ტ. კიკვაძე, თ. ბერიძე

ბიზნესის ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები

„ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ტ. კიკვაძე, თ. ბერიძე

ბიზნესის ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები

დამტკიცებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ

თბილისი
2009

სახელმძღვანელო ორიენტირებულია ეკონომიკის, ფინანსებისა და ბიზნესის ადმინისტრირების პროფილის საბაკალავრო და სამაგისტრო პროგრამების ასათვისებლად. იგი ასევე სასარგებლო იქნება პროფესიონალი პრაქტიკოსებისათვის ეფექტიანი სამეწარმეო საქმიანობის მისაღწევად.

რეცენზენტები: პროფ. ჯ. როგავა
პროფ. ზ. ლიპარტია

სამეცნიერო რედაქტორი ფიზ-მათ. მეც. კანდ., ასოც. პროფ. ხ. რუხაია

ISBN 978-9941-14-519-3
http://www.gtu.ge/publishinghouse/

Verba volant,
scripta manent

შესავალი

სახელმძღვანელოში განიხილება ბიზნესის ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები, რომელიც ეფუძნება ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის, ფინანსური მათემატიკის ინსტრუმენტების, მასობრივი მომსახურების სისტემებისა და მარაგების მართვის მოდელების გამოყენებას.

თეორიული მასალა გადმოცემულია კომპაქტურად, გასაგები ენით. თითოეული თავი შეიცავს კონკრეტული სიტუაციების, მაგალითებისა და სავარჯიშოების საკმარის რაოდენობას.

სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების ეკონომიკსა და ბიზნესის მართვის სპეციალობის ბაკალავრიატის საფეხურის სტუდენტებისათვის. იგი დააინტერესებს პროფესორ-მასწავლებლებსაც, აგრეთვე, სპეციალისტებს მარკეტინგისა და მენეჯმენტის სფეროებში.

თავი 1. ბიზნესის სტატისტიკის შესავალი

თანამედროვე ეტაპზე სტატისტიკა ფირმათა საქმიანი ცხოვრების განუყოფელი ნაწილი გახდა. იშვიათად თუ შევხვდებით წლიურ ანგარიშებს, რომელიც არ შეიცავდეს მონაცემთა გრაფიკული სახით წარმოდგენასა და ანალიზს. კომერციული ინფორმაციის შეგროვების, წარმოდგენისა და ანალიზის მეთოდების გამოყენებას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ეფექტური მენეჯერული გადაწყვეტილებების მიღების პროცესში.

სტატისტიკა აღწერს და გამოავლენს რაოდენობრივ კანონზომიერებებს მასობრივ საზოგადოებრივ მოვლენებში.

წინამდებარე თავში გავეცნობით მონაცემთა შეგროვების, ასახვისა და ანალიზის, საშუალო და ვარიაციის მაჩვენებლების გამოთვლისა და შედარების მეთოდებს, მათ ინტერპრეტაციასთან და შედარებასთან დაკავშირებულ საკითხებს.

1.1. მონაცემთა შეგროვების მეთოდები

რაოდენობრივი ანალიზის პირველ ეტაპს აუცილებელი ინფორმაციის შეგროვება წარმოადგენს.

არსებობს აღნიშნული ინფორმაციის მიღების სხვადასხვა შიდა თუ გარე წყარო, ისეთები მაგალითად, როგორიცაა წარმოებასთან, გასაღებასთან და საკადრო შემადგენლობასთან დაკავშირებული ანგარიშები, აგრეთვე, სტატისტიკური ორგანოების მიერ გამოქვეყნებული მასალები, რომელიც მოიცავს მონაცემთა ფართო სპექტრს ქვეყნის მასშტაბით. ასეთებს განეკუთვნება მონაცემები, რომლებშიც ასახულია მოსახლეობის ზრდისა და მისი დემოგრაფიული შემადგენლობის ცვლილების ტენდეციები, შემოსავლები და ფასები, ვაჭრობაში ბრუნვისა და პროდუქციის გამოშვების მოცულობები, მოხმარების ტენდეციები.

მნიშვნელოვან ინფორმაციას შეიძლება შეიცავდეს აგრეთვე ხელისუფლების ადგილობრივი ორგანოების სტატისტიკური მასალები და კომერციული სტრუქტურების მარკეტინგული გამოკვლევების მონაცემები.

მიმდინარე ინფორმაციის არარსებობის შემთხვევაში ხშირად პირველადი მონაცემების მისაღებად იყენებენ ე. წ. გამოკითხვის ფურცლებს (ანკეტებს). მონაცემთა შეგროვების ამ მეთოდისათვის დამახასიათებელია შედარებით დაბალი დანახარჯები.

გამოკითხვის ფურცელი სხვადასხვა ტიპის შეიძლება იყოს. მისი გაფორმების ძირითადი ეტაპებიდან შეიძლება გამოვყოთ:

1. წინასწარი გამოკითხვა, როდესაც ე. წ. „გონებრივი შტურმის" მეთოდით დგინდება მისაღები ინფორმაციის ტიპი და მოცულობა;
2. გამოკითხვის ფურცლის შავი ვარიანტის შედგენა;
3. გამოკითხვის ფურცლის შავი ვარიანტის პირველადი ანალიზი, რაც გულისხმობს კითხვების ფორმულირების დაზუსტებას მათზე პასუხების ცხადად და ცალსახად გაცემის მიზნით;

4. წინასწარი მონაცემების შეგროვება გამოკითხვის ფურცლების რესპოდენტთა მცირე ჯგუფებისადმი დაგზავნის გზით მათი ფორმისა და შინაარსის შემდგომი დახვეწის მიზნით;
5. გამოკითხვის ფურცლის საბოლოო ვარიანტის შემუშავება;
6. გამოკითხვის ჩატარება სრული ინფორმაციის მისაღებად.

მიღებული ინფორმაციის საიმედობა მნიშვნელოვანწილად დამოკიდებულია გამოკითხვის ფურცლების გაფორმების ხარისხზე. ამ თვალსაზრისით სასარგებლო იქნება თუ გავითვალისწინებთ ქვემოთმოყვანილ რეკომენდაციებს:

- გამოკითხვის ფურცლის მიზანი ფორმულირებული უნდა იყოს მის დასაწყისში ან ცალკე წერილში;
- კითხვები შეძლებისდაგვარად ფორმულირებული უნდა იყოს მარტივი, გასაგები ენით. უნდა მოვერიდოთ ჟარგონსა და ტექნიკურ ტერმინოლოგიას;
- მინიმუმანდე უნდა იქნეს დაყვანილი კითხვების რაოდენობა;
- შეძლებისდაგვარად გამოვიყენოთ კითხვები, რომლებზეც შეიძლება გაეცეს „დიახ/არა“ ტიპის პასუხები ანდა კითხვები, რომლებიც გვთავაზობს ალტერნატიულ პასუხებს;
- ღია ტიპის შეკითხვები იშვიატად უნდა იქნეს გამოყენებული და ისიც მხოლოდ გამოკითხვის ფურცლის ბოლოს;
- უნდა მოვერიდოთ ორაზროვან და პირადი ხასიატის კითხვებს.

პირველადი ინფორმაციის მიღების **ალტერნატიულ მეთოდს** წარმოადგენს ზეპირი გამოკითხვა.

მიუხედავად იმისა, რომ ანკეტირებასთან შედარებით ეს მეთოდი უფრო დიდ დანახარჯებთან არის დაკავშირებული, მეტ დროს მოითხოვს და შრომატევადიცაა, ხშირად მაინც მას ანიჭებენ უპირატესობას, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც აუცილებელია ინფორმაციის მიღება მიმდინარე კონიუნქტურის შესახებ.

რიგ შემთხვევებში ინფორმაციის მისაღებად უმჯობესია **დაკვირვებათა მეთოდის** გამოყენება. მაგალითად, სასტუმრო ან რეკრეაციულ ბიზნესთან დაკავშირებული მონაცემების მისაღებად შეიძლება უკეთესი იყოს ვაწარმოოთ დაკვირვება და არა თანამშრომელთა გამოკითხვა. უშუალოდ ობიექტებზე საწარმოო გარემოში დაკვირვება უფრო საიმედო მონაცემებს მოგვცემს, ვიდრე დაინტერესებული პერსონალის გამოკითხვა.

როგორც უკვე ავღნიშნეთ, მონაცემთა შეგროვება მათი ანალიზის პროცესის ძალზე მნიშვნელოვანი ნაწილია. მეთოდის არასწორად შერჩევამ ან გამოყენებამ შეიძლება გამოიწვიოს არაადეკვატური ინფორმაციის მიღება და ეჭვქვეშ დააყენოს ანალიზის შედეგები.

რეალობის მეტნაკლებად ადეკვატური ინფორმაციის მიღება შეიძლება უზრუნველყოს მეთოდის გამოყენებამ, რომელიც მათემატიკურ სტატისტიკაში **შერჩევითი მეთოდის** სახელწოდებით არის ცნობილი.

აღნიშნულ მეთოდს საფუძვლად უდევს გენერალური და შერჩევითი ერთობლიობის ცნებები.

გენერალური ერთობლიობის ქვეშ ესმით ერთგვაროვანი ობიექტების მთლიანი გამოსაკვლევი სიმრავლე, ხოლო **შერჩევითი ერთობლიობა** მის ქვესიმრავლეს წამოადგენს, რომელიც შემთხვევით შერჩეული ობიექტებისაგან შედგება.

მეთოდის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ შერჩევითი ერთობლიობის ობიექტების გამოკვლევის გზით გამოტანილ იქნეს გარკვეული დასკვნები გენერალური ერთობლიობის ობიექტებთან მიმართებაში.

გამოკვლევის აუცილებლობა სტატისტიკური მასალის შერჩევის საფუძველზე იმით აიხსნება, რომ მთელი გენერალური ერთობლიობის გამოკვლევა შრომატევადია, დაკავშირებულია სახსრებისა და დროის დიდ დანახარჯებთან, ან პრაქტიკულად შეუძლებელია.

შერჩევას ეწოდება **რეპრეზენტატიული**, თუ ყოველ ობიექტს გენერალური ერთობლიობიდან თანაბარი შესაძლებლობა აქვს მოხვდეს შერჩევაში. თუ შერჩევა რეპრეზენტატიულია, იქმნება იმის საფუძველი, რომ მისი შესწავლა და დასკვნები ახლოს იქნება რეზულტატებთან, რომელსაც მივიღებდით იმ შემთხვევაში, რომ მთელი გენერალური ერთობლიობა გამოგვეკვლია.

იმისათვის, რომ შერჩევა ეფექტურად განხორციელდეს, აუცილებელია სპეციალური ცოდნა და კარგი ინტუიცია შესაბამის დარგში. დაუდევრად შედგენილმა შერჩევამ შეიძლება მცდარ დასკვნებამდე მიგვიყვანოს.

განასხვავებენ სტატისტიკური მონაცემების შერჩევის შემდეგ ხერხებს: მარტივს (შემთხვევითს), მექანიკურს, ტიპიურსა და სერიულს.

თუ დავნომრავთ გენერალური ერთობლიობის ყველა ობიექტს, დავამზადებთ ბარათებს ასეთივე ნომრებით, გულდასმით ავურევთ და შევარჩევთ ბარათების დასტას, შესაბამისი ნომრის გენერალური ერთობლიობის ობიექტები ქმნიან მარტივ შერჩევას.

თუ ობიექტებს გენერალური ერთობლიობიდან გარკვეული ინტერვალებით არჩევენ, ასეთ შერჩევას მექანიკურს უწოდებენ.

როდესაც გენერალურ ერთობლიობას ყოფენ წყვილწყვილად თანაუკვეთ ჯგუფებად და თითოეული ჯგუფიდან ირჩევენ ობიექტებს, ეს არის შერჩევის შედგენის ტიპიური ხერხი.

თუ გენერალური ერთობლიობის წყვილწყვილად თანაუკვეთ ჯგუფებად დაყოფის შემდეგ შემთხვევით ირჩევენ რომელიმე ჯგუფებს, ასეთ შერჩევას სერიულს უწოდებენ.

1.2 განაწილების ცხრილები

ხშირად, ასე ვთქვათ, „ნედლი“, პირველადი ინფორმაციის გასაანალიზებლად მოსახერხებელია მონაცემების გარკვეული ნიშნით დაჯგუფება და მონაცემების ცხრილის სახით წარმოდგენა.

მაგალითი 1.1 ცხრილში 1.1 მოყვანილია ფირმის 40 ტექნიკური მუშაკის საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარებში):

750	410	520	604	810	610	770	690
670	505	370	660	515	860	654	550
446	725	632	720	590	694	424	649
760	535	756	682	330	785	575	835
802	625	437	520	440	584	610	710

ცხრილი 1.1

ასეთ ფორმით წარმოდგენილი მონაცემები მოუხერხებელია გასაანალიზებლად. ამ ტიპის მონაცემთა ასახვის სტანდარტული მეთოდის არსი მდგომარეობს მათი სიხშირეთა განაწილების ცხრილის სახით წარმოდგენაში.

გამარტივების მიზნით მონაცემებს შემდეგნაირად აჯგუფებენ. პირველ ეტაპზე პოულობენ მინიმალურ და მაქსიმალურ მნიშვნელობებს (ჩვენს შემთხვევაში ეს მნიშვნელობებია 330 და 860), რითაც დგინდება მათი ცვლილების მთელი დიაპაზონი.

შემდეგ ამ დიაპაზონს ყოფენ ჯგუფებად ან ინტერვალებად (დაახლოებით 5-10 მეტნაკლებად თანაბარ ჯგუფად, თუმცა კონკრეტულ სიტუაციებში მათი რაოდენობა შეიძლება მეტიც იყოს და ნაკლებიც).

თუ ჩვენს მაგალითში დაჯგუფების ინტერვალის სიგრძედ 100 დოლარს ავიღებთ, სიხშირეთა განაწილების ცხრილი შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ:

საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარი)	300–	400–	500–	600–	700–	800–
მუშაკთა რაოდენობა	2	5	9	12	8	4

ცხრილი 1.2

თუ დავაკვირდებით ინტერვალთა ჩაწერის ფორმას, შევამჩნევთ, რომ ყოველი ინტერვალი მოიცავს მონაცემებს მარცხენა საზღვრის ჩათვლით და ზემოთ, შემდეგი ინტერვალის მარცხენა საზღვრამდე.

მაგალითი 1.2 ცხრილში 1.3 მოყვანილია სამუშაოს გამცდენ თანამშრომელთა რაოდენობა კომპანიაში ბოლო 30 დღის განმავლობაში:

5	0	15	1	23	6	5	18	8	10
2	10	6	0	0	11	2	13	6	3
19	7	12	1	5	16	0	14	4	8

ცხრილი 1.3

დაჯგუფების შემდეგ გამცდენთა რაოდენობის სიხშირეთა განაწილების ცხრილი შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ:

სამუშაოს გამცდენთა რაოდენობა	0 - 4	5 - 9	10 - 14	15 - 19	20 - 24
გაცდენილი დღეების რაოდენობა	10	9	6	4	1

ცხრილი 1.4

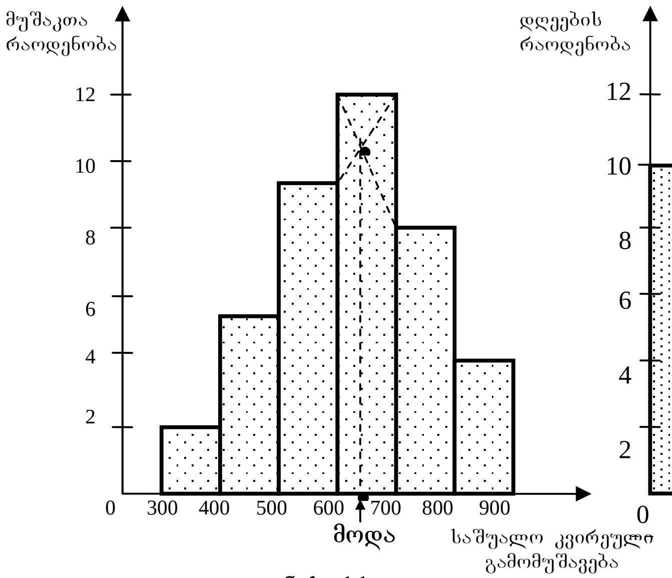
შევნიშნოთ, რომ ამ მაგალითში წინასაგან განსხვავებით მონაცემები დისკრეტული ხასიათისაა (მათ მხოლოდ მთელი მნიშვნელობები შეიძლება ჰქონდეთ). ასეთ შემთხვევებში დაჯგუფების ინტერვალებში შეიძლება ვუჩვენოთ როგორც მარცხენა, ასევე მარჯვენა საზღვრებიც.

1.3 მონაცემთა გრაფიკული ასახვა

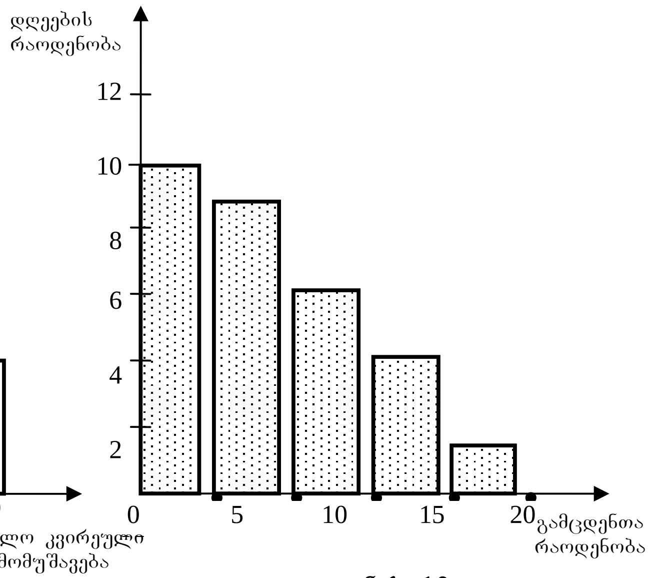
მონაცემთა თვალსაჩინოდ ასახვისა და პირველადი ანალიზის მიზნით ხშირად ცდილობენ მათ გრაფიკულ წარმოდგენას. მოცემულ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ მონაცემთა გრაფიკული ასახვის რამდენიმე მეთოდს, რომელთაც ყველაზე ფართო გავრცელება ჰპოვეს სამეურნეო საქმიანობის ანალიზის პროცესებში.

სიხშირეთა განაწილების ცხრილის ასახვის საუკეთესო საშუალებად მიჩნეულია **ჰისტოგრამა**, რომელიც მათ ცალკე აღებული სვეტების სახით წარმოადგენს.

განაწილებათა 1.2 და 1.4 ცხრილების შესაბამისი ჰისტოგრამები წარმოდგენილია ქვემოთმოყვანილ 1.1 და 1.2 ნახაზებზე:



ნახ. 1.1



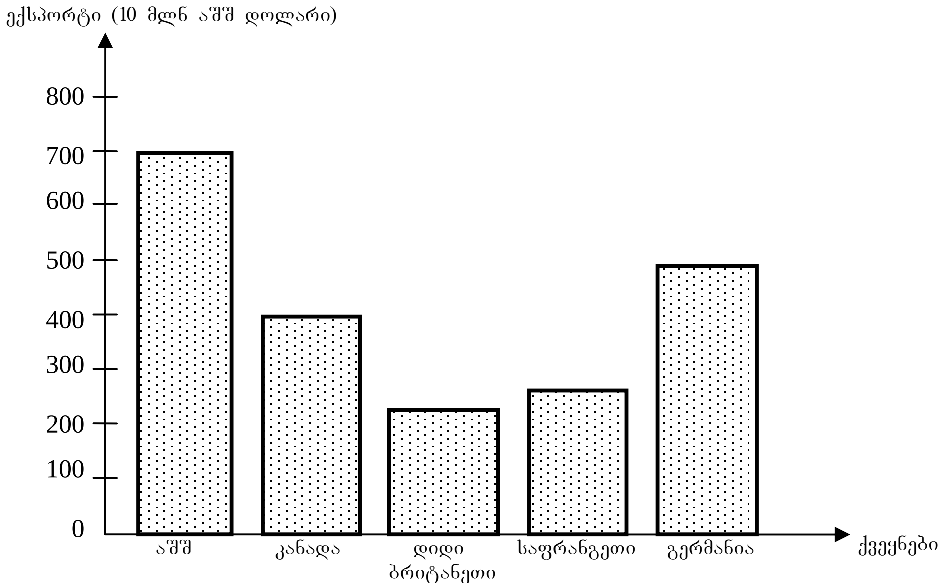
ნახ. 1.2

არარაოდენობრივი ხასიათის ცვლადებთან დაკავშირებული მონაცემების ასახვის მიზნით ხშირად იყენებენ **სვეტურ დიაგრამებსაც**. მაგალითად, ცხრილში 1.5 მოყვანილია რიგი ქვეყნების ექსპორტის მოცულობა ერთი გარკვეული თვისათვის:

ქვეყანა	აშშ	კანადა	დიდი ბრიტანეთი	საფრანგეთი	გერმანია
ექსპორტი (10 მლნ აშშ დოლარი)	700	350	170	210	480

ცხრილი 1.5

ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე ცხრილი 1.5-ით ასახული მონაცემები წარმოდგენილია სვეტური დიაგრამის სახით:



ნახ. 1.3

შევნიშნოთ, რომ სვეტური დიაგრამების სხვადასხვა ნაირსახეობა არსებობს და მათ შეიძლება ჰქონდეს როგორც ვერტიკალური, ასევე ჰორიზონტალური ფორმაც.

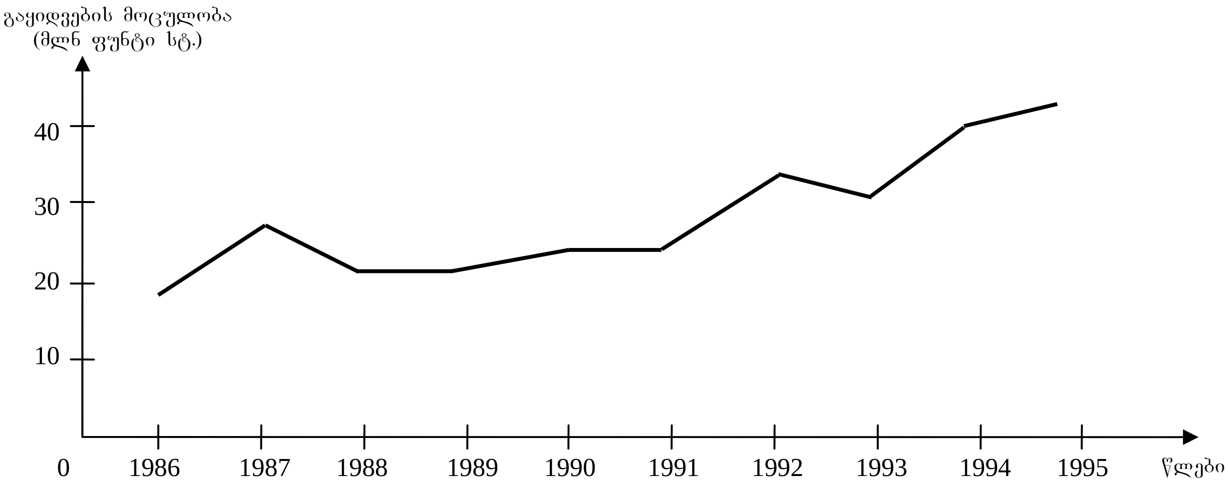
როდესაც საჭიროა მონაცემთა ასახვა დროის გარკვეული პერიოდისათვის, ან ორ ან მეტ მონაცემთა ნაკრების შედარებითი ანალიზი, შეიძლება გამოყენებული იქნეს **წრფივი გრაფიკები** (სხვანაირად მათ **ტეხილ სიხშირეებსაც** უწოდებენ).

მაგალითი 1.3 ცხრილში 1.6 მოყვანილია კომპანიის პროდუქციის გაყიდვების მოცულობა ათწლიანი პერიოდისათვის:

წლები	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
გაყიდვების მოცულობა (მლნ ფუნტი სტ.)	19	25	22	21	23	23	28	26	32	34

ცხრილი 1.6

შესაბამის წრფივ გრაფიკს ექნება სახე:



ნახ. 1.4

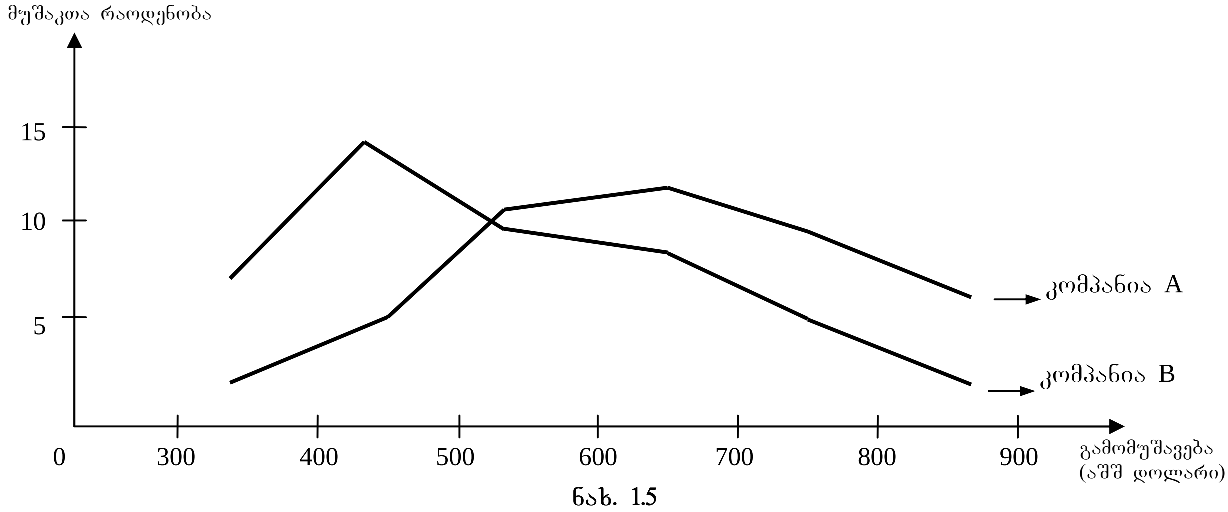
როგორც გრაფიკიდან ჩანს, თუ არ ჩავთვლით ხანმოკლე პერიოდს (1988-1989 წლებს), მთელი ათწლიანი პერიოდის განმავლობაში შეინიშნებოდა გაყიდვების მოცულობის მდგრადი ზრდის ტენდეცია.

მაგალითი 1.4 ცხრილში 1.7 მოყვანილია ორი კომპანიის 40-40 მუშაკის საშუალოკვირეული გამომუშავება:

საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარი)	300-	400-	500-	600-	700-	800-
მუშაკთა რაოდენობა (კომპანია A)	2	5	9	12	8	4
მუშაკთა რაოდენობა (კომპანია B)	7	14	8	7	3	1

ცხრილი 1.7

ცხრილის მონაცემები შეიძლება ავსახოთ ერთ გრაფიკზე:



ნახ. 1.5

როგორც წრფივი გრაფიკებიდან ჩანს, შეიძლება ითქვას, რომ მთლიანობაში A კომპანიის მუშაკთა გამომუშავება უფრო მაღალია ვიდრე B-სი.

მონაცემთა გრაფიკული ასახვის კიდევ ერთ ალტერნატიულ მეთოდს წარმოადგენს **სექტორული დიაგრამა.** მის მთავარ დანიშნულებას შეადგენს ნაწილების ხვედრითი წილების თვალსაჩინო ასახვა მთელთან მიმართებაში.

მაგალითი 1.5 ცხრილში 1.8 წარმოდგენილია გარკვეული ჯგუფის საქონლის წარმოებასთან დაკავშირებული დანახარჯები კომპანიის სხვადასხვა განყოფილებაში:

განყოფილება	საწარმოო	გასაღების	მარკეტინ-გული	კვლევითი	მატერიალურ-ტექნიკური უზრუნველყოფის
დანახარჯები (მლნ აშშ დოლარი)	17	9	3	5	2

ცხრილი 1.8

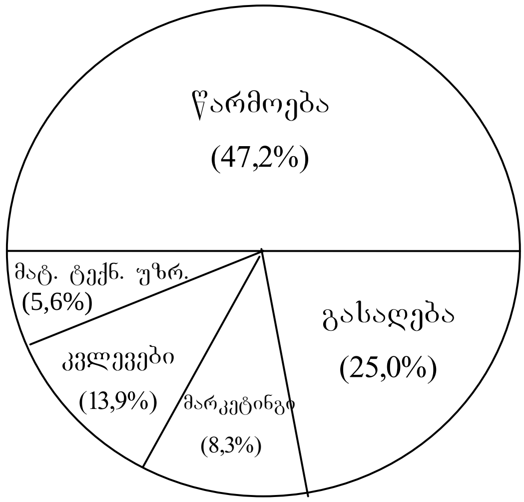
სვეტური დიაგრამის ასაგებად თავდაპირველად დავადგინოთ პროპორციულობის კოეფიციენტის მნიშვნელობა:

$$k = \frac{360}{17+9+3+5+2} = \frac{360}{36} = 10$$

ამგვარად, თითოეული განყოფილების ხვედრითი წილები დიაგრამაზე უნდა გამოისახოს შესაბამისად 170, 90, 30, 50 და 20 გრადუსიანი სექტორებით. ამ მნიშვნელობებს პროცენტული ინტერპრეტაციაც შეიძლება მივცეთ:

$$\frac{170}{360}\cdot 100 \approx 47,2\%;$$
$$\frac{90}{360}\cdot 100 \approx 25\%;$$
$$\frac{30}{360}\cdot 100 \approx 8,3\%;$$
$$\frac{50}{360}\cdot 100 \approx 13,9\%;$$
$$\frac{20}{360}\cdot 100 \approx 5,6\%.$$

ამგვარად, ცხრილი 1.8-ის მონაცემები სექტორულ დიაგრამაზე შემდეგნაირად აისახება:



ნახ. 1.6

დიაგრამიდან ნათლად ჩანს, რომ მთლიანი დანახარჯების თითქმის ნახევარი საწარმოო განყოფილებაზე მოდის.

1.4 საშუალო მნიშვნელობები

საშუალო – ეს არის სტატისტიკური მაჩვენებელი, რომელიც წარმოდგენას გვაძლევს ყველაზე „ტიპიურ“ (ანდა, შეიძლება ითქვას, „ცენტრალურ“) მნიშვნელობაზე მონაცემთა ცვლილების მთელი დიაპაზონიდან. მაგალითად, ამა თუ იმ ფორმით ხშირი გამოყენება აქვს ისეთ ტერმინებს, როგორიცაა საშუალო ხელფასი, გამოშვების საშუალო მოცულობა, სამუშაო კვირის საშუალო ხანგრძლივობა, გაყიდვების საშუალო მოცულობა და ა. შ.

მოცემულ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ საშუალო მნიშვნელობის გამოთვლის პრაქტიკაში ყველაზე გავრცელებულ რამდენიმე მეთოდს, რომლებიც ხშირად განსხვავებულ რეზულტატებს იძლევა.

მონაცემთა **საშუალო არითმეტიკული**, ანდა უბრალოდ საშუალო, მიიღება ყველა მნიშვნელობის ჯამის მათ რაოდენობაზე გაყოფის გზით:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1.1}$$

საშუალო არითმეტიკულის პრაქტიკაში ყველაზე ხშირი გამოყენება აქვს. ამ მაჩვენებლის მთავარი ღირსება მისი გამოთვლის სიმარტივეში მდგომარეობს.

საშუალო არითმეტიკულის გარკვეულ განზოგადოებას წარმოადგენს ე. წ. „შეწონილი“ საშუალო. იგი შეიძლება გამოვიყენოთ მაშინ, როდესაც რიგი მონაცემები რამდენჯერმე მეორდება. განსხვავებულ მნიშვნელობათა წონითი კოეფიციენტების როლში გამოდის მათი სიხშირეები მონაცემთა ერთობლიობაში:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} \tag{1.2}$$

ალბათ გასაგებია, რომ ამ უკანასკნელში $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

მაგალითი 1.6 ცხრილში 1.9 ფირმის თანამშრომელთა სამუშაოზე არგამოცხადების მონაცემები ოცდღიანი პერიოდისათვის:

გამცდენთა რაოდენობა	1	2	3	4	5
გაცდენილი დღეების რაოდენობა	4	7	5	2	2

ცხრილი 1.9

(1.2)-ის თანახმად, ფირმაში დღიური არგამოცხადების შეწონილი საშუალო მაჩვენებლისათვის ვღებულობთ შემდეგ მნიშვნელობას:

$$\bar{x} = \frac{4\cdot1+7\cdot2+5\cdot3+2\cdot4+2\cdot5}{20} = 2,55$$

რამდენადმე განსხვავებულად ითვლიან შეწონილ საშუალოს არადისკრეტული ხასიათის მონაცემებისათვის. ამ დროს შესაწონ სიდიდეებად იღებენ დაჯგუფების ინტერვალთა შუა მნიშვნელობებს. მაგალითად, ცხრილი 1.2-ის მონაცემების საფუძველზე ფირმის მუშაკთა შეწონილი საშუალოკვირეული გამომუშავება შემდეგნაირად შეიძლება გამოვთვალოთ:

$$\bar{x} = \frac{2\cdot350+5\cdot450+9\cdot550+12\cdot650+8\cdot750+4\cdot850}{40} = 627,5$$

საშუალო მნიშვნელობები შეიძლება გამოვიყენოთ მონაცემთა ორი ან მეტი ნაკრების შედარებისას. თუმცა, უნდა შევნიშნოთ, რომ ექსტრემალურმა მონაცემებმა ისინი საგრძნობლად შეიძლება შეცვალოს. ამიტომ მათი გამოყენებისას საჭიროა გარკვეული სიფრთხილის გამოჩენა. მსგავს სიტუაციებში ხშირად ამ ტიპის მონაცემებს უგულველყოფენ, რაც, როგორც წესი, მიღებული მნიშვნელობის ობიექტურობის ხარისხს ამაღლებს.

ხშირად უფრო რეპრეზენტატულ და სარწმუნო საშუალოდ მიიჩნევენ **მოდას**, რომელიც მიიღება იმ მნიშვნელობის დადგენის გზით, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება მონაცემთა ნაკრებში.

ცხადია, დისკრეტული მონაცემებისთვის მოდის განსაზღვრა ძალზე იოლია (მაგალითად, ცხრილი 1.9-დან ნათლად ჩანს, რომ მოდის მნიშვნელობა 2-ის ტოლია), მაგრამ თუ განაწილების სიხშირეთა ცხრილი შეიცავს დაჯგუფების ინტერვალებს, ეს პროცესი უფრო რთულდება, ისევე როგორც შეწონილი საშუალოს გამოთვლის შემთხვევაში. კერძოდ, მონაცემების ინტერვალებად დაჯგუფების პროცესში პირველადი ინფორმაციის მნიშვნელოვანი ნაწილი შეიძლება დაიკარგოს. ასე მაგალითად, თუ ცხრილი 1.1-ის მონაცემებში რიცხვითი მნიშვნელობა 300 შეგვხვდებოდა ორჯერ, ხოლო სხვა არცერთი მნიშვნელობა არ განმეორდებოდა, მოდად 300 უნდა აგვერჩია, რაც, ცხადია, შორს იქნებოდა რეალობიდან.

როგორც ცხრილი 1.2-დან ჩანს, ყველაზე მეტი მონაცემი ხვდება 600-700 ინტერვალში და მოდად ამ ინტერვალის შუა მნიშვნელობა - 650 შეიძლება ავიღოთ, თუმცა, უფრო მისაღები მნიშვნელობის მისაღებად უმჯობესია ჰისტოგრამის გამოყენება იმ სქემის მიხედვით, როგორც ეს ნახ. 1.1-ზე არის ნაჩვენები.

საშუალოს განსაზღვრის კიდევ ერთ ხერხს **მედიანის** განსაზღვრა წარმოადგენს, რომელიც მიიღება „ცენტრალური“ მნიშვნელობის გამოვლენის გზით მას შემდეგ, რაც მოვახდენთ მონაცემების რანჟირებას (ზრდადობის ან კლებადობის მიხედვით).

განმარტების თანახმად მედიანა – ეს არის მნიშვნელობა, რომელიც მონაცემთა ერთობლიობას ორ ტოლ ნაწილად ყოფს (რაოდენობის შესაბამისად):

$$\bar{x} = \begin{cases} x_{m+1}, & n = 2m+1 \\ \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}, & n = 2m \end{cases} \tag{1.3}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ მეორე შემთხვევაში (როდესაც მონაცემთა რაოდენობა ლუწია) მედიანის მნიშვნელობა შეიძლება არ შედიოდეს მონაცემთა ნაკრებში.

მაგალითი 1.7 განვსაზღვროთ მედიანის მნიშვნელობა ცხრილი 1.6-ით წარმოდგენილი მონაცემებისათვის.

თავდაპირველად მოვახდინოთ მონაცემების რანჟირება, ვთქვათ, ზრდადობის შესაბამისად:

19, 21, 22, 23, 23, 25, 26, 28, 32, 34

(1.3)-ის თანახმად მედიანის მნიშვნელობისათვის მივიღებთ:

$$\bar{x} = \frac{x_5 + x_6}{2} = 24$$

იმისათვის, რომ მედიანის გამოთვლა არადისკრეტული ხასიათის მონაცემებზეც გავავრცელოთ, დაგვჭირდება დაგროვილი სიხშირისა და მასთან დაკავშირებული განაწილების ინტეგრალური მრუდის (რომელიც მის გრაფიკულ ასახვას წარმოადგენს) ცნებები.

მონაცემის **დაგროვილი (კუმულიატური) სიხშირე** განისაზღვრება მასზე ნაკლები მნიშვნელობების რაოდენობის დადგენის გზით მონაცემთა ნაკრებში.

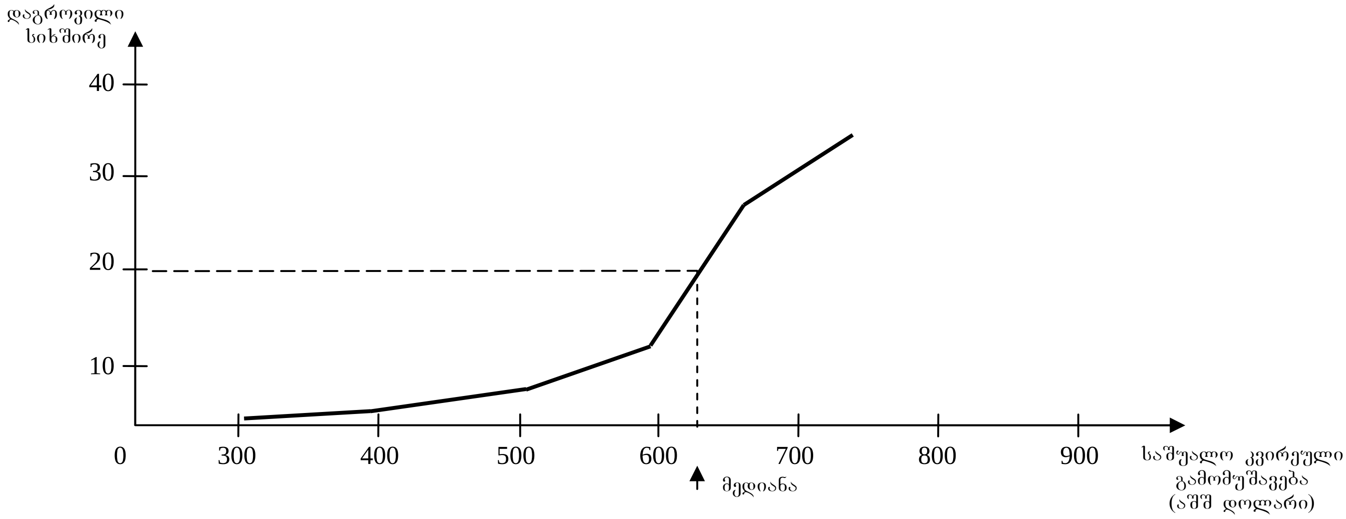
ცხრილში 1.1 მოყვანილია ცხრილი 1.2-ის შესაბამისი მონაცემების დაგროვილი სიხშირეები:

საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარი)	300	400	500	600	700	800	900
დაგროვილი სიხშირეები	0	2	7	16	28	36	40

ცხრილი 1.10

მაგალითად, 500-ის შესაბამისი დაგროვილი სიხშირე შეადგენს 7-ს, რადგანაც, როგორც ეს ცხრილი 1.1-დან ჩანს 40 მუშაკიდან 7-ის საშუალოკვირეული გამოშვება 500 დოლარზე ნაკლებია.

ნახ. 1.9-ზე წარმოდგენილია ცხრილი 1.10-ის შესაბამისი განაწილების ინტეგრალური მრუდი:



ნახ. 1.7

საერთოდ, მედიანის რიგით ნომერს განსაზღვრავს *(n+1)/2* -ის მნიშვნელობა. როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, როდესაც *n* კენტია, მედიანის რიგითი ნომერი ბუნებრივად განისაზღვრება და მისი შესაბამისი მნიშვნელობა მონაცემთა ნაკრებში შედის. ჩვენს შემთხვევაში *n* ლუწია და მედიანის რიგით ნომრად პირობითად შეიძლება მივიჩნიოთ არანატურალური $\frac{40+1}{2}=20,5$ მნიშვნელობა.

გრაფიკიდან ჩანს, რომ აღნიშნულ მნიშვნელობას ჰორიზონტალურ ღერძზე დაახლოებით 640 შეესაბამება.

ამგვარად, შეიძლება ითქვას, რომ საშუალოკვირეული გამომუშავების „ცენტრალურ“ მნიშვნელობას (ანუ მედიანას) 640 დოლარი შეადგენს, რაც იმას ნიშნავს, რომ საშუალოდ ფირმის მუშაკთა ნახევარი მასზე ნაკლებს, ხოლო მეორე ნახევარი – მასზე მეტს გამოიმუშავებს კვირაში.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ასიმეტრიული განაწილებების შემთხვევაში მედიანა, როგორც მონაცემთა ცენტრალური მნიშვნელობა, უფრო რეპრეზენტატიული და სარწმუნოა საშუალო არითმეტიკულთან და მოდასთან შედარებით.

1.5 მონაცემთა ვარიაციის ზომები

საშუალოები, რომლებიც წინა პარაგრაფში განვიხილეთ, მონაცემთა ნაკრების მნიშვნელოვან სტატისტიკურ მახასიათებელს წარმოადგენს, მაგრამ ხშირად მხოლოდ მათი საშუალებით ვერ ხერხდება სხვადასხვა განაწილებათა სრულყოფილი შედარება. ამის გამო მიზანშეწონილია მონაცემთა ვარიაციის (გაბნევის) გარკვეული ზომის შემოღება.

ვარიაციის უმარტივეს ზომას წარმოადგენს **გაბნევის დიაპაზონი**, რომელიც მონაცემთა ნაკრების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობის სხვაობის ტოლია.

ამ ზომის უარყოფით მხარეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ იგი ძალზე მგრძნობიარეა ცალკეული ექსტრემალური მნიშვნელობების მიმართ, რის გამოც მსგავს შემთხვევებში მონაცემთა სხვადასხვა ნაკრების შედარების შედეგები ნაკლებად სარწმუნოდ უნდა ჩაითვალოს.

მაგალითი 1.8. ცხრილში 1.11 მოყვანილია ორი კომპანიის 100-100 მუშაკის საშუალოკვირეული გამომუშავების მონაცემები:

საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარი)	200-	300-	400-	500-	600-	700-	800-	900-
მუშაკთა რაოდენობა (კომპანია A)	25	38	23	13	0	0	0	1
მუშაკთა რაოდენობა (კომპანია B)	25	38	23	14	0	0	0	0

ცხრილი 1.11

როგორც ვხედავთ, გაბნევის დიაპაზონი *A* კომპანიაში (1000-200=800) ორჯერ მეტია ვიდრე *B*-ში (600-200=400), მაგრამ ამ განსხვავებას განაპირობებს *A* კომპანიის ერთადერთი მუშაკის 900-1000 ინტერვალის ფარგლებში გამომუშავება *B* კომპანიის ასევე ერთ მუშაკთან შედარებით, რომლის გამომუშავება 500-600 ინტერვალის ფარგლებშია.

ამგვარად, ერთი ექსტრემალური მნიშვნელობის გამო მონაცემების შედარების შედეგები შეიძლება მისაღები არ აღმოჩნდეს.

გაბნევის დიაპაზონის აღნიშნული ნაკლის გამო მსგავს სიტუაციებში უფრო მისაღებია **კვარტილებშორისი დიაპაზონის** გამოყენება, რომელიც მიიღება მონაცემთა ნაკრებიდან 25% უდიდესი და 25% უმცირესი მნიშვნელობების გამორიცხვის გზით.

ასე რომ, ეს დიაპაზონი მოიცავს მონაცემთა ნაკრების 50 % ცენტრალურ მნიშვნელობას. მისი საზღვრების ისევე შეიძლება დავადგინოთ, როგორც ამას მედიანის განსაზღვრის დროს ვაკეთებდით. კერძოდ, მცირე (Q_1) და დიდ (Q_3) კვარტილებს, შესაბამისად, ექნებათ $\frac{n+1}{4}$ და $\frac{3}{4}(n+1)$ რიგითი ნომრები, ხოლო კვარტლიებშორისი დიაპაზონის მნიშვნელობა იქნება Q_3-Q_1 სხვაობა.

მაგალითი 1.9 ცხრილში 1.12 მოყვანილია სასაქონლო მარაგების მოცულობები ფირმაში ბოლო 100 დღის განმავლობაში:

სასაქონლო მარაგები	3	4	5	6	7	8	9	10
დღეების რაოდენობა	4	12	22	20	16	12	8	6

ცხრილი 1.12

ჩვენს შემთხვევაში n=100, ამიტომ მცირე კვარტილის რიგითი ნომერი იქნება $\frac{100+1}{4}=25\frac{1}{4}$. როგორც ცხრილიდან ჩანს, რიგით 25-ე და 26-ე მონაცემების მნიშვნელობები ერთიდაიგივეა და 5-ის ტოლია, ამიტომ Q_1=5.

ანალოგიურად, დიდი კვარტილის რიგითი ნომერი იქნება $\frac{3}{4}(100+1)=75\frac{3}{4}$, 75-ე და 76-ე მონაცემების მნიშვნელობები კი შეადგენს 8-ს, ე. ი. Q_3=8.

ამგვარად, მოცემულ მაგალითში კვარტილებშორისი დიაპაზონის მნიშვნელობისათვის ვღებულობთ 8-5=3.

მაგალითი 1.10 ცხრილში 1.13 წარმოდგენილია კომპანიის 155 მუშაკის საშუალოკვირეული გამოშვება:

საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარი)	300-	400-	500-	600-	700-	800-
მუშაკთა რაოდენობა	28	47	49	17	9	5

ცხრილი 1.13

მცირე და დიდი კვარტილების რიგითი ნომრებისათვის შესაბამისად ვღებულობთ:

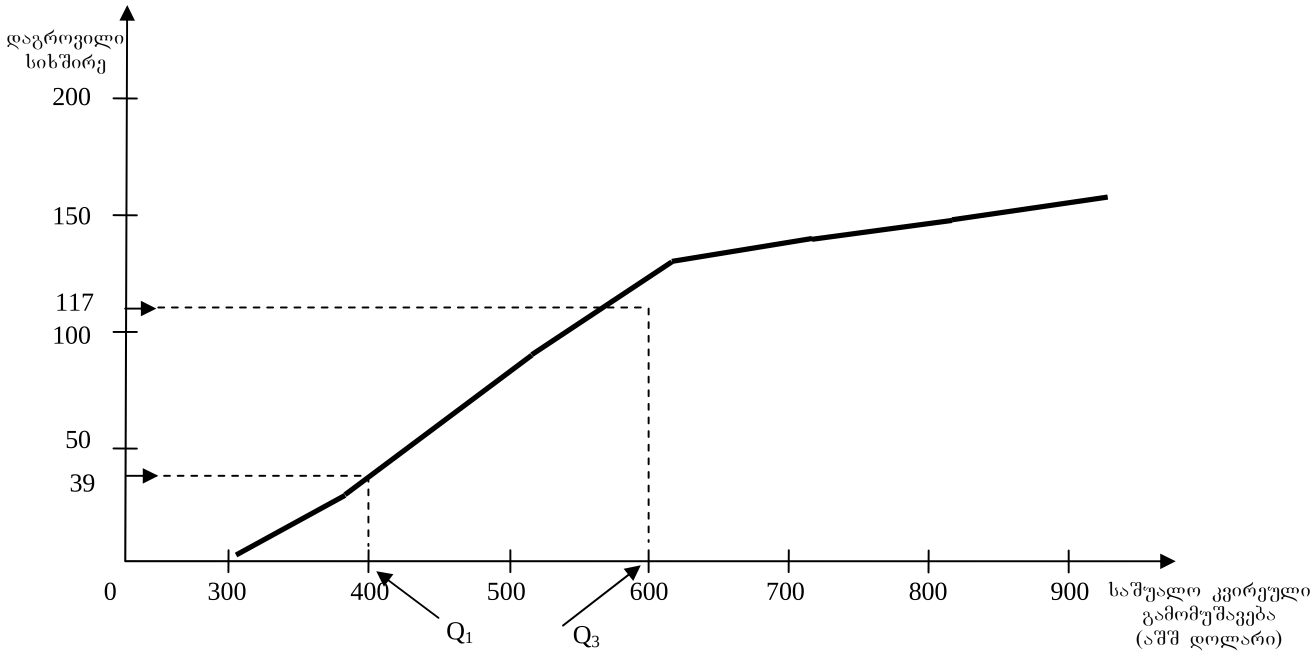
$$\frac{155+1}{4}=39;$$
$$\frac{3}{4}(155+1)=117$$

ამ ნომრების შესაბამისი მნიშვნელობები შეიძლება განვსაზღვროთ 1.9 ნახაზით წარმოდგენილი სქემის ანალოგიურად, რისთვისაც ჯერ ვადგენთ დაგროვილი სიხშირეების ცხრილს:

საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარი)	300	400	500	600	700	800	900
დაგროვილი სიხშირეები	0	28	75	124	141	150	155

ცხრილი 1.14

ვაგებთ შესაბამის გრაფიკს:



ნახ. 1.8

როგორც გრაფიკიდან ჩანს, Q_1=425, ხოლო Q_3=585, რაც იმას ნიშნავს, რომ კვარტილებშორისი დიაპაზონის მნიშვნელობა 585-425=160-ს შეადგენს.

ვარიაციის ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან მახასიათებელს წარმოადგენს **საშუალოკვადრატული გადახრა**, რომელსაც, ჩვეულებრივ s-ით ან σ-თი აღნიშნავენ და შემდეგი ფორმულით იანგარიშება:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}} \qquad (1.4)$$

სიხშირეთა განაწილების ცხრილის მონაცემების საფუძველზე საშუალოკვადრატული გადახრა შეიძლება შემდეგი ალტერნატიული ფორმულებითაც გამოვთვალოთ:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-x)^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i x_i^2}{n}-(\overline{x})^2} \qquad (1.5)$$

მაგალითი 1.11 გამოვთვალოთ საშუალოკვადრატული გადახრის მნიშვნელობა მონაცემთა შემდეგი ნაკრებისათვის:

2, 3, 5, 1, 0, 1, 7, 4, 2, 5

თავდაპირველად ვიპოვოთ საშუალო არითმეტიკული:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{30}{10}=3$$

ამის შემდეგ განვსაზღვროთ $x_i - \overline{x}$ და $(x_i - \overline{x})^2, i = \overline{1,10}$:

-1,	0,	2,	-2,	-3,	-2,	4,	1,	-1,	2,
1,	0,	4,	4,	9,	4,	16,	1,	1,	4

ცხრილი 1.15

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ ჯამის მნიშვნელობა შეადგენს 44-ს და (1.4)-ის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{44}{10}} = \sqrt{4,4} \approx 2,1$$

მაგალითი 1.12 გამოვიანგარიშოთ ცხრილი 1.12 მონაცემების შესაბამისი საშუალოკვადრატული გადახრის მნიშვნელობა.

ამ მიზნით შუალედური გამოთვლების შედეგები მოსახერხებელია შემდეგი ცხრილის სახით წარმოვადგინოთ:

x_i	n_i	$n_i x_i$	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$	$n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2$
3	4	12	-3,3	10,89	43,56
4	12	48	-2,3	5,29	63,48
5	22	110	-1,3	1,69	37,18
6	20	120	-0,3	0,09	1,80
7	16	112	0,7	0,49	7,84
8	12	96	1,7	2,89	34,68
9	8	72	2,7	7,29	58,32
10	6	60	3,7	13,69	82,14
Σ	*100*	630			329

(1.5) ფორმულის პირველი ვარიანტის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{329}{100}} = \sqrt{3,29} \approx 1,81$$

(ალბათ ადვილი მისახვედრია, რომ გამოთვლებში $\overline{x}$ -ის მნიშვნელობა 6,3 მიღებულია 1.2 ფორმულის გამოყენებით).

ჩვეულებრივ, (1.5) ფორმულის მეორე ვარიანტის გამოყენებას უფრო მოსახერხებლად მიიჩნევენ, რაშიც იოლად დავრწმუნდებით, თუ თავდაპირველად შევადგენთ შემდეგ ცხრილს:

x_i	n_i	$n_i\, x_i$	$n_i\, x_i^2$
3	4	12	36
4	12	48	192
5	22	110	550
6	20	120	720
7	16	112	784
8	12	96	768
9	8	72	648
10	6	60	600
Σ	100	630	4298

ცხრილი 1.16

(1.5) ფორმულის მეორე ვარიანტის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{4298}{100} - (6,3)^2} = \sqrt{42,98 - 39,29} = \sqrt{3,29} \approx 1,81$$

ზოგჯერ ანალიზის პროცესში საშუალოკვადრატული გადახრის ნაცვლად იყენებენ **დისპერსიას,** რომელიც, უბრალოდ, ამ უკანასკნელის კვადრატს წარმოადგენს:

$$D = \sigma^2 \qquad (1.6)$$

როდესაც განიხილავენ განაწილებებს, რომლებშიც მონაცემები არსებითად განსხვავდება საშუალო მნიშვნელობისაგან, იყენებენ ვარიაციის განსაკუთრებულ მაჩვენებელს – **ვარიაციის კოეფიციენტს**, როგორც გაბნევის შეფარედებით ზომას. იგი მიიღება საშუალოკვადრატული გადახრის საშუალო მნიშვნელობაზე გაყოფის გზით და როგორც წესი, პროცენტული ინტერპრეტაციით წარმოადგენენ:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 \qquad (1.7)$$

შევნიშნოთ, რომ ვარიაციის კოეფიციენტი უგანზომილებო სიდიდეა და არ არის დამოკიდებული გაზომვის ერთეულზე.

კვარტილებთან ერთად, რომელიც ზემოთ განვიხილეთ, მონაცემთა შედარებითი ანალიზის პროცესში ე. წ. „**პროცენტილებსაც**“ იყენებენ.

ამ დროს თავდაპირველად დაჯგუფებულ ინტერვალებში მოხვედრილ მონაცემთა რაოდენობას პროცენტულად გამოსახავენ (მათ პროცენტული სიხშირეებიც შეიძლება ვუწოდოთ). ამის შემდეგ აგებენ განაწილების ინტეგრალურ მრუდს და მე-n პროცენტილს განსაზღვრავენ გრაფიკულად. კერძოდ, ეს უნდა იყოს ისეთი მნიშვნელობა მონაცემთა დიაპაზონიდან (იგი შეიძლება არ ემთხვეოდეს რომელიმე

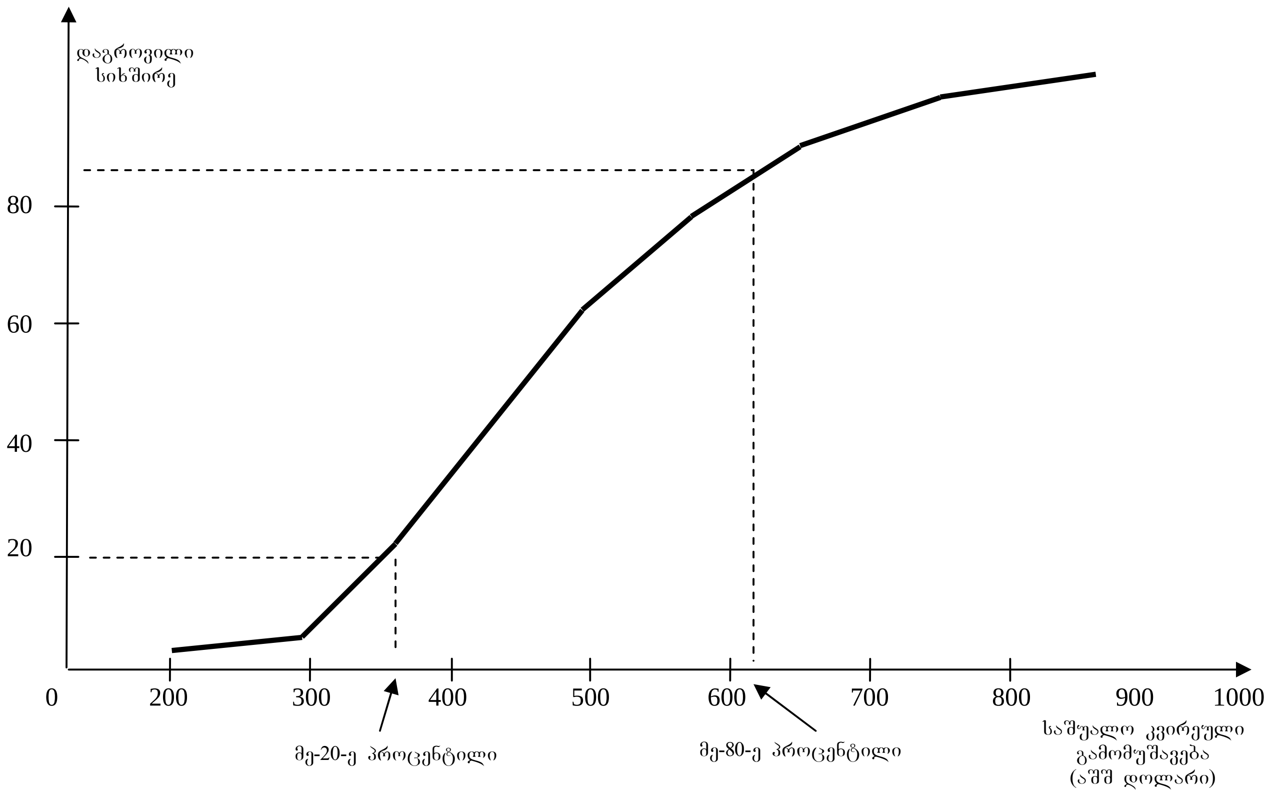
კონკრეტულ მონაცემს), რომ მონაცემთა მთლიანი რაოდენობის *n* %-ის შესაბამისი რიცხვითი მნიშვნელობები მასზე ნაკლები აღმოჩნდეს.

მაგალითი 1.13 ცხრილში 1.17 მოყვანილია მსხვილი კომპანიის თანამშრომელთა საშუალოკვირეული გამომუშავების პროცენტული განაწილება:

საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარი)	200-	300-	400-	500-	600-	700-	800-	900-
თანამშრომელთა % ასეთი გამომუშავებით	5	20	30	19	14	7	4	1

ცხრილი 1.17

პროცენტილების განსაზღვრის მიზნით ავაგოთ შესაბამისი განაწილების ინტეგრალური მრუდი:



ნახ. 1.9

როგორც ნახაზიდან ჩანს, მე-20 და მე-80 პროცენტილის მნიშვნელობები, შესაბამისად, 375-ს და 645-ს შეადგენს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ფირმის თანამშრომელთა 20-20% საშუალოდ კვირაში 375 დოლარზე ნაკლებს და 645 დოლარზე მეტს გამოიმუშავებს.

ჩვენ ზემოთ უკვე ავღნიშნეთ, რომ სხვადასხვა სახის საშუალოები ერთმანეთისაგან საგრძნობლად შეიძლება განსხვავდებოდნენ. დადებითი

ასიმეტრიული განაწილების შემთხვევაში შლეიფის სიგრძე განაწილების მარჯვენა მხარეში უფრო გრძელია და ამ დროს საშუალო არითმეტიკული აღემატება მოდის მნიშვნელობას, ხოლო უარყოფითი ასიმეტრიული განაწილების შემთხვევაში – პირიქით.

