იაშა დიასამიძე

ალგებრის ამოცანათა კრებული

ბათუმი
2020

წინამდებარე ამოცანათა კრებულის თითოეულ პარაგრაფში, თეორიულ მასალასთან ერთად, მოყვანილია: ტიპური მაგალითები, შესაბამისი დამტკიცებებით; დიდი რაოდენობის ამოცანები დამტკიცებაზე და პრაქტიკული მაგალითები, თავიანთი პასუხებით.

ამოცანათა კრებულის მიზანია, შესაძლებლობის ფარგლებში დაეხმაროს სტუდენტებს თანამედროვე ალგებრის დამოუკიდებლად ათვისების საქმეში და ამ მიმართულებით გამოუმუშაოს კვლევის უნარი.

ავტორი დიდი მადლიერებით მიიღებს ყველა იმ შენიშვნასა და სურვილს, რომელიც მიმართული იქნება ამოცანათა კრებულის შემდგომ დასახვეწად.

რედაქტორები: **მიხეილ ამაღლობელი** - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

რეცენზენტები: **თენგიზ ბოკელავაძე** - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ქუთაისის აკაკი წერეთელის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

ომარ გივრაძე - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.

გულადი ფარტენაძე - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.

 ISBN 99940 – 25 – 47 – 3

ითვალე დრო
და აგროვე ცოდნა.

წინასიტყვაობა

პასუხი კითხვაზე, თუ რას სწავლობს ალგებრა, აუცილებლად მათემატიკური აზროვნების განვითარების საწყისებამდე მიგვიყვანს. ალგებრის განვითარების საწყისები კი, გარკვეულწილად, დაკავშირებულია მთელი რიცხვების შეკრების, გამრავლების და ახარისხების ხელოვნებასთან. მთელი რიცხვების არცთუ ისე გასაგები და არაცალსახა შეცვლა ასოებით, საშუალებას იძლევა მანამდე არსებული ცნობილი კანონებით ვიმუშაოთ ალგებრული ოპერაციების გაცილებით ფართო სივრცეში. ძირითადი სიძნელეები კი დაკავშირებულია იმ დიდი რაოდენობის ალგებრული ოპერაციების თვისებების შესწავლასთან, რომლებიც მოცემულ სიმრავლეებშია განმარტებული.

ამოცანათა კრებულის მიზანია, შესაძლებლობის ფარგლებში დაეხმაროს სტუდენტებს თანამედროვე ალგებრის დამოუკიდებლად ათვისებაში და ამ მიმართულებით გამოუმუშაოს კვლევის უნარი.

ავტორი

სარჩევი

§ 1. გამონათქვამთა ალგებრა

1. გამონათქვამში მოიაზრება ისეთი თხრობითი წინადადება, რომლის შესახებ, გარკვეული მსჯელობის შემდეგ, შეიძლება ითქვას, რომ იგი ჭეშმარიტია ან მცდარია.
   გამონათქვამებს $p, q, r, \ldots$ სიმბოლოებით აღვნიშნავთ. p და q გამონათქვამებიდან შეიძლება მივიღოთ ახალი გამონათქვამი, თუ მას შევაერთებთ შემდეგი კავშირებით:

   და; ან; თუ $\cdots$, მაშინ; მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა.

2. გამონათქვამს „ p და q “ სიმბოლურად ასე ჩავწერთ $p \wedge q$ და იგი ჭეშმარიტი იქნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p და q გამონათქვამები ორივე ერთდროულად ჭეშმარიტია. $p \wedge q$ გამონათქვამს p და q გამონათქვამთა კონიუქცია ეწოდება.
3. გამონათქვამს „ p ან q “ სიმბოლურად ასე ჩავწერთ $p \vee q$ და იგი ჭეშმარიტი იქნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p და q გამონათქვამებიდან ერთი მაინც ჭეშმარიტია. $p \vee q$ გამონათქვამს p და q გამონათქვამთა დიზუნქცია ეწოდება.
4. გამონათქვამს „თუ p მაშინ q “ სიმბოლურად ასე ჩავწერთ $p \to q$ და იგი მცდარი იქნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p ჭეშმარიტია და q მცდარია. $p \to q$ გამონათქვამს p და q გამონათქვამთა იმპლიკაცია ეწოდება.
5. გამონათქვამს „ p მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა q “ სიმბოლურად ასე ჩავწერთ $p \leftrightarrow q$ და იგი ჭეშმარიტი იქნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p და q ორივე ერთდროულად ჭეშმარიტია ან ორივე ერთდროულად მცდარია. $p \leftrightarrow q$ გამონათქვამს p და q გამონათქვამთა ექვივალენტობა ეწოდება.
6. p გამონათქვამის უარყოფას სიმბოლურად ასე ჩავწერთ $\overline{p}$ და გვესმის გამონათქვამი, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხო-

   ლოდ მაშინ, როცა p მცდარია.
7. შემდგომში ჭეშმარიტ და მცდარ გამონათქვამებს და ორი გამონათქვამის ტოლძალოვნებას შესაბამისად 1, 0 და $\equiv$ სიმბოლოებით აღვნიშნავთ.
8. ლოგიკური კანონის ან კიდევ ლოგიკური ტავტოლოგიის ქვეშ ესმით p, q, r და ა.შ. ასოებითა და $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $-$, $\equiv$ ლოგიკური ოპერაციებით შედგენილი ისეთი გამოსახულება, რომელიც ჭეშმარიტია მასში შემავალ ასოებზე ნებისმიერად 0 და $1-$ის მნიშვნელობათა მინიჭების დროს.

ზემოთ მოყვანილი $1-6$ განმარტებებიდან მივიღებთ:

$$\begin{array}{llll} 1 \wedge 1 \equiv 1, & 0 \wedge 1 \equiv 0, & 1 \wedge 0 \equiv 0, & 0 \wedge 0 \equiv 0; \\ 1 \vee 1 \equiv 1, & 0 \vee 1 \equiv 1, & 1 \vee 0 \equiv 1, & 0 \vee 0 \equiv 0; \\ 1 \to 1 \equiv 1, & 0 \to 1 \equiv 1, & 1 \to 0 \equiv 0, & 0 \to 0 \equiv 1; \\ 0 \leftrightarrow 0 \equiv 1, & 0 \leftrightarrow 1 \equiv 0; & 1 \leftrightarrow 0 \equiv 0, & 1 \leftrightarrow 1 \equiv 1; \end{array}$$
$$\overline{0} \equiv 1, \quad \overline{1} \equiv 0.$$

მაგალითი 1. ლოგიკური კანონების დამტკიცების ერთ ერთი მეთოდი.

ვთქვათ, დასამტკიცებელია რომელიღაც ლოგიკური კანონი, რომელიც n რაოდენობის $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ცვლად გამონათქვამს შეიცავს, რომელთაც შეუძლიათ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მიიღონ ორი მნიშვნელობა 0 ან 1 (მცდარი ან ჭეშმარიტი), ე.ი. უნდა განვიხილოთ $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ სიმრავლის ყველა შესაძლო ასახვები $\{0,1\}$ ელემენტიან სიმრავლეზე. მათი რაოდენობა 2^n-ტოლია. თუ ყველა შემთხვევაში დადასტურდება ლოგიკური გამოსახულების ჭეშმარიტობა, მაშინ იგი იქნება ლოგიკური კანონი.

მაგალითისათვის, დავამტკიცოთ სილოგიზმის კანონის სამართლიანობა. იგი შეიცავს 3 ცვლად გამონათქვამს. მათ შეუძლიათ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მიიღონ ორი მნიშვნელობა 0 ან 1 (მცდარი ან ჭეშმარიტი), ე.ი. უნდა განვიხილოთ $\{p, q, r\}$ სიმრავლის ყველა შესაძლო ასახვა $\{0,1\}$ ელემენტიან

სიმრავლეზე. მათი რაოდენობა იქნება $2^3 = 8$. დასახელებული კანონის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ შედეგი ცხრილი:

p	q	r	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

რადგან ლოგიკური $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ გამოსახულების მნიშვნელობა მასში შემავალი ცვლადი გამონათქვამების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ყოველთვის ჭეშმარიტია, ამიტომ იგი ლოგიკური კანონია.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ ლოგიკური კანონი

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}).$$

იგი შეიცავს 2 ცვლად გამონათქვამს. ამიტომ უნდა განვიხილოთ $\{p,q\}$ სიმრავლის ყველა შესაძლო ასახვები $\{0,1\}$ ელემენტიან სიმრავლეზე. მათი რაოდენობა $2^2 = 4-$ის ტოლია. ლოგიკური კანონის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ შემდეგი ცხრილი.

p	q	$(p \wedge q)$	$(\overline{\overline{p} \vee \overline{q}})$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (\overline{\overline{p} \vee \overline{q}})$
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1

რადგან ლოგიკური $(p \wedge q) \leftrightarrow (\overline{\overline{p} \vee \overline{q}})$ გამოსახულების მნიშვნელობა მასში შემავალი ცვლადი გამონათქვამების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ყოველთვის ჭეშმარიტია, ამიტომ იგი ლოგიკური კანონია.

სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ შემდეგი ლოგიკური კანონების სამართლიანობა:
   1) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ − დიზუნქციის კომუტაციურობის კანონი;
   2) $((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ − დიზუნქციის ასოციაციურობის კანონი;
   3) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ −კონიუქციის კომუტაციურობის კანონი;
   4) $((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ − კონიუქციის ასოციაციურობის კანონი;
   5) $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ − დისტრიბუციულობის პირველი კანონი;
   6) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ − დისტრიბუციულობის მეორე კანონი;
   7) $(p \vee p) \leftrightarrow p,\ (p \wedge p) \leftrightarrow p$ − იდემპოტენტურობის კანონი;
   8) $(p \wedge 0) \leftrightarrow 0,\ (p \wedge 1) \leftrightarrow p,\ (p \vee 0) \leftrightarrow p,\ (p \vee 1) \leftrightarrow 1$ − შთანთქმის კანონები;
   9) $(p \vee \overline{p}) \leftrightarrow 1$ − მესამეს გამორიცხვის კანონი;
   10) $(p \wedge \overline{p}) \leftrightarrow 0$ − წინააღმდეგობის კანონი;
   11) $p \leftrightarrow \overline{\overline{p}}$ − ორმაგი უარყოფის კანონი;
   12) $\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q}),\ \overline{(p \wedge q)} \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ დე მორგანის კანონები;
   13) $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{q} \wedge \overline{p})$ − კონტრაპოზიციის კანონი;
   14) $p \wedge (p \to q) \to q$ − დასკვნის კანონი;

15) $\begin{cases} p\wedge q\to p, \\ p\wedge q\to q, \end{cases}$ – კონიუქციის ჩამოშორების კანონი;

16) $\begin{cases} p\to p\vee q, \\ q\to p\vee q, \end{cases}$ – დიზუნქციის შემოტანის კანონი;

17) $(p\vee q)\wedge\overline{q}\to p$ – დიზუნქციის ჩამოშორების კანონი;

18) $\overline{\overline{p}}\to p$ – ორმაგი უარყოფის ჩამოშორების კანონი;

19) $((p\to q)\wedge(q\to p))\to(p\leftrightarrow q)$ – ექვივალენციის შემოტანის კანონი;

20) $\begin{cases} (p\leftrightarrow q)\to(p\to q), \\ (p\leftrightarrow q)\to(q\to p), \end{cases}$ – ექვივალენციის ჩამოშორების კანონი;

21) $(\overline{p}\to q)\wedge(\overline{p}\to\overline{q})\to p$ – დამტკიცება წინააღმდეგობის დაშვების გზით;

22) $(p\to r)\wedge(q\to r)\to(p\vee q\to r)$ – წინამძღვართა შეკრების კანონი;

23) $((p\to q)\wedge(p\to r))\to(p\to r\wedge q)$ – დასკვნათა გამრავლების კანონი;

24) $(p\leftrightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r)\to(p\leftrightarrow r)$ – ექვივალენციის ტრანზიტიურობის კანონი;

25) $p\leftrightarrow p$ – იგივეობის კანონი;

26) $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(q\leftrightarrow p)$ – ექვივალენციის კომუტაციურობის კანონი;

27) $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\overline{p}\leftrightarrow\overline{q})$ – საწინააღმდეგო პოზიციათა კანონი;

28) $(p\to(q\to r))\leftrightarrow(q\to(p\to r))$ – წინამძღვართა გადანაცვლებადობის კანონი;

29) $(p\to q)\leftrightarrow\overline{p}\vee q$;

30) $(p\to q)\leftrightarrow\left(\overline{p\wedge\overline{q}}\right)$;

31) $(p\vee q)\leftrightarrow\overline{p}\to q$;

32) $(p\vee q)\leftrightarrow\left(\overline{\overline{p}\wedge\overline{q}}\right)$;

33) $(p\wedge q)\leftrightarrow\left(\overline{p\to\overline{q}}\right)$;

34) $(p\to q)\leftrightarrow(\overline{p}\vee q)$;

35) $((p\to q)\wedge(q\to p))\leftrightarrow(p\leftrightarrow q)$;

36) $((p\wedge q)\to(p\wedge r))\leftrightarrow 1$;

37) $0\to p,\ p\to p,\ p\to 1$;

38) $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\to q)\wedge(q\to p)$.

§ 2. სიმრავლეები

ზოგიერთი ცნებები სიმრავლეთა თეორიიდან

1. სიმრავლეთა თეორია შეისწავლის ისეთ ობიექტებს, რომლებსაც კლასები ეწოდება. X და Y კლასებისათვის განიმარტება ბინარული მიმართება $X \in Y$, რომელსაც ასე კითხულობენ: X კლასი არის Y კლასის ელემენტი, ან კიდევ X კლასი ეკუთვნის Y კლასს. სიმბოლური $X \notin Y$ ჩანაწერით აღინიშნება, რომ X კლასი არ არის Y კლასის ელემენტი. თუ X და Y კლასები შედგებიან ერთი და იგივე ელემენტებისაგან, მაშინ მათ ერთმანეთის ტოლი ეწოდება და $X = Y$ სიმბოლოთი ჩაიწერება. $X = Y$ ტოლობის უარყოფა კი $X \neq Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ X კლასი არის რომელიმე სხვა კლასის ელემენტი, მაშინ ასეთ X კლასს სიმრავლე ეწოდება. სიმრავლეს, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი.

X და Y სიმრავლეთა გაერთიანება ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც შედგება მხოლოდ იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც მიეკუთვნებიან X ან Y სიმრავლეს და $X \cup Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ლოგიკური ჩანაწერია:

$$(x \in A \cup B) \equiv ((x \in A) \vee (x \in B)).$$

X და Y სიმრავლეთა თანაკვეთა ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ელემენტებია მხოლოდ X და Y სიმრავლის საერთო ელემენტები და $X \cap Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ლოგიკური ჩანაწერია:

$$(x \in A \cap B) \equiv ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

X და Y სიმრავლეთა სხვაობა შედგება X სიმრავლის ყველა იმ ელემენტისაგან, რომლებიც Y სიმრავლეს არ ეკუთვნიან. X და Y სიმრავლეთა სხვაობა $X \setminus Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ლოგიკური ჩანაწერია:

$$(x \in A \setminus B) \equiv ((x \in A) \wedge \overline{(x \in B)})$$

$|X|$ სიმბოლოთი აღინიშნება X სიმრავლის სიმძლავრე, ან X სიმრავლეში ელემენტთა რაოდენობა, თუ X სასრული სიმრავლეა. $B(X)$-ით კი – X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე.

2. ხშირად, სიმრავლეები, რომლებიც გამოიყენებიან ამა თუ იმ თეორიაში, შედიან რაიმე ფიქსირებულ სიმრავლეში. მაგალითად გეომეტრიაში საქმე გვაქვს რომელიღაც სივრცის წერტილების სიმრავლესთან, არითმეტიკაში კი ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლესთან და ა. შ.. ასეთ ფიქსირებულ სიმრავლეს უნივერსალური სიმრავლე, ან კიდევ უნივერსუმი ეწოდება და U სიმბოლოთი აღინიშნება. ვთქვათ $A \subseteq U$. მაშინ $\overline{A} = U \setminus A$ სიმრავლეს A სიმრავლის U სიმრავლემდე დამატება ეწოდება.
3. ვთქვათ x და y რაღაც ობიექტებია და $x \neq y$. $\{x, y\}$ სიმრავლეს დაულაგებელი წყვილი ეწოდება. ცხადია $\{x, y\} = \{y, x\}$, ხოლო $\{\{x\},\{x,y\}\}$ სიმრავლეს კი დალაგებული წყვილი ეწოდება და (x, y) სიმბოლოთი აღინიშნება. თანახმად დალაგებული წყვილის განსაზღვრისა, გვექნება $(x, y) = \{\{x\},\{x, y\}\}$.

$\{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ სიმრავლეს X და Y სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი ეწოდება და $X \times Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

შევნიშნოთ, რომ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის ოპერაცია არაკომუტაციური ოპერაციაა.

4. ვთქვათ X ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა, $\overline{A} = X \setminus A$ და $A \div C = (A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap C)$ ნებისმიერი $A, B, C \in B(X)$ ელემენტისათვის.

მაგალითი 1. გამოთქმათა ალგებრის გამოყენებით დავამტკიცოთ ტოლობა $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

$$\left(x\in A\setminus(A\cap B)\right)\Leftrightarrow\left((x\in A)\wedge\overline{(x\in A\cap B)}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left((x\in A)\wedge\overline{\left((x\in A)\wedge(x\in B)\right)}\right)\Leftrightarrow\left((x\in A)\wedge\left(\overline{(x\in A)}\vee\overline{(x\in B)}\right)\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left((x\in A)\wedge\overline{(x\in A)}\right)\vee\left((x\in A)\wedge\overline{(x\in B)}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0\vee\left((x\in A)\wedge\overline{(x\in B)}\right)\Leftrightarrow(x\in A)\wedge\overline{(x\in B)}\Leftrightarrow(x\in A\setminus B).$$

($\Leftrightarrow$ სიმბოლოთი ხშირად აღინიშნება ორი მტკიცებულების ტოლძალოვნება).

მაგალითი 2. სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით: დავამტკიცოთ ტოლობა $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

ამისათვის უნდა დავამტკიცოთ შემდეგი ორი ჩართვის სამართლიანობა: $A\setminus(A\cap B)\subseteq A\setminus B$ და $A\setminus B\subseteq A\setminus(A\cap B)$.

1) ჯერ ვაჩვენოთ $A\setminus(A\cap B)\subseteq A\setminus B$ ჩართვის სამართლიანობა. მართლაც ვთქვათ $x\in A\setminus(A\cap B)$, მაშინ $x\in A$ და $x\notin A\cap B$, პირობიდან $x\in A$ და $x\notin A\cap B$ გამომდინარეობს $x\notin B$. ამგვარად $x\in A$ და $x\notin B$ პირობებიდან მივიღებთ $x\in A\setminus B$. მივიღეთ რომ $A\setminus(A\cap B)$ სიმრავლის ყოველი ელემენტი იმავე დროს არის $A\setminus B$ სიმრავლის ელემენტიც, ე.ი. სამართლიანია შემდეგი ჩართვა $A\setminus(A\cap B)\subseteq A\setminus B$.

2) ახლა ვაჩვენოთ $A\setminus B\subseteq A\setminus(A\cap B)$ ჩართვის სამართლიანობაც. მართლაც, ვთქვათ $x\in A\setminus B$, მაშინ $x\in A$ და $x\notin B$. აქედან მივიღებთ $x\notin A\cap B$. რადგან $x\in A$ და $x\notin A\cap B$ ამიტომ $x\in A\setminus(A\cap B)$. მივიღეთ რომ $A\setminus B$ სიმრავლის ყოველი ელემენტი იმავე დროს არის $A\setminus(A\cap B)$ სიმრავლის ელემენტიც, ე.ი. სამართლიანია ჩართვა $A\setminus B\subseteq A\setminus(A\cap B)$. ჩართვებიდან $A\setminus(A\cap B)\subseteq A\setminus B$ და $A\setminus B\subseteq A\setminus(A\cap B)$ მივიღებთ, რომ $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

(შენიშვნა: რომ შეძლოთ ლოგიკის გამოყენებით სიმრავლეთა ტოლობების დამტკიცება, ამისათვის კარგად უნდა ფლობდეთ

გამოთქმათა ალგებრის კანონებს).

სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:
   1) $X\cup X=X$;
   2) $X\cap X=X$;
   3) $X\cup Y=Y\cup X$;
   4) $X\cap Y=Y\cap X$;
   5) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$;
   6) $(X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$;
   7) $X\cup(X\cap Z)=X$;
   8) $X\cap(X\cup Z)=X$;
   9) $X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$;
   10) $X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$;
   11) $X\setminus(Y\cup Z)=(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)$;
   12) $X\setminus(Y\cap Z)=(X\setminus Y)\cup(X\setminus Z)$;
   13) $X\setminus(X\setminus Y)=X\cap Y$;
   14) $Y\cup(X\setminus Y)=X\cup Y$;
   15) $Y\cap(X\setminus Y)=\varnothing$;
   16) თუ $Y\subseteq X$, მაშინ $(X\setminus Y)\cup Y=X$;
   17) თუ $X\subseteq Y$, მაშინ $X\cap Y=X$;
   18) თუ $X\subseteq Y$, მაშინ $X\cup Y=Y$;
   19) თუ $X\cap Y=\varnothing$, მაშინ $(X\cup Y)\setminus Y=X$;
   20) თუ $X\subseteq Y$, მაშინ $X\setminus Z\subseteq Y\setminus Z$;
   21) თუ $X\subseteq Y$, მაშინ $X\cap Z\subseteq Y\cap Z$;
   22) თუ $X\subseteq Y$ მაშინ $X\cup Z\subseteq Y\cup Z$;

23) თუ $C = A \setminus B$, მაშინ $C \cap B = \varnothing$;

24) თუ $X \not\subset Y$, მაშინ $X \setminus Y \neq \varnothing$;

25) თუ $X \subseteq Z$, მაშინ $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z$;

26) $X \cup Z = \varnothing$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X = \varnothing$ და $Y = \varnothing$;

27) $X \setminus Y = X$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y \setminus X = Y$;

28) $X \cup Y = X \setminus Y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y = \varnothing$;

29) $X \setminus Y = X \cap Y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X = \varnothing$;

30) $X \subseteq Y \cup Z$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \setminus Y \subseteq Z$;

31) $X \cap Y = X \cup Y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X = Y$;

32) $X \subseteq Y \subseteq Z$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \cup Y = Y \cap Z$;

33) $A \cup U = U$;

34) $A \cap U = A$;

35) $A \cup \overline{A} = U$;

36) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

37) $\overline{\overline{A}} = A$;

38) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

39) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

40) $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{(\overline{A} \cup B)}$;

41) $A \subseteq B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \cap \overline{B} = \varnothing$;

42) $A \subseteq B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overline{B} \subseteq \overline{A}$;

43) $A = B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = \varnothing$;

44) $\overline{\bigcup_{i \in I} X_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{X_i}$;

45) $\overline{\bigcap_{i \in I} X_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{X_i}$.

46) $\left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \cap Y = \bigcup_{i \in I} (X_i \cap Y)$;

47) $\left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \cup Y = \bigcap_{i \in I} (X_i \cup Y)$;

48) $Y \setminus \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (Y \setminus X_i)$;

49) $Y \setminus \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (Y \setminus X_i)$;

50) $(x, y) = (z, t)$ მხოლოდ მაშინ, როცა $x = z$ და $y = t$;

51) $(X \cap Y) \times (Z \cap T) = (X \times Z) \cap (Y \times T)$;

52) $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$;

53) $X \times (Z \cap T) = (X \times Z) \cap (X \times T)$;

54) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$;

55) $(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z)$;

56) $A \div B = B \div A$;

57) $(A \div B) \div C = B \div (A \div C)$;

58) $A \div \varnothing = A$;

59) $(A \div B) \cap C = (C \cap B) \div (A \cap C)$;

60) $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

61) $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2. აჩვენეთ, რომ თუ X და Y სიმრავლეებში ელემენტთა რაოდენობა სასრულია, მაშინ $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

3. ვთქვათ X და Y ნებისმიერი ორი სიმრავლეა. დაამტკიცეთ, რომ $X \times Y = \varnothing$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X = \varnothing$ ან $Y = \varnothing$.

4. ნებისმიერი სასრული $X_1, X_2, ..., X_n$ სიმრავლეებისათვის დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|X_i| - \sum_{1\le i<j\le n}\left(X_i \cap X_j\right) + \cdots +$$
$$+(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\left|X_{i_1}\cap X_{i_2}\cap\ldots\cap X_{i_k}\right| + \cdots + (-1)^{n-1}\left(X_1\cap X_2\cap\ldots\cap X_n\right).$$

5. X სიმრავლის ნებიამიერი A ქვესიმრავლისათვის არსებობს X სიმრავლის ისეთი B ქვესიმრავლე, რომ $A \div B = \varnothing$.
6. დაამტკიცეთ, რომ X სიმრავლის ნებიამიერი A, B და C ქვესიმრავლეებისათვის სამართლიანია $A \cap B \subseteq C$ ჩართვა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \subseteq \left(X \setminus B\right) \cup C$.

§ 3. თანადობები, ასახვები

1. ვთქვათ, X და Y ნებისმიერი ორი არაცარიელი სიმრავლეა. X და Y სიმრავლეთა დეკარტული $X\times Y$ ნამრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ეწოდება თანადობა X და Y სიმრავლეებს შორის, ხოლო თანადობას X და X სიმრავლეებს შორის ბინარული მიმართება ეწოდება X სიმრავლეზე.

ახლა ვთქვათ f რაღაც თანადობაა X და Y სიმრავლეთა შორის. თუ $(x,y)\in f$ $(x\in X,\ y\in Y)$, მაშინ $(x,y)\in f$ პირობას xfy სახით ჩავწერთ.

ვთქვათ X, Y და Z რომელიღაც არაცარიელი სიმრავლეებია $\alpha\subseteq X\times Y$ და $\beta\subseteq Y\times Z$. α და β თანადობათა $\alpha\circ\beta$ ნამრავლის ქვეშ იგულისხმება ისეთი თანადობა X და Z სიმრავლეებს შორის, რომ $x(\alpha\circ\beta)z$ მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი $y\in Y$ ელემენტი, რომ $x\alpha y\beta z$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

1) ვიტყვით, რომ $x\in X$ ელემენტი ეკუთვნის fX სიმრავლეს, თუ მოიძებნება ისეთი $y\in Y$ ელემენტი, რომ სრულდება პირობა xfy.

2) ვიტყვით, რომ $y\in Y$ ელემენტი ეკუთვნის Yf სიმრავლეს, თუ მოიძებნება ისეთი $x\in X$ ელემენტი, რომ სრულდება პირობა xfy.

3) fX სიმრავლეს f თანადობის პირველი გეგმილი, ხოლო Yf სიმრავლეს f თანადობის მეორე გეგმილი ეწოდება.

ახლა მოვიყვანოთ X და Y სიმრავლეთა შორის f თანადობის ზოგიერთი შესაძლო თვისებები:

4) $fX=X$, ე.ი. X სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის მოიძებნება Y სიმრავლის ისეთი y ელემენტი, რომ xfy;

5) f ისეთი თანადობაა, რომ xfy_1 და xfy_2 $(x\in X,\ y_1,y_2\in Y)$

პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $y_1=y_2$ ტოლობა;

6) f ისეთი თანადობაა, რომ x_1fy და x_2fy $(x_1,x_2\in X,\ y\in Y)$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $x_1=x_2$ ტოლობა;

7) $Yf=Y$, ე.ი. Y სიმრავლის ყოველი y ელემენტისათვის მოიძებნება X სიმრავლის ისეთი x ელემენტი, რომ xfy;

თუ X და Y სიმრავლეთა შორის f თანადობა ისეთია, რომ იგი ერთდროულად აკმაყოფილებს 4) და 5) პირობებს, მაშინ მას X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა ეწოდება. $fX=X$ სიმრავლეს f ასახვის განსაზღვრის არე, ხოლო Yf სიმრავლეს კი $-f$ ასახვის მნიშვნელობათა სიმრავლე ეწოდება.

თუ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა, მაშინ მას სიმბოლურად ასეც ჩასწერენ $f:X\to Y$, ხოლო პირობა xfy კი $f(x)=y$ სახით ჩაიწერება. ამ შემთხვევაში y ელემენტს x ელემენტის სახე ეწოდება f ასახვის დროს, ხოლო x ელემენტს კი y ელემენტის წინასახე f ასახვის დროს.

ახლა თუ $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $Yf=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ და $f(x_i)=y_i$ $(i=1,2,...,n)$, მაშინ f ასახვა ხშირად სიმბოლურად ასეც ჩაიწერება

$$f=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_2 \end{pmatrix}.$$

თუ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა და 6) პირობასაც აკმაყოფილებს, მაშინ მას X სიმრავლის Y სიმრავლეში ურთიერთცალსახა ასახვა ან კიდევ ინექცია ეწოდება.

თუ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა და 7) პირობასაც აკმაყოფილებს, მაშინ მას X სიმრავლის Y სიმრავლეზე ასახვა ან კიდევ სურექცია ეწოდება.

თუ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა და ერთდროულად 6) და 7) პირობებს აკმაყოფილებს, მაშინ მას X

სიმრავლის Y სიმრავლეზე ურთიერთცალსახა ასახვა ან კიდევ ბიექცია ეწოდება. თუ X სასრული სიმრავლეა და $X=Y$, მაშინ f ასახვას ჩასმა ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია ორი $f:X\to Y$ და $g:Y\to Z$ ასახვა. $g\cdot f$ ასახვათა ნამრავლის (კომპოზიციის) ქვეშ იგულისხმება X სიმრავლის Z სიმრავლეში ასახვა, რომელიც ყოველი $x\in X$ ელემენტისათვის აკმაყოფილებს პირობას $(g\cdot f)(x)=g(f(x))$.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ ორი ბიექციის ნამრავლი ბიექციაა.

ვთქვათ f და g ორი ბიექციაა X და Y სიმრავლეებს შორის. ე.ი. მათთვის სამართლიანია 1 პუნქტის $4)-7)$ წინადადებები. ვაჩვენოთ, რომ $f\cdot g$ თანადობისათვისაც სამართლიანია იგივე 1 პუნქტის $4)-7)$ წინადადებები:

1) ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $(f\cdot g)X=X$. მართლაც, ვთქვათ x არის X სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. რადგან g და f ასახვებია, ამიტომ $fX=X$ და $gX=X$. ბოლო ორი ტოლობიდან f და g თანადობათა პირველი გეგმილების განმარტების თანახმად X სიმრავლეში არსებობს ისეთი y და z ელემენტები, რომ xfy და ygz. საიდანაც მივიღებთ $x(f\cdot g)z$. ამგვარად სრულდება პირობა $x\in(f\cdot g)X$ და ჩართვა $X\subseteq(f\cdot g)X$. პირიქით ჩართვა გამომდინარეობს თანადობის პირველი პროექციის განსაზღვრიდან. ამგვარად სამართლიანია $X=(f\cdot g)X$ ტოლობა.

2) ახლა ვაჩვენოთ, რომ $x(f\cdot g)y_1$ და $x(f\cdot g)y_2$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $y_1=y_2$ პირობა. მართლაც, პირობებიდან $x(f\cdot g)y_1$ და $x(f\cdot g)y_2$ მივიღებთ, რომ xfz_1gy_1 და xfz_2gy_2, რომელიღაც $z_1,z_2\in Y\cup X-$ სათვის. რადგან f ასახვაა, ამიტომ xfz_1 და xfz_2 პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $z_1=z_2$. მეორეს მხვრივ გვექნება z_1gy_1 და z_1gy_2 საიდანაც მივი-

ღებთ $y_1=y_2$, რადგანაც g ასახვაა თანახმად მოცემულობისა.

3) ვაჩვენოთ, რომ $x_1(f\cdot g)y$ და $x_2(f\cdot g)y$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $x_1=x_2$ პირობა. მართლაც, პირობებიდან $x_1(f\cdot g)y$ და $x_2(f\cdot g)y$ მივიღებთ, რომ x_1fz_1gy და x_2fz_2gy, რომელიღაც $z_1,z_2\in Y\cup X-$სათვის. რადგან g ინექციაა, ამიტომ z_1gy და z_2gy პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $z_1=z_2$. მეორეს მხვრივ გვექნება x_1fz_1 და x_2fz_1 საიდანაც მივიღებთ $x_1=x_2$, რადგანაც f ინექციაა თანახმად მოცემულობისა.

4) ახლა ვაჩვენოთ, რომ $Y(f\cdot g)=Y$. მართლაც, ვთქვათ y არის Y სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. რადგან g და f ასახვებია, ამიტომ $Yf=Y$ და $Yg=Y$. ბოლო ორი ტოლობიდან f და g თანადობათა მეორე გეგმილების განმარტების თანახმად X სიმრავლეში არსებობს ისეთი x და z ელემენტები, რომ xfz და zgy. საიდანაც მივიღებთ $x(f\cdot g)y$. ამგვარად სრულდება პირობა $y\in Y(f\cdot g)$ და ჩართვა $Y\subseteq Y(f\cdot g)$. პირიქით ჩართვა გამომდინარეობს თანადობის მეორე პროექციის განსაზღვრიდან. ამგვარად სამართლიანია $Y=Y(f\cdot g)$ ტოლობა.

$1)-4)$ პირობებიდან, თანახმად $4)-7)$ პირობებისა მივიღებთ, რომ $f\cdot g$ თანადობა იქნება ბიექცია X და Y სიმრავლეებს შორის.

სავარჯიშოები

1. $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ და $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$ სიმრავლეებს შორის მოცემულია თანადობები:

$$f_1=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_3,y_4)\},\ f_2=\{(x_1,y_1),(x_2,y_1),(x_3,y_2)\},$$
$$f_3=\{(y_1,z_1),(y_2,z_2),(y_3,z_3),(y_4,z_1)\},\ f_4=\{(y_1,z_1),(y_2,z_2),(y_3,z_3)\},$$
$$f_5=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\},\ f_6=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}.$$

იპოვეთ:

1) თანადობები, რომლებიც ასახვები არ არიან;
2) თანადობები, რომლებიც ასახვებია;
3) თანადობები, რომლებიც ინექციებია;
4) თანადობები, რომლებიც სურექციებია;
5) თანადობები, რომლებიც ბიექციებია;
6) $f_3 \cdot f_2$, $f_2 \circ f_3$; $f_3 \cdot f_5$, $f_5 \circ f_3$ და $f_1 \circ f_3$ ნამრავლები.
7) თანადობათა რიცხვი X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
8) ასახვათა რიცხვი X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
9) ინექციათა რიცხვი X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
10) სურექციათა რიცხვი Y სიმრავლისა Z სიმრავლეზე;
11) ბიექციათა რიცხვი X და Z სიმრავლეებს შორის;
12) ყველა ასახვები X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
13) ყველა ინექციები X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
14) ყველა სურექციები Y სიმრავლისა Z სიმრავლეზე;
15) ყველა ბიექციები X და Z სიმრავლეებს შორის;
16) რა შემთხვევაში იარსებებს ინექცია X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
17) რა შემთხვევაში იარსებებს სურექცია X სიმრავლისა Y სიმრავლეზე;
18) იპოვეთ ყველა ბიექცია $X_i=\{1,2,...,i\}$ სიმრავლეზე, როცა $i=2,3,4$;
19) ვთქვათ f ბიექციაა X და Y სიმრავლეებს შორის. აჩვენეთ, რომ $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$;
20) ვთქვათ, Y არის უსასრულო X სიმრავლის სასრული ქვესიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ბიექცია $X \setminus Y$ და X სიმრავლეებს შორის.

2. ვთქვათ, f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა. ხოლო g კი Y სიმრავლის X სიმრავლეში ასახვაა. g ასახვას ეწოდება f ასახვის მარცხენა (მარჯვენა) შებრუნებული, თუ

$$g \cdot f = \Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \quad \left(f \cdot g = \Delta_Y = \{(y,y) \mid y \in Y\}\right).$$

1) აჩვენეთ, რომ f ინექციაა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია მარცხენა შებრუნებული;
2) აჩვენეთ, რომ f სურექციაა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია მარჯვენა შებრუნებული.

3. ვთქვათ, $|X|=m$ და $|Y|=n$. დაამტკიცეთ, რომ
1) X და Y სიმრავლეთა შორის ყველა თანადობათა რიცხვი $2^{n \cdot m}$ – ის ტოლია;
2) X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა ასახვათა რაოდენობა n^m – ის ტოლია;
3) თუ $m \le n$, მაშინ X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა ინექციათა რაოდენობა $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ ტოლია;
4) თუ $m \ge n$, მაშინ X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა სურექციათა რაოდენობა $n^m + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \cdot C_n^i \cdot (n-i)^m$ ტოლია;
5) თუ $m=n$, მაშინ X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა ბიექციათა რაოდენობა $n!$ ტოლია;
6) თუ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა. მაშინ $f^{-1}=\{(y,x) \mid xfy\}$ იქნება ასახვა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f ბიექციაა;
7) თუ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ბიექცია, მაშინ $f \cdot f^{-1} = \Delta_Y$ და $f^{-1} \cdot f = \Delta_X$.

პასუხები

1)

$f_1=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_3,y_4)\}$, $f_4=\{(y_1,z_1),(y_2,z_2),(y_3,z_3)\}$.

2)

$f_2=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_1&y_2\end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix}y_1&y_1&y_2&y_4\\z_1&z_2&z_3&z_1\end{pmatrix}$, $f_5=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{pmatrix}$, $f_6=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}$.

3) $f_5=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\}$, $f_6=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}$.

4) $f_3=\{(y_1,z_1),(y_2,z_2),(y_3,z_3),(y_4,z_1)\}$, $f_6=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}$.

5) $f_6=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}$.

6) $f_3\cdot f_2=\varnothing$, $f_2\cdot f_3=\{(x_1,z_1),(x_2,z_1),(x_3,z_2)\}$, $f_3\cdot f_5=\varnothing$,

$f_5\cdot f_3=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}$, $f_1\cdot f_3=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_1),(x_3,z_3)\}$.

7) $2^{12}=4096$.

8) $4^3=64$.

9) $4\cdot3\cdot2=24$.

10) 36.

11) $1\cdot2\cdot3=6$.

12) $f_1=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_1&y_1\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_1&y_2\end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_1&y_3\end{pmatrix}$, $f_4=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_1&y_4\end{pmatrix}$,

$f_5=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_1\end{pmatrix}$, $f_6=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_2\end{pmatrix}$, $f_7=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{pmatrix}$, $f_8=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_4\end{pmatrix}$,

$f_9=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_1\end{pmatrix}$, $f_{10}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_2\end{pmatrix}$, $f_{11}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_3\end{pmatrix}$, $f_{12}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{13}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_4&y_1\end{pmatrix}$, $f_{14}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_4&y_2\end{pmatrix}$, $f_{15}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_4&y_3\end{pmatrix}$, $f_{16}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_4&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{17}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_1&y_1\end{pmatrix}$, $f_{18}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_1&y_2\end{pmatrix}$, $f_{19}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_1&y_3\end{pmatrix}$, $f_{20}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_1&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{21}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_2&y_1\end{pmatrix}$, $f_{22}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_2&y_2\end{pmatrix}$, $f_{23}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_2&y_3\end{pmatrix}$, $f_{24}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_2&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{29}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_4&y_1\end{pmatrix}$, $f_{30}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_4&y_2\end{pmatrix}$, $f_{31}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_4&y_3\end{pmatrix}$, $f_{32}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_4&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{33}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_1&y_1\end{pmatrix}$, $f_{34}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_1&y_2\end{pmatrix}$, $f_{35}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_1&y_3\end{pmatrix}$, $f_{36}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_1&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{37}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_2&y_1\end{pmatrix}$, $f_{38}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_2&y_2\end{pmatrix}$, $f_{39}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_2&y_3\end{pmatrix}$, $f_{40}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_2&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{41}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_3&y_1\end{pmatrix}$, $f_{42}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_3&y_2\end{pmatrix}$, $f_{43}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_3&y_3\end{pmatrix}$, $f_{44}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_3&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{45}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_4&y_1\end{pmatrix}$, $f_{46}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_4&y_2\end{pmatrix}$, $f_{47}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_4&y_3\end{pmatrix}$, $f_{48}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_4&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{49}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_1&y_1\end{pmatrix}$, $f_{50}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_1&y_2\end{pmatrix}$, $f_{51}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_1&y_3\end{pmatrix}$, $f_{52}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_1&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{53}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_2&y_1\end{pmatrix}$, $f_{54}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_2&y_2\end{pmatrix}$, $f_{55}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_2&y_3\end{pmatrix}$, $f_{56}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_2&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{57}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_3&y_1\end{pmatrix}$, $f_{58}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_3&y_2\end{pmatrix}$, $f_{59}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_3&y_3\end{pmatrix}$, $f_{60}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_3&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{61}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_4&y_1\end{pmatrix}$, $f_{62}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_4&y_2\end{pmatrix}$, $f_{63}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_4&y_3\end{pmatrix}$, $f_{64}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_4&y_4\end{pmatrix}$.

13)

$f_1=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_4\end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_2\end{pmatrix}$, $f_4=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_4\end{pmatrix}$,

$f_5=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_4&y_2\end{pmatrix}$, $f_6=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_4&y_3\end{pmatrix}$, $f_7=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_1&y_3\end{pmatrix}$, $f_8=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_1&y_4\end{pmatrix}$,

$f_9=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_3&y_1\end{pmatrix}$, $f_{10}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_3&y_4\end{pmatrix}$, $f_{11}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_4&y_1\end{pmatrix}$, $f_{12}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_4&y_3\end{pmatrix}$,

$f_{13}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_1&y_2\end{pmatrix}$, $f_{14}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_1&y_4\end{pmatrix}$, $f_{15}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_2&y_1\end{pmatrix}$, $f_{16}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_2&y_4\end{pmatrix}$,

$f_{17}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_4&y_1\end{pmatrix}$, $f_{18}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_4&y_2\end{pmatrix}$, $f_{19}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_1&y_2\end{pmatrix}$, $f_{20}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_1&y_3\end{pmatrix}$,

$f_{21}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_2&y_1\end{pmatrix}$, $f_{22}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_2&y_3\end{pmatrix}$, $f_{23}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_3&y_1\end{pmatrix}$, $f_{24}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_3&y_2\end{pmatrix}$.

14)

$f_1=\begin{pmatrix}y_1&y_1&y_2&y_4\\z_1&z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}y_1&y_1&y_2&y_4\\z_1&z_1&z_3&z_2\end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix}y_1&y_1&y_2&y_4\\z_1&z_2&z_1&z_3\end{pmatrix}$,

$f_4=\begin{pmatrix}y_1&y_1&y_2&y_4\\z_1&z_2&z_2&z_3\end{pmatrix}$, $f_5=\begin{pmatrix}y_1&y_1&y_2&y_4\\z_1&z_2&z_3&z_1\end{pmatrix}$, $f_6=\begin{pmatrix}y_1&y_1&y_2&y_4\\z_1&z_2&z_3&z_2\end{pmatrix}$,

$$f_7=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_3 \end{pmatrix}, f_8=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}, f_9=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_2 & z_1 \end{pmatrix},$$
$$f_{10}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_2 & z_2 \end{pmatrix}, f_{11}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}, f_{12}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_3 & z_2 \end{pmatrix},$$
$$f_{13}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_1 & z_1 & z_3 \end{pmatrix}, f_{14}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}, f_{15}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_1 & z_3 & z_1 \end{pmatrix},$$
$$f_{16}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_1 & z_3 & z_2 \end{pmatrix}, f_{17}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_1 & z_3 & z_3 \end{pmatrix}, f_{18}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_2 & z_1 & z_3 \end{pmatrix},$$
$$f_{19}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_2 & z_3 & z_1 \end{pmatrix}, f_{20}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_1 & z_1 \end{pmatrix}, f_{21}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix},$$
$$f_{22}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_1 & z_3 \end{pmatrix}, f_{23}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}, f_{24}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_3 & z_1 \end{pmatrix},$$
$$f_{25}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_1 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}, f_{26}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}, f_{27}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_1 & z_2 & z_2 \end{pmatrix},$$
$$f_{28}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}, f_{29}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_1 & z_3 & z_2 \end{pmatrix}, f_{30}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_2 & z_1 & z_1 \end{pmatrix},$$
$$f_{31}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_2 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}, f_{32}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_2 & z_1 & z_3 \end{pmatrix}, f_{33}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_2 & z_2 & z_1 \end{pmatrix},$$
$$f_{34}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_2 & z_3 & z_1 \end{pmatrix}, f_{35}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}, f_{36}=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_3 & z_3 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}.$$

15)

$$f_1=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}, f_2=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_3 & z_2 \end{pmatrix}, f_3=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_2 & z_1 & z_3 \end{pmatrix},$$
$$f_4=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{pmatrix}, f_5=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}, f_6=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_3 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}.$$

16) $|X|\le|Y|$.

17) $|X|\ge|Y|$.

18) $f_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, როცა $i=2$.

$$\varphi_1=\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \varphi_2=\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}, \varphi_3=\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}, \varphi_4=\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}, \varphi_5=\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}, \varphi_6=\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix},$$

როცა $i=3$.

$$\psi_1=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&2&3&4 \end{pmatrix}, \psi_2=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&2&4&3 \end{pmatrix}, \psi_3=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&3&2&4 \end{pmatrix}, \psi_4=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&3&4&2 \end{pmatrix},$$
$$\psi_5=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&2&3 \end{pmatrix}, \psi_6=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&3&2 \end{pmatrix}, \psi_7=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&3&4 \end{pmatrix}, \psi_8=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&4&3 \end{pmatrix},$$

$$\psi_9=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&3&1&4 \end{pmatrix}, \psi_{10}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&3&4&1 \end{pmatrix}, \psi_{11}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&4&1&3 \end{pmatrix}, \psi_{12}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&4&3&1 \end{pmatrix},$$
$$\psi_{13}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&1&2&4 \end{pmatrix}, \psi_{14}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&1&4&2 \end{pmatrix}, \psi_{15}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&2&1&4 \end{pmatrix}, \psi_{16}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&2&4&1 \end{pmatrix},$$
$$\psi_{17}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&1&2 \end{pmatrix}, \psi_{18}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&2&1 \end{pmatrix}, \psi_{19}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&1&2&3 \end{pmatrix}, \psi_{20}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&1&3&2 \end{pmatrix},$$
$$\psi_{21}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&2&1&3 \end{pmatrix}, \psi_{22}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&2&3&1 \end{pmatrix}, \psi_{23}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&3&1&2 \end{pmatrix}, \psi_{24}=\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&3&2&1 \end{pmatrix},$$

როცა $i=4$.

§ 4. ბინარული მიმართებები

1. ვთქვათ, X ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა. X სიმრავლის თავისთავზე დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ეწოდება ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე. თუ (x,y), $(x,y\in X)$ დალაგებული წყვილი ეკუთვნის α ბინარულ მიმართებას, ე.ი. თუ $(x,y)\in\alpha$, მაშინ ამ პირობას შემოკლებით ასეც ჩავწერთ $x\alpha y$. თუ რომელიღაც $x,y,z\in X$ ელემენტებისათვის ერთდროულად სრულდება $x\alpha y$ და $y\alpha z$ პირობები მაშინ გამოვიყენებთ ჩანაწერს $x\alpha y\alpha z$.

ახლა ვთქვათ $x\in X$, $Y\subseteq X$ და $\alpha\subseteq X\times X$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\alpha^{-1}=\{(y,x)\mid x\alpha y\};\ x\alpha=\{y\in X\mid x\alpha y\};\ Y\alpha=\bigcup_{x\in Y}x\alpha;$$

$$\alpha x=x\alpha^{-1};\ \alpha Y=Y\alpha^{-1};\ \Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}.$$

ცარიელ ბინარულ მიმართებას $\varnothing$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.

ვთქვათ, $\alpha,\beta\subseteq X\times X$. α და β ბინარულ მიმართებათა $\alpha\circ\beta$ ნამრავლის ქვეშ იგულისხმება ისეთი ბინარული მიმართება, რომ $x(\alpha\circ\beta)y$ მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი $z\in X$ ელემენტი, რომ $x\alpha z\beta y$.

α ბინარულ მიმართებას X სიმრავლეზე ეწოდება რეფლექსური თუ $\Delta_X\subseteq\alpha$; სიმეტრიული, თუ $\alpha=\alpha^{-1}$; ანტისიმეტრიული, თუ $\alpha\cap\alpha^{-1}\subseteq\Delta_X$; ტრანზიტული, თუ $\alpha\circ\alpha\subseteq\alpha$ და იდემპოტენტური, თუ $\alpha\circ\alpha=\alpha$.

ბინარულ მიმართებას კვაზიდალაგების მიმართება ეწოდება, თუ იგი რეფლექსურია და ტრანზიტულია; დალაგების მიმართება ეწოდება, თუ იგი რეფლექსურია, ანტისიმეტრიულია და ტრანზიტულია; ექვივალენტობის მიმართება ეწოდება, თუ იგი რეფლექსურია, სიმეტრიულია და ტრანზიტულია.

სიმრავლეს, რომელზეც განმარტებულია ერთი მაინც დალა-

გების მიმართება, დალაგებული სიმრავლე ეწოდება.

თუ X სიმრავლეზე განსაზღვრული α დალაგების მიმართება ისეთია, რომ ყოველი $x,y\in X$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს ან $x\alpha y$ ან $y\alpha x$, მაშინ X სიმრავლეს წრფივად დალაგებული სიმრავლე ეწოდება.

ვთქვათ, X დალაგებული სიმრავლეა „$\le$“ დალაგების მიმართ, ხოლო Y მისი რომელიმე ქვესიმრავლეა. თუ $x_0\in Y$ და ყოველი $y\in Y$ ელემენტისათვის აკმაყოფოლებს პირობას $x_0\le y$, მაშინ x_0 ელემენტს Y სიმრავლის უმცირესი ელემენტი ეწოდება.

თუ წრფივად დალაგებული სიმრავლე ისეთია, რომ მისი ყოველი არაცარიელი ქვესიმრავლე უმცირეს ელემენტს შეიცავს, მაშინ მას სავსებით დალაგებული სიმრავლე ეწოდება.

ვთქვათ, α არის ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე და $x\in X$. მაშინ $x\alpha$ სიმრავლეს X სიმრავლის $\alpha-$ ექვივალენტობის კლასს უწოდებენ.

ვიტყვით, რომ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რომელიმე X_i $(i\in I)$ სისტემა არის X სიმრავლის წესიერი დანაწილება, თუ ერთდროულად სრულდება შემდეგი სამი პირობა:

1) $X_i\neq\varnothing$, ყოველი $i\in I$ - სათვის;

2) $X_i\cap X_j=\varnothing$, ყოველი $i,j\in I$ - სათვის, სადაც $i\neq j$;

3) $X=\bigcup_{i\in I}X_i$.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ რომ თუ α,β არიან ისეთი ბინარული მიმართებები X სიმრავლეზე, რომ $\alpha\subseteq\beta$, მაშინ X სიმრავლეზე აღებული ნებისმიერი δ ბინარული მიმართებისათვის სამართლიანი იქნება შემდეგი ჩართვები $\alpha\circ\delta\subseteq\beta\circ\delta$ და $\delta\circ\alpha\subseteq\delta\circ\beta$.

1) დავამტკიცოთ $\alpha\circ\delta\subseteq\beta\circ\delta$ ჩართვის სამართლიანობა. მართლაც, ვთქათ $x(\alpha\circ\delta)y$, რომელიღაც $x,y\in X-$ სათვის. $x(\alpha\circ\delta)y$

პირობიდან მივიღებთ, რომ $x\alpha z\delta y$ რომელიღაც $z\in X-$სათვის. $x\alpha z$ პირობიდან მივიღებთ $x\beta z$, რადგანაც $\alpha\subseteq\beta$ დაშვების თანახმად. ამიტომაც $x\beta z\delta y$ და $x(\beta\circ\delta)y$, მივიღეთ, რომ $\alpha\circ\delta$ ბინარული მიმართების ნებისმიერი (x,y) ელემენტი იმავე დროს არის $\beta\circ\delta$ ბინარული მიმართების ელემენტიც, ე.ი. $\alpha\circ\delta\subseteq\beta\circ\delta$.

ანალოგიურად დამტკიცდება $\delta\circ\alpha\subseteq\delta\circ\beta$ ჩართვაც.

მაგალითი 2. ნებისმიერი α ბინარული მიმართებისათვის X სიმრავლეზე სამართლიანია ტოლობა $\Delta_X\circ\alpha=\alpha\circ\Delta_X=\alpha$.

1) ჯერ დავამტკიცოთ $\Delta_X\circ\alpha=\alpha$ ტოლობის სამართლიანობა. მართლაც თუ $x\alpha y$, რომელიღაც $x,y\in X-$სათვის. მაშინ $x\Delta_x x\alpha y$ თანახმად Δ_X ბინარული მიმართების განსაზღვრისა. ამიტომაც $x(\Delta_x\circ\alpha)y$, ე.ი. $\alpha\subseteq\Delta_X\circ\alpha$.

2) ახლა, თუ $z(\Delta_X\circ\alpha)t$ რომელიღაც $z,t\in X-$სათვის. მაშინ $z\Delta_X z\alpha t$, ე.ი. $z\alpha t$ და $\Delta_X\circ\alpha\subseteq\alpha$. 1) და 2) პირობებიდან მივიღებთ, რომ $\Delta_X\circ\alpha=\alpha$.

ანალოგიურად დამტკიცდება მეორე $\alpha\circ\Delta_X=\alpha$ ტოლობაც.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ X სიმრავლეზე კვაზიდალაგების, დალაგებისა და ექვივალენტობის მიმართებები ყოველთვის იდემპოტენტური მიმართებებია;

1) ვთქვათ α არის კვაზიდალაგების მიმართება X სიმრავლეზე. მაშინ $\Delta_X\subseteq\alpha$ და $\alpha\circ\alpha\subseteq\alpha$. პირველი ჩართვიდან და პირობიდან $\Delta_X\circ\alpha=\alpha$ მივიღებთ $\alpha=\Delta_X\circ\alpha\subseteq\alpha\circ\alpha$, ე.ი. $\alpha\subseteq\alpha\circ\alpha$. პირობებიდან $\alpha\circ\alpha\subseteq\alpha$ და $\alpha\subseteq\alpha\circ\alpha$ გვექნება, რომ $\alpha\circ\alpha=\alpha$, ე.ი. α ბინარული მიმართება იდემპოტენტურია.

რადგან დალაგებისა და ექვივალენტობის მიმართებები იმავე დროს კვაზიდალაგების მიმართებებია, ამიტომაც ისინი ყოველთვის იდეპოტენტური ელემენტები იქნებიან.

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, $X=\{1,2\}$. იპოვეთ:

1) ყველა ბინარული მიმართებათა რაოდენობა;
2) ყველა ბინარული მიმართება;
3) ყველა რეფლექსური ბინარული მიმართება;
4) ყველა სიმეტრიული ბინარული მიმართება;
5) ყველა ანტისიმეტრიული ბინარული მიმართება;
6) ყველა ტრანზიტიული ბინარული მიმართება;
7) ყველა კვაზიდალაგების მიმართება;
8) ყველა დალაგების მიმართება;
9) ყველა წრფივი დალაგების მიმართება;
10) ყველა ექვივალენტობის მიმართება;
11) ყველა იდემპოტენტური მიმართება.

2. $X=\{1,2,3,4,5\}$ სიმრავლეზე მოცემულია შემდეგი ბინარული მიმართებები:

$\alpha_1=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(5,3)\}$,

$\alpha_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$,

$\alpha_3=\{(2,1),(2,2),(2,5),(4,1),(4,2),(4,5),(5,1),(5,2),(5,5)\}$,

$\alpha_4=\{(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$.

იპოვეთ $\alpha_1\circ\alpha_2$, $\alpha_2\circ\alpha_1$, $\alpha_3\circ\alpha_4$, $\alpha_4\circ\alpha_3$ და $\alpha_3\circ\alpha_3$.

3. აჩვენეთ, რომ თუ $|X|=n$, მაშინ ყველა ბინარულ მიმართებათა რიცხვი X სიმრავლეზე 2^{n^2}-ის ტოლია.

4. აჩვენეთ, რომ α ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე რეფლექსურია მხოლოდ მაშინ, როცა $x\alpha x$ ყოველი $x\in X$ - სათვის.

5. აჩვენეთ, რომ თუ α ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე

სიმეტრიულია, მაშინ $x\alpha y$ $(x, y \in X)$ პირობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $y\alpha x$ პირობა.

6. აჩვენეთ, რომ თუ α ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე ანტისიმეტრიულია, მაშინ $x\alpha y$ და $y\alpha x$ $(x, y \in X)$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $x = y$ პირობა.
7. დაამტკიცეთ, რომ თუ α ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე ტრანზიტიულია, მაშინ $x\alpha y$ და $y\alpha z$ $(x, y, z \in X)$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $x\alpha z$ პირობა.
8. აჩვენეთ, რომ თუ α არის ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე, მაშინ $x\alpha = y\alpha$ $(x, y \in X)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x\alpha y$.
9. დაამტკიცეთ, რომ X სიმრავლეზე განსაზღვრულ ექვივალენტობის მიმართებებსა და X სიმრავლის წესიერ დანაწილებებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა.
10. დაამტკიცეთ, რომ თუ X_i $(i \in I)$ სისტემა არის X სიმრავლის წესიერი დანაწილება და $\alpha = \bigcup\limits_{i \in I}(X_i \times X_i)$, მაშინ α იქნება ექვივალენტობის მიმართებაა X სიმრავლეზე.
11. დაამტკიცეთ, რომ α და β_i $(i \in I)$ არიან X სიმრავლეზე რაღაც ბინარულ მიმართებები, მაშინ:

    1) $\alpha \circ \left(\bigcup\limits_{i \in I} \beta_i \right) = \bigcup\limits_{i \in I} (\alpha \circ \beta_i)$;

    2) $\alpha \circ \left(\bigcap\limits_{i \in I} \beta_i \right) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} (\alpha \circ \beta_i)$;

    3) $\left(\bigcup\limits_{i \in I} \beta_i \right) \circ \alpha = \bigcup\limits_{i \in I} (\beta_i \circ \alpha)$;

    4) $\left(\bigcap\limits_{i \in I} \beta_i \right) \circ \alpha \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} (\beta_i \circ \alpha)$.
12. დაამტკიცეთ, რომ თუ α, β და δ რომელიღაც ბინარული მიმართებებია X სიმრავლეზე, მაშინ $(\alpha \circ \beta) \circ \delta = \alpha \circ (\beta \circ \delta)$.
13. დაამტკიცეთ, რომ თუ α და β ბინარული მიმართებებია X სიმრავლეზე, მაშინ $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$.
14. დაამტკიცეთ, რომ თუ α და β ისეთი ექვივალენტობის მიმართებებია X სიმრავლეზე, რომ $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, მაშინ $\alpha \circ \beta$ იქნება ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე.
15. დაამტკიცეთ, რომ X სიმრავლეზე ნებისმიერი α, β და δ მიმართებებისათვის, თუ $\alpha \subseteq \beta$, მაშინ $\alpha \circ \delta \subseteq \beta \circ \delta$ და $\delta \circ \alpha \subseteq \delta \circ \beta$.
16. დაამტკიცეთ, რომ თუ α რომელიღაც ბინარული მიმართებაა X სიმრავლეზე, მაშინ $\alpha^t = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ იქნება ტრანზიტული ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე.
17. დაამტკიცეთ, რომ $\alpha \circ \varnothing = \varnothing \circ \alpha = \varnothing$.
18. დაამტკიცეთ, რომ $\alpha \cup \Delta_X$ რეფლექსური ბინარული მიმართებაა X სიმრავლეზე.
19. დაამტკიცეთ, რომ $\alpha \cup \alpha^{-1}$ სიმეტრიული ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე.
20. დაამტკიცეთ, რომ $\left(\alpha \cup \alpha^{-1} \cup \Delta_X\right)^t$ ექვივალენტობის მიმართებაა X სიმრავლეზე.

პასუხები

1. 1) $2^{2^2} = 16$.

   2) $\alpha_1 = \varnothing$, $\alpha_2 = \{(1,1)\}$, $\alpha_3 = \{(1,2)\}$, $\alpha_4 = \{(2,1)\}$, $\alpha_5 = \{(2,2)\}$,
   $\alpha_6 = \{(1,1),(1,2)\}$, $\alpha_7 = \{(1,1),(2,1)\}$, $\alpha_8 = \{(1,1),(2,2)\}$,
   $\alpha_9 = \{(1,2),(2,1)\}$, $\alpha_{10} = \{(1,2),(2,2)\}$, $\alpha_{11} = \{(2,1),(2,2)\}$,
   $\alpha_{12} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$, $\alpha_{13} = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$,
   $\alpha_{14} = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$, $\alpha_{15} = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$,

$\alpha_{16} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

3) $\alpha_8,\ \alpha_{13},\ \alpha_{14},\ \alpha_{16}$. 4) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_5,\ \alpha_8,\ \alpha_9,\ \alpha_{12},\ \alpha_{15},\ \alpha_{16}$.

5) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_7,\ \alpha_8,\ \alpha_{10},\ \alpha_{11},\ \alpha_{13},\ \alpha_{14}$.

6) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_7,\ \alpha_8,\ \alpha_{10},\ \alpha_{11},\ \alpha_{13},\ \alpha_{14},\ \alpha_{16}$.

7) $\alpha_8,\ \alpha_{13},\ \alpha_{14},\ \alpha_{16}$. 8) $\alpha_8,\ \alpha_{13},\ \alpha_{14}$. 9) $\alpha_8,\ \alpha_{13},\ \alpha_{14}$. 10) $\alpha_8,\ \alpha_{16}$.

11) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_7,\ \alpha_8,\ \alpha_{10},\ \alpha_{11},\ \alpha_{13},\ \alpha_{14},\ \alpha_{16}$.

2.

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(3,1),(3,2),\\ (3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2),(5,4)\}.$$
$$\alpha_2 \circ \alpha_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}.$$
$$\alpha_3 \circ \alpha_4 = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(4,1),(4,2),\\ (4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}.$$
$$\alpha_4 \circ \alpha_3 = \{(2,1),(2,2),(2,5),(3,1),(3,2),(3,5),(5,1),(5,2),(5,5)\}.$$
$$\alpha_3 \circ \alpha_3 = \alpha_3.$$

0§ 5. $n-$არული მიმართებები, $n-$არული ალგებრული ოპერაციები, ალგებრები და ალგებრული სისტემები

1. ვთქვათ $X_1, X_2, ..., X_n$ ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეებია და $x_1, x_2, ..., x_n$ შესაბამისად $X_1, X_2, ..., X_n$ სიმრავლეთა ელემენტებია.

   $x_1, x_2, ..., x_n$ მიმდევრობას $n-$ელემენტიანი კორტეჟი ეწოდება $X_1, X_2, ..., X_n$ სიმრავლეებზე და $(x_1, x_2, ..., x_n)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ $(y_1, y_2, ..., y_n)$ მეორე კორტეჟია $X_1, X_2, ..., X_n$ სიმრავლეზე, მაშინ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ და $(y_1, y_2, ..., y_n)$ კორტეჟებს უწოდებენ ერთმანეთის ტოლს, თუ $x_i = y_i$ ყოველი $i = 1, 2, ..., n-$სათვის.

   სიმრავლეს
   $$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\}$$
   $X_1, X_2, ..., X_n$ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი ეწოდება. თუ $X_1 = \cdots = X_n = X$, მაშინ $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n}$ სიმრავლე X^n სიმბოლოთი აღინიშნება.

   X^n სიმრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს $n-$არული მიმართება ეწოდება X სიმრავლეზე.
2. X^n სიმრავლის X სიმრავლეში ნებისმიერ f ასახვას $n-$არული ალგებრული ოპერაცია (ან კიდევ $n-$რანგიანი ალგებრული ოპერაცია) ეწოდება. $n = 1, 2, 3$ შემთხვევაში f ასახვას შესაბამისად უნარული, ბინარული და ტერნარული ოპერაცია ეწოდება. X სიმრავლის ელემენტის დაფიქსირებას კი ნულარული ალგებრული ოპერაცია ეწოდება.

   ახლა ვთქვათ Ω რაღაც ოპერაციათა სიმრავლეა X სიმრავლეზე, ხოლო Ω' კი რაღაც მიმართებათა სიმრავლეა X სიმ-

რავლეზე.

3. დალაგებულ $\mathbf{X} = (X, \Omega, \Omega')$ სამეულს ალგებრული სისტემა ეწოდება. Ω სიმრავლეს კი მთავარი ოპერაციათა სიმრავლეს უწოდებენ. ხოლო ალგებრულ $\mathbf{X} = (X, \Omega, \varnothing)$ და $\mathbf{Y} = (X, \varnothing, \Omega')$ სისტემებს შესაბამისად ალგებრა და მოდელი ეწოდება და $\mathbf{X} = (X, \Omega)$ და $\mathbf{Y} = (X, \Omega')$ სიმბოლოებით აღინიშნება.

   თუ $\Omega = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$, მაშინ $\mathbf{X} = (X, \Omega)$ ალგებრას სიმბოლურად $\mathbf{X} = (X, f_1, f_2, ..., f_n)$ ასეც წარმოიდგინება.
4. ორ $\mathbf{X} = (X, \Omega)$ და $\mathbf{Y} = (Y, \Omega')$ ალგებრას ერთნაირტიპიანი ეწოდება, თუ Ω და Ω' სიმრავლეებს შორის არსებობს ისეთი θ ბიექცია, რომ ყოველი $f \in \Omega$ ელემენტისათვის f და $\theta(f)$ ოპერაციების რანგები ერთმანეთის ტოლია.

   ვთქვათ $\mathbf{X} = (X, \Omega)$ და $\mathbf{Y} = (Y, \Omega')$ ერთნაირტიპიანი ალგებრებია და θ ისეთი ბიექციაა, რომ ყოველი $f \in \Omega$ ელემენტისათვის f და $\theta(f)$ ოპერაციების რანგები ერთმანეთის ტოლია. თუ $Y \subseteq X$ და ყოველი $\theta(f) \in \Omega'$ ოპერაცია არის f ოპერაციის Y სიმრავლემდე შეზღუდვა, მაშინ $\mathbf{Y} = (Y, \Omega')$ ალგებრას $\mathbf{X} = (X, \Omega)$ ალგებრის ქვეალგებრა ეწოდება.
5. ვთქვათ, $\mathbf{X} = (X, \Omega)$ და $\mathbf{Y} = (Y, \Omega')$ ორი ერთნაირტიპიანი ალგებრებია; h ასახვაა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში; $f \in \Omega$ და $g \in \Omega'$ თანადი $n-$არული ალგებრული ოპერაციებია. იტყვიან, რომ h ასახვა ინახავს $\mathbf{X} = (X, \Omega)$ ალგებრის f ოპერაციას თუ ნებისმიერი $x_1, x_2, ..., x_n$ ელემენტებისათვის აღებული X სიმრავლიდან ყოველთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა
   $$h(f(x_1, x_2, ..., x_n)) = g(h(x_1), h(x_2), ..., h(x_n)).$$

თუ h ინახავს $\mathbf{X}=(X,\Omega)$ ალგებრის ნებისმიერ ოპერაციას, მაშინ მას $\mathbf{X}=(X,\Omega)$ ალგებრის $\mathbf{Y}=(Y,\Omega')$ ალგებრაში ჰომომორფულ ასახვას უწოდებენ. თუ h ასახვა ბიექციაა X და Y სიმრავლეებს შორის, მაშინ f ჰომომორფულ ასახვას ეწოდება იზომორფიზმი $\mathbf{X}=(X,\Omega)$ და $\mathbf{Y}=(Y,\Omega')$ ალგებრებს შორის.

6. ახლა ვთქვათ $(*)$ და $(\circ)$ ორი ბინარული ალგებრული ოპერაციაა X სიმრავლეზე. მათ შეიძლება გააჩნდეთ შემდეგი თვისებები:

1) $x*y=y*x$ ყოველი $x,y\in X$ ელემენტებისათვის ($(*)$ ოპერაცია კომუტაციურია);

2) $(x*y)*z=x*(y*z)$ ყოველი $x,y,z\in X$ ელემენტებისათვის ($(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია);

3) თუ $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ისეთი $e\in X$ ელემენტი, რომ $e*x=x*e=x$ ყოველი $x\in X$ ელემენტისათვის, მაშინ $e-$ს ნეიტრალური ელემენტი ეწოდება $(*)$ ოპერაციის მიმართ;

4) ვთქვათ $(*)$ ოპერაციის მიმართ X სიმრავლეში არსებობს e ნეიტრალური ელემენტი. თუ $(*)$ ოპერაციის მიმართ X სიმრავლის x ელემენტისათვის არსებობს ისეთი x' ელემენტი, რომ $x'*x=x*x'=e$, მაშინ x' ელემენტს x ელემენტის სიმეტრიული ელემენტი ეწოდება;

5) თუ $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ისეთი $0\in X$ ელემენტი, რომ $0*x=x*0=0$ ყოველი $x\in X$ ელემენტისათვის, მაშინ 0 ნულოვანი ელემენტი ეწოდება $(*)$ ოპერაციის მიმართ;

6) $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$ და $(y\circ z)*x=(y*x)\circ(z*x)$ ($(*)$ ოპერაციის დისტრიბუციულობის კანონები $(\circ)$ ოპერაციის მიმართ).

თუ $(*)$ ოპერაცია აღნიშნულია $(+)$ სიმბოლოთი, მაშინ მას X სიმრავლეზე შეკრების ოპერაცია ეწოდება. X სიმრავლის ნეიტრალურ e ელემენტს და x ელემენტის სიმეტრიულ x' ელემენტს შეკრების ოპერაციის მიმართ, შესაბამისად ნულოვან და მოპირდაპირე ელემენტებს უწოდებენ და 0 და $-x$ სიმბოლოებით აღნიშნავენ.

თუ $(*)$ ოპერაცია აღნიშნულია $(\cdot)$ სიმბოლოთი, მაშინ მას X სიმრავლეზე გამრავლების ოპერაცია ეწოდება. X სიმრავლის ნეიტრალურ e ელემენტს და x ელემენტის სიმეტრიულ x' ელემენტს გამრავლების ოპერაციის მიმართ, შესაბამისად ერთეულოვან და შებრუნებულ ელემენტებს უწოდებენ და 1 და x^{-1} სიმბოლოებით აღნიშნავენ.

7. $\mathbf{X}=(X,*)$ ალგებრას, სადაც $(*)$ ბინარული ალგებრული ასოციაციური ოპერაციაა, ნახევარჯგუფი ეწოდება.

თუ X ნახევარჯგუფში $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ნეიტრალური ელემენტი, მაშინ $\mathbf{X}$ ნახევარჯგუფს მონოიდი ეწოდება.

8. $\mathbf{X}=(X,*,')$ ალგებრას, სადაც $(*)$ არის ბინარული ალგებრული ოპერაცია, ხოლო (') უნარული ალგებრული ოპერაციაა, ჯგუფი ეწოდება, თუ

1) $(X,*)$ მონოიდია $(*)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური e ელემენტით;

2) ყოველი $x\in X$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $x'\in X$ ელემენტი, რომ $x*x'=x'*x=e$.

$\mathbf{X}$ ჯგუფს ეწოდება აბელური, თუ ჯგუფში განმარტებული $(*)$ ოპერაცია კომუტაციურია.

9. $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ალგებრას, სადაც $(+)$ და $(\cdot)$ არის ბინარული

ალგებრული ოპერაციები, $(-)$ უნარული ალგებრული ოპერაციაა, ხოლო 1 ნულარული ალგებრული ოპერაციაა, რგოლი ეწოდება, თუ:

1) $(X,+,-)$ აბელური ჯგუფია $(+)$ და $(-)$ ოპერაციების მიმართ ნულოვანი 0 ელემენტით;

2) $(X,\cdot)$ მონოიდია $(\cdot)$ ოპერაციის მიმართ ერთეულოვანი 1 ელემენტით;

3) $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ და $(y+z)\cdot x=(y\cdot x)+(z\cdot x)$;

$(X,+,-)$ აბელურ ჯგუფს, **X** რგოლის ადიციური ჯგუფი ეწოდება.

$(X,\cdot,1)$ ალგებრას **X** რგოლის მულტიპლიკაციური მონოიდი ეწოდება.

X რგოლს ეწოდება კომუტაციური, თუ რგოლში განმარტებული გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურია.

ამბობენ **X** რგოლია ნულის გამყოფი ელემენტების გარეშე, თუ ნებისმიერი $x,y\in X$ ელემენტებისათვის $x\neq 0$ და $y\neq 0$ პირობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს პირობა $x\cdot y\neq 0$.

10. კომუტაციურ **X** რგოლს ნულის გამყოფი ელემენტების გარეშე მთელობის არე ეწოდება.
11. ვთქვათ, 0 და 1 რგოლის ნულოვანი და ერთეულოვანი ელემენტებია. იმ უმცირეს $n\geq 1$ ნატურალურ რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $n\cdot 1=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=0$, რგოლის მახასიათებელი ეწოდება.
12. თუ ტოლობა $n\cdot 1=0$ სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $n=0$, მაშინ **X**-ს ნულმახასიათებლიანი რგოლი ეწოდება.
13. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რგოლია. თუ **X** რგოლის ყოველი არანულოვანი $x\in X$ ელემენტისათვის არსებობს შებრუნებული

$x^{-1}\in X$ ელემენტი, მაშინ **X** რგოლს ტანი ეწოდება.

14. ვთქვათ, 0 არის $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ტანის ნულოვანი ელემენტი. თუ $0\neq 1$, მაშინ კომუტაციურ **X** ტანს ველი ეწოდება.
15. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ არის რომელიღაც ველი, რომელსაც სკალართა ველი ეწოდება, ხოლო მის ელემენტებს კი - სკალარები ეწოდება.

ახლა, ვთქვათ, V არაცარიელი სიმრავლეა. $\omega: X\times V\to V$ რომელიღაც ასახვაა $X\times V$ სიმრავლისა V სიმრავლეში. ამ დროს (x,a) ელემენტის $(x\in X, a\in V)$ სახეს ω ასახვის დროს $x\cdot a$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, ე.ი. $\omega((x,a))=x\cdot a$.

თუ $x\in X$ სკალარი ფიქსირებულია და ω_x არის ω ასახვის შეზღუდვა $\{x\}\times V$ სიმრავლემდე, მაშინ ω_x ასახვა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც უნარული ოპერაცია V სიმრავლეზე.

16. ალგებრას $\mathbf{V}=(V,+,\{\omega_x \mid x\in X\})$ ეწოდება ვექტორული (წრფივი) სივრცე X ველზე, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $(V,+,-)$ ალგებრა, სადაც $(-)$ ოპერაცია ემთხვევა ω_{-1} $(-1\in X)$ ოპერაციას, აბელური ჯგუფია;

2) $\omega_{x\cdot y}(a)=\omega_x(\omega_y(a))$ (ე.ი. $(x\cdot y)\cdot a=x\cdot(y\cdot a)$), ყოველი $x,y\in X$ სკალარისათვის და $a\in V$ ელემენტისათვის;

3) $\omega_{x+y}(a)=\omega_x(a)+\omega_y(a)$ (ე.ი. $(x+y)\cdot a=x\cdot a+y\cdot a$), ყოველი $x,y\in X$ სკალარისათვის და $a\in V$ ელემენტისათვის;

4) $\omega_x(a+b)=\omega_x(a)+\omega_x(b)$ (ე.ი. $x\cdot(a+b)=x\cdot a+x\cdot b$), ყოველი $x\in X$ სკალარისათვის და $a,b\in V$ ელემენტებისათვის;

5) $\omega_1(a)=a$ (ე.ი. $1\cdot a=a$), ყოველი $a\in V$ ელემენტისათვის.

