საქართველოს სახელმწიფო ჰიმნი
„თავისუფლება“

ლექსი დავით მაღრაძისა

ჩემი ხატია სამშობლო,
სახატე – მთელი ქვეყანა,
განათებული მთა-ბარი,
წილნაყარია ღმერთთანა.
თავისუფლება დღეს ჩვენი
მომავალს უმღერს დიდებას,
ცისკრის ვარსკვლავი ამოდის
და ორ ზღვას შუა ბრწყინდება.
დიდება თავისუფლებას,
თავისუფლებას დიდება.

მათემატიკა 10

მოსწავლის წიგნი

გრიფი მიენიჭა ს.ს.ი.პ განათლების ხარისხის განვითარების ეროვნული ცენტრის მიერ
(ბრძანება N 375, 18.05.2012).

ბაკურ სულაკაურის
გამომცემლობა

ნანა ჯაფარიძე
მაია წილოსანი
ნანი წულაია

მათემატიკა 10
მათემატიკის სახელმძღვანელო მეათეკლასელთათვის
მოსწავლის წიგნი

დიზაინი: ია მახათაძე
ილუსტრაციები: ია მახათაძე
ყდის დიზაინი: მართა თაბუკაშვილი, ნათია კვარაცხელია
დაკაბადონება: მაია ფეიქრიშვილი

პირველი გამოცემა, 2012

ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა
მისამართი: დავით აღმაშენებლის 150, თბილისი 0112
ტელ.: 291 09 54, 291 11 65
ელფოსტა: info@sulakauri.ge

www.sulakauri.ge

ISBN 978-9941-15-635-9

N. Jafaridze
M. Tsilosani
N. Tsulaia

MATH 10
Student's Book

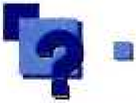
ს ა რ ჩ ე ვ ი

როგორ ვისარგებლოთ წიგნით

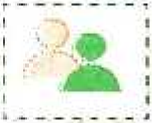
წიგნზე მუშაობა რომ გაგიადვილდეთ, მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ გაგაცნოთ წიგნის აგებულება.

წიგნი შედგება თავებისაგან, ხოლო თითოეული თავი — პარაგრაფებისგან. ყოველ თავში მოცემულია ტესტები რუბრიკით „შეამოწმე შენი ცოდნა". ტესტებზე მუშაობა დაგეხმარებათ თვითშემოწმებასა და შესწავლილი მასალის განმტკიცებაში. წიგნში განმარტებები დაბეჭდილია მუქი შრიფტით, ხოლო თვისებები, ფორმულები, ზოგიერთი საჭირო დასკვნა — ფერად ფონში.

თითქმის ყოველ თავში მოცემულია ამ თავში გადმოცემულ მასალასთან დაკავშირებული საინტერესო თემა. ყოველ პარაგრაფში შეხვდებით ზოგიერთს შემდეგი ნიშნებიდან:

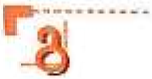


- უმარტივესი კითხვები, რომელთაც ახალი მასალის ახსნის პროცესში თვეად მოსწავლემ უნდა გასცეს პასუხი;

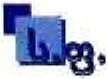


- წყვილებში სამუშაო;

* - შედარებით რთული ამოცანა;



- სავარჯიშოები, რომელიც ემსახურება გავლილი მასალის გამეორებას;



- საგულისხმო ფაქტი.

წიგნის ბოლოს მოცემულია საგნობრივი საძიებელი და შემოკლებული აღნიშვნებისთვის გამოყენებული მათემატიკური ნიშნები. გთავაზობთ აგრეთვე ზომის ერთეულებს, ლათინურ და ბერძნულ ანბანს და ამოცანების პასუხებს, დამხმარე ლიტერატურის ჩამონათვალს.

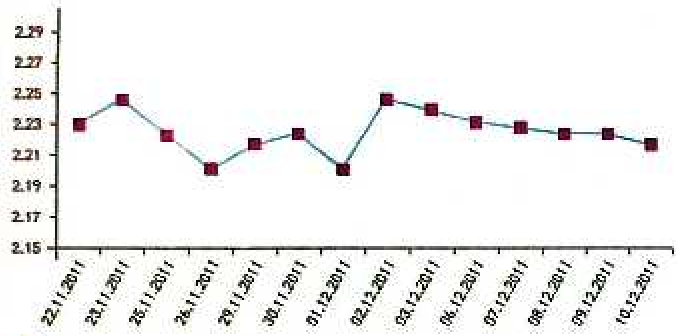
გისურვებთ წარმატებებს!

I თავი

ამ თავში გაიღრმავებთ ცოდნას ფუნქციის შესახებ. გაეცნობით მის თვისებებს. შეისწავლით $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციას. დაადგენთ კვადრატული ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს სეგმენტზე.

1 ფუნქცია. ფუნქციის თვისებები

1. შესავალი



ლარის კურსი ევროს მიმართ
22.11.2011-10.12.2011

1 არის თუ არა ნახაზზე მოცემული დამოკიდებულება ფუნქცია?

ა) იპოვეთ მისი განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე;

ბ) დროის რა პერიოდში იკლებდა, იზრდებოდა ევროს კურსი ლართან მიმართებაში?

გ) როდის მიაღწია ევროს კურსმა უდიდეს მნიშვნელობას?

ბუნებრივი მოვლენები ძალიან მჭიდროდაა ერთმანეთთან დაკავშირებული. უმეტეს შემთხვევაში ის კანონები, რომლებიც მართავენ მოვლენათა ურთიერთდამოკიდებულებას საკმაოდ რთულია.
უამრავ ასეთ დამოკიდებულებათა შორის მეცნიერებმა გამოყვეს ისეთები, როცა ერთი სიდიდის მნიშვნელობა ცალსახად განსაზღვრავს მეორე სიდიდის მნიშვნელობას. ასეთი დამოკიდებულებების მაგალითები მრავლად გვხვდება როგორც მათემატიკაში, ასევე ფიზიკაშიც (მაგალითად, თუ ვიცით კუბის წიბოს სიგრძე, შეგვიძლია გამოვთვალოთ კუბის მოცულობა, ზედაპირის ფართობი; მოძრაობის სიჩქარისა და მოძრაობაზე დახარჯული დროის საშუალებით შესაძლებელია გავლილი მანძილის გამოთვლა და ა.შ.).

გავიხსენოთ: X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როცა X სიმრავლის ნებისმიერ x ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ერთადერთი **y** ელემენტი **ფუნქცია** ეწოდება.
ფუნქცია აღინიშნება ასე:

$$f: x \to y, \quad \text{ან} \quad y=f(x),$$

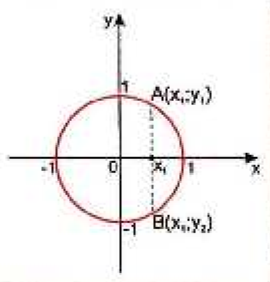
სადაც x დამოუკიდებული ცვლადია, არგუმენტი; y – დამოკიდებული ცვლადი, ფუნქცია; **f** კი – წესი, რომლითაც x ელემენტს შეესაბამება **y** ელემენტი.

X და Y რიცხვით სიმრავლეებს შორის ფუნქციური დამოკიდებულება რიცხვითი ფუნქციაა.

როგორც ვიცით, რიცხვითი ფუნქციის თვალსაჩინოთ წარმოსადგენად მის გრაფიკს იყენებენ. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი არის საკოორდინატო სიბრტყის $(x; f(x))$ წერტილთა სიმრავლე.

დახაზეთ ა) $y=2x+3$; ბ) $y=-x+1$; გ) $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის საშუალებით იპოვეთ $y(0)$; $y(-2)$; $y(3)$.

ცხადია, რომ საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული ყოველი წირი არ არის რაიმე ფუნქციის გრაფიკი. მაგალითად, ნახაზზე მოცემულია წრეწირი ცენტრით (0;0) წერტილში. იგი არ არის რაიმე ფუნქციის გრაფიკი, რადგან $\forall x \in (-1;1)$-ს შეესაბამება ორდინატის ორი y_1 და y_2 მნიშვნელობა, რაც იგივეა, რომ წრეწირზე არის ორი სხვადასხვა წერტილი ერთი და იმავე აბსცისით და განსხვავებული ორდინატით.
მაშასადამე,



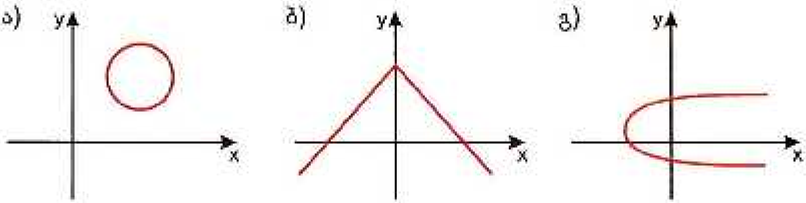
სიმბოლო ∀-ით მათემატიკაში აღინიშნება სიტყვა „ნებისმიერი", „ყოველი"

f წირი იქნება რაიმე ფუნქციის გრაფიკი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა y ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფე f წირს გადაკვეთს არაუმეტეს ერთ წერტილში.

გასახსენებლად!

$y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე არის x-ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $f(x)$ გამოსახულებას აზრი აქვს.

■ ნახაზზე მოცემული წირებიდან რომელია რაიმე ფუნქციის გრაფიკი? (პასუხი დაასაბუთეთ)



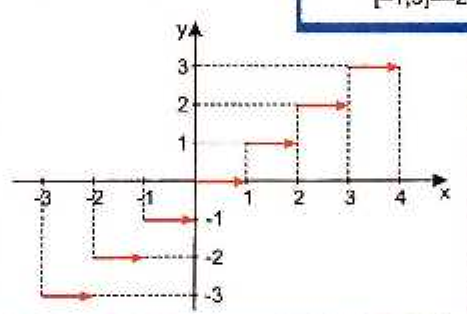
[1]=1
[0,7]=0
[–1,5]=–2

■ ნებისმიერ x რიცხვს შეუსაბამეთ [x], მისივე მთელი ნაწილი (x რიცხვის მთელი ნაწილი ის უდიდესი მთელი რიცხვია, რომელიც არ აღემატება x-ს). ე.ი. გვაქვს $f: x \to [x]$ დამოკიდებულება.

ა) არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია?

ბ) იპოვეთ $f(-2,2)$; $f(0,5)$; $f(1,3)$; $f(-0,1)$.

გ) დაწერეთ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე.



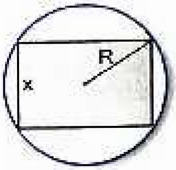
როგორც პარაგრაფის დასაწყისში ვნახეთ ფუნქციის გრაფიკი საკმაოდ მოსახერხებელია იმისათვის, რომ შეგვექმნას ზოგადი წარმოდგენა ფუნქციის ყოფაქცევაზე, მის თვისებებზე.
მომდევნო პარაგრაფებში ჩვენ გავეცნობით სხვადასხვა ფუნქციათა გრაფიკებს, მათ თვისებებს.

სავარჯიშოები:

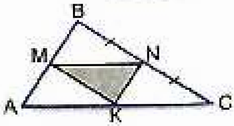
1 იქნება თუ არა ფუნქცია მოცემული შესაბამისობა?
ა) სიბრტყის M წერტილი → (x;y), სადაც წყვილი (x;y) არის M წერტილის კოორდინატები;
ბ) M (x;y) → x;
გ) x → M (x;y);
დ) მანქანა → ის რიცხვი, რომელ რიცხვშიც ეს მანქანაა გამოშვებული;
ე) დღე (რიცხვი) → ამ დღეს გამოშვებული მანქანა.

2 დაწერეთ ფუნქცია f: წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი → ამავე ექვსკუთხედის ფართობი და იპოვეთ f(2); f(5).

3 საწარმოს ერთი პალტოს შეკერვა 150 ლარი უჯდება. თვეში საწარმო საშუალოდ 50 პალტოს კერავს. დაწერეთ ფუნქცია f: გასაყიდი ფასი → მოგება, თუ ცნობილია, რომ საწარმო სხვადასხვა სახის გადასახადებში 800 ლარს იხდის.



4 ნახაზის მიხედვით დაწერეთ ფუნქცია S=f(x), სადაც S მართკუთხედის ფართობია.



5 ABC სამკუთხედში MN||AC. დაწერეთ MKN სამკუთხედის ფართობი, როგორც x-ის ფუნქცია, სადაც $x=S_{\Delta ABC}$.

6 ნებისმიერ x ნამდვილ რიცხვს შევუსაბამოთ {x}, მისი წილადი ნაწილი. ({x}=x–[x]).
ა) არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია?
ბ) დაწერეთ მისი განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე.
გ) დახაზეთ აღნიშნული შესაბამისობის გრაფიკი.

7 ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შეუსაბამეს მისი 5-ზე გაყოფით მიღებული r ნაშთი. იპოვეთ r, როცა n ტოლია 15; 27; 138; 1004. არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია? იპოვეთ განსაზღვრის არე; მნიშვნელობათა არე.

გ

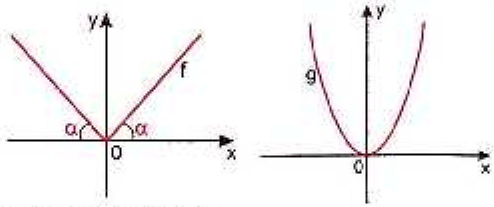
8 ABC სამკუთხედის AB, AC და BC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად K, N და M წერტილები ისე, რომ AK:KB=2:3, AN:NC=4:5 და BM:MC=4:7. იპოვეთ $S_{\Delta AKN}$, $S_{\Delta BKM}$ და $S_{\Delta MNC}$, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია S.

9 გვაქვს 2 ათლიტრიანი ქილა 10% და 15%-იანი მარილმჟავას ხსნარით. მოცემულია აგრეთვე 3, 4 და 5 ლიტრიანი ქილები. გადასხმების შედეგად როგორ მივიღოთ 1 ლიტრი 12%-იანი ხსნარი?

10 E წერტილი ABC სამკუთხედის AD მედიანას ყოფს შეფარდებით 1:4 (წვეროს მხრიდან). იპოვეთ BEC სამკუთხედის ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია 40.

2. ლუწი და კენტი ფუნქცია

ნახაზზე მოცემულია f წირი, რომელიც სხივის მოძრაობის ტრაექტორიას აღწერს (სარკისებრ ზედაპირზე დაცემისას) და g წირი, რომელიც $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკია.
ა) რა აქვთ საერთო და რით განსხვავდებიან ეს გრაფიკები ერთმანეთისგან?
ბ) დაწერეთ f წირის განტოლება, თუ $\alpha=45°$.

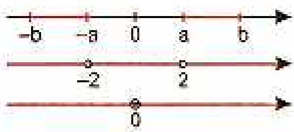


სარკისებრ ზედაპირზე სხივის დაცემის კუთხე არეკვლის კუთხის ტოლია.

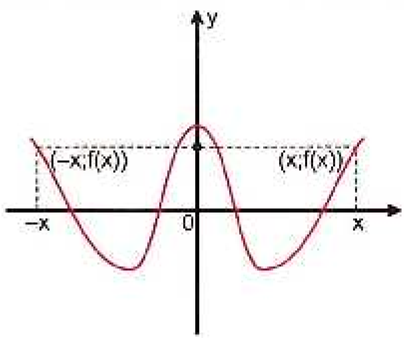
ფუნქციას, მის გრაფიკს ბევრი საინტერესო თვისება აქვს. გავეცნოთ ზოგიერთ მათგანს.
M რიცხვით სიმრავლეს ეწოდება **სიმეტრიული ნულის მიმართ**, თუ $\forall x \in M$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $-x \in M$. ე.ი. $(-a;a)$ შუალედი სიმეტრიულია ნულის მიმართ ნებისმიერი a-ს-თვის.

ჩამოთვლილი შუალედებიდან რომელია სიმეტრიული ნულის მიმართ?
ა) $[-5;5]$; ბ) $[-2;3]$; გ) $R\setminus\{0\}$; დ) $R\setminus\{2\}$; ე) $R\setminus\{-1;1\}$.

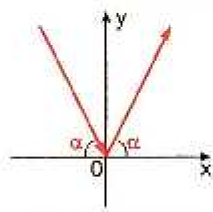
$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია **0**-ის მიმართ და განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი **x**-ისთვის სრულდება: **$f(-x)=f(x)$**.



ნახაზზე მოცემული შუალედები (წითლად შეფერადებული) სიმეტრიულია ნულის მიმართ.



განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $(x;f(x))$ წერტილი მდებარეობს ლუწი ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ $(-x;\, f(x))$-იც იმავე გრაფიკის წერტილია.



რადგან სარკისებრ ზედაპირზე სხივის დაცემის კუთხე არეკვლის კუთხის ტოლია, ამიტომ სხივის მოძრაობის ტრაექტორია ლუწი ფუნქციით აღიწერება.

ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ.

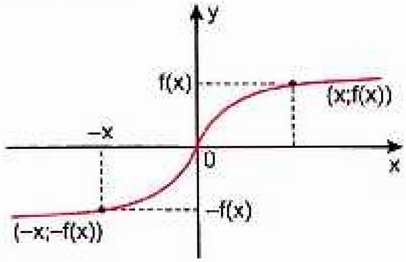
$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია **0**-ის მიმართ და განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი **x**-ისთვის სრულდება: **$f(-x)=-f(x)$**.

გასახსენებლად!

(a;b) და (–a;–b) წერტილები სიმეტრიული წერტილებია O(0;0) წერტილის მიმართ.
(a;b) და (–a;b) წერტილები სიმეტრიული წერტილებია y ღერძის მიმართ.

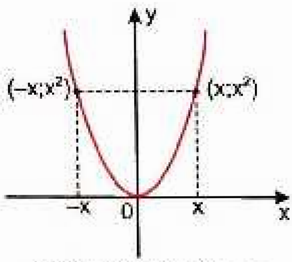
ვამბობთ, რომ y=f(x) ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის (y ღერძის) მიმართ, თუ განსაზღვრის არის ნებისმიერი a წერტილისათვის (–a;–f(a)) წერტილიც ((–a;f(a)) წერტილიც) იმავე გრაფიკის წერტილია.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ (x,f(x)) წერტილი მდებარეობს კენტი ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ (–x;–f(x)) წერტილიც იმავე გრაფიკის წერტილი იქნება.

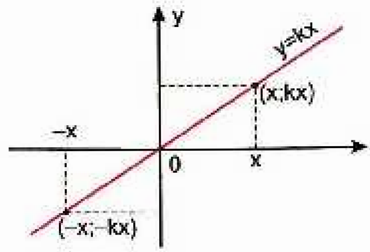


კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

აჩვენეთ (ანალიზურად), რომ ა) $y=x^2$ ლუწი ფუნქციაა; ბ) $y=kx$ კენტი ფუნქციაა.



$y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ



$y=kx$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია (0;0) წერტილის მიმართ

მაგალითი.

დაადგინეთ, ლუწია თუ კენტი შემდეგი ფუნქცია:

ა) $f(x)=x^4+2x^2+5$;

ბ) $f(x)=\dfrac{x^3+5x}{3x^2}$;

გ) $f(x)=2x^2+3x$;

დ) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$.

ამოხსნა:

ა) $D(f)=(-\infty;\infty)$.

განვიხილოთ $f(-x)$.

$f(-x)=(-x)^4+2(-x)^2+5=x^4+2x^2+5=f(x)$. ე.ი. ფუნქცია ლუწია.

ბ) $D(f)=R\setminus\{0\}$ – სიმეტრიულია ნულის მიმართ.

$$f(-x)=\frac{(-x)^3+5(-x)}{3(-x)^2}=\frac{-x^3-5x}{3x^2}=-\frac{x^3+5x}{3x^2}=-f(x).$$

ე.ი. ფუნქცია კენტია.

გ) $D(f)=R$

$f(-x)=2(-x)^2+3(-x)=2x^2-3x$.

ე.ი. ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

დ) $D(f)=R\setminus\{1;2\}$.

რადგან განსაზღვრის არე არ არის სიმეტრიული 0-ის მიმართ, ამიტომ ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1 $y=f(x)$ ფუნქცია ლუწია, თუ $\forall x\in D(f)$-თვის სრულდება __?__.

2 თუ $y=f(x)$ კენტი ფუნქციაა და $f(5)=9$, მაშინ $f(-5)=$__?__.

3 ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია __?__ მიმართ.

4 კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია __?__ მიმართ.

5 თუ $y=f(x)$ კენტი ფუნქციაა და $f(1)=7$, მაშინ $f(-1)=$__?__.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ A წერტილის სიმეტრიული წერტილი:

1) y ღერძის მიმართ,

2) O(0;0) წერტილის მიმართ, თუ:

ა) $A(-2;4)$; ბ) $A(5;-7)$; გ) $A(3;2)$; დ) $A(-1{,}5;-4)$.

2 ააგეთ AB, BC და AC მონაკვეთების სიმეტრიული მონაკვეთები
1) y ღერძის მიმართ; 2) O(0;0) წერტილის მიმართ:

ა) $A(1;2)$, $B(3;5)$, $C(5;0)$; ბ) $A(1;-2)$, $B(3;-5)$, $C(4;2)$;

გ) $A(-2;3)$, $B(-3;5)$, $C(-1;-2)$; დ) $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(3;6)$.

3 ააგეთ AB მონაკვეთის სიმეტრიული AB_1 მონაკვეთები y ღერძის მიმართ, სადაც $A(0;b)$ $B(a;c)$ და აჩვენეთ, რომ $\angle BAO=\angle B_1AO$.

4 ააგეთ ABC სამკუთხედის სიმეტრიული 1) y ღერძის მიმართ 2) O სათავის მიმართ, თუ $A(2;1)$ $B(-2;5)$ $C(-5;2)$ და აჩვენეთ, რომ მიღებული სამკუთხედი მოცემული სამკუთხედის ტოლია.

5 დაადგინეთ, ლუწია თუ კენტი შემდეგი ფუნქცია:

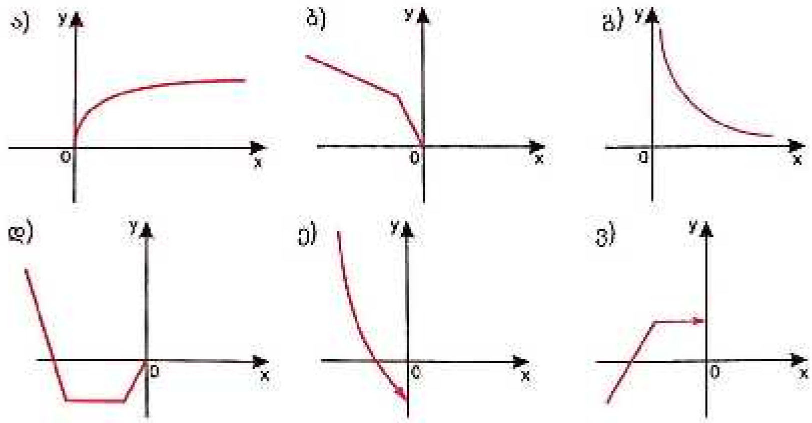
ა) $y=5x^2+1$; ბ) $y=4x^3$; გ) $y=x^3+3x$;

დ) $y=x(x+5x^3)$; ე) $y=x^5+3x-5$; ვ) $y=x^2+2x+5$;

ზ) $y=x|x|$; თ) $y=2|x-2|$; ი) $y=3x^2-2|x|-4$;

კ) $y=\dfrac{x}{3x^4+5}$; ლ) $y=\dfrac{5}{x}$; მ) $y=\dfrac{x^4}{2-x^2}$.

6 ნახაზზე მოცემულია R სიმრავლეზე განსაზღვრული y=f(x) ფუნქციის გრაფიკის ნაწილი. შეავსეთ იგი მთელ განსაზღვრის არეზე, თუ ცნობილია, რომ:
1) y=f(x) ლუწი ფუნქციაა; 2) y=f(x) კენტი ფუნქციაა.



7 თუ $f(0)=5$. შესაძლებელია თუ არა, რომ f ფუნქცია იყოს კენტი?

8 რისი ტოლია $f(0)$, თუ f კენტი ფუნქციაა და $0 \in D(f)$?

9 შესაძლებელია თუ არა $y=kx+b$ ფუნქცია იყოს კენტი? ლუწი? (დადებითი პასუხის შემთხვევაში დაადგინეთ რა შემთხვევაში?)

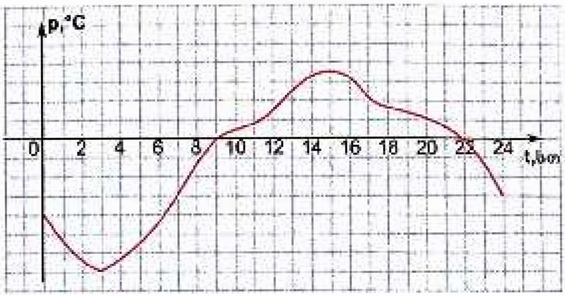
10 დაამტკიცეთ, რომ:
ა) ლუწ ფუნქციათა ჯამი, ნამრავლი, განაყოფი (თუ მნიშვნელი≠0) ლუწი ფუნქციაა;
ბ) კენტ ფუნქციათა ჯამი კენტი ფუნქციაა;
გ) კენტ ფუნქციათა ნამრავლი, განაყოფი (თუ მნიშვნელი≠0) ლუწი ფუნქციაა;
დ) კენტ და ლუწ ფუნქციათა ჯამი არც კენტია, არც ლუწი;
ე) კენტ და ლუწ ფუნქციათა ნამრავლი, განაყოფი კენტი ფუნქციაა.

---

11 D წერტილი ძევს ABC სამკუთხედის AB გვერდზე. როგორ შეეფარდება AD და DB მონაკვეთთა სიგრძეები, თუ ACD სამკუთხედის ფართობი სამჯერ ნაკლებია ABC სამკუთხედის ფართობზე?

12 სამი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია 3 სმ, 3 სმ და 1 სმ, წყვილ-წყვილად ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელთა წვეროებიც წრეწირთა შეხების წერტილებია.

3. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა



■ ნახაზზე მოცემულია გრაფიკი, რომელიც გვიჩვენებს ჰაერის ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულებას.

ა) დროის რომელ შუალედში იკლებდა, მატულობდა ტემპერატურა?

ბ) დროის რომელ შუალედში ყინავდა, რომელ შუალედში იყო სითბო?

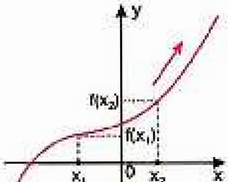
გ) იპოვეთ დღის განმავლობაში ყველაზე დაბალი და ყველაზე მაღალი ტემპერატურა;

დ) რომელ საათზე გაუტოლდა ტემპერატურა 0°C-ს?

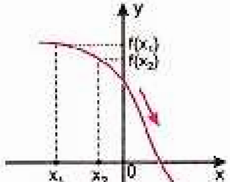
$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი განსაზღვრის არის რაიმე **(a,b)** შუალედში, თუ ნებისმიერი $x_1,x_2\in(a,b)$-თვის, როცა $x_1<x_2$, მაშინ $f(x_1)<f(x_2)$.

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კლებადი განსაზღვრის არის რაიმე **(a,b)** შუალედში, თუ ნებისმიერი $x_1,x_2\in(a,b)$-თვის, როცა $x_1<x_2$, მაშინ $f(x_1)>f(x_2)$.

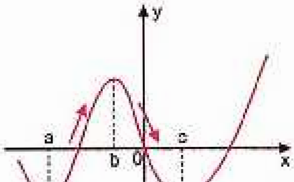
ფუნქციას ეწოდება ზრდადი რაიმე შუალედში, თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას ამ შუალედიდან შეესაბამება ფუნქციის მეტი მნიშვნელობა.
ფუნქციას ეწოდება კლებადი რაიმე შუალედში, თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას ამ შუალედიდან შეესაბამება ფუნქციის ნაკლები მნიშვნელობა.



$x_1<x_2$
$f(x_1)<f(x_2)$
ფუნქცია ზრდადია



$x_1<x_2$
$f(x_1)>f(x_2)$
ფუნქცია კლებადია



$x\in[a;b]$ - ფუნქცია ზრდადია
$x\in[b;c]$ - ფუნქცია კლებადია

ზრდად და კლებად ფუნქციებს მონოტონური ფუნქციები ეწოდება.

■ მოიყვანეთ ზრდადი, კლებადი ფუნქციის მაგალითები თქვენთვის ცნობილი ფუნქციებიდან.

■ დახაზეთ $y=x^2$ ფუნქცია. რომელ შუალედშია იგი ზრდადი? კლებადი?

მაგალითი.

დაამტკიცეთ, რომ $y=x^2+5$ ფუნქცია კლებადია $x\in(-\infty;0)$ შუალედში, ხოლო $x\in(0;\infty)$ შუალედში კი ზრდადია.

ამოხსნა:

განვიხილოთ ნებისმიერი $x_1<x_2$, $x_1,x_2\in(-\infty;0)$. მაშინ სხვაობა

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2^2+5)-(x_1^2+5)=x_2^2+5-x_1^2-5=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

რადგან $x_1<x_2$, ამიტომ $x_2-x_1>0$. მოცემულობით $x_1<0$, $x_2<0$. ამიტომ მივიღებთ $x_1+x_2<0$. ე.ი. $(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$. აქედან $f(x_2)-f(x_1)<0$, რაც ნიშნავს, რომ $f(x_2)<f(x_1)$, ე.ი. $(-\infty;0)$ შუალედში ფუნქცია კლებადია.
ვთქვათ, $x_1<x_2$ და $x_1,x_2\in(0;\infty)$.
განვიხილოთ სხვაობა $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$.
$(x_1<x_2)\Rightarrow(x_2-x_1>0)$.

$$\left\{\begin{matrix} x_1>0 \\ x_2>0 \end{matrix}\right) \Rightarrow (x_1+x_2)>0.$$

ე.ი. $((x_2-x_1)(x_2+x_1)>0)\Rightarrow(f(x_2)-f(x_1)>0)\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$.
ე.ი. $(0;\infty)$ შუალედში ფუნქცია ზრდადია. რ.დ.გ.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1 ფუნქციას ეწოდება ზრდადი $(a;b)$ შუალედში, თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას ამ შუალედიდან შეესაბამება ფუნქციის ___?___ მნიშვნელობა.

2 ფუნქციას ეწოდება ___?___ რაიმე შუალედში, თუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას ამ შუალედიდან შეესაბამება ფუნქციის ნაკლები მნიშვნელობა.

3 ზრდად და კლებად ფუნქციებს ___?___ ფუნქციები ეწოდება.

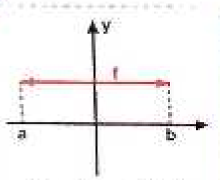
4 თუ $y=f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $x\in[-2;4]$, მაშინ $f(-1)$ ___?___ $f(3)$.

5 თუ $y=f(x)$ კლებადი ფუნქციაა, მაშინ $f(-1)$ ___?___ $f(3)$.

სავარჯიშოები:

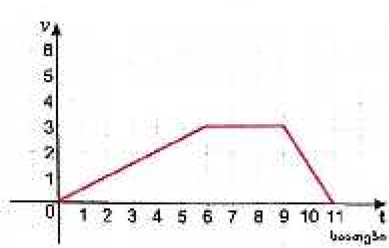
1 ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი და იპოვეთ: 1) მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე; 2) ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები:

ა) $y=2x-3$, $x\in(-4;3]$; ბ) $y=-x+1$, $x\in[-2;2]$;
გ) $y=|x-2|$, $x\in[0;3)$; დ) $y=x^2-2x-3$, $x\in[-2;3]$;
ე) $y=|x+3|$, $x\in(-4;1)$; ვ) $y=x^2-3x-4$, $x\in(-4;-1)$.



f მუდმივია $(a;b)$ ინტერვალში

2 ნახაზზე მოცემულია სხეულის სიჩქარის მოძრაობის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. დროის რა პერიოდის განმავლობაში: ა) იზრდებოდა სიჩქარე; ბ) იყო მუდმივი სიჩქარე; გ) განიცდიდა სიჩქარე კლებას.

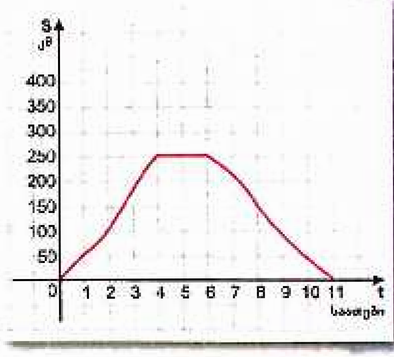


3 ნახაზზე მოცემულია ავტომანქანის მიერ გავლილი მანძილის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. დროის რა პერიოდის განმავლობაში:

ა) იზრდებოდა მანძილი საწყის პუნქტსა და ავტომანქანას შორის;

ბ) იყო მანძილი უცვლელი ავტომანქანასა და საწყის პუნქტს შორის;

გ) მცირდებოდა მანძილი ავტომანქანასა და საწყის პუნქტს შორის.



4 წარმოვიდგინოთ, რომ თვითმფრინავი მოძრაობს წრფივად და თანაბრად 500 კმ/სთ სიჩქარით ფრანკფურტიდან კიევამდე და კიევიდან თბილისამდე (კიევში დაფრენით). საკოორდინატო სიბრტყის სათავედ მიიჩნიეთ კიევი და დახაზეთ თვითმფრინავის კიევიდან დაშორების, მოძრაობის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. ცნობილია, რომ მანძილი ფრანკფურტიდან კიევამდე და კიევიდან თბილისამდე დაახლოებით 1450 კმ-ია. იპოვეთ ფუნქციის:

ა) განსაზღვრის არე;

ბ) მნიშვნელობათა სიმრავლე;

გ) ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები;

დ) დაადგინეთ ლუწია თუ კენტი მიღებული ფუნქცია.

5 ამოხსენით წინა ამოცანა იმ შემთხვევაში, თუ:

ა) სიჩქარე იქნება 300 კმ/სთ;

ბ) მანძილი ქალაქებს შორის იქნებოდა 3000 კმ.

დააკვირდით მოცემული სიდიდის შეცვლამ რა გავლენა იქონია მოძრაობის დროზე.

6 დახაზეთ $[-5;3]$ შუალედში განსაზღვრული ფუნქცია ისე, რომ ეს ფუნქცია $[-5;-1]$ შუალედში იყოს ზრდადი, ხოლო $[-1;3]$ შუალედში – კლებადი.

თუ ფუნქცია ზრდადია (კლებადია) $(a;b)$ შუალედში, მაშინ გრაფიკი ამ შუალედში მარცხნიდან მარჯვნივ მიემართება ზევით (ქვევით).

7 დახაზეთ $(-3;7]$ შუალედში განსაზღვრული ფუნქცია ისე, რომ ეს ფუნქცია $(-3;-1]$ შუალედში იყოს ზრდადი, $[-1;0]$ შუალედში – კლებადი, ხოლო $[0;7]$ შუალედში კი — ისევ ზრდადი.

8 დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია:

ა) $y=3x-1$ ზრდადია;

ბ) $y=-2x+3$ კლებადია;

გ) $y=-x^2-3$ ზრდადია $(-\infty;0]$, ხოლო კლებადია $[0;\infty)$ შუალედში;

დ)* $y=-x^2-4x-4$ ზრდადია $(-\infty;-2)$ და კლებადია $(-2;\infty)$ შუალედში.

9 ააგეთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი და ჩამოწერეთ მისი თვისებები:

ა) $f(x)=0,5x-2$; ბ) $f(x)=-2x+5$;

გ) $f(x)=3x+1$; დ) $f(x)=-x-1$.

10 გიორგიმ ბანკში 500 ლარი შეიტანა. რა თანხა იქნება ბანკში გიორგის ანგარიშზე 5 წლის შემდეგ, თუ ყოველწლიურად თანხას ემატება 5% (იგულისხმება, რომ 5 წლის განმავლობაში გიორგი ბანკიდან ფულს არ გამოიტანს)?

11 AF არის ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის მედიანა. F წერტილიდან გავლებულია AFC კუთხის ბისექტრისა. იპოვეთ AFK სამკუთხედის ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია $30\sqrt{3}$ სმ^2.

12 სამართლიანია შემდეგი დებულებები:
1. ბეჯითი ბავშვი კარგად სწავლობს;
2. თუ ბავშვი კარგად სწავლობს, მაშინ ის ბეჯითია;
3. ბავშვი, რომელიც კარგად სწავლობს, მოწესრიგებულია.
შემდეგი წინადადებებიდან ჭეშმარიტია
ა) მოწესრიგებული ბავშვი ბეჯითია;
ბ) მოწესრიგებული ბავშვი კარგად სწავლობს;
გ) თუ ბავშვი არ არის მოწესრიგებული, მაშინ ის კარგად სწავლობს;
დ) თუ ბავშვი კარგად არ სწავლობს, მაშინ ის არ არის ბეჯითი.

13 მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეა 15°, ჰიპოტენუზის სიგრძე 20 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე.

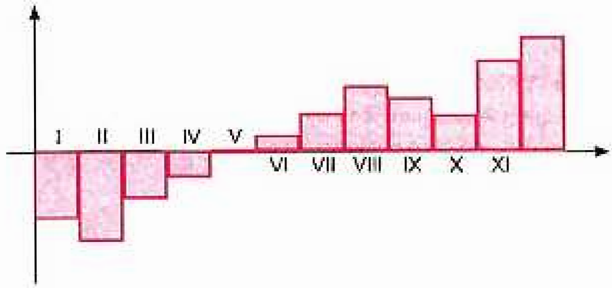
პროექტი:

ყოველდღიურად, მათემატიკაში საშინაო დავალებად მოცემული ამოცანების თუ მაგალითების რაოდენობა x-ით აღვნიშნოთ, ხოლო ამ ამოცანებიდან თქვენს მიერ სწორად ამოხსნილისა – m-ით. დავალების შესრულების შეფასებად მივიჩნიოთ $\frac{m}{x}\cdot 10$.

შეადგინეთ ფუნქცია f: დღე (რიცხვი) → ამ დღის შეფასება. ყოველდღიურად მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში მონიშნეთ წერტილები (x; f(x)).

g: დღე (რიცხვი) → მიღებული ნიშანი მათემატიკაში. საკოორდინატო სისტემაში მონიშნეთ (x; g(x)) წერტილები. ეს დავალება შეასრულეთ ერთი სემესტრის განმავლობაში. დააკვირდით ორივე ფუნქციის გრაფიკს. რა დასკვნის გამოტანა შეძელით?

4. ფუნქციის ნულები. ნიშანმუდმივობის შუალედები



ნახაზზე მოცემული დიაგრამა გვიჩვენებს ფირმის შემოსავალს თორმეტი თვის განმავლობაში:

ა) რომელ თვეში განიცდიდა წაგებას ფირმა?

ბ) რომელ თვეში იყო მისი მოგება ნულის ტოლი?

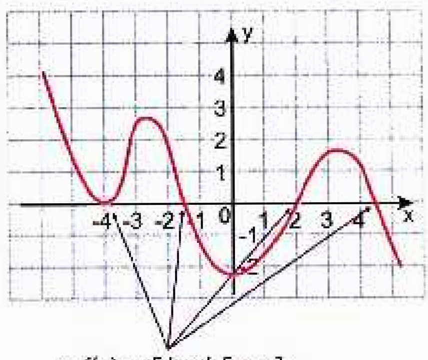
გ) რომელ თვეებში მუშაობდა ფირმა მოგებაზე?

დ) რომელ თვეში ჰქონდა ფირმას ყველაზე დიდი მოგება? წაგება?

არგუმენტის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ფუნქციის მნიშვნელობა ნულის ტოლი ხდება, ფუნქციის ნული ეწოდება.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $y=f(x)$ ფუნქციის ნულები, საჭიროა ამოვხსნათ $f(x)=0$ განტოლება. ამ განტოლების ფესვები იქნება $y=f(x)$ ფუნქციის ნულები.

ადვილი მისახვედრია, რომ ფუნქციის ნულები იმ წერტილთა აბსცისებია, რომელშიც $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი კვეთს, ან ეხება აბსცისათა ღერძს.



y=f(x) ფუნქციის ნულები

ნახ.1

1-ელ ნახაზზე მოცემული ფუნქციის ნულებია $x_1=-4$; $x_2=-1,5$; $x_3=2$ და $x_4=4,5$. აქედან $(-4;0)$ წერტილში გრაფიკი ეხება, ხოლო დანარჩენ წერტილებში კვეთს აბსცისათა ღერძს. კიდევ ერთი საინტერესო თვისება – ფუნქცია მომდევნო ნულებს შორის „ნიშანს ინარჩუნებს"[1]. მაგალითად:

1-ელ ნახაზზე, თუ $x<-4$, მაშინ $f(x)>0$.

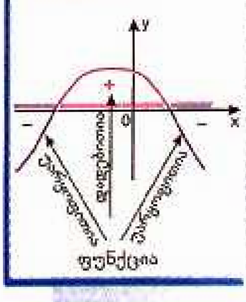
თუ $x\in(-4;-1,5)$, მაშინ $f(x)>0$;

თუ $x\in(-1,5;2)$, მაშინ $f(x)<0$;

თუ $x\in(2;\ 4,5)$, მაშინ $f(x)>0$;

თუ $x>4,5$, მაშინ $f(x)<0$.

თუ $x\in(a;b)$ შუალედში ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია x ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეში, მაშინ ამ შუალედში ფუნქცია ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს – ფუნქცია დადებითია. ხოლო თუ $x\in(c;d)$ შუალედში ფუნქციის გრაფიკი x ღერძის ქვედა ნახევარსიბრტყეშია, მაშინ ამ შუალედში ფუნქცია უარყოფითია.



[1] ეს თვისება ახასიათებს ფუნქციას, განსაზღვრის არის (a,b) შუალედში, თუ ამ შუალედში ფუნქციის გრაფიკი უწყვეტი ნირით გამოისახება – დაიხაზება ფანქრის წვერის რვეულიდან მოუცილებლად.

შუალედს, რომელშიც ფუნქცია ნიშანს ინარჩუნებს (ან დადებითია ან უარყოფითი), ფუნქციის **ნიშანმუდმივობის შუალედი** ეწოდება.

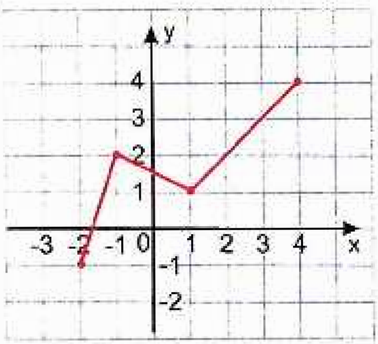
ა) დახაზეთ $y=2x+5$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ მისი ნული, დადებითობისა და უარყოფითობის შუალედები;
ბ) გრაფიკის აუგებლად იპოვეთ $y=-x+2$ ფუნქციის ნული.

მაგალითი 1

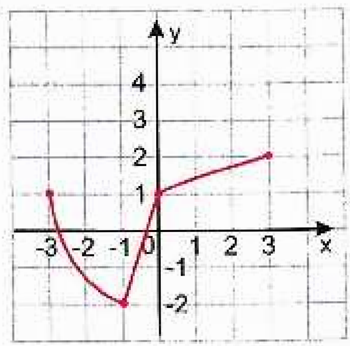
ნახაზზე მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ f ფუნქციის:

1) განსაზღვრის არე;
2) მნიშვნელობათა სიმრავლე;
3) x და y ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები;
4) ზრდადობის და კლებადობის შუალედები;
5) ნიშანმუდმივობის შუალედები.

ა)



ბ)



ამოხსნა:

ა) **1.** $D(y)=[-2;4]$.
2. $E(y)=[-1;4]$.
3. $\left(-1\frac{2}{3};0\right)$; $(0;1,5)$.
4. $x\in[-2;-1]$ – ფუნქცია ზრდადია,
$x\in[-1;1]$ – ფუნქცია კლებადია,
$x\in[1;4]$ – ფუნქცია ზრდადია,
5. $x\in\left[-2;-1\frac{2}{3}\right)$, $f(x)<0$
$x\in\left(-1\frac{2}{3};4\right]$, $f(x)>0$

ბ) **1.** $D(y)=[-3;3]$.
2. $E(y)=[-2;2]$.
3. $\left(-\frac{1}{3};0\right)$; $\left(-2\frac{2}{3};0\right)$; $(0;1)$.
4. $x\in[-3;-1]$ – კლებადია,
$x\in[-1;3]$ – ზრდადია.
5. $x\in\left(-3;-2\frac{2}{3}\right)$, $f(x)>0$
$x\in\left(-2\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $f(x)<0$
$x\in\left(-\frac{1}{3};3\right]$, $f(x)>0$.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ ფუნქციის ნულები:

ა) $y=\frac{3x-1}{2}$; ბ) $y=x^2-8x-9$; გ) $y=\frac{x^2-3x-28}{x-7}$; დ) $y=\frac{x^2-4x}{3}$.

2 დახაზეთ $(-2;6)$ შუალედში განსაზღვრული ფუნქცია, რომლის ნულებია -1 და 0 და რომელიც $(-1;0)$ შუალედში უარყოფითია.

3 დახაზეთ $[-4;5]$ შუალედში განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც $[-4;1)$ შუალედში იქნება დადებითი, $(1;2)$ შუალედში – უარყოფითი, ხოლო $(2;5]$ შუალედში – ისევ დადებითი. იპოვეთ ამ ფუნქციის ნულები.

4 ნახაზზე მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ f ფუნქციის:

ა) განსაზღვრის არე; ბ) მნიშვნელობათა სიმრავლე;

გ) საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები;

დ) ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები;

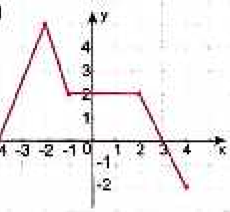
ე) ნიშანმუდმივობის შუალედები.

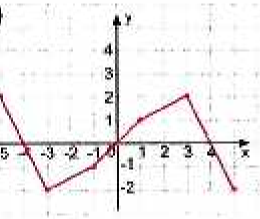
ვ) დაადგინეთ, ლუწია თუ კენტი f ფუნქცია.

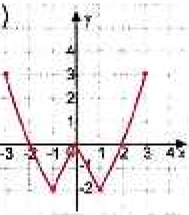
ზ)* ამოხსენით განტოლება: $f(x)=1$; $f(x)=-2$; $f(x)=0$.

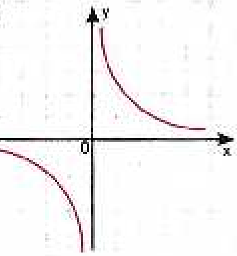
თ)* ამოხსენით უტოლობა: $f(x)>1$; $f(x)<2$.

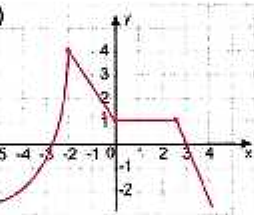
ი) იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი, უმცირესი მნიშვნელობა (თუკი არსებობს).

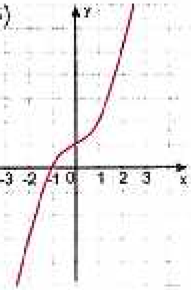
1)


2)


3)


4)


5)


6)


5 იპოვეთ რა ფორმულით გამოისახება $f(x)$ ფუნქცია, როცა $x<0$ და იპოვეთ მისი ნულები, თუ $f(x)=-x^2+4x$, როცა $x>0$ და $f(x)$ ფუნქცია ა) ლუწია; ბ) კენტია.

ბ

6 აგორებენ ორ, ლურჯ და ყვითელ კამათელს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ლურჯ კამათელზე და ყვითელ კამათელზე მოსული რიცხვების სხვაობა ტოლი იქნება −1-ის, 1-ის, 5-ის. შეადგინეთ f შესაბამისობის ცხრილი, სადაც f: მოსულ რიცხვთა სხვაობა → ამ სხვაობის მოსვლის ალბათობა (იგულისხმება ლურჯ კამათელზე მოსულ რიცხვს გამოკლებული ყვითელ კამათელზე მოსული რიცხვი).
მიღებული ცხრილის მიხედვით ააგეთ ამ შესაბამისობის გრაფიკი. იქნება თუ არა ეს შესაბამისობა ფუნქცია?
დადებითი პასუხის შემთხვევაში დაადგინეთ:
ა) ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე; ბ) ლუწია თუ კენტი ფუნქცია;
გ) ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები; დ) ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა.

7 ABCD პარალელოგრამის გვერდების სიგრძეებია AB=6 სმ და AD=16 სმ. AB და AD გვერდებზე გადაზომილია შესაბამისად AK=1 სმ და AP=7 სმ სიგრძის მონაკვეთები. იპოვეთ $S_{\Delta AKP}:S_{ABCD}$.

8 ქაღალდზე დახაზეს ტოლგვერდა სამკუთხედი და დაფარეს სხვადასხვა ზომის ორი გამოჭრილი ტოლგვერდა სამკუთხედით. დაამტკიცეთ, რომ ამ სამკუთხედის დასაფარად საკმარისი იყო ერთ-ერთი გამოჭრილი სამკუთხედებიდან.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

9 იპოვეთ $y=f(f(x))$, თუ $f(x)=2x-1$.

10 დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $y=f(f(x))$ იქნება ზრდადი, როცა $y=f(x)$ ფუნქცია ზრდადია.
გაარკვიეთ იქნება თუ არა $y=f(f(x))$ ზრდადი, როცა $y=f(x)$ კლებადი ფუნქციაა?

2 წრფივი ფუნქცია

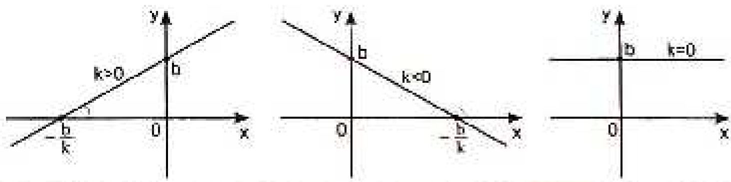
თქვენთვის უკვე ცნობილია წრფივი და კვადრატული ფუნქციები, მათი გრაფიკი და თვისებები. ამ პარაგრაფში გავიხსენოთ წრფივი ფუნქცია.

$y=kx+b$, $k, b \in R$ სახის ფუნქციას წრფივი ფუნქცია ეწოდება.

1. მოიყვანეთ წრფივი ფუნქციის მაგალითები.

2. რა გეომეტრიულ ფიგურას წარმოადგენს წრფივი ფუნქციის გრაფიკი?

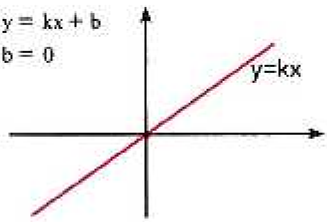
x	y=kx+b	(x; y)
0	b	(0; b)
$-\frac{b}{k}$	0	$\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$



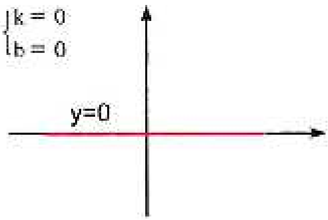
3. ჩამოაყალიბეთ წრფივი ფუნქციის თვისებები.

4. არის თუ არა პირდაპირპროპორციულობა წრფივი ფუნქცია?

$\begin{cases} y = kx + b \\ b = 0 \end{cases}$



$\begin{cases} k = 0 \\ b = 0 \end{cases}$



5. აღწერეთ როგორ ავაგოთ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი. ააგეთ:
ა) $y = 2x-3$; ბ) $y = -0,5x + 1$ წრფე.

6. რა გარდაქმნით მიიღება $y=kx$ წრფისგან $y=kx+b$ წრფე? დაწერეთ ამ გარდაქმნის შესაბამისი ფორმულები.

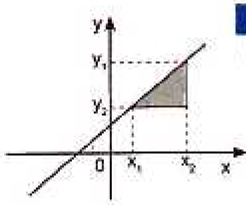
7. შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები ისეთი რიცხვებით, რომ $f(x)=2x$ წრფისგან მივიღოთ $g(x)=2x+3$ წრფე.

ა) $\begin{cases} x \to x \\ y \to y + \underline{?} \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x \to x + \underline{?}; \\ y \to y \end{cases}$

გ) $g(x) = f(x) + \underline{?}$; დ) $g(x) = f(x + \underline{?})$.

8*. აჩვენეთ, რომ თუ $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ მდებარეობს $y=kx+b$ ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ:

ა) $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; ბ) $k=tg\alpha$.



ს.ფ.

$y=kx+b$, მაშინ $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; $k=tg\alpha$

ბ) $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებას ექნება სახე: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

9. დაადგინეთ რა შემთხვევაშია ა) პარალელური; ბ) მკვეთი; გ) როდის ემთხვევა ერთმანეთს ორი $y=k_1x+b_1$ და $y=k_2x+b_2$ წრფე.

10. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი და ჩამოწერეთ მისი თვისებები
ა) $y = -x+2$; ბ) $y=2x+1$; გ) $y=2x$; დ) $y=-2x$.

11. გრაფიკის აუგებლად იპოვეთ $y=2x+1$ და $y=5x+10$ ფუნქციათა გრაფიკების კვეთის წერტილის კოორდინატები.

12. სისტემის ამოხსნის გარეშე ამოარჩიეთ ფუნქციები, რომელთა გრაფიკიც პარალელურია $y=-3x+11$ ფუნქციის გრაფიკის.
ა) $y=3x+11$; ბ) $y=3x-11$; გ) $y=-3x$; დ) $y=-6x+22$.

13. f ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო ღერძებს კვეთს $A(0;5)$ და $B(3;0)$ წერტილებში. დაწერეთ წრფივი ფუნქცია, რომელიც გადის $(1;1)$ წერტილზე და პარალელურია ამ წრფის.

გ

14. დაამტკიცეთ, რომ $7n^3+5n$ იყოფა 6-ზე ნებისმიერი მთელი n რიცხვისთვის.

15. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი 10 ნატურალური რიცხვიდან ყოველთვის მოიძებნება ორი, რომელთა სხვაობა იყოფა 9-ზე.

16. დაამტკიცეთ, რომ $3x^2+5=6y^2$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს მთელი ამონახსნები.

17. ამოხსენით განტოლება:
ა) $|x|=-5$; ბ) $|x|=5$; გ) $|x|=0$; დ) $|x|=|2x-3|$.

3 გავიხსენოთ კვადრატული ფუნქცია

1. რა გეომეტრიულ ფიგურას წარმოადგენს $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკი?

$y=ax^2 + bx + c$, $a,b,c\in R$, $a\neq0$ სახის ფუნქციას კვადრატული ფუნქცია ეწოდება.

2. აღწერეთ, როგორ ავაგოთ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი მახასიათებელი წერტილებით (წვერო, ღერძებთან კვეთის წერტილები) და ააგეთ:
ა) $y = x^2 + 3x - 4$ პარაბოლა; ბ) $y = -2x^2 + 3x + 2$ პარაბოლა.

3. ჩამოაყალიბეთ კვადრატული ფუნქციის თვისებები.

4. რა გარდაქმნით მიიღება $y=x^2$ პარაბოლასგან
ა) $y=(x-3)^2$; ბ) $y=x^2+8$; გ) $y=2(x-3)^2$; დ) $y=(x-3)^2-1$ პარაბოლა?

5. დაწერეთ პარაბოლის განტოლება a კოეფიციენტით და წვეროს კოორდინატებით.

6. როგორაა დამოკიდებული პარაბოლა ა) a; ბ) c კოეფიციენტზე?

7. დაწერეთ $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლას სიმეტრიის ღერძის განტოლება.

8. რა შემთხვევაში ექნება პარაბოლას x ღერძთან:
ა) ერთი; ბ) ორი; გ) არც ერთი საერთო წერტილი?

9. იპოვეთ $y = x^2 + 2x - 15$ ფუნქციის ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები.

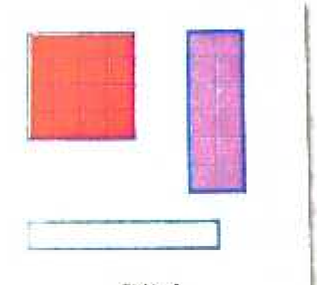
10. იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ა) $y=x^2-x-6$; $x\in[1;4]$.
ბ) $y=2x^2+4x-7$, $x\in[-5;-2]$; გ) $y=x(x-4)$, $x\in[-1;3]$
ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

11. იპოვეთ c-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=-x^2-4x+c$ ფუნქციის გრაფიკი
ა) მოთავსებულია x ღერძის ქვემოთ;
ბ) O_x ღერძთან აქვს ერთადერთი საერთო წერტილი;
გ) კვეთს O_x ღერძს ორ წერტილში;
დ) გადაკვეთს O_x ღერძს ორ წერტილში, რომლებიც კოორდინატთა სათავის მიმართ სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

12. კვადრატის გვერდის სიგრძე x სმ-ია. მისი ერთი გვერდი 3 სმ-ით შეამცირეს, ხოლო მეორე 3 სმ-ით გაადიდეს. დაწერეთ f ფუნქცია, რომელიც გვიჩვენებს მიღებული მართკუთხედის ფართობის კვადრატის გვერდის სიგრძეზე დამოკიდებულებას. ა) იპოვეთ $f(10)$, $f(12)$, $f(20)$; ბ) იპოვეთ მიღებული ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე; გ) დახაზეთ f ფუნქციის გრაფიკი, ჩამოწერეთ მისი თვისებები (ფუნქციის განსაზღვრის არედ ჩათვალეთ R).

4 კვადრატული ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა



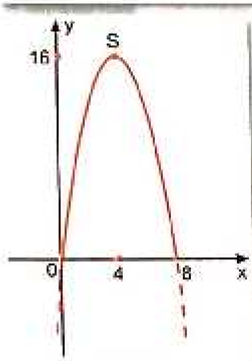
ნახ. 1

განვიხილოთ ამოცანა.

1. გიორგის 16 მ სიგრძის მავთულბადე აქვს. რა უდიდესი ფართობის მართკუთხა ნაკვეთის შემოღობვა შეუძლია მას ამ მავთულბადით?

ვთქვათ, ასეთი მართკუთხა ნაკვეთის გვერდებია xმ და zმ. მაშინ $2(x+z)=16$, $x+z=8$ (1). მართკუთხედის ფართობი კი, როგორც ცნობილია, გამოითვლება ფორმულით $S=xz$. (1)-დან $z=8-x$.

მივიღებთ $S=x(8-x)$. $S=-x^2+8x$. ჩვენი მიზანია, ვიპოვოთ x-ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება მართკუთხედის ფართობი, ანუ $(-x^2+8x)$ გამოსახულების მნიშვნელობა უდიდესი.



ნახ. 2

განვიხილოთ ფუნქცია $x \to -x^2+8x$

ავაგოთ $y=-x^2+8x$ ფუნქციის გრაფიკი, $0<x<8$.

პარაბოლის წვეროა $S(4;16)$ (ნახ. 2). $y=-x^2+8x$ ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა $x=4$-ს. მივიღეთ $x=4$ და $z=8-4=4$. ე.ი. მოცემული პერიმეტრის შემთხვევაში უდიდესი ფართობი აქვს კვადრატს. $S_{კვ}=4^2=16$.