განაწილების აღნიშნულ თვისებებს ახასიათებენ ასიმეტრიულობის შემდეგი მაჩვენებლით:

$$A_s = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma} \tag{1.8}$$

სადაც $\bar{x}$-ით, M_0 – ით და σ-თი შესაბამისად, აღნიშნულია განაწილების საშუალო არითმეტიკულის, მოდისა და საშუალო კვადრატული გადახრის მნიშვნელობები. სიმეტრიული განაწილების შემთხვევაში ამ მაჩვენებლის მნიშვნელობა ნულის ტოლია, ხოლო დადებითი და უარყოფითი ასიმეტრიული განაწილებების შემთხვევებში, შესაბამისად, დადებით და უარყოფით მნიშვნელობებს იღებს.

სავარჯიშოები:

1. ცხრილში მოყვანილია გაზეთის მკითხველთა რაოდენობის მონაცემები დროის ორმოცდაათდღიანი პერიოდისათვის (ათასი მკითხველი):

121	102	132	142	139	114	136	142	156	145
135	140	148	117	125	134	120	137	107	134
110	150	94	135	144	111	145	128	133	146
137	127	146	154	136	105	138	153	143	124
123	145	114	130	125	149	128	133	118	136

ა. შეადგინეთ განაწილებათა სიხშირის ციკლი;
ბ. ააგეთ შესაბამისი ჰისტოგრამა.

2. წრფივი გრაფიკების მეშვეობით შეადარეთ ორი *A* და *B* ფორმის ყოველკვირეული გაყიდვების მოცულობები უკანასკნელი 100 კვირის განმავლობაში:

გაყიდვების მოცულობა (ათასი აშშ დოლარი)	20-	25-	30-	35-	40-	45-	50-
კვირათა რაოდენობა (ფორმა *A*)	15	26	19	15	11	9	5
კვირათა რაოდენობა (ფორმა *B*)	10	22	25	22	10	7	4

3. ასახეთ სექტორული დიაგრამის საშუალებით კომპანიის გაყიდვების მოცულობები მსოფლიო ბაზრებზე 2000 წლისთვის:

რეგიონი	ევროპა	ავსტრალია	აზია	ჩრდ. ამერიკა	სამხ. ამერიკა	აფრიკა
გაყიდვების მოცულობა (მლნ აშშ დოლარი)	70	25	40	130	20	15

4. ცხრილში მოყვანილია სამუშაოს გაცდენის მონაცემები ფირმაში 60 დღის განმავლობაში:

გამცდენთა რაოდენობა	0	1	2	3	4	5	6
შესაბამისი დღეების რაოდენობა	12	16	11	6	8	3	4

განსაზღვრეთ მონაცემთა საშუალო არითმეტიკული, მედიანა და მოდა. თქვენის აზრით რომელი საშუალო უფრო მისაღებია მოცემულ შემთხვევაში?

5. გამოვთვალოთ საშუალო არითმეტიკული, მედიანა და მოდა სიხშირეთა განაწილების შემდეგი ცხრილის მონაცემების საფუძველზე:

საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარი)	200-	300-	400-	500-	600-
მუშაკთა რაოდენობა	4	7	6	5	3

6. გამოთვალეთ გაბნევისა და კვარტილებშორისი დიაპაზონები მონაცემთა შემდეგი ნაკრებისათვის:

10, 4, 7, 12, 3, 2, 15, 8, 9, 6, 7, 4, 10, 30, 9, 8, 13, 10, 16

7. ცხრილში მოყვანილია ფირმის 50 მუშაკის საშუალოკვირეული გამომუშავების მონაცემები:

საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარი)	300-	400-	500-	600-	700-
მუშაკთა რაოდენობა	5	20	15	7	3

განსაზღვრეთ საშუალო გამომუშავების მედიანა და კვარტილებშორისი დიაპაზონი მოცემულ ფირმაში.

8. ცხრილში მოყვანილია მსხვილი კომპანიის მუშაკთა საათობრივი ანაზღაურების მონაცემები:

საათობრივი ანაზღაურება (აშშ დოლარი)	3,00-	4,00-	5,00-	6,00-	7,00-	8,00-	9,00
მუშაკთა % ასეთი ანაზღაურებით	20	34	30	10	4	1	1

გამოთვალეთ 30-ე და 70-ე პროცენტილების მნიშვნელობები.

9. იპოვეთ და შეადარეთ ერთმანეთს შემდეგი მონაცემების მედიანისა და კვარტილებშორისი დიაპაზონის მნიშვნელობები:

საშუალოკვირეული გამომუშავება (აშშ დოლარი)	200-	300-	400-	500-	600-	700-	800-	900-
მუშაკთა რაოდენობა (ფორმა A)	25	38	23	14	0	0	0	0
მუშაკთა რაოდენობა (ფორმა B)	18	22	24	17	10	5	3	1

თავი 2. ინდექსები

უკანასკნელ ხანებში ინდექსები სულ უფრო ფართოდ გამოიყენება მენეჯერულ საქმიანობაში. მათი მთავარი დანიშნულება მდგომარეობს ამა თუ იმ მაჩვენებლის რიცხვითი მნიშვნელობების ცვლილებათა ასახვაში. ინდექსები ავსებს სხვადასხვა ეკონომიკურ თუ ფინანსურ მონაცემებს, რომელთა ღრმა და ყოველმხრივი ანალიზის გარეშე ძნელად წარმოსადგენოა ეფექტური მენეჯერული გადაწყვეტილებების გამომუშავება.

2.1 მარტივი ინდექსები

მარტივი ინდექსი გვიჩვენებს რაიმე მაჩვენებლის მნიშვნელობის პროცენტულ ცვლილებას დროის გარკვეული პერიოდის განმავლობაში. აღნიშნული პერიოდის დასაწყისს **საბაზისო მომენტი**, ხოლო შესაბამის მნიშვნელობას, **საბაზისო მნიშვნელობა** ეწოდება.

განმარტებიდან გამომდინარე მარტივი ინდექსი დროის მიმდინარე k მომენტისათვის შეიძლება ვიანგარიშოთ შემდეგი ფორმულით:

$$I=\frac{a_k}{a_0}\cdot 100 \qquad (2.1)$$

სადაც a_0 და a_k , შესაბამისად, მაჩვენებლის საბაზისო და მიმდინარე მნიშვნელობებია.

მაგალითი 2.1. ცხრილში 1. მოყვანილია მთლიანი შიდა პროდუქტის (მ შ პ-ს) ცვლილების დინამიკა საქართველოში ერთ სულ მოსახლეზე გადაანგარიშებით 1996-2001 წლებისათვის:

წელი	1996	1997	1998	1999	2000	2001
მშპ ერთ სულზე (ლარი)	1069	1463	1765	2157	2239	2367

ცხრილი 2.1

თუ საბაზისო მომენტად ავიღებთ 1996 წელს, მაგალითად, 1998 წლისთვის, მაშინ (2.1)-ის თანახმად მშპ-ს მარტივი ინდექსის მნიშვნელობა იქნება

$$\frac{1765}{1069}\cdot 100 = 165{,}1\%$$

მაშასადამე, მ შ პ ერთ მოსახლეზე 1998 წელს 65,1%-ით გაიზარდა საბაზისო 1996 წელთან შედარებით.

ანალოგიურად შეიძლება გამოვთვალოთ მშპ-ს ინდექსები სხვა წლებისთვისაც. გაანგარიშების შედეეგები მოყვანილია ცხრილში 2.2:

წელი	1996	1997	1998	1999	2000	2001
მ შ პ-ს მარტივი ინდექსი	100,0	136,9	165,1	201,8	209,4	221,4

ცხრილი 2.2

2.2 ინდექსები ცვლადი ბაზისით

წინა პარაგრაფში ინდექსის გამოთვლისას ყოველი მნიშვნელობის შედარება ხდებოდა საბაზისო მომენტის ერთი და იგივე მნიშვნელობასთან, რის გამოც ამ ინდექსს უწოდებენ ინდექსს მუდმივი ბაზისით.

როდესაც მნიშვნელობებს ვადარებთ წინა მომენტისას, ვღებულობთ, ინდექსს **ცვლადი (ჯაჭვური) ბაზისით**:

$$I=\frac{a_k}{a_{k-1}}\cdot 100 \qquad (2.2)$$

მაგალითი 2.2 განვიხილოთ ცხრილი 2.3, რომელშიც წარმოდგენილია ფირმის მომუშავეთა საშუალოთვიური გამომუშავება 2003-2006 წლებისათვის:

წელი	2003	2004	2005	2006
საშუალოთვიური გამომუშავება (ლარი)	420	438	446	450

ცხრილი 2.3

თუ საბაზისო მომენტად ავიღებთ 2003 წელს, მაშინ მარტივი (მუდმივი ბაზისით) ინდექსების მნიშვნელობები შესაბამისად 2004, 2005 და 2006 წლებისათვის იქნება:

$$\frac{438}{420}\cdot 100=104,3;$$
$$\frac{446}{420}\cdot 100=106,2;$$
$$\frac{450}{420}\cdot 100=107,1.$$

იგივე წლებისათვის ინდექსების მნიშვნელობებისათვის ცვლადი ბაზისით (როდესაც ბაზისად დროის წინა მომენტი, ანუ ჩვენი შემთხვევისათვის წინა წელია აღებული) მივიღებთ:

$$\frac{438}{420}\cdot 100=104,3;$$

$$\frac{446}{438}\cdot 100 = 101,8$$
$$\frac{450}{446}\cdot 100 = 100,9\,.$$

უკანასკნელი მნიშვნელობები უფრო ნათელ წარმოდგენას იძლევა საშუალოთვიური გამომუშავების ყოველწლიურ ცვლილებაზე. მაგალითად, ინდექსის მნიშვნელობა 100,9 იმაზე მიგვანიშნებს, რომ საშუალოთვიური გამომუშავება ფირმაში 2006 წელს არსებითად არ შეცვლილა წინა წელთან შედარებით, რასაც არ აჩვენებს მარტივი ინდექსის მნიშვნელობა იმავე წლისათვის - 107,1.

თუმცა აქვე უნდა აღინიშნოს ამ ტიპის ინდექსის ნაკლოვანი მხარეც, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ მათმა მნიშვნელობებმა წლიდან წლამდე შეიძლება კარგად ვერ ასახოს რეალური ცვლილებები. ასე მაგალითად, 2005 და 2006 წლებისათვის ინდექსების მნიშვნელობები ცვლადი ბაზისით, შესაბამისად, შეადგენს 101,8-სა და 100,9-ს. ეს ფაქტი შეიძლება გაგებულ იქნეს ისე, თითქოსდა საშუალოთვიური გამომუშავება 2006 წელს ნაკლები იყო 2005 წელთან შედარებით, რაც, როგორც ვხედავთ, რეალობას არ შეესაბამება.

2.3 აგრეგირებული ინდექსები

აქამდე ჩვენ ვითვლიდით მარტივი მაჩვენებლის შესაბამის ინდექსებს. როდესაც მონაცემები რთული (შედგენილი) ბუნებისაა, გარკვეული სიძნელეები წარმოიქმნება მათი შედარებისა და ინდექსების გაანგარიშების პროცესში. მაგალითად, როდესაც გვინდა ერთმანეთს შევადაროთ ცხოვრების ღირებულება სხვადასხვა წლებისათვის, გათვალისწინებული უნდა იქნეს მრავალი საქონლის ფასი (კვების პროდუქტების, ბინის, ტანსაცმლის, ტრანსპორტის და ა. შ.). რა თქმა უნდა, თითოეული მათგანის ცვლილება გავლენას ახდენს ცხოვრების მთლიან ღირებულებაზე.

განვიხილოთ ერთიანი ინდექსის გამოთვლის ორი მეთოდი, რომელიც ეფუძნება საშუალო არითმეტიკულისა და მარტივი აგრეგატის ცნებებს.

მარტივი საშუალო ინდექსი იანგარიშება მდგენელი მაჩვენებლების მარტივი ინდექსების გასაშუალების გზით:

$$I = \frac{\sum_{j=1}^{n} I_j}{n} = \frac{\frac{a_{k1}}{a_{01}}\cdot 100 + \frac{a_{k2}}{a_{02}}\cdot 100 + \ldots + \frac{a_{kn}}{a_{0n}}\cdot 100}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{kj}}{a_{0j}}}{n} \qquad (2.3)$$

სადაც n მდგენელი მაჩვენებლების საერთო რაოდენობაა, ხოლო a_{0j} და a_{kj} შესაბამისად, მდგენელი მაჩვენებლების საბაზისო და მიმდინარე მნიშვნელობებია.

მარტივი აგრეგირებული ინდექსი კი იანგარიშება ფორმულით:

$$I = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{kj}}{\sum_{j=1}^{n} a_{0j}} \cdot 100 \qquad (2.4)$$

განხილული მეთოდები გულისხმობს, რომ მდგენელი მაჩვენებლები თანაბრად მნიშვნელოვანია, რაც პრაქტიკაში იშვიათად ხდება. აღნიშნული გარემოება ორივე მეთოდის არსებით ნაკლოვან მხარეს წარმოადგენს.

თუ მოხერხდება მდგენელი მაჩვენებლების „წონების" შეფასება, მაშინ შეიძლება გამოვითვალოთ **შეწონილი აგრეგირებული ინდექსი,** რომელშიც გარკვეულ-წილად ასახული იქნება მდგენელი მაჩვენებლების „ხვედრითი წილები", რომელთაც შემდგომში წონით კოეფიციენტებს, ანდა უბრალოდ, წონებს ვუწოდებთ:

$$I = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j a_{kj}}{\sum_{j=1}^{n} w_j a_{0j}} \cdot 100, \qquad (2.5)$$

სადაც w_j j-ური მდგენელი მაჩვენებლის წონითი კოეფიციენტია, $j = \overline{1,n}$.

მაგალითი 2.3. ცხრილში 2.4 მოყვანილია სამი სახეობის ტონა მეტალის ფასი ერთერთ სასაქონლო ბაზარზე 1998 და 1999 წლებისათვის:

მეტალის სახეობა	წონითი კოეფიციენტი	ერთი ტონის ფასი (აშშ დოლარი)	
		1998წ.	1999წ.
რკინა	7	25	24
ფოლადი	12	34	38
სპილენძი	1	64	80

ცხრილი 2.4

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, წონითი კოეფიციენტი უნდა ასახავდეს იმას, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია კონკრეტული საქონელი მომხმარებლისათვის. იგი შეიძლება დამოკიდებული იყოს რიგ ფაქტორებზე და იცვლებოდეს დროთა განმავლობაში. როგორც ცხრილიდან ჩანს, თითქოს მომხმარებლისათვის ფოლადის ფასი „12-ჯერ უფრო მნიშვნელოვანია" სპილენძთან შედარებით.

(2.5)-ის გამოყენებით შეწონილი აგრეგირებული ინდექსის მნიშვნელობისათვის ვღებულობთ:

$$I=\frac{7\cdot 24+12\cdot 38+1\cdot 80}{7\cdot 25+12\cdot 34+1\cdot 64}\cdot 100=\frac{704}{647}\cdot 100=108,8$$

ამგვარად, 1999 წელს მეტალთა მოცემულ ჯგუფზე ფასები 8.8%-ით გაიზარდა 1998 წელთან შედარებით.

2.4 ლასპეირესის ინდექსი

შედგენილი ბუნების მაჩვენებლის ფასების ინდექსის გაანგარიშებისას ხშირად შეწონვა ხდება შესაბამისი მდგენელების რაოდენობრივი მნიშვნელობების შესაბამისად:

$$I=\frac{\sum_{j=1}^{n}q_{0j}p_{kj}}{\sum_{j=1}^{n}q_{0j}p_{0j}}\cdot 100, \qquad (2.6)$$

სადაც q_{0j} - ური მდგენელის საბაზისო რაოდენობრივი მნიშვნელობა, ხოლო p_{0j} და p_{kj} , შესაბამისად, ამ მდგენელის ერთეულის საბაზისო და მიმდინარე ფასებია.

(2.6) ფორმულით განსაზღვრულ ინდექსს **ლასპეირესის საფასო ინდექსს** უწოდებენ. ხშირად ამ ინდექსს **საბაზისო შეწონილი ინდექსის** სახელწოდებითაც მოიხსენიებენ

მაგალითი 2.4. ცხრილში 2.5 მოყვანილია კვების ზოგიერთი პროდუქტის ერთეულის ფასები 1996 და 1997 წლებისათვის და ამ პროდუქტების საშუალოკვირეული შესყიდვების ოდენობა ბრიტანული ოჯახების მიერ 1996 წლისათვის.

პროდუქტის დასახელება	ყოველკვირეული შესყიდვების მოცულობა 1996წლისათვის	პროდუქტის ერთეულის ფასი (ფუნტი სტ.)	
		1996წ.	1997წ.
პური	5	0.80	0.98
კარაქი	4	0.52	0.50
რძე	8	0.42	0.37
ხორცი	3	1.80	1.85

ცხრილი 2.5

ცხრილის მონაცემების საფუძველზე (2.6) ფორმულის გამოყენებით ლასპეირესის ინდექსის მნიშვნელობისათვის ვღებულობთ:

$$I=\frac{5\cdot 0.98+4\cdot 0.50+8\cdot 0.37+3\cdot 1.85}{5\cdot 0.80+4\cdot 0.52+8\cdot 0.42+3\cdot 1.80}\cdot 100=\frac{15.41}{14.84}\cdot 100=103.8$$

ამგვარად, 1997 წლისათვის „კვების პროდუქტების კალათა“ 3.8% - ით გაძვირდა 1996 წელთან შედარებით.

2.5 პააშეს ინდექსი

არსებობს ალტერნატიული მიდგომაც ერთიანი ინდექსის გამოთვლისადმი, რომელიც მდგომარეობს მდგენელი მაჩვენებლების საბაზისო მომენტის შესაბამისი რაოდენობრივი მნიშვნელობების მიმდინარე მნიშვნელობებით შეცვლაში:

$$I = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_{kj} p_{kj}}{\sum_{j=1}^{n} q_{kj} p_{0j}} \cdot 100, \qquad (2.7)$$

სადაც p_{0j} და p_{kj} იგივეა, რაც (2.6)-ში ხოლო q_{kj} j -ური მდგენელის მიმდინარე

ლასპეირესისა და პააშეს ინდექსების შედარების მიზნით ორივე ინდექსი გამოვთვალოთ ცხრილი 2.6-ის მონაცემების საფუძველზე, რომლებიც რამდენადმე განსხვავებულია ცხრილი 2.5-ის მონაცემებთან შედარებით და კიდევ იგი შევსებულია ყოველკვირეული შესყიდვების მოცულობებით 1997 წლისათვის:

მომენტის შესაბამისი რაოდენობრივი მნიშვნელობააა, $j = \overline{1, n}$.

(2.7) – ით განსაზღვრულ ინდექსს **პააშეს საფასო**, ანუ **მიმდინარე შეწონილ ინდექსს** უწოდებენ.

ლასპეირესისა და პააშეს ინდექსების შედარების მიზნით ორივე ინდექსი გამოვთვალოთ ცხრილი 2.6-ის მონაცემების საფუძველზე, რომლებიც რამდენადმე განსხვავებულია ცხრილი 2.5-ის მონაცემებთან შედარებით და კიდევ იგი შევსებულია ყოველკვირეული შესყიდვების მოცულობებით 1997 წლისათვის:

პროდუქტის დასახელება	ყოველკვირეული შესყიდვების მოცულობა		პროდუქტის ერთეულის ფასი (ფუნტი სტ.)	
	1996წ.	1997წ.	1996წ.	1997წ.
პური	5	4	0.80	0.08
კარაქი	4	3	0.52	0.54
რძე	7	10	0.42	0.35
ხორცი	3	2	1.80	1.95

ცხრილი 2.6

ლასპეირესისა და პააშეს ინდექსების მნიშვნელობებისათვის, შესაბამისად, ვღებულობთ:

$$I=\frac{5\cdot1.08+4\cdot0.54+7\cdot0.35+3\cdot1.95}{5\cdot0.80+4\cdot0.52+7\cdot0.42+3\cdot1.80}\cdot100=\frac{15.86}{14.42}\cdot100=110.0\,,$$

$$I=\frac{4\cdot1.08+3\cdot0.54+10\cdot0.35+2\cdot1.95}{4\cdot0.80+3\cdot0.52+10\cdot0.42+2\cdot1.80}\cdot100=\frac{13.34}{12.56}\cdot100=106.2\,.$$

ერთის შეხედვით შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ პააშეს ინდექსი უფრო მისაღებია, რადგანაც იგი ითვალისწინებს, ასე ვთქვათ „უკანასკნელ" ინფორმაციას. მართლაც, თუ დროთა განმავლობაში მონაცემები არსებითად შეიძლება შეიცვალოს, ობიექტურობის მიზნით უპირატესობა პააშეს ინდექსს უნდა მიენიჭოს, მაგრამ პრაქტიკულ სიტუაციათა უმეტესობაში აღნიშნული ცვლილებები უმნიშვნელოა და ინდექსის მნიშვნელობაზე სერიოზულ გავლენას არ ახდენს.

გარდა ამისა, ლასპეირესის ინდექსს გააჩნია გამოთვლითი ხასათის რიგი უპირატესობანი სიმარტივის თვალსაზრისით, რის გამოც მას უფრო ხშირი გამოყენება აქვს.

2.6 სხვა ინდექსები

როგორც წინა პარაგრაფში ავღნიშნეთ, ლასპეირესისა და პააშეს ინდექსებს გააჩნიათ თავიანთი უპირატესობანი და ნაკლოვანი მხარეები.

ინდექსების გამოთვლის ალტერნატიულ მეთოდებში, რომელთაც ქვემოთ მოვიყვანთ, შეიძლება ითქვას, გარკვეულწილად შერწყმულია ლასპეირესისა და პააშეს ინდექსების უპირატესობანი და მათ საფუძვლად უდევს ამ ორი ინდექსის „გასაშუალოების" იდეა.

ინდექსს, რომელშიც წონითი კოეფიციენტების როლში მდგენელების საბაზისო და მიმდინარე მომენტების შესაბამისი გაერთიანებული (ჯამური) რაოდენობრივი მნიშვნელობები გვევლინება, **მარშალ-ეჯვორტის ინდექსს** უწოდებენ და შემდეგი ფორმულით იანგარიშება:

$$I=\frac{\sum_{j=1}^{n}(q_{0j}+q_{kj})p_{kj}}{\sum_{j=1}^{n}(q_{0j}+q_{kj})p_{0j}}\cdot100 \qquad (2.8)$$

ფიშერის იდეალური ინდექსი ფაქტიურად წარმოადგენს ლასპეირესისა და პააშეს ინდექსების ნამრავლს და გამოითვლება ფორმულით:

$$I=\sqrt{\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}q_{0j}p_{kj}}{\sum_{j=1}^{n}q_{0j}p_{0j}}\right]}\cdot\sqrt{\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}q_{kj}p_{kj}}{\sum_{j=1}^{n}q_{kj}p_{0j}}\right]}\cdot100 \qquad (2.9)$$

ეს ორი უკანასკნელი ინდექსი საშუალებას იძლევა უკეთ გავაანალიზოთ ფასების ცვლილება შედგენილი მაჩვენებლის მდგენელთა ერთობლიობაზე ლასპეირესისა და პააშეს ინდექსებთან შედარებით, მაგრამ მათი გამოყენება რამდენადმე გართულებულია გამოთვლების შრომატევადობის გამო.

სამეურნეო პრაქტიკაში მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს ე. წ. „ცხოვრების ღირებულების“ ინდექსს. განვითარებული ქვეყნები რეგულარულად აქვეყნებენ აღნიშნულ ინდექსებს. მაგალითად, დიდ ბრიტანეთში ამ ინდექსს **საცალო ფასების**, ხოლო აშშ-ში **სამომხმარებლო ფასების ინდექსს** უწოდებენ.

საცალო ფასების ინდექსს დიდ ბრიტანეთში 1914 წლიდან მოყოლებული ითვლიან. მისი საშუალებით იზომება ცვლილებები იმ სასაქონლო კალათაში, რომელსაც „საშუალო ოჯახები“ იძენენ. კალათაში ჩართულია კვების პროდუქტები, ალკოჰოლური სასმელები, თამბაქოს ნაწარმი, ტანსაცმელი და ფეხსაცმელი, საცხოვრებელი, ტრანსპორტი, სათბობი და ელექტროენერგია, სხვადასხვა სახის მომსახურება.

თითოეული ამ პოზიციის შესაბამისი ჯამური დანახარჯები განისაზღვრება ოჯახების დანახარჯების ყოველწლიური გამოკვლევების საფუძველზე. ამის შემდეგ ლასპეირესის მეთოდის გამოყენებით იანგარიშება ერთიანი ინდექსი, რომელშიც წონითი კოეფიციენტების როლში სწორედ ზემოთაღნიშნული ჯამური დანახარჯები გვევლინება.

ანალოგიურად, აშშ-ში 1919 წლიდან ანგარიშობენ სამომხმარებლო ფასების ინდექსს 400-ზე მეტი დასახელების საქონელსა და მომსახურებაზე. მასში აისახება ინფლაციის დონე ქვეყანაში, რის საფუძველზეც ხდება შრომის ანაზღაურების ახალი სატარიფო ბადეების შემუშავება.

უნდა აღინიშნოს, რომ ეს ინდექსები მაინცდამაინც ზუსტად ვერ ზომავს ცვლილებებს ცხოვრების ღირებულებაში, რადგანაც არ ითვალისწინებს რიგ სხვა ფაქტორებს.

გარდა ამისა, ამ ამ ინდექსებს აკრიტიკებენ იმის გამოც, რომ ისინი იანგარიშება „ტიპიური“ ოჯახებისათვის. ბევრი საოჯახო მეურნეობა ვერ ეწერება მოდელში, რადგანაც ხშირად პრობლემატიურია იმის დადგეა, თუ რომელი ოჯახი მიეკუთვნება „ტიპიური“ ოჯახების კატეგორიას.

ჩამოთვლილი მიზეზების გამო ანგარიშობენ სხვა ინდექსებსაც, რომლებიც ითვალისწინებს საცალო ფასებზე მოქმედ ისეთ ფაქტორებს, როგორიცაა გადასახადებით დაბეგვრა და სოციალური დაზღვევა.

ფართო გამოყენება აქვს პრაქტიკაში აგრეთვე საქმიანი აქტივობის ინდექსებს. მათგან განსაკუთრებით უნდა გამოვყოთ **საბირჟო ინდექსები,** რომლებიც ასახავს აქციათა ღირებულებების ცვლილებებს.

საბირჟო ინდექსი უმნიშვნელოვანესი მაჩვენებელია საფონდო ბირჟებზე (მსოფლიოს უდიდესი საფონდო ბირჟები ფუნქციონირებს ნიუ-იორკში,. ლონდონში, პარიზში, ფრანკფურტში, ტოკიოსა და ციურიხში) და იგი, როგორც წესი, აერთიანებს უმსხვილესი საწარმოების აქციების კურსს.

ერთ-ერთ ყველაზე ცნობილ საბირჟო ინდექსს წარმოადგენენ დოუ-ჯონსის (Dow - Jones) ინდექსი, რომელიც შემუშავდა აშშ-ში 1984 წელს და იმდროინდელი 11

მთავარი კორპორაციის აქციების ღირებულებას ითვალისწინებდა. სადღეისოდ არსებობს დოუ-ჯონსის ინდექსის ოთხი ნაირსახეობა. იგი განისაზღვრება ყოველ საათში დღის განმავლობაში და რამდენიმე ათეული კომპანიის აქციების კურსის ცვლილებებს ითვალისწინებს.

სხვა საბირჟო ინდექსებიდან უნდა აღინიშნოს FT (ინგლისი), Nikkei (იაპონია), DAX (გერმანია) და CAC (საფრანგეთი).

საქმიანი აქტივობის კიდევ ერთ მნიშვნელოვან ინდექსს წარმოადგენს **წარმოების მოცულობის ინდექსი.**, რომელიც ითვალისწინებს სხვადასხვა დარგის წარმოების მოცულობებს. წონითი კოეფიციენტების როლში ამ დროს გამოდის მათი (დარგების) ხვედრითი წილები მთლიან შიდა პროდუქტში.

განიხილავენ აგრეთვე ფასების **ინდექსს საგადასახადო წნეხის** გათვალისწინებით. ამ ინდექსის დანიშნულება მდგომარეობს იმაში, რომ გაიზომოს ცვლილებები ფიზიკური პირების რეალურ მსყიდველუნარიანობაში საცალო ფასების რყევების პირობებში.

საშუალო ხელფასის ინდექსი იძლევა ინფორმაციას ცვლილებებზე ეკონომიკის ძირითად დარგებში საშუალო გამომუშავების დონის შესახებ. ამ დროს გასათვალისწინებელია მომუშავეთა შემოსავლების ხვედრითი წილები მთლიან შიდა პროდუქტში.

სავარჯიშოები:

1. ცხრილში მოყვანილია ერთი ტონა ფოლადის საშუალო ფასი ხუთწლიანი პერიოდისათვის:

ა)

წელი	1994	1995	1996	1997	1998
ტონა ფოლადის ფასი (ფუნტი სტ.)	250	255	260	236	224

საბაზისო წლად აიღეთ 1994 წელი და გამოთვალეთ ფოლადის ფასის მარტივი ინდექსი ყოველი წლისათვის;

ბ) გამოთვალეთ ფოლადის ფასის ინდექსი ცვლადი ბაზისით ყოველი წლისათვის;

გ) ახსენით ინდექსების გამოთვლილი მნიშვნელობები.

2. ცხრილში მოყვანილია ფასები სამი სახეობის საბირჟო საქონელზე 1996 და 1998 წლებისათვის:

საქონელი	ერთეულის ფასი (აშშ დოლარი)	
	1996წ.	1998წ.
A	3.00	3.60
B	2.34	2.20
C	1.98	2.70

ა) საბაზისო წლად აიღეთ 1996 წელი და გამოთვალეთ შეწონილი აგრეგირებული ინდექსები შესაბამისად, A, B და C საქონლუის წონითი კოეფიციენტების შემდეგი ორი ვარიანტისათვის: 5, 1, 14 და 10, 3, 2;

ბ) ახსენით განსხვავებები გამოთვლის შედეგებს შორის.

3. ცხრილში მოყვანილია ოთხი კომპანიის აქციის ფასები 1997 და 1998 წლის ბოლოსათვის და თითოეული კომპანიის აქციის საშუალოდღიური გაყიდვების რაოდენობები ამ წლებისათვის:

კომპანია	გაყიდული აქციების საშუალოდღიური რაოდენობა		აქციის ფასი (ფუნტი სტ.)	
	1997წ.	1998წ.	1997წ.	1998წ.
A	2000	2400	2.54	2.80
B	1200	3400	1.15	2.34
C	3000	2900	3.60	3.88
D	1800	2050	2.10	2.35

ა) გამოთვალეთ ლასპეირესისა და პააშეს ინდექსების მნიშვნელობები 1998 წლისათვის;

ბ) ახსენით მიღებული განსხვავებები ინდექსების მნიშვნელობებში. თქვენის აზრით, რომელი ინდექსი უფრო მისაღებია ამ შემთხვევაში?

თავი 3. ალბათობის თეორიის საფუძვლები

ხშირად მენეჯერს გადაწყვეტილების მიღება უხდება განუსაზღვრელობის პირობებში. მაგალითად, სიტუაციები, როდესაც საჭიროა კონკურენტთა შესაძლო ქცევების გაანალიზება, ოპტიმალური სასაქონლო ასორტიმენტის განსაზღვრა, სტიმულირების ღონისძიებათა შემუშავება, სარეკლამო საშუალებების შერჩევა და ა. შ., როგორც წესი, განუსაზღვრელობის ელემენტებს შეიცავს.

ალბათობის თეორიის საფუძვლების ცოდნა მენეჯერს მნიშვნელოვან დახმარებას გაუწევს სწორად შეაფასოს გადაწყვეტილებათა გარემოს სხვადასხვა მდგომარეობების დადგომის შესაძლებლობები, რაც თავის მხრივ, ქმნის მისაღები გადაწყვეტილებების ხარისხის ამაღლების წინაპირობებს.

3.1 ალბათობის თეორიის საგანი

ალბათობის თეორია არის მეცნიერება, რომელიც სწავლობს კანონზომიერებებს შემთხვევით მოვლენებში. იგი სხვა მათემატიკურ მეცნიერებათა მსგავსად პრაქტიკის მოთხოვნილებებით წარმოიშვა. კერძოდ, საუბარია სპეციალურად მომარჯვებული მათემატიკური აპარატის შექმნის აუცილებლობაზე მასობრივ შემთხვევით მოვლენათა გასაანალიზებლად. ჯერ კიდევ მე-17 საუკუნის დასაწყისსი **გალილეო გალილეი** შეეცადა მეცნიერული კვლევებისათვის დაექვემდებარებია ფიზიკურ გაზომვათა შედეგები: განიხილავდა რა მათ როგორც შემთხვევითს და აფასებდა მათ ალბათობებს. ამავე პერიოდს მიეკუთვნება დაზღვევის ზოგადი თეორიის შექმნის პირველი ცდა, რომელიც ეფუძნებოდა კანონზომიერებებს ისეთ მასობრივ შემთხვევით მოვლენებში, როგორიცაა დაავადება, სიკვდილიანობა, უბედურ შემთხვევათა სტატისტიკა და ა. შ. მაგრამ ალბათობის თეორია ზემოთჩამოთვლილი პრაქტიკული ამოცანების მასალებზე არ ჩამოყალიბებულა მათი სირთულის გამო. თავიდან აუცილებელი გახდა შემთხვევით მოვლენათა კანონზომიერებების შესწავლა მარტივი მასალის საშუალებით. ასეთ ისტორიულ მასალად გამოდგა აზარტული თამაშები, რომლებიც უხსოვარი დროიდან იქმნებოდა თაობათა მიერ. მათთვის დამახასიათებელია შედეგის წმინდა შემთხვევითობა. აზარტულ თამაშთა სქემები შემთხვევით მოვლენათა განსაკუთრებული სიმარტივისა და სიცხადის მოდელებია, რომლებიც საშუალებას იძლევა ყველაზე მკაფიო ფორმით დავაკვირდეთ ამ მოვლენებს და შევისწავლოთ მათი მმართველი სპეციფიკური კანონები. იმის შესაძლებლობა, რომ ერთი და იგივე ცდა შეიძლება რაგინდ მრავალჯერ იქნეს გამეორებული, უზრუნველყოფს ამ კანონების ექსპერიმენტულ შემოწმებას ნამდვილი მასობრიობის პირობებში. მაგალითები აზარტული თამაშებიდან და მათი ანალოგიური ამოცანები დღემდე ფართოდ გამოიყენება ალბათობის თეორიის შესასწავლად, როგორც შემთხვევით მოვლენათა გამარტივებული მოდელები. აზარტულ თამაშთა სქემები შემთხვევით მოვლენათა გამარტივებული მოდელებია, რომლებიც ყველაზე მარტივი და თვალსაჩინო ფორმით იძლევა ალბათობიის თეორიის კანონებისა და წესების ილუსტრაციას.

მე-18 საუკუნიდან ალბათობის თეორიამ ინტენსიური განვითარება დაიწყო და ერთგვარ „მოდურ“ მეცნიერულ მიმართულებად იქცა. მისი გამოყენება დაიწყეს არა მარტო ისეთ სფეროებში, რომლებშიც ეს სავსებით ბუნებრივად და კანონზომიერად გამოიყურებოდა, არამედ იქაც, სადაც იგი არაფრით იყო გამართლებული. ამ პერიოდისათვის დამახასიათებელი იყო ალბათობის თეორიის გამოყენების მრავალრიცხოვანი მცდელობა ისეთ სფეროებში, როგორიცაა სასამართლო წარმოება, ისტორია, პოლიტიკა და ღვთისმეტყველებაც კი.

აღნიშნულ ფსევდომეცნიერულ გამოკვლევებს ახასიათებდა მეტად გამარტივებული მექანიკური მიდგომა საზოგადოებრივი მოვლენებისადმი. ბუნებრივია, ყველა მსგავსი მცდელობა წინასწარვე განწირული იყო წარუმატებლობისათვის და არ შეეძლო დადებითი როლი ეთამაშა მეცნიერების განვითარებაში. პირიქით, მის არაპირდაპირ შედეგად შეიძლება მივიჩნიოთ ის გარემოება, რომ მე-19 საუკუნის 30-იან წლებში ალბათობის თეორიით საყოველთაო გატაცება დასავლეთ ევროპაში შეიცვალა იმედგაცრუებითა და სკეპტიციზმით. მას ყურება დაუწყეს როგორც მეორეხარისხოვან, საეჭვო მეცნიერებას და თვლიდნენ თავისებურ მათემატიკურ გატაცებად, რომელიც სერიოზული შესწავლის ღირსი არ იყო.

მოგვიანებით, ალბათობის თეორია მტკიცე ლოგიკურ და მათემატიკურ საფუძვლებზე დადგა და შემეცნების საიმედო, ზუსტ და ეფექტურ მეთოდად იქცა.

ალბათობის თეორიის თანამედროვე განვითარებისადმი დამახასიათებელია საყოველთაო ინტერესი და პრაქტიკული გამოყენების არეალის მკვეთრი გაფართოება.

3.2 კომბინატორიკის ელემენტები

იმისათვის, რომ უკეთ ჩავწვდეთ ალბათობის ცნების თეორიულ საფუძვლებს და კანონზომიერებებს რიგ ალბათურ განაწილებებში, მიზანშეწონილია კომბინატორიკის ელემენტების ცოდნა.

კომბინატორიკა მათემატიკის დარგია, რომელიც სწავლობს სასრული სიმრავლის ელემენტებისაგან რაიმე წესით შედგენილი ყველა შესაძლო კომბინაციის გამოთვლის ხერხებს.

ძირითადად განიხილავენ სამი სახეობის კომბინაციებს – გადანაცვლებას, წყობასა და ჯუფთებას.

სასრული სიმრავლის ყველა ელემენტის ნებისმიერ დალაგებას **გადანაცვლება** ეწოდება.

n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი P_n-ით აღინიშნება და შემდეგი ფორმულით იანგარიშება:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n! \tag{3.1}$$

($n!$ იკითხება როგორც „n – ფაქტორიალი“. მიღებულია, რომ $0! = 1! = 1$)

m ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ n ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს ($n \le m$) ეწოდება **წყობა** m ელემენტისაგან n –ად.

ყველა ასეთ წყობათა რიცხვი A_m^n-ით აღინიშნება და შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \qquad (3.2)$$

m ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ n ელემენტიან ქვესიმრავლეს ($n \le m$) ეწოდება **ჯუფთება** m ელემენტიდან n –ად.

m ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო ჯუფთებათა რიცხვი C_m^n სიმბოლოთი აღინიშნება და შემდეგი ფორმულით იანგარიშება:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} \qquad (3.3)$$

ჯუფთებათა რიცხვს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$1. C_m^n = C_m^{m-n}$$
$$2. C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$$
$$3. C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^m = 2^m$$

თუ ყურადღებით დავაკვირდებით (3.1) - (3.2) ფორმულებს, ადვილად მივხვდებით, რომ გადანაცვლების, წყობისა და ჯუფთების რაოდენობებს შორის არსებობს შემდეგი კავშირი:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} \qquad (3.4)$$

C_m^n მნიშვნელობებს ($m \ge 2, n = \overline{0,m}$) ბინომიალურ კოეფიციენტებსაც უწოდებენ, რადგანაც ნიუტონის ბინომის (ორწევრის) განაშალს აქვს შემდეგი სახე:

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \ldots + C_m^n a^{m-n} b^n + \ldots + C_m^m b^m \qquad (3.5)$$

3.3 ხდომილებები და მათი კლასიფიკაცია

ალბათობის თეორიის ძირითადი ცნებების კატეგორიას განეკუთვნება ცდისა და ხდომილების ცნებები.

ცდა - ეს არის დაკვირვების განხორციელება პირობათა გარკვეული კომპლექსის პირობებში. იგულისხმება, რომ ცდის განმეორება ნებისმიერი რაოდენობით არის შესაძლებელი.

ხდომილების ცნების ქვეშ ესმით ყოველი ფაქტი (თვისობრივი შედეგი), რომელიც შეიძლება მოხდეს, ან არ მოხდეს ცდის შედეგად.

ხდომილებებს ლათინური ალფავიტის დიდი ასოებით აღნიშნავენ – A, B, C,...

განასხვავებენ აუცილებელ, შეუძლებელ და შემთხვევით ხდომილებებს.

აუცილებელი ეწოდება ხდომილებას, რომელიც არ შეიძლება რომ არ მოხდეს ცდის შედეგად, ხოლო მისი განმეორებისას ყოველთვის ხდება (აღინიშნება U ასოთი).

ხდომილებას ეწოდება **შეუძლებელი,** თუ ცდის ჩატარებისას იგი არ შეიძლება რომ მოხდეს (აღინიშნება V ასოთი).

შემთხვევითი კი ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ცდის განხორციელებისას შეიძლება მოხდეს და შეიძლება არც მოხდეს.

A და B ხდომილებებს ეწოდებათ **უთავსადი** ხდომილებები, თუ ცდის ჩატარებისას ერთის მოხდენა გამორიცხავს მეორისას.

ყველა შესაძლო ერთმანეთის გამომრიცხავ შედეგებს ცდის ჩატარებისას **ელემენტარული** ხდომილებები ეწოდებათ. მაგალითად, კამათელის გაგორებისას „იაქეს“, „დუს“ და ა. შ. მოსვლა ელემენტარულ ხდომილებებს წარმოადგენს.

A და B ხდომილებებს **თავსებადი** ეწოდებათ, თუ ერთი ცდის ფარგლებში ერთის მოხდენა მეორის მოხდენას არ გამორიცხავს.

იტყვიან, რომ მოცემულ ცდაში რამდენიმე ხდომილება ქმნის ხდომილებათა **სრულ ჯგუფს**, თუ ცდის შედეგად ერთი მათგანი მაინც მოხდება.

ორ უთავსად ხდომილებას, რომლებიც სრულ ჯგუფს ქმნის, **მოპირდაპირე** ხდომილებები ეწოდებათ. A-ს მოპირდაპირე ხდომილებას $\overline{A}$ -თი აღნიშნავენ.

მოცემულ ცდაში რამოდენიმე ხდომილებას ეწოდებათ **ტოლშესაძლო**, თუ არავითარი საფუძველი არ არსებობს იმისა, რომ ამ ხდომილებათაგან ერთერთის მოხდენა სხვასთან შედარებით უფრო შესაძლებელია.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლე ქმნის ხდომილებათა სრულ ჯგუფს.

თუ ელემენტარულ ხდომილებათა რიცხვი სასრულია და ყველა ელემენტარული ხდომილება ტოლშესაძლოა, ასეთ ცდასთან დაკავშირებულ ხდომილებათა სისტემას **კლასიკურ მოდელად** მიიჩნევენ.

3.4 ხდომილებათა სტატისტიკური და კლასიკური ალბათობები

დავუშვათ ვატარებთ რაიმე ცდას, ვიმეორებთ მას სავსებით ერთსა და იმავე პირობებში და ყოველი ცდისას ვაკვირდებით ჩვენთვის სასურველი A ხდომილების მოხდენის ფაქტს. შეფარდებას

$$P^*(A) = \frac{n_A}{N} \tag{3.6}$$

ეწოდება A ხდომილების სიხშირე, ანუ **სტატისტიკური ალბათობა,** სადაც N ჩატარებული ცდების საერთო რიცხვია, ხოლო n_A A ხდომილების მოხდენის რაოდენობა ცდათა ამ სერიაში.

უშუალოდ განმარტებიდან გამომდინარეობს ხდომილების სიხშირის შემდეგი თვისებები:

1. ხდომილების სიხშირე უგანზომილებო სიდიდეა და $0 \le P^*(A) \le 1$;
2. აუცილებელი ხდომილების სიხშირე $P^*(U) = 1$;
3. შეუძლებელი ხდომილების სიხშირე $P^*(V) = 0$.

ხდომილების სიხშირე დამოკიდებულია შემთხვევით გარემოებებზე, რომელიც თან ახლავს ცდას. ცდათა ერთი სერიიდან მეორეზე გადასვლისას ხშირად ერთი და იგივე ხდომილების სიხშირე ამჟღავნებს სტაბილურობის ტენდეციას – სერიებში N-ის ზრდასთან ერთად ხდომილების სიხშირის რყევა მნიშვნელოვნად მცირდება. ეს საფუძველს გვაძლებს ვივარაუდოთ, რომ არსებობს გარკვეული რიცხვითი მნიშვნელობა, რომლიდანაც ხდომილების სიხშირეები სხვადასხვა სერიებში ხან ერთი და ხან მეორე მომართულებით გადაიხრება.

ხდომილების ალბათობას უწოდებენ მისი დადგომის ობიექტური შესაძლებლობის რიცხვით ზომას.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ხდომილების სტატისტიკური ალბათობა მისი თეორიული ალბათობის მიახლოებით მნიშვნელობას წარმოადგენს.

თუ აპრიორულად (ცდის ჩატარებამდე) საკმაო საფუძველი არსებობს გამოითქვას ვარაუდი, რომ ხდომილებათა შესაბამისი სისტემა კლასიკურ მოდელს წარმოადგენს, მაშინ A ხდომილების **კლასიკური ალბათობა** შემდეგი ფორმულით შეიძლება გამოვთვალოთ:

$$P^*(A) = \frac{m}{n} \tag{3.7}$$

სადაც n ყველა შესაძლო ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა, ხოლო m - A ხდომილების დადგომის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რიცხვია (ანუ ყველა იმ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა, რომელთაგანაც თითოეულის დადგომასთან ერთად A ხდომილებაც დგება).

შევნიშნოთ, რომ იმ ხდომილებათა ალბათობის გამოსათვლელად, რომელიც კლასიკურ მოდელზე არ დაიყვანება, ალბათობის თეორიაში მრავალი არაპირდაპირი ხერხი არსებობს.

ხდომილებათა კლასიკურ ალბათობას სტატისტიკური ალბათობის ანალოგიური თვისებები აქვს:

1. რადგანაც $0 \le m \le n$, ამიტომ $0 \le P(A) \le 1$, როგორი ბუნებისაც არ უნდა იყოს A ხდომილება;
2. აუცილებელი ხდომილების ალბათობა $P(U) = 1$;
3. შეუძლებელი ხდომილების ალბათობა $P(V) = 0$.

შევნიშნოთ, რომ ალბათობას შეიძლება პროცენტული ინტერპრეტაციაც მიეცეს (წარმოვადგინოთ იგი 0-დან 100 %-მდე ფარგლებში).

3.5 ხდომილებათა ჯამი და ნამრავლი. პირობითი ალბათობა.

ორი A და B ხდომილების ჯამი (გაერთიანება) ეწოდება ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როდესაც ხდება ან A, ან B ხდომილება და აღინიშნება შემდეგნაირად – $A+B$ (ან $A\cup B$).

განმარტება შეიძლება განვაზოგადოთ იმ შემთხვევისათვისაც, როდესაც ხდომილებათა რაოდენობა ორს აღემატება.

ადვილად მტკიცდება, რომ ორი უთავსადი ხდომილების ჯამი ამ ხდომილებათა ალბათობების ჯამის ტოლია:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{3.8}$$

მაგალითი 3.1 ურნაში 5 თეთრი, 7 წითელი და 9 შავი ბურთულაა. შემთხვევით ვიღებთ ერთ ბურთულას. როგორია ალბათობა იმისა, რომ იგი იქნება წითელი ან შავი?

ავღნიშნოთ A, B და C – თი ხდომილებები, რომლებიც, შესაბამისად, მდგომარეობს ურნიდან თეთრი, წითელი და შავი ბურთულის ამოღებაში.

(3.7)-ისა და (3.8)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$P(B)=\frac{7}{21}, P(C)=\frac{9}{21}, P(B+C)=P(B)+P(C)=\frac{7}{21}+\frac{9}{21}=\frac{16}{21}$$

თუ $A_1, A_2, ..., A_k$ ხდომილებები წყვილწყვილად უთავსადია, მაშინ

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k) \tag{3.9}$$

ხოლო თუ იმავდროულად ისინი ქმნის ხდომილებათა სრულ ჯგუფს, მაშინ

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k)=1 \tag{3.10}$$

(3.9)-დან და (3.10)-დან, როგორც შედეგი გამომდინარეობს, ვღებულობთ რომ

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \tag{3.11}$$

ორი A და B ხდომილების **ნამრავლი (თანაკვეთა)** ეწოდება ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როდესაც ხდება A ხდომილებაც და B ხდომილებაც. ჩაიწერება ასე – A•B (ან $A\cap B$).

ანალოგიურად განიმარტება ხდომილებათა ნამრავლი ხდომილებათა მეტი რაოდენობისთვისაც.

იმისათვის, რომ დავადგინოთ, თუ რა დამოკიდებულებაშია ხდომილებათა ნამრავლის ალბათობა ამ ხდომილებების ალბათობებთან, უნდა შემოვიღოთ პირობითი ალბათობის ცნება.

A ხდომილების ალბათობას, იმ პირობით, რომ B ხდომილებას უკვე ჰქონდა ადგილი, ეწოდება A ხდომილების **პირობითი ალბათობა** და $P_B(A)$-თი აღინიშნება. A და B ხდომილებებს ეწოდებათ **ურთიერთდამოუკიდებელი,** თუ $P_B(A)= P(A)$ და $P_A(B)= P(B)$

ნებისმიერი ორი ხდომილების ნამრავლის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \qquad (3.12)$$

უშუალოდ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ A და B ხდომილებები ურთიერთდამოუკიდებელია, მაშინ

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (3.13)$$

თუ A და B ხდომილებები თავსებადია, მაშინ

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \qquad (3.14)$$

თუ A და B ხდომილებები ურთიერთდამოუკიდებელია, მაშინ (13)-ის გათვალისწინებით ამ ხდომილებათა ჯამის გამოთვლა უშუალოდ A და B ხდომილებების ალბათობების საშუალებით შეიძლება:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \qquad (3.15)$$

რაც შეეხება თავსებად ხდომილებათა ნებისმიერი რიცხვის ჯამის ალბათობის ფორმულას, იგი მიიღება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით და საკმაოდ რთული სახე აქვს.

მაგალითი 3.2 უნივერსიტეტის ყოველი 100 სტუდენტიდან საშუალოდ 97 გამოცდაზე დადებით შეფასებას იღებს და მათგან 68 მაღალ შეფასებას იმსახურებს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული დადებითად შეფასებული სტუდენტის შეფასება მაღალი იქნება?

A-თი ავღნიშნოთ ხდომილება, რომელიც ნიშნავს, რომ შემთხვევით შერჩეული სტუდენტის შეფასება დადებითია, ხოლო B-თი ხდომილება, რომელიც ნიშნავს - შემთხვევით შერჩეულმა სტუდენტმა მაღალი შეფასება დაიმსახურა.

პირობის თანახმად, ერთდროულად A-ს და B-ს ასიდან 68 შემთხვევა უწყობს ხელს, ე. ი.

$$P(A \cdot B) = 0,68$$

A ხდომილების ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვი კი 100-დან 97-ია, მაშასადამე

$$P(A) = 0,97$$

(3.12) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$P_A(B) = \frac{0,68}{0,97} \approx 0,71$$

3.6 შემთხვევითი სიდიდე და მისი სტატისტიკური მახასიათებლები

შემთხვევითი ეწოდება სიდიდეს, რომელსაც რაიმე სიმრავლიდან შემთხვევით ფაქტორთა ზემოქმედებით შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობები გარკვეული ალბათობებით.

შემთხვევითი სიდიდის ცნება დაკავშირებულია შემთხვევითი ხდომილების ცნებასთან. თუ შემთხვევითი ხდომილება ცდის თვისობრივი მახასიათებელია, შემთხვევითი სიდიდე მის რიცხვით მახასიათებელს წარმოადგენს.

მაგალითად, შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს შაშის მოსვლის რაოდენობა კამათლის 10-ჯერ გაგორებისას (ან 0, ან 1, ან 2, ..., ან 10).

განასხვავებენ ორი ტიპის შემთხვევით სიდიდეს: დისკრეტულს და უწყვეტს.

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **დისკრეტული**, თუ ყველა შესაძლო მნიშვნელობის გადანომრვა შესაძლებელია, ხოლო **უწყვეტი** – თუ მისი ყველა შესაძლო მნიშვნელობა ავსებს რომელიმე სასრულ ან უსასრულო ინტერვალს.

შემთხვევით სიდიდეს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით, ხოლო მათ შესაძლო მნიშვნელობებს - პატარათი.

შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების კანონი** ეწოდება შესაბამისობას, რომელიც შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებს მათ ალბათობებთან აკავშირებს. იგი, ჩვეულებრივ, მოიცემა ფორმულით ან შემდეგი ცხრილის სახით:

შესაძლო მნიშვნელობები X	X_1	X_2	...	X_i	...
ალბათობები P	P_1	P_2	...	P_i	...

ცხრილი 3.1

განაწილების კანონი სრულად ახასიათებს შემთხვევით სიდიდეს. კერძოდ, იგი ხასიათდება რამდენიმე მუდმივი სიდიდით, რომელთა შორის უმნიშვნელოვანესია მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

მონაცემთა საშუალოს, დისპერსიისა და სხვა რიცხვითი მახასიათებლების ცნებებს ჩვენ ნაწილობრივ გავეცანით პირველ თავში. ალბათობის ცნების შემოტანა მათი შემდგომი დაზუსტების საშუალებას იძლევა.

ცხრილი 2.1-ით მოცემული X შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი** $M(X)$ გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$M(X) = \sum_i P_i X_i \tag{3.16}$$

როგორც ვხედავთ, მათემატიკური ლოდინი ფაქტიურად შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა ალბათობით შეწონილ საშუალო არითმეტიკულს წარმოადგენს.

ისტორიულად, ტერმინი „მათემატიკური ლოდინი“ უკავშირდება ალბათური მეთოდების გამოყენებას სადაზღვევო საქმიანობაში, რადგანაც ამ დროს აუცილებელია განისაზღვროს მოსალოდნელი სადაზღვევო თანხის განსაზღვრა სადაზღვევო ხელშეკრულების საფუძველზე.

უშუალოდ განმარტებიდან გამომდინარეობს მათემატიკური ლოდინის შემდეგი თვისებები:

1. მუდმივის მათემატიკური ლოდინი ამ მუდმივის ტოლია:

$$M(C)=C$$

2. მუდმივის გატანა შეიძლება მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ:

$$M(CX)=C\,M(X)$$

3. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი მის შესაძლო უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს შორისაა.
4. შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის მათემატიკური ლოდინი ამ სიდიდეების მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია:

$$M(X+Y)= M(X)+ M(Y)$$

5. ურთიერთდამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი მათი მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის ტოლია:

$$M(X\cdot Y)= M(X)\cdot M(Y)$$

(შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდებათ ურთიერთდამოუკიდებელი, თუ ერთი მათგანის განაწილების კანონი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორი მნიშვნელობა მიიღო მეორემ).

შემთხვევით სიდიდის მისი მათემატიკური ლოდინიდან გაბნევის ზომას წარმოადგენს დისპერსია.

შემთხვევითი სიდიდის **დისპერსია** ეწოდება შემთხვევით სიდიდისა და მისი მათემატიკური ლოდინის სხვაობის კვადრატის მათემატიკური ლოდინს:

$$D(X)= M(X- M(X))^2 \tag{3.17}$$

თუ $(X- M(X))^2$ შემთხვევით სიდიდის განაწილების კანონს წარმოვადგენთ შემდეგი ცხრილის სახით

$(X- M(X))^2$	$(X_1- M(X))^2$	$(X_2- M(X))^2$	...	$(X_i- M(X))^2$	...
P	P_1	P_2	...	P_i	...

ცხრილი 3.2

(3.17)-ის თანახმად დისპერსია შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$D(X)=\sum_i P_i(X_i-M(X))^2 \qquad (3.18)$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებებიდან გამომდინარე (3.17)-ს შეიძლება მიეცეს პრაქტიკულად უფრო მოსახერხებელი სახე:

$$D(X)=M_i(X^2)-(M(X))^2 \qquad (3.19)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მის გამოსაანგარიშებლად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა:

$$D(X)=\sum_i P_i X^2{}_i-(\sum_i P_i X_i)^2 \qquad (3.20)$$

მოვიყვანოთ დისპერსიის თვისებები:

1. მუდმივის დისპერსია ნულის ტოლია:

$$D(C)=0;$$

2. მუდმივი შეიძლება გავიტანოთ დისპერსიის ნიშნის გარეთ, თუ მას კვადრატში ავიყვანთ:

$$D(CX)=C^2\,D(X;)$$

3. ურთიერთდამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის დისპერსია მათი დისპერსიების ჯამის ტოლია:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y);$$

როგორც შედეგი, უკანასკნელი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$D(C+X)=D(X).$$

დისპერსიას შემთხვევითი სიდიდის კვადრატის განზომილება აქვს. ბუნებრივად ჩნდება სურვილი გვქონდეს მაჩვენებელი, რომელსაც იგივე განზომილება ექნება, რაც შემთხვევით სიდიდეს და დაახასიათებს მის გაბნევას. ასეთ მახასიათებელს შემთხვევითის სიდიდის **საშუალოკვადრატული** გადახრა წარმოადგენს:

$$\sigma=\sqrt{\mathrm{D(X)}} \qquad (3.21)$$

შემთხვევითი სიდიდის შეფარდებით გაბნევის ზომას კი ახასიათებს ვარიაციის კოეფიციენტით:

$$V(X)=\frac{\sigma}{M(X)} \qquad (3.22)$$

იმისათვის, რომ განვმარტოთ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკური მახასიათებლები, დაგვჭირდება განაწილების ინტეგრალური და დიფერენციალური ფუნქციების ცნებების შემოტანა.

ავიღოთ უსასრულო ინტერვალი $(-\infty; x)$, სადაც x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. დავუშვათ, ცდის შედეგად შემთხვევითმა სიდიდემ მიიღო მნიშვნელობა $(-\infty; x)$ ინტერვალიდან, ე. ი. აღმოჩნდა რომ $X<x$.

$P(X<x)=F(x)$ ალბათობა ეწოდება x შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების ინტეგრალური ფუნქცია,** ან, უბრალოდ, განაწილების ფუნქცია.

მოვიყვანოთ განაწილების ფუნქციის თვისებები:

1. $F(x)$ უგანზომილებო სიდიდეა და $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(x)$ არაკლებადი ფუნქციაა
3. $P(x_1 \le x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
4. $F(-\infty)=0$ და $F(+\infty)=1$

განაწილების ფუნქცია შეიძლება განიმარტოს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისთვისაც:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \tag{3.23}$$

იგი იცვლება ნახტომისებურად და ნახტომის სიდიდე წყვეტის წერტილში ამ მნიშვნელობის ალბათობის ტოლია. (3.23)-ით განსაზღვრული ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან.

რიცხვით ღერძზე ავიღოთ $(x, x+\Delta x)$ ინტერვალი. განაწილების ფუნქციის მე-3 თვისების თანახმად (აქ $\le$ უნდა შეიცვალოს $<$ ნიშნით, რადგანაც იმის ალბათობა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს ერთ გარკვეულ მნიშვნელობას, ნულის ტოლია).

$$P(x < X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x)$$

$\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ სიდიდეს ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის **ალბათობის საშუალო სიმკვრივე** $[x, x+\Delta x]$ ინტერვალზე, ხოლო ამ შეფარდების ზღვარს, როდესაც Δx მიისწრაფვის ნულისაკენ – უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის ალბათობათა **განაწილების დიფერენციალური ფუნქცია,** ან, უბრალოდ, განაწილების სიმკვრივე და აღინიშნება $p(x)$ -ით:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{3.24}$$

ამ უკანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ

$$p(x) = F'(x) \tag{3.25}$$

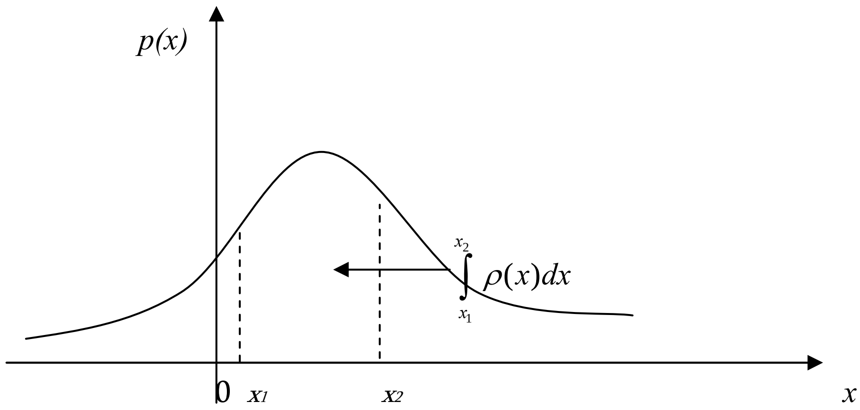
$y = p(x)$ განტოლების შესაბამის მრუდს **ალბათობათა განაწილების მრუდი** ეწოდება.

