გადაკვეთს შემდეგ წერტილებში: $A(a, 0)$, $A_1(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B_1(0, -b)$. ამ წერტილებს ელიფსის წვეროები ეწოდება. $\overline{AA_1}$ და $\overline{BB_1}$ მონაკვეთებს სათანადოდ ელიფსის დიდი და მცირე ღერძი ეწოდება. a და b რიცხვები სათანადოდ დიდი და მცირე ნახევარღერძების სიგრძეებია. შემოკლებით a და b რიცხვებს დიდ და მცირე ნახევარღერძებს უწოდებენ.

ელიფსის ფორმის გამოსარკვევად, საკმარისია, ელიფსის ფორმა გამოვარკვეოთ კოორდინატთა სიბრტყის პირველ მეოთხედში, რადგანაც ელიფსი სიმეტრიულია კოორდინატთა ღერძების მიმართ.

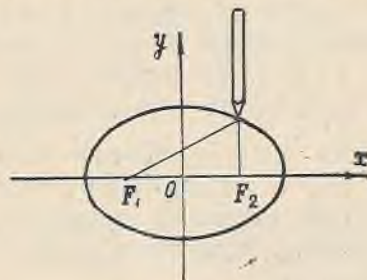
(4) განტოლებიდან მივიღებთ

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

ცხადია, y ნამდვილ მნიშვნელობებს ღებულობს x -ის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $-a \leq x \leq a$. ასევე, x ღებულობს ნამდვილ მნიშვნელობებს, თუ y აკმაყოფილებს უტოლობას $-b \leq y \leq b$. განვიხილოთ $M(x, y)$ წერტილი, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ უტოლობებს $x \geq 0$, $y \geq 0$. განტოლებიდან $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ გამოვძიწოთ: როცა x იზრდება 0-დან a -მდე, y მცირდება b -დან 0-მდე.



ნახ. 6



ნახ. 7

ამის შედეგად (4) განტოლებით მოცემულ ელიფსს აქვს მე-6 ნახაზზე გამოსახული ფორმა. ელიფსის განსაზღვრის მიხედვით ადვილად შეიძლება მეტანიკურად მისი დახაზვა. ავიღოთ $2a$ სიგრძის ძაფი და დავამაგროთ ბოლოები სიბრტყის F_1 და F_2 წერტილებში. თუ ამგვარად დამაგრებულ ძაფს გავჭიმავთ ფანქრის წვერით და ფანქარს ვამოძრავებთ, ფანქრის წვერი აღწერს ელიფსს (ნახ. 7).

300

3. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი ეწოდება ელიფსის ფოკუსთა შორის მანძილის დიდ ღერძთან შეფარდებას,

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \quad (5)$$

ელიფსის ექსცენტრისიტეტი $e < 1$, რადგანაც $c < a$.

თუ C -ს განვსაზღვრავთ (3) ტოლობიდან და შევიტანთ (5)-ში, მივიღებთ

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

ამ ტოლობიდან გვექნება

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

ეს ორი ტოლობა გვაძლევს ექსცენტრისიტეტისა და ელიფსის ღერძთა ფარდობის ურთიერთდამოკიდებულებას. ექსცენტრისიტეტი ახასიათებს ელიფსის ფორმას. რაც უფრო ახლოსაა ექსცენტრისიტეტი 1-თან, მით უფრო მცირეა $\frac{b}{a}$, ე. ი. b მცირეა a -ზე; ელიფსი გაჭიმულია. თუ e ნულს უახლოვდება, $\frac{b}{a}$ უახლოვდება 1-ს; ელიფსი უფრო მრგვალია. და, თუ $b = a$, მაშინ ელიფსი გადადის წრეწირში:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

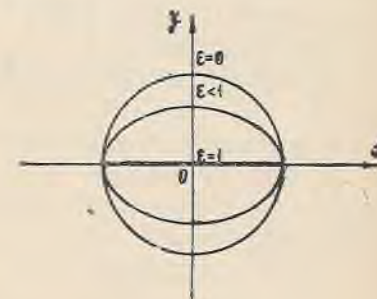
მე-8 ნახაზზე ნაჩვენებია ექსცენტრისიტეტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ელიფსის სხვადასხვა ფორმა.

4. ელიფსის პარამეტრული განტოლებანი. ავიღოთ ელიფსი (4) კანონიკური განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4)$$

მივიღოთ $a > b$. კოორდინატთა სათავედან a და b რადიუსებით შემოვხაზოთ წრეწირები (ნახ. 9). დიდ წრეწირზე ავიღოთ რომელიმე წერტილი A . ამ წერტილიდან x ღერძზე დავუშვათ პერპენდიკულარი AB . კოორდინატთა სათავედან გავატაროთ OA რადიუსი.

OA რადიუსისა და მცირე წრეწირის გადაკვეთის C წერტილზე გავატაროთ AB -ს პერპენდიკულარი, $CM \perp AB$. ვაჩვენოთ, რომ წერტილი მდებარეობს (4) ელიფსზე.



ნახ. 8

მართლაც, OBA სამკუთხედიდან

$$x = OB = OA \cos t = a \cos t,$$

სადაც t არის კუთხე x ღერძსა და OA რადიუსს შორის.

ცხადია, $y = BM = DC$. ODC

სამკუთხედიდან მივიღებთ

$$y = DC = OC \sin t = b \sin t.$$

ამგვარად, განესაზღვრეთ M წერტილის კოორდინატები

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

თუ მიღებულ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (4)-ში, იგი დაკმაყოფილებს, ე. ი. M წერტილი მდებარეობს (4) ელიფსზე.

მაშასადამე, (6) წარმოადგენს ელიფსის პარამეტრულ განტოლებებს.

ნახაზზე ვაჩვენებთ ელიფსის ერთი წერტილის აგება. თუ ვცვლით A წერტილის მდებარეობას, მივიღებთ ელიფსის სხვა წერტილებს. თუ A წერტილი შემოვიღოს მთელ წრეწირს, მაშინ M წერტილი შემოწერს მთელ ელიფსს. ელიფსის დახაზვის ეს ხერხი ხშირად გამოიყენება მხაზველობით პრაქტიკაში.

5. ელიფსის ფოკუსური რადიუსების რაციონალურად გამოხატვა. ელიფსის დირექტრისები. დირექტრისების თვისება. ავიღოთ ელიფსის ნებისმიერი M წერტილი. M წერტილის ფოკუსური რადიუსები გამოისახება დამოკიდებულებით (ნახ. 10).

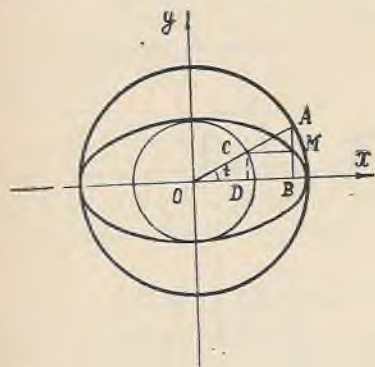
$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

ამ ტოლობათა სათანადოდ კვადრატში ახარისხებით და გამოკლებით, მივიღებთ

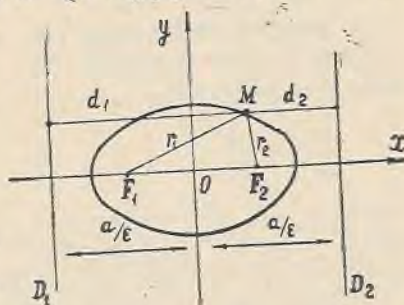
$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx. \quad (7)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ელიფსის განსაზღვრას, $r_1 + r_2 = 2a$, მაშინ (7) ტოლობა მოგვცემს

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx,$$



ნახ. 9



ნახ. 10

საიდანაც

$$r_1 - r_2 = \frac{4cx}{2a},$$

ანუ

$$r_1 - r_2 = 2ex.$$

ამგვარად, მივიღეთ განტოლებათა სისტემა

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

$$r_1 - r_2 = 2ex.$$

(ეს განტოლებათა სისტემა ზემოთაც მივიღეთ. იხილეთ (1), (2) განტოლებანი). ამ სისტემიდან

$$r_1 = a + ex, \quad (8)$$

$$r_2 = a - ex, \quad (9)$$

რაც წარმოადგენს ელიფსის ფოკუსური რადიუსების რაციონალურ გამოხატვას.

ახლა ავიღოთ წრფეები

$$x = -\frac{a}{e}, \quad x = \frac{a}{e}. \quad (10)$$

ამ წრფეებს ეწოდება ელიფსის დირექტრისები.

ელიფსზე ავიღოთ რაიმე $M(x, y)$ წერტილი. ელიფსის დირექტრი-

სები ელიფსის გარეთაა, რადგანაც $e < 1$ და $\frac{a}{e} > a$. ელიფსის მარჯვენა

ფოკუსის შესაბამის დირექტრისას ვუწოდოთ მარჯვენა დირექტრისა, ხოლო მარცხენა ფოკუსის შესაბამის დირექტრისას — მარცხენა დირექტრისა. დირექტრისები აღვნიშნოთ სათანადოდ D_1 -ითა და D_2 -ით.

თეორემა. თუ ელიფსის ნებისმიერი M წერტილიდან რომელიმე ფოკუსამდე მანძილია r , ხოლო სათანადო დირექტრისამდე მანძილი d , მაშინ შეფარდება $\frac{r}{d}$ მუდმივი სიდიდეა. ეს მუდმივი ექსცენტრისიტეტის ტოლია.

დამტკიცება. ავიღოთ მანძილი M წერტილიდან მარცხენა ფოკუსამდე

$r_1 = a + ex$ და მანძილი მარცხენა დირექტრისამდე $d_1 = \frac{a}{e} + x$. ამ მანძილთა შეფარდება მოგვცემს

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + ex}{\frac{a}{e} + x}. \quad (11)$$

სრულიად ასევე, M წერტილიდან მარჯვნივ გვექნება

$$r_2 = a - ex,$$

$$d_2 = \frac{a}{e} - x.$$

ამ მანძილთა შეფარდება მოგვცემს

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - ex}{\frac{a}{e} - x}. \quad (12)$$

(11) და (12) ტოლობა გავაერთიანოთ, მივიღებთ

$$\frac{r}{d} = e. \quad (13)$$

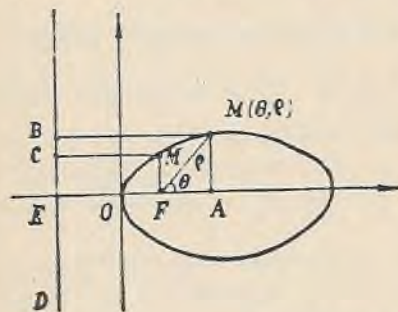
რაც გამოთქმულ თეორემას ამტკიცებს.

6. ელიფსის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში. ელიფსის მარცხენა ფოკუსი ავიღოთ პოლუსად, ხოლო ღერძი შევუთავსოთ ელიფსის დიდ ღერძს (ნახ. 11). ავიღოთ ელიფსის ნებისმიერი $M(\theta, \rho)$ წერტილი. M წერტილიდან გავატაროთ პოლარული ღერძის პერპენდიკულარი MA . FAM სამკუთხედიდან ცხადია, რომ

$$FA = FM \cos \theta = \rho \cos \theta.$$

ელიფსის დირექტრისამდე მანძილი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$d = BM = EA = EF + FA = EF + \rho \cos \theta. \quad (14)$$



ნახ. 11

F წერტილიდან აღმართოთ X ღერძისადმი პერპენდიკულარი ელიფსის გადაკვეთამდე, $FM' \perp OX$. მიღებულ M' წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილი $CM' = EF$. თუ M' წერტილისათვის ვისარგებლებთ დამტკიცებული თეორემებით, გვექნება

$$\frac{FM'}{EF} = e,$$

საიდანაც

$$EF = \frac{FM'}{e},$$

ამ მნიშვნელობის (14) ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ

$$d = \frac{FM'}{e} + \rho \cos \theta. \quad (15)$$

ამგვარად, M წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილი გამოისახება (15) დამოკიდებულებით. ელიფსის M წერტილისათვის გამოვიყენოთ დამტკიცებული თეორემა, მივიღებთ

$$\frac{\rho}{\frac{FM'}{e} + \rho \cos \theta} = e.$$

ამ ტოლობიდან განვსაზღვროთ ρ რადიუს-ვექტორი,

$$\rho = \frac{FM'}{1 - e \cos \theta}.$$

FM' მონაკვეთის სიგრძე აღვნიშნოთ p ასოთი. p -ს ელიფსის ფოკუსური პარამეტრი ეწოდება. ამ აღნიშვნის შედეგად უკანასკნელი ტოლობა ასე ჩაიწერება:

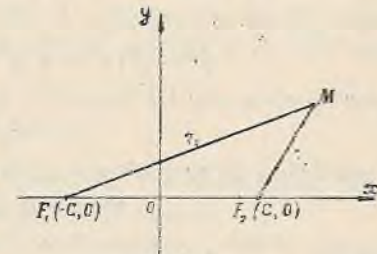
$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}. \quad (16)$$

მივიღეთ ელიფსის პოლარული განტოლება, სადაც $e < 1$.

§ 3. ჰიპერბოლა

1. ჰიპერბოლის განსაზღვრა და მისი განტოლება. ჰიპერბოლა ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვის ორ მოცემულ წერტილამდე მანძილების სხვაობა მოდულით მუდმივია.

მოცემულ წერტილებს ფოკუსები ეწოდება. ეს წერტილები აღვნიშნოთ F_1 და F_2 ასოებით. მანძილთა სხვაობა $r_1 - r_2$ განიხილება აბსოლუტური მნიშვნელობით. ამასთან ეს სხვაობა ნაკლები უნდა იყოს ფოკუსებს შორის მანძილზე (ნახ. 12). ფოკუსები ავიღოთ Ox ღერძზე კოორდინატთა სათავეს მიმართ სიმეტრიულად. მივიღოთ $|F_1 F_2| = 2c$. ჰიპერბოლის რომელიმე წერტილი



ნახ. 12

აღვნიშნოთ $M(x, y)$ ასოთი. $\overline{F_1 M}$ -სა და $\overline{F_2 M}$ -ს ეწოდება ჰიპერბოლის ფოკუსური რადიუსები, $|F_1 M| = r_1$, $|F_2 M| = r_2$.

20. გ. კომლაძე

ჰიპერბოლის განსაზღვრის თანახმად

$$r_1 - r_2 = \pm 2a, \quad (1)$$

ანუ

$$|r_1 - r_2| = 2a,$$

სადაც $2a$ მოცემული მუდმივი სიდიდეა.

თუ (1) ტოლობაში r_1 და r_2 შევცვლით მნიშვნელობებით

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad (2)$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad (3)$$

მივიღებთ

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (4)$$

აქ გვაქვს ორი განტოლება. მაშასადამე, ჰიპერბოლა შედგება ორი ნაწილისაგან. ერთ ნაწილში $r_1 > r_2$, ხოლო მეორე ნაწილში $r_1 < r_2$. ჰიპერბოლის იმ ნაწილს, სადაც $r_1 < r_2$, ეწოდება ჰიპერბოლის მარცხენა შტო, ხოლო იმ ნაწილს, სადაც $r_1 > r_2$, ეწოდება ჰიპერბოლის მარჯვენა შტო.

წარმოვადგინოთ (4) განტოლება უფრო მარტივი სახით. ამისათვის (4) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

მიღებული განტოლების კვადრატში ახარისხებით მივიღებთ

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2,$$

საიდანაც

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

ამ ტოლობის კვადრატში ახარისხებით მივიღებთ

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

საიდანაც სათანადო გამარტივება მოგვცემს

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (5)$$

რადგანაც $c > a$, ამიტომ შეგვიძლია შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$c^2 - a^2 = b^2. \quad (6)$$

ამ აღნიშვნით (5) ტოლობიდან გვექნება

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

საიდანაც a^2b^2 -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

მიღებულ განტოლებას ეწოდება ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება.

ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება მიღებულია (4) განტოლებიდან ორჯერ კვადრატში ახარისხებით. (7) განტოლება (4) განტოლების შედეგია. თუ დავამტკიცებთ, რომ (7) განტოლების შედეგია (4) განტოლება, ამით დამტკიცდება, რომ (7) განტოლება და (4) განტოლება ეკვივალენტურია. ამისათვის საკმარისია დავუშვათ, რომ რაიმე x და y წყვილი აკმაყოფილებს (7) განტოლებას. შემდეგ ჩავატაროთ უკუშეცვლა (7) განტოლებიდან და მივაღებთ (4) განტოლებამდე. ასეთივე შენიშვნა შეგვიძლია გამოეთქვათ ელიფსის კანონიკური განტოლების შესახებაც.

2. ჰიპერბოლის ფორმა. ჰიპერბოლის ასიმპტოტები. ჰიპერბოლის (7) კანონიკური განტოლება მიმდინარე კოორდინატებს შეიცავს ლუწ ხარისხში. ეს ნიშნავს, რომ ჰიპერბოლა სიმეტრიულია ორივე კოორდინატის ღერძის მიმართ. აქედან ცხადია, ჰიპერბოლის ფორმის გასაგებად საკმარისია, ჰიპერბოლის ფორმა შევისწავლოთ კოორდინატთა სიბრტყის პირველ მეოთხედში.

განვსაზღვროთ (7) განტოლებიდან y ,

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \quad (8)$$

ამ გამოსახულებიდან ცხადია, $x^2 - a^2 \geq 0$ ანუ $|x| \geq a$. $|x|$ არ შეიძლება ნაკლები იყოს a -ზე. ჰიპერბოლა შედგება ორი შტოსაგან. ერთი მოთავსებულია Oy ღერძის მარჯვნივ, ჰიპერბოლის ამ შტოს იძლევა (8) განტოლება

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a.$$

ჰიპერბოლის მეორე შტო მოთავსებულია y ღერძის მარცხნივ. იგი გამოისახება განტოლებით

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \leq -a.$$

(8) ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]-\infty, -a]$, $[a, \infty[$. როცა $x \rightarrow +\infty$, y -იც მიისწრაფვის $+\infty$ -კენ. მაგრამ გამოვარკვეოთ მისწრაფების ხასიათი. ამისათვის ავიღოთ წრფე

$$y = \frac{b}{a}x. \quad (9)$$

განვიხილოთ ამ წრფის $M'(x, Y)$ წერტილის Y ორდინატსა და ჰიპერბოლის $M(x, y)$ წერტილის y ორდინატს შორის სხვაობა,

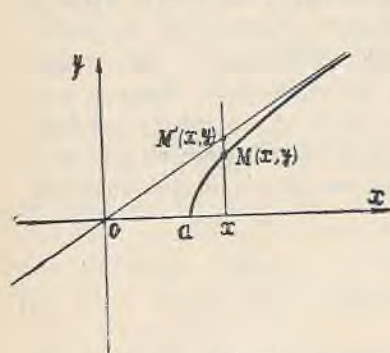
$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

ეს სხვაობა ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \quad (10)$$

თუ $x \rightarrow \infty$, მაშინ, ცხადია, (10) გამოსახულების მნიშვნელი, რომელიც შედგება ორი დადებითი, ზრდადი სიდიდისაგან, მიისწრაფვის $+\infty$ -კენ, მაშასადამე; სხვაობა $Y - y$ მიისწრაფვის ნულისაკენ (ნახ. 13).



ნახ. 13

ამგვარად, ჰიპერბოლის ცვლადი M წერტილი, რომელიც მოთავსებულია ჰიპერბოლის შტოზე კოორდინატთა სიბრტყის პირველ მეოთხედში, ისე მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, რომ M წერტილისა და $y = \frac{b}{a}x$ წრფის M' წერტილს შორის მანძილი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

წრფეებს

$$y = \pm \frac{b}{a}x \quad (11)$$

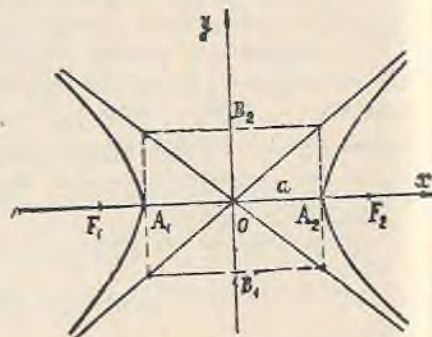
ეწოდება (7) ჰიპერბოლის ასიმპტოტები. ზემოთ მიღებული შედეგი ასეც შეგვიძლია გამოვთქვათ:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

ფუნქციის გრაფიკი, როცა $x \rightarrow \infty$ ასიმპტოტურად უახლოვდება $y = \frac{b}{a}x$ წრფეს.

ჰიპერბოლის წერტილების სიმეტრიულობის გამო კოორდინატთა ღერძების მიმართ მთლიანად ჰიპერბოლას ექნება მე-14 ნახაზზე გამოსახული ფორმა.

ჰიპერბოლის წვეროების შემართებელ $\overline{A_1 A_2}$ მონაკვეთს, $|\overline{A_1 A_2}| = 2a$, ეწოდება ჰიპერბოლის ნამდვილი ღერძი. Y ღერძზე გადაჭიმული $OB_1 = -b$, $OB_2 = b$.



ნახ. 14

$\overline{B_1 B_2}$ მონაკვეთის სიგრძეა $2b$. $\overline{B_1 B_2}$ მონაკვეთს ეწოდება ჰიპერბოლის წარმოსახვითი ღერძი.

შემოკლებით a და b რიცხვებს ჰიპერბოლის ნამდვილ და წარმოსახვით ნახევარღერძებს უწოდებენ.

3. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი. ფოკუსური რადიუსების რაციონალური გამოსახვა. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი ეწოდება ფოკუსური მანძილისა და ნამდვილი ღერძის ფარდობას

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad (12)$$

რადგანაც $c > a$, ამიტომ $e > 1$. თუ c -ს განვსაზღვრავთ (6) ფორმულიდან და შევიტანთ (12)-ში, მივიღებთ

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

აქედან კი გვექნება

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

ამგვარად მივიღებთ

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} \quad (13)$$

ეს გვიჩვენებს, რომ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი განისაზღვრება $\frac{b}{a}$

ფარდობით და, პირიქით, $\frac{b}{a}$ ფარდობა განისაზღვრება e ექსცენტრისიტეტით. ექსცენტრისიტეტი რაც უფრო ახლოსაა ერთთან, მაშინ $e^2 - 1$ მცირეა და, მაშასადამე, მით უფრო მცირეა $\frac{b}{a}$ ფარდობა. ე. ი. b მცირეა a -სთან შედარებით; მართკუთხედი, რომელიც წყვეტილითაა აღნიშნული ნახაზზე, უფრო გაჭიმულია $A_1 A_2$ -ს მიმართულებით. ამგვარად, ექსცენტრისიტეტი ახასიათებს ჰიპერბოლის ფორმას.

თუ $a = b$, მაშინ ჰიპერბოლის განტოლება იქნება

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (14)$$

ასეთ ჰიპერბოლას ტოლგვერდა ჰიპერბოლა ეწოდება. ტოლგვერდა ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $e = \sqrt{2}$.

ავილოთ ჰიპერბოლის რაიმე M წერტილი. თუ ამ წერტილის ფოკუსური რადიუსებია r_1 და r_2 , მაშინ

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \quad (15)$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (16)$$

ჰიპერბოლის განტოლების გამარტივების დროს მივიღეთ

$$cx - a^2 = \pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

ეს ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm \left(\frac{c}{a}x - a \right), \quad (17)$$

სადაც (+) ნიშანი აიღება, როცა M წერტილი ჰიპერბოლის მარჯვენა შტოზეა მოთავსებული, ხოლო (-), როცა M წერტილი ჰიპერბოლის მარცხენა შტოზეა მოთავსებული.

(16) დამოკიდებულების გამო (17) მოგვცემს

$$r_2 = \pm (\varepsilon x - a). \quad (18)$$

ჰიპერბოლის განსაზღვრით გვაქვს

$$r_1 - r_2 = \pm 2a,$$

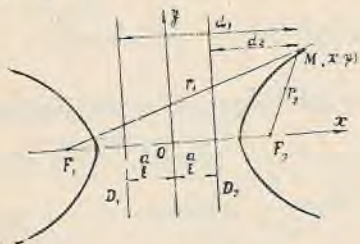
საიდანაც

$$r_1 = r_2 \pm 2a.$$

შევიტანოთ r_2 -ის მნიშვნელობა (18)-დან, მივიღებთ

$$r_1 = \pm (\varepsilon x + a). \quad (19)$$

(18) და (19) გამოსახულებები იძლევა $M(x, y)$ წერტილის ფოკუსური რადიუსების რაციონალურად გამოსახვას.



ნახ. 15

სადაც ε ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტია. რადგანაც $\varepsilon > 1$, ჰიპერბოლის დირექტრისები ჰიპერბოლის შტოებს შორის გაივლის (ნახ. 15).

დირექტრისას, რომელიც გაივლის ჰიპერბოლის მარცხენა შტოსა და ღერძს შორის, ეწოდება ჰიპერბოლის მარცხენა დირექტრისა, ხოლო დირექტრისას, რომელიც გაივლის ჰიპერბოლის მარჯვენა შტოსა და ღერძს შორის, ეწოდება მარჯვენა დირექტრისა. დირექტრისები აღენიშნოთ ასოებით D_1, D_2 .

ავილოთ ჰიპერბოლის მარჯვენა შტოზე რაიმე $M(x, y)$ წერტილი და გამოვთვალოთ მანძილები მარცხენა და მარჯვენა დირექტრისამდე:

$$d_1 = \left| x + \frac{a}{\varepsilon} \right|, \quad d_2 = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|.$$

ავილოთ $M(x, y)$ წერტილის ფოკუსური რადიუსები:

$$r_1 = |\varepsilon x + a|, \quad r_2 = |\varepsilon x - a|.$$

გამოვთვალოთ შეფარდებანი

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{|\varepsilon x + a|}{\left| x + \frac{a}{\varepsilon} \right|} = \frac{\varepsilon \left| x + \frac{a}{\varepsilon} \right|}{\left| x + \frac{a}{\varepsilon} \right|} = \varepsilon, \quad \frac{r_2}{d_2} = \frac{|\varepsilon x - a|}{\left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|} = \varepsilon.$$

ეს ტოლობანი გვიჩვენებს, რომ მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა. ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსამდე და შესაბამის დირექტრისამდე მანძილების შეფარდება მუდმივია და ეს მუდმივი ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტის ტოლია,

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \quad (21)$$

5. ჰიპერბოლის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში. ავილოთ ჰიპერბოლის მარჯვენა შტო. შემოვიღოთ პოლარული კოორდინატები ისე, რომ პოლუსი მოხვდეს F ფოკუსში და პოლარული ღერძი დაემთხვეს ჰიპერბოლის შტოს სიმეტრიის ღერძს (ნახ. 16). როგორც ადრე, M წერტილის პოლარული კოორდინატები აღენიშნოთ θ -თი და ρ -თი. აღებული წირის პოლარული განტოლების შესადგენად ვისარგებლოთ დამტკიცებული თეორემით

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

ჩვენს შემთხვევაში

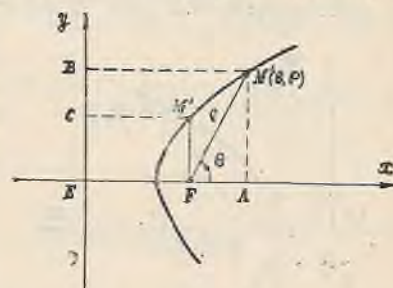
$$r = \rho,$$

ხოლო

$$d = |BM| = |EA| = |EF| + FA = EF + \rho \cos \theta.$$

EF-ის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ისევ თეორემით

$$\frac{|FM'|}{|EF|} = \varepsilon,$$



ნახ. 16

საიდანაც

$$|EF| = \frac{|FM'|}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon}.$$

ამის შედეგად $\frac{r}{d}$ შეფარდება მოგვცემს

$$\frac{p}{\frac{p}{\varepsilon} + p \cos \theta} = \varepsilon,$$

საიდანაც

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}. \quad (22)$$

მივიღეთ ჰიპერბოლის პოლარული განტოლება, სადაც $\varepsilon > 1$.

ჰიპერბოლის პოლარული განტოლება (22) მიღებულია ჰიპერბოლის ერთი შტოსათვის, მაგრამ ადვილი საჩვენებელია, რომ იმავე განტოლებას აკმაყოფილებს ჰიპერბოლის მეორე შტოს წერტილის კოორდინატები.

§ 4. პარაბოლა

1. პარაბოლის განსაზღვრა. განტოლების შედგენა. პარაბოლა ეწოდება სიმრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა მანძილები მოცემულ წერტილამდე და მოცემულ წრფემდე თანაბრობა.

განსაზღვრაში ნახსენებ წერტილს პარაბოლის ფოკუსი ეწოდება, წრფეს — პარაბოლის დირექტრისა. პარაბოლის ფოკუსი და დირექტრისა ისე ავიღოთ, როგორც მე-17 ნახაზზეა ნაჩვენები. ფოკუსი აღვნიშნოთ F ასოთი, ხოლო დირექტრისა δ ასოთი. მანძილი ფოკუსიდან დირექტრისამდე აღვნიშნოთ p ასოთი. p -ს ეწოდება პარაბოლის პარამეტრი. პარაბოლის განსაზღვრის თანახმად

$$\frac{r}{d} = 1. \quad (1)$$

ეს ტოლობა შეგვიძლია მივიღოთ პარაბოლის ექსცენტრისიტეტის განსაზღვრად. პარაბოლის ექსცენტრისიტეტი

$$\varepsilon = 1.$$

გამოვიყვანოთ პარაბოლის კანონიკური განტოლება.

(1) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$r = d. \quad (2)$$

Oy ღერძი ავიღოთ პარაბოლის დირექტრისის პარალელურად, კოორდინატთა სათავე ავიღოთ ფოკუსსა და დირექტრისის შუაში, Ox ღერძი მივმართოთ დირექტრისიდან ფოკუსისაკენ. ასეთ Oxy სისტემაში ფოკუსის კოორდინატები იქნება $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. ვთქვათ, პარაბოლის რაიმე წერტილია $M(x, y)$. დირექტრისამდე მანძილი იქნება $d = x + \frac{p}{2}$. ამის გამო

(2) ასე ჩაიწერება:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (3)$$

ეს არის პარაბოლის განტოლება აღებულ Oxy კოორდინატთა სისტემაში.

გავამარტივოთ (3) განტოლება. ამისათვის (3) განტოლების ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში, მივიღებთ

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

ანუ

$$y^2 = 2px. \quad (4)$$

ვაჩვენოთ, რომ (3) და (4) განტოლებანი ეკვივალენტურია.

(4) განტოლება (3) განტოლების შედეგია. ახლა ვაჩვენოთ, რომ (3) განტოლება (4) განტოლების შედეგია.

მართლაც, (4) განტოლება, სათანადო წევრების დამატებით და px -ის მარცხნივ გადატანით, მოგვცემს

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

ამ ტოლობიდან კვადრატული ფესვის ამოღებით გვექნება

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \pm \left(x + \frac{p}{2}\right). \quad (5)$$

მაგრამ (4) ტოლობის თანახმად ყოველთვის $x \geq 0$. ამიტომ $x + \frac{p}{2} > 0$.

ე. ი. (5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში დადებითი სიდიდე გვაქვს,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

მივიღეთ (3) განტოლება. ამგვარად, (3) განტოლება (4) განტოლების შედეგია, ამით დავამტკიცეთ, რომ (3) და (4) განტოლებები ეკვივალენტურია.

მაშასადამე, (4) განტოლება პარაბოლის განტოლებაა. ამ განტოლებას ეწოდება პარაბოლის კანონიკური განტოლება.

2. პარაბოლის ფორმა. x -ს არ შეუძლია მიიღოს უარყოფითი მნიშვნელობა ($p > 0$), ამიტომ პარაბოლა მთლიანად მოთავსებულია Oy ღერძის მარჯვნივ. პარაბოლა სიმეტრიულია x ღერძის მიმართ,

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

როცა $x \rightarrow \infty$, მაშინ $y \rightarrow \infty$. პარაბოლას არა აქვს ასიმპტოტი. პარაბოლის გრაფიკი მოცემულია მე-17 ნახაზზე.

3. პარაბოლის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში. პარაბოლის პოლარული განტოლების მისაღებად საჭიროა სიტყვა-სიტყვით გავიმეოროთ ელიფსზე ან ჰიპერბოლაზე ჩატარებული მსჯელობა და მივიღებთ პოლარულ განტოლებას

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}, \quad (6)$$

სადაც ექსცენტრისიტეტი $\varepsilon = 1$.

§ 5. მეორე რიგის წირთა განტოლებანი პოლარულ კოორდინატებში

ზემოთ მივიღეთ ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის პოლარული განტოლებანი. ყველა განტოლებას ერთი და იგივე სახე აქვს, მხოლოდ განსხვავდებიან ექსცენტრისიტეტით:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}, \quad (1)$$

სადაც ელიფსისათვის (ნახ. 18)

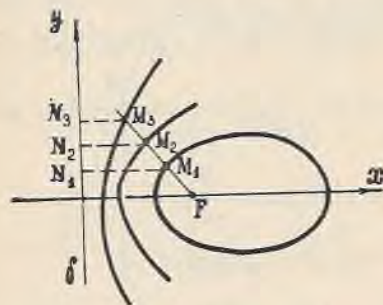
$$\frac{|FM_1|}{|M_1N_1|} = \varepsilon < 1,$$

პარაბოლისათვის

$$\frac{|FM_2|}{|M_2N_2|} = \varepsilon = 1,$$

ჰიპერბოლისათვის

$$\frac{|FM_3|}{|M_3N_3|} = \varepsilon > 1.$$



ნახ. 18

§ 6. მეორე რიგის წირების კონუსური კვეთებით განსაზღვრა

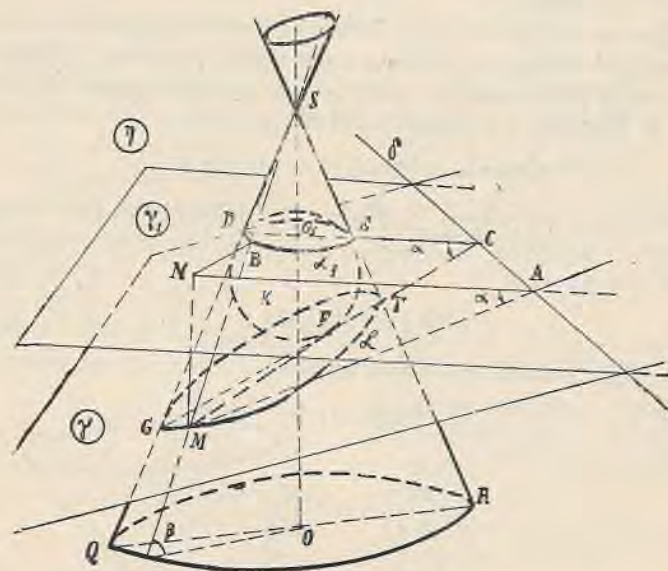
პირველ პარაგრაფში ვახსენეთ, რომ სიბრტყის მიერ კონუსის გადაკვეთაში მიიღება ყველა მეორე რიგის წირი¹. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

¹ А. В. Погорелов, Аналитическая геометрия, М., 1978.

თეორემა. სიბრტყის მიერ კონუსის გადაკვეთაში მიიღება, გარდა წრეწირისა, ისეთი წერტილების სიმრავლე, რომ ამ წერტილებიდან რომელიმე F წერტილამდე და რომელიმე δ წრფემდე მანძილების შეფარდება მუდმივი სიდიდესაა.

F წერტილის კონუსური კვეთის ფოკუსი ეწოდება, ხოლო δ — წრფეს დირექტრისა.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად ავიღოთ კონუსი (ნახ. 19), ამ კონუსის SO ღერძზე გავატაროთ სიბრტყე. ნახაზზე ეს სიბრტყე თვით ნახა-



ნახ. 19

ზის სიბრტყე იყოს. ეს სიბრტყე η ასოთი აღვნიშნოთ. შემდეგ გავატაროთ SO ღერძისადმი დახრილი სიბრტყე γ . კონუსის γ სიბრტყით გადაკვეთაში მივიღებთ წირს, რომელიც L ასოთი აღვნიშნოთ. γ სიბრტყის η სიბრტყესთან გადაკვეთაში მივიღებთ მონაკვეთს GT -ს. განვიხილოთ სამკუთხედი GTS . ამ სამკუთხედში ჩავხაზოთ წრეწირი. ამ წრეწირის ცენტრი O_1 მოთავსდება SO ღერძზე. წრეწირის ΔGTS გვერდებთან შეხების წერტილები აღვნიშნოთ D, E და F ასოებით. D და E წერტილები სიმეტრიული წერტილები იქნება SO ღერძის მიმართ. წრეწირი ვაბრუნოთ SO ღერძის გარშემო. მივიღებთ კონუსში ჩახაზულ სფეროს. ეს სფერო K ასოთი აღვნიშნოთ. K სფერო კონუსს შეეხება O_1 წერტი-

ლის გარშემო $O_1 E$ რადიუსით შემოწერილი წრეწირის წერტილებში. წრეწირი L_1 ასოთი აღვნიშნოთ. გავატაროთ O_1 წერტილზე SO დერძისადმი პერპენდიკულარული სიბრტყე γ_1 . ცხადია, γ_1 სიბრტყისა და K სფეროს გადაკვეთის გადაკვეთაში მიიღება L_1 წრეწირი. γ და γ_1 სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფე δ ასოთი აღვნიშნოთ.

L წირზე ავიღოთ რომელიმე M წერტილი და ამ წერტილზე გავატაროთ SM მსახველი. ამ მსახველის L_1 წრეწირთან გადაკვეთის წერტილი B ასოთი აღვნიშნოთ. განვიხილოთ MB და MF მონაკვეთები. ეს მონაკვეთები K სფეროსადმი M წერტილიდან გატარებული მხეებია. ამიტომ $|MF| = |MB|$.

ვთქვათ, γ და γ_1 სიბრტყეთა შორის კუთხე α -ს ტოლია, $\angle DCG = \alpha$, ხოლო კონუსის მსახველი γ_1 სიბრტყისადმი ადგენს β კუთხეს, $\angle SQO = \beta$. გავატაროთ M წერტილიდან γ_1 სიბრტყისადმი პერპენდიკულარი MN . შევუერთოთ N წერტილი B წერტილს. $\triangle MBN$ -დან ცხადია,

$$|MN| = |MB| \sin \beta = |MF| \sin \beta. \quad (1)$$

MN წრფეზე გავატაროთ δ წრფის პერპენდიკულარული სიბრტყე. δ წრფეზე მივიღებთ წერტილს, რომელიც A ასოთი აღვნიშნოთ. $\triangle MAN$ -დან ცხადია,

$$|MN| = |MA| \sin \alpha. \quad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$|MA| \sin \alpha = |MF| \sin \beta.$$

საიდანაც

$$\frac{|MF|}{|MA|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (3)$$

ამგვარად, შეფარდება $\frac{|MF|}{|MA|}$ არაა დამოკიდებული L წირზე M წერტილის მდებარეობაზე. შეფარდება $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ აღვნიშნოთ ε -ით,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \varepsilon. \quad (4)$$

მაშინ

$$\frac{|MF|}{|MA|} = \varepsilon. \quad (5)$$

ამგვარად დავამტკიცეთ, რომ L წირის ნებისმიერი M წერტილიდან γ სიბრტყის F წერტილამდე და δ წრფემდე მანძილების შეფარდება

მუდმივია. განსაზღვრის თანახმად F წერტილი L წირის ფოკუსია, δ წრფე — დირექტრისა.

ε სიდიდე დამოკიდებულია α კუთხის სიდიდეზე, β კუთხე კი მოცემული კონუსისათვის მუდმივია, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. თუ $\varepsilon < 1$, მაშინ $\sin \alpha < \sin \beta$,

საიდანაც $\alpha < \beta$. ვთქვათ, $0 < \alpha < \beta$, მაშინ γ სიბრტყე კონუსის მხოლოდ ერთ კალთას გადაკვეთს. ამ კვეთაში მიღებული წირი ელიფსი იქნება, რადგანაც ელიფსი განისაზღვრება როგორც γ სიბრტყის იმ M წერტილთა სიმრავლე, რომელსაც აქვს თვისება (5), $\varepsilon < 1$, სადაც $|MF|$ არის M წერტილიდან F წერტილამდე — ფოკუსამდე მანძილი, ხოლო $|MA|$ არის δ წრფემდე — დირექტრისამდე მანძილი.

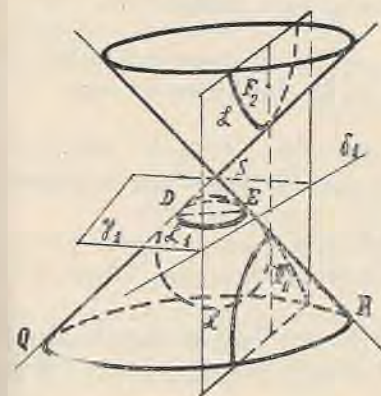
რაც უფრო ახლოსაა α -ს მნიშვნელობა β -ს მნიშვნელობასთან, მით უფრო G წერტილი შორსაა T წერტილიდან; ელიფსი უფრო გაჭიმულია. თუ $\alpha \rightarrow \beta$, მაშინ G წერტილი SQ მსახველის ვასწვრივ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ და $\alpha = \beta$ -სათვის γ სიბრტყე SQ მსახველის პარალელურია (ნახ. 20).

ამ შემთხვევაში კონუსურ კვეთაში მიიღება პარაბოლი,

$$\frac{|MF|}{|MA|} = 1.$$

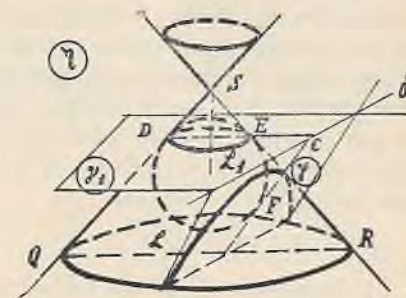
თუ $\beta < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, მაშინ

$$\varepsilon = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} > 1,$$



ნახ. 21

კონუსის ორივე კალთას გადაკვეთს γ სიბრტყე და კვეთაში მიიღება ჰიპერბოლა. ჰიპერბოლა შედგება ორი შტოსაგან (ნახ. 21). თითო კალთაზე თითო შტო არის მოთავსებული, ადვილი წარმოსადგენია, რომ ჰიპერბოლის ფოკუსები F_1 და F_2 თითოეულ კალთაში ჩაზაზული სფეროს საშუალებით



ნახ. 20

განისაზღვრება. ასევე განისაზღვრება ორი დირექტრისა d_1, d_2 . თუ $\alpha=0$, მაშინ კვეთაში მიიღება წრეწირი. (2) ტოლობით წრეწირი არ განისაზღვრება. შეიძლება წრეწირი განესაზღვროთ როგორც მკვეთის ზღვრული მდებარეობა, როდესაც $\alpha \rightarrow 0$. მაშინ (2) ტოლობიდან $|MA| \rightarrow \infty$. საიდანაც დავასკვნით, A წერტილი ზისწრადვის უსასრულობისაკენ, ე. ი. წრეწირის დირექტრისა უსასრულოდაა დაშორებული წრეწირიდან.

ამგვარად, კონუსის რაიმე γ სიბრტყით გადაკვეთაში მიიღება მეორე რიგის წირი. ამ წირებიდან წრეწირი მიიღება, თუ γ სიბრტყე კონუსის ღერძის პერპენდიკულარულია; ელიფსი მიიღება, თუ γ სიბრტყე კონუსის ღერძისადმი დახრილადაა გატარებული, მაგრამ კონუსის მსახველის პარალელური არაა. თუ γ სიბრტყე კონუსის მსახველის პარალელურადაა გატარებული, კვეთაში პარაბოლა მიიღება. თუ γ სიბრტყე კონუსის ღერძის პარალელურია, სიბრტყე γ კონუსის ორივე კალთას გადაკვეთს, კვეთაში მიიღება ჰიპერბოლა.

ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 11.

1. შეადგინეთ იმ წირის განტოლება, რომლის ყოველი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული $C(0; -4)$ წერტილიდან და $y+2=0$ წრფიდან. ააგეთ ნახაზი.

2. შეადგინეთ იმ წირის განტოლება, რომლის ყოველი წერტილისათვის მანძილების ჯამი წერტილებამდე $F_1(-1; 3)$, $F_2(7; 3)$ მუდმივი სიდიდეა და გადის $A(6; \frac{27}{5})$ წერტილზე. ააგეთ ნახაზი.

3. შეადგინეთ იმ წირის განტოლება, რომლის წერტილები $A(0; 2)$ -დან ორჯერ უფრო შორსაა, ვიდრე $B(0; 6)$ წერტილიდან ააგეთ ნახაზი.

4. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ერთ-ერთი ფოკუსი $x^2+y^2-20y+19=0$ წრეწირის ცენტრია, სიმეტრიულია X ღერძის მიმართ და ექსცენტრისიტეტი 1,25-ია. შეადგინეთ ნახაზი.

5. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი დიამეტრია $y=3-2x-x^2$ პარაბოლის მიერ x ღერძზე მოჭრილი მონაკვეთი. ააგეთ ორივე წირი.

6. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი დიამეტრია $xy=8$ ჰიპერბოლის მიერ $x+y=6$ წრფეზე მოჭრილი მონაკვეთი. ააგეთ სამივე წირი.

7. წრეწირის დიამეტრის ბოლო წერტილებია $x^2-y^2=16$ ჰიპერბოლის ფოკუსები. მონახეთ წრეწირისა და ჰიპერბოლის ასიმპტოტების გადაკვეთის წერტილები, ააგეთ ნახაზი.

8. მონახეთ $y=4-x^2$ პარაბოლის x ღერძთან და $y=3x$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილები. იპოვეთ ამ წერტილებით შედგენილი ოთხკუთხედის ფართობი.

9. შეადგინეთ იმ წრეწირების ცენტრების მიერ აღწერილი წირის განტოლება, რომლებიც გადიან $A(3; 4)$ წერტილზე და ეხებიან x ღერძს.

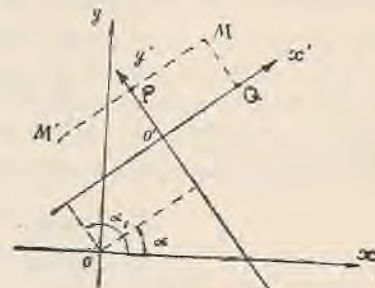
10. შეადგინეთ იმ წირის განტოლება, რომლის წერტილებიდან $3x+4y=0$ წრფემდე და x ღერძამდე მანძილების კვადრატების სხვაობაა 2,4.

§ 7. ამოცანები მეორე რიგის წირებზე (დაშავება)

სიბრტყეზე ავიღოთ ორი კოორდინატთა სისტემა Oxy და $O'x'y'$ (ნახ. 22). დავამყაროთ ამ სისტემათა შორის დამოკიდებულება. ეს საკითხი მე-7 თავის მე-3 პარაგრაფში შევისწავლეთ. ახლა ეს საკითხი შევისწავლოთ, თუ ცნობილია Oxy კოორდინატთა სისტემაში O_1x' და O_1y' ღერძების განტოლებანი. ვთქვათ, Oxy კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია სათანადოდ O_1y' და O_1x' ღერძების განტოლებანი ნორმალური სახით:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$



ნახ. 22

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები $O'x'y'$ კოორდინატთა სისტემაში გამოისახება M წერტილის Oxy სისტემაში (x, y) კოორდინატების საშუალებით შემდეგი ფორმულებით:

$$x' = A_1x + B_1y + C_1,$$

$$y' = A_2x + B_2y + C_2.$$

დავუშვათ, რომ $O'x'y'$ კოორდინატთა სისტემის პირველ მეოთხედში

$$A_1x + B_1y + C_1 > 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 > 0.$$

თუ ეს ასე არაა, სათანადო განტოლებაში ყველა კოეფიციენტს ნიშანი შევუცვალათ საწინააღმდეგო ნიშნით. ავიღოთ $M(x, y)$ წერტილი. თუ ამ წერტილის კოორდინატებს ჩავსვამთ პირველ განტოლებაში, მივიღებთ

$$Mp = A_1x + B_1y + C_1.$$

ეს კი გამოსახავს $O'y'$ ღერძიდან M წერტილამდე მანძილს. თუ ავიღებთ $O'y'$ ღერძის მიმართ M წერტილის სიმეტრიულ M' წერტილს, მაშინ

$$M'P = -(A_1x + B_1y + C_1).$$

ასე რომ, $A_1x + B_1y + C$ გამოსახულება იძლევა M წერტილის x' კოორდინატის $O'x'y'$ კოორდინატთა სისტემაში, თუ ამ გამოსახულებაში ჩავსვამთ M წერტილის x და y კოორდინატებს:

$$x' = A_1x + B_1y + C.$$

სრულიად ასევე ვაჩვენებთ, რომ $A_2x + B_2y + C_2$ გამოსახულება მოგვცემს M წერტილის y' კოორდინატს $O'x'y'$ კოორდინატთა სისტემაში, თუ მასში ჩავსვამთ M წერტილის x და y კოორდინატებს:

$$y' = A_2x + B_2y + C_2.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, წრფეთა განტოლებანი მოცემულია ნორმალური სახით და წრფეები ურთიერთპერპენდიკულარულია,

$$A_1^2 + B_1^2 = 1,$$

$$A_2^2 + B_2^2 = 1,$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0,$$

მაშინ განტოლებათა კოეფიციენტები ასე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ

$$A_1 = \cos \alpha, \quad b_1 = \sin \alpha,$$

$$A_2 = \cos \alpha_1, \quad b_2 = \sin \alpha_1.$$

მესამე დამოკიდებულება მოგვცემს

$$\cos \alpha \cos \alpha_1 + \sin \alpha \sin \alpha_1 = \cos (\alpha - \alpha_1) = 0,$$

სადაც

$$\alpha_1 = \alpha \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

აქედან კი დავასკვნით, კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებს ექნებათ

შემდეგი სახე, თუ $\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$,

$$x' = C_1 + x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$y' = C_2 - x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

ეს ფორმულები იძლევა მე-7 თავის მე-3 პარაგრაფში განხილულ კოორდინატთა გარდაქმნების ყველა შემთხვევას.

თუ $\alpha_1 = \alpha - \frac{\pi}{2}$, მაშინ გვექნება კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები:

$$x' = C_1 + x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$y' = C_2 + x \sin \alpha - y \cos \alpha.$$

ქვემოთ განვიხილავთ ამოცანებს, სადაც უნდა მოინახოს ისეთი $O'x'y'$ კოორდინატთა სისტემა, რომელშიც წირის განტოლება უფრო მარტივი იქნება, ვიდრე მოცემული განტოლება.

1. ცენტრიანი წირის განტოლების გამარტივება. ამოცანა 1. გავამარტივოთ მეორე ხარისხის ორცვლადიანი განტოლება

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1)$$

გავამარტივოთ (1) განტოლება, ნიშნავს შევცვალოთ x და y ცვლადები ისეთი ახალი x' და y' ცვლადებით, რომელთა მიმართ განტოლებას ექნება უმარტივესი სახე. გეომეტრიულად (1) განტოლების გამარტივება ნიშნავს, მოვნახოთ ისეთი ახალი კოორდინატთა სისტემა $O'x'y'$, რომლის მიმართ (1) განტოლება მიიღებს კანონიკურ სახეს.

(1) განტოლება გავამარტივოთ მიმდევრობით.

1) კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანა. სიბრტყეზე ავიღოთ ორი კოორდინატთა სისტემა Oxy და $O_1x_1y_1$, სადაც ნებისმიერი M წერტილის ძველი (x, y) კოორდინატები და იმავე წერტილის ახალი (x_1, y_1) კოორდინატები დაკავშირებულია შემდეგი ფორმულებით:

$$x = a + x_1,$$

$$y = b + y_1,$$

სადაც O_1 წერტილის კოორდინატები Oxy სისტემაში არის (a, b) .

გამოვარკვეოთ, როგორი სახე ექნება (1) განტოლებას ახალ x_1, y_1 ცვლადებში. შევცვალოთ x და y ცვლადები (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2(Aa + Bb + D)x_1 + 2(Ba + Cb + E)y_1 + Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F = 0. \quad (2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$U(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

$$U_x(x, y) = Ax + By + D,$$

$$U_y(x, y) = Bx + Cy + E,$$

(3)

მაშინ (2) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2U_x(a, b)x_1 + 2U_y(a, b)y_1 + U(a, b) = 0. \quad (4)$$

ამგვარად, კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანის შემთხვევაში (1) განტოლების ცვლადთა მეორე ხარისხის კოეფიციენტები არ იცვლება, ცვლადთა პირველი ხარისხის კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი კი მიიღება სათანადოდ (3) გამოსახულებებით, თუ x -სა და y -ს შევცვალოთ a და b -თი.

21. გ. კომლაძე

ავარჩიოთ a და b ისე, რომ
შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$\begin{aligned} Aa + Bb + D &= 0, \\ Ba + Cb + E &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

მიღებულ (5) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით გვექნება ახალი კოორდინატთა სათავე (a, b) . ამ ახალ კოორდინატთა სისტემაში (1) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$A x_1^2 + 2B x_1 y_1 + C y_1^2 + U(a, b) = 0. \quad (6)$$

აქ ვიგულისხმეთ, რომ (5) განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნი. ამისათვის კი სისტემის დეტერმინანტი უნდა განსხვავდებოდეს ნული-საგან,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \neq 0. \quad (7)$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, (1) წირი ცენტრიანია და ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება (5) განტოლებათა სისტემიდან. ცენტრიანია, თუ უცენტრო წირი გასაგები იქნება ქვემოთ.

ამგვარად, თუ წირი ცენტრიანია, $AC - B^2 \neq 0$, მაშინ ამოვხსნათ (5) განტოლებათა სისტემა, შევადგინოთ გარდაქმნის ფორმულები $x = a + x_1$, $y = b + y_1$. ამ ახალ კოორდინატებში (1) განტოლება მიიღებს (6) სახეს.

მაგალითად, კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანით ვა-
ვამარტივოთ განტოლება

$$2x^2 + 6xy + 8y^2 + 2x + 10y - 21 = 0. \quad (8)$$

აღებული წირი ცენტრიანია,

$$2 \cdot 4 - 6^2 = 8 - 36 = -28 \neq 0.$$

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$2x + 3y + 1 = 0,$$

$$3x + 8y + 5 = 0.$$

მივიღებთ $x = 1$, $y = -1$. შევადგინოთ გარდაქმნის ფორმულები

$$x = 1 + x_1,$$

$$y = -1 + y_1.$$

ახალ x_1 და y_1 ცვლადებში (8) განტოლება მოგვცემს

$$2x_1^2 + 6x_1y_1 + 8y_1^2 - 25 = 0. \quad (9)$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა

$$AC - B^2 = 0, \quad (10)$$

ანუ

$$AC = B^2.$$

ამ შემთხვევაში A -სა და C -ს ერთი და იგივე ნიშანი აქვს. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ორივე დადებითია, წინააღმდეგ შემთხვევაში (1) განტოლებას გავამრავლებთ (-1) -ზე და მივიღებთ დადებით A -სა და C -ს.

$$\text{ვთქვათ, } A = \alpha^2, \quad C = \beta^2, \quad \text{მაშინ } \alpha^2 \beta^2 = B^2,$$

$$B = \alpha \beta.$$

ნამრავლის წინ ნიშანი ავარჩიოთ B -ს ნიშნის მიხედვით.

ამ აღნიშვნების შემდეგ (1) მოგვცემს

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

ანუ

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (11)$$

ამგვარად, თუ (1) წირი უცენტროა, $AC - B^2 = 0$, მაშინ ცვლადთა მეორე ხარისხში წევრები განტოლებაში გამოსახავს ორწევრის სრულ კვადრატს.

2) ღერძთა მობრუნება. გამოვარკვიოთ, თუ როგორ შეიცვლება (6) განტოლება, როცა კოორდინატთა ღერძებს მოვებრუნებთ θ კუთხით:

$$\begin{aligned} x_1 &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y_1 &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \quad (12)$$

მიღებულ მნიშვნელობათა (6)-ში ჩასმით გვექნება

$$A_1 x'^2 + 2B_1 x' y' + C_1 y'^2 + U(a, b) = 0, \quad (13)$$

სადაც

$$A_1 = A \cos^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta,$$

$$B_1 = (C - A) \sin \theta \cos \theta + B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \quad (14)$$

$$C_1 = A \sin^2 \theta - 2B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta.$$

ჩვენი მიზანია, (13) გამოსახულებას ჰქონდეს რაც შეიძლება მარტივი სახე. ამიტომ θ კუთხე შევარჩიოთ ისე, რომ B_1 გახდეს ნული. გვექნება

$$(C - A) \sin \theta \cos \theta + B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0,$$

ანუ

$$(C - A) \sin 2\theta + 2B \cos 2\theta = 0. \quad (15)$$

ვიგულისხმობთ $B \neq 0$, მაშინ (15)-დან გვექნება

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A-C}{2B}. \quad (16)$$

(15)-ში არ შეიძლება $\sin 2\theta = 0$, რადგანაც, მაშინ B გაუტოლდება ნულს, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

განვსაზღვრავთ θ კუთხეს (16) ტოლობიდან, (13) მოგვცემს

$$A_1 x'^2 + C_1 y'^2 + U(a, b) = 0. \quad (17)$$

ამგვარად, თუ წირი ცენტრიანია, $AC - B^2 \neq 0$, და $B \neq 0$, მაშინ შეიძლება ისეთი θ კუთხის განსაზღვრა, რომ (6) განტოლებას მიეცეს (17) სახე.

მაგალითად, (9) განტოლებისათვის გვექნება

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{2-8}{6},$$

საიდანაც

$$2\theta = -\frac{\pi}{4}, \quad \theta = -\frac{\pi}{8}.$$

ამგვარად, თუ x_1, y_1 ღერძებს მოვებრუნებთ $-\frac{\pi}{8}$ კუთხით, ახალ კოორდინატა $Ox'y'$ სისტემაში (9) განტოლებაში აღარ გვექნება წევრი, რომელიც შეიცავს $x'y'$ ნამრავლს.

2. უცენტრო წირის განტოლების გამარტივება. დავებრუნდეთ (11) განტოლებას. რომ გავამარტივოთ (11) განტოლება, შემოვებრუნოთ კოორდინატთა ღერძები ისეთი θ კუთხით, რომ $\operatorname{tg} \theta = -\frac{\alpha}{\beta}$. მოვნახოთ $\sin \theta$ და $\cos \theta$.

$$\sin \theta = \pm \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}, \quad \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}},$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$\sin \theta = \mp \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \cos \theta = \pm \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (18)$$

ავიღოთ ზედა ნიშნები, მაშინ (12) ფორმულები მოგვცემს:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{\beta x' + \alpha y'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta = \frac{-\alpha x' + \beta y'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

გამოვთვალოთ მნიშვნელობანი:

$$\alpha x + \beta y = \alpha \frac{\beta x' + \alpha y'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \beta \frac{-\alpha x' + \beta y'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} y', \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 2Dx + 2Ey &= 2D \frac{\beta x' + \alpha y'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + 2E \frac{-\alpha x' + \beta y'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \\ &= 2D_1 x' + 2E_1 y', \end{aligned} \quad (21)$$

სადაც

$$D_1 = \frac{\beta D - \alpha E}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad E_1 = \frac{\beta E + \alpha D}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (22)$$

(20) და (21) ფორმულებით (11) მოგვცემს

$$(\alpha^2 + \beta^2) y'^2 + 2D_1 x' + 2E_1 y' + F = 0. \quad (23)$$

ახლა გავამარტივოთ (23) განტოლება. ამისათვის გადავიტანოთ $Ox'y'$ სისტემა პარალელურად

$$x' = a + x_1, \quad y' = b + y_1.$$

ამ გარდაქმნით (23) მოგვცემს:

$$(\alpha^2 + \beta^2) y_1^2 + 2D_1 x_1 + 2E_1 y_1 + F' = 0, \quad (24)$$

სადაც

$$\begin{aligned} E_1' &= (\alpha^2 + \beta^2) b + E_1, \\ F' &= (\alpha^2 + \beta^2) b^2 + 2D_1 a + 2E_1 b + F. \end{aligned} \quad (25)$$

(24) განტოლების გამარტივებისათვის ავარჩიოთ a და b ისე, რომ

$$E_1' = 0, \quad F' = 0,$$

ანუ

$$(\alpha^2 + \beta^2) b + E_1 = 0, \quad (26)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) b^2 + 2D_1 a + 2E_1 b + F = 0. \quad (27)$$

რადგანაც $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, (26) განტოლებიდან შევვიძლია განვსაზღვროთ b ,

$$b = -\frac{E_1}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (28)$$

მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (27)-ში, საიდანაც, თუ $D_1 \neq 0$ განვსაზღვრავთ a -ს,

$$a = -\frac{(\alpha^2 + \beta^2) b^2 + 2E_1 b + F}{2D_1}. \quad (29)$$

ამის შედეგად (24) მოგვცემს

$$(\alpha^2 + \beta^2) y_1^2 + 2 D_1 x_1 = 0,$$

საიდანაც

$$y_1^2 = 2 p x_1, \quad (30)$$

სადაც

$$p = -\frac{D_1}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha E - \beta D}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}. \quad (31)$$

მივიღეთ პარაბოლის კანონიკური განტოლება.

ამგვარად, თუ (1) განტოლებაში $AC - B^2 = 0$ და $D_1 \neq 0$, მაშინ (1) განტოლება იძლევა პარაბოლს, რომლის კანონიკური განტოლებაც (30). თუ $D_1 = 0$, მაშინ a და b არ შეიძლება განისაზღვროს. განვიხილოთ დაწვრილებით ეს შემთხვევა.

რადგანაც $D_1 = 0$, (22)-დან გვექნება

$$\beta D - \alpha E = 0. \quad (31)$$

რადგანაც α და β ერთდროულად ნულის ტოლი არ შეიძლება იყოს, შეგვიძლია (31)-დან დავწეროთ

$$D = \frac{\alpha E}{\beta}.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (11)-ში, მივიღებთ

$$(\alpha x + \beta y)^2 + \frac{2E}{\beta} (\alpha x + \beta y) + F = 0. \quad (32)$$

ამგვარად, გვაქვს $(\alpha x + \beta y)$ -ის მიმართ კვადრატული განტოლება. (32)-დან განვსაზღვროთ $\alpha x + \beta y$. გვექნება

$$\alpha x + \beta y = p_1, \quad \alpha x + \beta y = p_2,$$

სადაც p_1 და p_2 რიცხვებია.

აქ შესაძლებელია სამი შემთხვევა.

1) p_1 და p_2 კომპლექსური რიცხვებია. ამ შემთხვევაში (32) გამო-სახავს წარმოსახვით წერტილთა სიმრავლეს: წარმოსახვით წრფეთა სიმ-რავლეს.

2) p_1 და p_2 ნამდვილი და სხვადასხვაა. ამ შემთხვევაში (32) გან-ტოლება გამოსახავს ორ პარალელურ წრფეს.

3) $p_1 = p_2$, მაშინ (32) გამოსახავს ორ თანამთხვეულ წრფეს.

მაშასადამე, თუ $AC - B^2 = 0$ და $D_1 = 0$, მაშინ (1) განტოლება გამო-სახავს ან პარაბოლს, ან პარალელურ წრფეებს.

3. მაგალითები. მაგალითი 1. მოვიყვანოთ კანონიკურ სახეზე განტოლება

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 - 46x - 62y + 13 = 0 \quad (33)$$

და ავავოთ წირი.

გამოვთვალოთ $AC - B^2$.

$$AC - B^2 = 13 \cdot 13 - 5^2 = 144 \neq 0.$$

მაშასადამე, (33) განტოლებით გამოსახული წირი ცენტრიანია.

მოვნახოთ ცენტრის კოორდინატები. ამისათვის ამოვხსნათ განტო-ლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} 13x + 5y - 23 &= 0, \\ 5x + 13y - 31 &= 0. \end{aligned}$$

მივიღებთ

$$x = 1, \quad y = 2.$$

შევადგინოთ გარდაქმნის ფორმულები

$$\begin{aligned} x &= 1 + x_1, \\ y &= 2 + y_1. \end{aligned}$$

გვექნება

$$\begin{aligned} 13x_1^2 + 10x_1y_1 + 13y_1^2 + (13 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 \cdot 2 + 13 \cdot 2^2 - \\ - 46 \cdot 1 - 62 \cdot 2 + 13) = 0, \end{aligned}$$

ანუ

$$13x_1^2 + 10x_1y_1 + 13y_1^2 - 72 = 0, \quad (34)$$

ახლა განვსაზღვროთ $O_1 x_1 y_1$ კოორდინატთა სისტემის შემობრუნების კუთხე.

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{13 - 13}{10} = 0,$$

საიდანაც

$$2\alpha = \frac{3\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}.$$

შევადგინოთ გარდაქმნის ფორმულები:

$$x_1 = x' \cos \frac{3\pi}{4} - y' \sin \frac{3\pi}{4} = -(x' + y') \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y_1 = x' \sin \frac{3\pi}{4} + y' \cos \frac{3\pi}{4} = (x' - y') \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ამ მნიშვნელობათა (34)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} 13 \left[-(x' + y') \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^2 + 10 \left[-(x' + y') \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' - y') \frac{1}{\sqrt{2}} \right] + \\ + 13 \left[(x' - y') \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^2 = 72. \end{aligned}$$

ანუ

$$8x'^2 + 18y'^2 = 72. \quad (35)$$

(35) ტოლობის ორივე ნაწილის თავისუფალ წევრზე გაყოფით გვექნება

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1. \quad (36)$$

მივიღეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება. მაშასადამე (33) განტოლება გამოსახავს ელიფსს. მისი გრაფიკი მოცემულია 23-ე ნახაზზე.

მაგალითი 2. მივიყვანოთ კანონიკურ სახეზე განტოლება

$$2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y - 2 = 0 \quad (37)$$

და ავაგოთ წირი.

გამოვთვალოთ $AC - B^2$.

$$AC - B^2 = 2(-3) - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \neq 0.$$

(37) წირი ცენტრიანია. ვიპოვოთ ცენტრის კოორდინატები. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$2x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = 0,$$

$$-\frac{1}{2}x - 3y + \frac{7}{2} = 0.$$

მივიღებთ $x = 1, y = 1$.

შევადგინოთ გარდაქმნის ფორმულები:

$$x = 1 + x_1, \quad y = 1 + y_1. \quad (38)$$

ამ მნიშვნელობათა (37)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$2x_1^2 - x_1y_1 - 3y_1^2 + (2 \cdot 1^2 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 2) = 0,$$

ანუ

$$2x_1^2 - x_1y_1 - 3y_1^2 = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4}.$$

აქედან კი გვექნება ორი მნიშვნელობა:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)_1 = \frac{3}{2}, \quad \left(\frac{x_1}{y_1}\right)_2 = -1. \quad (39)$$

თუ (38)-დან განვსაზღვრავთ x_1 და y_1 და შევიტანთ (39)-ში, მივიღებთ:

$$\frac{x-1}{y-1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{x-1}{y-1} = -1.$$

ამ განტოლებათა გამარტივება მოგვცემს:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 1 &= 0, \\ x + y - 2 &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

ამგვარად, (37) განტოლება იძლევა ორი წრფის ერთობლიობას, რომლებიც გადიან (1,1) წერტილზე (ნახ. 24).

მაგალითი 3. მივიყვანოთ კანონიკურ სახეზე

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 250x + 250y + 375 = 0 \quad (41)$$

განტოლება და ავაგოთ წირი.

ჯერ გამოვთვალოთ

$$AC - B^2 = 9 \cdot 16 - 12^2 = 0.$$

მაშასადამე, (41) წირი უცენტროა.

(41) განტოლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$(3x + 4y)^2 - 250x + 250y + 375 = 0. \quad (42)$$

მკუთხე განვსაზღვროთ შემდეგი ტოლობიდან

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{3}{4},$$

საიდანაც

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{4}{5}.$$

შევადგინოთ გარდაქმნის ფორმულები:

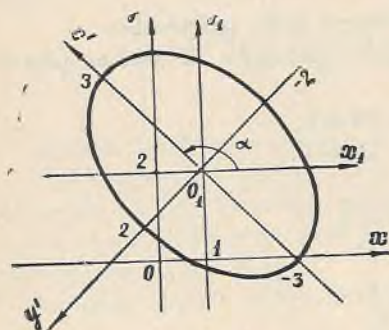
$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y',$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'.$$

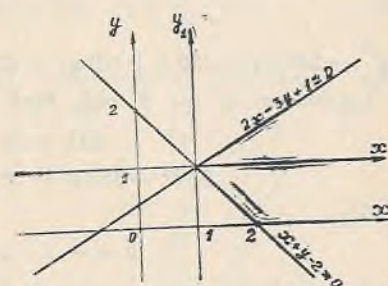
ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (42)-ში, მივიღებთ

$$(5y')^2 - 350x' + 50y' + 375 = 0. \quad (43)$$

329



ნახ. 23



ნახ. 24

კოორდინატა Ox, y , სისტემა გადავიტანოთ პარალელურად:

$$x' = a + x_1, \quad y' = b + y_1.$$

ამ გარდაქმნით (43) მოგვცემს

$$25(b + y_1)^2 - 350(a + x_1) + 50(b + y_1) + 375 = 0,$$

ანუ

$$25y_1^2 - 350x_1 + (50b + 50)y_1 + (25b^2 - 350a + 50b + 375) = 0. \quad (44)$$

შევარჩიოთ a და b ისე, რომ

$$50b + 50 = 0,$$

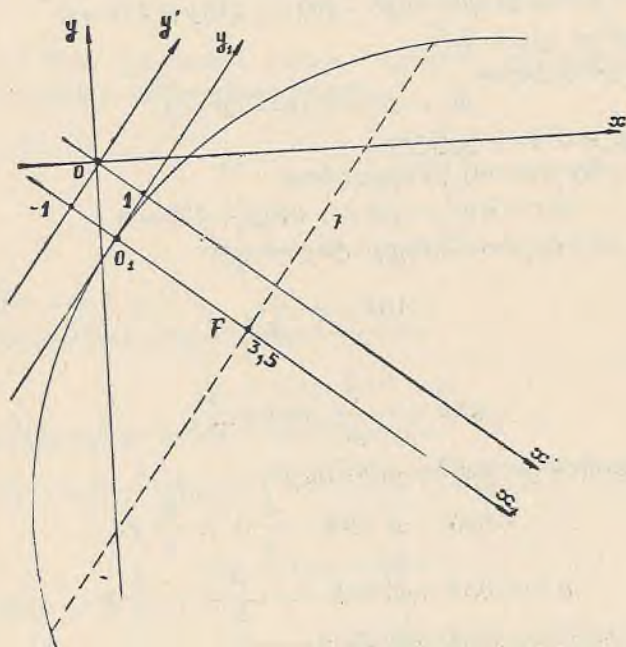
$$25b^2 - 350a + 50b + 375 = 0.$$

საიდანაც

$$b = -1, \quad a = 1.$$

ამგვარად განსაზღვრული a -სა და b -ს საშუალებით (44) მოგვცემს (ნახ. 25)

$$y_1^2 = 14x_1. \quad (45)$$



ნახ. 25.

მივიღეთ პარაბოლის კანონიკური განტოლება. ამგვარად, (41) განტოლება გამოსახავს პარაბოლს, რომლის კანონიკური განტოლება კოორდინატა სისტემაში არის (45). წირი აგებულია 25-ე ნახაზზე.

მაგალითი 4. მივიყვანოთ კანონიკურ სახეზე განტოლება

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0 \quad (46)$$

და ავაგოთ წირი.

აღვიღო შესაძენევა, რომ (46) განტოლებით გამოსახული წირი უცენტროა

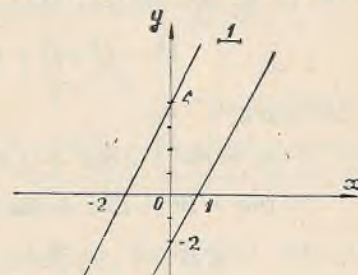
$$AC - B^2 = 4 \cdot 1 - 2^2 = 0.$$

(46) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$(2x - y)^2 + 2(2x - y) - 8 = 0.$$

თუ მიღებულ განტოლებას ამოვხსნით $(2x - y)$ -ის მიმართ, გვექნება

$$2x - y = -1 \pm 3.$$



ნახ. 26

ამგვარად, (46) განტოლება გამოსახავს პარალელურ წრფეთა ერთობლიობას

$$2x - y - 2 = 0,$$

$$2x - y + 4 = 0.$$

ეს წრფეები აგებულია 26-ე ნახაზზე.

4. შენიშვნა. მეორე რიგის წირის განტოლების უმარტივეს სახეზე მისაყვანად ჯერ უნდა გამოვარკვიოთ წირი ცენტრიანია თუ არა. თუ ცენტრიანია, $AC - B^2 \neq 0$, მაშინ უნდა ვიპოვოთ ცენტრი. ამისათვის უნდა ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} Ax + By + D &= 0, \\ Bx + Cy + E &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

ამის შემდეგ კოორდინატა სისტემა გადავიტანოთ პარალელურად

$$x = a + x_1,$$

$$y = b + y_1.$$

შემდეგ კი $O_1x_1y_1$ კოორდინატა სისტემა შემოვებრუნოთ θ კუთხით,

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{2B}.$$

რის შედეგადაც (1) ზოგადი განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$k_1 x'^2 + k_2 y'^2 + u_0 = 0, \quad (48)$$

სადაც

$$k_1 = A_1, \quad k_2 = C_1, \quad u_0 = U(a, b).$$

ადგილი შესაძლებელია (14) ტოლობების საფუძველზე, რომ

$$k_1 + k_2 = A_1 + C_1 = A + C, \quad k_1 k_2 = A_1 C_1 = AC - B^2.$$

ე. ი. k_1 და k_2 ამონახსნებია შემდეგი კვადრატული განტოლებისა:

$$k^2 - (A+C)k + (AC - B^2) = 0. \quad (49)$$

გამოვთვალოთ u_0 ,

$$\begin{aligned} u_0 &= Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F = \\ &= (Aa + Bb + E)a + (Ba + Cb + D)b + Da + Eb + F, \end{aligned} \quad (50)$$

სადაც (47) სისტემიდან გვექნება

$$\left. \begin{aligned} Aa + Bb + D &= 0, \\ Ba + Cb + E &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

ამის გამო (50) მოგვცემს

$$u_0 = Da + Eb + F.$$

გამოვთვალოთ (51)-დან a და b , გვექნება:

$$a = \frac{-\begin{vmatrix} D & B \\ E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{-\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

ეს მნიშვნელობანი შევიტანოთ u_0 -ის გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$u_0 = \frac{D \begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} - E \begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} + F = \frac{D \begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} - E \begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix} + F \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}},$$

ანუ

$$u_0 = \begin{vmatrix} D & E & F \\ A & B & D \\ B & C & E \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}. \quad (52)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \quad (42)$$

მაშინ (52) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$u_0 = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (53)$$

ამის გამო (48) განტოლება საბოლოოდ ასეთი სახის იქნება:

$$k_1 x'^2 + k_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (54)$$

k_1 -სა და k_2 -ს ნიშნის მიხედვით შეგვიძლია განვსაზღვროთ როგორი ტიპის წირს იძლევა (54) განტოლება; რაც იგივეა, როგორი ტიპის წირს იძლევა მეორე ხარისხის ზოგადი განტოლება

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1)$$

k_1 -სა და k_2 -ის ნიშანი კი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობიდან:

$$k_1 k_2 = AC - B^2.$$

1) თუ $AC - B^2 > 0$, მაშინ გვაქვს ელიფსური ტიპის წირი: ელიფსი (ან წრეწირი), ან წარმოსახვით წერტილთა სიმრავლე, ან წერტილი. წერტილი მიიღება, თუ $\Delta = 0$.

2) თუ $AC - B^2 < 0$, მაშინ გვაქვს ჰიპერბოლური ტიპის წირი: ჰიპერბოლა ან ორ გადაშტეკვით წრფეთა ერთობლიობა. ორი გადაშტეკვითი წრფე მიიღება, თუ $\Delta = 0$. შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ამ შემთხვევაში (54) განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

აქედან კი, ცხადია,

$$(bx - ay)(bx + ay) = 0,$$

ანუ

$$bx - ay = 0, \quad bx + ay = 0.$$

მთელი ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის დროს ვგულისხმობდით $B \neq 0$. თუ $B = 0$, მაშინ საჭიროა კოორდინატთა ღერძების პარალელურა გადატანა ისე, რომ ახალი კოორდინატთა სისტემის სათავე მოხვდეს წირის ცენტრში. ამით ზოგადი განტოლება მიიყვანება კანონიკურ სახეზე.

თუ (1) წირი უცენტროა, $AC - B^2 = 0$ და D და E პროპორციულია α და β -სი, $D = m\alpha$, $E = m\beta$, მაშინ (32) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2m(\alpha x + \beta y) + F = 0.$$

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ამ განტოლების ამონახსნით მივიღებთ ან პარაბოლურ წრფეებს, როცა ამონახსნები ნამდვილია, $\alpha x + \beta y = p_1$, $\alpha x + \beta y = p_2$, ან თანამთხვეულ წრფეებს, როცა $p_1 = p_2$ და, თუ p_1 და p_2 წარმოსახვითია, მაშინ განტოლება გამოსახავს წარმოსახვით პარაბოლურ წრფეებს.

თუ (1) წირი უცენტროა და D და E პროპორციული არაა α და β -სი, მაშინ ზოგადი (1) განტოლებით გამოსახული წირი პარაბოლაა.

5. ამოცანები. ამოცანა 1^ა. კიდული ხიდის ბაგირს პარაბოლის ფორმა აქვს (ნახ. 27). ბაგირის ლუნი $OA = a$, მალის სიგრძე $BC = 2b$. დავეწყოთ ბაგირის განტოლება ნახაზზე ნაჩვენები კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

ამოხსნა. პარაბოლის განტოლება დავწეროთ კანონიკური სახით

$$x^2 = 2py, \quad (1)$$

სადაც p საძიებელი პარამეტრია. რადგანაც პარაბოლა გაივლის $C(b, a)$ წერტილზე, გვექნება

$$b^2 = 2pa,$$

საიდანაც შეგვიძლია $2p$ -ს განსაზღვრა,

$$2p = \frac{b^2}{a}.$$

$2p$ -ს მნიშვნელობა შევიტანოთ (1) განტოლებაში, მივიღებთ საძიებელ განტოლებას

$$x^2 = \frac{b^2}{a} y,$$

ანუ

$$y = \frac{a}{b^2} x^2. \quad (2)$$

ამოცანა 2. A წერტილში იმყოფება ქალაქი, B წერტილში რკინიგზის სადგური, რომელიც A ქალაქთან სწორი რკინიგზის ხაზითაა შეერთებული. C ადგილას განლაგებულია სოფლები. ამათგან ერთ-ერთი

¹ ვლ. კვლიძე, ნ. ლომჯარიძე, გ. ხახუზია, უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტ. I, თბილისი, 1962, გვ. 158.

სოფელია M . სოფლებიდან ტვირთის ჩატანა შეიძლება A ქალაქში პირდაპირ ავტომობილით, ან ავტომობილით ტვირთი მივიტანოთ B სადგურამდე, შემდეგ კი მატარებლით გადავზიდოთ A ქალაქში. (ნახ. 28). გამოვარკვიოთ, რომელი გზით, MBA თუ MA , უფრო ხელსაყრელია ტვირთის გადაზიდვა M სოფლიდან A ქალაქში.



ნახ. 28

ვთქვათ, სათანადო მანძილებია:

$$|MA| = r_1, |MB| = r_2, |AB| = l.$$

ტვირთის 1 კილომეტრზე გადატანა ავტომობილით ჯდება p მანეთი,

ხოლო რკინიგზით q მანეთი. ერთი ტონა ტვირთის ჩატვირთვა და A ქალაქში გადმოტვირთვა ღირს m მანეთი, ამისთან $p > q$.

თუ ტვირთი M სოფლიდან A ქალაქში პირდაპირ ავტომობილით გადავზიდეთ, გადაზიდვის ხარჯი იქნება pr_1 მანეთი, ხოლო, თუ სოფლიდან ქალაქში ტვირთი გადავზიდეთ B სადგურის გავლით, მაშინ გადაზიდვის ხარჯები იქნება $pr_2 + lq + m$.

M წერტილის იმ მდებარეობისათვის, რომლისთვისაც

$$pr_1 = pr_2 + lq + m, \quad (1)$$

ტვირთის გადაზიდვის ხარჯები სოფლიდან ორივე გზით ერთი და იგივე იქნება. (1) განტოლებიდან მივიღებთ

$$r_1 - r_2 = \frac{lq + m}{p}.$$

ეს კი ჰიპერბოლის განსაზღვრაა.

ამგვარად, თუ M სოფელი მდებარეობს ჰიპერბოლაზე, რომლის ფოკუსებია A და B , ხოლო ნამდვილი ნახევარღერძის სიგრძეა

$$a = \frac{lq + m}{2p},$$

მაშინ ტვირთის გადაზიდვის ხარჯები ორივე მიმართულებით ტოლია. რადგანაც $a > 0$, მაშინ, ცხადია, $r_1 - r_2 > 0$. მივიღებთ ჰიპერბოლის ერთ შტოს, რომლის შესაბამისი ფოკუსია B წერტილი. იმ სოფლებისათვის, რომლებიც მდებარეობენ ჰიპერბოლიდან A ქალაქის მხარეს, უმჯობესია ტვირთი პირდაპირ A ქალაქში გადავზიდოთ ავტომობილით, ხოლო იმ სოფლებისათვის, რომლებიც მდებარეობენ ჰიპერბოლიდან B სადგურისაკენ, უმჯობესია, ტვირთი ჯერ B სადგურამდე მივიტანოთ ავტომობილით, შემდეგ კი გადავზიდოთ მატარებლით.

ისეთი M წერტილის არსებობისათვის, რომ ABM სამკუთხედი იყოს, აუცილებელია და საკმარისია

$$r_1 - r_2 < l,$$

ანუ

$$\frac{lq + m}{p} < l,$$

საიდანაც

$$m < l(p - q).$$

ეს უტოლობა კი გვიჩვენებს, რომ l არ უნდა იყოს ძალიან მცირე. წინა-აღმდეგ შემთხვევაში უტოლობა დაირღვევა, ე. ი. როცა A ქალაქიდან B სადგური ახლოსაა, ჩატვირთვა-გადმოტვირთვის m ფასს ვერ ანაზღაურებს რკინიგზით გადატანის ხარჯებს ის განსხვავდება, რომელსაც იძლევა მცირე მანძილზე რკინიგზის იაფი ტარიფით ტვირთის გადატანა.

ამოცანა 3. ავაგოთ კვადრატული ფუნქცია

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (1)$$

კვადრატული ფუნქცია (1) გამოსახავს პარაბოლას,

$$AC - B^2 = a \cdot c - b^2 = 0,$$

რომლის სიმეტრიის ღერძი Oy ღერძის პარალელურია. (1) ფუნქცია ასე გადავწეროთ:

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right],$$

საიდანაც

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2. \quad (2)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$x + \frac{b}{2a} = x_1 \quad (3)$$

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = y_1,$$

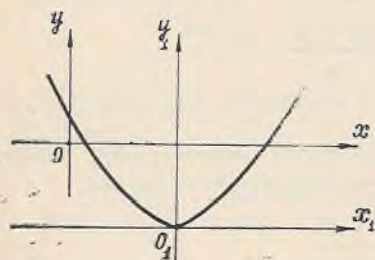
მაშინ (2) ტოლობა მოგვცემს

$$y_1 = ax_1^2. \quad (2)$$

(3) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$x = -\frac{b}{2a} + x_1, \quad y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + y_1.$$

ე. ი. Oxy სისტემიდან Ox_1y_1 სისტემა მიიღება პარალელური გადატანით, სადაც ახალი სისტემის სათავე $O_1 \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$ წერტილშია (ნახ. 29).



ნახ. 29

ეს კი გვიჩვენებს, რომ (1) კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის წვერო $O_1 \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$ წერტილშია, ხოლო სიმეტრიის ღერძია

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ წრფე.}$$

ამოცანა 4. გავამარტივოთ ტოლგვერდა ჰიპერბოლის

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (1)$$

განტოლება.

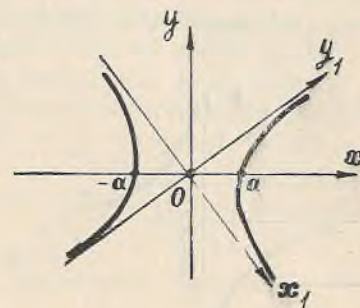
შემოვიღოთ ახალი კოორდინატთა სისტემა, რომელიც მიიღება

Oxy სისტემიდან $-\frac{\pi}{4}$ კუთხით

მობრუნებით (ნახ. 30).

$$x = x_1 \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) - y_1 \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right),$$

$$y = x_1 \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) + y_1 \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right).$$



ნახ. 30

ამ ახალ კოორდინატთა სისტემაში (1) განტოლება მოგვცემს

$$\left[(x_1 + y_1) \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^2 - \left[(x_1 - y_1) \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^2 = a^2,$$

ანუ

$$2x_1y_1 = a^2,$$

საიდანაც

$$x_1y_1 = \frac{a^2}{2}. \quad (2)$$

ამგვარად, ტოლგვერდა ჰიპერბოლა (1) გამოსახავს x_1 და y_1 -ს შორის უკუპროპორციულ დამოკიდებულებას.

(2) წირის ასიმპტოტებია $x_1 = 0$ და $y_1 = 0$.

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$y = \frac{a}{x} + b. \quad (3)$$

(3)-დან ცხადია, $x \rightarrow \infty, y \rightarrow b$. (3) ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{y - b},$$

საიდანაც $y \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$

22. გ. კომლაძე

ამგვარად, (3) წირის ასიმპტოტებია

$$x = 0, \quad y = b. \quad (4)$$

ამის გამო აღვილი წარმოსადგენია, რომ (3) წირს ექნება 31-ე ნახაზზე გამო-
სახული სახე.

ამოცანა 6. ავაგოთ წილად-წრფივი ფუნქცია

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}. \quad (1)$$

თუ (1) გამოსახულების პრიცველსა და მნიშვნელს c -ზე გავყოფთ, მი-
ვიღებთ

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{x + \delta}, \quad (2)$$

სადაც

$$\alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = \frac{b}{c}, \quad \delta = \frac{d}{c}.$$

(2) გამოსახულება ასე გადაწეროთ:

$$y = \frac{\alpha(x + \delta) + \beta - \alpha\delta}{x + \delta}.$$

ანუ

$$y = \alpha + \frac{\beta - \alpha\delta}{x + \delta}. \quad (3)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$y_1 = y - \alpha, \quad x_1 = x + \delta, \quad (4)$$

მაშინ (3) გამოსახულება მოგვცემს

$$y_1 = \frac{A}{x_1}, \quad (5)$$

სადაც

$$A = \beta - \alpha\delta$$

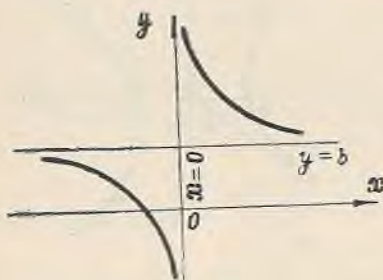
ამგვარად, წილად-წრფივი ფუნ-
ქცია (1) გამოსახეს უკუპროპორ-
ციულ დამოკიდებულებას. (5) ფუნ-
ქციის გრაფიკის აგება არავითარ
სიძნელეს არ წარმოადგენს. (5) წი-
რის ასიმპტოტებია $x_1 = 0, y_1 = 0$,

ანუ

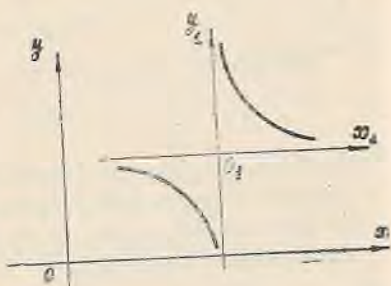
$$x = -\delta, \quad y = \alpha.$$

ეს ასიმპტოტებია ახალი კოორდინატა სისტემის ღერძები x_1 და y_1 .
თუ $A > 0$, მაშინ (5) წირის გრაფიკი მოთავსდება პირველ და მესამე
მეოთხედში. თუ $A < 0$, მაშინ წირის გრაფიკი მოთავსდება მეორე და
მეოთხე მეოთხედში (ნახ. 32).

338



ნახ. 31



ნახ. 32

(4) დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ ახალი x_1, y_1 კოორდინატა
სისტემის სათავე მოთავსებულია $O_1(-\delta, \alpha)$ წერტილში და ღერძები x_1
და y_1 სათანადო x -ისა და y -ის პარალელურია.

§ 8. მაორა რიგის წირების გამოსახვა ეკონომიკურ ამოცანებში¹

1. უკუპროპორციული დამოკიდებულება. ეკონომიკურ ამოცანებში
ხშირად განიხილება ისეთი სიდიდეები, რომელთა შორის არსებობს უკუ-
პროპორციული დამოკიდებულება. მაგალითად, პროდუქტის ღირებულე-
ბასა და შრომის საწარმოო ძალებს შორის არსებობს უკუპროპორციუ-
ლი დამოკიდებულება. საწარმოო ძალთა რაიმე დონე მივიღოთ ერთეუ-
ლად, ხოლო მისი შესაბამისი პროდუქტის ღირებულება (გამოშვებული
პროდუქტის ღირებულება) მივიღოთ 100 (მანეთად). საწარმოო ძალთა
სიდიდე აღვნიშნოთ x -ით, ხოლო გამოშვებული პროდუქტის ღირებუ-
ლება აღვნიშნოთ y -ით. მათ შორის გვექნება შემდეგი დამოკიდებულება

$$y = \frac{100}{x}. \quad (1)$$

მივიღეთ ე. წ. ტოლგვერდა ჰიპერბოლა. (1) ჰიპერბოლის ასიმპტოტებია
 $x = 0, y = 0$. როცა $x \rightarrow 0$, მაშინ $y \rightarrow \infty$. მაგრამ $x = 0, y = \infty$, რეალური
აზრი არ აქვს; თუ საწარმოო ძალა ნულის ტოლია, წარმოებას აზრი არა
აქვს.

თუ x იზრდება, მაშინ y მცირდება. საწარმოო ძალა უსასრუ-
ლობაა, ნიშნავს: არ ვიშრომით, მაგრამ მივიღოთ ნებისმიერი რაოდენ-
ობის პროდუქტი. ამ შემთხვევაში პროდუქტის ღირებულება ნულია;
პროდუქტი შრომის შედეგად კი არაა მიღებული, არამედ ბუნებისაგანაა
ნაწყალობევი, როგორც ჰაერი, წყალი და სხვ.

2. წილადწრფივი ფუნქცია. ვთქვათ, წლიურად x რაოდენობის პრო-
დუქტის გამოშვების ხარჯებია $ax + b$, სადაც a ერთეული პროდუქტის
ხარჯი (მაგალითად, ერთი ტონა თუჩის გამოდნობის ხარჯი), b წლიური
ხარჯები, რომლებიც არაა დამოკიდებული გამოშვებული პროდუქტის
რაოდენობაზე (მაგალითად, შენობის ამორტიზაცია, დაცვის მუშაკთა
ხარჯები და სხვ.).

გამოშვებული პროდუქტის ერთეულის თვითღირებულება y -ით
აღვნიშნოთ. ცხადია, გამოშვებული პროდუქტის ერთეულის ღირებუ-
ლება ტოლია მთელი ხარჯები გაყოფილი გამოშვებული პროდუქტის
რაოდენობაზე,

$$y = \frac{ax + b}{x},$$

¹ А. Я. Боярский, Математика для экономистов, М., 1961, гл. 45—53.

$$y = a + \frac{b}{x} \quad (2)$$

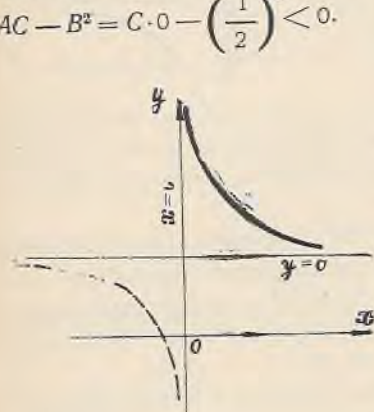
მიღებული ფუნქცია გამოსახავს ჰიპერბოლას, რომლის ასიმპტოტებია $x=0$, და $y=a$, ე. ი. ჰიპერბოლა გადაადგილებულია y ღერძის გასწვრივ a სიდიდით (ნახ. 33).

თუ აღებული პროდუქტის x რაოდენობის გამოშვებისათვის მუშას დამატებით ეძლევა cx მანეთი, მაშინ გამოშვებული პროდუქტის ერთეულის თვითღირებულება იქნება

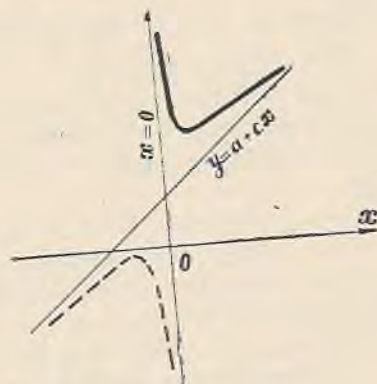
$$y = a + \frac{b}{x} + cx \quad (3)$$

მიღებული ფუნქცია ჰიპერბოლას გამოსახავს, რაშიც ადვილად დაგრწმუნდებით, თუ (3) გამოსახულებას გავაერთმნიშვნელიანებთ,

$$AC - B^2 = C \cdot 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 0.$$



ნახ. 33



ნახ. 34

ვიპოვოთ (3) წირის ასიმპტოტები.

როცა $x \rightarrow 0$, მაშინ $y \rightarrow \infty$. მაშასადამე, (3) წირის ერთი ასიმპტოტია $x=0$. მეორე ასიმპტოტისათვის განვიხილოთ სხვაობა (3) ფუნქციასა და

$$Y = a + cx$$

ფუნქციას შორის, როცა $x \rightarrow \infty$. გვექნება

$$y - Y = \frac{b}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (y - Y) = 0.$$

მაშასადამე, (3) წირის მეორე ასიმპტოტია $y = a + cx$

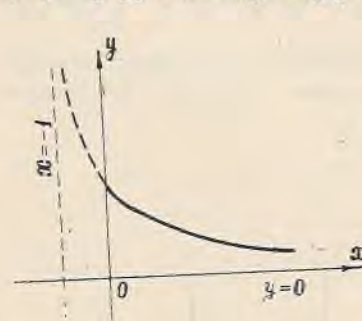
(3) ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია 34-ე ნახაზზე.

თუ (2) ან (3) განტოლებებს აბსტრაქტულად განვიხილავთ, მაშინ შეგვიძლია ავიღოთ x -ის უარყოფითი მნიშვნელობებიც, რითაც მივიღებთ ჰიპერბოლის მეორე შტოს, რაც გრაფიკებზე პუნქტირითაა აღნიშნული. მაგრამ განხილული ეკონომიკური ამოცანებისათვის ჰიპერბოლის მეორე შტოს რეალური აზრი არა აქვს.

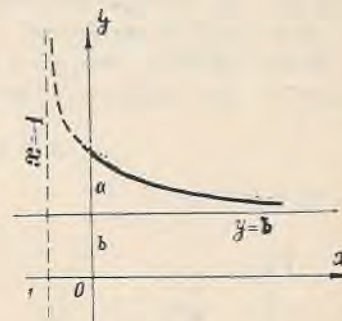
მუშის ხელფასის დონე განისაზღვრება ერთი მუშის მიერ გამომუშავებული საშუალო ხელფასის სიდიდით. ვთქვათ, ეს სიდიდეა a . მუშის მატერიალური კეთილდღეობა კი დამოკიდებულია მუშის კმაყოფილებაზე მყოფ სულთა რაოდენობაზე. თუ მუშის მატერიალური კეთილდღეობის დონეს y -ით აღვნიშნავთ, ხოლო კმაყოფილებაზე მყოფ სულთა რიცხვს x -ით, მაშინ გვექნება

$$y = \frac{a}{1+x} \quad (4)$$

(1-თვის მუშა). გრაფიკულად ეს ფუნქცია ნაჩვენებია 35-ე ნახაზზე. ჰიპერბოლა გადაადგილებულია მარცხნივ. ამ ჰიპერბოლის ასიმპტოტებია $x=-1$, $y=0$. ჰიპერბოლის შტოს იმ მონაკვეთს, რომელიც Oy ღერძის მარცხნივაა მოთავსებული, $x < 0$, რეალური აზრი არა აქვს, ამიტომ ეს ნაწილი პუნქტირითაა აღნიშნული.



ნახ. 35



ნახ. 36

თუ უფრო დაწვრილებით გავარჩევთ იმ დახმარებას, რასაც მუშა ლეზულობს: ავადმყოფობის პერიოდში სოციალური ხარჯები, უფასო საგზურები სანატორიუმებში და დასასვენებელ სახლებში, სამსახურებრივი მანქანებით მომსახურება და სხვ. და, თუ ყველა ამ შემოსავალს ერთ სულზე b -თი აღვნიშნავთ, მაშინ, ნაცვლად (4) დამოკიდებულებისა, გვექნება

$$y = \frac{a}{1+x} + b \quad (5)$$

მიღებული (5) ჰიპერბოლა გადაადგილებულია y ღერძის მიმართ b სიდიდით (ნახ. 36). (5) ჰიპერბოლის ასიმპტოტებია $x=-1$, $y=b$.

ზემოთ გავარჩიეთ გამოშვებული x რაოდენობის თვითღირებულება y . იგი გამოისახება ერთი ჰიპერბოლით (2). ამ ჰიპერბოლის პარამეტრებია a და b . a — ერთეული პროდუქციის გამოშვების ხარჯი, b — ხარჯები, რომლებიც არაა დამოკიდებული გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაზე, მაგრამ აუცილებელია წარმოებისათვის.

ვთქვათ, გვინდა გამოსაშვები პროდუქციის რაოდენობის გაზრდა. როგორც აღინიშნა, გამოსაშვები პროდუქციის რაოდენობის გაზრდა ნებისმიერად არ შეიძლება. ამისათვის უნდა შეიცვალოს მუდმივი ხარჯები. მაგალითად, უნდა დაიდგას ახალი მოწყობილობა, აიგოს ახალი შენობა და სხვ. ამით მივიღებთ სხვა პარამეტრებს და პროდუქციის თვითღირებულებისათვის გვექნება სხვა ჰიპერბოლა. ასე რომ, x -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის გვექნება სხვადასხვა ჰიპერბოლა.

ვთქვათ, $0 < x \leq x_1$ რაოდენობის პროდუქციის შემთხვევაში პროდუქციის თვითღირებულება განისაზღვრება შემდეგი ჰიპერბოლით

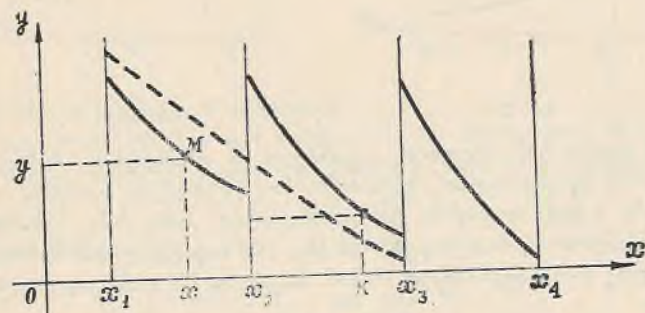
$$y = a_1 + \frac{b_1}{x} \quad (6)$$

ე. ი. ერთი საწარმოო პროცესით გამოშვებული პროდუქციის თვითღირებულება, თუ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა x არ აღემატება x_1 -ს, გამოისახება (6) ფუნქციით.

მეორე საწარმოო პროცესით გამოშვებული პროდუქციის თვითღირებულება $x_2 < x \leq x_3$ -თვის განისაზღვრება შემდეგი ჰიპერბოლით

$$y = a_2 + \frac{b_2}{x}$$

და ა. შ. (ნახ. 37).



ნახ. 37

რომ განესაზღვროთ x რაოდენობის პროდუქციის თვითღირებულება, საკმარისია, x ღერძის x წერტილზე გავატაროთ Oy ღერძის პარალელური წრფე. ეს წრფე რომელიმე ჰიპერბოლას გადაკვეთს. გადაკვეთის M

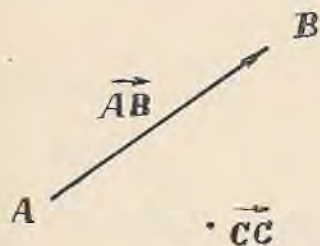
წერტილის ორდინატის y -ის მნიშვნელობა მოგვცემს პროდუქციის თვითღირებულებას.

ნახაზიდან ცხადია, თუ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა $k < x < x_3$, მაშინ პროდუქციის თვითღირებულება მცირეა, ვიდრე პროდუქციის თვითღირებულება, როცა $x_2 \leq x \leq k$. ამიტომ უფრო ხელსაყრელია $k < x \leq x_3$ რაოდენობის პროდუქციის გამოშვება. თუ $x_1 < x < x_3$ -თვის პროდუქციის თვითღირებულება განისაზღვრება ნახაზზე პუნქტირით მოცემული ჰიპერბოლით, მაშინ შეგვიძლია პროდუქციის გამოშვების ისეთი ვარიანტი ავირჩიოთ (საწარმოო ისეთი პროცესი ავიღოთ), რომელიც მოგვცემს პროდუქციის უმცირეს თვითღირებულებას აღებული x -სათვის.

ვექტორული ალგებრა

§ 1. ვექტორები სივრცეში. მოძრაობის ვექტორები

1. ვექტორის ცნება¹. ვექტორთა ურთიერთ კოლინეარობა. განვიხილოთ სიდიდეები: ერთი მხრივ — მონაკვეთის სიგრძე, ჰაერის ტემპერატურა, სხეულის მოცულობა, მასა, სიმკვრივე; მეორეს მხრივ — მატერიალური წერტილის გადაადგილება, მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალა, სიჩქარე, აჩქარება. პირველი ამ სიდიდეებთან ხასიათდება მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობებით, ხოლო მეორე სიდიდეები ხასიათდება რიცხვითი მნიშვნელობებითა და მიმართულებებით. მაგალითად, A ქალაქში ჰაერის ტემპერატურა 20° -ია, A ქალაქსა და B ქალაქს შორის მანძილი 75 კმ-ია. ამ რიცხვებით სრულიად დახასიათებულია A ქალაქში როგორი სიბზოა და რა მანძილითაა დაშორებული A ქალაქიდან B ქალაქი. მაგრამ ავტომობილის სიჩქარე A ქალაქსა და B ქალაქს შორის



ნახ. 1

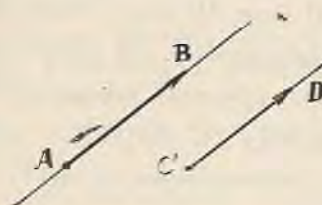
აღებულ მომენტში 50 კმ/ს. არ კმარა ავტომობილის მოძრაობის დასახასიათებლად. საჭიროა მოძრაობის მიმართულების, ანუ სიჩქარის მიმართულების ცოდნაც. ზემოთ ჩამოთვლილ პირველ სიდიდეებს სკალარულ სიდიდეებს უწოდებენ, ხოლო მეორე სიდიდეებს ვექტორულ სიდიდეებს. ბუნებაში არსებული ვექტორული სიდიდეების კონკრეტული თვისებების აბსტრაქციით მივიღივართ გეომეტრიული ვექტორის ან მარტივად ვექტორის ცნებამდე.

გეომეტრიული ვექტორი, ანუ მარტივად ვექტორი ეწოდება მიმართულ მონაკვეთს. ვექტორი, რომლის საწყისი წერტილია A , ხოლო ბოლო წერტილია B , აღინიშნება $\vec{AB}$ სიმბოლოთი (ნახ. 1). A წერტილის ეწოდება $\vec{AB}$ ვექტორის მოდების წერტილი. $\vec{AB}$ ვექტორის

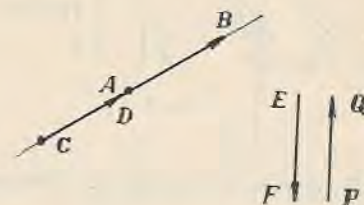
¹ იხ. ლიტერატურა: [22], [26], [43], [37].

შესახებ ვიტყვით: $\vec{AB}$ ვექტორი გადადებულია A წერტილიდან. ვექტორს, რომლის საწყისი და ბოლო წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, ეწოდება ნულოვანი ვექტორი. $\vec{AA}$ ნულოვანი ვექტორია. ამ შემთხვევაში A წერტილი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია. ნულოვან ვექტორს შემოკლებით ნულვექტორს უწოდებენ. ნულვექტორი $\vec{0}$ -ით ან 0 -ით აღინიშნება.

A და B წერტილებს შორის მანძილს ეწოდება $\vec{AB}$ ვექტორის სიგრძე ან ვექტორის აბსოლუტური სიდიდე (მოდული) და აღინიშნება $|\vec{AB}|$ სიმბოლოთი. ნულვექტორის სიგრძე ნულის ტოლია, ხოლო მისი მიმართულება განსაზღვრული არაა.



ნახ. 2

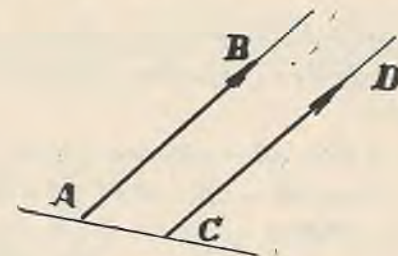


ნახ. 3

$\vec{AB}$ ვექტორის შესახებ ვიტყვით, რომ მდებარეობს (ეკუთვნის) AB წრფეზე ან AB სხივზე (ნახევარწრფეს) (ნახ. 2). ორი ვექტორი ერთიკოლინეარულია, თუ ისინი ერთ წრფეზე ან ურთიერთპარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ. მე-3 ნახაზზე ნაჩვენებია $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, $\vec{EF} \parallel \vec{PQ}$.

$\vec{AB}$ და $\vec{CD}$ ვექტორებს ერთნაირადმიმართული ან თანამიმართული ეწოდება, თუ სხივები AB და CD ერთნაირადაა მიმართული (ნახ. 4).

გავიხსენოთ საშუალო სკოლის გეომეტრიის კურსიდან: ორ სხივს ერთნაირად მიმართული ეწოდება, თუ პარალელური გადატანით ერთა მათგანი მეორეს შეუთავსდება, ანუ, თუ არსებობს პარალელური გადატანა, რომელიც ერთ სხივს მეორეში გადაიტანს.

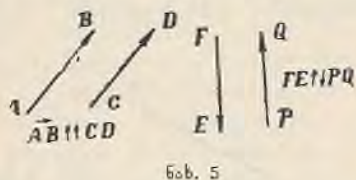


ნახ. 4

ადგენი დასამტკიცებელია: თუ AB და CD ურთიერთ პარალელური წრფეებია, B და D წერტილები AC წრფის ერთსა და იგივე მხარეს მდებარეობს, მაშინ AB და CD სხივები ერთნაირადაა მიმართული.

AB წრფე O წერტილით ორ OA და OB სხივებად გაიყოფა, თუ O წერტილი AB მონაკვეთს ეკუთვნის. ამასთან ერთ-ერთ სხივს მეორე სხივის დამატება ეწოდება.

ორ სხივს ურთიერთმომპირდაპირედ მიმართული ეწოდება, თუ თითოეული მათგანი და მეორეს დამატებითი სხივი ერთნაირადაა მიმართული.



ნახ. 5

$\vec{CD}$ ვექტორი $\vec{AB}$ ვექტორის მოპირდაპირე მიმართულებისაა, თუ CD სხივი AB სხივის მოპირდაპირე მიმართულებისაა. $\vec{AB}$ ვექტორი რომ $\vec{CD}$ ვექტორის მიმართულებისაა, ასე ჩაიწერება: $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$, ხოლო

$\vec{AB}$ ვექტორი $\vec{CD}$ ვექტორის საწინააღმდეგო მიმართულებისაა ასე: $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$ (ნახ. 5).

2. ვექტორთა ტოლობა. $\vec{AB}$ ვექტორი $\vec{CD}$ ვექტორის ტოლია, თუ $\vec{AB}$ ვექტორი პარალელური გადატანით $\vec{CD}$ ვექტორს შეუთავსდება. ყველა ნულვექტორი ურთიერთტოლია.

განსაზღვრის თანახმად $\vec{AB}$ ვექტორი $\vec{CD}$ ვექტორის ტოლია, თუ

$$\vec{AB} \uparrow \vec{CD}, |\vec{AB}| = |\vec{CD}|.$$

ამ ვექტორების ტოლობა ასე ჩაიწერება $\vec{AB} = \vec{CD}$.

აღვნიშნოთ ვექტორთა ტოლობის — მიმართების შემდეგი თვისებები:

1) $\vec{AB} = \vec{AB}$ — ვექტორთა ტოლობა რეფლექსურია,

2) თუ $\vec{AB} = \vec{CD}$, მაშინ $\vec{CD} = \vec{AB}$ — ვექტორთა ტოლობა სიმეტრიულია,

3) თუ $\vec{AB} = \vec{CD}$ და $\vec{CD} = \vec{EF}$, მაშინ $\vec{AB} = \vec{EF}$ — ვექტორთა ტოლობა ტრანზიტულია.

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. ნებისმიერი სამი A, B და C წერტილი-

სათვის არსებობს ერთადერთი D წერტილი, რომ ქვეშეაჩივია ტოლობა

$$\vec{CD} = \vec{AB}.$$

მართლაც, არსებობს C წერტილზე გამავალი AB წრფის პარალელური ერთადერთი წრფე CE (ნახ. 6). ამ წრფის CF და CE სხივებიდან ის სხივი ავიღოთ, რომელიც AB სხივის მიმართულებისაა. ასეთია CE სხივი. ამ სხივზე ისეთი D წერტილი მოვნახოთ, რომელიც C წერტილიდან $|\vec{AB}|$ მანძილითაა დაშორებული, $|\vec{CD}| = |\vec{AB}|$. ასეთი D წერტილი ერთადერთია. $\vec{CD}$ ისეთი ვექტორია, რომელიც $\vec{AB}$ ვექტორის ტოლია.

ამით თეორემა დამტკიცდა. ამ თეორემიდან გამომდინარეობს: სიბრტყის ყოველი წერტილიდან შეგვიძლია გადავდოთ მოცემული ვექტორის ტოლი ერთადერთი ვექტორი.

განვიხილოთ რომელიმე $\vec{AB}$ ვექტორი და აღვნიშნოთ $\vec{u}$ ასეთი სიმრავლე $\vec{AB}$ ვექტორის ტოლი ვექტორებისა. ამ $\vec{u}$ სიმრავლეს ეწოდება $\vec{AB}$ ვექტორით შექმნილი ეკვივალენტურობის კლასი. თუ $\vec{CD} \in \vec{u}$, მაშინ $\vec{CD} = \vec{AB}$ და, ცხადია, $\vec{u}$ სიმრავლის ყველა ვექტორი ტოლია $\vec{AB}$ ვექტორისა.

ეკვივალენტურობის კლასი $\vec{u}$ ესაა ახალი მათემატიკური ობიექტი, რომელიც შექმნილია ურთიერთტოლი ვექტორების ყოველი ვექტორით, რომლებიც ადგენენ ამ კლასს. ამ ობიექტს ვუწოდებთ თავისუფალ ვექტორს. ამის გამო ვწერთ

$$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD} = \dots$$

და გვესმის ურთიერთტოლი ვექტორებიდან რომელიმე ვექტორი, ე. ი. თავისუფალი ვექტორი. $\vec{u}$ ვექტორით ნებისმიერი A წერტილი აისახება სათანადო B წერტილში,

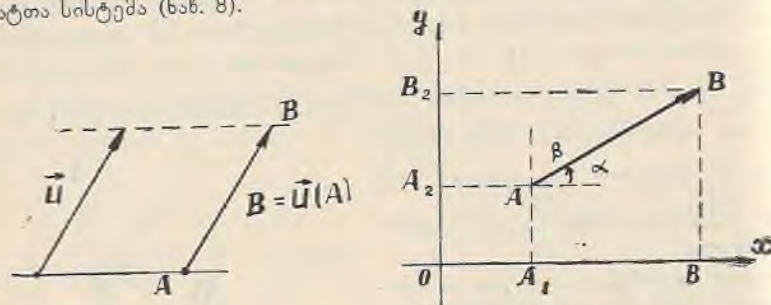
$$B = \vec{u}(A).$$



ნახ. 6

ეს ნიშნავს, ნებისმიერი A წერტილიდან უნდა გადავდლოთ $\vec{u}$ ვექტორი. ამ ვექტორის ბოლო წერტილი იქნება ის წერტილი, რომელშიც აისახება A წერტილი. (ნახ. 7).

3. ვექტორის ღერძზე გეგმილი. სიბრტყეზე ავიღოთ Oxy კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 8).



ნახ. 7

ამ სიბრტყეზე ავიღოთ Oy ღერძზე არამდებარე რომელიმე $\vec{AB}$ ვექტორი. დავაგეგმილოთ Ox ღერძზე A და B წერტილები Oy ღერძის პარალელურად, მივიღებთ წერტილებს

$$A_1 = \text{გვ}_x A, AA_1 \parallel Oy; B_1 = \text{გვ}_x B, BB_1 \parallel Oy.$$

თუ Ox ღერძი Oy ღერძის პერპენდიკულარულია, მაშინ A_1 წერტილს ეწოდება A წერტილის ორთოგონალური გეგმილი. A_1 წერტილი რომ A წერტილის ორთოგონალური გეგმილია, ასე ჩაიწერება:

$$A_1 = \text{გვ}_x A$$

და იგულისხმება ორთოგონალური გეგმილი.

$\vec{AB}$ ვექტორის Ox ღერძზე გეგმილი ეწოდება $\overline{A_1 B_1}$ მიმართული მონაკვეთის სიდიდეს Ox ღერძზე,

$$A_1 B_1 = \text{გვ}_x \vec{AB}, Oy \text{ ღერძის პარალელურად.}$$

თუ Oy ღერძი Ox ღერძის პერპენდიკულარულია, მაშინ გვექნება ორთოგონალური გეგმილი, $A_1 B_1 = \text{გვ}_x \vec{AB}$ და იგულისხმება ორთოგონალური გეგმილი. ნახაზიდან ცხადია, $A_1 B_1 = |\vec{AB}| \cos \alpha$. სრულიად ასევე განისაზღვრება $\vec{AB}$ ვექტორის გეგმილი Y ღერძზე:

$$\text{გვ}_y \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \beta,$$

სადაც β კუთხეა Oy ღერძსა და $\vec{AB}$ -ს შორის.

$\vec{AB}$ ვექტორის გეგმილი Ox ღერძზე X -ით აღვნიშნოთ, ხოლო $\vec{AB}$ ვექტორის გეგმილი Oy ღერძზე აღვნიშნოთ Y -ით:

$$X = |\vec{AB}| \cos \alpha, \quad (1)$$

$$Y = |\vec{AB}| \cos \beta.$$

X -სა და Y -ს ეწოდება $\vec{AB}$ ვექტორის კოორდინატები OXY სიბრტყეში.

X, Y რომ $\vec{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია, ასე ჩაიწერება:

$$\vec{AB} = (X, Y) \text{ ან } \vec{AB}(X, Y).$$

ცხადია, $\vec{AB}$ ვექტორის სიგრძე განისაზღვრება ფორმულით

$$|\vec{AB}| = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (2)$$

თუ A და B წერტილების კოორდინატებია სათანადოდ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, მაშინ $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$ და

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3)$$

4. ვექტორთა ჯამი. ვთქვათ, მოცემულია ვექტორები $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ (ნახ. 9). ავიღოთ რომელიმე წერტილი A . ამ წერტილიდან გადავდლოთ ვექტორი $\vec{P}$. მივიღებთ $\vec{P} = \vec{AB}$. შემდეგ B წერტილიდან გადავდლოთ ვექტორი $\vec{Q}$. მივიღებთ $\vec{Q} = \vec{BC}$. $\vec{AC} = \vec{R}$ ვექტორს ეწოდება $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების ჯამი,

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = \vec{R},$$

ე. ი. $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების ჯამი

$\vec{P} + \vec{Q}$ ეწოდება ისეთ $\vec{R}$ ვექტორს,

რომლის სათავეს წერტილი ემთხვევა

$\vec{P}$ ვექტორის სათავეს, ხოლო ბოლო

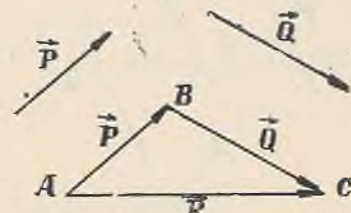
წერტილი ემთხვევა $\vec{Q}$ ვექტორის

ბოლო წერტილს, იმ პირობით,

რომ $\vec{P}$ ვექტორის ბოლო წერტილი ემთხვეოდეს $\vec{Q}$ ვექტორის სათავეს წერტილს,

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}.$$

ორი ვექტორის შეკრების წესს, რომელიც ვექტორთა შეკრების ამ განსაზღვრითაა მოცემული, ჩვეულებრივად, „სამკუთხედის წესი“ ეწოდება.



ნახ. 9

განვიხილოთ ორი ვექტორი $\vec{P} = \vec{AB}$ და $\vec{Q} = \vec{BA}$. ცხადია,

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{O}.$$

ამგვარად, ყოველი არანულოვანი $\vec{P}$ ვექტორისათვის არსებობს ისეთი ვექტორი $\vec{Q}$, რომ

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{O}.$$

ეს ვექტორი აღვნიშნოთ — $\vec{P}$ სიმბოლოთი. — $\vec{P}$ ვექტორს ეწოდება $\vec{P}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი (ნახ. 10),

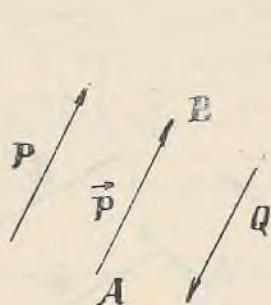
$$\vec{P} + (-\vec{P}) = \vec{O}. \quad (4)$$

ნულვექტორისა და ორი ვექტორის ჯამის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს: ნებისმიერ $\vec{P}$ ვექტორთან ნულვექტორის შეკრება $\vec{P}$ ვექტორს არ ცვლის,

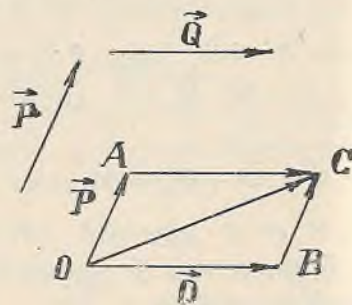
$$\vec{P} + \vec{O} = \vec{P}.$$

ვაჩვენოთ, რომ ქვეშარიტია შემდეგი ტოლობა:

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}. \quad (5)$$



ნახ. 10



ნახ. 11

ავიღოთ ნებისმიერი O წერტილი (ნახ. 11) და ამ წერტილიდან გადავდოთ როგორც $\vec{P}$ ვექტორი, $\vec{OA} = \vec{P}$, ისე $\vec{Q}$ ვექტორი, $\vec{OB} = \vec{Q}$ ავავოთ პარალელოგრამი $OBCA$. განვიხილოთ ვექტორთა ჯამები

$$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}, \quad \vec{P} + \vec{Q} = \vec{OC},$$

$$\vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}, \quad \vec{Q} + \vec{P} = \vec{OC}.$$

ამ ტოლობათა შედარებით დავასკვნით (5) ტოლობის ქვეშარიტებას.

ახლა განვიხილოთ სამი $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ვექტორი. ავიღოთ, რომელიმე O წერტილი და მიმდევრობით გადავდოთ ვექტორები (ნახ. 13).

$$\vec{OA} = \vec{P}, \quad \vec{AB} = \vec{Q}, \quad \vec{BC} = \vec{R}.$$

განვიხილოთ ვექტორთა შემდეგი ჯამები:

$$(\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC},$$

ანუ

$$(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{OC}.$$

$$\vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OC},$$

ანუ

$$\vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R}) = \vec{OC}.$$

ამ ტოლობათა შედარება მოგვცემს

$$(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R}). \quad (6)$$

(5) თვისების დამტკიცების დროს ვაჩვენეთ ვექტორთა შეკრების კიდევ ერთი წესი, რომელსაც „პარალელოგრამის წესი“ ეწოდება. თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები ერთი O წერტილიდანაა გადადებული და ამ ვექტორებზე ავაგებთ პარალელოგრამს, მაშინ ჯამი $\vec{P} + \vec{Q}$ ან $\vec{Q} + \vec{P}$ წარმოადგენს $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალს, რომელიც მიმართულია $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების საერთო O წერტილიდან.

(6) თვისების საფუძველზე სამი $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ვექტორთა ჯამის ქვეშ გვესმის $(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R}$ ან $\vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R})$.

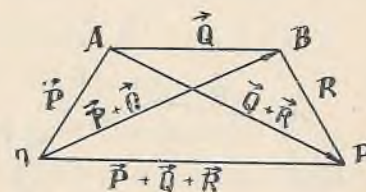
ამრიგად,

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R}.$$

ამით ვექტორთა შეკრების ზემოთმოტანილი განსაზღვრა გავრცელდება სამზე მეტ ვექტორთა შეკრებაზე. მაგალითად,

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S} = [(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R}] + \vec{S}.$$

(6) ტოლობით ვექტორთა შეკრება იმასაც გვიჩვენებს, რომ საჭირო არაა ვექტორთა მიმდევრობით შეკრება. უნდა ავაგოთ ე. წ. ვექტორთა მრავალ-



ნახ. 12

კუთხედი. მაგალითად, შეგვიბოთ $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ ვექტორები. ავიღოთ რომელიმე O წერტილი და მიმდევრობით გადავლოთ ვექტორები

$$O\vec{A} = \vec{P}, \vec{AB} = \vec{Q}, \vec{BC} = \vec{R}, \vec{CD} = \vec{S}$$

(ნახ. 13). ვექტორი $O\vec{D}$, რომელიც განისაზღვრება პირველი $\vec{P}$ ვექტორის საწყისი წერტილით და უკანასკნელი ვექტორის $\vec{S}$ -ის ბოლო წერტილით, არის აღებულ ვექტორთა ჯამი,

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S} = O\vec{D}.$$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის საფუძველზე დავსკვნით, რომ ვექტორთა შეკრებას აქვს შემდეგი თვისებები:

1) ნებისმიერი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებისათვის არსებობს ერთადერთი ვექტორი $\vec{P} + \vec{Q}$, რომელსაც $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორის ჯამი ეწოდება.

2) ნებისმიერი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებისათვის $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$ — შეკრების გადანაცვლებადობა.

3) ნებისმიერი $\vec{P}, \vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორებისათვის $(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R})$ — შეკრების ჯუფთებადობა.

4) არსებობს ერთადერთი ვექტორი $\vec{O}$, რომელსაც ნულ-ვექტორი ეწოდება, ისეთი, რომ $\vec{P} + \vec{O} = \vec{P}$.

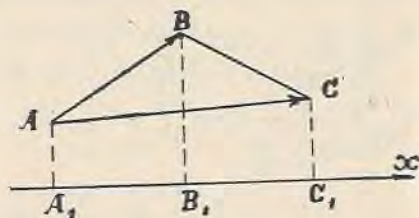
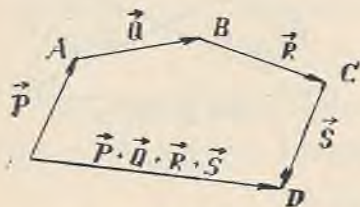
5) ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორისათვის არსებობს ერთადერთი $-\vec{P}$, რომ $\vec{P} + (-\vec{P}) = \vec{O} - \vec{P}$ ვექტორს ეწოდება $\vec{P}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი.

5. ვექტორთა ჯამის გეგმილი. ავიღოთ $\vec{AB}$ და $\vec{BC}$ ვექტორები და დავაგვიკმლოთ. მივიღებთ $\vec{A_1B_1}$ და $\vec{B_1C_1}$ მონაკვეთებს (ნახ. 14).

თუ გამოვიყენებთ მე-5 თავის 1-ლი პარაგრაფის 1-ლ თეორემას, გვექნება

$$\vec{A_1C_1} = \vec{A_1B_1} + \vec{B_1C_1},$$

ნახ. 13



ნახ. 14

ანუ

$$\text{გვს} (\vec{AB} + \vec{BC}) = \text{გვს} \vec{AB} + \text{გვს} \vec{BC}.$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ

თეორემა 2. ვექტორთა ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე ტოლია იმავე ღერძზე შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ჯამისა:

$$\text{გვს} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n) = \text{გვს} \vec{P}_1 + \text{გვს} \vec{P}_2 + \dots + \text{გვს} \vec{P}_n. \quad (7)$$

თუ ავიღებთ Oxy კოორდინატთა სისტემას, სადაც

$$\vec{P}_1 = (X_1, Y_1), \vec{P}_2 = (X_2, Y_2), \dots, \vec{P}_n = (X_n, Y_n)$$

და ამ ვექტორების ჯამის გეგმილებს (X, Y) -ით აღვნიშნავთ, მაშინ (1) მოგვცემს:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ Y &= Y_2 + Y_n + \dots + Y_n. \end{aligned} \quad (8)$$

6. ვექტორთა სხვაობა. სხვაობის გეგმილი. ავიღოთ ორი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორები. $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების სხვაობა $\vec{P}_1 - \vec{P}_2$ ვუწოდოთ ისეთ $\vec{R}$ ვექტორს, რომელიც $\vec{P}_2$ -სთან შეკრებილი გაძლევს $\vec{P}_1$ ვექტორს (ნახ. 15).

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_2 = \vec{R}, \quad (9)$$

თუ

$$\vec{P}_2 + \vec{R} = \vec{P}_1. \quad (10)$$

(10) ტოლობიდან ცხადია,

$$X_2 + X = X_1,$$

$$Y_2 + Y = Y_1,$$

სადაც $\vec{R} = (X, Y)$. უკანასკნელიდან მივიღებთ:

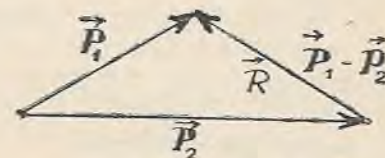
$$X = X_1 - X_2,$$

$$Y = Y_1 - Y_2. \quad (11)$$

ცხადია, ვექტორთა ჯამი და ვექტორთა სხვაობა შეგვიძლია გავაერთიანოთ და ვუწოდოთ ვექტორთა ალგებრული ჯამი, ან ვექტორთა ჯამის ქვეშ ვიგულისხმოთ ვექტორთა ალგებრული ჯამი, ასე რომ, (8) ფორმულები შეგვიძლია ასე გამოვთქვათ:

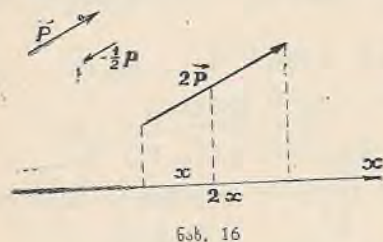
ვექტორთა ალგებრული ჯამის კოორდინატები ტოლია შესაკრებ ვექტორთა სათანადო კოორდინატების ალგებრული ჯამისა.

23. გ. კომლაძე



ნახ. 15

7. ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი. ვთქვათ, მოცემულია $\vec{P}$ ვექტორი და α რიცხვი. $\vec{P}$ ვექტორის α რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\vec{R}$ ვექტორს, რომლის სიგრძე ტოლია $|\vec{P}| |\alpha|$ და მიმართულია $\vec{P}$ ვექტორის მიმართულებით, თუ $\alpha > 0$ და $\vec{P}$ -ს საწინააღმდეგოდ, თუ $\alpha < 0$,



ნახ. 16

$$\vec{P}\alpha = \alpha\vec{P} = \vec{R}. \quad (12)$$

თუ $\vec{P}$ ან α ნულის ტოლია, მაშინ ნამრავლი ნულ-ვექტორია. ამ შემთხვევაში $\alpha\vec{P}$ -ს მიმართულება განუსაზღვრელია.

მე-16 ნახაზე ნაჩვენებია $\vec{P} \cdot \frac{1}{2}$

და $\vec{P} \cdot 2$ ვექტორები. $\vec{P}$ ვექტორის

α რიცხვზე გამრავლებას პირობით $\vec{P}$ ვექტორის α -ჯერ „გაჭიმვას“ უწოდებენ. თუ (12) ტოლობით გამოსახულ ვექტორებს დავაგვიძლიებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} X &= \alpha X_1, \\ Y &= \alpha Y_1, \end{aligned} \quad (13)$$

სადაც $\vec{P} = (X_1, Y_1)$, $R = (X, Y)$. (13) ტოლობის მართებულობის შესამოწმებლად საკმარისია გამოვიყენოთ სათანადო ფიგურების მსგავსების თეორემები.

ამგვარად, მართებულია შემდეგი

თეორემა 3. ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის გეგმილი ღერძზე ტოლია იმავე ღერძზე ვექტორის გეგმილის რიცხვზე ნამრავლისა.

ადგილი დასამტკიცებელია შემდეგ ტოლობათა მართებულობა:

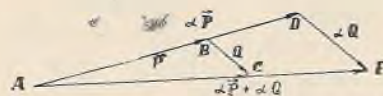
$$\alpha(\vec{P} + \vec{Q}) = \alpha\vec{P} + \alpha\vec{Q}, \quad (14)$$

$$\alpha(\beta\vec{P}) = \alpha\beta\vec{P}, \quad (15)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{P} = \alpha\vec{P} + \beta\vec{P}. \quad (16)$$

მაგალითად, (14) ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია გამოვიღოთ სათანადო ფიგურების მსგავსებიდან (ნახ. 17):

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{P}, \quad \vec{AD} = \alpha\vec{P}, \quad \vec{BC} = \vec{Q}, \quad \vec{DE} = \alpha\vec{Q} \\ \vec{AC} \cdot \alpha &= \vec{AE}, \end{aligned}$$



ნახ. 17

ანუ

$$(\vec{AB} + \vec{BC})\alpha = \vec{AD} + \vec{DE}.$$

ამგვარად,

$$\alpha(\vec{P} + \vec{Q}) = \alpha\vec{P} + \alpha\vec{Q},$$

რაც (14) ტოლობას ამტკიცებს.

ცხადია, ვექტორთა სხვაობა, ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის ცნების შემოღების შემდეგ, ასეც შეგვიძლია განვსაზღვროთ:

$$\vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} + (-\vec{Q}) = \vec{P} + \vec{Q}(-1).$$

თეორემა 4. თუ $\vec{Q}$ ვექტორი კოლინეარულია არანულოვან $\vec{P}$ ვექტორისა, მაშინ არსებობს ისეთი λ ნამდვილი რიცხვი, რომ $\vec{Q} = \lambda\vec{P}$.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევა. ვთქვათ, $|\vec{Q}| = |\vec{P}|$. მაშინ გვეჩვენა ორი შემთხვევა. ან $\vec{Q} = \vec{P}$, მაშინ $\lambda = 1$, ან $\vec{Q} = -\vec{P}$, მაშინ $\lambda = -1$. თუ $\vec{Q} = 0$, მაშინ $\lambda = 0$, რადგანაც $0 = \lambda\vec{P}$ ტოლობა $\lambda = 0$ -ისათვის სრულდება. განვიხილოთ შემთხვევებში თეორემა ქვეშარტია. ვთქვათ, $|\vec{Q}| \neq |\vec{P}|$.

განვიხილოთ შემთხვევა $|\vec{Q}| > |\vec{P}|$. აღებული $\vec{Q}$ და $\vec{P}$ კოლინეარული ვექტორები გადავდოთ სიბრტყის რომელიმე O წერტილიდან. $\vec{OA} = \vec{P}$, $\vec{OB} = \vec{Q}$. თუ



ნახ. 18

$\vec{Q} \uparrow \vec{P}$, მაშინ A წერტილი ეკუთვნის $\vec{OB}$ მონაკვეთს (ნახ. 18). ამ შემთხვევაში A წერტილი $\vec{OB}$ მიმართულ მონაკვეთს ჰყოფს რაიმე m ფარდობით (თავი VII, § I, n4),

$$\frac{OA}{AB} = m, \quad m > 0.$$

რადგანაც $\vec{Q} \uparrow \vec{P}$, მაშინ $m > 0$ და შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{|\vec{OA}|}{|\vec{AB}|} = m,$$

ანუ

$$\frac{|\vec{P}|}{|\vec{Q}| - |\vec{P}|} = m,$$

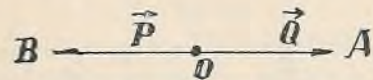
$$|\vec{Q}| = \left(1 + \frac{1}{m}\right) |\vec{P}|.$$

პირობის თანახმად $\vec{Q}$ და $\vec{P}$ ვექტორები თანამიმართულია, ამიტომ

$$\vec{Q} = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \vec{P}.$$

ამგვარად, თუ $\vec{Q}$ და $\vec{P}$ ვექტორები თანამიმართულია, მაშინ $\lambda = 1 + \frac{1}{m}$.

თუ $\vec{Q}$ და $\vec{P}$ ვექტორები ურთიერთმომართაობრივ მიმართულებიანაა, მაშინ მე-18 ნახაზის ნაცვლად გვექნება მე-19 ნახაზი. O წერტილი იქნება $\overline{AB}$



ნახ. 19

მონაკვეთის შიგნით. $\overline{BA}$ მიმართულ მონაკვეთს O წერტილი ჰყოფს რაიმე m ფარდობით,

$$\frac{BO}{OA} = m_1, m_1 > 0,$$

საიდანაც $\frac{|BO|}{|OA|} = m_1$. აქედან კი გვექნება $|\vec{Q}| = m_1 |\vec{P}|$.

რადგანაც $\vec{Q} \nparallel \vec{P}$, შეგვიძლია დავწეროთ $\vec{Q} = -m_1 \vec{P}$. ამგვარად, თუ $\vec{Q} \nparallel \vec{P}$, მაშინ $\lambda = -m_1$.

სრულიად ასევე განიხილება შემთხვევა $|\vec{Q}| < |\vec{P}|$. აქ A წერტილის მაგიერ უნდა ავიღოთ B წერტილი.

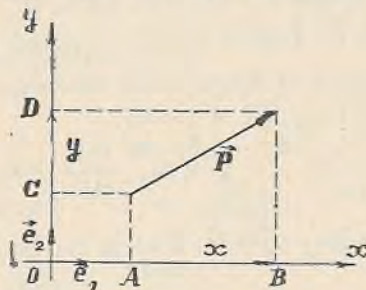
8. ვექტორთა დაშლა. ვთქვათ სიბრტყეზე მოცემულია XY კოორდინატთა სისტემა. ავიღოთ $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ვექტორები, რომლებიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებენ (ნახ. 20):

1) $\vec{e}_1$ მდებარეობს X ღერძზე, $\vec{e}_2$ მდებარეობს Y ღერძზე;

2) $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ვექტორების სიგრძეები ერთეულის ტოლია,

3) $\vec{e}_1$ მიმართულია X ღერძის

დადებითი მიმართულებით, ხოლო $\vec{e}_2$ — Y ღერძის დადებითი მიმართულებით.



ნახ. 20

ასე განსაზღვრულ $\vec{e}_1$ ვექტორს X ღერძის მგეზავი (ორტი) ეწოდება, ხოლო $\vec{e}_2$ -ს — Y ღერძის მგეზავი (ორტი).

ავიღოთ რაიმე $\vec{P}$ ვექტორი, $P(X, Y)$, სადაც

$$AB = X, CD = Y.$$

განვიხილოთ ვექტორები $\vec{AB}$ და $\vec{CD}$. ცხადია,

$$\vec{AB} = X \vec{e}_1, \vec{CD} = Y \vec{e}_2. \quad (17)$$

ადვილი შესამჩნევია,

$$\vec{P} = \vec{AB} + \vec{CD}.$$

საიდანაც (17)-ის საფუძველზე გვექნება

$$\vec{P} = X \vec{e}_1 + Y \vec{e}_2. \quad (18)$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ XY სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორი წარმოიადგინება $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით, სადაც

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0), \\ \vec{e}_2 &= (0, 1). \end{aligned} \quad (19)$$

(18) გვიჩვენებს, რომ მართებულია

თეორემა 5. სიბრტყის ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორი ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ჯამით:

$$\vec{P} = X \vec{e}_1 + Y \vec{e}_2,$$

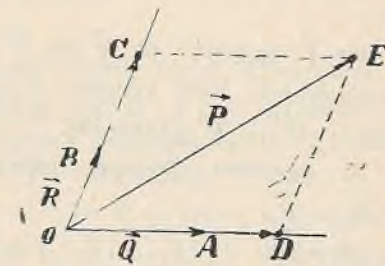
სადაც $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ სათანადოდ X და Y ღერძების მგეზავებია.

შენიშნოთ, რომ $\vec{P}$ ვექტორის წარმოდგენა (18) ფორმულით შეიძლება არა მარტო $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ვექტორებით, არამედ ნებისმიერი არაკოლინეარული ვექტორებით.

მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი

სამი $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ვექტორი, სადაც $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ — არაკოლინეარულია. ვადავლოთ ეს ვექტორები რომელიმე წერტილიდან (ნახ. 21)

$$\vec{OE} = \vec{P}, \vec{OA} = \vec{Q}, \vec{OB} = \vec{R}.$$



ნახ. 21

E წერტილი დავაგვიკავშიროთ OA და OB წრფეებზე სათანადოდ OB და OA წრფეების პარალელურად,

$$D = \text{გვბო}A E, C = \text{გვბო}B E.$$

ცხადია, $\vec{OE}$ ვექტორი დაიშლება $\vec{OD}$ და $\vec{OC}$ ვექტორების ჯამად,

$$\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{OC}. \quad (20)$$

რადგანაც $\vec{OA}$ და $\vec{OB}$ ვექტორები კოლინეარულია, მაშინ მე-4 თეორემის თანახმად მოიძებნება ისეთი α ნამდვილი რიცხვი, რომ $\vec{OD} = \alpha \cdot \vec{OA}$. ასევე მოიძებნება $\vec{OB}$ და $\vec{OC}$ ვექტორებისათვის ისეთი β ნამდვილი რიცხვი, რომ $\vec{OC} = \beta \cdot \vec{OB}$. ამის გამო (20) ასე ჩაიწერება

$$\vec{OE} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB},$$

ანუ

$$\vec{P} = \alpha \vec{Q} + \beta \vec{R}. \quad (21)$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 6. სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი $\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორებისათვის, სადაც $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ არაკოლინეარულია, მოიძებნება ისეთი ნამდვილი რიცხვები α და β , რომ

$$\vec{P} = \alpha \vec{Q} + \beta \vec{R}.$$

თუ $\vec{P}$ ვექტორსა და $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორებს შორის არსებობს (21) დამოკიდებულება, მაშინ ვიტყვი, $\vec{P}$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორებზე.

9. ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობა. ავიღოთ ვექტორები $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$.

ვექტორებს $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ წრფივად დამოკიდებული ეწოდება, თუ არსებობენ რიცხვები $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ისე, რომ

$$\alpha_1 \vec{P}_1 + \alpha_2 \vec{P}_2 + \dots + \alpha_n \vec{P}_n = 0 \quad (22)$$

და ამ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

თუ (22) ტოლობა ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა α ნულის ტოლია, ვექტორებს $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება.

ვთქვათ, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვებიდან, მაგალითად, $\alpha_1 \neq 0$, მაშინ (22) ტოლობიდან განვსაზღვროთ $\vec{P}_1$,

$$\vec{P}_1 = \beta_2 \vec{P}_2 + \beta_3 \vec{P}_3 + \dots + \beta_n \vec{P}_n, \quad (23)$$

სადაც

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}.$$

ამგვარად, თუ ვექტორები $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ერთი რომელიმე ვექტორთაგანი სხვა დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციაა.

დავუბრუნდეთ (21) ტოლობას. ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ერთ სიბრტყეში მდებარე სამი ნებისმიერი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

ვექტორები $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც ტოლობა

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = 0 \quad (24)$$

ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$.

მართლაც, (24) ტოლობიდან კოორდინატთა ღერძებზე დაგვიკვირებოთ მივიღებთ

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 = 0,$$

$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 = 0,$$

საიდანაც $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$.

ამრიგად, (24) ტოლობა ჭეშმარიტია მხოლოდ $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ -სათვის. $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ვექტორებს Oxy სიბრტყის ბაზისი ვექტორები ეწოდება. სიბრტყეზე ბაზისი ვექტორების განსაზღვრის შედეგად მე-6 თეორემა ასე ჩამოყალიბდება:

თეორემა 7. სიბრტყის ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორი წარმოიგინება ამ სიბრტყის ბაზისი $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით,

$$\vec{P} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2. \quad (25)$$

თეორემა 8. თუ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ ვექტორებიდან ერთ-ერთი ვექტორი დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციაა, მაშინ ეს ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია.

მართლაც, (23) ტოლობა ასე გადავწერთ

$$(-1) \vec{P}_1 + \beta_2 \vec{P}_2 + \dots + \beta_n \vec{P}_n = 0.$$

ნამდვილი რიცხვებიდან (-1) , $\beta_2, \dots, \beta_n$ ერთი მაინც განსხვავებულია ნული-საგან. ასეთია -1 . რაც გვიჩვენებს $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ ვექტორების წრფივად დამოკიდებულებას.

თეორემა 9. თუ n ვექტორთა შორის რამდენიმე ვექტორი, მაგალითად, $n-1$ ვექტორი, წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ყველა n ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

მართლაც, თუ $n-1$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ არსებობენ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია 0-საგან, და

$$\alpha_1 \vec{P}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \vec{P}_{n-1} = 0.$$

თუ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილს დავუმატებთ $0 \cdot \vec{P}_n$ -ს, ამით ტოლობა არ დაირღვევა,

$$\alpha_1 \vec{P}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \vec{P}_{n-1} + 0 \cdot \vec{P}_n = 0.$$

ეს ტოლობა კი თეორემას ამტკიცებს.

ასევე მართლაც დამტკიცდება შემდეგი

თეორემა 10. თუ მოცემული n ვექტორიდან ერთი მაინც ნულვექტორია, მაშინ ეს ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია.

მართლაც, თუ $\vec{P}_1 = 0$, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ,

$$1 \cdot \vec{P}_1 + 0 \cdot \vec{P}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{P}_n = 0.$$

რიცხვებიდან $1, 0, \dots, 0$ ერთი რიცხვი $1 \neq 0$, დანარჩენი ნულის ტოლია. ამით თეორემა დამტკიცდა.

მე-4 თეორემის ძალით, თუ $\vec{P}$ არანულოვანი ვექტორია და $\vec{Q}$ ვექტორი $\vec{P}$ ვექტორის კოლინეარულია, მაშინ მოიძებნება ისეთი ნამდვილი რიცხვი λ , რომ

$$\vec{Q} = \lambda \vec{P}.$$

ეს ტოლობა კი გვიჩვენებს, $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია.

ამრიგად, კეშმარიტია შემდეგი

თეორემა 11. ორი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორის წრფივად დამოკიდებულებისათვის აუცილებელია და საკმარისი ამ ვექტორების ურთიერთკოლინეარობა.

ამ თეორემიდან დავასკვნით შემდეგ წინადადებათა კეშმარიტებას:

შედეგი 1. თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები არაკოლინეარულია, მაშინ ეს ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

შედეგი 2. ორ არაკოლინეარულ ვექტორს შორის არ შეიძლება იყოს ნულვექტორი (წინააღმდეგ შემთხვევაში ვექტორები წრფივად დამოკიდებული იქნებოდა).

სიბრტყეზე ავიღოთ სამი $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ვექტორი. ვთქვათ, $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. მე-6 თეორემის თანახმად არსებობს α და β ნამდვილი რიცხვები ისეთი, რომ

$$\vec{P} = \alpha \vec{Q} + \beta \vec{R}, \quad (21)$$

სადაც α და β განისაზღვრება $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ვექტორების საშუალებით.

რომელიმე სიბრტყეზე მდებარე ორი წრფივად დამოუკიდებელი $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორებს ეწოდება ამ სიბრტყეში მდებარე ვექტორთა სიმრავლის ბაზისი ვექტორები. მართლაც, ბაზისი, თუ ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორისათვის არსებობს α და β ნამდვილი რიცხვები ისეთი, რომ

$$\vec{P} = \alpha \vec{Q} + \beta \vec{R}.$$

მე-11 თეორემის 1-ლი შედეგის საფუძველზე ადვილი დასამტკიცებელია.

თეორემა 12. სიბრტყეში მდებარე წრფივად დამოუკიდებელი ნებისმიერი $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორთა დალავებული წყვილი ქმნის ამ სიბრტყის ბაზისს.

ეს თეორემა დამტკიცდება მე-5 თეორემის დამტკიცების სრული ანალოგიით.

ავიღოთ სიბრტყეში მდებარე არაკოლინეარული $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორები. (ნახ. 21). ეს ვექტორები გადავდოთ რომელიმე 0 წერტილიდან. იმავე წერტილიდან გადავდოთ ამ სიბრტყეში მდებარე რომელიმე $\vec{P}$ ვექტორი. ავაგოთ პარალელოგრამი, რომლის დიაგონალია $\vec{P}$ ვექტორი, ხოლო გვერდებია იმ წრფეთა მონაკვეთები, რომლებზედაც მდებარეობენ $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორები. პარალელოგრამის გვერდები განვიხილოთ

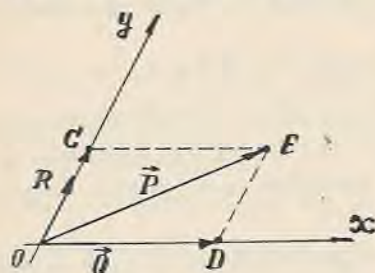
როგორც ვექტორები $\vec{OD}$ და $\vec{OC}$, მაშინ მოიძებნება ისეთი α და β რიცხვები $\vec{OD} = \alpha \cdot \vec{Q}$, $\vec{OC} = \beta \vec{R}$. რადგანაც $\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{OC}$, გვექნება $\vec{P} = \alpha \vec{Q} + \beta \vec{R}$. მივიღეთ (21) ტოლობა. ცხადია, α და β ცალსახად განისაზღვრება.

(21) ტოლობა იძლევა $\vec{P}$ ვექტორის ბაზისი ვექტორების მიხედვით დაშლას.

ზემოთ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში შემოვიღეთ $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ მგეზავები. შეგვიძლია ვთქვათ, $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ვექტორები განსაზღვრავს Oxy კოორდინატთა სისტემას. კოორდინატთა ეს სისტემა Oe_1e_2 -ით აღვნიშნოთ. კოორდინატთა Oe_1e_2 სისტემაში ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორი წარმოიდგინება $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ -ს წრფივი კომბინაციით:

$$\vec{P} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2. \quad (25)$$

α_1 და α_2 რიცხვებს ეწოდება $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ბაზისის მიმართ. სრულიად ასე შეგვიძლია განვიხილოთ სიბრტყეზე კოორდინატთა სისტემა, რომელიც განისაზღვრება $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ წრფივად დამოუკიდებელი (არაკოლინეარული) ვექტორებით (ნახ. 22). წრფე, რომელზედაც მდებარეობს $\vec{Q}$ ვექტორი, ავიღეთ Ox ღერძად ამ ღერძის დადებითი მიმართულება. იყოს $\vec{Q}$ ვექტორის მიმართულება. ასევე გან-



ნახ. 22

ვსაზღვროთ $\vec{R}$ ვექტორით Oy ღერძი. გვექნება Oxy კოორდინატთა სისტემა. გადავღოთ O წერტილიდან რომელიმე $\vec{P}$ ვექტორი, $\vec{OE} = \vec{P}$. ვექტორი $\vec{OE}$ დავაგვიშლით Ox ღერძზე Oy ღერძის პარალელურად,

$$\vec{OD} = \alpha \vec{Q}.$$

α სიდიდე განვსაზღვროთ ტოლობიდან

$$\vec{OD} = \alpha \vec{Q}.$$

ასევე შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\vec{OE}$ ვექტორის Oy ღერძზე გვემილი Ox ღერძის პარალელურად, $\vec{OC} = \beta \vec{R}$ და β სიდიდე განვსაზღვროთ ტოლობიდან

$$\vec{OC} = \beta \vec{R}.$$

$\vec{OD}$ და $\vec{OC}$ ვექტორების შეკრებით მივიღებთ

$$\vec{P} = \alpha \vec{Q} + \beta \vec{R}.$$

α და β რიცხვებს ეწოდება $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ბაზისის მიმართ.

ცხადია, თუ სიბრტყეზე სხვადასხვა ბაზისს ავიღებთ, ერთი და იმავე ვექტორის კოორდინატები სხვადასხვა ბაზისში სხვადასხვა იქნება.

ავიღოთ სხვა ბაზისი, ეს ბაზისი აღვნიშნოთ $\vec{Q}'$, $\vec{R}'$ -ით და მას პირობით ვუწოდოთ „ძველი“ ბაზისი. ამ ბაზისში $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ვექტორების კოორდინატები იყოს

$$\vec{Q} = (q_1, q_2), \vec{R} = (r_1, r_2), \vec{P} = (p_1, p_2),$$

ანუ

$$\vec{Q} = q_1 \vec{Q}' + q_2 \vec{R}',$$

$$\vec{R} = r_1 \vec{Q}' + r_2 \vec{R}',$$

$$\vec{P} = p_1 \vec{Q}' + p_2 \vec{R}'. \quad (26)$$

გამოვიკვლიოთ, რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორების კოორდინატები, რომ ეს ვექტორები ბაზისად მივიღოთ.

მოვწახოთ $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები „ახალ“ $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ბაზისში. ამისათვის შევიტანოთ (26) მნიშვნელობანი (21) ტოლობაში,

$$p_1 \vec{Q}' + p_2 \vec{R}' = \alpha (q_1 \vec{Q}' + q_2 \vec{R}') + \beta (r_1 \vec{Q}' + r_2 \vec{R}'),$$

საიდანაც

$$\left. \begin{aligned} \alpha q_1 + \beta r_1 &= p_1 \\ \alpha q_2 + \beta r_2 &= p_2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

მივიღეთ განტოლებათა სისტემა α და β -ს მიმართ. (21) და (27) დამოკიდებულებათა შედარება მოგვცემს: (27) განტოლებათა სისტემა ვექტორულადაა ჩაწერილი (21) სახით. თუ (21) განტოლების ორივე მხარეს სათანადოდ დავაგვიშლით კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ (27)

განტოლებათა სისტემას. $\vec{P}$ ვექტორის (21) ტოლობით წარმოდგენის საკითხი $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორების საშუალებით, მიყვანილია (27) განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე. თუ (27) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი α და β , მაშინ $\vec{P}$ ვექტორი წარმოიდგინება $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით.

(27) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი α და β ,
თუ ამ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}. \quad (28)$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ

თეორემა 13. ვექტორები $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ მხოლოდ მაშინ ქმნიან სიბრტყეში ბაზისს, თუ რომელიმე ბაზისის მიმართ ამ ვექტორთა კოორდინატებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$\Delta = 0$ ნიშნავს $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორები კოლინეარულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\vec{Q} \neq \vec{R}$. თუ $\Delta = 0$, მაშინ (27) განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არ აქვს ან ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვს. ამ ბოლო შემთხვევაში ორი განტოლება ერთ განტოლებას იძლევა ორი ცვლადით. ერთი ცვლადი განისაზღვრება მეორე ცვლადით. ეს მეორე ცვლადი ნებისმიერია.

ამ ორივე შემთხვევაში $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორები სიბრტყეში ბაზისს არ ქმნიან.

თუ $\Delta \neq 0$, $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები (α, β) ახალი $\vec{Q}, \vec{R}$ ბაზისის მიმართ განისაზღვრებიან (27) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით.

ბაზისის შემოტანის ძირითადი მნიშვნელობა ისაა, რომ ვექტორებზე წრფივი მოქმედებანი (შეკრება, რიცხვზე გამრავლება) მიიყვანება რიცხვებზე — ვექტორთა კოორდინატებზე მოქმედებებზე. ამისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი.

თეორემა 14. ორი ვექტორის P_1 და P_2 ჯამის კოორდინატი ნებისმიერი ბაზისის მიმართ ტოლია იმავე ბაზისის მიმართ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების კოორდინატების ჯამისა. $\vec{P}_1$ ვექტორის α რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატი ტოლია $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატის α რიცხვზე ნამრავლისა.

მართლაც, თუ $\vec{P}_1 = \alpha_1 \vec{Q} + \alpha_2 \vec{R}$, $\vec{P}_2 = \beta_1 \vec{Q} + \beta_2 \vec{R}$, მაშინ ვექტორებზე წრფივ მოქმედებათა თვისებების საფუძველზე გვექნება:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \alpha_1 \vec{Q} + \alpha_2 \vec{R} + \beta_1 \vec{Q} + \beta_2 \vec{R} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{Q} + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{R};$$

$$\vec{P}_1 \cdot \lambda = (\alpha_1 \vec{Q} + \alpha_2 \vec{R}) \cdot \lambda = \alpha_1 \lambda \vec{Q} + \alpha_2 \lambda \vec{R}.$$

მიღებული ტოლობანი გამოთქმულ თეორემას ამტკიცებს.

ზემოთ განვსაზღვრეთ n -განზომილებიანი ვექტორი (თავი II, § 2, n9). ნამდვილი რიცხვების სიმრავლის ელემენტთა $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ დალაგებულ n -ელს ეწოდება n — განზომილებიანი ვექტორი. გამოვიდეთ ამ განსაზღვრიდან და ავიღოთ n ვექტორი

$$\vec{Q}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

წრფივად დამოუკიდებელ $\vec{Q}_i, i = 1, 2, \dots, n$, ვექტორებს n განზომილებიან ვექტორთა სიარავლის ბაზისი ვექტორები ეწოდება. ამ სიმრავლის ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორი წარმოიადგინება $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით, ანუ $\vec{P}$ ვექტორისათვის არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვები $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, რომ $\vec{P}$ წარმოიადგინება $\vec{Q}_i, i = \overline{1, n}$, ვექტორების წრფივი კომბინაციით

$$\vec{P} = \alpha_1 \vec{Q}_1 + \alpha_2 \vec{Q}_2 + \dots + \alpha_n \vec{Q}_n. \quad (29)$$

რიცხვებს $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ეწოდება $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n$ ბაზისის მიმართ,

$$\vec{P} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

თუ სიტყვასიტყვით გავიმეორებთ მე-13 თეორემის დამტკიცებას, დავრწმუნდებით: $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n$ ვექტორები n -განზომილებიან ვექტორთა სიმრავლეში ქმნიან ბაზის ვექტორებს, თუ ამ ვექტორთა კოორდინატებისაგან რომელიმე ბაზისის მიმართ შედგენილი დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (30)$$

რიცხვები $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ განისაზღვრებიან შემდეგ განტოლებათა სისტემიდან

$$x_{11} \alpha_1 + x_{21} \alpha_2 + \dots + x_{n1} \alpha_n = x_1,$$

$$x_{12} \alpha_1 + x_{22} \alpha_2 + \dots + x_{n2} \alpha_n = x_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{1n} \alpha_1 + x_{2n} \alpha_2 + \dots + x_{nn} \alpha_n = x_n,$$

სადაც $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ რომელიმე (ძველი) ბაზისის მიმართ; მაგალითად, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ბაზისის მიმართ,

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

განვიხილოთ ამოცანა: მოცემულია 4 ვექტორის კოორდინატები $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ბაზისის მიმართ: $\vec{Q}_1 = (2, 1, 1)$, $\vec{Q}_2 = (3, -1, -2)$, $\vec{Q}_3 = (4, 1, 3)$, $\vec{P} = (2, -2, 3)$. ვაჩვენოთ: $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3$ ვექტორები ქმნიან ბაზისს და მოვნახოთ $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები ბაზისი $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3$ ვექტორების მიმართ.

ჯერ გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -12.$$

მაშასადამე, $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3$ ვექტორები ქმნიან ბაზისს სამგანზომილებიან ვექტორთა სივრცეში. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma &= 2, \\ \alpha - \beta + \gamma &= -2, \\ \alpha - 2\beta + 3\gamma &= 3. \end{aligned} \right\}$$

მივიღებთ $\alpha = -\frac{53}{12}$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{31}{12}$. ამგვარად, $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3$ ვექტორთა ბაზისის მიმართ $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებია $\left(-\frac{53}{12}, \frac{1}{6}, \frac{31}{12}\right)$,

ანუ

$$\vec{P} = -\frac{53}{12}\vec{Q}_1 + \frac{1}{6}\vec{Q}_2 + \frac{31}{12}\vec{Q}_3.$$

n -განზომილებიანი ვექტორით განვსაზღვროთ ვექტორული მრავალსახეობა.

ვექტორული მრავალსახეობა არის ვექტორთა ისეთი არა-ცარიელი სიმრავლე, რომლის ელემენტთა ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია ეკუთვნის ამავე სიმრავლეს. ამ მრავალსახეობაში ვექტორთა იმ უდიდეს რიცხვს, რომლებიც წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას ქმნიან, ეწოდება მრავალსახეობის განზომილება.

ვთქვათ, v რომელიმე ვექტორული მრავალსახეობაა. შესაძლებელია, v შედგება მხოლოდ ნულვექტორისაგან, მაშინ v -ს განზომილებაა 0. თუ v შედგება ურთიერთკოლინეარული ვექტორებისაგან, მაშინ მისი განზომილებაა 1. თუ მრავალსახეობაში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა რიცხვია 2, ვექტორები ურთიერთკოლინეარულია, მრავალსახეობის განზომილებაა 2.

10. აფინური კოორდინატები. აფინური კოორდინატები სიბრტყეზე

განისაზღვრება ბაზისი $\vec{Q}, \vec{R}$ ვექტორებისა და სიბრტყის რომელიმე O წერტილის მოცემით. O წერტილს კოორდინატთა სათავე ეწოდება.

ნებისმიერი M წერტილის აფინური კოორდინატები ეწოდება $\vec{OM}$ ვექტორის კოორდინატებს $\vec{Q}, \vec{R}$ ბაზისის მიმართ. რაღვანაც $\vec{OM}$ ვექტორი ერთადერთი წრფივი კომბინაციით წარმოიდგინება.

$$\vec{OM} = \alpha \vec{Q} + \beta \vec{R},$$

M წერტილს შეესაბამება α და β რიცხვების ერთადერთი დალაგებული წყვილი (α, β) .

ცხადია, დეკარტის კოორდინატთა სისტემა კერძო შემთხვევაა აფინური კოორდინატთა სისტემისა. დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში ბაზის ვექტორებად აღებულია ერთეული ვექტორები — კოორდინატთა ღერძების მგზავები $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$. (25) ფორმულით ყოველ M წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილი (x, y) , რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

სადაც x არის $\vec{OM}$ ვექტორის Ox ღერძზე გეგმილი Oy ღერძის პარალელურად, ხოლო y არის $\vec{OM}$ ვექტორის Oy ღერძზე გეგმილი Ox ღერძის პარალელურად,

$$x = \text{გეგმა}_{Ox} \vec{OM} \quad Oy \text{ ღერძის პარალელურად,}$$

$$y = \text{გეგმა}_{Oy} M \quad Ox \text{ ღერძის პარალელურად,}$$

ანუ

$x = \text{გეგმა}_{Ox} M \quad Oy \text{ ღერძის პარალელურად, } y = \text{გეგმა}_{Oy} M \quad Ox \text{ ღერძის პარალელურად.}$

თუ $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, მაშინ $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ბაზისით განისაზღვრება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, ყოველ M წერტილს შეესაბამება x და y ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილი (x, y)

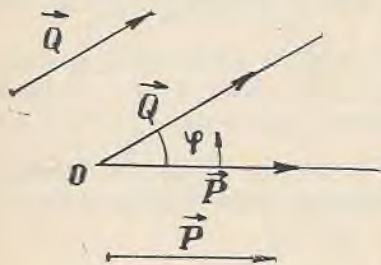
$$x = \text{გეგმა}_{Ox} M, \quad y = \text{გეგმა}_{Oy} M,$$

სადაც იგულისხმება ორთოგონალური გეგმილები ღერძებზე.

§ 2. პამპოროთა საპლარული ნამრავლი

1. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი. წინასწარ განვსაზღვროთ ორ ვექტორს შორის კუთხე. ავიღოთ ორი ვექტორი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$. რომელიმე O წერტილიდან გავატაროთ სხივები, რომელთაგან ერთი სხივი $\vec{P}$ ვექტორის მიმართულებისაა, ხოლო მეორე სხივი $\vec{Q}$ ვექტორის მიმართულებისაა,

(ნახ. 23). $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორის შორის φ კუთხე განისაზღვრება რომელიმე O წერტილიდან გამოშვებული ორ სხივს შორის კუთხით, რომელთაგან ერთი სხივი $\vec{P}$ ვექტორის მიმართულებისაა, ხოლო მეორე სხივი $\vec{Q}$ ვექტორის მიმართულების, ამასთან $0 \leq \varphi \leq \pi$. სრულიად ასევე განისაზღვრება კუთხე ვექტორსა და ღერძს შორის.



ნახ. 23

ზოგჯერ დაგვირდება ერთი ვექტორიდან მეორე ვექტორისაკენ ათვლილი კუთხე. მაგალითად, $\vec{P}$ ვექტორიდან $\vec{Q}$ ვექტორის შორის კუთხე. ამ შემთხვევაში $\vec{P}, \vec{Q}$ ვექტორების კუთხე, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ დადებითი მიმართულებით $\vec{P}$ ვექტორი O წერტილის გარშემო, რომ დაემთხვეს $\vec{Q}$ ვექტორს. ნახაზ-

ზე $\vec{P}$ ვექტორის ბრუნვის ეს მიმართულება ისრითაა ნაჩვენები.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება მოცემული ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს.

$\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ასე აღინიშნება $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ ან $(\vec{P}, \vec{Q})$ ან, მარტივად, $\vec{P}\vec{Q}$.

$\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ასე ჩაიწერება:

$$\vec{P}\vec{Q} = |\vec{P}| |\vec{Q}| \cos \varphi. \quad (1)$$

თუ ვისარგებლებთ ვექტორის გეგმილის განსაზღვრით, გვექნება (ნახ. 24)

$$OC = \text{გეგ}_P \vec{Q} = |\vec{Q}| \cos \varphi.$$

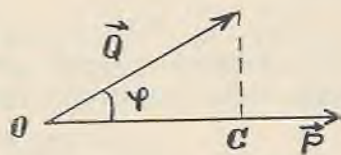
ამის გამო

$$\vec{P}\vec{Q} = |\vec{P}| \text{გეგ}_P \vec{Q}. \quad (2)$$

ცხადია, სკალარული ნამრავლი ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\vec{P}\vec{Q} = |\vec{Q}| \text{გეგ}_Q \vec{P}. \quad (3)$$

ამრიგად, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ტოლია პირველი ვექტორის სიგრძის მეორე ვექტორის პირველ გეგმირზე გეგმილის ნამრავლისა.



ნახ. 24

სკალარული ნამრავლით გამოისახება $\vec{P}$ ძალის მუშაობა $\vec{Q}$ გადაადგილებაზე:

$$A = |\vec{P}| |\vec{Q}| \cos \varphi.$$

2. სკალარული ნამრავლის თვისებები. სკალარული ნამრავლის (1) განსაზღვრიდან ცხადია, რომ

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P}. \quad (4)$$

ე. ი. ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს აქვს გადანაცვლებადობის თვისება.

ახლა ავიღოთ $(\alpha \vec{P}) \vec{Q}$. (2) განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned} (\alpha \vec{P}) \vec{Q} &= |\vec{Q}| \text{გეგ}_Q (\alpha \vec{P}) = |\vec{Q}| \alpha \text{გეგ}_Q \vec{P} = \\ &= \alpha |\vec{Q}| \text{გეგ}_Q \vec{P} = \alpha (\vec{Q} \vec{P}), \end{aligned}$$

ანუ

$$(\alpha \vec{P}) \vec{Q} = \alpha (\vec{P} \vec{Q}). \quad (5)$$

ამგვარად, ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს აქვს ჯუფთებადობის თვისება რიცხვზე გამრავლების მიმართ. ვაჩვენოთ, რომ

$$\vec{P} (\vec{Q} + \vec{R}) = \vec{P}\vec{Q} + \vec{P}\vec{R}. \quad (6)$$

მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ვექტორთა ჯამის გეგმილის თვისებას (§ 1, ნ5, (7)), გვექნება

$$\begin{aligned} \vec{P} (\vec{Q} + \vec{R}) &= |\vec{P}| \text{გეგ}_P (\vec{Q} + \vec{R}) = |\vec{P}| (\text{გეგ}_P \vec{Q} + \text{გეგ}_P \vec{R}) = \\ &= |\vec{P}| \text{გეგ}_P \vec{Q} + |\vec{P}| \text{გეგ}_P \vec{R} = \vec{P}\vec{Q} + \vec{P}\vec{R}. \end{aligned}$$

რაც ამტკიცებს (6) ტოლობას.

ამრიგად, სკალარულ ნამრავლს აქვს განრიგებადობის თვისება. (6) თვისება საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ ნამრავლი

$$\begin{aligned} (\alpha \vec{P} + \beta \vec{Q}) (\gamma \vec{R} + \delta \vec{S}) &= (\alpha \vec{P} + \beta \vec{Q}) \gamma \vec{R} + (\alpha \vec{P} + \beta \vec{Q}) \delta \vec{S} = \\ &= \alpha \vec{P} \cdot \gamma \vec{R} + \beta \vec{Q} \cdot \gamma \vec{R} + \alpha \vec{P} \cdot \delta \vec{S} + \beta \vec{Q} \cdot \delta \vec{S} = (\alpha \gamma) (\vec{P} \vec{R}) + \\ &+ (\beta \gamma) (\vec{Q} \vec{R}) + (\alpha \delta) (\vec{P} \vec{S}) + (\beta \delta) (\vec{Q} \vec{S}). \end{aligned} \quad (7)$$

ცხადია, არ შეგვიძლია განვიხილოთ სამი და მეტი ვექტორის სკალარული ნამრავლი, რადგანაც ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უკვე რიცხვია და არა ვექტორი. მაგრამ თუ დავწერთ $(\vec{P}\vec{Q})\vec{R}$, უნდა გავიგოთ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი გამრავლებული $\vec{R}$ ვექტორზე, რაც ვექტორს მოგვცემს.

თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |\vec{P}| |\vec{Q}| \cos \frac{\pi}{2} = 0. \quad (8)$$

ამგვარად, ურთიერთპერპენდიკულარული ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია.

ცხადია, პირიქითაც, თუ სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია, მაშინ ვექტორები $\vec{P} \neq 0$, $\vec{Q} \neq 0$ ურთიერთპერპენდიკულარულია. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინაც, როდესაც ერთ-ერთი ვექტორი, მაგალითად, $\vec{Q}$ ნულის ტოლია. მაგრამ ვიცით, რომ ნულვექტორის მიმართულება ნებისმიერია, ამიტომ ნულვექტორიც $\vec{P}$ ვექტორის პერპენდიკულარულად შეგვიძლია განვიხილოთ.

ამგვარად, მართებულია შემდეგი,

თეორემა 1. ორი ვექტორის ურთიერთპერპენდიკულარობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლის ნულთან ტოლობა.

თუ კუთხე $\varphi = \widehat{\vec{P}, \vec{Q}}$ მახვილია, მაშინ $\vec{P}\vec{Q}$ დადებითია, ხოლო თუ ბლაგვია, მაშინ $\vec{P}\vec{Q}$ უარყოფითია.

თუ $\vec{P} = \vec{Q}$, მაშინ სკალარული ნამრავლი მოგვცემს

$$\vec{P}\vec{P} = \vec{P}^2 = |\vec{P}| |\vec{P}| \cos 0 = |\vec{P}|^2,$$

ანუ

$$\vec{P}^2 = |\vec{P}|^2. \quad (9)$$

ე. ი. ვექტორის სკალარული კვადრატი მისი სიგრძის კვადრატის ტოლია.

3. ბაზისი ვექტორების სკალარული ნამრავლი. სკალარული ნამრავლის გამოსახვა ვექტორთა კოორდინატებით.

ავილოთ ბაზისი $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ვექტორები:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \vec{e}_1 = \vec{e}_1^2 = 1, \quad \vec{e}_2^2 = 1, \\ \vec{e}_1 \vec{e}_2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

მიღებული (10) დამოკიდებულებით (7) ფორმულის საფუძველზე ადვილი მისაღებია, რომ

$$\vec{P}\vec{Q} = (X_1 \vec{e}_1 + Y_1 \vec{e}_2) (X_2 \vec{e}_1 + Y_2 \vec{e}_2) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2,$$

ანუ

$$\vec{P}\vec{Q} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2.$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ

თეორემა 2. თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები მოცემულია კოორდინატებით

$$\vec{P}_1 = (X_1, Y_1), \quad \vec{Q} = (X_2, Y_2),$$

მაშინ სკალარული ნამრავლი გამოსახება ფორმულით

$$\vec{P}\vec{Q} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2. \quad (11)$$

(11) ფორმულიდან ადვილად მიიღება:

1) ვექტორთა პერპენდიკულარობის პირობა. $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია, თუ

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 = 0. \quad (12)$$

2) ვექტორის სიგრძე. (11) დამოკიდებულებიდან გვექნება

$$\vec{P}^2 = |\vec{P}|^2 = X^2 + Y^2,$$

საიდანაც

$$|\vec{P}| = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (13)$$

ეს ფორმულა ადრეც გვქონდა მიღებული (§ 1, (2)).