ამრიგად 16 მ სიგრძის მავთულბადით გიორგი შემოღობავს სულ დიდი 16 მ^2 ფართობის მქონე ნაკვეთს, რომელსაც კვადრატის ფორმა აქვს.

2. იპოვეთ $y=2x^2-5x+2$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა შემდეგ შუალედებში: ა) $x\in[1,5;3]$; ბ) $x\in[0;3]$.

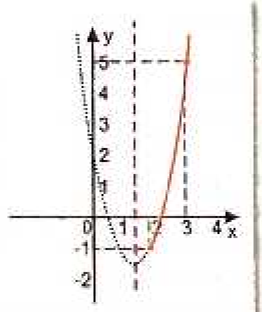
ამოხსნა:

ავაგოთ $y=2x^2-5x+2$ ფუნქციის გრაფიკი.

1. პარაბოლის წვეროა $S(x_0;y_0)$,

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{4},\quad y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{16-25}{8}=-\frac{9}{8}$$

$$S\left(\frac{5}{4};-\frac{9}{8}\right).$$



ნახ. 3

2. თუ $y=0$, მაშინ $(2x^2-5x+2=0)\Leftrightarrow\left(x=\frac{5\pm3}{4}\right)\Leftrightarrow(x_1=2;\ x_2=0,5)$.
თუ $x=0$, მაშინ $y=2$. ე.ი. ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებია $M(2;0)$, $N(0,5;0)$, $K(0;2)$.

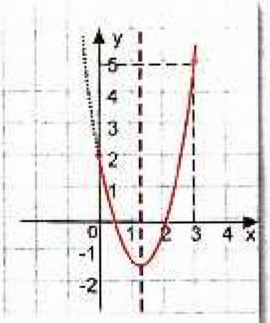
ა) რადგან ფუნქცია განსაზღვრულია $[1,5;3]$ მონაკვეთზე, ამიტომ ფუნქციის გრაფიკი იქნება პარაბოლია ის ნაწილი, რომელიც მე-3 ნახ-ზე წითლადაა შეფერადებული.

ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა იქნება $f(1,5)=2\cdot1,5^2-5\cdot1,5+2=4,5-7,5+2=-1$.

უდიდესი მნიშვნელობა კი – $f(3)=2\cdot3^2-5\cdot3+2=5$.

ბ) ფუნქცია განსაზღვრულია [0;3] შუალედში, აქედან გამომდინარე, მისი გრაფიკი პარაბოლის ის ნაწილია, რომელიც მე-**4** ნახაზზე წითლადაა შეფერადებული.

ადვილი დასანახია, ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა $f\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{9}{8}$ (წვეროს ორდინატა), ხოლო უდიდესი მნიშვნელობა – $f(3)=5$.

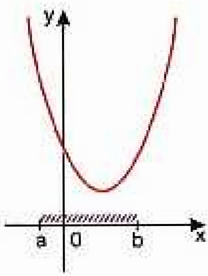


ნახ. **4**

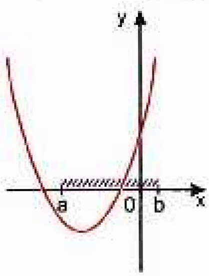
შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

ნახაზზე მოცემული გრაფიკის მიხედვით დაადგინეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა შესაბამის შუალედში:

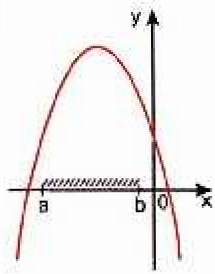
1



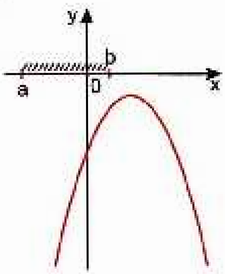
2



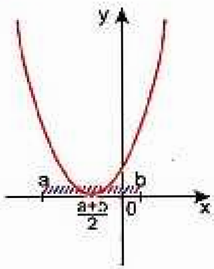
3



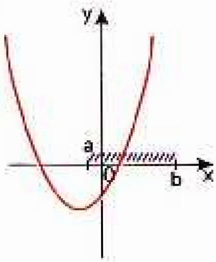
4



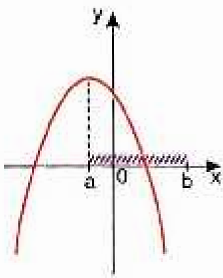
5



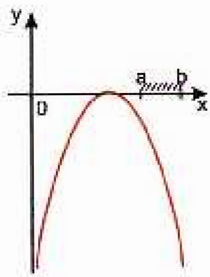
6



7



8



[a;b] შუალედში ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა f(?), ხოლო უმცირესი — f(?).

სავარჯიშოები:

1 36 სმ პერიმეტრის მქონე მართკუთხედებიდან იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედის გვერდების სიგრძე.

2 იპოვეთ რიცხვი, რომლის ნამრავლი მასზე 2-ით ნაკლებ რიცხვზე უმცირესია.

3 იპოვეთ რიცხვი, რომლის გასამკეცებული ნამრავლი მასზე 4-ით მეტ რიცხვზე უმცირესია.

4 20 წარმოადგინეთ ისეთ ორ შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

5 10 წარმოადგინეთ ისეთ ორ შესაკრებად, რომ მათი კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი.

6 იპოვეთ ისეთი რიცხვი, რომ ამ რიცხვისა და მასზე 4-ით ნაკლები რიცხვის ნამრავლი იყოს უმცირესი.

7 მექოთნეებმა სოფლის განაპირას მართკუთხა ფორმის ნაკვეთზე ბაზრობის მოწყობა გადაწყვიტეს. მათ შეიძინეს 200 მ სიგრძის მავთულბადე. რა სიგრძის ნაკვეთი უნდა შემოღობონ მათ, რომ ფართობი უდიდესი იყოს?

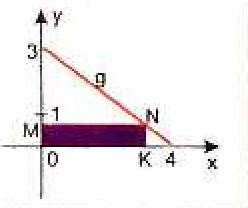
8 დაამტკიცეთ, რომ, თუ ორი სიდიდის ჯამი მუდმივია, მათი ნამრავლი მაქსიმალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს სიდიდეები ტოლ მნიშვნელობებს ღებულობს.

9 იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა (თუკი არსებობს):

ა) $y=2x^2-4x+5$; ბ) $y=-x^2+4x+3$;

გ) $y=x^2+6x-4,\ x\in[-2;2)$; დ) $y=-x^2+2x-3,\ x\in(2;5]$;

ე) $y=-x^2-4x+7,\ x\in[-4;-1]$; ვ) $y=x^2+6x-4,\ x\in[-4;2]$.



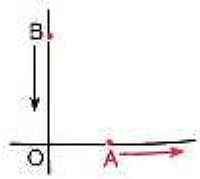
10 ნახაზზე მოცემული g წრფის განტოლებაა

$$g(x)=-\frac{3}{4}x+3.$$

ა) იპოვეთ OMNK მართკუთხედის ფართობი, თუ N წერტილის აბსცისა 3-ის ტოლია.

ბ)* იპოვეთ იმ N წერტილის კოორდინატები, რომლისთვისაც OMNK მართკუთხედის ფართობი იქნება უდიდესი.

11 ორი ავტომანქანა მოძრაობს ურთიერთმართობულ გზებზე, პირველი ახლა B წერტილშია და მოძრაობს O წერტილისკენ. მეორემ კი უკვე გაიარა O წერტილი და ახლა A წერტილში იმყოფება. ცნობილია, რომ OB=12 კმ და OA=5კმ. პირველი მოძრაობს 40 კმ/სთ, მეორე

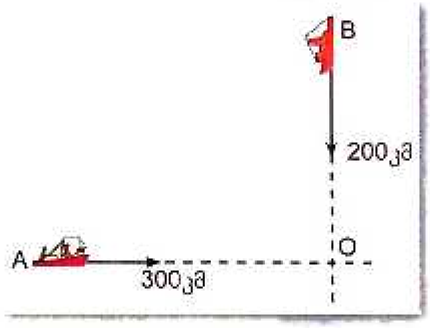


კი – 60კმ/სთ სიჩქარით. ა) რამდენი საათის შემდეგ იქნება მათ შორის მანძილი უმცირესი?
ბ) რამდენი საათის შემდეგ იქნება მათ შორის მანძილი 13 კმ?

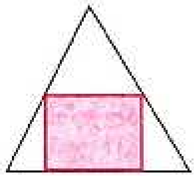
12 A და B პუნქტებიდან ერთდროულად დაიწყო მოძრაობა ორმა გემმა. A-დან გამოსული გემი მოძრაობს დასავლეთიდან აღმოსავლეთით 40 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო B-დან გამოსული ჩრდილოეთიდან სამხრეთით 30 კმ/სთ სიჩქარით, როგორც ნახაზზეა მოცემული.

ა) არის თუ არა საშიშროება, რომ ეს გემები ერთმანეთს შეეჯახონ?

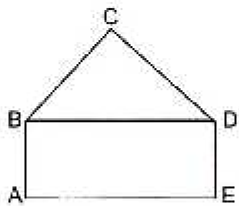
ბ) მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ ხანში იქნება გემებს შორის მანძილი უმცირესი? იპოვეთ ეს მანძილი.



13 წესიერ სამკუთხედში, რომლის გვერდია a სმ, საჭიროა ჩაიხაზოს უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი. რას უდრის ასეთი მართკუთხედის გვერდების სიგრძე?

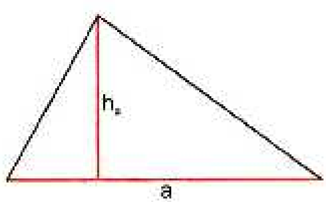


14 ფიგურა შედგება მართკუთხედისაგან და წესიერი სამკუთხედისაგან. რისი ტოლი უნდა იყოს მართკუთხედის გვერდები, რომ ამ ფიგურას ჰქონდეს მაქსიმალური ფართობი, თუ ფიგურის პერიმეტრი p-ს ტოლია (BD-ს სიგრძე პერიმეტრში არ შედის)?



15 სამკუთხედში ფუძისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ჯამი 14 სმ-ია.

ა) შესაძლებელია თუ არა ასეთი სამკუთხედის ფართობი იყოს 25 სმ^2?



ბ) რას უნდა უდრიდეს ასეთი სამკუთხედის ფუძე, რომ სამკუთხედის ფართობი იყოს უდიდესი?

გ) იპოვეთ ეს ფართობი.

გ

16 დაშალეთ მამრავლებად:
ა) $x-9$; ბ) a^2-5; გ) $x-2\sqrt{x}$; დ) $x\sqrt{x}-8$; ე) $\sqrt{10}-\sqrt{14}$.

17 იპოვეთ გამოსახულების განსაზღვრის არე:
ა) $\sqrt{5-7x}$; ბ) $\sqrt{\frac{5}{x-3}}$; გ) $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-4}$; დ) $\sqrt{2x^2-x+4}$.

18 ABC სამკუთხედის AB გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$, ხოლო BC გვერდზე აღებულია E წერტილი ისე, რომ $\frac{BE}{BC}=\frac{1}{6}$. E წერტილზე გავლებულია AC-ს პარალელური წრფე, რომელიც AB გვერდს გადაკვეთს F წერტილში. იპოვეთ BDE და BEF სამკუთხედების ფართობების შეფარდება.

19 რამდენი დიაგონალი გაივლება ხუთკუთხედში? შვიდკუთხედში? დაწერეთ ფუნქცია $f: n \to n$-კუთხედში დიაგონალების რაოდენობა.

ა) იპოვეთ: $f(10)$; $f(6)$; ბ) იპოვეთ n, თუ $f(n)=14$; 27.

20 თუ „$y=f(x)$ კვადრატული ფუნქციაა" – ჭეშმარიტი წინადადებაა, მაშინ ჩამოთვლილი წინადადებიდან აუცილებლად მცდარია:
ა) f ფუნქციის მნიშვნელობა სიმრავლეა $[-7;\infty)$;
ბ) f ფუნქცია ზრდადია $(-\infty;5)$ შუალედში და კლებადია $[5;\infty)$ შუალედში;
გ) f ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია პირველ მეოთხედში;
დ) f ფუნქციის გრაფიკი არ გადის მე-3 მეოთხედში.

21 დაამტკიცეთ, რომ $n^2(n^2-1)\vdots 4$.

22 $S_{ABC}=40$ სმ², $AC=10$ სმ. იპოვეთ B წერტილიდან AC წრფემდე მანძილი.

23 სქემატურად დახაზეთ $y=ax^2+bx+c$, $a\neq0$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ ცნობილია, რომ $af(1)<0$. როგორაა განლაგებული $x=1$ წერტილის მიმართ მოცემული ფუნქციის ნულები?

24 შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:
ა) თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ____________ მეორე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების, ეს სამკუთხედები მსგავსია.
ბ) თუ მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია სიმაღლე მიიღება ____________ წყვილი მსგავსი სამკუთხედი
გ) სამკუთხედის ____________ ყოფს მოპირდაპირე გვერდს მონაკვეთებად,რომლებიცმიმდებარეგვერდებისპროპორციულია.

25 შემდეგი წინადადებებიდან რომელია ჭეშმარიტი?
ა) ორი ნებისმიერი პარალელოგრამი მსგავსია;
ბ) ორი ნებისმიერი მართკუთხედი მსგავსია;
გ) ორი ნებისმიერი რომბი მსგავსია;
დ) ორი ნებისმიერი კვადრატი მსგავსია;
ე) ორი ნებისმიერი ტრაპეცია მსგავსია;
ვ) ერთსა და იმავე წრეწირზე შემოხაზული ორი მსგავსი მრავალკუთხედი ტოლია.

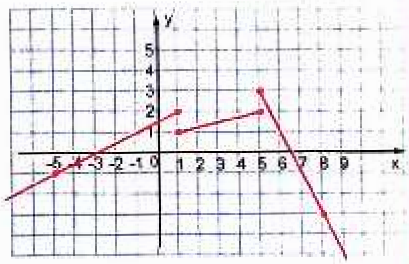
5 უბან-უბან წრფივი ფუნქცია

Xᵇ კლასის მოსწავლეები ლაშქრობაზე მატილში წავიდნენ. ორი საათის განმავლობაში ისინი 4 კმ/სთ სიჩქარით მიდიოდნენ. შემდეგი სამი საათი კი - 2 კმ/სთ სიჩქარით. იქ ბავშვებმა ორი საათი შეისვენეს და 3 კმ/სთ სიჩქარით უკან დაბრუნდნენ.
დაწერეთ ფუნქცია, რომელიც გვიჩვენებს მოსწავლეების მიერ გავლილი მანძილის დროზე დამოკიდებულებას. ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი და ჩამოწერეთ მისი თვისებები.

1-ელ ნახაზზე მოცემულია

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}, \text{ თუ } x<1\\ \frac{1}{4}x+\frac{3}{4}, \text{ თუ } 1\le x\le 5\\ -2x+13, \text{ თუ } x>5\end{cases}$$

ფუნქციის გრაფიკი.



ნახ. 1

ასეთ ფუნქციას **უბან-უბან წრფივი ფუნქცია** ეწოდება.

თქვენთვის ცნობილი ფუნქციებიდან რომელია უბან-უბან წრფივი? დახაზეთ შესაბამისი გრაფიკი და ჩამოწერეთ მისი თვისებები.

მაგალითი.

დახაზეთ $f(x)=\begin{cases}-0{,}5x-2, & x<-1\\ 1, & -1\le x<2\\ x-1, & x\ge 2\end{cases}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა:

I. ავაგოთ ა) $f(x)=-0{,}5x-2,\ x<-1$; ბ) $y=x-1,\ -1<x<2$;
გ) $y=x-1,\ x\ge 2$ ფუნქციის გრაფიკი.

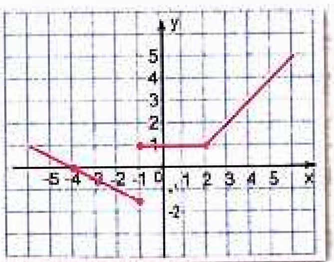
შევადგინოთ ცხრილი:

ა)

x	f(x)=–0,5x–2
–1	–1,5
–4	0

ბ)

x	f(x)=x–1
2	1
3	2



ყურადღება!
(a;b) შუალედზე განსაზღვრული წრფის ნაწილის ასაგებად სასურველია საკოორდინატო სიბრტყეზე მოვნიშნოთ (a;f(a)), (b;f(b)) წერტილები.

სავარჯიშოები:

1 დახაზეთ ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $y=\begin{cases}3x-1, & \text{თუ } x\le -1\\ 2x-2, & \text{თუ } -1<x\le 0;\\ 5, & \text{თუ } x>0\end{cases}$ ბ) $y=\begin{cases}|x+1|, & \text{თუ } x<1\\ 2, & \text{თუ } 1\le x<2\\ \frac{1}{2}x+5, & \text{თუ } x\ge 2\end{cases}$.

2 დახაზეთ $y=|x-2|+|x+3|$ ფუნქციის გრაფიკი და იპოვეთ:
$y(-5)$; $y(0)$; $y(-3)$; $y(8)$.

3 იპოვეთ ფუნქციის ღერძებთან კვეთის წერტილები:

ა) $y=\begin{cases}2x-5, & \text{თუ } x\le -5\\ x-8, & \text{თუ } -5<x<5;\\ -3x+5, & \text{თუ } x\ge 5\end{cases}$ ბ) $y=\begin{cases}x+7, & \text{თუ } x\le -2\\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}, & \text{თუ } -2<x\le 0.\\ -2x+1, & \text{თუ } x>0\end{cases}$

4 იპოვეთ x-ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებული x ღერძის ზემოთ.

ა) $y=\begin{cases}-5, & \text{თუ } x<-3\\ x, & \text{თუ } -3\le x\le 3;\\ 5, & \text{თუ } x>3\end{cases}$ ბ) $y=\begin{cases}-|x+2|, & \text{თუ } x\le 0\\ |x-2|, & \text{თუ } x>0\end{cases}$

5* მოცემულია

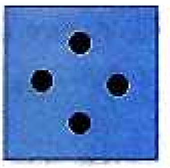
1) $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{თუ } x<0\\ 0, & \text{თუ } 0\le x\le 2;\\ x-2, & \text{თუ } x>2\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}|x+3|, & \text{თუ } x\le 0\\ |x-3|, & \text{თუ } x>0\end{cases}$ ფუნქცია.

ააგეთ f ფუნქციის გრაფიკი და გრაფიკის საშუალებით გაარკვიეთ, a-ს რა მნიშვნელობებისთვის ექნება $f(x)=a$ განტოლებას: ა) ერთი ამონახსენი; ბ) ორი ამონახსენი; გ) უამრავი ამონახსენი.

6 იპოვეთ a-ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც y ფუნქციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა $x=2$ წერტილში.

$$y=\begin{cases}x+1, & \text{თუ } x<2\\ a, & \text{თუ } x=2\\ 5-x, & \text{თუ } x>2\end{cases}$$

7 x სმ სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატული ფორმის თუნუქის ფურცელზე ამოჭრილია R=5 მმ რადიუსიანი 4 წრიული ხვრელი.



ა) დაწერეთ ფუნქცია:

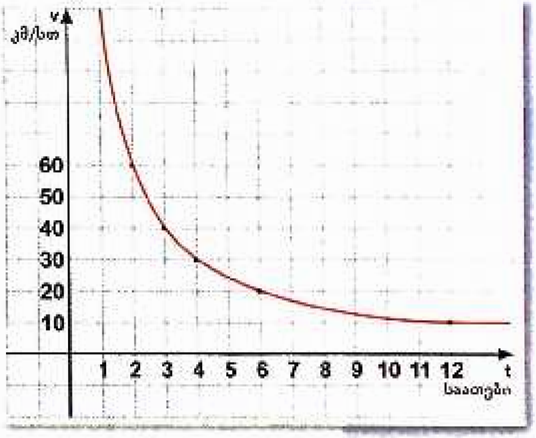
f: კვადრატის გვერდი → თუნუქის დარჩენილი ნაწილის ფართობი;

ბ) იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობა, თუ x=4 სმ, 7 სმ, 1 მ.

8 რომელიღაც რიცხვის 10-ზე გაყოფისას ნაშთში ვიღებთ 7-ს. რა ნაშთი მიიღება ამავე რიცხვის 5-ზე გაყოფისას?

6 $f: x \to \frac{k}{x}$ ფუნქცია

■ ნახაზზე მოცემულია ავტომობილის მოძრაობის სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი, როცა მის მიერ გავლილი S მანძილი მუდმივია. იპოვეთ S.



ა) რა დროში გაივლის ავტომობილი S კმ-ს, თუ ის მოძრაობს 20 კმ/სთ, 40 კმ/სთ სიჩქარით?

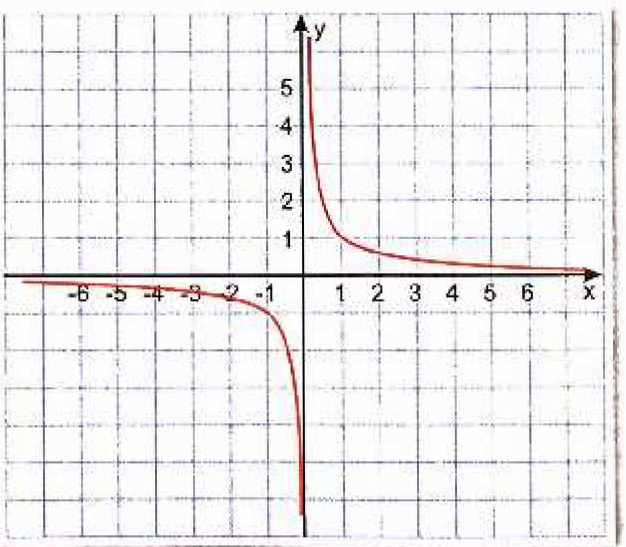
ბ) რა სიჩქარით უნდა იმოძრაოს ავტომობილმა, რათა S კმ გაიაროს 3 სთ-ში, 2 სთ-ში, 1 სთ-ში?

გ) როგორი დამოკიდებულება არსებობს სიჩქარესა და დროს შორის მუდმივი გავლილი მანძილის შემთხვევაში?

დ) დაწერეთ სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების ფუნქცია (ნახაზის მიხედვით).

■ მოიყვანეთ ორ სიდიდეს შორის პირდაპირპროპორციული, უკუპროპორციული დამოკიდებულების მაგალითები.

განვიხილოთ $y=\frac{1}{x}$ ფუნქცია. შევადგინოთ ცხრილი. მიღებული წერტილები მოვნიშნოთ მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში და შევაერთოთ წირით. მიღებული წირი იქნება $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი.

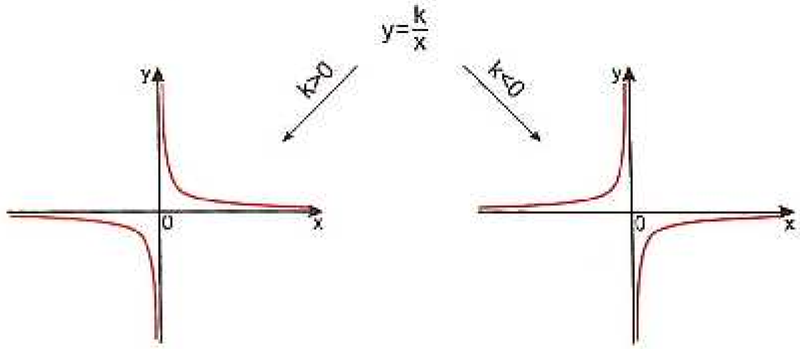


x	y
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	-2
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$

ა) ააგეთ: $y=\frac{3}{x}$; $y=\frac{6}{x}$; $y=-\frac{5}{x}$; $y=-\frac{3}{x}$ ფუნქციათა გრაფიკები.

ბ) რა აქვთ საერთო და რით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან აგებული გრაფიკები?

თუ დავალებას კარგად გაართვით თავი, მაშინ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე:



f: $x \rightarrow \frac{k}{x}$ ფუნქციას, $k \neq 0$ **უკუპროპორციულობა** ეწოდება.

$y=\frac{k}{x}$

$\frac{y_1}{y_2}=\frac{k/x_1}{k/x_2}$

$\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_2}{x_1}$

x და y ცვლადებს შორის უკუპროპორციული დამოკიდებულებაა.

ჩამოვაყალიბოთ $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის თვისებები:

I. $k>0$.

1. $D(y)=R\setminus\{0\}$. $x=0$-თვის ფუნქცია არ არის განსაზღვრული.

2. თუ $x>0$, მაშინ $f(x)>0$,
   თუ $x<0$, მაშინ $f(x)<0$.
   $E(y)=R\setminus\{0\}$.

   გრაფიკის ერთი შტო I მეოთხედშია მეორე კი – III მეოთხედში.

3. $f(-x)=\frac{k}{(-x)}=-\frac{k}{x}=-f(x)$.

ფუნქცია კენტია (სიმეტრიულია (0;0)-ის მიმართ).

4. ფუნქცია კლებადია $x\in(-\infty;0)$, კლებადია $x\in(0;+\infty)$

5. $|x|$-ის ზრდასთან ერთად ფუნქციის მნიშვნელობები თანდათან უახლოვდება 0-ს (ხდება რაგინდ მცირე და გრაფიკი უახლოვდება x ღერძს).

6. როცა x უახლოვდება 0-ს, მაშინ $|f(x)|$-ის მნიშვნელობები უფრო და უფრო იზრდება (ხდება რაგინდ დიდი და გრაფიკი უახლოვდება y ღერძს).

7. გრაფიკი სიმეტრიულია (0;0) წერტილის მიმართ.

ჩამოაყალიბეთ $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის თვისებები, როცა $k<0$.

$y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ჰიპერბოლა ეწოდება.

მაგალითი.

იპოვეთ k, თუ $A(k-6;k-4)$ მდებარეობს $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე.

ამოხსნა:

A წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს $y=\frac{k}{x}$ განტოლებას:

$$k-4=\frac{k}{k-6}$$
$$k^2-11k+24=0$$
$$k_1=8,\quad k_2=3.$$

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1 თუ $f(x)=\frac{3}{x}$, მაშინ $f(-4)$ _?_ $f(-1)$; $f(5)$ _?_ $f(7)$.

2 f: პროდუქციის რაოდენობა → ერთეული პროდუქციის ფასი (პროდუქციაზე გადახდილი თანხა მუდმივია) ფუნქციის გრაფიკი არის _?_.

3 f: მუშათა რაოდენობა → მათ მიერ შექმნილი პროდუქტი (მუშაობაზე დახარჯული დრო მუდმივია) ფუნქციის გრაფიკი არის _?_.

4 $y=-\frac{2}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია _?_ და _?_ მეოთხედებში.

5 $y=\frac{10}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია _?_ და _?_ მეოთხედებში.

6 $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია _?_ მიმართ.

სავარჯიშოები:

1 უკუპროპორციულობა მოცემულია ფორმულით $f(x)=\frac{12}{x}$. იპოვეთ:
ა) $f(x)$, თუ $x = 3;\ -5;\ 0{,}2;\ 100$.   ბ) x, თუ $f(x) = 1;\ -1;\ 10^{-5};\ -3$.

2 A და B ქალაქებს შორის მანძილი 800 კმ-ია. ავტობუსმა ეს მანძილი t საათში გაიარა. რა სიჩქარით მოძრაობდა ავტობუსი? დაწერეთ ფუნქცია, რომელიც აღწერს მუდმივი მანძილის შემთხვევაში მოძრაობის დროის სხეულის სიჩქარეზე დამოკიდებულებას.
ა) რა დროში გაივლის ავტობუსი 800 კმ-ს, თუ იგი მოძრაობდა 60 კმ/სთ სიჩქარით? 80 კმ/სთ სიჩქარით?
ბ) რა სიჩქარით უნდა იმოძრაოს ავტობუსმა, რომ იგი B ქალაქში ჩავიდეს 8 სთ-ში? 9 სთ-ში?

3 ააგეთ $y=-\frac{6}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის საშუალებით იპოვეთ:

ა) f(1,5); f(–0,3); f(–7,1); f(5,2).
ბ) x, თუ y = 5; –4; 7.

4 ააგეთ $f(x)=\frac{4}{x}$ $\left(f(x)=-\frac{4}{x}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის საშუალებით იპოვეთ:

ა) f(–3), f(1,5), f(2), f(–2,7); ბ) x, თუ f(x) = 5, 1, –1, –3.

5 მდებარეობს თუ არა $f: x \to x^{-1}$ ფუნქციის გრაფიკზე M წერტილი:

ა) M(0,1; 1000); ბ) M(–1; –1); გ) M(–2; 8); დ) M(1; 1).

6 მოცემული $f(x)=\frac{3}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის აუგებლად შეადარეთ:

ა) f(–5) და f(–1); ბ) f(3) და f(4,7); გ) f(–2) და f(1,7).

7 იპოვეთ m, თუ F წერტილი მდებარეობს $f: x \to x^{-1}$ ფუნქციის გრაფიკზე:

ა) F(3;m); ბ) F(–2;m); გ) F(m;–1); დ) F(m;–32).

8 იპოვეთ m და n, თუ M(–0,25; –2048), F(0,25; m) და E(0,125; n) წერტილები მდებარეობს $f(x)=ax^{-1}$ ფუნქციის გრაფიკზე.

9 მენარმემ მუშების სამუშაო პირობების გაუმჯობესების მიზნით სამუშაო დღის 8 საათიდან 7 საათამდე შემცირება გადაწყვიტა. რამდენი მუშის აყვანა მოუწევს მეწარმეს სამუშაოზე, თუ დღის განმავლობაში დასამზადებელი პროდუქციის რაოდენობა უცვლელი რჩება და თავდაპირველად საწარმოში მუშაობდა 7 მუშა; 14 მუშა; 21 მუშა.

10 ცხრილში მოცემულია მონაცემები, თუ რამდენი მუშა დროის რა მონაკვეთში ასრულებს სამუშაოს. იგულისხმება, რომ ყოველი მუშა 1 საათში ერთსა და იმავე სამუშაოს ასრულებს.

მუშათა რაოდენობა x	4	10	12	3	8
ყოველი მუშის მუშაობის ხანგრძლივობა y	15	6	5	20	7,5

როგორი დამოკიდებულება არსებობს x და y ცვლადებს შორის? დაწერეთ ფუნქცია f : მუშათა რაოდენობა → მუშის მუშაობის ხანგრძლივობა, თუ შესასრულებელი სამუშაო a-ს ტოლია.

11 რეოსტატს მიეწოდება U=6 ვ მუდმივი ძაბვა. როგორ იცვლება რეოსტატში დენის ძალა, თუ წინაღობა 1 ომიდან 24 ომამდე თანაბრად იზრდება? ააგეთ დენის ძალის წინაღობაზე დამოკიდებულების I=f(R) გრაფიკი. გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ:

ა) დენის ძალა, როცა R = 6 ომი, 15 ომი, 22 ომი;

ბ) რეოსტატის წინაღობა, თუ დენის ძალა ტოლია 10; 7; 2 ამპერის.

გ) როგორი დამოკიდებულება არსებობს დენის ძალასა და წინაღობას შორის მუდმივი ძაბვის დროს?

12 ერთ ოპერატორს შეუძლია ხელნაწერი კომპიუტერზე 20 დღეში აკრიფოს. რამდენ დღეში დასრულდება სამუშაო, თუ ერთდროულად (ერთი და იმავე სიჩქარით) იმუშავებს ა) 2 ოპერატორი, ბ) 4 ოპერატორი. დაწერეთ ფუნქცია:

f : ოპერატორთა რაოდენობა → სამუშაოს შესასრულებლად დახარჯული დრო.
ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი. გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ რამდენი ოპერატორი იქნება საჭირო, რათა სამუშაო დასრულდეს 4 დღეში.

13* ლაშქრობაზე წასულმა მეგობრებმა გზის პირველი 20კმ ავტობუსით გაიარეს 40 კმ-სთ სიჩქარით, ხოლო ბოლო 6 კმ კი ფეხით იარეს x კმ-სთ სიჩქარით. რა საშუალო სიჩქარით მოძრაობდნენ ბიჭები მთელ გზაზე თუ $x = 4; 6$. დაწერეთ ფუნქცია f : სიჩქარე ფეხით სიარულისას → საშუალო სიჩქარე მთელ გზაზე.

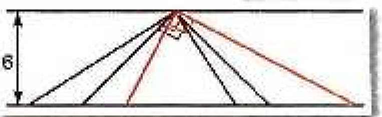
14 დაამტკიცეთ, რომ ა) $(2^{4k}-1) \vdots 5$.

15 წარმოიდგინეთ, რომ რომელიღაც ქვეყანაში არის მხოლოდ 1, 10, 100, 1000, ... დოლარიანი კუპიურები. შეძლებთ თუ არა 5000 ცალი კუპიურით შეადგინოთ მილიონი დოლარი?

16 აქვს თუ არა $10^n+10^{n-5}+10^3=9^n+9$ განტოლებას ამონახსენი მთელ რიცხვებში?

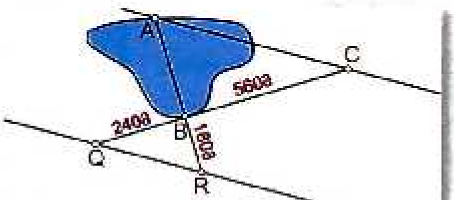
17 იპოვეთ a-ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)=-3(x-2)^2-4$ და $g(x)=2(x+a)^2-4$ ფუნქციებისთვის ერთის უდიდესი მნიშვნელობა ემთხვევა მეორის უმცირეს მნიშვნელობას.

18 იმ მართკუთხა სამკუთხედებს შორის, რომელთა ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე 6 სმ-ის ტოლია, რომელს აქვს უმცირესი ფართობი? იპოვეთ ეს ფართობი.



19 ABC სამკუთხედის მედიანა BD=9 სმ, MN შუახაზია (MN||AC), MN=4. BD და MN გადაკვეთისას ადგენენ კუთხეებს, რომელთაგან ერთ-ერთის სიდიდეა 60°. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი.

20 დაადგინეთ, ნახაზის მიხედვით რომელ ორ წერტილს შორის მანძილის პოვნაა შესაძლებელი და იპოვეთ, თუ ცნობილია, რომ QR||AC და BQ=240 მ, BC=560 მ, BR=180 მ.

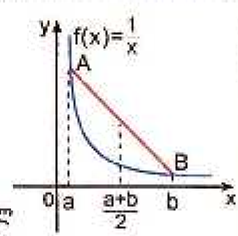


ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

21* დაამტკიცეთ, რომ $\forall a,b>0$-თვის მართებულია უტოლობა:

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}>\frac{2}{a+b}.$$

ახსენით ამ უტოლობის გეომეტრიული აზრი.



22 1) დაყავით 180 ა) 2-ის, 3-ისა და 4-ის პირდაპირპროპორციულ ნაწილებად; ბ) 2-ის, 3-ისა და 6-ის უკუპროპორციულ ნაწილებად.
2) დაყავით A რიცხვი m-ის, n-ისა და k-ს უკუპროპორციულ ნაწილებად.

7 ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთი გარდაქმნა

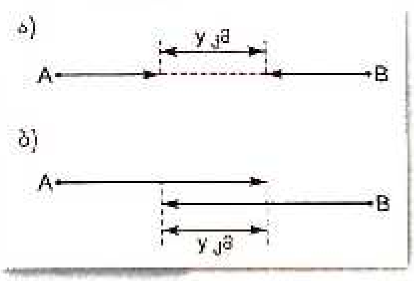
1 მცხეთიდან და ბათუმიდან შემხვედრი მიმართულებით ორი ავტომობილი მოძრაობს. ერთი — 60 კმ/სთ, მეორე კი — 80 კმ/სთ სიჩქარით.

ა) დაწერეთ ფუნქცია:

f : დრო → მანქანებს შორის მანძილი, თუ ცნობილია, რომ მცხეთასა და ბათუმს შორის მანძილი 560 კმ-ია;

ბ) ააგეთ **f** ფუნქციის გრაფიკი;

გ) რა ინფორმაციის მიღება შეგიძლიათ კიდევ გრაფიკისაგან? დასვით გონივრული შეკითხვები.

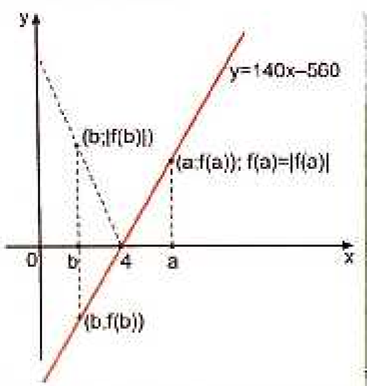


ამოხსნა:

მანქანებს შორის მანძილი y-ის ტოლი შესაძლებელია იყოს როგორც შეხვედრამდე (ნახ. ა); ასევე შეხვედრის შემდეგაც (ნახ. ბ).

თუ მოძრაობის დროს x-ით აღვნიშნავთ, მაშინ ა) შემთხვევაში გვექნება: $x \to 560-140x$ ფუნქცია ($y=560-140x$);

ბ) შემთხვევაში: $x \to 140x-560$ ფუნქცია ($y=140x-560$). ადვილი სანახავია, რომ ორივე ეს ფუნქცია შესაძლებელია გავაერთიანოთ ერთ $x \to |140x-560|$ ფუნქციად, რაც იგივეა $y=|140x-560|$.

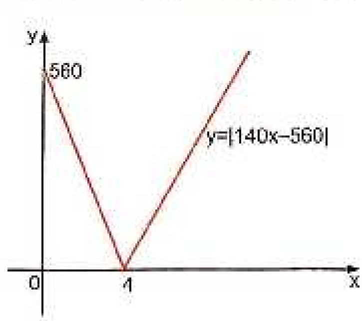


უპირველეს ყოვლისა ავაგოთ $f(x)=140x-560$ ფუნქციის გრაფიკი.

1 რა დამოკიდებულება არსებობს $y=f(x)$ და $y=|f(x)|$ ფუნქციების მნიშვნელობებს შორის x-ის იმ მნიშვნელობებისთვის, როცა
ა) $140x-560\geq0$;
ბ) $140x-560<0$.

2 როგორ არიან განლაგებული ერთმანეთის მიმართ $(b;f(b))$ და $(b;|f(b)|)$ წერტილები, როცა $f(b)<0$.

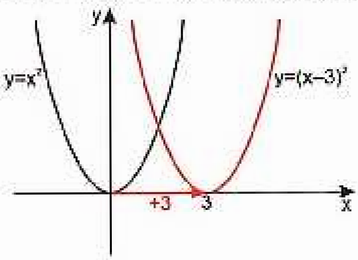
ე.ი. $f(x)=|140x-560|$ ფუნქციის გრაფიკის მისაღებად $y=140x-560$ წრფის ის ნაწილი, რომელიც x ღერძის ზემოთაა, დარჩება, ხოლო ის, რომელიც x ღერძის ქვემოთაა აისახება x ღერძის მიმართ სიმეტრიულად.

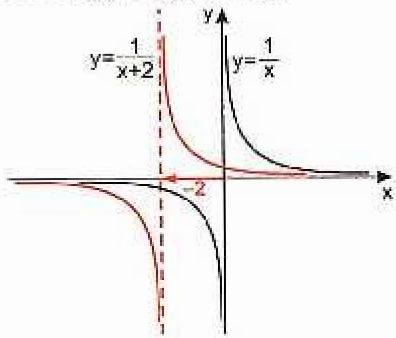


- გაეცით პასუხი პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული ამოცანის დანარჩენ შეკითხვებს.
- რა გარდაქმნით მიიღება $y=x^2$ პარაბოლისაგან $y=(x-a)^2$; $y=x^2+c$; $y=(x-a)^2+c$ პარაბოლა?

გავეცნოთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთ გარდაქმნას.

1. $y=f(x-a)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისაგან მისი x ღერძის გასწვრივ პარალელური გადატანით a ერთეულით (მარჯვნივ, თუ a დადებითია და მარცხნივ, თუ a უარყოფითია).
ამ გარდაქმნას ჩვენ უკვე გავეცანით პარაბოლის მაგალითზე.



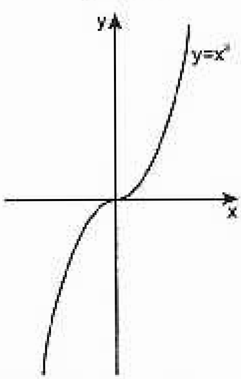


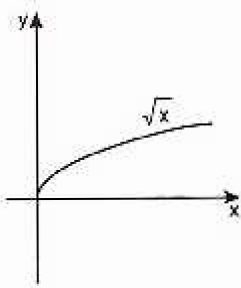
სცადეთ თვითონ:

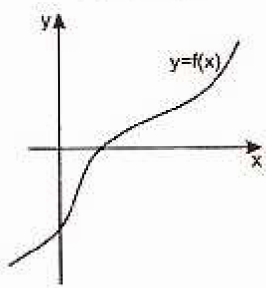
ააგე: $y=(x-1)^3$
$y=(x+2)^3$

ააგე: $y=\sqrt{x+1}$;
$y=\sqrt{x-3}$.

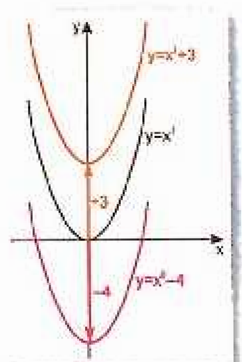
ააგე: $y=f(x-1)$
$y=f(x+2)$



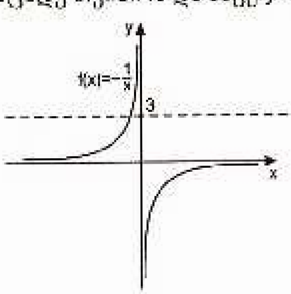


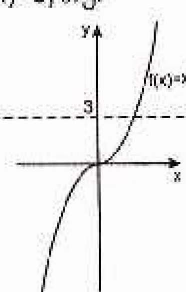


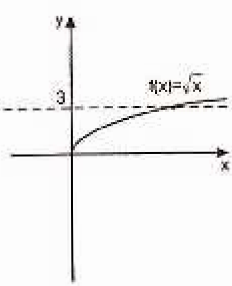
2. $y=f(x)+b$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის y ღერძის გასწვრივ პარალელური გადატანით b ერთეულით (ზევით, თუ b დადებითია და ქვევით, თუ b უარყოფითია).



სცადე თვითონ და ააგე $y=f(x)+3$, თუ:



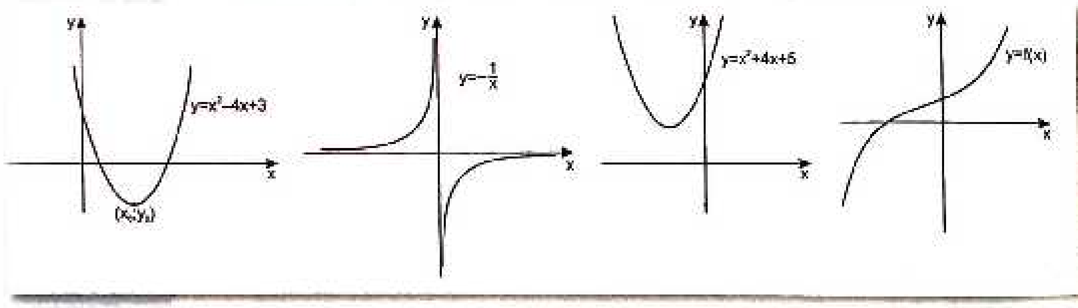




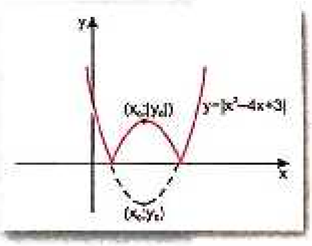
3. $y=|f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკი რომ ავაგოთ საჭიროა:

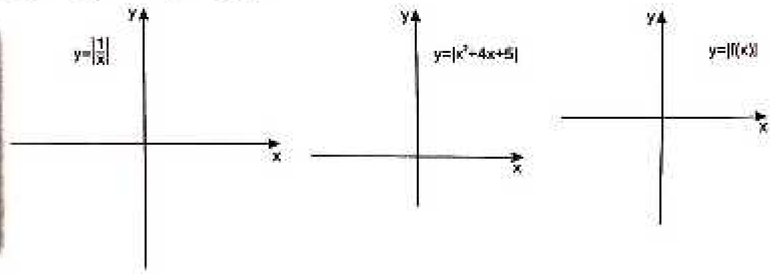
ა) ავაგოთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი;

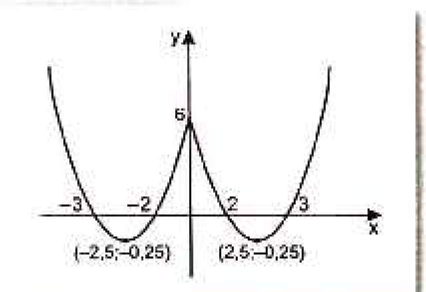
ბ) f წირის ის ნაწილი, რომელიც x ღერძის ზემოთაა, დავტოვოთ უცვლელად, ხოლო ის ნაწილი, რომელიც x ღერძის ქვემოთაა სიმეტრიულად გადავიტანოთ x ღერძის მიმართ.



სცადეთ თვითონ და ააგეთ:







4. $y=f(|x|)$ ფუნქცია ლუწია, რადგან $f(|-x|)=f(|x|)$. ამასთან, როცა $x\geq0$ $f(|x|)=f(x)$. ამიტომ $y=f(|x|)$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საჭიროა ავაგოთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა $x\geq0$ და შევავსოთ იგი ლუწ ფუნქციამდე.

ავაგოთ $y=x^2-5|x|+6$ (1) ფუნქციის გრაფიკი. (1) ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ: $y=|x|^2-5|x|+6$. ავაგოთ (1) პარაბოლა, როცა $x\geq0$ და შევავსოთ ლუწი ფუნქციის გრაფიკამდე.

1 აჩვენეთ, როგორ ავაგოთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისაგან
ა) $y=-f(x)$; ბ) $y=f(-x)$ ფუნქციათა გრაფიკები.

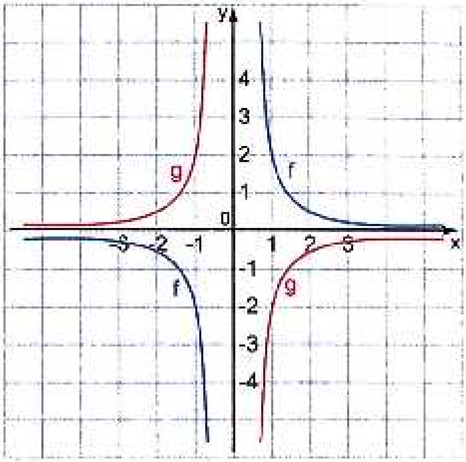
მაგალითი 1

ააგეთ $f(x)=\dfrac{2}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი. აღწერეთ, როგორ მიიღება f ფუნქციის გრაფიკიდან g ფუნქციის გრაფიკი და ჩამოაყალიბეთ g ფუნქციის თვისებები:

ა) $g(x)=-\dfrac{2}{x}$; ბ) $g(x)=\dfrac{2}{x-2}$.

ამოხსნა:

ა) f და g ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია x ღერძის მიმართ (ნახ.1).



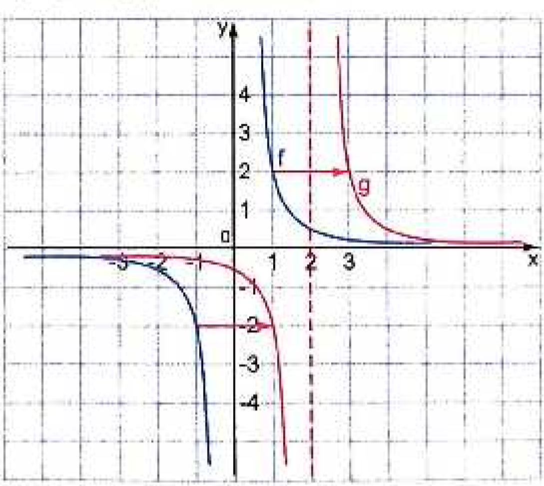
თვისებები:

1. $D(g)=R\setminus\{0\}$.
2. $E(g)=R\setminus\{0\}$.

ერთი შტო მოთავსებულია II მეოთხედში, მეორე კი – IV მეოთხედში.

3. ფუნქცია კენტია.
4. ფუნქცია ზრდადია $x\in(-\infty;0)$, ზრდადია $x\in(0;+\infty)$
5. $|x|$-ის ზრდასთან ერთად $f(x)$-ის მნიშვნელობები უახლოვდება 0-ს (გრაფიკი უახლოვდება x ღერძს).
6. როცა x უახლოვდება 0-ს, $|f(x)|$-ის მნიშვნელობები უფრო და უფრო იზრდება (გრაფიკი უახლოვდება y ღერძს).

ბ) g ფუნქციის გრაფიკის მისაღებად f ჰიპერბოლა უნდა გავაცუროთ x ღერძის გასწვრივ, მარჯვნივ 2 ერთეულით.

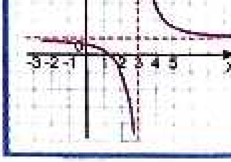


სწრაფი აგება

$$y=\frac{2}{(x-3)}+1$$

$x-3\neq 0$, ე.ი. $x\neq 3$.

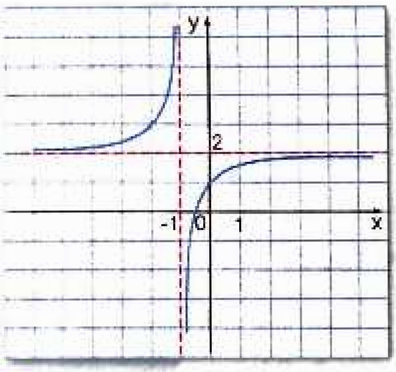
ავაგოთ დამხმარე საკოორდინატო ღერძები: $x=3$ და $y=1$ წრფეები. სიმეტრიის ცენტრია (3;1) წერტილი. ახალ საკოორდინატო სისტემაში ავაგოთ $f(x)=\frac{2}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი.



თვისებები:

1. $D(y)=R\setminus\{2\}$, რადგან $x-2\neq0$, $x\neq2$.
2. $E(y)=R\setminus\{0\}$.
3. არც ლუწია, არც კენტი.
   გრაფიკი სიმეტრიულია (2;0) წერტილის მიმართ.
4. ფუნქცია კლებადია $x\in(-\infty;2)$, კლებადია $x\in(2;+\infty)$.
5. $|x|$-ის ზრდასთან ერთად $f(x)$-ის მნიშვნელობები უახლოვდება 0-ს, გრაფიკი უახლოვდება x ღერძს.
6. როცა x უახლოვდება 2-ს, მაშინ $|f(x)|$-ის მნიშვნელობები უფრო და უფრო იზრდება (გრაფიკი უახლოვდება $x=2$ წრფეს, მაგრამ არ ეხება მას).

მაგალითი 2



ააგეთ $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა:

$y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ გამოსახულებიდან გამოვყოთ მთელი ნაწილი.

$$y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-2+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-1}{x+1}=$$
$$=\frac{2(x+1)}{x+1}-\frac{1}{x+1}$$

მივიღეთ: $y=\dfrac{2x+1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკის აგებაც ჩვენთვის ცნობილია. დამხმარე ღერძებია: $x=-1$; $y=2$ ახალ საკოორდინატო სისტემაში ავაგოთ $y=-\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი.

შესაძლებელია ასეც:
$x+1=t$, მაშინ $x=t-1$
მივიღებთ:
$$y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(t-1)+1}{t}=\frac{2t-1}{t}=$$
$$=2-\frac{1}{t}=2-\frac{1}{x+1}$$

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad-bc\neq0$, $c\neq0$ სახის ფუნქციას წილად-წრფივი ფუნქცია ეწოდება.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1 $y=f(x-2)$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი უნდა გადავიტანოთ პარალელურად __?__ ღერძის გასწვრივ __?__ ერთეულით.

2 $y=f(x)+b$ გრაფიკის ასაგებად, $(b>0)$ საჭიროა $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი გადავიტანოთ პარალელურად __?__ ღერძის გასწვრივ __?__ ერთეულით.

3 $y=-|f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკი განთავსებული შეიძლება იყოს __?__ და __?__ მეოთხედებში.

4 $y=\left|\dfrac{5}{x}\right|$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია __?__ და __?__ მეოთხედებში.

5 $y=f(|x|)$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია __?__ ღერძის მიმართ.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ f ფუნქციის განსაზღვრის არე და სიმეტრიის ცენტრი:

ა) $f(x)=\frac{2}{x}-1$; ბ) $f(x)=\frac{1}{x+5}$; გ) $f(x)=\frac{1}{x-3}+1$.

2 $f(x)=\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ააგეთ g ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $g(x)=-\frac{1}{(x-1)}$; ბ) $g(x)=-\frac{1}{x}$; გ) $g(x)=\frac{1}{(x+2)}-1$.

3 ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y=|2x+5|$; ბ) $y=2|x|+5$; გ) $y=|2x-1|$; დ) $y=2|x|-1$.

4 $y=\frac{6}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ააგეთ $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $g(x)=-\frac{6}{x}$; ბ) $g(x)=\frac{6}{x}+3$; გ) $g(x)=\frac{6}{x+2}$; დ) $g(x)=\frac{6}{x+2}+3$.

5 პარაგრაფში აღწერილი გარდაქმნებით ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $y=|x^2-3|$; ბ) $y=|x^2-2x-8|$; გ) $y=x^2-2|x|-8$;

დ) $y=|2x^2-2|$; ე) $y=|x^2-2|x|-8|$; ვ) $y=x^2+3|x|+2$.

6 პარაგრაფში აღწერილი გარდაქმნებით ააგეთ შემდეგი ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y=\frac{4}{x}+1$; ბ) $y=\frac{3}{x-2}$; გ) $y=\left|\frac{4}{x}\right|$; დ) $y=\frac{5}{|x-1|}$;

ე) $y=\frac{1}{|x|+2}$; ვ) $y=\left|\frac{3}{x}+4\right|$; ზ) $y=\frac{1}{2x+5}$; თ) $y=\frac{1}{|x|-3}$.

7 ააგეთ $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკი და ჩამოწერეთ მისი თვისებები.

8 $y=x^3+b$ ფუნქციის გრაფიკი გადის (2;5) წერტილზე. იპოვეთ b და ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

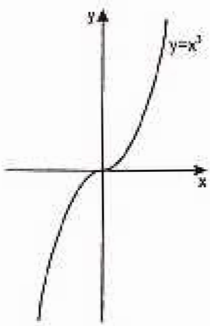
9 ჭეშმარიტია თუ მცდარი შემდეგი წინადადებები:

ა) $y=f(|x|)$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ;

ბ) $y=|f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია x ღერძის მიმართ;

გ) $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ;

დ) $y=x^3+5$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია (0;5) წერტილის მიმართ.



10 პარაგრაფში აღწერილი გარდაქმნებით ააგეთ შემდეგი ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y=-x^3+3$; ბ) $y=|x^3+2|$; გ) $y=|(x+3)^3|$; დ) $y=|x^2-4x+5|$;

დ) $y=(x-1)^3$; ე) $y=|x|^3-1,5$; ვ) $y=(x-2)^3+2$; თ) $y=x^2-4|x|+5$.

11 იპოვეთ მოცემული ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა:

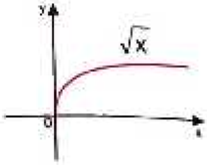
ა) $y=|3x+1|-2$; ბ)* $y=|3x^2-4x+2|-3$; გ) $y=|x^2-4x+3|-4$;

დ) $y=|-x^2+2x|+1$; ე $y=5+|2x+7|$; ვ) $y=x^2-2|x|+1$.

12 ააგეთ შემდეგი ფუნქციათა გრაფიკები (გარდაქმნების საშუალებით):

ა) $y=\sqrt{x+2}$; ბ) $y=\sqrt{x}-3$; გ) $y=-\sqrt{x+1}$;

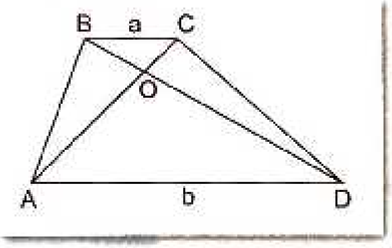
დ) $y=|\sqrt{x}-7|$; ე) $y=|\sqrt{x+2}-5|$.



13 ABCD პარალელოგრამის AB და AD გვერდებზე აღებულია შესაბამისად K და P წერტილები ისე, რომ AK:KB=1:4 და AP:PC=3:5. იპოვეთ $S_{\Delta AKP}:S_{\Delta ABCD}$

14 მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან დიდ გვერდამდე მანძილი 2,5სმ-ია. იპოვეთ მართკუთხედის მცირე გვერდი.

15 P და Q წერტილები ABC სამკუთხედის AB და AC გვერდების შუაწერტილებია. იპოვეთ $P_{\Delta ABC}$, თუ $P_{\Delta APQ}$=21სმ.



16 ABCD ტრაპეციაში BC=a და AD=b ფუძეებია. შემდეგი წინადადებებიდან ამოარჩიეთ ჭეშმარიტი წინადადებები:

ა) $\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}}=\frac{a}{b}$ ბ) $S_{AOB}=S_{COD}$ გ) $S_{ABD}=S_{ACD}$

დ) $S_{ABC}=S_{BCD}$ ე) $\frac{S_{AOD}}{S_{BOC}}=\frac{a^2}{b^2}$ ვ) $\frac{S_{ABO}}{S_{BOC}}=\frac{a}{b}$

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

17 $y=f(x)$ ფუნქციის ნულია $x=2$. იპოვეთ:

ა) $y=f(x-3)$; ბ) $y=f(x+1)$ ფუნქციის ნული.

18 ა) ააგეთ $y=|x^2-x-6|$ ფუნქციის გრაფიკი;

ბ) a-ს რა მნიშვნელობისთვის აქვს $|x^2-x-6|=a$ განტოლებას არც ერთი, ერთი, ორი, სამი, ოთხი, უამრავი ამონახსენი?

8 უკეთესი ვარიანტის არჩევა

- ტექსტიანი ამოცანების ამოხსნისას საჭიროა ამოცანა მშობლიური ენიდან მათემატიკის ენაზე გადავიყვანოთ და შემდეგ ამოვხსნათ მიღებული განტოლება თუ უტოლობა. ეს ყველაფერი ძალიან მნიშვნელოვანია, რადგან საწარმოო და ეკონომიკურ პრაქტიკაში ხშირად გვესაჭიროება დავთვალოთ, შევაჯამოთ მონაცემები, გავუკეთოთ ანალიზი საწარმოოს მუშაობას და ა.შ. ბოლოს კი გავაანალიზოთ შექმნილი სიტუაცია. რის შემდეგაც შესაძლებელია შედგეს შემდგომი მუშაობის გეგმა. შექმნილი სხვადასხვა ვარიანტებიდან კი საჭიროა შეირჩეს უკეთესი.
  ასეთი ამოცანების დასმა და ამოხსნა არის მათემატიკური პროგრამირების საგანი. ჩვენ განვიხილავთ რამდენიმე ასეთ მარტივ ამოცანას.