მოვიყვანოთ $p(x)$–ის თვისებები:

1. $p(x) \ge 0$, როგორც არაკლებადი ფუნქციის წარმოებული

2. $P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x^2} p(x)dx$

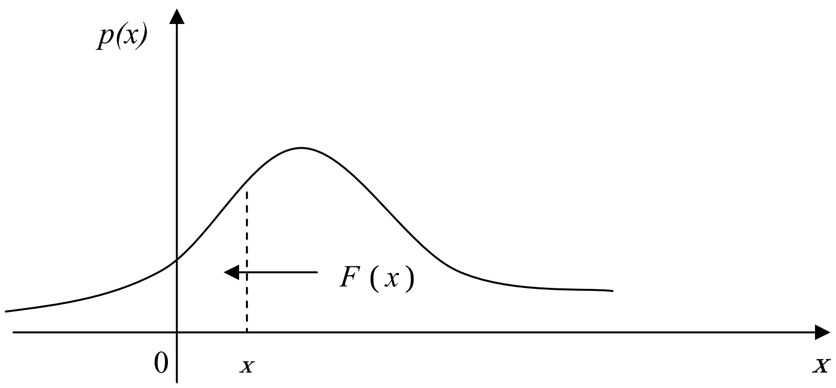
ამ თვისების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია წარმოდგენილია ქვემოთმოყვანილ ნახაზზე:



ნახ. 3.1

3. $\int_{-\infty}^{x} p(x)dx = F(x)$

შესაძლებელია ამ თვისების გეომეტრიული ინტერპრეტაციაც:



ნახ. 3.2

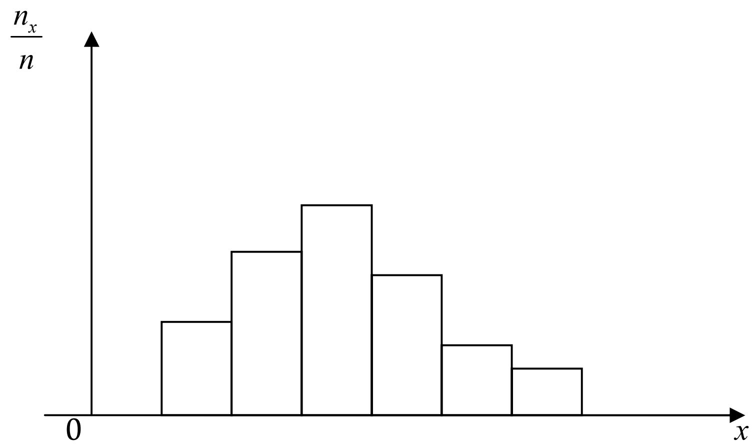
4. $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$

5. თუ $p(x) = \begin{cases} p(x), & a \le x \le b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}$

მაშინ $\int_a^b p(x)dx = 1$

პრაქტიკაში უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის ალბათობათა განაწილებაზე შეიძლება ვიმსჯელოთ მხოლოდ ცდათა შედეგების მიხედვით. ამ დროს ხელმძღვანელობენ იმ გარემოებით, რომ შემთხვევითი სიდიდის ფარდობითი სიხშირეები მათ ალბათობებთან ახლოსაა.

დავყოთ X შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა დიაპაზონი ინტერვალებად. ვატარებთ რა ცდათა სერიებს, რომლებიც იძლევა X სიდიდის ემპირიულ მნიშვნელობებს, ვაფიქსირებთ n_x სიდიდეებს, რომლებიც აღნიშნავს ამა თუ იმ ინტერვალებში მოხვედრებს ცდების შედეგად. მაშინ $\frac{n_x}{n}$ შეფარდებებში განსაზღვრავს უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის ემპირიულ განაწილებას, რომლის საფუძველზეც შეიძლება აიგოს ჩვენთვის უკვე ნაცნობი **ჰისტოგრამა**:



ნახ. 3.3

ჰისტოგრამის მართკუთხედების ფართობები შესაბამის ინტერვალებში მოხვედრის სიხშირეების პროპორციულია.

ამ გზით ღებულობენ ალბათობათა განაწილების მრუდის გარკვეულ მიახლოებას კიბისებური ფიგურის სახით.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი,** რომლის შესაძლო მნიშვნელობები ეკუთვნის რაიმე ინტერვალს, ეწოდება განსაზღვრულ ინტეგრალს:

$$M(x) = \int_a^b xp(x)dx \tag{3.26}$$

ხოლო უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი,** რომლის შესაძლო მნიშვნელობები ეკუთვნის მთელ რიცხვით ღერძს, შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \tag{3.27}$$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **დისპერსია** სასრული ინტერვალის და მთელ რიცხვით ღერძის შემთხვევაში, შესაბამისად, შემდეგი ინტეგრალებით გამოითვლება:

$$D(x) = \int_a^b (x - M(x))^2 p(x)dx\,; \tag{3.28}$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{-\infty} (x - M(x))^2 p(x)dx \tag{3.29}$$

მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებები უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ისევე ფორმულირდება, როგორც დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში.

ანალოგიურად განისაზღვრება უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **საშუალოკვადრატული გადახრაც**. (იხ. (3.21)).

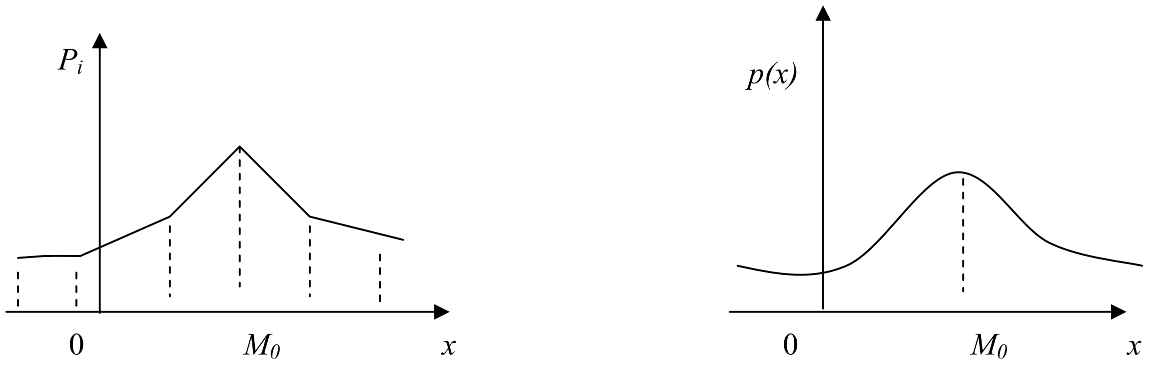
დისპერსიის გამოსათვლელად მარტივად მიიღება უფრო მოსახერხებელი ფორმულები:

$$D(x) = \int_a^b x^2 p(x)dx - (M(x))^2\,; \tag{3.30}$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{-\infty} x^2 p(x)dx - (M(x))^2 \tag{3.31}$$

პრაქტიკაში ზოგჯერ გამოიყენება შემთხვევითი სიდიდის ისეთი მახასიათებლებიც, როგორიცაა მოდა და მედიანა.

შემთხვევითი სიდიდის **მოდა** ეწოდება მის ყველაზე ალბათურ M_0 მნიშვნელობას. უფრო ზუსტად, ტერმინი „ყველაზე ალბათური მნიშვნელობა“ უფრო გამოსადეგია დისკრეტული სიდიდეებისათვის (ნახ. 3.4ა), ხოლო უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდისთვის მოდა ის მნიშვნელობაა, რომელშიც ალბათობის სიმკვრივე მაქსიმალურია (ნახ. 3.4ბ).



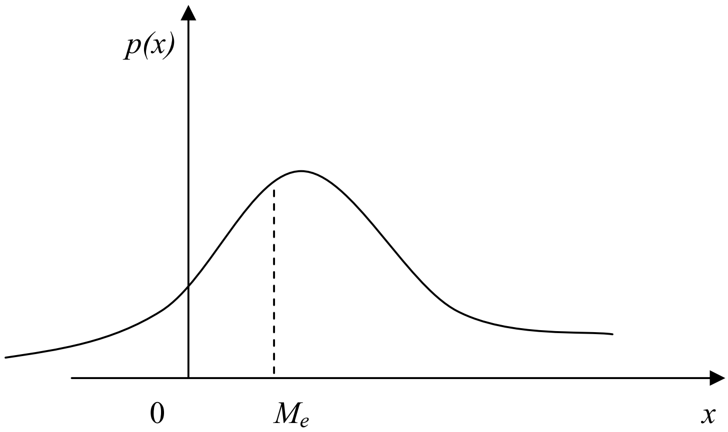
ა) ბ)

ნახ. 3.4

შემთხვევითი სიდიდის **მედიანა** ეწოდება მის ისეთ M_e მნიშვნელობას, რომლისთვისაც $P(x < Me) = P(x > Me)$.

ეს მახასიათებელი გამოიყენება მხოლოდ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის, თუმცა ფორმალურად იგი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისთვისაც შეიძლება განისაზღვროს:

გეომეტრიულად მედიანა ეს იმ წერტილის აბცისაა, რომელშიც განაწილების მრუდით შემოსაზღვრული ფართობი შუაზე იყოფა.



ნახ. 3.5

სიმეტრიული განაწილების შემთხვევაში მედიანა ემთხვევა მათემატიკურ ლოდინსა და მოდას.

3.7 მნიშვნელოვანი ალბათური განაწილებები

დავუშვათ, X შემთხვევითი სიდიდე არის A ხდომილების დადგომის რიცხვი m ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ ცდათა ისეთ სერიაში, რომელსაც მხოლოდ ორი შედეგი შეიძლება მოყვეს. თითოეულ ცდაში A ხდომილების დადგომის ალბათობა მუდმივია და p –ს ტოლია. X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია 0, 1, 2, ..., m და იგი ემორჩილება ბინომიალური განაწილების კანონს.

დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს ეწოდება **ბინომიალური,** თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობების ალბათობები $(q+p)^m$ ბინომის განაშლის შესაბამისი წევრების ტოლია, სადაც $q=1-p$.

(3.5)-ის თანახმად ბინომიალური განაწილების მოცემა შეიძლება შემდეგი ცხრილის სახით:

X	0	1	...	n	...	m-1	m
P	q^m	mpq^{m-1}	...	$C_m^n p^n q^{m-n}$	...	$mp^{m-1}q$	p^m

ცხრილი 3.3

(3.16)-ის თანახმად ბინომიალური განაწილების მათემატიკურ ლოდინი შეიძლება გამოვიანგარიშოთ:

$$M(x)=0\cdot q^{m}+1\cdot m\cdot p\cdot q^{m-1}+...+m\cdot C_{m}^{n}p^{n}q^{m-n}+...+mp^{m}$$

ჯუფთებათა მე-3 თვისების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$M(X)= m\,p \tag{3.32}$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ბინომიალური კანონით განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია გამოითვლება ფორმულით:

$$D(X)= mq\,p \tag{3.33}$$

მაგალითი 2.3 საწარმოო ხაზის შემოწმების პროცესში დადგინდა, რომ საშუალოდ ყოველი ათი წარმოებული დეტალიდან ერთი წუნდებულია. როგორია წუნდებულ დეტალთა რაოდენობის ალბათობები შემთხვევით შერჩეული ოთხი დეტალისაგან შედგენილ ნაკრებში?

თუ ცდად მივიჩნევთ დეტალის ვარგისიანობის შემოწმებას (თავისი ორი შესაძლო შედეგით: დეტალი წუნდებულია ან ვარგისია), მაშინ აქ საქმე გვაქვს ტიპიურ ბინომიალური განაწილების ამოცანასთან შემდეგი პარამეტრებით:

p=0, 1 – ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული დეტალი წუნდებული იქნება,
m=4 – შემოწმებული დეტალების რაოდენობა

შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობები იქნება 0, 1, 2, 3, 4, რაც შესაბამისად ნიშნავს: შემთხვევით შერჩეული ოთხი დეტალიდან არცერთი იქნება წუნდებული, ერთი იქნება წუნდებული და ა. შ. – ოთხივე წუნდებული იქნება.

აღნიშნული რიცხვითი მნიშვნელობების ალბათობები შემდეგნაირად იანგარიშება:

$$P(x=0)=C_{4}^{0}(0{,}1)^{0}(1-0{,}1)^{4-0}=1\cdot 1\cdot 0{,}9^{4}=0{,}6561;$$
$$P(x=1)=C_{4}^{1}(0{,}1)^{1}(1-0{,}1)^{4-1}=4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^{3}=0{,}2916;$$
$$P(x=2)=C_{4}^{2}(0{,}1)^{2}(1-0{,}1)^{4-2}=6\cdot 0{,}01\cdot 0{,}9^{2}=0{,}0486;$$
$$P(x=3)=C_{4}^{3}(0{,}1)^{3}(1-0{,}1)^{4-3}=4\cdot (0{,}1)^{2}\cdot 0{,}9^{1}=0{,}0036;$$
$$P(x=4)=C_{4}^{4}(0{,}1)^{4}(1-0{,}1)^{4-4}=4\cdot 0{,}0001\cdot (0{,}9)^{0}=0{,}0001.$$

იმ ხდომილებათა ალბათობების განსაზღვრისათვის, რომლებიც დროის მოცემულ ინტერვალში ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეიძლება დადგეს და მათი დადგომის საშუალო რიცხვი წინასწარ ცნობილია, იყენებენ პუასონის განაწილებას.

იტყვიან, რომ დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია **პუასონის კანონის** მიხედვით, თუ მას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ მთელი არაუარყოფითი მნიშვნელობები 0, 1, 2, ..., m, ... შემდეგი ალბათობებით:

$$P(x=m)=P(x)=\frac{a}{m!}e^{-\mu},\qquad m=0,1,2,.... \tag{3.34}$$

სადაც a ხდომილებათა დადგომის საშუალო რიცხვია დროის მოცემულ ინტერვალში და მას პუასონის კანონის **პარამეტრს** უწოდებენ.

ექსპონენციალური e^{-a} ფუნქციის მნიშვნელობებს პოულობენ ექსპონენციალური ცხრილების საშუალებით a –ს მნიშვნელობის შესაბამისად.

მტკიცდება, რომ პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი

$$M(X)=a \tag{3.35}$$

ბინომიალურ კანონს გააჩნია ზღვრული თვისება, რომელიც ხშირად გამოიყენება პრაქტიკაში. დავუშვათ, ატარებენ დიდი (m) რაოდენობის დამოუკიდებელ ცდათა სერიას, რომელთაგან თითოეულში A ხდომილების დადგომის ალბათობა p ერთიდაიგივეა და ძალიან მცირეა. მაშინ $P_{m,n}$ –ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილება ცდათა ამ სერიაში დადგება n-ჯერ, შეიძლება გამოითვალოს მიახლოებითი ფორმულით:

$$P_{m,n} \approx \frac{(mp)}{n!} e^{-mp}, \tag{3.36}$$

სადაც $m \cdot p = a$ - პარამეტრია პუასონის იმ კანონისა, რომლითაც მიახლოებით შეიცვლება ბინომიალური განაწილება.

თუ შემთხვევითი სიდიდის ფორმირებაზე მრავალი ფაქტორი ახდენს გავლენას, ამასთან თითოეული ფაქტორის გავლენა მასზე მცირეა და არცერთ ფაქტორს ამ მხრივ არა აქვს მნიშვნელოვანი უპირატესობა სხვასთან მიმართებაში, ასეთ შემთხვევით სიდიდეებს მიაკუთვნებენ სიდიდეებს, რომლებიც ემორჩილება ე. წ. ნორმალური განაწილების კანონს. იგულისხმება, რომ იგი იღებს არაუარყოფით მნიშვნელობებს.

იტყვიან, რომ უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდე ემორჩილება განაწილების **ნორმალურ (გაუსის) კანონს**, თუ მისი განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.37}$$

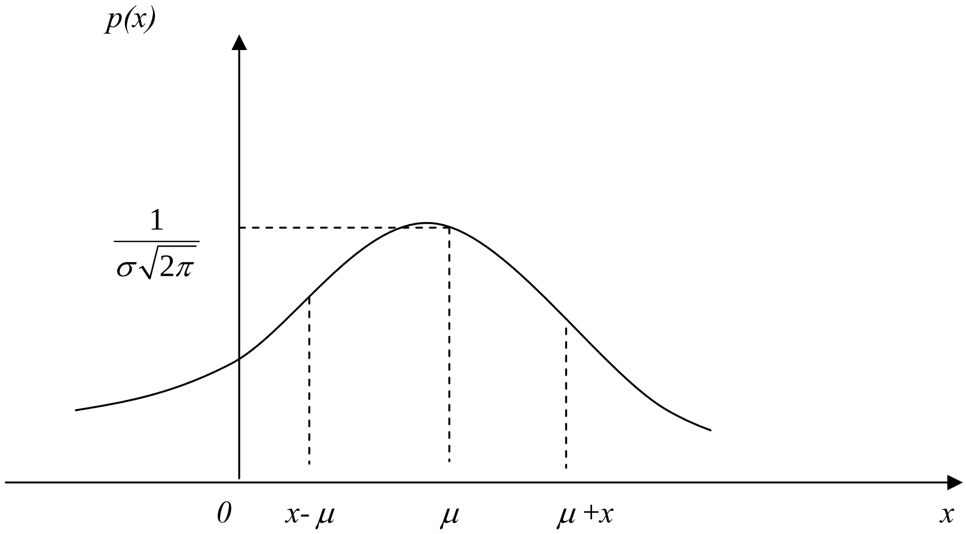
სადაც σ და μ განაწილების პარამეტრებია.

p(x) ფუნქციის გრაფიკს ნორმალური განაწილების მრუდი ეწოდება (ნახ. 3.6). მას შემდეგი თვისებები გააჩნია:

1. მრუდი სიმეტრიულია $x = \mu$ წრფის მიმართ;
2. ფუნქციას მაქსიმუმი აქვს $x = \mu$ წერტილში და $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
3. x-ის μ წერტილიდან დაშორებასთან ერთად ფუნქცია იკლებს და როცა $x \to +\infty$, მრუდი უახლოვდება $0x$ ღერძს;

4. მრუდი ამოზნექილია, როდესაც $x \in (a-\mu, a+\mu)$ და ჩაზნექილია, როდესაც $x \in (-\infty, a-\mu)$ და $x \in (a+\mu, +\infty)$.

მრუდის ფორმა იცვლება σ პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად. σ-ს ზრდისას *p(x)* იკლებს, მრუდი ხდება უფრო დამრეცი და გაჭიმული $0x$ ღერძის გასწვრივ.



ნახ. 3.6

შევნიშნოთ, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის მნიშვნელობები, შესაბამისად μ -ს და σ^2-ის ტოლია.

სავარჯიშოები:

1. ფირმის მარკეტიგულ განყოფილებაში მუშაობს 12 მამაკაცი და 8 ქალი. მათგან პირადი საქმეების ნომრების მუხედვით ირჩევნ 10-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ არჩეულთაგან 6 მამაკაცი და 4 ქალი იქნება?

2. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული პროდუქტი იქნება პირველი ხარისხის, თუ ცნობილია, რომ მთელი პროდუქციის 4% წუნდებულია, ხოლო ვარგისიდან 75% პირველი ხარისხისაა.

3. ხანგრძლივი დაკვირვების შედეგად დაადგინეს, რომ ყოველდღიურად საშუალოდ ფირმის თანამსრომელთა 10% აგვიანებს, ხოლო 4% აცდენს სამუშაოს.
   I – განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ რომელიმე დღეს თანამშრომელი:
      ა) არ დააგვიანებს სამუშაოზე;
      ბ) არ გააცდენს სამუშაოს.
   II– განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ რომელიმე ორი დღისათვის თანამშრომელი:
      ა) დააგვიანებს თითოეულ ამ დღეს;
      ბ) დააგვიანებს პირველ დღეს და გააცდენს მეორე დღეს;
      გ) ორივე დღეს დაგვიანების გარეშე გამოცხადდება სამუშაოზე;
      დ) გააცდენს ერთ-ერთ დღეს;
      ე) ერთ-ერთ დღეს გააცდენს, ხოლო მეორე დღეს არ დააგვიანებს.

4. ლატარიაში ყოველ ას ბილეთზე თამაშდება ერთი 5000 ლარიანი, ორი 1000 ლარიანი და ათი 100 ლარიანი მოგება. შეადგინეთ ერთი ბილეთით მოგების სიდიდის განაწილების კანონი იმ პირობით, რომ ერთი ბილეთის ღირებულება 80 ლარს შედაგენს. როგორი იქნება აღნიშნული მოგების მათემატიკური ლოდინი?

5. სიკვდილიანობის ამერიკული ცხრილის თანახმად ალბათობა, იმისა, რომ 25 წლის ადამიანი კიდევ ერთ წელიწადს იცოცხლებს, უდრის 0.992-ს, ხოლო, ალბათობა იმისა, რომ იგი მოკვდება შემდეგი ერთი წლის განმავლობაში 0,008-ს შეადგენს. სადაზღვევო კომპანია ასეთ ადამიანთან დებს ხელშეკრულებას დაზღვიოს თავისი სიცოცხლე 1000 დოლარად. სადაზღვევო შესატანი 10 ოლარია. როგორი შემოსავლის მიღებას უნდა ვარაუდობდეს კომპანია?

6. კომპანიას ხუთი ერთიდაიგივე ტიპის დაზგა აქვს. ნებისმიერი მათგანის ანგრძლივი დროით გაჩერებამ შეიძლება მნიშვნელოვანი ზარალი მიაყენოს ომპანიას. ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერ დღეს რომელიმე მათგანი მწყობრიდან გამოვა 0,03-ს შეადგენს.
   ბინომიალური განაწილების გამოყენებით განსაზღვრეთ ალბათობა

იმისა, რომ ნებისმიერ მოცემულ დღეს:

ა) არცერთი დაზგა არ გამოვა მწყობრიდან;

ბ) მხოლოდ ერთი დაზგა გამოვა მწყობრიდან;

გ) ორი მაინც დაზგა გამოვა მწყობრიდან.

7. სამუშაოს გაცდენებს კომპანიაში შემთხვევითი ხასიათი აქვს და დღეში საშუალოდ 3 თანამშრომელი აცდენს სამუშაოს. პუასონის განაწილების გამოყენებით განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერ მოცემულ დღეს სამუშაოს გააცდენს:

ა) ნული თანამშრომელი;

ბ) ერთი თანამშრომელი;

გ) ორზე ნაკლები თანამშრომელი;

დ) მინიმუმ სამი თანამშრომელი.

თავი 4. ფინანსური მათემატიკის ელემენტები

საფინანსო-ეკონომიკური გაანგარიშებანი (ფინანსური მათემატიკა) – წარმოადგენს იმ სფეროს, რომელიც ქმნის სესხის სახით ფულის გაცემასთან დაკავშირებულ საფინანსო-საკრედიტო და კომერციულ გარიგებების საფუძვლებს. მოთხოვნილებები მათზე ვრცელდება ყველა იმ შემთხვევაში, როცა ხორციელდება ინვესტირება ამა თუ იმ სახით და შემდეგ ხდება მათგან შემოსავლების მიღება. ეს შეიძლება იყოს ფასიანი ქაღალდების განთავსება, საწარმოო ინვესტიცია და სხვა.

ასეთ დროს დგება გადასახადების ზომებისა და ვადების გაანგარიშების დროსთან და შეთანხმების წესებთან შესაბამისობაში მოყვანის ამოცანა. ამ მიზნებისათვის შემუშავებულმა ანალიტიკურმა ფორმულებმა და გამოთვლის საშუალებებმა მიიღო სახელწოდება – „საფინანსო-ეკონომიკური გაანგარიშებანი“, ანუ „ფინანსური მათემატიკა“.

საფინანსო-ეკონომიკური გაანგარიშებანი ანუ ფინანსური მათემატიკა განსაზღვრავს ფულადი სახსრების ღირებულებების ცვლილებათა ერთობლიობას, რომელიც არსებობს ფულადი რესურსების უკუმოძრაობის შედეგად (სესხის გაცემის) კვლავწარმოების პროცესში.

ფინანსური მათემატიკის მთავარი დანიშნულება არის ის, რომ იგი საშუალებას იძლევა ეფექტურად განხორციელდეს – საინვესტიციო მოღვაწეობა, ჩატარდეს საპროექტო ანალიზი, მოხდეს ფინანსების მართვა.

ასევე, ფინანსური მათემატიკა განიხილავს ხელშეკრულებების პირობებიდან გამომდინარე ფულადი სახსრების დაბანდების შესაძლო ვარიანტებს და აანალიზებს უკვე გაწეული ხარჯების შედეგებს.

ამრიგად, ფინანსური მათემატიკის (სეგ) ყველა აუცილებელი გაანგარიშების არსი მდგომარეობს – მოცემულ მომენტში ფულის ღირებულების განსაზღვრა,ში კაპიტალის ზრდის პროცესის ანალიზის გზით – გარკვეული პერიოდის განმავლობაში.

ზოგიერთი მეცნიერის აზრით (ე.მ. ჩეტირკინი), ფინანსური მათემატიკა მოიცავს გამოთვლათა მეთოდების განმსაზღვრელ წესებს, რომლებზეც მოთხოვნილება ჩნდება ყოველთვის, როცა ხდება საფინანსო-საბანკო ოპერაციის პირობებიდან გამომდინარე – კონკრეტული **სამი პარამეტრის** მნიშვნელობების შეთანხმება. ესენია:

ღირებულებათა მახასიათებლები (გადასახადები, სავალო ვალდებულებები, კრედიტები და სხვა);

დროის მონაცემები (გადასახადის თარიღები ან ვადები, საშეღავათო პერიოდების ხანგრძლივობა ან გადასახადის გადავადება და ა. შ.);

საპროცენტო განაკვეთები (ისინი შეიძლება მოცემული იყოს არაცხადი სახით).

ყოველივე ზემოთ თქმული გვეხმარება შემდეგი ამოცანების გადაწყვეტაში:

პროცენტებზე დარიცხვის გზით მიღებული ფულადი სახსრების საბოლოო ჯამების გაანგარიშება ანაბრებსა თუ გაცემულ სესხებში, ასევე ფასიან ქაღალდებზე;

ფასიანი ქაღალდების აღრიცხვა;

ცალკეული პარამეტრების განსაზღვრა და მათ შორის ურთიერთკავშირის დადგენა ხელშეკრულებების პირობებიდან გამომდინარე;

მოცემული პარამეტრების ექვივალენტულობის განსაზღვრა სხვადასხვა მეთოდებით მისაღები ხარჯების ტოლი უკუგებისათვის სახელშეკრულებო დოკუმენტებში;

ოპერაციათა პირობების ცვლილების შედეგების ანალიზი;

ფულადი რესურსების განმაზოგადოებელი მახასიათებლებისა და ცალკეული პარამეტრების აღრიცხვა, რომლებსაც განვიხილავთ როგორც საფინანსო ფულად ნაკადებს;

ფინანსურ ოპერაციათა შესრულების თანმიმდევრობათა შემუშავება;

ფინანსური ოპერაციების შემოსავლიანობის მაჩვენებლების გაანგარიშება.

პრაქტიკულად, ასეთი გაანგარიშებანი გამოიყენება საბანკო-საფინანსო ორგანიზაციების, სავაჭრო ფირმების, საინვესტიციო კომპანიების, საფონდო და სავალუტო ბირჟების საქმიანობაში. ასევე, მას დიდ მნიშვნელობას ანიჭებენ საგარეო ეკონომიკურ ურთიერთობებში.

41. ელემენტარული ფუნქციების გამოყენება. ფასი-მოთხოვნისა და შემოსავლის მოდელირება

ფუნქციის შესწავლისა და გამოყენების მნიშვნელოვან ასპექტს ალგებრულ, რიცხობრივ და გრაფიკულ გამოსახულებებს შორის ურთიერთქმედება წარმოადგენს. ფუნქცია შეიძლება გამოყენებულ იქნას რეალური სამყაროდან აღებული მონაცემების აღსაწერად. ამ პროცესს **მათემატიკურ მოდელირებას** უწოდებენ. **ფასი-მოთხოვნისა** და **შემოსავლის** მოდელირება ადგენს დამოკიდებულებას ფუნქციების ალგებრულ განსაზღვრებას, ფუნქციების რიცხობრივ მნიშვნელობასა და ფუნქციების გრაფიკულ გამოსახულებებს შორის.

განვიხილოთ რენტაბელობისა და მოგება-ზარალის კონცეფციები.

ნებისმიერ მწარმოებელ კომპანიას გააჩნია ხარჯები C და შემოსავლები R. თუ $R<C$, კომპანია განიცდის ზარალს, თუ $R=C$, კომპანია აღწევს უზარალობას, ხოლო თუ $R>C$, კომპანია ხდება მომგებიანი. ხარჯები შეიძლება იყოს ფიქსირებული (მაგ. პროდუქციის დიზაინის, გამართვისა და რეკლამის ხარჯები) და ცვლადი ხარჯები, რომლებიც დამოკიდებულია გარკვეულ ფასად წარმოებული პროდუქციის რაოდენობაზე.

ვთქვათ, x არის წარმოებული და გაყიდული ერთეულების რაოდენობა, რომელიც წარმოადგენს დამოუკიდებელ ცვლადს. ხარჯის ფუნქციები, შემოსავლის ფუნქციები, მოგების ფუნქციები და ფასი-მოთხოვნის დამოკიდებულების ფუნქციები ხშირად წარმოდგენილია ერთი და იგივე ფორმით, სადაც a,b,m და $n-$ მუდმივი სიდიდეებია განსაზღვრული კონკრეტული პროგრამის კონტექსტისაგან. ამასთან, ფასი-მოთხოვნის დამოკიდებულების ფუნქციები, როგორც წესი, განისაზღვრება ფინანსური განყოფილების მიერ მონაცემების საფუძველზე და მოგება-ზარალის ანალიზში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს.

ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ხარჯის ფუნქცია:

$$C=a+bx \tag{4.1}$$

სადაც a − ფიქსირებული, ხოლო bx − ცვალებადი ხარჯია.

თუ პროდუქციის ერთეულის საცალო ფასს ავღნიშნავთ p-თი და x არის პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც შეიძლება გაიყიდოს საცალო ფასად, მაშინ შემოსავლის ფუნქციას ექნება სახე:

$$R = px\,, \tag{4.2}$$

სადაც

$$p = m - nx \tag{4.3}$$

ე.ი.

$$R = (m - nx)x$$

მოგების ფუნქცია ავღნიშნოთ P, მაშინ შეიძლება ჩავწეროთ:

$$P = R - C = x(m - nx) - (a + bx) \tag{4.4}$$

მაგალითი 4.1 პოპულარული ავტომატური კამერების მწარმოებელი ბითუმად ყიდის მათ საცალო რეალიზაციის პუნქტებში მთელ ამერიკაში. სტატისტიკური მეთოდების გამოყენებით კომპანიის ფინანსურმა განყოფილებამ შეადგინა **ფასი-მოთხოვნის** დამოკიდებულების მონაცემები:

x (მლნ.)	p($)
2	87
5	68
8	53
12	37

(4.5)

სადაც p არის კამერის საცალო ფასი. ამ ფასად რეალიზებულ იქნა x მლნ. კამერა.

შევნიშნოთ, რომ როცა ფასი ეცემა, გაყიდული კამერების რაოდენობა იზრდება.

სპეციალური ანალიზური მეთოდების გამოყენებით (რეგრესიის ანალიზი) ანალიტიკოსები მივიდნენ ფასი-მოთხოვნის შემდეგ ფუნქციაზე, რომელიც ახდენს (4.5) მონაცემების მოდელირებას:

$$p(x) = 94{,}8 - 5x, \qquad 1 \le x \le 15 \tag{4.6}$$

ა) გრაფიკზე ავღნიშნოთ (5) მონაცემები. ავაგოთ ფასი-მოთხოვნის ფუნქციის გრაფიკი კოორდინატთა იმავე სისტემაში;

ბ) როგორია კომპანიის შემოსავლის ფუნქცია და როგორი იქნება ამ ფუნქციის არე?

გ) შევავსოთ მოცემული ცხრილი:

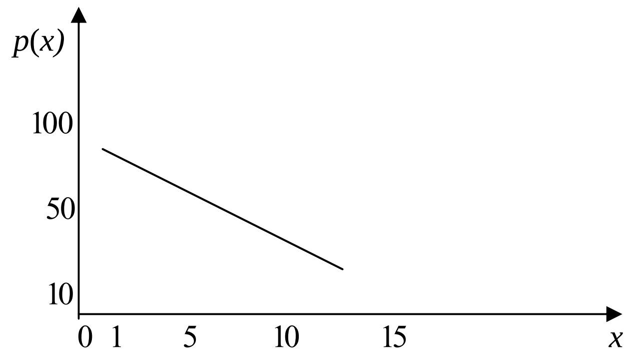
x (მლნ.)	$R(x)$ (მლნ.$)
1	
3	
6	
9	
12	
15	

(4.7)

დ) ავაგოთ შემოსავლების ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა:

ა)



ნახ. 4.1

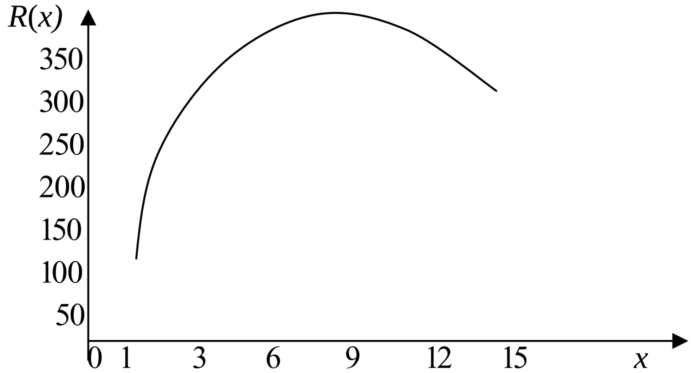
ბ) $R(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (94{,}8 - 5x)$,

ფუნქციის არეა – $1 \le x \le 15$

გ)

x (მლნ.)	$R\,(x)$ (მლნ.$)
1	90
3	239
6	389
9	448
12	418
15	297

დ)



ნახ. 4.2

მაგალითი 4.2 გორგოლაჭებიანი ციგურების მწარმოებელ კომპანიას აქვს დღიური ფიქსირებული ხარჯი $ 300 ოდენობით და მთლიანი დღიური ხარჯი $ 4300 წარმოებით – 100 წყვილი ციგურები დღეში. ხარჯები C წრფივადაა დაკავშირებული x –თან (წარმოებული და გაყიდული ერთეულების რაოდენობა).

ა) იპოვეთ წარმოებასთან დაკავშირებული წერტილების შემაერთებელი წრფის კუთხური კოეფიციენტი. ეს ის წრფეა, რომელიც გაივლის (0;300) და (100;4300) წერტილებზე;

ბ) შეადგინეთ წარმოებისა და ხარჯის ურთიერთდამაკავშირებელი წრფის განტოლება. ჩაწერეთ იგი $c = mx + b$ ფორმით;

გ) ააგეთ ხარჯის განტოლება (ბ) პასუხის გამოყენებით, თუ $0 \le x \le 200$.

ამოხსნა:

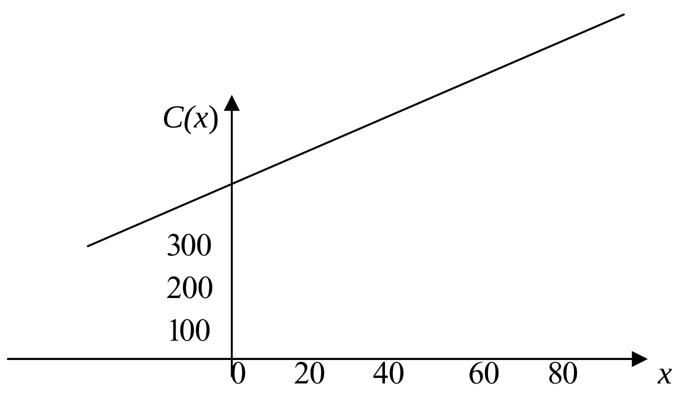
ა) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4300 - 300}{100 - 0} = 40$

ბ) უნდა ვიპოვოთ წრფის განტოლება, რომელიც გაივლის (0, 300) წერტილზე 40 კოეფიციენტით:

$$c = mx + b,$$

$$c = 40x + 300$$

გ)



ნახ. 4.3

შევნიშნოთ, რომ დღიური ფიქსირებული ხარჯი $ 300 მოიცავს ფაბრიკის ხარჯებს, დაზღვევას და ა. შ. ამ ხარჯებს ადგილი აქვს იმისგან დამოუკიდებლად, იქმნება თუ არა რაიმე პროდუქცია. კოეფიციენტი 40 არის ერთი წყვილი ციგურების გამოშვებაზე გაწეული ხარჯები.

მაგალითი 4.3 ოცდამეერთე საუკუნის დასაწყისში მსოფლიო მოთხოვნა ნედლ ნავთობზე შეადგენდა 75 მლნ ბარელს დღეში და ერთო ბარელის ფასი მერყეობდა 20-დან 40 აშშ დოლარამდე. ვთქვათ, დღიური მოთხოვნა ნედლ ნავთობზე იყო 76,1 მლნ ბარელი, როცა ერთი ბარელის ღირებულება შეადგენდა $ 25,52. დავუშვათ, რომ ეს მოთხოვნა შემცირდა 74,9 მლნ ბარელამდე, ხოლო ბარელის ღირებულება გაიზარდა და გახდა $ 33,68.

ვგულისხმობთ, რომ დამოკიდებულება მოთხოვნასა (x) და ფასს (p) შორის წრფივია.

იპოვეთ, წრფივი ფუნქცია $p=ax+b$, რომელიც ასახავს ნავთობის **ფასი-მოთხოვნის ურთიერთდამოკიდებულებას.** ამ მოდელის დახმარებით გამოთვალეთ მოთხოვნა, როცა ბარელის ფასი მიაღწევს $ 39,12.

ამოხსნა.

ვიპოვოთ წრფივი განტოლება, რომელიც გადის (76,1; 25,52) და (74,9; 33,68) წერტილებზე.

გამოვთვალოთ კუთხური კოეფიციენტი:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{33,68-25,52}{74,9-76,1}=\frac{8,16}{-1,2}=-6,8$$

$$p-p_1=m(x-x_1)$$

$$p-25,52=-6,8(x-76,1)$$

$$p-25,52=-6,8x+517,48$$

$$p=-6,8x+543$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მოთხოვნა, როცა ბარელის ფასი შედაგენს $ 39,12, უნდა ამოვხსნათ მიღებული განტოლება p=39,12-თვის. ამ მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ:

$$-6,8x+543=39,12$$

$$-6,8x=-503,88$$

$$x=\frac{-503,88}{-6,8}=74,1$$

ე. ი. 74,1 მლნ ბარელი დღეში.

მაგალითი 4.4 ნედლი ნავთობის მიწოდება იცვლება ფასთან ერთად: დღიური მიწოდება შეადგენს 73,4 ბარელს, როცა ბარელის ფასია 23,84 აშშ დოლარი და მიწოდება იზრდება 77,4 მლნ ბარელამდე, როცა ფასი აღწევს $34,24.

დავუშვათ, რომ დამოკიდებულება მიწოდებასა (x) და ფასს (p) შორის წრფივია.

ვიპოვოთ $p=ax+b$ წრფივი ფუნქცია, რომელიც ასახავს ნავთობის **ფასი-მიწოდების ურთიერთდამოკიდებულებას.** ამ მოდელის დახმარებით გამოთვალეთ მიწოდება, როცა ბარელის ფასი ეცემა $ 20,98.

ამოხსნა.

ვიპოვოთ წრფივი განტოლება, რომელიც გადის (73,4; 23,84) და (77,4; 34,24) წერტილებზე.

გამოვთვალოთ კუთხური კოეფიციენტი:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{34,24-23,84}{77,4-73,4}=\frac{10,4}{4}=2,6$$

$$p-p_1=m(x-x_1)$$

$$p-34,24=2,6(x-77,4)$$

$$p-34,24=2,6x-201,24$$

$$p=2,6x-167$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მოთხოვნა, როცა ბარელის ფასი შედაგენს $ 20,98, უნდა ამოვხსნათ მიღებული განტოლება p=20,98-თვის. ამ მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ:

$2,6x-167=20,98$

$2,6x=187,98$

$x=\dfrac{187,98}{2,6}=72,3$

ე. ი. 72,3 მლნ ბარელი დღეში.

თავისუფალი ბაზრის პირობებში პროდუქტის ფასი განისაზღვრება **მიწოდებასა და მოთხოვნას შორის ურთიერთდამოკიდებულებით**. ფასს აქვს სტაბილიზაციისაკენ ტენდენცია იმ წერტილში, როცა მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები გადაიკვეთება. ამ წერტილს ეწოდება **წონასწორობის წერტილი**, ხოლო შესაბამის ფასს – **წონასწორობის ფასი.** მოთხოვნის და მიწოდების საერთო მნიშვნელობას კი – **წონასწორული რაოდენობა**.

ზემოთ განხილულის შედეგად გვაქვს:

ფასი-მოთხოვნისა და ფასი-მიწოდების ურთიერთდამოკიდებულების წრფივი ფუნქციები:

$p=-6,8x+543$

$p=2,6x-167$

ვიპოვოთ მოცემული მონაცემების საფუძველზე წონასწორული რაოდენობა:

$2,6x-167=-6,8x+543$

$9,4x=710$

$x=\dfrac{710}{9,4}$

$x=75,532$

ე.ი. წონასწორული რაოდენობაა 75,53 მლნ ბარელი.

წონასწორობის ფასი იქნება:

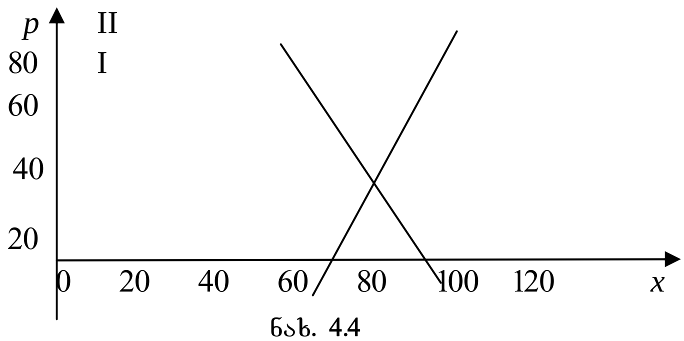
$p=2,6\cdot(75,53)-167=29,38$

$p=-6,8\cdot(75,53)+543=29,38$

ვიპოვოთ ეს წერტილი კოორდინატთა ღერძზე.

$p=-6,8x+543$

$p=2,6x-167$



ნახ. 4.4

მაგალითი 4.5 გავიხსენოთ, რომ იმ კომპანიის ფინანსურმა განყოფილებამ, რომელიც აწარმოებს ავტოკამერებს, შეადგინა ფასი-მოთხოვნის ურთიერთდამოკიდებულების ფუნქცია – $p(x)=94,8-5x$ და შემოსავლის ფუნქცია – $R(x)=x\cdot p(x)=x\cdot(94,8-5x)$, სადაც $p(x)$ არის თითო კამერის საბითუმო ფასი, რა ფასადაც შესაძლებელია x კამერის რეალიზაცია და $R(x)$ არის შესაბამისი შემოსავალი დოლარებში. ორივე ფუნქციის განსაზღვრის არეა $1\le x\le 15$.

ვიპოვოთ: წარმოებული კამერების რაოდენობა, რომელიც **მაქსიმალურ შემოსავალს** მოიტანს. ასევე, განვსაზღვროთ ამ მომენტისათვის თითოეული კამერის საბითუმო ფასი.

$$R(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (94,8 - 5x) =$$
$$= 5x^2 + 94,8x =$$
$$= -5(x^2 - 18,96x + ?) =$$
$$= -5(x^2 - 18,96x + 9,48^2 - 9,48^2) =$$
$$= -5(x - 9,48)^2 + 5 \cdot 9,48^2 =$$
$$= -5(x - 9,48)^2 + 449,352$$

მაქსიმალური შემოსავალი (449,352 მლნ დოლარი) მიიღწევა მაშინ, როცა $x = 9,48$ (9 480 000 კამერა).

$$p(x) = 94,8 - 5x$$
$$p(9,48) = 94,8 - 5 \cdot 9,48 = 47,4$$

იმ მომენტისათვის, როდესაც კომპანიას ექნება მაქსიმალური შემოსავალი, კამერის საბითუმო ფასი იქნება $ 47,4.

ზღვრული წერტილები ეწოდება პროდუქციის წარმოების იმ დონეებს, რომლებზეც ალგებრულად $R(x) = C(x)$.

აქვე ავღნიშნოთ, რომ როდესაც $R(x) < C(x)$ – ადგილი აქვს **ზარალს,** ხოლო როდესაც $R(x) > C(x)$ – კომპანია **მოგებაზე** გადის.

მაგალითი 4.6 სტატისტიკური მეთოდების გამოყენებით ფინანსურმა სამსახურმა მიიღო ხარჯის ფუნქცია $C(x) = 156 + 19,7x$, სადაც $C(x)$ არის მლნ კამერის წარმოებისა და რეალიზაციის ხარჯი.

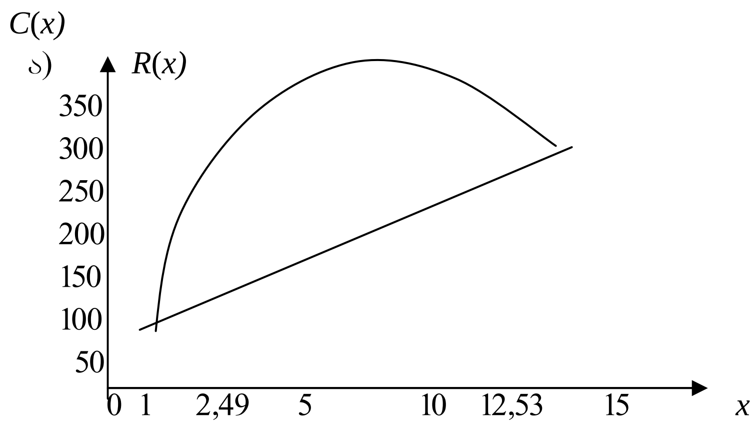
ა) ააგეთ მოცემული ხარჯის ფუნქციისა და შემოსავლის $R(x) = x \cdot (94,8 - 5x)$ ფუნქციის გრაფიკი ერთი და იმავე საკოორდინატო სისტემაში;

ბ) იპოვეთ და გრაფიკულად გამოსახეთ ზღვრული წერტილები მოცემული კომპანიისათვის;

გ) როდის განიცდის კომპანია ზარალს? როდის აქვს ადგილი მოგებას?

ამოხსნა.

ა)



ნახ. 4.5

ბ) $R(x) = C(x)$

$$x \cdot (94,8 - 5x) = 156 + 19,7x$$

$$94,8x-5x^2=156+19,7x$$
$$-5x^2+75,1x-156=0$$
$$5x^2-75,1x+156=0$$
$$D=75,1^2-4\cdot 5\cdot 156$$
$$D=2520,01$$
$$x=\frac{75,1\pm\sqrt{2520,01}}{10}=\frac{75,1\pm 50,2}{10}$$

$$x_1=2,48 \qquad\qquad x_2=12,53$$

გ) როგორც ვნახეთ, $x_1=2,48$ და $x_2=12,53$.

თუ $R(x)<C(x)$ (კომპანია განიცდის ზარალს), $x\in[1;2,49)\cup(12,53;15]$, ხოლო როდესაც $R(x)>C(x)$ (ე.ი. ადგილი აქვს მოგებას) – $x\in(2,49;12,53)$.

4.2 ფინანსური ოპერაციების განვითარების მოდელები მარტივი პროცენტების სქემის მიხედვით

ფინანსურ ოპერაციათა უმრავლესობაში განიხილება ფულადი რესურსების სესხად გაცემისა და საპროცენტო დანახარჯების შედეგად კაპიტალის ღირებულების ზრდა. ამ დროს შეთანხმებებს საფუძვლად უდევს ხელშეკრულებაში მონაწილე ორივე მხარის ინტერესები, რომელთა მიხედვით განისაზღვრება შემოსავლის მიღება გაცემულ სესხზე დარიცხული პროცენტების სახით, ანუ მოგების მიღება კვლავწარმოების პროცესში ფულადი რესურსების ბრუნვის შედეგად.

ამრიგად, პროცენტი გვევლინება, როგორც დროში ფულადი ღირებულების ცვლილების მიზეზი. მაგრამ იგი არ შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც მხოლოდ ნასესხებზე დარიცხული თანხები. პროცენტი არის ნებისმიერი კაპიტალდაბანდების შემოსავლიანობის მაჩვენებელი.

როდესაც ხდება საკრედიტო დაწესებულების მიერ სახსრების დეპოზიტებზე განთავსება ან სესხების გაცემა, ფული იძენს გარკვეულ ღირებულებას ანუ მისი ღირებულება სესხის გაცემისა და დაფარვის ბოლოს იცვლება სასესხებო პერიოდში პროცენტული ნაზრდის შედეგად.

პროცენტების დარიცხვისა და ფულის ნაზრდი ღირებულების გამოთვლის პრინციპები მოიცავს:

- საპროცენტო და საღრიცხვო განაკვეთს;
- ჩვეულებრივ და ზუსტ პროცენტებს;
- მარტივ და რთულ პროცენტებს;
- დისკრეტულ და მუდმივად დარიცხვად პროცენტებს;
- ნომინალურ, ეფექტურ და რეალურ შემოსავლიანობას.

ფული რომელიც თქვენ გაქვთ დღეს, დროის გარკვეული პერიოდის გასვლის შემდეგ, ანუ დროის გარკვეულ ინტერვალში იცვლის თავის ღირებულებას. ეს დაახლოებით იგივეა, რომ დღევანდელი 1 ლარის ღირებულება განვსაზღვროთ გარკვეული პერიოდის შემდეგ.

პროცენტი არის თანხა, რომელსაც იხდიან ფულადი რესურსების გამოყენებისათვის.

საპროცენტო შემოსავალი *(interest money)*- წარმოადგენს სესხის გაცემისას მიღებულ აბსოლუტურ შემოსავალს, რომლის გაანგარიშებაც ხდება გასესხებული თანხის მეასედებში. ფინანსურ გაანგარიშებაში პროცენტის ქვეშ იგულისხმება ნებისმიერი ფორმის ვალის სახით აღებული თანხიდან მიღებული შემოსავლის აბსოლუტური სიდიდე.

პროცენტი (*interest)* ანუ საპროცენტო ფული, არის ის საზღაური, რომელსაც იღებს კრედიტორი სესხის ამღებისგან სესხის ნებისმიერი ფორმით გაცემისას. ეს ფორმები შეიძლება იყოს: უშუალო სესხი, პროდუქციის კრედიტში გაყიდვა, ფასიანი ქაღალდების შესყიდვა და ა.შ.

სესხზე პროცენტების მიღების პრაქტიკას დიდი ხნის ისტორია აქვს. ჯერ კიდევ ძველ საბერძნეთში სესხზე წლიური სარგებელი იცვლებოდა 10%-დან 30%-მდე.

როგორც უკვე ავღნიშნეთ, პრაქტიკულ ფინანსურ ოპერაციებში, ფულის სიდიდეს, მათი წარმოშობისა და დანიშნულების მიუხედავად, უკავშირებენ დროის გარკვეულ მომენტს ან გარკვეულ პერიოდს. დროის ფაქტორი, სესხის სიდიდეზე არანაკლებ როლს თამაშობს განსაკუთრებით გრძელვადიანი სესხების დროს.

დროის ფაქტორის გათვალისწინების აუცილებლობა გამოიხატება ფულის არატოლფასობის პრინციპში: ფულის ფასეულობა დროის მიხედვით იცვლება.

დროის ფაქტორი ნაკლებ როლს არ თამაშობს, ვიდრე ფულადი თანხების სიდიდე და ამიტომ კონტრაქტებში აუცილებლად ფიქსირდება ვადები, თარიღები, ფულადი სახსრების შემონატანების ან მათი გადახდების პერიდულობა.

ფინანსურ სფეროში დროის ფაქტორი საპროცენტო განაკვეთის მეშვეობით აღირიცხება, როგორც ფიქსირებული დროის მონაკვეთში გადასახდელი პროცენტული ფულადი თანხის სესხის სიდიდესთან შეფარდება.

აბსოლუტურად ერთი და იგივე ოდენობის თანხებს შორის განსხვავება გამოწვეულია იმით, რომ თეორიულად დღეს შეიძლება დავაბანდოთ მოცემული თანხა (შევიტანოთ დეპოზიტზე) და ერთი წლის შემდეგ მივიღოთ გარკვეული მოგება. მიღებული თანხა ისევ შეიძლება დავაბანდოთ, ანუ მოვახდინოთ საწყისი თანხის რეინვესტირება და ა.შ.

ფინანსური შეთანხმებისას ორივე მხარე თანხმდება გარკვეულ საპროცენტო განაკვეთზე (*rate of interest*), რომელიც დროის ერთეულში ფარდობითი შემოსავლის ტოლია.

საპროცენტო განაკვეთის სიდიდე დამოკიდებულია სხვადასხვა ფაქტორზე – ქვეყნის ეკონომიკის მდგომარეობაზე, საფინანსო-საკრედიტო ბაზარზე, სესხის ვადებზე და სხვ.

ე.ი. ფინანსურ რაოდენობრივ ანალიზში საპროცენტო განაკვეთი წარმოადგენს არა მარტო სავალო თანხის გაზრდის ინსტრუმენტს, ასევე ფინანსური ოპერაციის შემოსავლის საზომს.

ფინანსური შეთანხმებისას მხარეები (კრედიტორი და მოვალე) თანხმდებიან გარკვეულ საპროცენტო განაკვეთზე *(rate of insert)*, რომელიც უდრის დროის ერთეულში ფარდობით შემოსავალს. ე.ი. საპროცენტო განაკვეთი არის დროის ერთეულში საპროცენტო ფულის შეფარდება სესხის სიდიდესთან. საპროცენტო განაკვეთი იზომება პროცენტებში, ათობითი ან ნატურალური წილადის სახით.

დროის ინტერვალს, რომელზეც საპროცენტო ინტერვალი არის გათვალისწინებული, დარიცხვის პერიოდს *(running period)* უწოდებენ. პროცენტების დარიცხვა შეიძლება ხდებოდეს წელიწადში, კვარტალში ან თვეში ერთხელ. პროცენტის დარიცხვა შეიძლება მოხდეს პერიოდის ბოლოს ან პერიოდის დასაწყისში. თუმცა, ძირითადად, პროცენტების დარიცხვა პერიოდის ბოლოს ხდება. ე.ი. საპროცენტო შემოსავლის გადახდაც, ძირითადად, ფინანსური ოპერაციების ბოლოს ხდება.

პროცენტების დარიცხვის პერიოდი უნდა გავიგოთ, როგორც დროის მონაკვეთი პროცენტების ამოღების ორ თანმიმდევრულ პროცესს შორის ან ფინანსური ოპერაციის ვადა.

თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება ერთხელ (ნახ. 4.6), მაშინ ეს პროცენტები უმეტესად გამოიყენება სადეპოზიტო და საკრედიტო ოპერაციების უმრავლეს შემთხვევაში. ასევე, დაზღვევისას.

პერიოდი პერიოდი

I———————— · ———————I———————— · ———————I——————→ *t* (დრო)

ოპერაციის დასაწყისი I დარიცხვა II დარიცხვა

ნახ. 4.6

ფინანსური ანალიზის დროს საფინანსო-ეკონომიკურ გაანგარიშებათა მეთოდები დამოკიდებულია საპროცენტო სახეებზე. განასხვავებენ საპროცენტო განაკვეთის ორი სახეს: მარტივს და რთულს.

მარტივი პროცენტის შემთხვევაში პროცენტის დარიცხვა ყოველთვის ხდება საწყისი თანხიდან. რთული პროცენტის შემთხვევაში კი პროცენტი დაერიცხება წინა ეტაპზე მიღებულ თანხას.

პროცენტის გამოთვლის ორი ხერხი არსებობს:

პროცენტი დაერიცხება საწყისი დავალიანებას და გამოითვლება საბოლოო მნიშვნელობა;

პროცენტი დაერიცხება საბოლოო დავალიანებას და გამოითვლება საწყისი მნიშვნელობა.

შესაბამისად, საპროცენტო განაკვეთს უწოდებენ დაგროვების განაკვეთს (*Insert base rate*) და სააღრიცხვო განაკვეთს (*discount base rate*). პირველი ხერხით მიღებულ პროცენტებს ჩვეულებრივ ან დეკურსიულ (*postnumerando*) პროცენტს უწოდებენ, მეორე შემთხვევაში კი – ანტისიპატიურ (*prenumerando*) პროცენტს.

პროცენტების ასეთი დაანგარიშება გამოიყენება დაკრედიტების ზოგიერთ სახეებში. მაგალითად, საქონლის კრედიტში გაყიდვისას, საერთაშორისო გაანგარიშებებში, დისკონტურ ფასიან ქაღალდებთან დაკავშირებულ ოპერაციებში. ამ დროს, პროცენტების გამოთვლის ბაზად ითვლება თანხა პროცენტების ჩათვლით (ვალის დაფარვის სიდიდე), ხოლო ასეთი გზით გათვლილი პროცენტების ამოღება ხდება წინასწარ.

შეთანხმების მიხედვით, პროცენტები, შეიძლება გადახდილ იქნას დარიცხვის მომენტში ან შეიძლება დაემატოს ძირითად ვალს (პროცენტის კაპიტალიზაცია), ან საწინააღმდეგო მიმართულებით – მომავლიდან დღევანდელ მომენტამდე. ასეთ შემთხვევაში, სამომავლო თანხა მცირდება ე.წ. დისკონტითა და ასეთ მეთოდს ეწოდება დისკონტირება. შესაბამისად, პრაქტიკაში გამოიყენება დარიცხვის ორი სახეობა:

ჩვეულებრივი განაკვეთი (საპროცენტო განაკვეთი – *rate of interest*);

ანტისიპატიური განაკვეთი (სააღრიცხვო, დისკონტური განაკვეთი – *discount rate*).

დარიცხული პროცენტების გაანგარიშება ეყრდნობა ფულადი სიდიდეების ზრდას არითმეტიკული ან გეომეტრიული პროგრესიის მიხედვით. ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა გვევლინება დარიცხვის ბაზად – ცვალებადი თუ მუდმივი სიდიდე. შესაბამისად, არითმეტიკულ პროგრესიას შეესაბამება – დარიცხვა მარტივი პროცენტებით, გეომეტრიულს კი – რთულით.

მარტივი პროცენტის დროს მთელი პერიოდის განმავლობაში დარიცხვა ხდება საწყის თანხაზე, ხოლო რთული პროცენტის შემთხვევაში დარიცხვის ბაზა გამუდმებით იცვლება უკვე დარიცხული პროცენტების დამატების ხარჯზე.

საბაზრო ეკონომიკის პირობებში ინვესტირების სხვადასხვა ვარიანტები არსებობს. ჩვეულებრივ შემთხვევაში კრედიტორი და მსესხებელი კრედიტის სიდიდის P (საწყისი ფულადი თანხა), წლიური საპროცენტო განაკვეთის ზომის i %, კრედიტის ვადისა და პროცენტების დარიცხვის პერიოდის ხანგრძლივობის შესახებ შეთანხმდებიან. ეს ფინანსური ოპერაცია განვითარდება მარტივი პროცენტის სქემის მიხედვით.

მარტივი პროცენტის სქემა ხორციელდება ვალის საერთო თანხის S დაგროვება პერიოდულობის ხარჯზე. დაგროვებული ჯამი *(amount, maturity value)* ეწოდება სესხს მასზე დარიცხულ პროცენტებთან ერთად სესხის ვადის *(data of maturity, due date)* ბოლოსათვის.

როგორც უკვე ავღნიშნეთ, მარტივი პროცენტის შემთხვევაში პროცენტი დაერიცხება საწყის თანხას. ამ შემთხვევაში დაგროვებული ჯამი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = P + I \tag{4.8}$$

სადაც – საწყისი თანხაა *(present valie);*

S – დაგროვებული ჯამია, ანუ თანხა ვადის ბოლოს (Future value);

i – წლიური საპროცენტო განაკვეთია (გამოსახული ათწილადებში);

n – სესხის ვადაა (გამოსახული წლებში);

I – ვადის განმავლობაში დარიცხული პროცენტები.