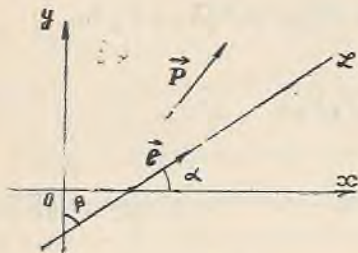
3) ორ ვექტორს შორის კუთხე. თუ (11) ფორმულას ასე ჩავეწერთ:

$$|\vec{P}| |\vec{Q}| \cos \varphi = X_1 X_2 + Y_1 Y_2$$

და $|\vec{P}|$ -სა და $|\vec{Q}|$ -ს შევცვლით სათანადოდ (13) ფორმულებით, გვექნება

$$\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}. \quad (14)$$

4. ვექტორის გეგმილი ღერძზე. ვთქვათ მოცემულია $\vec{P}$ ვექტორი და L ღერძი. L ღერძი მოცემული იყოს ერთეული $\vec{e}$ ვექტორით (ნახ. 25).



ნახ. 25

$$\vec{P} = (X, Y), \quad \vec{e} = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

ცხადია, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\cos \beta = \sin \alpha$, მაგრამ ზოგადობისათვის ვწერთ $\cos \beta$ -ს და არა $\sin \alpha$ -ს). სკალარული ნამრავლის (2) განმარტებიდან გვექნება

$$\vec{P} \cdot \vec{e} = |\vec{e}| \text{ გვექნება } \vec{P} =$$

$$= 1 \cdot \text{გვექნება } \vec{P} = \text{გვექნება } \vec{P},$$

ანუ

$$\text{გვექნება } \vec{P} = \vec{P} \cdot \vec{e} = X \cos \alpha + Y \sin \alpha.$$

ამგვარად, $\vec{P}$ ვექტორის გეგმილი L ღერძზე, რომლის მიმართველია $\vec{e}$ ვექტორი, განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\text{გვექნება } \vec{P} = X \cos \alpha + Y \sin \alpha. \quad (15)$$

5. სამკუთხედის უტოლობა. ავიღოთ სამი ვექტორი $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ და $\vec{CB}$ (ნახ. 26). ცხადია,

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}.$$

აქედან მივიღებთ

$$|\vec{AB}| \leq |\vec{AC}| + |\vec{CB}|. \quad (16)$$

თუ

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

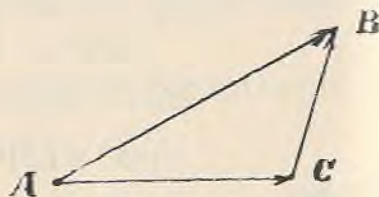
$$\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1),$$

$$\vec{CB} = (x_2 - x_3, y_2 - y_3),$$

მაშინ (16) ასე ჩაიწერება:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \quad (17)$$

მივიღეთ ე. წ. სამკუთხედის უტოლობა.



ნახ. 26

6. ამოცანები. ამოცანა 1. მოცემულია $\vec{AB}$ და $\vec{AC}$ ვექტორები, რომლებიც სამკუთხედის გვერდებს წარმოადგენენ. ამ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია M . დავამტკიცოთ

$$\vec{AM} = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AC}).$$

დამტკიცება. ABC სამკუთხედი შევაესოთ $ABDC$ პარალელოგრამად (ნახ. 27). E წერტილი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. ამიტომ

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} = 2 \vec{AE}.$$

აქედან კი გვექნება

$$\vec{AE} = \frac{1}{2} \vec{AD}.$$

მაგრამ

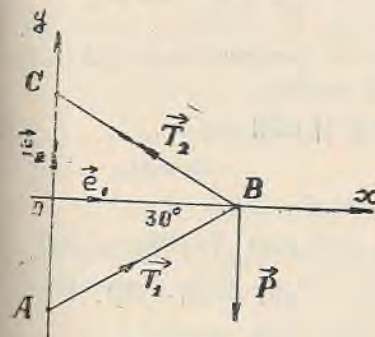
$$\vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AE}.$$

რაც მოგვცემს

$$\vec{AM} = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AC}).$$

რაც უნდა დავამტკიცებინა.

ამოცანა 2. P წონის ტვირთი დაკერილია AB და CB ღეროების საშუალებით. ღეროები კედელთან დაკავშირებულია ბურთულების საშუალებით (ნახ. 28). რა ძალები მოქმედებს ღეროებზე, თუ ABC სამკუთხედი წესიერია.



ნახ. 28

ამოხსნა. AB და CB ღეროებზე მოქმედი ძალები აღვნიშნოთ $\vec{T}_1$ -ით და $\vec{T}_2$ -ით.

წონასწორობისათვის საჭიროა B წერტილზე მოქმედ ძალები ჯამი ნულის ტოლი იყოს:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = 0. \quad (18)$$

კოორდინატთა სისტემა ისე ავიღოთ, რომ Ox ღერძი გადიოდეს B წერტილზე, ხოლო Oy ღერძი გაჰყვეს

კედელს. ამ სისტემის ბაზისი ვექტორები იყოს $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$. (18) ტოლობა გაუმრავლოთ სკალარულად $\vec{e}_1$ -ზე, მივიღებთ

$$\vec{T}_1 \vec{e}_1 + \vec{T}_2 \vec{e}_1 + \vec{P} \vec{e}_1 = 0.$$

სათანადო გამარტივება მოგვცემს

$$|\vec{T}_1| |\vec{e}_1| \cos 30^\circ + |\vec{T}_2| |\vec{e}_1| \cos 150^\circ + |\vec{P}| |\vec{e}_1| \cos 90^\circ = 0,$$

$$|\vec{T}_1| \frac{\sqrt{3}}{2} - |\vec{T}_2| \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

ანუ

$$|\vec{T}_1| - |\vec{T}_2| = 0. \quad (19)$$

(18) ტოლობა $\vec{e}_2$ -ზე სკალარულად გავამრავლოთ, მივიღებთ

$$\vec{T}_1 \vec{e}_2 + \vec{T}_2 \vec{e}_2 + \vec{P} \vec{e}_2 = 0,$$

ანუ

$$|\vec{T}_1| |\vec{e}_2| \cos 60^\circ + |\vec{T}_2| |\vec{e}_2| \cos 60^\circ + |\vec{P}| |\vec{e}_2| \cos 180^\circ = 0.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$|\vec{T}_1| + |\vec{T}_2| = 2 |\vec{P}|. \quad (20)$$

(19) და (20) ტოლობა წარმოადგენს განტოლებათა სისტემას $|\vec{T}_1|$ -ისა და $|\vec{T}_2|$ -ის მიმართ. ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

$$|\vec{T}_1| = |\vec{P}|, \quad |\vec{T}_2| = |\vec{P}|.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$\vec{T}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} P \vec{e}_1 + \frac{1}{2} P \vec{e}_2, \quad \vec{T}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} P \vec{e}_1 + \frac{1}{2} P \vec{e}_2.$$

ამოცანა 3. სკალარული ნამრავლის გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ ყოველ სამკუთხედში ჭეშმარიტია ტოლობა

$$|AB|^2 = |CA|^2 + |CB|^2 - 2 |CA| |CB| \cos C. \quad (21)$$

(კოსინუსების თეორემა).

განვიხილოთ $\vec{AC}$, $\vec{CB}$, $\vec{AB}$ ვექტორები (ნახ. 29).

აღვილი შესამჩნევია, რომ

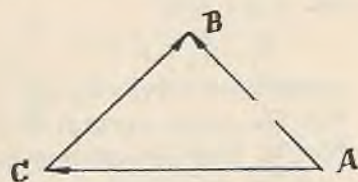
$$\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB},$$

ანუ

$$\vec{AC} + \vec{CB} - \vec{AB} = 0. \quad (22)$$

მაგრამ

$$\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{AB} \neq 0.$$



ნახ. 29

ამის გამო (22) ტოლობა შეგვიძლია სკალარულად გავამრავლოთ $\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{AB}$ -ზე, გვექნება

$$(\vec{AC} + \vec{CB} - \vec{AB})(\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{AB}) = 0,$$

ანუ

$$(\vec{AC} + \vec{CB})^2 - (\vec{AB})^2 = 0,$$

საიდანაც

$$(\vec{AB})^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{CB}|^2 + 2 |\vec{AC}| |\vec{CB}| \cos \widehat{ACB}. \quad (23)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$|\vec{AC}| = |\vec{CA}| = |CA|, \quad |\vec{CB}| = |CB|, \quad \widehat{ACB} = \pi - C,$$

მაშინ (23) ტოლობა (21) ტოლობას ამტკიცებს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 12.

1. გამოარკვეთ, რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $\vec{P} = (X_1, Y_1)$ და $\vec{Q} = (X_2, Y_2)$ ვექტორები, რომ ეს ვექტორები ბაზის ვექტორებს ქმნიდნენ.

2. მოცემულია წერტილები $A(1; 2)$, $B(-4; 1)$, $C(-1; 5)$. გამოსახეთ $\vec{BC}$ ვექტორი $\vec{AB}$ და $\vec{AC}$ ვექტორებით. ააგეთ ნახაზი.

3. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(8; 1)$, $B(2; 9)$ და $C(3; 4)$.
1) D წერტილი BC გვერდის შუა წერტილია. გამოსახეთ $\vec{AD}$ ვექტორი $\vec{AB}$ და $\vec{AC}$ ვექტორებით.

2) E წერტილი BC გვერდისა და A კუთხის ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილია. გამოსახეთ $\vec{AE}$ ვექტორი $\vec{AB}$ და $\vec{AC}$ ვექტორების საშუალებით. ააგეთ სათანადო ნახაზი.

4. მოცემულია კვადრატის წვეროები $A(2; 2)$, $B(-2; 2)$, $C(-2; 2)$, $D(2; -2)$. გამოსახეთ $\vec{AC}$ და $\vec{DB}$ ვექტორები $\vec{e}_1 = (1; 0)$ და $\vec{e}_2 = (0; 1)$ ბაზისი ვექტორებით.

5. მოცემულია წერტილები $A(4; 0)$; $B(2\sqrt{3}; 2)$, $C(-2\sqrt{3}; -2)$. გამოსახეთ $\vec{OB}$ ვექტორი $\vec{OA}$ და $\vec{OC}$ ვექტორებით, სადაც O წერტილი კოორდინატთა სათავეა. ააგეთ სათანადო ნახაზი.

6. მოცემულია ვექტორები $\vec{P}_1 = (-2; 5)$, $\vec{P}_2 = (6; -2)$, $\vec{P}_3 = (6; 8)$.
1) იპოვეთ ამ ვექტორების ჯამი, 2) იპოვეთ $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 - \vec{P}_3 = \vec{R}$. 3) გამოსახეთ $\vec{R}$ ვექტორი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორებით.

7. მოცემულია წესიერი ექვსკუთხედის წვეროები პოლარულ კოორდინატებში $A(0; 2)$, $B\left(\frac{\pi}{3}; 2\right)$ და ა. შ.

ძველი სისტემის სათანადო ღერძების პარალელურობა, ხოლო კოორდინატთა სათავე O' იმყოფება (a, b, c) წერტილში (ნახ. 31).

ნახაზის მიხედვით გვეხსენება O' არის A , გვეხსენება M არის B , გვეხსენება M არის B' . x' ცხადია,

$$OB = OA + AB = OA + O'B',$$

ანუ

$$x = a + x'.$$

სრულიად ასევე მივიღებთ:

$$y = b + y', \quad z = c + z'.$$

ამგვარად, გვაქვს დამოკიდებულებანი:

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'. \quad (1)$$

ამ ტოლობებიდან გვექნება

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c. \quad (2)$$

(1) ფორმულები იძლევა ძველი კოორდინატების ახალი კოორდინატებით გამოსახვას, ხოლო (2) ფორმულები წარმოადგენს ახალი კოორდინატების გამოსახვას ძველის საშუალებით.

2) ორ წერტილს შორის მანძილი. თუ M წერტილის კოორდინატებია (x, y, z) , მაშინ OM წარმოადგენს მართკუთხა პარალელებიპედის დიაგონალს (ნახ. 32), ცხადია,

$$|OM|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

საიდანაც

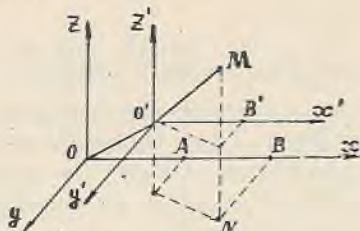
$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3)$$

ახლა ვიპოვოთ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ -სა და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილის შორის მანძილი.

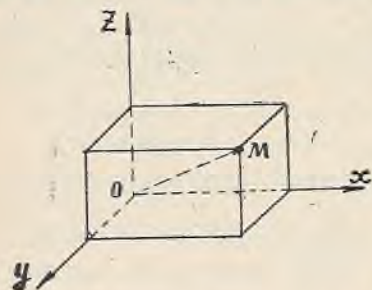
გადავიტანოთ კოორდინატთა სისტემა პარალელურად ისე, რომ ახალი სისტემის სათავე მოთავსდეს $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილში. ამ ახალ

$M_1 x' y' z'$ სისტემაში M_1 და M_2 წერტილებს შორის მანძილი (3) ფორმულის მიხედვით იქნება შემდეგი:

$$d_{M_1 M_2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$



ნახ. 31



ნახ. 32

თუ გამოვიყენებთ (2) ფორმულებს, გვექნება

$$d_{M_1 M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (4)$$

3) მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით. მოვნახოთ $[M_1 M_2]$ მონაკვეთის ისეთი $M(x, y, z)$ წერტილი, რომელიც $[M_1 M_2]$ მონაკვეთს τ ფარდობით ყოფს (ნახ. 33)

$$\frac{M_1 M}{M M_2} = \lambda. \quad (5)$$

M_1, M, M_2 წერტილებზე გავატაროთ Ox ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყეები. Ox ღერძზე მივიღებთ A_1, A, A_2 წერტილებს:

$$OA_1 = x_1, \quad OA = x, \quad OA_2 = x_2.$$

ნახაზიდან ცხადია, რომ

$$\frac{A_1 A}{A A_2} = \frac{M_1 M}{M M_2},$$

ანუ

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

საიდანაც

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

ნახ. 33

სრულიად ასევე მივიღებთ y -სა და z -სათვის.

ამგვარად, საძიებელი M წერტილის კოორდინატები იქნება:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (6)$$

კერძოდ, თუ M წერტილი $\overline{M_1 M_2}$ მონაკვეთის შუა წერტილია,

$$\lambda = \frac{M_1 M}{M M_2} = 1,$$

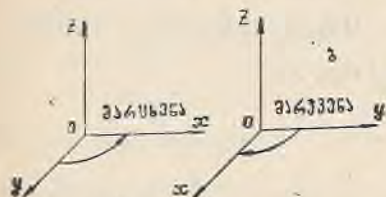
მაშინ გვექნება:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (7)$$

3. კოორდინატთა მარცხენა და მარჯვენა სისტემები. თუ დავაკვირდებით ზემოთ განხილულ $Oxyz$ სისტემას, შევამჩნევთ: Oz ზევითაა მიმართული, მკითხველის ფეხებიდან თავისაკენ, ხოლო Oy ღერძი რომ Ox ღერძს დაემთხვეს, საჭიროა Oy ღერძი უმცირესი კუთხით მარცხნივ მოვაბრუნოთ. ამიტომ ამ $Oxyz$ სისტემას ეწოდება მარცხენა

სისტემა. ან ასე: ღერძები Ox , Oy და Oz ისეა განლაგებული, როგორც მარცხენა ხელის მაჩვენებელი თითო, შუა თითი და ცერი, თუ ამ თითებს ერთმანეთისადმი მართი კუთხით მოვათავსებთ.

თუ კოორდინატა სისტემის Ox ღერძის მაგიერ ავიღებთ Oy ღერძს



ნახ. 34

და Oy ღერძის მაგიერ Ox ღერძს (ნახ. 34), მაშინ Oy ღერძი რომ Ox ღერძს დაემთხვეს, დაგვირდება Oy -ის უმცირესი კუთხით მარჯვნივ მობრუნება. ამ სისტემას ეწოდება კოორდინატა მარჯვენა სისტემა. თუ მარცხენა xyz სისტემის ღერძებს შორის გადანაცვლებას მოვახდენთ, მაგალითად, yxz , zyx , xzy , მივიღებთ მარჯვენა სისტემას.

4. ბაზისი ვექტორები. ავიღოთ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ერთეული ვექტორები სათანადოდ Ox, Oy, Oz ღერძებზე დადებითი მიმართულებით (ნახ. 35).

ვთქვათ, $\vec{OM}$ რადიუს-ვექტორის ღერძებზე გვემილება:

$$OM_x = \text{გვზ} \vec{OM}, OM_y = \text{გვზ} \vec{OM},$$

$$OM_z = \text{გვზ} \vec{OM}.$$

თუ განვიხილავთ $\vec{OM}_x, \vec{OM}_y, \vec{OM}_z$ ვექტორებს, გვეჩვენება

$$\vec{OM} = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y + \vec{OM}_z. \quad (8)$$

(8) ტოლობის მართებულობისათვის

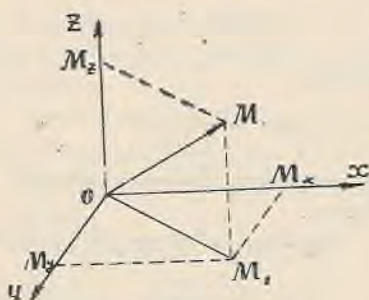
საკმარისია $\vec{OM}_x$ და $\vec{OM}_y$ ვექტორები შევკრიბოთ პარალელოგრამის წესით, მივიღებთ $\vec{OM}_1$ ვექტორს, შემდეგ $\vec{OM}_1$ და $\vec{OM}_z$ შევკრიბოთ

ისევ პარალელოგრამის წესით, მივიღებთ $\vec{OM}$ ვექტორს. თუ გამოვიყენებთ ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განსაზღვრას, გვეჩვენება

$$\vec{OM}_x = X \vec{e}_1, \vec{OM}_y = Y \vec{e}_2, \vec{OM}_z = Z \vec{e}_3.$$

ამის გამო (8) მოგვცემს

$$\vec{OM} = X \vec{e}_1 + Y \vec{e}_2 + Z \vec{e}_3. \quad (8)$$



ნახ. 35

ეს ფორმულა იძლევა $\vec{OM}$ ვექტორის დაშლას $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ვექტორების მიხედვით. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ვექტორებს ეწოდება ერთ-ერთი რეპერული ბაზისი ვექტორები. (X, Y, Z) -ს ეწოდება $\vec{OM}$ ვექტორის კოორდინატები. (X, Y, Z) სამეული რომ $\vec{OM}$ ვექტორის კოორდინატებია, ასე ჩაიწერება:

$$\vec{OM} = (X, Y, Z), \text{ ან } \vec{OM}(X, Y, Z).$$

ცხადია, M წერტილსა და $\vec{OM}$ რადიუს-ვექტორს ერთი და იგივე კოორდინატები აქვთ.

5. მოქმედებანი ვექტორებზე. სივრცეში მოთავსებულ ვექტორებზე მოქმედებანი ისევე შესრულდება და ხასიათდება იმავე თვისებებით, როგორც ერთ სიბრტყეში მოთავსებული ვექტორები.

1) $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$ — გადანაცვლებადობის თვისება;

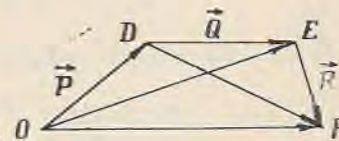
2) $(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R})$ — ჯუფთებადობის თვისება.

ჯუფთებადობის თვისების შესამოწმებლად განვიხილოთ 36-ე ნახაზი.

$$(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{OE} + \vec{R} = \vec{OF};$$

$$\vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R}) = \vec{P} + \vec{DF} = \vec{OF}.$$

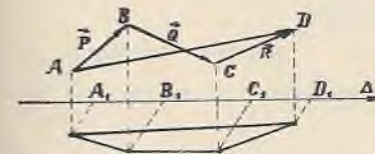
ამ ტოლობათა შედარება ვექტორთა ჯამის ჯუფთებადობის თვისების მართებულობას გვიჩვენებს.



ნახ. 36

$$3) \text{გვზ} (\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}) = \text{გვზ} \vec{P} + \text{გვზ} \vec{Q} + \text{გვზ} \vec{R} \quad (9)$$

— ვექტორთა ჯამის გვემილი რაიმე Δ ღერძზე ტოლია შესაკრებ ვექტორთა გვემილების ჯამის იმავე Δ ღერძზე.



ნახ. 37

(9) თვისების შესამოწმებლად განვიხილოთ 37-ე ნახაზი.

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}. \quad (10)$$

ამ ვექტორთა გვემილები მოგვცემს:

$$\text{გვზ} \vec{AB} = A_1 B_1, \text{ გვზ} \vec{BC} = B_1 C_1, \text{ გვზ} \vec{CD} = C_1 D_1.$$

გვემილთა ჯამი მოგვცემს

$$A_1 B_1 + B_1 C_1 + C_1 D_1 = A_1 D_1,$$

ანუ

$$\text{გვამ} \vec{P} + \text{გვამ} \vec{Q} + \text{გვამ} \vec{R} = \text{გვამ} \vec{AD},$$

გ. ი.

$$\text{გვამ} (\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}) = \text{გვამ} \vec{P} + \text{გვამ} \vec{Q} + \text{გვამ} \vec{R}.$$

ამით (9) ტოლობის მართებულობა დამტკიცდა.

4) გვამ $(m\vec{P}) = m$ გვამ $\vec{P}$ ანუ $\vec{P}$ ვექტორის m რიცხვზე ნამრავლის რაიმე Δ ღერძზე გვემოსილი ტოლია $\vec{P}$ ვექტორის გვემოსილისა და m რიცხვის ნამრავლისა.

თუ ვექტორები მოცემულია კოორდინატებით:

$$\vec{P} = (X_1, Y_1, Z_1), \vec{Q} = (X_2, Y_2, Z_2), \vec{R} = (X_3, Y_3, Z_3),$$

მაშინ გვექნება

$$\vec{P} + \vec{Q} - \vec{R} = (X_1\vec{e}_1 + Y_1\vec{e}_2 + Z_1\vec{e}_3) + (X_2\vec{e}_1 + Y_2\vec{e}_2 + Z_2\vec{e}_3) - (X_3\vec{e}_1 + Y_3\vec{e}_2 + Z_3\vec{e}_3),$$

საიდანაც

$$X = X_1 + X_2 - X_3, Y = Y_1 + Y_2 - Y_3, Z = Z_1 + Z_2 - Z_3, \quad (11)$$

სადაც X, Y, Z კოორდინატებია $\vec{P} + \vec{Q} - \vec{R}$ ვექტორისა.

(11) გვიჩვენებს: ვექტორთა ალგებრული ჯამის კოორდინატები ტოლია შესაყრებ ვექტორთა კოორდინატების ალგებრული ჯამისა.

სრულიად ასევე მივიღებთ:

$$m\vec{P} = m(X_1\vec{e}_1 + Y_1\vec{e}_2 + Z_1\vec{e}_3) = mX_1\vec{e}_1 + mY_1\vec{e}_2 + mZ_1\vec{e}_3,$$

ანუ

$$X = mX_1, Y = mY_1, Z = mZ_1, \quad (12)$$

სადაც X, Y, Z $m\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებია.

(12) გვიჩვენებს, რომ m რიცხვისა და $\vec{P}$ ვექტორის ნამრავლის კოორდინატები ტოლია $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებისა და m რიცხვის ნამრავლისა.

6. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი. მე-2 პარაგრაფში განვსაზღვრეთ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |\vec{P}| |\vec{Q}| \cos \varphi, \quad (13)$$

სადაც φ კუთხეა $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებს შორის, $\varphi = \widehat{\vec{P}, \vec{Q}}$.

წინასწარ გამოვიყვანოთ ბაზისი ვექტორების სკალარული ნამრავლი:

$$\vec{e}_1 \vec{e}_1 = |\vec{e}_1| |\vec{e}_1| \cos 0 = |\vec{e}_1|^2 = 1, \quad \vec{e}_1 \vec{e}_2 = |\vec{e}_1| |\vec{e}_2| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\vec{e}_2 \vec{e}_2 = 1, \quad \vec{e}_3 \vec{e}_3 = 1, \quad \vec{e}_2 \vec{e}_3 = 0, \quad \vec{e}_1 \vec{e}_3 = 0. \quad (14)$$

ნებისმიერი $\vec{P} = (X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{Q} = (X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ასე გამოითვლება:

$$\begin{aligned} \vec{P} \cdot \vec{Q} &= (X_1\vec{e}_1 + Y_1\vec{e}_2 + Z_1\vec{e}_3) (X_2\vec{e}_1 + Y_2\vec{e}_2 + Z_2\vec{e}_3) = \\ &= X_1X_2\vec{e}_1\vec{e}_1 + X_1Y_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + X_1Z_2\vec{e}_1\vec{e}_3 + \\ &+ Y_1X_2\vec{e}_2\vec{e}_1 + Y_1Y_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + Y_1Z_2\vec{e}_2\vec{e}_3 + \\ &+ Z_1X_2\vec{e}_3\vec{e}_1 + Z_1Y_2\vec{e}_3\vec{e}_2 + Z_1Z_2\vec{e}_3\vec{e}_3. \end{aligned}$$

გ. ი.

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \quad (15)$$

თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ $\vec{P} \cdot \vec{Q} = 0$. ამის გამო (15) მოგვცემს

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \quad (16)$$

მივიღეთ ორი ვექტორის პერპენდიკულარობის პირობა.

7. ვექტორის სიგრძე. (15) ფორმულით ადვილად მიიღება

$\vec{P} = (X, Y, Z)$ ვექტორის სიგრძე:

$$\vec{P} \cdot \vec{P} = |\vec{P}| |\vec{P}| \cos 0 = |\vec{P}|^2.$$

ამის გამო (15) მოგვცემს

$$|\vec{P}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

საიდანაც

$$|\vec{P}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (17)$$

8. ვექტორთა შორის კუთხე. $\vec{P} = (X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{Q} = (X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორთა შორის კუთხე განიზღვრება სკალარული ნამრავლიდან

$$\cos \varphi = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{|\vec{P}| |\vec{Q}|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \quad (18)$$

1. ვექტორული ნამრავლი. ვთქვათ, მოცემულია $\vec{P} = (X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{P}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორები. ვექტორები გადაღებულია ერთი წერტილიდან. განსაზღვრა. $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\vec{R}$ ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $|\vec{R}| = |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \varphi$ — ვექტორული ნამრავლის სიგრძე ტოლია თანამრაველ ვექტორთა სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლისა;

2) $\vec{R}$ ვექტორი პერპენდიკულარულია $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებზე გაშვალ სიბრტყისა.

3) $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ვექტორები ქმნიან მარცხენა სისტემას — ე. ი. იმ სისტემას, რომელიც გვაქვს აღებული (ნახ. 38).

$\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ასე აღინიშნება:

$$[\vec{P}, \vec{Q}] \text{ ან } \vec{P} \times \vec{Q}.$$

$\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ნამრავლის სიგრძე რიცხობრივად ტოლია $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობისა.

თუ ერთ-ერთი ვექტორი ნულ-ვექტორია, მაშინ, ცხადია, ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ნულია. თუ ვექტორები ნულ-ვექტორები არაა, ვექტორული ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ვექტორები პარალელურია.



ნახ. 38

2. ვექტორული ნამრავლის თვისებები. ვექტორული ნამრავლიდან გამომდინარეობს

$$[\vec{Q}, \vec{P}] = -[\vec{P}, \vec{Q}]$$

ე. ი. ვექტორული ნამრავლი ანტიკომუტატიურია (ნახ. 38).

მართლაც, $\vec{P}, \vec{Q}, [\vec{P}, \vec{Q}]$ ვექტორები მარცხენა ორიენტაციისაა, $\vec{Q}, \vec{P}, [\vec{Q}, \vec{P}]$ ნამრავლიც მარცხენა ორიენტაციისა, მაგრამ $[\vec{P}, \vec{Q}]$ და $[\vec{Q}, \vec{P}]$ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებისაა, ხოლო სიგრძეებით ტოლი:

$$|[\vec{P}, \vec{Q}]| = |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \varphi = |\vec{Q}| |\vec{P}| \sin \varphi = |[\vec{Q}, \vec{P}]|.$$

თუ $[\vec{P}, \vec{Q}]$ -ს (-1)-ზე გაგზავნავთ, მივიღებთ ვექტორს, რომელსაც $[\vec{P}, \vec{Q}]$ -ს საწინააღმდეგო მიმართულება ექნება, ე. ი. $[\vec{Q}, \vec{P}] = -[\vec{P}, \vec{Q}]$. ამგვარად, დავამტკიცეთ

თეორემა 1. ვექტორული ნამრავლი ანტიკომუტატიურია,

$$[\vec{Q}, \vec{P}] = -[\vec{P}, \vec{Q}]. \quad (1)$$

დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 2. ნებისმიერი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებისა და ნებისმიერი λ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$[\lambda \vec{P}, \vec{Q}] = \lambda [\vec{P}, \vec{Q}]. \quad (2)$$

მართლაც,

$$|\lambda \vec{P}, \vec{Q}| = |\lambda \vec{P}| |\vec{Q}| \sin \angle \lambda \vec{P}, \vec{Q} = |\lambda| |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \angle \vec{P}, \vec{Q}.$$

ვექტორები, რომლებიც მონაწილეობენ დასამტკიცებელი (2) ტოლობის ორივე მხარეში, პერპენდიკულარულია $\vec{P}, \vec{Q}$ ვექტორებზე გაშვალ სიბრტყისა. თუ $\lambda > 0$, მაშინ $[\lambda \vec{P}, \vec{Q}]$ და $\lambda [\vec{P}, \vec{Q}]$ ვექტორები ისეა მიმართული, როგორც $[\vec{P}, \vec{Q}]$. თუ $\lambda < 0$, მაშინ $\lambda \vec{P}, \vec{Q} = \pi - \angle \vec{P}, \vec{Q}$ და $[\lambda \vec{P}, \vec{Q}]$ საწინააღმდეგო მიმართულებისაა $[\vec{P}, \vec{Q}]$ ვექტორისა. ასევე საწინააღმდეგო მიმართულებისაა $\lambda [\vec{P}, \vec{Q}]$ ვექტორი $[\vec{P}, \vec{Q}]$ ვექტორისა. მაშასადამე, $\lambda < 0$ -სათვის, $[\lambda \vec{P}, \vec{Q}]$ და $\lambda [\vec{P}, \vec{Q}]$ ერთი და იგივე მიმართულებისაა. ამ ვექტორთა სიგრძეებიც ტოლია:

$$|[\lambda \vec{P}, \vec{Q}]| = |\lambda \vec{P}| |\vec{Q}| \sin \angle \lambda \vec{P}, \vec{Q} = |\lambda| |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin (\pi - \angle \vec{P}, \vec{Q}) = |\lambda| |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \angle \vec{P}, \vec{Q} = |\lambda| |[\vec{P}, \vec{Q}]|.$$

ამგვარად, $[\lambda \vec{P}, \vec{Q}]$ და $\lambda [\vec{P}, \vec{Q}]$ სიგრძეებით ტოლია და ერთი და იგივე მიმართულებისაა. ეს კი ამტკიცებს გამოთქმულ თეორემას.

თეორემა 3. თუ $\vec{P}$ ვექტორს დავშლით ორ მდგენელად, $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$, სადაც $\vec{P}_1 \perp \vec{Q}$, $\vec{P}_2 \parallel \vec{Q}$, მაშინ $[\vec{P}, \vec{Q}]$ ვექტორული ნამრავლი ტოლია $[\vec{P}_1, \vec{Q}]$ ვექტორული ნამრავლისა.

მართლაც, $\vec{P}$ ვექტორი დავშალოთ ორ მდგენელად (ნახ. 39)

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2,$$

სადაც $\vec{P}_1 \perp \vec{Q}$ და $\vec{P}_2 \parallel \vec{Q}$. ნახაზიდან ცხადია,

$$|\vec{P}_1| = |\vec{P}| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = |\vec{P}| \sin \varphi,$$

სადაც $\varphi = \widehat{\vec{P}, \vec{Q}}$. $\vec{R}$ ვექტორის სიგრძისათვის გვექნება,

$$|\vec{R}| = |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \varphi = |\vec{P}_1| |\vec{Q}|.$$

თუ დაგვიკვირდებათ $\vec{P}_1$ და $\vec{Q}$ ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს, შეგამჩნევთ, რომ იგი მიმართულია $\vec{R}$ ვექტორის მიმართულებით და მისი სიგრძე $||\vec{P}\vec{Q}||$ -ს ტოლია,

$$||\vec{P}_1, \vec{Q}|| = |\vec{P}_1| |\vec{Q}| = |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \varphi,$$

რადგანაც

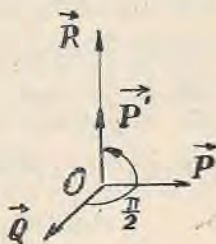
$$\vec{P}_1 \perp \vec{Q}.$$

ამგვარად, $[\vec{P}, \vec{Q}]$ ვექტორული ნამრავლი ტოლია $[\vec{P}_1, \vec{Q}]$ ვექტორული ნამრავლისა.

თეორემა 4. ურთიერთპერპენდიკულარული $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი $\vec{R}$ ვექტორი მიიღება $\vec{P}$ ვექტორის მობრუნებით $\vec{Q}$ ვექტორის გარშემო დადებითი მიმართულებით მართი კუთხის ტოლი კუთხით, თუ $\vec{Q}$ ვექტორი ჩვენენაა მომართული, და მიღებული ვექტორის $|\vec{Q}|$ სიგრძეზე გამრავლებით.

მართლაც, $\vec{P}'$ ვექტორი, რომელიც $\vec{P}$ ვექტორის დადებითი მიმართულებით $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნებით მიიღება, პერპენდიკულარულია $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ვექტორებზე. გამავალი სიბრტყისა (ნახ. 40) და $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}'$ მარცხენა ორიენტაციისა. ე. ი. $\vec{P}'$ ვექტორი $\vec{R}$ ვექტორის მიმართულებისაა. შეგადართ $\vec{P}'$ -ისა და $\vec{R}$ -ის სიგრძეები:

$$|\vec{R}| = |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \frac{\pi}{2} = |\vec{P}'| |\vec{Q}|.$$



ნახ. 40

ე. ი. $|\vec{R}|$ სიგრძე მიიღება $|\vec{P}'|$ სიგრძის გამრავლებით $|\vec{Q}|$ -ზე. ამით გამოთქმული თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

თეორემა 5. ნებისმიერი $\vec{P}$, $\vec{S}$, $\vec{Q}$ ვექტორებისათვის მართებულია ტოლობა

$$[\vec{P} + \vec{S}, \vec{Q}] = [\vec{P}, \vec{Q}] + [\vec{S}, \vec{Q}]. \quad (3)$$

დამტკიცება. $\vec{P}$ და $\vec{S}$ ვექტორები დავშალოთ

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2, \quad \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2,$$

სადაც $\vec{P}_1, \vec{S}_1 \perp \vec{Q}$, ხოლო $\vec{P}_2, \vec{S}_2 \parallel \vec{Q}$. ამის გამო გვექნება

$$[\vec{P} + \vec{S}, \vec{Q}] = [\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{S}_1 + \vec{S}_2, \vec{Q}] = [(\vec{P}_1 + \vec{S}_1) + (\vec{P}_2 + \vec{S}_2), \vec{Q}].$$

მე-3 თეორემის ძალით უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$[\vec{P} + \vec{S}, \vec{Q}] = [\vec{P}_1 + \vec{S}_1, \vec{Q}], \quad (4)$$

ვექტორული ნამრავლი $[\vec{P}_1 + \vec{S}_1, \vec{Q}]$ მე-4 თეორემის ძალით გვაძლევს, რომ $(\vec{P}_1 + \vec{S}_1)$ ვექტორი უნდა მოვებრუნოთ $\vec{Q}$ ვექტორის გარშემო $\frac{\pi}{2}$ და-

დებითი კუთხით და მიღებული ვექტორი გავამრავლოთ $|\vec{Q}|$ -ზე. მაგრამ $\vec{Q}$ -ს გარშემო შემობრუნდება მთელი პარალელოგრამი, რომელიც $\vec{P}_1$ -სა და $\vec{S}_1$ -ზეა აგებული, და მიღებული პარალელოგრამის დიაგონალით გამოსახული ვექტორი უნდა გავამრავლოთ $|\vec{Q}|$ -ზე. ეს კი იგივეა $\vec{P}_1$ -სა და $\vec{S}_1$ -ზე აგებული პარალელოგრამის გვერდებიც, ე. ი. $\vec{P}_1, \vec{S}_1$ -იც, გავამრავლოთ $\vec{Q}$ -ზე.

$$[\vec{P}_1 + \vec{S}_1, \vec{Q}] = [\vec{P}_1, \vec{Q}] + [\vec{S}_1, \vec{Q}]. \quad (5)$$

მე-3 თეორემის გამოყენებით

$$[\vec{P}_1, \vec{Q}] = [\vec{P}, \vec{Q}], \quad [\vec{S}_1, \vec{Q}] = [\vec{S}, \vec{Q}].$$

ამის გამო (4) ასე ჩაიწერება:

$$[\vec{P} + \vec{S}, \vec{Q}] = [\vec{P}, \vec{Q}] + [\vec{S}, \vec{Q}],$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

გამოვსახოთ ვექტორული ნამრავლი მოცემულ ვექტორთა კოორდინატებით, ამისათვის, წინასწარ გამოვთვალოთ ბაზისი ვექტორების ვექტორული ნამრავლი:

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_1] = |\vec{e}_1| |\vec{e}_1| \sin 0 = 0, \quad [\vec{e}_2, \vec{e}_2] = 0, \quad [\vec{e}_3, \vec{e}_3] = 0.$$

რადგანაც e_1 და e_2 მართობულია,

$$|[\vec{e}_1, \vec{e}_2]| = |\vec{e}_1| |\vec{e}_2| \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

ნამრავლი $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ მიმართულია $\vec{e}_3$ -ის მიმართულებით, $|\vec{e}_3| = 1$, ამიტომ

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3.$$

სრულიად ასევე მივიღებთ

$$[\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1, [\vec{e}_3, \vec{e}_1] = \vec{e}_2.$$

ასე რომ, გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$[\vec{e}_i, \vec{e}_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3, [\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1, [\vec{e}_3, \vec{e}_1] = \vec{e}_2. \quad (6)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ: (5) განრიგადობის კანონს, (6) ფორმულებს, ვექტორული ნამრავლი რომ ანტიკომუტატიურია და რიცხვითი მამრავლი შეიძლება გამოვიტანოთ ვექტორული ნამრავლის ნიშნის გარეთ, გვექნება

$$\begin{aligned} \vec{P} \times \vec{Q} &= (X_1 \vec{e}_1 + Y_1 \vec{e}_2 + Z_1 \vec{e}_3) \times (X_2 \vec{e}_1 + Y_2 \vec{e}_2 + Z_2 \vec{e}_3) = \\ &= (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) \vec{e}_1 + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2) \vec{e}_2 + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) \vec{e}_3, \end{aligned} \quad (7)$$

ანუ

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

§ 5. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი

1. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი, განსაზღვრა. $[\vec{P}, \vec{Q}] \vec{T}$ ნამრავლს ეწოდება სამი $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{T}$ ვექტორის შერეული ნამრავლი.

$\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $\vec{T}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი ასე აღინიშნება $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{T})$.

ვთქვათ, $\vec{P} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{Q} = (X_2, Y_2, Z_2)$, $\vec{T} = (X_3, Y_3, Z_3)$. განსაზღვრის თანახმად $[\vec{P}, \vec{Q}]$ გამოისახება § 4-ის (7) ფორმულით:

$$\vec{R} = [\vec{P}, \vec{Q}] = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, Z_1 X_2 - X_1 Z_2, X_1 Y_2 - Y_1 X_2).$$

$[\vec{P}, \vec{Q}] \vec{T}$ სკალარული ნამრავლია. სკალარული ნამრავლის ფორმულით (§ 3, 15) მივიღებთ

$$[\vec{P}, \vec{Q}] \vec{T} = \vec{R} \vec{T} = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) X_3 + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2) Y_3 + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) Z_3, \quad (9)$$

ანუ

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{T}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

2. შერეული ნამრავლის გეომეტრიული მნიშვნელობა. განვიხილოთ

$\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{T}$ ვექტორებზე აგებული პარალელებიპედი (ნახ. 41).

$\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი რიცხობრივად $|\vec{R}|$ -ის ტოლია, $\vec{R} = [\vec{P}, \vec{Q}]$, $S_{\vec{P}, \vec{Q}} = |\vec{R}|$.

$\vec{R}$ და $\vec{T}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი გამოისახება ფორმულით:

$$\vec{R} \vec{T} = |\vec{R}| |\vec{T}| \cos \theta = |\vec{R}| \text{გვ}_{\vec{R}} \vec{T}.$$

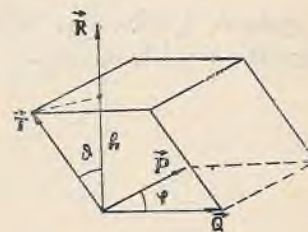
თუ $\text{გვ}_{\vec{R}} \vec{T} > 0$, მაშინ $\text{გვ}_{\vec{R}} \vec{T} = h$, სადაც h აგებული პარალელებიპედის სიმაღლეა, ამის გამო

$$\vec{R} \vec{T} = |\vec{R}| h,$$

ანუ

$$\vec{R} \vec{T} = S_{\vec{P}, \vec{Q}} h.$$

ამგვარად, სამი $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{T}$ ვექტორის შერეული ნამრავლი ამ ვექტორებზე აგებული პარალელებიპედის მოცულობის ტოლია, თუ $\text{გვ}_{\vec{R}} \vec{T} > 0$.



ნახ. 41

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{T}$ -ს მარცხენა ორიენტაცია აქვს,

შერეული ნამრავლი დადებითი იქნება. თუ მხედველი კუთხეა, $\theta = \angle(\vec{R}, \vec{T})$, $\cos \theta > 0$, თუ ამ ვექტორებს მარჯვენა ორიენტაცია აქვს, მაშინ θ კუთხე ბლაგვი იქნება და $\cos \theta < 0$, ამის გამო შერეული ნამრავლი უარყოფითი იქნება.

თუ ჩატარებულ მსჯელობას მხედველობაში მივიღებთ, გვექნება, რომ მართებულია შემდეგი

თეორემა. $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{T}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{T})$, ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლია, თუ $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{T}$ მარცხენა ორიენტაციისაა, ხოლო შერეული ნამრავლი მოცულობის ტოლია უარყოფითი ნიშნით, თუ $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{T}$ ვექტორები მარჯვენა ორიენტაციისაა.

საგარჯიშო 13

1. მოცემულია ტეტრაედრის წვეროები A_1, A_2, A_3, A_4 იპოვეთ: 1) A_1A_2 წიბოს სიგრძე, 2) კუთხე A_1A_2 და A_1A_3 წიბოებს შორის, 3) $A_1A_2A_3$ წახნაგის ფართობი, 4) ტეტრაედრის მოცულობა, 5) A_1 წერტილიდან $A_2A_3A_4$ წახნაგზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე, 6) კუთხე A_1A_4 წიბოსა და $A_1A_2A_3$ წახნაგს შორის, თუ წვეროების კოორდინატებია

- ა) $A_1(3; 3; 9), A_2(6; 2; 1), A_3(1; 7; 3), A_4(8; 5; 8),$
- ბ) $A_1(2; 4; 3), A_2(7; 6; 3), A_3(4; 9; 3), A_4(3; 6; 7),$
- გ) $A_1(0; 7; 1), A_2(4; 1; 5), A_3(4; 6; 3), A_4(3; 9; 8),$
- დ) $A_1(6; 1; 1), A_2(6; 6; 6), A_3(4; 2; 0), A_4(1; 2; 6),$
- ე) $A_1(7; 5; 3), A_2(9; 4; 4), A_3(4; 5; 7), A_4(7; 9; 6).$

$[A_4]$ წერტილიდან $A_1A_2A_3$ წახნაგზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფორმულიდან $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6} S_{A_1A_2A_3} h$, ხოლო კუთხე A_1A_4 წიბოსა და $A_1A_2A_3$ წახნაგს შორის განვსაზღვროთ ფორმულიდან $h = |A_1A_2| \sin \omega$.

ანალიზური გეომეტრია სივრცეში

თ ა ზ ი X I

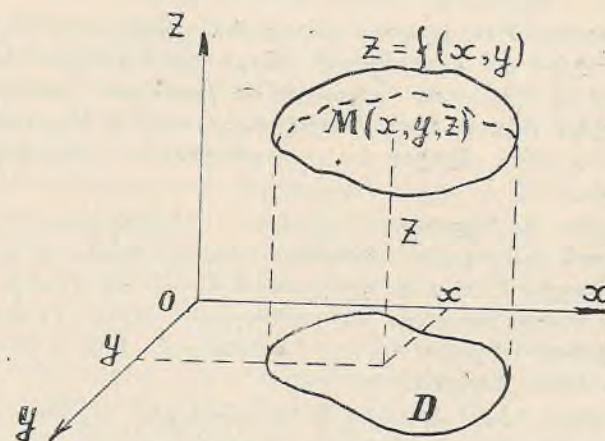
სივრცეში. წრფე. ზედაპირი. წირი სივრცეში

§ 1. ზედაპირის განტოლება

1. ზედაპირის განტოლება. ძირითადი ამოცანები. განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია

$$z = f(x, y). \quad (1)$$

ავიღოთ სივრცეში დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა და განვიხილოთ x, y, z ცვლადები, როგორც სივრცის რომელიმე



ნახ. 1

M' წერტილის კოორდინატები (ნახ. 1). (1) ფუნქციის განსაზღვრის არიდან, ცხადია, x -ისა და y -ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება z -ის გარკვეული მნიშვნელობა, და, მასასადამე, (1) დამოკიდებულებით სივრცეში განისაზღვრება წერტილთა სიმრავლე.

იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები (x, y, z) აკმაყოფილებენ (1) დამოკიდებულებას, ზედაპირი ეწოდება, ხოლო (1) დამოკიდებულებას — ზედაპირის განტოლება.

ზედაპირი განსაზღვრეთ (1) დამოკიდებულებით, მაგრამ, მართლაც რომ ზედაპირი მივიღოთ, საჭიროა $f(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებდეს ვარკვეულ პირობებს, მაგალითად, უწყვეტობას და სხვ.

ახლა განვიხილოთ განტოლება

$$F(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

ეს განტოლება, საზოგადოდ, განსაზღვრავს ერთ-ერთ ცვლადს, როგორც რომ დანარჩენი ცვლადის ფუნქციას. ვიგულისხმობთ, ასეთი განსაზღვრა შესაძლებელია,

$$z = f(x, y).$$

ეს ნიშნავს, რომ $f(x, y)$ ისეთი ფუნქციაა, რომელიც ჩასმული z -ის ნაცვლად (2) განტოლებაში, მას აქცევს იგივეობად.

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

(2) დამოკიდებულებიდან ამგვარად განსაზღვრულ z -ს ეწოდება არცხადი ფუნქცია. როგორც (1) ისე (2) განტოლება განსაზღვრავს ზედაპირს.

საზოგადოდ, $F(x, y, z) = 0$ განტოლებას ეწოდება S ზედაპირის განტოლება, რომელიმე $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, თუ S ზედაპირის ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ $F(x, y, z) = 0$ განტოლებას, ხოლო S ზედაპირზე არამდებარე არც ერთი წერტილის კოორდინატები არ აკმაყოფილებს ამ განტოლებას.

სივრცეში S ზედაპირი შეგვიძლია განვსაზღვროთ როგორც $F(x, y, z) = 0$ განტოლების ამონახსნთა მრავალსახეობა. ამ მრავალსახეობას ეწოდება $F(x, y, z)$ ფუნქციის ნული. თუ $F(x, y, z)$ მრავალწევრია, მაშინ ზედაპირს აღგებრთული ზედაპირი ეწოდება. აღგებრთული ზედაპირის რიგი განსაზღვრება $F(x, y, z)$ მრავალწევრის ხარისხის მაჩვენებლით.

შევნიშნოთ, რომ სიბრტყეზე წირის (სივრცეში ზედაპირის) განსაზღვრის შემთხვევაში ყველაფერი ისე მარტივად არაა, როგორც გვეჩვენება. ამის შესახებ საუბარი იყო მე-8 თავის I-ლ პარაგრაფში.

მაგალითად, ავიღოთ სიბრტყე, სადაც არჩეულია Oxy კოორდინატთა სისტემა. ამ კოორდინატთა სისტემაში, იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებას $x^2 = 0$, ემთხვევა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ გან-

ტოლებას $x = 0$, გამოდის, რომ y ღერძი (წრფე) განსაზღვრება არა მარტო თავისი „ბუნებრივი“ განტოლებით $x = 0$, არამედ $x^2 = 0$ განტოლებითაც. ეს პირველი დაბრკოლება ანალიზურ გეომეტრიაში იმით მოიხსნება, რომ $x^2 = 0$ განტოლება არა უბრალოდ y ღერძის განტოლებაა, არამედ „ორჯერ აღებული ორდინატთა ღერძის“ განტოლებაა, ანუ $x^2 = 0$ არის „შერწყმული“ ორდინატთა წყვილი ღერძების განტოლება.

შეიძლება მოხდეს, რომ წირს (ზედაპირს) ჰქონდეს სასრული რაოდენობა წერტილებისა. მაგალითად, წირს $x^2 + y^2 = 0$ აქვს მხოლოდ ერთი ნამდვილი წერტილი $(0, 0)$. შეიძლება წირს სულ არ ჰქონდეს ნამდვილი წერტილი. მაგალითად, განტოლება $x^2 + y^2 + 1 = 0$ არ განსაზღვრავს ნამდვილ წირს. ეს მეორე დაბრკოლება იმით მოიხსნება, რომ სიბრტყეს (სათანადოდ სივრცეს) შევავსებთ წარმოსახვითი წერტილებით. ამით მივაღწევთ კომპლექსურ სიბრტყემდე (კომპლექსურ სივრცემდე). ამ სიბრტყეში ზემოთ აღებულ განტოლებას უკვე აღარ ექნება ამონახსნთა ცარიელი სიმრავლე.

ჩვენთვის უკვე გასაგებია, რომ ანალიზური გეომეტრიის არსი შემდეგში მდგომარეობს: უნდა ავარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა. მაგალითად, რომელიმე π სიბრტყეზე ავიღოთ Oxy დეკარტის კოორდინატთა სისტემა. ამ სიბრტყეში წერტილი შევცვალოთ ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული (x, y) წყვილით, ხოლო წირი შევცვალოთ სათანადო განტოლებით. ამით წირის თვისებებს შევისწავლით განტოლების თვისებებით. მაგრამ ჩვენთვის ისიც ცნობილია, რომ ერთცვლადიანი მეორე ხარისხის განტოლების ამონახსნებსაც ვერ შევისწავლით, თუ მარტო ნამდვილი რიცხვებით ვისარგებლებთ. ამით გასაგები უნდა იყოს, თუ რაოდენ გააღარიბებდა ანალიზური გეომეტრიის თეორიას, მარტო ნამდვილ რიცხვთა წყვილებით სარგებლობა.

ავიღოთ ჩვეულებრივი (ნამდვილი) სიბრტყე და ამ სიბრტყეში ავარჩიოთ Oxy კოორდინატთა სისტემა. უნდა დავუშვათ, რომ სიბრტყეზე M წერტილის კოორდინატების მნიშვნელობანი იყოს არა მარტო ნამდვილი რიცხვები, არამედ, ზოგადად, კომპლექსური რიცხვებიც. ყოველ კომპლექსურ რიცხვთა (x, y) დალაგებულ წყვილს ჩავთვლით სიბრტყის — კომპლექსური სიბრტყის — წერტილად და x და y M წერტილის კოორდინატებად Oxy კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ამასთან M წერტილს ვუწოდოთ კომპლექსური სიბრტყის ნამდვილი წერტილი, თუ მისი ორივე კოორდინატი ნამდვილი რიცხვია, წინააღმდეგ შემთხვევაში წარმოსახვითი წერტილი. მაგალითად, $M(x, y)$ წარმოსახვითია, თუ $x = a + bi$, $b \neq 0$, როგორც ვინდ იყოს y . ამ განსაზღვრის შემდეგ კომპლექსურ სიბრტყეზე წერტილთა $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ დალაგებულ წყვილს ვუწოდოთ ვექტორი $\vec{M_1M_2}$.

$$\vec{M_1M_2} = (x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

ამის შემდეგ ვექტორთა ჯამი, ვექტორის რიცხვზე (კომპლექსურ რიცხვზე) გაშვება, ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობა ისე განისაზღვრება, როგორც ნამდვილ სიბრტყეში ვექტორებისათვის:

$$\vec{P} + \vec{Q} = (x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)),$$

$$\vec{P} \cdot \lambda = (x, y) \lambda = (x\lambda, y\lambda).$$

ვექტორს $\vec{0} = (0, 0)$ აქვს კომპლექსურ სიბრტყეზე. ეწოდება ნულვექტორი. ვექტორს $-\vec{P} = (-x, -y)$ -ს ეწოდება $\vec{P} = (x, y)$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი და სხვ.

როგორც ნამდვილ სიბრტყეზე, კომპლექსურ სიბრტყეზეც წრფე განისაზღვრება როგორც პირველი რიგის ალგებრული წირი, ე. ი. წირი, რომელიც მოცემულია განტოლებით

$$Ax + By + C = 0.$$

სიმრავლე კომპლექსური სიბრტყის წერტილებისა, რომლებიც ამ განტოლებას აკმაყოფილებენ, აკმაყოფილებს აგრეთვე განტოლებას

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + \lambda C = 0,$$

სადაც λ რომელიმე კომპლექსური რიცხვია.

საზოგადოდ ალგებრულ წირს, რომელიც მოცემულია $F(x, y) = 0$ განტოლებით, ეწოდება ნამდვილ კოეფიციენტებიანი ალგებრული წირი, თუ $F(x, y)$ მრავალწევრისათვის არსებობს ისეთი λ რიცხვი, რომ $\lambda F(x, y)$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია. მაგალითად,

$$2ix + 3iy - 6i = 0$$

ნამდვილკოეფიციენტებიანი პირველი რიგის ალგებრული წირია, რადგანაც $\lambda F(x, y) = -i F(x, y) = 2x + 3y - 6$. მივიღეთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი პირველი ხარისხის მრავალწევრი.

შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ მოცემული განტოლება ასეთ λ მამრავლზე უკვე გამრავლებულია და $F(x, y)$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია. შეიძლება მოხდეს, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი ალგებრულ წირზე არც ერთი ნამდვილი წერტილი არ მდებარეობდეს, როგორც ზემოთ აღნიშნეთ $x^2 + y^2 + 1 = 0$ წირზე არც ერთი ნამდვილი წერტილი არ მდებარეობს. ეს განტოლებაა იმ წერტილისა, რომლის ცენტრი მოთავსებულია $(0, 0)$ წერტილში და რადიუსი i -ს ტოლია, $i^2 = -1$. პრაქტიკაში ამ წრეწირს წარმოსახვით წრეწირს ეწოდებენ. იმ ნამდვილკოეფიციენტებიანი ალგებრულ წირს, რომელზედაც წარმოსახვითი წერტილები მდებარეობენ, ეწოდება წარმოსახვითი

თი წირი. ამ ბოლო განსაზღვრის მხედველობაში მიღებით, შეგვიძლია ვთქვათ: ნამდვილკოეფიციენტებიანი ალგებრული წირი ან ნამდვილი წირია ან წარმოსახვითი, ანუ ნამდვილკოეფიციენტებიანი $F(x, y)$ მრავალწევრის ნული ან ნამდვილი წირია ან წარმოსახვითი. მაგალითად, $F(x, y) = x^2 + y^2$ მრავალწევრის ნულებია $x + iy = 0$, $x - iy = 0$ — წარმოსახვითი წრფეები, რადგანაც

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy).$$

ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილია $(0, 0)$. წარმოსახვითი წრეწირი დამოკიდებულია ორ წარმოსახვით წრფეზე.

სამგანზომილებიანი სივრცის შევსება წარმოსახვითი ელემენტებით — წარმოსახვითი წერტილებით და წარმოსახვითი ვექტორებით — ისევე წარმოებს, როგორც ორგანზომილებიანი სივრცის — სიბრტყის შევსება აღნიშნული ელემენტებით.

ავიღოთ სივრცეში რომელიმე $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა, სივრცის ყოველ M წერტილს შევუსაბამოთ ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული სამეული (x, y, z) და პირიქით ყოველ ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ სამეულს შევუსაბამოთ სივრცის ერთადერთი წერტილი. ამ (x, y, z) სამეულს ეწოდება M წერტილის კოორდინატები. ამის შემდეგ ყოველ კომპლექსურ რიცხვთა დალაგებულ (x, y, z) სამეულს ვუწოდებთ M წერტილის კოორდინატებს $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემაში. ასეთ M წერტილთა სიმრავლე კმნის სამგანზომილებიან კომპლექსურ სივრცეს. იმ წერტილს, რომლის ყველა კოორდინატი ნამდვილი რიცხვია, ეწოდება კომპლექსური სივრცის ნამდვილი წერტილი. თუ წერტილის ერთ-ერთი კოორდინატაგანი მაინც წარმოსახვითი რიცხვია, მას ეწოდება კომპლექსური სივრცის წარმოსახვითი წერტილი. კომპლექსური სივრცე შედგენილია ნამდვილი წერტილებისა და წარმოსახვითი წერტილების გაერთიანებით.

ალგებრულ ზედაპირს, რომელიც მოცემულია $F(x, y, z) = 0$ განტოლებით, ეწოდება ნამდვილკოეფიციენტებიანი ალგებრული ზედაპირი, თუ $F(x, y, z)$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია. მაგალითად,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

მეორე რიგის ნამდვილკოეფიციენტებიანი ალგებრული ზედაპირია, თუ ამ განტოლებაში კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია.

ნამდვილკოეფიციენტებიანი ალგებრული ზედაპირი ან ნამდვილი ზედაპირია ან წარმოსახვითი. ამ შემთხვევაში ვთქვათ: $F(x, y, z)$ მრავალწევრის ნული ან ნამდვილი სამგანზომილებიანი მრავალსახეობა ან წარმოსახვითი.

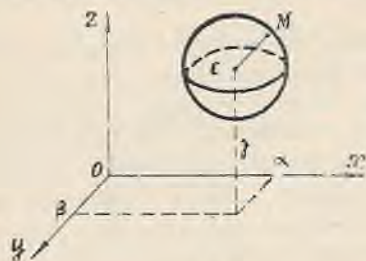
ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ მეორე რიგის ნამდვილკოეფიციენტებიან ალგებრულ ზედაპირებს.

ისევე, როგორც სიბრტყეზე წირის შესახებ განვიხილეთ ორი ძირითადი ამოცანა, სივრცეში ზედაპირების შესახებაც განვიხილავთ ორ ძირითად ამოცანას:

1) მოცემულია ზედაპირი, როგორც წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც გარკვეულ პირობას აკმაყოფილებენ და უნდა შევადგინოთ ზედაპირის განტოლება.

2) მოცემულია ზედაპირი განტოლებით. საჭიროა შევისწავლოთ ამ ზედაპირის თვისებები და ავაგოთ.

2. **სფეროს ზედაპირი.** სფერული ზედაპირი, ანუ სფერო, ეწოდება სივრცის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც ტოლი მანძილებით არიან დაშორებული



ნახ. 2

მოცემული წერტილიდან (ნახ. 2).

მოცემულ წერტილს ეწოდება სფეროს ცენტრი, ხოლო სფეროს ცენტრიდან სფეროს ზედაპირამდე მანძილს ეწოდება სფეროს რადიუსი.

ვთქვათ, სფეროს ცენტრია

$C(\alpha, \beta, \gamma)$ და რადიუსია r .

სფეროს განტოლების შესადგენად, საკმარისია სფეროზე ავიღოთ ნებისმიერი $M(x, y, z)$ წერტილი. სფეროს განსაზღვრის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$|CM| = r,$$

ანუ

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = r. \quad (3)$$

მივიღეთ სფეროს განტოლება. ეს განტოლება გავამარტივოთ. (3) განტოლების ორივე ნაწილის კვადრატში ახარისხებით მივიღებთ

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2. \quad (4)$$

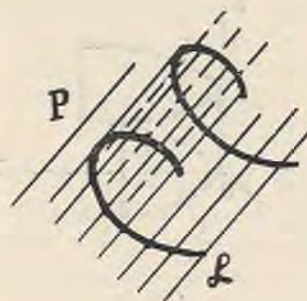
მიღებულ განტოლებას სფეროს კანონიკური განტოლება ეწოდება. თუ სფეროს ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, მაშინ (4) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (5)$$

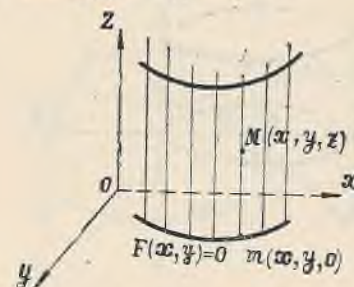
3. **ცილინდრული ზედაპირი.** ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია წირი და რომელიმე მიმართულება. ამ წირის ყოველ წერტილზე გავატაროთ

წრფე, რომელიც მოცემული მიმართულების პარალელურია. ზედაპირს, რომელსაც ეს წრფეები ქმნის, ცილინდრული ზედაპირი ეწოდება. წრფეებს, რომლებითაც შეიქმნა ცილინდრული ზედაპირი, ეწოდება ცილინდრული ზედაპირის მსახველები. მოცემულ წირს ცილინდრული ზედაპირის მიმმართველი წირი ეწოდება. (ნახ. 3). ცილინდრული ზედაპირი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მსახველის მოძრაობით შექმნილი ზედაპირი, თუ მსახველი ისე მოძრაობს, რომ იგი პირვანდელი მდებარეობის პარალელურია და მიმმართველი წირს კვეთს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მსახველი z ღერძის პარალელურია და მიმმართველი წირი Oxy სიბრტყეში მდებარეობს.



ნახ. 3



ნახ. 4

ვთქვათ, Oxy სიბრტყეში მიმმართველი წირის განტოლებაა

$$F(x, y) = 0. \quad (6)$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს მიმმართველი წირის ნებისმიერი $m(x, y, 0)$ წერტილი. (6) განტოლებას აკმაყოფილებს ნებისმიერი $M(x, y, z)$ წერტილი, რომლის x და y კოორდინატები m წერტილის კოორდინატებია (ნახ. 4).

$M(x, y, z)$ წერტილი $m(x, y, 0)$ წერტილზე განავალ მსახველზე მდებარეობს. მაშასადამე, (6) განტოლება სივრცეში იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლებაა, რომლის მსახველი Oz ღერძის პარალელურია, ხოლო მიმმართველი წირი მდებარეობს Oxy სიბრტყეში, რომელიც იმავე (6) განტოლებით გამოისახება.

ცილინდრულ ზედაპირს შემოკლებით ცილინდრს უწოდებენ, თუ $p(x, y)$ მრავალწევრია.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. **ელიფსური ცილინდრი.** თუ მიმმართველი წირი ელიფსია,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

მაშინ ცილინდრს ელიფსური ცილინდრი ეწოდება (ნახ. 5).

თუ $a = b$, მაშინ

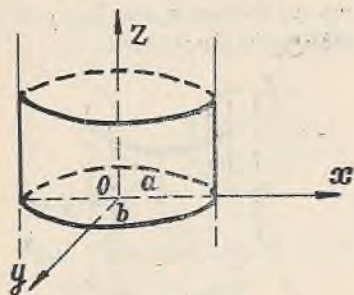
$$x^2 + y^2 = a^2$$

ცილინდრს წრიულ ცილინდრი ეწოდება.

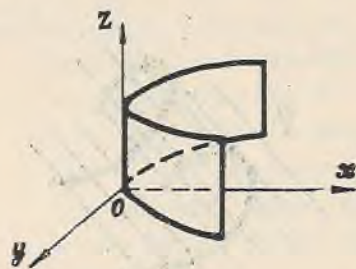
2. პარაბოლური ცილინდრი. თუ მიმართველი წირი პარაბოლაა.

$$y^2 = 2px,$$

მაშინ ცილინდრს პარაბოლური ცილინდრი ეწოდება (ნახ. 6).



ნახ. 5

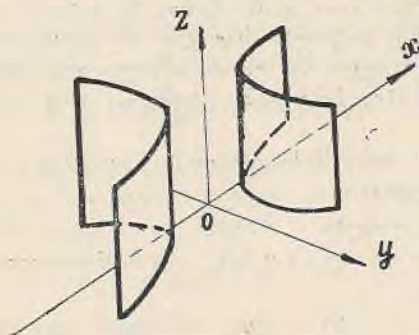


ნახ. 6

3. ჰიპერბოლური ცილინდრი. თუ მიმართველი წირი ჰიპერბოლაა,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

მაშინ ცილინდრს ჰიპერბოლური ცილინდრი ეწოდება (ნახ. 7).



ნახ. 7

შესაძლებელია, (6) განტოლებას სრულებით არ აქვს ნამდვილი ამონახსნები, მაგალითად,

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

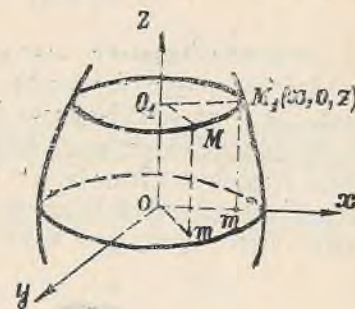
მაშინ განტოლება არ განსაზღვრავს ნამდვილ წირს. ამ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ განტოლება განსაზღვრავს „წარმოსახვით ცილინდრს“.

4. ბრუნვის ზედაპირი. ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია წრფე და ამ წრფეზე გამავალ სიბრტყეზე — რაიმე წირი. ამ წრფის გარშემო აღებულ წირის ბრუნვით მიღებულ ზედაპირს ბრუნვის ზედაპირი ეწოდება. მოცემულ წრფეს ეწოდება ბრუნვის ზედაპირის ღერძი. წირს, რომელიც მიიღება ბრუნვის ზედაპირის ღერძზე გამავალ სიბრტყესთან კვეთით, ზედაპირის მერიდიანი ეწოდება (ნახ. 8).

ვთქვათ, ბრუნვის ზედაპირი მიიღება Oxz სიბრტყეში მდებარე

$$F(x, z) = 0 \quad (7)$$

წირის Oz ღერძის გარშემო ბრუნვით. შევადგინოთ ამ ზედაპირის განტოლება. ბრუნვითი ზედაპირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები იყოს (X, Y, Z) . ბრუნვის ზედაპირზე ავიღოთ რაიმე $M(X, Y, Z)$ წერტილი. M წერტილი მიიღება M_1 წერტილის შემობრუნებით Oz ღერძის გარშემო. ამ წერტილთა გვემილები Oxy სიბრტყეზე სათანადოდ იქნება m და m_1 წერტილი,



ნახ. 8

$$|Om| = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad |Om_1| = |x|.$$

ცხადია, m წერტილის Om რადიუსიან წრეწირზე ნებისმიერი მდებარეობისათვის გვექნება

$$x = \pm \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

ისიც ადვილი შესამჩნევია, რომ M წერტილის O_1m რადიუსიან წრეწირზე ნებისმიერი მდებარეობისათვის $mM = m_1M_1$, ანუ

$$z = Z.$$

ამ ორი უკანასკნელი გამოსახულების (7) განტოლებაში შეტანით გვექნება

$$F(\pm \sqrt{X^2 + Y^2}, Z) = 0, \quad (8)$$

ამგვარად, ბრუნვის ზედაპირის ნებისმიერი (X, Y, Z) წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს (8) განტოლებას. მაშასადამე, (8) განტოლე-

ბა წარმოადგენს იმ ბრუნვის ზედაპირის განტოლებას, რომელიც მიიღება Oz ღერძის გარშემო $F(x, y) = 0$ წირის ბრუნვით.

რადგანაც საბოლოო (8) განტოლებაში მნიშვნელობა არ აქვს, თუ რომელ ასოებს ვიხმართ, დიდს თუ პატარას, ამ განტოლებაში ვიგულისხმობთ პატარა ასოები

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

თუ Oxy სიბრტყეში მდებარე წირი $F(x, y) = 0$ ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო, მაშინ ბრუნვის ზედაპირის განტოლება იქნება

$$F(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

5. კონუსური ზედაპირი. სივრცეში ავიღოთ წერტილი და რაიმე წირი. ამ წირის ყოველ წერტილზე და აღებულ წერტილზე გავატაროთ წრფეები. ამ წრფეებით შეიქმნება ზედაპირი. ზედაპირს, რომელიც მიიღება მოცემულ წერტილზე და მოცემული წირის ყოველ წერტილზე გაშვებული წრფეებით, ეწოდება კონუსური ზედაპირი (ნახ. 9). აღებულ წერტილს ეწოდება კონუსური ზედაპირის წვერო, ხოლო მოცემულ წირს — კონუსური ზედაპირის მიმმართველი წირი.



ნახ. 9

და კონუსის წვეროზე გამავალ წრფეს წრიული კონუსის ღერძი ეწოდება.

შევადგინოთ წრიული კონუსის ზედაპირის განტოლება. კონუსის წვერო მოვათავსოთ კოორდინატთა სათავეში. კონუსის ღერძი იყოს Oz ღერძი. ზედაპირის წერტილები დახასიათდება კონუსის მსახველსა და ღერძს

შორის მოთავსებული α კუთხით (ნახ. 10). კონუსურ ზედაპირზე ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი $M(x, y, z)$, ამ წერტილისათვის

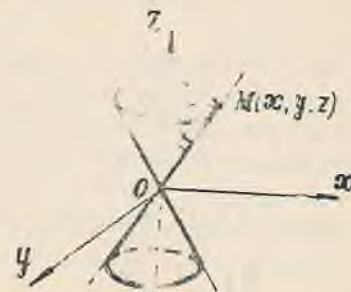
$$\frac{|O_1M|}{|O_1O|} = \operatorname{tg} \alpha = k, \quad (9)$$

სადაც O_1 წერტილი M წერტილის გვემოლია z ღერძზე. M წერტილი მდებარეობს იმ წრეწირზე, რომლის რადიუსია $|O_1M|$,

$$|O_1M| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ხოლო $OO_1 = z$. ამის გამო (9) ტოლობა ასე ჩაიწერება

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|z|} = k. \quad (10)$$



ნახ. 10

მივიღეთ, რომ $M(x, y, z)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს (10) განტოლებას. მაშასადამე, (10) განტოლება წარმოადგენს წრიული კონუსის განტოლებას.

(10) განტოლების ორივე ნაწილის კვადრატში ახარისხებით და გაერთმნიშვნელობებით მივიღებთ

$$x^2 + y^2 = k^2 z^2. \quad (11)$$

მიღებულ განტოლებას ეწოდება წრიული კონუსის კანონიკური განტოლება.

§ 2. სივრცული წირის განტოლებანი

1. სივრცული წირის ზოგადი განტოლებანი. სივრცეში L წირი შეიძლება მოცემული იყოს, როგორც ორი, π_1 და π_2 ზედაპირების ურთიერთგადაკვეთა (ნახ. 11). L წირის $M(x, y, z)$ წერტილი ეკუთვნის, როგორც π_1 ზედაპირს, ისე π_2 ზედაპირს და, მაშასადამე, M წერტილის კოორდინატები (x, y, z) აკმაყოფილებენ ორივე ზედაპირის განტოლებებს. თუ π_1 ზედაპირის განტოლებაა $F_1(x, y, z) = 0$, ხოლო π_2 ზედაპირის განტოლება $F_2(x, y, z) = 0$, მაშინ L წირის განტოლებებად გვესმის სისტემა ორი განტოლებისა

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0, \\ F_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ სივრცეში წირის განტოლებების მონახვისათვის საჭიროა (1) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. ეს საზოგადოდ შეუძლებელიცაა, რადგანაც ცვლადთა რიცხვი განტოლებათა რიცხვზე 26. გ. კომლაძე

მეტია. (1) განტოლებათა სისტემის ზუსტი აზრი შემდეგია: L წირს ეკუთვნის მხოლოდ ის წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ (1) განტოლებათა სისტემის როგორც ერთ განტოლებას, ისე მეორე განტოლებას.

ცხადია, მოცემული L წირი შეიძლება სხვადასხვა ზედაპირთა ურთიერთ გადაკვეთით მივიღოთ. ამის გამო ერთსა და იგივე L წირს შეესაბამება ურთიერთეკვივალენტურ განტოლებათა სისტემები.

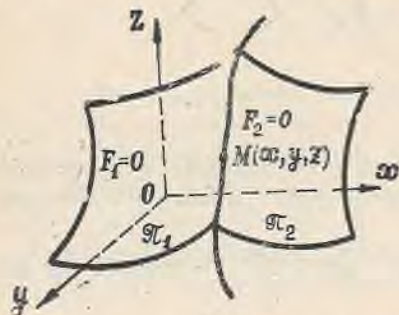
ზოგადად, L წირის განტოლებანი ეწოდება ისეთ x, y, z სამეცვლადიან ორი განტოლების სისტემას, რომელსაც აკმაყოფილებს იმ წერტილის კოორდინატები, რომლებიც L წირზე მდებარეობენ და არ აკმაყოფილებს L წირზე არამდებარე წერტილის კოორდინატები.

მაგალითად, ორი სფეროს

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4, \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 &= 9, \end{aligned}$$

გადაკვეთით მიღებული წირის განტოლებები იქნება

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases}$$



ნახ. 11

2. წირის პარამეტრული განტოლებები. ვთქვათ, x, y, z კოორდინატები ერთი t ცვლადის ფუნქციებია

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = g(t). \quad (2)$$

თუ t ცვლადს გამოვრიცხავთ ამ სამი განტოლებიდან, მივიღებთ ორ განტოლებას, რომლებიც სამ x, y, z ცვლადს შეიცავენ. მაშასადამე, (2) განტოლებათა სისტემა განსაზღვრავს სივრცეში წირს. (2) განტოლებათა სისტემას ეწოდება წირის პარამეტრული განტოლებანი.

მაგალითად, პარამეტრული განტოლებანი $x=t, y=\sqrt{1-t^2}, z=2t$ იძლევა წირს (ელიფსს), რომელიც მიიღება $x^2 + y^2 = 1$ ცილინდრისა და $z=2x$ სიბრტყის გადაკვეთით:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2x. \end{cases}$$

შევასრულოთ შემდეგი სავარჯიშო

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 14.

1. განსაზღვრეთ, რა გეომეტრიულ სახეს იძლევა განტოლებანი

$$\begin{aligned} 1) \quad x^2 + (y-1)^2 &= 4, & 2) \quad 4x^2 + 9y^2 &= 36, & 3) \quad 2x + 3y - 6 &= 0, \\ 4) \quad y^2 &= 4x, & 5) \quad y &= x^2 - 1, & 6) \quad x^2 - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

2. შეამოწმეთ, მოთავსებულია თუ არა წერტილები $A(2; 0; 0), B(1; 2; 4), C(1; 1; -1), D(0; 3; 9)$ ზედაპირზე, რომლის განტოლება

$$y^3 - 2xy + 3z = 0.$$

3. იპოვეთ ცენტრი და რადიუსი შემდეგი სფეროს:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z - 23 = 0.$$

4. შეადგინეთ იმ სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრია $C(1; 2; 4)$ და გადის $A(-1; 3; 6)$ წერტილზე.

5. შეადგინეთ განტოლება იმ წერტილთა სიმრავლისა, რომლებიც ტოლდა დაშორებულია $A(6; 6; 6)$ და $B(-4; -4; -4)$ წერტილებიდან და მიღებული ზედაპირი ააგეთ.

6. შეადგინეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $z^2 = 4y, \begin{cases} x = 0 \end{cases}$ პარაბოლის Oz ღერძის გარშემო ბრუნვით. ზედაპირი ააგეთ.

7. შეადგინეთ იმ ზედაპირთა განტოლებანი, რომლებიც მიიღებიან Oxy სიბრტყეში მოთავსებულ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის 1) Ox ღერძის გარშემო,

2) Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით. ზედაპირები ააგეთ.

8. შეადგინეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება Oyz სიბრტყეში მდებარე სინუსოიდის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით. ზედაპირი ააგეთ $0 \leq y \leq 2\pi$ შუალედში.

9. შეადგინეთ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მიმართველი Oxy სიბრტყეში მდებარეობს და მისი განტოლებაა $x^2 - 2x + y^2 = 0$, ხოლო მსახველი $\vec{P}(1; 0; 1)$ ვექტორის პარალელურია.

10. შეადგინეთ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მიმართველი მდებარეობს Oyz სიბრტყეში, მიმართველის განტოლებაა $4y^2 - 9z^2 - 36 = 0$, ხოლო მსახველი $\vec{P}(2; 3; 2)$ ვექტორის პარალელურია.

11. შეადგინეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის მიმართველი მოთავსებულია Oxy სიბრტყეში, მიმართველის განტოლებაა $x^2 - 2x + y^2 = 0$, კონუსის წვერო მოთავსებულია $A(1; 1; 1)$ წერტილში.

12. შეადგინეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის მიმართველი მოთავსებულია Oxz სიბრტყეში, მიმართველის განტოლებაა $z^2 - 2z + x^2 = 0$, ხოლო წვერო მოთავსებულია $A(2; 2; 2)$ წერტილში.

13. გამოარკვეთ რა გეომეტრიულ სახეობას იძლევა განტოლებათა სისტემები:

$$\begin{aligned} 1) \quad \begin{cases} x = y, \\ x = 0. \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases} & 3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases} & 4) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

14. შეადგინეთ იმ კონუსის განტოლება, რომლის წვერო

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$$

სფეროს ცენტრშია, ხოლო მიმართველი წირი სფეროსა და $x=1$ სიბრტყის გადაკვეთის წირია.

შევიტანოთ მე-9 ამოცანისათვის. ზედაპირის ნებისმიერ $M(X, Y, Z)$ და წირის $m(x, y, z)$ წერტილებზე გავატაროთ წრფე $\vec{P}(1; 0; 1)$ ვექტორის პარალელურად.

$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{0} = \frac{Z-z}{1} = t,$$

საიდანაც $x = X - t$, $y = Y$, $z = Z - t$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი $x^2 - 2x + y^2 = 0$ და $z = 0$ განტოლებებში, საიდანაც გამოვრიცხავთ t -ს. მივიღებთ $t = Z$;

$$(X - Z)^2 - 2(X - Z) + Y^2 = 0.$$

შევიტანოთ მე-11 ამოცანისათვის. მოცემული წირის ნებისმიერ $M(x, y, z)$ წერტილზე და კონუსის წვეროზე გავატაროთ წრფე

$$\frac{X-1}{x-1} = \frac{Y-1}{y-1} = \frac{Z-1}{z-1} = t,$$

საიდანაც

$$x = \frac{X-1}{t} + 1, \quad y = \frac{Y-1}{t} + 1, \quad z = \frac{Z-1}{t} + 1.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი წირის განტოლებებში

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

მივიღებთ $t = 1 - z$;

$$(X - Z)^2 - 2(X - Z)(1 - Z) + (Y - Z)^2 = 0.$$

§ 3. სიბრტყის განტოლებანი

1. სიბრტყის ვექტორული განტოლება ნორმალური სახით. სივრცეში ავიღოთ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა. ამ სისტემის მიმართ განვიხილოთ რომელიმე π სიბრტყე. π სიბრტყე განსაზღვრულია $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, თუ ცნობილია π სიბრტყის ერთი წერტილი $M(x_0, y_0, z_0)$ და სიბრტყისადმი პერპენდიკულარული ვექტორი. ვთქვათ, ეს

ვექტორია $\vec{n}$, რომლის სიგრძე ერთეულის ტოლია. $\vec{n}$ ვექტორი გადავღოთ კოორდინატთა სათავედან, $\vec{OA} = \vec{n}$ (ნახ. 12). ავიღოთ π სიბრტყის ნებისმიერი $M(x, y, z)$ წერტილი და განვიხილოთ ვექტორი $\vec{M_0M}$,

$$\vec{M_0M} = \vec{OM} - \vec{OM_0} = \vec{M} - \vec{M_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

რადგანაც ვექტორები $\vec{M_0M}$ და $\vec{n}$ ურთიერთპერპენდიკულარულია, ამ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია,

$$(\vec{M} - \vec{M_0}) \cdot \vec{n} = 0. \quad (1)$$

მოცემული π სიბრტყე შეგვიძლია განვსაზღვროთ, როგორც ისეთ M წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას. (1) განტოლებას ეწოდება სიბრტყის ვექტორული განტოლება ნორმალური სახით.

(1) განტოლება ასე გადავწეროთ

$$\vec{M} \cdot \vec{n} = \vec{M_0} \cdot \vec{n}. \quad (2)$$

ეს ტოლობა მართებულია M წერტილის ნებისმიერი მდებარეობისათვის π სიბრტყეზე. ამიტომ M წერტილი შეგვიძლია ავიღოთ N წერტილში, $ON \perp \pi$. გვექნება

$$\vec{N} \cdot \vec{n} = \vec{M_0} \cdot \vec{n}. \quad (3)$$

რადგანაც

$$\vec{N} \cdot \vec{n} = |\vec{N}| |\vec{n}| \cos \widehat{\vec{N}, \vec{n}} = p,$$

სადაც P -თი აღნიშნულია კოორდინატთა სათავედან სიბრტყემდე მანძილი,

$$|\vec{ON}| = |\vec{N}| = p.$$

ამის გამო (3) მოგვცემს

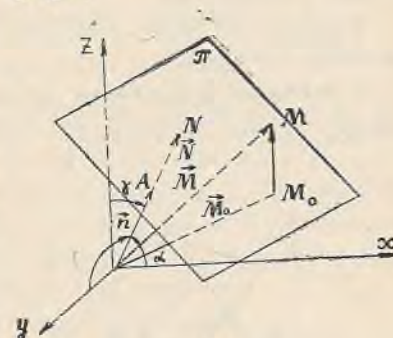
$$\vec{M_0} \cdot \vec{n} = p.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობა (2) განტოლებაში, გვექნება

$$\vec{M} \cdot \vec{n} = p. \quad (4)$$

ვთქვათ, $\vec{n}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსებია

$$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma,$$



ნახ. 12

მაშინ (4) განტოლების სკალარული ნამრავლის კოორდინატებში ჩაწერით მივიღებთ

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p,$$

ანუ

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (5)$$

ამ განტოლებას ეწოდება სიბრტყის განტოლება ნორმალური სახით.

(5) განტოლებით ვაჩვენებთ, რომ სიბრტყე გამოისახება პირველი ხარისხის განტოლებით.

შემდეგში ვაჩვენებთ, რომ ყოველი პირველი ხარისხის განტოლება გამოსახავს სიბრტყეს.

2. სიბრტყის ვექტორული განტოლება ზოგადი სახით. ვთქვათ, π სიბრტყე გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე და პერპენდიკულარულია

$\vec{Q} = (A, B, C)$ ვექტორის. სიბრტყეზე ავიღოთ $M(x, y, z)$ წერტილი. განვიხილოთ ვექტორი

$$\begin{aligned} \vec{M_0M} &= \vec{M} - \vec{M_0} = \\ &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \end{aligned}$$

(ნახ. 13). ვექტორები $\vec{M_0M}$ და $\vec{Q}$ ურთიერთპერპენდიკულარულია, ამიტომ ამ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია,

$$(\vec{M} - \vec{M_0}) \vec{Q} = 0 \quad (6)$$

მივიღეთ π სიბრტყის განტოლება. ამ განტოლებას ეწოდება სიბრტყის ვექტორული განტოლება ზოგადი სახით.

(6) განტოლება კოორდინატებში ასე ჩაიწერება

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (7)$$

ანუ

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (8)$$

სადაც

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

(7) განტოლებას ეწოდება სიბრტყის ზოგადი განტოლება.

ახლა ვაჩვენებთ, რომ ყოველი სამცვლადიანი პირველი ხარისხის განტოლება დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში გამოსახავს სიბრტყეს.

ავიღოთ ნებისმიერი პირველი ხარისხის განტოლება

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (9)$$

როცა ვამბობთ „ნებისმიერი“ განტოლება, ვგულისხმობთ, რომ A, B, C, D კოეფიციენტები შეიძლება იყოს ნებისმიერი რიცხვები, მაგრამ გამორიცხულია სამივე A, B, C კოეფიციენტის ერთდროულად ნულთან ტოლობა. დავამტკიცოთ, რომ (9) განტოლება არის სიბრტყის განტოლება.

ვთქვათ, x_0, y_0, z_0 არის (9) განტოლების რაიმე ამონახსნი, ე. ი. ამ რიცხვთათვის სრულდება ტოლობა

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (10)$$

გამოვაკლოთ (9) განტოლებიდან (10) იგივეობა, მივიღებთ

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (11)$$

მივიღეთ განტოლება იმ სიბრტყის, რომელიც გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე და პერპენდიკულარულია $\vec{Q} = (A, B, C)$ ვექტორისა. (9) და (11) განტოლებანი ურთიერთეკვივალენტური განტოლებანია. მართლაც, (11) განტოლება მიიღება (9) განტოლებიდან (10) იგივეობის წვერობრივ გამოკლებით. პირიქით, (9) განტოლება მიიღება (11) განტოლებიდან, თუ ამ განტოლებას წვერობრივ მივუმატებთ (10) იგივეობას.

ამგვარად, (9) განტოლება სიბრტყის განტოლებაა.

3. სიბრტყის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში. როცა სიბრტყე კოორდინატთა სამივე ღერძზე გარკვეულ მონაკვეთებს ჩამოაჭრის, მაშინ შესაძლებელია განტოლებას მივცეთ ისეთი სახე, რომლიდანაც შესაძლებელია ამ სამი მონაკვეთის განსაზღვრა.

ავიღოთ განტოლება ზოგადი (8) სახით. თავისუფალი წევრი გადავიტანოთ განტოლების მარცხენა ნაწილში,

$$Ax + By + Cz = -D.$$

მიღებული განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ $(-D)$ -ზე, გვექნება

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1. \quad (12)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

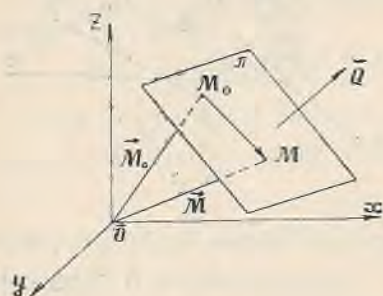
$$-\frac{A}{D} = \frac{1}{p}, \quad -\frac{B}{D} = \frac{1}{q}, \quad -\frac{C}{D} = \frac{1}{r},$$

მაშინ (12) განტოლება მოგვცემს

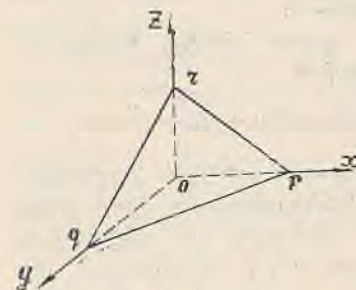
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1. \quad (13)$$

მიღებულ განტოლებას ეწოდება სიბრტყის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში.

(13) განტოლებაში p, q, r -ს აქვთ მარტივი გეომეტრიული აზრი.



ნახ. 13



ნახ. 14

მართლაც, თუ (13) განტოლებაში მივიღებთ $y=0, z=0$, მაშინ გვექნება $x=p$. ასევე, თუ მივიღებთ $x=0, y=0$, მაშინ $z=r$ და, თუ მივიღებთ $x=0, z=0$, გვექნება $y=q$.

ამგვარად, p, q და r იძლევა (13) სიბრტყის მიერ Ox, Oy და Oz ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთების სიგრძეებს (ნახ. 14).

4. განტოლების მიხედვით სიბრტყის აგება. სიბრტყის ასაგებად, საზოგადოდ, საკმარისია ვიპოვოთ სიბრტყის სამი წერტილი, რომლებიც

ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ. თუ სიბრტყე კოორდინატთა სათავეზე არ გადის, განტოლება დაიყვანოთ განტოლებაზე მონაკვეთებში და სათანადოდ გადავზომოთ ღერძებზე მონაკვეთების სიგრძეები. მაგალითად, ავაგოთ სიბრტყე

$$2x - 3y - 3z + 6 = 0. \quad (14)$$

განტოლება გადავწეროთ მონაკვეთებში

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1.$$

Ox, Oy, Oz ღერძებზე სათანადოდ გადავზომოთ $-3, 2, 2$ -ის ტოლი მონაკვეთები. ამ მონაკვეთების ბოლო წერტილებზე გაშვებული სიბრტყის განტოლებაა (14) (ნახ. 15). ზოგად შემთხვევაში (მნიშვნელობა არ აქვს თუ სად, რომელ წერტილზე გაივლის სიბრტყე) სიბრტყის აგება ასე შეგვიძლია:

ავიღოთ სიბრტყე ზოგადი განტოლებით

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (8)$$

ვიპოვოთ ამ სიბრტყის კოორდინატთა სიბრტყეებთან გადაკვეთის წრფეები. ამისათვის (8) განტოლებაში ჩავსვათ $z=0$, მივიღებთ (ნახ. 16)

$$Ax + By + D = 0. \quad (15)$$

ეს წრფე წარმოადგენს მოცემული (8) სიბრტყისა და Oxy სიბრტყის გადაკვეთის წრფეს. (15) წრფეს ეწოდება (8) სიბრტყის კვალი Oxy სიბრტყეზე. სრულიად ასევე მივიღებთ (8) სიბრტყის კვალს Oyz სიბრტყეზე. $x=0$ მოგვცემს

$$By + Cz + D = 0. \quad (16)$$

$y=0$ მოგვცემს

$$Ax + Cz + D = 0. \quad (17)$$

მაგალითად, ავაგოთ სიბრტყე

$$x + y + z - 1 = 0. \quad (18)$$

ამისათვის მოვნახოთ მოცემული სიბრტყის კვალი Oxy სიბრტყეზე. $z=0$ -ს ჩასმით (18) განტოლებაში, მივიღებთ

$$x + y - 1 = 0.$$

ასევე Oxz და Oyz სიბრტყეებზე სათანადოდ კვლები იქნება

$$x + z - 1 = 0,$$

$$y + z - 1 = 0.$$

ამ კვლების სათანადოდ აგება მოგვცემს (18) სიბრტყეს (ნახ. 17).

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი. ავაგოთ სიბრტყე, რომლის განტოლებაა

$$2x - 3y = 0. \quad (19)$$

ეს სიბრტყე პარალელურია Oz ღერძის. ამიტომ საკმარისია ავაგოთ Oxy სიბრტყეზე კვალი

$$2x - 3y = 0. \quad (20)$$

სიბრტყე გაივლის (20) კვალზე და z ღერძზე (ნახ. 18).

5. სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლების ნორმალურ სახეზე მიყვანა.

ავიღოთ სიბრტყის განტოლება (8) სახით და მივიყვანოთ ნორმალურ სახეზე. ამისათვის (8) განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ λ მამრავლზე, მივიღებთ

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0. \quad (21)$$

შევარჩიოთ λ მამრავლი ისე, რომ აღვიღოთ ჰქონდეს ტოლობებს

$$\lambda A = \cos \alpha, \quad \lambda B = \cos \beta, \quad \lambda C = \cos \gamma, \quad \lambda D = -p. \quad (22)$$

λ -განსაზღვრისათვის ამ ტოლობათაგან პირველი სამი ავახარისხოთ კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 + \lambda^2 C^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (23)$$

ამ ორი მნიშვნელობიდან ის მნიშვნელობა ავიღოთ, რომ დაკმაყოფილდეს (22) ტოლობებიდან მეოთხე ტოლობა, $\lambda D = -p$, ე. ი. λD უნდა იყოს უარყოფითი.

მაშასადამე, λ მამრავლის (მანორმალეზელი მამრავლის) ნიშანი უნდა იყოს სიბრტყის ზოგადი განტოლების თავისუფალი წევრის მოპირდაპირე ნიშნის.

თუ $D=0$, მაშინ λ -ს ნიშანი სურვილის მიხედვით ავიღოთ. λ -ს მნიშვნელობის შეტანით სიბრტყის ზოგადი განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \quad (24)$$

მაგალითად, სიბრტყის განტოლება

$$3x - 4y - 12z + 26 = 0 \quad (25)$$

მივიყვანოთ ნორმალურ სახეზე.

(23) ფორმულით გვექნება

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{1}{\pm 13}.$$

რადგანაც λ -ს უნდა ჰქონდეს (25) განტოლების თავისუფალი წევრის მოპირდაპირე ნიშანი, ამიტომ λ -ს მნიშვნელობა ავიღოთ

$$\lambda = -\frac{1}{13}.$$

(25) განტოლების ნორმალური სახე იქნება

$$-\frac{3}{13}x + \frac{4}{13}y + \frac{12}{13}z - 2 = 0.$$

6. სიბრტყის ზოგადი განტოლების გამოკვლევა. ავიღოთ სიბრტყის ზოგადი განტოლება

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (8)$$

და ვთქვათ,

1) $D=0$, მაშინ გვექნება

$$Ax + By + Cz = 0. \quad (26)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ განტოლებას აკმაყოფილებს $x=0, y=0, z=0$. მაშასადამე, (26) განტოლებით გამოსახული სიბრტყე გაივლის კოორდინატთა სათავეზე, ანუ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი სიბრტყის ზოგადი განტოლებაა (26) განტოლება.

2) ვთქვათ, სიბრტყის ზოგადი განტოლებაში ერთ-ერთი კოეფიციენტი ნულის ტოლია. მაგალითად, ნულის ტოლია z -ის კოეფიციენტი, $C=0$, მაშინ სიბრტყის ზოგადი განტოლებიდან მივიღებთ

$$Ax + By + D = 0. \quad (27)$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს (x, y, z) წერტილი, სადაც z ნებისმიერია, ხოლო x, y კოორდინატები (27) სიბრტყის Oxy სიბრტყეში კვალის წერტილის კოორდინატებია. ამგვარად, (27) წარმოადგენს Oz ღერძის პარალელური სიბრტყის ზოგადი განტოლებას (ნახ. 19).

საზოგადოდ კი, თუ ზოგადი განტოლებაში, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, რომელიმე ცვლადი არ შედის, მაშინ განტოლება ამ ცვლადის სახელწოდების პარალელურ სიბრტყეს გამოსახავს. აქედან ადვილად დავსკვნით: თუ ზოგადი განტოლებაში (8) ორი ცვლადი არაა, მაგალითად, $B=0, C=0$, მაშინ განტოლება გამოსახავს ამ ცვლადების სახელწოდების პარალელური სიბრტყის, Oyz სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს (ნახ. 20).

ამგვარად, Oyz სიბრტყის პარალელური სიბრტყის განტოლებაა

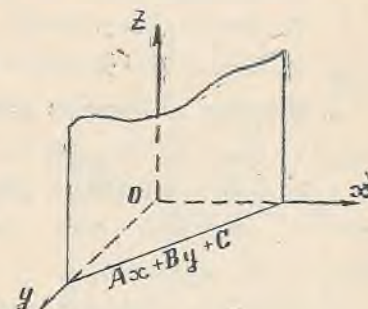
$$Ax + D = 0. \quad (28)$$

Oyz სიბრტყის განტოლება კი იქნება $x=0$. ასევე, Oxz სიბრტყის პარალელური სიბრტყის ზოგადი განტოლება იქნება

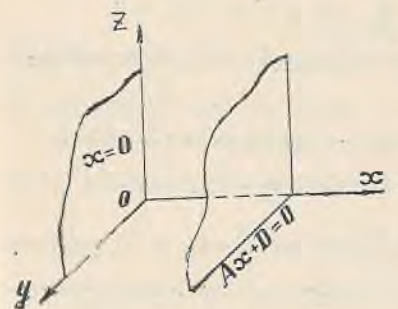
$$By + D = 0. \quad (29)$$

ხოლო Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყის ზოგადი განტოლება იქნება

$$Cz + D = 0. \quad (30)$$



ნახ. 19



ნახ. 20

Oxz სიბრტყის განტოლება იქნება $y=0$; Oxy სიბრტყის განტოლება იქნება $z=0$.

შევასრულოთ შემდეგი სავარჯიშო

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 15

1. ააგეთ სიბრტყეები, რომლებიც მოცემულია განტოლებებით

$$1) 3x + 2y - z - 6 = 0, \quad 4) 2x - 3y + z = 0,$$

$$2) 2x - y + 3z - 6 = 0, \quad 5) 2x - y - 3 = 0,$$

$$3) -x + 4y - 3z + 12 = 0, \quad 6) y - z = 0.$$

2. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $A(3; 1; 4)$

წერტილზე $\vec{Q} = (3; 5; -1)$ ვექტორის პერპენდიკულარულად.

3. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც Ox ღერძზე მოკვეთს 2 ერთეულის ტოლ მონაკვეთს და პერპენდიკულარულია

$\vec{Q} = (1; -2; 3)$ ვექტორის.

4. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $A(-1; 4; 6)$ წერტილზე Oy ღერძის პერპენდიკულარულად.

5. მოცემულია სიბრტყის ზოგადი განტოლება, მიიყვანეთ სიბრტყის ნორმალურ განტოლებასზე:

$$1) 3x - 4y + 10 = 0, \quad 3) 6x + 8y - 4z + 24 = 0,$$

$$2) 4x - 3y - 15 = 0, \quad 4) x - y + 7z - 21 = 0.$$

6. მოცემულია სიბრტყის ზოგადი განტოლება, მიიყვანეთ სიბრტყის განტოლებასზე მონაკვეთებში:

$$1) 2x - y + 3z - 6 = 0, \quad 3) -x + 3y - 15z - 15 = 0,$$

$$2) x - 3y + 4z - 12 = 0, \quad 4) 6x - 2y - 3x - 6 = 0.$$

7. მოცემულია $Mo(1; 2; 3)$ წერტილი და $\vec{Q} = (3; 4; 5)$ ვექტორი.

შეადგინეთ Mo წერტილზე გამავალი $\vec{Q}$ ვექტორის პერპენდიკულარული სიბრტყის ვექტორული განტოლება — ზოგადი სახისა და ნორმალური სახის.

8. მოცემულია ტეტრაედრი, რომლის წვეროებია $A(0; 2; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $D(0; 0; 2)$. შეადგინეთ ტეტრაედრის წახნაგების განტოლებანი.

9. შეადგინეთ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი $\vec{Q} = \left(-\frac{4}{9}; \frac{7}{9}; \frac{4}{9}\right)$

ვექტორის პერპენდიკულარული სიბრტყის განტოლება.

10. შეადგინეთ $M(2; 4; 5)$ წერტილზე გამავალი $3x - 2y + z - 6 = 0$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყის განტოლება.

§ 4. სივრცეში წრფის განტოლებანი

1. წრფის ვექტორული განტოლება. ავიღოთ $Oxyz$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და ამ კოორდინატთა სისტემაში რომელიმე Δ წრფე. ცხადია, Δ წრფის მდებარეობა განსაზღვრული იქნება, თუ

ცნობილია $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი, რომელზედაც წრფე გაივლის, და $\vec{Q} = (l, m, n)$ ვექტორი, რომლის პარალელურობაა წრფე (ნახ. 21).

წრფეზე ავიღოთ ნებისმიერი $M(x, y, z)$ წერტილი. განვიხილოთ M_0 და M წერტილების რადიუს-ვექტორები

$$\vec{OM}_0 = \vec{M}_0, \quad \vec{OM} = \vec{M}.$$

ნახაზიდან ცხადია,

$$\vec{M}_0\vec{M} = \vec{M} - \vec{M}_0 = \vec{Q}t,$$

სადაც t ნებისმიერი სიდიდეა — პარამეტრია.

უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღეთ

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{Q}t. \quad (1)$$

ამ განტოლებას ეწოდება წრფის ვექტორული განტოლება.

$\vec{Q}$ ვექტორს ეწოდება Δ წრფის მიმდართელი ვექტორი.

2. წრფის პარამეტრული განტოლებანი. წრფის ვექტორული განტოლება ჩაეწეროთ კოორდინატებში:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

მიღებულ განტოლებებს ეწოდება წრფის პარამეტრული განტოლებები.

3. წრფის კანონიკური განტოლებანი. $\vec{M}_0\vec{M}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების პარალელობის პირობიდან მივიღებთ

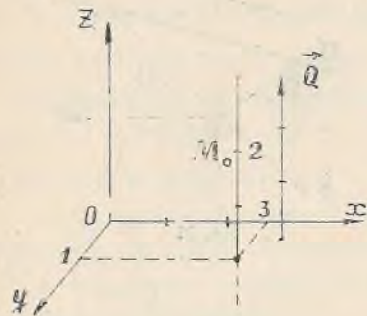
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (3)$$

ეს განტოლებები გვიჩვენებს, რომ წერტილი $M(x, y, z)$ მდებარეობს იმ წრფეზე, რომელიც გაივლის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე და პარალელურია $\vec{Q} = (l, m, n)$ ვექტორისა. (3) განტოლებებს ეწოდება წრფის განტოლებანი მიმართულ ლევის კოორდინატებით ან წრფის კანონიკური განტოლებანი.

მაგალითად, განტოლებანი

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{3}$$

გამოსახავს წრფეს, რომელიც გაივლის $M_0(3, 1, 2)$ წერტილზე და პარალელურია $\vec{Q} = (0, 0, 3)$ ვექტორის (ნახ. 22).



ნახ. 22

წრფის ზოგადი სახის განტოლებები. წრფე სივრცეში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი სიბრტყის გადაკვეთა, თუ ეს სიბრტყეები პარალელური არაა. ამიტომ ავიღოთ ორი სიბრტყე ზოგადი განტოლებებით და განვიხილოთ ამ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

ცხადია, რომ (4) განტოლებათა სისტემა წრფეს გამოსახავს, თუ ვექტორები $\vec{P}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ და $\vec{P}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ პარალელური არაა, ან, თუ მოვიგონებთ განტოლებათა სისტემის თავსებადობის პირობას (თავი, VI, § 3), მივიღებთ, რომ (4) განტოლებათა სისტემა გამოსახავს წრფეს, თუ ერთ-ერთი დეტერმინანტთაგანი მაინც

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad (5)$$

განსხვავებულია ნულისაგან.

(4) განტოლებათა სისტემას ეწოდება წრფის ზოგადი სახის განტოლებები.

მაგალითად, განტოლებები

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} - 1 = 0, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} - 1 = 0. \end{cases}$$

გამოსახავს წრფეს (ნახ. 23), რომელიც გადის $(0, 0, 4)$ წერტილზე და

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 1 = 0$$

წრფეების გადაკვეთის წერტილზე.

5. წრფის დაუვანილი სახის განტოლებები. ავიღოთ წრფის განტოლებები ზოგადი სახით და ვთქვათ, (5) დეტერმინანტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. მაგალითად,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

მაშინ (4) განტოლებათა სისტემა შეგვიძლია ამოვხსნათ x -ისა და y -ის მიმართ, გვექნება

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -C_1z - D_1 & B_1 \\ -C_2z - D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1z - D_1 \\ A_2 & -C_2z - D_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \end{aligned}$$

ანუ

$$x = \frac{B_1C_2 - C_1B_2}{\Delta}z + \frac{B_1D_2 - D_1B_2}{\Delta}, \quad y = \frac{C_1A_2 - A_1C_2}{\Delta}z + \frac{D_1A_2 - A_1D_2}{\Delta}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს,

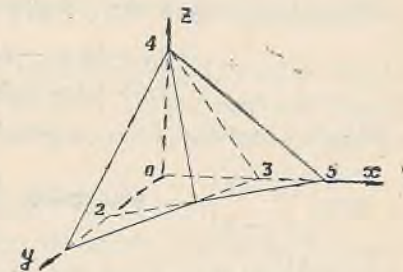
$$\frac{1}{\Delta} (B_1C_2 - C_1B_2) = k_1, \quad \frac{1}{\Delta} (B_1D_2 - D_1B_2) = b_1,$$

$$\frac{1}{\Delta} (C_1A_2 - A_1C_2) = k_2, \quad \frac{1}{\Delta} (D_1A_2 - A_1D_2) = b_2,$$

მივიღებთ

$$\begin{cases} x = k_1z + b_1, \\ y = k_2z + b_2. \end{cases} \quad (6)$$

ამ განტოლებებს ეწოდება წრფის განტოლებები დაყვანილი ან უმარტივესი სახით.



ნახ. 23

მაგალითად, განტოლებები

$$\begin{cases} x = 2z + 3, \\ y = z - 2. \end{cases}$$

წრფის განტოლებებია დაყვანილი სახით.

ცხადია, წრფის ერთი სახის განტოლებებიდან ყოველთვის შეგვიძლია მივიღოთ მეორე სახის განტოლებები.

მაგალითად, წრფის ზოგადი სახის განტოლებებიდან

$$\begin{cases} 2x - 5y + 6z - 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 2 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

მოვნახოთ წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებები.

მოცემული სისტემა ასე გადავწეროთ:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -6z + 1, \\ 2x - 4y = -3z - 2. \end{cases}$$

ეს სისტემა ამოვხსნათ x -ისა და y -ის მიმართ. გვექნება

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2, & -5 \\ 2, & -4 \end{vmatrix} = -8 + 10 = 2; \quad \begin{vmatrix} -6, & -5 \\ -3, & -4 \end{vmatrix} = 24 - 15 = 9,$$

$$\begin{vmatrix} 1, & -5 \\ -2, & -4 \end{vmatrix} = -4 + 10 = 6, \quad \Delta_1 = 9z + 6; \quad \begin{vmatrix} 2, & -6 \\ 2, & -3 \end{vmatrix} = -6 + 12 = 6,$$

$$\begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 2, & -2 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6, \quad \Delta_2 = 6z - 6.$$

კრამერის ფორმულებით მივიღებთ

$$x = \frac{9z + 6}{2}, \quad y = \frac{6z - 6}{2},$$

ანუ

$$x = \frac{9}{2}z + 3, \quad y = 3z - 3, \quad (8)$$

ამ განტოლებათა სისტემას ეწოდება წრფის განტოლებანი დაყვანილი სახით.

(8) განტოლებათა სისტემაში შემოვიღოთ აღნიშვნა $z = t$, მაშინ გვექნება

$$\begin{cases} x = \frac{9}{2}t + 3, \\ y = 3t - 3, \\ z = t. \end{cases} \quad (9)$$

მიღებულ სისტემას ეწოდება წრფის განტოლებანი პარამეტრული სახით.

(9) განტოლებათა სისტემიდან განვსაზღვროთ t ,

$$\frac{x-3}{\frac{9}{2}} = t, \quad \frac{y+3}{3} = t, \quad z = t,$$

ანუ

$$\frac{x-3}{\frac{9}{2}} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-0}{1}; \quad M_0(3; -3; 0), \quad \vec{Q} = \left(\frac{9}{2}; 3; 1\right). \quad (10)$$

მიღებულ განტოლებათა სისტემას ეწოდება წრფის კანონიკური განტოლებანი.

ისევე, როგორც წრფის ზოგადი განტოლებებიდან მივიღეთ წრფის სხვადასხვა განტოლებანი, წრფის კანონიკური განტოლებებიდან შეგვიძლია მივიღოთ სხვა სახის განტოლებანი.

§ 5. ძირითადი აზრები

1. მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. შევადგინოთ მოცემულ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

მოცემულ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება ვექტორული სახით ასე ჩაიწერება:

$$(\vec{M} - \vec{M}_0) \vec{Q} = 0, \quad (1)$$

სადაც $\vec{Q} = (A, B, C)$ ვექტორი ნებისმიერია. (1) განტოლება კოორდინატული სახით ასე ჩაიწერება:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (2)$$

სადაც A, B, C ნებისმიერია, x_0, y_0, z_0 მოცემული M_0 წერტილის კოორდინატებია, ხოლო x, y, z სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატებია.

(2) განტოლება იძლევა სიბრტყეთა სიმრავლეს. სიბრტყეთა ამ სიმრავლეს ეწოდება სიბრტყეთა ძეხული. M_0 წერტილის ეწოდება ძეხულის ცენტრი, ხოლო (2) განტოლებას — ძეხულის განტოლება.

A, B, C სიდიდეებიდან მხოლოდ ორი სიდიდეა ნებისმიერი. მართლაც, მივიღოთ, რომ ამ სამი სიდიდიდან ერთ-ერთი, მაგალითად $C \neq 0$, მაშინ C -ზე გაყოფითა და სათანადო აღნიშვნების შემოღებით

$$\frac{A}{C} = \lambda, \quad \frac{B}{C} = \mu,$$

(2) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + z - z_0 = 0. \quad (3)$$

ამგვარად, სიბრტყეთა ძნულის განტოლება შეიცავს ორ ნებისმიერ მუდმივს.

2. ერთ წრფეზე გამავალი სიბრტყეთა კონა. ვთქვათ, მოცემულია წრფე ზოგადი სახის განტოლებებით

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ამ წრფეზე უამრავი სიბრტყე გაივლის, ამიტომ სიბრტყეთა საძიებელი განტოლება უნდა შეიცავდეს ნებისმიერ მუდმივს.

ავიღოთ განტოლება

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (5)$$

სადაც k ნებისმიერი მუდმივია. (5) განტოლება, ცხადია, სიბრტყეს გამოსახავს. ეს სიბრტყე (4) წრფეზე გაივლის. მართლაც, თუ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი (4) წრფეს ეკუთვნის, მაშინ

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0,$$

$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0,$$

და ამის გამო

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 + k(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ M_0 წერტილი (5) სიბრტყეზედაც მდებარეობს, ანუ (5) სიბრტყე გადის (4) წრფეზე. თუ k -ს მივანიჭებთ სხვადასხვა მნიშვნელობებს, მივიღებთ სხვადასხვა სიბრტყეს, რომლებიც (4) წრფეზე გადის.

ერთ წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა სიმრავლეს ეწოდება სიბრტყეთა კონა. სიბრტყეთა კონის განტოლებაა (5) განტოლება.

სიბრტყეთა კონის განტოლება შეიცავს ერთ ნებისმიერ მუდმივს.

3. სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. ავიღოთ სამი $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ წერტილი. სამი წერტილი განსაზღვრავს ერთადერთ სიბრტყეს. შევადგინოთ ამ სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

ვთქვათ M_1 წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (6)$$

შევარჩიოთ A, B, C ისე, რომ (6) სიბრტყე გაიაროს $M_2(x_2, y_2, z_2)$ და $M_3(x_3, y_3, z_3)$ წერტილებზე. ამისათვის უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\left. \begin{aligned} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) &= 0, \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(6) და (7) განტოლებები ქმნის განტოლებათა სისტემას A, B და C -ს მიმართ. ეს განტოლებათა სისტემა ერთგვაროვანია და, რომ ამ სისტემას ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, აუცილებელია სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლი იყოს,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

მიღებული განტოლება წარმოადგენს აღებულ M_1, M_2 და M_3 წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლებას.

მაგალითად, შევადგინოთ $M_1(1; 2; -1)$, $M_2(4; 4; 2)$, $M_3(5; 2; 1)$ წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

(8) გამოსახულებით მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ 4 - 1 & 4 - 2 & 2 + 1 \\ 5 - 1 & 2 - 2 & 1 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

დეტერმინანტის სათანადოდ გამოთვლა მოგვცემს

$$2x + 3y - 4z - 12 = 0.$$

4. ორი სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა. ვთქვათ, მოცემულია ორი სიბრტყე განტოლებებით:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (9)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (10)$$

თუ ამ სიბრტყისადმი პერპენდიკულარული ვექტორები $\vec{Q}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{Q}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ ურთიერთპარალელურია, მაშინ, ცხადია, სიბრტყეებიც ურთიერთპარალელური იქნება. თუ მოვიგონებთ ვექტორთა პარალელობის პირობას, გვექნება

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} (=k). \quad (11)$$

ამგვარად, სიბრტყეები ურთიერთპარალელურია, თუ ამ სიბრტყეთა განტოლებებში შემაჯალ ცვლადთა კოეფიციენტები სათანადოდ პროპორციულია.

ასეთივე დასკვნა შეგვიძლია გავაკეთოთ მე-4 პარაგრაფის (5) დეტერმინანტების ნულთან ტოლობიდანაც. თუ $\frac{D_1}{D_2} = k$, მაშინ (9) და (10) განტოლებებით შედგენილ სისტემას ამონახსნი არ აქვს. გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ სიბრტყეები ურთიერთპარალელურია.

თუ (11) პირობას დაემატება $\frac{D_1}{D_2} = k$, მაშინ სიბრტყეები თანამთხვეულია. მართლაც, ამ შემთხვევაში

$$A_1 = k A_2, B_2 = k B_2, C_1 = k C_2, D_1 = k D_2.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (9) განტოლებაში, მივიღებთ

$$k A_2 x + k B_2 y + k C_2 z + k D_2 = 0,$$

ანუ

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$$

ე. ი. (9) განტოლების ყოველი ამონახსნი არის (10) განტოლების ამონახსნი და, პირიქით, (10) განტოლების ყოველი ამონახსნი არის (9) განტოლების ამონახსნი. მაშასადამე, (9) და (10) სიბრტყეები თანამთხვეულია.

თუ (11) პირობათაგან ერთ-ერთი დარღვეულია, მაშინ (9), (10) განტოლებანი განსაზღვრავს წრფეს. ამის შესახებ ნათქვამი იყო მე-2 პარაგრაფის მე-4 პუნქტში.

5. სამი სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა. ვთქვათ, მოცემულია სამი სიბრტყე განტოლებებით:

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0, \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

ამ სიბრტყეთა ურთიერთმდებარეობა უნდა გავარჩიოთ მოცემული სამი განტოლებით შედგენილი განტოლებათა სისტემის თავსებადობის პირობით. ამისათვის უნდა ვისარგებლოთ კონვეკერ-კაპელის თეორემით (თავი VII, § 3, n 3, თეორემა 4).

თუ მოცემულ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

მაშინ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ანუ ეს სამი სიბრტყე იკვეთება ერთადერთ წერტილში.

დაწვრილებით გავარჩიოთ (12) სიბრტყეების ურთიერთმდებარეობის ყველა შესაძლო შემთხვევა. ამისათვის შევადგინოთ (12) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტთაგან მატრიცა და გავართოებული მატრიცა:

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

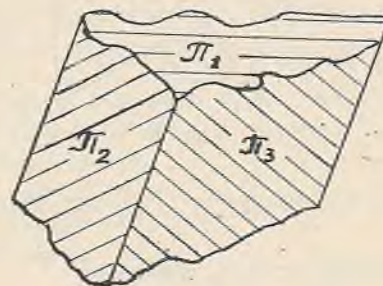
ამ მატრიცების რანგები სათანადოდ აღვნიშნოთ r_1 -ითა და r_2 -ით, მოცემული სიბრტყეები სათანადოდ აღვნიშნოთ π_1, π_2, π_3 -ით.

შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები.

1) $r_1 = 3$. ამ შემთხვევაში $r_2 = 3$.

(12) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრავს ერთადერთ წერტილს (ნახ. 24). ამის შესახებ ზემოთ იყო ნათქვამი.

2) $r_1 = 2, r_2 = 3$. ამ შემთხვევაში (12) სისტემას არ აქვს ამონახსნი. მაშასადამე, სიბრტყეებს არ აქვთ საერთო წერტილი.



ნახ. 24

ნახ. 24

ამ შემთხვევაში შესაძლებელია სიბრტყეთა ორგვარი განლაგება:

ა) A მატრიცაში არც ერთი ორი სტრიქონი პროპორციული არაა. მაშასადამე, ყოველი ორი სიბრტყე განსაზღვრავს წრფეს და ეს წრფეები ურთიერთპარალელურია (ნახ. 25).

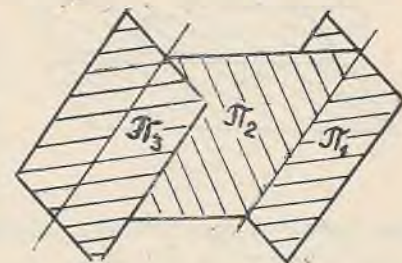
ბ) A მატრიცაში არსებობს ერთმანეთის პროპორ-

ციული ორი სტრიქონი, ხოლო მესამე არაა პროპორციული. ეს ნიშნავს, რომ ორი სიბრტყე ურთიერთპარალელურია, მესამე სიბრტყე ამ ორ სიბრტყეს გადაკვეთს. კვეთაში მიიღება ურთიერთპარალელური წრფეები (ნახ. 26).

3) $r_1 = r_2 = 2$. ამ შემთხვევაში D მატრიცაში ორი სტრიქონი პროპორციულია, მაგალითად,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

ან ერთი სტრიქონი ორი დანარჩენი სტრიქონის წრფივი კომბინაციაა, მაგალითად,



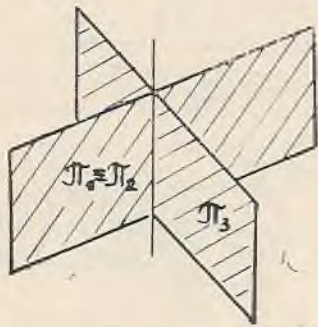
ნახ. 26

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = \alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2);$$

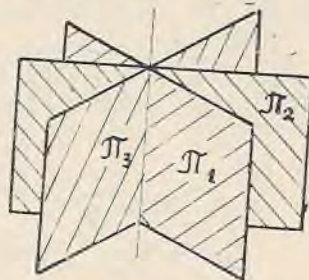
მესამე სიბრტყე გაივლის ორი დანარჩენი სიბრტყის ურთიერთგადაკვეთის წრფეზე.

ამგვარად, გვაქვს ორი შემთხვევა:

ა) ორი სიბრტყე თანამთხვეულია და ამ სიბრტყეებს გადაკვეთს მესამე სიბრტყე (ნახ. 27). კვეთაში მიიღებთ წრფეს. ე. ი. სამი სიბრტყე განსაზღვრავს წრფეს.



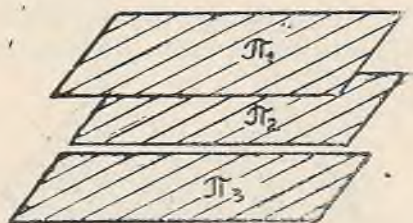
ნახ. 27



ნახ. 28

ბ) ორი სიბრტყე გადაკვეთება და გადაკვეთით მიღებულ წრფეზე გაივლის მესამე სიბრტყე (ნახ. 28).

4) $r_1 = 1, r_2 = 2$. აქ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:



ნახ. 29

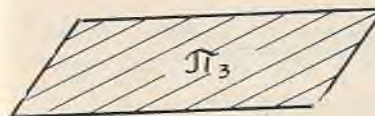
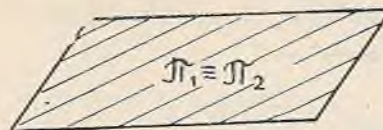
ა) D მატრიცაში არ არსებობს ერთმანეთის პროპორციული ორი სტრიქონი. ეს ნიშნავს, რომ π_1, π_2, π_3 სიბრტყეებიდან ნებისმიერი ორი სიბრტყე ურთიერთპარალელურია (ნახ. 29).

ბ) D მატრიცაში არსებობს ორი სტრიქონი ერთმანეთის პროპორციული. ეს

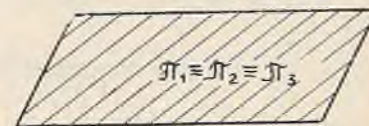
ნიშნავს ორი სიბრტყე ურთიერთ თანამთხვეულია, მესამე სიბრტყე ამ სიბრტყეების პარალელურია (ნახ. 30).

5) $r_1 = 1, r_2 = 1$. ამ შემთხვევაში D მატრიცის სამივე სტრიქონი პროპორციულია, ე. ი. სამივე სიბრტყე ურთიერთთანამთხვეულია (ნახ. 31).

სხვა შემთხვევა არ შეიძლება. მაგალითად, $r_1 = 1, r_2 = 3$ არ შეიძლება.



ნახ. 30



ნახ. 31

6. ორ სიბრტყეს შორის კუთხე. ვთქვათ, მოცემულია ორი სიბრტყე განტოლებებით:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

ამ სიბრტყეთა სათანადო ნორმალური ვექტორებია

$$\vec{Q}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{Q}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

მოცემულ სიბრტყეთა შორის ორწახნაგა ერთ-ერთი ფ კუთხე ტოლია მათ ნორმალთა შორის კუთხისა, ხოლო მეორე კუთხე იქნება დამატებითი კუთხე π -მდე (ნახ. 32).

$$\varphi = \widehat{\vec{Q}_1, \vec{Q}_2} \text{ ან } \varphi = \pi - \widehat{\vec{Q}_1, \vec{Q}_2}.$$

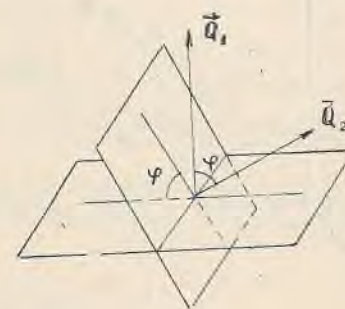
მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \pm \frac{\vec{Q}_1 \cdot \vec{Q}_2}{|\vec{Q}_1| |\vec{Q}_2|} = \\ &= \frac{\pm (A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

აქედან ადვილი მისაღებია სიბრტყეთა პერპენდიკულარულობის პირობა. თუ სიბრტყეები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ ამ სიბრტყეთა ნორმალური ვექტორებიც ურთიერთპერპენდიკულარულია. ამისათვის კი უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (14)$$

პირიქით, თუ შესრულდება (14) პირობა, მაშინ სიბრტყეები ურთიერთპერპენდიკულარული იქნება.



ნახ. 32

მაგალითად, განესაზღვროთ

$$x + y - 5 = 0,$$

$$2x + y + 2z - 8 = 0$$

სიბრტყეებს შორის კუთხე.

(13) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\cos \varphi = \pm \frac{1.2 + 1.1 + 0.2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}.$$

სათანადო გამოთვლები მოგეცემს

$$\cos \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

ამგვარად, მოცემულ სიბრტყეთა მიერ შეღგენილი კუთხეებია 45°
და 135° .

7. წერტილიდან სიბრტყეში მანძილი. გამოვთვალოთ მანძილი მოცემული $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილიდან მოცემულ π სიბრტყეზე.

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (14)$$

კოორდინატთა სათავედან გავატროთ პერპენდიკულარული On ღერძი მოცემული სიბრტყისადმი (ნახ. 33). M_0 წერტილი დაეგვიგმილით (14) სიბრტყეზე. მივიღებთ წერტილს, რომელიც C ასოთი აღვნიშნათ.

On ღერძის მიერ (14) სიბრ-
ტყის გადაკვეთის წერტილი A-თი
აღენიშნოთ.

განვიხილოთ ვექტორები

$\vec{OB}$ და $\vec{OM}_0$, სადაც $B = \text{გვ. } M_0$.
ცხადია, რომ

$$OB = \text{ЗЗ}_{on} \vec{OM}_0 =$$

$$= x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma. \quad (15)$$

ისევე, როგორც სიბრტყეზე წრფის შემთხვევაში განვსაზღვრეთ

წერტილის გადახრა წრფიდან, სივრცეშიც განესაზღვრავთ წერტილის გადახრას სიბრტყიდან.

M_0 წერტილის გადახრა მოცემული სიბრტყიდან ეწოდება M_0 წერტილიდან ამ სიბრტყეზე მანძილს დადებითი ნიშნით, $\delta = +d$, თუ M_0 წერტილი და კოორდინატთა სათავე სიბრტყიდან სტვადასხვა მხარესაა, ხოლო M_0 წერტილის გადახრა მოცემული სიბრტყიდან ეწოდება M_0 წერტილიდან მან-

ძილს უარყოფითი ნიშნით, $\delta = -d$, თუ M_0 წერტილი და კოორდინატთა სათავე მოცემული სიბრტყიდან ერთ მხარესა;

$$\delta = \pm d.$$

ამ ტოლობიდან გვექნება

$$d = |\delta|, \quad (16)$$

გამოვთვალოთ M_0 წერტილიდან (14) სიბრტყეებზე გადახრა. ნახაზიდან ცხადია, რომ

$$\delta = CM_0 = AB = OB - OA = OB - p.$$

შევიტანოთ *OB*-ს მნიშვნელობა (15) ტოლობიდან, მივიღებთ

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p. \quad (17)$$

(16) განსაზღვრიდან გვეჩვენება

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|. \quad (18)$$

ამგვარად, რომ ვიპოვოთ π სიბრტყიდან $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილის გადახრა, საკმარისია (14) განტოლების მარცხენა მხარეში ჩავსვათ M_0 წერტილის კოორდინატები და სათანადო მნიშვნელობა გამოვიანგარიშოთ. ამ მნიშვნელობის ნიშნით განვსაზღვრავთ, თუ სად იმყოფება M_0 წერტილი π სიბრტყის მიმართ. თუ გადახრა დადებითი ნიშნისაა, მაშინ M_0 წერტილი და კოორდინატა სათავე $O\pi$ სიბრტყიდან სხვადასხვა მხარესაა, თუ გადახრა უარყოფითია, მაშინ M_0 წერტილი π სიბრტყიდან კოორდინატთა სათავეს მხარეს იმყოფება. M_0 წერტილიდან π სიბრტყემდე მანძილი კი იქნება π სიბრტყიდან M_0 წერტილის გადახრის აბსოლუტური მნიშვნელობა.

თუ სიბრტყის განტოლება ზოგადი სახისაა, მაშინ განტოლება უნდა მივიყვანოთ ნორმალურ სახეზე. ამით (18) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \quad (19)$$

მაგალითად, ვიპოვით მანძილი M_0 (3; 5; — 2) წერტილიდან

$$2x - y + 2z - 9 = 0 \quad (20)$$

სიბრტყეში.

ჭერ გამოვთვალოთ (20) სიბრტყიდან $M_0(3; 5; -2)$ წერტილის გა-
დანრა:

$$\delta = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) - 9}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6 - 5 - 4 - 9}{\sqrt{9}} = \frac{-12}{3} = -4 < 0.$$

ე. ი. კოორდინატთა სათავე და M_0 წერტილი (20) სიბრტყიდან ერთ მხარესაა. საძიებელი მანძილი იქნება

$$d = |-4| = 4.$$

8. ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებები. თუ მოცემულია ორი წერტილი $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, მაშინ იმ წრფის მიმართ-
თველ ვექტორად, რომელიც ამ წერტილებზე გაივლის, შეგვიძლია ავიღოთ ვექტორი

$$\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

ე. ი.

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

ამის გამო ამ ორ წერტილზე გამავალი წრფის კანონიკური განტოლებანი იქნება

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (21)$$

მაგალითად, დავწეროთ იმ წრფის კანონიკური განტოლებანი, რომე-
ლიც გაივლის $M_1(2; 1; 3)$, $M_2(3; 4; 7)$ წერტილებზე.

გვექნება

$$\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y - 1}{4 - 1} = \frac{z - 3}{7 - 3},$$

ანუ

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 3}{4}.$$

9. წრფისა და სიბრტყის ურთიერთგადაკვეთა. ვთქვათ, მოცემულია წრფე პარამეტრული განტოლებებით

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

და სიბრტყე ზოგადი განტოლებით

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (23)$$

მოვძებნოთ წრფის სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი. ამისათვის (22) გამოსახულებანი შევიტანოთ (23) განტოლებაში, მივიღებთ

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (Al + Bm + Cn)t = 0. \quad (24)$$

თუ (22) წრფის მიმართველი ვექტორი $\vec{Q} = (l, m, n)$ (23) სიბრ-
ტყის ნორმალური ვექტორის $\vec{P} = (A, B, C)$ -ს პერპენდიკულარული არაა,

$$Al + Bm + Cn \neq 0 \quad (25)$$

ე. ი. (22) წრფე (23) სიბრტყის პარალელური არაა, მაშინ (24)-დან შეგვიძლია განვსაზღვროთ t ,

$$t = - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

l -ს მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (22)-ში და მივიღებთ საძიებელი წერტილის კოორდინატებს. ამ შემთხვევაში (22) წრფე (23) სიბრტყეს ერთადერთ წერტილში გადაკვეთს.

თუ

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad (26)$$

მაშინ გვექნება ორი შემთხვევა.

1) (x_0, y_0, z_0) წერტილი არ მდებარეობს (23) სიბრტყეზე, ე. ი.

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0,$$

მაშინ არ არსებობს l -ს მნიშვნელობა, რომელიც (24) ტოლობას დააკმა-
ყოფილებს. მაშასადამე, (22) წრფე (23) სიბრტყის პარალელური იქნება.

2) (x_0, y_0, z_0) წერტილი მდებარეობს (23) სიბრტყეზე,

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

მაშინ არსებობს l -ს მნიშვნელობის უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც (24) განტოლებას აკმაყოფილებენ. ეს კი გვიჩვენებს, რომ (22) წრფე (24) სიბრტყეზე მდებარეობს.

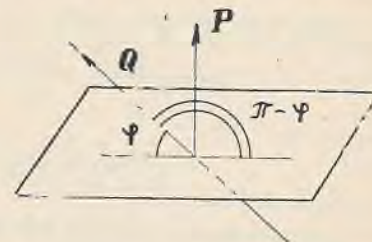
10. წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე. ვთქვათ, წრფე Δ მოცემულია განტოლებებით

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

ხოლო სიბრტყე π ზოგადი განტო-
ლებით

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Δ წრფესა და π სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება Δ წრფესა და π სიბრტყეზე Δ წრფის გვერდის შო-
რის კუთხეს. ეს კუთხე φ ასოთი აღვნიშნოთ (ნახ. 34). ამ განსაზღვრის თანახმად გვაქვს ორი კუთხე φ , $\pi - \varphi$. Δ წრფისა და π სიბრტყის გადაკვეთის M წერტილიდან გადავღოთ Δ წრფის მიმართველი ვექტორი $\vec{Q}$ და π სიბრტყის ნორმალური ვექტორი $\vec{P}$.



ნახ. 34

თუ $\vec{Q}$ და $\vec{P}$ ვექტორები π სიბრტყიდან ერთ მხარეს არიან მიმართული, მაშინ ამ ვექტორებს შორის კუთხე იქნება $\frac{\pi}{2} - \varphi$, ხოლო, თუ ეს ვექტორები მიმართულია π სიბრტყის სხვადასხვა მხარეს, მაშინ $\vec{Q}$ და $\vec{P}$ ვექტორებს შორის კუთხე იქნება $\frac{\pi}{2} + \varphi$.

ასე რომ, ორივე შემთხვევაში გვექნება

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right) = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

საიდანაც

$$\sin \varphi = \pm \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (27)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ვექტორებს შორის კუთხე არ აღემატება π -ს, $\sin \varphi$ არ იქნება უარყოფითი. ამის გამო (27) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში ნიშანი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ მივიღოთ $\sin \varphi \geq 0$.

(27) ფორმულიდან კვლავ შეგვიძლია მივიღოთ წრფის სიბრტყესთან პარალელობის პირობა.

მათილაც, თუ Δ წრფე π სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მათ შორის კუთხე ნულის ტოლია, ამის გამო გვექნება

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Δ წრფის π სიბრტყისადმი პერპენდიკულარობის პირობა მიიღება $\vec{Q}$ და $\vec{P}$ ვექტორების ურთიერთპარალელობიდან:

$$\frac{l}{A} = \frac{B}{m} = \frac{n}{C}. \quad (28)$$

მაგალითად, ვიპოვოთ კუთხე

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{2} \quad (29)$$

წრფესა და

$$2x + 2z - 15 = 0 \quad (30)$$

სიბრტყეს შორის.

(27) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\sin \varphi = + \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2}},$$

ანუ

$$\sin \varphi = \frac{6}{3 \cdot 2 \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ამგვარად, (29) წრფესა და (30) სიბრტყეს შორის კუთხე $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

გამოვარკვეოთ

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{2} \quad (31)$$

წრფის და

$$2x + 4y + 3z - 12 = 0 \quad (32)$$

სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა.

M (1, 1, 2) წერტილი იმყოფება (32) სიბრტყეზე,

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 12 = 0.$$

(31) წრფის მიმართველი ვექტორი $\vec{Q} = (3, -3, 2)$ და (32) სიბრტყის ნორმალური ვექტორი $\vec{P} = (2, 4, 3)$ ურთიერთპერპენდიკულარულია,

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0.$$

მაშასადამე, (31) წრფე მდებარეობს (32) სიბრტყეზე.

11. ორ წრფეს შორის კუთხე. ვთქვათ, წრფეები მოცემულია კანონიკური განტოლებებით

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad (33)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

ორ წრფეს შორის კუთხე ეწოდება ნებისმიერ კუთხეს იმ ორ კუთხეთაგან, რომლებიც მიიღება ერთ წერტილზე გამავალი და მოცემულ წრფეთა სათანადოდ პარალელური წრფეებით.

ამ განსაზღვრიდან ცხადია, რომ (33) წრფეთა შორის ერთი კუთხე ტოლია ამ წრფეთა მიმართველ ვექტორთა შორის φ კუთხის, ხოლო მეორე $\pi - \varphi$ -ს:

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (34)$$

წრფეთა ურთიერთპერპენდიკულარობის და ურთიერთპარალელობის პირობები მიიღება სათანადოდ ამ წრფეთა მიმართველი ვექტორების ურთიერთპერპენდიკულარობის და ურთიერთპარალელობის პირობებიდან.

(33) წრფეების ურთიერთპერპენდიკულარობის პირობაა

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

ხოლო ურთიერთპარალელობის პირობაა

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

12. წერტილიდან წრფემდე მანძილი. ავიღოთ წრფე კანონიკური განტოლებებით

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (35)$$

და წერტილი $M_1(x_1, y_1, z_1)$. წერტილიდან წრფემდე მანძილი ეწოდება ამ წერტილიდან წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიგრძეს (ნახ. 35). განვიხილოთ

$$\vec{Q} = (l, m, n) \text{ და } \vec{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

ვექტორებზე აგებული პარალელო-

გრამი. საძიებელი d მანძილი არის M_1 წერტილიდან დაშვებული ამ პარალელოგრამის სიმაღლე.

მოვიგონოთ, რომ $\vec{M_0M_1}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი ამ ვექტორთა ვექტორული ნამრავლის სიგრძის ტოლია

$$S_{\vec{M_0M_1}, \vec{Q}} = |\vec{M_0M_1}, \vec{Q}| = d |\vec{Q}|, \quad (36)$$

სადაც

$$[\vec{M_0M_1}, \vec{Q}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}.$$

(36)-დან გვექნება

$$d = \frac{S_{\vec{M_0M_1}, \vec{Q}}}{|\vec{Q}|},$$

სადაც

$$S_{\vec{M_0M_1}, \vec{Q}} = \sqrt{\left| \frac{y_1 - y_0}{m} \frac{z_1 - z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{x_1 - x_0}{l} \frac{z_1 - z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{x_1 - x_0}{l} \frac{y_1 - y_0}{m} \right|^2},$$

$$|\vec{Q}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.$$

ამგვარად,

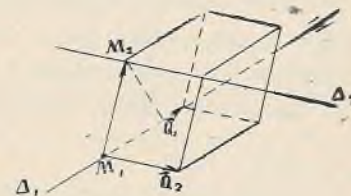
$$d = \frac{\sqrt{\left| \frac{y_1 - y_0}{m} \frac{z_1 - z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{x_1 - x_0}{l} \frac{z_1 - z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{x_1 - x_0}{l} \frac{y_1 - y_0}{m} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (37)$$

13. ორ წრფეს შორის უმოკლესი მანძილი. ორ წრფეს შორის უმოკლესი მანძილი ეწოდება ამ წრფეთა საერთო პერპენდიკულარის იმ მონაკვეთის სიგრძეს, რომელიც წრფეებს შორისაა მოთავსებული (ნახ. 36).

წრფეები ავიღოთ კანონიკური განტოლებებით

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$



ნახ. 36

განვიხილოთ $\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{Q_1} = (l_1, m_1, n_1)$, $\vec{Q_2} = (l_2, m_2, n_2)$ ვექტორებზე აგებული პარალელოპიპედი. ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოპიპედის მოცულობა ტოლია ამ ვექტორების შერეული ნამრავლის აბსოლუტური მნიშვნელობისა

$$V_{\vec{M_1M_2}, \vec{Q_1}, \vec{Q_2}} = |(\vec{M_1M_2}, \vec{Q_1}, \vec{Q_2})| = \pm h |\vec{Q_1}, \vec{Q_2}|, \quad (38)$$

სადაც

$$(\vec{M_1M_2}, \vec{Q_1}, \vec{Q_2}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

(38)-დან გვექნება

$$h = \frac{\pm \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\left| \frac{m_1}{m_2} \frac{n_1}{n_2} \right|^2 + \left| \frac{l_1}{l_2} \frac{n_1}{n_2} \right|^2 + \left| \frac{l_1}{l_2} \frac{m_1}{m_2} \right|^2}}. \quad (39)$$

ს ა ვ ა რ გ ი შ ო 16

1. შეადგინეთ იმ წრფის ვექტორული განტოლება, რომელიც გაივლის კოორდინატთა სათავეზე და $\vec{Q} = (1; 1; 1)$ ვექტორის პარალელურია.

2. შეადგინეთ იმ წრფის ნორმალური განტოლებანი, რომელიც გადის $M(1; 2; -1)$ წერტილზე $\vec{Q} = (-1, 1, -2)$ ვექტორის პარალელურად. მიღებული განტოლებანი გადაწერეთ ვექტორულად, პარამეტრულად, როგორც ორი სიბრტყის ურთიერთგადაკვეთა და დაყვანილი სახით.

3. მოცემულია წრფის განტოლებანი ზოგადი სახით:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 10, \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

დაიყვანეთ ეს განტოლებანი წრფის ნორმალური სახის, პარამეტრული სახის და დაყვანილი სახის განტოლებებზე.

4. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(2; -1; 5)$ წერტილზე და $5x - 2y + z - 6 = 0$ და $x - y + z - 2 = 0$ სიბრტყეება პარალელურად.

5. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გაივლის $A(3; 2; 1)$, $B(-1; 5; 4)$, $C(-5; -4; -3)$ წერტილებზე.

6. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გაივლის $M(5; 1; 3)$ წერტილზე $3x - 4y + 6z - 7 = 0$ სიბრტყის პარალელურად.

7. მოცემულია ტეტრაედრის წვეროები $A(6; 3; 1)$, $B(1; 5; 2)$, $C(4; 7; 3)$, $D(3; 4; 6)$. შეადგინეთ: ABC წახნაგის განტოლება, D წვეროზე გატარებული სიმაღლის განტოლება და იპოვეთ ტეტრაედრის მოცულობა.

8. იპოვეთ

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 5z + 10 &= 0, \\ 2x - 3y - 5z - 20 &= 0 \end{aligned}$$

სიბრტყეებს შორის მანძილი.

9. იპოვეთ $M(-3; 3; 1)$ წერტილიდან

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

წრფემდე მანძილი.

10. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(2; 4; 5)$ წერტილზე და კოორდინატთა ღერძებთან ადგენს კუთხეებს 45° , 60° , 120° .

11. მონახეთ კუთხე

$$x + y - z - 5 = 0$$

და

$$3x - 2y + z - 4 = 0$$

სიბრტყეებს შორის.

12. გაარკვეთ, როგორ არიან

$$\frac{x}{3} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-1}{-9},$$

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$$

წრფეები ურთიერთგანლაგებული.

13. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გაივლის $M(2; -1; 3)$ წერტილზე

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}, \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-5}$$

წრფეების პარალელურად.

14. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გაივლის $M(2; -1; 3)$ წერტილზე

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$$

წრფის პერპენდიკულარულად.

15. შეადგინეთ

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 4 = 0, \\ x + 2y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

წრფეზე და $M(2; 1; 3)$ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

16. შეადგინეთ $M(-2; -1; 3)$ წერტილზე გამავალი და $\vec{P} = (1, 4, 5)$

და $\vec{Q} = (5, 2, 1)$ ვექტორების პარალელური სიბრტყის განტოლება.

17. მონახეთ

$$\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$$

წრფის $x + y + z - 2 = 0$ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი.

18. მონახეთ $\begin{cases} x - y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ წრფისა და $2x + 3y - z + 5 = 0$ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი.

19. იპოვეთ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$ და $\frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z+1}{2}$ წრფეებს შორის მანძილი.

20. მონახეთ იმ წრფის განტოლებანი, რომელიც გაივლის $M(2; 1; -1)$ წერტილზე და $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{4}$ წრფისა და $2x - 3y + 5z - 6 = 0$ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილზე.

§ 6. მეორე რიგის ზედაპირთა კანონიერი განტოლებანი

1. ზოგადი შენიშვნები, ისეთ ზედაპირს, რომელიც ღერძების $Oxyz$ სისტემის მიმართ გამოისახება სამკვლედიანი მეორე ხარისხის ალგებრული განტოლებით

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (1)$$

ეწოდება მეორე რიგის ზედაპირი.

(1) განტოლების კოეფიციენტთა მნიშვნელობის მიხედვით მივიღებთ სხვადასხვა სახის ზედაპირს.

მაგალითად, თუ (1) განტოლება არ შეიცავს z -ს, ე. ი. იმ წევრთა კოეფიციენტები, რომლებშიც z შედის, ნულის ტოლია,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0,$$

გვექნება ცილინდრული ზედაპირები (თავი X, § 1, n 3), რომელთა მსახველები z ღერძის პარალელურია.

თუ (1) განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

მივიღებთ სფეროს

$$(x + a_{14})^2 + (y + a_{24})^2 + (z + a_{34})^2 = D,$$

თუ $D > 0$,

$$D = a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44},$$

მივიღებთ წერტილს, თუ $D = 0$ და მივიღებთ წარმოსახვით სფეროს, თუ $D < 0$.

თუ (1) განტოლების მარჯვენა მხარე იშლება პირველი ხარისხის ორ ნამდვილ მამრავლად, მაშინ (1) განტოლება იძლევა ორ სიბრტყეს. ეს სიბრტყეები შეიძლება თანამთხვეული იყოს.

თუ (1) განტოლება იძლევა წერტილს ან წარმოსახვით წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, ან სიბრტყეთა ერთობლიობას, მაშინ ვიტყვით, რომ გვაქვს გადაგვარებული მეორე რიგის ზედაპირი.

განვიხილოთ (1) განტოლების სხვადასხვა კერძო შემთხვევა.

2. ელიფსოიდი, ზედაპირს, რომელიც გამოისახება

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

განტოლებით ღერძების მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში, ეწოდება ელიფსოიდი.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ელიფსოიდის ფორმა, ვისარგებლებთ ე. წ. „პარალელური კვეთების მეთოდით“.

განვიხილოთ მოცემული ელიფსოიდის პარალელური კვეთები, რომლებიც მიიღებთან $z = h$ სიბრტყეებით, სადაც h ზღუდლობს სხვადასხვა მნიშვნელობას. ეს კვეთებია ელიფსები

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \quad z = h. \quad (3)$$

ამ ელიფსების ნახევარღერძებია

$$\bar{a} = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad \bar{b} = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

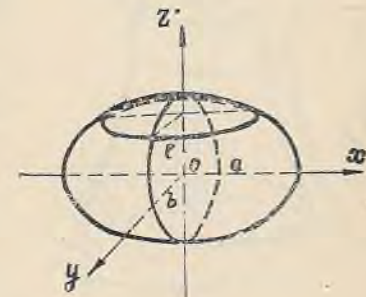
ეს ნახევარღერძები მცირდება h -ის ზრდასთან ერთად (ნახ. 37), $|h|$ არ შეიძლება მეტი იყოს c -ზე.

სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ $x = h$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით მიღებული კვეთები. ეს კვეთებიც ელიფსებია,

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 - \frac{h^2}{a^2}, \\ x &= h. \end{aligned} \right\}$$

ასევე გვექნება $y = h$ პარალელური სიბრტყეებით მიღებული კვეთები,

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y &= h. \end{aligned} \right\}$$



ნახ. 37

ამგვარად, ელიფსოიდი (2) წარმოადგენს ჩაკეტილ ზედაპირს, რომელსაც აქვს სამი ურთიერთპერპენდიკულარული სიმეტრიის სიბრტყე, ეს სიბრტყეები ემთხვევა კოორდინატთა სიბრტყეებს.

თუ ავიღებთ განტოლებას

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (4)$$

გვეჩვენება, რომ არ არსებობს ისეთი ნამდვილი წერტილი, რომელიც ამ განტოლებას აკმაყოფილებდეს; განტოლების მარცხენა მხარეში გვაქვს დადებითი სიდიდე, ხოლო მარჯვენა მხარეში — უარყოფითი სიდიდე. (4) განტოლებას (2) განტოლების ანალოგიით ეწოდება წარმოსახვითი ელიფსოიდი. a, b, c სიდიდეებს ეწოდება ელიფსოიდის ნახევარღერძები.

თუ a, b, c სიდიდეები ტოლია, მაშინ მივიღებთ სფეროს

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

მ. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი ეწოდება ზედაპირს, რომელიც გამოისახება განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5)$$

თუ $z = 0$, (5) განტოლება მოგვცემს ელიფსს,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

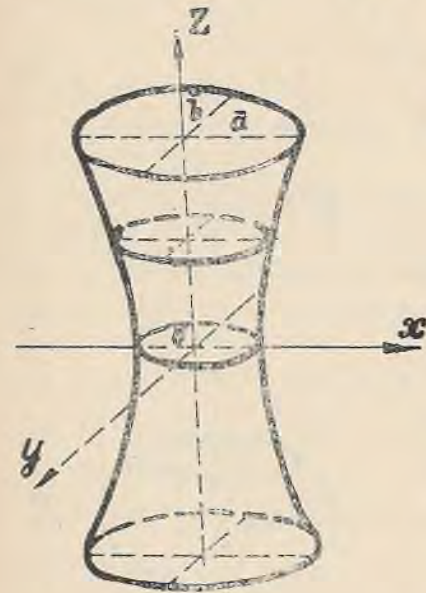
$z = h$, სადაც $h \neq 0$, გვეჩვენება

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \quad z = h.$$

ამგვარად, Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყე (5)-თან კვეთაში გვაძლევს ელიფსს ნახევარ ღერძებით (ნახ. 38)

$$\bar{a} = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}},$$

$$\bar{b} = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$



ნახ. 38

საკოორდინატო $x = 0$ და $y = 0$ სიბრტყით გადაკვეთა გვაძლევს ჰიპერბოლებს

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ x &= 0, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(5) განტოლება ასე გადავწერთ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}. \quad (7)$$

აგიღოთ განტოლებათა სისტემები

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= t \left(1 + \frac{y}{b} \right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{t} \left(1 - \frac{y}{b} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= s \left(1 - \frac{y}{b} \right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{s} \left(1 + \frac{y}{b} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

სადაც t და s პარამეტრებია. ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ (8) და (9) განტოლებებიდან პარამეტრებს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ (7) განტოლებას. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ თუ t და s -ს ვცვლით, წრფეები (8) და (9) აღწერს ცალკალთა ჰიპერბოლოიდს (ნახ. 39). თუ ზედაპირი მიიღება წრფის მოძრაობით, მას წრფოვანი ზედაპირი ეწოდება. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი წრფოვანი ზედაპირია.

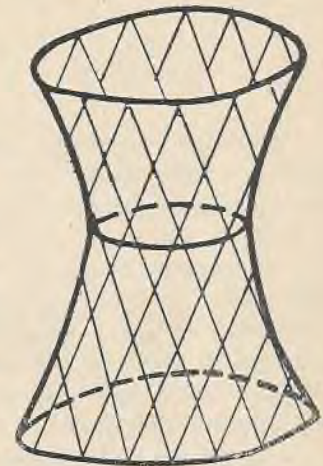
ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი გამოიყენება სამშენებლო მექანიკაში. კოშკების ასაგებად სარგებლობენ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის წრფივი მსახველებით, რითაც უზრუნველყოფილია სიმაგრე, სიმსუბუქე და კონსტრუქციის სიმარტივე. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის ასეთი სარგებლობის იდეა ეკუთვნის რუს ინჟინერს ვ. გ. შუხოვს (1853 — 1939). შუხოვის სისტემით აგებულია მოსკოვში სატელევიზიო ანტენა.

4. ორკალთა ჰიპერბოლოიდი. ორკალთა ჰიპერბოლოიდი ეწოდება ზედაპირს, რომელიც გამოისახება განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (10)$$

a, b, c -ს ეწოდება ორკალთა ჰიპერბოლოიდის ნახევარღერძები. სიბრტყე $z = h$, თუ $|h| < c$, არ გადაკვეთს (10) ჰიპერბოლოიდს, რადგანაც არ შეიძლება ნამდვილი რიცხვებისათვის შესრულდეს ტოლობა

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2}, \quad z = h, \quad |h| < c.$$

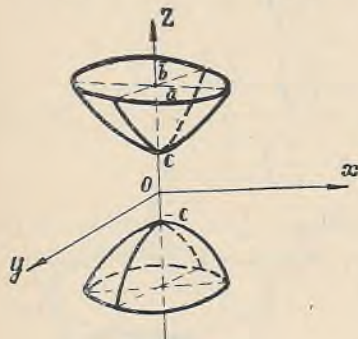


ნახ. 39

თუ $|h| > c$, მაშინ გვექნება

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \quad \frac{h^2}{c^2} - 1 > 0,$$

ე. ი. Oxy სიბრტყის პარალელური კვეთები იძლევა ელიფსებს ნახევარღერძებით



ნახ. 40

ჩატარებული მსჯელობის საფუძველზე დავასკვნით, რომ (10) ზედაპირი შედგება ორი ნაწილისაგან — ორი კალთისაგან (აქედან სახელწოდება — ორკალთა), რომელთა წვეროები იმყოფება $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$ წერტილებში. თითოეული კალთა წარმოადგენს თასს, რომლის გვერდები უსასრულოდ იზრდება. ორკალთა ჰიპერბოლიდს აქვს სიმეტრიის სამი სიბრტყე. ეს სიბრტყეებია კოორდინატთა სისტემის სიბრტყეები.

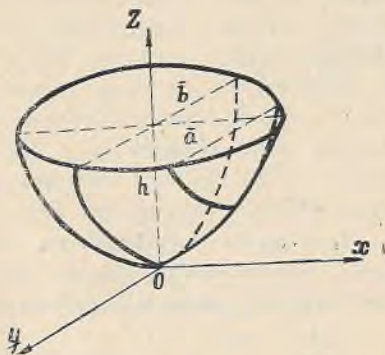
5. ელიფსური პარაბოლოიდი. მეორე რიგის ელიფსური პარაბოლოიდი ეწოდება ზედაპირს, რომლის განტოლება

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (11)$$

სადაც $p > 0$, $q > 0$.

ჯერ განვიხილოთ $y = 0$ სიბრტყესთან გადაკვეთა (ნახ. 41):

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= 2pz, \\ y &= 0. \end{aligned} \right\}$$



ნახ. 41

$$\bar{a} = a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1},$$

$$\bar{b} = b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

(ნახ. 40).

(10) განტოლება $x = 0$ სიბრტყესთან კვეთაში მოგვცემს ჰიპერბოლას,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1, \quad y = 0,$$

რომელიც სიმეტრიულია $z = 0$ სიბრტყის მიმართ.

ეს წირი პარაბოლაა, რომლის სიმეტრიის ღერძია Oz ღერძი. ასევე, $x = 0$ სიბრტყესთან კვეთაში გვექნება პარაბოლა, რომლის სიმეტრიის ღერძია Oz ღერძი,

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= 2qz, \\ x &= 0. \end{aligned} \right\}$$

ახლა ავიღოთ $z = h$ სიბრტყესთან კვეთის წირი, $h > 0$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2h, \\ z &= h. \end{aligned} \right\}$$

ეს წირი ელიფსია, რომლის ნახევარღერძებია

$$\bar{a} = \sqrt{2hp}, \quad \bar{b} = \sqrt{2hq}.$$

ამგვარად, Oxy სიბრტყის პარალელურ კვეთებში ვღებულობთ ელიფსებს, ხოლო $x = h$ სიბრტყესთან კვეთებში პარაბოლებს

$$\left. \begin{aligned} \frac{h^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2z, \\ x &= h. \end{aligned} \right\}$$

ასევე გვექნება $y = h$ სიბრტყის კვეთებში პარაბოლები

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{h^2}{q} &= 2z, \\ y &= h. \end{aligned} \right\}$$

6. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი ეწოდება ზედაპირს, რომელიც გამოისახება განტოლებით

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (12)$$

სადაც $p > 0$, $q > 0$.

გამოვარკვეოთ ამ ზედაპირის ფორმა.

$y = 0$ სიბრტყის კვეთაში მივიღებთ პარაბოლას (ნახ. 42)

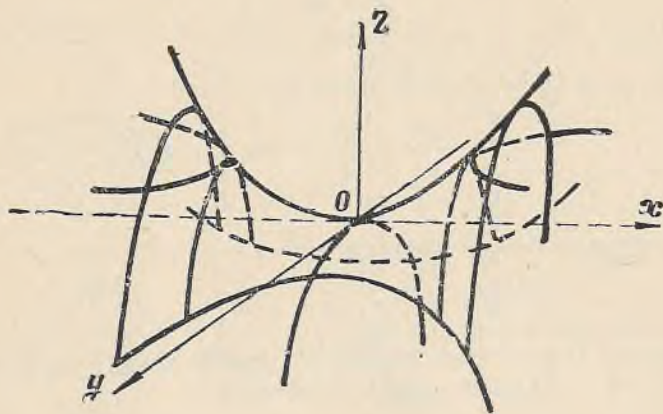
$$x^2 = 2pz, \quad (13)$$

რომელიც სიმეტრიულია Oz ღერძის მიმართ და მიმართულია Oz -ის დადებითი მიმართულებით.

$x = 0$ სიბრტყესთან კვეთაშიც მივიღებთ პარაბოლას

$$y^2 = -2qz, \quad (14)$$

რომლის სიმეტრიის ღერძია Oz ღერძი და მიმართულია Oz ღერძის უარყოფითი მიმართულებით.



ნახ. 42

$x = h$, სიბრტყესთან კვეთაში მივიღებთ ჰიპერბოლას, $h > 0$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} &= 1, \\ z &= h, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

რომლის ნახევარღერძებია

$$\bar{a} = \sqrt{2ph}, \quad \bar{b} = \sqrt{2qh}.$$

მიღებული ჰიპერბოლის სიმეტრიის ნამდვილი ღერძია

$$\left. \begin{aligned} y &= 0, \\ z &= h. \end{aligned} \right\}$$

თუ ავიღებთ $z = -h$, სადაც $h > 0$, მაშინ მივიღებთ ჰიპერბოლას

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{2qh} - \frac{x^2}{2ph} &= 1, \\ z &= -h, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

რომლის სიმეტრიის ნამდვილი ღერძია

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, \\ z &= -h. \end{aligned} \right\}$$

თუ ავიღებთ $x = h$ სიბრტყესთან (12) ზედაპირის კვეთას, მივიღებთ პარაბოლას

$$\left. \begin{aligned} \frac{h^2}{p} - \frac{y^2}{q} &= 2z, \\ x &= h. \end{aligned} \right\}$$

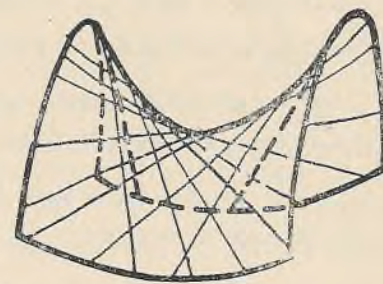
რომელიც მიმართულია Oz -ის უარყოფითი მიმართულებით.

ზემოთ აღნიშნული მსჯელობის შედეგად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს აქვს უნაგირის ფორმა, რომლის სიმეტრიის სიბრტყეები ემთხვევა დეკარტის კოორდინატთა სიბრტყეებს. 0 წერტილის ეწოდება ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის სათავე, ხოლო p -სა და q -ს—პარამეტრები.

განვიხილოთ წრფეები

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= 2tz, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{1}{t} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 2sz, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{1}{s} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$



ნახ. 43

სადაც t და s პარამეტრებია. თუ ამ პარამეტრებს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ (12) განტოლებას. მაშასადამე, (17), (18) წრფეები მდებარეობენ (12) ზედაპირზე.

ამგვარად, ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი წარმოადგენს წრფოვან ზედაპირს (ნახ. 43).

შევასრულოთ შემდეგი საგარჯიშო:

ს ა გ ა რ ჯ ი შ ო 17

1. ააგეთ ზედაპირები, რომელთა განტოლებებია:

$$\begin{aligned} 1) \quad 2z &= x^2 + \frac{y^2}{2}, & 3) \quad x &= 2 \left(1 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} \right), \\ 2) \quad 4z &= x^2 + y^2, & 4) \quad y &= \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9}. \end{aligned}$$

2. შეადგინეთ იმ წერტილთა სიმრავლის განტოლება, რომელთა მანძილების შეფარდება $x=2a$ სიბრტყემდე და $F(a; 0; 0)$ წერტილამდე ტოლია $\sqrt{2}$.

3. შეადგინეთ იმ წერტილთა სიმრავლის განტოლება. რომლებიც ტოლი მანძილებითაა დაშორებული $F(-a; 0; 0)$ წერტილიდან და $x = a$ სიბრტყიდან.

4. ააგეთ $z = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$ ზედაპირი და გამოარკვიეთ საკოორდინატო სიბრტყეებთან კვეთები.

5. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე ზედაპირის განტოლება

$$9x^2 + 16y^2 + 36z^2 - 18x + 64y - 216z + 253 = 0$$

და ააგეთ ზედაპირი.

6. გამოარკვიეთ რა ზედაპირს განსაზღვრავს განტოლება

$$4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 16x - 54y - 72z - 65 = 0.$$

7. გამოარკვიეთ, რა ზედაპირს განსაზღვრავს განტოლება

$$3x^2 - 4y^2 + 6z^2 + 24x + 8y - 36z + 122 = 0.$$

8. გამოარკვიეთ, რა ზედაპირს განსაზღვრავს განტოლება

$$x^2 + 4x - 6y + 20 = 0.$$

9. გამოარკვიეთ, რა ზედაპირს განსაზღვრავს განტოლებანი

$$1) \quad x^2 - y^2 = 0, \quad 3) \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 0,$$

$$2) \quad x^2 + y^2 = 0, \quad 4) \quad \frac{x^2}{a^2} = -1.$$

10. შეადგინეთ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 2z$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის მსახ-

ველის განტოლებანი, რომელიც გაივლის $(3; 2; \frac{3}{8})$ წერტილზე.

თ ა ზ ი XII

წ რ ზ ი ვ ი ა ლ გ ა ბ რ ის ე ლ ე მ ე ნ ტ ა ბ ი

§ 1. მ ა ტ რ ი ც ე ბ ი, მ ო მ ა რ ა გ ე ბ ა ნ ი მ ა ტ რ ი ც ე ბ ა ზ ე

1. **მატრიცის ცნება**^{1,2}. ჩვენ უკვე კისარგებლეთ მატრიცის ცნებით მე-6 თავში. ახლა განვიხილოთ მატრიცი მაგალითი, სადაც მატრიცა გამოიყენება წარმოების მომარაგების დაგეგმვაში. ვთქვათ, წარმოება ამზადებს ოთხი სახის პროდუქტს. ეს პროდუქტები აღენიშნოთ ნომრებით: 1, 2, 3, 4. ამ პროდუქტების დასამზადებლად გამოიყენება სამი სახის ნედლეული. ეს ნედლეულები აღენიშნოთ ნომრებით: 1, 2, 3. a_{ij} -ით აღენიშნოთ i -ური ნედლეულის დანახარჯის ნორმა j -ური პროდუქტისათვის, $i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3, 4$. მაგალითად, 1-ლი ნედლეულის დანახარჯის ნორმები 1, 2, 3, 4 პროდუქტების ერთეულზე სათანადოდ არის $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$. მე-2 ნედლეულის დანახარჯის ნორმა 1-ლ პროდუქტზე არის a_{21} და ა. შ.

ორი სახის პროდუქტის — 1, 2, 3, 4 — წარმოებისათვის სამი სახის ნედლეულის — 1, 2, 3 — დანახარჯთა ნორმები მოიცემა შემდეგი ცხრილით:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \quad (1)$$

ეს ცხრილი წარმოადგენს წარმოების მომარაგების გეგმის საფუძველს. (1) ცხრილი იძლევა ინფორმაციას, რომლის საფუძველზედაც უნდა დაიგეგმოს წარმოების მომარაგება.

(1) ცხრილი წარმოადგენს მატრიცის კერძო შემთხვევას.

ჩიცხვთა mn სისტემას, რომელიც განლაგებულია მართკუთხოვანი ცხრილით, რომელიც შეიცავს m სტრიქონს და n სვეტს,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

¹ Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы выч. математики. М., 1963.
² П. Ланкастер, Теория матриц, М., 1978.

ეწოდება მატრიცა. a_{ij} , $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$ რიცხვებს ეწოდება მატრიცის ელემენტები. a_{ij} ელემენტის პირველი ინდექსი i აღნიშნავს მატრიცის იმ სტრიქონის ნომერს, ხოლო მეორე ინდექსი j იმ სვეტის ნომერს, რომელთა გადაკვეთაზე მოთავსებულია ეს ელემენტი.

(2) მატრიცისათვის ხშირად იხმარება შემოკლებული აღნიშვნა

$$A = \|a_{ij}\|, \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n})$$

ან

$$A = \|a_{ij}\|_{m,n}.$$

ამასთან ამბობენ, A არის $m \times n$ განზომილების (mn ტიპის). თუ $m=n$, მაშინ მატრიცას ეწოდება კვადრატული. ამ შემთხვევაში $m=n$ რიცხვს ეწოდება კვადრატული მატრიცის რიგი,

$$A = \|a_{ij}\|_{n,n} = \|a_{ij}\|_n.$$

მატრიცის (2) აღნიშვნასთან ერთად ხშირად იხმარება შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებით როლს ასრულებს მატრიცის განზომილება ან რიგი, მაშინ მატრიცის აღმნიშვნელ ასოს უმატებენ სათანადო ინდექსს. მაგალითად, A მატრიცა, რომელიც $m \times n$ განზომილებისაა, აღინიშნება $A_{m \times n}$ ან A_{mn} , ხოლო თუ მატრიცა n რიგისაა აღინიშნება A_n -ით.

კვადრატულ მატრიცას

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ეწოდება დიაგონალური და შემოკლებით ასე აღინიშნება: $\|a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\|$. იქ $a_{ii} = 1$, $i = \overline{1, n}$, მაშინ A მატრიცას ერთეული მატრიცა ეწოდება და აღინიშნება J ან E ასოთი,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

თუ მატრიცა მართო ერთ ელემენტს შეიცავს,

$$A = [a] = a,$$

ასეთი მატრიცა უბრალოდ რიცხვია.

თუ მატრიცა ერთი სტრიქონისაგან შედგება,

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n],$$

მაშინ მატრიცას მატრიც-სტრიქონი ან ვექტორ-სტრიქონი (სტრიქონი) ეწოდება. თუ მატრიცა ერთი სვეტისაგან შედგება,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

მაშინ მატრიცას მატრიც-ს-ვეტი ან ვექტორ-ს-ვეტი (სვეტი) ეწოდება. მატრიცა სვეტი ასეც აღინიშნება:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m).$$

მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულია, ნულოვანი მატრიცა ეწოდება. ნულოვანი მატრიცა O სიმბოლოთი აღინიშნება,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

თუ საჭიროა ნულოვანი მატრიცის სტრიქონების რიცხვისა და სვეტების რიცხვის მითითება, მაშინ ნულოვანი მატრიცისთვის იხმარება აღნიშვნა O_{mn} .

2. მოქმედებანი მატრიცებზე. განვიხილოთ მატრიცები $A = [a_{ij}]_{m,n}$, $B = [b_{ij}]_{m,n}$. A მატრიცა B მატრიცის ტოლია, თუ

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

ორი ერთი და იგივე განზომილების A და B მატრიცას ჯამი ეწოდება ისეთ C მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი c_{ij} ტოლია სათანადო A და B მატრიცების ელემენტების ჯამისა, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

ამგვარად,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12}, \dots, a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21}, a_{22} + b_{22}, \dots, a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1}, a_{m2} + b_{m2}, \dots, a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

მატრიცათა ჯამის განსაზღვრიდან ადვილი შესამჩნევია შემდეგ ტოლობათა ჭეშმარიტება:

- 1) $A + B = B + A$,
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- 3) $(A + O) = A$.

მატრიცათა ჯამის ანალოგიურად განისაზღვრება მატრიცათა სხვაობა:

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11}, & a_{12} - b_{12}, & \dots, & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21}, & a_{22} - b_{22}, & \dots, & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1}, & a_{m2} - b_{m2}, & \dots, & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}.$$

A მატრიცის α რიცხვზე (ან α რიცხვის A მატრიცზე) ნამრავლი ეწოდება ისეთ C მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი c_{ij} ტოლია A მატრიცის სათანადო a_{ij} ელემენტის α რიცხვზე ნამრავლის, $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

ამგვარად,

$$A\alpha = \begin{bmatrix} \alpha a_{11}, & \alpha a_{12}, & \dots, & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21}, & \alpha a_{22}, & \dots, & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1}, & \alpha a_{m2}, & \dots, & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

მატრიცის რიცხვზე გამრავლების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს შემდეგ ტოლობათა ჭეშმარიტება:

- 1) $\alpha A = A\alpha$,
- 2) $1 \cdot A = A$,
- 3) $O \cdot A = O$,
- 4) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
- 5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- 6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

როგორც ვხედავთ, მატრიცათა შეყრებას და მატრიცის რიცხვზე გამრავლებას აქვს ის თვისებები, რაც რიცხვთა შეყრებას და გამრავლებას. არსებითი განსხვავება თავს იჩენს მატრიცის მატრიცაზე გამრავლების დროს, რომელსაც ახლა განვიხილავთ.

ვთქვათ მოცემულია ორი მატრიცა: $A = [a_{ij}]_{m \times p}$, $B = [b_{ij}]_{p \times n}$. შევადგინოთ C მატრიცა, რომლის c_{ij} ელემენტები განისაზღვრება ტოლობებით:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

ე. ი. A მატრიცის i -ური სტრიქონის ელემენტები მრავლდება B მატრიცის j -ური სვეტის ელემენტებზე და მიღებული ნამრავლები იკრიბება. ამგვარად განსაზღვრულ C მატრიცას ეწოდება A მატრიცის B მატრიცაზე ნამრავლი,

$$A \cdot B = C.$$

მაგალითად,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

მაშინ

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, \quad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}, \\ c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}, \quad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

A და B მატრიცების გამრავლების (5) განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ AB ნამრავლი $m \times n$ განზომილებისაა.

ამგვარად, AB ნამრავლს აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის სვეტთა რიცხვი ტოლია B მატრიცის სტრიქონთა რიცხვისა.

(5) განსაზღვრიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$AB \neq BA,$$

ე. ი. მატრიცათა გამრავლება არაა გადანაცვლებადი.

მაგალითად,

$$A = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 4 \\ 3, & 4, & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1, & -2 \\ 2, & 1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix}.$$

გამოვთვალოთ AB და BA .

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1), & 2(-2) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1), & 3(-2) + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4, & 7 \\ 6, & 8 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2, & 3, & 4 \\ 3, & 4, & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3, & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4, & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3, & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4, & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3, & -1 \cdot 3 + 2 \cdot 4, & -1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8, & 9, & 14 \\ 7, & 10, & 13 \\ 4, & 5, & 6 \end{bmatrix}.$$

കുടാലനം.

$$AB \neq BA.$$

ადვილი შესაძენეია, რომ A_m მატრიცის გამრავლება შეიძლება ერთეულოვან n რიგის მატრიცაზე:

$$A_{mn} J_n = A_{mn}.$$

კერძოდ, თუ A და J ერთი და იგივე რიგის მატრიცებია,

$$AJ = JA = A.$$

ამგვარად, მატრიცათა გამრავლების დროს ერთეულოვანი მატრიცა იგივე როლს ასრულებს, რასაც ერთი რიცხვითა გამრავლების დროს.

მატრიცათა ნამრავლისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$1) \quad A(BC) \stackrel{!}{=} A(BC),$$

$$3) \quad (A + B)C = AC + BC,$$

$$2) \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B.$$

$$4) \quad C(A + B) = CA + CB.$$

3. მატრიცის მინორები, მე- n თაგის მე-2 პარაგრაფში განსაზღვრული იყო A კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha, \beta, \dots, e=1}^n (-1)^s a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{ne},$$

სადაც k არის იზერისათა რიცხვი ან... k ვადანაცვლებაში, $\alpha, \beta, \dots, k$ დებულობის მნიშვნელობებს $1, 2, \dots, n$, მაგრამ ისე, რომ, თუ $\alpha=1$, მაშინ $\beta, \dots, k$ არ შეუძლიათ მიიღონ 1-ის მნიშვნელობა. ასევე, თუ $\beta=2$, მაშინ $\alpha, \gamma, \dots, k$ არ შეუძლიათ მიიღონ 2-ის მნიშვნელობა და ა. შ.

დეტერმინანტის განსაზღვრიდან სჩანს, ყოველ კვადრატულ მატრიცას შეესაბამება გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ამ მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება. ახლა ავიღოთ $m \times n$ განზომილების A მატრიცა. თუ ამ მატრიციდან ამოვშლით განსაზღვრული რაოდენობის სტრიქონებსა და სვეტებს, მისგან შეიძლება მივიღოთ სხვადასხვა რიგის კვადრატული მატრიცა. A მატრიციდან ასეთნაირად მიღებულ კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტს ეწოდება A მატრიცის მინორი. მაგალითად, ავიღოთ 3×4 განზომილების მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

თუ ამ მატრიციდან მიმდევრობით ამოვშლით მეოთხე, მესამე, მეორე და პირველ სვეტს, მივიღებთ 4 მესამე რიგის კვადრატულ მატრიცას. ამ მატრიცებიდან შეგვიძლია შევადგინოთ მესამე რიგის დეტერმინანტები

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

თუ A მატრიციდან ამოვშლით მესამე და მეოთხე სვეტს და მესამე სტრიქონს, მივიღებთ მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცს, რომლიდანაც შევადგენთ მეორე რიგის დეტერმინანტს.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

თუ A მატრიცადან ამოვშლით სამ სვეტს და ორ სტრიქონს, მივიღებთ ერთ ელემენტს — მატრიცას, რომლის შესაბამისი დეტერმინანტი თვით ეს რიცხვი იქნება, $|a_{11}| = a_{11}$.