ამოცანა 1

ნიკამ და ლუკამ გადაწყვიტეს მოენახულებინათ მათი სოფლიდან 40კმ-ით დაშორებული მოწამეთას ტაძარი. მათ მხოლოდ ერთი ველოსიპედი აქვთ. ნიკას შეუძლია ფეხით 6კმ/სთ სიჩქარით, ველოსიპედით კი – 20კმ/სთ სიჩქარით იმოძრაოს. ლუკას შესაბამისად – 4კმ/სთ და 30კმ/სთ სიჩქარით. შესაძლებელია ველოსიპედის გზაზე უყურადღებოდ დატოვება. როგორ შეუძლიათ მათ, ორივემ, რაც შეიძლება სწრაფად მიაღწიონ ტაძრამდე?

1) ბიჭები ერთდროულად მიყიდნენ ტაძართან.

ვთქვათ, ნიკამ x კმ გაიარა ველოსიპედით და (40–x) კმ – ფეხით. მაშინ ლუკა x კმ-ს ფეხით გაივლიდა, (40–x) კმ-ს კი – ველოსიპედით. ნიკა ტაძართან მივიდოდა $\left(\frac{x}{20}+\frac{40-x}{6}\right)$ საათში. ლუკა კი – $\left(\frac{x}{4}+\frac{40-x}{30}\right)$ საათში. რადგან ისინი ერთდროულად მივიდნენ ტაძართან, ამიტომ $\frac{x}{20}+\frac{40-x}{6}=\frac{x}{4}+\frac{40-x}{30}$, აქედან x=16კმ-ს, ხოლო ბიჭები ტაძართან 4 საათსა და 48 წთ-ში მივიდოდნენ.

2) თუ ვიგულისხმებთ, რომ ნიკა ველოსიპედით 16კმ-ზე ნაკლებს გაივლის (x<16), მაშინ ტაძრამდე მისასვლელი დრო $t=\frac{400-7x}{60}$ გაიზრდება (რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ).

3) თუ ნიკა ველოსიპედით 16კმ-ზე მეტ მანძილს გაივლიდა, მაშინ თვითონ კი მივიდოდა ტაძრამდე უფრო სწრაფად, მაგრამ სამაგიეროდ ლუკას ტაძრამდე მისვლის დრო, $t=\frac{13x+80}{60}$ სთ, გაიზრდებოდა.
ე.ი. საუკეთესო ვარიანტია, როცა ბიჭები ტაძართან ერთდროულად მიელენ.

ამოცანა 2

ლაბორატორიაში მოიტანეს სამი სხვადასხვა შენადნობი. პირველი შეიცავს 40% სპილენძს და 60% ნიკელს, მეორე – 60% სპილენძს და 40% კობალტს, მესამე – 60% კობალტს და 40% ნიკელს. ექსპერიმენტისთვის საჭიროა 1 კგ შენადნობი, რომელშიც იქნება 40% კობალტი და რაც შესაძლებელია ნაკლები სპილენძი. როგორ შეიძლება ამის მიღწევა?

	Cu	Ni	Co
I	40%	60%	–
II	60%	–	40%
III	–	40%	60%

ვთქვათ, ავიღეთ x კგ I, y კგ II და z კგ III შენადნობი. მაშინ მივიღებთ

$$\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ 0{,}4y+0{,}6z=0{,}4 & (2) \end{cases}$$

თან გასათვალისწინებელია, რომ სპილენძი იყოს რაც შეიძლება მცირე. ე.ი. გამოსახულებამ $a=0{,}4x+0{,}6y$ უნდა მიიღოს მინიმალური მნიშვნელობა (a გავხადოთ ერთ – y ცვლადზე, დამოკიდებული):

$$a=0{,}4(x+y)+0{,}2y=0{,}4(1-z)+0{,}2y$$

(2)-დან $z=\frac{2-2y}{3}$. მივიღებთ: $a=\frac{2+7y}{15}$.

y-ის რა მნიშვნელობისთვის მიიღებს a უმცირეს მნიშვნელობას?

დიახ, სპილენძის მინიმალური წილი ახალ შენადნობში იქნება $\frac{2}{15}$, მაშინ, როცა $x=\frac{1}{3}$; $z=\frac{2}{3}$ და $y=0$.

ე.ი. უნდა შევურიოთ $\frac{1}{3}$ კგ პირველი შენადნობი და $\frac{2}{3}$ კგ მესამე შენადნობი.

ამ ამოცანაშიც ჩვენ შევეხეთ წრფივი, $a=\frac{7}{15}y+\frac{2}{15}$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობის პოვნას, როცა $y\subset[0;1]$.

მიღებულ შენადნობში რაც შეიძლება ნაკლები სპილენძი ნიშნავს რაც შეიძლება მეტ ნიკელს. ამოხსენით ამოცანა ამ კუთხით.

ამოცანა 3

100 ლარად უნდა შეიძინონ ნაძვის ხის სათამაშოები. შეკვრა, რომელშიც 20 სათამაშოა, 4 ლარი ღირს. შეკვრა, რომელშიც 35 სათამაშოა – 6 ლარი, ხოლო, რომელშიც 50 სათამაშო – 9 ლარი. რამდენი და რომელი შეკვრა უნდა შეიძინონ, რათა იყიდონ რაც შეიძლება მეტი სათამაშო.

ამოხსნა:

პირველი შეკვრის თითოეული სათამაშო $\frac{1}{5}$ ლარი ღირს, მეორე შეკვრისა – $\frac{6}{35}$ ლარი, მესამისა კი – $\frac{9}{50}$ ლარი.

I	II	III
20 ცალი	35 ცალი	50 ცალი
4 ლარი	6 ლარი	9 ლარი

I	II	III
1 ცალი	1 ცალი	1 ცალი
$\frac{1}{5}$ ლარი	$\frac{6}{35}$ ლარი	$\frac{9}{50}$ ლარი

$$\frac{6}{35}<\frac{9}{50}<\frac{1}{5}$$

როგორ ფიქრობთ, რომელი სათამაშოები სჯობს მეტი შეიძინონ? რომელი და რამდენი შეკვრა უნდა შეიძინონ, რათა რაც შეიძლება მეტი სათამაშო იყიდონ?

იმედია, თქვენ სწორად იმსჯელეთ, მაგრამ, რა თქმა უნდა, ვერ განიხილავთ ყველა შესაძლო ვარიანტს. მოვიყვანოთ ამოცანის უფრო მკაცრი ამოხსნა.

ვთქვათ, იყიდეს x ცალი პირველი შეკვრა, y ცალი მეორე შეკვრა და z ცალი მესამე შეკვრა. $x, y, z \geq 0$ და $4x+6y+9z \leq 100$. ამასთან $S=20x+35y+50z$ უნდა იყოს უდიდესი.

იპოვეთ x, y, z ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე.

$S=5(4x+7y+10z)=5[4x+6y+9z+y+z] \leq 500+5(y+z)$.

S გამოსახულების მნიშვნელობა იქნება უდიდესი, როცა $(y+z)$-ის მნიშვნელობა არის უდიდესი, ანუ როცა $y+z=16$. აქედან $S \leq 580$.

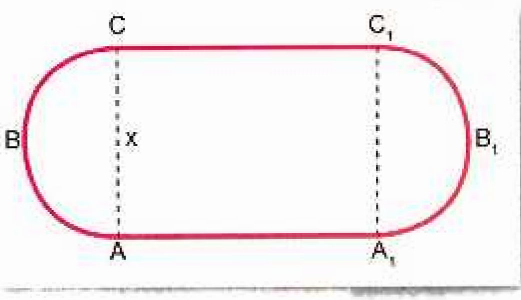
ადვილი სანახავია, როცა $x=1$, $y=16$ და $z=0$. მაშინ $S=580$.

სავარჯიშოები:

1 ტაფაზე 2 კატლეტი ეტევა. მათი შეწვა ორივე მხარეს შესაძლებელია 10 წთ-ში. რა უმცირეს დროში შეიწვება ამ ტაფაზე სამი კატლეტი?

2 b წრფის ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს A და B წერტილები. როგორ და სად მოვათავსოთ b წრფეზე მოცემული სიგრძის $MK=a$ მონაკვეთი, რომ $AMKB$ ტეხილის სიგრძე იყოს უმცირესი?

3 მოსწავლეებმა გადაწყვიტეს, რომ სკოლის სპორტულ მოედანზე მოაწყონ სარბენი ბილიკი სიგრძით $l=100$მ, რომელსაც ექნება ნახაზზე მოცემული ფორმა. რისი ტოლი უნდა იყოს AA_1 და AC მონაკვეთების სიგრძე, რომ სარბენი ბილიკით შემოსაზღვრული ნაკვეთის ფართობი იყოს უდიდესი (ABC და $A_1B_1C_1$ – ნახევარწრეებია).

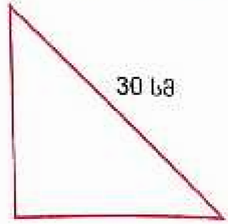


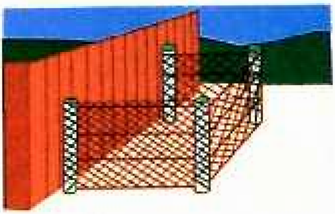
4* ფირმა ყოველთვიურად ყიდის 1000 ცალ დეტალს. თითოეული დეტალის ფასი 10 ლარია. ერთ-ერთი თანამშრომლის აზრით, თუ თითოეული დეტალს გააიაფებდნენ 0,1 ლარით, მაშინ შესაძლებელი იქნებოდა ყოველთვიურად 20 დეტალით მეტის გაყიდვა; თუ დეტალი 0,2 ლარით გაიაფდებოდა, მაშინ გაიყიდებოდა 40-ით მეტი და ა.შ.

ა) რამდენად უნდა გაიაფდეს თითოეული დეტალი, რომ ფირმამ მიიღოს მაქსიმალური მოგება, თუ ვიგულისხმებთ, რომ თანამშრომლის ვარაუდი სწორია;

ბ) რამდენ დეტალს გაყიდდა თვეში ფირმა ამ შემთხვევაში.

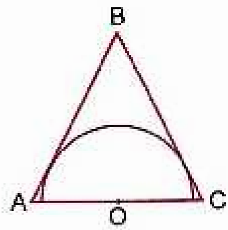
5* ქარხანაში ღია კოლოფის დასამზადებლად იყენებენ ფურცლოვანი ფოლადის ნარჩენებს, რომლებსაც ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ფორმა აქვთ $c=30$ სმ ჰიპოტენუზით. კოლოფი რომ, რაც შეიძლება მეტი ტევადობისა იყოს, საჭიროა ფოლადის თითოეული ნაჭრიდან გამოიჭრას რაც შეიძლება მეტი ფართობის მქონე მართკუთხედი. როგორ შეიძლება ამის გაკეთება?



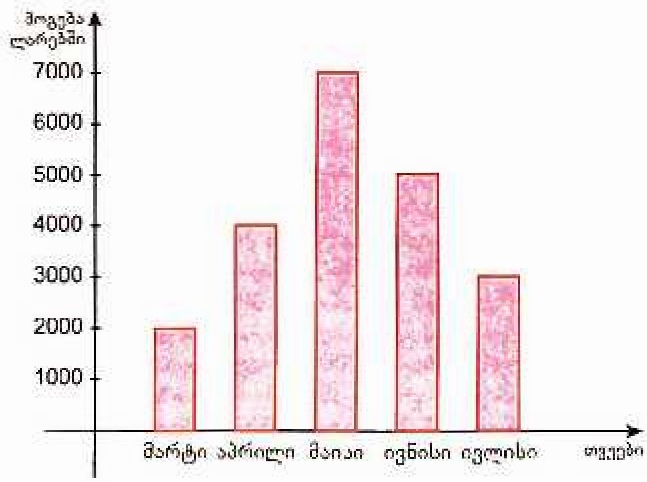


6 100 მ სიგრძის მავთულბადით საჭიროა შემოიღობოს უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხა ნაკვეთი ისე, რომ ნაკვეთის ერთ გვერდად შესაძლებელია გამოყენებული იქნას სხვა ნაკვეთის ღობე. იპოვეთ ასეთი მართკუთხა ნაკვეთის სიგრძე და სიგანე.

7 ABC ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფერდი 8 სმ-ია, ჩახაზულია ნახევარწრე, რომლის ცენტრი AC ფუძეზე ძევს. იპოვეთ რადიუსის სიგრძე, რომლისთვისაც ნახევარწრის ფართობი უდიდესი იქნება.



8 სვეტოვან დიაგრამაზე ნაჩვენებია ფირმის მოგების მაჩვენებლები 5 თვის განმავლობაში.



ა) რა თანხას შეადგენდა ფირმის მოგება მარტიდან ივლისის ჩათვლით?

ბ) რამდენია საშუალო თვიური მოგება?

გ) რამდენი პროცენტით მეტი იყო მოგება მაისში მარტთან შედარებით?

I თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\frac{x-3}{x(x-5)}$; ბ) $y=\frac{5x-7}{2|x+3|-5}$; გ) $y=\frac{4}{2x^2-4x+3}$;

დ) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$; ე) $y=\sqrt{12-x-x^2}$; ვ) $y=\sqrt{x^2-4x+1}$.

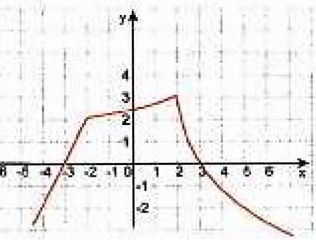
2 დაადგინეთ, ლუწია თუ კენტი ფუნქცია:

ა) $y=3-2x^2$; ბ) $y=5x-7x^3$; გ) $y=2|x|-x^2+5$;

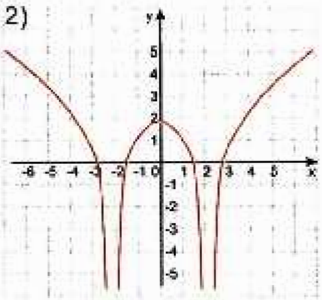
დ) $y=\frac{3x-7}{x^2+4x}$; ე) $y=\frac{x}{x^2-1}$; ვ) $y=\frac{|x|+2x}{x^2-4}$.

3 იპოვეთ ფუნქციის: ა) ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები; ბ) ნიშანმუდმივობის შუალედები; გ) ნულები.

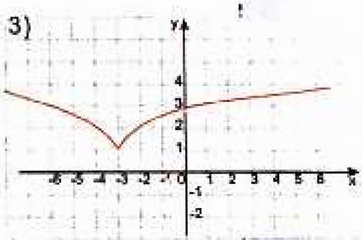
1)



2)



3)

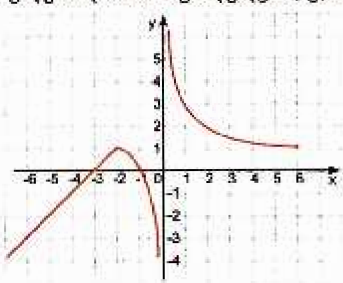


4 დახაზეთ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც ზრდადია $(-\infty;-3]$ შუალედში, $(-3;2]$ შუალედში კლებადია, ხოლო $(2;\infty)$ შუალედში კი ისევ ზრდადია და აქვს ერთადერთი ნული, $x=4$.

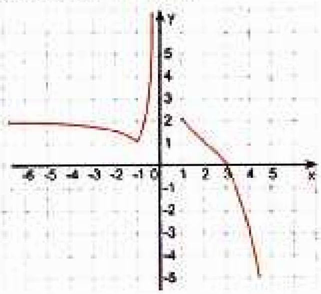
5 დახაზეთ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც ზრდადია $(-\infty;1]$ შუალედში და კლებადი $(1;\infty)$ შუალედში. ამავე დროს, $(-2;\ 4)$ შუალედში ფუნქცია დადებითია, ხოლო $(-\infty;-2)\cup(4;\infty)$ შუალედში კი – უარყოფითი.

6 ნახაზზე მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის ა) განსაზღვრის არე; ბ) მნიშვნელობათა არე, გ) საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები; დ) ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები; ე) ნიშანმუდმივობის შუალედები.

ა)



ბ)



7. განსაზღვრეთ, შემდეგი ფუნქციებიდან რომელია ლუწი, კენტი, რომელია არც ლუწი, არც კენტი?

ა) $(3-x)^3-(3+x)^3$; ბ) $y=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$;

გ) $y=|x-2|-3|x|+|x+2|$; დ)* $y=[|4x|]$.

8. ცნობილია, რომ $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა; $g(x)$ კენტია. რა შეიძლება ითქვას შემდეგი ფუნქციების ლუწ-კენტობაზე.

ა) $y=f(x+g(x))$; ბ) $y=g(f(x))$; გ) $y=xf(x)+g(x)$; დ) $y=x(f(x)+g(x))$.

9. იპოვეთ a; b და c-ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც ა) $y=ax+b$; ბ) $y=ax^2+bx+c$, $a\neq0$ ფუნქცია არის 1) ლუწი; 2) კენტი.

10* იპოვეთ $f(-3)$, თუ ცნობილია, რომ $f(3)=2$, ხოლო $f(x)+x^2$ ფუნქცია კენტია.

11* გამოთვალეთ $f(4)$, თუ $f(-4)=9$, ხოლო $(x+1)\cdot f(x)$ ლუწია.

12 ჭეშმარიტია თუ არა:

ა) ორი ზრდადი ფუნქციის ჯამი ზრდადია;

ბ) ორი კლებადი ფუნქციის ჯამი კლებადია;

გ) ორი ზრდადი ფუნქციის ნამრავლი ზრდადია.

13 $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და კლებადია $[-1;4]$ შუალედზე. ცნობილია, რომ $f(2)=5$. ამოხსენით უტოლობა $f(x)>5$.

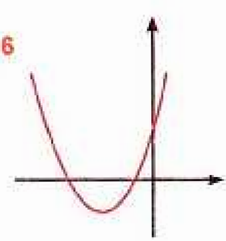
14 იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა

ა) $y=2-|x|$; ბ) $\dfrac{2x}{1+x^2}$; გ) $\sqrt{2+x-x^2}$; დ) $\sqrt{2x^4-6x^2+7}$.

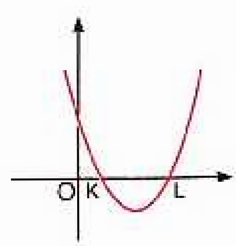
15 იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა მოცემულ შუალედზე.

ა) $y=2+x-x^2$ $x\in[-1;3]$; ბ) $y=4+\dfrac{1}{x-3}$ $x\in[0;2]$; გ) $y=\dfrac{3-3x}{2-3x}$ $x\in[1;4]$.

16



ნახაზზე მოცემულია $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ a; b და c კოეფიციენტების ნიშნები.



17 ნახაზზე მოცემულია $y=x^2-7x+c$ ფუნქციის გრაფიკი და $KL=5KO$. იპოვეთ c-ს მნიშვნელობა.

18* k-ს რა მნიშვნელობისათვის ექნება მოცემულ ფუნქციათა გრაფიკებს

1) ერთი; 2) ორი; 3) არც ერთი გადაკვეთის წერტილი:

ა) $y=3x-9$; $y=x^2-(2k+1)x+8k$; ბ) $y=x^2-2kx+1$; $y=-3$.

19 იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა:

ა) $y=-2x^2+5x-1$, $x\in[0;3]$; ბ) $y=-0{,}5x^2+2x-7$, $x\in[1;4]$;

გ) $y=x^2-3x+4$, $x\in[-3;1]$; დ) $y=2x^2-5x-1$, $x\in[-4;2]$.

20 x-ის რა მნიშვნელობისათვის მიიღებს გამოსახულება უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას? იპოვეთ ეს მნიშვნელობა:

ა) x^2-4x+1; ბ) $x(x-2)-1$; გ) $-x(x+3)-4$; დ) $x-3x^2$.

21 იპოვეთ რიცხვი, რომლის:

ა) ნამრავლი მასზე 25-ით მეტ რიცხვზე იქნება უმცირესი;

ბ) გასამკეცებელი ნამრავლი მასზე 1-ით მეტ რიცხვზე იქნება უმცირესი;

გ) მეოთხედის ნამრავლი მასზე 3-ით ნაკლებ რიცხვზე იქნება უმცირესი.

22. ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

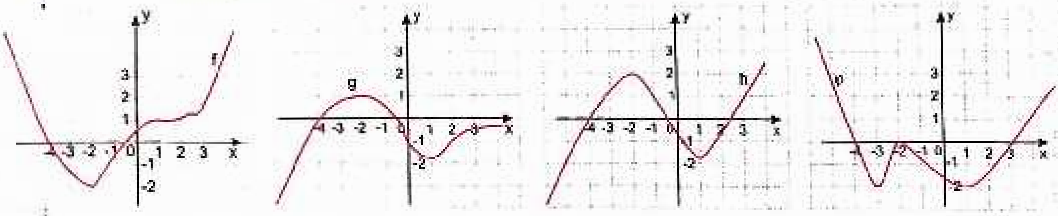
ა) $y=|3x+5|$; ბ) $y=3|x|-7$; გ) $y=|x^2-15x+54|$;

დ) $y=|x-5|+3$; ე) $y=x^2+2|x|-3$; ვ) $y=|x^2-x-2|+2$;

ზ) $y=\dfrac{1}{x+5}$; თ) $y=\dfrac{1}{|x+5|}$; ი) $y=\dfrac{1}{|x|+5}$.

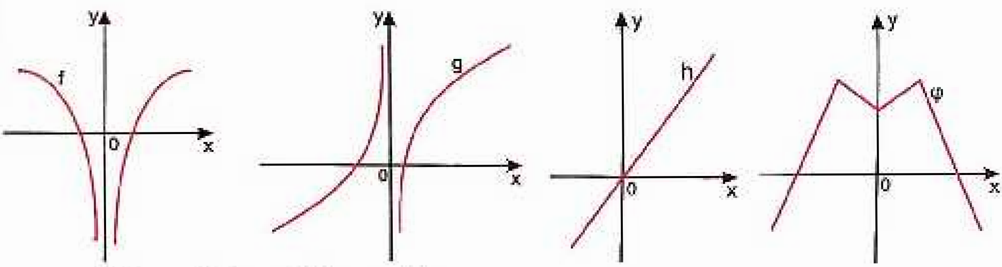
შეამოწმე შენი ცოდნა:

1. ცნობილია, რომ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty;-2)$ და $[1;5]$ შუალედებში, ხოლო მის ნულებია: $x=-4$ და $x=-0,5$, მაშინ ასეთი ფუნქციის გრაფიკი იქნება:



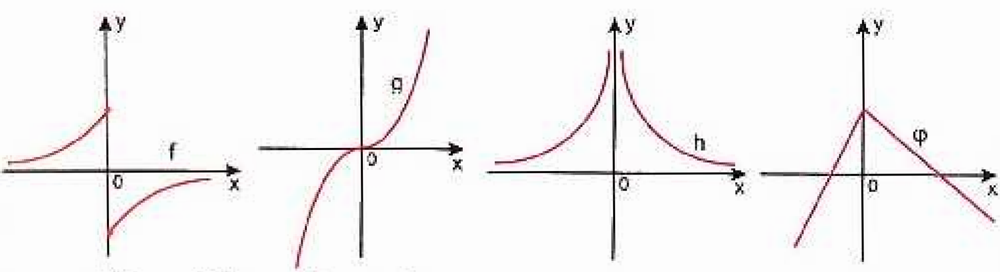
ა) f; ბ) g; გ) h; დ) φ.

2. მოცემული ფუნქციებიდან ლუწია:



ა) f; ბ) g; გ) h; დ) φ.

3. მოცემული წირებიდან კენტი ფუნქციის გრაფიკია:



ა) f; ბ) g; გ) h; დ) φ.

4. $y=|x-1|+|x+1|$ ფუნქცია:

ა) ლუწია; ბ) კენტია; გ) არც ლუწია, არც კენტია; დ) წრფივია.

5. თუ $f(x)=x^2+x-1$, მაშინ $f(x-1)=$:

ა) x^2-x-1; ბ) x^2-1; გ) x^2+x-1; დ) x^2-x+1.

6. შემდეგი ფუნქციებიდან I. $y=x^2-x^4$; II. $y=x^2-3$; III. $y=4x^3+16$ ლუწია:

ა) მხოლოდ I; ბ) მხოლოდ II; გ) მესამე; დ) I და II.

7. თუ მოცემულია ax^4+bx^2+c ფუნქცია და $f(5)=3$, მაშინ $f(-5)=$

ა) 3; ბ) -3; გ) 9; დ) პასუხს ვერ გავცემთ.

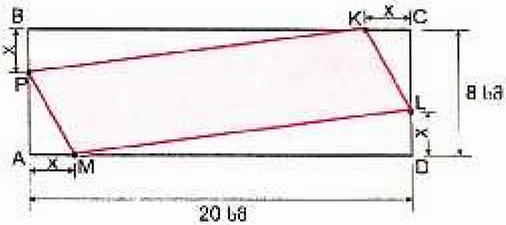
8. $y=x^2-5x+6$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა.

ა) $y=-2$; ბ) $y=-\frac{1}{4}$; გ) $y=0$; დ) $y=1$.

9. ABCD მართკუთხედში ჩახაზულია პარალელოგრამი ისე, როგორც ეს ნახაზზეა. პარალელოგრამის ფართობი უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა x უდრის:

ა) 1 სმ; ბ) 7 სმ;

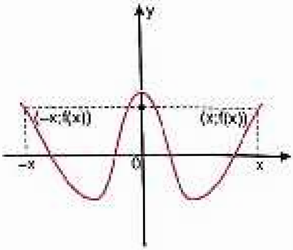
გ) 4 სმ; დ) 3 სმ.

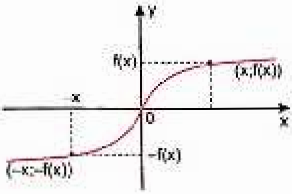


10. $y=|-x^2+bx+c|$ ფუნქციას გააჩნია: ა) უმცირესი მნიშვნელობა; ბ) უდიდესი მნიშვნელობა; გ) უმცირესი მნიშვნელობაც და უდიდესი მნიშვნელობაც; დ) არც ერთი პასუხი სწორი არ არის.

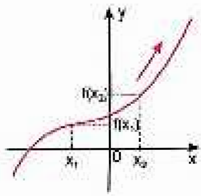
I თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია 0-ის მიმართ და განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი x-თვის სრულდება: $f(x)=f(-x)$.

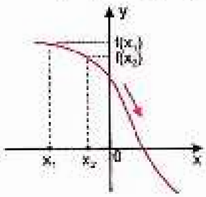




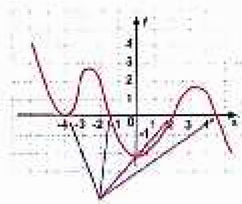
- $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია 0-ის მიმართ და განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი x-თვის სრულდება: $f(-x)=-f(x)$.



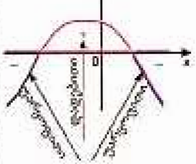
- $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი განსაზღვრის არის რაიმე (a,b) შუალედში, თუ ნებისმიერი $x_1,x_2\in(a,b)$-თვის, როცა $x_1< x_2$, მაშინ $f(x_1)<f(x_2)$.



- $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კლებადი განსაზღვრის არის რაიმე (a,b) შუალედში, თუ ნებისმიერი $x_1,x_2\in(a,b)$-თვის, როცა $x_1< x_2$, მაშინ $f(x_1)>f(x_2)$.

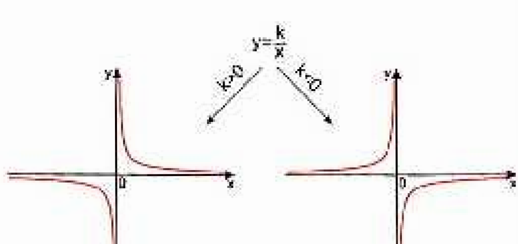


- არგუმენტის იმ მნიშვნელობას, რომლისათვისაც ფუნქციის მნიშვნელობა ნულის ტოლი ხდება, ფუნქციის ნული ეწოდება.



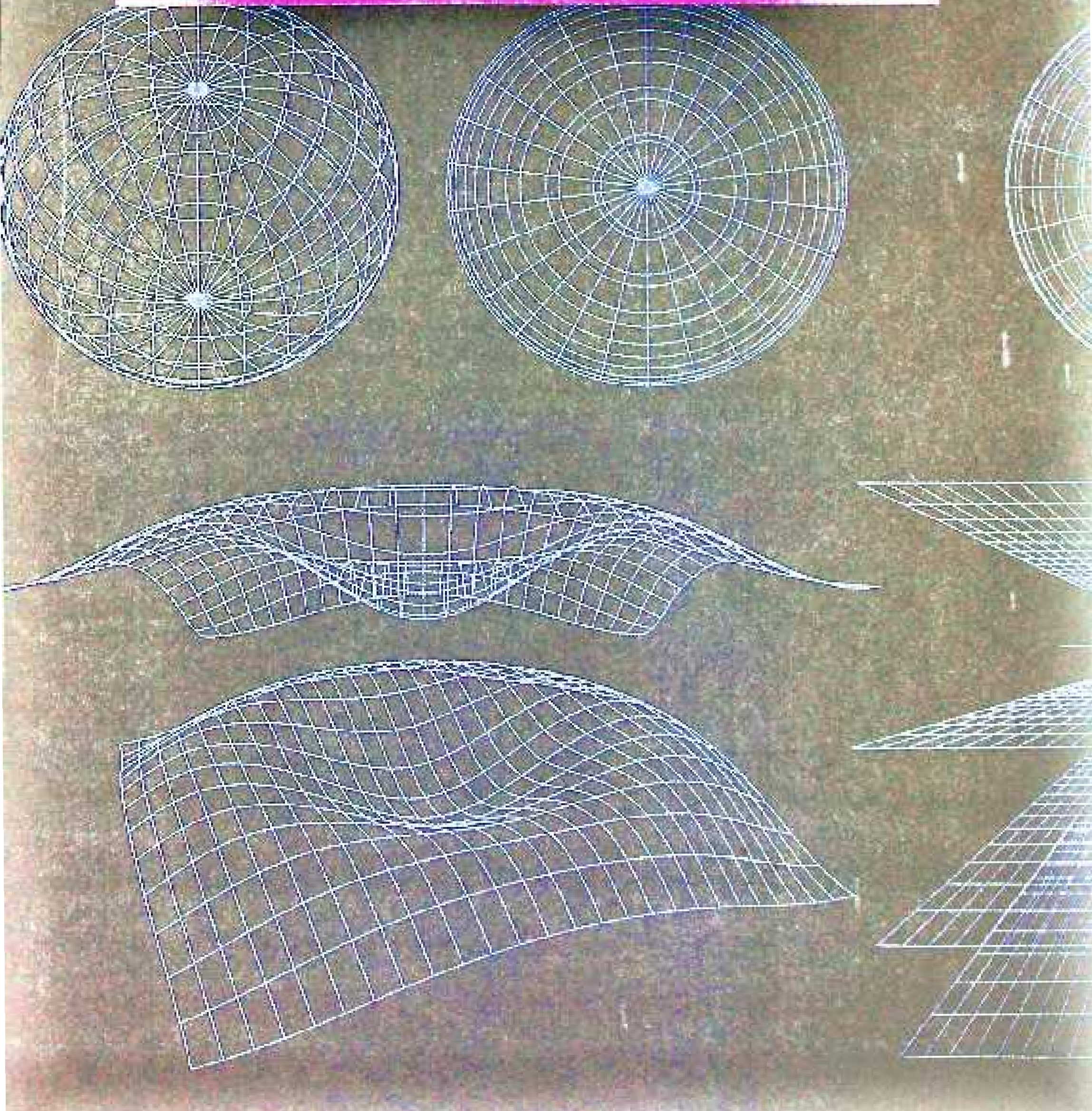
- შუალედს, რომელშიც ფუნქცია ნიშანს ინარჩუნებს (ან დადებითია ან უარყოფითი), ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედი ეწოდება.

- $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ჰიპერბოლა ეწოდება.



II თავი

ამ თავში განვიხილავთ გეომეტრიულ გარდაქმნებს. თავს მოვუყრით გეომეტრიული გარდაქმნებით ამოცანების ამოხსნის საინტერესო მეთოდებს. გავეცნობით სტერეომეტრიის აქსიომებს.



II თავი

1 გეომეტრიული გარდაქმნები. ღერძული სიმეტრია

გეომეტრიული გარდაქმნები — მოძრაობა და მსგავსების გარდაქმნა ხშირ შემთხვევაში საშუალებას გვაძლევს ლამაზად და მარტივად ამოვხსნათ ამოცანები. დამტკიცების და აგების ამოცანებში ხშირად გამოიყენება მოძრაობა: ღერძული სიმეტრია, ცენტრული სიმეტრია, პარალელური გადატანა, მობრუნება წერტილის გარშემო.

გასახსენებლად!
მოძრაობა არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომლის დროსაც შენარჩუნებულია ორ წერტილს შორის მანძილი.

? მართალია თუ არა, რომ მოძრაობისას:

1. წრფე გადადის წრფეში;

2. ერთ წრფეზე მდებარე წერტილები გადადის ისევ ერთ წრფეზე მდებარე წერტილებში, ამასთან ინარჩუნებს ამ წერტილების ურთიერთმდებარეობას;

3. სხივი გადადის სხივში;

4. მონაკვეთი - მონაკვეთში;

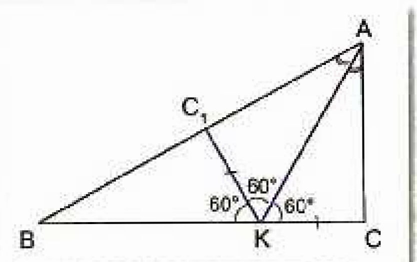
5. კუთხე გადადის მისსავე ტოლ კუთხეში;

6. თანამიმართული სხივები თანამიმართულ სხივებში.

გავიხსენოთ ზემოჩამოთვლილი გეომეტრიული გარდაქმნები.

k წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრია — ეს არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომლის შედეგადაც k წრფეზე მდებარე A წერტილი გადადის თავის თავში, ხოლო თუ A წერტილი არ ეკუთვნის k წრფეს, მაშინ გადადის ისეთ A_1 წერტილში, რომ k წრფე არის AA_1 მონაკვეთის შუამართობი.

ღერძულ სიმეტრიას ხშირად იყენებენ იმ ამოცანების ამოსახსნელად, როცა მოცემულ ფიგურას ან მის ნაწილს გააჩნია სიმეტრიის ღერძი, მაგალითად, როცა ამოცანაში საუბარია კუთხის ბისექტრისაზე.

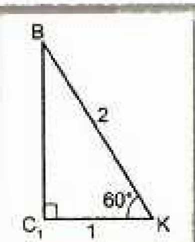


ამოცანა.

ABC სამკუთხედია AK ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს ყოფს ნაწილებად $BK=2$ და $CK=1$. $\angle AKC=60°$. იპოვეთ AK და ABC სამკუთხედის კუთხეები.

ამოხსნა:

ავაგოთ AK წრფის მიმართ C წერტილის სიმეტრიული C_1 წერტილი. რადგან AK წარმოადგენს BAC კუთხის სიმეტრიის ღერძს, ამიტომ C_1 წერტილი მდებარეობს AB სხივზე. მივიღეთ $ACKC_1$ ოთხკუთხედი, რომლის სიმეტრიის ღერძია AK. მაშასადამე, $C_1K=CK=1$, $\angle AKC_1=\angle AKC=60°$, საიდანაც $\angle C_1KB=60°$. ΔBKC_1-ში ვიცით ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე. ΔBKC_1 წარმოადგენს იმ ტოლგვერდა სამკუთხედის ნახევარს, რომლის გვერდია $BK=2$, ე.ი. $\angle B=30°$ და $BC_1K=90°$, საიდანაც და ცხადია, $\angle C=90°$ და $\angle CAB=60°$. ΔBAK გამოვიდა ტოლფერდა, ე.ი. $BK=AK=2$.



პასუხი: $\angle C=90°$; $\angle B=30°$; $\angle BAC=60°$; $AK=2$.

სავარჯიშოები:

1 მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია. დაამტკიცეთ, რომ ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხე 30°-ია.

2 ABC სამკუთხედში გავლებულია AK ბისექტრისა. იპოვეთ AC, $\angle B$ და $\angle C$, თუ $\angle C - \angle B = 45°$, $CK=1$ და $BK=\sqrt{2}$.

3 ABC სამკუთხედში გავლებულია AD ბისექტრისა. იპოვეთ AC და AB, თუ $BD=1$, $CD=\sqrt{3}$ და $\angle B=120°$.

4 ABCD ოთხკუთხედის AC დიაგონალი წარმოადგენს A კუთხის ბისექტრისას. ვიცით, რომ $AB=3$, $BC=\sqrt{3}$, $CD=2$ და $AD=4$. იპოვეთ AC და $\angle BAD$.

5 იპოვეთ ABC სამკუთხედის CH სიმაღლე, თუ $BC=a$, $AC=b$ და $\angle A-\angle B=90°$.

6 ABC სამკუთხედის C გარე კუთხის ბისექტრისაზე აღებულია M წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $AC+CB<AM+MB$.

7 მახვილი კუთხის შიგნით აღებულია M წერტილი. ააგეთ ისეთი ABM სამკუთხედი, რომლის A და B წვეროებიც მდებარეობს კუთხის გვერდებზე და რომელსაც ექნება უმცირესი პერიმეტრი.

8 ABC სამკუთხედში, რომლის გვერდებია $AB=15$; $BC=5$, $AC=16$, გავლებულია AM; BN და CK ბისექტრისები. რა შეფარდებით იყოფა BN ბისექტრისა გადაკვეთის წერტილით.

9 ტრაპეციის ფართობი 128 სმ^2-ის ტოლია, ხოლო ფუძეების შეფარდებაა 1:3. იპოვეთ დიაგონალების გავლებით მიღებული ოთხივე სამკუთხედის ფართობი.

10 რა უდიდესი ფართობი შეიძლება ჰქონდეს სამკუთხედს, რომლის გვერდებია 9 სმ და 14 სმ.

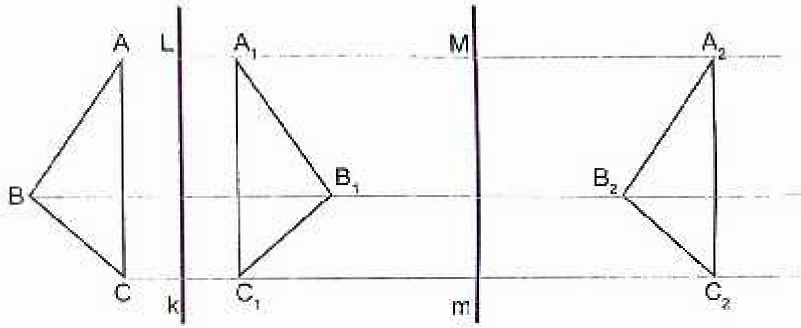
11 განვიხილოთ ორი წინადადება რიცხვთა გაყოფადობაზე:

I. თუ $a \vdots c$ და $b \vdots c$, მაშინ $(a+b) \vdots c$; II. თუ $(a+b) \vdots c$, მაშინ $a \vdots c$ და $b \vdots c$.

რომელი მათგანია ყოველთვის ჭეშმარიტი? რა პირობაა დაამატებდით, რომ ჭეშმარიტი გამოვიდეს ორივე წინადადება? მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითები.

2 პარალელური გადატანა

განვახორციელოთ ორი მომდევნო ღერძული სიმეტრია პარალელური k და m წრფეების მიმართ.
ვთქვათ, რომელიღაც A წერტილის სიმეტრიული წერტილი k წრფის მიმართ არის A_1 წერტილი, ხოლო ამ უკანასკნელის სიმეტრიული წერტილი m წრფის მიმართ არის A_2 წერტილი ($k||m$). წერტილები A, A_1 და A_2 ისეთ ერთ წრფეზეა განლაგებული, რომელიც სიმეტრიის ღერძების მართობულია.



ღერძული სიმეტრიის თვისებების თანახმად, მივიღეთ $AL=LA_1$ და $A_1M=MA_2$, საიდანაც

$\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LA_1} + \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{MA_2} = 2(\overrightarrow{LA_1} + \overrightarrow{A_1M}) = 2\overrightarrow{LM}$

მივიღეთ $\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{LM}$.

ჩვენ მივიღეთ სიბრტყის გარდაქმნა — პარალელური გადატანა.

პარალელური გადატანა $\vec{a}$ ვექტორზე არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომლის დროსაც ნებისმიერი A წერტილი გადადის ისეთ A_1 წერტილში, რომ $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$.

პარალელური m და k ღერძების მიმართ ორი ღერძული სიმეტრიის კომპოზიციით მივიღეთ პარალელური გადატანა $2\overrightarrow{LM}$ ვექტორით.
პირიქითაც — ნებისმიერი პარალელური გადატანა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ პარალელური ღერძების (რომლებიც პარალელური გადატანის მართობულია) მიმართ ორი ცენტრალური სიმეტრიით.

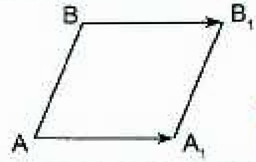
პარალელური გადატანა მოძრაობაა, რომელიც არ ცვლის ფიგურის ფორმას.

■ მართალია თუ არა, რომ:

1. არანულოვან ვექტორზე პარალელური გადატანისას არ არსებობს წერტილი, რომელიც თავის თავში გადავიდა;
2. პარალელური გადატანისას ყოველი სხივი გადადის მის თანამიმართულ სხივში.

დაამტკიცეთ, რომ:

თუ პარალელური გადატანისას A და B წერტილები გადადის A_1 და B_1 წერტილებში და ეს ოთხი წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, მაშინ ABB_1A_1 ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.



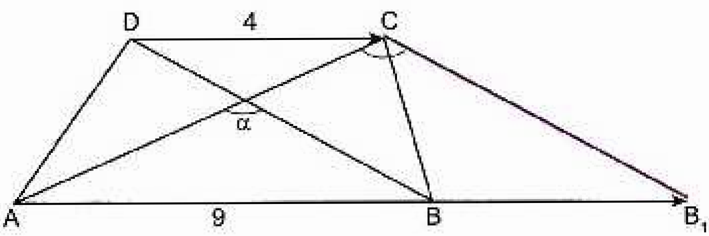
პარალელური გადატანის ეს თვისება გამოიყენება ამოცანების ამოხსნისას.

პარალელური გადატანის მეთოდი ხშირად გამოიყენება ოთხკუთხედის აგებისას, ამასთან, ხშირად გადააქვთ ერთი ან რამდენიმე მონაკვეთი ისე, რომ მიიღონ სამკუთხედი, რომლითაც შესაძლებელია აგების დაწყება. ანალოგიურად იქცევიან დამტკიცების ან გამოთვლის ამოცანების ამოხსნისას.

პარალელური გადატანის შედეგად იღებენ ახალ ფიგურას, რომელშიც თავმოყრილია ამოცანის გადასაწყვეტად საჭირო საკმარისი მოცემულობა.

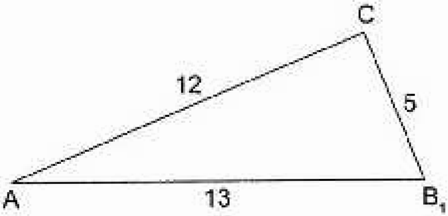
ამოცანა.

ტრაპეციის ფუძეებია 4 სმ და 9 სმ. დიაგონალები კი 5 სმ და 12 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი და დიაგონალებს შორის კუთხე.



ამოხსნა:

გადავიტანოთ BD დიაგონალი $\overrightarrow{DC}$ ვექტორზე. განვიხილოთ ΔACB_1. AC და CB_1 გვერდები ტრაპეციის დიაგონალების ტოლია, ხოლო AB_1 გვერდი კი ტრაპეციის ფუძეების ჯამია. $\angle ACB_1$ კუთხე კი დიაგონალებს შორის კუთხის ტოლია. ამასთან, ეს სამკუთხედი ტრაპეციის ტოლდიდია (დაასაბუთეთ თავად).



საჭიროების შემთხვევაში შეგიძლიათ ამოხსნათ ΔACB_1.

$S_{\Delta ACB_1} = \sqrt{15 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10} = 30$

$\widehat{(d_1;d_2)} = \angle C$.

$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 \cdot \sin\alpha = 30 \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$.

პასუხი: $\widehat{(d_1;d_2)} = 90°$ და $S_{ABCD} = 30$სმ^2.

სავარჯიშოები:

1. ააგეთ ტრაპეცია ფუძეებით და დიაგონალებით.

2. ააგეთ ტრაპეცია დიაგონალებით და მათ შორის მდებარე კუთხით.

3. ტრაპეციის ფუძეებია 1 და 3, დიდ ფუძესთან მდებარე კუთხეები კი $30°$ და $60°$. იპოვეთ ტრაპეციის ფერდების სიგრძეები.

4. ტრაპეციის ფუძეებია 2 და 7, ფერდები კი 3 და 4. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეების შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძე.

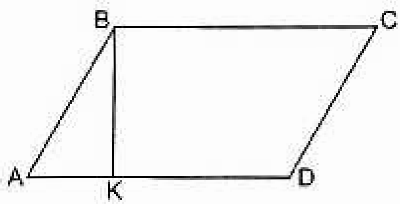
5. ტრაპეციის ფუძეებია a და b, დიაგონალები კი ურთიერთმართობულია. რა მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს ტრაპეციის h სიმაღლემ?

6. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტრაპეციის დიაგონალები ტოლია, მაშინ ის ტოლფერდაა.

გ

7. პარალელოგრამის დიაგონალებია 10 და 12, ხოლო ერთ-ერთი გვერდი 9. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

8. ABCD რომბში $BK=AK=a$ იპოვეთ რომბის ფართობი.



9. რომელ საკოორდინატო მეოთხედებში შეიძლება იყოს $y=|f(x)|+b$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ
ა) $b>0$ ბ) $b<0$.

10. თუ $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი და $y=|ax^2+bx+c|$ ფუნქციის გრაფიკი ერთი და იგივეა, რომელი თანაფარდობაა ჭეშმარიტი?
ა) $ac<0$; ბ) $a \cdot D>0$; გ) $aD \le 0$; დ) $a+b+c<0$.

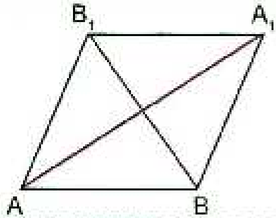
3 ცენტრული სიმეტრია

ცენტრული სიმეტრია O ცენტრით — ეს არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომლის დროსაც O წერტილი უძრავადაა, ხოლო ნებისმიერი სხვა A წერტილი გადადის ისეთ A_1 წერტილში, რომ O წერტილი არის AA_1 მონაკვეთის შუაწერტილი.

ცენტრული სიმეტრიის შებრუნებული გარდაქმნა ისევ ცენტრული სიმეტრიაა.

დაამტკიცეთ, რომ:

თუ A და B წერტილები ცენტრული სიმეტრიით O ცენტრის მიმართ გადადის A_1 და B_1 წერტილებში (O წერტილი არ ეკუთვნის AB წრფეს), მაშინ AB_1A_1B ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.



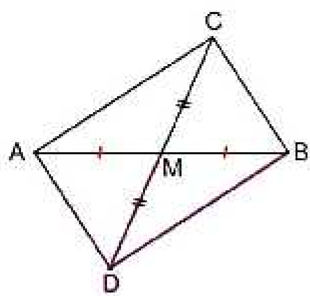
ცენტრული სიმეტრია, ისევე, როგორც პარალელური გადატანა, გამოიყენება ფიგურის მოცემული და საძიებელი ელემენტების მოხერხებულად განთავსებისათვის, რათა ადვილად დავადგინოთ მათ შორის კავშირი.

მაგალითი 1.

დავამტკიცოთ, რომ სამკუთხედის მედიანა ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეთა ნახევარჯამზე.

ამოხსნა:

ავაგოთ C წერტილის სიმეტრიული D წერტილი M ცენტრის მიმართ. მივიღეთ ΔACD, რომელშიც $CD=2CM$ და $AD=BC$. სამკუთხედის უტოლობის თანახმად, $DC<AD+AC \Rightarrow 2CM<BC+AC$ რ.დ.გ.

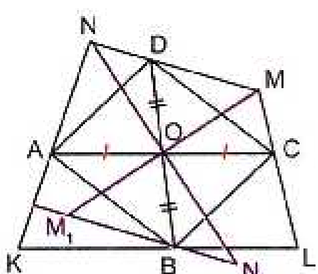


მაგალითი 2.

მოცემულ ოთხკუთხედში ჩახაზეთ პარალელოგრამი იმ პირობით, რომ ამ პარალელოგრამის ორი წვერო მოპირდაპირე გვერდებზე დაფიქსირებული წერტილებია.

ამოხსნა:

ABCD პარალელოგრამის A და C წვეროები დაფიქსირებულია KN და LM გვერდებზე. საკმარისია ავაგოთ D და B წვეროები, რომლებიც სიმეტრიულია AC მონაკვეთის O შუაწერტილის მიმართ. D წერტილი მდებარეობს MN წრფეზე, მაშასადამე, B წერტილი უნდა მდებარეობდეს (O ცენტრის მიმართ) MN მონაკვეთის სიმეტრიული M_1N_1 მონაკვეთზე. ამავე დროს, $B\in KL$ მონაკვეთს, ე.ი. B წერტილი იქნება KL და M_1N_1 მონაკვეთების კვეთის წერტილი. ამით ანალიზი დამთავრებულია და შეგვიძლია დავიწყოთ აგება.



აგება:

ავაგოთ AC მონაკვეთის O შუანერტილი და MN მონაკვეთის სიმეტრიული M_1N_1 მონაკვეთი O ცენტრის მიმართ. M_1N_1 მონაკვეთის კვეთა KL-თან გვაძლევს საძიებელ B წერტილს. BO წრფისა და NM მონაკვეთის კვეთის წერტილი იქნება პარალელოგრამის D წვერო. A, D, M და B წერტილები მიმდევრობით შევაერთოთ.

? მართალია თუ არა, რომ:

1. ცენტრული სიმეტრია მოძრაობაა;

2. ცენტრული სიმეტრიით სხივი გადადის მის თანამიმართულ სხივში;

3. მონაკვეთი გადადის მონაკვეთში;

4. სხივი გადადის მის საპირისპიროდ მიმართულ სხივში;

5. სამკუთხედი გადადის მის ტოლ სამკუთხედში?

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ ΔABC-ს ფართობი, თუ $AC=11$სმ, $BC=13$სმ და მედიანა $CD=10$სმ.

2 იპოვეთ ΔABC-ს CH სიმაღლე, თუ მედიანა $CD=5$, $AC=6$ და $BC=8$.

3 ΔABC-ში გავლებულია CD მედიანა. რომელი კუთხის გრადუსული ზომაა მეტი $\angle ACD$ თუ $\angle BCD$, თუ $AC<BC$?

4 ΔABC-ში გავლებულია CD მედიანა. იპოვეთ AC და BC, თუ $\angle ACD=90°$, $\angle BCD=30°$ და $CD=\sqrt{3}$.

5 ABCD ოთხკუთხედში $\angle A=\angle C$, ხოლო BD დიაგონალი მეორე დიაგონალით შუაზე იყოფა. დაამტკიცეთ, რომ ABCD პარალელოგრამია.

6 ორი წრეწირის კვეთის წერტილზე გაატარეთ წრფე ისე, რომ ამ წრფით წარმოქმნილი ქორდები იყოს ტოლი (არა საერთო ქორდა).

გ

7 ააგეთ $y=|x^2-8x+15|$ და $y=x^2-8|x|+15$ ფუნქციათა გრაფიკები და იპოვეთ მათი უმცირესი მნიშვნელობები.

8 სავაჭრო საწარმოს თვეში 4000 ლ. შემოსავალი აქვს, თუ გაყიდვების მოცულობა 500 ერთეულია. პროდუქციის ფასის გაძვირებამ გამოიწვია 20%-ით გაყიდვების მოცულობის შემცირება.

ა) როგორ შეიცვალა თვიური შემოსავალი, თუ გაყიდვის მოცულობა ფასის უკუპროპორციულია.

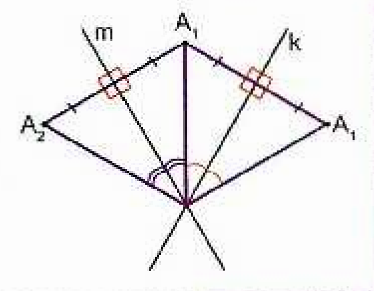
ბ) რისი ტოლია ფასი გაძვირების შემდეგ?

4 მობრუნება

მოცემული მიმართულებით, O წერტილის მიმართ, α კუთხით მობრუნება არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომლის დროსაც O წერტილი უძრავად რჩება, ხოლო სხვა ნებისმიერი A წერტილი გადადის ისეთ A_1 წერტილში, რომ $OA_1=OA$ და $\angle AOA_1=\alpha$ (ითვლება OA სხივიდან მოცემული მიმართულებით).

მომავალში ყოველთვის α კუთხით მობრუნებაში ვიგულისხმებთ α კუთხით მობრუნებას საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

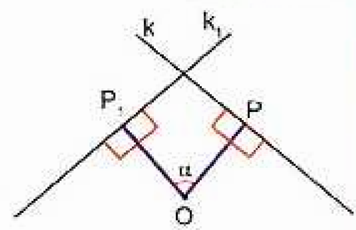
აღნიშნული მობრუნება R_O^{α}-ით აღინიშნება. 360°-იანი კუთხით მობრუნებისას სიბრტყის ყველა წერტილი ბრუნდება პირვანდელ მდგომარეობაში, ამიტომ $R_O^{360+\alpha} = R_O^{0} R_O^{360+\alpha} = R_O^{\alpha}$.



ორი ღერძული სიმეტრიის კომპოზიცია იმ ღერძების მიმართ, რომლებიც O წერტილში იკვეთებიან, არის მობრუნება O ცენტრის მიმართ, გაორმაგებული — ღერძებს შორის კუთხით და პირიქით.

ყოველი მობრუნება წერტილის გარშემო შეიძლება წარმოვადგინოთ ისეთი ორი ღერძული სიმეტრიის კომპოზიციით, რომელთა ღერძები იკვეთება მობრუნების ცენტრში.

ყოველივე ზემოთთქმულიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მობრუნება არის მოძრაობა.



ამოცანა 1.

ავაგოთ k წრფის O ცენტრის მიმართ მობრუნებით მიღებული k_1 წრფე.

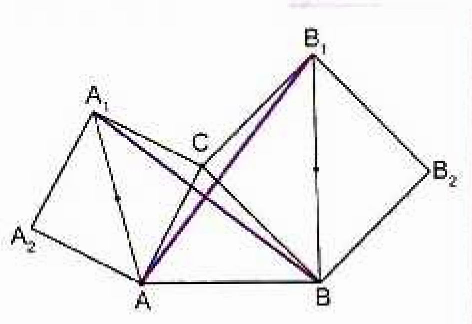
ამოხსნა:

O ცენტრიდან დავუშვათ $OP \perp k$. მოვაბრუნოთ P წერტილი O ცენტრის მიმართ α კუთხით. მიღებულ P_1 წერტილზე გავავლოთ $k_1 \perp OP_1$.

მობრუნებაა ძირითადად იყენებენ ისეთ ამოცანებში, რომლებშიც მოცემული ან საძიებელი ფიგურა არის წესიერი მრავალკუთხედი.

ამოცანა 2.

ABC სხვადასხვაგვერდა სამკუთხედის AC და BC გვერდებზე აგებულია ACA_1A_2 და BCB_1B_2 კვადრატები. დაამტკიცეთ, რომ $AB_1=A_1B$ და $AB_1 \perp A_1B$.



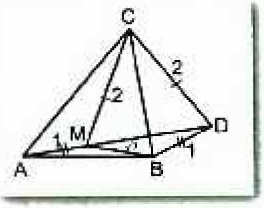
ამოხსნა:

გამოვიყენოთ მობრუნება C წერტილის მიმართ 90°-ით. სამკუთხედები A_1CA და BCB_1 ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედებია, ამიტომ A_1 წერტილი გადავა A წერტილში, B კი — B_1-ში.

ე.ი. AB_1 მონაკვეთი გადავა A_1B მონაკვეთში, საიდანაც დავასკვნით, რომ: 1) ეს მონაკვეთები ტოლია ($A_1B= AB_1$) და 2) მათ შორის კუთხე 90°-ია ($AB_1 \perp A_1B$), რ.დ.გ.

ამოცანა 3.

ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის შიგნით მოცემულია M წერტილი ისეთი, რომ $AM=1$, $BM=\sqrt{3}$ და $CM=2$. იპოვეთ AB, $\angle AMB$ და $\angle BMC$.



ამოხსნა:

მოვაბრუნოთ ΔACM C წერტილის გარშემო 60°-იანი კუთხით. A წერტილი გადავა B-ში, M წერტილი — D-ში. ΔACM გადავა ΔBCD-ში. ამასთან, $CD=CM$ და $\angle MCD=60°$. ე.ი. ΔCDM ტოლგვერდაა.

მობრუნების შედეგად მივიღეთ დამხმარე BDM სამკუთხედი, რომელშიც ვიცით სამი გვერდი $BD=AM=1$; $BM=\sqrt{3}$ და $DM=CM=2$. რიცხვითი მონაცემებიდან ჩანს, რომ ΔMBD მართკუთხაა მართი B კუთხით, ამასთან, BD კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია, ე.ი. $\angle BMD=30°$, $\angle AMB=150°$, $\angle BMC=30°+60°=90°$.

$\Delta BCM \Rightarrow BC=AB=\sqrt{7}$.

პასუხი: $AB=\sqrt{7}$; $\angle AMB=150°$ და $\angle BMC=90°$.

სავარჯიშოები:

1 ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის შიგნით აღებულია M წერტილი. ვიცით, რომ $AM=1$, $BM=\sqrt{2}$ და $\angle AMB=105°$. იპოვეთ CM და $\angle BMC$.

2 ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის შიგნით აღებულია M წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ MA, MB და MC მონაკვეთებიდან უდიდესის სიგრძე ნაკლებია დანარჩენი ორის ჯამზე.

3 წრეწირში ჩახაზულია ABC ტოლგვერდა სამკუთხედი. მცირე AB რკალზე აღებულია M წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $MA+MB=MC$.

4 ტოლფერდა მართკუთხა ABC სამკუთხედის ($\angle C=90°$) შიგნით აღებულია M წერტილი ისე, რომ $AM=2$, $BM=\sqrt{2}$ და $CM=1$. იპოვეთ AC, $\angle BMC$ და $\angle CMA$.

5 მართკუთხა ტოლფერდა ABC სამკუთხედის ($\angle C=90°$) შიგნით აღებულია M წერტილი ისე, რომ $AM=2$, $\angle AMB=120°$, $\angle AMC=105°$. იპოვეთ BM და CM.

6 ABCD კვადრატის შიგნით აღებულია M წერტილი ისე, რომ $MC=1$, $MD=\sqrt{2}$ და $\angle CMD=105°$. იპოვეთ AC დიაგონალი და $\angle MDC$.

გ

7 ამოხსენით მთელ რიცხვებში

ა) $y^3-x^3=91$;   ბ) $xy+3x-5y=-2$.