დარიცხული პროცენტი დამოკიდებულია საწყის თანხაზე, წლიურ საპროცენტო განაკვეთსა და სესხის ვადაზე:

$$I = Pni \tag{4.9}$$

სადაც i – წლიური საპროცენტო განაკვეთია, გამოსახული ათწილადებში, n- სესხის ვადაა გამოსახული წლებში.

მაგალითი 4.7* იპოვეთ პროცენტები და დაგროვებული თანხა, თუ საწყისი თანხაა 500 ათასი, ვადა კი 3 წელი. წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთია 20%.

ამოხსნა.

ვიპოვოთ პროცენტი:

I = 500· 0,2 · 3 = 300 ათასი

დაგროვებული თანხა იქნება – S = 500 + 300 = 800 ათასი.

ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე მარტივი პროცენტის სქემის მიხედვით კაპიტალის დაგროვების მოდელი შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$S = P + I = P + Pni = P(1+ni) \qquad (4.10)$$

მართლაც, დაგროვება ხდება პერიოდულობის ხარჯზე. შესაბამისად, პირველი წლის ბოლოსათვის გაზრდილი თანხა იქნება

$$S_1 = P + I = P(1+i),$$

მეორე წლის ბოლოსათვის $S_2 = S_1 + I = P(1+2i)$,

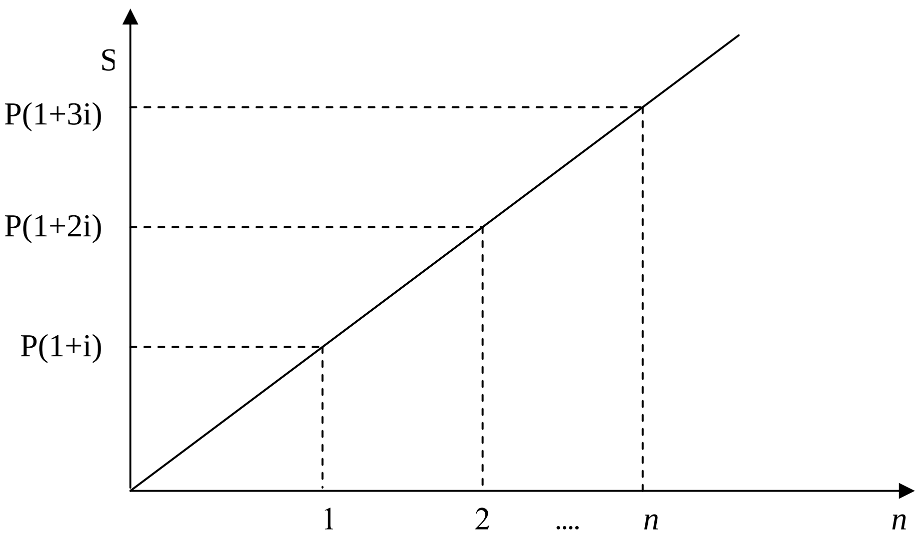
მესამე წლის ბოლოსათვის $S_3 = S_2 + I = P(1+3i)$, და ა. შ.

ამ სქემის მიხედვით, n წლის ბოლოსათვის გვექნება:

$$S_n = S_{n-1} + I = P(1+ni)$$

დაგროვება მარტივი პროცენტით უმეტესად გამოიყენება მოკლევადიანი (წელზე ნაკლები ვადით) სესხების შემთხვევაში. ამ სქემას იყენებენ მაშინაც, თუ ხდება პროცენტების პერიოდული გადახდა. კონტრაქტში მითითებულია საპროცენტო განაკვეთი და ვადაც.

გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას ექნება სახე:



ნახ. 4.7

(1+ni) სიდიდეს **დაგროვების კოეფიციენტი** ეწოდება. იგი უჩვენებს, თუ რამდენჯერ გაიზარდა საწყისი თანხა.

ე.ი. დაგროვებული ჯამი საწყისი თანხისა და დაგროვების კოეფიციენტის ნამრავლის ტოლია.

** ამ თავში მაგალითები ძირითადად აღებულია [6]-დან მცირეოდენი ცვლილებებით მნიშვნელობებსა და ინტერპრეტაციებში*

n პარამეტრი როგორც მთელი, ასევე წილადური დადებითი რიცხვი შეიძლება იყოს:

$$n = \frac{t}{k} \qquad (4.11)$$

სადაც t პროცენტების დარიცხვის პერიოდის ხანგრძლივობაა გამოსახული დღეებში, k – დღეთა რაოდენობაა მოცემულ წელიწადში.

ზემოთ განსაზღვრულის თანახმად, (4.10) და (4.11)-ის საფუძველზე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$S = P(1 + i\frac{t}{k}) \qquad (4.12)$$

k= 360 (12 თვე თითოეული 30 დღით) ან k=365 (k=366 – თუ წელი ნაკიანია).

სესხის დღეების რაოდენობა შეიძლება დათვლილი იყოს მიახლოებით ან ზუსტად. პირველ ვარიანტში ყოველი თვე ითვლება 30 დღედ. სესხის გაცემისა და დაბრუნების დღე კი ერთ დღედ.

ცხრილი 4.1

მაჩვენებელი / გაზომვა	t (დღეების რაოდენობა თვეში)	K (დღეების რაოდენობა წელიწადში)
ზუსტი	თვეში დღეების ფაქტიური რაოდენობა	365, ან 366
მიახლოებითი	ყველა თვეში დღეების რაოდენობა ტოლია 30	360

სხვადასხვა ქვეყნების საბანკო პრაქტიკაში, ვადა დღეებში და დღეთა საანგარიშო რაოდენობა წელიწადში, პროცენტების დარიცხვის დროს, სხვადასხვანაირად განისაზღვრება.

გერმანიის პრაქტიკაში დღეთა რაოდენობის გათვლა წლის ხანგრძლივობის 360 დღეზე და თვეების 30 დღეზე არის დაფუძნებული.

საფრანგეთის პრაქტიკაში წლის ხანგრძლივობის 360 დღის ტოლი, ხოლო თვეში დღეთა რაოდენობა ფაქტიური კალენდარული ხანგრძლივობის შესაბამისად 28, 29, 30 ან 31 დღის ტოლად ითვლება.

ინგლისის პრაქტიკაში წლის ხანგრძლივობა 365 დღეს, ხოლო თვეთა ხანგრძლივობა კალენდარის მიხედვით ფაქტიურ ხანგრძლივობას შეესაბამება.

ცხრილი 4.2 პრაქტიკაში გამოყენებული დღეთა აღრიცხვის ოთხი ბაზისი

0	US (NASD) European, 360/360	წელიწადში – 360 დღე თვეში – 30 დღე	„გერმანული პრაქტიკა“
1	Actual/Actual	წელიწადი – ზუსტი დღეები თვეშიც – ზუსტი დღეები	„ინგლისური პრაქტიკა“
2	Actual/360 an 365/360	წელიწადი – 360 დღე თვეში – ზუსტი დღეები	„ფრანგული პრაქტიკა“
3	Actual/365	წელიწადი – 365 დღე თვეში – ზუსტი დღეები	–

ცხრილის პირველ სვეტში მითითებულ რიცხვებს იყენებენ *Exsel*-ის პროგრამით მუშაობისას.

„გერმანული პრაქტიკა“ გავრცელებულია გერმანიაში, შვედეთში, დანიაში და სხვ. „ინგლისური პრაქტიკა“ - ინგლისში, აშშ-ში, პორტუგალიაში, „ფრანგული პრაქტიკა“ კი – საფრანგეთში, ესპანეთში, შვეიცარიაში და სხვ.

ავღნიშნოთ, რომ „ფრანგული პრაქტიკა“ უფრო დიდ შედეგს იძლევა, რადგან, მაგალითად, თუ სესხის ვადაა 364 დღე, მაშინ n = 364/360 = 1,011წ.

მაგალითი 4.8 ბანკმა სესხი 1 მლნ. ლარი გასცა 20/01.03წ. სესხის დაფარვის ვადაა 05.10.03 წლიური საპროცენტო განაკვეთია 18%. რა თანხა უნდა გადაიხადოს მევალემ ვადის ბოლოს? გამოიყენეთ სამივე „პრაქტიკა“.

ამოხსნა.

ვიპოვოთ დღეების რაოდენობა t:

20იანვ. 31იანვ. 28თებერ 31მარ. 30აპრ. 31მაისი 30ივნ. 31ივლ. 31აგვ. 30სექტ. 5ოქტ.

ზუსტი დღეების რაოდენობაა – 258;

მიახლოებით – 225

„ინგლისური პრაქტიკა“ 365/365, $n = \frac{258}{365} = 0,706$ წელი

S = 1 · (1+0,706 · 0,18) = 1,127232 მლნ.

“ფრანგული პრაქტიკა“ $n = \frac{258}{360} =$ 0.716 წელი.

S = 1 . (1+ 0,716 · 0,18) = 1,129 მლნ.

“გერმანული პრაქტიკა“ $n = \frac{255}{360} = 0,708$ წელი.

S = 1 .(1+0,708 . 0,18) = 1,127499 მლნ.

როგორც მაგალითიდან ჩანს „ფრანგული პრაქტიკის“ შემთხვევაში უფრო მეტი თანხაა გადასახდელი.

ფინანსური ოპერაციის ვადის (დღეების) ზუსტი გაანგარიშებისათვის უნდა ვიცოდეთ წლის განმავლობაში ყველა დღის რიგითი ნუმერაცია. ფინანსური ოპერაციის პერიოდი იანგარიშება, როგორც მისი დაწყებისა და დამთავრების, ანუ სახელშეკრულებო ვადის დამთავრების პერიოდი, რასაც ემატება კიდევ ერთი დღე. მაგალითად, თუ ვალი წარმოიქმნა დღეს, ხოლო იგი გასასტუმრებელია ხვალისათვის, მაშინ მისი მოქმედების ვადა იქნება არა ერთი, არამედ ორი დღე.

ბანკებში, პროცენტების დარიცხვების ანგარიშსწორების გასამარტივებლად, გამოიყენება კომპიუტერული პროგრამები, რომლებიც ქვემოთ მოცემული ცხრილის მიხედვით იგება.

ცხრილი 4.3 დღეების ნუმერაცია არანაკიანი (28 დღიანი თებერვალი) წლის დროს

თვე რიცხვი	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

მაგალითი 4.9 2006 წლის 21 თებერვალს კლიენტმა ბანკისგან ისესხა 40 000 ლარი 23 აგვისტოს დაბრუნების პირობით, წლიური 22% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. გამოვთავლოთ დასარიცხი დღეების რაოდენობა და პერიოდის ბოლოს დასაბრუნებელი თანხა.

ამოხსნა.

ცხრილის მიხედვით 21 თებერვალი არის 52 დღე, ხოლო 23 აგვისტო 235 დღე. ამიტომ დასარიცხი დღეების რაოდენობა იქნება 235-52+1=183+1=184, ხოლო დასაბრუნებელი თანხა:

$$40000\cdot(1+\frac{184}{365}\cdot 0,22)=44436,164 \quad \text{ლარი}$$

მაგალითი 4.10 განვსაზღვროთ პროცენტების დასარიცხი დღეების რაოდენობა დარიცხვის სხვადასხვა პრაქტიკის გამოყენებისას, თუ მოთხოვნამდე ანაბარი 12.01.2002-დან 15.03.200-მდე იყო განთავსებული.

ამოხსნა.

ცხრილის მიხედვით 12 იანვარი არის 12 დღე, ხოლო 15 მარტი 74 დღე. ამიტომ დასარიცხი დღეების რაოდენობა იქნება 74-12+1=62+1=63.

იგივე მაგალითი ამოვხსნათ ცხრილის გამოყენების გარეშე.

გერმანიის პრაქტიკისთვის პროცენტების დასარიცხი დღეების რაოდენობა ტოლი იქნება:

19 (იანვარში ანაბრის შენახვის დღეების რაოდენობა) + 30 (თებერვალში) + 15 (მარტში) – 1 (ანაბრის მიღებისა და გაცემის დღე ერთ დღედ ითვლება) = 63 დღეს.

საფრანგეთის პრაქტიკისთვის, ისევე როგორც ინგლისის პრაქტიკისთვის, პროცენტის დასარიცხი დღეების რაოდენობა ტოლი იქნება:

20+28+15-1=62

მაგალითი 4.11 ორგანიზაციამ მიიღო სესხი 100 000 ლარი წლიური 10% საპროცენტო განაკვეთით 2009 წლის 1 იანვრიდან 1 აპრილამდე. განსაზღვრეთ დასაბრუნებელი თანხა.

ამოხსნა.

მოც.

$P=100000$

$i=10\%$

$t=31+28+31=90$

$S=?$

$$S=P(1+i\frac{t}{k})=$$

$$=100000\cdot(1+\frac{90}{360}\cdot 0,1)=102,5$$ ათასი ლარი.

$S-P=2,5$ ათასი ლარი.

2.5 ათასი ლარი არის სესხის გამოყენებისათვის დარიცხული პროცენტი.

სხვადასხვა საქმიანობისას ბანკები აწყდებიან შემნახველ ანაბარზე რეგულარულად თანხების შემოტანასა და გატანას. ცხადია, აუცილებელია მუდმივად ცვალებად თანხებზე პროცენტების დარიცხვა. ეს ეხება გაანგარიშების როგორც სადებეტო, ისე საკრედიტო ნაწილს. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ საკრედიტოს პროცენტები აკლდება.

ზოგჯერ, ასეთ მუდმივ თანხებზე პროცენტების დარიცხვისათვის გამოიყენება პროცენტული რიცხვები:

$$\text{პროცენტული რიცხვი} = \frac{\text{თანხა} \cdot \text{მისი შენახვის ხანგრძლივობა}}{100} \quad \text{ანუ} \quad \frac{\boldsymbol{P\,t}}{\boldsymbol{100}}$$

პროცენტული რიცხვები თითოეული მუდმივი თანხისათვის ჯამდება და იყოფა დივიზორზე:

$$\text{დივიზორი} = \frac{\text{წელიწადის ხანგრძლივობა დღეებში}}{\text{წლიური საპროცენტო განაკვეთი}} \quad \text{ანუ} \quad \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{i}}$$

ამრიგად, თუ განვიხილავთ დროში ცვალებად თანხაზე დამოკიდებულ ოპერაციებს, დარიცხული პროცენტების მთლიანი აბსოლუტური ჯამი გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\boldsymbol{I} = \frac{\text{პროცენტული რიცხვი}}{\text{დივიზორი}} = \frac{\boldsymbol{P\,t}}{100} : \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{i}}$$

ეს შეიძლება სხვანაირად ჩაიწეროს:

$$I = \frac{\sum_{j=1}^{m} R_j t_j}{100} : \frac{k}{i} \tag{4.13}$$

სადაც *Rj* არის *j* –ური მომენტისათვის ანგარიშზე არსებული ნაშთი, *k* არის წელიწადში დღეების რაოდენობაა, ხოლო t_j ანგარიშზე ორ მომდევნო ცვლილებას შორის დროის ინტერვალი.

$\frac{\sum_{j=1}^{m} R_j t_j}{100}$ სიდიდეს ეწოდება საპროცენტო რიცხვი (*interest number*), ხოლო – $\frac{k}{i}$ სიდიდეს საპროცენტო გამყოფი (*interest divisior*).

თუ $\frac{t_j}{k} = n_j$, მაშინ $I = \frac{\sum_{j=1}^{m} R_j t_j}{100} : \frac{k}{i} = \frac{\sum_{j=1}^{m} R_j n_j k}{100} : \frac{k}{i} = \sum_{j=1}^{m} R_j n_j i$

ე.ი.

$$I = R_1 n_1 i + R_2 n_2 i + \cdots + R_m n_m i = \sum_{j=1}^{m} R_j n_j i,$$

ხოლო $$S = R_m + I\,.$$

მაგ.ალითი 4.12 მეანაბრემ ანაბარზე შეიტანა 10 მარტს 8 ათასი ლარი. 14 აპრილს მან ისევ შეიტანა 4 ათასი ლარი. შემდეგ ანგარიშიდან მოხსნა 25 ივნისს 3 ათასი ლარი და 4 სექტემბერს კი 2 ათასი ლარი. და ბოლოს, ანგარიში დახურა 20 დეკემბერს. იპოვეთ მფლობელის მიერ მიღებული თანხა, თუ წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთია 30% (ჩვეულებრივი პროცენტი ზუსტი დღეებით).

ამოხსნა.

ა) ჯერ ამოვხსნათ ჩვეულებრივი მეთოდით:

+8ათ. 35დღე +4აპრ. 72დღე −3ათ. 71დღე −2ათ. 107დღე ?

10 მარტი 14 აპრ. 25ივნ. 4სექტ. 20დეკ.

რადგან მარტივი პროცენტის დროს პროცენტი ერიცხება მხოლოდ ძირითად თანხას, ამიტომ გვექნება:

$$S_{14\text{აპრ}} = 8000 \cdot (1 + \frac{35}{360} \cdot 0,3) = 8233,33 \quad \text{ლარი}$$

აქედან I_{14} = 233.33 ლარი არის დარიცხული პროცენტი.

რადგან 14 აპრილს დაემატა 4 ათასი ლარი, ამიტომ 25 ივნისისთვის იქნება

$$S_{25\text{ივნ}} = (8000 + 4000)(1 + \frac{72}{360} \cdot 0,3) = 12720 \quad \text{ლარი}$$

ხოლო დარიცხული პროცენტები იქნება:

I_{25}=233,33+720=953.33 ლარი.

ანალოგიურად, დანარჩენი პერიოდებისათვის მივიღებთ:

$$S_{4\text{სექ}} = (12000 - 3000)(1 + \frac{71}{360} \cdot 0,3) = 9532,5 \text{ ლარი და}$$

I_4=953,33+532,5=1485.83 ლარი

$$S_{20\text{დეკ}} = (9000 - 2000)(1 + \frac{107}{360} \cdot 0,3) = 7624,17 \text{ ლარი და}$$

I_{20}=1485.83+624.17=2110 ლარი

საბოლოოდ, მეანაბრეს ბოლოს მიუღია 7000+2110=9110 ლარი.

ბ) გვაქვს:

8 ათასი ლარი მოთავსებული იყო ანაბარზე 35 დღით, შემდეგ 12 ათასი (8+4) მოთავსებული იყო 72 დღით, შემდეგ 9 ათასი (12-3) კი 71 დღით და ბოლოს 7 ათასი (9-2) კი 107 დღით. მაშინ საპროცენტო რიცხვი იქნება:

$$(8 \cdot 35+12 \cdot 72 +9 \cdot 71+7 \cdot 107) /100=25.32,$$

ხოლო დივიზორი იქნება 360/30=12.

აქედან გამომდინარე, მთლიანი პროცენტი იქნება I=25.32/12=2.11 ათასი ლარი. ე.ი. მეანაბრემ მიიღო S=7+9.11 ათასი ლარი.

როგორც ამოხსნის მეთოდებიდან ჩანს, მეორე მეთოდი უფრო მოხერხებულია გამოთვლების ჩასატარებლად.

სასესხო ოპერაციებში ხშირად გამოიყენება დროის მიხედვით ცვალებადი საპროცენტო განაკვეთი. მარტივი პროცენტის შემთხვევაში დაგროვებული ჯამი გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$S = P\,(1+ n_1i_1 + n_2i_2 + \ldots\ldots\ldots + n_mi_m) \qquad (4.14)$$

სადაც, n_1, n_2…… n_m დროის ინტერვალებია, რომლებზედაც მოქმედებს შესაბამისი i_1, i_2 …… i_m მარტივი საპროცენტო განაკვეთები.

მაგალითი 4.13 კონტრაქტი ითვალისწინებს შემდეგ წლიურ მარტივ საპროცენტო განაკვეთებს: პირველ წელს 16%, ხოლო ყოველ მომდევნო 6 თვეში წლიური განაკვეთი იზრდება 2%-ით. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი 2 წლის ბოლოს და დაგროვების კოეფიციენტი, თუ საწყისი თანხაა 1000 ლარი.

ამოხსნა.

დაგროვების კოეფიციენტი იქნება:

$1 + 1 \cdot 0.16 + 0.18 + 0.5 \cdot 0.20 = 1,35$

ეი. საწყისი თანხა გაიზარდა 1,35-ჯერ.

ხოლო დაგროვებული ჯამი ტოლია:

$$S = 1000 \cdot 1,35 = 1350 \text{ ლარი.}$$

მაგალითი 4.14 ბანკმა გასცა სესხი 30 ათასი ლარი ორი თვით წლიური 28% სარგებლით და 2 თვის შემდეგ 45 ათასი ლარი ოთხი თვით წლიური 34% სარგებლით. იპოვეთ ამ ოპერაციების სრული შემოსავლიანობა 6 თვეში წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით, თუ: ა) მეორე კრედიტში არ გამოიყენებოდა პირველი კრედიტის დროს დაბრუნებული თანხა, ბ) მეორე კრედიტში გამოიყენებოდა პირველი კრედიტის დროს დაბრუნებული თანხა. გამოიყენეთ ჩვეულებრივი პროცენტი.

ამოხსნა.

ვიპოვოთ პირველი კრედიტით მიღებული პროცენტი:

$I_1=30\cdot\dfrac{60}{360}\cdot 0.28=1.4$ ათასი ხოლო მეორე კრედიტი მიღებული პროცენტი იქნება:

$I_2=45\cdot\dfrac{120}{360}\cdot 0.34=5.1$ ათასი ე.ი. მთლიანი პროცენტი არის:

$I=I_1+I_2$=1,4+5,1=6.5 ათასი ლარი.

ა) თუ მეორე კრედიტში არ გამოიყენებოდა პირველი კრედიტის დროს დაბრუნებული თანხა, მაშინ სრული დაბანდებული თანხა იქნებოდა 75(30+45) ათასი ლარი. რეალური საპროცენტო განაკვეთი ავღნიშნოთ $i_{რეალ}$–ით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას: $I=6500=75000 \cdot \frac{6}{12} \cdot i_{რეალ}$

საიდანაც $i_{რეალ}=0{,}1733$ ანუ 17,33%

ბ) თუ მეორე კრედიტში გამოიყენებოდა პირველი კრედიტის დროს დაბრუნებული თანხა, მაშინ სრული დაბანდებული თანხა იქნებოდა 45 ათასი ლარი. რეალური საპროცენტო განაკვეთი ავღნიშნოთ $i_{რეალ}$–ით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას $I=6500=45000 \cdot \frac{6}{12} \cdot i_{რეალ}$

საიდანაც გვექნება $i_{რეალ}=0.2889$ ანუ 28.89%

ავღნიშნოთ, რომ ერთი და იგივე რესურსის მრავალჯერადი გამოყენება ზრდის შემოსავლიანობას.

მაგალითი 4.15 მეწარმემ აიღო სესხი 60 დღით წლიური მარტივი 26% საპროცენტო სარგებლით. ამასთან, ბანკმა დაიტოვა საკომისიო, სესხის 2,5%. იპოვეთ ამ ოპერაციების სრული შემოსავლიანობა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით, თუ დარიცხვა ხდებოდა სესხის საწყის სიდიდეზე. ჩავთვალოთ, რომ წელიწადში არის 360 დღე.

ამოხსნა.

ვთქვათ, P არის სესხის საწყისი სიდიდე. მაშინ საკომისიო იქნება $0.025\,P$. აქედან გამომდინარე, მეწარმემ რეალურად მიიღო $P - 0{,}025\,P = 0{,}975\,P$. მეწარმემ 60 დღის შემდეგ კი უნდა დააბრუნოს

$S = P\,(1+ \frac{60}{360} \cdot 0{,}26)=1{,}04\,P$. ე.ი. ბანკმა რეალურად გასცა $0{,}975\,P$ და დაიბრუნა $1{,}04\,P$.

თუ რეალურ საპროცენტო განაკვეთს ავღნიშნავთ $i_{რეალ}$.-ით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

$1.04P = 0.975P\,.\,(1+\frac{60}{360} \cdot i_{რეალ})$. საიდანაც გვექნება $i_{რეალ} = 0{,}4$.

ანუ, ბანკის შემოსავლიანობა შეადგენს წლიურ მარტივ 40% საპროცენტო განაკვეთს.

საფინანსო პრაქტიკაში გვიხდება დაგროვებული ჯამის განსაზღვრის საწინააღმდეგო ამოცანის ამოხსნა მოცემული S თნხის მიხედვით, რომელიც n წლის შემდეგ არის გადასახდელი, უნდა განვსაზღვროთ სესხის ოდენობა P. ასეთ სიტუაციას ვხვდებით კონტრაქტების პირობების შემუშავებისას. P-ს პოვნა საჭიროა მაშინაც, როცა სამომავლოდ გადასახდელი S თანხიდან პროცენტების

დაკავება ხდება სესხის გაცემის მომენტში. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ხდება S თანხის დისკონტირება.

პროცენტების დარიცხვისა და წინასწარ დაკავების პროცესს ეწოდება აღრიცხვა, ხოლო დაკავებულ პროცენტს – დისკონტი (*discont*). დისკონტირების აუცილებლობა ჩნდება მაშინ, როცა ხდება იმ მოკლევადიანი ვალდებულებების (თამასუქი, ტრატა და ა.შ) შესყიდვა, რომლებზეც ანგარიშსწორება მოხდება მომავალში.

ტერმინი „დისკონტირება“ გამოიყენება უფრო ფართო აზრითაც – როგორც ნებისმიერი ღირებულებით სიდიდის განსაზღვრის საშუალება დროის გარკვეული მომენტისთვის იმ პირობით, რომ მომავალში მისი ღირებულება იქნება S-ის ტოლი.

S-ის დისკონტირებით გამოთვლილი P-ს უწოდებენ S-ის მიმდინარე ან დაყვანილ სიდიდეს (*Present value*). ხანდახან P-ს S-ის დღევანდელ ღირებულებას უწოდებენ. ეს ცნება ერთ-ერთი უმთავრესია რაოდენობრივ ფინანსურ ანალიზში, რადგან სწორედ დისკონტირების მეშვეობით ხდება ისეთი ფაქტორის გათვალისწინება, როგორიცაა დრო. როგორც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები, უმეტესად, ანალიტიკური მეთოდები ეფუძნება დღევანდელი ღირებულების განსაზღვრას.

P=? S

I———————— · ————————I———————— · ————————I———————→ t

←——————————

ნახ. 4.8

საპროცენტო განაკვეთების სახეობებიდან გამომდინარე იყენებენ – დისკონტირების ორ ხერხს:

1. მათემატიკურ დისკონტირებას;
2. საბანკო აღრიცხვას.

როგორც ვიცით,

$$S = P \cdot (1 + ni)$$

$$P = \frac{S}{1 + ni}$$

ამ ფორმულების გამოყენებით:

$$S - P = S - \frac{S}{1 + ni} = \frac{S + Sni - S}{1 + ni} = \frac{Sni}{1 + ni}$$

$\frac{1}{1+ni}$ სიდიდეს **დისკონტირების კოეფიციენტი** ეწოდება. იგი გვიჩვენებს, საბოლოო დავალიანების რა ნაწილს შეადგენს სესხის საწყისი სიდიდე. $S - P$ სიდიდეს დისკონტი D ეწოდება:

$$D = S - P = \frac{Sni}{1 + ni} \qquad (4.15)$$

და

$$D=\frac{S\frac{t}{k}i}{1+\frac{t}{k}i}$$

მაგალითი 4.16 კონტრაქტის ხელმოწერიდან 90 დღის შემდეგ გადახდილ უნდა იქნეს 50000 ლარი, 16% წლიური საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ სესხის საწყისი თანხა, თუ ერთი წელი ითვლება 360 დღედ.

ამოხსნა.

მოც.

S=50000 ლ, i=16%, n=90 დღე ანუ $n=\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$ წელი.

$$P=\frac{50000}{1+\frac{1}{4}\cdot 0,16}=48076.92 \quad \text{ლარი}$$

ხოლო დისკონტი კი იქნება:

$$D=50000-48076,92=1923,08 \quad \text{ლარი.}$$

მაგალითი 4.17 დეპოზიტური სერთიფიკატი, ნომინალით 10 ათასი ლარი, გამოშვებულია ერთი წლის ვადით. სერთიფიკატს ერიცხება წლიური მარტივი 40% სარგებელი. რა ფასად შეიძლება მისი ყიდვა განაღდებამდე 90 დღით ადრე, რომ უზრუნველყოს წლიური მარტივი 42% შემოსავლიანობა. ჩვეულებრივი პროცენტი.

ამოხსნა.

დეპოზიტური სერთიფიკატი არის დოკუმენტი, რომელიც ადასტურებს, რომ მის მფლობელს აქვს ბანკში სერთიფიკატზე მითითებული თანხა. წლის ბოლოსთვის სერთიფიკატის ღირებულება იქნება

S=10(1+0,4)=14 ათასი ლარი.

მისი ღირებულება 90 დღით ადრე 42% სარგებლით იქნება:

$$P=\frac{10\cdot(1+0,4)}{1+\frac{90}{360}\cdot 0,42}=12,670 \quad \text{ათასი ლარი.}$$

მაგალითი 4.18 ბანკებისათვის მოკლევადიანი ფულადი რესურსების დაბანდების წლიური საპროცენტო განაკვეთი 3 დღე-ღამეში შეადგენს 14,1 %-ს. თანხის რა მოცულობა უნდა განვათავსოთ, რომ ოპერაციის შედეგად 1,5 მლნ ლარი შემოვიდეს (ზუსტი პროცენტი).

ამოხსნა.

მოც.

$S=1,5$

$i=14,1\%$

$t=3$

$k=365$

$P=?$

$$P=\frac{S}{1+\frac{t}{k}i}=$$

$$=\frac{1,5}{1+\frac{3}{365}\cdot 0,141}=1,498264 \quad \text{მლნ ლარი}$$

მაგალითი 4.19 სესხად გაცემული დასაბრუნებელი თანხაა 10 ათასი ლარი. განსაზღვრეთ დარიცხული პროცენტების თანხა, თუ სესხის ვადაა 1 წელი და წლიური დეკურსიული განაკვეთია 70%.

ამოხსნა.

მოც.

$$S = 10000$$
$$i = 70\%$$
$$n = 1$$

$$D = ?$$

$$D = S - P = \frac{Sni}{1+ni}$$

$$= \frac{10 \cdot 1 \cdot 0,7}{1+1 \cdot 0,7} = 4,117647 \text{ ათასი ლარი.}$$

ფასიანი ქაღალდების საბანკო აღრიცხვა მფლობელისათვის გამოიხატება მის ვადამდელ რეალიზაციაში, ბანკისათვის კი ნომინალზე ნაკლები ფასით შეძენასა და მისი ღირებულების განსაზღვრაში ვადამდელი რეალიზაციის მომენტში.

```
                  P=?                    S
———————— · —————————————— · ——————————→
  ვადამდელი           (———————————————)    დროულად
რეალიზაცია                  t,d                   დაფარვა
```

ნახ. 4.9

მოცემულ ნახაზზე t არის ის დრო, რომელიც დარჩენილია დროულად დაფარვამდე. იქმნება ისეთი სიტუაცია, რომ ფულადი სახსრების გამოყენებისათვის პროცენტები ერიცხება თანხას, რომელიც ოპერაციის დამთავრებისას უნდა იქნეს გადახდილი.

ვთქვათ, სესხად აღებული 1 ლარიდან ვიღებთ წლიურ დისკონტირებულ განაკვეთს d, მაშინ ხელზე მევალე მიიღებს თანხას (1- d) და ვალის ამოწურვისას დასაბრუნებელი იქნება 1 ლარი. ე. ი. თუ (1- d) გადაიქცევა 1 ლარად, მაშინ 1 ლარი 1 წლის მერე რისი ტოლი იქნება?

გვაქვს პროპორცია:

(1- d) ———————— 1 ლარი

1 ლარი ———————— S ლარი

გვექნება:

$$S = \frac{1}{1-d}$$

მაგრამ S მომავალი ღირებულებაა, 1 ლარი მიმდინარე ღირებულება, ამიტომ

$$S = \frac{P}{1-d}$$

$$P = S - Sd$$

თუ რა იქნება ერთი ლარი გარკვეული წლების შემდეგ. ეს შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ფორმულით:

$$P = S - Snd = S \cdot (1 - nd)$$

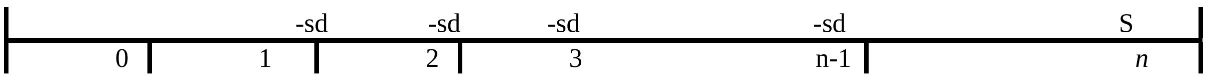
ან

$$P = S - S\frac{t}{k}d = S \cdot (1 - \frac{t}{k}d)$$

ბანკი ან სხვა საფინანსო ინსტიტუტები ყიდულობენ თამასუქს, ან სხვა ვალდებულებებს მისი მფლობელისაგან განაღდების ვადის *(data of maturity)* დადგომამდე იმ ფასზე იაფად, რომელიც უნდა გაიცეს თამასუქის განაღდების მომენტში. თამასუქის მყიდველი ახდენს განაღდების მომენტში დისკონტის რეალიზაციას, ხოლო თამასუქის მფლობელი, მისი აღრიცხვით, იღებს ვადაზე ადრე ფულს.

თამასუქების აღრიცხვისას ბანკი იყენებს არა მათემატიკურ დისკონტირებას, არამედ საბანკო ანუ კომერციულ აღრიცხვას (*bank discount*). ამ მეთოდით, პროცენტი დაერიცხება თანხას, რომელიც გადასახდელია სესხის ვადის ბოლოს. შემდეგ კი ხდება ამ პროცენტის დაკლება გადასახდელი თანხიდან. ამ შემთხვევაში პროცენტის დარიცხვის განაკვეთი განსხვავებული იქნება *i*-საგან, მას **სააღრიცხვო განაკვეთს** უწოდებენ და აღნიშნავენ *d* ასოთი.

ე.ი. თუ *n* წლის შემდეგ გადასახდელია *S* თანხა და *d* წლიური სააღრიცხვო განაკვეთი, მაშინ დისკონტის სიდიდე ტოლი იქნება *Snd*.



გვექნება

$$P = S - Snd = S\,(1\text{-}nd) \qquad (4.16)$$

სადაც (1–*nd*) არის დისკონტირების კოეფიციენტი.

ცხადია, რომ $n < \frac{1}{d}$.

მართლაც, თუ *d*=20% და *n*=5 წელი, მაშინ თამასუქის მფლობელი არაფერის არ მიიღებს.

მაგალითი 4.20 ტრატა (გადასაცემი თამასუქი), რომლის ღირებულებაა 30 ათასი ლარი, განაღდების ვადით 09.11.03, მფლობელმა აღრიცხვა ბანკში 10.09.03 წლიური მარტივი 20% სააღრიცხვო განაკვეთით. იპოვეთ მფლობელის მიერ მიღებული თანხა.

ამოხსნა.

გვაქვს: $S = 30$ ათასი, $d = 0.20$, $n = 60$დღე.

მისაღები თანხა ტოლი იქნება:

$$P = 30 \cdot (1 - \frac{60}{360} \cdot 0,2) = 29 \quad \text{ლარი}$$

ზოგჯერ, სააღრიცხვო განაკვეთი გამოიყენება დაგროვებული ჯამის გამოსათვლელად. ამ შემთხვევაში მივიღებთ:

$$P = S - Snd = S \cdot (1 - nd)$$
$$S = P \cdot \frac{1}{1 - nd} \qquad (4.17)$$

სადაც $\frac{1}{1-nd}$-ს **დაგროვების კოეფიციენტი** ეწოდება. არსებობს თანაფარდობა საპროცენტო განაკვეთსა და სააღრიცხვო განაკვეთს შორის.

როგორც ვიცით, $S = P \cdot (1 + ni)$

ამ და (4,17) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$P \cdot (1 + ni) = P \cdot \frac{1}{1 - nd}$$

საიდანაც:

$$1 + ni = \frac{1}{1 - nd} \qquad (4.18)$$

$$ni = \frac{1}{1 - nd} - 1$$

$$i = \frac{d}{1 - nd} \qquad (4.19)$$

ასევე (4.18) ფორმულიდან:

$$(1 + ni)(1 - nd) = 1$$

გავამარტივოთ:

$$d \cdot (1 + ni) = i$$
$$d = \frac{i}{1 + ni} \qquad (4.20)$$

ეს იგივეობები გამომდინარეობს იმ ვარაუდიდან, რომ საწყისი და მომავალი თანხები, რომლებიც გვხვდება დეკურსიული პროცენტებისა და ანტისიპატიური პროცენტებით გათვლისას – თანაბარია. ამიტომ ამ შემთხვევაში i და d განაკვეთები ექვივალენტურია და მოაქვთ ერთნაირი შემოსავლები – მარტივი პროცენტის დარიცხვისას და დროის ერთნაირ მონაკვეთში.

ცხადია, ამ თვალსაზრისით, ფინანსურ ოპერაციაში მონაწილე მხარეებისათვის, სულ ერთია, როგორი გზით წარმართავენ ანგარიშსწორებას.

თუ ფინანსური ოპერაციის ვადა მოცემულია დღე ან თვეებში, ხოლო განაკვეთი წლიურია, მაშინ (4.19) და (4.20) ფორმულები, შესაბამისად, მიიღებენ სახეს:

$$i=\frac{d}{1-\frac{t}{k}d} \qquad \text{და} \qquad d=\frac{i}{1+\frac{t}{k}i} \qquad (4.21)$$

ცხადია, ექვივალენტური განაკვეთებისათვის $d<i$. ე.ი. d-თი გამოსახული შემოსავალი კლებულობს, ამიტომ შეთანხმებათა ვარიანტების შედარებისას, გაანგარიშებათა პირობების შეცვლისას – ექვივალენტურ განაკვეთებს გამორიცხავენ.

მაგალითი 4.21 3 თვიანი მიმოქცევის ვადიანი ფასიანი ქაღალდის შემოსავლიანობა შეფასებულია დისკონტური განაკვეთის სახით, რომელიც წლიური 100%-ის ტოლია, ხოლო 3 თვიან დეპოზიტზე განთავსების შემოსავლიანობა წლიურ 120%-ს უტოლდება. რომელი ოპერაცია იძლევა მეტ შემოსავალს?

ამოხსნა.

მოც.

$d=100\%$

$i=120\%$

$\frac{t}{k}=\frac{3}{12}$

$$i=\frac{d}{1-d\frac{t}{k}}=$$

$$=\frac{1}{1-1\cdot\frac{3}{12}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}=1,33$$

ე.ი. დისკონტური ფასიანი ქაღალდის შემოსავლიანობა უფრო მაღალია, ვიდრე ფულის დანაზოგზე შეტანა (133% > 120%).

მაგალითი 4.22 ბანკში 100 ათასი ლარის ღირებულების თამასუქის განაღდების ვადაა მიმდინარე წლის 30 ივნისი. როგორი იქნება მისი გამოსასყიდი ღირებულება 12 ივნისისათვის, თუ წლიური სააღრიცხვო განაკვეთია 40%.

ამოხსნა.

მოც.

$S=100000$

$t=18$

$k=360$

$d=40\%$

$P=?$

$$P=S\cdot(1-\frac{t}{k}\cdot d)=$$

$$=100000\cdot(1-\frac{18}{360}\cdot 0,4)=98000$$

ე.ი. 98000 ლარი.

მაგალითი 4.23 20 ათასი ლარის ღირებულების თამასუქი გაცემული იქნა 2008 წლის 3 აპრილს. განაღდების ვადაა ამავე წლის 3 ოქტომბერი. თამასუქის ნომინალურ ღირებულებაზე გათვალისწინებულია მარტივი პროცენტის დარიცხვა

წლიური 25% სარგებლით. თამასუქი აღრიცხეს 18 სექტემბერს წლიური მარტივი 36% სააღრიცხვო განაკვეთით. იპოვეთ მფლობელის მიერ მიღებული თანხა. წელიწადი არის ნაკიანი.

ამოხსნა.

რადგან თამასუქის განაღდება მოხდება გაცემიდან 183 დღის შემდეგ (3 ოქტომ. – 3 აპრილი), ამიტომ განაღდების მომენტისთვის მისი ღირებულება იქნება:

$$S = 20(1+\frac{183}{366}\cdot 0,25) = 22,5$$ ათასი ლარი

ხოლო მფლობელის მიერ მიღებული თანხა:

$$P = 22,5(1-\frac{15}{366}\cdot 0,36) = 22,168$$ ათასი ლარი

ე.ი. მფლობელი მიიღებდა 22168 ლარს, ხოლო ბანკის მოგება იქნება:

= შ – = 332 ლარს.

მაგალითი 4.24 ბანკში აღიცხეს 50 ათასი ლარის ღირებულების თამასუქი განაღდებამდე 1.5 წლით ადრე. სააღრიცხვო განაკვეთები იყო: პირველ 6 თვეში – წლიური 30%, მეორე 6 თვეში – წლიური 36%, ყოველ მომდევნო კვარტალში სააღრიცხვო განაკვეთი იზრდებოდა წლიური 2%-ით. იპოვეთ ბანკისა და მფლობელის მიერ მიღებული თანხები.

ამოხსნა.

ვიპოვოთ დისკონტი ყოველი პერიოდისთვის.

რადგან პირველ 6 თვეში განაკვეთი იყო წლიური 30%, ამიტომ დისკონტი იქნება 50 · 0,5 · 0,3=7.5 ათასი ლარი.

ანალოგიურად, მეორე 6 თვეში იქნება – 50 · 0,5 · 0,36=9 ათასი ლარი.

რადგან დანარჩენ ორ კვარტალში განაკვეთები იყო შესაბამისად, 36%+2%=38% და 38%+2%=40%, ამიტომ დისკონტი იქნება 50 · 0,25 · 0,38 =4,75 ათასი ლარი და 50 · 0,25 · 0,4=5 ათასი ლარი.

ბანკის მთლიანი დისკონტი იქნება D =7,5+9+4,75 =26,25 ათასი ლარი, ხოლო მფლობელის მიერ მიღებული თანხა კი – 50–26,25=23,75 ათასი ლარი.

მოკლედ ამ ამოცანის ამოხსნა შეიძლება $P = S - Snd = S\cdot(1-nd)$ ფორმულის მოდიფიცირებით, რომელსაც მოცემული მაგალითისათვის ექნება სახე:

P = 50 . (1-0,5 · 0.3 – 0,5 · 0,36 -0,25 · 0.4) = 23,75 ათასი ლარი.

მაგალითი 4.25 ბანკში აღრიცხეს თამასუქი განაღდებამდე 120 დღით ადრე მარტივი წლიური 39% სააღრიცხვო განაკვეთით. იპოვეთ ამ ოპერაციების სრული შემოსავლიანობა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით, თუ: ა) საკომისიო არ დაერიცხებოდა, ბ) ერიცხებოდა საკომისიო თამასუქში გადახდილი თანხის 1%.

ამოხსნა. ა) ვთქვათ თამასუქის ნომინალური ღირებულებაა S. მაშინ მფლობელის მიერ მიღებული თანხა იქნება:

$$P = S(1 - \frac{120}{360} \cdot 0,39) = 0,87S$$

ბანკის მოგება კი: S – 0,87S = 0,13S. თუ რეალურ საპროცენტო განაკვეთს ავღნიშნავთ $i_{რეალ}$-ით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას: 0,13S = 0,87S · $\frac{120}{360}$ · i_{real}. საიდანაც გვექნება $i_{რეალ}$ =0,4483 ანუ 44.83%

ბ) რადგან თამასუქში გადახდილი თანხაა 0,87S, ამიტომ მისი 1% საკომისიო იქნება 0.0087S. ე.ი. მფლობელის მიერ მიღებული თანხა იქნება: 0,87 S – 0,0087 S = 0,8613 S, ხოლო ბანკის მოგება კი S – 0,8613 S = 0,1387 S.

თუ რეალურ საპროცენტო განაკვეთს ავღნიშნავთ $i_{რეალ}$-ით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას: 0,1387 S = 0,8613 S · $\frac{120}{360}$ $i_{რეალ}$ საიდანაც გვექნება $i_{რეალ}$=0,4831 ანუ 48,31%

კონტრაქტის პირობების შემუშავებისას და მათი ანალიზისათვის საჭირო ხდება მეორადი ამოცანების – სესხის ვადისა და საპროცენტო განაკვეთების – ამოხსნა, ამ სიდიდეების პოვნა შეიძლება. გვექნება:

სესხის ვადის გამოსათვლელად გვექნება:

$$n = \frac{S-P}{Pi};$$

$$n = \frac{S-P}{Sd}$$

შესაბამისად,

$$t = \frac{S-P}{Pi}k;$$

$$t = \frac{S-P}{Sd}k$$

სადაც

$$n = \frac{t}{k}$$

საპროცენტო განაკვეთი:

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-P}{Pt}k \qquad (4.22)$$

სააღრიცხვო განაკვეთი:

$$d = \frac{S-P}{Sn} = \frac{S-P}{St}k \qquad (4.23)$$

მაგალითი 4.26 იპოვეთ სესხის ხანგრძლივობა, თუ სესხი 0,5 მლნ. ლარი გაიზარდა 0,8 მლნ.-მდე წლიური 20% საპროცენტო განაკვეთით. (k =365 დღე).

ამოხსნა.

$n = \dfrac{S - P}{Pi}$ ფორმულით მივიღებთ:

$$n = \frac{0,8 - 0,5}{0,5 \cdot 0,2} = 3$$

მაგალითი 4.27 იპოვეთ კრედიტორის შემოსავლიანობა წლიური საპროცენტო განაკვეთის სახით, თუ სესხი 100 ათასი გაცემულია 150 დღით. დასაბრუნებელი თანხაა 120 ათასი. (k=360 დღე).

ამოხსნა.

$i = \dfrac{S - P}{Pn} = \dfrac{S - P}{Pt}k$ ფორმულით მივიღებთ:

$$i = \frac{120 - 100}{100 \cdot 150} \cdot 360 = 0,48$$

ე.ი. წლიური შემოსავლიანობა 48%

მაგალითი 4.28 იპოვეთ მარტივი წლიური 30% საპროცენტო განაკვეთის ექვივალენტური მარტივი წლიური სააღრიცხვო განაკვეთი, თუ თანხის დაგროვების ვადაა 150 დღე. (k=360 დღე).

ამოხსნა.

გვაქვს *ნ*=150/360, *ი*=0.3.

თუ საწყისი თანხაა P და საბოლოო თანხაა S, მაშინ მივიღებთ:

$S = P(1+ni)$ და $S = \dfrac{P}{1 - nd}$

საიდანაც $d = \dfrac{0,3}{1 + \dfrac{150}{360} \cdot 0,3} = 0,2667$ ანუ d=26,67%

ე.ი. 26,67% წლიური მარტივი სააღრიცხვო განაკვეთი იძლევა იგივე დაგროვებულ ჯამს, რასაც 30% წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთი.

მაგალითი 4.29 დისკონტური ტიპის დეპოზიტური სერთიფიკატი, ნომინალით 300 ათასი ლარი, წლიური მარტივი 30% სააღრიცხვო სარგებლით, შეძენილია განაღდებამდე 100 დღით ადრე. 40 დღის შემდეგ მფლობელმა გაყიდა ფასად, რომელიც გამოითვლება წლიური მარტივი 28% სააღრიცხვო სარგებლით. იპოვეთ ამ ოპერაციების სრული შემოსავლიანობა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით, თუ წელიწადში არის 360 დღე. რისი ტოლი იქნება შემოსავლიანობა, თუ მფლობელი არ გაყიდის სერთიფიკატს?

ამოხსნა.

მოგება დოსკონტური ტიპის დეპოზიტური სერტიფიკატიდან არის ის, რომ იყიდება ნომინალზე იაფად და იაფრება ნომინალით. გარდა ამისა, მფლობელს შეუძლია მისი გაყიდვა ვადაზე ადრე.

გვაქვს: S=300000, n=100/360, d=0.3. მაშინ განაღდებამდე 100 დღით ადრე, მფლობელმა იყიდა იგი.

$$=300000 \cdot (1 - \frac{100}{360} \cdot 0{,}3) = 274\ 882 \text{ ლარად.}$$

რადგან სერთიფიკატი გაიყიდა განაღდებამდე 60 დღით ადრე წლიური მარტივი 28% სააღრიცხვო სარგებლით, ამიტომ მისი გასაყიდი ფასი იქნება:

$$= 300000 \cdot (1 - \frac{60}{360} \cdot 0{,}28) = 286000 \text{ ლარი.}$$

ე.ი. მყიდველმა დააბანდა 274 882 ლარი და 40 დღის შემდეგ მიიღო 286000 ლარი.

თუ რეალურ მარტივ საპროცენტო განაკვეთს ავღნიშნავთ $i_{რეალ}$–ით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

$$274\ 882 \cdot (1 + \frac{40}{360} \cdot i_{რეალ}) = 286\ 000$$

საიდანაც

$i_{რეალ}$=0.3640, ანუ შემოსავლიანობა იქნება 36.40%

თუ მფლობელი არ გაყიდის სერთიფიკატს, მაშინ იგი დაბანდებული 274 882 ლარიდან 100 დღის შემდეგ მიიღებს 300 000 ლარს. გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$274\ 882 \cdot (1 + \frac{100}{360} \cdot i_{რეალ}) = 300\ 000 \text{ ლარი.}$$

საიდანაც:

$i_{რეალ}$=0.3289 ანუ შემოსავლიანობა იქნება 32.89%

4.3 ფინანსური ოპერაციების განვითარების მოდელები რთული პროცენტის სქემის მიხედვით

პრაქტიკაში ანგარიშსწორების მნიშვნელოვანი ნაწილი რთული პროცენტების გამოყენებით მიმდინარეობს.

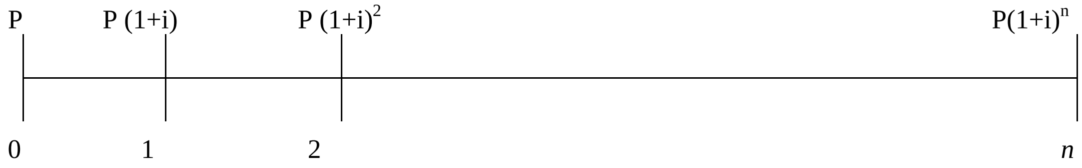
თუ გრძელვადიან საფინანსო-საკრედიტო ოპერაციებში, პროცენტების გადახდა არ ხერხდება მათი დარიცხვისთანავე და ის ემატება ვალს, მაშინ სესხის დაგროვება ხდება რთული პროცენტით (*compound interest*). მარტივი პროცენტისაგან განსხვავებით, პროცენტების დარიცხვა ხდება წინა დავალიანებაზე და ამიტომ მისი დაგროვება აჩქარებით მიმდინარეობს. რთული პროცენტით დაგროვება შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც დაბანდებული სახსრების პერიოდული რეინვესტირება მარტივი პროცენტით დარიცხვის ერთი პერიოდით.

ფინანსურ ოპერაციებში რთული პროცენტების სქემა გამოიყენება, მაშინ როდესაც დასარიცხი პროცენტი I (შემოსავალი კაპიტალიდან) საწყის კაპიტალთან ჯამდება და შემდეგ ეტაპზე პროცენტი უკვე წარმოქმნილ მთლიან თანხას ($P+I$) დაირიცხება. ამ ვარიანტს ხშირად კაპიტალიზაციას ან რეინვესტირებას, ანუ „პროცენტებზე პროცენტებს“ უწოდებენ. ამ შემთხვევაში დაგროვილი კაპიტალის თანხაა:

პირველი წლის ბოლოსთვის: $S_1 = P + Pi = P \cdot (1+i)$, სადაც i არის რთული სასესხო პროცენტების წლიური განაკვეთის შეფარდებითი სიდიდე.

მეორე წლის ბოლოსთვის: $S_2 = S_1 + S_1 i = S_1 \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^2$

მესამე წლის ბოლოსთვის: $S_3 = S_2 \cdot (1+i) = P \cdot (1+i)^3$ და ა. შ.



ნახ. 4.10

საბოლოოდ, n წლის ბოლოს დავალიანება (დაგროვებული ჯამი) ტოლი იქნება

$$S_n = P \cdot (1+i)^n \tag{4.24}$$

აქედან მივიღებთ, რომ $P = \dfrac{S}{(1+i)^n}$

$(1+i)^n$ – სიდიდეს დაგროვების კოეფიციენტი (*compound interest factor*) ეწოდება. მისი სიდიდე სხვადასხვა n-ისა და i-თვის მოცემულია ცხრილებში.

n წლის განმავლობაში დაგროვებული პროცენტები იქნება:

$$I = S - P = P \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]$$

მაგალითი 4.30 სესხი, 2 მლნ ლარი, გაცემულია 3 წლის ვადით წლიური 10% სარგებლით (დარიცხვა ყოველი წლის ბოლოს). განსაზღვრეთ დავალიანების თანხა დაფარვის მომენტისათვის.

ამოხსნა.

მოც.

P=2 მლნ ლ.

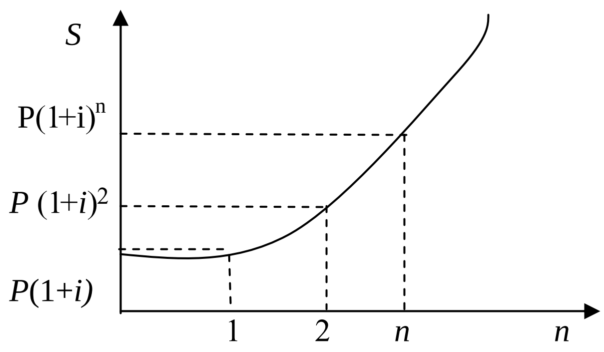
i = 10%

n=3

$S = ?$

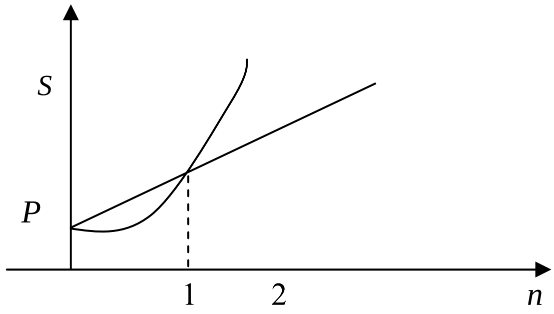
$S = 2 \cdot (1+0,1)^3 = 2,662$ მლნ ლარი.

რთული პროცენტის გეომეტრიულად ინტერპრეტაციას აქვს სახე:



ნახ. 4.11

შევადაროთ ერთმანეთს თანხის მარტივი და რთული პროცენტით ზრდის პროცესი:



ნახ. 4.12

თუ სესხი გაცემა უნდა მოხდეს ერთ წლამდე ვადით, მაშინ ბანკისათვის უფრო მომგებიანია მარტივი, ხოლო ერთ წელზე მეტი პერიოდისათვის – რთული საპროცენტო განაკვეთი. ერთი წლით სესხის გაცემის დროს ორივე სახის განაკვეთი ერთ და იგივე შედეგს იძლევა.

მაგალითი 4.31 ფირმას ესაჭიროება 5 მლნ. ლარის კრედიტი სამი წლით. 20%-იანი განაკვეთით ერთ ბანკში კრედიტის აღება შესაძლებელია მარტივი პროცენტით, ხოლო მეორეში – რთულით.

რომელი ბანკიდან იქნება კლიენტისთვის კრედიტის აღება უფრო მომგებიანი?

ამოხსნა.

მოც.
P=5 მლნ ლ.
$i = 20\%$
$n = 3$
$S = ?$

$$S_1 = P(1+ni) = 5(1+3\cdot 0{,}2) = 8{,}0 \text{ მლნ ლარი.}$$
$$S_2 = P(1+i)^n = 5(1+0{,}2)^3 = 8{,}64 \text{ მლნ ლარი.}$$

ამრიგად, პირველი ბანკიდან სესხის აღება უფრო მომგებიანია, რადგან ამ შემთხვევაში კლიენტი მიიღებს 640 ათასი ლარის ეკონომიას.

ვთქვათ, ძირითად თანხას ერიცხება წლიური რთული i საპროცენტო განაკვეთი, ხოლო პროცენტს კი წლიური რთული $r \neq i$ საპროცენტო განაკვეთი, მაშინ დაგროვებული ჯამი იქნება:

$$S = P + P\cdot i\cdot(1+(1+r)+(1+r)^2+\cdots+(1+r)^{n-1}) =$$
$$= P\cdot(1+i\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r})$$

მაგალითი 4.32 დეპოზიტზე შეტანილია 4000 ლარი, 3 წლის ვადით წლიური რთული 20% სარგებლით. დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს. პროცენტების დაგროვება ხდება სხვა ანგარიშზე, რომელსაც ერიცხება რთული წლიური 10% სარგებელი. იპოვეთ დაგროვებული თანხა.

ამოხსნა.

მოც.

$P = 4000$

$i = 0,2$

$r = 0,1$

$S = ?$

$$S = 4000 + 4000 \cdot 0,2 \cdot (1 + 1,1 + 1,1^2) = 6648$$

ლარი.

მაგალითი 4.33 განვსაზღვროთ პროცენტის წლიური რთული განაკვეთი ანაბარზე, თუ თანხა 800 ლარის ტოლია და ანაბარის ვადაა 3 წელი.

ამოხსნა.

მოც.

$P = 800$

$n = 3$

$i = ?$

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

$$(1+i)^n = \frac{S}{P}$$

$$1 + i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[50]{\frac{800}{100}} - 1 = \sqrt[50]{8} - 1 = 0,0425$$

ე.ი. 4,25%.

ხშირად, კონკურენტული ბაზარი აიძულებს საფინანსო სამსახურებს, გამოიყენონ ე. წ. „მცოცავი“ განაკვეთი (*floating rate*). ასეთ შემთხვევაში გვექნება:

$$S = P(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdots (1+i_k)^{n_k}, \qquad (4.25)$$

სადაც $n_{1,} n_{2,} ...., n_k$ დროის ინტერვალებია, რომლებზედაც მოქმედებენ, შესაბამისად $i_{1,} i_{2,} ...., i_k$ რთული საპროცენტო განაკვეთები.

მაგალითი 4.34 სესხი 50 ათასი ლარი გაცემულია 7 წლის ვადით. სესხზე ერიცხება რთული საპროცენტო განაკვეთები შემდეგნაირად: პირველ ოთხ წელიწადში წლიური 20%, მომდევნო წელიწადში განაკვეთი იზრდება წლიური 1,5%, ხოლო დანარჩენ წელიწადში კი წლიური 1%-ით. იპოვეთ გადასახდელი თანხის მოცულობ ოპერაციის ბოლოსათვის.

ამოხსნა.

მოც.

$P = 50000$
$n_1 = 4$
$n_2 = 1$
$n_3 = 2$
$i_1 = 0,2$
$i_2 = 0,215$
$i_3 = 0,225$
$S = ?$

$$S = 50000 \cdot (1+0,2)^4 \cdot (1+0,215)^1 \cdot (1+0,225)^2 = 189035,532$$

ანუ მე-7 წლის ბოლოს გადასახდელია 189035,532 ლარი.

კომერციულ ოპერაციებში არანაკლებ მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია შერეული პროცენტის გამოყენებას. მისი გამოთვლის მეთოდს მიმართავენ მაშინ, როცა პროცენტების დარიცხვის პერიოდი არ გამოისახება მთელი რიცხვებით. ის შეიძლება იყოს მოცემული წილდის ან ათწილადის სახით. ასეთ შემთხვევებში იყენებენ ორ მეთოდს:

პირველი მეთოდი მდგომარეობს იმაში, რომ $S_n = P \cdot (1+i)^n$ ფორმულაში n არის წილადი (ან ათწილადი).

მაგალითად, თუ სესხის ვადაა 2 წელი და 3 თვე, მაშინ $n = 2\frac{1}{4} = 2,25$ წელს.

მეორე მეთოდით – n იყოფა ორ შესაკრებად, სადაც პირველი შესაკრები მთელი რიცხვია, ხოლო მეორე კი – წილადური ნაწილი.

ე.ი. თუ $n = a + b$, სადაც a მთელი რიცხვია და b წილადური, მაშინ დაგროვებული ჯამი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$S = P \cdot (1+i)^a \cdot (1+bi) \tag{4.26}$$

მაგალითი 4.35 ერთი ბანკი სთავაზობს კლიენტებს წლიურ 110% საპროცენტო განაკვეთს, მეორე ბანკი კი კვარტალურ 22% სარგებელს ყოველი კვარტლის ბოლოს დარიცხვით. ორივე ვარიანტში ვიყენებთ შერეულ პროცენტს. რომელი ვარიანტია მომგებიანი კლიენტისათვის, თუ ანაბრის ვადა განისაზღვრება 9 თვით?

ამოხსნა.