მატრიცის მინორის განსაზღვრიდან ადგილი უესამჩნევია, $m \times n$ რიგის მატრიცის მინორის უმაღლესი რიგი, თუ $m \leq n$, იქნება m .

ავიღოთ n -ცვლადიანი m განტოლებათა სისტემა

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2,$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

შევადგინოთ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადთა კოეფიციენტებისაგან მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

თავისუფალი წევრებისაგან და ცვლადებისაგან სათანადოდ შევადგინოთ მატრიცა-სვეტები

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}.$$

თუ A მატრიცას გავამრავლებთ X მატრიცა-სვეტზე, მივიღებთ მატრიცა-სვეტს, რომლის ელემენტები იქნება (6) განტოლებათა სისტემის მარცხენა მხარეში მოთავსებული მნიშვნელობანი. თუ გამრავლებით მიღე-

ბულ მატრიცას გაგუთოლებით B მატრიცა-სვეტს, მივიღებთ (6) განტოლებათა სისტემას. ამგვარად, (6) განტოლებათა სისტემა ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$AX = B. \quad (7)$$

4. ტრანსპონირებული მატრიცა. მოცემული მატრიცის

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ტრანსპონირებული მატრიცა ეწოდება მატრიცას, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან სათანადოდ სვეტების სტრიქონებით და სტრიქონების სვეტებით შეცვლით

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა A' სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ A მატრიცის განზომილებანია $m \times n$, მაშინ ტრანსპონირებული მატრიცის განზომილებანი იქნება $n \times m$.

ცხადია, მატრიცა-სტრიქონის

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

ტრანსპონირებული მატრიცა იქნება მატრიცა-სვეტი,

$$A' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი თეორემების მართებულობა:

თეორემა 1. ორი მატრიცის ჯამის ტრანსპონირებული მატრიცა ტოლია შესაჯარებ მატრიცათა ტრანსპონირებული მატრიცების ჯამისა:

$$(A + B)' = A' + B'.$$

თეორემა 2. მატრიცათა ნამრავლის ტრანსპონირებული მატრიცა ტოლია თანამამრავლთა ტრანსპონირებულ მატრიცათა ნამრავლისა შებრუნებული მიმდევრობით,

$$(AB)' = B' A'.$$

5. შებრუნებული მატრიცა. ავიღოთ კვადრატული ნებისმიერი n რიგის მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

ისეთ კვადრატულ X მატრიცას, რომლისთვისაც

$$XA = AX = J, \quad (10)$$

ეწოდება A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა. შებრუნებული მატრიცა აღინიშნება A^{-1} სიმბოლოთი. (10) განსაზღვრით

$$A^{-1} A = AA^{-1} = I. \quad (11)$$

კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება არასაკუთრივი, თუ მისგან შედგენილი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან,

$$\det A \neq 0.$$

დავამტკიცოთ თეორემა:

თეორემა 3. ყოველ არასაკუთრივ მატრიცას აქვს შებრუნებული მატრიცა.

ვთქვათ, მოცემულია არასაკუთრივი (9) მატრიცა. შევადგინოთ A მატრიცის ე. წ. საურთიერთო (მიკავშირებული) მატრიცა

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

სადაც A_{ij} არის a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება; $i, j = \overline{1, n}$.

(12) მატრიცის ყველა ელემენტი გავყოთ Δ -ზე,

$$\Delta = \det A,$$

მივიღებთ მატრიცას:

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

ვაჩვენოთ, რომ $A^* = A^{-1}$.

გამოვთვალოთ A^*A ნამრავლის ელემენტები:

$$C_{11} = \frac{A_{11}}{\Delta} a_{11} + \frac{A_{21}}{\Delta} a_{21} + \dots + \frac{A_{n1}}{\Delta} a_{n1} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} (A_{11} a_{11} + A_{21} a_{21} + \dots + A_{n1} a_{n1}) = \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta = 1,$$

რადგანაც, თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს გავამრავლებთ თავისივე ალგებრულ დამატებებზე და შევკრებთ, მივიღებთ დეტერმინანტის მნიშვნელობას (დეტერმინანტთა მე-8 თვისება).

$$C_{12} = \frac{A_{11}}{\Delta} a_{21} + \frac{A_{21}}{\Delta} a_{22} + \dots + \frac{A_{n1}}{\Delta} a_{2n} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} (A_{11} a_{21} + A_{21} a_{22} + \dots + A_{n1} a_{2n}) = \frac{1}{\Delta} \cdot 0 = 0,$$

რადგანაც, თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს გავამრავლებთ სხვა სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე და შევკრებთ, მივიღებთ ნულს (დეტერმინანტთა მე-9 თვისება). ზუსტად, ასევე ვაჩვენებთ, $c_{ii} = 1$, ხოლო $c_{ij} = 0$, როცა $i \neq j$.

ამგვარად,

$$A^*A = AA^* = J.$$

ეს კი გვიჩვენებს

$$A^* = A^{-1}.$$

მოცემული A მატრიცისათვის A^{-1} მატრიცა ერთადერთია. უფრო მეტიც, მატრიცის ყოველი მარჯვენა შებრუნებული (მარცხენა შებრუნებული) მატრიცა ემთხვევა A^{-1} , თუ ეს უკანასკნელი არსებობს.

მართლაც, თუ

$$AB = J,$$

მაშინ ეს ტოლობა გავამრავლოთ მარცხნიდან A^{-1} -ზე, მივიღებთ

$$A^{-1}AB = A^{-1}J,$$

ანუ

$$B = A^{-1}.$$

ასევე, თუ

$$CA = J,$$

მაშინ

$$C = A^{-1}.$$

ამის გამო (11) დამოკიდებულებაში საკმარისია ერთ-ერთი ტოლობით $A^{-1}A = J$ ან $AA^{-1} = J$ ვისარგებლოთ.

6. დეტერმინანტთა ნამრავლი. კრამერის ფორმულები. ავიღოთ ერთი და იგივე რიგის დეტერმინანტები

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

შევადგინოთ $\det C = |c_{ij}|$, $i, j = \overline{1, n}$, სადაც

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}. \quad (14)$$

$\det C$ -ს ეწოდება $\det A$ და $\det B$ -ზე ნამრავლი,

$$\det A \cdot \det B = \det C. \quad (15)$$

როგორც (14) გვიჩვენებს, $\det A$ და $\det B$ -ს ნამრავლის ელემენტები ისე განისაზღვრება, როგორც მატრიცათა AB ნამრავლის ელემენტები. ამის გამო $AB = C$. ამ ტოლობით (15) მოგვცემს

$$\det A \cdot \det B = \det (AB).$$

სრულიად ასევე მივიღებთ

$$\det B \cdot \det A = \det (BA).$$

ამ ორი ტოლობის შედარებით გვექნება

$$\det (AB) = \det (BA) = \det A \cdot \det B. \quad (16)$$

მიღებული ტოლობის საფუძველზე შეგვიძლია ვაჩვენოთ, განსაკუთრებულ მატრიცას შებრუნებული მატრიცა არა აქვს. მართლაც, თუ A მატრიცა განსაკუთრებულია, მაშინ

$$\det A = 0.$$

(11) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det J = 1,$$

ანუ

$$0 \cdot \det A^{-1} = 1.$$

რაც შეუძლებელია.

თუ $\det A \neq 0$, მაშინ იგივე (11) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\det A^{-1} \cdot \det A = 1,$$

საიდანაც

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \quad (17)$$

ახლა ავიღოთ (7) განტოლება

$$AX = B,$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ მარცხნიდან A^{-1} -ზე, მივიღებთ

$$A^{-1} A X = A^{-1} B,$$

ანუ

$$X = A^{-1} B. \quad (18)$$

გამოთვალეთ A^{-1} , B . ამისათვის ავიღოთ A^{-1} -ის მნიშვნელობა (13) ტოლობიდან, გვექნება:

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{1i}}{\Delta} & \frac{A_{2i}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{ni}}{\Delta} \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{1i}}{\Delta} b_1 + \frac{A_{2i}}{\Delta} b_2 + \dots + \frac{A_{ni}}{\Delta} b_n \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

(18) და (19) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$x_i = \frac{1}{\Delta} (A_{1i} b_1 + A_{2i} b_2 + \dots + A_{ni} b_n),$$

ანუ

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

სადაც

$$\Delta_i = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1, i-1} & b_1 & a_{1, i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2, i-1} & b_2 & a_{2, i+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n, i-1} & b_n & a_{n, i+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მივიღეთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა კრამერის ფორმულებით. ამგვარად, თუ $\det A = \Delta \neq 0$, მაშინ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები მიიღება კრამერის ფორმულებით,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

სავარჯიშო 18.

1. შეკრიბეთ მატრიცები

$$1) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$2) \begin{bmatrix} \sin^2 x & 1 \\ -2 & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos^2 x & -1 \\ 2 & \sin^2 x \end{bmatrix}.$$

2. გამოთვალეთ X მატრიცა განტოლებებიდან

$$1) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$2) X + \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. გადაამრავლეთ მატრიცები

$$1) [1, -4, 3] \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}; \quad 2) [2, -4, 1] \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

4. გამოთვალეთ

$$1) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad 2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad 3) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^3, \quad 4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3,$$

$$5) AB - BA, \text{ თუ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ და } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$6) A^{-1}, \text{ თუ } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad 7) B^{-1}, \text{ თუ } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. გამოთვალეთ X მატრიცა განტოლებებიდან:

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 2) X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left. \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10, \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -2. \end{aligned} \right\} & 2) \quad & \left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0, \\ x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_3 &= 2. \end{aligned} \right\} \\ 3) \quad & \left. \begin{aligned} x_1 + 7x_2 - x_3 &= 18, \\ -7x_2 + 15x_3 + 4x_4 &= -36, \\ -10x_2 + 21x_3 - 2x_4 &= 51, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -2. \end{aligned} \right\} & 4) \quad & \left. \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1, \\ x_2 - x_3 &= -1, \\ x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 + x_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

§ 2. მატრიცის რანგი. წარმოადგენს დამოუკიდებლობა.
კარგად — კარგად თეორემა

1. მატრიცის რანგი. წინასწარ განვსაზღვროთ წრფივი ვექტორული სივრცე. სამგანზომილებიანი სივრცეში ვექტორი განისაზღვრება რიცხვთა დალაგებული სამეულით: $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$. ამ სივრცეში ვექტორთა ჯამი და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობებით:

$$\begin{aligned} \vec{X} + \vec{Y} &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \\ \lambda \vec{X} &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3). \end{aligned}$$

სამგანზომილებიანი სივრცის ანალოგიურად შეგვიძლია განვსაზღვროთ: რიცხვთა, საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვთა, დალაგებულ n -ულის $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ეწოდება n -განზომილებიანი სივრცის წერტილი ან ვექტორი. $x_1, x_2, \dots, x_n$ რიცხვებს ეწოდება $\vec{X}$ ვექტორის კოორდინატები. ვექტორს $(0, 0, \dots, 0)$ აღვნიშნავთ O -ით და ეწოდება ნულოვანი ვექტორი, შემოკლებით ნულ ვექტორი. $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ვექტორების ჯამი ეწოდება ვექტორს

$$\vec{X} + \vec{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

ხოლო $\vec{X}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ვექტორს

$$\lambda \vec{X} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

ვექტორთა სიმრავლეს, სადაც განსაზღვრულია ვექტორთა შეკრება და ვექტორის რიცხვზე გამრავლება, ეწოდება წრფივი ვექტორული სივრცე ან, მოკლედ, ვექტორული სივრცე.

თუ რიცხვები $\lambda, \mu, \dots$ რომლებზედაც ვამრავლებთ ვექტორებს, ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ სივრცეს ეწოდება ნამდვილი წრფივი ვექტორული სივრცე. თუ ეს რიცხვები აიღება კომპლექსური რიცხვთა ველიდან, მაშინ სივრცეს კომპლექსური წრფივი

სივრცე ეწოდება. ამ საკითხებს დაწვრილებით მე-5 პარაგრაფში გავარჩევთ.

ახლა განვიხილოთ მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

ამ მატრიციდან შედგება ერთი მესამე რიგის დეტერმინანტი. თუ ამოვშლით ერთ სვეტს და ერთ სტრიქონს, მატრიცის დარჩენილი ელემენტებიდან შეიძლება შედგეს მეორე რიგის დეტერმინანტი. სულ აღებული მატრიციდან შეიძლება შედგეს 9 მეორე რიგის დეტერმინანტი. თუ (1) მატრიციდან ამოვშლით ორ სტრიქონს და ორ სვეტს, მაშინ მატრიცის დარჩენილი ელემენტებიდან შეიძლება შედგეს პირველი რიგის დეტერმინანტი.

თუ (1) მატრიციდან შედგენილი მესამე რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ხოლო მეორე რიგის დეტერმინანტებიდან, რომლებიც შეიძლება შედგეს (1) მატრიციდან, ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ვიტყვი, (1) მატრიცის რანგი არის ორი.

აქედან $m \times n$ განზომილების მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

ვთქვათ, $m \leq n$. (2) მატრიციდან შეიძლება შედგეს m რიგის დეტერმინანტები, შეიძლება შედგეს $m-1$ რიგის დეტერმინანტები და ა. შ. ბოლოს პირველი რიგის დეტერმინანტები. თუ (2) მატრიციდან შედგენილი r რიგის დეტერმინანტებიდან ერთი დეტერმინანტი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ხოლო r -ზე მაღალი რიგის დეტერმინანტები ყველა ნულის ტოლია, მაშინ ვიტყვი, (2) მატრიცის რანგი არის r .

A მატრიცის რანგი რომ არის r , აღვნიშნავთ $r(A)$ სიმბოლოთი ან მარტო r ასოთი.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია მივიღოთ, რომ A მატრიციდან შედგენილი ნულისაგან განსხვავებული r რიგის დეტერმინანტის ელემენტები მოთავსებულია A მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

რადგანაც r -ზე მაღალი რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ამიტომ (3) მატრიცის $r+1, r+2, \dots, m$ სტრიქონის ელემენტები წრფივი კომბინაცია იქნება $1, 2, \dots, r$ სტრიქონის ელემენტებისა, ანუ (3) მატრიცის $r+1, r+2, \dots, m$ სტრიქონი (ვექტორი) წრფივი კომბინაცია იქნება $1, 2, \dots, r$ სტრიქონის (ვექტორის):

$$a_{ik} = a_{i1} a_{1k} + a_{i2} a_{2k} + \dots + a_{ir} a_{rk}, \quad (4)$$

$$i = r+1, r+2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}$ რაღაც რიცხვებია. ამ ტოლობათა ჯამში იქნება ადგილად დავრწმუნდებით დეტერმინანტთა მე- r და მე- $r+1$ თვისებათა საფუძველზე.

2. ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებლობა. განვიხილოთ n -ცვლადიანი წრფივ ფუნქციათა სისტემა, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$f_i(x) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

შევადგინოთ ამ ფუნქციათა სისტემის კოეფიციენტთაგან მატრიცა

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}. \quad (6)$$

წრფივი ფუნქცია $f_i(x)$ ცალსახად განისაზღვრება A მატრიცის i -ური სტრიქონი-ვექტორით

$$\vec{P}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

A მატრიცის i -ური სტრიქონის ელემენტები $\vec{P}_i$ ვექტორ-სტრიქონის კოორდინატებია. შემდგომ i -ურ სტრიქონსაც $\vec{P}_i$ ასოთი აღვნიშნავთ და, როცა ვიტყვით „ $\vec{P}_i$ სტრიქონი“, ვგულისხმებთ $\vec{P}_i$ ვექტორ-სტრიქონს. ამის გამო P_i სტრიქონთა წრფივად დამოუკიდებლობა ჩვეულებრივი $\vec{P}_i$ ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობით განისაზღვრება.

ქვემოთ, ზოგადობის შეუზღუდავად, განვიხილავთ ოთხცვლადიან წრფივ ფუნქციებს

$$f_i(x) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (8)$$

შევადგინოთ ამ წრფივ ფუნქციათა კოეფიციენტებისაგან მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

განსაზღვროთ ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებულება.

ვთქვათ, ფუნქციები $f_1(x), \dots, f_n(x)$ განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. $[a, b]$ სეგმენტზე ფუნქციებს $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ არსებობს $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვები, რომელთაგან

ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ყველა x -სათვის $[a, b]$ სეგმენტთან ჰქვამარიტა ტოლობა

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0.$$

თუ უკანასკნელი ტოლობა ჰქვამარიტა ყველა x -სათვის $[a, b]$ სეგმენტთან მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყველა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვი ნულის ტოლია, მაშინ $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ ფუნქციებს $[a, b]$ სეგმენტზე წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება.

წრფივი ფუნქციები (8) განსაზღვრულია ცვლადების ყველა მნიშვნელობისათვის,

$$f_i(x) = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad i = \overline{1, 3}; \quad -\infty < x_j < +\infty, \quad j = \overline{1, 4}.$$

ფუნქციებს $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი x_j -ის, $j = \overline{1, 4}$, ყველა მნიშვნელობისათვის, თუ არსებობს ისეთი რიცხვები $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ყველა x_j -სათვის, $-\infty < x_j < +\infty, j = \overline{1, 4}$, ჰქვამარიტა ტოლობა

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0. \quad (10)$$

თუ (10) ტოლობა ჰქვამარიტა ყველა x_j -სათვის, $-\infty < x_j < +\infty, j = \overline{1, 4}$, მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყველა $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ რიცხვი ნულის ტოლია, მაშინ $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ფუნქციებს წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება.

ვთქვათ, ფუნქციები $f_i(x), i = \overline{1, 3}$, წრფივად დამოუკიდებულია, მაშინ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და სრულდება (10) ტოლობა. თუ $\alpha_3 \neq 0$, მაშინ (10)-დან მივიღებთ:

$$f_3(x) = \beta_1 f_1(x) + \beta_2 f_2(x), \quad \beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}. \quad (11)$$

ამგვარად, თუ $f_i, i = \overline{1, 3}$, ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ ერთ-ერთი ამ ფუნქციათაგანი წრფივი კომბინაციაა დანარჩენი ფუნქციებისა.

თუ (11) ტოლობა ჰქვამარიტა x_j -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, $-\infty < x_j < +\infty, j = \overline{1, 4}$, მაშინ ეს ტოლობა ასე გადავწეროთ

$$\beta_1 f_1(x) + \beta_2 f_2(x) + (-1) f_3(x) = 0. \quad (12)$$

მიღებული (12) ტოლობა გვიჩვენებს, ფუნქციები $f_i(x), i = \overline{1, 3}$, წრფივად დამოუკიდებულია, რადგანაც $\beta_1, \beta_2, (-1)$ რიცხვებიდან $(-1) \neq 0$.

ამგვარად, თუ $f_i, i = \overline{1, 3}$, ფუნქციებიდან ერთი ფუნქცია დანარჩენი ფუნქციების წრფივი კომბინაციაა, მაშინ ეს ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია.

გამოყარებით, რა კავშირი არსებობს f_i , $i = \overline{1, 3}$, ფუნქციებში წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციასა რაოდენობასა და (9) მატრიცის რანგს შორის.

ეთქვას, ფუნქციები f_i , $i = \overline{1, 3}$, წრფივად დამოუკიდებელია, ე. ი. არ სრულდება (11) ტოლობა, მაშინ, ცხადია, (9) მატრიცის რანგი $r = 3$.

თუ ფუნქციები f_i , $i = \overline{1, 3}$, წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ (9) მატრიცის რანგი 3-ზე ნაკლებია. მართლაც, (11) ტოლობიდან გვექნება

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = \beta_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) + \beta_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4). \quad (13)$$

ეს ტოლობა იგივეობაა x_j , $j = \overline{1, 4}$, ცვლადების მიმართ. ამიტომ ერთი და იგივე ცვლადების კოეფიციენტები (13) ტოლობის ორივე მხარეში ტოლი უნდა იყოს:

$$\begin{aligned} a_{31} &= a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2, \\ a_{32} &= a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2, \\ a_{33} &= a_{13}\beta_1 + a_{23}\beta_2, \\ a_{34} &= a_{14}\beta_1 + a_{24}\beta_2. \end{aligned} \quad (14)$$

ამ ტოლობათა საფუძველზე დავასკვნით, (9) მატრიცის მესამე სტრიქონის ელემენტები ტოლია პირველი სტრიქონის ელემენტების β_1 რიცხვზე ნამრავლის და მეორე სტრიქონის ელემენტების β_2 რიცხვზე ნამრავლის ჯამისა. ასეთი მატრიციდან შედგენილი ყველა მესამე რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია დეტერმინანტა მე-ნ და მე-5 თვისებათა თანახმად. ამგვარად, თუ $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ (9) მატრიცის რანგი სამზე ნაკლებია.

თუ $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ფუნქციებიდან წრფივად დამოუკიდებელია ორი ფუნქცია, მაგალითად, $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციები, მაშინ შეუძლებელია ტოლობა

$$f_3(x) = \beta f_1(x),$$

სადაც $\beta \neq 0$ რიცხვია. ეს კი ნიშნავს, შეუძლებელია ტოლობანი

$$a_{31} = \beta a_{11}, a_{32} = \beta a_{12}, a_{33} = \beta a_{13}, a_{34} = \beta a_{14}.$$

ამგვარად, (9) მატრიცის პირველი და მეორე სტრიქონის ელემენტები ურთიერთ პროპორციული არაა, ამის გამო (9) მატრიციდან შედგენილი მეორე რიგის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება. მაშასადამე, თუ $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ფუნქციებიდან დამოუკიდებელ ფუნქციასა რიცხვი ორის ტოლია, მაშინ (9) მატრიცის რანგი $r = 2$.

თუ ამ სამი $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ფუნქციიდან ერთი ფუნქციაა წრფივად დამოუკიდებელი, მაგალითად, $f_1(x)$ მაშინ

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \beta_1 f_1(x), \\ f_3(x) &= \beta_2 f_1(x), \end{aligned} \quad (15)$$

სადაც β_1 და β_2 ნულისაგან განსხვავებული რიცხვებია. (15) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= \beta_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4), \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= \beta_2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4). \end{aligned} \quad (16)$$

ეს ტოლობანი იგივეურად უნდა შესრულდეს x_1 , x_2 , x_3 , x_4 ცვლადების მიმართ. ამის გამო (16) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_{21} &= \beta_1 a_{11}, a_{22} = \beta_1 a_{12}, a_{23} = \beta_1 a_{13}, a_{24} = \beta_1 a_{14}, \\ a_{31} &= \beta_2 a_{11}, a_{32} = \beta_2 a_{12}, a_{33} = \beta_2 a_{13}, a_{34} = \beta_2 a_{14}. \end{aligned} \quad (17)$$

ეს ტოლობანი გვამღებს, (9) მატრიცის მეორე და მესამე სტრიქონის ელემენტები პროპორციულია პირველი სტრიქონის ელემენტებისა. ამ თვისების საფუძველზე დავასკვნით, (9) მატრიცისგან შედგენილი ყველა მესამე და მეორე რიგის დეტერმინანტები ნულის ტოლია. მხოლოდ პირველი რიგის დეტერმინანტიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. მაშასადამე, (9) მატრიცის რანგი $r = 1$. ამგვარად დავამტკიცეთ:

თეორემა 1: ოთხ ცვლადიანი სამი წრფივი ფუნქციის $f_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, სისტემის კოეფიციენტთაგან შედგენილი (9) მატრიცის რანგი ტოლია ამ ფუნქციებში წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციათა უდიდესი რიცხვისა.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს წინადადება ჰეშმარიტია შებრუნებულიადაც. მაგალითად, (9) მატრიცის რანგი $r = 1$, ზოგადობის შეუზღუდველად დავუშვათ, (9) მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. (9) მატრიციდან შედგენილი ყველა მეორე რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ მატრიცის მეორე და მესამე სტრიქონის ელემენტები პირველი სტრიქონის ელემენტების პროპორციულია

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{a_{23}}{a_{13}} = \frac{a_{24}}{a_{14}} = \beta_1, \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{a_{32}}{a_{12}} = \frac{a_{33}}{a_{13}} = \frac{a_{34}}{a_{14}} = \beta_2.$$

ე. ი. სრულდება (17) ტოლობანი. შევიტანოთ f_2 და f_3 ფუნქციებში კოეფიციენტთა მაგივრად სათანადოდ (17) მნიშვნელობანი, მივიღებთ (16) ტოლობებს

$$f_2(x) = \beta_1 f_1(x), \quad f_3(x) = \beta_2 f_1(x).$$

ა. მაგალითად, თუ (9) მატრიცის რანგი 1-ის ტოლია, მაშინ $f_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, ფუნქციებში წრფივად დამოუკიდებელია 1 ფუნქცია: ასევე დამოუკიდებელია, რომ, თუ $r=2$, მაშინ ამ ფუნქციებში წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციათა უდიდესი რიცხვი 2-ის ტოლია და ა. შ.

აღნიშნული წინადადებანი ჭეშმარიტია ნებისმიერი n -ცვლადიანი m წრფივ ფუნქციათა სისტემისათვის.

მატრიცის რანგის განსაზღვრის დროს შევნიშნეთ, თუ მატრიცის რანგი r -ის ტოლია, მაშინ ჭეშმარიტია (4) თვისება: A მატრიცის $r+1$, $r+2, \dots, m$ სტრიქონი წრფივი კომბინაციაა პირველი r სტრიქონისა. ამ თვისების საფუძველზე დავასკვნით, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი.

თეორემა 2. ყოველ მატრიცაში წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა უდიდესი რიცხვი ამ მატრიცის რანგის ტოლია.

ახლა განვიხილოთ A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A' მატრიცის რანგი A მატრიცის რანგის ტოლია, რადგანაც A' მატრიციდან შედგენილი r რიგის დეტერმინანტი ტოლია სათანადო A მატრიციდან შედგენილი r რიგის ტრანსპონირებული დეტერმინანტის (დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება სათანადო სტრიქონის და სვეტის ელემენტების ურთიერთადგომლობის (ცვლით). ტრანსპონირებულ (18) მატრიცაში სტრიქონები A მატრიცის სვეტებია. ამ შენიშვნის შემდეგ მე-2 თეორემით ჭეშმარიტია შემდეგი

თეორემა 3. ყოველ მატრიცაში წრფივად დამოუკიდებელ სვეტთა უდიდესი რიცხვი ამ მატრიცის რანგის ტოლია.

ეს თეორემები იძლევიან მატრიცის რანგის გამოთვლის პრაქტიკულ მეთოდს. მატრიცა შედგება (7) სტრიქონ-ვექტორებისაგან. მოვინახვოთ რა მატრიცის რანგს, ამით გავარკვევთ მოცემულ ვექტორთა (7) სისტემაში რომელი ვექტორები ქმნიან წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა ქმეცს სისტემას.

მოცემული A მატრიცის რანგის განსაზღვრისათვის, საჭიროა მოინახოს მატრიცის ის უდიდესი რიგის მინორი, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან. მაგრამ შესაძლებელია დაგვირდეს ბევრი მინორის გამოთვლისაგან. ამოსათვლელი მინორების რიცხვი შემცირდება, თუ ვისარგებლებთ შემდეგი მეთოდით. ვთქვათ, A მატრიცის r რიგის რომელიმე მინორი განსხვავებულია ნულისაგან. შემდეგ უნდა გამოვთვალოთ $r+1$ რიგის

მინორი. მაგრამ ყველა $r+1$ რიგის მინორის გამოთვლა საჭირო არაა: საკმარისია, ამ r რიგის მინორს მივუწეროთ სხვა სტრიქონის და სვეტის ელემენტები, რომ მივიღოთ $r+1$ რიგის მინორი. თუ ყველა ასე მიღებული $r+1$ რიგის მინორი ნულის ტოლია, მაშინ A მატრიცის რანგი იქნება r , რადგანაც A მატრიცის ყველა $r+1$ სტრიქონი წინა r სტრიქონის წრფივი კომბინაცია იქნება.

მაგალითად, ეიზოვით შემდეგი მატრიცის რანგი:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

ამ მატრიცის ზედა მარცხენა კუთხეში მოთავსებული ელემენტებისაგან შევადგინოთ მე-2 რიგის მინორი და გამოვთვალოთ:

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

მაშასადამე, B_1 მატრიცის რანგი 2-ზე ნაკლები არაა. ახლა ავიღოთ მესამე რიგის მინორები. მესამე რიგის მინორის მისაღებად, საკმარისია C_1 მინორის ელემენტები შემოვქოთ B_1 მატრიცის დარჩენილი ელემენტებით ისე, რომ მივიღოთ მესამე რიგის მინორი,

$$C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

C_2 მივიღეთ C_1 მინორის ელემენტებით, რომელიც შემოვქოთ A მატრიცის მე-3 სვეტისა და მე-3 სტრიქონის ელემენტებით. C_1 მინორის ელემენტები შემოვქოთ მე-4 სვეტისა და მე-3 სტრიქონის ელემენტებით, მივიღებთ

$$C_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

B_1 მატრიცა ისე გადავწეროთ, რომ C_3 მინორის ელემენტები მოთავსდნენ მატრიცის ზედა მარცხენა კუთხეში,

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

B_2 მატრიცის მე-4 სვეტისა და მე-4 სტრიქონის ელემენტებით შემოვჭობოთ C_3 მინორის ელემენტები, მივიღებთ

$$C_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

ასევე, B_2 მატრიცის მე-5 სვეტის და მე-4 სტრიქონის ელემენტებით შემოვჭობოთ C_3 მინორის ელემენტები, მივიღებთ

$$C_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

ასე რომ, $r(B_2) = 3$. ცხადია, B_1 მატრიცის რანგი B_2 მატრიცის რანგის ტოლია.

ამგვარად,

$$r(B_1) = 3.$$

როგორც განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რანგის გამოანგარიშება ე. წ. შემოჭობვის მეთოდით მარტივია და ნაკლებად შრომატევადია, რადგანაც მატრიცის ყველა მინორის გამოთვლა საჭირო არაა.

თუ გვინტერესებს მართო მატრიცის რანგი და არა სათანადო დეტერმინანტების მნიშვნელობანი, მაშინ მატრიცის რანგის გამოთვლას ვაწარმოებთ მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნებით.

მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნები ეწოდება შემდეგ გარდაქმნებს:

1) მატრიცის ორი სვეტის (სტრიქონის) ურთიერთ ადგილმონაცვლეობა,

2) რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე გამრავლება,

3) რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) რაიმე რიცხვზე გამრავლება და სხვა სვეტს (სტრიქონს) მიმატება.

დეტერმინანტთა თვისებების საფუძველზე ადვილი მისახვედრია, რომ მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნა მატრიცის რანგს არ ცვლის.

მატრიცის რანგის გამოთვლა ე. წ. მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნების მეთოდით შემდეგნაირად წარმოებს: ჯერ მატრიცის სვეტების (სტრიქონების) ურთიერთადგილმონაცვლეობა ისე უნდა მოვახდინოთ, რომ a_{11} განსხვავებული იყოს ნულისაგან. შემდეგ

პირველი სტრიქონი უნდა გავამრავლოთ a_{11}^{-1} -ზე, ამით ელემენტი a_{11} გახდება 1-ის ტოლი. თუ მატრიცის პირველ სვეტს გავამრავლებთ a_{1j} , $j = \overline{2, n}$ და გამოვაკლებთ დანარჩენ სვეტებს, ასევე, თუ მატრიცის პირველ სტრიქონს გავამრავლებთ a_{i1} -ზე, $i = \overline{2, m}$ და გამოვაკლებთ დანარჩენ სტრიქონებს, მივიღებთ შემდეგი სახის მატრიცას:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$

სრულიად ასეთივე გარდაქმნებს ვაწარმოებთ B მატრიცის მარჯვენა ქვედა კუთხეში მოთავსებულ ელემენტებზე და ა. შ. ამით მივიღებთ მატრიცას, რომლის მთავარი დიაგონალის ელემენტები $a_{ii} = 1$, $i = \overline{1, r}$ და შემდეგ $a_{ii} = 0$, $i = r + 1, \dots$ ამ შემთხვევაში მატრიცის რანგი დიაგონალზე 1-იანების რაოდენობის ტოლია.

მაგალითად, გამოვთვალოთ შემდეგი მატრიცის რანგი:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & -2 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & 3 & -4 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & -4 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & -4 & -3 & -6 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -21 & 21 & -21 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_7 = \begin{bmatrix} -21 & 21 & -21 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 21 & -21 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & 0 \\ -21 & & & \end{bmatrix}, \quad A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -40 & 0 \\ 21 & & & \end{bmatrix},$$

$$A_{10} = [-4 \ 0 \ 0], \quad A_{11} = [1 \ 0 \ 0].$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ მიმდევრობით შევასრულეთ შემდეგი სახის გარდაქმნები: A_1 მატრიცის პირველი და მესამე სვეტის ურთიერთ ადგილმონაცვლებით მივიღეთ A_2 მატრიცა. A_2 მატრიცის 1-ლი სვეტის 3-ზე გამრავლებით და გამოკლებული მეორე სვეტს, მოგვცემს A_3 მატრიცის მეორე სვეტს. მესამე სვეტი უცვლელად გადმოვწერეთ A_3 მატრიცაში A_2 მატრიციდან. A_2 მატრიცის 1-ლი სვეტი გავამრავლეთ 2-ზე და გამოვაკელით მე-4 სვეტს, მივიღეთ A_4 მატრიცის მე-4 სვეტი და ა. შ. A_3 მატრიცის მე-2 სვეტი გავამრავლეთ (-1) -ზე, მივიღეთ A_4 მატრიცა. A_4 მატრიციდან ამოვწერეთ ელემენტები პირველი სტრიქონის და პირველი სვეტის ელემენტების გარეშე. მივიღებთ A_5 მატრიცას. დანარჩენი მოქმედებანი აღწერილი მოქმედების სრული ანალოგიით არის შესრულებული.

ამრიგად, A_1 მატრიციდან წრფივი გარდაქმნებით მივიღეთ მატრიცა

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{21} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ამ მატრიცის რანგი 4-ის ტოლია. მაშასადამე, $r(A_{12}) = 4$.

3. წრფივ განტოლებათა სისტემის თავისებულობა. წინასწარ შევისწავლოთ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა ზოგიერთი თვისება.

$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l$ ვექტორებს წრფივად დამოკიდებული ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ქვეშარიტია შემდეგი ტოლობა:

$$\alpha_1 \vec{P}_1 + \alpha_2 \vec{P}_2 + \dots + \alpha_l \vec{P}_l = 0, \quad (19)$$

ამ განსაზღვრიდან მიიღება, რომ წრფივად დამოკიდებულ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l$ ვექტორთა სისტემიდან ერთ-ერთი ვექტორი დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციაა (წრფივი ერთგვაროვანი ფუნქცია). მაგალითად, თუ $\alpha_l \neq 0$, მაშინ

$$\vec{P}_l = \beta_1 \vec{P}_1 + \beta_2 \vec{P}_2 + \dots + \beta_{l-1} \vec{P}_{l-1}, \quad \beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_l}, \dots, \beta_{l-1} = -\frac{\alpha_{l-1}}{\alpha_l},$$

და, პირიქით, თუ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l$ ვექტორთა სისტემიდან ერთი ვექტორი დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციაა, მაშინ ვექტორთა ასეთი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია,

$$\beta_1 \vec{P}_1 + \beta_2 \vec{P}_2 + \dots + \alpha_{l-1} \vec{P}_{l-1} + (-1) \vec{P}_l = 0.$$

თუ $l = 1$, მაშინ $\vec{P}_1$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, თუ $\vec{P}_1 = 0$. რადგანაც $\alpha_1 \vec{P}_1 = 0$ ტოლობა $\vec{P}_1 = 0$ -სათვის ქვეშარიტია, როდესაც, მაგალითად, $\alpha_1 = 1$.

ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოკიდებულების განსაზღვრიდან ადვილი მისახვედრია, რომ ვექტორთა სისტემაში, თუ ორი ვექტორი პროპორციულია ან ერთერთი ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ ვექტორთა ეს სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

თუ (19) ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_l = 0$, მაშინ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი. თუ ვექტორთა სისტემა მართო ერთ ვექტორს $\vec{P}_1$ -ს შეიცავს, იგი წრფივად დამოუკიდებელია, თუ $\vec{P}_1 \neq 0$. რადგანაც ტოლობა $\alpha_1 \vec{P}_1 = 0$ სრულდება მხოლოდ $\alpha_1 = 0$ -სათვის, როდესაც $\vec{P}_1 \neq 0$.

თუ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l$ ვექტორთა სისტემიდან რომელიმე $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_s$ ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ვექტორთა $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. მართლაც, ტოლობიდან,

$$\alpha_1 \vec{P}_1 + \alpha_2 \vec{P}_2 + \dots + \alpha_s \vec{P}_s = 0,$$

რომელიც სრულდება, თუ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, გამომდინარეობს

$$\alpha_1 \vec{P}_1 + \alpha_2 \vec{P}_2 + \dots + \alpha_s \vec{P}_s + 0 \cdot \vec{P}_{s+1} + \dots + 0 \cdot \vec{P}_l = \vec{P}_l = 0,$$

რაც გვიჩვენებს, რომ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

ახლა ავიღოთ n -განზომილებიანი ვექტორულ სივრცეში ვექტორები

$$\vec{P}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = \overline{1, l}.$$

გამოვარკვევით, n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში რამდენი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორია.

განვიხილოთ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ერთეული ვექტორები:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \dots \dots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

შევადგინოთ ტოლობა:

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = 0, \quad (20)$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვებია. ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილში გვაქვს ვექტორი $\vec{Q} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. ვექტორი $\vec{Q}$ წარმოდგენილია $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ვექტორების მიხედვით. (20) ტოლობით ვექტორი $\vec{Q}$ ნულის ტოლია, მაშასადამე ყველა მისი კოორდინატი ნულის ტოლია: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. ამგვარად, (20) ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყველა რიცხვი $\alpha_i = 0, i = \overline{1, n}$. აქედან დავასკვნით: n -განზომილებიან სივრცის ერთეული $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ვექტორები იძლევა წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას. ამ სისტემაში ვექტორთა რიცხვი n -ის ტოლია. შემდეგში ვაჩვენებთ, რომ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემების სიმრავლე უსასრულოა.

დავამტკიცოთ

თეორემა 4. n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ყოველი $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_s$ ვექტორთა სისტემა, სადაც $s > n$, წრფივად დამოკიდებულია.

მართლაც, განვიხილოთ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ცვლადების მიმართ განტოლება

$$\alpha_1 \vec{P}_1 + \alpha_2 \vec{P}_2 + \dots + \alpha_s \vec{P}_s = 0, \quad (21)$$

ანუ

$$a_{11} \alpha_1 + a_{21} \alpha_2 + \dots + a_{s1} \alpha_s = 0,$$

$$a_{12} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + \dots + a_{s2} \alpha_s = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1n} \alpha_1 + a_{2n} \alpha_2 + \dots + a_{sn} \alpha_s = 0.$$

ამგვარად, გვაქვს განტოლებათა სისტემა, სადაც განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია ცვლადთა რიცხვზე, $n < s$. როგორც გაუსის მეთოდით წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის დროს შევნიშნეთ, ასეთ განტოლებათა

სისტემას აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$. ეს კი გვიჩვენებს, $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_s$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რადგანაც (21) ტოლობა სრულდება ნულისაგან განსხვავებული $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ რიცხვებისათვის.

დამტკიცებული თეორემის საფუძველზე დავასკვნით, n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში, თუ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა, მაშინ ამ სისტემის ყველა ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა იქნება.

n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ვექტორთა სისტემას

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l \quad (22)$$

ეწოდება მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა, თუ ამ სისტემის ერთი n -განზომილებიანი ვექტორის დამატებით მიიღება წრფივად დამოკიდებული ვექტორთა სისტემა.

განსაზღვრის თანახმად, თუ (22) ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ $\vec{P}$ ვექტორის დამატებით მივიღებთ წრფივად დამოკიდებულ სისტემას; ტოლობა

$$\alpha_1 \vec{P}_1 + \alpha_2 \vec{P}_2 + \dots + \alpha_l \vec{P}_l + \alpha \vec{P} = 0 \quad (23)$$

შესრულდება, სადაც $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha$ რიცხვებიდან $\alpha \neq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში (22) ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებული იქნებოდა.

(23) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{P}$ ვექტორი წრფივი კომბინაციაა (22) ვექტორთა სისტემის. ამგვარად, n -განზომილებიანი სივრცის ყოველი ვექტორი წრფივი კომბინაციაა n -განზომილებიანი სივრცის მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემისა.

თეორემა 5. თუ $\vec{P}$ ვექტორი წრფივი კომბინაციაა $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l$ ვექტორებისა

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^l \beta_i \vec{P}_i, \quad (24)$$

ხოლო $\vec{P}_i, i = \overline{1, l}$, ვექტორები წრფივი კომბინაციაა $\vec{Q}_j, j = \overline{1, s}$ ვექტორების,

$$\vec{P}_i = \sum_{j=1}^s \gamma_{ij} \vec{Q}_j, \quad (25)$$

მაშინ $\vec{P}$ ვექტორი წრფივი კომბინაციაა $\vec{Q}_j, j = \overline{1, s}$ ვექტორების.

მართლაც, შევიტანოთ (24) გამოსახულებაში $\vec{P}_i$ ვექტორების მნიშვნელობანი (25)-დან, მივიღებთ

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^l \beta_i \sum_{j=1}^s \gamma_{ij} \vec{Q}_j.$$

თუ $\sum_{j=1}^s \gamma_{ij} \vec{Q}_j$ გამოსახულების ყველა წევრს გადამრავლებთ β_i -ზე და შემდეგ ჯერ i ინდექსით შევკრებთ, შემდეგ j ინდექსით მიღებულ გამოსახულებას, გვექნება

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^l \beta_i \gamma_{ij} \right) \vec{Q}_j.$$

რიცხვები $\sum_{i=1}^l \beta_i \gamma_{ij}$ აღვნიშნოთ δ_j ასოებით,

$$\sum_{i=1}^l \beta_i \gamma_{ij} = \delta_j,$$

მაშინ დავწერთ

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^s \delta_j \vec{Q}_j.$$

ამგვარად, $\vec{P}$ ვექტორი $\vec{Q}_j$, $j = \overline{1, s}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციაა.

ვექტორთა ორ სისტემას $\vec{P}_i$, $i = \overline{1, l}$ და Q_j , $j = \overline{1, s}$ ეწოდება ეკვივალენტური (ურთიერთეკვივალენტური), თუ ერთი სისტემის ვექტორები მეორე სისტემის ვექტორების წრფივი კომბინაციაა და პირიქით. მე-5 თეორემის თანახმად, ვექტორთა წრფივი კომბინაციას აქვს ტრანზიტულობის თვისება. მაშასადამე, ვექტორთა ეკვივალენტურობასაც აქვს ტრანზიტულობის თვისება. ამის გამო, თუ $\vec{P}$ ვექტორი წრფივი კომბინაციაა $\vec{P}_i$, $i = \overline{1, l}$, ვექტორთა სისტემის და ვექტორთა ეს სისტემა ეკვივალენტურია $\vec{Q}_j$, $j = \overline{1, s}$, ვექტორთა სისტემის, მაშინ $\vec{P}$ ვექტორი წრფივი კომბინაცია იქნება $\vec{Q}_j$, $j = \overline{1, s}$, ვექტორთა სისტემის.

თეორემა 6. თუ n -განზომილებიან სივრცეში მოცემულია ვექტორთა ორი სისტემა

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l; \quad (26)$$

$$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_s. \quad (27)$$

რომელთაგან (26) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია და ყოველი მისი ვექტორი წრფივი კომბინაციაა (27) ვექტორთა სისტემის, მაშინ (26) სისტემის ვექტორთა რიცხვი არ აღემატება (27) სისტემის ვექტორთა რიცხვს, $l \geq s$.

მართლაც, ვთქვათ, n -განზომილებიან ვექტორთა სივრცეში გვაქვს ვექტორები

$$Q_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}), \quad j = \overline{1, s},$$

თეორემის პირობით $\vec{P}_i$, $i = \overline{1, l}$, წრფივად გამოსახება $\vec{Q}_j$, $j = \overline{1, s}$, ვექტორებით,

$$\vec{P}_i = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} \vec{Q}_j, \quad i = \overline{1, l}, \quad (28)$$

სადაც $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{lj}$ რიცხვებია. დაფუძნებით $l > s$. (28) დამოკიდებულება იძლევა $\vec{P}_i$, $i = \overline{1, l}$, ვექტორების წარმოდგენას s განზომილებიან სივრცეში. რადგანაც დაშვების თანახმად $l > s$, მე-4 თეორემის საფუძველზე დავასკვნით, ვექტორთა სისტემა $\vec{P}_i$, $i = \overline{1, l}$, წრფივად დამოკიდებულია. ეს დასკვნა კი თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. ამით თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს: ყოველი ორი ეკვივალენტური წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემა ტოლი რაოდენობის ვექტორებს შეიცავს.

ავიღოთ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ორი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემა. ცხადია, ეს სისტემები ეკვივალენტური იქნება. და ამის გამო ვექტორთა ეს სისტემები ტოლი რაოდენობის ვექტორებს შეიცავს. ზემოთ ვაჩვენეთ, n -განზომილებიანი ვექტორული სივრცის ერთეული ვექტორები ქმნიან წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას. ამ სისტემაში n ვექტორია. აქედან დავასკვნით: n -განზომილებიანი ვექტორული სივრცის მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემა შეიცავს n ვექტორს. ამრიგად, მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემები n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში არსებობს და ამასთან ამ სისტემათა სიმრავლე უსასრულოა.

ვთქვათ, n -განზომილებიან სივრცეში მოცემულია m ვექტორი,

$$\vec{P}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = \overline{1, m}.$$

შევადგინოთ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m$ სისტემის კოორდინატთაგან მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

ამ მატრიცაში თითოეული ვექტორის კოორდინატები სათანადო სტრიქონის ელემენტებია. A მატრიცაში i -ური სტრიქონი ისევ $\vec{P}_i$ ასოთი აღვნიშნოთ და სტრიქონის ქვეშ ვიგულისხმოთ ვექტორი (ვექტორი — სტრიქონი). უკვე ვიცით, წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა უდიდესი რიცხვი A მატრიცაში ტოლია ამ მატრიცის რანგისა. A მატრიცის რანგს $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m$ ვექტორთა სისტემის რანგი ვუწოდოთ. ამ განსაზღვრის შემდეგ მე- n თეორემა ასე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ:

თეორემა 7. ვთქვათ, n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში მოცემულია ორი ვექტორთა სისტემა

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l;$$

$$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_m;$$

არაა აუცილებელი წრფივად დამოუკიდებელი იყოს. ამასთან $\vec{P}_i, i = \overline{1, l}$, ვექტორთა სისტემის რანგი k -ს ტოლია, ხოლო $\vec{Q}_i, i = \overline{1, m}$, ვექტორთა სისტემის რანგი q -ს ტოლია. თუ $\vec{P}_i, i = \overline{1, l}$, ვექტორთა სისტემა წრფივად გამომისახება $\vec{Q}_i, i = \overline{1, m}$, ვექტორთა სისტემით, მაშინ $k \leq q$. თუ ეს სისტემები ეკვივალენტურია, მაშინ $k = q$.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც კრონეკერ-კაპელის სახელწოდებითაა ცნობილი:

თეორემა 8. წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (29)$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის თავსებადი, როდესაც განტოლებათა სისტემის გაფართოებული მატრიცის

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

რანგი განტოლებათა სისტემის

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

რანგის ტოლია,

$$r(\bar{A}) = r(A).$$

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ

$$r(\bar{A}) = r(A) \quad \text{ან} \quad r(\bar{A}) = r(A) + 1.$$

მართლაც, ავიღოთ A მატრიცის რომელიმე მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების სისტემა. სვეტების ეს სისტემა ეკუთვნის $\bar{A}$ მატრიცასაც. თუ $\bar{A}$ მატრიცის თავისუფალი წევრების სვეტი დანარჩენი სვეტების წრფივი კომბინაციაა, მაშინ, ცხადია,

$$r(\bar{A}) = r(A).$$

თუ $\bar{A}$ მატრიცის თავისუფალი წევრების სვეტი დანარჩენი სვეტების წრფივი კომბინაცია არ არის, მაშინ $\bar{A}$ მატრიცაში წრფივად დამოუკიდებელ სვეტთა რიცხვი ერთით მეტი იქნება A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელ სვეტთა რიცხვზე, ამის გამო

$$r(\bar{A}) = r(A) + 1.$$

ჯერ დავამტკიცოთ: თუ (29) განტოლებათა სისტემა თავსებადია, მაშინ $r(\bar{A}) = r(A)$.

ვთქვათ, (29) განტოლებათა სისტემის ამონახსნებია $k_1, k_2, \dots, k_n$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (29) განტოლებათა სისტემაში, მივიღებთ

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{in}k_n = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

ამგვარად, $\bar{A}$ მატრიცის თავისუფალი წევრების სვეტი წრფივი კომბინაციაა დანარჩენი სვეტებისა და, მაშასადამე, $\bar{A}$ მატრიცის სვეტები წრფივი კომბინაციაა A მატრიცის სვეტებისა. ცხადია, პირიქითაც, A მატრიცის ყველა სვეტი ეკუთვნის $\bar{A}$ მატრიცას. $\bar{A}$ მატრიცის სვეტები კი წრფივად დამოკიდებულ სვეტთა სისტემას წარმოადგენს. ამის გამო A მატრიცის სვეტები წრფივი კომბინაციაა $\bar{A}$ მატრიცის სვეტების, ეს გვაძლევს, რომ A მატრიცის და $\bar{A}$ მატრიცის სვეტები ურთიერთ ეკვივალენტური სვეტების სისტემაა, ამის გამო $r(\bar{A}) = r(A)$. ამრიგად, თუ განტოლებათა სისტემა (29) თავსებადია, მაშინ განტოლებათა სისტემის გაფართოებული მატრიცის რანგი განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგის ტოლია.

ახლა ვთქვათ, $r(\bar{A}) = r(A)$, მაშინ ვაჩვენოთ განტოლებათა სისტემა (29) თავსებადია.

რადგანაც $r(\bar{A}) = r(A)$, მაშინ $\bar{A}$ მატრიცის მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების სისტემა და A მატრიცის მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების სისტემა ერთი და იგივე იქნება. $\bar{A}$ მატრიცის თავისუფალი წევრების სვეტი წრფივი კომბინაციაა A მატრიცის სვეტებისა. ეს ნიშნავს, აჩვენებს რიცხვების სისტემა $k_1, k_2, \dots, k_n$, რომ სრულდება ტოლობები

$$a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2 + \dots + a_{in} k_n = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

ანუ $k_1, k_2, \dots, k_n$ რიცხვთა სისტემა აკმაყოფილებს (29) განტოლებათა სისტემას. ამით კრონეკერ-კაპელის თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

კრონეკერ-კაპელის თეორემა იძლევა პირობას, რომლითაც ვადგენთ, წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს თუ არა ამონახსნი, მაგრამ არ იძლევა მეთოდს განტოლებათა სისტემის ამონახსნის შესახებ.

ვთქვათ, A მატრიცის რანგი არის r , მაშინ A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელ მაქსიმალური სტრუქტურა რიცხვი იქნება r . დაეუშვათ, A მატრიცის პირველი r სტრუქტურა წრფივად დამოუკიდებელია. თუ A

მატრიცის რანგიც r -ის ტოლია, მაშინ $\bar{A}$ მატრიცის პირველი r სტრიქონი წრფივად დამოუკიდებელი იქნება, ხოლო შემდეგი $r+1, \dots, m$ სტრიქონები პირველი r სტრიქონის წრფივი კომბინაცია იქნება. აქედან ცხადია, (29) განტოლებათა სისტემის ყოველი განტოლება მიიღება პირველი r განტოლებების სათანადო რიცხვებზე გამრავლებით და შეკრებით. ამის გამო პირველი r განტოლების ამონახსნები დააკმაყოფილებს (29) განტოლებათა სისტემის დანარჩენ განტოლებებს. ასე რომ, საკმარისია ამოვხსნათ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n &= b_r. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

თუ $r=n$, განტოლებათა სისტემა (30) ამოვხსნათ კრამერის ფორმულე-
ბით. გვექნება ერთადერთი ამონახსნი. თუ $r < n$, მაშინ (30) განტოლე-
ბათა სისტემა ასე გადავწეროთ

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n, \end{aligned} \right\}$$

საიდანაც კვლავ კრამერის თეორემის გამოყენებით განვსაზღვრავთ $x_1, x_2, \dots, x_r$ ცვლადებს, სადაც $x_{r+1}, \dots, x_n$ ცვლადები ნებისმიერ მნიშვნელობებს ღებულობენ.

ამრიგად, თუ A მატრიცის რანგი $r < n$ და $r(\bar{A}) = r(A)$, მაშინ (29) განტოლებათა სისტემას აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა, სადაც $x_{r+1}, \dots, x_n$ ცვლადები ნებისმიერ მნიშვნელობებს ღებულობენ, ხოლო დანარჩენი ცვლადები $x_1, \dots, x_r$ წრფივი ფუნქციებია $x_{r+1}, \dots, x_n$ ცვლადების განვიხილოთ შავალითები.

მაგალითი 1. ამოვსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 3. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

შევადგინეთ (31). განტოლებათა სისტემის მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

ვიზოვით ამ სისტემის რანგი. (32) მატრიციდან შევადგინოთ დეტერმინანტები:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = -3 + 4 = 1 \neq 0.$$

ამგვარად, (31) სისტემის მატრიცის რანგი $r=2$.

ახლა შევადგინოთ (31) განტოლებათა სისტემის გაფართოებული მატრიცა:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

გამოცთვალათ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3+4) = 2.$$

პირველი და მეორე სტრიქონის ელემენტთა ჯამი გამოვსვლით მესამე სტრიქონის ელემენტებს და შემდეგ დეტერმინანტი დავშალეთ მესამე სვეტის ელემენტების მინორებად. მივიღეთ, რომ $\overline{A}$ მატრიცის რანგი $\overline{r} = 3$, ე. ი. $\overline{r} \neq r$.

მაშასადამე, (31) განტოლებათა სისტემა თავსებადი არ არის.

დეტერმინანტის სხვა სტრიქონის ელემენტების ალგებრულ დამატებანი აკმაყოფილებს (36) განტოლებათა სისტემას.

უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ თუ (30) სისტემის ამონახსნია $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, მაშინ მისი ამონახსნია აგრეთვე $\beta_1 t, \beta_2 t, \beta_3 t$, სადაც t ნებისმიერია.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \quad (38)$$

გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

რადგანაც $\det A \neq 0$, ამიტომ განტოლებათა (38) სისტემას აქვს ნულოვანი ამონახსნი: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \quad (39)$$

გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

ახლა გამოვთვალოთ ამ დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ალგებრული დამატებანი:

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = 2, \quad A_{13} = -1.$$

(33) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი იქნება:

$$x_1 = -t, \quad x_2 = 2t, \quad x_3 = -t.$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases} \quad (40)$$

ამ განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგი $r = 1$. ავიღოთ ერთი განტოლება (40) განტოლებათა სისტემიდან და ამოვხსნათ ერთი ცვლადის, მა-

გალითად, x_1 -ის მიმართ, მივიღებთ $x_1 = 2x_2 - 3x_3$, სადაც x_2 და x_3 ნებისმიერია.

ამგვარად, (34) განტოლებათა სისტემის ამონახსნია

$$x_1 = 2x_2 - 3x_3,$$

სადაც x_2 და x_3 ნებისმიერ მნიშვნელობებს ღებულობს.

სავარჯიშო 19.

გამოიკვლიეთ შემდეგი განტოლებათა სისტემები და ამოხსენით:

- 1) $4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -4,$ 2) $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1,$
 $x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2,$ $2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -4,$
 $2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -3.$ $3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1.$
- 3) $5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 21,$ 4) $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3,$
 $5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 - 4x_5 = 20,$ $2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,$
 $7x_1 + 14x_2 + 25x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 6,$ $3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3,$
 $2x_1 + 10x_2 + 25x_3 + x_4 - 3x_5 = -16.$ $x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -1.$
- 5) $x_1 + x_2 = 2,$
 $2x_2 + x_3 = 3,$
 $2x_3 + x_4 = 3,$
 $3x_1 + x_4 = 4,$
 $3x_2 + 2x_3 = 5.$

§ 3. კვადრატული მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები

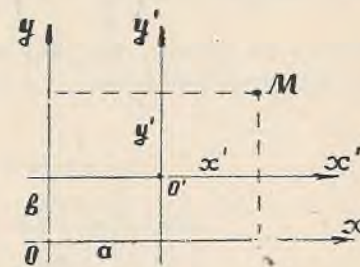
1. სიბრტყეზე კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები

1) ახალი ღერძები ძველი ღერძების პარალელურია (ნახ. 1). თუ კოორდინატი ძველი სისტემაა Oxy , ხოლო ახალი $O'x'y'$, მაშინ სიბრტყის ნებისმიერ M წერტილის ძველსა (x, y) და ახალ (x', y') კოორდინატებს შორის შემდეგი დამოკიდებულება არსებობს (თავი VII, § 3):

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} \quad (1)$$

2) თუ კოორდინატთა ახალი ღერძები ძველ კოორდინატთა ღერძებთან α კუთხეს ადგენენ, მაშინ (ნახ. 2)

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (2)$$



ნახ. 1

თუ ამ სისტემიდან სათანადოდ განვსაზღვრავთ x' და y' -ს, გვექნება

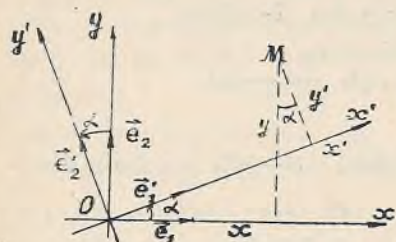
$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ახალი ღერძების მგეზავების

$$\vec{e}_1' = (l_1, m_1), \quad \vec{e}_2' = (l_2, m_2)$$

და ძველი ღერძების მგეზავების

$$\vec{e}_1 = (1; 0), \quad \vec{e}_2 = (0; 1)$$



ნახ. 2

ურთიერთდამოკიდებულება გამოისახება შემდეგი ცხრილით

ცხრილი 1

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$
$\vec{e}_1'$	l_1	m_1
$\vec{e}_2'$	l_2	m_2

სადაც l_1, m_1, l_2, m_2 სათანადო ღერძებს შორის მოთავსებული კუთხეების კოსინუსებია:

$$l_1 = \cos \widehat{\vec{e}_1', \vec{e}_1} = \cos \alpha, \quad l_2 = \cos \widehat{\vec{e}_2', \vec{e}_1} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha,$$

$$m_1 = \cos \widehat{\vec{e}_1', \vec{e}_2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha, \quad m_2 = \cos \widehat{\vec{e}_2', \vec{e}_2} = \cos \alpha.$$

ცხადია, 1-ლი ცხრილი, რადგანაც კოორდინატთა სისტემები მართკუთხაა, ასეა შეგვიძლია ჩავწეროთ:

ცხრილი 2

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$
$\vec{e}_1'$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\vec{e}_2'$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$

1-ლი ცხრილის დახმარებით (2) და (3) ფორმულები ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\left. \begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y' \\ y &= m_1 x' + m_2 y' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= l_1 x + m_1 y \\ y' &= l_2 x + m_2 y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(5) გარდაქმნის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 = 1, \quad (6)$$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0, \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 1. \quad (8)$$

ე.ი. ძველი კოორდინატები ისე გადადის ახალ კოორდინატებში, რომ მასშტაბი არ იცვლება $|\vec{e}_1'| = 1, |\vec{e}_2'| = 1$. შეგვიძლია (1) გარდაქმნით ცენტრიანი მეორე რიგის წირის განტოლება დავიყვანოთ ისეთ განტოლებაზე, სადაც არ იქნება x და y ცვლადები პირველ ხარისხში.

მაგალითი 1. გავამარტივოთ განტოლება

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 16x - 16y - 56 = 0. \quad (9)$$

გარდაქმნათ ცვლადები

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

შევარჩიოთ a და b ისე, რომ (10) გარდაქმნით (9) განტოლება არ შეიცავდეს x' და y' -ს პირველ ხარისხში.

სათანადო ჩასმა (9) განტოლებაში და x' -ის და y' -ის კოეფიციენტთა ნულოვან გატოლება მოგვცემს

$$\left. \begin{aligned} 13a - 5b - 8 &= 0, \\ -5a + 13b - 8 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

საიდანაც $a = 1, b = 1$.

(10) გარდაქმნით (9) განტოლება მიიღებს სახეს

$$13x'^2 - 10x'y' + 13y'^2 - 72 = 0. \quad (11)$$

ახლა x' და y' ღერძები მოვაბრუნოთ α კუთხით:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha, \\ y' &= x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

31. გ. კომლაძე

სათანადო ჩასმა (11) განტოლებაში მოგვცემს:

$$(13 - 5 \sin 2\alpha) x''^2 - 10 \cos 2\alpha x'' y'' + (13 + 5 \sin 2\alpha) y''^2 - 72 = 0. \quad (13)$$

შევარჩიოთ α ისე, რომ $x'' y''$ -ის კოეფიციენტი გახდეს ნულის ტოლი. გვქვია

$$\cos 2\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

ამით (13) განტოლება მოგვცემს

$$8x''^2 + 18y''^2 - 72 = 0,$$

ანუ

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1. \quad (14)$$

2. ცვლადთა წრფივი გარდაქმნა. ვთქვათ, გვაქვს ცვლადთა ერთი სისტემა $x_1, x_2, \dots, x_n$ და ცვლადთა მეორე სისტემა $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$, რომლებიც ურთიერთდაკავშირებულია შემდეგი დამოკიდებულებებით

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \\ x'_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (15)$$

სადაც $f_1, f_2, \dots, f_n$ მოცემული ფუნქციებია. ცვლადთა $x_1, x_2, \dots, x_n$ სისტემაშიდან ცვლადთა $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ სისტემაზე გადასვლას ეწოდება გარდაქმნა.

შეგვიძლია განვიხილოთ ცვლადთა შებრუნებული გარდაქმნა. თუ (15) დამოკიდებულებებიდან განისაზღვრება $x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \\ x_2 &= \varphi_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \\ &\dots \\ x_n &= \varphi_n(x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \end{aligned} \quad (16)$$

მაშინ $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ ცვლადებიდან $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადებზე გადასვლას ეწოდება შებრუნებული გარდაქმნა.

ჯერ განვიხილოთ ცვლადთა გარდაქმნა ორ განზომილებიან სივრცეში. π სიბრტყეზე ავიღოთ $Ox_1 x_2$ კოორდინატთა სისტემა. π სიბრტყეში მდებარე ყველა ვექტორი გადავდეთ O კოორდინატთა სათავიდან, მაშინ π სიბრტყის ნებისმიერი $M(x)$ წერტილი განსაზღვრავს $\vec{OM}$ რადიუს-ვექტორს,

$$\vec{OM} = x = (x_1, x_2).$$

ასე რომ, ცვლადთა გარდაქმნა ორი ცვლადის x_1, x_2 შემთხვევაში არის π სიბრტყის ვექტორთა გარდაქმნა: ნებისმიერი $\vec{OM} = x$ ვექტორი გადაი-სახება იმავე π სიბრტყის $\vec{OM}' = x'$ ვექტორში. შემდეგში სიტყვა „გარდაქმნის“ ქვეშ ვიგულისხმებთ როგორც ცვლადთა გარდაქმნას, ისე ვექტორთა გარდაქმნას. ჩვენ შევისწავლით ცვლადთა წრფივ გარდაქმნას.

გარდაქმნას $x' = Ax$ ეწოდება წრფივი, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, სადაც x ნებისმიერი ვექტორია π სიბრტყეში და λ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

2) $A(x+y) = Ax + Ay$, სადაც x და y π სიბრტყის ნებისმიერი ვექტორებია.

წარმოვადგინოთ გეომეტრიულად ეს ორი პირობა. 1-ლი პირობა ნიშნავს:

λx ვექტორი კოლინეარულია x ვექტორისა და მიიღება მისგან λ -ჯერ გა-ჭიმვით, ე. ი. $|\lambda x| = |\lambda| |x|$ (ნახ. 3),

$$x = \vec{OM}, \quad \lambda x = \vec{ON}, \quad Ax = \vec{OM'}, \quad A(\lambda x) = \vec{ON'}.$$

რადგანაც $A(\lambda x) = \lambda Ax$, მაშინ $\vec{ON'}$ მიიღება $\vec{OM'}$ ვექტორიდან იმავე გა-ჭიმვით, როგორც $\vec{ON}$ მიიღება $\vec{OM}$ ვექტორისაგან.

მე-2 პირობით (ნახ. 4)

$$\vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OP},$$

სადაც $\vec{OM} = x$, $\vec{ON} = y$. რა-დგანაც

$$\vec{OM'} = A\vec{OM}, \quad \vec{ON'} = A\vec{ON}$$

და

$$\vec{OM'} + \vec{ON'} = \vec{OP'}.$$

მაგრამ

$$A(x+y) = Ax + Ay,$$

ანუ

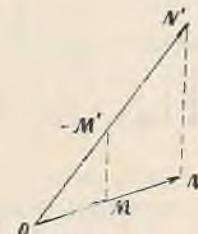
$$A\vec{OP} = \vec{OP'}.$$

ამგვარად, მე-2 პირობა აღნიშნავს, ყოველი $OMPN$ პარალელოგრამი წრფივი გარდაქმნით ისევე $OM'P'N'$ პარალელოგრამში გადადის.

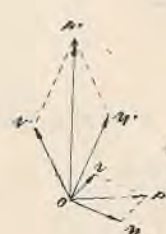
ჩვენი მიზანია, წრფივი გარდაქმნა ცხადად გამოვსახოთ.

როგორც ვიცით, π სიბრტყეში მდებარე x ნებისმიერი ვექტორი ამ სიბრტყის ბაზისი e_1 და e_2 ვექტორების მიხედვით შემდეგი წრფივი კომ-ბინაციით წარმოიადგინება (შემდეგში ვექტორებს მხოლოდ ასოებით აღვნიშნავთ!):

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$



ნახ. 3



ნახ. 4

განვიხილოთ რაიმე წრფივი გარდაქმნა $x' = Ax$. ამ გარდაქმნით ბაზისი e_1, e_2 ვექტორები გადავა e_1', e_2' წყვილ ვექტორებში: e_1' და e_2' არაკოლინეარულია. ვთქვათ, e_1' და e_2' ვექტორები მოცემულია, ე. ი. მოცემულია ამ ვექტორების e_1, e_2 ბაზისი ვექტორების მიხედვით დაშლა;

$$\begin{aligned} e_1' &= A e_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2, \\ e_2' &= A e_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2. \end{aligned} \quad (17)$$

ვანგვით, რომ ამ დამოკიდებულებებით განისაზღვრება წრფივი გარდაქმნა $x' = Ax$ და მოვნახოთ A -ს გამოსახულება.

ვთქვათ, $x = (x_1, x_2)$ ვექტორის $x' = Ax$ წრფივი გარდაქმნით (შემოკლებით A გარდაქმნით) e_1, e_2 ბაზის ვექტორებში მიიღება $x' = (x_1', x_2')$ ვექტორი,

$$x' = x_1' e_1 + x_2' e_2.$$

ვისარგებლობთ წრფივი გარდაქმნის თვისებებით, გვექნება

$$\begin{aligned} x' &= x_1' e_1 + x_2' e_2 = Ax = A(x_1 e_1 + x_2 e_2) = A(x_1 e_1) + A(x_2 e_2) = \\ &= x_1 A e_1 + x_2 A e_2 = x_1 e_1' + x_2 e_2', \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$x' = x_1' e_1 + x_2' e_2 = x_1 e_1' + x_2 e_2'.$$

შევცვალოთ e_1' და e_2' ვექტორების მნიშვნელობანი (17) გამოსახულებებით:

$$x' = x_1(a_{11} e_1 + a_{21} e_2) + x_2(a_{12} e_1 + a_{22} e_2),$$

ანუ

$$x' = x_1' e_1 + x_2' e_2 = (a_{11} x_1 + a_{21} x_2) e_1 + (a_{12} x_1 + a_{22} x_2) e_2,$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + a_{21} x_2, \\ x_2' &= a_{12} x_1 + a_{22} x_2. \end{aligned} \quad (18)$$

თუ ვისარგებლებთ მატრიცათა ნამრავლით, უკანასკნელი ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$x' = Ax, \quad (19)$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

ამგვარად, თუ ცნობილია ორი e_1' და e_2' ვექტორების ბაზისი ვექტორებით e_1 და e_2 -ით წარმოდგენა (17), მაშინ განსაზღვრულია გარდაქმნა $x' = Ax$, სადაც $A = [a_{ij}]$ $i, j = 1, 2$.

ახლა დავამტყიცოთ, ვექტორთა გარდაქმნა (19) წრფივი გარდაქმნაა, ჯერ შევამოწმოთ წრფივი გარდაქმნის პირველი პირობა. გამოვიყენოთ ვექტორის რიცხვზე გამრავლების განსაზღვრა და მატრიცის მატრიცაზე გამრავლების განსაზღვრა, გვექნება

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= A \cdot \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \lambda x_1 + a_{12} \lambda x_2 \\ a_{21} \lambda x_1 + a_{22} \lambda x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

ახლა შევამოწმოთ, ვექტორთა გარდაქმნა (19) აკმაყოფილებს წრფივი გარდაქმნის მეორე პირობას. ამისათვის საკმარისია, გამოვიყენოთ მატრიცათა ჯამის განსაზღვრა, გვექნება

$$\begin{aligned} A(x + y) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) \\ a_{21}(x_1 + y_1) + a_{22}(x_2 + y_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} x_1 + a_{11} y_1) + (a_{12} x_2 + a_{12} y_2) \\ (a_{21} x_1 + a_{21} y_1) + (a_{22} x_2 + a_{22} y_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + (a_{11} y_1 + a_{12} y_2) \\ (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) + (a_{21} y_1 + a_{22} y_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$A(x + y) = Ax + Ay.$$

ამით დამტყიცდა, რომ ჰერმარიტია შემდეგი¹.

თეორემა 1. თუ ცნობილია ორი არაკოლინეარული e_1' და e_2' ვექტორის e_1 და e_2 ბაზისი ვექტორების მიხედვით გაშლა π სიბრტყეზე

$$e_1' = a_{11} e_1 + a_{21} e_2,$$

$$e_2' = a_{12} e_1 + a_{22} e_2,$$

მაშინ განისაზღვრება ვექტორთა წრფივი გარდაქმნა π სიბრტყეზე $x' = Ax$, სადაც

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

¹ Н. В. Ефимов, Квадратичные формы и матрицы, М., 1972.

რადგანაც თეორემის პირობით ვექტორები e_1' და e_2' არაკოლინეარულია, ეს ვექტორები შეგვიძლია მივიღოთ ახალ ბაზის ვექტორებად აღებული π სიბრტყეზე.

საზოგადოდ, π სიბრტყეზე e_1 და e_2 ბაზისი ვექტორების $x' = Ax$, $\det A \neq 0$, წრფივი გარდაქმნით მიიღება არაკოლინეარული ვექტორები (სიბრტყეზე წრფივი გარდაქმნით პარალელოგრამი გადადის პარალელოგრამში) e_1' და e_2' . ეს ვექტორები π სიბრტყის ახალი ბაზისი ვექტორები იქნება.

(17) დამოკიდებულების შესახებ ვიტყვი: წრფივი გარდაქმნა მოცემულია ახალი ბაზისი e_1' და e_2' ვექტორების კოორდინატებით, ხოლო (19)-ის შესახებ ვიტყვი: წრფივი გარდაქმნა მოცემულია A მატრიცით, სადაც A მატრიცის ელემენტები ახალი ბაზისის კოორდინატებია.

კოორდინატა გარდაქმნა (5) ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$x' = Lx, \quad (20)$$

სადაც

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

ადვილი შესაძინებია, (5) და (18), ასევე (19) და (20) ფორმულები ერთნაირია, მაგრამ (18) ფორმულა x ვექტორის წრფივ გარდაქმნას განსაზღვრავს e_1, e_2 ბაზისში. e_1, e_2 ბაზისი უცვლელია, x ვექტორი იცვლება. ხოლო (20) ფორმულა x ვექტორის კოორდინატებს განსაზღვრავს ახალ e_1', e_2' ბაზისში. აქ x ვექტორი უცვლელია, იცვლება e_1, e_2 ბაზისი ახალი e_1', e_2' ბაზისით. ახლა ვთქვათ, მოცემულია წრფივი გარდაქმნა (19) და არჩეულია ბაზისი e_1 და e_2 ,

$$e_1 = (1; 0), \quad e_2 = (0; 1).$$

გამოვარკვეოთ, როგორი გამოსახულებით მიიღება ახალი ბაზისი e_1' და e_2' ძველი ბაზისით. ჩავსვათ (20) გამოსახულებაში e_1 და e_2 ვექტორების კოორდინატები, მივიღებთ

$$e_1' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = (a_{11}, a_{21}),$$

$$e_2' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = (a_{12}, a_{22}),$$

ანუ

$$e_1' = a_{11} e_1 + a_{21} e_2,$$

$$e_2' = a_{12} e_1 + a_{22} e_2.$$

მივიღეთ (17) გამოსახულება.

ამრიგად დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 2. თუ მოცემულია ვექტორთა წრფივი გარდაქმნა $x' = Ax$, სადაც

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

და π სიბრტყეზე არჩეულია ბაზისი ვექტორები e_1 და e_2 , მაშინ ახალი e_1' და e_2' ბაზისი ვექტორები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$e_1' = a_{11} e_1 + a_{21} e_2,$$

$$e_2' = a_{12} e_1 + a_{22} e_2.$$

ანალოგიურად განვსაზღვრავთ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ვექტორთა წრფივად გარდაქმნას. $x' = Ax$ გარდაქმნას, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, ეწოდება წრფივი გარდაქმნა, თუ სრულდება ზემოთ ჩამოთვლილი ორი პირობა:

1) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, x ნებისმიერი n -განზომილებიანი ვექტორია, ხოლო λ — ნებისმიერი რიცხვი.

2) $A(x + y) = Ax + Ay$, სადაც x და y ნებისმიერი n -განზომილებიანი ვექტორებია,

თუ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში მოცემულია ახალი ბაზისი ვექტორები $e_1', e_2', \dots, e_n'$ ძველი ბაზისი ვექტორებით $e_1, e_2, \dots, e_n$,

$$e_1' = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n,$$

$$e_2' = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{n2} e_n,$$

$$\dots$$

$$e_n' = a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n,$$

მაშინ ეს დამოკიდებულება განსაზღვრავს ვექტორთა წრფივ გარდაქმნას

$$x' = Ax,$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n).$$

რომ ეს გარდაქმნა მართლაც წრფივია, ადვილად დამტკიცდება მატრიცათა თვისებების საფუძველზე.

განვიხილოთ სიბრტყეზე წრფივი გარდაქმნის მაგალითები.

ვთქვათ, სიბრტყეზე x ვექტორის გარდაქმნა k -ჯერ გაჭიმვა (შეკუმშვა), k რიცხვია, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ $x' = Ax$, ვაჩვენოთ, რომ გარდაქმნა წრფივი გარდაქმნაა. მართლაც,

$$1) A(\lambda x) = k(\lambda x) = \lambda(kx) = \lambda Ax,$$

$$2) A(x + y) = k(x + y) = kx + ky = Ax + Ay.$$

მაშასადამე, სრულდება წრფივი გარდაქმნის ორივე პირობა. სიბრტყეზე x ვექტორის k -ჯერ გაჭიმვა წრფივი გარდაქმნაა. ამ გარდაქმნას მსგავსება (მსგავსი გარდაქმნა) ეწოდება, ხოლო k -ს მსგავსების კოეფიციენტი.

გამოვსახოთ მსგავსება კოორდინატებში. სიბრტყეზე ავიღოთ წერტილები e_1 და e_2 ბაზისი ვექტორები. მაშინ მოცემული x ვექტორი და მისი სახე x' ასე წარმოიდგინება:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

$$x' = x'_1 e_1 + x'_2 e_2.$$

რადგანაც $x' = kx$, გვქვია

$$x'_1 = k x_1,$$

$$x'_2 = k x_2.$$

მივიღეთ სიბრტყეზე მსგავსების კოორდინატებში წარმოდგენა. მსგავსება ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$x'_1 = k x_1 + 0 x_2,$$

$$x'_2 = 0 x_1 + k x_2,$$

ანუ

$$x' = Ax,$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

ამგვარად, განვსაზღვრეთ A მატრიცა, რომელიც იძლევა სიბრტყეზე მსგავსებას.

ახლა განვიხილოთ სიბრტყეზე $\overline{OM} = x$ ვექტორის ბრუნვა α კუთხით 0 წერტილის გარშემო. ვთქვათ ეს გარდაქმნა $x' = Ax$.

სიბრტყეზე ავიღოთ ისეთი ბაზისი e_1, e_2 ვექტორები, რომლებიც ურთიერთპერპენდიკულარულია და სიგრძეები ერთეულის ტოლია. ავი-

ღოთ რომელიმე x ვექტორი, რომლის ბოლო წერტილის პოლარული კოორდინატებია (ρ, θ) ე. ი. $x_1 = \rho \cos \theta$, $x_2 = \rho \sin \theta$. რადგანაც ახალი x' ვექტორი მიიღება x ვექტორის მობრუნებით 0 წერტილის გარშემო α კუთხით, გვქვია

$$x'_1 = \rho \cos(\theta + \alpha), \quad x'_2 = \rho \sin(\theta + \alpha),$$

საიდანაც

$$x'_1 = \rho \cos \theta \cos \alpha - \rho \sin \theta \sin \alpha = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha,$$

$$x'_2 = \rho \sin \theta \cos \alpha + \rho \cos \theta \sin \alpha = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha.$$

ამგვარად,

$$x' = Ax,$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

3. სიბრტყეზე ცვლადთა წრფივი გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტის გეომეტრიული მნიშვნელობა. გადავარებული წრფივი გარდაქმნა.

ავიღოთ π სიბრტყე, სადაც განსაზღვრულია Oxy კოორდინატთა სისტემა e_1 და e_2 ბაზისი ვექტორებით. ვთქვათ, ამ სიბრტყეში მოცემულია ორი ვექტორი x და y ,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2.$$

კოორდინატთა სათავიდან π სიბრტყისადმი პერპენდიკულარულად გადავღოთ ერთეული ვექტორი. ეს ვექტორი აღვნიშნოთ n ასოთი. n ვექტორი ისეთი მიმართულების იყოს, რომ Oe_1e_2n კოორდინატთა მარცხენა სისტემას იძლეოდეს სივრცეში. ვიგულისხმობთ, რომ π სიბრტყის ყველა ვექტორი გადადებულია 0 წერტილიდან. e_1 და e_2 ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი აღვნიშნოთ S_0 ასოთი. ვექტორთა ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრის თანახმად (თავი X, § 4) მივიღებთ

$$[e_1 \cdot e_2] = S_0 n.$$

x და y ვექტორზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი აღვნიშნოთ S ასოთი. მაშინ

$$[x \cdot y] = \pm S n,$$

სადაც პლუს ნიშანი უნდა ავიღოთ, თუ x, y და e_1, e_2 ვექტორები ერთნაირი ორიენტაციისა (x, y და e_1, e_2 ვექტორები ერთნაირი ორიენტაციისაა, თუ x ვექტორი რომ y ვექტორს დაემთხვეს, x ვექტორი უნდა მოვებრუნოთ იმ მიმართულების კუთხით, რომელი მიმართულებითაც e_1

ვექტორი რომ e_2 ვექტორს დაემთხვეს), წინააღმდეგ შემთხვევაში უნდა ავიღოთ მინუსი ნიშანი.

გამოვთვალოთ ვექტორული ნამრავლი $[x \cdot y]$. გვექნება

$$[x \cdot y] = [(x_1 e_1 + x_2 e_2) \cdot (y_1 e_1 + y_2 e_2)] = x_1 y_1 [e_1 \cdot e_1] + x_1 y_2 [e_1 \cdot e_2] + x_2 y_1 [e_2 \cdot e_1] + x_2 y_2 [e_2 \cdot e_2] = (x_1 y_2 - y_1 x_2) [e_1 e_2].$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ $[e_1 \cdot e_2]$ და $[x \cdot y]$ -ის მნიშვნელობებს, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\pm S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0.$$

სადაც $\pm S$ წარმოადგენს x და y ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ე. წ. ორიენტირებულ ფართობს. თუ მას σ ასოთი აღვნიშნავთ, გვექნება:

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0.$$

თუ ავიღებთ x და y ვექტორების $x' = Ax$ წრფივი გარდაქმნით მიღებული x' , y' ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ორიენტირებულ ფართობს, გვექნება

$$\sigma' = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} S_0.$$

განვიხილოთ წრფივი გარდაქმნა

$$x' = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

ამ გარდაქმნით $x = (x_1, x_2)$ და $y = (y_1, y_2)$ ვექტორები მოგვცემს

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \quad y'_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2,$$

$$x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \quad y'_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2.$$

თუ ვისარგებლებთ მატრიცათა ნამრავლით, ეს დამოკიდებულებანი ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix},$$

აქედან კი მატრიცათა ნამრავლის დეტერმინანტის განსაზღვრით მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

ანუ

$$\sigma' = \det A \cdot \sigma.$$

ამგვარად, სიბრტყეზე $x' = Ax$ გარდაქმნით ყოველი პარალელოგრამი გადადის პარალელოგრამაში ისე, რომ გარდაქმნით მიღებული პარა-

ლელოგრამის ორიენტირებული ფართობი პროპორციულია მოცემული პარალელოგრამის ორიენტირებული ფართობისა, $\sigma' = \det A \cdot \sigma$.

ან ასე: სიბრტყის წრფივი $x' = Ax$ გარდაქმნით ყველა პარალელოგრამი დეფორმირდება ისე, რომ მათი ორიენტირებული ფართობები პროპორციულად იცვლებიან და აქვთ პროპორციულობის საერთო კოეფიციენტი $\det A$.

თუ $\det A > 0$, მაშინ x, y და x', y' ვექტორთა წყვილები ერთნაირი ორიენტაციისაა, ხოლო, თუ $\det A < 0$, მაშინ ვექტორთა ეს წყვილები სხვადასხვა ორიენტაციისაა.

აქამდე განვიხილავდით ისეთ წრფივ გარდაქმნებს $x' = Ax$, სადაც $\det A \neq 0$. ვთქვათ, $\det A = 0$, ამ შემთხვევაში ნებისმიერი x და y ვექტორების გარდაქმნით მიღებულ x' და y' ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი $\sigma' = 0$. ამგვარად, წრფივი გარდაქმნა $x' = Ax$, თუ $\det A = 0$, ნებისმიერ x, y ვექტორთა წყვილს გადასახავს კოლინეარულ x', y' ვექტორთა წყვილში. კერძოდ, კოლინეარული იქნება e'_1 და e'_2 ვექტორები. კოორდინატთა სისტემის Ox_1x_2 სათავეზე გავატაროთ l წრფე, რომელზედაც მდებარეობენ e'_1 და e'_2 ვექტორები. წინა პუნქტში მივიღეთ, წრფივი გარდაქმნით $x' = Ax$ ნებისმიერი ვექტორი $x(x_1, x_2)$ გადაისახება x' ვექტორში

$$x' = x_1 e'_1 + x_2 e'_2.$$

აქედან დავასკვნით: თუ $\det A = 0$, მაშინ წრფივი გარდაქმნით $x' = Ax$ სიბრტყის ყველა ვექტორი გადაისახება l წრფეზე მდებარე ვექტორებზე. ან ასე: წრფივი გარდაქმნით $x' = Ax$, $\det A = 0$, მთელი Ox_1x_2 სიბრტყე გადაისახება l წრფეზე. ისეთ $x' = Ax$ წრფივ გარდაქმნას, სადაც $\det A = 0$, ეწოდება გადაადგილებული წრფივი გარდაქმნა. ამ განსაზღვრიდან ცხადია, რომ თუ A მატრიცა გადაადგილებულია, მაშინ $x' = Ax$ წრფივი გარდაქმნა გადაადგილებულია.

მაგალითად, წრფივი გარდაქმნა

$$x'_1 = x_1 + x_2,$$

$$x'_2 = x_1 + x_2$$

გადაადგილებულია, რადგანაც მთელი სიბრტყე გადაისახება ამ გარდაქმნით $x'_1 = x'_2$ წრფეზე. ამასთან

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

თუ განვიხილავთ სამგანზომილებიან სივრცეს $x = (x_1, x_2, x_3)$, მაშინ წრფივი გარდაქმნა

$$x'_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$x'_2 = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$x'_3 = x_1 + x_2 + x_3,$$

მთელ სივრცეს გადასახავს $x_1' = x_2' = x_3'$ წრფეზე. ამ გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

საზოგადოდ, n -განზომილებიან სივრცეში წრფივი გარდაქმნა $x' = Ax$, $\det A = 0$, მთელ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ სივრცეს გადასახავს დაბალგანზომილებიან სივრცეზე.

4. მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები. განვიხილოთ ორგანზომილებიან სივრცეში (x_1, x_2) მატრიცით

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

განსაზღვრული $x' = Ax$ გარდაქმნა. ვიპოვოთ $x = (1; 1)$ ვექტორის (21) გარდაქმნით მიღებული $x' = (x_1', x_2')$ ვექტორი. გვექნება

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(21) გარდაქმნით მიღებული ვექტორი $x' = (3; 3)$ კოლინეარულია მოცემული $(1, 1)$ ვექტორისა, $x' = 3x$.

რიცხვს 3-ს ეწოდება (21) მატრიცის საკუთრივი რიცხვი, ხოლო $x = (1; 1)$ ვექტორს ამ მატრიცის საკუთრივი ვექტორი.

არანულოვან x ვექტორს ეწოდება A მატრიცის საკუთრივი ვექტორი (ან A მატრიცით განსაზღვრული $x' = Ax$ წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი), თუ A მატრიცით განსაზღვრული წრფივი გარდაქმნით $x' = Ax$, ეს ვექტორი გარდაიქმნება თავის კოლინეარულ x' ვექტორში; A მატრიცით x ვექტორის გარდაქმნით მიღებული x' ვექტორი სკალარული მამრავლით განსხვავდება მოცემული x ვექტორისაგან.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, x ვექტორს A მატრიცის საკუთრივი ვექტორი ეწოდება, თუ ეს მატრიცა x ვექტორს გარდაქმნის λx ვექტორად,

$$Ax = \lambda x. \quad (22)$$

რიცხვ λ -ს ეწოდება A მატრიცის საკუთრივი ან მახასიათებელი რიცხვი.

(22) ტოლობა ასე გადავწეროთ

$$(A - \lambda I) x = 0. \quad (23)$$

მატრიცას $A - \lambda I$ ეწოდება მახასიათებელი მატრიცა. (23) განტოლება წარმოადგენს წრფივ ერთგვაროვან განტო-

ლებათა სისტემას $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების მიმართ. ამ განტოლებათა სისტემას ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტთაგან შედგენილი მატრიცის დეტერმინანტი ნულის ტოლია,

$$\det (A - \lambda I) = 0. \quad (24)$$

მიღებულ (24) განტოლებას A მატრიცის მახასიათებელი განტოლება ეწოდება.

განტოლება (24) გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ

$$\lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} \lambda + (-1)^n \sigma_n = 0. \quad (25)$$

ამ განტოლების მარცხენა ნაწილში მოთავსებულ მრავალწევრს A მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი ეწოდება. მახასიათებელი მრავალწევრის კოეფიციენტების შესახებ შევნიშნოთ შემდეგი: A მატრიცის პირველ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ჯამი σ_1 -ის ტო-

ლია, $\sigma_1 = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. ამ რიცხვს A მატრიცის კვალი ეწოდება. თავი-

სუფალი წევრია $(-1)^n \sigma_n$, $\sigma_n = \det A$.

განვიხილოთ n -განზომილებიანი კომპლექსური ვექტორული სივრცე $M = \{x | x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, სადაც $x_1, x_2, \dots, x_n$ რიცხვები საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვებია.

როგორც ცნობილია, $n \geq 1$ ხარისხის მრავალწევრს აქვს ერთი ნული მაინც, ზოგად შემთხვევაში, კომპლექსური (თავი V; § 2). ვთქვათ, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $m \leq n$, რიცხვები ურთიერთგანსხვავებული მახასიათებელი მრავალწევრის ნულებია. ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი λ_j რიცხვი ავიღოთ და ჩავსვათ (23) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_j) x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= 0, \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda_j) x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= 0, \\ \vdots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_j) x_n &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

ამ განტოლებათა სისტემას აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები: $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$, რადგანაც $\det (A - \lambda_j I) = 0$. ვექტორი $X^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$ სწორედ A მატრიცის საკუთრივი ვექტორია.

თუ $A = \lambda_j I_n$ მატრიცის რანგი არის r , $r < n$, მაშინ არსებობს $n - r = k$ წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორები

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}.$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 3. კომპლექსურ წრფივ სივრცეში ყოველ წრფივ გარდაქმნას $x' = Ax$ (ყოველ A მატრიცას) აქვს ერთი საკუთრივი ვექტორი მაინც, ზოგად შემთხვევაში, კომპლექსური.

შეიძლება დამტკიცდეს, (25) მახასიათებელი განტოლების ერთი ამონახსნის შესაბამის წრფივად დამოუკიდებელ საკუთრივ ვექტორთა რიცხვი არ აღემატება ამონახსნის ჯერადობის მაჩვენებელს¹.

ადვილი შესამჩნევია, თუ A მატრიცის საკუთრივი ვექტორია x , მაშინ მისი საკუთრივი ვექტორი აგრეთვე იქნება x ვექტორის ნებისმიერი კოლინეარული ვექტორი $x^* = kx$.

მართლაც,

$$Ax^* = A(kx) = kAx = k(\lambda x) = \lambda(kx) = \lambda x^*.$$

ანუ

$$Ax^* = \lambda x^*.$$

ამ ორი ბოლო დასკვნით ადვილად დავადგენთ: თუ A მატრიცის მახასიათებელ განტოლებას აქვს ურთიერთგანსხვავებული ამონახსნები, მაშინ ყოველ ამონახსნს სიზუსტით პროპორციულობის კოეფიციენტიმდე ერთი და მხოლოდ ერთი საკუთრივი ვექტორი შეესაბამება.

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები.

შევადგინოთ (27) მატრიცის მახასიათებელი განტოლება. გვქვია

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (28)$$

ანუ

$$(3-\lambda)^3 - 7(3-\lambda) + 6 = 0.$$

¹ იხ. Б. П. Демидович и И. А. Марон, Основы вычислительной математики, М., 1963, стр. 369.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$3 - \lambda_1 = 1, \quad 3 - \lambda_2 = 2, \quad 3 - \lambda_3 = -3$$

აქმაყოფილებენ (28) განტოლებას. ამ ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 6.$$

ვიპოვოთ (27) მატრიცის საკუთრივი ვექტორი, რომელიც $\lambda_1 = 2$ საკუთრივ რიცხვს შეესაბამება. ამისათვის $\lambda = 2$ ჩავსვათ განტოლებათა სისტემაში:

$$\left. \begin{aligned} (3-\lambda)x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + (3-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (29) განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგი $r = 2$. რადგანაც ამ მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებული ელემენტებისაგან შედგენილი მეორე რიგის მინორი

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ავიღოთ (29) განტოლებათა სისტემის პირველი და მეორე განტოლება

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} x_3 = -\frac{1}{3} x_3, \quad x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} x_3 = -\frac{1}{3} x_3,$$

ანუ

$$\frac{x_1}{-\frac{1}{3}} = \frac{x_2}{-\frac{1}{3}} = \frac{x_3}{1} = t.$$

აქედან კი მივიღებთ

$$x_1 = -\frac{1}{3} t, \quad x_2 = -\frac{1}{3} t, \quad x_3 = t,$$

სადაც t ნულისაგან განსხვავებული სიდიდეა. დაეუშვათ $t=1$. მივიღებთ $\lambda_1=2$ საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი (27) მატრიცის საკუთრივ ვექტორს:

$$X^{(1)} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

სრულიად ასევე ვიპოვით (27) მატრიცის სხვა საკუთრივ ვექტორებს, რომლებიც $\lambda_2=1$, $\lambda_3=6$ საკუთრივ რიცხვებს შეესაბამებიან:

$$X^{(2)} = \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right), \quad X^{(3)} = (1, 1, 1).$$

5. წრფივი გარდაქმნის მატრიცის ცვლილება ახალ ბაზისზე გადასვლის შემთხვევაში. ზოგადობის შეუზღუდველად შეგვიძლია განვიხილოთ სიბრტყის შემთხვევა. ვთქვათ, სიბრტყეზე e_1, e_2 ბაზისში მოცემულია წრფივი გარდაქმნა

$$x' = Ax \quad (30)$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

ავიღოთ სიბრტყეზე ახალი ბაზისი

$$\tilde{e}_1 = l_{11} e_1 + l_{21} e_2, \quad (31)$$

$$\tilde{e}_2 = l_{12} e_1 + l_{22} e_2.$$

გამოვარკვეოთ, როგორ შეიცვლება ამ ბაზისში A მატრიცა.

დაეუშვათ, x ვექტორი ძველსა და ახალ ბაზისში სათანადოდ გამოისახება ტოლობებით

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

$$x = \tilde{x}_1 \tilde{e}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{e}_2,$$

მაშინ (31) დამოკიდებულებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}_1 (l_{11} e_1 + l_{21} e_2) + \tilde{x}_2 (l_{12} e_1 + l_{22} e_2) = \\ &= (l_{11} \tilde{x}_1 + l_{12} \tilde{x}_2) e_1 + (l_{21} \tilde{x}_1 + l_{22} \tilde{x}_2) e_2. \end{aligned}$$

საიდანაც

$$x_1 = l_{11} \tilde{x}_1 + l_{12} \tilde{x}_2,$$

$$x_2 = l_{21} \tilde{x}_1 + l_{22} \tilde{x}_2.$$

ამგვარად, x ვექტორი ახალ ბაზისში გამოიხატება ტოლობით

$$x = L \tilde{x}, \quad (32)$$

სადაც

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}.$$

ამავე (32) დამოკიდებულებით გამოისახება x' ვექტორი ახალ ბაზისში

$$x' = L \tilde{x}'. \quad (33)$$

შევიტანოთ (32) და (33) მნიშვნელობანი (30) ტოლობაში, მივიღებთ

$$L \tilde{x}' = A L \tilde{x}.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან გავამრავლოთ L^{-1} -ზე, გვექნება

$$L^{-1} L \tilde{x}' = L^{-1} A L \tilde{x},$$

ანუ

$$\tilde{x}' = L^{-1} A L \tilde{x} = \tilde{A} \tilde{x}, \quad (34)$$

ცხადია, ასეთივე დამოკიდებულებას მივიღებთ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ახალ ბაზისზე გადასვლის შემთხვევაში.

ამგვარად, დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 4. თუ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში გადავალთ ახალ ბაზისზე $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n$,

$$e_1 = l_{11} e_1 + l_{21} e_2 + \dots + l_{n1} e_n,$$

$$e_2 = l_{12} e_1 + l_{22} e_2 + \dots + l_{n2} e_n,$$

$$\dots$$

$$\tilde{e}_n = l_{1n} e_1 + l_{2n} e_2 + \dots + l_{nn} e_n,$$

მაშინ ვექტორთა ნებისმიერი წრფივი გარდაქმნის მატრიცა A შეიცვლება მატრიცით $\tilde{A}$,

$$\tilde{A} = L^{-1} A L,$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

(34) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\det \tilde{A} = \det L^{-1} \cdot \det A \cdot \det L = \det L^{-1} \cdot \det L \cdot \det A = \\ = \det (L^{-1} L) \det A = \det J \cdot \det A,$$

ანუ

$$\det \tilde{A} = \det A.$$

ამგვარად, n -განზომილებიან სივრცეში ვექტორთა წრფივი გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტის მნიშვნელობა დამოუკიდებელია ბაზისის არჩევისაგან.

6. მეორე რიგის კვადრატული მატრიცის მიუვანა დიაგონალურ სახეზე. ორცვლადიანი კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე მიუვანა.

განვიხილოთ სიბრტყეზე ვექტორთა წრფივი გარდაქმნა (30)

$$x' = Ax,$$

სადაც

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

A მატრიცის საკუთრივი ვექტორი განისაზღვრება შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 = 0, \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 = 0, \end{cases} \quad (35)$$

ხოლო A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები განისაზღვრება განტოლებიდან

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

ვთქვათ, A სიმეტრიულია, $a_{12} = a_{21}$, მაშინ ამ განტოლებიდან გამარტივებით მივიღებთ

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = 0,$$

საიდანაც

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \right]. \quad (36)$$

შევნიშნოთ, რომ

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

ამრიგად, თუ A მატრიცა სიმეტრიულია, მაშინ მახასიათებელ განტოლებას აქვს მხოლოდ ნამდვილი ამონახსნები.

განვსაზღვროთ საკუთრივი ვექტორები. λ_1 -სათვის გვექნება

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1) x_1 + a_{12} x_2 = 0, \\ a_{12} x_1 + (a_{22} - \lambda_1) x_2 = 0. \end{cases}$$

ამ განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{x_1}{a_{12}} = - \frac{x_2}{a_{11} - \lambda_1} = t,$$

ანუ

$$x_1 = a_{12} t, \quad x_2 = (\lambda_1 - a_{11}) t,$$

სადაც t ნებისმიერია. ამგვარად, განვსაზღვრეთ ერთი საკუთრივი ვექტორი $x_1 = (a_{12} t, (\lambda_1 - a_{11}) t)$, რომლის სიგრძე ნებისმიერია. შევარჩიოთ t ისე, რომ ამ ვექტორის სიგრძე 1-ის ტოლი იყოს.

$$(a_{12} t)^2 + ((\lambda_1 - a_{11}) t)^2 = 1,$$

საიდანაც

$$t = \frac{1}{\pm \sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_1 - a_{11})^2}}.$$

ამ ორი ნიშნიდან ერთი ნიშანი ავიღოთ. მაგალითად, დადებითი ნიშანი. ამგვარად, განვსაზღვრეთ ერთი საკუთრივი ვექტორი

$$e'_1 = (l_1, m_1),$$

სადაც

$$l_1 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_1 - a_{11})^2}}, \quad m_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_1 - a_{11})^2}}. \quad (37)$$

ცხადია, (l_1, m_1) საკუთრივი ვექტორი აკმაყოფილებს (35) განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} a_{11} l_1 + a_{12} m_1 = \lambda_1 l_1, \\ a_{21} l_1 + a_{22} m_1 = \lambda_1 m_1. \end{cases} \quad (38)$$

სრულიად ასევე განვსაზღვრავთ A მატრიცის მეორე საკუთრივი ვექტორს

$$e'_{21} = (l_2, m_2),$$

სადაც

$$l_2 = \frac{\lambda_2 - a_{22}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_2 - a_{22})^2}}, \quad m_2 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_2 - a_{22})^2}}. \quad (39)$$

აქაც ავიღეთ t დადებითი ნიშნით. ცხადია, (l_2, m_2) საკუთრივი ვექტორი აკმაყოფილებს (35) განტოლებათა სისტემას:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} l_2 + a_{12} m_2 &= \lambda_2 l_2, \\ a_{21} l_2 + a_{22} m_2 &= \lambda_2 m_2. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ e_1' და e_2' ურთიერთპერპენდიკულარულია. მართლაც, (37)–(40) ტოლობათა საფუძველზე მივიღებთ

$$e_1' \cdot e_2' = [(\lambda_2 - a_{22}) + (\lambda_1 - a_{11})] D = [(\lambda_1 + \lambda_2) - (a_{11} + a_{22})] D = 0,$$

სადაც

$$D = \frac{a_{12}}{\sqrt{[a_{12}^2 + (\lambda_1 - a_{11})^2][a_{12}^2 + (\lambda_2 - a_{22})^2]}}.$$

ამგვარად, e_1' და e_2' ვექტორები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\left. \begin{aligned} |e_1'|^2 &= l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad |e_2'|^2 = l_2^2 + m_2^2 = 1 \\ e_1' \cdot e_2' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$, ადვილად შეგვიძლია ვაჩვენოთ:

$$l_1 = m_2, \quad m_1 = -l_2. \quad (42)$$

(41) პირობების შესრულების შემთხვევაში ვიტყვი e_1' და e_2' ვექტორები A მატრიცის ორთონორმირებული საკუთრივი ვექტორებია.

(42) პირობიდან გამომდინარეობს

$$\det L = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = l_1 m_2 - l_2 m_1 = m_2^2 + l_2^2 = 1.$$

ამ შემთხვევაში ორთონორმირებული ვექტორები e_1' და e_2' , e_1 და e_2 ერთი და იგივე ორიენტაციისაა, $\angle e_1 o e_2 = \angle e_1' o e_2'$. ანუ ვექტორები e_1 და e_2 , e_1' და e_2' , რომლებიც $Ox_1 x_2$ კოორდინატთა სისტემის სათავედანაა გადაღებული, e_1' ვექტორი რომ e_2' ვექტორს შეუთავსდეს, e_1' ვექტორი იმავე მიმართულებით უნდა მოვაბრუნოთ O წერტილის გარშემო, რომ იგი e_2' ვექტორს შეუთავსდეს, როგორი მიმართულებითაც e_1 ვექტორი, რომ იგი e_2 ვექტორს შეუთავსდეს. ამ წინადადების ჰეშმარიტებაში ადვილად დავრწმუნდებით. თუ (42) პირობას 1-ლი პუნქტის მე-2 ცხრილში მოცემულ სიდიდეებს შევადარებთ. ამ შედარებით მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos \alpha, \quad l_2 = -\sin \alpha, \\ m_1 &= \sin \alpha, \quad m_2 = \cos \alpha. \end{aligned} \right\}$$

ეს დამოკიდებულებანი მე-2 ნახაზის საფუძველზე მართლაც იძლევა e_1 , e_2 ბაზისიდან e_1' , e_2' ბაზისზე გადასვლას ისე, რომ e_1 ვექტორი a კუთხით მობრუნებით e_2 ვექტორს შეუთავსდება და იმავე მიმართულებით და a კუთხით e_1' ვექტორი შეუთავსდება e_2' ვექტორს.

გამოვიყენოთ მატრიცის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი რიცხვები ე. წ. კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე მისაყვანად.

n -ცვლადიანი კვადრატული ფორმა ეწოდება მეორე ხარისხის n -ცვლადიან მრავალწევრს

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k.$$

კვადრატული ფორმის ისეთ სახეს, რომელიც ცვლადთა მხოლოდ კვადრატებს შეიცავს. ეწოდება კვადრატული ფორმის კანონიკური სახე.

განვიხილოთ ორცვლადიანი კვადრატული ფორმა

$$\Phi(x) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2. \quad (43)$$

კვადრატული ფორმა (43) ასე გადავწეროთ

$$\Phi(x) = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) x_1 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) x_2, \quad a_{12} = a_{21}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

მაშინ $\Phi(x)$ ფუნქცია ასე ჩაიწერება

$$\Phi(x) = x_1 x_1' + x_2 x_2'.$$

მივიღოთ, რომ $\Phi(x)$ ფუნქცია $x = (x_1, x_2)$ და $x' = (x_1', x_2')$ ვექტორების სკალარული ნამრავლია,

$$\Phi(x) = (x, x'). \quad (45)$$

ამგვარად, (44) ცვლადთა წრფივი გარდაქმნით

$$x' = Ax,$$

სადაც A სიმეტრიული მატრიცაა, $a_{12} = a_{21}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

კვადრატული ფორმა $\Phi(x)$ წარმოადგინეთ x და x' ვექტორთა სკალარუ-

ლი ნამრავლით. თუ ვისარგებლებთ A მატრიცის x ვექტორ-სვეტზე გამრავლებით, გვექნება

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}.$$

ასე რომ, Ax მატრიცა ვექტორ-სვეტია,

$$Ax = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2).$$

ამის გამო (45) გამოსახულება შეგვიძლია ჩავწეროთ x და Ax ვექტორთა სკალარული ნამრავლით

$$\Phi(x) = (x, Ax). \quad (46)$$

განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევა.

1) A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები ურთიერთგანსხვავებულია, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. შევცვალოთ e_1, e_2 ბაზისი ახალი e'_1, e'_2 ბაზისით, სადაც e'_1, e'_2 ვექტორები A მატრიცის ორთონორმირებული საკუთრივი ვექტორებია.

$$e'_1 = (l_1, m_1),$$

$$e'_2 = (l_2, m_2).$$

e'_1 და e'_2 ვექტორების განსაზღვრის თანახმად

$$\left. \begin{aligned} a_{11}l_1 + a_{12}m_1 &= \lambda_1 l_1, \\ a_{21}l_1 + a_{22}m_1 &= \lambda_1 m_1, \\ l_1^2 + m_1^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} a_{11}l_2 + a_{12}m_2 &= \lambda_2 l_2, \\ a_{21}l_2 + a_{22}m_2 &= \lambda_2 m_2, \\ l_2^2 + m_2^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad l_1l_2 + m_1m_2 = 0.$$

ახლა e'_1, e'_2 ბაზისში (46) სკალარული ნამრავლი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\Phi(x) = (x', \tilde{A}x'),$$

სადაც

$$\tilde{A} = L^{-1}AL; \quad L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix},$$

გამოვთვალოთ $\tilde{A}$ მატრიცა. ჯერ გამოვთვალოთ AL მატრიცა. A და e_1, e_2 ვექტორების განსაზღვრის თანახმად (38) და (40) ტოლობების საფუძველზე გვექნება

$$\begin{aligned} AL &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}l_1 + a_{12}m_1 & a_{11}l_2 + a_{12}m_2 \\ a_{21}l_1 + a_{22}m_1 & a_{21}l_2 + a_{22}m_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 l_1 & \lambda_2 l_2 \\ \lambda_1 m_1 & \lambda_2 m_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ახლა გამოვთვალოთ $L^{-1}AL$ მატრიცა. e'_1 და e'_2 ვექტორთა ორთონორმირებით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} L^{-1}AL &= \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 l_1 & \lambda_2 l_2 \\ \lambda_1 m_1 & \lambda_2 m_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (l_1^2 + m_1^2)\lambda_1 & (l_1l_2 + m_1m_2)\lambda_2 \\ (l_1l_2 + m_1m_2)\lambda_1 & (l_2^2 + m_2^2)\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$L^{-1}AL = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

ამის გამო

$$\tilde{A}x' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x'_1 \\ \lambda_2 x'_2 \end{bmatrix} = (\lambda_1 x'_1, \lambda_2 x'_2).$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობა $\Phi(x)$ გამოსახულებაში, გვექნება

$$\Phi(x) = (x', \tilde{A}x') = x'_1 \cdot \lambda_1 x'_1 + x'_2 \cdot \lambda_2 x'_2 = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2.$$

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 2. დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე შემდეგი კვადრატული ფორმა

$$\Phi(x) = 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 13x_2^2. \quad (47)$$

ამოხსნა. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 13 - \lambda & -5 \\ -5 & 13 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

საიდანაც

$$(13 - \lambda)^2 - 25 = 0.$$

ამ განტოლებიდან მივიღებთ

$$\lambda_1 = 18, \quad \lambda_2 = 8.$$

ვიპოვოთ საკუთრივი ვექტორი. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} (13 - \lambda_1)x_1 - 5x_2 &= 0, \\ -5x_1 + (13 - \lambda)x_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$\lambda_1 = 18$ -ისათვის გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} (13 - 18)x_1 - 5x_2 &= 0, \\ -5x_1 + (13 - 18)x_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

ე. ი. უნდა ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} -5x_1 - 5x_2 = 0, \\ -5x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$$

გვექნება

$$x_1 = t, \quad x_2 = -t,$$

სადაც t ნებისმიერია, $t \neq 0$.

$\lambda_1 = 8$ -სათვის გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} (13-8)x_1 - 5x_2 = 0, \\ -5x_1 + (13-8)x_2 = 0, \end{cases}$$

საიდანაც

$$x_1 = \tau, \quad x_2 = \tau,$$

τ ნებისმიერია, $\tau \neq 0$.

$\lambda_1 = 18$ საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის ნორმირებით გვექნება

$$x_1^2 + x_2^2 = t^2 + t^2 = 1,$$

საიდანაც ავიღოთ $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ამის გამო საკუთრივი პირველი ნორმირებული ვექტორი იქნება

$$e'_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

ასევე მეორე საკუთრივი ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$, რომლის შედეგადაც მეორე საკუთრივი ვექტორი იქნება

$$e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

ამგვარად, ახალი ბაზისი ვექტორებია

$$e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

ამ ახალ ბაზისში x ვექტორი შემდეგნაირად გამოისახება

$$\dot{x} = Lx',$$

სადაც

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

ხოლო

$$\Phi(x) = (x', \tilde{A}x'),$$

სადაც

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= L^{-1}AL = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ $\tilde{A}x'$.

$$\tilde{A}x' = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18x'_1 \\ 8x'_2 \end{bmatrix} = (18x'_1, 8x'_2).$$

ახალ ბაზისში კვადრატული ფორმა (47) მიიღებს კანონიკურ სახეს:

$$\Phi(x) = (x', \tilde{A}x') = 18x_1'^2 + 8x_2'^2. \quad (48)$$

ცხადია, საკუთრივი ვექტორების მიმართულებანი შეგვიძლია შევცვალოთ საწინააღმდეგო მიმართულებით, ან ვექტორები ურთიერთ შევცვალოთ. ეს მხოლოდ (48) გამოსახულებაში კოეფიციენტთა ადგილმონაცვლებას გამოიწვევს.

2). A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები $\lambda_1 = \lambda_2$. ეს საკუთრივი რიცხვი λ ასოთი აღვნიშნოთ,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1.$$

მაგრამ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ პირობით (36) ტოლობიდან მივიღებთ

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0,$$

საიდანაც

$$a_{11} - a_{22} = 0, \quad a_{12} = 0.$$

ასე რომ,

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22}}{2},$$

ხოლო ამ საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი განისაზღვრება განტოლებიდან

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + 0 \cdot x_2 = 0.$$

ეს კი გვიჩვენებს, ნებისმიერი x ვექტორი A მატრიცის საკუთრივი ვექტორია. ამ შემთხვევაში წრფივი გარდაქმნა წარმოიდგინება ფორმულებით

$$x'_1 = \lambda x_1,$$

$$x'_2 = \lambda x_2.$$

ასეთი წრფივი გარდაქმნა მსგავსი გარდაქმნაა, მსგავსების კოეფიციენტი λ . როდესაც A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები $\lambda_1 = \lambda_2$, მაშინ კვადრატული ფორმა (43) უკვე კანონიკური სახითაა მოცემული.

3) A მატრიცის ერთი საკუთრივი რიცხვი ნულის ტოლია: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. ამ შემთხვევაში ტოლობიდან

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

გამომდინარეობს

$$a_{12}^2 = a_{11} a_{22}.$$

ამ ტოლობით მივიღებთ, რომ (43) კვადრატული ფორმა სრული კვადრატია,

$$\Phi(x) = (a_{11} x_1 + a_{22} x_2)^2.$$

A მატრიცის ერთი საკუთრივი ვექტორი განისაზღვრება (36) ფორმულებით,

$$e'_1 = \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_1 - a_{11})^2}}, \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_1 - a_{11})^2}} \right).$$

ეს ვექტორი მივიღოთ ახალი ბაზისის ერთ ვექტორად, ხოლო მეორე ვექტორად ავიღოთ ამ ვექტორის ორთონორმირებული ვექტორი

$$e'_2 = \left(\frac{a_{11} - \lambda_1}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_1 - a_{11})^2}}, \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_1 - a_{11})^2}} \right).$$

ამ ახალ ბაზისში e'_1, e'_2 კვადრატული ფორმა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\Phi(x) = \lambda_1 x'^2.$$

7. სიბრტყეზე მეორე რიგის წირის განტოლების გამარტივება.

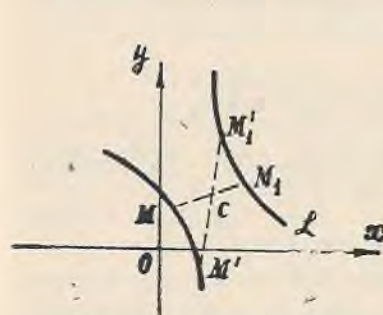
ვთქვათ, მოცემულია სიბრტყეზე წირის ზოგადი განტოლება

$$F(x, y) \equiv a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0. \quad (49)$$

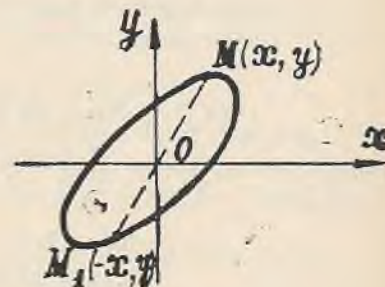
ჩვენი მიზანია, დავიყვანოთ (49) განტოლება კანონიკურ სახეზე და ამით გამოვარკვიოთ წირის სახე.

ჩერ განესაზღვროთ წირის ცენტრი. წირის ცენტრი ეწოდება იმ წერტილს, რომლის მიმართ წირის ნებისმიერ წერტილს აქვს სიმეტრიული წერტილი წირზე.

L წირის ცენტრია C წერტილი, თუ L წირზე მდებარე ნებისმიერი M წერტილისათვის არსებობს M_1 წერტილი, სიმეტრიული M წერტილის მიმართ, $MC = CM_1$ და ეკუთვნის L წირს (ნახ. 5).



ნახ. 5



ნახ. 6

ვთქვათ, მოცემულია წირის განტოლება

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_{33} = 0. \quad (50)$$

ამ განტოლებაში ისაა შესანიშნავი, რომ არ შეიცავს ცვლადებს პირველ ხარისხში. წირს, რომლის განტოლებაა (50), აქვს შემდეგი თვისება: თუ $M(x, y)$ წერტილი ეკუთვნის ამ წირს, მასვე ეკუთვნის წერტილი $M_1(-x, -y)$ (ნახ. 6). წერტილები M და M_1 სიმეტრიული წერტილებია კოორდინატთა სათავეს მიმართ. მაშასადამე, წირი (50) ცენტრიანია და მისი ცენტრი კოორდინატთა სათავეა.

თუ გამოვალთ წირის (49) განტოლებიდან და დავუშვებთ ამ წირის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა, მაშინ (49) განტოლება არ უნდა შეიცავდეს ცვლადებს პირველ ხარისხში.

ამრიგად, მეორე რიგის წირი ცენტრიანია და ცენტრი კოორდინატთა სათავეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი განტოლება (50) სახისაა.

(49) განტოლების მარცხენა მხარე შეიცავს

1) კვადრატულ ფორმას

$$\Phi(x, y) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2,$$

2) წრფივ ფორმას

$$2 a_{13} x + 2 a_{23} y,$$

3) თავისუფალ წევრს a_{33} -ს.

შევაღებინოთ კვადრატული ფორმის მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

ვთქვათ, $\det A \neq 0$, ე. ი. კვადრატული ფორმის მატრიცა გადაუგვარებელია.

ვიპოვოთ A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები. ამისათვის ვისარგებლოთ (31) განტოლებით, საიდანაც

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}].$$

A მატრიცის საკუთრივი ვექტორები განვსაზღვროთ (30) განტოლებათა სისტემიდან

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y = 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

ეს საკუთრივი ვექტორები ურთიერთ პერპენდიკულარულია, თუ $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(49) განტოლების კვადრატული ფორმის A მატრიცის საკუთრივ ვექტორთა მიმართულებებს ეწოდება (49) განტოლებით გამოსახული წირის მთავარი მიმართულებანი.

ავილოთ შემდეგი წრფივი გარდაქმნა

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y', \end{cases} \quad (51)$$

სადაც x_0 და y_0 ზერ ცნობილი არაა.

(49) განტოლება (51) წრფივი გარდაქმნით შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$a_{11}(x_0 + x')^2 + 2a_{12}(x_0 + x')(y_0 + y') + a_{22}(y_0 + y')^2 + 2a_{13}(x_0 + x') + 2a_{23}(y_0 + y') + a_{33} = 0,$$

ანუ

$$\Phi(x', y') + 2\bar{a}_{13}x' + 2\bar{a}_{23}y' + \bar{a}_{33} = 0, \quad (52)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \Phi(x', y') &= a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2, \\ \bar{a}_{13} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ \bar{a}_{23} &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \\ \bar{a}_{33} &= F(x_0, y_0). \end{aligned}$$

შევარჩიოთ x_0 და y_0 ისე, რომ

$$\bar{a}_{13} = 0, \quad \bar{a}_{23} = 0,$$

ანუ

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან განისაზღვრება x_0 და y_0 , რადგანაც პირობის თანახმად $\det A \neq 0$. ამგვარად შერჩეულ x_0 და y_0 საფუძველზე, (52) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \bar{a}_{33} = 0.$$

ამ განტოლებიდან ადვილად დავასკვნით, (49) განტოლებით მოცემული წირის ცენტრი ახალ კოორდინატთა $O'x'y'$ სისტემაში კოორდინატთა სათავეა $O'(0, 0)$. (51) დამოკიდებულებიდან კი მივიღებთ, (49) წირის ცენტრია (x_0, y_0) წერტილი.

ამგვარად, თუ (49) განტოლების კვადრატული ფორმის მატრიცა A გადაუგვარებელია, $\det A \neq 0$, მაშინ წირი ცენტრიანია და ცენტრის კოორდინატები (53) განტოლებათა სისტემიდან განისაზღვრება.

(49) წირის (x_0, y_0) ცენტრზე გავატაროთ A მატრიცის საკუთრივი ვექტორების პარალელური წრფეები. საკუთრივი ვექტორების მიმართულებანი განისაზღვრებიან განტოლებებიდან:

$$\begin{cases} a_{21}x + (a_{22} - \lambda_1)y = 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda_2)y = 0. \end{cases}$$

საიდანაც

$$k_1 = \frac{a_{12}}{\lambda_1 - a_{22}}, \quad k_2 = \frac{a_{12}}{\lambda_2 - a_{22}}.$$

(x_0, y_0) წერტილზე გამავალი საკუთრივი ვექტორების პარალელურ წრფეთა განტოლებანი იქნება

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_1(x - x_0), \\ y - y_0 &= k_2(x - x_0). \end{aligned}$$

ამ წრფეებს (49) წირის მთავარი დიამეტრები ეწოდება. მთავარი დიამეტრები ურთიერთპერპენდიკულარულია. მართლაც,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

ამის გამო

$$k_1 k_2 = \frac{a_{12}^2}{\lambda_1 \lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)a_{22} + a_{22}^2} = \frac{a_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - (a_{11} + a_{22})a_{22} + a_{22}^2} = -1.$$

ცხადია, ეს ფაქტი საკუთრივ ვექტორთა პერპენდიკულარობის პირობიდან გამომდინარეობს.

(49) წირის მთავარი დიამეტრების განტოლებანი ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} x_0 - \frac{1}{k_1} y_0 - x + \frac{1}{k_1} y &= 0, \\ y_0 - k_2 x_0 + k_2 x - y &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\begin{aligned} x' &= \bar{x}_0 - x + \frac{1}{k_1} y, \\ y' &= \bar{y}_0 + k_2 x - y, \end{aligned}$$

სადაც

$$\bar{x}_0 = x_0 - \frac{1}{k_1} y_0, \quad \bar{y}_0 = y_0 - k_1 x_0, \quad (55)$$

მაშინ (49) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + F(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0.$$

მაგალითი 3. მივიყვანოთ უმარტივეს სახეზე წირის შემდეგი განტოლება

$$F(x, y) \equiv x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y = 0. \quad (56)$$

ჯერ ვიპოვოთ ცენტრი:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} y + 1 = 0, \\ -\frac{1}{2} x + y - 2 = 0, \end{cases}$$

საიდანაც

$$x = 0, \quad y = 2.$$

ვიპოვოთ საკუთრივი რიცხვები. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლება

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda, & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

ამ განტოლებიდან მივიღებთ

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი მიიღება განტოლებებიდან

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}y = 0, \\ -\frac{1}{2}x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)y = 0. \end{cases}$$

გვექნება

$$x = t, \quad y = t,$$

სადაც t ნებისმიერია, $t \neq 0$.

ასევე

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{3}{2}\right)x - \frac{1}{2}y = 0, \\ -\frac{1}{2}x + \left(1 - \frac{3}{2}\right)y = 0. \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ მეორე საკუთრივ ვექტორს:

$$x = -\tau, \quad y = \tau,$$

სადაც τ ნებისმიერია, $\tau \neq 0$.

საკუთრივ ვექტორთა ნორმირებით მივიღებთ ვექტორებს

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (57)$$

მთავარი დიამეტრების საკუთხო კოეფიციენტები განისაზღვრება საკუთრივი ვექტორებით:

$$k_1 = \frac{a_{12}}{\lambda_1 - a_{22}}, \quad k_1 = 1; \quad k_2 = \frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}}, \quad k_2 = -1.$$

მთავარი დიამეტრების განტოლებები იქნება

$$y - 2 = x, \quad y - 2 = -x,$$

ანუ

$$x - y + 2 = 0, \quad x + y - 2 = 0. \quad (5.8)$$

გარდავქმნათ ცვლადები:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y', \\ y &= 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y', \end{aligned}$$

მაშინ (39) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 - 4 = 0,$$

ანუ

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{\frac{8}{3}} = 1. \quad (59)$$

მივიღეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, რომლის O_1x' ღერძის განტოლებაა

$$x - y + 2 = 0,$$

ხოლო O_1y' ღერძის განტოლებაა

$$x + y - 2 = 0.$$

(56) წირი აგებულია მე-7 ნახაზზე.

ცხადია, როდესაც λ_1 და λ_2 ერთი და იგივე ნიშნისაა, მეორე რიგის წირი ელიფსია. თუ λ_1 და λ_2 სხვადასხვა ნიშნისაა, მაშინ მეორე რიგის წირი ჰიპერბოლაა.

განვიხილოთ შემთხვევა, $\lambda_1 = \lambda_2$.

მაგალითი 4. გავამარტივოთ

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \quad (60)$$

განტოლება და ავაგოთ სათანადო წირი.

მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

მოგვცემს

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

(60) წირი წრეწირია. მისი განტოლება ასე გადავწეროთ

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

გარდაქმნით

$$x = x' + 3, \quad y = y' + 4$$

მივიღებთ (60) წირის კანონიკურ განტოლებას:

$$x'^2 + y'^2 = 25.$$

განვიხილოთ შემთხვევა: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$.

მაშინ (31) მახასიათებელი განტოლებიდან მივიღებთ

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

საიდანაც

$$a_{21}^2 = a_{11} a_{22},$$

ხოლო

$$\lambda_1 = a_{11} + a_{22}.$$

საკუთრივი ვექტორი განისაზღვრება განტოლებათა სისტემიდან

$$\left. \begin{aligned} [a_{11} - (a_{11} + a_{22})] x + a_{12} y &= 0, \\ a_{12} x + [a_{22} - (a_{11} + a_{22})] y &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ ანუ } \left. \begin{aligned} a_{22} x - a_{12} y &= 0, \\ -a_{12} x + a_{11} y &= 0, \end{aligned} \right\}$$

საიდანაც

$$x = a_{11} t, \quad y = a_{12} t.$$

ნორმირება მოგვცემს

$$(a_{11} t)^2 + (a_{12} t)^2 = 1,$$

ანუ

$$a_{11}^2 t^2 + a_{11} a_{22} t^2 = 1,$$

საიდანაც

$$t = \frac{1}{\pm \sqrt{a_{11}^2 + a_{11} a_{22}}}.$$

ნორმირებული საკუთრივი ვექტორის კოორდინატები იქნება

$$x = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{11} a_{22}}} = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{11} + a_{22}}}, \quad y = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{11} a_{22}}} = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11} + a_{22}}}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$a_{11} = \alpha^2, \quad a_{22} = \beta^2, \quad (61)$$

მაშინ საკუთრივი ვექტორი იქნება

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right). \quad (62)$$

ამ საკუთრივი ვექტორის პერპენდიკულარული ვექტორი იქნება

$$\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right). \quad (63)$$

33. გ. კომლაძე

მეორე რიგის ზოგადი სახის (49) განტოლება (61) აღნიშვნით, სადაც $a_{12}^2 = \alpha^2 \beta^2$, ასე შევვიძლია გადავწეროთ

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

ანუ

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (64)$$

გარდაქმნით

$$x = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} x' + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} y',$$

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} x' + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} y'$$

(64) განტოლება მოგვცემს

$$(\alpha^2 + \beta^2) y'^2 + 2\bar{a}_{13}x' + 2\bar{a}_{23}y' + a_{33} = 0, \quad (65)$$

სადაც

$$\bar{a}_{13} = \frac{a_{23}\alpha - a_{13}\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \bar{a}_{23} = \frac{a_{13}\alpha + a_{23}\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

შემდეგი ახალი გარდაქმნით

$$x' = x'' + x'_0, \quad y' = y'' + y'_0$$

(65) განტოლება მიიღებს სახეს

$$(\alpha^2 + \beta^2) y''^2 + 2\bar{a}'_{13}x'' + 2\bar{a}'_{23}y'' + \bar{a}'_{33} = 0, \quad (66)$$

სადაც

$$\bar{a}'_{13} = \bar{a}_{13},$$

$$\bar{a}'_{23} = (\alpha^2 + \beta^2) y'_0 + \bar{a}_{23} = (\alpha^2 + \beta^2) y'_0 + \frac{a_{13} + a_{23}\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}'_{33} &= (\alpha^2 + \beta^2) y_0'^2 + 2\bar{a}_{13}x'_0 + 2\bar{a}_{23}y'_0 + a_{33} = \\ &= 2\frac{a_{23}\alpha - a_{13}\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} x'_0 + \left(\alpha^2 + \beta^2 + 2\frac{a_{13}\alpha + a_{23}\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) y_0' + a_{33}. \end{aligned} \quad (68)$$

იმისათვის, რომ (66) განტოლებას ჰქონდეს უმარტივესი სახე x'_0 და y'_0 ისე ავარჩიოთ, რომ $\bar{a}'_{23}$ და $\bar{a}'_{33}$ გახდეს ნული, ანუ

$$(\alpha^2 + \beta^2) y'_0 + \frac{a_{13}\alpha + a_{23}\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 0, \quad (69)$$

$$2\frac{a_{23}\alpha - a_{13}\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} x'_0 + \left(\alpha^2 + \beta^2 + 2\frac{a_{13}\alpha + a_{23}\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) y'_0 + a_{33} = 0, \quad (70)$$

x'_0 და y'_0 ასე არჩევის შედეგად (56) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$(\alpha^2 + \beta^2) y''^2 + 2\bar{a}'_{13}x'' = 0, \quad (71)$$

ანუ

$$y''^2 = 2px'',$$

სადაც

$$p = -\frac{\bar{a}'_{13}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

(71) განტოლება გამოსახავს პარაბოლას, რომლის სიმეტრიის ღერძია x'' — მთავარი დიამეტრი, ხოლო y'' ღერძის პარაბოლას სათავეში ეხება.

მაგალითი 5. გავამარტივოთ წირის შემდეგი განტოლება

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4y - 11 = 0 \quad (72)$$

და ავაგოთ წირი.

განტოლება ასე გადავწეროთ

$$(x + y)^2 - 8x + 4y - 11 = 0.$$

კვადრატული ნაწილისათვის შევადგინოთ მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(72) წირი პარაბოლურია. ვიპოვოთ A მატრიცის მახასიათებელი რიცხვები. გვქვია

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0.$$

განვსაზღვროთ საკუთრივი ვექტორი. ამისათვის შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda)x + y &= 0, \\ x + (1 - \lambda)y &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ ანუ } \left. \begin{aligned} -x + y &= 0, \\ x - y &= 0, \end{aligned} \right\},$$

საიდანაც

$$x = t, \quad y = t.$$

ნორმირებით, მივიღებთ

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1, \quad \sqrt{2}t = 1, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ამგვარად, საკუთრივი ნორმირებული ვექტორია

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

ავიღოთ ამ ვექტორის პერპენდიკულარული ვექტორი

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

შემოვიღოთ გარდაქმნა

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y', \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'. \end{aligned} \quad (73)$$

(რადგანაც განტოლებას გვინდა მივცეთ სახე $y^2 = 2px$).
გვექნება

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{2}{\sqrt{2}} y', \\ -8x + 4y &= -8\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right) + \\ &+ 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right) = -\frac{12}{\sqrt{2}} x' - \frac{4}{\sqrt{2}} y'. \end{aligned}$$

ამგვარად, (72) განტოლება მიიღებს სახეს

$$2y'^2 - \frac{12}{\sqrt{2}} x' - \frac{4}{\sqrt{2}} y' - 11 = 0. \quad (74)$$

ახლა გარდაქმნით

$$\begin{aligned} x' &= x'_0 + x'', \\ y' &= y'_0 + y'' \end{aligned}$$

(74) განტოლება მოგვცემს

$$2(y'_0 + y'')^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}(x'_0 + x'') - \frac{4}{\sqrt{2}}(y'_0 + y'') - 11 = 0,$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} 2y''^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}x'' + \left(4y'_0 - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)y'' + \left(-\frac{12}{\sqrt{2}}x'_0 + 2y'_0^2 - \right. \\ \left. - \frac{4}{\sqrt{2}}y'_0 - 11\right) = 0. \end{aligned}$$

შევარჩიოთ x'_0 და y'_0 , ისე, რომ

$$\begin{aligned} 4y'_0 - \frac{4}{\sqrt{2}} &= 0, \\ -\frac{12}{\sqrt{2}}x'_0 + 2y'_0^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}y'_0 - 11 &= 0. \end{aligned}$$

საიდანაც

$$y'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x'_0 = -\sqrt{2}.$$

(73)-დან განვსაზღვროთ x_0 და y_0 :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}, \\ y_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

შევადგინოთ მთავარი დიამეტრის განტოლება. მთავარი დიამეტრის მიმართულება საკუთრივი ვექტორი მიმართულებისა და ვაივლის $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ წერტილზე:

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

ანუ

$$y - \frac{3}{2} = -\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

საიდანაც

$$x + y - 1 = 0.$$

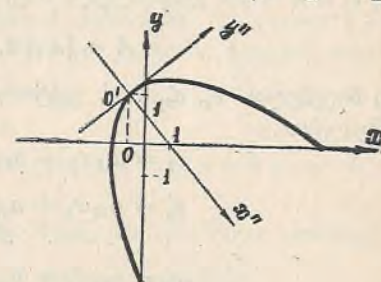
(72) პარაბოლა გამოსახულია მე-8 ნახაზზე. პარაბოლის განტოლებაა

$$y''^2 = 3\sqrt{2}x''.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 20.

გამარტივებთ შემდეგი წირების განტოლებანი და ააგეთ წირები:

- 1) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$,
- 2) $5x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$,



ნახ. 8

- 3) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 6x - 3y + 5 = 0$,
- 4) $3x^2 - 7xy - 6x^2 + 3x - 9y + 5 = 0$,
- 5) $4x^2 + 8xy - 2y^2 - 7 = 0$,
- 6) $2xy - 4x - 2y + 3 = 0$,
- 7) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + y - 1 = 0$,
- 8) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$,
- 9) $4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0$,
- 10) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = 0$.

§ 4. წრფივი გარდაქმნა n -განზომილებიან სივრცეში. მატრიცის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი რიცხვები. კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე მიყვანა.

1. წრფივი გარდაქმნა n -განზომილებიან სივრცეში. წინა პარაგრაფის მე-2 პუნქტში განვსაზღვრეთ n -განზომილებიან სივრცეში $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორის წრფივი გარდაქმნა

$$x' = Ax, \quad (1)$$

სადაც A n რიგის კვადრატული მატრიცაა,

$$A = [a_{ij}] \quad i, j = \overline{1, n}.$$

თუ მოცემულია $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ვექტორების ბაზისი $e_1, e_2, \dots, e_n$ ვექტორების საშუალებით,

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n,$$

$$e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n,$$

$$\dots$$

$$e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n,$$

მაშინ n -განზომილებიან სივრცეში განსაზღვრულია ვექტორთა გარდაქმნა

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n,$$

$$\dots$$

$$x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n.$$

თუ განვიხილავთ ვექტორთა გადაუგვარებელ წრფივ გარდაქმნას, $\det A \neq 0$, მაშინ შეგვიძლია განვიხილოთ (1) გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა

$$x = A^{-1}x', \quad (2)$$

სადაც

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}, \dots, A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}, \dots, A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n}, \dots, A_{nn} \end{bmatrix}.$$

წრფივი (1) გარდაქმნა ცალსახად განისაზღვრება A მატრიცით და ამის გამო (1) გარდაქმნას A გარდაქმნას ეწოდებთ და ვამბობთ: A გარდაქმნით x ვექტორი გვაძლევს x' ვექტორს. x' ვექტორს x ვექტორის სახეს ეწოდებთ, ხოლო x ვექტორს x' ვექტორის წინასახეს.

ჩვენთვის ცნობილია მატრიცათა შეკრება, მატრიცის სკალარზე გამრავლება და მატრიცის მატრიცაზე გამრავლება. ამის საფუძველზე შეგვიძლია A და B წრფივ გარდაქმნებზე შემდეგი მოქმედებანი ვაწარმოოთ:

1) A და B წრფივ გარდაქმნათა შეკრება, $(A+B)x = Ax + Bx$;

2) A გარდაქმნის α სკალარზე გამრავლება, $(\alpha A)x = \alpha Ax$;

3) A და B წრფივ გარდაქმნათა ნამრავლი, $(AB)x = A(Bx)$.

ძნელი არაა იმის შემოწმება, რომ წრფივ გარდაქმნათა ჯამი, წრფივი გარდაქმნის სკალარზე ნამრავლი და წრფივ გარდაქმნათა ნამრავლი წრფივი გარდაქმნაა.

არანულოვან x ვექტორს ეწოდება A მატრიცის საკუთრივი ვექტორი, თუ A წრფივი გარდაქმნით ეს ვექტორი გადადის თავის კოლინეარულ λx ვექტორში,

$$Ax = \lambda x, \quad (3)$$

სადაც λ რიცხვია. λ -ს ეწოდება A მატრიცის საკუთრივი რიცხვი.

2. მატრიცის კვადრატული ფორმა. ჩვენთვის ცნობილია კომპლექსური რიცხვთა $z = \alpha + i\beta$, $\bar{z} = \alpha - i\beta$ შემდეგი თვისებები:

$$1) \quad z + \bar{z} = 2\alpha,$$

$$2) \quad z\bar{z} = |z|^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$3) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$4) \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

$$5) \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

ვთქვათ, n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში მოცემული გვაქვს ორი ვექტორი

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

რომელთა კოორდინატები საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვებია

$$x_j = \alpha_j + i\beta_j, y_j = \gamma_j + i\delta_j, j = \overline{1, n}.$$

x და y ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება

$$\text{რიცხვს, რომელიც ტოლია } \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}.$$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}. \quad (4)$$

ადვილი შესამჩნევია, თუ განვიხილავთ ნამდვილ ვექტორებს (ვექტორებს, რომელთა კოორდინატები მხოლოდ ნამდვილი რიცხვებია), $x_j = \alpha_j, y_j = \gamma_j, \overline{y_j} = \gamma_j$, მაშინ სკალარული ნამრავლი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \gamma_j.$$

კომპლექსურ რიცხვთა მე-2 თვისების საფუძველზე სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისება

$$(x, x) = \sum_{j=1}^n x_j \overline{x_j} = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \geq 0.$$

ცხადია, ნებისმიერი ვექტორის ნულოვან ვექტორზე სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია

$$(x, 0) = \sum_{j=1}^n x_j 0 = 0, (0, 0) = 0$$

და, თუ $(x, x) = 0$, მაშინ $x_j = 0, j = \overline{1, n}$ და, მაშასადამე, $x = 0$. სკალარულ ნამრავლში ადგილები შევუცვალოთ x და y ვექტორებს, გვექნება:

$$(y, x) = \sum_{j=1}^n y_j \overline{x_j} = \sum_{j=1}^n \overline{x_j y_j}.$$

ვისარგებლოთ კომპლექსურ რიცხვთა მე-3 მე-5 თვისებებით, მივიღებთ

$$(y, x) = \sum_{j=1}^n \overline{x_j y_j} = \overline{\sum_{j=1}^n x_j y_j} = \overline{\sum_{j=1}^n x_j \overline{\overline{y_j}}} = \overline{\sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}} = \overline{(x, y)},$$

ანუ

$$(y, x) = \overline{(x, y)}. \quad (5)$$

ამგვარად, ვექტორთა სკალარულ ნამრავლში მამრავლთა ადგილმონაცვლებით სკალარული ნამრავლი იცვლება სკალარული ნამრავლის შეუღლებული სიდიდით.

განვიხილოთ სკალარული ნამრავლი (Ax, y) , სადაც A მატრიცა ნამდვილუქმენტებია. ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ავიღოთ $n=3$,

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \sum_{j=1}^3 (Ax)_j \overline{y_j} = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 a_{jk} x_k \right) \overline{y_j} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{jk} x_k \overline{y_j} = \\ &= (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) \overline{y_1} + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) \overline{y_2} + \\ &+ (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) \overline{y_3} = a_{11} x_1 \overline{y_1} + a_{12} x_2 \overline{y_1} + a_{13} x_3 \overline{y_1} + \\ &+ a_{21} x_1 \overline{y_2} + a_{22} x_2 \overline{y_2} + a_{23} x_3 \overline{y_2} + a_{31} x_1 \overline{y_3} + a_{32} x_2 \overline{y_3} + a_{33} x_3 \overline{y_3}. \quad (6) \end{aligned}$$

განოსახულებას (Ax, y) ეწოდება A მატრიცის ბილინეარული (ორადწრფივი) ფორმა. A მატრიცის ბილინეარული ფორმა არ შეიცვლება, თუ ჯერ (6) გამოსახულების სვეტებში მყოფ წევრებს შევკრებთ და შემდეგ მიღებულ ჯამებს შევკრებთ:

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= (a_{11} x_1 \overline{y_1} + a_{21} x_1 \overline{y_2} + a_{31} x_1 \overline{y_3}) + \\ &+ (a_{12} x_2 \overline{y_1} + a_{22} x_2 \overline{y_2} + a_{32} x_2 \overline{y_3}) + \\ &+ (a_{13} x_3 \overline{y_1} + a_{23} x_3 \overline{y_2} + a_{33} x_3 \overline{y_3}) = \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{kj} x_j \overline{y_k}. \quad (7) \end{aligned}$$

ამგვარად, A მატრიცის ბილინეარული ფორმა $\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{jk} x_k \overline{y_j}$ არ შეიცვლება, თუ შეჯამების რიგს შევცვლით და ამასთან ადგილებს შევუცვლით შეჯამების ინდექსებს, $\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{kj} x_j \overline{y_k}$.

(5) და (7) ტოლობათა საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{kj} x_j \overline{y_k} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \overline{\overline{a_{kj} x_j \overline{y_k}}} = \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \overline{a_{kj} y_k \overline{x_j}} = \overline{(A'y, x)} = (x, A'y), \end{aligned}$$

$$(Ax, y) = (x, A'y). \quad (8)$$

ამგვარად, ნამდვილემენტებიანი A მატრიცა (Ax, y) სკალარულ ნამრავლებში შეიძლება გადავადგილოთ, მაგრამ A უნდა შევცვალოთ მისი ტრანსპონირებული A' მატრიცით.

თუ A მატრიცა ნამდვილემენტებიანია და სიმეტრიული, $A=A'$, მაშინ (8) ტოლობა მოგვცემს

$$(Ax, y) = (x, Ay). \quad (9)$$

ამგვარად, სკალარული ნამრავლი (Ax, y) არ შეიცვლება A მატრიცის გადაადგილებით, თუ A მატრიცა ნამდვილემენტებიანია და სიმეტრიული.

ახლა დავამტკიცოთ

თეორემა 1. ნამდვილემენტებიანი სიმეტრიული მატრიცის საკუთრივი რიცხვები ნამდვილი რიცხვებია.

დამტკიცება. ვთქვათ, A მატრიცის საკუთრივი რიცხვია λ და საკუთრივი ვექტორია x ,

$$Ax = \lambda x.$$

რადგანაც A მატრიცა სიმეტრიულია, $A=A'$, ჰერმიტიუმი (9) ტოლობა. ამ ტოლობაში ჩავსვათ $y=x$, მივიღებთ

$$(Ax, x) = (x, Ax). \quad (10)$$

მაგრამ $Ax=\lambda x$, ამის გამო (10) ტოლობა მოგვცემს

$$(\lambda x, x) = (x, \lambda x). \quad (11)$$

ვისარგებლოთ თვისებებით

$$(\lambda x, x) = \lambda (x, x), (x, \lambda x) = (x, x) \bar{\lambda}.$$

მაშინ (11) ტოლობა მოგვცემს

$$\lambda (x, x) = \bar{\lambda} (x, x).$$

რადგანაც საკუთრივი x ვექტორი არანულოვანია, $(x, x) \neq 0$, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$\lambda = \bar{\lambda},$$

ე. ი. λ ნამდვილი რიცხვია.

ამგვარად, ნამდვილემენტებიანი სიმეტრიულ მატრიცას მხოლოდ ნამდვილი საკუთრივი რიცხვები აქვს.

ამ თეორემიდან ცხადია, ნამდვილემენტებიანი სიმეტრიულ A მატრიცის მახასიათებელ განტოლებას $\det(A-\lambda I)=0$ მხოლოდ ნამდვილი ამონახსნები აქვს.

თეორემა 2. ნამდვილემენტებიანი სიმეტრიული მატრიცის საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც განსხვავებულ საკუთრივ რიცხვებს შეესაბამებიან, ურთიერთპერპენდიკულარულია.

მართლაც, განვიხილოთ ნამდვილემენტებიანი სიმეტრიული A მატრიცის $\lambda_j \neq \lambda_k$ საკუთრივი რიცხვები,

$$Ax^{(j)} = \lambda_j x^{(j)}, \quad (12)$$

$$Ax^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}, \quad (13)$$

სადაც

$$x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}), \quad x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}).$$

სათანადოდ λ_j, λ_k საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი A მატრიცის საკუთრივი ვექტორებია.

შევადგინოთ სკალარული ნამრავლი

$$(Ax^{(k)}, x^{(j)}) = (x^{(k)}, Ax^{(j)}).$$

ამ ტოლობიდან (12) და (13) ტოლობების საფუძველზე მივიღებთ

$$(\lambda_k x^{(k)}, x^{(j)}) = (x^{(k)}, \lambda_j x^{(j)}),$$

საიდანაც

$$\lambda_k (x^{(k)}, x^{(j)}) = (x^{(k)}, x^{(j)}) \bar{\lambda}_j.$$

მაგრამ $\bar{\lambda}_j = \lambda_j$, ამის გამო გვქნება

$$\lambda_k (x^{(k)}, x^{(j)}) = \lambda_j (x^{(k)}, x^{(j)}).$$

ამ ტოლობიდან მივიღებთ

$$(\lambda_k - \lambda_j) (x^{(k)}, x^{(j)}) = 0.$$

რადგანაც $\lambda_k \neq \lambda_j$, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$(x^{(k)}, x^{(j)}) = 0.$$

მაშასადამე, A მატრიცის საკუთრივი ვექტორები $x^{(j)}$ და $x^{(k)}$ ურთიერთ პერპენდიკულარულია.

რადგანაც ნამდვილემენტებიანი სიმეტრიულ მატრიცას მხოლოდ ნამდვილი საკუთრივი რიცხვები აქვს, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ამ მატრიცის საკუთრივი ვექტორებიც ნამდვილია. წინა პარაგრაფის მე-4

პუნქტში ნაჩვენები იყო, თუ მატრიცის საკუთრივი ვექტორია x , მაშინ მისი საკუთრივი ვექტორია kx -იც, სადაც k ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია. შევარჩიოთ k ისე, რომ kx ვექტორის სიგრძე 1-ის ტოლი იყოს:

$$|k| \cdot |x| = 1,$$

საიდანაც

$$k = \pm \frac{1}{|x|}.$$

ამ მნიშვნელობიდან ავიღოთ ერთი მნიშვნელობა $k = \frac{1}{|x|}$.

ამრიგად, A მატრიცის ნორმირებული საკუთრივი ვექტორი იქნება

$$x = \left(\frac{x_1}{|x|}, \frac{x_2}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|} \right).$$

შ. კვადრატული ფორმა. კანონიკურ სახეზე მიყვანა. ავიღოთ n -განზომილებიანი ნამდვილი ვექტორული სივრცე. ამ სივრცეში განვიხილოთ ნამდვილევმენტებიანი სიმეტრიული A მატრიცის ბილინეარული ფორმა

$$(A x, y) = \sum_{j=1}^n (A x)_j y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k y_j.$$

ამ გამოსახულებაში ჩავსვათ $y = x$, გვექნება

$$(A x, x) = \sum_{j=1}^n (A x)_j x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k x_j.$$

მიღებულ გამოსახულებას ეწოდება კვადრატული ფორმა (ფუნქცია). ადვილი შესამჩნევია, $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების კვადრატული ფორმა არის $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების მეორე ხარისხის ერთგვაროვანი მრავალწევრი. თუ კვადრატული ფორმა მხოლოდ ცვლადთა კვადრატებს შეიცავს, მაშინ მას კვადრატული ფორმის კანონიკური ან ნორმალური სახე ეწოდება.

ჩვენი მიზანია, ცვლადთა ისეთი გარდაქმნა ავირჩიოთ, რომ კვადრატული ფორმა კანონიკურ სახეზე დავიყვანოთ. სიმარტივისათვის განვიხილოთ სამცვლადიანი კვადრატული ფორმა.

$$\Phi(x) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2.$$

ეს კვადრატული ფორმა შემდეგნაირად გადავწეროთ

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) x_1 + \\ &+ (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) x_2 + \\ &+ (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) x_3, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Phi(x) = (A x, x).$$

სადაც A ნამდვილევმენტებიანი სიმეტრიული მატრიცაა, $a_{ij} = a_{ji}$,

$$A = [a_{ij}], \quad i, j = \overline{1, 3}.$$

განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევა.

1) A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები ურთიერთგანსხვავებულია

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

ვთქვათ, ამ საკუთრივ რიცხვთა ნორმირებული (ორთონორმირებული) საკუთრივი ვექტორებია

$$e'_i = (l_i, m_i, n_i), \quad i = \overline{1, 3}.$$

განვიხილოთ შემდეგი წრფივი გარდაქმნა

$$\begin{aligned} x'_1 &= l_1 x_1 + m_1 x_2 + n_1 x_3, \\ x'_2 &= l_2 x_1 + m_2 x_2 + n_2 x_3, \\ x'_3 &= l_3 x_1 + m_3 x_3 + n_3 x_3 \end{aligned} \quad (15)$$

ანუ

$$x' = L x,$$

სადაც

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}.$$

საკუთრივი ვექტორების განსაზღვრის თანახმად, $e'_i, i = \overline{1, 3}$, ვექტორების კოორდინატები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$\left. \begin{aligned} a_{11} l_i + a_{12} m_i + a_{13} n_i &= \lambda_i l_i, \\ a_{21} l_i + a_{22} m_i + a_{23} n_i &= \lambda_i m_i, \\ a_{31} l_i + a_{32} m_i + a_{33} n_i &= \lambda_i n_i, \end{aligned} \right\}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (16)$$

რადგანაც საკუთრივი ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული და ნორმირებულია, გვექნება:

$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1, \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1, \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0, \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0, \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0. \end{aligned}$$

ამ თვისებათა საფუძველზე ადვილი მისაღებია

$$L \cdot L' = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ანუ

$$L L' = I$$

საიდანაც

$$L^{-1} = L'.$$

ამგვარად, შეგვიძლია განვიხილოთ (15) წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული წრფივი გარდაქმნა:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l_1 x'_1 + l_2 x'_2 + l_3 x'_3, \\ x_2 &= m_1 x'_1 + m_2 x'_2 + m_3 x'_3, \\ x_3 &= n_1 x'_1 + n_2 x'_2 + n_3 x'_3. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (14) კვადრატულ ფორმაში, იგი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\Phi(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2. \quad (18)$$

გამოთვლების გასამარტივებლად ჯერ გამოვთვალოთ (14) გამოსახულების ფრჩხილებში მოთავსებული მნიშვნელობანი (17) ფორმულების საფუძველზე.

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= (a_{11} l_1 + a_{12} m_1 + a_{13} n_1) x'_1 + \\ &+ (a_{11} l_2 + a_{12} m_2 + a_{13} n_2) x'_2 + \\ &+ (a_{11} l_3 + a_{12} m_3 + a_{13} n_3) x'_3. \end{aligned}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (16)-ს, გვექნება:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = \lambda_1 l_1 x'_1 + \lambda_2 l_2 x'_2 + \lambda_3 l_3 x'_3. \quad (19)$$

სრულიად ასევე გვექნება:

$$\begin{aligned} a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= \lambda_1 m_1 x'_1 + \lambda_2 m_2 x'_2 + \lambda_3 m_3 x'_3, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= \lambda_1 n_1 x'_1 + \lambda_2 n_2 x'_2 + \lambda_3 n_3 x'_3. \end{aligned} \quad (20)$$

ახლა გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) x_1 &= \\ &= (\lambda_1 l_1 x'_1 + \lambda_2 l_2 x'_2 + \lambda_3 l_3 x'_3) x_1 = \\ &= (\lambda_1 l_1 x'_1 + \lambda_2 l_2 x'_2 + \lambda_3 l_3 x'_3) (l_1 x'_1 + l_2 x'_2 + l_3 x'_3) = \\ &= \lambda_1 l_1^2 x_1'^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) l_1 l_2 x'_1 x'_2 + \lambda_2 l_2^2 x_2'^2 + \\ &+ (\lambda_1 + \lambda_3) l_1 l_3 x'_1 x'_3 + (\lambda_2 + \lambda_3) l_2 l_3 x'_2 x'_3 + \lambda_3 l_3^2 x_3'^2. \end{aligned}$$

ასევე გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) x_2 &= \\ &= (\lambda_1 m_1 x'_1 + \lambda_2 m_2 x'_2 + \lambda_3 m_3 x'_3) (m_1 x'_1 + m_2 x'_2 + m_3 x'_3) = \\ &= \lambda_1 m_1^2 x_1'^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) m_1 m_2 x'_1 x'_2 + \lambda_2 m_2^2 x_2'^2 + \\ &+ (\lambda_1 + \lambda_3) m_1 m_3 x'_1 x'_3 + (\lambda_2 + \lambda_3) m_2 m_3 x'_2 x'_3 + \lambda_3 m_3^2 x_3'^2, \\ (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) x_3 &= \lambda_1 n_1^2 x_1'^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) n_1 n_2 x'_1 x'_2 + \\ &+ \lambda_2 n_2^2 x_2'^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) n_1 n_3 x'_1 x'_3 + (\lambda_2 + \lambda_3) n_2 n_3 x'_2 x'_3 + \\ &+ \lambda_3 n_3^2 x_3'^2. \end{aligned}$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობანი (14)-ში, გვექნება

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \lambda_1 (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) x_1'^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) x'_1 x'_2 + \\ &+ \lambda_2 (l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) x_2'^2 + (\lambda_1 + \lambda_3) (l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3) x'_1 x'_3 + \\ &+ (\lambda_2 + \lambda_3) (l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3) x'_2 x'_3 + \lambda_3 (l_3^2 + m_3^2 + n_3^2) x_3'^2. \end{aligned} \quad (21)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ e'_1, e'_2, e'_3 ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია და $|e'_i|^2 = 1, i = 1, 2, 3$. ჩუ. ი. e'_1, e'_2, e'_3 ორთონორმირებული ვექტორებია, (21) ტოლობა მოგვცემს

$$\Phi(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2.$$

ამით (18) ტოლობის მართებულობა დამტკიცდა.

2) ახლა განვიხილოთ შემთხვევა: A მატრიცის საკუთრივ რიცხვებს შორის ზოგიერთი ურთიერთტოლია. მაგალითად, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$.

მოვნახოთ λ_1 -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი. ვთქვათ, ეს ვექტორია e'_1 . ასევე მოვნახოთ λ_2 შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი e'_2 . ეს

ვექტორი e_1' ვექტორის პერპენდიკულარულია, რადგანაც $\lambda_1 \neq \lambda_2$. ვიგულისხმობთ, ეს ვექტორები ნორმირებულია. რადგანაც λ_2 ორჯერადი ამონახსნია მახასიათებელი $\det(A - \lambda I) = 0$ განტოლებისა, მახასიათებელი მატრიცის რანგი $r(A - \lambda I) = 1$. ამის გამო

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda_2) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= 0, \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda_2) x_2 + a_{23} x_3 &= 0, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \lambda_2) x_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

განტოლებათა სისტემაში მხოლოდ ერთი განტოლება იქნება წრფივად დამოუკიდებელი, დანარჩენი განტოლებანი ამ განტოლების შედეგია. ეს მდგომარეობა მაგალითების განხილვის დროს გამოირკვევა. საზოგადოდ, თუ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ განტოლების λ_j ამონახსნი k ჯერადობისაა, მაშინ $A - \lambda_j I_n$ მატრიცის რანგი $r(A - \lambda_j I_n) = n - k$.

ვთქვათ, (22) განტოლებათა სისტემიდან განტოლება

$$(a_{11} - \lambda_2) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0 \quad (23)$$

წრფივად დამოუკიდებელია. ეს განტოლება $Ox_1x_2x_3$ კოორდინატთა სისტემაში კოორდინატთა სათავეზე გამავალი სიბრტყის განტოლებაა. ამ სიბრტყეში მდებარე $\vec{OM} = (x_1, x_2, x_3)$ ნებისმიერი ვექტორი A მატრიცის λ_2 საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორია. სიბრტყეში მდებარე ვექტორთათვის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი 2-ის ტოლია. ნებისმიერი ორი არაკოლინეარული ვექტორი შეგვიძლია მივიღოთ სიბრტყეში მდებარე ვექტორთა ბაზის ვექტორებად. მოვნახოთ (23) სიბრტყეში ორი ურთიერთპერპენდიკულარული ვექტორი. ამისათვის ჯერ მოვნახოთ ნებისმიერი ვექტორი, რომელიც ამ სიბრტყეშია და შემდეგ ამ ვექტორის პერპენდიკულარული ვექტორი. მაგრამ, უმჯობესია შემდეგი გზით მოვნახოთ (23) სიბრტყეში e_1' და e_2' ვექტორების პერპენდიკულარული ვექტორი. ავიღოთ e_1' და e_2' ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი $[e_1', e_2']$. სწორედ ეს ვექტორული ნამრავლი იქნება A მატრიცის λ_2 საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი მეორე საკუთრივი ვექტორი.

ამგვარად, მოვნახეთ A მატრიცის ურთიერთპერპენდიკულარული ერთეულის ტოლი სიგრძეების საკუთრივი ვექტორები $e_i' = (l_i, m_i, n_i)$, $i = 1, 3$. ამ ვექტორთა კოორდინატებით შევადგინოთ L მატრიცა. გარდაქმნა $x = L^{-1}x_1$ (14) კვადრატულ ფორმას მიიყვანს შემდეგ კანონიკურ სახეზე

$$\Phi(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2.$$

3) ვთქვათ, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. ამ შემთხვევაში გარდაქმნა $x' = Ax$ იძლევა შემდეგს:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = \lambda x_1,$$

$$a_{22} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = \lambda x_2,$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = \lambda x_3,$$

სადაც λ აღნიშნავს $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ მნიშვნელობას. ეს გარდაქმნა სივრცეში განსაზღვრავს მსგავსებას კოეფიციენტით λ . ამ შემთხვევაში სივრცის ყოველი ვექტორი λ რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორია. მოვნახოთ სივრცეში სამი ურთიერთპერპენდიკულარული ერთეულის ტოლი სიგრძეების ვექტორები. შევადგინოთ ამ ვექტორთა კოორდინატებისაგან L მატრიცა. მაშინ $x = L^{-1}x'$ გარდაქმნა (14) კვადრატულ ფორმას მიიყვანს შემდეგ სახეზე

$$\Phi(x) = \lambda x_1'^2 + \lambda x_2'^2 + \lambda x_3'^2.$$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის საფუძველზე შეიძლება მიეთითოს კვადრატული ფორმის

$\Phi(x) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3$ კანონიკურ სახეზე მიყვანის შემდეგი გზა: შევადგინოთ მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

ეს მატრიცა ნამდვილევმენტებიანი და სიმეტრიულია $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. შევადგინოთ A მატრიცის მახასიათებელი განტოლება $\det(A - \lambda I) = 0$. ამ განტოლებას აქვს ნამდვილი ამონახსნები λ_1 , λ_2 , λ_3 . ეს ამონახსნებია A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები, განვსაზღვროთ

$$\left\{ \begin{aligned} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= 0, \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + a_{23} x_3 &= 0, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \lambda) x_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

განტოლებათა სისტემიდან საკუთრივი ვექტორები. მოვახდინოთ ამ ვექტორთა ნორმირება. მივიღებთ

$$e_1 = (l_1, m_1, n_1),$$

$$e_2 = (l_2, m_2, n_2),$$

$$e_3 = (l_3, m_3, n_3).$$

შევადგინოთ ამ ვექტორთა კოორდინატებისაგან მატრიცა

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}.$$

შევადგინოთ L მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა $L' = L^{-1}$.

გარდაქმნით $x = L^{-1} x'$ მოცემული კვადრატული ფორმა მიიღებს კანონიკურ სახეს:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2.$$

განვიხილოთ მაგალითები (მაგალითები ამოღებულია წიგნიდან Н. Е. Ефимов, Квадратичные формы и матрицы, М. 1967).

მაგალითი 1. დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე შემდეგი კვადრატული ფორმა:

$$\Phi(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3. \quad (24)$$

შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162.$$

ამ პრავალწევრის ნულებია

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 9.$$

განვსაზღვროთ საკუთრივი ვექტორები:

$$\left. \begin{aligned} (7-\lambda)l - 2m &= 0, \\ -2l + (6-\lambda)m - 2n &= 0, \\ -2m + (5-\lambda)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$\lambda_1 = 3$ -სათვის (25) განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} -4l - 2m &= 0, \\ -2l + 3m - 2n &= 0, \\ -2m + 2n &= 0, \end{aligned} \right\}$$

საიდანაც

$$l = A_{11}t = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} t = 2t, \quad m = A_{12}t = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} t = 4t, \\ n = A_{13}t = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} t = 4t.$$

ნორმირებით მივიღებთ:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 4t^2 + 16t^2 + 16t^2 = 1,$$

საიდანაც

$$t = \frac{1}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{1}{6}.$$

ამგვარად, პირველი ნორმირებული საკუთრივი ვექტორია

$$e'_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

$\lambda_2 = 6$ -სათვის (25) განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} l - 2m &= 0, \\ -2l - 2n &= 0, \\ -2m - n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

საიდანაც

$$l = A_{11}t = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} t = -4t, \quad m = A_{12}t = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} t = 2t, \\ n = A_{13}t = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} t = 4t.$$

ნორმირებით მივიღებთ

$$(-4t)^2 + (2t)^2 + (4t)^2 = 1,$$

საიდანაც

$$t = \frac{1}{6}.$$

საკუთრივი ნორმირებული ვექტორი იქნება

$$e'_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

ასევე გამოვთვალოთ $\lambda_3 = 9$ -სათვის საკუთრივ ნორმირებული ვექტორი

$$e'_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

გარდავქმნათ ცვლადები

$$x' = Lx,$$

სადაც

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

აქედან

$$x = L^{-1} x',$$

სადაც

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}, & -\frac{2}{3}, & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(24) კვადრატული ფორმა x' ცვლადებში მიიღებს სახეს

$$\Phi(x) = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 + 9x_3'^2.$$

მაგალითი 2. მივიყვანოთ კანონიკურ სახეზე შემდეგი კვადრატული ფორმა

$$\Phi(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3. \quad (25)$$

შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & -2 - \lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

ამ განტოლების ამოხსნებია

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = -3.$$

მატრიცის საკუთრივი ვექტორები განვსაზღვროთ შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda)l + 2m - 4n &= 0, \\ 2l - (2 + \lambda)m - 2n &= 0, \\ -4l - 2m + (1 - \lambda)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ვიპოვოთ $\lambda = 6$ შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი. (26) განტოლებათა სისტემაში ჩავსვათ $\lambda = 6$, მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} -5l + 2m - 4n &= 0, \\ 2l - 8m - 2n &= 0, \\ -4l - 2m - 5n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მივიღებთ

$$l = A_{11}t = \begin{vmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} t = 36t, \quad m = A_{12}t = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} t = 18t,$$

$$n = A_{13}t = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} t = -36t.$$

სადაც t ნებისმიერია. ამგვარად, საკუთრივი ვექტორია

$$(36t, 18t, -36t).$$

ამ ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ

$$(36t)^2 + (18t)^2 + (-36t)^2 = 1,$$

საიდანაც $t = \frac{1}{18 \cdot 3}$. შევიტანოთ t -ს მნიშვნელობა საკუთრივი ვექტორის კოორდინატებში

$$e_1' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

ამგვარად, მოვნახოთ ეერთი საკუთრივი ვექტორი e_1' .

ახლა (26) განტოლებათა სისტემაში შევიტანოთ $\lambda = -3$, მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} 4l + 2m - 4n &= 0, \\ 2l + m - 2n &= 0, \\ -4l - 2m + 4n &= 0, \end{aligned} \right\}$$

ამ სამი განტოლებიდან მხოლოდ ერთი განტოლებაა დამოუკიდებელი (მატრიცის რანგი $r(A - \lambda I) = r(A - (-3)I) = 1$) ავიღოთ განტოლება

$$2l + m - 2n = 0. \quad (27)$$

ეს განტოლება $Olmn$ კოორდინატთა სისტემაში გამოსახავს სიბრტყეს. ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი (l, m, n) ვექტორი A მატრიცის საკუთრივი ვექტორია. ვიპოვოთ (27) სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთპერპენდიკულარული ვექტორი. ჯერ ვიპოვოთ ერთი ვექტორი. ამისათვის მივიღოთ $n = 0$. გვექნება

$$2l + m = 0,$$

საიდანაც $l = -\frac{m}{2}$. ამგვარად, მოვნახეთ ვექტორი $\left(-\frac{m}{2}, m, 0\right)$, რომელიც მდებარეობს (27) სიბრტყეში. ამ ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ

$$\left(-\frac{m}{2}\right)^2 + m^2 = 1,$$

საიდანაც

$$m = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

ამგვარად, მოვნახეთ მეორე საკუთრივი ვექტორი A მატრიცისა

$$e'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right).$$

ახლა ვიპოვოთ ვექტორი, რომელიც (27) სიბრტყეში მდებარეობს და e'_2 ვექტორის პერპენდიკულარულია. ვთქვათ, ეს ვექტორია (l, m, n) . გვექნება

$$\left. \begin{aligned} 2l + m - 2n &= 0, \\ l \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + m \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + n \cdot 0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მივიღებთ $l = 2m$, $n = \frac{5}{2}m$. ვექტორის $\left(2m, m, \frac{5}{2}m \right)$ ნორმირება მოგვცემს

$$(2m)^2 + m^2 + \left(\frac{5}{2}m \right)^2 = 1,$$

საიდანაც $m = \frac{2}{3\sqrt{5}}$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა საკუთრივი ვექტორის კოორდინატებში, გვექნება

$$e'_3 = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}} \right).$$

ეს ნორმირებული საკუთრივი ვექტორია A მატრიცისა.

განვსაზღვრეთ A მატრიცის ორთონორმირებული ვექტორები

$$e'_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right),$$

$$e'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right),$$

$$e'_3 = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}} \right).$$

შევადგინოთ მატრიცა

$$L = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}, & \frac{1}{3}, & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}, & \frac{2}{\sqrt{5}}, & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{5}}, & \frac{2}{3\sqrt{5}}, & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

გარდაქმნით $x = L^{-1} x'$, ანუ

$$x_1 = \frac{2}{3} x'_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} x'_2 + \frac{4}{3\sqrt{5}} x'_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{3} x'_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} x'_2 + \frac{2}{3\sqrt{5}} x'_3,$$

$$x_3 = -\frac{2}{3} x'_1 + \frac{5}{3\sqrt{5}} x'_3,$$

(25) კვადრატული ფორმა მიიყვანება კანონიკურ სახეზე

$$\Phi(x) = 6x_1'^2 - 3x_2'^2 - 3x_3'^2.$$

მაგალითი 3. მივიყვანოთ კანონიკურ სახეზე შემდეგი კვადრატული ფორმა:

$$\Phi(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2. \quad (28)$$

ამ კვადრატული ფორმის მატრიცაა

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A მატრიცის რანგი $r(A) = 1$. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

ამ განტოლების გამარტივება მოგვცემს

$$3\lambda^2 - \lambda^3 = 0,$$

საიდანაც

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

A მატრიცის საკუთრივი ვექტორები განისაზღვრება შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\left. \begin{aligned} (1-\lambda)l + m + n &= 0, \\ l + (1-\lambda)m + n &= 0, \\ l + m + (1-\lambda)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$\lambda_1 = 3$ საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\left. \begin{aligned} -2l + m + n &= 0, \\ l - 2m + n &= 0, \\ l + m - 2n &= 0, \end{aligned} \right\}$$

საიდანაც

$$\left. \begin{aligned} l = A_{11}t &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} t; & m = A_{12}t &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} t; \\ n = A_{13}t &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} t, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

სადაც t ნებისმიერია. განვსაზღვროთ (30)-დან l, m, n -ის მნიშვნელობანი. გვექნება

$$l = 3t, \quad m = 3t, \quad n = 3t. \quad (31)$$

ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ

$$(3t)^2 + (3t)^2 + (3t)^2 = 1.$$

საიდანაც

$$t = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

შევიტანოთ t მნიშვნელობა (31) გამოსახულებებში, გვექნება

$$l = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

ამგვარად $\lambda_1 = 3$ რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ნორმირებული ვექტორია

$$e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

$\lambda = 0$ -სათვის (29) განტოლებათა სისტემა მოგვცემს

$$\left. \begin{aligned} l + m + n &= 0, \\ l + m + n &= 0, \\ l + m + n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

ამ განტოლებათა სისტემაში მხოლოდ ერთი განტოლებაა წრფივად დამოუკიდებელი, სხვა განტოლებანი კი ამ ერთი განტოლების შედეგია. ავიღოთ განტოლება

$$l + m + n = 0. \quad (32)$$

ეს განტოლება $Olmn$ კოორდინატთა სისტემაში გამოსახავს სიბრტყეს. ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი ვექტორი (l, m, n) არის A მატრიცის საკუთრივი ვექტორი. ვიპოვოთ (32) სიბრტყეში მდებარე რომელიმე (l, m, n) ვექტორი. ვთქვათ, $n = 0$, მაშინ $l = -m$. ამგვარად, (32) სიბრტყეში მდებარე ვექტორია

$$(-m, m, 0).$$

ამ ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ

$$(-m)^2 + m^2 = 1,$$

საიდანაც

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ამგვარად, A მატრიცის ნორმირებული საკუთრივი ვექტორია

$$e'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

ახლა ვიპოვოთ (32) სიბრტყეში მდებარე (l, m, n) ვექტორი, რომელიც e'_2 ვექტორის პერპენდიკულარულია. ამ პირობის თანახმად გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} l + m + n &= 0, \\ l \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + m \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + n \cdot 0 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

საიდანაც $l = m, \quad n = -2m$.

ამგვარად, (32) სიბრტყეში მდებარე ვექტორი, რომელიც e'_2 ვექტორის პერპენდიკულარულია, არის ვექტორი $(m, m, -2m)$. ამ ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ

$$m^2 + m^2 + (-2m)^2 = 1,$$

საიდანაც

$$m = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

ამგვარად, (32) სიბრტყეში მდებარე მეორე ნორმირებული ვექტორია

$$e'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

A მატრიცის საკუთრივი ვექტორებით

$$\begin{aligned} e'_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \\ e'_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ e'_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned}$$

შევადგინოთ მატრიცა

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

(28) კვადრატული ფორმა გარდაქმნით $x = L^{-1}x'$, ანუ

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} x'_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} x'_3, \end{aligned}$$

დაიყვანება კანონიკურ სახეზე

$$\Phi(x) = x_1'^2.$$

განხილული მაგალითები გვიჩვენებს, რომ ყოველი სამცვლადიანი კვადრატული ფორმა წრფივი გარდაქმნით მიიყვანება კანონიკურ სახეზე.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი თეორემა

თეორემა 3. ყოველი ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმა სათანადო წრფივი გარდაქმნით დაიყვანება კანონიკურ სახეზე.

მართლაც, ავიღოთ კვადრატული ფორმა

$$\Phi(x) = (Ax, x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k x_j, \quad (33)$$

სადაც A მატრიცა ნამდვილკოეფიციენტებიანი და სიმეტრიულია,

$$A = [a_{jk}], \quad j, k = \overline{1, n}, \quad a_{jk} = a_{kj}.$$

A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები მხოლოდ ნამდვილი რიცხვებია

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

ვთქვათ, $\det A \neq 0$. A მატრიცის ორთონორმირებული ვექტორები აღვნიშნოთ

$$e^{(j)} = (e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \dots, e_n^{(j)}), \quad j = \overline{1, n}.$$

თუ A მატრიცის საკუთრივი რიცხვია λ_j , მაშინ ამ რიცხვის შესაბამისი ნორმირებული საკუთრივი $e^{(j)}$ ვექტორი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$A e^{(j)} = \lambda_j e^{(j)}. \quad (34)$$

ავიღოთ n -განზომილებიანი სივრცის ნებისმიერი ვექტორი x ,

$$x = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \sum_{j=1}^n x'_j e^{(j)},$$

სადაც $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ არის x ვექტორის კოორდინატები n -განზომილებიანი ვექტორული სივრცის ახალ ბაზისში $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$.

x ვექტორი A წრფივი გარდაქმნით მოგვცემს

$$Ax = A \sum_{j=1}^n x'_j e^{(j)} = \sum_{j=1}^n x'_j A e^{(j)} = \sum_{j=1}^n x'_j \lambda_j e^{(j)}. \quad (35)$$

შევიტანოთ (35) და (36) გამოსახულებანი (33) კვადრატულ ფორმაში, მივიღებთ

$$\Phi(x) = \left(\sum_{j=1}^n x'_j \lambda_j e^{(j)}, \sum_{j=1}^n x'_j e^{(j)} \right).$$

რადგანაც $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ორთონორმირებული ვექტორებია, უკანასკნელიდან მივიღებთ

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j'^2. \quad (36)$$

ამგვარად, კვადრატული ფორმა (33) წრფივი გარდაქმნით (35) მივიყვანეთ კანონიკურ სახეზე (37), სადაც $\det A \neq 0$.