თემა

მოძრაობათა კომპოზიცია

ორი გარდაქმნის კომპოზიცია არის გარდაქმნა, რომელსაც მივიღებთ, თუ ჯერ შევასრულებთ პირველ გარდაქმნას, ხოლო შემდეგ — მეორეს.

ორი f და g გარდაქმნის კომპოზიცია $g \circ f$-ით აღინიშნება, ამასთან, ჯერ სრულდება f გარდაქმნა, შემდეგ — g.
ჩანაწერის ეს სახე განაპირობა განმარტებამ, რომლის თანახმადაც $(g \circ f)(A)=g(f(A))$ ანუ: თუ $f(A)=A_1$, $(g \circ f)(A)=g(A_1)$.

იყენებენ გეომეტრიული გარდაქმნების შემდეგ აღნიშვნებს:

S_k — ღერძული სიმეტრია K წერტილის მიმართ;
$T_{\vec{a}}$ — პარალელური გადატანა $\vec{a}$ ვექტორზე;
R_0^α — O წერტილის მიმართ α კუთხით მობრუნება;
E — იგივური გარდაქმნა (რომლის დროსაც სიბრტყის ყველა წერტილი გადადის თავის თავში).

ნებისმიერი ორი გარდაქმნის კომპოზიცია ხასიათდება თვისებებით:

$h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$

$f \circ E=E \circ f=f$ (E იგივური გარდაქმნა).

აღსანიშნავია, რომ $g \circ f=f \circ g$ ტოლობა ყოველთვის არ სრულდება.
აჩვენეთ ეს დამოუკიდებლად. კონკრეტულად: განიხილეთ ორი ცენტრული სიმეტრიის კომპოზიცია $Z_B \circ Z_A$ სხვადასხვა A და B ცენტრები $Z_B \circ Z_A$-ს შემთხვევაში სხვადასხვა A და B ცენტრებით.

ცნობილია, რომ ნებისმიერი მოძრაობა შესაძლოა წარმოვადგინოთ არა უმეტეს სამი ღერძული სიმეტრიით.

5 მსგავსების გარდაქმნა. ჰომოთეტია

მსგავსება არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომლის დროსაც ნებისმიერი ორი A და B წერტილის და მათი A_1 და B_1 სახეებისთვის სრულდება ტოლობა: $A_1B_1 = k \cdot AB$, სადაც k მოცემული დადებითი რიცხვია. k-ს ეწოდება მსგავსების კოეფიციენტი.

თუ k=1, მაშინ მსგავსება წარმოადგენს მოძრაობას.

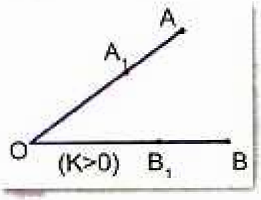
მსგავსების გარდაქმნა k კოეფიციენტით შექცევადია.

შექცეული გარდაქმნა არის მსგავსების გარდაქმნა $\frac{1}{k}$ კოეფიციენტით.

Φ_1 ფიგურას ეწოდება Φ ფიგურის მსგავსი, თუ არსებობს მსგავსების გარდაქმნა, რომლითაც Φ ფიგურა გადადის Φ_1 ფიგურაში.

სამკუთხედებისათვის ვიცით მსგავსების ნიშნები. სხვა მრავალკუთხედებისათვის სარგებლობენ შემდეგით:

ორი n-კუთხედი მსგავსია, თუ მათი გვერდები პროპორციულია, ხოლო შესაბამისი კუთხეები კი ტოლი.



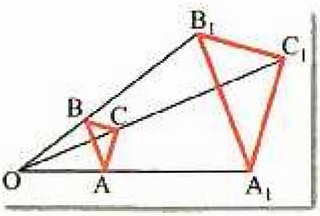
ახლა განვიხილოთ გარდაქმნა, რომლის დროსაც სიბრტყის ნებისმიერ A წერტილს შეესაბამება ისეთი A_1 წერტილი, რომ $OA_1 = k \cdot OA$, ამასთან $A_1 \subset OA$ წრფეს. ასეთ გარდაქმნას ეწოდება სიბრტყის **ჰომოთეტია** O ცენტრითა და k კოეფიციენტით.

ჰომოთეტია მსგავსების გარდაქმნა

განმარტებიდან ჩანს, რომ თუ **k=1**, ჰომოთეტია წარმოადგენს სიბრტყის იგივურ გარდაქმნას, ხოლო თუ **k= –1**, მაშინ ჰომოთეტია წარმოადგენს ცენტრულ სიმეტრიას.

ორი ჰომოთეტია O ცენტრით, k და $\frac{1}{k}$ კოეფიციენტებით, წარმოადგენს ურთიერთშებრუნებულ ჰომოთეტიებს — ერთ მათგანს A წერტილი გადაჰყავს A_1 წერტილში, ხოლო მეორეს — A_1 წერტილი A წერტილში.

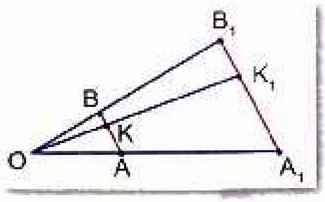
თუ ჰომოთეტიით, რომლის კოეფიციენტია k, AB მონაკვეთი გადადის A_1B_1 მონაკვეთში, მაშინ $AB \| A_1B_1$ და $A_1B_1 = |k|\ AB$. მაშასადამე, ნებისმიერი F ფიგურა გადადის მისსავე მსგავს F_1 ფიგურაში მსგავსების კოეფიციენტით |k|.



მაგალითად, ჰომოთეტიას O ცენტრით და k კოეფიციენტით $\triangle ABC$ გადაჰყავს მისსავე მსგავს $\triangle A_1B_1C_1$-ში, მსგავსების კოეფიციენტით |k|. ამასთან, სამკუთხედების შესაბამისი გვერდები ურთიერთპარალელურია.

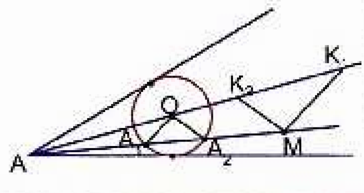
ცხადია, ჰომოთეტიით AB მონაკვეთის შუაწერტილი გადადის A_1B_1 მონაკვეთის შუაწერტილში და, უფრო მეტიც, წერტილი, რომელიც AB მონაკვეთს ყოფს გარკვეული შეფარდებით, გადადის წერტილში, რომელიც A_1B_1 მონაკვეთს ყოფს იგივე შეფარდებით:

$$\frac{BK}{AK} = \frac{B_1K_1}{A_1K_1}.$$



ამოცანა 1.

მოცემულია $\angle A$ კუთხე და მისი შიგა M წერტილი. ააგეთ წრეწირი, რომელიც ეხება კუთხის გვერდებს და გადის M წერტილზე.



აგება:

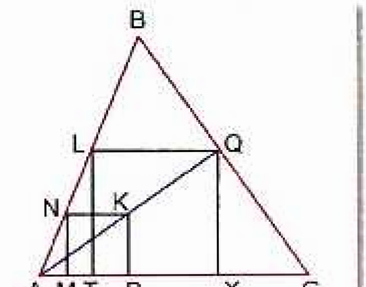
ავიღოთ ბისექტრისის ნებისმიერი O წერტილი და ავაგოთ ამ კუთხეში ჩახაზული წრეწირი ცენტრით O. A_1 და A_2-ით აღვნიშნოთ AM წრფისა და ამ წრეწირის კვეთის წერტილები.

ჰომოთეტია A ცენტრით და ნებისმიერი კოეფიციენტით მოგვცემს ამ კუთხეში ჩახაზულ წრეწირს. ამიტომ: M წერტილზე გავატაროთ $MK_1 || OA_1$ და $MK_2 || OA_2$. K_1 და K_2 წარმოადგენს საძიებელი წრეწირის ცენტრებს (ასეთი წრეწირი ორია). მაშასადამე: ჩავხაზოთ A კუთხეში წრეწირები K_1 და K_2 ცენტრებით და ეს წრეწირები გაივლის M წერტილზე.

კუთხეში ჩახაზული წრეწირების ცენტრთა გეომეტრიული ადგილია ამ კუთხის ბისექტრისა.

ამოცანა 2.

მოცემულ სამკუთხედში ჩახაზეთ კვადრატი.

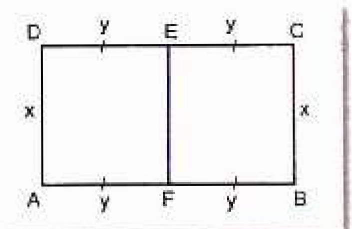


აგება:

ჩავხაზოთ BAC კუთხეში MNKP კვადრატი ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. გავატაროთ AK წრფე BC გვერდთან გადაკვეთამდე. გავავლოთ QL||KN და QX||KP. LT||QX. მიღებულია LQXT კვადრატი.

ამოცანა 3.

მართკუთხა ფორმის ქაღალდის ფურცელი შუაზე გადაკეცეს. რა შემთხვევაში იქნება ფურცელი და მისი ნახევარი ერთი და იმავე ფორმის?



ამოხსნა:

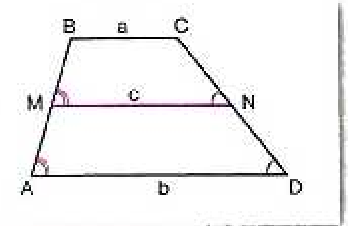
უნდა დავადგინოთ, თუ AB და AD გვერდებია როგორი თანაფარდობისას იქნება ADEF და ABCD მართკუთხედები მსგავსი.

მართკუთხედის ყველა კუთხე მართია, ამიტომ საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ $\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DE}$

$$\frac{x}{2y}=\frac{y}{x}\Rightarrow x^2=2y^2\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{\sqrt{2}}{1}\Rightarrow \frac{AD}{\frac{1}{2}AB}=\sqrt{2}\Rightarrow \frac{AB}{AD}=\sqrt{2}.$$

ამოცანა 4.

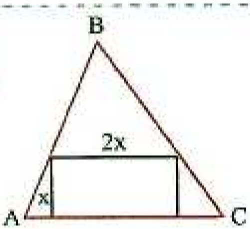
ტრაპეციაში გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფე.
I. შეიძლება თუ არა მიღებული ორი ტრაპეციიდან რომელიმე იყოს თავდაპირველის მსგავსი?
II. შეიძლება თუ არა მიღებული ორი ტრაპეცია იყოს მსგავსი?
დადებითი პასუხის შემთხვევაში დაადგინეთ თანაფარდობა ფუძეებსა და ამ წრფის მონაკვეთს შორის.



I. დავუშვათ ABCD~MBCN, მაშინ $\frac{a}{b}=\frac{a}{c}\Rightarrow b=c$, რაც შეუძლებელია.

დავუშვათ ABCD~AMND, მაშინ $\frac{a}{b}=\frac{c}{b}\Rightarrow a=c$, რაც შეუძლებელია.

შევამოწმოთ II შემთხვევა. დავუშვათ AMND~MBCN, მაშინ $\frac{c}{b}=\frac{a}{c}\Rightarrow c^2=ab$.



1. ახსენით, რატომ იქნება TLQX ოთხკუთხედი კვადრატი მე-2 ამოცანაში (გამოიყენეთ ჰომოთეტიის ცნება).

2. მოცემულ სამკუთხედში ჩახაზეთ მართკუთხედი, რომლის გვერდებიც ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:1 (იხ. ნახაზი).

- რამდენი ისეთი წრფე შეიძლება არსებობდეს, რომელიც ტრაპეციას გაყოფს ორ მსგავს ტრაპეციად?
- მართალია თუ არა, რომ:

ა) ნებისმიერი ორი კვარდატი მსგავსია;

ბ) ნებისმიერი ორი ტოლგვერდა სამკუთხედი მსგავსია;

გ) ნებისმიერი ორი ტოლფერდა სამკუთხედი მსგავსია;

დ) ნებისმიერი ორი მართკუთხედი მსგავსია;

ე) ტრაპეცია შუახაზით იყოფა ორ მსგავს ტრაპეციად;

ვ) ნებისმიერი ორი რომბი მსგავსია.

სავარჯიშოები:

1 მოცემულია ABCD ტრაპეცია ფუძეებით $BC=a$ და $AD=b$. ფუძეების პარალელური MN წრფე ტრაპეციას ყოფს ორ მსგავს ტრაპეციად. იპოვეთ MN მონაკვეთის სიგრძე (M და N ფერდებზე მდებარეობს).

2 ABCD ტრაპეციის ფუძეა AB. წრეწირი გადის A, D და C წერტილებზე და ეხება BC-ს. იპოვეთ AC, თუ $AB=a$ და $CD=b$.

3 ABCD ტრაპეციაში AB დიდი ფუძეა. $AD=CD=1$; $AB=3$; $\angle A=2\angle B$. იპოვეთ BC და $\angle ABC$.

4 მოცემული მართკუთხედი გაყავით BC გვერდის პარალელური წრფით ორ მსგავს მართკუთხედად (არატოლი).

5 მოცემული ტრაპეცია გაყავით ფუძეების პარალელური წრფით ორ მსგავს ტრაპეციად.

6 ჩამოაყალიბეთ რომბების მსგავსების ნიშანი.

7 ჩამოაყალიბეთ ტრაპეციების მსგავსების ნიშანი.

8 ჩამოაყალიბეთ მართკუთხედების მსგავსების ნიშანი.

9 ΔABC-ში ჩახაზეთ PDMN მართკუთხედი ისე, რომ $PD:DM=2:3$ და ამ მართკუთხედის ორი წვერო მდებარეობდეს სამკუთხედის გვერდებზე ($D\in AB$ და $M\in BC$).

10 ABC სამკუთხედში ჩახაზეთ მართკუთხედი, რომლის გვერდების შეფარდებაა 2:3 და რომლის დიდი გვერდი მდებარეობს სამკუთხედის AC გვერდზე.

11 სამართლიანია შემდეგი დებულება: „თუ ანი ისწავლის ინგლისურ ენას და კომპიუტერს, მაშინ მას პრესტიჟულ ფირმაში აუცილებლად მიიღებენ სამუშაოდ." ქვემოთ მოყვანილ დებულებიდან რომელი არის აუცილებლად სამართლიანი?

ა) თუ ანი ისწავლის ინგლისურ ენას ან კომპიუტერა, მაშინ მას პრესტიჟულ ფირმაში აუცილებლად მიიღებენ სამუშაოდ;

ბ) თუ ანი არ ისწავლის არც ინგლისურ ენას და არც კომპიუტერს, მაშინ მას პრესტიჟულ ფირმაში არ მიიღებენ სამუშაოდ;

გ) თუ ანი არ მიიღეს სამუშაოდ პრესტიჟულ ფირმაში, მას არ უსწავლია ინგლისურ ენას ან კომპიუტერს;

დ) თუ ანი არ მიიღეს სამუშაოდ პრესტიჟულ ფირმაში, მას არ უსწავლია არც ინგლისური ენა და არც კომპიუტერი.

მეცნიერული თეორიის ლოგიკური წყობის საკითხი ჯერ კიდევ ჩვენს წელთაღრიცხვამდე იყო დასმული არისტოტელეს მიერ (384–322 წწ ძვ. წელთაღრიცხვით), რომლის გენიალური თხზულებაც დაშენებული იყო მისი წინამორბედების მიერ ჩაყრილ ფუნდამენტზე. „დედუქციური დასკვნის", „ლოგიკური მტკიცების" იდეა წარმოიშვა ძველ საბერძნეთში, არისტოტელემდე ორი საუკუნით ადრე იონიელების სკოლაში (ძველი იონია მოიცავდა ბერძნულ კოლონიებს მცირე აზიაში და მიმდებარე ეგეოსის ზღვის კუნძულებს) და პითაგორელებში (პითაგორელები წარმოიშვნენ ეგრეთწოდებულ დიდებულ საბერძნეთში, აგრეთვე სამხრეთ იტალიის ბერძნულ კოლონიებში და სიცილიაში).

იონიელების ცენტრალურ ფიგურად ითვლება თალეს მილეთელი (625–547 წწ ძვ. წელთაღრიცხვამდე), ხოლო მასწავლებლად ითვლებოდა პითაგორა, რომელიც წარმოშობით იყო იონიელი. იონიელების და ძველი პითაგორელების შრომებს და ხელნაწერებს ჩვენამდე არ მოუღწევია. თუმცა, შენარჩუნდა ჰიპოკრატე ხიოსელის გეომეტრიის სახელმძღვანელოს ფრაგმენტები (Vს. ძვ. წ. აღ.) არ აგერიოთ ცნობილ იონიელ ექიმ ჰიპოკრატეში).

არისტოტელე მეცნიერებებს ყოფდა დაკვირვებითად (ინდუქციურად) და დასკვნითად (დედუქციურად). დედუქციური მეცნიერებების ეტალონად იგი თვლიდა მათემატიკას.

არისტოტელეს სქემის მიხედვით, დედუქციური მეცნიერებების საფუძველია ძირითადი(განუსაზღვრელი)ცნებები.მისიმოთხოვნითესცნებები„თვალსაჩინო, ცხადი" უნდა ყოფილიყო. შემდგომ ამ ცნებების ბაზაზე შემოდის ახალი, ლოგიკურად კონსტრუირებული ცნებები. ეგრეთწოდებული „აქსიომატური მეთოდი" სათავეს იღებს, სულ ცოტა, ევკლიდეს პერიოდიდან მაინც. აშკარა შეცდომა იქნებოდა, გვეფიქრა, რომ ანტიკური მათემატიკა ვითარდებოდა და გამოიცემოდა მხოლოდ „ელემენტებისათვის დამახასიათებელი მკაცრი პოსტულატური ფორმით, მაგრამ ამ თხზულებამ შემდგომ თაობაზე იმდენად დიდი შთაბეჭდილება მოახდინა, რომ მასში ეძებდნენ ნიმუშს მათემატიკაში ყოველი მკაცრი დამტკიცებისათვის. ზოგ შემთხვევაში ფილოსოფოსებიც კი (მაგალითად სპინოზა მის „Ethica, more geometrico demonstrata"–ში) ცდილობდნენ მსჯელობა აქსიომებისა და განსაზღვრებებისაგან გამოყვანილი თეორემის სახით გადმოეცათ. თანამედროვე მათემატიკაში ევკლიდეს ტრადიციებიდან გადახვევის პერიოდის შემდეგ, რომელიც XVII და XVIII საუკუნის მანძილზე გრძელდებოდა, ხელახლა შეიმჩნევა სხვადასხვა დარგში აქსიომატური მეთოდის სულ უფრო მზარდი შეჭრა. აზროვნების ამგვარი მისწრაფების ერთ–ერთ უახლეს პროდუქტთაგანს წარმოადგენს ახალი დისციპლინის – მათემატიკური ლოგიკის წარმოშობა.

ზოგად მონახაზებში აქსიომატური თვალსაზრისი შეიძლება შემდეგნაირად დავახასიათოთ: თეორემის დამტკიცება რაიმე დედუქციურ სისტემაში ნიშნავს, დავადგინოთ, რომ ეს თეორემა წარმოადგენს ადრე დამტკიცებული ამა თუ იმ წინადადების აუცილებელ ლოგიკურ შედეგს. ეს უკანასკნელი,

თავის მხრივ, უნდა იყოს დამტკიცებული. მაგრამ ამ შემთხვევაში უნდა არსებობდეს მტკიცებების — პოსტულატების ანუ აქსიომების — გარკვეული რიცხვი, რომლებიც მიღებულნი იქნებიან როგორც ჭეშმარიტნი და რომელთა დამტკიცებაც არ მოითხოვება. მათგან შეიძლება ვცადოთ ყველა სხვა თეორემის წმინდა ლოგიკური არგუმენტაციის გზით გამოყვანა. თუ რაიმე სამეცნიერო დარგის ყველა ფაქტი მოყვანილია ამგვარ ლოგიკურ წესრიგში, სახელდობრ, ისეთში, რომ ნებისმიერი მათგანი რამდენიმე არჩეული წინადადებიდან „გამოიყვანება“ (უკეთესია, რომ ისინი არამრავალრიცხოვანნი, მარტივნი და ადვილად ასათვისებელნი იყვნენ), მაშინ საფუძველი გვაქვს ვთქვათ, რომ დარგი წარმოდგენილია „აქსიომატური ფორმით“ ანდა „უშვებს აქსიომატიზაციას“. წინადადება–აქსიომების არჩევა საკმაოდ ნებისმიერია, მაგრამ ნაკლებ სასარგებლოა, თუ ჩვენი პოსტულატები ძალზე ბევრია ან ძალიან რთული. შემდეგ პოსტულატთა სისტემა უნდა იყოს კონსისტენტური (არ შეიცავს წინააღმდეგობებს) იმ გაგებით, რომ ყოველი ორი თეორემა, რომელიც მათგან შეიძლება მიღებულ იქნეს, ერთმანეთს არ უნდა ეწინააღმდეგებოდეს, და იყოს სრული იმ გაგებით, რომ ნებისმიერი თეორემა, რომელსაც შეიძლება ადგილი ჰქონდეს განხილულ დარგში, უნდა გამოიყვანებოდეს ამ პოსტულატებიდან. სასურველია აგრეთვე, რომ პოსტულატების სისტემა იყოს დამოუკიდებელი, ე.ი. რომ არც ერთი მათგანი დანარჩენების ლოგიკური შედეგი არ იყოს.

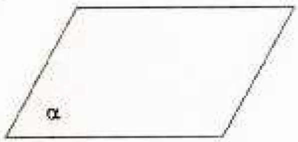
ჰილბერტმა თავის შესანიშნავ წიგნში „Grundlagen der Geometrie“ (მისი პირველი გამოცემა გამოვიდა 1901 წელს) მოგვცა გეომეტრიის აქსიომათა სისტემის სავსებით დამაკმაყოფილებელი აგება და ამასთანავე მოახდინა მათი ურთიერთდამოუკიდებლობის, თავსებადობისა და სისრულის ამომწურავი ანალიზი.

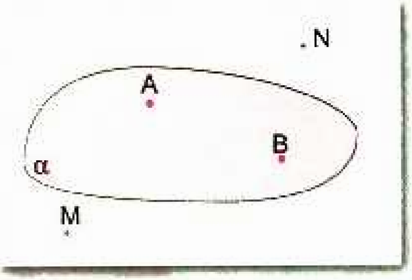
გეომეტრიის გამოყენებისათვის მნიშვნელოვანია, რომ გეომეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები კარგ შესაბამისობაში იყვნენ „რეალური“, აღქმადი საგნების შესახებ იმ დებულებებთან, რომელთა შემოწმება ფიზიკურად შესაძლებელია. ფიზიკური რეალობა, რომელიც „წერტილის“ ცნების მიღმა დგას, არის რაღაც ძალზე მცირე ობიექტი, მცირე კვალის მაგვარი რამ, რომელსაც ფანქრის ქაღალდზე შეხებით ვღებულობთ და ამგვარადვე „წრფე“ წარმოადგენს მაგრად გაჭიმული ძაფის აბსტრაქციას. ან ფიზიკური წერტილებისა და წრფეების თვისებები, რომელიც შესაძლებელია შემოწმებით დავადგინოთ, ცოტად თუ ბევრად შეესაბამება გეომეტრიის ფორმალურ აქსიომებს. ადვილი წარმოსადგენია, რომ უფრო ზუსტად დაყენებულმა ექსპერიმენტმა შეიძლება აქსიომათა შეცვლის აუცილებლობა გამოიწვიოს, თუ ჩვენ გვინდა, რომ მათ ფიზიკური მოვლენების ადეკვატური აღწერა მოგვცენ და პირიქით, ფორმალურ აქსიომებსა და საგანთა ფიზიკურ თვისებებს შორის შესამჩნევი გადახრა რომ არსებულიყო, მაშინ ასეთ აქსიომებზე აგებულ გეომეტრიას შემოსაზღვრული ინტერესი ექნებოდა.

6 სტერეომეტრიის აქსიომები

წერტილების, წრფეების და სიბრტყეების ურთიერთმდებარეობის ძირითადი თვისებები აისახება აქსიომებში, რომელთა გარკვეული ნაწილი განვიხილეთ პლანიმეტრიის კურსში. სანამ გავეცნობით სტერეომეტრიის რამდენიმე აქსიომას, გავიხსენოთ, რომ წერტილები, ძირითადად, ლათინური დიდი ასოებით A, B, C, ... აღინიშნება, წრფეები – ლათინური პატარა a, b, c, ... ასოებით, ხოლო სიბრტყეების აღსანიშნავად ბერძნული პატარა α, β, γ, ... ასოები გამოიყენება.

სიბრტყე, როგორც გეომეტრიული ფიგურა, ნახაზზე პარალელოგრამის, ან ნებისმიერი შეკრული მრუდის სახით შეგვიძლია გამოვსახოთ:

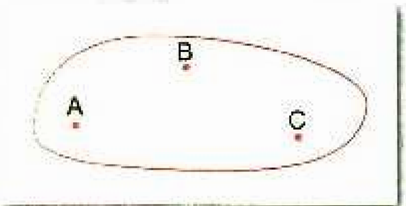




აქსიომა 1

ნებისმიერი სიბრტყისათვის არსებობს მასზე მდებარე და მასზე არამდებარე წერტილები.

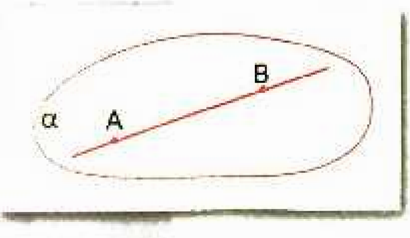
ნახაზზე A და B წერტილები მდებარეობს α სიბრტყეზე, ხოლო M და N წერტილები მასზე არ მდებარეობს. ეს ასე ჩაიწერება: $A \in \alpha$; $B \in \alpha$; $M \notin \alpha$; $N \notin \alpha$.



აქსიომა 2

ნებისმიერ სამ ერთ წრფეზე არამდებარე წერტილზე გაივლება სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი.

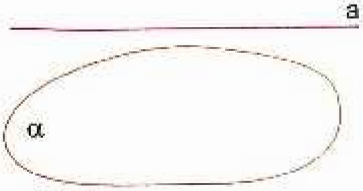
ნახაზზე მოცემული α სიბრტყე ასეც შეიძლება ჩავწეროთ – (ABC) სიბრტყე.



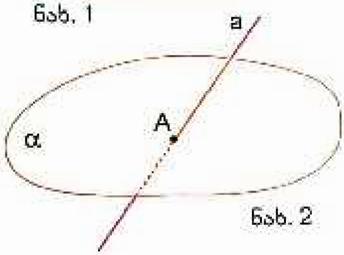
აქსიომა 3

თუ წრფის ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ ეს წრფე მდებარეობს ამ სიბრტყეზე.

ნახაზზე A და B წერტილები α სიბრტყეს ეკუთვნის. აქსიომის თანახმად, AB წრფე α სიბრტყეზე მდებარეობს.



ნახ. 1



ნახ. 2

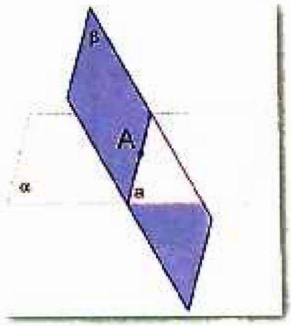
მე-3 აქსიომის შედეგად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ წრფეს, რომელიც მოცემულ სიბრტყეზე არ მდებარეობს, ამ სიბრტყესთან ან არა აქვს საერთო წერტილი (ნახ. 1), ან თუ აქვს, მხოლოდ ერთი. (ნახ. 2)

პირველ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მეორე შემთხვევაში ვამბობთ, რომ a წრფე კვეთს α სიბრტყეს A წერტილში.

აქსიომა 4

თუ ორ სიბრტყეს აქვს საერთო წერტილი, მაშინ მათ გააჩნიათ საერთო წრფე, რომელზედაც მდებარეობს ამ სიბრტყეთა ყველა საერთო წერტილი.

ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ α და β სიბრტყეები იკვეთება a წრფეზე.



ამოცანა.

დავამტკიცოთ, რომ, თუ A, B და C წერტილები ეკუთვნის ორი განსხვავებული სიბრტყიდან თითოეულს, მაშინ ისინი ერთ წრფეზე მდებარეობენ.

ამოხსნა:

მე-4 აქსიომის თანახმად, ორი განსხვავებული სიბრტყის ყველა საერთო წერტილი მდებარეობს ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეზე, ე.ი. A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს.

■ შეიძლება თუ არა, რომ:

1. სიბრტყეზე მდებარეობდეს პარალელოგრამის წვეროებიდან მხოლოდ სამი წვერო;

2. სიბრტყე გავავლოთ ნებისმიერ ოთხ წერტილზე.

■ მართალია თუ არა, რომ:

1. MAB და MCD სიბრტყეები არ იკვეთება;

2. ABC და ABD განსხვავებული სიბრტყეები იკვეთება წრფეზე;

3. ABC და MND სიბრტყეები არ შეიძლება იკვეთებოდნენ;

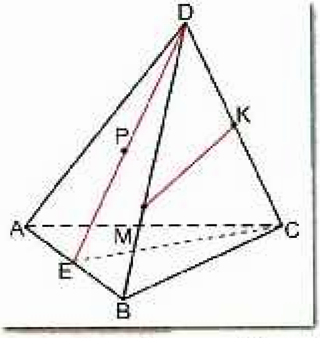
4. ორ სიბრტყეს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი.

სავარჯიშოები:

1 სამფეხა და ოთხფეხა სკამებიდან რომელი სკამი შეიძლება არ იდგეს იატაკზე მყარად და რა შემთხვევაში (პასუხი დაასაბუთეთ).

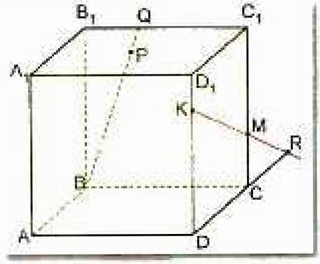
2 მოცემული სამი წერტილი წყვილ-წყვილად შეერთებულია მონაკვეთებით. დაამტკიცეთ, რომ ყველა მონაკვეთი ერთ სიბრტყეში მდებარეობს.

3 მაგიდის ზედაპირიდან სხვადასხვა მიმართულებით აფრინდა სამი ბუზი (ბუზების სიჩქარეების შეფარდებაა 1:2:3). აფრენიდან რამდენი ხნის მერე მოხვდება სამივე ბუზი ერთ რომელიმე სიბრტყეში? პასუხი დაასაბუთეთ.



4 ნახაზის მიხედვით დაასახელეთ:
ა) სიბრტყეები, რომელშიც მდებარეობს წრფეები: PE, MK, DB, AB, EC;
ბ) DK წრფის ABC სიბრტყესთან, ხოლო CE წრფის ADB სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილები.
გ) ADB და DBC სიბრტყეების საერთო წერტილები.
დ) წრფეები, რომლებზედაც იკვეთება სიბრტყეები ABC და DCB; ABD და CDA; PDC და ABC.

5 A, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს. იკვეთება თუ არა ABC და ABD სიბრტყეები?



6 ნახაზის მიხედვით დაასახელეთ:
ა) DCC_1 და BQC სიბრტყეების საერთო წერტილები;
ბ) სიბრტყეები, რომლებშიც მდებარეობს AA_1 წრფე;
გ) MK წრფის სიბრტყესთან და DK და BP წრფეების $A_1B_1C_1$ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილები;
დ) MK და DC, B_1C_1 და BP, C_1M და DC წრფეებს გადაკვეთის წერტილები.

7 მოცემულია ორი სიბრტყე, რომლებიც a წრფეზე იკვეთებიან და b წრფე, რომელიც მდებარეობს ამ სიბრტყეებიდან ერთ-ერთში და მეორეს კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ a და b წრფეები იკვეთება.

8 დაამტკიცეთ, რომ თუ AB და CD წრფეები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს, მაშინ არც AC და BD წრფეები მდებარეობს ერთ სიბრტყეში.

9 შეადგინეთ 12 ასანთის ღერისაგან 6 კვადრატი, ასანთის ღერის ტოლი გვერდით.

გ

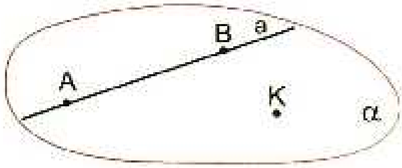
10 სამკუთხედის გვერდებია 13სმ; 14სმ; 15სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ა) უმცირეს გვერდზე დაშვებული სიმაღლე; ბ) უდიდეს გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

11 სამკუთხედის ორი გვერდია 27 სმ და 29 სმ, მესამე გვერდის მედიანაა 26 სმ. იპოვეთ ფართობი.

7 აქსიომების შედეგები

თეორემა:

წრფესა და მასზე არამდებარე წერტილზე გაივლება სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი.



α სიბრტყე შეიძლება ასეც აღვნიშნოთ – (a;K) სიბრტყე.

დამტკიცება:

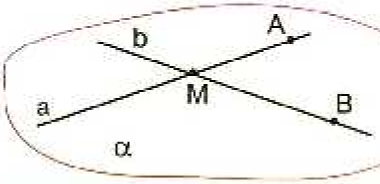
განვიხილოთ a წრფე და მასზე არამდებარე K წერტილი.
ავიღოთ a წრფეზე ნებისმიერი ორი A და B წერტილი. რადგან A, B და K წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, მე-2 აქსიომის თანახმად, მათზე გაივლება ერთადერთი α სიბრტყე. a წრფის A და B წერტილები ეკუთვნის α სიბრტყეს, ე.ი. მე-3 აქსიომის თანახმად, a წრფე მდებარეობს α სიბრტყეზე.

- აჩვენეთ, რომ ამგვარად მიღებული α სიბრტყე არ არის დამოკიდებული A და B წერტილების არჩევაზე.

დავამტკიცოთ კიდევ ერთი საინტერესო თეორემა.

თეორემა:

ორ ურთიერთგადამკვეთ წრფეზე გაივლება სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი.



დამტკიცება:

a და b წრფეების გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ M-ით. ავიღოთ a წრფეზე M წერტილისგან განსხვავებული A, ხოლო b წრფეზე – B წერტილი. მე-2 აქსიომის თანახმად, A, B და M წერტილებზე გაივლება ერთადერთი a სიბრტყე, რომელზეც, მე-3 აქსიომის თანახმად, მდებარეობს a და b წრფეები. ცხადია, ასეთი სიბრტყე ერთადერთია, რადგან ნებისმიერი სიბრტყე, რომელზეც მდებარეობს a და b წრფეები, ამავე დროს, შეიცავს A, B და M წერტილებს, ე.ი. ემთხვევა a სიბრტყეს.

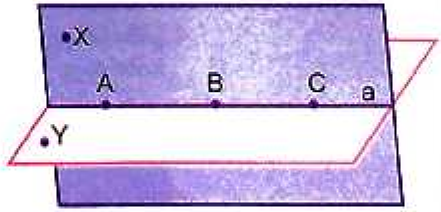
a სიბრტყე შეგვიძლია ასეც აღვნიშნოთ (a;b) სიბრტყე.

ამოცანა.

დავამტკიცოთ, რომ სამ წერტილზე, რომელიც ერთ წრფეზე მდებარეობს, უამრავი სიბრტყე გაივლება.

დამტკიცება:

ვთქვათ, მოცემული A, B და C წერტილები მდებარეობს a წრფეზე. ავიღოთ ამ წრფეზე არამდებარე X წერტილი და გავავლოთ (a;X) სიბრტყე. შემდეგ ავიღოთ ამ სიბრტყეზე არამდებარე წერტილი. ამის უფლებას გვაძლევს 1-ელი აქსიომა.



მივიღეთ (a;X) სიბრტყისგან განსხვავებული (a;Y) სიბრტყე. X მონაკვეთზე შეგვიძლია ავიღოთ Z წერტილი, მივიღებთ ახალ (a;Z) სიბრტყეს და ა.შ. სიბრტყე, რომელიც a წრფეს, ე.ი. A, B და C წერტილებს შეიცავს, უამრავია.

მართალია თუ არა, რომ:

1. ნებისმიერი ოთხი წერტილი მდებარეობს ერთ სიბრტყეში;
2. არ მოიძებნება ოთხი წერტილი, რომელიც მდებარეობს ერთ სიბრტყეში;
3. ნებისმიერ სამ წერტილზე გაივლება სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი;
4. ნებისმიერი სამი წერტილი მდებარეობს ერთ სიბრტყეში.
5. ორ ურთიერთგადამკვეთ წრფეზე გაივლება სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი;
6. წრფესა და მასზე არამდებარე წერტილზე გაივლება სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი;
7. ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილზე გაივლება სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი;
8. თუ წრეწირის ორი წერტილი მდებარეობს რომელიმე სიბრტყეზე, მაშინ ეს წრეწირი მდებარეობს ამ სიბრტყეზე.

სავარჯიშოები:

1 A, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობს.
ა) შესაძლებელია თუ არა, რომ მათგან რომელიმე სამი ერთ წრფეზე მდებარეობდეს; ბ) შესაძლებელია თუ არა, რომ AB და CD წრფეები იკვეთებოდეს? პასუხი დაასაბუთეთ.

2 ორი წრფე იკვეთება M წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ ყველა წრფე, რომელიც არ გადის M წერტილზე და კვეთს ამ ორ წრფეს, ერთ სიბრტყეში მდებარეობს. მდებარეობს თუ არა ერთ სიბრტყეზე M წერტილზე გამავალი ყველა წრფე?

3 პარალელოგრამის ორი მეზობელი წვერო და დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი მდებარეობს α სიბრტყეში. მდებარეობს თუ არა α სიბრტყეში პარალელოგრამის დანარჩენი ორი წვერო? პასუხი დაასაბუთეთ.
• უპასუხეთ ამოცანაში დასმულ კითხვას, თუ მეზობელი წვეროების ნაცვლად ავიღებთ მოპირდაპირე წვეროებს.

4 სამი წრფე გადის ერთ წერტილზე. მათგან ყოველ ორზე გავლებულია სიბრტყე. რამდენი სიბრტყე გაივლება?

5 სამი წრფე წყვილ-წყვილად იკვეთება. დაამტკიცეთ, რომ ისინი ან ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ, ან სამივე ერთ წერტილზე გადის.

6* მოცემულია ორი არაგადამკვეთი სიბრტყე. დაამტკიცეთ, რომ წრფე, რომელიც გადაკვეთს ერთ-ერთ მათგანს, გადაკვეთს მეორესაც.

8 წრფეთა პარალელურობა

ორ წრფეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ და მათზე შესაძლებელია სიბრტყის გავლება.

ის ფაქტი, რომ a და b პარალელური წრფეებია, სტერეომეტრიაშიც ისე აღინიშნება, როგორც პლანიმეტრიაში: $a \parallel b$.

განმარტებიდან ჩანს, რომ ორ პარალელურ წრფეზე სიბრტყე გაივლება. ვაჩვენოთ, რომ ეს სიბრტყე ერთადერთია. ამისათვის ერთ-ერთ წრფეზე ავიღოთ ორი A და B წერტილი, მეორეზე კი C წერტილი.

დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ ასეთი სიბრტყე ორია. გამოდის, რომ ერთ წრფეზე არამდებარე სამ A, B და C წერტილზე ორი განსხვავებული სიბრტყე გაივლება, რაც აქსიომა 2-ს ეწინააღმდეგება.

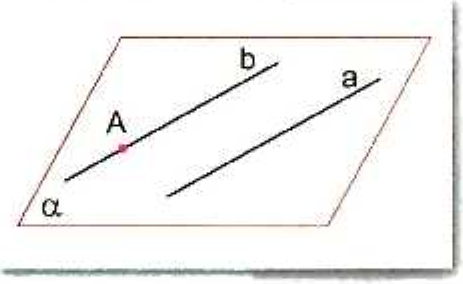
თეორემა:

წრფეზე არამდებარე ნებისმიერ წერტილზე შესაძლებელია ამ წრფის პარალელური წრფის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.

ვიტყვით, რომ მონაკვეთები ან სხივები პარალელურია, თუ ისინი პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ.

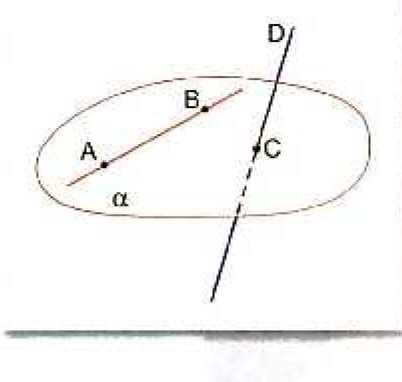
დამტკიცება:

მოცემულია a წრფე და მასზე არამდებარე A წერტილი. გავავლოთ მათზე α სიბრტყე. ასეთი სიბრტყე ერთადერთია. სიბრტყეზე კი, როგორც ვიცით პლანიმეტრიის კურსიდან, წრფეზე არამდებარე წერტილზე, ამ წრფის პარალელური ერთადერთი წრფე გაივლება. ე.ი. A წერტილზე გავლებული a წრფის პარალელური b წრფე ერთადერთია რ.დ.გ.



როგორც ვნახეთ, თუ ორი წრფე იკვეთება, ან პარალელურია, მათზე გაივლება სიბრტყე.

შევნიშნოთ, რომ სივრცეში არსებობს წრფეთა ისეთი წყვილები, რომლებზეც სიბრტყე არ გაივლება, ე.ი. წრფეები, რომლებიც არც იკვეთება და პარალელურიც არ არის. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, განვიხილოთ AB წრფე, რომელიც α სიბრტყეზე მდებარეობს და DC წრფე, რომელიც კვეთს ამ სიბრტყეს AB წრფეზე არამდებარე C წერტილში. AB და DC წრფეებზე სიბრტყის გავლება შეუძლებელია, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მათზე გამავალ სიბრტყეში უნდა მდებარეობდეს AB წრფეც და C წერტილიც. ასეთი სიბრტყე კი ერთადერთი α სიბრტყეა, რომელზეც, ცხადია, DC წრფე არ მდებარეობს.

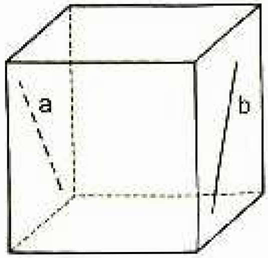


ორ წრფეს, რომლებზედაც სიბრტყე არ გაივლება, აცდენილი წრფეები ეწოდება.

ყოველივე ზემოთთქმულის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ აცდენილ წრფეთა ნიშანი:

ორი წრფე აცდენილია, თუ ერთ-ერთი კვეთს მეორე წრფეზე გამავალ რაიმე სიბრტყეს ამ წრფეზე არამდებარე წერტილში.

აცდენილი წრფეების მაგალითად გამოგვადგება პარალელეპიპედის მოპირდაპირე წახნაგებზე მდებარე არაპარალელურ წრფეთა ნებისმიერი წყვილი.

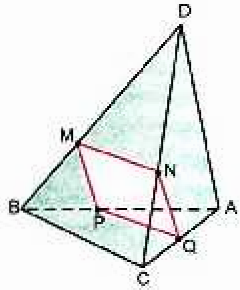


ამოცანა.

ნახაზზე M, N, Q და P წერტილები, DABC პირამიდის DB, DC, AC და AB წიბოების შუაწერტილებია. იპოვეთ MNQP ოთხკუთხედის პერიმეტრი, თუ AD=28 სმ და BC=30 სმ.

ამოხსნა:

M და N წერტილები მდებარეობს BDC სიბრტყეში და რადგან ისინი BD და DC მონაკვეთების შუაწერტილებია, MN წარმოადგენს BDC სამკუთხედის შუახაზს. ე.ი. $MN=\frac{BC}{2}=15$ სმ, ანალოგიურად, PQ, MP და NQ, შესაბამისად ABC, ABD და ADC სამკუთხედების შუახაზებია, ამიტომ $PQ=\frac{BC}{2}=15$სმ, $MP=MQ=\frac{AD}{2}=14$სმ.



ე.ი. $P_{MNPQ}= 2\cdot 15 + 2\cdot 14 = 58$ სმ.

მართალია თუ არა, რომ:

1. თუ ორ წრფეს საერთო წერტილი არ აქვს, მაშინ ისინი აცდენილია.

2. ორი წრფე, რომლებიც ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს, შეიძლება აცდენილი იყოს

სავარჯიშოები:

1 დაამტკიცეთ, რომ ყველა წრფე, რომელიც მოცემულ ორ პარალელურ წრფეს გადაკვეთს, ერთ სიბრტყეში მდებარეობს.

2 a და b წრფეები იკვეთება. დაამტკიცეთ, რომ ყველა წრფე, რომელიც b წრფის პარალელურია და a წრფეს გადაკვეთს, ერთ სიბრტყეში მდებარეობს.

3 AB მონაკვეთის A ბოლოზე გავლებულია სიბრტყე. AB მონაკვეთის C და B წერტილებზე გავლებულია პარალელური წრფეები, რომლებიც სიბრტყეს C_1 და B_1 წერტილებში გადაკვეთს. იპოვეთ BB_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ

ა) $CC_1=15$ სმ, $AC:BC=2:3$; ბ) $CC_1=8,1$ სმ, $AB:AC=11:9$;
გ) $AB=6$ სმ, $AC:CC_1=2:5$; დ) $AC=a$, $BC=b$, $CC_1=c$.

4 AB მონაკვეთის ბოლოებზე და M შუაწერტილზე გავლებულია პარალელური წრფეები, რომლებიც რომელიღაც სიბრტყეს A_1, B_1 და M_1 წერტილებში კვეთენ. იპოვეთ MM_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ:

ა) $AA_1=5$ მ, $BB_1=7$ მ; ბ) $AA_1=3,6$ დმ, $BB_1=4,8$ დმ;
გ) $AA_1=8,3$ სმ, $BB_1=4,1$ სმ; დ) $AA_1=a$, $BB_1=b$.

5* ამოხსენით წინა ამოცანა იმ პირობით, რომ AB მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს.

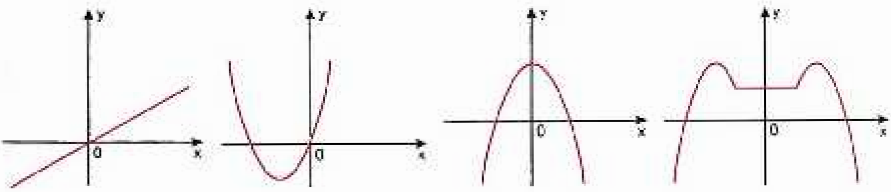
6 დახაზეთ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი და დაასახელეთ აცდენილ წრფეთა წყვილები.

7 დახაზეთ ABCD პირამიდა და დაასახელეთ აცდენილ წრფეთა წყვილები.

8 დაასახელეთ თქვენს საკლასო ოთახში აცდენილ და პარალელურ წრფეთა წყვილები.

---

9 ნახაზზე მოცემული ფუნქციებიდან ლუწია მხოლოდ:



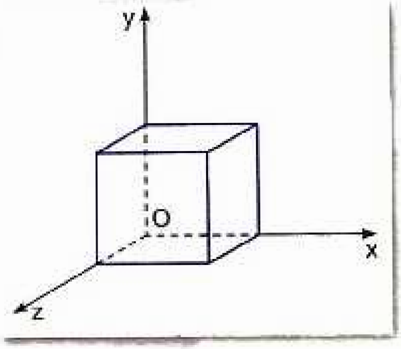
10 ცნობილია, რომ $y=kx+b$ ფუნქცია კენტია, იპოვეთ k და b, თუ $y(-5)=8$.

11 თუ $a<b<0$, მაშინ $|a+b|-|b-a|+\sqrt{a^2-2ab+b^2}$ უდრის:

ა) $2a$; ბ) $a+b$; გ) $b-a$; დ) $-a-b$.

9 წერტილის კოორდინატები სივრცეში

როგორც ვიცით, თუ სიბრტყეზე ავიღებთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას, ნებისმიერი წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება ორი კოორდინატით. როგორ განვსაზღვროთ წერტილის მდებარეობა სივრცეში?



განვიხილოთ სამი ურთიერთმართობული ღერძი, ამ მიზნით წარმოვიდგინოთ, რომ მართკუთხა პარალელეპიპედის ერთი O წვეროდან გამოსული სამი წიბო უსასრულოდ გავაგრძელეთ. წვეროდან წიბოს მიმართულებით გაგრძელებას დადებითი, ხოლო საწინააღმდეგო მიმართულებას უარყოფითი ვუწოდოთ. ასეთი შექმნილი სისტემა არის მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა სივრცეში O ცენტრით და ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები მიიღება ამ წერტილიდან Ox, Oy და Oz ღერძებზე მართობების დაშვების შედეგად. მაგალითად, თუ A წერტილის კოორდინატებია A(2;5;7), ეს ნიშნავს, რომ A წერტილიდან Ox ღერძზე დაშვებული მართობის ფუძეა x=2; Oy ღერძზე — y=5 და Oz ღერძზე — z=7.

ცხადია, კოორდინატთა სათავის კოორდინატები იქნება O(0;0;0).

სივრცეში ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს იგივე სახე, რაც სიბრტყეზე, ოღონდ ემატება მესამე კოორდინატი. ორ $A(x_1;y_1;z_1)$ და $B(x_2;y_2;z_2)$ წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

სავარჯიშოები:

თუ A წერტილის კოორდინატებია x_A; y_A; z_A,
x_A-ს — აბსცისა
y_A-ს — ორდინატა
z_A-ს — აპლიკატა ეწოდება და ჩაიწერება
$A(x_A; y_A; z_A)$

1 სად მდებარეობს წერტილი, რომლის ა) x კოორდინატი; ბ) y კოორდინატი; გ) z კოორდინატი ნულის ტოლია?

2 სად მდებარეობს წერტილი, რომლის ა) x და y კოორდინატები; ბ) x და z კოორდინატები; გ) y და z კოორდინატები; დ) x; y და z კოორდინატები ნულის ტოლია?

3 იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ: A, B და C წერტილების კოორდინატებია: A(0;0;3); B(0;3;0), C(3;0;0).

4 იპოვეთ A და B წერტილებს შორის მანძილი, თუ
ა) A(1; 1; 0); B(2; 1; 0); ბ) A(2; 3; 1); B(4; 2; 1)
გ) $A(\sqrt{3}; 2; 0)$; $B(\sqrt{3}; 1; \sqrt{2})$; დ) $A(1; 0; -\sqrt{5})$; B(1; 2; 0)

II თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1 მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი ჰიპოტენუზას ნახევარია. დაამტკიცეთ, რომ ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხე 30°-ია.

2 მოცემულია ℓ წრფე და ორი A და B წერტილი ალებული ℓ წრფის ერთ მხარეს. იპოვეთ ℓ წრფეზე ისეთი C წერტილი, რომ AC+CB ჯამი იყოს უმცირესი.

3 A და B წერტილები მოთავსებულია m და n წრფეებს შორის. ააგეთ m წრფეზე ისეთი M და n წრფეზე ისეთი N წერტილი, რომ AMNB ტეხილის სიგრძე იყოს უმცირესი.

4 ტრაპეციის დიაგონალების სიგრძეებია 13 სმ და 20 სმ, ხოლო ფუძეების ჯამია 21 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

5 ტრაპეციის დიაგონალების სიგრძეებია 15 სმ და 20 სმ, სიმაღლე კი 7 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

6 ტრაპეციის დიაგონალების სიგრძებია 13სმ და 15 სმ. შუახაზი კი 7 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლის სიგრძე.

7* წრფეზე მიმდევრობით ალებულია A, B და C წერტულები. იპოვეთ ისეთ M წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $\angle ABM=\angle AMC$.

8 დაამტკიცეთ, რომ $CC_1 \cdot HC_1 = AC_1 \cdot BC_1$, სადაც CC_1 ABC სამკუთხედის სიმაღლეა, H კი სიმაღლეების კვეთის წერტილი.

9 წრეწირის გარეთ მდებარე M წერტილიდან გავლებულია MAB მკვეთი და MC მხები. დაამტკიცეთ, რომ $MC^2 = MA \cdot MB$.

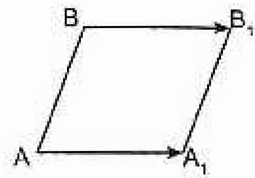
10 დაახასიათეთ, სად მდებარეობს წერტილი, რომლის კოორდინატებია: ა) (2; 0; 3); ბ) (0; 2; 5); დ) (0; 0; 3); ე) (0; 3; 0); ვ) (3; 0; 0); ზ) (0; 0; 0).

11 იპოვეთ მანძილი A და B წერტილებს შორის, თუ ამ წერტილების კოორდინატებია:

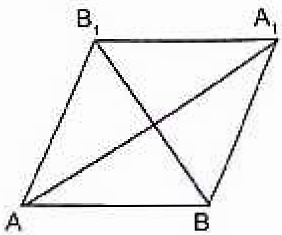
ა) A(1;0;0) და B(0;1;1);   ბ) A(1;2;3) და B(1;1;1).

11 თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- პარალელური გადატანა $\vec{a}$ ვექტორზე არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომლის დროსაც ნებისმიერი **A** წერტილი გადადის ისეთ **A_1** წერტილში, რომ $\overrightarrow{AA} = \vec{a}$ ვექტორები ტოლია.



- თუ პარალელური გადატანისას A და B წერტილები გადადის A_1 და B_1 წერტილებში და ეს ოთხი წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, მაშინ ABB_1A_1 ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.



- თუ A და B წერტილები ცენტრული სიმეტრიით O ცენტრის მიმართ გადადის A_1 და B_1 წერტილებში (O წერტილი არ ეკუთვნის AB წრფეს), მაშინ AB_1A_1B ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

- მოცემული მიმართულებით, O წერტილის მიმართ, α კუთხით მობრუნება არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომლის დროსაც O წერტილი უძრავად რჩება, ხოლო სხვა ნებისმიერი A წერტილი გადადის ისეთ A_1 წერტილში, რომ $OA_1=OA$ და $\angle AOA_1=\alpha$ (ითვლება OA სხივიდან მოცემული მიმართულებით).
- გარდაქმნა, რომლის დროსაც სიბრტყის ნებისმიერ A წერტილს შეესაბამება ისეთი A_1 წერტილი, რომ $OA_1=k\cdot OA$, ამასთან $A_1\in OA$ წრფეს. ასეთ გარდაქმნას ეწოდება სიბრტყის **ჰომოთეტია** O ცენტრითა და k კოეფიციენტით.

- **აქსიომა 1: ნებისმიერი სიბრტყისათვის არსებობს მასზე მდებარე და მასზე არამდებარე წერტილები.**

  აქსიომა 2: ნებისმიერ სამ ერთ წრფეზე არამდებარე წერტილზე გაივლება სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი.

  აქსიომა 3: თუ წრფის ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ ეს წრფე მდებარეობს ამ სიბრტყეზე.

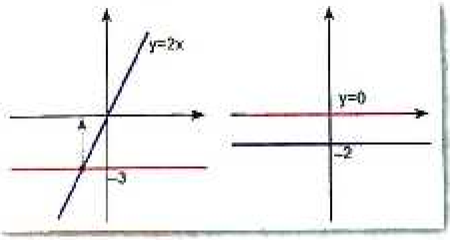
  აქსიომა 4: თუ ორ სიბრტყეს აქვს საერთო წერტილი, მაშინ მათ გააჩნიათ საერთო წრფე, რომელზედაც მდებარეობს ამ სიბრტყეთა ყველა საერთო წერტილი.

- ორ წრფეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ და მათზე შესაძლებელია სიბრტყის გავლება.
- ორ წრფეს, რომლებზედაც სიბრტყე არ გაივლება, აცდენილი წრფეები ეწოდება.

III თავი

ამ თავში ამოვხსნით პარამეტრის შემცველ განტოლებას და უტოლობას. მოდულის შემცველ განტოლებას და უტოლობას. მაღალი ხარისხის და ირაციონალურ განტოლებებს. ვისწავლით უტოლობის ამოხსნას ინტერვალთა მეთოდით.

1 პარამეტრის შემცველი განტოლება



■ ამოხსენით განტოლება:

ა) $2x+3=0$

ბ) $3(x-1)+7=3x+2$

გ) $3(x-1)+7=3x+4$

რა აქვთ საერთო ამ განტოლებებს და რით განსხვავდებიან ისინი ერთმანეთისგან?

1. თორნიკეს ცურვის სიჩქარე მდგარ წყალში m კმ/სთ-ია. რა დროში გაცურავს იგი მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით 200 მ-ს, თუ მდინარის დინების სიჩქარე 3 კმ/სთ-ია.

ამოხსნა:

ვთქვათ, 200მ=0,2კმ-ს ბიჭი x სთ-ში გაცურავს. მივიღებთ $(m-3)x=0,2$ წრფივ განტოლებას. რადგან 0-ზე გაყოფა არ არის განმარტებული, ამიტომ განვიხილოთ შემთხვევა: თუ $m-3\neq0$, ანუ $m\neq3$, მაშინ $x=\frac{0,2}{m-3}$.

ცხადია, თუ $m=3$, მაშინ მივიღებთ $0\cdot x=0,2$ განტოლებას, რომელსაც ამონახსენი არ ექნება. მაგრამ ამოცანას არ ექნება ამონახსენი მაშინაც, როცა $m<3$. რადგან ამ შემთხვევაში თორნიკე მდინარის საწინააღმდეგო მიმართულებით ვერ გაცურავს.

ე.ი. თორნიკე ამ მანძილს გაცურავს $x=\frac{0,2}{m-3}$ სთ-ში, როცა $m>3$.

■ რა დროში გაცურავს თორნიკე ამ მანძილს, თუ მისი ცურვის სიჩქარე (საკუთარი) იქნება 4 კმ/სთ; 6 კმ/სთ.

■ ჩამოაყალიბეთ განტოლების ძირითადი თვისებები.

■ ა) რას ეწოდება განტოლების ამონახსენი?
ბ) როგორ შევამოწმოთ, $x=3$ არის თუ არა $x^3-4x^2+3x=0$ განტოლების ფესვი?

ამოვხსნათ $ax=b$ განტოლება.

1. თუ $a\neq0$, მაშინ $ax=b \quad | :a,\ a\neq0$ განტოლების მე-2 თვისება.
$x=\frac{b}{a}$.

ე.ი. თუ x-ის კოეფიციენტი არ უდრის ნულს, მაშინ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსენი.

2. თუ $a=0$, მაშინ (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს: $0\cdot x=b$.

2^1. თუ $b=0$, მაშინ გვექნება $0\cdot x=0 \Leftrightarrow x\in R$ (ფესვის განმარტების თანახმად).

2^2. თუ $b\neq0$, მაშინ გვექნება $0\cdot x=b \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

$ax=b$

$a=0$:
- $b=0$: $0\cdot x=0$, $x\in R$
- $b\neq 0$: $0\cdot x=b$, $x\in\varnothing$

$a\neq 0$:
- $x=\dfrac{b}{a}$

$ax=b$ სახის განტოლებას, სადაც x უცნობია, ხოლო $a, b\in R$, **წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება** ეწოდება.

მაგალითი.

ამოხსენით განტოლება:

ა) $(a-1)x=a^2-1$; ბ) $(a^2-1)x=a+1$.

ამოხსნა:

ა) $(a-1)x=a^2-1$

1) თუ $a-1\neq 0$, $a\neq 1$, მაშინ $(a-1)x=(a-1)(a+1) \Leftrightarrow x=a+1$.