17. $(V,+,-)$ ჯგუფს **V** ვექტორული სივრცის ადიციური ჯგუფი ეწოდება. ამ ჯგუფის ნულოვან ელემენტს, რომელიც **0** სიმბო-

ლოთი აღინიშნება, **V** ვექტორული სივრცის ნულოვანი ელემენტი ეწოდება. **V** ვექტორული სივრცის ელემენტებს ვექტორები ეწოდება, ხოლო V სიმრავლის a და $\omega_{-1}(a)=-a$ ელემენტებს, მოპირდაპირე ვექტორები ეწოდება. და ბოლოს $b)$, $c)$, $d)$ და $e)$ პირობებს **V** ვექტორული სივრცის აქსიომები ეწოდება.

18. ალგებრას $\mathbf{V}=(V,+,\cdot,\{\omega_x \mid x\in X\})$, სადაც $(V,+,\{\omega_x \mid x\in X\})$ ვექტორული სივრცეა **X** ველზე, ეწოდება წრფივი ალგებრა, თუ
   1) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ და $c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$, ყოველი $a,b,c\in V$ ელემენტებისათვის;
   2) $\omega_x(a\cdot b)=(\omega_x a)\cdot b=a\cdot(\omega_x b)$ (ე.ი. $x\cdot(a\cdot b)=(x\cdot a)\cdot b=a\cdot(x\cdot b)$), ყოველი $a,b\in V$ და $x\in X$ ელემენტებისათვის.

   $(V,+,\{\omega_x \mid x\in X\})$ ვექტორული სივრცის განზომილებას **V** ალგებრის რანგი ეწოდება.
19. ისეთ წრფივ ალგებრას, რომლის ყოველ ნულისაგან განსხვავებულ ელემენტს გამრავლების ოპერაციის მიმართ გააჩნია შებრუნებული ელემენტი, ეწოდება ალგებრა გაყოფით.
20. ვთქვათ, f არის (X,Ω) ალგებრის $n-$არული ალგებრული ოპერაციაა; R ეკვივალენტობის მიმართებაა $X-$სიმრავლეზე; იტყვიან, რომ R ეკვივალენტობა ინახავს f ოპერაციას, თუ $x_1Ry_1,\ x_2Ry_2,...,x_nRy_n$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $f(x_1,x_2,...,x_n)Rf(y_1,y_2,...,y_n)$ პირობა. თუ R ეკვივალენტობა ინახავს (X,Ω) ალგებრის ნებისმიერ ოპერაციას, მაშინ $R-$ს (X,Ω) ალგებრის კონგრუენცია ეწოდება.

მაგალითი 1. ვთქვათ, R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა, $a,b,c\in R$, ხოლო Z ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლეა.

აჩვენეთ, რომ α მიმართება არის (R,f,g) ალგებრის კონგრუენცია, თუ ნებისმიერი $a,b,c\in R-$სათვის $f(a,b)=3\cdot a+5\cdot b$, $g(a,b,c)=a+2\cdot b-c$ და $a\alpha b\equiv a-b\in Z$.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ α ეკვივალენტობის მიმართებაა R სიმრავლეზე.

1) ვთქვათ, a არის R სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ $a-a=0\in Z$. ამიტომ $a\alpha a$ ნებისმიერი $a\in R-$სათვის მივიღეთ, რომ α ბინარული მიმართება რეფლექსურია.

2) ახლა, ვთქვათ, $a\alpha b$ რომელიღაც $a,b\in R-$სათვის. პირობიდან $a\alpha b$ მივიღებთ $a-b\in Z$. ამიტომაც $-(a-b)\in Z$ და $b-a\in Z$, ე.ი. $b\alpha a$. მივიღეთ, რომ α ბინარული მიმართება სიმეტრიულია.

3) ახლა, ვთქვათ, $a\alpha b\alpha c$ რომელიღაც $a,b,c\in R-$სათვის. პირობიდან $a\alpha b\alpha c$ მივიღებთ $a-b,\ b-c\in Z$. ამიტომაც

$$a-c=(a-b)+(b-c)\in Z,$$

ე.ი. $a\alpha c$. მივიღეთ, რომ α მიმართება ტრანზიტულია.

1), 2) და 3) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ α ეკვივალენტობის მიმართებაა R სიმრავლეზე.

ახლა, ვთქვათ, რომელიღაც $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in R-$სათვის $a_1\alpha b_1$, $a_2\alpha b_2$ და $a_3\alpha b_3$. მაშინ α მიმართების, f და g ოპერაციების განსაზღვრის თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned}
&a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3\in Z;\\
&f(a_1,a_2)-f(b_1,b_2)=(3\cdot a_1+5\cdot a_2)-(3\cdot b_1+5\cdot b_2)=\\
&=3\cdot(a_1-b_1)-5\cdot(a_2-b_2)\in Z,\\
&g(a_1,a_2,a_3)-g(b_1,b_2,b_3)=(a_1+2\cdot a_2-a_3)-(b_1+2\cdot b_2-b_3)=\\
&=(a_1-b_1)+2\cdot(a_2-b_2)-(a_3-b_3)\in Z,
\end{aligned}$$

ე.ი. $f(a_1,a_2)-f(b_1,b_2)\in Z$ და $g(a_1,a_2,a_3)-g(b_1,b_2,b_3)\in Z$, ამიტომაც სამართლიანია პირობები:

$$f(a_1,a_2)\alpha f(b_1,b_2),\ g(a_1,a_2,a_3)\alpha g(b_1,b_2,b_3).$$

1 და 2 პუნქტებიდან მივიღებთ, რომ α ეკვივალენტობის მიმართება კონგრუენციაა (R,f,g) ალგებრაზე.

მაგალითი 2. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{R}=(R,\oplus)$ ალგებრა ჯგუფია $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ და იპოვეთ მისი იდემპოტენტური, ნეიტრალური და სიმეტრიული ელემენტები, თუ $a\oplus b=a+b+10$.

1) ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $(\oplus)$ ოპერაცია ასოციაციურია. ვთქვათ, $a,b,c\in R$. გამოვთვალოთ:

$$(a\oplus b)\oplus c=(a+b+10)\oplus c=(a+b+10)+c+10=a+b+c+20,$$
$$a\oplus(b\oplus c)=a\oplus(b+c+10)=a+(b+c+10)+10=a+b+c+20,$$

რადგანაც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრების ოპერაცია კომუტაციური და ასოციაციურია. ამგვარად, $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$, ე.ი. $(\oplus)$ ოპერაცია ასოციაციურია. მივიღეთ, რომ $\mathbf{R}=(R,\oplus)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია.

2) ახლა ვიპოვოთ $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ იდემპოტენტური ელემენტები. მართლაც, ვთქვათ, $a\in R$ ელემენტი იდემპოტენტურია, მაშინ $a\oplus a=a$, ე.ი. $a+a+10=a$. ამიტომაც $a=-10$. მივიღეთ, რომ მოცემულ ნახევარჯგუფს $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ გააჩნია ერთადერთი იდემპოტენტური ელემენტი -10.

3) ახლა ვიპოვოთ $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ ნახევარჯგუფის ნეიტრალური ელემენტი. მართლაც, ვთქვათ, $e\in R$ ელემენტი ნეიტრალურია, მაშინ $a\oplus e=a$ ყოველი $a\in R-$სათვის, ე.ი. $a+e+10=a$. ამიტომაც $e=-10$. მივიღეთ, რომ მოცემულ ნახევარჯგუფს $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი -10.

4) ახლა ვიპოვოთ $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ $a\in R$ სიმეტრიული ელემენტი e ნეიტრალური ელემენტის მიმართ. მართლაც, თუ $a'\in R$ ელემენტი არის a ელემენტის სიმეტრიული ელემენტი. მაშინ $a\oplus a'=a'\oplus a=-10$. ჩვენს შემთხვევაში $(\oplus)$ ოპერაცია კომუტაციურია, ამიტომ დასახელებული $a-$სათვის $a'-$ის საპოვნელად საკმარისია $a\oplus a'=-10$ ტოლობიდან ამოვხსნათ a'. გვექნება: $a+a'+10=-10$, ე.ი. $a'=-20-a$. ამგვარად, $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ a სიმეტრიული a' ელემენტი ნეიტრალური $e=-10$ ელემენტის მიმართ გამოითვლება ფორმულით $a'=-20-a$.

სავარჯიშოები

სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლები და მათი თვისებები

1. ვთქვათ, $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{a,b\}$ და $D=\{c\}$. იპოვეთ შემდეგ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლები:
   1) $A\times A$; 2) $A\times B$; 3) $B\times A$; 4) $A\times(B\times D)$; 5) $(A\times B)\times D$;
   6) $A\times B\times C\times D$.
2. არიან თუ არა ერთმანეთის ტოლი $A\times(B\times D)$ და $(A\times B)\times D$ სიმრავლეები?
3. არის თუ არა სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის ოპერაცია კომუტაციური და ასოციაციური?
4. რამდენი ელემენტი იქნება $A\times B\times C\times D$ სიმრავლეში?
5. დაამტკიცეთ, რომ $|X_1\times X_2\times\cdots\times X_n|=k_1\cdot k_2\cdots k_n$, თუ $|X_1|=k_1$, $|X_2|=k_2,\dots,|X_n|=k_n$.

n - არული ალგებრული ოპერაციები და ალგებრები

1. ვთქვათ, N ყველა ნატურალური რიცხვების სიმრავლეა. $f-$ით აღვნიშნოთ ასახვა $N^n=N\times N\times\cdots\times N$ სიმრავლისა N სიმრავლეში, რომელიც N^n სიმრავლის $(m_1,m_2,\dots,m_n)$ ელემენტს შეუსა-

ზამებს ამ ელემენტების უმცირეს საერთო ჯერადს $[m_1, m_2, ..., m_n]$ (უდიდეს საერთო გამყოფს). იქნება თუ არა f ასახვა $n-$არული ალგებრული ოპერაცია N სიმრავლეზე (რა მოხდება, თუ N სიმრავლეს შევცვლით ყველა მთელ რიცხვთა Z სიმრავლით. ასეთ შემთხვევაში f ოპერაცია იქნება თუ არა ალგებრული Z სიმრავლეზე?).

2. ვთქვათ, N, Z, Q, R, C, K სიმბოლოებით შესაბამისად აღნიშნული არიან ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლე, ყველა რაციონალური რიცხვების სიმრავლე, ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე, ყველა კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე და ყველა კვატერნიონების სიმრავლე. $(+), (-), (\cdot)$ და $(:)$ სიმბოლოებით აღნიშნული არიან შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის ოპერაციები მოცემულ სიმრავლეებზე.

შეამოწმეთ:

1) ჩამოთვლილი ოპერაციებიდან რომელი ოპერაციებია ალგებრული N, Z, Q, R, C, K სიმრავლეებზე.

2) ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან ალგებრას.

3) ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან ნახევარჯგუფს.

4) ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან მონოიდს.

5) ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან ჯგუფს.

6) ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან რგოლს.

7) ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან ტანს.

8) ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან ველს.

1. შეამოწმეთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები $(+), (-), (\cdot)$ ოპერაციების მიმართ ქმნიან ველს:

1) ყველა კენტმნიშვნელიანი რაციონალური რიცხვები;

2) ყველა $x + y\sqrt{2}$ სახის რიცხვები, სადაც $x, y \in Q$;

3) ყველა $x + y\sqrt{5}$ სახის რიცხვები, სადაც $x, y \in Q$;

4) ყველა $x + y\sqrt[3]{2}$ სახის რიცხვები, სადაც $x, y \in Q$;

5) ყველა $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$ სახის რიცხვები, სადაც $x, y \in Q$;

2. ვთქვათ, m ნულისაგან განსხვავებული რომელიღაც ნატურალური რიცხვია.

$$\overline{0} = \{mz \mid z \in Z\},\ \overline{1} = \{mz+1 \mid z \in Z\}, ...,\ \overline{m-1} = \{mz+(m-1) \mid z \in Z\}.$$

ახლა, ვთქვათ, $Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{m-1}\}$ და $\overline{i}, \overline{j} \in Z_m$. Z სიმრავლეში შემოვიტანოთ ელემენტთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები შემდეგნაირად: $\overline{i} + \overline{j} = \overline{i+j}$ და $\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{i \cdot j}$. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{Z_m} = (Z_m, +, -, \cdot, \overline{1})$ ალგებრა ყოველთვის რგოლია და ველია, როცა m მარტივი რიცხვია. რგოლის მახასიათებელი კი m-ის ტოლია.

3. ვთქვათ, X ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა. X სიმრავლეზე განვმარტოთ $(\cdot)$ გამრავლების ოპერაცია შემდეგნაირად: $x \cdot y = x$ ყოველი $x, y \in X$ ელემენტებისათვის.

აჩვენეთ, რომ ალგებრა $(X, \cdot)$ ნახევარჯგუფია.

4. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{R} = (R, *)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია $(*)$ ოპერა-

ციის მიმართ და იპოვეთ მისი იდემპოტენტური ელემენტები, თუ

1) $a*b=a+b+3$; 2) $a*b=a\cdot(1-b)+b$; 3) $a*b=a+b-ab$;

4) $a*b=a+b+ab$; 5) $a*b=-a-b+ab+2$;

6) $a*b=-2a-2b+ab+6$;

7) $a*b=2a+2b+2ab+1$, სადაც R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $(+),(-),(\cdot)$ შესაბამისად შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციებია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

5. ვთქვათ, M არის ყველა $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}$ სახის მატრიცების სიმრავლე რაციონალური a და b ელემენტებით. აჩვენეთ, რომ ალგებრა $\mathbf{M}=(M,+,-,\cdot,e)$, სადაც $(+)$, $(-)$ და $(\cdot)$ მატრიცების შეკრების, მოპირდაპირე ელემენტის აღების და გამრავლების ოპერაციებია, ხოლო $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{M}$ ალგებრა ველია, რომელიც შეიცავს ისეთ x ელემენტს, რომ $x^2=-e$.

6. ვთქვათ, Z ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $(+)$, $(-)$ და $(\cdot)$ შესაბამისად შეკრების, გამოკლების და გამრავლების ოპერაციებია მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე და $x,y\in Z$. აჩვენეთ, რომ $(Z,\oplus,',*,e)$ ალგებრა რგოლია, თუ

1) $x\oplus y=x+y-2$, $x*y=x\cdot y-2\cdot x-2\cdot y+6$;

2) $x\oplus y=x+y-1$, $x*y=x\cdot y-x-y+2$;

3) $x\oplus y=x+y+3$, $x*y=x\cdot y+3\cdot x+3\cdot y+6$;

4) $x\oplus y=x+y+2$, $x*y=x\cdot y+2\cdot x+2\cdot y+2$ (პრიმ სიმბოლოთი აღნიშნულია x ელემენტის სიმეტრიული $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ).

7. ვთქვათ, R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $(+)$, $(-)$ და $(\cdot)$ შესაბამისად შეკრების, გამოკლების და გამრავლების ოპერაციებია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე და $x,y\in Z$.

8. აჩვენეთ, რომ $(Z,\oplus,',*,e)$ ალგებრა ველია, თუ

1) $x\oplus y=x+y-\frac{1}{2}$, $x*y=x\cdot y-\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot y+\frac{3}{4}$;

2) $x\oplus y=x+y-\frac{1}{2}$, $x*y=\frac{3}{2}x\cdot y-\frac{3}{4}\cdot x-\frac{3}{4}\cdot y+\frac{7}{8}$;

3) $x\oplus y=x+y+\frac{1}{2}$, $x*y=x\cdot y+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y-\frac{1}{4}$ (პრიმ სიმბოლოთი აღნიშნულია x ელემენტის სიმეტრიული $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ).

9. ვთქვათ, $R^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\,|\,x_1,x_2,...,x_n\in R\}$. $(x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$ და $x\in R$. R^n სიმრავლეზე განვმარტოთ ბინარული $(+)$ და უნარული ω_x ოპერაციები შემდეგნაირად:

$$(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n),$$

$$\omega_x(x_1,x_2,...,x_n)=x\cdot(x_1,x_2,...,x_n)=(x\cdot x_1,x\cdot x_2,...,x\cdot x_n).$$

აჩვენეთ, რომ ალგებრა $\mathbf{R^n}=(R^n,+,\{\omega_x\,|\,x\in X\})$ ვექტორული სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა R ველზე.

10. ვთქვათ, P' არის რიცხვითი P ველის საკუთარი ქვეველი. ქმნის თუ არა ვექტორულ სივრცეს P' ველი P ველზე, P' ველის ელემენტების შეკრების ოპერაციისა და P ველის ელემენტების P' ველის ელემენტებზე გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

11. ვთქვათ, P' არის რიცხვითი P ველის საკუთარი ქვეველი. ქმნის თუ არა ვექტორულ სივრცეს P ველი P' ველზე, P ველის ელემენტების შეკრების ოპერაციისა და P' ველის ელე-

მენტების P ველის ელემენტებზე გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

12. ვთქვათ, h არის (A,f) ალგებრის ჰომომორფული ასახვა (B,g) ალგებრაში. როგორ ჩაიწერება h ასახვის ეს თვისება, თუ f და g ნულარული, უნარული და ბინარული ოპერაციებია.

13. ვთქვათ, Z ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $(\cdot)$ გამრავლების ოპერაციაა Z სიმრავლეზე.

1) იქნება თუ არა $h(x)=2\cdot x$ $(x\in Z)$ ასახვა ჰომომორფიზმი $(Z,1)$ ალგებრისა $(Z,2)$ ალგებრაში?

2) იქნება თუ არა $h(x)=2\cdot x$ $(x\in Z)$ ასახვა ჰომომორფიზმი $(Z,1)$ ალგებრისა $(Z,1)$ ალგებრაში?

14. ვთქვათ, Z ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $(+)$ და $(\cdot)$ შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებია Z სიმრავლეზე.

1) იქნება თუ არა $h(x)=x+1$ $(x\in Z)$ ასახვა ჰომომორფიზმი $(Z,+)$ ალგებრისა $(Z,+)$ ალგებრაში?

2) იქნება თუ არა $h(x)=x+1$ $(x\in Z)$ ასახვა ჰომომორფიზმი $(Z,\cdot)$ ალგებრისა $(Z,\cdot)$ ალგებრაში?

3) იქნება თუ არა $h(x)=2\cdot x$ $(x\in Z)$ ასახვა ჰომომორფიზმი $(Z,+)$ ალგებრისა $(Z,+)$ ალგებრაში?

4) იქნება თუ არა $h(x)=2\cdot x$ $(x\in Z)$ ასახვა ჰომომორფიზმი $(Z,\cdot)$ ალგებრისა $(Z,\cdot)$ ალგებრაში?

5) იქნება თუ არა $h(x)=2\cdot x$ $(x\in Z)$ ასახვა ჰომომორფიზმი $(Z,+,1)$ ალგებრისა $(Z,+,2)$ ალგებრაში?

n – არული მიმართებები, n – არული ალგებრული
ოპერაციები, ალგებრები და ალგებრული
სისტემები

15. ვთქვათ, Z ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $(\cdot)$ გამრავლების ოპერაციაა Z სიმრავლეზე. იქნება თუ არა $h(x)=x^2$ $(x\in Q)$ ასახვა ჰომომორფიზმი $(\mathrm{Z},\cdot,1)$ ალგებრისა $(\mathrm{Z},\cdot,1)$ ალგებრაში?

16. იქნება თუ არა იმ ნახევარჯგუფის ჰომომორფული სახე, რომელიც შეკვეცადობის პირობას აკმაყოფილებს, ნახევარჯგუფი შეკვეცადობის პირობით?

17. შეიძლება თუ არა ალგებრა იყოს იზომორფული მისი რომელიმე ფაქტორალგებრის?

18. ვთქვათ, f და g შესაბამისად ბინარული ალგებრული ოპერაციებია X და Y სიმრავლეებზე, ხოლო h არის (X,f) ალგებრის ჰომომორფული ასახვა (Y,g) ალგებრაზე. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) თუ f კომუტაციური ოპერაციაა, მაშინ g ოპერაციაც კომუტაციური იქნება;

2) თუ f ასოციაციური ოპერაციაა, მაშინ g ოპერაციაც ასოციაციური ოპერაცია იქნება;

3) თუ e არის f ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური ელემენტი X სიმრავლეში, მაშინ $h(e)$ იქნება ნეიტრალური ელემენტი Y სიმრავლეში;

4) თუ e არის f ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური ელემენტი X სიმრავლეში და $xfx'=e$, მაშინ $h(x)\,gh(x')=h(e)$.

19. $(+)$ და $(\cdot)$ შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებია ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეში ხოლო h ისეთი ასახვაა N სიმრავლისა N – ში, რომ $h(n)=2^n$ ყოველი $n\in N$ ელემენტისათვის. აჩვენეთ, რომ h ასახვა ჰომომორფიზმია $(N,+)$ ალგებ-

რისა $(N,\cdot)$ ალგებრაში.

20. $(+)$ და $(\cdot)$ შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში, ხოლო $a\in R$ ფიქსირებული დადებითი რიცხვია. h ისეთი ასახვაა R სიმრავლისა $R-$ში, რომ $h(r)=a^r$ ყოველი $r\in R$ რიცხვისათვის. აჩვენეთ, რომ h ასახვა ჰომომორფიზმია $(R,+)$ ალგებრისა $(R,\cdot)$ ალგებრაში.

21. ვთქვათ, R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $(-)$ და $(\cdot)$ გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციებია R სიმრავლეზე. იქნება თუ არა h ასახვა $(R,-)$ ალგებრისა $(R,-)$ ალგებრაში ჰომომორფიზმი, თუ

1) $h(x)=2\cdot x$; 2) $h(x)=\frac{1}{3}\cdot x$; 3) $h(x)=x^2$; 4) $h(x)=0$; 5) $h(x)=|x|$;

6) $h(x)=1$.

22. დაადგინეთ, რომელი ოპერეციაა ასოციაციური:

1) მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეზე განსაზღვრული $(*)$ ოპერაცია, თუ $a*b=a-b$ $(a,b\in Z)$;

2) ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განსაზღვრული $(*)$ ოპერაცია, თუ $a*b=a+b+a\cdot b$ $(a,b\in R)$;

3) რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლეზე განსაზღვრული $(*)$ ოპერაცია, თუ $a*b=\frac{a+b}{5}$ $(a,b\in Q)$;

4) $Z\times Z$ სიმრავლეზე განსაზღვრული $(*)$ ოპერაცია, თუ $(a,b)*(c,d)=(a\cdot d+b\cdot c,\ b\cdot d)$ $((a,b),(c,d)\in Z\times Z)$;

5) ნულისაგან განსხვავებულ რაციონალურ რიცხვთა $Q\setminus\{0\}$

სიმრავლეზე განსაზღვრული $(*)$ ოპერაცია, თუ $a*b=\frac{a}{b}$ $(a,b\in Q\setminus\{0\})$.

23. ვთქვათ, R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა და $a,b\in R$. აჩვენეთ, რომ α მიმართება არის (R,f) ალგებრის კონგრუენცია, თუ $f(a)=3\cdot a$, $a\alpha b\equiv(a^2=b^2)$.

24. ვთქვათ, R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა და $a,b\in R$. Z ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ α მიმართება არის $(R,\oplus)$ ალგებრის კონგრუენცია, თუ $a\oplus b=a+b$, $a\alpha b\equiv a-b\in Z$.

25. ვთქვათ, R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა, $a,b,c\in R$, ხოლო Z ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ α მიმართება არის (R,f) ალგებრის კონგრუენცია, თუ

1) $f(a,b,c)=a+2\cdot b-c$, $a\alpha b\equiv a-b\in Z$;

2) $f(a,b,c)=a-3\cdot b+c$, $a\alpha b\equiv a-b\in Z$.

26. ვთქვათ, R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა, $a,b,c,d\in R$, ხოლო Z ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ α მიმართება არის (R,f,g) ალგებრის კონგრუენცია, თუ

1) $f(a,b)=3a+2\cdot b$, $g(a,b,c)=a+2\cdot b-c$, $a\alpha b\equiv a-b\in Z$;

2) $f(a,b,c)=a-3\cdot b+c, f(a,b,c,d)=a-3\cdot b+c+2\cdot d$, $a\alpha b\equiv a-b\in Z$.

27. ვთქვათ, $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ყველა ნამდვილ რიცხვთა ველია. $R^+=\{x\in R\,|\,0<x\}$, $A=\{x\in R^+\,|\,0<x<1\}$ და $a,b\in R^+$. აჩვენეთ, რომ $f:R^+\to A$ ასახვა ჰომომორფიზმია $\mathrm{R}^+=(R^+,\cdot,{}^{-1})$ ალგებრისა $(A,*)$ ალგებრაში, და რომ $(A,*)$ ალგებრა ჯგუფია, თუ:

1) $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $a*b=\frac{a\cdot b}{1-a-b+2\cdot a\cdot b}$; 2) $f(x)=\frac{1}{2\cdot x+1}$, $a*b=\frac{2\cdot a\cdot b}{1-a-b+3\cdot a\cdot b}$;

3) $f(x)=\frac{2}{x+2}$, $a*b=\frac{2\cdot a\cdot b}{2-2\cdot a-2\cdot b+3\cdot a\cdot b}$; 4) $f(x)=\frac{2}{3\cdot x+2}$, $a*b=\frac{3\cdot a\cdot b}{2-2\cdot a-2\cdot b+5\cdot a\cdot b}$.

28. ვთქვათ, R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა და $a,b\in R$. აჩვენეთ, რომ $f:R\to R$ ასახვა ჰომომორფიზმია ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ველისა $(A,\oplus,*)$ ალგებრაში, და რომ $(A,\oplus,*)$ ალგებრა ველია, თუ:

1) $f(x)=2\cdot x+1$, $a\oplus b=a+b-1$, $a*b=\frac{1}{2}\cdot(a\cdot b-a-b+3)$;

2) $f(x)=2\cdot x+2$, $a\oplus b=a+b-2$, $a*b=\frac{1}{2}\cdot(a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+8)$;

3) $f(x)=2\cdot x+3$, $a\oplus b=a+b-3$, $a*b=\frac{1}{2}\cdot(a\cdot b-3\cdot a-3\cdot b+15)$.

პასუხები

სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი.

1. 1) $A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$; 2) $A\times B=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$;

3) $B\times A=\{(2,1),(3,1),(2,2),(3,2)\}$;

4) $A\times(B\times D)=A\times\{(2,c),(3,c)\}=\{(1,(2,c)),(1,(3,c)),(2,(2,c)),(2,(3,c))\}$;

5) $(A\times B)\times D=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}\times D=\{((1,2),c),((1,3),c),((2,2),c),((2,3),c)\}$.

2. $A\times(B\times D)\neq(A\times B)\times D$.

3. სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის ოპერაცია არაა არც კომუტაციური და არც ასოციაციური.

4. $|A\times B\times C\times D|=2\cdot2\cdot2\cdot1=6$.

n – არული ალგებრული ოპერაციები და ალგებრები.

1. იქნება (არ იქნება);

2. 1) $(+)$ და $(\cdot)$ ოპერაციები ალგებრულია N,Z,Q,R,C,K სიმრავლეებზე; $(-)$ ოპერაცია ალგებრულია Z,Q,R,C,K სიმრავლეებზე; $(:)$ ოპერაცია არაა ალგებრული არცერთ N,Z,Q,R,C,K სიმრავლეზე.

2) სიმრავლეები N,Z,Q,R,C,K თითოდ აღებული $(+)$ და $(\cdot)$ ოპერაციების, ან ორივე ოპერაციის მიმართ ყოველთვის ქმნიან ალგებრას; სიმრავლეები Z,Q,R,C,K ცალკ-ცალკე აღებული $(+)$, $(-)$ და $(\cdot)$ ოპერაციების, ან ორ-ორად აღებული, ან სამივე ოპერაციის მიმართ ყოველთვის ქმნიან ალგებრას.

3) სიმრავლეები N,Z,Q,R,C,K ცალკ-ცალკე აღებული $(+)$ და $(\cdot)$ ოპერაციების მიმართ ყოველთვის ქმნიან ნახევარჯგუფს.

4) სიმრავლეები N,Z,Q,R,C,K ცალკ-ცალკე აღებული $(+)$ და $(\cdot)$ ოპერაციების მიმართ ყოველთვის ქმნიან მონოიდს.

5) $(+)$ ოპერაციის მიმართ Z,Q,R,C,K სიმრავლეები ყოველთვის ქმნიან ჯგუფს.

6) Z,Q,R,C,K სიმრავლეები $(+)$ და $(\cdot)$ ოპერაციების მიმართ ყოველთვის ქმნიან რგოლს.

7) Q,R,C,K სიმრავლეები $(+)$ და $(\cdot)$ ოპერაციების მიმართ ყოველთვის ქმნიან ტანს.

8) Q,R,C სიმრავლეები $(+)$ და $(\cdot)$ ოპერაციების მიმართ ყოველთვის ქმნიან ველს.

3. 1) არ ქმნის ველს, რადგან არაა სავალდებულო კენტმნიშვნელიანი რაციონალური რიცხვის შებრუნებული იყოს კენტმნიშვნელიანი რაციონალური რიცხვი.

2) ყველა $x+y\sqrt{2}$ სახის რიცხებვის სიმრავლე, რაციონალური x და y კოეფიციენტებით იქნება ველი.

3) ყველა $x+y\sqrt{5}$ სახის რიცხვის სიმრავლეა, რაციონალური x და y კოეფიციენტებით იქნება ველი.

4) ყველა $x+y\sqrt[3]{2}$ სახის რიცხვის სიმრავლეა, რაციონალური x და y კოეფიციენტებით არ იქნება ველი, რადგანაც იგი გამრავლების ოპერაციის მიმართ ჩაკეტილი არ არის.

5) ყველა $x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}$ სახის რიცხვის სიმრავლეა, რაციონალური x და y კოეფიციენტებით იქნება ველი.

11. თუ P' არის რიცხვითი P ველის ქვეველი, მაშინ P იქნება ვექტორული სივრცე P' ველზე, P ველის ელემენტების შეკრების ოპერაციისა და P' ველის ელემენტების P ველის ელემენტებზე გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

12. თუ P' არის რიცხვითი P ველის ქვეველი, მაშინ P' არ იქნება ვექტორული სივრცე P ველზე, P' ველის ელემენტების შეკრების ოპერაციისა და P ველის ელემენტების P' ველის ელემენტებზე გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

13. თუ f ნულარული ოპერაციაა, მაშინ $h(f)=g$; თუ f უნარული ალგებრული ოპერაციაა, მაშინ $h\big(f(a)\big)=g\big(h(a)\big)$ ყოველი $a\in A-$სათვის; თუ f ბინარული ალგებრული ოპერაციაა, მაშინ $h\big(f(a,b)\big)=g\big(h(a),h(b)\big)$ ყოველი $a,b\in A-$ სათვის.

14. 1) ჰომომორფიზმია. 2} არა ჰომომორფიზმი.

15. 1) ჰომომორფიზმია. 2) ჰომომორფიზმია. 3) ჰომომორფიზმია. 4) არაა ჰომომორფიზმი. 5) არაა ჰომომორფიზმი.

16. 1) ჰომომორფიზმია.

17. შეკვეცადობის პირობის მქონე ნახევარჯგუფის ჰომომორფული სახე, იქნება ნახევარჯგუფი შეკვეცადობის პირობით.

18. ალგებრა და ფატორალგებრა ერთმანეთის იზომორფული იქნება, თუ კონგრუენციის თითოეული კლასი ერთელემენტიანია.

19. 1) ჰომომორფიზმია. 2) ჰომომორფიზმია. 3) არაა ჰომომორფიზმი. 4) ჰომომორფიზმია. 5) არაა ჰომომორფიზმი, რადგანაც საზოგადოდ $|a-b|\neq|a|-|b|$ ნებისმიერი $a,b\in R-$სათვის ($1=|2-3|\neq|2|-|3|=-1$). 6) არაა ჰომომორფიზმი.

23. 1) არაასაოციაციურია. 2) ასოციაციურია. 3) ასოციაციურია. 4) ასოციაციურია. 5) არაასოციაციურია.

§ 6. რიცხვითი სისტემები

ნატურალურ რიცხვთა სისტემა

1. $\mathbf{N}=(N,+,\cdot,0,1)$ ალგებრას, სადაც N არაცარიელი სიმრავლეა, $(+)$, $(\cdot)$ შესაბამისად შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციებია, ხოლო 0 და 1 ნულარული ოპერაციებია, ეწოდება ნატურალურ რიცხვთა სისტემა, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:
   1) $n+1\neq 0$ ყოველი $n\in N$ ელემენტისათვის;
   2) თუ $n+1=m+1$, მაშინ $n=m$ ყოველი $n,m\in N$ ელემენტებისათვის;
   3) $m+0=m$, ყოველი $m\in N$ ელემენტისათვის;
   4) $n+(m+1)=(n+m)+1$, ყოველი $n,m\in N$ ელემენტებისათვის;
   5) $n\cdot 0=0$, ყოველი $n\in N$ ელემენტისათვის;
   6) $n\cdot(m+1)=n\cdot m+n$, ყოველი $n,m\in N$ ელემენტებისათვის;
   7) თუ A არის N სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე, რომ $0\in A$ და ყოველი $n-$სათვის პირობიდან $n\in A$ ყოველთვის გამომდინარეობს $n+1\in A$ პირობა, მაშინ $A=N$.

   საზოგადოდ $1)-7)$ პირობებს პეანოს აქსიომები ეწოდება. $7)$ აქსიომას კი ინდუქციის აქსიომა ეწოდება.

   N სიმრავლის ელემენტებს ნატურალური რიცხვები ეწოდება. $0-$სა და $1-$ს ნატურალურ რიცხვთა $\mathbf{N}$ სისტემის ნულოვანი და ერთეულოვანი ელემენტი ეწოდება.

   $1+1$, $(1+1)+1$, $((1+1)+1)+1$ და ა.შ. ელემენტების ჩასაწერად შესაბამისად გამოიყენებიან სიმბოლოები 2, 3, 4 და ა.შ. ამგვარად, $1+1=2$, $(1+1)+1=3$, $((1+1)+1)+1=4$ და ა.შ.

2. **(მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი).** თუ $T(n)$ არის ისეთი ერთადგილიანი პრედიკატი ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე, რომლიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:
   1) $T(0)$ ჭეშმარიტია;
   2) თუ იმ პირობიდან, რომ $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია ყოველი $n\in N-$სათვის, ყოველთვის გამომდინარეობს პირობა, რომ $T(n+1)$ პრედიკატიც ჭეშმარიტია, მაშინ $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

3. $T(n)$ არის ერთადგილიანი პრედიკატი ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე, რომლიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:
   1) $T(m)$ ჭეშმარიტია;
   2) თუ იმ პირობიდან, რომ $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია ყოველი $n\in N-$სათვის $(n\geq m)$, ყოველთვის გამომდინარეობს პირობა, რომ $T(n+1)$ პრედიკატიც ჭეშმარიტი იქნება, მაშინ $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური $n\geq m$ რიცხვისათვის.
4. $T(n)$ არის ერთადგილიანი პრედიკატი ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:
   1) $T(0)$ ჭეშმარიტია;
   2) თუ ყოველი $n\in N-$სათვის, $T(n)$ პრედიკატის ჭეშმარიტობა გამომდინარეობს იმ დაშვებიდან, რომ $T(m)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია ყოველი $n-$ზე ნაკლები m რიცხვისათვის, მაშინ $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.
5. n და m ნატურალური რიცხვების სხვაობა ეწოდება ისეთ ნატურალურ k რიცხვს, რომ $n+k=m$.
6. ვთქვათ $n,m\in N$. იტყვიან, რომ n ნატურალური რიცხვი ნაკლებია m ნატურალურ რიცხვზე და სიმბოლურად ჩაწერენ $n<m$, თუ არსებობს ისეთი ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური k რიცხვი, რომ $n+k=m$. ჩანაწერი $n\leq m$ ნიშნავს,

რომ $n<m$ ან $n=m$.

ახლა მოვიყანოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ბინარულ ალგებრულ ოპერაციათა და „$\le$“ ბინარული მიმართების ზოგიერთი თვისებები.

ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები და „$\le$“ მიმართება აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) შეკრების ოპერაცია კომუტაციურია;

2) შეკრების ოპერაცია ასოციაციურია;

3) ნებისმიერი n, m და k ნატურალური რიცხვებისათვის $n+k=m+k$ პირობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $n=m$ ტოლობა;

4) ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის ან $n=0$ ან არსებობს ისეთი ნატურალური m რიცხვი, რომ $n=m+1$;

5) ნებისმიერი n და m ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $n+m=0$, მაშინ $n=m=0$;

6) ნებისმიერი n და m ნატურალური რიცხვებისათვის ან $n=m$ ან $n+k=m$ ან $m+s=n$, რომელიღაც $k,s\in N\setminus\{0\}$;

7) გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურია;

8) გამრავლების ოპერაცია ასოციაციურია;

9) ნებისმიერი n, m და k ნატურალური რიცხვებისათვის სამართლიანია $k\cdot(n+m)=k\cdot n+k\cdot m$ ტოლობა.

10) ნებისმიერი n და m ნატურალური რიცხვებისათვის შემდეგი სამი $n=m$, $n<m$ და $m<n$ პირობიდან ყოველთვის სამართლიანია მხოლოდ ერთი.

11) ნებისმიერი n, m და k ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $n\le m$ მაშინ $n+k\le m+k$ და $n\cdot k\le m\cdot k$;

12) ნებისმიერი n, m და k ნატურალური რიცხვებისათვის,

თუ $n+k\le m+k$ ან $n\cdot k\le m\cdot k$ მაშინ $n\le m$;

13) ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე სავსებით დალაგებული სიმრავლეა „$\le$” დალაგების მიმართ;

14) თუ m და n ისეთი ნატურალური რიცხვებია, რომ $m\cdot n=1$, მაშინ $m=n=1$;

მაგალითი 1. მათემატიკური ინდუქციის მე-2 პრინციპის გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის $5^{2n}-1$ გამოსახულება ყოველთვის გაიყოფა $24-$ზე. დავუშვათ, რომ $T(n)\equiv(24\,|\,5^{2n}-1)$.

1) შევამოწმოთ: $T(0)-$ის ჭეშმარიტობა. მართლაც, როცა $n=0$, გვექნება $5^{2\cdot0}-1=1-1=0$და უნაშთოდ იყოფა $24-$ზე. მივიღეთ, რომ $T(0)$ გამონათქვამი ჭეშმარიტია. 2) დავუშვათ, რომ $T(k)$ ჭეშმარიტია, რომელიღაც ნატურალური k რიცხვისათვის. დაშვების თანახმად $5^{2k}-1$ გამოსახულება უნაშთოდ იყოფა $24-$ზე. ასეთ პირობებში გვექნება:

$$5^{2(k+1)}-1=5^{2k}\cdot5^2-1=5^{2k}\cdot(1+24)-1=\left(5^{2k}-1\right)+24\cdot5^{2k}.$$

ინდუქციური დაშვების თანახმად გამოსახულება $5^{2k}-1$ უნაშთოდ იყოფა $24-$ზე; ასევე $24\cdot5^{2k}$ უნაშთოდ გაიყოფა $24-$ზე. ამგვარად, $\left(5^{2k}-1\right)+24\cdot5^{2k}=5^{2(k+1)}-1$ გამოსახულებაც უნაშთოდ გაიყოფა $24-$ზე. მივიღეთ, რომ $T(k+1)$ გამონათქვამიც ჭეშმარიტია. მე-2 პუნქტის თანახმად $T(n)$ წინადადება ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

მაგალითი 2. მათემატიკური ინდუქციის მე-3 პრინციპის გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. დავუშვათ, რომ $T(n)$ გამონათქვამი აკმაყოფილებს პირობას

$$T(n)\equiv\left(1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\right).$$

1) შევამოწმოთ: $T(1)-$ის ჭეშმარიტობა. მართლაც, როცა $n=1$,

გვექნება $1 = 1^2 = 1$, ე.ი. $T(1)$ გამონათქვამი ჭეშმარიტია. 2) დავუშვათ, რომ $T(k)$ ჭეშმარიტია, რომელიღაც ნატურალური k რიცხვისათვის, ე.ი. დაშვების თანახმად სამართლიანია ტოლობა $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ და ამ შემთხვევაში დავამტკიცოთ, რომ $T(k+1)$ გამონათქვამიც ჭეშმარიტი იქნება. მართლაც

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=\\&=(1+3+5+\cdots+(2k-1))+(2(k+1)-1)=\\&=k^2+(2(k+1)-1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.\end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ $T(k+1)$ გამონათქვამიც ჭეშმარიტია. მე - 3 პუნქტის თანახმად, $T(n)$ გამონათქვამი ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური $n \geq 1$ რიცხვისათვის.

სავარჯიშოები.
ნატურალურ რიცხვთა სისტემა

1. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დაამტკიცეთ:

1) $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$;

3) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

4) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

5) $24\,|\,5^{2n}-1$; 6) $9\,|\,4^n+6n-1$; 7) $27\,|\,10^{3n}-1$;

8) $8\,|\,3^{2n}+5$; 9) $3|n^3-n$; 10) $5|n^5-n$;

11) $7|n^7-n$; 12) $6|n(n^2+5)$; 13) $30\,|\,n^5-n$;

14) თუ X ისეთი სიმრავლეა, რომ $|X|=n$, მაშინ $|B(X)|=2^n$;

15) თუ X და Y ისეთი სიმრავლეებია, რომ $|X|=n$ და $|Y|=m$, მაშინ X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა შესაძლო ასახვათა რიცხვი m^n – ის ტოლია;

16) თუ X და Y ისეთი სიმრავლეებია, რომ $|X|=n$ და $|Y|=m$, მაშინ X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა შესაძლო ინექციათა რიცხვი $n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)$ – ის ტოლია.

2. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი a, b, c და d ნატურალური რიცხვებისათვის

1) თუ $a<b$ და $c<d$, მაშინ $a+c<b+d$;

2) თუ $a<b$ და $c<d$, მაშინ $a\cdot c<b\cdot d$.

3. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი a, b და c ნატურალური რიცხვებისათვის $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a\leq a^2+b^2+c^2$.
4. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი a, b და $n>1$ ნატურალური რიცხვებისათვის $(a+b)^n\leq 2^{n-1}\cdot(a^n+b^n)$.
5. დაამტკიცეთ, რომ თუ C_n^k $(1\leq k\leq n)$ აღნიშნულია n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა k ელემენტიან ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, მაშინ $C_n^k=\dfrac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$.
6. დაამტკიცეთ, რომ $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$, თუ $n\geq k>1$.
7. დაამტკიცეთ, რომ $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.
8. დაამტკიცეთ, რომ $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2=C_{2n}^n$.
9. ნატურალური n რიცხვისათვის დაამტკიცეთ შემდეგ უტოლობათა სამართლიანობა:

1) $n^2<2^n$, თუ $n\geq 4$; 2) $2^n<n!$, თუ $n\geq 4$; 3) $n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, თუ $n\geq 2$.

მთელ რიცხვთა რგოლი

1. $\mathbf{Z}=(Z,+,-)$ ჯგუფს მთელ რიცხვთა ადიციური ჯგუფი ეწოდე-

ბა, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობებს:

1) $N \subset Z$, და Z სიმრავლეში შეკრების ოპერაცია წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განმარტებული შეკრების ოპერაციის გაგრძელებას;

2) Z სიმრავლეში გამოკლების ოპერაცია ალგებრულია და Z სიმრავლის ყოველი ელემენტი ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობის სახით წარმოიდგინება.

2. ვთქვათ, $a = m - n$ და $b = p - q$ არის Z სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტი. Z სიმრავლეზე გამრავლების ოპერაცია შემდეგნაირად განვმარტოთ

$$a \cdot b = (m-n)\cdot(p-q) = (mp+nq)-(mq+np).$$

3. Z$=(Z,+,-,\cdot,1)$ რგოლს უწოდებენ მთელ რიცხვთა რგოლს, თუ მოცემული რგოლის ადიციური ჯგუფი მთელ რიცხვთა ადიციურ $(Z,+,-)$ ჯგუფს ემთხვევა, ხოლო რგოლში განმარტებული გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურია და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განმარტებული გამრავლების ოპერაციის გაგრძელებას წარმოადგენს.

4. ვთქვათ $a, b \in Z$. იტყვიან, რომ a მთელი რიცხვი ნაკლებია b მთელ რიცხვზე და სიმბოლურად ჩაწერენ $a < b$, თუ არსებობს ისეთი ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური k რიცხვი, რომ $a + k = b$. ჩანაწერი $a \le b$ ნიშნავს, რომ $a < b$ ან $a = b$.

5. ვთქვათ $a,b \in Z$. იტყვიან, რომ a იყოფა $b-$ზე, ან b გამყოფია $a-$ს და სიმბოლურად $b \mid a$ სახით ჩაწერენ, თუ $a = b \cdot q$ რომელიღაც $q \in Z$ მთელი რიცხვისათვის.

6. ვთქვათ, $a, b, c, d_1, d_2 \in Z$. იტყვიან, რომ c რიცხვი არის a და b რიცხვების საერთო გამყოფი, თუ $a = c \cdot d_1$ და $b = c \cdot d_2$.

7. a და b რიცხვების ისეთ საერთო გამყოფს, რომელიც იყოფა მოცემული რიცხვების ნებისმიერ საერთო გამყოფზე, a და b რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება და (a,b) სიმბოლოთი აღინიშნება.

მთელ რიცხვთა გაყოფადობის შემდეგ პროცესს:

$$\begin{array}{ll} a = b \cdot q_0 + r_0, & b > r_0, \\ b = r_0 \cdot q_1 + r_1, & r_0 > r_1, \\ r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2, & r_1 > r_2, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_k + r_k, & r_{k-1} > r_k, \\ r_{k-1} = r_k \cdot q_{k+1} + 0, & \end{array}$$

a და b რიცხვების ევკლიდეს ალგორითმი ეწოდება.

8. იტყვიან, რომ c არის a და b რიცხვების საერთო ჯერადი, თუ $c = a \cdot d_1$ და $c = b \cdot d_2$.

a და b რიცხვების ისეთ საერთო ჯერადს, რომელზეც იყოფა მოცემული რიცხვების ნებისმიერი საერთო ჯერადი, a და b რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი ეწოდება და $[a,b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

9. მთელ რიცხვთა რგოლზე „$\le$“ მიმართება და ელემენტთა გაყოფადობა აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) ნებისმიერი a და b მთელი რიცხვებისათვის შემდეგი სამი $a = b$, $a<b$ და $b < a$ პირობიდან ყოველთვის სამართლიანია მხოლოდ ერთი;

2) ნებისმიერი a მთელი რიცხვისათვის შემდეგი სამი $a < 0$, $a = 0$ და $0 < a$ პირობიდან ყოველთვის სამართლიანია მხოლოდ ერთი;

3) ნებისმიერი a, b და c მთელი რიცხვებისათვის, თუ $a \le b$ მაშინ $a + c \le b + c$ და $a \cdot c \le b \cdot c$, როცა $c \ge 0$;

4) ნებისმიერი a და $b > 0$ მთელი რიცხვებისათვის მოიძებნება მთელ რიცხვთა ისეთი ერთადერთი q და r წყვილი, რომ $a = b \cdot q + r$ და $0 \le r < b$;

5) a და b მთელი რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი ევკლიდეს ალგორითმში ბოლო ნულისაგან განსხვავებული ნაშთის ტოლია;

6) თუ a და b რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფია d რიცხვი, მაშინ ყოველთვის მოიძებნება ისეთი მთელი u და v რიცხვები, რომ $a \cdot u + b \cdot v = d$;

7) $[a,b] = \dfrac{a \cdot b}{(a,b)}$.

10. ყოველი a მთელი რიცხვი იყოფა $\pm 1-$სა და $\pm a-$ზე. a რიცხვის ასეთ გამყოფებს ტრივიალური გამყოფები ეწოდება.

$0-$საგან და $\pm 1-$საგან განსხვავებულ მთელ რიცხვს, რომლის ყოველი გამყოფი ტრივიალურია, მარტივი რიცხვი ეწოდება. თუ ნულისაგან განსხვავებულ მთელ რიცხვს გარდა ტრივიალური გამყოფებისა გააჩნია სხვა გამყოფიც, მას შედგენილი რიცხვი ეწოდება.

მთელი მარტივი რიცხვებია:

$$\pm 2,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 7,\ \pm 11,\ \pm 13,\ \pm 17,\ \pm 19, \ldots .$$

მთელი შედგენილი რიცხვებია:

$$\pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 9,\ \pm 10, \ldots .$$

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

11. მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა;

12. $0-$სა და ± 1 რიცხვებისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მთელი a რიცხვისათვის არსებობენ ისეთი წყვილ წყვილად ერთმანეთისაგან განსხვავებული მარტივი $p_1, p_2, \ldots, p_n$ და ნატურალური $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვები, რომ $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. ($a$ რიცხვის ასეთნაირ წარმოდგენას მისი მარტივ მამრავლებად დაშლა ეწოდება).

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, a, b, c, d, m და n ნებისმიერი მთელი რიცხვებია, დაამტკიცეთ, რომ:

1) $a \mid a$;

2) $a \mid 0$;

3) თუ $0 \mid a$, მაშინ $a = 0$;

4) $\pm 1 \mid a$;

5) თუ $a \mid 1$, მაშინ $a = \pm 1$;

6) თუ $a \mid b$ და $b \mid a$, მაშინ $a = \pm b$;

7) თუ $a \mid b$ და $b \mid c$, მაშინ $a \mid c$, ე.ი. გაყოფადობის მიმართება ტრანზიტულია;

8) თუ $c \mid a$, მაშინ $c \mid a \cdot b$;

9) თუ $c \mid a$ და $c \mid b$, მაშინ $c \mid (a \pm b)$;

10) თუ $a \mid b$, მაშინ $a \cdot c \mid b \cdot c$;

11) თუ $c \neq 0$, მაშინ $a \cdot c \mid b \cdot c$ გამომდინარეობს $a \mid b$ პირობა;

12) თუ $a \mid c$ და $b \mid d$, მაშინ $a \cdot b \mid b \cdot d$;

13) თუ $a \mid b$ და $a \mid c$, მაშინ $a \mid (m \cdot b \pm n \cdot c)$.

2. დაამტკიცეთ, რომ მთელ რიცხვთა რგოლის ნებისმიერი ავტომორფიზმი იგივურია.

რაციონალურ რიცხვთა ველი

1. ვთქვათ, რომ $\mathbf{X} = (X, +, -, \cdot, 1)$ ველია. X სიმრავლის არაცარიელ Y ქვესიმრავლეს ეწოდება $\mathbf{X}$ ველის ქვეველი, თუ $\mathbf{Y} = (Y, +, -, \cdot, 1)$ ალგებრა ველია იმ ოპერაციების მიმართ რაც $\mathbf{X}$ ველშია განმარტებული.

$\mathbf{F}$ ველს $\mathbf{K}$ მთელობის არის განაყოფთა ველი ეწოდება, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $\mathbf{K}$ არის $\mathbf{F}$ ველის ქვეველი;

2) $\mathbf{F}$ ველის ყოველი x ელემენტისათვის $\mathbf{K}$ მთელობის არეში მოიძებნებიან ისეთი a და b ელემენტები, რომ $x = a \cdot b^{-1}$.

2. მთელ რიცხვთა რგოლის განაყოფთა ველს რაციონალურ რიცხვთა ველი ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა ველს $\mathbf{Q}=(Q,+,-,\cdot,1)$ შემდეგში $\mathbf{Q}$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ; Q სიმრავლეს რაცინალურ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება, ხოლო მის ელემენტებს რაციონალური რიცხვები ეწოდება. ხშირად $x=a\cdot b^{-1}$ ელემენტს სიმბოლურად $x=\frac{a}{b}$ სახითაც ჩავწერთ.

ვთქვათ, $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in Q$. იტყვიან, რომ $\frac{a}{b}$ რაციონალური რიცხვი ნაკლებია $\frac{c}{d}$ რაციონალურ რიცხვზე და სიმბოლურად ჩაწერენ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, თუ $a\cdot d<b\cdot c$. ჩანაწერი $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$ ნიშნავს, რომ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ ან $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

ადვილად შემოწმდება, რომ რაცინალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული „$\le$“ მიმართება დალაგების მიმართებაა.

სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ბინარულ ალგებრულ ოპერაციათა და „$\le$“ ბინარული მიმართების შემდეგი თვისებები.

   1) თუ a, b ისეთი ელემენტებია Q სიმრავლიდან, რომ $a\cdot b=1$, მაშინ $a\neq 0$ და $b=a^{-1}$;

   2) თუ a,b,c ისეთი ელემენტებია Q სიმრავლიდან, რომ $a\cdot c=b\cdot c$ და $c\neq 0$, მაშინ $a=b$;

   3) თუ a, b ისეთი ელემენტებია Q სიმრავლიდან, რომ $a\cdot b=0$, მაშინ $a=0$ ან $b=0$;

   4) თუ a, b ისეთი ელემენტებია Q სიმრავლიდან,რომ $a\neq 0$ და $b\neq 0$, მაშინ $a\cdot b\neq 0$;

   5) ვთქვათ $a,b,c,d\in Q$. მაშინ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a\cdot d=b\cdot c$ და $b\neq 0$ და $a\neq 0$;

   6) ვთქვათ $a,b,c,d\in Q$. მაშინ $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{b\cdot d}$;

   7) ვთქვათ $a,b,c,d\in Q$. მაშინ $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$;

   8) ვთქვათ $a,b\in Q$. მაშინ $\frac{a}{b}+\frac{(-a)}{b}=0$ და $-\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{-a}{b}$;

   9) თუ a, b ისეთი ელემენტებია Q სიმრავლიდან,რომ $a\neq 0$ და $b\neq 0$, მაშინ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$;

   10) ვთქვათ $a,b,c\in Q$ და $c\neq 0$, მაშინ $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$;

   11) ვთქვათ $a,b,c\in Q$. თუ $a<b$ და $b<c$, მაშინ $a<c$;

   12) ნებისმიერი a და b რაციონალური რიცხვებისათვის შემდეგი სამი $a=b$, $a<b$ და $b<a$ პირობიდან ყოველთვის სამართლიანია მხოლოდ ერთი.

   13) ნებისმიერი a, b და c რაციონალური რიცხვებისათვის, თუ $a<b$ მაშინ $a+c<b+c$ და $a\cdot c<b\cdot c$, როცა $c>0$.

2. აჩვენეთ, რომ $x^2=2$ განტოლებას რაციონალურ რიცხვთა ველში არ აქვს ამონახსენი.

ნამდვილ რიცხვთა სისტემა

1. $\mathbf{X}=(X,<)$ ალგებრულ სისტემას უწოდებენ დალაგებულს, თუ X სიმრავლის ელემენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

   1) ნებისმიერი $a,b,c\in X$ ელემენტებისათვის $a<b$ და $b<c$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $a<c$ პირობა;

2) X სიმრავლის ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის შემდეგი სამი $a=b$, $a<b$ და $b<a$ პირობიდან სრულდება მხოლოდ ერთი;

2. $\mathbf{F}=(F,+,-,\cdot,1,<)$ ალგებრულ სისტემას უწოდებენ დალაგებულ ველს, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $(F,+,-,\cdot,1)$ ალგებრა ველია;

2) $(F,<)$ ალგებრული სისტემა დალაგებული სიმრავლეა;

3) ნებისმიერი $a,b,c\in F$ ელემენტებისათვის, თუ $a<b$, მაშინ $a+c<b+c$ (შეკრების ოპერაციის მონოტონურობა);

4) ნებისმიერი $a,b,c\in F$ ელემენტებისათვის, თუ $a<b$ და $0<c$, მაშინ $a\cdot c<b\cdot c$ (გამრავლების ოპერაციის მონოტონურობა).

3. თუ დალაგებული $\mathbf{F}$ ველის a ელემენტი აკმაყოფილებს $0<a$ პირობას, მაშინ მას დადებითი ელემენტი ეწოდება.

4. დალაგებულ $\mathbf{F}$ ველის a ელემენტის $|a|$ აბსოლუტური მნიშვნელობა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$|a|=a$ თუ $0<a$, $|a|=-a$, თუ $0<-a$ და $|0|=0$ თუ $a=0$.

5. დალაგებულ $\mathbf{F}$ ველს ეწოდება არქიმედისეულად დალაგებული, თუ $\mathbf{F}$ ველის ნებისმიერი დადებითი a და b ელემენტებისათვის ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური n რიცხვი, რომ $na=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n}>b$.

6. ვთქვათ, $a_0,a_1,a_2,\ldots$ არის დალაგებული $\mathbf{F}$ ველის ელემენტთა რომელიღაც უსასრულო მიმდევრობა. დალაგებული $\mathbf{F}$ ველის a ელემენტს ეწოდება $a_0,a_1,a_2,\ldots$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი ε დადებითი ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური n_ε რიცხვი, რომ როცა $k\geq n_\varepsilon$, მაშინ $|a_k-a|<\varepsilon$. თუ $a_0,a_1,a_2,\ldots$ მიმდევრობას გააჩნია ზღვარი, მაშინ მას კრებადი ეწოდება.

7. დალაგებული $\mathbf{F}$ ველის ელემენტთა $a_0,a_1,a_2,\ldots$ მიმდევრობას

ეწოდება ფუნდამენტალური, თუ ნებისმიერი ε დადებითი ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური n_ε რიცხვი, რომ როცა $k,n>n_\varepsilon$, მაშინ $|a_k-a_n|<\varepsilon$.

8. დალაგებულ $\mathbf{F}$ ველს ეწოდება სრული, თუ $\mathbf{F}$ ველის ელემენტთა ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია ისევ $\mathbf{F}$ ველში.

9. არქიმედისეულად დალაგებულ სრულ ველს ნამდვილ რიცხვთა სისტემა ეწოდება.

შემდგომში $\mathbf{R}=(R,+,-,\cdot,1,<)$ სისტემას და $-$ $(R,+,-,\cdot,1)$ ალგებრას შესაბამისად ნამდვილ რიცხვთა სისტემა და ნამდვილ რიცხვთა ველი ეწოდებათ; R სიმრავლეს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო მის ელემენტებს კი, ნამდვილი რიცხვები ეწოდება.

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, $\mathbf{R}=(R,+,-,\cdot,1,<)$ ნამდვილ რიცხვთა სისტემაა და a,b,c,d არის R სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) $a<b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $0<b-a$;

2) ნებისმიერი $a\in R$ ელემენტისათვის შემდეგი სამი $a<0$, $a=0$ და $0<a$ პირობიდან სამართლიანია მხოლოდ ერთი;

3) თუ $0<a$ და $0<b$, მაშინ $0<a+b$ და $0<a\cdot b$;

4) თუ $a<b$ და $c<d$, მაშინ $a+c<b+d$;

5) თუ $a<b$ და $0<c$, მაშინ $a\cdot c<b\cdot c$;

6) თუ $a\neq 0$, მაშინ $0<a^2$;

7) $0<1$ და $0<n\cdot 1$ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის;

8) ნებისმიერი a და $0<b$ ნამდვილი რიცხვებისათვის მოიძებნება ნამდვილ რიცხვთა მხოლოდ ერთი ისეთი q და r წყვილი,

რომ $a=b\cdot q+r$ და $0\le r<b$;

9) ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის და ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს ერთადერთი დადებითი ნამდვილი c რიცხვი, რომ $c^n=a$ (ამ ერთადერთ დადებით c რიცხვს $n-$ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი ეწოდება a რიცხვიდან);

10) $|a|=|-a|$; 11) $0\le|a|\pm a$; 12) $|a+b|\le|a|+|b|$; 13) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;

14) $|b|\le a$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $-a\le b\le a$.

2. $x^2=a$ განტოლებას, სადაც a ნებისმიერი დადებითი ნამდვილი რიცხვია, ნამდვილ რიცხვთა ველში ყოველთვის აქვს ამონახსენი.
3. $x^2+1=0$ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა ველში არ აქვს ამონახსენი.
4. ვთქვათ R^+ აღნიშნულია ყველა დადებითი ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ ალგებრა $\left(R^+,\cdot,^{-1}\right)$, სადაც $(\cdot)$ და $\left(^{-1}\right)$ აღნიშნული არიან ნამდვილი რიცხვების გამრავლების ოპერაცია და ნამდვილ რიცხვზე შებრუნებულის შეთანადების ოპერაცია, ქმნის ჯგუფს.
5. დაამტკიცეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლის თავისთავზე იგივური ასახვა ერთადერთი იზომორფიზმია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისა თავისთავში.
6. დაამტკიცეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა სისტემის იზომორფული ალგებრული სისტემა თვითონაც ნამდვილ რიცხვთა სისტემა იქნება.

კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა

1. ვთქვათ $\mathrm{F}=(F,+,-,\cdot,1)$ ისეთი ველია, რომლის ყოველი $a\in F$ ელემენტისათვის სრულდება $a^2\ne-1$ პირობა. K ველს F ველის კომპლექსური გაფართოება ეწოდება, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

1) F არის K ველის ქვეველი;

2) K ველში არსებობს ისეთი i ელემენტი, რომ $i^2=-1$;

3) K ველის ყოველი z ელემენტისათვის არსებობენ ისეთი ცალსახად განსაზღვრული $a,b\in F$ ელემენტები, რომ $z=a+bi$.

2. ნამდვილ რიცხვთა $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ველის კომპლექსურ გაფართოებას კომპლექსურ რიცხვთა ველი ეწოდება.

შემდგომში კომპლექსურ რიცხვთა ველს $\mathrm{C}=(C,+,-,\cdot,1)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. C -ს კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება, ხოლო C სიმრავლის ელემენტებს კომპლექსური რიცხვები ეწოდება.

თუ $z=a+bi,\ u=c+di\quad(a,b,c,d\in R)$ არის C სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები, მაშინ C კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები შემდეგნაირად განიმარტებიან:

$$z+u=(a+c)+(b+d)i,\quad z\cdot u=(a\cdot c-b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)i.$$

3. კომპლექსურ რიცხვთა ველის ნებისმიერ ქვეველს რიცხვითი ველი ეწოდება.
4. ყოველ კომპლექსურ $z=a+bi\in C$ რიცხვს დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში შევუსაბამოთ $M(a,b)$ წერტილი. M წერტილს $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიულ წარმოდგენას უწოდებენ.
5. $z=a-bi$ კომპლექსურ რიცხვს და $\sqrt{a^2+b^2}$ რიცხვიდან არითმეტიკულ ფესვს შესაბამისად z კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული და z კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება და $\bar{z}$ და $|z|$ სიმბოლოებით აღინიშნება.
6. კომპლექსური $z=a+bi$ რიცხვის წარმოდგენას $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ სახით, სადაც r და φ ნამდვილი რიცხვებია და $0\le r$, მისი ტრიგონომეტრიული ფორმით წარმოდგენა ეწოდება.

φ ნამდვილ რიცხვს კომპლექსური z რიცხვის არგუმენტი ეწოდება და $\arg z -$ ით აღინიშნება, ე.ი. $\varphi = \arg z$; r რიცხვს კი კომპლექსური z რიცხვის მოდული ეწოდება და $|z|$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი. $r = |z|$.

ნებისმიერი კომპლექსური $z = a + bi$ რიცხვისათვის C სიმრავლიდან ყოველთვის მოიძებნება ნამდვილ რიცხვთა ისეთი r, φ წყვილი, რომ $0 < r$, $0 \le \varphi < 2\pi$ და $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

შევნიშნოთ, რომ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, ხოლო $\varphi = arctg\dfrac{b}{a}$.

7. თუ u_k აღნიშნავს ერთ-ერთ ფესვს $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)} -$ დან, მაშინ

$$u_k = \sqrt[n]{r_1} \cdot \left(\cos\frac{2\pi k + \varphi}{n} + i\sin\frac{2\pi k + \varphi}{n}\right),\ (k = 0,1,...,n-1),$$

სადაც $\sqrt[n]{r_1}$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $n-$ ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი r_1 რიცხვიდან.

8. თუ ω_k აღნიშნავს ერთ-ერთ ფესვს $\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\sin 0} -$ დან, მაშინ $\omega_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$, სადაც $k = 0,1,...,n-1$.

$\sqrt[n]{1}$ -ის ისეთ ω_k ფესვს, რომლის $k-$ ური ხარისხები $(k = 0,1,...,n-1)$ იძლევა $\sqrt[n]{1}$ -დან ყველა ფესვის მნიშვნელობას, პირველადი ფესვი ეწოდება.

მტკიცდება, რომ ω_k წარმოადგენს პირველად ფესვს მხოლოდ მაშინ, როცა k და n რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი $1-$ ის ტოლია.

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, $\mathrm{C} = (C,+,-,\cdot,1)$ კომპლექსურ რიცხვთა ველია. $z = a + bi$, $u = c + di$ $(a,b,c,d \in R)$ არის C სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები. დაამტკიცეთ, რომ:

1) $\overline{z+u} = \overline{z} + \overline{u}$;

2) $\overline{(-z)} = -\overline{z}$;

3) $\overline{z \cdot u} = \overline{z} \cdot \overline{u}$;

4) $\overline{(\overline{z})} = z$;

5) $z = \overline{z}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $z \in R$;

6) $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$; 7) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$;

8) $|z| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $z = 0$;

9) $|z \cdot u| = |z| \cdot |u|$;

10) როცა $z \ne 0$, მაშინ $|z^{-1}| = |z|^{-1}$;

11) $|z+u| \le |z| + |u|$;

12) $|z| - |u| \le |z + u|$;

13) $\big||z| - |u|\big| \le |z + u|$.

2. ვთქვათ, $\mathrm{C} = (C,+,-,\cdot,1)$ კომპლექსურ რიცხვთა ველია $z = r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ და $u = r_2(\cos\psi + i\sin\psi)$ არიან C სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები. დაამტკიცეთ, რომ:

1) $z \cdot u = (r_1 \cdot r_2) \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$;

2) $z^n = r_1^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i\sin(n \cdot \varphi))$ (მუავრის ფორმულა);

3) $\dfrac{z}{u} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$;

3. იპოვეთ შემდეგი კომპლექსური რიცხვების გეომეტრიული წარმოდგენები:

1) 1; 2) i; 3) $1 + i$; 4) $1 - i$; 5) $-1 - i$; 6) $1 + i\sqrt{2}$;

7) $1 + i\sqrt{3}$.

4. იპოვეთ სიბრტყის წერტილთა შემდეგი სიმრავლეები:

1) $|z|=a$; 2) $|z|<a$; 3) $|z-1|=a$; 4) $|z-1|<a$.

5. ამოხსენით განტოლებები:

1) $(1-i)\cdot\overline{z}-3i\cdot z=1-i$;

2) $z\cdot\overline{z}-2\overline{z}=1-2i$;

3) $z\cdot\overline{z}+3(z-\overline{z})=4+3i$.

6. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} ix+(1-i)y=3-i, \\ (1-i)x-(6-i)y=4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (1+i)x+(1-i)y=1+i, \\ (1-i)x-(1+i)y=1+3i; \end{cases}$

3) $\begin{cases} ix+(1+i)y=2+2i, \\ 2ix-(3+2i)y=5+3i; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (1+i)x-3iy=-i, \\ 2x-(3+3i)y=3-i. \end{cases}$

7. ამოხსენით განტოლებები კომპლექსურ რიცხვთა ველში:

1) $z^2+5z+9=0$; 2) $z^3+1=0$; 3) $z^4+1=0$; 4) $z^6+64i=0$

8. წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიულ ფორმით შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:

1) 1; 2) i; 3) -1; 4) $-i$; 5) $1+i$; 6) $1-i$.

9. იპოვეთ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლითაც გამოისახებიან შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:

1) $\arg z=0$; 2) $\arg z=\frac{\pi}{3}$; 3) $\arg z=\pi$; 4) $\arg z=\frac{\pi}{2}$;

5) $\arg z=\frac{\pi}{2}$.

10. იპოვეთ შემდეგი რიცხვებიდან ყველა ფესვი და ყველა პირველადი ფესვი.

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[5]{1}$.

11. იპოვეთ ფესვის ყველა მნიშვნელობა:

1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt{-2i}$; 3) $\sqrt[4]{i}$

12. გამოთვალეთ გამოსახულება:

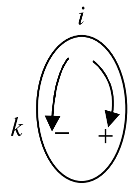
1) $(1+i)^{20}$; 2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$.

13. ვთქვათ, $\overline{K}$ არის ყველა $m+ni$ $(m,n\in Z)$ სახის კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე. აჩვენეთ, რომ $\overline{\mathrm{K}}=(\overline{K},+,-,\cdot,1)$ ალგებრა, სადაც $(+),(\cdot),(-)$ კომპლექსურ რიცხვთა შეკრების, გამრავლების და მოცემულ ელემენტზე მოპირდაპირე ელემენტის შეთანადების ოპერაციებია, წარმოადგენს მთელობის არეს.

კვატერნიონთა ტანი

1. ვთქვათ, K ოთხგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა R ველზე და $1,i,j,k$ მისი ბაზისია. K ვექტორულ სივრცეში განვმარტოთ ბაზისური ელემენტების გამრავლების ოპერაცია შემდეგნაირად

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1



$i\cdot j=k$
$i\cdot k=-j$

თუ $\alpha=a+bi+cj+dk$ და $\beta=a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ $(a,b,c,d,a_1,b_1,c_1,d_1\in R)$ ორი ელემენტია K ვექტორული სივრციდან, მაშინ მათი ნამრავლი განისაზღვრება ტოლობით

$$\alpha\cdot\beta=(aa_1-bb_1-cc_1-dd_1)+(ab_1+ba_1+cd_1-dc_1)i+$$
$$+(ac_1+a_1c+db_1-bd_1)j+(ad_1+a_1d+bc_1-cb_1)k.$$

შემოწმდება, რომ K ვექტორული სივრცე მასში განმარტებული ოპერაციების მიმართ ქმნის წრფივ ალგებრას, რომელსაც

კვატერნიონთა ალგებრა ეწოდება. მოცემული ალგებრის ელემენტებს კვატერნიონები ეწოდება.

ვთქვათ, $\alpha = a + bi + cj + dk$ არის K წრფივი ალგებრის რომელიღაც კვატერნიონი. მაშინ $\overline{\alpha} = a - bi - cj - dk$ კვატერნიონს α კვატერნიონის შეუღლებული კვატერნიონი ეწოდება.

ცნობილია, რომ (ფრობენიუსი) არსებობენ მხოლოდ ერთრანგიანი, ორრანგიანი და ოთხრანგიანი ალგებრები გაყოფით.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. კვატერნიონთა K ალგებრაში დაამტკიცეთ, რომ:

   1) კვატერნიონთა გამრავლების ოპერაცია არაკომუტაციურია;

   2) თუ $\alpha = a + bi + cj + dk$ არის ალგებრის კვატერნიონი, მაშინ $\alpha \cdot \overline{\alpha} = \overline{\alpha} \cdot \alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$;

   3) კვატერნიონთა K ალგებრა ტანია.

2. გაამარტივეთ გამოსახულება:

   1) $\dfrac{2+3i+4j+5k}{1+3i+j+2k}$; 2) $\dfrac{1+3i+j+2k}{2+3i+4j+5k}$; 3) $\dfrac{1+3i+2k}{2+4j+5k}$

3. კვატერნიონთა ტანში ამოხსენით განტოლებები $\alpha x = \beta$ და $y\alpha = \beta$, თუ

   1) $\alpha = 2+3i+4j+5k$, $\beta = 1+3i+j+2k$;

   2) $\alpha = 1-i+2j+k$, $\beta = -1+2i-2j+k$;

   3) $\alpha = 2+i+j+3k$, $\beta = 1+i+j+k$;

   4) $\alpha = 1+i+j+k$, $\beta = 2-i-j-k$;

   5) $\alpha = 1+i-j+k$, $\beta = 2-i+j-k$;

   6) $\alpha = 2-i-j+k$, $\beta = 1+i+j-k$;

   7) $\alpha = 2-i-j+2k$, $\beta = 2+i+j+2k$;

   8) $\alpha = a+bi+cj+dk$, $\beta = a-bi-cj-dk$.

4. აჩვენეთ, რომ ყველა ნამდვილი რიცხვების R სიმრავლე მასში განმარტებული ნამდვილ რიცხვთა შეკრებისა და ნამდვილ რიცხვთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის ერთრანგიან წრფივ ალგებრას გაყოფით.
5. აჩვენეთ, რომ ყველა კომპლექსური რიცხვების C სიმრავლე მასში განმარტებული კომპლექსურ რიცხვთა შეკრებისა და კომპლექსურ რიცხვთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის ორრანგიან წრფივ ალგებრას გაყოფით.
6. აჩვენეთ, რომ ყველა კვატერნიონების K სიმრავლე მასში განმარტებული კვატერნიონების შეკრებისა და კვატერნიონების გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის ოთხრანგიან წრფივ ალგებრას გაყოფით.

პასუხები

კომპლექსური რიცხვები

5. 1) $z = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}i$; 2) $z = -i$ ან $z = 2 - i$;

   3) $z = \dfrac{\sqrt{15}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ან $z = -\dfrac{\sqrt{15}}{2} + \dfrac{1}{2}i$;

6. 1) $x = -3 - i$, $y = 2$; 2) $x = i$, $y = 1 + i$;

   3) $x = 2$, $y = 1 - i$; 4) $\varnothing$.

7. 1) $z_{1,2} = -\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{\sqrt{11}}{2}i$; 2) $z_1 = -1$, $z_{2,3} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;

   3) $z_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$, $z_{3,4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$;

   4) $z_{1,2} = \pm 2 \cdot (1+i)$, $z_{3,4} = \pm 2 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{12} - \sin\dfrac{\pi}{12}\right)$,

   $z_{5,6} = \pm 2 \cdot \left(\cos\dfrac{5\pi}{12} - \sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

8. $\cos 0 + i\sin 0$; $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$; $\cos\pi + i\sin\pi$; $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$;

$\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

10. $\omega_0 = 1$, $\omega_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. პირველადი ფესვებია ω_1 და ω_2; $\omega_0 = 1$,

$\omega_{1,2} = \cos\frac{2\pi}{5} \pm i\sin\frac{2\pi}{5}$, $\omega_{3,4} = -\cos\frac{\pi}{5} \pm i\sin\frac{\pi}{5}$. პირველადი ფესვე-ბია: ω_1, ω_2, ω_3 და ω_4.

11. 1) $u_{1,2} = \pm\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. 2) $u_{1,2} = \pm(1-i)$.

3) $u_{1,2} = \pm\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$. $u_{3,4} = \pm\left(\cos\frac{3\pi}{8} - i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$.

12. 1) -1024; 2) -1.

კვატერნიონები

2. 1) $\frac{5}{3} - \frac{2}{5}i - \frac{7}{15}j + \frac{2}{3}k$. 2) $\frac{25}{54} + \frac{1}{9}i + \frac{7}{54}j - \frac{5}{27}k$.

3) $\frac{4}{15} + \frac{14}{45}i + \frac{11}{45}j - \frac{13}{45}k$.

3. 1) $x = \frac{25}{54} - \frac{11}{54}j + \frac{4}{27}k$, $y = \frac{25}{54} + \frac{2}{9}i + \frac{7}{54}j - \frac{5}{27}k$;

2) $x = -\frac{6}{7} - \frac{3}{7}i - \frac{3}{7}j + \frac{4}{7}k$, $y = -\frac{6}{7} + \frac{5}{7}i + \frac{3}{7}j$;

3) $x = \frac{7}{15} + \frac{1}{5}i - \frac{1}{15}j - \frac{1}{15}k$, $y = \frac{7}{15} - \frac{1}{15}i + \frac{1}{5}j - \frac{1}{15}k$;

4) $x = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i - \frac{5}{4}j - \frac{3}{4}k$, $y = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i - \frac{3}{4}j - \frac{3}{4}k$;

5) $x = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i + \frac{3}{4}j - \frac{3}{4}k$, $y = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i + \frac{3}{4}j - \frac{3}{4}k$;

6) $x = -\frac{1}{7} + \frac{3}{7}i + \frac{3}{7}j - \frac{3}{7}k$, $y = -\frac{1}{7} + \frac{3}{7}i + \frac{3}{7}j - \frac{3}{7}k$;

7) $x = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, $y = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}j$;

8) $x = \frac{\left(a^2 - b^2 - c^2 - d^2\right) - 2abi - 2acj - 2adk}{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)} = y$.