ვთქვათ, $\det A = 0$ და A მატრიცის რანგი $r(A) = n-1$, მაშინ A მატრიცის საკუთრივი რიცხვია $\lambda = 0$, ამ შემთხვევაში განტოლებათა სისტემის

[illegible]

ნებისმიერი x ამონახსნი-ვექტორი A მატრიცის საკუთრივი ვექტორია. (37) განტოლებათა სისტემიდან ერთი ცვლადი ნებისმიერია, დანარჩენი ამ ცვლადის წრფივი ფუნქციაა. ისე შევარჩიოთ ეს ნებისმიერი ცვლადი, რომ ვექტორის $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ სივრცე ერთის ტოლი იყოს. ამით განისაზღვრება A მატრიცის $\lambda = 0$ შესაბამისი ნორმირებული საკუთრივი ვექტორი. ნულისაგან განსხვავებული საკუთრივი რიცხვებისათვის მაგალითებში განხილული ხერხით მოვეძებნით A მატრიცის სხვა ნორმირებულ საკუთრივ ვექტორებს. ასეთი ვექტორების რიცხვაა $n-1$. ამ ვექტორებს უნდა დავუმატოთ $\lambda = 0$ -სათვის განსაზღვრული ნორმირებული საკუთრივი ვექტორი, სულ გვექნება ორთონორმირებული n ვექტორი

$$\begin{aligned} e^{(1)} &= (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_n^{(1)}), \\ e^{(2)} &= (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \dots, e_n^{(2)}), \\ &\vdots \\ e^{(n)} &= (e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}). \end{aligned}$$

ამ ვექტორების კოორდინატებისაგან შევადგენთ L მატრიცას,

$$L = \begin{bmatrix} e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_n^{(1)} \\ e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \dots, e_n^{(2)} \\ \vdots \\ e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \dots, e_n^{(n)} \end{bmatrix}.$$

ცვლადთა გარდაქმნით $x = L^{-1} x'$, სადაც, $L^{-1} = L'$, (33) კვადრატული ფორმა მიიღებს კანონიკურ სახეს

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j^2. \quad (38)$$

თუ $r(A) = n-2$, მაშინ (37) განტოლებათა სისტემაში $n-2$ განტოლება წრფივად დამოუკიდებელია, საიდანაც განისაზღვრება $n-2$ ცვლადი, ხოლო ორი ცვლადი ნებისმიერია. ამ ცვლადებიდან ერთ-ერთი ნულის ტოლი ავიღოთ, მაგალითად, $x_n = 0$, და მეორე ცვლადი ისე შევარჩიოთ,

რომ $e^{(1)} = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ ვექტორის სივრცე ერთის ტოლი ვახდეს. ამგვარად განსაზღვრული ვექტორი A მატრიცის $\lambda=0$ შესაბამისი საკუთარი ვექტორი იქნება. მეორე $e^{(2)}$ ვექტორის განსაზღვრისათვის (37) განტოლებათა სისტემიდან ავიღოთ $n-2$ წრფივად დამოუკიდებელი განტოლება და ვიპოვოთ ამ განტოლებათა სისტემიდან ისეთი ამონახსნი-ვექტორი $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(1)})$, რომელიც $e^{(1)}$ ვექტორის პერპენდიკულარულია,

$$x_1 x_1^{(1)} + x_2 x_2^{(1)} + \dots + x_{n-1} x_{n-1}^{(1)} + 0 \cdot x_n^{(1)} = 0. \quad (39)$$

წინა $n-2$ განტოლებასთან ერთად (39) განტოლება მოგვცემს $n-1$ განტოლებას n ცვლადით, სადაც ერთი ცვლადი ნებისმიერ მნიშვნელობას ღებულობს. ეს ცვლადი ისე შეგარჩიოთ, რომ $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(1)})$ ვექტორის სივრცე ერთის ტოლი იყოს. ამით განვსაზღვრეთ $e^{(1)}, e^{(2)}$ ნორმირებული საკუთრივი ვექტორები. დანარჩენი ვექტორები განისაზღვრება საკუთრივი $\lambda_j, j = 1, n-2$ რიცხვების საშუალებით $(A - \lambda_j I) x = 0$ განტოლებიდან. ამგვარად, განვსაზღვრეთ A მატრიცის n საკუთრივი ნორმირებული ვექტორი, რომელთა საშუალებითაც განვსაზღვრავთ L მატრიცას. გარდაქმნით $x = L^{-1} x'$ კვადრატული ფორმა (33) მიიღებს კანონიკურ სახეს

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j x_j'^2.$$

ჩატარებული მსჯელობის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ყოველი კვადრატული ფორმა სათანადო წრფივი გარდაქმნით დაიყვანება კანონიკურ სახეზე.

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j x_j^2, \quad (40)$$

სადაც r არის მოცემული კვადრატული ფორმის მატრიცის რანგი,
 $r(A) \leq n$. ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

ავიღოთ ნამდვილყოფიენტიდან კვარატული ფორმის A მატრი-
ცის საკუთრივი რიცხვებიდან უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობანი

$$\lambda = \min (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

$$\Lambda = \max (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

მაშინ (36) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\lambda \sum_{j=1}^n x_j'^2 \leq \Phi(x) \leq \Lambda \sum_{j=1}^n x_j'^2, \quad (41)$$

მაგრამ x ვექტორი ძველ $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისში და ახალ $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ ბაზისში ასე გამოისახება

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j e^{(j)}.$$

ვექტორები $e_1, e_2, \dots, e_n$ ორთონორმირებულია, ასევე $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ ვექტორებიც ორთონორმირებულია, ამის გამო

$$(x, x) = \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad (x, x) = \sum_{j=1}^n x_j'^2.$$

(41) უტოლობა მიღებულ გამოსახლებათა საფუძველზე ასე ჩაიწერება

$$\lambda(x, x) \leq (Ax, x) \leq \Lambda(x, x) \quad (42)$$

ამით დავამტკიცეთ

თეორემა 4. ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმა (Ax, x) ნებისმიერი $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორისათვის აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\lambda(x, x) \leq (Ax, x) \leq \Lambda(x, x),$$

სადაც λ უმცირესი საკუთრივი რიცხვია A მატრიცისა, Λ უდიდესი საკუთრივი რიცხვი.

გავიხსენოთ, როცა A მატრიცის საკუთრივ ვექტორს ვეძებდით ჯერადი საკუთრივი რიცხვისათვის ან, როცა $\det A = 0$, მაგალითად, $r(A) = n - 2$, მაშინ საკუთრივი $e^{(1)}$ ვექტორის $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ კოორდინატები განისაზღვრა, როგორც x_{n-1}, x_n ცვლადების წრფივი ფუნქცია. ეს ცვლადები ნებისმიერია. ამ ცვლადებიდან ერთი ცვლადი, მაგალითად, $x_n = 0$ ავიღეთ, ხოლო მეორე ცვლადი განვსაზღვრეთ $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ ვექტორის ნორმირებით. შემდეგ მეორე $e^{(2)}$ საკუთრივი ვექტორი განვსაზღვრეთ $e^{(1)}$ ვექტორის პერპენდიკულარობის პირობის დახმარებით და ა. შ. ცხადია, შეგვეძლო აგველო $x_n = 1$, ამით შეიცვლებოდა, როგორც $e^{(1)}$ ისე $e^{(2)}$ ვექტორი. ასე რომ, თუ ერთ შემთხვევაში გვექნებოდა ცვლადთა გარდაქმნა $x' = Lx$ და კვადრატულ ფორმას დავიყვანდით (40) კანონიკურ სახეზე, მეორე შემთხვევაში ცვლადთა გარდაქმნით $y = \tilde{L}x$ იმავე კვადრატულ ფორმას მივიყვანდით სხვა კანონიკურ სახეზე, მაგალითად,

$$(Ax, x) = \sum_{k=1}^r \alpha_k y_k^2. \quad (43)$$

ვაჩვენოთ, რომ (Ax, x) კვადრატული ფორმის (40) და (43) კანონიკურ სახეებში ცვლადთა კვადრატების დადებით კოეფიციენტთა რიცხვი უცვლელია. ასევე უცვლელია ცვლადთა კვადრატების უარყოფით კოეფიციენტთა რიცხვი.

ვთქვათ,

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_s > 0, \lambda_{s+1} < 0, \dots, \lambda_r < 0;$$

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \dots, \alpha_t > 0, \alpha_{t+1} < 0, \dots, \alpha_r < 0.$$

დავუშვათ, $s \neq t$. მაგალითად, $s < t$, მაშინ იგივეობაში

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j x_j'^2 = \sum_{k=1}^r \alpha_k y_k^2 \quad (44)$$

მივცეთ ცვლადებს $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ის მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებებს

$$x'_j = e_1^{(j)} x_1 + e_2^{(j)} x_2 + \dots + e_n^{(j)} x_n = 0, \quad j = \overline{1, s}; \quad (45)$$

$$y_k = \tilde{e}_1^{(k)} x_1 + \tilde{e}_2^{(k)} x_2 + \dots + \tilde{e}_n^{(k)} x_n = 0, \quad k = \overline{t+1, r},$$

და არ აკმაყოფილებენ

$$x'_j = 0, \quad j = \overline{s+1, r}, \quad (46)$$

განტოლებებს. ასეთი $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობანი, რომელთაგან ყველა არაა ნულის ტოლი, ცხადია, არსებობენ. წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ ცვლადთა ამ მნიშვნელობებისათვის კმაყოფილდება განტოლებანი

$$x'_j = 0, \quad j = \overline{s+1, r},$$

მაშინ ეს განტოლებანი იქნებოდნენ $x_j = 0, j = \overline{1, s}$, განტოლებათა შედეგი. ეს კი შეუძლებელია, რადგანაც ვექტორები $e^{(j)}, j = \overline{1, n}$, წრფივად დამოუკიდებელია.

ცვლადთა იმ მნიშვნელობისათვის, რომელთათვისაც კმაყოფილდება (45) განტოლებათა სისტემა და არ კმაყოფილდება (46) განტოლებათა სისტემა, (44) იგივეობის მარცხენა მხარე

$$\sum_{j=s+1}^r \lambda_j x_j'^2 < 0,$$

ხოლო მარჯვენა მხარე

$$\sum_{k=1}^t \alpha_k y_k^2 \geq 0.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 5. ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმის (Ax, x) კანონიკური სახით წარმოდგენის შემთხვევაში,

$$(Ax, x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j x_j^2,$$

ცვლადთა კვადრატების დადებით კოეფიციენტთა რიცხვი და ცვლადთა კვადრატების უარყოფით კოეფიციენტთა რიცხვი დამოუკიდებელია კვადრატული ფორმის კანონიკური სახით წარმოდგენის ხერხისაგან (კვადრატული ფორმის ინერციის კანონი).

4. დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმები. ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატულ ფორმას (ნამდვილი კვადრატული ფორმა) ეწოდება არაუარყოფითი (არადადებითი) კვადრატული ფორმა, თუ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორის არანულოვანი (არატრივიალური) ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის კვადრატული ფორმა არაუარყოფით მნიშვნელობას ღებულობს,

$$(Ax, x) \geq 0 \quad ((Ax, x) \leq 0).$$

ნამდვილ კვადრატულ ფორმას (Ax, x) ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ ნებისმიერი არანულოვანი $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორისათვის

$$(Ax, x) > 0.$$

ნამდვილ კვადრატულ ფორმას (Ax, x) ეწოდება უარყოფითად განსაზღვრული, თუ ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორისათვის

$$(Ax, x) < 0.$$

ცხადია, დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმის A მატრიცის რანგი $r = n$, რადგანაც, თუ $r < n$, მაშინ შეგვიძლია ისეთი $x_1, x_2, \dots, x_n$ რიცხვები ავიღოთ, რომლებიც ერთდროულად ნულის ტოლი არაა და $(Ax, x) = 0$.

კვადრატული ფორმის (42) უტოლობის საფუძველზე ადვილი შესაძინებია, რომ ჰერმიტიუმი შემდეგი

თეორემა 6. ნამდვილი კვადრატული ფორმა (Ax, x) მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის დადებითად განსაზღვრული, როდესაც A მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი დადებითია.

ეს კრიტერიუმი, რომელთაც ნამდვილი კვადრატული ფორმის დადებითობა განისაზღვრება, პრაქტიკულად არ ვარგა იმ მიზეზით, რომ მა-

ღალი რიგის მატრიცის საკუთრივი რიცხვების მონახვა მეტად ძნელი საქმეა. ყოველი ცდა, გავშალოთ $\det(A - \lambda I)$ ჯამად, განწირულია: რადგანაც მაღალი რიგის დეტერმინანტის გაშლაში დიდი რაოდენობის წევრებია. n რიგის დეტერმინანტი $n!$ შესაქრებს შეიცავს. მაგალითად, $10! = 3\,628\,800$ და $20! \approx 2\,433 \cdot 10^{15}$.

განვიხილოთ მეთოდი, რომლის საშუალებითაც A მატრიცის საკუთრივი რიცხვების ცოდნის გარეშე დაფადგენთ ნამდვილი კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობას.

ჯერ განვიხილოთ ორცვლადიანი კვადრატული ფორმა.

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \quad (47)$$

თუ $a_{11} \neq 0$, მაშინ (47) ფორმა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$Q(x_1, x_2) = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 \right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) x_2^2,$$

ანუ

$$Q(x_1, x_2) = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 \right)^2 + \frac{1}{a_{11}^2} (a_{22}a_{11} - a_{12}^2) x_2^2.$$

ამ ტოლობიდან დავსკვნით: ორცვლადიანი ნამდვილი კვადრატული ფორმა (47) დადებითად განსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$a_{11} > 0, \quad \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| > 0. \quad (48)$$

ახლა განვიხილოთ სამცვლადიანი ნამდვილი კვადრატული ფორმა

$$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2. \quad (49)$$

ამ კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობისათვის აუცილებელია $a_{11} > 0$. რადგანაც, თუ (49) გამოსახულებაში ჩავსვათ $(x_1, 0, 0)$, მივიღებთ $a_{11}x_1^2$, რომელიც დადებითად განსაზღვრულია, თუ $a_{11} > 0$.

(9) კვადრატული ფორმა ასე გადავწეროთ

$$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) x_2^2 + + 2 \left(a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} \right) x_2x_3 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} \right) x_3^2. \quad (50)$$

თუ (49) დადებითად განსაზღვრული ფორმაა, მაშინ დაშვებით

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = 0$$

მივიღებთ კვადრატულ ფორმას ორი ცვლადის x_2 და x_3 მიმართ:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right) x_2^2 + 2 \left(a_{23} - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{11}}\right) x_2 x_3 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}\right) x_3^2.$$

(50) კვადრატული ფორმისათვის გამოვიყენოთ (48) პირობა, მივიღებთ

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{11}} \\ a_{23} - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} \end{vmatrix} > 0. \quad (51)$$

პირველი ორი პირობა ჩვენთვის ცნობილია (48) პირობიდან, მესამე პირობა მოგვცემს

$$\frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{23} - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (52)$$

რომ მივიღოთ უკანასკნელი ტოლობა, დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ -ზე და სათანადოდ გამოვაკლოთ მეორე სტრიქონის ელემენტებს, ხოლო პირველი სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ $\frac{a_{13}}{a_{11}}$ -ზე და გამოვაკლოთ მესამე სვეტის ელემენტებს. (51) პირობა (52) ტოლობით ასე ჩაიწერება

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0. \quad (53)$$

მიღებული (53) პირობის საფუძველზე ადვილად წარმოვიდგენთ, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი

თეორემა 7. ნამდვილი კვადრატული ფორმა (Ax, x) , სადაც

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ხოლო

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის დადებითად განსაზღვრული, როდესაც

$$D_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც

$$D_k = \det [a_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

ამ პირობებს სილვესტრის¹ პირობები ეწოდება.

განსაზღვროთ მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობა.

ნამდვილელემენტებიან სიმეტრიულ მატრიცას $A = [a_{ik}]_n$ ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ შესაბამისი კვადრატული ფორმა

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

დადებითად განსაზღვრულია.

ამ განსაზღვრის შემდეგ ზემოთ დამტკიცებული თეორემები ასეც შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ:

თეორემა 6.' ნამდვილელემენტებიანი სიმეტრიული მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია მაშინ, როდესაც ამ მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი დადებითია.

თეორემა 7.' ნამდვილელემენტებიანი სიმეტრიული მატრიცა $A = [a_{ik}]_n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ

¹ ჯეიმს ჯოზეფ სილვესტრი (1814—1897), ინგლისელი მათემატიკოსი.

არის დადებითად განსაზღვრული, როდესაც

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

სავარჯიშო 21.

დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე შემდეგი კვადრატული ფორმები:

$$1) \Phi = x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2xz,$$

$$2) \Phi = x^2 + y^2 - z^2 - 4xy + 4yz - 4zx,$$

$$3) \Phi = x^2 - y^2 + z^2 - 4xy + 4yz - 6xz,$$

$$4) \Phi = x^2 - y^2 - z^2 - 4xy - 4yz,$$

$$5) \Phi = x^2 + y^2 - z^2 + 4yz.$$

§ 5. წრფივი (აფინური) n -განზომილებიანი სივრცის ძირითადი ცნებანი

1. წრფივი ვექტორული სივრცის ცნება. წრფივად დამოუკიდებლობა. აქამდე ორგანზომილებიან და სამგანზომილებიან სივრცეში გარჩეულ ზოგიერთ საკითხს ვანზოგადებდით მრავალგანზომილებიან სივრცისათვის. ახლა ცალკე განვიხილოთ n -განზომილებიანი სივრცე.

რიცხვთა დალაგებულ n -ეულს, საზოგადოდ კომპლექსურ რიცხვთა დალაგებულ n -ეულს $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ეწოდება n -განზომილებიანი სივრცის წერტილი ან ვექტორი; მოკლედ, n -განზომილებიანი ვექტორი. მაგალითად, წრფეზე თავისუფალი ვექტორები ერთგანზომილებიანი ვექტორებია, სიბრტყეზე ვექტორები ორგანზომილებიანი ვექტორებია და ა. შ. ასევე $n \times m$ განზომილებიანი მატრიცის სვეტის ელემენტები შეადგენს n -განზომილებიან ვექტორს (ვექტორი — სვეტი) სტრიქონის ელემენტები შეადგენს m -განზომილებიან ვექტორს (ვექტორი — სტრიქონი). $(0, 0, \dots, 0)$ ვექტორს 0 -ით აღვნიშნავთ და ნულოვან ვექტორს ვუწოდებთ.

განვიხილოთ მოქმედებანი ვექტორებზე.

1. ორი ვექტორი $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ტოლია, თუ ტოლია მათი კომპონენტები $x_i = y_i, i = \overline{1, n}$.

2. ვექტორების $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ჯამი ეწოდება ვექტორს

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ ვექტორთა ჯამს აქვს თვისებები:

$$1) x + y = y + x,$$

$$2) (x + y) + z = x + (y + z).$$

3. x ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი ეწოდება ვექტორს $-x$ -ს, რომელიც x ვექტორთან ჯამში იძლევა ნულოვან ვექტორს,

$$x + (-x) = 0.$$

x ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორს — x -ით აღვნიშნავთ,

$$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

4. x და y ვექტორთა სხვაობა ეწოდება x ვექტორისა და y -ის მოპირდაპირე ვექტორის ჯამს,

$$x - y = x + (-y) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$

5. x ვექტორის k რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ვექტორს

$$kx = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n).$$

ამ განსაზღვრიდან აღვილი შესამჩნევია, რომ ვექტორის რიცხვზე გამრავლებას აქვს შემდეგი თვისებები:

$$1) k(x + y) = kx + ky,$$

$$2) (k + l)x = kx + lx,$$

$$3) k(lx) = (kl)x,$$

$$4) 0 \cdot x = 0,$$

$$5) 1 \cdot x = x,$$

$$6) (-1)x = -x.$$

სადაც k და l ნებისმიერი რიცხვებია.

x და y ვექტორთა წრფივი კომბინაცია ეწოდება ვექტორს

$$\alpha x + \beta y,$$

სადაც α და β ნებისმიერი რიცხვებია.

n -განზომილებიან ვექტორთა ნებისმიერ სიმრავლეს, სადაც განიხილება წრფივი ოპერაციები: ვექტორთა შეკრება, ვექტორის რიცხვზე გამრავლება, რომლებიც არ გამოიყვანს ვექტორს ამ სიმრავლიდან, ეწოდება წრფივი ვექტორული სივრცე. ნამდვილკოორდინატებიანი n -განზომილებიანი წრფივი ვექტორული სივრცე E_n სიმბოლოთი აღვნიშნოთ (ეგვილიდეს არითმეტიკული სივრცე).

განვიხილოთ ვექტორები $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$. ამ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობენ ერთი მაინც ნული-საგან განსხვავებული რიცხვები $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ისეთი, რომ

$$\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \dots + \alpha_m x^{(m)} = 0. \quad (1)$$

ვთქვათ, $\alpha_m \neq 0$, მაშინ (1) ტოლობა მოგვცემს

$$x^{(m)} = \beta_1 x^{(1)} + \beta_2 x^{(2)} + \dots + \beta_{m-1} x^{(m-1)}, \quad \beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_m}, \quad i = \overline{1, m-1}. \quad (2)$$

ამგვარად, თუ $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ამ სისტემიდან ერთ-ერთი ვექტორი დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციაა. ცხადია, პირიქითაც, თუ ერთი ვექტორი სხვა ვექტორების წრფივი კომბინაციაა, მაშინ ვექტორთა ეს სისტემა წრფივად დამოკიდებული სისტემაა, მართლაც, (2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\beta_1 x^{(1)} + \beta_2 x^{(2)} + \dots + \beta_{m-1} x^{(m-1)} + (-1) x^{(m)} = 0.$$

რაც $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოკიდებულებას გვიჩვენებს.

ამგვარად, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ერთი ვექტორთაგანი სხვა ვექტორების წრფივი კომბინაციაა.

თუ (1) ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყველა $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, მაშინ ვექტორთა $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

გამოვარკვევით, რამდენი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორია n -განზომილებიან E_n ვექტორულ სივრცეში.

ავიღოთ ერთეული ვექტორები (მგზავები)

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

განვიხილოთ განტოლება

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0.$$

სადაც ცვლადებია $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. ამ განტოლებას მხოლოდ $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, ამოხსნები აქვს, რადგანაც განტოლებათა სისტემის

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 &= 0, \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \dots + \alpha_n \cdot 0 &= 0, \\ \vdots & \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

მატრიცის $\det A \neq 0$. ამგვარად, n -განზომილებიან სივრცეში n მგზავი წრფივად დამოუკიდებელია. ახლა ავიღოთ ვექტორთა სისტემა $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$, სადაც ვექტორთა რიცხვი $m > n$. შევადგინოთ განტოლება

$$\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \dots + \alpha_m x^{(m)} = 0,$$

ანუ

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_1^{(2)} + \dots + \alpha_m x_1^{(m)} &= 0, \\ \alpha_1 x_2^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(2)} + \dots + \alpha_m x_2^{(m)} &= 0, \\ \vdots & \\ \alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)} + \dots + \alpha_m x_n^{(m)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ამ განტოლებათა სისტემის მატრიცის სტრიქონთა რიცხვი ნაკლებია სვეტთა რიცხვზე, $n < m$, და ამ მატრიცის რანგი $r \leq \min(n, m) \leq n$. აქედან გამომდინარეობს: (3) განტოლებათა სისტემას ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები აქვს.

მაშასადამე, ვექტორთა სისტემა $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$, სადაც ვექტორთა რიცხვი m მეტია E_n სივრცის განზომილებაზე, წრფივად დამოკიდებულია. ამით დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 1. n -განზომილებიან E_n სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი ტოლია ამ სივრცის განზომილებისა.

ორგანზომილებიან სივრცეში (სიბრტყეზე) ყოველი ორი არაკოლინეარული ვექტორი წრფივად დამოუკიდებელია. სამგანზომილებიან სივრცეში ყოველი სამი არაკომპლანარული ვექტორი წრფივად დამოუკიდებელია.

ნებისმიერ წრფივად დამოუკიდებელ n ვექტორთა სისტემას n -განზომილებიან სივრცეში ეწოდება ამ სივრცის ბაზისი.

თეორემა 2. n -განზომილებიან E_n სივრცის ყოველი ვექტორი ამ სივრცის ბაზისი ვექტორების წრფივი კომბინაციით წარმოიშობება, ამასთან ერთად ერთი სახით,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

მართლაც, ვთქვათ, x ვექტორი ეკუთვნის E_n სივრცეს და ამ სივრცის ბაზისი ვექტორებია $e_1, e_2, \dots, e_n$. განვიხილოთ ვექტორთა სისტემა $x, e_1, e_2, \dots, e_n$. 1-ლი თეორემის თანახმად ეს სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი. არსებობს ისეთი $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი რიცხვი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ადვილი აქვს ტოლობას

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0. \quad (4)$$

ამ $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ რიცხვებიდან $\alpha_0 \neq 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში (4) ტოლობიდან მივიღებდით

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0, \quad (5)$$

სადაც $\alpha_i, i = \overline{1, n}$, რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ამ შემთხვევაში (5) ტოლობა შეუძლებელია, რადგანაც $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისი ვექტორებია. (4) ტოლობიდან მივიღებთ

$$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n, \quad \beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_0}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

ამგვარად E_n სივრცის ნებისმიერი x ვექტორი ამ სივრცის ბაზისი ვექტორების $e_1, e_2, \dots, e_n$ წრფივი კომბინაციაა. ვაჩვენოთ, რომ x ვექტორის (6) სახით წარმოდგენა ერთადერთია. დავუშვათ, რომ x ვექტორი წარმოდგენება შემდეგი სახითაც

$$x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n, \quad (7)$$

სადაც $\gamma_i \neq \beta_i, i = \overline{1, n}$. განვიხილოთ (6) და (7) ტოლობათა სხვაობა

$$(\beta_1 - \gamma_1) e_1 + (\beta_2 - \gamma_2) e_2 + \dots + (\beta_n - \gamma_n) e_n = 0.$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს $\beta_i - \gamma_i = 0, i = \overline{1, n}$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ბაზისი $e_1, e_2, \dots, e_n$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებული იქნებოდა. ამგვარად, $\beta_i = \gamma_i, i = \overline{1, n}$.

მაშასადამე, ნებისმიერი x ვექტორი მხოლოდ ერთადერთი სახით წარმოდგენება E_n სივრცის ბაზისი ვექტორების მიხედვით.

თუ n -განზომილებიანი E_n სივრცის ბაზისია $e_1, e_2, \dots, e_n$ და x ვექტორი წარმოდგენება

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

ტოლობით, მაშინ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვებს ეწოდება x ვექტორის კოორდინატები $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისში,

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

უჩნდა შევნიშნოთ, n -განზომილებიანი სივრცის ვექტორი განვსაზღვრეთ რიცხვთა დალაგებული n -ეულით

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

რიცხვებს $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ს x ვექტორის კოორდინატები ეწოდება. ახლა გასაგები უნდა იყოს ამ რიცხვთა მიმართ კოორდინატების სახელწოდება; x ვექტორი $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისი ვექტორების მიხედვით ასე წარმოდგენება

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

თუ ვისარგებლებთ კრონეკერის სიმბოლოთი

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i = j, \\ 0, & \text{თუ } i \neq j, \end{cases}$$

მაშინ ბაზისი ვექტორები კოორდინატებით ასე ჩაიწერება

$$e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{nj}), \quad j = \overline{1, n}.$$

განვსაზღვროთ E_n სივრცის წრფივი ქვესივრცე.

E_k ვექტორთა სიმრავლეს n -განზომილებიანი E_n სივრციდან ეწოდება E_n სივრცის წრფივი ქვესივრცე, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

1) თუ $x \in E_k$ და $y \in E_k$, მაშინ $x + y \in E_k$;

2) თუ $x \in E_k$, მაშინ $\alpha x \in E_k$, სადაც α ნებისმიერი რიცხვია. კერძოდ, ნულოვანი ვექტორი ეკუთვნის E_k -ს.

ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, E_k ვექტორთა სივრცეა. წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალურ რიცხვს k -ს ეწოდება ამ სივრცის განზომილება.

1-ლი თეორემიდან გამომდინარეობს $k \leq n$. ამგვარად, E_n სივრცის ქვესივრცეებია: ერთგანზომილებიანი E_1 , ორგანზომილებიანი E_2 და ა. შ. E_k ქვესივრცეები, ნულოვანი ვექტორი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნულგანზომილებიანი სივრცე.

ახლა გამოვარკვიოთ, რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს მოცემულ

$$x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}), \quad j = \overline{1, n}, \quad (8)$$

ვექტორთა კოორდინატები, რომ ეს ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელი იყოს. n -განზომილებიანი სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების მაქსიმალური რიცხვი არის n .

თუ ვექტორების (8) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ტოლობა

$$\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \dots + \alpha_n x^{(n)} = 0$$

ქვეშარიტია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. ამ ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_1^{(2)} + \dots + \alpha_n x_1^{(n)} &= 0, \\ \alpha_1 x_2^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(2)} + \dots + \alpha_n x_2^{(n)} &= 0, \\ &\vdots \\ \alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)} + \dots + \alpha_n x_n^{(n)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

მიღებული განტოლებანი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც განტოლებათა სისტემა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ცვლადების მიმართ. (9) განტოლებათა სის-

ტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნები აქვს მაშინ, როდესაც განტოლებათა სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (10)$$

ამგვარად, n -განზომილებიან სივრცეში ვექტორთა (8) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, თუ ამ ვექტორთა კოორდინატებისაგან შედგენილი მატრიცის დეტერმინანტი (10) ნულისაგან განსხვავდება.

ახლა განვიხილოთ საკითხი, თუ როგორ გამოვსახოთ ახალი ბაზისით მოცემული ვექტორი.

ვთქვათ, მოცემულია ვექტორი B ,

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

ახალ ბაზისად მივიღოთ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემა (8). მე-2 თეორემის თანახმად, B ვექტორი წარმოიდგინება (8) ვექტორთა წრფივი კომბინაციით

$$B = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \dots + \alpha_n x^{(n)}. \quad (11)$$

ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ სიდიდეები. (11) განტოლება კოორდინატებში მოგვცემს

$$\begin{cases} x_1^{(1)} \alpha_1 + x_1^{(2)} \alpha_2 + \dots + x_1^{(n)} \alpha_n = b_1, \\ x_2^{(1)} \alpha_1 + x_2^{(2)} \alpha_2 + \dots + x_2^{(n)} \alpha_n = b_2, \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \alpha_1 + x_n^{(2)} \alpha_2 + \dots + x_n^{(n)} \alpha_n = b_n. \end{cases} \quad (12)$$

მივიღოთ განტოლებათა სისტემა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ -ის მიმართ. (12) განტოლებათა სისტემიდან განისაზღვრება $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ცვლადების მნიშვნელობანი, რადგანაც ამ განტოლებათა სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

განვიხილოთ მაგალითი. მოცემულია ვექტორები: $a_1 = (2; 1; 1)$, $a_2 = (1; 2; 1)$, $a_3 = (1; 1; 2)$, $b = (6; 1; 5)$. ვაჩვენოთ, რომ ვექტორები a_1, a_2, a_3 ქმნის ბაზისს და მოვსახოთ b ვექტორის კოორდინატები ამ ბაზისში.

ამოხსნა: ვერ შევადგინოთ a_1, a_2, a_3 ვექტორების კოორდინატებისაგან A მატრიცა და გამოვთვალოთ ამ მატრიცის დეტერმინანტის მნიშვნელობა:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

რადგანაც A მატრიცის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, ვექტორები a_1, a_2, a_3 შეგვიძლია ავიღოთ ბაზისად სამგანზომილებიან სივრცეში. ვექტორი b ამ ბაზისში ასე წარმოიდგინება

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b. \quad (13)$$

ვიპოვოთ x_1, x_2, x_3 კოორდინატები. (13) განტოლებას მოგვცემს

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \end{cases}$$

საიდანაც

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 2.$$

ამგვარად, b ვექტორი a_1, a_2, a_3 ვექტორებით ასე წარმოიდგინება

$$b = 3a_1 - 2a_2 + 2a_3,$$

ანუ b ვექტორის კოორდინატები $Oa_1a_2a_3$ კოორდინატთა სისტემაში იქნება $(3; -2; 2)$.

2. წრფივ ერთგვაროვან განტოლებების სისტემის ამონახსნთა სივრცე. განვიხილოთ წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებების სისტემა

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = 0, \quad (14)$$

ანუ

$$Ax = 0,$$

სადაც $A = [a_{ij}]_n^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორი სვეტია.

თუ A მატრიცის დეტერმინანტი $\det A \neq 0$, მაშინ (14) განტოლებათა სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნები, $x = (0, 0, \dots, 0) = 0$.

ვთქვათ, $\det A = 0$, მაშინ (14) განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, მათ რიცხვში ნულოვანი ამონახსნებიც. ვაჩვენოთ, რომ

1) თუ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ არის (13) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი, მაშინ ამავე განტოლებათა სისტემის ამონახსნია cx , სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

მართლაც, თუ $Ax = 0$, მაშინ

$$A(cx) = cAx = 0.$$

2) თუ $x^{(1)}$ და $x^{(2)}$ არის (13) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები, მაშინ იმავე განტოლებათა სისტემის ამონახსნია $x^{(1)} + x^{(2)}$.

მართლაც, თუ $Ax^{(1)} = 0$ და $Ax^{(2)} = 0$, მაშინ

$$A(x^{(1)} + x^{(2)}) = Ax^{(1)} + Ax^{(2)} = 0.$$

ამ ორი პირობის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ: თუ $x^{(1)}$ და $x^{(2)}$ არის (14) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები, მაშინ ამავე განტოლებათა სისტემის ამონახსნია

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)},$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია. აქედან გამომდინარეობს: (14) ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა წრფივი კომბინაცია

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_k x^{(k)}$$

არის იმავე განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.

თუ მხედველობაში მივიღებთ n -განზომილებიანი ვექტორული სივრცის ქვესივრცის განსაზღვრას, გვექნება: (14) განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ვექტორული სივრცეა. ამ სივრცეს ერთგვაროვანი განტოლებების სისტემის ამონახსნთა სივრცე ეწოდება.

ასევე, თუ მხედველობაში მივიღებთ 1-ლი თეორემის პირობებს, ადვილი წარმოსადგენია, რომ ჰერმეტიკა შემდეგი

თეორემა 3. თუ n -ცვლადიანი წრფივი განტოლებების სისტემის A მატრიცის რანგი არის r , $r \leq n$, მაშინ ამ განტოლებების სისტემის ამონახსნთა სივრცის განზომილებაა $n-r$.

(14) განტოლებების სისტემის ამონახსნთა სიმრავლის ბაზისს ამ სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნები ეწოდება.

ვთქვათ, (14) განტოლებების სისტემის ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემაა

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}; x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)});$$

მაშინ (14) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები გამოისახება ფორმულით:

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_k x^{(k)}. \quad (15)$$

ვთქვათ, A მატრიცის r რიგის დეტერმინანტი, რომელიც განსხვავდება ნულისაგან, მოთავსებულია A მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში. ამის მიღწევა ადვილია განტოლებებისა და განტოლებებში წევრების ადგილმონაცვლებით.

(14) განტოლებათა სისტემიდან ავიღოთ r განტოლება და ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1r} x_r &= -a_{1, r+1} x_{r+1} - \dots - a_{1n} x_n, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2r} x_r &= -a_{2, r+1} x_{r+1} - \dots - a_{2n} x_n, \\ &\vdots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rr} x_r &= -a_{r, r+1} x_{r+1} - \dots - a_{rn} x_n \end{aligned} \quad (16)$$

ამ განტოლებათა სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი, პირობის თანახმად, ნულისაგან განსხვავდება. ამოვხსნათ ეს განტოლებათა სისტემა. მივიღებთ

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x_{r+1} + \dots + \alpha_{1, n-r} x_n, \\ x_2 &= \alpha_{21} x_{r+1} + \dots + \alpha_{2, n-r} x_n, \\ &\vdots \\ x_r &= \alpha_{r1} x_{r+1} + \dots + \alpha_{r, n-r} x_n, \end{aligned} \quad (17)$$

სადაც კოეფიციენტები $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i, n-r}$, $i = \overline{1, r}$, სრულიად გარკვეული რიცხვებია, ხოლო $x_{r+1}, \dots, x_n$ ნებისმიერ მნიშვნელობებს ღებულობენ. ვთქვათ, $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = \dots = x_n = 0$, მაშინ (17)-დან მივიღებთ

$$x_i = \alpha_{i1}, \quad i = \overline{1, r}.$$

ამგვარად, მოვნახეთ (14) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი

$$x^{(1)} = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{r1}, 1, 0, \dots, 0). \quad (18)$$

ვთქვათ, $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, $x_{r+3} = 0, \dots$, მაშინ (17) მოგვცემს

$$x_i = \alpha_{i2}, \quad i = \overline{1, r}.$$

ამგვარად, მოვნახეთ (14) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი

$$x^{(2)} = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{r2}, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

და ა. შ. მივიღებთ

$$x^{(n-r)} = (\alpha_{1, n-r}, \alpha_{2, n-r}, \dots, \alpha_{r, n-r}, 0, 0, \dots, 0, 1). \quad (19)$$

მიღებული ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია.

ამის გამო (14)-ს ამონახსნები ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_{n-r} x^{(n-r)}, \quad (20)$$

სადაც $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ ნებისმიერი მუდმივებია, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-r)}$ განისაზღვრებიან (18) — (19) ტოლობებით, ხოლო $x_{r+1} = c_1, \dots, x_n = c_{n-r}$.

ადვილი შესაძენეა, თუ როგორ უნდა ვიპოვოთ (14) განტოლებათა სისტემაში ფუნდამენტური ამონახსნები. ჯერ განვსაზღვროთ (14) განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგი r . შემდეგ ამოვწეროთ სათანადო r განტოლება და განტოლებათა მარჯვენა ნაწილში ვადავიტანოთ ის წევრები, რომლებიც შეიცავენ $x_{r+1}, \dots, x_n$ ცვლადებს. მიღებული განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ მიმდევრობით, როცა $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = 0, \dots$ შემდეგ $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, $x_{r+3} = 0$ და ა. შ. $x_{r+1} = 0, \dots, x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$. მივიღებთ $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-r)}$ ამონახსნებს, რომლებიც მოცემულ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნების სისტემა იქნება.

განვიხილოთ მაგალითი. მოვინახოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნების სისტემა:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 8x_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

შევადგინოთ ამ სისტემის კოეფიციენტთა მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

გამოთვლები მოგვცემს $\det A = 0$. A მატრიცის ელემენტთაგან შედგენილი ყველა მესამე რიგის დეტერმინანტის მნიშვნელობა ნულის ტოლია. ავიღოთ მეორე რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

(21) განტოლებათა სისტემიდან ავიღოთ პირველი და მეორე განტოლება და ასე გადავწეროთ

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -x_3 - x_4, \\ x_1 + 2x_2 &= x_3 - 5x_4. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ამ განტოლებათა სისტემაში მივიღოთ $x_3 = 1, x_4 = 0$. გვექნება

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

ამოვხსნათ ეს განტოლებათა სისტემა. მივიღებთ $x_1 = -3, x_2 = 2$

ამგვარად (22) განტოლებათა სისტემის ამონახსნია

$$x^{(1)} = (-3, 2, 1, 0).$$

ახლა (22) განტოლებათა სისტემაში ჩავსვათ $x_3 = 0, x_4 = 1$. გვექნება

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 &= -5. \end{aligned} \right\}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი $x_1 = 3, x_2 = -4$.

ამგვარად, (22) განტოლებათა სისტემის ამონახსნია

$$x^{(2)} = (3, -4, 0, 1).$$

(21) განტოლებათა სისტემის ამონახსნია

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}$$

ანუ

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია. თუ ამ ამონახსნებს ჩვეულებრივად ჩავწერთ, მივიღებთ

$$x_1 = -3c_1 + 3c_2,$$

$$x_2 = 2c_1 - 4c_2,$$

$$x_3 = c_1,$$

$$x_4 = c_2.$$

განვიხილოთ n -განზომილებიან სივრცეში განტოლება

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0, \quad a_n \neq 0. \quad (23)$$

მე-3 თეორემის თანახმად ამ განტოლების $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების ამონახსნთა სივრცის განზომილებაა $n-1$. (23) განტოლების ამონახსნთა სივრცის ეწოდება **ჰიპერსიბრტყე**.

ვთქვათ, (14) განტოლებათა სისტემის მატრიცის $r(A) = n-1$, მაშინ ამ განტოლებათა სისტემიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ $n-1$ ცვლადი ერთ ცვლადზე დამოკიდებულებით. მაგალითად,

$$x_1 = l_1 x_n, \quad x_2 = l_2 x_n, \dots, \quad x_{n-1} = l_{n-1} x_n,$$

ანუ

$$\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = \dots = \frac{x_{n-1}}{l_{n-1}} = \frac{x_n}{1}. \quad (24)$$

იმ სივრცის განზომილება, რომელსაც (24) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები განსაზღვრავს, არის $n-(n-1)=1$. (24) განტოლებათა ამონახსნების სივრცეს წრფე ეწოდება.

(23) განტოლება სამგანზომილებიან სივრცეში, $n=3$, სიბრტყის განტოლებაა, ხოლო (24) განტოლებანი მოგვცემს

$$\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = \frac{x_3}{1}.$$

ეს განტოლებები წრფის განტოლებებია.

მ. წრფივი (აფინური) n -განზომილებიანი სივრცე. ჩვენ გავეცანით ობიექტებს, რომლებზედაც წარმოებდა შეკრება და რიცხვზე გამრავლება. ასეთი ობიექტები სამგანზომილებიან სივრცეში იყო ვექტორები, ე. ი. მიმართული მონაკვეთები. ამასთან, თუ ორი მიმართული მონაკვეთი პარალელური გადატანით ერთმანეთს შეუთავსდებოდა, ეს მიმართული მონაკვეთები განსაზღვრავდნენ ერთსა და იმავე ვექტორს. ამის გამო ზელსაყრელი იყო ყველა ვექტორის გადადება ერთი და იგივე წერტილიდან. ამ წერტილს ვუწოდეთ კოორდინატთა სათავე. სათანადოდ განვსაზღვრეთ ვექტორთა ჯამი და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი. შემდეგ განვსაზღვრეთ n -განზომილებიანი ვექტორი და სამგანზომილებიანი ვექტორის ანალოგიურად განვსაზღვრეთ n -განზომილებიანი ვექტორების ჯამი და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი. ვექტორი, რომლის ყველა კოორდინატი ნულია, განსაზღვრავს ნულოვან ვექტორს, $(0, 0, \dots, 0) = 0$.

ალგებრაში გავეცანით მატრიცის ცნებას. კერძოდ გავეცანით n -რიგის კვადრატულ მატრიცას, $[a_{ik}]_n$; განვსაზღვრეთ $[a_{ik}]_n$ და $[b_{ik}]_n$ მატრიცების ჯამი, $[a_{ik}] + [b_{ik}] = [a_{ik} + b_{ik}]$. ნულოვან მატრიცად მივიღეთ მატრიცა, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, $[0]_n = 0$.

გავეცანით აგრეთვე ერთგვაროვან წრფივ n -განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეს. ამ სიმრავლეში განსაზღვრული იყო ამონახსნთა ჯამი და ამონახსნის რიცხვზე ნამრავლის თვისებები.

ალგებრაში გავეცანით აგრეთვე მრავალწევრთა სიმრავლეს, რომელთა ხარისხის მაჩვენებელი არ აღემატებოდა n -ს. ამ სიმრავლეში განვსაზღვრეთ მრავალწევრთა ჯამი და მრავალწევრის რიცხვზე ნამრავლი.

ყველა ზემოთხსენებულ მაგალითებში ერთი და იგივე ობიექტები წარმოებს, რომლებიც 1-ლ პუნქტში ჩამოყალიბებულ აქსიომებს აკმაყოფილებენ. იმისათვის, რომ ყველა ასეთი სიმრავლე შევსწავლოთ ერთი თვალსაზრისით, შემოვიტანოთ წრფივი, ანუ აფინური, სივრცის ცნება.

ელემენტების $x, y, z, \dots$ სიმრავლეს R -ს ეწოდება წრფივი (აფინური) სივრცე, თუ

1. ყოველ ორ ელემენტს x და y -ს შეესაბამება ამავე სიმრავლის z ელემენტი, რომელსაც ამ ელემენტთა ჯამი ეწოდება და აღინიშნება $x+y$ -ით, ისე, რომ შეკრების ოპერაცია აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს (ასიომებს):

1°. $x+y = y+x$, გადანაცვლებადობის პირობა;

2°. $(x+y)+z = x+(y+z)$, ჯუფთებადობის პირობა;

3°. R სიმრავლეში არსებობს ელემენტი 0 ისეთი, რომ $x+0=x$, ელემენტი 0 -ს ეწოდება R სიმრავლის ნულოვანი ელემენტი;

4°. ყოველ x ელემენტისათვის არსებობს ელემენტი z , რომ $x+z=0$. z ელემენტს ეწოდება x ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი და აღინიშნება $(-x)$ -ით, $x+(-x)=0$.

II. ყოველ x ელემენტს R სიმრავლიდან და ყოველ λ რიცხვს რაიმე K რიცხვთა ველიდან, შეესაბამება x ელემენტი R სიმრავლიდან, ამ λx ელემენტს ეწოდება x ელემენტის λ - რიცხვზე ნამრავლი. ამასთან R სიმრავლის ელემენტების λ რიცხვზე გამრავლების მოქმედება უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

1°. $1 \cdot x = x$;

2°. $\alpha(\beta x) = \alpha\beta(x)$.

III. ორივე მოქმედება უნდა აკმაყოფილებდეს განრიგებადობის პირობებს:

1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

აქ არ გვითქვამს, თუ როგორ განისაზღვრება R სიმრავლეში ელემენტთა შეკრება და ელემენტის რომელიმე რიცხვზე გამრავლება. ამ მოქმედებათაგან მოვითხოვეთ, რომ R სიმრავლეში სრულდებოდეს მხოლოდ ზემოთ ჩამოთვლილი აქსიომები. ამიტომ ყოველთვის, როცა საქმე გვექნება სიმრავლესთან, სადაც სრულდება მოქმედებანი, რომლებიც ზემოთ ჩამოთვლილ აქსიომებს აკმაყოფილებენ, უფლება გვაქვს, ჩავთვალოთ ისინი ელემენტთა შეკრებისა და ელემენტთა რიცხვზე გამრავლების მოქმედებად და ელემენტთა ასეთი სიმრავლე — წრფივ სივრცედ.

ძნელი არაა იმის შემოწმება, რომ პუნქტის დასაწყისში მოტანილი სიმრავლეთა მაგალითები წარმოადგენენ წრფივი სივრცის მაგალითებს. ხოლო n ხარისხის მრავალწევრთა სიმრავლე წრფივი სივრცე არაა, რადგანაც ორი n ხარისხის მრავალწევრთა ჯამი ყოველთვის არაა n ხარისხის მრავალწევრი. მაგალითად,

$$(t^n + t - 2) + (-t^n + 2t + 7) = 3t + 5$$

არაა n ხარისხის მრავალწევრი.

წრფივი სივრცის ელემენტებს ვუწოდებთ ვექტორებს. იმ გარემოებაში, რომ ამ სიტყვას ზემოთ ხშირად ვხმარობდით მეტად ვიწრო გაგებით, არ უნდა შეგვაშფოთოს. გეომეტრიული წარმოდგენა, რომელიც ამ სიტყვასთანაა დაკავშირებული, მოგვეხმარება კარგად გავიგოთ, ზოგჯერ წარმოვიდგინოთ კიდევ ის დასკვნები, რომლებიც წრფივი სივრცისათვის მიიღებოდა.

თუ რიცხვები $\alpha, \beta, \dots$, რომლებიც R წრფივი სივრცის განსაზღვრაში მონაწილეობენ, ნამდვილია, მაშინ R სივრცეს ნამდვილი სივრცე ეწოდება. თუ ეს რიცხვები კომპლექსური რიცხვებია, მაშინ R სივრცეს კომპლექსური ეწოდება.

4. განზომილებათა რიცხვი წრფივ სივრცეში. 1-ლ პუნქტში განსაზღვრეთ n -განზომილებიანი ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებულება და წრფივად დამოუკიდებლობა. ვაჩვენეთ აგრეთვე, რომ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი ტოლია ამ ვექტორთა სივრცის განზომილებისა (თეორემა 1). სრულიად ასევე განსაზღვრება წრფივ სივრცეში ელემენტთა (ვექტორთა) წრფივად დამოკიდებულება და წრფივად დამოუკიდებლობა.

წრფივი R სიმრავლის ელემენტებს $x, y, \dots, v$ წრფივად დამოკიდებულები სისტემა ეწოდება, თუ არსებობს $\alpha, \beta, \dots, \theta$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ისეთი, რომ სრულდება ტოლობა

$$\alpha x + \beta y + \dots + \theta v = 0. \quad (25)$$

თუ, მაგალითად, $\alpha \neq 0$, მაშინ (25) ტოლობიდან მივიღებთ

$$x = \lambda y + \mu z + \dots + \xi v, \quad (26)$$

სადაც

$$\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \mu = -\frac{\gamma}{\alpha}, \dots, \quad \xi = -\frac{\theta}{\alpha}.$$

ასე რომ, თუ ერთ-ერთი ელემენტთაგანი $x, y, \dots, v$ ელემენტებიდან სხვა დანარჩენი ელემენტების წრფივი კომბინაციაა, მაშინ ელემენტთა ასეთი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

თუ (25) ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\alpha = \beta = \dots = \theta = 0$ $x, y, \dots, v$ ელემენტებს წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა ეწოდება.

ჩვენ ვნახეთ, რომ წრფეზე წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა რიცხვი, სიბრტყეზე მდებარე წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი და სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი ემთხვევა იმ რიცხვს, რაც მიღებულია გეომეტრიაში წრფის განზომილებად, სიბრტყის განზომილებად და სივრცის განზომილებად. ისიც ვაჩვენეთ, რომ n -განზომილებიან ვექტორთა სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი არის n . ბუნებრივია, ამის გამო შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა:

წრფივ სივრცეს R -ს ეწოდება n -განზომილებიანი სივრცე, თუ ამ სივრცეში არსებობს წრფივად დამოუკიდებელი n ელემენტი და n -ზე მეტი წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტი არ არსებობს.

თუ R სიმრავლეში ნებისმიერი რაოდენობის ელემენტები წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ R სიმრავლეს უსასრულო განზომილების წრფივი სივრცე ეწოდება.

ზემოთ ვაჩვენეთ, n -განზომილებიან ვექტორთა სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

და ეს ვექტორები მივიღეთ ამ სივრცის ბაზის ვექტორებად. სრულიად ასევე განსაზღვრათ R წრფივი სიმრავლის ბაზისი.

წრფივი სივრცის R -ის წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა $e_1, e_2, \dots, e_n$ სისტემას ეწოდება R სივრცის ბაზისი. მაგალითად, არაუმეტეს n -ბარისხის მრავალწევრთა სივრცის ბაზისი ელემენტებია

$$1, t, t^2, \dots, t^n,$$

რადგანაც ტოლობა

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n = 0$$

იგივერად სრულდება, თუ $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

ანალოგიურად მე-2 თეორემისა შეგვიძლია დავამტკიცოთ!

თეორემა 3. n -განზომილებიანი R წრფივი სივრცის ყოველი x ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ და ამასთან ერთად ერთი სახით ბაზისი $e_1, e_2, \dots, e_n$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

რიცხვებს $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ეწოდება x ვექტორის კოორდინატები. მაგალითად, არაუმეტეს n -ბარისხის მრავალწევრთა სივრცეში ყოველი მრავალწევრი ერთადერთი სახით წარმოიდგინება ბაზისი $1, t, t^2, \dots, t^n$ ელემენტების საშუალებით

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n.$$

რიცხვებს $a_0, a_1, \dots, a_n$ -ს ეწოდება $P_n(t)$ მრავალწევრის კოორდინატები. ეს კოორდინატები ჩვენთვის კარგად ცნობილი მრავალწევრის კოეფიციენტებია.

5. n -განზომილებიან სივრცეთა იზომორფიზმი. განვიხილოთ ორი სივრცე. ერთი, ნამდვილ რიცხვთა (x_1, x_2, x_3) დალაგებულ სამეულთა

* Н. М. Гельфанд, Лекции о линейной алгебре, М., 1971, стр. 16.

წრფივი სივრცე (სამგანზომილებიან ვექტორთა სივრცე) და მეორე, არა უმეტეს მეორე ხარისხის მრავალწევრთა სივრცე,

$$P = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

ამ სივრცეებში აღვნიშნავთ დასამყარებელია ცალსახა ურთიერთ შესაბამისობა

$$x = (x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

ამასთან ისეთი, რომ, თუ $x^{(1)} \longleftrightarrow P^{(1)}$, $x^{(2)} \longleftrightarrow P^{(2)}$, მაშინ

$$x^{(1)} + x^{(2)} \longleftrightarrow (P^{(1)} + P^{(2)}), \quad c x^{(1)} \longleftrightarrow c P^{(1)}.$$

ამ ორი სივრცის შესახებ ვიტყვი: სამგანზომილებიან ვექტორთა სივრცე და არა უმეტეს მეორე ხარისხის მრავალწევრთა სივრცე იზომორფული სივრცეებია.

საზოგადოდ, წრფივ სივრცეებს R და R' -ს ეწოდება ურთიერთიზომორფული, თუ R სივრცის x ვექტორსა და R' სივრცის x' ვექტორს შორის შეიძლება დამყარდეს ისეთი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $x_1 \longleftrightarrow x'_1$, $x_2 \longleftrightarrow x'_2$, მაშინ $x_1 + x_2 \longleftrightarrow x'_1 + x'_2$, $c x \longleftrightarrow c x'$, სადაც $x_1, x_2 \in R$, ხოლო $x'_1, x'_2 \in R'$.

ამ განსაზღვრის საფუძველზე აღვნიშნავთ წარმოსადგენია, ორი წრფივი სივრცე მხოლოდ მაშინ არის ურთიერთიზომორფული, როდესაც ამ სივრცეთა განზომილებიანი ტოლია.

6. ევკლიდეს სივრცე. მე-3 პუნქტში წრფივი (აფინური) სივრცე განსაზღვრეთ როგორც ელემენტთა (ვექტორთა) სიმრავლე, რომელშიაც განსაზღვრულია ელემენტთა ჯამი და ელემენტის რიცხვზე გამრავლება. ამ მოქმედებებით შეიძლება ჩამოვყალიბოთ, რა არის წრფე, რა არის სიბრტყე, სივრცის განზომილება, რა არის პარალელური წრფეები და სხვ. მაგრამ ეს ცნებები არ კმარა ყველა იმ საგანთა დამახასიათებელი ფაქტის შესასწავლად, რაც ე. წ. ევკლიდეს გეომეტრიის შინაარსს წარმოადგენს. ელემენტთა შეკრების და ელემენტის რიცხვზე გამრავლების ცნებებით არ შეგვიძლია ვექტორის სივრცის, ვექტორთა შორის კუთხის განსაზღვრა და სხვ. ამ ცნებათა შემოტანა შეგვიძლია შემდეგნაირად.

შემოვიტანოთ ძირითადი ცნება: ელემენტთა სკალარული ნამრავლი.

ვიტყვი, რომ n -განზომილებიან წრფივ ნამდვილ სივრცეში განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი, თუ ამ სივრცის ვექტორთა x და y ყოველ წყვილს შეესაბამება სათანადო ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც აღვნიშნავთ (x, y) სიმბოლოთი, ამასთან ეს შესაბამისობა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს (აქსიომებს):

1) $(x, y) = (y, x)$, ე. ი. სკალარული ნამრავლი სიმეტრიულია;

2) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$, სადაც λ ნამდვილი რიცხვია;

3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ — სკალარული ნამრავლი განრიგებულია;

4) x ვექტორის თავის თავზე სკალარული ნამრავლი არათარყოფითია $(x, x) \geq 0$ და ნულის ტოლია მაშინ, თუ $x = 0$.

წრფივ სივრცეს, რომელშიაც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი, რომელიც ჩამოთვლილ 4 პირობას აკმაყოფილებს, ეწოდება ევკლიდეს სივრცე.

განვიხილოთ მაგალითები.

1°. მე-12 თავის მე-4 პარაგრაფში განსაზღვრეთ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ნამდვილი ვექტორების $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ სკალარული ნამრავლი

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (27)$$

აღვნიშნავთ, ამ სკალარული ნამრავლით ოთხივე აქსიომა სრულდება. მაშასადამე, n -განზომილებიანი ვექტორული სივრცე, სადაც სკალარული ნამრავლი განსაზღვრულია (27) ტოლობით, ევკლიდეს სივრცეა.

2°. ავიღოთ მატრიცა $[a_{ik}]_n$. შევადგინოთ ამ მატრიცით ბილინეარული ფორმა. ამ ბილინეარული ფორმით განსაზღვროთ R წრფივ სივრცეში x და y ვექტორთა სკალარული ნამრავლი, სადაც $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k \quad (28)$$

გამოვარკვეოთ, რა პირობებში $[a_{ik}]_n$ მატრიცით განსაზღვრული გამოსახულება (28) დააკმაყოფილებს სკალარული ნამრავლის აქსიომებს.

აღვნიშნავთ, შესაძლებელია მე-2 და მე-3 აქსიომა სრულდება ნებისმიერი $[a_{ik}]_n$ მატრიცისათვის. რომ შესრულდეს 1-ლი აქსიომა $(x, y) = (y, x)$, მატრიცა $[a_{ik}]_n$ უნდა იყოს სიმეტრიული, $a_{ik} = a_{ki}$.

ავიღოთ სკალარული ნამრავლის მე-4 აქსიომა $(x, x) \geq 0$,

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k. \quad (29)$$

ეს გამოსახულება უნდა იყოს ნებისმიერი $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობებისათვის, არათარყოფითი და ნულის ტოლი უნდა გახდეს მხოლოდ $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ -სათვის. (29) გამოსახულება კვადრატული ფორმაა, პირობის თანახმად ეს კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრული უნდა იყოს და ნულის ტოლი გახდეს, როდესაც ყველა $x_1, x_2, \dots, x_n$ ნულის ტოლია.

ამგვარად, ყოველი მატრიცა განსაზღვრავს სკალარულ ნამრავლს (28) ფორმულის საფუძველზე, თუ ეს მატრიცა სიმეტრიულია და დადებითად განსაზღვრული:

$$|a_{11}| > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

თუ $[a_{ik}]_n$ მატრიცა ერთეული მატრიცაა, $a_{ii} = 1$; $a_{ik} = 0$, $i \neq k$, მაშინ (28) გამოსახულება მოგვცემს

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

ამით მივიღეთ ევკლიდეს სივრცე, რომელიც წინა მაგალითში იყო განსაზღვრული.

7. ევკლიდეს სივრცის ზოგიერთი ცნება. ვექტორთა შეკრების, ვექტორის რიცხვზე გამრავლების და სკალარული ნამრავლის ცნებათა საფუძველზე შეგვიძლია მთელი ევკლიდეს გეომეტრია ავაგოთ.

ჯერ განვსაზღვროთ x ვექტორის სიგრძე.

R წრფივი სივრცის x ვექტორი განვსაზღვროთ n ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული n -ეულით, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. ვექტორთა ჯამი და λ რიცხვზე გამრავლება განვსაზღვროთ ტოლობებით

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

ვექტორთა სკალარული ნამრავლი კი განვსაზღვროთ ტოლობით

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

ასეთი R წრფივი სივრცე წარმოადგენს ევკლიდეს სივრცეს. ევკლიდეს სივრცე E_n სიმბოლოთი აღინიშნება.

ევკლიდეს სივრცის x ვექტორის სიგრძე ეწოდება რიცხვს

$$\sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

x ვექტორის სიგრძე $|x|$ სიმბოლოთი აღინიშნება,

$$|x| = \sqrt{(x, x)}. \quad (30)$$

ახლა განვსაზღვროთ x და y ვექტორებს შორის კუთხე. x და y ვექტორებს შორის კუთხე φ ვუწოდოთ რიცხვს

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x| |y|}.$$

ე. ი. φ კუთხე განვსაზღვროთ ტოლობიდან

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| |y|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (31)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ აქ ორ ვექტორს შორის კუთხე განვსაზღვრეთ სამგანზომილებიან სივრცეში ორ ვექტორს შორის კუთხის ანალოგიით. სამგანზომილებიან სივრცეში x და y ვექტორთა სკალარული ნამრავლი განსაზღვრება ტოლობით

$$(x, y) = |x| |y| \cos \widehat{x, y}.$$

ამ ტოლობიდან, როდესაც ცნობილია x და y ვექტორთა სიგრძეები და ამ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი, $\varphi = \widehat{x, y}$ განისაზღვრება (31) ტოლობით.

იმისათვის, რომ x და y ვექტორთა შორის კუთხე განისაზღვროს (31) ტოლობით, უნდა შესრულდეს პირობა

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| |y|} \leq 1,$$

ანუ უნდა შესრულდეს პირობა

$$\frac{(x, y)^2}{|x|^2 |y|^2} \leq 1,$$

საიდანაც

$$(x, y)^2 \leq |x|^2 |y|^2. \quad (32)$$

ამგვარად, x და y -ს შორის კუთხე რომ განისაზღვროს (31) ტოლობით, უნდა შესრულდეს (32) უტოლობა.

(32) უტოლობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ვექტორი $x - ty$, სადაც t ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. სკალარული ნამრავლის მე-4 აქსიომის საფუძველზე გვექნება

$$(x - ty, x - ty) \geq 0, \quad (33)$$

საიდანაც მივიღებთ

$$(x - ty, x - ty) = (x, x - ty) - t(y, x - ty) = (x, x) - t(x, y) - t(y, x) + t^2(y, y) = (x, x) - 2t(x, y) + t^2(x, y).$$

ამგვარად, (33) უტოლობა გვაძლევს

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) \geq 0.$$

ეს კვადრატული სამწევრი არაუარყოფითია t -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. მაშასადამე, კვადრატული განტოლების

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) = 0$$

დისკრიმინანტი არ შეიძლება იყოს დადებითი. ე. ი.

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

რაც (32) უტოლობას ამტკიცებს.

(32) უტოლობას კოში-ბუნიაკოვსკის² უტოლობა ეწოდება.

(31) ტოლობა მართლაც განსაზღვრავს x და y ვექტორებს შორის კუთხეს.

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right). \quad (34)$$

თუ x და y ვექტორთა სკალარული ნამრავლი შემდეგი ტოლობითაა განსაზღვრული

$$(x, y) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i y_k,$$

სადაც $[a_{ik}]$ მატრიცა სიმეტრიულია, $a_{ik} = a_{ki}$, და $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \geq 0$,

მაშინ ნაცვლად (34) უტოლობისა გვქვნება

$$\left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \right) \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} y_i y_k \right). \quad (35)$$

ორ ვექტორს შორის კუთხის ცნების საშუალებით განვსაზღვროთ ვექტორთა ურთიერთპერპენდიკულარობა.

ვექტორებს x და y -ს ეწოდება ურთიერთპერპენდიკულარული, თუ მათ შორის კუთხე $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ე. ი., თუ

$$(x, y) = 0.$$

ზემომოტანილ ცნებათა საფუძველზე E_n სივრცეში განვაზოგადოთ ელემენტარული გეომეტრიის ზოგიერთი თეორემა.

¹ ლეჟანდრის ლუი კოში (1789—1857), ფრანგი მათემატიკოსი.

² ვიქტორ იაკობის ძე ბუნიაკოვსკი (1804—1889), რუსი მათემატიკოსი.

1) ბითაგორას თეორემა. თუ x და y ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ $x+y$ ვექტორი იმ მართკუთხედის დიაგონალია, რომლის გვერდებია x და y ვექტორები. დავამტკიცოთ ე. წ. ბითაგორას თეორემა: თუ x და y ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2. \quad (36)$$

მართლაც,

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y).$$

სკალარული ნამრავლის განრიგებადობის აქსიომის საფუძველზე მივიღებთ:

$$|x+y|^2 = (x, x+y) + (y, x+y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y). \quad (37)$$

რადგანაც x და y ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მივიღებთ

$$(x, y) = (y, x) = 0,$$

ამის გამო (37) ტოლობა მოგვცემს

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

რაც (36) ტოლობას ამტკიცებს.

2) სამკუთხედის თეორემა: ნებისმიერი x, y ვექტორებისათვის ეგკლიდეს E_n სივრცეში შემართია უტოლობა:

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \quad (38)$$

მართლაც,

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y).$$

კოში-ბუნიაკოვსკის თეორემის საფუძველზე გვქვნება:

$$2(x, y) \leq 2|x||y|,$$

$$|x+y|^2 \leq (x, x) + 2|x||y| + (y, y) = (|x| + |y|)^2,$$

საიდანაც მიიღება (38) უტოლობა.

3) ორ წერტილს შორის მანძილი. ელემენტარულ გეომეტრიაში ორ x და y წერტილს შორის მანძილი განისაზღვრება როგორც $x-y$ ვექტორის სიგრძე, $d = |x-y|$. n -განზომილებიან ეგკლიდეს სივრცეში x და y წერტილთა შორის მანძილს ამავე ფორმულით განვსაზღვრავთ

$$d = |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}.$$

ამ მაგალითებიდან ვამჩნევთ, რომ ბევრი თეორემა ელემენტარული გეომეტრიისა უცვლელად გადაიტანება ეგკლიდეს E_n სივრცეში.

8. კომპლექსური წრფივი სივრცე. წინა პუნქტებში მიღებული ზოგიერთი შედეგი ჰერმიტიულობის ნებისმიერი რიცხვითი ველისათვის და, მასადასრულ, კომპლექსურ რიცხვთა ველისათვისაც.

კომპლექსური ევკლიდესი სივრცე ეწოდება კომპლექსურ წრფივ სივრცეს, რომელშიაც შემოტანილია სკალარული ნამრავლის ცნება: ყოველ ვექტორთა x და y -ის წყვილს შეესაბამება კომპლექსური რიცხვი (x, y) , ამასთან სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1° $(x, y) = \overline{(y, x)}$, სადაც $\overline{(y, x)}$ არის (y, x) -ის კომპლექსურად შეუღლებული რიცხვი;

2° $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$;

3° $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

4° (x, x) არის ნამდვილი არაუარყოფითი რიცხვი, რომელიც ნულის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x=0$.

1-ლი და მე-2 აქსიომებიდან გამომდინარეობს $(x, \lambda y) = \overline{\lambda} (x, y)$. მართლაც,

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y, x)} = \overline{\lambda} \overline{(y, x)} = \overline{\lambda} (x, y).$$

სამართლიანია აგრეთვე ტოლობა

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2).$$

მართლაც,

$$(x, y_1 + y_2) = \overline{(y_1 + y_2, x)} = \overline{(y_1, x) + (y_2, x)} = \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2).$$

1-ლი აქსიომა განსხვავდება ნამდვილი ევკლიდესი სივრცის 1-ლი აქსიომიდან; კომპლექსურ სივრცეზე გადასვლის დროს არ შეგვეძლო შეგვენარჩუნებინა ნამდვილი სივრცის 1°, 2°, 4° აქსიომები უცვლელად. მართლაც, თუ გვექნებოდა

$$(x, y) = (y, x),$$

მაშინ

$$(x, \lambda y) = \lambda (x, y);$$

მაგრამ, მაშინ

$$(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 (x, x).$$

აქედან კი, კერძოდ, მივიღებდით

$$(i x, i x) = - (x, x).$$

ე. ი. რიცხვები (x, x) და (y, y) , სადაც $y = ix$, იქნებოდნენ სხვადასხვა ნიშნის, რაც ეწინააღმდეგება მე-4° აქსიომს.

განვიხილოთ მაგალითი კომპლექსური ევკლიდესი სივრცის R სივრცის ვექტორს ვუწოდებთ კომპლექსურ რიცხვთა დალაგებულ n -ეულს,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. ვექტორთა შეკრებას და ვექტორის რიცხვზე გამრავლებას განვსაზღვრავთ ჩვეულებრივად. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

განისაზღვრება ფორმულით (§ 4, 2, ფორმულა (4))

$$(x, y) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}. \quad (39)$$

ძნელი არაა იმის შემოწმება, რომ სკალარული ნამრავლის ოთხივე აქსიომა (39) ფორმულით განსაზღვრული სკალარული ნამრავლისათვის სრულდება. კერძოდ, ვექტორის თავის თავზე სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება ფორმულით

$$(x, x) = x_1 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} + \dots + x_n \overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

n -განზომილებიან კომპლექსურ ვექტორთა წრფივი სივრცე, სადაც ვექტორთა სკალარული ნამრავლი განსაზღვრულია (39) ფორმულით, წარმოადგენს კომპლექსურ ევკლიდესი სივრცეს.

§ 6. სივრცის ცნება მათემატიკაში

1. ზოგადი შენიშვნები. ფილოსოფიურ ენციკლოპედიაში შემდეგი განსაზღვრაა მოცემული: „სივრცე (მათემატიკაში) კრებითი სახელწოდებაა მათემატიკური აბსტრაქციებისა, რომლებიც გულისხმობენ — ან დაუშვებენ — „თვალსაჩინო“ მატერიალური განფენილობის ტერმინებით, ანდა მათთან ფორმით, სტრუქტურით აბლომდგომ, მაგალითად, აბსტრაქტული ობიექტების აქსიომატურ აღწერილობაში ასახულ ერთობლიობათა წარმოდგენებს“.

სივრცის იდეამ მათემატიკის განვითარების მიხედვით განიცადა რთული ევოლუცია.

ახლა მათემატიკისათვის სივრცე — ეს სიმრავლეა რომელიმე „ელემენტების“ (პირობით „წერტილებს“ უწოდებენ), რომლებიც მთლიანად ხასიათდებიან აქსიომებით“.

ამ განსაზღვრიდან ცხადია, რომ სივრცე, რომელიც შეისწავლება მათემატიკაში, წარმოადგენს მათემატიკურ აბსტრაქციას.

გავარჩიოთ: რა გვესმის მათემატიკაში სიტყვა „სივრცის“ ქვეშ, რა ცვლილება განიცადა სივრცის ცნებამ, როგორი სივრცეები გვხვდება მათემატიკაში?

მანძილის ცნებას დასაბამიდანვე ვეცნობით. საგანთა შორის მანძილს ნაბიჯებით, მტკაველით ან სხვა საშუალებით, მაგალითად, ჯოხით, ვზომავთ. დროის შესაბამის წარმოდგენას პერიოდულ პროცესებზე დავკვირვე-

¹ Философская энциклопедия, 4, М., 1967, стр. 392.

ბით ვლემულობთ: მზე ამოდის და ჩადის, დღე იცვლება ღამით, ზამთარს იცვლება ზაფხულით და ასე გრძელდება პერიოდულად. ძნელი არ უნდა იყოს იმის წარმოდგენა, რომ ეცხოვრობთ სივრცეში და დროში. უნსოვარი დროიდან წარმოიშვა მოთხოვნილება: გაიზომოს სიგრძე და ვაწარმოოთ დროის ანგარიში. მშენებლობამ, მიწის ნაკვეთების გაზომვამ, გზათა მიმართულების განსაზღვრამ, ჭურჭლის მოცულობის განსაზღვრამ და სხვა ასეთმა პრაქტიკულმა საკითხებმა დააგროვა ცალკეული ცნობები საგანთა თვისებების შესახებ. მაგრამ ჯერ კიდევ არ იყო შექმნილი მეცნიერება „გეომეტრია“. გეომეტრიული კანონების დადგენაში პირველობა ეკუთვნის ძველ ბერძნებს. ცალკეული გეომეტრიული კანონები ცნობილი იყო ეგვიპტეშიც, ბაბილონშიც, ინდოეთშიც, მაგრამ ბერძნებმა ყველა ცნება გეომეტრიიდან შეადგინეს და ლოგიკურად გააანალიზეს. ამ დიდი შრომის შედეგი იყო ევკლიდეს¹ „საწყისები“-². იშვიათია სხვა წიგნი, რომელსაც სკოლაში სწავლების ასე ხანგრძლივი ისტორია ჰქონდეს. „საწყისები“ ინგლისის სკოლებში მე-19 საუკუნის ბოლოსაც კი ისწავლებოდა.

2. ევკლიდეს „საწყისები“. „საწყისები“ ითვლება ნათელი, ლოგიკურად მკაცრად აგებული გადმოცემის პირველ ნიმუშად. ზოგადად გვეცნოთ „საწყისების“ შინაარსს³.

საწყისებში ფაქტები არა მარტო ჩამოთვლილია, არამედ მკაცრი რიგით არის დალაგებული, როგორც ერთიანი მეცნიერების — გეომეტრიის ელემენტები. ამ წიგნში პირველად იქნა გამოყენებული აქსიომაური მეთოდი. ევკლიდეს გამოდის ზოგიერთი წინადადებიდან, რომლებიც თვალცხადობის გამო ჭეშმარიტებად ითვლებიან. ამ წინადადებებს ევკლიდეს არ ამტკიცებს. ასეთ წინადადებებს ორ ჯგუფად ყოფს. პირველ ჯგუფს უწოდებს აქსიომებს, ხოლო მეორე ჯგუფს — პოსტულატებს. მაგალითად, აქსიომად თვლის:

ტოლ სიდიდეებს თუ მივუმატებთ ტოლ სიდიდეებს, მივიღებთ ტოლ სიდიდეებს. პოსტულატები, ეს ისეთი დაუმტკიცებელი ძირითადი წინადადებებია, რომელთა საშუალებითაც ლოგიკურად მკაცრად სხვა წინადადებანი მტკიცდება. მაგალითად, პოსტულატებია:

1. ყოველი წერტილიდან ყოველი სხვა წერტილისაკენ შეიძლება გავატაროთ წრფე.

¹ ევკლიდეს (დაახ. 340—287 წლები ჩვ. წელთაღრიცხვამდე), ბერძენი სწ.

² „Начала“ Евклида, Перевод с греч. Д. Д. Мордухай-Болтонского, М. — Л. 1948.

³ ევკლიდეს „საწყისების“ დედანი არაა შემორჩენილი. „საწყისების“ უძველესი ტექსტი, რომელშიც ჩვენამდე მოაღწია, მე-9 საუკუნისაა. ამ უკანასკნელის წყაროა ბერძენი გამოცემლის თეონ ალექსანდრიელის ხელნაწერი (ჩვენი წელთაღრიცხვის მე-4 საუკუნის შუა წლები).

II. ყოველი შემოსაზღვრული წრფე შეიძლება შემოუსაზღვრელად გავავრცელოთ.

„საწყისები“ იწყება 23 სხვადასხვა განსაზღვრით:

1. წერტილი არის ის, რასაც არა აქვს ნაწილები.

2. წირი არის სიგრძე სიგანის გარეშე.

3. წირის საზღვრები არის წერტილები.

4. წრფე არის წირი, რომელიც ერთნაირადაა განლაგებული თავისი ყველა წერტილის მიმართ.

5. ზედაპირი არის ის, რასაც მხოლოდ სიგრძე და სიგანე აქვს და ა. შ.

23. წრფეები პარალელურია, თუ ისინი იმყოფებიან რა ერთ სიბრტყეში, და გავავრცელებთ რა ორივე მხრიდან შემოუსაზღვრელად, არც ერთი და არც მეორე მხრიდან ერთმანეთს არ შეხვდებიან.

პოსტულატები:

1. დავუშვათ, მოითხოვება, რომ ყოველი წერტილიდან ყოველი სხვა წერტილისაკენ შეიძლება გავატაროთ წრფე.

II. ყოველი შემოსაზღვრული წრფე შეიძლება შემოუსაზღვრავად გავავრცელოთ.

III. ყოველი წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შეიძლება ნებისმიერი რადიუსით წრეწირი შემოვხაზოთ.

IV. ყველა მართი კუთხე ურთიერთტოლია.

V. ყოველთვის, როდესაც წრფე ორი სხვა წრფით გადაიკვეთება, ქმნის მათთან შიდა ცალმხრივ კუთხეებს, რომელთა ჯამი ორ მართ კუთხეზე ნაკლებია, ეს წრფეები გადაიკვეთებიან იმ მხარეს, რომელ მხარესაც ეს ჯამი ორ მართ კუთხეზე ნაკლებია.

აქსიომები:

1. სიდიდეები, რომლებიც ცალ-ცალკე მესამე სიდიდის ტოლია, ურთიერთტოლია.

II. ტოლ სიდიდეებს თუ ტოლ სიდიდეებს მივუმატებთ, ტოლ სიდიდეებს მივიღებთ.

III. ტოლ სიდიდეებს თუ ტოლ სიდიდეებს გამოვაკლებთ, ტოლ სიდიდეებს მივიღებთ.

IV. არატოლ სიდიდეებს ტოლ სიდიდეებს თუ მივუმატებთ, არატოლ სიდიდეებს მივიღებთ.

V. ტოლ სიდიდეებს თუ გავაორკეცებთ, მივიღებთ ტოლ სიდიდეებს.

VI. ტოლების ნახევრები ტოლია.

VII. ურთიერთშეთავსებულნი ურთიერთ ტოლია.

VIII. მთელი მეტია ნაწილზე.

IX. ორ წრფეს მთელი სივრცე არ შეუძლია მოიცვას.

იღებდა რა ამ ძირითად დებულებას, ევკლიდეს უნდოდა განეკითარებინა მთელი გეომეტრია მხოლოდ ლოგიკური გზით, ყოველგვარი თვალსაჩინოების გამოუყენებლად, სხვა აქსიომებისა და პოსტულატების გარეშე. შეძლო თუ არა ევკლიდემ ამ მიზნის მიღწევა, ამას თანდათან შევეხებით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ მათემატიკური წრფის განსაზღვრა არსად არაა. თუ წარმოვიდგენთ გაჭიმულ თოკს, ან სინათლის სხივს, ან სახაზავის ნაპირს, ესენი მხოლოდ უბრალო წარმოდგენას იძლევიან წრფის შესახებ. მაგრამ ყველა ამ საგანს რაღაც საერთო აქვთ. თუ ამ საგანთა კონკრეტულ თვისებებს უგულებელვყოფთ, გვეჩვენა წარმოდგენა რაღაც წირის შესახებ, რომელსაც წრფეს ვუწოდებთ. ანალოგიურად იმისა, რომ ვამბობთ: ორი ვაშლი, ორი ადამიანი ორი თითი და სხვ. ამ საგნებს თუ უგულებელვყოფთ, მივაღწეოთ მათემატიკურ აბსტრაქციასთან — რიცხვი ორი. საგანთა ასეთი რედუქციაცია საშუალებას მოგვცემს, დავამტკიცოთ გეომეტრიულ სხეულთა თვისებები — თეორემები და გამოვიყენოთ ეს დამტკიცება პრაქტიკულად, მიწაზე დასაბუთი საგნებისათვის, სადაც დამტკიცებული სრულდება მიახლოებით. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, აბსტრაქტული თეორემის მნიშვნელობა ნათელია.

მოვიგონოთ ე. წ. მეხუთე პოსტულატი: ყოველთვის, როდესაც წრფე სხვა ორი წრფით გადაიკვეთება, ქმნის მასთან შეიდა ცალმხრივ კუთხეებს, რომელთა ჯამი ორ მართ კუთხეზე ნაკლებია, ეს წრფეები გადაიკვეთებიან იმ მხარეს, რომელ მხარესაც ეს ჯამი ორ მართ კუთხეზე ნაკლებია.

ეს პოსტულატი სხვა პოსტულატებთან შედარებით რთულად გამოიხატება და, რაც მთავარია, ბევრი თეორემა მტკიცდება ამ პოსტულატის გარეშე. ამ ამბავმა წარმოშვა ეჭვი: მე-5 პოსტულატი მართლაც პოსტულატი, თუ შეიძლება ამ პოსტულატის დამტკიცება? ამის გამო „საწყისების“ გაუმჯობესება დაიწყო ევკლიდეს შემდეგმა თაობებმა. მათ შორის იყო არქიმედე¹. არქიმედემ წრფე განსაზღვრა როგორც უმოკლესი

შანხილი ორ წერტილს შორის და ჩამოაყალიბა ახალი წინადადება: ორი არატოლი მონაკვეთიდან, ან ორი არატოლი ფართობიდან, ან ორი არატოლი სხეულიდან უდიდესი აღმოჩნდება იმ სიდიდეზე ნაკლები, რომელსაც მივიღებთ, თუ უმცირესს გავიმეორებთ სათანადოდ. ეს წინადადება ცნობილია არქიმედეს პოსტულატის სახელწოდებით.

პტოლომემ² მე-5 პოსტულატი შეცვალა ახალი პოსტულატით: თუ წრფეები პარალელურია ერთი მიმართულებით, მაშინ ისინი პარალელურია მეორე მიმართულებითაც.

პარალელობის პოსტულატის დამტკიცებას ცდილობდა ბევრი გამოჩენილი მეცნიერი. მათ შორის ინგლისელი მათემატიკოსი ჯონ ვალისი³, იტალიელი მათემატიკოსი ჯონ საკკერი⁴, ფრანგი მათემატიკოსი ადრიენ ლეჟანდრი⁵, უნგრელი მათემატიკოსი ფარკაშ ბოლიაი (ბოიი)⁶. ყოველი ცდა მე-5 პოსტულატის დამტკიცებისა უშედეგო იყო.

ევკლიდეს მე-5 პოსტულატით დაინტერესდნენ რუსი მათემატიკოსი ნიკოლოზ ივანეს ძე ლობაჩევსკი⁷ და უნგრელი ოფიცერი იანოშ ბოიი⁸.

8. არაევკლიდური გეომეტრიის შექმნა. 1826 წლის 11 თებერვალს ყაზანის უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის განყოფილების სხდომაზე ნ. ი. ლობაჩევსკი გამოვიდა მოხსენებით, რომელშიაც აჩვენა, რომ ევკლიდეს მე-5 პოსტულატი არ შეიძლება დამტკიცდეს სხვა პოსტულატების გამოყენებით. ამ მოხსენებით საქვეყნოდ იქნა გამოცხადებული ახალი გეომეტრიის აღმოჩენა, რომელიც დაფუძნებულია ევკლიდეს ყველა აქსიომაზე, გარდა მე-5 აქსიომისა, მე-5 აქსიომა შეცვლილ იქნა მისი საწინააღმდეგო აქსიომით: სიბრტყეში წრფის გარეშე მდებარე წერტილზე შეიძლება გავატაროთ არაუმცირეს ორი წრფისა, რომლებიც მოცემულ წრფეს არ გადაკვეთენ.

1826 წლის 11 თებერვალი მათემატიკის ისტორიაში ღირსშესანიშნავი თარიღია. რადგანაც ამ დღიდან იწყება ადამიანის ცოდნის განვითარება კოსმოსის შესახებ; ამ დღიდან ბოლო მოეღო ევკლიდეს გეომეტრიის ერთადერთობას, რომ ევკლიდეს აქსიომები აბსოლუტურია და უცვლელად ჰეშმარდება. ლობაჩევსკის „ახალი გეომეტრიის“ აღმოჩენის დღი-

¹ პტოლომეი (მე-2 სუკ. წ. წ. აღრიცხვამდე), ბერძენი მეცნიერი.

² ჯონ ვალისი (1616—1703);

³ ჯოვანი ჟიროლამო საკკერი (1667—1733).

⁴ ადრიენ მარი ლეჟანდრი (1752—1833).

⁵ ფარკაშ ბოიი (1775—1856).

⁶ ნიკოლოზ ივანეს ძე ლობაჩევსკი (1792—1856).

⁷ იანოშ ბოიი (1802—1860).

⁸ არქიმედე (დაახ. 287—212 წ. წელთაღრიცხვამდე), ბერძენი მეცნიერი.

დან გაფართოვდა ჩვენი შეხედულებანი სივრცის შესახებ. ლობაჩევსკიმ თავისი აღმოჩენის გამოქვეყნება მხოლოდ 1829 წელს შეძლო ჟურნალში „Казанский вестник“ სახელწოდებით „გეომეტრიის საწყისების შესახებ“. ეს არის პირველი ნაბეჭდი შრომა, რომელშიც მოცემულია ახალი გეომეტრია, როგორც დასრულებული სისტემა. ეს ნაშრომი შეიძლება სამ ნაწილად გაიყოს. პირველი ნაწილი შეიცავს იმის მოკლე გადმოცემას, თუ როგორ უნდა იყოს გეომეტრია. მეორე ნაწილი შეიცავს ახალი გეომეტრიის ძირითადი საკითხების გადმოცემას. ამ ნაწილს ლობაჩევსკი „წარმოსახვითი გეომეტრია“ უწოდებს. ლობაჩევსკი აღნიშნავს: „ახალ გეომეტრიას, თუ ბუნებაში არა, ყოველ შემთხვევაში ჩვენ წარმოდგენაში შეუძლია იარსებოს. ... იგი ვვაძლევს გეომეტრიისა და ანალიზის ურთიერთგამოყენების ფართო შესაძლებლობას“. ამის დასაბუთებას ლობაჩევსკი იძლევა შრომის მესამე ნაწილში. ამ ნაწილში ლობაჩევსკი იზილავს ანალიზური და დიფერენციალური გეომეტრიის საწყისებს „არაევკლიდურ სივრცეში“. ახალ გეომეტრიაში ლობაჩევსკი განსაზღვრავს წირის სიგრძეს, ზედაპირის ფართობს, სხეულის მოცულობას. ე. ი. იძლევა ინტეგრალური აღრიცხვის გამოყენებას ახალ გეომეტრიაში. ამასთან ახალი გეომეტრიის საშუალებებს იყენებს ანალიზში.

როგორც ზემოთ დასახელებული მოხსენება, ისე ნაშრომი „გეომეტრიის საწყისების შესახებ“ გაუგებარი დარჩა არა მარტო ფართო საზოგადოებისათვის, არამედ სწავლულებისათვისაც. უფრო მეტიც, იმდროინდელი სწავლულებიდან ბევრი მის შრომას აბუჩად იგდებდა და არასერიოზულ შრომად თვლიდა. დიდმა მათემატიკოსებმა, აკადემიკოსებმა მ. ვ. ოსტროგრადსკიმ¹ და ვ. ი. ბუნიაკოვსკიმ ვერ გაიგეს ლობაჩევსკის იდეები. ლობაჩევსკის მრავალი წლის ნაყოფიერი მუშაობა არა თუ იქნა დაფასებული მეფის მთავრობის მიერ, არამედ 1846 წელს მას ათავისუფლებენ უნივერსიტეტიდან და გადააყენებენ სხვა სამუშაოზე. ის კარგავს კათედრას და რექტორობას უნივერსიტეტში. მას შეექმნა ცუდი შატერიალური პირობები, შეერყა ჯანმრთელობა, მაგრამ მაინც გააგრძელა შრომა ახალი გეომეტრიის დაფუძნებისათვის. ერთადერთი ადამიანი, რომელმაც სათანადოდ შეაფასა ლობაჩევსკის შრომები, იყო კარლ გაუსი, გერმანელი მათემატიკოსი. 1841 წელს გაუსი ეცნობა ლობაჩევსკის წიგნს „გეომეტრიული გამოკვლევები პარალელური წრფეების შესახებ“ (1840) და სათანადოდ შეაფასა. გაუსი 1846 წლის 28 ნოემბერს თავის მეგობარს შუმბერს უგზავნის წერილს, სადაც აღნიშნავს: „ახლო წარსულში მე

¹ ნ. ი. ლობაჩევსკის შრომები: 1) О началах геометрии (1829); 2) Воображаемая геометрия (1835); 3) Новые начала геометрии с полной теорией параллельных (1835—1838); 4) Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам (1836); 5) Геометрические исследования по теории параллельных (1840); 6) Пангеометрия (1855).

² შიხვილ ვასილის ძე ოსტროგრადსკი (1777—1855), რუსი მათემატიკოსი.

ქონდა შემთხვევა ზელმეორედ გადამეთვლიერებინა ლობაჩევსკის წიგნი. იგი შეიცავს იმ გეომეტრიის საფუძვლებს, რომელსაც ექნებოდა ადგილი და რომელიც იქნებოდა მკაცრად თანმიმდევრული, რომ ევკლიდური გეომეტრია არ ყოფილიყო ნამდვილი. მაგრამ ლობაჩევსკის აღმოჩენის შესახებ საჯაროდ მას სიტყვაც არ უთქვამს. ეს წერილი გამოქვეყნდა მხოლოდ გაუსის გარდაცვალების შემდეგ, 1865 წელს.

ლობაჩევსკისაგან დამოუკიდებლად არაევკლიდური გეომეტრია განავითარა იანოშ ბოიამი. იანოშ ბოიას ნაშრომი არაევკლიდური გეომეტრიის შესახებ გამოაქვეყნა მისმა მამამ ფარკაშ ბოიამი, როგორც გეომეტრიის საბელადგანდელის დამატება: „დანართი, რომელიც შეიცავს აბსოლუტურად ქვეშაირ მოძღვრებას სივრცის შესახებ“, 1832 წელს.

კარლ გაუსის გარდაცვალების შემდეგ, მისი გამოქვეყნებული წერილებიდან გამოიჩინა, რომ იგი ეჭვს გამოთქვამდა ევკლიდეს გეომეტრიის ერთადერთობის გამო. ბევრს ფიქრობდა ახალი გეომეტრიის აუცილებლობის შესახებ და აეთარებდა ახალ გეომეტრიას; მაგრამ კატეგორიულად აკრძალა თავისი წერილების გამოქვეყნება, რადგანაც შიშობდა, რომ მისი იდეები ახალი გეომეტრიის შესახებ გაუგებარი დარჩებოდა (1829 წ. 27 იანვარს ბესელიანდში მიწერილი წერილიდან). კიდევ მეტიც, გაუსმა მხარი არ დაუჭირა ახალგაზრდა იანოშ ბოიას, როცა მის შრომას გაეცნო. თუმცა სამართლიანობა მოითხოვს, აღინიშნოს, გაუსის წინადადებით ნ. ი. ლობაჩევსკი არჩეულ იქნა გეტინგენის სამეცნიერო საზოგადოების წევრად (იმ დროისათვის ეს საზოგადოება განიხილებოდა როგორც მეცნიერებათა აკადემია). ი. ბოიას შრომა იმ დროისათვის შეუმჩნეველი დარჩა, როცა ი. ბოია დარწმუნდა, რომ მის შრომას ყურადღება არავინ მიაქცია. ღრმა სასოწარკვეთილებებში ჩავარდა და სრულიად მიაღწია თავი მათემატიკას. იგი გარდაიცვალა 1860 წელს.

არ შეიძლება გვერდი ავუაროთ ლობაჩევსკის თავდადებულ ბრძოლას თავისი იდეების გავრცელებისათვის. ლობაჩევსკის არ შეშინებია, როგორც გაუსი, რომ მის იდეებს ვერ გაიგებენ, არ ჩაეარდნოდა სასოწარკვეთილებებში, როგორც იანოშ ბოია. ვერც თანამედროვეთა მიერ ლობაჩევსკის იდეების სასაცილოდ აგდება, ვერც მეგობართაგან და მოწოდებულ დიდმა მეურავებმა, ვერც მისმა პირადმა უბედურებამ (1852 წელს გარდაცვალება უფროსი ვაჟი) ვერ ააღებინა ხელი გამოკვლევებზე; ის არ შეჩერებულა შუა გზაზე. ლობაჩევსკიმ მაინც გააგრძელა კვლევა ახალ გეომეტრიაში. მას მხარს უჭერდა შეურყეველი რწმენა თავის გამოკვლევების ქვეშაირებისა და თავდადებული გატაცება მეცნიერებისა და ადამიანთა პროგრესისათვის. ლობაჩევსკი ისე ჩავიდა სა-

ოსტროგრადსკის იდეებზე (1831—1832) იმპერატორს მიმართა

ოსტროგრადსკის იდეებზე (1831—1832) იმპერატორს მიმართა

¹ ფრიდრიხ ბეელი (1784—1846) გერმანელი ფილოსოფი

მარეშო, რომ მისი იდეები არ იქნა გაგებული და აღიარებული. ნ. ი. ლობაჩევსკი გარდაიცვალა 1856 წ.

ლობაჩევსკის ტრაგედია იმაში მდგომარეობდა, რომ მან გაუსწრო თავის დროს. ლობაჩევსკის გეომეტრია აღმოჩენიდან მხოლოდ ნახევარი საუკუნის შემდეგ იქნა აღიარებული.

გაუსი ერთ-ერთ თავის წერილში აღნიშნავდა: „დაშვებას, რომ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი ორ მართ კუთხეზე ნაკლებია, მივყავართ თავისებურ გეომეტრიასთან, რომელიც განსხვავდება ევკლიდეს გეომეტრიისაგან“.

ლობაჩევსკი ცდილობდა გამოეკვლია, რომელი გეომეტრიაა ჭეშმარიტი ჩვენი სივრცისათვის, ის, რომელშიც სამკუთხედის კუთხეების ჯამი ორი მართი კუთხეა, თუ ის, რომელშიც სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი ორ მართ კუთხეზე ნაკლებია? ამისათვის მან მიმართა ასტრონომიას. ლობაჩევსკის გეომეტრიაში სამკუთხედში კუთხეთა ჯამი ორი მართი კუთხისაგან განსხვავდება. ამის დადასტურება მაშინდელი გამოთვლებით დედამიწაზე აღებული სამკუთხედისათვის შეუძლებელი იყო. ლობაჩევსკი აღნიშნავდა: „... ასტრონომიულ დაკვირვებებზე დაყრდნობით მე დავამტკიცე, რომ იმ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი, რომლის გვერდები დედამიწიდან მზემდე მანძილის ტოლია, ორი მართი კუთხისაგან განსხვავდება არა უმეტეს 0,003 გრადუსის შესამოცედი სეკუნდისა“.

ლობაჩევსკის აღმოჩენამ უფრადლება ვერ მიიქცია იმის გამოც, რომ მისი შრომები ძნელად გასაგები იყო. მხოლოდ მას შემდეგ დაინტერესდნენ ლობაჩევსკის იდეით, როცა გაუსი ცოცხალი არ იყო და მის გამოუქვეყნებელ შრომებში მონახეს არაევკლიდური გეომეტრიის მონახაზი.

4. ლობაჩევსკის გეომეტრიის აღიარება. ლობაჩევსკის გეომეტრიამ საერთო აღიარება პოვა მის შემდეგ, როდესაც იტალიელმა მათემატიკოსმა ე. ბელტრაშიმ¹ აღმოაჩინა, რომ ევკლიდეს სივრცეში არსებობს ზედაპირი, რომელსაც აქვს ლობაჩევსკის სიბრტყის თვისებები. ამ აღმოჩენამ დააწმენა მეცნიერები ლობაჩევსკის იდეების ჭეშმარიტებაში. და ამით დასაწყისი მიეცა მრავალრიცხოვან გამოკვლევებს არაევკლიდურ გეომეტრიაში. ფელიქს კლაინმა² მოგვცა სრულიად ახალი მიდგომა არაევკლიდური გეომეტრიისადმი.

რომანოვ³ შექმნა სხვაგვარი არაევკლიდური გეომეტრია, სრულიად განსხვავებული როგორც ევკლიდეს გეომეტრიისაგან, ისე ლობაჩევსკის გეომეტრიისაგან. ამ გეომეტრიას რ ი მ ა ნ ის გ ე ო მ ე ტ რ ი ა ს უწოდებენ.

¹ ეუჩინო ბელტრაში (1835—1900), იტალიელი მათემატიკოსი.

² კარლ ფელიქს კლაინი (1849—1925), გერმანელი მათემატიკოსი.

³ ბერნარდ რომანი (1826—1866), გერმანელი მათემატიკოსი.

პაშის⁴ შრომა „ლექციები ახალ გეომეტრიაში“ (1882), წარმოადგენს ცდას გეომეტრიის აქსიომური დაფუძნების შესახებ. ე. წ. დალაგებულობის აქსიომები ყველაზე ადრე პაშიმ ჩამოაყალიბა. პაშიმ გამოთქვა ღრმა აზრი გეომეტრიის ძირითად დებულებათა შესახებ: „გეომეტრიის ძირითადმა დებულებებმა უნდა მოიცვათ მთელი ემპირიული მასალა, დავადგენთ რა მათ, აღარ უნდა მოგვიხდეს დაფუძნებულად გრძნობით აღქმას“.

დიდი დამსახურება აქვს ახალი გეომეტრიის განვითარებაში იტალიელ მათემატიკოსს პეანოს და მის სკოლას. ამ დროისათვის შეიქმნა სიმრავლეთა თეორია და მათემატიკური ანალიზი, მყარ საფუძველზე დაფუძნდა კანტორის, ვაიერშტრასის² და ლიდეკანდის³ შრომების შედეგად. მათემატიკოსთა მრავალი თაობის დიდი შრომა დაგვირგვინდა დავით ჰილბერტის შრომით — „გეომეტრიის საფუძველები“ (1899).

ბ. ჰილბერტის აქსიომათა სისტემა. ჰილბერტმა ააგო გეომეტრია აქსიომური მეთოდით, ის აქსიომები, რომლებიც ჩამოაყალიბა ჰილბერტმა, გაცილებით სრულყოფილია, ვიდრე ევკლიდეს აქსიომები. ჰილბერტი არ ანსხვავებს პოსტულატებს აქსიომებისაგან. განიხილავს მხოლოდ აქსიომებს, ევკლიდეს აქსიომებში არაა დალაგებულობის აქსიომები. ჰილბერტმა ჩამოაყალიბა დალაგებულობის აქსიომები. ევკლიდეს აქსიომებში არ იყო უწყვეტობის აქსიომები. ჰილბერტმა გეომეტრიის აქსიომებში შეიტანა უწყვეტობის აქსიომები.

აი, რას წერს ჰილბერტი „გეომეტრიის საფუძველების“⁴ შესავალში:

„გეომეტრია, — ისევე როგორც არითმეტიკა, — თავისი აგებისათვის მოითხოვს მხოლოდ რამდენიმე მარტივ ძირითად დებულებას. ამ დებულებებს გეომეტრიის აქსიომები უწოდება. გეომეტრიის აქსიომათა დადგენა და მათი ურთიერთიმართების გამოკვლევა — აი ამოცანა, რომელიც ევკლიდეს დროიდან მრავალრიცხოვანი მშვენიერი მათემატიკური ლიტერატურის თემას წარმოადგენდა. ეს ამოცანა დაიყვანება ჩვენი სივრცული წარმოდგენის ლოგიკურ ანალიზზე.“

წინამდებარე გამოკვლევა ახალი ცდაა, დაადგინოს გეომეტრიისათვის სრული და შეძლებისდაგვარად აქსიომათა მარტივი სისტემა და გამოიყვანოს აქედან უმნიშვნელოვანესი გეომეტრიული თეორემები, რომლებიც მიიღებიათ ცალკეული თეორემიდან ისე, რომ ამასთან ნათელი ხდებოდა, როგორც აქსიომათა სხვადასხვა ჯგუფის, ისე შედეგების მნიშვნელობა“.

ჰილბერტი განიხილავს ნებისმიერი სამი სახის ობიექტთა სიმრავლეს. ამ ობიექტთაგან ერთს უწოდებს წერტილებს, მეორეს წრფეებს და

¹ მორიკ პაში (1843—1930), გერმანელი მათემატიკოსი.

² კარლ ვაიერშტრასი (1815—1892), გერმანელი მათემატიკოსი.

³ რომარდ დედეკანდი (1831—1916), გერმანელი მათემატიკოსი.

⁴ Д. Гильберт, Основания геометрии, М.—Л. 1948.

მესამეს სიბრტყეებს. იგი მოითხოვს, რომ ისინი აკმაყოფილებდნენ აქსიომათა სისტემას. თითქმის ყველა ეს აქსიომა ცნობილია საშუალო სკოლის გეომეტრიის კურსიდან.

პილბერტი აქსიომებს ჰყოფს ხუთ ჯგუფად. აქსიომების პირველ ჯგუფს ეკუთვნის ე. წ. კუთვნილებების აქსიომები. მაგალითად, პირველი ჯგუფის აქსიომებია:

I₁. ნებისმიერი ორი A და B წერტილისათვის არსებობს წრფე a , რომელიც გაივლის თითოეულ ამ წერტილზე.

I₂. ნებისმიერი ორი A და B წერტილისათვის არსებობს არა უმეტესი ერთი წრფისა, რომელიც ამ წერტილებზე გაივლის.

I₃. არსებობს სამი წერტილი მაინც, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ და ა. შ. სულ 8 აქსიომა.

მეორე ჯგუფის აქსიომებს ეწოდება დალაგებულობის აქსიომები.

II₁. თუ B წერტილი მდებარეობს A წერტილსა და C წერტილს შორის, მაშინ A, B, C არის ერთი წრფის სამი სხვადასხვა წერტილი და B წერტილი მდებარეობს აგრეთვე C და A წერტილებს შორის.

II₂. AC წრფის ნებისმიერი ორი A და C წერტილისათვის არსებობს ყოველ შემთხვევაში ერთი B წერტილი მაინც, რომ B წერტილი მდებარეობს A და C წერტილებს შორის და ა. შ. სულ 4 აქსიომა.

აქსიომათა მესამე ჯგუფი განსაზღვრავს კონგრუენტულობის ცნებას და ამით — მოძრაობის ცნებას. ორი ფიგურა კონგრუენტულია, თუ მოძრაობით ერთი შეუთავსდება მეორეს, მაგალითად, ორი სამკუთხედი, რომელთაგან ერთი მიიღება მეორე სამკუთხედის პარალელური გადატანით და მოძრუნებით, კონგრუენტულია. მაგრამ აბსტრაქტულ სივრცეში, რომელშიაც ჩვენ ვიმყოფებით, ჯერ კიდევ არაა მოძრაობის ცნება. პირიქით, მოძრაობა განისაზღვრება როგორც ისეთი გარდაქმნა ჩვენი სივრცისა, რომლითაც კონგრუენტული ფიგურები გადაისახებიან კონგრუენტულ ფიგურებში.

მესამე ჯგუფის აქსიომებია

III₁. თუ a წრფის ორი წერტილია A და B და A' — ამავე ან სხვა a' წრფის წერტილი, მაშინ a' წრფეზე A' წერტილიდან მოცემულ მხარეზე არსებობს ისეთი B' წერტილი, რომ AB მონაკვეთი კონგრუენტულია $A'B'$ მონაკვეთისა. სხვაგვარად რომ

ვთქვათ, AB მონაკვეთი ტოლია $A'B'$ მონაკვეთისა (ნახ. 9).

ამასთან, ყოველთვის $AB \equiv BA$.

III₂. თუ $A'B'$ მონაკვეთი და $A''B''$ მონაკვეთი კონგრუენტულია ერთი და იგივე AB მონაკვეთისა, მაშინ $A'B'$ და $A''B''$ მონაკვეთები კონგრუენტულია. სულ 5 აქსიომა.

მეოთხე ჯგუფი აქსიომებისა შედგება მხოლოდ ერთი აქსიომისაგან — აქსიომა პარალელობის შესახებ:

IV (ევკლიდეს აქსიომა). ვთქვათ, a ნებისმიერი წრფეა და A წერტილი, რომელიც a წრფის გარეთაა, ამ შემთხვევაში a წრფით და A წერტილით განსაზღვრულ სიბრტყეში არსებობს არაუმეტესი ერთი წრფისა, რომელიც გაივლის A წერტილზე და არ გადაკვეთს a წრფეს.

აქსიომების მე-5 ჯგუფი — უწყვეტობის აქსიომები.

V₁ (არქიმედეს აქსიომა). ვთქვათ, AB და CD ორი რომელიმე მონაკვეთია, მაშინ AB წრფეზე არსებობს ისეთი $A_1, A_2, \dots, A_n$ წერტილების სასრული რიცხვი, რომ $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ მონაკვეთები კონგრუენტულია CD მონაკვეთისა და B წერტილი მდებარეობს A და A_n -ს შორის (ნახ. 10).



ნახ. 10

V₂. ვთქვათ, რომელიმე a წრფეზე აღებულია $AB, A_2B_2, \dots$ მონაკვეთების მიმდევრობა, რომელთაგან ყოველი მომდევნო მდებარეობს წინას შიგნით. ვთქვათ, აგრეთვე არ არსებობს მონაკვეთი, რომელიც მდებარეობს აღებულ მონაკვეთთა მიმდევრობის ყველა მონაკვეთის შიგნით, მაშინ არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომელიც მდებარეობს

რეობს ყველა მონაკვეთში (წრფივი სასრულის, ანუ კანტორის აქსიომა). (ნახ. 11).



ნახ. 11

კანტორის აქსიომის პირობიდან აღვიღო შესამჩნევია, რომ მხოლოდ ერთი ξ წერტილი არსებობს, რომელიც ყველა $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ მონაკვეთს ეკუთვნის. მართლაც, რომ კიდევ მეორე η წერტილი არსებობდეს, რომელიც ყველა მონაკვეთს ეკუთვნის, მაშინ ყოველი n -სათვის A_nB_n მონაკვეთი უნდა შეიცავდეს ξ მონაკვეთს, რაც აქსიომის პირობით გამოირიცხება.

არქიმედეს და კანტორის აქსიომებით ყოველ მონაკვეთს შეგვიძლია შევესაბამოთ ერთადერთი რიცხვი, ამისათვის შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა:

ყოველ მონაკვეთს შეესაბამება დადებითი რიცხვი ისე, რომ

1) ტოლ მონაკვეთებს ტოლი რიცხვები შეესაბამებოდეს;

2) თუ B წერტილი AC მონაკვეთის წერტილია და AB მონაკვეთს შეესაბამება რიცხვი a , ხოლო BC მონაკვეთს რიცხვი b , მაშინ AC მონაკვეთს შეესაბამება რიცხვი $a+b$;

3) რაიმე OE მონაკვეთს შეესაბამება რიცხვი 1.

მაშინ რიცხვს, რომელიც ჩამოთვლილი პირობებით შეესაბამება მონაკვეთს, ეწოდება მონაკვეთის სიგრძე.

ჩამოთვლილი პირობებით ყოველ მონაკვეთს შეესაბამება რიცხვი და ეს რიცხვი ერთადერთია.

მართლაც, ავიღოთ ორი მონაკვეთი AB და CD . წერტილი C შევუთავსოთ D წერტილს ისე, რომ CD მონაკვეთი გაყვეს AB მონაკვეთს. ვთქვათ, D წერტილი მოთავსდა AB მონაკვეთის A_1 წერტილში, $AA_1 \equiv CD$ (AA_1 კონგრუენტულია CD მონაკვეთის, ნახ. 10), მაშინ ვიტყვი, AB -ს სიგრძე მეტია CD მონაკვეთის სიგრძეზე. ახლა ავიღოთ A_1B და CD მონაკვეთები და, ვთქვათ, $A_1A_2 \equiv CD$ და ა. შ. არქიმედეს აქსიომის თანახმად, არსებობს CD მონაკვეთის კონგრუენტულ მონაკვეთთა სასრული რიცხვი n , რომ B წერტილი მოთავსდება

A_{n-1} A მონაკვეთში. შეიძლება B წერტილი A_{n-1} წერტილს შეუთავსდეს. თუ AB მონაკვეთის სიგრძეს აღვნიშნავთ a ასოთი, ხოლო CD მონაკვეთის სიგრძეს b ასოთი, მაშინ სიგრძის ზემომოტანილი განსაზღვრის თანახმად

$$(n-1)b \leq a < nb.$$

(სწორედ, ასეთი დამოკიდებულებითაა განსაზღვრული არქიმედეს აქსიომა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია, თავი III, § 2). თუ CD მონაკვეთის სიგრძეს ერთეულად მივიღებთ, მაშინ AB მონაკვეთის სიგრძე უკანასკნელი უტოლობით განისაზღვრება ერთეულამდე სიზუსტით.

ვაჩვენოთ, რომ მონაკვეთის სიგრძე განისაზღვრება ნებისმიერი სიზუსტით. ამისათვის მოვიგონოთ მონაკვეთის შუაზე გაყოფა.

მონაკვეთის შუაზე გაყოფა შესაძლებელია პილბერტის შემდეგი აქსიომის საფუძველზე, სადაც წინასწარ განსაზღვრულია სხივი და კუთხე.

III₄. ყოველი კუთხე ცალსახად გადაიღება მოცემულ სიბრტყეში სხივის მოცემულ მხარეს (ნახ. 12). კუთხეთა კონგრუენტულობისათვის იზმარება აღნიშვნა:

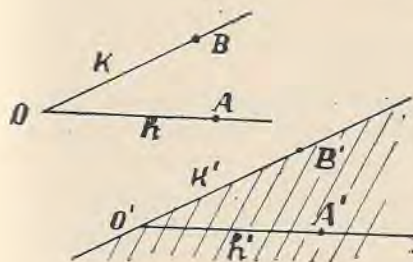
$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k') \text{ ან } \angle AOB \equiv \angle A'O'B'.$$

ყოველი კუთხე თავისთავის კონგრუენტულია:

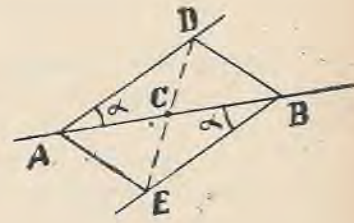
$$\angle AOB \equiv \angle AOB.$$

მე-13 ნახაზზე ნაჩვენებია AB მონაკვეთის შუაზე გაყოფა:

$$\angle BAD \equiv \angle ABE, AD \equiv BE.$$



ნახ. 12



ნახ. 13

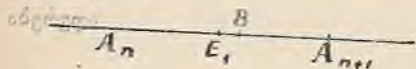
C წერტილი რომ AB მონაკვეთის შუა წერტილია, ადვილი დასამტკიცებელია ნახაზზე გამოსახული სამკუთხედების კონგრუენტულობის საფუძველზე.

ახლა აჩვენოთ, რომ AB მონაკვეთის სიგრძე განისაზღვრება ნებისმიერი სიზუსტით.

ვთქვათ, B წერტილი მოთავსებულია A_n წერტილსა და A_{n+1} წერტილს შორის.

$$n < a < n + 1.$$

მონაკვეთი $A_n A_{n+1}$ გავყოთ შუაზე. მაშინ B წერტილი მოთავსდება ან $A_n E_1$ მონაკვეთზე ან $E_1 A_{n+1}$ მონაკვეთზე. ვთქვათ, B წერტილი მოთავსდა $E_1 A_{n+1}$ მონაკვეთზე (ნახ. 14). გვეჩვენა



$$n + \frac{1}{2} < a < n + 1.$$

ამ იმედი

ნახ. 14

ამ შემთხვევაში $a = n + \frac{1}{2}$, რომელიც ჩაეწერათ ორწილადით:

რეგულარული

$a = n, 1$. ამ შემთხვევაში AB მონაკვეთის სიგრძე გაზომილია $\frac{1}{2}$ სიზუსტით.

თუ ჩამატოცეს გაავარძელებთ, მივიღებთ

სიზუსტე

$$a = n, n_1 n_2, \dots,$$

სადაც n მთელი ნაწილია, ხოლო $n_1, n_2, \dots$ ლებულობენ მნიშვნელობებს 0 ან 1.

კანტორის აქსიომის თანახმად მონაკვეთებს $A_n A_{n+1}, E_1 A_{n+1}, \dots$ აქვთ ერთადერთი საერთო წერტილი ξ . სწორედ ეს წერტილი დაემთხვევა B წერტილს, ხოლო $A\xi = AB$ მონაკვეთის სიგრძე იქნება $n, n_1 n_2, \dots$ ეს წილადი ან შეწყდება ან გაგრძელდება უსასრულოდ. თუ წილადი შეწყდება რომელიმე n_k -ზე, B წერტილი თუ $A_n A_{n+1}$ მონაკვეთის 2^{-k} ნაწილის წერტილს დაემთხვევა, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$a = n, n_1 n_2 \dots n_k 0 0 \dots$$

ამგვარად, AB მონაკვეთის სიგრძე a მონაკვეთის სიგრძის განსაზღვრება და უწყვეტობის აქსიომათა საფუძველზე განისაზღვრება ცალსახად.

ამ ხუთი ჯგუფის პილბერტის აქსიომათა სისტემა განსაზღვრავს ობიექტთა სივრცის რომელსაც ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცე ეწოდება. ამ სივრცეში მოქმედებს ევკლიდეს გეომეტრია.

6. პილბერტის აქსიომათა სისტემის არითმეტიკული ინტერპრეტაცია. შევნიშნოთ, რომ აქ არაფერი იყო ნათქვამი იმაზე, თუ რა ობიექტებია აღებული წერტილებად, წრფეებად და სიბრტყეებად. ან რას ნიშნავს ევკლიდეს (მდებარეობის), კონგრუენტულობისა და დალაგებულობის მიმართება. რაც არ უნდა ავიღოთ ობიექტებად და როგორც არ უნდა

განსაზღვროთ ეს მიმართებანი კერძოდ, თუ სრულდება ყველა აქსიომა, მაშინ ჩვენი სივრცისათვის ქვეშაირი იქნება ერთი და მხოლოდ ერთი გეომეტრია — ევკლიდეს გეომეტრია. სხვადასხვა ობიექტებისაგან მივიღებთ მხოლოდ ერთი და იგივე გეომეტრიის სხვადასხვა ინტერპრეტაციას — მოდელს.

მაგალითად, „წერტილი“ ვუწოდოთ x და y რიცხვთა დალაგებულ წყვილს (x, y) , ხოლო „წრფე“ — სამი რიცხვის მიმართებას $(a : b : c)$ სადაც a და b ერთდროულად ნულის ტოლი არაა. ვიტყვი, რომ „წერტილი“ (x, y) „ევკლიდის“ $(a : b : c)$ „წრფეს“, თუ სრულდება ტოლობა

$$ax + by + c = 0. \quad (1)$$

ვაჩვენოთ, რომ აღებული ობიექტებისათვის, სადაც განსაზღვრულია ჯერ-ჯერობით მხოლოდ მიმართება „ევკლიდის“, სრულდება I_1 აქსიომა. მართლაც, ვთქვათ (x_1, y_1) და (x_2, y_2) ურთიერთგანსხვავებული წერტილებია. ე. ი. $x_1 \neq x_2$ და $y_1 \neq y_2$ უტოლობიდან ერთი მაინც სრულდება. უნდა ვაჩვენოთ, რომ არსებობს „წრფე“ $(a : b : c)$, რომელსაც ევკლიდის როგორც (x_1, y_1) ისე (x_2, y_2) წერტილი. ეს კი ჩვენთვის ცნობილია; ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებაა:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (2)$$

ანუ

$$\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

ამგვარად, არსებობს „წრფე“

$$\left(\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right), \quad (4)$$

რომელიც გაივლის როგორც ერთ (x_1, y_1) , ისე მეორე (x_2, y_2) „წერტილზე“.

ადვილი მისახედრია, რომ სრულდება I_2 აქსიომა, რომ (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილებზე ერთადერთი „წრფე“ $(a : b : c)$ გაივლის. ე. ი. (1) განტოლება ერთადერთია, რომელსაც აკმაყოფილებს (x_1, y_1) , (x_2, y_2) რიცხვთა წყვილები.

დალაგებულობის აქსიომების შესამოწმებლად (2) განტოლებას მივცეთ პარამეტრული სახე

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t, \quad (5)$$

ანუ

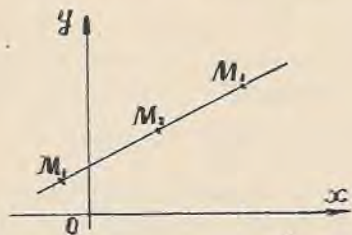
$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t. \end{cases} \quad (6)$$

თუ ავიღებთ $t_1 < t_2 < t_3$ მნიშვნელობებს, მაშინ (6) განტოლებათა სისტემიდან განვსაზღვრავთ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) რიცხვთა წყვილებს. მაგალითად, $t = 0$ მოგვცემს $M = (x_1, y_1)$ წყვილს; $t = 1$ მოგვცემს $M_2 = (x_2, y_2)$ წყვილს; $t = \frac{1}{2}$ მოგვცემს $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ წყვილს. ეს წყვილი M_3 -ით აღვნიშნოთ:

$$M_3 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

თუ მონაკვეთს $M_1 M_2$ -ს განვსაზღვრავთ, როგორც (4) „წრფის“ წერტილთა იმ სიმრავლეს, რომელიც შეესაბამება $0 \leq t \leq 1$ სეგმენტს, მაშინ ცხადია, M_3 წერტილი ეკუთვნის $M_1 M_2$ მონაკვეთს. (6) წრფის ყველა წერტილს მივიღებთ, თუ t მიიღებს ყველა მნიშვნელობას $-\infty < t < +\infty$. (6) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება, თუ $x_1 \neq x_2$, განსაზღვრავს t ცვლადის მკაცრად მონოტონურ ფუნქციას. ასევე, თუ $y_1 \neq y_2$, მაშინ მეორე განტოლებაც განსაზღვრავს t ცვლადის მკაცრად მონოტონურ ფუნქციას. ასე რომ, $t_1 < t_2 < t_3$ სიდიდეთათვის მივიღებთ $x_1 < x_2 < x_3$ ან $x_1 > x_2 > x_3$. ასევე მივიღებთ y -თვისაც.

წრფის (1) განტოლებას ყოველთვის შეგვიძლია მივცეთ (2) სახე. ამისათვის საკმარისია, (1) წრფეზე ავიღოთ ორი ნებისმიერი $M_1 = (x_1, y_1)$ $M_2 = (x_2, y_2)$ წერტილი. ამ წერტილების კოორდინატებით დავწეროთ (2) ან, რაც იგივეა, (6) განტოლებათა სისტემას. ახლა (2) წრფეზე ავიღოთ



ნახ. 15

სამი $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$, $M_3 = (x_3, y_3)$ წერტილები და გამოვთვალოთ t -ს სათანადო მნიშვნელობანი: t_1, t_2, t_3 . ვიტყვი, რომ M_2 წერტილი მდებარეობს M_1 და M_3 -ს შორის, თუ $t_1 < t_2 < t_3$ ან $t_1 > t_2 > t_3$ (ნახ. 15).

განვსაზღვროთ წრფის სხივი. ავიღოთ წრფე პარამეტრული განტოლებებით:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \quad (7)$$

ანუ

$$nx + (-m)y + (-nx_0 + my_0) = 0. \quad (8)$$

ამგვარად, „წრფე“ $(n : (-m) : (-nx_0 + my_0))$ გადის (x_0, y_0) „წერტილზე“.

$(n : (-m) : (-nx_0 + my_0))$ „წრფის“ „სხივი“, რომლის სათავეა (x_0, y_0) „წერტილი“, ეწოდება

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$$

წრფის ყველა იმ წერტილის სიმრავლეს, რომლებიც შეესაბამებიან $t > 0$ ან $t < 0$ მნიშვნელობებს. ეს „სხივი“ შეგვიძლია აღვნიშნოთ

$$h = (x_0, y_0; m, n)$$

ან

$$\bar{h} = (x_0, y_0; -m, -n).$$

„კუთხე“ ვუწოდოთ ორი h და $\bar{h}$ „სხივების“ სიმრავლეს, რომელთაც საერთო სათავე აქვთ: $\nless (n, k)$.

ორ M_1 და M_2 წერტილს შორის მანძილი ვუწოდოთ სიდიდეს

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

ავიღოთ წერტილების ორი წყვილი:

$$M_1 = (x_1, y_1), M_2 = (x_2, y_2); M'_1 = (x'_1, y'_1), M'_2 = (x'_2, y'_2).$$

$M_1 M_2$ და $M'_1 M'_2$ მონაკვეთებს ეწოდება კონგრუენტული, თუ

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}.$$

შევამოწმოთ, რომ III₁ აქსიომა სრულდება.

ავიღოთ ნებისმიერი $(a : b : c)$

„წრფე“, რომლის „წერტილები“ განისაზღვრებიან ტოლობებით

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \quad (7)$$

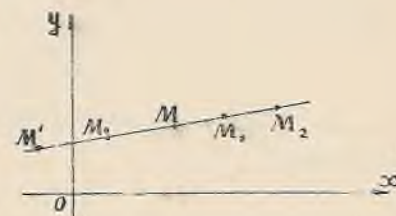
ავიღოთ ამ „წრფეზე“ ორი ნებისმიერი „წერტილი“ $M_1 = (x_1, y_1)$ და $M_2 = (x_2, y_2)$ და ამავე „წრფეზე“ ავიღოთ „წერტილი“ $M_0 = (x_0, y_0)$. მაშინ არსებობს (7) „წრფეზე“ M_0

„წერტილის“ ორივე მხარეს ისეთი „წერტილები“ M და M' , რომ (ნახ. 16)

$$|M_1 M_2| = |M_0 M|, |M_1 M_2| = |M_0 M'|,$$

ანუ

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (9)$$



ნახ. 16

ამ ტოლობაში ყველა სიდიდე ცნობილია, გარდა x და y -სა. (9) ტოლობა (7) ტოლობის საფუძველზე მოგვცემს

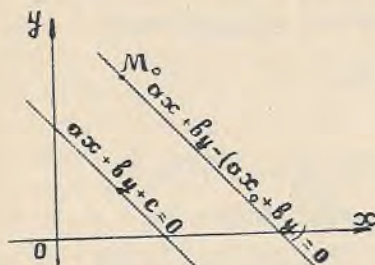
$$m^2 t^2 + n^2 t^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

საიდანაც განვსაზღვრავთ t -ს ორ მნიშვნელობას:

$$t_1 = + \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{m^2 + n^2}}, \quad t_2 = - \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{m^2 + n^2}}.$$

აქედან t_1 -ის მნიშვნელობით (7) ტოლობიდან განვსაზღვრავთ M „წერტილს“, ხოლო t_2 -ის მნიშვნელობით M' წერტილს. სრულიად ასევე შევა-
მოწმებთ, რომ მე-3 ჯგუფის სხვა აქსიომებიც სრულდება.

შევჩერდეთ მე-4 ჯგუფის აქსიომაზე — პარალელობის აქსიომაზე. ვთქვათ, $(a : b : c)$ „წრფე“ არ გადის $M_0 = (x_0, y_0)$ წერტილზე (ნახ. 17),



ნახ. 17

$$ax_0 + by_0 + c \neq 0. \quad (10)$$

დავწეროთ M_0 წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება:

$$ax + by - (ax_0 + by_0) = 0.$$

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ ax + by - (ax_0 + by_0) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

ამ განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არა აქვს, რადგანაც

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

და განტოლებათა თავისუფალი წევრები ურთიერთგანსხვავდებიან (10) პირობით,

$$-(ax_0 + by_0) \neq c.$$

ამგვარად, წრფეები

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ ax + by - (ax_0 + by_0) &= 0 \end{aligned}$$

ურთიერთპარალელურია. ამით დავამტკიცებთ, რომ არსებობს ერთი „წრფე“ მაინც $(a : b : -(ax_0 + by_0))$, რომელიც გაივლის „წერტილზე“ და არ გადაკვეთს $(a : b : c)$ წრფეს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ასეთი წრფე ერთადერთია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ არსებობს კიდევ „წრფე“ $(a' : b' : c')$, რომელიც გაივლის (x_0, y_0) „წერტილზე“ და არ გადაკვეთს $(a : b : c)$ „წრფეს“. ე. ი.

$$a'x_0 + b'y_0 + c' = 0 \quad (11)$$

და განტოლებათა სისტემა

$$\left. \begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

არ უნდა იყოს თავსებადი.

მაგრამ განტოლებათა სისტემა (12) არ იქნება თავსებადი, თუ

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \lambda,$$

საიდანაც

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b.$$

(11) ტოლობიდან კი მივიღებთ:

$$c' = -a'x_0 - b'y_0 = -\lambda ax_0 - \lambda by_0 = -\lambda(ax_0 + by_0).$$

ამგვარად, წრფეები

$$\begin{aligned} a'x + b'y + c' &= 0, \\ ax + by - (ax_0 + by_0) &= 0 \end{aligned}$$

თანამთხვეულია და ამით წრფის ერთადერთობა დამტკიცდა, ანუ „წრფე“

$$(a : b : -(ax_0 + by_0))$$

ერთადერთია, რომელიც (x_0, y_0) „წერტილზე“ გაივლის და

$$(a : b : c)$$

„წრფეს“ არ გადაკვეთს.

ამგვარად, ევკლიდეს პარალელობის აქსიომა სრულდება.

შევჩერდეთ უწყვეტობის აქსიომებზე. კერძოდ, კანტორის აქსიომაზე. ჩვენ ზემოთ განვსაზღვრეთ, რომ M_3 წერტილი ეკუთვნის $[M_1 M_2]$ მონაკვეთს, თუ $M_3 = (x_3, y_3)$ აკმაყოფილებს

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

განტოლებათა სისტემას და M_1, M_2, M_3 წერტილთა შესაბამის t -ს მნიშვნელობათა შორის არსებობს დამოკიდებულება

$$t_1 < t_2 < t_3 \text{ ან } t_1 > t_2 > t_3.$$

ავიღოთ (13) წრფეზე წერტილები $A_1, B_1; A_2, B_2; \dots; A_n, B_n; \dots$ გამოვთვალოთ შესაბამისი მნიშვნელობანი A_i -სათვის t_i , B_i -სათვის — t'_i , ვთქვათ მივიღეთ მნიშვნელობანი

$$[t_1, t'_1] \supset [t_2, t'_2] \supset \dots \supset [t_n, t'_n] \supset \dots \quad (14)$$

თუ n -ის ზრდასთან ერთად $([t_n, t'_n])$ ნამდვილ რიცხვთა მონაკვეთების მიმდევრობა მისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ არსებობს მხოლოდ t ცვლადის ერთი მნიშვნელობა τ , რომელიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის (14) სეგმენტთა მიმდევრობიდან (კანტორის აქსიომა ნამდვილ რიცხვთა განსაზღვრიდან).

რადგანაც t ნამდვილ ცვლადსა და (13) წრფის (x, y) წერტილებს შორის ურთიერთცალსახა თანადობა არსებობს, მივიღებთ მონაკვეთთა მიმდევრობას

$$[A_1, B_1] \supset [A_2, B_2] \supset \dots \supset [A_n, B_n] \supset \dots$$

რომლისთვისაც არსებობს ერთდერთი წერტილი (x_τ, y_τ) , რომელიც ყველა მონაკვეთს ეკუთვნის, სადაც

$$x_\tau = x_1 + (x_2 - x_1) \tau,$$

$$y_\tau = y_1 + (y_2 - y_1) \tau.$$

ამგვარად, ვაჩვენეთ, რომ იმ სივრცეში, სადაც „წერტილი“ განვსაზღვრეთ როგორც ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილი (x, y) , „წრფე განვსაზღვრეთ ნამდვილ რიცხვთა მიმართებით $(a : b : c)$, (x, y) წერტილი“ ეკუთვნის $(a : b : c)$ „წრფეს“ ტოლობით

$$ax : by : c = 0$$

და ა. შ. სრულდება ჰილბერტის აქსიომათა სისტემა, ეს სივრცე წარმოადგენს ევკლიდეს გეომეტრიის არითმეტიკული ინტერპრეტაციის მოდელს.

7. ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის თავსებადობა. ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის ზემოთ მოტანილი არითმეტიკული ინტერპრეტაცია გვიჩვენებს, რომ ყველა გეომეტრიული აქსიომა, ყველა გეომეტრიული ცნება, რომლებიც არითმეტიკული აზრით გამოვსახეთ, წარმოადგენს იმ აქსიომათა სისტემის ლოგიკურ შედეგს, რომელიც არითმეტიკის საფუძველია, აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ ჰილბერტის აქსიომათა სისტემა არაა თავსებადი, შეიცავს წინააღმდეგობას, მაშინ ნამდვილ რიცხვთა არითმეტიკაც უნდა შეიცავდეს წინააღმდეგობას.

მართლაც, ვთქვათ, ჰილბერტის აქსიომათა სისტემიდან მივიღეთ ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო წინადადება. მაგრამ, რადგანაც ჰილბერ-

ტის აქსიომები სრულდება ზემოთ მოტანილ არითმეტიკულ ინტერპრეტაციაში, მაშინ ამ არითმეტიკულ ინტერპრეტაციაში ადგილი უნდა ჰქონდეს ყველა იმ ლოგიკურ დასკვნას, რომელიც ჰილბერტის აქსიომათაგან მიიღება, და, კერძოდ, იმ ლოგიკურ დასკვნასაც, რომლითაც ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო წინადადება მივიღეთ. ეს კი ნიშნავს ნამდვილ რიცხვთა არითმეტიკაშიც უნდა მივიღოთ ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო წინადადება.

ამგვარად, მივიღეთ შემდეგ დასკვნამდე:

თუ ნამდვილ რიცხვთა არითმეტიკა თავსებადია — წინააღმდეგობას არ შეიცავს, მაშინ ჰილბერტის აქსიომათა სისტემაც თავსებადია — წინააღმდეგობას არ შეიცავს, ე. ი. ევკლიდეს გეომეტრიაც არ შეიცავს წინააღმდეგობას.

არითმეტიკის თავსებადობა მთელი მათემატიკის საფუძველია, რომლის ჰეშმარტებას ყველაფერს წინ ვუძღვარებთ. ეს იმის გამო, რომ ის მტკიცდება ადამიანთა მრავალსაუკუნოვანი პრაქტიკით. გაუსმა არითმეტიკას უწოდა „მეცნიერებათა დედოფალი“. კრონეკერი ფიქრობდა მათემატიკური ანალიზის დაფუძნებას „არითმეტიკაზე“. მაგრამ ეს არ გვზღუდავს, რომ ვეძებთ არითმეტიკის თავსებადობის ლოგიკური დამტკიცება. არითმეტიკის თავსებადობის საკითხი დაიყვანება თვით ლოგიკის თავსებადობის საკითხზე. ეს უკანასკნელი კი გარდაუვლად მიგვიყვანს ჩვენი აზრის ნამდვილ რეალურ სამყაროსთან შესაბამისობამდე — თუ რამდენად ასახავს ჩვენი აზროვნება რეალურ სამყაროს, ამ შესაბამისობის კრიტერიუმი კი ისევე ადამიანთა პრაქტიკის შედეგებია. ადამიანთა საზოგადოების პრაქტიკის სიდიდე, აზრის შესაბამისობა მატერიალურ სამყაროსთან, ჩვენი აზროვნებით ნამდვილი სამყაროს შეცნობა საბოლოო ანგარიშში გადამწყვეტია არითმეტიკის აქსიომათა თავსებადობის დამტკიცებაში.

8. ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის დამოუკიდებლობა. შევჩერდეთ აქსიომათა სისტემის დამოუკიდებლობაზე:

აქსიომათა სისტემის დამოუკიდებლობა ნიშნავს:

აქსიომათა სისტემა არ შეიცავს ისეთ წინადადებებს, რომლებიც შეიძლება დამტკიცებულ იქნენ სხვა აქსიომების საშუალებით, ასეთი წინადადება აქსიომათა სისტემაში ზედმეტია. სხვაგვარად, აქსიომათა სისტემა უნდა შეიცავდეს წინადადებათა მინიმალურ რიცხვს, რომლებიც საჭიროა სხვა დანარჩენი წინადადებების ჰეშმარტების დასამტკიცებლად. უნდა შევნიშნოთ, თუ აქსიომათა სისტემა თავსებადი არაა, აქსიომათა სისტემა უვარგისია. მაგრამ, თუ აქსიომათა სისტემა ზედმეტ წინადადებას შეიცავს, ეს მხოლოდ აქსიომათა სისტემის დაუხვეწილობაზე მიგვითითებს; არაა გამოყოფილი ზედმეტი წინააღმდეგობანი აქსიომათა სისტემიდან.

¹ Я. Л. Т р а й н и, Основания геометрии, М., 1961.

პრაქტიკული გამოყენებიდან ცნობილია, რომ ყველა თეორემას არ გამო-
ტყეობს, ან თეორემის სიმართლის, ან თეორემის დამტკიცების მეტის-
მეტი სირთულისა და შრომატევადობის გამო, ამით ფაქტიურად ეზარდოთ
აქსიომათა რიცხვს.

უნდა აღინიშნოს, აქსიომათა სისტემის თავსებადობის საკითხი არ
აღიჭრულა XIX საუკუნის პირველ ნახევარამდე, ლობაჩევსკიმდე, ხოლო
აქსიომათა დამოუკიდებლობის საკითხს დიდი ხნის ისტორია აქვს, ევკლი-
დეს მე-5 პოსტულატის დამტკიცების საკითხი სწორედ ამის შესახებ
მიგვიჩივებს.

აქსიომათა სისტემის დამოუკიდებლობის დამტკიცების მეთოდი მი-
თითებული იყო ლობაჩევსკის მიერ.

გთქვამთ, მოცემულია თავსებადი აქსიომათა სისტემა: $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ და
გვინდა ვაჩვენოთ: აქსიომათა ეს სისტემა დამოუკიდებელია თუ არა. ავი-
ლოთ ერთი, რომელიმე A_i აქსიომა. ვაჩვენოთ, აქსიომა A_i არის თუ არა
 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n\}$ აქსიომათა სისტემისაგან დამოუკიდებ-
ელი. ამისათვის უნდა ვანვიხილოთ $A \cup \bar{A}_i$ აქსიომათა სისტემა, სადაც
 $\bar{A}_i$ არის: „აქსიომა A_i არაა ჭეშმარიტი“, თუ $A \cup \bar{A}_i$ თავსებადია, აქედან
გამომდინარეობს A_i არაა დამოუკიდებელი დანარჩენ აქსიომებზე. მართლაც, A_i
აქსიომა რომ დანარჩენი აქსიომების შედეგი იყოს, მაშინ $A \cup \bar{A}_i$ არ იქნებო-
და თავსებადი, რადგანაც ამ სისტემაში ჭეშმარიტი იქნებოდა ორი ურთიერთ-
საწინააღმდეგო წინადადება A_i და $\bar{A}_i$, რაც შეუძლებელია.

მეორე მხრივ აქსიომათა $A \cup \bar{A}_i$ სისტემის თავსებადობის დასამ-
ტკიცებლად საჭიროა ავაგოთ ისეთი მოდელი, სადაც ეს აქსიომათა სის-
ტემა განხორციელდება.

ჩვენი მიზანია, რომ დავამტკიცოთ ჰილბერტის პარალელობის აქსი-
ომის დამოუკიდებლობა დანარჩენი აქსიომებისაგან. ამისათვის პარალე-
ლობის აქსიომა შევცვალოთ წინადადებით: წრფის გარეშე მდებარე წერ-
ტილზე ამ წრფისადმი ორი წრფის გატარება მაინც შეიძლება, რომლე-
ბიც მოცემულს არ გადაკვეთს. ეს კი ლობაჩევსკის აქსიომაა.

ამგვარად, რომ დავამტკიცოთ ჰილბერტის აქსიომათა სისტემაში პა-
რალელობის აქსიომის დამოუკიდებლობა, საკმარისია, დავამტკიცოთ იმ
აქსიომათა სისტემის თავსებადობა, რომელიც მიიღება ჰილბერტის აქსიო-
მათა სისტემიდან, თუ ევკლიდეს პარალელობის აქსიომას შევცვლით ლო-
ბაჩევსკის აქსიომით. ამაში მდგომარეობს ლობაჩევსკის წინადადება:

„ასე რომ, ლობაჩევსკის გეომეტრიის მოდელის აგება მოგვცემს შე-
საძლებლობას, ერთდროულად დავამტკიცოთ ლობაჩევსკის გეომეტრიის
თავსებადობა და ევკლიდეს პარალელობის აქსიომის დამოუკიდებლობა
ევკლიდეს სხვა აქსიომათაგან. ამ საკითხს ამჟამად ვიკვლიებ“.

9. აქსიომათა სისტემის სისრულე. შევჩერდეთ აქსიომათა სისტემის

1261.16.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43.44.45.46.47.48.49.50.51.52.53.54.55.56.57.58.59.60.61.62.63.64.65.66.67.68.69.70.71.72.73.74.75.76.77.78.79.80.81.82.83.84.85.86.87.88.89.90.91.92.93.94.95.96.97.98.99.100.101.102.103.104.105.106.107.108.109.110.111.112.113.114.115.116.117.118.119.120.121.122.123.124.125.126.127.128.129.130.131.132.133.134.135.136.137.138.139.140.141.142.143.144.145.146.147.148.149.150.151.152.153.154.155.156.157.158.159.160.161.162.163.164.165.166.167.168.169.170.171.172.173.174.175.176.177.178.179.180.181.182.183.184.185.186.187.188.189.190.191.192.193.194.195.196.197.198.199.200.201.202.203.204.205.206.207.208.209.210.211.212.213.214.215.216.217.218.219.220.221.222.223.224.225.226.227.228.229.230.231.232.233.234.235.236.237.238.239.240.241.242.243.244.245.246.247.248.249.250.251.252.253.254.255.256.257.258.259.260.261.262.263.264.265.266.267.268.269.270.271.272.273.274.275.276.277.278.279.280.281.282.283.284.285.286.287.288.289.290.291.292.293.294.295.296.297.298.299.300.301.302.303.304.305.306.307.308.309.310.311.312.313.314.315.316.317.318.319.320.321.322.323.324.325.326.327.328.329.330.331.332.333.334.335.336.337.338.339.340.341.342.343.344.345.346.347.348.349.350.351.352.353.354.355.356.357.358.359.360.361.362.363.364.365.366.367.368.369.370.371.372.373.374.375.376.377.378.379.380.381.382.383.384.385.386.387.388.389.390.391.392.393.394.395.396.397.398.399.400.401.402.403.404.405.406.407.408.409.410.411.412.413.414.415.416.417.418.419.420.421.422.423.424.425.426.427.428.429.430.431.432.433.434.435.436.437.438.439.440.441.442.443.444.445.446.447.448.449.450.451.452.453.454.455.456.457.458.459.460.461.462.463.464.465.466.467.468.469.470.471.472.473.474.475.476.477.478.479.480.481.482.483.484.485.486.487.488.489.490.491.492.493.494.495.496.497.498.499.500.501.502.503.504.505.506.507.508.509.510.511.512.513.514.515.516.517.518.519.520.521.522.523.524.525.526.527.528.529.530.531.532.533.534.535.536.537.538.539.540.541.542.543.544.545.546.547.548.549.550.551.552.553.554.555.556.557.558.559.560.561.562.563.564.565.566.567.568.569.570.571.572.573.574.575.576.577.578.579.580.581.582.583.584.585.586.587.588.589.590.591.592.593.594.595.596.597.598.599.600.601.602.603.604.605.606.607.608.609.610.611.612.613.614.615.616.617.618.619.620.621.622.623.624.625.626.627.628.629.630.631.632.633.634.635.636.637.638.639.640.641.642.643.644.645.646.647.648.649.650.651.652.653.654.655.656.657.658.659.660.661.662.663.664.665.666.667.668.669.670.671.672.673.674.675.676.677.678.679.680.681.682.683.684.685.686.687.688.689.690.691.692.693.694.695.696.697.698.699.700.701.702.703.704.705.706.707.708.709.710.711.712.713.714.715.716.717.718.719.720.721.722.723.724.725.726.727.728.729.730.731.732.733.734.735.736.737.738.739.740.741.742.743.744.745.746.747.748.749.750.751.752.753.754.755.756.757.758.759.760.761.762.763.764.765.766.767.768.769.770.771.772.773.774.775.776.777.778.779.780.781.782.783.784.785.786.787.788.789.790.791.792.793.794.795.796.797.798.799.800.801.802.803.804.805.806.807.808.809.810.811.812.813.814.815.816.817.818.819.820.821.822.823.824.825.826.827.828.829.830.831.832.833.834.835.836.837.838.839.840.841.842.843.844.845.846.847.848.849.850.851.852.853.854.855.856.857.858.859.860.861.862.863.864.865.866.867.868.869.870.871.872.873.874.875.876.877.878.879.880.881.882.883.884.885.886.887.888.889.890.891.892.893.894.895.896.897.898.899.900.901.902.903.904.905.906.907.908.909.910.911.912.913.914.915.916.917.918.919.920.921.922.923.924.925.926.927.928.929.930.931.932.933.934.935.936.937.938.939.940.941.942.943.944.945.946.947.948.949.950.951.952.953.954.955.956.957.958.959.960.961.962.963.964.965.966.967.968.969.970.971.972.973.974.975.976.977.978.979.980.981.982.983.984.985.986.987.988.989.990.991.992.993.994.995.996.997.998.999.1000.

სისრულეზე, რაში მდგომარეობს აქსიომათა სისტემის სის-
რულე?

აქსიომათა სისტემის სისრულე იმაში მდგომარეობს, რომ მხოლოდ
აღებული აქსიომათა სისტემის საშუალებით, ყოველგვარი თვალსაჩინოე-
ბისა და ცდების გარეშე, მხოლოდ ლოგიკური გზით დავამტკიცოთ ყვე-
ლა იმ წინადადების ჭეშმარიტება ან სიყალბე, რომელიც აღებულ აქსიო-
მათა სისტემის ინტერპრეტაციაში განიხილება.

არასრული აქსიომათა სისტემის მაგალითია ევკლიდეს „საწყისების“
პოსტულატთა სისტემა. ამ სისტემაში არაა უწყვეტობის, მოძრაობის და
დალაგების აქსიომები, ამის გამო არ შეგვიძლია დავამტკიცოთ მთელი
რჩევი წინადადებანი, ევკლიდეს იძულებული იყო ესარგებლა ნახაზებით
და ზოგიერთი წინადადების ჭეშმარიტება ნახაზებით დავამტკიცებინა.

შევაღიროთ აქსიომათა სისტემის თავსებადობა და სისრულე.
თუ აქსიომათა სისტემის თავსებადობა იძლევა პირობას, რომ ურთი-

ერთსაწინააღმდეგო წინადადებათაგან A და $\bar{A}$ -დან ერთდროულად ორი-
ვე არ შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი, აქსიომათა სისტემის სისრულე იძლე-
ვა პირობას, რომ ამ წინადადებათაგან ერთ-ერთი აუცილებლად იქნება
ჭეშმარიტი.

ფაქტიურად, როგორ გავიგოთ, აღებული აქსიომათა სისტემის სის-
რულე? დიდი ხნის განმავლობაში ფიქრობდნენ, რომ აქსიომათა სისტე-
მის სისრულის შემოწმება შეიძლება მხოლოდ პრაქტიკულად: ყველა
თეორემა, რომელიც პრაქტიკაში გვხვდება, უნდა იქნეს განხილული, და,
ცხადია, ამით შემოწმდება აღებული აქსიომათა სისტემის სისრულე. მაგ-
რამ გეომეტრიულ წინადადებათა რიცხვი შემოუსაზღვრელია, ჩვენ არ
შეგვიძლია ყველა წინადადების განხილვა და, მაშასადამე, არასდროს არ
შეგვიძლება დავადასტუროთ აქსიომათა სისტემის სისრულე. ამას ისიც
უნდა დაემატოს, რომ სადაა იმის პირობა, რომ არ აღმოჩნდება ახალი
წინადადებანი, რომლებიც კვლავ უნდა განვიხილოთ?

ამიტომ უნდა გვქონდეს ისეთი კრიტერიუმი — საზომი, რომელიც
მოგვცემს საშუალებას, გამოვარკვიოთ აღებულ აქსიომათა სისტემის
სისრულე.

ასეთი ნიშანი შეიძლება მოგვცეს აქსიომათა სისტემის ინტერპრეტა-
ციების იზომორფიზმის ცნებამ.

10. აქსიომათა სისტემის ინტერპრეტაციების იზომორფულობა. ერთი
და იგივე აქსიომათა სისტემის ინტერპრეტაციები იზომორფულაა,
თუ ამ ინტერპრეტაციათა ძირითად ობიექტებს შორის შეიძლება დავამ-
ყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შემდეგი პირობით: თუ ერთი
ინტერპრეტაციის ობიექტები ურთიერთდაკავშირებულია აღებულ აქსიო-
მათა ძირითადი მიმართებით, მაშინ იმავე მიმართებით ურთიერთ-
დაკავშირებული უნდა იყოს ამ ობიექტების შესაბამისი ობიექტები მეო-
რე ინტერპრეტაციაში. მაგალითად, ავიღოთ ჰილბერტის აქსიომათა სის-

38. გ. კოშლახე

593

ტემის ორი ინტერპრეტაცია. ეს ინტერპრეტაციები ურთიერთიზომორფული იქნება, თუ ერთი ინტერპრეტაციის „წერტილებს“ $A, B, C, \dots$ და „წრფეებს“ $a, b, c, \dots$ შეესაბამება მეორე ინტერპრეტაციის „წერტილები“ $A', B', C', \dots$ და „წრფეები“ $a', b', c', \dots$ ისე, რომ თუ B „მდებარეობს“ A და C „წერტილებს“ შორის, მაშინ B' წერტილი უნდა „მდებარეობდეს“ A' და C' -ს შორის. ასევე, თუ a „წრფე“ „გაივლის“ B და C „წერტილებზე“, a' უნდა „გაივლიდეს“ B' და C' „წერტილებზე“ და ა. შ.

ადვილი შესამჩნევია, რომ იზომორფულობა ცნებას აქვს ტრანზიტულობის თვისება; თუ აქსიომათა სისტემის ორი ინტერპრეტაცია ცალკეულ იზომორფულია მეორე ინტერპრეტაციისა, მაშინ ეს ორი ინტერპრეტაცია ურთიერთიზომორფულია.

ახლა ვისარგებლოთ ინტერპრეტაციის ცნებით და აქსიომათა A სისტემიდან $\{A_i$ აქსიომების ურთიერთდამოუკიდებლობის ცნებით, გვეჩვენება შემდეგი განსაზღვრება:

წინადადება A_i დამოუკიდებელია A აქსიომათა სისტემიდან, თუ არსებობს A სისტემის ორი არაიზომორფული ინტერპრეტაცია, სადაც ერთ ინტერპრეტაციაში სრულდება A_i , ხოლო მეორეში არ სრულდება ამის გამო, აქსიომათა სისტემა, რომელიც უზრუნველყოფს მხოლოდ დამოუკიდებელ წინადადებათა არსებობას, შემდეგნაირად განისაზღვრება:

აქსიომათა სისტემას ეწოდება სრული, თუ ამ სისტემის ყველა ინტერპრეტაცია ურთიერთიზომორფულია.

თუ, მაგალითად, ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის ყველა ინტერპრეტაცია ურთიერთიზომორფულია, ჰილბერტის აქსიომათა სისტემა სრულია. სხვა წინადადებანი, რომლებიც ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის ინტერპრეტაციაში მიიღებ, დამოკიდებულ იქნება ძირითად წინადადებებზე — აქსიომებზე და მათი დამტკიცება შეიძლება აღებულ აქსიომათა საფუძველზე.

ახლა დავამტკიცოთ ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის სისრულე.

ზემოთ განვიხილეთ ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის არითმეტიკული ინტერპრეტაცია, რომელშიაც ზოგიერთ ობიექტს ეწოდება „წერტილები“, სხვა ობიექტებს „წრფეები“. სადაც სრულიად გარკვეული მიმართებანი გამოსახავს „ეკუთვნის“, „მათ შორის მდებარეობს“, „კონგრუენტულობას“, აქსიომათა სისტემიდან ყველა შემდეგი სრულდება აღებულ ინტერპრეტაციაში. ეს ინტერპრეტაცია აღვნიშნოთ p ასოთი. p არის ევკლიდეს პლანიმეტრიის არითმეტიკული ინტერპრეტაცია. p ინტერპრეტაციაში „წერტილი“ განესაზღვრეთ ნამდვილ რიცხვთა დაღებულ წყვილთა (x, y) . „წრფე“ განესაზღვრეთ სამი ნამდვილი რიცხვის c მიმართებით, „ეკუთვნის“ განესაზღვრეთ

$$ax + by + c = 0$$

ტოლობით და ა. შ.

ახლა ავაგოთ სხვა ინტერპრეტაცია. ავიღოთ აბსტრაქტული სიბრტყე, რომელშიაც შემოვიღოთ კოორდინატთა სისტემა, სადაც (x, y) ნამდვილ რიცხვთა წყვილს შევუსაბამოთ „წერტილი“ კოორდინატებით (x, y) . ყოველი სამეული $(a : b : c)$ რიცხვებით განესაზღვროთ „წრფე“

$$ax + by + c = 0,$$

სადაც, a და b ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის. შემოვიღოთ ცნება „წერტილი“ (x, y) „ეკუთვნის“ $(a : b : c)$ „წრფეს“ და ა. შ. ამით, ამ ახალ ინტერპრეტაციაში ავაგებთ ანალიზურ გეომეტრიას. ეს ინტერპრეტაცია აღვნიშნოთ Q ასოთი. ცხადია, ყველა ფორმულას, რომელიც Q ინტერპრეტაციაში მიიღება, ცალსახად შეესაბამება P ინტერპრეტაციაში მიღებული ფორმულა.

ამგვარად, ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის P ინტერპრეტაცია იზომორფულია Q ინტერპრეტაციისა. რადგანაც ჰილბერტის აქსიომათა ყველა ინტერპრეტაცია იზომორფულია ჰილბერტის აქსიომების არითმეტიკული ინტერპრეტაციისა, ჰილბერტის აქსიომათა სისტემა სრულია.

ზემოთ შევხვდეთ საკითხს — როგორ დამოკიდებულებაშია ევკლიდეს გეომეტრია ლობაჩევსკის გეომეტრიასთან:

ჰილბერტის აქსიომათა სისტემაში პარალელობის აქსიომა დამოუკიდებელი იქნება სხვა აქსიომებისაგან, თუ აქსიომათა ის სისტემა, რომელშიც პარალელობის აქსიომა შეცვლილია მისი უარყოფით — ლობაჩევსკის აქსიომით, იქნება თავისებური. ხოლო აქსიომათა სისტემის თავსებადობის დასამტკიცებლად საკმარისია ავაგოთ რომელიმე მისი მოდელი, რომელიც არ შეიცავს წინააღმდეგობას.

11. ლობაჩევსკის გეომეტრიის ინტერპრეტაცია. ლობაჩევსკის გეომეტრიის ინტერპრეტაცია მრავალნაირად შეიძლება; ჩვენ განვიხილავთ ერთ-ერთ ინტერპრეტაციას, რომელიც გამოჩენილ ფრანგ მათემატიკოსს ა. პუანკარეს¹ ეკუთვნის.

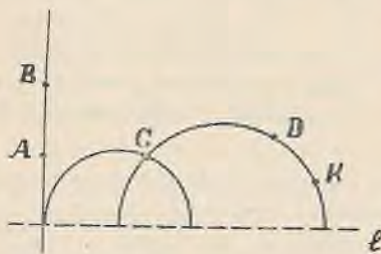
ჯერ ჩამოვაყალიბოთ ევკლიდეს მე-5 აქსიომის საწინააღმდეგო აქსიომა:

არსებობს AB წრფე და მის გარეშე მდებარე C წერტილი, რომ C წერტილზე გადის არანაკლებ ორი წრფისა, რომლებიც ABC სიბრტყეში მდებარეობენ და AB წრფეს არ გადაკვეთენ. ევკლიდეს დანართნი აქსიომები უცვლელად დავტოვოთ.

ევკლიდეს სიბრტყეზე ავიღოთ რაიმე l წრფე. ეს წრფე ევკლიდეს სიბრტყეს ორ ნაწილად გაყოფს (ნახ. 18). შევთანხმდეთ, რომ ერთ-ერთ ამ ნახევარსიბრტყეთაგანს ეუწოდოთ „ზედა სიბრტყე“, ამ სიბრტყეს l წრფის წერტილები არ მიეკუთვნოთ (ამის გამო l წრფე პუნქტირითა აღნიშნული). ამ სიბრტყის წერტილებს ეუწოდოთ „ლობაჩევსკის წერ-

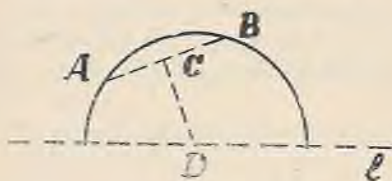
¹ ანრი პუანკარე (1854—1912), ფრანგი მათემატიკოსი.

ტილები. ევკლიდეს სიბრტყეზე განვიხილოთ წრეწირები, რომელთა ცენტრები l წრფეზეა. ამ წრეწირებს ეძეწოდოთ „ლობაჩევსკის წრფეები“. ცხადია, ლობაჩევსკის წრფეების კერძო შემთხვევაა ევკლიდეს სიბრტყეში l წრფის პერპენდიკულარული წრფეები: ეს წრფეები იმ წრეწირების ზღვრული მდებარეობაა, რომელთა ცენტრები l წრფეზე უსასრულოდისაყენ მიისწრაფვის. ლობაჩევსკის წერტილი D ეკუთვნის ლობაჩევსკის CK „წრფეს“, ეს ნიშნავს D წერტილი ეკუთვნის ევკლიდეს იმ CK წრეწირს, რომლის ცენტრი მოთავსებულია l წრფეზე. ძნელი არაა იმის წარმოდგენა, რომ იმ სიბრტყეში, სადაც განსაზღვრულია ლობაჩევსკის „წერტილები“ და „წრფეები“, სრულდება ჰილბერტის ყველა აქსიომა (აქ მხოლოდ სიბრტყეს განვიხილავთ). მაგალითად, ყოველ

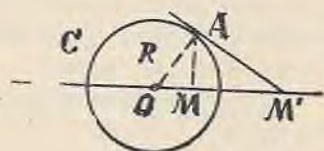


ნახ. 18

ორ „წერტილზე“ გაივლის „წრფე“. მართლაც, ავიღოთ ლობაჩევსკის ორი A და B წერტილი, ეს ორი წერტილი შევაერთოთ ევკლიდეს წრფის AB მონაკვეთით. ამ მონაკვეთის შუა C წერტილზე გავატაროთ ევკლიდეს პერპენდიკულარი, რომელიც l წრფეს ერთადერთ D წერტილში გადაკვეთს. ის ნახევარი წრეწირი, რომლის ცენტრია D წერტილი და გაივლის A და B წერტილებზე, მოგვცემს „ლობაჩევსკის წრფეს“ (ნახ. 19).



ნახ. 19



ნახ. 20

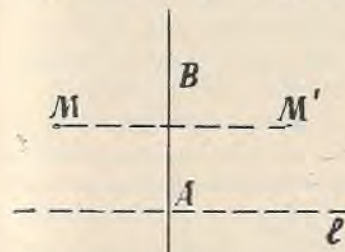
„ლობაჩევსკის წრფის“ მონაკვეთთა კონგრუენტულობას განვსაზღვრავთ ე. წ. ინვერსიის საშუალებით:

M და M' წერტილები ურთიერთინვერსიულია R -რადიუსიანი C წრეწირის მიმართ, თუ $OM \cdot OM' = R^2$ (ნახ. 20). ინვერსიით წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილები გადაისახება წრეწირის გარეთ მდებარე წერტილებში და პირიქით; წრეწირის გარეთ მდებარე წერტილები გადაისახებიან წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილებში. ინვერსია შეიძლება განისაზღვროს არა მარტო წრეწირისათვის, არამედ წრფისათვის (ნახ. 21).

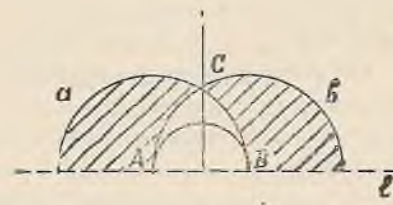
AB წრფის მიმართ ინვერსიით ყოველი წერტილი გადავა წრფის მიმართ სიმეტრიულ წერტილში

$$MO = OM', MM' \perp AB.$$

ახლა განვსაზღვროთ ფიგურათა კონგრუენტულობა. ვიტყვი, რომ ორი ფიგურა ურთიერთკონგრუენტულია, თუ ერთი ფიგურა მიიღება მეორე ფიგურისაგან ინვერსიის სასრულ რიგზევე გამოყენებით ვერტიკალური წრფეებისა და ნახევარწრეწირების მიმართ, რომელთა ცენტრები l წრფე-



ნახ. 21



ნახ. 22

ზეა. იმ სიბრტყეს, სადაც განსაზღვრულია ლობაჩევსკის „წერტილები“, „წრფეები“ და ფიგურათა კონგრუენტულობა, ეწოდება ლობაჩევსკის სიბრტყე. ლობაჩევსკის სიბრტყეში სრულდება ჰილბერტის ყველა აქსიომა, გარდა მე-4 აქსიომისა. ნაცვლად მე-4 აქსიომისა სრულდება ლობაჩევსკის აქსიომა: არსებობს AB „წრფე“ და მის გარეშე მდებარე C „წერტილი“, რომ C „წერტილზე“ „გადის“ არანაკლებ ორი „წრფისა“, რომლებიც ABC სიბრტყეში მდებარეობენ და AB „წრფეს“ არ გადაკვეთენ. l წრფის წერტილები ლობაჩევსკის სიბრტყეს არ ეკუთვნიან (ნახ. 22).

ყველა „წრფე“, რომელიც a და b „წრფეებს“ შორის მოთავსდება, არ გადაკვეთს AB „წრფეს“. ნახაზზე ეს „წრფეები“ მოთავსდება დამტრიალულ არეში.

ამგვარად, ჩვენ ნამდვილად მივიღეთ ლობაჩევსკის პლანიმეტრიის მოდელი. სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია ავაგოთ ლობაჩევსკის მთელი სივრცის მოდელი. ამისათვის ავიღოთ ნახევარსფეროები, რომელთა ცენტრები ერთ სიბრტყეზეა მოთავსებული. ეს სიბრტყე სივრცეს ორ ნაწილად გაჰყოფს. ნახევარსფეროებში ლობაჩევსკის „სიბრტყეებია“, ხოლო ამ ნახევარსფეროებზე მდებარე დიდი წრეწირები — ლობაჩევსკის „წრფეები“.

ძნელი არ უნდა იყოს იმის წარმოდგენა, რომ ყველა თეორემა ლობაჩევსკის გეომეტრიისა სათანადოდ გადასწავფრდება ევკლიდეს გეომეტრიაში. მაშასადამე, თუ ლობაჩევსკის გეომეტრიაში შეგვხვდებოდა

ერთიერთსაწინააღმდეგო წინადადებანი, ერთიერთსაწინააღმდეგო წინადადებებს მივიღებდით ევკლიდეს გეომეტრიაში.

მასადაამე, ლობაჩევსკის გეომეტრიის აქსიომები დამოუკიდებელია, რადგანაც თავსებადია ევკლიდეს გეომეტრია. ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ევკლიდეს გეომეტრიის აქსიომები ერთიერთდამოუკიდებელია, თუ ლობაჩევსკის გეომეტრია თავსებადია. ევკლიდეს გეომეტრიის პარალელობის აქსიომა დამოუკიდებელია აქსიომათა სისტემის სხვა აქსიომებისაგან და არ შეიძლება დამტკიცებულ იქნეს სხვა აქსიომების საშუალებით. ლობაჩევსკის გეომეტრიის საშუალებით შესაძლებელი გახდა ევკლიდეს გეომეტრიის პარალელობის აქსიომის დამოუკიდებლობის დამტკიცება.

რადგანაც ლობაჩევსკის გეომეტრია კონკრეტული აგება შეიძლება, ამით ლობაჩევსკის გეომეტრია აღარაა „წარმოსახვითი“ გეომეტრია.

12. არაევკლიდური გეომეტრიები. ლობაჩევსკის გეომეტრიის აგებამ საზღვარი დაუდო ევკლიდეს პარალელობის აქსიომის დამტკიცებას: პარალელობის აქსიომა დამოუკიდებელია სხვა აქსიომებისაგან და არ შეიძლება დამტკიცდეს სხვა აქსიომების საფუძველზე.

თუ ევკლიდეს გეომეტრიაში წრფის გარეშე მდებარე წერტილზე მხოლოდ ერთი წრფის გატარება შეიძლება, რომელიც ამ წრფეს არ გადაკვეთს, ლობაჩევსკის გეომეტრიაში ორი წრფის გატარება შეიძლება მოცემულ წერტილზე, რომელიც მოცემულ წრფეს არ გადაკვეთს. თუ ამ აქსიომების ნაცვლად შემოვიღებთ შემდეგ აქსიომას: წრფეთა ყოველი წყვილი, რომლებიც ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ, გადაიკვეთებიან, მივიღებთ ე. წ. რიმანის გეომეტრიას¹. რიმანის გეომეტრიაში იცვლება აგრეთვე ჰილბერტის სხვა აქსიომებიც. ამ საკითხზე დაწვრილებით არ შეგვირდებით. უნდა აღვნიშნოთ, რომ სხვადასხვა გეომეტრია და მათი სხვადასხვა ინტერპრეტაცია აფართოებს გეომეტრიათა გამოყენების არეს.

თუ ადრე გეომეტრია ვითარდებოდა კონკრეტული სიმრავლის ობიექტების მიხედვით, ახლა, როდესაც აქსიომებში არაა მითითებული რა ობიექტები უნდა ავიღოთ და რა კონკრეტული აზრი აქვს მიმართვებებს, რომლებიც აქსიომებშია აღნიშნული, ვსწავლობთ რაოდენობრივ ფარდობის და სივრცულ ფორმების თვისებებს მთლიანი ზოგადობით. როგორც ვიცით, გეომეტრია გამოგონებული და განვითარებული იქნა ფიზიკური სივრცის თვისებათა შესასწავლად. პაგრამ აღმოჩნდა: გეომეტრიულ თვისებებს აქვს უფრო ზოგადი ხასიათი და ძალაშია მრავალი სხვა ობიექტებისათვის, რომლებიც ხარისხობრივად განსხვავდებიან იმ ობიექტებისაგან, რომლებიც დაკავშირებულია ჩვენ ჩვეულებრივ გეომეტრიულ წარმოდგენებთან.

აბსტრაქციის სიღრმე კი არ ამცირებს, არამედ აფართოებს გეომეტრიის გამოყენებას რეალური სამყაროს შესწავლაში.

ევკლიდეს, ლობაჩევსკის და რიმანის სივრცეები წარმოდგენენ სივრცეთა სხვადასხვა სახეს, სადაც განსაზღვრულია შესაბამისად ევკლიდეს, ლობაჩევსკის და რიმანის გეომეტრიები. ამასთან, ევკლიდეს გეომეტრია საშუალო გეომეტრიაა ლობაჩევსკის და რიმანის გეომეტრიათა შორის.

13. აბსტრაქტული სივრცე. ზემოთ ნათქვამიდან ნათელია, რომ აქსიომურ გეომეტრიაში სივრცე დაიყვანება რაღაც აბსტრაქტულ სიმრავლეში, რომლის ელემენტებს ეუწოდებთ „წერტილებს“, „წრფეებს“ და „სიბრტყეებს“, ეს სახელწოდებანი მხოლოდ ევკლიდეს გეომეტრიის წყალობაა, რომელსაც ჩვენ შეჩვეული ვართ. შეგვიძლო გვეხმარა სხვა სიტყვებიც და წარმოგვედგინა ცხადად, ამით არაფერი არ შეიცვლებოდა, რადგანაც აქსიომურ გეომეტრიაში საქმე აქვს იმ ლოგიკურ სტრუქტურასთან, იმ ჩონჩხთან, რომელიც აღიწერება აქსიომათა მოცემული სისტემით.

სივრცე მათემატიკაში წარმოიშევა არამარტო აქსიომათა მოცემული სისტემიდან რომელიმე აქსიომის უკუღებებით და მისი შეცვლით ახალი აქსიომით. შეგვირდებოდა ამ უკანასკნელ საკითხზე.

ავიღოთ სიბრტყის ვექტორთა სიმრავლე. ჩვენთვის ცნობილია, რომ ფიზიკაში ვექტორებით გამოისახება ძალა, სიჩქარე, აჩქარება და სხვა სწორედ ფიზიკიდან განისაზღვრება მოქმედებანი ვექტორებზე. მაგალითად, $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორთა ჯამის ქვეშ გვესმის ვექტორი, რომელიც ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალით გამოისახება. $\vec{P}$ ვექტორის λ რიცხვზე გამრავლებით მივიღებთ ვექტორს $\lambda\vec{P}$ -ს, რომლის სიგრძე $|\lambda| \cdot |\vec{P}|$ -ს ტოლია და $\vec{P}$ ვექტორის მიმართულებისაა, თუ $\lambda > 0$ და საწინააღმდეგო მიმართულებისაა $\vec{P}$ -ს მიმართ, თუ $\lambda < 0$. ვექტორთა შეკრება აკმაყოფილებს პირობებს (თავი X, § 2, n2):

$$1^\circ \vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P},$$

$$2^\circ (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R}),$$

$$3^\circ \vec{P} + \vec{O} = \vec{P},$$

$$4^\circ \vec{P} + (-\vec{P}) = \vec{O}.$$

ვექტორის რიცხვზე გამრავლებს აკმაყოფილებს პირობებს:

$$1^\circ 1 \cdot \vec{P} = \vec{P},$$

$$2^\circ \alpha (\beta \vec{P}) = (\alpha\beta) \vec{P}.$$

¹ С. А. Богомолов, Введение в неевклидову геометрию Римана, М.,—Л., 1934.

ხოლო ვექტორთა შეკრება, ვექტორის რიცხვზე გამრავლება აკმაყოფილებს პირობებს:

$$1^\circ (\alpha + \beta) \vec{P} = \alpha \vec{P} + \beta \vec{P},$$

$$2^\circ \alpha (\vec{P} + \vec{Q}) = \alpha \vec{P} + \alpha \vec{Q}.$$

ახლა აქსიომური გზით განვსაზღვროთ აბსტრაქტული წრფივი სივრცე. ავიღოთ რაღაც ობიექტთა სიმრავლე, რომელთაც ვექტორები ეწოდოთ. ამ სიმრავლეში, ვთქვათ, განსაზღვრულია რაღაც მოქმედებანი, რომელთაც ობიექტთა ჯამი და ობიექტის რიცხვზე ნამრავლი ეწოდებათ და რომლებიც აკმაყოფილებენ ზემოთ ჩამოთვლილ თვისებებს — აქსიომებს. აქ არაფერია ნათქვამი იმის შესახებ, თუ რას ნიშნავს აღებული ობიექტთა ჯამი და ობიექტის რიცხვზე ნამრავლი; რა იგულისხმება აღებული ობიექტებზე აღნიშნულ მოქმედებათა ქვეშ.

ჩვეულებრივი ვექტორებისათვის ვიცით, რა არის ვექტორთა ჯამი ან ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი. მაგრამ აბსტრაქტული ობიექტებისათვის ეს მოქმედებანი გაურკვეველია. ობიექტთა აღნიშნული მოქმედებებისაგან მხოლოდ ის მოითხოვება, რომ შესრულდეს ჩამოთვლილი აქსიომები. ამიტომ, ყოველთვის, როცა გვხვდება მოქმედებანი, რომლებიც ჩამოთვლილ აქსიომებს აკმაყოფილებენ, სრული უფლება გვაქვს ვთქვათ, ეს მოქმედებანია ობიექტთა „შეკრება“ და ობიექტის რიცხვზე „გამრავლება“. ხოლო თვით ობიექტთა სიმრავლეს, რომლისთვისაც აღნიშნული მოქმედებანია დადგენილი, ეწოდოთ წრფივი სივრცე. ამის გამო უნდა

მიითითებული იქნეს რაღაც კანონი, რომლითაც ყოველ ორ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ობიექტს აღებული სიმრავლიდან შეესაბამება მესამე ობიექტი იმავე სიმრავლიდან, რომელსაც ელემენტთა ჯამი ეწოდება, აღინიშნება $\vec{P} + \vec{Q}$ სიმბოლოთი, და ნებისმიერ $\vec{P}$ ობიექტსა და λ რიცხვს შეესაბამება ობიექტი იმავე სიმრავლიდან, რომელსაც $\vec{P}$ ობიექტის λ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება, აღინიშნება $\lambda \vec{P}$ სიმბოლოთი. თუ სიმრავლის ობიექტები ნამდვილი რიცხვების დალაგებული n -ეულებია, $\vec{P} = (x_1', x_2', \dots, x_n')$, $\vec{Q} = (x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$, მაშინ $\vec{P} + \vec{Q}$ შეგვიძლია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{Q} &= (x_1', x_2', \dots, x_n') + (x_1'', x_2'', \dots, x_n'') = \\ &= (x_1' + x_1'', x_2' + x_2'', \dots, x_n' + x_n''), \end{aligned}$$

ხოლო $\lambda \vec{P}$ — შემდეგნაირად:

$$\lambda \vec{P} = \lambda (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

ამით აბსტრაქტულ სიმრავლეში განვსაზღვრავთ ობიექტთა შეკრებას და ობიექტის რიცხვზე გამრავლებას და, რომ ეს სიმრავლე წრფივი სივრცე იყოს, საჭიროა შემოწმდეს სათანადოდ აღებული აქსიომები. იმისდა მიხედვით, რა ობიექტებს ავიღებთ და როგორ განვსაზღვრავთ ამ ობიექტთა შეკრებასა და რიცხვზე გამრავლებას, მივიღებთ წრფივი სივრცის სხვადასხვა მოდელს — წრფივი სივრცის სხვადასხვა ინტერპრეტაციას.

თუ λ რიცხვი ნამდვილია, მივიღებთ ნამდვილ წრფივ სივრცეს, ხოლო, თუ λ კომპლექსურია, მივიღებთ კომპლექსურ წრფივ სივრცეს.