2) თუ $a=1$, მაშინ გვექნება: $0\cdot x=0 \Leftrightarrow x\in R$.

პასუხი: $a\neq 1$, $x=a+1$; $a=1$, $x\in R$.

ბ) $(a^2-1)x=a+1$.

1) $a^2-1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq\pm 1$, მაშინ $(a^2-1)x=a+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{a-1}$.

2) $a^2-1=0 \Leftrightarrow a=\pm 1$.

$2^{\text{ა}}$) თუ $a=1$, მაშინ $0\cdot x=2 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

$2^{\text{ბ}}$) თუ $a=-1$, მაშინ $0\cdot x=0 \Leftrightarrow x\in R$.

პასუხი: $a\neq\pm 1$, $x=\dfrac{1}{a-1}$; $a=1$, $x\in\varnothing$; $a=-1$, $x\in R$.

- თუ განტოლების ორივე მხარეს დავუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, მივიღებთ მოცემულის ტოლფას განტოლებას.
- თუ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ერთსა და იმავე ნულის არატოლ რიცხვზე, მივიღებთ მოცემულის ტოლფას განტოლებას.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. $(a-2)x=5$ განტოლებას ამონახსენი არ აქვს, თუ $a=$ __?__ .
2. ცნობილია, რომ $ax=b$ განტოლებას აკმაყოფილებს $x_1=2$ და $x_2=3$ რიცხვები, მაშინ მოცემულ განტოლებას __?__ ამონახსენი აქვს.
3. $(a^2-9)x=a+3$ განტოლებას უამრავი ამონახსენი აქვს, თუ $a=$ __?__ .
4. წრფივ განტოლებას შესაძლებელია ქონდეს __?__; __?__ და __?__ ამონახსენი.

სავარჯიშოები:

1 ამოხსენით განტოლება x-ის მიმართ:

ა) $3x=2a$; ბ) $5x-4a=7$; გ) $ax=a$;

დ) $(b-1)x=2$; ე) $bx+2=3x-1$; ვ) $a(x-1)+5=3x$;

ზ) $(a+2)x=a^2-4$; თ) $(b^2-b-6)x=b+2$; ი) $a(ax-1)=ax+2$;

კ) $x^2+bx+b-1=0$; ლ) $x^2+4x-a=0$; მ) $ax^2+2x+5=0$.

2 a პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის არის x_0 განტოლების ფესვი:
ა) $ax=3a-5$, $x_0=-1$; ბ) $(a+1)x=a^2-7$, $x_0=3$;
გ) $\frac{x+1}{a+5}=x-1$, $x_0=2$; დ) $ax^2+5(a-1)x+1=0$, $x_0=-1$.

განტოლებას, რომელიც, გარდა უცნობი სიდიდისა, შეიცავს სხვა დამატებით სიდიდეს, რომელიც მნიშვნელობებს რაიმე M სიმრავლიდან ღებულობს, **პარამეტრული განტოლება** ეწოდება, ამ სიდიდეს კი **პარამეტრი**.
მაგალითად, $x+a=9$
$(a-1)x+7x=a+1$
პარამეტრის შემცველი განტოლებებია
x – უცნობია
a – პარამეტრი

3 k პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის:
1) არა აქვს განტოლებას ამონახსენი?
2) აქვს განტოლებას უამრავი ამონახსენი?
3) აქვს განტოლებას ერთადერთი ამონახსენი?
ა) $(k^2+2k-15)x=k-3$; ბ) $(k+4)x^2+2kx+2=0$;
გ) $(1+k)x=k^2+5k$; დ) $x^2-kx+k+3=0$.

4 a და b-ს რა მნიშვნელობისთვის აა წყვილი (3;–1) სისტემის ამონახსენი?
ა) $\begin{cases}3x-5y=a\\2x+y=b\end{cases}$; ბ) $\begin{cases}ax+by=2\\5x+by=a+3\end{cases}$; გ) $\begin{cases}7x+y=a\\8x-3y=b\end{cases}$.

5 გამოსახეთ თითოეული ცვლადი დანარჩენის საშუალებით:
ა) $S=Vt$; ბ) $F=Ap$; გ) $U=IR$; დ) $W=Pt$.

6* a-ს რა მნიშვნელობისთვის არა აქვს $\frac{5x+5a}{5-x}=0$ განტოლებას ამონახსნი.

7 როგორია c პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ $y=x^2+c$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია
ა) I და II მეოთხედებში ბ) ოთხივე მეოთხედში?

8 $y=x^2+c$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს წერტილი (1;8). იპოვეთ $y(-4)$; $y(0)$; $y(-1)$.

9 a-ს რა მნიშვნელობისთვის აქვს $(a^2-5a+6)x=a^2+2a-15$ განტოლებას:
ა) ერთი ამონახსნი; ბ) უამრავი ამონახსნი; გ) არა აქვს ამონახსნი.

ბ

10 ცვლადის რა მნიშვნელობებისთვის არის:
ა) $7m+5$ და $2m-4$ გამოსახულებები ტოლია;
ბ) $3m-4$ გამოსახულება 2-ით მეტია $3m-6$ გამოსახულებაზე;
გ) $4m+2$ გამოსახულება 2-ჯერ მეტი $m+2$ გამოსახულებაზე.

11 ორი მომდევნო მთელი რიცხვის ნამრავლი 34-ით ნაკლებია შემდეგი ორი მომდევნო მთელი რიცხვის ნამრავლზე.

12 დათოს აქვს გიგის თანხის $\frac{2}{5}$. იმის შემდეგ, რაც გიგიმ დათოს მისცა 30 ლარი, ორივეს თანხები თანაბარი გახდა. რა თანხა ქონდა თითოეულს?

13* $x^2+px+q=0$ განტოლების ფესვებია 3; –4. იპოვეთ $x^4+px^2+q=0$ განტოლების ფესვების კვადრატების ჯამი.

14* $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების ამონახსნებია 2; –3.
იპოვეთ $a\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2+b\left(\frac{2x}{x+1}\right)+c=0$ განტოლების ამონახსნები.

2 მოდულის შემცველი განტოლებისა და უტოლობის ამოხსნა

ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაში ააგეთ:

ა) $y=|x+2|$ და $y=-0{,}5x+3$ ფუნქციების გრაფიკები,

ბ) გრაფიკის საშუალებით დაადგინეთ, რამდენი ამონახსენი აქვს $|x+2| = -0{,}5x+3$ (1) განტოლებას;

გ) იპოვეთ (1) განტოლების ამოხსნები.

გავეცნოთ (1) განტოლების ანალიზურ ამოხსნას. მოდულის განმარტების თანახმად

$$|x+2|=\left[\begin{array}{l} x+2, \text{ როცა } x+2\geq 0, \text{ ანუ } x\geq -2, \\ -x-2, \text{ როცა } x+2<0, \text{ ანუ } x<-2. \end{array}\right.$$

ამიტომ გვექნება შემდეგი შემთხვევები:

$$1) \begin{cases} x\geq -2 \\ x+2=-0{,}5x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2}{3};$$

$$2) \begin{cases} x<-2 \\ -x-2=-0{,}5x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x=-10 \end{cases} \Leftrightarrow x=-10.$$

ე.ი. $x\in\left\{-10;\dfrac{2}{3}\right\}$.

გავიხსენოთ!

რიცხვის მოდული არის მანძილი რიცხვითი ღერძის სათავიდან ამ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე.

თუ $x\geq 0$, მაშინ $|x|=x$.
თუ $x<0$, მაშინ $|x|=-x$.

განვიხილოთ მოდულის შემცველი უმარტივესი უტოლობები:

ა) $|x|<5$; ბ) $|x|>5$.

თუ გავიხსენებთ რიცხვის მოდულის გეომეტრიულ აზრს, მაშინ $|x|<5$ უტოლობის ამონახსნები იქნება რიცხვები, რომელთა შესაბამისი წერტილები რიცხვითი ღერძის სათავიდან დაშორებულია 5-ზე ნაკლები მანძილით, $-5<x<5$.

ე.ი. $x\in(-5;5)$.

$$\begin{cases} |x|<a \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -a<x<a.$$

$$\begin{cases} |x|<a \\ a\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

ანალოგიური მსჯელობით $|x|>5$ უტოლობის ამონახსნების შესაბამისი წერტილები რიცხვითი ღერძის სათავიდან დაშორებულია 5-ზე მეტი მანძილით.

$x\in(-\infty;5)\cup(5;\infty)$.

მაგალითი.

ამოხსენით: ა) $|2x-3|>7$; ბ) $|x+5|<2x+1$.

$$\begin{cases}|x|>a\\ a\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>a\\ x<-a\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}|x|>a\\ a<0\end{cases} \Leftrightarrow x\in R$$

ამოხსნა:

ა) $|2x-3|>7$

1) $2x-3>7 \Leftrightarrow x>5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(5;\infty)$;

ა) $2x-3<-7 \Leftrightarrow x<-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)$.

ე.ი. $x\in(-\infty;-2)\cup(5;\infty)$.

ბ) $|x+5|<2x+1$.

I. $\begin{cases}x+5\geq 0\\ x+5<2x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -5\\ x>4\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>4 \Leftrightarrow x\in(4;\infty)$.

II. $\begin{cases}x+5<0\\ -x-5<2x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-5\\ x>-2\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing$. $(4;\infty)\cup\varnothing=(4;\infty)$.

პასუხი: $x\in(4;\infty)$.

ან ასე:

$|2x-3|>7 \Leftrightarrow$ უტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში

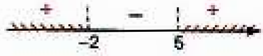
$\Leftrightarrow (2x-3)^2>7^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-3)^2-7^2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-3-7)(2x-3+7)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-10)(2x+4)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+2)>0$.



$x\in(-\infty;-2)\cup(5;\infty)$.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. დადებითი რიცხვის მოდული __?__ ტოლია.
2. უარყოფითი რიცხვის მოდული __?__ ტოლია.
3. $|a|$ __?__ 0.
4. თუ $|x|=1$, მაშინ $|x+3|=$ __?__ .
5. თუ $|x|=x$, მაშინ x __?__ 0.
6. თუ $|x-2|=2-x$, მაშინ $x-2$ __?__ 0.

სავარჯიშოები:

1 ამოხსენით განტოლება:

ა) $|x-1|=3x-1$; ბ) $2-|2x-1|=-x$; გ) $|2-x|=0{,}5x-1$; დ) $|x+5|=-x+2$.

ე) $7x-|2x+5|=3$; ვ) $4-2x+|3-1{,}5x|=x+1$; ზ) $|2{,}5-7{,}5x|=x+1$;

თ) $|5x+1|=-3+2x$; ი) $|3x-1|=2x+1$; კ) $|2-5x|=7x+1$.

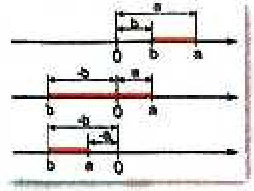
2 ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\sqrt{x^2-6x+9}=2x-3$; ბ) $\sqrt{4x^2-12x+9}=|x-2|$;

გ) $|x+4|=|2x-3|$; დ) $x^2-4x+4=2|x-2|$.

3 ამოხსენით უტოლება:

ა) $|x|>0$; ბ) $|x|\geq 2$; გ) $|x|\leq 0$;
დ) $|2x|<0$; ე) $|x|\leq 8,1$; ვ) $|3x-1|>7$;
ზ) $|5-2x|<3$; თ) $|7,3x+1|>-2$; ი) $|2-4x|>0$;
კ) $|8-2x|\leq 0$; ლ) $|2x-4|\geq 0$; მ) $|x+7|<0$;
ნ) $|1-3x|>x-1$; ო) $|x-3|\geq 5x-1$; პ) $|3-2x|\leq 4x-1$;
ჟ) $|x+2|\leq -x+1$; რ) $|5x-1|>3x-2$; ს) $|2-7x|<x+1$;
ტ) $|3x+2|<x-2$; უ) $|5-2x|\leq x$; ფ) $|2+3x|>x+1$.



4 დაამტკიცეთ, რომ რიცხვითი ღერძის $A(a)$ და $B(b)$ წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით $AB=|a-b|$.

5 გეომეტრიულად აჩვენეთ, რომ თუ $|x-a|=|x-b|$, $a\neq b$, მაშინ $x=\frac{1}{2}(a+b)$.

6 ისარგებლეთ მე-4 ამოცანის შედეგით და ამოხსენით განტოლებები:

ა) $|x-2|=|x-4|$; ბ) $|x-7|=|x-2|$;
გ) $|2x-3|=|2x-5|$; დ) $|2x+6|=|2x+12|$.

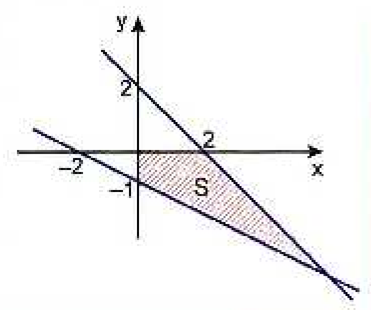
მ

7 ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი და ჩამოწერეთ მისი თვისებები:

ა) $y=|x+3|$; ბ) $y=2x-5$; ბ) $y=|x-2|-1$.

8 ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი და ჩამოწერეთ მისი თვისებები:

ა) $y=0,5x^2-x-4$; ბ) $y=|0,5x^2-x-4|$;
გ) $y=0,5x^2-|x|-4$; დ) $y=|0,5x^2-|x|-4|$.



9 იპოვეთ ნახაზზე დაშტრიხული ოთხკუთხედის ფართობი.

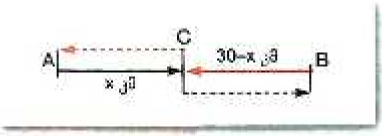
10 დაამტკიცეთ, რომ თუ $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ რიცხვები არითმეტიკულ პროგრესიას ადგენენ, მაშინ a^2, b^2, c^2 რიცხვებიც არითმეტიკულ პროგრესიას ადგენენ.

11 რამდენი 0-ით ბოლოვდება: ა) $100!$; ბ) $200!$; გ) $625!$.

$n!=1\cdot 2 \ldots n$

12 რა ციფრი შეიძლება იყოს 7^n-ის, 8^n-ის და 9^n-ის ბოლო ციფრი, როცა $n\in N$?
იპოვეთ $118^{118}-127^{127}+19^{19}$-ის ბოლო ციფრი.

3 მაღალი ხარისხის განტოლების ამოხსნა



1. A და B ნავსადგურებიდან შემხვედრი მიმართულებით ორი ნავი გამოვიდა. ერთი საათის შემდეგ ისინი შეხვდნენ ერთმანეთს და შეუჩერებლივ განაგრძეს გზა იმავე სიჩქარით. პირველი B ნავსადგურში 50 წთ-ით უფრო ადრე ჩავიდა, ვიდრე მეორე A ნავსადგურში. რა სიჩქარით მოძრაობდა თითოეული ნავი, თუ ნავსადგურებს შორის მანძილი 30 კმ-ია.

ამოხსნა:

ვთქვათ, A-დან გამოსულმა ნავმა შეხვედრამდე x კმ გაიარა, AC=x კმ, მაშინ BC=30–x კმ. v_A=x კმ/სთ და v_B=30–x კმ/სთ. მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{30-x}{x}+\frac{5}{6}=\frac{x}{30-x} \qquad (1)$$

რადგან $\frac{30-x}{x}\cdot\frac{x}{30-x}=1$, ამიტომ, თუ შემოვიტანთ, აღნიშვნას $y\equiv\frac{30-x}{x}$ (2), მაშინ (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y+\frac{5}{6}=\frac{1}{y}$$

აქედან $y_1=\frac{2}{3}$, $y_2=-\frac{3}{2}$.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე $-\frac{3}{2}$ გარეშე ფესვი იქნება (რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ). ე.ი. $y=\frac{2}{3}$.

თუ გავითვალისწინებთ (2) აღნიშვნას, მივიღებთ:

$$\frac{30-x}{x}=\frac{2}{3}$$

$x=18$.

ე.ი. A-დან გამოსულის სიჩქარე 18 კმ/სთ-ია, ხოლო B-დან გამოსულისა — 12 კმ/სთ.

ახალი უცნობის შემოტანის ხერხი კარგად გამოიყენება სხვადასხვა ტიპის მაღალი ხარისხის განტოლებების ამოხსნის დროს. მაგალითად, ამოვხსნათ შემდეგი განტოლებები:

$ax^4+bx^2+c=0$ სახის განტოლებას, სადაც $a,b,c\in R$, $a\neq 0$, და x უცნობია, ბიკვადრატული განტოლება ეწოდება.

1. $x^4-x^2-30=0$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $x^2\equiv y$ (3). მივიღებთ:

$(y^2-y-30=0)\Leftrightarrow(y_1=6;\ y_2=-5)$.

თუ გავითვალისწინებთ (3) აღნიშვნას, მივიღებთ:

$(x^2=6)\Leftrightarrow(x=\pm\sqrt{6})$

ან $(x^2=-5)\Leftrightarrow x\in\varnothing$. ე.ი. $x=\pm\sqrt{6}$.

2. $\dfrac{x^2+5x-6}{x}+\dfrac{3x}{x^2+5x-6}+4=0.$

$\dfrac{x^2+5x-6}{x}\equiv y$ (4). მაშინ $\dfrac{3x}{x^2+5x-6}=\dfrac{3}{y}$. მივიღებთ:

$\left(y+\dfrac{3}{y}+4=0\right)\Leftrightarrow(y_1=-3,\ y_2=-1).$

გავითვალისწინოთ (4) აღნიშვნა და მივიღებთ:

1) $\left(\dfrac{x^2+5x-6}{x}=-3\right)\Leftrightarrow\left(x=-4\pm\sqrt{22}\right).$

2) $\left(\dfrac{x^2+5x-6}{x}=-1\right)\Leftrightarrow\left(x=-3\pm\sqrt{15}\right).$

პასუხი: $-4\pm\sqrt{22}$; $-3\pm\sqrt{15}$.

სავარჯიშოები:

1 ამოხსენით განტოლება:

ა) $x^3+3x^2-4x=0$;
ბ) $x^4+11x^3-x^2=0$;
გ) $3x^4-x^3+9x-3=0$;
დ) $8x^4+x^3+64x+8=0$.

2 ქუთაისიდან და სამტრედიიდან, რომელთა შორის მანძილი 24 კმ-ია, ერთსა და იმავე დროს ერთმანეთის შემხვედრი მიმართულებით ორი ავტომობილი გამოვიდა. შეხვედრის შემდეგ მათ შეუჩერებლივ განაგრძეს გზა და ერთი სამტრედიაში 16 წთ-ში, მეორე კი ქუთაისში — 4 წთ-ში ჩავიდა. იპოვეთ ავტომობილთა სიჩქარეები.

3 ორი A და B ქალაქიდან ერთმანეთის შემხვედრი მიმართულებით ორი ტურისტი გამოვიდა. შეხვედრისას აღმოჩნდა, რომ პირველს 4 კმ-ით ნაკლები ჰქონდა გავლილი, ვიდრე მეორეს. განაგრძეს რა გზა იმავე სიჩქარით, პირველი B ქალაქში შეხვედრის შემდეგ 4 სთ 48 წთ-ში ჩავიდა, მეორე A-ში — 3 სთ-სა და 20 წთ-ში. იპოვეთ მანძილი ქალაქებს შორის.

4 ამოხსენით ბიკვადრატული განტოლება:

ა) $x^4-6x^2+5=0$;
ბ) $x^4+4x^2-21=0$;
გ) $x^4+20x^2+36=0$;
დ) $2x^4-19x^2+9=0$;
ე) $3x^4+7x^2+2=0$;
ვ) $2x^4+3x^2-2=0$;
ზ) $(x^2-14)^2=5(6x^2-49)$;
თ) $(x^2+2)^2+3(2x+1)=(3x+1)^2$;
ი) $(x^2+25)^2=111x^2-275$.

5 ამოხსენით განტოლება:

ა) $x^6-4x^3+3=0$;
ბ) $x^6-7x^3-8=0$;
გ) $(x^2-2x)^2+14(x^2-2x)-15=0$;
დ) $(4-x^2)^2-2(4-x^2)-24=0$;
ე) $(x^2+3)^2-11(x^2+3)+28=0$;
ვ) $(x^2-4x)^2+9(x^2-4x)+20=0$;
ზ) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\dfrac{x-1}{x}\right)-4=0$;
თ) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-14=0$.

6 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\frac{x^2-x}{x^2-x+2}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$;   ბ) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$;

გ) $\frac{x^2+1}{x}-\frac{x}{x^2+1}=-2{,}5$;   დ) $\frac{x^2-3x+6}{x}+\frac{8x}{x^2-3x+6}=6$;

ე) $(x^2-x+1)(x^2-x+3)=3$;   ვ) $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)=-4$;

ზ) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$;   თ) $(x^2-5x+7)^2-2(x-2)(x-3)=1$.

7 იპოვეთ:

ა) $x^2+\frac{1}{x^2}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $x+\frac{1}{x}=3$;

ბ) $9x^2+\frac{4}{x^2}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $3x+\frac{2}{x}=-5$.

8 ამოხსენით განტოლება:

ა) $2x^2+\frac{2}{x^2}+x+\frac{1}{x}-6=0$;   ბ) $4x^2+\frac{1}{x^2}+2x+\frac{1}{x}-8=0$;

გ) $9x^2+\frac{4}{x^2}+3x-\frac{2}{x}-14=0$;   დ) $7(x+\frac{1}{x})-2(x^2+\frac{1}{x^2})=0$.

9 ა) ცნობილია, რომ $x^2+5x+4=17$.
გამოთვალეთ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.
ბ) ამოხსენით განტოლება: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=360$.

10* ამოხსენით განტოლება:

ა) $(x+1)^2-4(x^2-1)+3(x-1)^2=0$;   ბ) $x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$;

გ) $x^3+x^2-2=0$;   დ) $2x^3-x^2-1=0$.

გ

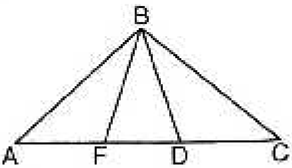
11 ააგეთ $f(x)=3x-4$ ფუნქციის გრაფიკი.
გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ ა) x-ის მნიშვნელობა, თუ $f(x)=0;\ -3;\ 2$;
ბ) $f(x)$-ის მნიშვნელობა, თუ $x=-4;\ 0;\ 2;\ 4$;
გ) ამოხსენით უტოლობა $f(x)>20$.

12 ააგეთ $y=-2x-3$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ რა მნიშვნელობებს ღებულობს ფუნქცია, როცა ა) $x\in[-2;3)$; ბ) $x\geq 1$.

13* a-ს რა მნიშვნელობისათვის ექნება განტოლებას ზუსტად სამი განსხვავებული ამონახსენი:

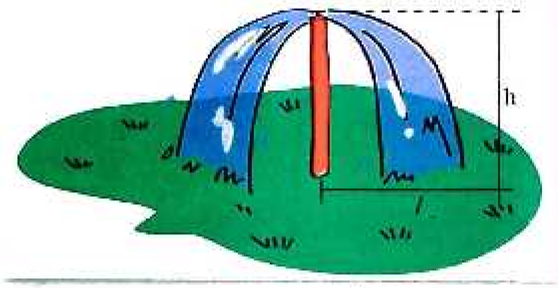
ა) $(x+5)(x-7)(x+1)(x-a)=0$;   ბ) $(ax^2+5x+1)(x^2-x-2)=0$.

14 იპოვეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები, თუ ცნობილია ნახაზზე მოცემული ექვსივე სამკუთხედი ტოლფერდაა.



4 ირაციონალური განტოლება

1. დათოს ოჯახმა ეზოში შადრევნის გაკეთება გადაწყვიტა. რა სიმაღლიდან უნდა გადმოედინებოდეს წყლის ჭავლი, რომ შადრევანის სიშორე 3 მ იყოს?



$l = v_1\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, $g \approx 10$ მ/წმ²

$v \approx 5,7$ მ/წმ²

ნახაზზე და ამოცანის პირობაში მოცემული მონაცემების გათვალისწინებით მივიღებთ $3=5,7\sqrt{\dfrac{h}{5}}$, $\sqrt{\dfrac{h}{5}} = \dfrac{1}{1,9}$ განტოლებას, რომელიც უცნობს რადიკალის ნიშნის ქვეშ შეიცავს. კვადრატული ფესვის განმარტების თანახმად, $\dfrac{h}{5} = \dfrac{1}{3,61}$, ე.ი. $h = \dfrac{5}{3,61}$, საიდანაც $h \approx 1,4$მ.

ამოხსენით ა) $\sqrt{x+3} = 4$; ბ) $\sqrt{x^2-5} = x+1$; განტოლება და მიღებული შედეგი შეამოწმეთ.

განტოლებას, რომელიც უცნობს რადიკალის ნიშნის ქვეშ შეიცავს, ირაციონალური განტოლება ეწოდება.

$\sqrt{2x-7} = x-1$, $1+\sqrt{x+5}+\sqrt{5} = x+5$ – ირაციონალური განტოლებებია. ირაციონალური განტოლების ამოსახსნელად საჭიროა ზოგიერთი გარდაქმნის საშუალებით იგი შევცვალოთ რაციონალური განტოლებით. თუ გავიხსენებთ კვადრატული ფესვის შემდეგ თვისებებს: ა) $(\sqrt{a})^2 = a$; ბ) $\sqrt{a^2} = |a|$, ადვილად მივხვდებით, რომ ირაციონალური განტოლების ამოხსნისას უმეტესად განტოლების ორივე მხარე აჰყავთ კვადრატში, ზოგჯერ – რამდენჯერმე კი.

განტოლების ორივე მხარის კვადრატში ახარისხებისას საზოგადოდ მოცემულის ტოლფასი განტოლება არ მიიღება.

ყურადღება!

$x=1$ (1) და $x^2=1$ (2) განტოლებები ტოლფასი განტოლებანი არ არის (1)-თვის, $x=1$, ხოლო (2)-თვის $x=\pm 1$.

მაგალითად, ამოვხსნათ $\sqrt{x^2-8} - x = 2$ განტოლება:

$\sqrt{x^2-8} - x = 2$	რადიკალიანი გამოსახულება დავტოვოთ ტოლობის ერთ მხარეს, დანარჩენი გადავიტანოთ მეორე მხარეს.
$\sqrt{x^2-8} = x+2$	განტოლების ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში
$x^2-8 = x^2+4x+4$	დავალაგოთ წევრები.
$4x = -12$	:4
$x = -3$	

შემოწმება:
მარცხენა მხარე: $\sqrt{9-8}-(-3)=4$.. $4\neq 2$, ე.ი. $x\in\varnothing$.

x=-3 არ აღმოჩნდა მოცემული განტოლების ფესვი. იგი გარეშე ფესვია. როგორც ვხედავთ, ირაციონალური განტოლების ამოხსნის შემდეგ შემოწმება აუცილებელია.

მაგალითი.

გასახსენებლად! განტოლების ორივე მხარის კვადრატში აყვანით შესაძლებელია გაჩნდეს გარეშე ფესვი.

ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sqrt{x+7}+3=2$; ბ) $5\sqrt{x+1}=\sqrt{x-23}$;
გ) $\sqrt{5-2x}=2x+1$. დ) $\sqrt{x-5}+\sqrt{3-x}=2$.

ამოხსნა:

ა) $\sqrt{x+7}+3=2$ | კვადრატული ფესვი დავტოვოთ ტოლობის ერთ მხარეს, დანარჩენი წევრები გადავიტანოთ მეორე მხარეს.

$\sqrt{x+7}=-1$, რადგან $\sqrt{x+7}\geq 0$, ამიტომ მოცემულ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს.

გახსოვდეს!
$\sqrt{a}\geq 0$

ბ) $5\sqrt{x+1}=\sqrt{x-23}$ | ავიყვანოთ კვადრატში

$25(x+1)=x-23$ | მიღებული განტოლება ამოვხსნათ

$x=-2$

შემოწმება: მარცხენა მხარე: $5\sqrt{-2+1}$. განტოლების მარცხენა მხარე (ასევე მარჯვენაც) x=-2-ზე განსაზღვრული არ არის, ამიტომ $x\in\varnothing$.

f(x)=0 განტოლების განსაზღვრის არე ეწოდება მასში შემავალი ცვლადის (ცვლადების) ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომლისთვისაც f(x) გამოსახულებას აზრი აქვს.

გ) დავადგინოთ განტოლების განსაზღვრის არე:
$5-2x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2{,}5$

$\sqrt{5-2x}=2x+1$ | ავიყვანოთ კვადრატში

$5-2x=4x^2+4x+1$

$4x^2+6x-4=0$

$2x^2+3x-2=0$

$x=-2$ ან $x=\frac{1}{2}$, თუ გავითვალისწინებთ განტოლების განსაზღვრის არეს, მივიღებთ, რომ $x=\frac{1}{2}$.

შემოწმება:

$\sqrt{5-1}=1+1$

2 = 2ჭეშმარიტია

პასუხი: $x=\frac{1}{2}$

მოცემული განტოლება შესაძლებელია ასეც ამოვხსნათ:

$\sqrt{5-2x}=2x+1$

$\sqrt{5-2x}=t$

$5-2x=t^2$

$2x=5-t^2$

მივიღებთ: $(t=5-t^2+1) \Leftrightarrow t=-3$ ან $t=2$,

ე.ი. $\sqrt{5-2x}=-3$ ან $\sqrt{5-2x}=2$

$x \subset \varnothing$ $\qquad\qquad x=\frac{1}{2}$

პასუხი: $x=\frac{1}{2}$,

ან ასეც

* $\sqrt{5-2x}=2x+1 \qquad (1)$

I. თუ $2x+1<0$, მაშინ (1) განტოლებას ამონახსენი არ ექნება.

II. თუ $2x+1\geq 0$, მაშინ (1) შეგვიძლია განტოლების ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში, მივიღებთ მოცემულის ტოლფას განტოლებას.

$$\sqrt{5-2x}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x=(2x+1)^2 \\ 5-2x\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

რადგან ფესვქვეშა გამოსახულება უტოლდება არაუარყოფით $(2x+1)^2$ გამოსახულებას, ამიტომ სისტემის მეორე უტოლობა შესრულდება პირველიდან გამომდინარე.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x=4x^2+4x-1 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3x-2=0 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

დ) $\sqrt{x-5}+\sqrt{3-x}=2$;

დავადგინოთ ჯერ განტოლების განსაზღვრის არე:

$$\begin{cases} x-5\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 6 \\ x\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

რადგან x-ის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე ცარიელია, ამიტომ მოცემულ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ფესვები.

გამოსახულება $\sqrt{a}$ განსაზღვრულია მხოლოდ $a\geq 0$ რიცხვებისათვის

გვახსოვდეს!

სანამ ირაციონალური განტოლების ამოხსნას შევუდგებით, სასურველია დავადგინოთ განტოლების განსაზღვრის არე. თუ განტოლების განსაზღვრის არე ცარიელია, ყოველგვარი გარდაქმნების გარეშე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. $\sqrt{x}=9 \Leftrightarrow x=\underline{?}$; **2.** $\sqrt{x}=-1 \Leftrightarrow x=\underline{?}$;

3. $\sqrt{x^2}=1 \Leftrightarrow x=\underline{?}$; **4.** $\sqrt{x-1}+5=0 \Leftrightarrow x=\underline{?}$.

5. მოცემული განტოლებებიდან: $\sqrt{2}x^2+3x=\sqrt{7}$; $\frac{3x^2-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=x+1$;

$\sqrt{2x}-5x=1$ ირაციონალური განტოლებაა: $\underline{\ ?\ }$

სავარჯიშოები:

1 ამოხსენით ზეპირად:

ა) $\sqrt{x}=5$; ბ) $\sqrt{x}=12$; გ) $\sqrt{x}=-1,3$; ზ) $\sqrt{x}-1,5$;

დ) $\sqrt{x}=0$; ე) $\sqrt{x}=-0,5$; ვ) $\sqrt{-x}=3$; თ) $\sqrt{-x}=5$.

2 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sqrt{x-1}=5$; ბ) $\sqrt{3x-2}=2$; გ) $3-\sqrt{5x+2}=7$;

დ) $2-\sqrt{x+1}=3$; ე) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x}$; ვ) $\sqrt{-4x+3}=\sqrt{-x}$;

ზ) $\sqrt{5x^2-4}=2x$; თ) $\sqrt{25x^2-2x+2}=4x-1$; ი) $\sqrt{13x^2-81}=3x$.

3* იპოვეთ განტოლების ამონახსენთა სიმრავლე:

ა) $\sqrt{x^2-16}=x-2$; ბ) $\sqrt{9x^2+6}=3x-1$; გ) $\sqrt{10x^2-36}=3x$;

დ) $\sqrt{x^2+5}=x-3$; ე) $(2x-1)\sqrt{x-2}=0$; ვ) $(x-1)\sqrt{x^2-4}=0$;

ზ) $\sqrt{13-4x}=4x+7$; თ) $7-\sqrt{4x+5}=4x$; ი) $7+\sqrt{2x-5}=2x$;

კ) $\sqrt{x-5}=5-\sqrt{x}$; ლ) $\sqrt{x+1}+x+1=20$; მ) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7$.

4 გამოიანგარიშეთ 1 წმ-მდე სიზუსტით 300 მ. სიმაღლიდან სხეულის ვარდნის დრო, რისთვისაც ისარგებლეთ $S=\frac{gt^2}{2}$ ფორმულით, სადაც S სხეულის ვარდნის სიმაღლეა მეტრებში, $g \approx 9{,}8$მ/წმ^2 – სიმძიმის ძალის აჩქარება, t – ვარდნის დრო წამებით.

5 ჰორიზონტის სიშორე ზღვაზე განისაზღვრება $d=4{,}1\sqrt{h}$ ფორმულით, სადაც d ჰორიზონტის სიშორეა კილომეტრებში, ხოლო h დამკვირვებლის თვალის სიმაღლე ზღვის დონიდან მეტრებში. გამოიანგარიშეთ 1 კმ-მდე სიზუსტით ჰორიზონტის სიშორე, თუ ა) h=15 მ; ბ) h=250 მ.

გ

6 გიორგიმ მაღაზიაში რამდენიმე (ერთზე მეტი) კომპაქტდისკი იყიდა. თითოეული კომპაქტდისკის ფასი მთელი რიცხვით (ერთზე მეტით) გამოისახება. რამდენი კომპაქტდისკი იყიდა გიორგიმ და რა ღირდა თითოეული, თუ მან 121 ლარი გადაიხადა?

7 იპოვეთ გამოსახულების განსაზღვრის არე:

ა) $\sqrt{-5x+7}$; ბ) $\frac{3x-1}{\sqrt{4x+1}}$; გ) $\frac{2}{x}+\frac{7x}{\sqrt{x+2{,}5}}$; დ) $\frac{x-2}{x-4}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+8}}$

8 იპოვეთ განტოლების ამონახსენთა სიმრავლე:

ა) $\sqrt{9-30x+25x^2}=2$; ბ) $\sqrt{x+3}+\sqrt{y-4}=0$;

გ) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{y+4x-1}=0$; დ) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-16}=0$;

9 ABC სამკუთხედის AK და BD ბისექტრისები იკვეთება O წერტილში. იპოვეთ BO:OD, თუ AB = 2, BC = 7 და AC = 8.

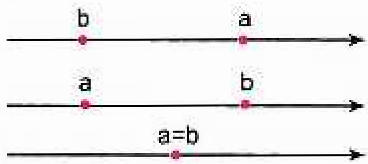
5 უტოლობა

ალბათ, გახსოვთ, a და b რიცხვები რომ ერთმანეთს შევადაროთ, საჭიროა a-b სხვაობა შევადაროთ 0-ს.

თუ $a-b>0$, მაშინ $a>b$.

თუ $a-b<0$, მაშინ $a<b$.

თუ $a-b=0$, მაშინ $a=b$.



გავიხსენოთ რიცხვითი უტოლობის თვისებები.

1. $(a>b) \Leftrightarrow (b<a)$
2. $(a>b)$ და $(b>c) \Rightarrow (a>c)$
3. $(a>b$ და $c\in R) \Rightarrow (a+c>b+c)$
4. ა) $(a>b$ და $c>0) \Rightarrow \begin{cases} ac>bc \\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c} \end{cases}$
5. ბ) $(a>b$ და $c<0) \Rightarrow \begin{cases} ac<bc \\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c} \end{cases}$

შეგვიძლია თუ არა ვთქვათ, რომ:
ა) თუ $x>5$, მაშინ $x^2>5x$; ბ) თუ $x<5$, მაშინ $x^2<5x$;
გ) თუ $x>3 \Rightarrow x-a>3-a$; დ) თუ $x>3 \Rightarrow xa>3a$.

მართებულია თუ არა უტოლობა:
ა) $3x>2x$; ბ) $-a<a$; გ) $x^3>x^2$.

ჩამოაყალიბეთ, თუ როგორი აზრის უტოლობათა შეკრებაა (გამოკლებაა) შესაძლებელი და შეასრულეთ მოქმედება ზეპირად:

ა) $+\begin{array}{l} a>7 \\ \underline{b>9} \end{array}$ ბ) $-\begin{array}{l} a>7 \\ \underline{b<9} \end{array}$

ჩამოაყალიბეთ, თუ როგორი აზრის უტოლობათა გამრავლებაა (გაყოფაა) შესაძლებელი და შეასრულეთ მოქმედება ზეპირად:

ა) $\times\begin{array}{l} a>2 \\ \underline{b>5} \end{array}$, ბ) თუ $b>0$, $:\begin{array}{l} a>8 \\ \underline{b<2} \end{array}$, გ) $\begin{array}{l} a>2 \\ a^n > \underline{\ ?\ } \end{array}$

დ) $0<a<b$, მაშინ $\frac{1}{a}\,?\,\frac{1}{b}$

შესაძლებელია თუ არა წევრობრივ გადავამრავლოთ ერთნაირი აზრის ორი უტოლობა? უარყოფითი პასუხის შემთხვევაში მოიყვანეთ კონტრმაგალითები.

- შესაძლებელია თუ არა წევრობრივ გავყოთ სხვადასხვა აზრის ორი უტოლობა?
უარყოფითი პასუხის შემთხვევაში მოიყვანეთ კონტრმაგალითები.
- მართებულია თუ არა წინადადება: ა) თუ $a>b$, მაშინ აუცილებლად $a^n>b^n$? ბ) თუ $a^n>b^n$, მაშინ აუცილებლად $a>b$.
უარყოფითი პასუხის შემთხვევაში მოიყვანეთ კონტრმაგალითები.
- ჩამოაყალიბეთ დამოკიდებულება საშუალო არითმეტიკულსა და გეომეტრიულს შორის.

მაგალითი.

რომელია მეტი:
ა) $\frac{3+2\sqrt{5}}{2}$ თუ 3,7? ბ) $1+\sqrt{2}$ თუ $\sqrt{6}$?

ამოხსნა:
ა) განვიხილოთ სხვაობა $\frac{3+2\sqrt{5}}{2}-3,7$.

$$\frac{3+2\sqrt{5}}{2}-3,7=\frac{3+2\sqrt{5}-7,4}{2}=\frac{\sqrt{20}-4,4}{2}=\frac{\sqrt{20}-\sqrt{19,36}}{2}>0$$

ე.ი. $\frac{3+2\sqrt{5}}{2}>3,7$

ბ) რადგან ორივე დადებითი რიცხვია, შევადაროთ მათი კვადრატები.

$(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$. $\sqrt{6}^2=6$ განვიხილოთ მიღებული რიცხვების სხვაობა.

$(3+2\sqrt{2})-6=2\sqrt{2}-3=\sqrt{8}-\sqrt{9}<0$ ე.ი. $3+2\sqrt{2}<6$ აქედან კი $1+\sqrt{2}<\sqrt{6}$

სავარჯიშოები:

1 ამოხსენით უტოლობა:

ა) $5x-3>x+5$; ბ) $3x-1>5x-8$; გ) $\frac{x+4}{3}+\frac{2x-4}{3}>2$;

დ) $\frac{5x}{6}-\frac{3x+4}{3}-\frac{x-7}{4}<1$; ე) $1,5(x-2)+2,3(5-x)\geq 8$.

2 რა შუალედში იცვლება $-4a$, თუ

ა) $a>2$; ბ) $a<4$; გ) $3<a<5$; დ) $-8<a<-5$.

3 $2<a<8$; $3<b<15$, შეაფასეთ

ა) $2a+b$; ბ) a^2-b^2; გ) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; დ) $\frac{a-2}{3}+\frac{5}{8}$.

4 ყუთის წონა ტვირთიანად 7,8 კგ-დან 8,5 კგ-მდეა. ცარიელი ყუთის წონა 1,2 კგ-დან 1,4 კგ-მდე. რამდენს იწონის ტვირთი? რა იქნება ხუთი ასეთი ყუთის წონა?

5 ამოხსენით უტოლობა:

ა) $2x+12<7x-3<5x+20$; ბ) $3x+10<x+2<5x-18$;

გ) $3x-14<2x+5<4x+20$; დ) $2x-1<4x-7<5x+14$.

6 ამოხსენით უტოლობა

ა) $x^2+3x-10\geq0$; ბ) $2x^2-5x-18<0$;

გ) $5x^2+4x<15x+12$; დ) $4x(x+1)-3x-5\geq7-7x$.

7 იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\dfrac{x-8}{x^2-3x+2}+\dfrac{15}{\sqrt{x-5}}$; ბ) $y=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{8-x}$;

გ) $y=\sqrt{16x-x^2}$; დ) $y=\dfrac{1}{x^2-4}+\sqrt{x+7}$.

8* დაამტკიცეთ უტოლობის სამართლიანობა ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობებისთვის:

ა) $5x^2-10xy+25y^2+7>0$; ბ) $x^2+xy+y^2\geq0$;

გ) $\dfrac{(1+b)^2}{2}>b$; დ) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

9* m-ის რომელი მნიშვნელობისთვის სრულდება უტოლობა ნებისმიერი x-ისთვის.

ა) $mx^2-9mx+5m+1>0$; ბ) $ax^2+(2a+1)x+a>0$.

10 x-ის რომელი მნიშვნელობებისთვისაა ჭეშმარიტი უტოლობა:

ა) $|x-2|>-4$ ბ) $|x+3|<-3$ გ) $|x^2+4|=2$

დ) $\left|\dfrac{x+3}{x-2}\right|>-4$ ე) $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right|<-4$ ვ) $\left|\dfrac{x+4}{x-1}\right|\leq0$

---

11 თუ ABC სამკუთხედის ყველა კუთხე ტოლია, MNP სამკუთხედის ყველა კუთხე ტოლია. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ABC და MNP სამკუთხედების ტოლობა საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ ა) AB=MN; ბ) $\angle A=\angle M$; გ) არაფრის დამტკიცება საჭირო აღარ არის.

12 მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის ერთი გვერდი 2სმ-ის ტოლია, ხოლო სიმაღლე 2სმ-ით მეტია ფუძის მეორე გვერდზე. გამოსახეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა, თუ სიმაღლე 4სმ-ის, 8სმ-ის, 11სმ-ის ტოლია.

6 პარამეტრის შემცველი უტოლობა

1. გამომცემელს ერთი წიგნის დაბეჭდვა a ლარი უჯდება. ამასთან, სხვადასხვა ხარჯებისათვის მან 1500 ლარი უნდა გადაიხადოს. რამდენი წიგნი უნდა გაყიდოს გამომცემელმა, რომ მოგებამ შეადგინოს არანაკლებ 500 ლარი.

ამოხსნა:

თუ გამომცემელი x წიგნს გაყიდის მივიღებთ წრფივ უტოლობას:

$ax-1500\geq 500$

აქედან $x \geq \frac{2000}{a}$ $\Big|$:a, ცხადია $a > 0$.

- სულ მცირე, რამდენი წიგნი უნდა გაყიდოს გამომცემელმა, თუ ერთი წიგნის ღირებულება 8 ლარია? 10 ლარია?
- როგორი დამოკიდებულება არსებობს წიგნის ღირებულებასა და გაყიდული წიგნების რაოდენობას შორის, თუ შემოსული თანხა უცვლელია?

ამოვხსნათ $ax<b$ უტოლობა, თუ $a,b\in R$:

1. $a>0$

$ax<b$ |:a, $a>0$

$x<\frac{b}{a}$ $\qquad x\in\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$

2. $a<0$

$ax<b$ $\Big|$: a, $a<0$

$x>\frac{b}{a}$ $\qquad x\in\left(\frac{b}{a};\infty\right)$

3. $a=0$, $0\cdot x<b$

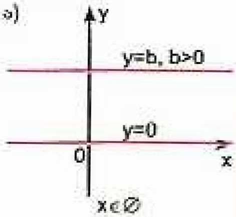
I თუ $b>0$, გვექნება, $\begin{cases}0\cdot x<b\\ b>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in R.$

II თუ $b\leq 0$, გვექნება, $\begin{cases}0\cdot x<b\\ b\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$

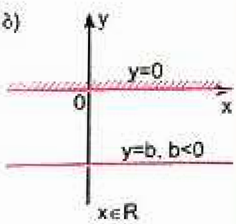
- ამოხსენით ა) $ax > b$; ბ) $ax \geq b$ უტოლობა.

ამოვხსნათ გრაფიკულად $kx>b$ უტოლობა. ავაგოთ $y=kx$ და $y=b$ ფუნქციათა გრაფიკები.
I. თუ $k=0$, მაშინ $y=0$.

ა)



ბ)



მაგალითი.

ამოხსენით $3ax-(8-ax)\geq 2a$ უტოლობა.

ამოხსნა:

$(3ax-(8-ax)\geq 2a)\Leftrightarrow$ | გავხსნათ ფრჩხილები

$\Leftrightarrow(3ax-8+ax\geq 2a)\Leftrightarrow$ | დავალაგოთ წევრები

$\Leftrightarrow(4ax\geq 2a+8)\Leftrightarrow$ | :2

$\Leftrightarrow(2ax\geq a+4)$

შემდგომ ეტაპზე უნდა გამოვიყენოთ უტოლობის (ცვლადის შემცველი) მე-2 ან მე-3 თვისება — უტოლობის ორივე მხარე გავყოთ 2a-ზე (x-ის კოეფიციენტზე). მაგრამ, რადგან 2a გამოსახულების მნიშვნელობა (დადებითია იგი, უარყოფითი თუ ნული), დამოკიდებულია a-ს მნიშვნელობაზე. ამიტომ განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა.

I შემთხვევა: თუ $a=0$, მაშინ უტოლობას ექნება შემდეგი სახე:

$$2\cdot 0x \geq 0 + 4$$
$$0\cdot x \geq 4$$

მიღებულ უტოლობას არ აკმაყოფილებს x-ის არც ერთი მნიშვნელობა, ე.ი. $x\in\varnothing$.

II შემთხვევა: თუ $a>0$, მაშინ:

$(2ax \geq a + 4) \Leftrightarrow \; |:2a,\ 2a>0$

$\Leftrightarrow\ x \geq \dfrac{a+4}{2a}$ $\qquad x\in\left[\dfrac{a+4}{2a};\infty\right)$

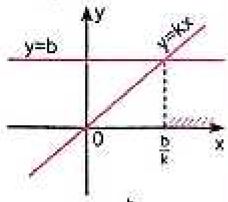
III შემთხვევა: თუ $a<0$, მაშინ:

$(2ax \geq a + 4) \Leftrightarrow \; |:2a,\ 2a<0$

$\Leftrightarrow\ x \leq \dfrac{a+4}{2a}$ $\qquad x\in\left[-\infty;\dfrac{a+4}{2a}\right)$

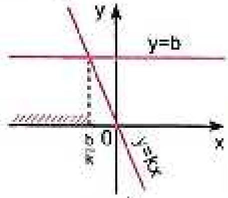
ამრიგად, $A=\varnothing$, თუ $a=0$; $A=\left[\dfrac{a+4}{2a};\infty\right)$, თუ $a>0$; $A=\left[-\infty;\dfrac{a+4}{2a}\right)$, თუ $a<0$.

II. თუ $k>0$



$x > \frac{b}{k}$

III. თუ $k<0$



$x < \frac{b}{k}$

სავარჯიშოები:

1 ამოხსენით უტოლობა x ცვლადის მიმართ

ა) $2x+3a>4(x-2a)+7$; ბ) $3(x-5a)+4x>7a+5$; გ) $2a(x+a)>3x-4(x+a)$;
დ) $ax>1+5a$; ე) $x(x-a)<0$; ვ) $(x-a)(x-2a)<0$.

2 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისთვის მოცემული უტოლობის ამონახსნია x_0.

ა) $3ax+2(a+x)>2-3a(x+1)$ $\quad x_0=1$;
ბ) $(2a-3)x+3\leq ax-2a(x-1)$ $\quad x_0=-1$.

3 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის მოცემულ სისტემას აქვს 1) უამრავი ამონახსნი; 2) ერთი ამონახსნი; 3) არც ერთი ამონახსნი.

ა) $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 4 - a \end{cases}$; $\qquad$ ბ) $\begin{cases} x > 5 \\ x \leq a \end{cases}$;

გ) $\begin{cases} 2x - 5 \geq 2 - 3(x - 1) \\ 2(x + a) \leq 4a - 2 \end{cases}$; $\qquad$ დ) $\begin{cases} 3x - 1 > 2(x + 1) - a \\ 4(x - 1) < 2x + a \end{cases}$.

4 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეუ-ლისათვის მოცემული სისტემის ამონახსენია 1) (3; ∞) ინტერვალი 2) [5;∞) ინტერვალი.

ა) $\begin{cases} x > 3 \\ x \geq a \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x > 3 \\ 2x + 3 \geq 2a \end{cases}$.

5* იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეუ-ლისათვის მოცემულ სისტემას არ აქვს ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} ax - 1 < 0 \\ x > 4a \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} 2ax - 1 > 0 \\ x > 8a \end{cases}$.

6. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითო-ეულისათვის მოცემულ უტოლობას აქვს ერთადერთი ამონახსნი დ იპოვეთ ეს ამონახსენი.

ა) $(x-a)(x-2)\leq 0$; ბ) $(ax+2)(3x-6)\geq 0$;

გ) $(ax-3)(2x-6)\leq 0$; დ) $(x-a)(4-x)\geq 0$.

7 a-ს რა მნიშვნელობებისთვის დააკმაყოფილებს $ax^2+(4a+1)x+4a-1<0$ უტოლობას x-ის ყველა მნიშვნელობა?

გ

8 x-ის რა მნიშვნელობებისთვისაა ჭეშმარიტი ტოლობა:

ა) $|x|=x$; ბ) $|x^2|=-x^2$; გ) $|x^2+5|=x^2+5$;

დ) $|-x|=|x|$; ე) $|\sqrt{x^2-4x+4}|=2-x$; ვ) $|x+5|+|x-2|=0$.

9 რისი ტოლია x, თუ:

ა) $\dfrac{|x+5|}{|x|}=1$; ბ) $|5x|=-5x$?

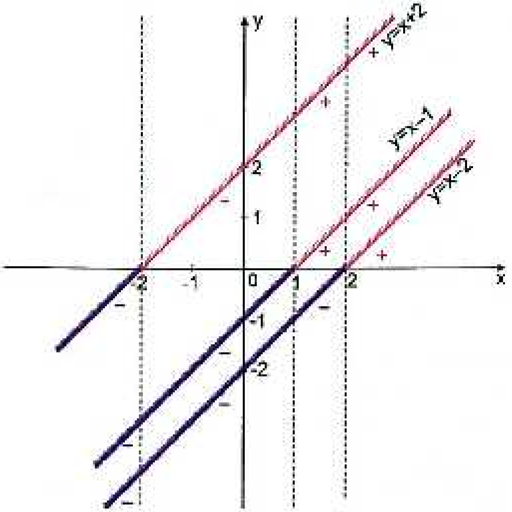
7 უტოლობის ამოხსნა ინტერვალთა მეთოდით

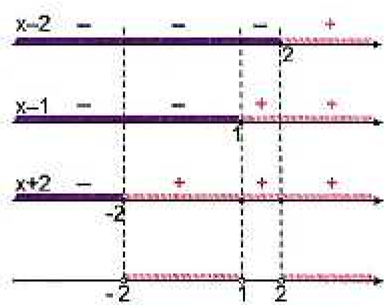
1. ამოხსენით უტოლობა:

ა) $x^2-16>0$; ბ) $(x^2-6x-16)(5x-7)>0$; გ) $\dfrac{(x^2-5x-14)(x+5)}{x^2-9} \ge 0$.

რა თქმა უნდა, თქვენ ალბათ შეძელით მოცემული უტოლობების ამოხსნა. მაგრამ მაღალი ხარისხის უტოლობის თქვენთვის უკვე ცნობილი ხერხით ამოხსნა გარკვეულ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული (უტოლობის ამოხსნა ხდება რამდენიმე რიცხვითი ღერძის დახმარებით).
გავეცნოთ უტოლობათა ამოხსნის ინტერვალთა მეთოდს.

განვიხილოთ $x^3-x^2-4x+4>0$ უტოლობა.
უტოლობის მარცხენა მხარე დავშალოთ მამრავლებად
$((x-1)(x^2-4)>0)\Leftrightarrow((x-1)(x-2)(x+2)>0)$.
განვიხილოთ $y=(x-1)(x-2)(x+2)$ (1) ფუნქცია.
ადვილი სანახავია, რომ $x=1$, $x=2$, $x=-2$ ფუნქციის ნულებია. დავადგინოთ, ცვლადის რა მნიშვნელობებისათვის ღებულობს (1) ფუნქცია დადებით და რა მნიშნელობებისთვის უარყოფით მნიშვნელობას.





ნახაზზე მოცემულია (1) ფუნქციის თითოეული თანამამრავლის ნიშანი. ვხედავთ, რომ $(2;\infty)$ შუალედში სამივე თანამამრავლი დადებითია, ე.ი. ნამრავლიც დადებითი იქნება. $x=2$-ის მარცხენა $(1;2)$ შუალედში ნიშანი მხოლოდ ერთმა თანამამრავლმა შეიცვალა, ამიტომ ფუნქცია ამ შუალედში მიიღებს უარყოფით მნიშვნელობებს. $(-2;1)$ შუალედში კიდევ ერთი თანამამრავლი – $(x-1)$ გახდა უარყოფითი, ე.ი. ამ შუალედში უკვე ორი თანამამრავლია უარყოფითი და შესაბამისად, ნამრავლიც დადებითი იქნება. მომდევნო $(-\infty;-2)$ შუალედშიც ისევ ერთი თანამამრავლი იცვლის ნიშანს და ამიტომ ნამრავლიც შეიცვლის ნიშანს – ფუნქცია ხდება უარყოფითი.

თუ რიცხვით წრფეზე მოვნიშნავთ (1) ფუნქციის ნულებს, მაშინ რიცხვითი წრფე ოთხ შუალედად დაიყოფა.

განხილული მსჯელობის გათვალისწინებით თითოეულ შუალედში დავწეროთ ფუნქციის შესაბამისი ნიშანი. მივიღებთ: (1) ფუნქცია დადებითია $(-2;1)$, $(2;\infty)$ შუალედებში, ხოლო $(-\infty;-2)$, $(1;2)$ შუალედებში კი – უარყოფითი. მაშასადამე, $(x-1)(x^2-4)>0$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა $A=(-2;1)\cup(2;\infty)$.

ამოვხსნათ $\dfrac{(3-5x)(x^2-4)}{(2x-7)(x^2+4x+6)(x-2)}>0$ უტოლობა.

წილადის მრიცხველიცა და მნიშვნელიც დავშალოთ მამრავლებად: $x^2-4=(x-2)(x+2)$. x^2+4x+6 კვადრატული სამწევრი მამრავლებად არ იშლება, იგი x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის დადებითია, რადგან $\frac{D}{4}=2^2-6<0$, ამიტომ უტოლობის ორივე მხარე შესაძლებელია გავამრავლოთ x^2+4x+6 გამოსახულებაზე.
მივიღებთ:

$$\frac{(3-5x)(x-2)(x+2)}{(2x-7)(x-2)}>0$$

წილადი შევკვეცოთ $(x-2)$-ზე, თან გავითვალისწინოთ, რომ $x-2\neq 0$

$$\begin{cases}\dfrac{(3-5x)(x+2)}{(2x-7)}>0\\ x-2\neq 0\end{cases} \quad \cdot(-1)$$

მრიცხველისა და მნიშვნელის თითოეულ თანამამრავლში x-ის კოეფიციენტი გავხადოთ დადებითი

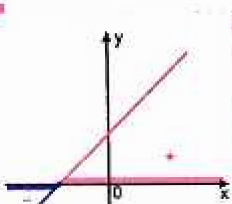
$$\begin{cases}\dfrac{(5x-3)(x+2)}{(2x-7)}<0\\ x\neq 2\end{cases} \quad (2)$$

თითოეული თანამამრავლის ფესვებია: $5x-3=0$, $x=0{,}6$
$x+2=0$, $x=-2$
$2x-7=0$, $x=3{,}5$.

თუ უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ერთსა და იმავე დადებით რიცხვზე ან ისეთ ცვლადიან გამოსახულებაზე, რომელიც ცვლადის ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობისათვის დადებითია, მივიღებთ მოცემულის ტოლფას უტოლობას.

რიცხვით წრფეზე მოვნიშნოთ მიღებული ფესვები:

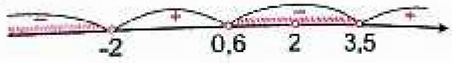
მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ (2) უტოლობის მარცხენა მხარეს ყოველ თანამამრავლში (მრიცხველშიც და მნიშვნელშიც) ცვლადის კოეფიციენტი დადებითია, რაც იმას ნიშნავს, რომ თითოეული თანამამრავლი (წრფივი) ფესვის მარჯვნივ დადებითია, მარცხნივ კი – უარყოფითი. მაშასადამე, ყველაზე მარჯვენა – $(3{,}5;\infty)$ შუალედში ყველა თანამამრავლი და, ე.ი. წილადიც დადებითი იქნება, ამიტომ ამ შუალედში დაიწერება ნიშანი „+". რადგან რიცხვით წრფეზე, ყოველ ფესვზე გავლისას, ნიშანს მხოლოდ ერთი თანამამრავლი იცვლის, ამიტომ ყოველ მომდევნო შუალედში წინას საპირისპირო ნიშანი დაიწერება.



$y=kx+b$
$k>0$

ე.ი. $\left(\dfrac{(5x-3)(x+2)}{2x-7}<0\right) \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(0{,}6;3{,}5)$.

ამის შემდეგ გავითვალისწინოთ, რომ $x\neq 2$.



ამრიგად, უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა:
$A=(-\infty;-2)\cup(0,6;2)\cup(2;3,5)$.

** განვიხილოთ $\frac{(x+3)^3}{(3-x)(5x-2)^2}<0$ უტოლობა:

მოცემული უტოლობა ასე გადავწეროთ:
$\frac{(x+3)^3}{(x-3)(5x-2)^2}>0$.

თითოეული თანამამრავლის ფესვებია:

$(x+3)^3=0$, $x-3=0$, $(5x-2)^2=0$

$x=-3$ $x=3$ $x=0,4$.

რიცხვით წრფეზე მოვნიშნოთ მიღებული ფესვები.