§ 7. მატრიცები

1. ვთქვათ, X არაცარიელი სიმრავლეა. მართკუთხოვან ცხრილს

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn}\end{pmatrix}=\left(x_{ij}\right), \qquad \dots(1)$$

სადაც $x_{ij}\in X$ $\left(i=1,2,...m;\ j=1,2,...,n\right)$, ეწოდება $\left(m\times n\right)-$განზომილებიანი მატრიცა X სიმრავლეზე. x_{ij} ელემენტებს კი $-A$ მატრიცის ელემენტები ეწოდება.

$x_{i1},x_{i2},\ ...,\ x_{in}$ $(i=1,2,...m)$ ელემენტთა სიმრავლეს A მატრიცის $i-$ური სტრიქონი ეწოდება, ხოლო $x_{1j},x_{2j},...,x_{mj}$ $(j=1,2,...,n)$ ელემენტთა სიმრავლეს A მატრიცის $j-$ური სვეტი ეწოდება.

მატრიცას, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან მისი $i_1,i_2,...,i_k$ $\left(k<m\right)$ სტრიქონებისა და $j_1,j_2,...,j_s$ $\left(j<n\right)$ სვეტების ამოღებით, A მატრიცის ქვემატრიცა ეწოდება. A მატრიცის $x_{11},x_{22},...,x_{ss}$ ელემენტებს A მატრიცის მთავარი დიაგონალის ელემენტები ეწოდება.

X სიმრავლეზე განსაზღვრულ ორ ერთნაირგანზომილებიან A და

$$B=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mn}\end{pmatrix}$$

მატრიცებს ეწოდება ერთმანეთის ტოლი, თუ $x_{ij}=y_{ij}$, სადაც $i=1,2,...,m$ და $j=1,2,\dots,n$.

თუ A მატრიცისათვის სრულდება პირობა $m=n$, მაშინ A მატრიცას $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა ეწოდება.

ახლა, ვთქვათ, s არის m და n რიცხვებს შორის უმცირესი რიცხვი. $\left(m\times n\right)-$განზომილებიანი $A=\left(a_{ij}\right)$ მატრიცის ქვემატრიცას

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} x_{11}x_{12}\dots x_{1s}\\ x_{21}x_{22}\dots x_{2s}\\ \dots\dots\dots\\ x_{s1}x_{s2}\dots x_{ss}\end{pmatrix}$$

ვუწოდებთ A მატრიცის მთავარ მატრიცას, ხოლო A მატრიცას კი $\overline{A}$ მატრიცის გაფართოებას

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} x_{1\ s+1} & x_{1\ s+2} & \dots & x_{1n}\\ x_{2\ s+1} & x_{2\ s+2} & \dots & x_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{s\ s+1} & x_{s\ s+2} & \dots & x_{sn}\end{pmatrix}$$

მატრიცით, თუ $s\le n$.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი კვადრატული მატრიცის მთავარი მატრიცა მასვე ემთხვევა. ახლა დავუშვათ, რომ A არის $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა. მატრიცას

$$A'=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1}\\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn}\end{pmatrix}$$

A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა ეწოდება. თუ $A=A'$, მაშინ $A-$ს სიმეტრიული მატრიცა ეწოდება.

ახლა, ვთქვათ, X რომელიღაც რიცხვითი ველია, ხოლო 0 და 1 ამ ველის ნულოვანი და ერთეულოვანი ელემენტებია. კვადრატულ მატრიცებს

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \dots 0 & 0\\ x_{21} & x_{22} & 0 & \dots 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{n-1\ 1} & x_{n-1\ 2} & x_{n-1\ 3} & \dots\ x_{n-1\ n-1} & 0\\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n\ 3} & \dots\ x_{n-1\ n} & x_{nn}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots\ x_{1\ n-1} & x_{1n}\\ 0 & x_{22} & x_{23} & \dots\ x_{2\ n-1} & x_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots\ x_{n-1\ n-1} & x_{n-1\ n}\\ 0 & 0 & 0 & \dots\ 0 & x_{nn}\end{pmatrix},$$

ე.ი. მთავარი დიაგონალის „ზემოთ“ ან მთავარი დიაგონალის „ქვემოთ“ ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, სამკუთხა მატრიცები ეწოდება. კვადრატულ მატრიცას,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & x_{22} & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1\ n-1} & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{nn}\end{pmatrix}$$

რომლის მთავარ დიაგონალზე არამდებარე ყველა ელემენტი ნულის ტოლია დიაგონალური მატრიცა ეწოდება.

მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულია, ნულოვანი მატრიცა ეწოდება, ხოლო დიაგონალურ მატრიცას, რომლის მთავარი დიაგონალის ყოველი ელემენტი $1-$ის ტოლია, ერთეულოვანი მატრიცა ეწოდება. შემდგომში ნულოვან და ერთეულოვან მატრიცებს შესაბამისად $\mathbf{0}$ და E სიმბოლოებით აღვნიშნავთ. ამგვარად,

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}00...0\\00...0\\\cdots\cdots\\00...0\end{pmatrix} \text{ და } E=\begin{pmatrix}10...0\\01...0\\\cdots\cdots\\00...1\end{pmatrix}.$$

ვთქვათ, A მატრიცას აქვს (1) სახე. თუ სრულდება

$$x_{i1}+k\cdot x_{j1}, x_{i2}+k\cdot x_{j2},\ ..., x_{in}+k\cdot x_{jn}$$

ან

$$x_{1i}+k\cdot x_{1j}, x_{2i}+k\cdot x_{2j},..., x_{mi}+k\cdot x_{mj}$$

პირობები, მაშინ იტყვიან, რომ A მატრიცის რიმელიმე $i-$ური სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებზე დამატებულია A მატრიცის რომელიმე j სტრიქონის (სვეტის) ელემენტები გამრავლებული k რიცხვზე.

2. ვთქვათ, A არის $(m\times n)-$განზომილებიანი მატრიცა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე. A მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნების ქვეშ ესმით შედეგი სახის გარდაქმნები:

1) A მატრიცის რომელიმე ორი სტრიქონის (სვეტის) ადგილების შეცვლა;

2) A მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტის რომელიღაც ნულისაგან განსხვავეულ ელემენტზე გამრავლება.

3) A მატრიცის რომელიმე $i-$ური სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებზე A მატრიცის რომელიმე $j-$ური სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების დამატება გამრავლებული რაიმე $k-$ელემენტზე.

4) A მატრიცაზე ნულოვანი სტრიქონის მიერთება ან ამოგდება.

A მატრიცის ისეთ ელემენტარულ გარდაქმნებს, რომელშიაც მონაწილეობს 4) სახის გარდაქმნა A მატრიცის განსაკუთრებული გარდაქმნები ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი არაგანსაკუთრებული.

3. ვთქვათ, s არის m და n ნატურალურ რიცხვებს შორის უმცირესი და $A=\left(x_{ij}\right)$ არის $(m\times n)-$განზომილებიანი მატრიცა. ვიტყვით, რომ $(m\times n)-$განზომილებიანი $B=\left(y_{ij}\right)$ მატრიცა არის A მატრიცის შესაბამისი დაყვანილი მატრიცა სტრიქონების მიმართ, თუ B მატრიცა მიღებულია A მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნებით სტრიქონების მიმართ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $y_{11}, y_{22},..., y_{ss}\in\{0,1\}$;

2) $y_{ij}=0$ ყოველი $1\le i\le s$ და $j-$სათვის, სადაც $1\le j<i$;

3) თუ რომელიღაც $i-$სათვის $(1\le i\le s)$ ადგილი აქვს ტოლობას $y_{ii}=1$, მაშინ B მატრიცის i სვეტის ყველა დანარჩენი ელემენტი ნულის ტოლია;

4) თუ რომელიღაც $j-$სათვის $(1\le j\le s)$ ადგილი აქვს ტოლობას $y_{jj}=0$, მაშინ $y_{ji}=0$ ყოველი $i=1,2,...,s$.

ვთქვათ, s არის m და n ნატურალურ რიცხვებს შორის უმცირესი და $A=\left(x_{ij}\right)$ არის $(m\times n)-$განზომილებიანი მატრიცა. ვიტყვით, რომ $(m\times n)-$განზომილებიანი $B=\left(y_{ij}\right)$ მატრიცა არის A მატრიცის შესაბამისი დაყვანილი მატრიცა, თუ B მატრიცა მიღებულია A მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნებით და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $y_{11}, y_{22},..., y_{ss}\in\{0,1\}$;

2) B მატრიცის $y_{11}, y_{22}, \ldots, y_{ss}$ ელემენტებისაგან განსხვავებული ყველა ელემენტი ნულის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ A მატრიცის სტრიქონების მიმართ დაყვანილი, და დაყვანილი მატრიცების მთავარი მატრიცები, სტრიქონების მიმართ დაყვანილი და დაყვანილი მატრიცების განსაზღვრებების თანახმად, შესაბამისად სამკუთხა, და დიაგონალური მატრიცები იქნებიან.

4. ცნობილია რომ, თუ **X** სიმრავლე ველია, ხოლო 0 და 1 მისი ნულოვანი და ერთეულოვანი ელემენტებია, ხოლო $A=(x_{ij})$ ნებისმიერი $(m\times n)-$განზომილებიანი მატრიცაა X ველზე. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებანი.

1) ყოველი A მატრიცა მისი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით მიიყვანება დაყვანილ $(m\times n)-$განზომილებიან $B=(y_{ij})$ მატრიცამდე;

2) ყოველი $m\times n$ $(m\geq n)$ განზომილებიანი A მატრიცა მისი სტრიქონების მიმართ არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით მიიყვანება სტრიქონების მიმართ დაყვანილ $(m\times n)-$ განზომილებიან $B'=(y'_{ij})$ მატრიცამდე;

3) ყოველი $m\times n$ $(m<n)$ განზომილებიანი A მატრიცა მისი სტრიქონების მიმართ განსაკუთრებული გარდაქმნებით მიიყვანება სტრიქონების მიმართ დაყვანილ $(n\times n)-$განზომილებიან $B'=(y'_{ij})$ მატრიცამდე.

5. ახლა **X** ველზე განმარტებულ მატრიცთა სიმრავლეში განვმარტოთ მატრიცების შეკრების, გამრავლების და **X** ველის ელემენტზე გამრავლების ოპერაციები.

ყველა $(m\times n)-$განზომილებიანი მატრიცის სიმრავლე **X** ველზე აღვნიშნოთ $X^{m\times n}-$ით; $A=(x_{ij}), B=(y_{ij})\in X^{m\times n}$ და $\lambda\in X$. $X^{m\times n}$ სიმრავლეზე შემოვიტანოთ მატრიცების შეკრების ბინა-

რული ალგებრული ოპერაცია და ω_λ $(\lambda\in X)$ უნარული ალგებრული ოპერაცია შემდეგნაირად: $A+B=(x_{ij}+y_{ij})$ და $\omega_\lambda(A)=(\lambda\cdot x_{ij})$, სადაც $i=1,2,\ldots,m$ და $j=1,2,\ldots,n$.

ახლა ვთქვათ $A=(x_{ij})\in X^{m\times n}$, $B=(y_{ij})\in X^{n\times s}$ და $C=(z_{ij})\in X^{m\times s}$. ვიტყვით, რომ A და B მატრიცების ნამრავლი არის C მატრიცა და დავწერთ $A\cdot B=C$, თუ

$$z_{pq}=\sum_{k=1}^{n}x_{pk}\cdot y_{kq}=x_{p1}\cdot y_{1q}+x_{p2}\cdot y_{2q}+\cdots+x_{pn}\cdot y_{nq},$$

ყოველი $p=1,2,\ldots,m$ და $q=1,2,\ldots,s$.

შევნიშნოთ, რომ A და B მატრიცების ნამრავლი განსაზღვრულია მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის სვეტების რიცხვი უდრის B მატრიცის სტრიქონების რიცხვს.

6. $X^{m\times n}$ სიმრავლეში მატრიცების შეკრების ბინარულ ალგებრულ ოპერაციასა და ω_λ $(\lambda\in X)$ ოპერაციებს გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1) მატრიცთა შეკრების ოპერაცია კომუტაციურია;

2) მატრიცთა შეკრების ოპერაცია ასოციაციურია;

3) შეკრების ოპერაციის მიმართ $X^{m\times n}$ სიმრავლეში არსებობს ნულოვანი

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}00\ldots0\\00\ldots0\\\cdots\cdots\\00\ldots0\end{pmatrix}$$

ელემენტი და $A=(x_{ij})$ მატრიცის მოპირდაპირე მატრიცა

$$-A=\begin{pmatrix}-x_{11} & -x_{12} & \ldots & -x_{1n}\\-x_{21} & -x_{22} & \ldots & -x_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\-x_{m1} & -x_{m2} & \ldots & -x_{mn}\end{pmatrix}.$$

4) $(\omega_{\lambda_1\cdot\lambda_2})(A)=\omega_{\lambda_1}(\omega_{\lambda_2}(A))$, ყოველი $\lambda_1,\lambda_2\in X$ და $A\in X^{m\times n}$;

5) $(\omega_{\lambda_1+\lambda_2})(A)=\omega_{\lambda_1}(A)+\omega_{\lambda_1}(A)$, ყოველი $\lambda_1,\lambda_2\in X$ და $A\in X^{m\times n}$;

6) $\omega_{\lambda}(A+B)=\omega_{\lambda}(A)+\omega_{\lambda}(B)$, ყოველი $\lambda\in X$ და $A,B\in X^{m\times n}$;

7) $\omega_{1}(A)=A$, სადაც 1 არის $\mathbf{X}$ ველის ერთეულოვანი ელემენტი.

7. თუ A, B და C ისეთი მატრიცებია, რომ $A\cdot B$ და $B\cdot C$ განსაზღვრულია, მაშინ $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$, ე.ი. მატრიცების გამრავლების ოპერაცია ასოციაციურია.

8. თუ A, B და C ისეთი მატრიცებია, რომ $B+C$ და $A\cdot(B+C)$ განსაზღვრულია, მაშინ

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \text{ და } (B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A,$$

ე.ი. მატრიცების გამრავლებისა და შეკრების ოპერაციები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან დისტრიბუციულობის კანონით.

9. ვთქვათ, $X^{n\times n}$ არის ყველა $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცების სიმრავლე $\mathbf{X}$ ველზე. მაშინ ალგებრა $\mathbf{X}^{n\times n}=\left(X^{n\times n},+,-,\cdot,1\right)$ რგოლია, სადაც $(+)$ და $(\cdot)$ მატრიცთა შეკრებისა და გამრავლების ალგებრული ოპერაციებია; $(-)$ უნარული ალგებრული ოპერაციაა $X^{n\times n}$ სიმრავლეზე, რომელიც ყოველ მატრიცას $X^{n\times n}$ სიმრავლიდან შეუსაბამებს მის მოპირდაპირე მატრიცას, ხოლო 1 ნულარული ოპერაციაა, რომელიც $X^{n\times n}$ სიმრავლეში გამრავლების ოპერაციის მიმართ აფიქსირებს ერთეულოვან ელემენტს.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\\ a_{21}a_{22}a_{33}a_{24}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1223\\3131\end{pmatrix}$$

და

$$B=\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\\ b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}\\ b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}\\ b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\3&-2&1&2\\4&1&1&2\\-2&2&1&2\end{pmatrix}$$

მატრიცების ნამრავლი.

ვთქვათ, $A\cdot B=C=\left(c_{ij}\right)$ სადაც $1\le i\le 2,\ \ 1\le j\le 4,$. გვექნება:

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{4}a_{1k}\cdot b_{k1}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}+a_{14}\cdot b_{41}=7,$$

$$c_{12}=\sum_{k=1}^{4}a_{1k}\cdot b_{k2}=a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32}+a_{14}\cdot b_{42}=5,$$

$$c_{13}=\sum_{k=1}^{4}a_{1k}\cdot b_{k3}=a_{11}\cdot b_{13}+a_{12}\cdot b_{23}+a_{13}\cdot b_{33}+a_{14}\cdot b_{43}=8,$$

$$c_{14}=\sum_{k=1}^{4}a_{1k}\cdot b_{k4}=a_{11}\cdot b_{14}+a_{12}\cdot b_{24}+a_{13}\cdot b_{34}+a_{14}\cdot b_{44}=16,$$

$$c_{21}=\sum_{k=1}^{4}a_{2k}\cdot b_{k1}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31}+a_{24}\cdot b_{41}=10,$$

$$c_{22}=\sum_{k=1}^{4}a_{2k}\cdot b_{k2}=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32}+a_{24}\cdot b_{42}=10,$$

$$c_{23}=\sum_{k=1}^{4}a_{2k}\cdot b_{k3}=a_{21}\cdot b_{13}+a_{22}\cdot b_{23}+a_{23}\cdot b_{33}+a_{24}\cdot b_{43}=8,$$

$$c_{24}=\sum_{k=1}^{4}a_{2k}\cdot b_{k4}=a_{21}\cdot b_{14}+a_{22}\cdot b_{24}+a_{23}\cdot b_{34}+a_{24}\cdot b_{44}=16.$$

ამიტომაც

$$C=\begin{pmatrix}c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}\\c_{21}c_{22}c_{23}c_{24}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5&8&16\\10&10&8&16\end{pmatrix}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. $X=\{0,1\}$ სიმრავლეზე დაწერეთ:

   1) ყველა $(1,1)$ განზომილებიანი მატრიცა;

   2) ყველა $(1,2)$ განზომილებიანი მატრიცა;

   3) ყველა $(3,1)$ განზომილებიანი მატრიცა;

   4) ყველა მესამე რიგის დიაგონალური მატრიცა;

   5) მესამე რიგის ნულოვანი და ერთეულოვანი მატრიცები;

6) ყველა მესამე რიგის ელემენტარული მატრიცა.

2. იპოვეთ $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა.

3. იპოვეთ $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ მატრიცის გაფართოება $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ მატრიცით და B მატრიცისა A მატრიცით.

4. აჩვენეთ, რომ $A=\begin{pmatrix}1&3&6&1\\3&2&4&3\\6&4&3&5\\1&3&5&4\end{pmatrix}$, სიმეტრიული მატრიცაა.

5. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული მატრიცების

$$A=\begin{pmatrix}1\\0\\4\\5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4&7&6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\2&2\end{pmatrix}$$

მთავარი მატრიცები. იპოვეთ $\tilde{B}$ და $\tilde{C}$ მატრიცები.

6. იპოვეთ

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&2&0&1&1\\2&0&1&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0&1&1&0&2&0&1&1\\1&0&0&0&1&0&2&2\end{pmatrix},$$

$$A_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ A_5=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix},\ A_6=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

მატრიცების შესაბამისი სტრიქონების მიმართ დაყვანილი და დაყვანილი მატრიცები.

7. მოცემულია მატრიცები

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&2\\5&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&2\\4&0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\2&3&1&0&3\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\3&0&0\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}1&2&1&2&1\\2&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&2\\2&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ A_1+B_1, $A_1\cdot A_2$, $B_1\cdot A_2$, $B_2\cdot A_3$ და $A_3\cdot B_3$.

8. იპოვეთ $f(A)$, თუ

1) $f(x)=x^2-5x+3$ და $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$;

2) $f(x)=x^2-x-1$ და $A=\begin{pmatrix}-26&-18&-27\\21&15&21\\12&8&13\end{pmatrix}$;

3) $f(x)=x^3-2x^2+1$ და $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$;

4) $f(x)=x^3-3x+2$ და $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

პასუხები

1. 1) $A_1=(0)$; $A_2=(1)$.

2) $A_1=(0\,0)$; $A_2=(1\,0)$; $A_3=(0\,1)$; $A_4=(1\,1)$.

3) $B_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $B_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $B_5=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B_6=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $B_7=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $B_8=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

4) $C_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; $C_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; $C_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; $C_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;
$C_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; $C_6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $C_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $C_8=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5) $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}000\\000\\000\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}100\\010\\001\end{pmatrix}.$

6) $E_1=\begin{pmatrix}100\\010\\001\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}110\\010\\001\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}101\\010\\001\end{pmatrix},\ E_4=\begin{pmatrix}100\\110\\001\end{pmatrix},$

$E_5=\begin{pmatrix}100\\011\\001\end{pmatrix},\ E_6=\begin{pmatrix}100\\010\\101\end{pmatrix},\ E_7=\begin{pmatrix}100\\010\\011\end{pmatrix}.$

2. $A^t=\begin{pmatrix}100\\110\\111\end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix}1010\\0111\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0101\\1011\end{pmatrix}.$

5. $\bar{A}=(1);\ \bar{B}=(2);\ \bar{C}=\begin{pmatrix}123\\312\\011\end{pmatrix};\ \bar{D}=\begin{pmatrix}12\\34\end{pmatrix};\ \tilde{B}=(3476);\ \tilde{C}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}.$

6. A_1,B_1,A_2,B_2,A_3,B_3 მატრიცების სტრიქონების მიმართ დაყვანილ მატრიცებს შესაბამისად აქვთ სახე:

$$A_1'=\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix};\qquad B_1'=\begin{pmatrix}100\\010\\001\\000\end{pmatrix};\qquad A_2'=\begin{pmatrix}1&0&-7&-12&6\\0&1&5&8&-3\end{pmatrix};$$

$$B_2'=\begin{pmatrix}100\\010\\001\end{pmatrix};$$

$$A_3'=\begin{pmatrix}10000\\01010\\00101\end{pmatrix};\ B_3'=\begin{pmatrix}10\\01\\00\\00\\00\end{pmatrix}.$$

A_1,B_1,A_2,B_2,A_3,B_3 მატრიცების შესაბამის დაყვანილ მატრიცებს შესაბამისად აქვთ სახე:

$$A_1''=\begin{pmatrix}100000\\010000\\001000\end{pmatrix};\ B_1''=\begin{pmatrix}100\\010\\001\\000\end{pmatrix};\ A_2''=\begin{pmatrix}10000\\01000\end{pmatrix};\ B_2''=\begin{pmatrix}100\\010\\001\end{pmatrix};$$

$$A_3''=\begin{pmatrix}10000\\01000\\00100\end{pmatrix};\ B_3''=\begin{pmatrix}10\\01\\00\\00\\00\end{pmatrix}.$$

7. $A_1+B_1=\begin{pmatrix}20\\22\\54\\90\end{pmatrix};\ A_1\cdot A_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\4&7&7&8&3\\7&12&11&12&6\\5&10&15&20&0\end{pmatrix};\ B_1\cdot A_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\2&3&1&0&3\\6&10&8&8&6\\4&8&12&16&0\end{pmatrix};$

$$B_2\cdot A_3=\begin{pmatrix}10101\\45353\\36363\end{pmatrix};A_3\cdot B_3=\begin{pmatrix}97\\88\\55\end{pmatrix}.$$

8. 1) $f\left(\begin{pmatrix}-26&-18&-27\\21&15&21\\12&8&13\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};$

2) $f\left(\begin{pmatrix}1&-1\\-3&3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix};$

3) $f\left(\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\1&4&0\end{pmatrix};$

4) $f\left(\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}18&18&18\\18&18&18\\18&18&18\end{pmatrix}.$

§ 8. წრფივ განტოლებათა სისტემები

1. ვთქვათ, **X** ველია. განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad \ldots(1)$$

სადაც $b_i, a_{ij} \in \mathbf{X}$ $(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n)$ და $x_1, x_2, ..., x_n$ რომელიღაც უცნობებია, ეწოდება n უცნობიანი m რაოდენობის წრფივ განტოლებათა სისტემა **X** ველზე. a_{ij} ელემენტებს (1) განტოლებათა სიტემაში შემავალ უცნობთა კოეფიციენტებს უწოდებენ, ხოლო $b_1, b_2, ..., b_m$ ელემენტებს კი - თავისუფალ წევრებს. თუ თავისუფალი წევრებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ (1) სისტემას არაერთგვაროვანი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ერთგვაროვანი ეწოდება. მატრიცებს

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad \ldots(2)$$

(1) განტოლებათა სისტემის მთავარი და გაფართოებული მატრიცები ეწოდება. **X** ველის ელემენტთა $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ სიტემას ეწოდება (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი, თუ უცნობთა $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ მნიშვნელობებისათვის (1) განტოლებათა სისტემის ყოველი განტოლება ჭეშმარიტ ტოლობად გადაიქცევა.

თუ (1) განტოლებათა სისტემას ერთი ამონახსნი მაინც გააჩნია, მაშინ მას თავსებადი ეწოდება.

(1) განტოლებათა სისტემას ეწოდება

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{s1}x_1 + c_{s2}x_2 + \cdots + c_{sn}x_n = d_s \end{cases} \qquad \ldots(3)$$

სისტემის ეკვივალენტური, თუ (1) განტოლებათა სისტემის ყოველი ამონახსენი არის (3) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი და პირიქით (3) განტოლებათა სისტემის ყოველი ამონახსენი არის (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი.

2. მე-(3) განტოლებათა სისტემა იქნება (1) განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტური მხოლოდ მაშინ, როცა შემეგი სამი პირობიდან შესრულებულია თუნდაც ერთი პირობა:

1) მესამე განტოლებათა სისტემა მიღებულია (1) განტოლებათა სისტემიდან მასში ნებისმიერი ორი განტოლების ადგილების ურთიერთ შეცვლით;

2) მესამე განტოლებათა სისტემა მიღებულია (1) განტოლებათა სისტემიდან მისი რომელიმე განტოლების ნულისაგან განსხვავებულ ელემენტზე გამრავლებით;

3) მესამე განტოლებათა სისტემა მიღებულია (1) განტოლებათა სისტემიდან მისი $i-$ურ განტოლებაზე $j-$ური განტოლების $(1 \le i \ne j \le m)$ დამატებით, გამრავლებული რაიმე k ელემენტზე (ე.ი. მესამე სისტემაში $i-$ური განტოლება შეცვლილია განტოლებით

$$\left(a_{i1} + ka_{j1}\right)x_1 + \left(a_{i2} + ka_{j2}\right)x_2 + \cdots + \left(a_{in} + ka_{jn}\right)x_n = b_i + kb_j\ ).$$

3. შევნიშნოთ, რომ თუ (1) განტოლებათა სისტემა, მისი 1), 2) და 3) გარდაქმნებით მიყვანილი იქნება განტოლებათა სისტემამდე, რომელიც შეიცავს განტოლებას

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b \ne 0,$$

მაშინ მას უცნობთა არცერთი მნიშვნელობა არ აკმაყოფილებს, ამიტომაც 2 პუნქტის 1), 2) და 3) პირობების თანახმად (1) განტოლებათა სისტემაც არ იქნება თავსებადი. თუ მიღებულ განტოლებათა სისტემა შეიცავს განტოლებას $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$, მაშინ მას აკმაყოფილებს $x_1, x_2, ..., x_n$ უცნობთა ნებისმიერი მნიშ-

ვნელობა და ამიტომაც ამ განტოლების მიღებული განტოლებათა სისტემიდან ამოშლა ყოველთვის შეიძლება და მიღებული განტოლებათა სისტემა მოცემული (1) განტოლებათა სისტემის ექვივალენტური იქნება.

(1) განტოლებათა სისტემის 1), 2), 3) სახის გარდაქმნებს და სისტემიდან $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$ სახის განტოლების მიერთებას ან ამოშლას (1) განტოლებათა სისტემის ელემენტარული გარდაქმნები ეწოდება.

(1) განტოლებათა სისტემის ზემოთ აღწერილი მეთოდით ამოხსნას უცნობთა თანდათანობითი გამორიცხვის მეთოდით ამოხსნას ან კიდევ გაუსის მეთოდით ამოხსნას უწოდებენ.

მივანიჭებთ რა $n-r$ რაოდენობის თავისუფალ უცნობებს **X** ველიდან აღებული ელემენტების რომელიღაც მნიშვნელობებს, მაშინ (1) განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნიდან $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ უცნობთა მნიშვნელობები ცალსახად განისაზღვრებიან მივიღებთ, რომ $x_1 = \delta_1,\ x_2 = \delta_2, \ldots, x_n = \delta_n$. უცნობთა ამ მნიშვნელობებს (1) განტოლებათა სისტემის კერძო ამონახსენი ეწოდება და ხშირად $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ სახით ჩაიწერება.

შევნიშნოთ, რომ თუ (1) განტოლებათა სისტემა თავსებადია და $r = n$ მაშინ მას ერთადერთი ამონახსენი ექნება, ხოლო ერთზე მეტი ამონახსენი ექნება, როცა $r < n$ (ე.ი. ძირითად უცნობთა რიცხვი ნაკლებია განტოლებაში შემავალ უცნობთა რიცხვზე).

მაგალითი 1. გაუსის მეთოდით ამოვხსნათ შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases} \qquad \ldots(4)$$

მე – (4) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებით შევადგინოთ მატრიცა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -5 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \qquad \ldots(5)$$

და მის მიმართ გამოვიყენოთ მხოლოდ მატრიცის სტრიქონთა ელემენტარული გარდაქმნები. ასეთი გარდაქმნებით მიღებულ მატრიცას, თუ ისევ წარმოვადგენთ, როგორც განტოლებათა სისტემას, მაშინ მიღებული განტოლებათა სისტემა მოცემული განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტური იქნება (იხ § 7, პუნქტი 2). ჩვენს შემთხვევაში მოცემული მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტები გამრავლებულია ჯერ $-3-$ზე და შემდეგ $-2-$ზე და შესაბამისად დამატებულია მატრიცის მეორე და მესამე სტრიქონის ელემენტებზე და შედეგი ჩაწერილია მეორე და მესამე სტრიქონებში. ამგვარად მიღებულია მეორე მატრიცა. შემდეგ, მეორე მატრიცის მეორე სტრიქონი ყველა ელემენტი გამრავლებულია $-1-$ზე და დამატებულია მეორე მატრიცის მესამე სტრიქონზე. ამგვარად მიღებული მესამე მატრიცა. მოცემულ მატრიცაზე ჩატარებული მთელი ეს პროცესი წარმოდგენილია შემდეგ სამი მატრიცის სახით (მატრიცებს შორის ~ სიმბოლო აღნიშნავს, რომ თუ დავწერთ თითოეული მატრიცის შესაბამის განტოლებათა სისტემას , მაშინ ისინი ერთმანეთის ექვივალენტურები იქნებიან).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -5 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -13 & 4 & | & -1 \\ 0 & -5 & 10 & -13 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -13 & 4 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

აღვადგინოთ ბოლო მატრიცის შესაბამისი განტოლებათა სისტემა. მას ექნება სახე:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 1 \\ 0 - 5x_2 + 10x_3 - 13x_4 + 4x_5 = -1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1 \end{cases}$$

ამ სისტემის ბოლო განტოლებას არ აკმაყოფილებს x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 უცნობთა არცერთი მნიშვნელობა, ამიტომ მოცემულ (4) გან-

ტოლებათა სისტემას არა აქვს ამონახსენი.

მაგალითი 2) გაუსის მეთოდით ამოვხსნათ შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases} \qquad \ldots(6)$$

მე$-(6)$ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებით შევადგინოთ მატრიცა

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -5 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

მოცემული მატრიციდან, მესამე მატრიცა მიღებულია მაგალით $1-$ში გამოყენებული გარდაქმნებით.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -5 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -13 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -13 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -13 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -13 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -\frac{13}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -\frac{13}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{array}\right).$$

შემდეგ, ნულოვანი სტრიქონის ამოგდებით მიიღება მეოთხე მატრიცა (იგი შეესაბამება $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$, რომელსაც x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 უცნობთა ნებისმიერი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს, ე.ი. მას დააკმაყოფილებს დარჩენილი განტოლებათა სისტემის ამონახსენიც). მოცემული მატრიცის მთავარი დიაგონალის ქვემოთ ყველა ელემენტი ნულია. ამ შემთხვევაში თუ აღვადგენთ მოცემული მატრიცის შესაბამის განტოლებათა სისტემას, სისტემის პირველ განტოლებაში გვექნება გამოსარიცხი x_2 უცნობი. ეს კი იმას მიშნავს, რომ მოცემული განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პროცესი სრულად არ არის დამთავრებული. მატრიცის გარდაქმნის პროცესი მანამდე უნდა გავაგრძელოთ, სანამ მოცემული მატრიცის მთავარი

დიაგონალის ზემოთაც ყველა ელემენტი ნული არ გახდება. მეოთხე და მეხუთე მატრიციები შემდგომი გარდაქმნებიც ამ იდეას ექვემდებარება. კერძოდ, მეოთხე მატრიცის მეორე სტრიქონის $\frac{1}{5}-$ზე გამრავლებით მიღებულია მეხუთე მატრიცა. მეხუთე მატრიცის ბოლო სტრიქონი გამრავლებულია $2-$ზე, დამატებულია პირველ სტრიქონზე და ჩაწერილია პირველი სტრიქონის ადგილას. ამგვარად მიღებულია მეექვსე მატრიცა. ბოლო მატრიცა გვიჩვენებს, რომ მატრიცის გარდაქმნის პროცესი დასრულებულია (მიღებული მატრიცის მთავარ დიაგონალს ზემოთაც ყველა ელემენტი ნულია). დავწეროთ ბოლო მატრიცის შესაბამისი განტოლებათა სისტემა. გვექნება:

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 - \frac{6}{5}x_4 \quad + \frac{3}{5}x_5 = \ 1 \\ -x_2 + \ 2x_3 - \frac{13}{5}x_4 + \ \frac{4}{5}x_5 = \ 0 \end{cases}$$

თავისუფალ უცნობებად მოცემულ შემთხვევაში მიღებული x_3, x_4 და x_5 უცნობები. მაშინ მოცემული განტოლებათა სისტემის ზოგად ამონახსენს ექნება სახე:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 + \frac{6}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5, \\ x_2 = 2x_3 - \frac{13}{5}x_4 + \ \frac{4}{5}x_5. \end{cases}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, მაშინ $x_1 = 1$ და $x_2 = 0$, ე.ი. მოცემული განტოლებათა სისტემის ერთი კერძო ამონახსენი იქნება ვექტორი $\alpha = (1,0,0,0,0)$.

საზოგადოდ, მოცემულ განტოლებათა სისტემას აქვს უამრავი ამონახსენი.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. ამოხსენით შემდეგი განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=1, \\ 3x_1+5x_2-2x_3+3x_4=3, \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=5, \\ x_1+3x_2-2x_3+3x_4=4, \\ 2x_1+x_2-x_3+4x_4=6. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-3x_3+5x_4=3, \\ 2x_1+3x_2-x_3+3x_4=2, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+2x_2-2x_3+2x_4=1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-5x_3+5x_4=-2, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4=-1, \\ -x_1+x_2-2x_3-3x_4=-3, \\ x_1+2x_2-2x_3+2x_4=-1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-3x_3=5, \\ 2x_1+3x_2-x_3=4, \\ x_1+2x_2-2x_3=1. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1+x_2-3x_3=-2, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=1, \\ x_1+2x_2-3x_3=-1. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1+7x_2-10x_3-2x_5=-8, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4+2x_5=0, \\ -x_1+x_2-2x_3-3x_4-3x_5=-4, \\ x_1+3x_2-5x_3-x_5=-4. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} -x_1+2x_2=-1, \\ 3x_1+x_2=4, \\ 2x_1+3x_2=3. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3-5x_4-x_5=-3, \\ 3x_1-3x_2+4x_3+2x_4-3x_5=4, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4-x_5=3, \\ -3x_1+2x_2-3x_3+x_4+x_5=-5 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+x_5=4 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x_1+7x_2-10x_3-2x_4=-8, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4=-1, \\ -x_1+x_2-2x_3-3x_4=-3, \\ x_1+3x_2-5x_3-x_5=-4. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3-5x_4-x_5=8, \\ 3x_1-3x_2+4x_3+2x_4-3x_5=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4-x_5=1, \\ -3x_1+2x_2-3x_3+x_4+x_5=3 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+x_5=2 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2x_1+7x_2-10x_3+2x_4=9, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4=6, \\ -x_1+4x_2-2x_3-3x_4=1, \\ x_1+3x_2-5x_3-x_4=2. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3-5x_4-x_5=-5, \\ 3x_1-3x_2+4x_3+2x_4-3x_5=3, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4-x_5=4, \\ -3x_1+2x_2-3x_3+x_4+x_5=-2 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+x_5=6 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2x_1+7x_2-10x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4=5, \\ -x_1+4x_2-2x_3+3x_4=4, \\ x_1+3x_2-5x_3-x_4=-2. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1+7x_2-10x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4=5, \\ -x_1+x_2-2x_3-3x_4=-4, \\ x_1+3x_2-5x_3-3x_4=-2. \end{cases}$ 16) $\begin{cases} -x_1+2x_2=1, \\ 3x_1+x_2=4, \\ 2x_1+3x_2=5. \end{cases}$

2. განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გარეშე დაადგინეთ, თავსებადია თუ არა შემდეგი განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7, \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3, \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 12x_1+9x_2+3x_3+10x_4=13, \\ 8x_1+6x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4=5, \\ 3x_1-3x_2+4x_3-3x_4=3, \\ x_1-2x_2+x_3-4x_4=-4. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-2, \\ 2x_1+4x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-3x_3=-1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x_1+4x_2=2, \\ 3x_1+x_2=4, \\ -x_1+2x_2=-1, \\ 2x_1+3x_2=5. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-5x_3+5x_4-x_5=2, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4+2x_5=0, \\ -x_1-2x_2+2x_3-2x_4+3x_5=3, \\ x_1+2x_2-2x_3+2x_4+x_5=2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x_1-3x_2+4x_3=3, \\ 2x_1-x_2+3x_3=5, \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x_1+4x_2-2x_3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=-2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6, \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x_1-1x_2-6x_3+3x_4=-1, \\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4=-32, \\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4=5, \\ x_1-x_2+2x_3-6x_4=-8. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10, \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=1, \\ 3x_1+9x_2+12x_3+9x_4=6, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} -9x_1+6x_2+7x_3+10x_4=17, \\ -6x_1+4x_2+2x_3+3x_4=5, \\ -3x_1+2x_2-11x_3-15x_4=-26, \\ 3x_1+4x_2-x_3-11x_4=-12. \end{cases}$

3. დაადგინეთ, თავსებადია თუ არა შემდეგი განტოლებათა სისტემები და თავსებადობის შემთხვევაში ამოხსენით ისინი:

1) $\begin{cases} 18x_1+6x_2+3x_3+2x_4=15, \\ -12x_1-3x_2-3x_3+3x_4=-6, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4=3, \\ x_1+4x_2+x_3+4x_4=2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -6x_1+8x_2-5x_3-x_4=9, \\ -2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1, \\ -3x_1+5x_2+4x_3+2x_4=3, \\ -3x_1+7x_2+17x_3+7x_4=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=7. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ 8x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3-3x_4=2, \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4=0, \\ 6_1x_1-17x_2+9x_3+18x_4=1, \\ x_1+14x_2+2x_3-10x_4=4, \\ 2x_1+3x_2+3x_3-2x_4=1. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x_1-3x_2-2x_3+10x_4=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 6x_1+3x_2-7x_3+8x_4=2, \\ 4x_1-2x_2-x_3+6x_4=1, \\ 8x_1-14x_2+9x_3+10x_4=3. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 6x_1+11x_2+4x_3+8x_4=1, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=7. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-4x_4=1, \\ 4x_1-2x_2+5x_3-6x_4=3, \\ 2x_1-x_2+2x_3-2x_4=2, \\ 8x_1-4x_2+9x_3-16x_4=1. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 6x_1+19x_2+2x_3+10x_4=1, \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=7. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+4x_4=3, \\ 4x_1-2x_2-2x_3+6x_4=2, \\ 6x_1-3x_2-3x_3+8x_4=3, \\ 8x_1-4x_2-4x_3+10x_4=4. \end{cases}$

პასუხები

1. 1) $\left(x_1,\ 1-x_1+x_4,\ 1-x_1+4x_4,\ x_4\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $(0,2,5,1)$;

2) $\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{4}x_4,\ -\frac{11}{4}+\frac{11}{4}x_4,\ -\frac{21}{4}+\frac{21}{4}x_4,\ x_4\right)$, ერთი კერძო ამო-ნახსენია $\left(\frac{7}{4},-\frac{11}{4},-\frac{21}{4},0\right)$;

3) $\left(x_1,\ \frac{3}{4}-\frac{3}{4}x_1-x_4,\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}x_1,\ x_4\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $\left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4},0\right)$;

4) $(1,\ -5x_4,\ 1-4x_4,\ x_4)$, ერთი კერძო ამონახსენია $(1,0,1,0)$;

5) $\left(x_1,\ \frac{7}{4}-\frac{3}{4}x_1,\ \frac{5}{4}-\frac{1}{4}x_1\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $\left(0,\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right)$;

6) $(0,1,1)$;

7) $\left(\frac{12}{7}-\frac{15}{7}x_4-\frac{13}{7}x_5,\ 0,\ \frac{8}{7}-\frac{3}{7}x_4-\frac{4}{7}x_5,\ x_4,\ x_4\right)$, ერთი კერძო ამონახ-სენია $\left(\frac{12}{7},0,\frac{8}{7},0,0\right)$;

8) $\left(\frac{9}{7},\frac{1}{7}\right)$; 9) $(1,0,1,01)$; 10) $(1,0,1,0)$; 11) $(0,1,0,1,0)$

12) $(0,1,0,1)$; 13) $(1,1,1,1,1)$; 14) $(1,1,1,1)$. 15) $(1,0,0,1)$; 16) $(1,1)$.

2. 1) არათავსებადია; 2) $\left(x_1,\ -\frac{6}{5}x_1,\ 1-\frac{2}{5}x_1,\ 1\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $-(0,0.1,1)$;

3) არათავსებადია; 4) $(1,0,1)$; 5) არათავსებადია;

6) არათავსებადია;

7) $\left(x_1,\ \frac{11}{5}+\frac{1}{5}x_1,\ \frac{12}{5}-\frac{3}{5}x_1\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $\left(0,\frac{11}{5},\frac{12}{5}\right)$;

8) $\left(x_1,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_1,\ 1\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $\left(0,\frac{1}{2},1\right)$;

9) $(1,1,-1,-1)$; 10) $\left(-3,0,-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$;

11) არათავსებადია;

12) $\left(-\frac{79}{72}+\frac{79}{72}x_4,\ -\frac{19}{12}+\frac{19}{12}x_4,\ \frac{19}{8}-\frac{19}{8}x_4,\ x_4\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $\left(-\frac{79}{72},-\frac{19}{12},\frac{19}{8},0\right)$.

3. 1) $\left(1,\ 1-\frac{5}{3}x_4,\ -3+\frac{8}{3}x_4,\ x_4\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $(1,1,-3,0)$;

2) $\left(x_1,\ \frac{17}{19}+\frac{13}{19}x_1,\ -\frac{7}{19}-\frac{2}{19}x_1,\ 0\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $\left(0,\frac{17}{19},-\frac{7}{19},0\right)$;

3) $\left(x_1,\ \frac{22}{9}-\frac{2}{9}x_1,\ \frac{43}{9}-\frac{8}{9}x_1,\ -5\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $\left(0,\frac{22}{9},\frac{43}{9},-5\right)$;

4) $\left(x_1,\ 4+2x_1-2x_4,\ 3-2x_4,\ x_4\right)$, ერთი კერძო ამონახსენია $(0,4,3,0)$;

5) $(0,1,0,1)$; 6) $(1,1,1,0)$;

7) არათავსებადია;

8) $(1,0,1,1)$;

9) არათავსებადია;

10) $(1,0,1,0)$.

§ 9. ჩასმები

1. ვთქვათ, $X=\{1,2,...,n\}$.

X სიმრავლის თავისთავზე ნებისმიერ ბიექციას ჩასმა ეწოდება. შემდგომში X სიმრავლეზე ყველა ჩასმათა სიმრავლეს S_n სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. ამასთან თუ $\varphi\in S_n$, მაშინ φ ჩასმას წარმოვადგენთ შემდეგი სახით:
$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n)\end{pmatrix}.$$

ჩასმებს
$$e=\begin{pmatrix}1\ 2\ ...\ n\\ 1\ 2\ ...\ n\end{pmatrix} \text{ და } \varphi^{-1}=\begin{pmatrix}\varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n)\\ 1 & 2 & ... & n\end{pmatrix}$$
შესაბამისად, ერთეულოვან და φ ჩასმის შებრუნებულ ჩასმას უწოდებენ, რადგანაც
$$\varphi\cdot e=e\cdot\varphi=\varphi \text{ და } \varphi\cdot\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\cdot\varphi=e$$
ყოველი $\varphi\in S_n$ ჩასმისათვის.

ახლა, ვთქვათ, $i,j\in X\ (i\neq j)$. თუ φ ჩასმა აკმაყოფილებს პირობებს $\varphi(i)=j$, $\varphi(j)=i$ და $\varphi(t)=t$ ყოველი $t\in X$ რიცხვისათვის, რომელიც განსხვავებულია i და j რიცხვებისაგან, მაშინ φ ჩასმას ტრანსპოზიცია ეწოდება.

2. იტყვიან, რომ φ ჩასმაში i და j რიცხვები ქმნიან ინვერსიას, თუ
$$\frac{i-j}{\varphi(i)-\varphi(j)}<0.$$

შევნიშნოთ, რომ i და j რიცხვები φ ჩასმაში ქმნიან ინვერსიას, თუ φ ჩასმის რომელიმე სტრიქონში i რიცხვი გვხდება პირველად ვიდრე j რიცხვი და $i>j$.

3. φ ჩასმას ლუწი ეწოდება, თუ φ ჩასმაში ინვერსიათა რიცხვი ლუწია, კენტი ეწოდება, თუ φ ჩასმაში ინვერსიათა რიცხვი

კენტია.

ცხადია, რომ ერთეულოვანი ჩასმა ლუწი ჩასმაა, რადგანაც e ჩასმაში ინვერსიათა რიცხვი ნულის ტოლია.

4. თუ φ და ψ ჩასმებიდან ორივე ერთდროულად ლუწია ან კენტი, მაშინ მათი ნამრავლი ლუწი ჩასმაა;
5. თუ φ და ψ ჩასმებიდან ერთი ლუწია და მეორე კენტი, მაშინ მათი ნამრავლი კენტი ჩასმაა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. იპოვეთ φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 და φ_6 ჩასმებში ინვერსიათა რიცხვი, თუ

1) $\varphi_1=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\ 6\,5\,4\,3\,2\,1\end{pmatrix}$, 2) $\varphi_2=\begin{pmatrix}1\ 6\,3\,4\,5\,2\\ 6\,3\,4\,5\,2\,1\end{pmatrix}$,

3) $\varphi_3=\begin{pmatrix}1\,2\,5\,4\,6\,3\\ 6\,5\,4\,3\,2\,1\end{pmatrix}$, 4) $\varphi_4=\begin{pmatrix}1\,7\,3\,4\,5\,6\,2\,8\\ 8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1\end{pmatrix}$,

5) $\varphi_5=\begin{pmatrix}1\,7\,3\,4\,5\,6\,2\,8\,9\\ 8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,9\,1\end{pmatrix}$, 6) $\varphi_6=\begin{pmatrix}1\,7\,2\,4\,5\,6\,3\,8\\ 8\,7\,6\,4\,5\,3\,2\,1\end{pmatrix}$.

2. ვთქვათ, $\varphi=\begin{pmatrix}1\,6\,3\,4\,5\,2\\ 6\,3\,4\,5\,2\,1\end{pmatrix}$. იპოვეთ φ^2, φ^3, φ^4, φ^5 და φ^6.
3. ვთქვათ, $X=\{1,2,...,n\}$ და S_n არის X სიმრავლის ყველა ჩასმათა სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{S_n}=\left(S_n,\cdot,^{-1}\right)$ ალგებრა, სადაც $(\cdot)$ ჩასმათა გამრავლების ოპერაციაა S_n სიმრავლეზე, ხოლო $\left(^{-1}\right)$, უნარული ოპერაციაა S_n სიმრავლეზე, რომელიც ყოველ $\varphi\in S_n$ ელემენტს შეუსაბამებს φ^{-1} ელემენტს, ქმნის ჯგუფს.
4. ვთქვათ, $X=\{1,2,...,n\}$ და A_n არის S_n სიმრავლის ყველა ლუწ ჩასმათა სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{A_n}=\left(A_n,\cdot,^{-1}\right)$ ალგებრა, სადაც $(\cdot)$ ჩასმათა გამრავლების ოპერაციაა A_n სიმრავლეზე, ხოლო $\left(^{-1}\right)$, უნარული პერაციაა A_n სიმრავლეზე, რომელიც

ყოველ $\varphi \in A_n$ ელემენტს შეუსაბამებს φ^{-1} ელემენტს, ქმნის ჯგუფს.

5. იპოვეთ შემდეგ ჩასმათა ნამრავლი:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&4&5&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&5&6&3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&2&1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&1&6&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&4&2&1&5\end{pmatrix}$.

6. იპოვეთ შემდეგ ჩასმათა ლუწკენტოვნება:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&6&4&7&2&1&3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&5&2&1&6&4&8&7\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3&5&6&4&2&1&7\\2&4&1&7&6&5&3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}2&7&5&4&8&3&6&1\\3&5&8&7&2&6&1&4\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}1\ 2\ 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n-1\ n\\2\ 4\ 6 \ldots 1\ 3\ 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}1\ 2\ 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n-1\ n\\1\ 3\ 5 \ldots 2\ 4\ 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}1\ 2\ 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n-1\ n\\2\ 4\ 6 \ldots 1\ 3\ 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\ \ldots&n-1&n\\n&1&n-1&2\ \ldots\ldots\ldots\ldots&&\end{pmatrix}$.

პასუხები

1. 1) 15;
   2) 19;
   3) 19;
   4) 37;
   5) 38;
   6) 35.

2. $\varphi^2 = \begin{pmatrix}1&6&3&4&5&2\\3&4&5&2&1&6\end{pmatrix}$; $\varphi^3 = \begin{pmatrix}1&6&3&4&5&2\\4&5&2&1&6&3\end{pmatrix}$; $\varphi^4 = \begin{pmatrix}1&6&3&4&5&2\\5&2&1&6&3&4\end{pmatrix}$;

   $\varphi^5 = \begin{pmatrix}1&6&3&4&5&2\\2&1&6&3&4&5\end{pmatrix}$; $\varphi^6 = \begin{pmatrix}1&6&3&4&5&2\\1&6&3&4&5&2\end{pmatrix}$.

5. 1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}$;

   2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&5&6&4&2\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&3&2&1&4\end{pmatrix}$;

   3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&1&2\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&1&2\end{pmatrix}$;

   4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&6&5&3&2\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&6&5&3&2\end{pmatrix}$.

6. 1) 15, კენტი;
   2) 8, ლუწი;
   3) 20, ლუწი;
   4) 33, კენტი;
   5) $(-1)^{\frac{n+2}{2}}$;
   6) $(-1)^{\frac{n+1}{4}}$;
   7) $(-1)^{\frac{n}{2}}$;
   8) $(-1)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}$.

§ 10. დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ე ბ ი

1. ვთქვათ, X ველია,

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \qquad \dots(1)$$

არის $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა X ველზე, ხოლო S_n ყველა $n-$ური რიგის ჩასმების სიმრავლეა $\{1,2,\dots,n\}$ სიმრავლეზე. ყოველი $\varphi\in S_n$ ჩასმისათვის შევადგინოთ A მატრიცის ელემენტების

$$x_{1\varphi(1)}\cdot x_{2\varphi(2)}\cdots x_{n\varphi(n)} \qquad \dots(2)$$

ნამრავლები.

შევნიშნოთ, რომ (2) ნამრავლში ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან აღებულია მხოლოდ თითო ელემენტი. მათი რაოდენობა კი იმდენია, რამდენი ჩასმაც არსებობს $\{1,2,\dots,n\}$ სიმრავლეზე, ამიტომაც მათი რაოდენობა $n!=1\cdot 2\cdots n$ -ის ტოლია. (2) ნამრავლი ავიღოთ დადებითი ნიშნით თუ მისი შესაბამისი

$$\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

ჩასმა ლუწია და უარყოფითი ნიშნით თუ φ ჩასმა კენტია.

2. $n!$ რაოდენობის (2) სახის წევრთა ჯამს აღებულს შესაბამისი ნიშნით მოცემული A მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება და $|A|$ ან $\det(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

3. ვთქვათ, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ არიან X ველის რომელიღაც ელემენტები. იტყვიან, რომ A მატრიცის $i-$ური $(1\le i\le n)$ სტრიქონი (სვეტი) არის A მატრიცის დანარჩენი სტრიქონების (სვეტების) წრფივი კომბინაცია, თუ

$$x_{ik}=\lambda_1 x_{1k}+\lambda_2 x_{2k}+\dots+\lambda_n x_{nk}, \quad \left(x_{ki}=\lambda_1 x_{k1}+\lambda_2 x_{k2}+\dots+\lambda_n x_{kn}\right)$$

ყოველი $k-$სათვის, სადაც $k=1,2,\dots,n$.

4. A მატრიცის დეტერმინანტისათვის სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) A მატრიცისა და მისი ტრანსპონირებული A' მატრიცის დეტერმინანტები ერთმანეტის ტოლია;

2) თუ A მატრიცის რომელიმე ორ სტრიქონს (სვეტს) ადგილებს შევუცვლით, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნიშანს შეიცვლის;

3) თუ A მატრიცას ორი ერთნაირი სტრიქონი (სვეტი) აქვს, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია;

4) თუ A მატრიცას რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტს გავამრავლებთ X ველის რომელიმე x ელემენტზე, მაშინ მოცემული მატრიცის დეტერმინანტიც x ელემენტზე გამრავლდება;

5) თუ A მატრიცას რომელიმე ორი სტრიქონი (სვეტი) პროპორციულია, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია;

6) ვთქვათ, A მატრიცის $i-$ური სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი $m-$რაოდენობის შესაკრებთა ჯამის ტოლია, მაშინ A მატრიცის დეტერმინანტი $m-$რაოდენობის დეტერმინანტთა ჯამის ტოლია, რომელთაგან პირველი დეტერმინანტის შესაბამისი მატრიცის $i-$ურ სტრიქონში ($i-$ურ სვეტში) ჯამის პირველი შესაკრებებია, მეორე მატრიცაში ჯამის მეორე შესაკრებები და ა.შ.;

7) A მატრიცის დეტერმინანტი არ შეიცვლება, თუ A მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტს შესაბამისად დავუმატებთ A მატრიცას რომელიმე სხვა სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს გამრავლებულს X ველის რომელიმე ელემენტზე;

8) თუ A მატრიცის რომელიმე სტრიქონი (სვეტი) წარმოადგენს A მატრიცის დანარჩენი სტრიქონების (სვეტების)

წრფივ კომბინაციას, მაშინ მოცემული მატრიცის დეტერ-მინანტი ნულის ტოლია.

9) თუ A მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ მატრიცის დეტერმინანტიც ნულის ტოლია;

10) თუ A სამკუთხა მატრიცაა, მაშინ მისი დეტერმინანტი მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ნამრავლის ტო-ლია;

მინორები და ალგებრული დამატებები

1. ვთქვათ, X ველზე განსაზღვრულ A მარტიცა წარმოდგენილია (1) სახით.

1) A მარტიცის $k-$ური რიგის ქვემატრიცის დეტერმინანტს A მატრიცის $k-$ური რიგის მინორი ეწოდება.

2) A მარტიცის იმ M_{ik} ქვემატრიცის დეტერმინანტს, რო-მელიც მიიღება A მარტიცის i სტრიქონისა და k სვეტის ამო-შლით, x_{ik} ელემენტის შესაბამისი მინორი ეწოდება, ხოლო X ველის $A_{ik}=(-1)^{i+k}\cdot M_{ik}$ ელემენტს x_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება ეწოდება.

2. ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

X ველზე განსაზღვრული მატრიცაა და $1\le i,j\le n$. მაშინ

$x_{i1}A_{j1}+x_{i2}A_{j2}+\dots+x_{in}A_{jn}=|A|,\ x_{1i}A_{1j}+x_{2i}A_{2j}+\dots+x_{ni}A_{nj}=|A|,\ \dots(3)$

თუ $i=j$ და

$$x_{i1}A_{j1}+x_{i2}A_{j2}+\dots+x_{in}A_{jn}=0,\ x_{1i}A_{1j}+x_{2i}A_{2j}+\dots+x_{ni}A_{nj}=0,$$

თუ $i\ne j$, ე.ი. A მატრიცის i სტრიქონის (i სვეტის) ელემენტე-ბის ნამრავლთა ჯამი შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე მოცე-

მული მატრიცის დეტერმინანტის ტოლია, ხოლო A მატრიცის i სტრიქონის (i სვეტის) ელემენტების ნამრავლთა ჯამი სხვა სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნულის ტოლია.

A მატრიცის დეტერმინანტის წარმოდგენას მე-(3) სახის ფორმულებით A მატრიცის დეტერმინანტის i სტრიქონის (i სვეტის) ელემენტების მიმართ დაშლა ეწოდება.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ A მატრიცის დეტერმინანტი, სადაც.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

გვექნება:

$$\begin{vmatrix} 2&3&2&3&4 \\ 3&2&3&3&2 \\ 2&2&2&2&2 \\ 2&3&3&2&2 \\ 3&3&3&3&2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1&1&-1&0&2 \\ 3&2&3&3&2 \\ 2&2&2&2&2 \\ 2&3&3&2&2 \\ 3&3&3&3&2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1&1&-1&0&2 \\ 0&5&0&3&8 \\ 0&4&0&2&6 \\ 0&5&1&2&6 \\ 0&6&0&3&8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1&1&-1&0&2 \\ 0&1&0&1&2 \\ 0&4&0&2&6 \\ 0&5&1&2&6 \\ 0&6&0&3&8 \end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix} -1&1&-1&0&2 \\ 0&1&0&1&2 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&-3&-4 \\ 0&0&0&-3&-4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} -1&1&-1&0&2 \\ 0&1&0&1&2 \\ 0&0&1&-3&-4 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&-3&-4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} -1&1&-1&0&2 \\ 0&1&0&1&2 \\ 0&0&1&-3&-4 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&-1 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot\big((-1)\cdot1\cdot1\cdot(-1)\big)=2.$$

A მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლისას გამოყენებულია შემდეგი გარდაქმნები: 1) A მატრიცის პირველ სტრიქონზე გამოკლებულია მეორე სტრიქონი; შემდეგ პირველი სტრიქო-ნის ელემენტები გამრავლებული $3-$ზე შესაბამისად დამატე-ბულია მეორე სტრიქონის ელემენტებზე; გამრავლებული $2-$ზე დამატებულია მესამე სტრიქონის ელემენტებზე; გამრავ-ლებული $2-$ზე დამატებულია მეოთხე სტრიქონის ელემენ-ტებზე და ბოლოს გამრავლებული $3-$ზე დამატებულია მეხუ-თე სტრიქონის ელემენტებზე; დაწერილია მესამე, მეოთხე და

მეხუთე სტრიქონების ადგილას. 2) მეორე სტრიქონის ელემენტებზე შესაბამისად გამოკლებულია მესამე სტრიქონის ელემენტები; შემდეგ მეორე სტრიქონის ელემენტები გამრავლებული $-4-$ზე შესაბამისად დამატებულია მესამე სტრიქონის ელემენტებზე; გამრავლებული $-5-$ზე დამატებულია მეოთხე სტრიქონის ელემენტებზე და ბოლოს გამრავლებული $-6-$ზე დამატებულია მეხუთე სტრიქონის ელემენტებზე. დაწერილია მესამე, მეოთხე და მეხუთე სტრიქონების ადგილას. 3) მესამე სტრიქონიდან დეტერმინატის ნიშნის გარეთ გამოტანილია საერთო მამრავლი -2. 4) ადგილები შეცვლილი აქვს მესამე და მეოთხე სტრიქონებს; ამის გამო შეცვლილია დეტერმინანტის ნიშანც. 5) მეოთხე სტრიქონის ელემენტები გამრავლებული $3-$ზე შესაბამისად დამატებულია მეხუთე სტრიქონის ელემენტებზე.

ცნობილია, რომ სამკუთხა მატრიცის დეტერმინანტი მიღებული მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ნამრავლის ტოლია, ე.ი. $2\cdot\left((-1)\cdot1\cdot1\cdot(-1)\right)=2$.

მაგალითი 2. დეტერმინანტის დაშლა პირველი სვეტის ელემენტების მიმართ. ვთქვათ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

მესამე რიგის კვადრატული მატრიცაა.

1) A მატრიცის დეტერმინანტი წარმოვადგინოთ, როგორც პირველი სვეტის ელემენტების ნამრავთა ჯამი შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე. გვექნება

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\cdot(-2)+3\cdot(-1)\cdot(-13)+(-4)\cdot(-8)=67$$

(ტოლი იქნება მოცემული მატრიცის დეტერმინანტის).

2) A მატრიცის დეტერმინანტი წარმოდგენილია, როგორც მეორე სვეტის ელემენტების ნამრავთა ჯამი პირველი სვეტის ელემენტების შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე

$$1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 1\cdot(-2)+2\cdot(-1)\cdot(-13)+3\cdot(-8)=0.$$

აღვნიშნოთ, რომ საზოგადოდ დეტერმინანტის დაშლა სასურველია იმ სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების მიმართ, რომელშიაც ყველაზე ბევრი ნულებია, ან ისინი წინასწარ გავაჩინოთ მატრიცის იმ გარდაქმნებით, რომლებიც მისი დეტერმინანტის მნიშვნელობას არ ცვლიან.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. გამოიყვანეთ მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტების გამოსათვლელი ფორმულები.
2. გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a & c-di \\ c+di & b \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 34 & 102 \\ 51 & 85 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} tg\alpha & -1 \\ 1 & \mathrm{tg}\alpha \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 15) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

16) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; 17) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 18) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

19) $\begin{vmatrix} 2&3&0&0&0&0\\ 0&3&0&0&0&0\\ 1&1&4&0&0&0\\ 5&1&1&4&0&0\\ 3&1&2&1&1&3\\ 1&2&1&3&0&1 \end{vmatrix}$; 20) $\begin{vmatrix} 1&2&1&0&1&7\\ 0&3&4&1&0&1\\ 3&1&2&1&1&0\\ 1&0&1&0&1&2\\ 4&1&2&1&0&3\\ 1&0&1&3&0&0 \end{vmatrix}$; 21) $\begin{vmatrix} 1&0&1&0&1&0\\ 2&3&5&1&0&1\\ 1&1&2&1&2&0\\ 4&0&1&0&1&0\\ 3&1&0&1&6&3\\ 1&0&1&3&0&0 \end{vmatrix}$;

22) $\begin{vmatrix} 1&0&1&0&1&0\\ 2&3&5&1&0&1\\ 0&0&2&1&2&0\\ 0&0&0&4&1&0\\ 0&0&0&0&6&3\\ 0&0&0&3&0&1 \end{vmatrix}$; 23) $\begin{vmatrix} 4&4&-1&0&-1&8\\ 2&3&7&5&2&3\\ 3&2&5&7&3&2\\ 1&2&2&1&1&2\\ 1&7&6&6&5&7\\ 2&1&1&2&2&1 \end{vmatrix}$; 24) $\begin{vmatrix} -5&-7&-2&2&-2&16\\ 0&0&4&0&-5&0\\ 2&0&-2&0&2&0\\ 6&4&6&-1&15&-5\\ 5&-4&10&1&14&6\\ 3&0&-2&0&3&0 \end{vmatrix}$;

25) $\begin{vmatrix} 1&5&3&5&-4\\ 3&1&2&9&8\\ -1&7&-3&8&-9\\ 3&4&2&4&7\\ 1&8&3&3&5 \end{vmatrix}$; 26) $\begin{vmatrix} 27&44&40&55\\ 20&64&21&40\\ 13&-20&-13&24\\ 46&45&-55&84 \end{vmatrix}$; 27) $\begin{vmatrix} 30&20&15&12\\ 20&15&12&15\\ 15&12&15&20\\ 12&15&20&30 \end{vmatrix}$;

28) $\begin{vmatrix} 14&13&3&-13\\ -7&-4&2&10\\ 21&23&0&-23\\ 7&12&-2&-6 \end{vmatrix}$; 29) $\begin{vmatrix} 4&3&3&3\\ -7&-4&2&1\\ 2&3&0&-2\\ 7&12&-2&-6 \end{vmatrix}$; 30) $\begin{vmatrix} 3&2&1&2\\ 20&5&2&5\\ 5&2&5&0\\ 1&5&0&3 \end{vmatrix}$

3. როგორ შეიცვლება $n-$ური რიგის კვადრატული A მატრიცის დეტერმინანტი, თუ მოცემული მატრიცის ყოველ ელემენტს შევცვლით მისი მოპირდაპირე ელემენტით.

4. ვთქვათ, A არის $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა X ველზე და λ მოცემული ველის ელემენტია. აჩვენეთ, რომ $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$.

5. დაამტკიცეთ, რომ $\begin{vmatrix} 1&x&x^2\\ 1&y&y^2\\ 1&z&z^2 \end{vmatrix} = (y-x)\cdot(z-y)\cdot(z-x)$.

6. დაამტკიცეთ, რომ $\begin{vmatrix} 1&1&1\\ x&y&z\\ x^2&y^2&z^2 \end{vmatrix} = (y-x)\cdot(z-y)\cdot(z-x)$.

7. ვთქვათ, A არის $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა X ველზე. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის $|A^n| = |A|^n$.

8. გამოთვალეთ $n-$ური რიგის დეტერმინანტები.

1) $\begin{vmatrix} x&y&0&\dots&0&0\\ 0&x&y&\dots&0&0\\ 0&0&x&\dots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&0&\dots&x&y\\ y&0&0&\dots&0&x \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} n!\cdot a_0&(n-1)!\cdot a_1&(n-2)!\cdot a_2&\dots&a_n\\ -n&x&0&\dots&0\\ 0&-(n-1)&x&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&0&\dots&x \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a_0&-1&0&0&\dots&0&0\\ a_1&x&-1&0&\dots&0&0\\ a_2&0&x&-1&\dots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ a_{n-1}&0&0&0&\dots&x&-1\\ a_n&0&0&0&\dots&0&x \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a_0&1&1&1&\dots&1\\ 1&a_1&0&0&\dots&0\\ 1&0&a_2&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 1&0&0&0&\dots&a_n \end{vmatrix}$.

9. 2) ამოცანაში მოცემული მეჩვიდმეტე დეტერმინანტი დაშალეთ პირველი სტრიქონისა და მეოთხე სვეტის ელემენტების მიმართ.

10. იპოვეთ იმ მესამე რიგის კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტის უდიდესი მნიშვნელობა, რომლის ელემენტებია:
1) 0 და 1; 2) -1 და 1.

11. აჩვენეთ, რომ $n>1$ რიგის კვადრატული A მატრიცის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიღაც k რაოდენობის სტრიქონისა და l $(k+l>n)$ რაოდენობის სვეტის გადაკვეთაში მდებარე ყველა ელემენტი ნულია.

პასუხები

1.

1) $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$.

2) $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

2. 1) 11; 2) 13; 3) $-\cos 2\alpha$; 4) $a\cdot b-c^2-d^2$; 5) -2312;

6) $\sin(\alpha-\beta)$; 7) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 8) 2; 9) 1; 10) 48; 11) 13;

12) 160; 13) -84; 14) 132; 15) -900; 16) 394; 17) 665;

18) 1692; 19) 96; 20) 410; 21) 207; 22) 198; 23) -336;

24) 10; 25) -7497; 26) 1; 27) -2639;

28) -924; 29) -257; 30) 342.

3. $(-1)^n\cdot|A|$

8. 1) $x^n+(-1)^{n+1}y^n$;

2) $n!\cdot(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)$; 3) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$;

4) $a_1\cdot a_2\cdots a_n\left(a_0-\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}-\cdots-\dfrac{1}{a_n}\right)$.

9.

17) $$\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+6\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+5}\cdot\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{vmatrix};$$

17) $$\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=0\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}5&6&0&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}+$$

$$+6\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&0&1&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&0&5\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{5+4}\cdot\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\end{vmatrix};$$

10. 1) 2;

შენიშვნა. აჩვენეთ, რომ მესამე რიგის დეტერმინანტში ყველა დადებითნიშნიანი შესაკრებლების ჯამი არ შეიძლება იყოს 1-ის ტოლი. შემდეგ განიხილეთ მესამე რიგის დეტერმინანტი, რომლის მთავარ დიაგონალზე ყველა ელემენტი ნულია, ხოლო მის გარეთ კი ერთია.

2) 4.

შენიშვნა. მესამე რიგის დეტერმინანტში განიხილეთ ყველა დადებით ნიშნიანი შესაკრებლებისა და უარყოფით ნიშნიანი შესაკრებლების ნამრავლი და ბოლოს გამოთვალეთ ის დეტერმინანტი, რომლის მთავარ დიაგონალზე ყველა ელემენტი -1 - ია, ხოლო მის გარეთ კი 1 - ია.

§ 11. არითმეტიკული ვექტორული სივრცეები

1. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ნებისმიერი ველია და

$$X^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\,|\,x_1,x_2,...,x_n\in X\}.$$

$(x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\in X^n$ და $x\in X$. X^n სიმრავლეზე განვმარტოთ ბინარული $(+)$ და უნარული ω_x (X სიმრავლის ელემენტის X^n სიმრავლის ელემენტზე გამრავლება) ოპერაციები შემდეგნაირად:

$$(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n),$$
$$\omega_x(x_1,x_2,...,x_n)=x\cdot(x_1,x_2,...,x_n)=(x\cdot x_1,x\cdot x_2,...,x\cdot x_n). \quad \dots(1)$$

ცნობილია, რომ $\mathbf{X^n}=(X^n,+,\{\omega_x\,|\,x\in X\})$ ალგებრა ვექტორული სივრცეა $\mathbf{X}$ ველზე, რომელსაც n განზომილებიანი არითმეტიკული ვექტორული სივრცე ეწოდება. მის ელემენტებს კი ვექტორები ეწოდება.

ვთქვათ, $\mathbf{0}=(0,0,...,0)$ აღნიშნულია მოცემული ვექტორული სივრცის ნულოვანი ელემენტი ($0-$ არის $\mathbf{X}$ ველის ნულოვანი ელემენტი).

2. ვექტორთა სისტემას $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ აღებულს X^n სიმრავლიდან ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ მოიძებნება $X-$ის ისეთი $x_1,x_2,...,x_s$ ელემენტები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და სრულდება ტოლობა $x_1\cdot\alpha_1+x_2\cdot\alpha_2+\cdots+x_s\cdot\alpha_s=\mathbf{0}$. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორთა სისტემას წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება, ე.ი. $x_1\cdot\alpha_1+x_2\cdot\alpha_2+\cdots+x_s\cdot\alpha_s=\mathbf{0}$ ტოლობას ადგილი ექნება მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1=x_2=\cdots=x_s=0$.

3. იტყვიან, რომ $\beta\in X^n$ ვექტორი არის $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორთა სისტემის წრფივი კომბინაცია, თუ მოიძებნება ისეთი $x_1,x_2,...,x_s\in X$ ელემენტები, რომ $\beta=x_1\cdot\alpha_1+x_2\cdot\alpha_2+\cdots+x_s\cdot\alpha_s$.

4. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) თუ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემა შეიცავს ნულოვან ვექტორს, მაშინ იგი წრფივად დამოკიდებულია;

2) თუ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის რომელიმე ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ მოცემული ვექტორთა სისტემაც წრფივად დამოკიდებული იქნება;

3) წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემის ნებისმიერი ქვესისტემაც წრფივად დამოუკიდებელი იქნება;

4) ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება წრფივად დამოკიდებული, თუ მისი რომელიმე ვექტორი დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციაა;

5) თუ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\beta$ სისტემა წრფივად დამოკიდებული, მაშინ β ვექტორი $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორთა წრფივი კომბინაციაა.

5. ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ და $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ სისტემებს ეწოდება ერთმანეთის ეკვივალენტური, თუ პირველი სისტემის ყოველი ვექტორი არის მეორე სისტემის ვექტორთა წრფივი კომბინაცია და პირიქით მეორე სისტემის ყოველი ვექტორი არის პირველი სისტემის ვექტორთა წრფივი კომბინაცია.

6. ვთქვათ, ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ რაღაც სისტემაა. მოცემული ვექტორთა სისტემის $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_k}$ $(k\le s)$ ქვესისტემას ეწოდება ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სიტემის ბაზისი, თუ შესრულებულია ორი პირობა:

1) ვექტორთა $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_k}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია;

2) $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის ყოველი ვექტორი $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_k}$ ვექტორთა სისტემის წრფივი კომბინაციაა.

ვექტორთა სისტემის ბაზისში შემავალი ვექტორების რიცხვს მოცემული ვექტორთა სისტემის რანგი ეწოდება.

7. ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემას ეწოდება $\mathbf{X}^n$ ვექტორული სივრცის ბაზისი, თუ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია და მოცემული ვექტორული სივრცის ყოველი ელემენტი წარმოადგენს $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორთა სისტემის წრფივ კომბინაციას.

   ვექტორული სივრცის ბაზისში შემავალი ვექტორების რიცხვს მოცემული ვექტორული სივრცის განზომილება ეწოდება.

8. ჩვენ შემდგომში განვიხილავთ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის შემდეგი სახის გარდაქმნებს:

   1) $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის ნებისმიერი ორი ვექტორის ადგილების ურთიერთშეცვლა;

   2) $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის ნებისმიერი ვექტორის $\mathbf{X}$ ველის არანულოვან ელემენტზე გამრავლება;

   3) $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის ნებისმიერ ვექტორზე ამ სისტემის ნებისმიერი ვექტორის დამატება გამრავლებული $\mathbf{X}$ ველის რომელიღაც ელემენტზე.

   ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის 1), 2) და 3) სახის გარდაქმნებს, შემდეგში, ელემენტარულ გარდაქმნებს ვუწოდებთ.

9. ვექტორთა სისტემის ელემენტარული გარდაქმნებით ვექტორთა სისტემის რანგი არ იცვლება.

10. ვთქვათ, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორთა რაღაც სისტემაა. სიმრავლეს

$$L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)=\{x_1\cdot\alpha_1+x_2\cdot\alpha_2+\cdots+x_s\cdot\alpha_s \mid x_1,x_2,...,x_s\in X\}$$

   $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორებით წარმოქმნილი წრფივი გარსი ეწოდება.

   ადვილად შემოწმდება, რომ $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორებით წარმოქმნილი წრფივი $L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ გარსი ვექტორული სივრცეა $\mathbf{X}$ ველზე.

11. ვთქვათ, $L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ არის $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორებით წარმოქმნილი წრფივი გარსი. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) თუ $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s,\beta_{s+1}\in L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$, მაშინ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s,\beta_{s+1}$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია;

2) თუ $\beta_1,\beta_2,...,\beta_{k-1},\beta_k\in L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ და $k>s$, მაშინ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია;

3) თუ $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k\in L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ და ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებულია, მაშინ $k\le s$;

4) $\mathbf{X}$ ველზე $n-$განზომილებიანი არითმეტიკული ვექტორული სივრცის $n+1$ რაოდენობის ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

5) თუ ორი სასრული ვექტორთა სისტემა ერთმანეთის ეკვივალენტურია და თითოეული მათგანი წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მათში შემავალი ვექტორების რიცხვი ერთნაირია.