პირველი შემთხვევისათვის ვიყენებთ მარტივი პროცენტს, ამიტომ გვექნება:

$$S_1 = P \cdot (1 + \frac{9}{12} \cdot 1,1) = 1,825P$$

მეორე ვარიანტში, რადგან 9 თვე 3 კვარტალია და დარიცხვა ხდებოდა ყოველი კვარტლის ბოლოს, ვისარგებლოთ რთული პროცენტით. ე.ი.

$$S_2 = P \cdot (1+0,22)^3 = 1,816P$$

როგორც ვხედავთ, $S_1 > S_2$, ამიტომ კლიენტისათვის I ვარიანტი უფრო ხელსაყრელია.

თანამედროვე საფინანსო პრაქტიკაში პროცენტების დარიცხვა ხდება არა წელიწადში ერთხელ, არამედ რამდენჯერმე. კერძოდ, ყოველ 6 თვეში, ყოველ კვარტალში, ყოველთვე ან ყოველდღე. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ადგილი აქვს ნომინალური საპროცენტო განაკვეთის დარიცხვას.

ვთქვათ, წელიწადში დარიცხვის რაოდენობაა m. თუ i წლიური საპროცენტო განაკვეთია, მაშინ პერიოდის საპროცენტო განაკვეთი იქნება $\frac{i}{m}$, ხოლო პერიოდების რაოდენობა nm. ასეთ პირობებში ვიყენებთ შემდეგ ფორმულას:

$$S = P(1+\frac{i}{m})^{nm} \tag{4.27}$$

მაგალითი 4.36 კლიენტმა ბანკში განათავსა 10 ათასი ლარი. განსაზღვრეთ ამ თანხის სიდიდე 2 წლის შემდეგ, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება 3 თვეში ერთხელ წლიური რთული 80% საპროცენტო განაკვეთით.

ამოხსნა.

მოც.

$P = 10000$

$n = 2$

$i = 80\%$

$m = 4$

$S = ?$

$$S = P(1+\frac{i}{m})^{nm} =$$

$$= 10000 \cdot (1+\frac{0,8}{4})^{4\cdot 2} = 42,99817 \text{ ათასი ლარი}$$

მაგალითი 4.37 დებეტურ ბარათს ერიცხება პროცენტები წლიური 9% ყოველკვარტალურად. რა თანხა ექნება ბარათის მფლობელს 7 თვის შემდეგ, თუ ის გაფორმებულია 500 აშშ დოლარზე.

ამოხსნა.

მოც.

$P = 500$

$t = 7$

$i = 9\%$

$m = 4$

$S = ?$

$$S = P(1+\frac{i}{m})^{nm} =$$

$$= 500 \cdot (1+\frac{0,09}{4})^{4\cdot\frac{7}{12}} = 500 \cdot \sqrt[3]{1,0225^7} = 522 \text{ აშშ დოლარი}$$

მაგალითი 4.38 200 ათასი დოლარის ოდენობის კრედიტი გაცემულია 16% წლიური განაკვეთით ერთი წლით. პროცენტი განისაზღვრება ერთხელ ნახევარ წელიწადში ან ერთხელ კვარტალში. განსაზღვრეთ ნაზრდი თანხა ორივე შემთხვევისათვის.

ამოხსნა.

$$S_1 = P(1+i)^n = 200(1+0{,}16/2)^2 = 200\cdot 1{,}1664 = 233{,}28 \text{ (ათასი დოლარი)}$$

$$S_2 = P(1+i)^n = 200(1+0{,}16/4)^{1\cdot 4} = 200\cdot 1{,}1699 = 233{,}97 \text{ (ათასი დოლარი)}$$

ბანკისათვის უფრო მომგებიანია პროცენტის დარიცხვა ყოველკვარტალურად.

მაგალითი 4.39 მოთხოვნამდე ანაბარზე განათავსებული იყო 10 000 ლარი. 1,5 წლის შემდეგ ანგარიშიდან მოხსნეს 2000 ლარი და მომდევნო 2 წლის შემდეგ დახურეს ანგარიში. იპოვეთ ბოლოს მიღებული თანხა, თუ რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთია 18% და დარიცხვა ხდება ყოველი 6 თვის ბოლოს.

ამოხსნა.

მოც.

$P = 10000$

$n_1 = 1{,}5$

$n_2 = 2$

$m = 2$

$i = 0{,}18$

$S = ?$

1,5 წლის შემდეგ ანგარიშზე დაგროვებული თანხა იქნება:

$$S = P(1+\frac{i}{m})^{nm} = 10000\cdot(1+\frac{0{,}18}{2})^{2\cdot 1{,}5} = 12950{,}29 \text{ ლარი.}$$

თანხის გატანის შემდეგ ანგარიშზე დარჩებოდა 12950,29–2000=10950,29 ლარი. მომდევნო ორ წელიწადში ანგარიშზე დაგროვდებოდა:

$$S_3 = 10950{,}29\cdot(1+\frac{0{,}18}{2})^{2\cdot 2} = 15457{,}23$$

ე.ი. მეანაბრემ საბოლოოდ მიიღო 15457,23 ლარი.

თუ ყოველი წლის ბოლოს დარიცხვით, რომლის დროსაც იგივე ფინანსური ეფექტი მიიღება, როგორიც წლის განმავლობაში m–ჯერადი დარიცხვით ნომინალური განაკვეთისათვის, მაშინ ადგილი აქვს წლიურ ეფექტური საპროცენტო განაკვეთს (*effective rate*). ეფექტური განაკვეთი ავღნიშნოთ i_{eff}-ით. განმარტების თანახმად მივიღებთ:

$$P\cdot(1+i_{eff})^n = P\cdot(1+\frac{i}{m})^{nm}$$

საიდანაც (4.28)

$$i_{eff} = (1+\frac{i}{m})^m - 1$$

მაგალითი 4.40 იპოვეთ ეფექტური განაკვეთი, თუ ნომინალური განაკვეთია 25% და პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი თვის ბოლოს.

ამოხსნა.

მოც.	
$m=12$ $i=0,25$ $i_{eff}=?$	$i_{eff} = (1+\frac{i}{m})^m - 1$ $\Rightarrow$ $i_{eff} = (1+\frac{0,25}{12})^{12} - 1 = 0,2807$

ე.ი. ეფექტური განაკვეთია 28%. ანუ, წლიური ნომინალური 25% საპროცენტო განაკვეთი პროცენტების ყოველთვიურად დარიცხვით, ტოლფასია 28%-იანი ეფექტური განაკვეთისა.

მაგალითი 4.41 იპოვეთ ნომინალური განაკვეთი, თუ ეფექტური განაკვეთია 20% და პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს.

ამოხსნა.

მოც.	
$m=4$ $i_{eff}=0,2$ $i=?$	$i_{eff} = (1+\frac{i}{m})^m - 1$ $1+0,2 = (1+\frac{i}{4})^4$ $i = 0,1865$

ანუ, ნომინალური საპროცენტო განაკვეთია 18,65%.

ნებისმიერი სამომავლო თანხის მიმდინარე ღირებულების გამოსათვლელად, ამ თანხას აკლდება შესაბამისი პერიოდისათვის რთული პროცენტით დარიცხული თანხა. მომავალი პერიოდის თანხის მიმდინარე ღირებულების მისაღებად რთული პროცენტით დარიცხული თანხის გამოთვლასა და გამოკლებას სხვანაირად **დის-კონტირებას** უწოდებენ. დისკონტირებით მიღებულ თანხას კი – **დისკონტირებულ ღირებულებას**. ეს განაპირობებს, მიმდინარე ღირებულების სინონიმად ხშირად „დისკონტირებული ღირებულების“ ტერმინის გამოყენებას.

მიმდინარე ღირებულების გამოთვლა მომავალი ღირებულების გამოთვლის შებრუნებული პროცედურაა, ამიტომ დისკონტირება წააგავს რთული პროცენტის გამოთვლას, იმ განსხვავებით, რომ დისკონტირება წარმოადგენს პირუკუ პროცესს.

ე.ი. დისკონტირება რთული პროცენტით გულისხმობს მოცემული S –ის მიხედვით P სიდიდის პოვნას.

$$S_n = P\cdot(1+i)^n$$

ფორმულიდან მივიღებთ:

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}, \qquad (4.29)$$

$\frac{1}{(1+i)^n}$ – ეწოდება დისკონტირების კოეფიციენტი, P – მიმდინარე, დღევანდელი სიდიდე.

მაგალითი 4.42 ბანკი აღრიცხავს თამასუქს მისი გადახდის ვადამდე 2 წლით ადრე მარტივი სააღრიცხვო განაკვეთით 6%. როგორი რთული სააღრიცხვო განაკვეთი უნდა დაადგინოს ბანკმა, რომ იგივე შემოსავალი დარჩეს?

ამოხსნა.

ბანკის შემოსავალი მარტივი სააღრიცხვო განაკვეთის გამოყენებისას არის:

$$S=\frac{P}{1-nd}$$
$$P=S\cdot(1-nd)$$
$$D=S\cdot n\cdot d$$

რთული სააღრიცხვო განაკვეთის გამოყენებისას კი:

$$S=\frac{P}{(1-d')^n}$$
$$P=S\cdot(1-d')^n$$
$$D=S\cdot(1-(1-d')^n)$$

მიღებული ფორმულების საფუძველზე:

$$S\cdot n\cdot d \;=\; S\cdot(1-(1-d')^n)$$
$$nd=1-(1-d')^n$$
$$(1-d')^n=1-nd \qquad (4.30)$$

ჩვენს შემთხვევაში:

$$(1-d')^2=1-2\cdot d$$
$$1-d'=\sqrt{1-2\cdot d}$$
$$d'=1-\sqrt{1-2\cdot d}$$
$$d'=1-\sqrt{1-2\cdot 0,06}=0,062=6,2\%$$

ანუ რთული სააღრიცხვო განაკვეთი რამდენადმე მეტი უნდა იყოს, ვიდრე მარტივი.

იმ შემთხვევაში, თუ პროცენტების დარიცხვა წელიწადში m–ჯერ ხდება, გვექნება:

$$P = \frac{S}{(1+\frac{i}{m})^{nm}} \qquad (4.31)$$

მაგალითი 4.43 5000 ლარი გადახდილ უნდა იქნეს 2 წლის შემდეგ. იპოვეთ მიმდინარე ღირებულება, თუ რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთია 12%, ხოლო დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთხელ.

ამოხსნა.

მოც.

$S=5000$

$n=2$

$i=12\%$

$m=1$

$P=?$

$$P = \frac{S}{(1+\frac{i}{m})^{nm}} =$$

$=5000\cdot 1{,}12^{-2}=3985{,}97$ ლარი

გამოვიყვანოთ სეხის ვადისა და საპროცენტო განაკვეთის ფორმულები.

როგორ ვიცით,

$$S = P(1+i)^n$$

გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{S}{P} = (1+i)^n$$

$$\lg\frac{S}{P} = \lg(1+i)^n$$

$$g(\frac{S}{P}) = n\cdot\lg(1+i)$$

$$n = \frac{\lg(\frac{S}{P})}{\lg(1+i)}$$

ანალოგიურად,

$$n = \frac{\lg(\frac{S}{P})}{m\cdot\lg(1+\frac{i}{m})}. \qquad (4.32)$$

მაგალითი 4.44 წლიური რთული საპროცენტო სარგებელია 30%. რა დროა საჭირო საწყისი თანხის 4-ჯერ გაზრდისათვის?

ამოხსნა.

როგორც ვიცით, $n = \dfrac{\lg(\frac{S}{P})}{\lg(1+i)}$,

მოც. თანახმად $S = 4P$,

ამიტომ გვექნება:

$$n = \frac{\lg(\frac{S}{P})}{\lg(1+i)} = \frac{\lg 4}{\lg(1+0,3)} = 5,284 \quad \text{წელი.}$$

საპროცენტო განაკვეთის გამოსათვლელი ფორმულა იქნება:

$$S = P(1+i)^n$$

$$\frac{S}{P} = (1+i)^n$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 \tag{4.33}$$

ანალოგიურად $i = m(\sqrt[nm]{\frac{S}{P}} - 1)$ (4.34)

4.4 გადასახადების ფინანსური ექვივალენტობა

პრაქტიკაში, ხშირად საჭირო ხდება ერთი ფინანსური ვალდებულების შეცვლა მეორეთი (მაგალითად, უფრო შორეული ვადით), რამდენიმე ვალდებულების ერთში გაერთიანება (გადასახადების კონსოლიდაცია) და ა.შ. ასეთ შემთხვევაში აუცილებლად გასარკვევია, თუ რა პრინციპებით უნდა ვიხელმძღვანელოთ ხელშეკრულების პირობებში.

პრინციპი უნდა მდგომარეობდეს ვალდებულებების ფინანსურ ექვივალენტობაში. ექვივალენტურად ითვლება ისეთი გადასახადები, რომელთა დაყვანილი სიდიდე დროის რაიმე მომენტისათვის ერთი და იგივეა.

გარდა ამისა, ექვივალენტურობის პრინციპი საშუალებას იძლევა შევადაროთ ერთმანეთს დროის სხვადასხვა მომენტში გადასახდელი გადასახადები, ამისათვის ისინი უნდა დავიყვანოთ დროის რაიმე ერთი მომენტისათვის. ასეთი სახის ამოცანები პრაქტიკაში გვხვდება არა მხოლოდ საფინანსო ვალდებულებების შეცვლისას, არამედ ალტერნატივების არჩევისას. თუ ფინანსური ექვივალენტობის პრინციპი დაირღვა, მაშინ კონტრაქტში მონაწილე ერთი მხარე ზარალდება.

მაგალითი 4.45 გვაქვს ორი ვალდებულება: პირველი: 400 ათასი ლარი გადახდილი უნდა იქნეს 4 თვის შემდეგ და მეორე: 450 ათასი ლარი გადახდილ უნდა იქნეს 8 თვის შემდეგ. გადამხდელისათვის რომელი ვარიანტია უფრო იაფი, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია 20% (მარტივი პროცენტი).

ამოხსნა.

ვიპოვოთ ორივე ვარიანტის მიმდინარე ღირებულება კონტრაქტის დასაწყისისათვის. გვექნება:

$$P_1 = \frac{400}{1+\frac{4}{12}\cdot 0,2} = 375 \quad \text{ათასი;}$$

$$P_2 = \frac{450}{1+\frac{8}{12}\cdot 0,2} = 397,06 \quad \text{ათასი.}$$

რადგან $P_1 < P_2$ ამიტომ პირველი ვარიანტი უფრო იაფია გადამხდელისათვის.

მაგალითი 4.46 ორი სესხი: 10 ათასი ლარი გადახდის ვადით 150 დღე და 5 ათასი ლარი გადახდის ვადით – 180 დღე-უნდა გაერთიანდეს ერთ სესხად გადახდის ვადით 200 დღე. მხარები შეთანხმდნენ წლიურ 20%-იან განაკვეთზე. იპოვეთ გადასახდელი თანხის სიდიდე (მარტივი პროცენტი, K=360).

ამოხსნა.

$$P_1 = \frac{10}{1+\frac{150}{360}\cdot 0,2} = 9230,7;$$

$$P_2 = \frac{5}{1+\frac{180}{360}\cdot 0,2} = 4545,4$$

რადგან ახალი ვალდებულება ექვივალენტური უნდა იყოს მოცემული ორი ვალდებულებისა, ამიტომ თუ მის დღევანდელ ღირებულებას ავღნიშნავთ -ით, მაშინ $P = P_1 + P_2$. ე.ი. $P = 9230,7 + 4545,4 = 13776,1$ ლარი. საბოლოოდ, გადასახდელი თანხის სიდიდე 200 დღის შემდეგ ტოლი იქნება

$$S = 13776,1\cdot(1+\frac{200}{360}\cdot 0,2) = 14471,8 \quad \text{ლარი.}$$

მაგალითი 4.47 კონტრაქტის მიხედვით მოვალემ კრედიტორს უნდა გადაუხადოს 20, 30 და 50 ათასი ლარი შესაბამისად, 1 წელი 6 თვის, 2 წლის და 4 წლის შემდეგ. შეთანხმების შედეგად, მოვალე დაფარავს მთლიანად დავალიანებას ერთჯერადად 3 წლის 6 თვის შემდეგ. იპოვეთ გადასახდელი თანხა, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 36%.

ამოხსნა. რადგან გადახდა უნდა მოხდეს 3 წლის და 6 თვის შემდეგ, ამიტომ ბუნებრივია, დაყვანის დროის მომენტიდან ავიღოთ ნახაზზე პუნქტი „3.5”:

	2000	3000	?	50 000
0	1,5	2	3,5	4

ნახაზიდან ჩანს, რომ P_1=20000, n_1=3,5 - 1,5=2,

P_2=30000, n_2=3,5-2=1,5,

S_3=5000, n_3=4-3,5=0,5, i=0,36.

ავღნიშნოთ X-ით გადასახდელი თანხა. მაშინ

$$X = 20000\cdot(1+0,36)^2 + 30000\cdot(1+0,36)^{1,5} + + \frac{50000}{(1+0,36)^{0,5}} = 127447 \text{ ლარი.}$$

ავღნიშნოთ, რომ იგივე შედეგს მივიღებდით, დაყვანის მომენტიდან რომ აგვერჩია ნებისმიერი სხვა პუნქტი და მიღებული სიდიდის მიხედვით შემდეგ გამოგვეთვალა გადასახდელი თანხა.

მაგალითი 4.48 კონტრაქტის მიხედვით მეწარმემ უნდა გადაუხადოს ბანკს 10 ათასი ლარი 2 წლის შემდეგ და 30 ათასი ლარი 5 წლის შემდეგ. შეთანხმების შედეგად მეწარმე დაფარავს დავალიანებას ტოილ გადასახადებით 1 წლის, 3 წლის 6 თვისა და 8 წლის შემდეგ. იპოვეთ ეს სიიდეები, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 36% და დარიცხვა ხდება ყოველი 6 თვის ბოლოს.

ამოხსნა. დაყვანის მომენტად ავიღოთ პუნქტი “0”.

	X	10		X	30				X
0	1	2	3	3,5	4	5	6	7	8

ნახაზიდან გამომდინარე, მივიღებთ

$$P_I = \frac{10000}{(1+\frac{0,36}{2})^{2\cdot 2}} + \frac{30000}{(1+\frac{0,36}{2})^{2\cdot 5}}$$

$$P_{II} = \frac{X}{(1+\frac{0,36}{2})^{2\cdot 1}} + \frac{X}{(1+\frac{0,36}{2})^{2\cdot 3\cdot 5}} \frac{X}{(1+\frac{0,36}{2})^{2\cdot 8}}$$

ექვივალენტობის პრინციპით გვაქვს, $P_I = P_{II}$ ამიტომ X=12010.

4.5 ინფლაცია

ინფლაცია სოციალური, ეკონომიკური და პოლიტიკური განვითარების ერთ-ერთი ურთულესი და უმწვავესი პრობლემაა. იგი მეტნაკლები სიღრმითა და მასშტაბებით ყველა ქვეყნის ეკონომიკის განვითარებისთვისაა დამახასიათებელი.

ინფლაცია, როგორც ეკონომიკური მოვლენა, ხანგრძლივი პერიოდის მანძილზე არსებობს. თავად ტერმინი ინფლაცია ლათინური სიტყვაა, რაც ნიშნავს „გაბერვას". მისგან არც ერთი ქვეყანა არაა დაზღვეული.

ინფლაცია ნიშნავს ფასების საერთო დონის ამაღლებას, რომელიც განაპირობებულია ბრუნვაში მყოფი ფულადი მასისა და მისი საქონლით უზრუნველყოფას შორის წონასწორობის დარღვევით. იგი დამანგრეველ გავლენას ახდენს როგორც მაკრო, ისე მიკროეკონომიკურ პროცესებზე, ბიზნესსა და მენეჯმენტზე. ინფლაციის შედეგია მაკროეკონომიკური მაჩვენებლების ხელოვნური გადიდება და ამ საფუძველზე ცხოვრების დონის მოჩვენებითი გაუმჯობესება. დისპროპორცია აღმოცენდება სხვადასხვა ერთმანეთთან დაკავშირებული მიზეზებით: ინფლაციური მოთხოვნის წარმოშობითა და დანახარჯების დონის ზრდით, ამიტომ დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ინფლაციის შესწავლას, მისი გაზომვის მეთოდების დაუფლებასა და სათანადო ეკონომიკური, ბიზნესმენური, მენეჯმენტური გადაწყვეტილებების მიღებას პრევენციული ღონისძიებების გასატარებლად ქვეყანასა და მის ცალკეულ რეგიონებში.

ინფლაცია იწვევს ფასების საერთო დონის ზრდას, მაგრამ არა ყველა სახის საქონელსა და მომსახურებაზე ფასის აუცილებლად მომატებას. ინფლაციის დროს თავს იჩენს ფასების ძალზედ არათანაბარი ზრდის ტენდენცია. იგი ზოგჯერ თანაბარი ტემპებით, ზოგჯერ არც კი იზრდება.

ინფლაციის ტემპი გულისხმობს ფასების ზრდის ფარდობით სიდიდეს მოცემულ პერიოდში. მაგალითად, თუ პერიოდის დასაწყისში 1000 ლარის ღირებულების ნივთი პერიოდის ბოლოს ღირს 1200 ლარი, მაშინ ამბობენ, რომ ფასები გაიზარდა 1,2-ჯერ, ანუ ინფლაციის ინდექსი არის 1,2. ხოლო ინფლაციის ტემპია (1200-1000)/1000 = 0,2 ანუ 20%. ინფლაციის ტემპს აღნიშნავენ h ასოთი.

$$h = CPI - 1, \qquad (4.35)$$

სადაც *CPI* (*Consumer Prise Indexs)* სამომხმარებლო ფასების ინდექსი ანუ, როგორც ხშირად უწოდებენ, ინფლაციის ინდექსია.

ინფლაცია გამოხატულებას პოულობს ბაზრის ხანგრძლივ საერთო უწონასწორობაში მოთხოვნის მხრივ, მაგრამ ეს არც საყოველთაო მოვლენაა და არც ინფლაციური. ამ შემთხვევაში ძალიან დიდი როლის შემსრულებელია ბაზარზე მოთხოვნა-მიწოდების თანაფარდობა. მოთხოვნის შედარებითი ზრდა მიწოდებასთან შედარებით გვიჩვენებს მხოლოდ ბაზრის მექანიზმის მუშაობას და არ ეხება ინფლაციას, მაგრამ როცა უწონასწორობა ხანგრძლივია და ერთბაშად მრავალი ბაზრის დამახასიათებელ თავისებურებად იქცევა, საქმე გვაქვს ინფლაციური პროცესის გაშლასთან.

ინფლაცია იწვევს ფულადი მიმოქცევის კანონის დარღვევას და ამის შემდეგ ქაღალდის ფულის გაუმჯობესებას ოქროსა და საქონელთან შედარებით. საქონლის ფასის ზრდისა და ფულის მსყიდველობითი უნარის შემცირების პირობებში წარმოიქმნება ოქროზე ლაჟი, რაც ნიშნავს ოქროს საბაზრო ფასის

გადიდებას ქაღალდის ფულის ნიშნების რაოდენობასთან შეფარდებით. აქედან გამომდინარე ჩანს, რომ ლითონის ფულის ინფლაცია გამორიცხულია, რადგან თუ რაიმე მიზეზით სარეალიზაციო საქონლის მასა შემცირდება, ოქროს მონეტების ნაწილი გავა მიმოქცევიდან და იქცევა განძად.

ამრიგად, შეიძლება ვთქვათ, რომ ინფლაცია დაკავშირებულია ქაღალდის ფულთან, მას არა აქვს ოქროს ის თვისება, რომ ავტომატურად დატოვოს მიმოქცევის სფერო და გადაიქცეს დაგროვების საშუალებად. მას ისიც ემატება, რომ ქვეყნების მთავრობათა უმრავლესობა ბიუჯეტის შესრულების პროცესში, ყოველთვის „აღმოაჩენეს" შეუსაბამობას ბიუჯეტის ხარჯებსა და შემოსავლებს შორის. ამ მიზნით ხდება ფულის ემისია, რომელიც თავის მხრივ იწვევს ფასების სწრაფ ზრდას და ეკონომიკაში ქმნის შოკურ მდგომარეობას: ფასები უფრო სწრაფად იზრდება, ვიდრე ხელფასები, ეს კი მოთხოვნასა და მიწოდებას შორის თანაფარდობის დარღვევის უმთავრესი მიზეზი ხდება.

ინფლაციის მიზეზებს შორის მთავარია ისეთი მაკროეკონომიკური პროპორციების დარღვევა, როგორიცაა წონასწორობა გადახდისუნარიან მოთხოვნასა და შესაბამისი მოცულობის რეალურ მოხმარებას შორის.

მოთხოვნისამებრ ინფლაციას იწვევს ერთობლივი მოთხოვნის სიჭარბე იმასთან შედარებითთ, რისი უზრუნველყოფაც შეუძლია წარმოებას. ფასების ზრდას იწვევს არა მოთხოვნის სიჭარბე, არამედ მიწოდების შემცირება, რაც თავის მხრივ საწარმოო დანახარჯების ზრდით არის განპირობებული, ე.ი. ფასების მუდმივი ზრდა სრულიადაც არ არის ინფლაციის ერთადერთი ნიშანი, ინფლაცია შეიძლება მოხდეს სტაბილური ფასების დროსაც, თუ კი ამავე დროს მიწოდება ქრონიკულად ჩამორჩება მოთხოვნას.

ინფლაციური მოვლენების **კლასიფიკაცია** სხვადასხვა ნიშნით შეიძლება მოვახდინოთ. ამ ნიშნებიდან ყველაზე მთავარია **ინფლაციის ტემპი.** ამ ნიშნით ინფლაცია შეიძლება იყოს "მცოცავი", **"ჭენებადი"** და **ჰიპერინფლაცია** (<u>hiper</u> ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს ზევით).

მცოცავი ინფლაცია ქაღალდის ფულის ისეთ გაუფასურებაა, რომელიც ნელა, შედარებით შეუმჩნებლად მიმდინარეობს, რომლია დროსაც ფასების საერთო დონის მატება შეადგენს 10-15%-ს. მცოცავ ინფლაციას თითქმის ყველა განვითარებულ ქვეყანაში აქვს ადგილი. ამ დროს ინფლაციის წლიური ტემპი მერყეებს 3-3.5%-ის ფარგლებში.

ჭენებადი ინფლაცია არის ქაღალდის ფულის სწრაფი ტემპით გაუფასურება (ფასების წლიური ზრდა 20%-ზე მეტია), რომელიც იწვევს წარმოების დეზორგანიზაციას. ამ დროს მოსახლეობა ცდილობს შეიქმნას მარაგი და მოიცილოს გაუფასურებული ფული.

ჰიპერინფლაცია არის ზეინფლაცია, ამ დროს ფასების ყოველთვიური ზრდა 50%-ს აღემატება. იგი ხდება უმართავი, მიმოქცევაში გროვდება ბევრი ფული, ცხოვრების დონე მკვეთრად ეცემა, წარმოება იკვეცება ან საერთოდ ჩერდება.

ინფლაცია, ასევე, შეიძლება იყოს ღია (რომელიც კარგად ჩანს სამომხმარებლო საქონელსა და საწარმოო რესურსებზე ფასების ზრდით) და **დახურული** (რაც გამოწვეულია სასაქონლო დეფიციტით და ჩანს არაპირდაპირ, წარმოების დანახარჯების გადიდებითა და მოგების თანდათანობითი შემცირებით ბიზნესში).

როგორც ვხედავთ, ინფლაციის პროცესი საკმაოდ რთულია, რაც მოითხოვს მის გულმოდგინედ გამოკვლევას, ამიტომ ინფლაციაზე მოქმედი პროცესების ანალიზი ხორციელდება სხვადასხვა ეკონომიკური მაჩვენებლებით, როგორც საერთო ეროვნულ მეურნეობათა დონეზე, ისე ცალკეულ საწარმოების დონეზე.

ინფლაციური მოვლენებისა და პროცესებისათვის დამახასიათებელია ინერციის კანონების ძალით განვითარების ჩამოყალიბებულ ტენდენციების შენარჩუნება ამის გამო ბიზნესმენები აწარმოებენ ნედლეულის, სათბობის, ელექტროენერგიის, ნახევარფაბრიკატების ან მთლიანი მზა პროდუქციის წინასწარ შესყიდვას, რითაც ფასთასხვაობით ღებულობენ მოგებას. ასეთ მოგებას უწოდებენ **ჰოლდინგურ** მოგებას. ასეთი საქმითაა დაკავებული არა მარტო ცალკეული ბიზნესმენი, არამედ სპეციალური მსხვილი ჰოლდინგური კომპანიები და კორპორაციებიც. ისინი უმეტეს შემთხვევებში, არ ფლობენ რაიმე სახის თავიანთ საწარმოო პოტენციალს და ჰოლდინგური ოპერაციებით მნიშვნელოვანი წილი უჭირავთ ცალკეული ფირმების აქციათა საკონტროლო პაკეტში. თუ დავუშვებთ, რომ მცოცავი ინფლაციის პირობებში საწარმოო მოხმარების საქონელზე ფასები ყოველწლიურად საშუალოდ იზრდება 7 %-ით, ანუ ფასების ინდექსი შეადგენს საშუალოდ 1,07-ს. თუ ვივარაუდებთ, რომ ასეთი ტენდენცია ორი წელი მაინც გაგრძელდება ქვეყანაში, მაშინ ბიზნესმენს 200 ათასი ლარის საქონლის წინასწარ შესყიდვით შეუძლია ერთი წლის შემდეგ მიიღოს ჰოლდინგური მოგება ყოველ ერთ ლარზე 7 თეთრი (1,07 ლარს გამოკლებული 1 ლარი), ხოლო მთლიანად

200 ათასი 0,07 თეთრზე =14,0 ათასი ლარი.

ინფლაცია არის ჯაჭვური პროცესი. აქედან გამომდინარე, რამდენიმე პერიოდის ინფლაციის სრული ინდექსი ტოლია თითოეული პერიოდის ინფლაციის ინდექსების ნამრავლისა. ე.ი. თუ n პერიოდში ინფლაციის ტემპებია $h_1, h_2, \ldots, h_n$, მაშინ ინფლაციის ინდექსი იქნება:

$$CPI=(1+h_1)\cdot(1+h_2)\cdots(1+h_n) \tag{4.36}$$

კერძოდ, თუ ყოველ პერიოდში ინფლაციის ტემპი მუდმივია, მაშინ $CPI=(1+h)^n$.

უხეშ შეცდომად ითვლება ინფლაციის ტემპების შეკრება, რაც, სამწუხაროდ, დამახასიათებელია განვითარებადი ქვეყნებისათვის.

განვიხილოთ ინფლაციის გავლენა დაგროვებულ ჯამზე.

შემოვიღოთ რეალური დაგროვებული ჯამი (მსყიდველუნარიანობის მიხედვით) S_{real}. ცხადია,

$$S_{real}=\frac{S}{CPI}$$

მარტივი პროცენტის შემთხვევაში გვექნება:

$$S_{real}=\frac{S}{CPI}=\frac{P\cdot(1+ni)}{(1+h)^n} \tag{4.37}$$

რთული პროცენტის შემთხვევაში კი, როცა დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს და h არის ინფლაციის წლიური ტემპი, გვექნება:

$$S_{real}=\frac{S}{CPI}=\frac{P\cdot(1+i)^n}{(1+h)^n}=P\cdot\left(\frac{1+i}{1+h}\right)^n \tag{4.38}$$

ანალოგიურად, გამოითვლება რეალური დაგროვებული ჯამი, როცა დარიცხვა ხდება ყოველ თვე, ყოველ კვარტალში და ა.შ.

თუ $i=h$, მაშინ $S_{real}=P$. ე.ი. თუ ინფლაციის ტემპი ემთხვევა საპროცენტო სარგებელს, მაშინ, მართალია, საწყისი კაპიტალი რაოდენობრივად იზრდება, მაგრამ მსყიდველობითი უნარი იგივე რჩება.

თუ $h>i$, მაშინ ხდება კაპიტალის „ეროზია" და რეალურად დაგროვება არ ხდება.

ვიპოვოთ რეალური საპროცენტო i_{real} განაკვეთი ნომინალური i_{nom} და ინფლაციის h ტემპის მიხედვით.

მარტივი პროცენტის შემთხვევაში მივიღებთ:

$$P\cdot(1+ni_{real})=\frac{P\cdot(1+ni)}{(1+h)^n}$$

საიდანაც ვიპოვით რეალურ განაკვეთს:

$$i_{real}=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1+ni}{(1+h)^n}-1\right) \qquad (4.39)$$

რთული პროცენტის შემთხვევაში მივიღებთ:

$$P\cdot(1+i_{real})^n=P\left(\frac{1+i_{nom}}{1+h}\right)^n$$

და შესაბამისად, გვექნება:

$$1+i_{nom}=(1+i_{real})\cdot(1+h) \qquad (4.40)$$

ანუ

$$i_{nom}=i_{real}+h+h\cdot i_{real}$$

რადგანაც ნორმალურ ეკონომიკაში ინფლაციის ტემპი მცირეა, ამიტომ ბოლო ტოლობაში $h\cdot i_{real}$ შესაკრები იქნება მცირე და მისი უგულველყოფა შეიძლება. მაშინ მივიღებთ ფიშერის (*Irving Fisher*) ფორმულას:

$$i_{nom}=i_{real}+h \quad \text{da} \quad i_{real}=i_{nom}-h \qquad (4.41)$$

ავღნიშნოთ, რომ თუ ინფლაციის ტემპი დიდია, მაშინ ფიშერის ფორმულა იძლევა დამახინჯებულ შედეგს, მაგალითად, თუ ნომინალური შემოსავალია 110% და ინფლაციაა 100%, მაშინ რეალური შემოსავალია 5% და არა 10%.

მაგალითი 4.49 სამ თვეში სამომხმარებლო კალთა გაძვირდა 634 ლარიდან 692 ლარამდე. იპოვეთ: ა) *CPI* სამ თვეში, ბ) საშუალო თვიური *CPI*, გ) ინფლაციის ტემპი სამ თვეში, დ) ინფლაციის საშუალო თვიური ტემპი.

ამოხსნა.

ა) *CPI*=692/634=1,0915. ე.ი. ამ პერიოდში ფასები გაიზარდა 1,0915-ჯერ ანუ 9,15%-ით;

ბ) b-ით ავღნიშნოთ საშუალო თვიური ინდექსი, მაშინ გვექნება b^3 =1,0915 საიდანაც x=$\sqrt{1.0915}$=1,0296;

გ) $h=CPI-1=0,0915$.

იგივე შედეგს მივიღებდით, თუ გამოვიყენებდით $h=(692-634)/634=0,0915$. დ) საშუალო ტემპი თვეში იქნება 1,0296-1=0,296. ანუ 2,96%.

მაგალითი 4.50 საწყისი თანხაა 800 ლარი. ინფლაციის წლიური ტემპია 20%, წლიური ნომინალური განაკვეთია 40%. იპოვეთ 4 წლის ბოლოს დაგროვებული ჯამი (მსყიდველობითი უნარის მიხედვით) და რეალური წლიური საპროცენტო განაკვეთი ა) მარტივი პროცენტის, ბ) რთული პროცენტის შემთხვევაში.

ამოხსნა.

მარტივი:

გვაქვს: =800, *ი*$_{ნომ}$=0,4, *ჰ*=0,20, *ნ*=4.

ვპოულობთ $i_{real}=(\dfrac{0,8+4\cdot 0,4}{(1+0,2)^4}-1):4=0,0399$

ე.ი. რეალური განაკვეთი არის წლიური 3,99%. დაგროვებული ჯამი იქნება $S_{real}=P(1+ni_{real})=$ 928 ლარი.

ბ) რთული ფორმულით გვაქვს: $0,4=i_{real}+0,2+0,2i_{real}$.

საიდანაც, რეალური განაკვეთი იქნება წლიური 16,7%. დაგროვებული ჯამი იქნება $S_{real}=P(1+i_{real})^4$ =1483,8 ლარი.

ფიშერის ფორმულით კი $i_{real}=0,4-0,2=0,2$, ანუ 20%. როგორც ვხედავთ განსხვავება საკმაოდ დიდია.

მაგალითი 4.51 რვა ათას ლარს სამი კვარტლის განმავლობაში ერიცხებოდა მარტივი პროცენტი შემდეგნაირად: პირველ კვარტალში წლიური 40%, მეორეში – წლიური 45% და მესამეში კი წლიური 50%. კვარტალში ინფლაციის ყოველთვიური ტემპი იყო, შესაბამისად, 3%, 1.5% და 2%. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი (მსყიდველობითი უნარის მიხედვით).

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ დაგროვებული ჯამი ინფლაციის გარეშე. გვაქვს:

=8000, *ნ*$_1$=*ნ*$_2$=*ნ*$_3$=0.25 წელი, *ი*$_1$=0,4, *ი*$_2$=0,45, *ი*$_3$=0.5.

მაშინ მივიღებთ:

$S=8000\cdot(1+0,25\cdot 0,4+0,25\cdot 0,45+0,25\cdot 0,5)=10700$ ლარი.

ინფლაციის ინდექსი სამი კვარტლისთვის იქნება:

CPI=$(1+0.03)^3\cdot(1+0.015)^3\cdot(1+0.02)^3=1.2126$ ლარი.

მაშინ რეალური დაგროვებული ჯამი იქნება:

$S_{real}=\dfrac{10700}{1,2126}$=8824 ლარი.

4.6 ანუიტეტი

ფულის მიმდინარე და მომავალი ღირებულების გაანგარიშების დროს ვიყენებდით ერთ ძირითად თანხას, რომელიც ინვესტირდებოდა ერთჯერადად, მაგრამ ფულის ინვესტირება შესაძლებელია რამდენიმე ძირითადი თანხით განხორციელდეს, რომელიც გადაიხდება უკვე რამდენიმე თანაბარი პერიოდის განმავლობაში და ყოველ გადასახდელ ნაწილზე დაირიცხება რთული პროცენტი. მომავალი და მიმდინარე ღირებულების პრინციპი გამოიყენება როგორც ძირითადი თანხის ერთჯერადი ინვესტირების დროს, ასევე რამდენიმე ძირითადი თანხის

მიმართ, რამდენიმე თანაბარ პერიოდში, რომელსაც დაერიცხება რთული პროცენტი. შესაბამისად, საპროცენტო თანხის დარიცხვა (გადახდა) მოხდება ერთჯერადად ან მრავალჯერადად განსაზღვრული პერიოდის განმავლობაში. პერიოდის თანაბარ ინტერვალში ინვესტირებულ ერთნაირ თანხებს ეწოდება **ანუიტეტი** (*annuity*-ფინანსური რენტა).

ფულის დროითი ღირებულების პრინციპი ბუღალტრულ აღრიცხვაში გამოიყენება აქტივებისა და ვალდებულებების შესაფასებლად, იჯარის, ობლიგაციების და სხვა ფასიანი ქაღალდების, საპროცენო შემოსავლებისა და ხარჯების აღსარიცხავად.

თუ ანუიტეტის გადახდა ხდება რიგითი პერიოდის ბოლოს, მას ეწოდება **ჩვეულებრივი ანუიტეტი,** სხვანაირად პოსტნუმერანდო**,** ***deffered Annuity***, ხოლო თუ გადახდა ხდება რიგითი პერიოდის დასაწყისში, მაშინ მას **წინასწარი ანუიტეტი** ანუ პრენუმერანდო**,** ***Annuity due*** ეწოდება.

ჩვეულებრივი ანუიტეტის მომავალი ღირებულება წარმოადგენს თანაბარი ინტერვალის მქონე პერიოდში (*n*) თანაბარი ფულადი თანხის რამოდენიმე შემოსვლის ან გადახდის მომავალ ღირებულებას, რომელიც გამოანგარიშებულია რთული პროცენტის (*i*) დარიცხვით. იგი აღინიშნება შემდეგნაირად (*FVA, I, n*).

ფულის ერთეულზე ჩვეულებრივი ანუიტეტის მომავალი ღირებულება იანგარიშება ფორმულით

$$\mathrm{FVA} = \frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{i}} \tag{4.42}$$

მაგალითი 4.52 საწარმომ კრედიტით შეიძინა სატრანსპორტო საშუალება და ვალდებულება აიღო მისი ღირებულება გადაიხადოს 3 წლის განმავლობაში. გარიგების შესაბამისად, საწარმო ყოველწლიურად გადაიხდის 2000 ლარს 10%-იანი განაკვეთით.

საწარმოს მიერ 3 წლის განმავლობაში გადასახდელი თანხა ანუ 2000 ლარი ანუიტეტის მომავალი ღირებულება იქნება 6.620 ლარი.

2000 V =2000 $(1{,}1^3$-1)/0,1=2000 3,31=6620

ჩვეულებრივი ანუიტეტის მიმდინარე ღირებულება წარმოადგენს მომავალ, რამდენიმე პერიოდში ანუიტეტებით განსახორციელებელი გადასახდელების დღევანდელ ეკვივალენტურ ფულად თანხას. ანუიტეტების გადახდა ხდება თანაბარი ინტერვალი მქონე დროში (*n*) და თანაბარი ოდენობის თანხით უცვლელი რთული საპროცენტო (*i*) განაკვეთით. ანიუტეტის მიმდინარე ღირებულება აღინიშნება შემდეგნაირად (*PV/i,n*). იგი გამოითვლება ფორმულით:

$$\mathrm{PVA} = \frac{1 - \frac{1}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}}}{\mathrm{i}} \tag{4.43}$$

მაგალითი 4.53 სამი წლის განმავლობაში ყოველწლიურად ხდება 500 ლარის გადახდა, დისკონტირების 10%-იანი განაკვეთით. ვიპოვოთ მთელი პერიოდის განმავლობაში დაგროვილი თანხის დისკონტირებული ღირებულება.

PVA ფორმულის გამოყენებით ერთეულის დისკონტირების კოეფიციენტი იქნება 2,48685.

შესაბამისად, ყოველწლიურად 500 ლარის გადახდით დაგროვილი თანხის მიმდინარე ღირებულება იქნება 12443,43 (500·2,48685) ლარი.

წინასწარი ანუიტეტის პრინციპიდან გამომდინარე, მისი მიმდინარე და მომავალი ღირებულება განსხვავება ჩვეულებრივი ანუიტეტის შესაბამისი ღირებულებისაგან.

წინასწარი ანუიტეტის მომავალი და მიმდინარე ღირებულებები ფულის ერთეულზე გამოიანგარიშება ფორმულით:

წინასწარი ანუიტეტის მომავალი ღირებულება (*FVAD, I, n*)

$$FVA = \frac{(1-i)^n - 1}{i} \times (1+n) \tag{4.54}$$

წინასწარი ანუიტეტის მიმდინარე ღირებულება (PVAD, I, n)

$$PVA = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n - 1}}{i} \tag{4.55}$$

ამრიგად, მომავალი და მიმდინარე ღირებულებების გამოთვლის გასამარტივებლად პრაქტიკაში მიმართავენ ერთეული ფულის ღირებულებების ცხრილებს, სადაც მოცემულია მიმდინარე და მომავალი ღირებულებების გამოსათვლელი კოეფიციენტები (იხ. დანართი – დისკონტირების ცხრილი).

სავარჯიშოები:

4.1

1. ფინანსურმა განყოფილებამ სტატისტიკური მეთოდების გამოყენებით მიიღო შემდეგი მონაცემები, რომელიც მოცემულია ცხრილში:

x (მლნ.)	$R(x)$ (მლნ.$)
1	175
5	260
8	305
12	395

სადაც *C(x)* არის *x* მლნ კამერის წარმოებასა და რეალიზაციაზე გაწეული ხარჯები. სპეციალური ანალიტიკური მეთოდების (რეგრესიის ანალიზი) გამოყენებით მონაცემთა მოდელირებისათვის მიიღეს ხარჯის ფუნქცია: $C(x)=156+19,7x$, $1 \leq x \leq 15$.

ა) ააგეთ ცხრილის მონაცემების საფუძველზე *C(x)* განტოლების გრაფიკი კოორდინატთა სიბრტყეში;

ბ) როგორია კომპანიის მოგების ფუნქცია კამერებისათვის და როგორია მისი არე?

გ) შეავსეთ ცხრილი მოგების ფუნქციის გამოყენებით:

x (მლნ.)	$p(x)$ (მლნ.$)
1	-86
3	
6	
9	
12	
15	

დ) $p(x)$–ის მნიშვნელობებით ააგეთ მოგების ფუნქციის გრაფიკი.

2. გორგოლაჭებიანი ციგურების მწარმოებელ კომპანიას აქვს დღიური ფიქსირებული ხარჯი $ 250 და მთლიანი დღიური ხარჯი $ 3450, ხოლოგამოსავლიანობა 80 წყვილი ციგურები დღეში. ხარჯები *C* წრფივადაა დაკავშირებული *x*-თან.

ა) იპოვეთ წარმოებასთან დაკავშირებული წერტილების შემაერთებელი წრფის კუთხური კოეფიციენტი. ეს ის წრფეა, რომელიც გადის (0, 250) და (80, 3450) წერტილებზე;

ბ) შეადგინეთ წარმოებისა და ხარჯის ურთიერთდამაკავშირებელი წრფის განტოლება. ჩაწერეთ იგი $c=mx+b$ ფორმით;

გ) ააგეთ ხარჯის განტოლება (ბ) პასუხის გამოყენებით, თუ $0 \le x \le 200$

3. გვაქვს ხარჯის განტოლება $C(x) = 156 + 19,7x$, სადაც $C(x)$ არის x მლნ კამერის წარმოებისა და რეალიზაციის ხარჯი.
   ა) შემოსავლის ფუნქციისა და მოცემული ხარჯის ფუნქციის გამოყენებით შეადგინეთ მოგების ფუნქციის განტოლება;
   ბ) როგორია მაქსიმალური მოგება უახლოესი ათასი დოლარისათვის?
   გ) როგორია ერთი კამერის საბითუმო ფასი, რომელიც მაქსიმალური მოგების მომტანია?
   დ) ააგეთ მოგების ფუნქციის გრაფიკი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში;
   ე) იპოვეთ ზღვრული წერტილები უახლოესი ათასი კამერისათვის.

4.2

1. კლიენტმა ბანკში დეპოზიტზე შეიტანა 4500 ლარი წლიური 18% სარგებლით და პროცენტების ყოველკვარტალური გამოტანით. რა თანხას მიიღებს იგი ყოველი კვარტლის ბოლოს? როგორ შეიცვლება თანხა ყოველი თვის ბოლოს გამოტანისას? (მარტივი პროცენტი)

2. კლიენტმა განათავსა 6 ათასი ლარი ბანკში წლიური 20% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. რა თანხა ექნება მას: ა) 7 თვის შემდეგ; ბ) 3 წლის შემდეგ; გ) 3 წლის და 9 თვის შემდეგ?

3. მიმდინარე ფულადი თანხაა 100 ფ.ე. განსაზღვრეთ ფულის ღირებულება 4 პერიოდის შემდეგ, თუ პერიოდის მარტივი განაკვეთი შეადგენს 10%.

4. მოთხოვნამდე ანაბარზე განთავსებულია 100 ათასი ლარი. განსაზღვრეთ თანხა 2 თვის შემდეგ, თუ წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთია 10%.

5. გამოთვალეთ საპროცენტო დანარიცხები, გადასახდელი 1 მლნ. ლარის სესხით სარგებლობისათვის ნახევარი წლის განმავლობაში, თუ წლიური მარტივი განაკვეთია 60%.

6. ბანკი იღებს თანხებს 3-თვიან დეპოზიტზე წლიური 28%, 6-თვიან დეპოზიტზე წლიური 32% და ერთწლიან დეპოზიტზე წლიური 34% მარტივი საპროცენტო განაკვეთებით. რა თანხა ექნება კლიენტს სამივე შემთხვევაში, თუ მან სამივე ვარიანტში დეპოზიტზე შეიტანა 20000 ლარი?

7. ფინანსური ხელშეკრულების თანახმად კლიენტი გადაუხდის ბანკს კრედიტის – 20 ათასი ლარის სანაცვლოდ, 24 ათას ლარს 150 დღის შემდეგ. იპოვეთ ბანკის შემოსავლიანობა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით. გამოიყენეთ ჩვეულებრივი პროცენტი.

8. მეწარმემ აიღო ორწლიანი სესხი წლიური 32% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. რამდენჯერ აღემატება ვადის ბოლოს გადასახდელი თანხა გაცემულ კრედიტს?

9. სააქციო კომერციული ბანკი სთავაზობს სახსრების განთავსებას ვადიან დეპოზიტურ ანაბარზე შემდეგი პროცენტებით:

დეპოზიტის ვადა, თვე	წლიური საპროცენტო განაკვეთი
1	10
2	20
3	40

10. ფინანსური აქტივი, ნაყიდი 15 ათას ფ.ე.-ად, 27 დღის შემდეგ გაყიდეს 16 ათას ფ.ე.-ად. შეაფასეთ ოპერაციის შემოსავლიანობა.

11. ბანკმა გასცა 10 ათასი ლარი 45 დღით წლიური 30% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ ბანკის შემოსავლიანობა (თანხის სახით), თუ ითვლება, რომ წელიწადში არის: ა) 360 დღე; ბ) 365 დღე.

12. იპოვეთ კრედიტორის შემოსავლიანობა, თუ 6-თვიანი სესხის გაცემის შედეგად მან მიიღო 46550 ლარი. სესხზე ერიცხებოდა წლიური 22% მარტივი საპროცენტო სარგებელი.

13. მეანაბრემ ბანკში გახსნა 1 ათასი დოლარის მოცულობის დეპოზიტი. რამდენი ხნის შემდეგ მიიღებს იგი 1,5 ათასს დოლარს წლიური 8%-იანი მარტივი საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში?

14. ანაბარი 300 ათასი ლარის ოდენობით ბანკიში 20.05.2006 წელს წლიური 60% - იანი განაკვეთით იყო ჩადებული. 1 სექტემბრიდან ბანკმა ანაბრებზე განაკვეთი წლიურ 30 %-დე შეამცირა. 25 ოქტომბერს ანაბარი დაიხურა. განვსაზღვროთ ანაბარზე დარიცხული პროცენტული თანხა დარიცხვის ინგლისური, გერმანული და ფრანგული პრაქტიკების გამოყენებით.

15. თანხა მოთავსებული იქნა ბანკში 10 იანვარს და გატანილ იქნა იმავე წლის 14 აპრილს. იპოვეთ დღეების რაოდენობა, თუ წელიწადი იყო: ა) ნაკიანი; ბ) ჩვეულებრივი. გამოიყენეთ ორივე (ზუსტი და მიახლოებითი) მეთოდი.

16. იპოვეთ პროცენტების დარიცხვის დღეების რაოდენობა (ზუსტად და მიახლოებით), თუ თანხა განთავსებული იყო დეპოზიტზე: ა) 12 თებერვლიდან

იმავე წლის 15 მაისამდე; ბ) 5 ივნისიდან იმავე წლის 3 ნოემბრამდე. როგორ შეიცვლება შედეგები, თუ წელიწადი იქნება ნაკიანი?

17. 50 ათასი ლარის ოდენობის სესხი გაცემულია 9 თვით წლიური 10% ვალისა და პროცენტის ერთდროული გადახდით ოპერაციის ბოლოს. პირველი სამი თვის შემდეგ გადასახადი სესხზე გაიზარდა 10,5%-ით. გამოთვალეთ დასაბრუნებელი თანხა.

18. სესხი 180 ათასი გაცემულია 16 იანვარს 9 თვით წლიური 25% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ ბოლოს გადასახდელი თანხა. გამოიყენეთ სამივე პრაქტიკა.

19. სესხი გაცემულია 12 თებერვალს წლიური 32% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. სესხის დაბრუნების ვადაა იმავე წლის 27 დეკემბერი. რამდენჯერ გაიზრდება დავალიანება? გამოიყენეთ სამივე პრაქტიკა.

20. ბანკი დარიცხავს 3-თვიან დეპოზიტზე წლიურ 28%-ს. რა თანხა უნდა შევიტანოთ დეპოზიტზე, რომ მოვიცილოთ 3 ათასი ლარი ოპერაციის ბოლოს?

21. 40 ათასი ლარი შეტანილ იქნა ბანკში 12 მარტს წლიური 30% მარტივი საპროცენტო სარგებლით. იმავე წლის 15 ოქტომბრისთვის ანგარიშზე იყო 47134 ლარი. რომელი მეთოდი გამოიყენა ბანკმა პროცენტების დარიცხვისას?

22. სესხის ვადის განმავლობაში ჩვეულებრივი პროცენტის სიდიდემ ზუსტი დღეებით შეადგინა 6400 ლარი. იპოვეთ იგივე ვადის შემთხვევაში ზუსტი პროცენტის სიდიდე. როგორ შეიცვლება შედეგი, თუ წელიწადი არის ნაკიანი?

23. მოქალაქეს აქვს 20500 ლარი და სურს ერთი წლის შემდეგ გაუხდეს 27 ათასი ლარი. ღირს თუ არა ამ თანხის დეპოზიტზე განთავსება წლიური მარტივი 26% განაკვეთით? რა საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში აქვს აზრი ბანკში შეტანას?

24. შემნახველი ბანკის სერტიფიკატების პროცენტული განაკვეთი 1 წლის მიმოქცევის ვადაზე შეადგენს 35%-ს. როგორია განაღდების ღირებულება? ნომინალია – 1 000 ლარი.

25. რა დროა საჭირო იმისათვის, რომ 28 ათასი, წლიური 20% მარტივი საპროცენტო სარგებლით, გაიზარდოს იმდენით, რამდენითაც გაიზრდება 30 ათასი, წლიური 25% მარტივი საპროცენტო სარგებლით, განთავსებული დეპოზიტზე 16 თებერვლიდან იმავე წლის 28 ივლისამდე? ამასთან, პირველ კაპიტალს ერიცხება ჩვეულებრივი პროცენტი ზუსტი დღეებით, ხოლო მეორეს – ჩვეულებრივი პროცენტი მიახლოებითი დღეებით.

26. ბანკმა გასცა სესხი 9 თვით წლიური 28% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. ამასთან, ბანკმა გაცემის მომენტში დაიტოვა 3% საკომისიო. იპოვეთ ბანკის რეალური შემოსავლიანობა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით, თუ პროცენტები ერიცხებოდა სესხის საწყის სიდიდეს.

27. ბანკი ყიდის დეპოზიტურ სერთიფიკატებს შემდეგი პირობებით: სამთვიან სერთიფიკატს წლიური 40%-ით, ხოლო ერთწლიანს – წლიური 45% მარტივი საპროცენტო სარგებლებით. მოსახლეობისათვის რომელი სერთიფიკატის შეძენაა უკეთესი (ჩვეულებრივი პროცენტი)?

28. გამოვთვალოთ 10 ათასი ლარი ნომინალის დისკონტური თამასუქი განაღდებამდე 2 თვით ადრე თამასუქის განაკვეთზე წლიურ 40%.

29. დისკონტური თამასუქის განაღდების ვადაა მიმდინარე წლის 05.07. როგორია მისი გამოსასყიდი ფასი მიმდინარე წლის 23.02 ? თამასუქის ნომინალია 1 მლნ ლარი, საპროცენტო განაკვეთია წლიური 8%.

30. გადასაყვანი თამასუქი (ტრატტა) გაცემულია 100 000 ლარის ოდენობით გადახდით იმავე წლის 12 ნოემბერს. თამასუქის მფლობელმა იგი ბანკში ვადამდე ადრე – 12 სექტემბერს აღრიცხა მარტივი საპროცენტო განაკვეთით 10%. განსაზღვრეთ თანხა, რომელიც თამასუქის მფლობელმა მიიღო ბანკში, თუ დღეთა რაოდენობა წელიწადში არის k=360.

31. თამასუქი, რომლის ღირებულებაა 40 ათასი ლარი, აღრიცხეს ბანკში 20 დღით ადრე. ბანკის სარგებელი იყო 800 ლარი. იპოვეთ სააღრიცხო განაკვეთი. როგორ შეიცვლება შედეგი, თუ ბანკი გამოიყენებს მარტივ საპროცენტი განაკვეთს?

32. მოქალაქეს აქვს 50 ათასი ლარის თამასუქი. თამასუქის განაღდების ვადამდე 45 დღით ადრე ერთი ბანკი სთავაზობს 30% სააღრიცხო სარგებელს, ხოლო მეორე ბანკი კი თამასუქის აღრიცხვას 28% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. რომელი პირობაა მფლობელისთვის მომგებიანი?

33. იპოვეთ თამასუქის ნომინალური ღირებულება, თუ იგი აღრიცხეს ბანკში განაღდებამდე 18 თვით ადრე წლიური 12% სააღრიცხო განაკვეთით და მფლობელმა მიიღო 4500 ლარი.

4.3

1. 40 ათასი ლარი შეტანილი იქნა ბანკში 5 წლით წლიური რთული 28% საპროცენტო სარგებლით. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი. შეადგინეთ გადახდის სქემა წლების მიხედვით.

2. მეწარმემ აიღო სესხი 30 ათასი ლარი 7 წლით შემდეგი პირობებით: პირველ ორ წელს საპროცენტო განაკვეთია 22%, მომდევნო სამი წლის განმავლობაში ემატება წლიური მარჟა 0.5%, ხოლო ბოლო წლებშიკი წლიური მარჟა 0.8%. იპოვეთ დასაბრუნებელი თანხა, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს (რთული პროცენტი).

3. ბანკმა გასცა სესხი 250 ათასი ლარი 33 თვით წლიური 34% სარგებლით. იპოვეთ დასაბრუნებელი თანხა: ა) რთული პროცენტით; ბ) შერეული სქემით. პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს. რომელი სქემაა მომგებიანი ბანკისთვის?

4. 90 ათასი ლარი გაცემული იქნა წლიური რთული 36% საპროცენტო სარგებლით. 2 წლისა და 7 თვის შემდეგ დაბრუნებული იქნა 201421 ლარი. რომელი მეთოდი გამოიყენა ბანკმა, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს?

5. 14 ათასი ლარი შეტანილ იქნა ბანკში 5 წლით წლიური რთული 32% საპროცენტო სარგებლით. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი რთული და მარტივი პროცენტების შემთხვევაში, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი 6 თვის ბოლოს.

6. განსაზღვრეთ თანხა პერიოდის ბოლოს, თუ სესხი 200 ათასი ლარი აღებულია მიმდინარე წლის 01.07-დან მიმდინარე წლის 20.10-დე წლიური 20% საპროცენტო განაკვეთით და ყოველთვიური დარიცხვებით.

7. სესხის განაკვეთია – წლიური 50%. განსაზღვრეთ 4 თვით გაცემული სესხის სიდიდე, თუ დასაბრუნებელი თანხაა 310 ათასი ლარი. პროცენტი ერიცხება ყოველთვიურად და ემატება ძირითად თანხას.

8. გამოთვალეთ პროცენტის ეფექტური განაკვეთი, თუ ბანკი ანაბარს ყოველკვარტალურად არიცხავს და ამატებს პროცენტებს წლიური 6,5% განაკვეთით.

9. 8 ათასი ლარი შეტანილ იქნა ბანკში 1,5 წლით წლიური 32% საპროცენტო სარგებლით. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს. იპოვეთ კაპიტალის ზრდა ყოველი კვარტლის

ბოლოს. როგორ შეიცვლება შედეგი, თუ დარიცხვა მოხდება ყოველი თვის ბოლოს?

10. 100 ათასი ლარი შეტანილ იქნა ბანკში 5 წლით წლიური რთული 36% საპროცენტო სარგებლით. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი 6 თვის ბოლოს; გ) ყოვლი კვარტლის ბოლოს; დ) ყოველი თვის ბოლოს.

11. მეანაბრეს სურს საწყისი თანხა გაორმაგდეს 4 წლის შემდეგ. რა წლიური ნომინალური საპროცენტო განაკვეთი იქნება მისთვის მისაღები, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს?

12. ფირმას ესაჭიროება 1 მლნ. ლარის კრედიტი ნახევარი წლით (ექვსი თვე). ერთ ბანკში სთავაზობენ 15%-იან სესხს მარტივი პროცენტით, მეორეში ასევე 15%-იანს - რთული პროცენტით. რომელი ბანკიდან იქნება კლიენტისათვის კრედიტის აღება უფრო მომგებიანი?

13. საწარმოს ესაჭიროება 500 ათასი დოლარის მოცულობის სესხი 2,5 წლის ვადით. ერთი ბანკი სთავაზობს კრედიტს რთული პროცენტით 11%-იანი განაკვეთით; მეორე კი მარტივი პროცენტით 12%-იანი განაკვეთით. რომელი ბანკის პირობაა უფრო მისაღები კლიენტისათვის და რა იქნება მისი ეკონომია სესხის ფინანსური დანახარჯის გათვალისწინებით სწორი არჩევანის გაკეთების შემთხვევაში?