ისევე, როგორც უკვე განხილულ მაგალითებში, ყველაზე მარჯვენა $(3;\infty)$ შუალედში ყველა თანამამრავლი და, მაშასადამე, წილადიც დადებითია. ე.ი. ვწერთ „+" ნიშანს. მომდევნო $(0,4;3)$ შუალედში ფუნქცია მიიღებს უარყოფით მნიშვნელობებს, რადგან $x=3$ წერტილზე გავლისას ნიშანს იცვლის მხოლოდ $(x-3)$ თანამამრავლი. $(-3;0,4)$ შუალედში ფუნქცია ისევ უარყოფით მნიშვნელობებს მიიღებს, რადგან 0,4 წერტილზე გავლისას ნიშანს არც ერთი თანამამრავლი არ შეიცვლის ($(5x-2)^2\geq0$ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის).

–3-ზე გავლისას ნიშანს შეიცვლის მხოლოდ ერთი თანამამრავლი $(x+3)^3$ (რადგან ხარისხის მაჩვენებელი კენტია), ამიტომ $(-\infty;-3)$ შუალედში ფუნქცია იქნება დადებითი.
მაშასადამე, უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა:

$$A=(-\infty;-3)\cup(3;\infty).$$

უტოლობის ამოხსნის განხილულ მეთოდს ინტერვალთა მეთოდი ეწოდება.

ამრიგად, უტოლობა რომ ინტერვალთა მეთოდით ამოვხსნათ, უპირველეს ყოვლისა, მივცეთ მას $f(x)>0$ ან $f(x)<0$ სახე (უტოლობის ყველა წევრი დავალაგოთ უტოლობის ერთ მხარეს), შემდგომ კი საჭიროა:

1. დავშალოთ მამრავლებად უტოლობის მარცხენა მხარე (თუ წილადია, მნიშვნელიცა და მრიცხველიც).

2. თითოეულ თანამამრავლში ცვლადის კოეფიციენტი (უფროსი კოეფიციენტი) გავხადოთ დადებითი.

3. თანამამრავლი, რომელიც ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის ინარჩუნებს ნიშანს, „უკუვაგდოთ" (უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ ან გავყოთ მასზე).

4. ერთნაირფუძიანი ხარისხები ჩავწეროთ ერთი ხარისხის სახით.

5. რიცხვით ღერძზე მოვნიშნოთ მრიცხველისა და მნიშვნელის ყველა თანამამრავლის ფესვი.

ყურადღება!

წილადის შეკვეცისას არ დაგვავიწყდეს, რომ შესაკვეცი თანამამრავლი უნდა განსხვავდებოდეს ნულისაგან.

6. მარჯვენა შუალედში დავწეროთ ნიშანი „+". კენტმაჩვენებლიანი მამ
რავლის ფესვის სხვადასხვა მხარეს უნდა დავწეროთ სხვადასხვა ნიშა
ნი, ხოლო ლუწმაჩვენებლიანი მამრავლის ფესვის ორივე მხარეს – ერთ
და იგივე ნიშანი.

მაგალითი.

ამოხსენით უტოლობა: $\frac{(x^2-10x+25)(x^2+x-20)}{(4x^2+9)(x^2-7x+12)}\le 0.$

$\forall x\in R$-თვის $4x^2+9>0$, ამიტომ უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლო
$(4x^2+9)$-ზე.

$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$; $x^2-10x+25=(x-5)^2$; $x^2+x-20=(x+5)(x-4)$

$$\left(\frac{(x^2-10x+25)(x^2+x-20)}{(4x^2+9)(x^2-7x+12)}\le 0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{(x-5)^2(x-4)(x+5)}{(x-3)(x-4)}\le 0\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ne 4\\ \frac{(x-5)^2(x+5)}{x-3}\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

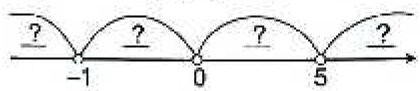
$\Leftrightarrow x\in[-5;3)\cup\{5\}.$

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

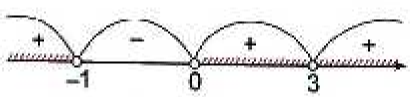
1. ჩასვით >, <, = ნიშნები ისე, რომ მიიღოთ ჭეშმარიტი წინადადება.
თუ $f(x)=(x+1)(x-9)^2(x-15)$, მაშინ:

ა) $f(9)$ _?_ 0; ბ) $f(10)$ _?_ 0; გ) $f(-2)$ _?_ 0.

2. თუ $(x-5)x(x+1)<0$, მაშინ



3. ნახაზზე დაშტრიხულია $(x+1)^2\cdot(x-3)^2\cdot x^2>0$ უტოლობის ამონახს
ნები.



სავარჯიშოები:

1 ამოხსენით უტოლობა ინტერვალთა მეთოდით:

ა) $(x-2)(x+3)>0$; ბ) $(5x-1)(2-x)\le 0$; გ) $x^2<9$;
დ) $7x-12x^2\le 0$; ე) $4x^2\ge 9$; ვ) $4x^2-3{,}5x<0$;
ზ) $4x^2-4x-3\ge 0$; თ) $x^2+x-12<0$; ი) $x^2-2x-3\le 0$.

2 ამოხსენით უტოლობა:

ა) $(x+1)(2x-5)(x+7)\ge 0$; ბ) $x(x+5)(x+9)\le 0$;
გ) $(3+2x)(x-7)(5x+1)(2x-1)\le 0$; დ) $(2x-4x^2)(x^4-1)\ge 0$;
ე) $(x^2-1)(x+3)>0$; ვ) $(9x^2-16)(3x+4)<0$.

3 ამოხსენით უტოლობა:

ა) $(2-3x)(x^2+9)(x^2-0{,}01)>0$;

ბ) $(5-8x)(4-x)(3+x^2)(x-1)\le 0$;

გ) $\dfrac{4x(9x^2-16)}{(3x+4)(x^2-4)}>0$;

დ) $\dfrac{(2x-11)(x^2+18)}{(x+15)(2x^2-3x+2)}\le 0$.

4* ამოხსენით უტოლობა:

ა) $\dfrac{(x+7)^2(3x-7x^2)}{x^3(x+1)}\ge 0$;

ბ) $\dfrac{(5-x)^2(2x^2-29x-85)}{(4-x)^3(5x-1{,}5)}\le 0$.

5 იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{3x-1}}$;

ბ) $y=\sqrt{x(x-7)(3{,}5-x)}$;

გ) $\sqrt{x(x^2-4)}+\dfrac{1}{x-5}$.

ბ

6 ზღვის წყალი 5% მარილს შეიცავს (თავისი წონის). რამდენი კილოგრამი მტკნარი წყალი უნდა დავამატოთ 20 კგ ზღვის წყალს, რომ მარილის შემცველობა მასში 2% გახდეს?

7 გაამარტივეთ გამოსახულება, თუ $x=3b$: $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{b}}{x-b}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{b}}{x-b}$.

8 ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი და ჩამოაყალიბეთ მისი თვისებები:

ა) $y=\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$;

ბ) $y=3x^2-5x+2$.

9 a-ს რა მნიშვნელობებისთვის ექნება $ax^2-4ax+5-a=0$ განტოლებას ორი განსხვავებული ამონახსენი.

10 ურნიდან, რომელშიც ოთხი ბურთულაა ასოებით „ა", „გ", „ი", „თ", თანამიმდევრულად (უკან დაუბრუნებლად) იღებენ სამ ბირთვს. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ამოღებული სიტყვა იქნება „გია."

11 ამოხსენით ბიკვადრატული განტოლება და გამოთვალეთ ფესვების ჯამი და ნამრავლი:

ა) $x^4-25x^2+144=0$;

ბ) $x^4-2x^2-3=0$;

გ) $x^4-6x^2+9=0$;

დ) $x^4-3x^2-4=0$.

III თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1 ამოხსენით განტოლება:

ა) $|3x-2|+x=11$; ბ) $4-5x=|5x-4|$;

გ) $|5x^2-3|=2$; დ) $(x-1)^2+|x-1|-2=0$;

ე) $x^2-4x+|x-3|+3=0$; ვ) $|x|+x^3=0$;

ზ) $|x^2-5x|=0$; თ) $|x^2-2x|=-5$.

2 ამოხსენით უტოლობა:

ა) $|3-x|<4$; ბ) $|3x-5|\geq 10$;

გ) $2|x+1|>x+4$; დ) $3|x-1|\leq x+3$;

ე) $(|x|-5)(|x|-7)\leq 0$; ვ) $0,3|x|-1\leq \frac{6-|x|}{2}$.

3 ამოხსენით უტოლობა:

ა) $\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+4}\right|>0$; ბ) $\left|\frac{x^2-3x-2}{x^2+4x-5}\right|\geq 0$.

4* რამდენი ამონახსენი აქვს განტოლებას:

ა) $(|x|+2)(x^2-2x)=0$; ბ) $(|x|-2)(x^2+4)=0$;

გ) $(|x|-7)(x-3)=0$; დ) $(|x|-4)(x^2-2x-3)=0$.

5 a-ს რა მნიშვნელობისთვის აქვს განტოლებას მხოლოდ ერთი ფესვი:

ა) $|x-5|=a+2$; ბ) $|2x+1|=2a+1$;

გ) $|x+2|=a^2-4a$; დ) $|x|=a^2-2a-3$.

6 a-ს რა მნიშვნელობისთვის აქვს განტოლებას ორი ფესვი:

ა) $|x+2|=a-5$; ბ) $|2x+5|=2a+5$;

გ) $|3x+2|=a^2-4a-5$; დ) $2|x-5|=a^2+2$.

7 a-ს რა მნიშვნელობისთვის არა აქვს ამონახსენი შემდეგ განტოლებებს:

ა) $|3x+5|=a-2$; ბ) $|x^2-1|=a^2-a$;

გ) $|x^2+1|=a$; დ) $\left|\frac{x-1}{5}\right|=a^2+1$.

8* a-ს რა მნიშვნელობისთვის არა აქვს ამონახსენი შემდეგ უტოლობებს:

ა) $|2x-3|<3a+1$; ბ) $|x+7|\leq 4-a^2$;

გ) $\sqrt{(x+2)^2}\leq 2a+1$; დ) $\sqrt{(2x-1)^2}\leq 16-a^2$.

9 იპოვეთ c პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისათვისაც განტოლებას ამონახსენი არ აქვს.

ა) $x^4+4x^2+c=0$; ბ) $x^4-4x^2+c=0$.

10* a-ს რა მნიშვნელობისთვის აქვს განტოლებას $x^4-13x^2+a=0$:

ა) ოთხი ამონახსენი; ბ) ორი ამონახსენი.

11. ამოხსენით განტოლება

ა) $(9-x^2)\sqrt{1-x}=0$; ბ) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0$; გ) $\frac{\sqrt{x^2-2x-15}}{x-5}=0$;

დ) $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$; ე) $x^2+13-2\sqrt{x^2+13}=35$; ვ) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$;

ზ) $x^2-2\sqrt{x^2-24}=39$; თ) $(x+2)\sqrt{16x+33}=(x+2)(8x-15)$.

12. ამოხსენით განტოლება:

ა) $(x^2+2x)^2-7(x^2+2x)-8$; ბ) $\frac{3x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=4$;

გ) $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$; დ) $3\left(\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}\right)=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$;

ე) $x^2(x-1)^2+x(x^2-1)=2(x+1)^2$; ვ) $x^3-4x^2-x+4=0$;

ზ) $2x^3+3x^2+3x+2=0$; თ) $10x^2(x-2)^2=9(x^2+(x-2)^2)$.

13. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის $ax^2+4x>1-3a$ უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისთვის.

14. იპოვეთ a-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=\frac{1}{5x^3+3x^2-4x+2a}$ არ არის განსაზღვრული $x=-1$ წერტილში.

15. ამოხსენით უტოლობა:

ა) $\frac{x^3+x-x^2-1}{x+8}\le 0$; ბ) $\frac{(x^2+2x+9)(x-3)^2}{(x^2-2x-15)(x+4)}\ge 0$;

გ) $\frac{(5x^2+7)(x^2-8)}{(x^2-x-2)(x+1)}\le 0$; დ) $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x}\ge 0$; ე) $\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2\le 9$;

ვ) $\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^2\ge -2$; ზ) $\left(\frac{x+1}{x-7}\right)^2\ge 0$; თ) $\left(\frac{x-4}{8x-5}\right)^2\le 0$.

16. ამოხსენით უტოლობა:

ა) $\frac{(2-\sqrt{5})(x^2+4)|5-x|}{(|x|+4)(x^2+2x)}\ge 0$; ბ) $\frac{(x-3)^3(x+2)^2(x^2+4)}{(\sqrt{10}-5)(x^3+9x)}\ge 0$.

17. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-5x-6}}$; ბ) $y=\sqrt{\frac{x^2-2x-3}{4-x^2}}$;

გ) $y=\frac{|x-2|\sqrt{4-x}}{x^2-x+12}$; დ) $y=\frac{(\sqrt{17}-4)\sqrt{x+8}}{\sqrt{x^2-5x-14}}$.

18* შეიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის შიგნით:

ა) $x\sqrt{-7a^3x^4}$, თუ $x<-5$; ბ) $(2-5a)\sqrt{a+7}$, თუ $a\in(-2;0{,}2)$;

გ) $(-a^2+a)\sqrt{-2a^3(a-1)}$; დ) $(2a-3)\sqrt{25-3a}$, თუ $a\in[2;5]$.

შეამოწმე შენი ცოდნა:

1 a-ს რამდენი ნატურალური მნიშვნელობა არსებობს, რომლისთვისაც $|8-x|=8-a$ განტოლებას აქვს ამონახსენი:

ა) 8; ბ) 7; გ) 2; დ) 1.

2 იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $2|x-5|=a+1$ განტოლებას გააჩნია ამონახსენი:

ა) $a\in[-1;1]$; ბ) $a\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; გ) $a\in[-1;\infty)$; დ) $a\in(-1;\infty)$.

3 $\frac{|1-x|}{x-1}=1$ განტოლების ამონახსენთა სიმრავლეა:

ა) $(-\infty;1)$; ბ) $(1;\infty)$; გ) $(-1;1)$; დ) $[-1;1)$.

4 თუ $x\neq2$, მაშინ $\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{x-2}{|x-2|}$ გამოსახულების მნიშვნელობა ტოლია:

ა) 2; ბ) 4; გ) 0; დ) −2.

5 შემდეგი თანაფარდობებიდან რომელია სამართლიანი ნებისმიერი x-თვის:

ა) $x<|x|$; ბ) $x<x^2$; გ) $x\le x^2$; დ) $x\le|x|$.

6 $\frac{x}{x+2}>0$ უტოლობის ამონახსენია:

ა) $x\in R$; ბ) $x\in R\setminus\{-2\}$; გ) $x\in R\setminus(-2;0)$; დ) $x=0$.

7 $|x+3|>x+3$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა:

ა) R; ბ) $(-\infty;-3)$; გ) $(-3;\infty)$; დ) $(-\infty;-3)\cup(-3;\infty)$.

8 თუ $a=3$, მაშინ $ax-(a-2)x+2=7-a$ განტოლების ამონახსენია:

ა) 3; ბ) 1; გ) 2; დ) 0.

9 $\frac{(3x-9)^2}{|x+2|}\le0$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა:

ა) $\{3\}$; ბ) $\varnothing$; გ) $(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$; დ) R.

10 $\frac{2x-a}{x-3}=0$ განტოლების ამონახსენია $x=4$, თუ:

ა) $a \neq 0$; ბ) $a=3$; გ) $a=8$; დ) $a=4$.

11 $(a^2-4)x=a+2$ განტოლებას უამრავი ამონახსენი აქვს, როცა:

ა) $a=2$; ბ) $a=-2$; გ) $a=2$ ან $a=-2$; დ) ასეთი a არ არსებობს.

12 $(k^2+4)x=k-2$ განტოლებას ერთი ამონახსენი აქვს, როცა:

ა) k ნებისმიერია; ბ) $k \neq -2$; გ) $k \neq 2$; დ) $k \neq \pm 2$.

13 ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამია 12, თუ ამ რიცხვს 18-ს გამოვაკლებთ, მივიღებთ იმავე ციფრებით, მაგრამ შებრუნებული რიგით ჩაწერილ რიცხვს. ასეთი რიცხვი:

ა) 84; ბ) 93; გ) 75; დ) 66.

14. ამოხსენით უტოლობა $\frac{2x}{x+2}<0$

ა) $(-1;0)$; ბ) $(\infty;0)$; გ) $(-2;0)$; დ) $(-2;0)$.

15. $\frac{2}{x}>1$ უტოლობის ამონახსნია:

ა) $(-\infty;2)$; ბ) $(0;2)$; გ) $(0;\infty)$; დ) $(-3;3)$.

16. $\frac{1}{x^2-9}+\sqrt{x-3}$ გამოსახულების განსაზღვრის არეა:

ა) $[3;\infty)$; ბ) $(3;\infty)$; გ) $(-3;3]$; დ) $(-3;3)$

17 ამოხსენით განტოლებები:

ა) $(x^2-1)(x^2+1)-4(x^2-11)=0$; ბ) $x^3-x^2-4(x-1)^2=0$;

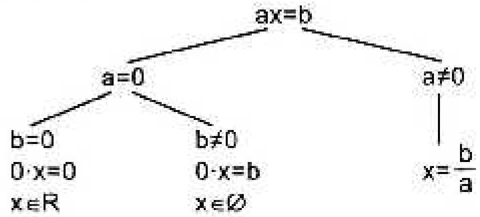
გ) $x^5+x^4-6x^3-6x^2+5x+5=0$; დ) $(x-1)(x+1)(x^2+1)=6x^2-1$.

18 თუ $(x+4)\sqrt{x^2-25}=0$, მაშინ $x=$

ა) $-4; 5; -5$; ბ) $-4; 5$; გ) $5; -5$; დ) $4; 5$.

III თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- $ax=b$ სახის განტოლებას, სადაც x უცნობია, ხოლო a, $b \in R$, წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება ეწოდება. a და b-ს კი განტოლების პარამეტრებს უწოდებენ.



- განტოლებას, რომელიც ცვლადს რადიკალის ნიშნის ქვეშ შეიცავს, ირაციონალური განტოლება ეწიდება.

- რიცხვითი უტოლობის თვისებები.

1. $(a>b) \Leftrightarrow (b<a)$
2. $(a>b)$ და $(b>c) \Rightarrow (a>c)$
3. $(a>b$ და $c \in R) \Rightarrow (a+c>b+c)$
4. ა) $(a>b$ და $c>0) \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$
5. ბ) $(a>b$ და $c<0) \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases}$

IV თავი

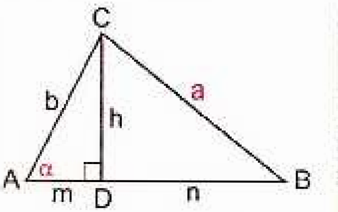
ამ თავში შევისწავლით კოსინუსების და სინუსების თეორემებს და მათ შედეგებს. გავიგებთ, რას ნიშნავს სამკუთხედების ამოხსნა.

შევძლებთ: მოცემულობის საფუძველზე ვიპოვოთ სამკუთხედის ელემენტები, გვერდების მიხედვით დავადგინოთ სამკუთხედის სახე.

1 კოსინუსების თეორემა

კოსინუსების თეორემა:

სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის კვადრატი უდრის დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამ გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორკეცეული ნამრავლი.



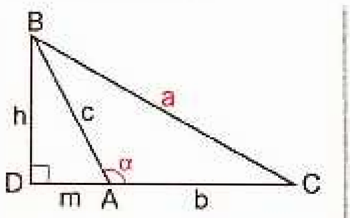
დამტკიცება:

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ABC სამკუთხედი, რომლის A კუთხის გრადუსული ზომა α-ს ტოლია. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\alpha<90°$.

ჩანაწერის გამარტივების მიზნით შემოვიტანოთ აღნიშვნები $\angle A=\alpha$, $AC=b$, $BC=a$, $AB=c$, $AD=m$ და $DB=n$. ცხადია, $c=m+n$. C წვეროდან გავავლოთ $CD\equiv h$ სიმაღლე. მართკუთხა ACD და BCD სამკუთხედებიდან, პითაგორას თეორემის თანახმად, მივიღებთ, რომ $a^2=h^2+n^2$ და $b^2=h^2+m^2$, საიდანაც $a^2=b^2+n^2-m^2$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $n=c-m$, მივიღებთ:

$$a^2=b^2+(c-m)^2-m^2=b^2+c^2-2mc+m^2-m^2=b^2+c^2-2mc.$$

მართკუთხა ACD სამკუთხედიდან $\cos\alpha=\frac{m}{b}$, საიდანაც $m=b\cdot\cos\alpha$, მაშასადამე, $a^2=b^2+c^2-2cb\cdot\cos\alpha$.



ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა A კუთხე ბლაგვია, ანუ $\alpha>90°$. ABD და DBC მართკუთხა სამკუთხედებიდან პითაგორას თეორემის თანახმად $c^2=h^2+m^2$ და $a^2=h^2+(b+m)^2$, საიდანაც მივიღებთ

$$a^2=c^2-m^2+(b+m)^2=c^2-m^2+b^2+2mb+m^2=c^2+b^2+2mb.$$

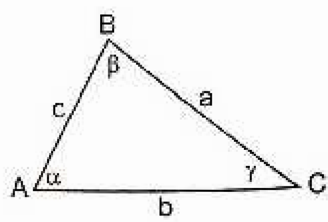
ΔABD-დან $\cos\angle DAB=\frac{m}{c}$, საიდანაც $m=c\cdot\cos\angle DAB$.

მაგრამ $\angle DAB=180°-\alpha$, ე.ი. $\cos\angle DAB=\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$. მაშასადამე, $m=-c\cdot\cos\alpha$. თუ m-ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ a^2-ის გამოსათვლელ გამოსახულებაში, მივიღებთ, რომ $a^2=c^2+b^2-2bc\cdot\cos\alpha$. ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ b^2-ის და c^2-ის გამოსათვლელი გამოსახულებები. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$



- სამკუთხედის გვერდების სიგრძებია 5სმ; 7სმ და 10სმ. დაადგინეთ სამკუთხედია სახე (მართკუთხა, ბლაგვკუთხა, მახვილკუთხა).
- სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია a, b და c. ჩამოაყალიბეთ როგორ უნდა დავადგინოთ სამკუთხედის სახე.

მართალია თუ არა, რომ:

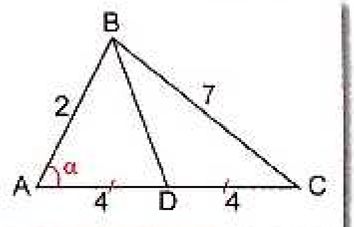
- კოსინუსების თეორემა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ვიცით სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.
- კოსინუსების თეორემა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ, არის თუ არა მოცემული გვერდების მქონე სამკუთხედში ბლაგვი კუთხე.
- სამკუთხედის ორი კუთხის კოსინუსი ვერ იქნება უარყოფითი.
- მახვილკუთხა სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის კვადრატი ნაკლებია დანარჩენი გვერდების კვადრატების ჯამზე.
- დაასახელეთ ABC სამკუთხედის უდიდესი კუთხე, თუ

  ა) $AC^2>AB^2+BC^2$; ბ) $BC^2>AB^2+AC^2$.

ამოცანა.

ABC სამკუთხედის AB, BC და AC გვერდების სიგრძეები შესაბამისად 2სმ, 7სმ და 8სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AC გვერდისადმი გავლებული მედიანის სიგრძე.

ამოხსნა:



მოც. ΔABC

$AB=2$ სმ, $BC=7$ სმ,

$AC=8$ სმ, $AD=DC$

უ. ვ. BD

განვიხილოთ ΔABC. კოსინუსების თეორემის თანახმად, $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha$, საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\cos\alpha=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{2^2+8^2-7^2}{2\cdot2\cdot8}=\frac{19}{32}.$$

ხოლო ΔABD-დან კოსინუსების თეორემის თანახმად

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\alpha=4+16-16\frac{19}{32}=20-\frac{19}{2}=10{,}5$$

მაშასადამე, $BD=\sqrt{10{,}5}$.

პასუხი: $BD=\sqrt{10{,}5}$ სმ.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ სამკუთხედის მესამე გვერდის სიგრძე, თუ ორი სხვა გვერდი ერთმანეთთან $60°$-იან კუთხეს შეადგენს და მათი სიგრძეები შესაბამისად უდრის 6-ს და 8-ს (პასუხი დაამრგვალეთ მეათედამდე სიზუსტით).

2 იპოვეთ სამკუთხედის მესამე გვერდის სიგრძე, თუ ორი სხვა გვერდი ერთმანეთთან $120°$-იან კუთხეს ადგენს და მათი სიგრძეებია შესაბამისად 3 და 5.

3 სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეების კოსინუსები.

4 ABC სამკუთხედის ბლაგვი კუთხის გრადუსული ზომა $120°$-ია, ხოლო ამ კუთხის შემადგენელი გვერდების სიგრძეები 5 სმ და 8 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე გვერდის სიგრძე და შემოხაზული წრეწირის რადიუსი (პასუხი დაამრგვალეთ მეასედამდე სიზუსტით).

5 სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეებია 12 სმ და 13 სმ. შეარჩიეთ მესამე გვერდი ისე, რომ:

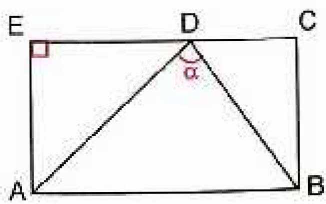
ა) ეს გვერდი იყოს უდიდესი და სამკუთხედი იყოს: I - მართკუთხა; II - მახვილკუთხა; III - ბლაგვკუთხა;

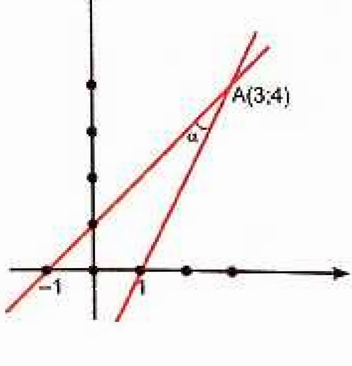
ბ) ეს გვერდი არ იყოს უდიდესი და სამკუთხედი იყოს: I - მართკუთხა; II - მახვილკუთხა; III - ბლაგვკუთხა.

6 იპოვეთ სამკუთხედის უმცირესი და უდიდესი კუთხეების კოსინუსები, თუ მისი გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:7:8.

7 ABC სამკუთხედში $AC=8$; $AB=5$ და $BC=6$. AC გვერდზე აღებულია K წერტილი ისე, რომ $AK=1$. იპოვეთ BK.

8 ნახაზის მიხედვით იპოვეთ $\cos\alpha$, თუ $\frac{ED}{4}=\frac{BC}{3}=\frac{DC}{2}$.





9 ნახაზის მიხედვით იპოვეთ $\cos\alpha$.

2 კოსინუსების თეორემის შედეგები

შედეგი 1

პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეების კვადრატების ჯამი მისი გვერდების სიგრძეების კვადრატების ჯამის ტოლია.

დამტკიცება:

ABCD პარალელოგრამში გავავლოთ AC და BD დიაგონალები. ΔABC და ΔABD-დან კოსინუსების თეორემის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$.

$BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD$.

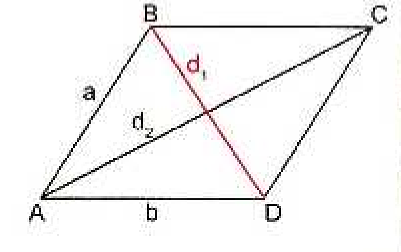
გავითვალისწინოთ, რომ AB=CD და BC=AD, ხოლო $\angle BAD\equiv\alpha$, საიდანაც $\angle ABC=180^\circ-\alpha$.

ე.ი. $\cos\angle ABC=\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$.

მაშასადამე, $AC^2=AB^2+BC^2+2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\alpha$,

$BD^2=CD^2+AD^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\alpha$.

მიღებული ტოლობების შეკრების შედეგად მივიღებთ, რომ $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$, რ.დ.გ. თუ შემოვიტანთ $BD\equiv d_1$, $AC\equiv d_2$, $AB\equiv a$ და $AD\equiv b$ აღნიშვნებს, ყოველივე ზემოთთქმული შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:



$$d_1^2+d_2^2=2a^2+2b^2.$$

შედეგი 2

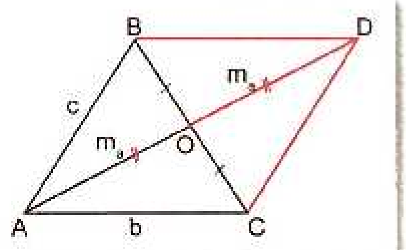
სამკუთხედის მედიანების სიგრძეები გამოითვლება ფორმულებით:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}\qquad m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2},$$

სადაც a, b და c სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია.

განვიხილოთ ABC სამკუთხედი. შემოვიღოთ აღნიშვნები AB=c; AC=b და BC=a. გავავლოთ a სიგრძის მქონე გვერდის მედიანა AO და მისი სიგრძე აღვნიშნოთ m_a-თი. AO სხივზე გადავდოთ OD=AO მონაკვეთი. D წერტილი შევაერთოთ B და C წერტილებთან. ცხადია, მიღებული ABDC ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, $AD^2+BC^2=2c^2+2b^2$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ BC=a და $AD=2m_a$, მივიღებთ $(2m_a)^2=2c^2+2b^2-a^2$, საიდანაც $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}$. ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ m_b და m_c-ს გამოსათვლელი ფორმულები.

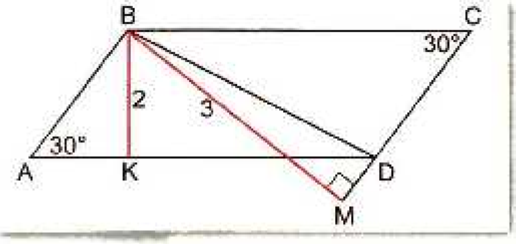


შეიძლება თუ არა, რომ:

- პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი მეტი იყოს გვერდების კვადრატების ჯამზე.
- პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი ნაკლები იყოს გვერდების კვადრატების ჯამზე.
- სამკუთხედის სამი მედიანა გამოისახებოდეს ნებისმიერი სამი რიცხვით.
- რიცხვებიდან 2; 5; 7; 9 ამოარჩიეთ სამი, რომლითაც შეიძლება გამოისახებოდეს რომელიღაც სამკუთხედის მედიანების სიგრძეები.

ამოცანა.

პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეების სიგრძეები 2 და 3-ის, ხოლო მათ შორის კუთხე 30°-ის ტოლია. იპოვეთ პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეები.



ამოხსნა:

მოც. ABCD პარალელოგრამი

$BK \perp AD$; $BM \perp CD$

$KBM=30^{\circ}$; $BK=2$;

$BM=3$

უ. გ. BD და AC.

ვიცით, რომ პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლე-ბულ სიმაღლეებს შორის კუთხე ტოლია პარალელოგრამის მახვილი კუთხისა. ე.ი. ABK და BMC სამკუთხედებიდან მივიღებთ, რომ $AB=4$ და $BC=6$. ABD სამკუთხედისთვის კოსინუსების თეორემის გამოყენების შედეგად

$$BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot \cos\angle A=16+36-2\cdot 4\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=52-24\sqrt{3},$$

$$BD=\sqrt{52-24\sqrt{3}}=2\sqrt{13-6\sqrt{3}}.$$

განვიხილოთ ABCD პარალელოგრამი. ვიცით, რომ

$AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$. აქედან

$AC^2=2(AB^2+AD^2)-BD^2=2(16+36)-(52-24\sqrt{3})=52+24\sqrt{3}$, ე.ი.

$AC=\sqrt{52+24\sqrt{3}}=2\sqrt{13+6\sqrt{3}}$

პასუხი: $BD=2\sqrt{13-6\sqrt{3}}$; $AC=2\sqrt{13+6\sqrt{3}}$

სავარჯიშოები:

1 პარალელოგრამის გვერდების სიგრძეებია 23 სმ და 11 სმ, დიაგონალები კი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ დიაგონალების სიგრძეები.

2 პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეებია 17 სმ და 19 სმ, გვერდები კი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ გვერდების სიგრძეები.

3 პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეებია 12 სმ და 14 სმ, გვერდების სიგრძეების სხვაობა კი 4 სმ-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდების სიგრძეები.

4 იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდების და დიაგონალების სიგრძეები, თუ დიდი გვერდი ტოლია მცირე დიაგონალის, გვერდების სხვაობა 3 სმ-ია, დიაგონალების სხვაობა კი – 2 სმ.

5 ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის სიგრძეა $4\sqrt{2}$ სმ, ხოლო ფერდის მედიანის კი – 5 სმ. იპოვეთ ფერდის სიგრძე.

6 ტოლფერდა სამკუთხედში გავლებულია ფერდის მედიანა. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძის სიგრძე, თუ ფერდის სიგრძეა 4 სმ, ხოლო მედიანის სიგრძე – 3 სმ.

7 სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია: 16, 18 და 26. იპოვეთ უდიდესი გვერდის მედიანის სიგრძე.

8 სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეებია 7 და 11, მესამე გვერდის მედიანაა 6. იპოვეთ მესამე გვერდის სიგრძე.

9 სამკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძეა 26 დმ. მისი მედიანა კი – 16 დმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ორი სხვა გვერდის სიგრძეები, თუ მათი შეფარდებაა 3:5.

10 სამკუთხედის ფუძე უდრის 23-ს; ფერდების მედიანების სიგრძეები კი – 15-ს და $22\frac{1}{2}$-ს. იპოვეთ მესამე მედიანის სიგრძე.

11 პარალელოგრამის დიაგონალები ტოლია 12 სმ და 14 სმ, მათ შორის კუთხე კი 60°-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდების სიგრძეები.

გ

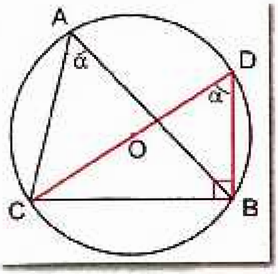
12 იპოვეთ a და b-ს მნიშვნელობები, რომელთათვისაც ტოლობა $\frac{5x+3}{(x-5)(x+2)}=\frac{a}{(x-5)}+\frac{b}{(x+2)}$ სრულდება x-ის ყველა დასაშვები მნიშვნელობისათვის.

13 მათემატიკოსებში ყოველი მეშვიდე ფილოსოფოსია, ხოლო ფილოსოფოსებში ყოველი მეცხრე მათემატიკოსია. ვინ მეტია ფილოსოფოსი თუ მათემატიკოსი?

3 სინუსების თეორემა

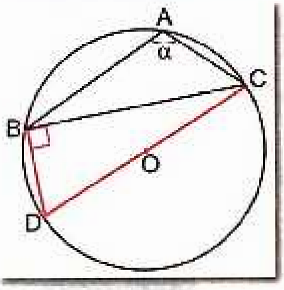
სინუსების თეორემა:

სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები მისი მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია.



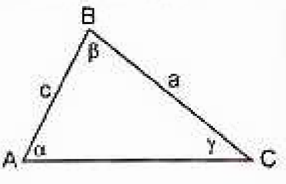
დამტკიცება:

მოცემული ABC სამკუთხედზე შემოვხაზოთ წრეწირი. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა A კუთხე მახვილია. A კუთხის გრადუსული ზომა აღვნიშნოთ α-თი, CB გვერდის სიგრძე კი a-თი.
C კუთხის წვეროდან გავატაროთ CD დიამეტრი. D და B წერტილები შევაერთოთ. ჩახაზული კუთხის თვისების თანახმად, ∠D=∠A=α, ხოლო კუთხე CBD მართია, როგორც დიამეტრზე დაყრდნობილი კუთხე. ΔCBD-დან, კუთხის სინუსის განმარტების თანახმად, $\sin\alpha=\frac{CB}{CD}$, საიდანაც, თუ ჩავსვამთ CB=a და CD=2R-ს მივიღებთ $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$, ან, რაც იგივეა, $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$.



ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა A კუთხე ბლაგვია. ანალოგიური აგების შედეგად მიღებული მართკუთხა BCD სამკუთხედიდან $\sin\angle BDC=\frac{a}{2R}$, მაგრამ $\angle BDC=180^\circ-\alpha$, საიდანაც $\sin\angle BDC=\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.

მაშასადამე, $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$. ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $\frac{b}{\sin\beta}=2R$ და $\frac{c}{\sin\gamma}=2R$. მაშასადამე, $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.



$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$

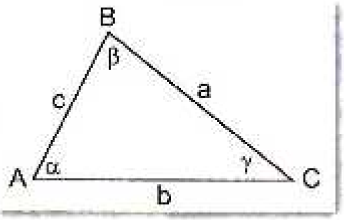
- მახვილკუთხა ABC სამკუთხედში sinA>sinB. შეადარეთ cos A და cos B.
- ABC მართკუთხა სამკუთხედში დაასახელეთ:
  ა) ჰიპოტენუზა, თუ $AC=\frac{BC}{\sin A}$;
  ბ) კათეტები, თუ $AB=\frac{AC}{\sin B}$.
- გაითვალისწინეთ სინუსების თეორემა ABC სამკუთხედისათვის და შეავსეთ ტოლობის მეორე მხარე.
  ა) AB:BC:AC= ბ) sinA:sinB:sinC=

მართალია თუ არა, რომ:

- კუთხე, რომლის სინუსიც ნულია, ვერ იქნება სამკუთხედის კუთხე.
- კუთხე, რომლის კოსინუსიც ნულია, ვერ იქნება სამკუთხედის კუთხე.

ამოცანა 1.

სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 2 სმ, 3 სმ და 4 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეების გრადუსული ზომები.



ამოხსნა:

მოც. ΔABC

$AB=2$ სმ; $BC=3$ სმ;

$AC=4$ სმ

უ.ვ. $\angle A$, $\angle B$ და $\angle C$

$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot \cos B$.

აქედან $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\dfrac{4+9-16}{2\cdot 2\cdot 3}=-\dfrac{1}{4}$.

ცხადია, $\angle B$ ბლაგვია. რადგან $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, მივიღებთ $\sin^2B=1-\cos^2B=$ $=\dfrac{15}{16}$, აქედან $\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. სინუსების თეორემის თანახმად $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$, ხოლო $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{16}{\sqrt{15}}$, საიდანაც ვპოულობთ $\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$, $\sin A=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$.

მივიღეთ ბლაგვკუთხა ABC სამკუთხედი ($\angle B>90^\circ$) (შევნიშნოთ, რომ ანალოგიური ტიპის ამოცანაში კოსინუსების თეორემით ვეძებთ დიდი სიგრძის მქონე გვერდის მოპირდაპირე კუთხეს, ხოლო დანარჩენი კუთხეების სინუსების პოვნა ცალსახად გვაძლევს კუთხეების ზომებს ($\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$)).

ამოცანა 2.

მოცემულია $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$. დაამტკიცეთ, რომ ამ სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსების შეფარდება მსგავსი სამკუთხედების შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია.

ამოხსნა:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A}=2R;\\ \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \dfrac{a_1}{\sin A_1}=2R_1\\ \Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \angle A=\angle A_1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin A}:\frac{a_1}{\sin A_1}=\frac{2R}{2R_1} \Rightarrow \frac{a}{a_1}=\frac{R}{R_1} \text{ რ.დ.გ.}$$

საავარჯიშოები:

1* იპოვეთ ABC სამკუთხედის კუთხის გრადუსული ზომა და დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეები, თუ: $b=5$, $\beta=30^\circ$, $\gamma=45^\circ$.

2 მოცემულია სამკუთხედის ორი გვერდი და მესამე გვერდის მოპირდაპირე კუთხე. იპოვეთ დანარჩენი ორი კუთხე და მესამე გვერდი, თუ: $a=12$, $b=8$, $\gamma=60^\circ$.

3 სამკუთხედში მოცემულია a, b გვერდების სიგრძეები და a გვერდის მოპირდაპირე α კუთხის გრადუსული ზომა. იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები და გვერდი, თუ:
ა) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120^\circ$; ბ) $a=2$, $b=4$, $\alpha=60^\circ$; გ) $a=6$, $b=8$, $\alpha=30^\circ$.

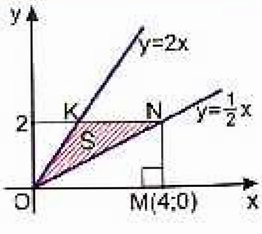
4 მოცემულია სამკუთხედის სამი გვერდის სიგრძე. იპოვეთ მისი კუთხეების გრადუსული ზომები, თუ: ა) $a=7$, $b=2$, $c=8$; ბ) $a=4$, $b=5$, $c=7$.

5 ABC სამკუთხედის კუთხის გრადუსული ზომა 150°-ია, ხოლო ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდის სიგრძე კი – 15 სმ. იპოვეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე.

6 ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძეა 16 სმ. AC გვერდის სიგრძე კი $16\sqrt{3}$ სმ-ია. იპოვეთ B კუთხის გრადუსული ზომა.

გ

7 იპოვეთ ნახაზზე დაშტრიხული სამკუთხედის ფართობი.

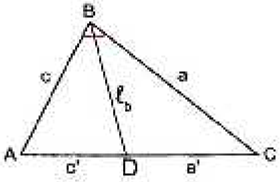


8 შეიძლება თუ არა 5×5 დაფა დავფაროთ 2×1 დომინოს ქვებით?

9 შეიძლება თუ არა, რომ რიცხვი, რომელიც ჩაიწერება 100 ნულით 100 ერთიანით და 100 ორიანით, იყოს სრული კვადრატი?

10 იპოვეთ $2003\cdot2004\cdot2005+2006^3$ რიცხვის 7-ზე გაყოფის ნაშთი.

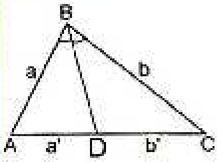
4 სამკუთხედის ბისექტრისის სიგრძისა და სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა



განვიხილოთ ABC სამკუთხედი. BD არის B კუთხის ბისექტრისა. BD-ს სიგრძე აღვნიშნოთ ℓ_b-თი. ვაჩვენოთ, რომ $\ell_b^2=ac-a'c'$.

გასახსენებლად!

სამკუთხედის კუთხის ბისექტრისა ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდს მიმდებარე გვერდების პროპორციულ მონაკვეთებად ყოფს.



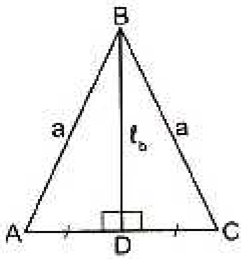
$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

დამტკიცება:

როგორც ვიცით, $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$; $c'=cx$ და $a'=ax$. $\angle ABD=\angle DBC\equiv\alpha$. BDC და BAD სამკუთხედებისათვის თუ გამოვიყენებთ კოსინუსების თეორემას, მივიღებთ, რომ $a^2x^2=a^2+\ell_b^2-2a\ell_b\cos\alpha$ და $c^2x^2=c^2+\ell_b^2-2c\ell_b\cos\alpha$. საიდანაც მივიღებთ, რომ $\frac{a^2+\ell_b^2-a^2x^2}{a}=\frac{c^2+\ell_b^2-c^2x^2}{c}$.

მაშასადამე, $a^2c+\ell_b^2c-a^2cx^2=ac^2+a\ell_b^2-ac^2x^2$.

$\ell_b^2(c-a)=ac(c-a)-acx^2(c-a)$, საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a\neq c$, მივიღებთ: $\ell_b^2=ac-acx^2=ac-ax\cdot cx=ac-a'c'$.

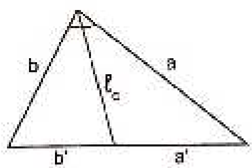


თუ $a=c$, მაშინ სამკუთხედი ABC ტოლფერდაა და BD ბისექტრისა ამავე დროს მედიანაცაა და სიმაღლეც, ე.ი. $\angle BDC=90°$; $DC=\frac{b}{2}\equiv a'$

$\ell_b^2=a^2-DC^2=a\cdot a-a'\cdot a'$. რ.დ.გ.

ანალოგიურად მივიღებთ A და C კუთხეების ბისექტრისების გამოსათვლელ ფორმულებს, ე.ი.

$$\ell_b^2=a\cdot c-a'\cdot c'$$
$$\ell_a^2=b\cdot c-b'\cdot c'$$
$$\ell_c^2=a\cdot b-a'\cdot b'.$$



დავამტკიცოთ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი კიდევ ერთი ფორმულა.

$$\boxed{S=\frac{abc}{4R},}$$

სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდების, ხოლო R კი ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძეა.

დამტკიცება:

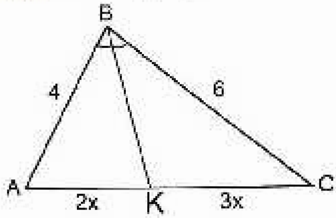
სინუსების თეორემის თანახმად, $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$. რ.დ.გ.

ამოცანა 1.

ABC სამკუთხედის AB, BC და AC გვერდების სიგრძეები შესაბამისად 4სმ, 6სმ და 5სმ-ია. იპოვეთ B კუთხის ბისექტრისის სიგრძე.

ამოხსნა:



მოც. ABC
AB=4 სმ; BC=6 სმ;
AC=5 სმ
$\angle ABK=\angle KBC$

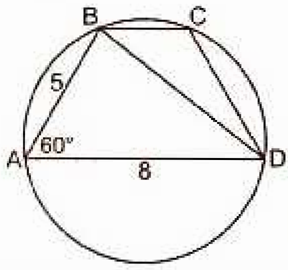
უ. გ. BK

სამკუთხედის ბისექტრისის თვისების თანახმად $\frac{AB}{BC}=\frac{AK}{KC}$.
აქედან $\frac{AK}{KC}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. მაშასადამე, AK=2x და KC=3x,
ხოლო AC=AK+KC=2x+3x=5x, მაგრამ AC=5სმ, მაშასადამე, x=1სმ. აქედან AK=2x=2სმ, ხოლო KC=3x=3სმ.

ABC სამკუთხედის BK ბისექტრისისათვის გამოვიყენოთ ბისექტრისის გამოსათვლელი ფორმულა: $BK^2=AB\cdot BC-AK\cdot KC=4\cdot6-2\cdot3=18$, საიდანაც $BK=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

პასუხი: $BK=3\sqrt{2}$სმ.

ამოცანა 2.



წრეწირში ჩახაზულია ტრაპეცია, რომლის ფერდის სიგრძეა 5სმ, დიდი ფუძის – 8სმ, ხოლო მახვილი კუთხის გრადუსული ზომაა 60°. იპოვეთ ამ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე.

ამოხსნა:

ცხადია, ეს წრეწირი შემოხაზულია ABD სამკუთხედზეც.
$BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\angle A\Rightarrow BD^2=25+64-2\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2}=49\Rightarrow$
$\Rightarrow BD=7$.

სინუსების თეორემის თანახმად: $\frac{BD}{\sin\alpha}=2R\Rightarrow R=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2}=\frac{7}{\sqrt{3}}$.

სავარჯიშოები:

1 BD მონაკვეთი ABC სამკუთხედის ბისექტრისაა, იპოვეთ BD მონაკვეთის სიგრძე, თუ AB=10 მ, BC=15 მ და AC=20 მ.

2 BD მონაკვეთი ABC სამკუთხედის ბისექტრისაა. იპოვეთ BC გვერდის სიგრძე, თუ AD: DC=8:5 და AB=16 მ.

3 BD მონაკვეთი ABC სამკუთხედის ბისექტრისაა. იპოვეთ AC გვერდის სიგრძე, თუ AB:BC=2:7 და DC–AD=1 მ.

4 სამკუთხედის პერიმეტრია 32. კუთხის ბისექტრისა ყოფს BC გვერდს 5-ის და 3-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე.

5* სამკუთხედის ბისექტრისა, რომელიც 9 სმ და 6 სმ-ის ტოლ გვერ-დებს შორის გადის, მესამე გვერდს ყოფს მონაკვეთებად ისე, რომ ერთი მათგანი მოცემული გვერდებიდან ერთ-ერთის ტოლია. იპოვეთ მესამე გვერდის სიგრძე.

6 ABC სამკუთხედში AC გვერდი b-ს ტოლია, AB გვერდი კი – c-ს ტოლი. A კუთხის ბისექტრისა BC გვერდს კვეთს D წერტილში ისე, რომ DA=DB. იპოვეთ BC გვერდის სიგრძე, თუ b=4 და c=5.

7* მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია 24 სმ და 18 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის მახვილ კუთხეთა ბისექტრისების სიგრძეები.

8 იპოვეთ შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების R და r რადიუსები სამკუთხედისათვის, რომლის გვერდებია: ა) 13, 14, 15; ბ) 15, 13, 4.

9 იპოვეთ სამკუთხედში ჩახაზული და იმავე სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსთა ნამრავლი, თუ სამკუთხედის გვერდებია 26, 28 და 30.

10 ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი უდრის 6-ს, ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე კი – 4-ს. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე.

11 წრეწირის ქორდა, რომელიც 16 სმ-ის ტოლია, დაშორებულია ცენტრიდან 15 სმ-ით. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოხაზულია ამ წრეწირზე, თუ ვიცით, რომ სამკუთხედის პერიმეტრი უდრის 200 სმ-ს.

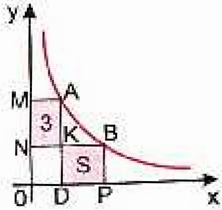
12 წრეწირის ერთი წერტილიდან გავლებულია 9 სმ და 17 სმ სიგრძის ორი ქორდა. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ მანძილი ქორდების შუაწერტილებს შორის უდრის 5 სმ-ს.

13 შეკვეცეთ წილადი: ა) $\frac{2a-1}{10a^2-a-2}$; ბ) $\frac{5x-1-6x^2}{4x^2-1}$.

14 დახაზეთ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც განსაზღვრულია [-8;8] შუალედზე, ამავე დროს ფუნქცია [-8;-3] შუალედში იყოს ზრდადი [-3;3] შუალედში კლებადი, ხოლო [3;8] შუალედში ისევ ზრდადი. დაასახელეთ თქვენ მიერ დახაზული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. ლუწია თუ კენტი ფუნქცია? რამდენი ნული აქვს? დაასახელეთ ისინი. დაწერეთ ფუნქციის ღერძებთან კვეთის წერტილები.

15 ააგეთ $f(x)=x^2+2x-8$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ:
ა) მისი ნულები;
ბ) ნიშანმუდმივობის შუალედები;
გ) ღერძებთან კვეთის წერტილები;
დ) ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

16 მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელზეც არჩეულია A და B წერტილები ნებისმიერად. იპოვეთ DKBP მართკუთხედის ფართობი S, თუ $S_{MAKN}=3$.



17* ამოხსენით რებუსი

```
 _ * * * * * * * | * *
   * * *         |--------
   -----         | * * 8 * *
       * *
    _
       * *
     -------
         * * *
       _
         * * *
       -------
             0
```

18 დაამტკიცეთ, რომ $(n^2+8n+15)$ არ გაიყოფა $n+4$-ზე არც ერთი ნატურალური n-ისთვის.

5 სამკუთხედების ამოხსნა (I)

შესაძლებელია თუ არა, რომ ამოვხსნათ:

- სამკუთხედი სამი კუთხით;
- სამკუთხედი სამი გვერდით;
- ტოლფერდა სამკუთხედი ფუძესთან მდებარე კუთხითა და შემოხაზული წრეწირის რადიუსით;
- მართკუთხა სამკუთხედი ჰიპოტენუზით;
- ტოლგვერდა სამკუთხედი სიმაღლით;
- სამკუთხედი ნებისმიერი სამი ელემენტით.

ამოხსნათ სამკუთხედი ნიშნავს, რომ მოცემული ელემენტების საშუალებით ვიპოვოთ მისი ყველა ელემენტი.

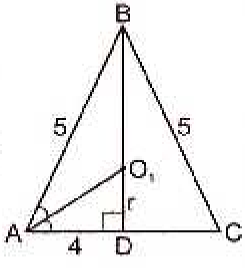
ტოლგვერდა სამკუთხედის ამოხსნისთვის საკმარისია ერთი ელემენტის (კუთხის გარდა) ცოდნა.

- შემდეგი მონაცემებიდან: ტოლგვერდა სამკუთხედის პერიმეტრი – P, ფართობი S, შემოხაზული წრეწირის რადიუსი R, ჩახაზული წრეწირის რადიუსი r; სიმაღლე h, შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსების ჯამი ან სხვაობა — $R+r$ და $R-r$. ამოარჩიეთ თითო-თითო, მიანიჭეთ რაიმე მნიშვნელობა და იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი.

ტოლფერდა და მართკუთხა სამკუთხედების ამოხსნისათვის საკმარისია ორი ელემენტის ცოდნა. ცხადია, ორივე არ უნდა იყოს კუთხე. განვიხილოთ რამდენიმე საინტერესო შემთხვევა.

ამოცანა 1.

ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა b, ფერდი კი a. იპოვეთ მანძილი ამ სამკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების ცენტრებს შორის, თუ $a+b=13$ და $a:b=5:8$.



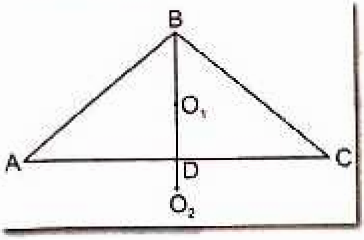
ამოხსნა:

$$\left.\begin{array}{l} a:b=5:8 \Rightarrow a=5x \text{ და } b=8x \\ a+b=13 \end{array}\right) \Rightarrow x=1 \text{ ე. ი. } a=5 \text{ და } b=8$$

$BD=h=3 \Rightarrow BO_1=3-r$ (O_1 ჩახაზული წრეწირის ცენტრია)

ΔABD-ში ბისექტრისის თვისების თანახმად მივიღებთ:

$\frac{5}{4}=\frac{3-r}{r} \Rightarrow 5r=12-4r \Rightarrow r=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$.



$\Delta ABD \Rightarrow \sin A=\frac{3}{5}$. ΔABD-დან სინუსების თეორემის თანახმად $\frac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow \frac{5\cdot 5}{3}=2R \Rightarrow R=\frac{25}{6}$. ე.ი. $R>h$, მაშასადამე, სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა და შემოხაზული წრეწირის O_2 ცენტრი სამკუთხედის გარეთ მდებარეობს.

$$\left.\begin{array}{l} BO_2=R=\frac{25}{6} \\ BD=h=3 \end{array}\right) \Rightarrow O_2D=\frac{25}{6}-3=\frac{25-18}{6}=\frac{7}{6}$$

$$O_1O_2=O_1D+O_2D=r+O_2D=\frac{4}{3}+\frac{7}{6}=\frac{15}{6}.$$

პასუხი: $O_1O_2=\frac{15}{6}$.

ამოცანა 2.

იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები a, b და c (c ჰიპოტენუზაა), თუ $a+b=7$ და $b+c=9$.

ამოხსნა:
თუ გამოვაკლებთ $b+c=9$ და $a+b=7$ ტოლობებს, მივიღებთ.
$b+c-(a+b)=9-7 \Rightarrow c-a=2 \Rightarrow c=a+2$ (I), $b=7-a$ (II).
პითაგორას თეორემის თანახმად $c^2=a^2+b^2$, სადაც I და II ტოლობების ჩასმით მივიღებთ $(a+2)^2=a^2+(7-a)^2 \Rightarrow a^2+4a+4=a^2+49-14a+a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2-18a+45=0$

$a=9\pm\sqrt{81-45}=9\pm 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=15 \\ a=3 \end{array}\right.$

ამოცანის პირობის გათვალისწინებით $a=3$. $b=4$ და $c=5$.

პასუხი: $a=3$; $b=4$ და $c=5$.

ამოცანა 3.

იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის a, b და c გვერდები, თუ $R+r=7$ და $c-a=4$.

ამოხსნა:

$R=\frac{c}{2}$; $r=\frac{a+b-c}{2}$

$\frac{c}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c-a}{2}=7 \Rightarrow \frac{c+b}{2}=9 \Rightarrow c+b=18$, საიდანაც $b=18-c$, ხოლო
$c-a=4$ ტოლობიდან მივიღებთ $a=c-4$ პითაგორას თეორემის თანახმად:
$c^2=(18-c)^2+(c-4)^2 \Rightarrow c^2-44c+340=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} c=34 & \text{I} \\ c=10 & \text{II} \end{array}\right.$

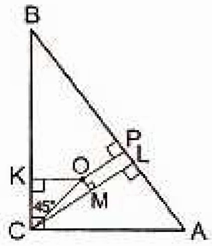
I $c=34$, $b=18-34$ $\varnothing$
II $c=10$, $b=8$, $a=6$.

პასუხი: $c=10$, $b=8$, $a=6$.

ამოცანა 4.

მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებია 3, 4 და 5. იპოვეთ მანძილი ჩახაზული წრეწირის ცენტრიდან სიმაღლემდე.

ამოხსნა:



O-ით აღვნიშნოთ ჩახაზული წრეწირის ცენტრი.

CO არის $\angle BCA$-ს ბისექტრისა, ე.ი. $\angle BCO=45°$. გავავლოთ $OK \perp BC$, ცხადია $OK=CK=r$, ხოლო $OC=r\sqrt{2}$.

$\Delta ABC \Rightarrow 5\cdot CL=3\cdot 4 \Rightarrow CL=\frac{12}{5}$.

$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{3+4-5}{2}=1$.

$CM=CL-ML=CL-r=\frac{12}{5}-1=\frac{7}{5}$.

$\Delta OCM \Rightarrow OM^2=OC^2-CM^2=(\sqrt{2})^2-\left(\frac{7}{5}\right)^2=2-\frac{49}{25}=\frac{1}{25} \Rightarrow OM=\frac{1}{5}$.

პასუხი: $OM=\frac{1}{5}$.

სხვადასხვაგვერდა, არამართკუთხა სამკუთხედისათვის საჭიროა სამი ელემენტის ცოდნა (ცხადია, არ შეიძლება, რომ სამივე იყოს კუთხე). განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 5.

იპოვეთ იმ სამკუთხედის გვერდები, რომლის სიმაღლეებია $\frac{\sqrt{15}}{2}$; $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ და $\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

ამოხსნა: $h_a=\frac{15\sqrt{15}}{2}$; $h_b=4\sqrt{15}$ და $h_c=\frac{60\sqrt{15}}{17}$.

$ah_a=bh_b=ch_c \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}=\frac{8}{15}$; $\frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b}=\frac{15}{17}$.

$a:b:c=8:15:17 \Rightarrow a=8x$; $b=15x$ და $c=17x$.

სამკუთხედის სამივე გვერდი გამოვსახეთ ერთი უცნობით, ე.ი. შეგვიძლია ჰერონის ფორმულით ფართობიც გამოვსახოთ x-ით. პერიმეტრის ნახევარი $p=20x$.

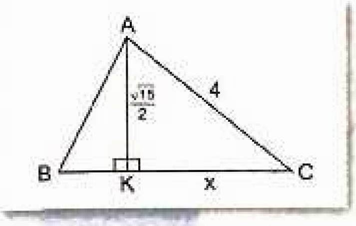
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{20x\cdot 12x\cdot 5x\cdot 3x}=60x^2$.