6) თუ $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k\in L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$, მაშინ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$ სისტემის რანგი ნაკლებია ან ტოლი ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის რანგზე;

7) სასრული ვექტორთა სისტემის ნებისმიერი ქვესისტემის რანგი ნაკლებია ან ტოლი მოცემული სისტემის რანგზე;

8) ვექტორთა ორი ექვივალენტურ სისტემის რანგები ტოლია;

9) $n-$განზომილებიანი არითმეტიკული ვექტორული სივრცის ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ვექტორთა სისტემის რანგი $n-$ს არ აღემატება;

10) თუ სასრული ვექტორთა სისტემის რანგი $r-$ის ტოლია, მაშინ მისი ნებისმიერი ქვესისტემა რომელიც $r-$ზე მეტი რაოდენობის ელემენტს შეიცავს წრფივად დამოკიდებულია;

11) თუ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის რანგი არის ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\beta$ სისტემის რანგის ტოლი, მაშინ β ვექტორი $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორთა სისტემის წრფივი კომბინაციაა.

მაგალითი 1. გაარკვიეთ, ვექტორთა სისტემა

$$\alpha_1=(2,-1,-3),\ \alpha_2=(1,-1,-2),\ \alpha_3=(3,4,7)$$

წრფივად დამოკიდებულია თუ დამოუკიდებელი.

აქ მოყვანილი იქნება დასმული ამოცანის გადაწყვეტის ერთ ერთი მეთოდი (თუმცა არსებობა სხვა მეთოდიც). დავუშვათ, რომ $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=\mathbf{0}=(0,0,0)$, სადაც λ_1, λ_2 და λ_3 ჯერ-ჯერობით უცნობი ელემენტებია. $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=(0,0,0)$ ტოლობაში α_1, α_2 და α_3 ვექტორების მნიშვნელობათა ჩასმით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}&\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=\lambda_1(2,-1,-3)+\lambda_2(1,-1,-2)+\lambda_3(3,4,7)=\\&=(2\lambda_1,-\lambda_1,-3\lambda_1)+(\lambda_2,-\lambda_2,-2\lambda_2)+(3\lambda_3,4\lambda_3,7\lambda_3)=\\&=(2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3,\ -\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3,\ -3\lambda_1-2\lambda_2+7\lambda_3)=(0,0,0).\end{aligned}$$

გამოვიყენებთ რა ორი ვექტორის ტოლობის განსაზღვრას, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას λ_1, λ_2 და λ_3 ცვლადების მიმართ:

$$\begin{cases}2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0,\\-\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3=0,\\-3\lambda_1-2\lambda_2+7\lambda_3=0.\end{cases}$$

დავწეროთ მოცემული განტოლებათა სისტემის შესაბამისი მატრიცა

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&3&0\\-1&-1&4&0\\-3&-2&7&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&4&0\\2&1&3&0\\-3&-2&7&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&4&0\\0&-1&11&0\\0&1&-5&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&4&0\\0&-1&11&0\\0&0&6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&4&0\\0&-1&11&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

ბოლო მატრიცის შესაბამის განტოლებათა სისტემას ექნება სახე:

$$\begin{cases}-\lambda_1=0,\\-\lambda_2=0,\\\lambda_3=0,\end{cases}$$

ე.ი. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. მივღეთ, რომ მოცემული ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ნებისმიერი ველია და
$$X^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\mid x_1,x_2,...,x_n\in X\}.$$
$(x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\in X^n$ და $x\in X$. X^n სიმრავლეზე განვმარტოთ ბინარული $(+)$ და უნარული ω_x ოპერაციები შემდეგნაირად:
$$\begin{aligned}&(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n),\\&\omega_x(x_1,x_2,...,x_n)=x\cdot(x_1,x_2,...,x_n)=(x\cdot x_1,x\cdot x_2,...,x\cdot x_n).\end{aligned}\qquad\ldots(1)$$
აჩვენეთ, რომ $\mathbf{X^n}=(X^n,+,\{\omega_x\mid x\in X\})$ ალგებრა ვექტორული სივრცეა $\mathbf{X}$ ველზე.
2. დაამტკიცეთ მეოთხე პუნქტის $1)-5)$ წინადადებები.
3. დაამტკიცეთ მერვე პუნქტის $1)-3)$ წინადადებები.
4. დაამტკიცეთ მეცხრე პუნქტის წინადადება.
5. დაამტკიცეთ, რომ $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორებით წარმოქმნილი წრფივი $L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ გარსი ვექტორული სივრცეა $\mathbf{X}$ ველზე.
6. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{X}$ ველზე $n-$განზომილებიანი არითმეტიკული ვექტორული სივრცის $n+1$ რაოდენობის ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.
7. თუ V ვექტორული სივრცეა $\mathbf{X}$ ველზე, მაშინ ამ სივრციდან აღებული $\alpha=(x_1,y_1)$ და $\beta=(x_2,y_2)$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია $\mathbf{X}$ ველზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1y_2-y_1x_2=0$.
8. თუ V არის $n-$განზომილებიანი ვექტორული სივრცე $\mathbf{X}$ ველზე, მაშინ ამ სივრციდან აღებული α და β ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია $\mathbf{X}$ ველზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა რომელიღაც $\lambda\in X$ ელემენტისათვის $\alpha=\lambda\beta$ ან $\beta=\lambda\alpha$.

9. რა შემთხვევაში გააჩნია ვექტორთა სისტემას ერთადერთი ბაზისი?

10. ქმნის თუ არა ყველა $n-$განზომილებიან $\alpha=(x_1,x_2,...,x_n)$ $(x_1,x_2,...,x_n\in R)$ ვექტორთა სიმრავლე ვექტორულ სივრცეს ნამდვილ რიცხვთა R ველზე, რომელთათვისაც $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$.

11. იპოვეთ α_1, α_2 და α_3 ვექტორთა წრფივი $3\alpha_1-2\alpha_2+8\alpha_3$ კომბინაცია, თუ $\alpha_1=(1,2,1,2)$, $\alpha_2=(-1,-3,4,5)$, $\alpha_3=(-5,0,2,3)$.

12. ამოხსენით ვექტორული $2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3-7x=\alpha_4$ განტოლება, თუ $\alpha_1=(-1,2,-3,4)$, $\alpha_2=(-1,-1,-1,5)$, $\alpha_3=(2,-5,-1,3)$, $\alpha_4=(2,-1,-2,-1)$.

13. ამოხსენით ვექტორული $3(\alpha_1-2x)+5(\alpha_2+\alpha_3-3x)=2(\alpha_3-4x)$ განტოლება, თუ $\alpha_1=(4,3)$, $\alpha_2=(2,-1)$, $\alpha_3=(-1,4)$.

14. არიან თუ არა შემდეგი ვექტორთა სისტემები წრფივად დამოკიდებულნი ან დამოუკიდებელნი:
1) $\alpha_1=(2,3,5)$, $\alpha_2=(-2,-3,-5)$; 2) $\alpha_1=(2,3,5)$, $\alpha_2=(-2,-3,-6)$;
3) $\alpha_1=(2,3,5)$, $\alpha_2=(2,3,5)$, $\alpha_3=(-2,-3,-6)$.

15. აჩვენეთ, რომ ვექტორთა $\alpha_1=(2,3,5)$, $\alpha_2=(1,3,3)$, $\alpha_3=(1,2,3)$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

16. აჩვენეთ, რომ ნამდვილი ცვლადის ყველა ფუნქციათა ვექტორულ სივრცეში ვექტორთა $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობენ ისეთი $a_1,a_2,...,a_n$ რიცხვები, რომ

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \dots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \dots & f_n(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

17. ვთქვათ S_R არის ყველა ნამდვილ ფუნქციათა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ველზე, $f,g\in S_R$ და $r\in R$. S_R სიმრავლეში განვმარტოთ $(+_1)$ და $(\cdot_1)$ ოპერაციები შემდეგნაირად:

$(f+_1 g)(x)=f(x)+g(x)$, $(r\cdot_1 f)(x)=r\cdot f(x)$. აჩვენეთ, რომ S_R- აკმაყოფილებს არითმეტიკული ვექტორული სივრცის ყველა აქსიომას და $f_0(x)=0$ ყოველი $x\in R$, არის მისი ნულოვანი ელემენტი.

18. აჩვენეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ველზე ფუნქციათა შემდეგი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია:
1) $\sin x,\ \cos x$; 2) $1,\ \sin x,\ \cos x$; 3) $\sin x,\ \sin 2x,...,\sin nx$;
4) $1,\ \cos x,\ \cos 2x,...,\cos nx$;
5) $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,...,\ \cos nx,\ \sin nx$;
6) $1,\ \sin x,\ \sin^2 x,...,\ \sin^n x$; 7) $1,\ \cos x,\ \cos^2 x,...,\cos^n x$.

19. ვთქვათ, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ წყვილ-წყვილად განსხვავებული ნამდვილი რიცხვებია. აჩვენეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ველზე ფუნქციათა შემდეგი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია:
1) $e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},...,e^{\alpha_n x}$; 2) $x^{\alpha_1},\ x^{\alpha_2},...,x^{\alpha_n}$;
3) $(1-\alpha_1 x)^{-1},\ (1-\alpha_2 x)^{-1},...,(1-\alpha_n x)^{-1}$.

პასუხები

9. როცა ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

10. ქმნიან.

11. $(-35,12,11,20)$. $\left(-\frac{9}{7},\frac{12}{7},-\frac{6}{7},3\right)$. $\left(\frac{24}{13},\ -\frac{4}{13}\right)$.

12. 1) ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რადგან $\alpha_1+\alpha_2=\mathbf{0}$;
2) ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებულია;
3) ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რადგანაც $\alpha_1-\alpha_2+0\cdot\alpha_3=\mathbf{0}$.

§ 12. მატრიცის რანგი

1. ვთქვათ

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \qquad \dots(1)$$

$(m\times n)-$განზომილებიანი მატრიცაა $\mathbf{X}$ ველზე. განვიხილოთ ვექტორთა სისტემები

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (x_{11}\ x_{12}\ \dots\ x_{1n}), & \beta_1 &= (x_{11}\ x_{21}\ \dots\ x_{m1}), \\ \alpha_2 &= (x_{21}\ x_{22}\ \dots\ x_{2n}), & \beta_2 &= (x_{12}\ x_{22}\ \dots\ x_{m2}), \\ &\dots\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_m &= (x_{m1}\ x_{m2}\ \dots\ x_{mn}), & \beta_n &= (x_{1n}\ x_{2n}\ \dots\ x_{mn}). \end{aligned} \qquad \dots(2)$$

ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ და $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ სისტემების რანგებს შესაბამისად A მატრიცის სტრიქონული და სვეტური რანგები ეწოდება.

A მატრიცის რანგში მოიაზრება მისი სვეტური რანგი და $rang\ A$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

2. მატრიცის სტრიქონული და სვეტური რანგები ერთმანეთის ტოლია.

3. როგორც ვიცით, A მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნების ქვეშ ესმით შედეგი სახის გარდაქმნები:

1) A მატრიცის რომელიმე ორი სტრიქონის (სვეტის) ადგილებ-ის შეცვლა;

2) A მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელე-მენტის რომელიღაც ნულისაგან განსხვავეულ ელემენტზე გამ-რავლება;

3) A მატრიცის რომელიმე $i-$ური სტრიქონის (სვეტის) ელე-მენტებზე A მატრიცის რომელიმე $j-$ური სტრიქონის (სვე-ტის) ელემენტების დამატება გამრავლებული რაიმე $k-$ელე-მენტზე.

4. A მატრიცის ისეთ ელემენტარულ გარდაქმნებს, რომელშიაც

მონაწილეობს 1), 2) და 3) სახის გარდაქმნები A მატრიცის არაგანსაკუთრებული გარდაქმნები ეწოდება.

ცნობილია, რომ ყოველი A მატრიცა მისი არაგანსაკუთრებუ-ლი გარდაქმნებით მიიყვანება ისეთ $B=(y_{ij})$ მატრიცამდე, რომლის ყველა ელემენტი, გარდა მთავარი დიაგონალის ელე-მენტებისა, ნულის ტოლია, ხოლო $y_{11},y_{22},\dots,y_{ss}\in\{0,1\}$ (აქ s უმცირესი რიცხვია m და n რიცხვებს შორის). დავუშვათ, რომ $y_{i_1i_1}=y_{i_2i_2}=\dots=y_{i_ri_r}=1$ $(1\le r\le s)$ ელემენტებით ამოიწურება B მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული ყველა ელემენტი. B მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული სტრიქონების (სვეტების) რიცხვი $r-$ის ტოლია, ე.ი. მოცემული A მატრიცის სტრიქო-ნული და სვეტური რანგი $r-$ის ტოლია.

5. ამგვარად, A მარიცის რანგი მისი არაგანსაკუთრებული გარდა-ქმნებით მიღებული დაყვანილი B მატრიცის მთავარ დიაგო-ნალზე ნულისაგან განსხვავებული ელემენტთა რაოდენობის ტოლია.

მაგალითი 1. გაარკვიეთ ვექტორთა სისტემა

$$\alpha_1=(2,-1,-3),\ \alpha_2=(1,-1,-2),\ \alpha_3=(3,4,7)$$

წრფივად დამოკიდებულია თუ დამოუკიდებელი.

აქ მოყვანილი იქნება დასმული ამოცანის გადაწყვეტის კიდევ ერთ მეთოდი (ერთი მეთოდი განხილული იყო § $11-$ში). ამისათვის შევადგინოთ შემდეგი მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

და მატრიცის არაგანსაკუთრებული ელემენტარული გარდაქ-მნებით გსმოვთვალოთ მისი რანგი:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 13 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 13 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

მეორე მატრიცა მიღებულია მოცემულ მატრიცაში პირველი და

მეორე სტრიქონების ადგილების ურთიერთ შეცვლით. მეორე მატრიცის პირველი სტრიქონი ჯერ გამრავლებულია $-2-$ ზე, შემდეგ $-3-$ ზე და შესაბამისად დამატებულია მეორე მატ-რიცის მეორე და მესამე სტრიქონებზე. მიღებულია მესამე მატრიცა. მესამე მატრიცის პირველი სვეტი ჯერ გამრავლებუ-ლია $1-$ ზე, შემდეგ $2-$ ზე და დამატებულია მესამე მატრიცის მეორე და მესამე სვეტებზე. მიღებულია მეოთხე მატრიცა. საზოგადოდ, თუ მატრიცის რომელიმე სვეტში (ან სტრიქონში), ყველა ელემენტი ნულია, გარდა ერთისა, რომელიც ერთის ტოლია, ასეთ შემთხვევაში იქ სადაც ერთიანია მოთავსებული, მისგან განსხვავებული სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი შეიძლება ნულებით შევცვალოთ, მატრიცის ყველა დანარჩენი ელემენტი უცვლელი დავტოვოთ. მეხუთე მატრიცა მიღებუ-ლია მეოთხე მატრიცისაგან მისი მეორე სტრიქონის $-7-$ გამრავ-ლებით და მესამე სტრიქონზე დამატებით. რადგან მეორე სვეტში ყველა ელემენტი ნულია გარდა ერთისა, ამიტომ მეორე სტრიქონის ყველა დანარჩენი ელემენტი, გარდა იმისა, რომე-ლიც ერთის ტოლია, განულებულია. მივიღეთ, რომ მოცემული მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ყველა ელემენტი არანულოვანია, მატრიცაში მის გარეთ მდგომი ყველა ელე-მენტი ნულია, ამიტომ მოცემული მატრიცის რანგი სამის ტო-ლია, ე.ი. მოცემული ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდე-ბელია.

შევნიშნოთ, რომ რანგის გამოთვლის პროცესი მთავრდება მხოლოდ მაშინ, როცა მატრიცა მისი ელემენტარული გარდაქ-მნებით მიყვანილია იმ სახემდე, როცა მატრიცის მთავარი დია-გონალის გარეთ მდგომი ყველა ელემენტი ნულია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. იპოვეთ შემდეგი მატრიცების რანგები:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & -7 & 8 & 3 & -6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 15 \end{pmatrix};\ 5)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ 6)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ 7)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$8)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ 9)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ 10)\ \begin{pmatrix} 77 & 32 & 6 & 5 & 3 \\ 32 & 14 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$11)\ \begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \\ 9 & 6 & 12 & -6 & 9 \end{pmatrix};\ 12)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & 9 & 8 & -7 & 3 \\ -12 & -5 & -8 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ 13)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$14)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ 15)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ 16)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$17)\ \begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix};\ 18)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix};\ 19)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$20)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ 21)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & -7 & -5 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ 22)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. λ პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის იპოვეთ შემ-დეგი მატრიცების რანგები:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix};\ 2)\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \lambda \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ 3)\ \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix};$$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

პასუხები

1. 1) $rangA=2$; 2) $rangA=3$; 3) $rangA=2$; 4) $rangA=4$; 5) $rangA=4$;

6) $rangA=4$; 7) $rangA=2$; 8) $rangA=5$; 9) $rangA=6$;

10) $rangA=4$; 11) $rangA=3$; 12) $rangA=4$; 13) $rangA=5$;

14) $rangA=5$; 15) $rangA=4$; 16) $rangA=3$; 17) $rangA=3$.

18) $n-$ის ტოლია, როცა n კენტი რიცხვია და $(n-1)-$ის ტოლია, როცა n ლუწი რიცხვია;

19) $rangA=4$; 20) $rangA=4$; 21) $rangA=4$; 22) $rangA=4$.

2. 1) $2-$ის ტოლია, როცა $\lambda=1$; $3-$ის ტოლია, როცა $\lambda=2,3$ და $4-$ის ტოლია ყველა დანარჩენ შემთხვევაში.

2) $2-$ის ტოლია, როცა $\lambda=0$ და $3-$ის ტოლია, როცა $\lambda\neq 0$.

3) $2-$ის ტოლია, როცა $\lambda=3$ და $3-$ის ტოლია, როცა $\lambda\neq 3$.

4) $3-$ის ტოლია, როცა $\lambda=\pm1$ ან $\lambda=\pm2$ და $4-$ის ტოლია, როცა $\lambda\neq\pm1$ და $\lambda\neq\pm2$.

5) $3-$ის ტოლია, როცა $\lambda=0,-2,-4$ და $4-$ის ტოლია ყველა დანარჩენ შემთხვევაში.

§ 13. მატრიცების შებრუნებული მატრიცები

1. ვთქვათ, $\mathbf{X}$ ველია ნულოვანი 0 და ერთეულოვანი 1 ელემენ-ტებით,

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$n-$ური რიგის კვადრატული და ერთეულოვანი მატრიცებია $\mathbf{X}-$ზე, მაშინ $A\cdot E=E\cdot A=A$.

თუ $\mathbf{X}$ ველზე, არსებობს ისეთი $n-$ური რიგის კვადრატული B მატრიცა, რომ $A\cdot B=B\cdot A=E$, მაშინ B მატრიცას A მატ-რიცის შებრუნებული მატრიცა ეწოდება და A^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება. ცხადია, მოცემულ პირობებში A მატრიცაც იქნება B მატრიცის შებრუნებული მატრიცა. შევნიშნოთ, რომ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ცალსახად განისაზღვრება.

შეგახსენებთ, რომ A_{ij} სიმბოლოთი აღნიშნულია A მატრიცის x_{ij} $(i,j=1,2,...,n)$ ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება.

2. თუ $|A|\neq 0$, მაშინ A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცა გამოითვლება ფორმულით

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. ვთქვათ, k ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. $n-$ური რიგის $A=(x_{ij})$ $(i,j=1,2,...,n)$ მატრიცას ეწო-დება ელემენტარული მატრიცა, თუ იგი შემდეგი ორი პირო-ბიდან აკმაყოფილებს მხოლოდ ერთს:

1) $x_{pp}=k$ რომელიღაც ფიქსირებული $1\le p\le n$ რიცხვისათვის; $x_{ii}=1$ ყოველი $1\le i\le n$ რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფი-ლებს პირობას $i\neq p$ და $x_{ij}=0$ ყოველი $1\le i\neq j\le n$;

2) $x_{ii}=1$ ყოველი $1\le i\le n$ რიცხვისათვის; $x_{pq}=k$, რომელიღაც ფიქსირებული $1\le p\neq q\le n$ რიცხვებისათვის; $x_{ij}=0$ ყოველი $1\le i\neq j\le n$ რიცხვებისათვის, რომელთათვისაც სრულდება პირობა $i\neq p, j\neq q$.

$n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა, რომელიც აკმაყოფი-ლებს $4-$ის 2) პირობას $E_{p,q,k}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო თუ იგი აკმაყოფილებს $3-$ის 1) პირობას, მაშინ იგი $E_{p,k}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

4. ვთქვათ, A არის $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა. თუ $E_{p,k}$ და $E_{p,q,k}$ $n-$ური რიგის ელემენტარული მატრიცებია, მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) $E_{p,k}\cdot A$ არის მატრიცა, რომლის p სტრიქონისაგან განსხვავე-ბული ყოველი სტრიქონი A მატრიცის შესაბამისი სტრიქონის ტოლია, ხოლო p სტრიქონი მიღებულია A მატრიცის p სტრიქონის ყველა ელემენტის $\mathbf{X}$ ველის ნულისაგან განსხვავე-ბულ k ელემენტზე გამრავლებით;

2) $E_{p,q,k}\cdot A$ არის მატრიცა, რომლის p სტრიქონისაგან განსხვა-ვებული ყოველი სტრიქონი A მატრიცის შესაბამისი სტრიქო-ნის ტოლია, ხოლო p სტრიქონი მიღებულია A მატრიცის p სტრიქონის ყველა ელემენტზე q სტრიქონის შესაბამისი ელე-მენტების დამატებით გამრავლებული k რიცხვზე;

3) ყოველი ელემენტარული მატრიცისათვის არსებობს მისი შებრუნებული მატრიცა.

4) A მატრიცა შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს სახით: $A=E_1\cdots E_m\cdot B'$, სადაც $E_1,E_2,...,E_m$ რომელიღაც $n-$ური რიგის ელემენტარული მატრიცებია $\mathbf{X}$ ველზე, ხოლო $B'=(b'_{ij})$ არის $n-$ური რიგის დაყვანილი მატრიცა $\mathbf{X}$ ველზე, რომლის დიაგონალური $b'_{11},b'_{22},...,b'_{nn}$ ელემენტები აკმაყოფილებენ პირო-

ზას: $b'_{11}, b'_{22}, ..., b'_{nn} \in \{0,1\}$.

5) თუ A მატრიცის რანგი $n-$ის ტოლია, მაშინ $\left(E_m^{-1} \cdot E_{m-1}^{-1} \cdots E_1^{-1}\right) \cdot A = E$ და ამიტომ, $A^{-1} = E_m^{-1} E_{m-1}^{-1} \cdots E_1^{-1}$.

6) A მატრიცას მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია შებრუნებული მატრიცა, როცა მისი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია.

5. ვთქვათ, $|A| \neq 0$. რომ გამოვთვალოთ $n-$ური რიგის კვადრატული A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, ამისათვის

$$(A \mid E) = \begin{pmatrix} x_{11} \; x_{12} \; ... \; x_{1n} & 1 \; 0 \; ... 0 \\ x_{21} \; x_{22} \; ... \; x_{2n} & 0 \; 1 ... \; 0 \\ .... & \\ x_{m1} \; x_{m2} \; ... \; x_{mn} & 0 \; 0 \; ... \; 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცა მისი სტრიქონების არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით უნდა მივიყვანოთ

$$(E \mid B) = \begin{pmatrix} 1 \; 0 ... 0 \; y_{11} \; y_{12} ... y_{1n} \\ 0 \; 1 ... 0 \; y_{21} \; y_{22} ... y_{2n} \\ .... \\ 0 \; 0 ... 1 \; y_{n1} \; y_{n2} ... y_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცამდე. ასეთ შემთხვევაში B მატრიცა იქნება A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, ე.ი. $B = A^{-1}$.

მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტი.

6. ორი $n-$ განზომილებიანი კვადრატული მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი თანამამრავლთა დეტერმინანტების ნამრავლის ტოლია.

მაგალითი 1. მატრიცის შებრუნებული მატრიცის პოვნა.

1) გამოვთვალოთ A მატრიცის შემრუნებული მატრიცა, თუ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

როგორც ვიცით, მატრიცას გააჩნია შებრუნებული, თუ $|A| \neq 0$.

მართლაც, მოცემულ შემთხვევაში გვექნება:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 1 - 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

ახლა ვიპოვოთ მოცემული A მატრიცის a_{ij} ელემენტების შესაბამისი ალგებრული A_{ij} დამატებები თუ $i, j = 1, 2, 3$:

$$a_{11} = 1,\; A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;\; a_{12} = 0,\; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$a_{13} = 1,\; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;\; a_{21} = 1,\; A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$a_{22} = 1,\; A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1;\; a_{23} = 0,\; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$a_{31} = 0,\; A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;\; a_{32} = 1,\; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_{33} = -1,\; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

მოცემული A მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას ექნება სახე:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} \; A_{21} \; ... \; A_{n1} \\ A_{12} \; A_{22} \; ... \; A_{n2} \\ .... \\ A_{1n} \; A_{2n} \; ... \; A_{nn} \end{pmatrix} = -\frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

შემოწმება:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ახლა ვიპოვოთ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა მეორე გზით. ზოგადოდ ეს პროცესი მიმდინარეობს შემდეგნაირად: მოცემულ A მატრიცას მარჯვნიდან მიეწერება იმავე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა. მივიღებთ ახალ C მატრიცას. შემდეგ C მატრიცა მხოლოდ სტრიქონების არაგანსაკუთრებული ელემენტარული გარდაქმნების გამოყენებით უნდა მივიყვანოთ ისეთი C' მატრიცამდე, რომლის მარცხენა მხარეში უკვე იქნება მოთავსებული ის ერთეულოვანი მატრიცა, რომელიც თავიდან

მივუწერეთ A მატრიცას მარჯვენა მხარეში. C' მატრიციდან მისი ჩამოშორებით მივიღებთ B მატრიცას, რომელიც A მატრიცის შებრუნებული იქნება.

$$C=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&-1&1&-1&1\end{pmatrix}\sim$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&-1&1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&-1\end{pmatrix}=C';\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}.$$

ჩვენს შეთხვევაში ჩატარებულია მატრიცის შემდეგი გარდაქმნები: 1) A მატრიცას მარჯვნიდან მიწერილი აქვს მესამე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა, მივიღებთ C მატრიცას; 2) C მატრიცის მეორე სტრიქონის ელემენტებზე შესაბამისად დამატებულია პირველი სტრიქონის ელემენტები გამრავლებული $-1-$ზე და ჩაწერილია მეორე სტრიქონის ადგილას; 3) მიღებული მატრიცის მესამე სტრიქონის ელემენტებზე შესაბამისად დამატებულია მეორე სტრიქონის ელემენტები გამრავლებული $-1-$ზე და ჩაწერილია მესამე სტრიქონის ადგილას; 4) შემდეგ, მიღებულ მატრიცაში პირველ სტრიქონის ელემენტებს ემატება მესამე სტრიქონის შესაბამისი ელემენტები და ჩაწერილია პირველი სტრიქონის ადგილას. ამგვარად მიიღება C' მატრიცა (ასეთ შემთხვევაში B იქნება მოცემული A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა).

შევნიშნოთ, რომ მეორე მეთოდით მოცემული მატრიცის შებრუნებული მატრიცის პოვნა ალბათ გაცილებით ადვილია, თუნდაც იმიტომ, რომ იგი არ არის დაკავშირებული მაღალი რიგის დეტერმინანტების გამოთვლებთან.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. დაამტკიცეთ, რომ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ცალსახად განისაზღვრება.
2. ვთქვათ,

$$A=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\dots&x_{1n}\\x_{21}&x_{22}&\dots&x_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_{n1}&x_{n2}&\dots&x_{nn}\end{pmatrix}.$$

სადაც $|A|\neq 0$ და A_{ij} სიმბოლოთი აღნიშნულია A მატრიცის x_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება. დაამტკიცეთ, რომ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა გამოითვლება ფორმულით:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}.$$

3. იპოვეთ შემდეგი მატრიცების შებრუნებული მატრიცები:

$$1)\ \begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix}1&2&-3\\0&5&2\\0&0&1\end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix};\quad 4)\ \begin{pmatrix}1&3&-5&7\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix};\quad 5)\ \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix};$$

$$6)\ \begin{pmatrix}2&-1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-2&-1\\1&-2&-1&3\end{pmatrix};\quad 7)\ \begin{pmatrix}1&3&1&1\\1&-7&-1&-1\\1&-1&2&-1\\1&-1&-1&8\end{pmatrix};\ 8)\ \begin{pmatrix}2&1&1&1\\2&1&-1&-1\\1&-2&5&-1\\1&-1&-2&4\end{pmatrix};\quad 9)\ \begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&1&-1&-1\\1&-2&5&-1\\1&-1&-2&4\end{pmatrix}$$

$$10)\ \begin{pmatrix}1&1&3&1\\1&9&-1&-1\\1&-1&1&-9\\9&-1&-1&1\end{pmatrix};\quad 11)\ \begin{pmatrix}1&1&1&1&5\\1&1&-1&-1&4\\1&-1&1&-1&3\\1&-1&-1&1&2\\2&3&4&3&1\end{pmatrix};\quad 12)\ \begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\1&2&3&4&5\\1&1&-1&-1&3\\1&-1&1&-1&2\\1&-1&-1&1&5\end{pmatrix};$$

$$13)\begin{pmatrix}1&1&1&1&6\\1&1&-1&-1&7\\1&-1&1&-1&8\\9&8&7&6&5\\1&-1&-1&1&9\end{pmatrix};\ 14)\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\3&1&1&2&-1\\4&1&-1&1&-1\\5&1&-1&-1&1\\6&5&4&3&2\end{pmatrix};\ 15)\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\3&1&1&3&-1\\4&1&-1&1&-1\\5&1&-1&-1&1\\6&5&4&3&2\end{pmatrix};\ 16)\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\3&1&1&4&-1\\4&1&-1&1&-1\\5&1&-1&-1&1\\6&5&4&3&2\end{pmatrix}.$$

4. შემდეგი განტოლებებიდან იპოვეთ x მატრიცა:

$$1)\ \begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\cdot x=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix};\ 2)\ x\cdot\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix};\ 3)\ \begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\cdot x=\begin{pmatrix}2&4\\3&2\end{pmatrix};$$

$$4)\ x\cdot\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\3&2\end{pmatrix};\ 5)\ \begin{pmatrix}4&5\\3&4\end{pmatrix}\cdot x=\begin{pmatrix}3&-6\\4&1\end{pmatrix};\ 6)\ x\cdot\begin{pmatrix}4&5\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6\\4&1\end{pmatrix};$$

7) $x\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot x=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}$;

9) $x\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\3&3&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot x=\begin{pmatrix}1&-1&3\\3&3&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\cdot x\cdot\begin{pmatrix}-3&2\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\3&1\end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\cdot x\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\cdot x\cdot\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-6\\3&1\end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix}4&3\\5&4\end{pmatrix}\cdot x\cdot\begin{pmatrix}4&3\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-6\\3&1\end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot x\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot x\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}$;

5. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot y=\begin{pmatrix}2&8\\0&3\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot y=\begin{pmatrix}4&9\\-1&-4\end{pmatrix}.\end{cases}$

2) $\begin{cases}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot y=\begin{pmatrix}3&5\\1&1\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\cdot y=\begin{pmatrix}1&1\\5&3\end{pmatrix}.\end{cases}$

პასუხები

3. 1) $\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{5}&\frac{19}{5}\\0&\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\0&0&1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1&-3&11&-38\\0&1&-2&7\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\ -\frac{4}{27}&\frac{17}{27}&-\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\\ \frac{8}{27}&-\frac{7}{27}&-\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix}\frac{13}{14}&\frac{19}{42}&-\frac{2}{7}&-\frac{2}{21}\\ \frac{3}{14}&-\frac{1}{42}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{21}\\ -\frac{3}{7}&-\frac{2}{7}&\frac{13}{21}&\frac{2}{21}\\ -\frac{1}{7}&-\frac{2}{21}&\frac{2}{21}&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}0&\frac{3}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{11}{48}&\frac{1}{16}&-\frac{5}{48}\\ \frac{1}{4}&-\frac{13}{48}&-\frac{1}{16}&\frac{5}{48}\end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix}0&\frac{3}{11}&\frac{1}{11}&\frac{1}{11}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{22}&-\frac{2}{11}&-\frac{2}{11}\\ \frac{1}{4}&-\frac{13}{132}&\frac{7}{66}&-\frac{2}{33}\\ \frac{1}{4}&-\frac{17}{132}&-\frac{1}{66}&\frac{5}{33}\end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix}\frac{1}{30}&\frac{1}{105}&\frac{1}{70}&\frac{11}{105}\\ \frac{1}{30}&\frac{11}{105}&-\frac{1}{105}&-\frac{1}{70}\\ \frac{3}{10}&-\frac{1}{30}&\frac{1}{30}&-\frac{1}{30}\\ \frac{1}{30}&-\frac{1}{70}&-\frac{11}{105}&\frac{1}{105}\end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix}-\frac{31}{44}&\frac{9}{22}&\frac{1}{4}&\frac{9}{22}&\frac{7}{22}\\ -\frac{1}{44}&\frac{13}{44}&-\frac{1}{4}&-\frac{9}{44}&\frac{1}{11}\\ \frac{5}{44}&-\frac{5}{22}&\frac{1}{4}&-\frac{5}{22}&\frac{1}{22}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\ \frac{3}{11}&-\frac{1}{22}&0&-\frac{1}{22}&-\frac{1}{11}\end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix}\frac{17}{8}&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}&\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{16}&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}&-\frac{3}{16}&-\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&0&\frac{3}{8}&-\frac{1}{4}\\ \frac{9}{16}&-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&-\frac{5}{16}&\frac{1}{4}\\ -\frac{5}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&0\end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix}-\frac{29}{34}&\frac{7}{68}&\frac{3}{17}&\frac{5}{34}&\frac{1}{4}\\ \frac{27}{68}&\frac{55}{204}&-\frac{49}{204}&-\frac{1}{51}&-\frac{1}{4}\\ \frac{11}{34}&-\frac{49}{204}&\frac{13}{51}&-\frac{1}{102}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\ \frac{5}{34}&\frac{1}{51}&\frac{1}{102}&-\frac{1}{51}&0\end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix}\frac{1}{24}&\frac{1}{3}&-\frac{5}{24}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{12}\\ -\frac{17}{24}&-\frac{2}{3}&\frac{13}{24}&-\frac{1}{4}&\frac{5}{12}\\ -\frac{25}{48}&\frac{5}{6}&-\frac{43}{48}&\frac{3}{8}&\frac{1}{24}\\ \frac{13}{12}&-\frac{1}{3}&\frac{7}{12}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\\ \frac{17}{16}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{16}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & -1 & \frac{9}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{15}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{13}{8} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{15}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} -\frac{17}{8} & 1 & -\frac{11}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{29}{8} & -2 & \frac{23}{8} & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{95}{16} & \frac{5}{2} & -\frac{61}{16} & \frac{23}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{13}{4} & -1 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{69}{16} & -\frac{3}{2} & \frac{31}{16} & -\frac{13}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$.

4. 1) $x=\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $x=\begin{pmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$; 3) $x=\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; 4) $x=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$;

5) $x=\begin{pmatrix} -8 & -29 \\ 7 & 22 \end{pmatrix}$; 6) $x=\begin{pmatrix} 30 & -39 \\ 13 & -16 \end{pmatrix}$; 7) $x=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$; 8) $x=\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

9) $x=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -4 & \frac{5}{2} & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 10) $x=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & \frac{11}{4} & -2 \\ -4 & \frac{9}{4} & -2 \end{pmatrix}$; 11) $x=\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ -14 & -6 \end{pmatrix}$;

12) $x=\begin{pmatrix} \frac{29}{7} & -\frac{73}{7} \\ -\frac{8}{7} & \frac{24}{7} \end{pmatrix}$; 13) $x=\begin{pmatrix} 29 & -43 \\ -69 & 103 \end{pmatrix}$; 14) $x=\begin{pmatrix} 26 & -\frac{105}{2} \\ -32 & 65 \end{pmatrix}$;

15) $x=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{9}{2} & 7 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$; 16) $x=\begin{pmatrix} 20 & -18 & 6 \\ \frac{3}{2} & -1 & 2 \\ \frac{27}{2} & -12 & 5 \end{pmatrix}$.

4. 1) $x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. 2) $x=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

§ 14. წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობა. კრამერის ფორმულები

1. ვთქვათ,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad \ldots(1)$$

n უცნობიანი m რაოდენობის წრფივ განტოლებათა სისტემაა $\mathbf{X} = (X, +, -, \cdot, 1)$ ველზე, ხოლო

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad \ldots(2)$$

(1) განტოლებათა სისტემის მთავარი და გაფართოებული მატრიცებია.

2. (1) განტოლებათა სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემული განტოლებათა სისტემის მთავარი და გაფართოებული მატრიცების რანგები ერთმანეთის ტოლია (კრონეკერ-კაპელის თეორემა).

3. დავუშვათ, რომ $rang\ A = rang\ B$. $rang\ A-$სა და (1) განტოლებათა სისტემაში შემავალი უცნობთა n რიცხვის მიმართ განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

   1) $rang\ A < n$. მაშინ (1) განტოლებათა სისტემაში იქნება $n - rang\ A$ რაოდენობის თავისუფალი უცნობი. თავისუფალ უცნობთა ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა რაოდენობა განსაზღვრავს (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა რაოდენობას. მათი რაოდენობა კი ერთზე მეტი იქნება, რადგანაც $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ველის X სიმრავლისათვის სრულდება $|X| \geq 2$ უტოლობა.

   2) $rang\ A = n$. მაშინ (1) განტოლებათა სისტემას ექნება მხოლოდ ერთი ამონახსენი.

კრამერის ფორმულები

1. ახლა ვიგულისხმოთ, რომ (1) განტოლებათა სისტემაში უცნობთა და განტოლებათა რიცხვი ერთნაირია (ე.ი. $m = n$) და $|B| \neq 0$. B_j $(j = 1, 2, ..., n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მატრიცა, რომელიც მიიღება B მატრიცისაგან, მისი j სვეტის ელემენტების $b_1, b_2, ..., b_n$ ელემენტებით შეცვლით, ე.ი.

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{1j+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{1j+1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. თუ (1) განტოლებათა სისტემაში $m = n$ და $|B| \neq 0$, მაშინ (1) განტოლებათა სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც გამოისახება $x_j = \dfrac{|B_j|}{|B|}$ $(j = 1, 2, ..., n)$ ფორმულებით.

3. ფორმულებს: $x_1 = \dfrac{|B_1|}{|B|}, x_2 = \dfrac{|B_2|}{|B|}, ..., x_n = \dfrac{|B_n|}{|B|}$ კრამერის ფორმულები ეწოდება.

4. შევნიშნოთ, რომ (1) განტოლებათა სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს როგორც მატრიცული განტოლება. მართლაც, თუ

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix},$$

მაშინ (1) განტოლებათა სისტემას ჩაწერილს მატრიცული ფორმით ექნება $A\cdot x=B$ სახე. ამასთან, თუ A არის $n-$ური რიგის ისეთი კვადრატული მატრიცა, რომ $|A|\neq 0$, მაშინ $x=A^{-1}\cdot B$ იქნება მოცემული განტოლების ამონახსენი.

5. თუ (1) განტოლებათა სისტემაში $b_1, b_2, ..., b_m$ ელემენტებს შევცვლით ნულებით, მივიღებთ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad ...(3)$$

განტოლებათა სისტემას, რომელსაც (1) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა ეწოდება.

6. სამართლიანია შემდეგი წინადადებანი:

$1)$ თუ $x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2, ...,\ x_n=\alpha_n$ და $x_1=\beta_1,\ x_2=\beta_2, ...,\ x_n=\beta_n$ არის (1) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ორი ამონახსენი, მაშინ $x_1=\alpha_1-\beta_1,\ \ x_2=\alpha_2-\beta_2, ..., x_n=\alpha_n-\beta_n$ იქნება (1) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ამონახსენი;

$2)$ თუ $x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2, ...,\ x_n=\alpha_n$ არის (1) განტოლებათა სისტემის რომელიმე ამონახსენი, ხოლო $x_1=\delta_1,\ x_2=\delta_2, ...,\ x_n=\delta_n$ (1) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსენია, მაშინ

$$x_1=\alpha_1+\delta_1,\ x_2=\alpha_2+\delta_2, ...,\ x_n=\alpha_n+\delta_n$$

იქნება (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი.

მაგალითი 1. – დავადგინოთ, არის თუ არა შემდეგი წრივი განტოლებათა სისტემა თავსებადი.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 = 13, \\ x_1 + 4x_2 = 11, \\ 5x_1 + 2x_2 = 19, \\ 3x_1 - 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 4. \end{cases}$$

დავწეროთ მოცემული განტოლებათა სისტემის ძირითადი და გაფართოებული მატრიცები:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 13 \\ 1 & 4 & 11 \\ 5 & 2 & 19 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ თითოეული მატრიცის რანგი:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 0 & 2 \\ 0 & -8 \\ 0 & -8 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 13 \\ 1 & 4 & 11 \\ 5 & 2 & 19 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ამგვარად $rangB=rangA=2$, ე.ი. მოცემული განტოლებათა სისტემა თავსებადია.

A მატრიცის მიმართ ჩატარებულია შემდეგი ელემენტარული გარდაქმნები: $1)$ A მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტები გამრავლებულია -3, -1, -5, -3, $-2-$ზე და შესაბამისად დამატებულია მეორე, მესამე, მეოთხე, მეხუთე და

მეექვსე სტრიქონის ელემენტებზე და ჩაწერილია მეორე, მესამე, მეოთხე, მეხუთე და მეექვსე სტრიქონებში. 2) მიღებული მატრიცის პირველი სვეტის ელემენტები გამრავლებულია -2 და $-7-$ზე და დამატებულია შესაბამისად მეორე და მესამე სვეტის ელემენტებზე და შედეგები ჩაწერილია მეორე და მესამე სვეტებში; ერთდროულად მატრიცის თითოეული სტრიქონის ელემენტები შეკვეცილია საერო მამრავლებზე -4, 2, -8, -8 და -5-ზე. 3) მიღებული მატრიცის მეორე სტრიქონის ელემენტები გამრავლებულია $-1-$ზე და დამატებულია მესამე, მეოთხე, მეხუთე და მეექვსე სტრიქონის ელემენტებს და მიღებული შედეგები ჩაწერილია შესაბამის სტრიქონებში. 4) მიღებული მატრიცის მეორე სვეტი გამრავლებულია $-2-$ზე და დამატებულია მესამე სვეტზე და შედეგი ჩაწერილია მესამე სვეტში. მიღებული მატრიცის მთავარ დიაგონალზე ორი ნულისაგან განსხვავებული ელემენტია, მის გარეთ კი ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, ამიტომ A მატრიცის რანგი $2-$ის ტოლია.

ცოტა ნაკლები, მაგრამ ანალოგიური გარდაქმნებია ჩატარებული B მატრიცაზეც. მისი რანგიც $2-$ის ტოლია.

მაგალითი 2. განტოლებათა სისტემა წარმოადგინეთ მატრიცული განტოლების სახით და ამოხსენით მატრიცული განტოლება. ვთქვათ, მოცემულია განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

მაშინ გვექნება $A \cdot x = B$. ადვილად შემოწმდება, რომ A მატრიცას გააჩნია შებრუნებული მატრიცა A^{-1}, რომელიც წარმოდგინება შემდეგი სახით:

წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობა.
კრამერის ფორმულები

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ამასთან, პირობიდან $A \cdot x = B$ მივიღებთ $A^{-1} \cdot (A \cdot x) = A^{-1} \cdot B$, ე.ი. $x = A^{-1} \cdot B$. ამიტომაც

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ამგვარად, მოცემული განტოლებათა სისტემის ამონახსენია: $x_1 = x_2 = 2$ და $x_3 = 1$.

შევნიშნოთ, რომ მატრიცული $A \cdot x = B$ განტოლების ნაჩვენები გზით ამოხსნა შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცა კვადრატულია და $|A| \neq 0$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. დაადგინეთ, არის თუ არა შემდეგი განტოლებათა სისტემები თავსებადი და თავსებადობის შემთხვევაში იპოვეთ მათი ამონახსნები:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 7x_5 = 7, \\ x_1 + x_2 - 16x_3 + 16x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 - 17x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 6x_4 = 7, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -3. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - 13x_3 = 2. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_2 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 8, \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 8x_4 + 7x_5 = 6, \\ 17x_1 + x_2 - 16x_3 + 6x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 11, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 9, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 16x_3 + 16x_4 + x_5 = 7. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 5, \\ 9x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 7x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 16x_3 + 16x_4 + x_5 = 17. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 16x_3 + 16x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 9, \\ 8x_1 - 9x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 10x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 6x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

20) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 7x_5 = 8, \\ 9x_1 + x_2 - 16x_3 + 16x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 - 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 16x_3 + 16x_4 - 4x_5 = 1. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 7x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 - 16x_3 + 16x_4 + 2x_5 = 5. \end{cases}$

23) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 8x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 16x_3 + 16x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - 16x_3 + 16x_4 + x_5 = 7. \end{cases}$

25) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - 16x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

26) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 2. \end{cases}$

27) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 16x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

28) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 16x_3 + 8x_4 = 3. \end{cases}$

29) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 = 13, \\ 6x_1 - 5x_2 = -4, \\ 7x_1 + 6x_2 = 19. \end{cases}$

2. წრფივ განტოლებათა სისტემა წარმოადგინეთ მატრიცული განტოლების სახით და იპოვეთ მატრიცული განტოლების ამონახსენი.

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x_1-9x_2+3x_3=1, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=3, \\ 3x_1-7x_2+5x_3=1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3=8, \\ 2x_1+7x_2-8x_3=-1, \\ -x_1-3x_2+4x_3=1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1-4x_2+5x_3=4, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ 3x_1-5x_2-x_3=-3. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3+x_4=5, \\ 3x_1-7x_2+3x_3-x_4=-1, \\ 5x_1-9x_2+6x_3+2x_4=7, \\ 4x_1-6x_2+3x_3+x_4=8. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+8x_4=5, \\ x_1+3x_2-6x_3+2x_4=21, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-2. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 6x_1+5x_2-2x_3+4x_4=-4, \\ 9x_1-x_2+4x_3-x_4=13, \\ 3x_1+4x_2+2x_3-2x_4=1, \\ 3x_1-9x_2+2x_3=14. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=33, \\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=24, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=11. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=4, \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4=6, \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4=7, \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4=6. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1-x_2-6x_3+3x_4=1, \\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4=2, \\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4=-4, \\ x_1-x_2+2x_3-6x_4=-1. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=-4, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=-2, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=0, \\ 3x_1+8x_2-4x_4=4, \\ 2x_1+2x_2-4x_3-3x_4=1, \\ 3x_1+8x_2-1x_3-6x_4=2. \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x_1+4x_2+x_3+2x_4=5, \\ 3x_1+5x_2+x_3+5x_4=13, \\ 6x_1+x_2+x_3+5x_4=16, \\ 3x_1+5x_2+3x_3+x_4=5. \end{cases}$

3. ამოხსენით კრამერის ფორმულების გამოყენებით შემდეგი განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=7, \\ 4x_1+2x_2-x_3=9, \\ 3x_1+x_2+x_3=4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x_1+x_2-3x_3=-8, \\ x_1+x_2-7x_3=-16, \\ 6x_1+x_2+4x_3=6. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=21, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=28, \\ x_1+x_2-x_3=9. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 8x_1+x_2+x_3=-8, \\ 5x_1+x_2-3x_3=3, \\ 3x_1+2x_2-x_3=3. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4, \\ 2x_1-x_2+x_3-5x_4=-9, \\ 3x_1+2x_2-x_3-x_4=2, \\ 4x_1+2x_2+3x_3-5x_4=-9. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4=7, \\ 3x_1-3x_2+x_3+x_4=20, \\ x_1+2x_2+3x_3-4x_4=-17, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+4x_4=9. \end{cases}$

7) $\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3-4x_4=-\frac{9}{2}, \\ 3x_1+4x_2-5x_3+x_4=13, \\ x_1+5x_2-x_3+x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+2x_3-x_4=-3. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-4x_4=-4, \\ x_1+4x_2-5x_3+x_4=-2, \\ x_1+5x_2-2x_3+x_4=9. \\ 4x_1+x_2+2x_3-x_4=8. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 7x_1-2x_2+x_3-x_4=23, \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4=18, \\ x_1+2x_2+2x_3-4x_4=10, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+x_4=32. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4, \\ 2x_1-3x_2+x_3-5x_4=-11, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=-2, \\ 4x_1+2x_2+3x_3-x_4=-6. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=-1, \\ 3x_1+8x_2-4x_4=4, \\ 2x_1+2x_2-4x_3-3x_4=-5, \\ 3x_1+8x_2-1x_3-6x_4=1. \end{cases}$

პასუხები

1. 1) $(1,1,1,1,1)$; 2) $\left(\frac{23}{34},-\frac{1}{34},\frac{31}{34}\right)$;

3) $\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{3}x_4,\ \frac{2}{3}-\frac{5}{3}x_4,\ \frac{1}{3}-\frac{5}{3}x_4,\ x_4,\ -2+x_4\right)$;

4) $\left(x_1,\ -\frac{11}{30}+\frac{19}{3}x_1,\ -\frac{13}{30}+\frac{13}{3}x_1,\ \frac{9}{10}\right)$;

5) $\left(3-\frac{1}{2}x_4,\ 2-\frac{1}{2}x_4,\ 1+\frac{1}{2}x_4,\ x_4\right)$; 6) $(1,0,1,0)$;

7) არათავსებადია; 8) $(1,0,1)$; 9) $(2,2,0)$;

10) $(0,x_2,x_2,1)$; 11) $\left(2,-1,-\frac{17}{2},\frac{7}{2}\right)$; 12) $(1,1,1,1)$; 13) $(1,1,0)$;

14) $\left(\frac{44}{39},-\frac{9}{13},-\frac{38}{39}\right)$, 15) $(1,0,1,0,0)$; 16) $(2,0,0,0,3)$;

17) $(1,0,0,1,0)$; 18) $(2,1,0,0,0)$; 19) $(1,1,1,1,1)$;

20) $(2,0,1,0,0)$; 21) $(3,0,0,0,2)$; 22) $(2,1,0,0,1)$;

23) $(2,2,0,0,2)$; 24) $(4,0,0,0,3)$; 25) $(2,2,0,2)$; 26) $(1,1,1,1)$;

27) $(2,0,0,2)$; 28) $(2,1,1,2)$; 29) $(1,2,1)$; 30) $(1,2)$.

2. 1) $(1,1,1)$; 2) $(1,1,1)$; 3) $(1,1,1)$; 4) $(0,1,1)$; 5) $(1,1,1)$;

6) $\left(0,-3,-\frac{16}{3},6\right)$; 7) $\left(2,3,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$; 8) $\left(\frac{2}{3},-1,\frac{3}{2},0\right)$;

9) $(1,2,1,2)$; 10) $(1,0,1,0)$; 11) $(2,3,0,0)$; 12) $(1,2,3,4)$;

13) $(-8,5,-4,3)$; 14) $(1,0,0,2)$.

3. 1) $(1,2,-1)$; 2) $(0,-2,2)$; 3) $(3,2,-4)$; 4) $(-1,2,-2)$;

5) $(1,0,-1,2)$; 6) $(2,-3,1,4)$; 7) $\left(\frac{1}{2},1,-\frac{3}{2},0\right)$; 8) $(-1,-1,0,1)$;

9) $(1,2,3,4)$; 10) $(4,3,2,1)$; 11) $(-1,1,-1,1)$; 12) $(0,1,1,1)$.

§ 15. ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა

1. ვთქვათ,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad \dots(1)$$

n უცნობიანი m რაოდენობის ერთგვაროვანი წრფივი განტოლებათა სისტემაა $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ველზე, ხოლო

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

მისი მთავარი მატრიცაა.

ვიტყვით, რომ $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ვექტორი არის (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი, თუ უცნობთა $x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2,...,\ x_n=\alpha_n$ მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ (1) განტოლებათა სისტემას.

ყველა ისეთი $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ვექტორთა სიმრავლე, რომლებიც არიან (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი, აღვნიშნოთ V_1 სიმბოლოთი.

ვთქვათ, $\lambda\in X$ და ω_λ ისეთი ასახვაა V_1 სიმრავლისა ყველა $n-$განზომილებიან არითმეტიკულ ვექტორთა V სიმრავლეში, რომ ყოველი $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in V_1$ ვექტორისათვის

$$\omega_\lambda\left((\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\right)=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,...,\lambda\alpha_n)\in V .$$

თუ $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n),(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\in V_1$ და $\lambda_1,\lambda_2\in X$, მაშინ

$$\omega_{\lambda_1}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)+\omega_{\lambda_2}(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\in V_1 .$$

$\mathrm{V}_1=(V_1,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in X\})$ ალგებრა, სადაც $(+)$ არის V_1 სიმრავ-

ლის ვექტორთა შეკრების ოპერაცია, ვექტორული სივრცეა.

2. $\mathrm{V}_1=(V_1,+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in X\})$ ვექტორული სივრცის ნებისმიერ ბაზისს (1) განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა ეწოდება.

რადგან ვექტორული სივრცის ბაზისი ცალსახად არ განისაზღვრება, ამიტომ, (1) განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემაც ცალსახად არ განისაზღვრება.

(1) განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა საშუალებას იძლევა მოცემული განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი წარმოვადგინოთ ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემაში შემავალი ვექტორთა წრფივი კომბინაციის სახით, კოეფიციენტებით X სიმრავლიდან.

თუ (1) განტოლებათა სისტემის მთავარი მატრიცის რანგი r $(r\geq 1)$ ნაკლებია განტოლებაში შემავალ უცნობთა n რიცხვზე, მაშინ (1) განტოლებათა სისტემას გააჩნია $n-r$ რაოდენობის ვექტორისაგან შემდგარი ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა.

განტოლებათა (1) სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემის საპოვნელად საჭიროა:

1) ვიპოვოთ (1) განტოლებათა სისტემის მთავარი მატრიცის რანგი r;

2) ვიპოვოთ (1) განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენი;

3) შევადგინოთ $n-r$ რიგის კვადრატული

$$B'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცა (მისი დეტერმინანტი ყოველთვის ნულისაგან უნდა იყოს განსხვავებული)

4) (1) განტოლებათა სისტემის ზოგად ამონახსენში თანამიმდევრობით თითოეულ თავისუფალ უცნობს მივანიჭოთ 1-ის ტოლი, ხოლო ყველა დანარჩენს კი ნულის ტოლი მნიშვნელობა. შედეგად მივიღებთ (1) განტოლებათა სისტემების $n-r$ რაოდენობის ამონახსენს.

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_q^{(1)}, 1, 0, ..., 0\right), \\ a_2 &= \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_q^{(2)}, 0, 1, ..., 0\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-r} &= \left(x_1^{(n-r)}, x_2^{(n-r)}, ..., x_q^{(n-r)}, 0, 0, ..., 1\right). \end{aligned}$$

მე–4 პუნქტის თანახმად ვექტორთა $a_1, a_2, ..., a_p$ სისტემა იქნება (1) განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა.

სხვა ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემის მისაღებად საჭიროა B' მატრიცის ისეთი სხვა B მატრიცით შეცვლა, რომ $|B| \neq 0$.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} x_1 + 2x_1 - 3x_1 + 3x_1 + 4x_1 - 7x_1 = 0, \\ 2x_1 - x_1 + 4x_1 - x_1 + 2x_1 - 3x_1 = 0, \end{cases}$$

ერთ-ერთი ფუნდამენტალურ ამოხსნათა სისტემა. ჯერ ვიპოვოთ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენი.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & -5 & 10 & -7 & -6 & 11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{11}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{29}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}.$$

მას ექნება სახე:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - \frac{29}{5}x_4 - \frac{8}{5}x_5 + \frac{13}{5}x_6, \\ x_2 = 2x_3 + \frac{7}{5}x_4 - \frac{6}{5}x_5 + \frac{11}{5}x_6. \end{cases}$$

ამგვარად ძირითად უცნობთა რიცხვი $r = 2$, ამიტომ თავისუფალ უცნობთა რიცხვი ტოლი იქნება $n - r = 6 - 2 = 4$. ნებისმიერად შევადგინოთ მეოთხე რიგის ისეთი B მატრიცა, რომლის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. კერძოდ,

$$\begin{pmatrix} 5000 \\ 0500 \\ 0050 \\ 0005 \end{pmatrix}.$$

თავისუფალ უცნობებს მივანიჭოთ შესაბამისად პირველი, მეორე, მესამე და მეოთხე სტრიქონების ელემენტების მნიშვნელობები მოცემული განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენიდან ვიპოვოთ x_1 და x_2 უცნობების მნიშვნელობები. მივიღებთ ოთხ ამონახსენს, ჩაწერილს ვექტორის სახით:

$$\alpha_1 = (-5, 10, 5, 0, 0, 0),\ \alpha_2 = (-29, 7, 0, 5.0, 0),$$
$$\alpha_3 = (-8, -6, 0, 0, 5, 0),\ \alpha_4 = (13, 11, 0, 0, 0, 5),$$

რომელიც იქნება მოცემული განტოლებათა სისტემის ერთ-ერთი ფუნდამენტალურ ამოხსნათა სისტემა. ფუნდამენტალურ ამოხსნათა სხვა სისტემის მიღება შეიძება B მატრიცის გამოცვლით. ფუნდამენტალურ ამოხსნათა სისტემა საშუალებას იძლევა მოცემული განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი β ამონახსენი ჩავწეროთ $\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \lambda_4\alpha_4$ სახით, სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ რომელიღაც ნამდვილი რიცხვებია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. იპოვეთ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენი და ერთ-ერთი ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 6x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 - x_6 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 0, \\ 6x_1 + x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 4x_6 = 0. \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

15) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ 16) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

17) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ 18) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

პასუხები

1. ჯერ მოცემულია ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენი და შემდეგ ფუნდამენტალურ ამოხსნათა ერთ-ერთი სისტემა.

1) $\left(x_1,\ -\frac{1}{2}x_1\right)$; თუ $B=(2)$, მაშინ $\alpha=(2,-1)$;

2) $\left(x_1,\ x_2,\ \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2\right)$; თუ $B=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$, მაშინ $\alpha_1=(3,0,1)$, $\alpha_2=(0,3,2)$;

3) $(x_1,\ x_4-x_1,\ 4x_4-x_1,\ x_4)$; თუ $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, მაშინ $\alpha_1=(1,-1,-1,0)$, $\alpha_2=(0,1,4,1)$;

4) $\left(x_1,\ \frac{5}{3}x_1,\ \frac{7}{3}x_1\right)$; თუ $B=(3)$, მაშინ $\alpha=(3,5,7)$;

5) $\left(x_1,\ \frac{5}{3}x_1-x_4,\ \frac{7}{3}x_1;\ x_4\right)$; თუ $B=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$, მაშინ $\alpha_1=(3,5,7,0)$, $\alpha_2=(0,-3,0,3)$;

6) $\left(x_1,\ \frac{1}{5}x_1,\ \frac{9}{5}x_1\right)$; თუ $B=(5)$, მაშინ $\alpha=(5,1,9)$;

7) $(x_1,\ x_2,\ x_1+2x_2-3x_4+4x_5,\ x_4,\ x_5)$; თუ $B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, მაშინ $\alpha_1=(1,0,1,0,0)$, $\alpha_2=(0,1,2,0,0)$, $\alpha_3=(0,0,-3,1,0)$, $\alpha_4=(0,0,4,0,1)$;

8) $\left(x_1,\ -\frac{5}{8}x_1+\frac{7}{8}x_4-\frac{5}{8}x_5,\ \frac{1}{8}x_1+\frac{5}{8}x_4+\frac{9}{8}x_5,\ x_4,\ x_5\right)$; თუ $B=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}$, მაშინ $\alpha_1=(8,-5,1,0,0)$, $\alpha_2=(0,7,5,8,0)$, $\alpha_3=(0,-5,9,0,8)$;

9) $\left(-\frac{1}{2}x_4,\ \frac{19}{16}x_4-\frac{5}{8}x_5,\ \frac{9}{16}x_4+\frac{9}{8}x_5,\ x_4,\ x_5\right)$; თუ $B=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$,

მაშინ $\alpha_1=(-8,19,9,16,0)$, $\alpha_2=(0,-10,18,0,16)$;

10) $\left(-6x_4-\frac{41}{7}x_5,\ -x_4-\frac{8}{7}x_5,\ -5x_4-\frac{29}{7}x_5,\ x_4,\ x_5\right)$; თუ $B=\begin{pmatrix}70\\07\end{pmatrix}$,

მაშინ $\alpha_1=(-42,-7,-35,7,0)$, $\alpha_2=(-41,-8,-29,0,7)$;

11) $\left(x_1,\ -\frac{3}{4}x_1-x_4,\ -\frac{1}{4}x_1,\ x_4\right)$; თუ $B=\begin{pmatrix}40\\04\end{pmatrix}$, მაშინ

$\alpha_1=(4,-3,-1,0)$,

$\alpha_2=(0,-4,0,4)$;

12) $(-13x_5,\ x_2,\ x_2+x_4-8x_5,\ x_4,\ x_5)$; თუ $B=\begin{pmatrix}100\\010\\001\end{pmatrix}$, მაშინ

$\alpha_1=(-13,0,-8,0,1)$, $\alpha_2=(0,1,1,0,0)$, $\alpha_3=(0,0,1,1,0)$;

13) $\left(-\frac{6}{5}x_6,\ -\frac{2}{5}x_6,\ 0,\ -\frac{1}{3}x_6,\ \frac{22}{15}x_6,\ x_6\right)$; თუ $B=(15)$, მაშინ

$\alpha=(-18,\ -6,\ 0,\ -5,\ 22,\ 15)$;

14) $\left(x_1,\ -\frac{7}{8}x_1,\ -\frac{5}{8}x_1+x_4,\ x_4\right)$; თუ $B=\begin{pmatrix}80\\08\end{pmatrix}$, მაშინ

$\alpha_1=(8,-7,-5,0)$, $\alpha_2=(0,0,8,8)$;

15) $\left(x_1,\ x_2,\ \frac{1}{2}x_1+x_2+x_4,\ x_4,\ 0\right)$; თუ $B=\begin{pmatrix}200\\020\\002\end{pmatrix}$, მაშინ

$\alpha_1=(2,0,1,0,0)$, $\alpha_2=(0,2,2,0,0)$, $\alpha_3=(0,0,2,2,0)$;

16) $(x_1,\ -7x_1,\ -6x_1)$; თუ $B=(1)$, მაშინ $\alpha=(1,-7,-6)$;

17) $\left(x_1,\ -\frac{11}{4}x_1,\ -\frac{17}{4}x_1,\ 0\right)$; თუ $B=(4)$, მაშინ $\alpha=(4,-11,-17,0)$;

18) $\left(x_1,\ -\frac{23}{13}x_1-\frac{16}{13}x_4-\frac{8}{13}x_5,\ -\frac{15}{13}x_1+\frac{2}{13}x_4+\frac{1}{13}x_5,\ x_4,\ x_5\right)$;

თუ $B=\begin{pmatrix}13 & 0 & 0\\ 0 & 13 & 0\\ 0 & 0 & 13\end{pmatrix}$, მაშინ $\alpha_1=(13,-23,-15,0,0)$, $\alpha_2=(0,-16,2,13,0)$,

$\alpha_3=(0,-8,1,0,13)$;

19) $\left(x_1,\ \frac{26}{7}x_1-\frac{1}{7}x_4,\ \frac{23}{7}x_1-\frac{6}{7}x_4,\ x_4\right)$; თუ $B=\begin{pmatrix}70\\07\end{pmatrix}$, მაშინ

$\alpha_1=(7,26,23,0)$, $\alpha_2=(0,-1,-6,7)$;

20) $\left(-\frac{31}{35}x_5,-\frac{11}{35}x_5,\ x_3=0,-\frac{29}{35}x_5,\ x_5\right)$; თუ $B=(35)$, მაშინ

$\alpha=(-31,-11,0,-29,35)$.

§ 16. ერთი ცვლადის მრავალწევრთა რგოლი

1. ვთქვათ, $\mathbf{K}=(K,+,-,\cdot,1)$ და $\mathbf{L}=(L,+,-,\cdot,1)$ კომუტაციური რგოლებია.

$\mathbf{L}$ რგოლს ეწოდება $\mathbf{K}$ რგოლის მარტივი გაფართოება x ელემენტით, თუ

1) $\mathbf{K}$ რგოლი $\mathbf{L}$ რგოლის ქვერგოლია;

2) $\mathbf{L}$ რგოლის ყოველი f ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი $a_0,a_1,a_2,...,a_n\in K$ ელემენტები, რომ

$$f=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

შემდეგში $\mathbf{K}[x]-$ით აღინიშნება $\mathbf{K}$ რგოლის მარტივი გაფართოება x ელემენტით.

თუ ნებისმიერი $a_0,a_1,a_2,...,a_n\in K$ ელემენტებისათვის

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$$

ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$, მაშინ $\mathbf{K}[x]$ რგოლს ეწოდება $\mathbf{K}$ რგოლის მარტივი ტრანსცენდენტული გაფართოება x ელემენტით. ასეთ შემთხვევაში x-ს ეწოდება ტრანსცენდენტული ელემენტი $\mathbf{K}$ რგოლზე.

$\mathbf{K}[x]$ რგოლს, რომელიც წარმოადგენს $\mathbf{K}$ რგოლის მარტივ ტრანსცენდენტულ გაფართოებას x ელემენტით, ეწოდება მრავალწევრთა რგოლი $\mathbf{K}$ რგოლზე x ელემენტის მიმართ, ხოლო $\mathbf{K}[x]$ რგოლის ელემენტებს კი მრავალწევრები ეწოდება x ელემენტის მიმართ.

შემდგომში $\mathbf{K}[x]$ რგოლის მრავალწევრებს $f(x),g(x),q(x)$ და ა.შ. სიმბოლოებით აღვნიშნავთ. ამასთან, თუ

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

მაშინ $a_0,a_1,...,a_n$ ელემენტებს $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები ეწოდება. n ნატურალურ რიცხვს ეწოდება f მრავალწევრის ხარისხი, თუ n არის x ელემენტის ის უდიდესი ხარისხი,

რომლის a_n კოეფიციენტიც განსხვავებულია ნულისაგან. ამასთან, a_nx^n შესაკრებს $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრი, ხოლო a_n-ს f მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი ეწოდება. f მრავალწევრს ნორმირებული ეწოდება, თუ $a_n=1$.

თუ $f=a_0$ და $a_0\neq 0$, მაშინ მისი ხარისხი ნულის ტოლია, ხოლო ნულოვანი $f(x)=0+0x+0x^2+\cdots+0x^n+\cdots$ მრავალწევრის ხარისხი საერთოდ არ განისაზღვრება.

შემდეგში $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი $\deg f(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ $\mathbf{K}[x]$ მრავალწევრთა რგოლია $\mathbf{K}$ რგოლზე x ელემენტის მიმართ, მაშინ $\mathbf{K}[x]$ რგოლის ნებისმიერი $f(x)$ მრავალწევრის წარმოდგენა $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, ($a_0,a_1,a_2,...,a_n\in K$) სახით ცალსახაა.

2. ვთქვათ $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\ g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_sx^s\in\mathbf{K}[x]$ და $n\le s$. $\mathbf{K}[x]$ რგოლზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$f(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_sx^s$$

და

$$f(x)\cdot g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m,\ \text{სადაც}\ c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j,\ (0\le k\le n+s).$$

3. ვთქვათ, $\mathbf{F}=(F,+,-,\cdot,1)$ ველია და $f(x),g(x),q(x),p(x),p'(x)\in\mathbf{F}[x]$. იტყვიან, რომ $q(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების საერთო გამყოფი, თუ $f(x)=q(x)\cdot p(x)$ და $g(x)=q(x)\cdot p'(x)$.

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების ისეთ საერთო გამყოფს, რომელიც იყოფა მოცემული მრავალწევრების ნებისმიერ საერთო გამყოფზე, $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება და $(f(x),g(x))$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

4. მრავალწევრთა გაყოფადობის შემდეგ პროცესს:

$$\begin{array}{ll} f(x)=g(x)\cdot q(x)+r_0(x), & \deg g(x)>\deg r_0(x), \\ g(x)=r_0(x)\cdot q_0(x)+r_1(x), & \deg r_0(x)>\deg r_1(x), \\ r_0(x)=r_1(x)\cdot q_1(x)+r_2(x), & \deg r_1(x)>\deg r_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{k-2}(x)=r_{k-1}(x)\cdot q_{k-1}(x)+r_k(x), & \deg r_{k-1}(x)>\deg r_k(x), \\ r_{k-1}(x)=r_k(x)\cdot q_k(x)+0, & \end{array}$$

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ევკლიდეს ალგორითმი ეწოდება.

5. იტყვიან, რომ $q(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების საერთო ჯერადი, თუ $q(x)=f(x)\cdot p(x)$ და $q(x)=g(x)\cdot p'(x)$.

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების ისეთ საერთო ჯერადს, რომელზეც იყოფა მოცემული მრავალწევრების ნებისმიერი საერთო ჯერადი, $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უმცირესი საერთო ჯერადი ეწოდება და $\left[f(x),g(x)\right]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი საზოგადოდ ცალსახად არ განისაზღვრება.

6. ვთქვათ, $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n\in \mathrm{K}[x]$ და $a\in K$, მაშინ ცხადია, $f(a)=a_0+a_1a+a_2a^2+\dots+a_na^n\in K$ და $f(a)$ ელემენტს $f(x)$ მრავალწევრის მნიშვნელობა ეწოდება, როცა $x=a$ და თუ $f(a)=0$, მაშინ a ელემენტს $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი ეწოდება.

ვთქვათ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n\in \mathrm{K}[x]$. დავუშვათ, რომ $f^*=\left\{\left(a,\ a_0+a_1a+a_2a^2+\dots+a_na^n\right)\mid a\in K\right\}$.

შევნიშნოთ, თუ $f(x),g(x)\in \mathrm{K}[x]$ და $f(x)\neq g(x)$, მაშინ არაა სავალდებულო ადგილი ჰქონდეს $f^*\neq g^*$ უტოლობას.

7. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) თუ $f(x),g(x)\in \mathrm{K}[x]$, მაშინ

$$\deg\left(f(x)+g(x)\right)\le \max\left(\deg f(x),\deg g(x)\right);$$

2) თუ $f(x),g(x)\in \mathrm{K}[x]$, მაშინ

$$\deg\left(f(x)\cdot g(x)\right)\le \deg f(x)+\deg g(x);$$

3) თუ კომუტაციური K რგოლი მთელობის არეა, მაშინ

$$\deg\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\deg f(x)+\deg g(x);$$

4) ვთქვათ K ველია. თუ $f(x),g(x)\in \mathrm{K}(x)$ და $g(x)\neq 0$, მაშინ არსებობენ ისეთი ცალსახად განსაზღვრული $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრები $\mathrm{K}(x)$ რგოლიდან, რომ

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x) \text{ და } 0\le \deg r(x)\le \deg g(x) \text{ ან } r(x)=0;$$

5) $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის შედგენილი ევკლიდეს ალგორითმის ბოლო ნულისაგან განსხვავებული $r_k(x)$ ნაშთის ტოლია;

6) $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უმცირესი საერთო ჯერადი

$$\left[f(x),g(x)\right]=\frac{f(x)\cdot g(x)}{\left(f(x),g(x)\right)};$$

7) თუ $f(x),g(x)\in \mathrm{K}[x]$ და $a\in K$, მაშინ $f(x)=(x-a)\cdot g(x)+f(a)$;

8) $x=a$ ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, როცა $f(x)$ მრავალწევრის $x-a$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი ნულის ტოლია (ბეზუს თეორემა);

9) თუ კომუტაციური K რგოლი მთელობის არეა, $f(x)\in \mathrm{K}[x]$ და $\deg f(x)=n$, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის ფესვთა რაოდენობა n-ს არ აღემატება;

10) თუ $n-$ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს აღებულს მთელობის $\mathbf{K}[x]$ არიდან $n-$ზე მეტი ფესვი გააჩნია, მაშინ $f(x)$ ნულოვანი მრავალწევრია.

11) ვთქვათ $\mathbf{K}[x]$ მრავალწევრთა რგოლია $\mathbf{K}$ უსასრულო მთელობის არეზე. $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები $\mathbf{K}[x]$ მთელობის არიდან მაშინ და მხოლოდ მაშინაა ერთმანეთის ტოლი, როცა $f^* = g^*$.

8. დავუშვათ, რომ $\mathbf{F}=(F,+,-,\cdot,1)$ ველია. $c,r\in F$, $f(x),g(x)\in\mathbf{F}[x]$ და $f(x)=(x-c)g(x)+r$, სადაც $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ და $g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}$. მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობები: $b_0=a_0$, $b_1=cb_0+a_1$, $b_2=cb_1+a_2$, ..., $b_{n-1}=cb_{n-2}+a_{n-1}$ და $r=cb_{n-1}+a_n$.

$f(x)$ მრავალწევრის $x-c$ ორწევრზე გაყოფადობის მოცემულ პროცესს ჰორნერის სქემა ეწოდება.

გაყოფადობის პროცესის შესრულება უფრო მოსახერხებელია შემდეგი ცხრილის გამოყენებით.

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0 a_0	b_1 cb_0+a_1	b_2 cb_1+a_2	... ...	b_{n-1} $cb_{n-2}+a_{n-1}$	r $cb_{n-1}+a_n$

9. ვთქვათ $\mathbf{F}=(F,+,-,\cdot,1)$ ველია და $f(x),g(x),q(x),p(x)\in\mathbf{F}[x]$. თუ $f(x)=g(x)\cdot q(x)$ და $g(x)=f(x)\cdot p(x)$, მაშინ $f(x)$ და $g(x)$ ასოცირებული მრავალწევრები ეწოდება.

$f(x)$ მრავალწევრის ისეთ გამყოფებს, რომლებიც ან $f(x)$ მრავალწევრთანაა ასოცირებული ან $\mathbf{F}$ ველის ელემენტთან, $f(x)$ მრავალწევრის ტრივიალური გამყოფები ეწოდება.

$f(x)$ მრავალწევრს უწოდებენ შედგენილს $\mathbf{F}[x]$ რგოლში ან კიდევ დაყვანადს $\mathbf{F}$ ველზე, თუ რომელიღაც დადებითი ხარისხის $g(x)$ და $q(x)$ მრავალწევრებისათვის სამართლიანია $f(x)=g(x)\cdot q(x)$ ტოლობა.

$f(x)$ მრავალწევრს ეწოდება დაუყვანადი $\mathbf{F}$ ველზე, ან კიდევ მარტივი $\mathbf{F}[x]$ რგოლში, თუ მისი ნებისმიერი გამყოფი ტრივიალურია.

ვთქვათ $f(x)$ და $q(x)$ ორი მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathbf{F}[x]$ რგოლიდან, ხოლო $g(x)$ მარტივი მრავალწევრია $\mathbf{F}[x]$ რგოლში. თუ $q(x)$ მრავალწევრი არ იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე და $f(x)=g(x)^m\cdot q(x)$, მაშინ $g(x)$ მრავალწევრს $f(x)$ მრავალწევრის m ჯერადობის მამრავლი ეწოდება.

ვთქვათ $f(x)$ და $q(x)$ ორი მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathbf{F}[x]$ რგოლიდან და $c\in F$. თუ $q(x)$ მრავალწევრი არ იყოფა $x-c$ ორწევრზე და $f(x)=(x-c)^m\cdot q(x)$, მაშინ c ელემენტს $f(x)$ მრავალწევრის m ჯერადობის ფესვი ეწოდება.