14. 05 .09. 2007-ში ბანკი მეანაბრესთან დებს ვადიანი საბანკო ანაბრის ხელშეკრულებას 21 დღის ხანგრძლივობით (ანაბრის დაბრუნების ავადაა 26. 08. 2007წ.). ანაბრის თანხაა – 15 ათასი ლარი, საპროცენტო განაკვეთია – 15%. ამასთან, ხელშეკრულების თანახმად, დეპოზიტის მოქმედების ვადის თითოეული დღის ჯამზე დარიცხული პროცენტები ანაბრის თანხას ადიდებენ.

15. განსაზღვრეთ, რომელი პირობა წარმოადგენს უფრო მომგებიანს ბანკისათვის და კლიენტისათვის:
    ა) წლიური 30%-იანი განაკვეთი წელიწადში ერთხელ დარიცხვით;
    ბ) წლიური 25%-იანი განაკვეთი კვარტალში ერთხელ დარიცხვით

16. მოქალაქეს სურს 8 ათასი ლარი 3 წლის შემდეგ გახდეს 12 ათასი ლარი. რა წლიური ნომინალური საპროცენტო განაკვეთი იქნება მისთვის მისაღები, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი 6 თვის ბოლოს; ბ) ყოველი კვარტლის ბოლოს?

17. განსაზღვრეთ 100 ფ.ე. კაპიტალის 3 თვით განთავსების შემოსავლიანობა (რთული პროცენტი), თუ მისი ნამატი ღირებულებაა 110 ფ. ე.

18. საკრედიტო ხელშეკრულება ითვალისწინებს 3 თვის შემდეგ 500 ათასი დოლარის დაფარვას. სესხის საწყისი მოცულობა 450 ათასი დოლარია. განსაზღვრეთ განაკვეთის რთული პროცენტის სიდიდე. რისი ტოლი იქნება იგი მარტივი პროცენტის შემთხვევაში?

19. მეანაბრემ ბანკში გახსნა 200 ათასი დოლარის მოცულობის დეპოზიტი, 100 დღის ვადით და წლირი 13%-იანი განაკვეთით. რა თანხას მიიღებს იგი
    ა) მარტივი პროცენტის დარიცხვის შემთხვევაში;
    ბ) რთული პროცენტის დარიცხვის შემთხვევაში.

20. სესხის გაცემის რომელი ვარიანტია ბანკისთვის მომგებიანი: ა) წლიური 29% ყოველი კვარტლის ბოლოს დარიცხვით, თუ ბ) წლიური 30% ყოველი 6 თვის ბოლოს დარიცხვით?

21. შემოთავაზებულია კრედიტზე საპროცენტო განაკვეთის ორი ვარიანტი: წლიური 32% ყოველთვიური დარიცხვითა და წლიური 33% ყოველკვარტალური დარიცხვით. რომელი ვარიანტია მისაღები კლიენტისთვის, თუ პროცენტების გადახდა ხდება კრედიტის დაფარვასთან ერთად?

22. სესხი გაცემულია 4 წლით წლიური 60% განაკვეთით. პროცენტი ერიცხება ყოველწლიურად და ემატება ძირითად თანხას. რამდენჯერ უფრო იაფი ეღირება სესხი, აღებული მარტივი საპროცენტო განაკვეთით?

23. საწარმო 3 წლის მანძილზე რიცხავდა ბანკში ყოველწლიურად 40 ათას ლარს, რომელსაც საკრედიტო დაწესებულების მიერ წლიური 10% საპროცენტო განაკვეთი (წელიწადში ორჯერ) ერიცხებოდა. განსაზღვრეთ თანხის სიდიდე პერიოდის ბოლოს.

24. 2 ათასი ლარი სიდიდის ფულადი სახსრები განთავსებულია ანაბარზე, რომლებსაც პროცენტები ერიცხება ყოველკვარტალურად წლიური 16% გაანგარიშებით და ემატება ძირითად თანხას. განსაზღვრეთ ანაბრის ნამატი ღირებულება, თუ ანაბრის შენახვის ვადაა 9 თვე.

25. მეშვიდე წლის ბოლოს დაგროვებული თანხაა 240 ათასი ლარი. იპოვეთ მისი დღ ვანდელი ღირებულება, თუ დარიცხვა ხდებოდა: ა) ყოველი 6 თვის ბოლოს წლიური 30% სარგებლით; ბ) ყოველი კვარტლის ბოლოს წლიური 40% სარგებლით.

26. რა თანხა უნდა შევიტანოთ ბანკში რთული წლიური 30% სარგებლით, რომ დავაგროვოთ 50 ათასი ლარი: ა) 6 წლის შემდეგ, თუ დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს; ბ) 4 წლის შემდეგ, თუ დარიცხვა ხდება ყოველი თვის ბოლოს?

27. იპოვეთ 40 ათასი ლარის დღევანდელი ღირებულება, თუ: ა) თუ ეს თანხა მიღებული იქნება 5 წლის 3 თვის შემდეგ; ბ) ეს თანხა მიღებული იქნა 3 წლის 6 თვის წინ; გ) ეს თანხა მიღებული იქნა კონტრაქტის გაფორმების მომენტში. თანხის განთავსება შეიძლება ბანკში წლიური რთული 36%-ით.

28. თქვენ გაქვთ 8 ათასი ლარი. ბანკი გთავაზობთ წლიურ რთულ 25% სარგებელს. გარდა ამისა, გთავაზობენ ფინანსურ გარიგებას, რომლის მიხედვითაც თქვენი აქტივი 5 წლის შემდეგ გაიზრდება 2,9-ჯერ. რომელ ვარიანტს ამჯობინებდით?

29. კლიენტმა განათავსა 25 ათასი ლარი ბანკში რთული წლიური 30%-ით. 1 წლის 9 თვის შემდეგ მან გამოიტანა 8 ათ სი ლარი, მომდევნო 3 წლის შემდეგ შეიტანა 4 ათასი ლარი. კლიენტმა ანგარიში დახურა მომდევნო 2 წლის 3 თვის შემდეგ. იპოვეთ თანხის სიდიდე დახურვის მომენტისთვის.

30. მეწარმემ განათავსა 30 ათასი ლარი ბანკში რთული წლიური 32% სარგებლითა და ყოველკვარტალური დარიცხვებით. 3 წლის 3 თვის შემდეგ მან გამოიტანა 12 ათასი ლარი, მომდევნო 1 წლის 6 თვის შემდეგ შეიტანა 8 ათასი ლარი. ანგარიში დაიხურა მომდევნო 15 თვის შემდეგ. იპოვეთ თანხის სიდიდე დახურვის მომენტისთვის.

31. რა მინიმალური ოდენობის თანხა უნდა მოვათავსოთ დეპოზიტზე, წლიური 36% სარგებლით და ყოველკვარტალური დარიცხვებით, რომ გამოვიტანოთ 9 თვის შემდეგ 10 ათასი და მომდევნო 18 თვის შემდეგ 20 ათასი ლარი.

32. მეწარმემ შეიძინა 400 ათასი ლარის მოწყობილობა კრედიტში რთული წლიური 20% სარგებლით. 2 წლის 6 თვის შემდეგ გადაიხადა 250 ათასი ლარი და კიდევ ერთი წლის შემდეგ მან სრულად დაფარა დავალიანება. იპოვეთ ბოლოს გადახდილი თანხა.

4.4

1. გადასახადი 4 ათასი ლარი, 3 თვის შემდეგ გადახდით, უნდა შეიცვალოს 5 თვის შემდგ გადახდით. იპოვეთ ახალი გადასახადი, თუ წლიური მარტივი საპროცენტო სარგებელია 36%.

2. 5 ათასი ლარი გადახდილ უნდა ყოფილიყო 6 თვის შემდეგ. ეს გადასახადი შეცვლილი იქნა 4800 ლარის გადასახადით. იპოვეთ გადახდის დრო, თუ ამ ფინანსურ ოპერაციაში გამოიყენებოდა წლიური მარტივი საპროცენტო სარგებელი 34%.

3. 50 ათასი ლარის თამასუქი, 90 დღის შემდეგ განაღდებით, უნდა შეიცვალოს თამასუქით 120 დღის შემდეგ განაღდებით. იპოვეთ თამასუქის ღირებულება, თუ წლიური სააღრიცხო განაკვეთია მარტივი 36%.

4. გადასახადები 4 ათასი ლარი, 12 ათასი ლარი და 9 ათასი ლარი გადახდილ უნდა იქნეს, შესაბამისად, 80, 150 და 210 დღის შემდეგ. მხარეების შეთანხმების შედეგად მოვალე გადაიხდის სამივე გადასახადის ჯამს. იპოვეთ კონსოლიდირებული გადასახადის ვადა, თუ ამ ფინანსურ ოპერაციაში გამოიყენებოდა წლიური მარტივი 30% განაკვეთი. დაყვანის მომენტად განიხილეთ ათვლის მომენტი. (ჩვეულებრივი პროცენტი).

5. 20000 ლარი გადახდილ უნდა იქნეს 100 დღის შემდეგ. იგი უნდა შეიცვალოს ორი გადასახადით 30 და 60 დღის შემდეგ. პირველი გადასახადის სიდიდეა 12 ათასი ლარი. იპოვეთ მეორე გადასახადი, თუ წლიური სარგებელია მარტივი 36%. დაყვანის მომენტად განიხილეთ ათვლის მომენტი. (ჩვეულებრივი პროცენტი). როგორ შეიცვლება შედეგი, თუ დაყვანის მომენტად განიხილავთ ბოლო დღეს?

6. კონტრაქტის პირობის მიხედვით, გადასახადები 15 ათასი ლარი, 5 ათ სი ლარი და 10 ათასი ლარი გადახდილ უნდა იქნეს, შესაბამისად, 15 აპრილს, 8 ივნისს და 20 სექტემბერს. მხარეები შეთანხმდნენ გადახდის ახალ წესზე: 12 ათასი – 25 მაისს, 4 ათასი – 15 ივლისს, დარჩენილი დავალიანება დაიფარება 1 აგვისტოს. იპოვეთ ბოლო გადასახადი, თუ წლიური მარტივი განაკვეთია 38%. (გამოიყენეთ 365/365 მეთოდი, წელიწადი ნაკიანია). დაყვანის მომენტად განიხილეთ 15 აპრილი.

7. გადასახადები 8 ათასი, 15 ათასი და 25 ათასი ლარი, შესაბამისად, 1 წლის, 2წ. 6თვის და 3 წლის შემდეგ გადახდებით, უნდა შეიცვალოს 2 წლის შემდეგ გადახდით. იპოვეთ ეს გადასახადი, თუ წლიური განაკვეთია რთული 36%.

8. მეწარმემ შეიძინა მომწოდებლისგან ნედლეული. კონტრაქტის პირობის მიხედვით, მეწარმემ უნდა გადაუხადოს კრედიტორს 50 ათასი ლარი 3 თვის შემდეგ, 25 ათასი 9 თვის შემდეგ და 35 ათასი ლარი 1.5 წლის შემდეგ. მომწოდებელს დასჭირდა ფული და გადაწყვიტა კონტრაქტი მიჰყიდოს საფინანსო ინსტიტუტეს, რომელიც იყიდის კონტრაქტს იმ პირობით, თუ თავის ფულს ყოველთვიურად დაერიცხება წლიური რთული 30% სარგებელი. რა თანხას მიიღებს მომწოდებელი, თუ იგი გაყიდის კონტრაქტს: ა) კონტრაქტის გაფორმების მომენტში; ბ) კონტრაქტის გაფორმებიდან 2 თვის შემდეგ?

4.5

1. ნახევარ წელიწადში სამომხმარებლო კალათა გაძვირდა 645 ლარიდან 788 ლარამდე. იპოვეთ ინფლაციის ტემპი: ა) ყოველ 6 თვეში; ბ) ყოველ თვეში; გ) ყოველ ორ თვეში.

2. წლის განმავლობაში ინფლაციის საშუალო თვიური ტემპია 4%. იპოვეთ ინფლაციის ინდექსი და ტემპი: ა) კვარტალში; ბ) 6 თვეში; გ) წელიწადში.

3. 10000 ლარს 3 თვის განმავლობაში ერიცხებოდა წლიური მარტივი 30% სარგებელი. ყოველთვე ფასები იზრდებოდა, შესაბამისად, 7%, 5% და 4%-ით. იპოვეთ დაგროვებული თანხა ინფლაციის გათვალისწინებით და რეალური საპროცენტო სარგებელი.

4. 35 000 ლარის ინვესტიციის შედეგად 3 წლის შემდეგ მიღებული იქნა 70 000 ლარი. ინფლაციის წლიური ტემპი იყო, შესაბამისად, 30%, 15% და 20%. იპოვეთ პერიოდის მოგების ნორმა (პროცენტებში) ინფალაციის გათვალისწინებით დამ ის გარეშე.

5. სამი წლის განმავლობაში ორგანიზაციას ჰქონდა შემდეგი მახასიათებლები: I-ლი წლის ბოლოს 80% მოგება, II-წლის ბოლოს 10% ზარალი, III-წლის ბოლოს 60% მოგება. იგულისხმება, რომ ყველა შემოსავალი რეინვესტირდება. იპოვეთ პერიოდის მოგება (პროცენტებში), თუ წლიური ინფლაციაა 20%.

6. მოქალაქემ იყიდა სახლი 18 ათას კუპონად და 5 წლის შემდეგ გაყიდა 250 ათას კუპონად. ინფლაციის წლიური ტემპი იყო, შესაბამისად, 15%, 20%, 40%, 60% და 200%. მოიგო თუ წააგო მოქალაქემ და რამდენი პროცენტით?

7. 15000 ლარზე 4 კვარტლის განმავლობაში ერიცხებოდა მარტივი პროცენტი შემდეგნაირად: I კვარტალში – წლიური 38%, II კვარტალში – წლიური 44%, III კვარტალში – წლიური 50%, IV კვარტალში – წლიური 54%. ყოველ კვარტალში ინფლაციის საშუალო ყოველთვიური ტემპი იყო, შესაბამისად, 1%, 2%, 1.5%, 0.5%. იპოვეთ რეალური წლიური საპროცენტო განაკვეთი და დაგროვებული ჯამი ინფლაციის გათვალისწინებით.

4.6

1. მოქალაქემ ბანკში აიღეთ ბიზნეს კრედიტი 3 წლის ვადით, სარეცხი მანქანის შესაძენად, ყოველწლიური 1000 ლარის გადახდის ვალდებულებით წლიური 12%-ის ოდენობით. გამოთვალეთ მოქალაქის მიერ 3 წლის მანძილზე გადასახდელი თანხა ანუ 1000 ლარის ანუიტეტი.

2. წლის განმავლობაში ხდება ყოველწლიურად 1000 ლარის გადახდა, დისკონტირების 5 %-იანი განაკვეთით. გამოვიანგარიშოთ მთელი პერიოდის განმავლობაში დაგროვილი თანხის დისკონტირებული ღირებულება. იგი ტოლი იქნება – 3310,1 ლარი ლარი.

3. 3 წლის განმავლობაში ხდება ყოველწლიურად 1000 ლარის გადახდა, დისკონტირების 5 %-იანი განაკვეთით. გამოვიანგარიშოთ მთელი პერიოდის განმავლობაში დაგროვილი თანხის დისკონტირებული ღირებულება. იგი ტოლი იქნება – **2 723,25** ლარი.

4. წარმოდგენილ გრაფიკზე ასახულია 1000 დოლარიანი 3 წლიანიწლიური 6 %-იანი საბანკო სესხის დაფარვის გრაფიკი, ძირითადი თანხისა და დასაფარი პროცენტის სახით. გამოიყვანეთ ყოველწლიური დასაფარი თანხის ანუიტეტი და შეავსეთ წარმოდგენილი ცხრილი.

თარიღი	სესხის თანხა	ყოველთვიური გადასახადი	საპროცენტო გადასახადი	ძირითადი თანხის დაფარვა	ნაშთი სესხზე
1	2	3	4 = 2X0,06	5 = 3 - 4	6 = 2 - 5
1	1 000,00				
2					
3					0,00
				1000,00	

თავი 5. მოდელირების მეთოდები

ხშირად მენეჯერული გადაწყვეტილებების გამოსამუშავებლად ვერ ხერხდება ანალიტიკური საშუალებების გამოყენება. ამ დროს მიმართავენ მოდელირების მეთოდებს, რომელიც გულისხმობს რეალური სიტუაციების ასახვას მოდელების გამოყენებით. მოდელის საშუალებით შეიძლება გავაანალიზოთ მოცემული პრობლემის გადაწყვეტის ალტერნატიული გზები, მათი უპირატესობანი და ნაკლოვანი მხარეები. მოდელირება რეალობასთან შედარებით ექსპერიმენტირების ეფექტური დაურისკო ხერხია. მოდელირების პროცესში გადაწყვეტილების მიმღები პირი უფრო ღრმად წვდება დასმული პრობლემის არსში. ამ დროს მას შეუძლია შედარებით მარტივი ხერხების გამოყენებით საკმაოდ რთული ამოცანა გადაწყვიტოს.

მოდელირების მეთოდები მოითხოვს განმეორებით ქმედებათა დიდ რაოდენობასა და დროს, რის გამოც პრაქტიკულ სიტუაციათა უმრავლესობაში მიზანშეწონილია კომპიუტერის გამოყენება.

წინამდებარე თავში ჩვენ განვიხილავთ ტიპიურ სამეურნეო ამოცანებში მოდელირების მეთოდების გამოყენების შესაძლებლობებს და კონკრეტულ მაგალითებს.

5.1 იმიტაციური მოდელები

ზოგიერთი ცვლადის მოდელირება შეიძლება შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით, რომელთა გენერირება ხდება კომპიუტერის საშუალებით.

შემთხვევითი რიცხვი წარმოადგენს დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც იღებს მნიშვნელობებს 00-99 დიაპაზონში ერთიდაიგივე ალბათობებით.

ქვემოთ მოგვყავს 50 შემთხვევითი რიცხვის გენერირების ერთი შესაძლო ვარიანტი:

89	07	37	29	28	08	75	01	21	63
34	65	11	80	34	14	92	48	83	91
52	49	98	44	80	04	42	37	87	96
85	46	51	73	10	83	99	24	49	70
68	22	13	71	56	35	76	16	69	94

ცხრილი 5.1

იმიტაციური მოდელირების სპეციფიკა სწორედ შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებაში მდგომარეობს სხვადასხვა სამეურნეო სიტუაციის მოდელირების პროცესში.

მაგალითი 5.1. ცხრილში წარმოდგენილია კომპანიის მიერ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობის მონაცემები ბოლო ერთი თვის განმავლობაში:

საათში წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა	3	4	5	6
პროცენტული სიხშირე	15	45	30	10

ცხრილი 5.2

როგორც ვხედავთ, რომელიმე კონკრეტულ საათში კომპანიამ შეიძლება აწარმოოს 3-დან 6-მდე პროდუქციის ერთეული. 3 ერთეულის გამოშვების ალბათობა შეადგენს 15%-ს, 4-ისა 45 %-ს და ა. შ.

ამ პროცესის მოდელირების მიზნით შეიძლება განვახორციელოთ შემთხვევითი რიცხვების გენერირება. ნებისმიერი შემთხვევითი რიცხვი 00-დან 14-ის ჩათვლით შევუსაბამოთ პროდუქციის 3 ერთეულის გამოშვებას, 15-დან 59-მდე 4 ერთეულისას და ა. შ. მაგალითად, თუ „ამოვა“ მნიშვნელობა 72, ეს შეესაბამება პროდუქციის 5 ერთეულის წარმოებას, რადგანაც იგი 60-89 დიაპაზონშია.

ყოველივე ეს შემდეგი ცხრილის სახით წარმოვადგინოთ:

საათში წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა	3	4	5	6
პროცენტული სიხშირე	00-14	15-59	60-89	90-99

ცხრილი 5.3

ამგვარად, შეიძლება განვახორციელოთ პროდუქციის გამოშვების რაოდენობის მოდელირება რამდენიმე საათისათვის. ქვემოთ, ცხრილში მოყვანილია პროდუქციის გამოშვების მოცულობის ათსაათიანი მოდელირების შედეგები:

საათი	შემთხვევითი რიცხვი	გამოშვების მოცულობა
1	89	5
2	07	3
3	37	4
4	29	4
5	28	4
6	08	3
7	75	5
8	01	3
9	21	4
10	63	5

ცხრილი 5.4

მოდელირების პროცესში გამოყენებულია ცხრილი 5.1-ის პირველი სტრიქონი. მაგალითად, მეორე საათისათვის აღებულია 07 მნიშვნელობა, რაც პროდუქციის 3 ერთეულის გამოშვებას შეესაბამება. ანალოგიურად არის მიღებული გამოშვების მოცულობის სხვა მნიშვნელობებიც.

მას შემდეგ, რაც მოდელირების შედეგად მიღებულია გარკვეული რიცხვითი მნიშვნელობები, ისინი შეიძლება გამოვიყენოთ წარმოების პროცესთან დაკავშირებული სხვადასხვა ცვლადების გასაანალიზებლად.

5.2 მოთხოვნის მოდელირება და მარაგების მართვა

შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით შესაძლებელია განვახორციელოთ მოთხოვნის მოდელირებაც ამა თუ იმ სახეობის საქონელსა თუ მომსახურებაზე.

მაგალითი 5.2. გარკვეული მოდელის ტელევიზორზე მოთხოვნის პროცენტული სიხშირის განაწილების ცხრილს აქვს სახე:

ყოველდღიური მოთხოვნა	0	1	2	3	4
პროცენტული სიხშირე	10	22	37	28	3

ცხრილი 5.5

ამ ცხრილისა და შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით, ისევე როგორც წინა მაგალითში, შეიძლება განვახორციელოთ მოთხოვნის მოდელირება ამ მოდელის ტელევიზორზე:

ყოველდღიური მოთხოვნა	0	1	2	3	4
შემთხვევითი რიცხვები	00-09	10-31	32-68	69-96	97-99

ცხრილი 5.6

ქვემოთმოყვანილ ცხრილში კი წარმოდგენილია მოთხოვნის თხუთმეტდღიანი მოდელირების შედეგები, რომელშიც შემთხვევითი რიცხვების მნიშვნელობები ასევე ცხრილი 5.1-დან არის აღებული:

დღე	შემთხვევითი რიცხვი	მოთხოვნა
1	89	3
2	07	0
3	37	2
4	29	1
5	28	1
6	08	0
7	75	3
8	01	0
9	21	1
10	63	2
11	34	2
12	65	2
13	11	1
14	80	3
15	34	2

ცხრილი 5.7

მიღებული მოდელი შეიძლება გამოვიყენოთ სასაწყობო ფართობისა და შეკვეთის მოცულობის განსაზღვრისას დანახარჯების, რენტაბელობის, ან ამონაგების ოპტიმიზაციის მიზნით.

საერთოდ, როდესაც შემთხვევითი რიცხვები გამოიყენება ისეთი ცვლადების მოდელირებისათვის, როგორიცაა მოთხოვნა და შეკვეთის ვადები, შესაძლებელია გავაანალიზოთ მარაგების მართვასთან დაკავშირებული საკითხები. კერძოდ, შევაფასოთ მარაგების საშუალო დონე, შეკვეთების სიხშირე, დეფიციტის წარმოქმნის შესაძლებლობები და მარაგების მართვასთან დაკავშირებული დანახარჯები.

ავიღებთ რა საბაზო მონაცემებად უკანასკნელ მაგალითში მიღებულ მოთხოვნის თხუთმეტდღიანი მოდელირების შედეგებს, ქვემოთ აღნიშნულ საკითხებს უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ სხვადასხვა დამატებითი ინფორმაციის პირობებში.

თავდაპირველად ვიგულისხმებთ, რომ მარაგების საწყისი დონე განისაზღვრება 12 ტელევიზორით, მოწმდება ყოველი დღის დასაწყისში და როდესაც იგი 10-ზე ნაკლები ან ტოლი აღმოჩნდება, ხორციელდება შეკვეთა 8 ტელევიზორისაგან შედგენილ პარტიაზე, რომელიც ორი დღის განმავლობაში სრულდება (მიმდინარე შეკვეთის შესრულებამდე ახალი შეკვეთა არ ხდება).

მარაგების მართვის პროცესის მოდელირების ეს ეტაპი შეიძლება ავსახოთ შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

დღე	მარაგების საწყისი დონე	მოთხოვნა	შეკვეთა	შეკვეთის შესრულება	მარაგების ნაშთი
1	12	3			9
2	9	0	8		9
3	9	2			7
4	7	1		8	14
5	14	1			13
6	13	0			13
7	13	3			10
8	10	0	8		10
9	10	1			9
10	9	2		8	15
11	15	2			13
12	13	2			11
13	11	1			10
14	10	3	8		7
15	7	2			5

ცხრილი 5.8

მარაგების ნაშთის დასადგენად მოცემულ დღეს საწყისი მარაგებისა და მოთხოვნის სხვაობას ემატება შესრულებული შეკვეთა.

ამ მოდელის მიხედვით მარაგების საშუალო დონედ მიიჩნევენ მარაგების საწყისი დონეების საშუალო არითმეტიკულს: 162/15=10,8. რაც შეეხებაშეკვეთების სიხშირეს, როგორც ვხედავთ, 15 დღის განმავლობაში მხოლოდ 3 შეკვეთა

განხორციელდა. ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ მესამე შეკვეთა ამ პერიოდის ბოლოსათვის ჯერ კიდევ არ არის შესრულებული.

როდესაც მოთხოვნა მიმდინარე მომენტში ჭარბობს მარაგების დონეს, წარმოიქმნება **დეფიციტი,** რაც არასასურველ მოვლენას წარმოადგენს, რადგანაც ამ დროს ფერხდება გაყიდვები, რაც, თავის მხრივ, ზრდის დანახარჯებს, აუარესებს კლიენტებთან ურთიერთობას და ამცირებს ამონაგებს.

როგორც ვხედავთ, მარაგების დონის რეგულირების ასეთი პოლიტიკა კონსერვატულია და გამორიცხავს დეფიციტებს. ამას უზრუნველყოფს შეკვეთების მოცულობის შედარებით მაღალი დონე, რაც ზოგჯერ შეიძლება არ აღმოჩნდეს მიზანშეწონილი დანახარჯების თვალსაზრისით. ასეთ სიტუაციებში კომპანია მზად არის გასწიოს დეფიციტის წარმოქმნის გარკვეული რისკი მარაგების დონის შემცირებით.

თუ სხვა ფაქტორებს უცვლელად დავტოვებთ და შეკვეთებს 4 ტელევიზორისაგან შედგენილ პარტიებზე გავაკეთებთ როდესაც მარაგების დონის ნიშნული 4-ზე, ან უფრო ნაკლებზე ჩამოვა, მივიღებთ მარაგების მართვის ალტერნატიულ პოლიტიკას. ამ პროცესის მოდელირების შედეგები მოყვანილია ცხრილში 5.9:

დღე	მარაგების საწყისი დონე	მოთხოვნა	შეკვეთა	შეკვეთის შესრულება	მარაგების ნაშთი	დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნა
1	12	3			9	
2	9	0			9	
3	9	2			7	
4	7	1			6	
5	6	1			5	
6	5	0			5	
7	5	3			2	
8	2	0	4		2	
9	2	1			11	
10	1	2		4	3	
11	3	2	4		1	
12	1	2			0	1
13	0	1		4	3	
14	3	3	4		0	
15	0	2			0	2

ცხრილი 5.9

მოდელიდან ჩანს, რომ მარაგების მართვის ასეთმა პოლიტიკამ შეიძლება წარმოშვას დეფიციტით გამოწვეული დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნები, რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს გარკვეული სარგებლის მიღების შესაძლებლობის ხელიდან გაშვებას რეალიზაციიდან ამონაგების თვალსაზრისით.

შევნიშნოთ, რომ მოდელი არ ითვალისწინებს შეფერხებებს მოთხოვნების დაკმაყოფილებისას (მაგალითად, როდესაც წინა დღის მოთხოვნა კმაყოფილდება შეკვეთის შესრულებით შევსებული მარაგების ხარჯზე), თუმცა უფრო რეალისტური მოდელირებით ამ გარემოების გათვალისწინებაც შეიძლება.

ახლა გავაანალიზოთ მარაგების მართვის პროცესთან დაკავშირებული დანახარჯები შემდეგი დამატებითი პირობებით: ტელევიზორის გასაყიდი ფასი შეადგენს 100 ერთეულს, დღეში 1 ტელევიზორის შენახვასთან დაკავშირებული დანახარჯები – 5 ერთეულს, ხოლო დეფიციტით გამოწვეული ერთი დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნა 10 ერთეულის მოგების შესაძლებლობის ხელიდან გაშვებას ნიშნავს (ანუ, ამ დროს მოგებას უნდა დავაკლოთ 10 ერთეული).

ყოველივე ამის გათვალისწინებით შეიძლება შევავსოთ ცხრილი 5.9-ის მონაცემები და მოდელირების შედეგები შემდეგი ცხრილის სახით წარმოვადგინოთ:

დღე	მარაგების საწყისი დონე	მოთხო-ვნა	გაყიდუ-ლია	დაუკმაყო-ფილებელია	ამონა-გები	შენახვის დანახა-რჯები	დეფიციტით გამოწვეული დანახარჯები	მოგება
1	12	3	3	–	300	65	–	240
2	9	0	0	–	0	45	–	- 45
3	9	2	2	–	200	45	–	155
4	7	1	1	–	100	35	–	65
5	6	1	1	–	100	30	–	70
6	5	0	0	–	0	25	–	- 25
7	5	3	3	–	300	25	–	275
8	2	0	0	–	0	10	–	- 10
9	2	1	1	–	100	10	–	90
10	1(+4)	2	2	–	200	5	–	195
11	3	2	2	–	200	15	–	185
12	1	2	1	1	100	5	10	85
13	0(+4)	1	1	–	100	0	–	100
14	3	3	3	–	300	15	–	285
15	0	2	0	2	0	0	20	- 20
		სულ:	20	3	2000	325	30	1645

ცხრილი 5.10

როგორც ვხედავთ, მთლიანი მოგება დამოკიდებულია შენახვის დანახარჯებსა და დეფიციტით განპირობებულ დანაკარგებზე, რასაც მარაგების საწყისი დონეები განაპირობებს. მარაგების მაღალი საწყისი დონე, ერთის მხრივ, ამცირებს დეფიციტის წარმოქმნის შესაძლებლობებს, მაგრამ საგრძნობლად ზრდის შენახვასთან დაკავშირებულ დანახარჯებს.

საერთოდ, რეალური სურათის მიღება შესაძლებელია მხოლოდ მას შემდეგ, რაც მარაგების საწყისი მაღალი დონე რეალურ ნიშნულზე ჩამოვა (ჩვენს მიერ განხილულ 15 დღიან მოდელში პირველი დეფიციტი პერიოდის ბოლოს, მე-12 დღეს წარმოიქმნა). ამიტომ, სასურველია მოდელირების ხანგრძლივობის გაზრდა.

5.3 მასობრივი მომსახურების ამოცანები

ბანკებსა თუ სხვა საფინანსო დაწესებულებებში, სუპერმარკეტებსა და საზოგადოებრივი კვების ობიექტებში, საბილეთო სალაროებთან თუ ექიმთა მისაღებებში გარკვეულ საათებში შეინიშნება ადამიანთა მომლოდინე ნაკადები, ანუ რიგები.

ნაკადები, რომლებიც გარკვეულ მომსახურებას ელოდებიან, მარტო პირდაპირი გაგებით, ცოცხალი რიგების სახით არ უნდა წარმოვიდგინოთ. საწარმოო შეკვეთები, რომლებიც გროვდება მენეჯერის სამუშაო მაგიდაზე, კომუტატორზე შემოსული სატელეფონო ზარები, ან გზაჯვარედინზე შუქნიშანთან შეჩერებული ავტომობილების კოლონაც რიგების კატეგორიას განეკუთვნება.

მასობრივი მომსახურების, ანუ რიგების თეორია, როგორც მას ზოგჯერ უწოდებენ, შეისწავლის მოთხოვნათა (შეკვეთათა, კლიენტთა) ნაკადებს და მათი ოპტიმალური მომსახურების შესაძლებლობებს. ამ თეორიის გამოყენებით შეიძლება შევაფასოთ ისეთი მნიშვნელოვანი სიდიდეები, როგორიცაა რიგის საშუალო სიგრძე, რიგში მოცდენის (რიგში დგომის) საშუალო დრო და მასთან დაკავშირებული დანახარჯები, მომსახურების არხების (ფანჯრების ბანკებში ან საბილეთო სალაროებთან, ბენზოგასამართი მოწყობილობების შესაბამის სადგურებში და ა. შ.) საჭირო რაოდენობა და სხვ.

როგორც ქვემოთ ვნახავთ, მოდელირების მეთოდების გამოყენება შესაძლებელია მასობრივი მომსახურების ამოცანების ანალიზის პროცესშიც.

მასობრივი მომსახურების სისტემაში გამოყოფენ სამ ძირითად კომპონენტს – შემავალ ნაკადს, რიგის დისციპლინასა და მომსახურების მექანიზმს.

პრაქტიკაში იშვიათად გვხვდება სიტუაციები, როდესაც ნაკადს რეგულარული ხასიათი აქვს (ანუ, როცა წინასწარ არის ცნობილი დროის ინტერვალები სისტემაში შემოსულ შეკვეთებს შორის). შემთხვევათა უმრავლესობაში სისტემაში შემავალ შეკვეთათა ნაკადს შემთხვევითი და საკმაოდ რთული ალბათური ბუნება აქვს.

შეკვეთათა ნაკადს ეწოდება **უმარტივესი,** თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

1. **სტაციონარობა**: შეკვეთათა რაოდენობა დროის რაიმე პერიოდში დამოკიდებულია მხოლოდ ამ პერიოდის სიგრძეზე და არა პერიოდის ათვლის მომენტზე;
2. **დამოუკიდებლობა**: დროის რაიმე მომენტის შემდეგ შემოსულ შეკვეთათა რაოდენობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რამდენი შეკვეთა იყო შემოსული ამ მომენტამდე;
3. **ორდინარობა**: დროის მოცემულ მომენტში ერთდროულად ორი ან მეტი შეკვეთის შემოსვლა შეუძლებელია.

უმარტივესი ნაკადი აღიწერება პუასონის განაწილებით:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad (k=0,1,2,...) \qquad (5.1)$$

სადაც $P_k(t)$ არის დროის $(0,\ t)$ შუალედში k შეკვეთის შემოსვლის ალბათობა, ხოლო λ-განაწილების მათემატიკური ლოდინი და გვიჩვენებს, თუ რამდენი შეკვეთა შემოდის სისტემაში საშუალოდ დროის ერთეულში.

მომსახურების დრო კი უმრავლეს შემთხვევაში აღიწერება ექსპონენციალური კანონით, რომლის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე:

$$F(t) = 1 - e^{-\nu t}, \tag{5.2}$$

სადაც ν გვიჩვენებს, თუ რამდენი შეკვეთის მომსახურება არის შესაძლებელი სისტემაში დროის ერთეულში საშუალოდ.

თუ δ-თი მომსახურების დროს ავღნიშნავთ, მაშინ

$$P(\delta < t) = F(t) \tag{5.3}$$

რიგის დისციპლინის ქვეშ იგულისხმება შეკვეთათა მომსახურების პროცესის გარკვეული მოწესრიგება.

ყველაზე ხშირი გამოყენება აქვს რიგის დისციპლინის შემდეგ ტიპს: პირველ რიგში ემსახურებიან სისტემაში პირველ შემოსულ შეკვეთას (ასე ვთქვათ, პირველი მოხვალ–პირველს მოგემსახურებიან). მომსახურების ასეთი წესრიგი მარტივია მოდელირების თვალსაზრისით.

გამოიყენება მომსახურების მოწესრიგების ასეთი ტიპიც: პირველ რიგში ემსახურებიან ბოლოს შემოსულ შეკვეთას (ანუ, ბოლოს მოხვალ–პირველს მოგემსახურებიან). მაგალითად, წარმოვიდგინოთ, რომ თქვენ შედიხართ ცარიელ ლიფტში მრავალსართულიანი შენობის ერთერთ მაღალ სართულზე და ქვემოთ მოძრაობისას იგი თანდათან ივსება იმ ადამიანებით, ვინც მასში მოგვიანებით შემოდის. თუ მომსახურებას დავაკავშირებთ ლიფტიდან გამოსვლასთან შენობის პირველ სართულზე, რიგის ასეთი დისციპლინა შეიძლება მივაკუთვნოთ ამ უკანასკნელ ტიპს.

შეკვეთათა მომსახურების პროცესს შეიძლება სრულიად შემთხვევითი ხასიათიც ქონდეს (მაგალითად, თუ მომსახურებად მივიჩნევთ მოსწავლის გამოკითხვას სკოლებში მასწავლებლის მიერ).

ზოგჯერ შეკვეთათა მოწესრიგება ხდება პრიორიტეტთა გარკვეული სისტემის შესაბამისად. ამ დროს შეკვეთები იყოფა გარკვეულ კატეგორიებად და ხდება მათი რანჟირება. პირველ რიგში ემსახურებიან რანგით ყველაზე მაღალი კატეგორიის შეკვეთებს. შემდეგ გადადიან რანგით უფრო დაბალი კატეგორიის შეკვეთების მომსახურებაზე და ა. შ. (მაგალითად, როდესაც ცდილობენ მგზავრთა გადარჩენას გემის ჩაძირვის საფრთხის დროს, მაშველ ნავებში პირველ რიგში ხდება ქალებისა და ბავშვების ჩასხმა).

მომსახურების მექანიზმის ქვეშ ესმით უშუალოდ მომსახურე სისტემის სტრუქტურათან და მომსახურების პროცედურებთან დაკავშირებული მახასიათებლების აღწერა. იგულისხმება მომსახურების არხების რაოდენობა, ფუნქციონირების რეჟიმები, მომსახურების ტექნიკური შესაძლებლობები და პროცედურათა ხანგრძლივობა.

განასხვავებენ მომსახურების სისტემის ფუნქციონირების პარალელურ და მიმდევრობით რეჟიმებს.

პირველ შემთხვევაში სისტემის ყველა არხი გვთავაზობს ერთიდაიგივე ტიპის მომსახურებას (მაგალითად, სპორტულ ან კულტურულ ღონისძიებებზე დასასწრები ბილეთები შეიძლება ერთდროულად რამდენიმე სალაროში იყიდებოდეს).

როდესაც სისტემა შედგება სხვადასხვა ტიპის მომსახურების არხებისგან, რომლებიც უნდა გაიაროს თითოეულმა შეკვეთამ (როგორსაც გადის, მაგალითად,

მზა ნაკეთობა წარმოების პროცესში სხვადასხვა ტექნიკური საშუალების გამოყენებით), საქმე გვაქვს მომსახურების მიმდევრობით რეჟიმთან.

მასობრივი მომსახურების კონკრეტული ამოცანის გაანალიზება, როგორც წესი, იწყება სისტემაში შემავალი ნაკადის შესწავლით. აღნიშნული ნაკადის ინტენსივობას ადგენენ მოდელირების საფუძველზე შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით.

მაგალითი 5.3 ბენზოგასამართი სადგურის ხელმძღვანელობა ამჩნევს, რომ რიგებში ხანგრძლივი ლოდინის გამო კლიენტთა მნიშვნელოვანი რაოდენობა იკარგება. მომსახურების ზონაში შემოსულ ავტომობილებზე ერთკვირიანი დაკვირვების შედეგად მიიღეს ნაკადის ინტენსივობასთან დაკავშირებული შემდეგი მონაცემები:

ინტერვალი ორ მომდევნო შემოსვლას შორის (წთ)	1	2	3	4
კლიენტთა პროცენტები	60	25	10	5

ცხრილი 5.11

ცხრილიდან ჩანს, რომ სისტემაში კონკრეტული კლიენტის შემოსვლის შემდეგ არსებობს 60%-იანი ალბათობა იმისა, რომ შემდეგი კლიენტი შემოვა ერთი წუთის შემდეგ, 25%-იანი ალბათობა იმისა, რომ შემდეგი კლიენტი შემოვა 2 წთ-ის შემდეგ და ა. შ.

ნაკადის ინტენსივობის შეფასების ალტერნატიული ხერხი მდგომარეობს, უბრალოდ, დროის გარკვეულ ინტერვალში სისტემაში შემოსულ კლიენტთა დათვლაში, ისე მაგალითად, როგორც ეს ნაჩვენებია ქვემოთმოყვანილ ცხრილში:

წუთში შემოსულ კლიენტთა რაოდენობა	0	1	2
წუთების პროცენტები	55	35	10

ცხრილი 5.12

შევნიშნოთ, რომ ნაკადის ინტენსივობის შესაფასებლად უპირატესობას მონაცემების წარმოდგენის პირველ ხერხს ანიჭებენ.

ნაკადის მოდელირებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ შემთხვევითი რიცხვები შემდეგი სქემის შესაბამისად:

ინტერვალი ორ მომდევნო შემოსვლას შორის (წთ)	1	2	3	4
კლიენტთა პროცენტები	60	25	10	5
შემთხვევითი რიცხვები	00-59	60-84	85-94	95-99

ცხრილი 5.13

ამგვარად, პირველი 60 შემთხვევითი რიცხვი მიგვანიშნებს ერთწუთიან ინტერვალზე ორ მომდევნო შემოსვლას შორის, შემდეგი 25 რიცხვი – ორწუთიანზე და ა. შ.

ქვემო ცხრილში ნაჩვენებია პირველი ათი კლიენტის შემოსვლა ბენზოგასამართ სადგურში. ფრჩხილებში აღნიშნულია მოდელირების პროცესში გამოყენებული შემთხვევითი რიცხვები:

კლიენტი	ინტერვალი	შემოსვლის დრო
1	3 (89)	3
2	1 (07)	4
3	1 (37)	5
4	1 (29)	6
5	1 (28)	7
6	1 (08)	8
7	2 (75)	10
8	1 (01)	11
9	1 (21)	12
10	2 (63)	14

ცხრილი 5.14

ნებისმიერი კლიენტის შემოსვლის დრო მიღებულია წინა კლიენტის შემოსვლის დროზე ინტერვალის ხანგრძლივობის მიმატებით (ათვლა დაწყებულია 0-დან). ცხრილიდან ჩანს, რომ პირველი 14 წუთის განმავლობაში სადგურში 10 კლიენტი შემოვიდა.

ეს ინფორმაცია შეიძლება გამოვიყენოთ მომსახურების სხვადასხვა მეთოდის ანალიზის პროცესში, რომელსაც მომდევნო პარაგრაფში განვიხილავთ.

5.4 მომსახურების მოდელები

იმისათვის, რომ გავაანალიზოთ მასობრივი მომსახურების კონკრეტული ამოცანა, აუცილებელია ვფლობდეთ ინფორმაციას კლიენტთა მომსახურების ხანგრძლივობის შესახებ.

როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ბენზოგასამართ სადგურში შემომავალ კლიენტთა ნაკადის წინა პარაგრაფში მიღებული მოდელირების შედეგების გამოყენებით შეიძლება შეფასდეს მასობრივი მომსახურების სისტემისათვის ისეთი მნიშვნელოვანი მახასათებლები, როგორიცაა რიგის სიგრძე, რიგში ლოდინის დრო, მომსახურების დამატებითი არხების საჭირო რაოდენობა მისი შემცირების მიზნით და ამასთან დაკავშირებული დანახარჯები და შემოსავლები.

თავდაპირველად მოვიყვანოთ ცხრილი, რომელშიც ნაჩვენებია კლიენტთა მომსახურების ხანგრძლივობის მონაცემები:

მომსახურების ხანგრძლივობა (წთ)	2	3	4	5	6
კლიენტთა პროცენტები	20	30	20	15	15

ცხრილი 5.15

მომსახურების ხანგრძლივობის მოდელირებისათვის კვლავ გამოვიყენებთ შემთხვევითი რიცხვებს შემდეგი სქემის შესაბამისად: პირველ 20 შემთხვევით რიცხვს (00-19) შევუსაბამოთ მომსახურების 2 წუთიანი ხანგრძლივობა, მომდევნო 30 –ს (20-49) – 3 წუთიანი და ა. შ. (იხ. ცხრილი 5.16)

მომსახურების ხანგრძლივობა (წთ)	2	3	4	5	6
შემთხვევითი რიცხვები	00-19	20-49	50-69	70-84	85-99

ცხრილი 5.16

ცხრილში 5.17 მოყვანილია სადგურში შემოსული პირველი ათი კლიენტის მომსახურების ხანგრძლივობები (ფრჩხილებში ნაჩვენებია მოდელირების პროცესში გამოყენებული შემთხვევითი რიცხვები).

კლიენტი	მომსახურების ხანგრძლივობა
1	3 (34)
2	4 (65)
3	2 (11)
4	5 (80)
5	3 (34)
6	2 (14)
7	6 (92)
8	3 (48)
9	5 (83)
10	6 (91)

ცხრილი 5.17

რიგის სიგრძის შესაფასებლად ორ მომდევნო შემოსვლათა შორის დროის ინტერვალები და მომსახურების ხანგრძლივობები შეიძლება გაანალიზდეს მთლიანობაში ისე, როგორც ეს ქვემოთმოყვანილ ცხრილშია ნაჩვენები (მოცემულ შემთხვევაში იგულისხმება, რომ მომსახურების სისტემა ერთარხიანია):

კლიენტი	შემოსვლის დრო	რიგის სიგრძე	მომსახურების ხანგრძლივობა	მომსახურების დაწყების დრო	მომსახურების დამთავრების დრო
1	3	0	3	3	6
2	4	1	4	6	10
3	5	2	2	10	12
4	6	2	5	12	17
5	7	3	3	17	20
6	8	4	2	20	22
7	10	4	6	22	28
8	11	5	3	28	31
9	12	5	5	31	36
10	14	6	6	36	42

ცხრილი 5.18

რიგის სიგრძის დასადგენად მოცემულ მომენტში შემოსული კლიენტის ნომერს უნდა გამოვაკლოთ იმ კლიენტის ნომერი, რომელსაც ამ დროს ემსახურებიან (რიგის სიგრძეში მომსახურების პროცესში მყოფი კლიენტის ჩართვა არ ხდება). მაგალითად, მეხუთე კლიენტი სადგურში შემოდის მე-7 წუთს, როდესაც მომსახურების პროცესში მეორე კლიენტი იმპოფება. ამიტომ ამ მომენტში რიგის სიგრძე 3-ის ტოლია (რიგში დგანან მესამე, მეოთხე და მეხუთე კლიენტები).

როდესაც კლიენტის შემოსვლის დრო ემთხვევა რომელიმე წინა კლიენტის მომსახურების დაწყების დროს (ან რაც იგივეა, აღნიშნული კლიენტის წინას მომსახურების დროს), მაშინ რიგის სიგრძის გამოსათვლელად ბოლოს შემოსული კლიენტის ნომერს აკლდება იმ წინა კლიენტის ნომერი, რომლის მომსახურებაც იწყება დროის ამ მომენტისათვის. მაგალითად, ცხრილიდან ჩანს, რომ მეშვიდე კლიენტი შემოდის მე-10 წუთზე, როდესაც მთავრდება მეორე კლიენტის მომსახურება და იწყება მესამესი. შესაბამისად, რიგის სიგრძე ამ მომენტისათვის 4-ის ტოლია.

მომსახურებაზე მოთხოვნის დაკმაყოფილების მნიშვნელოვან ინდიკატორს შესაბამისი ხელმძღვანელობისათვის წარმოადგენს აგრეთვე კლიენტთა რიგში დგომის საშუალო დრო. ჩვენ შეგვიძლია გავაგრძელოთ აღნიშნული მიმართულებით ანალიზის პროცესი, რისთვისაც წინა ცხრილს შევავსებთ ერთი სვეტით, რომელშიც ნაჩვენებია რიგში ლოდინის დრო თითოეული კლიენტისათვის:

კლიენტი	შემოსვლის დრო	რიგის სიგრძე	მომსახურების ხანგრძლივობა	ლოდინის დრო	მომსახურების დაწყების დრო	მომსახურების დამთავრების დრო
1	3	0	3	0	3	6
2	4	1	4	2	6	10
3	5	2	2	5	10	12
4	6	2	5	6	12	17
5	7	3	3	10	17	20
6	8	4	6	12	20	22
7	10	4	6	12	22	28
8	11	5	3	17	28	31
9	12	5	5	19	31	36
10	14	6	6	22	36	42

ცხრილი 5.19

ადვილი მისახვედრია, რომ ყოველი კლიენტის რიგში ლოდინის დრო წარმოადგენს მისი მომსახურების დაწყებისა და შემოსვლის დროთა სხვაობას.

მოდელიდან ჩანს, რომ მოცემულ სადგურში არასახარბიელო მდგომარეობაა იმ თვალსაზრისით, რომ რიგის სიგრძე სწრაფად იზრდება, რის გამოც ასევე სწრაფად იზრდება ბოლოს შემოსულ კლიენტთა რიგში ლოდინის დროც (მეათე კლიენტი მაგალითად, მომსახურებას 22 წუთი უნდა ელოდოს). ასეთ სიტუაციაში საკმაოდ დიდია კლიენტთა დაკარგვის (იგულისხმება

კლიენტები, რომელთაც რიგში ხანგრძლივ დგომას ურჩევნიათ მომსახურების გარეშე დატოვონ სადგური) ალბათობა.

პირველი ცხადი გადაწყვეტილება, რომელიც შეიძლება მიიღოს ხელმძღვანელობამ ამ დროს, მდგომარეობს იმაში, რომ გაზარდოს მომსახურების არხების ან/და მომსახურე პერსონალის რაოდენობა.

საწყის სიტუაციასთან შედარების მიზნით ქვემოთ მოყვანილია მომსახურების ორარხიანი მოდელი, რომელშიც კლიენტთა ნაკადის სადგურში შემოსვლის დრო და მათი მომსახურების ხანგრძლივობა იგივეა, რაც წინა, ერთარხიან მოდელში:

ლიენტი	შემოსვლის დრო	რიგის სიგრძე	მომსახურების ხანგრძლივობა	ლოდინის დრო	მომსახურების დაწყების დრო	მომსახურების დამთავრების დრო
1	3	0	3	0	3	6
2	4	0	4	0	4	8
3	5	1	2	3	6	8
4	6	1	5	2	8	13
5	7	2	3	1	8	11
6	8	1	2	3	11	13
7	10	2	6	3	13	19
8	11	2	3	2	13	16
9	12	3	5	4	16	21
10	14	2	6	5	19	25

ცხრილი 5.20

ამ მოდელის მიხედვით ერთდროულად შესაძლებელია ორი კლიენტის მომსახურება. ავიღოთ, მაგალითად, მე-7 კლიენტი. იგი შემოდის მე-10 წუთზე. ამ დროს ემსახურებიან: მე-4 კლიენტს (მომსახურების დაწყების დრო მერვე, ხოლო დამთავრების – მეცამეტე წუთი) და მე-5 კლიენტს (მომსახურების დაწყების და დამთავრების დრო, შესაბამისად, მერვე და მეთერთმეტე წუთები). ასე, რომ ამ მომენტისათვის რიგში იმყოფებიან მეექვსე და მეშვიდე კლიენტები და, შესაბამისად, რიგის სიგრძე 2-ის ტოლია (ზემოთ ჩვენ უკვე ავღნიშნეთ, რომ რიგის სიგრძეში არ ხდება იმ კლიენტების ჩართვა, რომლებიც მომსახურების პროცესში იმყოფებიან).

ქვემოთ მოყვანილია რიგში ლოდინის საშუალო დრო და რიგის სიგრძეები მომსახურების ერთარხიანი და ორარხიანი სიტუაციებისათვის, რომლებიც, როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, სასარგებლო სამუშაო ინდიკატორებს წარმოადგენს ხელმძღვანელობისათვის:

სიტუაცია	ლოდინის საშუალოდრო (წთ)	რიგის საშუალო სიგრძე
ერთარხიანი	10,5	3,2 ავტომობილი
ორარხიანი	2,5	1,4 ავტომობილი

ცხრილი 5.21

თუ მოდელირების ხანგრძლივობას გავზრდით, ერთარხიან სიტუაციაში ლოდინის დროსა და რიგის სიგრძის სწრაფი ზრდის ტენდეცია კიდევ უფრო შესამჩნევი გახდებოდა.

როგორც მოსალოდნელი იყო, არხის დამატებამ აღნიშნული მაჩვენებლების მნიშვნელობები შეამცირა, თუმცა, როგორც ცხრილი 5.20-დან ჩანს, ამ სიტუაციაშიც შეინიშნება ლოდინის დროისა და რიგის სიგრძის ზრდის გარკვეული ტენდეცია.

ამგვარად, შეიძლება დავასკვნათ, რომ მოცემულ პირობებში სამი არხი უზრუნველყოფს სადგურში შემოსულ კლიენტთა ნორმალურ მომსახურებას.

მოდელირების საფუძველზე შესაძლებელია შემოსავლებისა და დანახარჯების გაანალიზებაც. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, მომსახურების დამატებითი არხების ორგანიზებით იზრდება კლიენტთა რაოდენობა, რომელთაც შეიძლება მოვემსახუროთ და შესაბამისად, შესაძლო შემოსავლებიც, მაგრამ იმავდროულად, ამ პროცესს თან ახლავს დანახარჯებიც. ამიტომ არსებობს მომსახურების არხების რაოდენობის გარკვეული ზღვრული დონე, რომლის ზემოთ მისი გაზრდა მიზანშეწონილი არ არის.

გავაანალიზოთ ჩვენი მოდელი შემდეგი დამატებითი ინფორმაციის გათვალისწინებით: მომსახურე პერსონალს ხელმძღვანელობა საათში უხდის 5 დოლარს, ხოლო საშუალოდ ერთი კლიენტის მომსახურებას მოაქვს 2 დოლარის ტოლი შემოსავალი. გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ თუ რიგის სიგრძე 2-ს აღემატება, კლიენტი უარს ამბობს მომსახურებაზე და ტოვებს სადგურს.

შესაბამისი მოდელი ორი მომსახურე პერსონალის პირობით წარმოდგენილია ქვემოთ მოყვანილი ცხრილის საშუალებით:

კლიენტი	შემოსვლის დრო	რიგის სიგრძე	მომსახურების ხანგრძლივობა	ლოდინის დრო	მომსახურების დაწყების დრო	მომსახურების დამთავრების დრო	შემოსავალი (აშშ დოლარი)
1	3	0	3	0	3	6	2
2	4	0	4	0	4	8	2
3	5	1	0	3	6	8	2
4	6	1	5	2	8	13	2
5	7	2	3	1	8	11	2
6	8	1	2	3	11	13	2
7	10	2	6	3	13	19	2
8	11	2	3	2	13	16	2
9	12	2**	-	-	-	-	-
10	14	2	6	2	16	22	2

ცხრილი 5.22

ცხრილიდან ჩანს, რომ მე-12 წუთზე, როდესაც შემოდის მეცხრე კლიენტი, რიგში დგანან მეშვიდე და მერვე კლიენტები. პირობის თანახმად იგი ტოვებს სადგურს მომსახურების გარეშე (ეს ცხრილში „** " სიმბოლოთია აღნიშნული).

ოცდაორი წუთის განმავლობაში სადგური მოემსახურა 9 კლიენტს, რამაც მას 18 დოლარის შემოსავალი მისცა. ერთ საათში გადაყვანით ეს 60/22·18=49 დოლარს შეადგენს. თუ გავითვალისწინებთ ორი მომსახურე პერსონალის შრომის ანაზღაურებას 10 დოლარის ოდენობით, სადგური საათში დაახლოებით – 39 დოლარის შემოსავლის მიღებას უნდა ელოდეს.

თუ გავზრდით მოდელირების პროცესის ხანგრძლივობას და მომსახურების არხების რაოდენობას (რაც ჩვენს შემთხვევაში მომსახურე პერსონალის რაოდენობასთან უნდა გავაიგივოთ), დავრწმუნდებით, რომ მოცემულ პირობებში ოთხი და მეტი არხის ფუნქციონირება შემოსავლის თვალსაზრისით მიზანშეწონილი არ არის.

ამგვარად, მოდელირების მეთოდები წარმატებით შეიძლება იქნეს გამოყენებული მენეჯერული გადაწყვეტილებების გამომუშავების პროცესში ადამიანური და სხვა სახის დამატებითი რესურსების მოზიდვის მიზანშეწონილობის კუთხითაც.

საერთოდ, სისტემაში დროის ერთეულში შემოსული და მომსახურებული კლიენტების საშუალო რაოდენობათა ფარდობას უწოდებენ **დატვირთვის კოეფიციენტს:**

$$\rho = \frac{\lambda}{\nu} \tag{5.4}$$

სისტემებს, რომელთათვისაც $\rho > 1$, მიუღებლად მიიჩნევენ, რადგანაც მათში დროთა განმავლობაში რიგები უსასრულოდ გაიზრდება (შევნიშნოთ, რომ შემთხვევა, როდესაც $\rho < 1$, არ გამორიცხავს რიგებს, მაგრამ ამ დროს რიგის უსასრულოდ ზრდის ტენდეციას არ ექნება ადგილი).

დატვირთვის კოეფიციენტის გამოყენებით მიღებულია მასობრივი მომსახურების სისტემის ძირითად მახასიათებელთა შეფასების შემდეგი მიახლოებითი ფორმულები:

$$\overline{m} = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \tag{5.5}$$

$$\overline{n} = \frac{\rho}{1-\rho}, \tag{5.6}$$

$$\overline{t} = \overline{n} \cdot \tilde{t} \tag{5.7}$$

სადაც $\overline{m}, \overline{n}, \overline{t}$ და $\tilde{t}$, შესაბამისად, აღნიშნავს რიგის საშუალო სიგრძეს, სისტემაში მყოფ კლიენტთა საშუალო რიცხვს (მომსახურების პროცესში მყოფ კლიენტთა ჩათვლით), რიგში ლოდინისა და ერთი კლიენტის მომსახურების საშუალო დროის (ადვილი მისახვედრია, რომ $\tilde{t} = \frac{1}{\nu}$).

მაგალითი 5.4 ავიაბილეთების სალაროსთან საათში საშუალოდ შემოდის 10 კლიენტი, ხოლო ერთი კლიენტის მომსახურების საშუალო დრო 5 წუთს შეადგენს. შევაფასოთ რიგის საშუალო სიგრძე და ლოდინის დრო.

ჩვენს შემთხვევაში $\lambda = \frac{1}{6,}$ ხოლო $\nu = \frac{1}{5}$.

ამგვარად, $\rho = \frac{1/6}{1/5} = \frac{5}{6}$

(5.6) - (5.7)-ის თანახმად

$$\overline{m} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{25}{36} \cdot 6 \approx 4{,}17,$$

$$\overline{n} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{5}{6} \cdot 6 = 5$$

$$\overline{t} = 5 \cdot 5 = 25$$

როგორც ვხედავთ, ლოდინის დრო საკმაოდ დიდია, რაც ზრდის კლიენტთა დაკარგვის ალბათობას. ამიტომ, ამ სიტუაციაში შეიძლება დაისვას, ვთქვათ, შემდეგი სახის ამოცანა: რამდენარხიანი უნდა იყოს მომსახურების ეს სისტემა, რომ კლიენტის რიგში ლოდინის ხანგრძლივობა 4 წუთს არ აღემატებოდეს?

თუ არხების საძიებელ რაოდენობას n-ით ავღნიშნვთ, მაშინ ასეთი სისტემისათვის $\nu = \frac{n}{5}$, ხოლო $\rho = \frac{1/6}{n/5} = \frac{5}{6n}$.

(5.7)-ის თანახმად, დასმული ამოცანა ფორმალურად შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\frac{5/6n}{1-5/6n} \cdot \frac{5}{n} \le 4$$

ამ უკანასკნელი უტოლობის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ $n \ge 1{,}52$, რაც იმას ნიშნავს, რომ დასმული ამოცანის გადაჭრას ორი არხი უზრუნველყოფს.

მართლაც, ვთქვათ, n=2, მაშინ $\rho = \frac{1/6}{2/5} = \frac{5}{12}$

ამ მნიშვნელობის (5.7)-ში ჩასმით კი ვღებულობთ: $\overline{t} = \frac{5/12}{1-5/12} \cdot \frac{5}{2} \approx 1{,}8$ (წთ).

მოდელირების მეთოდების გამოყენება საშუალებას იძლევა დავაკვირდეთ სხვადასხვა მაჩვენებლის ქცევას და გავითვალისწინოთ განუსაზღვრელობა ისეთ ცლადებთან მიმართებაში, როგორიცაა სამომავლო მოთხოვნა, კონკურენტთა ფასები, მიწოდების ვადები, მყიდველთა ნაკადის ინტენსივობა, საპროცენტო განაკვეთები და სხვ.