მეორე მხრივ, ფართობი შეიძლება გამოვთვალოთ გვერდით და მასზე დაშვებული სიმაღლით, ე.ი. $S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{8x\cdot\sqrt{15}}{2\cdot 2}$

მივიღეთ $60x^2=\frac{8x\cdot 15\sqrt{15}}{4} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

ე.ი. $a=4\sqrt{15}$; $b=\frac{15\sqrt{15}}{2}$; $c=\frac{17\sqrt{15}}{2}$.

ამოცანა 6.

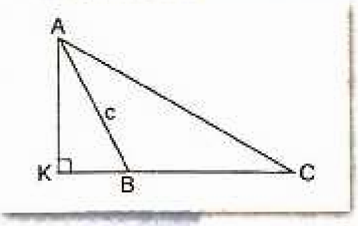


მოცემულია ΔABC. $a=3$; $h_a=\frac{\sqrt{15}}{2}$; $h_b=\frac{3\sqrt{15}}{8}$. იპოვეთ b და c.

ამოხსნა:

$ah_a=bh_b \Rightarrow b=\frac{ah_a}{h_b}=\frac{3\cdot\sqrt{15}\cdot 8}{2\cdot 3\sqrt{15}}=4$.

$\Delta AKC \Rightarrow x^2=4^2-\frac{15}{4}=\frac{49}{4} \Rightarrow x=\frac{7}{2}$.



მივიღეთ, რომ KC>BC, მაშასადამე სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა, კერძოდ $\angle B>90^0$.

$KB=KC-BC=\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}$.

$\Delta AKB \Rightarrow c^2=AK^2+KB^2=\frac{15}{4}+\frac{1}{4}=4 \Rightarrow c=2$.

პასუხი: $b=4$ და $c=2$.

სამკუთხედების ამოხსნა (II)

ახლა ვნახოთ, თუ როგორ შეიძლება ვიპოვოთ სამკუთხედის გვერდები მედიანებით და, პირიქით, მედიანები — გვერდებით.

როგორც ვიცით, სამკუთხედის მედიანა გვერდს ყოფს ორ ტოლ ნაწილად, ხოლო თავად მედიანა კი მედიანების კვეთის წერტილით იყოფა შეფარდებით 2:1 წვეროს მხრიდან. მაშასადამე, როცა სამკუთხედში გავლებულია მედიანები, თუ ვიცით რომელიმე მედიანის ან გვერდის სიგრძე, მაშინ ჩვენთვის ცნობილია მისი ნაწილების სიგრძეებიც. ამის გათვალისწინებით გთავაზობთ, გავამრავლოთ ან გავაწილოთ მოცემული მონაკვეთები, მაშინ ჩვენთვის ცნობილი იქნება გადაკვეთის შედეგად მიღებული ყოველი გაფერადებული მონაკვეთის სიგრძე. მედიანის ფორმულის გამოყენება ხშირად დაკავშირებულია ორ ან სამუცნობიანი ირაციონალური განტოლებების ამოხსნასთან, რასაც ამ მეთოდების გამოყენების შედეგად შეგვიძლია გვერდი ავუაროთ.

$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}$;

$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$;

$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.

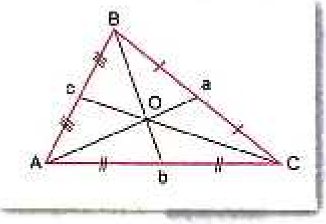
მედიანის ფორმულაში ფიგურირებს ოთხი სიდიდე — სამი გვერდის სიგრძე და ერთი მედიანის სიგრძე. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ სამკუთხედები, რომლებშიც ამ ოთხი სიდიდიდან სამი მოცემულია. მოცემულობები შეიძლება იყოს შემდეგი სახის:

ა) a; b; c; ბ) a; b; m_a; გ) a; b; m_c; დ) m_a; m_b; m_c;

ე) a; m_a; m_b; ვ) a; m_c; m_b.

ა) მოც. a; b; c

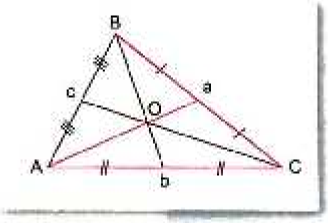
უ. ვ. m_a; m_b; m_c



ამ შემთხვევაში ABC სამკუთხედიდან ვიღებთ ერთუცნობიან განტოლებებს m_a, m_b და m_c-ს მიმართ.

ბ) მოც. a; b; m_a

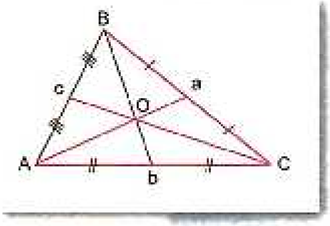
უ. ვ. c; m_b; m_c



ამ შემთხვევაში ვხედავთ, რომ წითელია ABC სამკუთხედის a და b გვერდები და m_a მედიანა. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}$ ფორმულით ვპოულობთ c-ს, ამის მერე ABC სამკუთხედის სამივე გვერდი განითლდება და m_b და m_c მედიანებისთვის გვაქვს უკვე „ა" შემთხვევა.

გ) მოც. a; b; m_c

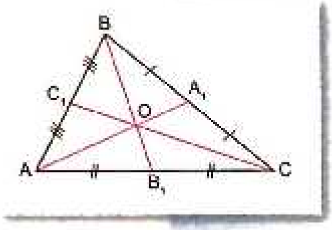
უ. ვ. c; m_a; m_b



ABC სამკუთხედში წითელია a და b გვერდები და m_c მედიანა. m_c-ს გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ ერთუცნობიან ანტოლებას c-ს მიმართ. c-ს პოვნის შემდეგ გვაქვს „ა" შემთხვევა.

დ) მოც. m_a; m_b; m_c

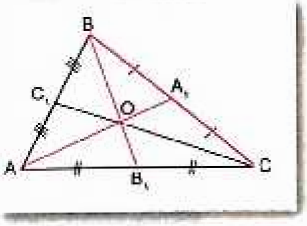
უ. ვ. a; b; c



OBC, OAC და OBA სამკუთხედებში წითელია სამ-სამი მონაკვეთი. ე.ი. ამ სამკუთხედებში OA_1, OC_1 და OB_1 მედიანების გამოსათვლელი შესაბამისი ფორმულის გამოყენებით, ერთუცნობიანი განტოლებებით ვიპოვით a, c და b-ს.

ე) მოც. $a;\ m_a;\ m_b$

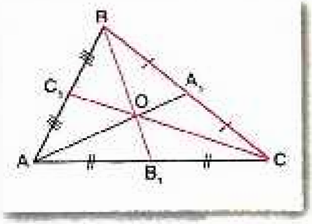
უ. ვ. $b;\ c;\ m_c$



BOC სამკუთხედში წითელია ორი გვერდი და OA_1 მედიანა. OA_1-ის მიმართ მედიანების ფორმულის გამოყენებით, ერთუცნობიანი განტოლებით ვიპოვით OC-ს სიგრძეს. OC-ს პოვნის მერე განითლდება CC_1 მონაკვეთი. AOC და BOC სამკუთხედებში OC_1 და OB_1-ის მიმართ მედიანების შესაბამისი ფორმულის გამოყენებით, ერთუცნობიანი განტოლებებით ვიპოვით b და c-ს.

ვ) მოც. $a;\ m_c;\ m_b$

უ. ვ. $b;\ c;\ m_a$



BOC სამკუთხედში სამი წითელი მონაკვეთი გვაქვს. ე.ი. ერთუცნობიანი განტოლებით OA_1 მედიანის მიმართ ვპოულობთ OA_1-ს. OA_1-ის პოვნის მერე განითლდება AA_1 მონაკვეთი და AOC და BOA სამკუთხედებშიც გვექნება თითო AC და AB შავი მონაკვეთი, საიდანაც, ანალოგიურად, OB_1 და OC_1 მედიანების მიმართ ფორმულის გამოყენებით ვპოულობთ b და c-ს.

სავარჯიშოები:

1 შემდეგი მონაცემებიდან ამოარჩიეთ სამეულები ისე, რომ სამივე არ იყოს გვერდი და იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები:

1. $a=13$;	**2.** $b=4$;	**3.** $c=15$;	**4.** $\sin A=0{,}8$;
5. $h_a=3\frac{9}{13}$;	**6.** $h_b=12$;	**7.** $h_c=3{,}2$;	**8.** $m_a=\frac{\sqrt{313}}{2}$;
9. $h_b=\frac{\sqrt{778}}{2}$;	**10.** $h_c=\frac{\sqrt{145}}{2}$;	**11.** $P=32$;	**12.** $S=24$;
13. $r=1{,}5$;	**14.** $R=8\frac{1}{8}$;	**15.** $\cos B=\frac{63}{65}$;	**16.** $a+b=17$;
17. $a:b=13:4$.			

2 ABC სამკუთხედში $AB=5$; $BC=7$. იპოვეთ $\sin A:\sin C$.

3 ამოხსენით სამკუთხედი, თუ $a=10$; $\alpha=40°$; $\beta=60°$.

4 იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები, თუ 20 სმ-ის სიგრძის დიაგონალი გვერდებთან ადგენს 45° და 75°-იან კუთხეებს.

5 ტოლფერდა ABC სამკუთხედში AB ფუძის სიგრძეა $10\sqrt{3}$სმ. იპოვეთ AD ბისექტრისის სიგრძე, თუ ფუძესთან მდებარე კუთხეა 30°.

6 სამკუთხედის მედიანის სიგრძეებია 5 სმ, 7 სმ და 10 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

7 ABC სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეებია 5 სმ და 10 სმ, ხოლო მესამე გვერდის მედიანის სიგრძეა 7 სმ. იპოვეთ მესამე გვერდის და დანარჩენი ორი მედიანის სიგრძეები.

8 სამკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძეა 12 სმ, ხოლო დანარჩენი ორი გვერდის მედიანების სიგრძეებია 8 სმ და 18 სმ. იპოვეთ მესამე მედიანის და დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეები.

---

9 სახანძრო მანქანის კიბე შეიძლია ამოიწიოს 20 მ, ხოლო მისი დახრილობა იყოს არაუმეტეს 70°-ის. რომელ სართულამდე შეიძლება აიწიოს კიბე, თუ კიბის ფუძე მიწიდან 2 მ-ზეა, ხოლო თითო სართულის სიმაღლე 3 მ-ია.

10 დაამთავრეთ ცხრილის შევსება, თუ a,b,c – სამკუთხედის გვერდებია, R და r — შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირის რადიუსების სიგრძეებია, S — ფართობი, P - პერიმეტრი.

a	b	c	R	r	P	S
3	4		2,5			
2		3	5			
3	4	5				
13	14	15				

11 ჩაწერეთ ფართობის გამოსათვლელი შესაბამისი ფორმულა:

სამკუთხედის ცნობილი ელემენტები	სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა
გვერდი და მასზე დაშვებული სიმაღლე	
სამი გვერდი	
ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე	
სამი გვერდი და შემოხაზული წრეწირის რადიუსი	

IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1* სამკუთხედში, რომლის გვერდების სიგრძეებია 9 სმ და 15 სმ, ჩახაზულია პარალელოგრამი ისე, რომ მისი ერთი გვერდი, სიგრძით 6სმ, მდებარეობს სამკუთხედის ფუძეზე, ხოლო დიაგონალები შესაბამისად სამკუთხედის გვერდების პარალელურია. იპოვეთ პარალელოგრამის მეორე გვერდის და სამკუთხედის ფუძის სიგრძეები.

2 ქორდა AB=15მ, ქორდა AC=21მ და ქორდა BC=24მ. D არის CB რკალის შუა წერტილი. იპოვეთ იმ მონაკვეთების სიგრძეები, რომლებადაც AD ქორდა ყოფს BC ქორდას.

3 სამკუთხედის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს ყოფს 8 სმ და 10 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები, თუ მასში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი ბისექტრისას ყოფს 3:2 შეფარდებით.

4* ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის სიგრძეა 48, ფერდისა კი – 30. იპოვეთ მანძილი შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების ცენტრებს შორის.

5 ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძის და ფერდის სიგრძეები შესაბამისად უდრის 5 სმ და 20 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხის ბისექ-ტრისის სიგრძე.

6* R და r-რადიუსიანი წრეწირების ცენტრებზე გამავალ წრფესა და საერთო გარე მხებს შორის კუთხის სიდიდე α-ს ტოლია. იპოვეთ ცენტრებს შორის მანძილი, თუ $R=10$, $r=6$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

7* წრეზე შემოხაზული მართკუთხა ტრაპეციის მახვილი კუთხის სიდიდეა 60°. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ მანძილი წრეწირის ცენტრიდან ტრაპეციის ბლაგვი კუთხის წვერომდე 10სმ-ია.

8* ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი უდრის b-ს, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე α-ს ტოლია. გამოთვალეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე, თუ $b=28$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{7}$.

9* პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეებია h_1 და h_2, კუთხე მათ შორის უდრის α-ს. იპოვეთ პარალელოგრამის დიდი დიაგონალის სიგრძე, თუ $h_1=0{,}5$სმ; $h_2=1$სმ; $\cos\alpha=\frac{3}{4}$.

10 იპოვეთ ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსები R და r სამკუთხედისათვის, რომლის გვერდებია:

ა) 35; 29; 8;　　　ბ) 4; 5; 7.

11 იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, რომლის ფუძეა 15 სმ, ფუძესთან მდებარე კუთხეები კი 30° და 45°.

12 ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 21სმ და 9სმ, ხოლო სიმაღლეა 8სმ. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე.

13 სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 25 სმ, 29 სმ და 36 სმ. უდიდესი გვერდისადმი გავლებულია სიმაღლე და ბისექტრისა. დაადგინეთ, რა სიგრძის მონაკვეთებად გაიყო ეს გვერდი?

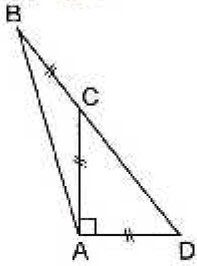
14 დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის უდიდესი მედიანა უმცირესი გვერდისადმია გავლებული.

15 თუ ფარგალი გაშლილია 30°-ზე, მისი ბოლოებით იზომება 11-ის ტოლი მონაკვეთი. რამდენ გრადუსზე უნდა გავშალოთ იგივე ფარგალი, რომ გაიზომოს 2-ის ტოლი მონაკვეთი?

16* ABC სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია a, b და c. დაადგინეთ სამკუთხედის სახე (მახვილკუთხა, მართკუთხა, ბლაგვკუთხა), თუ ცნობილია, რომ $a^3=b^3+c^3$.

17 დაადგინეთ სამკუთხედის სახე (მახვილკუთხა, მართკუთხა, ბლაგვკუთხა), თუ მისი მედიანა იმ შუახაზის ტოლია, რომელსაც იგი კვეთს.

18 სამკუთხედის გვერდებია AB=21სმ, BC=$\sqrt{7}$სმ, AC=3სმ. იპოვეთ A კუთხე და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.



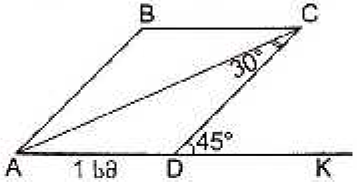
19 ΔABD-ში A წერტილიდან AD გვერდის მიმართ აღმართული მართობი BD გვერდს კვეთს C წერტილში. იპოვეთ AB, თუ BC=AC=AD=1სმ.

20* ABCD ტოლფერდა ტრაპეციაში AC დიაგონალი CD ფერდის მართობულია. იპოვეთ AD ფუძის სიგრძე, თუ AB=4სმ; BC=3 სმ და ∠ABC=120°.

21 ABCD ტოლფერდა ტრაპეციაში ფუძეები BC=5სმ; AD=9სმ; AB=CD=4სმ. იპოვეთ BD და ∠C.

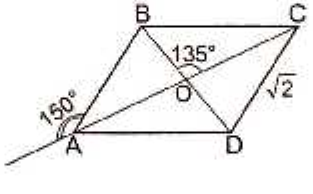
22 ABC ტოლფერდა სამკუთხედში ∠B=30°; AB=BC=$\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ AC ფუძე და ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

23 სამკუთხედში 1 სმ-ის სიგრძის გვერდის მიმდებარე კუთხეებია 30° და 105°. იპოვეთ 30 °-იანი კუთხის მოპირდაპირე გვერდის სიგრძე.



24 ნახაზის მიხედვით იპოვეთ ABCD პარალელოგრამის AC დიაგონალი.

25 ABCD პარალელოგრამში იპოვეთ BD დიაგონალი.



შეამოწმე შენი ცოდნა

I ვარიანტი

1 ABC სამკუთხედი ტოლფერდაა. დაასახელეთ სამკუთხედის ტოლი კუთხეები, თუ $AC^2>AB^2+BC^2$.

2 შეადარეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები, თუ $2AB^2<AB^2+BC^2<AC^2$.

3 დაადგინეთ ABC სამკუთხედის სახე, თუ $\sin\hat{B}=\cos\hat{A}$.

4 მოცემულია მახვილკუთხა ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები, ამასთან $AB=A_1B_1$; $BC=B_1C_1$ შეადარეთ სამკუთხედების ფართობები, თუ $\hat{B}>\hat{B}_1$.

5 მოცემულია ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები, ამასთან $AB=A_1B_1$ და $BC=B_1C_1$. შეადარეთ ამ სამკუთხედების ფართობები, თუ $\hat{B}<\hat{B}_1<90°$.

6 სამკუთხედები ABC და $A_1B_1C_1$ ერთი და იმავე წრეშია ჩახაზული. შეადარეთ BC და B_1C_1 გვერდები, თუ $\sin A>\sin A_1$.

7 მართალია თუ არა, რომ თუ სამკუთხედში, გვერდებით a, b და c სრულდება $a^2>b^2+c^2$, მაშინ მოცემული სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა.

8 შეიძლება თუ არა სამკუთხედის ამოხსნა ნებისმიერი სამი ელემენტით?

9 სამკუთხედები ABC და ABC_1 ჩახაზულია ერთსა და იმავე წრეწირში. შეადარეთ კუთხეები C და C_1, თუ $AC=AC_1$ და $BC>BC_1$.

10 პარალელოგრამის მახვილი კუთხეა 60°, გვერდები კი 6სმ და 8სმ. იპოვეთ მცირე დიაგონალის სიგრძე.

11 იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ a=12, b=8 და c=10.

12 იპოვეთ რომბის მცირე დიაგონალი, თუ ბლაგვი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლე გვერდს ყოფს 3 სმ და 7 სმ სიგრძის მონაკვეთებად.

II ვარიანტი

1 ABC სამკუთხედი ტოლფერდაა. დაასახელეთ სამკუთხედის ტოლი გვერდები, თუ $BC^2>AB^2+AC^2$.

2 შეადარეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები, თუ $2BC^2<AB^2+BC^2<AC^2$

3 დაადგინეთ ABC სამკუთხედის სახე, თუ $\sin C=\cos B$.

4 მოცემულია მახვილკუთხა ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები, ამასთან $AB=A.B_1$; $BC=B_1C_1$ შეადარეთ B და B_1 კუთხეები, თუ $S_{\Delta ABC}<S_{\Delta A_1B_1C_1}$.

5 მოცემულია ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები, ამასთან $AB=A_1B_1$ და $BC=B_1C_1$. შეადარეთ ამ სამკთხედების ფართობები, თუ $90°<\hat{B}<\hat{B}_1$.

6 სამკუთხედები ABC და $A_1B_1C_1$ ერთსა და იმავე წრეშია ჩახაზული. შეადარეთ AC და A_1C_2 გვერდები, თუ $\sin B<\sin B_1$.

7 მართალია თუ არა, რომ, თუ სამკუთხედში გვერდებით a, b და c სრულდება $a^2<b^2+c^2$, მაშინ მოცემული სამკუთხედი მახვილკუთხაა.

8 შეიძლება თუ არა სამკუთხედის ამოხსნა ორი გვერდით და შემოხაზული წრეწირის რადიუსით.

9 სამკუთხედები ABC და ABC_1 ჩახაზულია ერთსა და იმავე წრეწირში. წეადარეთ კუთხეები c და c_1, თუ $AC<AC_1$ და $BC=BC_1$.

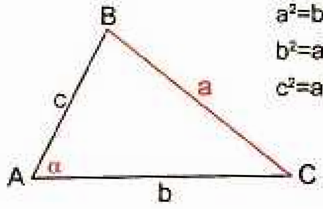
10 პარალელოგრამის მახვილი კუთხეა 60°, გვერდები კი 6სმ და 8სმ. იპოვეთ დიდი დიაგონალის სიგრძე.

11 იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ $a=12$, $b=8$ და $\alpha=75°$.

12 ABC ტოლფერდა სამკუთხედის AB ფუძის სიგრძეა 6 სმ. AN და BM მედიანები იკვეთება O წერტილში. იპოვეთ AN, თუ $\angle MOA=60°$.

IV თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

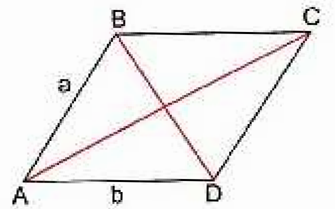
კოსინუსების თეორემა



$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$

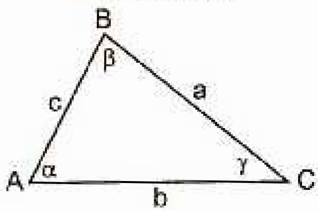
$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$



$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$,
სადაც d_1 და d_2 პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეებია.

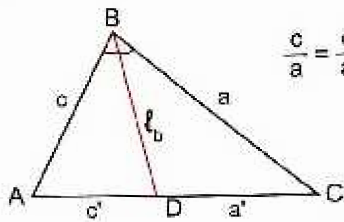
სინუსების თეორემა



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

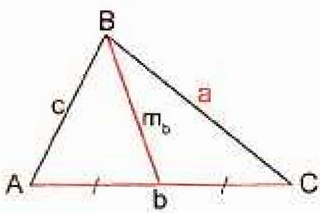
სადაც R არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე.

სამკუთხედის ბისექტრისის თვისება



$$\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$$

სამკუთხედის მედიანის გამოსათვლელი ფორმულა



$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$

სამკუთხედის ბისექტრისის გამოსათვლელი ფორმულა

$\ell_b^2=a\cdot c-a'\cdot c'$

$\ell_a^2=b\cdot c-b'\cdot c'$

$\ell_c^2=a\cdot b-a'\cdot b'$.

სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

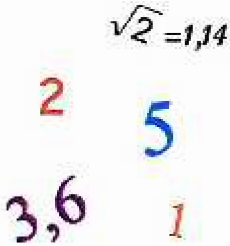
$$S=\frac{abc}{4R}$$

V თავი

ამ თავში გავეცნობით რაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხს, მის თვისებებს. თვლის სისტემებს.

შევძლებთ რაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხის შემცველი გამოსახულებების გამარტივებას, რიცხვის ჩაწერას სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში ერთი პოზიციური სისტემიდან მეორეში რიცხვის გადაყვანას.

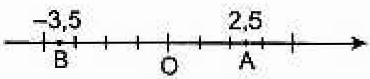
1 ნამდვილი რიცხვები



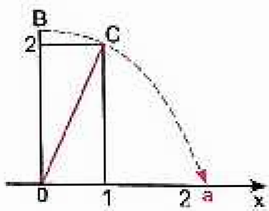
1. ქვემოთ მოცემული რიცხვებიდან რომელია რაციონალური და რომელი ირაციონალური?
$\frac{5}{6}$; 0,712712...; 2,01201120112...; π; $\sqrt{9}$.

2. აღწერეთ, როგორ მოვძებნოთ რიცხვით ღერძზე –2-ის; $\frac{3}{4}$-ის; 5,3-ის შესაბამისი წერტილი.

როგორც ვიცით, ყოველი რაციონალური რიცხვი გეომეტრიულად შესაძლებელია გამოისახოს რიცხვითი წრფის რომელიღაც გარკვეული წერტილით.

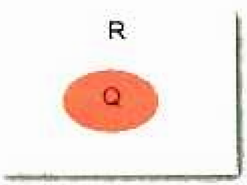


■ ჩამოაყალიბეთ შებრუნებული დებულება. არის თუ არა შებრუნებული დებულება ჭეშმარიტი?



■ გაიხსენეთ ამოცანები, რომლებსაც უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადებამდე მივყავართ.

■ მოიყვანეთ ირაციონალური რიცხვების მაგალითები.

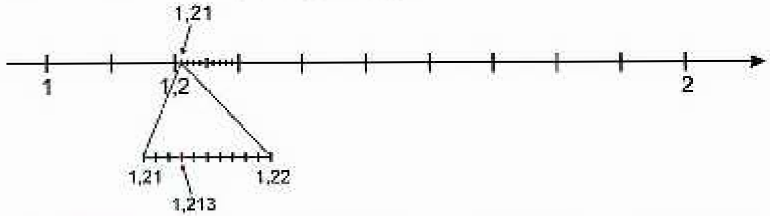


რაციონალური და ირაციონალური რიცხვები ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ქმნიან.

დავამყაროთ შესაბამისობა ნამდვილ რიცხვებსა და რიცხვითი წრფის წერტილებს შორის.

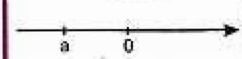
I. სასრული ათწილადის შესაბამისი წერტილის მოსაძებნად საკმარისია ერთეული მონაკვეთი დავყოთ 10, შემდეგ 100 (თითოეული დანაყოფი კიდევ 10 ტოლ ნაწილად), 1000 და ა.შ. ტოლ ნაწილებად. მიღებული დაყოფის წერტილები შეესაბამებიან „ათწილადებს":

მაგალითად, $1,213=1+\frac{2}{10}+\frac{1}{100}+\frac{3}{1000}$.



ყოველი რაციონალური რიცხვი გეომეტრიულად შესაძლებელია გამოისახოს რიცხვითი წრფის რომელიღაც გარკვეული წერტილით.

a _?_ 0



a _?_ 0

თუ სასრული ათწილადი მძიმის შემდეგ n ნიშანს შეიცავს, მაშინ მას აქვს სახე:

$a=a_0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n=a_0+10^{-1}a_1+10^{-2}a_2+10^{-3}a_3+\ldots+10^{-n}a_n$.

II. ვთქვათ, a ნამდვილი რიცხვი პერიოდული ათწილადი, ან ირაციონალური რიცხვია. ისევ დავყოთ მონაკვეთი 10, 100, 1000 და ა.შ. ტოლ ნაწილებად.

■ აღმოჩნდება თუ არა P(a) წერტილი დაყოფის წერტილებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

დიახ, რა თქმა უნდა, P(a) წერტილი ყოველთვის მოთავსებული იქნება დაყოფის შედეგად მიღებული ინტერვალის შიგნით.

მაგალითად, განვიხილოთ, როცა ა) $a=\frac{1}{3}$; ბ) $a=\sqrt{2}$.

ა) $\frac{1}{3}=0,(3)$;

$$0<0,(3)<1$$
$$0,3<0,(3)<0,4$$
$$0,33<0,(3)<0,34$$
$$0,333<0,(3)<0,334$$
$$0,3333<0,(3)<0,3334$$
$$\text{- - - - - - - -}$$
$$0,\overbrace{33\ldots3}^{n}3<0,(3)<0,\overbrace{33\ldots3}^{n}4$$
$$\text{- - - - - - - -}$$

ბ)

$$1<\sqrt{2}<2$$
$$1,4<\sqrt{2}<1,5$$
$$1,41<\sqrt{2}<1,42 \qquad (1)$$
$$1,414<\sqrt{2}<1,415$$
$$1,4142<\sqrt{2}<1,4143$$
$$\text{- - - - - - - -}$$

ადვილად შეამჩნევთ, რომ თუ ეს პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება, მაშინ ყოველი შუალედი შეიცავს 0,(3) (შესაბამისად $\sqrt{2}$-ს), ყოველი მომდევნო შუალედი კი წინას ქვესიმრავლეა და შუალედების სიგრძეც თანდათან მცირდება.

$\sqrt{2}$ მდებარეობს შუალედში	სეგმენტის სიგრძე
[1;2]	1
[1,4;1,5]	0,1
[1,41;1,42]	0,01
[1,414;1,415]	0,001
[1,4142;1,4143]	0,0001
------------------------	------------------------

ნახ. 1

ჩაკეტილ შუალედს სეგმენტი ეწოდება.

[2;5] სეგმენტია.

შევადგინოთ ცხრილი: გავითვალისწინოთ – $(\sqrt{2})^2=2$.

I ეტაპი: ვიპოვოთ ერთი ერთეული სიგრძის შუალედი, რომელშიც მოთავსებულია .

II. ვიპოვოთ $\sqrt{2}$-ის შემცველი 0,1 სიგრძის შუალედი, რისთვისაც განვიხილოთ რიცხვები [1;2] შუალედიდან 0,1 ბიჯით და მათი კვადრატები შევადაროთ $(\sqrt{2})^2=2$-ს.

III. განვიხილოთ რიცხვები [1,4;1,5] შუალედიდან 0,01 ბიჯით და ა. შ.

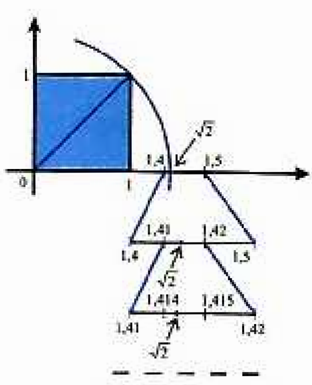
გასახსენებლად!

2,36≈2,4

რადგან 6≥5.

2,34≈2,3

რადგან 4<5.



მიახლოებითი მნიშვნელობა	მიახლოებითი მნ-ის კვადრატი	შედარება $\sqrt{2}$-თან	შუალედი, რომელსაც ეკუთვნის $\sqrt{2}$
1	$1<\sqrt{2}^2$	$1<\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\in[1;2]$
2	$4>2$	$2>\sqrt{2}$	
1,1	$1,21<2$	$1,1<\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\in[1,4;2,5]$
1,2	$1,44<2$	$1,2<\sqrt{2}$	
1,3	$1,69<2$	$1,3<\sqrt{2}$	
1,4	$1,96<2$	$1,4<\sqrt{2}$	
1,5	$2,25>2$	$1,5>\sqrt{2}$	
1,41	$1,9881<2$	$1,41<\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\in[1,41;1,42]$
1,42	$2,0164>2$	$1,42>\sqrt{2}$	
1,411			

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ:

$1,414<\sqrt{2}<1,415$

$1,4142<\sqrt{2}<1,4143$ $\quad\sqrt{2}\in[1,4142;2,4143]$

— — — — — —

— — — — — —

ე.ი. $\sqrt{2}\approx 1,41$

ნახაზზე მოცემულია სეგმენტთა მიმდევრობა, რომელთაგან თითოეული შეიცავს $\sqrt{2}$-ს და ყოველი მომდევნო შუალედი წინას ქვესიმრავლეა, ამასთან შუალედების სიგრძე უფრო და უფრო მცირდება — ხდება „რაგინდ მცირე".

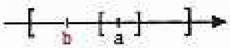
სეგმენტთა ასეთ მიმდევრობას ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა ეწოდება.

„რაგინდ მცირე" ნიშნავს: როგორი მცირე დადებითი რიცხვიც არ უნდა დავასახელოთ, სეგმენტთა განხილულ მიმდევრობაში (ნახ. 1), მოიძებნება ამ რიცხვზე ნაკლები სიგრძის სეგმენტი.

არსებობს ერთადერთი a რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობის ყოველ სეგმენტს.

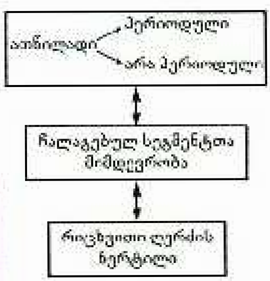
დავუშვათ, რომ ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობის ყოველ სეგმენტს, a რიცხვის გარდა, ეკუთვნის კიდევ რაიმე $b \neq a$ რიცხვი.

ვთქვათ, $b < a$, მაშინ მიმდევრობის ყოველი სეგმენტის სიგრძე ნაკლები არ იქნება $(a-b)$ რიცხვზე, ეს კი ეწინააღმდეგება ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობის განმარტებას. ე.ი. ასეთი b რიცხვი არ არსებობს.



ჩამოწერეთ ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა, რომლის ყოველი სეგმენტი შეიცავს $\frac{1}{3}$-ს, $\frac{1}{6}$-ს.

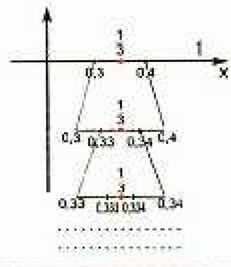
ირაციონალური წერტილებით „შევსო" რიცხვითი ღერძი.



ამრიგად, ნებისმიერი a რიცხვისთვის არსებობს ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა, რომლის ყოველი სეგმენტი შეიცავს a რიცხვს. თუ ამ ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობას განვიხილავთ რიცხვით ღერძზე, მაშინ იარსებებს რიცხვითი ღერძის ერთადერთი წერტილი, რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის ყველა სეგმენტს. სწორედ ეს წერტილი იქნება მოცემული a რიცხვის შესაბამისი წერტილი.

რიცხვითი წრფის ნებისმიერ წერტილს შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი და, პირიქით, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება რიცხვითი წრფის ერთადერთი წერტილი.

განვიხილოთ ჯამი: $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$. თუ თითოეული შესაკრების შესაბამის ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობის სეგმენტთა საწყის და ბოლო წერტილებს შესაბამისად შევკრებთ, მივიღებთ ახალ – ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობას, რომლის ყოველი სეგმენტი შეიცავს ერთადერთ რიცხვს და ეს რიცხვი იქნება $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$.



ე.ი.

$$1<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<3$$
$$1,7<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1,9$$
$$1,74<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1,76$$
$$1,747<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1,749$$
$$1,7475<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1,7477$$
$$1,74754<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1,74756$$

- -

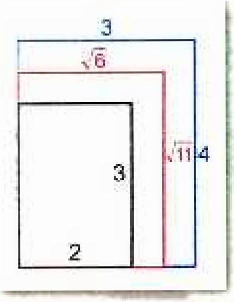
ასევე განიმარტება ორი, ნამდვილი, a და b რიცხვების ნამრავლი, სხვაობა, შეფარდება. ამ განსაზღვრათა საფუძველზე შესაძლებელია ვაჩვენოთ, რომ ირაციონალურ რიცხვებზე გადასვლისას არ ირღვევა არითმეტიკის კანონები.

(1) ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობაში რიცხვები:

1; 1,4; 1,41; 1414; 1,4142; 1,41421... არია $\sqrt{2}$-ის
0; 0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; 0,33333... არის $\frac{1}{3}$-ის... — ათწილადი მიახლოებანი ნაკლებობით.
ხოლო
2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422... არის $\sqrt{2}$-ის
1; 0,4; 0,34; 0,334; 0,3334; 0,33334... არის $\frac{1}{3}$-ის... — ათწილადი მიახლოებანი მეტობით.

შევნიშნოთ, რომ ნამდვილი რიცხვის თითოეული ათწილადი მიახლოება რაციონალური რიცხვია.

მაგალითი.



გამოვთვალოთ მართკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდების სიგრძე ირაციონალური რიცხვებით გამოისახება. ვთქვათ, წითელი მართკუთხედის გვერდებია $a=\sqrt{11}$ სმ და $b=\sqrt{6}$ სმ.

$\sqrt{6}$-სთვის ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა იქნება:

[2; 3]; [2,4; 2,5]; [2,44; 2,45]; [2,449; 2,450]; ...

$\sqrt{11}$-სთვის კი – [3; 4]; [3,3; 3,4]; [3,31; 3,32]; [3,316; 3,317]; ...

აქედან გამომდინარე, წითელი მართკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი რიცხვისათვის ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა იქნება: [2·3; 3·4]; [2,4·3,3; 2,5·3,4]; [2,44·3,31; 2,45·3,32]; [2,449·3,316; 2,450·3,317]; ..., რომელიც $\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}$ ნამრავლისთვისაც ასევე ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობაა. ე.ი. მოცემული მართკუთხედის ფართობია $\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}=$ $=\sqrt{66}\approx8,08$ სმ².

თუ მართკუთხედის გვერდების სიგრძეებია a და b, სადაც a, b∈R, მაშინ მართკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=ab$$

სავარჯიშოები:

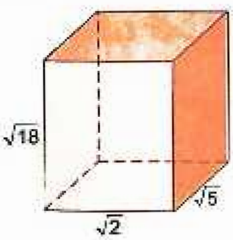
1 რომელ ორ ერთმანეთის მომდევნო მთელ რიცხვს შორის მდებარეობს:
ა) $\sqrt{65}$; ბ) $\sqrt{89}$; გ) $\sqrt{139}$; დ) $\sqrt{640}$.

2 იპოვეთ 0,01 სიგრძის ინტერვალი, რომელშიც მდებარეობს:
ა) $\sqrt{5}$; ბ) $\sqrt{6}$; გ) $\sqrt{13}$; დ) $\sqrt{3}$; ე) $\sqrt{7}$.

3 ჩამოწერეთ ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა a რიცხვისთვის და რიცხვის ათწილადი მიახლოებანი ნაკლებობით, მეტობით, თუ:
ა) $a=\sqrt{3}$; ბ) $a=\sqrt{7}$.

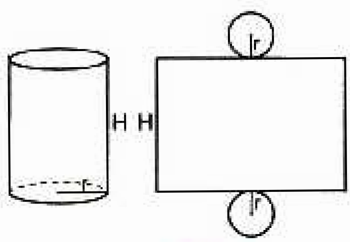
4 იპოვეთ კალკულატორის მეშვეობით (პასუხი დაამრგვალეთ მეასედამდე):
ა) $3+\sqrt{15}$; ბ) $\sqrt{5}-\sqrt{30}$; გ) $\sqrt{22}-\sqrt{10}+\sqrt{14}$.

5 იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი და პერიმეტრი (მეასედებამდე სიზუსტით), თუ მისი გვერდების სიგრძეებია:
ა) $a=\sqrt{7}$ სმ; $b=\sqrt{12}$ სმ; ბ) $a=\sqrt{8}$ სმ; $b=\sqrt{5}$ სმ;
გ) $a=2$ სმ; $b=\sqrt{6}$ სმ; დ) $a=3\sqrt{2}$ სმ; $b=7{,}12$ სმ;
ე) $a=3{,}31$ სმ; $b=\sqrt{3}$ სმ; ვ) $a=2{,}51$ სმ; $b=2\sqrt{5}$ სმ.

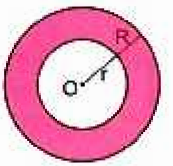


6 იპოვეთ ნახაზზე მოცემული მართკუთხა პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

7 ნახაზზე მოცემულია ცილინდრის შლილი. იპოვეთ ცილინდრის ზედაპირის ფართობი მეათედამდე სიზუსტით, თუ $H=\sqrt{30}$, $r=\sqrt{3}$.



8 იპოვეთ რგოლის ფართობი მეასედამდე სიზუსტით, თუ $R=\sqrt{26}$ და $r=\sqrt{12}$.

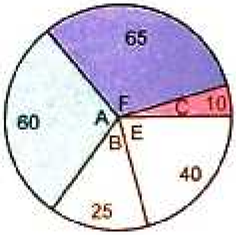


9 იპოვეთ:
ა) $N\cup Z$; ბ) $Z\setminus N$; გ) $Z\cup Q$; დ) $C_Q Z$.

10 ჩაწერეთ სათანრიგო შესაკრებებად:
ა) 25,703; ბ) 3007,05; გ) 3701,251; დ) 137,1374.

11 რამდენ ქორდას განსაზღვრავს წრეწირის ხუთი წერტილი?

12 რამდენნაირად შეიძლება გავაკეთოთ თაიგული ორი მიხაკისა და სამი ვარდისაგან, თუ თაიგული სამი ყვავილისაგან უნდა შედგებოდეს.



13 წრიულ დიაგრამაზე გამოსახულია პარლამენტის შემადგენლობა პროფესიათა მიხედვით. A აღნიშნავს იურისტებს, B – ბიზნესმენებს, E – ეკონომისტებს, C – მეცნიერებს, F – სხვა პროფესიების წარმომადგენლებს.

1) პარლამენტართა მთლიანი რაოდენობის რამდენი პროცენტია იურისტები?

ა) 60; ბ) 45; გ) 40; დ) 30.

2) პარლამენტართა რა ნაწილია ბიზნესმენი?

ა) 1/6; ბ) 1/4; გ) 1/8; დ) 2/7.

3) რას უდრის კუთხის გრადუსული ზომა?

ა) 60°; ბ) 35°; გ) 40°; დ) 45°.

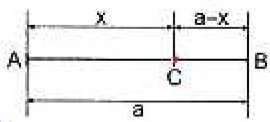
4) რამდენით ნაკლებია „სხვა პროფესიის“ პარლამენტართა რაოდენობა დანარჩენი პარლამენტარების რაოდენობასთან შედარებით?

ა) 60-ით; ბ) 70-ით; გ) 40-ით; დ) 80-ით.

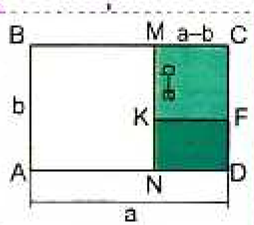
პროექტი:

ჯერ კიდევ პითაგორელებმა იცოდნენ მონაკვეთის ოქროს კვეთით გაყოფა.

გავიხსენოთ: ამბობენ, რომ C წერტილი ახდენს AB მონაკვეთის „ოქროს კვეთას", თუ $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$



$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x} \qquad (1)$$



$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}$$

ABCD „ოქროს მართკუთხედია", ასევე MKFC-ც „ოქროს მართკუთხედია" და ა.შ.

ა) დაამტკიცეთ, რომ $\frac{a}{b}$ ირაციონალური რიცხვია.

ბ) თუ $\frac{a}{x}\equiv\phi$, მაშინ (1) ტოლობა მიიღებს სახეს (აჩვენეთ თავად).

$$\phi=\frac{1}{\phi-1}$$

იპოვეთ ϕ-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა (მეათასედამდე სიზუსტით).

გ) აჩვენეთ: ϕ-ს შებრუნებული რიცხვი ϕ-ზე 1-ით მეტია.

„ოქროს კვეთას“ იყენებდნენ ხუროთმოძღვრებასა და ხელოვნებაში. ბევრ ხუროთმოძღვრულ შედევრში „ოქროს კვეთის“ პროპორციაა გამოყენებული.

„ოქროს კვეთის" პროპორციებითაა აგებული:

პართენონი ათენში

სიგრძე დაახლოებით $\varphi \approx 1,618$-ჯერ მეტია სიმაღლეზე

პირამიდების კომპლექსი გიზაში

მცხეთის ჯვარი

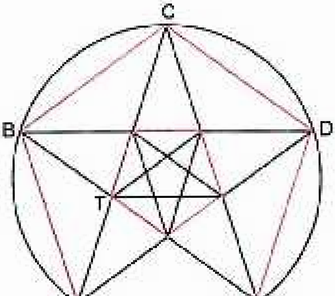
ადამიანის სხეულის იდეალური პროპორციები დაკავშირებულია φ რიცხვთან.

„ოქროს კვეთის" გამოყენების ერთ-ერთი საუკეთესო მაგალითია წრეწირში წესიერი ათკუთხედისა და მისი საშუალებით წესიერი ხუთკუთხედის (ასევე ხუთქიმიანი ვარსკვლავის) აგება.

აჩვენეთ, რომ: ა) წესიერი ხუთკუთხედის ყოველი დიაგონალი მოპირდაპირე გვერდის პარალელურია;

ბ) CDET პარალელოგრამია;

გ) ხუთქიმიანი ვარსკვლავისებური წესიერი ხუთკუთხედის თითოეული გვერდი მეორე გვერდით იყოფა „ოქროს კვეთით".



$\frac{AC}{TC}=\frac{TC}{AT}$ თუ $TC \equiv b$ და $AC \equiv a$ მაშინ $\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}$.

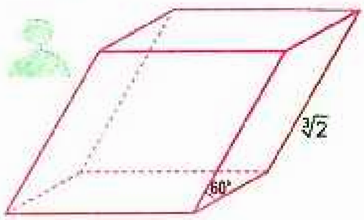
„ოქროს კვეთის" ფორმულა $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$, პითაგორელებმა (ძვ.წ.VI ს.) არისტოკრატიის სიმბოლოდ აღიარეს, ხოლო ხუთქიმიანი ვარსკვლავისებური ხუთკუთხედი ე.წ. პენტაგრამა ბედნიერების, ჯანმრთელობის, სიმტკიცის სიმბოლოდ და პითაგორელთა კავშირის ემბლემად.

„ოქროს კვეთის" პროპორციის პირველი აღმომჩენი იყო პითაგორას მოსწავლე ჰიპასის მეტაპონტელი. მონაკვეთის გაყოფა ოქროს კვეთით მოცემულია ევკლიდეს „საწყისების" მეორე წიგნის მე-11 წინადადებაში (ძვ. წ. III ს.).

მოიძიეთ ინფორმაცია და დაამუშავეთ თემა: ოქროს კვეთა და პითაგორელების სკოლა. ოქროს კვეთის გამოვლენა ბუნებასა და ხელოვნებაში.

თემის დასამუშავებლად ისარგებლეთ წიგნის ბოლოში მითითებული ლიტერატურით და ინტერნეტ მისამართით.

2 ირაციონალური გამოსახულების გამარტივება



რამდენი კილოგრამი საღებავი დაჭირდება პარალელეპიპედის ფორმის ყუთის შეღებვას, თუ 1მ^2 ზედაპირის შესაღებად საჭიროა 0,3 კგ საღებავი? ამასთან, ცნობილია, რომ პარალელეპიპედის წახნაგები ტოლი რომბებია, რომელთა გვერდები $\sqrt[3]{2}$ მ-ის ტოლია, ხოლო მახვილი კუთხეა 60°.

ამ დავალების შესასრულებლად დაგჭირდებათ $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}$ – ირაციონალური გამოსახულების გამარტივება, რისთვისაც საჭიროა n–ური ხარისხის ფესვის თვისებების გამოყენება.

■ რომელი ტოლობაა ჭეშმარიტი და რომელი არა?

		ჭ	მ
1.	$\sqrt{a^n} = \sqrt{a}^{\,n}$		
2.	$\sqrt{a}^{\,n} = \sqrt{a^n}$		
3.	$a\sqrt{ab^2} = \sqrt{a^3b^2}$		
4.	$a\sqrt{ab} = \sqrt{a^3b}$		
5.	$\sqrt{a^2} = a$		
6.	$\sqrt{a}^{\,2} = a$		

გასახსენებლად!

ნებისმიერი $n,m,k\in N$ და $a,b\geq 0$ რიცხვებისთვის სრულდება:

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b\neq 0$.

$\forall a\in R$-თვის

$\sqrt[n]{a^n}=a$, თუ n კენტია

$\sqrt[n]{a^n}=|a|$, თუ n ლუწია

$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$, თუ n კენტია

$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{|a^m|}$, თუ n ლუწია

■ აჩვენეთ, რომ ირაციონალური რიცხვია:

ა) $\sqrt{3}$ ბ) $\sqrt{5}$; გ) $2+\sqrt{3}$; დ) $3-\sqrt{7}$.

■ გავიხსენოთ n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვის თვისებები.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ ფესვის მნიშვნელობა:

ა) $\sqrt[3]{125}$; ბ) $\sqrt{2^6}$; გ) $\sqrt[3]{2^6}$; დ) $\sqrt{(-3)^2}$.

2 გაამარტივეთ.

ა) $\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2y^4}$; ბ) $\sqrt{9a^{-4}}$; გ) $\sqrt{a^{-2}}$; დ) $\sqrt[3]{\dfrac{64a^{-12}b^{15}}{125c^{-6}d^{3}}}$.

3 გამოიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის გარეთ:

ა) $\sqrt{54}$; ბ) $\sqrt[4]{a^5}$; გ) $\sqrt[5]{3x^{10}y^7}$; დ) $\sqrt{c^6d^5}$;

ე) $\sqrt{a^2b^3}$; ვ) $\sqrt[4]{x^5y^5}$; ზ) $\sqrt[4]{x^5y^7}$; თ) $\sqrt[4]{x^6y^6}$;

ი) $\sqrt{a^{2n}b^{3n}}$; კ) $\sqrt[4]{x^{2n+1}}$; ლ) $\sqrt[n]{3\cdot x^{2n+1}}$; მ) $\sqrt[m]{\frac{a^{n+2}}{b^{m+1}}}$.

4 დაალაგეთ ზრდის მიხედვით:

ა) $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2}$; ბ) $\sqrt[7]{5}$; $\sqrt[5]{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{2}$.

შეიტანეთ მამრავლი რადიკალის ნიშნის ქვეშ:

5 ა) $2\sqrt{2}$; ბ) $2\sqrt[3]{2}$; გ) $2\sqrt[5]{2}$; დ) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

6 ა) $a\sqrt[4]{a}$; ბ) $a\sqrt[4]{-a}$; გ) $-a\sqrt[4]{a}$; დ) $-a\sqrt[4]{-a}$;

ე) $a\sqrt[3]{-a}$; ვ) $-a\sqrt[3]{a}$; ზ) $a\sqrt[3]{-a}$; თ) $-a\sqrt[3]{-a}$;

7 ა) $ab\sqrt{\frac{b}{a}}$; ბ) $\frac{m}{n}\sqrt{\frac{n}{m}}$; გ) $ab\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ თუ $\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}$; დ) $mn^2\sqrt{m^2n}$.

8 ა) $(5-a)\sqrt{\frac{-a}{5-a}}$; ბ) $(5-a)\sqrt{\frac{2-a}{5-a}}$; გ) $(a^2-25)\sqrt{\frac{a}{a^4-5^4}}$, თუ $a-5>0$.

შეასრულეთ მოქმედებანი:

9 ა) $(\sqrt{5}+3\sqrt{20}-\sqrt{45})+(\sqrt{72}-\sqrt{80})$;

ბ) $(5\sqrt{a}-3\sqrt{25a})-(2\sqrt{36a}-2\sqrt{49a})$;

გ) $(5\sqrt{4x}+4\sqrt{x}-6\sqrt{9x}-8\sqrt{2x})-(8\sqrt{x}+\sqrt{18x}+\sqrt{2x})$;

დ) $\left(3\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{108}\right)-\left(16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-4\sqrt[3]{\frac{1}{3^2}}\right)$;

ე) $\sqrt{\frac{(x^2-y^2)(x-y)}{8x^2}}\cdot\sqrt{\frac{2x}{(x^2-y^2)(x-y)}}\cdot\sqrt{2x^4+2x^3y}$.

10 ა) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}$; ბ) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$; გ) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}$;

დ) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{8})\cdot\sqrt{2}$; ე) $(\sqrt[6]{2}+2\sqrt[3]{4}-\sqrt{8})\cdot\sqrt[6]{32}$;

ვ) $\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$; ზ) $a^2b\sqrt[6]{16a^5b}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{4ab^2}$.

11 ა) $\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{81x^5}{25y^4}}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3y}{5x}}$; ბ) $\left(4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2}\right)xy\sqrt[3]{xy}$;

გ) $\left(\sqrt{ab^2}-3b\sqrt{ab}\right)\left(2\sqrt{ab}+3b\sqrt[3]{a^2b}\right)$;

დ) $\left(2\sqrt[5]{m^4}+\sqrt[3]{m^2}-3\sqrt{m}\right)\left(\sqrt[15]{m^4}-\sqrt[3]{m}\right)$.

12 გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\sqrt[5]{\left(\frac{\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right)^3}$; ბ) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}\sqrt[4]{a^3}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[12]{a^{11}}}$;

გ) $\frac{\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[6]{a^4\sqrt[5]{a^4}}$; დ) $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$.

13 დაასახელეთ:

ა) ორი ირაციონალური რიცხვი, რომელთა ჯამი რაციონალურია;

ბ) ორი ირაციონალური რიცხვი, რომელთა ნამრავლი რაციონალურია.

14 მოცემულია, რომ a და b რიცხვები ირაციონალურია, ხოლო c რაციონალური. შემდეგი რიცხვებიდან, რომელი შეიძლება იყოს რაციონალური:

ა) $a+b$; ბ) ab; გ) $a+c$; დ) ac;

ე) $\sqrt{a}$; ვ) $\sqrt{c}$; ზ) $\sqrt{a+b}$; თ) $\sqrt{a+c}$.

15 გაათავისუფლეთ მნიშვნელოვანი ირაციონალობისგან:

ა) $\dfrac{1}{1-4\sqrt{5}}$; ბ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; გ) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

დ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; ე) $\dfrac{2}{2-\sqrt[3]{3}}$; ვ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$;

ზ)* $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$; თ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$.

16*. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}$;

ბ) $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.

17. კალკულატორის გამოყენების გარეშე გამოთვალეთ:

ა) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$; ბ) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$; გ) $\sqrt{5}+\left(\sqrt[6]{(\sqrt{5}-3)^2}\right)^3$.

18* გაამარტივეთ:

ა) $\sqrt{\dfrac{a-16\sqrt{ab}+100b}{\sqrt{a}-6\sqrt[4]{ab}+10\sqrt{b}}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b}$;

ბ) $\sqrt{\dfrac{16a-72\sqrt{ab}+b}{4\sqrt{a}-8\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}+5\sqrt{b}}-2\sqrt[4]{a}-2\sqrt[4]{b}$.

19 გაამარტივეთ და გამოთვალეთ:

ა) $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$; ბ) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}$;

გ) $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}+\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$;

დ) $\dfrac{\sqrt{180}+\dfrac{\sqrt{245}}{14}-\sqrt{125}-\dfrac{\sqrt{320}}{2}}{\sqrt[5]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[5]{5\sqrt{2}-7}}$.

3 რაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხი

1. ჩაწერეთ გამოტოვებული ხარისხის მაჩვენებელი:

$\sqrt{3^6}=3^{\underline{?}}$; $\sqrt{3^2}=3^{\underline{?}}$; $\sqrt{3^{12}}=3^{\underline{?}}$; $\sqrt{3}=3^{\underline{?}}$;
$\sqrt[4]{5^4}=5^{\underline{?}}$; $\sqrt[4]{5^8}=5^{\underline{?}}$; $\sqrt[4]{5^{12}}=5^{\underline{?}}$; $\sqrt[4]{5^3}=5^{\underline{?}}$.

თქვენ უკვე შეისწავლეთ ხარისხი ნატურალური, მთელი მაჩვენებლით. განვაზოგადოთ ხარისხის ცნება ნებისმიერი რაციონალური მაჩვენებლისათვის.

თუ $a>0$ და $m\in Z$, $n\in N\setminus\{1\}$, მაშინ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

თუ $a=0$ და $\frac{m}{n}>0$, მაშინ $a^{\frac{m}{n}}=0$.

წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის განმარტებისა და წილადის ძირითადი თვისების საფუძველზე ადვილად დავასკვნით, რომ $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mk}{nk}}$.

ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხის ყველა თვისება მართებულია რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხისთვისაც.

ნებისმიერი რაციონალური p და q რიცხვებისთვის და ნებისმიერი $a, b>0$-თვის სრულდება:

1 $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$;
2 $a^p\cdot b^p=(ab)^p$;
3 $a^p:a^q=a^{p-q}$;
4 $\frac{a^p}{b^p}=\left(\frac{a}{b}\right)^p$;
5 $(a^p)^q=a^{pq}$.

დავამტკიცოთ 1-ელი თვისება:

ვთქვათ $p=\frac{m}{n}$ და $q=\frac{k}{\ell}$. უ.დ. $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{k}{\ell}}=a^{\frac{m\ell+nk}{n\ell}}$

განვიხილოთ $\left(a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{k}{\ell}}\right)^{n\ell}=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n\ell}\left(a^{\frac{k}{\ell}}\right)^{n\ell}=\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n\ell}\left(\sqrt[\ell]{a^k}\right)^{n\ell}=\left(\sqrt[n]{a^m}^{\,n}\right)^{\ell}\left(\sqrt[\ell]{a^k}^{\,\ell}\right)^{n}=$
$=(a^m)^{\ell}(a^k)^n=a^{m\ell}a^{kn}=a^{m\ell+kn}$.

განმარტების თანახმად მივიღეთ:
$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{k}{\ell}}=\sqrt[n\ell]{a^{m\ell+kn}}=a^{\frac{m\ell+nk}{n\ell}}$. რ.დ.გ.

დაამტკიცეთ მე-2, ..., მე-5 თვისებები.

მაგალითი 1.

ა) ჩაწერეთ წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის სახით: $\sqrt[4]{10^3}$; $\sqrt[5]{10^{-2}}$.

ბ) ჩაწერეთ ფესვის სახით: $2^{\frac{2}{5}}$; $3^{-\frac{2}{9}}$.

ამოხსნა:

ა) $\sqrt[4]{10^3}=10^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[5]{10^{-2}}=10^{-\frac{2}{5}}$; ბ) $2^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{2^2}$; $3^{-\frac{2}{9}}=\sqrt[9]{3^{-2}}$.

მაგალითი 2.

შეასრულეთ მოქმედება:

ა) $3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{5}}$; ბ) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$; გ) $2^{\frac{2}{5}} : 3^{\frac{2}{5}}$; დ) $\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$; ე) $\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^2}}$.

ამოხსნა:

ა) $3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}} = 3^{\frac{3}{5}}$;

ბ) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)} = 2^0 = 1$;

გ) $2^{\frac{2}{5}} : 3^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$;

დ) $\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = 8^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$;

ე) $\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^2}} = \left(a \cdot a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{15}} = a^{\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^7}$.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. ტოლფუძიანი ხარისხების გამრავლებისას ფუძე __?__, ხარისხის მაჩვენებლები კი __?__.

2. ტოლმაჩვენებლიანი ხარისხები რომ გადავამრავლოთ, საჭიროა __?__ გადავამრავლოთ, ხოლო __?__ იგივე დავტოვოთ.

3. ტოლფუძიანი ხარისხების გაყოფისას ფუძე __?__, ხარისხის მაჩვენებლები კი __?__.

4. ტოლმაჩვენებლიანი ხარისხები რომ გავყოთ, საჭიროა __?__ გავყოთ, __?__ იგივე დავტოვოთ.

5. ხარისხის ახარისხებისას, საჭიროა ხარისხის __?__ იგივე დავტოვოთ, მაჩვენებლები კი __?__.

6. ა) $10^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{\underline{\ ?\ }}$; ბ) $10^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\underline{\ ?\ }}$.

7. ა) $(2x-1)^{\frac{3}{8}}$, გამოსახულებას აზრი აქვს, როცა $2x-1$ __?__ 0;

ბ) $(3-x)^{-\frac{1}{4}}$, გამოსახულებას აზრი აქვს, როცა $3-x$ __?__ 0.

სავარჯიშოები:

1 ნილადმაჩვენებლიანი ხარისხი შეცვალეთ ფესვით:

$3^{\frac{1}{4}}$; $3^{\frac{-2}{3}}$; $3^{-0,2}$; $5^{-7,1}$; $x^{\frac{1}{7}}$; $2y^{-\frac{2}{5}}$; $(xy)^{\frac{3}{4}}$; $a^{-\frac{2}{9}}$; $a^{1,3}$.