თუ ნამდვილ რიცხვთა განსაზღვრას მოვიგონებთ (თავი III, § 2, n1), ადვილად წარმოვიდგენთ: ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, ჩვეულებრივი შეკრებითა და გამრავლებით, წრფივი სივრცეა. ამ სივრცეში 0 ელემენტია რიცხვი 0.

თუ განვიზილავთ არა უმეტეს $(n-1)$ ხარისხის მრავალწევრთა სიმრავლეს,

$$P(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1},$$

რომელსაც დავუმატებთ ისეთ მრავალწევრს, რომლის ყველა კოეფიციენტი ნულია, $P(x) = 0$, სადაც განვსაზღვრავთ ამ სიმრავლის ელემენტთა შეკრებას და რიცხვზე გამრავლებას მრავალწევრთა ჩვეულებრივი შეკრებით და რიცხვზე გამრავლებით, მივიღებთ წრფივ სივრცის კიდევ ერთ მოდელს.

დავუბრუნდეთ ევკლიდეს ჩვეულებრივ სივრცეს. ამ სივრცეში ყოველი $\vec{P}$ ვექტორი წარმოიღგინება შემდეგნაირად

$$\vec{P} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3,$$

სადაც $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ბაზისი ვექტორებია. როგორც ვიცით, ბაზის ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0),$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0),$$

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1).$$

ისიც ვიცით, რომ ყოველი ოთხი ვექტორი ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში წრფივად დამოკიდებულია. იმისდამხედვით, თუ რამდენი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორია სივრცეში, განსაზღვრავს ევკლიდეს ჩვეულებრივი სივრცის განზომილებას. წრფეზე მდებარე ვექტორთა სიმრავლე ერთგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცეა. სიბრტყეზე მდებარე ვექტორთა სიმრავლე ორგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცეა. ასევე განვსაზღვრავთ წრფივი სივრცის განზომილებას.

წრფივ სივრცეს n -განზომილებიანი ეწოდება, თუ მასში არსებობს წრფივად დამოუკიდებელ ობიექტთა n სისტემა. ობიექტთა

წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას ბაზისი ობიექტები ეწოდება. მაგალითად, არა უმეტეს $(n-1)$ ხარისხის მრავალწევრთა სიმრავლე n -განზომილებიანი წრფივი სივრცეა, რადგანაც ობიექტები $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ წრფივად დამოუკიდებელია.

ვექტორთა სივრცე,

$$\vec{P} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

სადაც $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ რიცხვთა დალაგებული n -ეულია, n -განზომილებიანი წრფივი სივრცეა, რადგანაც ამ სივრცეში ვექტორიუმი

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\vdots$$

$$\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1),$$

წრფივად დამოუკიდებელია.

14. n -განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე. ჩვენთვის ცნობილია ვექტორი — მიმართული მონაკვეთი. თუ ვექტორი ჩვეულებრივ სიბრტყეზე ან სივრცეშია მოცემული, მაშინ ვექტორის სიგრძე განსაზღვრულია. მაგრამ, თუ განვიხილავთ თუნდაც აბსტრაქტულ ორგანზომილებიან წრფივ სივრცეს, მაშინ ვექტორის სიგრძე განსაზღვრული არ არის. ასევე განსაზღვრული არ არის ორ ვექტორს შორის კუთხე, რადგანაც სიგრძის ცნება და კუთხის ცნება აქსიომებში არაა მოცემული. იმისათვის, რომ აბსტრაქტულ წრფივ სივრცეს ჰქონდეს ევკლიდეს ჩვეულებრივი თვისებები, აქსიომებში უნდა გამოისახოს ვექტორის სიგრძის ცნება. ე. ი. უნდა დავამატოთ ისეთი აქსიომები, რომლებიც აღწერენ სივრცის მეტრიულ თვისებებს. როგორ შევასრულოთ ეს? მოვიგონოთ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი. $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება რიცხვს, რომელიც ტოლია $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორთა სიგრძეების და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლის:

$$(\vec{P}, \vec{Q}) = |\vec{P}| \cdot |\vec{Q}| \cos \varphi.$$

ამ განსაზღვრით ვაჩვენებთ, რომ ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს აქვს თვისებები:

$$1^\circ (\vec{P}, \vec{Q}) = (\vec{Q}, \vec{P}),$$

$$2^\circ (\alpha \vec{P} + \beta \vec{Q}, \vec{R}) = \alpha (\vec{P}, \vec{R}) + \beta (\vec{Q}, \vec{R})$$

ნებისმიერი α და β ნამრავლი რიცხვებისათვის,

$$3^\circ (\vec{P}, \vec{P}) \geq 0 \text{ და } (\vec{P}, \vec{P}) = 0, \text{ თუ } \vec{P} = 0.$$

ამგვარად, ჩვეულებრივ ევკლიდეს სივრცეში, სადაც უკვე განსაზღვრულია ვექტორის სიგრძე და ვექტორთა შორის კუთხე, ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს აქვს ზემოჩამოთვლილი თვისებები, ევკლიდეს სივრცეში $\vec{P}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ და $\vec{P}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი გამოისახება ტოლობით

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

აბსტრაქტული სივრცის შემთხვევაში ჩვენ ავიღებთ სკალარული ნამრავლის თვისებებს აქსიომებად და მივაღებთ შემდეგ განსაზღვრამდე:

აბსტრაქტულ წრფივ სივრცეში ობიექტთა სკალარული ნამრავლი ეწოდება მოქმედებას (მიმართებას), რომელიც ამ სივრცის ყოველ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ობიექტს შეუსაბამებს $(\vec{P}, \vec{Q})$ რიცხვს და, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

$$1^\circ. \text{ ყოველი } \vec{P} \text{ და } \vec{Q} \text{ ობიექტებისათვის } (\vec{P}, \vec{Q}) = (\vec{Q}, \vec{P});$$

$$2^\circ. \text{ ყოველი } \alpha \text{ ნამდვილი რიცხვისათვის და ყოველი } \vec{P} \text{ და } \vec{Q} \text{ ობიექტებისათვის}$$

$$(\alpha \vec{P}, \vec{Q}) = \alpha (\vec{P}, \vec{Q});$$

$$3^\circ. \text{ ყოველი } \vec{P}, \vec{Q}, \vec{R} \text{ ობიექტებისათვის}$$

$$(\vec{P} + \vec{Q}, \vec{R}) = (\vec{P}, \vec{R}) + (\vec{Q}, \vec{R});$$

$$4^\circ. (\vec{P}, \vec{P}) \geq 0 \text{ და } (\vec{P}, \vec{P}) = 0, \text{ თუ } \vec{P} = 0.$$

წრფივ სივრცეს, სადაც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი ზემოჩამოთვლილი აქსიომებით, ეწოდება ევკლიდეს სივრცე. როდესაც წრფივ სივრცეში სკალარული ნამრავლი განსაზღვრულია, ადვილია ვექტორის სიგრძის განსაზღვრა:

$$|\vec{P}| = \sqrt{(\vec{P}, \vec{P})}$$

და ორ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორს შორის კუთხის განსაზღვრა:

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{P}, \vec{Q})}{|\vec{P}| \cdot |\vec{Q}|}.$$

ამ განსაზღვრით ადვილი მისახვედრია, თუ რა არის

$$|\vec{Q}| = 1$$

და როგორ გავიგოთ $\vec{P}$ ვექტორი პერპენდიკულარულია $\vec{Q}$ ვექტორისა

$$(\vec{P}, \vec{Q}) = 0.$$

თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს

$$(\vec{P}, \vec{Q}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

ტოლობით განესაზღვრავთ, მაშინ სკალარული ნამრავლის ყველა აქსიომა შესრულებდა.

n -განზომილებიანი წრფივი ევკლიდეს სივრცის განსაზღვრის შემდეგ შეიძლება ასეთი კითხვა დაგვებადოს. რატომ ვუთმობთ n -განზომილებიან სივრცეს ამდენ ადგილს? ჩვენ ხომ ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან

სივრცეში ვცხოვრობთ? ჩვეულებრივი ვექტორი $\vec{P} = (x_1, x_2, x_3)$ სრულიად საკმარისია ფიზიკურ და მექანიკურ მოქმედებაში. ხომ არ არის n -განზომილებიანი სივრცე უბრალო აბსტრაქტული ცნობისმოყვარეობა, რომელსაც გამოყენება არა აქვს? ასეც რომ იყოს, ესეც არ გვაძლევს საფუძველს უმოწყალოდ გავილით იმ მათემატიკოსებზე, რომლებიც n -განზომილებიან სივრცეებს სწავლობენ. რადგანაც მათემატიკოსები ვალდებული არიან შეისწავლონ ყველა სტრუქტურა, ყველა ობიექტი, რომლებიც სტრუქტურის განვითარების დროს წარმოიშვებიან.

წრფივი აბსტრაქტული სივრცე მეტად ნაყოფიერი აღმოჩნდა განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის (თავი VI, § 3, $n3$), შემდეგში გავცნობით (მათემატიკური ანალიზის რიცხვით მეთოდებს), თუ როგორი წარმატებით გამოიყენება n -განზომილებიანი წრფივი სივრცე ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის ასაგებად, რომელიც მათემატიკის წმინდა გამოყენებითი საკითხია.

უთქვამთ, მაგალითად, გვინდა გამოვარკვიოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემის

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

სადაც x_1, x_2, x_3 ცვლადებია, a_{ij} მოცემული რიცხვებია, ამონახსნთა თვისებები მხარე: განტოლებათა სისტემას აქვს თუ არა ამონახსნი, თუ აქვს ამონახსნი, მაშინ რამდენი ამონახსნი აქვს, როგორ არიან ეს ამონახსნები ურთიერთდაკავშირებული?

იმისათვის, რომ დასმულ კითხვებს გუპასუხოთ, სრულებით არაა საჭირო (16) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. საკმარისია, მივმართოთ შემდეგ გეომეტრიულ წარმოდგენას:

სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში განვიხილოთ შემდეგი ვექტორები

$$\vec{P}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \quad \vec{P}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}).$$

(16) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნიშნავს, მოვნახოთ ისეთი $\vec{X}$ ვექტორი,

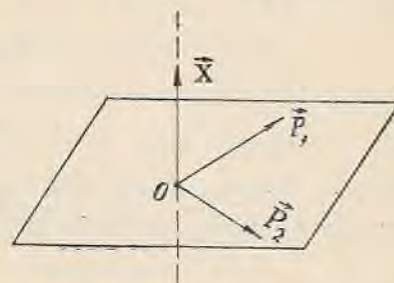
$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3),$$

რომელიც პერპენდიკულარულია როგორც $\vec{P}_1$, ისე $\vec{P}_2$ ვექტორისა:

$$(\vec{P}_1, \vec{X}) = 0, \quad (\vec{P}_2, \vec{X}) = 0. \quad (17)$$

თუ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორები ურთიერთპარალელური არ არიან (ნახ.

23), მაშინ $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ ვექტორები განსაზღვრავენ სიბრტყეს, რომლის პერპენდიკულარული ნებისმიერი $\vec{X}$ ვექტორის კოორდინატები დააკმაყოფილებენ (17) განტოლებათა სისტემას და, მაშასადამე, (16) განტოლებათა სისტემას.



ნახ. 23

თუ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორები ურთიერთპარალელურია, მაშინ იმ სიბრტყის ყველა წერტილის კოორდინატები, რომელიც $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების პერპენდიკულარულია, დააკმაყოფილებენ (16) განტოლებათა სისტემას.

გამოვიყენებთ რა n -განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეს, ადვილად გავარჩევთ განტოლებათა და უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა თვისებრივ მხარეს, ამისათვის განვიხილოთ მაგალითი წრფივი დამპროგრამების თეორიიდან.

მაგალითად, გვაქვს წარმოება, რომელიც n რაოდენობის სხვადასხვა ნაწარმს უშვებს. ნაწარმის გამოშვებისათვის საჭიროა რესურსები (ნედლეული, ელექტროენერგია, მუშის ხელფასი და სხვ.). რესურსების რაოდენობა შემოსაზღვრულია. ცნობილია, თუ რა რაოდენობის i -ური რესურსია საჭირო j -ური ნაწარმის ერთეულისათვის. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

m — რესურსების რაოდენობა,

n — ნაწარმის რაოდენობა (ერთეულებში),

a_{ij} — i -ური რესურსის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა j -ური ნაწარმის ერთეულის დასამზადებლად,

b_i — i -ური რესურსის რაოდენობა, რომელიც წარმოებას აქვს,

c_j — j -ური ნაწარმის ერთეულის ღირებულება,

x_j — j -ური ნაწარმის რაოდენობა, რომელიც წარმოებაში უნდა გამოუშვას,

x_1 ერთი სახის ნაწარმის რაოდენობა, x_2 —მეორე სახის ნაწარმის რაოდენობა და ა. შ. x_n n -ური ნაწარმის რაოდენობა. წარმოების გეგმა იქნება

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

სადაც $x_i \geq 0$. წარმოების x გეგმის მიხედვით i -ური რესურსების საჭირო რაოდენობა იქნება

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = \overline{1, m}.$$

ამ რაოდენობამ არ უნდა გადააჭარბოს არსებულ რესურსებს b_i -ს,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

შემოსავალი, რომელიც მიიღება j -ური ნაწარმის x_j ერთეულით, ტოლია $c_j x_j$, ხოლო ყველა ნაწარმის გამოშვებით შემოსავალი ტოლი იქნება

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

წარმოებას აინტერესებს ისეთი $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობათა განსაზღვრა—გეგმის შედგენა, რომ აღებული ჯამი რაც შეიძლება დიდი იყოს.

ამგვარად, წარმოების მიზანია, შეადგინოს ისეთი გეგმა, რომ ფუნქციამ

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

მაღალქონს უდიდეს მნიშვნელობას შემდეგი პირობით

$$x_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

მაშასადამე, წარმოების დაგეგმვის ამოცანა განიხილება n -განზომილებიან წრფივ სივრცეში.

ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ყველა n -განზომილებიანი წრფივი სივრცე ურთიერთიზომორფულია. ე. ი. შეიძლება ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობა ორი წრფივი სივრცის ვექტორებს შორის, რომ ერთი სივრცის ორი ვექტორია ჯამს შეესაბამებოდეს მეორე სივრცის შესაბამის ვექტორთა ჯამს, ხოლო ერთი სივრცის ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლს შეესაბამებოდეს მეორე სივრცის შესაბამისი ვექტორის იმავე რიცხვზე ნამრავლი. მაგალითად, არა უმეტეს $n-1$ ხარისხის მრავალწევრთა $P(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$ სივრცესა და $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ დალაგებულ n -ეულ რიცხვთა სივრცეს შორის შეგვიძლია დავამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა, რადგანაც ყოველი მრავალწევრი ცალსახად განისაზღვრება კოეფიციენტთა $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ დალაგებული n -ეულით:

$$P(x) \longleftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

ავიღოთ ორი მრავალწევრი

$$P(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} \text{ და } Q(x) = b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1},$$

ამ მრავალწევრთა ჯამს შეესაბამება სათანადო n -ეულების ჯამი

$$P(x) + Q(x) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + \dots + (a_n + b_n)x^{n-1} \longleftrightarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

ასევე, მრავალწევრის რიცხვზე ნამრავლს შეესაბამება სათანადო რიცხვითა n -ეულის იმავე რიცხვზე ნამრავლი:

$$\lambda P(x) = \lambda a_1 + \lambda a_2 x + \dots + \lambda a_n x^{n-1} \longleftrightarrow (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

რადგანაც წრფივ სივრცეში ამ სივრცის ობიექტთა შეკრება და ობიექტის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციებზე მეტი აოფერირი გვაქვს, ყოველ თეორემას რიცხვთა დალაგებულ n -ეულთა სივრცეში შეესაბამება ანალოგიური თეორემა არა უმეტეს $n-1$ ხარისხის მრავალწევრთა სივრცეში. თუ დავამტკიცებთ რაიმე თეორემას ერთ სივრცეში, მეორე სივრცეში ანალოგიური თეორემის დამტკიცება საჭირო არაა, საკმარისია, ანალოგიური თეორემის მხოლოდ ინტერპრეტაცია ამ მეორე სივრცეში. წრფივი სივრცის მოდელთა შორის ავიღებთ ერთ მოდელს. ესაა n -გან-

ზომილებიან ვექტორთა წრფივი სივრცე $\vec{P} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. ვექტორთა წრფივ სივრცეში ზოგიერთი თეორემის დამტკიცება მეტად თვალცხადია, სხვა n -განზომილებიან წრფივ სივრცეში შესაბამისი თეორემის ჭეშმარიტების დასადგენად მხოლოდ სათანადო თეორემის ინტერპრეტაციაა საკმარისი.

სრულიად ასეთივე მდგომარეობა გვექნება n -განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეებში. თუ ერთსა და იმავე სივრცეში განვსაზღვრავთ სკალარულ ნამრავლს სხვადასხვაგვარად, ამით მივიღებთ სხვადასხვა ევკლიდეს სივრცეს. ეს სივრცეები ურთიერთიზომორფული იქნებიან. ამასთან ვექტორი შეესაბამება არა თავის თავს, არამედ სხვა ვექტორს იმავე სივრციდან.

სტატისტიკურ ფიზიკაში შეისწავლება მცირე ზომის ჭურჭელში მოთავსებული განმუხტული გაზის მოლეკულათა მდგომარეობა. ყოველი მოლეკულა აღებულ მომენტში ხასიათდება სივრცეში მისი მდებარეობით და სიჩქარით. თითოეული ეს მდგომარეობა ხასიათდება სამი კოორდინატით. სულ 6 კოორდინატით. თუ ჭურჭელში N მოლეკულაა, ამ მოლეკულათა მდგომარეობა დახასიათდება $6N$ რიცხვით. ე. ი. საქმე გვაქვს $6N$ -განზომილებიან ნამდვილ სივრცესთან. თუ წარმოვიდგენთ რამდენიმე მოლეკულა 1 სმ³, ადვილი წარმოსადგენია როგორი განზომილების სივრცე გვექნება. სწორედ ასეთი საკითხების შესწავლაში დიდ დახმარებას გვიწევს მრავალგანზომილებიანი აბსტრაქტული სივრცე.

15. **ლობაჩევსკის გეომეტრიის მნიშვნელობა.** ზემოთქმულიდან ძნელი წარმოსადგენი არაა ლობაჩევსკის დამახტერება მათემატიკაში. შექმნა რა არაეკლიდური გეომეტრია, ამით აჩვენა, რომ შეიძლება შეიქმნას რამდენიმე გეომეტრია, ლოგიკურად თანაწორუფლებიანი, რომლებიც საკმარისი მიახლოებით ასახავენ რეალურ სივრცეს. მხოლოდ ცდებს, დაკვირვებებს შეუძლიათ გადაწყვიტონ საკითხი: რომელი გეომეტრია, რა საზღვრებში, სად სრულდება — სადაა შესაძლებელი მისი რეალიზაცია — განხორციელება. ლობაჩევსკიმ აჩვენა, რომ ევკლიდეს გეომეტრია ჭეშმარიტია: ევკლიდეს მე-4 პოსტულატი არ დამტკიცდება სხვა პოსტულატების საფუძველზე. ამით ლობაჩევსკიმ მოგვცა იმ ამოცანის ამოხსნა, რომელსაც შეეწირა მათემატიკოსთა უდიდესი შრომა ორი ათასი წლის მანძილზე.

ლობაჩევსკიმ ახალი გეომეტრიის შექმნით აჩვენა, რომ გეომეტრიის ძირითადი ცნებების და აქსიომების წყაროა რეალური სამყარო, რომელიც აღიქმება და შეიგრძნობა ჩვენს მიერ გარკვეული სიზუსტით.

ლობაჩევსკის გამოკვლევები წარმოადგენს თანამედროვე მათემატიკაში უმთავრესი იდეების განვითარების წყაროს. უპირველესად ამ გამოკვლევებიდან იღებენ სათავეს თანამედროვე გეომეტრია, აქსიომური თეორია და, კერძოდ, დ. ჰილბერტის „გეომეტრიის საფუძვლები“ (1899). აქსიომურმა მეთოდმა ღრმად გაიღმა ფესვი მათემატიკაში (არითმეტიკა, ალგებრა, ალბათობათა თეორია და სხვა). ახლა მათემატიკა სწავლობს არა მარტო ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეს, არამედ აფინურს, პროექციულს..., სწავლასხვა n -განზომილებიან სივრცეს.

სწორედ მათემატიკაში აქსიომური მეთოდის შემოტანის შედეგია განსაზღვრა:

მათემატიკა (ბერძნულად — *μαθημα* — ცოდნა) არის მეცნიერება მათემატიკური სტრუქტურების შესახებ (სიმრავლეთა შესახებ, რომლის ელემენტთა შორის განსაზღვრულია ზოგიერთი მიმართება); ენგელსის განმარტებით „წმინდა მათემატიკის საგანი ნამდვილი სამყაროს სივრცული ფორმები და რაოდენობრივი დამოკიდებულებანი“¹.

ლობაჩევსკის შრომებმა გამოიწვია ისეთი საკითხების შესწავლა, რომლებიც არ შეიძლებოდა მანამდე მათემატიკას შეესწავლა, მაგალითად, ნამდვილი სივრცის გეომეტრიული აგებულება. ლობაჩევსკის აღმოჩენის გარეშე შეუძლებელი იყო ფარდობითობის თეორიის განვითარება. თეორია, რომლითაც ატომგულის შიგნით პროცესის მიმდინარეობა შეისწავლება, ლობაჩევსკის გამოკვლევებზეა დამყარებული.

შევერდეთ ნ. ი. ლობაჩევსკის იდეების შემეცნებით მნიშვნელობაზე.

ლობაჩევსკიმდე გეომეტრიაში მრავალი საუკუნის განმავლობაში გაფიქრებული იყო იდეალისტური თვალსაზრისი, რომელიც მომდინარეობდა უძველესი ბერძენი ფილოსოფოსის — პლატონის მოძღვრებიდან, ევკლიდეს აქსიომათა სისტემას შიარქვდნენ აბსოლუტურ ხასიათს; თითქმის ევკლიდეს აქსიომები მიღებული იყო არა ცდებით, დაკვირვებით რეალური სამყაროდან, არამედ მხოლოდ ადამიანის წარმოდგენებიდან.

კანტის² მიხედვით სივრცე ობიექტურად არ არსებობს, იგი მხოლოდ შეგნების აპრიორული ფორმაა, რომელიც ადამიანის გონებაში დასაბამიდანვე მოთავსებული. ამ მოძღვრების დამამტკიცებლად კანტს მოჰყავდა გეომეტრიული აქსიომების თვალცხადობა, რომ შეუძლებელია წარმოვიდგინოთ სივრცე, რომელსაც აქვს ევკლიდეს აქსიომებისაგან განსხვავებული თვისებები. თუ გეომეტრიის ჭეშმარიტებანი თვით გონებაში არის ფესვგადგმული და იქნებოდა მიღებული მხოლოდ ცდებიდან, დაკვირვებებიდან, მაშინ ეს აქსიომები არ უნდა ატარებდნენ ასე თვალცხად, აბსოლუტურად სანდო ხასიათს, თუ ეს აქსიომები ცდებიდანაა მიღებული, მაშინ ახალმა ცდებმა უნდა უფლებებელყოს ამ აქსიომათა ჭეშმარიტება. კანტის მიხედვით ევკლიდეს გეომეტრია ჩვენი აზროვნების მიერ წმინდა სუბიექტური წყობაა, მისი ჭეშმარიტებანი აპრიორულია, რომლებიც არავითარ ცდებთან არაა დაკავშირებული. ის ერთადერთი შესაძლო გეომეტრიაა, რადგანაც მხოლოდ ერთადერთი სივრცე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ.

ლობაჩევსკის მიერ ახალი გეომეტრიის შექმნამ დამტკიცა სივრცის შესახებ კანტის თეორიის უსაფუძვლობა. მართლაც, ევკლიდეს გეომეტრიის გვერდით, აღმოჩენილ იქნა ახალი გეომეტრიული სისტემა, რომელიც არ შეიცავს წინააღმდეგობას ისევე, როგორც არ შეიცავს წინააღმდეგობას ევკლიდეს გეომეტრიული სისტემა, იგი ისევე სანდოა, როგორც ევკლიდეს გეომეტრიული სისტემა. ამით ლობაჩევსკიმ დამტკიცა, რომ გეომეტრიის აქსიომები არაა აპრიორული, ისინი მარტო აზროვნების ნაყოფი არაა. ისინი რეალური სამყაროდან მიღებული მეცნიერული ჰიპოთეზებია, რომლებიც პრაქტიკით, დაკვირვებებით, ცდებით უნდა შემოწმდეს. ადამიანის გონებას შეუძლია შექმნას რამდენიმე გეომეტრია, ლოგიკურად ტოლუფლებიანი. მხოლოდ ცდებით, დაკვირვებებით შეგვიძლია დამტკიცოთ რომელი გეომეტრია ასახავს უფრო ზუსტად ნამდვილი სამყაროს თვისებებს. გამოდიოდა რა ამ მოსაზრებიდან, ლობაჩევსკი ცდილობდა მოენახა ახალი გეომეტრიის დამადასტურებელი რეალური სივრცე — რეალური მოდელი. შემდგომში ასეთი მრავალი მოდელი იქნა აგებული.

¹ პლატონი (დაახლ. 428—347 წწ. ჩ. წ. აღ-მდე), ბერძენი ფილოსოფოსი.

² იმანუელ კანტი (1724—1804), გერმანელი ფილოსოფოსი, გერმანული კლასიკური ფილოსოფიის მამამთავარი.

¹ Философский словарь, М., 1980, стр. 205.

II ბ ა ნ ე ო ზ ი ლ ე ბ ა

დიფერენციალური აღრიცხვა

თ ა ვ ი X I I I

ფუნქციები, ზღვარი, უწყვეტობა

§ 1. ფუნქცია

1. მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები. ბუნების მოვლენების ან ტექნიკური პროცესების შესწავლის დროს საკმე გვაქვს სხვადასხვა სიდიდესთან. ამ სიდიდეებიდან ერთი ნაწილი გარკვეულ პირობებში ინარჩუნებს ერთსა და იმავე რიცხობრივ მნიშვნელობას, ხოლო მეორე ნაწილი დებულობს სხვადასხვა რიცხობრივ მნიშვნელობას. მაგალითად, თვეში კვირების რიცხვი მუდმივია, ხოლო დღეების რიცხვი ცვლადია: 28, 29, 30 ან 31 დღე. პერმეტიულად დახურულ ჭურჭელში გაზის მოცულობა გათბობით არ იცვლება; მუდმივია; ხოლო გაზის ტემპერატურა, წნევა ჭურჭლის კედლებზე იცვლება.

მუდმივი ეწოდება სიდიდეს, რომელიც მოცემულ პროცესში ერთსა და იმავე მნიშვნელობას ინარჩუნებს; ხოლო ცვლადი ეწოდება სიდიდეს, რომელიც სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობას ღებულობს.

ცვლად სიდიდეებს ჩვეულებრივად $x, y, z, \dots$ ასოებით აღნიშნავენ.

რაიმე x -ცვლადი სიდიდის ყველა მნიშვნელობა x კმნის y რიცხვით სიმრავლეს: $y = \{x\}$, რომელსაც x ცვლადი სიდიდის ცვლილებების სიმრავლე ეწოდება. მაგალითად, სუფთა წყალი ტემპერატურის ცვლილების სიმრავლეა $T = \{t | 0^\circ \leq t \leq 100^\circ\}$. თუ x ცვლადი სიდიდის ცვლილების x სიმრავლე მხოლოდ ერთ ელემენტს შეიცავს, მაშინ x სიდიდე მუდმივია. მაგალითად, ყოველი წრეწირის სიგრძის თავის დიამეტრთან შეფარდების რიცხვითი მნიშვნელობების სიმრავლე მხოლოდ ერთ ელემენტს შეიცავს. ეს ელემენტია π . ამგვარად, მუდმივი სიდიდე ცვლადი სიდიდის კერძო შემთხვევაა.

აქ ვიხმარებთ სიტყვა „სიდიდე“, ვგულისხმობთ, რომ ყველასათვის ცნობილია სიდიდე ინტუიციით, ზერელედ მაინც (მაგალითად, ორ წერ-

ტილს შორის მანძილი, სხეულის წონა და სხვა). ზემოთ ლაპარაკია იმაზე, თუ როგორ გავარჩიოთ ეს სიდიდეები ერთიმეორისაგან. სინამდვილეში სიდიდის ცნება ძალიან რთულია და მაშასადამე, „ცვლადი სიდიდის“ ცნებაც საკმარისად რთულია.

2. ფუნქცია¹. ბუნების მოვლენებსა და ტექნიკურ პროცესებში სიდიდეთა ცვლილება ისეთია, რომ უმეტესად ერთი სიდიდის ცვლილება იწვევს მეორე სიდიდის ცვლილებას. მაგალითად, პერმეტიულად დახურულ ჭურჭელში მოთავსებული გაზის წნევა იცვლება ჭურჭელში ტემპერატურის ცვლილებასთან ერთად; წრეწირის რადიუსის ცვლილება იწვევს წრეწირის სიგრძის ცვლილებას. პერმეტიულად დახურულ ჭურჭელში გაზის ტემპერატურა დღის სხვადასხვა დროისათვის სხვადასხვაა და სხვ.

სწორედ ურთიერთდაკავშირებულ სიდიდეთა ცვლილებებს სწავლობს მათემატიკური ანალიზი. მათემატიკურ ანალიზში ძირითადი ცნებებია ცვლადი სიდიდის ცნება და ფუნქციის ცნება.

ფუნქციის ცნება ჩვენთვის უკვე ცნობილია (თავი II, § 3, n4). იგი განესაზღვრეთ დალაგებული წყვილის ცნების საფუძველზე.

ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეები $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$. სიმრავლე, რომელიც შედგენილია ორი ელემენტისაგან $\{x, y\}$, $x \in X$, $y \in Y$, ეწოდება x და y ელემენტთა წყვილი.

წყვილს $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, სადაც $x \in X$, $y \in Y$, ხოლო $\{x, y\}$ წყვილია x და y ელემენტებისა, ეწოდება x და y ელემენტთა დალაგებული წყვილი. x -ს ეწოდება პირველი ელემენტი, ხოლო y -ს მეორე ელემენტი.

დალაგებული წყვილი $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ ასე აღინიშნება (x, y) . შემდეგში წყვილთა მიმართ ვიგულისხმებთ მხოლოდ დალაგებულ წყვილს.

როგორც ვიცით, ყველა (x, y) წყვილთა სიმრავლეს, $x \in X$, $y \in Y$, ეწოდება X და Y სიმრავლეთა ნამრავლი და აღინიშნება $X \times Y$ სიმბოლოთი. არაა აუცილებელი X განსხვავებული იყოს Y -საგან. შევიძლია განვიხილოთ $X \times X$.

ახლა განვიხილოთ დალაგებული წყვილების (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$, შემდეგი სიმრავლე $f = \{(x, y)\}$. ამ სიმრავლის წყვილები (ელემენტები) ისეთი იყოს, რომ ნებისმიერი $(x_1, y_1) \in f$, $(x_2, y_2) \in f$, თუ $x_1 = x_2$, მაშინ $y_1 = y_2$. დალაგებულ წყვილთა ასეთ სიმრავლეს ეწოდება ფუნქცია. ამ შემთხვევაში: f ფუნქცია განსაზღვრულია (X, Y) წყვილზე.

დალაგებულ (x, y) წყვილთა პირველ ელემენტების სიმრავლეს ეწოდება f ფუნქციის განსაზღვრის არე. ეს სიმრავლე $D(f)$ ან X_f -ით აღინიშნება. დალაგებულ (x, y) წყვილთა მეორე ელემენტების სიმრავლეს f ფუნქციის

¹ Л. Д. Кудрявцев, Курс математического анализа, т. I, М., 1981; В. А. Зорич, Математический анализ, т. I, М., 1981.

მნიშვნელობათა არე ეწოდება. ეს სიმრავლე $E(f)$ ან Y_f -ით აღინიშნება. დალაგებულ (x, y) წყვილთა პირველ ელემენტს ეწოდება f ფუნქციის არგუმენტი ან დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო მეორე ელემენტს დამოკიდებული ცვლადი.

ტერმინ „ფუნქციასთან“ ერთად იხმარება მისი ტოლფასი ტერმინები: „ასახვა“, „გადასახვა“, „შესაბამისობა“ (შესაბამება), „თანადობა“ (ეთანადება). ფუნქციითა აღსანიშნავად იხმარება ასოები: $f, g, \dots, F, G, \dots, \Phi, \Psi, \dots$.

ფუნქციის ზემოთაღნიშნული განსაზღვრის თანახმად $X \times Y$ სიმრავლის f ქვესიმრავლე სიმრავლეთა (X, Y) წყვილზე განსაზღვრული ფუნქცია იქნება, თუ X სიმრავლის ყოველ x ელემენტისათვის f ქვესიმრავლეში არსებობს არა უმეტეს ერთი წყვილი (x, y) , რომლის პირველი ელემენტი არის x .

X სიმრავლის ყოველ x ელემენტისათვის არსებობს არა უმეტეს ერთი ელემენტი $y \in Y$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $(x, y) \in f$.

თუ $f = \{(x, y)\}$ არის ფუნქცია (გადასახვა), მაშინ მას სიმბოლურად ასე აღნიშნავენ: $f: X \rightarrow Y$ და ამბობენ, რომ f გადასახვას X სიმრავლეს Y სიმრავლეში; $X_f \subset X$, $Y_f \subset Y$.

x ელემენტს რომ f ფუნქცია y ელემენტში გადასახვას, ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ:

$$y = f(x) \text{ ან } y = f_x$$

და ამბობენ: „ f ფუნქცია x ელემენტს გადასახვას y ელემენტში“ ან „ y ელემენტი არის f ფუნქციის მნიშვნელობა x ელემენტში“ (x წერტილში). x_0 წერტილში f ფუნქციის მნიშვნელობას $f(x_0)$ -ს ასედაც აღნიშნავენ:

$$f(x)|_{x=x_0}$$

აქ ერთი და იგივე ასო f აღნიშნავს $f: X \rightarrow Y$ ფუნქციასაც და x -ის შესაბამის მნიშვნელობასაც, $y = f(x)$. ეს არავითარ გაუგებრობას არ იწვევს. კონკრეტულ შემთხვევაში ყოველთვის გასაგებია $f(x)$ ფუნქციაა $f: X \rightarrow Y$, თუ x -ის შესაბამისი მნიშვნელობაა $y \in Y$ სიმრავლეში. მოცემულია გადასახვა $f: X \rightarrow Y$ ნიშნავს ყოველ $x \in X$ ელემენტს შესაბამება არა უმეტეს ერთი ელემენტისა $y \in Y$ და ყოველ $y \in Y$ ელემენტს შესაბამება სიმრავლე $x \in X$ ელემენტებისა:

$$\{x | x \in X, f(x) = y\}.$$

ან ასე: მოცემულია გადასახვა $f: X \rightarrow Y$ ნიშნავს ყოველ $x \in X$ ელემენტს შესაბამება ერთადერთი ელემენტი $y \in Y$, და ყოველ $y \in Y$ ელემენტს შესაბამება არა ნაკლებ ერთი ელემენტისა $x \in X$.

თუ $f: X \rightarrow X$, მაშინ ვიტყვით ფუნქცია f გადასახვას X სიმრავლეს თავის თავში.

თუ $Y = Y_f$, მაშინ ვიტყვით X სიმრავლეს f გადასახვას Y სიმრავლეზე. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ f გადასახვა სურექტიული გადასახვაა. ამგვარად, გადასახვა $f: X \rightarrow Y$ სურექტიულია, თუ ყოველი $y \in Y$ ელემენტისათვის ერთი მაინც ისეთი $x \in X$ ელემენტი არსებობს, რომ $y = f(x)$.

თუ $f: X \rightarrow Y$ გადასახვა ისეთია, რომ $x_1 \neq x_2$ -სათვის $f(x_1) \neq f(x_2)$, ასეთ გადასახვას ეწოდება ურთიერთცალსახა გადასახვა ან ინექციური გადასახვა.

თუ გადასახვა $f: X \rightarrow Y$ ურთიერთცალსახა გადასახვაა Y სიმრავლეზე, $Y_f = Y$, $X_f = X$, მაშინ ასეთ გადასახვას, ბუნებრივია, ეწოდებოდა X სიმრავლის Y სიმრავლეზე ურთიერთცალსახა გადასახვა, ანუ X სიმრავლის Y სიმრავლეზე ბიექციური გადასახვა.

ამგვარად, X სიმრავლის Y სიმრავლეზე გადასახვა ბიექციურია, თუ ეს გადასახვა ერთდროულად ინექციურია და სურექტიულიც.

X და Y სიმრავლეთა ურთიერთცალსახა გადასახვას ხშირად X და Y სიმრავლეთა ელემენტების ურთიერთცალსახა გადასახვასაც უწოდებენ.

მე-2 თავის მე-3 პარაგრაფში განვსაზღვრეთ ფუნქციის გრაფიკი. $f: X \rightarrow Y$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება $X \times Y$ ნამრავლის იმ Γ ქვესიმრავლეს, რომლის ელემენტებია $(x, f(x))$. ასე რომ,

$$\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}.$$

ამ განსაზღვრით ფუნქციის ცნება და ფუნქციის გრაფიკის ცნება გაიგივებულია. მაგრამ ფუნქციის გრაფიკს უფრო მეტად გეომეტრიული აზრი აქვს. მათემატიკურ ანალიზში ფუნქციის გრაფიკს Oxy სიბრტყის $(x, f(x))$ წერტილთა სიმრავლით წარმოადგენენ. ამ სიმრავლეს ის თვისება აქვს, რომ OY ღერძის პარალელური წრფე, რომელიც OX ღერძის x წერტილზე გაივლის, მას არა უმეტეს ერთ წერტილში გადაკვეთს. წინააღმდეგ შემთხვევაში $(x, f(x))$ წერტილთა სიმრავლე ფუნქციის არ განსაზღვრავს.

ამგვარად, $f: X \rightarrow y$ ფუნქციის გრაფიკი Oxy სიბრტყის $(x, f(x))$ წერტილთა სიმრავლეა, ქვემოთ გავცნობით ფუნქციის მოცემის სხვადასხვა ხერხს. ფუნქციური მიმართება ზოგჯერ ზელსაყრელია მოცემული იყოს ანალიზურად, ზოგჯერ სიტყვიერი აღწერით, ზოგჯერ ცხრილით. ყველა ამ შემთხვევაში მოცემული $x \in X$ -ათვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ სათანადო $y \in Y$ ელემენტი. ასე მოცემული ფუნქციისათვის ყოველთვის აზრი აქვს ფუნქციის გრაფიკულ წარმოდგენას. ამ შემთხვევაში ხშირად ვსვამთ საკითხს: ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი. ფუნქციის გრაფიკული წარმოდგენა გვეხმარება ფუნქციის განსაკუთრებული ბუნების გარკვევაში.

ვთქვათ, $f: X \rightarrow Y$ რაიმე ფუნქციაა და Z სიმრავლე წარმოადგენს X სიმრავლის ნაწილს. Z სიმრავლის ყველა z ელემენტის $f(z)$ სახეთა სიმრავლეს Z სიმრავლის f სახე ეწოდება და $f(Z)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამგვარად,

$$f(Z) = \{f(z) \mid z \in Z\}.$$

ცხადია, რომ $f(Z) \subset Y$. თუ $Z = X$, მაშინ $f(Z)$ -ს f ფუნქციის განსაზღვრის სიმრავლის **სრული სახე** ეწოდება.

ახლა ავიღოთ რაიმე U სიმრავლე. X სიმრავლის ყველა ისეთი x ელემენტის ქვესიმრავლეს, რომელთა f სახეები ეკუთვნიან U სიმრავლეს, U სიმრავლის წინასახე ეწოდება და $f^{-1}(U)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამგვარად,

$$f^{-1}(U) = \{x \mid x \in X, f(x) \in U\},$$

ცხადია, $f^{-1}(U) \subset X$. თუ $U \supset Y$, მაშინ გვექნება $f^{-1}(U) = X$.

განვიხილოთ $f: X \rightarrow Y$ კერძო შემთხვევა.

ვთქვათ, X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს ერთი და იგივე $y \in Y$ ელემენტი შეესაბამება. ასეთ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება მუდმივი X სიმრავლეში.

მივიღოთ მუდმივი სიდიდის სხვა განსაზღვრა, რომელიც ზემოთ მოტანილი მუდმივი სიდიდის განსაზღვრის ტოლფასია.

თუ $f: X \rightarrow Y$ და $g: Y \rightarrow Z$, მაშინ $F: X \rightarrow Z$ განსაზღვრება ყოველი x ელემენტისათვის, $x \in X$, ტოლობით $F(x) = g(f(x))$. ამ F ფუნქციას რთული ფუნქცია ან კომპოზიცია (ფუნქციისაა ჩაჭვი) ეწოდება. g და f ფუნქციისა კომპოზიცია ($g \cdot f$) სიმბოლოთი აღინიშნება:

$$(g \cdot f)(x) = g(f(x)).$$

ვთქვათ, გვაქვს X სიმრავლის Y სიმრავლეზე ურთიერთცალსახა გადასახე: $f: X \rightarrow Y$, მაშინ ყოველი შესაძლო დალაგებული წყვილით (y, x) , სადაც $y = f(x)$, განსაზღვრება სიმრავლე, რომელსაც f ფუნქციის შეკეცული ფუნქცია ეწოდება და აღინიშნება f^{-1} სიმბოლოთი.

შეკეცული ფუნქცია f^{-1} ყოველ $y \in Y$ ელემენტს შეესაბამებს მის წინასახეს $f^{-1}(y) = \{x \mid x \in X, f(x) = y\}$. ეს სიმრავლე ყოველი y -სათვის, $y \in Y$, მხოლოდ ერთ ელემენტს $x \in X$ შეიცავს, $(y, f^{-1}(y)) \in f^{-1}$.

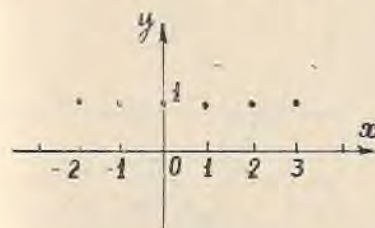
3. უწყვეტი წირის ცნება. მე-8 თავის 1-ლ პარაგრაფში ზოგადად გავეცანით წირის ცნებას: $F(x, y) = 0$ განტოლებას ეწოდება L წირის განტოლება მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში π სიბრტყეზე, თუ ამ განტოლებას აკმაყოფილებს L წირის ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილის კოორდინატები და არ აკმაყოფილებს L წირზე არამდებარე წერტილის კოორდინატები.

ამ განსაზღვრით თვით L წირი მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში π სიბრტყეზე წარმოადგენს M წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს — M წერტილთა $\{M\}$ სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ $F(x, y) = 0$ განტოლებას. შენიშნული იყო, რომ $F(x, y) = 0$ განტოლება შეიძლება განსაზღვრავდეს ისეთ წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც განსხვავდება იმისაგან, რასაც ჩვენ ჩვეულებრივად „წირს“ ეწოდებთ. შეიძლება განტოლება განსაზღვრავდეს მხოლოდ ერთ წერტილს, ან განკალკევებულ წერტილთა სიმრავლეს ან სრულებით არ განსაზღვრავდეს წერტილს. მაგალითად, $x^2 + y^2 = 0$ განტოლება განსაზღვრავს მხოლოდ ერთ $(0, 0)$ წერტილს. განტოლება $y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$ განსაზღვრავს განკალკევებულ წერტილთა სიმრავლეს $\{(n, 1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (ნახ. 1). განტოლება $x^2 + y^2 + 1 = 0$ არ განსაზღვრავს წერტილს.

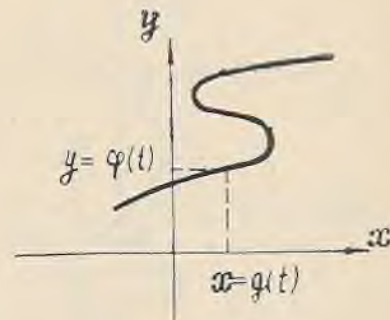
წირი წარმოვადგინოთ პარამეტრულად

$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases}$$

სადაც t პარამეტრი $\alpha \leq t \leq \beta$.



ნახ. 1



ნახ. 2

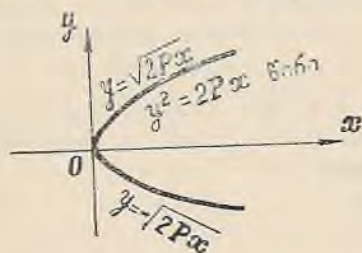
ჩვენთვის ახლა გამოსავალ პუნქტად სწორედ წირის პარამეტრული განტოლება იქნება, თუ t პარამეტრი ღრის აღნიშნავს, მაშინ ეს განტოლებანი განსაზღვრავს იმ M წერტილის მოძრაობის კანონს, რომლის კოორდინატებია $(x, y) = (g(t), \varphi(t))$, სადაც $\alpha \leq t \leq \beta$. (ნახ. 2). L წირი შეგვიძლია განვსაზღვროთ როგორც π სიბრტყეზე M წერტილის კვალი, რომელიც მოძრაობს კანონით $x = g(t), y = \varphi(t)$.

განვსაზღვროთ ახლა მარტივი წირი.

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქციები $x = g(t), y = \varphi(t)$, უწყვეტი $\alpha \leq t \leq \beta$ სეგმენტზე. თუ t ცვლადის ყოველი ორი ურთიერთგანსხვავებული t_1 და t_2 -თვის $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე L წირის წერტილები $M_1(g(t_1), \varphi(t_1))$, $M_2(g(t_2), \varphi(t_2))$ ურთიერთგანსხვავებულია, მაშინ L წირს ეოქონის¹ წირი ან მარტივი წირი ეწოდება.

¹ მარი ემინონ კამილ ეოქონი (1838—1922), ფრანგი მათემატიკოსი.

ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ მარტივი წირი თავის თავს არ გადაკვეთს ან, როგორც ამბობენ, მარტივ წირს არ აქვს ჯერადი წერტილები. მარტივი წირის ყოველი წერტილი t -ს მხოლოდ ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება $a \leq t \leq b$ სეგმენტიდან. მარტივი წირის მაგალითია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი f ფუნქციის განსაზღვრის $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე, რომელიც ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:



ნახ. 3

$$\left. \begin{array}{l} x=t, \\ y=f(t), \end{array} \right\} a \leq t \leq b.$$

აქედან ადვილი წარმოსადგენია, რომ მარტივი წირებია წრეწირის ნაწილები, ელიფსის ნაწილები, ჰიპერბოლის, პარაბოლის და ჩვენთვის კარგად ცნობილი წირების ნაწილები (ნახ. 3). მთელი წრეწირი, ელიფსი ან პარაბოლა არ წარმოადგენს მარტივ წირს.

მაგალითად, წრეწირის პარამეტრული განტოლებებიდან

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos 2\pi t, \\ y = r \sin 2\pi t \end{array} \right\}$$

მივიღებთ, რომ $t=0$ და $t=1$ -სათვის ერთი წერტილი გვაქვს: $M(r, 0)$.

შემოვიღოთ ჩაკეტილი წირის ცნება.

L წირს ეწოდება ჩაკეტილი, თუ მისი საწყისი წერტილი $M(g(a), \varphi(a))$ ემთხვევა ბოლო წერტილს $M(g(b), \varphi(b))$. ჩაკეტილი წირია ჩვენთვის კარგად ცნობილი წრეწირი და ელიფსი.

მარტივ წირთა კლასი არაა ფართო. მაგრამ ფართოა იმ წირთა კლასი, რომლებიც შეიძლება ისე დანაწილდეს, რომ მათ საერთო ჰქონდეთ მხოლოდ ბოლო წერტილები და თითოეული წარმოადგენდეს მარტივ წირს. ამ წირთა კლასს ეკუთვნის ყველა ალგებრული წირი და პრაქტიკაში გამოყენებული ყველა წირი.

განვიხილოთ მაგალითი იმის შესახებ, თუ როგორ უნდა დავანაწილოთ $g(t)$ და $\varphi(t)$ ფუნქციების განსაზღვრის $\{t\}$ სიმრავლე სეგმენტებად, რომ თითოეულ სეგმენტზე მივიღოთ მარტივი წირი.

ეთქვათ, მოცემულია წირი პარამეტრული განტოლებებით:

$$x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = at \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

ამ წირს სტროფოიდა ეწოდება (ნახ. 4 ა). შევნიშნოთ, რომ t -ს ორი მნიშვნელობისათვის $t=-1$, $t=1$ მივიღებთ ერთ წერტილს $O(0, 0)$. სტროფოიდა მარტივი წირი არაა, მაგრამ შეიძლება დანაწილდეს მარტივ

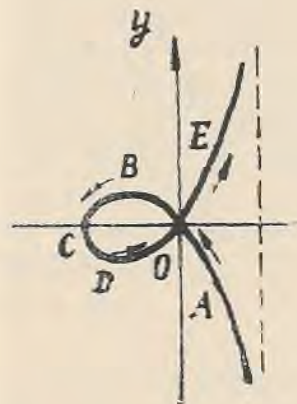
წირებად ისე, რომ ამ წირებს მხოლოდ ბოლო წერტილები ჰქონდეს საერთო. განვიხილოთ სეგმენტები $[n-1, n]$, სადაც n მთელი რიცხვია.

შუალედში $[-2, -1]$ მივიღებთ AO მარტივ წირს, სადაც A წერტილის კოორდინატებია $x = -\frac{3}{5}a$, $y = -\frac{6}{5}a$. შუალედში $[-1, 0]$ მივიღებთ OBC მარტივ წირს, სადაც C წერტილის კოორდინატებია $x = -a$, $y = 0$. ასევე შუალედში $[0, 1]$ გვექნება CDO მარტივი წირი, სადაც C წერტილის კოორდინატებია $(-a, 0)$. შუალედში $[1, 2]$ გვექნება OE მარტივი წირი.

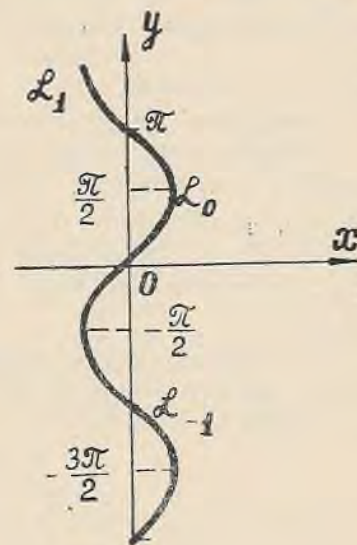
ამგვარად, მთელი $\{t\}$ სიმრავლე შეგვიძლია ისეთ სეგმენტებად დავანაწილოთ, რომ თითოეულ სეგმენტზე მივიღოთ მარტივი წირი.

თუ $x=g(t)$ და $y=\varphi(t)$ ფუნქციებიდან ერთ-ერთი მაინც შექცევადია, მაშინ t -ს გამორიცხვით მივიღებთ $F(x, y)=0$. ეს წირი საზოგადოდ მარტივი წირი არაა.

განვიხილოთ მაგალითი.



ნახ. 4, ა



ნახ. 4, ბ

ეთქვათ, წირი მოცემულია პარამეტრული განტოლებებით

$$\left. \begin{array}{l} x = \sin t, \\ y = t, \end{array} \right\} -\infty < t < +\infty.$$

ამ განტოლებებიდან გამოვირიცხოთ t პარამეტრი, მივიღებთ $x = \sin y$ (ნახ. 4, ბ). ეს წირი შედგება L_k მარტივი წირებისაგან

$$\left. \begin{array}{l} x = \sin t \\ y = (-1)^k t + k\pi, \end{array} \right\}$$

სადაც t იცვლება $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე და k მთელი რიცხვია. მაგალითად, $k=0$ -სათვის გვაქვს მარტივი წირი

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t. \end{cases}$$

$k=-1$ -სათვის გვაქვს მარტივი წირი

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -t - \pi \end{cases}$$

და ა. შ.

ამგვარად, $F(x, y) = 0$ წირი საზოგადოდ მარტივი წირი არაა, ხოლო $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მარტივი წირია.

შევთანხმდეთ, რომ, როდესაც ვიტყვით „ $f(x)$ წირი“ ან „ $F(x, y)$ წირი“, ვიგულისხმებთ არამარტივ წირს, ხოლო, როდესაც ვიტყვით „ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი“ ან მარტო „გრაფიკი“ ვიგულისხმებთ მარტივ წირს — ევოლუტის წირს.

4. მიმდევრობა. განვიხილოთ რაიმე X სიმრავლის ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე გადასახვა. ყოველგვარ გადასახვას $f: N \rightarrow X$ ეწოდება X სიმრავლის ელემენტთა მიმდევრობა. ამ მიმდევრობის ელემენტს $F(n)$ -ს x_n -ით აღნიშნავენ და უწოდებენ მიმდევრობის n -ურ წევრს (ზოგად წევრს), თვით მიმდევრობას $x_n, n=1, 2, \dots$ ან $(x_n)_{n \geq 1}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ, შემოკლებით კი აღნიშნავენ (x_n) სიმბოლოთი.

(x_n) მიმდევრობის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს დალაგებულ წყვილს, რომელიც შედგება n რიცხვისაგან $n \in N$ და მისი $f: N \rightarrow X$ ასახვით მიღებული x ელემენტისაგან, $x \in X$, ე. ი.

$$x_n = (n, x).$$

ამ დალაგებული წყვილის მეორე ელემენტს x -ს ეწოდება (x_n) მიმდევრობის ელემენტის მნიშვნელობა, ხოლო პირველს n -ს — ამ ელემენტის ნომერი.

მიმდევრობის ელემენტთა სიმრავლე ყოველთვის უსასრულოა. მიმდევრობის ორ განსხვავებულ ელემენტს შეიძლება ჰქონდეს ერთი და იგივე მნიშვნელობა. ისინი განსხვავებული იქნებიან მხოლოდ ნომრებით. მაგალითად, მიმდევრობის

$$0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots$$

ყოველი კენტი ნომრის ელემენტის მნიშვნელობა ნულია,

$$x_{2n-1} = 0, n=1, 2, \dots,$$

ხოლო ლუწი ნომრის ელემენტის მნიშვნელობა 1-ის,

$$x_{2n} = 1, n=1, 2, \dots$$

თუ ყოველი $n \in N$ გადაისახება მხოლოდ ერთ a ელემენტში,

$$x_n = a,$$

მაშინ (x_n) მიმდევრობას ეწოდება სტაციონარული.

თუ $n_1 < n_2, n_1, n_2 \in N$, მაშინ (x_n) მიმდევრობის x_{n_1} წევრი წინ უსწრებს x_{n_2} წევრს. ამ აზრით მიმდევრობის წევრები ყოველთვის დალაგებულია.

5. ფუნქციის მოცემის ხერხები. ჩვენ ჯერ მხოლოდ ერთი ნამდვილი არგუმენტის ნამდვილ ფუნქციებს განვიხილავთ, ე. ი. ფუნქციას $f: X \rightarrow Y$, სადაც X, Y ევკლიდესის R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს. ასეთ ფუნქციას რიცხვით ფუნქციას უწოდებენ. ქვემოთ ყველგან შემოკლებით ვიტყვით „ფუნქცია“ და ვიგულისხმებთ „რიცხვით ფუნქციას“.

1°. ანალიზური ხერხი. ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს ფორმულის საშუალებით. ფუნქციის მოცემის ასეთ ხერხს ანალიზური ხერხი ეწოდება. ანალიზური ხერხით ფუნქციის მოცემისათვის გამოიყენება ფუნქციათა სპეციალური აღნიშვნები და ალგებრული მოქმედებანი. მაგალითად, $y = \sin x, y = ax^2 + bx + c$ და ა. შ. ფორმულით მოცემული ფუნქციის შემთხვევაში, ვგულისხმობთ, რომ ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა იმ Y სიმრავლეზე, რომელთათვისაც აღებულ ფორმულას აქვს აზრი და ამასთან, ფორმულით ჩატარებული გამოთვლების შედეგად არგუმენტის აღებული მნიშვნელობისათვის x სიმრავლიდან მხოლოდ ნამდვილი მნიშვნელობა მიიღება.

ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს რამდენიმე ფორმულით მაგალითად,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\infty < x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ -x + 2, & 1 \leq x < +\infty. \end{cases} \quad (1)$$

ფუნქცია შეიძლება მიღებული იყოს აგრეთვე სიტყვიერი აღწერილობით,

$$\text{მაგალითად, } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \text{ რაციონალური რიცხვია,} \\ 0, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალური რიცხვია.} \end{cases}$$

ამ ფუნქციას დირიხლეს¹ ფუნქცია ეწოდება.

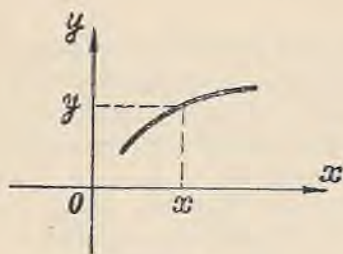
¹ ლეჟენ დირიხლე (1805—1859), გერმანელი მათემატიკოსი.

ასევე სიტყვიერი აღწერილობით განისაზღვრება შემდეგი ფუნქცია:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x\text{-ის დადებითი მნიშვნელობისათვის,} \\ 0, & x = 0\text{-სათვის,} \\ -1, & x\text{-ის უარყოფითი მნიშვნელობისათვის} \end{cases}$$

sign — ლათინურად ნიშნავს „ნიშანს“ და $\text{sign } x$ იკითხება: „სიგნუმ x “ (ნიშან x).

2°. გრაფიკული ხერხი. თუ ფუნქცია მოცემულია გრაფიკით, ვიტყვი: ფუნქცია მოცემულია გრაფიკული ხერხით. ფუნქციის მო-



ნახ. 5

ცემის გრაფიკული ხერხი დიდად გამოიყენება მეტეოროლოგიურ სამსახურში, სამედიცინო სამსახურში და სხვ. სპეციალური ხელსაწყოებით აიგება ზოგიერთი მოვლენის დამახასიათებელი სიდიდე. მაგალითად, ბარიოგრაფით აიგება ბარიოგრამა, რომელიც იძლევა ატმოსფერული წნევის სიდიდეს დროსთან დამოკიდებულებით. კარდიოგრაფით აიგება კარდიოგრამა, რომლითაც ხასიათ-

დება გულის ზეშაობა და სხვ. გრაფიკით მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის გვექმნება სათანადო $X = \{x\}$ სიმრავლის და $Y = \{y\}$ სიმრავლის ელემენტთა გაზომვა, რაც გარკვეული სიზუსტით შეიძლება შესრულდეს. ამგვარად, გრაფიკული მეთოდით მოცემული ფუნქცია მხოლოდ მიახლოებით განისაზღვრება (ნახ. 5).

3°. ფუნქციის მოცემის ცხრილური ხერხი. ვთქვათ გვაქვს ცხრილი, რომელიც იძლევა 1 კვ. ვაშლის ფასს (მანეთებში) თვეების მიხედვით.

თვე	იანვარი	თებერვალი	მარტი	აპრილი	მაისი	ივნისი	ივლისი	აგვისტო
ფასი	0,90	1,00	1,10	1,20	1,00	0,80	0,75	0,60

სექტემბერი	ოქტომბერი	ნოემბერი	დეკემბერი
0,60	0,65	0,75	0,80

ცხრილიდან ჩანს, რომ 1 კვ. ვაშლის ფასი იცვლება ყოველთვიურად. ვაშლის ფასი დროის ფუნქციაა და ეს ფუნქცია მოცემულია ცხრილით. ფუნქციის აღნიშნული ხერხით მოცემას ეწოდება ფუნქციის მოცემის ცხრილური ხერხი. ამ ცხრილით ადვილად გავიგებთ ვაშლის თვიურ საშუალო ფასს. ამისათვის ყველა თვეში ვაშლის ფასთა ჯამი უნდა გავყოთ თვეთა რიცხვზე.

თუ ცნობილია ფუნქციის ანალიზური სახე, შეგვიძლია ეს ფუნქცია არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით. ამ შემთხვევაში ამბობენ: ფუნქცია ტაბულური ხერხითაა მოცემული.

ჩვეულებრივად ისეთი ფუნქციები ტაბულირდება, რომელთა რიცხვითი მნიშვნელობის განსაზღვრა ადვილი არაა, მაგრამ პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება. ასეთია, მაგალითად, ფართოდ ცნობილი ფუნქციების: $\sin x$, $\lg x$ და სხვა ცხრილები.

ცხადია, არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის ცხრილში ფუნქციის მნიშვნელობა მოცემული არაა. ამიტომ ფუნქციის საძიებელი მნიშვნელობის მაზღაბელი მნიშვნელობით უნდა ვისარგებლოთ. მაგალითად, თუ საჭიროა არგუმენტის ორი მეზობელი მნიშვნელობის შუა მნიშვნელობისათვის ფუნქციის მნიშვნელობა, შეგვიძლია ავიღოთ სათანადოდ ფუნქციის მეზობელ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული. რასაკვირველია, მიღებული მნიშვნელობა მიახლოებითი იქნება, მაგრამ პრაქტიკულად გამოსადგენი.

როდესაც ფუნქცია ცხრილითაა მოცემული, ბუნებრივია დაისვას კითხვა, ხომ არ შეიძლება ცხრილით მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობებით ფუნქციის ანალიზური სახის შედგენა? ეს საკითხი შეისწავლება ქიახლოებით ანალიზში. (ფუნქციათა ინტერპოლირება).

6. არაცხადი ფუნქციები. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$F(x, y) = 0. \quad (2)$$

ეს განიხილება ისეთ დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე $\{(x, y)\}$, რომლისათვისაც (2) ტოლობა სრულდება (რასაცვირველია, თუ ასეთი წყვილი (x, y) არსებობს).

ვთქვათ, არსებობს ისეთი სიმრავლე X , რომ ყოველი x ელემენტისათვის, $x \in X$ ყოველ შემთხვევაში არსებობს ერთი მაინც y , რომ სრულდება (2) ტოლობა. ავიღოთ თითო ასეთი y -თაგანი და შევადგინოთ Y სიმრავლე. ამით მივიღებთ ფუნქციას $f(x)$, რომელიც განსაზღვრულია X სიმრავლეზე და ისეთია, რომ $F(x, f(x)) = 0$ ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის. ამ შემთხვევაში ამბობენ: f ფუნქცია მოცემულია (2) განტოლებით არაცხადი სახით, ცხადია, რომ ერთი და იგივე განტოლება განსაზღვრავს, ზოგადად, არაერთ ფუნქციას, არამედ ფუნქციათა სიმრავლეს. მაგალითად, განტოლება

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

განტოლება განსაზღვრავს არაცხად ფუნქციებს

$$f_1(x) = +\sqrt{1-x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან ცხადია, თუ მოცემული გვაქვს არაცხადი $f(x)$ ფუნქცია (2) განტოლებით, ეს განტოლება უნდა ამოვხსნათ y -ის მიმართ (თუ ეს შესაძლებელია) და განვსაზღვროთ სათანადოდ $f(x)$ ფუნქცია. მაგალითად,

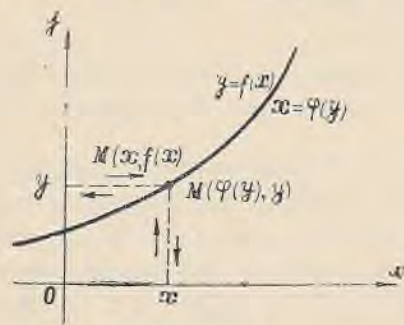
$$x - 2y = 0$$

განტოლებიდან განვსაზღვროთ y . ამ განტოლებიდან y მხოლოდ $X = \{x | 0 < x < +\infty\}$ სიმრავლეში შეგვიძლია განვსაზღვროთ:

$$y = \log_2 x, \quad \text{სადაც } Y = \{y | -\infty < y < +\infty\}.$$

ცნება „არაცხადი ფუნქცია“ გამოსახავს არა ფუნქციონალური დამოკიდებულების ხასიათს. არამედ მხოლოდ ფუნქციის მოცემის ხერხს. ერთი და იგივე ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს როგორც ცხადი, ისე არაცხადი სახით. მაგალითად, $y = \sin x$ ცხადი ფუნქციაა, ხოლო $y - \sin x = 0$ უკვე არაცხადი ფუნქციაა, მაგრამ აქ მხოლოდ ერთი ფუნქცია გვაქვს.

7. შექცევადი ფუნქცია და მისი გრაფიკი. ვთქვათ, f ფუნქცია $X = \{x\}$ სიმრავლეს $Y = \{y\}$ სიმრავლეზე ურთიერთცალსახად გადასახავს: $f: X \rightarrow Y$, $y = f(x)$. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში შეგვიძლია განვიხილოთ f ფუნქციის შექცევადი ფუნქცია $f^{-1}: Y \rightarrow X$, $x = f^{-1}(y)$. ეს ფუნქცია $x = \varphi(y)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. ცხადია, Oxy კოორდინატთა სისტე-



ნახ. 6

მაში $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი და $x = \varphi(y)$ ფუნქციის გრაფიკი ერთი და იგივეა: $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკია Oxy სიბრტყეში იმ M წერტილთა სიმრავლე, რომლის კოორდინატებია $(x, f(x))$ (ნახ. 6). იგივე წერტილის კოორდინატებია $(\varphi(y), y)$. ფუნქციებს $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ ურთიერთშექცევადი ფუნქციები ეწოდება. აქედან ერთს

აღვნიშნავთ, ხოლო დამოკიდებულს ყოველთვის y -ით. მაშინ $y = f(x)$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია იქნება $y = \varphi(x)$. თუ წარმოვიდგენთ $(x, f(x))$ წერტილის კოორდინატებს Oxy კოორდინატთა სისტემაში და იმავე სისტემაში $(x, f(x))$ წერტილის კოორდინატებს (ნახ. 7), მივიღებთ, რომ $y = \varphi(x)$ ფუნქციის დამოკიდებელი x ცვლადი უნდა შეიცვალოს $y = f(x)$ ფუნქციის დამოკიდებელი ცვლადით:

$$x = OA = OB = f_x,$$

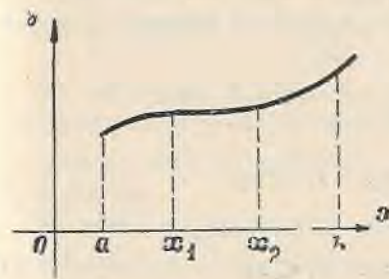
ხოლო $y = \varphi(x)$ ფუნქციის დამოკიდებელი y ცვლადი უნდა შეიცვალოს $y = f(x)$ ფუნქციის დამოკიდებელი ცვლადით:

$$y = OD = OC = \varphi_x.$$

ამით M წერტილი გადაისახა M_1 წერტილში.

თუ დავაკვირდებით ნახაზს, შევამჩნევთ, რომ $y = f(x)$ წირის M წერტილიდან $y = \varphi(x)$ წირის M_1 წერტილი კოორდინატთა სისტემის პირველი საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის მიმართ ურთიერთსიმეტრიული წერტილებია.

ამგვარად, $y = f(x)$ პირდაპირი ფუნქციის გრაფიკიდან $y = \varphi(x)$ შექცევადი ფუნქციის გრაფიკი მიიღება Oxy სისტემის პირველი საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის მიმართ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიული გარდაქმნით.



ნახ. 8

8. ზრდადი და კლებადი ფუნქციები. ვთქვათ $X = \{x | a < x < b\}$ შუალედში განსაზღვრულია $y = f(x)$ ფუნქცია (ნახ. 8). $f(x)$ ფუნქციის X შუალედში ეწოდება არაკლებადი, თუ ამ შუალედის ნებისმიერი x_1 და x_2 რიცხვებისათვის სრულდება უტოლობა

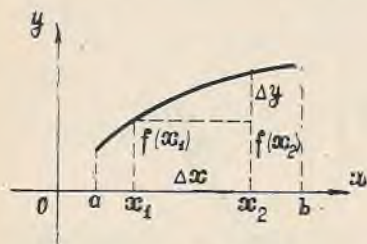
$$f(x_1) \leq f(x_2), \quad \text{როცა } x_1 < x_2, \quad (3)$$

ხოლო თუ სრულდება უტოლობა

$$f(x_1) < f(x_2), \quad \text{როცა } x_1 < x_2, \quad (4)$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი (ნახ. 9).

შემოვიღოთ ნაზრდის ცნება. ავიღოთ x -ის ორი მნიშვნელობა: x_1, x_2 . x_1 მნიშვნელობიდან x_2 მნიშვნელობაზე გადასვლა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ისე, რომ x_1 -ს მიეცა ნაზრდი $\Delta x_1 = x_2 - x_1$. (Δx_1 გვესმის მთლიან სიმბოლოდ და არა x_1 -ის და Δ -ს ნამრავლი. Δx იკითხება „დელტა იქსი“). $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $f(x_2) = f(x_1 + \Delta x_1)$ განსხვავდება $f(x_1)$ -საგან ნაზრდით.



ნახ. 9

$$\Delta y_1 = \Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)$$

Δx -ს ეწოდება x არგუმენტის ნაზრდი, Δy -ს $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი.

ვისარგებლოთ არგუმენტის ნაზრდის და ფუნქციის ნაზრდის ცნებით ფუნქციის ზრდადობის განსაზღვრისათვის.

ავიღოთ ნებისმიერი x წერტილი X შუალედში. (3) უტოლობის თანახმად გვექნება: $f(x)$ ფუნქცია არაკლებადია X შუალედში, თუ ამ შუალედის ნებისმიერ x წერტილში სრულდება უტოლობა.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0, \text{ როცა } \Delta x > 0, x + \Delta x \in X. \quad (5)$$

ხოლო $f(x)$ ზრდადია, თუ

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) > 0, \text{ როცა } \Delta x > 0, x + \Delta x \in X. \quad (6)$$

ძნელი მისახვედრი არაა, რომ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია X შუალედში, თუ ამ შუალედის ნებისმიერ x წერტილში არგუმენტის ნაზრდსა და ფუნქციის ნაზრდს ერთი და იგივე ნიშანი აქვთ.

$f(x)$ ფუნქციას არაზრდადი ეწოდება X შუალედში, თუ ამ შუალედის ნებისმიერი x_1 და x_2 რიცხვებისათვის სრულდება უტოლობა:

$$f(x_1) \geq f(x_2), \text{ როცა } x_1 < x_2, \quad (7)$$

ხოლო ეწოდება კლებადი, თუ

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ როცა } x_1 < x_2. \quad (8)$$

თუ ვისარგებლებთ ნაზრდის ცნებით, გვექნება:

$f(x)$ ფუნქცია არაზრდადია, თუ X შუალედის ნებისმიერ x წერტილში

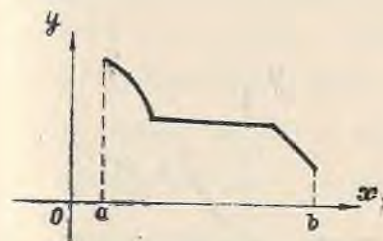
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0, \text{ როცა } \Delta x > 0, x + \Delta x \in X, \quad (9)$$

ხოლო $f(x)$ ფუნქცია კლებადია, თუ

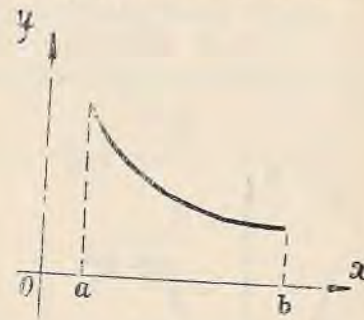
$$\Delta y = f(x + \Delta x) < 0, \text{ როცა } \Delta x > 0, x + \Delta x \in X. \quad (10)$$

ცხადია, $f(x)$ ფუნქცია კლებადია X შუალედში, თუ ამ შუალედის ნებისმიერ x წერტილში არგუმენტის ნაზრდსა და ფუნქციის ნაზრდს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ.

არაზრდადი და კლებადი ფუნქციები ნაჩვენებია სათანადოდ მე-10 და მე-11 ნახაზებზე:



ნახ. 10



ნახ. 11

9. პერიოდული ფუნქციები. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $-\infty < x < +\infty$: $f: R \rightarrow R$ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, თუ არსებობს ისეთი ω რიცხვი, $\omega \neq 0$, რომ ყოველი x რიცხვისათვის სრულდება ტოლობა:

$$f(x + \omega) = f(x).$$

ω -ს ეწოდება მოცემული $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი. მაგალითად,

$y = \sin \frac{x}{2}$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია 4π ,

$$\Delta \sin \frac{x + 4\pi}{2} = \sin \left(\frac{x}{2} + 2\pi \right) = \sin \frac{x}{2}.$$

ცხადია, თუ $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია ω , მაშინ მისი პერიოდი იქნება $2\omega, 3\omega, \dots$

10. ლუწი და კენტი ფუნქციები. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ ყოველი x -სათვის $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის X შუალედიდან $x \in X$, $-x \in X$, სრულდება ტოლობა

$$f(-x) = f(x).$$

მაგალითად, ფუნქცია $y = x^2$ ლუწია. მართლაც, ყოველი x -სათვის $-\infty < x < +\infty$, სრულდება ტოლობა:

$$(-x)^2 = x^2.$$

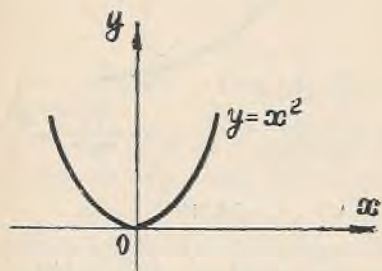
$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ ყოველი x -სათვის $x \in X$, $-x \in X$ სრულდება ტოლობა:

$$f(-x) = -f(x).$$

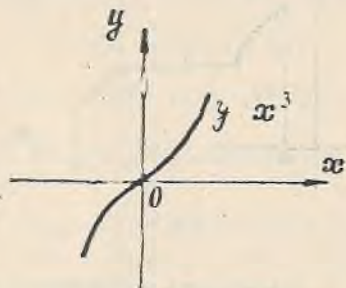
მაგალითად, ფუნქცია $y = x^3$ კენტია. მართლაც, ყოველი x -სათვის, $-\infty < x < +\infty$, სრულდება ტოლობა:

$$(-x)^3 = -x^3.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი Oxy კოორდინატთა სისტემაში სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, (ნახ. 12), ხოლო კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ (ნახ. 13).



ნახ. 12



ნახ. 13

11. შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი ფუნქციები.

$f(x)$ ფუნქციას x შუალედში ეწოდება შემოსაზღვრული თუ არსებობს ისეთი დადებითი k რიცხვი, რომ x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, $x \in X$, სრულდება უტოლობა

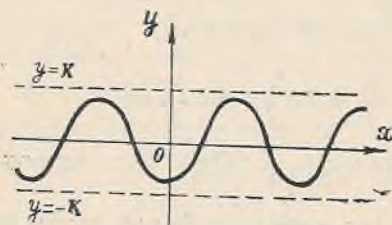
$$|f(x)| \leq k, \quad (11)$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$-k \leq f(x) \leq k.$$

კერძოდ, $f(x)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობის შუალედი შეიძლება იყოს სეგმენტი, ან ინტერვალი ან მთელი X ღერძი.

(II) უტოლობა გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მთლიანად მოთავსებულია $y = -k$ და $y = k$ წრფეებს შორის (ნახ. 14). მაგალითად, ფუნქცია $y = \sqrt{1-x^2}$ შემოსაზღვრულია სეგმენტზე $[-1; 1]$, ხოლო ფუნქცია $y = \sin x$ შემოსაზღვრულია მთელ X ღერძზე.



ნახ. 14

განვიხილოთ ფუნქცია $y = \frac{1}{x}$ შუალედში $]0; 1[$ (ნახ. 15). ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია ნებისმიერ სეგმენტზე, რომელიც მოთავსებულია $]0; 1[$ ინტერვალში, ხოლო $]0; 1[$ ინტერვალში არაა შემოსაზღვრული. მართლაც, ვთქვათ, l ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. ავიღოთ x -ის ის მნიშვნელობა, რომელიც $0 < x < \frac{1}{l}$

უტოლობას აკმაყოფილებს, მაშინ $\frac{1}{x} > l$. ამრიგად, $]0; 1[$ ინტერვალში არსებობს ისეთი x , რომ $\frac{1}{x}$ ნებისმიერ დადებით l რიცხვს

გადააჭარბებს. მაშასადამე, ფუნქცია $y = \frac{1}{x}$ არაა შემოსაზღვრული მთელ $]0; 1[$ ინტერვალში.

განვიხილოთ ჩვენთვის ცნობილი ფუნქციები.

1) დირიხლეს ფუნქცია:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,} \\ 0, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია.} \end{cases}$$

შემოსაზღვრულია მთელ $-\infty < x < +\infty$ შუალედში; $0 \leq f(x) \leq 1$.

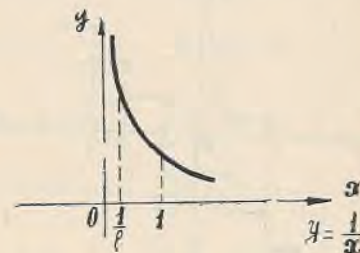
2) სიგნუმ ფუნქცია:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x > 0, \\ 0, & \text{თუ } x = 0, \\ -1, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

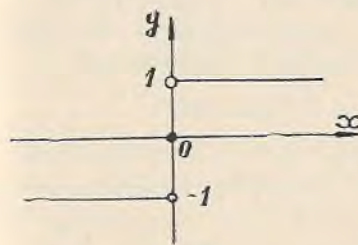
ამ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია მე-16 ნახაზზე. წერტილები, რომლებიც თეთრი წრეებითაა აღნიშნული, $\text{sign } x$ -ის გრაფიკს არ ეკუთვნიან.

ფუნქცია $\text{sign } x$ შემოსაზღვრულია მთელ $-\infty < x < +\infty$ შუალედში,

$$-1 \leq \text{sign } x \leq 1.$$

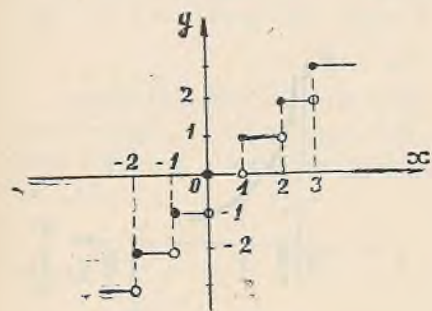


ნახ. 15



ნახ. 16

3) ფუნქცია „რიცხვის მთელი ნაწილი“ — $E(x)$. ფუნქცია $E(x)$ ნიშნავს იმ მთელ რიცხვს, რომელიც x -ს არ აღემატება.



ნახ. 17

მაგალითად, $E(1,5) = 1$,
 $E(\sqrt{2}) = 1$, $E(\pi) = 3$.

$E(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია მე-17 ნახაზზე.

იგი განსაზღვრულია $-\infty < x < +\infty$ შუალედში.

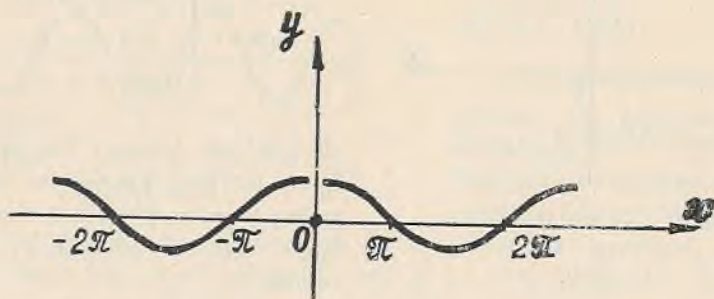
წერტილები, რომლებიც $E(x)$ ფუნქციის გრაფიკს არ ეკუთვნის თეთრი წრეებითაა აღნიშნული. $E(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული არაა $-\infty < x < +\infty$ შუალედში.

4) ფუნქცია $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ განსაზღვრულია $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$ შუალედში (ნახ. 18). ფუნქცია $\frac{\sin x}{x}$ შემოსაზღვრულია $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$, $x \neq 0$. ფუნქცია

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

შემოსაზღვრულია მთელ ლერძზე $-\infty < x < +\infty$.



ნახ. 18

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 23. განსაზღვრეთ შემდეგი ფუნქციების არსებობის შუალედები და ააგეთ სათანადო გრაფიკები:

- 1) $f(x) = (x-1)^2$, 2) $f(x) = 1+x^2$, 3) $f(x) = x+x^2$,
- 4) $f(x) = (x-1)^3$, 5) $f(x) = x^3+1$, 6) $f(x) = x^3-1$,
- 7) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 8) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 9) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$,
- 10) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, 11) $f(x) = \sqrt{x-1}$, 12) $f(x) = \sqrt{1-x}$,
- 13) $f(x) = |x|$, 14) $f(x) = |x-1|$, 15) $f(x) = \frac{1}{(x)}$,
- 16) $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$, 17) $f(x) = \frac{1}{|1-x|}$, 18) $f(x) = \frac{1}{|x|^3}$,
- 19) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0; \\ x-1, & x < 0, \end{cases}$ 20) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 2; \\ x+1, & 0 \leq x < 2; \\ 0, & -\infty < x < 0, \end{cases}$
- 21) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$ 22) $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq -2; \\ x, & -2 < x \leq 1; \\ x+1, & -1 < x < \infty; \end{cases}$
- 23) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 24) $f(x) = 2^{-x^2}$.

§ 2. პირტი ცვლადის ფუნქციების კლასიფიკაცია

იმისდამხედვეთ, თუ არგუმენტზე რა მოქმედებით ვღებულობთ ფუნქციებს, ფუნქციებს ვყოფთ კლასებად:

1. რაციონალური ფუნქციები. განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (1)$$

სადაც x ცვლადია, n მთელი დადებითი სასრული რიცხვია, $a_0, a_1, \dots, a_n$ კოეფიციენტები მუდმივებია. ამ ფუნქციას მთელი რაციონალური ფუნქცია ანუ მრავალწევრი ეწოდება.

მრავალწევრთა შეფარდებას

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}, \quad (2)$$

წილად — რაციონალური ფუნქცია ან, მოკლედ, რაციონალური ფუნქცია ეწოდება. ცხადია, თუ (2) გამოსახულების

მნიშვნელში ნულ ხარისხის მრავალწევრი გვექნება, $P_m(x) = b_0 \neq 0$, მივღებთ მრავალწევრს.

მთელი რაციონალური და წილად-რაციონალური ფუნქციების სიმრავლე შეადგენს რაციონალურ ფუნქციათა კლასს.

2. ალგებრული ფუნქციები. თუ არგუმენტი x -ზე, გარდა იმ მოქმედებებისა, რომლებიც სრულდება (2) გამოსახულებაში, სრულდება ფესვის ამოღება, მიღებულ ფუნქციას ეწოდება **რაციონალური ფუნქცია**, მაგალითად,

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x^2+1}} + 4x^2 - 5\sqrt{x} + 3$$

რაციონალური ფუნქციაა.

რაციონალური და რაციონალური ფუნქციების სიმრავლე შეადგენს ალგებრულ ფუნქციათა კლასს.

ზოგადად, x ცვლადის ალგებრული ფუნქცია ეწოდება არაცხად y ფუნქციას, რომელიც განისაზღვრება განტოლებიდან

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0 \quad (3)$$

სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია, $P_0(x), \dots, P_n(x)$ — მთელი რაციონალური ფუნქციები.

3. ტრანსცენდენტური ფუნქციები. არალგებრულ ფუნქციას ტრანსცენდენტური ფუნქცია ეწოდება. უმარტივესი ტრანსცენდენტული ფუნქციებია:

1°. მაჩვენებლიანი ფუნქცია a^x , სადაც a დადებითი რიცხვია, $a \neq 1$.

2°. ლოგარითმული ფუნქცია $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

3°. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$.

4°. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები: $\arcsin x$, $\arccos x, \dots$

ალგებრულ ფუნქციებს, უმარტივეს ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს და ამ ფუნქციებიდან სასრული არითმეტიკული მოქმედებით და სუპერპოზიციებით მიღებულ ფუნქციებს ელემენტარული ფუნქციები ეწოდება; მაგალითად,

$$\sin^2 x, \sin \frac{1}{x^2}, \operatorname{tg} \log_2 \sqrt{1-x^2}, \frac{x + \sin x}{\sqrt{1+x^2}}, ax^2 + bx + c$$

ელემენტარული ფუნქციებია.

შემდეგში სწორედ ელემენტარულ ფუნქციებს შევისწავლით.

§ 3. ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები

1. ხარისხოვანი ფუნქცია. ხარისხოვანი ფუნქცია

$$y = x^n \quad (1)$$

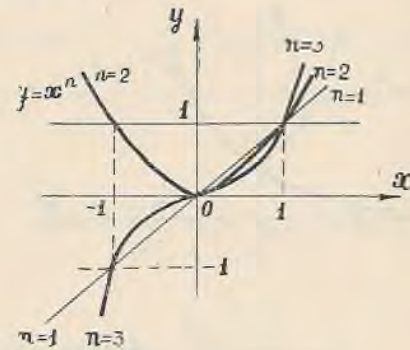
თუ n მთელი დადებითი რიცხვია, განსაზღვრულია $-\infty < x < +\infty$ შუალედში; თუ n მთელი უარყოფითი რიცხვია, განსაზღვრულია $0 < |x| < +\infty$ შუალედში.

(1) ფუნქციის გრაფიკი n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის იქნება პარაბოლები, თუ $n > 0$ (ნახ. 19) და ჰიპერბოლები, თუ $n < 0$ (ნახ. 20).

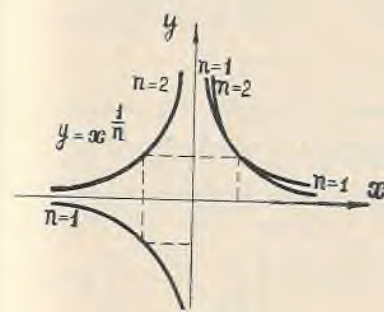
განვიხილოთ ფუნქცია

$$y = x^{1/n}, \quad (2)$$

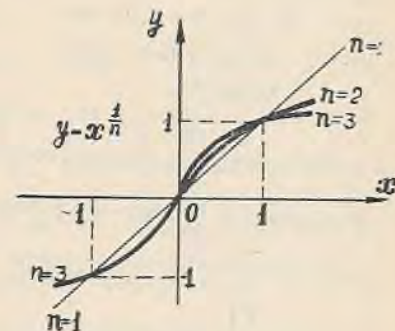
სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია. თუ n კენტია, (2) ფუნქცია განსაზღვრულია $-\infty < x < +\infty$ შუალედში, ხოლო, თუ n ლუწია, იგი განსაზღვრულია $0 \leq x < +\infty$ შუალედში. რადგანაც (2) ფუნქცია (1) ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა, (2) ფუნქციის გრაფიკს ავაგებთ (1) ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით. 21-ე ნახაზზე ნაჩვენებია (2) ფუნქციის გრაფიკი n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.



ნახ. 19



ნახ. 20



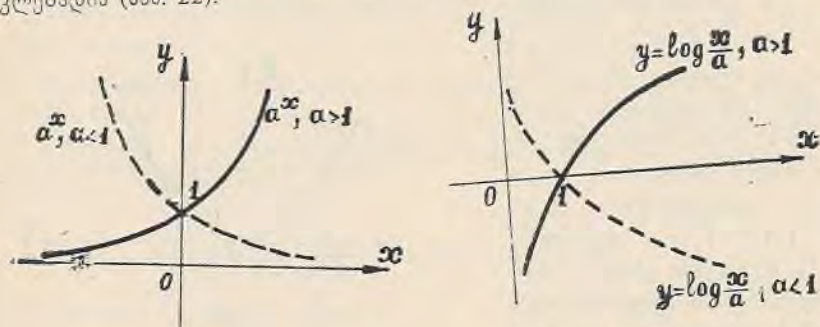
ნახ. 21

2. მაჩვენებლიანი ფუნქცია. მაჩვენებლიანი ფუნქცია

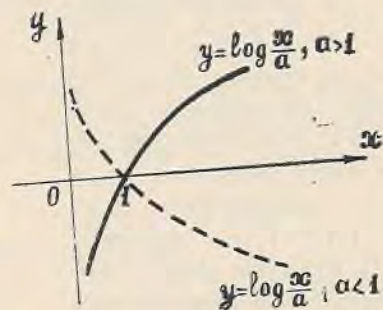
$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

განსაზღვრულია x -ის ყველა $-\infty < x < +\infty$ მნიშვნელობისათვის. ფუნქ-

ცია a^x დადებითია. თუ $a > 1$ ზრდალია; თუ $a < 1$, მაშინ ფუნქცია კლებადია (ნახ. 22).



ნახ. 22



ნახ. 23

3. ლოგარითმული ფუნქცია. ფუნქცია

$$y = \log_a x; \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad (3)$$

განსაზღვრულია $x > 0$ მნიშვნელობისათვის. (3) ფუნქცია ზრდალია, თუ $a > 1$ და კლებადია, თუ $a < 1$ (ნახ. 23).

4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებში არგუმენტი რიცხვია, რომელიც უნდა განვიხილოთ როგორც სათანადო კუთხის ზომა რადიანებში.

1°. ფუნქცია

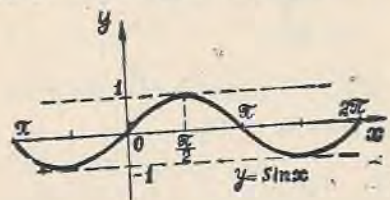
$$y = \sin x \quad (4)$$

განსაზღვრულია $-\infty < x < +\infty$ შუალედში. იგი პერიოდულია, პერიოდით 2π , $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. ფუნქცია $y = \sin x$ გრაფიკს სინუსოიდა ეწოდება (ნახ. 24).

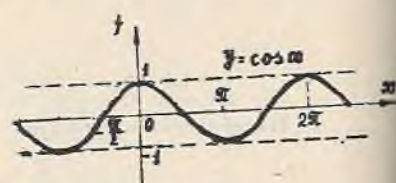
2°. ფუნქცია

$$y = \cos x \quad (5)$$

განსაზღვრულია $-\infty < x < +\infty$ შუალედში. (5) ფუნქციის პერიოდია 2π , მისი გრაფიკი მიიღება სინუსოიდის Ox ღერძის გასწვრივ $\frac{\pi}{2}$ -ის სიღრმეზე მარცხნივ გადაადგილებით (ნახ. 25).



ნახ. 24



ნახ. 25

(5) ფუნქციის გრაფიკს კოსინუსოიდა ეწოდება.

3°. ფუნქცია

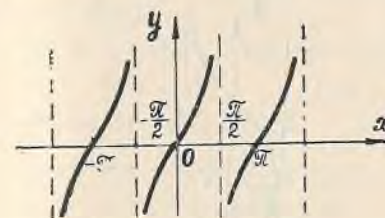
$$y = \operatorname{tg} x. \quad (6)$$

განსაზღვრულია $-\infty < x < +\infty$, გარდა $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. მისი პერიოდია π . (6) ფუნქციის გრაფიკი — ტანგენსოიდა გამოსახულია 26-ე ნახაზზე.

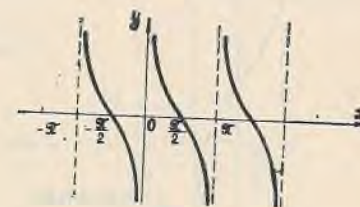
4°. ფუნქცია

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad (7)$$

განსაზღვრულია $-\infty < x < +\infty$, გარდა $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. მისი გრაფიკი გამოსახულია 27-ე ნახაზზე.



ნახ. 26



ნახ. 27

5. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. 1°. $y = \arcsin x$. განვიხილოთ განტოლება y ცვლადის მიმართ

$$\sin y = x. \quad (8)$$

ამ განტოლების ამონახსნია

$$y = (-1)^k \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

სადაც α არის (8) განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

შუალედს ეკუთვნის. ამ ამონახსნს (9) ამონახსნთაგან მთავარი მნიშვნელობა (მთავარი შტო) ეწოდოთ. იგი მიიღება (9) ამონახსნიდან, თუ $k=0$. ფუნქცია $\sin y$ y -ის იმ მნიშვნელობებისათვის,

რომლებიც $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტს ეკუთვნიან, ზრდალია და იგი მხოლოდ

ერთხელ მიიღებს x -ის ყოველ მნიშვნელობას სეგმენტიდან $-1 \leq x \leq 1$

ამგვარად, ფუნქცია $\sin y$ ურთიერთცალსახად გადასახავს $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

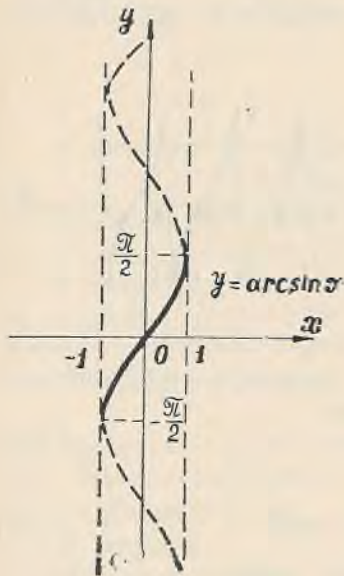
სეგმენტს $-1 \leq x \leq 1$ სეგმენტზე. ამის გამო შეგვიძლია განვიხილოთ $\sin y$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. ეს ფუნქცია აღინიშნება

$$y = \arcsin x \quad (10)$$

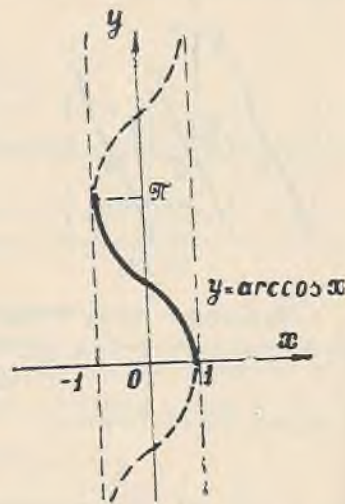
სიმბოლოთი. ფუნქცია $\arcsin x$ განსაზღვრულია $-1 \leq x \leq 1$ სეგმენტზე, ხოლო მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $Y = \left\{ y \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$. თუ (8) განტოლებას ამონახსნებს $\text{Arc sin } x$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, მაშინ (9)-დან მივიღებთ:

$$\text{Arc sin } x = (-1)^k \arcsin x + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

აქედან k სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის სხვადასხვა ფუნქციას მივიღებთ. $y_k = (-1)^k \arcsin x + k\pi$ -ის გრაფიკი მოცემულია 28-ე ნახაზზე, უწყვეტი წირით ნაჩვენებია $y = \arcsin x$ -ის გრაფიკი.



ნახ. 28



ნახ. 29

2°. $y = \arccos x$, ანალოგიურად $y = \arcsin x$ -ის განსაზღვრისა, აქაც განვიხილოთ განტოლება

$$\cos y = x, \quad (11)$$

რომლის ამონახსნებია

$$\begin{aligned} y_k &= +\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ y_k &= -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (12)$$

სადაც α არის (11) განტოლების ამონახსნი, რომელიც მოთავსებულია 0-სა და π -ს შორის (მთავარი მნიშვნელობა — მთავარი შტო).

თუ $y \in [0, \pi]$, მაშინ ფუნქცია $\cos y$ კლებადია და ურთიერთცალსახად

ვადისახავს $0 \leq y \leq \pi$ სეგმენტს, $-1 \leq x \leq 1$ სეგმენტზე. ამის გამო შეგვიძლია განვიხილოთ $\cos y$ -ის შებენი ფუნქცია. ეს ფუნქცია

$$y = \arccos x$$

სიმბოლოთი აღინიშნება. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $-1 \leq x \leq 1$ სეგმენტზე, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $0 \leq y \leq \pi$ სეგმენტი. თუ (11) განტოლების ამონახსნს $\text{Arc cos } x$ აღვნიშნავთ, გვექნება

$$\text{Arc cos } x = \pm \arccos x + 2k\pi \quad (13)$$

ამ გამოსახულებაში k -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის სხვადასხვა ფუნქციას მივიღებთ:

$$y_k = \arccos x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$y_k = -\arccos x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

29-ე ნახაზზე მოცემულია $y_k = \arccos x + 2k\pi$ -ის გრაფიკი, უწყვეტი, წირით ნაჩვენებია $y = \arccos x$ -ის გრაფიკი.

3°. $y = \text{arctg } x$. განვიხილოთ განტოლება

$$\text{tg } y = x. \quad (14)$$

ამ განტოლების ამონახსნია

$$y_k = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

სადაც α არის (14) განტოლების

ამონახსნი, რომელიც $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

ინტერვალში მოთავსებული. ამ ინტერვალში განსაზღვრული ფუნქცია $\text{tg } y$ ურთიერთცალსახად ვადასახავს $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ინტერვალს

$-\infty < x < +\infty$ ინტერვალში.

ამის გამო შეგვიძლია განვიხილოთ $\text{tg } y$ -ის შებენი ფუნქცია, რომელიც

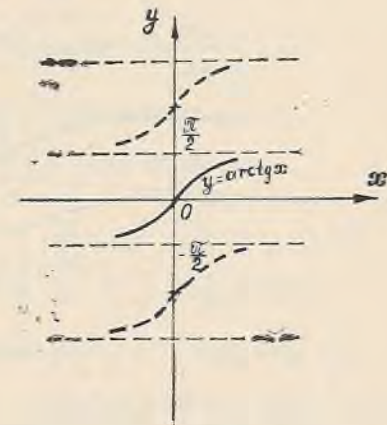
$$x = \text{arc tg } y$$

სიმბოლოთი აღინიშნება. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ინტერვალში და მისი მნიშვნელობათა არეა $-\infty < x < +\infty$ ინტერვალში.

თუ (14) განტოლების ამონახსნს აღვნიშნავთ $\text{Arc tg } x$ სიმბოლოთი, გვექნება

$$\text{Arc tg } x = \text{arc tg } x + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

აქედან k -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის სხვადასხვა ფუნქციას მივიღებთ. 30-ე ნახაზზე ნაჩვენებია $y_k = \text{arc tg } x + k\pi$ -ის გრაფიკი. უწყვეტი წირით ნაჩვენებია $y = \text{arc tg } x$ ფუნქციის გრაფიკი.



ნახ. 30

4°. $y = \operatorname{arccotg} x$. ანალოგიურად $y = \operatorname{arctg} x$ -ის განსაზღვრისა, განტოლებიდან

$$\operatorname{ctg} y = x \quad (16)$$

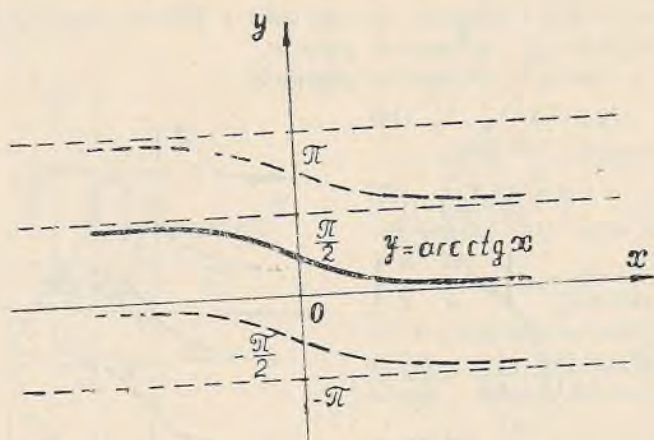
განესაზღვრავთ

$$y = \operatorname{arccotg} x. \quad (17)$$

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $-\infty < x < +\infty$ ინტერვალში, ხოლო მისი მნიშვნელობათა არეა $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

(16) განტოლების ამონახსნებია

$$\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x = \operatorname{arccotg} x + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



ნახ. 31

k -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ამ გამოსახულებიდან სხვადასხვა ფუნქციას მივიღებთ. 31-ე ნახაზზე ნაჩვენებია $y_k = \operatorname{arccotg} x + k\pi$ -ის გრაფიკი. უწყვეტი წირით ნაჩვენებია $y = \operatorname{arccotg} x$ ფუნქციის გრაფიკი.

ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 24.

1. მონახეთ შემდეგი ფუნქციების შექცეული ფუნქციები და ააგეთ:

$$\begin{aligned} 1) y = 2x + 3, \quad 2) y = \sqrt{1 - x^2}, \quad 3) y = \sqrt[3]{1 - x^3}, \\ 4) y = 2^{\frac{x}{2}}, \quad 5) y = \operatorname{ctg} 2x, \quad 6) y = \frac{1}{x-2}, \quad y = \sqrt{2x^2}. \end{aligned}$$

2. ვთქვათ, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, მონახეთ $f(g(x))$ და $g(f(x))$, ააგეთ გრაფიკები.

3. ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

$$\begin{aligned} 1) y = x^{2/3}, \quad 2) y = (x-2)^2, \quad 3) y = 3 + (x-1)^2, \quad 4) y = 1 + 2^x, \\ 5) y = 2^{x-1}, \quad 6) y = \operatorname{tg}(2+x), \quad 7) y = 2 \cos x, \quad 8) y = 2 \cos \frac{x}{2}, \\ 9) y = \sin^2 x, \quad 10) y = \cos^2 x. \end{aligned}$$

$$\left(\text{მითითება: ისარგებლეთ ფორმულით } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \right).$$

$$11) y = 4 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right), \quad 12) y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

4. ააგეთ წირები:

$$1) y = e^{-x}, \quad 2) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad 3) y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

5. ააგეთ წირები:

$$1) y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad 2) y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

$$3) y = \operatorname{arc} \sec x, \quad 4) y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x.$$

6. მონახეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არეები:

$$\begin{aligned} 1) y = a^{x^2}, \quad 2) y = a^{\frac{1}{x^2+1}}, \quad 3) y = a^{\frac{1}{x^2-1}}, \quad 4) y = 2\sqrt{x}, \\ 5) y = \log_a |x|, \quad 6) y = \log_a (x^2 + 1), \quad 7) y = \log_a (x^2 - 1), \\ 8) y = \sin \frac{1}{x^2}, \quad 9) y = \sin \frac{1}{x^2 + 1}, \quad 10) y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$11) y = \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2+1}, \quad 12) y = \log_a \frac{5x-x^2}{4}, \quad 13) y = \operatorname{arcsin} \frac{1}{2-x}.$$

§ 4. რიცხვითი მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი

1. მიმდევრობის ზღვარი^{1,2} ზემოთ განესაზღვრეთ (x_n) მიმდევრობა. ეთქვას, X რაიმე სიმრავლეა, ხოლო N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. ყოველგვარ გადასახვას $f: N \rightarrow X$ ეწოდება X სიმრავლის ელემენტთა მიმდევრობა. ამ მიმდევრობის $f(n)$ ელემენტს x_n -ით აღნიშნავენ. x_n -ს ეწოდება (x_n) მიმდევრობის n -ური წევრი (ზოგადი წევრი).

¹ С. М. Никольский, Курс математического анализа, т. I, М. 1973;

² В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк, Основы математического анализа, ч. I, М. 1982.

ახლა X ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე იყოს $X \subset \mathbb{R}$. ვთქვათ, გვაქვს რაიმე გადასახვა $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. ამ შემთხვევაში (x_n) მიმდევრობის წევრები რიცხვებია. ასეთ (x_n) მიმდევრობას რიცხვთა მიმდევრობა ეწოდება.

რა ხერხით შეიძლება მოცემულ იქნეს მიმდევრობა? ცხადია, ყველა იმ ხერხით, რა ხერხითაც შეიძლება ფუნქციის მოცემა. მაგრამ აქედან მიმდევრობის მოცემის ბუნებრივი ხერხია ანალიზური ხერხი. ამ შემთხვევაში ცნობილია ფორმულა, რომლის საშუალებითაც ყოველი n -სათვის გამოითვლება x_n .

მაგალითად, $x_n = \frac{n}{2^n}$. მიეცეთ მნიშვნელობანი $n = 1, 2, 3, \dots$ მივღებთ,

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{2}{2^2}, \quad x_3 = \frac{3}{2^3}, \dots$$

მაშასადამე, გვექნება მიმდევრობა:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{2^2}, \quad \frac{3}{2^3}, \dots, \frac{n}{2^n}, \dots$$

მიმდევრობის ზღვრის განსაზღვრისათვის განვიხილოთ მიმდევრობები:

$$(n) = (1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right), \quad (2)$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots\right), \quad (3)$$

$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\right), \quad (4)$$

$$(1 + (-1)^n) = (0, 2, 0, 2, \dots), \quad (5)$$

$$\left(\frac{n + (-1)^n}{n}\right) = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \dots\right), \quad (6)$$

$$\left(x_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & n=1, 3, 5, \dots \\ \frac{n-1}{n}, & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{7}{8}, \dots\right) \quad (7)$$

ამ ტოლობებში მარცხნივ, ფრჩხილებში, მოთავსებულია მიმდევრობის ზოგადი x_n წევრი, ხოლო მარჯვნივ, ფრჩხილებში, x_n -ის მნიშვნელობანი, $n=1, 2, 3, \dots$

შემდეგში ხშირად ვიხმართ სიტყვებს „ x_n ცვლადი“ ან „ x_n მიმდევრობა“ ნაცვლად (x_n) მიმდევრობისა, ამით არავითარი გაუგებრობა არ შეიქმნება.

მიმდევრობას ეწოდება სტაციონარული, თუ x_n -ის ყველა მნიშვნელობა, $n=1, 2, \dots$, ერთი და იგივეა. მაგალითად, მიმდევრობა (1^ა). დავაკვირდეთ (2) მიმდევრობას.

აღვილი შესამჩნევია, რომ (2) მიმდევრობა მისწრაფვის 1-საკენ.

ანუ (2) მიმდევრობა იკრებება — 1-საკენ, მაგრამ $x_n = \frac{n-1}{n}$ ისე მისწრაფვის 1-საკენ, რომ $x_n < 1$.

(3) მიმდევრობაც მისწრაფვის 1-საკენ, მაგრამ $x_n = \frac{n+1}{n} > 1$.

(4) მიმდევრობის ზღვარია 0, მაგრამ აქ $x_{2n} > 0$, $x_{2n-1} < 0$. მიმდევრობებს (1), (5), (7) ზღვარი არ აქვთ.

ვითყვიოთ, რომ (x_n) მიმდევრობის — x_n ცვლადის ზღვარი არის a რიცხვი, თუ ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N (ε -ზე დამოკიდებული), რომ ყველა იმ n ნატურალური რიცხვისათვის, რომელიც N -ზე მეტია, სრულდება უტოლობა

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

ის ფაქტი, რომ (x_n) მიმდევრობის ზღვარი არის a , როდესაც $n \rightarrow \infty$, ასე ჩაიწერება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{ან} \quad \lim x_n = a. \quad (8)$$

(x_n) მიმდევრობის ზღვრის განსაზღვრა ლოგიკური სიმბოლოებით ასე ჩაიწერება:

$$\lim x_n = a := \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon),$$

ან ასე:

$$\lim x_n = a := \forall \varepsilon > 0 \exists N |x_n - a| < \varepsilon, n > N. \quad (9)$$

სიტყვებით „ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვისთვის“ ვგულისხმობთ: როგორი მცირეც არ უნდა იყოს ε დადებითი რიცხვი...

(2) მიმდევრობისათვის გვექნება:

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}.$$

დავასახელოთ ε რიცხვი და განვსაზღვროთ $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

მაშინ ყველა $n > N$ -თვის შესრულება უტოლობა

$$|x_n - 1| < \varepsilon.$$

მაგალითად, $\varepsilon = 0,1$, მაშინ $E\left(\frac{1}{0,1}\right) = 10$.

ცხადია, $\forall n > 10$ -სათვის შესრულება უტოლობა

$$|x_n - 1| < 0,1.$$

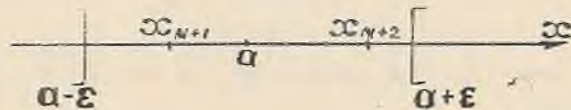
$|x_n - a| < \varepsilon$ უტოლობა ასე გადავწეროთ

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon.$$

ანუ

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \quad (10)$$

ამ უტოლობიდან დავასკვნით, რომ გეომეტრიულად (9) განსაზღვრება ნიშნავს: (x_n) -ის ზღვარი არის a რიცხვი (წერტილი), თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ ყველა $n > N$ -თვის x_n ეკუთვნის a წერტილის ε მიდამოს, $x_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ (ნახ. 32).



ნახ. 32

ავიღოთ a წერტილის ნებისმიერი მიდამო $c < a < d$. თუ $x_n \rightarrow a$, მაშინ როგორც უნდა იყოს a წერტილის მიდამო $]c, d[$, მოიძებნება ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ ინტერვალი მოთავსდება $]c, d[$ მიდამოში,

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset]c, d[.$$

ამის გამო (x_n) -ის ზღვარი არის a , შეიძლება ასეც განისაზღვროს: როგორც უნდა იყოს a წერტილის მიდამო $]c, d[$, ყველა x_n წერტილი, დაწყებული რომელიმე N ნომრიდან, უნდა მოხვდეს ამ $]c, d[$ მიდამოში. ე. ი. უნდა არსებობდეს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N = N(c, d)$, რომ $\forall n > N$ -ისთვის $x_n \in]c, d[$. რაც შეეხება $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ სიმრავლეს, შეიძლება ეკუთვნოდეს ან არ ეკუთვნოდეს $]c, d[$ მიდამოს. ამგვარად, $]c, d[$ მიდამოს გარეთ იქნება მხოლოდ x_n წერტილების სასრულო რაოდენობა.

მეორე მხრივ, თუ ცნობილია, რომ $]c, d[$ მიდამოს გარეთ $\{x_n\}$ სიმრავლის სასრულო რაოდენობის წერტილებია $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$, მაშინ ავიღოთ

$$N = \max \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$$

და, ცხადია, ყველა $n > N$ -სათვის $x_n \in]c, d[$ მიდამოს.

ამგვარად, შეგვიძლია (x_n) მიმდევრობის ზღვარი შემდეგნაირადაც განვსაზღვროთ:

(x_n) მიმდევრობის ზღვარი არის a , თუ a წერტილის ნებისმიერი მიდამოს გარეთ იქნება x_n წერტილთა სასრული ან ცარიელი სიმრავლე.

(7) მიმდევრობა არ მიისწრაფვის არავითარ ზღვრისაკენ, რადგანაც, თუ ამ ცვლადს ზღვარი აქვს $a=1$, მაშინ a წერტილის ნებისმიერი მცირე მიდამო უნდა შეიცავდეს x_n წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს, მის გარეთ უნდა იყოს მხოლოდ სასრულო რაოდენობა x_n წერტილებისა. მაგრამ, სადაც არ უნდა იყოს a წერტილი, ხოლო მისი მიდამო სივრცით $\frac{1}{2}$ -ს არ აღემატებოდეს, მაშინ ამ მიდამოს გარეთ მოთავსდება უსასრულო სიმრავლე (7) მიმდევრობის x_n — წერტილებისა.

თუ a წერტილის მიდამოს $u(a)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, ზემოთ მოტანილი განსაზღვრა ასეც შეიძლება გამოვთქვათ: a რიცხვს ეწოდება (x_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ a წერტილის ნებისმიერი $u(a)$ მიდამოსათვის არსებობს N რიცხვი, $N \in \mathbb{N}$, რომ ყველა x_n , რომლის ნომერი მეტია N -ზე, მოთავსდება $u(a)$ მიდამოში,

$$\lim x_n = a := \forall u(a) \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow x_n \in u(a)).$$

რაც შეეხება (1) მიმდევრობას, იგი არ მიისწრაფვის არავითარ სასრულო ზღვრისაკენ, შემდეგში კი ვიტყვით, რომ იგი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.

თუ (x_n) მიმდევრობას აქვს ზღვარი, მაშინ ვიტყვით, რომ მიმდევრობა კრებადი, ან (x_n) მიმდევრობა იკრებიება.

აღვიღოთ შესამჩნევია, რომ კრებად მიმდევრობას ერთადერთი ზღვარი აქვს. მართლაც (x_n) მიმდევრობას რომ ორი a და b ზღვარი ჰქონდეს, მაგალითად, $a < b$, მაშინ $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ ინტერვალები უნდა შეიცავდეს ყველა x_n -ს, გარდა x_n -ის სასრულო რიცხვისა. მაგრამ ეს შეუძლებელია, რადგანაც ამ ინტერვალებს საერთო წერტილები არ ექნებათ, თუ $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$,

მაგალითად, $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$.

(5) მიმდევრობაში $x_{2n-1} = 0$, $x_{2n} = 1$, $n = 1, 2, \dots$. ამ მიმდევრობას ზღვარი არ აქვს.

(3) მიმდევრობის ზღვარი არის 1,

$$\lim \frac{n+1}{n} = 1.$$

(4) მიმდევრობის ზღვარი არის 0,

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

გისარგებლოთ მიმდევრობის ზღვრის განსაზღვრით და $x_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+4}-2}{\sqrt[3]{n^3+4}+2}$ -თვის ვაჩვენოთ $\lim x_n = 1$, ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) (\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon).$$

განვიხილოთ სხვაობა

$$x_n - 1 = \frac{\sqrt[3]{n^3+4}-2}{\sqrt[3]{n^3+4}+2} - 1 = \frac{-4}{\sqrt[3]{n^3+4}+2},$$

საიდანაც

$$|x_n - 1| = \frac{4}{\sqrt[3]{n^3+4}+2} < \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}.$$

იმისათვის, რომ $\forall \varepsilon > 0$ შესრულდეს $|x_n - 1| < \varepsilon$, საკმარისია $\frac{4}{n} < \varepsilon$,

ანუ $n > \frac{4}{\varepsilon}$. თუ $N = E\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)$, მაშინ $\forall n > N$ -სათვის $|x_n - 1| < \varepsilon$.

2. კრებადი მიმდევრობის თვისებები. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 1. კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია,

$$(x_n \rightarrow a) \Leftrightarrow (\exists M > 0 \mid \forall |x_n| \leq M).$$

მართლაც, თუ $x_n \rightarrow a$, მაშინ $\varepsilon = 1$ -სათვის არსებობს ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ

$$\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < 1.$$

მაგრამ

$$|x_n - a| \geq |x_n| - |a|.$$

ამ ორი უტოლობიდან მივიღებთ

$$|x_n| - |a| < 1,$$

საიდანაც ყოველი $n > N$ -სათვის

$$|x_n| < |a| + 1.$$

N სასრული რიცხვია, ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ

$$M = \max\{|a| + 1, |x_1|, \dots, |x_N|\}.$$

მაშინ, ცხადია, ყოველი n -ისათვის მართებულია უტოლობა

$$|x_n| \leq M,$$

რაც გამოთქმულ თეორემას ამტკიცებს.

თეორემა 2. თუ (x_n) მიმდევრობის ზღვარია a , მაშინ რომელიმე N ნომრიდან დაწყებული x_n -ს ექნება a რიცხვის ნიშანი.

მართლაც, რადგანაც $x_n \rightarrow a$, მაშინ $\forall \varepsilon > 0 \exists N$, რომ $\forall n > N$ -სათვის

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

ავიღოთ $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$, მაშინ მოიძებნება ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ $\forall n > N$ -სათვის

$$|x_n - a| < \frac{|a|}{2},$$

ანუ

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}. \quad (11)$$

თუ $a > 0$, მაშინ (11) უტოლობიდან მივიღებთ $\forall n > N$ -სათვის

$$a - \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2} < x_n. \quad (12)$$

თუ $a < 0$, მაშინ $\forall n > N$ -სათვის

$$x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}. \quad (13)$$

მიღებული (12) და (13) უტოლობანი ამტკიცებენ გამოთქმულ თეორემას.

თეორემა 3. თუ (x_n) და (y_n) კრებადი მიმდევრობებია და n -ის ყველა მნიშვნელობისათვის $x_n \leq y_n$, მაშინ

$$\lim x_n \leq \lim y_n.$$

მართლაც, ვთქვათ, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$. დავუშვათ $b < a$, მაშინ შეგვიძლია ისეთი $\varepsilon > 0$ მოვიძებნოთ, რომ

$$b + \varepsilon < a - \varepsilon. \quad (14)$$

ამისათვის საკმარისია ავიღოთ $\varepsilon < \frac{a-b}{2}$. მაგალითად, $\varepsilon = \frac{a-b}{3}$.

რადგანაც $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, ამიტომ $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n > N_1$ -სათვის

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \quad (15)$$

ასევე $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n > N_2$ -სათვის

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon. \quad (16)$$

ავიღოთ $N = \max\{N_1, N_2\}$, მაშინ (15) და (16) უტოლობანი შესრუდება $\forall n > N$ -სათვის:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

ამ უტოლობათა სისტემიდან (14) უტოლობის დახმარებით მივიღებთ:

$$y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n,$$

ანუ $\forall n > N$ -სათვის

$$y_n < x_n.$$

მივიღეთ თეორემაში დაშვებული პირობის საწინააღმდეგო, სადაც $x_n \leq y_n$ -ზე n -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის.

ამგვარად, თუ x_n და y_n კრებადი მიმდევრობებია და $x_n \leq y_n$ n -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, მაშინ

$$\lim x_n \leq \lim y_n.$$

თეორემა 4. თუ (x_n) და (y_n) იკრიბება ერთსა და იმავე a რიცხვისაკენ და (z_n) აკმაყოფილებს პირობას

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

მაშინ

$$\lim z_n = a.$$

მართლაც, $\forall \varepsilon > 0$ -სათვის არსებობს N_1 და N_2 ისეთი, რომ

$$\forall n > N_1 \Rightarrow (a - \varepsilon < x_n),$$

$$\forall n > N_2 \Rightarrow (y_n < a + \varepsilon).$$

თუ ავიღებთ $N = \max\{N_1, N_2\}$, მაშინ $\forall n > N$ -სათვის შესრუდება ორივე უტოლობა:

$$a - \varepsilon < x_n,$$

$$y_n < a + \varepsilon.$$

(17) პირობიდან ამ ორი უტოლობის საფუძველზე მივიღებთ:

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

ამით გამოთქმული თეორემა დამტკიცდა.

3. მიმდევრობის კრებადობის პირობები. დავამტკიცოთ კოშის შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5. (x_n) მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი: ყოველი დადებითი ε -სთვის არსებობდეს ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ ყოველი $n > N$ და $m > N$ -სთვის შესრულდეს უტოლობა:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \quad (18)$$

ამ თეორემას ეწოდება მიმდევრობის კრებადობის კოშის კრიტერიუმი, ხოლო (18) პირობას კოშის პირობა.

დამტკიცება. 1) პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ $x_n \rightarrow a$, მაშინ $\forall \varepsilon > 0 \exists N$, რომ $\forall n > N$ -სათვის

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ვთქვათ, n და m ადებულ N -ზე მეტი ნატურალური რიცხვებია, მაშინ

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ავიღოთ გამოსახულება $|x_n - x_m|$,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

მივიღეთ, რომ $n > N$ და $m > N$ -სათვის სრულდება (18) პირობა. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცდა.

2) პირობის საკმარისობა. რადგანაც (x_n) მიმდევრობა აკმაყოფილებს კოშის პირობას, მაშინ $\forall \varepsilon > 0 \exists N$, რომ $\forall n > N$, $\forall m > N$ -სათვის

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

დავუშვათ, $\varepsilon = 1$ და ავარჩიოთ სათანადოდ N . გვქვია $\forall n > N$, $\forall m > N$ -სათვის

$$|x_n - x_m| < 1. \quad (19)$$

ავიღოთ m -ის რაიმე ფიქსირებული მნიშვნელობა. მაგალითად, $m = N + 1$. (19) უტოლობიდან მივიღებთ

$$|x_n| - |x_m| \leq |x_n - x_m| \leq |x_n - x_m| < 1.$$

საიდანაც

$$|x_n| < 1 + |x_m|.$$

მაშასადამე, (x_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ახლა ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის განვსაზღვროთ

$$\alpha_n = \inf_{k > n} x_k, \quad \beta_n = \sup_{k > n} x_k.$$

ცხადია, $[\alpha_n, \beta_n]$ არის სივრცით უმცირესი სეგმენტი, რომელიც შეიცავს ყველა x_n , $n > N$, ალბულო (x_n) მიმდევრობიდან. თუ n -ის მაგივრად ავიღებთ $n+1$ -ს, მაშინ

$$\alpha_n = \inf_{k > n} x_k \leq \inf_{k > n+1} x_k = \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} = \sup_{k > n+1} x_k \leq \sup_{k > n} x_k = \beta_n.$$

ამ მოქმედების გაგრძელებით გვექნება სეგმენტთა მიმდევრობა

$$[\alpha_n, \beta_n] \supset [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \supset \dots$$

ვაჩვენოთ, რომ $[\alpha_n, \beta_n]$ სეგმენტის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $n \rightarrow \infty$.

მართლაც, კოშის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ -სათვის არსებობს ისეთი n_0 , რომ ყოველი $k > n_0$ -სათვის

$$x_{n_0} - \varepsilon < x_k < x_{n_0} + \varepsilon.$$

(n_0 ისე განისაზღვრება, როგორც ზემოთ m განვსაზღვრეთ). ამ უტოლობიდან მივიღებთ:

$$x_{n_0} - \varepsilon < \alpha_{n_0} \leq \beta_{n_0} \leq x_{n_0} + \varepsilon,$$

$n > n_0$ -სათვის

$$2\varepsilon \geq \beta_{n_0} - \alpha_{n_0} \geq \beta_n - \alpha_n.$$

თავმოყრილ სეგმენტთა პრინციპის თანახმად, არსებობს ისეთი ერთადერთი a რიცხვი, რომელიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის. სწორედ ეს რიცხვია (x_n) მიმდევრობის ზღვარი. მართლაც, ავიღოთ a წერტილის ნებისმიერი $]c, d[$ მიღამო. მოინახება ისეთი n , რომ $[\alpha_n, \beta_n] \subset]c, d[$. ცხადია, $k > n$ -სათვის $x_k \in [\alpha_n, \beta_n] \subset]c, d[$. ე. ი.

$$\lim x_n = a.$$

ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

კოშის პირობით ვაჩვენოთ, რომ $x_n = \frac{4n^2 + 5}{2n^2 + 3}$ მიმდევრობა კრებადია.

მართლაც,

$$x_n - x_m = \frac{4n^2 + 5}{2n^2 + 3} - \frac{4m^2 + 5}{2m^2 + 3} = \frac{2n^2 - 2m^2}{(2n^2 + 3)(2m^2 + 3)}.$$

მივიღოთ $n > m$, მაშინ

$$x_n - x_m < \frac{(2n^2 + 3) - 2m^2}{(2n^2 + 3)(2m^2 + 3)} < \frac{2n^2 + 3}{(2n^2 + 3)(2m^2 + 3)} = \frac{1}{2m^2 + 3}$$

თუ

$$\frac{1}{2m^2 + 3} < \varepsilon, \quad N = E\left(\sqrt{\frac{1 - 3\varepsilon}{2\varepsilon}}\right),$$

მაშინ

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m > N.$$

ამით $x_n = \frac{4n^2 + 5}{2n^2 + 3}$ -ის კრებადობა დამტკიცდა.

კოშის პირობის საფუძველზე ვაჩვენოთ, რომ (x_n) მიმდევრობა,

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

განშლადია.

მართლაც, საკმარისია რომელიმე n, m აღმოვაჩინოთ, რომ კოშის პირობა კრებადობის შესახებ ირღვევა.

ავიღოთ $m = 2n$.

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

მაშასადამე, (x_n) , $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, განშლადია.

თეორემა 6. თუ (x_n) მიმდევრობა არაკრებადია და შემოსაზღვრულია ზემოდან b რიცხვით, მაშინ (x_n) კრებადია და $\lim x_n \leq b$.

მართლაც, თუ მიმდევრობა (x_n) არაა კრებადი, ე. ი.

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n \leq x_{n+1})$$

და შემოსაზღვრულია, მაშინ $\{x_n\}$ -ს აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი a ,

$$\sup_n x_n = a \leq b.$$

ზუსტი ზედა საზღვრის განმარტებიდან გვექნება, რომ $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ -სათვის სრულდება უტოლობა

$$a - \varepsilon < x_N \leq a.$$

(x_n) მიმდევრობა არაკრებადია, ამიტომ $\forall n > N$ -სათვის

$$a - \varepsilon < x_N \leq x_n.$$

ასე რომ, $\forall \varepsilon < 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N$ -სათვის სრულდება უტოლობა

$$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon,$$

ანუ

$$\lim x_n = a.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თუ არაკლებადი (x_n) მიმდევრობა შემოუსაზღვრელია, მაშინ ნებისმიერი დადებითი b რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი x_N , რომ $b < x_N$ და ასეთივე უტოლობას ექნება ადგილი $\forall n > N$ -სათვის. ეს კი ნიშნავს

$$\lim x_n = +\infty.$$

მე-6 თეორემა ამ შენიშვნის შემდეგ შეიძლება ასე ჩამოვყალიბოთ.

თუ (x_n) მიმდევრობა არაა კლებადი და შემოსაზღვრულია ზემოდან b რიცხვით, მაშინ (x_n) მიმდევრობა კრებადი და $\lim x_n = a \leq b$. თუ (x_n) შემოსაზღვრული არაა ზემოდან, მაშინ $\lim x_n = +\infty$.

სრულიად ასევე გამოითქმის და დამტკიცდება არაზრდადი ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობის შესახებ.

თეორემა 7. თუ (x_n) მიმდევრობა არაა ზრდადი, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Rightarrow (x_n \geq x_{n+1})$ და ქვემოდან შემოსაზღვრულია რაიმე b რიცხვით, მაშინ (x_n) მიმდევრობა კრებადი და $\lim x_n = a \geq b$. თუ (x_n) მიმდევრობა ქვემოდან შემოუსაზღვრავია, მაშინ $\lim x_n = -\infty$.

4. e რიცხვი. განვიხილოთ მიმდევრობა (x_n) , სადაც $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

ნიუტონის ბინომის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n},$$

ანუ

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (20)$$

სრულიად ასევე მივიღებთ

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

x_n -ის წევრები ნაკლებია, ვიდრე x_{n+1} -ის წევრები, ამასთან x_{n+1} შეიცავს ერთი წევრით მეტ წევრს. ეს წევრი ბოლო წევრია და დადებითი. ამიტომ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n < x_{n+1})$, ე. ი. (x_n) მიმდევრობა ზრდადი.

ვაჩვენოთ, რომ (x_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

თუ (20)-ში $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ უგულებელვყოფთ, მივიღებთ:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}. \quad (21)$$

თუ 2!-ს შევცვლით 2-ით, 3!-ს შევცვლით 2² და ა. შ. n! შევცვალოთ 2ⁿ⁻¹-ით, მაშინ (21) უტოლობა გაძლიერდება. გვექნება:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}. \quad (22)$$

და თუ (22) უტოლობაშიც უკუვაგდებთ $\frac{1}{2^n}$ -ს, უტოლობა კიდევ უფრო გაძლიერდება და გვექნება

$$x_n < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

ამგვარად, (x_n) მიმდევრობა ზრდადი და ზემოდან შემოსაზღვრული. მე-6 თეორემის საფუძველზე (x_n) მიმდევრობას აქვს ზღვარი. ეს ზღვარი აღინიშნება e ასოთი და უწოდებენ **ნებერის**¹ რიცხვს. აღნიშვნა ეკუთვნის ლ. ეილერს.

e რიცხვს ანალიზში თითქმის ისეთივე მნიშვნელობა აქვს, რაც გეომეტრიაში π რიცხვს და არითმეტიკაში 1-ს.

e რიცხვი, ისე როგორც π რიცხვი, ირაციონალური რიცხვია. უფრო მეტიც, e და π ტრანსცენდენტური რიცხვებია, რადგანაც არ არსებობს მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლება, რომლის ამონახსნიც e ან π რიცხვი იყოს.

როგორც ადვილი შესამჩნევია $2 < e < 3$. მისი მნიშვნელობაა

$$e = 2,718281 \dots$$

პრაქტიკაში ღებულობენ

$$e = 2,72.$$

¹ ჯონ ნებერი (1550—1617), შოტლანდიელი მათემატიკოსი, ლოგარიტმების გამომგონებელი.

ცალკე განიხილება მაჩვენებლიანი ფუნქცია $y=e^x$. ამ ფუნქციას ექსპონენციალური ფუნქცია ეწოდება და შემდეგნაირად აღინიშნება $e^x = \exp x$,

წაიკითხება „ექსპონენციალური x “, შემოკლებით „ექსპონენც x “.

ქვემოთ ზშირად შეგვხვდება წინადადებანი: „ (x_n) მიმდევრობა მიისწრაფვის პლუს უსასრულობისაკენ“, „ (x_n) მიმდევრობა მიისწრაფვის მინუს უსასრულობისაკენ“, „ (x_n) მიმდევრობა მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ“, რომლებიც შემდეგნაირად განისაზღვრებიან:

$$x_n \rightarrow +\infty := \forall b \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow x_n > b),$$

$$x_n \rightarrow -\infty := \forall b \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow x_n < b),$$

$$x_n \rightarrow \infty := \forall b \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow |x_n| > |b|).$$

განვიხილოთ მაგალითი.

ვაჩვენოთ, რომ

$$x_n = \frac{\sqrt{2n^2+1}-1}{\sqrt{2n^2+3}+1} \rightarrow 1.$$

მიმდევრობის ზღვრის განმარტების თანახმად,

$$\lim x_n = 1 := \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon).$$

ვაშოვთვალოთ $|x_n - 1|$.

$$\begin{aligned} x_n - 1 &= \frac{\sqrt{2n^2+1}-1}{\sqrt{2n^2+3}+1} - 1 = \frac{\sqrt{2n^2+1}-1-(\sqrt{2n^2+3}+1)}{\sqrt{2n^2+3}+1} = \\ &= \frac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2+3}}{\sqrt{2n^2+3}+1} = \frac{(2n^2+1)-(2n^2+3)}{(\sqrt{2n^2+3}+1)(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2+3})} = \\ &= \frac{-2}{(\sqrt{2n^2+3}+1)(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2+3})}; \\ |x_n - 1| &= \frac{2}{(\sqrt{2n^2+3}+1)(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2+3})} < \\ &< \frac{2}{(n+1)(n+n)} < \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

რომ შესრულდეს (x_n) მიმდევრობის 1-სკენ კრებადობა, საკმარისია ავიღოთ $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, ანუ $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. თუ ავიღებთ $N = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, მაშინ $\forall n > N$ -სთვის შესრულდება პირობა $|x_n - 1| < \varepsilon$.

მაგალითად, $\varepsilon = 0,01$, მაშინ

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{0,01}}\right) = 10$$

ე. ი. $N = 10$ ნომრის შემდეგ ყველა x_n ისეთია, რომ $|x_n - 1| < 0,01$.

როდესაც საჭიროა (x_n) მიმდევრობის მართო კრებადობის გამოკვეთა, უნდა მივმართოთ მიმდევრობის კრებადობის კოშის პირობას. მიმდევრობას, რომელიც კოშის პირობას აკმაყოფილებს, ეწოდება ფუნქციური მიმდევრობა. იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ (x_n) მიმდევრობა ფუნქციური არაა, უნდა ვაჩვენოთ

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} (\exists n > N \wedge \exists m > N \Rightarrow |x_n - x_m| \geq \varepsilon).$$

მაგალითად, მიმდევრობა $(-1)^n$ არაა ფუნქციური (ეს უკვე ვიცით, მაგრამ ვაჩვენოთ ზემოთ მოტანილი განსაზღვრით), რადგანაც, თუ ავიღებთ $\varepsilon = 1$, გვექნება:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 \quad \forall N \in \mathbb{N} (|x_{N+1} - x_{N+2}| &= |(-1)^{N+1} - (-1)^{N+2}| = \\ &= |(-1)^N ((-1)^1 - (-1)^2)| = 2 > \varepsilon). \end{aligned}$$

ამ მოსაზრებით უნდა ვისარგებლოთ სავარჯიშოს შესრულებისას.

სავარჯიშო 25. 1. ისარგებლეთ მიმდევრობის ზღვრის განმარტებით და აჩვენეთ:

$$1) \lim \frac{\sqrt{n^2+2}-4}{\sqrt{n^2+5}+3} = 1, \quad 2) \lim \frac{10n^2-2n-3}{5n^2+4n+7} = 2,$$

$$3) \lim \frac{\sqrt{4n^2-3}}{\sqrt{n^2+1}} = 2, \quad 4) \lim \frac{9n+1}{3n+5} = 3,$$

$$5) \lim \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-1}{n+1} = 1.$$

2. დაამტკიცეთ, რომ მიმდევრობა $(x_n) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ ფუნქციურია.

3. აჩვენეთ, $x_n = \frac{2n-1}{2-3n} \rightarrow -\frac{2}{3}$ და იპოვეთ იმ წევრის ნომერი, რომლიდანაც დაწყებული $\left|x_n + \frac{2}{3}\right| < 0,001$.

4. აჩვენეთ, $x_n = \frac{3n-1}{6n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ და იპოვეთ ის წევრი, რომლიდანაც დაწყებული $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < 0,001$.

5. აჩვენეთ, მიმდევრობა $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right)$ არაა ფუნდამენტური.

6. გამოარკვეთ შემდეგ მიმდევრობათა ფუნდამენტურობა:

$$1) (n + (-1)^n n), \quad 2) \left(\frac{n + (-1)^n n}{n}\right), \quad 3) \left(\frac{n + (-1)^n n}{n^2}\right).$$

7. აჩვენეთ, რომ მიმდევრობა (x_n) , $x_n = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, სადაც α_0 მთელი რიცხვია, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ციფრები და აკმაყოფილებს პირობას

$$x_n^2 \leq 2 < (x_n + 10^{-n})^2,$$

კრებადია, მაგრამ $\lim x_n$ არ არის რაციონალური რიცხვი.

მითითება: $m > n$ -სათვის გვექნება

$$0 \leq x_m - x_n = 0, \alpha_{n+1} \dots \alpha_m \cdot 10^{-n} \leq 10^{-n}.$$

რომ შესრულდეს პირობა $x_m - x_n < \varepsilon$, უნდა ავიღოთ $N = E\left(\lg \frac{1}{\varepsilon}\right)$ და მაშინ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (n > N \wedge m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon).$$

ამგვარად, (x_n) მიმდევრობა კრებადია. ვთქვათ, $\lim x_n = a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$, მაშინ $0 \leq a^2 - x_n^2 \leq 2a \cdot 10^{-n}$, $0 \leq (x_n + 10^{-n})^2 - a^2 \leq 2 \cdot 10^{-n}(2a+1)$. ამ ორი უტოლობიდან და ამოცანის პირობიდან $x_n^2 \leq 2 < (x_n + 10^{-n})^2$ და-ვასკენით $a^2 = 2$, ან Q .

§ 5. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები

1. უსასრულოდ მცირე თვისებები. უსასრულოდ მცირე ეწოდება მიმდევრობას, თუ მისი ზღვარი ნულის ტოლია. ე. ი. (α_n) უსასრულოდ მცირეა, თუ

$$\lim \alpha_n = 0,$$

ანუ

$$\alpha_n \rightarrow 0 := \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon). \quad (1)$$

ავიღოთ კრებადი (x_n) მიმდევრობა:

$$\lim x_n = a,$$

ანუ

$$\lim x_n = a := \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

ეს კი ნიშნავს $x_n - a$ უსასრულოდ მცირეა, $x_n - a = \alpha_n$, სადაც

$$x_n = a + \alpha_n. \quad (2)$$

ამგვარად, თუ (x_n) მიმდევრობა კრებადია, მაშინ (2) ტოლობას აქვს ადგილი.

ახლა, ვთქვათ, რომ (x_n) მიმდევრობისათვის (2) ტოლობას აქვს ადგილი, სადაც α_n უსასრულოდ მცირეა, მაშინ $x_n - a = \alpha_n$. ეს კი (1) განსაზღვრით ნიშნავს

$$x_n - a \rightarrow 0 := \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon),$$

ანუ

$$\lim x_n = a.$$

ამგვარად დავამტკიცეთ

თეორემა 1. (x_n) მიმდევრობის a რიცხვისაკენ კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$x_n = a + \alpha_n,$$

სადაც α_n უსასრულოდ მცირეა.

თეორემა 2. თუ მოცემულია სასრული რიცხვი $\alpha_n, \beta_n, \dots, \xi_n$ უსასრულოდ მცირეებისა, მაშინ მათი ჯამი $\alpha_n + \beta_n + \dots + \xi_n$ იქნება აგრეთვე უსასრულოდ მცირე.

თეორემის დამტკიცებისათვის საკმარისია ავიღოთ სამი უსასრულოდ მცირე: (α_n) , (β_n) , (γ_n) .

რადგანაც (α_n) , (β_n) , (γ_n) უსასრულოდ მცირეებია, გვექნება

$$\alpha_n \rightarrow 0 := \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} (\forall n > N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3}),$$

$$\beta_n \rightarrow 0 := \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} (\forall n > N_2 \Rightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{3}), \quad (3)$$

$$\gamma_n \rightarrow 0 := \forall \varepsilon > 0 \exists N_3 \in \mathbb{N} (\forall n > N_3 \Rightarrow |\gamma_n| < \varepsilon).$$

ავიღოთ $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, მაშინ (3) უტოლობანი შესრულდება $\forall n > N$ -სათვის. მივიღებთ

$$|\alpha_n + \beta_n + \gamma_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| + |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ანუ $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, რომ შესრულდება უტოლობა

$$|\alpha_n + \beta_n + \gamma_n| < \varepsilon \quad \forall n > N\text{-სათვის.}$$

ამით კამოთქმული თეორემა დამტკიცდება.

თეორემა 3. უსასრულოდ მცირისა და შემოსაზღვრული მიმდევრობის ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.

მართლაც, თუ გვაქვს (α_n) უსასრულო მცირე და (x_n) შემოსაზღვრული მიმდევრობა, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leq M$, მაშინ $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$ -სათვის სრულდება უტოლობა

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

ხოლო $(\alpha_n x_n)$ -სათვის გვექნება:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \left(\forall n > N \Rightarrow |\alpha_n x_n| = |\alpha_n| |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \right).$$

ამით გამოთქმული თეორემა დამტკიცდა.

დამტკიცებული თეორემიდან ადვილი მისახვედრია, რომ ჰუმპარიტი შემდეგი წინადადება:

შედეგი 1. თუ მოცემულია სასრული რიცხვი $\alpha_n, \beta_n, \dots, \zeta_n$ უსასრულოდ მცირეებისა, მაშინ მათი ნამრავლი $\alpha_n \beta_n \dots \zeta_n$ იქნება აგრეთვე უსასრულოდ მცირე.

ამ შედეგიდან, როგორც კერძო შემთხვევა, დავასკვნით:

შედეგი 2. უსასრულოდ მცირე მთელ დადებით ხარისხში აგრეთვე უსასრულოდ მცირეა:

$$(\alpha_n \rightarrow 0) \Rightarrow (\alpha_n^k \rightarrow 0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

შედეგი 3. უსასრულოდ მცირიდან მთელი დადებითი ხარისხის ფესვი აგრეთვე უსასრულოდ მცირეა.

მართლაც, თუ $\sqrt[k]{\alpha_n} = \beta_n$ არ არის უსასრულოდ მცირე, მაშინ $\alpha_n = \beta_n^k$ არ იქნება უსასრულოდ მცირე წინა შედეგის თანახმად.

2. უსასრულოდ დიდი. (x_n) მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ დიდი, თუ ნებისმიერი $b > 0$ მოიძებნება ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ $|x_n| > b$ ყოველი $n > N$ -სათვის. (x_n) მიმდევრობა რომ უსასრულოდ დიდია, ასე ჩიწერება

$$\lim x_n = \infty \quad \text{ან} \quad x_n \rightarrow \infty \quad (4)$$

და ამოებენ: (x_n) მისწრაფვის უსასრულობისკენ. ნიშანი ∞ ნიშნავს, რომ x_n არ მისწრაფვის არავითარ სასრულო რიცხვისაკენ.

თუ უსასრულოდ დიდი რომელიმე N ნომრიდან დადებითია, მაშინ (x_n) დადებითი უსასრულოდ დიდია,

$$\lim x_n = +\infty \quad \text{ან} \quad x_n \rightarrow +\infty \quad (5)$$

თუ რომელიმე N ნომრიდან $x_n < 0$, მაშინ (x_n) უარყოფითი უსასრულოდ დიდია,

$$\lim x_n = -\infty \quad \text{ან} \quad x_n \rightarrow -\infty. \quad (6)$$

ცხადია, (5) და (6)-დან გამომდინარეობს (4). მაგრამ (4)-დან არ გამომდინარეობს (5) და (6), მაგალითად, $((-1)^n n)$ უსასრულოდ დიდია, მაგრამ (5) და (6) ტოლობებს ადგილი არ აქვს.

თეორემა 4. თუ (α_n) უსასრულოდ მცირეა, $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ უსასრულოდ დიდია და პირიქით, თუ (α_n) უსასრულოდ დიდია, მაშინ $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ უსასრულოდ მცირეა.

მართლაც, თუ (α_n) უსასრულოდ მცირეა, მაშინ $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, რომ $\forall n > N$ -სათვის

$$|\alpha_n| < \varepsilon.$$

აქედან ცხადია, $\left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$. მივიღოთ $b = \frac{1}{\varepsilon}$, მაშინ გვექნება

$$\forall b > 0 \exists N \in \mathbb{N} \left(\forall n > N \Rightarrow \left| \frac{1}{\alpha_n} \right| > b \right).$$

ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცდება.

გამოთქმული თეორემის მეორე ნაწილი პირველი ნაწილის ანალოგიურად დამტკიცდება.

3. უსასრულოდ მცირეთა რიგი. უსასრულოდ მცირეთა შეფარდება შეიძლება იყოს სასრულიც, უსასრულოდ დიდიც და უსასრულოდ მცირეც. მართლაც, თუ

$$\alpha_n \rightarrow 0, \quad \text{მაშინ} \quad \frac{6\alpha_n}{3\alpha_n} \rightarrow 2,$$

$$\frac{\alpha_n^2}{5\alpha_n} \rightarrow 0, \quad \frac{7\alpha_n}{3\alpha_n^2} \rightarrow \infty.$$

ორი უსასრულოდ მცირე (α_n) და (β_n) ერთი და იგივე რიგისაა, თუ მათი შეფარდების ზღვარი ნულისაგან განსხვავებული სასრული რიცხვია,

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} \rightarrow a \neq 0.$$

თუ (α_n) და (β_n) უსასრულოდ მცირეთა შეფარდების ზღვარი ერთის ტოლია, მაშინ (α_n) და (β_n) -ს ეკვივალენტური (ტოლფასი) უსასრულოდ მცირეები ეწოდება: $\alpha_n \sim \beta_n$. სიმბოლო $\sim$ ეკვივალენტურობის ნიშანია. (α_n) უსასრულოდ მცირეს ეწოდება (β_n) უსასრულოდ მცირის მიმართ k რიგის უსასრულოდ მცირე, თუ $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n^k}\right)$ მიმდევრობის ზღვარი ნულისაგან განსხვავ-

გებული რიცხვია. თუ (α_n) უსასრულოდ მცირეა, მაშინ $\left(\alpha_n^{\frac{3}{2}}\right)$ უსასრულოდ მცირე $\frac{3}{2}$ რიგის უსასრულოდ მცირეა (α_n) -ის მიმართ.

განვიხილოთ მაგალითები.

$$1) \lim \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 1.$$

დამტკიცება: ვაჩვენოთ, რომ $\sqrt[n]{a} - 1$ უსასრულოდ მცირეა. ცხადია, შეგვიძლია დავწეროთ

$$0 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon,$$

სადაც ε დადებითი რიცხვია. ამ ტოლობიდან მივიღებთ

$$a < (1 + \varepsilon)^n \Rightarrow \lg a < n \lg (1 + \varepsilon) \Rightarrow n > \frac{\lg a}{\lg (1 + \varepsilon)}.$$

თუ ავიღებთ $N = E\left(\frac{\lg a}{\lg (1 + \varepsilon)}\right)$, მაშინ გვექნება

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon,$$

ანუ

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 1.$$

$$2) \lim \sqrt[k]{n} = \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

უნდა ვაჩვენოთ

$$\forall b > 0 \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow \sqrt[k]{n} > b).$$

ავიღოთ $b > 0$. ცხადია, $\sqrt[k]{n} > b$, წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ $\sqrt[k]{n} < b$, მაშინ $n < b^k$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $n \rightarrow \infty$.

უტოლობიდან $\sqrt[k]{n} > b$, მივიღებთ $n > b^k$, საიდანაც, თუ $N = E(b^k)$ მაშინ

$$\forall b > 0 \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N \Rightarrow \sqrt[k]{n} > b),$$

ანუ

$$\lim \sqrt[k]{n} = \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$3) \lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, სადაც $\alpha_n > 0$. აქედან ცხადია,

$$n = (1 + \alpha_n)^n > \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \alpha_n^2 \Rightarrow \alpha_n^2 < \frac{2}{n-1} \Rightarrow \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0,$$

როდესაც $n \rightarrow \infty$.

ამრიგად, α_n უსასრულოდ მცირეა. ტოლობიდან $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$ დავასკვნით

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$4) \lim \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad a > 1, \quad k \text{ ნატურალური რიცხვია.}$$

ვთქვათ, $a = 1 + \alpha$. შეგვიძლია დავუშვათ $n > k$, მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{n^k}{a^n} &= \frac{n^k}{(1 + \alpha)^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1} \alpha^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{\alpha^{k+1}} \cdot \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k)} = \\ &= \frac{(k+1)!}{\alpha^{k+1}} \cdot \frac{1}{n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k}{n}\right)} < \frac{(k+1)!}{\alpha^{k+1}} \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

რადგან α და k სასრული რიცხვებია და $n \rightarrow \infty$, მაშინ

$$\left(\frac{(k+1)!}{\alpha^{k+1}} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0\right) \Rightarrow \left(\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0\right).$$

5) $\lim q^n = 0, \quad 0 < q < 1$. მართლაც, $0 < q < 1 \Rightarrow 0 < q^n < 1$. ე. ი. q^n შემოსაზღვრულია. ვთქვათ, $\lim q^n = A$, მაშინ გვექნება

$$(\lim q^n = A) \Rightarrow (q \lim q^{n-1} = A) \Rightarrow (qA = A).$$

მაგრამ $q \neq 1$, ამიტომ $A = 0$. ეს კი ამტკიცებს

$$\lim q^n = 0, \quad 0 < q < 1.$$

$$6) \lim \frac{a^n}{n!} = 0. \text{ საკმარისია განვიხილოთ } a > 0. \text{ ვთქვათ, } m+1 > a,$$

მაშინ

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^m \cdot a^{n-m}}{1 \cdot 2 \dots m(m+1) \dots n} < \frac{a^m}{m!} \left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m}.$$

მე-5 მაგალითის მიხედვით, რადგანაც $\frac{a}{m+1} < 1$, გვექნება

$$\lim \left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m} = 0.$$

მაშასადამე,

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0.$$

1. მიმდევრობებზე არითმეტიკული მოქმედებანი. ვთქვათ, მოცემულია მიმდევრობანი (x_n) და (y_n) . ამ მიმდევრობათა ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და შეფარდება განისაზღვრება სათანადოდ შემდეგი ტოლობებით:

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), (x_n) - (y_n) = (x_n - y_n), (x_n) \cdot (y_n) = (x_n y_n)$$

$$\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n} \right).$$

თუ $x_n = c$, მაშინ გვექნება:

$$c \pm (y_n) = (c \pm y_n), \quad c (y_n) = (c y_n), \quad \frac{c}{(y_n)} = \left(\frac{c}{y_n} \right).$$

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ (x_n) და (y_n) კრებადი მიმდევრობანია, მაშინ მიმდევრობათა ჯამი $(x_n + y_n)$ კრებადი და ჰეშმარიტია ტოლობა

$$\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n.$$

დამტკიცება. რადგანაც მიმდევრობანი კრებადი

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

მაშინ

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

სადაც α_n და β_n უსასრულოდ მცირეებია. განვიხილოთ ამ მიმდევრობათა ჯამი

$$x_n + y_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n),$$

ანუ

$$x_n + y_n = a + b + \delta_n,$$

სადაც δ_n უსასრულოდ მცირეა. ეს ტოლობა გვიჩვენებს

$$\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$$

სრულიად ასევე დამტკიცდება, რომ

$$\lim (x_n + y_n + \dots + z_n) = \lim x_n + \lim y_n + \dots + \lim z_n, \quad (1)$$

თუ თითოეული მიმდევრობა კრებადი.

თეორემა 2. თუ მიმდევრობანი (x_n) და (y_n) კრებადი, მაშინ კრებადი ამ მიმდევრობათა ნამრავლი $(x_n y_n)$ და ჰეშმარიტია ტოლობა

$$\lim (x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n.$$

მართლაც, პირობის თანახმად, (x_n) და (y_n) მიმდევრობანი კრებადი, ამის გამო შეგვიძლია განვიხილოთ ნამრავლი

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) (b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n),$$

საიდანაც

$$x_n y_n = ab + \delta_n,$$

სადაც δ_n უსასრულოდ მცირეა. აქედან ცხადია,

$$\lim (x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n.$$

ცხადია, თეორემა ჰეშმარიტია მაშინაც, როცა კრებად მიმდევრობათა რიცხვი ორზე მეტია:

$$\lim (x_n y_n \dots z_n) = \lim x_n \lim y_n \dots \lim z_n \quad (2)$$

განვიხილოთ $(c x_n)$ მიმდევრობა, სადაც (x_n) მიმდევრობა კრებადი. მაშინ

$$\lim (c x_n) = \lim c \cdot \lim x_n = c \lim x_n. \quad (3)$$

ამრიგად ჰეშმარიტია

შედეგი 1. კრებადი მიმდევრობის ყველა წევრთა მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ ამ მიმდევრობის ზღვრის ნიშნის გარეთ.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ (2) ტოლობის საფუძველზე

$$\lim x_n^k = (\lim x_n)^k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

ე. ი. ჰეშმარიტია

შედეგი 2. კრებადი მიმდევრობის მთელი დადებითი ხარისხის ზღვარი ტოლია მიმდევრობის ზღვრისა იმავე ხარისხში.

(1) და (3) ტოლობათა საფუძველზე ადვილად დავასკვნით: თუ (x_n) და (y_n) კრებადი მიმდევრობანია, მაშინ

$$\lim (x_n - y_n) = \lim (x_n + (-1) y_n) = \lim x_n + (-1) \lim y_n = \lim x_n - \lim y_n.$$

თეორემა 3. თუ მიმდევრობანი (x_n) და (y_n) კრებადი, $\lim y_n \neq 0$, მაშინ კრებადი ამ მიმდევრობათა შეფარდება $\left(\frac{x_n}{y_n} \right)$ და ჰეშმარიტია ტოლობა

$$\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n, \quad b \neq 0,$$

სადაც α_n და β_n უსასრულოდ მცირეებია.

განვიხილოთ სხვაობა

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b^2 + b\beta_n},$$

ანუ

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{\delta_n}{b^2 + b\beta_n}, \quad (5)$$

სადაც δ_n უსასრულოდ მცირეა.

(5) გამოსახულების მნიშვნელში $b^2 + b\beta_n$ შემოსაზღვრული, პირობის თანახმად, ნულისაგან განსხვავებული სიდიდეა. ამიტომ

$$\frac{\delta_n}{b^2 + b\beta_n} = \eta_n - \text{უსასრულოდ მცირეა, ე. ი.}$$

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \eta_n,$$

საიდანაც

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \eta_n,$$

ანუ

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \lim \frac{x_n}{y_n}. \quad (6)$$

ამით გამოთქმული თეორემა დამტკიცდა.

2. მნიშვნელოვანი უტოლობანი.

თეორემა 4. თუ ნატურალური რიცხვი $n > 1$, ხოლო რაიმე რიცხვი $a > -1$ და $a \neq 0$, მაშინ ჭეშმარიტია უტოლობა

$$(1 + a)^n > 1 + na. \quad (7)$$

ეს უტოლობა დავამტკიცოთ ინდუქციის მეთოდით.

(7) უტოლობა ჭეშმარიტია $n=2$ -სათვის. მართლაც,

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2.$$

თუ ამ უტოლობის მარჯვენა მხარეში დადებით a^2 -ს უკუვაგდებთ, მარჯვენა მხარე შემცირდება, მივიღებთ

$$(1 + a)^2 > 1 + 2a.$$

ახლა დავუშვათ, რომ (7) უტოლობა ჭეშმარიტია ნებისმიერი $n=k$ ნატურალური რიცხვისათვის და ვაჩვენოთ, რომ იგი ჭეშმარიტია $(k+1)$ -სათვის. მართლაც, თუ ჭეშმარიტია უტოლობა

$$(1 + a)^k > 1 + ka,$$

ამ უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $(1+a)$ -ზე, გვექნება

$$(1 + a)^{k+1} > (1 + ka)(1 + a) = 1 + (k+1)a + ka^2.$$

მაგრამ $ka^2 > 0$ და მისი უკუგდებით მიღებული უტოლობა გაძლიერდება, მივიღებთ

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k+1)a,$$

რაც გამოთქმულ თეორემას ამტკიცებს. (7) უტოლობას ბერნულის უტოლობა ეწოდება.

შედეგი 1. თუ $b \geq 1$, მაშინ n ნატურალური რიცხვისათვის, $n > 1$, ჭეშმარიტია უტოლობა

$$\sqrt[n]{b} - 1 < \frac{b-1}{n}. \quad (8)$$

მართლაც, ბერნულის უტოლობიდან მივიღებთ

$$b = [1 + (\sqrt[n]{b} - 1)]^n > 1 + n(\sqrt[n]{b} - 1),$$

ანუ

$$n(\sqrt[n]{b} - 1) < b - 1,$$

საიდანაც მიიღება (8) უტოლობა.

თეორემა 5. თუ a დადებითი რიცხვია, ხოლო ნატურალური რიცხვი $n > 2$, მაშინ ჭეშმარიტია უტოლობა

$$(1 + a)^n > 1 + na + \frac{n^2}{4} a^2. \quad (9)$$

თეორემა დავამტკიცოთ ინდუქციის მეთოდით:

(9) უტოლობა ჭეშმარიტია $n=3$ -სათვის. მართლაც,

$$(1 + a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3 > 1 + 3a + 3a^2 > 1 + 3a + \frac{3^2}{4} a^2.$$

ახლა, ვთქვათ, (9) უტოლობა ჭეშმარიტია ნებისმიერი $n=k$ -სთვის და ვაჩვენოთ, რომ იგი ჭეშმარიტია $(k+1)$ -სთვის.

მართლაც, უტოლობის ორივე ნაწილი, რომელიც მართებულია k -სათვის

$$(1 + a)^k > 1 + ka + \frac{k^2}{4} a^2,$$

გავამრავლოთ $(1+a)$ -ზე, მივიღებთ

$$(1+a)^{k+1} > \left(1 + ka + \frac{k^2}{4}a^2\right)(1+a) = \\ = 1 + ka + \frac{k^2}{4}a^2 + a + ka^2 + \frac{k^2}{4}a^3.$$

თუ $\frac{k^2}{4}a^3$ -ს უკუვაგდებთ, უტოლობა გაძლიერდება:

$$(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)a + \frac{k^2+4k}{4}a^2. \quad (10)$$

მაგრამ

$$k^2 + 4k > (k+1)^2.$$

თუ (10) უტოლობაში k^2+4k -ს შევცვლით $(k+1)^2$ -ით, უტოლობა გაძლიერდება და მივიღებთ (9) უტოლობას. თეორემა დამტკიცდა. (9) უტოლობას ბერნულის განზოგადებული უტოლობა ეწოდება.

შედეგი. თუ $n \geq 2$ და $a > 0$, მაშინ

$$(1+a)^n > \frac{a^2}{4}n^2.$$

3. **შტოლცის თეორემა.** ზოგჯერ, როდესაც გვაქვს მიმდევრობათა შეფარდების ზღვარი, $\lim \frac{x_n}{y_n}$, სადაც $\lim x_n = \infty$, $\lim y_n = \infty$, სასარგებლოა გამოვიყენოთ თეორემა, რომელიც შტოლცს ეკუთვნის.

თეორემა 6. ვთქვათ, მოცემულია ორი მიმდევრობა (x_n) , (y_n) . ამასთან (y_n) მიმდევრობა ზრდადია, $y_n < y_{n+1}$, $\lim y_n = +\infty$ და

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A, \quad (11)$$

სადაც A სასრულია, მაშინ არსებობს $\lim \frac{x_n}{y_n}$ და ქეშმარიტია ტოლობა

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = A. \quad (12)$$

დამტკიცება. პირობის თანახმად არსებობს (11) ზღვარი. ეს ნიშნავს $\forall \varepsilon > 0 \exists N$, რომ ყოველი $m > N$ -ისათვის

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_m - x_{m-1}}{y_m - y_{m-1}} < A + \frac{\varepsilon}{2},$$

ანუ

$$(y_m - y_{m-1}) \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) < x_m - x_{m-1} < (y_m - y_{m-1}) \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right), \quad (13)$$

როდესაც $m > N$.

m -ს მივცეთ მნიშვნელობანი: $m+1$, $m+2$, ..., n , მაშინ (13) უტოლობიდან მივიღებთ:

$$(y_{m+1} - y_m) \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) < x_{m+1} - x_m < (y_{m+1} - y_m) \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

$$(y_{m+2} - y_{m+1}) \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) < x_{m+2} - x_{m+1} < (y_{m+2} - y_{m+1}) \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

$$(y_n - y_{n-1}) \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) < x_n - x_{n-1} < (y_n - y_{n-1}) \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ

$$(y_n - y_m) \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) < x_n - x_m < (y_n - y_m) \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

საიდანაც

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_m}{y_n - y_m} < A + \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > m > N. \quad (14)$$

აღვილი შესამოწმებელია შემდეგი ტოლობის ჰეშმარიტება

$$\frac{x_n}{y_n} - A = \frac{x_m - A y_m}{y_n} + \left(1 - \frac{y_m}{y_n} \right) \left(\frac{x_n - x_m}{y_n - y_m} - A \right),$$

საიდანაც

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - A \right| \leq \left| \frac{x_m - A y_m}{y_n} \right| + \left| 1 - \frac{y_m}{y_n} \right| \left| \frac{x_n - x_m}{y_n - y_m} - A \right|. \quad (15)$$

რადგანაც $y_m < y_n$, $y_n \rightarrow +\infty$, მაშინ $\left| 1 - \frac{y_m}{y_n} \right| < 1$. ამის გამო

(15)-დან მივიღებთ

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - A \right| \leq \left| \frac{x_m - A y_m}{y_n} \right| + \left| \frac{x_n - x_m}{y_n - y_m} - A \right|. \quad (16)$$

ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე შესაყრები (14) დამოკიდებულია ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$, როდესაც $n > m > N$. პირველი შესაყრებიც ნაკლები იქნება $\frac{\varepsilon}{2}$, რადგანაც $y_n \rightarrow +\infty$. ვთქვათ, ამ შემთხვევაში $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N}$, რომ $n > N_1$ -სათვის

$$\left| \frac{x_m - A y_m}{y_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

თუ ავიღებთ, $N_1 > N$, მაშინ ცხადია,

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - A \right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N_1.$$

რაც ამტკიცებს შტოლცის თეორემას¹.

შტოლცის თეორემის გამოყენებით დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა (კოშის თეორემა):

თეორემა 7. თუ (a_n) მიმდევრობას აქვს ზღვარი (სასრული ან უსასრულო), მაშინ იგივე ზღვარი აქვს (b_n) მიმდევრობას,

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

მართლაც, შტოლცის თეორემაში მივიღოთ

$$x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$y_n = n,$$

მაშინ

$$\lim b_n = \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{a_n}{1} = \lim a_n.$$

მაგალითად, ვიცით $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, მაშინ,

$$\lim \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{1} = 1.$$

მიმდევრობებზე ალგებრულ მოქმედებათა შედეგად მივიღებთ მიმდევრობებს, სადაც ზღვარზე გადასვლის შემდეგ გვექნება განუსაზღვრელობანი

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty.$$

¹ Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, М.—Л., 1948 г., стр. 81.

ცხადია, ამ სიმბოლოებს არავითარი რიცხვითი აზრი არა აქვს: თითოეული მხოლოდ ახასიათებს სათანადო მოქმედებას. მაგალითად, უსასრულოდ მცირეთა შეფარდება $\frac{0}{0}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ სათანადო მოქმედებათა შედეგად გამოვთვლით ასეთ მიმდევრობათა შეფარდების ზღვარს, ამ მოქმედებას $\frac{0}{0}$ განუსაზღვრელობის გახსნა ეწოდება.

4. მაგალითები

1) გამოვთვალოთ

$$\lim \left(\frac{3}{n^2 + 1} + \frac{15n}{3n + 1} - \frac{4n^2 - 3n + 2}{1 - 5n - 2n^2} \right). \quad (17)$$

რომ გამოვიყენოთ თეორემა მიმდევრობათა ჯამის ზღვრის შესახებ, ჯერ უნდა გამოვარკვიოთ, აქვს თუ არა თითოეულ შესაყრებს ზღვარი. (17) გამოსახულების პირველი შესაყრები მოგვცემს:

$$\lim \frac{3}{n^2 + 1} = 3 \lim \frac{1}{n^2 + 1} = 3 \cdot 0 = 0. \quad (18)$$

ავიღოთ (17)-ს მეორე შესაყრები:

$$\lim \frac{15n}{3n + 1}. \quad (19)$$

აქ მიმდევრობათა შეფარდების ზღვრის შესახებ თეორემას ვერ გამოვიყენებთ, რადგანაც, მართალია, მნიშვნელის ზღვარი ნულისაგან განსხვავდება, მაგრამ გვაქვს $\frac{\infty}{\infty}$. ამ შემთხვევაში მრიცხველში და მნიშვნელში

ისეთი გარდაქმნა მოვახდინოთ, რომ ნაცვლად უსასრულოდ დიდებზე მოქმედებისა, მივიღოთ უსასრულო მცირეებზე მოქმედება. ამისათვის შევცვალოთ $n = \frac{1}{\alpha_n}$, სადაც $\alpha_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n}{3n + 1} = \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{15 \frac{1}{\alpha_n}}{3 \cdot \frac{1}{\alpha_n} + 1} = \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{15}{3 + \alpha_n}.$$

აქ, უკვე შეგვიძლია გამოვიყენოთ თეორემა შეფარდების ზღვრის შესახებ. გვექნება

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{15}{3 + \alpha_n} = \frac{\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} 15}{\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} (3 + \alpha_n)} = \frac{\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} 15}{\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} 3 + \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \alpha_n} = \frac{15}{3 + 0} = 5. \quad (20)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ შეიძლება (19) გამოსახულებაში მრიცხველი და მნიშვნელი გავყუდოთ n -ზე, მივიღებთ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15}{3 + \frac{1}{n}}.$$

აქ კი გამოვიყენოთ თეორემა წილადის ზღვრის შესახებ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 15}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{15}{3+0} = 5.$$

შემდეგში, როდესაც მიმდევრობათა შეფარდება იძლევა $\frac{\infty}{\infty}$ გამოსახულებას და n ცვლადის მიმართ ალგებრული ფუნქციებია, მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ n -ის იმ უდიდეს ხარისხზე, რომელიც მრიცხველსა და მნიშვნელში გვაქვს. სწორედ ასეთი გამოსახულება გვაქვს (17) მაგალითის მესამე შესაყრებში. აქ n -ის უდიდესი ხარისხია 2. ამიტომ მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ n^2 -ზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 6}{1 - 5n - 2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{n} + \frac{6}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - \frac{5}{n} - 2} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 2} = \frac{4 - 0 + 0}{0 - 0 - 2} = -2. \end{aligned} \quad (21)$$

ამგვარად, (17) გამოსახულება (18), (20) და (21)-ს საფუძველზე მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^2+1} + \frac{15n}{3n+1} - \frac{4n^2-3n+2}{1-5n-2n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2+1} + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n}{3n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-3n+2}{1-5n-2n^2} = 0 + 5 - (-2) = 7. \end{aligned}$$

2) გამოვთვალოთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n).$$

აქ ვერ გამოვიყენებთ თეორემას მიმდევრობათა ჯამის შესახებ, რადგანაც არც ერთ შესაყრებს ზღვარი არ აქვს. მაგრამ, ადვილი შესამჩნევია, $n \rightarrow \infty$, მაშინ $-n \rightarrow +\infty$ და თითოეული შესაყრები $+\infty$ -აა. ამიტომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = \infty.$$

3) გამოვთვალოთ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+1} - n).$$

აქ გვაქვს $\infty - \infty$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $n = \frac{1}{\alpha_n}$, მაშინ $n \rightarrow +\infty$, გვაძლევს $\alpha_n \rightarrow 0$. მივიღებთ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) &= \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha_n^2} + 1} - \frac{1}{\alpha_n} \right) = \\ &= \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1 + \alpha_n^2}{\alpha_n^2}} - \frac{1}{\alpha_n} \right) = \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \alpha_n^2} - 1}{\alpha_n} = \\ &= \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \alpha_n^2})^2 - 1}{\alpha_n (\sqrt{1 + \alpha_n^2} + 1)} = \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n (\sqrt{1 + \alpha_n^2} + 1)} = \\ &= \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{\alpha_n}{\sqrt{1 + \alpha_n^2} + 1} = 0. \end{aligned}$$

უკანასკნელ გამოსახულებაში, ჯერ შევკვეცეთ α_n -ზე ($\alpha_n \rightarrow 0$, $\alpha_n \neq 0$!), შემდეგ კი გამოვიყენოთ თეორემა მიმდევრობათა შეფარდების ზღვრის შესახებ.

უკანასკნელი მაგალითი შეიძლება გამოგვეთვალოთ ირაციონალობის მნიშვნელში გადატანითაც:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+1} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0.$$

4) გამოვთვალოთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 5n + 7}.$$

მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ n^2 -ზე. გვაქვს

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 5n + 7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2} \right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 6 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 7 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{6 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{3 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0} = 2. \end{aligned}$$

5) გამოვთვალოთ

$$\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

ცხადია,

$$\begin{aligned} \lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n+5} &= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^5 \right] = \\ &= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6/3} \right]^3 \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^5 = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} \right]^2 \times \\ &\times \left[\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right) \right]^5 = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} \right]^2 \cdot 1. \end{aligned}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $3n = m$, $(n \rightarrow \infty) \Rightarrow (m \rightarrow \infty)$. ამიტომ გვექნება

$$\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} = \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

ამრიგად,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n+5} = e^2.$$

6) გამოვთვალოთ

$$\lim z_n = \lim \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

დავუშვათ,

$$x_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k, \quad y_n = n^{k+1},$$

მაშინ შტოლცის თეორემის თანახმად

$$\lim z_n = \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}.$$

მაგრამ

$$(n-1)^{k+1} = n^{k+1} - (k+1)n^k + \dots + (-1)^{k+1}.$$

ასე რომ

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (k+1)n^k - \dots - (-1)^{k+1}.$$

ამის გამო

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{(k+1)n^k - \dots - (-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

7) გამოვთვალოთ

$$\lim x_n = \lim \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}, \quad a > 0.$$

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ (x_n) მიმდევრობა ზრდადია.

მართლაც,

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{x_1 + a}, \dots, \quad x_n = \sqrt{x_{n-1} + a}.$$

საიდანაც

$$(x_1^2 = a) \wedge (x_2^2 = a + x_1) \Rightarrow x_2 > x_1;$$

$$((x_2^2 = x_2 + \sqrt{a}) \wedge (x_3^2 = x_2 + \sqrt{a})) \Rightarrow x_3 > x_2 \text{ და ა.შ.}$$

ამგვარად,

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

ტოლობიდან $x_n^2 = x_{n-1} + a$ გამოდინარეობს, რომ (x_n) და $(x_{n-1} + a)$ მიმდევრობანი ერთდროულად კრებადია ან განშლადი.

ვაჩვენოთ, (x_n) მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია.

რადგანაც (x_n) მიმდევრობა ზრდადია, მაშინ $x_n \leq a$ ან $x_n > a$. თუ $x_n \leq a$, მაშინ (x_n) მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა უკვე დამტკიცებულია. ვთქვათ, $x_n > a$. მაშინ ტოლობიდან $x_n^2 = a + x_{n-1}$ გამოდინარეობს

$$x_n^2 < a + x_n < x_n + x_n.$$

საიდანაც მივიღებთ $x_n < 2$. რადგანაც (x_n) მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრულია, მას აქვს ზღვარი. ვთქვათ, $\lim x_n = b$. მაშინ $\lim x_n^2 = \lim (x_{n-1} + a)$, საიდანაც მივიღებთ $b^2 = b + a$. აქედან კი

$$b = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2},$$

რადგანაც $a > 0$. ამრიგად,

$$\lim \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

§ 7. ფუნქციის ზღვარი. ფუნქციის ზღვრის ზოგადი თვისებები

1. ფუნქციის ზღვარი. ვთქვათ, X სიმრავლეში განსაზღვრულია $f: X \rightarrow Y$ ფუნქცია, $X \in R$, $Y \in R$. ავიღოთ a წერტილი, $a \in X$. მოვიგონოთ a წერტილის მიდამოს განსაზღვრა. ნებისმიერი ინტერვალი $[c, d]$, რომელიც a წერტილს შეიცავს, არის a წერტილის მიდამო. a წერტილის რაიმე მიდამო $u(a)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ ამ მიდამოს a

არ ეკუთვნის, მაშინ მას a წერტილის განხვლეტილი მიდამო ეწოდება და $\dot{u}(a)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ავიღოთ რაიმე $\delta > 0$ რიცხვი. a წერტილის δ მიდამო ეწოდება ინტერვალს $]a - \delta, a + \delta[$, რაც $u(a, \delta)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. a წერტილის განხვლეტილი δ მიდამო კი $\dot{u}(a, \delta)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. a წერტილის δ მიდამოს a წერტილის δ წრიულ მიდამოსაც უწოდებენ.