გარდა ამისა, მოდელის მრავალჯერადი გამოყენება საშუალებას იძლევა გავაანალიზოთ ალტერნატიული სტრატეგიები და მათი ზემოქმედება სხვადასხვა ფაქტორზე. მოდელირების გარეშე იძულებული ვიქნებოდით გარკვეული რისკების ფასად სხვადასხვა სტრატეგია შეგვემოწმებინა რეალობაში. მაგალითად, შეიძლება გავზარდოთ ფასი საქონელზე და დავაკვირდეთ, თუ როგორ იმოქმედებს ეს გაყიდვების მოცულობაზე, ან, შევამციროთ მომსახურე პერსონალი და დავაკვირდეთ, როგორ აისახება ეს კლიენტთა მომსახურების დონეზე.

კარგად დამუშავებული იმიტაციური მოდელის დახმარებით შედარებით დროის მცირე მონაკვეთში შეიძლება „გავათამაშოთ" სხვადასხვა სიტუაცია (ყოველგვარი რისკის გარეშე) და გამოვიტანოთ მნიშვნელოვანი დასკვნები.

უნდა ავღნიშნოთ, რომ რიგ შემთხვევებში იმიტაციური მოდელი შეიძლება აღმოჩნდეს უაღრესად რთული, შეიცავდეს ცვლადების დიდ რაოდენობას მათი შესაძლო მნიშვნელობების საგრძნობი ვარიაციებით. ასეთმა სირთულემ შეიძლება განაპირობოს არასაიმედო მონაცემების გენერირება და შეცდომაში შეიყვანოს მენეჯერი. ამიტომ, მიზანშეწონილია მოდელის შეძლებისდაგვარად გამარტივება იმისათვის, რომ იგი იქცეს მნიშვნელოვან პრაქტიკულ ინსტრუმენტად.

სავარჯიშოები:

1. ცხრილში მოყვანილია აქციის უკუგების ყოველკვირეული პროცენტული ცვლილებები დროის გარკვეული პერიოდისათვის:

უკუგების პროცენტული ცვლილება კვირის განმავლობაში	-3%	-2%	-1%	0%	1%	2%	3%
შესაბამის კვირათა პროცენტი დროის მოცემულ პერიოდში	10	10	20	20	25	10	5

შემთხვევითი რიცხვებისა და ცხრილის მონაცემების გამოყენებით შეადგინეთ აქციის უკუგების პროცენტული ცვლილების თხუთმეტკვირიანი მოდელი. გააკეთეთ შესაბამისი დასკვნები.

2. ცხრილში ასახულია ქალაქის საავადმყოფოს სასწრაფო დახმარების განყოფილებაში შემოსულ პაციენტთა ინტენსივობა:

დროის ინტერვალი მიმდევრობით შემოსულ პაციენტთა შორის (წთ)	2	4	6	8	10	12	14
შემოსვლათა პროცენტი	5	10	12	23	27	16	7

შემდეგ ცხრილში კი წარმოდგენილია კლიენტთა მომსახურების დროის ხანგრძლივობის მონაცემები:

მომსახურების ხანგრძლივობა (წთ)	10	12	14	16	18	20	22
პაციენტთა პროცენტი	15	21	19	17	15	9	4

ა) მოახდინეთ პირველი თხუთმეტი კლიენტის შემოსვლის მოდელირება იმ პირობით, რომ მათ მხოლოდ ერთი მორიგე ექიმი ემსახურება;
ბ) მოახდინეთ პირველი თხუთმეტი კლიენტის შემოსვლის მოდელირება იმ პირობით, რომ მათ ორი მორიგე ექიმი ემსახურება. განსაზღვრეთ რიგში ლოდინის საშუალო დრო და რიგის საშუალო სიგრძე.

3. ფირმის საწყობში ტელეფონის საშუალებით შემოდის შეკვეთები სამი დასახელების A, B და C საქონელზე შემდეგი ინტენსივობით:

დროის ინტერვალი მიმდევრობით შემოსულ სატელეფონო ზარებს შორის (წთ)	4	5	6	7	8	9	10
შემოსული ზარების პროცენტი	13	7	10	25	23	17	5

ერთი ზარით ხდება მხოლოდ ერთი სახის საქონლის შეკვეთა. ქვემო ცხრილში მოყვანილია შემოსული ზარების პროცენტები თითოეული სახის საქონელზე:

საქონლის დასახელება	A	B	C
შემოსული ზარების პროცენტი	25	55	20

მოახდინეთ მიმდევრობით შემოსული ოცი ზარის მოდელირება შემდეგი ინფორმაციის გათვალისწინებით:

ა) საწყობი, ჩვეულებრივ, შემკვეთს უგზავნის თითოეული დასახელების საქონლის 5 ერთეულს. თუ მარაგი ასეთი რაოდენობით არ არის, უბრალოდ, იგზავნება ნაშთი;

ბ) მარაგების მოცულობა მოწმდება ყოველ ნახევარ საათში და როდესაც მათი დონე 10-ზე ნაკლები აღმოჩნდება, იგზავნება შეკვეთები ცენტრალურ საწყობში შემდეგი ზომის პარტიებზე:

გ)

საქონლის დასახელება	A	B	C
შეკვეთილი პარტიის ზომა	80	120	40

დ) საქონლის მიწოდება ხორციელდება შეკვეთის მომენტიდან ოთხი საათის განმავლობაში .

მოდელირების საფუძველზე შეაფასეთ მარაგების მოცულობის საშუალო დონე თითოეული დასახელების საქონლისათვის.

4. ცხრილში მოყვანილია ყოველკვირეული მოთხოვნის შესაბამისი მონაცემები გარკვეული სახეობის საქონელზე საცალო ვაჭრობის ობიექტისათვის:

ყოველკვირეული მოთხოვნა	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34
კვირათა პროცენტები	15	35	25	15	10

ა) მოახდინეთ მოთხოვნის მოდელირება პირველი თხუთმეტი კვირისათვის (მოდელირების პროცესში გამოიყენეთ თითოეული დიაპაზონის შუალედური მნიშვნელობები);

ბ) განსაზღვრეთ საშუალოკვირეული შემოსავლები და დანახარჯები მოდელირების შედეგებისა და შემდეგი მონაცემების გათვალისწინებით:
საქონლის შესყიდვის ფასი – 25 დოლარი;
საქონლის საცალო ფასი – 40 დოლარი;
შეკვეთის პარტიის ზომა – 50 ერთეული;
შეკვეთასთან დაკავშირებული დანახარჯები – 40 დოლარი;
შეკვეთის წერტილი – 40 ერთეული;
შეკვეთის ციკლი – 2 კვირა;
შენახვასთან დაკავშირებული დანახარჯები – 2 დოლარი საქონლის ერთეულზე;
მარაგების საწყისი დონე – 90 ერთეული;
დეფიციტით განპირობებული დანაკარგები – 10 დოლარი საქონლის ერთეულზე.

5. ერთადერთი საბილეთო სალარო მუშაობს 7 საათიდან 13 საათამდე შესვენების გარეშე. დაკვირვებამ აჩვენა, რომ კლიენტთა საშუალო რიცხვი დღის განმავლობაში შეადგენდა 54-ს, ხოლო მომსახურების დრო საშუალოდ 5 წუთს ერთ კლიენტზე.
შევაფასოთ:
ა) რიგის საშუალო სიგრძე;
ბ) რიგში ლოდინის დრო.

თავი 6. პროექტების მართვა

თანამედროვე ეტაპზე სამეურნეო, სამშენებლო, საწარმოო, სამეცნიერო-კვლევითი და სამუშაოთა სხვა კომპლექსები მათი სირთულის გამო მოითხოვს ზუსტ კოორდინაციას შემსრულებელთა მხრიდან. სხვადასხვა დონის ხელმძღვანელს ესაჭიროება სამუშაოთა შესრულებაზე კონტროლის მეცნიერულად დასაბუთებული სისტემა.

ასეთ სისტემას წარმოადგენს ქსელური დაგეგმვისა და მართვის მეთოდები. იგი პირველად გამოიყენეს აშშ-ი ჯერ კიდევ გასული საუკუნის 50-იანი წლების ბოლოს და თავდაპირველად იწოდებოდა როგორც კრიტიკული გზის მეთოდი (Critical Path Method).

მოგვიანებით დამუშავდა აღნიშნული სისტემის მრავალი მოდიფიკაცია სახელწოდებებით PLANET, COMET, RAMS და სხვ.

ქსელური გრაფიკების გამოყენება და ქსელური ანალიზი გულისხმობს მეთოდებსა და ხერხებს, რომლებიც საშუალებას იძლევა პროექტების მართვის პროცესში რესურსები პირველ ყოვლისა მივმართოთ იქითკენ, სადაც ამის აუცილებლობაა და თვალყური მივადევნოთ დანახარჯებს.

რთული პროექტები დაკავშირებულია ასეულობით ოპერაციების განხორციელებასთან, ამიტომ ამ დროს უმჯობესია შესაბამისი პროგრამული პაკეტების გამოყენება.

6.1 ქსელური გრაფიკების აგების წესები

ქსელური გრაფიკის ელემენტებს წარმოადგენს ხდომილებები და სამუშაოები (ოპერაციები).

ხდომილება – ეს არის ერთი ან რამდენიმე სამუშაოს შესრულების შედეგი (ფაქტი). გრაფიკზე ხდომილება, როგორც წესი, აღინიშნება წრეწირით, ან სხვა გეომეტრიული ფიგურით (კვადრატით, რომბით და ა. შ.) და ინომრება.

სამუშაოს ცნების ქვეშ ესმით გარკვეული სამეურნეო ან ტექნიოლოგიური პროცესი, რომლის განხორციელება საჭიროებს დროს, მატერიალურ და შრომით რესურსებს. მაგალითად, სამუშაოდ შეიძლება ჩაითვალოს საქონლის ტრანსპორირება საწყობიდან საწარმოში.

ზოგჯერ სამუშაოდ მიიჩნევენ ისეთ პროცესსაც, რომლის განხორციელებაც საჭიროებს მხოლოდ დროს და არ არის დაკავშირებული მატერიალურ დანახარჯებთან (ვთქვათ, ბეტონის შრობის პროცესი).

ქსელური გრაფიკის აგებისას იყენებენ აგრეთვე ე. წ. **ფიქტიურ სამუშაოებსაც** (ანუ ფსევდოოპერაციებს, როგორც მათ ზოგჯერ უწოდებენ ხოლმე). ისინი გამოიყენება სამუშაოთა შესრულების რიგითობის სწორი ასახვის მიზნით და არ საჭიროებს დროს და არანაირ რესურსს. გრაფიკზე ფიქტიურ სამუშაოს პუნქტირი ისრით აღნიშნავენ.

ხდომილება დგება მაშინ, როდესაც მისი ყველა წინმსწრები სამუშაო დასრულებულია და შესაძლებელია მომდევნო სამუშაოთა დაწყება. ამ დროს იგულისხმება, რომ ხდომილება მომენტალურად დგება და ხანგრძლივობა არა აქვს.

განასხვავებენ ხდომილებათა შემდეგ ტერმინოლოგიურ ნაირსახეობებს:

ამოსავალი ხდომილება – შედეგი, რომელთანაც მიმართებაში პირობითად მიჩნეულია, რომ მას წინმსწრები სამუშაოები არა აქვს.

დამამთავრებელი ხდომილება - შედეგი, რომელთანაც მიმართებაში პირობითად მიჩნეულია, რომ მას არ მოსდევს არცერთი სამუშაო.

შუალედური ხდომილება – ეს არის ერთი ან რამდენიმე სამუშაოს შესრულებით მიღწევადი შედეგი, რომელიც შემდეგი სამუშაოების დაწყების საშუალებას იძლევა.

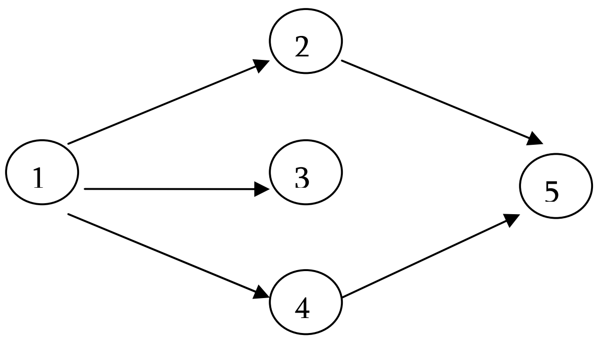
საწყისი ხდომილება – ხდომილება, რომელიც უშუალოდ წინ უსწრებს მოცემულ კონკრეტულ სამუშაოს.

საბოლოო ხდომილება – ხდომილება, რომელიც უშუალოდ მოსდევს მოცემულ სამუშაოს.

ქსელურ გრაფიკში ყოველთვის არსებობს ერთი ამოსავალი და ერთი ან რამდენიმე დამამთავრებელი ხდომილება (ამ შემთხვევაში ქსელურ მოდელს მრავალმიზნიანს უწოდებენ).

ქსელური გრაფიკების აგებისას აუცილებელია დავიცვათ შემდეგი წესები:

1. გრაფიკზე არ უნდა იყოს ე. წ. „ჩიხები“, ანუ ხდომილებები, რომელთაგანაც არცერთი სამუშაო გამოდის, გარდა დამამთავრებელი ხდომილებისა (იხ. ხდომილება 3, ნახ. 6.1)

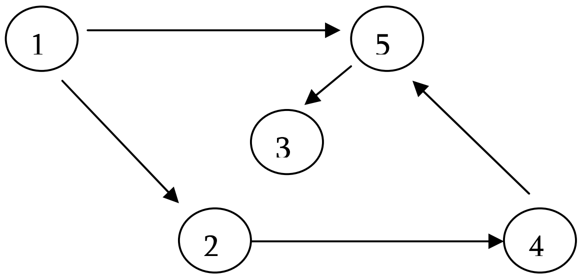


ნახ. 6.1

ასეთი ხდომილებები გრაფიკზე შეიძლება აღმოჩნდეს, უბრალოდ, მარტივი შეცდომების გამო, რაც ასევე იოლად შეიძლება გასწორდეს. თუმცა, შეიძლება მოხდეს ისეც, რომ სამუშაოს შესრულება, რომლის შედეგსაც ხდომილება წარმოადგენს, სრულებით არ იყო საჭირო, ან გამორჩენილია რომელიმე სამუშაო, რომელიც უნდა მოსდევდეს ამ ხდომილებას.

მსგავს შემთხვევებში ყურადღებით უნდა გაანალიზდეს კავშირები და დამოკიდებულებები ხდომილებებსა და სამუშაოებს შორის.

2. ქსელურ გრაფიკებში არ უნდა იყოს ხდომილებებიც (გარდა ამოსავალი ხდომილებისა), რომელთაც წინ არ უსწრებს თუნდაც ერთი სამუშაო (იხ. ხდომილება 3 ნახ. 6.2-ზე).



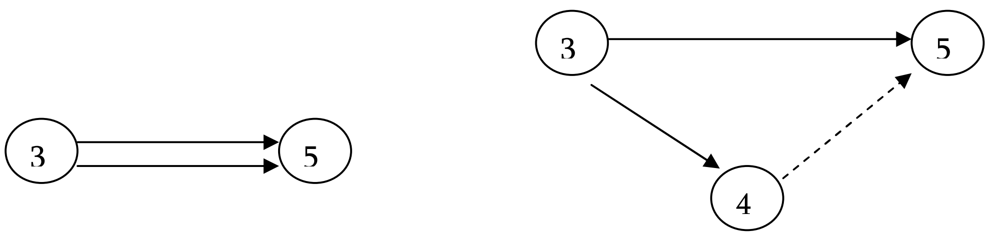
ნახ. 6.2

ასეთ ხდომილებების არსებობა გრაფიკზე, გარდა შესაძლო შეცდომებისა, შეიძლება იყოს იმის შედეგი, რომ არ არის გათვალისწინებული მისი წინმსწრები სამუშაოები. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მაგალითად, ხდომილება 3 საერთოდ ვერ დადგება და აქედან გამომდინარე, ვერ შესრულდება სამუშაო (3,5)-ც, რომელიც უშუალოდ მოსდევს მას.

ამ დროს აუცილებელია ამ ხდომილებების წინმსწრები სამუშაოების გამოვლენა და მათი ქსელში ჩათრევა.

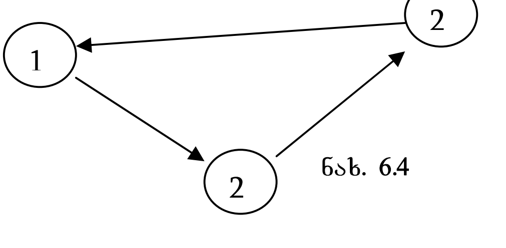
3. ქსელური გრაფიკების აგებისას არ უნდა დავუშვათ, რომ მოსაზღვრე ხდომილებები (ანუ ხდომილებები, რომელთაც გარკვეული სამუშაო აკავშირებს) ერთმანეთს უკავშირდებოდეს ორი ან მეტი სამუშაოთი, რასაც შეიძლება ადგილი ჰქონდეს სამუშაოთა პარალელური შესრულებისას. თუ აღნიშნულ ფაქტს არ გამოვასწორებთ, ამან შეიძლება გამოიწვიოს გაუგებრობა, რადგანაც ორ ან მეტ სამუშაოს ერთიდაიგივე აღნიშვნა ექნებათ (სამუშაოს აღნიშნავენ ნატურალურ რიცხვთა წყვილით, რომელთაგანაც პირველი აღნიშნავს სამუშაოს საწყისი ხდომილების, ხოლო მეორე – საბოლოო ხდომილების ნომრებს).

მსგავს შემთხვევებში მიზანშეწონილია შემოვიტანოთ დამატებითი ხდომილება და გამოვიყენოთ ფიქტიური სამუშაო, როგორც ეს ნახ. 6.3-ზეა ნაჩვენები.



ნახ. 6.3

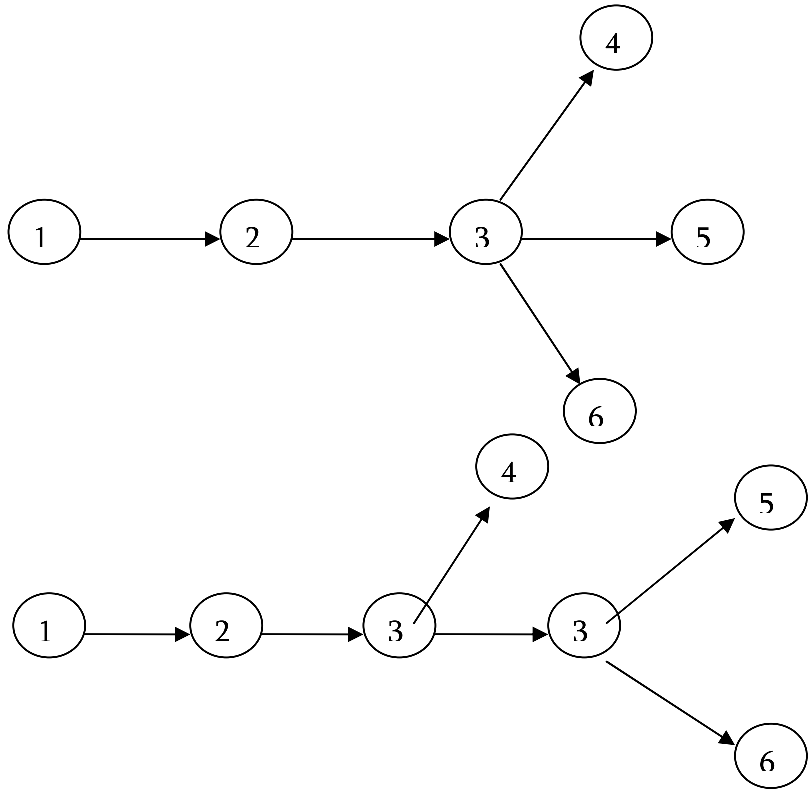
4. ქსელი არ უნდა შეიცავდეს ჩაკეტილ ციკლებს, ანუ სამუშაოთა გარკვეულ მიმდევრობას, რომელიც რომელიმე ხდომილებას თავის თავთან აკავშირებს (ნახ. 6.4)



ნახ. 6.4

მსგავსი შემთხვევა, როგორც წესი, წარმოადგენს შეცდომების შედეგს, რადგანაც იგი წინააღმდეგობაში მოდის სამუშაოთა ერთმანეთთან კავშირის ლოგიკასთან.

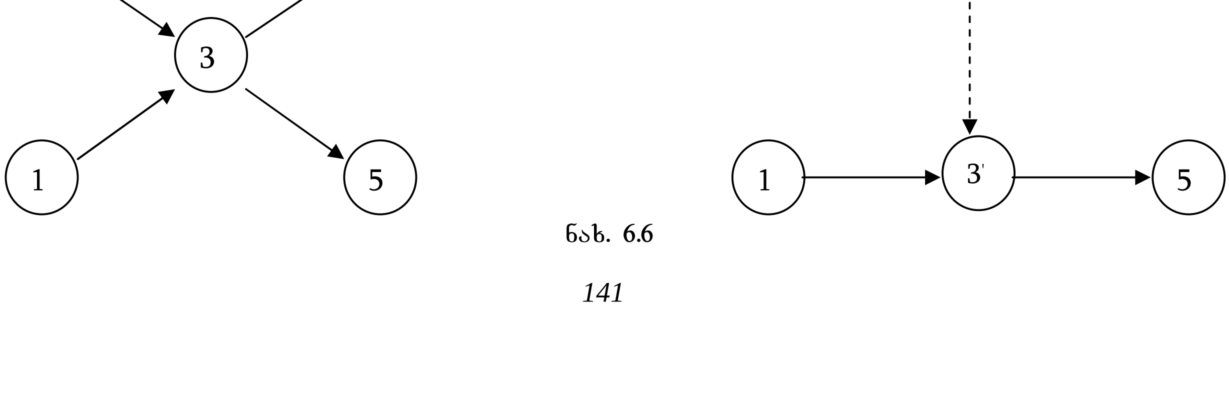
5. თუ რომელიმე სამუშაოს დაწყება შესაძლებელია უშუალოდ მისი წინმსწრები სამუშაოს დასრულებამდე, მაშინ ეს სამუშაო უნდა გამოიყოს შუალედური ხდომილებით, ისე, როგორც ეს ქვემოთმოყვანილ ნახაზზეა ნაჩვენები:



ნახ. 6.5

მოცემულ ნახაზზე ასახულია ის გარემოება, რომ (3,5) და (3,6) სამუშაოების დაწყება შესაძლებელია მხოლოდ მას შემდეგ, როდესაც მთლიანად დასრულდება (2,3) სამუშაო, ხოლო (3,4)-ისა მის დასრულებამდე, რაც ხდომილება 3'-ით არის გამოყოფილი.

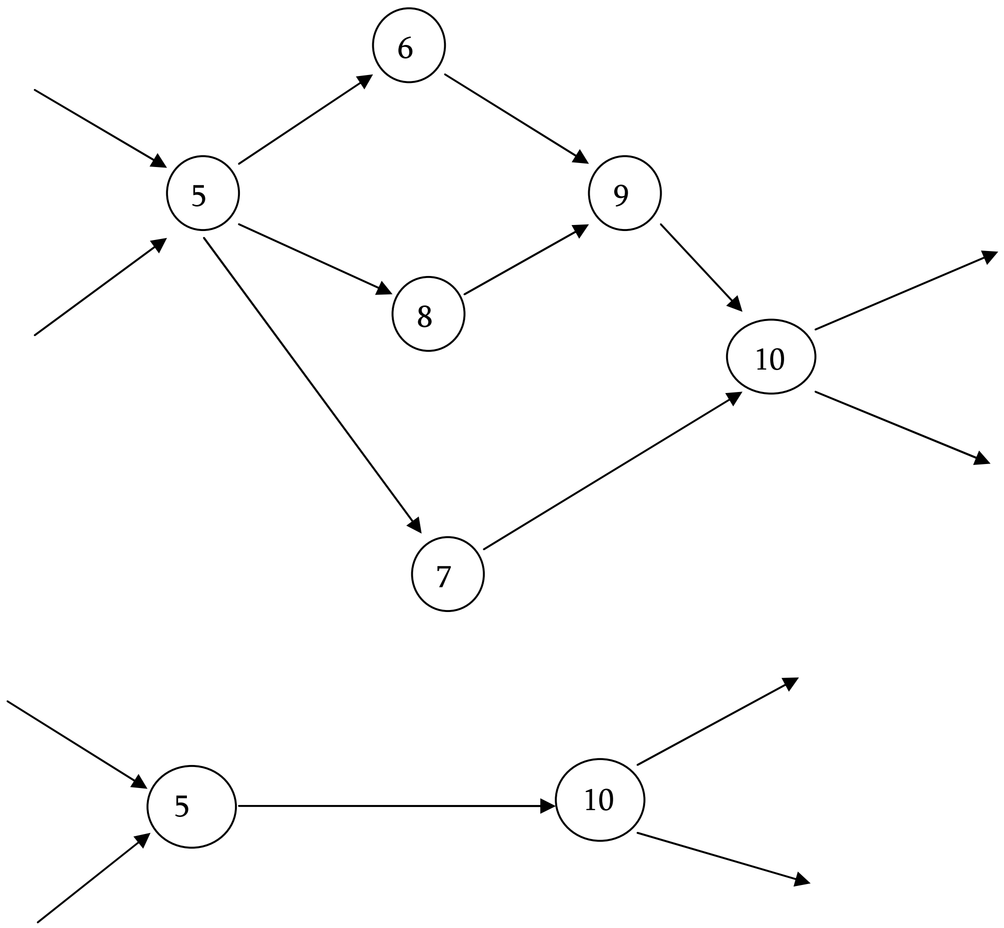
6. თუ რომელიმე სამუშაოს შესრულებისას აუცილებელია უშუალოდ მისი ყველა წინმსწრები, ხოლო სხვა სამუშაოსათვის საკმარისია მხოლოდ ერთი ან რამდენიმე წინმსწრები სამუშაოს შესრულება, მაშინ უნდა შემოვიტანოთ დამატებითი ხდომილება და ფიქტიური სამუშაო (ნახ. 6.6)



ნახ. 6.6

ამ ნახაზზე ასახულია ის გარემოება, რომ (3,5) სამუშაოს შესასრულებლად აუცილებელია შესრულდეს როგორც (1,3), ასევე (2,3) სამუშაოც, ხოლო (3,4)-თვის საკმარისია მხოლოდ (2.3) სამუშაოს შესრულება. ხდომილება 3᾽ დამატებით ხდომილებას, ხოლო (3,3᾽) - ფიქტიურ სამუშაოს წარმოადგენს.

7. თუ ქსელური გრაფიკი ხდომილებათა ძალიან დიდ რაოდენობას შეიცავს, მაშინ ხელმძღვანელობის გარკვეული დონისათვის მოსახერხებელი შეიძლება აღმოჩნდეს გრაფიკის ისეთი გამსხვილება, როგორიც ქვემოთმოყვანილ ნახაზზეა ნაჩვენები:



ნახ. 6.7

საერთოდ, რთული პროექტების ქსელური გრაფიკების აგებისას მიღებულია ბლოკური მიდგომა, ანუ თავდაპირველად იგება კერძო გრაფიკები, რომლებიც მოიცავს სამუშაოთა მთლიანი კომპლექსის გარკვეულ ნაწილს, ხოლო შემდეგ ხდება მათი „შეკვრა“.

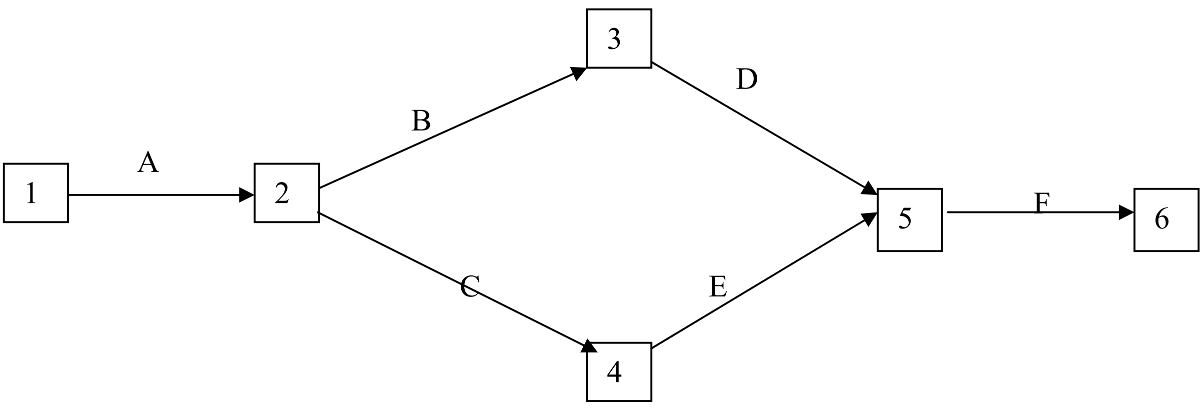
კონკრეტული ქსელური გრაფიკის ასაგებად აუცილებელია ვიცოდეთ სამუშაოთა სრული ჩამონათვალი და მათი ერთმანეთთან დამოკიდებულება რიგობითობის თვალსაზრისით.

მაგალითი 6.1 ცხრილში მოყვანილია საწარმოს გაფართოებასთან დაკავშირებული სამუშაოთა ჩამონათვალი და მათი რიგობითობა:

სამუშაოს დასახელება და აღნიშვნა		წინმსწრები სამუშაოები
ახალი ფართის დაგეგმვა	(A)	-
დროებით შენობაში გადასვლა	(B)	A
ახალი შენობის აგება	(C)	A
პერსონალის მომზადება	(D)	B
დანადგარების დადგმა	(E)	C
ახალ შენობაში გადასვლა	(F)	D, E

ცხრილი 6.1

შესაბამის ქსელურ გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 6.8

მოცემულ და შემდეგ ქსელურ გრაფიკებზე სამუშაოები აღნიშნული იქნება ლათინური ასომთავრული ასოებით. რაც შეეხება მათი ნატურალურ რიცხვთა წყვილით აღნიშვნას – ეს, უბრალოდ, წარმოადგენს პროცესის კომპიუტერიზაციის აუცილებელ პირობას.

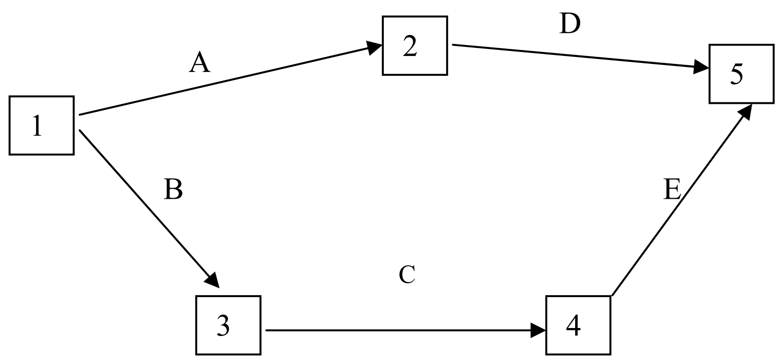
ფიქტიური სამუშაოს შემოტანის მიზანშეწონილობის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ქსელური გრაფიკის აგების კიდევ ერთი

მაგალითი 6.2 ცხრილში წარმოდგენილია სამუშაოთა გარკვეული კომპლექსის ჩამონათვალი და რიგობითობა:

სამუშაოთა ჩამონათვალი	წინმსწრები სამუშაოები
A	-
B	-
C	B
D	A
E	A, C

ცხრილი 6..2

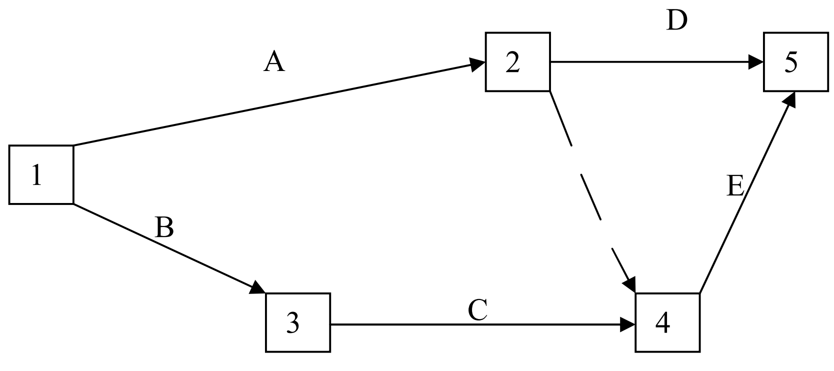
შევადგინოთ შესაბამისი ქსელური გრაფიკის შემდეგი ვარიანტი:



ნახ. 6.9

როგორც ვხედავთ, ამ გრაფიკიდან არ ჩანს, რომ *E* სამუშაოს წინ უსწრებს *A* სამუშაოს.

ქვემოთ, მოყვანილია ქსელური გრაფიკის სწორი ვარიანტი, რომელზეც ფიქტიური (2,4) სამუშაოს დახმარებით ასახულია ის გარემოება, რომ *A*-ც *E* სამუშაოს წინმსწრები სამუშაოა:



ნახ. 6.10

6.2 ქსელური გრაფიკის ძირითადი დროითი პარამეტრები და მათი გაანგარიშება

პროექტის მართვის პროცესში მეტად მნიშვნელოვანია პროექტის საერთო ხანგრძლივობა. ქსელური გრაფიკის დახმარებით მისი გამოთვლა შესაძლებელია იმ პირობით, თუ ცნობილია პროექტის განსახორციელებლად აუცილებელი ყველა სამუშაოს ხანგრძლივობა.

ქსელური გრაფიკის უმნიშვნელოვანეს პარამეტრს კრიტიკული გზა წარმოადგენს. საერთოდ, **გზას** ქსელურ გრაფიკში უწოდებენ სამუშაოთა (ისართა) ნებისმიერ მიმდევრობას, რომელიც რომელიმე ორ ხდომილებას ერთმანეთს უკავშირებს. ამასთან, გზას, რომელიც აკავშირებს ამოსავალ და დამამთავრებელ ხდომილებებს **სრული**, ხოლო ყველა სხვას – **არასრული** გზა ეწოდება.

სრულ გზას, რომელსაც ყველაზე დიდი ხანგრძლივობა აქვს (გზის ხანგრძლივობა მასში შემავალ სამუშაოთა ხანგრძლივობების ჯამის ტოლია) **კრიტიკული გზა**, ხოლო სამუშაოებსა და ხდომილებებს, რომლებიც კრიტიკულ გზაზე მდებარეობს, შესაბამისად, **კრიტიკული სამუშაოები** და **კრიტიკული ხდომილებები** ეწოდება. ქსელურ გრაფიკზე კრიტიკული გზის სამუშაოებს გამსხვილებული ისრებით, ან რაიმე სხვა აღნიშვნებით გამოყოფენ ხოლმე.

ქსელურ გრაფიკში ჩართული ყველა ხდომილებისათვის იანგარიშება შემდეგი მაჩვენებლები:

ხდომილების დადგომის ადრეული ვადა $t_\alpha(i)$, რომელიც ახასიათებს ამა თუ იმ ხდომილების შესაძლო დადგომის ყველაზე ადრეულ მომენტს. რადგანაც ყოველი ხდომილება წარმოადგენს კონკრეტული სამუშაოს, ან სამუშაოთა ჯგუფის შესრულების შედეგს, ხოლო ისინი, თავის მხრივ სხვა ხდომილებებს მოსდევს, მისი დადგომის ვადას განსაზღვრავს ყველაზე გრძელი (ხანგრძლივი) გზა ამოსავალი ხდომილებიდან მოცემულ ხდომილებამდე.

ხდომილების დადგომის გვიანი ვადა $t_\varpi(i)$, ახასიათებს ამ ხდომილების შესაძლო დადგომის დასაშვები ვადებიდან ყველაზე გვიან მომენტს.

თუ დადგენილია დამამთავრებელი ხდომილების დადგომის ვადა, რომელიც სამუშაოთა მთელი კომპლექსის შესრულების შედეგს წარმოადგენს, მაშინ ყოველი შუალედური ხდომილება არ შეიძლება დადგეს განსაზღვრულ ვადაზე უფრო გვიან. სწორედ ეს მომენტი წარმოადგენს მოცემული ხდომილების დადგომის ზღვრულად დასაშვებ ვადას.

ხდომილების დადგომის დროის რეზერვი კი განისაზღვრება როგორც ამ ხდომილების დადგომის გვიანი და ადრეული ვადების სხვაობა:

$$r(i) = t_w(i) - t_\alpha(i) \tag{6.1}$$

თუ ცნობილია ხდომილებათა აღნიშნული მაჩვენებლები, მაშინ ქსელური გრაფიკის ყოველი (i, j) სამუშაოსათვის შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგი პარამეტრები:

სამუშაოს დაწყების ადრეული ვადა, რომელიც განისაზღვრება მისი საწყისი ხდომილების დადგომის მომენტით ადრეულ ვადაში:

$$t_\alpha^\beta(i,j) = t_\alpha(i) \tag{6.2}$$

სამუშაოს დაწყების გვიანი ვადა განისაზღვრება მისი საბოლოო ხდომილების დადგომის გვიანი ვადიდან სამუშაოს ხანგრძლივობის გამოკლებით:

$$t_\alpha^\beta(i,j) = t_\alpha(j) - t(i,j) \tag{6.3}$$

ხოლო **სამუშაოს დამთავრების ადრეული ვადა** – მისი საწყისი ხდომილების ადრეულ ვადაზე სამუშაოს ხანგრძლივობის დამატებით:

$$t_\alpha^f(i,j) = t_\alpha(i) - t(i,j) \tag{6.4}$$

სამუშაოს დამთავრების გვიანი ვადა ემთხვევა მისი საბოლოო ხდომილების დადგომის გვიან ვადას :

$$t_w^f(i,j) = t_w(i) \tag{6.5}$$

მოსახერხებელია ამოსავალი ხდომილების დადგომის ადრეულ ვადად მივიჩნიოთ 0, ხოლო ყოველი მომდევნო (i-ური) ხდომილების დადგომის ადრეულ ვადას განსაზღვრავს მაქსიმალური ხანგრძლივობის გზა ამოსავალი ხდომილებიდან მოცემულ ხდომილებამდე. აღნიშნული ხანგრძლივობა შემდეგი ფორმულით შეიძლება ვიანგარიშოთ:

$$t_\alpha(j) = \max_i \left\{ t_\alpha(i) + t(i,j) \right\} \tag{6.6}$$

დამამთავრებელი ხდომილების დადგომის გვიანი ვადა ემთხვევა მისი დადგომის ადრეულ ვადას, ხოლო ნებისმიერი წინა (i-ური) ხდომილების დადგომის გვიანი ვადა გამოითვლება ფორმულით:

$$t_w(i) = \min_j \left\{ t_w(j) - t(i,j) \right\} \tag{6.7}$$

შეიძლება ითქვას, რომ ფაქტიურად, ამ შემთხვევაშიც მოცემული და დამამთავრებელი ხდომილებების დამაკავშირებელი მაქსიმალური ხანგრძლივობის გზა განსაზღვრავს ხდომილების დადგომის გვიან ვადას იმ თვალსაზრისით, რომ იგი შეიძლება მივიღოთ, თუ დამამთავრებელი ხდომილების გვიან ვადას გამოვაკლებთ აღნიშნულ ხანგრძლივობას.

შევნიშნოთ, რომ (6.6) და (6.7) ფორმულებით წარმოებული გამოთვლის პროცესები, შესაბამისად, ცნობილია სახელწოდებით „პასი წინ“ და „პასი უკან“.

ქსელურ გრაფიკებზე ხდომილებათა აღმნიშვნელ გეომეტრიულ ფიგურებში ხდომილების ნომერი, მისი დადგომის ადრეული და გვიანი ვადები ჩაიწერება ისე, როგორც ეს 6.11 ნახაზზეა ნაჩვენები:

i	
$t_\alpha(i)$	$t_w(i)$

ნახ. 6.11

სამუშაოებს შეიძლება ჰქონდეს დროის რეზერვები შესასრულებლად. განასხვავებენ რეზერვების შემდეგ ნაირსახეობებს:

დროის სრული რეზერვი - ეს არის დროის მაქსიმალურად შესაძლებელი მარაგი იმ პირობით, რომ ასეთი შეფერხების შედეგად მოცემული სამუშაოს საბოლოო ხდომილება დადგება არაუგვიანეს მისის გვიანი ვადისა. იგი შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$r_1(i,j)=t_w(j)-\left[t_\alpha(i)+t(i,j)\right] \tag{6.8}$$

სრული რეზერვი გვიჩვენებს სამუშაოს მაქსიმალურ შესაძლო შეფერხებას, რომლის დროსაც სამუშაოთა მთელი კომპლექსის შესრულების ვადას საფრთხე არ ემუქრება.

დროის თავისუფალი რეზერვი - ეს არის დროის მარაგი, რომელიც შეიძლება გვქონდეს სამუშაოს შესასრულებლად იმ პირობით, რომ მისი საწყისი და საბოლოო ხდომილებები დგება ადრეულ ვადებში:

$$r_2(i,j)=t_\alpha(j)-\left[t_\alpha(i)+t(i,j)\right] \tag{6.9}$$

ეს რეზერვი გვიჩვენებს სამუსაოს მაქსიმალურ შესაძლო შეფერხებას, რომლის დროსაც მომდევნო სამუშაოების დაწყებისა და სამუშაოთა მთელი კომპლექსის შესრულების ვადებს საფრთხე არ ემუქრება.

დროის დამოუკიდებელი რეზერვი - ეს არის დროის მარაგი, რომელიც შეიძლება გვქონდეს იმ პირობით, რომ სამუშაოს საწყისი და საბოლოო ხდომილებები დგება გვიან ვადებში:

$$r_3(i,j)=t_w(j)-\left[t_w(i)+t(i,j)\right] \tag{6.10}$$

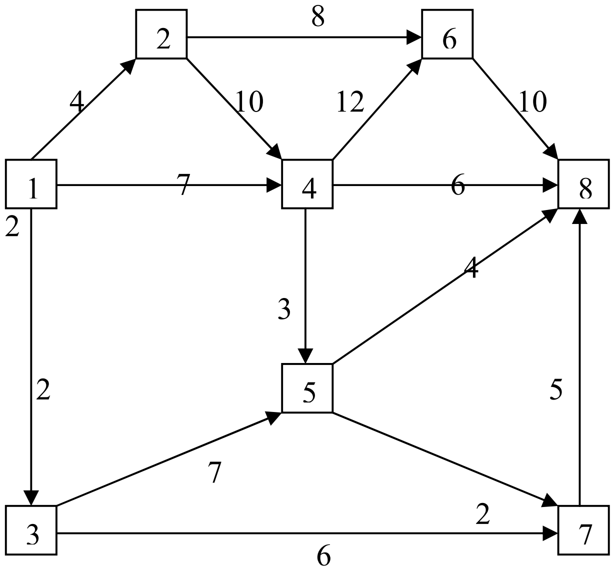
დროის ეს რეზერვი გვიჩვენებს თუ რამდენ ხანს შეიძლება მაქსიმუმ შეფერხდეს სამუშაო, რომ საფრთხე არ დაემუქროს სამუშაოთა მთელი კომპლექსის შესრულების, მომდევნო სამუშაოების დაწყების ან წინა სამუშაოების დამთავრების ვადებს.

ალბათ გასაგებია, რომ ხდომილებებს, რომლებიც კრიტიკულ გზაზე მდებარეობს, დროის რეზერვი არ გააჩნია.

თუ რაიმე სამუშაოს საწყისი და საბოლოო ხდომილებები კრიტიკულ ხდომილებებს წარმოადგენს, ეს ჯერ კიდევ არ ნიშნავს იმას, რომ იგი კრიტიკულ გზაზე მდებარეობს.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ქსელური გრაფიკი შეიძლება ერთზე მეტ კრიტიკულ გზას შეიცავდეს.

მაგალითი 6.3 ქვემოთმოყვანილ ნახაზზე წარმოდგენილია სამუშაოთა გარკვეული კომპლექსის ქსელური გრაფიკი. ისრებზე აღნიშნულია შესაბამის სამუშაოთა ხანგრძლივობები დღეებში:



ნახ. 6.12

გამოვთვალოთ ხდომილებებისა და სამუშაოების დროითი პარამეტრები, განვსაზღვროთ კრიტიკული გზა და სამუშაოთა მთელი კომპლექსის შესრულების ხანგრძლივობა.

მოსახერხებელია 6.1-6.10 ფორმულების გამოყენებით წარმოებული გამოთვლების შედეგები შემდეგი ცხრილის სახით წარმოვადგინოთ:

სამუშაო	სამუშაოს ხანგრძლივობა	დაწყების ადრეული ვადა	დაწყების გვიანი ვადა	დამთავრების ადრეული ვადა	დამთავრების გვიანი ვადა	დროის სრული რეზერვი	დროის თავისუფალი რეზერვი	დროის დამოუკიდებელი რეზერვი
(1,2)	4	0	0	4	4	0	0	0
(1,2)	2	0	20	2	22	20	0	20
(1,2)	7	0	7	7	14	7	7	7
(1,2)	10	4	4	14	14	0	0	0
(1,2)	2	4	18	12	26	20	14	14
(1,2)	7	2	22	9	29	20	8	0
(1,2)	6	2	25	8	31	23	11	3
(1,2)	3	14	26	17	29	12	0	12
(1,2)	12	14	14	26	26	0	0	0
(1,2)	6	14	30	20	36	16	16	16
(1,2)	2	17	29	19	31	12	0	0
(1,2)	4	17	32	21	36	15	15	3
(1,2)	10	26	26	36	36	0	0	0
(1,2)	5	19	31	24	36	12	6	0

ცხრილი 6..3

თავის მხრივ, ამ უკანასკნელში მოყვანილი პარამეტრები გაანგარიშებულია ხდომილებათა დადგომის ადრეული და გვიანი ვადების გათვალისწინებით. კერძოდ, (6)-ის თანახმად :

$$
\begin{aligned}
&t_\alpha(1)=0;\\
&t_\alpha(2)=t_\alpha(1)+t(1,2)=0+4=4;\\
&t_\alpha(3)=t_\alpha(1)+t(1,3)=0+2=2;\\
&t_\alpha(4)=\max\{t_\alpha(1)+t(1,4);t_\alpha(2)+t(2,4)\}=\max\{0+7;4+10\}=14;\\
&t_\alpha(5)=\max\{t_\alpha(3)+t(3,5);t_\alpha(4)+t(4,5)\}=\max\{2+7;14+3\}=17;\\
&t_\alpha(6)=\max\{t_\alpha(2)+t(2,6);t_\alpha(4)+t(4,6)\}=\max\{4+8;14+12\}=26;\\
&t_\alpha(7)=\max\{t_\alpha(3)+t(3,7);t_\alpha(5)+t(5,7)\}=\max\{2+6;17+2\}=19;\\
&t_\alpha(8)=\max\{t_\alpha(4)+t(4,8);t_\alpha(5)+t(5,8);t_\alpha(6)+t(6,8);t_\alpha(7)+t(7,8)\}=\\
&=\max\{14+6;17+4;26+10;19+5\}=36;
\end{aligned}
$$

(7)-ის გამოყენებით კი ვღებულობთ:

$$
\begin{aligned}
&t_w(8)=t_\alpha(8)=36;\\
&t_w(7)=t_w(8)-t(7,8)=36-5=31;\\
&t_w(6)=t_w(8)-t(6,8)=36-10=26;\\
&t_w(5)=\min\{t_w(7)-t(5,7);t_w(8)-t(5,8)\}^2=\min\{36-4;31-2\}=29;\\
&t_w(4)=\min\{t_w(8)-t(4,8);t_w(6)-t(4,6);t_w(5)-t(4,5)\}^2=\\
&=\min\{29-3;36-6;26-12\}=14;\\
&t_w(3)=\min\{t_w(7)-t(3,7);t_w(5)-t(3,5)\}=\\
&=\min\{31-6;29-7\}=22;\\
&t_w(2)=\min\{t_w(6)-t(2,6);t_w(4)-t(2,4)\}=\\
&=\min\{26-8;14-10\}=4;\\
&t_w(1)=\min\{t_w(2)-t(1,2);t_w(4)-t(1,4);t_w(3)-t(1,3)\}=\\
&=\min\{22-2;14-7;4-4\}=0;
\end{aligned}
$$

მაგალითად, (3,5) სამუშაოს სრული რეზერვი (6,8)-ის თანახმად

$$r_1(3,5)=t_w(5)-[t_\alpha(3)+t(3,5)]=29-(2+7)=20$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ (3,5) სამუშაოს შესრულება შესაძლებელია არა 7 დღეში, არამედ 27 (20+7) დღეში ისე, რომ სამუშაოთა კომპლექსის შესრულების ვადა არ დაირღვევა.

რა თქმა უნდა, ეს უკიდურესი ვადაა, რადგანაც მისი ერთი დღით დარღვევაც კი საფრთხეს შეუქმნის დამამთავრებელი მე-8 ხდომილების დადგომას და აქედან გამომდინარე, სამუშაოთა მთელი კომპლექსის შესრულების ვადას.

იგივე სამუშაოს თავისუფალი რეზერვი (6.9)-ის თანახმად იქნება:

$$r_2(3,5)=t_\alpha(5)-[t_\alpha(3)+t(3,5)]=17-(2+7)=8$$

რაც შეეხება დამოუკიდებელ რეზერვს, იგი ამ სამუშაოს არა აქვს, რაშიც დავრწმუნდებით, თუ გამოვიყენებთ (6.10) ფორმულას:

$$r_3(3,5) = t_w(5) - \left[t_w(3) + t(3,5)\right] = 29 - (22+7) = 0$$

(6,1) ფორმულის გამოყენებით ადვილად გამოითვლება თითოეული ხდომილების დროის რეზერვი:

$r(1) = t_w(1) - t_\alpha(1) = 0 - 0 = 0;$

$r(2) = t_w(2) - t_\alpha(2) = 4 - 4 = 0;$

$r(3) = t_w(3) - t_\alpha(3) = 22 - 2 = 20;$

$r(4) = t_w(4) - t_\alpha(4) = 14 - 14 = 0;$

$r(5) = t_w(5) - t_\alpha(5) = 29 - 17 = 12;$

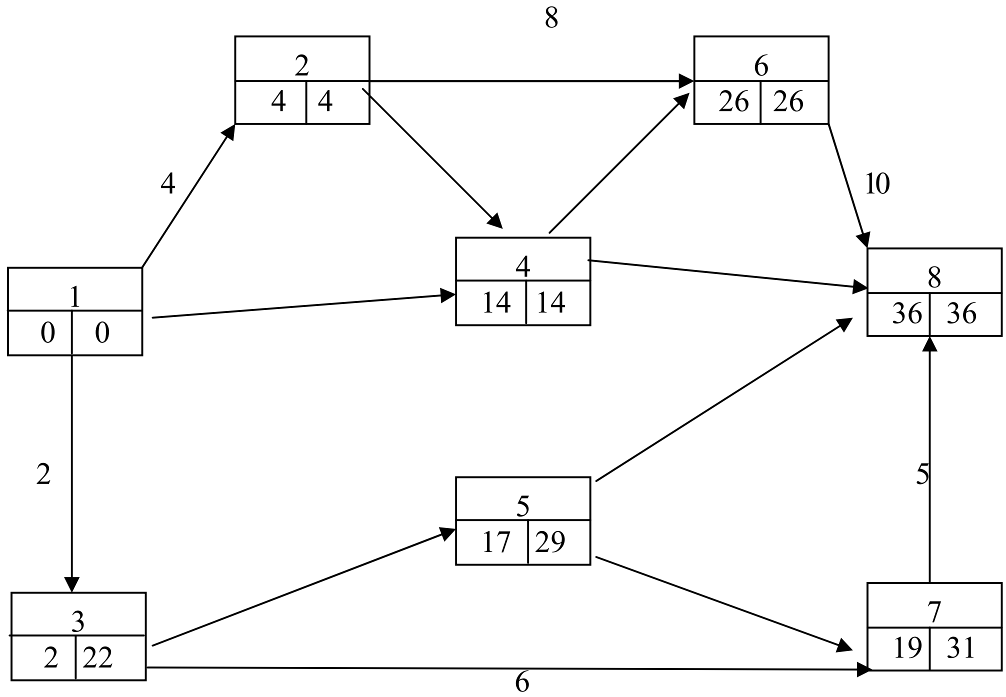
$r(6) = t_w(6) - t_\alpha(6) = 26 - 26 = 0;$

$r(7) = t_w(7) - t_\alpha(7) = 31 - 19 = 12;$

$r(8) = t_w(8) - t_\alpha(8) = 36 - 36 = 0;$

ამგვარად, კრიტიკული გზა გადის ხდომილებებზე 1, 2 , 4, 6 და 8, რომელთა დროის რეზერვები ნულის ტოლია. კრიტიკული გზის ხანგრძლივობა შეადგენს 36 დღეს, რაც იმავდროულად სამუშაოთა მთელი კომპლექსის შესრულების ვადას წარმოადგენს.

ყველა ჩატარებული გაანგარიშების შედეგი ასახულია ქვემოთმოყვანილ ქსელურ გრაფიკზე:



ნახ. 6.13

6.3 განტის გრაფიკი. რესურსების დაგეგმვა

პროექტის მართვისა და რესურსების დაგეგმვის პროცესში განსაკუთრებით მოსახერხებელია განტის **გრაფიკის გამოყენება,** რომელიც რამდენადმე განსხვავებულად ასახავს სამუშაოთა ერთობლიობას.

ეს გრაფიკი საშუალებას იძლევა დადგინდეს, თუ რა სამუშაოები წარმოებს დროის ნებისმიერ მომენტში, რაც ეხმარება ხელმძღვანელობას განსაზღვროს აუცილებელი რესურსები მათ შესასრულებლად.

დაგეგმილი გრაფიკის შესრულების პროცესში რესურსების განაწილების ვარიანტების გასაანალიზებლად მოსახერხებელია მათი ჰისტოგრამით ასახვა.

განტის გრაფიკის აგებისას ჰორიზონტალურ სკალაზე გადაიზომება მთელი პროექტის ხანგრძლივობის მნიშვნელობები. შემდეგ ერთ ხაზზე გადაიდება ყველა კრიტიკული სამუშაო. ყველა სხვა სამუშაო გადაიდება ცალკე ჰორიზონტალურ ხაზებზე მათი დაწყების ადრეული ვადის, ხანგრძლივობისა და დროის სრული რეზერვის (იგი პუნქტირი წირით აღინიშნება) გათვალისწინებით. მონაკვეთების დასაწყისსა და ბოლოში იწერება შესაბამის ხდომილებათა ნომრები.

ქვემოთმოყვანილ ნახაზზე წარმოდგენილია წინა პარაგრაფში განხილული მაგალითის შესაბამისი განტის გრაფიკი:

```
0_._._._5_._._._10_._._._15_._._._20_._._._25_._._._30_._._._35

1_____ 2________________ 4_______________________6_______________ 8
1__3_._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._.
1___________4_._._._._._._.
       2______________6_._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._
    3__________5_._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._._
    3_________7_._._._._._._._._._._._.
                              4_______ 5._._._._._._._._._._._._.
                              4___________8._._._._._._._._._._._._._._._._._..
                                       5__7._._._._._._._._._._._._._.
                                       5_____8._._._._._._._._._._._._._._._._.
                                          7________8._._._._._._._._._._._._._._
```

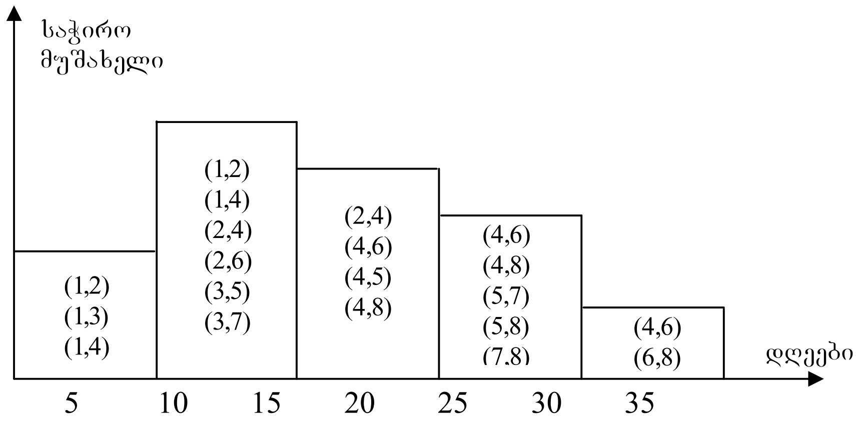
ნახ. 6.14

თითოეული სამუშაოს შესასრულებლად გარკვეულ ვადებში აუცილებელია შესაბამისი რესურსების განსაზღვრული რაოდენობა. სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ ბოლო გრაფიკზე მოყვანილი სამუშაოთა მთელი კომპლექსის განსახორციელებლად შეიძლება გამოვიყენოთ ერთიდაიგივე პროფესიონალური უნარ-ჩვევების მქონე პერსონალი. სამუშაოთა შესასრულებლად აუცილებელი მუშახელის რაოდენობა წარმოვადგინოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

სამუშაო	საჭირომუშახელი
(1,2)	2
(1,3)	1
(1,4)	3
(2,4)	4
(2,6)	2
(3,5)	3
(3,7)	1
(4,5)	2
(4,6)	3
(4,8)	2
(5,7)	1
(5,8)	2
(6,8)	4
(7,8)	1

ცხრილი 6..4

მუშახელის მოთხოვნის ამ უკანასკნელ ცხრილში მოყვანილი მონაცემები ავსახოთ ჰისტოგრამაზე ისე, როგორც ეს ქვემოთმოყვანილ ნახაზზეა ნაჩვენები:

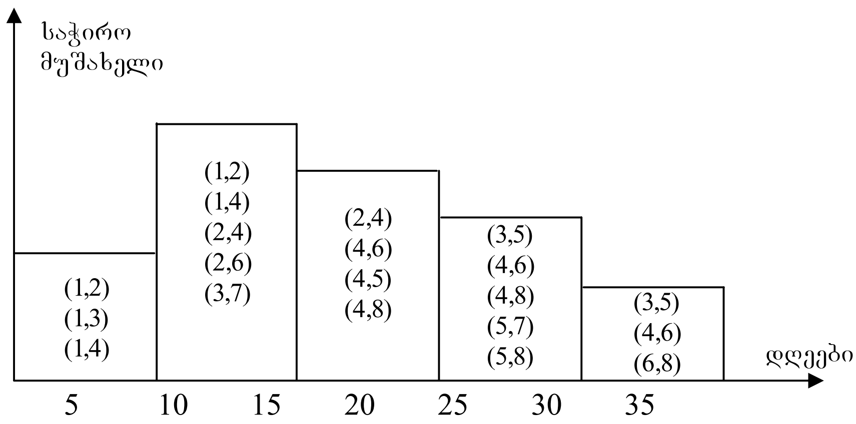


ნახ. 6.15

როგორც ვხედავთ, მუშახელზე მოთხოვნის „პიკს“ ადგილი აქვს მე-3 დღიდან მე-12 დღის ჩათვლით და იგი 19 ერთეულს შეადგენს.

აღნიშნული „პიკის“ დაწევა შესაძლებელია ერთი ან რამდენიმე სამუშაოს დაძვრით მათი დროის სრული რეზერვების გათვალისწინებით (ადვილი მისახვედრია, რომ ნებისმიერი კრიტიკული სამუშაოს დაძვრის შემთხვევაში აუცილებლად დაირღვევა პროექტის შესრულების ვადა).

ასე, მაგალითად, (3,5) სამუშაოს დროის სრული რეზერვი 20 დღეს შეადგენს (იხ. ცხრილი 6.3). ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ნაცვლად მე-3 დღისა, მისი დაწყება 22-ე დღეს შეიძლება და ამ დროს პროექტის შესრულების 36 დღიანი ვადა არ დაირღვევა. აღნიშნული სამუშაოს 20 დღით დაძვრა, ცხადია, გარკვეულ კორექტივებს შეიტანს ჰისტოგრამაში. კორექტირებულ ჰისტოგრამას ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 6.16

ამ ჰისტოგრამიდან ნათლად ჩანს, რომ „პიკი“ იგივე დღეებზე მოდის, მაგრამ მან 3 ერთეულით დაიწია.

„პიკის“ დაწევის და რესურსების გათანაბრების აღწერილი პროცესი ცალსახა არ არის და ზოგჯერ შეიძლება მიზანშეწონილიც არ იყოს. ამ დროს გათვალისწინებული უნდა იქნეს როგორც მომუშავეთა განსხვავებული პროფესიული უნარ-ჩვევები და კვალიფიკაცია, ასევე პროექტის ფინანსური მხარეც (მაგალითად, ორგანიზაციისათვის შეიძლება უფრო მომგებიანი იყოს ანგარიშსწორებები აწარმოოს მოგვიანებით, ვიდრე თანაბრად გაანაწილოს ფინანსური რესურსები პროექტის ვადის საზღვრებში).