10. თუ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ნებისმიერი მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathbf{F}[x]$ რგოლიდან, მაშინ $a_0\cdot n\cdot x^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$ მრავალწევრს ეწოდება მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფორმალური წარმოებული და $f'(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ე.ი.

$$f'(x)=a_0\cdot n\cdot x^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

11. ვთქვათ $f(x)$ და $g(x)$ ორი მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathbf{F}[x]$ რგოლიდან და $a\in F$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$;

2) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$;

3) $\left(a\cdot f(x)\right)' = a\cdot f'(x)$;

4) $\left(f(x)^m\right)' = m\cdot f(x)^{m-1} f'(x)$, ნებისმიერი ნატურალური m რიცხვისათვის;

5) ვთქვათ, $\mathrm{F}=(F,+,-,\cdot,1)$ ნულმახასიათებლიანი ველია. თუ $f(x)$ მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathrm{F}[x]$ რგოლიდან და $g(x)$ მარტივი მრავალწევრი $f(x)$ მრავალწევრის m ჯერადობის მამრავლია, მაშინ $g(x)$ მრავალწევრი $f'(x)$-სათვის $(m-1)$ ჯერადობის მამრავლი იქნება;

6) $f(x)$ მრავალწევრს მრავალწევრთა $\mathrm{F}[x]$ რგოლიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია დაუყვანი ჯერადი მამრავლი, როცა $f(x)$ და $f'(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი დადებითი ხარისხის მრავალწევრია;

7) ვთქვათ, $f(x)$ მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathrm{F}[x]$ რგოლიდან. თუ $c\in F$ არის მოცემული მრავალწევრის m ჯერადობის ფესვი, მაშინ $f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(m-1)}(c)=0$, ხოლო $f^{(m)}(c)\neq 0$.

12. ვთქვათ, $\mathrm{C}=(C,+,-,\cdot,1)$ კომპლექსურ რიცხვთა ველია. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებანი:

1) კომპლექსურ რიცხვთა $\mathrm{C}=(C,+,-,\cdot,1)$ ველი ალგებრულად ჩაკეტილია;

2) $\mathrm{C}[x]$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ნებისმიერი დადებითი ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი შეიძლება ცალსახად წარმოდგენილი იქნეს C ველის ელემენტისა და მრავალწევრთა $\mathrm{C}[x]$ რგოლიდან აღებული ნორმირებულ წრფივ მრავალწევრთა ნამრავლის სახით, ე.ი. $f(x)=a\cdot(x-c_1)\cdot(x-c_2)\cdots(x-c_n)$,

სადაც $a\in C$ და $(x-c_1),(x-c_2),\dots,(x-c_n)\in \mathrm{C}[x]$.

3) ნებისმიერი $n-$ური $(n\geq 2)$ ხარისხის მრავალწევრი დაყვანადია მრავალწევრთა $\mathrm{C}[x]$ რგოლში.

4) ნებისმიერ $n-$ური $(n\geq 1)$ ხარისხის მრავალწევრს მრავალწევრთა $\mathrm{C}[x]$ რგოლიდან ზუსტად n რაოდენობის ფესვი აქვს.

5) თუ $c_1,c_2,\dots,c_n$ ელემენტები არიან

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_n\in \mathrm{C}[x]$$

მრავალწევრის ფესვები მაშინ:

$$\begin{aligned}&\frac{a_1}{a_0}=-(c_1+c_2+\cdots+c_n),\\ &\frac{a_2}{a_0}=c_1c_2+c_1c_3+\cdots+c_1c_n+c_2c_3+\cdots+c_{n-1}c_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\frac{a_n}{a_0}=(-1)^n\cdot c_1c_2\cdots c_n.\end{aligned} \qquad \dots(1)$$

(როცა $a_0=1$, მაშინ (1) ფორმულებს ვიეტას ფორმულები ეწოდება).

13. $f(x)$ მრავალწევრის წარმოდგენას

$$f(x)=a\cdot(x-c_1)^{k_1}\cdot(x-c_2)^{k_2}\cdot\dots\cdot(x-c_m)^{k_m}$$

სახით, სადაც $a,c_1,c_2,\dots,c_m\in C$ და $c_1,c_2,\dots,c_m$ მოცემული მრავალწევრის წყვილ-წყვილად განსხვავებული ფესვებია, კანონიკური წარმოდგენა ეწოდება.

ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრები.

1. ვთქვათ, $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ნამდვილ რიცხვთა ველია. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებანი:

1) თუ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი არის $f(x)\in \mathrm{R}[x]$ მრავალწევრის ფესვი, მაშინ $a-bi$ კომპლექსური რიცხვიც იქნება მოცემული მრავალწევრის ფესვი;

2) მრავალწევრთა $\mathbf{R}[x]$ რგოლზე დაუყვანადია მხოლოდ პირველი ხარისხის მრავალწევრები, ან კიდევ მეორე ხარისხის ისეთი მრავალწევრები, რომლებიც ასოცირებული არიან $g(x)=(x-a)^2+b^2$ სახის მრავალწევრებთან, სადაც $a,b\in R$, $b\neq 0$;

3) ნებისმიერი დადებითი ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი შეიძლება ცალსახად წარმოდგენილი იქნას $\mathbf{R}$ ველის ელემენტისა და მრავალწევრთა $\mathbf{R}[x]$ რგოლიდან აღებული ისეთ მრავალწევრთა ნამრავლის სახით, რომელთა ხარისხი არ აღემატება ორს, ე.ი.

$$f(x)=a\cdot\prod_k\left((x-a_k)^2+b_k\right)\cdot\prod_p\left(x-c_p\right);$$

4) კენტი ხარისხის ნებისმიერ მრავალწევრს მრავალწევრთა $\mathbf{R}[x]$ რგოლიდან ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი გააჩნია. კერძოდ, $n-$ური ხარისხის მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა რაოდენობის ლუწ-კენტოვნება ემთხვევა n რიცხვის ლუწ-კენტოვნებას;

5) ნებისმიერ მრავალწევრს მრავალწევრთა $\mathbf{R}[x]$ რგოლიდან ლუწი რაოდენობის კომპლექსური ფესვი გააჩნია.

მესამე ხარისხის განტოლებები

2. განტოლებას, რომელსაც აქვს $a_0y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0$ სახე, სადაც $a_0,a_1,a_2,a_3\in R$ და y უცნობი სიდიდეა, მესამე ხარისხის სრული განტოლება ეწოდება. იგი $y=x-\frac{a_1}{3a_0}$ ჩასმით მიიყვანება $x^3+px+q=0$ სახემდე, რომელსაც მესამე ხარისხის არასრული განტოლება ეწოდება. ბოლო განტოლებაში დავუშვათ, რომ $x=u+v$. მივიღებთ: $u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v)=0$. ახლა თუ $3uv+p=0$, მაშინ $u^3+v^3+q=0$ და $uv=-\frac{p}{3}$, ე.ი. $u^3+v^3=-q$ და

$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$. მივიღეთ, რომ u^3 და v^3 არის $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$ კვადრატული განტოლების ფესვები. მიღებულ განტოლებას $x^3+px+q=0$ განტოლების ამომხსნელი განტოლება ეწოდება. მის დისკრიმინანტს აქვს $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ სახე.

3. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) $\sqrt[3]{1}$ -ის ყველა ფესვებია:

$$\omega_0=1,\ \omega_1=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{და}\ \omega_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

2) ვთქვათ, z_1 და z_2 არის $x^3+px+q=0$ განტოლების ამომხსნელი $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$ განტოლების ფესვები. თუ ε არის $\sqrt[3]{1}$ რომელიმე პირველადი ფესვი, მაშინ $x^3+px+q=0$ განტოლების ფესვები გამოითვლება ფორმულებით:

$$x_1=u+v,\ x_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2\ \text{და}\ x_2=u\varepsilon^2+v\varepsilon,$$

სადაც u და v ისეთი ფესვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს: $u^3=z_1$, $v^3=z_2$ და $uv=-\frac{p}{3}$.

3) ვთქვათ, $x^3+px+q=0$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი განტოლებაა და $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ მისი დისკრიმინანტია. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

თუ $\Delta>0$ მაშინ მოცემულ განტოლებას ერთი ნამდვილი და ორი კომპლექსურად შეუღლებული ფესვი ექნება;

თუ $\Delta=0$ მაშინ მოცემულ განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია და ერთერთი მათგანი ჯერადი;

თუ $\Delta<0$ მაშინ მოცემულ განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია და წყვილ-წყვილად განსხვავებული.

ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრების ნამდვილ ფესვთა განცალების არეები (შტურმის მრავალწევრთა მიმდევრობა)

1. ვთქვათ, $f(x)$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი დადებითი ხარისხის მრავალწევრია, რომელსაც არ გააჩნია ჯერადი ფესვები. განვმარტოთ მრავალწევრთა სასრული $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ მიმდევრობა შემდეგნაირად: $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)=f'(x)$

$$\begin{array}{l} f_0(x)=q_1(x)f_1(x)-f_2(x); \\ f_1(x)=q_2(x)f_2(x)-f_3(x); \\ f_2(x)=q_3(x)f_3(x)-f_4(x); \\ \text{---------------} \\ f_{m-1}(x)=q_m(x)f_m(x). \end{array}$$

ამგვარად, $f(x)$ და $f'(x)$ მრავალწევრებისათვის ვაგებთ ევკლიდეს ალგორითმს. ამასთან, ნაშთის ნიშანს ყოველთვის მოპირდაპირე ნიშნით ვცვლით, და ნაშთიანი გაყოფის პროცესს მანამდე ვაგრძელებთ სანამ ნაშთი ნულის ტოლი არ გახდება.

მრავალწევრთა $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ მიმდევრობას $f(x)$ მრავალწევრის შტურმის მრავალწევრთა მიმდევრობა ეწოდება.

2. ვთქვათ, c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. $\omega(c)$ აღნიშნულია ნიშანცვლათა რიცხვი $f_0(c), f_1(c), f_2(c), ..., f_m(c)$ რიცხვით მიმდევრობაში.

3. ვთქვათ, $f(x)$ ჯერადი ფესვების არ მქონე ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია. a და b $(a<b)$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, რომლებიც არ არიან მოცემული მრავალწევრის ფესვები, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის ნამვილ ფესვთა რაოდენობა (a,b) ინტერვალში $\omega(a)-\omega(b)$ რიცხვის ტოლია.

მაგალითი 1. მესამე ხარისხის $a_0y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0$ განტოლებიდან გამოვრიცხოთ y^2 უცნობის შემცველი წევრი. ამისათვის

გამოვიყენოთ ჩასმა $y=x-\frac{a_1}{3a_0}$. გვექნება:

$$a_0\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)^3+a_1\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)^2+a_2\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)+a_3=$$
$$a_0\left(x^3-\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_1^2}{3a_0^2}x-\frac{a_1^3}{27a_0^3}\right)+a_1\left(x^2-\frac{2a_1}{3a_0}x+\frac{a_1^2}{9a_0^2}\right)+a_2\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)+a_3=$$
$$=a_0x^3-a_1x^2+\frac{a_1^2}{3a_0}x-\frac{a_1^3}{27a_0^2}+a_1x^2-\frac{2a_1^2}{3a_0}x+\frac{a_1^3}{9a_0^2}+a_2x-\frac{a_1a_2}{3a_0}+a_3=$$
$$=a_0x^3+\left(\frac{a_1^2}{3a_0}-\frac{2a_1^2}{3a_0}+a_2\right)x+\left(\frac{a_1^3}{9a_0^2}-\frac{a_1^3}{27a_0^2}-\frac{a_1a_2}{3a_0}+a_3\right)=$$
$$=a_0\left(x^3+\left(\frac{3a_0a_2-a_1^2}{3a_0^2}\right)x+\left(\frac{2a_1^3+27a_0^3a_3-9a_0a_1a_2}{27a_0^3}\right)\right)=0$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$p=\frac{3a_0a_2-a_1^2}{3a_0^2},\quad q=\frac{2a_1^3+27a_0^3a_3-9a_0a_1a_2}{27a_0^3}.$$

მივიღებთ განტოლებას $x^3+px+q=0$, რომელსაც მესამე რიგის არასრული კუბური განტოლება ეწოდება.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$g(x)=x^3+2x^2-x-2$ და $\varphi(x)=x^5-4x^4-4x^3+34x^2-45x+18$

მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი. შევადგინოთ $\varphi(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ევკლიდეს ალგორითმი:

$$\varphi(x)=g(x)\left(x^2-6x+9\right)+12\left(x^2-4x+3\right),$$
$$g(x)=\left(12x^2-48x+36\right)\left(\frac{1}{12}x+\frac{1}{2}\right)+20(x-1),$$
$$12x^2-48x+36=(20x-20)\left(\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}\right)+0.$$

ბოლო ნულისაგან განსხვავებული ნაშთია $20x-20=\frac{1}{20}(x-1)$, ე.ი. მოცემული მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფია

$x-1$ მრავალწევრი, რადგან $20x-20$ და $x-1$ მრავალწევრები ერთმანეთთან ასოცირებული არიან.

მაგალითი 3. მაგალითი $2-$დან ჩანს, რომ

$$\varphi(x)=x^5-4x^4-4x^3+34x^2-45x+18$$

უნაშთოდ იყოფა $x-1$ ორწევრზე, ე.ი. $x=1$ მოცემული მრავალწევრის ფესვია. ჰორნერის სქემის გამოყენებით დავადგინოთ მოცემული ფესვის ჯერადობა:

	1	-4	-4	34	-45	18
1	1	-3	-7	27	-18	0
1	1	-2	-9	18	0	
1	1	-1	-10	8		

მივიღეთ, რომ $x=1$ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ორჯერადი ფესვია, რადგან $\varphi(x)=(x-1)^2(x^3-2x^2-9x+18)$.

მაგალითი 4. $f(x)=x^3-2x^2-9x+18$ მრავალწევრისათვის ავაგოთ შტურმის მრავალწევრთა მიმდევრობა. ვთქვათ $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)=f'(x)=3x^2-4x-9$, $f_2(x)=31x-72$, $f_3(x)=1$. ავაგოთ ნიშანცვლათა შემდეგი ცხრილი:

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$\omega(a)-\omega(b)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	2
2,5	$-$	$-$	$+$	$+$	1
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

ცხრილიდან ჩანს, რომ მოცემულ მრავალწევრს აქვს სამი ნამდვილი ფესვი. მათგან ერთი მოთავსებულია $(-\infty;-1)$ ინტერვალში, მეორე $(-1;\ 2,5)$ ინტერვალში, ხოლო მესამე

$(2,5;\ +\infty)$ ინტერვალში.

შევნიშნოთ, რომ ნიშანცვლათა რიცხვი არ შეიცვლება, თუ ნაშთს გავამრავლებთ რომელიმე დადებით რიცხვზე, სამაგიეროდ გამარტივდება ევკლიდეს ალგორითმის შედგენის პროცესი.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. იპოვეთ მრავალწევრთა ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი:
   1) $f(x)=-3ix^2+(1+i)x+2,\ g(x)=x^4+ix^3-2ix\in C[x]$;
   2) $f(x)=(2-i)x^2+1,\ g(x)=(1+i)x^2+ix+3i\in C[x]$;
   3) $f(x)=\overline{3}x^3+\overline{5}x^2-\overline{2},\ g(x)=\overline{2}x^3-\overline{6}x+\overline{3}\in Z_7[x]$;
   4) $f(x)=\overline{4}x^4+\overline{3}x^3+\overline{1}x+\overline{2},\ g(x)=\overline{3}x^4-\overline{3}x^3+\overline{4}x+\overline{1}\in Z_5[x]$;
2. შეასრულეთ $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე ნაშთიანი გაყოფა:
   1) $f(x)=2x^4-4x^3+4x^2-6,\ g(x)=x^2-3x-1\in R[x]$;
   2) $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6,\ g(x)=x^2-3x+1\in R[x]$;
   3) $f(x)=x^3-3x^2-x-1,\ g(x)=3x^2-2x-1\in R[x]$;
   4) $f(x)=(10+5i)x^4-(15+13i)x^2+(10+3i)x+(10-5i)$,
      $g(x)=(2+i)x^2-3x+i\in C[x]$;
   5) $f(x)=\overline{6}x^4+\overline{5}x^2-\overline{2},\ g(x)=\overline{1}x^3-\overline{2}x-\overline{1}\in Z_7[x]$;
   6) $f(x)=\overline{2}x^5-\overline{3}x^4+\overline{2}x^3-\overline{3}x+\overline{1},\ g(x)=\overline{2}x^2-\overline{3}x+\overline{1}\in Z_5[x]$.
3. იპოვეთ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი:
   1) $f(x)=\overline{1}x^3+\overline{4}x-\overline{3},\ g(x)=\overline{1}x^4+\overline{1}x^3-\overline{1}x^2+\overline{1}x-\overline{2}\in Z_5[x]$;
   2) $f(x)=\overline{3}x^2+\overline{1}x-\overline{2},\ g(x)=\overline{2}x^4-\overline{1}x^3-\overline{4}x^2+\overline{3}x-\overline{1}\in Z_7[x]$;
   3) $f(x)=\overline{1}x^4+\overline{1}x-\overline{4},\ g(x)=\overline{2}x^4+\overline{1}x^3-\overline{3}x^2-\overline{2}x-\overline{2}\in Z_{11}[x]$;
   4) $f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1,\ g(x)=x^3-2x^2+x-2\in R[x]$;

5) $f(x)=x^4+2x^3+2x^2+2x+2,\ g(x)=x^3+3x^2+2\in R[x]$;

6) $f(x)=x^5+(1-i)x^4+x^3-ix^2-1,$
$g(x)=x^4-ix^3-(1-i)x^2-x+1\in C[x]$;

7) $f(x)=x^3-3x+2,\ g(x)=x^3+x^2-5x+3;$

8) $f(x)=\overline{1}x^2+\overline{3}x+\overline{2},\quad g(x)=\overline{1}x^2+\overline{4}x+\overline{3}\in Z_5[x]$;

9) $f(x)=\overline{1}x^2+\overline{1},\ g(x)=\overline{1}x^2+\overline{1}x+\overline{1}\in Z_5[x]$;

10) $f(x)=\overline{1}x^2-\overline{2}x+\overline{2},\ g(x)=\overline{1}x^2-\overline{3}x+\overline{1}\in Z_5[x]$.

11) $f(x)=(x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2,\ g(x)=(x-1)^2(x-2)^5(x-3)^4$;

12) $f(x)=(x+1)^2(x-2)^3(x+3)(x-1),$
$g(x)=(x+1)(x-2)^2(x+3)^5,\ \varphi(x)=(x+1)^3(x-2)(x+3)^2$.

4. იპოვეთ b, c და $d-$ს ისეთი მნიშვნელობები, რომლის დროსაც $f(x)$ მრავალწევრი უნაშთოდ გაიყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე:
1) $f(x)=x^3+bx+c,\ g(x)=x^2+1$;
2) $f(x)=x^3+bx+c,\ g(x)=x^2+dx+1$;
3) $f(x)=x^4+bx+c,\ g(x)=x^2+dx+1$;
4) $f(x)=x^5+bx+c,\ g(x)=x^2+dx+1$.

5. ჰორნერის სქემის გამოყენებით შეასრულეთ $f(x)$ მრავალწევრისა $x-a$ ორწევრზე გაყოფა:
1) $f(x)=x^4-3x^3+x-1,\ a=2$;
2) $f(x)=9x^3+8x^2-10x-1,\ a=-3$;
3) $f(x)=4x^3+x^2,\ a=-1-i$;
4) $f(x)=\overline{3}x^3+\overline{6}x^2-\overline{2}\in Z_7[x],\ a=\overline{2}$;
5) $f(x)=\overline{7}x^4-\overline{9}x^3+\overline{8}x^2+\overline{10}x-\overline{6}\in Z_{11}[x],\ a=-\overline{3}$.

6. ჰორნერის სქემის გამოყენებით იპოვეთ $f(a)$:
1) $f(x)=x^5+3x^4+2x^3+8x+40,\ a=-3$;

2) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16,\ a=4$
3) $f(x)=3x^4-x+300i,\ a=-3+i$;
4) $f(x)=2x^3-9x^2+4x-5,\ a=5+i$;
5) $f(x)=\overline{2}x^3+\overline{1}x^2-\overline{3}x+\overline{2}\in Z_5[x];\ a=\overline{3}$;
6) $f(x)=\overline{3}x^5-\overline{2}x^3+\overline{1}x^2+\overline{4}x-\overline{3}\in Z_7[x];\ a=-\overline{2}$.

7. ჰორნერის სქემის გამოყენებით იპოვეთ $f(x)$ მრავალწევრის a ფესვის ჯერადობა:
1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8,\ a=2$;
2) $f(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16,\ a=-2$;
3) $f(x)=x^5-15x^4+76x^3-140x^2+75x-125,\ a=5$;
4) $f(x)=x^{10}-x^9-3x^8+4x^7+2x^6-6x^5+2x^4+4x^3-3x^2-x+1,\ a=\pm1$;
5) $f(x)=x^8-6x^7+13x^6-10x^5-9x^4+$
$+32x^3-37x^2+20x-4,\ a_1=1,\ a_2=2$;
6) $f(x)=\overline{1}x^5-\overline{2}x^3+\overline{1}x^2-\overline{2}\in Z_3[x],\ a=\overline{2}$;
7) $f(x)=\overline{1}x^7-\overline{3}x^6+\overline{1}x^5-\overline{1}x^3+\overline{4}x^2-\overline{4}x+\overline{2}\in Z_5(x),\ a_1=\overline{1}$;
8) $f(x)=x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x-2,\ a=-1$;
9) $f(x)=x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12,\ a=-1,\ a=3$.

8. იპოვეთ b და $c-$ს ისეთი მნიშვნელობები, რომლის დროსაც a ელემენტი მოცემული მრავალწევრის k ჯერადი ფესვი იქნება:
1) $f(x)=x^4+bx^3+cx+1,\ a=-1,\ k=2$;
2) $f(x)=x^5-x^4-4x^3+bx^2+cx+1,\ a=1,\ k=3$.

9. ჩამოთვლილი Q, R და C ველებიდან რომელ ველშია დაყვანადი მრავალწევრები?
1) $f_1(x)=x^2-10x+21$;
2) $f_2(x)=2x^2-3x-5$;

3) $f_3(x)=3x^2+x+3$;

4) $f_4(x)=x^2+2x-1$;

5) $f_5(x)=x^4-5x^2+6$;

6) $f_6(x)=x^3+8$;

7) $f_4(x)=x^3-1$.

10. ჰორნერის სქემის გამოყენებით იპოვეთ მოცემული მრავალწევრისა და მისი წარმოებულის მნიშვნელობა, როცა $x=a$:

1) $f(x)=4x^3-2x^2+5x-1,\ a=2$;

2) $f(x)=3x^4+8x^3-2x^2+6x-5,\ a=-3$;

3) $f(x)=x^4-3ix^3-4x^2+5ix-1,\ a=1+2i$;

4) $f(x)=x^4-3ix^3+(1-i)x^2+2x+(1+i),\ a=i$.

11. არის თუ არა a ელემენტი მოცემული მრავალწევრისა და მისი წარმოებულის ფესვი?

1) $f(x)=2x^4-2x^3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8},\ a=\frac{1}{2}$;

2) $f(x)=4x^3+2x^2+18ix-22\frac{1}{2}-13\frac{1}{2}i,\ a=-\frac{3}{2}i$;

3) $f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-2,\ a=1$;

4) $f(x)=x^3+ix^2+x+i,\ a=-i$.

12. იპოვეთ ასოითი კოეფიციენტების ისეთი მნიშვნელობები, რომლის დროსაც a იქნება მოცემული განტოლების ორჯერადი ფესვი:

1) $f(x)=x^5-bx^2-bx+1,\ a=-1$;

2) $f(x)=bx^4+cx^3+1,\ a=1$;

13. $\mathrm{C}[x]$ მრავალწევრთა რგოლში იპოვეთ უმცირესი ხარისხის ნორმირებული მრავალწევრი რომლის ფესვებია:

1) $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_{3,4}=2$;

2) $x_1=i,\ x_{2,3}=1-i$;

3) $x_{1,2}=i,\ x_{3,4}=-i$;

4) $x_{1,2}=1,\ x_{3,4,5}=\sqrt{2}$;

5) $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{3}{4},\ x_{3,4}=i$;

6) $x_1=2,\ x_{2,3}=1-i,\ x_{4,5}=1$.

14. ვიეტას ფორმულების გამოყენებით ააგეთ მრავალწევრი, რომლის ფესვებია:

1) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$;

2) $x_1=0,\ x_{2,3}=1,\ x_4=-1$;

3) $x_{1,2}=i,\ x_{3,4}=1+i$.

15. $\mathrm{R}[x]$ მრავალწევრთა რგოლში იპოვეთ უმცირესი ხარისხის ნორმირებული მრავალწევრი რომლის ფესვებია:

1) $x_1=2+i,\ x_{2,3}=1$;

2) $x_1=-3,\ x_{2,3}=1-i$;

3) $x_1=1-i,\ x_{2,3}=2+i$;

4) $x_1=-1-i,\ x_{2,3}=i,\ x_{4,5}=1-i$;

5) $x_{1,2,3}=2-3i$.

16. ამოხსენით მესამე ხარისხის განტოლებები:

1) $x^3+9x^2+18x+28=0$;

2) $4x^3-3x-1=0$;

3) $x^3-6x^2+57x-196=0$;

4) $3x^3-8x+8=0$;

5) $x^3-9x^2+21x-5=0$;

6) $x^3+12x+63=0$;

7) $x^3+3ix^2-(3+6i)x+(10-5i)=0$;

8) $x^3+9x-26=0$;

9) $x^3-3x+2=0$.

17. იპოვეთ შემდეგი მრავალწევრების შტურმის ფუნქციათა მიმდევრობები და დაადგინეთ ნამდვილ დადებით და უარყოფით ფესვთა რიცხვი

1) $f(x)=x^3+3x-1$;

2) $f(x)=x^4-2x^3+3x^2+2x+2$

3) $f(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$.

პასუხები

1.

1) $x^4+ix^3-3ix^2+(1-i)x+2,\quad -x^4-ix^3-3ix^2+(1+3i)x+2,$
$-3ix^6+(4+i)x^5+(1+i)x^4-(6-2i)x^3+(2-2i)x^2-4ix;$

2) $3x^2+ix+1+3i,\quad (1-2i)x^2-ix+1-3i,$
$(3+i)x^4+(1+2i)x^3+(4+7i)x^2+ix+3i;$

3) $\overline{5}x^3+\overline{5}x^2-\overline{6}x+\overline{1},\quad \overline{1}x^3+\overline{5}x^2+\overline{6}x-\overline{5},$
$\overline{6}x^6+\overline{3}x^5-\overline{4}x^4-\overline{4}x^3+\overline{1}x^2+\overline{5}x-\overline{6};$

4) $\overline{2}x^4+\overline{3},\quad \overline{1}x^4+\overline{1}x^3-\overline{3}x+\overline{1},$
$\overline{2}x^8+\overline{2}x^7-\overline{4}x^6+\overline{4}x^5+\overline{4}x^4+\overline{2}x^3+\overline{4}x^2+\overline{4}x+\overline{2}.$

2. 1) $f(x)=g(x)\cdot(2x^2+2x+12)+(38x+6)$;.

2) $f(x)=g(x)\cdot(2x^2+3x+11)+(25x-5)$;.

3) $f(x)=g(x)\cdot\left(x-\frac{7}{3}\right)+\left(-\frac{20}{3}x-\frac{16}{3}\right)$;

4) $f(x)=g(x)\cdot(5x^2+(6-3i)x+1-i)+((10-6i)x+9-6i)$.

5) $f(x)=g(x)\cdot\overline{6}x+(\overline{3}x^2-\overline{1}x-\overline{2})$;

6) $f(x)=g(x)\cdot(\overline{1}x^3+\overline{3}x+\overline{2})-\overline{1}$.

3. 1) $(f(x),g(x))=\overline{1}$,

2) $(f(x),g(x))=\overline{1},\quad [f(x),g(x)]=-\overline{1}x^6-\overline{1}x^5-\overline{3}x^4+\overline{1}x^2+\overline{2};$

3) $(f(x),g(x))=\overline{2}x^2+\overline{1}x+\overline{1},$
$[f(x),g(x)]=\overline{1}x^6-\overline{2}x^4+\overline{1}x^3+\overline{4}x^2-\overline{2}x+\overline{3}.$

4) $(f(x),g(x))=x^2+1,\quad [f(x),g(x)]=x^5-x^4-3x^2-x-2;$

5) $(f(x),g(x))=1,$
$[f(x),g(x)]=x^7+5x^6+8x^5+10x^4+12x^3+10x^2+4x+4;$

6) $(f(x),g(x))=x^3+(1-i)x^2-1,$
$[f(x),g(x)]=x^6-ix^5+ix^4-(1+i)x^3+ix^2-x+1.$

7) $(f(x),g(x))=(x-1)^2,\quad [f(x),g(x)]=x^4+3x^3-3x^2-7x+6;$

8) $(f(x),g(x))=\overline{1}x+\overline{1},\quad [f(x),g(x)]=\overline{1}x^3+\overline{1}x^2+\overline{1}x+\overline{1};$

9) $(f(x),g(x))=\overline{1}x+\overline{2},\quad [f(x),g(x)]=\overline{1}x^3+\overline{3}x^2+\overline{1}x+\overline{3};$

10) $(f(x),g(x))=\overline{1}x-\overline{4},\quad [f(x),g(x)]=\overline{1}x^3-\overline{1}x^2-\overline{3};$

11) $(f(x),g(x))=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^2,$
$[f(x),g(x)]=(x-1)^4(x-2)^5(x-3)^4.$

12) $(f(x),g(x),\varphi(x))=(x+1)(x-2)(x+3),$
$[f(x),g(x),\varphi(x)]=(x+1)^3(x-2)^3(x+3)^5(x-1).$

4. 1) $b=1,\ c=0$; 2) $c=d=0,\ b=1$;

3) $b=1,\ c=0,\ d=-1$, ან $b=-1,\ c=0,\ d=1$.

4) $b=-1,\ c=0,\ d=0$, ან $b=1,\ c=1,\ d=1$.

5. 1) $(x-2)\cdot(x^3-x^2-2x-3)-7$;

2) $(x+3)\cdot(9x^2-19x+47)-142$;

3) $(x+1+i)\cdot(4x^2-(3+4i)x-(1-7i))+8-6i$;

4) $(x-\overline{2})\cdot(\overline{3}x^2+\overline{5}x+\overline{3})+\overline{4}$; 5) $(x+\overline{3})\cdot(\overline{7}x^3+\overline{10}x^2+\overline{10}x)$.

6. 1) -38; 2) 136; 3) $87+11i$; 4) $-1+58i$; 5) $\overline{4}$; 6) $\overline{3}$.

7. 1) 3; 2) 4; 3) 3; 4) 4, 4; 5) 2, 2; 6) 3; 7) 2; 8) 1; 9) 3, 1.

8. 1) $b=c=1$; 2) $b=8,\ c=-5$.

9. 1) Q; 2) Q; 3) C; 4) R; 5) Q; 6) Q; 7) Q.

10. 1) 33, 45; 2) 86, -102; 3) $-12-2i,\ -16+8i$; 4) $-2+4i,\ \ 4+7i.$.

11. 1) არის; 2) არ არის; 3) არის; 4) არის.

12. 1) $b=-5$; 2) $b=3,\ c=-4$.

13. 1) $x^4-4x^3+3x^2+4x-4$; 2) $x^3+(-2+i)x^2+2x-2$; 3) x^4+2x^2+1;
4) $x^5-\left(2+3\sqrt{2}\right)x^4+\left(7+6\sqrt{2}\right)x^3-\left(12+5\sqrt{2}\right)x^2+\left(6+4\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{2}$;
5) $8x^4-(10+16i)x^3-(5-20i)x^2+(10-6i)x-3$;
6) $x^5+(-6+2i)x^4+(13-10i)x^3+(-12+18i)x^2+(4-14i)x+4i$.

14. 1) $x^3-6x^2+11x-6$; 2) $x^4-x^3-x^2+x$;
3) $3x^4-(6+12i)x^3-(15-18i)x^2+(18+6i)x-6i$;

15. 1) $x^4-6x^3+14x^2-14x+5$; 2) $x^5-x^4-4x^3+16x^2-20x+12$;
3) $x^6-10x^5+44x^4-108x^3+157x^2-130x+50$;
4) $x^{10}-2x^9+4x^8-4x^7+9x^6-10x^5+18x^4-8x^3+4x^2-8x+8$;
5) $x^6-12x^5+87x^4-376x^3+1129x^2-2028x+2197$.

16. 1) $x_1=-7,\ x_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}i$; 2) $x_1=4,\ x_2=3+4\sqrt{3}i\ \ x_3=1-4\sqrt{3}i$;
3) $x_1=2+i,\ x_{2,3}=-1-2i$; 4) $x_1=5,\ x_2=4-\sqrt{3}\ \ x_3=2+\sqrt{3}$;
5) $x_1=-3,\ x_{2,3}=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{5\sqrt{3}}{2}i$; 6) $x_1=2,\ x_{2,3}=1\pm2\sqrt{3}i$; 7) $x_1=-2,\ x_{2,3}=1$;
8) $x_1=-2,\ x_{2,3}=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$; 9) $x_1=1,\ x_{2,3}=-\dfrac{1}{2}$.

17. 1) $f(x)=x^3+3x-1$, $f_1(x)=f'(x)=x^2+1$, $f_2(x)=-2x+1$, $f_3(x)=-1$.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	ნიშანცვლათა რაოდენობა
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	2
0	$-$	$+$	$+$	$-$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	1

$f(x)=x^3+3x-1=0$ განტოლებას ექნება ერთი დადებითი ნამდვილი ფესვი.

2) $f(x)=x^4-2x^3+3x^2+2x+2$, $f_1(x)=f'(x)=2x^3-3x^2+3x+1$, $f_2(x)=-x^2-3x-3$, $f_3(x)=-6x-7$, $f_3(x)=1$.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	ნიშანცვლათა რაოდენობა
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	2
0	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2

$f(x)=x^4-2x^3+3x^2+2x+2=0$ განტოლებას არ ექნება არც უარყოფითი არც დადებითი ნამდვილი ფესვი.

3) $f(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$, $f_1(x)=f'(x)=5x^4+8x^3-15x^2+16x-7$,
$f_2(x)=66x^3-150x^2+172x+61$, $f_3(x)=-464x^2+1135x+723$,
$f_4(x)=-32599x-8486093$, $f_5(x)=-1$.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	ნიშანცვლათა რაოდენობა
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	4
0	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1

$f(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3=0$ განტოლებას ექნება ორი უარყოფითი და ერთი დადებითი ნამდვილი ფესვი.

§ 17. მრავალცვლადიან მრავალწევრთა რგოლი

1. ვთქვათ $\mathrm{K}=(K,+,-,\cdot,1)$ არის $\mathrm{L}=(L,+,-,\cdot,1)$ კომუტაციური რგოლის ქვერგოლი და $x_1,x_2,...,x_n\in L$.

L რგოლის ისეთ მინიმალურ ქვერგოლს, რომელიც შეიცავს K რგოლსა და $x_1,x_2,\dots,x_n$ ელემენტებს K რგოლითა და $x_1,x_2,...,x_n$ ელემენტებით წარმოქმნილი რგოლი ეწოდება და $\mathrm{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ცხადია, $\mathrm{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ არის L რგოლის ყველა იმ ქვერგოლების თანაკვეთა, რომლებიც K რგოლსა და $x_1,x_2,...,x_n$ ელემენტებს შეიცავენ.

ახლა დავუშვათ, რომ N ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, $n\in N$ $(n\geq 2)$, $k=2,3,...,n$ და

$$N^n=\{(i_1,i_2,...,i_n)\mid i_1,i_2,...,i_n\in N\},$$

$$\mathrm{K}[x_1][x_2]...[x_{k-1}][x_k]=(\mathrm{K}[x_1][x_2]...[x_{k-1}])[x_k].$$

2. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) $\mathrm{K}[x_1][x_2]...[x_{n-1}][x_n]=\mathrm{K}[x_1,x_2,...,x_n]$;

2) $\mathrm{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოიდგინება $\sum\limits_{(i_1,i_2,...,i_n)\in M} a_{i_1i_2...i_n}\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$ სახით, სადაც M არის N^n სიმრავლის რომელიღაც ქვესიმრავლე, ხოლო $a_{i_1i_2...i_n}$ $((i_1,i_2,...,i_n)\in M)$ არიან K სიმრავლის რომელიღაც ელემენტები.

$x_1,x_2,...,x_n$ ელემენტებს აღებულს L რგოლიდან K რგოლზე ალგებრულად დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ

$$\sum_{(i_1,i_2,...,i_n)\in M} a_{i_1i_2...i_n}\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}=0$$

ტოლობა სრულდება მხოლოდ, მაშინ როცა $a_{i_1i_2...i_n}=0$ ყოველი $(i_1,i_2,...,i_n)$ ელემენტისათვის აღებული M სიმრავლიდან.

შევნიშნოთ, რომ როცა $n=1$, მაშინ x_1 ელემენტის K რგოლზე ალგებრულად დამოუკიდებლობის ცნება ემთხვევა მის K რგოლზე ტრანსცედენტულობის ცნებას.

$\mathrm{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლს ეწოდება K რგოლის $n-$ჯერადი ტრანსცედენტული გაფართოება, თუ ყოველი $s\in\{1,2,...,n\}$ რიცხვისათვის $\mathrm{K}[x_1,x_2,\dots,x_s]$ რგოლი წარმოადგენს $\mathrm{K}[x_1,x_2,\dots,x_{s-1}]$ რგოლის მარტივ ტრანსცედენტულ გაფართოებას x_s ელემენტის საშუალებით.

3. $\mathrm{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლს, რომელიც წარმოადგენს არანულოვანი კომუტაციური K რგოლის $n-$ჯერად ტრანსცენდენტულ გაფართოებას, K რგოლზე $x_1,x_2,...,x_n$ ცვლადების მრავალწევრთა რგოლი ეწოდება.

მეორე პუნქტის თანახმად $\mathrm{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოიდგინება

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{(i_1,i_2,...,i_n)\in M} a_{i_1i_2...i_n}\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$$

სახით. მათ მრავალწევრები ეწოდება K რგოლზე $x_1,x_2,...,x_n$ ცვლადების მიმართ, ხოლო $a_{i_1i_2...i_n}$ $((i_1,i_2,...,i_n)\in M)$ ელემენტებს $f(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები, $a_{i_1i_2...i_n}\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$ ელემენტებს $((i_1,i_2,...,i_n)\in M)$ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრის ერთწევრები და $i_1+i_2+\dots+i_n$ რიცხვებს კი ერთწევრების ხარისხები ეწოდებათ.

ორ $a\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$ და $b\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{k_n}$ ერთწევრს მსგავსი ეწოდება, თუ $i_p=k_p$ ყოველი $p=1,2,...,n$. მსგავსი ერთწევრები ტოლია თუ მათი კოეფიციენტები ტოლია.

ორი მრავალცვლადიანი $f(x_1,x_2,...,x_n)$ და $g(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრი ტოლია, თუ $f(x_1,x_2,...,x_n)-$ისა და $g(x_1,x_2,...,x_n)$

მრავალწევრების ჩანაწერებში მონაწილე ერთწევრთა სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია.

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრს, რომლის ერთწევრების ხარისხები ერთმანეთის ტოლია, ერთგვაროვანი მრავალწევრი ეწოდება, ხოლო ერთგვაროვან მრავალწევრს წრფივი ეწოდება, თუ მისი ხარისხი ერთის ტოლია.

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრის არანულოვანი ერთწევრების ხარისხებს შორის უდიდესს $f(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრის ხარისხი ეწოდება და $\deg f$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

საზოგადოდ, ნულოვანი მრავალწევრის (ე.ი. ისეთი მრავალწევრის, რომლის ყოველი კოეფიციენტი ნულის ტოლია) ხარისხი არ განისაზღვრება.

მოცემული ერთწევრების ჯამი და ნამრავლი ასე განისაზღვრება: $a\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}+b\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{k_n}=(a+b)\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$.

თუ $a\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$ და $b\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{k_n}$ მსგავსი ერთწევრებია, მაშინ

$$\left(a\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}\right)\cdot\left(b\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{k_n}\right)=(ab)\cdot x_1^{i_1+k_1}\cdot x_2^{i_2+k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n+k_n}.$$

ორი მრავალცვლადიანი $f(x_1,x_2,...,x_n)$ და $g(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრები რომ შევკრიბოთ, ამისათვის საჭიროა, ავიღოთ მათი ალგებრული ჯამი და მსგავსი ერთწევრები შევკრიბოთ.

ორი მრავალცვლადიანი $f(x_1,x_2,...,x_n)$ და $g(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრები რომ გადავამრავლოთ, ამისათვის საჭიროა, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრის ყოველი ერთწევრი გავამრავლოთ $g(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრის თითოეულ ერთწევრზე და მიღებულ ალგებრულ ჯამში მსგავსი ერთწევრები შევკრიბოთ.

4. ვთქვათ, f და g არანულოვანი მრავალწევრებია მრავალწევრთა $\mathrm{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლიდან. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) თუ $f+g\neq 0$, მაშინ $\deg(f+g)\le\max\{\deg f,\ \deg g\}$;

2) თუ $f\cdot g\neq 0$, მაშინ $\deg(f\cdot g)\le\deg f+\deg g$;

3) თუ K მთელობის არეა, მაშინ $\deg(f\cdot g)=\deg f+\deg g$.

5. ვთქვათ, $i=(i_1,i_2,...,i_n), k=(k_1,k_2,...,k_n)\in N^n$. N^n სიმრავლეში განვმარტოთ ბინარული „<“ მიმართება შემდეგნაირად: კერძოდ ვიგულისხმოთ, რომ $i<k$, თუ $k_1-i_1,k_2-i_2,...,k_n-i_n$ რიცხვებიდან პირველი ნულისაგან განსხვავებული რიცხვი დადებითია.

ნებისმიერი $i,k\in N^n$ ელემენტებისათვის შემდეგი სამი $i<k$, $i=k$, $k<i$ პირობიდან ყოველთვის სრულდება მხოლოდ ერთი, ე.ი. ბინარული „<" მიმართება არის მკაცრი დალაგების მიმართება N^n სიმრავლეში.

6. ახლა, ვთქვათ, f არანულოვანი მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathrm{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლიდან და Q_f არის f მრავალწევრის ყველა ერთწევრთა სიმრავლე და

$$a_{i_1i_2\dots i_n}\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n},\ a_{k_1k_2\dots k_n}\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{k_n}\in S_f.$$

S_f სიმრავლეზე განვმარტოთ ბინარული „<“ მიმართება შემდეგნაირად: $a_{i_1i_2\dots i_n}\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}<a_{k_1k_2\dots k_n}\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{k_n}$ მხოლოდ მაშინ, როცა $(i_1,i_2,...,i_n)<(k_1,k_2,...,k_n)$ $(i<k)$. რადგან ბინარული „<“ მიმართება არის მკაცრი დალაგების მიმართება N^n სიმრავლეში, ამიტომ ბინარული „<“ მიმართება იქნება მკაცრი დალაგების მიმართება Q_f სიმრავლეში. Q_f სიმრავლის ასეთ დალაგებას f მრავალწევრის წევრთა ლექსიკოგრაფიული დალაგება ეწოდება.

მრავალწევრის წევრთა ლექსიკოგრაფიული დალაგების დროს Q_f სიმრავლეში ყოველთვის იარსებებს უდიდესი ელემენტი, რომელსაც f მრავალწევრის უმაღლესი წევრი ეწოდება.

ვთქვათ, S_n არის $X=\{1,2,...,n\}$ სიმრავლის ყველა ჩასმათა

სიმრავლე, τ ჩასმა S_n სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტია, ხოლო f მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathbf{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლიდან.

7. f მრავალწევრს მრავალწევრთა $\mathbf{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლიდან სიმეტრიული მრავალწევრი ეწოდება, თუ ყოველი $\tau \in S_n$ ჩასმისათვის სრულდება პირობა $f(x_1,x_2,...,x_n)=f\left(x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},...,x_{\tau(n)}\right)$.

მრავალწევრებს, რომელებიც წარმოიდგინებიან

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\\
&\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sigma_n = (-1)^n x_1x_2\cdots x_n
\end{aligned}$$

სახით, $x_1,x_2,...,x_n$ ცვლადების ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრები ეწოდება.

$\mathbf{K}(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $\mathbf{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლის ყველა იმ ქვერგოლთა თანაკვეთა, რომლებიც $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ მრავალწევრებს შეიცავენ. ასევე, $\mathbf{SK}[x_1,x_2,...,x_n]$ აღვნიშნოთ $\mathbf{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლის ყველა სიმეტრიულ მრავალწევრთა სიმრავლე. რადგან სიმეტრიულ მრავალწევრთა ჯამი და ნამრავლი კვლავ სიმეტრიული მრავალწევრებია, ამიტომ $\mathbf{SK}[x_1,x_2,...,x_n]$ იქნება $\mathbf{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლის ქვერგოლი. ამასთან, აგრეთვე, სამართლიანი იქნება შემდეგი ჩართვა $\mathbf{K}(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\subseteq\mathbf{SK}[x_1,x_2,...,x_n]$.

8. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) თუ $f\in\mathbf{SK}[x_1,x_2,...,x_n]$ და $a\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{k_n}$ არის f მრავალწევრის უმაღლესი წევრი, მაშინ $k_1\ge k_2\ge...\ge k_n$;

2) თუ $a\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{k_n}$ არის $\mathbf{SK}[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლიდან აღებული არანულოვანი f მრავალწევრის უმაღლესი წევრი, მაშინ f და $a\cdot\sigma_1^{k_1-k_2}\cdot\sigma_2^{k_2-k_3}\cdot\cdots\cdot\sigma_n^{k_n}$ მრავალწევრების უმაღლესი წევრები ერთმანეთის ტოლია;

3) $\mathbf{K}(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=\mathbf{SK}[x_1,x_2,...,x_n]$

9. კვადრატული მატრიცაა შედგენილი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა კოეფიციენტებით

$$R(f,g)=\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \ldots 0\\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 \ldots 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & \cdots\ a_{n-1} & a_n\\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & 0 \ldots 0\\
0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & 0 \ldots 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & b_0 & b_1 & \cdots\ b_{m-1} & b_m
\end{pmatrix},$$

სადაც f მრავალწევრის კოეფიციენტები მეორდება $m-$ჯერ, ხოლო g მრავალწევრისა კი $n-$ჯერ. $R(f,g)$ მატრიცის დეტერმინანტს $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების რეზულტანტი ეწოდება და $R(f,g)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებია კოეფიციენტებით $\mathbf{F}$ ველიდან. მაშინ $R(f,g)=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები იყოფიან დადებითი ხარისხის რომელიმე მრავალწევრზე, ან $a_0=b_0=0$.

მაგალითი 1, ვთქვათ, $f(x)=x^2-1$ და $g(x)=x^3-1$. გამოვთვალოთ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების $R(f,g)$ რეზულტანტი. გვექნება:

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1\\
1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & -1\\
0 & -1 & 1 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1
\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}
-1 & 1 & 0\\
0 & -1 & 1\\
1 & 0 & -1
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
-1 & 1\\
1 & -1
\end{vmatrix}=1-1=0$$

მივიღეთ, რომ მოცემული მრავალწევრები იყოფიან დადებითი ხარისხის მრავალწევრზე (კერძოდ $x-1-$ზე).

მაგალითი 2, ვთქვათ, $f(x)=x-2$ და $g(x)=x^3-1$. გამოვთვალოთ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების $R(f,g)$ რეზულტანტი. გვექნება:

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&-2\\1&0&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&-2\\0&2&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\\2&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\4&-1\end{vmatrix}=$$
$$=-1+8=7\neq 0.$$

მივიღეთ, რომ მოცემული მრავალწევრები არ იყოფიან რომელიმე დადებითი ხარისხის მრავალწევრზე (ე.ი. მათ საერთო ფესვი არ გააჩნია).

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ შემდეგი მრავალწევრების ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი:
   1) $f(x_1,x_2)=-2x_1^3+4x_1x_2-6x_2^2$, $g(x_1,x_2)=2x_1^3-8x_1x_3+2x_2^2$;
   2) $f(x_1,x_2)=\sqrt{2}x_1-2x_1x_2+\sqrt{3}x_2$, $g(x_1,x_2)=\sqrt{3}x_1-\sqrt{2}x_2$;
2. იპოვეთ 1) $f+g+h$ და 2) $(f-g)-h$, თუ
   $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1x_2^2x_3-7x_1x_2+8x_2^3$, $g(x_1,x_2,x_3)=8x_1x_2-10x_1-12x_1x_2^2x_3$,
   $h(x_1,x_2,x_3)=2x_2^3+9x_1x_2^2x_3-x_1x_2$.
3. ლექსიკოგრაფიულად დაალაგეთ შემდეგი მრავალწევრის წევრები:
   1) $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}x_2x_3^2-\frac{13}{4}x_1x_2x_3+x_2x_3+2x_1^2x_2+3x_1x_2$;
   2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sqrt{2}x_1x_2x_4-3x_2x_3x_4+4\sqrt{3}x_1x_3x_4-5\sqrt{2}x_2^2x_4-x_2^2x_3$;
   3) $f(x_1,x_2)=(5+i)x_2^3+3ix_1x_2^2+(4+2i)x_1^2x_2-8x_1^2x_2^2-ix_1x_2+x_1^2$.
4. მრავალწევრთა გადამრავლების გარეშე იპოვეთ მათი ნამრავლების უმაღლესი წევრები და ხარისხები:
   1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2x_2x_3-3x_1^3x_2^2x_3+4x_1^3x_2^2$,
   $g(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}x_2x_3^2-4x_1x_2^2$;

   2) $f(x_1,x_2)=7x_1x_2-8x_1^2+4x_2^2$,
   $g(x_1,x_2)=-3x_1^2x_2^2+x_1^2x_2^3$, $h(x_1,x_2)=3x_1-2x_2$;
   3) $f(x_1,x_2)=2ix_1^4-3x_1x_2^5-3ix_1^5x_2$,
   $g(x_1,x_2)=(4-i)x_2^6-(5-i)x_1x_2$;
   4) $f(x_1,x_2,x_3)=-3x_1^2x_2x_3^3+(2+i)x_1^2x_2^2x_3$,
   $g(x_1,x_2,x_3)=-3x_1^3x_2^3-x_1^4x_2x_3+ix_2x_3$.
5. წარმოადგინეთ ერთგვაროვან მრავალწევრთა ჯამის სახით შემდეგი მრავალწევრები:
   1) $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^3-2x_1^2x_3+x_2x_3-5x_1x_2x_3+4x_1-2x_1^2-6$;
   2) $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1^3x_2+x_1^2x_2-5x_1x_2^2+x_2^2-x_1x_2-3x_1^2x_2^2+2$;
   3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_1^2-x_2^2-3x_1x_2x_3+x_1+x_2-x_1x_2+7$.
6. x_1,x_2,x_3 ცვლადების სიმეტრიული მრავალწევრები წარმოადგინეთ, როგორც მრავალწევრები $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ ცვლადების მიმართ:
   1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_3^2-2x_2^2x_3^2$;
   2) $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;
   3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;
   4) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;
   5) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4+x_2^4+x_3^4-x_1^2x_2^2-x_1^2x_3^2-x_2^2x_3^2$;
   6) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$.
7. დავუშვათ, რომ $s_k=x^k+y^k$. დაამტკიცეთ, რომ $s_k=\sigma_1s_{k-1}-\sigma_2s_{k-2}$, სადაც $s_1=\sigma_1$, $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$ და $k=3,4,\dots$. აჩვენეთ, რომ
   1) $s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$;
   2) $s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2$;
   3) $s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$;
   4) $s_6=\sigma_1^6-4\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3$;
   5) $s_7=\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1\sigma_2^3$;

6) $s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$.

8. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x^6 + y^3 = 65; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8. \end{cases}$

9. ამოხსენით ირაციონალური განტოლებები:

1) $x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9$;

2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{35}{12}$.

10. ნამდვილ რიცხვთა **R** ველში, ამოხსენით განტოლებათა სისტემები x უცნობის გამორიცხვის გზით:

1) $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16 = 0, \\ 2x^2 - xy - x + y^2 - y - 4 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 5y^3 + 2 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 7 = 0. \end{cases}$

11. კომპლექსურ რიცხვთა **C** ველში, ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ჯერ y უცნობის შემდეგ კი x უცნობის გამორიცხვის გზით

1) $\begin{cases} y^2 + (x-4)y + x^2 - 2x + 3 = 0, \\ y^3 - 5y^2 + (x+7)y + x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0. \end{cases}$

პასუხები

1. 1) $f + g = 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2^2$;

$f - g = -4x_1^3 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2^2$,

$f \cdot g = -4x_1^6 + 8x_1^4x_2 + 16x_1^4x_3 - 16x_1^3x_2^2 - 32x_1^2x_2x_3 + 8x_1x_2^3 + 48x_1x_2^2x_3 - 12x_2^4$.

2) $f + g = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x_1 - 2x_1x_2 + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x_2$,
$f - g = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)x_1 - 2x_1x_2 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)x_2$,
$f \cdot g = \sqrt{6}x_1^2 + x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_1^2x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_2^2 - \sqrt{6}x_2^2$.

2. 1) $f + g + h = -10x_1 + 10x_2^3$;

2) $(f - g) - h = 6x_1x_2^2x_3 - 14x_1x_2 + 10x_1 + 6x_2^3$.

3. 1) $2x_1^2x_2 - \dfrac{13}{4}x_1x_2x_3 + 3x_1x_2 + \dfrac{1}{2}x_2x_3^2 + x_2x_3$;

2) $\sqrt{2}x_1x_2x_4 + 4\sqrt{3}x_1x_3x_4 - x_2^2x_3 - 5\sqrt{2}x_2^2x_4 - 3x_2x_3x_4$;

3) $-8x_1^2x_2^2 + (4+2i)x_1^2x_2 + x_1^2 + 3ix_1x_2^2 - ix_1x_2 + (5+i)x_2^3$.

4. 1) $12x_1^4x_2^4x_3$, 9;

2) $-24x_1^5x_2^3$, 9;

3) $(-2-i)x_1^6x_2^3x_3^2$, 12;

4) $(-3+15i)x_1^6x_2^2$, 12.

5. 1) $\left(4x_1^3 - 2x_1^2x_3 - 5x_1x_2x_3\right) + \left(x_2x_3 - 2x_1^2\right) + 4x_1 - 6$;

2) $\left(-3x_1^2x_2^2 - x_1^3x_2\right) + \left(x_1^2x_2 - 5x_1x_2^2\right) + \left(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2\right) + 2$;

3) $\left(x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2x_3\right) + \left(x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2\right) + \left(x_1 + x_2\right) + 7$.

6. 1) $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2 + 3\sigma_3$;

2) $2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3$;

3) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 2\sigma_2$;

4) $-4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2$;

5) $\sigma_1^4 - \sigma_1^2\sigma_2 + 6\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2$;

6) $\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$..

7. 1) $x = 2,\ y = 0$, ან $x = 0,\ y = -2$;

2) $x = 2,\ y = 1$, ან $x = -2,\ y = 1$, ან $x = 1,\ y = 4$, ან $x = -1,\ y = 4$;

3) $x = 8,\ y = 1$, ან $x = 1,\ y = 8$.

8. 1) $x=4,$ ან $x=1$.

მითითება:

$$\left(y=\sqrt{17-x^2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=9,\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=17.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=7,\\ xy=16.\end{cases}\vee\begin{cases}x+y=5,\\ xy=4.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4,\\ y=1.\end{cases}\vee\begin{cases}x=1,\\ y=4.\end{cases}$$

2) $x=\frac{3}{5},$ ან $x=\frac{4}{5}$ ან $x=\frac{-5-\sqrt{73}}{14}$.

9. 1) $x=-1,\ y=1,$ ან $x=1,\ y=-1,$ ან $x=2,\ y=2;$

2) $x=\sqrt{3},\ y=1,$ ან $x=-\sqrt{3},\ y=1.$.

10. 1) $x=0,\ y=3,$ ან $x=0,\ y=1,$ ან $x=-1,\ y=2,$ ან $x=-1,\ y=3;$
ან $x=2,\ y=1+\sqrt{2}i,$ ან $x=2,\ y=1-\sqrt{2}i.$

§ 18. ნახევარჯგუფები

ბინარული ალგებრული ოპერაციები და მათი თვისებები

1 ვთქვათ, S არაცარიელი სიმრავლეა. $S\times S$ სიმრავლის ნებისმიერ f ასახვას S სიმრავლეში ბინარული ალგებრული ოპერაცია ეწოდება S სიმრავლეზე.

შევნიშნოთ, რომ თუ $|S|=n$, მაშინ ბინარული ალგებრულ ოპერაციათა რაოდენობა S სიმრავლეზე ტოლი იქნება n^{n^2}. კერძოდ, თუ $n=2,3$, მაშინ 2 და 3-ელემენტიან სიმრავლეებზე ბინარული ალგებრულ ოპერაციათა რაოდენობა შესაბამისად 16 და 19683 ტოლი იქნება.

ვთქვათ, $a,b,c\in S$ და $f((a,b))=c$, მაშინ ეს პირობა შემდგომში სიმბოლურად ასე ჩაიწერება $afb=c$. ასევე ხშირად f სიმბოლოს ნაცვლად გამოვიყენებთ $(*)$, $(+)$, $(\cdot)$ სიმბოლოებსაც.

რადგან ალგებრა შეისწავლის სიმრავლეებზე განმარტებული ალგებრული ოპერაციის თვისებებს, და იმის გამო, რომ მათი რაოდენობა საკმაოდ დიდია, ამიტომ მათი თვისებების შესწავლა ზოგადად ძალიან რთულ ამოცანას წარმოადგენს. ცხადია, მათი რაოდენობა საკმაოდ შემცირდება, თუ S სიმრავლეზე განმარტებულ ოპერაციების მიმართ მოთხოვნილი იქნება, რომ ისინი წინასწარ აკმაყოფილებდნენ სხვადასხვა თვისებას. განვიხილოთ ზოგიერთი ასეთი თვისებათაგანი.

2 იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაცია კომუტაციურია, თუ ნებისმიერი $a,b\in S$ ელემენტებისათვის სრულდება $a*b=b*a$ პირობა.

3 იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია, თუ ნებისმიერი $a,b,c\in S$ ელემენტებისათვის სრულდება $(a*b)*c=a*(b*c)$ პირობა.

4 იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს მარჯვენა ნეიტრალური e' ელემენტი, თუ ნებისმიერი $a\in S$ ელემენტისათვის სრულდება $a*e'=a$ პირობა.

იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს მარცხენა ნეიტრალური e'' ელემენტი, თუ ნებისმიერი $a\in S$ ელემენტებისათვის სრულდება $e''*a=a$ პირობა.

იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ნეიტრალური e ელემენტი, თუ ნებისმიერი $a\in S$ ელემენტებისათვის სრულდება $e*a=a*e=a$ პირობა.

შევნიშნოთ, რომ თუ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ ერთდროულად არსებობენ როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა ნეიტრალური ელემენტები, მაშინ ეს ელემენტები ერთმანეთის ტოლი იქნებიან, ე.ი. იარსებებს ერთადერთი ნეიტრალური ელემენტი.

5 იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს მარჯვენა ნულოვანი $0'$ ელემენტი, თუ ნებისმიერი $a\in S$ ელემენტებისათვის სრულდება $a*0'=0'$ პირობა.

იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს მარცხენა ნულოვანი $0''$ ელემენტი, თუ ნებისმიერი $a\in S$ ელემენტებისათვის სრულდება $0''*a=0''$ პირობა.

იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული

ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ნულოვანი e ელემენტი, თუ ნებისმიერი $a \in S$ ელემენტებისათვის სრულდება $0 * a = a * 0 = 0$ პირობა.

შევნიშნოთ, რომ თუ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ ერთდროულად არსებობენ როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა ნულოვანი ელემენტები, მაშინ ეს ელემენტები ერთმანეთის ტოლი იქნებიან, ე.ი. იარსებებს ერთადერთი ნულოვანი ელემენტი.

6 ახლა, ვთქვათ, e არის S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური ელემენტი.

იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს a ელემენტის მარჯვენა სიმეტრიული b' ელემენტი, თუ $a * b' = e$.

იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს a ელემენტის მარცხენა სიმეტრიული b'' ელემენტი, თუ $b'' * a = e$.

იტყვიან, რომ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს a ელემენტის სიმეტრიული a' ელემენტი, თუ $a' * a = a * a' = e$.

შევნიშნოთ, რომ თუ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია და ერთდროულად არსებობენ a ელემენტის როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა სიმეტრიული ელემენტები, მაშინ ეს ელემენტები ერთმანეთის ტოლი იქნებიან, ე.ი. იარსებებს ერთადერთი სიმეტრიული ელემენტი.

7 $\mathbf{S} = (S, *)$ ალგებრას, სადაც $(*)$ ბინარული ალგებრული ასოციაციური ოპერაციაა, ნახევარჯგუფი ეწოდება.

თუ $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფში $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ნეიტრალური ელემენტი, მაშინ $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფს მონოიდი ეწოდება.

თუ $a * b = b * a$ ნებისმიერი $a, b \in S$ ელემენტისათვის. მაშინ $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფს კომუტაციური ნახევარჯგუფი ეწოდება.

თუ $(*)$ ოპერაცია აღნიშნულია $(+)$ სიმბოლოთი, მაშინ მას S სიმრავლეზე შეკრების ოპერაცია ეწოდება. S სიმრავლის ნეიტრალურ e ელემენტს და a ელემენტის სიმეტრიულ a' ელემენტს შეკრების ოპერაციის მიმართ (თუ ისინი არსებობენ), შესაბამისად ნულოვან და მოპირდაპირე ელემენტებს უწოდებენ და 0 და $-a$ სიმბოლოებით აღნიშნავენ.

თუ $(*)$ ოპერაცია აღნიშნულია $(\cdot)$ სიმბოლოთი, მაშინ მას S სიმრავლეზე გამრავლების ოპერაცია ეწოდება. S სიმრავლის ნეიტრალურ e ელემენტს და a ელემენტის სიმეტრიულ a' ელემენტს გამრავლების ოპერაციის მიმართ (თუ ისინი არსებობენ), შესაბამისად, ერთეულოვან და შებრუნებულ ელემენტებს უწოდებენ და 1 და a^{-1} სიმბოლოებით აღნიშნავენ.

ცხადია, რომ არაა სავალდებულო ყოველ ნახევარჯგუფს გააჩნდეს ერთეულოვანი ან ნულოვანი ელემენტი. მაგრამ არსებობს მეთოდი ერთეულის (ნულის) არმქონე ნახევარჯგუფის ისეთი გაფრთოებისა, რომ მიღებულ ნახევარჯგუფს გააჩნდეს ერთეულოვანი (ნულოვანი) ელემენტი.

8 ვთქვათ, $a \in S$. თუ $a \cdot a = a$, მაშინ $a-$ს იდემპოტენტური ელემენტი ეწოდება. თუ $a \cdot b \cdot a = a$, რომელიღაც $b \in S$ ელემენტისათვის, მაშინ მას რეგულარული ელემენტი ეწოდება. თუ $a \cdot b \cdot a = a$ და $b \cdot a \cdot b = b$, მაშინ a და b ელემენტებს რეგულარულად შეუღლებული ან კიდევ ინვერსული ელემენტები ეწოდება.

ცხადია, ყოველი იდემპოტენტური ელემენტი იმავე დროს რეგულარული ელემენტიცაა.

9 ნახევარჯგუფს, რომლის ყოველი ელემენტი იდემპოტენტურია, კონა ან კიდევ იდემპოტენტურ ელემენტთა ნახევარჯგუფი ეწოდება.

10 კომუტაციურ იდემპოტენტურ ელემენტთა ნახევარჯგუფს ნახევარმესერი ეწოდება.

11 ვთქვათ, D არის არაცარიელი X სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, რომ

$$\bigcup_{Z\in D'} Z = \breve{D}' \in D\,,$$

D სიმრავლის ნებისმიერი არაცარიელი D' ქვესიმრავლისათვის. ასეთ შემთხვევაში D სიმრავლე არის ნახევარმესერი თეორიულ სიმრავლური გაერთიანების ოპერაციის მიმართ, რადგანაც $Z{\cup}Z{=}Z$ და $Y{\cup}Z{=}Z{\cup}Y$ ყოველი $Y,Z\in D$ ელემენტისათვის. მას გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერი ეწოდება.

12 ნახევარჯგუფს, რომლის ყოველი ელემენტი რეგულარულია, რეგულარული ნახევარჯგუფი ეწოდება.

13 რეგულარულ ნახევარჯგუფს, რომლის ყოველ ელემენტს გააჩნია მხოლოდ ერთი რეგულარულად შეუღლებული ელემენტი, ინვერსული ნახევარჯგუფი ეწოდება.

14 იტყვიან, რომ $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფია შეკვეცადობის პირობით, თუ $a*x=b*x$ და $y*a=y*b$ ტოლობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $a=b$ ტოლობა.

ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფები და წარმომქმნელი სისტემები

1. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფია და $\varnothing\neq S'\subseteq S$. S' სიმრავლეს $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფზე $(*)$ ოპერაციის მიმართ ეწოდება ჩაკეტილი, თუ ყოველი $a',b'\in S'$ ელემენტებისათვის სრულდება $a'*b'\in S'$ პირობა.

2. ვთქვათ $\varnothing\neq S'\subseteq S$. თუ S' სიმრავლე არის $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფზე ჩაკეტილი სიმრავლე, მაშინ $\mathbf{S}'=(S',*)$ ნახევარჯგუფს $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფის ცნება რეფლექსური და ტრანზიტული ცნებაა.

იმის დასამტკიცებლად, რომ $\mathbf{S}'$ არის $\mathbf{S}-$ის ქვენახევარჯგუფი, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ S' სიმრავლე $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფზე $(*)$ ოპერაციის მიმართ ჩაკეტილია, რადგანაც S' სიმრავლეზე განსაზღვრული ოპერაციის ასოციაციურობა უშუალოდ გამომდინარეობს $S-$ზე განსაზღვრული ოპერაციის ასოციაციურობიდან.

3. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფია, ხოლო $\mathbf{S}_i=(S_i,*)$ $(i\in I)$ არის $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფთა რომელიღაც სისტემა. თუ $S'=\bigcap_{i\in I} S_i$ და $S'\neq\varnothing$, მაშინ $\mathbf{S}'=(S',*)$ ნახევარჯგუფი იქნება $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფი.

4. ვთქვათ, $\varnothing{\neq}M{\subseteq}S$: $\mathbf{S}_i{=}(S_i,*)$ $(i{\in}I)$ აღნიშნული არიან $\mathbf{S}{=}(S,*)$ ნახევარჯგუფის ყველა ის ქვენახევარჯგუფები, რომელთათვისაც $M\subseteq S_i$ და $\bigcap_{i\in I} S_i = S'\neq\varnothing$. ასეთ შემთხვევაში $M\subseteq S'$ და $\mathbf{S}'=(S',*)$ იქნება $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფი. S' სიმრავლეს M სიმრავლით წარმოქმნილს უწოდებენ და $\langle M\rangle = S'$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. თუ $\langle M\rangle = S$ ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ M არის $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის წარმომქმნელთა სისტემა.

თუ $\langle M\rangle = S$ და M სიმრავლის არცერთი საკუთარი ქვესიმრავლე არ წარმოქმნის S სიმრავლეს, მაშინ M სიმრავლეს $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სისტემა ეწოდება.

ცხადია, რომ $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის წარმომქმნელთა სისტემები

ცალსახად არ განისაზღვრებიან.

თუ M სიმრავლე $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფის წარმომქმნელთა რაღაც სისტემაა, მაშინ ყოველი $a\in S$ ელემენტისათვის M სიმრავლეში არსებობს სასრული რაოდენობის $m_1,m_2,...,m_n$ ელემენტთა ისეთი სისტემა, რომ $a=m_1\cdot m_2\cdots m_n$.

ნახევარჯგუფთა ჰომომორფიზმი და იზომორფიზმი

1. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,*)$ და $\mathbf{S}_1=(S_1,\cdot)$ მოცემული ნახევარჯგუფებია. თუ h არის S სიმრავლის S_1 სიმრავლეში ისეთი ასახვა, რომ

$$h(a*b)=h(a)\cdot h(b)$$

ყოველი $a,b\in S$ ელემენტებისათვის, მაშინ h ასახვას $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის $\mathbf{S}_1$ ნახევარჯგუფში ჰომომორფული ასახვა ეწოდება.

თუ h ასახვა ინექციაა S სიმრავლისა S_1 სიმრავლეში, მაშინ h ჰომომორფიზმს $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფის $\mathbf{S}_1=(S_1,\cdot)$ ნახევარჯგუფში მონომორფიზმი ეწოდება.

თუ h ასახვა სურექციაა S სიმრავლისა S_1 სიმრავლეში, მაშინ h ჰომომორფიზმს $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფის $\mathbf{S}_1=(S_1,\cdot)$ ნახევარჯგუფში ეპიმორფიზმი ეწოდება.

თუ h ასახვა ბიექციაა S სიმრავლისა S_1 სიმრავლეში, მაშინ h ჰომომორფიზმს $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფის $\mathbf{S}_1=(S_1,\cdot)$ ნახევარჯგუფში იზომორფიზმი ეწოდება.

თუ h ასახვა ჰომომორფიზმია $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფისა თავისთავში, მაშინ მას ენდომორფიზმი ეწოდება, ხოლო h იზომორფიზმს კი ავტომორფიზმი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ იზომორფული ნახევარჯგუფები ითვლებიან ექვივალენტურ ნახევარჯგუფებად და მათი ერთმანეთისაგან განსხვავება არ ხდება, თუმცა მათი ელემენტები და

ოპერაციების ჩანაწერები შეიძლება ერთმანეთისაგან განსხვავებული იყოს.

კონგრუენციები და ფაქტორნახევარჯგუფები

1. ვთქვათ, ε ეკვივალენტობის მიმართებაა S სიმრავლეზე.

ε მიმართებას ეწოდება კონგრუენცია $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფზე, თუ $a\varepsilon b$ და $a_1\varepsilon b_1$ $(a,b,a_1,b_1\in S)$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $(a*a_1)\varepsilon(b*b_1)$ პირობა.

ცხადია, რომ $\Delta_X=\{(a,a)\mid a\in S\}$ და $\omega=S\times S$ ეკვივალენტობის მიმართებები ყოველთვის კონგრუენციებია $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფზე.

ვთქვათ, ε კონგრუენციაა $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფზე.

$S/\varepsilon=\{a\varepsilon\mid a\in S\}$ ფაქტორსიმრავლეზე განვმარტოთ $(\breve{*})$ ოპერაცია შემდეგნაირად $a\varepsilon\,\breve{*}\,b\varepsilon=(a*b)\varepsilon$ ყოველი $a\varepsilon, b\varepsilon\in S/\varepsilon$ ელემენტისათვის. აღმოჩნდება, რომ S/ε ფაქტორსიმრავლეში განმარტებული $(\breve{*})$ ოპერაცია არ არის დამოკიდებული ε ექვივალენტობის კლასებიდან წარმომადგენლების შერჩევაზე, ე.ი. $(\breve{\cdot})$ ოპერაცია ასახვაა $S/\varepsilon\times S/\varepsilon$ სიმრავლისა S/ε ფაქტორსიმრავლეში. ამასთან, S/ε ფაქტორსიმრავლეში განმარტებული $(\breve{*})$ ოპერაცია ასოციაციურია.

2. $\mathbf{S}/\varepsilon=\left(S/\varepsilon,\breve{*}\right)$ ნახევარჯგუფს $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ფაქტორნახევარჯგუფი ეწოდება ε კონგრუენციის მიმართ.

ცნობილია, რომ თუ h არის $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფის $\mathbf{S}_1=(S_1,\cdot)$ ნახევარჯგუფზე ეპიმორფული ასახვა, მაშინ იარსე-

ზებს $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ისეთი ε_h კონგრუენცია, რომ $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ფაქტორნახევარჯგუფი ε_h კონგრუენციის მიმართ იზომორფული იქნება $\mathbf{S}_1$ ნახევარჯგუფის (ჰომომორფიზმის, ან კიდევ ეპიმორფიზმის თეორემა).

3. განვიხილოთ $h' : S \to S/\varepsilon_h$ ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $h'(a) = a\varepsilon_h$. იგი იქნება $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის $\mathbf{S}/\varepsilon_h$ ფაქტორნახევარჯგუფზე ეპიმორფიზმი. მას ბუნებრივი ჰომომორფული ასახვა ეწოდება.

4. ვთქვათ, S' არის $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ ნახევარჯგუფის რომელიღაც წარმომქმნელთა სისტემა (მაგალითად, $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის წარმომქმნელთა სისტემად გამოდგება თვითონ S სიმრავლეც). განვიხილოთ S სიმრავლეზე თავისუფალი $\mathbf{F}_S = (F_S, \cdot)$ ნახევარჯგუფი.

ვთქვათ $\psi : S \to S'$ ასახვა სურექციაა (ასეთი ასახვა არსებობს, რადგან $S' \subseteq S$). ახლა h იყოს ისეთი თანადობა F_S და S სიმრავლეებს შორის, რომელიც ყოველ $x_1 x_2 \dots x_m$ სიტყვას F_S სიმრავლეზე შეუსაბამებს $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის $\psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \cdots \psi(x_m)$ ელემენტს, ე.ი. $h(x_1 x_2 \dots x_m) = \psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \cdots \psi(x_m)$.

დამტკიცდება, რომ h იქნება ჰომომორფული ასახვა შესაბამის ნახევარჯგუფებს შორის.

5. თუ W_1 და W_2 ისეთი სიტყვებია F_S სიმრავლიდან, რომ $h(W_1) = h(W_2)$, მაშინ ასეთ ტოლობას თანაფარდობას უწოდებენ $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფზე S' წარმომქნელთა სისტემის მიმართ და სიმოლურად $W_1 = W_2$ სახით ჩაიწერება.

ვთქვათ, $\mathbf{Q}$ თანაფარდობათა რაღაც სისტემაა $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფზე S' წარმომქნელთა სისტემის მიმართ.

$\mathbf{Q}$ თანაფარდობათა სისტემაზე განვმარტოთ α', α'' და α ბინარული მიმართებები:

1) $W_1 \alpha' V_1$ მხოლოდ მაშინ, როცა $W_1 = V_1$ თანაფარდობა ეკუთვნის $\mathbf{Q}$ სიმრავლეს.

2) $W \alpha'' V$ მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნებიან ისეთი W_1, W_2, V_1 და V_2 ელემენტები F_S სიმრავლიდან, რომ

$$W \equiv W_1 V_1 W_2 , \ V \equiv W_1 V_2 W_2 ,$$

სადაც ან $V_1 \alpha' V_2$, ან $V_2 \alpha' V_1$, ან V_1 და V_2 ერთდროულად ცარიელი სიტყვებია.

შევნიშნოთ, რომ $V_1 \alpha' V_2$, $V_2 \alpha' V_1$ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $V_1 = V_2$, ე.ი. $h(V_1) = h(V_2)$, ამიტომაც ადგილი ექნება ტოლობას $h(W) = h(V)$, ე.ი. $W = V$. ამ შემთხვევაში ამბობენ რომ $W = V$ თანაფარდობა არის $\mathbf{Q}$ თანაფარდობათა სისტემის უშუალო შედეგი.

3) $W \alpha V$ მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნებიან ისეთი

$$W \equiv W_1, \ W_2, \dots, W_n \equiv V$$

ელემენტები F_S სიმრავლიდან, რომ

$$W_1 \alpha'' W_2, \ W_2 \alpha'' W_3, \dots, W_{n-1} \alpha'' W_n .$$

ამ შემთხვევაშიც ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} &h(W) = h(W_1) = h(W_2), \\ &h(W_2) = h(W_3), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &h(W_{n-1}) = h(W_n) = h(V) \end{aligned}$$

და ამიტომაც $W = V$.