სრულიად ასევე V სიმრავლეში განისაზღვრება b წერტილის ε მიდამო, სადაც ε რაიმე დადებითი რიცხვია. b წერტილის ε მიდამო $v(b, \varepsilon)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილის განხვლეტილ რაიმე მიდამოში, $\dot{u}(a)$. ამ მიდამოს წერტილებისაგან შევადგინოთ (x_n) , რომელიც მიისწრაფვის a წერტილისაკენ. ამ x_n მნიშვნელობებისათვის გამოვთვალოთ $f(x_n)$. მივიღებთ $(f(x_n))$ მიმდევრობას (ნახ. 33). ამ $(f(x_n))$ მიმდევრობას შეიძლება ჰქონდეს ან შეიძლება არ ჰქონდეს ზღვარი. ვთქვათ, $(f(x_n))$ მიმდევრობას აქვს ზღვარი და ეს ზღვარია b რიცხვი.

b რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში ან $f(x)$ ფუნქციის ზღვრული მნიშვნელობა, როდესაც x მიისწრაფვის a წერტილისაკენ ($x \rightarrow a$), თუ ყოველი (x_n) მიმდევრობისათვის, რომელიც მიისწრაფვის a წერტილისაკენ, ისე რომ ყველა $x_n \neq a$, მიმდევრობა $(f(x_n))$ მიისწრაფვის b რიცხვისაკენ.

რიცხვი b რომ არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში, სიმბოლურად ასე აღინიშნება.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

ამგვარად $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში ასე განისაზღვრება:

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = b := (\forall x_n \rightarrow a \mid x_n \neq a) \Rightarrow (f(x_n) \rightarrow b). \quad (1)$$

ფუნქციის (1) განსაზღვრა ეკუთვნის ჰაინეს¹.

ფუნქციის ზღვრის ჰაინეს განსაზღვრიდან ადვილად წარმოვიდგენთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში მხოლოდ ერთი ზღვარი აქვს. ეს გა-

¹ ჰ. ჰაინეს (1821—1881), გერმანელი მათემატიკოსი.

მომდინარეობს იქიდან, რომ $f(x_n)$ მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარი აქვს.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

1) ფუნქციას $f(x) = c$ აქვს ზღვარი X ღერძის ყოველ წერტილში. მართლაც, ნებისმიერი წერტილთა მიმდევრობისათვის $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ რომელიც მიისწრაფვის რომელიმე a წერტილისაკენ, $f(x) = c$ ფუნქციიდან მივიღებთ მიმდევრობას: $c, c, \dots, c, \dots$, რომელიც მიისწრაფვის c -კენ. მაშასადამე, $f(x) = c$ ფუნქციის ზღვარი ნებისმიერ a წერტილში c -ს ტოლია. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$.

2) ფუნქციას $f(x) = x$ აქვს ზღვარი X ღერძის ყოველ a წერტილში და ეს ზღვარი a -ს ტოლია. მართლაც, ამ შემთხვევაში არგუმენტის მნიშვნელობათა მიმდევრობა, რომელიც რომელიმე a წერტილისაკენ მიისწრაფვის, ტოლია ფუნქციის მნიშვნელობათა მიმდევრობისა და, მაშასადამე, $f(x) = x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა მიმდევრობის ზღვარი ტოლია a რიცხვისა.

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

3) დირიხლეს ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობანი X ღერძის რაციონალურ წერტილებში ერთეულის ტოლია, ხოლო ირაციონალურ წერტილებში — ნულის ტოლია, არ აქვს ზღვარი X ღერძის არც ერთ წერტილში. მართლაც, X ღერძის რომელიმე a წერტილისაკენ კრებადი (x_n) მიმდევრობის შესაბამისი ფუნქციის მნიშვნელობათა $(f(x_n))$ მიმდევრობის ელემენტებია მხოლოდ 1 და 0. და ამ მიმდევრობას ზღვარი არ აქვს; თუ $b = 1$, $\varepsilon < 1$, მაშინ $|f(x_n) - 1| = |0 - 1| < \varepsilon$ და $b = 0$, $|f(x_n) - 0| = |1 - 0| < \varepsilon$ არ შესრულდება.

$f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში შემდეგნაირად განისაზღვრება.

b რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ ყველა x -სათვის, რომელიც $0 < |x - a| < \delta$, სრულდება უტოლობა

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

უ. ი.

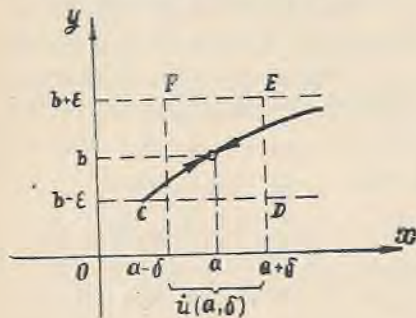
$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = b := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon). \quad (2)$$

შევნიშნოთ, რომ δ დამოკიდებულია როგორც a რიცხვზე ისე ε რიცხვზე. ამასთანავე, საზოგადოდ, δ მცირდება ε -თან ერთად.

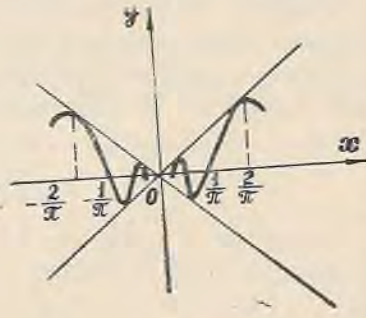
1) ჯ. კომლარე

ფუნქციის ზღვრის ეს განსაზღვრა ეკუთვნის კოშს¹.

(2) განსაზღვრის საფუძველზე $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში გეომეტრიულად მოცემულია 34-ე ნახაზზე. Oxy კოორდინატთა სისტემაში აგებულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. a წერტილში $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული არაა, ამიტომ ეს წერტილი თეთრი წრითაა აღნიშნული. ავიღოთ რაიმე დადებითი ε რიცხვი და ავაგოთ წრფეები $y=b-\varepsilon$, $y=b+\varepsilon$. ალებულ a წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი არის b , თუ როგორც გინდ იყოს ε დადებითი რიცხვი, ყოველთვის არსებობს a წერტილის ისეთი გაჩხვლეტილი მიდამო $\delta(a, \delta)$, რომ ამ მიდამოს ყველა x წერტილისათვის $y=f(x)$ წირის ყველა წერტილი მოთავსდება $y=b-\varepsilon$ და $y=b+\varepsilon$ წრფეებს შორის.



ნახ. 34



ნახ. 35

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვარკვეოთ აქვს თუ არა ზღვარი ფუნქციას $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, რომელიც განსაზღვრულია $X = \{x | -\infty < x < 0, 0 < x < +\infty\}$ სიმრავლეში, როცა $x \rightarrow 0$ (ნახ. 35).

ნახაზის მიხედვით ადვილი წარმოსადგენია, რომ ალებული ფუნქციის ზღვარი, თუ არსებობს, არის 0. მართლაც მოცემული $\varepsilon > 0$, ავიღოთ $\delta = \varepsilon$. გვექნება

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon.$$

ამგვარად,

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ფუნქცია განსაზღვრული არაა $x=0$ წერტილში, მაგრამ 0 წერტილში ალებულ ფუნქციას ზღვარი აქვს.

¹ კოშის ტენ ლუი კოში (1789—1857), ფრანგი მათემატიკოსი.

მოვიფიქროთ (x_n) მიმდევრობის ზღვრის შემდეგი განსაზღვრა: (x_n) მიმდევრობის ზღვარი არის a , თუ a წერტილის ნებისმიერ მიდამოში $[c, d]$ -ში მოთავსდება ყველა x_n წერტილი, დაწყებული რომელიმე N -დან. ცხადია, N ნატურალური რიცხვი დამოკიდებულია c და d რიცხვებზე. ამ განსაზღვრის ანალოგიით ფუნქციის ზღვარი შემდეგნაირადაც განსაზღვრეთ:

რიცხვს b -ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი X სიმრავლის a წერტილში, თუ Y სიმრავლეში b წერტილის $v(b)$ ნებისმიერი მიდამოსათვის არსებობს a წერტილის ისეთი მიდამო $u(a)$ X სიმრავლეში, რომ ამ მიდამოს სახე $f: X \rightarrow Y$ ასახვით მოთავსდება b წერტილის $v(b)$ მიდამოში.

ამრიგად,

$$\lim_{x \rightarrow a \in X} f(x) = b := \forall v(b) \exists u(a) ((f: X \rightarrow Y) \Rightarrow f(u(a)) \subset v(b)). \quad (3)$$

მივიღეთ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრა სამი სახით. ეს განსაზღვრები ურთიერთეკვივალენტურია. ამას ქვემოთ დავამტკიცებთ. ეს განსაზღვრები სხვადასხვა მიზნისათვის გამოიყენება. მაგალითად, ფუნქციის ზღვრის რიცხვითი შეფასებისათვის უფრო ხელსაყრელია, გამოვიყენოთ (1) განსაზღვრა. ზოლო ზოგადად ფუნქციის ზღვრის შეფასებისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ (2) განსაზღვრა. მაგრამ, თუ ფუნქციის ცნებას გამოვიყენებთ უფრო ზოგადად, უფრო ხელსაყრელია (3) განსაზღვრა.

მაგალითად, ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციას

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{როცა } x > 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0, \\ -1, & \text{როცა } x < 0 \end{cases}$$

არ აქვს ზღვარი $x=0$ წერტილში.

მართლაც, Y სიმრავლეში ავიღოთ ნებისმიერი რიცხვი b . ამ რიცხვისათვის მოინახება ისეთი მიდამო $v(b)$, რომ როგორი მცირეც არ უნდა იყოს a წერტილის გაჩხვლეტილი მიდამო $u(a)$, ყოველთვის არსებობს ერთი წერტილი მაინც ამ მიდამოში, რომ ამ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა არ მოთავსდება $v(b)$ მიდამოში. აქ საკმარისია, განვიხილოთ მიდამო

$$v(b) = \{y | |y - b| < \varepsilon\}, \text{ სადაც } b < -1, b = 0, b > 1.$$

შემდეგში ნაცვლად აღნიშვნებისა

$$\lim_{x \rightarrow a \in X} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x)$$

ვიხმართ აღნიშვნას $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, სადაც ვიგულისხმებთ $f(x)$ ფუნქციას განსა-

ზღვრულია a წერტილის გარსგელეტილ $U(a)$ მიდამოში და
 $x \rightarrow a, x \neq a \in X$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრა კოშის აზრით და ჰაინეს აზრით ურთიერთგვერდონტურია. რაც შეეხება (3) განსაზღვრას, აღვილი მისახვედრია, რომ იგი კოშის აზრით ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრის ეკვივალენტურია.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას ზღვარი აქვს კოშის აზრით. ვაჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას ზღვარი აქვს ჰაინეს აზრითაც.

რადგანაც $f(x)$ ფუნქციას ზღვარი აქვს a წერტილში კოშის აზრით, გვექნება

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (x \in]a - \delta, a + \delta[, x \neq a) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

ინტერვალი $]a - \delta, a + \delta[$ ცარიელი არაა. ავარჩიოთ N ნატურალური რიცხვი ისე, რომ

$$\forall n > N \Rightarrow (x_n \in]a - \delta, a + \delta[).$$

მაგრამ, მაშინ

$$\forall n > N \Rightarrow |f(x_n) - b| < \varepsilon.$$

ეს ნიშნავს ($f(x_n)$) მიმდევრობა მიისწრაფვის b რიცხვისაკენ, როცა (x_n) მიმდევრობა მიისწრაფვის a -სკენ, $x_n \neq a$.

ამგვარად, თუ $f(x)$ ფუნქციას ზღვარი აქვს a წერტილში კოშის აზრით, მაშინ ($f(x)$ ფუნქციას ზღვარი ექნება a წერტილში ჰაინეს აზრითაც.

ახლა, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში ზღვარი აქვს ჰაინეს აზრით. ვაჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი ექნება a წერტილში კოშის აზრითაც.

დავუშვათ, $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში არ აქვს ზღვარი კოშის აზრით. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ერთი მაინც ისეთი $\varepsilon > 0$, რომელიც ε_0 -ით აღენიშნოთ, რომლისთვისაც სათანადო δ -ს არჩევა არ შეიძლება. ანუ ნებისმიერი δ -სათვის x -ებს შორის, რომელიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $0 < |x - a| < \delta$, უნდა მოიძებნოს ისეთი ერთი მაინც x_δ რიცხვი, რომ $|f(x_\delta) - b| \geq \varepsilon_0$. რადგანაც δ ნებისმიერია, შეგვიძლია ავიღოთ

$$\delta_k = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

δ_k -ს შესაბამისი x_{δ_k} წერტილი x_k -ასოთი აღენიშნოთ. გვექნება:

$$0 < |x_k - a| < \frac{1}{k}, \quad x_k \neq a,$$

$$|f(x_k) - b| \geq \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ანუ ამ (x_k) მიმდევრობისათვის, რომელიც მიისწრაფვის a წერტილისაკენ. ($f(x_k)$) მიმდევრობა არ მიისწრაფვის b რიცხვისაკენ.

ამგვარად, იმის დაშვებამ, რომ $f(x)$ ფუნქციას ზღვარი აქვს a წერტილში ჰაინეს აზრით და ზღვარი არ აქვს იმავე წერტილში კოშის აზრით, მიგვიყვანა წინააღმდეგობამდე.

მაშასადამე, თუ $f(x)$ ფუნქციას ზღვარი აქვს a წერტილში ჰაინეს აზრით, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ზღვარი ექნება იმავე a წერტილში კოშის აზრითაც.

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია

x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც განსხვავებულია 2-საგან. რადგანაც, $x \rightarrow 2$ -თვის $f(x)$ -ის მნიშვნელობა $x=2$ -ზე მხედველობაში არ მიიღება, გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4).$$

ფუნქციები $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ და $\varphi(x) = x^2 + 2x + 4$ სხვადასხვაა,

$f(x)$ განსაზღვრულია $\{x | -\infty < x < 0 \vee 0 < x < +\infty\}$ სიმრავლეში, როცა φ განსაზღვრულია ყველგან $-\{x\} - \infty < x < +\infty\}$

ამ ფუნქციათა ზღვარები კი ტოლია.

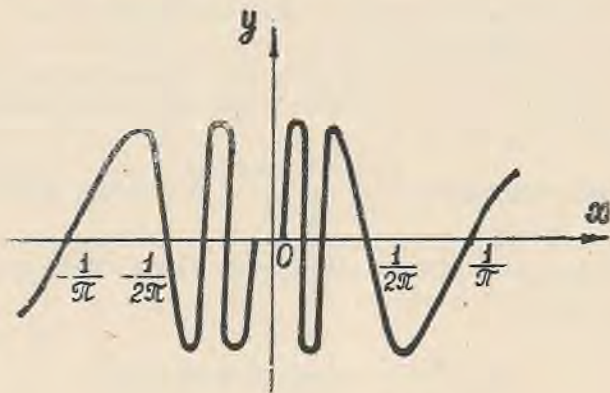
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x).$$

ამგვარად, რომ გამოვთვალოთ $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x \rightarrow 0$, საკმარისია, გამოვთვალოთ $\varphi(x) = x^2 + 2x + 4$ -ის ზღვარი, როცა $x \rightarrow 2$.

ზემოთ განხილული ფუნქციის ზღვრის ორივე განსაზღვრის ეკვივალენტურობით აღვიღად დავასკვნით, რომ, თუ თეორემა დამტკიცებულია ზღვრის შესახებ ჰაინეს აზრით, ეს თეორემა მართებული იქნება კოშის აზრითაც.

განვიხილოთ კიდევ ფუნქცია: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ (ნახ. 33). ეს ფუნქცია ყველგან განსაზღვრულია გარდა $x=0$. ე. ი. $f(x)$ განსაზღვრულია $x=0$ -ის მახლობლობაში. გამოირიცხებულია $x=0$ წერტილი. ამ ფუნქციას არ აქვს

ზღვარი, რადგანაც, თუ ავიღებთ $x_k = \frac{2}{\pi(2k+1)}$, $k \in \mathbb{Z}$, მიმდევრობას, ცხადია, $x_k \rightarrow 0$, მაგრამ $f(x_k) = (-1)^k$.



ნახ. 36

2. $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x \rightarrow \pm\infty$. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $\{x | k < x < +\infty\}$ სიმრავლეში, სადაც k რაიმე რიცხვია.

თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $M > 0$, რომ

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

უტოლობა სრულდება ყველა x -სათვის, $x > M$, მაშინ ვიტყვით $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი არის b , როცა x მიისწრაფვის პლუს უსასრულობისაკენ და ვწერთ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b. \quad (4)$$

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ეს განსაზღვრა ეკვივალენტურია შემდეგი განსაზღვრის: b რიცხვი $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი არის, როცა $x \rightarrow +\infty$, თუ ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისათვის, $x_n \rightarrow +\infty$, მიმდევრობა $(f(x_n))$ მიისწრაფვის b რიცხვისაკენ,

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} f(x_n) = b$$

სრულიად ასევე განსაზღვრება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x \rightarrow -\infty$.

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $\{x | -\infty < x < k\}$ სიმრავლეში, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი არის b , როცა $x \rightarrow -\infty$, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $M > 0$ რიცხვი, რომ უტოლობა

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

სრულდება ყოველი x -სათვის, $x < -M$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

ან ასე: $f(x)$ ფუნქციის ფუნქციის ზღვარი არის b , როცა $x \rightarrow -\infty$, თუ ნებისმიერი მიმდევრობისათვის (x_n) , $x_n \rightarrow -\infty$, მიმდევრობა $(f(x_n))$ მიისწრაფვის b რიცხვისაკენ.

ახლა ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყველა x -სათვის, $|x| > k$ სადაც k რაიმე დადებითი რიცხვია. ვიტყვით, რომ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b,$$

თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის არსებობს ისეთი $M > 0$, რომ $|x| > M$ -სათვის სრულდება უტოლობა

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

ან ასე: თუ ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისათვის, $x_n \rightarrow \infty$ მიმდევრობა $(f(x_n))$ მიისწრაფვის b რიცხვისაკენ.

საზოგადოდ, სიმბოლოებს $+\infty, -\infty, \infty$ უწოდებენ უსასრულო რიცხვებს. ასეთ შემთხვევაში ჩვეულებრივ რიცხვებს სასრულო რიცხვებს უწოდებენ.

როდესაც a სასრული რიცხვია, მისთვის განსაზღვრული გვაქვს მიდამო, გაჩვენებული მიდამო. თუ a უსასრულო რიცხვია, მაგალითად, $+\infty$, მაშინ შევთანხმდეთ, რომ a წერტილის მიდამოა ყველა იმ x წერტილთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $x > M$, სადაც M ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. ასევე, $-\infty$ ის მიდამოდ ვივულისხმეთ x წერტილთა ისეთი სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $x < -M$, სადაც M ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. საერთოდ ∞ -ის მიდამოდ ვივულისხმეთ ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x| > M$, სადაც M ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

ქვემოთ შევისწავლით $f(x)$ ფუნქციის თვისებებს, რომელსაც ზღვარი აქვს $x \rightarrow a$, სადაც a რიცხვია ან $+\infty, -\infty, \infty$. ასეთივე აზრით განვიხილავთ a წერტილის მიდამოს, სადაც a რიცხვია ან $+\infty, -\infty, \infty$.

3. ზღვრის მქონე ფუნქციის თვისებები. განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში და აქვს ზღვარი, როდესაც $x \rightarrow a$. დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. თუ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, სადაც b სასრული რიცხ-
ვია, მაშინ a წერტილის რაიმე $\dot{u}(a, \delta)$ მიდამოში

$f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ე. ი.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \exists \dot{u}(a, \delta) \wedge \exists M > 0 (\forall x \in \dot{u}(a, \delta) \Rightarrow (f(x)) < M). \quad (5)$$

მართლაც, თეორემის პირობიდან

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b : = \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall x \in \dot{u}(a, \delta) \Rightarrow (f(x) - b) < \varepsilon). \quad (6)$$

ავიღოთ $\varepsilon = 1$, მაშინ (6) დამოკიდებულებიდან მივიღებთ

$$|f(x) - b| < 1.$$

მაგრამ უტოლობათა თვისების გამო გვექნება

$$|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b| < 1, \quad x \in \dot{u}(a, \delta).$$

საიდანაც

$$\forall x \in \dot{u}(a, \delta) \Rightarrow |f(x)| < 1 + |b|.$$

თუ ავიღებთ $M = 1 + |b|$, მაშინ (5) პირობა შესრულებული იქნება, რაც თეორემას ამტკიცებს.

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში აქვს
ზღვარი $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ და $b \neq 0$, მაშინ მოიძებნება a

წერტილის ისეთი $\dot{u}(a, b)$ მიდამო, რომელშიაც
 $f(x)$ ფუნქციას ექნება b რიცხვის ნიშანი.

მართლაც, ავიღოთ $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$, მაშინ (6) პირობა მოგვცემს

$$\forall x \in \dot{u}(a, \delta) \Rightarrow |f(x)| - |b| \leq |f(x) - b| < \frac{|b|}{2},$$

საიდანაც

$$b - \frac{|b|}{2} < f(x) < b + \frac{|b|}{2}. \quad (7)$$

თუ $b > 0$, მაშინ (7) უტოლობიდან მივიღებთ $\forall x \in \dot{u}(a, \delta)$ -თვის

$$b - \frac{|b|}{2} = \frac{b}{2} < f(x). \quad (8)$$

თუ $b < 0$, მაშინ $\forall x \in \dot{u}(a, \delta)$ -თვის

$$f(x) < b + \frac{|b|}{2} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2},$$

ანუ

$$\forall x \in \dot{u}(a, \delta) \Rightarrow f(x) < \frac{b}{2}. \quad (9)$$

(8) და (9) უტოლობანი ამტკიცებენ გამოთქმულ თეორემას.

1-ლი და მე-2 თეორემების დამტკიცება შეიძლებოდა ასე არ ჩაგვე-
ტარებინა. შეგვეძლო გვესარგებლა მე-4 პარაგრაფის 1-ლი და მე-2 თეო-
რემით და უფრო ადვილად დავგვემტკიცებინა აღნიშნული თეორემები.
ამის შესრულებას გვითხველს ვანდობთ.

მე-4 პარაგრაფში მიმდევრობათა შესახებ დამტკიცებული თეორემე-
ბის საფუძველზე ადვილი საჩვენებელია შემდეგი თეორემების მართებუ-
ლობა:

თეორემა 3. თუ

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$$

და რაიმე $\dot{u}(a, \delta)$ მიდამოში,

$$\forall x \in \dot{u}(a, \delta) \Rightarrow (f_1(x) \leq f_2(x)),$$

მაშინ

$$b_1 \leq b_2.$$

თეორემა 4. თუ ფუნქციები $f_1(x)$, $f_2(x)$ და $\varphi(x)$ გან-
საზღვრულია a წერტილის რაიმე $\dot{u}(a)$ მიდამოში
და ამ მიდამოში

$$f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x),$$

ამასთან

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b,$$

მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b.$$

4. ფუნქციის ზღვრის არსებობის პირობები. მე-3 პარაგრაფში დამ-
ტკიცებულია კოშის თეორემა მიმდევრობის კრებადობის შესახებ (მე-5
თეორემა). ამ თეორემის საფუძველზე ადვილი დასამტკიცებელია კოშის
შედეგი.

თეორემა 5. $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში. a წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε -სათვის არსებობდეს a წერტილის ისეთი $u(a, \delta)$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი x' და x'' წერტილებსათვის, $x' \neq a$, $x'' \neq a$, სრულდებოდეს უტოლობა

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

ზრდადი და კლებადი ფუნქციებისათვის მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 6. $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში. a წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი არსებობს, თუ $f(x)$ ფუნქცია არაა კლებადი $x < a$ -სათვის და შემოსაზღვრულია ზემოდან, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში აქვს ზღვარი.

$$\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = b.$$

თეორემა 7. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში $x < a$ -სათვის, არაა ზრდადი და შემოსაზღვრულია ქვემოდან, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში აქვს ზღვარი.

$$\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = b.$$

ამ თეორემათა დამტკიცება ადვილია, თუ ვისარგებლებთ ჰაინეს აზრით ზღვრის განსაზღვრით.

სრულიად ასევე განსაზღვრება ფუნქციის ზღვარი $x \rightarrow a$ და $x > a$ -სათვის და მართებულია მე-6 და მე-7 თეორემები a წერტილში, როდესაც $x \rightarrow a$ და $x > a$,

$$\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = b.$$

5. ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები. მე-6 თეორემაში უკვე შეგვხვდა ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები.

განვსაზღვროთ a წერტილის მარცხენა და მარჯვენა მიდამო.

ნებისმიერ $[a, a]$ ინტერვალს, სადაც $a < a$, ეწოდება a წერტილის მარცხენა მიდამო, ხოლო ნებისმიერ $[a, \beta]$ ინტერვალს, სადაც $a < \beta$, ეწოდება a წერტილის მარჯვენა მიდამო. a წერტილის მარცხენა მიდამო $u(a-0)$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო მარჯვენა

მიდამო $u(a+0)$ სიმბოლოთი. ბუნებრივია, $+\infty$ -ის მიდამოდ ჩავთვალოთ ინტერვალი $[N, +\infty]$, სადაც N ნებისმიერი სასრული რიცხვია. ასევე, $-\infty$ -ის მიდამოდ ჩავთვალოთ ინტერვალი $]-\infty, N]$, სადაც N ნებისმიერი სასრული რიცხვია. ცხადია, $[N, +\infty]$ ნახევრად უსასრულო ინტერვალი $+\infty$ -ის მარცხენა მიდამოა, ხოლო $]-\infty, N]$ ინტერვალი $-\infty$ -ის მარჯვენა მიდამოა. ადვილი შესამჩნევია, რომ a წერტილის მარცხენა და მარჯვენა δ მიდამო ასე უნდა განისაზღვროს:

$$u(a-0, \delta) := \{x \mid a-\delta < x < a\}, \quad u(a+0, \delta) := \{x \mid a < x < a+\delta\}.$$

ჩანაწერი $x \rightarrow a-0$ აღნიშნავს, რომ $x \rightarrow a$ ისე, რომ $x < a$. ასევე, $x \rightarrow a+0$ აღნიშნავს, $x \rightarrow a$ -კენ, ისე, რომ $x > a$.

ვთქვათ, $f(x)$ განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მარცხენა მიდამოში. მაშინ $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ აღნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის ზღვარს, როცა $x \rightarrow a$, მაგრამ $x < a$ ანუ

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall x \in u(a-0, \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

აქ დამატებით არ ვწერთ $x \neq a$, რადგანაც $u(a-0, \delta)$ არ შეიცავს a წერტილს. ამ b რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან ან $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი a წერტილში (b სასრული ან უსასრულო).

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის მარჯვენა მიდამოში.

თუ

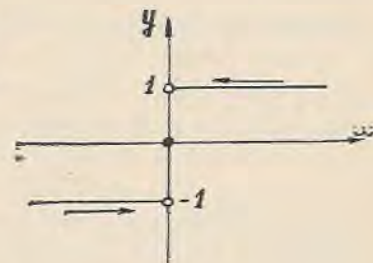
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall x \in u(a+0, \delta) \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon).$$

ამ c რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში მარჯვნიდან ან $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი a წერტილში. განვიხილოთ ფუნქცია (ნახ. 37).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია,

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1.$$



ნახ. 37

ე. ი. მივიღეთ—მარცხნიდან ზღვარი და მარჯვნიდან ზღვარი სხვადასხვაა.

ადვილი შესამჩნევია, რომ a წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

ცხადია, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ იძლევა $f(x)$ ფუნქციის ზღვარს მარცხნიდან, ხოლო $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ იძლევა $f(x)$ ფუნქციის ზღვარს მარჯვნიდან უსასრულობაში.

§ 8. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი ფუნქციები.

1. უსასრულოდ მცირე ფუნქცია. თვისებები. $\alpha(x)$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, a წერტილში შეიძლება განსაზღვრული არ იყოს, ეწოდება უსასრულოდ მცირე a წერტილში, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $\dot{u}(a, \delta)$ მიდამოს $\forall x$ წერტილისათვის სრულდება უტოლობა

$$|\alpha(x)| < \varepsilon. \quad (1)$$

ე. ი. თუ $\alpha(x)$ -ის ზღვარი a წერტილში ნულია, $\alpha(x)$ -ს უსასრულოდ მცირე ეწოდება a წერტილში.

a რიცხვი შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო, ე. ი. სიმბოლო $+\infty, -\infty$.

(1) განსაზღვრის საფუძველზე ადვილად დავასკვნით: თუ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი აქვს a წერტილში,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

მაშინ არსებობს ისეთი $\dot{u}(a, \delta)$, რომ

$$\forall x \in \dot{u}(a, \delta) \Rightarrow f(x) = b + \alpha(x). \quad (2)$$

(2) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში აქვს ზღვარი და მისი ზღვარი b -ს ტოლია, მაშინ მოიწინებება a წერტილის ისეთი მიდამო $\dot{u}(a, \delta)$, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის $f(x)$ ფუნქცია თავისი იმავე a წერტილში b ზღვარისა და $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირის ჯამის ტოლია.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 2. რაიმე წერტილში უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა ჯამი უსასრულოდ მცირე ფუნქციაა იმავე წერტილში.

$$(\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0.$$

თეორემა 3. ერთსა და იმავე წერტილში შემოსაზღვრული ფუნქციისა და უსასრულოდ მცირე ფუნქციის ნამრავლი უსასრულოდ მცირე ფუნქციაა იმავე წერტილში:

$$(\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) f(x)) = 0.$$

ვიტყვი, $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია a წერტილში, თუ არსებობს a წერტილის ისეთი მიდამო $u(a)$, რომ ამ მიდამოს ყოველი წერტილისათვის $|f(x)| \leq M$, სადაც M რაიმე დადებითი რიცხვია.

თეორემა 4. რაიმე წერტილში უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა ნამრავლი უსასრულოდ მცირე ფუნქციაა იმავე წერტილში:

$$(\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) \beta(x)) = 0.$$

შედეგი. რაიმე წერტილში უსასრულოდ მცირის მთელი დადებითი ხარისხი უსასრულოდ მცირე ფუნქციაა იმავე წერტილში:

$$(\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \wedge n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x))^n = 0.$$

2. უსასრულოდ დიდი ფუნქცია. თვისებები. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, a წერტილში შეიძლება განსაზღვრული არ იყოს. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ დიდი a წერტილში, თუ ნებისმიერი $M > 0$ -სათვის მოიწინებება a წერტილის ისეთი $\dot{u}(a, \delta)$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყველა წერტილისათვის, $x \neq a$,

$$|f(x)| > M.$$

$f(x)$ ფუნქცია რომ უსასრულოდ დიდია a წერტილში, ასე ჩაიწერება:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

თუ a რიცხვი სასრული არაა, მაშინ წინადადება „ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილში შეიძლება განსაზღვრული არ იყოს“ საჭირო არაა.

თუ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x) > 0$ და $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილში პლუს უსასრულობაა,

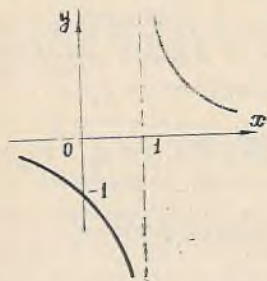
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

ასევე, თუ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x) < 0$ და $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილში მინუს უსასრულობაა,

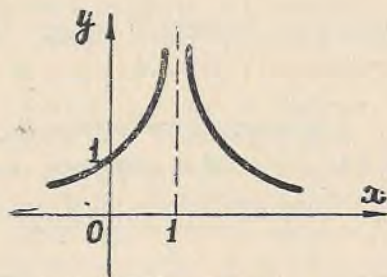
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

მაგალითად,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty \text{ (ნახ. 38)}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \text{ (ნახ. 39)}, \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-1) = -\infty \text{ (ნახ. 40)}.$$



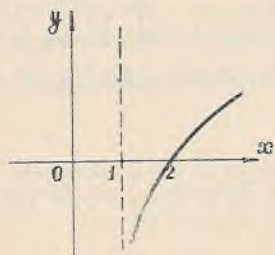
ნახ. 38



ნახ. 39

ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ უსასრულოდ დიდის შებრუნებული სიდიდეა უსასრულოდ მცირე სიდიდე (მიმდევრობა). იმავე მეთოდით შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5. თუ $f(x)$ ფუნქცია უსასრულოდ დიდია a წერტილში, მაშინ $\frac{1}{f(x)}$ უსასრულოდ მცირეა იმავე წერტილში და, პირიქით, თუ $f(x)$ ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა a წერტილში, მაშინ $\frac{1}{f(x)}$ უსასრულოდ დიდია იმავე წერტილში.



ნახ. 40

3. მაგალითები

1) გამოვთვალოთ $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$, $a > 1$.

ავიღოთ ნებისმიერი $N > 0$ რიცხვი. M განვსაზღვროთ ტოლობიდან $M = \log_a N$. თუ $x > M$, მაშინ $a^x > N$. აქედან კი ცხადია,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty.$$

თუ $x \rightarrow -\infty$, მაშინ ავიღოთ ε რიცხვი, $0 < \varepsilon < 1$. დავუშვათ $M = \log_a \frac{1}{\varepsilon} = -\log_a \varepsilon$, თუ $x < M$, მაშინ $a^x < \varepsilon$. მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

ცხადია, თუ $0 < a < 1$, მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

2) გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x, \quad a > 1.$$

ავიღოთ ნებისმიერი $N > 0$. თუ $x > a^N$, მაშინ $\log_a x > N$, მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty.$$

3) გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x, \quad a > 1.$$

ავიღოთ x -ის ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $0 < x < a^{-N}$, სადაც N ნატურალური რიცხვია. მაშინ

$$\log_a x < -N.$$

აქედან ცხადია

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = -\infty, \quad a > 1.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ჲ 26

1. გამოვთვალოთ ზღვრები:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 1}{n^2 + n + 1}, \quad 2) \lim \left(\frac{n^3 - 1}{n - 1} - n^2 - \sqrt{n^2 - 1} \right),$$

$$3) \lim \frac{4n^4 - 3n^2 + 1}{2 - n^2 + n^4}, \quad 4) \lim \left(\frac{\sqrt{4n^2 + 1} + n}{2n + \sqrt{n^2 - 1}} \right),$$

$$5) \lim \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2 + n} - n}, \quad 6) \lim \frac{\sqrt{n^4 - 3n^2 + 2}}{2n^2 - 3n + 4},$$

$$7) \lim \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n, \quad 8) \lim \left(1 + \frac{4}{n} \right)^n,$$

$$9) \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^n, \quad 10) \lim \left(\frac{2n}{2n+3} \right)^n,$$

$$11) \lim \left(\frac{n^2}{n^2+1} \right)^{4n^2+1}.$$

2. ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრის საფუძველზე აჩვენეთ:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 = 12, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{3x-1} = 2, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1-x} = 1,$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5}{x^2 - 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0.$$

3. გამოთვალეთ ზღვრები:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{2(x-4)}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{x}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x},$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} x}.$$

მითათება: წინასწარ დაადგინეთ მოცემულ მაგალითში ზღვრის მნიშვნელობა და შემდეგ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრის საფუძველზე დადასტურეთ მიღებული მნიშვნელობის ჭეშმარიტება.

§ 9. თეორემები ფუნქციათა ზღვრების შესახებ

1. არითმეტიკული მოქმედებანი ფუნქციათა ზღვრებზე. მე-3 პარაგრაფში დავამტკიცეთ თეორემები მიმდევრობათა ჯამის, ნამრავლისა და შეფარდებათა ზღვრების შესახებ. ამ თეორემათა დამტკიცების სრული ანალოგიით შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1. თუ არსებობს $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ზღვრები a წერტილში, მაშინ არსებობს ამ ფუნქციათა ჯამის ზღვარი და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

მართლაც, ვთქვათ, (x_n) მიმდევრობა მიისწრაფვის a -სკენ. მაშინ, პირობის თანახმად, არსებობს $\lim f(x_n)$ და $\lim g(x_n)$, გამოვიყენოთ თეორემა მიმდევრობათა ჯამის ზღვრის შესახებ. მივიღებთ

$$\lim (f(x_n) + g(x_n)) = \lim f(x_n) + \lim g(x_n).$$

რადგანაც ამ ტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისათვის, $x_n \rightarrow a$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

ზოგადად ეს თეორემა ასე ჩამოყალიბდება: ფუნქციათა ჯამის ზღვარი რაიმე წერტილში ტოლია შესაბამისი ფუნქციების იმავე წერტილში ზღვრების ჯამისა, თუ თითოეული შესაბამისი ზღვარი არსებობს.

თეორემა 2. თუ არსებობს $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ზღვარი a წერტილში, მაშინ არსებობს ამ ფუნქციათა ნამრავლის ზღვარი და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

ანუ ფუნქციათა ნამრავლის ზღვარი ტოლია თანამამრავლთა ზღვრების ნამრავლისა.

ამ თეორემიდან ადვილად დავასკვნით, რომ ჭეშმარიტია

შედეგი 1. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი a წერტილში, ხოლო c რაიმე მუდმივი რიცხვია, მაშინ არსებობს $cf(x)$ ფუნქციის ზღვარი და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

ე. ი. მუდმივი თანამამრავლი ზღვრის ნიშნის გარეთ შეგვიძლია გავიტანოთ.

შედეგი 2. თუ $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში აქვს ზღვარი, მაშინ არსებობს $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^k$, სადაც k ნატურალური რიცხვია, და ჭეშმარიტია ტოლობა:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^k = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^k.$$

თეორემა 3. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვთ ზღვარი a წერტილში და $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, მაშინ არსებობს ამ ფუნქციათა შეფარდების ზღვარი და ჭეშმარიტია ტოლობა:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

ე. ი. ფუნქციითა შეფარდების ზღვარი ტოლია მრიცხველის ზღვრის მნიშვნელის ზღვართან შეფარდებისა, თუ მნიშვნელის ზღვარი განსხვავებულია ნულისაგან.

დავამტკიცოთ უკანასკნელი თეორემა.
პირობის თანახმად

$$(\forall x_n \rightarrow a) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b \text{ და } (\forall x_n \rightarrow a) \Rightarrow g(x_n) \rightarrow c \neq 0.$$

ასე რომ, $\forall x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow b$ და $g(x) \rightarrow c \neq 0$.

მაგრამ, მაშინ მიმდევრობათა შეფარდების თეორემის საფუძველზე გვექნება

$$\lim_{x_n \rightarrow a} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{x_n \rightarrow a} f(x_n)}{\lim_{x_n \rightarrow a} g(x_n)},$$

ანუ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

ეს ტოლობა კი გამოთქმული თეორემის მართებულობას გვიჩვენებს.

შეიძლება ეს თეორემა უსასრულოდ მცირე ფუნქციის (§ 1, თეორემა 1) საშუალებითაც დავგვემტკიცებინა:

პირობის თანახმად

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad g(x) = c + \beta(x), \quad c \neq 0,$$

სადაც

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0.$$

შევადგინოთ სხვაობა

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b + \alpha(x)}{c + \beta(x)} - \frac{b}{c} = \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c(c + \beta(x))}.$$

ეს სხვაობა უსასრულოდ მცირეა a წერტილში. ამის გამო

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

ბნელი არაა იმის შემჩნევა, რომ ზემოთ ჩამოყალიბებული თეორემები ჭეშმარიტია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც a უსასრულოა.

თეორემა 4. თუ a წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)$ ფუნქცია არაუარყოფითია და არსებობს $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი ამ წერტილში, მაშინ k ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს $\sqrt[k]{f(x)}$ ფუნქციის ზღვარი $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{f(x)}$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}.$$

მართლაც, თუ ეს ტოლობა მართებული არაა, მაშინ k ხარისხში ახარისხება მიგვიყვანს იმ დასკვნამდე, რომ მე-2 შედეგი არაა მართებული.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემების საფუძველზე შეგვიძლია ვაჩვენოთ

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)},$$

სადაც r რაციონალური რიცხვია.

2. მაგალითები.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 1}.$$

რადგანაც $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ და $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + 2x) = 0$, ამიტომ მრიცხველი და მნიშვნელი გარდაექმნათ.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2), \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

გვექნება

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-2)}{x+1} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x(x-2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x \cdot (\lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{1 \cdot (1-2)}{1+1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 5}.$$

რადგანაც

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^2 + 3x - 2) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 5) = \infty,$$

ამიტომ წილადში ზღვარზე ვერ გადავალთ. მოცემული წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ x^2 -ზე. ამით უსასრულოდ დიდი შეიცვლება უსასრულო მცირით. გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 - \frac{5}{x^2}} = \frac{4 + 0 - 0}{2 - 0} = 2.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt[3]{x^3 - 5}).$$

ამ სხვაობაში ზღვარზე გადასვლა არ შეიძლება, რადგანაც შესაკრებთა ზღვრები არ არსებობს. სხვაობაში ირაციონალობა ჩაეიტანოთ მნიშვნელში:

$$\begin{aligned} x - \sqrt[3]{x^3 - 5} &= \frac{(x - \sqrt[3]{x^3 - 5})(x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 5} + \sqrt[3]{(x^3 - 5)^2})}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 5} + \sqrt[3]{(x^3 - 5)^2}} = \\ &= \frac{5}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 5} + \sqrt[3]{x^3 - 5)^2}}. \end{aligned}$$

გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt[3]{x^3 - 5}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 5} + \sqrt[3]{x^3 - 5)^2}} = 0.$$

სავარჯიშო 27. გამოთვალოთ:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x + 4),$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x + 2}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} ((x^2 - 1)(x^3 - 1)),$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 9},$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8},$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{1}{2^x}\right),$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 27},$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x^2 + x - 2},$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{2x - 8},$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3}.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{1 - \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}},$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \sin x - 1},$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}, \quad 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 4x^3}{1 + x + 2x^3},$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x}),$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2x^2 - 5},$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1},$$

$$18) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + 2}},$$

$$19) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 + \frac{1}{2^x}\right),$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}.$$

§ 10. მკვიდრულ უსასრულო მცირეები. შესანიშნავი ზღვრები

1. ფუნქციათა შედარება. ფუნქციათა შედარებისათვის შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა:

თუ a წერტილის რაიმე გაჩხვლელში $U(a)$ მიღამოში $\alpha(x) = \beta(x)f(x)$, სადაც $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$, მაშინ $\alpha(x)$

ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ მცირე $f(x)$ ფუნქციის მიმართ, როდესაც $x \rightarrow a$, და აღინიშნება $\alpha = o(f)$, $x \rightarrow a$. ამ უკანასკნელს ასე კითხულობენ „ α არის o მცირე f -საგან, როდესაც $x \rightarrow a$ “.

ამ განსაზღვრის საფუძველზე აღნიშვნა „ $\alpha(x) = o(1)$, $x \rightarrow a$ “ ნიშნავს: $\alpha(x)$ ფუნქცია არის უსასრულოდ მცირე, როდესაც $x \rightarrow a$.

თუ $f(x) \neq 0$, როდესაც $x \neq a$, მაშინ პირობა $\alpha = \beta f$, $\lim_{x \rightarrow a} \beta = 0$ ასე შე-

გვიძლია ჩავწეროთ:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0.$$

ამგვარად, აღნიშვნით $o(f)$, როდესაც $x \rightarrow a$ ($f(x) \neq 0$, $x \neq a$), იგულისხმება ნებისმიერი ფუნქცია ისეთი, რომ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(f)}{f} = 0$.

თუ $f(x)$ უსასრულოდ მცირეა, როდესაც $x \rightarrow a$, მაშინ ვიტყვი, რომ $\alpha(x)$, როდესაც $x \rightarrow a$, უფრო მაღალი რიგის უსასრულო მცირეა, ვიდრე $f(x)$.

$\alpha(x)$ და $f(x)$ ფუნქციებს a წერტილში ერთი და იგივე რიგის უსასრულოდ მცირეები ეწოდება, თუ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = A,$$

სადაც A ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია. თუ $A=1$, მაშინ $\alpha(x)$ და $f(x)$ ფუნქციებს a წერტილში ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები ეწოდება და ასე ჩაიწერება

$$\alpha(x) \sim f(x), \quad x \rightarrow a.$$

უსასრულოდ მცირეს, $\alpha(x)$ -ს ეწოდება k რიგის უსასრულოდ მცირე $f(x)$ -ის მიმართ a წერტილში, თუ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{(f(x))^k} = A,$$

სადაც A ნულისაგან განსხვავებული სასრული რიცხვია. მაგალითად, თუ $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, მაშინ $5a^2$ მეორე რიგის უსასრულოდ მცირეა a წერტილში α -ს მიმართ.

თუ $g(x)$ და $f(x)$ ფუნქციებისათვის არსებობს ისეთი გაჩვენებული მიდამო a წერტილისა, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის, $\forall x \in U(a)$, სრულდება ტოლობა

$$g(x) = k(x) \varphi(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} k(x) = b \neq 0,$$

ეწოდება ერთი და იგივე რიგის ფუნქციები a წერტილში და ასე ჩაიწერება

$$g(x) = O(\varphi(x)), \quad x \rightarrow a.$$

ეს უკანასკნელი ასე წაიკითხება: „ $g(x)$ არის O დიდი $f(x)$ -ის, როდესაც $x \rightarrow a$ “. ეს ცნება უფრო მეტი შინაარსისაა ვიდრე $o(f)$, რადგანაც $g(x)$ და $f(x)$ ფუნქციები შეიძლება იყოს ან უსასრულოდ დიდი ან უსასრულოდ მცირე ან სასრული რიცხვი a წერტილში.

ფუნქციები $g(x)$ და $f(x)$ ეკვივალენტურია a წერტილში, თუ

$$g(x) = k(x) \varphi(x), \quad x \rightarrow a,$$

სადაც $\lim_{x \rightarrow a} k(x) = 1$. $g(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციათა ეკვივალენტურობა ასე ჩაიწერება:

$$g(x) \asymp \varphi(x), \quad x \rightarrow a.$$

თუ ამ პუნქტში განხილულ ცნებებს ერთად შევკრებთ, მივიღებთ შემდეგს:

ვთქვათ, a წერტილის გაჩვენებული რაიმე მიდამოში

$$g(x) = k(x) \varphi(x).$$

თუ $\lim_{x \rightarrow a} k(x) = b \neq 0$, მაშინ

$$g(x) = O(\varphi(x)), \quad x \rightarrow a.$$

თუ $\lim_{x \rightarrow a} k(x) = 1$, მაშინ

$$g(x) \asymp \varphi(x), \quad x \rightarrow a.$$

თუ $\lim_{x \rightarrow a} k(x) = 0$, მაშინ

$$g(x) = o(\varphi(x)), \quad x \rightarrow a.$$

თუ $g(x) = o(1)$ და $\varphi(x) = o(1)$, $x \rightarrow a$, ამასთან $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\varphi(x)} = 1$, მაშინ

$$g(x) \sim \varphi(x), \quad x \rightarrow a.$$

2. უსასრულოდ მცირე რკალის სინუსის თავის რკალთან შეფარდების ზღვარი. დავამტკიცოთ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1)$$

წინასწარ ვაჩვენოთ

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |\sin x| \leq |x|.$$

მართლაც, თუ $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, მაშინ ერთეულრადიუსიან წრეწირიდან

(ნახ. 41) დავასკვნით

$$2|\sin x| = AD \leq$$

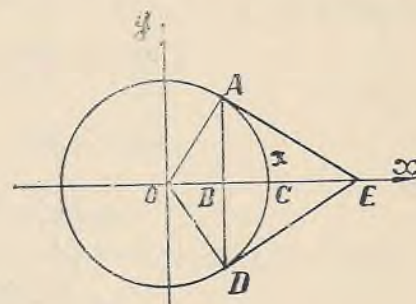
$$\leq 2|ACD| = 2|x|,$$

ანუ

$$|\sin x| \leq |x|.$$

თუ $|x| > \frac{\pi}{2}$, მაშინ

$$|x| > \frac{\pi}{2} > 1 \geq |\sin x|.$$



ნახ. 41

ახლა ავიღოთ სხვაობა

$$|\sin(x+h) - \sin x| = \left| 2 \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{h}{2} \right| = |h|.$$

ამ სხვაობიდან გამომდინარეობს

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|x+h| - x| = |h| < \delta \Rightarrow |\sin(x+h) - \sin x| \leq |h| < \varepsilon)$$

ამისათვის საკმარისია ავიღოთ $\delta = \varepsilon$. ასე რომ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x+h) = \sin x. \quad (2)$$

კერძოდ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

სრულიად ასევე, სხვაობიდან

$$|\cos(x+h) - \cos x| = \left| 2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{h}{2} \right| = |h|$$

დავასკვნით

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+h) = \cos x. \quad (3)$$

კერძოდ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

განვიხილოთ ფუნქცია $\frac{\sin x}{x}$. იგი განსაზღვრულია $\forall x \in \mathbb{R}$, გარდა

$x = 0$. ვთქვათ, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. 41-ე ნახაზზე AD ქორდა პერპენდიკულარულია

Ox ღერძის. A და D წერტილებში გავატაროთ წრეწირისადმი სათანადოდ მხეხვები AE და DE . რადგანაც მომჭიმავი AD ქორდა ნაკლებია ACD რკალის სიგრძეზე, ხოლო ეს უკანასკნელი ნაკლებია AED ტეხილზე, გვექნება

$$|AD| < |\overset{\frown}{ACD}| < |AEB|,$$

საიდანაც

$$|AB| < |\overset{\frown}{AC}| < |AE|,$$

ანუ

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

ამ უტოლობის ყველა წევრი გავყოთ $\sin x$ -ზე, $\sin x \neq 0$, მივიღებთ

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

მიღებული უტოლობა ქვეშარიტია არა მხოლოდ დადებითი x -სათვის,

არამედ უარყოფითი x -სთვისაც, თუ $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

ამგვარად, ფუნქცია $\frac{\sin x}{x}$ მოთავსებულია ორ ფუნქციას შორის, რომელთა ზღვრები, როცა $x \rightarrow 0$, ტოლია 1-ის. მე-4 პარაგრაფის მე-4 თეორემის საფუძველზე დავასკვნით

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

რაც (1) ტოლობას ამტკიცებს.

ახლა გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

ამრიგად,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \quad (4)$$

განვიხილოთ $y = \sin x$ ფუნქცია $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ შუალედში, მაშინ $-1 \leq y \leq 1$. როგორც ვიცით, x -სა და y -ს შორის არსებობს ურთიერთ-ცალსახა დამოკიდებულება $x \leftrightarrow y$. ასე რომ შეგვიძლია დავწეროთ (იხ. § 12, $n \cdot 2$)

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \quad \text{და} \quad y \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0.$$

მაშასადამე,

$y = \sin x$ -სათვის: $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$ და $x = \arcsin y$ -სათვის: $y \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$.

ურთიერთშექცეული ფუნქციებიდან $y = \sin x$, $x = \arcsin y$ მვიღებთ

$$\frac{\arcsin y}{y} = \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}},$$

საიდანაც

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin y}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

ამრიგად,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1. \quad (5)$$

სრულიად ასევე შეგვიძლია, ვაჩვენოთ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \operatorname{tg} x}{x} = 1. \quad (6)$$

ჩამოვწერთ მიღებული ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირენი:

$$\begin{aligned}\sin x &\sim x, \quad x \rightarrow 0; \\ \arcsin x &\sim x, \quad x \rightarrow 0; \\ \operatorname{tg} x &\sim x, \quad x \rightarrow 0; \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} x &\sim x, \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

3. ისევ e რიცხვის შესახებ. ჩვენთვის ცნობილია, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (7)$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x \rightarrow \infty$

ცხადია, ნებისმიერი x -სათვის $x \in \mathbb{R}$, არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n , რომ

$$n \leq x < n+1. \quad (8)$$

ამ უტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

თუ ამ უტოლობის ყველა წევრს ერთსა და იმავე სიდიდეს 1-ს დავამატებთ, მივიღებთ:

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

მიღებული უტოლობის პირველი ნაწილი ავასრულებთ n ხარისხში, მეორე ნაწილი x ხარისხში, ხოლო მესამე $n+1$ ხარისხში, ამით (8) პირობის გამო გვექნება:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (9)$$

ვაჩვენოთ, რომ (9) უტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების ზღვარი, როცა $n \rightarrow \infty$ (ცხადია, $x \rightarrow \infty$), ტოლია.

მართლაც,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e.\end{aligned}$$

რადგანაც, თუ პირველ მაშრაველში ავიღებთ $n+1=m$, მაშინ $n \rightarrow \infty \Rightarrow m \rightarrow \infty$, გვექნება

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

ასევე

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = e \cdot 1 = e.$$

ასე რომ, (9) უტოლობა აკმაყოფილებს მე-4 პარაგრაფის მე-4 თეორემის პირობებს, რის საფუძველზედაც მივიღებთ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (10)$$

გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x = -y$, მაშინ $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$. გვექნება

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^1\right] = e \cdot 1 = e.\end{aligned}$$

ასე რომ, (9) ტოლობა მართებულია როგორც $x \rightarrow +\infty$, ისე $x \rightarrow -\infty$.

თუ დავუშვებთ $x = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha > -1$, მაშინ $x \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$. ამ აღნიშვნის საფუძველზე (10) მოგვცემს

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e. \quad (11)$$

მივიღეთ e რიცხვის ორი გამოსახულება (10) და (11).

4. ნატურალური ლოგარიტმის ცნება. ჩვენთვის ცნობილია: ასახვას $a^x: X \rightarrow Y$ ეწოდება მაჩვენებელი ან ექსპონენციური ფუნქცია $a > 0$ ფუძით. $y = a^x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, $R_+ = \{y | y > 0\}$. უფრო ხშირად გვხვდება $f(x) = e^x$ ფუნქცია, $a = e$, რომელსაც $\exp x$ -ით აღნიშნავენ. ამის გამო $f(x) = a^x$ ფუნქციას $\exp_a x$ სიმბოლოთიც აღნიშნავენ. რადგანაც $\exp x: \mathbb{R} \rightarrow R_+$ ასახვა ბიექციურია, შეგვიძლია განვიხილოთ ამ ფუნქციის შებენი ფუნქცია.

ასახვას, რომელიც შექცეულია $\exp_a x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ასახვისა, ეწოდება ლოგარითმული ფუნქცია ან ლოგარითმი a ($0 < a \neq 1$) ფუძით და აღინიშნება $\log_a x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ სიმბოლოთი. ლოგარითმულ ფუნქციას $a=e$ ფუძით ეწოდება ნატურალური ლოგარითმი და აღინიშნება $\ln x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ სიმბოლოთი ან შემოკლებით $y=\ln x$. დიფერენციალურ და ინტეგრალურ აღრიცხვაში გავეცნობით ნატურალური ლოგარითმების უპირატესობას სხვა ლოგარითმების მიმართ.

გამოვიყენოთ დამოკიდებულება ნატურალურ ლოგარითმსა და a ფუძით, $a>0$, ლოგარითმს შორის. (ეს ფორმულები საშუალო სკოლიდანაც კარგადაა ცნობილი).

ავიღოთ

$$y = \log_a x,$$

საიდანაც

$$x = a^y.$$

ეს უკანასკნელი გავალოგარითმოთ e ფუძით, გვექნება

$$\ln x = y \ln a,$$

საიდანაც

$$y = \frac{\ln x}{\ln a},$$

ანუ

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad (12)$$

ეს ფორმულა გამოსახავს x რიცხვის ლოგარითმს a ფუძით x რიცხვის ნატურალური ლოგარითმის საშუალებით.

თუ (12)-ში დავუშვებთ $x=e$, მივიღებთ

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a},$$

თუ (12)-ში დავუშვებთ $a=10$ -ს, მივიღებთ

$$\lg x = M \ln x, \quad (13)$$

სადაც

$$M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,43429.$$

M -ს ეწოდება ნატურალური ლოგარითმიდან ათობით ლოგარითმებზე გადასვლის მონძული.

(13) ფორმულიდან შეგვიძლია მივიღოთ

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x,$$

სადაც

$$\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2,30258.$$

5. ნატურალურ ლოგარითმთან დაკავშირებული უსასრულოდ მცირე ფუნქციები. გამოვთვალოთ

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

გვექნება

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \ln(1+\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln(1+\alpha)^{1/\alpha}. \quad (14)$$

დავუშვათ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln \lim_{x \rightarrow a} f(x). \quad (15)$$

ე. ი. ლოგარითმული $\ln f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x \rightarrow a$, ტოლია $f(x)$ ფუნქციის a წერტილში ზღვრის ლოგარითმისა ((15) ფორმულას შემდეგში დავამტკიცებთ). მაშინ (14) მოგვცემს

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = \ln \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = \ln e = 1. \quad (16)$$

ამგვარად,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1. \quad (17)$$

მაშასადამე,

$$\ln(1+\alpha) \sim \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (18)$$

ახლა გამოვთვალოთ

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}.$$

გვექნება:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+\alpha)}{\ln a} \cdot \frac{1}{\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{\ln a} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\ln a} \cdot 1 = \frac{1}{\ln a}. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_a (1 + \alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\ln a},$$

საიდანაც

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_a (1 + \alpha)}{\frac{\alpha}{\ln a}} = 1.$$

ამგვარად,

$$\log_a (1 + \alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a}, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (19)$$

გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $e^x - 1 = y$. მაშინ $e^x = 1 + y$, საიდანაც $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$ და $x = \ln(1 + y)$. გვექნება:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1.$$

ამგვარად,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

ანუ

$$e^x - 1 \sim x, \quad x \rightarrow 0. \quad (20)$$

სრულიად ასევე ვაჩვენებთ:

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x \rightarrow 0. \quad (21)$$

6. თეორემა ეკვივალენტურობის გამოყენების შესახებ. მაგალითები. გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^m - 1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

თუ მნიშვნელს დავშლით $(x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)$ ნამრავლად, მაშინ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^m - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1} = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

ამის გამო, ცხადია

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

ახლა ავიღოთ ფუნქცია $\sqrt[k]{1+x} - 1$. ვაჩვენოთ, რომ იგი ეკვივალენტურია $\frac{x}{k}$, $x \rightarrow 0$.

ამისათვის გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x} - 1}{x}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\sqrt[k]{1+x} = y$, საიდანაც $1 + x = y^k \Rightarrow x = y^k - 1$. თუ $x \rightarrow 0$, მაშინ $y \rightarrow 1$.

გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{y^k - 1} = \frac{1}{k}.$$

ამგვარად,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{k}.$$

ამ რეზულტატს ცხადია,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x} - 1}{\frac{x}{k}} = 1,$$

ანუ

$$\sqrt[k]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{k}, \quad x \rightarrow 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

დავამტკიცოთ თეორემები ეკვივალენტურ უსასრულოდ მცირეთა სარგებლობის შესახებ.

თეორემა 1. უსასრულოდ მცირეთა ფარდობის ზღვარი მოცემულ წერტილში არ შეიცვლება, თუ ამ უსასრულოდ მცირეებს შევცვლით იმავე წერტილში მათი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებით.

მართლაც, თუ

$$\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \quad \beta_1(x) \sim \beta_2(x), \quad x \rightarrow a,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \cdot \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)} \cdot \frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)} \times$$

$$\times \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

ამრიგად,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

მაგალითად, გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{3}x}{\sqrt{1+2x}-1}.$$

რადგანაც $\sin \sqrt{3}x \sim \sqrt{3}x$, $\sqrt{1+2x}-1 \sim \frac{2x}{2}$, $x \rightarrow 0$, შეფარდე-

ბის პრიციპებში და მნიშვნელობა ფუნქციები შევცვალოთ სათანადოდ ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებით, მივიღებთ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{3}x}{\sqrt{1+2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3}.$$

თეორემა 2. თუ a წერტილის რაიმე მიდამოში, a წერტილის გამოკლებით, განსაზღვრულია ფუნქციები $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ და $f(x)$ და ამ ფუნქციებს a წერტილში აქვთ ზღვრები, ამასთან $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$, $x \rightarrow a$, მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha_1(x) f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (\alpha_2(x) f(x)).$$

მართლაც,

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha_1(x) f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \cdot \alpha_2(x) f(x) \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (\alpha_2(x) f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (\alpha_2(x) f(x)).$$

7. თეორემა რთული ფუნქციის ზღვრის შესახებ. ზემოთ რამდენჯერმე გამოვთვალეთ რთული ფუნქციის ზღვარი სათანადო აღნიშვნის შემოტანით. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. ვთქვათ, $y=f(x)$ განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე $e < x < d$ მიდამოში, a წერტილში შეიძლება განსაზღვრული არ იყოს. $x=g(t)$ ფუნქცია

განსაზღვრულია c წერტილის რაიმე მიდამოში $k < t < l$, c წერტილში შეიძლება განსაზღვრული არ იყოს. ამასთან $x=g(t)$ ფუნქცია c წერტილის რაიმე მიდამოს ასახავს a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა $t=c$ წერტილისა. თუ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{t \rightarrow c} g(t) = a,$$

მაშინ

$$\lim_{t \rightarrow c} f(g(t)) = b.$$

დამტკიცება. ავიღოთ b წერტილის მიდამო $u(b, \varepsilon)$ (ნახ. 42). თეორემის პირობით არსებობს ისეთი $u(a, \delta) \in]\varepsilon, d[$, რომ

$$\forall x \in \dot{u}(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in \dot{u}(b, \varepsilon),$$

ხოლო $\dot{u}(a, \delta)$ მიდამოსათვის არსებობს ისეთი $\dot{u}(c, \eta) \in]k, l[$, რომ

$$\forall t \in \dot{u}(c, \eta) \Rightarrow g(t) \in \dot{u}(a, \delta).$$

ამიტომ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 (\forall t \in \dot{u}(c, \eta) \Rightarrow f(g(t)) \in \dot{u}(b, \varepsilon)).$$

რაც უნდა დავამტკიცებინა.

მაგალითად, გამოვთვალოთ $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$. შემოვი-

ლოთ აღნიშვნა $\operatorname{tg} x = z$, მაშინ $x \rightarrow \pi \Rightarrow z \rightarrow 0$. ამიტომ

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin 2x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+z} - \sqrt{1-z})(1+z^2)}{2z} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1+z^2)((\sqrt{1+z}-1) - (\sqrt{1-z}-1))}{2z} =$$

$$= \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+z}-1}{2z} - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-z}-1}{2z} \right) \lim_{z \rightarrow 0} (1+z^2) = \frac{1}{2}.$$

სავარჯიშო 28. 1. გამოვთვალოთ ზღვრები

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[5]{x-4}}{x^2-5x+4},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x+5}}{\sqrt{x}-2},$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\sin 4x},$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x},$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x},$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos 2x},$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{\sqrt{1+4x} - 1},$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{\sqrt{9-x} - \sqrt{9+x}},$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+4x} - 1}{\sqrt{x+1} - 1},$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \right),$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 4x},$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin x - \cos x},$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \operatorname{tg} 4x},$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-x}}{\operatorname{tg} x},$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x,$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+x} - (x-2)),$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[5]{1-x} - 1},$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \sin 7x}.$$

2°. r -რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია წესიერი n -კუთხედი, რომლის აბოთემაა a_n . აჩვენეთ, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$.

3°. r -რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია წესიერი n -კუთხედი. ცენტრიდან მრავალკუთხედის წვერო დაშორებულია $|OA| = b_n$ მანძილით. აჩვენეთ, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$.

4°. ღამტყიცეთ: 1) რომ $0,333\ldots = \frac{1}{3}$, 2) $0,233\ldots = \frac{7}{30}$.

5°. გამოთვალეთ 1) $0,42555\ldots$ 2) $0,235235\ldots$

§ 11. ფუნქციის უწყვეტობა.

1. ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის მიდამოში x_0 წერტილის ჩათვლით (ნახ. 43).

თუ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში.

თუ მოვიგონებთ ფუნქციის ზღვრის განმარტებას, გვექნება:

$f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, თუ იგი განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე $u(x_0)$ მიდამოში x_0 წერტილის ჩათვლით და, თუ ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon > 0$ -სათვის მოიძებნება დადებითი δ , რომ ყოველი x წერტილისათვის რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x - x_0| < \delta$ სრულდება უტოლობა

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad (1)$$

ანუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall x \in x_0 - \delta, x_0 + \delta [\Rightarrow f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[).$$

$f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში გეომეტრიულად ნიშნავს: როგორც გინდ იყოს ε დადებითი რიცხვი, ყოველთვის არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო $u(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$, რომ $y = f(x)$ წირის ყველა წერტილი, რომელთა აბსცისები $x \in u(x_0, \delta)$ მიდამოს, მოთავსდება $y = f(x_0) - \varepsilon$ და $y = f(x_0) + \varepsilon$ წრფეებს შორის.

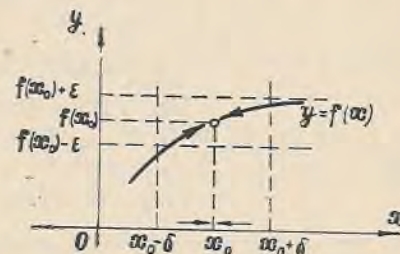
თუ მოვიგონებთ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრას ჰაინეს აზრით, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა x_0 წერტილში ასე განისაზღვრება:

$f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, თუ იგი განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე $u(x_0)$ მიდამოში x_0 წერტილის ჩათვლით და, თუ ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისათვის, რომელიც მიისწრაფვის x_0 — წერტილისაკენ,

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0). \quad (2)$$

ცხადია, δ დამოკიდებულია როგორც ε -ზე, ისე x_0 -ზე,

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0).$$



ნახ. 43

თუ მოვიგონებთ $f(x)$ ფუნქციის x_0 წერტილში მარცხენა და მარჯვენა ზღვრის განსაზღვრას, გვექნება:

$f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, თუ იგი განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე $u(x_0)$ მიდამოში x_0 წერტილის ჩათვლით და, თუ $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი, მარჯვენა ზღვარი და $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერტილში ტოლია:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0), \quad (3)$$

ანუ

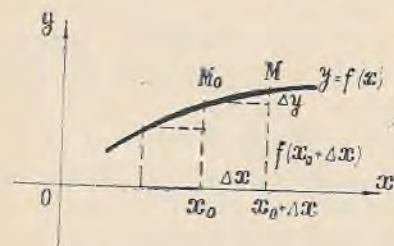
$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

თუ არგუმენტის x_0 მნიშვნელობას მივცემთ Δx ნაზრდს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციაც მიიღებს Δy ნაზრდს,

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

ფუნქციის ნაზრდის განსაზღვრის საფუძველზე $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა x_0 წერტილში შემდეგნაირად განსაზღვრება:

$f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, თუ $f(x)$ განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე $u(x_0)$ მიდამოში x_0 წერტილის ჩათვლით და, თუ ნებისმიერი დადებითი ε -თვის მოიძებნება დადებითი $\delta > 0$, რომ, როცა x -ის ნაზრდი Δx აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლებია δ -ზე, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი x_0 წერტილში აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლებია ε -ზე.



ნახ. 44

მება x_0 წერტილში ფუნქციის უსასრულოდ მცირე $\Delta f(x_0)$ ნაზრდი (ნახ. 44),

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta f(x_0) \rightarrow 0. \quad (5)$$

$f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილია x_0 წერტილი, თუ x_0 წერტილში დარღვეულია $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა.

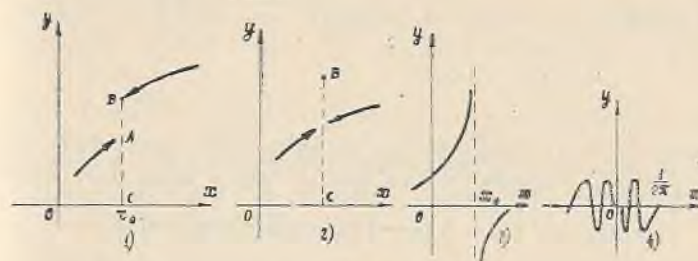
ე. ი. x_0 წერტილი $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილია, თუ იგი განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, x_0 წერტილის ჩათვლით, მაგრამ

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

ან

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$

ან $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, მაგრამ x_0 წერტილში განსაზღვრული არაა. ეს შემთხვევები ნაჩვენებია 45-ე ნახაზზე:



ნახ. 45

- 1) $f(x_0 - 0) = CA$, $f(x_0 + 0) = CB$, $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$.
- 2) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.
- 3) $f(x_0 - 0) = +\infty$, $f(x_0 + 0) = -\infty$. $f(x)$ განსაზღვრული არაა x_0 -სათვის.
- 4) ნაჩვენებია $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ -ის გრაფიკი.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^k, & x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad f(0 - 0) \neq f(0 + 0)$$

და $f(x)$ განსაზღვრული არაა 0 წერტილში.

განვიხილოთ ზოგიერთი ფუნქცია.

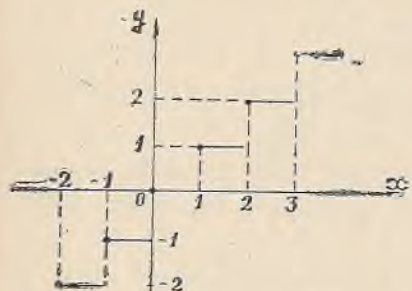
- 1) $f(x) = x^2$. ცხადია, $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2$. ფუნქცია $f(x) = x^2$ უწყვეტია

ყველგან $-\infty < x < +\infty$.

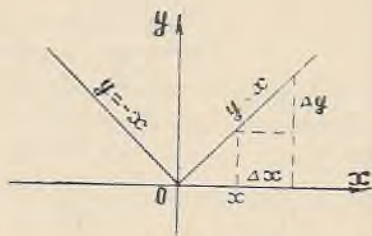
2) $f(x) = E(x)$ — ფუნქცია ტოლია x -ის მთელი ნაწილისა (ნახ. 46).

$x = n + q$, $0 \leq q < 1$, მაშინ $f(x) = n$, $f(n-0) = n-1$,

$$f(n+0) = n, n \in \mathbb{Z}.$$



ნახ. 46



ნახ. 47

მაშასადამე, $E(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებია $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$. თუ $n \leq x_0 < n+1$ და Δx ისეთია, რომ $n \leq x_0 + \Delta x < n+1$, მაშინ Δx -ს შეესაბამება

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = E(n) - E(n) = 0.$$

ე. ი. $E(x)$ ფუნქცია უწყვეტია იმ x წერტილებში, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $n \leq x < n+1$.

3) $f(x) = |x|$ (ნახ. 47). უწყვეტია x -ის ყოველი წერტილისათვის $-\infty < x < +\infty$, რადგანაც ყოველ x წერტილში $\Delta f(x) = |\Delta x|$ და

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta f(x) \rightarrow 0.$$

4) $f(x) = \text{sign } x$ (ნახ. 48),

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

უწყვეტია ყოველ x წერტილში, თუ $x \neq 0$. $x = 0$ წერტილში ზღვარი არ აქვს:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \text{sign } x = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \text{sign } x = 1.$$

5) $f(x) = |\text{sign } x|$ უწყვეტია ყველგან $-\infty < x < +\infty$, თუ $x \neq 0$, (ნახ. 49). $x = 0$ წერტილის წერტილია,

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} |\text{sign } x| = \lim_{x \rightarrow 0+0} |\text{sign } x|,$$

$$|\text{sign } 0| = 0.$$



ნახ. 48



ნახ. 49

2. წერტილში უწყვეტი ფუნქციის თვისებები. გავიხსენოთ ფუნქციის თვისებები (§ 7, n 3, თ. 1, 2): თუ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, სადაც b სასრული

რიცხვია, მაშინ მოიძებნება a წერტილის ისეთი მიდამო $u(a, \delta)$, სადაც $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია და $f(x)$ ფუნქციას ამ $u(a, \delta)$ მიდამოში აქვს b რიცხვის ნიშანი. ამ თვისებათა საფუძველზე, ადვილი წარმოსადგენია, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილში უწყვეტია და $f(x_0) > 0$, მაშინ მოიძებნება x_0 წერტილის ისეთი მიდამო $u(x_0, \delta)$, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის $f(x) > 0$, ე. ი.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists u(x_0, \delta) (\forall x \in u(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) > 0). \quad (6)$$

თუ გავიხსენებთ ზღვრებზე მოქმედებებს (§ 6, n 1, თ. 1-3), მაშინ ადვილად დავამტკიცებთ შემდეგს:

თეორემა 2. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები x_0 წერტილში უწყვეტია, მაშინ ფუნქციები $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x_0) \neq 0$, უწყვეტია იმავე x_0 წერტილში.

მაგალითად, დავამტკიცოთ $F(x) = f(x) + g(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა x_0 წერტილში, თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები უწყვეტი ფუნქციებია x_0 წერტილში.

მართლაც, x_0 წერტილში უწყვეტობის თანახმად გვქვია

$$\forall x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0),$$

$$\forall x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow g(x_n) \rightarrow g(x_0)$$

და, მაშინ

$$\forall x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \Rightarrow f(x_0) + g(x_0) = F(x_0).$$

თეორემა 3. თუ $y=g(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში და $f(y)$ ფუნქცია უწყვეტია y_0 წერტილში, $y_0=g(x_0)$, მაშინ $g(x)$ ფუნქციის f ფუნქცია $(f \circ g)(x)=f(g(x))=F(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში.

დამტკიცება. ავიღოთ $\varepsilon > 0$ რიცხვი. რადგანაც $f(y)$ ფუნქცია უწყვეტია y_0 წერტილში, მოიძებნება ისეთი $\eta > 0$, რომ $f(y)$ ფუნქცია განსაზღვრული იქნება $u(y_0, \eta) =]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ ინტერვალში და შესრულდება პირობა

$$\forall y \in u(y_0, \eta) \Rightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon. \quad (7)$$

მაგრამ $y=g(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ეს ნიშნავს $\forall \eta > 0$ -სათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომ $g(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული იქნება $u(x_0, \delta) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ინტერვალში და

$$\forall x \in u(x_0, \delta) \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \eta. \quad (8)$$

მიღებული (7) და (8) უტოლობებიდან გვექნება: ყოველი x -სათვის, რომელთათვისაც სრულდება უტოლობა $|x - x_0| < \delta$, ფუნქცია $f(g(x)) = F(x)$ განსაზღვრულია და ადგილი აქვს უტოლობას

$$|F(x) - F(x_0)| = |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon,$$

რაც გამოთქმულ თეორემას ამტკიცებს.

3. ზოგიერთი ფუნქციის უწყვეტობა. 1) ხარისხობანი ფუნქცია მთელი დადებითი მაჩვენებლით $f(x) = x^n$. შევადგინოთ ფუნქციის ნაზრდი x წერტილში

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + c_n^1 x^{n-1} \Delta x + c_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + c_n^n (\Delta x)^n - x^n = \Delta x (c_n^1 x^{n-1} + c_n^2 x^{n-2} \Delta x + \dots + c_n^n (\Delta x)^{n-1}). \quad (9)$$

როცა Δx უსასრულოდ მცირეა, (9) გამოსახულების ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება შემოსაზღვრული სიდიდეა, ამიტომ

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow (f(x + \Delta x) - f(x)) \rightarrow 0.$$

ე. ი. $f(x) = x^n$ ფუნქცია უწყვეტია მთელ X ღერძზე.

2) n -ური ხარისხის მრავალწევრი.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

უწყვეტი ფუნქციაა $-\infty < x < +\infty$ შუალედში, რადგანაც იგი უწყვეტ ფუნქციათა ჯამია.

3) მაჩვენებლიანი ფუნქცია $f(x) = e^x$. შევადგინოთ ფუნქციის ნაზრდი

$$f(x + \Delta x) - f(x) = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1).$$

რადგანაც

$$(\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow (e^{\Delta x} - 1) \rightarrow 0) \Rightarrow e^x (e^{\Delta x} - 1) \rightarrow 0.$$

ეს კი გვიჩვენებს ფუნქცია $f(x) = e^x$ უწყვეტია მთელ X ღერძზე.

ახლა განვიხილოთ მაჩვენებლიანი ფუნქცია $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

გამოვთვალოთ ფუნქციის ნაზრდი.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1) \sim a^x \ln a \Delta x, \quad \Delta x \rightarrow 0;$$

$$(\Delta x \rightarrow 0) \Rightarrow (f(x + \Delta x) - f(x)) \rightarrow 0.$$

ამგვარად, a^x უწყვეტია მთელ X ღერძზე.

4) ლოგარიტმული ფუნქცია $f(x) = \ln x$. გამოვთვალოთ ნაზრდი

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &= \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \\ &= \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \sim \frac{\Delta x}{x}, \quad \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

რადგანაც $x > 0$, $\frac{\Delta x}{x}$ უსასრულო მცირეა, $\Delta f(x)$ -იც უსასრულოდ მცირეა R_+ -ის ყოველ წერტილში.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი $a > 0$ ფუძით ლოგარიტმული ფუნქციაც უწყვეტია, რადგანაც $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, $\ln a \neq 0$. მივიღეთ უწყვეტი ფუნქციათა შეფარდება.

5) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები 1° $f(x) = \sin x$. გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2} \sim \\ &\sim \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x, \quad \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

მაშასადამე, $\sin x$ ფუნქცია უწყვეტია $\forall x \in R$ -თვის.

2° $f(x) = \cos x$. ასევე დამტკიცდება $f(x) = \cos x$ -ის უწყვეტობა. ან შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც რთული ფუნქცია $f(x) = \sin u$,

$u = \frac{\pi}{2} + x$. რადგანაც ორივე ფუნქცია უწყვეტია, უწყვეტი იქნება

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \text{ ფუნქციაც, } \forall x \in \mathbb{R}.$$

3°. $f(x) = \operatorname{tg} x$. რადგანაც $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, იგი უწყვეტია იქ, სადაც $\cos x \neq 0$, ანუ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. მაშასადამე, $f(x) = \operatorname{tg} x$ ფუნქცია

უწყვეტია მთელ X ლერძზე $\frac{\pi}{2} + k\pi$ წერტილების გამოკლებით.

4. წერტილის მარცხნიდან და მარჯვნიდან ფუნქციის უწყვეტობა. მოვიგონოთ მე-7 პარაგრაფის მე-5 პუნქტში განხილული ცნებანი. წერტილის (რიცხვის) მარცხენა მიდამო ეწოდება ნებისმიერ $]c, a[$ ინტერვალს, ხოლო მარჯვენა მიდამო ეწოდება ნებისმიერ $]a, d[$ ინტერვალს. ბუნებრივია, $+\infty$ -ის მიდამოდ ჩავთვალოთ ინტერვალ (ნახევრად უსასრულო) $]N, +\infty[$, ხოლო $-\infty$ -ის მიდამოდ ინტერვალ $]-\infty, N[$, სადაც N ნებისმიერი სასრული რიცხვია. შეიძლება კიდევ ვთქვათ, ადამარჯვენა მიდამოა $-\infty$ -ის, ხოლო მარცხენა მიდამოა $+\infty$ -ის.

ამ განსაზღვრათა საფუძველზე შემოვიტანეთ a ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები. $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი a წერტილში არის (სასრული ან უსასრულო), თუ $f(x)$ განსაზღვრულია a წერტილის მარჯვენა მიდამოში და $\forall \varepsilon > 0$ -სათვის მოიძებნება ისეთი მარჯვენა $u(a+0, \delta) =]a, a+\delta[$ მიდამო, რომ $|f(x) - b| < \varepsilon$ სრულდება ამ $u(a+0, \delta)$ მიდამოს ყველა წერტილისათვის,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b : = \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall x \in u(a+0, \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon). \quad (10)$$

სრულიად ასევე განსაზღვრება $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი a წერტილში:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b : = \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall x \in u(a-0, \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon). \quad (11)$$

სადაც $u(a-0, \delta) =]a-\delta, a[$.

ჩვეულებრივად, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ -ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი ∞ -ში, ხოლო $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ -ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი ∞ -ში.

(10) გამოსახულების საფუძველზე განსაზღვრავთ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობას მარჯვნიდან.

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მარჯვენა მადამოში a წერტილის ჩათვლით და, თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall x \in u(a+0, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

მაშინ ვიტყვით $f(x)$ ფუნქცია a წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან.

ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია a წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან, თუ

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) = f(a). \quad (12)$$

სრულიად ასევე განსაზღვრავთ $f(x)$ ფუნქციის a წერტილში უწყვეტობას მარცხნიდან.

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მარცხენა მადამოში a წერტილის ჩათვლით და, თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall x \in u(a-0, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

მაშინ ვიტყვით, $f(x)$ ფუნქცია a წერტილში უწყვეტია მარცხნიდან.

ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია a წერტილში უწყვეტია მარცხნიდან, თუ

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) = f(a). \quad (13)$$

ს ა გ ა რ ჯ ი შ ი 29. 1. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $f(x) = |x-1|$ უწყვეტია. ააგეთ წირი.

2. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $f(x) = |x|^3$ უწყვეტია. ააგეთ წირი.

3. განსაზღვრეთ შემდეგი ფუნქციების წყვეტის წერტილები:

$$1) f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), \quad 2) f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}, \quad 3) f(x) = \operatorname{tg} \pi x,$$

$$4) f(x) = \sec 3\pi x, \quad 5) f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

4. მონახეთ $f(x) = \frac{2}{x-2}$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი და გამოთვალეთ $f(2-0)$ და $f(2+0)$.

5. ააგეთ წირი

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & 1 < x < 2, \\ 4, & 2 < x < \infty. \end{cases} \quad f(1)=0, f(2)=3,$$

გამოარკვეთ როგორი წერტილებია $x=1$; 2. გამოთვალეთ

$$f(1-0), f(1+0), f(2-0), f(2+0).$$

6. ავეთ 1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 2) $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$ წირები. განსაზღვ-

რეთ წყვეტის წერტილები. გამოთვალეთ წყვეტის წერტილებში მარცხნი-

დან და მარჯვნიდან ზღვრები.

§ 12. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნე-

ლობის მიღწევის შესახებ. $f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ეწოდება, თუ ის უწყვეტია $[a, b]$ ინტერვალის ყველა წერტილში და a წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან, ხოლო b წერტილში მარცხნიდან.

დახურულ შუალედში უწყვეტ ფუნქციას ბევრი შესანიშნავი თვისება აქვს. ამ თვისებებს ქვემოთ ვაჩვენებთ. ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი დამხმარე თეორემა, რომელიც მე-4 პარაგრაფის მე-2 პუნქტის მე-3 თეორემიდან გამომდინარეობს.

ლემა 1. თუ (x_n) კრებადი მიმდევრობის წევრები $[a, b]$ სეგმენტს ეკუთვნის, მაშინ (x_n) მიმდევრობის ზღვარიც ამავე სეგმენტს ეკუთვნის.

ამ თეორემის მართებულობა ცხადია, რადგანაც, თუ ყოველი წევრი $x_n \leq b$, მაშინ $\lim x_n \leq b$. ასევე, თუ $x_n \geq a$, მაშინ $\lim x_n \geq a$.

ე. ი. $a \leq \lim x_n \leq b$.

ახლა დავამტკიცოთ მეტად მნიშვნელოვანი ლემა.

ლემა 2. ნამდვილ რიცხვთა ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს კრებადი მიმდევრობა (ბოლცანო-ვაიერშტრასის პრინციპი).

დამტკიცება. მიმდევრობა (x_n) პირობის თანახმად შემოსაზღვრულია. ამიტომ არსებობს ისეთი $[a, b]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს (x_n) მიმდევრობის ყველა წევრს. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი ორ ისეთ ქვესეგმენტად, რომელთა სიგრძეები ტოლია. ისეთ სეგმენტებს კონგრუენტული სეგმენტები ვუწოდოთ. ამ სეგმენტებიდან ერთი მაინც შეიცავს მოცემული (x_n) მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს. ის სეგმენტი, რომელიც შეიცავს (x_n) მიმდევრობის წევრების უსასრულო სიმრავლეს, აღვნიშნოთ $[a_1, b_1]$ მოცემული (x_n) -დან რომელიმე წევრი, რომელიც $[a_1, b_1]$ სეგმენტს ეკუთვნის, აღვნიშნოთ x_{n_1} -ით. შემდეგ $[a_1, b_1]$ სეგმენტი გავყოთ კვლავ ორ კონგრუენტულ

სეგმენტად. ამ სეგმენტებიდან ავიღოთ ის სეგმენტი, რომელიც შეიცავს მოცემული (x_n) მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს. ამგვარად არჩეული სეგმენტი აღვნიშნოთ $[a_2, b_2]$. თუ ორივე სეგმენტი ამ სეგმენტებიდან შეიცავს (x_n) მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს, მაშინ ამ სეგმენტებიდან ერთ-ერთი ავიღოთ. (x_n) მიმდევრობის რომელიმე წევრი, რომელიც $[a_2, b_2]$ სეგმენტს ეკუთვნის, აღვნიშნოთ x_{n_2} . ასეთი პროცესით k საფეხურზე გამოვყოფთ (x_n) მიმდევრობიდან x_{n_k} წევრს, $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. ეს პროცესი უსაზღვროდ განვაგრძოთ. მივიღებთ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots$$

სადაც

$$a_k < x_{n_k} < b_k, \quad b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

აქედან ჩანს, რომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = 0.$$

ამგვარად, სეგმენტთა მიმდევრობა $([a_k, b_k])$ თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობაა. საიდანაც დავასკვნით, რომ არსებობს ერთადერთი რიცხვი ξ , რომელიც ეკუთვნის ყველა $[a_k, b_k]$ სეგმენტს. ეს ξ არის (x_{n_k}) მიმდევრობის ზღვარი, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$.

ამგვარად, ნამდვილ რიცხვთა შემოსაზღვრული (x_n) ნებისმიერი მიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს კრებადი მიმდევრობა.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი ამ სეგმენტზე შემოსაზღვრულია (ვაიერშტრასის I თეორემა).

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ წინააღმდეგობის დაშვებით, $f(x)$ ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $x_n \in [a, b]$, რომ

$$|f(x_n)| > n, \quad n = 1, 2, \dots$$

მიმდევრობა (x_n) შემოსაზღვრულია $\forall x_n \in [a, b]$ (a და b სასრული რიცხვებია და არა $\pm \infty$ სიმბოლოები). (x_n) მიმდევრობიდან ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა (x_{n_k}) , რომელიც კრებადია $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi \in [a, b]$. მაგრამ ξ წერტილში $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, ე. ი.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(\xi).$$

მეორე მხრივ $f(x_{n_k}) > n_k$, საიდანაც

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty.$$

ამ ორი ტოლობიდან მივიღებთ

$$f(\xi) = \infty,$$

რაც შეუძლებელია. ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე მხოლოდ შემოსაზღვრულია.

შევნიშნოთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ინტერვალში ან ნახევრადსეგმენტზე, იგი შეიძლება არ იყოს შემოსაზღვრული. მაგალითად,

ფუნქცია $f(x) = \frac{1}{x}$ $]0; 1[$ ინტერვალში უწყვეტია, მაგრამ ამ ინტერვალში იგი შემოუსაზღვრავია. ასე რომ, $f(x)$ ფუნქცია რომ განსაზღვრულია სეგმენტზე $[a, b]$, ძირითადი მნიშვნელობა აქვს ამ თეორემაში.

განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე X შუალედში. ეს შუალედი შეიძლება იყოს სეგმენტი, ნახევრადსეგმენტი ან ინტერვალის. $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე აღებულ X შუალედში აღვნიშნოთ E -თი. E სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზედა საზღვარი X -ში და აღვნიშნება $\sup_{x \in X} f(x)$.

E სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ქვედა საზღვარი X -ში და აღვნიშნება $\inf_{x \in X} f(x)$.

თუ E სიმრავლე არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული, მაშინ $\sup_{x \in X} f(x) = +\infty$; ხოლო თუ E სიმრავლე არ არის ქვემოდან შემოსაზღვრული, მაშინ $\inf_{x \in X} f(x) = -\infty$. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია X -ში. თუ X შუალედში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$f(\xi) = \sup_{x \in X} f(x),$$

მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია X შუალედში აღწევს თავის ზედა საზღვარს. ასევე, თუ არსებობს X -ში ისეთი ξ წერტილი, რომ ამ ξ წერტილში

$$f(\xi) = \inf_{x \in X} f(x),$$

მაშინ ამბობენ $f(x)$ ფუნქცია X შუალედში აღწევს თავის ქვედა საზღვარს.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა (ვაიერშტრასის II თეორემა).
თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი ამ სეგმენტზე მიაღწევს თავის ზედა და ქვედა საზღვრებს.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტია, მაშინ წინა თეორემით $f(x)$ ფუნქცია ამ სეგმენტზე შემოსაზღვრულია და შემოსაზღვრულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები (თავი III, § 2, n I, თ. I). ეს საზღვრები სათანადოდ M და m -ით აღვნიშნოთ,

$$\sup_{x \in X} f(x) = M, \quad \inf_{x \in X} f(x) = m.$$

უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე აკმაყოფილებს უტოლობას

$$m \leq f(x) \leq M.$$

ახლა უნდა ვაჩვენოთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს ξ და η წერტილები, სადაც

$$f(\xi) = M, \quad f(\eta) = m.$$

ავიღოთ დადებით რიცხვთა (ε_n) მიმდევრობა, კრებადი, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

რადგანაც E სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარია M , ზუსტი ზედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად $[a, b]$ სეგმენტზე გვექნება

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M := \forall \varepsilon > 0 \exists x_n \in [a, b] (M - \varepsilon_n < f(x_n) \leq M). \quad (1)$$

განვიხილოთ ამ x_n წერტილების მიმდევრობა (x_n). ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, $\forall x_n \in [a, b]$. ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად (x_n) მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ (x_{n_k}) მიმდევრობა, რომელიც $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე ξ წერტილისაკენაა კრებადი, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$. $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში უწყვეტია, ამის გამო $\xi \in [a, b]$ წერტილში გვექნება

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(\xi), \quad (2)$$

(1) დამოკიდებულებიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$(x_{n_k} \in [a, b]) \Rightarrow (M - \varepsilon_{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M).$$

რადგანაც $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_{n_k} = 0$, ამ დამოკიდებულებიდან ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $k \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M,$$

საიდანაც (2) ტოლობის საფუძველზე გვექნება

$$f(\xi) = M.$$

ამრიგად, $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს ისეთი ξ წერტილი, სადაც უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია აღწევს თავის ზედა საზღვარს.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს ისეთი η წერტილი, სადაც უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია აღწევს თავის ქვედა საზღვარს.

შევიზიწოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება შემოსაზღვრული იყოს ინტერვალში და ამავე ინტერვალში უწყვეტი, მაგრამ თავის ზედა საზღვარს ან ქვედა საზღვარს ვერ მიაღწიოს. მაგალითად, ფუნქცია $f(x) = x$ ინტერვალში $[0; 1]$ უწყვეტია და შემოსაზღვრული, მაგრამ თავის ზედა საზღვარს და ქვედა საზღვარს ვერ აღწევს,

$$\sup_{x \in [0, 1]} x = 1, \quad \inf_{x \in [0, 1]} x = 0.$$

აქ $f(x)$ ფუნქცია $[0, 1]$ სეგმენტზე არაა მოცემული.

ასევე ფუნქცია $f(x) = \arctg x$ განსაზღვრულია $[0, \infty[$ შუალედში, უწყვეტია და შემოსაზღვრული, მაგრამ თავის ზედა საზღვარს $\sup_{x \in [0, \infty[} \arctg x = \frac{\pi}{2}$

ვერ აღწევს. აქაც თეორემის პირობა არ სრულდება. ფუნქცია $f(x) = \arctg x$ განვიხილეთ $[0, \infty[$ ნახევრადსეგმენტზე.

შემდეგში $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციები აღვნიშნოთ $C[a, b]$.

2. თეორემები სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის მიერ მის ორ მნიშვნელობათა შორის ყველა მნიშვნელობების მიღწევის შესახებ.

თეორემა 3. თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტია და $f(a)$ და $f(b)$ სხვადასხვა ნიშნისაა, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ ამ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია ნულის ტოლი ხდება:

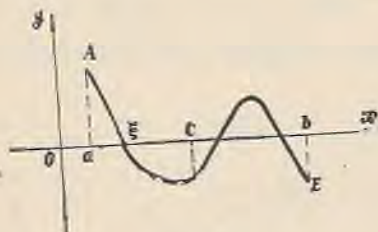
$$(f \in C[a, b]) \wedge (f(a) \cdot f(b) < 0) \Rightarrow ((\exists \xi \in [a, b] \wedge (f(\xi) = 0)))$$

(კოშის I თეორემა).

დამტკიცება. ეს თეორემა დამტკიცებულია თანამოყრდელ სეგმენტთა პრინციპის გამოყენებით.

ვთქვათ, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$

(ნახ. 50). $[a, b]$ სეგმენტი გავყოთ ორ კონგრუენტულ სეგმენტებად $[a, c]$, $[c, b]$, $c = \frac{a+b}{2}$. თუ $f(c) = 0$, მაშინ თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.



ნახ. 50

რებულობა. თუ $f(c) < 0$, მაშინ ავიღოთ $[a, c]$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ავიღოთ $[c, b]$ სეგმენტი. ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ $[a_1, b_1]$. ახლა ავიღოთ $[a_1, b_1]$ სეგმენტი და კვლავ გავყოთ ორ კონგრუენტულ სეგმენტად და ამ სეგმენტებიდან ის სეგმენტი ავიღოთ, რომლის ბოლო წერტილებში $f(x)$ ფუნქციას სხვადასხვა ნიშანი აქვს. თუ ორივე სეგმენტი აღვნიშნულ პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ ამ სეგმენტებიდან ერთ-ერთი ავიღოთ. ამგვარად არჩეული სეგმენტი აღვნიშნოთ $[a_2, b_2]$. ასეთი პროცესი უსაზღვროდ დავაგრძელოთ. მივიღებთ ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

სადაც

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

აქედან კი მივიღებთ $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

ამგვარად, სეგმენტთა მიმდევრობა $([a_n, b_n])$ თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობაა. ამის გამო არსებობს ერთადერთი ξ წერტილი, რომელიც ეკუთვნის ყველა სეგმენტს $[a_n, b_n]$. განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ξ წერტილში.

$f(\xi)$ არ შეიძლება იყოს დადებითი. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $f(\xi) > 0$, მაშინ ფუნქციის წერტილში უწყვეტი ფუნქციის თვისების თანახმად (§ 10, n 2, თ. 1) მოიძებნება ისეთი მიდამო $u(\xi)$, რომ ამ მიდამოში $f(x)$ იქნებოდა დადებითი, რაც შეუძლებელია. რადგანაც n იმდენად დიდი შეგვიძლია ავიღოთ, რომ $[a_n, b_n] \subset u(\xi)$ და ამ $[a_n, b_n]$ სეგმენტის ბოლო წერტილებში $f(x)$ ფუნქცია სხვადასხვა ნიშნისაა. ასევე, შეგვიძლია, ვაჩვენოთ, რომ $f(\xi)$ არ შეიძლება იყოს უარყოფითი. ამგვარად, ξ წერტილში მხოლოდ $f(\xi) = 0$.

ნახაზის მიხედვით ადვილი შესაძენეია კოშის თეორემის გეომეტრიული შინაარსი: თუ უწყვეტი $y = f(x)$ წირის A და B ბოლოები Ox ღერძის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ, მაშინ ეს წირი Ox ღერძს ერთ წერტილში მაინც გადაკვეთს.

ამ თეორემის გამოყენებით ადვილად დავამტკიცებთ

თეორემა 4. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, $f(a) = A$, $f(b) = B$ და C მოთავსებულია A და B რიცხვებს შორის, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $f(\xi) = C$ (კოშის II თეორემა);

$$((f(a) = A < C < B = f(b)) \wedge (f(x) \in C[a, b])) \Rightarrow ((\exists \xi \in [a, b] \wedge (f(\xi) = C))).$$

16. გ. კომლაძე

ე. ი. $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია ღებულობს ყველა მნიშვნელობას მის ორ მნიშვნელობათა შორის ამავე სეგმენტზე.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია, განვიხილოთ ფუნქცია $F(x) = f(x) - C$, მაშინ $F(a) = f(a) - C$ და $F(b) = f(b) - C$ ექნება სხვადასხვა ნიშანი. კოშის I თეორემის თანახმად $[a, b]$ სეგმენტში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ $F(\xi) = f(\xi) - C = 0$, საიდანაც ნათელია გამოთქმული თეორემის ჭეშმარიტება:

$$f(\xi) = C.$$

3. ფუნქციის თანაბრად უწყვეტობა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია X შუალედში.

ფუნქციას: $f: X \rightarrow Y$ ეწოდება X შუალედში თანაბრად უწყვეტი, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს X შუალედის წერტილებიდან დაშორებული ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ X შუალედის ყოველი x' და x'' წერტილებიდან, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x'' - x'| < \delta$ ჭეშმარიტია უტოლობა

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

ანუ

$$f: X \rightarrow Y \text{ თანაბრად უწყვეტია } X\text{-ში: } = \forall x' \in X \wedge \forall x'' \in X (|x'' - x'| < \delta \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon). \quad (3)$$

ამ განსაზღვრიდან ძნელი არ უნდა იყოს იმ დასკვნის გამოტანა, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია X შუალედში, მაშინ იგი უწყვეტია X შუალედის ყოველ x წერტილში. ამისათვის საკმარისია ავიღოთ $x' = x$, $x'' = x + \Delta x$, მაშინ (3) განსაზღვრიდან გვექნება

$$\forall x \in X \wedge \forall (x + \Delta x) \in X (|\Delta x| < \delta \Rightarrow |f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon).$$

გარეშეთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს მისი თანაბრად უწყვეტობა. ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ მაგალითი.

ფუნქცია $f(x) = \frac{1}{x}$ უწყვეტია $]0, 1[$ ინტერვალში. მართლაც, ყოველ $x \in]0, 1[$ წერტილში გვექნება

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)} < \frac{\Delta x}{x^2}, \text{ თუ } \Delta x > 0.$$

თუ ავიღებთ $0 < \Delta x < \delta = \varepsilon x^2$, მაშინ

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \frac{\Delta x}{x^2} < \varepsilon.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ δ არ შეიძლება აირჩეს x -საგან დამოუკიდებლად, როცა x უახლოვდება 0-ს.

მაშასადამე, ფუნქცია $f(x) = \frac{1}{x}$ არაა თანაბრად უწყვეტი $]0, 1[$ -ში.

ახლა დავამტკიცოთ ასეთი თეორემა.

თეორემა 5. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ამ სეგმენტზე (კანტორის თეორემა თანაბრად უწყვეტობის შესახებ).

თეორემა დავამტკიცოთ საწინააღმდეგოს დაშვებით.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტი არაა მისი განსაზღვრის $X = [a, b]$ სეგმენტზე. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი ε_0 დადებითი რიცხვი, რომ ყოველი δ დადებითი რიცხვისათვის $[a, b]$ სეგმენტზე მოიძებნება ისეთი ორი წერტილი x' და x'' , რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$|x'' - x'| < \delta \Rightarrow |f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon_0. \quad (4)$$

განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებითი რიცხვთა მიმდევრობა

$$(\delta_n) = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots).$$

აღებული δ_n რიცხვისათვის (4) პირობის თანახმად მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტზე ისეთი x'_n და x''_n წერტილი, რომ

$$|x''_n - x'_n| < \delta_n \quad (5)$$

ბოლო

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0. \quad (6)$$

წერტილთა მიმდევრობა (x_n) შემოსაზღვრულია, ამის გამო ბოლცანო-ვაიერშტრასის პრინციპის საფუძველზე შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი მიმდევრობა (x'_{n_k}) . ვთქვათ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = x_0.$$

ცხადია, $x_0 \in [a, b]$.

(5) უტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x''_{n_k} - x'_{n_k}) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}'' = \lim_{k \rightarrow \infty} [(x_{n_k}'' - x_{n_k}') + x_{n_k}'] = x_0.$$

(6) უტოლობიდან მივიღებთ

$$|f(x_{n_k}'') - f(x_{n_k}')| \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $x_0 \in [a, b]$, გვეძინება

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}') = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}'') = f(x_0).$$

ახლა, თუ გადავალთ (7) უტოლობაში ზღვარზე, როდესაც $k \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$|f(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

ანუ

$$0 \geq \varepsilon_0.$$

რაც შეუძლებელია. ამრიგად, დაშვება იმის შესახებ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია არაა თანაბრად უწყვეტი, კეშმარტივი არაა. მაშასადამე, კეშმარტივია: $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია. ამით თეორემა დამტკიცდა.

§ 12. შეკვეთილი ფუნქციები

1. თეორემები ფუნქციის შეკვეთადობის შესახებ. 1-ლი პარაგრაფის მე-7 პუნქტში განვსაზღვრეთ $f: X \rightarrow Y$ ფუნქციის შეკვეთილი ფუნქცია. სათანადო ნაბაზზე ნაჩვენები იყო, რომ $f(x)$ ფუნქციის შეკვეთილი ფუნქცია განისაზღვრება, თუ $f(x)$ ფუნქცია მკაცრად მონოტონურია. თუ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია ან კლებადი X სიმრავლეზე, $X = \{x | a \leq x \leq b\}$, მაშინ f ასახვა, $f: X \rightarrow Y$, ცხადია, ინიექციურია: X სიმრავლის სხვადასხვა წერტილში ფუნქცია სხვადასხვა მნიშვნელობას ღებულობს. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ x -ის სამი მნიშვნელობისათვის $x_1 < x_2 < x_3$, კოშის თეორემის თანახმად, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ მნიშვნელობებიდან გვექნება, რომ $f(x_2)$ მოთავსდება $f(x_1)$ -სა და $f(x_3)$ -ს შორის. თუ ფუნქცია ზრდადია, მივიღებთ $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$. ცხადია, $a \leq x \leq b$ სეგმენტის უწყვეტი $f: X \rightarrow Y$ ასახვა $f(a) \leq y \leq f(b)$ სიმრავლეზე მხოლოდ მაშინაა ინიექციური, როდესაც ეს $f(x)$ ასახვა $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე მკაცრად მონოტონურია.

ყოველ მკაცრად მონოტონურ ფუნქციას $f: X \rightarrow Y$, რომელიც განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა X სიმრავლეზე, აქვს შეკვეთილი ფუნქცია $f^{-1}: Y \rightarrow X$, განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა Y სიმრავლეზე, $Y = \{y | y = f(x)\}$. ამასთან $f^{-1}(y)$ ფუნქცია მკაცრად მონოტონურია.

მართლაც, გარკვეულობისათვის მივიღოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია. მაშინ ასახვა $f: X \rightarrow Y$ სურვეტციურია: $X = \{x | a \leq x \leq b\}$ სიმრავლეს ფუნქცია $f: X \rightarrow Y$ ასახავს $A \leq y \leq B$ სეგმენტზე, სადაც $A = f(a)$ და $B = f(b)$. ადვილი წარმოსადგენია, რომ $f: X \rightarrow Y$ ასახვა ბიექციურია, ე. ი. ეს ასახვა ურთიერთცალსახა ასახვაა:

$$\forall x_1, \forall x_2 \in [a, b] (x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)).$$

ეს დამოკიდებულება ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\forall y_1, \forall y_2 \in [A, B] (y_1 < y_2 \iff f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)).$$

მაშასადამე, ზრდად და უწყვეტ $f: X \rightarrow Y$ ფუნქციას აქვს შეკვეთილი ზრდად და უწყვეტი ფუნქცია $f^{-1}: Y \rightarrow X$, სადაც $X = \{x | a \leq x \leq b\}$, $Y = \{y | A \leq y \leq B\}$.

ამ წინასწარი მსჯელობის საფუძველზე ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 1. თუ $y = f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტია და ზრდადია, ამასთან $f(a) = A$, $f(b) = B$, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტის სახეა $[A, B]$ სეგმენტი და $y = f(x)$ ფუნქციის შეკვეთილი ფუნქცია $x = \varphi(y)$ უწყვეტია და ზრდადია $[A, B]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. თეორემის პირველი ნაწილის კეშმარტივება, რომ $[a, b]$ სეგმენტი ასახება $[A, B]$ სეგმენტზე, როცა $f(a) = A$ და $f(b) = B$, გამომდინარეობს წინა პარაგრაფში დამტკიცებული კოშის II თეორემიდან: $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია ღებულობს ყველა მნიშვნელობას მის ორ A და B მნიშვნელობებს შორის, $f([a, b]) = [A, B]$ და, რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია (და არაკლებადი) $[a, b]$ სეგმენტზე, ასახვა $f: [a, b] \rightarrow [A, B]$ ცალსახაა: $x \mapsto y$, სადაც $a \leq x \leq b$, და $A \leq y \leq B$. ამ ცალსახა დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს: თუ რაიმე y არ ეკუთვნის $[A, B]$ სეგმენტს, y -ს არ შეესაბამება არც ერთი წერტილი $[a, b]$ სეგმენტიდან. x -სა და $y = f(x)$ -ს შორის ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ შეგვიძლია განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის შეკვეთილი ფუნქცია $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ სეგმენტზე $A \leq y \leq B$. ცხადია, ამ $[A, B]$ სეგმენტზე ფუნქცია ზრდადია.

დავამტკიცოთ $x = \varphi(y)$ ფუნქციის უწყვეტობა.

ვთქვათ, y_0 წერტილი $[A, B]$ სეგმენტის შიგნით წერტილია, $y_0 \in [A, B]$. ამ y_0 -ს შეესაბამება $x_0 = \varphi(y_0)$. ავიღოთ ε დადებითი რიცხვი ისეთი, რომ $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$. ვთქვათ, $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. რადგანაც $f(x)$ ზრდადია, გვექნება $y_1 < y_0 < y_2$. ავიღოთ δ რიცხვი შემდეგი პირობით $0 < \delta < \min \{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$. ამგვარად, ნებისმიერად მცირე $\varepsilon > 0$ -სათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რომ

$$(|y - y_0| < \delta) \implies (|x - x_0| = |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon).$$

რაც გვიჩვენებს $x = \varphi(y)$ ფუნქციის უწყვეტობას y_0 წერტილში.

თუ y_0 სეგმენტის ბოლო წერტილია, მაგალითად, $B = y_0$, მაშინ $x_0 = b$. განვიხილოთ $|y_1, y_0|$, სადაც $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ და, მაშინ $0 < \delta < |y_0 - y_1|$. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|y - y_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon).$$

ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

თეორემა 2. თუ $y = f(x)$ უწყვეტი და ზრდადი ფუნქციაა $[a, b]$ ინტერვალში და

$$A = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad B = \sup_{x \in [a, b]} f(x);$$

კერძოდ, შეიძლება $A = -\infty, B = +\infty$,

მაშინ $[a, b]$ ინტერვალის სახეა $[A, B]$ და $y = f(x)$ -ის შექცევადი $x = \varphi(y)$ ფუნქცია უწყვეტია და ზრდადი $[A, B]$ -ში.

დამტკიცება. თუ B სასრულია, მაშინ მისი განსაზღვრის თანახმად, ისეთი y , რომელიც B -ზე მეტია, არ ეკუთვნის $f([a, b]) = \{f(x) | a < x < b\}$ სიმრავლეს. მაგრამ არც B -ს ტოლი y ეკუთვნის $f([a, b])$ -ს. მართლაც, თუ $B = f(x_1)$, $x_1 \in [a, b]$, მაშინ არსებობს $x_2 > x_1$ და $x_2 \in [a, b]$ -ს. პირობის თანახმად $y = f(x)$ მკაცრად მონოტონურია, ამიტომ $f(x_2) > f(x_1) = B$. ეს კი შეუძლებელია B -ს განსაზღვრის თანახმად.

ასევე შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ, თუ A სასრულია, ისეთი y , რომელიც არ აღემატება A -ს, არ ეკუთვნის $f([a, b])$ -ს.

ამგვარად, $f([a, b]) \subset]A, B[$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $f(]a, b[) =]A, B[$. ამისათვის საკმარისაა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი y , რომელიც $]A, B[$ -ს ეკუთვნის, ეკუთვნის $f(]a, b[)$ -ს.

ვთქვათ, $y \in]A, B[$, მაშინ, თეორემის პირობის თანახმად, მოიძებნება $x_1, x_2 \in]a, b[$, რომ

$$y_1 = f(x_1) < y < f(x_2) = y_2.$$

რადგანაც ფუნქცია ზრდადია, უნდა გვქონდეს $x_1 < x_2$. ფუნქცია $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ ინტერვალში. ამიტომ, როდესაც x მიიღებს $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე ყველა მნიშვნელობას, $f(x)$ ფუნქცია მიიღებს y_1 -სა და y_2 -ს შორის ყველა მნიშვნელობას. ამიტომ იარსებებს ისეთი x რომ $f(x) = y$.
გ. ი.

$$y = f(x) \in f(]a, b[).$$

ამრიგად,

$$f(]a, b[) =]A, B[.$$

$y = f(x)$ ფუნქციის ზრდადობის გამო $[a, b]$ ინტერვალში, არსებობს მისი შექცევადი ფუნქცია $x = \varphi(y)$. ამ ფუნქციის უწყვეტობის დამტკიცება ისე ჩატარდება როგორც 1-ლი თეორემის შემთხვევაში.

ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ თეორემა კლებადი $y = f(x)$ ფუნქციის შექცევადობის შესახებ.

თეორემა 3. თუ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და კლებადი $[a, b]$ სეგმენტზე და $f(a) = A, f(b) = B$, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტის სახეა $[A, B]$ სეგმენტი და $y = f(x)$ ფუნქციის შექცევადი ფუნქცია $x = \varphi(y)$ უწყვეტია და კლებადი $[A, B]$ სეგმენტზე.

თეორემა 4. თუ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და კლებადი $[a, b]$ ინტერვალში და

$$A = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad B = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

სადაც, შეიძლება,

$$A = -\infty, B = +\infty,$$

მაშინ $[a, b]$ -ს სახეა $[A, B]$ ინტერვალში და $y = f(x)$ -ის შექცევადი $x = \varphi(y)$ ფუნქცია უწყვეტია და კლებადი $[A, B]$ ინტერვალში.

2. შექცევადი ფუნქციები. 1) შევამოწმოთ, რომ $y = \sin x$ ფუნქცია $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე ზრდადია.

მართლაც, ავიღოთ x და x_0 რიცხვები, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{\pi}{2}$. საიდანაც, თუ $x > x_0$, გვექნება

$$0 < x - x_0 < \pi, \quad -\pi < x + x_0 < \pi.$$

აქედან კი მივიღებთ

$$0 < \frac{x - x_0}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \frac{x + x_0}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

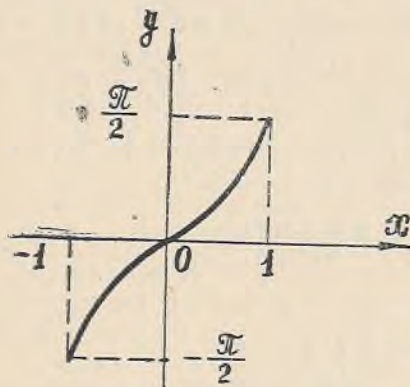
ამის გამო

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} > 0.$$

ფუნქცია $y = \sin x$ უწყვეტია $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე და ზრდადი. ამის გამო მისი შექცევა შეიძლება. გვექნება

$$x = \arcsin y, \quad y \in [-1, 1].$$

მიღებული ფუნქცია უწყვეტია და ზრდადი. თუ პარამეტრს აღვნიშნავთ x -ით და ფუნქციას y -ით, გვექნება $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (ნახ. 51).



ნახ. 51

ვაჩვენოთ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $y = \arcsin x$, მაშინ $x = \sin y$.
თუ $x \rightarrow 0$, მაშინ

$$y = \arcsin x \rightarrow 0.$$

გვექნება ტოლობა

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{y}{\sin y}.$$

თუ გამოვიყენებთ თეორემას ფუნქციის ზღვრის ქვეშ ცვლადთა შეცვლის შესახებ (§ 9, n 7, თ. 3), მივიღებთ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

2) ფუნქცია $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ კლებადია. მართლაც,

$$\cos x - \cos x_0 = 2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}.$$

რადგანაც

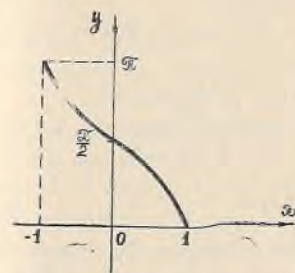
$$0 < x < \pi, \quad 0 < x_0 < \pi, \quad -\pi < -x_0 < 0,$$

მივიღებთ

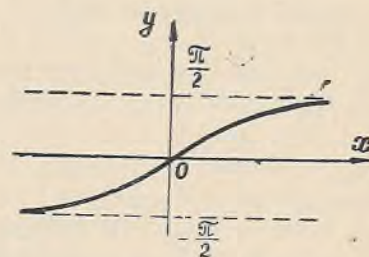
$$0 < \frac{x + x_0}{2} < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{x - x_0}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

სხვაობა $\cos x - \cos x_0 > 0$, როცა $x - x_0 < 0$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ $y = \cos x$ ფუნქცია $[0, \pi]$ შუალედში კლებადია. მაშინ არსებობს $y = \cos x$ -ის შებენი ფუნქცია $x = \arccos y$, $y \in [-1, 1]$, კლებადი და უწყვეტი.

ფუნქცია $y = \arccos x$ კლებადია და უწყვეტი $[-1, 1]$ შუალედში (ნახ. 52).



ნახ. 52



ნახ. 53

3) სრულიად ასევე ვაჩვენებთ, რომ $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ფუნქცია ზრდადი უწყვეტია, ამიტომ მისი შებენი $x = \operatorname{arctg} y$ ფუნქციაც, $y \in]-\infty, +\infty[$ ზრდადი უწყვეტი ფუნქცია იქნება. $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in]-\infty, +\infty[$ ნაჩვენებია 53-ე ნახაზზე.

4) $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in]0, \pi[$, კლებადი და უწყვეტი ფუნქციაა. ამიტომ

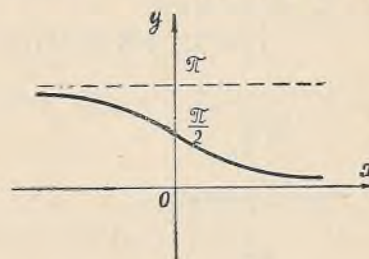
$$x = \operatorname{arctg} y, \quad y \in]-\infty, +\infty[,$$

$$x \in]0, \pi[$$

კლებადი და უწყვეტი ფუნქციაა.

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in]-\infty, +\infty[,$$

ნაჩვენებია 54-ე ნახაზზე.



ნახ. 54

აღვილი საჩვენებელია, რომ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$

5) მაჩვენებლიანი ფუნქციის

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

შებენი ფუნქციაა

$$x = \log_a y, \quad y \in]0, +\infty[, \quad x \in]-\infty, +\infty[.$$

$y = \log_a x$ — ჩვენთვის კარგად ცნობილი ლოგარითმული ფუნქციაა.

§ 14. ფუნქციის წამების წარბილადი. წამების სახეები

მე-11 პარაგრაფში (1) ზოგადად გავცანით ფუნქციის წერტილში წვეტის საკითხს. ქვემოთ ამ საკითხს უფრო დაწვრილებით შევხებით.

1. ფუნქციის წვეტა წერტილში. იმ x_0 წერტილს, სადაც დარღვეუ-

ლია $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი ან, გიტყვი, $f(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილში განიკდიის წყვეტას.

თუ x_0 წერტილი $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილია, შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x=x_0$ -სათვის, მაგრამ

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ არ მიისწრაფის ნულისკენ, როდესაც $\Delta x \rightarrow 0$.

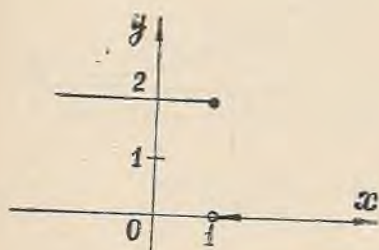
2) $f(x)$ ფუნქცია არაა განსაზღვრული x_0 წერტილში და, ცხადია, ფუნქციის ნაზრდს x_0 წერტილში აზრი არ აქვს. ამ შემთხვევაში, შევთანხმდეთ, x_0 წერტილს ეწოდოს $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე $u(x_0, \delta)$ მიდამოში. ე. ი. თუ რაიმე $\delta > 0$ -სათვის, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ მიდამოში მოიძებნება წერტილები, სადაც $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია.

მაგალითად, ფუნქცია

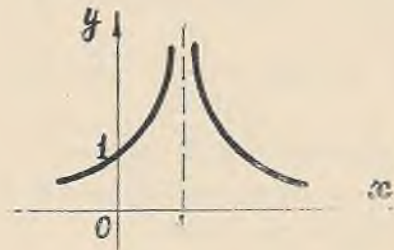
$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

განსაზღვრულია $x=1$ წერტილში (ნახ. 55). $f(1 + \Delta x) = 0$, როცა $\Delta x > 0$. გამოვთვალოთ ნაზრდი

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 0 - 2 = -2, \Delta x > 0.$$



ნახ. 55



ნახ. 56

ცხადია, დარღვეულია პირობა

$$(\Delta x \rightarrow 0) \Rightarrow (\Delta y \rightarrow 0),$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ფუნქციას აქვს,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0,$$

ცალმხრივი ზღვრები $x=1$ წერტილში და ეს ზღვრები განსხვავებულია.

ფუნქცია $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ განსაზღვრული არაა $x=1$ წერტილში და,

მაშასადამე, წყვეტილი ფუნქციაა ამ წერტილში (ნახ. 56).

2. ფუნქციის წყვეტის წერტილია კლასიფიკაცია. თუ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს $f(x_0-0)$ და $f(x_0+0)$ ცალმხრივი ზღვრები და ეს ზღვრები განსხვავებულია, მაშინ x_0 წერტილს ეწოდება ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. ამ შემთხვევაში x_0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული შეიძლება არ იყოს, ე. ი. არ არსებობდეს $f(x_0)$. 55-ე ნახაზზე ნაჩვენებია პირველი გვარის წყვეტის წერტილია $x_0=1$.

სხვაობას

$$\delta = f(x_0+0) - f(x_0-0)$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილში.

55-ე ნახაზზე განხილული ფუნქციისათვის $\delta = -2$.

თუ $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილია x_0 და $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, მაშინ x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ასაცილებელი წყვეტის წერტილი.

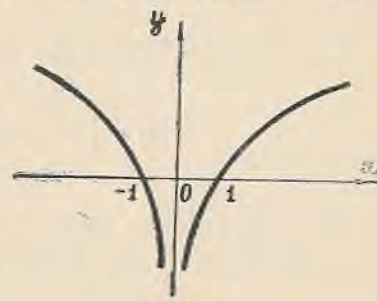
მაგალითად, $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ -სათვის გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \arctg \frac{1}{x} = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \arctg \frac{1}{x} = 0.$$

მაშასადამე, $x=0$ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ -სათვის.

ფუნქციის წყვეტის ყველა სხვა სახის წერტილებს (არა პირველი გვარის წყვეტის წერტილებს) ეწოდება ფუნქციის წყვეტის მეორე გვარის წერტილები.

მაგალითად, $f(x) = \ln|x|$ -თვის 0 წერტილი მეორე გვარის წყვეტის წერტილია (ნახ. 57), ასევე, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ -თვის $x=0$ წერტილი მეორე გვარის წყვეტის წერტილია, რადგანაც $\sin \frac{1}{x}$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში ზღვარი არ აქვს.

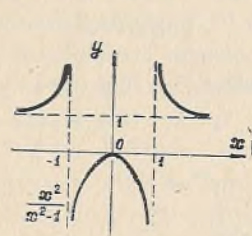


ნახ. 57

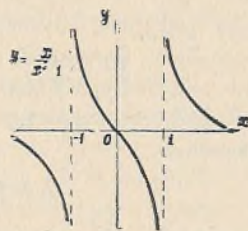
სავარჯიშო 30.

1. განსაზღვრეთ შემდეგი ფუნქციების 1) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$, 2) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

წყვეტის წერტილები და მოძებნეთ წყვეტის წერტილებში მარცხნიდან და მარჯვნიდან ზღვრები (ნახ. 58, 59).

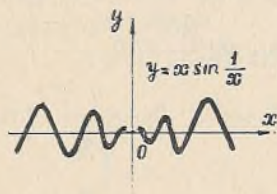


ნახ. 58

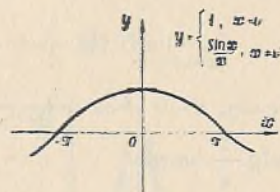


ნახ. 59

2. დამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$, უწყვეტია $x=0$ წერტილში. ააგეთ წირი (ნახ. 60).



ნახ. 60



ნახ. 61

3. განსაზღვრეთ შემდეგი ფუნქციის

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 4 - x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 4, & 2 < x < \infty, \end{cases}$$

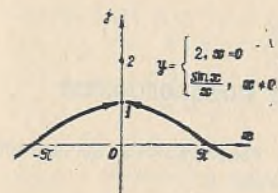
წყვეტის წერტილები და წყვეტის წერტილებში გამოთვალეთ მარცხნიდან და მარჯვნიდან ფუნქციის ზღვრები. ააგეთ სათანადო წირი.

4. დამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = 1$, უწყვე-

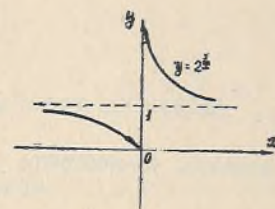
ტია $-\infty < x < +\infty$ შუალედში, ხოლო ფუნქცია $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = 2$ წყვეტილია $x=0$ წერტილში. ააგეთ ორივე წირი (ნახ. 61, 62).

5. ააგეთ ფუნქციები 1) $f(x) = 2^x$, 2) $f(x) = \frac{1}{1 + 2^x}$ და გამო-

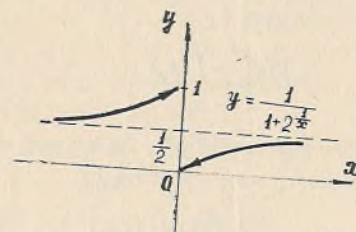
იკვლიეთ მონოტონურობა (ნახ. 63, 64).



ნახ. 62



ნახ. 63



ნახ. 64

ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

§ 1. ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრა. წარმოებულის გამოთვლიური და მათემატიკური აზრი

1. ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე X შუალედში. ამ შუალედში ავიღოთ რომელიმე x_0 წერტილი. შევადგინოთ ფუნქცია

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

რომელსაც x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციის გაყოფილ სხვაობას უწოდებენ და $f(x, x_0)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ,

$$f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1)$$

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია X შუალედის ყოველ x წერტილში, გარდა x_0 წერტილისა. x_0 წერტილში განსაზღვრული არაა. $f(x, x_0)$ გაყოფილი სხვაობა წარმოადგენს x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდის x არგუმენტის $x - x_0$ ნაზრდთან შეფარდებას. ავიღოთ X შუალედის ნებისმიერი x წერტილი. მივცეთ x -ს ნაზრდი Δx , მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მიიღებს ნაზრდს

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

და მაშინ გაყოფილი სხვაობა ასე ჩაიწერება

$$f(x + \Delta x, x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

გაყოფილი სხვაობა $f(x + \Delta x, x)$ განსაზღვრულია X შუალედის ყოველ x წერტილში, $\Delta x \neq 0$, თუ $x + \Delta x$ წერტილი არ გამოდის X შუალედიდან.

განვიხილოთ $f(x + \Delta x, x)$ გაყოფილი სხვაობის ზღვარი $\Delta x \rightarrow 0$. ეს ზღვარი შეიძლება არსებობდეს, შეიძლება არა. ვთქვათ, ამ გაყოფილი

სხვაობის ზღვარი არსებობს. ამ ზღვარს x წერტილში $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულს უწოდებენ და $f'(x)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულში x წერტილში ეწოდება x წერტილში $f(x)$ ფუნქციის $\Delta f(x)$ ნაზრდის x არგუმენტის Δx ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი მიიწრაფვის ნულისაკენ.

ფუნქციის წარმოებულის (3) განსაზღვრა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x, x), \quad (4)$$

ანუ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულში x წერტილში ეწოდება x წერტილში $f(x + \Delta x, x)$ გაყოფილი სხვაობის ზღვარს, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი Δx მიიწრაფვის ნულისაკენ.

გამოვთვალოთ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის წარმოებული.

1) მუდმივის წარმოებული. c მუდმივისათვის $\Delta c = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$, ამიტომ

$$c' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta x} = 0,$$

ანუ

$$c' = 0 \quad (5)$$

2) $f(x) = \sin x$.

გამოვთვალოთ $\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x$,

$$\Delta \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

$(\sin x)'$ -ის განსაზღვრიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x. \end{aligned}$$

ანუ

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (6)$$

ამგვარად, $\sin x$ -ს აქვს წარმოებული ყოველ x წერტილში, $-\infty < x < +\infty$.

3) $f(x) = \cos x$. (6)-ის ანალოგიურად მივიღებთ

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (7)$$

4) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. გვექნება

$$\Delta(x^n) = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n,$$

საიდანაც

$$\Delta(x^n) = C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

აქედან კი მივიღებთ

$$\Delta(x^n) = \Delta x \cdot n x^{n-1} + (\Delta x)^2 (C_n^2 x^{n-2} + \dots + (\Delta x)^{n-2}).$$

უკანასკნელიდან კი ადვილი მისაღებია

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(x^n)}{\Delta x} = n x^{n-1},$$

ანუ

$$(x^n)' = n x^{n-1}. \quad (8)$$

ამგვარად, x^n -ს აქვს წარმოებული ყოველ x წერტილში, $-\infty < x < +\infty$.

ამ ფორმულის დახმარებით გვექნება

$$x' = 1, (x^2)' = 2x, (x^3)' = 3x^2.$$

5) $f(x) = a^x$, $a > 0$. გვექნება

$$\Delta(a^x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

თუ მოვიგონებთ, $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a$, $\Delta x \rightarrow 0$, უკანასკნელი გამოსახულებიდან მივიღებთ

$$\Delta(a^x) \sim a^x \Delta x \ln a, \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

ამიტომ

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(a^x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

ანუ

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (9)$$

ამგვარად, a^x -ს, $a > 0$, აქვს წარმოებული ყოველ x წერტილში, $-\infty < x < +\infty$. თუ ავიღებთ $f(x) = e^x$ -ს, მივიღებთ

$$(e^x)' = e^x. \quad (10)$$

5) $f(x) = \log_a x$, $a > 0$. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $0 < x < +\infty$ შუალედში. გამოთვლები მოგვცემს

$$\begin{aligned} \Delta(\log_a x) &= \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \\ &= \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \sim \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}, \quad \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ამიტომ

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(\log_a x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x \ln a}}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a},$$

ანუ

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad (11)$$

ამგვარად, $\log_a x$, $a > 0$, ფუნქციას წარმოებული აქვს ყოველ x წერტილში, $x \in]0, +\infty[$. თუ ავიღებთ ნატურალურ ლოგარითმს $\ln x$, გვექნება $\ln e = 1$, რის გამოც

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (12)$$

არ მოგვეჩვენოს, რომ ყოველთვის არსებობს $f(x + \Delta x, x)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $\Delta x \rightarrow 0$.

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვიკვლიოთ

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

ფუნქციას (ნახ. 1) აქვს თუ არა წარმოებული.

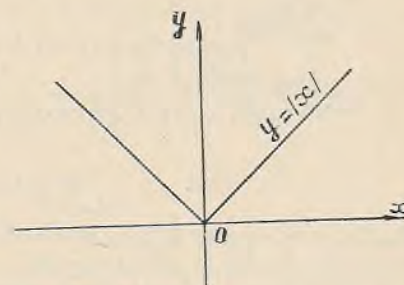
ავიღოთ $x = 0$, გვექნება

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, x) &= \\ &= \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x, x) = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0, \\ -1, & \Delta x < 0. \end{cases}$$

ამგვარად $f(x) = |x|$ ფუნქციის წარმოებული $x = 0$ წერტილში არ აქვს, რადგანაც $\frac{|\Delta x|}{x}$ -ის ზღვარი მარჯვნიდან არ უდრის $\frac{|\Delta x|}{x}$ -ის



ნახ. 1

ზღვარს მარცხნიდან. დანარჩენ წერტილებში, $x \neq 0$, ფუნქციის $f(x) = |x|$ -ს აქვს წარმოებული:

$$\Delta |x| = |x + \Delta x| - |x| \Rightarrow ||x + \Delta x| - |x|| = |x + \Delta x - x| = |\Delta x|.$$

საიდანაც

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta |x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

მივიღოთ, რომ $f(x) = |x|$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $-\infty < x < +\infty$ შუალედში, წარმოებული არ აქვს $x=0$ წერტილში. ეს კი გვიჩვენებს, რომ ფუნქციის უწყვეტობა ვერ უზრუნველყოფს წარმოებადობას. ე. ი. ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში არაა საკმარისი ფუნქციის წარმოებულის არსებობისათვის იმავე წერტილში. მაგრამ ადვილი საჩვენებელია, რომ, თუ ფუნქციას წარმოებული აქვს რაიმე წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია იმავე წერტილში. ამისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქციას წარმოებული აქვს x წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია იმავე წერტილში.

საზოგადოდ, „ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში“ ნიშნავს, არსებობს x წერტილის ისეთი მიდამო, სადაც განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული $f'(x)$.

დამტკიცება. (4) გამოსატყულების სასრული ზღვრის არსებობიდან გამომდინარეობს,

$$f(x + \Delta x, x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \quad (13)$$

სადაც $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$, როდესაც $\Delta x \rightarrow 0$. (13)-დან მივიღებთ

$$\Delta f(x) = [f'(x) + \alpha(\Delta x)] \Delta x.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow 0, \text{ როდესაც } \Delta x \rightarrow 0.$$

ე. ი.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0.$$

მიღებული ტოლობა ამტკიცებს, რომ, თუ $f'(x)$ არსებობს x წერტილში, $f(x)$ უწყვეტია იმავე x წერტილში.

ამგვარად, რაიმე წერტილში წარმოებადი ფუნქცია უწყვეტია იმავე წერტილში.

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან დავსკვნით, რომ ფუნქციის უწყვეტობა რაიმე წერტილში, აუცილებელი პირობაა ფუნქციის წარმოებადობისათვის იმავე წერტილში.

ისიც ადვილი შესამჩნევია, რომ x წერტილში $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის $f'(x)$ -ის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$f(x)$ ფუნქციას x წერტილში ჰქონდეს მარცხნიდან და მარჯვნიდან წარმოებულები და ეს წარმოებულები იყოს ტოლი:

$$f'_{x-0}(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0, \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0, \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'_{x+0}(x). \quad (14)$$

აქამდე საქმე გვქონდა სასრულ წარმოებულებთან.

ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქციას წერტილში აქვს უსასრულო წარმოებული, ტოლი $+\infty$ -ის, თუ ამ წერტილში

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = +\infty, \quad f'(x) = +\infty,$$

და აქვს უსასრულო წარმოებული, $-\infty$ -ის ტოლი, თუ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\infty, \quad f'(x) = -\infty.$$

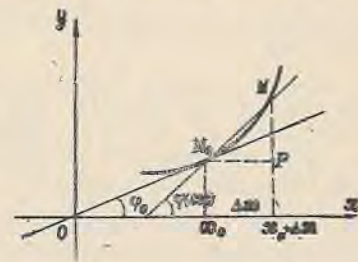
∞ -ის შემთხვევა გამოიკვეთა.

2. წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობა. განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია და უწყვეტია $[a, b]$ ინტერვალში (ნახ. 2). ამ ფუნქციის გრაფიკი L ასოთი აღვნიშნოთ. ავიღოთ $[a, b]$ ინტერვალის x -ის რომელიმე მნიშვნელობა, რომელიც x_0 -ით აღვნიშნოთ. მივცეთ x_0 -ს ნაზრდი Δx ისეთი მცირე, რომ $x_0 + \Delta x$ არ გამოვიდეს $[a, b]$ ინტერვალისა.

ვთქვათ, $y = f(x)$ წირზე M_0 და M ისეთი წერტილებია, რომელთა აბსცისებია სათანადოდ x_0 და $x_0 + \Delta x$. ასე რომ, ეს წერტილები განსაზღვრულია კოორდინატებით

$$M_0(x_0, f(x_0)),$$

$$M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)).$$



ნახ. 2

გავატაროთ M_0 და M_1 წერტილებზე წრფე. ამ წრფეს L წირის მკვეთი ეწოდება. რადგანაც M_0 წერტილი ფიქსირებულია, $M_0 M$ წრფის Ox ღერძთან დახრის კუთხე დ იცვლება L წირზე M წერტილის მდებარეობის ცვლილების მიხედვით. ე. ი. დ კუთხე Δx -ის ფუნქციაა, $\varphi = \varphi(\Delta x)$.

განვსაზღვროთ, $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$. ამისათვის განვიხილოთ $\overline{M_0 M}$ მონაკვეთის სიგრძე $|\overline{M_0 M}|$,

$$|\overline{M_0 M}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

რადგანაც კვადრატულ ფესვს ქვეშ რიცხვთა კვადრატების ჯამი გვაქვს, ცხადია,

$$(x - x_0) \rightarrow 0 \wedge (y - y_0) \rightarrow 0 \Rightarrow (|\overline{M_0 M}| \rightarrow 0) \quad (15)$$

და პირიქით

$$(|\overline{M_0 M}| \rightarrow 0) \Rightarrow (x - x_0) \rightarrow 0 \wedge (y - y_0) \rightarrow 0.$$

ამის გამო $M(x, y)$ წერტილი მისწრაფვის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილისაკენ შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

$$M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0), \text{ თუ } (x - x_0) \rightarrow 0 \wedge (y - y_0) \rightarrow 0.$$

ახლა გამოვარკვიოთ, თუ რას ნიშნავს $M \rightarrow M_0$ -კენ L წირის გასწვრივ და რა პირობებში გვექნება $\lim_{M \rightarrow M_0} M = M_0$, სადაც $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ მოცემული L წირის წერტილებია, Δx ნაზრდია x_0 წერტილში.

(15) გამოსახულების თანახმად გვექნება:

$$M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \rightarrow M_0(x_0, f(x_0)),$$

თუ

$$(\Delta x \rightarrow 0) \wedge ((f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \rightarrow 0).$$

ეს უკანასკნელი კი მაშინ შესრულდება, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში.

ამრიგად, L წირის გასწვრივ M წერტილი მისწრაფვის M_0 წერტილისაკენ, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში.

ახლა გამოვარკვიოთ, როდესაც $M \rightarrow M_0$, როდის აქვს $M_0 M$ წრფეს ე. წ. „ზღვრული მდებარეობა“.

M_0 წერტილზე გავატაროთ Ox ღერძის პარალელური წრფე. M წერტილზე გავატაროთ Oy ღერძის პარალელური წრფე. ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილი P ასოთი აღვნიშნოთ. $M_0 P M$ სამკუთხედიდან მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

საიდანაც

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (16)$$

გამოვთვალოთ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

ვთქვათ, x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

რადგანაც $\operatorname{arc} \operatorname{tg} u$ უწყვეტი ფუნქციაა, $-\infty < u < \infty$, მაშინ (16) გამოსახულებიდან მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f'(x_0).$$

ამრიგად,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f'(x_0) = \varphi_0.$$

ასწორედ M_0 წერტილზე გამავალი წრფე, რომელიც Ox ღერძთან φ_0 კუთხეს ადგენს, განსაზღვრავს $M_0 M$ წრფის ზღვრულ მდებარეობას, როდესაც $M \rightarrow M_0$, ანუ, როდესაც $\Delta x \rightarrow 0$. ამრიგად, დავამტკიცეთ შემდეგ თეორემა.

თეორემა 2. თუ $y = f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე $u(x_0, \delta)$ მიდამოში და x_0 წერტილში წარმოებადია, მაშინ $M_0(x_0, y_0)$ და $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, $x_0 + \Delta x \in u(x_0, \delta)$, წერტილებზე გამავალ წრფეს აქვს ზღვრული მდებარეობა, როდესაც $M \rightarrow M_0$ ადებული $y = f(x)$ წირის გასწვრივ და ეს ზღვრული მდებარეობის წრფე Ox ღერძთან ადგენს კუთხეს $\varphi_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f'(x_0)$.

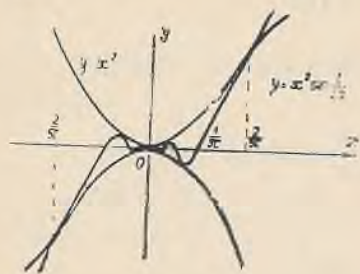
ახლა განვსაზღვროთ $y = f(x)$ წირის მხები წრფე $M_0(x_0, f(x_0))$ წერტილში. თუ არსებობს $y = f(x)$ წირის $M_0(x_0, y_0)$, $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ წერტილებზე გამავალი წრფის ზღვრული მდებარეობა, როდესაც M წერტილი მისწრაფვის M_0 წერტილისაკენ, ან რაც იგივეა, $\Delta x \rightarrow 0$, ამ ზღვრული მდებარეობის წრფეს ეწოდება $y = f(x)$ წირის მხები ($x_0, f(x_0)$) წერტილში (შემოკლებით: $f(x)$ წირის მხები x_0 წერტილში).

მოცემული $y = f(x)$ ფუნქციის x_0 წერტილში წარმოებადობიდან ადვილად დავსკვნით, რომ $y = f(x)$ წირს აქვს მხები ($x_0, f(x_0)$) წერტილში და მხების საკუთხო კოეფიციენტია $\operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x_0)$.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ნებისმიერ x წერტილში გეომეტრიულად წარმოადგენს $y = f(x)$ წირის $M(x, f(x))$ წერტილზე გატარებული მხების საკუთხო კოეფიციენტს, $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$.

შევნიშნოთ, რომ $y = f(x)$ წირის მხების ზემოთ მოტანილი განსაზღვრიდან არ გამომდინარეობს, რომ $M(x, f(x))$ წერტილზე გატარებულ

მხედს მხოლოდ ერთი წერტილი აქვს აღებულ წირთან ისე, როგორც წრეწირს მხედთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს. ამის ნათელსაყოფად განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია



ნახ. 3

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

ამ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია მე-3 ნახაზზე.

მოვნახოთ იმ მხედის საკუთხო კოფიციენტი, რომელიც $(0,0)$ წერტილზე გაივლის.

განსაზღვრის თანახმად,

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0,$$

ანუ

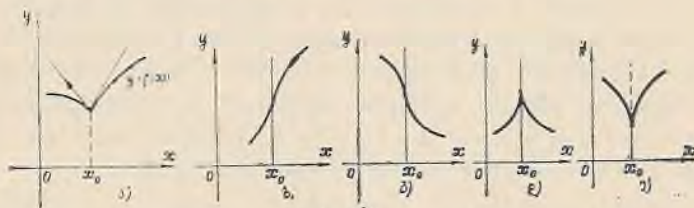
$$f'(0) = 0.$$

ასე რომ, $y = f(x)$ წირის მხედია $y = 0$ წრფე; მხედი ემთხვევა OX ღერძს. OX ღერძს კი აღებულ წირთან საერთო წერტილების უსასრულო სიმრავლე აქვს:

$$\frac{1}{x_k} = k\pi, \quad x_k = \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობის საფუძველზე შევისწავლოთ ფუნქციის უსასრულო წარმოებულის არსებობა.

განვიხილოთ მე-4 ნახაზზე გამოსახული ფუნქციები.



ნახ. 4

ა) ნახაზზე გამოსახულ ფუნქციას x_0 წერტილში არ აქვს წარმოებულის, რადგანაც

$$f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0).$$

ფუნქციას, რომელიც გამოსახულია ბ) ნახაზზე, აქვს უსასრულო წარმოებულის

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = +\infty.$$

ფუნქციას, რომელიც გამოსახულია გ) ნახაზზე, აქვს უსასრულო წარმოებულის

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = -\infty.$$

ფუნქციას, რომელიც გამოსახულია დ) ნახაზზე, არ აქვს წარმოებულის

$$f'(x_0 - 0) = +\infty, \quad f'(x_0 + 0) = -\infty.$$

ასევე ფუნქციას, რომელიც გამოსახულია ე) ნახაზზე, არ აქვს წარმოებულის,

$$f'(x_0 - 0) = -\infty, \quad f'(x_0 + 0) = +\infty.$$

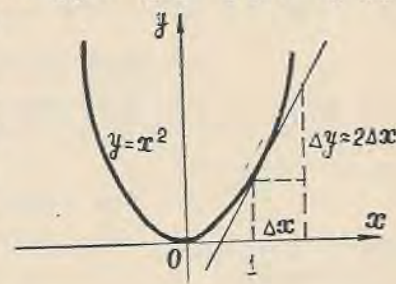
შემდეგში განვიხილავთ მარტო ისეთ ფუნქციებს, რომელთაც აქვთ სასრული წარმოებულის და ასეთ ფუნქციებს სასრულ წარმოებულის ან ფუნქციები ეწოდება. მაგრამ სიტყვა „სასრულს“ არ ვიხმართ და ვიტყვით „ფუნქცია წარმოებადი“ და ვიგულისხმებთ სასრულ წარმოებულს.

3. წარმოებულის მექანიკური მნიშვნელობა. წარმოებულის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ წარმოებულის $f'(x)$ იძლევა $y = f(x)$ ფუნქციის ცვლილებას არგუმენტის მიმართ. მაგალითად, თუ $f'(x)$ წარმოებულის რომელიმე წერტილში არის 2, ეს ნიშნავს, რომ მცირე შუალედში $[x, x + \Delta x]$ $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი 2-ჯერ მეტია, ვიდრე x არგუმენტის ნაზრდი და ეს ფარდობა მით უფრო ზუსტი იქნება, რაც უფრო მცირე იქნება Δx . მე-5 ნახაზზე $x = 1$ წერტილში $\Delta y \approx 2\Delta x$.

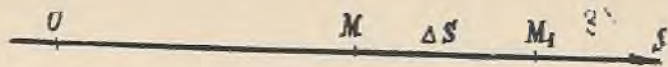
წარმოებულის უფრო ცხად სახეს მიიღებს მექანიკურად, თუ x -ის ქვეშ ვიგულისხმებთ დროს და f ფუნქციის ქვეშ, მატერიალური წერტილის იჯახს — გავლილ მანძილს.

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი მოძრაობს რომელიმე წრფეზე. ეს წრფე მივიღოთ OS

ღერძად (ნახ. 6). t დროის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება მოძრაი წერტილის რომელიმე მდებარეობა M . მანძილი $OM = S$. შეიძლება ვთქვათ, რომ მოძრაი წერტილის აბსცისა არის t დროის ფუნქცია:



ნახ. 5



ნახ. 6

თუ მოძრავე წერტილი t მომენტში იმყოფება M წერტილში, $S = OM = f(t)$ და $t + \Delta t$ მომენტში M_1 წერტილში, $S_1 = OM_1 = f(t + \Delta t)$, მაშინ მატერიალური წერტილის გადაადგილება Δt დროში იქნება

$$\Delta S = OM_1 - OM = f(t + \Delta t) - f(t).$$

ΔS არის მოძრავე წერტილის მიერ Δt დროში გავლილი მანძილი. ცხადია, შეფარდება,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

გამოსახავს S აბსცისის საშუალო ცვლილებას Δt დროში, ანუ გამოსახავს მოძრავე წერტილის საშუალო სიჩქარეს დროის $[t, t + \Delta t]$ შუალედში.

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ -ს ვწოდებთ მოძრავე წერტილის სიჩქარე t მომენტში. ე. ი.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t). \quad (16)$$

ამგვარად, თუ წერტილი მოძრაობს წრფეზე $S = f(t)$ კანონით, მაშინ $f'(t)$ განსაზღვრავს წერტილის სიჩქარეს t მომენტში.

წარმოებულთ შეგვიძლია დავახსიანოთ სხვა ფიზიკური მოვლენები. მაგალითად, ჰაერის ტემპერატურის ცვლილება დროის მიხედვით, ქიმიური რეაქციის სიჩქარე და სხვ.

§ 2. გაწარმოების ძირითადი წესები

1. ფუნქციათა ჯამის წარმოებული. ვთქვათ $u = g(x)$ და $v = \varphi(x)$ ფუნქციები რაიმე X შუალედში წარმოებადი ფუნქციებია. ავიღოთ შემდეგი გამოსახულება

$$f(x) = g(x) + \varphi(x).$$

მივცეთ x არგუმენტს Δx ნაზრდი, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მიიღებს ნაზრდს: $x \in X$, $x + \Delta x \in X$.

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= (g(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x)) - (g(x) + \varphi(x)) = \\ &= (g(x + \Delta x) - g(x)) + (\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)) = \\ &= \Delta g(x) + \Delta \varphi(x), \end{aligned}$$

ე. ი.

$$\Delta f(x) = \Delta u + \Delta v.$$

სათანადოდ Δx -ზე გაყოფით და ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

რადგანაც $u = g(x)$ და $v = \varphi(x)$ ფუნქციები წარმოებადი x წერტილში, მივიღებთ

$$(g(x) + \varphi(x))' = g'(x) + \varphi'(x),$$

ანუ

$$(u + v)' = u' + v'.$$

ამრიგად დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ $u = g(x)$ და $v = \varphi(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია x წერტილში, მაშინ $u + v = g(x) + \varphi(x)$ ფუნქცია, წარმოებადი იმავე წერტილში და ქვეშეა-რიტი ტოლობა

$$(u + v)' = u' + v'. \quad (1)$$

2. ფუნქციათა ნაპრავლის წარმოებული. ვთქვათ, $u = g(x)$ და $v = \varphi(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია რაიმე X შუალედში. ამ შუალედში ავიღოთ x და მივცეთ ნაზრდი Δx ისე, რომ $x + \Delta x \in X$. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = g(x) \varphi(x).$$

გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის ნაზრდი

$$\Delta f(x) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v,$$

ანუ

$$\Delta f(x) = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v.$$

მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილის Δx -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x. \quad (2)$$

რადგანაც $u = g(x)$ და $v = \varphi(x)$ ფუნქციები დამოუკიდებელია Δx -ზე, ამასთან ეს ფუნქციები წარმოებადი ფუნქციებია x წერტილში, (2) ტოლობიდან ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta x \rightarrow 0$, გვექნება

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x, \end{aligned}$$

$$(uv)' = u'v + v'u. \quad (3)$$

ამრიგად დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. თუ $u = g(x)$ და $v = \varphi(x)$ წარმოებადი ფუნქციები x წერტილში, მაშინ $uv = g(x)\varphi(x)$ ნამრავლიც წარმოებადი ფუნქციაა იმავე წერტილში და მისი მარტივი ტოლობა:

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

მე-3 ფორმულა სამი მამრავლი ფუნქციისათვის მიიღებს სახეს

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \quad (4)$$

ავიღოთ ნამრავლი $f(x) = cu(x)$, სადაც c მუდმივია. (3) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$(cu(x))' = cu'(x) + c'u(x),$$

ანუ

$$cu(x)' = cu'(x). \quad (5)$$

ამგვარად, მივიღებთ, რომ მართებულია

შედეგი. მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ წარმოებულის ნიშნის გარეთ.

3. ფუნქციათა შეფარდების წარმოებული. ვთქვათ, $u = g(x)$ და $v = \varphi(x)$ ფუნქციები რაიმე X შუალედში წარმოებადი ფუნქციებია, სადაც $\varphi(x) \neq 0$.

შევადგინოთ შეფარდება

$$f(x) = \frac{g(x)}{\varphi(x)}.$$

გამოვთვალოთ ნაზრდი

$$\Delta f(x) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - (v + \Delta v)u}{(v + \Delta v)v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

სათანადოდ Δx -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}. \quad (6)$$

ვთქვათ $\Delta x \rightarrow 0$, მაშინ $\Delta v \rightarrow 0$ (წარმოებადი ფუნქციის უწყვეტობის თანახმად). თუ გადავალთ (6) გამოსახულებაში ზღვარზე, როდესაც $\Delta x \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2},$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \quad (7)$$

ამგვარად დავამტკიცეთ თეორემა

თეორემა 3. თუ $u = g(x)$ და $v = \varphi(x)$ ფუნქციები წარმოებადი ფუნქციები x წერტილში და $\varphi'(x) \neq 0$, მაშინ ამ ფუნქციათა შეფარდება $\frac{u}{v} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$ წარმოებადი ფუნქციაა იმავე წერტილში და მისი მარტივი ტოლობა

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

მაშასადამე, ფუნქციათა შეფარდების წარმოებული უდრის მრიცხველის წარმოებულის ნამრავს მნიშვნელზე მინუს მნიშვნელის წარმოებულის ნამრავლი მრიცხველზე და ეს სხვაობა გაყოფილი მნიშვნელის კვადრატზე.

(7) ფორმულიდან ადვილი მისაღებია $\left(\frac{u}{c}\right)'$ და $\left(\frac{c}{v}\right)'$, სადაც c მუდმივია:

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c} \quad (8)$$

და

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}. \quad (9)$$

ზემოთ გამოვიყენეთ x^n ფუნქციის წარმოებული, როდესაც n ნატურალური რიცხვი იყო. ახლა ავიღოთ $f(x) = x^{-n}$ ფუნქცია და გამოვიყენოთ (9) ფორმულა:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

ამრიგად,

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

4. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა წარმოებულები. ჩვენთვის უკვე ცნობილია $\sin x$ და $\cos x$ -ის წარმოებულები;

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

ახლა გამოვთვალოთ $\operatorname{tg} x$ -ის წარმოებული. ვისარგებლოთ ფუნქციითა შეფარდების წარმოებულით:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ამგვარად,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (11)$$

ანალოგიური გამოთვლით მივიღებთ

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (12)$$

ს ა ე ა რ ჯ ი შ ო 31. 1. მონახეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

$$1) y = \frac{1}{4} x^4, \quad 2) y = \frac{1}{2} x^{-3}, \quad 3) y = \frac{1}{x},$$

$$4) y = x^{-4}, \quad 5) y = \frac{2x+1}{3}, \quad 6) y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3},$$

$$7) y = (a-bx)^2, \quad 8) y = \frac{10}{x^4}, \quad 9) y = x - \sin x,$$

$$10) y = x^2 \cos x, \quad 11) y = \sec x, \quad 12) y = \operatorname{cosec} x,$$

$$13) y = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad 14) y = \sin 2x, \quad 15) y = \cos 2x,$$

$$16) y = \operatorname{tg} 2x, \quad 17) y = (x^2+x) \sin x, \quad 18) y = \frac{\sin 2x}{x^2+1},$$

$$19) \frac{x^3+1}{x^2+5x+3}, \quad 20) y = \sin 3x + \sin x, \quad 21) y = \cos 3x - \cos 2x.$$

2. გამოთვალეთ წარმოებული მნიშვნელობანი:

$$1) f(x) = x - \cos x, \quad f' \left(\frac{\pi}{4} \right); \quad 2) f(x) = (x + \sin x) \cos x, \quad f' \left(\frac{\pi}{2} \right);$$

$$3) f(x) = \sin^2 x, \quad f' \left(\frac{\pi}{6} \right); \quad 4) f(x) = \cos^2 x, \quad f' \left(\frac{\pi}{3} \right);$$

$$5) f(x) = (2+x^2)^4, \quad f'(1); \quad 6) f(x) = \frac{(3x^2+1)^3}{(x^2+1)^2}, \quad f'(2).$$

§ 3. შერეული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, $y=f(x)$ განსაზღვრულია $]a, b[$ ინტერვალში, ხოლო y -ის მხიშვნელობათა სიმრავლე იძლევა $]A, B[$ ინტერვალს. თუ $y=f(x)$ ფუნქცია მკაცრად მონოტონურია და უწყვეტი, მაშინ ამ ფუნქციის შერეული ფუნქცია $x=g(y)$ მკაცრად მონოტონური და უწყვეტი ფუნქციაა $]A, B[$ ინტერვალში. ავიღოთ რაიმე $x, x \in]a, b[$ და მივცეთ ნაზრდი Δx ისეთი, რომ $x+\Delta x \in]a, b[$.

მაშინ $y=f(x)$ ფუნქცია მიიღებს ნაზრდს $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$, $y+\Delta y \in]A, B[$. და, პირიქით, თუ y მიიღებს ნაზრდს Δy -ს, $y+\Delta y \in]A, B[$, მაშინ $x=g(y)$ მიიღებს ნაზრდს, $x+\Delta x=g(y+\Delta y)$, $x+\Delta x \in]a, b[$. იმის გამო, რომ $f(x)$ და $g(y)$ უწყვეტი ფუნქციებია,

$$(\Delta x \rightarrow 0) \Rightarrow (\Delta y \rightarrow 0) \text{ და } (\Delta y \rightarrow 0) \Rightarrow (\Delta x \rightarrow 0). \quad (1)$$

ვთქვათ, $x=g(y)$ ფუნქციას y წერტილში აქვს ნულისაგან განსხვავებული წარმოებული, მაშინ ვაჩვენოთ, რომ $y=f(x)$ ფუნქციას x წერტილში აქვს წარმოებული.

მართლაც,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

ამ ტოლობიდან (1) დამოკიდებულების საფუძველზე მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{g'(y)}.$$

საიდანაც

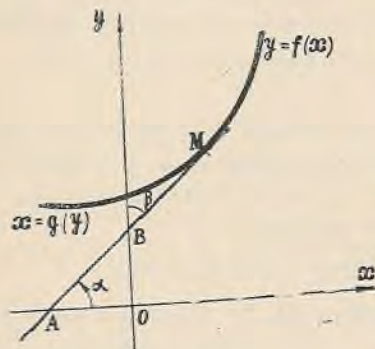
$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}. \quad (2)$$

ამ ფორმულით დავამტკიცებთ შემდეგი თეორემას:

თეორემა. ვთქვათ, რაიმე $a < x < b$ შუალედში $y=f(x)$ მკაცრად მონოტონური უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო $x=g(y)$ მისი შერეული ფუნქციაა $A < y < B$ შუალედში. თუ $g(y)$ ფუნქციას აქვს ნულისაგან განსხვავებული წარმოებული y წერტილში, $y \in]A, B[$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული x წერტილში, $x \in]a, b[$ და მართებულია ტოლობა

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

გავარჩიოთ გეომეტრიულად $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებულისა და მისი შებენი $x=g(y)$ ფუნქციის წარმოებულებს შორის დამოკიდებულება (ნახ. 7). წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობიდან გვეჩვენება



ნახ. 7

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \widehat{XAM} = f'(x),$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \widehat{YBM} = g'(y).$$

$$\text{რადგანაც } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \text{ მაშინ}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta},$$

ანუ

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

ეს დამოკიდებულება ასეც შეგვიძლია დავწეროთ

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

ამგვარად, წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობიდან მარტივად მიიღება პირდაპირი ფუნქციის წარმოებულისა და მისი შებენი ფუნქციის წარმოებულებს შორის (2) დამოკიდებულება.

გამოვთვალოთ ზოგიერთი შებენი ფუნქციის წარმოებულები.

1) $y = \arcsin x$. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $-1 \leq x \leq 1$ შუალედში, ფუნქციის მნიშვნელობათა შუალედი $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

$y = \arcsin x$ ფუნქცია $-1 \leq x \leq 1$ შუალედში ზრდადი უწყვეტი ფუნქციაა. მისი შებენი $x = \sin y$ ფუნქცია წარმოებალია $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ შუალედში. იქ, სადაც $(\sin y)' \neq 0$,

თეორემის თანახმად ადგილი ექნება დამოკიდებულებას

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}. \quad (3)$$

$$\cos y \neq 0, \text{ თუ } y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

რადგანაც $\cos y > 0$, თუ $y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} > 0, x \in] -1, 1[.$$

(3) ფორმულიდან მივიღებთ

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in] -1, 1[. \quad (4)$$

ამ ფორმულიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ $y = \arcsin x$ წივს $x = 1$, $x = -1$ წერტილებში აქვს Oy ღერძის პარალელური მხები წრფეები.

2) $y = \arccos x$. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $-1 \leq x \leq 1$ შუალედში. ფუნქციის მნიშვნელობათა შუალედი $0 \leq y \leq \pi$.

$y = \arccos x$ -ის შებენი ფუნქციაა $x = \cos y$. შებენი ფუნქციის წარმოებულის ფორმულით მივიღებთ

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y}, y \in] 0, \pi[. \quad (5)$$

რადგანაც $\sin y > 0$, თუ $0 < y < \pi$, ამიტომ

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}, x \in] -1, 1[.$$

სათანადო ჩასმა (5) ფორმულაში მოგვცემს

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in] -1, 1[. \quad (6)$$

3) $y = \operatorname{arctg} x$. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $-\infty < x < +\infty$. ფუნქციის მნიშვნელობათა შუალედი $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

$y = \operatorname{arctg} x$ -ის შებენი ფუნქციაა $x = \operatorname{tg} y$. გვეჩვენება

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

ამგვარად,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (7)$$

4) $y = \operatorname{arccotg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$. შებენი ფუნქციაა $x = \operatorname{ctg} y$. შებენი ფუნქციის წარმოებულის ფორმულით გვეჩვენება

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

ამგვარად,

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \quad (8)$$

1. რთული ფუნქციის წარმოებული. განვიხილოთ რთული ფუნქცია $y=f[g(x)]$, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე X შუალედში. შემოვიღოთ აღნიშვნა $u=g(x)$, მაშინ, ნაცვლად $y=f[g(x)]$ ფუნქციისა, გვექნება ფუნქციათა ჯაჭვი

$$y=f(u), \quad u=g(x).$$

u ცვლადს ეწოდება დამხმარე ცვლადი.

დავამტკიცოთ თეორემა რთული ფუნქციის გაწარმოების შესახებ.

თეორემა 1. თუ $u=g(x)$ ფუნქცია არ გუმენტის რაიმე x მნიშვნელობისათვის წარმოებადია, ხოლო $f(u)$ u -ს სათანადო მნიშვნელობისათვის წარმოებადია, მაშინ რთული ფუნქციის $y=f[g(x)]$ -ის წარმოებული არსებობს და ადგილი აქვს ტოლობას

$$(f[g(x)])' = f'(u) \cdot g'(x). \quad (1)$$

ე. ი. რთული ფუნქციის წარმოებული ტოლია მოცემული ფუნქციის წარმოებულისა დამხმარე ცვლადით, გამრავლებული დამოუკიდებელი ცვლადით დამხმარე ცვლადის წარმოებულზე.

დამტკიცება. რადგანაც $y=f(u)$ ფუნქცია წარმოებადია

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u).$$

ანუ

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + (\Delta u),$$

აქედან

$$\Delta y = (f'(u) + \alpha(\Delta u)) \Delta u, \quad (2)$$

სადაც $\alpha(\Delta u)$ უსასრულოდ მცირეა, როდესაც $\Delta u \rightarrow 0$.

ახლა ავიღოთ $u=g(x)$ ფუნქცია. x -ს მივცეთ ნაზრდი Δx , მაშინ u მიიღებს ნაზრდს Δu -ს. პირობის თანახმად $u=g(x)$ ფუნქცია წარმოებადია, მაშასადამე, უწყვეტია. ამიტომ $\Delta u \rightarrow 0$, როდესაც $\Delta x \rightarrow 0$. ამასთან Δu ნაზრდმა თავისი ცვლილებისას შეიძლება ნულის მნიშვნელობაც მიიღოს. ამ შემთხვევაში $\alpha(\Delta u)$ განსაზღვრული არ არის. ვიგულისხმოთ $\alpha(\Delta u)$ ნულის ტოლად, როდესაც $\Delta u=0$. ამ შემთხვევაშიც (2) ტოლობას ადგილი აქვს.

(2) ტოლობის ორივე ნაწილი გავყოთ Δx -ზე, მივიღებთ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (f'(u) + \alpha(\Delta x)) \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (3)$$

როდესაც $\Delta x \rightarrow 0$, მაშინ $\Delta u \rightarrow 0$ და, ცხადია, $\alpha(\Delta u) \rightarrow 0$. (3) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(u) + \alpha(\Delta u)) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

ანუ

$$(f[g(x)])' = f'(u) g'(x).$$

მაშასადამე, (1) ტოლობა მართებულია.

(1) ფორმულა ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

ვთქვათ, გვაქვს ფუნქცია $y=f[g(\varphi(x))]$. მაშინ აღნიშვნებით

$$v = \varphi(x), \quad u = g(v)$$

მივიღებთ ფუნქციათა ჯაჭვს

$$y = f(u), \quad u = g(v), \quad v = \varphi(x).$$

ხოლო წარმოებულისათვის გვექნება ფორმულა

$$y' = f'(u) g'(v) \varphi'(x). \quad (4)$$

ეს ფორმულა ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x.$$

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვთვალოთ $y=(\sin x + 5x^2)^9$ -ის წარმოებული.

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\sin x + 5x^2 = u$, მაშინ გვექნება ფუნქციათა ჯაჭვი

$$y = u^9, \quad u = \sin x + 5x^2.$$

საიდანაც

$$y'_u = 9u^8, \quad u'_x = \cos x + 10x.$$

რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$((\sin x + 5x^2)^9)' = 9u^8 \cdot (\cos x + 10x),$$

ანუ

$$((\sin x + 5x^2)^9)' = 9(\sin x + 5x^2)^8 (\cos x + 10x).$$

შეიძლება ეს მაგალითი ასე გამოგვეთვალოს:

$$((\sin x + 5x^2)^9)' = 9(\sin x + 5x^2)^8 \cdot (\sin x + 5x^2)'$$

ე. ი. ჯერ გავაწარმოთ მოცემული $(\sin x + 5x^2)^9 = u^9$ ფუნქცია u დამხმარე ცვლადით, $u^9 = 9u^8$ და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ u'_x -ზე, ანუ

$(\sin x + 5x^2)'$ -ზე. ამ შემთხვევაში სათანადო აღნიშვნები საჭირო არაა — ვგულისხმობთ აღნიშვნებს და შედეგს ზეპირად ვწერთ.

მაგალითად, გამოვთვალოთ,

$$y = \ln^5 \sin(2x + 3) = (\ln(\sin(2x + 3)))^5.$$

გვექნება

$$\begin{aligned} y' &= ((\ln(\sin(2x + 3)))^5)' = 5(\ln(\sin(2x + 3)))^4 \cdot (\ln(\sin(2x + 3)))' = \\ &= 5(\ln(\sin(2x + 3)))^4 \cdot \frac{1}{\sin(2x + 3)} \cdot (\sin(2x + 3))' = \\ &= 5 \ln^4 \sin(2x + 3) \cdot \frac{1}{\sin(2x + 3)} \cdot \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = \\ &= 5 \ln^4 \sin(2x + 3) \cdot \operatorname{ctg}(2x + 3) \cdot 2 = \\ &= 10 \ln^4 \sin(2x + 3) \cdot \operatorname{ctg}(2x + 3). \end{aligned}$$

2. ნამდვილმაჩვენებლიანი ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული. განვიხილოთ ფუნქცია $y = x^\alpha$, $x > 0$, α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. ეს ფუნქცია წარმოვადგინოთ e რიცხვის ხარისხით:

$$y = e^{\alpha \ln x}.$$

მივიღეთ რთულ ფუნქცია:

$$y = e^u, \quad u = \alpha \ln x.$$

სათანადო გაწარმოება მოგვცემს

$$(e^u)'_u = e^u, \quad (\alpha \ln x)'_x = \frac{\alpha}{x},$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულაში, გვექნება

$$(x^\alpha)'_x = (e^{\alpha \ln x})'_x = (e^u)'_u \cdot (\alpha \ln x)'_x = e^u \frac{\alpha}{x}.$$

უკანასკნელში e^u შევცვალოთ $e^u = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$, მაშინ გვექნება

$$(x^\alpha)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

ამგვარად,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 1 \quad (5)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ მთელი დადებითი მაჩვენებლით ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა მართებულია ნამდვილმაჩვენებლიანი ხარისხოვანი ფუნქციისათვისაც:

ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული ტოლია დამოუკიდებელი ცვლადის ხარისხის მაჩვენებლისა და დამოუკიდებელი ცვლადის ერთით ნაკლებ ხარისხზე ნამრავლისა.

3. ლოგარითმული წარმოებული. განვიხილოთ ფუნქცია $y = \ln \varphi(x)$. სადაც $\varphi(x)$ დადებითი წარმოებადი ფუნქციაა. დამხმარე ცვლადის შემოტანით $u = \varphi(x)$, მივიღებთ ფუნქციასა $y = \ln u$, $u = \varphi(x)$.

$$y = \ln u, \quad u = \varphi(x).$$

გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების ფორმულა

$$y'_x = (\ln u)' \varphi'(x) = \frac{1}{u} \varphi'(x).$$

თუ შევიტანოთ u -ს მნიშვნელობას უკანასკნელში, გვექნება

$$y'_x = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

ანუ

$$(\ln \varphi(x))' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}. \quad (7)$$

უკანასკნელ ფორმულას ეწოდება ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებულის ფორმულა.

მაგალითად, ვიპოვოთ $y = \ln(\sin x + x^2 + 2)$ ფუნქციის წარმოებული. გვექნება

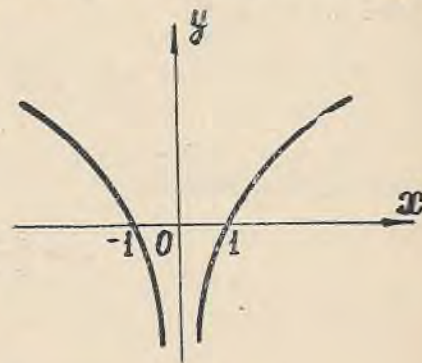
$$y' = \frac{(\sin x + x^2 + 2)'}{\sin x + x^2 + 2} = \frac{\cos x + 2x}{\sin x + x^2 + 2}.$$

4. $y = \ln |x|$ ფუნქციის წარმოებული. $\ln x$ ფუნქცია განსაზღვრულია მხოლოდ $x > 0$ მნიშვნელობებისათვის. მაგრამ შეიძლება განვიხილოთ $\ln |x|$, რომელიც განსაზღვრულია $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ შუალედებში (ნახ. 69). ლოგარითმული წარმოებულის (7) ფორმულის საფუძველზე

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} (|x|)', \quad x \neq 0. \quad (8)$$

თუ გავიხსენებთ $y = |x|$ -ფუნქციის გაწარმოებას (§ 1, 1, ნახ. 8), მივიღებთ $y = x$, $x > 0$; $y = -x$, $x < 0$, პირველ შემთხვევაში $y' = 1$

და მეორე შემთხვევაში $y' = -1$. ამის გამო (8) ფორმულა ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ



ნახ. 8

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} \operatorname{sign} x = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad (9)$$

სადაც

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

5. პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, x და y ცვლადებს შორის პარამეტრულადაა მოცემული დამოკიდებულება:

$$x = \varphi(t), \quad y = g(t), \quad \alpha < t < \beta, \quad (10)$$

სადაც t პარამეტრია — დამხმარე ცვლადია. (10) დამოკიდებულება განსაზღვრავს x -ის რთულ ფუნქციას. მართლაც, პირველი განტოლებიდან განვსაზღვროთ t ცვლადი (თუ ეს შესაძლებელია) $t = \psi(x)$ და შევიტანოთ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ

$$y = g(\psi(x)).$$

ახლა ვისარგებლოთ რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულით, გვექნება

$$y'_x = g'(t) t'_x. \quad (11)$$

თუ გამოვიყენებთ შექცეული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულას

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

მაშინ (11) მოგვცემს:

$$y'_x = g'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

ამგვარად, პარამეტრულად მოცემული (10) ფუნქციის წარმოებული გამოისახება ფორმულით

$$y'_x = \frac{g'(t)}{\varphi'(t)}, \quad (12)$$

ან უფრო მოკლედ

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობით დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. თუ y ფუნქცია x არგუმენტისაგან მიიღება პარამეტრულად $x = \varphi(t)$, $y = g(t)$ შუალედში $\alpha < t < \beta$, სადაც $\varphi(t)$ და $g(t)$ ფუნქციები წარმოებადია და $\varphi'(t) \neq 0$, მაშინ y ფუნქციის წარმოებულის x -ით გამოისახება ფორმულით

$$y'_x = \frac{g'(t)}{\varphi'(t)}.$$

მაგალითად, $x = t^5$, $y = \ln t$, $t > 0$. გამოვთვალოთ y'_x -ით. გვექნება $x'_t = 5t^4$, $y'_t = \frac{1}{t}$, მაშინ

$$y'_x = \frac{\frac{1}{t}}{5t^4} = \frac{1}{5t^5} = \frac{1}{5x}, \quad x > 0.$$

6. წარმოებულის აღნიშვნები. $y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის აღნიშვნა, რომელიც ჩვენ ვიხმარეთ, $y' = f'(x)$, ეკუთვნის ლაგრანეს. იხმარება აგრეთვე აღნიშვნები:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) \text{ — ეკუთვნის ლაიბნიცს,}$$

$$\dot{y} = \dot{f}(x) \text{ — ეკუთვნის ნიუტონს,}$$

$$Dy = Df(x) \text{ — ეკუთვნის კოშის.}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც ფუნქციაში არგუმენტი არ წერია ან ერთზე მეტი არგუმენტი, მაშინ წარმოებულს ინდექსით აღვნიშნავთ. მაგალითად, $x'_t(t, s)$ ნიშნავს x ფუნქციის წარმოებულს t ცვლადით, s ცვლადი მუდმივადია ჩათვლილი.