ბუნებრივია, აქტუალურია მთელი პროექტის შესრულების ვადის შეკვეცის ამოცანაც. არცთუ იშვიათად ამის მიღწევას ცდილობენ ყველა, ან სამუშაოთა უმრავლესობის ხანგრძლივობის შემცირების გზით. ასეთი მიდგომა, როგორც წესი, არ იძლევა სასურველ ეფექტს, რადგანაც დაკავშირებულია დამატებით დანახარჯებთან, ხოლო სამუშაოთა კომპლექსის შესრულების ვადა უმნიშვნელოდ იკვეცება.

ქსელური დაგეგმვისა და მართვის მეთოდის გამოყენება ზემოთაღნიშნული მიზნის მისაღწევად, პირველ ყოვლისა, გულისხმობს კრიტიკული გზის სამუშაოთა ხანგრძლივობის შემცირებას მატერიალური და შრომითი რესურსების გარკვეული ნაწილის არაკრიტიკული სამუშაოებიდან გადასროლის გზით.

შევნიშნოთ, რომ დიდ გრაფიკებში კრიტიკულ სამუშაოთა რაოდენობა იშვიათად აღემატება სამუშაოთა საერთო რაოდენობის 10%-ს. არაკრიტიკული სამუშაოებიდან რესურსების კრიტიკულ სამუშაოებზე აღნიშნული გადაადგილებები უნდა განხორციელდეს გონიერ ფარგლებში იმ თვალსაზრისით, რომ ამ დროს ქსელურ გრაფიკებზე შეიძლება გაჩნდეს ახალი კრიტიკული გზები.

საერთოდ, ყველა ღონისძიება, რომელიც მიმართული იქნება კრიტიკული გზის ხანგრძლივობის შესამცირებლად, უნდა ჩატარდეს მთელი ქსელური გრაფიკის გათვალისწინებით.

პრაქტიკაში პროექტის შესრულების ხანგრძლივობის შეკვეცას ცდილობენ დამატებითი რესურსების მიზიდვით, ანდა ზენორმატიული მუშაობით, რაც დამატებით დანახარჯებთანაა დაკავშირებული. ასეთ დანახარჯებს **სასწრაფო სამუშაოს ღირებულებას,** ხოლო სამუშაოს ხანგრძლივობის შეკვეცის პროცესს **ავრალს** უწოდებენ.

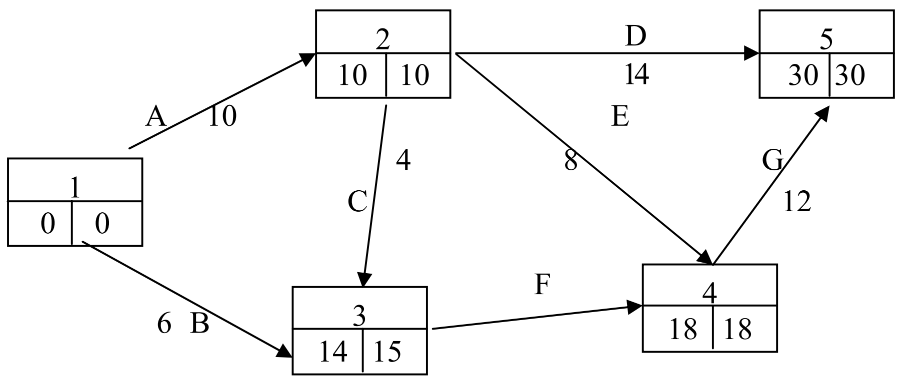
განვიხილოთ პროექტის ხანგრძლივობის შეკვეცის ამოცანა შემდეგ მაგალითზე.

მაგალითი 6.4 ცხრილში 6.5 მოყვანილია სამუშაოთა ნორმატიული და ავრალური ხანგრძლივობები და შესაბამისი დანახარჯები:

სამუშაო	წინმსწრები სამუშაოები	ხანგრძლივობა (კვირა)		დანახარჯები (100 აშშ დოლარი)	
		ნორმა	ავრალი	ნორმა	ავრალი
A	-	10	8	12	17
B	-	6	5	10	11
C	A	4	4	6	6
D	A	14	10	11	21
E	A	8	6	20	23
F	B,C	3	2	6	9
G	E,F	12	9	14	20

ცხრილი 6..5

თავდაპირველად, ავაგოთ ქსელური გრაფიკი სამუშაოთა ნორმატიული ხანგრძლივობის პირობით:



ნახ. 6.17

გრაფიკიდან ჩანს კრიტიკული გზა – A,E, G. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ პროექტის საერთო ხანგრძლივობა 30 კვირას შეადგენს. შესაბამისი განტის გრაფიკი წარმოდგენილია ქვემო ნახაზზე:

0_._._._5_._._._._10_._._._._15_._._._._20_._._._._25_._._._._30_._._._._35

A *E* *G*

1________________2 ______________ 4______________________________5

B

1__________3_._._._._._._._._._.

C

2_____3_._._.

D

2__________________________5_._._._._._._._._._._._._._._._._

F

3_______4_._._

ნახ. 6.18

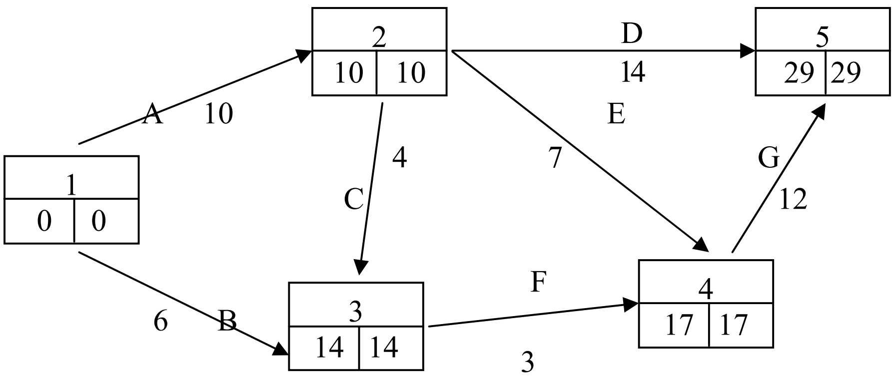
ცხრილი 6.5-ის თანახმად შესაძლებელია, რომ, ვთქვათ, (1,2) სამუშაო დავასრულოთ არა 10, არამედ 8 კვირაში, რაც დაკავშირებული იქნება 500 აშშ დოლარის (1700-1200) დამატებით დანახარჯებით.

ანალოგიურად შეიძლება შევამციროთ სხვა სამუშაოთა ხანგრძლივობებიც. შედეგები წარმოდგენილია ცხრილში 6.6 (ამ ცხრილის ბოლო სვეტის მონაცემები მიღებულია დამატებითი დანახარჯების შეკვეცილ კვირათა რაოდენობაზე გაყოფით, თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ პრაქტიკაში დანახარჯები ყოველთვის წრფივად არ არის დამოკიდებული დროის პერიოდის ხანგრძლივობაზე).

სამუშაო	ხანგრძლივობა (კვირა)		შეკვეცა	ღირებულება (100 აშშ დ.)		დანახარჯები ზრდა (100 აშშ დ.)	ერთი კვირით შეკვეცის ღირებულება (აშშ დ.)
	ნორმა	ავრალი		ნორმა	ავრალი		
A	10	8	2	12	17	5	250
B	6	5	1	10	11	1	100
C	4	4	0	6	6	0	-
D	14	10	4	11	21	10	250
E	8	6	2	20	23	3	150
F	3	2	1	6	9	3	300
G	12	9	3	14	20	6	200

ცხრილი 6..6

როგორც ამ ცხრილიდან ვხედავთ, კრიტიკულ სამუშაოთაგან ყველაზე იაფი *E* სამუშაოს შეკვეცა ჯდება. ამიტომ, თუ მივიღებთ აღნიშნული სამუშაოს ხანგრძლივობის 7 კვირამდე შეკვეცის გადაწყვეტილებას 150 აშშ დოლარის დამატებით დანახარჯების პირობით, ქსელური გრაფიკი შემდეგ სახეს მიიღებს:

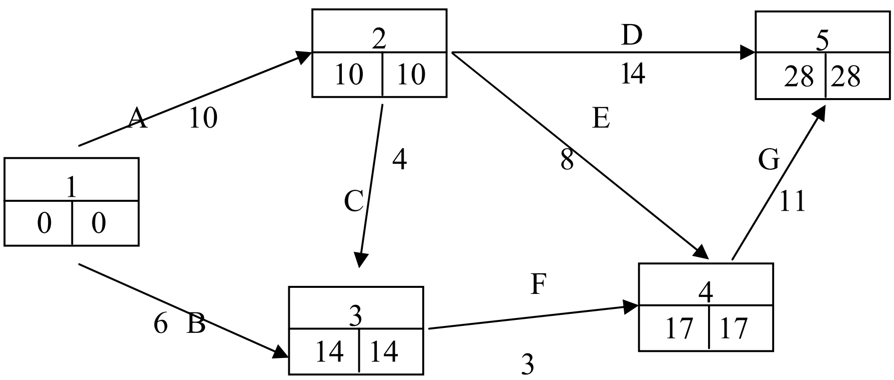


ნახ. 6.19

ადვილი შესამჩნევია, რომ უკანასკნელ გრაფიკზე ახალი კრიტიკული *C* და *F* სამუშაოები წარმოიშვა ($A \to E \to G$ და $A \to C \to F \to G$ გზები ხანგრძლივობები ტოლია და 29 კვირას შეადგენს). ეს კი იმას ნიშნავს, რომ პროექტის ხანგრძლივობის კიდევ ერთი კვირით შეკვეცა *E* სამუშაოს ხანგრძლივობის შემცირებით უკვე აღარ მოხერხდება.

აღნიშნულიდან გამომდინარე, ამ მიზნით უნდა შეიკვეცოს ერთ-ერთი შემდეგ სამუშაოთაგან: *A, G, E* და *F*. მათი თითო კვირით შეკვეცასთან დაკავშირებული დანახარჯები, შესაბამისად, შეადგენს 250, 200 და 450 (150+300) აშშ დოლარს. ამ ვარიანტთაგან ყველაზე იაფი *G* სამუშაოს შეკვეცა ჯდება. ამიტომ, თუ მისი შესრულების ხანგრძლივობას 11 კვირამდე შევამცირებთ 200 აშშ დოლარამდე დამატებითი დანახარჯების პირობით, მივაღწევთ პროექტის საერთო ხანგრძლივობის 28 კვირამდე შეკვეცას.

ქსელური გრაფიკის შესაბამის ვარიანტს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 6.20

პროექტების ხანგრძლივობის შესაკვეცად შემუშავებულია სხვა მეთოდებიც. ასე, მაგალითად, პროექტის სასურველ ხანგრძლივობას შეიძლება მივაღწიოთ, თუ თავდაპირველად ყველა სამუშაოს ხანგრძლივობას შევამცირებთ, ხოლო შემდეგ დავიწყებთ ყველაზე ძვირადღირებულ სამუშაოთა ხანგრძლივობის თანდათანობით ზრდას.

აღნიშნული მიმართულებით გარკვეული შედეგები შეიძლება მოგვცეს აგრეთვე ღონისძიებათა გატარებამ იმ სამუშაოთა ხანგრძლივობის შესამცირებლად, რომლებიც სიდიდით კრიტიკულთან ახლოს მყოფ გზაზე მდებარეობენ.

აქამდე ჩვენ ვთვლიდით, რომ პროექტის ყველა სამუშაოს ხანგრძლივობა წინასწარ ცნობილია. პრაქტიკაში ეს თითქმის შეუძლებელია, რის გამოც თითოეული სამუშაოს ხანგრძლივობა შეიძლება შეფასდეს მხოლოდ პროგნოზირების გზით, წარსულის გამოცდილების გათვალისწინებით.

მეთოდი, რომლის საფუძველზეც პროექტის ჩარჩოებში ხორციელდება სამუშაოთა ხანგრძლივობის შეფასება მათი ალბათური ბუნების გათვალისწინებით, ცნობილია ***PERT***-ის *(Programm Evaluation and Rewiew Technique)* სახელწოდებით.

ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს სამუშაოთა ხანგრძლივობის უკიდურესი და ყველაზე ალბათური ვადების განსაზღვრაში.

გასაშუალებული ხანგრძლივობის შესაფასებლად იყენებენ შემდეგ ფორმულას:

$$\bar{t} = \frac{t_{\min} + 6t_{pr} + t_{\max}}{6} \tag{6.11}$$

სადაც $\bar{t}$ სამუშაოს მოსალოდნელი ხანგრძლივობაა, $t_{\min}$ – ოპტიმისტური შეფასება, ანუ სამუშაოს ხანგრძლივობა მისი განხორციელების ყველაზე ხელსაყრელი პირობების დაშვებით, t_{pr} – ალბათური შეფასება, ე. ი. სამუშაოს ხანგრძლივობა, თუ იგი ყველაზე არახელსაყრელ პირობებში შესრულდება.

მხოლოდ ოპტიმისტურ და პესიმისტურ შეფასებათა გამოყენების შემთხვევაში კი გასაშუალოებულ ხანგრძლივობას შემდეგი ფორმულიდან ითვლიან:

$$\bar{t} = \frac{3t_{\min} + 2t_{\max}}{5} \tag{6.12}$$

სამუშაოთა ხანგრძლივობის შეფასების გასაშუალოების მეთოდებს იყენებენ სამეცნიერო-კვლევითი, პროდუქციის ახალი ნიმუშების წარმოებისა და გამოცდის და სამუშაოთა სხვა კომპლექსის განხორციელების პროცესში, როდესაც მათი შესრულება მრავალ ისეთ შემთხვევით ფაქტორზეა დამოკიდებული, რომელთა წინასწარი განჭვრეტა საკმაო სიზუსტით ვერ ხერხდება.

სავარჯიშოები:

1. ცხრილში მოყვანილია სამუშაოთა გარკვეული კომპლექსის ჩამონათვალი და მათი შესრულების რიგითობა:

სამუშაო	წინმსწრები სამუშაოები
A	-
B	A
C	B
D	B
E	C, D
F	C, D
G	E, F
H	G

ააგეთ შესაბამისი ქსელური გრაფიკი.

2. პროექტი შედგება ექვსი სამუშაოსაგან. მათი შესრულების რიგითობა და ხანგრძლივობები მოყვანილია შემდეგ ცხრილში:

სამუშაო	წინმსწრები სამუშაოები	სამუშაოს ხანგრძლივობა (კვირა)
A	-	5
B	-	4
C	B	2
D	B	6
E	A, C	7
F	D	1

ააგეთ შესაბამისი ქსელური გრაფიკი და გამოთვალეთ თითოეული ხდომილების დადგომის ადრეული და გვიანი ვადები.

3. ააგეთ ქსელური გრაფიკი და გამოთვალეთ დროის სრული, თავისუფალი და დამოუკიდებელი რეზერვები სამუშაოთა შემდეგი კომპლექსისათვის:

სამუშაო	წინმსწრები სამუშაოები	სამუშაოს ხანგრძლივობა (კვირა)
A	-	10
B	-	10
C	-	15
D	B	5
E	A	20
F	D, E	15
G	B	20

4. ააგეთ სამუშაოთა შემდეგი კომპლექსის შესაბამისი ქსელური და განტის გრაფიკები:

სამუშაო	წინმსწრები სამუშაოები	სამუშაოს ხანგრძლივობა (კვირა)
A	-	4
B	A	5
C	B	3
D	A	7
E	C	2
F	C	6
G	D, E	2

5. ცხრილში მოყვანილია სამუშაოთა კომპლექსის ჩამონათვალი, მათი შესრულების ნორმატიული და შეკვეცილი ვადები და შესაბამისი დანახარჯები:

სამუშაო	წინმსწრები სამუშაოები	სამუშაოს ხანგრძლივობა (კვირა)		დანახარჯები ($1000)	
		ნორმა	ავრალი	ნორმა	ავრალი
A	-	4	3	5	8
B	-	2	2	3	-
C	A	3	2	4	6
D	-	4	2	6	11
E	A	5	3	8	10
F	B, C	1	1	2	-
G	D	2	1	3	6

ა) ააგეთ ქსელური გრაფიკი და გამოთვალეთ პროექტის საერთო ხანგრძლივობა;
ბ) შეკვეცეთ პროექტის ხანგრძლივობა ორი კვირით და გამოიანგარიშეთ ამასთან დაკავშირებული დამატებითი დანახარჯები.

დანართი

ერთი ლარის ერთჯერადი გადასახდელის მიმდინარე ღირებულება PV1

წელი	პროცენტის განაკვეთი											
	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.9804	0.9756	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174	0.9091	0.9009	0.8929
2	0.9612	0.9518	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	0.8734	0.8573	0.8417	0.8264	0.8116	0.7972
3	0.9423	0.9286	0.9151	0.8890	0.8638	0.8396	0.8163	0.7938	0.7722	0.7513	0.7312	0.7118
4	0.9238	0.9060	0.8885	0.8548	0.8227	0.7921	0.7629	0.7350	0.7084	0.6830	0.6587	0.6355
5	0.9057	0.8839	0.8626	0.8219	0.7835	0.7473	0.7130	0.6806	0.6499	0.6209	0.5935	0.5674
6	0.8880	0.8623	0.8375	0.7903	0.7462	0.7050	0.6663	0.6302	0.5963	0.5645	0.5346	0.5066
7	0.8706	0.8413	0.8131	0.7599	0.7107	0.6651	0.6227	0.5835	0.5470	0.5132	0.4817	0.4523
8	0.8535	0.8207	0.7894	0.7307	0.6768	0.6274	0.5820	0.5403	0.5019	0.4665	0.4339	0.4039
9	0.8368	0.8007	0.7664	0.7026	0.6446	0.5919	0.5439	0.5002	0.4604	0.4241	0.3909	0.3606
10	0.8203	0.7812	0.7441	0.6756	0.6139	0.5584	0.5083	0.4632	0.4224	0.3855	0.3522	0.3220
11	0.8043	0.7621	0.7224	0.6496	0.5847	0.5268	0.4751	0.4289	0.3875	0.3505	0.3173	0.2875
12	0.7885	0.7436	0.7014	0.6246	0.5568	0.4970	0.4440	0.3971	0.3555	0.3186	0.2858	0.2567
13	0.7730	0.7254	0.6810	0.6006	0.5303	0.4688	0.4150	0.3677	0.3262	0.2897	0.2575	0.2292
14	0.7579	0.7077	0.6611	0.5775	0.5051	0.4423	0.3878	0.3405	0.2992	0.2633	0.2320	0.2046
15	0.7430	0.6905	0.6419	0.5553	0.4810	0.4173	0.3624	0.3152	0.2745	0.2394	0.2090	0.1827
16	0.7284	0.6736	0.6232	0.5339	0.4581	0.3936	0.3387	0.2919	0.2519	0.2176	0.1883	0.1631
17	0.7142	0.6572	0.6050	0.5134	0.4363	0.3714	0.3166	0.2703	0.2311	0.1978	0.1696	0.1456
18	0.7002	0.6412	0.5874	0.4936	0.4155	0.3503	0.2959	0.2502	0.2120	0.1799	0.1528	0.1300
19	0.6864	0.6255	0.5703	0.4746	0.3957	0.3305	0.2765	0.2317	0.1945	0.1635	0.1377	0.1161
20	0.6730	0.6103	0.5537	0.4564	0.3769	0.3118	0.2584	0.2145	0.1784	0.1486	0.1240	0.1037
21	0.6598	0.5954	0.5375	0.4388	0.3589	0.2942	0.2415	0.1987	0.1637	0.1351	0.1117	0.0926
22	0.6468	0.5809	0.5219	0.4220	0.3418	0.2775	0.2257	0.1839	0.1502	0.1228	0.1007	0.0826
23	0.6342	0.5667	0.5067	0.4057	0.3256	0.2618	0.2109	0.1703	0.1378	0.1117	0.0907	0.0738
24	0.6217	0.5529	0.4919	0.3901	0.3101	0.2470	0.1971	0.1577	0.1264	0.1015	0.0817	0.0659
25	0.6095	0.5394	0.4776	0.3751	0.2953	0.2330	0.1842	0.1460	0.1160	0.0923	0.0736	0.0588

ერთი ლარის ერთჯერადი გადასახდელის მომავალი ღირებულება FV1

წელი	პროცენტის განაკვეთი											
	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0200	1.0250	1.0300	1.0400	1.0500	1.0600	1.0700	1.0800	1.0900	1.1000	1.1100	1.1200
2	1.0404	1.0506	1.0609	1.0816	1.1025	1.1236	1.1449	1.1664	1.1881	1.2100	1.2321	1.2544
3	1.0612	1.0769	1.0927	1.1249	1.1576	1.1910	1.2250	1.2597	1.2950	1.3310	1.3676	1.4049
4	1.0824	1.1038	1.1255	1.1699	1.2155	1.2625	1.3108	1.3605	1.4116	1.4641	1.5181	1.5735
5	1.1041	1.1314	1.1593	1.2167	1.2763	1.3382	1.4026	1.4693	1.5386	1.6105	1.6851	1.7623
6	1.1262	1.1597	1.1941	1.2653	1.3401	1.4185	1.5007	1.5869	1.6771	1.7716	1.8704	1.9738
7	1.1487	1.1887	1.2299	1.3159	1.4071	1.5036	1.6058	1.7138	1.8280	1.9487	2.0762	2.2107
8	1.1717	1.2184	1.2668	1.3686	1.4775	1.5938	1.7182	1.8509	1.9926	2.1436	2.3045	2.4760
9	1.1951	1.2489	1.3048	1.4233	1.5513	1.6895	1.8385	1.9990	2.1719	2.3579	2.5580	2.7731
10	1.2190	1.2801	1.3439	1.4802	1.6289	1.7908	1.9672	2.1589	2.3674	2.5937	2.8394	3.1058
11	1.2434	1.3121	1.3842	1.5395	1.7103	1.8983	2.1049	2.3316	2.5804	2.8531	3.1518	3.4785
12	1.2682	1.3449	1.4258	1.6010	1.7959	2.0122	2.2522	2.5182	2.8127	3.1384	3.4985	3.8960
13	1.2936	1.3785	1.4685	1.6651	1.8856	2.1329	2.4098	2.7196	3.0658	3.4523	3.8833	4.3635
14	1.3195	1.4130	1.5126	1.7317	1.9799	2.2609	2.5785	2.9372	3.3417	3.7975	4.3104	4.8871
15	1.3459	1.4483	1.5580	1.8009	2.0789	2.3966	2.7590	3.1722	3.6425	4.1772	4.7846	5.4736
16	1.3728	1.4845	1.6047	1.8730	2.1829	2.5404	2.9522	3.4259	3.9703	4.5950	5.3109	6.1304
17	1.4002	1.5216	1.6528	1.9479	2.2920	2.6928	3.1588	3.7000	4.3276	5.0545	5.8951	6.8660
18	1.4282	1.5597	1.7024	2.0258	2.4066	2.8543	3.3799	3.9960	4.7171	5.5599	6.5436	7.6900
19	1.4568	1.5987	1.7535	2.1068	2.5270	3.0256	3.6165	4.3157	5.1417	6.1159	7.2633	8.6128
20	1.4859	1.6386	1.8061	2.1911	2.6533	3.2071	3.8697	4.6610	5.6044	6.7275	8.0623	9.6463
21	1.5157	1.6796	1.8603	2.2788	2.7860	3.3996	4.1406	5.0338	6.1088	7.4002	8.9492	10.8038
22	1.5460	1.7216	1.9161	2.3699	2.9253	3.6035	4.4304	5.4365	6.6586	8.1403	9.9336	12.1003
23	1.5769	1.7646	1.9736	2.4647	3.0715	3.8197	4.7405	5.8715	7.2579	8.9543	11.0263	13.5523
24	1.6084	1.8087	2.0328	2.5633	3.2251	4.0489	5.0724	6.3412	7.9111	9.8497	12.2392	15.1786
25	1.6406	1.8539	2.0938	2.6658	3.3864	4.2919	5.4274	6.8485	8.6231	10.8347	13.5855	17.0001

წელი	პროცენტის განაკვეთი											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1.1300	1.1400	1.1500	1.1600	1.1700	1.1800	1.1900	1.2000	1.2100	1.2200	1.2300	1.2400
2	1.2769	1.2996	1.3225	1.3456	1.3689	1.3924	1.4161	1.4400	1.4641	1.4884	1.5129	1.5376
3	1.4429	1.4815	1.5209	1.5609	1.6016	1.6430	1.6852	1.7280	1.7716	1.8158	1.8609	1.9066
4	1.6305	1.6890	1.7490	1.8106	1.8739	1.9388	2.0053	2.0736	2.1436	2.2153	2.2889	2.3642
5	1.8424	1.9254	2.0114	2.1003	2.1924	2.2878	2.3864	2.4883	2.5937	2.7027	2.8153	2.9316
6	2.0820	2.1950	2.3131	2.4364	2.5652	2.6996	2.8398	2.9860	3.1384	3.2973	3.4628	3.6352
7	2.3526	2.5023	2.6600	2.8262	3.0012	3.1855	3.3793	3.5832	3.7975	4.0227	4.2593	4.5077
8	2.6584	2.8526	3.0590	3.2784	3.5115	3.7589	4.0214	4.2998	4.5950	4.9077	5.2389	5.5895
9	3.0040	3.2519	3.5179	3.8030	4.1084	4.4355	4.7854	5.1598	5.5599	5.9874	6.4439	6.9310
10	3.3946	3.7072	4.0456	4.4114	4.8068	5.2338	5.6947	6.1917	6.7275	7.3046	7.9259	8.5944
11	3.8359	4.2262	4.6524	5.1173	5.6240	6.1759	6.7767	7.4301	8.1403	8.9117	9.7489	10.6571
12	4.3345	4.8179	5.3503	5.9360	6.5801	7.2876	8.0642	8.9161	9.8497	10.8722	11.9912	13.2148
13	4.8980	5.4924	6.1528	6.8858	7.6987	8.5994	9.5964	10.6993	11.9182	13.2641	14.7491	16.3863
14	5.5348	6.2613	7.0757	7.9875	9.0075	10.1472	11.4198	12.8392	14.4210	16.1822	18.1414	20.3191
15	6.2543	7.1379	8.1371	9.2655	10.5387	11.9737	13.5895	15.4070	17.4494	19.7423	22.3140	25.1956
16	7.0673	8.1372	9.3576	10.7480	12.3303	14.1290	16.1715	18.4884	21.1138	24.0856	27.4462	31.2426
17	7.9861	9.2765	10.7613	12.4677	14.4265	16.6722	19.2441	22.1861	25.5477	29.3844	33.7588	38.7408
18	9.0243	10.5752	12.3755	14.4625	16.8790	19.6733	22.9005	26.6233	30.9127	35.8490	41.5233	48.0386
19	10.1974	12.0557	14.2318	16.7765	19.7484	23.2144	27.2516	31.9480	37.4043	43.7358	51.0737	59.5679
20	11.5231	13.7435	16.3665	19.4608	23.1056	27.3930	32.4294	38.3376	45.2593	53.3576	62.8206	73.8641
21	13.0211	15.6676	18.8215	22.5745	27.0336	32.3238	38.5910	46.0051	54.7637	65.0963	77.2694	91.5915
22	14.7138	17.8610	21.6447	26.1864	31.6293	38.1421	45.9233	55.2061	66.2641	79.4175	95.0413	113.573
23	16.6266	20.3616	24.8915	30.3762	37.0062	45.0076	54.6487	66.2474	80.1795	96.8894	116.908	140.831
24	18.7881	23.2122	28.6252	35.2364	43.2973	53.1090	65.0320	79.4968	97.0172	118.205	143.780	174.630
25	21.2305	26.4619	32.9190	40.8742	50.6578	62.6686	77.3881	95.3962	117.390	144.210	176.853	216.542

ერთი ლარის ჩვეულებრივი ანუიტეტის მიმდინარე ღირებულება PVA

წელი	პროცენტის განაკვეთი										
	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.98039	0.97561	0.97087	0.96154	0.95238	0.94340	0.93458	0.92593	0.91743	0.90909	0.90090	0.89286
2	1.94156	1.92742	1.91347	1.88609	1.85941	1.83339	1.80802	1.78326	1.75911	1.73554	1.71252	1.69005
3	2.88388	2.85602	2.82861	2.77509	2.72325	2.67301	2.62432	2.57710	2.53129	2.48685	2.44371	2.40183
4	3.80773	3.76197	3.71710	3.62990	3.54595	3.46511	3.38721	3.31213	3.23972	3.16987	3.10245	3.03735
5	4.71346	4.64583	4.57971	4.45182	4.32948	4.21236	4.10020	3.99271	3.88965	3.79079	3.69590	3.60478
6	5.60143	5.50813	5.41719	5.24214	5.07569	4.91732	4.76654	4.62288	4.48592	4.35526	4.23054	4.11141
7	6.4720	6.3494	6.2303	6.0021	5.7864	5.5824	5.3893	5.2064	5.0330	4.8684	4.7122	4.5638
8	7.3255	7.1701	7.0197	6.7327	6.4632	6.2098	5.9713	5.7466	5.5348	5.3349	5.1461	4.9676
9	8.1622	7.9709	7.7861	7.4353	7.1078	6.8017	6.5152	6.2469	5.9952	5.7590	5.5370	5.3282
10	8.9826	8.7521	8.5302	8.1109	7.7217	7.3601	7.0236	6.7101	6.4177	6.1446	5.8892	5.6502
11	9.7868	9.5142	9.2526	8.7605	8.3064	7.8869	7.4987	7.1390	6.8052	6.4951	6.2065	5.9377
12	10.5753	10.2578	9.9540	9.3851	8.8633	8.3838	7.9427	7.5361	7.1607	6.8137	6.4924	6.1944
13	11.3484	10.9832	10.6350	9.9856	9.3936	8.8527	8.3577	7.9038	7.4869	7.1034	6.7499	6.4235
14	12.1062	11.6909	11.2961	10.5631	9.8986	9.2950	8.7455	8.2442	7.7862	7.3667	6.9819	6.6282
15	12.8493	12.3814	11.9379	11.1184	10.3797	9.7122	9.1079	8.5595	8.0607	7.6061	7.1909	6.8109
16	13.5777	13.0550	12.5611	11.6523	10.8378	10.1059	9.4466	8.8514	8.3126	7.8237	7.3792	6.9740
17	14.2919	13.7122	13.1661	12.1657	11.2741	10.4773	9.7632	9.1216	8.5436	8.0216	7.5488	7.1196
18	14.9920	14.3534	13.7535	12.6593	11.6896	10.8276	10.0591	9.3719	8.7556	8.2014	7.7016	7.2497
19	15.6785	14.9789	14.3238	13.1339	12.0853	11.1581	10.3356	9.6036	8.9501	8.3649	7.8393	7.3658
20	16.3514	15.5892	14.8775	13.5903	12.4622	11.4699	10.5940	9.8181	9.1285	8.5136	7.9633	7.4694
21	17.0112	16.1845	15.4150	14.0292	12.8212	11.7641	10.8355	10.0168	9.2922	8.6487	8.0751	7.5620
22	17.6580	16.7654	15.9369	14.4511	13.1630	12.0416	11.0612	10.2007	9.4424	8.7715	8.1757	7.6446
23	18.2922	17.3321	16.4436	14.8568	13.4886	12.3034	11.2722	10.3711	9.5802	8.8832	8.2664	7.7184
24	18.9139	17.8850	16.9355	15.2470	13.7986	12.5504	11.4693	10.5288	9.7066	8.9847	8.3481	7.7843
25	19.5235	18.4244	17.4131	15.6221	14.0939	12.7834	11.6536	10.6748	9.8226	9.0770	8.4217	7.8431

გაგრძელება **PVA**

წელი	პროცენტის განაკვეთი											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0.88496	0.87719	0.86957	0.86207	0.85470	0.84746	0.84034	0.83333	0.82645	0.81967	0.81301	0.80645
2	1.66810	1.64666	1.62571	1.60523	1.58521	1.56564	1.54650	1.52778	1.50946	1.49153	1.47399	1.45682
3	2.36115	2.32163	2.28323	2.24589	2.20958	2.17427	2.13992	2.10648	2.07393	2.04224	2.01137	1.98130
4	2.97447	2.91371	2.85498	2.79818	2.74324	2.69006	2.63859	2.58873	2.54044	2.49364	2.44827	2.40428
5	3.51723	3.43308	3.35216	3.27429	3.19935	3.12717	3.05763	2.99061	2.92598	2.86364	2.80347	2.74538
6	3.99755	3.88867	3.78448	3.68474	3.58918	3.49760	3.40978	3.32551	3.24462	3.16692	3.09225	3.02047
7	4.4226	4.2883	4.1604	4.0386	3.9224	3.8115	3.7057	3.6046	3.5079	3.4155	3.3270	3.2423
8	4.7988	4.6389	4.4873	4.3436	4.2072	4.0776	3.9544	3.8372	3.7256	3.6193	3.5179	3.4212
9	5.1317	4.9464	4.7716	4.6065	4.4506	4.3030	4.1633	4.0310	3.9054	3.7863	3.6731	3.5655
10	5.4262	5.2161	5.0188	4.8332	4.6586	4.4941	4.3389	4.1925	4.0541	3.9232	3.7993	3.6819
11	5.6869	5.4527	5.2337	5.0286	4.8364	4.6560	4.4865	4.3271	4.1769	4.0354	3.9018	3.7757
12	5.9176	5.6603	5.4206	5.1971	4.9884	4.7932	4.6105	4.4392	4.2784	4.1274	3.9852	3.8514
13	6.1218	5.8424	5.5831	5.3423	5.1183	4.9095	4.7147	4.5327	4.3624	4.2028	4.0530	3.9124
14	6.3025	6.0021	5.7245	5.4675	5.2293	5.0081	4.8023	4.6106	4.4317	4.2646	4.1082	3.9616
15	6.4624	6.1422	5.8474	5.5755	5.3242	5.0916	4.8759	4.6755	4.4890	4.3152	4.1530	4.0013
16	6.6039	6.2651	5.9542	5.6685	5.4053	5.1624	4.9377	4.7296	4.5364	4.3567	4.1894	4.0333
17	6.7291	6.3729	6.0472	5.7487	5.4746	5.2223	4.9897	4.7746	4.5755	4.3908	4.2190	4.0591
18	6.8399	6.4674	6.1280	5.8178	5.5339	5.2732	5.0333	4.8122	4.6079	4.4187	4.2431	4.0799
19	6.9380	6.5504	6.1982	5.8775	5.5845	5.3162	5.0700	4.8435	4.6346	4.4415	4.2627	4.0967
20	7.0248	6.6231	6.2593	5.9288	5.6278	5.3527	5.1009	4.8696	4.6567	4.4603	4.2786	4.1103
21	7.1016	6.6870	6.3125	5.9731	5.6648	5.3837	5.1268	4.8913	4.6750	4.4756	4.2916	4.1212
22	7.1695	6.7429	6.3587	6.0113	5.6964	5.4099	5.1486	4.9094	4.6900	4.4882	4.3021	4.1300
23	7.2297	6.7921	6.3988	6.0442	5.7234	5.4321	5.1668	4.9245	4.7025	4.4985	4.3106	4.1371
24	7.2829	6.8351	6.4338	6.0726	5.7465	5.4509	5.1822	4.9371	4.7128	4.5070	4.3176	4.1428
25	7.3300	6.8729	6.4641	6.0971	5.7662	5.4669	5.1951	4.9476	4.7213	4.5139	4.3232	4.1474

ერთი ლარის ჩვეულებრივი ანუიტეტის მომავალი ღირებულება FVA

წელი	პროცენტის განაკვეთი											
	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0200	2.0250	2.0300	2.0400	2.0500	2.0600	2.0700	2.0800	2.0900	2.1000	2.1100	2.1200
3	3.0604	3.0756	3.0909	3.1216	3.1525	3.1836	3.2149	3.2464	3.2781	3.3100	3.3421	3.3744
4	4.1216	4.1525	4.1836	4.2465	4.3101	4.3746	4.4399	4.5061	4.5731	4.6410	4.7097	4.7793
5	5.2040	5.2563	5.3091	5.4163	5.5256	5.6371	5.7507	5.8666	5.9847	6.1051	6.2278	6.3528
6	6.3081	6.3877	6.4684	6.6330	6.8019	6.9753	7.1533	7.3359	7.5233	7.7156	7.9129	8.1152
7	7.4343	7.5474	7.6625	7.8983	8.1420	8.3938	8.6540	8.9228	9.2004	9.4872	9.7833	10.0890
8	8.5830	8.7361	8.8923	9.2142	9.5491	9.8975	10.2598	10.6366	11.0285	11.4359	11.8594	12.2997
9	9.7546	9.9545	10.1591	10.5828	11.0266	11.4913	11.9780	12.4876	13.0210	13.5795	14.1640	14.7757
10	10.9497	11.2034	11.4639	12.0061	12.5779	13.1808	13.8164	14.4866	15.1929	15.9374	16.7220	17.5487
11	12.1687	12.4835	12.8078	13.4864	14.2068	14.9716	15.7836	16.6455	17.5603	18.5312	19.5614	20.6546
12	13.4121	13.7956	14.1920	15.0258	15.9171	16.8699	17.8885	18.9771	20.1407	21.3843	22.7132	24.1331
13	14.6803	15.1404	15.6178	16.6268	17.7130	18.8821	20.1406	21.4953	22.9534	24.5227	26.2116	28.0291
14	15.9739	16.5190	17.0863	18.2919	19.5986	21.0151	22.5505	24.2149	26.0192	27.9750	30.0949	32.3926
15	17.2934	17.9319	18.5989	20.0236	21.5786	23.2760	25.1290	27.1521	29.3609	31.7725	34.4054	37.2797
16	18.6393	19.3802	20.1569	21.8245	23.6575	25.6725	27.8881	30.3243	33.0034	35.9497	39.1899	42.7533
17	20.0121	20.8647	21.7616	23.6975	25.8404	28.2129	30.8402	33.7502	36.9737	40.5447	44.5008	48.8837
18	21.4123	22.3863	23.4144	25.6454	28.1324	30.9057	33.9990	37.4502	41.3013	45.5992	50.3959	55.7497
19	22.8406	23.9460	25.1169	27.6712	30.5390	33.7600	37.3790	41.4463	46.0185	51.1591	56.9395	63.4397
20	24.2974	25.5447	26.8704	29.7781	33.0660	36.7856	40.9955	45.7620	51.1601	57.2750	64.2028	72.0524
21	25.7833	27.1833	28.6765	31.9692	35.7193	39.9927	44.8652	50.4229	56.7645	64.0025	72.2651	81.6987
22	27.2990	28.8629	30.5368	34.2480	38.5052	43.3923	49.0057	55.4568	62.8733	71.4027	81.2143	92.5026
23	28.8450	30.5844	32.4529	36.6179	41.4305	46.9958	53.4361	60.8933	69.5319	79.5430	91.1479	104.602
24	30.4219	32.3490	34.4265	39.0826	44.5020	50.8156	58.1767	66.7648	76.7898	88.4973	102.174	118.155
25	32.0303	34.1578	36.4593	41.6459	47.7271	54.8645	63.2490	73.1059	84.7009	98.3471	114.413	133.333

გაგრძელება **FVA**

წელი	პროცენტის განაკვეთი											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.1300	2.1400	2.1500	2.1600	2.1700	2.1800	2.1900	2.2000	2.2100	2.2200	2.2300	2.2400
3	3.4069	3.4396	3.4725	3.5056	3.5389	3.5724	3.6061	3.6400	3.6741	3.7084	3.7429	3.7776
4	4.8498	4.9211	4.9934	5.0665	5.1405	5.2154	5.2913	5.3680	5.4457	5.5242	5.6038	5.6842
5	6.4803	6.6101	6.7424	6.8771	7.0144	7.1542	7.2966	7.4416	7.5892	7.7396	7.8926	8.0484
6	8.3227	8.5355	8.7537	8.9775	9.2068	9.4420	9.6830	9.9299	10.1830	10.4423	10.7079	10.9801
7	10.4047	10.7305	11.0668	11.4139	11.7720	12.1415	12.5227	12.9159	13.3214	13.7396	14.1708	14.6153
8	12.7573	13.2328	13.7268	14.2401	14.7733	15.3270	15.9020	16.4991	17.1189	17.7623	18.4300	19.1229
9	15.4157	16.0853	16.7858	17.5185	18.2847	19.0859	19.9234	20.7989	21.7139	22.6700	23.6690	24.7125
10	18.4197	19.3373	20.3037	21.3215	22.3931	23.5213	24.7089	25.9587	27.2738	28.6574	30.1128	31.6434
11	21.8143	23.0445	24.3493	25.7329	27.1999	28.7551	30.4035	32.1504	34.0013	35.9620	38.0388	40.2379
12	25.6502	27.2707	29.0017	30.8502	32.8239	34.9311	37.1802	39.5805	42.1416	44.8737	47.7877	50.8950
13	29.9847	32.0887	34.3519	36.7862	39.4040	42.2187	45.2445	48.4966	51.9913	55.7459	59.7788	64.1097
14	34.8827	37.5811	40.5047	43.6720	47.1027	50.8180	54.8409	59.1959	63.9095	69.0100	74.5280	80.4961
15	40.4175	43.8424	47.5804	51.6595	56.1101	60.9653	66.2607	72.0351	78.3305	85.1922	92.6694	100.815
16	46.6717	50.9804	55.7175	60.9250	66.6488	72.9390	79.8502	87.4421	95.7799	104.934	114.983	126.010
17	53.7391	59.1176	65.0751	71.6730	78.9792	87.0680	96.0218	105.930	116.893	129.020	142.429	157.253
18	61.7251	68.3941	75.8364	84.1407	93.4056	103.740	115.265	128.116	142.441	158.404	176.188	195.994
19	70.7494	78.9692	88.2118	98.6032	110.284	123.413	138.166	154.740	173.354	194.253	217.711	244.032
20	80.9468	91.0249	102.443	115.379	130.032	146.628	165.418	186.688	210.758	237.989	268.785	303.600
21	92.4699	104.768	118.810	134.840	153.138	174.021	197.847	225.025	256.017	291.346	331.605	377.464
22	105.491	120.436	137.631	157.415	180.172	206.344	236.438	271.030	310.781	356.443	408.875	469.056
23	120.204	138.297	159.276	183.601	211.801	244.486	282.361	326.236	377.045	435.860	503.916	582.629
24	136.831	158.658	184.167	213.977	248.807	289.494	337.010	392.484	457.224	532.750	620.817	723.461
25	155.616	181.870	212.793	249.214	292.104	342.603	402.042	471.981	554.242	650.955	764.605	898.091

ერთი ლარის წინასწარი ანუიტეტის მიმდინარე ღირებულება PVAD

წელი	პროცენტის განაკვეთი										
	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	1.9804	1.9756	1.9709	1.9615	1.9524	1.9434	1.9346	1.9259	1.9174	1.9091	1.9009	1.8929
3	2.9416	2.9274	2.9135	2.8861	2.8594	2.8334	2.8080	2.7833	2.7591	2.7355	2.7125	2.6901
4	3.8839	3.8560	3.8286	3.7751	3.7232	3.6730	3.6243	3.5771	3.5313	3.4869	3.4437	3.4018
5	4.8077	4.7620	4.7171	4.6299	4.5460	4.4651	4.3872	4.3121	4.2397	4.1699	4.1024	4.0373
6	5.7135	5.6458	5.5797	5.4518	5.3295	5.2124	5.1002	4.9927	4.8897	4.7908	4.6959	4.6048
7	6.6014	6.5081	6.4172	6.2421	6.0757	5.9173	5.7665	5.6229	5.4859	5.3553	5.2305	5.1114
8	7.4720	7.3494	7.2303	7.0021	6.7864	6.5824	6.3893	6.2064	6.0330	5.8684	5.7122	5.5638
9	8.3255	8.1701	8.0197	7.7327	7.4632	7.2098	6.9713	6.7466	6.5348	6.3349	6.1461	5.9676
10	9.1622	8.9709	8.7861	8.4353	8.1078	7.8017	7.5152	7.2469	6.9952	6.7590	6.5370	6.3282
11	9.9826	9.7521	9.5302	9.1109	8.7217	8.3601	8.0236	7.7101	7.4177	7.1446	6.8892	6.6502
12	10.7868	10.5142	10.2526	9.7605	9.3064	8.8869	8.4987	8.1390	7.8052	7.4951	7.2065	6.9377
13	11.5753	11.2578	10.9540	10.3851	9.8633	9.3838	8.9427	8.5361	8.1607	7.8137	7.4924	7.1944
14	12.3484	11.9832	11.6350	10.9856	10.3936	9.8527	9.3577	8.9038	8.4869	8.1034	7.7499	7.4235
15	13.1062	12.6909	12.2961	11.5631	10.8986	10.2950	9.7455	9.2442	8.7862	8.3667	7.9819	7.6282
16	13.8493	13.3814	12.9379	12.1184	11.3797	10.7122	10.1079	9.5595	9.0607	8.6061	8.1909	7.8109
17	14.5777	14.0550	13.5611	12.6523	11.8378	11.1059	10.4466	9.8514	9.3126	8.8237	8.3792	7.9740
18	15.2919	14.7122	14.1661	13.1657	12.2741	11.4773	10.7632	10.1216	9.5436	9.0216	8.5488	8.1196
19	15.9920	15.3534	14.7535	13.6593	12.6896	11.8276	11.0591	10.3719	9.7556	9.2014	8.7016	8.2497
20	16.6785	15.9789	15.3238	14.1339	13.0853	12.1581	11.3356	10.6036	9.9501	9.3649	8.8393	8.3658
21	17.3514	16.5892	15.8775	14.5903	13.4622	12.4699	11.5940	10.8181	10.1285	9.5136	8.9633	8.4694
22	18.0112	17.1845	16.4150	15.0292	13.8212	12.7641	11.8355	11.0168	10.2922	9.6487	9.0751	8.5620
23	18.6580	17.7654	16.9369	15.4511	14.1630	13.0416	12.0612	11.2007	10.4424	9.7715	9.1757	8.6446
24	19.2922	18.3321	17.4436	15.8568	14.4886	13.3034	12.2722	11.3711	10.5802	9.8832	9.2664	8.7184
25	19.9139	18.8850	17.9355	16.2470	14.7986	13.5504	12.4693	11.5288	10.7066	9.9847	9.3481	8.7843

გაგრძელება **PVAD**

წელი	პროცენტის განაკვეთი 13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	1.8850	1.8772	1.8696	1.8621	1.8547	1.8475	1.8403	1.8333	1.8264	1.8197	1.8130	1.8065
3	2.6681	2.6467	2.6257	2.6052	2.5852	2.5656	2.5465	2.5278	2.5095	2.4915	2.4740	2.4568
4	3.3612	3.3216	3.2832	3.2459	3.2096	3.1743	3.1399	3.1065	3.0739	3.0422	3.0114	2.9813
5	3.9745	3.9137	3.8550	3.7982	3.7432	3.6901	3.6386	3.5887	3.5404	3.4936	3.4483	3.4043
6	4.5172	4.4331	4.3522	4.2743	4.1993	4.1272	4.0576	3.9906	3.9260	3.8636	3.8035	3.7454
7	4.9975	4.8887	4.7845	4.6847	4.5892	4.4976	4.4098	4.3255	4.2446	4.1669	4.0923	4.0205
8	5.4226	5.2883	5.1604	5.0386	4.9224	4.8115	4.7057	4.6046	4.5079	4.4155	4.3270	4.2423
9	5.7988	5.6389	5.4873	5.3436	5.2072	5.0776	4.9544	4.8372	4.7256	4.6193	4.5179	4.4212
10	6.1317	5.9464	5.7716	5.6065	5.4506	5.3030	5.1633	5.0310	4.9054	4.7863	4.6731	4.5655
11	6.4262	6.2161	6.0188	5.8332	5.6586	5.4941	5.3389	5.1925	5.0541	4.9232	4.7993	4.6819
12	6.6869	6.4527	6.2337	6.0286	5.8364	5.6560	5.4865	5.3271	5.1769	5.0354	4.9018	4.7757
13	6.9176	6.6603	6.4206	6.1971	5.9884	5.7932	5.6105	5.4392	5.2784	5.1274	4.9852	4.8514
14	7.1218	6.8424	6.5831	6.3423	6.1183	5.9095	5.7147	5.5327	5.3624	5.2028	5.0530	4.9124
15	7.3025	7.0021	6.7245	6.4675	6.2293	6.0081	5.8023	5.6106	5.4317	5.2646	5.1082	4.9616
16	7.4624	7.1422	6.8474	6.5755	6.3242	6.0916	5.8759	5.6755	5.4890	5.3152	5.1530	5.0013
17	7.6039	7.2651	6.9542	6.6685	6.4053	6.1624	5.9377	5.7296	5.5364	5.3567	5.1894	5.0333
18	7.7291	7.3729	7.0472	6.7487	6.4746	6.2223	5.9897	5.7746	5.5755	5.3908	5.2190	5.0591
19	7.8399	7.4674	7.1280	6.8178	6.5339	6.2732	6.0333	5.8122	5.6079	5.4187	5.2431	5.0799
20	7.9380	7.5504	7.1982	6.8775	6.5845	6.3162	6.0700	5.8435	5.6346	5.4415	5.2627	5.0967
21	8.0248	7.6231	7.2593	6.9288	6.6278	6.3527	6.1009	5.8696	5.6567	5.4603	5.2786	5.1103
22	8.1016	7.6870	7.3125	6.9731	6.6648	6.3837	6.1268	5.8913	5.6750	5.4756	5.2916	5.1212
23	8.1695	7.7429	7.3587	7.0113	6.6964	6.4099	6.1486	5.9094	5.6900	5.4882	5.3021	5.1300
24	8.2297	7.7921	7.3988	7.0442	6.7234	6.4321	6.1668	5.9245	5.7025	5.4985	5.3106	5.1371
25	8.2829	7.8351	7.4338	7.0726	6.7465	6.4509	6.1822	5.9371	5.7128	5.5070	5.3176	5.1428

ერთი ლარის წინასწარი ანუიტეტის მომავალი ღირებულება FVAD

წელი	პროცენტის განაკვეთი 2	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0200	1.0250	1.0300	1.0400	1.0500	1.0600	1.0700	1.0800	1.0900	1.1000	1.1100	1.1200
2	2.0604	2.0756	2.0909	2.1216	2.1525	2.1836	2.2149	2.2464	2.2781	2.3100	2.3421	2.3744
3	3.1216	3.1525	3.1836	3.2465	3.3101	3.3746	3.4399	3.5061	3.5731	3.6410	3.7097	3.7793
4	4.2040	4.2563	4.3091	4.4163	4.5256	4.6371	4.7507	4.8666	4.9847	5.1051	5.2278	5.3528
5	5.3081	5.3877	5.4684	5.6330	5.8019	5.9753	6.1533	6.3359	6.5233	6.7156	6.9129	7.1152
6	6.4343	6.5474	6.6625	6.8983	7.1420	7.3938	7.6540	7.9228	8.2004	8.4872	8.7833	9.0890
7	7.5830	7.7361	7.8923	8.2142	8.5491	8.8975	9.2598	9.6366	10.0285	10.4359	10.8594	11.2997
8	8.7546	8.9545	9.1591	9.5828	10.0266	10.4913	10.9780	11.4876	12.0210	12.5795	13.1640	13.7757
9	9.9497	10.2034	10.4639	11.0061	11.5779	12.1808	12.8164	13.4866	14.1929	14.9374	15.7220	16.5487
10	11.1687	11.4835	11.8078	12.4864	13.2068	13.9716	14.7836	15.6455	16.5603	17.5312	18.5614	19.6546
11	12.4121	12.7956	13.1920	14.0258	14.9171	15.8699	16.8885	17.9771	19.1407	20.3843	21.7132	23.1331
12	13.6803	14.1404	14.6178	15.6268	16.7130	17.8821	19.1406	20.4953	21.9534	23.5227	25.2116	27.0291
13	14.9739	15.5190	16.0863	17.2919	18.5986	20.0151	21.5505	23.2149	25.0192	26.9750	29.0949	31.3926
14	16.2934	16.9319	17.5989	19.0236	20.5786	22.2760	24.1290	26.1521	28.3609	30.7725	33.4054	36.2797
15	17.6393	18.3802	19.1569	20.8245	22.6575	24.6725	26.8881	29.3243	32.0034	34.9497	38.1899	41.7533
16	19.0121	19.8647	20.7616	22.6975	24.8404	27.2129	29.8402	32.7502	35.9737	39.5447	43.5008	47.8837
17	20.4123	21.3863	22.4144	24.6454	27.1324	29.9057	32.9990	36.4502	40.3013	44.5992	49.3959	54.7497
18	21.8406	22.9460	24.1169	26.6712	29.5390	32.7600	36.3790	40.4463	45.0185	50.1591	55.9395	62.4397
19	23.2974	24.5447	25.8704	28.7781	32.0660	35.7856	39.9955	44.7620	50.1601	56.2750	63.2028	71.0524
20	24.7833	26.1833	27.6765	30.9692	34.7193	38.9927	43.8652	49.4229	55.7645	63.0025	71.2651	80.6987
21	26.2990	27.8629	29.5368	33.2480	37.5052	42.3923	48.0057	54.4568	61.8733	70.4027	80.2143	91.5026
22	27.8450	29.5844	31.4529	35.6179	40.4305	45.9958	52.4361	59.8933	68.5319	78.5430	90.1479	103.6029
23	29.4219	31.3490	33.4265	38.0826	43.5020	49.8156	57.1767	65.7648	75.7898	87.4973	101.1742	117.1552
24	31.0303	33.1578	35.4593	40.6459	46.7271	53.8645	62.2490	72.1059	83.7009	97.3471	113.4133	132.3339
25	32.6709	35.0117	37.5530	43.3117	50.1135	58.1564	67.6765	78.9544	92.3240	108.1818	126.9988	149.3339

გაგრძელება FVAD

წელი	პროცენტის განაკვეთი											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1.1300	1.1400	1.1500	1.1600	1.1700	1.1800	1.1900	1.2000	1.2100	1.2200	1.2300	1.2400
2	2.4069	2.4396	2.4725	2.5056	2.5389	2.5724	2.6061	2.6400	2.6741	2.7084	2.7429	2.7776
3	3.8498	3.9211	3.9934	4.0665	4.1405	4.2154	4.2913	4.3680	4.4457	4.5242	4.6038	4.6842
4	5.4803	5.6101	5.7424	5.8771	6.0144	6.1542	6.2966	6.4416	6.5892	6.7396	6.8926	7.0484
5	7.3227	7.5355	7.7537	7.9775	8.2068	8.4420	8.6830	8.9299	9.1830	9.4423	9.7079	9.9801
6	9.4047	9.7305	10.0668	10.4139	10.7720	11.1415	11.5227	11.9159	12.3214	12.7396	13.1708	13.6153
7	11.7573	12.2328	12.7268	13.2401	13.7733	14.3270	14.9020	15.4991	16.1189	16.7623	17.4300	18.1229
8	14.4157	15.0853	15.7858	16.5185	17.2847	18.0859	18.9234	19.7989	20.7139	21.6700	22.6690	23.7125
9	17.4197	18.3373	19.3037	20.3215	21.3931	22.5213	23.7089	24.9587	26.2738	27.6574	29.1128	30.6434
10	20.8143	22,0445	23.3493	24.7329	26.1999	27.7551	29.4035	31.1504	33.0013	34.9620	37.0388	39.2379
11	24.6502	26.2707	28.0017	29.8502	31.8239	33.9311	36.1802	38.5805	41.1416	43.8737	46.7877	49.8950
12	28.9847	31.0887	33.3519	35.7862	38.4040	41.2187	44.2445	47.4966	50.9913	54.7459	58.7788	63.1097
13	33.8827	36.5811	39.5047	42.6720	46.1027	49.8180	53.8409	58.1959	62.9095	68.0100	73.5280	79.4961
14	39.4175	42.8424	46.5804	50.6595	55.1101	59.9653	65.2607	71.0351	77.3305	84.1922	91.6694	99.8151
15	45.6717	49.9804	54.7175	59.9250	65.6488	71.9390	78.8502	86.4421	94.7799	103.9345	113.9834	125.0108
16	52.7391	58.1176	64.0751	70.6730	77.9792	86.0680	95.0218	104.9306	115.8937	128.0201	141.4295	156.2534
17	60.7251	67.3941	74.8364	83.1407	92.4056	102.7403	114.2659	127.1167	141.4413	157.4045	175.1883	194.9942
18	69.7494	77.9692	87.2118	97.6032	109.2846	122.4135	137.1664	153.7400	172.3540	193.2535	216.7116	243.0328
19	79.9468	90.0249	101.4436	114.3797	129.0329	145.6280	164.4180	185.6880	209.7584	236.9893	267.7853	302.6006
20	91.4699	103.7684	117.8101	133.8405	152.1385	173.0210	196.8474	224.0256	255.0176	290.3469	330.6059	376.4648
21	104.4910	119.4360	136.6316	156.4150	179.1721	205.3448	235.4385	270.0307	309.7813	355.4432	407.8753	468.0563
22	119.2048	137.2970	158.2764	182.6014	210.8013	243.4868	281.3618	325.2369	376.0454	434.8607	502.9166	581.6298
23	135.8315	157.6586	183.1678	212.9776	247.8076	288.4945	336.0105	391.4842	456.2249	531.7501	619.8174	722.4610
24	154.6196	180.8708	211.7930	248.2140	291.1049	341.6035	401.0425	470.9811	553.2422	649.9551	763.6054	897.0916
25	175.8501	207.3327	244.7120	289.0883	341.7627	404.2721	478.4306	566.3773	670.6330	794.1653	940.4647	1113.6336

გამოყენებული ლიტერატურა

1. გაბიძაშვილი ბ. სტატისტიკის თეორია, თბილისი, 2005.
2. გვანჯი მანია. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, თბილისი, 1976
3. გოგიჩაიშვილი გ., შონია ო., ქართველიშვილი ი. ოპერაციათა კვლევა. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თბილისი, 1998
4. ნატროშვილი, დ., გიორგაშვილი ლ., უსანეთაშვილი მ., ჯაშიაშვილი გ. მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. „გლობალ-პრინტი", 1999
5. „სტატისტიკა და ფინანსური მათემატიკა", საბანკო-საფინანსო აკადემია, თბილისი, 2003
6. „ფინანსური მათემატიკა", კონსპექტი *EESM* – თბილისის სტუდენტებისათვის, თბილისი, 2006
7. ცაავა გ. საბანკო და ფინანსური მენეჯმენტი, ტომი II, თბილისი, 2002
8. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. – М, : «Мир», 1971 – 534с.
9. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
10. Вагнер Г. Основы исследования операций, в 3-х книгах, М., 1972
11. Вентцель Е. С. Исследование операций, М., 1972
12. Коласс Б. Управление финансовой деятельностью предприятия. Проблемы, концепции и методы: Учебное пособие / Пер. с франц. под. ред. проф. Я.В. Соколова, — М.: Финансы, ЮНИТИ, 1997.
13. Количественные методы финансового анализа, под ред. С. Дж. Брауна, М. П. Крицмена: Пер. с англ. – М: Инфра-М, 1996
14. Кофман А., Фор Р., Займемся исследованием операций. М., «Мир», 1966
15. Лисицына Е.В. Статистический подход к коэффициентному методу в финансовом экспресс-анализе предприятия, журнал "Финансовый менеджемент" № 1, 2000.
16. Ричард Томас. Количественние методы анализа хозаиственной деятельности. Пер. с английского. «Дело и Сервис» Москва, 1999
17. Статистика финансов, под ред. В. Н. Салина, Москва, 2002
18. Т. Ф. Киквадзе, А. Г. Габелая. Методы исследования операций, ИУНХ. Тбилиси, 1984
19. Уотшем Т. Дж. Парромоу К. Количественные методы в финансах: Учеб. пособие. – М: Финансы – ЮНИТИ, 1999
20. Х. Таха. Введение в исследование операций, в 2-х книгах, Москва, «Мир», 1985
21. Хруцкий Е. А. Экономико-математические методы впланировании материально-технического снабжения. «Экономика», М., 1976
22. Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л., Введение в исследование операций, «Наука», М., 1968
23. Четыркин Е. М. Финансовая математика: Учебник. – М: Дело, 2000
24. David F. Groebner. Patrick W. Shannon. Phillip C. Fry. Kent D. Smith. A Course in Business statistics. Prentice Haoo. Upper Saddl River, New Jersey 07458. www. prenhall.com

ს ა რ ჩ ე ვ ი

კომპიუტერული უზრუნველყოფა ლიკა ბერიძის

იბეჭდება ავტორთა მიერ წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 01.05.2009. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 21.05.2009. ქაღალდის ზომა 60X84 1/8. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 11. ტირაჟი 100 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი", თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant,
scripta manent