6. თუ $W, V \in F_S$ და სრულდება პირობა $W \alpha V$ $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის S' წარმომქნელთა სისტემის მიმართ, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას $W = V$. ამ თანაფარდობას $\mathbf{Q}$ თანაფარდობათა სისტემის შედეგი ეწოდება.

7. **Q** თანაფარდობათა სისტემას **S** ნახევარჯგუფის S' წარმომქმნელთა სისტემის მიმართ ეწოდება განმსაზღვრელი თანაფარდობათა სისტემა, თუ S' წარმომქმნელთა სისტემის მიმართ ყოველი თანაფარდობა **Q** თანაფარდობათა სისტემის შედეგია.
8. ვთქვათ X რომელიღაც თვლადი სიმრავლეა. W_1 და W_2 ორი სიტყვაა X ალფავიტზე, ხოლო $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია. $W_1=W_2$ თანაფარდობას ეწოდება იგივეობა **S** ნახევარჯგუფზე, თუ ნებისმიერი $\varphi\colon X\to S$ ასახვის დროს W_1 და W_2 სიტყვების მნიშვნელობები **S** ნახევარჯგუფში ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. $\varphi(W_1)=\varphi(W_2)$.
9. მოვიყვანოთ იგივეობებით განსაზღვრული ზოგიერთი ნახევარჯგუფები:

1) ნებისმიერ კომუტაციურ ნახევარჯგუფში სამართლიანია იგივეობა $x_1x_2 = x_2x_1$.

2) ნებისმიერ კონაში სამართლიანია იგივეობა $xx = x$.

3) ნებისმიერ ნახევარმესერში სამართლიანია $xx = x$ და $x_1x_2 = x_2x_1$ იგივეობები.

4) ნებისმიერ ერთეულოვან ნახევარჯგუფში სამართლიანია იგივეობა $x_1 = x_2$.

5) ნებისმიერ მარცხენა (მარჯვენა) ნულების ნახევარჯგუფში სამართლიანია იგივეობა $x_1x_2 = x_1$ $(x_1x_2 = x_2)$.

ციკლური (მონოგენური) ნახევარჯგუფები

1. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია და $a\in S$, ხოლო $\langle a\rangle$ ნახევარჯგუფია, წარმოქმნილი a ელემენტით. მაშინ $\langle a\rangle=\{a,a^2,...,a^n....\}$. თუ $\langle a\rangle = S$, მაშინ **S** ნახევარჯგუფს a ელემენტით წარმოქმნილი ციკლური ნახევარჯგუფი ეწოდება.

$\langle a\rangle$ ნახევარჯგუფში ელემენტების რაოდენობას a ელემენტის რიგი ეწოდება.

ყოველი $a\in S$ ელემენტისათვის შემდეგი ორი შესაძლებლობიდან ადგილი აქვს მხოლოდ ერთს.

1) a ელემენტის ნებისმიერი ორი ხარისხი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. ამ შემთხვევაში a ელემენტის ხარისხი უსასრულოა, კერძოდ, თვლადია.

2) არსებობენ ისეთი მინიმალური r და s ნატურალური რიცხვები, რომ $r<s$ და $a^r=a^s$. ამ შემთხვევაში $\langle a\rangle=\{a,a^2,...,a^{r+m-1}\}$, ე.ი. a ელემენტის რიგი მოცემულ შემთხვევაში $(r+m-1)-$ის ტოლია და r და m რიცხვებს შესაბამისად a ელემენტის ინდექსი და პერიოდი ეწოდება.

2. ვთქვათ, $\langle a\rangle = S$ და $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ არის a ელემენტით წარმოქმნილი ციკლური ნახევარჯგუფი. მაშინ

1) ნებისმიერი უსასრულო რიგის ციკლური **S** ნახევარჯგუფი ნატურალურ რიცხვთა ადიციური $\mathbf{N}=(N\backslash\{0\},+)$ ნავევარჯგუფის იზომორფულია.

2) თუ **S** სასრული რიგის ციკლური ნახევარჯგუფია, მაშინ $\mathbf{G_a}=(G_a,\cdot)$ იქნება **S** ნახევარჯგუფის m რიგის ციკლური ქვეჯგუფი იზომორფული ნაშთთა კასების $\mathbf{Z_m}$ ჯგუფისა $m-$ის მოდულით.

3) ორი სასრული რიგის ციკლური ნახევარჯგუფი იზომორფულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ინდექსები და პერიოდები ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ დასახელებული r ინდექსისა m პერიოდისათვის ყოველთვის არსებობს ციკლური ნახევარჯგუფი r ინ-

დექსითა m პერიოდით. მართლაც, ავიღოთ ნახევარჯგუფი, რომელიც წარმოიქმნება $\{0,1,2,...,r+m-1\}$ სიმრავლის

$$a=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & ... & r-1 & r & ... & r+m-2 & r+m-1\\ 1 & 2 & 3 & ... & r & r+1 & ... & r+m-1 & r\end{pmatrix}$$

გარდაქმნით. ადვილად შემოწმდება, რომ a ელემენტით წარმოქმნილი ციკლური ჯგუფის ინდექსია r და პერიოდი m.

3. თუ $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ყოველი ელემენტი სასრული რიგისაა, მაშინ მას პერიოდული ნახევარჯგუფი ეწოდება.
ცხადია, რომ სასრული ნახევარჯგუფები, მარჯვენა ნულების, მარცხენა ნულების ნახევარჯგუფები და ნახევარმესერები პერიოდული ნახევარჯგუფებია.
პერიოდულ ნახევარჯგუფში ნებისმიერი ელემენტით წარმოქმნილი ნახევარჯგუფი შეიცავს ქვეჯგუფს, რომლის ერთეულოვანი ელემენტი მოცემული პერიოდული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტია.
ამგვარად, პერიოდული ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ელემენტის რომელიღაც ხარისხი აუცილებლად იდემპოტენტი იქნება.

ნახევარმესერები

1. იდემპოტენტურ ელემენტთა ნახევარჯგუფს კონა ეწოდება.
იდემპოტენტურ ელემენტთა კომუტაციურ ნახევარჯგუფს ნახევარმესერი ეწოდება.
2. ვთქვათ, X და Y ორი არაცარიელი სიმრავლეა. $S=X\times Y$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ბინარული ალგებრული ოპერაცია შემდეგნაირად: $(x,y)\cdot(x',y')=(x,y')$ $(x,x'\in X;\ y,y'\in Y)$. მაშინ $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფი იქნება კონა. მას S სიმრავლეზე მართკუთხა კონა ეწოდება.
3. ვთქვათ, $2^X=\{Y\,|\,Y\subseteq X\}$ და $\cup$ და $\cap$ სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციებია. მაშინ $(2^X,\cup)$ და $(2^X,\cap)$ ნახევარმესერებია.

4. თუ ბინარული $\alpha\subseteq S\times S$ მიმართება რეფლექსურია $(\alpha\supseteq\Delta_X)$, ანტისიმეტრიულია $(\alpha\cap\alpha^{-1}\subseteq\Delta_X)$ და ტრანზიტულია $(\alpha\circ\alpha\subseteq\alpha)$, მაშინ მას S სიმრავლეზე დალაგების მიმართება ეწოდება.
5. S სიმრავლეს, რომელზედაც განმარტებულია ერთი მაინც დალაგების მიმართება, დალაგებული სიმრავლე ეწოდება.
ვთქვათ, S დალაგებული სიმრავლეა $\le$ დალაგების მიმართ და S' მისი არაცარიელი ქვესიმრავლეა.
1) $a\in S'$ ელემენტს ეწოდება S' სიმრავლის უმცირესი ელემენტი, თუ ყოველი $x\in S'$ ელემენტისათვის სრულდება $a\le x$ პირობა.
2) $b\in S'$ ელემენტს ეწოდება S' სიმრავლის უდიდესი ელემენტი, თუ ყოველი $x\in S'$ ელემენტისათვის სრულდება $x\le b$ პირობა.
3) $a\in S'$ ელემენტს ეწოდება S' სიმრავლის მინიმალური ელემენტი, თუ $x'\le a$ $(x'\in S')$ პირობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $a=x'$ პირობა.
4) $b\in S'$ ელემენტს ეწოდება S' სიმრავლის მაქსიმალური ელემენტი, თუ $b\le y'$ $(y'\in S')$ პირობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $b=y'$ პირობა.
5) $a\in S$ ელემენტს ეწოდება S' სიმრავლის ქვედა საზღვარი, თუ $a\le x$ ყოველი $x\in S'$ ელემენტისათვის. თუ S' სიმრავლის ქვედა საზღვრების სიმრავლე არაცარიელია და ამ სიმრავლეში არსებობს უდიდესი ელემენტი, მაშინ მას S' სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი ეწოდება და $\wedge S'$ სიმბოლოთი აღინიშნება.
6) $b\in S$ ელემენტს ეწოდება S' სიმრავლის ზედა საზღვარი, თუ $x\le b$ ყოველი $x\in S'$ ელემენტისათვის. თუ S' სიმრავლის ზედა საზღვრებს სიმრავლე არაცარიელია და ამ სიმრავლეში

არსებობს უმცირესი ელემენტი, მაშინ მას S' სიმრავლის ზუს-ტი ზედა საზღვარი ეწოდება და $\vee S'$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

6. დალაგებულ S სიმრავლეს, რომლის ნებისმიერ ორ ელემენ-ტიან ქვესიმრავლეს გააჩნია ზუსტი ქვედა საზღვარი, ქვედა ნახევარმესერი ეწოდება.

დალაგებულ S სიმრავლეს, რომლის ნებისმიერ ორ ელე-მენტიან ქვესიმრავლეს გააჩნია ზუსტი ზედა საზღვარი, ზედა ნახევარმესერი ეწოდება.

დალაგებულ S სიმრავლეს, რომლის ნებისმიერ ორ ელემენ-ტიან ქვესიმრავლეს გააჩნია როგორც ზუსტი ზედა, ისე ზუსტი ქვედა საზღვარი, მესერი ეწოდება.

შევნიშნით, რომ S' სიმრავლის უმცირესი და უდიდესი ელე-მენტები (თუ ისინი არსებობენ) ცალსახად განისაზღვრებიან. S' სიმრავლის მინიმალური და მაქსიმალური ელემენტები (თუ ისინი არსებობენ) ცალსახად არ განისაზღვრებიან. ამას-თან, თუ S' სიმრავლეში არსებობს უმცირესი ან უდიდესი ელემენტი, მაშინ ისინი შესაბამისად იქნებიან S' სიმრავლის მინიმალური ან მაქსიმალური ელემენტები. პირიქით კი S' სიმრავლის მინიმალური ან მაქსიმალური ელემენტი არაა სავალდებულო შესაბამისად იყოს S' სიმრავლის უმცირესი ან უდიდესი ელემენტი. გარდა ამისა S' სიმრავლის ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები (თუ ისინი არსებობენ) ცალსახად განისაზღვრებიან.

ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ იდემპოტენტურ ელემენტთა კომუტა-ციური ნახევარჯგუფია და $a \le b$ მხოლოდ მაშინ, როცა $a \cdot b = a$. $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ასეთნაირ დალაგებას ბუნებრივი დალაგება ეწოდება.

ნახევარჯგუფთა ნახევარმესერული დაშლები

1. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია. $\mathbf{S}_\alpha=(S_\alpha,\cdot)$ $(\alpha\in\Omega)$ არიან $\mathbf{S}$

ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფთა ისეთი სისტემა, რომ $S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing$ ყოველი $\alpha \neq \beta$ $(\alpha,\beta\in\Omega)$ – სათვის და $S=\bigcup_{\alpha\in\Omega} S_\alpha$. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $\mathbf{S}$ დაშლილია მისი $\mathbf{S}_\alpha$ $(\alpha\in\Omega)$ ქვენახევარჯგუფთა გაერთიანებად.

2. ცნობილია, რომ ყოველი კომუტაციური პერიოდული ნახევარ-ჯგუფი ერთიდემპოტენტიან ნახევარჯგუფთა ნახევარმესერია.

ნახევარჯგუფის მაქსიმალური ქვეჯგუფები

1. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია. თუ მოცემულ ნახევარ-ჯგუფს გააჩნია ქვეჯგუფი, მაშინ ამ ქვეჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელე-მენტია.

მეორე მხრივ, თუ მოცემულ ნახევაჯგუფს გააჩნია იდემპო-ტენტური ელემენტი ε, მაშინ $\mathbf{S}'=(\{\varepsilon\},\cdot)$ იქნება მოცემული ნახევარჯგუფის ქვეჯგუფი.

ამგვარად $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფს მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია ქვეჯგუფი, როცა იგი შეიცავს იდემპოტენტს.

შევნიშნოთ, რომ უსასრულო რიგის ციკლურ ნახევარჯგუფს არ გააჩნია არც იდემპოტენტი და არც საკუთარი ქვეჯგუფი.

2. ვთქვათ, ε არის $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელე-მენტი. იტყვიან, რომ b არის a ელემენტის მარჯვენა შებრუ-ნებული ელემენტი ε იდემპოტენტის მიმართ, თუ $a \cdot b = \varepsilon$.

იტყვიან, რომ c არის a ელემენტის მარცხენა შებრუნებული ელემენტი ε იდემპოტენტის მიმართ, თუ $c \cdot a = \varepsilon$.

იტყვიან, რომ a' არის a ელემენტის შებრუნებული ელე-მენტი ε იდემპოტენტის მიმართ, თუ $a' \cdot a = a \cdot a' = \varepsilon$.

3. $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფის $\mathbf{G}_\varepsilon=(G,\cdot)$ ქვეჯგუფს უწოდებენ მაქსი-მალურს, თუ იგი არ არის S – ის რომელიმე სხვა ქვეჯგუფის

საკუთარი ქვეჯგუფი.

ცნობილია, რომ თუ $\mathbf{G}_{\varepsilon}$ და $\mathbf{G}_{\varepsilon'}$ $(\varepsilon\cdot\varepsilon=\varepsilon,\ \varepsilon'\cdot\varepsilon'=\varepsilon')$ არიან $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის მაქსიმალური ქვეჯგუფები და $\varepsilon\neq\varepsilon'$, მაშინ $G_{\varepsilon}\cap G_{\varepsilon'}=\varnothing$.

ნახევარჯგუფის მარცხენა, მარჯვენა და ორმხრივი იდეალები

ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია; $\varnothing\neq S'\subseteq S$ და

$$S'\cdot S=\{b\cdot a\,|\,b\in S',a\in S\},$$
$$S\cdot S'=\{a\cdot b\,|\,a\in S,b\in S'\},$$
$$S\cdot S'\cdot S=\{a\cdot b\cdot c\,|\,a,c\in S,b\in S'\}.$$

1. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია; $\varnothing\neq S'\subseteq S$.

1) თუ $S'\cdot S\subseteq S'$, მაშინ S' სიმრავლეს $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა იდეალი ეწოდება.

2) თუ $S\cdot S'\subseteq S'$, მაშინ S' სიმრავლეს $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის მარცხენა იდეალი ეწოდება.

3) თუ S' სიმრავლე ერთდროულად არის $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის როგორც მარჯვენა ისე მარცხენა იდეალი, მაშინ მას $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ორმხრივი იდეალი ან კიდევ იდეალი ეწოდება.

ცხადია, რომ $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა და ორმხრივი იდეალები $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფებია,

შევნიშნოთ, რომ თუ $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია, მაშინ S იქნება $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის იდეალი. გარდა ამისა, თუ 0 არის $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფის ნულოვანი ელემენტი, მაშინ $S'=\{0\}$ იქნება $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის იდეალი.

2. $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფს, რომელსაც არ გააჩნია არცერთი მარცხენა (მარჯვენა) იდეალი გარდა $S-$ისა მარცხნიდან (მარჯვნიდან) მარტივი ნახევარჯგუფი ეწოდება.

3. $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფს, რომელსაც არ გააჩნია ორმხრივი იდეალი, გარდა $S-$ისა, მარტივი ნახევარჯგუფი ეწოდება.

4. ვთქვათ $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია, $a\in S$ და $S'=\{a\}$. მაშინ $S'\cup S'\cdot S$, $S'\cup S\cdot S'$ და $S'\cup S'\cdot S\cup S\cdot S'\cup S\cdot S'\cdot S$ სიმრავლეებს შესაბამისად $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის მთავარი მარჯვენა, მთავარი მარცხენა და მთავარი იდეალები ეწოდება წარმოქმნილი a ელემენტით და სიმბოლურად $a\cup a\cdot S$, $a\cup S\cdot a$ და $a\cup a\cdot S\cup S\cdot a\cup S\cdot a\cdot S$ სახით აღინიშნებიან.

შევნიშნოთ, რომ როცა $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფს გააჩნია ერთეულოვანი ელემენტი 1, ე.ი. $S=S^1$, მაშინ $a\cup a\cdot S=a\cdot S^1$, $a\cup S\cdot a=S^1\cdot a$ და $a\cup a\cdot S\cup S\cdot a\cup S\cdot a\cdot S=S^1\cdot a\cdot S^1$

რეგულარული ელემენტები, რეგულარული და ინვერსიული ნახევარჯგუფები

1. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია და $a\in S$. როგორც ცნობილია $a-$ს იდემპოტენტური ელემენტი ეწოდება თუ $a\cdot a=a$; რეგულარული ელემენტი ეწოდება თუ $a\cdot b\cdot a=a$, რომელიღაც $b\in S$ ელემენტისათვის, გარდა ამისა, თუ $a\cdot b\cdot a=a$ და $b\cdot a\cdot b=b$, მაშინ a და b ელემენტებს რეგულარულად შეუღლებული ან კიდევ ინვერსიული ელემენტები ეწოდება.

თუ $a\in S$ ელემენტისათვის სამართლიანია $a\cdot b\cdot a=a$ და $a\cdot b=b\cdot a$ ტოლობები, მაშინ a ელემენტს სავსებით რეგულარული ელემენტი ეწოდება.

ცხადია, ყოველი იდემპოტენტური ელემენტი იმავე დროს რეგულარული ელემენტიცაა.

შევნიშნოთ, რომ ყოველ რეგულარულ ელემენტს ერთი მაინც ინვერსიული ელემენტი გააჩნია (თუ $axa=a$ და $b=xax$, მაშინ a და b ინვერსული ელემენტები იქნებიან).

2. ნახევარჯგუფს, რომლის ყოველი ელემენტი რეგულარულია, რეგულარული ნახევარჯგუფი ეწოდება.

3. ნახევარჯგუფს, რომლის ყოველი ელემენტი სავსებით რეგულარულია, სავსებით რეგულარული ნახევარჯგუფი ეწოდება.
4. რეგულარულ ნახევარჯგუფს, რომლის ყოველ ელემენტს ერთადერთი ინვერსიული ელემენტი გააჩნია, ინვერსული ნახევარჯგუფი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ მარჯვენა ნულების, მარცხენა ნულების ნახევარჯგუფები და ნებისმიერი ჯგუფი რეგულარული ნახევარჯგუფია. ნებისმიერი ჯგუფი სავსებით რეგულარული ნახევარჯგუფია. ნებისმიერი ჯგუფი ინვერსიული ნახევარჯგუფიცაა.

გრინის მიმართებები

1. ვთქვათ $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია. S სიმრავლეზე განვმარტოთ L, R, H, D და J ბინარული მიმართებები შემდეგნაირად:

$$L=\{(a,b)\in S\times S \mid a\cup S\cdot a=b\cup S\cdot b\},$$
$$R=\{(a,b)\in S\times S \mid a\cup a\cdot S=b\cup b\cdot S\},$$
$$J=\{(a,b)\in S\times S \mid a\cup a\cdot S\cup S\cdot a\cup S\cdot a\cdot S=b\cup b\cdot S\cup S\cdot b\cup S\cdot b\cdot S\},$$
$$H=L\cap R,$$
$$D=L\circ R,$$

ე.ი. aLb მხოლოდ მაშინ, როცა a და b ელემენტებით $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფში წარმოქმნილი მარცხენა მთავარი იდეალები ერთმანეთს ემთხვევიან; aRb, როცა a და b ელემენტებით $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფში წარმოქმნილი მარჯვენა მთავარი იდეალები ერთმანეთს ემთხვევიან, ხოლო aJb მხოლოდ მაშინ, როცა a და b ელემენტებით $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფში წარმოქმნილი მთავარი იდეალები ერთმანეთს ემთხვევიან;

შევნიშნოთ, რომ L მარჯვენა, R მარცხენა, ხოლო J ორმხრივი კონგრუენციებია.

L, R, J, H და D გრინის მიმართებები ეწოდება S ნახევარჯგუფზე.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $\mathbf{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ნამდვილ რიცხვთა ველია. ხოლო $(*)$ ისეთი ბინარული ალგებრული ოპერაციაა R სიმრავლეზე, რომ ნებისმიერი $a,b\in R$ ელემენტებისათვის

$$a*b=2a\cdot b+6a+6b+15\,.$$

იპოვეთ $(R,*)$ ალგებრის იდემპოტენტური ელემენტები.

ვთქვათ, $a\in R$ და ტოლობიდან $a*a=a$ უნდა ვიპოვოთ a ელემენტის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა. გვექნება

$$2a^2+11a+15=0\,.$$

საიდანაც მივიღებთ $a_1=-\dfrac{5}{2}$ და $a_2=-3$. ამგვარად, $(R,*)$ ალგებრას გააჩნია ორი იდემპოტენტი $a_1=-\dfrac{5}{2}$ და $a_2=-3$.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $\mathbf{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ნამდვილ რიცხვთა ველია. ხოლო $(*)$ ისეთი ბინარული ალგებრული ოპერაციაა R სიმრავლეზე, რომ ნებისმიერი $a,b\in R$ ელემენტებისათვის

$$a*b=a\cdot b+a+b\,.$$

აჩვენეთ, რომ $(R,*)$ ალგებრა მონოიდია. იპოვეთ მონოიდის ყველა სიმეტრიზირებად ელემენტთა სიმრავლე და $10-$ის სიმეტრიული ელემენტი.

1) ვაჩვენოთ, რომ $(R,*)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია. ყველაზე პირველად შევნიშნოთ, რომ $a*b\in R$, ე.ი. $(*)$ ოპერაცია ბინარული ალგებრული ოპერაციაა R სიმრავლეზე ($(*)$ ასახვაა $R\times R$ სიმრავლისა $R-$ში).

ახლა, ვთქვათ, $a,b,c\in R$. ასეთ შემთხვევაში ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების თვისებების გამოყენებით მივიღებთ:

$$(a*b)*c=(a\cdot b+a+b)*c=(a\cdot b+a+b)\cdot c+$$
$$+(a\cdot b+a+b)+c=a\cdot b\cdot c+a\cdot c+b\cdot c+$$
$$+a\cdot b+a+b+c=a\cdot b\cdot c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a+b+c;$$
$$a*(b*c)=a*(b\cdot c+b+c)=a\cdot(b\cdot c+b+c)+$$
$$+a+(b\cdot c+b+c)=a\cdot b\cdot c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c$$
$$+a+b+c=a\cdot b\cdot c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a+b+c.$$

ამგვარად სამართლიანია ტოლობა $(a*b)*c=a*(b*c)$.

მივიღეთ, რომ ბინარული ოპერაცია $(*)$ ასოციაციურია, ე.ი. $(R,*)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია.

2) ვაჩვენოთ, რომ $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ნეიტრალური ელემენტი e, ე.ი. ყოველი $a\in R$ ელემენტისათვის სამართლიანი უნდა იყოს ტოლობები $a*e=e*a=a$. რადგან $(*)$ ოპერაცია კომუტაციურია ამიტომ ყოველი $a\in R$ ელემენტისათვის საკმარისია მხოლოდ $a*e=a$ პირობის შესრულება. ასეთ შემთხვევაში ყოველი $a\in R$ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას $a\cdot e+a+e=a$, ე.ი. $e\cdot(a-1)=0$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $e=0$, თუ $a\neq 1$. ცხადია $1\cdot 0=0$, ამიტომაც $e=0$ იქნება მოცემული ნახევარჯგუფის ნეიტრალური ელემენტი. ამგვარად, მივიღეთ, რომ $(R,*)$ ალგებრა მონოიდია.

3) რომ ვიპოვოთ $10-$ის სიმეტრიული a' ელემენტი $e=0$ ნეიტრალური ელემენტის მიმართ, ამისათვის $10*a'=0$ ტოლობიდან უნდა ვიპოვოთ a'. გვექნება $a'=-\dfrac{10}{9}$. მივიღეთ, რომ $10-$ის სიმეტრიული $e=0$ ნეიტრალური ელემენტის მიმართ იქნება $-\dfrac{10}{9}$.

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ნამდვილ რიცხვთა ველია. ხოლო $(*)$ ისეთი ბინარული ალგებრული ოპერაციაა R სიმრავლეზე, რომ ნებისმიერი $a,b\in R$ ელემენტებისათვის:
   1) $a*b=a+b+3$;
   2) $a*b=2\cdot|a|\cdot b$;
   3) $a*b=a(1-b)+b$;
   4) $a*b=a\cdot(b-1)-b+2$;
   5) $a*b=2\cdot|a\cdot b|$;
   6) $a*b=a\cdot b-2\cdot(a+b)+6$;
   7) $a*b=2\cdot a\cdot b-(a+b)+1$.

   აჩვენეთ, რომ $(R,*)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია. იპოვეთ მათი არსებობის შემთხვევაში მისი იდემპოტენტური ელემენტები.
2. ვთქვათ, $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ნამდვილ რიცხვთა ველია. იპოვეთ $(R,*)$ ნახევარჯგუფის ნეიტრალური e ელემენტი და მის მიმართ სიმეტრიზირებადი ელემენტები, თუ
   1) $a*b=a+b-a\cdot b$;
   2) $a*b=a\cdot b-(a+b)+2$;
   3) $a*b=-2\cdot a\cdot b+2\cdot a+2\cdot b-1$;
   4) $a*b=a\cdot b-2\cdot(a+b)+6$;
   5) $a*b=a+b+a\cdot b$;
   6) $a*b=2\cdot a\cdot b+2\cdot a+2\cdot b+1$;
   7) $a*b=10\cdot a\cdot b+5\cdot a+5\cdot b+2$;
   8) $a*b=2\cdot a\cdot b+7\cdot a+7\cdot b+21$;
   9) $a*b=2\cdot a\cdot b+5\cdot a+5\cdot b+10$;
   10) $a*b=21\cdot a\cdot b+7\cdot a+7\cdot b+2$;

11) $a*b=6\cdot a\cdot b+7\cdot a+7\cdot b+7$;

12) $a*b=7\cdot a\cdot b+7\cdot a+7\cdot b+6$.

3. ვთქვათ $\mathbf{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ნამდვილ რიცხვთა ველია. ხოლო $(*)$ ისეთი ბინარული ალგებრული ოპერაციაა R სიმრავლეზე, რომ ნებისმიერი $a,b\in R$ ელემენტებისათვის:

1) $a*b=\frac{1}{2}(a\cdot b-a-b+3)$; 2) $a*b=\frac{1}{2}(3\cdot a\cdot b+6\cdot a+6\cdot b+8)$;

3) $a*b=2\cdot a\cdot b-2a-2b+3$; 4) $a*b=2\cdot a\cdot b+2a+2b+1$;

5) $a*b=\frac{1}{2}(a\cdot b+a+b-1)$; 6) $a*b=\frac{1}{2}(-a\cdot b+a+b+1)$;

7) $a*b=\frac{1}{2}(a\cdot b-2\cdot a-2\cdot b+8)$; 8) $a*b=2\cdot a\cdot b-4\cdot a-4\cdot b+10$;

9) $a*b=2\cdot a\cdot b+4a+4b+12$; 10) $a*b=-2\cdot a\cdot b+2a+2b-1$;

11) $a*b=\frac{1}{2}(a\cdot b+2\cdot a+2\cdot b)$; 12) $a*b=\frac{1}{2}(a\cdot b+3\cdot a+3\cdot b+3)$.

აჩვენეთ, რომ $(R,*)$ ალგებრა მონოიდია. ყველა შემთხვევაში იპოვეთ მონოიდის ყველა სიმეტრიზირებად ელემენტთა სიმრავლე და $10-$ის სიმეტრიული ელემენტი.

4. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(\mathrm{S},*)$ რომელიღაც ნახევარჯგუფია, ხოლო S' არის S სიმრავლის რომელიღაც არაცარიელი ქვესიმრავლე. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{S}'=(S',*)$ იქნება $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფი მხოლოდ მაშინ თუ $a*b\in S'$ ნებისმიერი $a,b\in S'-$სათვის.

5. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ისეთი ნახევარჯგუფია, რომელსაც არ გააჩნია ერთეულოვანი ელემენტი. დავუშვათ, 1 ისეთი სიმბოლოა, რომ $1\notin S$ და $S^1=S\cup\{1\}$. დავუშვათ, რომ $a,b\in S^1$ და S^1 სიმრავლეში განვმარტოთ $(*)$ ოპერაცია შემდეგნაირად:

$$a*b=\begin{cases} a\cdot b, & a,b\in S;\\ b, & a=1,\ b\in S;\\ a, & b=1,\ a\in S;\\ 1, & a=b=1.\end{cases}$$

აჩვენეთ, რომ S^1 სიმრავლეში განმარტებული $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია, ე.ი. $\mathbf{S}^1=(S^1,*)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია. ამასთან,

ელემენტი 1 მისი ერთეულია.

6. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ისეთი ნახევარჯგუფია, რომელსაც არ გააჩნია ნულოვანი ელემენტი. დავუშვათ 0 ისეთი სიმბოლოა, რომ $0\notin S$ და $S^0=S\cup\{0\}$. დავუშვათ, რომ $a,b\in S^0$ და S^0 სიმრავლეში განვმარტოთ $(*)$ ოპერაცია შემდეგნაირად:

$$a*b=\begin{cases} a\cdot b, & a,b\in S;\\ 0, & a=0,\ b\in S;\\ 0, & b=0,\ a\in S;\\ 0, & a=b=0.\end{cases}$$

აჩვენეთ, რომ S^0 სიმრავლეში განმარტებული $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია, ე.ი. $\mathbf{S}^0=(S^0,*)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია. ამასთან ელემენტი 0 მისი ნულია.

7. ვთქვათ, $S=(S,*,e)$ მონოიდია e ნეიტრალური ელემენტით. აჩვენეთ, რომ თუ $a\in S$ ელემენტს e ნეიტრალური ელემენტის მიმართ გააჩნია სიმეტრიული ელემენტი, მაშინ იგი ცალსახად განისაზღვრება.

8. ვთქვათ, S არაცარიელი სიმრავლეა. S სიმრავლეში განვმარტოთ $(*)$ ოპერაცია შემდეგნაირად: $a*b=a$ (ან $a*b=b$). აჩვენეთ, რომ S ნახევარჯგუფია. მას მარცხენა (მარჯვენა) ნულების ნახევარჯგუფი ეწოდება.

რადგან მოცემულ ნახევარჯგუფში ყოველი $a\in S$ ელე-

მენტისათვის სამართლიანია ტოლობა $a \cdot a = a$, ამიტომ იგი არის როგორც კონა და გამომდინარე აქედან, რეგულარული ნახევარჯგუფიც, ასევე მისი ნებისმიერი არაცარიელი ქვესიმრავლე, იმავე დროს ქვენახევარჯგუფია.

9. ვთქვათ, X რომელიღაც არაცარიელი სიმრავლეა. ამ სიმრავლეს ალფავიტი ეწოდება. X სიმრავლის ელემენტთა ყოველ სასრულ $x_1, x_2, ..., x_m$ მიმდევრობას, რომელიც $x_1 x_2 ... x_m$ სიმბოლოთი აღინიშნება, X ალფავიტზე სიტყვა ეწოდება. ყველა სიტყვების სიმრავლე X ალფავიტზე F_X სიმბოლოთი აღვნიშნოთ.

ახლა, ვთქვათ, $x_1 x_2 ... x_m$ და $y_1 y_2 \dots y_n$ ორი სიტყვაა F_X ალფავიტზე.

იტყვიან რომ $x_1 x_2 ... x_m$ და $y_1 y_2 \dots y_n$ სიტყვები ერთმანეთის ტოლია და სიმბოლურად ასე აღნიშნავენ $x_1 x_2 \dots x_m \equiv y_1 y_2 \dots y_n$, თუ $n = m$ და $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots, x_m = y_n$.

$W_1 \equiv x_1 x_2 ... x_m$ და $W_2 \equiv y_1 y_2 ... y_n$ სიტყვების ნამრავლში იგულისხმება სიტყვა, რომელიც მიიღება W_1 სიტყვაზე W_2 სიტყვის მარჯვნიდან მიწერით, ე.ი.

$$W_1 \cdot W_2 \equiv (x_1 x_2 \dots x_m) \cdot (y_1 y_2 \dots y_n) = x_1 x_2 \dots x_m y_1 y_2 \dots y_n .$$

აჩვენეთ, რომ F_X სიმრავლე სიტყვათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ნახევარჯგუფია, რომელსაც თავისუფალი ნახევარჯგუფი ეწოდება X ალფავიტზე და $\mathbf{F_X} = (F_X, \cdot)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ $\varnothing$ – აღნიშნულია სიტყვა, რომელიც არ შეიცავს ალფავიტის არცერთ სიმბოლოს, მაშინ ცხადია, ნებისმიერი $W \in F_X$ სიტყვისათვის $W \cdot \varnothing \equiv \varnothing \cdot W \equiv W$, ე.ი. ცარიელი სიტყვა $\mathbf{F}_X^1$ ნახევარჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტია.

10. ვთქვათ, X რომელიღაც არაცარიელი სიმრავლეა. T_X აღვნიშნოთ X სიმრავლის თავისთავში ყველა გარდაქმნათა სიმრავ-

ლე. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{T}_X = (T_X, \cdot)$ გარდაქმნათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ნახევარჯგუფია.

1) ვთქვათ, x_0 არის X სიმრავლის რომელიღაც ფიქსირებული ელემენტი და $f_{x_0}(x) = x_0$ ყოველი $x \in X$ – სათვის. აჩვენეთ, რომ f_{x_0} ყოველი $x_0 \in X$ ელემენტისათვის არის $\mathbf{T_X}$ ნახევარჯგუფის მარცხენა ნული და ყველა მარცხენა ნულების სიმრავლისა და X სიმრავლის სიმძლავრეები ერთმანეთის ტოლია;

2) ახლა, ვთქვათ, $i_X : X \to X$ ისეთი ასახვაა, რომ $i_X(x) = x$ ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის. აჩვენეთ, რომ i_X ასახვა მოცემული ნახევარჯგუფის ერთეულია;

3) აჩვენეთ, რომ $\mathbf{T}_X$ ნახევარჯგუფი რეგულარულია.

11. ვთქვათ, X რომელიღაც არაცარიელი სიმრავლეა. B_X აღვნიშნოთ X სიმრავლეზე ყველა ბინარულ მიმართებათა სიმრავლე. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{B}_X = (B_X, \circ)$ ალგებრა, სადაც $(\circ)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია ბინარულ მიმართებათა გამრავლების ოპერაცია B_X სიმრავლეში, არის ნახევარჯგუფი.

1) აჩვენეთ, რომ $\mathbf{T}_X = (T_X, \cdot)$ ნახევარჯგუფი $\mathbf{B}_X = (B_X, \circ)$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფია;

2) აჩვენეთ, რომ $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ ბინარული მიმართება არის $\mathbf{B_X}$ ნახევარჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი;

3) აჩვენეთ, რომ $\varnothing$ ბინარული მიმართება არის $\mathbf{B_X}$ ნახევარჯგუფის ნულოვანი ელემენტი.

12. ვთქვათ, X რომელიღაც არაცარიელი სიმრავლეა. J_X აღნიშნულია B_X სიმრავლის ყველა ისეთი ბინარული მიმართებების ქვესიმრავლე, რომ $\alpha \in J_X$ მხოლოდ მაშინ, როცა α წარმოადგენს X სიმრავლის რომელიმე Y ქვესიმრავლის ურთიერთცალსახა ასახვას (ინექციას) X სიმრავლის $Y\alpha$ ქვესიმრავ-

ლეზე (J_X სიმრავლის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $\varnothing$ სიმრავლის ასახვა $\varnothing$ სიმრავლეში ეკუთვნის J_X სიმრავლეს, რომელსაც ჩვენ 0 სიმბოლოთი აღვნიშნავთ).

1) აჩვენეთ, რომ J_X სიმრავლე ჩაკეტილია ბინარულ მიმართებათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ;

2) აჩვენეთ, რომ J_X სიმრავლე ჩაკეტილი იქნება ასახვათა გამრავლების $(\cdot)$ ოპერაციის მიმართ;

3) აჩვენეთ, რომ $\mathbf{J_X}=(J_X,\cdot)$ ინვერსიული ნახევარჯგუფია (ამ ნახევარჯგუფს X სიმრავლეზე სიმეტრიული ინვერსიული ნახევარჯგუფი ეწოდება).

13. ვთქვათ, D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერია. ყოველ f ასახვას X სიმრავლისა D ნახევარმესერში შევუსაბამოთ $\alpha_f=\bigcup\limits_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$ ბინარული მიმართება და $B_X(D)=\{\alpha_f \mid f:X\to D\}$. დაამტკიცეთ, რომ $B_X(D)=(B_X(D),\circ)$ სიმრავლე ნახევარჯგუფია (მას გაერთიანებათა $X-$ნახევარმესერ $D-$თი განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრულ ნახევარჯგუფი ეწოდება).

1) აჩვენეთ, რომ თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ $|B_X(D)|=|D|^{|X|}$;

2) აჩვენეთ, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია მარცხენა ერთეული, როცა $D=\{Y \mid Y\subseteq X\}$ ან $D=\{Y \mid \varnothing\neq Y\subseteq X\}$;

3) აჩვენეთ, რომ თუ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს გააჩნია მარცხენა ერთეული, მაშინ იგი ერთეულიცაა და აქვს $\Delta_X=\{(x,x) \mid x\in X\}$ სახე;

4) აჩვენეთ, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია მარჯვენა ერთეული ε, როცა $\varepsilon\circ\varepsilon=\varepsilon$ და $V(D,\varepsilon)=D$;

5) აჩვენეთ, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფს მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია მარცხენა ნულოვანი ელემენტი $\varnothing$, როცა $\varnothing\in D$ (ამ შემთხვევაში იგი ნახევარჯგუფის ნულოვანი ელემენტიცაა);

6) აჩვენეთ, რომ თუ $\varnothing\notin D$ მაშინ ნებისმიერი $Z\in D$ ელემენტისათვის $\alpha=X\times Z$ ბინარული მიმართება ყოველთვის იქნება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ნული.

14. ვთქვათ, $\mathbf{S}_i=(S_i,\cdot_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ნახევარჯგუფთა რაღაც სისტემაა. $S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$ და $(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in S$. S სიმრავლეზე განვმარტოთ გამრავლების ოპერაცია შემდეგნაირად:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1\cdot_1 y_1,\ x_2\cdot_2 y_2,\ldots,\ x_n\cdot_n y_n).$$

აჩვენეთ, რომ $\mathbf{S}=(S,.)$ სიმრავლე ნახევარჯგუფია (მას $\mathbf{S}_i=(S_i,\cdot_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ნახევარჯგუფთა პირდაპირი ნამრავლი ეწოდება).

ვთქვათ $\varphi_i:S\to S_i$, ისეთი ასახვაა, რომ $\varphi_i(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=x_i$ ყოველი $(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)\in S$ ელემენტისათვის. აჩვენეთ, რომ φ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ არის $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის $\mathbf{S}_i$ ნახევარჯგუფზე ჰომომორფული ასახვა.

15. ვთქვათ, R^+ დადებითი ნამდვილ რიცხვების სიმრავლეა. ხოლო $(*)$ ისეთი ბინარული ალგებრული ოპერაციაა R სიმრავლეზე, რომ $a*b=a^{\lg b}$ ყოველი $a,b\in R$ ელემენტებისათვის. აჩვენეთ, რომ $(R^+,*)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია.

16. აჩვენეთ, რომ კომუტაციურ ნახევარჯგუფში ორი იდემპოტენ-

ტური ელემენტის ნამრავლი კვლავ იდემპოტენტური ელემენტია.

17. ვთქვათ, $\mathbf{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ნამდვილ რიცხვთა ველია; $A=\{a|0\le a\le 1\}$, ხოლო $(*)$ ისეთი ბინარული ალგებრული ოპერაციაა A სიმრავლეზე, რომ $a*b=\dfrac{a+b}{1+a\cdot b}$ ყოველი $a,b\in R$ ელემენტებისათვის. აჩვენეთ, რომ $(A,*)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია შეკვეცებადობის პირობით.
18. ვთქვათ, M არის ყველა მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე, ხოლო $(\cdot)$ მატრიცთა გამრავლების ოპერაციაა M სიმრავლეში. იპოვეთ $(M,\cdot)$ ნახევარჯგუფის ყველა შებრუნებადი ელემენტების სიმრავლე.
17. აჩვენეთ, თუ $S=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია მარჯვენა შეკვეცადობის პირობით (ე.ი. ნებისმიერი $a,b\in S$ ელემენტებისათვის $a\cdot x=b\cdot x$ პირობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $a=b$ ტოლობა), მაშინ მისი ნებისმიერი სასრული რიგის ელემენტის ინდექსი $1-$ის ტოლია.
18. აჩვენეთ, რომ თუ კომუტაციური $S=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ელემენტის ინდექსი $1-$ის ტოლია, მაშინ იგი თანაუკვეთადი პერიოდული ჯგუფების გაერთიანებაა.
19. $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია. S სიმრავლის ნებისმიერი გარდაქმნა $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ჰომომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathbf{S}$ ან მარჯვენა ნულების ან მარცხენა ნულების ნახევარჯგუფია.
20. რეგულარული $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფი, რომელსაც მხოლოდ ერთი იდემპოტენტი გააჩნია, ჯგუფია.

21. რეგულარული $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფი, ორმხრივ შეკვეცადობის პირობით, ჯგუფია.
22. რეგულარული კომუტაციური $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფი, ჯგუფთა კონაა.
23. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია; m და n არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია; $\mathbf{C}_\mathbf{S}(m,n)$ არის $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ყველა ისეთი ელემენტების სიმრავლე, რომ $a\in\mathbf{C}_\mathbf{S}(m,n)$ მხოლოდ მაშინ, როცა $a=a^m\cdot x\cdot a^n$, რომელიღაც $x\in S-$ელემენტისათვის (a^0-ის ქვეშ იგულისხმება ცარიელი სიმბოლო). $\mathbf{C}_\mathbf{S}(m,n)$ სიმრავლეს $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის რეგულარობის კლასები ეწოდება. აჩვენეთ, რომ ქვემდებარე დიაგრამაზე მოცემულია რეგულარობის კლასებს შორის დამოკიდებულებები. კერძოდ, კლასებს შორის ისრის ბოლოები მიუთითებენ იმ კლასებს, რომლებიც შედიან ამორჩეული რეგულარობის კლასში.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{C}_\mathbf{S}(0,0) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \mathbf{C}_\mathbf{S}(1,0) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbf{C}_\mathbf{S}(0,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbf{C}_\mathbf{S}(2,0) \arrow[dr] & & \mathbf{C}_\mathbf{S}(1,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbf{C}_\mathbf{S}(0,2) \arrow[dl] \\
 & \mathbf{C}_\mathbf{S}(2,1) \arrow[dr] & & \mathbf{C}_\mathbf{S}(1,2) \arrow[dl] & \\
 & & \mathbf{C}_\mathbf{S}(2,2) & &
\end{tikzcd}$$

24. ვთქვათ, $\mathbf{S}=\mathbf{Z}=(Z,+)$ არის ყველა მთელი რიცხვების ნახევარჯგუფი (ჯგუფი) შეკრების ოპერაციის მიმართ, ხოლო Z_2 და Z_3 კი შესაბამისად არიან ორისა და სამის ჯერადი ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლე. აჩვენეთ, რომ $Z_2\cup Z_3$ არაა ჩაკეტილი მთელი რიცხვების შეკრების ოპერაციის მიმართ.
25. ვთქვათ, $\mathbf{S}=\mathbf{Z}=(Z,+)$ არის ყველა მთელი რიცხვების ნახევარ-

ჯგუფი (ჯგუფი) შეკრების ოპერაციის მიმართ. ცხადია, მისი წარმომქმნელები იქნებიან $M=\{-1,1\}$ და $M_1=\{-1,1\}\cup M'$ სიმრავლეები, სადაც $M'\subseteq Z\setminus\{-1,1\}$. მათგან $M=\{-1,1\}$ არის $\mathbf{Z}$ ნახევარჯგუფის დაუყვანი წარმომქმნელთა სიმრავლე.

26. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია; $\varepsilon\in S$ და $\varepsilon\cdot\varepsilon=\varepsilon$; $\varphi:S\to S$ ისეთი ასახვაა, რომ $\varphi(a)=\varepsilon$ ყოველი $a\in S$ ელემენტისათვის. აჩვენეთ, რომ φ ჰომომორფული ასახვაა $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფისა $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფში.

27. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფია; $i_S:S\to S$ ისეთი ასახვაა, რომ $i_S(a)=a$ ყოველი $a\in S-$სათვის. აჩვენეთ, რომ i_s ასახვა $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ავტომორფიზმია.

28. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფზე კონგრუენციის შემდეგი ორი განმარტება ერთმანეთის ქვივალენტურია:

1) ε ექვივალენტობის მიმართებას ეწოდება კონგრუენცია $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფზე, თუ $a\varepsilon b$ და $a_1\varepsilon b_1$ $(a,b,a_1,b_1\in S)$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $(a*a_1)\varepsilon(b*b_1)$ პირობა;

2) ε ეკვივალენტობის მიმართებას ეწოდება კონგრუენცია $\mathbf{S}=(S,*)$ ნახევარჯგუფზე, თუ $a\varepsilon b$ $(a,b\in S)$ პიროზებიდან ნებისმიერი $c\in S$ ელემენტისათვის ყოველთვის გამომდინარეობს $(c*a)\varepsilon(c*b)$ და $(a*c)\varepsilon(b*c)$ პირობები.

29. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ რომელიღაც ნახევარჯგუფია, ხოლო $S^1=S$, თუ 1 არის S ნახევარჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი ან $S^1=S\cup\{1\}$ ნახევარჯგუფია გარედან მიერთებული ერთეულით. აჩვენეთ, რომ

1) ყოველი $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფი S^1 სიმრავლის ყველა გარდაქმნა-

თა $\mathbf{T}_{S^1}$ ნახევარჯგუფის რომელიღაც ქვენახევარჯგუფის იზომორფულია;

2) ყოველი $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფი S^1 სიმრავლეზე ყველა ბინარულ მიმართებათა $\mathbf{B}_{S^1}$ ნახევარჯგუფის რომელიღაც ქვენახევარჯგუფის იზომორფულია;

3) ყოველი $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფი წარმოადგენს თავისუფალი $\mathbf{F}_S$ ნახევარჯგუფის ჰომომორფულ სახეს.

30. ვთქვათ, $\mathbf{Z}=(Z,+)$ ყველა მთელი რიცხვების ადიციური ჯგუფია; $mZ=\{m\cdot k\mid k\in Z\}$; $i+mZ=\{i+mk\mid k\in Z\}$, სადაც $0\le i\le m-1$ და $Z_m=\{i+mZ\mid 0\le i\le m-1\}$.

დავუშვათ, რომ $i+mZ, j+mZ\in Z_m$ და Z_m სიმრავლეში განვმარტოთ $(\breve{+})$ და სიმეტრიულის აღების ოპერაციები შემდეგნაირად $(i+mZ)\breve{+}(j+mZ)=(i+j)+mZ$, $\breve{-}(i+mZ)=-i+mZ$. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{Z_m}=(Z_m,\breve{+},\breve{-})$ ალგებრა ჯგუფია, რომელსაც ნაშთთა კლასების ჯგუფი ეწოდება $m-$ის მოდულით.

31. ვთქვათ, $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ იდემპოტენტურ ელემენტთა კომუტაციური ნახევარჯგუფია. $\le$ ბინარული მიმართებაა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $a\le b$ $(a,b\in S)$ მხოლოდ მაშინ, როცა $a\cdot b=a$. აჩვენეთ, რომ α დალაგების მიმართებაა S ნახევარმესერზე.

32. აჩვენეთ, რომ ყოველი კომუტაციური პერიოდული ნახევარჯგუფი ერთიდემპოტენტიან ნახევარჯგუფთა ნახევარმესერია.

33. ვთქვათ, ε არის $\mathbf{S}=(S,\cdot)$ ნახევარჯგუფის რომელიღაც იდემპოტენტური ელემენტი. $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon S\varepsilon,\cdot)$ არის $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფი ε ერთეულოვანი ელემენტით, ხოლო G_ε აღნიშნულია $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}$ ნახევარჯგუფში ε ერთეულოვანი ელემენ-

ტის მიმართ ყველა შებრუნებად ელემენტთა სიმრავლე. აჩვენეთ, რომ

1) $\mathbf{G}_\varepsilon = (G_\varepsilon, \cdot)$ არის **εSε** ნახევარჯგუფის ქვეჯგუფი;

2) თუ $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ არის ისეთი ჯგუფი, რომ $G \cap G_\varepsilon \neq \varnothing$, მაშინ **G** იქნება $\mathbf{G}_\varepsilon$ ჯგუფის ქვეჯგუფი.

34. აჩვენეთ, რომ **S** ნახევარჯგუფის როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა და ორმხრივი იდეალები **S** ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფებია.

35. ვთქვათ, $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ ნახევარჯგუფია, ხოლო S'_α $(\alpha \in \Omega)$ არიან **S** ნახევარჯგუფის მარჯვენა (მარცხენა, ორმხვრივ) იდეალები. თუ $S'_1 = \bigcap_{\alpha\in\Omega} S'_\alpha$, $S'_2 = \bigcup_{\alpha\in\Omega} S'_\alpha$ და $S'_1 \neq \varnothing$. აჩვენეთ, რომ S'_1 და S'_2 სიმრავლეები იქნებიან **S** ნახევარჯგუფის მარჯვენა (მარცხენა, ორმხრივ) იდეალები.

36. აჩვენეთ, რომ თუ $a \in S$ და $a \cdot x \cdot a = a$, რომელიღაც $x \in S$ ელემენტისათვის და $x \cdot a \cdot x = b$. აჩვენეთ, რომ $a \cdot x$ და $x \cdot a$ არიან **S** ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები, ხოლო a და b ელემენტები კი რეგულარულად შეუღლებული იქნებიან.

37. აჩვენეთ, რომ ჯგუფი რეგულარული და ინვერსიული ნახევარჯგუფებია.

38. ვთქვათ, X ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა. $f: Y \to Z$ ასახვაა X სიმრავლის Y ქვესიმრავლიდან X სიმრავლის Z ქვესიმრავლეზე (მას X სიმრავლის ნაწილობრივ ასახვას უწოდებენ). მივიღოთ, რომ $i_\varnothing : \varnothing \to \varnothing$ (ცარიელი ასახვა) ასახვაც X სიმრავლის ნაწილობრივი ასახვაა. P_X სიმბოლოთი ავღნიშნოთ X სიმრავლის ყველა ნაწილობრივ ასახვათა სიმრავლე. ახლა ვთქვათ f და g არის X სიმრავლოს ნებისმიერი ორი ნაწილობრივი ასახვა. f ასახვის მნიშვნელობათა სიმრავლისა და g ასახვის განსაზღვრის არის თანაკვეთა ავღნიშნოთ X_{fg} სიმბოლოთი. ახლა f და g ასახვების ნამრავლი განვმარტოთ შემდეგნაირად:

1) $f \cdot g$ იყოს ცარიელი $i_\varnothing$ ასახვა, თუ $X_{fg} = \varnothing$;

2) თუ $t \in X_{fg}$, მაშინ f ასახვის განსაზღვრის არიდან არსებობს ისეთი x ელემენტი და g ასახვის მნიშვნელობათა სიმრავლიდან ისეთი z ელემენტი, რომ $f(x) = t$ და $g(t) = z$. ყველა ასეთი x ელემენტების სიმრავლე იყოს $f \cdot g$ ასახვის განსაზღვრის არე და ყველა ასეთი z ელემენტების სიმრავლე იყოს $f \cdot g$ ასახვის მნიშვნელობათა სიმრავლე. ცხადია ასეთი $f \cdot g$ ასახვა დასახელებული f და g ასახვებისათვის ცალსახად განისაზღვრება.

აჩვენეთ, რომ P_X სიმრავლე, მასში ასეთნაირად განმარტებული X სიმრავლის ნაწილობრივ ასახვათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ იქნება ნახევარჯგუფი (მას X სიმრავლის ყველა ნაწილობრივ ასახვათა ნახევარჯგუფი ეწოდება).

39. ვთქვათ, P_X არის X სიმრავლის ყველა ნაწილობრივ ასახვათა ნახევარჯგუფი. J_X არის X სიმრავლის ყველა იმ ნაწილობრივ ასახვათა ნახევარჯგუფი, რომლებიც ბიექციებს წარმოადგენენ. აჩვენეთ, რომ J_X სიმრავლე X სიმრავლის არის P_X ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფი.

40. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ინვერსული ნახევარჯგუფი რომელიღაც X სიმრავლეზე განსაზღვრული J_X ნახევარჯგუფის რომელიმე ქვენახევარჯგუფის იზომორფულია.

პასუხები

1. 1) -3; 2) $0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$; 3) $0, 1$; 4) $1, 2$; 5) $0, \frac{1}{2}$; 6) $2, 3$; 7) $\frac{1}{2}, 1$.

2. 1) $e = 0$; სიმეტრიზებადია $1-$საგან განსხვავებული ელემენ-

ტები;

2) $e=2$; სიმეტრიზებადია $1-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები;

3) $e=\frac{1}{2}$; სიმეტრიზებადია $1-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები;

4) $e=3$; სიმეტრიზებადია $2-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები;

5) $e=0$; სიმეტრიზებადია $-1-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები;

6) $e=-\frac{1}{2}$; სიმეტრიზებადია $-1-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები;

7) $e=-\frac{2}{5}$; სიმეტრიზებადია $-\frac{1}{2}-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები;

8) $e=-3$; სიმეტრიზებადია $-\frac{7}{2}-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები;

9) $e=-2$; სიმეტრიზებადია $\frac{5}{2}-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები;

10) $e=-\frac{2}{7}$; სიმეტრიზებადია $-\frac{1}{3}-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები;

11) $e=-1$; სიმეტრიზებადია $-\frac{7}{6}-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები;

12) $e=-\frac{6}{7}$; სიმეტრიზებადია $-1-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები.

3. 1) $e=3$; სიმეტრიზებადია $1-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $\frac{13}{9}$;

2) $e=-\frac{4}{3}$; სიმეტრიზებადია $-2-$საგან განსხვავებული ელე-მენტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $-\frac{53}{27}$;

3) $e=\frac{3}{2}$; სიმეტრიზებადია $1-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $\frac{37}{36}$;

4) $e=-\frac{1}{2}$; სიმეტრიზებადია $-1-$საგან განსხვავებული ელე-მენტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $-\frac{43}{44}$;

5) $e=1$; სიმეტრიზებადია $-1-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $-\frac{7}{11}$;

6) $e=-1$; სიმეტრიზებადია $1-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $\frac{13}{9}$;

7) $e=4$; სიმეტრიზებადია $2-$საგან განსხვავებული ელემენ-ტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $\frac{5}{2}$;

8) $e=\frac{5}{2}$; სიმეტრიზებადია $2-$საგან განსხვავებული ელემენ-

ტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $\frac{65}{32}$;

9) $e=-\frac{3}{2}$; სიმეტრიზებადია $-2-$საგან განსხვავებული ელემენტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $-\frac{95}{48}$;

10) $e=\frac{1}{2}$; სიმეტრიზებადია $1-$საგან განსხვავებული ელემენტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $\frac{37}{36}$;

11) $e=0$; სიმეტრიზებადია $-2-$საგან განსხვავებული ელემენტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $-\frac{5}{3}$;

12) $e=-1$; სიმეტრიზებადია $-3-$საგან განსხვავებული ელემენტები, $10-$ის სიმეტრიული ელემენტია $-\frac{35}{13}$.

§ 19. ჯგუფები

1. $\mathbf{X}=(X,*,')$ ალგებრას, სადაც $(*)$ არის ბინარული ალგებრული ოპერაცია, ხოლო $(')$ უნარული ალგებრული ოპერაციაა, ჯგუფი ეწოდება, თუ:

1) $(X,*)$ მონოიდია $(*)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური e ელემენტით;

2) ყოველი $x\in X$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $x'\in X$ ელემენტი, რომ $x*x'=x'*x=e$;

თუ $(*)$ ოპერაცია აღნიშნულია $(+)$ სიმბოლოთი, მაშინ მას X სიმრავლეზე შეკრების ოპერაცია ეწოდება. X სიმრავლის ნეიტრალურ e ელემენტს და x ელემენტის სიმეტრიულ x' ელემენტს შეკრების ოპერაციის მიმართ, შესაბამისად ნულოვან და მოპირდაპირე ელემენტებს უწოდებენ და 0 და $-x$ სიმბოლოებით აღნიშნავენ. ამ შემთხვევაში მოცემული ჯგუფის აღსანიშნავად გამოიყენება $\mathbf{X}=(X,+,-)$ სიმბოლო და მას X სიმრავლის ადიციური ჯგუფი ეწოდება.

თუ $(*)$ ოპერაცია აღნიშნულია $(\cdot)$ სიმბოლოთი, მაშინ მას X სიმრავლეზე გამრავლების ოპერაცია ეწოდება. X სიმრავლის ნეიტრალურ e ელემენტს და x ელემენტის სიმეტრიულ x' ელემენტს გამრავლების ოპერაციის მიმართ, შესაბამისად, ერთეულოვან და შებრუნებულ ელემენტებს უწოდებენ და 1 და x^{-1} სიმბოლოებით აღნიშნავენ. ამ შემთხვევაში მოცემული ჯგუფის აღსანიშნავად გამოიყენება $\mathbf{X}=(X,\cdot,^{-1})$ სიმბოლო და მას X სიმრავლის მულტიპლიკაციური ჯგუფი ეწოდება.

თუ $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფია, მაშინ X სიმრავლის $|X|$ სიმძლავრეს $\mathbf{X}$ ჯგუფის რიგი ეწოდება. თუ $|X|$ სასრული რიცხვია, მაშინ $\mathbf{X}$ ჯგუფს სასრული რიგის ჯგუფი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი უსასრულო რიგის ჯგუფი ეწოდება.

$\mathbf{X}$ ჯგუფს ეწოდება აბელური ან კიდევ კომუტაციური, თუ ჯგუფში განმარტებული $(*)$ ოპერაცია კომუტაციურია.

$\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ნებისმიერ $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ ქვეალგებრას $\mathbf{X}$ ჯგუფის ქვეჯგუფი ეწოდება.

$\mathbf{X}$ ჯგუფის $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ ქვეჯგუფის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ Y სიმრავლე ჩაკეტილია ყველა იმ ოპერაციების მიმართ, რომლებიც $\mathbf{X}$ ჯგუფშია განმარტებული.

შევნიშნოთ, რომ ყოველ ჯგუფს ორი ქვეჯგუფი მაინც გააჩნია. ესენია: $(\{e\},*,')$ და $\mathbf{X}=(X,*,')$, სადაც e მოცემული ჯგუფის ნეიტრალური ელემენტია.

2. ვთქვათ $\mathbf{X}=(X,*,')$ და $\mathbf{Y}=(Y,*_1,'')$ მოცემული ჯგუფებია. თუ h ასახვა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში ინახავს $\mathbf{X}$ ჯგუფის ყველა ძირითად ოპერაციას, მაშინ მას $\mathbf{X}$ ჯგუფის $\mathbf{Y}$ ჯგუფში ჰომომორფული ასახვა ეწოდება.

ცხადია, თუ h არის $\mathbf{X}$ ჯგუფის $\mathbf{Y}$ ჯგუფში ჰომომორფული ასახვა, მაშინ ნებისმიერი $a,b\in X-$სათვის ყოველთვის სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

$$h(a*b)=h(a)*_1 h(b),\quad h(a')=(h(a))'.$$

თუ h ინექციაა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში, მაშინ h ჰომომორფიზმს $\mathbf{X}$ ჯგუფისა $\mathbf{Y}$ ჯგუფში მონომორფიზმი ეწოდება.

თუ h სურექციაა X სიმრავლისა Y სიმრავლეზე, მაშინ h ჰომომორფიზმს $\mathbf{X}$ ჯგუფისა $\mathbf{Y}$ ჯგუფზე ეპიმორფიზმი ეწოდება.

თუ h არის ბიექცია X და Y სიმრავლეებს შორის, მაშინ h ჰომომორფიზმს $\mathbf{X}$ ჯგუფისა $\mathbf{Y}$ ჯგუფზე იზომორფიზმი ეწოდება.

თუ h ასახვა ჰომომორფიზმია $\mathbf{X}$ ჯგუფისა თავისთავში, მაშინ მას ენდომორფიზმი ეწოდება, ხოლო h იზომორფიზმს კი ავტომორფიზმი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ იზომორფული ჯგუფები ითვლებიან ეკვივალენტურ ჯგუფებად და მათი ერთმანეთისაგან განსხვავება არ ხდება, თუმცა მათი ელემენტები და ოპერაციების ჩანაწერები შეიძლება ერთმანეთისაგან განსხვავებულნი იყოს.

3. X სიმრავლის a ელემენტს $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ცენტრალური ელემენტი ეწოდება, თუ $a*x=x*a$ ყოველი x ელემენტისათვის აღებული X სიმრავლიდან. $\mathbf{X}$ ჯგუფის ყველა ცენტრალური ელემენტის სიმრავლეს კი $\mathbf{X}$ ჯგუფის ცენტრი ეწოდება და შემდგომში $\mathbf{Z}(\mathbf{X})$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ცხადია, ჯგუფის ნეიტრალური ელემენტი ყოველთვის $Z(X)$ სიმრავლეს ეკუთვნის და ამიტომაც $Z(X)$ ყოველთვის არაცარიელია.

ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,*,')$ მოცემული ჯგუფია; Y არის X სიმრავლის რომელიღაც არაცარიელი ქვესიმრავლე და a კი X სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტია. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$a*Y=\{a*y\mid y\in Y\},\quad Y*a=\{y*a\mid y\in Y\}.$$

4. $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ ქვეჯგუფს $\mathbf{X}$ ჯგუფის ნორმალური გამყოფი ეწოდება, თუ $a*Y=Y*a$, ყოველი $a\in X$ ელემენტისათვის.

ადვილად შემოწმდება, რომ $(\{e\},*,')$ და $\mathbf{X}=(X,*,')$ ქვეჯგუფები $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ნორმალური გამყოფებია. ასევე, აბელური ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი მისი ნორმალური გამყოფია.

5. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,*,')$ მოცემული ჯგუფია და $a,b\in X$. მაშინ $a'*b'*a*b$ ელემენტს a და b ელემენტების კომუტატორი ეწოდება და $[a,b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი. $[a,b]=a'*b'*a*b$.

თუ $M=\{[a,b]\mid a,b\in X\}$, მაშინ $\mathbf{X}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს, რომელიც M სიმრავლით წარმოიქმნება $\mathbf{X}$ ჯგუფის კომუტანტი

ეწოდება და $\mathbf{K}(\mathbf{X})=(K,*,')$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

6. თუ $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ არის $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ქვეჯგუფი, მაშინ ε_Y ეკვივალენტობის მიმართ $a\varepsilon_Y=Y*a$ $(a\in X)$ კლასებს X სიმრავლის მარჯვენა მოსაზღვრე კლასები ეწოდება $\mathbf{Y}$ ქვეჯგუფის მიმართ, ხოლო ε'_Y ეკვივალენტობის მიმართ $a\varepsilon'_Y=a*Y$ კლასებს X სიმრავლის მარცხენა მოსაზღვრე კლასები ეწოდება $\mathbf{Y}$ ქვეჯგუფის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ $\mathbf{X}$ ჯგუფის $\mathbf{Y}$ ქვეჯგუფის მიმართ დაშლის მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეები საზოგადოდ ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. ცხადია, ეს სიმრავლეები ერთმანეთს დაემთხვევა, როცა $\mathbf{Y}$ ქვეჯგუფი $\mathbf{X}$ ჯგუფის ნორმალური გამყოფია.

7. მტკიცდება, რომ $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ყოველ $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ ნორმალურ გამყოფს შეესაბამება ε_Y კონგრუენცია $\mathbf{X}$ ჯგუფზე. ამიტომ $X/\varepsilon_Y=\{x\varepsilon_Y\mid x\in X\}$ ფაქტორსიმრავლეზე შეიძლება განვმარტოთ $(\breve{*})$ და სიმეტრიულის აღების ოპერაციები შემდეგნაირად: $x\varepsilon_Y\,\breve{*}\,y\varepsilon_Y=(x*y)\varepsilon_Y$, $(x\varepsilon_Y)''=x'\varepsilon_Y$ ნებისმიერი $x\varepsilon_Y, y\varepsilon_Y\in X/\varepsilon_Y$ – სათვის. მტკიცდება, რომ ალგებრა $\mathbf{X}/\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{Y}}=\left(X/\varepsilon_Y,\breve{*},''\right)$ ჯგუფია, რომელსაც $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ფაქტორჯგუფი ეწოდება $\mathbf{Y}$ ნორმალური გამყოფის მიმართ.

8. ვთქვათ, $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ არის სასრული $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ქვეჯგუფი. მაშინ $\mathbf{X}$ ჯგუფის $\mathbf{Y}$ ქვეჯგუფის მიმართ ყველა მარცხენა (მარჯვენა) მოსაზღვრე კლასების რაოდენობას $\mathbf{Y}$ ქვეჯგუფის ინდექსი ეწოდება $\mathbf{X}$ ჯგუფში.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{Y}$ ქვეჯგუფის ინდექსი სასრულ $\mathbf{X}$ ჯგუფში $\left|X/Y\right|$ - ის ტოლია.

9. ცნობილია, თუ $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ არის სასრული $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ქვეჯგუფი, მაშინ $\mathbf{X}$ ჯგუფის რიგი $\mathbf{Y}$ ქვეჯგუფის რიგისა და მოცემულ ჯგუფში ამ ქვეჯგუფის ინდექსის ნამრავლის ტოლია, ე.ი. $|X|=|Y|\cdot\left|X/Y\right|$ (ლაგრანჟის თეორემა).

10. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფია და $a\in X$. $\mathbf{X}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს, რომელიც $M=\{a\}$ სიმრავლით არის წარმოქმნილი $\mathbf{X}$ ჯგუფის a ელემენტით წარმოქმნილი ციკლური ჯგუფი ეწოდება და $\langle \mathbf{a}\rangle=(\langle a\rangle,*,')$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ცხადია, რომ $\langle \mathbf{a}\rangle$ ჯგუფის ყოველი b ელემენტი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას $b=\underbrace{a*a*\cdots*a}_{m}=a^m$ ან $b=\underbrace{a'*a'*\cdots*a'}_{m}=(a')^m$ სახით, სადაც m რომელიღაც ნატურალური რიცხვია.

$\langle a\rangle$ სიმრავლის $|\langle a\rangle|$ სიმძლავრეს a ელემენტის რიგი ეწოდება.

თუ $|\langle a\rangle|$ სასრული რიცხვია, მაშინ a ელემენტს სასრული რიგის ელემენტი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი უსასრულო რიგის ელემენტი ეწოდება.

თუ a ელემენტის რიგი არის n, ე.ი. თუ $a^n=e$, მაშინ a^k $(k\le n)$ ელემენტის სიმეტრიული ელემენტი ყოველთვის იქნება a^{n-k} ელემენტი.

შევნიშნოთ, რომ ციკლური ჯგუფი ყოველთვის აბელურია.

მაგალითი 1. წესიერი $n-$კუთხედის ბრუნვათა ჯგუფი.
წესიერი $n-$კუთხედის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტებია – წესიერი $n-$კუთხედის სიბრტყის ისეთი ბრუნვები რომელიღაც კუთხით, რომლის დროსაც მოცემული ფიგურა თავისთავს ემთხვევა. რადგანაც წესიერი $n-$კუთხედის ყოველი წვერო უნდა დაემთხვეს მის რომელიმე წვეროს ამიტომ მობრუნების

ცენტრი, თუ მისი მობრუნება არატრივიალურია (ე.ი არ არის იგივური ასახვა), მის ცენტრს ემთხვევა. ამ შემთხვევაში მობრუნების კუთხე (ჯერადია $2\pi-$ის) ემთხვევა $k\cdot\frac{2\pi}{n}$, სადაც $k=0,1,\dots,n-1$.

მაგალითი 2. წესიერი $n-$კუთხედის სიმეტრიათა ჯგუფი.
წესიერი $n-$კუთხედის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტებია – მისი სიბრტის ისეთი მობრუნებები, რომლის დროსაც მოცემული ფიგურა თავისთავს ემთხვევა. ამ შემთხვევაში ფიგურის ბრუნვა ხდება მისი სიმეტრიის ცენტრისა და სიმეტრიის ღერძების მიმართ.

სიმეტრიის ღერძთა რიცხვი ზუსტად $n-$ის ტოლია. თუ $n-$ლუწი რიცხვია $(n\ne 2)$, მაშინ $\frac{n}{2}$ რაოდენობის სიმეტრიის ღერძები გადიან წესიერი $n-$კუთხედის მოპირდაპირე წვეროებზე და მათი მოპირდაპირე გვერდების შუა წერტილებზე. თუ $n-$კენტი რიცხვია, მაშინ სიმეტრიის ყოველი ღერძი გადის წესიერი $n-$კუთხედის რომელიმე წვეროზე და ამ წვეროს მოპირდაპირე გვერდის შუა წერტილზე (იხ. წესიერი სამკუთხედის, ხუთკუთხედისა და ექვსკუთხედის შემთხვევები).

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ $\mathbf{Q}=(Q,+,-)$ ყველა რაციონალური რიცხვების ადიციური ჯგუფია. არის თუ არა ჩაკეტილი $\mathbf{Q}$ ჯგუფის მთავარ ოპერაციების მიმართ Q სიმრავლის შემდეგი ქვესიმრავლეები:
   1) ყველა ნატურალური რიცხვების სიმრავლე;
   2) ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლე;
   3) ყველა ლუწი რიცხვების სიმრავლე;
   4) n მთელი რიცხვის ჯერადი ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლე;

5) ყველა კენტი რიცხვების სიმრავლე;

6) ყველა კენტმნიშვნელიანი რაციონალური რიცხვების სიმრავლე;

7) ყველა ლუწმნიშვნელიანი რაციონალური რიცხვების სიმრავლე.

2. ვთქვათ, $Q' = Q \setminus \{0\}$. $Q' = (Q', \cdot, ^{-1})$ ყველა ნულისაგან განსხვავებული რაციონალური რიცხვების ჯგუფია. არის თუ არა ჩაკეტილი $\mathbf{Q}'$ ჯგუფის მთავარ ოპერაციების მიმართ Q' სიმრავლის შემდეგი ქვესიმრავლეები:

1) $\{-1,1\}$ სიმრავლე;

2) ნულისაგან განსხვავებული ყველა ლუწმნიშვნელიანი რაციონალური რიცხვების სიმრავლე;

3) ნულისაგან განსხვავებული ყველა კენტმნიშვნელიანი რაციონალური რიცხვების სიმრავლე;

4) $\{2^k \mid k \in Z\}$ სიმრავლე;

5) $\{p^k \mid k \in Z\}$ სიმრავლე, სადაც p მარტივი რიცხვია.

3. შეადგინეთ ელემენტთა გამრავლების ცხრილი (კელის ცხრილი) შემდეგი ჯგუფებისათვის:

1) $5-$ის მოდულით ნაშთა კლასების ადიციური ჯგუფისათვის;

2) $5-$ის მოდულით ნაშთა კლასების მულტიპლიკაციური ჯგუფისათვის;

3) $5-$ის მოდულით და $5-$თან თანამარტივი ნაშთა კლასების მულტიპლიკაციური ჯგუფისათვის;

4) მესამე რიგის ჩასმათა S_3 ჯგუფისათვის;

5) $\{-1,-i,1,i\}$ ელემენტებით შედგენილი ჯგუფისათვის;

6) $\{-1,-i,-j,-k,1,i,j,k\}$ კვატერნიონებით შედგენილი ჯგუფისათვის.

7) მესამე რიგის ლუწ ჩასმათა სიმეტრიული ჯგუფისათვის;

4. ვთქვათ $\mathbf{S_6} = (S_6, \cdot, ^{-1})$ არის მეექვსე რიგის ყველა სიმეტრიულ ჩასმათა ჯგუფი, ხოლო α_1, α_2 და α_3 არიან S_6 სიმრავლის ისეთი ჩასმები, რომ

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,1\,6 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,2\,1\,6\,5\,4 \end{pmatrix}.$$

1) იპოვეთ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ჩასმებით წარმოქმნილი ციკლური ჯგუფები და მათი რიგები.

2) გააჩნია თუ არა $\mathbf{S_6}$ ჯგუფს მეოთხე და მეხუთე რიგის ქვეჯგუფები.

5. ვთქვათ

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} \right\} \text{ და } H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \right\}.$$

1) იპოვეთ $\mathbf{S_3} = (S_3, \cdot, ^{-1})$ ჯგუფის მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასებად დაშლა $\mathrm{H}_1 = (H_1, \cdot, ^{-1})$ და $\mathrm{H}_2 = (H_2, \cdot, ^{-1})$ ქვეჯგუფების მიმართ.

2) აჩვენეთ, რომ H_2 არის $\mathbf{S_3}$ ჯგუფის ნორმალური გამყოფი. იპოვეთ $\mathbf{S_3}$ ჯგუფის $\mathbf{S_3}/\mathrm{H}_2$ ფაქტორჯგუფი H_2 ნორმალური გამყოფის მიმართ.

3) რას უდრის $\mathbf{S_3}$ ჯგუფის H_1 და H_2 ქვეჯგუფების ინდექსები $\mathbf{S_3}$ ჯგუფში.

6. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი სამელემენტიანი ჯგუფი აბელურია. ასევე აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ორი სამელემენტიანი ჯგუფი ერთმანეთის იზომორფულია.

1) იპოვეთ სამელემენტიანი ჯგუფის ყველა ქვეჯგუფები.