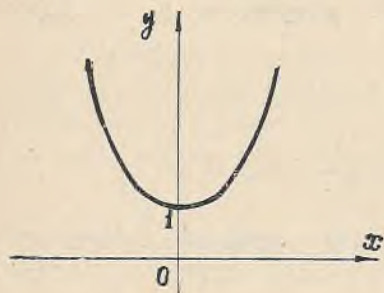
7. ჰიპერბოლური ფუნქციები და ჰიპერბოლურ ფუნქციათა წარმოებულები. ფუნქციებს $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ სათანადოდ უწოდებენ ჰიპერბოლურ კოსინუსს და ჰიპერბოლურ სინუსს და სიმბოლურად სათანადოდ $\operatorname{ch} x$ -ით და $\operatorname{sh} x$ -ით აღნიშნავენ,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

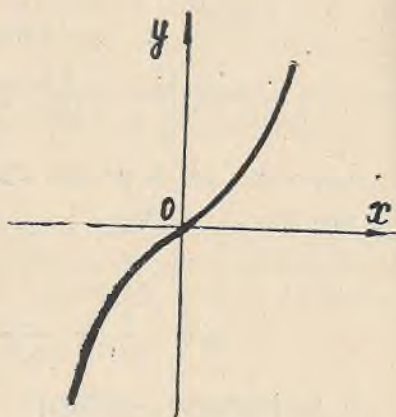
ეს ფუნქციები უწყვეტია მთელ OX ღერძზე, $-\infty < x < +\infty$, რაც გამომდინარეობს მაჩვენებლიანი ფუნქციის უწყვეტობიდან და სათანადოდ

უწყვეტ ფუნქციათა ჯამის უწყვეტობიდან. ჰიპერბოლური კოსინუსის და ჰიპერბოლური სინუსის გრაფიკები მოცემულია მე-9 და მე-10 ნახაზებზე. სახელწოდება ჰიპერბოლური კოსინუსი და ჰიპერბოლური სინუსი დაკავშირებულია იმასთან, რომ ფორმულები

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t \quad (13)$$



ნახ. 9



ნახ. 10

იძლევა ჰიპერბოლას პარამეტრული სახით, იმის მსგავსად, როგორც ე. წ. წრიული ფუნქციები

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t.$$

იძლევა წრეწირს. მართლაც, t ცვლადის გამორიცხვით (13) განტოლებებიდან მივიღებთ ტოლგვერდა ჰიპერბოლის განტოლებას

$$x^2 - y^2 = a^2$$

ისევე, როგორც წრეწირის პარამეტრული განტოლებებიდან t -ს გამორიცხვით მივიღებთ წრეწირის განტოლებას: $x^2 + y^2 = a^2$.

აღვილი დასამტკიცებელია, რომ ჰიპერბოლური კოსინუსს და ჰიპერბოლური სინუსს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x,$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

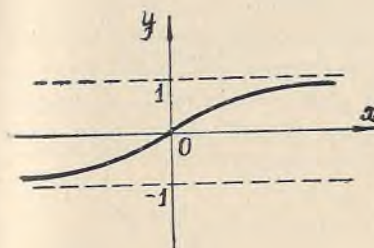
მაგალითად დავამტკიცოთ პირველი ფორმულის ჭეშმარიტება:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1. \end{aligned}$$

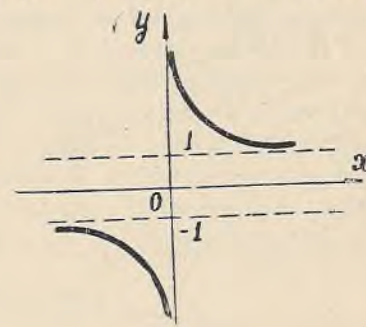
ანალოგიურად წრიული $\operatorname{tg} x$ და $\operatorname{ctg} x$ -ისა განისაზღვრება ჰიპერბოლური ტანგენსი $\operatorname{th} x$ და ჰიპერბოლური კოტანგენსი $\operatorname{cth} x$,

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$\operatorname{th} x$ ყველგან $-\infty < x < +\infty$ უწყვეტი ფუნქციაა (ნახ. 11), ხოლო $\operatorname{cth} x$ უწყვეტი ფუნქციაა $x=0$ წერტილის გამოკლებით: $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$ (ნახ. 12).



ნახ. 11



ნახ. 12

გამოვთვალოთ ჰიპერბოლური კოსინუსის და ჰიპერბოლური სინუსის წარმოებულები. რადგანაც $(e^x)' = e^x$, $(e^{-x})' = -e^{-x}$, გვექნება

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

ამგვარად,

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

გამოვთვალოთ ჰიპერბოლური ტანგენსის და ჰიპერბოლური კოტანგენსის წარმოებულები:

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x},$$

ანუ

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

ასევე

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

(ქ.)

8. არაცხადი ფუნქციის წარმოებულს. ვთქვათ, გვაქვს ფუნქცია $y=f(x)$, $f'(x)>0$, განსაზღვრული განტოლებიდან $x^2+y^2=1$. ამ განტოლებიდან განვსაზღვრავთ y -ს და შემდეგ მოვინახავთ მის წარმოებულს:

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

მაგრამ ზოგჯერ არ შეგვიძლია $F(x, y)=0$ განტოლების ამოხსნა, ელემენტარული საშუალებებით. ამიტომ უნდა მივმართოთ სხვა ხერხს.

$F(x, y)=0$ განტოლებაში y არის x -ის ფუნქცია. ასე რომ F არის x -ის რთული ფუნქცია. ამასთან, თუ ორი ფუნქცია იგივეურად ტოლია, მაშინ მათი წარმოებულებიც ტოლია (შებრუნებული თეორემა მართებული არაა!), რის გამოც მოცემული არაცხადი ფუნქციის განსაზღვრელი განტოლების ორივე მხარე შეგვიძლია გავაწარმოოთ როგორც რთული ფუნქცია. მაგალითად, $x^2+y^2-1=0$ განტოლებიდან განსაზღვრული არაცხადი y -ის გვექნება

$$2x + 2y y' = 0,$$

საიდანაც

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

მრავალი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში მტკიცდება შემდეგი ფორმულის მართებულობა:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) y' = 0, \quad (14)$$

საიდანაც

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

გამოსახულების $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ორივე მხარის ცალ-ცალკე გაწარმოება და წარმოებულთა გატოლება შეგვიძლია, რადგანაც ეს გამოსახულება იგივეობაა. მართლაც

$$2 \sin x \cos x - 2 \cos x \sin x = 0$$

ტოლობა მართებულია x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის.

9. წირის მხეებისა და ნორმალის განტოლებანი. ვთქვათ, მოცემულია წირი განტოლებით

$$y = f(x)$$

აწ

$$F(x, y) = 0 \quad (15)$$

განტოლებით (ნახ. 13) და გვინდა შევადგინოთ წირის იმ მხეები წრფის განტოლება, რომელიც წირის $M(x, y)$ წერტილზე გაივლის.

M წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლებაა

$$Y - y = k(X - x), \quad (16)$$

სადაც X და Y წრფის მიმდინარე კოორდინატებია, ხოლო k ნებისმიერი რიცხვია.

ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ $y=f(x)$ წირის $M(x, y)$ წერტილზე გამავალი მხეების საკუთხო კოეფიციენტი $k=f'(x)$. ამის გამო (16) განტოლება მოგვცემს $y=f(x)$ წირის მხეების განტოლებას, თუ k საკუთხო კოეფიციენტს შევცვლით $f'(x)$ -ით, $k=f'(x)$.

მაშასადამე, $y=f(x)$ წირის $M(x, y)$ წერტილზე გამავალი მხეების განტოლება იქნება

$$Y - y = f'(x)(X - x). \quad (17)$$

წრფეს, რომელიც წირის მხეების წერტილში მხეების პერპენდიკულარულია, ეწოდება წირის ნორმალი.

თუ $y=f(x)$ წირის $M(x, y)$ წერტილში გამავალი ნორმალის კუთხოვრი კოეფიციენტია k_1 , მაშინ წირის მხეების და ნორმალის ურთიერთპერპენდიკულარობიდან მივიღებთ $k_1 = -\frac{1}{k}$, ამის გამო $y=f(x)$ წირის $M(x, y)$ წერტილზე გამავალი ნორმალის განტოლება იქნება

$$Y - y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x). \quad (18)$$

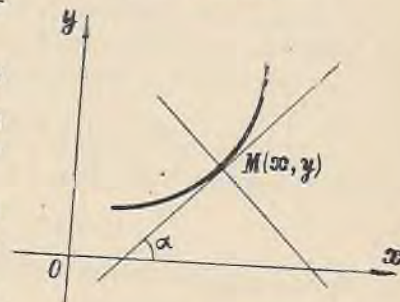
თუ წირის განტოლება მოცემულია (15) განტოლებით, მაშინ ვისარგებლოთ არაცხადი ფუნქციის წარმოებულთა $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ და, მაშინ წირის მხეების განტოლება იქნება

$$(X - x)F'_x(x, y) + (Y - y)F'_y(x, y) = 0, \quad (19)$$

ხოლო წირის ნორმალის განტოლება იქნება

$$(X - x)F'_y(x, y) - (Y - y)F'_x(x, y) = 0. \quad (20)$$

განვიხილოთ მაგალითები.



ნახ. 13

1) შევადგინოთ $y = x^2 - 1$ წირის მხების განტოლება, რომელიც გაივლის წირის $M(2; 3)$ წერტილზე.

ამოხსნა. ჯერ მოვწოდებთ წარმოებული $f'(x) = 2x$. შემდეგ გამოვთვალოთ წარმოებულის მნიშვნელობა $M(2; 3)$ წერტილში: $f'(2) = 4$. მოცემული წირის მხების განტოლება იქნება

$$Y - 3 = 4(X - 2),$$

გამარტივების შედეგად მივიღებთ

$$Y = 4X - 5.$$

2) შევადგინოთ $x^2 + y^2 = a^2$ წრეწირის ნებისმიერ $M(x, y)$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლება.

ამოხსნა. მოცემული განტოლებიდან განვსაზღვროთ $F(x, y)$,

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2.$$

გამოვთვალოთ წარმოებულები

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y.$$

წარმოებულთა ეს მნიშვნელობანი შევიტანოთ (19) განტოლებაში, გვექნება

$$(X - x) \cdot 2x + (Y - y) \cdot 2y = 0.$$

გამარტივება მოგვცემს

$$Xx + Yy = x^2 + y^2,$$

ანუ

$$Xx + Yy = a^2.$$

10. მაგალითები. 1) მოვწოდებთ წარმოებული ფუნქციის

$$y = \ln^2 \operatorname{tg} 7x.$$

ამოხსნა. სათანადო აღნიშვნებით მივიღებთ ფუნქციათა ჯაჭვს:

$$y = u^2, \quad u = \ln v, \quad v = \operatorname{tg} w, \quad w = 7x.$$

რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულას ექნება შემდეგი სახე

$$y'_x = y'_u u'_v v'_w w'_x. \quad (21)$$

წარმოებულთა გამოთვლები მოგვცემს

$$y'_u = 2u, \quad u'_v = \frac{1}{v}, \quad v'_w = \frac{1}{\cos^2 w}, \quad w'_x = 7.$$

შევიტანოთ (21) ფორმულაში:

$$y'_x = 2u \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\cos^2 w} \cdot 7 = 2 \ln \operatorname{tg} 7x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 7x} \cdot \frac{1}{\cos^2 7x} \cdot 7 = 28 \frac{\ln \operatorname{tg} 7x}{\sin 14x}.$$

რასაც ვიწვევთ, შეიძლება წარმოებული გამოვთვალოთ ზეპირად, შემდეგი მიმდევრობით: ჯერ გავაწარმოოთ როგორც ხარისხიანი ფუნქცია, შემდეგ გავაწარმოოთ ლოგარითმული ფუნქცია, შემდეგ ტანგენს ფუნქცია, ბოლოს გავაწარმოოთ $7x$ და მიღებული წარმოებულები გადავამრავლოთ.

$$\begin{aligned} y' &= (\ln \operatorname{tg} 7x)^2)' = 2 \ln \operatorname{tg} 7x \cdot (\ln \operatorname{tg} 7x)' = 2 \ln \operatorname{tg} 7x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 7x} \cdot (\operatorname{tg} 7x)' = \\ &= 2 \ln \operatorname{tg} 7x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 7x} \cdot \frac{1}{\cos^2 7x} \cdot (7x)' = 28 \frac{\ln \operatorname{tg} 7x}{\sin 14x}. \end{aligned}$$

წარმოებული ამ მაგალითში განიხილება იქ, სადაც $\operatorname{tg} 7x > 0$.

2) $y = (\sqrt[3]{x^2 + 1})^{\sin 4x}$. მოვწოდებთ

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ლოგარითმული წარმოებულის ფორმულა (7). y გავალოგარიტმოთ e ფუძით:

$$\ln y = \frac{\sin 4x}{3} \ln(x^2 + 1).$$

ლოგარითმული წარმოებული მოგვცემს

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{1}{3} (\sin 4x \cdot \ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{3} ((\sin 4x)' \ln(x^2 + 1) + \\ &+ \sin 4x (\ln(x^2 + 1))'). \end{aligned} \quad (22)$$

თითოეული მამრავლი ცალ-ცალკე გავაწარმოოთ:

$$(\sin 4x)' = \cos 4x \cdot (4x)' = 4 \cos 4x,$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

შევიტანოთ (22) გამოსახულებაში

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left(4 \cos 4x \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \sin 4x}{x^2 + 1} \right),$$

საიდანაც

$$y' = \frac{1}{3} (\sqrt[3]{x^2 + 1})^{\sin 4x} \left(4 \cos 4x \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \sin 4x}{x^2 + 1} \right).$$

3) შევადგინოთ

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^2 - 3t + 2, \end{cases} \quad (23)$$

წირის მხედის და ნორმალის განტოლებანი, რომლებიც გაივლიან წირის (0; 1) წერტილზე.

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ t -ს ის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება წირის (0; 1) წერტილს. ამისათვის განვიხილოთ განტოლებანი

$$0 = t^2 - 1 \quad \text{და} \quad 1 = t^2 - 3t + 2.$$

ამ განტოლებათა საერთო ამონახსნი ვიპოვოთ. გვექნება: პირველი განტოლებიდან $t_1 = 1$, $t_2 = -1$; მეორე განტოლებიდან $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. ამ ამონახსნებიდან საერთოა $t = 1$.

შემდეგ ვიპოვოთ (23) წირის მხედის საკუთხო კოეფიციენტი

$$x' = 2t, \quad y' = 2t - 3.$$

(12) ფორმულით მივიღებთ

$$y'_x = \frac{2t - 3}{2t}.$$

1-სათვის გვექნება

$$y'_x = \frac{2 \cdot 1 - 3}{2 \cdot 1} = -1.$$

მოცემული (0; 1) წერტილზე ვამავალი (23) წირის მხედის განტოლება იქნება

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0),$$

ანუ

$$y = -\frac{1}{2}x + 1,$$

ხოლო ნორმალის განტოლება იქნება

$$y = 2x + 1.$$

II. ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი. 1. გაწარმოების ფორმულები:

- | | |
|---------------------------|--|
| 1) $c' = 0$, | 2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, |
| 3) $(a^x)' = a^x \ln a$, | 4) $(e^x)' = e^x$, |

$$5) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$6) (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$7) (\sin x)' = \cos x,$$

$$8) (\cos x)' = -\sin x,$$

$$9) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$10) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$11) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$12) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$13) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$14) (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2. ფუნქციებზე მოქმედებათა წარმოებულების ფორმულები:

$$1) (u+v)' = u' + v',$$

$$2) (uv)' = u'v + v'u,$$

$$3) (uvw)' = u'vw + v'u'w + w'uv,$$

$$4) (cv)' = cv',$$

$$5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v'u - uv'}{v^2},$$

$$6) y'_x = y'_u u'_x,$$

$$7) y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

$$8) y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad 9) y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 32.

1. გამოთვალეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

$$1) y = \sqrt[3]{x^3 - 1},$$

$$2) y = \sqrt[n]{f(x)},$$

$$3) y = \arcsin \frac{1}{x},$$

$$4) y = \operatorname{tg} \sqrt{x+1},$$

$$5) y = 2^{\sin 3x},$$

$$6) y = e^{\operatorname{tg} x},$$

$$7) y = e^{\sin(5x+1)},$$

$$8) y = \arcsin \frac{3}{x^2 + 1},$$

$$9) y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$10) y = \sec(7x - 5),$$

$$11) y = \operatorname{cosec}(3x^2 + 4),$$

$$12) y = \sqrt{\ln^2(x^2 + 3) + 4},$$

$$13) y = \frac{1}{3x^2 + 1},$$

$$14) y = \operatorname{tg} \sin^2 5x,$$

$$15) y = 2^{\cos 4x},$$

$$16) y = e^{\sin^2 x},$$

$$17) y = \cos^2 5x,$$

$$18) y = \operatorname{tg}^2 3x,$$

$$19) y = e^{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}},$$

$$20) y = \sqrt{\frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}},$$

$$21) y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x} + \ln \cos x, \quad 22) y = \sqrt{4x^2 + 1} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2x - 1},$$

$$23) y = \ln(e^{2x} - 3x + 5), \quad 24) y = \lg_2(3^{x^2} - 2x - 7),$$

$$25) y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}, \quad 26) y = x^{\sin x},$$

$$27) y = (x^2 + 7)^{4x^2 - 3}, \quad 28) y = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{\sin x}.$$

2. გამოთვალეთ წარმოებული მნიშვნელობანი მოცემულ წერტილებში:

$$1) f(t) = (t^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{t}{a} - at, \quad f'(a);$$

$$2) \varphi(u) = e^{-\frac{u}{a}} \cos \frac{u}{a}, \quad \varphi(0) + a \varphi'(0);$$

$$3) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \ln \sqrt[4]{x^4 - a^4}, \quad f'(2a).$$

3. შეადგინეთ $y = x^3 + 2x^2 - 1$ წირის იმ მხეებისა და ნორმალის განტოლებანი, რომლებიც ამ წირისა და $y = 2x^2$ პარაბოლის გადაკვეთის წერტილზე გაივლის.

4. შეადგინეთ $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 16 = 0$ წირის მხეებისა და ნორმალის განტოლებანი, რომლებიც (1, 3) წერტილზე გაივლის.

5. შეადგინეთ (7, -1) წერტილზე გამავალი $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ წირის მხეების განტოლება.

6. შეადგინეთ (0, 1) წერტილზე გამავალი

$$\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2 - 5t + 4 \end{cases}$$

წირის მხეების განტოლება.

$$7. \text{ შეადგინეთ } y = \frac{1}{2a} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \text{ წირის მხეების განტოლება,}$$

რომელიც წირის იმ წერტილზე გაივლის, რომლის $x = a$.

§ 5. ფუნქციის დიფერენციალი

1. ფუნქციის დიფერენციალის ცნება. ვთქვათ $y = f(x)$ ფუნქციის x წერტილში აქვს წარმოებული. x -ს მივცეთ ნაზრდი Δx , მაშინ ფუნქცია მიიღებს ნაზრდს (იგულისხმება $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე x შუალედში და x და $x + \Delta x$ ამ შუალედშია)

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

აქედან კი გამოდინარეობს

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \quad (1)$$

სადაც $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$, როცა $\Delta x \rightarrow 0$.

(1) ტოლობიდან გვექნება

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x,$$

ანუ

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + o(\Delta x), \quad (2)$$

სადაც $o(\Delta x) = \alpha(\Delta x) \Delta x$ მაღალი რიგის უსასრულო მცირეა Δx -თან შედარებით,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $f'(x) = A$, მაშინ (2) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x). \quad (3)$$

ვითქვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში, თუ $f(x)$ — ფუნქციის ნაზრდი x წერტილში წარმოიდგინება (3) ტოლობით, სადაც A დამოუკიდებელია Δx -სგან (საზოგადოდ Δ სიდიდე x -ზეა დამოკიდებული).

თუ შევადარებთ (2) ტოლობას (3) ტოლობას, შევამჩნევთ, რომ, თუ $f(x)$ წარმოებადია x წერტილში, მაშინ იგი დიფერენცირებადია იმავე წერტილში.

ახლა, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში, მაშინ ადგილი აქვს (3) ტოლობას. ამ ტოლობიდან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \Rightarrow f'(x) = A.$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ

თეორემა. $f(x)$ ფუნქციის x წერტილში დიფერენცირებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი

სი, რომ $f(x)$ ფუნქცია x წერტილში წარმოებდა იყოს.

(3) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ, თუ $A=f'(x) \neq 0$, მაშინ ფუნქციის ნაზრდი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეა პირველი შესაყრებისა $\Delta y \sim A \Delta x, \Delta x \rightarrow 0$. (4)

(3) გამოსახულების პირველ შესაყრებს $A \Delta x$ -ს ეწოდება x წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდის მთავარი წრფივი წევრი. Δy ნაზრდის მთავარი წრფივი წევრი წრფივად არის დამოკიდებული არგუმენტის ნაზრდზე — Δx -ზე. ე. ი. Δy ნაზრდის მთავარი წევრი პირდაპირპროპორციულია Δx -ის. (4) დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი x წერტილში მიახლოებით ტოლია თავისი ნაზრდის მთავარი წრფივი წევრისა, რადგანაც $0(\Delta x)$ — მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა Δx -ის მიმართ, $\Delta y \approx A \Delta x$.

$f(x)$ ფუნქციის x წერტილში ნაზრდის მთავარ წრფივ წევრს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი x წერტილში.

$y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი აღინიშნება $df(x)$ ან dy -ით,

$$df(x) = f'(x) \Delta x, dy = f'(x) \Delta x. \quad (5)$$

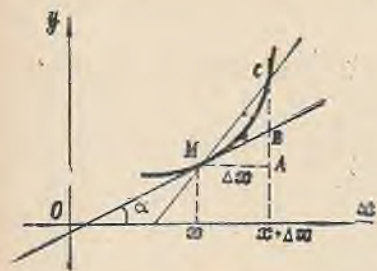
გამოვთვალოთ დამოუკიდებელი x ცვლადის დიფერენციალი, რადგანაც $x'=1$,

$$dx = x' \Delta x = \Delta x.$$

ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ

$$dy = f'(x) dx. \quad (6)$$

ამგვარად, $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი x წერტილში უდრის იმავე x წერტილში ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებულს, გამრავლებულს დამოუკიდებელი ცვლადის dx დიფერენციალზე.



ნახ. 14

მნელი არ უნდა იყოს იმის შემხვევა, რომ dx არ არის დამოკიდებული x -ზე, ხოლო $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი x წერტილში დამოკიდებულია როგორც x -ზე, ისე dx -ზე, $df(x) = f'(x) dx$.

2. დიფერენციალის გეომეტრიული მნიშვნელობა. განვიხილოთ $y=f(x)$ წირი (ნახ. 14). M წერტილის კოორდინატებია $(x, f(x))$, C წერტილის კი $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = AC$.

M წერტილზე გავატაროთ წირის მხები MB .

MB მხების მიერ Ox ღერძთან შედგენილი α კუთხე იძლევა $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$. MAB მართკუთხა სამკუთხედიდან ცხადია

$$AB = MA \operatorname{tg} \alpha,$$

ანუ

$$AB = f'(x) \Delta x = dy. \quad (7)$$

AB წარმოადგენს $y=f(x)$ წირის M წერტილზე გატარებული მხების ორდინატის ნაზრდს, როცა აბსცისა x იზრდება Δx -ით.

(7) დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი x წერტილში ტოლია $y=f(x)$ წირის იმავე წერტილში გატარებული მხების ორდინატის ნაზრდისა, როცა აბსცისა x იზრდება Δx -ით.

3. დიფერენციალის მექანიკური მნიშვნელობა. წინა პარაგრაფში გავარჩიეთ ფუნქციის წარმოებულის მექანიკური მნიშვნელობა. თუ მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონია $s=s(t)$, სადაც t არის დრო, ხოლო s არის t დროში გავლილი მანძილი, მაშინ $s'(t)=v(t)$ გამოსახავს t მომენტში მატერიალური წერტილის სიჩქარეს. $s'(t)$ წარმოებულის განსაზღვრიდან მივიღებთ

$$\frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = s'(t) + \alpha(\Delta t),$$

საიდანაც

$$s(t + \Delta t) - s(t) = s'(t) \Delta t + \alpha(\Delta t) \Delta t,$$

სადაც $\alpha(\Delta t)$ უსასრულოდ მცირეა Δt -სთან ერთად. ამ ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$s(t + \Delta t) - s(t) \approx s'(t) \Delta t = ds.$$

ამგვარად, $s(t)$ ფუნქციის დიფერენციალი მექანიკურად იძლევა იმ მატერიალური წერტილის მიერ გავლილ მანძილს $[t, t + \Delta t]$ დროში დაახლოებით, რომელიც მოძრაობს $s'(t)=v(t)$ სიჩქარით.

4. წარმოებულის გამოსახვა დიფერენციალების საშუალებით. ზემოთ შემოვიღეთ დამოუკიდებელი x ცვლადის დიფერენციალის dx -ის ცნება. დამოუკიდებელი x ცვლადის დიფერენციალის dx -ის ქვეშ გვესმის ნებისმიერი რიცხვი, x -საგან დამოუკიდებლად. ეს რიცხვი Δx -ის ტოლია. ამის გამო $y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი ჩავწერეთ შემდეგი ტოლობით

$$dy = f'(x) dx. \quad (8)$$

ამ ტოლობას ადგილი აქვს ჯერჯერობით, როდესაც x დამოუკიდებელი ცვლადია. შემდეგში ვაჩვენებთ (დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა),

რომ (8) ტოლობას ადგილი აქვს მაშინაც, როდესაც x დამოკიდებული ცვლადია.

(8) ტოლობიდან განვსაზღვროთ $f'(x)$,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} . \quad (9)$$

ე. ი. $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ტოლია ფუნქციის დიფერენციალის dy -ის არგუმენტის დიფერენციალთან dx -თან შეფარდებისა.

ფარდობა $\frac{dy}{dx}$ ასე იკითხება: „დე ივრეი დე იქსით“.

იმ გარემოებამ, რომ (9) ტოლობის მარცხენა ნაწილში სრულად გარკვეული სიდიდეა, ხოლო მარჯვენა ნაწილში ორი განუსაზღვრელი dy და dx სიდიდეა (Δx ხომ ნებისმიერადაა აღებული), არ უნდა შეგვაშფოთოს, dy და dx პროპორციულად იცვლებიან; ამასთან $f'(x)$ სწორედ პროპორციულობის კოეფიციენტია.

დიფერენციალის ცნება და ტერმინი ეკუთვნის ლაიბნიცს, ფუნქციის დიფერენციალთან ერთად ლაიბნიცმა განიხილა „დიფერენციალური ფარდობა“, რაც წარმოებულის ეკვივალენტურია.

ზემოთ შევნიშნეთ, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $\frac{dy}{dx}$

სიმბოლოთი აღნიშნება (§ 4, n 6). ახლა კი ნაჩვენებია $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. ამგვარად, $\frac{dy}{dx}$

არა მარტო წარმოებულის აღნიშვნის სიმბოლოა, არამედ წარმოებულის განსაზღვრაცაა. ამ მიზეზის გამო წარმოებულის ლაიბნიცის აღნიშვნას

$\frac{dy}{dx}$ -ს უპირატესობა აქვს დანარჩენ აღნიშვნებთან.

5. ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა დიფერენციალის საშუალებით. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია რაიმე X შუალედში წარმოებადი ფუნქციაა და ცნობილია x_0 წერტილში როგორც $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა, ისე მისი წარმოებულის მნიშვნელობა და გვინდა ვავითვოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x_0 + \Delta x$ წერტილში, $x_0 + \Delta x \in X$.

შევადგინოთ ფუნქციის ნაზრდი x_0 წერტილში:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალის განსაზღვრით გვექნება

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x,$$

საიდანაც

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x. \quad (10)$$

ეს გამოსახულება იძლევა $f(x_0 + \Delta x)$ -ის მნიშვნელობას $a(\Delta x) \Delta x$ -ის სიზუსტით. ეს სიდიდეა (10)-ში უწყვეტებული.

მაგალითად, შევადგინოთ $f(x) = \sqrt{x}$ -სათვის მიახლოებითი მნიშვნელობის ფორმულა. გვექნება

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(10) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ

$$\sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x. \quad (11)$$

ვთქვათ, გვინდა გამოვთვალოთ $\sqrt{1,1}$. მივიღოთ $x = 1$, $\Delta x = 0,1$, მაშინ (11) ფორმულა მოგვცემს

$$\sqrt{1,1} = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} 0,1,$$

საიდანაც

$$\sqrt{1,1} = 1,05.$$

მიღებულ რიცხვში ყველა ციფრი სანდოა. ეს საკითხი დაწვრილებით გამოთვლითი მათემატიკის კურსში იქნება გარჩეული.

§ 6. დიფერენციალის თვისებები

დიფერენციალის ოპერაციების მიღების დროს ყოველთვის ვიგულისხმებთ: აღებული ფუნქცია დიფერენცირებადია განსაზღვრელ შუალედში.

1. **არითმეტიკული მოქმედებანი დიფერენცირებად ფუნქციებზე.** ზემოთ განვსაზღვრეთ x წერტილში $y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი

$$dy = f'(x) dx. \quad (1)$$

თუ $y=c$, მაშინ (1) ფორმულაში ჩასმა მოგვცემს

$$dc = c' dx = 0.$$

ე. ი. მუდმივის დიფერენციალი ნულის ტოლია.

ანალოგიურად ფუნქციათა წარმოებულებისა ფუნქციათა დიფერენციალებისათვისაც ჭეშმარიტია შემდეგი თეორემა:

თეორემა. თუ $u=g(x)$ და $v=f(x)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია x წერტილში, მაშინ დიფერენცირებადია იმავე წერტილში ფუნქციათა ჯამი $u+v=g(x)+f(x)$, ფუნქციათა ნამრაველი $uv=g(x)f(x)$, ფუნ-

ქციათა შეფარდება $\frac{u}{v} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$, $\varphi(x) \neq 0$, და ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობები

$$d(u+v) = du + dv, \quad (2)$$

$$d(uv) = vdu + u dv, \quad (3)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}. \quad (4)$$

მაგალითად, შევამოწმოთ (2) ტოლობის ჭეშმარიტება.

მართლაც, ფუნქციათა ჯამის წარმოებულის არსებობისა და ფუნქციათა ჯამის გაწარმოების თვისების საფუძველზე მივიღებთ

$$d(g(x) + \varphi(x)) = (g(x) + \varphi(x))' dx = g'(x) dx + \varphi'(x) dx,$$

ანუ

$$d(u+v) = du + dv.$$

სრულიად ასე დამტკიცდება სხვა ტოლობების ჭეშმარიტება.

(2) ტოლობიდან ადვილი დასამტკიცებელია

შედეგი 1. თუ ორი დიფერენცირებადი ფუნქცია ყოველ x წერტილში, $x \in X$, მუდმივით განსხვავდებიან, მაშინ მათი დიფერენციალები მთელ X შტალებში ურთიერთტოლია.

მართლაც,

$$d(f(x) + c) = df(x) + dc = df(x).$$

შედეგი 2. მუდმივი მამრავლი შეიძლება გამოვიტანოთ დიფერენციალის ნიშნის გარეშე.

მართლაც,

$$d(cf(x)) = dc \cdot f(x) + cdf(x) = cdf(x).$$

ამრიგად,

$$d(cf(x)) = cdf(x).$$

ცხადია,

$$d\left(\frac{c}{f(x)}\right) = c \left(\frac{1}{f(x)}\right)' dx = -c \frac{df(x)}{(f(x))^2}.$$

2. დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა. დიფერენცირებად $y=f(x)$ ფუნქციისათვის x წერტილში, $x \in X$, ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობა

$$dy = f'(x) dx. \quad (1)$$

ამ ტოლობაში x დამოუკიდებელი ცვლადია. ვაჩვენოთ, რომ (1) დამოკიდებულება უნივერსალურია და ეს დამოკიდებულება ჭეშმარიტია მაშინაც, როდესაც x ცვლადი თვით წარმოადგენს დამოკიდებულ ცვლადს.

ფუნქციის დიფერენციალის ამ თვისებას დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობას უწოდებენ.

ვთქვათ, $y=f(u)$ დიფერენცირებადი ფუნქციის არგუმენტი თვით წარმოადგენს დიფერენცირებად ფუნქციას, $u=g(x)$, რომელიმე დამოუკიდებელი x ცვლადისას. ამ შემთხვევაში y შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც შემდეგი სახის $y=f(g(x))$ რთული ფუნქცია (f და g ფუნქციათა კომპოზიცია). რადგანაც $y=f(g(x))$ ფუნქციაში x დამოუკიდებელი ცვლადია, შეგვიძლია დავწეროთ

$$dy = (f(g(x)))' dx. \quad (5)$$

რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ

$$(f(g(x)))' = f'(u) \cdot g'(x).$$

და, რადგანაც $du = g'(x) dx$, მაშინ (5) ფორმულა მოგვცემს

$$dy = f'(u) du. \quad (6)$$

მიღებული ფორმულა ფორმით იგივეა, რაც (1) ფორმულა, მაგრამ ამ ფორმულაში u დამოკიდებული ცვლადია,

რადგანაც $y=f(u)$ რთულ ფუნქციაში u დამხმარე ცვლადია, (6) ფორმულა სიტყვიერად ასე გამოითქმის:

რთული ფუნქციის დიფერენციალი უდრის მოცემული ფუნქციის დამხმარე ცვლადით წარმოებულისა და დამხმარე ცვლადის დიფერენციალის ნამრავლს.

მაგალითად,

$$\begin{aligned} d(\sin 7x)^3 &= 3(\sin 7x)^2 d(\sin 7x) = 3(\sin 7x)^2 \cos 7x d(7x) = \\ &= 3(\sin 7x)^2 \cos 7x \cdot 7dx = 21(\sin 7x)^2 \cos 7x. \end{aligned}$$

3. ელემენტარულ ფუნქციათა დიფერენციალების ცხრილი. თუ მხედველობაში მივიღებთ $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალის განსაზღვრას, გვექნება შემდეგი ცხრილი:

$$1) dc = 0,$$

$$2) d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx,$$

$$3) d(a^x) = a^x \ln a dx,$$

$$4) d(e^x) = e^x dx,$$

$$5) d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}, \quad a > 0,$$

$$6) d(\ln x) = \frac{dx}{x},$$

$$7) d(\sin x) = \cos x dx,$$

$$8) d(\cos x) = -\sin x dx,$$

$$9) d(\lg x) = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$10) d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$11) d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$12) d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$13) d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$14) d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

1. მაღალი რიგის წარმოებულები. თუ $y=f(x)$ ფუნქციის აქვს წარმოებული,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

X სიმრავლის ყოველ წერტილში, მაშინ $f'(x)$ წარმოებული წარმოადგენს X სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციას. თუ $f'(x)$ ფუნქცია წარმოებადია X სიმრავლის x წერტილში,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = (f'(x))',$$

მაშინ ამ წარმოებულს $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს უწოდებენ x წერტილში და აღნიშნავენ $f^{(2)}(x)$ ან $y^{(2)}$ სიმბოლოთი,

$$f^{(2)}(x) = (f'(x))', \quad y^{(2)} = y''.$$

თუ მიღებულ $f^{(2)}(x)$ ფუნქციას X სიმრავლის x წერტილში აქვს წარმოებული

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(2)}(x+\Delta x) - f^{(2)}(x)}{\Delta x} = (f^{(2)}(x))',$$

მაშინ ამ წარმოებულს $f(x)$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებულს უწოდებენ,

$$(f^{(2)}(x))' = f^{(3)}(x),$$

ანუ

$$(y^{(2)})' = y^{(3)}.$$

და ა. შ. $y=f(x)$ ფუნქციის n -ური რიგის წარმოებული განისაზღვრება ტოლობით

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'. \quad (1)$$

გამოვთვალოთ ზოგიერთი ფუნქციის n -ური რიგის წარმოებული.

1) $f(x) = x^\alpha$, მიმდევრობითი გამოთვლა მოგვცემს

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (x^\alpha)^{(2)} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}.$$

ცხადია,

$$(x^\alpha)^{(n)} = n(n-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}. \quad (2)$$

თუ $\alpha \in \mathbb{N}$, მაგალითად, $\alpha = k$, მაშინ

$$(x^k)^{(n)} = n(n-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}.$$

თუ $n=k$, ე. ი. წარმოებულის რიგი ხარისხის მაჩვენებლის ტოლია, მაშინ

$$(x^n)^{(n)} = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!.$$

თუ წარმოებულის რიგი ხარისხის მაჩვენებელზე მეტია, მაშინ

$$(x^k)^{(n)} = 0, \quad n > k.$$

თუ $\alpha = -1$, მაშინ (2) ფორმულა მოგვცემს

$$(x^{-1})^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-1-n+1)x^{-1-n}$$

ანუ

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}. \quad (3)$$

2) $f(x) = \sin x$. გამოვთვალოთ მიმდევრობით:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} (\sin x)^{(2)} &= \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \\ &= \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

სრულიად ასევე მივიღებთ

$$(\sin x)^{(3)} = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

და საზოგადოდ

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

3) $f(x) = \cos x$. ის მოქმედება, რაც $\sin x$ -თვის ჩავატარეთ, ჩავატაროთ $\cos x$ -ზე, მივიღებთ

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \quad (5)$$

4) $f(x) = \log_a x$. ჯერ გამოვთვალოთ პირველი რიგის წარმოებული, გვექნება

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

შემდეგ კი გამოვიყენოთ (3) ფორმულა $(n-1)$ -ჯერ წარმოებულისათვის, მივიღებთ

$$(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{(n-1)} (n-1)!}{x^n \ln a}. \quad (6)$$

ცხადია, ნატურალური ლოგარითმისათვის, $\ln x$ -თვის მივიღებთ:

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}. \quad (7)$$

5) $f(x) = a^x$. მიმდევრობითი გაწარმოება მოგვცემს

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (a^x)^{(2)} = (a^x \ln a)' = a^x \ln a \cdot \ln a = a^x \ln^2 a$$

და ა. შ.

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a. \quad (8)$$

კერძოდ, $f(x) = e^x$ მოგვცემს

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \quad (9)$$

2. მაღალი რიგის დიფერენციალი. $y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალს

$$dy = df(x) = f'(x) dx$$

ვუწოდოთ $f(x)$ ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალი. $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი განსაზღვრეთ ტოლობით

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x) dx) = (f'(x) dx)' dx,$$

სადაც ვგულისხმობთ $f'(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია X სიმრავლეში, $X=E(f)$. რადგანაც dx x -სათვის მუდმივია, მივიღებთ

$$d^2 y = d^2 f(x) = f''(x) (dx)^2.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა (მხოლოდ დამოუკიდებელი ცვლადისათვის)

$$(dx)^2 = dx^2.$$

მაშინ მეორე რიგის დიფერენციალისათვის მივიღებთ გამოსახულებას

$$d^2 f(x) = f^{(2)}(x) dx^2.$$

სრულიად ასევე მივიღებთ $f(x)$ ფუნქციის მესამე რიგის დიფერენციალის გამოსახულებას:

$$d^3 f(x) = f^{(3)}(x) dx^3$$

და ა. შ. $f(x)$ ფუნქციის n -ური რიგის დიფერენციალი განისაზღვრება ტოლობით

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n. \quad (10)$$

ამ გამოსახულებიდან მივიღებთ $f(x)$ ფუნქციის n -ური რიგის წარმოებულის განსაზღვრას

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}. \quad (11)$$

ახლა განვიხილოთ $y=f(u)$ ფუნქციის მაღალი რიგის დიფერენციალი, სადაც u არგუმენტი დამოკიდებული ცვლადია, $u=g(x)$.

მეორე რიგის დიფერენციალის $d^2 f(u)$ განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$d^2 f(u) = d(df(u)) = d(f'(u) du) = df'(u) \cdot du + f'(u) d^2 u = \\ = f^{(2)}(u) (du)^2 + f'(u) d^2 u.$$

ამრიგად,

$$d^2 f(u) = f^{(2)}(u) (du)^2 + f'(u) d^2 u. \quad (12)$$

(12) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ მეორე რიგის დიფერენციალის ფორმას არ აქვს ინვარიანტულობის თვისება.

თუ u დამოუკიდებელი ცვლადია, მაშინ $d(du)=0$ და (12) ფორმულიდან მივიღებთ

$$d^2 f(u) = f''(u) (du)^2 = f''(u) du^2.$$

თუ გვინდა გამოვთვალოთ $d^3 f(u)$, სადაც $u=g(x)$, მაშინ ავიღოთ (12) გამოსახულების დიფერენციალი

$$d^3 f(u) = d(d^2 f(u)) = d(f^{(2)}(u) (du)^2 + f'(u) d^2 u) = \\ = f^{(3)}(u) (du)^3 + f^{(2)}(u) d(du)^2 + f^{(2)}(u) du d^2 u + f'(u) d^3 u = \\ = f^{(3)}(u) (du)^3 + f^{(2)}(u) \cdot 2 du d^2 u + f^{(2)}(u) du d^2 u + f'(u) d^3 u = \\ = f^{(3)}(u) (du)^3 + 3 f^{(2)}(u) du d^2 u + f'(u) d^3 u. \quad (13)$$

3. მეორე რიგის წარმოებულის მექანიკური მნიშვნელობა. პირველი რიგის წარმოებულის შეიძლება მატერიალური წერტილის მოძრაობის სიჩქარე განისაზღვროს. ახლა ვაჩვენოთ, რომ მეორე რიგის წარმოებულის განსაზღვრება მოძრაობის აჩქარება.

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი მოძრაობს Ox ღერძზე, მოძრაობის განტოლებაა $s=s(t)$. ვთქვათ, t მომენტში წერტილის სიჩქარეა $v=s'(t)$, $t+\Delta t$ მომენტში კი იქნება $v+\Delta v$. ასე რომ, Δt დროში v სიჩქარის ცვლილებაა Δv . შეფარდებას $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ — ეწოდება წრფივი მოძრაობის საშუალო აჩქარება Δt დროში. თუ ზღვარზე გადავალოთ, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, მივიღებთ მოძრავი მატერიალური წერტილის აჩქარებას t მომენტში.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'.$$

თუ აჩქარებას აღვნიშნავთ w ასოთი, გვექნება

$$w = v'.$$

მაგრამ

$$v = s'(t).$$

ასე რომ,

$$w = (s'(t))' = s''(t).$$

ამგვარად, წერტილის წრფივი მოძრაობის აჩქარება ტოლია გზის $s(t)$ -ს მეორე რიგის წარმოებულისა დროით.

4. მაგალითები. 1) გამოვთვალოთ ორი წარმოებადი ფუნქციის ნამრავლის n -ური რიგის წარმოებული.

ამოხსნა. uv ნამრავლის n -ური რიგის წარმოებული მოვნახოთ ინდუქციის მეთოდით.

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v^{(0)} + u^{(0)}v' \\ (uv)^{(2)} &= u^{(2)}v^{(0)} + 2u'v' + u^{(0)}v^{(2)} = \\ &= c_2^0 u^{(2)}v^{(0)} + c_2^1 u'v' + c_2^2 u^{(0)}v^{(2)},\end{aligned}$$

სადაც

$$v^{(0)} = v, \quad u^{(0)} = u.$$

ვთქვათ, uv -ს n რიგის წარმოებულისათვის ჭეშმარიტია შემდეგი ფორმულა:

$$(uv)^{(n)} = c_n^0 u^{(n)}v^{(0)} + c_n^1 u^{(n-1)}v^{(1)} + \dots + c_n^{n-1} u'v^{(n-1)} + c_n^n u^{(0)}v^{(n)}. \quad (14)$$

თუ n -ური რიგის წარმოებულისათვის ჭეშმარიტია (14) ფორმულა, ვაჩვენოთ მისი ჭეშმარიტება $(n+1)$ -სათვის, ამისათვის გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= c_n^0 u^{(n+1)}v^{(0)} + c_n^1 u^{(n)}v^{(1)} + \dots + c_n^{n-1} u^{(2)}v^{(n-1)} + c_n^n u'v^{(n)} + \\ &+ c_n^0 u^{(n)}v' + \dots + c_n^{n-2} u^{(2)}v^{(n-1)} + c_n^{n-1} u'v^{(n)} + \\ &+ c_n^n u^{(0)}v^{(n+1)} = c_n^0 u^{(n+1)}v^{(0)} + (c_n^1 + c_n^0)u^{(n)}v^{(1)} + \dots + \\ &+ (c_n^{n-1} + c_n^n)u'v^{(n)} + c_n^n u^{(0)}v^{(n+1)}.\end{aligned}$$

ვისარგებლოთ დამოკიდებულებებით

$$c_n^0 = c_{n+1}^0, \quad c_n^1 + c_n^0 = c_{n+1}^1, \dots, \quad c_n^{n-1} + c_n^n = c_{n+1}^n, \quad c_n^n = c_{n+1}^{n+1},$$

მაშინ უკანასკნელიდან მივიღებთ:

$$(uv)^{(n+1)} = c_{n+1}^0 u^{(n+1)}v^{(0)} + c_{n+1}^1 u^{(n)}v^{(1)} + \dots + c_{n+1}^{n+1} u^{(0)}v^{(n+1)}.$$

ამგვარად, (14) ფორმულა ჭეშმარიტია ნებისმიერი n -სათვის, $n \in \mathbb{N}$.

(14) ფორმულას ეწოდება ლაიბნიცის ფორმულა.

2) გამოვთვალოთ $(x \cos x)^{(100)}$.

ვისარგებლოთ ლაიბნიცის ფორმულით. მივიღებთ

$$\begin{aligned}(x \cos x)^{(100)} &= c_{100}^{99} x' (\cos x)^{(99)} + c_{100}^{100} x (\cos x)^{(100)} = \\ &= 100 \cos \left(x + 99 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + x \cos \left(x + 100 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 100 \cos \left(x + 4 \cdot 25 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \\ &+ x \cos \left(x + 4 \cdot 25 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 100 \sin x + x \cos x.\end{aligned}$$

3) გამოვთვალოთ $(\sin ax)^{(n)}$.

ჯერ გამოვთვალოთ პირველი რიგის წარმოებული:

$$(\sin ax)' = a \cos ax = a \sin \left(ax + \frac{\pi}{2} \right).$$

აქედან ცხადია, რომ

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin \left(ax + n \frac{\pi}{2} \right).$$

სავარჯიშო 33. გამოთვალეთ:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1) $(\ln \sin x)^{(3)}$, | 2) $(2^x x^2)^{(100)}$, |
| 3) $(x^2 \sin 3x)^{(4)}$, | 4) $(\lg x)^{(3)}$, |
| 5) $(x^2 \cos 2x)^{(3)}$, | 6) $((x^2 + 1)(x + 1)^7)^{(4)}$, |
| 7) $\left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(3)}$, | 8) $(\operatorname{ctg}^2 x)^{(4)}$. |

ფუნქციის გამოკვლევა წარმოებულის გამოყენებით

§ 1. თეორემათი ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობის შესახებ

ფუნქციის წარმოებულის ცოდნა რაიმე შუალედში ხშირად იძლევა შესაძლებლობას გამოვიკვლიოთ ფუნქციის ცვალებადობის ხასიათი. შუალედში ფუნქციის შესასწავლად წარმოებულის გამოყენება ემყარება ფორმულას, რომელიც ფრანგ მათემატიკოსს ლაგრანჟს ეკუთვნის. ორი ფუნქციისათვის ლაგრანჟის ფორმულის განზოგადებაა კოშის ფორმულა. ამ ფორმულის საფუძველზე მიიღება განუსაზღვრელობათა გახსნის ლოპიტალის წესი.

ფუნქციის გამოკვლევაში საუკეთესო საშუალებაა მაღალი რიგის წარმოებულის გამოყენება. თუ ცნობილია, რომ მოცემულ ფუნქციას აქვს წარმოებული სათანადო რიგამდე, გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას, რომელიც ლაგრანჟის ფორმულის განზოგადებაა. ტეილორის ფორმულით მოცემული ფუნქცია წარმოიდგინება მიახლოებით მრავალწევრის საშუალებით, რომლის საფუძველზე გამოითვლება ფუნქციის მნიშვნელობა.

ვიდრე ფუნქციის გამოკვლევას შევუდგებოდეთ, წინასწარ დავამტკიცოთ რამდენიმე თეორემა.

1. ფერმას თეორემა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ξ წერტილის რაიმე $u(\xi)$ მიდამოში და ξ წერტილში ფუნქცია ლებულობს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას, თუ ფუნქციას ξ წერტილში აქვს წარმოებული, მაშინ ამ წერტილში ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია, $f'(\xi) = 0$.

ჯერ განვსაზღვროთ, რას ნიშნავს $f(x)$ ფუნქცია ξ წერტილში ლებულობს უდიდეს მნიშვნელობას.

ვიტყვი: $f(x)$ ფუნქცია ξ წერტილში ლებულობს უდიდეს მნიშვნელობას, თუ არსებობს ξ წერტილის ისეთი $u(\xi)$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის

$$f(x) - f(\xi) \leq 0.$$

ასევე, ვიტყვი $f(x)$ ფუნქცია ξ წერტილში ლებულობს უმცირეს მნიშვნელობას, თუ არსებობს ξ წერტილის ისეთი $u(\xi)$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის

$$f(x) - f(\xi) \geq 0.$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა. ვთქვათ, ξ წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, მაშინ შეგვიძლია ისეთი $h > 0$,

$$\xi - h \in u(\xi), \quad \xi + h \in u(\xi),$$

რომ სრულდებოდეს უტოლობანი (ნახ. 1)

$$f(\xi + h) - f(\xi) \leq 0, \quad f(\xi - h) - f(\xi) \leq 0.$$

ამ უტოლობათა სათანადოდ h -ზე და $(-h)$ -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0, \quad \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \geq 0.$$

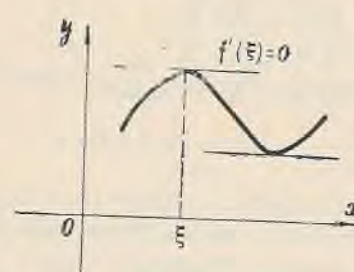
ξ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია წარმოებალია. ამ უტოლობათა მარცხენა ნაწილებში შეგვიძლია ზღვარზე გადასვლა, როდესაც $h \rightarrow 0$. თუ გამოვიყენებთ დამოკიდებულებას ფუნქციის ნიშანსა და მისი ზღვრის ნიშნის შესახებ აღებულ წერტილში (თავი XIII, § 7, თეორემა 3), გვექნება

$$f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0, \quad f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \geq 0.$$

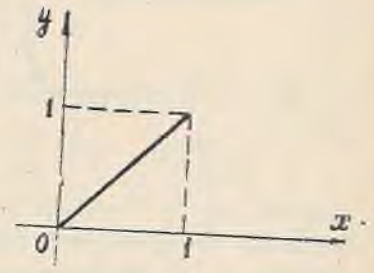
ამგვარად,

$$f'(\xi) \leq 0, \quad f'(\xi) \geq 0.$$

საიდანაც მივიღებთ $f'(\xi) = 0$. ამით ფერმას თეორემა დამტკიცდა.



ნახ. 1



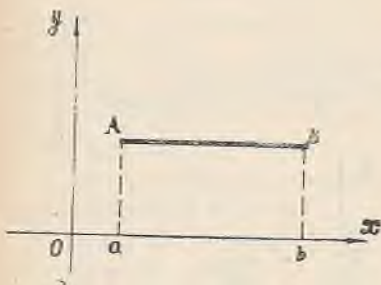
ნახ. 2

გეომეტრიულად ფერმას თეორემა ნიშნავს იმას, რომ თუ ξ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია ლებულობს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას ξ წერტილის რაიმე $u(\xi)$ მიდამოში, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მხები ($\xi, f(\xi)$) წერტილში Ox ღერძის პარალელურია.

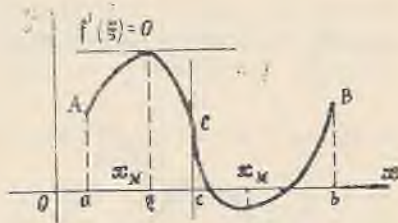
შევნიშნოთ, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია ღებულობს ξ წერტილის მარცხენა ან მარჯვენა შუალედში (ნახ. 2) უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას, ე. ი. ξ წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა, ვიდრე ξ წერტილიდან ცალმხრივ მდებარე რაიმე შუალედში, მაშინ შეიძლება ξ წერტილში ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლი არ იყოს, ნახაზზე წარმოდგენილია ფუნქცია $f(x)=x$ სეგმენტზე $[0, 1]$. ამ ფუნქციას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს $x=1$ წერტილში, მაგრამ ამ წერტილში $f'(x)=1$. ასევე, ამ ფუნქციას უმცირესი მნიშვნელობა აქვს $x=0$ წერტილში და ამ წერტილში $f'(x)=1$.

2. როლის თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, წარმოებადი $]a, b[$ ინტერვალში მაინც და $f(a)=f(b)$, მაშინ $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $f'(\xi)=0$.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ უწყვეტი ფუნქციის სეგმენტზე თვისების გამო ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია, $M \leq f(x) \leq N$ და არსებობენ ისეთი წერტილები x_N და x_M , სადაც $f(x)$ ფუნქცია აღწევს თავის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობას $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $f(x_N)=f(x_M)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მუდმივია $[a, b]$ სეგმენტზე (ნახ. 3) და რადგანაც ამ შემთხვევაში $f'(x) \equiv 0$, თეორემა კვშიარიტია. თუ $N \neq M$ (ნახ. 4), რადგანაც



ნახ. 3



ნახ. 4

$f(a)=f(b)$, მაშინ ერთ-ერთი წერტილი მაინც x_M, x_N წერტილებიდან $]a, b[$ ინტერვალში მდებარეობს. ეს წერტილი აღვნიშნოთ ξ ასოთი, ამ წერტილში ფერმას თეორემით გვექნება $f'(\xi)=0$. ამით როლის თეორემა დამტკიცდა.

¹ შიშელ როლი (1652—1719), ფრანგი მათემატიკოსი.

შევნიშნოთ, რომ როლის თეორემაში „ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადი ინტერვალში მაინც“ ნიშნავს $f(x)$ ფუნქციას აქვს $]a, b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში სასრული წარმოებული, მაგრამ შეიძლება ჰქონდეს უსასრულო წარმოებულობა — უსასრულო წარმოებული გარკვეული ნიშნის, როგორც ეს ნახაზზე ნაჩვენებია. C წერტილი $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილია (ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილებს მე-5 პარაგრაფში შევისწავლით). ამ წერტილში გატარებული მხები Oy ღერძის პარალელურია, $f'(c)=-\infty$.

გეომეტრიულად როლის თეორემა ასე გამოითქმის: თუ $y=f(x)$ წირი უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, $]a, b[$ ინტერვალში წირის ყოველ წერტილში შეიძლება მხების გატარება ისე, რომ მხებთან საკუთხო კოეფიციენტი შეიძლება მიისწრაფოდეს მხოლოდ $+\infty$ ან $-\infty$, ამასთან $f(a)=f(b)$, მაშინ $y=f(x)$ წირზე არსებობს ერთი (ξ , $f(\xi)$) წერტილი მაინც, რომელზედაც გატარებული წირის მხები Ox ღერძის პარალელურია.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია მრავალწევრია. თუ $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$, მაშინ როლის თეორემის თანახმად $]x_1, x_2[$ ინტერვალში იარსებებს ერთი მაინც ისეთი ξ , რომ $f'(\xi)=0$, ანუ $f(x)$ მრავალწევრის ორ ნულს შორის არსებობს ერთი მაინც $f'(x)$ მრავალწევრის ნული.

3. კოშის თეორემა. თუ $f(x)$ და $g(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, წარმოებადი $]a, b[$ ინტერვალში და $g'(x)$ $]a, b[$ ინტერვალის არც ერთ წერტილში ნულის ტოლი არაა, მაშინ $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ მართებულია ტოლობა

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} [g(x) - g(a)].$$

ცხადია, $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და წარმოებადი $]a, b[$ ინტერვალში. ამასთან $F(a)=0$, $F(b)=0$ ე. ი. $F(a)=F(b)$. ამგვარად, $F(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს. მაშასადამე, $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $F'(\xi)=0$, ანუ

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0,$$

საიდანაც მიიღება (1) ტოლობა. ამით კოშის თეორემა დამტკიცდა.

4. ლაგრანჟის¹ თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია $[a, b]$ ინტერვალში, მაშინ $[a, b]$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ მართებულა ტოლობა.

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi). \quad (2)$$

მართლაც, კოშის თეორემაში მივიღებთ $g(x) = x$, მაშინ $g'(x) = 1$ და, მაშასადამე, $g'(x) \neq 0$. ამ პირობებში (1)-დან გვექნება

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{1}, \quad (3)$$

საიდანაც

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

ლაგრანჟის თეორემას მარტივი გეომეტრიული შინაარსი აქვს (ნახ. 5). ავიღოთ A და B წერტილი, $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$. შევეერთოთ ქორდით.

AB წირზე ავიღოთ ისეთი P წერტილი, რომელზედაც გატარებული წირის მხები AB ქორდის პარალელური იყოს. სწორედ P წერტილის აბსცისა იქნება ξ .

მართლაც, ADB სამკუთხედისა

$$\frac{DB}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \varphi.$$

P წერტილზე გატარებული წირის მხების საკუთხო კოეფიციენტი

ტია $\operatorname{tg} \varphi = f'(\xi)$. ამ ორი სიდიდის: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ და $f'(\xi)$ -ის ტოლობა იძლევა (3) ტოლობას.

ამგვარად, როცა შესრულებულია ლაგრანჟის თეორემის პირობები, მაშინ $y = f(x)$ წირზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი $(\xi, f(\xi))$ წერტილი, რომელზედაც გატარებული წირის მხები წირის AB ქორდის პარალელურია.

ლაგრანჟის (2) ფორმულაში მივიღოთ $a = x$, $b = x + \Delta x$, მაშინ გვექნება

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi) \Delta x, \quad x < \xi < x + \Delta x. \quad (4)$$

¹ ჯოზეფ ლუი ლაგრანჟი (1736—1813), ფრანგი მათემატიკოსი და მექანიკოსი.

მიღებულ ფორმულას ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის ფორმულა ეწოდება.

ლაგრანჟის ფორმულაში ξ -ის ნაცვლად სხვა სიდიდე შეგვიძლია ავიღოთ. ადვილი შესაძრწევია $0 < \frac{\xi - a}{b - a} < 1$. ეს სიდიდე θ ასოთი აღვნიშნოთ,

$$\frac{\xi - a}{b - a} = \theta, \quad \xi = a + \theta(b - a),$$

მაშინ ლაგრანჟის ფორმულა ასე ჩაიწერება

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(a + \theta(b - a)) \quad (5)$$

და ამით ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x. \quad (6)$$

5. ლაგრანჟის თეორემის შედეგები. შედეგი 1. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტია $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია $[a, b]$ ინტერვალის ყოველ წერტილში, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე მუდმივია.

მართლაც, $[a, b]$ ინტერვალის ნებისმიერი x წერტილისათვის დავწეროთ ლაგრანჟის ფორმულა

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(\xi), \quad a < \xi < x.$$

პირობის თანახმად $\forall x \in [a, b]$ -თვის $f'(x) = 0$ და, მაშასადამე, $f'(\xi) = 0$. ამიტომ ყოველი x წერტილისათვის, $x \in [a, b]$, $f(x) - f(a) = 0$, საიდანაც

$$\forall x \in [a, b] \text{-თვის } f(x) = f(a).$$

ჩვენ აქამდე ვიცოდით, მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია. ახლა კი ვაჩვენეთ, რომ თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ხოლო მისი წარმოებული ნულის ტოლია $[a, b]$ ინტერვალის ყოველ წერტილში, მაშინ, $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია მუდმივია, $f(x) \equiv c$.

შედეგი 2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს $[a, b]$ ინტერვალის ყოველ წერტილში თანატოლი წარმოებულები აქვთ, მაშინ ეს ფუნქციები $[a, b]$ სეგმენტზე მხოლოდ მუდმივით განსხვავდებიან.

მართლაც, $[a, b]$ სეგმენტზე განვიხილოთ ფუნქცია $F(x) = f(x) - g(x)$. ეს ფუნქცია 1-ლი შედეგის თანახმად მოგვეცემს

$$\forall x \in [a, b] \text{-თვის } F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,$$

საიდანაც

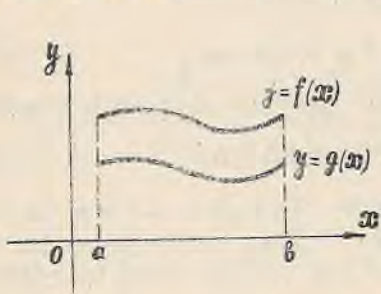
$$\forall x \in [a, b] \text{-თვის } f(x) - g(x) = c.$$

ამრიგად, თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს თანატოლი წარმოებულები აქვთ $[a, b]$ ინტერვალში მაინც, მაშინ ეს ფუნქციები მხოლოდ მუდმივით განსხვავდებიან (ნახ. 6),

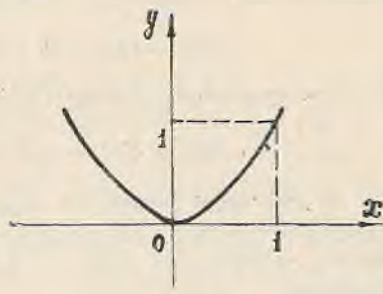
$$f(x) = g(x) + c, \quad x \in [a, b].$$

რაც უნდა გვეჩვენებინა.

ზემოაღბეტიებული საშუალო მნიშვნელობის თეორემების საფუძველზე განვიხილოთ ზოგიერთი ამოცანა.



ნახ. 6



ნახ. 7

ამოცანა 1. გამოვარკვეოთ, აკმაყოფილებს თუ არა $f(x) = x^2$ ფუნქცია $[0, 1]$ სეგმენტზე ფერმას თეორემის პირობებს?

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია $f(x) = x^2$ წარმოებალია $[0, 1]$ სეგმენტის ყველა წერტილში (ნახ. 7). ფუნქცია ზრდალია $[0, 1]$ სეგმენტზე. ამ სეგმენტზე $f(x) = x^2$ ფუნქციას აქვს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

მაგრამ $f(x) = x^2$ ფუნქცია არც ერთ x წერტილში $x \in [0, 1]$ არ ღებულობს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას. შესადაამე, მოცემული $f(x) = x^2$ ფუნქცია არ აკმაყოფილებს $[0, 1]$ სეგმენტზე ფერმას თეორემის პირობებს. ფერმას თეორემა ასეც შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ: თუ რაიმე X შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია წარმოებალია შიგა $\xi \in X$ წერტილში და აღწევს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას, მაშინ წარმოებულები ამ წერტილში ნულის ტოლია, $f'(\xi) = 0$.

ის, რომ $f(x) = x^2$ ფუნქციის წარმოებულები $f'(x) = 2x$ სეგმენტის ბოლო $x=0$ და $x=1$ წერტილებში $f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$, ფერმას თეორემიდან არ გამომდინარეობს.

ამოცანა 2. აკმაყოფილებს თუ არა $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ფუნქცია $[-1, 1]$ სეგმენტზე როლის თეორემის პირობებს?

ამოხსნა. როლის თეორემით $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ ინტერვალში წარმოებალია. შეიძლება ჰქონდეს უსასრულო წარმოებულები, მაგალითად,

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = +\infty \quad \text{ან} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = -\infty.$$

ფუნქცია $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ უწყვეტია მთელ Ox ღერძზე (ნახ. 8) და, ცხადია, უწყვეტია $[-1, 1]$ სეგმენტზეც. ამასთან $f(1) = f(-1)$.

გამოვყალიბოთ წარმოებულები, $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. წარმოებულები არსებობს მთელ სეგმენტზე $[-1, 1]$,

თუ $x \neq 0$. ხოლო $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = +\infty$.

ე. ი. $x=0$ წერტილში $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ფუნქციას არ აქვს არასასრულო წარმოებულები.

ამგვარად, ფუნქცია $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ სეგმენტზე $[-1, 1]$ არ აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას და ამის გამო არ არსებობს ისეთი ξ წერტილი $[-1, 1]$ სეგმენტზე, რომელშიც ფუნქციის წარმოებულები ნულის ტოლია. ეს მდგომარეობა ნათლად სჩანს ნახაზზედაც.

ამოცანა 3. $y = x^3 - 1$ წირზე მონახეთ წერტილები, რომლებზედაც გატარებული მხეხები $A(-1; -2)$ და $B(1; 0)$ წერტილებზე გატარებული წრფის პარალელურია. (ნახ. 9).

ამოხსნა. $[-1, 1]$ სეგმენტისათვის გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა:

$$f(1) - f(-1) = (1 - (-1)) f'(\xi),$$

$$0 - (-2) = 2 \cdot 3\xi^2,$$

$$0 - (-2) = 2 \cdot 3\xi^2,$$

$$0 - (-2) = 2 \cdot 3\xi^2,$$

$$0 - (-2) = 2 \cdot 3\xi^2,$$

$$0 - (-2) = 2 \cdot 3\xi^2,$$

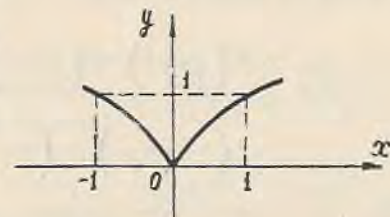
$$0 - (-2) = 2 \cdot 3\xi^2,$$

$$0 - (-2) = 2 \cdot 3\xi^2,$$

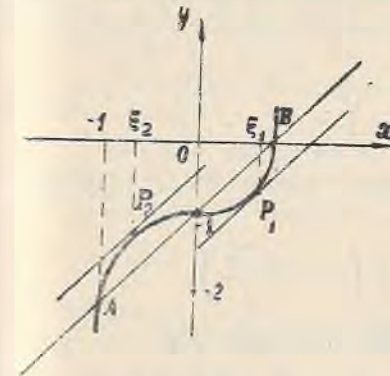
$$0 - (-2) = 2 \cdot 3\xi^2,$$

$$0 - (-2) = 2 \cdot 3\xi^2,$$

$$0 - (-2) = 2 \cdot 3\xi^2,$$



ნახ. 8



ნახ. 9

$$3\xi^2 = 1 \Rightarrow \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ და } \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

გამოვთვალოთ $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ და $\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ სათვის ფუნქციის მნიშვნელობანი:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 1 = \frac{\sqrt{3}}{9} - 1,$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{9} - 1.$$

ამგვარად, არსებობს ორი წერტილი

$$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right), P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right),$$

რომლებზედაც გატარებული $y = x^3 - 1$ წირის მხეხები პარალელურია AB წრფისა.

რომ შევადგინოთ P_1 და P_2 წერტილებზე გამავალი მხეხების განტოლებანი, უნდა გამოვთვალოთ $f'(\xi)$. ამისათვის საკმარისია, ავიღოთ ერთ-ერთი ξ_1 და ξ_2 -დან. გვექნება

$$f'(\xi) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

P_1 წერტილზე გამავალი მოცემული წირის მხეხის განტოლება იქნება

$$y - \left(\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right) = 1 \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

ხოლო P_2 წერტილზე გამავალი წირის მხეხის განტოლება იქნება

$$y - \left(-\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right) = 1 \cdot \left(x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right).$$

ზემოთ განხილული ამოცანების ანალოგიურად ამოვხსნათ ამოცანები.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 34.

1. აკმაყოფილებს თუ არა $f(x) = x(x-2)^2$ ფუნქცია $[0, 2]$ სეგმენტზე ფერმას თეორემის პირობებს. დადებითი პასუხის შემთხვევაში იპოვეთ სათანადო ξ . ააგეთ ნახაზი.

2. აკმაყოფილებს თუ არა $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ფუნქცია $[-1, 2]$ სეგმენტზე ფერმას თეორემის პირობებს. თუ პასუხი დადებითია, მაშინ მონახეთ სათანადო მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილები. ააგეთ ნახაზი.

3°. აკმაყოფილებს თუ არა $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ ფუნქცია $[-2, 1]$ სეგმენტზე როლის თეორემის პირობებს. დადებითი პასუხის შემთხვევაში მონახეთ სათანადო ξ . ააგეთ ნახაზი.

4. გამოარკვეთ, მართებულია თუ არა $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ ფუნქციისათვის $[-2, 4]$ სეგმენტზე როლის თეორემა. ააგეთ ნახაზი და მასზე გაარჩიეთ როლის თეორემის მართებულობის საკითხი.

5. გამოარკვეთ, მართებულია თუ არა $f(x) = x - \sin x$ ფუნქციისათვის $[0, \pi]$ სეგმენტზე ლაგრანჟის თეორემა დადებითი პასუხის შემთხვევაში მონახეთ სათანადო ξ . ააგეთ ნახაზი.

6. შეამოწმეთ, მართებულია თუ არა $f(x) = \ln x$ ფუნქციისათვის $[1, e]$ სეგმენტზე ლაგრანჟის თეორემა. დადებითი პასუხის შემთხვევაში მონახეთ სათანადო ξ . ამოცანა გაარჩიეთ ნახაზზე.

7. მოცემულია ფუნქციები $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = \frac{x^3}{3} + 1$. შეამოწმეთ კოშის თეორემის მართებულობა $[0; 1]$ სეგმენტზე. დადებითი პასუხის შემთხვევაში მონახეთ სათანადო ξ .

8. მოცემულია ფუნქციები $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$. შეამოწმეთ კოშის თეორემის მართებულობა $[0; 4]$ სეგმენტზე. მონახეთ სათანადო ξ .

9. მოცემულია ფუნქციები $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^2 - 1$. შეამოწმეთ კოშის თეორემის მართებულობა $[1, 2]$ სეგმენტზე. მონახეთ სათანადო ξ .

10. ისარგებლეთ თეორემით ფუნქციის მუდმივობის შესახებ და აჩვენეთ $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (ჯერ აჩვენეთ ალბულო ფუნქციათა

ქამის მუდმივობა, და შემდეგ მუდმივი c განსაზღვრეთ x -ის რომელიმე მნიშვნელობის, მაგალითად, $x=0$, ჩასმით მიღებულ გამოსახულებაში).

11. აჩვენეთ, რომ განტოლებას $e^x = 1 + x$ აქვს მხოლოდ ერთადერთი ნამდვილი ამონახსნი.

12. აჩვენეთ, რომ $f'(x) = f(x)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $f(x) = ce^x$. განიხილეთ ფუნქცია $k(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

§ 2. ლოკალის თეორემა. განსაზღვრავლობათა გახსნა

აღრე განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი ისეთ a წერტილში, სადაც ფუნქცია შეიძლება განსაზღვრული არ იყო.

თუ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილში განსაზღვრული არაა, მაგრამ ზღვარი აქვს, როდესაც $x \rightarrow a$, მაშინ ასეთი ზღვრის მოძებნას განუსაზღვრე-

ლობის გახსნა ეწოდება. კერძოდ, თუ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ და $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, მაშინ

$\frac{f(x)}{g(x)}$ შეფარდების ზღვრის მოძებნას, როდესაც $x \rightarrow a$, ეწოდება $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნა. ასევე, თუ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ და $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$,

მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ შეფარდების ზღვრის მოძებნას, როდესაც $x \rightarrow a$, ეწოდება $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნა. ანალოგიურად განისაზღვრება $0 \cdot \infty$, $1 \cdot \infty$, ∞^0 , 0^0 , $\infty - \infty$ სახის განუსაზღვრელობანი.

ახლა დავამტკიცებთ თეორემას, რომლის საფუძველზედაც შეგძლებოდა გაგხსნათ ზემოაღნიშნული განუსაზღვრელობანი.

1. $\frac{0}{0}$ განუსაზღვრელობის გახსნა.

თეორემა 1. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია a წერტილის რაიმე მარჯვენა მიდამოში, შესაძლოა თვით a წერტილის გარეშე, ამასთანავე ამ მიდამოში $g'(x) \neq 0$ და

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0.$$

თუ არსებობს ამ ფუნქციების წარმოებულთა შეფარდების ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

სასრული ან უსასრულო, ტოლი $+\infty$ -ის ან $-\infty$ -ისა, მაშინ არსებობს აგრეთვე

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(ლოპიტალის¹ თეორემა).

დამტკიცება. რადგანაც $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$ და $\lim_{x \rightarrow a+0} g'(x) = 0$, შეგვიძლია, დავუშვათ $f(a) = 0$, $g(a) = 0$. თუ ასეთი პირობით განვიხილავთ

$f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს a წერტილის რაიმე მიდამოში, ეს ფუნქციები აკმაყოფილებენ კოშის თეორემის პირობებს.

მართლაც, a წერტილის აღნიშნულ მიდამოში ავიღოთ რომელიმე x წერტილი, $x > a$, და განვიხილოთ $[a, x]$ სეგმენტი. ამ სეგმენტზე $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები თეორემის პირობით და a წერტილში დამატებითი პირობის საფუძველზე უწყვეტია, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ და $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = g(a)$,

წარმოებადია $]a, x[$ ინტერვალში, სადაც $g'(x) \neq 0$. $[a, x]$ სეგმენტზე გამოვიყენოთ კოშის თეორემა:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in]a, x[, \quad x > a.$$

მაგრამ $f(a)$ და $g(a)$ ნულის ტოლია, ამიტომ გვქვდება

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in]a, x[.$$

ცხადია, თუ $x \rightarrow a$, მაშინ $\xi \rightarrow a$. ამის გამო მივიღებთ

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (1)$$

ამრიგად, ლოპიტალის თეორემა დამტკიცდა იმ შემთხვევისათვის, როცა $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ სასრულია. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty. \quad (2)$$

რადგანაც $g'(x) \neq 0$ a წერტილის $]a, x[, x > a$, მიდამოში (2) ტოლობიდან გამომდინარეობს $f'(x) \neq 0$ a წერტილის გარკვეულ $]a, x[$ მიდამოში. ავიღოთ $x'' = \min\{x, x'\}$, სწორედ ასეთი ინტერვალის ვიგულისხმოთ $]a, x[$ -ად, სადაც $f'(x) \neq 0$. (2) ტოლობიდან ცხადია,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0. \quad (3)$$

ამ ტოლობით (2) შემთხვევა (1) შემთხვევაზე მივიყვანეთ. იმ განსხვავებით, რომ $f(x)$ -ის ნაცვლად $g(x)$ ფუნქცია უნდა განვიხილოთ და პირიქით. $[a, x]$ სეგმენტზე $g(x)$ და $f(x)$ ფუნქციებისათვის გვქვდება

$$\frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)},$$

საიდანაც

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a+0} \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0.$$

¹ გიიომ ფრანსუა ანტუან ლოპიტალი (1661—1704), ფრანგი მათემატიკოსი და მექანიკოსი.

აქედან კი მივიღებთ

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

იმ შემთხვევაში, როცა

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty,$$

აღნიშვნით $-f(x) = \varphi(x)$ მიიყვანება (2) შემთხვევაზე. დაგვჭირდება ზემოთ ჩატარებული დამტკიცება სიტყვასიტყვით გავიმეოროთ $g(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებზე, საიდანაც დავასკვნით

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty.$$

ამით ლობიტალის თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

დამტკიცებული თეორემა ბუნებრივი სახეცვლილებით ძალაშია მაშინაც, როდესაც გვაქვს მარცხენა ზღვარი, $x \rightarrow a-0$ და ასევე, ორმხრივი ზღვარი.

განვიხილოთ მაგალითი.

გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$$

ფუნქციები $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^2 - 1$ შუალედში $[1, x]$, $x > 1$, და ასევე $[1, x]$, $x < 1$, შუალედში აკმაყოფილებენ ლობიტალის თეორემის პირობებს, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}.$$

ყურადღება მივაქციოთ ლობიტალის თეორემაში პირობას: „თუ არსებობს $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, მაშინ ადგილი აქვს (1) ტოლობას“. შეიძლება

$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ არსებობდეს, მაგრამ $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ არ არსებობდეს.

მაგალითად,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0,$$

მაგრამ $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ და $g(x) = \sin x$ ფუნქციების წარმოებულთა შეფარდების ზღვარი არ არსებობს:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}.$$

ლობიტალის თეორემით გავხსენით $\frac{0}{0}$ განუსაზღვრელობა, შესაძლებელია,

ლია, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ იძლეოდეს $x = a$ მნიშვნელობისათვის ისევე $\frac{0}{0}$ განუსაზღვრელობას. თუ $f'(x)$ და $g'(x)$ ფუნქციები ლობიტალის თეორემის პირობებს აკმაყოფილებენ, მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

ცხადია, ამ ტოლობის განზოგადება შეიძლება, თუ

$$\begin{aligned} f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) &= 0, \\ g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) &= 0 \end{aligned}$$

და $g^{(n)}(x) \neq 0$ a წერტილის გაჩვენებულ მიდამოში, $u(a)$. ამ შემთხვევაში, თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)},$$

მაშინ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}. \quad (4)$$

მაგალითად, გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{1 - \cos 3x}.$$

გვექნება:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{1 - \cos 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 10x}{3 \sin 3x} = \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 10x)'}{(\sin 3x)'} = \\ &= \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10 \cos 10x}{3 \cos 3x} = \frac{50}{9}. \end{aligned}$$

ლოპიტალის თეორემით $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნას განუსაზღვრელობის ლოპიტალის წესით გახსნა ეწოდება.

ჩვენ ვაჩვენებთ ლოპიტალის წესის გამოყენებას, როცა $x \rightarrow a$, სასრული რიცხვია, ანუ, ვაჩვენებთ, რომ ლოპიტალის წესი ძალაშია მაშინაც, როცა a სასრული რიცხვი არაა.

ვთქვათ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x = \frac{1}{t}$, მაშინ $x \rightarrow +\infty$ გვადლევს $t \rightarrow 0+0$. ასე რომ, გვექნება

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)'}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)'} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}. \end{aligned}$$

თუ დავუბრუნდებით ისევ x ცვლადს, მივიღებთ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ამგვარად, ლოპიტალის წესი ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როცა $x \rightarrow +\infty$.

სრულად ასევე ვაჩვენებთ, რომ ლოპიტალის წესი ძალაში რჩება, როცა $x \rightarrow -\infty$.

2. $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა. დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებდათ a წერტილის რაიმე მარჯვენა მიდამოში $]a, b[$ და ამ მიდამოში $g'(x) \neq 0$. ამასთან

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty.$$

თუ არსებობს ზღვარი $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ სასრული ან უსას-

რულო, ტოლი სათანადოდ $+\infty$ ან $-\infty$, მაშინ არსებობს ზღვარი $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, სასრულია ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

მაშინ ყოველი ε დადებითი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta > 0$, რომ ყოველი x -სათვის,

$$\begin{aligned} x \in]a, a + \eta[\subset]a, b[, \\ \frac{f'(x)}{g'(x)} = k + \alpha(\eta), \end{aligned} \quad (6)$$

სადაც

$$|\alpha(\eta)| < \varepsilon.$$

ავიღოთ რაიმე $[x, c]$ სეგმენტი, რომელიც $]a, a + \eta[$ ინტერვალშია. ამ სეგმენტზე $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ კოშის თეორემის პირობებს, ამიტომ

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in]x, c],$$

ანუ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} + \frac{1 - \frac{f(c)}{g(c)}}{1 - \frac{g(c)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

საიდანაც

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}}. \quad (7)$$

მაგრამ

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}} = 1.$$

ეს ტოლობა კი გვიჩვენებს, რომ

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \delta < \eta$, რომ $\forall x \in]a, a + \delta[$ -სათვის

$$\frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}} = 1 + \beta, \text{ სადაც } |\beta| < \varepsilon.$$

ამის გამო (7) ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} (1 + \beta). \quad (8)$$

(6) დამოკიდებულების საფუძველზე (8) ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (k + \alpha)(1 + \beta), \quad x \in]a, a + \delta[, \quad |\alpha| < \varepsilon, |\beta| < \varepsilon,$$

საიდანაც

$$\frac{f(x)}{g(x)} = k + \alpha + k\beta + \alpha\beta.$$

აქედან კი მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

ამით გამოთქმული თეორემა დამტკიცდა, როცა $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ და k სასრული რიცხვია. ვთქვათ k არ არის სასრული რიცხვი:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty,$$

მაშინ $f'(x) \neq 0$ და

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0.$$

გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0,$$

აქედან კი მივიღებთ

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty.$$

ასე რომ, k სასრულია თუ უსასრულო, გამოთქმული თეორემის პირობებში (5) ტოლობას მაინც აქვს ადგილი.

აქაც შევნიშნოთ, რომ, თუ ერთჯერ გაწარმოება შედეგს არ იძლევა და $f'(x)$ და $g'(x)$ აკმაყოფილებენ თეორემაში მოთხოვნილ პირობებს, შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი რიგის წარმოებულები.

მაგალითად, გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

გვექნება:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(e^x)'} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

3. $0 \cdot \infty$ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ისეთია, რომ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, მაშინ ნამრავლი $f(x)g(x)$ მოგვცემს $0 \cdot \infty$ სახის განუსაზღვრელობას. ამ განუსაზღვრელობას ასე გავხსნით:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

ე. ი. $0 \cdot \infty$ სახის განუსაზღვრელობა მივიყენოთ $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობაზე. ასევე $0 \cdot \infty$ განუსაზღვრელობა შეგვიძლია მივიყენოთ $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობაზე.

მაგალითად, გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (x^n \ln x), \quad n > 0.$$

გვექნება

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} (x^n \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-n})'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{-n x^{-n-1}} = -\frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x^{-n}} = \\ &= -\frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0+0} x^n = 0. \end{aligned}$$

4. 1^∞ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები გვაძლევს

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

მაშინ $y = f(x) g(x)$ ფუნქცია მოგვცემს 1^∞ სახის განუსაზღვრელობას. ამ სახის განუსაზღვრელობას გავსწნით გალოგარიტმების საშუალებით:

$$\ln y = g(x) \ln f(x).$$

ეს უკანასკნელი კი გვაძლევს $\infty \cdot 0$ სახის განუსაზღვრელობას, რომლის გახსნაც უკვე ვიცით.

მაგალითად, გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (1 + 2 \sin x)^{\frac{5}{\sin 3x}},$$

გვექნება

$$y = (1 + 2 \sin x)^{\frac{5}{\sin 3x}} > 0, \quad \text{თუ } 0 < x < \frac{\pi}{3}.$$

$$\ln y = \frac{5}{\sin 3x} \ln (1 + 2 \sin x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{5}{\sin 3x} \ln (1 + 2 \sin x) \right) = 5 \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln (1 + 2 \sin x))'}{(\sin 3x)'} =$$

$$= 5 \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2 \cos x}{1 + 2 \sin x} = \frac{10}{3},$$

საიდანაც

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (1 + 2 \sin x)^{\frac{5}{\sin 3x}} = e^{\frac{10}{3}}.$$

ამავე ხერხით გაიხსნება ∞^0 , 0^0 სახის განუსაზღვრელობანი.

5. $\infty - \infty$ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ და

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, მაშინ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ მოგვცემს $\infty - \infty$ სახის განუსაზღვრელობას. $\infty - \infty$ განუსაზღვრელობის შემთხვევაში ზღვრის გამოთვლა

დაიყვანება $\frac{0}{0}$ სახის ზღვრის გამოთვლაზე.

მართლაც,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)f(x)}}.$$

მაგალითად, გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2+x-2} \right).$$

გვექნება

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2+x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-2x+1)'}{(x^2+x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{2x+1} = 0. \end{aligned}$$

სავარჯიშო 35.

ლოპიტალის წესით გამოვთვალოთ შემდეგი ზღვრები.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4},$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2},$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-e^{1-x}},$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin x - x},$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x},$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x)^{\operatorname{ctg} 3x},$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 e^{-x}),$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \sin \frac{1}{x} \right),$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x \ln (x-1)),$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x,$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin 2x},$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\cos \frac{D}{2} x},$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}},$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}},$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\sin x}},$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x},$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1-x))^{\ln(1-x)}, \quad 18) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right),$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right), \quad 20) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

§ 3. ტეილორის ფორმულა

1. ტეილორის ფორმულა პეანოს დამატებითი წევრით. ჩვენთვის ცნობილია: თუ $y=f(x)$ ფუნქციას a წერტილში აქვს წარმოებული, მაშინ მისი ნაზრდი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Delta y = f'(a) \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

სადაც

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a),$$

ასე რომ, არსებობს წრფივი ფუნქცია

$$P_1(x) = A_0 + A_1(x-a) \quad (1)$$

ისეთი, რომ

$$f(x) = P_1(x) + o(x-a), \quad x \rightarrow a, \quad (2)$$

სადაც

$$P_1(a) = f(a) = A_0, \quad P_1'(a) = f'(a) = A_1.$$

დავსვათ უფრო ზოგადი ამოცანა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას a წერტილში აქვს n რიგის წარმოებული. ე. ი. არსებობს a წერტილის ისეთი მიდამო $c \leq x \leq b$, სადაც განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებულები $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$. გამოვარკვეოთ, არსებობს თუ არა ისეთი არა უმეტეს n -ხარისხის მრავალწევრი $P_n(x)$, რომ

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a, \quad (3)$$

ამასთან

$$f(a) = P_n(a), \quad f'(a) = P_n'(a), \dots, f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a). \quad (4)$$

ეს მრავალწევრი ვეძებთ (1) ფორმულის ანალოგიით,

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-a) + \dots + A_n(x-a)^n. \quad (5)$$

ამ ტოლობიდან ჩანს $P_n(a) = A_0$. თუ (5) ტოლობის ორივე მხარეს გავაწარმოებთ, მივიღებთ

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + \dots + nA_n(x-a)^{n-1}.$$

საიდანაც $P_n'(a) = A_1$. (5) ტოლობის მეორე რიგის წარმოებული მოგვცემს

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1 \cdot A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3(x-a) + \dots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2},$$

საიდანაც $\frac{P_n''(a)}{2!} = A_2$. ასე რომ,

$$\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} = A_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

რადგანაც

$$f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a),$$

მივიღებთ, რომ

$$P_n(x, a) \equiv P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (6)$$

ეს მრავალწევრი აკმაყოფილებს (4) პირობებს. ახლა შევამოწმოთ, აკმაყოფილებს თუ არა (3) პირობას.

განვიხილოთ სხვაობა $f(x) - P_n(x)$, რომელიც $r_n(x)$ -ით აღვნიშნოთ,

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

ამ გამოსახულებას (3) ფორმულის ნაშთითი წევრი ვუწოდოთ. (4) პირობებიდან მივიღებთ:

$$r_n(a) = r_n'(a) = \dots = r_n^{(n)}(a) = 0.$$

გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n}.$$

რისთვისაც გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი (ფუნქციები $r_n(x)$ და $(x-a)^n$ ლოპიტალის თეორემის პირობებს აკმაყოფილებენ a წერტილის მიდამოში. $u(a)$). ლოპიტალის წესის n -ჯერ გამოყენება მოგვცემს

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(r_n^{(n-1)}(x))'}{n!} = \frac{r_n^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

ამგვარიად

$$r_n(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

თუ შევიტანთ (6) გამოსახულებას (3) ფორმულაში, მივიღებთ

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a. \quad (7)$$

მიღებულ ფორმულას ეწოდება ტეილორის ფორმულა. ამგვარად დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქციას, განსაზღვრულს $[b, c]$ ინტერვალში, $a \in]b, c[$ წერტილში აქვს წარმოებული n -ჯერ, მაშინ

მოცემული n რიგამდე n რიგის ჩათვლით, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია წარმოიდგინება შემდეგი ტოლობით

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

ეს თეორემა ჰერმარიტა მაშინაც, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[b, c]$ სეგმენტზე და $x=b$ -თვის და $x=c$ -თვის უნდა განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა და სათანადოდ მარცხენა წარმოებულები.

ფუნქციის $r_n(x) = O((x-a)^n)$ ეწოდება ნაშთი პეანოს სახით (დამატებითი წევრი პეანოს სახით). ამის გამო მიღებულ (7) ფორმულას ეწოდება ტეილორის ფორმულა პეანოს დამატებითი წევრით.

2. ტეილორის ფორმულა სხვა სახის დამატებითი წევრით. განვიხილოთ $[a, x]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(t)$ ფუნქცია. ვთქვათ, $f(t)$ ფუნქციას $[a, x]$ სეგმენტზე აქვს უწყვეტი n რიგის წარმოებული, ხოლო $[a, x]$ ინტერვალში $n+1$ რიგის წარმოებული. ამავე $[a, x]$ სეგმენტზე განვიხილოთ ნებისმიერი $g(t)$ უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც $[a, x]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში აქვს ნულისაგან განსხვავებული წარმოებული, $g'(t) \neq 0, x \in [a, b]$. ვჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის ფორმულის დამატებითი წევრს აქვს შემდეგი სახე:

$$r_n(x) = \frac{g(x) - g(a)}{g'(\xi)n!} (x - \xi)^n f^{(n+1)}(\xi).$$

ამისათვის $[a, x]$ სეგმენტზე განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$\begin{aligned} \varphi(t) = f(x) - P_n(t, x) &= f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

ამ ფუნქციის განსაზღვრიდან ადვილად დავრწმუნდებით, რომ იგი $a \leq t \leq x$ სეგმენტზე უწყვეტია, $a < t < x$ ინტერვალში წარმოებადია და ამასთან

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= - \left[f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{2f''(t)}{2!}(x-t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{n f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \right] = \\ &= - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n. \end{aligned}$$

გამოვიყენოთ კოშის თეორემა $\varphi(t)$ და $g(t)$ ფუნქციებისათვის $[a, x]$ სეგმენტზე. გვექნება

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in]a, x[.$$

საიდანაც

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \frac{g(x) - g(a)}{g'(\xi)} \varphi'(\xi), \quad \xi \in]a, x[. \quad (9)$$

გამოვყავართ $\varphi(x) - \varphi(a)$ და $\varphi'(\xi)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(a) &= f(x) - P_n(x, x) - [f(x) - P_n(a, x)] = 0 - r_n(x) = \\ &= -r_n(x), \end{aligned}$$

$$\varphi'(\xi) = - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი (8) ტოლობაში, საიდანაც მივიღებთ:

$$r_n(x) = \frac{g(x) - g(a)}{g'(\xi)n!} (x - \xi)^n f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in]a, x[. \quad (10)$$

ამრიგად დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქციას $[a, x]$ სეგმენტზე აქვს უწყვეტი n რიგის წარმოებული, $[a, x]$ ინტერვალში $n+1$ რიგის წარმოებული, მაშინ ნებისმიერი უწყვეტი $g(x)$ ფუნქციისათვის $[a, x]$ სეგმენტზე, რომლის წარმოებული $[a, x]$ ინტერვალის ყოველ წერტილში ნულისაგან განსხვავებულია, არსებობს ისეთი ξ წერტილი, $\xi \in]a, x[$, რომ $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის¹ ფორმულის დამატებითი წევრი

$$r_n(x) = \frac{g(x) - g(a)}{g'(\xi)n!} (x - \xi)^n f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in]a, x[.$$

ტოლობით გამოისახება.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის ფორმულის დამატებითი წევრი $r_n(x)$ მართო x -ის ფუნქცია არაა. იგი ფუნქციაა როგორც x -ის, ისე a და ξ სიდიდეების. ξ დამოკიდებულია როგორც x -ზე, ისე $[a, x]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციაზე. დამატებით წევრს რომ $r_n(x)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, ამ სიმბოლოს ქვეშ ჩამოთვლილი სიდიდეების ფუნქციას ვგულისხმობთ.

¹ ბრუკ ტეილორი (1685—1731), ინგლისელი მათემატიკოსი.

თუ მივიღებთ $g(t) = (x-t)^p$, მაშინ (10) ფორმულა მოგვცემს

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in]a, x[, \quad (11)$$

სადაც p ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია.

თუ მოვიფიქრობთ ξ -ის წარმოდგენას, $\xi = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$, (§ 1, n 4), მაშინ $r_n(x)$ მიიღებს შემდეგ სახეს

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1} (1-\theta)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)). \quad (12)$$

დამატებითი წევრის (12) სახეს ეწოდება ტეილორის ფორმულის დამატებითი წევრი შლეშილბის სახით.

თუ (12) გამოსახულებაში $p=1$, მივიღებთ

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1} (1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)). \quad (13)$$

ამ გამოსახულებას ეწოდება დამატებითი წევრი კოშის სახით.

თუ $p = n+1$, მაშინ (12) მოგვცემს

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)). \quad (14)$$

ამ გამოსახულებას ეწოდება დამატებითი წევრი ლაგრანჟის სახით. ფუნქციას

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (15)$$

ეწოდება ტეილორის n -ხარისხის მრავალწევრი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x-a=h$, მაშინ ტეილორის ფორმულა მიიღებს სახეს

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + r_n(h), \quad (16)$$

სადაც

$$r_n(h) = \frac{h^{n+1} (1-\theta)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1, \quad (17)$$

დამატებითი წევრია შლეშილბის სახით,

$$r_n(h) = \frac{h^{n+1} (1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1, \quad (18)$$

¹ ი. შლეშილბი (1823—1901), გერმანელი მათემატიკოსი.

დამატებითი წევრია კოშის სახით.

$$r_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1. \quad (19)$$

დამატებითი წევრია ლაგრანჟის სახით.

ვთქვათ, $a=0$, მაშინ ტეილორის ფორმულა მოგვცემს

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x). \quad (20)$$

მიღებულ ფორმულას ეწოდება მაკლორენის¹ ფორმულა. მაკლორენის ფორმულის დამატებითი წევრი $r_n(x)$ კოშის სახით იქნება

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1} (1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1. \quad (21)$$

ხოლო ლაგრანჟის სახით იქნება

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1. \quad (22)$$

3. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის გაშლა მაკლორენის ფორმულით

$$1. f(x) = e^x$$

ენიდან $(e^x)^{(n)} = e^x$, $(e^x)_{x=0}^{(n)} = 1$, მაკლორენის ფორმულა (20) მოგვცემს

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (23)$$

დამატებითი წევრი $r_n(x)$ დაწერილია ლაგრანჟის სახით.

$$2. f(x) = \sin x.$$

რადგანაც

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad (\sin x)_{x=0}^{(n)} = \sin n \frac{\pi}{2},$$

ვპექნება

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \sin n \frac{\pi}{2} + \\ &+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

¹ კოლინ მაკლორენი (1698—1746), შოტლანდიელი მათემატიკოსი.

ამ ფორმულიდან, როცა n ლუწია, $n=2k$, მივიღებთ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos \theta x, \quad (25)$$

ხოლო, როცა n კენტია, $n=2k+1$, მივიღებთ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sin \theta x. \quad (26)$$

$$3. f(x) = \cos x. \text{ რადგანაც } (\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

მივიღებთ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left(\theta x + (n+1) \frac{\pi}{2} \right). \quad (26)$$

თუ $n=2k$, მაშინ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin \theta x. \quad (27)$$

თუ $n=2k+1$, მაშინ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cos \theta x \quad (28)$$

$$4. f(x) = \ln(1+x), |x| < 1. \text{ რადგანაც}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1),$$

მივიღებთ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1} (1-\theta)^n}{n(1+\theta x)^{n+1}}. \quad (29)$$

დამატებითი წევრი კოშის სახითაა დაწერილი.

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $|x| < 1$, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. რადგანაც

$$(f(x))^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n},$$

მივიღებთ

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} (1-\theta)^n \quad (30)$$

ამ ფორმულაში დამატებითი წევრი კოშის სახითაა დაწერილი.

4. ტეილორის ფორმულით ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა. ტეილორის ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა, თუ დავადგენთ დამატებითი წევრის ზღვარს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

სწორედ ამ ზღვრის საშუალებით უნდა დავადგინოთ x -ის სიმრავლე, რომლისთვისაც შეგვიძლება $f(x)$ მნიშვნელობის მიახლოებითი განსაზღვრა. x -ის ასეთი მნიშვნელობისათვის, როცა $n \rightarrow \infty$, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

მივიღეთ ე. წ. ტეილორის მწკრივი. ტეილორის მწკრივით ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლას დაწვრილებით მწკრივთა თეორიაში გავცენებით.

ტეილორის მწკრივით $f(x)$ ფუნქციისათვის შემდეგი მიახლოებითი ფორმულა შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

ცხადია, n -ის სხვა და სხვა მნიშვნელობისათვის მივიღებთ $f(x)$ -ის მნიშვნელობას სხვა და სხვა სიზუსტით.

e^x ფუნქციის ტეილორის (23) ფორმულაში დამატებითი წევრი ლაგრანჟის სახით ავიღეთ.

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

ადვილი დასადგენია, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

ამის გამო x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, $-\infty < x < +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x)| = 0.$$

ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

სრულიად ასევე დავადგენთ, რომ $\sin x$ -ის და $\cos x$ -ის ტეილორის დამატებითი წევრის ზღვარი, როცა $n \rightarrow \infty$, ნულის ტოლია x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, $-\infty < x < +\infty$. ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \dots$$

ახლა ავიღოთ $\ln(1+x)$ -ის გაშლა ტეილორის ფორმულით (29). მისი დამატებითი წევრი აღებულია კოშის სახით:

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} = (-1)^n \frac{x}{1+\theta x} \left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x} \right)^n.$$

$|x| < 1$ -სათვის მივიღებთ

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-\theta x}{1+\theta x} \right| &\leq \frac{|x| - \theta|x|}{1-\theta|x|} = \frac{1-\theta|x| - (1-|x|)}{1-\theta|x|} = \\ &= 1 - \frac{1-|x|}{1-\theta|x|} \leq 1 - \frac{1-|x|}{1-0} = |x|, \end{aligned}$$

ანუ

$$\left| \frac{x-\theta x}{1+\theta x} \right| \leq |x|.$$

ამის გამო გვექნება

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{|1+\theta x|}.$$

რადგანაც $|x| < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x)| = 0.$$

ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

ავიღოთ $(1+x)^\alpha$ -ის ტეილორის ფორმულა (30). დამატებითი წევრი კოშის სახითაა აღებული. დამატებითი წევრი ასე ჩავწეროთ ($0 < \alpha < 1$):

$$r_n(x) = (-1)^n \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) (1+\theta x)^{\alpha-1} \left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x} \right)^n x.$$

როგორც წინა შემთხვევაში, აქაც, თუ $|x| < 1$, მივიღებთ

$$\left| \frac{x-\theta x}{1+\theta x} \right| \leq |x|.$$

ამის გამო გვექნება

$$|r_n(x)| \leq |\alpha| |1+\theta x|^{\alpha-1} |x|^{n+1},$$

საიდანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x)| = 0.$$

ამგვარად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + \dots$$

თუ (30) ფორმულაში $\alpha = n$, მივიღებთ ჩვენთვის კარგად ცნობილ ნიუტონის ბინომის ფორმულას

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!} x^n.$$

ტეილორის ფორმულით ვიპოვოთ ზოგიერთი ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

1. e^x -ის მნიშვნელობა. ვიპოვოთ $e^{0.1}$. ვისარგებლოთ (23) ფორმულით:

$$e^{0.1} \approx 1 + \frac{0.1}{1!} + \frac{0.1^2}{2!} + \dots + \frac{0.1^n}{n!}.$$

გამოთვლები მოგვცემს

$$e^{0.1} \approx 1 + 0.1 + 0.005 + 0.0001(6) + 0.0000041(6) + 0.00000008(3) + 0.0000000013(8) + 0.000000000019841.$$

$$e^{0.1} \approx 1.10517091769.$$

(31)

შევავსოთ მიღებულ მნიშვნელობაში ცდომილება

$$r_8 = \frac{0.1^8}{8!} e^{0.0,1} < \frac{0.1^8}{8!} \cdot 3 < 7 \cdot 10^{-13}.$$

ამგვარად, მიღებულ (31) მნიშვნელობაში ყველა ციფრი ზუსტია.

ვიზოვით e -ს მნიშვნელობა. იგივე (23) ფორმულა მოგვცემს

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{7!}.$$

გამოთვლებით მივიღებთ

$$e \approx 2,7182540.$$

შევამოწმოთ მიღებულ მნიშვნელობაში ცდომილება.

$$r_8 = \frac{1}{8!} e^{8x} < \frac{1}{8!} \cdot 3 < 0,00008 < 10^{-4}.$$

ამგვარად, e -ს მიღებულ მნიშვნელობაში სამი ათწილადი ციფრია ზუსტი, ამიტომ მიღებული მნიშვნელობა უნდა დავამრგვალოთ სამ ათწილად ნიშნამდე:

$$e \approx 2,718.$$

2. $\sin x$ -ის მნიშვნელობის პოვნა. ამისათვის უნდა ვი-სარგებლოთ ფორმულით, $n=2k+1$.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (32)$$

სადაც უკუგდებულია დამატებითი წევრი:

$$R_{2k+2}(x) = (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sin \theta x.$$

ცხადია,

$$|R_{2k+2}(x)| \leq \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}. \quad (33)$$

მიღებული (33) შეფასება გვიჩვენებს, რომ (32) ფორმულით $\sin x$ -ის მიღებულ მნიშვნელობაში ცდომილება არ აღემატება უკუგდებული პირ-ველი წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობას. მაგალითად, გამოვთვალოთ

$$\sin \frac{\pi}{36}.$$

გვექნება

$$\frac{\pi}{36} \approx \frac{3,1415927}{36} \approx 0,087266$$

$$\sin \frac{\pi}{36} \approx 0,087266 - \frac{0,087266^3}{3!} = 0,087266 - 0,000111 = 0,087155.$$

შეფასება მოგვცემს:

$$|R_4| \leq \frac{0,087266^4}{4!} < 3 \cdot 10^{-6}$$

მაშასადამე, $\sin \frac{\pi}{36}$ -ის მიღებულ მნიშვნელობაში 5 ათწილადი ნიშანია ზუს-ტი. გვექნება

$$\sin \frac{\pi}{36} \approx 0,08716.$$

3. $\sqrt[n]{1+x}$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობის პო-ვნა. ამისათვის უნდა ვისარგებლოთ (30) ფორმულით. მაგალითად, გამოვ-თვალოთ $\sqrt[3]{7}$.

გვექნება:

$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8-1} = 2 \sqrt[3]{1-\frac{1}{8}} = 2 \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

(30) ფორმულაში ავიღოთ $\alpha = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{8}$. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} &\approx 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1!} \frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!} \frac{1}{8^2} - \\ &- \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3!} \frac{1}{8^3} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) \left(\frac{1}{3} - 3\right)}{4!} \frac{1}{8^4}, \end{aligned}$$

ანუ

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1 - \frac{1}{1!3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{2}{2!3^2} \cdot \frac{1}{8^2} - \frac{2 \cdot 5}{3!3^3} \cdot \frac{1}{8^3} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{4!3^4} \cdot \frac{1}{8^4}.$$

გამოთვლები მოგვცემს:

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1 - 0,0416667 - 0,0017361 - 0,0001205 -$$

$$- 0,00001000 = 0,9564667;$$

$$\sqrt[3]{7} \approx 2,0,9564667 = 1,9129334. \quad (33)$$

გამოვარკვით ცდომილება მიღებულ (33) მნიშვნელობაში. ამისათვის ვი-სარგებლოთ დამატებითი წევრის ფორმულით (ლაგრანჟის სახით)

$$R_5 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{5! \cdot 3^5} \cdot \frac{1}{8^5} \left(1 - \theta \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3} - 5} < \frac{2 \cdot 11}{4! \cdot 8^4} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{8}\right)^{5 - \frac{1}{3}}} < \\ < \frac{11}{12 \cdot 8^4} \frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^5} = \frac{11 \cdot 8}{12 \cdot 7^5} < 0.0005.$$

ასე რომ, მიღებულ (33) მნიშვნელობაში ზუსტია სამი ათწილადი ნიშანი. ამიტომ უნდა ავიღოთ

$$\sqrt[3]{7} \approx 1.913.$$

ამ მაგალითიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ ვიდრე ფუნქციის მნიშვნელობას გამოვთვლიდეთ ტეილორის ფორმულით, წინასწარ უნდა დავადგინოთ რამდენი წევრი უნდა ავიღოთ, რომ მივიღოთ სათანადო სიზუსტე. სიზუსტის მიხედვით უნდა განვსაზღვროთ, თუ რამდენი ათწილადი ნიშნით ვაწარმოოთ გამოთვლები. ჩვენ შემთხვევაში, $\sqrt[3]{7}$ -დან რომ მიგვეღო 3 ათწილადი ნიშნის სიზუსტით, საკმარისი იყო გამოთვლები გვეწარმოებინა 5 ათწილადი ნიშნით და არა 7 ათწილადი ნიშნით, როგორც ეს ზემოთ ჩავატარეთ.

4. რიცხვის ლოგარითმის გამოთვლა. ვისარგებლოთ (29) ფორმულით.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

დამატებითი წევრი აღებულია ლაგრანჟის სახით.

შევცვალოთ x სათანადოდ ($-x$)-ით, გვექნება

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n!} + (-1)^{2n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}}.$$

ამ ორი გამოსახულებიდან სათანადო გამოკლებით მივიღებთ

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) + \bar{R}_{2n}, \quad (34)$$

სადაც

$$|\bar{R}_{2n}| \leq \frac{|x|^{2n}}{2n} \left(\frac{1}{|1+\theta x|^{2n}} + \frac{1}{|1-\theta x|^{2n}} \right). \quad (35)$$

მივიღოთ

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{p}{q},$$

საიდანაც

$$x = \frac{p-q}{p+q}.$$

მაშინ (34) ფორმულა მოგვცემს

$$\ln \frac{p}{q} = 2 \left(\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^5 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{2n-1} + \bar{R}_{2n} \right), \quad (36)$$

სადაც დამატებითი წევრისათვის გვექნება

$$|\bar{R}_{2n}| \leq \frac{1}{2n} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^{2n} \left(\frac{1}{\left(1+\theta \frac{p-q}{p+q}\right)^{2n}} + \frac{1}{\left(1-\theta \frac{p-q}{p+q}\right)^{2n}} \right). \quad (37)$$

მაგალითად, გამოვთვალოთ $\ln 2$. ცხადია, $p=2$, $q=1$. მივიღებთ

$$\ln 2 \approx 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} \right) \approx 0.6931468.$$

ცდომილებისათვის მივიღებთ

$$|\bar{R}_8| \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3^8} \left(\frac{1}{\left(1+\theta \frac{1}{3}\right)^8} + \frac{1}{\left(1-\theta \frac{1}{3}\right)^8} \right). \quad (38)$$

ვთქვათ, $\theta = \frac{1}{2}$, მაშინ (38) გამოსახულების პირველი შესაყრები შემცირდება, ხოლო მეორე შესაყრები გაიზრდება, საერთოდ კი გვექნება

$$|\bar{R}_8| \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3^8} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^8} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^8} \right),$$

ანუ

$$|\bar{R}_8| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^8} \left(\left(\frac{6}{7} \right)^8 + \left(\frac{6}{5} \right)^8 \right) < \frac{1}{8 \cdot 3^8} (0.3 + 4.3) < \frac{5}{8 \cdot 3^8}.$$

გამოთვლები მოგვცემს:

$$|\bar{R}_8| < 0.0000952.$$

მიღებული $\ln 2$ -ის მნიშვნელობა სამი ათწილადი ნიშნით მაინცაა ზუსტი, ამიტომ სათანადოდ უნდა დავამრგვალოთ:

$$\ln 2 \approx 0.6931$$

(37) ფორმულიდან $\ln 10$ -ისათვის გვექნება ($p=10, q=1$):

$$\ln 10 = 2 \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{11^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{11^5} + \dots \right) = 2.30293 \dots$$

როგორც ვიცით,

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{2.30293 \dots} \ln x = M \ln x,$$

სადაც

$$M = 0.43429448 \dots$$

M რიცხვს მოდული ეწოდება.

ამგეარად, რომ გამოვიანგარიშოთ მოცემული რიცხვის ლოგარითმა 10 -ის ფუძით, ჯერ გამოვიანგარიშოთ ამ რიცხვის ლოგარითმი ნატურალური ფუძით და შემდეგ გავამრავლოთ M -ზე.

მაგალითად,

$$\log_{10} 2 = 0.434294 \cdot 0.693147 \approx 0.30103.$$

რიცხვითი ლოგარითმების მონახვა (36) ფორმულის საფუძველზე ასე შეიძლება.

$$\ln p = \ln q + 2 \left(\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^5 + \dots \right) \quad (39)$$

ამით ვიცით რა q რიცხვის ლოგარითმი, გამოვიანგარიშებთ p რიცხვის ლოგარითმს. ამ შემთხვევაში მცირე სიდიდეებთან გვექნება საქმე.

მაგალითად, $\ln 11$ -ისათვის ($p=11, q=10$) გვექნება

$$\ln 11 = \ln 10 + 2 \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{21^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{21^5} + \dots \right),$$

რაც იდვილი გამოსათვლელია, როცა ცნობილია 10 -ის ლოგარითმი.

ს ა ვ ა რ ჟ ი შ ო 36.

1. მრავალწევრი $p(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$ გაშალეთ $(x-2)$ -ის ხარისხების მიხედვით.

2. ფუნქცია e^x გაშალეთ $x=-1$ წერტილის მახლობლობაში ტეილორის ფორმულით.

3. ფუნქცია $\ln x$ გაშალეთ $(x-1)$ -ის ხარისხების მიხედვით მე-4 წევრამდე.

4. გაშალეთ $\sqrt{1+x}$ მაკლორენის ფორმულით სათანადო დამატებითი წევრით.

5. გაშალეთ $\sqrt[3]{1+x}$ მაკლორენის ფორმულით სათანადო დამატებითი წევრით.

6. გამოთვალეთ $\cos 5^\circ$ ხუთი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით.

7. გამოთვალეთ $\sin 10^\circ$ სამი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით.

8. გამოთვალეთ $\sin 31^\circ$ ხუთი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით.

(ჯერ გაშალეთ $x = \frac{\pi}{6}$ -ის მახლობლობაში ტეილორის ფორმულით

და შემდეგ გამოთვალეთ $\frac{\pi}{180}$ სათანადო სიზუსტით. წინასწარ დამატებითი წევრის საშუალებით, განსაზღვრეთ, თუ რამდენი შესაყრები უნდა აიღოთ ტეილორის ფორმულაში).

9. გაშალეთ $f(x) = x\sqrt{1-x^2} - \cos x \ln(1+x)$ მაკლორენის ფორმულით მეოთხე წევრამდე.

10. გაშალეთ $\arctg x$ მაკლორენის ფორმულით მეოთხე წევრამდე.

§ 4. ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი

1. **შუალედში ფუნქციის მონოტონურობის ნიშნები.** ჩვენთვის უკვე ცნობილია ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის განსაზღვრა. ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია რაიმე X შუალედში არაკლებადია, თუ ამ შუალედის ყოველი x -სათვის და ნებისმიერი Δx -სათვის, სადაც $x + \Delta x \in X$, სრულდება პირობა

$$\Delta x > 0 \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0, \quad (1)$$

ან

$$\Delta x < 0 \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0. \quad (2)$$

ფუნქცია X შუალედში არაზრდადია, თუ ამ შუალედის ყოველი x -სათვის და ნებისმიერი Δx -სათვის, სადაც $x + \Delta x \in X$, სრულდება პირობა

$$\Delta x > 0 \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0 \quad (3)$$

ან

$$\Delta x < 0 \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0. \quad (4)$$

თუ (1) და (2) დამოკიდებულებებში მხოლოდ უტოლობათა ნიშნებია, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია X შუალედში ზრდადია. ასევე, თუ (3) და (4) დამოკიდებულებებში მხოლოდ უტოლობათა ნიშნებია, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია X შუალედში კლებადია.

არაზრდად და არაკლებად ფუნქციებს მონოტონური ფუნქციები ეწოდება, ხოლო ზრდად და კლებად ფუნქციებს მკაცრად მონოტონური ფუნქციები ეწოდება.

დავამტკიცოთ თეორემა.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე არაკლებადია და წარმოებადი, მაშინ ამ სეგმენტზე ფუნქციის წარმოებულ არაა უარყოფითი, $f'(x) \geq 0$.
მართლაც, თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე არაკლებადია, შესრულდება (1) პირობა, საიდანაც

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0. \quad (5)$$

$f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე წარმოებადი, მაშინ, თუ გადავალთ ზღვარზე, $\Delta x \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$f'(x) \geq 0. \quad (6)$$

თუ $x = b$, მაშინ Δx ავიღოთ ნულზე ნაკლები და ვისარგებლოთ (2) პირობით, მივიღებთ ისევ (5) უტოლობას, საიდანაც დავასკვნით, რომ (6) უტოლობა ამ შემთხვევაშიც მართებულია.

ახლა დავამტკიცოთ ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა.

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე წარმოებადი და წარმოებულ არაა უარყოფითი, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია არაკლებადია ამ სეგმენტზე.

მართლაც, ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტზე ნებისმიერი x და ნებისმიერი Δx ისე, რომ $x + \Delta x \in [a, b]$. გამოვიყენოთ ლავრანტის თეორემა $[x, x + \Delta x]$ სეგმენტზე,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(\xi), \quad \xi \in [x, x + \Delta x].$$

პირობის ძალით $f'(x) \geq 0$ და, მაშასადამე, $f'(\xi) \geq 0$, ხოლო $\Delta x > 0$. ამის გამო გვექნება

$$f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0.$$

ეს კი გამოთქმულ თეორემას ამტკიცებს.

ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი თეორემები:

თეორემა 3. თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე არაზრდადია და წარმოებადი, მაშინ ამ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულ არაა დადებითი, $f'(x) \leq 0$.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე წარმოებადი და წარმოებულ არაა უარყოფითი, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია არაზრდადია ამ სეგმენტზე.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ყველა ეს თეორემა ერთად შეგვიძლია გავაერთიანოთ:

თეორემა 5. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადი, იგი ამ $[a, b]$ სეგმენტზე მონოტონურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი წარმოებულ არაა უარყოფითი $f'(x)$ სეგმენტზე.

ისიც ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f'(x) > 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ამ სეგმენტზე ზრდადია და, თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f'(x) < 0$, მაშინ ფუნქცია კლებადია. ეს ორივე შემდეგი შეგვიძლია ერთად გავაერთიანოთ: თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f'(x) > 0$ ან $f'(x) < 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ამ სეგმენტზე მკაცრად მონოტონურია.

ახლა განვსაზღვროთ ფუნქციის მონოტონურობა წერტილში.

ვთქვათ, $f(x)$ განსაზღვრულია x წერტილის რაიმე მიდამოში.

$f(x)$ ფუნქციას არაკლებადი ეწოდება x წერტილში, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი $u(x, \delta)$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი $x + \Delta x$ წერტილისათვის სრულდება პირობა

$$(\Delta x > 0) \Rightarrow (f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0); \quad (\Delta x < 0) \Rightarrow (f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0),$$

ანუ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0, \quad 0 < |\Delta x| < \delta.$$

$f(x)$ ფუნქციას ზრდადი ეწოდება x წერტილში, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი $u(x, \delta)$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი $x + \Delta x$ წერტილისათვის სრულდება პირობა

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0, \quad 0 < |\Delta x| < \delta.$$

$f(x)$ ფუნქციას არაზრდადი ეწოდება x წერტილში, თუ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0, \quad 0 < |\Delta x| < \delta.$$

ასევე, $f(x)$ ფუნქციას კლებადი ეწოდება x წერტილში, თუ

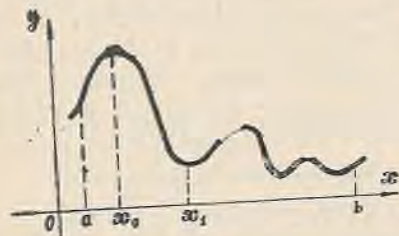
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0, \quad 0 < |\Delta x| < \delta,$$

ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება არაკლებადი, თუ სრულდება პირობა

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0, \quad 0 < |\Delta x| < \delta.$$

ადვილი წარმოსადგენია, თუ როგორ უნდა განისაზღვროს $f(x)$ ფუნქციის წერტილში მონოტონურობა და მკაცრად მონოტონურობა.

2. ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქცია (ნახ. 10). $f(x)$ ფუნქციის x_0 წერტილში



ნახ. 10

აქვს უფრო მეტი მნიშვნელობა, ვიდრე x_0 წერტილის მეზობელ წერტილებში. ასევე, x_1 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს უფრო მცირე მნიშვნელობა, ვიდრე x_1 წერტილის მეზობელ წერტილებში. ფუნქციის ასე განსაზღვრულ უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობას ეწოდება ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი ან შედარებითი (ფარდობითი) მაქ-

სიმუმი და შედარებითი (ფარდობითი) მინიმუმი. ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი და მაქსიმუმი ერთად ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი ეწოდება. თუ მთელ $[a, b]$ სეგმენტზე განვიხილავთ ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობას, მაშინ მას აბსოლუტური მაქსიმუმი და მინიმუმი ეწოდება.

ცხადია, თუ ვიცით ლოკალური ექსტრემუმები, ადვილად დავადგენთ აბსოლუტურ — გლობალურ ექსტრემუმს. ამიტომ ჩვენ განვიხილავთ ლოკალურ ექსტრემუმს და სიტყვა „ლოკალურს“ არ ვიხმარებთ.

ვთქვათ, მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია. ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტის შიგნით x_0 წერტილში აღწევს მაქსიმუმს, თუ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი $u(x_0, \delta)$ მიდამო, $u(x_0, \delta) \in [a, b]$, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის სრულდება უტოლობა

$$f(x) - f(x_0) \leq 0, u(x_0, \delta) \in [a, b].$$

x_0 წერტილს $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი ეწოდება.

ვითყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტის შიგნით x_1 წერტილში აღწევს მინიმუმს, თუ არსებობს x_1 წერტილის ისეთი $u(x_1, \delta)$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის სრულდება უტოლობა

$$f(x) - f(x_1) \geq 0, u(x_1, \delta) \in [a, b].$$

x_1 წერტილს $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი ეწოდება.

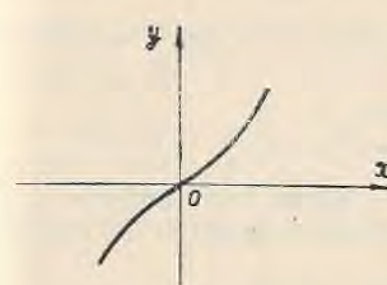
ამ განსაზღვრიდან ცხადია, რომ ფუნქციის ექსტრემუმი აღებულ x წერტილზე ნიშნავს, ფუნქცია ექსტრემალური მნიშვნელობისაა x წერტილზე x წერტილის გარკვეულ მიდამოსთან შედარებით.

თუ მოვიგონებთ ფერმას თეორემას, შევაძენგეთ, რომ მართებულია შემდეგი თეორემა.

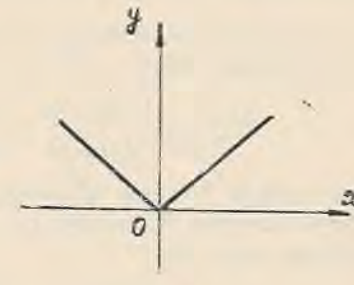
თეორემა 6. თუ წარმოებდა $f(x)$ ფუნქციის x წერტილში ექსტრემუმი აქვს, მაშინ ამავე წერტილში $f'(x)=0$.

გეომეტრიულად ეს თეორემა ნიშნავს, თუ x წერტილში წარმოებდა ფუნქციის ექსტრემუმი აქვს, მაშინ აუცილებლად ამ ფუნქციის გრაფიკი ექსტრემუმის $(x, f(x))$ წერტილში გატარებული მხების ერთ მხარესაა x წერტილის გარკვეული მიდამოში.

$f'(x)=0$ არის $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა x წერტილში. ეს პირობა არაა საკმარისი, როგორც მე-11-ე ნახაზზე გამოსახული $y=x^3$ ფუნქცია გვიჩვენებს. $x=0$ წერტილში $(x^3)'=0$. მაგრამ $y=x^3$ -ს $x=0$ წერტილში ექსტრემუმი არ აქვს.



ნახ. 11



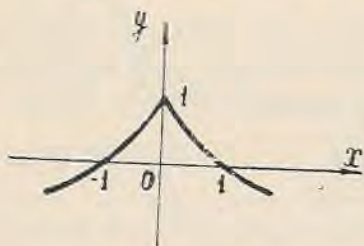
ნახ. 12

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმი განვიხილეთ x წერტილში წარმოებადი ფუნქციებისათვის. ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი ისეთ წერტილში, რომელზედაც სასრული წარმოებელი არ აქვს ან შემოუსაზღვრავ წარმოებულს არ აქვს განსაზღვრული ნიშანი. მე-12 ნახაზზე ნაჩვენებია $y=|x|$ ფუნქცია, რომელიც $x=0$ წერტილში წარმოებადი არაა, მაგრამ მინიმუმი აქვს. მე-13 ნახაზზე ნაჩვენებია ფუნქცია $y=1-\sqrt[3]{x^2}$, რომელსაც $x=0$ წერტილში არ აქვს უსასრულო წარმოებელი ($\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -\infty$), მაგრამ

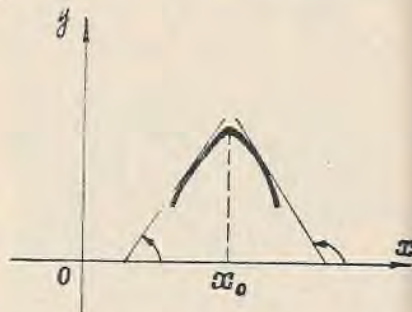
აღებულ წერტილში ფუნქციას მაქსიმუმი აქვს.

იმ x წერტილს, რომელზედაც $f'(x)=0$, ფუნქციის სტაციონარული წერტილი ეწოდება.

ცხადია, $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ $f'(x)=0$ განტოლების ამონახსნთა შორის ან იქ, სადაც $f(x)$ ფუნქციას არც სასრული და არც უსასრულო წარმოებული აქვს. ყველა ასეთ წერტილებს $f(x)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები ეწოდება. სტაციონარული წერტილები კრიტიკულ წერტილთა სიმრავლეს ეკუთვნის.



ნახ. 13



ნახ. 14

დავაკვირდეთ წარმოებად $f(x)$ ფუნქციას კრიტიკული x_0 წერტილის მიდამოში (ნახ. 14):

$$f'(x) > 0, \text{ როდესაც } x < x_0,$$

$$f'(x) < 0, \text{ როდესაც } x > x_0.$$

ე. ი. ფუნქცია ზრდადია x_0 წერტილის მარცხნივ, ხოლო კლებადია x_0 წერტილის მარჯვნივ. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი. სრულიად ასევე, თუ

$$f'(x) < 0, \text{ როდესაც } x < x_0,$$

$$f'(x) > 0, \text{ როდესაც } x > x_0,$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

ამგვარად, მართებულია x_0 კრიტიკულ წერტილში ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობის თეორემა:

თეორემა 7. თუ კრიტიკული x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში

$$f'(x) > 0, \text{ როდესაც } x < x_0, \quad (7)$$

$$f'(x) < 0, \text{ როდესაც } x > x_0,$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი. ხოლო, თუ

$$f'(x) < 0, \text{ როდესაც } x < x_0, \quad (8)$$

$$f'(x) > 0, \text{ როდესაც } x > x_0,$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

მე-6 და მე-7 თეორემების საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ ექსტრემუმის მონახვის შემდეგი წესი:

1) გამოვარკვიოთ მოცემული $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის შუალედი, წარმოებადობის შუალედი. მოვძებნოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)$ და ამოვხსნათ განტოლება $f'(x)=0$. მოვძებნოთ ის წერტილებიც, სადაც $f(x)$ ფუნქციას წარმოებული არ აქვს. ე. ი. მოვძებნოთ ყველა კრიტიკული წერტილი.

2) კრიტიკული წერტილის მარცხნივ და მარჯვნივ დავადგინოთ $f'(x)$ -ის ნიშნები და ამ ნიშნებით მე-7 თეორემის (7) და (8) პირობის საფუძველზე დავადგინოთ კრიტიკულ წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

მაგალითი. შევისწავლოთ $f(x)=(5-x)\sqrt[3]{x^2}$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

1) ეს ფუნქცია უწყვეტია $-\infty < x < +\infty$ -ში. $f(x)$ გაუწარმოოთ, გვექნება $f'(x) = \frac{5}{3} \frac{2-x}{\sqrt[3]{x}}$. $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია ყველგან, გარდა $x=0$ -სა. განტოლება $f'(x)=0$

$$\text{გვაძლევს } \frac{2-x}{\sqrt[3]{x}} = 0. \text{ აქედან,}$$

$x=2$. ამგვარად, კრიტიკული წერტილებია $x=0$ და $x=2$. ცხადია, $x=0$ -სათვის $f'(x)$ შემოუსაზღვრავია და გარკვეული ნიშანი არ აქვს.

$$f'(x) > 0, \text{ როცა } x > 0;$$

$$f'(x) < 0, \text{ როცა } x < 0.$$

$f(x)$ ფუნქციისათვის $x=0$ მინიმუმის წერტილია. $x=2$ -სათვის გვექნება $f'(x) > 0$, როცა $x < 2$ და $f'(x) < 0$, როცა $x > 2$. მაშასადამე, $x=2$ $f(x)$ ფუნქციისათვის მაქსიმუმის წერტილია (ნახ. 15).

$$\min_{x=0} f(x) = 0, \quad \max_{x=2} f(x) = 3\sqrt[3]{4}.$$

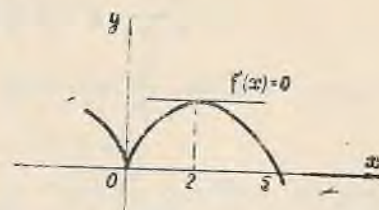
შევასრულოთ შემდეგი სავარჯიშო.

სავარჯიშო 37.

1. განსაზღვრეთ მონოტონურობის შუალედები და ააგეთ:

$$1) f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4,$$

$$2) f(x) = \ln |x|,$$



ნახ. 15

$$3) f(x) = |\sin x|,$$

$$4) f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$5) f(x) = e^{-x^2}.$$

2. დაამტკიცეთ

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \text{ თუ } x > 0.$$

3. დაამტკიცეთ

$$e^x \geq 1 + x \quad x\text{-ის ყველა მნიშვნელობისათვის.}$$

4. დაამტკიცეთ, თუ $0 \leq p \leq 1$, $a > 0$, $b > 0$, მართებულია უტოლობა

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p.$$

(დასამტკიცებელი უტოლობა ასე გადაწეროთ

$$\left(\frac{a}{b} + 1\right)^p \leq \left(\frac{a}{b}\right)^p + 1.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{a}{b} = x$, მაშინ

$$(x+1)^p \leq x^p + 1.$$

შემოიღეთ სათანადო ფუნქცია და გამოიყენეთ მონოტონურობის პირობა).

5. დაამტკიცეთ

$$\operatorname{tg} x > x - \frac{x^3}{3}, \text{ თუ } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

6. განსაზღვრეთ $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედი და ააგეთ.

§ 5. ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის მოძიება, როდესაც ფუნქციას მაღალი რიგის წარმოებული აქვს

ვთქვათ, x_0 $f(x)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილია: $f'(x_0) = 0$. ვთქვათ, აგრეთვე, $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში მეორე რიგის წარმოებული აქვს და $f''(x_0) \neq 0$.

მეორე რიგის წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

მაგრამ $f'(x_0) = 0$, ამიტომ

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

თუ $f''(x_0) > 0$, მაშინ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, $u(x_0, \delta)$, რომ

$$\forall x \in u(x_0, \delta) \Rightarrow \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

ანუ

$$f'(x) > 0, \text{ თუ } x > x_0,$$

და

$$f'(x) < 0, \text{ თუ } x < x_0.$$

მივიღეთ, რომ, თუ $f''(x_0) > 0$, არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომ სრულდება მე-7 თეორემის (8) პირობა (§ 4), ე. ი. ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

სრულიად ასევე ვაჩვენებთ, რომ, თუ სტაციონარულ წერტილში $f''(x_0) < 0$, მაშინ

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0,$$

საიდანაც

$$f'(x) > 0, \text{ თუ } x < x_0,$$

და

$$f'(x) < 0, \text{ თუ } x > x_0.$$

მაშასადამე, თუ $f''(x_0) < 0$ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი.

ამგვარად დავამტკიცეთ ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობის თეორემა:

თეორემა 1. თუ x_0 წერტილი არის $f(x)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი და $f''(x_0) < 0$, მაშინ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი, ხოლო თუ $f''(x_0) > 0$, მაშინ ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

ამ თეორემის განზოგადება აღვიღოთ. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში აქვს ყველა რიგის წარმოებული k რიგის ჩათვლით და მხოლოდ k რიგის წარმოებული განსხვავებულია ნულისაგან,

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(k-1)}(x_0) = 0, f^{(k)}(x_0) \neq 0,$$

მაშინ ტეილორის ფორმულით მივიღებთ

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(\xi), \xi \in x_0, x],$$

საიდანაც სათანადო მსჯელობით დავასკვნით, რომ მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. ვთქვათ, x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას აქვს k რიგის წარმოებული. $f^{(k)}(x)$ წარმოებული x_0 წერტილში უწყვეტია. ამას გარდა x_0 წერტილში სრულდება შემდეგი პირობები:

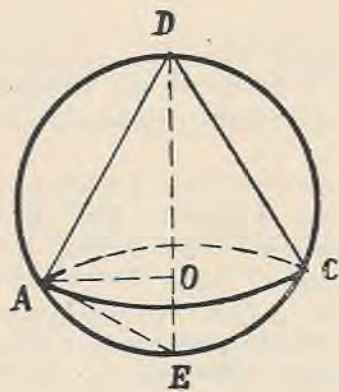
$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(k-1)}(x_0) = 0, f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

თუ რიცხვი k ლუწია და $f^{(k)}(x_0) < 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი; ხოლო, თუ $f^{(k)}(x_0) > 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი. თუ რიცხვი k კენტია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში არ აქვს ექსტრემუმი.

ექსტრემუმის თეორიის დახმარებით ამოიხსნება პრაქტიკული ხასიათის მთელი რიგი ამოცანები. ამოცანების ამოხსნისას განსაკუთრებული ყურადღებით უნდა შევადგინოთ ფუნქცია, რომლის ექსტრემუმის შესწავლაც მოგვიწევს.

მაგალითი. R რადიუსიან სფეროში ჩავხაზოთ უდიდესი მოცულობის კონუსი.

ამოხსნა. საძიებელი კონუსის მოცულობაა (ნახ. 16)



ნახ. 16

$$v = \frac{1}{3} \pi \cdot AO^2 \cdot OD.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $OD = x$. მაშინ $OE = 2R - x$. $\triangle DAE$ -დან

$$AO^2 = EO \cdot OD$$

ანუ

$$AO^2 = x(2R - x).$$

შვეიტანოთ მიღებული მნიშვნელობა v -ში:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\pi}{3} x^2 (2R - x) = \\ &= \frac{\pi}{3} (2Rx^2 - x^3). \end{aligned}$$

ამგვარად, მივიღეთ ფუნქცია

$$f(x) = 2Rx^2 - x^3,$$

რომლის ექსტრემუმი მოგვცემს ამოცანის ამოხსნას (ფუნქციის მუდმივი მაქსიმალური კრიტიკული წერტილის განსაზღვრაში არ მონაწილეობს).

$$f'(x) = 4Rx - 3x^2.$$

$$f'(x) = 0 \text{ მოგვცემს სტაციონარულ } x_1 = 0, x_2 = \frac{4R}{3} \text{ წერტილებს.}$$

გამოვთვალოთ $f''(x)$. გვექნება

$$f''(x) = 4R - 6x.$$

$x = 0$ სტაციონარულ წერტილში, $f''(0) = 4R > 0$. ხოლო $x = \frac{4R}{3}$ წერტილში

$$f''\left(\frac{4R}{3}\right) = 4R - 6 \cdot \frac{4R}{3} = -4R < 0.$$

ამრიგად, $x = 0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს, ხოლო $x = \frac{4R}{3}$ წერტილში მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

თუ სფეროში ჩავხაზავთ ისეთ კონუსს, რომლის სიმაღლე $\frac{4R}{3}$ -ის ტოლია, მაშინ ამ კონუსის მოცულობა უდიდესი იქნება ყველა იმ კონუსთან, რომლებიც შეიძლება R რადიუსიან სფეროში ჩაიხაზოს.

თუ გვავინტერესებს ამ უდიდესი კონუსის მოცულობა, გვექნება

$$v = \frac{\pi}{3} \left(\frac{4R}{3}\right)^2 \left(2R - \frac{4}{3}R\right) = \frac{32}{81} \pi R^3.$$

შევასრულოთ შემდეგი სავარჯიშო.

სავარჯიშო 38.

1. იპოვეთ $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი. წირი ააგეთ.

2. იპოვეთ $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 1$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი. წირი ააგეთ.

3. ისარგებლეთ პირველი რიგის წარმოებულით და იპოვეთ $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი.

4. ისარგებლეთ პირველი რიგის წარმოებულით და იპოვეთ

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$$

ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი.

5. გამოიკვლიეთ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x < 0, \\ 3x, & x \geq 0. \end{cases}$$

ექსტრემუმზე.

6. გამოიკვლიეთ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & x < 1, \\ -x + 6, & x \geq 1. \end{cases}$$

ექსტრემუმზე.

7. იპოვეთ $f(x) = \frac{4}{x^3 + 4}$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი და ააგეთ წირი.

8. გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე ფუნქციები: 1) $f(x) = x \ln^2 x$, 2) $f(x) = x^2 \ln x$.

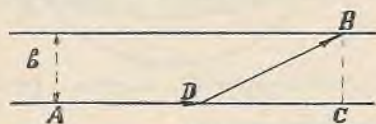
9. იპოვეთ $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი და ააგეთ წირი.

10. იპოვეთ $f(x) = x^3 - 3x + 3$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი და ააგეთ წირი.

11. მდინარის გაყოლებით უნდა შემოიღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი. როგორი ზომები უნდა ჰქონდეს მართკუთხედს, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი, თუ ღობის სიგრძე l მეტრია.

12. კვადრატული ფორმის ფუნქციის ფურცლისაგან უნდა დამზადდეს თავლია მართკუთხა პარალელები (ყუთი). რა ზომის ერთნაირი კვადრატები უნდა ჩამოვჭრათ თუნუქის ფურცელს ოთხივე კუთხიდან, რომ დარჩენილი მასალისაგან გაკეთდეს უდიდესი მოცულობის ყუთი.

13. ელექტროსადგური და ფაბრიკა მდინარის სხვადასხვა ნაპირზეა აგებული. მათ შორის მანძილი მდინარის გასწვრივ a კილომეტრია, ხოლო მდინარის სიგანე b კილომეტრია. ელექტროსადგურიდან ფაბრიკამდე დენის მიყვანის რა მიმდევრობაა ყველაზე ეკონომიური, თუ ერთი კილომეტრი ლინიის მიწის ზედა სადენის გამართვა ჯდება m მანეთი, ხოლო ერთი კილომეტრი ლინიის წყალქვეშა სადენის გამართვა n მანეთი, $n > m$ (ნახ. 17).



ნახ. 17

B -მდე წყალქვეშა სადენი. $AD = x$, $DB = \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$. ექსტრემუმზე გამოსაკვლევი ფუნქცია — კაბელის ღირებულება იქნება

$$f(x) = mx + \sqrt{(a-x)^2 + b^2}n, \quad n > m.$$

14. საჭიროა ავაგოთ ცილინდრული თავლია აუზი v_0 მოცულობით, საშენი მასალის სისქეა d . როგორი განზომილების (ფუძის რადიუსი და სიმაღლე) უნდა იყოს აუზი, რომ დაიხარჯოს უმცირესი მასალა (ნახ. 18).

მითითება. ვთქვათ, საძიებელი ფუძის რადიუსია x და სიმაღლე h .

$$AB = d, OD = x, OC = OD + DC = x + d. DA = h.$$

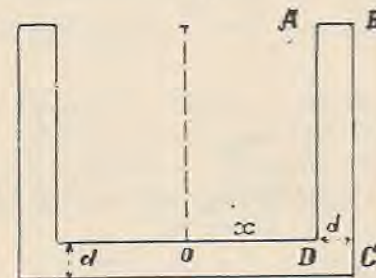
$$v = \pi(x+d)^2 d + \pi[(x+d)^2 - x^2]h = \pi d(x+d)^2 + \pi h(2dx + d^2).$$

პირობის თანახმად

$$v_0 = \pi x^2 h,$$

საიდანაც

$$h = \frac{v_0}{\pi x^2}.$$



ნახ. 18

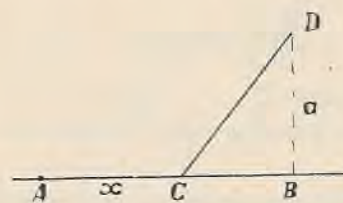
ამის გამო ექსტრემუმზე გამოსაკვლევი ფუნქცია იქნება

$$f(x) = \pi d(x+d)^2 + \frac{v_0(2dx + d^2)}{x^2},$$

ანუ

$$f(x) = \pi d(x+d)^2 + \frac{2v_0 d}{x} + \frac{v_0 d^2}{x^2}.$$

15. ქარხნისა და რკინიგზის სადგურის განლაგება ნაჩვენებია მე-19 ნახაზზე. A წერტილში სადგურია, ხოლო D წერტილში ქარხანა.



ნახ. 19

ქარხნიდან უნდა გაყვანილ იქნეს DC გზატკეცილი რკინიგზამდე ისე, რომ D ქარხნიდან A სადგურში საქონლის გადატანის დანახარჯები იყოს უმცირესი.

საქონლის გზატკეცილით გადატანის დანახარჯები m -ჯერ მეტია რკინიგზით გადატანით დანახარჯზე, $m > 1$.

მითითება. ვთქვათ, $AC = x$, მაშინ $DC = \sqrt{(l-x)^2 + a^2}$. საქონლის გადატანის დანახარჯები განისაზღვრება ფუნქციით

$$f(x) = x + \sqrt{(l-x)^2 + a^2}m, \quad x \leq l.$$

16. ქარხნის x ერთეული პროდუქტის გამოშვებისათვის დანახარჯი განისაზღვრება დამოკიდებულებით

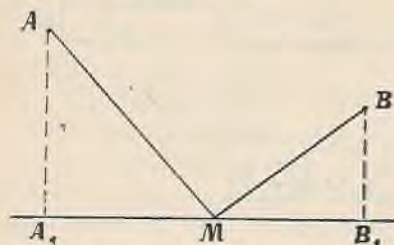
$$k(x) = \frac{1}{50}x^2 + 15x + 800.$$

ერთეული პროდუქტის ფასი განისაზღვრება დამოკიდებულებით

$$p(x) = 50 - \frac{1}{10}x.$$

რამდენი ერთეული პროდუქტი უნდა გამოუშვას ქარხანამ, რომ ქარხნის შემოსავალი იყოს უდიდესი.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. x ერთეული პროდუქტით ქარხანა მიიღებს შემოსავალს (ექსტრემუმზე გამოსაკვლევი ფუნქციაა)



ნახ. 20

სად უნდა აშენდეს სამრეწველო დაწესებულება, რომ სატრანსპორტო ხარჯები უმცირესი იყოს. სამრეწველო დაწესებულებამდე და სამრეწველო დაწესებულებიდან სატრანსპორტო ხარჯები ყოველ კმ-ზე თანაბარია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. $A_1M = x$, $MB_1 = l - x$ სატრანსპორტო ხარჯები იქნება

$$f(x) = AM + MB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (l - x)^2}.$$

$f(x)$ ფუნქცია უნდა შევისწავლოთ ექსტრემუმზე.

18. მოცემული მოცულობით კონუსთა შორის მოძებნეთ ისეთი, რომ გვერდითი ფართობი იყოს უმცირესი.

19. მოცემული მოცულობის კონუსთა შორის მოძებნეთ ისეთი, რომ სრული ზედაპირის ფართობი იყოს უმცირესი.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. $v = \frac{\pi x^2 h}{3}$ მოცემულია, $s(x) = \pi x^2 + \pi x l$, $l = \sqrt{x^2 + h^2}$.

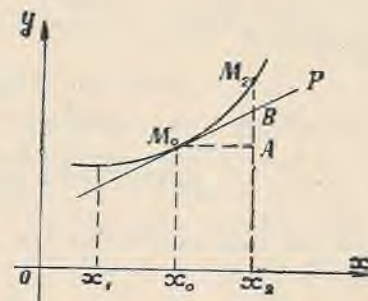
ექსტრემუმზე გამოსადეგი ფუნქციაა $s(x)$, x კონუსის ფუძის რადიუსია. h კონუსის სიმაღლეა, l — მსაზველის სიგრძე.

20. იმ ელიფსებს შორის, რომელთა ღერძების ჯამი თანატოლია, იპოვეთ ელიფსი, რომლის ფართობი უდიდესია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ელიფსის ფართობი $s = \pi ab$.

§ 6. წირის ჩაზნეილობა და ამოზნეილობა. გადაღწევის წერტილები

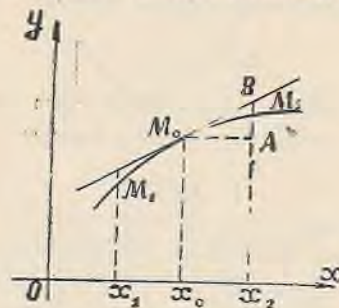
1. წირის ჩაზნეილობა და ამოზნეილობა. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია $y = f(x)$ უწყვეტი წირი. (ნახ. 20). ამ წირზე ავიღოთ რომელიმე $M_0(x_0, f(x_0))$ წერტილი, სადაც $f'(x_0)$ სასრულია. M_0 წერტილზე გავატაროთ $y = f(x)$ წირის მხები M_0P , დავუშვათ, რომ არსებობს წირის ისეთი M_1, M_0, M_2 რკალი, რომელიც მოთავსებულია M_0P მხებიდან Oy ღერძის მიმართულების მხარეს.



ნახ. 21

$y = f(x)$ წირს ეწოდება ჩაზნეილი M_0 წერტილში, თუ არსებობს ამ წირის ისეთი რკალი, რომელიც შეიცავს M_0 წერტილს და მდებარეობს ამ წერტილზე გატარებული წირის მხებიდან Oy ღერძის მიმართულების მხარეს.

ანალოგიურად განვსაზღვრავთ წირის ამოზნეილობას. $y = f(x)$ წირს ეწოდება ამოზნეილი M_0 წერტილში, თუ არსებობს ამ წირის ისეთი რკალი, რომელიც შეიცავს M_0 წერტილს და მდებარეობს ამ წერტილზე გატარებული წირის მხებიდან Oy ღერძის მიმართულების საწინააღმდეგო მხარეს (ნახ. 22).



ნახ. 22

თუ ვისარგებლებთ ფუნქციის დიფერენციალის გეომეტრიული მნიშვნელობით, ადვილად შევამჩნევთ, რომ $y = f(x)$ წირის ჩაზნეილობისათვის M_0 წერტილში აუცილებელი და საკმარისია არსებობდეს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში სრულდებოდეს უტოლობა (ნახ. 21)

$$\Delta y - dy > 0. \quad (1)$$

პართლაც,

$$\Delta y = AM_2, \quad dy = AB, \quad \Delta y - dy = AM_2 - AB > 0.$$

დავამტკიცოთ თეორემა.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მეორე რიგის წარმოებული და $f''(x_0) > 0$, მაშინ $y=f(x)$ წირი M_0 წერტილში ჩაზნექილია, ხოლო, თუ $f''(x_0) < 0$, მაშინ $y=f(x)$ წირი M_0 წერტილში ამოზნექილია. $M_0(x_0, f(x_0))$.

დამტკიცება. თუ (1) გამოსახულებაში შევიტანთ სათანადო მნიშვნელობებს

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x_0 + \theta \Delta x), \quad 0 < \theta < 1,$$

$$dy = f'(x_0) \Delta x,$$

გვექნება

$$\Delta x (f'(x_0 + \theta \Delta x) - f'(x_0)) > 0.$$

მიღებული უტოლობა ასე ჩავწერთ

$$\theta (\Delta x)^2 \frac{f'(x_0 + \theta \Delta x) - f'(x_0)}{\theta \Delta x} > 0. \quad (2)$$

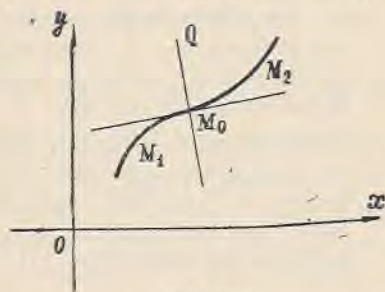
თეორემის პირობის თანახმად $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მეორე რიგის წარმოებული, ამიტომ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \theta \Delta x) - f'(x_0)}{\theta \Delta x} = f''(x_0).$$

(2) უტოლობიდან $\theta (\Delta x)^2 > 0$ მამრავლის ჩამოცილებით და ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $\Delta x \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$f''(x_0) > 0. \quad (3)$$

თუ $y=f(x)$ წირი ამოზნექილია x_0 წერტილში, მაშინ აუცილებელია და საკმარისი x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში შესრულდეს პირობა



ნახ. 23

$$\Delta y - dy < 0. \quad (4)$$

საიდანაც ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად მივიღებთ

$$f''(x_0) < 0. \quad (5)$$

ამით თეორემა დამტკიცდა.

2. წირის გადაღუნვის წერტილები. ვთქვათ, $y=f(x)$ წირს აქვს 23-ენახაზე გამოსახული ფორმა.

$M_0(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გავატაროთ მხები M_0P და ნორმალი M_0Q . წირის M_0M_2 რკალი და M_0M_1 რკალი M_0 წერტილზე გატარებული მხებიდან და ნორმალიდან სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს.

$y=f(x)$ წირის M_0 წერტილის ეწოდება გადაღუნვის წერტილი, თუ ამ წირის რაიმე რკალი, რომელიც M_0 წერტილის შეიცავს, M_0 წერტილიდან გატარებული წირის მხებიდან და ნორმალიდან სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს.

$y=f(x)$ წირის გადაღუნვის წერტილის განსაზღვრის თანახმად, M_0M_1 და M_0M_2 რკალებიდან ერთ-ერთი იქნება ამოზნექილი, ხოლო მეორე ჩაზნექილი, ამის გამო x_0 წერტილის რაიმე მარცხენა მიდამოში, მაგალითად, თუ წირი ამოზნექილია, გვექნება $f''(x) < 0$. ხოლო x_0 წერტილის მარჯვენა მიდამოში, თუ წირი ჩაზნექილია, გვექნება $f''(x) > 0$. რადგანაც $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში მეორე რიგის წარმოებული აქვს, მივიღებთ

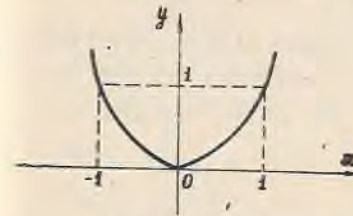
$$f''(x_0) = 0.$$

ამგვარად, მართებულია შემდეგი თეორემა.

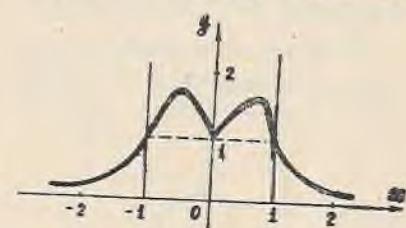
თეორემა 2. თუ $M_0(x_0, f(x_0))$ წარმოადგენს $y=f(x)$ წირის გადაღუნვის წერტილს და არსებობს $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის, მაშინ

$$f''(x_0) = 0.$$

$y=f(x)$ წირისათვის თეორემაში მიღებული პირობა $f''(x)=0$ არის გადაღუნვის წერტილის არსებობის აუცილებელი და არასაკმარისი პირობა. მაგალითად, $f(x)=x^4$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)=12x^2$, როდესაც $x=0$, ნულის ტოლია, მაგრამ $x=0$ წერტილში $y=x^4$ წირს არ აქვს გადაღუნვა. წირი ყოველ წერტილში ჩაზნექილია (ნახ. 24).



ნახ. 24



ნახ. 25

ზემოთ განვიხილეთ ის შემთხვევა, როდესაც $f(x)$ ფუნქციას სასრული წარმოებული ჰქონდა. თუ ფუნქციას აქვს უსასრულო წარმოებული $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ან $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, მაშინ $M_0(x_0, f(x_0))$ წირის გადაღუნვის წერტილია, თუ $f(x)$ ფუნქციას ალბუღ წერტილში არ აქვს არც უსასრულო წარმოებული, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$, მაშინ $y=f(x)$ წირს ამ წერტილში გადაღუნვა არ აქვს, განვიხილოთ წირი $y=x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$ (ნახ. 25).

წარმოებული

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} (x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}$$

სასრულია ყველგან, გარდა $x = \pm 1, x = 0$ წერტილებისა, ამ წერტილებში $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = -\infty$. $x = -1, x = 1$ წირის გადაღუნვის წერტილების აბსცისებია. $x = 0$ წერტილში ფუნქციის წარმოებული იძლევა $\lim_{x \rightarrow 0-0} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f'(x) = +\infty$. ე. ი. $x = 0$ წერტილში

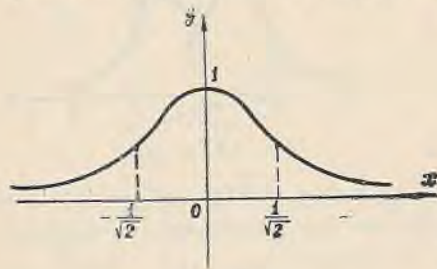
ფუნქციას უსასრულო წარმოებულიც არ აქვს. წირს $x = 0$ წერტილში გადაღუნვა არ აქვს.

წირის გადაღუნვის წერტილის განსაზღვრიდან ადვილად შეიძლება გადაღუნვის წერტილის მონახვის შემდეგი წესი: თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს მეორე წარმოებული, მოვნახოთ $f''(x) = 0$ განტოლების ამონახსნი. ვთქვათ, ეს ამონახსნია x_0 . თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $f''(x)$ წარმოებულს სხვადასხვა ნიშანი აქვს $x < x_0$ და $x > x_0$ მნიშვნელობებისათვის, მაშინ $(x_0, f(x_0))$ წერტილი $y = f(x)$ წირის გადაღუნვის წერტილი იქნება.

თუ $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული არ არსებობს რომელიმე x_0 წერტილში, მაშინ მივმართოთ $f(x)$ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულს, თუ $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = +\infty$ ან $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = -\infty$, მაშინ $y = f(x)$ წირის

გადაღუნვის წერტილი იქნება $(x_0, f(x_0))$ წერტილი.

მაგალითი. მოვნახოთ $y = e^{-x^2}$ წირის (გაუსის წირის) ჩაზნეკილობის, ამოზნეკილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები (ნახ. 26). გაწარმოება მოგვცემს



ნახ. 26

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x e^{-x^2}, \\ f''(x) &= (4x^2 - 2) e^{-x^2} = \\ &= 4 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) e^{-x^2}. \end{aligned}$$

მეორე რიგის წარმოებული ნულის ტოლია, თუ

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

საიდანაც

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი შემდეგნაირად იცვლება: $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ შუალედში $f''(x) > 0$; $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ შუალედში

$f''(x) < 0$; $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ შუალედში $f''(x) > 0$. ამრიგად, წირი

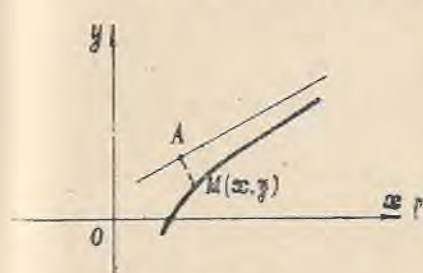
$y = e^{-x^2}$ შუალედში $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ჩაზნეკილია, შუალედში

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ამოზნეკილია, შუალედში $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ ჩა-

ზნეკილია. გადაღუნვის წერტილებია $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

§ 7. წირის ასიმპტოტები

ვთქვათ, M წერტილი მოცემულ წირზე მდებარეობს. ვიტყვი, რომ M წერტილი უსასრულოობისკენ მიისწრაფვის, თუ M



ნახ. 27

წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც აბსოლუტური მნიშვნელობით უსასრულოობისკენ მიისწრაფვის.

განვიხილოთ 27-ე ნახაზზე გამოსახული წრფე და წირი. წირზე ავიღოთ ნებისმიერი M წერტილი. M წერტილიდან წრფემდე მანძილი ადენიშნით d ასოთი, $d = |MA|$, სადაც A წერტილი წრფეს ეკუთვნის.

წირის ასიმპტოტი ეწოდება წრფეს, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ წირის M წერტილიდან ამ წრფემდე მანძილი მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც M წერტილი უსასრულოობისკენ მიისწრაფვის, $\lim_{M \rightarrow \infty} d = 0$.

$M \rightarrow \infty$

წირის ასიმპტოტს, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია, ეწოდება ვერტიკალური ასიმპტოტი, ხოლო ასიმპტოტს, რომელიც Ox ღერძის პარალელურია არაა, ეწოდება დახრილი ასიმპტოტი. ჯერ შევადგინოთ წირის დახრილი ასიმპტოტის განტოლება.

ასიმპტოტის განტოლება ვეძებთ შემდეგი სახით

$$y = kx + b. \quad (1)$$

$y=f(x)$ წირის M წერტილის კოორდინატები იყოს (X, Y) .
დავუყვანოთ (1) განტოლება ნორმალურ სახეზე:

$$\frac{kx - y + b}{\pm \sqrt{k^2 + 1}} = 0.$$

მაშინ

$$d = |MA| = \pm \frac{kX - Y + b}{\sqrt{k^2 + 1}}. \quad (2)$$

ასიმპტოტის განსაზღვრის თანახმად

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} \left(\pm \frac{kX - Y + b}{\sqrt{k^2 + 1}} \right) = 0,$$

ანუ

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} (kX - Y + b) = 0, \quad (3)$$

საიდანაც

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} \left(k - \frac{Y}{X} + \frac{b}{X} \right) = 0.$$

აქედან კი (b სასრულია)

$$k = \lim_{|X| \rightarrow \infty} \frac{Y}{X},$$

ანუ

$$k = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (4)$$

(3) ტოლობიდან განვსაზღვროთ b .

$$b = \lim_{|X| \rightarrow \infty} (Y - kX),$$

ანუ

$$b = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (f(x) - kx) \quad (5)$$

აქ ცალ-ცალკე უნდა განვიხილოთ $x \rightarrow -\infty$ და $x \rightarrow +\infty$.

თუ k და b კოეფიციენტების მნიშვნელობებს შევიტანთ (1) განტოლებაში, მივიღებთ $y=f(x)$ წირის დახრილი ასიმპტოტის განტოლებას.

$y=f(x)$ წირის ვერტიკალური ასიმპტოტის განტოლება თვით $f(x)$ ფუნქციიდან უნდა შევადგინოთ.

მაგალითად, თუ რომელიმე x_0 -სათვის გვექნება $(x \rightarrow x_0) \Rightarrow (f(x) \rightarrow \infty)$, მაშინ $y=f(x)$ წირის ვერტიკალური ასიმპტოტის განტოლება იქნება

$$x = x_0.$$

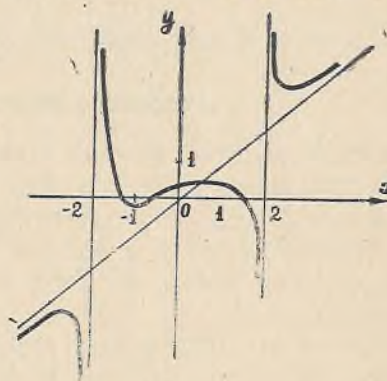
განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ

$$y = \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 4} \quad (6)$$

წირის ასიმპტოტები. გვექნება

$$k = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x - 1}{x(x^2 - 4)} = 1,$$

$$b = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 4} - 1 \cdot x \right) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x - 1 - x^3 + 4x}{x^2 - 4x} = 0.$$



ნახ. 28

ამგვარად, აღებული წირის დახრილი ასიმპტოტია $y = x$.

ვიპოვოთ ვერტიკალური ასიმპტოტები:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 4} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 4} = \infty.$$

ამგვარად ვერტიკალური ასიმპტოტებია

$$x = 2, \quad x = -2.$$

ავაგოთ წირი. ამისათვის გამოვარკვეოთ, როგორ მიისწრაფვის $y=f(x)$ უსასრულობისაკენ, როცა $x \rightarrow 2+0$. ამ შემთხვევაში $f(x) \rightarrow +\infty$. ხოლო, როცა $x \rightarrow -2-0$, მაშინ $f(x) \rightarrow -\infty$.

$$x \rightarrow 2-0, \quad \text{მაშინ } f(x) \rightarrow -\infty;$$

$$x \rightarrow -2+0, \quad \text{მაშინ } f(x) \rightarrow +\infty.$$

ამასთან, თუ $x = 0$, მაშინ $y = \frac{1}{4}$, ე. ი. (6) წირი Oy ღერძს გადა-

ჰყვეთ $y = \frac{1}{4}$ წერტილში.

$$\text{თუ } y = 0, \text{ მაშინ } \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 4} = 0,$$

საიდანაც

$$x^3 - 2x - 1 = 0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ განტოლების ამონახსნია $x_1 = -1$, $x^2 - 2x - 1$ -ის $(x+1)$ -ზე გაყოფით მივიღებთ $x^2 - x - 1$, რომლის ნულებია

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

ყველა ამ მნიშვნელობათა მხედველობაში მიღებით, გვექნება ნახ. 28.

§ 8. ფუნქციის გამოკვლევა. გრაფიკის აგება.

ტექნიკისა და ეკონომიკის საკითხების შესწავლაში დიდად გვხმარება ფუნქციების გრაფიკები. მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის Oxy კოორდინატთა სისტემაში ცალკეული წერტილების აგებით და მათი უწყვეტი წირით შეერთებით ვღებულობთ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. ამ გრაფიკს $f(x)$ ფუნქციის წირი ან შემოკლებით $f(x)$ წირი ვუწოდებთ.

ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების გრაფიკები — წირები ცალკეული წერტილების დახმარებით ავაგებთ. ეს მეთოდი უძლურია რთული ფუნქციების გრაფიკების ასაგებად.

წირის აგება დაკავშირებულია ფუნქციის გამოკვლევასთან. დიფერენციალური აღრიცხვის საშუალებით უნდა დავადგინოთ ფუნქციის დამახასიათებელი თვისებები: ზრდადობა, კლებადობა, ჩაზნექილობა და სხვ. და შემდეგ ავაგოთ წირი.

მოცემული ფუნქციის გამოკვლევა და სათანადო წირის აგება შეგვიძლია შემდეგი მიმდევრობით შევასრულოთ:

1. განვსაზღვროთ ფუნქციის არსებობის სიმრავლე და წყვეტის წერტილები;
2. გამოვარკვიოთ ფუნქციის ლუწობა, კენტობა და პერიოდულობა;
3. შევისწავლოთ ფუნქციის უწყვეტობა და წყვეტის წერტილებში წყვეტის ხასიათი;
4. შევადგინოთ ასიმპტოტების განტოლებანი;
5. ვიპოვოთ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები და გამოვთვალოთ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი;
6. განვსაზღვროთ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები;
7. განვსაზღვროთ ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის შუალედები;
8. ვიპოვოთ წირის გადაღუნვის წერტილები;
9. ვიპოვოთ წირის კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. შემდეგ სიბრტყეზე ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა. ამ სისტემაში ავაგოთ წირის ასიმპტოტები, მოვანახოთ ფუნქციის დამახასიათებელი წერტილები და შემდეგ ფუნქციის თვისებების საფუძველზე ავაგოთ წირი. თუ $f(x)$ ფუნქცია ლუწია, საკმარისია $y=f(x)$ წირი ავაგოთ x -ის დადებითი მნიშვნელობებისათვის და Oy ღერძის მიმართ სიმეტრიულად

გადავხაზოთ. თუ ფუნქცია კენტია, მაშინ $y=f(x)$ წირი საკმარისია ავაგოთ პირველ საკოორდინატო კუთხეში და შემდეგ კოორდინატთა სათავეის მიმართ სიმეტრიულად გადავხაზოთ.

რასაკვირველია, ფუნქციის გამოკვლევის ეს მიმდევრობა არაა საკმარისი მკაცრად დავიცვათ. შეიძლება ფუნქციის გამოკვლევის მიმდევრობა შეიცვალოს და დამატებით ფუნქციის სხვა დამახასიათებელი წერტილებიც მოვანახოთ. განსაკუთრებით იმ შემთხვევაში, როცა ფუნქცია წყვეტილია, ან მისი წარმოებული არის წყვეტილი.

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია

$$y = \frac{2x^3}{x^2 - 4} \quad (1)$$

და ავაგოთ.

1) ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$ შუალედებში.

2) ფუნქცია კენტია; $f(-x) = -f(x)$. მართლაც,

$$\frac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

მაშასადამე, (1) ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავეის მიმართ. ამიტომ საკმარისია, ფუნქცია გამოვიკვლიოთ $[0, \infty[$ შუალედში.

3) მოცემული (1) ფუნქცია უწყვეტ ფუნქციათა შეფარდებაა. იგი უწყვეტია $-\infty < x < +\infty$ შუალედში, გარდა იმ წერტილებისა, სადაც $x^2 - 4 = 0$; ე. ი. (1) ფუნქციის უწყვეტობის შუალედებია:

$$]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[.$$

(1) ფუნქციის წყვეტის წერტილებია $x^2 - 4 = 0$ განტოლების ამონახსნები:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

გამოვარკვიოთ (1) ფუნქციის წყვეტის გვარობა.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = +\infty.$$

ამრიგად, (1) ფუნქციის წერტილებში $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ აქვს მეორე გვარის წყვეტა.

4) მოვანახოთ (1) ფუნქციის ასიმპტოტები.

ვერტიკალური ასიმპტოტები $x=2$, $x=-2$ წრფეები. დახრილი ასიმპტოტის $y=kx+b$ კოეფიციენტებისათვის გვექნება:

$$k = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x(x^2-4)} = 2,$$

$$b = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-4} - 2x \right) = 0.$$

ამგვარად დახრილი ასიმპტოტის განტოლებაა $y=2x$.

5. ვიპოვოთ $f'(x)$.

გვექნება

$$f'(x) = 2 \frac{(x^3)'(x^2-4) - (x^2-4)'x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}.$$

$f'(x)=0$ განტოლება მოგვცემს

$$x^2(x^2-12)=0,$$

საიდანაც

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_{3,4} = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3,46.$$

რადგანაც (1) წირი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, ავიღოთ სტაციონარული წერტილები $x=0$ და $x=2\sqrt{3}$.

რადგანაც $f'(x)>0$, როდესაც $x<0$ და $x>0$. ე. ი. $f'(x)$ არ იცვლის ნიშანს x -ის 0 წერტილზე გავლის დროს. მაშასადამე, 0 წერტილი არაა ექსტრემუმის წერტილი. $x=2\sqrt{3}$ -სათვის გვექნება:

$$f'(x)<0, \text{ როდესაც } 2<x<2\sqrt{3},$$

ხოლო

$$f'(x)>0, \text{ როდესაც } 2\sqrt{3}<x<+\infty.$$

მაშასადამე, $x=2\sqrt{3}$ მინიმუმის წერტილია.

გამოვთვალოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=2\sqrt{3}$ -ში. გვექნება:

$$f(2\sqrt{3}) = \frac{2(2\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^2-4} = 6\sqrt{3}.$$

6. მონოტონურობის შუალედი განვსაზღვროთ $f'(x)>0$ და $f'(x)<0$ უტოლობებიდან:

$$\left(\frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} > 0 \right) \Rightarrow (x^2-12) > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow ((x>2\sqrt{3}) \vee (x<-2\sqrt{3})).$$

ამგვარად, (1) ფუნქცია ზრდადია $x>2\sqrt{3}$ -თვის და $x<-2\sqrt{3}$ -თვის. ასევე ვაჩვენებთ, რომ (1) ფუნქცია კლებადია

$$(2<x<2\sqrt{3}) \vee (-2\sqrt{3}<x<-2) \vee (-2<x<2).$$

7. გამოვთვალოთ $f''(x)$. გვექნება:

$$f''(x) = \frac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

$$(f''(x)<0) \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2-4} < 0 \right) \Rightarrow ((x<0) \wedge ((x<-2) \vee (x>2))) \Rightarrow \\ \Rightarrow (-\infty < x < -2);$$

$$\left(\frac{x}{x^2-4} < 0 \right) \Rightarrow ((x>0) \wedge (-2<x<2)) \Rightarrow (0<x<2).$$

ამგვარად, (1) ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობის შუალედებია: $-\infty < x < -2$, $0 < x < 2$.

ასევე,

$$(f''(x)>0) \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2-4} > 0 \right) \Rightarrow ((-2<x<0) \vee (2<x<+\infty)).$$

ამგვარად, (1) ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის შუალედებია: $-2<x<0$, $2<x<+\infty$.

8. ფუნქციის გრაფიკის ვადალუნვის წერტილი მიიღება $f''(x)=0$ განტოლების ამონახსნებით გვექნება:

$$\left(\frac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = 0 \right) \Rightarrow (x=0).$$

ფუნქციის მნიშვნელობა ვადალუნვის წერტილში იქნება 0,

$$f(0) = 0.$$

$$9. y = \frac{2x^3}{x^2-4} \text{ წირი } Ox \text{ ღერძს}$$

გადაკვეთს იქ, სადაც $y=0$:

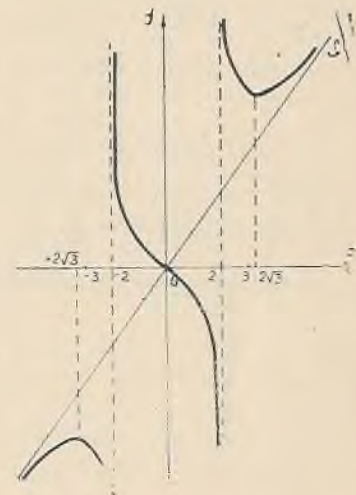
$$\left(\frac{2x^3}{x^2-4} = 0 \right) \Rightarrow (x=0).$$

ასევე თუ $x=0$, მივიღებთ $y=0$.

ამგვარად, წირი $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$ კო-

ორდინატთა ღერძებს გადაკვეთს მხოლოდ კოორდინატთა სათავეში.

10. $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$ ფუნქციის გრაფიკი ნაჩვენებია 29-ე ნახაზზე.



ნახ. 29

1. გამოიკვლიეთ ფუნქცია $f(x) = x \ln x$ და ააგეთ.
2. გამოიკვლიეთ r -რადიუსიან სფეროში ჩახაზული კოსინუსის მოცულობის ცვალებადობის ხასიათი და ააგეთ მიღებული ფუნქციის გრაფიკი.

3. გამოიკვლიეთ $f(x) = e^{-x^2}$ ფუნქცია და ააგეთ.

4. როგორც ცნობილია, შემნახველ სალაროში შეტანილი a მანეთი 1 წლის ბოლოს იძლევა $(a+ap)$ მან., სადაც p სალაროს მიერ დარიცხულია (p —% მოგებაა). მეორე წლის ბოლოს სალაროში გვექნება $a+ap+(a+ap)p$ მანეთი და ა. შ. შეადგინეთ t წლის ბოლოს a მანეთით მიღებული a მანეთის ჩათვლით სალაროში ფულის რაოდენობის ფორმულა, გამოიკვლიეთ და ააგეთ.

5. გამოიკვლიეთ $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 2}$ ფუნქცია და ააგეთ.

6. გამოიკვლიეთ $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ ფუნქცია და ააგეთ.

7. სრულ დანახარჯების $f(x)$ ფუნქციას აქვს სახე

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4, \quad x \geq 0,$$

გამოიკვლიეთ ფუნქცია და ააგეთ.

8. გამოიკვლიეთ $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ფუნქცია და ააგეთ.

9. გამოიკვლიეთ $f(x) = \frac{x^4}{1-x^3}$ და ააგეთ.

10. r -რადიუსიან სფეროში ჩახაზეთ უდიდესი ზედაპირის მქონე ცილინდრი. მიღებული ფუნქცია გამოიკვლიეთ და ააგეთ.

11. გამოიკვლიეთ $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ ფუნქცია და ააგეთ.

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

§ 1. მრავალი ცვლადის ფუნქცია

ბუნებაში ისეთი მოვლენები გვხვდება, სადაც რამდენიმე ცვლადი ურთიერთდამოკიდებულია. ამასთან ერთ-ერთი ცვლადის მნიშვნელობა დანარჩენი ცვლადის მნიშვნელობით განისაზღვრება. რომელიმე წერტილში სხეულის ტემპერატურა დამოკიდებულია სხეულში წერტილის მდებარეობაზე. წერტილის მდებარეობა კი დეკარტის კოორდინატებით — x, y, z -ით განისაზღვრება. ასე რომ, სხეულის ტემპერატურა t განისაზღვრება სამი ცვლადით — x, y, z . თუ განვიხილავთ გაზის წნევას p -ს რაიმე ზედაპირზე, იგი დამოკიდებულია იმ წერტილის მდებარეობაზე, სადაც წნევას განვიხილავთ, და აღებულ წერტილში ტემპერატურის სიდიდეზე, t -ზე. ასე რომ, გაზის წნევა p ოთხი ცვლადის — x, y, z, t -ს ფუნქციაა.

ქვემოთ განვიხილავთ მრავალი ცვლადის ფუნქციებს. კერძოდ შევისწავლით მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტებს. მრავალი ცვლადის დიფერენციალური აღრიცხვა ერთი ცვლადის დიფერენციალური აღრიცხვის ბუნებრივი განზოგადებაა.

განვიხილავთ n ცვლადის ფუნქციას. მაგრამ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სრულიად საკმარისია, ავიღოთ ორი ან სამი ცვლადის ფუნქცია, რომ ნათელი წარმოგვჩვენა მივიღოთ n ცვლადის ფუნქციაზე.

1. n -განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე. ევკლიდეს სივრცეში წერტილის მიდამო, სეგმენტი და ინტერვალი.

ჩვენთვის ცნობილია, რომ რიცხვითი ღერძის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი წერტილი და ყოველ წერტილს — ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი. Ox ღერძზე M წერტილს რომ x რიცხვი შეესაბამება, ასე ვწერთ: $M(x)$. x -ს ეწოდება M წერტილის კოორდინატი.

ახლა ავიღოთ სიბრტყეზე ორი ურთიერთპერპენდიკულარული ღერძი Ox და Oy . ვიცით, რომ Oxy სიბრტყის M წერტილი ცალსახად განისაზღვრება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილით და ასე ვწერთ: $M(x, y)$. x და y რიცხვებს M წერტილის კოორდინატები ეწოდება.