7. ვთქვათ, m ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური რიცხვია; $\mathbf{Z}=(Z,+,-)$ კი ყველა მთელი რიცხვების ადიციური ჯგუფია და $mZ=\{m\cdot k \mid k\in Z\}$. იპოვეთ $\mathbf{Z}$ ჯგუფის $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}=\left(Z/mZ,\breve{+},\breve{-}\right)$ ფაქტორჯგუფი $\mathbf{mZ}$ ნორმალური გამყოფის მიმართ.
   1) რას უდრის $\mathbf{Z}$ ჯგუფის $\mathbf{mZ}$ ქვეჯგუფის ინდექსი $\mathbf{Z}$ ჯგუფში.
8. იპოვეთ:
   1) წესიერი სამკუთხედის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტები და ააგეთ კელის ცხრილი;
   2) რომბის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტები, რომელიც კვადრატი არაა და ააგეთ კელის ცხრილი;
   3) მართკუთხედის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტები, რომელიც კვადრატი არაა და ააგეთ კელის ცხრილი;
   4) კვადრატის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტები და ააგეთ კელის ცხრილი;
   5) წესიერი ხუთკუთხედის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტები და ააგეთ კელის ცხრილი;
   6) წესიერი ექვსკუთხედის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტები და ააგეთ კელის ცხრილი;
9. იპოვეთ:
   1) წესიერი სამკუთხედის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტები და ააგეთ კელის ცხრილი;
   2) რომბის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტები, რომელიც კვადრატი არაა და ააგეთ კელის ცხრილი;
   3) მართკუთხედის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტები, რომელიც კვადრატი არაა და ააგეთ კელის ცხრილი;

   4) კვადრატის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტები და ააგეთ კელის ცხრილი;
   5) წესიერი ხუთკუთხედის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტები და ააგეთ კელის ცხრილი;
   6) წესიერი ექვსკუთხედის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტები და ააგეთ კელის ცხრილი;
10. იპოვეთ მეთორმეტე რიგის ციკლური ჯგუფის ყველა ქვეჯგუფი.
11. იპოვეთ ოცდამეოთხე რიგის ციკლური ჯგუფის ყველა ქვეჯგუფი.
12. იპოვეთ ყველა მთელ რიცხვთა ადიციური $\mathbf{Z}=(Z,+,-)$ ჯგუფის ყველა ქვეჯგუფი.
13. ვთქვათ R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა; $(+)$ და $(-)$ შეკრებისა და გამოკლების ოპერაციებია R სიმრავლეზე. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{R}'=(R',*,')$ ალგებრა ჯგუფია, თუ
   1) $R'=R\setminus\{1\}$, $a*b=a+b-ab$ და $a'=\dfrac{a}{a-1}$ ყოველი $a,b\in R'$;
   2) $R'=R\setminus\{-1\}$, $a*b=2ab+2a+2b+1$ და $a'=-\dfrac{4a+3}{4(a+1)}$ ყოველი $a,b\in R'$;
   3) $R'=R\setminus\{-1\}$, $a*b=\dfrac{1}{2}(3ab+3a+3b+1)$ და $a'=-\dfrac{9a+5}{9(a+1)}$ ყოველი $a,b\in R'$.
14. ვთქვათ, C ყველა კომპლექსური რიცხვების სიმრავლეა; $(\cdot)$ გამრავლების ოპერაციაა C სიმრავლეზე. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{C}'=(C',*,')$ ალგებრა ჯგუფია, თუ
   1) $C'=\{z\in C \mid |z|=1\}$, $z_1*z_2=z_1\cdot z_2$, $z'=\dfrac{1}{z}$ ყოველი $z,z_1,z_2\in C'$;

2) $C' = \left\{ z \in C \mid |z| = \frac{1}{3} \right\}$, $z_1 * z_2 = 3z_1 \cdot z_2$, $z' = \frac{1}{9 \cdot z}$ ყოველი $z, z_1, z_2 \in C'$;

3) $C' = \left\{ z \in C \mid z^5 = 1 \right\}$, $z_1 * z_2 = 3z_1 \cdot z_2$, $z' = \frac{1}{9 \cdot z}$ ყოველი $z, z_1, z_2 \in C'$;

4) $C' = \left\{ z \in C \mid z^6 = 2^6 \right\}$, $z_1 * z_2 = \frac{1}{2} z_1 \cdot z_2$, $z' = \frac{4}{z}$ ყოველი $z, z_1, z_2 \in C'$;

6) $C' = \{ z \in C \mid z \neq 0 \}$, $z_1 * z_2 = 2z_1 \cdot z_2$, $z' = \frac{1}{4 \cdot z}$ ყოველი $z, z_1, z_2 \in C'$;

15. ვთქვათ, C ყველა კომპლექსური რიცხვების სიმრავლეა; $(+)$, $(-)$ და $(\cdot)$ შეკრების, გამოკლების და გამრავლების ოპერაციებია C სიმრავლეზე. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{C}' = (C', *, ')$ ალგებრა ჯგუფია, თუ

1) $C' = \{ (3+i) \cdot r \in C \mid r \in R \}$, $z_1 * z_2 = z_1 + z_2$, $z' = -z$ ყოველი $z, z_1, z_2 \in C'$;

2) $C' = \{ z \in C \mid z \neq 1 \}$, $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - z_1 \cdot z_2$, $z' = \frac{z}{z-1}$ ყოველი $z, z_1, z_2 \in C'$;

3) $C' = C$, $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 + i$, $z' = -(2i + z)$ ყოველი $z, z_1, z_2 \in C'$;

4) $C' = \{ r + 2i \mid r \in R \}$, $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - 2i$, $z' = 4i - z$ ყოველი $z, z_1, z_2 \in C'$.

16. ვთქვათ, $\mathbf{X} = (X, \cdot, ^{-1})$ მოცემული ჯგუფია; $a, b \in X$; m და n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია და $a^{-m} = (a^{-1})^m$. დაამტკიცეთ შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

1) $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$; 2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot a^n$, თუ $\mathbf{X}$ აბელური ჯგუფია.

17. ვთქვათ, $\mathbf{X} = (X, *, ')$ ნებისმიერი ჯგუფია. აჩვენეთ, რომ ისეთი $h: X \to X$ ასახვა, რომელიც ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის აკმაყოფილებს $h(x) = x'$ პირობას, წარმოადგენს $\mathbf{X}$ ჯგუფის ანტიავტომორფიზმს.

18. აჩვენეთ, რომ ჯგუფის იზომორფული ალგებრა ჯგუფია.

19. ვთქვათ, რომ $\mathbf{X} = (X, \cdot, ^{-1})$ და $\mathbf{Y} = (Y, \cdot, ^{-1})$ ორი ჯგუფია. $X \times Y$ სიმრავლეში განვმარტოთ $(*)$ და $(')$ ოპერაციები შემდეგნაირად:

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) \text{ და } (x, y)' = (x^{-1}, y^{-1}).$$

აჩვენეთ, რომ $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = (X \times Y, *, ')$ ალგებრა ჯგუფია.

20. აჩვენეთ, რომ ციკლური ჯგუფის ფაქტორჯგუფი ციკლურია.

21. აჩვენეთ, რომ $\sqrt[n]{1}$ ყველა ფესვების მულტიპლიკაციური ჯგუფი $n-$ის მოდულით ნაშთა კლასების ადიციური ჯგუფის იზომორფულია.

22. მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ $n-$ური რიგის სიმეტრიულ ჩასმათა ჯგუფის რიგი $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ $-$ის ტოლია.

23. აჩვენეთ, თუ მულტიპლიკაციური ჯგუფი ისეთია, რომ მისი ყოველი ელემენტის კვადრატი ჯგუფის ერთეულის ტოლია, მაშინ ჯგუფი აბელურია.

24. აჩვენეთ, რომ თუ მოცემული ჯგუფის რიგი არ აღემატება $4-$ს ის ყოველთვის აბელურია.

25. ვთქვათ, G ადიციური აბელური ჯგუფია, n კი მთელი რიცხვია. აჩვენეთ, რომ φ ასახვა რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\varphi(x) = n \cdot x$ ყოველი $x \in G-$სათვის, იქნება G ჯგუფის ენდომორფიზმი.

26. ვთქვათ, R და R^+ შესაბამისად არიან ნამდვილ რიცხვთა ადიციური ჯგუფი და დადებით ნამდვილ რიცხვთა მულტიპლიკაციური ჯგუფი. $\varphi: R \to R^+$ ასახვა კი აკმაყოფილებს პირობას $\varphi(x) = 5^x$ ნებისმიერი $x \in R-$სათვის. აჩვენეთ, რომ φ ასახვა იზომორფიზმია მოცემულ ჯგუფებს შორის.

27. აჩვენეთ, რომ მესამე რიგის სიმეტრიულ ჩასმათა ჯგუფი და წესიერი სამკუთხედის სიმეტრიების ჯგუფი ერთმანეთის იზომორფულია.

28. ვთქვათ, G მულტიპლიკაციური აბელური ჯგუფია, ხოლო $\varphi{:}G\to G$ ასახვა კი აკმაყოფილებს პირობას $\varphi(x)=x^{-1}$ ნებისმიერი $x\in G-$ სათვის. აჩვენეთ, რომ φ ასახვა G ჯგუფის ავტომორფიზმია.
29. ვთქვათ, $\mathbf{S_n}=\left(S_n,\cdot,^{-1}\right)$ არის $n-$ური რიგის სიმეტრიულ ჩასმათა ჯგუფი, ხოლო A_n მისი ყველა ლუწი ჩასმების სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{A_n}=\left(A_n,\cdot,^{-1}\right)$ არის $\mathbf{S_n}$ ჯგუფის ქვეჯგუფი.
30. აჩვენეთ, რომ მულტიპლიკაციური ჯგუფის მარცხენა მოსაზღვრე კლასის ელემენტების ყველა შებრუნებული ელემენტების სიმრავლე ქმნის მარჯვენა მოსაზრვრე კლასს.
31. აჩვენეთ, რომ როცა $n>2$, მაშინ $n-1$ რაოდენობის $(1,2)$, $(1,3),...,(1,\mathrm{n})$ ტრანსპოზიციათა სიმრავლე $\mathbf{S_n}$ ჯგუფის წარმომქმნელთა სისტემაა.
32. აჩვენეთ, რომ როცა $n>2$, მაშინ $n-2$ რაოდენობის $(1,2,3)$, $(1,2,4),...,(1,2,\mathrm{n})$ სამელემენტებიანი ციკლების სიმრავლე $\mathbf{A_n}$ ჯგუფის წარმომქმნელთა სისტემაა.
33. ვთქვათ, $\mathbf{G}=\left(\mathrm{G},\cdot,^{-1}\right)$ არის $\mathbf{F}=(F+,-,\cdot,1)$ ველის ელემენტებით შედგენილი $n\times n$ განზომილებიანი ყველა ისეთი მატრიცების სიმრავლე, რომელთაც გააჩნიათ შებრუნებული მატრიცები. H არის $G-$ს ყველა ისეთი მატრიცების სიმრავლე რომელთა დეტერმინანტი $1-$ის ტოლია. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{H}=\left(H,\cdot,^{-1}\right)$ არის $\mathbf{G}$ ჯგუფის ქვეჯგუფი.
34. ვთქვათ, R^{+} ყველა დადებითი ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა. $\mathbf{R}^{+}=\left(R^{+},\cdot,^{-1}\right)$ არის ნამდვილ რიცხვთა მულტიპლიკაციური ჯგუფი. აჩვენეთ, რომ ყოველი ნატურალური $n\geq 1$ რიცხვისათვის $\sqrt[n]{1}$ ყველა ფესვების სიმრავლე იქნება $\mathbf{R}^{+}$ ჯგუფის ერთადერთი ქვეჯგუფი რომლის რიგიც $n-$ის ტოლია.

35. აჩვენეთ, რომ თუ ჯგუფის რიგი მარტივი რიცხვია, მაშინ მისი ყოველი ელემენტი, რომელიც განსხვავებული მისი ნეიტრალური ელემენტისაგან, მოცემული ჯგუფის წარმომქმნელია.
36. აჩვენეთ, რომ თუ G მულტიპლიკაციური აბელური ჯგუფია, ხოლო m და n თანამარტივი რიცხვებია, მაშინ m რიგის a ელემენტისა და n რიგის b ელემენტების ab ნამრავლის რიგი $m\cdot n-$ის ტოლი იქნება.
37. აჩვენეთ, რომ მე-15 რიგის ყოველი ჯგუფი ციკლურია.
38. ვთქვათ, G არის ნებისმიერი ნატურალური $n>1$ რიცხვების შემთხვევაში $\sqrt[n]{1}$ ყველა ფესვებით განსაზღვრული მულტიპლიკაციური ჯგუფი. აჩვენეთ, რომ ყოველი ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური m რიცხვისათვის G ჯგუფი შეიცავს მხოლოდ ერთ m რიგის ციკლურ ქვეჯგუფს.
39. აჩვენეთ, რომ მთელ რიცხვთა ადიციური Z ჯგუფის ნებისმიერი ფაქტორჯგუფი ციკლურია.
40. აჩვენეთ, რომ ციკლური ჯგუფის ნებისმიერი ფაქტორჯგუფი ციკლურია.
41. აჩვენეთ, რომ S_n სიმეტრიული ჯგუფის ფაქტორჯგუფი ლუწ ჩასმათა A_n ქვეჯგუფის მიმართ მეორე რიგისაა.
42. აჩვენეთ, რომ ყველა მთელი რიცხვების ადიციური ჯგუფი ყველა ლუწი რიცხვებით წარმოქმნილი ადიციური ჯგუფის იზომორფულია.
43. ვთქვათ, G რომელიღაც ჩასმათა ჯგუფია, ხოლო $\left(\{-1,1\},\cdot,^{-1}\right)$ მულტიპლიკაციური ჯგუფია. h იყოს ასახვა, რომელიც ყოველ ლუწ ასახვას შეუსამამებს რიცხვ $1-$ს, ხოლო კენტ ასახვას რიცხვ $-1-$ს. აჩვენეთ, რომ h ასახვა ჰომომორფიზმია შესაბამის ჯგუფებს შორის.
44. დაამტკიცეთ, რომ $\sqrt[n]{1}$ ყველა ფესვთა მულტიპლიკაციური ჯგუფი $n-$ის მოდულით ნაშთთა კლასების ადიციური ჯგუფის იზომორფულია.
45. ვთქვათ, G სიმბოლოთი აღნიშნულია ყველა $n\times n-$განზომილებიანი ნამდვილ რიცხვებით შედგენილი მატრიცთა მულტი-

პლიკაციური ჯგუფი, რომელთა დეტერმინანტები განსხვავებულია ნულისაგან. R^+ აღნიშნულია ყველა დადებითი ნამდვილი რიცხვების მულტიპლიკაციური ჯგუფი. h ისეთი ასახვაა, რომელიც G ჯგუფის ყოველ A მატრიცას შეუსაბამებს მის $|A|$ დეტერმინანტს. აჩვენეთ, რომ h ასახვა ჰომომორფიზმია შესაბამის ჯგუფებს შორის, რომლის ბირთვიცაა ყველა იმ $n\times n-$განზომილებიანი მატრიცებით წარმოქმნილი ქვეჯგუფი, რომელთა დეტერმინანტები ერთის ტოლია.

46. ვთქვათ, R ყველა ნამდვილ რიცხვთა ადიციური ჯგუფია. ხოლო K კომპლექსურ რიცხვთა მულტიპლიკაციური ჯგუფია, რომელთა მოდული $1-$ის ტოლია. აჩვენეთ, რომ ასახვა h, რომელიც ყოველ ნამდვილ r რიცხვს შეუსაბამებს კომპლექსურ $h(r)=\cos 2\pi r+i\sin 2\pi r$ არის ჰომომორფიზმი შესაბამის ჯგუფებს შორის Z ბირთვით.

47. ვთქვათ, Q და Z შესაბამისად არიან რაციონალურ რიცხვთა და მთელ რიცხვთა ადიციური ჯგუფები. აჩვენეთ, Q/Z ფაქტორჯგუფის ყოველი ელემენტის რიგი სასრულია. აჩვენეთ, რომ ყოველი ნულისაგან განსხვავებული n ნატურალური რიცხვისათვის Q/Z ფაქტორჯგუფს გააჩნია მოლოდ ერთი ქვეჯგუფი, რომელიც იმავე დროს ციკლურია.

48. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,*,')$ მოცემული ჯგუფია და e მისი ნეიტრალური ელემენტია. აჩვენეთ შემდეგ წინადადებათა სამართლიანობა:

1) თუ $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ არის $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ქვეჯგუფი, მაშინ $e\in Y$;

2) თუ $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფია და $a\in X$, მაშინ $(a')'=a$;

3) თუ $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფია, მაშინ ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის აღებული X სიმრავლიდან $a*x=b$ და $y*a=b$ განტოლებებს ყველთვის გააჩნიათ ერთადერთი $x=a'*b$ და $y=b*a'$ ამონახსნები;

4) თუ $x_1,x_2,...,x_n\in X$, მაშინ $(x_1*x_2*\cdots*x_n)'=x_n'*\cdots*x_2'*x_1'$;

5) $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ ქვეალგებრა $\mathbf{X}$ ჯგუფის ქვეჯგუფია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a*b'\in Y$, ყოველი $a,b\in Y$ ელემენტისათვის.

49. ვთქვათ, a, b და c არიან X ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტები. აჩვენეთ კომუტატორთა შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

1) $[a,b]'=[b,a]$; 2) $[a,b']=b*[b,a]*b'$; 3) $[a',b]=a*[b,a]*a'$;

4) $[a,b']=b*[b,a]*b'$; 5) $[a*b,c]=b'*[a,c]*b*[b,c]$;

6) $[a,b*c]=[a,c]*c'*[a,b]*c$; 7) $a'*[b,c]*a=[a'*b*a,a'*c*a]$.

50. ვთქვათ, $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ არის $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ქვეჯგუფი. ε_Y (ε_Y') ისეთი ბინარული მიმართებაა X სიმრავლეზე, რომ $a\varepsilon_Y b$ $(a\varepsilon_Y' b)$ $(a,b\in X)$ მხოლოდ მაშინ, როცა $a*b'\in Y$ $(a'*b\in Y)$. აჩვენეთ შემდეგ წინადადებათა სამართლიანობა:

1) თუ $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ არის $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ქვეჯგუფი, მაშინ ε_Y იქნება ეკვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე და $a\varepsilon_Y=Y*a$ ყოველი $a\in X$ ელემენტისათვის;

2) თუ $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ არის $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ქვეჯგუფი, მაშინ ε_Y' იქნება ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე და $a\varepsilon_Y'=a*Y$ ყოველი $a\in X$ ელემენტისათვის.

51. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,*,')$ მოცემული ჯგუფია და e მისი ნეიტრალური ელემენტია. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ ქვეჯგუფის მიმართ ყველა მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა;

2) $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ არის $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ნორმალური გამყოფი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a'*y*a\in Y$ ყოველი $a\in X$ და $y\in Y$ ელემენტებისათვის;

3) $\mathbf{X}$ ჯგუფის $\mathbf{Z}(\mathbf{X})$ ცენტრი მოცემული ჯგუფის ნორმალური გამყოფია;

4) $\mathbf{X}$ ჯგუფის $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ კომუტანტი მოცემული ჯგუფის ნორმალური გამყოფია;

5) თუ $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ არის $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ნორმალური გამყოფი, მაშინ ε_Y კონგრუენციაა $\mathbf{X}$ ჯგუფზე;

6) თუ ε არის $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის რომელიღაც კონგრუენცია, მაშინ ε კონგრუენციის მიმართ ის Y კლასი, რომელიც $\mathbf{X}$ ჯგუფის ნეიტრალურ ელემენტს შეიცავს $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ჩაკეტილი სიმრავლეა და გამომდინარე აქედან $\mathbf{Y}=(Y,*,')$ ალგებრა $\mathbf{X}$ ჯგუფის ნორმალური გამყოფია.

52. ვთქვათ, $\mathbf{X}/_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{Y}}}=\left(X/_{\varepsilon_Y},\breve{*},''\right)$ არის $\mathbf{X}=(X,*,')$ ჯგუფის ფაქტორჯგუფი $\mathbf{Y}$ ნორმალური გამყოფის მიმართ. აჩვენეთ შემდეგ წინადადებათა სამართლიანობა:

1) Y სიმრავლე წარმოადგენს $\mathbf{X}/_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{Y}}}$ ფაქტორჯგუფის ნეიტრალურ ელემენტს;

2) $x'\varepsilon_Y$ ელემენტი ყოველთვის არის $x\varepsilon_Y$ ელემენტის სიმეტრიული ელემენტი $\mathbf{X}/_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{Y}}}$ ფაქტორჯგუფში, ე.ი.

$$x\varepsilon_Y \,\breve{*}\, x'\varepsilon_Y = x'\varepsilon_Y \,\breve{*}\, x\varepsilon_Y = eY = Y .$$

53. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,*,')$ ციკლური ჯგუფია წარმოქმნილი a ელემენტით. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) თუ $a^k\neq a^p$ ყოველი $k,p\in Z$ და $k\neq p$, მაშინ X სიმრავლე უსასრულოა, ე.ი. $\mathbf{X}$ უსასრულო რიგის ჯგუფია;

2) თუ $a^p=a^q$ რომელიღაც $p,q\in Z$ და $p\neq q$, მაშინ X სიმრავლე სასრულოა, ე.ი. $\mathbf{X}$ სასრულო რიგის ჯგუფია;

3) ციკლური ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი ციკლურია;

4) ნებისმიერი უსასრულო რიგის ციკლური ჯგუფი ყველა მთელ რიცხვთა ადიციური $\mathbf{Z}=(Z,+,-)$ ჯგუფის იზომორფულია. ნებისმიერი სასრული n რიგის ციკლური ჯგუფი $n-$ის მოდულით ნაშთთა კლასების ადიციური ჯგუფის იზომორფულია.

54. აჩვენეთ, რომ მთელი რიცხვების $(Z,+,-)$ ადიციური ჯგუფი წარმოადგენს უსასრულო რიგის ციკლურ ჯგუფს წარმოქმნილს $M=\{1\}$ სიმრავლით.

პასუხები

1. 1) არაა ჩაკეტილი, 2) ჩაკეტილია, 3) ჩაკეტილია, 4) ჩაკეტილია, 5) არაა ჩაკეტილი, 6) ჩაკეტილია, 7) ჩაკეტილია.
2. 1) ჩაკეტილი, 2) არაა ჩაკეტილი, 3) არაა ჩაკეტილი, 4) ჩაკეტილია, 5) ჩაკეტილია.
3. 1) თუ $5-$ის მოდულით ნაშთთა კლასების ელემენტებია $\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}$ კლასები, მაშინ კელის ცხრილს ექნება სახე:

$(+)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

2) თუ $5-$ის მოდულით ნაშთთა კლასების ელემენტებია $\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}$ კლასები, მაშინ კელის ცხრილს ექნება სახე:

$(\cdot)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

3) 5 – ის მოდულით და 5 – თან თანამარტივი ნაშთთა კლასების მულტიპლიკაციური ჯგუფისათვის;

$(\cdot)$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

4) ვთქვათ, S_3 სიმრავლის ელემენტები წარმოდგენილია შემდეგი სახით:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix},\ \alpha_6=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,2\,1\end{pmatrix}$$

მაშინ კელის ცხრილს ექნება სახე:

$(\cdot)$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_2	α_2	α_1	α_4	α_3	α_6	α_5
α_3	α_3	α_5	α_1	α_6	α_2	α_4
α_4	α_4	α_6	α_2	α_5	α_1	α_3
α_5	α_5	α_3	α_6	α_1	α_4	α_2
α_6	α_6	α_4	α_5	α_2	α_3	α_1

5) $\{-1,-i,1,i\}$ ელემენტებით შედგენილი ჯგუფისათვის;

$(\cdot)$	-1	$-i$	1	i
-1	1	i	-1	$-i$
$-i$	i	-1	$-i$	1
1	-1	$-i$	1	i
i	$-i$	1	i	-1

6) $\{-1,-i,-j,-k,1,i,j,k\}$ კვატერნიონებით შედგენილი ჯგუფისათვის.

$(\cdot)$	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
-1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
$-i$	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
$-j$	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
$-k$	k	$-k$	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
i	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
j	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
k	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

7) მესამე რიგის ლუწ ჩასმათა სიმეტრიული $A_3=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ ჯგუფისათვის, სადაც $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\1\ 2\ 3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\2\ 3\ 1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\3\ 1\ 2\end{pmatrix}$.

$(\cdot)$	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	α_2	α_3
α_2	α_2	α_3	α_1
α_3	α_3	α_1	α_2

4. 1) α_1, α_2 და α_3 ჩასმებით წარმოქმნილ ციკლურ ჯგუფებს შესაბამისად აქვთ სახე:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\\2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\\3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\\4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\\5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\\1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\\6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\\1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\end{pmatrix}\right\} \text{ და } \left\{\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\\3\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\\1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\end{pmatrix}\right\}.$$

მათი რიგებია 5, 2 და 2.

2) გააჩნია, რადგან $\mathbf{S_6}$ ჯგუფის $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&1&6&5\end{pmatrix}$ ელემენტით წარმოქმნილი ციკლურ ქვეჯგუფის

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&1&6&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&1&2&5&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&2&3&6&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}\right\},$$

რიგი $4-$ის ტოლია, ხოლო 1) პუნქტში მოყვანილი $\mathbf{S_6}$ ჯგუფის $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&1&6\end{pmatrix}$ ელემენტით წარმოქმნილი ციკლური ქვეჯგუფის რიგი კი $5-$ის ტოლია.

5. 1) $\mathbf{S_3}$ ჯგუფის $\mathbf{H_1}$ ქვეჯგუფის მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასებად დაშლას შესაბამისად აქვს სახე:

$$H_1;\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot H_1=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\};\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot H_1=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\}.$$

$$H_1;\ H_1\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\};\ H_1\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}.$$

$\mathbf{S_3}$ ჯგუფის $\mathbf{H_2}$ ქვეჯგუფის მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასებად დაშლას შესაბამისად აქვს სახე:

$$H_2,\ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\cdot H_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\};$$

$$H_2,\ H_2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\},$$

ე.ი.

$$S_3/H_2=\left\{H_2,\ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\cdot H_2\right\}=\left\{\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\},\ \left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}\right\}.$$

2) რადგან $\mathbf{S_3}$ ჯგუფის $\mathbf{H_2}$ ქვეჯგუფის მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასებად დაშლა ერთმანეთს ემთხვევა, ამიტომ $\mathbf{H_2}$ არის $\mathbf{S}_3$ ჯგუფის ნორმალური გამყოფი.

3) $\mathbf{S_3}$ ჯგუფის H_1 და H_2 ქვეჯგუფების მიმათ ინდექსები შესაბამისად ტოლია 3 და $2-$ის.

6. 1) თუ $\mathbf{G}=(G,*,')$ არის სამელემენტიანი ჯგუფი e ერთეულოვანი ელემენტით, მაშინ მას გააჩნია მხოლოდ ორი ქვეჯგუფი – ესენია $(\{e\},*,')$ და $\mathbf{G}$.

7. $\mathbf{Z}$ ჯგუფის $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}=\left(Z/mZ,\breve{+},\breve{-}\right)$ ფაქტორჯგუფს $\mathbf{mZ}$ ნორმალური გამყოფის მიმართ აქვს სახე:

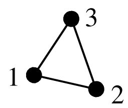
$$Z/mZ=\{1+mZ,\ 2+mZ,\dots,(m-1)+mZ,\ mZ\},$$

სადაც

$$\begin{aligned}&1+mZ=\{1+mk\mid k\in Z\},\\&2+mZ=\{2+mk\mid k\in Z\},\\&-------------\\&(m-1)+mZ=\{(m-1)+mk\mid k\in Z\},\\&mZ=\{mk\mid k\in Z\}.\end{aligned}$$

1) $\mathbf{Z}$ ჯგუფის $\mathbf{mZ}$ ქვეჯგუფის ინდექსი $\mathbf{Z}$ ჯგუფში m ნატურალური რიცხვის ტოლია.

8. 1) წესიერი სამკუთხედის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტებია:

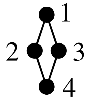


$$\alpha_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

კელის ცხრილს ექნება სახე:

$(\cdot)$	α_0	α_1	α_2
α_0	α_0	α_1	α_2
α_1	α_1	α_2	α_0
α_2	α_2	α_0	α_1

2) იმ რომბის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტებია, რომელიც კვადრატი არაა:

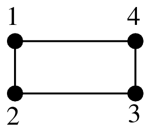


$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

კელის ცხრილს ექნება სახე:

$\cdot$	α_0	α_1
α_0	α_0	α_1
α_1	α_1	α_0

3) იმ მართკუთხედის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტებია, რომე-ლიც კვადრატი არაა.

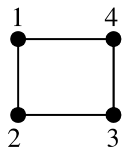


$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

კელის ცხრილს ექნება სახე:

$\cdot$	α_0	α_1
α_0	α_0	α_1
α_1	α_1	α_0

4) კვადრატის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტებია.



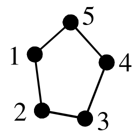
$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

კელის ცხრილს ექნება სახე

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	α_2	α_3	α_0
α_2	α_2	α_3	α_0	α_1
α_3	α_3	α_0	α_1	α_2

5) წესიერი ხუთკუთხედის ბრუნვათა ჯგუფს ელემენტებია.



$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

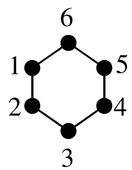
$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

კელის ცხრილს ექნება სახე

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_0
α_2	α_2	α_3	α_4	α_0	α_1
α_3	α_3	α_4	α_0	α_1	α_2
α_4	α_4	α_0	α_1	α_2	α_3

6) წესიერი ექვსკუთხედის ბრუნვათა ჯგუფის ელემენტებია:



$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$,

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

კელის ცხრილს ექნება სახე:

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_0
α_2	α_2	α_3	α_4	α_5	α_0	α_1

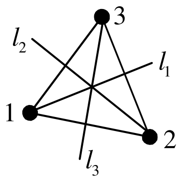
α_3	α_3	α_4	α_5	α_0	α_1	α_2
α_4	α_4	α_5	α_0	α_1	α_2	α_3
α_5	α_5	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4

9. 1) წესიერი სამკუთხედის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტებია:

$$\alpha_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},$$

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},$$

$$\alpha_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$



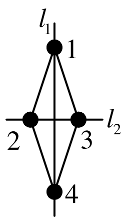
კელის ცხრილს ექნება სახე:

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α_1	α_1	α_2	α_0	α_5	α_3	α_4
α_2	α_2	α_0	α_1	α_4	α_5	α_3
α_3	α_3	α_4	α_5	α_0	α_1	α_2
α_4	α_4	α_5	α_3	α_2	α_0	α_1
α_5	α_5	α_3	α_4	α_1	α_2	α_0

2) იმ რომბის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტებია, რომელიც კვადრატი არაა

$$\alpha_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix},$$

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}.$$

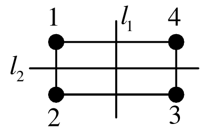


კელის ცხრილს ექნება სახე:

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3

α_0	α_0	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	α_0	α_3	α_2
α_2	α_2	α_3	α_0	α_1
α_3	α_3	α_2	α_1	α_0

3) იმ მართკუთხედის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტებია, რომელიც კვადრატი არაა:



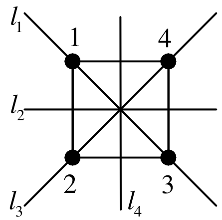
$$\alpha_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},$$

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

კელის ცხრილს ექნება სახე:

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	α_0	α_3	α_2
α_2	α_2	α_3	α_0	α_1
α_3	α_3	α_2	α_1	α_0

4) კვადრატის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტებია:



$$\alpha_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},$$

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix},$$

$$\alpha_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},$$

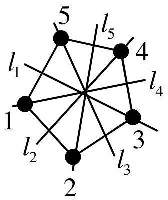
$$\alpha_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix},\ \alpha_7=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

კელის ცხრილს ექნება სახე:

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7

α_1	α_1	α_2	α_3	α_0	α_5	α_6	α_7	α_4
α_2	α_2	α_3	α_0	α_1	α_6	α_7	α_4	α_5
α_3	α_3	α_0	α_1	α_2	α_7	α_4	α_5	α_6
α_4	α_4	α_7	α_6	α_5	α_0	α_3	α_2	α_1
α_5	α_5	α_4	α_7	α_6	α_1	α_0	α_3	α_2
α_6	α_6	α_5	α_4	α_7	α_2	α_1	α_0	α_3
α_7	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0

5) წესიერი ხუთკუთხედის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენ-ტებია:



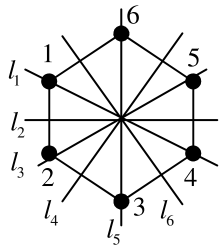
$$\alpha_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix},$$
$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix},$$
$$\alpha_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}.\ \alpha_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&4&3&2\end{pmatrix},$$
$$\alpha_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix},\ \alpha_7=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix},$$
$$\alpha_8=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&4&3\end{pmatrix},\ \alpha_9=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix}.$$

კელის ცხრილს ექნება სახე:

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_0	α_8	α_9	α_5	α_6	α_7
α_2	α_2	α_3	α_4	α_0	α_1	α_6	α_7	α_8	α_9	α_5
α_3	α_3	α_4	α_0	α_1	α_2	α_9	α_5	α_6	α_7	α_8
α_4	α_4	α_0	α_1	α_2	α_3	α_7	α_8	α_9	α_5	α_6
α_5	α_5	α_7	α_9	α_6	α_8	α_0	α_3	α_1	α_4	α_2
α_6	α_6	α_8	α_5	α_7	α_9	α_2	α_0	α_3	α_1	α_4
α_7	α_7	α_9	α_6	α_8	α_5	α_4	α_2	α_0	α_3	α_1

α_8	α_8	α_5	α_7	α_9	α_6	α_1	α_4	α_2	α_0	α_3
α_9	α_9	α_6	α_8	α_5	α_7	α_3	α_1	α_4	α_2	α_0

6) წესიერი ექვსკუთხედის სიმეტრიათა ჯგუფის ელემენტე-ბია.



$$\alpha_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix},$$
$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&1&2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\end{pmatrix},$$
$$\alpha_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&1&2&3&4\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&2&3&4&5\end{pmatrix},$$
$$\alpha_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&3&2\end{pmatrix},\ \alpha_7=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&4&3\end{pmatrix},$$
$$\alpha_8=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&1&6&5&4\end{pmatrix},\ \alpha_9=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&2&1&6&5\end{pmatrix},$$
$$\alpha_{10}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&4&3&2&1&6\end{pmatrix},\ \alpha_{11}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

კელის ცხრილს ექნება სახე:

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_0	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_6
α_2	α_2	α_3	α_4	α_5	α_0	α_1	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_6	α_7
α_3	α_3	α_4	α_5	α_0	α_1	α_2	α_9	α_{10}	α_{11}	α_6	α_7	α_8
α_4	α_4	α_5	α_0	α_1	α_2	α_3	α_{10}	α_{11}	α_6	α_7	α_8	α_9
α_5	α_5	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_{11}	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}
α_6	α_6	α_{11}	α_{10}	α_9	α_8	α_7	α_0	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1
α_7	α_7	α_6	α_{11}	α_{10}	α_9	α_8	α_1	α_0	α_5	α_4	α_3	α_2
α_8	α_8	α_7	α_6	α_{11}	α_{10}	α_9	α_2	α_1	α_0	α_5	α_4	α_3
α_9	α_9	α_8	α_7	α_6	α_{11}	α_{10}	α_3	α_2	α_1	α_0	α_5	α_4
α_{10}	α_{10}	α_9	α_8	α_7	α_6	α_{11}	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0	α_5

α_{11}	α_{11}	α_{10}	α_9	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0

10. მეთორმეტე S_{12} რიგის ციკლური ჯგუფის ქვეჯგუფებია:

1) **ერთეულოვანი** ქვეჯგუფი;

2) S_{12} ჯგუფის $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ \ldots\ 12 \\ 2\ 1\ 3\ \ldots\ 12 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მეორე** რიგისა და მისი იზომორფული ქვეჯგუფები;

3) S_{12} ჯგუფის $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ 12 \\ 3\ 1\ 2\ 4\ \ldots\ 12 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მესამე** რიგისა და მისი იზომორფული ქვეჯგუფები;

4) S_{12} ჯგუფის $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ldots\ 12 \\ 4\ 1\ 2\ 3\ 5\ \ldots\ 12 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მეოთხე** რიგისა და მისი იზომორფული ქვეჯგუფები;

5) S_{12} ჯგუფის $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ \ldots\ 12 \\ 6\ 1\ 2\ 3\ \ 4\ 5\ 7\ \ldots\ 12 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მეექვსე** რიგისა და მისი იზომორფული ქვეჯგუფები;

6) S_{12} ჯგუფის $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1\ \ 2\ 3\ \ 4\ \ 5\ 6\ 7\ \ldots\ 12 \\ 12\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ 5\ \ 6\ \ldots\ 11 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მეთორმეტე** რიგის ქვეჯგუფი.

11. ოცდამეოთხე S_{24} რიგის ციკლური ჯგუფის ქვეჯგუფებია:

1) **ერთეულოვანი** ქვეჯგუფი;

2) S_{24} ჯგუფის $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ \ldots\ 24 \\ 2\ 1\ 3\ \ldots\ 24 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მეორე** რიგისა და მისი იზომორფული ქვეჯგუფები;

3) S_{24} ჯგუფის $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ 24 \\ 3\ 1\ 2\ 4\ \ldots\ 24 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მესამე** რიგისა და მისი იზომორფული ქვეჯგუფები;

4) S_{24} ჯგუფის $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ldots\ 24 \\ 4\ 1\ 2\ 3\ \ 5\ \ldots\ 24 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მეოთხე** რიგისა და მისი იზომორფული ქვეჯგუფები;

5) S_{24} ჯგუფის $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ \ldots\ 24 \\ 6\ 1\ 2\ 3\ \ 4\ 5\ 7\ \ldots\ 24 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მეექვსე** რიგისა და მისი იზომორფული ქვეჯგუფები;

6) S_{24} ჯგუფის $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ \ldots\ 24 \\ 8\ 1\ 2\ 3\ \ 4\ 5\ 6\ 7\ \ 9\ \ldots\ 24 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მერვე** რიგისა და მისი იზომორფული ქვეჯგუფები;

7) S_{24} ჯგუფის $\alpha_6 = \begin{pmatrix} 1\ \ 2\ 3\ 4\ 5\ \ldots\ 12\ \ 13\ \ldots\ 24 \\ 12\ 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ 11\ \ 13\ \ldots\ 24 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **მეთორმეტე** რიგისა და მისი იზომორფული ქვეჯგუფები;

8) S_{24} ჯგუფის $\alpha_7 = \begin{pmatrix} 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ldots\ 23\ \ 24 \\ 24\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ldots\ 22\ \ 23 \end{pmatrix}$ ჩასმით წარმოქმნილი **ოცდამეოთხე** რიგის ქვეჯგუფი.

12. ყველა მთელ რიცხვთა ადიციური $\mathbf{Z} = (Z, +, -)$ ჯგუფის ქვეჯგუფები ამოიწურებიან ყველა იმ ქვეჯგუფებისგან, რომლებიც შედგებიან ფიქსირებული n მთელი რიცხვის ყველა ჯერადი მთელი რიცხვისაგან (n ნებისმიერი მთელი რიცხვია).

§ 20. რგოლები

1. $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ალგებრას, სადაც $(+)$ და $(\cdot)$ ბინარული ალგებრული ოპერაციებია, $(-)$ უნარული ალგებრული ოპერაციაა, ხოლო 1 ნულარული ალგებრული ოპერაციაა, რგოლი ეწოდება, თუ

1) $(X,+,-)$ აბელური ჯგუფია $(+)$ და $(-)$ ოპერაციების მიმართ ნულოვანი $\mathbf{0}$ ელემენტით;

2) $(X,\cdot)$ მონოიდია $(\cdot)$ ოპერაციის მიმართ ერთეულოვანი 1 ელემენტით;

3) $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ და $(y+z)\cdot x=(y\cdot x)+(z\cdot x)$;

$(X,+,-)$ აბელურ ჯგუფს, $\mathbf{X}$ რგოლის ადიციური ჯგუფი ეწოდება.

$(X,\cdot,1)$ ალგებრას $\mathbf{X}$ რგოლის მულტიპლიკაციური მონოიდი ეწოდება.

$\mathbf{X}$ რგოლს ეწოდება კომუტაციური, თუ რგოლში განმარტებული გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურია.

ამბობენ, $\mathbf{X}$ რგოლია ნულის გამყოფი ელემენტების გარეშე, თუ ნებისმიერი $x,y\in X$ ელემენტებისათვის $x\neq\mathbf{0}$ და $y\neq\mathbf{0}$ პირობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს პირობა $x\cdot y\neq\mathbf{0}$.

კომუტაციურ $\mathbf{X}$ რგოლს ნულის გამყოფი ელემენტების გარეშე მთელობის არე ეწოდება.

იმ უმცირეს $n\geq 1$ ნატურალურ რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $n\cdot 1=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=\mathbf{0}$, რგოლის მახასიათებელი ეწოდება.

თუ ტოლობა $n\cdot 1=\mathbf{0}$ სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $n=0$, მაშინ $\mathbf{X}-$ს ნულმახასიათებლიანი რგოლი ეწოდება.

2. $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რგოლის ნებისმიერ $\mathbf{Y}=(Y,+,-,\cdot,1)$ ქვეალგებრას $\mathbf{X}$ რგოლის ქვერგოლი ეწოდება.

$\mathbf{X}$ რგოლის $\mathbf{Y}=(Y,+,-,\cdot,1)$ ქვერგოლის განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ Y სიმრავლე ჩაკეტილია ყველა იმ ოპერაციების მიმართ, რომლებიც $\mathbf{X}$ რგოლშია განმარტებული.

3. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ და $\mathbf{Y}=(Y,+_1,-_1,\cdot_1,1_1)$ მოცემული რგოლებია. თუ h ასახვა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში ინახავს $\mathbf{X}$ რგოლის ყველა ძირითად ოპერაციას, მაშინ მას $\mathbf{X}$ რგოლის $\mathbf{Y}$ რგოლში ჰომომორფული ასახვა ეწოდება.

ცხადია, თუ h არის $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რგოლის $\mathbf{Y}=(Y,+_1,-_1,\cdot_1,1_1)$ რგოლში ჰომომორფული ასახვა, მაშინ ნებისმიერი $a,b\in X-$სათვის ყოველთვის სრულდება შემდეგი ოთხი პირობა:

$$h(a+b)=h(a)+_1 h(b),$$
$$h(-a)=-_1 h(a),$$
$$h(a\cdot b)=h(a)\cdot_1 h(b),$$
$$h(1)=1_1.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ X სიმრავლის თავისთავზე იგივური Δ_X ასახვა და h ასახვა, რომელიც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს $\mathbf{X}$ რგოლის ნულოვან ელემენტზე გადასახავს, იქნებიან $\mathbf{X}$ რგოლის თავისთავში ჰომომორფული ასახვები.

თუ h ინექციაა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში, მაშინ h ჰომომორფიზმს $\mathbf{X}$ რგოლის $\mathbf{Y}$ რგოლში მონომორფიზმი ეწოდება.

თუ h სურექციაა X სიმრავლისა Y სიმრავლეზე, მაშინ h ჰომომორფიზმს $\mathbf{X}$ რგოლისა $\mathbf{Y}$ რგოლზე ეპიმორფიზმი ეწოდება.

თუ h არის ბიექცია X და Y სიმრავლეებს შორის, მაშინ h ჰომომორფიზმს $\mathbf{X}$ რგოლისა $\mathbf{Y}$ რგოლზე იზომორფიზმი ეწოდება.

თუ h ასახვა ჰომომორფიზმია $\mathbf{X}$ რგოლისა თავისთავში, მაშინ მას ენდომორფიზმი ეწოდება, ხოლო h იზომორფიზმს კი ავტომორფიზმი ეწოდება.

4. ვთქვათ $(X,+,-)$ არის $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რგოლის ადიციური ჯგუფი, ხოლო $\mathbf{I}=(I,+,-)$ არის $(X,+,-)$ ჯგუფის ქვეჯგუფი. იტყვიან, რომ I სიმრავლე $\mathbf{X}$ რგოლის იდეალია, თუ $\mathbf{I}$ არის $\mathbf{X}$ რგოლის ადიციური ჯგუფის ქვეჯგუფი და $x\cdot a,\ a\cdot x\in I$ ყოველი $x\in X$ და $a\in I$ ელემენტებისათვის.

რგოლის იდეალის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ I სიმრავლე ჩაკეტილია $(+)$, $(-)$ და $(\cdot)$ ოპერაციების მიმართ.

ყოველ რგოლს ორი იდეალი მაინც გააჩნია. ესენია $\{\mathbf{0}\}$ და X სიმრავლეები. მათ $\mathbf{X}$ რგოლის ტრივიალური იდეალები ეწოდება. გარდა ამისა, მათგან პირველს $\mathbf{X}$ რგოლის ნულოვანი იდეალი, ხოლო მეორეს კი $\mathbf{X}$ რგოლის ერთეულოვანი იდეალი ეწოდება. $\mathbf{X}$ რგოლის ტრივიალური იდეალებისაგან განსხვავებულ ყველა სხვა იდეალს $\mathbf{X}$ რგოლის საკუთარი იდეალი ეწოდება.

5. ვთქვათ $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ კომუტაციური რგოლია; $a_1,a_2,\dots,a_n$ არიან X სიმრავლის ფიქსირებული ელემენტები და

$$\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle=\{a_1\cdot x_1+a_2\cdot x_2+\cdots+a_n\cdot x_n \mid x_1,x_2,\dots,x_n\in X\}.$$

მას $\mathbf{X}$ რგოლის $a_1,a_2,\dots,a_n$ ელემენტებით წარმოქმნილი იდეალი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ როცა $n=1$, მაშინ ცხადია

$$\langle a_1\rangle=\{a_1\cdot x \mid x\in X\}=a_1\cdot X.$$

მას $\mathbf{X}$ რგოლის a ელემენტით წარმოქმნილი მთავარი იდეალი ეწოდება. ამასთან, $\langle 1\rangle=1\cdot X=\{1\cdot x \mid x\in X\}=X$, ე.ი. $\langle 1\rangle$ არის $\mathbf{X}$ რგოლის ერთეულოვანი იდეალი.

6. ვთქვათ I და J სიმრავლეები არიან $\mathbf{X}$ რგოლის იდეალები, ადვილად შემოწმდება, რომ

$$I+J=\{a+b \mid a\in I,\ b\in J\},$$
$$I\cdot J=\{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n \mid a_1,a_2,\dots,a_n\in I,\ b_1,b_2,\dots,b_n\in J\}$$

სიმრავლეები $\mathbf{X}$ რგოლის იდეალებია. მათ შესაბამისად I და J იდეალების ჯამი და ნამრავლი ეწოდება.

7. ვთქვათ ε რომელიღაც კონგრუენციაა $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რგოლზე. $\mathbf{X}/\boldsymbol{\varepsilon}$ ფაქტორალგებრაა ε კონგრუენციის მიმართ. ეს ფაქტორალგებრა ცალსახად განისაზღვრება $\mathbf{X}$ რგოლის I_ε იდეალით, ამიტომაც იგი $\mathbf{X}/\mathbf{I}_\varepsilon=\left(X/I_\varepsilon,\breve{+},\breve{-},\breve{\cdot},\breve{1}\right)$ სიმბოლოთი აღნიშნება და $\mathbf{X}$ რგოლის ფაქტორრგოლი ეწოდება I_ε იდეალის მიმართ.

ამ შემთხვევაში $X/I_\varepsilon=\{a+I_\varepsilon \mid a\in X\}$ და ფაქტორრგოლის ძირითადი ოპერაციები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$(a+I_\varepsilon)\breve{+}(a+I_\varepsilon)=(a+b)+I_\varepsilon,$$
$$(a+I_\varepsilon)\breve{\cdot}(a+I_\varepsilon)=(a\cdot b)+I_\varepsilon,$$
$$\breve{-}(a+I_\varepsilon)=(-a)+I_\varepsilon,$$
$$\breve{1}=1+I_\varepsilon,$$

სადაც $0+I_\varepsilon=I_\varepsilon, -a+I_\varepsilon$ და $1+I_\varepsilon$ შესაბამისად არიან $\mathbf{X}/\mathbf{I}_\varepsilon$ ფაქტორრგოლის ნულოვანი, $a+I_\varepsilon$ ელემენტის მოპირდაპირე და ერთეულოვანი ელემენტები.

8. ცნობილია, რომ თუ g არის $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რგოლის $\mathbf{Y}=(Y,+_1,-_1,\cdot_1,1_1)$ რგოლზე ეპიმორფული ასახვა, მაშინ X – ის ყველა იმ ელემენტების I სიმრავლე, რომლებიც g ჰომომორფიზმის დროს $\mathbf{Y}$ რგოლის ნულოვან ელემენტზე აისახება, არის $\mathbf{X}$ რგოლის იდეალი და $\mathbf{X}$ რგოლის ფაქტორრგოლი I იდეალის მიმართ

Y რგოლის იზომორფული იქნება (რგოლთა კლასისათვის ჰომომორფიზმის, უფრო ზუსტად ეპიმორფიზმის თეორემა).

ელემენტთა გაყოფადობა კომუტაციურ რგოლებში

ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ კომუტაციური რგოლია და $a,b\in X$. თუ რომელიღაც $c\in X$ ელემენტისათვის სრულდება $a=b\cdot c$ ტოლობა, მაშინ b ელემენტს a ელემენტის გამყოფი ეწოდება, ხოლო a ელემენტს კი b ელემენტის ჯერადი ეწოდება და $b|a$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო ჩანაწერი $b\dagger a$ აღნიშნავს, რომ a ელემენტი არ იყოფა b ელემენტზე.

ვთქვათ, $c,a_1,a_2,...,a_n\in X$ და $c|a_1$, $c|a_2,...,c|a_n$, მაშინ c ელემენტს $a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტების საერთო გამყოფი ეწოდება.

თუ a და b ისეთი ელემენტებია, რომ $b|a$ და $a|b$, მაშინ a და b ელემენტებს ასოცირებული ელემენტები ეწოდება და $a\sim b$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ a ელემენტი ისეთია, რომ $a\cdot d=1$, რომელიღაც $d\in X$ ელემენტისათვის, მაშინ $a-$ს შებრუნებადი, ან კიდევ ერთეულის გამყოფი ელემენტი ეწოდება და $a=d^{-1}$ სიმბოლოთი ჩაიწერება.

თუ $a\in X$ ელემენტი ისეთია, რომ $a\cdot d=1$ და b არის X სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ $b=1\cdot b=(a\cdot d)\cdot b=a\cdot(d\cdot b)$, ე.ი. **X** რგოლის ერთეულის გამყოფი ელემენტი **X** რგოლის ნებისმიერი ელემენტის გამყოფია.

X სიმრავლის ყოველი ელემენტი იყოფა ერთეულის გამყოფ ნებისმიერ ელემენტზე და მასთან ასოცირებულ ელემენტზე. ასეთ ელემენტებს მოცემული ელემენტის ტრივიალური გამყოფები ეწოდება.

მოცემული ელემენტის ტრივიალური გამყოფებისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ სხვა გამყოფს მოცემული ელემენტის საკუთარი გამყოფი ეწოდება.

X სიმრავლის ნულისაგან განსხვავებულ a ელემენტს შედგენილი ან კიდევ დაყვანადი ელემენტი ეწოდება **X** მთელობის არეში, თუ მოიძებნებიან a ელემენტის ისეთი $b,c\in X$ საკუთარი გამყოფები, რომ $a=b\cdot c$.

X სიმრავლის ნულისაგან განსხვავებულ a ელემენტს მარტივი ან კიდევ დაუყვანი ელემენტი ეწოდება **X** მთელობის არეში, თუ იგი არ არის შებრუნებადი და მისი ნებისმიერი გამყოფი ტრივიალურია.

მთელობის არის ყველა ელემენტების სიმრავლე იყოფა ოთხ კლასად. ესენია:

1) სიმრავლე, რომელიც მთელობის არის მხოლოდ ერთი ნულოვანი ელემენტისაგან შედგება;
2) მთელობის არის ერთეულის გამყოფი ყველა ელემენტების სიმრავლე;
3) მთელობის არის ყველა შედგენილი ელემენტების სიმრავლე;
4) მთელობის არის ყველა მარტივი ელემენტის სიმრავლე.

შევნიშნოთ, რომ მთელობის არის ბოლო ორი სიმრავლე შეიძლება ცარიელი იყოს. ამის მაგალითად გამოდგება მთელობის არე, რომელიც ველია.

ცხადია, მთელ რიცხვთა რგოლი მთელობის არეა. მასში $\{-1,1\}$ წარმოადგენს ერთეულის გამყოფ ყველა ელემენტების სიმრავლეს. ნულისაგან და ±1 განსხვავებული მთელი a რიცხვი მარტივია, თუ ის იყოფა მხოლოდ $\pm1-$ზე და $\pm a-$ზე. მაგალითად ასეთი რიცხვებია:

$$\pm2,\ \pm3,\ \pm5,\ \pm7,\ \pm11,\ \pm13,\ \pm17\ .$$

ადვილად შემოწმდება, რომ მთელი ±4, ±6, ±8, ±9 რიცხვები შედგენილია.

1. მთელობის არეს, რომლის ყოველი იდეალი მთავარია, მთავარ

იდეალთა რგოლი ეწოდება.

ელემენტთა დაშლადობა მთავარ იდეალთა რგოლში

ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ მთელობის არეა და $a\in X$.

1. იტყვიან, რომ მთელობის არის a ელემენტი ცალსახად იშლება მთელობის არის მარტივი $p_1, p_2,..., p_n$ ელემენტების ნამრავლის სახით, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

   1) $a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$;

   2) თუ $a = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$, მთელობის არის რომელიღაც მარტივი q_1, $q_2,..., q_s$ ელემენტებისათვის, მაშინ $n=s$ და $q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$ ნამრავლში თანამამრავლთა შესაბამისი გადანომრის შემდეგ სრულდება $p_i \sim q_i$ $(i = 1,2,...,n)$ პირობა.
2. თუ $\mathbf{X}$ რგოლი ისეთი მთელობის არეა, რომ მისი ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი არაშებრუნებადი ელემენტი ცალსახად იშლება მოცემული მთელობის არის მარტივი ელემენტების ნამრავლის სახით, მაშინ მას ფაქტორიალური რგოლი ეწოდება.
3. მთავარ იდეალთა რგოლი ფაქტორიალურია. გამომდინარე აქედან, მთელ რიცხვთა $\mathbf{Z}$ რგოლის ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული არაშებრუნებადი რიცხვი ცალსახად იშლება მარტივი რიცხვების ნამრავლის სახით.

ევკლიდეს რგოლები

ვთქვათ, $\mathbf{0}$ არის $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ მთელობის არის ნულოვანი ელემენტი, ხოლო N ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლეა.

1. $\mathbf{X}$ მთელობის არეს ევკლიდეს რგოლი ეწოდება, თუ არსებობს X სიმრავლის N სიმრავლეში ისეთი h ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

   1) ყოველი $a,b\in X$ და $b \neq \mathbf{0}$ ელემენტებისათვის X სიმრავლეში არსებობენ ისეთი q და r ელემენტები, რომ $a=b\cdot q+r$ და $h(r)<h(b)$;

   2) ყოველი $a\in X$ ელემენტისათვის $h(a)=0$ ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=\mathbf{0}$.

   ცნობილია, რომ ევკლიდეს ყოველი რგოლი, იმავე დროს მთავარ იდეალთა და ფაქტორიალური რგოლიც იქნება.

კომუტაციურ რგოლში ელემენტთა უდიდესი საერთო გამყოფი

ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ კომუტაციური რგოლია და $c,a_1,a_2,...,a_n\in X$. ცნობილია, რომ c ელემენტს $a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტების საერთო გამყოფი ეწოდება, თუ $c\,|\,a_1,\ c\,|\,a_2,...,c\,|\,a_n$.

1. $a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტების ისეთ საერთო გამყოფს, რომელიც იყოფა მათ ნებისმიერ საერთო გამყოფზე მოცემული ელემენტების უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება და $(a_1,a_2,...,a_n)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

   ვთქვათ, $a,b\in X$. თუ $(a,b)=1$, მაშინ a და $b-$ს თანამარტივი ელემენტები ეწოდება.
2. აღვნიშნოთ, რომ თუ $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ კომუტაციური რგოლია და $a_1,a_2,...,a_n$ არიან X სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

   1) თუ $(a_1,a_2,...,a_n)=d$, მაშინ $a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტების ყველა საერთო გამყოფებისა და d ელემენტის ყველა საერთო გამყოფების სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევიან;

   2) თუ $(a_1,a_2,...,a_n)=d$ და $(a_1,a_2,...,a_n)=d_1$, მაშინ $d\sim d_1$;

   3) თუ $(a_1,a_2,...,a_n)=d$ და $d\sim d_1$, რომელიღაც $d_1\in X$ ელემენტისათვის, მაშინ $(a_1,a_2,...,a_n)=d_1$;

4) მთავარ იდეალთა $\mathbf{X}$ რგოლის, ნებისმიერი n რაოდენობის $a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტებისათვის ყოველთვის არსებობს მათი უდიდესი საერთო გამყოფი. ამასთან d ელემენტი იქნება $a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტების უდიდესი საერთო გამყოფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle=\langle d\rangle$;

5) მთავარ იდეალთა $\mathbf{X}$ რგოლის $a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტების საერთო d გამყოფი იქნება მათი უდიდესი საერთო გამყოფი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $d=c_1\cdot a_1+c_2\cdot a_2+\cdots+c_n\cdot a_n$, რომელიღაც $c_1,c_2,...,c_n\in X$ ელემენტებისათვის;

6) თუ $\mathbf{X}$ მთავარ იდეალთა რგოლია და $c\in X$, მაშინ

$$(c\cdot a_1,c\cdot a_2,...,c\cdot a_n)\sim c\cdot(a_1,a_2,...,a_n);$$

7) თუ $\mathbf{X}$ მთავარ იდეალთა რგოლია და $b_1,b_2,...,b_n$ არიან X სიმრავლის ისეთი ელემენტები, რომ $(a_1,a_2,...,a_n)=d$, $a_i=d\cdot b_i$ და $d\neq\mathbf{0}$ $(i=1,2,...,n)$, მაშინ $(b_1,b_2,...,b_n)=1$;

8) თუ $\mathbf{X}$ მთავარ იდეალთა რგოლია და a,b,c არიან X სიმრავლის ისეთი ელემენტები, რომ $a\mid b\cdot c$, $(a,b)=1$, მაშინ $a\mid c$.

9) თუ მთავარ იდეალთა $\mathbf{X}$ რგოლში სრულდება $(a_1,a_2,...,a_n)=d$, $(a_1,a_2,...,a_{n-1})=d_1$ და $(d_1,a_n)=d_2$ პირობები, მაშინ $d\sim d_2$.

კომუტაციურ რგოლში ელემენტთა უმცირესი საერთო ჯერადი

ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ მთავარ იდეალთა რგოლია და $a_1,a_2,...,a_n\in X$.

1. ვთქვათ $c\in X$. c ელემენტს ეწოდება $a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტების საერთო ჯერადი, თუ $\mathbf{X}$ რგოლში c ელემენტი იყოფა ნებისმიერ a_i $(i=1,2,...,n)$ ელემენტზე.

$a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტების უმცირესი საერთო ჯერადი ეწოდება მოცემული ელემენტების ისეთ საერთო ჯერადს, რომელიც

მათი ნებისმიერი საერთო ჯერადის გამყოფია და $[a_1,a_2,...,a_n]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

2. აღვნიშნოთ, რომ თუ $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ კომუტაციური რგოლია და $a_1,a_2,...,a_n$ არიან X სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) თუ $[a_1,a_2,...,a_n]=m$, მაშინ $a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტების ყველა საერთო ჯერადებისა და m ელემენტის ყველა საერთო ჯერადების სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევიან;

2) თუ $[a_1,a_2,...,a_n]=m$ და $[a_1,a_2,...,a_n]=m_1$, მაშინ $m\sim m_1$;

3) თუ $[a_1,a_2,...,a_n]=m$ და $m\sim m_1$, რომელიღაც $m_1\in X$ ელემენტისათვის, მაშინ $[a_1,a_2,...,a_n]=m_1$;

4) მთავარ იდეალთა $\mathbf{X}$ რგოლის, ნებისმიერი n რაოდენობის $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ელემენტებისათვის ყოველთვის არსებობს მათი უმცირესი საერთო ჯერადი. ამასთან m ელემენტი იქნება $a_1,a_2,...,a_n$ ელემენტების უმცირესი საერთო ჯერადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\langle a_1\rangle\cap\langle a_2\rangle\cap...\cap\langle a_n\rangle=\langle m\rangle$;

5) თუ $\mathbf{X}$ მთავარ იდეალთა რგოლია და $c\in X$, მაშინ

$$[c\cdot a_1,c\cdot a_2,...,c\cdot a_n]\sim c\cdot[a_1,a_2,...,a_n];$$

6) თუ $\mathbf{X}$ მთავარ იდეალთა რგოლია, $a,b\in X$ და $(a,b)=1$, მაშინ $[a,b]\sim a\cdot b$;

7) თუ a, b და d არიან მთავარ იდეალთა $\mathbf{X}$ რგოლის ისეთი არანულოვანი ელემენტები, რომ $(a,b)=d$, $a=d\cdot b_1$ და $b=d\cdot b_2$, მაშინ $[a,b]\sim d\cdot b_1\cdot b_2$.

8) თუ $\mathbf{X}$ ფაქტორიალური რგოლის a და b ელემენტები წარმოდგენილია $a=u\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ და $b=v\cdot p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n}$ სახით,

სადაც u, v და $p_1, p_2, ..., p_n$ შესაბამისად მოცემული რგოლის ერთეულის გამყოფი და მისი მარტივი ელემენტებია, ხოლო $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია, მაშინ სრულდება შემდეგი პირობები:

$$(a,b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdots p_n^{\gamma_n}, \text{ თუ } \gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\},$$

$$[a,b] = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdots p_n^{\delta_n}, \text{ თუ } \delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\} \ (i = 1,2,...,n).$$

ველი

1. ვთქვათ, $\mathbf{X} = (X, +, -, \cdot, 1)$ კომუტაციური რგოლია. თუ მოცემული რგოლის მონოიდი $\mathbf{X} = (X, \cdot, 1)$ წარმოადგენს ჯგუფს, მაშინ $\mathbf{X} = (X, +, -, \cdot, 1)$ რგოლს ველი ეწოდება.

მთელობის არის განაყოფთა ველი

ვთქვათ, $\mathbf{K} = (K, +, -, \cdot, 1)$ მთელობის არეა.

1. $\mathbf{F} = (F, +, -, \cdot, 1)$ ველს $\mathbf{K} = (K, +, -, \cdot, 1)$ მთელობის არის განაყოფთა ველი ეწოდება, თუ ერთდროულად სრულდება შემდეგი ორი პირობა:
   1) $\mathbf{K}$ რგოლი არის $\mathbf{F}$ ველის ქვერგოლი;
   2) ყოველი $x \in F$ ელემენტისათვის არსებობენ ისეთი $a, b \in K$ ელემენტები, რომ $x = a \cdot b^{-1}$.
2. ცნობილია, რომ ნებისმიერი მთელობის არისათვის არსებობს მისი განაყოფთა ველი და ეს ველი იზომორფიზმამდე სიზუსტით ცალსახად განისაზღვრება.

მაგალითი 1. ვთქვათ $\mathbf{Z} = (Z, +, -, \cdot, 1)$ მთელ რიცხვთა რგოლია,

$$a \oplus b = a + b + 3,$$
$$a' = -(a + 6),$$
$$a * b = ab + 3a + 3b + 6,$$

ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის აღებული $\mathbf{K}'$ რგოლიდან. აჩვენეთ, რომ $(K', \oplus, ', *, -2)$ ალგებრა რგოლია.

1) ჯერ ვაჩვენოთ რომ $(K', \oplus)$ ალგებრა კომუტაციური ჯგუფია. მართლაც, $a \oplus b = b \oplus a$, რადგან მთელ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრების $(+)$ ოპერაცია კომუტაციურია. ახლა, ვთქვათ a, b და c ნებისმიერი მთელი რიცხვებია და გამოვთვალოთ $(a \oplus b) \oplus c$ და $a \oplus (b \oplus c)$ გამოსახულებათა მნიშვნელობები. გვექნება:

$$(a \oplus b) \oplus c = (a + b + 3) \oplus c = (a + b + 3) + c + 3 = a + b + c + 6,$$
$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 3) = a + (b + c + 3) + 3 = a + b + c + 6,$$

რადგან მთელ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრების $(+)$ ოპერაცია კომუტაციური და ასოციაციურია. ბოლო ტოლობებიდან ჩანს, რომ $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$, ე.ი. $(\oplus)$ ოპერაცია $\mathbf{Z}$ რგოლზე ასოციაციურია.

2) $\mathbf{Z}$ რგოლზე $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ ვიპოვოთ ნეიტრალური ელემენტი e. დავუშვათ რომ a ნებისმიერი მთელი რიცხვია და ტოლობებიდან $a \oplus e = e \oplus a = a$ ვიპოვოთ e ელემენტის მნიშვნელობა. ჩვენს შემთხვევაში საკმარისია $a \oplus e = a$ ტოლობიდან e ელემენტის მნიშვნელობის პოვნა, რადგანაც მთელ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრების $(+)$ ოპერაცია კომუტაციურია. გვექნება: $(a \oplus e = a) \Rightarrow (a + e + 3 = a) \Rightarrow (e = -3)$, ე.ი. $e = -3$ არის $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური ელემენტი.

3) ახლა, ვთქვათ, რომ a ნებისმიერი მთელი რიცხვია და ვიპოვოთ $(\oplus)$ ოპერაციის დროს a ელემენტის სიმეტრიული a' ელემენტი $e = -3$ ნეიტრალური ელემენტის მიმართ. ამისათვის ტოლობებიდან $a \oplus a' = a' \oplus a = e$ უნდა გამოვთვალოთ a'. ჩვენს შემთხვევაში საკმარისია $a \oplus a' = e$

ტოლობიდან a' ელემენტის მნიშვნელობის პოვნა, რადგანაც მთელ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრების $(+)$ ოპერაცია კომუტაციურია. გვექნება:

$$(a\oplus a'=e)\Rightarrow(a+a'+3=-3)\Rightarrow(a'=-(6+a)),$$

ე.ი. $(\oplus)$ ოპერაციის დროს a ელემენტის სიმეტრიული a' ელემენტი $e=-3$ ნეიტრალური ელემენტის მიმართ გამოითვლება ფორმულით: $a'=-(6+a)$.

$1)$, $2)$ და $3)$ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ ალგებრა $(Z,\oplus)$ კომუტაციური ჯგუფია.

$4)$ ახლა ვაჩვენოთ, რომ $(Z,*)$ ალგებრა მონოიდია. მართლაც, ვთქვათ a, b და c ნებისმიერი მთელი რიცხვებია და გამოვთვალოთ $(a*b)*c$ და $a*(b*c)$ გამოსახულებათა მნიშვნელობები. გვექნება:

$$\begin{aligned}&(a*b)*c=(ab+3a+3b+6)*c=(ab+3a+3b+6)c+\\&+3(ab+3a+3b+6)+3c+6=abc+3ac+3bc+6c+3ab+\\&+9a+9b+18+3c+6=abc+3ab+3ac+3bc+9a+9b+9c+24,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a*(b*c)=a*(bc+3b+3c+6)=a(bc+3b+3c+6)+3a+\\&+3(bc+3b+3c+6)+6=abc+3ab+3ac+6a+3a+3bc+9b+\\&+9c+18+6=abc+3ab+3ac+3bc+9a+9b+9c+24.\end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ $(a*b)*c=a*(b*c)$, რადგანაც მთელ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრების $(+)$ და გამრავლების $(\cdot)$ ოპერაციები კომუტაციური და ასოციაციურია. მივიღეთ, რომ $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია.

$5)$ **Z** რგოლზე $(*)$ ოპერაციის მიმართ ვიპოვოთ ნეიტრალური ელემენტი e'. დავუშვათ რომ a ნებისმიერი მთელი რიცხვია და ტოლობებიდან $a*e'=e'*a=a$ ვიპოვოთ e' ელემენტის მნიშვნელობა. ჩვენს შემთხვევაში საკმარისია $a*e'=a$ ტოლო-

ბიდან e' ელემენტის მნიშვნელობის პოვნა, რადგანაც მთელ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრების $(+)$ და გამრავლების $(\cdot)$ ოპერაციები კომუტაციური და ასოციაციურია. გვექნება:

$$(a*e'=a)\Rightarrow(ae'+3a+3e'+6=a)\Rightarrow((a+3)e'=-2(a+3))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e'=-2,\\ a\neq-3.\end{cases},$$

$$(-3)*(-2)=(-3)(-2)+3(-3)+3(-2)+6=6-9-6+6=-3.$$

ე.ი. $e'=-2$ არის $(*)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური ელემენტი.

მივიღეთ, რომ $(Z,*)$ ალგებრა მონოიდია.

$6)$ ვთქვათ, a, b და c ნებისმიერი მთელი რიცხვებია და გამოვთვალოთ $a*(b\oplus c)$ და $(a*b)\oplus(a*c)$ გამოსახულებათა მნიშვნელობები. გვექნება:

$$\begin{aligned}&a*(b\oplus c)=a*(b+c+3)=a(b+c+3)+3a+3(b+c+3)+6=\\&=ab+ac+3a+3a+3b+3c+9+6=ab+ac+6a+3b+3c+15,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a*b)\oplus(a*c)=(ab+3a+3b+6)\oplus(ac+3a+3c+6)=\\&=(ab+3a+3b+6)+(ac+3a+3c+6)+3=ab+ac+6a+3b+3c+15\end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ $a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$, რადგანაც მთელ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრების $(+)$ და გამრავლების $(\cdot)$ ოპერაციები კომუტაციური და ასოციაციურია. მივიღეთ, რომ $(\oplus)$ და $(*)$ ოპერაციები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან დისტრიბუციულობის კანონით.

რადგან $-3=e\neq e'=-2$ ამიტომ $(Z,\oplus,',*,-2)$ ალგებრა რგოლია.

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რგოლია. აჩვენეთ, რომ რგოლის ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის სამართლიანი იქნება შემდეგი წინადადებები:
   1) თუ $a+b=a$, მაშინ $b=\mathbf{0}$;
   2) თუ $a+b=\mathbf{0}$, მაშინ $b=-a$;
   3) $(-1)\cdot a=a\cdot(-1)=-a$;
   4) $-(-a)=a$;
   5) $\mathbf{0}\cdot a=a\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$;
   6) $-a\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$;
   7) $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$;
   8) $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$ და $c\cdot(a-b)=c\cdot a-c\cdot b$.
2. ვთქვათ, $\mathbf{Z}=(Z,+,-,\cdot,1)$ მთელ რიცხვთა რგოლია და $m,n\in Z$. აჩვენეთ, რომ ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლე $\oplus$ და $(*)$ ოპერაციების მიმართ რგოლია, თუ
   1) $m\oplus n=m+n-2,\ \ m*n=m\cdot n-2\cdot m-2\cdot n+6;$
   2) $m\oplus n=m+n-1,\ \ m*n=m\cdot n-m-n+2;$
   3) $m\oplus n=m+n+3,\ \ m*n=m\cdot n-3\cdot m-3\cdot n+6;$
   4) $m\oplus n=m+n+2,\ \ m*n=m\cdot n+2\cdot m+2\cdot n+6.$
3. ვთქვათ, $\mathbf{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ნამდვილ რიცხვთა ველია და $a,b\in R$. აჩვენეთ, რომ ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე $(\oplus)$ და $(*)$ ოპერაციების მიმართ რგოლია, თუ
   1) $a\oplus b=a+b-\frac{1}{2},\ \ a*b=a\cdot b-\frac{1}{2}\cdot a-\frac{1}{2}\cdot b+\frac{3}{4};$

   2) $a\oplus b=a+b-\frac{1}{2},\ \ a*b=\frac{3}{2}\cdot a\cdot b-\frac{3}{4}\cdot a-\frac{3}{4}\cdot b+\frac{7}{8};$
   3) $a\oplus b=a+b+\frac{1}{2},\ \ a*b=a\cdot b+\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b-\frac{1}{4}.$
4. ვთქვათ $\mathbf{R}^{+}=(R^{+},+,-,\cdot,1)$ ყველა დადებითი ნამდვილი რიცხვების ველია და $a,b\in R$. აჩვენეთ, რომ R^{+} სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა გამრავლებისა $(\cdot)$ და $*$ ოპერაციის მიმართ ქმნის ველს და იპოვეთ a რიცხვის შებრუნებული, თუ
   1) $a*b=a^{\log_2 b},\ \ a=4;$
   2) $a*b=a^{\log_3 b},\ \ a=9;$
   3) $a*b=a^{\log_4 b},\ \ a=16;$
   4) $a*b=a^{\log_5 b},\ \ a=25;$
   5) $a*b=a^{\log_6 b},\ \ a=36;$
   6) $a*b=a^{\log_7 b},\ \ a=49;$
   7) $a*b=a^{\log_8 b},\ \ a=64;$
   8) $a*b=a^{\log_9 b},\ \ a=81.$
5. ვთქვათ, $\mathbf{Z}=(Z,+,-,\cdot,1)$ მთელ რიცხვთა რგოლია და $m,n\in Z$. აჩვენეთ, რომ მთელი რიცხვების სიმრავლე $\oplus$ და $*$ ოპერაციების მიმართ ქმნის რგოლს და $f:Z\to Z$ ასახვა კი იქნება ჰომომორფიზმი $\mathbf{Z}$ რგოლისა მეორე რგოლში, თუ
   1) $f(n)=n+2,\ \ m\oplus n=m+n-2,\ \ m*n=m\cdot n-2\cdot m-2\cdot n+6;$
   2) $f(n)=n+3,\ \ m\oplus n=m+n-3,\ \ m*n=m\cdot n-3\cdot m-3\cdot n+12;$
   3) $f(n)=n-2,\ \ m\oplus n=m+n+2,\ \ m*n=m\cdot n+2\cdot m+2\cdot n+2.$
6. ვთქვათ, $\mathbf{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ყველა ნამდვილი რიცხვების ველია და

$a, b \in R$. აჩვენეთ, რომ ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე $\oplus$ და $*$ ოპერაციების მიმართ ქმნის რგოლს, ხოლო $f: R \to R$ ასახვა კი იქნება ჰომომორფიზმი **R** ველისა მეორე რგოლში, თუ

1) $f(a) = 2 \cdot a + 1,\ \ a \oplus b = a + b - 1,\ \ a * b = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot b - a - b + 3)$;

2) $f(a) = 3 \cdot a - 1,\ \ a \oplus b = a + b + 1,\ \ a * b = \frac{1}{3} \cdot (a \cdot b + a + b - 2)$;

3) $f(a) = \frac{1}{2} \cdot a + 1,\ \ a \oplus b = a + b - 1,\ \ a * b = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a + 2 \cdot b + 3$.

7. აჩვენეთ, რომ რგოლის მარცხენა (მარჯვენა) იდეალთა თანაკვეთა ყოველთვის რგოლის მარცხენა (მარჯვენა) იდეალია.
8. ვთქვათ, $\mathbf{F} = (F, +, -, \cdot, 1)$ ველია და 0 არის მისი ნულოვანი ელემენტი.

   აჩვენეთ, რომ ველს არ გააჩნია ნულოვანი $\{0\}$ და ერთეულოვანი F იდეალებისაგან განსხვავებული სხვა იდეალები.
9. ვთქვათ, **V** არის სასრულ განზომილებიანი ვექტორული სივრცე **F** ველზე, **K** არის **V** ვექტორული სივრცის ყველა წრფივ ოპერატორთა რგოლი. აჩვენეთ, რომ **K** რგოლს არ გააჩნია ნულოვანი და ერთეულოვანი იდეალებისაგან განსხვავებული სხვა იდეალები.
10. ვთქვათ, $K = \left\{a + b \cdot \sqrt{3} \mid a, b \in Z\right\}$. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{K} = (K, +, -, \cdot, 1)$ ალგებრა რგოლია.
11. ვთქვათ, $K = \left\{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in Q\right\}$. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{K} = (K, +, -, \cdot, 1)$ ალგებრა ველია.
12. აჩვენეთ, რომ სასრული მთელობის არე ველია.
13. იპოვეთ კომპლექსურ რიცხვთა ველის ყველა ავტომორფიზმები, რომლებიც ნამდვილ რიცხვებს თავისთავში გადაიყვანს.

14. ვთქვათ, $\mathbf{F} = (F, +, -, \cdot, 1)$ m ელემენტიანი ველია. აჩვენეთ, რომ $a^m = a$ ყოველი $a \in F$ ელემენტისათვის.
15. აჩვენეთ, რომ რიცხვითი ველების ნებისმიერი იზომორფიზმის დროს რაციონალურ რიცხვთა ველი თავისთავზე იგივურად აისახება.
16. აჩვენეთ, რომ

$$\begin{pmatrix} a + b \cdot i & c + d \cdot i \\ -c + d \cdot i & a - b \cdot i \end{pmatrix}$$

სახის მატრიცებით წარმოქმნილი რგოლი, სადაც a, b, c და d ნამდვილი რიცხვებია, $a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ სახის კვატერნიონებით წარმოქმნილი ტანის (რგოლის რომლის ყოველ არანულოვან ელემენტს გამრავლების ოპერაციის მიმართ გააჩნია შებრუნებული) იზომორფულია.

17. აჩვენეთ, რომ $Z_6 / 2Z_6$ ფაქტორჯგუფი იზომორფულია Z_2 ჯგუფისა, ხოლო $Z_6 / 3Z_6$ ფაქტორჯგუფი კი იზომორფულია Z_3 ჯგუფისა.
18. ვთქვათ, $n > 0$ და არის ნატურალური m რიცხვის ნატურალური გამყოფი. აჩვენეთ, რომ Z_m / nZ_m ფაქტორჯგუფი Z_n ჯგუფის იზომორფულია.
19. ვთქვათ, $\mathbf{X} = (X, +, -, \cdot, 1)$ კომუტაციური რგოლია; $a_1, a_2, ..., a_n$ არიან X სიმრავლის ფიქსირებული ელემენტები და

$$\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle = \{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n \mid x_1, x_2, ..., x_n \in X\}.$$

აჩვენეთ, რომ $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ სიმრავლე მოცემული რგოლის ისეთი იდეალია, რომელიც შეიცავს $a_1, a_2, ..., a_n$ ელემენტებს.

20. ვთქვათ, I არის $\mathbf{X} = (X, +, -, \cdot, 1)$ რგოლის იდეალი. **X** რგოლზე განვმარტოთ ε_I ბინარული მიმართება შემდეგნაირად: $a \varepsilon_I b$

$(a,b\in X)$ მხოლოდ მაშინ, როცა $a-b\in I$. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) $\mathbf{Y}=(Y,+,-,\cdot,1)$ ალგებრა $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რგოლის ქვერგოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y\subseteq X$ და $a-b,\ a\cdot b,\ 1\in Y$ ყოველი $a,b\in Y$ ელემენტისათვის;

2) თუ I არის $\mathbf{X}$ რგოლის იდეალი, მაშინ ε_I ბინარული მიმართება კონგრუენციაა $\mathbf{X}$ რგოლზე.

3) თუ ε რომელიღაც კონგრუენციაა $\mathbf{X}$ რგოლზე, მაშინ ε კონგრუენციის მიმართ ის I_ε კლასი, რომელიც შეიცავს $\mathbf{X}$ რგოლის ნულოვან ელემენტს იქნება $\mathbf{X}$ რგოლის იდეალი.

21. ვთქვათ $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რგოლია. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) თუ $\mathbf{X}$ მთელობის არეა, მაშინ მისი მახასიათებელი ან ნულია ან მარტივი რიცხვია;

2) თუ $Z=(Z,+,-,\cdot,1)$ მთელ რიცხვთა ადიციური ჯგუფია, p მარტივი რიცხვია და $pZ=\{p\cdot k\,|\,k\in Z\}$, მაშინ $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}=\left(Z/pZ,\breve{+},\breve{-},\breve{\cdot},\breve{1}\right)$ ფაქტორრგოლი ველია;

22. ვთქვათ, I და J სიმრავლეები არიან $\mathbf{X}$ რგოლის იდეალები და $I+J=\{a+b\,|\,a\in I,\ b\in J\}$,

$I\cdot J=\{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n\,|\,a_1,a_2,\dots,a_n\in I,\ b_1,b_2,\dots,b_n\in J\}$,

აჩვენეთ, რომ $\mathbf{I}+\mathbf{J}=\{I+J,+,-,\cdot,1\}$ და $\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}=\{I\cdot J,+,-,\cdot,1\}$ სიმრავლეები $\mathbf{X}$ რგოლის იდეალებია.

23. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ კომუტაციური რგოლია. X სიმრავლეზე განვმარტოთ α ბინარული მიმართება შემდეგნაირად: $a\alpha b$ $(a,b\in X)$ მხოლოდ მაშინ, როცა a ელემენტი იყოფა b ელემენტზე. აჩვენეთ, რომ

1) α კვაზიდალაგების მიმართებაა X სიმრავლეზე;

2) ელემენტთა ასოცირებულობის ~ მიმართება ექვივალენტობის მიმართებაა X სიმრავლეზე;

3) თუ $\mathbf{X}$ რგოლი მთელობის არეა, მაშინ $a\sim b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სიმრავლეში არსებობს ისეთი ერთეულის გამყოფი u ელემენტი, რომ $a=u\cdot b$.

24. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ მთელობის არეა და $a,b\in X$. აჩვენეთ, რომ

1) $b\,|\,a$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\langle a\rangle\subseteq\langle b\rangle$;

2) $a\,|\,1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\langle a\rangle=\langle 1\rangle$;

3) $a\sim b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\langle a\rangle=\langle b\rangle$;

4) b არის a ელემენტის საკუთარი გამყოფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\langle a\rangle\subset\langle b\rangle$.

25. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ მთავარ იდეალთა რგოლია, $a_1,a_2,\dots,a_n\in X$ და $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ და $[a_1,a_2,\dots,a_n]$ სიმბოლოებით შესაბამისად აღნიშნული არიან მოცემული ელემენტების უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი $\mathbf{X}$ რგოლში. აჩვენეთ, რომ

1) $(a_1,a_2,\dots,a_n)=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n$ რომელიღაც $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in X-$ სათვის;

2) $[a_1,a_2,\dots,a_n]=\dfrac{a_1\cdot a_2\cdots a_n}{(a_1,a_2,\dots,a_n)}$;

3) თუ $a_1=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ და $a_2=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$, სადაც $p_1,p_2,,,p_k$ არიან $\mathbf{X}$ რგოლის ერთმანეთისაგან წყვილ წყვილად განსხვავებული მარტივი ელემენტები, მაშინ

$(a_1,a_2)=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdots p_k^{\gamma_k}$, $[a_1,a_2]=p_1^{\delta_1}\cdot p_2^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k}$, სადაც $\gamma_i=\min\{\alpha_i,\beta_i\}$ და $\delta_i=\max\{\alpha_i,\beta_i\}$, $i=1,2,...,k$.

26. აჩვენეთ, რომ
   1) ნებისმიერი ველი მთავარ იდეალთა რგოლია;
   2) მთელ რიცხვთა რგოლი მთავარ იდეალთა რგოლია.
27. ვთქვათ, $\mathrm{X}=(X,+,\neg,\cdot,1)$ მთავარ იდეალთა რგოლია და p მისი მარტივი ელემენტია. აჩვენეთ, რომ
   1) თუ $a\in X$ და $p\dagger a$, მაშინ $\langle a,p\rangle=\langle 1\rangle$;
   2) თუ $a,b\in X$ და $p\,|\,a\cdot b$, მაშინ ან $p\,|\,a$ ან $p\,|\,b$;
   3) თუ $a_1,a_2,...,a_n\in X$ და $p\,|\,a_1\cdot a_2\cdots a_n$, მაშინ $a_1\cdot a_2\cdots a_n$ ნამრავლის ერთი თანამამრავლი მაინც გაიყოფა p ელემენტზე.
28. აჩვენეთ, რომ, მთელ რიცხვთა $\mathrm{Z}=(Z,+,-,\cdot,1)$ რგოლი ევკლიდეს რგოლია.
29. ვთქვათ, n ნებისმიერი მთელი რიცხვია, Z კი ყველა მთელი რიცხვების რგოლია, Z_n კი $n-$ის ჯერადი ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ Z_n არის Z რგოლის იდეალი და Z რგოლის ნებისმიერი იდეალისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი m რიცხვი, რომ Z_m დაემთხვევა Z რგოლის მოცემულ იდეალს.
30. აჩვენეთ, რომ იდეალთა თანაკვეთისა და იდეალთა გაერთიანების ოპერაციები კომუტაციური და ასოციაციურია.
31. აჩვენეთ, რომ რგოლის მარცხენა (მარჯვენა) იდეალთა თანაკვეთა რგოლის მარცხენა (მარჯვენა) იდეალია.
32. ველის იდეალი შესდგება ან ველის ნულოვანი ელემენტისაგან (ნულოვანი იდეალია) ან მოცემულ ველს ემთხვევა.
33. ვთქვათ, **V** სასრულ განზომილებიანი ვექტორული სივრცეა **F** ველზე, ხოლო **K** არის **V** ვექტორული სივრცის წრფივ ოპერატორთა რგოლი. აჩვენეთ, რომ **K** რგოლს არ გააჩნია ორმხრივი

იდეალები განსხვავებული ნულოვანი იდეალისგან და მოცემული რგოლისაგან.
34. იპოვეთ $12-$ის ჯერადი ყველა მთელი რიცხვებით შედგენილი Z_{12} რგოლის ყველა იდეალი.
35. აჩვენეთ, რომ სასრული მთელობის არე ველია.
36. ვთქვათ, **P** არის სასრული m ელემენტიანი ველი. დაამტკიცეთ, რომ $a^m=a$ ნებისმიერი a ელემენტისათვის აღებული **P** ველიდან.
37. იპოვეთ კომპლექსურ რიცხვთა ველის ყველა ავტომორფიზმები, რომლებიც ნამდვილ რიცხვებს თავისთავში გადაიყვანს.
38. აჩვენეთ, რომ რიცხვითი ველების ნებისმიერი ავტომორფიზმის დროს რაციონალურ რიცხვების ქვეველი თავისთავზე იგივურად აისახება.
39. აჩვენეთ, რომ ნულ მახასიათებლიანი ველის ნებისმიერი უმცირესი ქვეველი რაციონალურ რიცხვთა ველის იზომორფულია.
40. აჩვენეთ, რომ ის მთელობის არე რომელიც შეიცავს მხოლოდ სამ
   ელემენტს Z/Z_3 ფაქტორრგოლის იზომორფულია.
41. ვთქვათ, Z_2, Z_6 და Z_{12} სიმრავლეები შესაბამისად არიან 2, 6 და
   12 მთელი რიცხვების ჯერადი, ყველა მთელი რიცხვებით წარმოქმნილი Z რგოლის ქვერგოლები (იდეალები). აჩვენეთ რომ ფაქტორრგოლი Z_6/Z_2 და Z_2 რგოლი ერთმანეთის იზომორფულია.
42. ვთქვათ, $n\cdot s=m$, სადაც n, s ნატურალური რიცხვებია. Z_m სიმრავლე არის m რიცხვების ჯერადი ყველა მთელი რიცხვებით წარმოქმნიილი Z რგოლის ქვერგოლი (იდეალი),

ხოლო $nZ_m = \{nx \mid x \in Z_m\}$. აჩვენეთ რომ ფაქტორრგოლი Z_n / nZ_m და Z_s რგოლი ერთმანეთის იზომორფულია.

43. აჩვენეთ, რომ $Q\left(\sqrt{7}\right)$ და $Q\left(\sqrt{11}\right)$ ველები არაიზომორფულია.

44. ვთქვათ, K ყველა კენტმნიშვნელიანი რაციონალური რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $\mathbf{K} = \{K,+,-,\cdot,1\}$ არის რაციონალურ რიცხვთა Q ველის ქვეველი. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{K}$ მთავარ იდეალთა რგოლია.

45. ვთქვათ, $Z[i] = \{a+bi \mid a,b \in Z\}$ და $\mathbf{Z[i]} = \{Z[i],+,-,\cdot,1\}$ არის გაუსის მთელ რიცხვთა რგოლი, ხოლო Z_3 არის მთელ რიცხვთა Z რგოლის იდეალი შედგენილი $3-$ის ჯერადი ყველა მთელი რიცხვისგან. აჩვენეთ, რომ ფაქტორგოლი $\mathbf{Z[i]} / \mathbf{Z_3}$ არის ცხრა ელემენტიანი ველი.

46. ვთქვათ, $Z[i] = \{a+bi \mid a,b \in Z\}$ და $\mathbf{Z[i]} = \{Z[i],+,-,\cdot,1\}$ არის გაუსის მთელ რიცხვთა რგოლი, ხოლო Z_n არის მთელ რიცხვთა Z რგოლის იდეალი შედგენილი $n-$ის ჯერადი ყველა მთელი რიცხვისგან. აჩვენეთ, რომ ფაქტორგოლი $\mathbf{Z[i]} / \mathbf{Z}_n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინაა ველი, როცა n მარტივი რიცხვია და არ წარმოდგება ორი მთელი რიცხვის კვადრატების ჯამის სახით.

47. ვთქვათ, $K = \left\{a + ib\sqrt{3} \mid a,b \in Z\right\}$ და $\mathbf{K} = \{K,+,-,\cdot,1\}$ კომპლექსურ რიცხვთა ველის ქვერგოლია. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{K}$ რგოლის ნულისაგან განსხვავებული ყოველი ელემენტი, რომელსაც არ გააჩნია შებრუნებული, ყოველთვის იშლება მოცემული რგოლის მარტივ ელემენტთა ნამრავლად, მაგრამ საზოგადოდ ეს დაშლა არაცალსაა. მაგალითისათვის,

მოცემულია $4-$ის ორი დაშლა მარტივ მამრავლებად, $4 = 2\cdot 2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-i\sqrt{3}\right)$ ამასთან 2 და $1 \pm i\sqrt{3}$ ერთმანეთთან ასოცირებული ელემენტები არ არიან.

48. ვთქვათ, K ყველა იმ $a+ib\sqrt{3}$ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეა, სადაც a და b ან ორივე მთელი რიცხვებია, ან ორივე მრავაწევრია, რომელთა კოეფიციენტები მთელი კენტი რიცხვებია. ვთქვათ $\mathbf{K} = \{K,+,-,\cdot,1\}$ კომპლექსურ რცხვთა ველის ქვერგოლია K ძირითადი სიმრავლით. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{K}$ ევკლიდეს რგოლია.

49. ვთქვათ, $\mathbf{K}$ მთავარ იდეალთა რგოლია, p მისი ელემენტია, ხოლო $\mathbf{K_p}$ მისი ქვერგოლია შედგენილი $\mathbf{K}-$ში p ელემენტის ყველა ჯერადი ელემენტებით. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{K}$ რგოლში ელემენტი p მარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფაქტორრგოლი $\mathbf{K} / \mathbf{K_p}$ მთელობის არეა.

50. ვთქვათ, $\mathbf{Z}\left(\sqrt{\mathbf{2}}\right) = \left\{m + n\sqrt{2} \mid m,n \in Z\right\}$ და $\mathbf{Z}\left(\sqrt{\mathbf{2}}\right) = \left\{Z\sqrt{2},+,-,\cdot,1\right\}$ არის ნამდვილ რიცხვთა ველის ქვერგოლი. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{Z}\left(\sqrt{\mathbf{2}}\right)$ ევკლიდეს რგოლია.

51. ვთქვათ, m მთელი შედგენილი რიცხვია. აჩვენეთ, რომ $m-$ის მოდულით ნაშთთა კლასების Z_m რგოლი ყოველთვის შეიცავს ნულის გამყოფ ელემენტებს.

52. ვთქვათ, p მთელი მარტივი რიცხვია. აჩვენეთ, რომ $p-$ს მოდულით ნაშთთა კლასების Z_p რგოლი არ შეიცავს ნულის გამყოფ ელემენტებს (ე.ი. Z_p ველია).

53. ვთქვათ, M_n არის $n-$ური $(n \geq 2)$ რიგის ყველა კვადრატულ მატრიცთა რგოლი რომელიღაც P ველზე. აჩვენეთ, რომ M_n რგოლი ყოველთვის შეიცავს ნულის გამყოფ ელემენტებს.

54. ვთქვათ, P რომელიღაც ველია. აჩვენეთ, რომ P ველი არასოდეს შეიცავს ნულის გამყოფ ელემენტებს.

55. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რომელიღაც რგოლია, ხოლო Y არის X სიმრავლის რომელიღაც არაცარიელი ქვესიმრავლე. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{Y}=(\mathrm{Y},+,-,\cdot,1)$ იქნება $\mathbf{X}$ რგოლის ქვერგოლი მხოლოდ მაშინ თუ ერთდროულად სამართლიანია შემდეგი ორი პირობა:

1) $a-b\in Y$ ნებისმიერი $a,b\in Y-$სათვის;

2) $a\cdot b\in Y$ ნებისმიერი $a,b\in Y-$სათვის.

56. ვთქვათ, $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რომელიღაც ველია, ხოლო Y არის X სიმრავლის რომელიღაც არაცარიელი ქვესიმრავლე. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{Y}=(\mathrm{Y},+,-,\cdot,1)$ იქნება $\mathbf{X}$ ველის ქვეველი მხოლოდ მაშინ თუ ერთდროულად სამართლიანია შემდეგი ორი პირობა:

1) $a-b\in Y$ ნებისმიერი $a,b\in Y-$სათვის;

2) $a\cdot b^{-1}\in Y$ ნებისმიერი $a,b\in Y-$სათვის (b^{-1} სიმბოლოთი აღნიშნულია b ელემენტის შებრუნებული ელემენტი $(\cdot)$ ოპერაციის მიმართ).

პასუხები

4. 1) $a=4-$ის შებრუნებულია $\sqrt{2}$;

2) $a=9-$ის შებრუნებულია $\sqrt{3}$;

3) $a=16-$ის შებრუნებულია 2;

4) $a=25-$ის შებრუნებულია $\sqrt{5}$;

5) $a=36-$ის შებრუნებულია $\sqrt{6}$;

6) $a=49-$ის შებრუნებულია $\sqrt{7}$;

7) $a=64-$ის შებრუნებულია $2\cdot\sqrt{2}$;

8) $a=81-$ის შებრუნებულია 3.

§21. ნახევარჯგუფების, ჯგუფების, რგოლებისა და ველების აგების ერთი მეთოდის შესახებ

ამ პარაგრაფის მიზანია აღწერილ იქნას ერთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას იძლევა რიცხვითი ველების (კომპლექსურ რიცხვთა ველის ქვეველების) ბინარული ალგებრული ოპერაციების თვისებებზე დაყრდნობით ავაგოთ ისეთი ალგებრების მაგალითები, რომლებიც ნახევარჯგუფები, ჯგუფები, რგოლები და ველები იქნებიან. ასევე თითოეულ შემთხვევაში, ვიპოვოთ მათი იდემპოტენტური, ნეიტრალური და მოცემული ელემენტების სიმეტრიული ელემენტები მოცემული ნეიტრალური ელემენტის მიმართ თუ ასეთი ელემენტები არსებობზენ.კერძოდ, ამ პარაგრაფში სულ განვიხილავთ ორი ბინარული ალგებრული $(\oplus)$, $(*)$ ოპერაციის თვისებებს და მათ შორის კავშირებს.

1. პირველად $\mathbf{K}'=(K',+,-,\cdot,1)$ რიცხვით რგოლზე განვმარტოთ ბინარული ალგებრული $(\oplus)$ ოპერაცია შემდეგნაირად: $a\oplus b=a_0'a+b_0'b+c_0'$, სადაც a_0',b_0',c_0' $(a_0'\neq 0,\ b_0'\neq 0,\ c_0'\neq 0)$ არიან K' სიმრავლის რომელიღაც ფიქსირებული ელემენტები, ხოლო a და b არიან K' სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები.

შევნიშნოთ, რომ $(\oplus)$ ოპერაცია კომუტაციურია, რადგანაც რიცხვითი $\mathbf{K}'$ რგოლი ყოველთვის კომუტაციურია.

1) ჯერ დავადგინოთ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს a_0',b_0',c_0' ელემენტები, რომ ნებისმიერი $a,b,c\in K'-$ელემენტებისათვის ადგილი ჰქონდეს $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$ ტოლობას. $(\oplus)$ ოპერაციის განსაზღვრის თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned}&(a\oplus b)\oplus c=(a_0'a+b_0'b+c_0')\oplus c=a_0'(a_0'a+b_0'b+c_0')+b_0'c+c_0'=\\&=(a')_0^2\,a+a_0'b_0'b+b_0'c+a_0'c_0'+c_0';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a\oplus(b\oplus c)=a\oplus(a_0'b+b_0'c+c_0')=a_0'a+b_0'(a_0'b+b_0'c+c_0')+c_0'=\\&=a_0'a+a_0'b_0'b+(b')_0^2\,c+b_0'c_0'+c_0'.\end{aligned}$$

დაშვების თანახმად $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$. ამიტომაც

$$\left((a')_0^2\,a+a_0'b_0'b+b_0'c+a_0'c_0'+c_0'=a_0'a+a_0'b_0'b+(b')_0^2\,c+b_0'c_0'+c_0'\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left((a')_0^2-a_0'\right)a+\left(b_0'-(b')_0^2\right)c+\left(a_0'c_0'-b_0'c_0'\right)=0$$

ე.ი.

$$\begin{cases}(a')_0^2-a_0'=0,\\ b_0'-(b')_0^2=0,\\ a_0'c_0'-b_0'c_0'=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a_0')^2=a_0',\\ (b_0')^2=b_0',\\ a_0'c_0'-b_0'c_0'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0'=1,\\ b_0'=1,\end{cases}$$

რადგანაც $a_0'\neq 0$ და $b_0'\neq 0$.

ამგვარად, K' სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(\oplus)$ ოპერაცია ასოციაციურია მხოლოდ მაშინ, როცა

$$a\oplus b=a+b+c_0',\qquad\ldots(1)$$

სადაც c_0' ნებისმიერია.

2) ახლა დავადგინოთ, რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს K' სიმრავლის a ელემენტი, რომ იგი ბინარული ალგებრული $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ იყოს იდემპოტენტი. ამისათვის $a\oplus a=a$ ტოლობიდან უნდა ვიპოვოთ a. გვექნება: $a+a+c_0'=a$, ე.ი. $a=-c_0'$. ამგვარად a ელემენტი იდემპოტენტურია, თუ

$$a=-c_0'.\qquad\ldots(2)$$

3) ვიპოვოთ $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური e ელემენტი. ამისათვის დავუშვათ, რომ a არის $\mathbf{K}'$ რგოლის ნებისმიერი ელემენტი და ტოლობიდან $a\oplus e=a$ გამოვთვალოთ e ელემენტი. გვექნება $e=-c_0'$. ამგვარად, $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალურ e ელემენტს ექნება სახე

$$e=-c_0' . \qquad \dots(3)$$

4) ელემენტი a' დასახელებული a ელემენტის სიმეტრიულია e ნეიტრალური ელემენტის მიმართ, თუ $a\oplus a'=e$, მაშინ $a\oplus a'=-c_0'$. ბოლო ტოლობიდან უნდა ვიპოვოთ a'. გვექნება: $(a\oplus a'=-c_0')\Rightarrow(a+a'+c_0'=-c_0')\Rightarrow(a'=-(a+2c_0'))$.

ამგვარად, დასახელებული a ელემენტისათვის მის სიმეტრიულ a' ელემენტი $(\oplus)$ ოპერაციის მიმართ გამოითვლება ფორმულით

$$a'=-(a+2c_0'). \qquad \dots(4)$$

5) ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ რიცხვითი რგოლია და h ასახვაა K' სიმრავლიდან K' სიმრავლეში, რომელიც ნებისმიერად ფიქსირებული $a',b'\in K'-$სათვის და ნებისმიერი $x\in K'-$ აკმაყოფილებს პირობას: $h(x)=a'x+b'$. დავადგინოთ, რა პირობებში ნებისმიერი $x,y\in K'-$ელემენტებისათვის შესრულდება $h(x+y)=h(x)\oplus h(y)$ ტოლობა. გვექნება:

$$h(x+y)=a'(x+y)+b'=a'x+a'y+b',$$
$$h(x)\oplus h(y)=h(x)+h(y)+c_0'=(a'x+b')+(a'y+b')+c_0'=$$
$$=a'x+a'y+2b'+c_0'.$$

რადგანაც $h(x+y)=h(x)\oplus h(y)$, ამიტომ

$$(a'x+a'y+b'=a'x+a'y+2b'+c_0')\Rightarrow(b'=-c_0'),$$

ე.ი. h ასახვა შეინახავს $(+)$ ოპერაციას მხოლოდ მაშინ, როცა

$$h(x)=a'x-c_0', \qquad \dots(5)$$

ყოველი $x\in K'-$სათვის. გარდა ამისა მეხუთე, მეოთხე და მესამე ტოლობების გამოყენებით მივიღებთ:

$$h(-x)=a'(-x)-c_0'=-(a'x+c_0')=-((a'x-c_0')+2c_0')=$$
$$=-(h(x)+2c_0')=h(x)',\quad h(0)=a'\cdot 0-c_0'=-c_0'=e,$$

ე.ი h ასახვა ინახავს $(-)$ ოპერაციას და ნულოვან 0 ელემენტს. ამგვარად $h(x)=a'x-c_0'$ ასახვა არის ჰომომორფიზმი $(K',+,-,0)$ და $(K',\oplus,',e)$ ალგებრებს შორის.

2. ახლა განვმარტოთ კიდევ ერთი ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაცია და ვიპოვოთ მისი ზოგიერთი თვისება.

ვთქვათ, $\mathbf{K}'=(K',+,-,\cdot,1)$, რომელიღაც რიცხვითი რგოლია და $a*b=a_0ab+b_0a+c_0b+d_0$, სადაც a_0,b_0,c_0,d_0 $(a_0\neq 0,\, b_0\neq 0,\, d_0\neq 0)$ არიან K' სიმრავლის რომელიღაც ფიქსირებული ელემენტები, ხოლო a და b არიან K' სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები.

ჯერ შევნიშნოთ, რომ $(*)$ ოპერაცია კომუტაციურია, რადგან $(+)$ და $(\cdot)$ ოპერაციები K' სიმრავლეში კომუტაციური ოპერაციებია.

1) ახლა დავადგინოთ, რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს a_0,b_0,c_0,d_0 ელემენტები, რომ $(*)$ ოპერაციის დროს ნებისმიერი $a,b,c\in K'-$ელემენტებისათვის სამართლიანი იყოს $(a*b)*c=a*(b*c)$ ტოლობა. მივიღებთ:

$$(a*b)*c=(a_0ab+b_0a+c_0b+d_0)*c=a_0(a_0ab+b_0a+c_0b+d_0)c+$$
$$+b_0(a_0ab+b_0a+c_0b+d_0)+c_0c+d_0=a_0^2abc+a_0b_0ac+a_0c_0bc+$$
$$+a_0d_0c+a_0b_0ab+b_0^2a+b_0c_0b+b_0d_0+c_0c+d_0=a_0^2abc+a_0b_0ab+$$
$$+a_0b_0ac+a_0c_0bc+b_0^2a+b_0c_0b+(a_0d_0+c_0)c+(b_0d_0+d_0).$$
$$a*(b*c)=a*(a_0bc+b_0b+c_0c+d_0)=a_0a(a_0bc+b_0b+c_0c+d_0)+$$
$$+b_0a+c_0(a_0bc+b_0b+c_0c+d_0)+d_0=a_0^2abc+a_0b_0ab+a_0c_0ac+$$
$$+a_0d_0a+b_0a+a_0c_0bc+b_0c_0b+c_0^2c+c_0d_0+d_0=a_0^2abc+a_0b_0ab+$$
$$+a_0c_0ac+a_0c_0bc+(a_0d_0+b_0)a+b_0c_0b+c_0^2c+(c_0d_0+d_0).$$

დაშვების თანახმად, $(a*b)*c=a*(b*c)$, ამიტომაც

$$a_0^2abc+a_0b_0ab+a_0b_0ac+a_0c_0bc+b_0^2a+b_0c_0b+(a_0d_0+c_0)c+(b_0d_0+d_0)=$$
$$=a_0^2abc+a_0b_0ab+a_0c_0ac+a_0c_0bc+(a_0d_0+b_0)a+b_0c_0b+c_0^2c+(c_0d_0+d_0).$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\left(b_0^2a+\left(a_0d_0+c_0\right)c+b_0d_0=\left(a_0d_0+b_0\right)a+c_0^2c+c_0d_0\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\left(b_0^2-a_0d_0-b_0\right)a+\left(c_0^2-a_0d_0-c_0\right)c+\left(c_0d_0-b_0d_0\right)=0\right)$$

მაგრამ ბოლო ტოლობას ნებისმიერი a და $c-$სათვის ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ, როცა მათი კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები ნულის ტოლია. გვექნება:

$$\begin{cases}b_0^2-a_0d_0-b_0=0,\\ c_0^2-a_0d_0-c_0=0,\\ c_0d_0-b_0d_0=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_0^2=a_0d_0+b_0,\\ a_0d_0+c_0=c_0^2,\\ b_0d_0=c_0d_0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_0\left(b_0-1\right)=a_0d_0,\\ b_0=c_0,\end{cases}$$

რადგანაც $a_0\neq 0,\ b_0\neq 0,\ d_0\neq 0$.

ამგვარად, K' სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაცია იქნება ასოციაციური მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathbf{K}'$ რიცხვითი რგოლიდან აღებული a_0, b_0, d_0 ელემენტებისათვის ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობებს:

$$\begin{cases}a*b=a_0ab+b_0a+b_0b+d_0,\\ b_0\left(b_0-1\right)=a_0d_0.\end{cases}\qquad\ldots(6)$$

2) ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ რიცხვითი ველია, თუ $a_0\neq 1$, ან $\mathbf{K}'$ რიცხვითი რგოლია, თუ $a_0=1$. ახლა დავადგინოთ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $\mathbf{K}'$ ველის (რგოლის) a ელემენტი, რომ იგი ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის მიმართ იყოს იდემპოტენტი. ამისათვის $a*a=a$ ტოლობიდან უნდა ვიპოვოთ a. გვექნება: $a_0a^2+2b_0a+d_0=a$. ამოვხსნით რა a ელემენტის მიმართ კვადრატულ $a_0a^2+\left(2b_0-1\right)a+d_0=0$ განტოლებას, მივიღებთ: $a=\dfrac{1-b_0}{a_0}$, ან $a=-\dfrac{b_0}{a_0}$. ამგვარად $(*)$ ოპერაციის მიმართ a ელემენტი იდემპოტენტია, თუ

$$a=\frac{1-b_0}{a_0},\ \text{ან}\ a=-\frac{b_0}{a_0}.\qquad\ldots(7)$$

3) ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ რიცხვითი ველია, თუ d_0 უნაშთოდ არ იყოფა b_0 (და რგოლია, თუ d_0 უნაშთოდ იყოფა b_0). ვიპოვოთ $(*)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური e' ელემენტი. ამისათვის $a*e'=a$ ტოლობიდან უნდა გამოვთვალოთ e' ელემენტის მნიშვნელობა, სადაც e' არის $\mathbf{K}'$ ველის (რგოლის) ფიქსირებული ელემენტი, ხოლო a არის $\mathbf{K}'-$ველის (რგოლის) ნებისმიერი ელემენტი. გვექნება:

$$\begin{cases}a_0ae'+b_0a+b_0e'+d_0=a,\\ b_0\left(b_0-1\right)=a_0d_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\left(a_0e'-1+b_0\right)=-\left(b_0e'+d_0\right),\\ b_0\left(b_0-1\right)=a_0d_0.\end{cases}$$

ტოლობა $a\left(a_0e'-1+b_0\right)=-\left(b_0e'+d_0\right)$ უნდა შესრულდეს ნებისმიერი $a-$ სათვის. ამიტომაც

$$\begin{cases}b_0e'+d_0=0,\\ a_0e'-1+b_0=0,\\ b_0\left(b_0-1\right)=a_0d.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e'=-\dfrac{d_0}{b_0},\\ \left(-\dfrac{a_0d_0}{b_0}\right)-1+b_0=0,\\ b_0\left(b_0-1\right)=a_0d.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e'=-\dfrac{d_0}{b_0},\\ \left(-\dfrac{a_0d_0}{b_0}\right)+\left(b_0-1\right)=0,\\ b_0\left(b_0-1\right)=a_0d.\end{cases}\Rightarrow\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e'=-\dfrac{d_0}{b_0},\\ -a_0d_0+b_0\left(b_0-1\right)=0,\\ b_0\left(b_0-1\right)=a_0d.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e'=-\dfrac{d_0}{b_0},\\ -b_0\left(b_0-1\right)+b_0\left(b_0-1\right)=0,\\ b_0\left(b_0-1\right)=a_0d.\end{cases}\Rightarrow\left(e'=-\frac{d_0}{b_0}\right).$$

მივიღეთ, რომ $(*)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური ელემენტის როლს შეასრულებს ელემენტი

$$e' = -\frac{d_0}{b_0}. \qquad \dots(8)$$

4) ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ რიცხვითი ველია, ხოლო a' არის a ელემენ-ტის სიმეტრიული ელემენტი e ნეიტრალური ელემენტის მი-მართ. ამიტომ $a*a' = e = -\frac{d_0}{b_0}$ ტოლობიდან უნდა ვიპოვოთ a'.

გვექნება:

$$\left(a*a'=-\frac{d_0}{b_0}\right)\Rightarrow\left(a_0aa'+b_0a+b_0a'+d_0=-\frac{d_0}{b_0}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left((a_0a+b_0)a'=-\frac{d_0}{b_0}-b_0a-d_0\right)\Rightarrow\left((a_0a+b_0)a'=\frac{-d_0-b_0^2a-b_0d_0}{b_0}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left((a_0a+b_0)a'=\frac{-a_0d_0-b_0^2a_0a-b_0a_0d_0}{a_0b_0}\right)\Rightarrow\left(a'=\frac{-a_0d_0-b_0^2a_0a-b_0a_0d_0}{a_0b_0(a_0a+b_0)}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(a'=\frac{-b_0(b_0-1)-b_0^2a_0a-b_0b_0(b_0-1)}{a_0b_0(a_0a+b_0)}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(a'=\frac{-b_0(b_0-1)-b_0b_0(b_0-1)-b_0^2a_0a}{a_0b_0(a_0a+b_0)}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(a'=\frac{1-b_0(a_0a+b_0)}{a_0(a_0a+b_0)}\right)\Rightarrow\left(a'=\frac{1}{a_0(a_0a+b_0)}+\frac{b_0}{a_0}\right).$$

თუ $a_0a+b_0\neq 0$. ამგვარად დასახელებული a ელემენტისათვის მის სიმეტრიულ a' ელემენტს ექნება სახე

$$a'=\frac{1}{a_0(a_0a+b_0)}-\frac{b_0}{a_0}, \qquad \dots(9)$$

სადაც $a_0a+b_0\neq 0$.

5) ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ რიცხვითი ველია, თუ b_0 უნაშთოდ არ იყოფა a_0-ზე (რგოლია, თუ b_0 უნაშთოდ იყოფა a_0-ზე). დისტრიბუ-ტიულობის კანონს ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ, როცა

$$a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c).$$

გვექნება:

$$a*(b\oplus c)=a*(b+c+c_0')=a_0a(b+c+c_0')+b_0a+b_0(b+c+c_0')+d_0=$$
$$=a_0ab+a_0ac+a_0ac_0'+b_0a+b_0b+b_0c+b_0c_0'+d_0;$$
$$(a*b)\oplus(a*c)=(a_0ab+b_0a+b_0b+d_0)\oplus(a_0ac+b_0a+b_0c+d_0)=$$
$$=(a_0ab+b_0a+b_0b+d_0)+(a_0ac+b_0a+b_0c+d_0)+c_0'=$$
$$=a_0ab+b_0a+b_0b+d_0+a_0ac+b_0a+b_0c+d_0+c_0',$$

ე.ი.

$$a_0ab+a_0ac+a_0ac_0'+b_0a+b_0b+b_0c+b_0c_0'+d_0=$$
$$=a_0ab+b_0a+b_0b+d_0+a_0ac+b_0a+b_0c+d_0+c_0'.$$

აქედან და სხვა პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{cases}a_0ac_0'+b_0c_0'=b_0a+d_0+c_0',\\ b_0(b_0-1)=a_0d_0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0ac_0'-b_0a=d_0+c_0'-b_0c_0',\\ b_0(b_0-1)=a_0d_0.\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a(a_0c_0'-b_0)=d_0+c_0'-b_0c_0',\\ b_0(b_0-1)=a_0d_0.\end{cases}$$

რადგან $a(a_0c_0'-b_0)=d_0+c_0'-b_0c_0'$ ტოლობას ადგილი უნდა ჰქონდეს ნებისმიერი $a-$ელემენტისათვის აღებული $\mathbf{K}'$ ველი-დან, ამიტომ

$$\begin{cases}(a_0c_0'-b_0)=0,\\ d_0+c_0'-b_0c_0'=0,\\ b_0(b_0-1)=a_0d_0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_0'=\frac{b_0}{a_0},\\ d_0+\frac{b_0}{a_0}-\frac{b_0^2}{a_0}=0,\\ b_0(b_0-1)=a_0d_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_0'=\frac{b_0}{a_0},\\ a_0d_0+b_0-b_0^2=0,\\ b_0(b_0-1)=a_0d_0\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}c_0'=\frac{b_0}{a_0},\\ a_0d_0-b_0(b_0-1)=0,\\ b_0(b_0-1)=a_0d_0.\end{cases}\Rightarrow\left(c_0'=\frac{b_0}{a_0}\right).$$

ე.ი. $c_0' = \dfrac{b_0}{a_0}$. ამგვარად, დისტრიბუციულობის კანონი $(\oplus)$ და $(*)$ ოპერაციებს შორის სამართლიანი იქნება მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{cases} a \oplus b = a + b + c_0', \\ a * b = a_0 ab + b_0 a + b_0 b + d_0, \\ b_0 (b_0 - 1) = a_0 d_0, \\ c_0' = \dfrac{b_0}{a_0},\ a_0 \neq 0. \end{cases} \qquad \dots(10)$$

6) ახლა ვთქვათ $e = -c_0' = -\dfrac{b_0}{a_0}$, $e' = -\dfrac{d_0}{b_0}$ და მივიღოთ მხედველობაში, რომ $b_0 (b_0 - 1) = a_0 d_0$, მაშინ გვექნება:

$$e * e' = a_0 e e' + b_0 e + b_0 e' + d_0 = a_0 \left(-\frac{b_0}{a_0}\right)\left(-\frac{d_0}{b_0}\right) + b_0 \left(-\frac{b_0}{a_0}\right) + b_0 \left(-\frac{d_0}{b_0}\right) + d_0 =$$
$$= \frac{a_0 d_0}{a_0} - \frac{b_0^2}{a_0} = \frac{a_0 d_0 - b_0^2}{a_0} = \frac{b_0 (b_0 - 1) - b_0^2}{a_0} = -\frac{b_0}{a_0} = e.$$

რადგან $e' * e = e * e'$, ამიტომაც e' იქნება e ელემენტის ერთეულიც, ე.ი.

$$e' * e = e * e' = e. \qquad \dots(11)$$

7) ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ რიცხვითი ველია და h ასახვაა K' სიმრავლიდან K' სიმრავლეში, რომელიც ნებისმიერად ფიქსირებული $a', b' \in K'$ – სათვის და ნებისმიერი $x \in K'$ – აკმაყოფილებს პირობას: $h(x) = a'x + b'$. დავადგინოთ, რა პირობებში ნებისმიერი $x, y \in K'$ – სათვის შესრულდება $h(x \cdot y) = h(x) * h(y)$ ტოლობა. გვექნება:

$$h(x \cdot y) = a'xy + b'.$$

ნახევარჯგუფების, ჯგუფების, რგოლებისა და
ველების აგების ერთი მეთოდის შესახებ

$$h(x) * h(y) = a_0 h(x) h(y) + b_0 h(x) + b_0 h(y) + d_0 =$$
$$= a_0 (a'x + b')(a'y + b') + b_0 (a'x + b') + b_0 (a'y + b') + d_0 =$$
$$= a_0 \left((a')^2 xy + a'b'x + a'b'y + (b')^2 \right) + b_0 a'x + b_0 b' + b_0 a'y + b_0 b' + d_0 =$$
$$= a_0 (a')^2 xy + a_0 a'b'x + b_0 a'x + a_0 a'b'y + b_0 a'y + a_0 (b')^2 + b_0 b' + b_0 b' + d_0 =$$
$$= a_0 (a')^2 xy + a'(a_0 b' + b_0) x + a'(a_0 b' + b_0) y + \left(a_0 (b')^2 + 2 b_0 b' + d_0 \right).$$

რადგან $h(x \cdot y) = h(x) * h(y)$, ამიტომ

$$\left(a_0 (a')^2 - a' \right) xy + a'(a_0 b' + b_0) x + a'(a_0 b' + b_0) y + \left(a_0 (b')^2 + 2 b_0 b' + d_0 - b' \right) = 0$$

ნებისმიერი x და y ელემენტებისათვის ბოლო ტოლობას ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{cases} a_0 (a')^2 - a' = 0 \\ a'(a_0 b' + b_0) = 0 \\ a_0 (b')^2 + 2 b_0 b' + d_0 - b' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 a' - 1 = 0, \\ a_0 b' + b_0 = 0, \\ a_0 (b')^2 + 2 b_0 b' + d_0 - b' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{1}{a_0}, \\ b' = -\dfrac{b_0}{a_0}, \\ a_0 \left(-\dfrac{b_0}{a_0}\right)^2 + 2 b_0 \left(-\dfrac{b_0}{a_0}\right) + d_0 - \left(-\dfrac{b_0}{a_0}\right) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{1}{a_0}, \\ b' = -\dfrac{b_0}{a_0}, \\ -\dfrac{b_0^2}{a_0} + \dfrac{b_0}{a_0} + d_0 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{1}{a_0}, \\ b' = -\dfrac{b_0}{a_0}, \\ -b_0^2 + b_0 + b_0 (b_0 - 1) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{1}{a_0}, \\ b' = -\dfrac{b_0}{a_0}. \end{cases}$$

ვინაიდან (6) ტოლობის თანახმად $b_0 (b_0 - 1) = a_0 d_0$.

ამგვარად, $h(x \cdot y) = h(x) * h(y)$ ტოლობას ექნება ადგილი, მხოლოდ მაშინ, როცა

$$h(x)=\frac{1}{a_0}x-\frac{b_0}{a_0}=\frac{1}{a_0}x-c_0' \qquad \ldots(12)$$

ახლა მივიღოთ მხედველობაში მე$-(6)$ და მე$-(9)$, რომელთა თანახმადაც $b_0(b_0-1)=a_0d_0$ და $a'=\dfrac{1}{a_0(a_0a+b_0)}-\dfrac{b_0}{a_0}$ და გამოვთვალოთ შემდეგ გამოსახულებათა მნიშვნელობები:

$$h(1)=\frac{1}{a_0}\cdot 1-\frac{b_0}{a_0}=\frac{1-b_0}{a_0}=-\frac{b_0-1}{a_0}=-\frac{\frac{a_0d_0}{b_0}}{a_0}=-\frac{d_0}{b_0}=e',$$

$$h(x^{-1})=\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}-\frac{b_0}{a_0}=\frac{1-b_0x}{a_0x}=\frac{1}{a_0x}-\frac{b_0}{a_0}=\frac{1}{a_0\left(a_0\left(\frac{1}{a_0}\cdot x-\frac{b_0}{a_0}\right)+b_0\right)}-\frac{b_0}{a_0}= \quad \ldots(13)$$

$$=\frac{1}{a_0(a_0f(x)+b_0)}-\frac{b_0}{a_0}=(h(x))'.$$

მივიღეთ, რომ $h(x)=\dfrac{1}{a_0}x-\dfrac{b_0}{a_0}$ ასახვა წარმოადგენს ჰომომორფულ ასახვას $(K',\cdot,^{-1})$ და $(K',*,')$ ალგებრებს შორის. ასევე, $h:K'\to K'$ ასახვა განსაზღვრულია $h(x)=\dfrac{1}{a_0}x-\dfrac{b_0}{a_0}=\dfrac{1}{a_0}x-c_0'$ პირობით, სადაც $c_0'=\dfrac{b_0}{a_0}$, წარმოადგენს ჰომომორფიზმს $\mathbf{K}'=(K',+,-,\cdot,1)$ და $\mathbf{K}'=(K',\oplus,',*,e')$ რგოლებს შორის.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ მთელ რიცხვთა რგოლია და $a*b=4ab+4a+4b+3$, ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის აღებული $\mathbf{K}'$ ველიდან. აჩვენეთ, რომ $(*)$ ოპერაციის მიმართ $(K',*)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია.

ნახევარჯგუფების, ჯგუფების, რგოლებისა და
ველების აგების ერთი მეთოდის შესახებ

ჩვენს შემთხვევაში $a_0=4,\ b_0=4$ და $d_0=3$, ამიტომაც

$$b_0(b_0-1)=4\cdot 3=12=a_0d_0 \text{ და და } e'=-\frac{d_0}{b_0}=-\frac{3}{4}\notin Z.$$

ამიტომაც (6) ტოლობის თანახმად $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია, მაგრამ მოცემული ოპერაციის მიმართ არ არსებობს ნეიტრალური ელემენტი, ე.ი. $(K',*)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ მთელ რიცხვთა რგოლია და $a*b=3ab+4a+4b+4$, ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის აღებული $\mathbf{K}'$ რგოლიდან. აჩვენეთ, რომ $(*)$ ოპერაციის მიმართ $(K',*)$ ალგებრა მონოიდია.

ჩვენს შემთხვევაში $a_0=3,\ b_0=4$, $d_0=4$. ამის გამო გვექნება:

$$b_0(b_0-1)=4\cdot 3=12=a_0d_0 \text{ და } e'=-\frac{d_0}{b_0}=-\frac{4}{4}=-1.$$

ამიტომაც (6) და (8) ტოლობების თანახმად $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია და ამ ოპერაციის მიმართ მთელი რიცხვი -1 ნეიტრალური ელემენტია, ე.ი. $(K',*)$ ალგებრა მონოიდია.

მაგალითი 3. ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ რაციონალურ რიცხვთა ველია,

$$a*b=3ab+4a+4b+4 \text{ და } a'=\frac{1}{3(3a+4)}-\frac{4}{3}$$

ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის აღებული $\mathbf{K}'$ ველიდან. აჩვენეთ, რომ $(K',*,')$ ალგებრა ჯგუფია.

ჩვენს შემთხვევაში $a_0=3,\ b_0=4$ და $d_0=4$, ამის გამო გვექნება: $b_0(b_0-1)=4\cdot 3=12=a_0d_0$, $e=-\dfrac{d_0}{b_0}=-\dfrac{4}{4}=-1$ და

$$a*a'=a*\left(\frac{1}{3(3a+4)}-\frac{4}{3}\right)=3a\left(\frac{1}{3(3a+4)}-\frac{4}{3}\right)+4a+4\left(\frac{1}{3(3a+4)}-\frac{4}{3}\right)+4=$$

$$=\frac{a}{3a+4}+\frac{4}{3(3a+4)}-\frac{16}{3}+4=\frac{3a+4-16(3a+4)+12(3a+4)}{3(3a+4)}=$$
$$=\frac{3a+4-48a-64+36a+48}{3(3a+4)}=\frac{-9a-12}{3(3a+4)}=-\frac{3(3a+4)}{3(3a+4)}=-1.$$

ამიტომაც (6), (8) და (9) ტოლობების თანახმად $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია და ამ ოპერაციის მიმართ მთელი რიცხვი -1 ნეიტრალური ელემენტია. ამგვარად, $(K',*,')$ ალგებრა ჯგუფია.

მაგალითი 4. ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ მთელ რიცხვთა რგოლია (იხ.§ 20, მაგალითი 1), $a\oplus b=a+b+3$, $a'=-(a+6)$, $a*b=ab+3a+3b+6$, ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის აღებული $\mathbf{K}'$ რგოლიდან. აჩვენეთ, რომ $(K',\oplus,',*,-2)$ ალგებრა რგოლია.

$(\oplus)$ ოპერაციის შემთხვევაში $c_0'=3$. აქედან და მე-(1), მე-(3) და მე-(4) პირობების თანახმად შესაბამისად გვექნება:

1) ბინარული ალგებრული $(\oplus)$ ოპერაცია ასოციაციურია;

2) ამ ოპერაციას გააჩნია ნეიტრალური $e=-c_0'=-3$ ელემენტი;

3) ნებისმიერი a ელემენტისათვის აღებული მთელ რიცხვთა რგოლიდან არსებობს $e=-3$ ელემენტის მიმართ სიმეტრიული $a'=-(a+6)$ ელემენტი. ამგვარად 1), 2) და 3) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $(K',\oplus,')$ ალგებრა კომუტაციური ჯგუფია.

ახლა განვიხილოთ ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის თვისებები. ჩვენს შემთხვევაში $a_0=1$, $b_0=3$ და $d_0=6$, ამიტომაც $b_0(b_0-1)=3\cdot 2=6=1\cdot 6=a_0d_0$, ე.ი. $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია. გარდა ამისა ამ ოპერაციის მიმართ არსებობს ნეიტრა-

ლური $e'=-\frac{6}{3}=-2\in K'$. ამგვარად, $(K',*)$ ალგებრა მონოიდია.

რადგან $(*)$ ოპერაცია კომუტაციურია, ამიტომ $e*e'=e'*e$ და $e*e'=ee'+3e+3e'+6=(-3)(-2)+3(-3)+3(-2)+6=-3$. მივიღეთ, რომ e' არის e-ს ერთეული $(*)$ ოპერაციის მიმართ. რადგან $3=c_0'=\frac{b_0}{a_0}=\frac{3}{1}=3$, ამიტომ მე-$(10)$ პირობის თანახმად სამართლიანი იქნება ტოლობა $a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$. მივიღეთ, რომ $(K',\oplus,',*,-2)$ ალგებრა კომუტაციური რგოლია.

მაგალითი 5. ვთქვათ, $\mathbf{K}'$ რაცინალურ რიცხვთა ველია $a\oplus b=a+b+3$, $a'=-(a+6)$, $a*b=ab+3a+3b+6$, ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის აღებული $\mathbf{K}'$ ველიდან. აჩვენეთ, რომ $(K',\oplus,',*,-2)$ ალგებრა ველია.

$(\oplus)$ ოპერაციის შემთხვევაში $c_0'=3$. აქედან და მე-(1), მე-(3) და მე-(4) პირობების თანახმად შესაბამისად გვექნება:

1) ბინარული ალგებრული $(\oplus)$ ოპერაცია ასოციაციურია;

2) ამ ოპერაციას გააჩნია ნეიტრალური $e=-c_0'=-3$ ელემენტი;

3) ნებისმიერი a ელემენტისათვის აღებული მთელ რიცხვთა რგოლიდან არსებობს $e=-3$ ელემენტის მიმართ სიმეტრიული $a'=-(a+6)$ ელემენტი. ამგვარად 1), 2) და 3) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $(K',\oplus,')$ ალგებრა კომუტაციური ჯგუფია.

ახლა განვიხილოთ ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაციის თვისებები. ჩვენს შემთხვევაში $a_0=1$, $b_0=3$ და $d_0=6$, ამიტომაც $b_0(b_0-1)=3\cdot 2=6=1\cdot 6=a_0d_0$, ე.ი. (6) პირობის თანახმად $(*)$

ოპერაცია ასოციაციურია. გარდა ამისა, ამ ოპერაციის მიმართ არსებობს ნეიტრალური $e=-\frac{6}{3}=-2\in K'$.

მოცემულ შემთხვევაში a ელემენტის სიმეტრიულ a' ელემენტს $e=-2$ ერთეულის მიმართ ექნება სახე $a'=-\frac{3a+8}{a+3}$. სადაც $a+3\neq 0$. ახლა თუ მივიღებთ მხედველობაში (11) ტოლობასაც, გვექნება, რომ $(K',*,')$ ალგებრა კომუტაციური ჯგუფია.

რადგან $3=c_0'=\frac{b_0}{a_0}=\frac{3}{1}=3$, ამიტომ მე-$(10)$ პირობის თანახმად სამართლიანი იქნება ტოლობა $a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$. მივიღეთ, რომ $(K',\oplus,',*,-2)$ ალგებრა ველია.

სავარჯიშოები.

1. ვთქვათ, $Z=(Z,+,-,\cdot,1)$ მთელ რიცხვთა რგოლია. აჩვენეთ, რომ $(Z,\oplus,')$ ალგებრა ჯგუფია თუ

1) $a\oplus b=a+b+5$ და $a'=-(a+10)$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

2) $a\oplus b=a+b-7$ და $a'=-(a-14)$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

3) $a\oplus b=a+b-11$ და $a'=-(a-22)$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

4) $a\oplus b=a+b-\frac{1}{2}$ და $a'=-(a-1)$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

5) $a\oplus b=a+b-\frac{9}{2}$ და $a'=-(a-9)$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

6) $a\oplus b=a+b-1$ და $a'=-(a-2)$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

7) $a\oplus b=a+b+1$ და $a'=-(a+2)$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

8) $a\oplus b=a+b-\frac{7}{10}$ და $a'=-\left(a-\frac{7}{5}\right)$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

9) $a\oplus b=a+b+\frac{7}{2}$ და $a'=-(a+7)$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

10) $a\oplus b=a+b-\frac{1}{2}$ და $a'=-(a-1)$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის.

2. ვთქვათ, $\mathbf{Z}=(Z,+,-,\cdot,1)$ მთელ რიცხვთა რგოლია. აჩვენეთ. რომ $h:Z\to Z$ ასახვა ჰომომორფიზმია $(\mathrm{Z},+,-,0)$ და $(\mathrm{Z},\oplus,',\mathrm{e})$ ალგებრებს შორის, თუ

1) $h(x)=2x+3$, $a\oplus b=a+b-3$, $a'=-(a-6)$ და $e=3$;

2) $h(x)=3x-2$, $a\oplus b=a+b+2$, $a'=-(a+4)$ და $e=-2$;

3) $h(x)=5x+4$, $a\oplus b=a+b-4$, $a'=-(a-8)$ და $e=4$;

4) $h(x)=7x-6$, $a\oplus b=a+b+6$, $a'=-(a+12)$ და $e=-6$;

5) $h(x)=2x-1$, $a\oplus b=a+b+1$, $a'=-(a+2)$ და $e=-1$;

6) $h(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$, $a\oplus b=a+b+\frac{1}{2}$, $a'=-(a+1)$ და $e=-\frac{1}{2}$;

7) $h(x)=\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}$, $a\oplus b=a+b-\frac{3}{2}$, $a'=-(a-3)$ და $e=\frac{3}{2}$;

8) $h(x)=\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}$, $a\oplus b=a+b+\frac{3}{4}$, $a'=-\left(a+\frac{3}{2}\right)$ და $e=-\frac{3}{4}$;

9) $h(x)=2x+1$, $a\oplus b=a+b-1$, $a'=-(a-2)$ და $e=1$;

10) $h(x)=3x+2$, $a\oplus b=a+b-2$, $a'=-(a-4)$ და $e=2$.

3. ვთქვათ, $Z=(Z,+,-,\cdot,1)$ მთელ რიცხვთა რგოლია. აჩვენეთ, რომ $(Z,*,')$ ალგებრა ნახევარჯგუფია და იპოვეთ მისი იდემპოტენტური ელემენტები, თუ

1) $a*b=2ab+5a+5b+10$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

2) $a*b=ab+5a+5b+20$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

3) $a*b=2ab+7a+7b+21$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

4) $a*b=6ab+4a+4b+2$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

5) $a*b=3ab+4a+4b+4$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

6) $a*b=6ab+3a+3b+1$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

7) $a*b=ab+4a+4b+6$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

8) $a*b=5ab-4a-4b+4$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

9) $a*b=12ab-3a-3b+1$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

10) $a*b=ab-3a-3b+12$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის.

4. ვთქვათ, $\mathbf{Q}=(Q,+,-,\cdot,1)$ რაციონალურ რიცხვთა ველია. აჩვენეთ. რომ $h:Q\to Q$ ასახვა ჰომომორფიზმია $(Q,\cdot,^{-1},1)$ და $(Q,*,',e')$ ალგებრებს შორის, თუ

1) $h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, $a*b=2ab+5a+5b+10$, $a'=-\frac{5a+12}{2a+5}$ და $e'=-2$;

2) $h(x)=\frac{1}{6}x-\frac{2}{3}$, $a*b=6ab+4a+4b+2$, $a'=-\frac{8a+5}{12a+8}$ და $e'=-\frac{1}{3}$;

3) $h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$, $a*b=2ab+7a+7b+21$, $a'=-\frac{7a+24}{2a+7}$ და $e'=-\frac{21}{2}$;

4) $h(x)=x-5$, $a*b=ab+5a+5b+20$, $a'=-\frac{5a+24}{a+5}$ და $e'=-4$;

5) $h(x)=\frac{1}{2}x-2$, $a*b=2ab+4a+4b+6$, $a'=-\frac{8a+15}{4a+8}$ და $e'=-\frac{3}{2}$;

6) $h(x)=\frac{1}{2}x+2$, $a*b=2ab-4a-4b+10$, $a'=\frac{8a-15}{4a-8}$ და $e'=\frac{5}{2}$;

7) $h(x)=x+3$, $a*b=ab-3a-3b+6$, $a'=\frac{3a-8}{a-3}$ და $e'=2$;

8) $h(x)=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$, $a*b=6ab-2a-2b+1$, $a'=\frac{4a-1}{4(3a-1)}$ და $e'=\frac{1}{2}$;

9) $h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $a*b=2ab-a-b+1$, $a'=\frac{a}{2a-1}$ და $e'=\frac{1}{2}$;

10) $h(x)=x+1$, $a*b=ab-a-b+2$, $a'=\frac{a}{a-1}$ და $e'=2$.

5. ვთქვათ, $Z=(Z,+,-,\cdot,1)$ მთელ რიცხვთა რგოლია. აჩვენეთ, რომ $(Z,\oplus,',*,e')$ ალგებრა რგოლია, თუ

1) $a\oplus b=a+b+4$, $a'=-(a+8)$, $a*b=ab+4a+4b+12$, $e'=-3$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

2) $a\oplus b=a+b+3$, $a'=-(a+6)$, $a*b=ab+3a+3b+6$, $e'=-2$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

3) $a\oplus b=a+b+2$, $a'=-(a+4)$, $a*b=ab+2a+2b+2$, $e'=-1$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

4) $a\oplus b=a+b+5$, $a'=-(a+10)$, $a*b=ab+5a+5b+20$, $e'=-4$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

5) $a\oplus b=a+b+6$, $a'=-(a+12)$, $a*b=ab+6a+6b+30$, $e'=-5$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

6) $a\oplus b=a+b-1$, $a'=-(a+12)$, $a*b=ab-a-b+2$, $e'=2$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

7) $a\oplus b=a+b-2$, $a'=-(a-4)$, $a*b=ab-2a-2b+6$, $e'=3$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

8) $a\oplus b=a+b-\frac{3}{2}$, $a'=-(a-3)$, $a*b=2ab-3a-3b+6$, $e'=-5$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

9) $a\oplus b=a+b-2$, $a'=-(a-4)$, $a*b=2ab-4a-4b+10$, $e'=\frac{5}{2}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

10) $a\oplus b=a+b-\frac{2}{5}$, $a'=-(a-4)$, $a*b=10ab-4a-4b+2$, $e'=\frac{1}{2}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის.

6. ვთქვათ, $\mathbf{Q}=(Q,+,-,\cdot,1)$ რაციონალურ რიცხვთა ველია. აჩვენეთ, რომ $(Q,\oplus,',*,e')$ ალგებრა ველია და იპოვეთ a_1 ელემენტის სიმეტრიული a_1' ელემენტი $(*)$ ოპერაციის მიმართ, თუ

1) $a\oplus b=a+b+2$, $a'=-(a+4)$, $a*b=2ab+4a+4b+6$, $e'=-\frac{3}{2}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის და $a_1=2$;

2) $a\oplus b=a+b+\frac{3}{2}$, $a'=-(a+3)$, $a*b=2ab+3a+3b+3$, $e'=-1$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის და $a_1=4$;

3) $a\oplus b=a+b+1$, $a'=-(a+2)$, $a*b=2ab+2a+2b+1$, $e'=-\frac{1}{2}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის და $a_1=-2$;

4) $a\oplus b=a+b+\frac{5}{2}$, $a'=-(a+5)$, $a*b=2ab+5a+5b+10$, $e'=-2$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის და $a_1=-4$;

5) $a\oplus b=a+b+2$, $a'=-(a+4)$, $a*b=3ab+6a+6b+10$, $e'=-\frac{5}{3}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის და $a_1=-5$;

6) $a\oplus b=a-\frac{1}{3}$, $a'=-\left(a-\frac{2}{3}\right)$, $a*b=15ab-5a-5b+2$, $e'=\frac{2}{5}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის და $a_1=-1$;

7) $a\oplus b=a+b-2$, $a'=-(a-4)$, $a*b=2ab-4a-4b+10$, $e'=\frac{5}{2}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის და $a_1=-2$;

8) $a\oplus b=a+b-\frac{2}{3}$, $a'=-\left(a-\frac{4}{3}\right)$, $a*b=3ab-2a-2b+2$, $e'=1$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის და $a_1=-3$;

9) $a\oplus b=a+b-1$, $a'=-(a-2)$, $a*b=3ab-3a-3b+4$, $e'=\frac{4}{3}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის და $a_1=-4$;

10) $a\oplus b=a+b-\frac{3}{4}$, $a'=-\left(a-\frac{3}{2}\right)$, $a*b=4ab-3a-3b+3$, $e'=1$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის და $a_1=-5$.

7. ვთქვათ, $\mathbf{Q}=(Q,+,-,\cdot,1)$ რაციონალურ რიცხვთა ველია. აჩვენეთ. რომ $h:Q\to Q$ ასახვა ჰომომორფიზმია $(Q,+,-,\cdot,1)$ და $(Q,\oplus,',*,e')$ ველებს შორის, თუ

1) $h(x)=\frac{1}{2}x-2$, $a\oplus b=a+b+2$, $a'=-(a+4)$ $a*b=2ab+4a+4b+6$,

$e'=-\frac{3}{2}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

2) $h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, $a\oplus b=a+b+\frac{3}{2}$, $a'=-(a+3)$, $a*b=2ab+3a+3b+3$,

$e'=-1$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

3) $h(x)=\frac{1}{2}x-1$, $a\oplus b=a+b+1$, $a'=-(a+2)$ $a*b=2ab+2a+2b+1$,

$e'=-\frac{1}{2}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

4) $h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, $a\oplus b=a+b+\frac{5}{2}$, $a'=-(a+5)$, $a*b=2ab+5a+5b+10$,

$e'=-2$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

5) $h(x)=\frac{1}{3}x-2$, $a\oplus b=a+b+2$, $a'=-(a+4)$ $a*b=3ab+6a+6b+10$,

$e'=-\frac{5}{3}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

6) $h(x)=\frac{1}{20}x-2$, $a\oplus b=a+b+2$, $a'=-(a+4)$ $a*b=20ab-4a-4b+1$,

$e'=\frac{1}{4}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

7) $h(x)=\frac{1}{12}x+\frac{1}{4}$, $a\oplus b=a+b-\frac{1}{4}$, $a'=-\left(a-\frac{1}{2}\right)$ $a*b=12ab-3a-3b+1$,

$e'=\frac{1}{3}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

8) $h(x)=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$, $a\oplus b=a+b-\frac{1}{3}$, $a'=-\left(a-\frac{2}{3}\right)$ $a*b=6ab-2a-2b+1$,

$e'=\frac{1}{2}$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

9) $h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $a\oplus b=a+b-\frac{1}{2}$, $a'=-(a-1)$ $a*b=2ab-a-b+1$,

$e'=1$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის;

10) $h(x)=x-1$, $a\oplus b=a+b-1$, $a'=-(a-2)$ $a*b=ab-a-b+2$,

$e'=1$ ნებისმიერი $a,b\in Z$ ელემენტებისათვის.

პასუხები

3. 1) $a=-2$, ან $a=-\frac{5}{2}$; 2) $a=-4$, ან $a=-5$;

3) $a=-3$, ან $a=-\frac{7}{2}$; 4) $a=-\frac{1}{3}$, ან $a=-\frac{2}{3}$;

5) $a=-1$, ან $a=-\frac{4}{3}$. 6) $a=-\frac{1}{3}$, ან $a=-\frac{1}{2}$;

7) $a=-3$, ან $a=-4$; 8) $a=1$, ან $a=\frac{4}{5}$;

9) $a=\frac{1}{3}$, ან $a=\frac{1}{4}$; 10) $a=4$, ან $a=3$.

6. 1) $a_1'=-\frac{31}{16}$; 2) $a_1'=-\frac{16}{11}$; 3) $a_1'=-\frac{5}{4}$; 4) $a_1'=-\frac{8}{3}$;

5) $a_1'=-\frac{55}{27}$; 6) $a_1'=\frac{33}{100}$; 7) $a_1'=\frac{31}{16}$; 8) $a_1'=\frac{7}{11}$; 9) $a_1'=\frac{44}{45}$;

10) $a_1'=\frac{17}{23}$.

ლიტერატურა

1. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Москва, 1962.
2. Бухштаб А. А. Теория чисел. Москва, 1966.
3. Ляпин Е. С., Аизенштат А. Я., Лесохин М. М. Упражнения по теории групп. Москва, 1967.
4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Москва, 1967.
5. Курош А. Г. Курс Высшей алгебры. Москва, 1971.
6. ქემხაძე შ. ს. უმაღლესი ალგებრა. თბილისი, 1972.
7. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. Москва, 1975.
8. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел. Москва, 1978.
9. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. Москва, 1979.
10. Скорняков Л. А. Элементы алгебры. Москва, 1980.
11. Кошелев Ю. Г. Научные основы школьного курса математики при изучении числовых систем. Новосибирск, 1980.
12. Солодовников А. С. Задачник практикум по алгебре. Москва, 1985.
13. Нечаев В. А. Задачник практикум по алгебре (Группы, Кольца, Поля, Векторные и евклидовы пространства, Линейные отображения). Москва, 1985.
14. Диасамидзе Я.И., Полные полугруппы бинарных отношений. Батуми, 2000.
15. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Москва, 2001.
16. Кострикин А. И. Сборник задач по алгебре. Москва, 2001.
17. ქათამაძე რ. უმაღლესი ალგებრის ამოცანათა კრებული. ბათუმი, 2002.
18. ქათამაძე რ. რიცხვთა თეორიის ამოცანათა კრებული. ბათუმი, 2004.
19. David S. D., Richard M. F., Abstract Algebra, Prentice hall, Upper Saddle River, N. J. 07458.

20. დიასამიძე ი. ალგებრა და რიცხვთა თეორია (საფაკულტეტო სწავლებისათვის). შოთა რუსთაველის სახემწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, ბათუმი, 2008.
21. Диасамидзе Я. И., Махарадзе Ш. И. Полные полугруппы бинарных отношений. Спутник +, Москва, 2010.
22. Diasamidze Ya., Makharadze Sh. Complete Semigroups of Binary Relations. Kriter, Turkey, 2013.
23. დიასამიძე ი. ალგებრა და რიცხვთა თეორია (მათემატიკოსებისათვის). ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, ბათუმი, 2013.
24. Диасамидзе Я. И., Махарадзе Ш. И. Полные полугруппы бинарных отношений. LAP Lambert, Academic Publishing, RU. 2017.

ძირითადი აღნიშვნები

1. $\overline{p}$ – გამონათქვამის უარყოფა.
2. $p\vee q$ – p და q გამონათქვამების დიზუნქცია.
3. $p\wedge q$ – p და q გამონათქვამების კონიუნქცია.
4. $p\rightarrow q$ – p და q გამონათქვამების იმპლიკაცია.
5. $p\leftrightarrow q$ – p და q გამონათქვამების ეკვივალენცია.
6. $\Rightarrow$ – მტკიცებულებათა გამომდინარეობა.
7. $\Leftrightarrow$ – მტკიცებულებათა ტოლძალოვნება.
8. $\in$ – მიკუთვნების მიმართება.
9. $\notin$ – მიკუთვნების მიმართების უარყოფა.
10. $=$ – ტოლობის მიმართება.
11. $\{x\mid P(x)\}$ –სიმრავლეა, რომელის ელემენტებია ყველა ისეთი x ელემენტი, რომელთათვისაც $P(x)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია.
12. $B(X)$ – X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე - ბულეანი.
13. $|X|$ – X სიმრავლის სიმძლავრე ან სასრულ X სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა.
14. $\subseteq$ – თეორიულ-სიმრავლური ჩართვის მიმართება.
15. $\{x,y\}$ – დაულაგებელი წვილი.
16. $(x,y)=\{x,\{x,y\}\}$ – დალაგებული წყვილი.
17. $\cup$, $\bigcup$ – თეორიულ-სიმრავლური გაერთიანების ოპერაცია.
18. $\cap$, $\bigcap$ – თეორიულ-სიმრავლური თანაკვეთის ოპერაცია.
19. $\setminus$ – სიმრავლეთა სხვაობის ოპერაცია.
20. U – უნივერსალური სიმრავლე.
21. $\overline{A}=U\setminus A$ – A სიმრავლის დამატება U სიმრავლემდე.
22. $X\times Y$ – X და Y სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი.
23. $\alpha\subseteq X\times Y$ – α თანადობაა X და Y სიმრავლეებს შორის.
24. $(x,y)\in f$, xfy – (x,y) წყვილი f თანადობის ელემენტია.

25. $\alpha\circ\beta$ – α და β თანადობების ნამრავლი.
26. fX – f თანადობის პირველი პროექცია ან f ასახვის განსაზღვრის არე.
27. Yf – f თანადობის მეორე პროექცია ან f ასახვის მნიშვნელობათა სიმრავლე.
28. $f:X\rightarrow Y$ – f ასახვაა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში.
29. Δ_X – X სიმრავლის თავისთავზე იგივური ასახვა.
30. f^{-1} – f ასახვის შებრუნებული ასახვა.
31. $f\cdot g$ – f და g ასახვების ნამრავლი.
32. $\bigcup_{i\in I}X_i$ – ყველა X_i $(i\in I)$ სიმრავლის გაერთიანება.
33. $\bigcup_{i=1}^{n}X_i$ – ყველა X_i $(i=1,2,...,n)$ სიმრავლის გაერთიანება.
34. $\bigcap_{i\in I}X_i$ – ყველა X_i $(i\in I)$ სიმრავლის თანაკვეთა.
35. $\bigcap_{i=1}^{n}X_i$ - ყველა X_i $(i=1,2,...,n)$ სიმრავლის თანაკვეთა.
36. $X_1\times X_2\times...\times X_n$ – $X_1,X_2,...,X_n$ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავი.
37. X^n – X სიმრავლის თავისთავზე n–ჯერ დეკარტული ნამრავლი.
38. $*$ – ბინარული ალგებრული ოპერაცია.
39. $\circ$ – ბინარული ალგებრული ოპერაცია.
40. $+$ – შეკრების ბინარული ალგებრული ოპერაცია.
41. $\cdot$ – გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაცია.
42. $-$ – გამოკლების ბინარული ალგებრული ოპერაცია.
43. $-,{}^{-1},{}'$ –მოპირდაპირეს, შებრუნებულის და სიმეტრიული ელემენტების აღების უნარული ოპერაციები.
44. (X,Ω,Ω') – ალგებრული სისტემა.
45. (X,Ω) – ალგებრა.

46. (X,Ω') – მოდელი.
47. $(X,*)$ –ნახევარჯგუფი.
48. $(X,\cdot)$ – ნახევარჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ.
49. $(X,+)$ – ნახევარჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ.
50. $(X,*,')$ – ჯგუფი.
51. $(X,\cdot,^{-1})$ – ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ.
52. $(X,+,-)$ – ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ.
53. $(X,+,-,\cdot,1)$ – რგოლი.
54. N – ნატურალურ რიცხვთა სისტემა.
55. Z – მთელ რიცხვთა სისტემა
56. Q – რაციონალურ რიცხვთა სისტემა.
57. R – ნამდვილ რიცხვთა სისტემა.
58. C – კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა.
59. K – კვატერნიონები.
60. S_n – $X=\{1,2,...,n\}$ სიმრავლის ყველა ჩასმათა სიმრალე.
61. $\theta': R \to \{-1,0,1\}$, სადაც $\theta'(a)=\begin{cases} 1, & a>0, \\ 0, & a=0, \\ -1, & a<0. \end{cases}$
62. $\theta: S_n \to \{-1,1\}$, სადაც $\theta(\varphi)=1$, თუ φ ლუწი ჩასმაა და $\theta(\varphi)=-1$, თუ φ კენტი ჩასმაა.
63. $A=(x_{ij})$ – მატრიცის აღმნიშვნელი სიმბოლო.
64. $|A|$ ან $\det A$ – A მატრიცის დეტერმინანტი.
65. V – არითმეტიკული ვექტორული სივრცე.
66. $r(A)$ – A მატრიცის რანგი.
67. $\mathrm{K}[x]$ – x ცვლადის მრავალწევრთა რგოლი კომუტაციურ K რგოლზე.

68. $\deg f(x)$ ან $\deg f(x_1,x_2,...,x_n)$ – $f(x)$ და $f(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრების ხარისხის მაჩვენებელი.
69. $(f(x),g(x))$ – $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი.
70. $[f(x),g(x)]$ – $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უმცირესი საერთო ჯერადი.
71. $\mathrm{K}[x_1,x_2,...,x_n]$ – $x_1,x_2,...,x_n$ ცვლადების მიმართ მრავალწევრთა რგოლი კომუტაციურ K რგოლზე.
72. $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ – ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრები.
73. $\mathrm{K}(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ – $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებით წარმოქმნილი რგოლი.
74. $\mathrm{SK}[x_1,x_2,...,x_n]$ – $x_1,x_2,...,x_n$ ცვლადების ყველა სიმეტრიული მრავალწევრთა რგოლი.
75. $R(f,g)$ – f და g მრავალწევრების რეზულტანტი.

იაშა ილიასისძე დიასამიძე დაიბადა 1943 წლის 5 მაისს ხელვაჩაურის რაიონის სოფელ მარადიდში.

დაამთავრა სოფელ მარადიდის რვაწლიანი და აჭარისწყლის საშუალო სკოლა; ბათუმის სახელმწიფო პედაგოგიური ინსტიტუტის საღამოს განყოფილების მათემატიკის ფაკულტეტი და სანკტ-პეტერბურგის გერცენის სახელობის სახელმწიფო პედაგოგიური ინსტიტუტის ასპირანტურა თანამედროვე ალგებრის განხრით.

საკანდიდატო დისერტაცია დაიცვა კიევის ტარას შევჩენკოს სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ხოლო სადოქტორო დისერტაცია - თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში.

სადოქტორო დისერტაციის ოპონენტების - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორების ი. ს. პანიზოვსკისა (სანკტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი) და ა. ლ. შმელკინის (მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტი) რეცენზიებში ვკითხულობთ: „ნაშრომის ავტორის მიერ შექმნილია ახალი პერსპექტიული მიმართულება ნახევარჯგუფთა თეორიაში.“ ამ მიმართულებაში, იაშა დიასამიძის ხელმძღვანელობით, ხუთმა პირმა დაიცვა საკანდიდატო დისერტაცია თბილისში, სამმა კი მოიპოვა მათემატიკის აკადემიური დოქტორის ხარისხი ბათუმში. ამავე მიმართულებაში, ოღონდ სხვა პირის ხელმძღვანელობით, კიდევ ორმა პირმა დაიცვა დისერტაცია თურქეთში.

ი. დიასამიძე არის უცხო ენებზე გამოქვეყნებული სამოცდაათზე მეტი ნაშრომის, ოთხი მონოგრაფიის და ოთხი სახელმძღვანელოს ავტორი.

ი. დიასამიძე დაჯილდოებულია ღირსების მედლით სამეცნიერო და პედაგოგიური საქმიანობაში მიღწეული წარმატებებისათვის.