Oxy სიბრტყის M_1 და M_2 წერტილებს შორის მანძილი განისაზღვრება ტოლობით

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული n -ეული $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

n -განზომილებიანი არითმეტიკული სივრცე ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა ყოველ დალაგებულ n -ეულთა $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ სიმრავლეს. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ს ეწოდება n -განზომილებიანი არითმეტიკული სივრცის წერტილი. ჩაწერა $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ნიშნავს, რომ M წერტილს აქვს კოორდინატები $x_1, x_2, \dots, x_n$.

n -განზომილებიანი არითმეტიკულ სივრცეს ეწოდება ევკლიდეს n -განზომილებიანი სივრცე (ევკლიდეს n -განზომილებიანი არითმეტიკული სივრცე), თუ არითმეტიკული სივრცის ნებისმიერ ორ $M_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $M_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$ წერტილს შორის მანძილი განისაზღვრება ფორმულით

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad (1)$$

მე-12 თავის მე-5 პარაგრაფში განესაზღვრეთ ზოგადად ევკლიდეს n -განზომილებიანი სივრცე, სადაც ელემენტთა შორის მანძილისათვის მივიღეთ ფორმულა

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

ცხადია, მანძილის ეს ორივე განსაზღვრა ერთი და იგივეა. მართლაც

$$\rho(M_1, M_2) = |\overline{OM}_1 - \overline{OM}_2| = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

უშუალო შემოწმებით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ (1) ფორმულით განსაზღვრული ორ წერტილს შორის მანძილი აკმაყოფილებს ევკლიდეს ორ და სამგანზომილებიანი სივრცის მანძილის აქსიომებს:

1) $\rho(M_1, M_2) \geq 0$. ამასთან $\rho(M_1, M_2) = 0$ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $M_1 = M_2$.

2) $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$ ნებისმიერი ორი M_1 და M_2 წერტილისათვის E_n სივრციდან.

3) $\rho(M_1, M_3) \leq \rho(M_1, M_2) + \rho(M_2, M_3)$ ნებისმიერი სამი M_1, M_2 და M_3 წერტილისათვის E_n სივრციდან (სამკუთხედის აქსიომა).

პირველი და მეორე აქსიომის შემამართება უშუალოდ შემოწმდება (1) განსაზღვრიდან. შევამოწმოთ მესამე აქსიომის შემამართება. ამისათვის განვიხილოთ არაუარყოფითი კვადრატული ფუნქცია

$$F(t) = \sum_{i=1}^n (a_i t + b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0.$$

ამ კვადრატულ ფუნქციას აქვს ან ორი თანატოლი ნამდვილი წელი ან ორი კომპლექსური წელი: $a \pm i\beta$, $\beta \neq 0$; ამის გამო $F(t)$ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი არ უნდა იყოს დადებითი:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0,$$

ანუ

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (2)$$

ამით კიდევ ერთხელ მივიღეთ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა (იხ. თავი XII, § 5, $n=7$, ფ. 32).

(2) უტოლობიდან ადვილად მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2, \end{aligned}$$

ანუ

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2.$$

ამ უტოლობის ორივე ნაწილიდან კვადრატული ფესვის ამოღებით მივიღებთ:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (3)$$

სწორედ ამ უტოლობით დავამტკიცებთ სამკუთხედის აქსიომის ჭეშ-
მარტებას. მართლაც, აღნიშვნით $x_i - y_i = a_i$, $y_i - z_i = b_i$; მაშინ
 $x_i - z_i = a_i + b_i$, მივიღებთ

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2},$$

$$\rho(M_2, M_3) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

ცხადია,

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_3) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}, \end{aligned}$$

ანუ

$$\rho(M_1, M_3) \leq \rho(M_1, M_2) + \rho(M_2, M_3),$$

რაც უნდა გვეჩვენებინა.

თუ ერთი ცვლადის $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის სიმრავლეა X სიმრავ-
ლე, რომელიც ერთგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცის ქვესიმრავლეა
და X სიმრავლეს თუ შევცვლით ევკლიდეს n -განზომილებიანი სივრცის
 $\{M\}$ ელემენტთა რომელიმე სიმრავლით, მაშინ, ბუნებრივია, მივაღწეოთ n
ცვლადის ფუნქციის ცნებაზე, $f(M)$. ამიტომ, ცხადია, წინასწარ უნდა
განვსაზღვროთ ევკლიდეს E_n სივრცის ძირითადი სიმრავლეები.

ევკლიდეს n -განზომილებიანი სივრცის იმ $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილთა
სიმრავლეს, სადაც $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$, ეწოდება i -რ
ღერძი, ხოლო წერტილს, სადაც $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ — კოორდინატ-
თა სათავე, $(0, 0, \dots, 0)$.

ევკლიდეს E_n სივრცის იმ $\{M\}$ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც
აქმაყოფილებენ უტოლობას $\rho(M_0, M) < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ ნამდვილი დადებითი
რიცხვია, ეწოდება M_0 წერტილის n -განზომილებიანი
სფერული მიდამო ε რადიუსით, ან მოკლედ, M_0 წერტილის ε
მიდამო. $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ წერტილის ε მიდამო $u(x_0, \varepsilon)$ სიმბოლოთი
აღინიშნება.

განსაზღვრის თანახმად

$$\begin{aligned} u(M_0, \varepsilon) &= u(M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}), \varepsilon) = \\ &= \left\{ M(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2 < \varepsilon^2 \right\}, \end{aligned}$$

ანუ

$$u(M_0, \varepsilon) = \{M \mid M \in E_n, \rho(M_0, M) < \varepsilon\}. \quad (4)$$

თუ $n=1$, გვეჩვენება Ox ღერძზე M_0 წერტილის მიდამო $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. თუ $n=2$, გვეჩვენება ევკლიდეს E_2 სიბრტყეში ε -რადიუსიანი წრე

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2.$$

თუ $n=3$ გვეჩვენება ევკლიდეს სამგანზომილებიან E_3 სივრცეში ε რადიუ-
სიანი ბირთვი

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2.$$

ჩაატეხილი r რადიუსიანი ბირთვი (სფერო) ცენტრით
 M_0 წერტილში ეწოდება ყველა იმ M წერტილთა სიმრავლეს $\bar{u}(M_0, r)$,
რომლებიც აქმაყოფილებენ უტოლობას

$$\rho(M_0, M) \leq r^2,$$

ანუ

$$\bar{u}(M_0, r) = \left\{ M(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2 \leq r^2 \right\}. \quad (5)$$

M_0 წერტილის δ მართკუთხა მიდამო ეწოდება იმ $\{M\}$
წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც აქმაყოფილებენ უტოლობას

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n).$$

$M_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილის δ მართკუთხა მიდამო $P(M_0; \delta_1, \dots, \delta_n)$
სიმბოლოთი აღინიშნება:

$$P(M_0; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = \{M(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i, i = \overline{1, n}\}.$$

თუ $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \delta$, მაშინ M_0 წერტილის δ მართკუთხა მიდამოს n -გან-
ზომილებიანი კუბი ეწოდება ცენტრით $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ წერტილში.
განსაზღვრის თანახმად

$$P(M_0; \delta, \delta, \dots, \delta) = \{M(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid |x_i - x_i^{(0)}| < \delta, i = \overline{1, n}\}.$$

განვიხილოთ ნამდვილი რიცხვები $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n$; სადაც $a_i < b_i, i = \overline{1, n}$.

n -განზომილებიანი სეგმენტი $\bar{I}_n = [a_1, b_1; \dots; a_n, b_n]$ ეწოდება იმ $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს

$$a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}.$$

განსაზღვრის თანახმად

$$\bar{I}_n = [a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n] = \{M(x_1, x_2, \dots, x_n) | a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}.$$

n -განზომილებიანი ინტერვალი $I_n =]a_1, b_1; \dots; a_n, b_n[$ ეწოდება იმ $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს:

$$a_i < x_i < b_i, i = \overline{1, n}.$$

ამგვარად,

$$I_n =]a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n[= \\ = \{M(x_1, x_2, \dots, x_n) | a_i < x_i < b_i, i = \overline{1, n}\}.$$

თუ $n=1$, ზემოთ მიღებული განსაზღვრიდან გვეჩვენება ჩვენთვის კარგად ცნობილი სეგმენტი $a \leq x \leq b$ და ინტერვალი $a < x < b$ რიცხვით ღერაზე — ევკლიდეს ერთგანზომილებიან სივრცეში.

ნებისმიერ n -განზომილებიან ინტერვალს, რომელიც შეიცავს $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ წერტილს, ეწოდება $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ წერტილის n -განზომილებიანი მართკუთხა მიდამო,

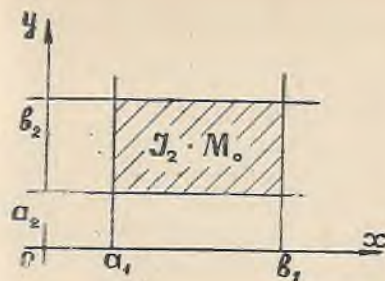
$$P(M_0(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})) = \{M(x_1, \dots, x_n) | x_i, x_i^{(0)} \in]a_i, b_i[, i = \overline{1, n}\}. \quad (6)$$

ცალკე განვიხილოთ სიბრტყე-ევკლიდეს ორგანზომილებიანი სივრცე E_2 . მოცემული $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის შემცველ ნებისმიერ ორგანზომილებიან I_2 ინტერვალს ეწოდება M_0 წერტილის მართკუთხა მიდამო (ნახ. 1),

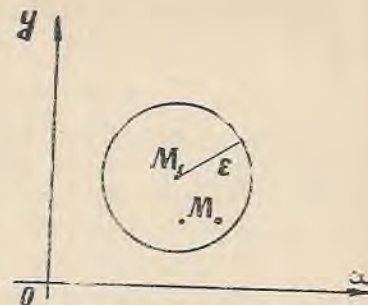
$$P(M_0) = \{M(x, y) | (x, y), (x_0, y_0) \in I_2\}, \quad (7)$$

ხოლო M_0 წერტილის შემცველ ნებისმიერ წრეს ეწოდება M_0 წერტილის წრიული მიდამო (ნახ. 2),

$$u(M_0) = \{M(x, y) | \rho(M_0, M) < \varepsilon, \varepsilon > 0 \text{ ნებისმიერია, } M_0 \in u(M_1, \varepsilon)\}. \quad (8)$$



ნახ. 1



ნახ. 2

ცხადია, ორგანზომილებიანი I_2 ინტერვალი არის მართკუთხედის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლის გვერდებია $x=a_1, x=b_1, y=a_2, y=b_2$, წრეები გვერდების წერტილების გარეშე, სადაც $a_i, b_i, i = 1, 2$, მოცემული რიცხვებია,

$$a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2.$$

თუ I სიმრავლეს დავემატებთ მართკუთხედის გვერდების ყველა წერტილების სიმრავლეს, მივიღებთ $\bar{I}_2$ მართკუთხა სეგმენტს:

$$a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2.$$

ავიღოთ M_0 წერტილის δ მართკუთხა მიდამო, $\delta = (\delta_1, \delta_2)$,

$$P(M_0; \delta_1, \delta_2) = \{M(x, y) | |x - x_0| < \delta_1, |y - y_0| < \delta_2\}$$

და M_0 წერტილის ε წრიული მიდამო

$$u(M_0, \varepsilon) = \{M(x, y) | \rho(M_0, M) < \varepsilon\}.$$

ძნელი დასამტკიცებელი არაა, რომ M_0 წერტილის ყოველი δ მართკუთხა $P(M_0; \delta_1, \delta_2)$ მიდამოსათვის მოიძებნება M_0 წერტილის ისეთი $u(M_0, \varepsilon)$ წრიული მიდამო, რომელიც მთლიანად მოთავსდება M_0 წერტილის δ მართკუთხა მიდამოში,

$$u(M_0, \varepsilon) \subset P(M_0; \delta_1, \delta_2),$$

და, პირიქით, M_0 წერტილის ყოველ ε წრიული მიდამოსათვის მოიძებნება M_0 წერტილის ისეთი δ მართკუთხა მიდამო, რომელიც მთლიანად მოთავსდება M_0 წერტილის ε წრიულ მიდამოში,

$$P(M_0; \delta_1, \delta_2) \subset u(M_0, \varepsilon).$$

მაგალითად, თუ M_0 წერტილის δ მართკუთხა მიდამოა

$$u(M_0; \delta_1, \delta_2) = \{M(x, y) | |x - x_0| < \delta_1, |y - y_0| < \delta_2\},$$

ავიღოთ

$$\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\},$$

¹ Н. А. Фролов, Курс математического анализа, ч. 2, М., 1959, В. А. Зорич, Математический анализ, ч. 1, М., 1981.

მაშინ M_0 წერტილის ε წრიული მიდამო $u(M_0, \varepsilon)$ მოთავსდება M_1 წერტილის δ მართკუთხა მიდამოში,

$$u(M_0, \varepsilon) \subset P(M_0; \delta_1, \delta_2).$$

ცხადია, თუ ε -რადიუსიან წრეში, ცენტრით M_0 წერტილში, ჩავხაზავთ მართკუთხედს, რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია, მივიღებთ M_0 წერტილის ისეთ δ მიდამოს, $P(M_0; \delta_1, \delta_2)$, რომელიც მთლიანად M_0 წერტილის ε წრიულ მიდამოში მოთავსდება. (ნახ. 3). გამოთქმული წინადადება ჰეშმარიტია $n > 2$ -სათვისაც.

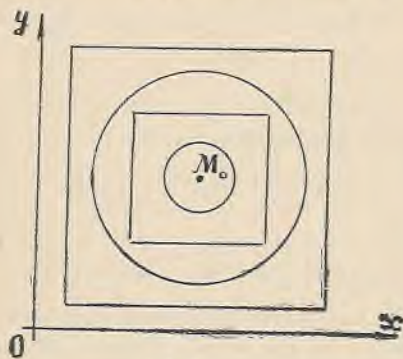
ახლა განვსაზღვროთ $\{M\}$ სიმრავლის შემდეგი წერტილები.

M_0 წერტილის ეწოდება $\{M\}$ სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს M_0 წერტილის ისეთი ε მიდამო, $u(x_0, \varepsilon)$, რომელიც მთლიანად ეკუთვნის $\{M\}$ სიმრავლეს,

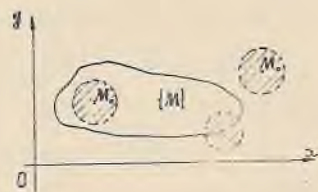
$$u(x_0, \varepsilon) \subset \{M\}. \quad (9)$$

M_0 წერტილის ეწოდება $\{M\}$ სიმრავლის გარე წერტილი, თუ არსებობს M_0 წერტილის ისეთი ε მიდამო $u(x_0, \varepsilon)$, რომლის არც ერთი წერტილი არ ეკუთვნის $\{M\}$ სიმრავლეს,

$$u(x_0, \varepsilon) \not\subset \{M\}.$$



ნახ. 3



ნახ. 4

M_0 წერტილის ეწოდება $\{M\}$ სიმრავლის საზღვრითი წერტილი, თუ M_0 წერტილი არც შიგა წერტილია და არც გარე წერტილია $\{M\}$ სიმრავლისათვის. ამ განსაზღვრით, ცხადია, M_0 წერტილი მხოლოდ მაშინ იქნება $\{M\}$ სიმრავლის საზღვრითი წერტილი, თუ M_0 წერტილის ნებისმიერი ε მიდამო $u(M_0, \varepsilon)$ შეიცავს როგორც $\{M\}$ სიმრავლის წერტილებს, ისე ისეთ წერტილებს, რომლებიც $\{M\}$ სიმრავლეს არ ეკუთვნიან (ნახ. 4).

2. წერტილთა მიმდევრობა. წერტილთა მიმდევრობის კრებადობა.

ავიღოთ E_2 სივრცეში წერტილთა რაიმე მიმდევრობა

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n), \dots \quad (10)$$

ვითყვი, რომ წერტილთა მიმდევრობა (M_n) კრებადია და იკრიბება $M_0(a, b)$ წერტილისაკენ თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} | \forall n > N \Rightarrow \rho(M_n, M_0) < \varepsilon, \quad (11)$$

ე. ი. თუ ყოველი დადებითი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ მანძილი M_0 წერტილსა და M_n წერტილს შორის ნაკლებია ε -ზე, როცა $n > N$.

ამ შემთხვევაში ვწერთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0. \quad (12)$$

სრულიად ასევე განისაზღვრება წერტილთა მიმდევრობის კრებადობა M_0 წერტილისაკენ E_n სივრცეში.

შეიძლება დამტკიცდეს თეორემები:

1) წერტილთა (10) მიმდევრობა კრებადია $M_0(a, b)$ წერტილისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

2) წერტილთა ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ე. ი. არსებობს ისეთი A რიცხვი, რომ $|x_i| < A$ და $|y_i| < A, i = 1, 2, \dots$

3) წერტილთა (M_n) მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ყოველი $\varepsilon > 0$ -სათვის არსებობდეს ისეთი ნატურალური რიცხვი N , რომ უტოლობა $\rho(M_n, M_m) < \varepsilon$ სრულდებოდეს ყოველთვის, როცა $n > N$ და $m > N$.

4) ყოველ კრებად მიმდევრობას აქვს მხოლოდ ერთი ზღვარი.

ჩამოთვლილი თეორემები ადვილად დამტკიცდება, თუ გავითვალისწინებთ ერთი ცვლადის ფუნქციის ანალოგიურ თეორემებს. მაგალითად, დავამტკიცოთ მე-4 თეორემა. ვთქვათ, (10) მიმდევრობას აქვს ორი ზღვარი M_0 და $\bar{M}_0$, მაშინ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} | n > N \Rightarrow \left(\rho(M_n, M_0) < \frac{\varepsilon}{2} \right) \wedge \left(\rho(M_n, \bar{M}_0) < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

ამ შემთხვევაში $M_n, M_0, \bar{M}_0$ წერტილები შეადგენენ სამკუთხედს,

$$\rho(M_0, \bar{M}_0) \leq \rho(M_0, M_n) + \rho(M_n, \bar{M}_0) < \varepsilon, \text{ როცა } n > N.$$

ე ნებისმიერია, ამიტომ ეს უტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $M_0 = \overline{M_0}$. ამით თეორემა დამტკიცდა.

3. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი. ერთი ცვლადის ფუნქციის ზღვრის ანალოგიურად განისაზღვრება მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი. ვთქვათ, $M_0(a, b)$ წერტილის რაიმე $\dot{u}(M_0)$ მიდამოში, გარდა, შესაძლებელია M_0 წერტილისა, განსაზღვრულია

$$z = f(x, y) = f(M)$$

ფუნქცია.

ვითყვი, რომ $f(M)$ ფუნქციის ზღვარი M_0 წერტილში არის c რიცხვი, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი $\eta > 0$, რომ უტოლობა

$$|f(M) - c| < \varepsilon$$

მართებულია M_0 წერტილის η მიდამოს ყველა M წერტილისათვის,

$$0 < \rho(M_0, M) < \eta.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = c$$

ან

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = c.$$

ფუნქციის ზღვრის ასეთი განსაზღვრა ეკუთვნის კოშის.

$f(M)$ ფუნქციის ზღვარი M_0 წერტილში ასეც შეგვიძლია განვსაზღვროთ:

ვითყვი, რომ $f(M)$ ფუნქციის ზღვარი M_0 წერტილში არის c , თუ M_0 -საკენ ყოველი კრებადი (M_n) მიმდევრობისათვის, $M_n \in \dot{u}(M_0)$, $f(M)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სათანადო მიმდევრობა $(f(M_n))$ კრებადია c რიცხვისაკენ.

ფუნქციის ზღვრის ასეთი განსაზღვრა ეკუთვნის ჰაინეს.

განვიხილოთ მაგალითი.

გამოვთვალოთ

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sqrt{x+y+8}-3}{x+y-1}.$$

რადგანაც

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+y+8}-3}{x+y-1} &= \frac{(\sqrt{x+y+8}-3)(\sqrt{x+y+8}+3)}{(x+y-1)(\sqrt{x+y+8}+3)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+y+8}+3}, \end{aligned}$$

ამიტომ

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sqrt{x+y+8}-3}{x+y-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1}{\sqrt{x+y+8}+3} = \frac{1}{6}.$$

მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვრისათვის მართებულია ყველა თეორემა, რომელსაც ადგილი ჰქონდა ერთი ცვლადის ფუნქციის ზღვრისათვის.

მაგალითად, თუ არსებობს $f(x, y)$ და $g(x, y)$ ფუნქციების ზღვრები $M_0(a, b)$ წერტილში, მაშინ არსებობს $f(x, y) + g(x, y)$ ჯამის ზღვარი $M_0(a, b)$ წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} (f(x, y) + g(x, y)) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) + \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} g(x, y),$$

ანუ

$$\lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) + g(M)) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) + \lim_{M \rightarrow M_0} g(M).$$

4. მრავალი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში და არეში

ვთქვათ, $f(M)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M_0(a, b)$ წერტილის რაიმე მიდამოში და $f(M_0)$ სასრულია. ვითყვი $f(M)$ უწყვეტია M_0 წერტილში, თუ

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0),$$

ანუ $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$, რომ უტოლობა

$$|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$$

სრულდება $\forall M$ -თვის, რომელიც მოთავსებულია M_0 -ის η მიდამოში,

$$\rho(M_0, M) < \eta.$$

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვარკვიოთ $f(M) = x^2 + y^2$ ფუნქცია უწყვეტია თუ არა $M_0(0, 0)$ წერტილში?

რადგანაც $f(M_0) = 0$ და

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = 0,$$

ფუნქცია $f(M) = x^2 + y^2$ უწყვეტია $M_0(0, 0)$ წერტილში. განვიხილოთ კიდევ მაგალითი.

გამოვარკვევით

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & \text{როცა } x^2 + y^2 > 0, \\ 1, & \text{როცა } x = 0, y = 0 \end{cases} \quad (13)$$

ფუნქციის ქცევა $M_0(0, 0)$ წერტილში.

ცხადია,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0,$$

ხოლო

$$f(0, 0) = 1$$

ამგვარად,

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \neq f(M_0).$$

მაშასადამე, (13) ფუნქცია განიკისს წყვეტას $(0, 0)$ წერტილში.

შესაძლებელია, $f(x, y)$ ფუნქციას ჰქონდეს წყვეტის მთელი წირი. მაგალითად,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x-y}, & \text{როცა } x \neq y, \\ 0, & \text{როცა } x = y. \end{cases}$$

ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა მთელი Oxy სიბრტყე, ხოლო $x=y$ წრფის ყოველი წერტილი წყვეტის წერტილია.

დავამტკიცოთ

თეორემა 1. თუ მრავალი ცვლადის ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, იგი უწყვეტია ამ წერტილში ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორი ცვლადი ფუნქცია $f(x, y)$. ვთქვათ, ეს ფუნქცია უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილში. ვაჩვენოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია თითოეული ცვლადის მიმართ. ე. ი. ვაჩვენოთ, რომ $f(x, y_0)$ ფუნქცია უწყვეტია x -ის მიმართ და $f(x_0, y)$ ფუნქცია უწყვეტია y -ის მიმართ.

რადგანაც (x_0, y_0) -ში $f(x, y)$ უწყვეტია, ამიტომ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 (|x - x_0| < \eta \wedge |y - y_0| < \eta) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

აქედან ცხადია, თუ ერთ-ერთს, მაგალითად, ავიღებთ $x = x_0$, გვექნება

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0,$$

რომ

$$|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

როცა

$$|y - y_0| < \eta.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ $f(x_0, y)$ ფუნქცია უწყვეტია y_0 წერტილში.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $f(x, y_0)$ უწყვეტია x_0 წერტილში.

ადვილი საჩვენებელია, რომ 1-ლი თეორემის შებრუნებულ თეორემას ადვილი არ აქვს.

მაგალითად,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{როცა } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{როცა } x = y = 0. \end{cases} \quad (14)$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ $(0, 0)$ წერტილში. მართლაც,

$$f(x, 0) = 0, \quad f(0, 0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = f(0, 0).$$

ასევე, ცხადია,

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = f(0, 0).$$

მაგრამ (14) ფუნქცია წყვეტილია $(0, 0)$ წერტილში. მართლაც, ავიღოთ წერტილთა მიმდევრობა

$$(1; 1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right), \dots,$$

რომელიც იკრიბება $(0, 0)$ წერტილისკენ. მიმდევრობა

$$\left(f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow 1,$$

რადგანაც

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) \neq f(0, 0).$$

ამით ვაჩვენებთ, რომ ფუნქცია $f(x, y)$ შეიძლება თითოეული ცვლადის მიმართ იყოს უწყვეტი რაიმე წერტილში, მაგრამ $f(x, y)$ ფუნქცია ამ წერტილში წყვეტილი იყოს.

ისევე, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში მართებულა თეორემები:

თეორემა 2. მრავალი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციების ჯამი უწყვეტი ფუნქციაა.

თეორემა 3. უწყვეტი რთული ფუნქცია, რომელიც შედგენილია სასრულ რიცხვ უწყვეტი ფუნქციებისაგან, უწყვეტი ფუნქციაა.

და ა. შ.

თუ ფუნქცია $f(M)$ უწყვეტია რაიმე G არის ყოველ წერტილში, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(M)$ ფუნქცია უწყვეტია G არეში.

შეასრულეთ შემდეგი სავარჯიშო.

სავარჯიშო 40.

1. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არე:

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1) $z = x + \sqrt{y-1}$, | 2) $z = \sin(x + \sqrt{y})$, |
| 3) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, | 4) $z = \ln x + \sin y$, |
| 5) $z = \frac{1}{(x-1)(y+2)}$, | 6) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$, |
| 7) $z = \ln(x^2 - y^2 - 1)$, | 8) $z = \arcsin \frac{\pi}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$, |
| 9) $z = \arctg \frac{x}{y}$, | 10) $z = e^{\frac{x^2 - y^2}{x+1}}$. |

2. გამოთვალეთ ზღვრები:

- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - x^2 y}$, | 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^3 - y^3}$, |
| 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{(x^2 - 3x + 2)(y+1)}{\sin(y+1)\sin(x-1)}$, | 4) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^3}{x^3 + y^2}$, |

$$5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}},$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}},$$

$$7) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\operatorname{tg} xy}{x + x^2 y - 2x^2},$$

$$8) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x^2 + y^2}},$$

$$9) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$10) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos xy}{\sin^2 x \operatorname{tg}^2 y}.$$

3) დაამტკიცეთ, რომ უწყვეტია შემდეგი ფუნქციები:

- | | |
|--|--|
| 1) $z = x - y$, | 2) $z = x^2 + y^2$, |
| 3) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$, | 4) $z = \sin \frac{y}{x^2 + 1}$, |
| 5) $z = \ln \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}$, | 6) $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$, |
| 7) $z = e^{x^2 - y^2}$, | 8) $z = \arctg \frac{x}{y^2 + 1}$, |
| 9) $z = e^{-x^2 - y^2}$, | 10) $z = \arctg \frac{x y^2 + 1}{x^2 + 1}$. |

4) მონახეთ წყვეტის წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

- | | | |
|--|---|-----------------------------|
| 1) $z = \frac{xy}{x-y}$, | 2) $z = \frac{x^2 + y^2}{y^2 - y^2}$, | 3) $z = \frac{x+y}{y-xy}$, |
| 4) $z = \frac{x}{x^3 - y^3}$, | 5) $z = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0, y = 0, \end{cases}$ | |
| 6) $z = \begin{cases} \sin \frac{x}{y}, & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0. \end{cases}$ | | |

§ 2. მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები და კერძო დიფერენციალები. სრული დიფერენციალი. სრული წარმოებული. პარციალი ფუნქციები

1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. განვიხილოთ რაიმე G არეში განსაზღვრული ორი ცვლადის ფუნქცია $z = f(x, y)$ და ამ არეში ავიღოთ რომელიმე $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი.

მივცეთ x_0 -ს ნაზრდი Δx , მაშინ ფუნქცია მიიღებს ნაზრდს

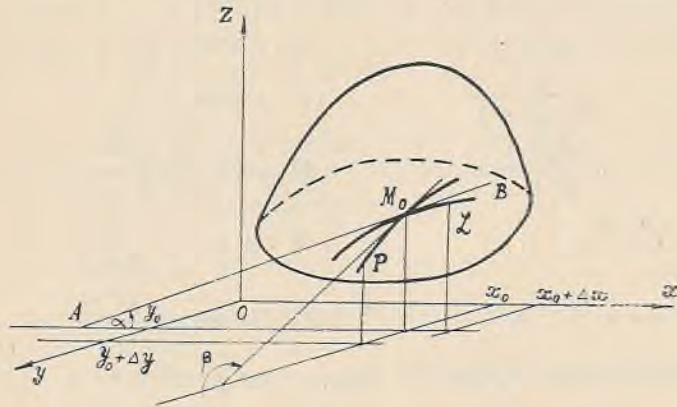
$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

ამ გამოსახულებას ეწოდება M_0 წერტილში $f(x, y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდი x -ით. $f(x, y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდი x -ით აღინიშნება $\Delta_x f(x, y)$ სიმბოლოთი,

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$



ნახ. 5

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება x ცვლადით $f(x, y)$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულის (x_0, y_0) წერტილში (ნახ. 5). ეს წარმოებული ასე აღინიშნება:

$$f'_x(x_0, y_0) \text{ ან } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \left(z'_x \text{ ან } \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

ამგვარად,

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

ე. ი. $f(x, y)$ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული x -ით (x_0, y_0) წერტილში ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის (x_0, y_0) წერტილში x -ით კერძო ნაზრდის $\Delta_x f(x_0, y_0)$ და x არგუმენტის ნაზრდის Δx ფარდობის ზღვარს, როდესაც Δx მიისწრაფვის ნულისაკენ.

როგორც მე-5 ნახაზზეა ნაჩვენები, (x_0, y_0) წერტილზე გატარებული Oxz სიბრტყის პარალელური სიბრტყე, რომელიც $z = f(x, y)$ ზედაპირს L წირზე გადაჰყვეს. ამ წირის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გატარებული AB მხები. ისწორედ ამ მხების მიერ Oxy სიბრტყეში $y = y_0$ წრფესთან Ox ღერძის მიმართულებით შედგენილი კუთხის ტანგენსის მნიშვნელობა არის $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \tan \alpha.$$

ანალოგიურად $\frac{\partial f}{\partial x}$ -ისა განისაზღვრება $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \quad (2)$$

როგორც მე-5 ნახაზი გვიჩვენებს

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \tan \beta.$$

ე. ი. (x_0, y_0) წერტილზე გატარებული Oyz სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. ეს სიბრტყე $z = f(x, y)$ ზედაპირზე კვეთაში მოგვცემს p წირს. ამ წირის M_0 წერტილზე გატარებული მხების მიერ Oxy სიბრტყეში $x = x_0$ წრფესთან Oy ღერძის მიმართულებით შედგენილი კუთხის ტანგენსი ტოლია $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ -ის.

სრულიად ასევე განისაზღვრება $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული რომელიმე x_k ცვლადით

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k}.$$

გამოსახულებას $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$ ეწოდება $z = f(x, y)$ ფუნქციის კერძო დიფერენციალი x -ით (x, y) წერტილში და აღინიშნება შემდეგნაირად

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x, \quad d_x f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x.$$

მაგრამ $z = x$ -თვის, $dz = dx = \Delta x$, გვექნება

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx. \quad (3)$$

სრულიად ასევე მივიღებთ $z = f(x, y)$ ფუნქციის კერძო დიფერენციალს y -ით

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (4)$$

განვიხილოთ მაგალითები.

1) ვიზოვით

$$z = \arctg \frac{x}{y}$$

ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები.

გვექნება:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{y^2 + x^2}.$$

2. ვიზოვით

$$u = \sin \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right)$$

ფუნქციის კერძო წარმოებულები.

გვექნება

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right) = \cos \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right) \cdot \frac{1}{1 + y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right) = \cos \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right) \times$$

$$\times \left(-\frac{2xy}{(1 + y^2)^2} \right) = -\frac{2xy}{(1 + y^2)^2} \cos \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right) = 3z^2 \cos \left(\frac{x}{1 + y^2} + z^3 \right).$$

2. მრავალი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი, როგორც ვიცით $y = f(x)$ ფუნქციისათვის

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \quad (5)$$

$f(x)$ ფუნქციის ნაზრდის მთავარი ნაწილია $f(x) \Delta x$. (5) ტოლობაში $\alpha \rightarrow 0$, როდესაც $\Delta x \rightarrow 0$.

$f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, თუ Δy ნაზრდისათვის მოიძებნება ისეთი A სიდიდე დამოუკიდებლად Δx -ისა, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha \Delta x. \quad (6)$$

თუ ფუნქცია $f(x)$ წარმოებადია, მაშინ (5) ტოლობას აქვს ადგილი, მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, $f'(x) = A$. თუ $f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაშინ (6) ტოლობიდან მივიღებთ $A = f'(x)$.

ახლა, ვთქვათ $z = f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია G არეში. ავიღოთ ამ არეში რაიმე (x, y) წერტილი.

$f(x, y)$ ფუნქციის ეწოდება (x, y) წერტილში დიფერენცირებადი, თუ ფუნქციის სრული ნაზრდი $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ (x, y) წერტილში შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს შემდეგი სახით

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \quad (7)$$

სადაც A და B დამოუკიდებელია Δx და Δy -საგან და α და β მიისწრაფვის ნულისაკენ Δx და Δy -თან ერთად:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

სრული ნაზრდის მთავარ ნაწილს

$$A \Delta x + B \Delta y$$

ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი და აღინიშნება dz -ან df -ით,

$$dz = A \Delta x + B \Delta y. \quad (8)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია რაიმე (x, y) წერტილში, მაშინ ამ წერტილში არსებობს ფუნქციის კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

მართლაც, (7) ტოლობაში დავუშვათ $\Delta y = 0$, მაშინ

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = A \Delta x + \alpha \Delta x.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ Δx -ზე და შემდეგ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \rightarrow 0$, მივიღებთ:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = A.$$

ე. ი.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\frac{\partial f}{\partial y} = B.$$

ამგვარად, ვაჩვენებთ, რომ მართებულია შემდეგი

თეორემა 1. თუ $z=f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია რაიმე (x, y) წერტილში, მაშინ ამ წერტილში არსებობს $f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ და მართებულია ტოლობები:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = B. \quad (9)$$

(8) ტოლობიდან (9) ტოლობების საფუძველზე მივიღებთ

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (10)$$

ანუ

$$dz = d_x z + d_y z. \quad (11)$$

მაშასადამე, ფუნქციის სრული დიფერენციალი უდრის ამავე ფუნქციის კერძო დიფერენციალების ჯამს.

3. ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობები. ახლა დავამტკიცოთ

თეორემა 2. თუ არსებობს $z=f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ წერტილის რომელიმე მიდამოში და ეს წარმოებულები უწყვეტია თვით (x, y) წერტილში, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში.

მართლაც, ფუნქციის სრული ნაზრდი წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \quad (12)$$

ლაგრანჟის თეორემის ძალით

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x f'(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y), \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

მაგრამ კერძო წარმოებულების უწყვეტობის გამო:

$$f(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha,$$

სადაც α უსასრულოდ მცირეა Δx და Δy -თან ერთად. ამის გამო გვქვნება

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x [f'_x(x, y) + \alpha]. \quad (13)$$

სრულიად ასევე

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y [f'_y(x, y) + \beta], \quad (14)$$

სადაც β უსასრულოდ მცირეა Δy -თან ერთად.

Δz სრული ნაზრდი (12) მიღებული (13) და (14) დამოკიდებულებათა საფუძველზე მოგვცემს:

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y. \quad (15)$$

ეს ტოლობა კი ამტკიცებს $z=f(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობას (x, y) წერტილში.

ფუნქციის დიფერენცირებადობიდან მოცემულ წერტილში გამომდინარეობს ფუნქციის უწყვეტობა იმავე წერტილში.

მართლაც, ფუნქციის დიფერენცირებადობის (8) განსაზღვრიდან მივიღებთ

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)] = 0.$$

ეს კი ფუნქციის (x, y) წერტილში უწყვეტობის მაჩვენებელია.

4. სრული წარმოებულობა. განვიხილოთ G არეში განსაზღვრული $z=f(x, y)$ ფუნქცია. ვივლით, რომ x და y t ცვლადის ფუნქციებია

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

რომლებიც განსაზღვრულია ერთსა და იმავე $[a, b]$ არეში და დაფუძვით, რომ, როცა t იცვლება $[a, b]$ -ში, (x, y) წერტილი არ გამოდის G არედან. ვთქვათ, აგრეთვე, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია. ცხადია,

$$z = f[\varphi(t), \psi(t)]$$

ფუნქცია t ცვლადის რთული ფუნქციაა.

ვივლით, რომ $z=f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში. მივცეთ t -ს ნაზრდი Δt , მაშინ

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

მაგრამ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, ამიტომ

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \quad (16)$$

სადაც α და β უსასრულოდ მცირეებია Δx და Δy -თან ერთად.

თუ (16) ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ Δt ნაზრდზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, გვექნება

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (17)$$

$\frac{dz}{dt}$ -ს ეწოდება $z=f(x, y)$ ფუნქციის სრული წარმოებული.

განვიხილოთ შემთხვევა, $z=f(x, y)$, $y=\varphi(x)$, მაშინ (17) მოგვცემს

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (18)$$

(18) ფორმულიდან მიიღება $f(x, y)=0$ განტოლებიდან განსაზღვრული ე. წ. არაცხადი $y(x)$ ფუნქციის წარმოებული. თუ f'_x და f'_y უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში და $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, $f(x_0, y_0)=0$, მაშინ

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{dy(x_0)}{dx} = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

(დაწვრილებით ეს საკითხი იხილეთ მე-6 პუნქტში).

(17)-დან მივიღებთ

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt,$$

ანუ

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (19)$$

როგორც ვხედავთ, (19) გამოსახულება იგივეა, რაც (10)— $z=f(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი. მაგრამ განსხვავება იმაშია, რომ (10) ტოლობაში x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო (19)-ში x და y დამოკიდებულია t ცვლადზე.

მაშასადამე, მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვისაც ადგილი აქვს ფუნქციის დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობას.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ სრული წარმოებული შემდეგი რთული ფუნქციისა

$$z = \ln(x^2 + y^2), \quad x = t^2, \quad y = \frac{1}{t}.$$

გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \frac{d}{dt}(t^2) + \frac{2y}{x^2 + y^2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = \\ &= -\frac{2}{x^2 + y^2} \left(2xt - \frac{y}{t^2}\right), \quad x = t^2, \quad y = \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

5. რთული ფუნქციის კერძო წარმოებული. ვთქვათ, ფუნქცია მოცემულია შემდეგნაირად:

$$z = f(x, y), \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (20)$$

სადაც $(u, v) \in D$, $(x, y) \in G$ და (u, v) ისე იცვლება D არეში, რომ სათანადო (x, y) არ გამოდის G არედან. დავუშვათ, რომ $f(x, y)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია თავისი არგუმენტების მიმართ. თუ სათანადო ჩასმას მოვახდენთ, გვექნება

$$z = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = F(u, v).$$

$\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$ z რთული ფუნქციის კერძო წარმოებულებია. რადგანაც u -სათვის v უნდა განვიხილოთ როგორც მუდმივი, $\frac{\partial z}{\partial u}$ -სათვის მართებულია (17) ფორმულა, მაგრამ u -თი წარმოებულები იქნება კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}. \quad (21)$$

ასევე მივიღებთ

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (22)$$

განვიხილოთ შემთხვევა

$$z = f(x, y), \quad y = \varphi(x, v), \quad x = x.$$

მაშინ (21) მოგვცემს

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ კერძო წარმოებულები შემდეგი რთული ფუნქციისა

$$z = \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad x = uv, \quad y = \frac{u}{v},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x \frac{\partial}{\partial u} (uv) + \\ &+ \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{v} \right) = 2 \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \left(xv + \frac{y}{v^2} \right) = \\ &= 2 \cos \frac{v^2}{u^2 v^4 + u^2} \cdot \left(uv^2 + \frac{u}{v^2} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= 2 \cos \frac{v^2}{u^2 v^4 + u^2} \cdot \left(u^2 v - \frac{u^2}{v^3} \right).\end{aligned}$$

6. არაცხადი ფუნქციები. $y=f(x)$ ფუნქციას, რომელიც მოცემულია $F(x, y)=0$ განტოლებით, სადაც y არაა ამოხსნილი, ეწოდება არაცხადი ფუნქცია.

ამავე აზრით შეგვიძლია განვიხილოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის არაცხადი ფუნქცია.

ვთქვათ, მოცემულია განტოლება $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z)=0$. განტოლება აკავშირებს $n+1$ ცვლადს. ამ ცვლადებიდან ერთი ცვლადი შეგვიძლია განვიხილოთ დანარჩენი ცვლადების ფუნქციად. მაგალითად, z განვიხილოთ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების ფუნქციად, $z=z(x_1, x_2, \dots, x_n)$. მაგრამ აქ დაისმის საკითხი ამ ფუნქციის არსებობისა და ერთადობის შესახებ. ე. ი. არსებობს თუ არა ისეთი $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობანი, რომელთათვისაც აქვს $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z)=0$ განტოლებას ერთადერთი ამონახსნი? ამ საკითხს პასუხობს შემდეგი თეორემა. სიმარტივისათვის განვიხილავთ სამი ცვლადის $F(x, y, z)$ ფუნქციას.

თეორემა 3. ვთქვათ, $F(x, y, z)$ ფუნქციის მიმართ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $F(x, y, z)$ განსაზღვრულია და უწყვეტი G არეში;

$$G = \{(x, y, z) \mid x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, y_0 - \delta \leq y \leq y_0 + \delta, z_0 - \delta \leq z \leq z_0 + \delta\}, \delta > 0;$$

2. G არეში $F(x, y, z)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები

$$F'_x(x, y, z), F'_y(x, y, z), F'_z(x, y, z);$$

3. $F(x_0, y_0, z_0)=0$;

4. $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

მაშინ (x_0, y_0) წერტილის რაიმე $g=u((x_0, y_0), h)$, $h>0$, მიდამოში არსებობს ერთადერთი უწყვეტი $z=f(x, y)$

ფუნქცია. რომელიც (x_0, y_0) წერტილში დებულობს z_0 მნიშვნელობას და, რომელიც ჩასმული განტოლებაში

$$F(x, y, z)=0, \quad (23)$$

მას აქცევს იგივეობად

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0.$$

$z=f(x, y)$ ფუნქციას g არეში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, სადაც

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (24)$$

(24) ფორმულები გამოსახვენ არაცხადი $z=f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებს $F(x, y, z)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულების საშუალებით.

ვთქვათ, G არეში $F(x, y, z)$ ფუნქციას აქვს კერძო წარმოებულები $F'_x(x, y, z)$ და $F'_z(x_0, y_0, z_0)=0$, $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, მაშინ არსებობს (x_0, y_0) წერტილის რაიმე g მიდამოში ერთადერთი უწყვეტი $z=f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც ჩასმული $F(x, y, z)=0$ განტოლებაში, მას აქცევს იგივეობად, ამასთან $f(x_0, y_0)=z_0$.

რადგანაც $F'_z(x, y, z)$ კერძო წარმოებულო უწყვეტია G -ში და $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, ამიტომ არსებობს (x_0, y_0, z_0) წერტილის ისეთი მიდამო $\bar{u}(M_0, \delta') \subset \bar{u}(M_0, \delta)$, სადაც $F'_z(x, y, z)$ ნიშანს ინარჩუნებს. მაგალითად, $F'_z(x, y, z) > 0$.

განვიხილოთ $F(x_0, y_0, z)$ ფუნქცია. რადგანაც $F'_z(x_0, y_0, z) > 0$, ფუნქცია $F(x_0, y_0, z)$ ზრდადია, ამასთან $F(x_0, y_0, z_0)=0$, ამის გამო

$$F(x_0, y_0, z_0 - \delta') < 0, F(x_0, y_0, z_0 + \delta') > 0. \quad (25)$$

რადგანაც ფუნქციები $F(x, y, z_0 - \delta')$ და $F(x, y, z_0 + \delta')$ უწყვეტია თეორემის პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი მნიშვნელობანი x და y $\bar{u}((x_0, y_0), \delta')$ მიდამოდან, $\delta' < \delta'$, სადაც ეს ფუნქციები (25) პირობებს აკმაყოფილებენ

$$F(x, y, z_0 - \delta') < 0, F(x, y, z_0 + \delta') > 0.$$

აქედან $\bar{u}((x_0, y_0), \delta')$ მიდამოდან ნებისმიერი $(\bar{x}, \bar{y})$ წერტილი, გვექნება

$$F(\bar{x}, \bar{y}, z_0 - \delta') < 0, F(\bar{x}, \bar{y}, z_0 + \delta') > 0,$$

ამასთან $F(\bar{x}, \bar{y}, z)$ უწყვეტი და ზრდადი ფუნქციაა z -ის მიმართ. მაშინ სტეპენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისების თანახმად, არსებობს $[z_0 - \delta', z_0 + \delta']$ სტეპენტზე ისეთი მნიშვნელობა $z = \bar{z}$, რომ $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$.

მაშასადამე, $\bar{u}((x_0, y_0), \delta'')$ მიდამოდან (x, y) -ის ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება z -ის ერთი მნიშვნელობა $z = f(x, y)$, რომელიც $F(x, y, z) = 0$ განტოლებას აკმაყოფილებს. ამრიგად, არსებობს $\bar{u}((x_0, y_0), \delta'')$ მიდამოში განსაზღვრული ისეთი $z = f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

ყოველი (x, y) -სათვის, $x_0 - \delta'' \leq x \leq x_0 + \delta''$ და $y_0 - \delta'' \leq y \leq y_0 + \delta''$, ამასთან

$$f(x_0, y_0) = z_0.$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $z = f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია სეგმენტზე

$$\bar{u}((x_0, y_0), \delta'') = [x_0 - \delta'', x_0 + \delta''; y_0 - \delta'', y_0 + \delta''].$$

δ' -ზე ნაკლები ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი დადებითი $\eta \leq \delta''$, რომ ყოველი (x, y) -სათვის სეგმენტიდან $\bar{u}((x_0, y_0), \delta'')$, რომლებიც $z = f(x, y)$ -თან ერთად $F(x, y, z) = 0$ განტოლებას აკმაყოფილებს, $f(x, y)$ მოთავსებულია $z_0 - \varepsilon$ და $z_0 + \varepsilon$ რიცხვებს შორის. ე. ი.

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \text{ როდესაც } |x - x_0| < \eta, |y - y_0| < \eta.$$

ეს კი გვიჩვენებს $f(x, y)$ ფუნქციის უწყვეტობას (x_0, y_0) წერტილში. თუ ავიღებთ $[x_0 - \delta'', x_0 + \delta''; y_0 - \delta'', y_0 + \delta'']$ სეგმენტიდან სხვა $(\bar{x}, \bar{y})$ წერტილს, მაშინ $\bar{x}, \bar{y}$ და $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$ აკმაყოფილებს იმავე პირობებს, რასაც (x_0, y_0, z_0) ალბულო სეგმენტზე. ეს კი მოგვცემს, რომ $(\bar{x}, \bar{y})$ წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრული $z = f(x, y)$ ერთადერთია და უწყვეტია $(\bar{x}, \bar{y})$ წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს $F(x, y, z) = 0$ განტოლებას იგივეურად.

თეორემაში ნახსენები G მიდამო სწორედ $[x_0 - \delta'', x_0 + \delta''; y_0 - \delta'', y_0 + \delta'']$, $h = \delta''$, სეგმენტია. თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცდა.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი: თუ G არეში უწყვეტ $F(x, y, z)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$, სადაც $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, მაშინ $z = f(x, y)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

ავიღოთ G არეში (x, y) და $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ წერტილები. ამ არეში $F(x, y, z) = 0$ განტოლებიდან განისაზღვრება უწყვეტი $z = f(x, y)$ ფუნქცია. რადგანაც (x, y) , $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ წერტილები ეკუთვნის G -ს, მაშინ ამ წერტილებთან ერთად $z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ აკმაყოფილებს $F(x, y, z) = 0$ განტოლებას;

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = 0.$$

პირობის თანახმად, $F(x, y, z)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები ყველა არგუმენტის მიმართ $u(M_0, \delta')$ მიდამოში, ამიტომ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია:

$$\Delta F = F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z) = (F'_x(x, y, z) + \alpha) \Delta x + (F'_y(x, y, z) + \beta) \Delta y + (F'_z(x, y, z) + \gamma) \Delta z.$$

მაგრამ

$$F(x, y, z) = 0, F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = 0,$$

მაშინ

$$F'_x(x, y, z) + \alpha) \Delta x + (F'_y(x, y, z) + \beta) \Delta y + (F'_z(x, y, z) + \gamma) \Delta z = 0, \quad (26)$$

სადაც α, β, γ უსასრულოდ მცირეებია $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ -თან ერთად. ვთქვათ. $\Delta y = 0$, მაშინ $z = f(x, y)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \Delta z = 0$. გავ-

ყოთ (26) ტოლობა Δx -ზე. მივიღებთ

$$F'_x(x, y, z) + \alpha + (F'_z(x, y, z) + \gamma) \frac{\Delta z}{\Delta x} = 0.$$

აქედან დავასკენით, რომ არსებობს $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$, რადგანაც $F'_z(x, y, z) \neq 0$.

გვექნება

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F'_x(x, y, z) + \alpha}{F'_z(x, y, z) + \gamma} = - \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad (27)$$

სადაც ვგულისხმობთ z -ის ნაცვლად ჩასმულია $f(x, y)$.

სრულიად ასევე მივიღებთ

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = - \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (28)$$

არაცხადი ფუნქციის $f(x, y)$ კერძო წარმოებულებთან უწყვეტობა გამოიძინარეობს (27) და (28) ტოლობებიდან, სადაც მრიცხველსა და მნიშვნელში უწყვეტი ფუნქციებია და $F'_z(x, y, z) \neq 0$.

ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცდა.

თუ დავგვირდებდა არაცხადი $f(x, y)$ ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულები, მაშინ, როგორც (27) და (28) ტოლობები გვიჩვენებს, უნდა მოვითხოვოთ $F(x, y, z)$ ფუნქციის მაღალი რიგის კერძო წარმოებულებთან უწყვეტობა ალბულო G არეში.

მწელი წარმოსადგენი არ უნდა იყოს, რომ მე-3 თეორემა ქეშმარიტი, როცა ცვლადთა რიცხვი F ფუნქციაში 3-ზე მეტია. თეორემა ჩამოვყალიბოთ უფრო ზოგადად.

თეორემა 4. თუ $(n+1)$ -განზომილებიან $G = [x_1^{(0)} - \delta_1, x_1^{(0)} + \delta_1; \dots; x_n^{(0)} - \delta_n, x_n^{(0)} + \delta_n; z_0 - \delta_{n+1}, z_0 + \delta_{n+1}]$ არეში უწყვეტი $F(x_1, \dots, x_n, z)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $F_{x_i}, i = \overline{1, n}, F_z$, ამასთან

$$F(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, z_0) = 0, F_z(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, z_0) \neq 0,$$

მაშინ არსებობს ერთადერთი $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ წერტილის გარკვეულ მიდამოში $g = [x_1^{(0)} - h_1, x_1^{(0)} + h_1; \dots; x_n^{(0)} - h_n, x_n^{(0)} + h_n]$, რომელიც ამ მიდამოში აკმაყოფილებს $F(x_1, \dots, x_n, z) = 0$ განტოლებას,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0,$$

ამასთან

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = z_0.$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციას g არეში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$, სადაც

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{F_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}{F_z(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}, i = \overline{1, n}, z = f(x_1, \dots, x_n).$$

ამ თეორემის დამტკიცება 1-ლი თეორემის დამტკიცების სრული ანალოგიით ჩატარდება.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5. ვთქვათ, $F(x, y, u, v)$ და $\Phi(x, y, u, v)$ ფუნქციებისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $F(x, y, u, v)$ და $\Phi(x, y, u, v)$ ფუნქციები განსაზღვრულია და უწყვეტი რაიმე $G = \{(x, y, u, v)\}$ არეში, რომელიც $M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ წერტილს შეიცავს;

2) ამ G არეში F და Φ ფუნქციებს აქვს პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები ყველა არგუმენტის მიმართ;

$$3) F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \Phi(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0; \quad (29)$$

4) F და Φ ფუნქციების წარმოებულებთან შედგენილი შემდეგი დეტერმინანტი

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (30)$$

$M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ წერტილში განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ (x_0, y_0) წერტილის გარკვეულ $g = \{(x, y)\}$ მიდამოში არსებობს ერთადერთი წყვილი უწყვეტი $u = f(x, y), v = \varphi(x, y)$ ფუნქციები, რომლებიც (x_0, y_0) წერტილში ღებულობენ სათანადოდ u_0 და v_0 მნიშვნელობებს და, რომლებიც განტოლებებს

$$F(x, y, u, v) = 0, \Phi(x, y, u, v) = 0. \quad (31)$$

ჩასმის შემდეგად, $u = f(x, y), v = \varphi(x, y)$, აქცევენ იგივეობადა,

$$F(x, y, f(x, y), \varphi(x, y)) = 0, \Phi(x, y, f(x, y), \varphi(x, y)) = 0.$$

$f(x, y)$ და $\varphi(x, y)$ ფუნქციები (x_0, y_0) წერტილის g მიდამოში უწყვეტი ფუნქციებია და აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

(30) დეტერმინანტს ფუნქციონალური დეტერმინანტი ან იაკობის დეტერმინანტი (იაკობიანი) ეწოდება.

ჩამოყალიბებულ თეორემას მე-3 თეორემის დახმარებით დავამტკიცებთ.

რადგანაც მე-4 პირობით $M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ წერტილში I დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, ცხადია, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ წარმოებულები-

დან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ვთქვათ, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)_{M_0} \neq 0$. მაშინ

მე-3 თეორემის თანახმად არსებობს (x_0, y_0, v_0) წერტილის რაიმე $u(x_0, y_0, v_0; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ მიდამოში განსაზღვრული $u = \varphi(x, y, v)$ ფუნქცია, რომელიც $M'_0(x_0, y_0, v_0)$ წერტილში ღებულობს u_0 მნიშვნელობას, $u_0 = \varphi(x_0, y_0, v_0)$, და ჩასმით $\Phi(x, y, u, v) = 0$ განტოლებას იგივეურად აკმაყოფილებს,

$$\Phi(x, y, \varphi(x, y, v), v) = 0.$$

ფუნქცია $\varphi(x, y, v)$ ერთადერთია, რომელიც $\Phi(x, y, u, v) = 0$ განტოლებიდან განსაზღვრება g არეში. ამის გამო, ნაცვლად (31) განტოლებათა სისტემისა, განვიხილოთ მისი ეკვივალენტური განტოლებათა სისტემა

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad (32)$$

$$u = \varphi(x, y, v).$$

მიღებული (32) განტოლებათა სისტემა გვიჩვენებს, რომ შეგვიძლია განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x, y, \varphi(x, y, v), v) = F_1(x, y, v)$$

და მე-5 თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ დავამტკიცებთ, არსებობს

ერთადერთი უწყვეტი ფუნქცია $u = \Psi(x, y)$, რომელიც იგივეურად აკმაყოფილებს განტოლებას

$$F_1(x, y, v) = 0$$

და

$$v_0 = \Psi(x_0, y_0).$$

ამასთან (x_0, y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში $v = \Psi(x, y)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები. ამისათვის შევამოწმოთ, აკმაყოფილებს თუ არა $F_1(x, y, v)$ ფუნქცია მე-3 თეორემის პირობებს.

მე-3 თეორემის პირველ სამ პირობას რომ $F_1(x, y, v)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს, ცხადია. შევამოწმოთ მე-4 პირობა. ვაჩვენოთ

$$\left(\frac{\partial F_1(x, y, v)}{\partial v} \right)_{M'_0(x_0, y_0, v_0)} \neq 0.$$

რთული ფუნქციის $F_1(x, y, v)$ -ს გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (33)$$

გავაწარმოოთ იგივეობა

$$\Phi(x, y, \varphi(x, y, v), v) = 0.$$

მივიღებთ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0,$$

საიდანაც

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)_{M'_0} = - \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{M'_0}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{M'_0}},$$

რადგანაც

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{M'_0} \neq 0.$$

შევიტანოთ $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{M'_0}$ მნიშვნელობა (33) გამოსახულებაში, გვექნება

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial v} \right)_{M'_0} &= \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_{M'_0} \left(- \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{M'_0}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{M'_0}} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)_{M'_0} = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{M'_0} \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{M'_0}} = \frac{I_{M'_0}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{M'_0}} \neq 0, \end{aligned}$$

რადგანაც პირობის თანახმად

$$I_{M'_0} \neq 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{M'_0} \neq 0.$$

ამრიგად, ფუნქცია $F_1(x, y, v)$ აკმაყოფილებს მე-3 თეორემის პირობებს. $F_1(x, y, v)$ ფუნქციისათვის გამოვიყენოთ მე-3 თეორემა. მივიღებთ, რომ არსებობს (x_0, y_0) წერტილის გარკვეულ მიდამოში უწყვეტი $v = \psi(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც (x_0, y_0) წერტილში ღებულობს $v_0 = \psi(x_0, y_0)$ მნიშვნელობას და ამ $\psi(x, y)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$.

თუ $v = \psi(x, y)$ მნიშვნელობას ჩავსვამთ $u = \varphi(x, y, v)$ ფუნქციაში, მივიღებთ

$$u = \varphi(x, y, \psi(x, y)) = f(x, y),$$

რომელიც აკმაყოფილებს თეორემაში ჩამოყალიბებულ ყველა პირობას. ამით მე-5 თეორემა დამტკიცდა.

მე-5 თეორემა ეხება ორი განტოლებიდან $F(x, y, u, v) = 0$, $\Phi(x, y, u, v) = 0$ ორი არაცხადი ფუნქციის განსაზღვრას $u = f(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.

ინტუქციის მეთოდით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი.

თეორემა 6. ვთქვათ, მოცემულია m განტოლებათა სისტემა $n+m$ ცვლადით

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \\ &\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

სადაც $F_i(x_1, \dots, y_m)$ $i = 1, m$ ფუნქციები უწყვეტია თავისი არგუმენტების მიმართ და აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები E_{n+m} სივრცის $M_0(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}; y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ წერტილის რაიმე G მიდამოში. თუ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}; y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) = 0, \quad i = 1, m,$$

და იაკობიანი

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

M_0 წერტილში ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ არსებობს ერთადერთი სისტემა უწყვეტი ფუნქციებისა.

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, m},$$

რომლებიც იგივეურად აკმაყოფილებენ (34) განტოლებათა სისტემას E_n სივრცის $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ წერტილის გარკვეულ g მიდამოში, ამასთან

$$f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = y_i^{(0)}, \quad i = \overline{1, m},$$

და ამ g მიდამოში $f_i, i = \overline{1, m}$, ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}, \quad i = \overline{1, m}.$$

7. მაგალითები.

1. ვთქვათ, $F(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მე-3 თეორემაში მოთხოვნილ პირობებს, მაშინ $F(x, y) = 0$ განტოლება განსაზღვრავს ერთადერთ $y = f(x)$ ფუნქციას. ამ შემთხვევაში $F(x, y) = 0$ განტოლების მარცხენა ნაწილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც x ცვლადის რთული ფუნქცია, ამიტომ ამ ტოლობის ორივე ნაწილის x -ით გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

სწორედ ასე განვსაზღვრეთ არაცხადი ფუნქციის წარმოებული მე-14 თავში (§ 3, n8).

2. ვთქვათ, $F(x, y, z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მე-3 თეორემის პირობებს. x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, z ცვლადი კი ამ ცვლადების ფუნქციაა, მაშინ $F(x, y, z) = 0$ განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

ამ ტოლობებიდან განისაზღვრება არაცხადი $z = f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები (იხ. ფორმულები (27), (28)).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

3. ვთქვათ, $F(x, y, u, v)$ და $\Phi(x, y, u, v)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ მე-5 თეორემის პირობებს, მაშინ არსებობს სისტემა არაცხადი ფუნქციებისა, რომლებიც

$$F(x, y, u, v) = 0,$$

$$\Phi(x, y, u, v) = 0$$

განტოლებათა სისტემიდან განისაზღვრება. არაცხადი $u = f(x, y)$ და $v = \psi(x, y)$ ფუნქციათა წარმოებულები განისაზღვრება განტოლებათა სისტემიდან

$$I \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

$$II \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

საიდანაც

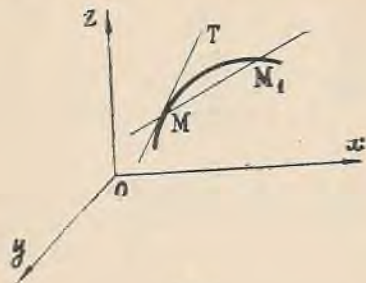
$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{I} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{I} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{I} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{I} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad I = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

8. მხეხი სიბრტყე. დიფერენციალის გეომეტრიული მნიშვნელობა წინასწარ გამოვიყენოთ სივრცული წირის

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t) \quad (34)$$

მხების განტოლება (ნახ. 6). ვთქვათ, $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ფუნქციებს $\alpha \leq t \leq \beta$ სეგმენტზე აქვთ წარმოებულები. ავიღოთ $t \in [\alpha, \beta]$ მნიშვნელობა. ამ მნიშვნელობის შესაბამის M წერტილზე და $t + \Delta t \in [\alpha, \beta]$ -ის შესაბამის M_1 წერტილზე გავატაროთ წრფე. MM_1 წრფის განტოლება იქნება



ნახ. 6

ადვილი შესამჩნევია, რომ (35) განტოლებანი ეკვივალენტურია შემდეგი განტოლებებისა

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

ამ წრფის ზღვრული მდებარეობა, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, იქნება (34) წირის მხები M წერტილში

$$\frac{X-x}{f'(t)} = \frac{Y-y}{\varphi'(t)} = \frac{Z-z}{\psi'(t)}. \quad (36)$$

ახლა ავიღოთ ზედაპირი, რომლის განტოლებაც

$$F(x, y, z) = 0. \quad (37)$$

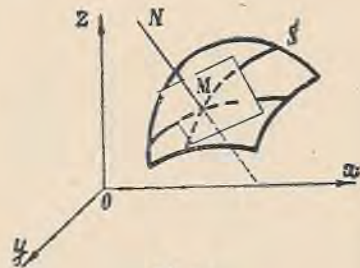
ვთქვათ, $F(x, y, z)$ დიფერენცირებადი G არეში. (37) ზედაპირზე ავიღოთ $M(x, y, z)$ წერტილი და წარმოვიდგინოთ M წერტილზე გატარებული წირი,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (38)$$

რომელიც (37) ზედაპირზე მდებარეობს (ნახ. 7). ვიგულისხმოთ, რომ M წერტილზე ნებისმიერი MS მიმართულებით შეგვიძლია გავატაროთ წირი (37) ზედაპირზე.

დავუშვათ, რომ წარმოებულები $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ უწყვეტია. (38) წირის M წერტილზე გატარებული მხების განტოლება იქნება

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}. \quad (39)$$



ნახ. 7

რადგანაც MS წირი მთლიანად მდებარეობს (37) ზედაპირზე, გვექნება t ცვლადის მიმართ იგივეობა:

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0. \quad (40)$$

$F(x(t), y(t), z(t))$ ფუნქცია t ცვლადის რთული ფუნქციაა. (40) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{dF}{dt} = 0,$$

ანუ M წერტილში ექნება ადვილი შემდეგ ტოლობას:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (41)$$

განვიხილოთ წრფე, რომლის განტოლებანია

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (42)$$

(39) და (42) წრფეების მიმართველი ვექტორები აკმაყოფილებენ (41) პირობას, ე. ი. (39) და (42) წრფეები ურთიერთპერპენდიკულარულია. (39) წრფე $F=0$ ზედაპირის M წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წირის მხებია. ცხადია, ყველა (39) მხები M წერტილზე გამავალი $F=0$ ზედაპირის მხებსიბრტყეშია. სწორედ ამ სიბრტყის პერპენდიკულარულია (42) წრფე. (42) წრფეს ეწოდება $F=0$ ზედაპირის ნორმალური M წერტილში. თუ მოვიგონებთ წრფისა და სიბრტყის პერპენდიკულარობის პირობას, $F=0$ ზედაპირის მხები სიბრტყე (42) ნორმალის პერპენდიკულარულია, მივიღებთ $F=0$ ზედაპირის M წერტილზე გამავალი მხების სიბრტყის განტოლებას:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0, \quad (43)$$

სადაც X, Y, Z კოორდინატები $F(x, y, z)=0$ ზედაპირის მხები სიბრტყის მიმდინარე წერტილის კოორდინატებია.

თუ ზედაპირი ცხადი სახითაა მოცემული,

$$z = f(x, y),$$

მაშინ

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

და

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

(43) განტოლება მოგვცემს

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) - (Z-z) = 0,$$

საიდანაც

$$Z-z = \frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y). \quad (44)$$

მხებ სიბრტყეზე ავიღოთ M_1 წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(x+dx, y+dy, Z_1)$,

გვექნება

$$Z_1-z = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \quad (45)$$

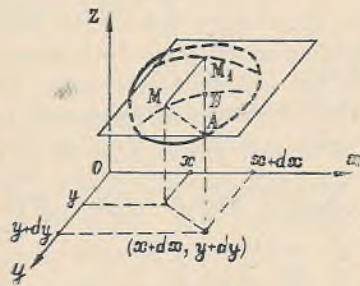
შევადაროთ (45) ტოლობა $f(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

მივიღებთ

$$df = Z_1 - z.$$

ამგვარად, $f(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი (x, y) წერტილში არის $z=f(x, y)$ ზედაპირის $M(x, y, z)$ წერტილში გატარებული მხები სიბრტყის აპლიკატის ნაზრდი, როცა x -ის ნაზრდია dx , ხოლო y -ის dy (ნახ. 8):



ნახ. 8

ს ა ე ა რ ჯ ი შ მ 41.

1. მონახეთ შემდეგი ფუნქციების კერძო წარმოებულები:

$$1) z = x^2 - y^3 + \frac{2x}{y^2},$$

$$2) z = \frac{3}{x} + \frac{x}{y},$$

$$3) z = \sin \frac{x}{x+y},$$

$$4) z = e^{x^2+y},$$

$$5) z = e^{\frac{y}{x+y}},$$

$$6) z = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2},$$

$$7) z = x^y,$$

$$8) z = \arctg \frac{x}{y}.$$

$$9) z = x \sin y + y \cos x,$$

$$10) z = x \sin \frac{1}{y} + \frac{y}{x},$$

$$11) z = \sqrt{x+y^2+t^3},$$

$$12) z = \ln \left(x^2 + \frac{1}{y^2+1} + t^2+1 \right),$$

$$13) z = \arcsin \frac{x}{yt},$$

$$14) z = \arctg \frac{xt}{x+y}.$$

2. მოცემულია ფუნქციები, იპოვეთ სათანადო სრული წარმოებულები:

$$1) z = \sin \left(\frac{1}{x^2} + y^2 \right), \quad x = 2t^2, \quad y = \frac{1}{t};$$

$$2) z = \arcsin \left(x^2 + \frac{1}{y^2} \right), \quad x = \frac{1}{t^2}, \quad y = 2t;$$

$$3) z = \arctg(x y^2), \quad x = \sin t, \quad y = \cos \sqrt{t};$$

$$4) z = 2^{\sin \frac{x+y}{x-y}}, \quad x = \frac{t^3}{3}, \quad y = -\frac{1}{t};$$

$$5) z = \ln \cos \frac{x^2+1}{y^2}, \quad x = \frac{2}{t}, \quad y = \frac{1}{t^2+1}.$$

3. მონახეთ y' შემდეგი არაცხადი ფუნქციებიდან:

$$1) e^{xy} - e^{-3x} + \frac{y}{x} - 1 = 0, \quad 2) y - x \arcsin y - \ln(xy) = 0,$$

$$3) \arcsin y + \arctg x - 5y^2 = 0, \quad 4) \sqrt{1+y^2} + \ln \frac{x}{y} = 0,$$

$$5) a^{xy} - \operatorname{ctg} y = 0, \quad 6) \frac{1}{3} x^3 y^3 - \frac{1}{2} x^2 y^2 + \cos(xy) = 0,$$

$$7) \ln(x^2+y^2) + \arctg \frac{x}{y} = 0, \quad 8) \cos \frac{1}{y} + x + y \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$9) x \arccos y + y \arcsin x = 0, \quad 10) \frac{5x^3 y^3}{3} - \frac{x^2 y^2}{2} + x + y = 0.$$

4. მოცემულია განტოლებანი

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2+1} - e^{-(u^2+v^2)} = 0, \\ \ln(1+x^2+y^2) - (u^2-u+v^2-v) = 0, \end{cases}$$

იპოვეთ

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

5. მოცემულია განტოლებანი

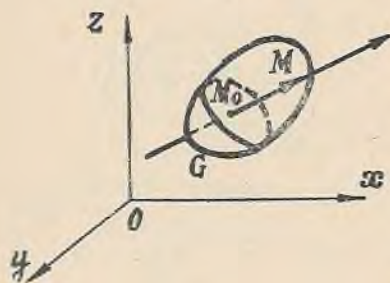
$$\begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{xu}{y} - e^{-y^2 v^2} = 0, \\ \operatorname{arc} \sin \frac{u}{v} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} = 0. \end{cases}$$

იპოვეთ

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

§ 3. მიმართულებით წარმოებული. გრადიენტი

1. მიმართულებით წარმოებული. ვთქვათ, $f(x, y, z)$ ფუნქცია განსაზღვრულია სამგანზომილებიან სივრცის G არეში. ავიღოთ G არეში $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი. ამ წერტილზე გავავლოთ რაიმე l ღერძი (ნახ. 9). ამ ღერძზე ავიღოთ რაიმე $M(x, y, z) \in G$ წერტილი. განვიხილოთ $\overline{M_0M}$ ვექტორი. ამ ვექტორის სიდიდე l ღერძის მიმართ აღვნიშნოთ ρ ასოთი. იგი დადებითია ან უარყოფითი იმისდა მიხედვით, $\overline{M_0M}$ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა l ღერძის მიმართულებას, თუ არა. შევადგინოთ გამოსახულება



ნახ. 9

$\frac{f(M) - f(M_0)}{\rho}$. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho},$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(M)$ ფუნქციის წარმოებული M_0 წერტილში l მიმართულებით. l მიმართულებით წარმოებული ასე აღინიშნება

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}. \quad (1)$$

ცხადია, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ შეგვიძლია განვიხილოთ სათანადოდ როგორც

x -ის, y -ის და z ღერძის მიმართულებით წარმოებული.

ვთქვათ, $f(x, y, z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია M_0 წერტილში, $M_0 \in G$, მაშინ

$$\begin{aligned} f(M) - f(M_0) &= \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \Delta z + \\ &+ \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + \alpha_3 \Delta z, \end{aligned} \quad (2)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rightarrow 0$, როდესაც $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$.

l ღერძის მიმართულების კოსინუსები იყოს

$$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma,$$

მაშინ

$$\Delta x = \rho \cos \alpha, \Delta y = \rho \cos \beta, \Delta z = \rho \cos \gamma.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი (2) გამოსახულებაში:

$$\begin{aligned} f(M) - f(M_0) &= \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \rho \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \rho \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \rho \cos \gamma + \\ &+ \alpha_1 \rho \cos \alpha + \alpha_2 \rho \cos \beta + \alpha_3 \rho \cos \gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

თუ (3) გამოსახულებას გავყოფთ ρ -ზე და გადავალთ ზღვარზე, $\rho \rightarrow 0$, მაშინ $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0$. მივიღებთ

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma.$$

ამგვარად, დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია სამგანზომილებიან G არეში, დიფერენცირებადია ამ არის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში, მაშინ არსებობს ნებისმიერი l მიმართულებით წარმოებული $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma, \quad (4)$$

სადაც $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ l ღერძის მიმართულების კოსინუსებია.

შევნიშნოთ, რომ $f(x, y, z)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს წარმოებული ნებისმიერი მიმართულებით, მაგრამ დიფერენცირებადი არ იყოს (მოვიგონოთ დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობა).

ადვილი შესამჩნევია, რომ 1-ლი თეორემა მართებულია n -განზომილებიან G არეში განსაზღვრულ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციისათვის.

2. ფუნქციის გრადიენტი. შემოვიღოთ $f(M)$ ფუნქციის გრადიენტის ცნება.

$f(M)$ ფუნქციის გრადიენტი ეწოდება ვექტორს, რომლის კოორდინატებია

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \frac{\partial f(M)}{\partial z},$$

ფუნქციის გრადიენტი ასე აღინიშნება:

$$\text{grad } f(M) = \left(\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \frac{\partial f(M)}{\partial z} \right),$$

თუ l ღერძის მგზავია (ერთეული ვექტორი, l ღერძის მიმართულებით) $\vec{e}$, მაშინ

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \vec{e} \text{ grad } f(M). \quad (5)$$

ამგვარად, $f(M)$ ფუნქციის წარმოებული l მიმართულებით უდრის ამ ღერძის მგზავისა და $f(M)$ ფუნქციის გრადიენტის სკალარულ ნამრავლს.

ამ განსაზღვრის თანახმად, შეგვიძლია დავადგინოთ ის მიმართულება, რომელი მიმართულებითაც უფრო სწრაფად იზრდება (ან მცირდება) ფუნქციის მნიშვნელობა.

ვექტორთა სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის თანახმად (5)-დან მივიღებთ

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = |\text{grad } f(M)| \cos \varphi, \quad (6)$$

სადაც φ არის კუთხე l ღერძსა და $\text{grad } f(M)$ -ს შორის. (6) ფორმულიდან ცხადია, $f(M)$ ფუნქცია უფრო სწრაფად იცვლება, თუ $\varphi=0$, უფრო ნელა იცვლება, თუ $\varphi=\pi$.

ამგვარად, $\text{grad } f(M)$ -ის მიმართულებით $f(M)$ უფრო სწრაფად იცვლება (მაქსიმალურად იცვლება), ხოლო $\text{grad } f(M)$ -ს საწინააღმდეგო მიმართულებით $f(M)$ უფრო ნელა იცვლება (მინიმალურად იცვლება).

თუ M წერტილის გადაადგილების ვექტორს $d\vec{M}$ -ით აღვნიშნავთ,

$$d\vec{M} = (dx, dy, dz),$$

მაშინ სრული დიფერენციალი $f(x, y, z)$ ფუნქციისა ასე ჩაიწერება

$$df = \frac{\partial f(M)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(M)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(M)}{\partial z} dz = \text{grad } f(M) d\vec{M}.$$

თუ $\text{grad } f(M)$ პირობით $f'(M)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, მაშინ

$$df = f'(M) d\vec{M}. \quad (7)$$

ამგვარად, მრავალი ცვლადის $f(M)$ ფუნქციისათვის შენარჩუნებულია ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი ფორმულის სახე (ფუნქციის დიფერენციალის სახე). (7) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი. მაშასადამე, გრადიენტის ცნება წარმოადგენს, გარკვეული აზრით, ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულის ცნების განზოგადებას.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(M) = 2x^3 + 4xy^2 + 6z^2y$ ფუნქციის წარმოებული $(1, 1, 1)$ წერტილში $4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ ვექტორის მიმართულებით. გვექნება

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 4y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8xy + 6z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 12yz;$$

$$\frac{\partial f(1, 1, 1)}{\partial x} = 10, \quad \frac{\partial f(1, 1, 1)}{\partial y} = 14, \quad \frac{\partial f(1, 1, 1)}{\partial z} = 12;$$

$$\frac{\partial f(1, 1, 1)}{\partial l} = 10 \cdot \frac{2}{3} + 14 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{1}{3} = 20.$$

§ 4. ფუნქციის მნიშვნელობის მიახლოებით გამოთვლა სრული დიფერენციალის საშუალებით

ავიღოთ ორი ცვლადის ფუნქცია $f(x, y)$, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე G არეში და დიფერენცირებადია $(x_0, y_0) \in G$ წერტილში. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \quad (1)$$

სადაც α და β მისწრაფვის ნულისაკენ Δx და Δy -თან ერთად. $\alpha \Delta x + \beta \Delta y$ მაღალი რიგის უსასრულო მცირეა Δx და Δy ნაზრდთან შედარებით, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0). \quad (2)$$

მიღებული ფორმულა გამოიყენება ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლაზე აღებულ (x_0, y_0) წერტილში.

მაგალითი. გამოთვალოთ $\sqrt[3]{1.02} + \sqrt[5]{0.98}$. მივიღოთ $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.02$; $y_0 = 1$, $\Delta y = -0.02$. გვექნება

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{5} y^{-\frac{4}{5}},$$

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \frac{1}{5},$$

$$\sqrt[3]{1.02} + \sqrt[5]{0.98} = \sqrt[3]{1 + 0.02} + \sqrt[5]{1 - 0.02} \approx$$

$$\approx \sqrt[3]{1} + \sqrt[5]{1} + \frac{1}{3} \cdot 0.02 + \frac{1}{5} \cdot (-0.02) \approx 2.003$$

შევასრულოთ შემდეგი სავარჯიშო:

სავარჯიშო 42.

1. მოცემულია წირი

$$\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = t^3, \\ z = \frac{t}{2}. \end{cases}$$

შეადგინეთ $M_0(2; 1; 0.5)$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლებანი.

2. შეადგინეთ $\begin{cases} z = 4x^2, \\ y = x^3 \end{cases}$ წირის $(1, 1, 4)$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლებანი.

(ერთ-ერთი ცვლადი, მაგალითად x , მიიღეთ პარამეტრად, მაშინ $M(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლებანი იქნება

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)}.$$

3. შეადგინეთ $z = x^2$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ წირის მხების განტოლებანი, რომელიც $M_0(1, 0, 1)$ წერტილზე გაივლის.

4. შეადგინეთ $z = x^2 + y^2$, $x = y^2$ წირის მხების განტოლებანი, რომელიც $M_0(1, 1, 2)$ წერტილზე გაივლის.

5. შეადგინეთ $z = x$, $4x^2 + y^2 = 4$ წირის მხების განტოლებანი, რომელიც $M_0(1, 0, 1)$ წერტილზე გაივლის.

6. შეადგინეთ $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ ელიფსოიდის $M_0(1, 1, 1)$ წერტილში გატარებული მხები სიბრტყის და ნორმალის განტოლებანი.

7. შეადგინეთ $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ ზედაპირის $M_0(1, 1, 1)$ წერტილზე გამავალი მხების სიბრტყის და ნორმალის განტოლებანი.

8. შეადგინეთ $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ ზედაპირის მხები სიბრტყის განტოლება, თუ მხები სიბრტყე კოორდინატთა ღერძებზე ტოლ მონაკვეთებს ჩამოაჭრის.

9. მოცემულია ზედაპირი

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2z - 14 = 0.$$

ამ ზედაპირის რომელ წერტილებზე გატარებული მხები სიბრტყეებია კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელური. შეადგინეთ ამ მხები სიბრტყეების განტოლებანი.

10. მოცემულია ზედაპირი

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

ამ ზედაპირის რომელ წერტილზე გატარებული მხები სიბრტყეა $\vec{p} = (8; 8; 0.5)$ ვექტორის პერპენდიკულარული. შეადგინეთ ამ მხები სიბრტყეების განტოლებანი.

11. გამოთვალოთ $z = x^2 + y^2 - xy$ ფუნქციის წარმოებული $M_0(1, 1)$ წერტილში იმ l ღერძის მიმართულებით, რომელიც ადგენს OX ღერძთან $\frac{\pi}{4}$ კუთხეს.

12. გამოთვალოთ $z = x^2 - y^2 + xy$ ფუნქციის წარმოებული $M_0(1, 1)$ წერტილში იმ l ღერძის მიმართულებით, რომელიც გაივლის M_0 წერტილზე $3x - 4y = 0$ წრფის პარალელურად. განიზილეთ ორივე შემთხვევა.

13. გამოთვალოთ $u = x^2 + y^2 + z^2 + x - 8y - 5z$ ფუნქციის წარმოებული $(1, 1, 1)$ წერტილში $\vec{p} = (2, 2, 1)$ ვექტორის მიმართულებით.

14. მონახეთ $z = x^2 y^2 - x^2 + y^2$ ფუნქციის გრადიენტი $(1, 2)$ წერტილში.

15. მონახეთ $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ფუნქციის გრადიენტი ნებისმიერ (x, y, z) წერტილში.

16. აჩვენეთ, რომ თუ u წრფივი ფუნქციაა,

$$u = ax + by + cz + d,$$

მაშინ $\text{grad } u$ მუდმივი ვექტორია და, პირიქით, თუ $\text{grad } u$ მუდმივი ვექტორია, მაშინ u ფუნქცია წრფივია.

17. გამოთვალოთ $u = x^2 + y^2 + z^2$ ფუნქციის $M_1(1, 0, 0)$, $M_2(0, 1, 0)$, $M_3(0, 0, 1)$ წერტილებში გრადიენტებს შორის კუთხეს.

18. გამოთვალეთ მიახლოებით

$$\sqrt[3]{5 \cdot 1,02^3 + 3 \cdot 0,97^3}.$$

19. გამოთვალეთ მიახლოებით

$$\begin{aligned} 1) & 0,98^{1,03}, & 2) & \ln(1,02^3 + 0,97^5) \\ 3) & \sin 0,501 \pi, & 4) & \cos 0,251 \pi; \left(0,501 \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{1000}\right). \end{aligned}$$

§ 5. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები. მაღალი რიგის დიფერენციალები

1. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები. ვთქვათ, $z = f(x, y)$ ფუნქციას რაიმე G არეში აქვს კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

ეს კერძო წარმოებულები იქნებიან x -სა და y -ის ფუნქციები, განსაზღვრული G არეში. ამ წარმოებულებს იმავე G არეში ან მის ნაწილში შეიძლება ჰქონდეს კერძო წარმოებულები.

$f'_x(x, y)$ და $f'_y(x, y)$ -ის კერძო წარმოებულებს ეწოდება $z = f(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. მეორე რიგის კერძო წარმოებულები ასე აღინიშნება

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (f'_x(x, y))'_x = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$(f'_x(x, y))'_y = f''_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$(f'_y(x, y))'_x = f''_{yx}(x, y).$$

ამგვარადვე აღინიშნება უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad (f''_{xy}(x, y))'_x = f'''_{xyx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}.$$

ყურადღება მივაქციოთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ან $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ შერეულ წარმოებულებს. ეს წარმოებულები გაწარმოების რიგით განსხვავდებიან.

ჩვენ არ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ეს წარმოებულები ტოლია. ამის შესახებ ქვემოთ დავამტკიცებთ თეორემას. მაგრამ მაგალითები გვიჩვენებენ ზოგჯერ მათ ტოლობებს.

მაგალითად, $z = \sin \left(x + \frac{1}{y} \right)$. გამოვთვალოთ კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos \left(x + \frac{1}{y} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos \left(x + \frac{1}{y} \right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin \left(x + \frac{1}{y} \right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\sin \left(x + \frac{1}{y} \right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right).$$

გხვდავთ, რომ $z = \sin \left(x + \frac{1}{y} \right)$ -სათვის

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა (შვარცის¹ თეორემა).

თეორემა 1. თუ $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილის რაიმე G მიდამოში აქვს $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ და მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილში, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

დამტკიცება. ავიღოთ h და k იმდენად მცირე, რომ მართკუთხედი წვეროებით (x_0, y_0) , $(x_0 + h, y_0)$, $(x_0 + h, y_0 + k)$, $(x_0, y_0 + k)$ მთლიანად ეკუთვნოდეს G არეს.

განვიხილოთ გამოსახულება

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0), \quad (1)$$

თუ აღვნიშნავთ

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0), \quad (2)$$

მაშინ გვექნება

$$\Delta = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0). \quad (3)$$

რადგანაც G არეში არსებობს $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$, მაშინ არსებობს წარმოებული $f'_x(x, y)$. აქედან გამოვდინარეობს [ფუნქციის, რომელიც (2) ტოლობითაა განსაზღვრული, $[x_0, x_0 + h]$ სეგმენტზე აქვს წარმოებული

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0).$$

¹ ჰერმან აშანდუს შვარცი (1843—1921), გერმანელი მათემატიკოსი.

ამის გამო (3) გამოსახულება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ლაგრანჟის ფორმულით

$$\Delta = h \varphi'(x_0 + \theta_1 h) = h [f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)], \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

რადგანაც $f''_{xy}(x, y)$ უწყვეტია G არეში, $[y_0, y_0 + k]$ სეგმენტზე კვლავ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა უკანასკნელ გამოსახულებაზე, გვექნება

$$\Delta = hk f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k), \quad 0 < \theta_2 < 1. \quad (4)$$

თუ ავიღებთ $\psi(y)$ ფუნქციას,

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y),$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned} \Delta &= \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k \psi'(y_0 + \theta_3 k) = \\ &= k [f'_y(x_0 + h, y_0 + \theta_3 k) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_3 k)] = \\ &= kh f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k), \quad 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1. \end{aligned} \quad (5)$$

(4) და (5) ტოლობათა შედარება მოგვცემს

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k). \quad (6)$$

რადგანაც, თეორემის პირობით, $f''_{xy}(x, y)$ და $f''_{yx}(x, y)$ უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილში, (6)-დან მივიღებთ

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k),$$

ანუ

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \quad (7)$$

ამით თეორემა დამტკიცდა.

თეორემით მყარდება რიგით განსხვავებულ ნებისმიერი რიგის შერეული კერძო წარმოებულების ტოლობა, თუ ეს კერძო წარმოებულები უწყვეტია. მაგალითად, $f'''_{xyx}(x, y)$, $f'''_{yxx}(x, y)$ და $f'''_{xxy}(x, y)$ წარმოებულები ტოლია, თუ ეს კერძო წარმოებულები (x, y) წერტილში უწყვეტია.

2. მაღალი რიგის დიფერენციალები. ვთქვათ, G არეში მოცემულია $z = f(x, y)$ ფუნქცია. თუ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია (x, y) წერტილში, $(x, y) \in G$, მაშინ

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

სადაც dx და dy განიხილება როგორც მუდმივი პარამეტრი. თუ $d f(x, y)$

დიფერენციალი არის დიფერენცირებადი ფუნქცია, ე. ი. თუ $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$

დიფერენცირებადი ფუნქციებია (x, y) წერტილში, მაშინ ვიტყვით, $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია მეორე რიგის ჩათვლით და dz დიფერენციალის დიფერენციალს მეორე რიგის სრული დიფერენციალი ეწოდება. $z = f(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი $d^2 z$ სიმბოლური აღინიშნება:

$$d^2 z = d(dz).$$

განსაზღვრის თანახმად

$$\begin{aligned} d^2 z &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = d\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + d\frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dy \Big] dx + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy\right] dy = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned} \quad (8)$$

რადგანაც $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია (იგულისხმება, სრულდება დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობები), 1-ლი თეორემის ძალით

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

მაშინ (8) გამოსახულება ასე ჩაიწერება

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \quad (9)$$

სრულიად ასევე განისაზღვრება მესამე და საერთოდ, მაღალი რიგის სრული დიფერენციალი:

$$d^n z = d(d^{n-1} z).$$

$d^2 z$ სრული დიფერენციალისათვის შეიძლება შევადგინოთ სიმბოლური გამოსახულება. ამისათვის dz ასე ჩავეწეროთ

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) f(x, y).$$

$f(x, y)$ მრავალდება სიმბოლურ $\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ გამოსახულებაზე, ისე, რომ $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, dx, dy$ ცალკეულ მრავალებად ითვლება. ამის გამო, $d^2 z$ ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} f(x, y),$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx \right)^2 f(x, y)$ იძლევა $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2$ -ს. სრულიად ასევე შეგვიძლია ჩავწეროთ $d^2 z$ სიმბოლურად:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} f(x, y). \quad (10)$$

მაგალითი 1. მოვნახოთ

$$z = \arctg \frac{x}{y}$$

ფუნქციის მეორე რიგის სრული დიფერენციალი.
გვექნება:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 1 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

მეორე რიგის დიფერენციალის ფორმულაში ჩასმა მოგვცემს

$$d^2 z = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (-2xy dx^2 + 2(x^2 - y^2) dx dy + 2xy dy^2).$$

შესაბუთებულ შემდეგი სავარჯიშო.

სავარჯიშო 43.

1. მონახეთ პირველი და მეორე რიგის სრული დიფერენციალები შემდეგი ფუნქციებისათვის:

1) $z = x^2 - y^2 + xy + x - y,$

2) $z = x^y,$

3) $z = \ln \frac{x}{y},$

4) $u = \arctg \frac{x}{yz},$

5) $u = xy + yz + xz,$

6) $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$

2. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, მაშინ ჰეშმარიტია ტოლობა $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$

3. მონახეთ $z = x^y$ ფუნქციის ყველა მესამე რიგის წარმოებული.

4. მონახეთ $z = x - xy^2 + x^2y - x^3 + y^3$ ფუნქციის ყველა მეოთხე რიგის წარმოებული.

5. მონახეთ $u = \ln(xyz)$ ფუნქციის ყველა მეორე რიგის წარმოებული.

6. მონახეთ $z = x \ln y$ ფუნქციის მესამე რიგის სრული დიფერენციალი.

7. მონახეთ $z = x \sin y$ ფუნქციის მეოთხე რიგის სრული დიფერენციალი.

§ 6. ბილიორის ფორმულა მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე G არეში. ამ არეში ავიღოთ (a, b) და $(a+h, b+k)$ წერტილები. მოვნახოთ $f(x, y)$ მნიშვნელობა $(a+h, b+k)$ წერტილში $f(x, y)$ ფუნქციისა და მისი წარმოებულების საშუალებით. ეს ამოცანა ერთი ცვლადის ფუნქციის ანალოგიურად ამოიხსნება ტეილორის ფორმულით. დავუშვათ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $(n+1)$ რიგამდე $(n+1)$ რიგის ჩათვლით $[a, a+h; b, b+k]$ ორგანოზომილებიან სეგმენტზე.

შემოვიღოთ ახალი დამოუკიდებელი ცვლადი t . დავუშვათ

$$x = a + ht, \quad y = b + kt.$$

მაშინ $f(x, y)$ ფუნქცია იქნება t ცვლადის ფუნქცია:

$$f(x, y) = f(a + ht, b + kt) = F(t), \quad (1)$$

სადაც $0 \leq t \leq 1$.

ცხადია, $F(t)$ ფუნქციის აქვს წარმოებულები $n+1$ რიგის ჩათვლით. ამის გამო $F(t)$ შეგვიძლია გავშალოთ t -ს ხარისხების მიხედვით:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} t + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} t^n + R_n, \quad (2)$$

სადაც ლაგრანჟის სახით ნაშთი იქნება

$$R_n = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta t), \quad 0 < \theta < 1. \quad (3)$$

(1) გამოსახულებიდან გვექნება

$$F(0) = f(a, b).$$

$F^{(n)}(t)$ წარმოებულისათვის კი გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k, \\ \frac{d^2 F(t)}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \right) \frac{dy}{dt} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{(2)} f(x, y). \end{aligned}$$

და საზოგადოდ,

$$\frac{d^p F(t)}{dt^p} = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{(p)} f(x, y). \quad (4)$$

რადგანაც $t=0$ -სათვის $x=a$, $y=b$, (4)-დან მივიღებთ

$$\frac{d^p F(0)}{dt^p} = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{(p)} f(a, b), \quad p = \overline{1, n}, \quad (5)$$

ხოლო

$$\left. \frac{d^{n+1} F(t)}{dt^{n+1}} \right|_{\theta t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{(n+1)} f(a + \theta h, b + \theta k). \quad (6)$$

(5) ფორმულის საფუძველზე (2) ფორმულა მოგვცემს

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{(1)} f(a, b) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{(2)} f(a, b) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{(n)} f(a, b) + R_n, \end{aligned} \quad (7)$$

სადაც R_n (6) გამოსახულების საფუძველზე მოგვცემს

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{(n+1)} f(a + \theta h, b + \theta k), \quad 0 < \theta < 1. \quad (8)$$

ამ ფორმულაში $(n+1)$ რიგის წარმოებულის უწყვეტობა არ იგულისხმება.

(7) ფორმულას ეწოდება ტეილორის ფორმულა, ორი ცვლადის ფუნქციისათვის. (8) გამოსახულება ტეილორის ფორმულის ნაშთია ლაგრანჟის სახით.

სრული დიფერენციალის ცნების განხილვის დროს შევნიშნეთ, რომ საკმარისად მცირე Δx და Δy -სათვის $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ შევიძლია df -ის ტოლად მივიღოთ: $\Delta f \approx df$ და აქედან კი

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + df(x, y), \quad (9)$$

ტეილორის ფორმულა $a=x$, $b=y$, $h=\Delta x$, $k=\Delta y$ -სათვის ჩავწეროთ:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x, y) + df(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y), \end{aligned} \quad (10)$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= df(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y). \end{aligned} \quad (11)$$

როგორც ვხედავთ, $\Delta f \approx df$ მიიღება (11)-დან, როცა ავიღებთ მარტო პირველ წევრს. თუ უფრო მაღალი სიზუსტით გვინდა მივიღოთ $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ -ის მნიშვნელობა, (10) ფორმულაში უფრო მეტი წევრები უნდა შევიანარჩუნოთ.

მაგალითი 1. გავშალოთ $f(x, y) = e^{x+y}$ x -ის და y -ის ხარისხებად.

$$f(x, y) = e^{x+y}, \quad f(0, 0) = 1,$$

$$f'_x(x, y) = e^{x+y}, \quad f'_x(0, 0) = 1,$$

$$f'_y(x, y) = e^{x+y}, \quad f'_y(0, 0) = 1.$$

და ასე ყველა რიგის კერძო წარმოებულები $(0, 0)$ -ში e^{x+y} -ფუნქციისა 1-ის ტოლია, ამიტომ

$$e^{x+y} = 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(x+y)}.$$

შევასრულოთ შემდეგი სავარჯიშო.

1. გავშალოთ $(x+1)$ -ისა და $(y-1)$ -ის ხარისხებად e^{x+y^2} ფუნქცია. შევჩერდეთ მესამე რიგის წარმოებულზე.

2. გავშალოთ $\sin(x+y)$ ფუნქცია $(0,0)$ წერტილის მახლობლობაში ტეილორის ფორმულით.

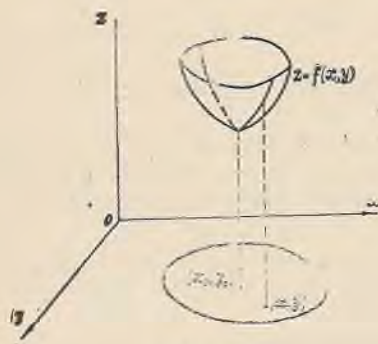
3. გავშალოთ $\ln(1+x+y)$ ფუნქცია $(0,0)$ წერტილის მახლობლობაში ტეილორის ფორმულით.

4. გავშალოთ $\arctg(xy)$ ფუნქცია $(0,0)$ წერტილის მახლობლობაში ტეილორის ფორმულით და შევჩერდეთ მესამე რიგის წარმოებულზე.

5. გავშალოთ $\cos(x^2+y)$ ფუნქცია $(0,0)$ წერტილის მახლობლობაში ტეილორის ფორმულით და შევჩერდეთ მესამე რიგის წარმოებულზე.

§ 7. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

1. ექსტრემუმის აუცილებელი პირობები. ვთქვათ, ორი ცვლადის ფუნქცია $f(x, y)$ განსაზღვრულია G არეში. ავიღოთ ამ არეში (x_0, y_0) წერტილი. ვიტყვი, რომ $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო (არაცარიელი სიბრავლე) $G \in G$, რომ ამ მიდამოს ნებისმიერი წერტილისათვის (ნახ. 10)



ნახ. 10

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0). \quad (1)$$

თუ (1)-ში ტოლობას მხოლოდ (x_0, y_0) -თვის აქვს ადგილი, ე. ი.

$$f(x, y) > f(x_0, y_0), \quad (2)$$

G არის ყველა (x, y) წერტილისათვის, გარდა (x_0, y_0) წერტილისა, მაშინ ვიტყვი, რომ $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში აქვს ლოკალური მკაცრი მინიმუმი. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში აქვს ლოკალური არამკაცრი მინიმუმი.

თუ G არის ნებისმიერი წერტილისთვის

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad (3)$$

მაშინ ვიტყვი, რომ (x_0, y_0) წერტილში $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი (ნახ. 11).

(2) უტოლობის ანალოგიურად $f(x, y)$ ფუნქციისათვის განისაზღვრება ლოკალური მკაცრი მაქსიმუმი და ლოკალური არამკაცრი მაქსიმუმი (x_0, y_0) წერტილში. ლოკალური მკაცრი მაქსიმუმი გვექნება, თუ

$$f(x, y) < f(x_0, y_0). \quad (4)$$

ყოველი (x, y) -სათვის, გარდა (x_0, y_0) წერტილისა.

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი და ამ წერტილში $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს სასრული კერძო წარმოებულები $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$.

რადგანაც $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში ლოკალური მაქსიმუმი აქვს, მაშინ იარსებებს ისეთი მიდამო

$$G =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[,$$

რომ ამ მიდამოს ყოველი (x, y) წერტილისათვის ადგილი ექნება უტოლობას

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

ცხადია, მართებული იქნება უტოლობაც

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0), \quad (5)$$

რაცა

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

რადგანაც $f(x, y_0)$ ერთი x ცვლადის ფუნქციაა და $f(x, y_0)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, გვექნება

$$f'_x(x_0, y_0) = 0.$$

ასევე ვაჩვენებთ

$$f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

ამგვარად დავამტკიცეთ თეორემა.

თეორემა 1. თუ $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს ლოკალური ექსტრემუმი (x_0, y_0) წერტილში და ამ წერტილში არსებობს $f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები

$$f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0),$$

მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (6)$$

მიღებული (6) პირობები ფუნქციის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობებია. ე. ი. (6) პირობების შესრულება არ კმარა, რომ (x_0, y_0) წერტილში

ტილში ფუნქციას ექსტრემუმი ჰქონდეს. მაგრამ ფუნქციის ექსტრემუმი უნდა ვეძებოთ იმ წერტილებში, რომელთათვისაც მართებულია ტოლობები

$$f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0. \quad (7)$$

იმ (x, y) წერტილებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (7) განტოლებათა სისტემას. $f(x, y)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები ეწოდება.

სწორედ $f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ სტაციონარულ წერტილებს შორის. მაგრამ $f(x, y)$ ფუნქციას შეიძლება ექსტრემუმი ჰქონდეს ისეთ წერტილებში, სადაც $f(x, y)$ ფუნქციას სასარგებლო წარმოებული არ აქვს ან უსასრულო წარმოებულიც არ აქვს. ყველა ასეთ წერტილს $f(x, y)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი ეწოდება. ამგვარად, ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ მის კრიტიკულ წერტილებს შორის.

თუ მოვიგონებთ $z = f(x, y)$ ზედაპირის მხევი სიბრტყის განსაზღვრას, გვეჩვენება, რომ ზედაპირის სტაციონარულ (x, y, z) წერტილში მხევი სიბრტყე Oxy სიბრტყის პარალელურია.

2. ფუნქციის ექსტრემუმის საკმარისი პირობები. ვთქვათ, (x_0, y_0) წერტილში

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (8)$$

ამ შემთხვევაში არ შეგვიძლია ვთქვათ, ნამდვილად აქვს თუ არა ფუნქციას ექსტრემუმი და თუ აქვს, კერძოდ რომელი, მაქსიმუმი თუ მინიმუმი. ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქციის სტაციონარულ (x_0, y_0) წერტილში აქვს უწყვეტი პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, მაშინ

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \\ &+ kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = h[A\theta h + B\theta k + \alpha_1\theta h + \beta_1\theta k] + \\ &+ k[B\theta h + C\theta k + \alpha_2\theta h + \beta_2\theta k] = \theta[Ah^2 + 2Bhk + Ck^2] + \theta\varepsilon, \end{aligned} \quad (9)$$

სადაც h და k სათანადოდ x -სა და y -ის ნაზრდებია (x_0, y_0) წერტილში,

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}, \quad (10)$$

$$0 < \theta < 1,$$

$$\varepsilon = \alpha_1 h^2 + h k (\beta_1 + \alpha_2) + \beta_2 k^2,$$

ε უსასრულოდ მცირეა, რადგანაც $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ უსასრულოდ მცირეებია და h და k -სთან ერთად.

$$\text{რადგანაც } f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

გამოსახულების ნიშანი განისაზღვრება კვადრატული სამწევრის

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \quad (11)$$

ნიშნით.

თუ $A \neq 0$, მაშინ (11) გამოსახულება ასე გადავწეროთ

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{1}{A} [(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2]. \quad (12)$$

ვთქვათ,

$$AC - B^2 > 0, \quad (13)$$

მაშინ (11) გამოსახულება დადებითია, თუ $A > 0$. ე. ი.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0.$$

ამგვარად, თუ

$$AC - B^2 > 0 \text{ და } A > 0, \quad (14)$$

მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი.

თუ $A < 0$ და სრულდება (13) პირობა, მაშინ

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < 0.$$

ამგვარად, თუ

$$AC - B^2 > 0 \text{ და } A < 0, \quad (15)$$

მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი.

(11) გამოსახულება ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ, თუ $C \neq 0$,

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{1}{C} [(Bh + Ck)^2 + (AC - B^2)h^2]. \quad (16)$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა ნაწილიდან ისევ (14) და (15) დასკვნებს გავაკეთებთ, ოღონდ, A -ს მაგივრად შემოვა C .

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა

$$AC - B^2 < 0. \quad (17)$$

ვთქვათ, $A \neq 0$, მაშინ მივიღოთ $k=0, h \neq 0$. კვადრატული სამწევრი (11) მოგვცემს

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = Ah^2.$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში კვადრატულ სამწევრს აქვს A -ს ნიშანი.

ვთქვათ, $k \neq 0, Ah + Bk = 0$, მაშინ

$$h = -\frac{B}{A} k$$

და იგივე კვადრატული სამწევრი (11) მოგვცემს

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{AC - B^2}{A} k^2,$$

რომელსაც აქვს A -ს საწინააღმდეგო ნიშანი ($AC - B^2 < 0$).

ამგვარად, თუ $AC - B^2 < 0$ და $A \neq 0$, კვადრატულ სამწევრს (11) არ აქვს მუდმივი ნიშანი h და k -ს ცვლილების დროს.

ვთქვათ, $A = 0$, მაშინ $AC - B^2 < 0$ -დან $-B^2 < 0$ და, მაშასადამე, $B \neq 0$.

აქ განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) $C = 0$ და 2) $C \neq 0$.

თუ $C = 0$, კვადრატული სამწევრი (11) მოგვცემს

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 2Bhk.$$

თუ $h = k$, კვადრატულ სამწევრს B -ს ნიშანი ექნება და, თუ $h = -k$, კვადრატულ სამწევრს B -ს საწინააღმდეგო ნიშანი ექნება.

ამგვარად, ამ შემთხვევაში კვადრატული სამწევრი (11) h და k -ს ცვლილების დროს მუდმივ ნიშანს არ ინარჩუნებს.

თუ $C \neq 0$, კვადრატული სამწევრი მოგვცემს

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 2Bhk + Ck^2. \quad (18)$$

თუ $h = 0$, $k \neq 0$, მივიღებთ

$$2Bhk + Ck^2 = Ck^2$$

და, მაშასადამე, კვადრატულ სამწევრს C -ს ნიშანი ექნება.

თუ $k \neq 0$, $h = -\frac{C}{B}k$, მაშინ

$$2Bhk + Ck^2 = -Ck^2.$$

ამ შემთხვევაში კი კვადრატულ სამწევრს C -ს საწინააღმდეგო ნიშანი ექნება.

მაშასადამე, თუ $AC - B^2 < 0$, მაშინ h და k -ს ცვლილების დროს კვადრატული სამწევრი ნიშანს არ ინარჩუნებს.

ვთქვათ

$$AC - B^2 = 0,$$

მაშინ გვექნება საეჭვო მდგომარეობა, ე. ი. უშუალოდ ვერ ვიტყვით, $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს თუ არა (x_0, y_0) წერტილში ექსტრემუმი. საკითხის ბოლომდე გამოკვლევა მოითხოვს რთული გამოთვლების ჩატარებას. ამიტომ ამ საეჭვო შემთხვევას განხილვის გარეშე დავტოვებთ.

ამგვარად დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. თუ $f(x, y)$ ფუნქციის სტაციონარულ (x_0, y_0) წერტილში კერძო წარმოებულები $f'_x(x, y)$ და $f'_y(x, y)$ დიფერენცირებადია და ამას გარდა ადგილი აქვს უტოლობას

$$AC - B^2 > 0,$$

სადაც

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

მაშინ (x_0, y_0) წერტილში $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს მინიმუმი, როცა $A > 0$ ($C > 0$), ხოლო მაქსიმუმი, როცა $A < 0$ ($C < 0$).

თუ

$$AC - B^2 < 0,$$

მაშინ (x_0, y_0) წერტილში $f(x, y)$ ფუნქციას ექსტრემუმი არ აქვს.

თუ

$$AC - B^2 = 0,$$

გვაქვს საეჭვო მდგომარეობა. მაგალითი. მოვანახოთ

$$f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$$

ფუნქციის ექსტრემუმი.

ამოხსნა. კერძო წარმოებულები

$$f'_x = y - 2xy - y^2,$$

$$f'_y = x - x^2 - 2xy$$

გავუტოლოთ ნულს.

$$\left. \begin{aligned} y - 2xy - y^2 &= 0, \\ x - x^2 - 2xy &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y(1 - 2x - y) &= 0, \\ x(1 - x - 2y) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_1 = 0, y_1 = 0; x_2 = 0, y_2 = 1; x_3 = 1, y_3 = 0; x_4 = \frac{1}{3}, y_4 = \frac{1}{3} \right).$$

გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებულები

$$f''_{xx} = -2y, f''_{xy} = 1 - 2x - 2y, f''_{yy} = -2x.$$

შევადგინოთ $D(x, y) = AC - B^2$,

$$D(x, y) = 4xy - (1 - 2x - 2y)^2.$$

გამოთვალთ $D(x, y)$:

$$D(0, 0) = -1 < 0, D(0, 1) < 0, D(1, 0) < 0, D\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) > 0.$$

მაშასადამე, გამოსაკვლევი $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ წერტილში $A = f''_{xx}(x, y)$ -ის ნიშანი.

$$f''_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} < 0.$$

მაშასადამე,

$$f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$$

ფუნქციას $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ წერტილში აქვს მაქსიმუმი.

შევასრულოთ შემდეგი საეარჯიშო.

ს ა ე ა რ ჯ ი შ ო 45.

1. გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე შემდეგი ფუნქციები:

$$1) z = 3x + 6y - xy + y^2; \quad 2) z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2;$$

$$3) z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1; \quad 4) z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy;$$

$$5) z = 3x^2y - x^2y^2 + x; \quad 6) z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2);$$

$$7) z = x^3y^2 - 8x^4y^2 - x^3y^3; \quad 8) z = \sqrt{x+y};$$

$$9) z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6; \quad 10) z = \frac{1}{\sqrt{x+y}}.$$

2. წრეწირში ჩახაზეთ სამკუთხედი, რომლის გვერდების კვადრატების ჯამი უდისესია.

3. s გვერდითი პირეულის მქონე კონუსებიდან მონახეთ უდიდესი მოცულობის კონუსი.

4. r -რადიუსიანი წრიდან გამოგვრათ ჭერისებური ფიგურა, რომლითაც შეიძლება შევადგინოთ ყუთი სახურავის გარეშე. როგორი ზომის უნდა იყოს ფიგურა, რომ ყუთის მოცულობა იყოს უდიდესი.

5. სიბრტყეზე, რომლის განტოლებაა $5x - 6y = 0$, მოვნახოთ ისეთი $M(x, y, z)$ წერტილი, რომ $A(1, 1, 1)$ და $B(2, 3, 5)$ წერტილებიდან M წერტილამდე მანძილების კვადრატების ჯამი იყოს უდიდესი.

6. ფანჯარას აქვს მართკუთხედის ფორმა, რომელიც ბოლოვდება ნახევარწრივით. განვსაზღვროთ ფანჯრის განზომილებანი ისე, რომ მოცემული პერიმეტრის ფანჯარა ატარებდეს მეტ სინათლეს.

7. მართკუთხა პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი ტოლია s -ის. იპოვეთ უდიდესი მოცულობის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედი.

8. იმ ელიფსთა შორის, რომელთა ღერძების ჯამი მუდმივია და უდრის m -ს, მონახეთ უდიდესი ფართობის მქონე ელიფსი.

9. მოცემული s ფართობის მქონე სამკუთხედებიდან მონახეთ უმცირესი პერიმეტრის მქონე სამკუთხედი.

10. მონახეთ უმოკლესი მანძილი $M(8, 9)$ წერტილიდან იმ ელიფსამდე, რომლის განტოლებაა $4x^2 + 9y^2 = 36$.

11. მონახეთ ის კვადრეტი, რომელიც შემოხაზულია მოცემულ კვადრატზე და აქვს უდიდესი ფართობი.

§ 8. პირობითი ექსტრემუმი ლაგრანჟის მეთოდით

1. პირობითი ექსტრემუმი. ვთქვათ,

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

ფუნქციის n ცვლადი $x_1, x_2, \dots, x_n$ დაკავშირებულია ერთმანეთთან შემდეგი დამოკიდებულებებით

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

სადაც $m < n$.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის ექსტრემუმს, როცა $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადები ურთიერთდაკავშირებულია (2) დამოკიდებულებებით, ეწოდება პირობითი ექსტრემუმი.

(2) განტოლებათა სისტემა განსაზღვრავს m ცვლადს, მაგალითად, $x_1, x_2, \dots, x_m$ -ს როგორც $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ ცვლადების არაცხად ფუნქციებს, თუ დავუშვებთ, რომ იმ წერტილის მიდამოში, სადაც განვიხილავთ (1) ფუნქციის ექსტრემუმს, სრულდება სათანადოდ არაცხადი ფუნქციების არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა (იხ. მე-2 პარაგრაფის მე-6 პუნქტი, მე-6 თეორემა). ვიგულისხმოთ, რომ $x_1, x_2, \dots, x_m$ მნიშვნელობანი განვსაზღვრეთ (2) განტოლებათა სისტემიდან და ჩავსვით $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციაში, მაშინ f ფუნქცია იქნება $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ ცვლადების რთული ფუნქცია:

$$z = F(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n).$$

როგორც ვიცი, $z = F(x_{m+1}, \dots, x_n)$ ფუნქციის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობაა

$$\frac{\partial z}{\partial x_{m+1}} = 0, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}} = 0, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

ანუ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}} + \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+2}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+2}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+2}} + \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

მაშასადამე, $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილებში აუცილებელია შემდეგი განტოლებათა სისტემის შესრულება:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+i}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial f}{\partial x_{m+i}} = 0 \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - m.$$

(3) განტოლებათა სისტემიდან უნდა განვსაზღვროთ $x_{m+1}, \dots, x_n$. ამ მნიშვნელობებით (2) განტოლებათა სისტემიდან უნდა განვსაზღვროთ $x_1, x_2, \dots, x_m$ მნიშვნელობანი და ამით მივიღებთ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ კრიტიკულ წერტილებს. ამ კრიტიკულ წერტილებს განვსაზღვრავთ ე. წ. ლაგრანჟის მამრაველთა მეთოდით.

2. ლაგრანჟის მეთოდი. გავაწარმოთ (2) განტოლებათა სისტემა $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ ცვლადით. მივიღებთ

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+i}} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+i}} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+i}} + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{m+i}} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+i}} + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+i}} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n - m.$$

მიღებული (4) განტოლებანი მიმდევრობით გაგამრავლოთ ჯერჯერობით განუსაზღვრელ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ მამრავლებზე, შევკრიბოთ და ეს ჯამი მივუმატოთ (3) ტოლობას, გვექნება

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+i}} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+i}} +$$

$$\dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \right) \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+i}} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_{m+i}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+i}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{m+i}} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+i}} = 0. \quad (5)$$

ავარჩიოთ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ მამრავლები ისე, რომ მიღებული განტოლების ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება ნულის ტოლი გახდეს:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = 0, \quad (6)$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

(6) განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნი, რადგანაც ამ სისტემის დეტერმინანტი იაკობის დეტერმინანტია. ეს დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება (2) არაცხადი ფუნქციების არსებობისა და ერთადერთობის პირობით. (6) სისტემის საფუძველზე (5)-დან მივიღებთ

$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+i}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+i}} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+i}} = 0, \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - m.$$

ამგვარად, (1) ფუნქციის (2) პირობითი ექსტრემუმისათვის აუცილებელია (6) და (7) განტოლებათა სისტემის შესრულება.

(6) და (7) განტოლებათა სისტემა (2) განტოლებათა სისტემასთან ერთად შეიცავს $n + m$ განტოლებას $n + m$ ცვლადით: $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. თუ ამ განუსაზღვრელ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ მამრავლებს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ n განტოლებას, საიდანაც განვსაზღვრავთ კრიტიკული წერტილები $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. სწორედ, ამ კრიტიკულ წერტილებში შეიძლება ჰქონდეს $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის ექსტრემუმი (2) პირობით.

ადგილი შესაძენვეია, რომ (6) და (7) სისტემა მიღებულია

$$u = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m \quad (8)$$

ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულების ნულთან გატოლებით. (8)-ს ეწოდება ლაგრანჟის ფუნქცია.

მაგალითი. მოვნახოთ $f(x, y) = x^2 + y^2$ ფუნქციის ექსტრემუმი პირობით $x + y - 1 = 0$.

შევადგინოთ ფუნქცია

$$u = f + \lambda \varphi = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1),$$

საიდანაც გვექნება:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \lambda,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \lambda.$$

უნდა განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

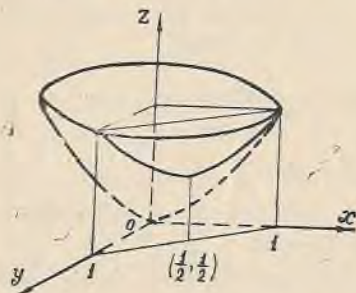
$$\left. \begin{aligned} 2x + \lambda &= 0, \\ 2y + \lambda &= 0, \\ x + y - 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

ამ სისტემიდან მივიღებთ

$$\lambda = -1, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

მაშასადამე, კრიტიკული წერტილია $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

გამოვარკვეით კრიტიკულ წერტილში აქვს თუ არა ექსტრემუმი და თუ აქვს, მინიმუმი თუ მაქსიმუმი.



ნახ. 12

წერტილში აქვს მინიმუმი. ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობაა (ნახ. 12)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

გეომეტრიულად $z = x^2 + y^2$ ფუნქციის ექსტრემუმი $x + y - 1 = 0$ პირობით ნიშნავს, ვიპოვოთ ექსტრემუმი წირზე

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

ეს წირი მდებარეობს $z = x^2 + y^2$ პარაბოლოიდისა და $x + y - 1 = 0$ სიბრტყის თანაკვეთაზე.

საგარჯოშო 46.

მონახეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმები:

$$1. \quad z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{პირობით} \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

$$2. \quad z = e^{xy} \quad \text{პირობით} \quad x + y = 1.$$

$$3. \quad z = x^2 - y^2 \quad \text{პირობით} \quad x + y = 1.$$

$$4. \quad z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \quad \text{პირობით} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

$$5. \quad z = x^2 + y^2 - xy + x - y \quad \text{პირობით} \quad x + y = 1.$$

§ 9. უმცირეს კვალაბათა მეთოდი

1. ზოგადი შენიშვნები. პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება, რომ ცვლადთა შორის დამოკიდებულება ექსპერიმენტით, დაკვირვებით ან გაზომვის შედეგადაა მიღებული. ასეთ შემთხვევაში ცვლადებს შორის დამოკიდებულება ცხრილების საშუალებით გვექნება მოცემული (ფუნქციის მოცემის ცხრილური ხერხი). ცხრილით მოცემული ფუნქციისათვის შეიძლება დაგვჭირდეს ფუნქციის მნიშვნელობა ცხრილით მოცემულ მნიშვნელობათა შორის (ინტერპოლირების ამოცანა) ან ფუნქციის მნიშვნელობა ცხრილით მოცემულ მნიშვნელობათა გარეთ (ექსტრაპოლირების ამოცანა). ამ ამოცანების ზუსტად ამოხსნა შეუძლებელია, რადგანაც აღებულ წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობა არაა ცნობილი. ამ შემთხვევაში ვგულისხმობთ, რომ გვაქვს რაღაც უწყვეტი ფუნქცია, რომლის სახე უცნობია, მაგრამ ცნობილია მისი მნიშვნელობანი არგუმენტის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის. წინასწარ უნდა დავადგინოთ ფუნქციის სახე — ფორმულა, რომელშიაც იქნება მუდმივები (კოეფიციენტები). ეს მუდმივები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობისათვის საძიებელმა ფუნქციამ ცხრილით მოცემული მნიშვნელობა მიიღოს. ექსპერიმენტული მონაცემებით არჩეულ ფორმულას ემპირიული ფორმულა ეწოდება, ცხადია, ფორმულა მით უკეთესი იქნება, რაც უფრო

მეტი მონაცემებია ფორმულაში გამოყენებული. ხსენებულ საკითხებს დაწერილებითი გამოთვლით მათემატიკაში განვიხილავთ.

ქვემოთ შევხებით აღებულ ემპირიულ ფორმულაში მუდმივების განსაზღვრის ზოგიერთ მეთოდს. ემპირიული ფორმულა უმეტესად მრავალწევრი იქნება. ამ მრავალწევრში კოეფიციენტები ისე უნდა განისაზღვროს, რომ მრავალწევრი „საუკეთესოდ“ უახლოვდებოდეს ცხრილით მოცემულ მნიშვნელობებს. ცნების „საუკეთესო“ მიახლოების აზრი შემდეგში იქნება გასაგები, რისთვისაც დაგვირდება ე. წ. მოცემული მნიშვნელობიდან გადახრის ცნების შემოტანა. მოკლედ განვიხილოთ ეს საკითხი.

ვთქვათ, ექსპერიმენტით მიღებული ფუნქციის მნიშვნელობანი $y_i, i=1, n$, უახლოვდება პირდაპირი პროპორციულობის ფუნქციას. ცხადია, ამ შემთხვევაში ემპირიული ფორმულა იქნება $y=kx$. ამ შემთხვევაში ამოცანა მიყვანილია k სიდიდის განსაზღვრაზე.

აღებულ $y=kx$ ფუნქციის i -ური ექსპერიმენტით მიღებულ მნიშვნელობიდან გადახრის ზომად ავიღოთ $(y_i - kx_i)^2$.

რატომ ავიღეთ გადახრის ზომად $(y_i - kx_i)^2$ და არა $y_i - kx_i$?

თუ გადახრის ზომად ავიღებდით $y_i - kx_i$, მაშინ, თუ განვსაზღვრავდით გადახრათა ჯამს რამდენიმე ექსპერიმენტში, შეგველო მიგველო შეტად მცირე სიდიდე შესაკრებთა სხვადასხვა ნიშნის გამო. ეს მდგომარეობა ვერ დაგვარწმუნებდა, რომ აღებულ $y=kx$ მნიშვნელობა იძლევა $y_i = kx_i$ -დან საუკეთესო მნიშვნელობას. ასეთი მდგომარეობა არ გვექნება, თუ გადახრის სიდიდე $(y_i - kx_i)^2$ ავიღებთ.

წრფივი $y=kx$ ფუნქციის ექსპერიმენტით მოცემული $y_i = kx_i$ მნიშვნელობებიდან გადახრის ზომად მივიღოთ ჯამი

$$S(k) = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i)^2 \quad (1)$$

და k განვსაზღვროთ ისე, რომ ეს ჯამი იყოს უმცირესი. მუდმივის განსაზღვრის იმ მეთოდს, რომლითაც $S(k)$ მნიშვნელობას მიაწევს უმცირეს მნიშვნელობას, ეწოდება უმცირეს კვადრატთა მეთოდი.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ k , ფუნქცია $S(k)$ გავაწარმოთ k ცვლადით და ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i) (-x_i) = 0,$$

საიდანაც

$$2k \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0,$$

რაც მოგვცემს

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \bar{k},$$

ფუნქცია $y=kx$ იძლევა (1) განსაზღვრით საუკეთესო მიახლოებას მოცემული მნიშვნელობებისათვის $y_i, i=1, n$, ვიდრე სხვა k მნიშვნელობა, $y_i = kx_i$.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდი მეტად შრომატევადია, როდესაც ემპირიული ფორმულა რთულია. ამის გამო პრაქტიკულად უფრო ეფექტურია ზოგჯერ გრაფიკული მეთოდი, რომელსაც შემდეგ პუნქტებში გავეცნობთ.

2. გრაფიკული მეთოდი. წინასწარ ცხრილით მოცემული მნიშვნელობანი წარმოვადგინოთ კოორდინატთა სისტემაზე. ვთქვათ, მოცემული მნიშვნელობანი იძლევა წერტილების ისეთ განლაგებას, როგორც მე-13 ნახაზზეა წარმოდგენილი. ამ წერტილებით ისეთი წრფე ავაგოთ, რომელიც, რაც შეიძლება ახლოს გაივლოს მოცემულ წერტილებთან. წრფის აგება უბრალოდ თვალზომით უნდა შევასრულოთ.

ამ შემთხვევაში საძიებელ ემპირიულ ფორმულას ექნება სახე

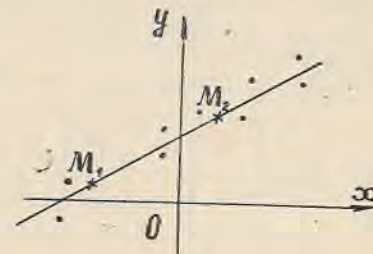
$$y = kx + b,$$

სადაც k და b კოეფიციენტები უნდა განისაზღვროს.

თუ მოცემული მნიშვნელობანი იძლევა წერტილებს, რომლებიც მე-14 ნახაზზეა გამოსახული, მაშინ ემპირიული ფორმულა შემდეგი სახით შეგვიძლია დავწეროთ

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (2)$$

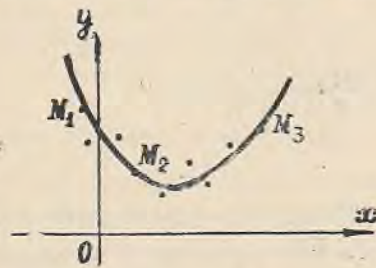
სადაც კოეფიციენტები უნდა განისაზღვროს.



ნახ. 13

ცხადია, წრფის კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის საკმარისია ორი წერტილი. ამ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება მოგვცემს საძიებელ ფუნქციას.

(2) პარაბოლის განტოლების კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის საკმარისია ისეთი სამი წერტილი გვქონდეს, რომლებიც პარაბოლზე



ნახ. 14

მდებარეობენ, ან ახლოსაა საძიებელ პარაბოლსთან.

ვთქვათ, პარაბოლზე მდებარე წერტილებია $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, პარაბოლის (2) განტოლებაში ამ წერტილების კოორდინატების ჩასმით მივიღებთ

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1,$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2,$$

$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3.$$

ამ სამი განტოლებიდან განვსაზღვრავთ a , b , c კოეფიციენტებს და მივიღებთ

$$y = ax^2 + bx + c$$

ემპირიულ ფორმულას.

როცა ექსპერიმენტით მიღებული წერტილები უფრო რთულადაა ურთიერთგანლაგებული, მაშინ ფორმულის სახის შერჩევა ძნელია. ზოგჯერ ხერხდება გარდაქმნის შედეგად საძიებელი ფორმულის წრფივად წარმოდგენა.

მაგალითად, ექსპერიმენტით მიღებული მნიშვნელობანი, რომლებიც

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	1,06	1,33	1,52	1,68	1,81	1,91	2,01	2,11

ცხრილშია მოცემული, შეესაბამება $y = ax^n$ ფორმულას. მისი გალოგარითმებით მივიღებთ

$$\lg y = \lg a + n \lg x. \quad (3)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$y' = \lg y, \quad x' = \lg x,$$

მაშინ (3) მოგვცემს

$$y' = a' + nx', \quad (4)$$

სადაც

$$a' = \lg a.$$

(4) გამოსახულება წრფივი ფუნქციაა. ამიტომ საკმარისია ორი მნიშვნელობის აღება:

$x'_1 = \lg x_1 = 1, \quad y'_1 = \lg 1,06; \quad x'_2 = \lg x_2 = \lg 80, \quad y'_2 = \lg 2,11.$
თუ ამოვხსნით განტოლებათა სისტემას

$$\lg a + n = \lg 1,06,$$

$$\lg a + n \lg 80 = \lg 2,11,$$

მივიღებთ

$$n = 0,3311, \quad a = 0,4945,$$

ამიტომ საძიებელი ფორმულა იქნება

$$y = 0,4945 x^{0,3311}.$$

გრაფიკული ხერხის დადებითი მხარე ისაა, რომ თვალნათლივ ვხედავთ, ესა თუ ის წირი როგორ უახლოვდება ექსპერიმენტით მიღებულ წერტილებს. მაგრამ ქაღალდის შეზღუდული ზომა ყოველთვის არ იძლევა ყველა წერტილის აგების საშუალებას და გამოთვლის სიზუსტე მცირეა.

3. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მაღალი ხარისხის მრავალწევრის კოეფიციენტთა განსაზღვრა.

პირველ პუნქტში უმცირეს კვადრატთა მეთოდით განვსაზღვრეთ წრფივი $y = kx$ ფუნქციის კოეფიციენტი.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ემპირიული ფორმულა მაღალი ხარისხის მრავალწევრით გამოისახება. ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ავიღოთ მეორე ხარისხის მრავალწევრი.

ვთქვათ, არგუმენტის $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობებისათვის მიღებულია ფუნქციის მნიშვნელობანი

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

დავუშვათ, ემპირიული ფორმულის სახეა

$$y = a + bx + cx^2.$$

ავიღოთ გადახრების მნიშვნელობანი

$$v_1 = a + bx_1 + cx_1^2 - y_1,$$

$$v_2 = a + bx_2 + cx_2^2 - y_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_n = a + bx_n + cx_n^2 - y_n.$$

(5)

ამ გადახრების კვადრატების ჯამი იქნება

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2. \quad (6)$$

გამოვიყენოთ მრავალწევლის ფუნქციის ექსტრემუმის პირობა:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0.$$

მივიღებთ

$$2 \sum_{i=1}^n (a + b x_i + c x_i^2 - y_i) = 0,$$

$$2 \sum_{i=1}^n (a + b x_i + c x_i^2 - y_i) x_i = 0,$$

$$2 \sum_{i=1}^n (a + b x_i + c x_i^2 - y_i) x_i^2 = 0,$$

ანუ

$$na + b \sum x_i + c \sum x_i^2 = \sum y_i,$$

$$a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 = \sum y_i x_i, \quad (7)$$

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4 = \sum y_i x_i^2.$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან განისაზღვრება a , b , c .

აღვლი შესამჩნევია, თუ როგორაა შედგენილი a , b და c -ს კოეფი-

ციენტები. მაგალითად, თუ a -ს კოეფიციენტი $\sum_{i=1}^n x_i$, b -ს კოეფიციენტი

იქნება $\sum_{i=1}^n x_i^2$, ხოლო c -ს კოეფიციენტი იქნება $\sum_{i=1}^n x_i^3$ და ა. შ. ისიც

აღვლი შესამჩნევია, რომ (7) განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს.

თუ ემპირიულ ფორმულად

$$y = a + bx$$

წრფივ ფუნქციას ავიღებთ, (7) სისტემაში 2 განტოლება დაგვრჩება, რადგანაც $c=0$, გვექნება

$$na + b \sum x_i = \sum y_i,$$

$$a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum y_i x_i. \quad (8)$$

მაგალითად, ექსპერიმენტით მიღებული მნიშვნელობანია

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y	0,31	0,82	1,29	1,85	2,51	3,02

სულ 6 მნიშვნელობაა. ემპირიულ ფორმულად წრფივი ფუნქცია ავიღოთ. გამოთვლები მოგვცემს

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 0,5 + 1,0 + 1,5 + 2,0 + 2,5 + 3,0 = 10,5;$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 0,5^2 + 1,0^2 + 1,5^2 + 2,0^2 + 2,5^2 + 3,0^2 = 22,75;$$

$$\sum_{i=1}^6 y_i = 0,31 + 0,82 + 1,29 + 1,85 + 2,51 + 3,02 = 9,80;$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 0,5 \cdot 0,31 + 1,0 \cdot 0,82 + 1,5 \cdot 1,29 + 2,0 \cdot 1,85 +$$

$$+ 2,5 \cdot 2,51 + 3,0 \cdot 3,02 = 21,945.$$

(8) განტოლებათა სისტემაში სათანადო ჩასმები მოგვცემს:

$$6a + 10,5b = 9,80;$$

$$10,5a + 22,75b = 21,945.$$

სათანადო გამოთვლებით მივიღებთ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 10,5 \\ 10,5 & 22,75 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 9,80 & 10,5 \\ 21,945 & 22,75 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 9,80 \\ 10,5 & 21,945 \end{vmatrix},$$

საიდანაც

$$a = 0,285 \approx 0,28; \quad b = 1,096 \approx 1,1.$$

ამგვარად, ემპირიული ფორმულა იქნება

$$y = 0,28 + 1,1x.$$

შევასრულოთ სავარჯიშო.

1. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც რაც შეიძლება ახლოს მდებარეობდეს შემდეგ წერტილებთან:

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y	2,30	2,82	2,30	2,95	3,55	4,05

2. მოცემულია ექსპერიმენტით ფუნქციის მნიშვნელობანი:

x	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
y	1,40	1,55	1,95	2,29	2,70	2,56	3,05	3,39

ემპირიული ფორმულის შესარჩევად წინასწარ წერტილები კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ და შემდეგ უმცირესი კვადრატთა მეთოდი გამოიყენეთ ემპირიული ფორმულის მუდმივების განსაზღვრისათვის.

3. მოცემულია ექსპერიმენტით ფუნქციის მნიშვნელობანი:

x	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
y	4,00	2,28	0,98	0,28	0,30	0,23	1,25	2,24	2,12

ემპირიული ფორმულის შესარჩევად კოორდინატთა სისტემაში წინასწარ ააგეთ წერტილები და შემდეგ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი გამოიყენეთ ფორმულის მისაღებად.

4. შეადგინეთ ფორმულა

$$y = a + bx + cx^2$$

შემდეგი მონაცემებით:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	4,240	4,253	4,262	4,252	4,323	4,181	4,123	4,091	4,942	3,972

5. შეადგინეთ ფორმულა

$$y = a \cdot 10^{bx}$$

შემდეგი მონაცემებით:

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	2,123	3,701	6,802	10,752	16,650	20,523

ბ ა მ ო უ ე ნ ე ბ უ ლ ი ლ ი ტ მ რ ა ტ უ რ ა

1. დ. ვაშაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, I ნაწილი, II ნაწილი, თბილისი, 1972, 1975.
2. პ. ზერავია, უმაღლესი მათემატიკა, თბილისი, 1979.
3. პ. კრინსკი, მათემატიკა ეკონომისტებისათვის, თბილისი, 1974.
4. ნ. მუსხელიშვილი, ანალიზური გეომეტრიის კურსი, თბილისი, 1939.
5. ა. რუხაძე, უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტ. I, II, თბილისი, 1961, 1963.
6. ა. ტარსკი, ლოგია და დედუქციურ მეცნიერებათა მეთოდოლოგიის შესავალი, თბილისი, 1971.
7. ა. ფხაძე, გეომეტრიის საფუძვლები, ნაწილი I, თბილისი, 1961.
8. შ. ფხაძე, სიმრავლეთა თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები, თბილისი, 1978.
9. ი. ქარცივაძე, მათემატიკური ანალიზი, ტ. I, თბილისი, 1981.
10. შ. ქეძეძე, უმაღლესი ალგებრა, თბილისი, 1972.
11. გ. შ. შაპირო, უმაღლესი ალგებრა, თბილისი, 1949.
12. ა. ჩახტაური, ანალიზური გეომეტრია, 1960.
13. ე. წათლანაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. III, თბილისი, 1981.
14. ე. წითლანაძე, ფუნქციონალური ანალიზის საფუძვლები, თბილისი, 1964.
15. ვლ. ქელიძე, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია, თბილისი, 1964.
16. ვლ. ქელიძე, ნ. ლომჯარია, გ. ხახუბია, უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტ. I, II, III, თბილისი, 1962, 1964, 1973.
17. ა. ხარაძე, ვ. ქელიძე, ბ. ხვედელიძე, ი. ქარცივაძე, მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I, II, თბილისი, 1948, 1950.
18. ფ. ხარშილაძე, მათემატიკის სასკოლო კურსის თანამედროვე საფუძვლები, თბილისი, 1981.
19. ფ. ხარშილაძე, მათემატიკური ლოგია, ლექციების კურსი, თბილისი, 1978.
20. გრ. ხაჭალია, დიფერენციალური ვანტოლებანი, თბილისი, 1974.
21. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.
22. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1979.
23. Атанасян Л. С. Геометрия, ч. I, II, М., 1973, 1976.
24. Бакельман И. Я. Высшая геометрия. М., 1961.
25. Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., 1972.
26. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иванюк В. П. Аналитическая геометрия. М., 1962.

27. Биклаишвев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1971.
28. Беддман Р. Введение в теорию матриц. М., 1953.
29. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. М., 1971.
30. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Лекции и задачи по элементарной математике. М., 1974.
31. Боярский А. Я. Математика для экономистов. М., 1961.
32. Вилейкин Н. Я., Дуничев К. И., Калужин Л. А., Столяр А. А. Современные основы школьного курса математики. М., 1980.
33. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1953.
34. Гильберт Д. Основания геометрии. М.-Л., 1948.
35. Гильберт Д., Аккерман В. Основы математической логики. ИЛ. М., 1947.
36. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики, логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979.
37. Гелфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., 1971.
38. Граuert Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисление. Мир. М., 1971.
39. Гурел Э. Курс математического анализа. т. I, М.-Л., 1936.
40. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., 1963.
41. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М., 1979.
42. Ежов И. И., Скороход А. В., Яценко М. И. Элементы комбинаторики. М., 1977.
43. Ефимов Н. В. Квадратичные формы и матрицы. М., 1962.
44. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М., 1961.
45. Зельдович Я. Б., Мышкин А. Д. Элементы прикладной математики. М., 1965.
46. Зорич В. А. Математический анализ, чч. I, II, М., 1981, 1984.
47. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М., 1971.
48. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, чч. I, II, М., 1982, 1973.
49. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х., Математический анализ. М., 1979.
50. Каган В. Ф. Великий ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке. М., 1943.
51. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. М., 1955.
52. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Математический анализ. М., 1984.
53. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. ИЛ. М., 1963.
54. Клини С. К. Введение в математику. ИЛ. М., 1957.
55. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. М., 1976.
56. Коровкин П. Т. Математический анализ, чч. I, II, 1974.
57. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. тт. I, II, М., 1981, 1983.
58. Курьнт Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. тт. I, II, М., 1967, 1970.
59. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. Мир, М., 1970.
60. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., 1971.
61. Ландау Э. Основы анализа. ИЛ. М., 1947.
62. Ландау Э. Введение в дифференциальное и интегральное исчисление. ИЛ. М., 1948.
63. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., 1970.
64. Марков А. А. Предмет и метод современной логики. БСЭ, третье изд. т. 14, ст. 598—600.
65. Менделеев Э. Введение в математическую логику. М., 1971.
66. Меньшиков М. В., Ревакин А. М., Копылова А. Н., Махров Ю. Н., Стечкин Б. С. Комбинаторный анализ под редакцией Рыбникова К. А. М., 1982.

67. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. М., 1968.
68. Нечаев В. И. Числовые системы. М., 1978.
69. Никольский С. М. Курс математического анализа. тт. I, II, М., 1983, 1984.
70. Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1973.
71. Новиков П. С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М., 1977.
72. Новоселов С. И. Специальный курс элементарной алгебры. М., 1972.
73. Новоселов М. М., Кузичева З. А., Бирюков Б. В. История логики. БСЭ, третье изд. т. 14, ст. 596—598.
74. Новоселов М. М., Логика, БСЭ, третье изд. т. 14, ст. 595—596.
75. Очан Ю. С., Шейдер В. Е. Математический анализ. М., 1961.
76. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики, алгебра и анализ. М., 1971.
77. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия. М., 1978.
78. Погорелов А. В. Основания геометрии. М., 1968.
79. Постников М. М. Аналитическая геометрия. М., 1973.
80. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. М.-Л., 1952.
81. Рудин У. Основы математического анализа. Мир, М., 1966.
82. Серпинский В., О теории множеств. М., 1966.
83. Сидоров Ю. Н. Понятие пространства в математике. М., 1974.
84. Сикорский Р. Булевы алгебры. Мир, М., 1969.
85. Смирнов В. И. Курс высшей математики, тт. I, II, III, ч. I, II, ч. 2, IV, М.-Л., 1952, 1951, 1951, 1951, М., 1959.
86. Стола Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М., 1968.
87. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. М., 1961.
88. Уверенков И. М., Маллер М. З. Курс математического анализа. тт. I, II, М., 1966, 1976.
89. Фиксгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. тт. I, II, III, М.-Л., 1947, 1948, 1949.
90. Фролов Н. А. Курс математического анализа, чч. I, II, М., 1955, 1959.
91. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа. М., 1956.
92. Чёрч А. Введение в математическую логику. т. I, М., 1960.
93. Шилов Г. Е. Математический анализ функции одного переменного, Части I—2, часть 3, 1969, 1970.
94. Шилов Г. Е. Математический анализ функции нескольких вещественных переменных. Части I—2, М., 1972.

შინაარსი

შინაარსი

შინაარსი

შინაარსი

მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

§ 1. გამონათქვამთა აღგებრა	6
1. ზოგადი შენიშვნები (6). 2. გამონათქვამი (8). 3. ლოგიკური მოქმედებანი (11). გამონათქვამთა კონიუნქცია (12). გამონათქვამთა დიზიუნქცია (19). გამონათქვამთა იმპლიკაცია (14). გამონათქვამთა ეკვივალენტურობა (15). გამონათქვამთა უარყოფა (16). 4. გამონათქვამთა აღგებრის ფორმულები. თვისებები (17). 5. იგივერად ჰეშმარიტი ფორმულები (24). 6. ბულის აღგებრა (25).	
§ 2. ცვლიანი წინადადება	27
§ 3. კვანტორები	30
1. ზოგადობის კვანტორი (30). 2. არსებობის კვანტორი (30). 3. ერთადერთის არსებობის კვანტორი (30).	
§ 4. ფორმულათა ტოლფასობა	33
§ 5. ინდუქციის მეთოდი	33
§ 6. ლოგიკური გამომდინარეობა	36
1. ლოგიკური გამომდინარეობა (36). 2. თეორემები დამტკიცებათა მეთოდები (38).	
§ 7. გამონათქვამთა აღგებრის გამოყენება ფიზიკაში	40
სავარჯიშო 1.	42

შინაარსი II

სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

§ 1. სიმრავლეები	46
1. სიმრავლეები (46). 2. ქვესიმრავლე (50)	
§ 2. სიმრავლეზე მოქმედებანი	52
1. სიმრავლეთა გაერთიანება (52). 2. სიმრავლეთა გადაკვეთა (53). 3. სიმრავლეთა სხვაობა (54). 4. დამატება (55). 5. სიმრავლეთა ბულის აღგებრა (55). 6. ცარიელი სიმრავლე. უნივერსუმი (56). 7. თვისებები (58). 8. სიმრავლეთა კლასებად დაყოფა (58). 9. კორტეჟი (60). 10. სიმრავლეთა დეკარტის ნამრავლი (61).	
§ 3. ელემენტთა მიმართება. ფუნქცია	62
1. ელემენტთა მიმართება (62). 2. შექცეული მიმართება (64). 3. სიმრავლეთა დალაგება. თვისებები (65). 4. სიმრავლეთა გადასახვა. ფუნქციის ცნე-	

ბა (66). 5. დალაგების სტრუქტურა (68). 6. დალაგებული სიმრავლის წედა და ქვედა საზღვრები (71). 7. სტრუქტურათა იზომორფიზმობა (72).	
§ 4. სიმრავლეთა ეკვივალენტურობა. ნატურალური რიცხვები. თვლადი სიმრავლეები. კონტინუუმი	74
1. სიმრავლეთა ეკვივალენტობა (74). 2. კარდინალური რიცხვები (77). 3. ნატურალური რიცხვები (79). 4. სიმრავლის სიმძლავრე (87). 5. თვლადი სიმრავლეები. თვისებები (90). 6. კონტინუუმის სიმძლავრე (93).	
სავარჯიშო 2.	127

შინაარსი III

რიცხვითი სისტემები

§ 1. რიცხვის ცნების გაფართოება	101
1. მიმართების ცნების განზოგადობა (106). 2. ნატურალური რიცხვთა სისტემა (103). 3. მთელ რიცხვთა და რაციონალური რიცხვთა სიმრავლეები (105). 4. მთელ რიცხვთა სისტემა (107). 5. რაციონალური რიცხვთა სისტემა (109). 6. რაციონალური რიცხვთა თვისებები (110). 7. თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა (114).	
§ 2. ნამდვილ რიცხვთა სისტემა	118
1. ნამდვილ რიცხვთა სისტემა (118). 2. თვლის ათობითი სისტემით ნამდვილი რიცხვის ჩაწერა (125). 3. ნებისმიერი დადებითი რიცხვიდან მთელი დადებითი ხარისხის ფესვის არსებობა (128). 4. გაფართოებული ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (130).	
§ 3. ნამდვილი რიცხვის მოდული	130
§ 4. კომპლექსური რიცხვთა სისტემა	133
1. კომპლექსური რიცხვთა სიმრავლე (133). 2. მოქმედებანი კომპლექსური რიცხვებზე (137).	
§ 5. კომპლექსური რიცხვის აბრისებრა. მუდგარის ფორმულა	139
§ 6. კომპლექსური რიცხვიდან უ-ური ხარისხის ფესვი	140
§ 7. კომპლექსური რიცხვთა მოდულების თვისებები	142
§ 8. კომპლექსური რიცხვის მანვერებლიანი სახის წარმოდგენა	144
სავარჯიშო 3.	146

შინაარსი IV

კომბინატორიკის ელემენტები

§ 1. კომბინატორიკის საფანი	149
§ 2. კომბინატორიკა განუმეორებელი ელემენტებით	150
1. წყობანი (150). 2. გადანაცვლებანი (158). 3. ჯუფთებანი (154).	
§ 3. ნიუტონის შინომის ფორმულა	157
1. ნიუტონის შინომი (157). 2. ბინომური კოეფიციენტების თვისებები (158).	
§ 4. კომბინატორიკა განუმეორებელი ელემენტებით	159
§ 5. წყობანი განმეორებით	160
§ 6. გადანაცვლებანი განმეორებით	162
§ 7. ჯუფთებანი განმეორებით	164
§ 8. მრავალწევრის აბრისებრა პოლინომური თეორემა	166
სავარჯიშო 4.	168

თ ა ზ ი V

რაციონალური ფუნქციები

§ 1. მრავალწევრები. მოქმედებანი მრავალწევრებზე	170
1. მრავალწევრები (170). 2. მოქმედებანი მრავალწევრებზე (172). 3. გაყოფადობის ცნება (176). 4. მრავალწევრის ნულის ცნება (176). 5. ბეზუს თეორემა (177). 6. ჰორნერის სქემა (177).	
§ 2. ალგებრის ძირითადი თეორემა	179
§ 3. მრავალწევრის წრფივ მამრავლებად დაშლა	190
1. წრფივ მამრავლებად დაშლა (190). 2. ვიეტის ფორმულები (192). 3. ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრები (192).	
§ 4. წილადრაციონალური ფუნქცია. უმარტივეს წილადებად დაშლა	234
1. წილადრაციონალური ფუნქცია (194). 2. წილადრაციონალური ფუნქციის დაშლა (195).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 5.	199

განუყოფილება 1

დეტერმინანტები და წრფივ განტოლებათა სისტემები ანალიზური გეომეტრია. ვიეტორული ალგებრა. წრფივი ალგებრის ელემენტები.

თ ა ზ ი VI

დეტერმინანტები და წრფივ განტოლებათა სისტემები

§ 1. განტოლება, განტოლებათა სისტემა, წრფივ განტოლებათა სისტემა, გაუსის მეთოდი	200
1. განტოლება. ეკვივალენტური განტოლებანი (200). 2. ორცვლიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა (205). 3. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით (210).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 6.	219
§ 2. მესამე რიგის დეტერმინანტი ძირითადი თვისებები	219
1. მესამე რიგის დეტერმინანტი (219). 2. დეტერმინანტის თვისებები (226).	
§ 3. სიმკვლეანი განტოლებათა სისტემის ამოხსნა	228
1. არაერთგვაროვანი წრფივი განტოლების სისტემა (228). 2. ერთგვაროვანი წრფივი განტოლებათა სისტემა (231). 3. ზოგადი შემთხვევა (236).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 7.	237

თ ა ზ ი VII

კოორდინატთა სისტემები. უმარტივესი ამოცანები

§ 1. მიმართული მონაკვეთი. მოქმედებანი მიმართულ მონაკვეთებზე	240
1. მიმართული მონაკვეთი ღერძზე (240). 2. მოქმედებანი მიმართულ მონაკვეთებზე (241). 3. წერტილის კოორდინატი (244). 4. მონაკვეთის გაყოფა, მოცემული ფარდობით (245).	
§ 2. კოორდინატთა სისტემები	247
1. მონაკვეთის გეგმილი ღერძზე (247). 2. დეკარტის კოორდინატთა სისტემა (248). 3. პოლარულ კოორდინატთა სისტემა (249). 4. დეკარტის პირთკუთხა კოორდინატთა სისტემისა და პოლარულ კოორდინატთა სისტემის შორის დამოკიდებულება (251). 5. უმარტივესი ამოცანები (252). ორწერ-	

ტილის შორის მანძილი (295). მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით (253). 6. სამკუთხედის ფართობი (254).	
§ 3. კოორდინატთა გარდაქმნები	256
1. კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანა (256). 2. ღერძითა მობრუნება (257). 3. ზოგადი შემთხვევა (258).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 8.	259

თ ა ზ ი VIII

სიბრტყეზე წირის განტოლება

§ 1. წირის განტოლება	260
1. წირის განტოლების ცნება (260). 2. წირის პარამეტრული განტოლებანი (264). 3. წირის განტოლებანი პოლარულ კოორდინატებში (266). 4. ალგებრული წირები (267).	
§ 2. წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებანი	268
1. წრფის საექსპოციენტიანი განტოლება (268). 2. წრფის ზოგადი განტოლება (270). 3. წრფის ზოგადი განტოლების გამოყვანა (271). 4. წრფის განტოლება მონაკვეთების (272). 5. წრფის ნორმალური განტოლება (273). 6. წრფის ზოგადი განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე (274). 7. განტოლებით წრფის აგება (275).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 9.	276
§ 3. ძირითადი ამოცანები წრფეზე	277
1. ორ წრფეს შორის კუთხე (277). 2. წრფეთა პარალელობისა და პერპენდიკულარობის პირობები (278). 3. მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება (279). 4. ორწერტილზე გამავალი წრფის განტოლება (281). 5. წერტილიდან წრფემდე მანძილი (282). 6. ორი წრფის ურთიერთ მდებარეობა (285). 7. ამოცანები (287).	
§ 4. მარტივი ეკონომიკური ამოცანები	292
1. ტვირთის გადატანის ხარჯები (292). 2. ტვირთის გადატანის ხელსაყრელი საშუალებების არჩევა (293).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 10.	295

თ ა ზ ი IX

მეორე რიგის წირები. ძირითადი თვისებები

§ 1. კონუსური კვეთები	296
§ 2. ელიფსი	298
1. ელიფსის განტოლება (298). 2. ელიფსის აგება (299). 3. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი (301). 4. ელიფსის პარამეტრული განტოლებანი (301). 5. ელიფსის ფიკუსური რადიუსების რაციონალურად გამოსახვა (302). 6. ელიფსის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში (304).	
§ 3. ჰიპერბოლა	305
1. ჰიპერბოლის განსაზღვრა და მისი განტოლება (305). 2. ჰიპერბოლის ფორმა. ჰიპერბოლის ასიმპტოტები (307). 3. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი (309). 4. ჰიპერბოლის დირექტრისები, თვისებები (310). 5. ჰიპერბოლის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში (311).	
§ 4. პარაბოლა	312
1. პარაბოლის განსაზღვრა. განტოლების შედგენა (312). 2. პარაბოლის ფორმა (314). 3. პარაბოლის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში (314).	

§ 5. მეორე რიგის წირთა განტოლებანი პოლარულ კოორდინატებში	314
§ 6. მეორე რიგის წირების კონუსური კვეთებით განსაზღვრა	314
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 11.	318
§ 7. ამოცანები მეორე რიგის წირებზე (დამატება)	319
1. ცენტრალური წირის განტოლების გამარტივება (321). 2. უცენტრო წირის განტოლების გამარტივება (324). 3. მაგალითები (327). 4. შენიშვნა (331). 5. ამოცანები (334).	334
§ 8. მეორე რიგის წირების გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში	339
1. უკუპროპორციული დამოკიდებულება (339). 2. წილად წრფივი ფუნქცია (339).	

თ ა ვ ი X

ვექტორული აღგებრა

§ 1. ვექტორები სიბრტყეზე. მოქმედებანი ვექტორებზე	344
1. ვექტორის ცნება. ვექტორთა ურთიერთ კოლონეარობა (344). 2. ვექტორთა ტოლობა (346). 3. ვექტორის ღერძზე გეგმილი (348). 4. ვექტორთა ჯამი (349). 5. ვექტორთა ჯამის გეგმილი (352). 6. ვექტორთა სხვაობა (353). 7. ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი (354). 8. ვექტორთა დამკლავობა (356). 9. ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობა (358). 10. აფინური კოორდინატები (366).	
§ 2. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი	367
1. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი (367). 2. სკალარული ნამრავლის თვისებები (369). 3. ბაზისი ვექტორების სკალარული ნამრავლი. სკალარული ნამრავლის გამოსახება, ვექტორთა კოორდინატებით (370). 4. ვექტორის გეგმილი ღერძზე (372). 5. სამკუთხედის უტოლობა (424). 6. ამოცანები (373).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 12.	375
§ 3. სივრცეში კოორდინატთა სისტემები. ვექტორები სივრცეში	376
1. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (376). 2. ძირითადი ამოცანები (377). 3. კოორდინატთა მარჯვენა და მარცხენა სისტემები (379). 4. ბაზისი ვექტორები (380). 5. მოქმედებანი ვექტორებზე (381). 6. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი (382). 7. ვექტორის სივრცე (383). 8. ვექტორთა შორის კუთხე (383).	
§ 4. ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი	384
1. ვექტორული ნამრავლი (384). 2. ვექტორული ნამრავლის თვისებები (384).	
§ 5. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი	385
1. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი (388). 2. შერეული ნამრავლის გეომეტრიული მნიშვნელობა (389).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 13.	390

თ ა ვ ი XI

ანალიზური გეომეტრია სივრცეში

§ 1. ზედაპირის განტოლება	391
1. ზედაპირის განტოლება (391). 2. სფერული ზედაპირი (396). 3. ცილინდრული ზედაპირი (396). 4. ბრუნვის ზედაპირი (399). 5. კონუსური ზედაპირი (400).	

§ 2. სივრცული წირის განტოლებანი	401
1. სივრცული წირის ზოგადი განტოლებანი (401). 2. წირის პარამეტრული განტოლებები (402).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 14.	402
§ 3. სიბრტყის განტოლებანი	404
1. სიბრტყის ვექტორული განტოლება ნორმალური სახით (404). 2. სიბრტყის ვექტორული განტოლება ზოგადი სახით (406). 3. სიბრტყის განტოლება ლერძთა მონაკვეთებში (407). 4. განტოლების მიხედვით სიბრტყის აგება (408). 5. სიბრტყის ზოგადი განტოლების გამოკვლევა (410).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 15.	412
§ 4. სივრცეში წრფის განტოლებანი	413
1. წრფის ვექტორული განტოლება (413). 2. წრფის პარამეტრული განტოლებანი (413). 3. წრფის კანონიკური განტოლებანი (413). 4. წრფის ზოგადი სახის განტოლებები (414). 5. წრფის დაყვანილი სახის განტოლებები (415).	
§ 5. ძირითადი ამოცანები	417
1. მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება (417). 2. ერთ წრფეზე გამავალი სიბრტყეთა კონა (418). 3. სამწერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება (418). 4. ორი სიბრტყის ურთიერთ მდებარეობა (419). 5. სამი სიბრტყის ურთიერთ მდებარეობა (420). 6. ორ სიბრტყეს შორის კუთხე (423). 7. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი (424). 8. ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებები (426). 9. წრფისა და სიბრტყის ურთიერთ გადაკვეთა (426). 10. წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე (427). 11. ორ წრფეს შორის კუთხე (429). 12. წერტილიდან წრფემდე მანძილი (430). 13. ორ წრფეს შორის უმოკლესი მანძილი (431).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 16.	431
§ 6. მეორე რიგის ზედაპირთა კანონიკური განტოლებანი	434
1. ზოგადი შენიშვნები (434). 2. ელიფსოიდი (435). 3. ცალკალთა ჰიპერბოლიდი (436). 4. ორკალთა ჰიპერბოლიდი (437). 5. ელიფსური პარაბოლიდი (438). 6. ჰიპერბოლური პარაბოლიდი (439).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 17.	441

თ ა ვ ი XII

წრფივი აღგებრის ელემენტები

მატრიცები. მოქმედებანი მატრიცებზე	443
1. მატრიცის ცნება (443). 2. მოქმედებანი მატრიცებზე (445). 3. მატრიცის მინორები (448). 4. ტრანსპონირებული მატრიცა (450). 5. შებრუნებული მატრიცა (451). 6. ლეტერმინანტთა ნამრავლი. კრამერის ფორმები (453).	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 18.	455
§ 2. მატრიცის რანგი წრფივად დამოუკიდებლობა. კრანეერ — კაპელის თეორემა	456
მატრიცის რანგი (456). 2. უუნქციათა წრფივად დამოუკიდებლობა (458). წრფივი განტოლებათა სისტემის თავისებულობა (466). 4. ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა	
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ი 19.	477
§ 3. კვადრატული მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები	479
1. სიბრტყეზე კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები (479). 2. ცვლადთა წრფივი გარდაქმნა (482). 3. სიბრტყეზე ცვლადთა წრფივი გარდაქმნის	

მატრიცის დეტერმინანტის გეომეტრიული მნიშვნელობა. გადაჯვარებული წრფივი გარდაქმნა (489). 4. მატრიცის საერთო რიცხვები და საერთო-რიგი ევქტორები (492). 5. წრფივი გარდაქმნის მატრიცის ცვლილება ახალ ბაზისზე გადასვლის შემთხვევაში (496). 6. მეორე რიგის კვადრატული მატრიცის მოყვანა დიაგონალურ სახეზე (498). 7. სიმბრტყეზე მეორე რიგის წირის განტოლების გამოტრეკვა (506).	
ს ა ე ა რ ქ ი შ ი 20.	517
9 4. წრფივი გარდაქმნა n -განზომილებიან სივრცეში. მატრიცის საერთოვი ევქტორები, საერთოვი რიცხვები. კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე მიყვანა	518
1. წრფივი გარდაქმნა n -განზომილებიან სივრცეში (158). 2. მატრიცის კვადრატული ფორმა (519). 3. კვადრატული ფორმა. კანონიკურ სახეზე მიყვანა (524). 4. დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმები (544).	
ს ა ე ა რ ქ ი შ ი 21.	548
5 5. წრფივი (აფინური) n -განზომილებიანი სივრცის ძირითადი ცნებანი	548
1. წრფივი ევქტორული სივრცის ცნება (548). 2. წრფივ ერთგვაროვან განტოლების სისტემის ამონახსნთა სივრცე (555). 3. წრფივი (აფინური) n -განზომილებიანი სივრცე (560). 4. განზომილებათა რიცხვი წრფივ სივრცეში (562). 5. n -განზომილებიან სივრცეთა იზომორფიზმი (563). 6. კომპლექსური წრფივი სივრცე (570).	
6. სივრცის ცნება მათემატიკაში	571
1. ზოგადი შენიშვნები (571). 2. ევკლიდეს „საწყისებში“ (572). 3. არაევკლიდური გეომეტრიის შექმნა (575). 4. ლობაჩევსკის გეომეტრიის აღიარება (578). 5. ჰილბერტის აქსიომათა სისტემა (579). 6. ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის არითმეტიკული ინტერპრეტაცია (584). 7. ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის თავისებულობა (590). 8. ჰილბერტის აქსიომათა სისტემის დამოუკიდებლობა (591). 9. აქსიომათა სისტემის სისრულე (592). 10. აქსიომათა სისტემის ინტერპრეტაციების იზომორფულობა (593). 11. ლობაჩევსკის გეომეტრიის ინტერპრეტაცია (595). 12. არაევკლიდური გეომეტრიები (598). 13. აბსტრაქტული სივრცე (599). 14. n -განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე (602). 15. ლობაჩევსკის გეომეტრიის მნიშვნელობა (608).	
ს ა ე ა რ ქ ი შ ი 22.	610

II ბ ა ნ ა მ ა თ ე რ ი კ ა

ლიფარანციალური ალგებრა

თ ა მ ი X I I I

ფუნქციები, ზღვარი, უწყვეტობა

§ 1. ფუნქცია	612
1. მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები (612). 2. ფუნქცია (613). 3. უწყვეტი წირის ცნება (616). 4. მიმდევრობა (620). 5. ფუნქციის მოკლების ხერხები (621). 6. არაცხადი ფუნქციები (623). 7. შექცევადი ფუნქციები (624). 8. ზრდადი და კლებადი ფუნქციები (625). 9. პერიოდული ფუნქციები (627). 10. ლუწი და კენტი ფუნქციები, (627). 11. შემოსაზღვრული და შემოსაზღვრული ფუნქციები (628).	
ს ა ე ა რ ქ ი შ ი 23.	631

§ 2. ერთი ცვლადის ფუნქციების კლასიფიკაცია	631
1. რაციონალური ფუნქციები (631). 2. ალგებრული ფუნქციები (632).	
§ 3. ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები	633
1. ხარისხოვანი ფუნქცია (633). 2. მაჩვენებლიანი ფუნქცია (633). 3. ლოგარითმული ფუნქცია (634). 4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები (634). 5. შექცევადი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები (635).	
ს ა ე ა რ ქ ი შ ი 24.	638
§ 4. რიცხვითი მიმდევრობა. რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი	639
1. მიმდევრობის ზღვარი (639). 2. კრებადი მიმდევრობის თვისებები (644). 3. მიმდევრობის კრებადობის პირობები (647). 4. e რიცხვი (650).	
ს ა ე ა რ ქ ი შ ი 25.	653
§ 5. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები	654
1. უსასრულოდ მცირე. თვისებები (654). 2. უსასრულოდ დიდი (655). 3. უსასრულოდ მცირეთა რიგი (657).	
§ 6. არითმეტიკული მოქმედებანი მიმდევრობებზე. მნიშვნელოვანი უტოლობანი. შტოლცის თეორემა	660
1. მიმდევრობებზე არითმეტიკული მოქმედებანი (660). 2. მნიშვნელოვანი უტოლობანი (662). 3. შტოლცის თეორემა (664). 4. მაგალითები (667).	
§ 7. ფუნქციის ზღვარი. ფუნქციის ზღვრის ზოგადი თვისებები	671
1. ფუნქციის ზღვარი (671). 2. ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x \rightarrow \pm\infty$. (678). 3. ზღვრის მქონე ფუნქციის თვისებები (679). 4. ფუნქციის ზღვრის არსებობის პირობები (681). 5. ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები (682).	
§ 8. უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე ფუნქციები	684
1. უსასრულოდ მცირე ფუნქცია. თვისებები (684). 2. უსასრულოდ დიდი ფუნქცია. თვისებები (685). 3. მაგალითები (686).	
ს ა ე ა რ ქ ი შ ი 26.	687
§ 9. თეორემები ფუნქციათა ზღვრების შესახებ	688
1. არითმეტიკული მოქმედებანი ფუნქციათა ზღვრებზე (688). 2. მაგალითები (691).	
ს ა ე ა რ ქ ი შ ი 27.	692
§ 10. ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები. შესანიშნავი ზღვრები	693
1. ფუნქციათა შედარება (693). 2. უსასრულოდ მცირე რეალის სინუსის თვის რეალთან შედარების ზღვარი (695). 3. ისევ e რიცხვის შესახებ (698). 4. ნატურალური ლოგარითმის ცნება (699). 5. ნატურალურ ლოგარითმთან დაკავშირებული უსასრულოდ მცირე ფუნქციები (701). 6. თეორემა ეკვივალენტურობის გამოყენების შესახებ (702). 7. თეორემა რთული ფუნქციის ზღვრის შესახებ (704).	
ს ა ე ა რ ქ ი შ ი 28.	705
§ 11. ფუნქციის უწყვეტობა	707
1. ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში (707). 2. წერტილში უწყვეტი ფუნქციის თვისებები (711). 3. ზოგიერთი ფუნქციის უწყვეტობა (712). 4. წერტილის მარცხნიდან და მარჯვნიდან ფუნქციის უწყვეტობა (714).	
ს ა ე ა რ ქ ი შ ი 29.	715
§ 12. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისებები	716
1. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობის მიღწევის შესახებ (716). 2. თეორემები სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის მიერ მის ორ მნიშვნელობათა შორის ყველა მნიშვნელობის მიღწევის შესახებ (720). 3. ფუნქციის თანაბრად უწყვეტობა (722).	
§ 13. შექცევადი ფუნქციები	724

1. თეორემები ფუნქციითა შეკვეთადობის შესახებ (724).	2. შეკვეთული ფუნქციები (727).	
§ 14. ფუნქციის წყვეტის წერტილები. წყვეტის სახეები		729
1. ფუნქციის წყვეტა წერტილში (729).	2. ფუნქციის წყვეტის წერტილთა კლასიფიკაცია (731).	
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 30.		731

თ ა ვ ი X I V

ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

§ 1. ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრა. წარმოებულის გეომეტრიული და მექანიკური აზრი		734
1. ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრა (734).	2. წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობა (739).	3. წარმოებულის მექანიკური მნიშვნელობა (743).
§ 2. გაწარმოების ძირითადი წესები		744
1. ფუნქციითა ჯამის წარმოებული (744).	2. ფუნქციითა ნამრავლის წარმოებული (745).	3. ფუნქციითა შეფარდების წარმოებული (746).
4. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციითა წარმოებულები (747).		
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 31.		748
§ 3. შეკვეთული ფუნქციის წარმოებული		749
§ 4. რთული ფუნქციის წარმოებული		752
1. რთული ფუნქციის წარმოებული (752).	2. ნამდვილმნიშვნელობის ბარის-ბოვანი ფუნქციის წარმოებული (754).	3. ლოგარითმული წარმოებულები (755).
4. $y = x $ ფუნქციის წარმოებული (755).	5. პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის წარმოებული (756).	6. წარმოებულის აღნიშვნების (757).
7. პიპერბოლური ფუნქციები და პიპერბოლურ ფუნქციითა წარმოებულები (757).	8. არაცხადი ფუნქციის წარმოებული (760).	9. წირის მხეზისა და ნორმალის განტოლებანი (760).
10. მაგალითები (762).	11. ელემენტარულ ფუნქციითა წარმოებულების ცხრილი (764).	
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 32.		765
§ 5. ფუნქციის დიფერენციალი		766
1. ფუნქციის დიფერენციალის ცნება (766).	2. დიფერენციალის გეომეტრიული მნიშვნელობა (768).	3. დიფერენციალის მექანიკური მნიშვნელობა (769).
4. წარმოებულის გამოსახვა დიფერენციალების საშუალებით (769).	5. ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა დიფერენციალის საშუალებით (770).	
§ 6. დიფერენციალის თვისებები		771
1. არითმეტიკული მოკმედეგანი დიფერენცირებად ფუნქციებზე (771).	2. დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა (772).	3. ელემენტარულ ფუნქციითა დიფერენციალების ცხრილი
§ 7. მაღალი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები		774
1. მაღალი რიგის წარმოებული (774).	2. მაღალი რიგის დიფერენციალი (776).	3. მეორე რიგის წარმოებულის მექანიკური მნიშვნელობა (777).
4. მაგალითები (778).		
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 33.		779

თ ა ვ ი X V

ფუნქციის გამოკვეთვა წარმოებულის გამოყენებით

§ 1. თეორემები ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობების შესახებ		780
1. ფერმას თეორემა (780).	2. როლის თეორემა (782).	3. ჯოშის თეორემა ((783).
4. ლაგრანჟის თეორემა (784).	5. ლაგრანჟის თეორემის შედეგები (785).	
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 34.		788
§ 2. ლოპიტალის თეორემა. განუსაზღვრელობათა გახსნა		789
1. $\frac{0}{0}$ განუსაზღვრელობის გახსნა (790).	2. $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა (794).	
3. $0 \cdot \infty$ სახის განუსაზღვრელობა (797).	4. $1 \cdot \infty$ სახის განუსაზღვრელობა (798).	5. $\infty - \infty$ სახის განუსაზღვრელობა (789).
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 35.		799
§ 3. ტეილორის ფორმულა		800
1. ტეილორის ფორმულა პიანოს დამატებითი წევრით (800).	2. ტეილორის ფორმულა სხვა სახის დამატებითი წევრით (802).	3. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის გაშლა მაკლორენის ფორმულით (805).
4. ტეილორის ფორმულით ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა (807);		
1) e^x — (809); 2) $\sin x$ — (810); 3) $\sqrt[n]{1+x}$ — (811); 4) რიგების ლოგარითმის გამოთვლა (812);		
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 36.		814
§ 4. ფუნქციის ლოკალური ექსტრემები		815
1. შუალედში ფუნქციის მონოტონურობის ნიშნები (815).	2. ფუნქციის ლოკალური ექსტრემები (818).	
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 37		821
§ 5. ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის მოძებნა, როდესაც ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებული იქვს		822
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 38.		825
§ 6. წირის ჩაზნექილობა და ამოზნექილობა. გადაღუნვის წერტილები		829
1. წირის ჩაზნექილობა და ამოზნექილობა (829).	2. წირის გადაღუნვის წერტილები (830).	
§ 7. წირის ასიმპტოტები		833
§ 8. ფუნქციის გამოკვეთვა. გრაფიკის აგება		836
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 39.		840

თ ა ვ ი X V I

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

§ 1. მრავალი ცვლადის ფუნქციები		841
ი-განზომილებიანი ევკლიდის სივრცე. ევკლიდის სივრცეში წერტილის მიდამო, სეგმენტი და ინტერვალი (841).	2. წერტილთა მიმდევრობა (848).	
3. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი (850).	4. მრავალი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში და არეში (851).	
ს ა ვ ა რ ქ ი შ ი 40.		854
§ 2. მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები და კერძო დიფერენციალები. სრული დიფერენციალი. არაცხადი ფუნქციები (855).		

1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები (855).	
2. მრავალი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი (858). 3. ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობები (860). 4. სრული წარმოებულები (861). 5. რთული ფუნქციის კერძო წარმოებულები (863). 6. არა-ცხადი ფუნქციები (864). 7. მაგალითები (872). 8. მხეზი სიბრტყე (873).	876
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 41.	878
§ 4. მიმართულებით წარმოებული. გრადიენტი	
1. მიმართული წარმოებულები (878). 2. ფუნქციის გრადიენტი (880).	
§ 5. ფუნქციის მნიშვნელობის მიახლოებით გამოთვლა სრული დიფერენციალის საშუალებით	881
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 42.	882
§ 6. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები. მაღალი რიგის დიფერენციალები	884
1. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები (884). 2. მაღალი რიგის დიფერენციალები (886).	888
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 43.	889
§ 7. ტეილორის ფორმულა მრავალცვლადის ფუნქციისათვის	892
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 44.	892
§ 8. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი	
1. ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა (892). 2. ფუნქციის ექსტრემუმის საკმარისი პირობები (894).	898
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 45.	899
§ 9. პირობითი ექსტრემუმი ლაგრანჟის მეთოდი	
1. პირობითი ექსტრემუმი (899). 2. ლაგრანჟის მეთოდი (900).	903
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 46.	903
§ 10. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი	
1. ზოგადი შენიშვნები (903). 2. გრაფიკული მეთოდი (905). 3. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მაღალი ხარისხის მრავალწევრის კოეფიციენტთა განსაზღვრა (907).	910
ს ა ვ ა რ ჭ ი შ ო 47.	911
გამოყენებული ლიტერატურა	

გამომცემლობის რედაქტორი ი. მჭედლიძე

სამხატვრო რედაქტორი ი. ჩიქვინიძე

ტექნიკური რედაქტორი თ. ფირცხელანი

კორექტორები: ც. მოლოდინი,

ე. გონჯილაშვილი

სბ № 1319

გადაეცა წარმოებას 20.08.86. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 4.05.87.

უე 04442. საბეჭდო ქაღალდი № 1. 60×90¹/₁₆. პირობითი ნაბეჭდი

თაბახი 58. სააღრ.-სავამომც. თაბახი 53,07

ტირაჟი 3000 შეკვეთის № 1704

ფასი 2 მან. 40 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14.

Комладзе Георгий Маланиевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Общий курс

Часть I

(на грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси — 1987

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნის ვაჭრობის
საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის თბილისის ო. ჭავჭავაძის სახ. წიგნის
ფაბრიკა, მეგობრობის გამზირი № 7.

Тбилисская книжная фабрика им. И. Чавчавадзе Государственного
комитета Грузинской ССР по делам издательств, полиграфии и
книжной торговли, пр. Дружбы № 7.