2 ჩაწერეთ ნილადმაჩვენებლიანი ხარისხის სახით:

ა) $\sqrt[3]{5}$; ბ) $\sqrt[4]{6}$; გ) $\sqrt[4]{3^3}$; დ) $\sqrt[5]{7^{-8}}$; ე) $\sqrt[4]{2^9}$; ვ) $\sqrt{3^{-7}}$;

ზ) $\sqrt[3]{x^5}$; თ) $\sqrt[5]{x^{-3}}$; ი) $\sqrt{a^{-7}}$; კ) $\sqrt{xy^3}$; ლ) $\sqrt[4]{a^2b}$; მ) $\sqrt[3]{mn^5}$.

3 გამოთვალეთ:

ა) $32^{\frac{1}{5}}$; ბ) $27^{\frac{1}{3}}$; გ) $81^{\frac{1}{4}}$; დ) $121^{-\frac{1}{2}}$; ე) $0,64^{-\frac{1}{3}}$.

4 მიკროკალკულატორის საშუალებით გამოთვალეთ:

ა) $2^{\frac{3}{4}}$; ბ) $5^{\frac{1}{2}}$; გ) $3^{-\frac{1}{3}}$; დ) $10,5^{\frac{1}{3}}$; ე) $\sqrt[3]{3,5^5}$.

5 შეასრულეთ მოქმედება:

ა) $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$; ბ) $m^{\frac{3}{4}}\cdot m^{\frac{1}{2}}$; გ) $2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{5}}$; დ) $2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{-\frac{3}{10}}$;

ე) $4^{\frac{1}{4}}:4^{-\frac{1}{2}}$; ვ) $x^{-\frac{1}{2}}:x$; ზ) $y^{\frac{2}{3}}:y^{\frac{1}{3}}$; თ) $5^{\frac{1}{n}}:5^{-\frac{1}{n}}$.

6 შეასრულეთ მოქმედება:

ა) $a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}$; ბ) $2^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}$; გ) $3^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{3}}$; დ) $8^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}$;

ე) $(mn)^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{1}{3}}$; ვ) $a^{-\frac{1}{2}}:(ab)^{-\frac{1}{2}}$; ზ) $x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{5}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$; თ) $b^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{2}{5}}$.

7 გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{-\frac{3}{4}}\sqrt[3]{27}\right)^{-\frac{1}{2}}$; ბ) $\left(\frac{1}{25}\cdot 0{,}2\right)^{\frac{1}{3}}$; გ) $\frac{10^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{-0{,}6}}{5^{-1{,}4}}$;

დ) $\frac{16^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{81}}{3^{\frac{2}{3}}\sqrt{2^3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}$; ე) $\frac{a^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; ვ) $\frac{\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}}{\sqrt[4]{2401}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;

ზ) $\frac{\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\,\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}}$; თ) $\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{a^{-2}x^2}}$; ი) $2^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}$.

8 დაადგინეთ გამოსახულების განსაზღვრის არე:

ა) $(x-2)^{-\frac{2}{3}}$; ბ) $(x-2)^{\frac{2}{3}}$; გ) $(3x-5)^{-\frac{7}{8}}$; დ) $(9-x)^{\frac{2}{5}}$.

9 წარმოადგინეთ ჯამის სახით:

ა) $\left(x^{\frac{2}{3}}+5\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)$; ბ) $\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)^2$; გ) $\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-4\right)$;

დ) $\left(m^{\frac{1}{3}}-4\right)\left(m^{\frac{1}{3}}+4\right)$; ე) $\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{4}}\right)^2$; ვ) $\left(m^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(m^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{1}{3}}+1\right)$;

ზ) $\left(a^{\frac{1}{3}}-2\right)^2$; თ) $\left(x^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)$; ი) $\left(x^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-\sqrt{2^3}\right)$;

კ) $\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}\right)^2$; ლ) $\left(x^{\frac{1}{6}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+1\right)$; მ) $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)$.

10 გაამარტივეთ და გამოთვალეთ:

ა) $\frac{\left(\sqrt[6]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\frac{a^{\frac{5}{2}}\cdot b^{\frac{7}{4}}}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}$, თუ $a=\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$, $b=\sqrt[3]{15}$;

ბ) $\sqrt[11]{(a^4b^5)^{\frac{5}{3}}\cdot\left(\sqrt{a^3b^5}\right)^4}:a^{\frac{5}{11}}$, თუ $a=\sqrt[3]{4}$, $b=\sqrt[5]{2}$.

11 დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$; ბ) $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$; გ) $(a-b)^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{8}}$;

დ) $\frac{1}{5}\sqrt{x}-\frac{1}{4}\sqrt{y}$; ე) $a+4$; ვ) $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

12 შეკვეცეთ წილადი:

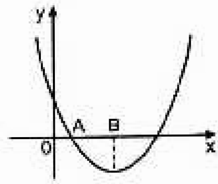
ა) $\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}$; ბ) $\frac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; გ) $\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a+b}$;

დ) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2x^{\frac{1}{3}}y-3x^{\frac{2}{3}}}$; ე) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$; ვ) $\frac{x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}$.

13 იმისათვის, რომ საინფორმაციო სატელიტი „სტაციონალური" გახდეს, საჭიროა მისი სიჩქარე იყოს $v=\left(\frac{4\cdot10^{14}}{d}\right)^{\frac{1}{2}}$ მ/წმ. „სტაციონალური" ნიშნავს, რომ სატელიტი დედამიწის გარკვეული წერტილის მიმართ ერთსა და იმავე ადგილას მდებარეობს. $d=4{,}137\cdot10^{7}$ მ არის უმოკლესი მანძილი დედამიწიდან სატელიტამდე. იპოვეთ v.

გ

14 გიორგი ხრამში აგდებს ქვას და 8 წამში ესმის ფსკერზე ქვის დაცემის ხმა. იპოვეთ ხრამის სიღრმე, თუ ბგერის გავრცელების სიჩქარე 340 მ/წმ.



15 ნახაზზე მოცემულია $y=x^2-12x+m+8$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ m, თუ $AB=2\cdot AO$.

16 გიორგიმ ორშაბათს იყიდა 25 ლარის დისკეტა, თითო 50 თეთრად, სამშაბათს კი – 45 ლარის დისკეტა, თითო 30 თეთრად. საშუალოდ რა თანხა გადაიხადა გიორგიმ 1 დისკეტაში?

17 გაამარტივეთ: ა) $\dfrac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

ბ) $|\sqrt{3}-2|-2|\sqrt{10}-3|-|2\sqrt{3}-4|+|6-\sqrt{40}|$.

18 მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4, სიმაღლე კი სამკუთხედის ფართობს ყოფს ნაწილებად, რომელთა სხვაობა 84 სმ^2-ია. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის ფართობი.

19* რამდენი ორნიშნა რიცხვი არსებობს, რომლის ჩანაწერშიც არ შეგვხვდება ციფრი 1.

20* იპოვეთ კუთხე საათის ისრებს შორის, 7 საათსა და 38 წუთზე.

21* a და b ისეთი ნატურალური რიცხვებია, რომ მათი სხვაობა იყოფა 11-ზე. დაამტკიცეთ, რომ $(a^2+b^2)^2+7a^2b^2$-იც იყოფა 11-ზე.

4 გამოსახულების გამარტივება

თქვენ უკვე გაეცანით რაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხს, მის თვისებებს.

ქვემოთ მოყვანილი დავალებების შესასრულებლად არ გჭირდებათ დამატებითი ცოდნის მიღება. ყველა ეს მოქმედება თქვენ უკვე შესრულებული გაქვთ. დააკვირდით დავალებას, დაადგინეთ მოქმედებათა რიგი, აარჩიეთ წაგალითის ან მისი ცალკეული ფრაგმენტის ჩაწერის ის ფორმა (მაგალითად, $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$), რომელიც კონკრეტული დავალების შესასრულებლად უფრო მარტივი გეჩვენებათ და ამოხსენით მაგალითები.

1 შეასრულეთ მოქმედებები:

ა) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{x}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}$;

ბ) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}-\sqrt{a}$;

გ) $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+(\sqrt{a})^{-1}}+\dfrac{1+\sqrt{a^{-1}}}{1-a^{-\frac{1}{2}}}$;

დ) $\dfrac{\sqrt[3]{a}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{a^4}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-(\sqrt[3]{a})^5}{a^{\frac{2}{3}}-(\sqrt[3]{a})^{-1}}$.

2 გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\sqrt{9a^{-\frac{1}{2}}b+6b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{9a^{\frac{1}{2}}b+12b^{\frac{1}{2}}+4a^{\frac{1}{2}}}$;

ბ) $\left(\dfrac{\left(b^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a\sqrt{b}}-a^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a}\right)^2}{\sqrt[3]{a^3\sqrt{a}}\cdot b\sqrt[6]{b}}+4\right)\left(\dfrac{\sqrt{a^2b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-1}$;

გ) $\dfrac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1$;

3 დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $(4^{\frac{1}{3}}-10^{\frac{1}{3}}+25^{\frac{1}{3}})(2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}})=5$; ბ) $(9^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{3}})(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})=1$;

გ) $\sqrt{5}+\sqrt{6\sqrt{14-6\sqrt{5}}-4}=3$.

4 გაამარტივეთ:

ა) $\left(\dfrac{1-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{x^2:\sqrt{x}}+\dfrac{x^{-2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{-1}$; ბ) $\dfrac{u-25u^{-1}}{u^{\frac{1}{2}}-5u^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2u+7+5u^{-1}}{u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}}$;

გ) $\dfrac{36z-z^{-1}}{6z^{\frac{2}{3}}+z^{-\frac{1}{3}}}+\dfrac{2z+7+5z^{-1}}{2z^{\frac{2}{3}}+5z^{-\frac{1}{3}}}$; დ) $\dfrac{m^{\frac{4}{3}}-27m^{\frac{1}{3}}n}{m^{\frac{2}{3}}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}\right)$.

5 დაამტკიცეთ, რომ გამოსახულების მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობაზე:

ა) $\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{(ab)^2}}{a+(ab)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{ab}}{a-b}\right)^{-1}+\sqrt{ab}-a$; ბ) $\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^2+\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^2}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^{-1}\left(a+(ab)^{\frac{1}{2}}\right)}:\frac{b-2\sqrt{ab}+a}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$;

გ) $\frac{2}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{\left(a^{\frac{3}{6}}+1\right)^2\left(a^{\frac{2}{6}}-1\right)^{-2}+3}{\left(\frac{\sqrt[3]{a}-1}{a^{\frac{1}{3}}+1}\right)^2+3}\cdot\frac{a-1}{(\sqrt{a})^3+1}$;

დ) $\left(\frac{a\sqrt[3]{a}-2ab^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b})^2}{\sqrt[3]{a^2}-a^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{b}}+\frac{\sqrt[3]{a^2b}-(ab^2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}$.

6 გაამარტივეთ:

ა) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{4}{a-1}\right)^{2}$; ბ) $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy^{\frac{1}{2}}-yx^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{x\sqrt{x}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$;

გ) $\frac{a^{\frac{1}{2}}+ab^{-1}}{a^{-\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}-\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$; დ) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^{-1}$.

7 გამოთვალეთ:

ა) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2^{-2}+1^0}+\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$; ბ) $\left(\frac{8\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3^{-3}}}{\sqrt[3]{72}}-1\right)\cdot\frac{9}{5}+(0{,}0825)^{-\frac{1}{4}}$.

8 გამოთვალეთ:

ა) $\sqrt[3]{((2-\sqrt{7})^2)^{\frac{3}{2}}}-\sqrt{7}$; ბ) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

გ) $\left(2^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{80}+\sqrt[3]{25}}\right)^3$; დ) $\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt{9-6\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}\right)^6$.

9 გამოთვალეთ:

ა) $\frac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}}+\sqrt{17}$; ბ) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{\frac{3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{0{,}03}-\sqrt{\frac{1}{50}}}}\cdot 10^{\frac{1}{2}}$.

10 გამოთვალეთ:

ა) $|\sqrt{32}-20|+|\sqrt{8}-3|-|2\sqrt{8}-4|+|10\sqrt{2}-6|$;

ბ) $3\sqrt{(2-\sqrt{6})^2}+2|7-\sqrt{24}|+4\sqrt{6}+18-\sqrt{54}$.

5 თვლის სისტემები

უძველესი დროიდან გაჩნდა ნატურალური რიცხვების ჩაწერის აუცილებლობა. ჩვენ მიჩვეული ვართ რიცხვი ჩავწეროთ თვლის ათობით სისტემაში, რომელიც გავრცელებულია მთელ მსოფლიოში, მაგრამ ეს ყოველთვის ასე არ იყო. უძველესი დროიდან მოდის იმის ტრადიცია, რომ დრო იზომება წუთებში, წამებში, რომელიც მთელის არა მეათედი, არამედ მესამოცედია.

ძველ ბაბილონში თვლის 6-ობითი სისტემა იყო

ახლაც კი, ხშირად, იმის ნაცვლად, რომ თქვან, „თორმეტი", ამბობენ „დუჟინი". მრავალ საგანს (დანებს, ჩანგლებს, თეფშებს, ცხვირსახოცებს და ა.შ.) ძალიან ხშირად ითვლიან დუჟინობით და არა ათეულობით. გავიხსენოთ, რომ სერვიზები არსებობს 12 ან 6 კაცზე და ძალიან იშვიათად 10 ან 5 კაცზე. თორმეტობითი სისტემის შედეგია ინგლისში დღემდე შემორჩენილი მანძილის საზომი ერთეული 1 ფუტი = 12 დუიმი და ფულის ერთეული 1 შილინგი = 12 პენსამი.

როდესაც ჩვენ ვლაპარაკობთ მრგვალ რიცხვებზე, ვერც კი ვხვდებით, რომ რიცხვების დაყოფა მრგვალ და არამრგვალ რიცხვებად პირობითია. ერთი და იგივე რიცხვი შესაძლებელია იყოს მრგვალი ან არა იმის მიხედვით, თუ თვლის რომელი სისტემით ვსარგებლობთ. ვნახოთ, თუ როგორ შეგვიძლია მოცემული რიცხვი წარმოვადგინოთ ამა თუ იმ თვლის სისტემაში. რიცხვი 2548, ათობით სისტემაში, სათანრიგო ერთეულების ჯამის სახით ასე წარმოიდგინება:

თვლის ათობით სისტემაში ათი ციფრია, შვიდობითში — შვიდი, ორობითში — ორი და ა.შ.

$$2548=2\cdot10^3+5\cdot10^2+4\cdot10^1+8\cdot10^0.$$

ვთქვათ, გვინდა ეს რიცხვი ჩავწეროთ შვიდობით სისტემაში, ამისათვის იგი წარმოვადგინოთ შვიდის ხარისხების ჯამის სახით.

$2548=7^4+3\cdot7^2=1\cdot7^4+0\cdot7^3+3\cdot7^2+0\cdot7^1+0\cdot7^0$,

ე. ი. $(2548)_{10}=(10300)_7$.

(10300), ჩანაწერი ნიშნავს, რომ რიცხვი ჩაწერილია შვიდობით სისტემაში.

თანამედროვე სახით თვლის ათობითი სისტემა; დაახლოებით VI საუკუნეში, ინდოეთში ჩაისახა. პირველად ინდოელებმა შემოიღეს ნულის აღმნიშვნელი ნიშანი. მოგვიანებით თვლის ინდურ ხელოვნებას არაბები დაეუფლნენ, ხოლო დაახლოებით X საუკუნიდან მისი გამოყენება დაიწყეს ევროპაშიც.

XVII საუკუნეში დაიწყეს თანამედროვე ალგებრული სიმბოლოების „=", „+" და სხვა, გამოყენება. უფრო გვიან კი რიცხვების საწერად 10-ის ხარისხების გამოყენება, მაგ., $25000000=2,5\cdot10^7$.

ნულის ინდური სახელწოდება ქართულად სიცარიელეს ნიშნავს.

საზოგადოდ, ნებისმიერი a რიცხვისათვის $a=a_k\cdot10^k+a_{k-1}\cdot10^{k-1}+\ldots+a_1\cdot10^1+a_0$ ჩანაწერს ეწოდება a რიცხვის ათობითი ჩანაწერი, სადაც $a_0, \ldots a_k\in\{0,1,\ldots,9\}$, $a_k\neq0$.

რასაც მოკლედ ასე წერენ $a=\overline{a_k\cdot a_{k-1}\ldots a_1a_0}$

რიცხვის ჩაწერის ათობითი სისტემის გარდა გამოიყენება სხვა სისტემები: თორმეტობითი, ორობითი, ოცობითი, რვაობითი...

რიცხვების ჩაწერის საშუალებებს რიცხვითი სისტემები ეწოდება.

საზოგადოდ, თვლის ყველა სისტემაში რიცხვის ჩაწერა ემორჩილება ერთ საერთო პრინციპს:

ვირჩევთ რაიმე P რიცხვს (P>1) ათვლის სისტემის ფუძედ. ნებისმიერი რიცხვი წარმოიდგინება P რიცხვის ხარისხების ჯამის სახით, კოეფიციენტებით, რომლებიც იღებს მნიშვნელობებს 1-დან P–1-მდე.
$a_k \cdot p^k + a_{k-1} \cdot p^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot p + a_0 \cdot p^0$. ამის მერე ეს რიცხვი მოკლედ ასე ჩაიწერება
$\overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 a_0}$.
ამ პრინციპით აგებულ თვლის სისტემებს ეწოდება პოზიციური თვლის სისტემები. არსებობს თვლის „არაპოზიციური" სისტემები, რომლის საყოველთაოდ ცნობილი მაგალითია რომაული დამწერლობა. ამ სისტემაში არის სიმბოლოები, რომლებიც აღნიშნავს სხვადასხვა რიცხვს: I — ერთი, V — ხუთი, X — ათი, L — ორმოცდაათი, C – 100, D – 500, M – 1000 და ა.შ. ნებისმიერი რიცხვი წარმოიდგინება ამ სიმბოლოების კომბინაციით. მაგალითად რიცხვი 88 წარმოიდგინება ასე — LXXXVIII. ნებისმიერი რიცხვი, ჩაწერილი პოზიციურ სისტემაში შეგვიძლია ჩავწეროთ რომაული სიმბოლოებით და პირიქით.

ძველ ეგვიპტეში იყენებდნენ:
| — ერთიანისთვის
Λ — ათიანისთვის;
C — ასიანისთვის.
მაგალითად, 135 ასე ჩაიწერება CΛΛΛIIIII

ახლა ვნახოთ, თუ როგორ გადავიყვანოთ რიცხვი ერთი პოზიციური სისტემიდან მეორეში, მაგალითად ათობიდან — შვიდობითში. როგორც უკვე ვნახეთ, შვიდობით სისტემაში ჩაწერილი $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_7$ რიცხვი ასე წარმოიდგინება $A=a_k \cdot 7^k + a_{k-1} \cdot 7^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 7^1 + a_0$. (I).

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რიცხვის შვიდობითი ჩანაწერი, საკმარისია ვიპოვოთ a_0, a_1 ... a^k კოეფიციენტების მნიშვნელობები. ამისათვის გავყოთ რიცხვი 7-ზე. ცხადია, მიღებული ნაშთი იქნება a_0 (რადგან (I)-ში ყველა შესაკრები, გარდა a_0-ისა იყოფა 7-ზე). შემდეგ ავიღოთ განაყოფი და კვლავ გავყოთ 7-ზე. მიღებული ნაშთი იქნება a_1. ამ პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ ყველა კოეფიციენტს. ბოლოს მიიღება რიცხვი, რომელიც ნაკლებია 7-ზე და გაყოფას ველარ შევასრულებთ. ეს რიცხვი იქნება a_k კოეფიციენტი.

მაგალითი 1.

ჩაწერეთ შვიდობით სისტემაში: ა) $(3287)_{10}$; ბ) $(2548)_{10}$.

ა) 3287:7=469 (4), ე.ი. $a_0=4$
469:7=67 (0) $a_1=0$
67:7=9 (4) $a_2=4$
9:7=1 (2) $a_3=2$
1:7=0 (1) $a_4=1$
1<7

მივიღეთ $(3287)_{10}=(12404)_7$

ბ) 2548:7=364 (0) $a_0=0$
364:7=52 (0) $a_1=0$
52:7=7 (3) $a_3=3$
7:7=1 (0) $a_4=0$
1<7 $a_5=1$

ე. ი. $(2548)_{10}=(10300)_7$

განვიხილოთ შებრუნებული ამოცანა — p-ობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი ჩავწეროთ 10-ობით სისტემაში. მაგალითისთვის განვიხილოთ შვიდობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი:
$A=7(a_k \cdot 7^{k-1}+\ldots +a_1)+a_0$,
$(10300)_7=1 \cdot 7^4+0 \cdot 7^3+3 \cdot 7^2+0 \cdot 7+0= 2548+147=(2578)_{10}$.

1 ჩაწერეთ $(527)_{10}$:

ა) ორობით,　　　　ბ) ხუთობით,

გ) შვიდობით,　　　　დ) თორმეტობით სისტემაში.

2 ჩაწერეთ 10-ობით სისტემაში: ა) $(213)_6$; ბ) $(314)_7$.

ნებისმიერ პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებები სრულდება ანალოგიურად, როგორც ათობით სისტემაში.

$(5)_8+(4)_8=(11)_8$

მაგალითი 2

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r}(23651)_8\\(17043)_8\end{array}\\ \hline (42714)_8\end{array}$$

მაგალითი 3

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r}(423)_5\\(1341)_5\end{array}\\ \hline (2204)_5\end{array}$$

ნებისმიერი რიცხვების გადამრავლება ხდება გამრავლების ტაბულის საფუძველზე. ავირჩიოთ რომელიმე სისტემა, მაგალითად ექვსობითი და შევადგინოთ გამრავლების ტაბულა.

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

ამ ცხრილის გამოყენებით ადვილად შევასრულებთ გამრავლება-გაყოფას.

ათობითი	რვაობითი
1	1
2	2
------	------
7	7
8	10
9	11
10	12
------	------
16	20
17	21
------	------

ათობითი	ექვსობითი
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	10
7	11
8	12
9	13
10	14
11	15
12	20
------	------

მაგალითი 4

ერთმა მასწავლებელმა კითხვაზე, თუ რამდენი მოსწავლე ყავს კლასში, უპასუხა: „მე კლასში მყავს 100 მოსწავლე, აქედან 24 ბიჭია და 32 გოგონა. თვლის რომელი სისტემით ისარგებლა მასწავლებელმა?

ამოხსნა:

ვთქვათ, ისარგებლა x-ობითი თვლის სისტემით. ე.ი. კლასში x^2 მოსწავლეა, აქედან $2x+4$ ბიჭია, ხოლო $3x+2$ კი — გოგონა. მაშასადამე, $2x+4+3x+2=x^2$, ანუ $x^2-5x-6=0$, საიდანაც $x=-1$ ან $x=6$.

პასუხი: მასწავლებელმა ისარგებლა ექვსობითი თვლის სისტემით. ამასთან, კლასში იყო ოცდათექვსმეტი მოსწავლე, მათგან თექვსმეტი ბიჭი და ოცი გოგონა.

მაგალითი 5.

$$
\begin{array}{r}
\times\ (352)_6 \\
(245)_6 \\
\hline
(3124)_6 \\
+(2332)_6\ \ \\
(1144)_6\ \ \ \ \\
\hline
(145244)_6
\end{array}
$$

მაგალითი 6.

შევასრულოთ გაყოფა $(120101)_3:(102)_3$

$$
\begin{array}{l|l}
-\,(120002)_3 & (102)_3 \\
\quad (102)_3 & \overline{1101} \\
\hline
\quad -\,(110)_3 & \\
\quad\quad (102)_3 & \\
\hline
\quad\quad -\,(102)_3 & \\
\quad\quad\quad (102)_3 & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

ახლა უფრო დაწვრილებით გავეცნოთ თვლის ორობით სისტემას, რომელიც ერთ-ერთ უძველესი სისტემაა. იგი გვხვდება ავსტრალიის და პოლინეზიის ზოგიერთ ტომებში. ამ სისტემაში არის მხოლოდ ორი ციფრი 0 და 1. რიცხვი 2 კი წარმოადგენს ერთიანს უკვე შემდეგ თანრიგში. საკმაოდ უბრალოა არითმეტიკული მოქმედებები ორობით სისტემაში ჩაწერილ რიცხვებზე. შეკრების ძირითადი წესები მოცემულია ტოლობებით: 0+0=0, 0+1=1 და 1+1=10. გამრავლების ტაბულას კი აქვს სახე:

	0	1
0	0	0
1	0	1

შევასრულოთ ქვეშმიწერით გამრავლება ორობით სისტემაში:

$$
\begin{array}{r}
\times\ 10111 \\
11010 \\
\hline
10111 \\
10111\ \ \\
10111\ \ \ \ \\
\hline
1001010110
\end{array}
$$

ორობითი სისტემის ნაკლი მდგომარეობს იმაში, რომ არც თუ ისე დიდი რიცხვის ჩანაწერი, საკმაოდ გრძელია. მაგალითად, რიცხვი 1000 ორობით სისტემაში ჩაიწერება 1111101000 სახით, რისთვისაც დაგვჭირდა ათი ციფრის გამოყენება. მიუხედავად ამისა, ორობითი სისტემა ფართოდ გამოიყენება ტექნიკის სხვადასხვა სფეროებში.

ვთქვათ, განვიხილავთ მოვლენას, რომელიც აღიწერება ორი პარამეტრით, რომელიც ყოველთვის იღებს ორ მნიშვნელობას. ამ შემთხვევაში ორობითი სისტემა აღმოჩნდება მნიშვნელოვნად ეფექტური, ვიდრე ათობითი. ზუსტად ასე ამ სქემით აღიქვამს ინფორმაციას თანამედროვე კომპიუტერი, კი – 1, არა – 0.

სავარჯიშოები:

1 ჩაწერეთ რომაული ციფრებით

ა) 25; ბ) 17; გ) 56; დ) 97; ე) 125.

2 ჩაწერეთ ათობით პოზიციურ სისტემაში

ა) XII; ბ) XXII; გ) LXXXIII; დ) LXVI.

3 წარმოადგინეთ ათობით სისტემაში ჩაწერილი შემდეგი რიცხვები სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში.

ა) 231 — ხუთობითში, ბ) 375 — რვაობითში, გ) 283 სამობითში,
დ) 1957 — თორმეტობითში, ე) 51 — ორობითში.

4 შეასრულეთ მოქმედებები.

ა) $(2357)_9+(126)_9$; ბ) $(1526)_7-(235)_7$; გ) $(152)_6\cdot(232)_6$;
დ) $(32132)_5:(112)_3$; ე) $(1000111)_2+(11101)_2$; ვ) $(100111)_2-(1010)_2$.

5 წარმოადგინეთ ათობით პოზიციურ სისტემაში

ა) $(236)_8$; ბ) $(341)_6$; გ) $(7771)_8$; დ) $(1101011)_2$.

6 რომელ პოზიციურ სისტემაშია ჭეშმარიტი ტოლობა?

ა) 57+31=110; ბ) 125+342=511.

7 შეადარეთ:

ა) $(12)_{10}$ და $(25)_5$; ბ) $(1111)_{10}$ და $(4444)_5$.

8 დაალაგეთ ზრდის მიხედვით:

ა) $(15)_7$; $(13)_6$; $(25)_8$ და $(13)_{10}$; ბ) $(111)_2$; $(111)_3$; $(111)_4$; $(111)_{10}$.

9 ჩაწერეთ ათობით სისტემაში:

ა) $(132)_4$, ბ) $(217)_8$, გ) $(10002)_3$, დ) $(1101)_2$.

10 ჩაწერეთ უდიდესი ხუთნიშნა რიცხვი:

ა) სამობით, ბ) რვაობით
გ) ორობით სისტემებში და დაასახელეთ ეს რიცხვი ათობით სისტემაში.

11 ჩაწერეთ რიცხვები ათობით სისტემაში:

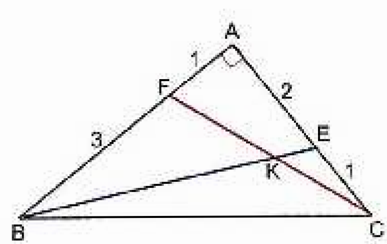
ა) $(101010)_2$; ბ) $(1101101)_2$, გ) $(111111111)_2$.

ბ

12 იპოვეთ f(4), თუ $f\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)=2x+1$

13 $\angle BAC=90°$
BF=3; FA=1; AE=2
EC=1

უ.ვ. $S_{\Delta FKB}+S_{\Delta KEC}$



ჯგუფური მეცადინეობა

6 ვითამაშოთ

ყურადღებით გაეცანით თამაშებს, რომელთა სწორად წარმართვაში ვიყენებთ ორობით სისტემას და ვითამაშოთ.

თამაში 1.

ჩაიფიქრე რიცხვი 1-დან 1000-მდე. მე შემიძლია გამოვიცნო იგი. უფლება მაქვს დაგისვა არაუმეტეს 10 კითხვისა, რომელზეც უნდა მიპასუხო მხოლოდ „კი" ან „არა".
ეს თამაში ეფუძნება რიცხვის ერთ სისტემიდან მეორეში გადაყვანის წესს. ფაქტიურად გადაგვყავს რიცხვი ათობითიდან ორობითში, სადაც მოქმედებებს ასრულებს მოწინააღმდეგე, ჩვენ უბრალოდ ვიწერთ შედეგს.
პირველი კითხვა: იყოფა თუ არა რიცხვი 2-ზე? (ანუ ვიგებთ 2-ზე გაყოფის ნაშთს). თუ იყოფა, ვწერთ 0-ს, თუ არა – 1-ს.
შემდეგი კითხვა: იყოფა თუ არა განაყოფი 2-ზე? თუ პასუხია „კი", ვწერთ 0-ს, ხოლო პასუხზე „არა" – ვწერთ 1. ყოველი შემდეგი პასუხის შედეგად ვწერთ კიდევ ერთ ციფრს (მარცხნიდან მარჯვნივ). ამ პროცედურის არაუმეტეს ათჯერ გამეორების შედეგად მივიღებთ საძიებელი რიცხვის ორობით ჩანაწერს.
10 შეკითხვა საკმარისია, რადგან 1-დან 1000-მდე რიცხვი ორობით სისტემაში ჩაიწერება არაუმეტეს ათი ციფრით.
დავუშვათ, მიღებულ ჩანაწერს აქვს სახე: 1100100.
$1100100=1\cdot2^6+1\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^3+0\cdot2^1+0=64+32+4=100$.
მოწინააღმდეგემ ჩაიფიქრა რიცხვი 100.

თამაში 2.

ჯერ კიდევ ძველ ჩინეთში ცნობილი იყო თამაში „ნიმი". გვაქვს ქვების სამი გროვა. თამაშობს ორი მოთამაშე. ისინი რიგრიგობით იღებენ ნებისმიერი გროვიდან ნებისმიერი რაოდენობის ქვას. მოგებული ის, ვინც აიღებს ბოლო ქვას.
ამ ამოცანის ამოსახსნელად მოხერხებულია ორობითი სისტემის გამოყენება. ვთქვათ გროვებში არის შესაბამისად a, b და c რაოდენობის ქვა. ჩავწეროთ a, b და c რიცხვები ორობით სისტემაში.

$$a=a_m\cdot2^m+a_{m-1}\cdot2^{m-1}+\ \dots\ +a_1\cdot2+a_0$$
$$b=b_m\cdot2^m+b_{m-1}\cdot2^{m-1}+\ \dots\ +b_1\cdot2+b_0$$
$$c=c_m\cdot2^m+c_{m-1}\cdot2^{m-1}+\ \dots\ +c_1\cdot2+c_0.$$

$125 = 1\cdot10^2+2\cdot10+5$
$37 = 0\cdot10^2+3\cdot10+7$

შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ყველა ჩანაწერში ტოლი თანრიგია, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში შეგვიძლია იმ რიცხვს, სადაც ნაკლებია თანრიგი, წინ მივუწეროთ 0-ები.
ცხადია, a_0, b_0, c_0, ..., a_m, d_m, c_m ციფრებია 0 ან 1. ამასთან, a_m, b_m, c_m ციფრებიდან ერთ-ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან.

მოთამაშეს, რომელიც აკეთებს პირველ სვლას, შეუძლია შეცვალოს a, b და c რიცხვებიდან ერთ-ერთი უფრო ნაკლები რიცხვით (ვთქვათ, მან გადაწყვიტა აიღოს ქვები პირველი გროვიდან, ე. ი. შეცვალოს რიცხვი a. ე. ი. შეიცვლება a_0, a_1, ..., a_1 ამ ციფრებიდან ერთი ან რამდენიმე).

განვიხილოთ ჯამები $a_m+b_m+c_m$; $a_{m-1}+b_{m-1}+c_{m-1}$ . . . $a_0+b_0+c_0$. თითოეული ამ ჯამებიდან შეიძლება იყოს 0, 1, 2 ან 3.

თუ ამ ჯამებიდან ერთი მაინც კენტია, მაშინ პირველ მოთამაშეს შეუძლია უზრუნველყოს მოგება.

მართლაც, დავუშვათ $a_k+b_k+c_k$ პირველი კენტი ჯამია (მარცხნიდან მარჯვნივ), მაშინ a_k, b_k და c_k ციფრებიდან ერთ-ერთი მაინც ტოლია 1-ის. ვთქვათ $a_k=1$. ამ შემთხვევაში მოტამაშეს შეუძლია პირველი გროვიდან იმდენი ქვის აღება, რომ კოეფიციენტები a_m, ..., a_k+1 არ შეიცვალოს, a_k გახდეს 0, ხოლო a_{k-1}, ..., a_0 კი იყოს ნებისმიერი, რაც მოესურვება მოთამაშეს (0 ან 1).

მაშასადამე, პირველი გროვიდან შესაძლებელია ავიღოთ იმდენი ქვა, რომ ყველა ჯამი $a_{k-1}+b_{k-1}+c_{k-1}$, ... , $a_0+b_0+c_0$ იყოს ლუწი.

მაგალითად: ვთქვათ გროვებში იყო 17, 15 და 9 ქვა

17:2=8(1), 8:2=4 (0), 4:2=2 (0), 2:2=1 (0). 17 = 1 0 0 0 1 (a)

15:2=7(1), 7:2=3 (1), 3:2=1 (1) 15 = 0 1 1 1 1 (b)

9:2=4(1), 4:2=2(0), 2:2=1 (0) 9 = 0 1 0 0 1 (c)

I II III IV V

პირველივე ჯამი კენტია, ამასთან $a_5=1$ მაშასადამე, უნდა ავიღოთ იმ გროვიდან, რომელშიც 17 ქვაა. ამოვწეროთ დანარჩენი ორი და მივუწეროთ ქვეშ რიცხვი ისე, რომ ყველა ჯამი იყოს ლუწი.

15 = 0 1 1 1 1 $x=(110)_2=(6)_{10}$

9 = 0 1 0 0 1

x = 0 0 1 1 0

მაშასადამე, გროვებში დარჩა 6, 15 და 9 ქვა, თანაც ისე, რომ ყველა ჯამი ლუწია.

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, პირველი მოთამაშე შეძლებს, რომ მისი სვლის მერე ყველა ჯამი გახდეს ლუწი.

მეორე მოთამაშე ნებისმიერი სვლით აუცილებლად შეცვლის ერთი მაინც ჯამის ლუწ-კენტობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთი მაინც ჯამი კენტია. ამის მერე პირველი მოთამაშე მიაღწევს, რომ ყველა ჯამი იყოს ლუწი. რადგან ქვების საერთო რაოდენობა ყოველი სვლის მერე მცირდება, ადრე თუ გვიან მოხდება, რომ თითოეული ჯამი იქნება 0.

ე.ი. ქვები აღარ დარჩება, რადგან ამ დროს ყველა ჯამი იქნება ლუწი. ეს მდგომარეობა, რომ ყველა ჯამი ნულია, დადგება პირველი მოთამაშის სვლის შემდეგ. ე.ი. ის მოიგებს.

თუ საწყის მდგომარეობაში ყველა ჯამი იყო ლუწი, მაშინ პირველი მოთამაშის ნებისმიერი სვლის მერე ერთი ჯამი მაინც გახდება კენტი. ამ შემთხვევაში მეორე მოთამაშე, თუ გამოიყენებს ზემოთაღწერილ პრინციპს, მოიგებს თამაშს.

ეს საინტერესოა

კოდირება და დეკოდირება

ინფორმაციის შეკრებისა და გადამუშავებისათვის ელექტრონული მანქანების გამოყენება საწინდარია დაგეგმარების სისტემის სრულყოფისათვის, მაგრამ სხვა ხერხებისაგან განსხვავებით გაჩნდა საჭიროება ინფორმაციის ისეთი გარდაქმნისა, რომ იგი გასაგები გამხდარიყო მანქანისათვის. ამ პროცესის აუცილებელი ელემენტი გახდა ინფორმაციის კოდირება.

კოდს უწოდებენ სიმბოლოთა ერთობლიობას, რომელიც შეესაბამება ინფორმაციას. მიზანი, კოდირებული ინფორმაციის გადამუშავება ელექტრონული მანქანებით, უზრუნველყოფა გარკვეული ძებნის მეთოდის, დახარისხება და ინფორმაციის მოწესრიგება.

დეკოდირება არის კოდირების საპირისპირო ოპერაცია: თუ კოდირებისას ხდება ინფორმაციის გარდაქმნა სიგნალებად, მაშინ დეკოდირებისას, პირიქით მოცემული კოდის მიხედვით განისაზღვრება შესაბამისი ობიექტი. მაგალითად, ტელეფონის ნომრის აკრეფისას, ჩვენ ვუკავშირდებით ამა თუ იმ ობიექტს... დეკოდირება მდგომარეობს კოდის (ტელეფონის ნომრის) აკრეფაში, რომლის დეკოდირება ხდება ელექტრონული სქემის საშუალებით შესაბამის სადგურში.

ინფორმაციის კოდირებისათვის ძალიან მოსახერხებელია ორობითი სისტემის გამოყენება. მაგალითისთვის განვიხილოთ ტელეგრაფის კოდი. ამოვწეროთ ალფავიტი თამიმდევრობით და გადავნომროთ 1-დან 33-მდე. თითოეული ასოს ნომერი ჩავწეროთ ორობით სისტემაში, რადგან $33=2^5+1=100001$, ამიტომ ყველა ეს ნომერი წარმოიდგინება არაუმეტეს ექვსი ნიშნით. ჩავწეროთ ეს ნომრები ექვსი ციფრით, ანუ საჭიროების შემთხვევაში წინ მივუწეროთ საჭირო რაოდენობის 0-ები. მივიღებთ:

– – 000000
ა – 000001
ბ – 000010
- - - - - - - - - -
- - - - - - - - - -
ჰ – 100001

ამ ნომრების გადაცემა ერთი ტელეგრაფიდან მეორეში ადვილად შესაძლებელია ელექტრონული იმპულსების საშუალებით. 1-ს შეესაბამება იმპულსის არსებობა, 0-ს კი არარსებობა. შესაბამისი საბეჭდი აპარატი კი ამ იმპულსების შესაბამის ასოებს, და შესაბამისად მათ კომბინაციას — ინფორმაციას დაბეჭდავს.

ტელეგრაფის გამოგონებას მოყვა მორზეს კოდის შექმნა.

მორზეს ანბანში ასოები გადმოიცემოდა წერტილებისა და ტირეების კომბინაციებით. მაგალითად, A-ს შეესაბამებოდა სიგნალი „ · – ", B-ს კი „ – · · · " და ა.შ.

უძველესი დროიდან, სხვადასხვა მიზეზის გამო, იყო ინფორმაციის დაცვის აუცილებლობა. გამოიყენებოდა გადანაცვლების ან ნანაცვლების შიფრები. ერთ-ერთი ცნობილი მაგალითია იულუს კეისარის შიფრი, რომელიც მიღებული იყო ანბანის 5 ასოთი წანაცვლებით.

შევადგინოთ ამ შიფრის ქართული ანალოგი სამი ასოთი წანაცვლებით.

ა → დ; ბ → ე; გ → ვ და ა.შ.

ეს უფრო ადვილად აღიქმება, თუ ანბანს მიუწერთ სამი ასოთი ნანაცვლებულ ანბანს:

ა ბ გ დ ე ვ ზ თ ი კ ლ მ ნ ო პ ჟ რ ს ტ უ ფ ქ ღ ყ შ ჩ ძ წ ჭ ხ ჯ ჰ
დ ე ვ ზ თ ი კ ლ მ ნ ო პ ჟ რ ს ტ უ ფ ქ ღ ყ შ ჩ ძ წ ჭ ხ ჯ ჰ ა ბ გ

დაშიფვრის კიდევ ერთი ცნობილი მაგალითია, როცა ყოველ ასოს შეესაბამება მისი რიგითი ნომერი ანბანის მიხედვით. ცხადია, აქაც შეიძლება ჩავრთოთ ნანაცვლების პრინციპი.

პროექტი:

აილეთ თქვენთვის საყვარელი ლიტერატურული ნანარმოების რომელიმე გვერდი და შეადგინეთ ასოების ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.
შექმენით შიფრი: ყველაზე მაღალი ფარდობითი სიხშირის ასოს შეუსაბამეთ ყველაზე პატარა რიცხვი, ასე გააგრძელეთ. და ბოლოს, ყველაზე პატარა სიხშირის ასოს შეუსაბამეთ ყველაზე დიდი რიცხვი.
შემდეგ შიფრი გადაიყვანეთ ორობით სისტემაში.
0-ს შეუსაბამეთ „ · ", 1-ს შეუსაბამეთ „ — ".

შეამოწმე შენი ცოდნა:

1 $(345)_7+(433)_7=$

ა) $(1111)_7$; ბ) $(3112)_7$; გ) $(1451)_7$; დ) $(2222)_7$.

2 $(359)_{10}=$

ა) $(500)_8$; ბ) $(547)_8$; გ) $(550)_8$; დ) $(677)_8$.

3 რომელ პოზიტიურ სისტემაშია ჭეშმარიტი 56+37=104 ტოლობა?

ა) ათობითში, ბ) ცხრაობითში, გ) რვაობითში, დ) არცერთში.

4 ექვსობით პოზიციურ სისტემაში უდიდეს ოთხნიშნა და უმცირეს სამნიშნა რიცხვებს შორის სხვაობაა:

ა) 5455; ბ) 5545; გ) 5554; დ) 4555.

5 $\dfrac{a^{0,5}-16b^{0,5}}{a^{0,25}-4b^{0,25}}-4b^{0,25}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $a=16$ არის:

ა) –2, ბ) –6, გ) 2, დ) 0.

6 რომელ შემთხვევაშია რიცხვები ზრდის მიხედვით დალაგებული:

ა) $2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{2}{5}}, 2^{\frac{3}{7}}$; ბ) $2^{\frac{3}{7}}, 2^{\frac{2}{5}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{4}}$; გ) $2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{5}}, 2^{\frac{3}{7}}$.

დ) არც ერთი პასუხი სწორი არ არის.

7 $\dfrac{4}{5^{\frac{1}{2}}+1}-5^{\frac{1}{2}}+4=$

ა) 4, ბ) 3, გ) 2, დ) –2.

8 $\dfrac{(2+3^{0,5})^4-(2-3^{0,5})^4}{56\cdot 3^{0,5}}=$

ა) 2, ბ) –6, გ) 2, დ) 0.

9 რომელი ტოლობა შეიძლება არ იყოს სწორი?

ა) $(a^2)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}}$, ბ) $(a^3)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}$, გ) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{6}}$, დ) $(a^{\frac{1}{6}})^3=a^{\frac{1}{2}}$.

10 $\dfrac{125^{\frac{1}{3}}-4\cdot 27^{\frac{1}{3}}}{64^{-\frac{1}{6}}}=$

ა) 14; ბ) -10; გ) -14; დ) -12

V თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1 გამოთვალეთ

ა) $25^{\frac{1}{2}}-27^{\frac{2}{3}}+25^{\frac{3}{4}}$; ბ) $16^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$; გ) $(0{,}027)^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0{,}75}-3^{-1}+3{,}5^{0}$;

დ) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2^{-2}+2^{0}}+\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$; ე) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-0{,}5}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}027}}\right)^{-2}625^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{0{,}4}\right)^{-2}2500$;

ვ) $\dfrac{8\cdot 8^{\frac{1}{5}}\cdot 3^{-\frac{3}{5}}}{\sqrt[5]{72}}\cdot\frac{9}{5}+(0{,}0625)^{-\frac{1}{4}}$; ზ) $\dfrac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}$.

2 შეასრულეთ მოქმედებები

ა) $(a^{\frac{1}{3}}+3)(a^{\frac{1}{3}}-3)$; ბ) $(x^{\frac{4}{5}}+1)(5-x^{\frac{1}{5}})$; გ) $(x^{\frac{1}{3}}+2)(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+4)$; დ) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{2}$.

3 შეკვეცეთ წილადი: ა) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$; ბ) $\dfrac{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}$.

4 შეასრულეთ მოქმედებები წილადებზე:

ა) $\dfrac{2}{c^{\frac{1}{2}}d}+\dfrac{b^{2}}{a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{cx}{4a^{\frac{1}{2}}bd}$; ბ) $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}$;

გ) $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{1}{x-y}$; დ) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}-6}-\dfrac{3}{\sqrt{x}+6}+\dfrac{x}{36-x}$.

5 გაამარტივეთ:

ა) $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{a^{-1}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+\left(\sqrt{b}\right)^{-1}}\right)^{-1}$; ბ) $\dfrac{\sqrt[3]{a}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a^{4}}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^{5}}{a^{\frac{2}{3}}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^{-1}}$;

გ) $\dfrac{b-1}{b+\sqrt{b}+1}\left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{b^{3}}-1}\right)^{-1}+\dfrac{2}{\left(\sqrt{b}\right)^{-1}}-b$; დ) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a}}-\dfrac{xa^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+\sqrt{x}}+\dfrac{2x^{2}-4xa}{x-a}$;

ე) $\left(\dfrac{b}{b+8}-\dfrac{4b}{\left(\sqrt[3]{b}+2\right)^{3}}\right)\left(\dfrac{1+2\sqrt[3]{b^{-1}}}{1-2\sqrt[3]{b^{-1/3}}}\right)^{2}-\dfrac{24}{b+8}$; ვ) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{a^{3}}-\sqrt[6]{a^{2}\sqrt{b^{6}}}}{\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\dfrac{a^{1/3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(\dfrac{(a-b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^{-5}}}\right)^{-1}$;

ზ) $\left(\dfrac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\dfrac{a\sqrt{a}+a-\sqrt{a}-1}{a^{1/2}}$; თ) $\left(\dfrac{x^{1/2}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}-\dfrac{(x+y)^{1/2}}{\sqrt{x}+y^{1/2}}\right)^{-2}-\dfrac{x+y}{2x^{1/2}\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{(x+4)^{4}}}{4xy}$;

ი) $\left(\dfrac{a-4b}{a+\sqrt{ab}-6b}-\dfrac{a-9b}{a+6\sqrt{ab}+9b}\right)\dfrac{b^{-1/2}(a-9b)}{\sqrt{a}-3b^{1/2}}$.

6 რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს a, b, c კოეფიციენტები და x არგუმენტი, რომ $f(x)=ax^2+bx+c$ კვადრატული ფუნქცია გამოხატავდეს სამნიშნა რიცხვს რიცხვით სისტემაში ფუძით x. c-ს რა მნიშვნელობისათვის გამოხატავს იმ რიცხვს ფუნქცია, რომელიც იყოფა თავისივე სისტემის ფუძეზე? რას გამოხატავს ფუნქციის მნიშვნელობები: $f(2)$, $f(5)$, $f(8)$, $f(10)$.

V თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

• თუ **$a>0$** და **$m\in Z$, $n\in N\setminus\{1\}$**, მაშინ **$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$**.

თუ **$a=0$** და **$\frac{m}{n}>0$**, მაშინ **$a^{\frac{m}{n}}=0$**.

ნებისმიერი რაციონალური p და q რიცხვებისთვის და ნებისმიერი $a,b>0$-თვის სრულდება:

1 $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$;

2 $a^p\cdot b^p=(ab)^p$;

3 $a^p:a^q=a^{p-q}$;

4 $\frac{a^p}{b^p}=\left(\frac{a}{b}\right)^p$;

5 $(a^p)^q=a^{p\cdot q}$.

• თუ $a>0$ და $m\in Z$, $n\in N\setminus\{1\}$, მაშინ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

თუ $a=0$ და $\frac{m}{n}>0$, მაშინ $a^{\frac{m}{n}}=0$.

• ნებისმიერი რაციონალური p და q რიცხვებისთვის და ნებისმიერი $a,b>0$-თვის სრულდება:

1 $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$;

2 $a^p\cdot b^p=(ab)^p$;

3 $a^p:a^q=a^{p-q}$;

4 $\frac{a^p}{b^p}=\left(\frac{a}{b}\right)^p$;

5 $(a^p)^q=a^{p\cdot q}$.

VI თავი

ამ თავში გავეცნობით წესიერ მრავალკუთხედებს, კუთხის რადიანულ ზომას, წრის სეგმენტის და სექტორის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულებს.

შევძლებთ ვიპოვოთ წესიერი მრავალკუთხედის ფართობის პოვნას, კუთხის რადიანული ზომის გრადუსული ზომით გამოსახვას.

1 ნესიერი მრავალკუთხედები

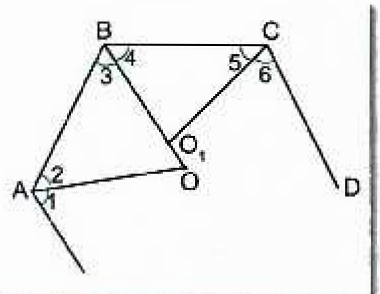
გასახსენებლად!

ვიტყვით, რომ მრავალკუთხედი ნესიერია, თუ მისი ყველა გვერდი ტოლი და ყველა კუთხე ტოლია.

ჩვენ უკვე ვიცნობთ ნესიერ მრავალკუთხედებს: ტოლგვერდა სამკუთხედს, კვადრატს. დასკვნისთვის — "სამკუთხედი ნესიერია" – საკმარისია მისი ყველა გვერდის ან ყველა კუთხის ტოლობა, რადგან ერთი მეორედან გამომდინარეობს, რასაც ვერ ვიტყვით სხვა n-კუთხედებზე ($n>3$). მაგალითად, რომბს (კვადრატი არ არის) ყველა გვერდი ტოლი აქვს, მაგრამ არა აქვს ტოლი კუთხეები. მართკუთხედა, რომელიც კვადრატი არ არის, ყველა კუთხე ტოლი აქვს, გვერდები კი განსხვავებული. ნესიერი მრავალკუთხედები მჭიდროდაა დაკავშირებული წრეწირთან. თუ წრეწირს გავყოფთ n ტოლ რკალად, ხოლო დაყოფის წერტილებს მიმდევრობით შევაერთებთ, მივიღებთ ამ წრეწირში ჩახაზულ ნესიერ n-კუთხედს. თუ დაყოფის წერტილებზე გავავლებთ წრეწირის მხებებს, ერთმანეთთან გადაკვეთამდე, მიღებული n-კუთხედი იქნება ამ წრეწირზე შემოხაზუ-ლი ნესიერი n-კუთხედი.

- წრეწირში ჩახაზულია ნესიერი სამკუთხედი. ააგეთ ამ წრეწირში ჩახაზული ნესიერი ექვსკუთხედი.
- წრეწირში ჩახაზულია ნესიერი ხუთკუთხედი. ააგეთ ამ წრეწირზე შემოხაზული ნესიერი ხუთკუთხედი.

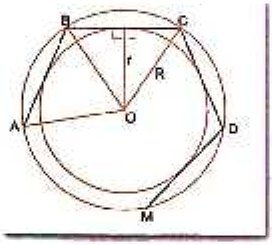
ახლა დავრწმუნდეთ, რომ ნესიერ n-კუთხედზე შემოიხაზება და მასში ჩაიხაზება წრეწირი (იხ. ნახაზი).



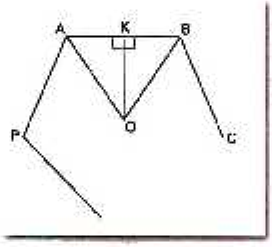
გავავლოთ A და B კუთხეების ბისექტრისები. მათი კვეთის წერტილი აღვნიშნოთ O-თი. ცხადია, $\angle1=\angle2=\angle3=\angle4$, მაშასადამე, ΔABO ტოლფერდაა.

ვთქვათ, B და C კუთხეების ბისექტრისები იკვეთება O-სგან განსხვავებულ O_1 წერტილში. $\Delta AOB=\Delta BO_1C$, რადგან $AB=BC$ და $\angle2=\angle3=\angle4=\angle5$. მაშასადამე $BO=BO_1$, ე.ი. O და O_1 წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა. ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ნესიერი მრავალკუთხედის ყველა კუთხის ბისექტრისა O წერტილში იკვეთება — მაშასადამე O წერტილი წარმოადგენს ამ მრავალკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს. რადგან $\Delta AOB=\Delta BOC=\Delta COD...$, ამიტომ $AO=OB=OC=...$, ე.ი. O წერტილი წარმოადგენს ამ მრავალკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრსაც.

წესიერ მრავალკუთხედზე შემოიხაზება და მასში ჩაიხაზება წრეწირი. ამასთან, ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევა. ამ წერტილს წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრი ეწოდება.



როგორც ნახაზიდან ვხედავთ, წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრიდან მის გვერდზე დაშვებული მართობი წარმოადგენს ამ მრავალკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსს, ხოლო მისი ცენტრის მრავალკუთხედის წვეროსთან შემაერთებელი მონაკვეთი კი მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.



n-კუთხედის ცენტრს თუ შევაერთებთ ყველა წვეროსთან, მივიღებთ n ცალ ტოლ სამკუთხედს O წვეროთი. მაშასადამე,

$$\angle AOB=\frac{360°}{n}.$$

ამოცანების ამოხსნისას უფრო ხშირად გვჭირდება $\angle KOB$-ს გრადუსული ზომის ცოდნა. რადგან ΔAOB ტოლფერდაა,

$$\angle KOB=\frac{180°}{n}.$$

n-კუთხედის გვერდი $AB\equiv a_n$. $OK=r$, $OA=R$.

KOB მართკუთხა სამკუთხედიდან $a_n=2R\sin\frac{180°}{n}$ და $a_n=2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$

ხოლო $r=R\cos\frac{180°}{n}$, (n გვერდების რაოდენობაა). მრავალკუთხედის ფართობი S_n ტოლია $S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}+...+S_{\Delta AOP}$ და რადგან ყველა ეს სამკუთხედი ტოლია და მათი რაოდენობაა n, მივიღებთ

$$S_n=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{360°}{n} \text{ ან } S_n=n\cdot r^2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}.$$

? ჭეშმარიტია თუ არა, რომ:

- ❑ ნებისმიერი ტოლგვერდა სამკუთხედი წესიერია;
- ❑ ნებისმიერი ტოლგვერდა ოთხკუთხედი წესიერია;
- ❑ წესიერ მრავალკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსები ტოლია;
- ❑ წესიერ მრავალკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების ცენტრები ერთმანეთს არ ემთხვევა;
- ❑ თუ სამკუთხედის ყველა კუთხე ტოლია, მაშინ ის წესიერია;
- ❑ თუ ოთხკუთხედის ყველა გვერდი ტოლია, მაშინ ის წესიერია.

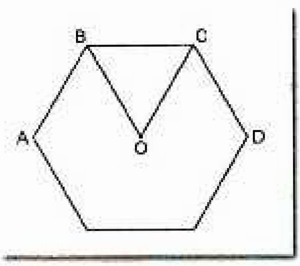
შეიძლება თუ არა, რომ:

- წესიერი მრავალკუთხედის კუთხეების ბისექტრისები არ გადაიკვეთოს ერთ წერტილში;
- წესიერი მრავალკუთხედის გვერდების შუამართობები არ გადაიკვეთოს ერთ წერტილში;
- წესიერ მრავალკუთხედს არ ჰქონდეს სიმეტრიის ღერძი;
- წესიერ მრავალკუთხედს არ ჰქონდეს სიმეტრიის ცენტრი.

ამოცანა 1.

წესიერი ექვსკუთხედის გვერდის სიგრძეა a. იპოვეთ ამ ექვსკუთხედის ფართობი და მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძე.

ამოხსნა:



$\angle BOC=\frac{360°}{6}=60°$, ე.ი. BOC სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

BO=OC=R და BC=a.

მაშასადამე, R=a.

$S=6S_{\triangle BOC}=6\cdot\frac{1}{2}\cdot BO\cdot OC\cdot\sin\angle BOC=$

$=6\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

ამოცანა 2.

იპოვეთ წესიერ მრავალკთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები, თუ $n=5$ და $a_n=10$ სმ.

ამოხსნა:

$a_n=2R\sin\frac{180°}{n}$ ფორმულაში n-ის და a_n-ის მნიშვნელობების ჩასმის შედეგად მივიღებთ.

$10=2R\sin 36° \Rightarrow R=\frac{5}{\sin 36°}$

ანალოგიურად, $a_n=2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$ ფორმულიდან მივიღებთ, რომ $r=\frac{5}{\mathrm{tg}36°}$.

სავარჯიშოები:

1 ჩახაზული წრეწირის რადიუსით გამოსახეთ წესიერი n-კუთხედის გვერდი, თუ: ა) $n=3$; ბ) $n=4$; გ) $n=6$.

2 შემოხაზული წრეწირის რადიუსით გამოსახეთ წესიერი n-კუთხედის-გვერდი, თუ: ა) $n=3$; ბ) $n=4$; გ) $n=6$.

3 წესიერი n-კუთხედის გვერდი $a_n=10$, იპოვეთ ამ n-კუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსების სიგრძეები, თუ:

ა) $n=3$; ბ) $n=4$; გ) $n=6$.

4* მოცემულ წრეწირში ჩახაზეთ: ა) წესიერი სამკუთხედი;

ბ) წესიერი ოთხკუთხედი; გ) წესიერი ექვსკუთხედი.

5 წესიერ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების სხვაობა უდრის m-ს. გაიგეთ სამკუთხედის გვერდის სიგრძე.

6 წრეწირში ჩახაზულია კვადრატი და წესიერი სამკუთხედი. კვადრატის ფართობი 54-ია. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

7 წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი 84 სმ-ია. იპოვეთ მისი ტოლდიდი წესიერი სამკუთხედის გვერდი.

8 წესიერი სამკუთხედის, კვადრატისა და წესიერი ექვსკუთხედის ფართობები ტოლია. როგორ შეეფარდება ერთმანეთს ამ ფიგურების გვერდები?

9 წრეწირში ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხედი. იპოვეთ მისი ფართობი, თუ $R=4\sqrt[4]{3}$.

10 წრეწირში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი უდრის $3{,}25\sqrt{3}$-ს. იპოვეთ ამავე წრეწირში ჩახაზული წესიერი თორმეტკუთხედის ფართობი.

11 წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედის პერიმეტრია 20, ხოლო ფართობი 60. გამოთვალეთ წრეწირის რადიუსი.

12 წრეწირში ჩახაზულია და მასზე შემოხაზულია წესიერი n-კუთხედები. იპოვეთ n-კუთხედების გვერდების შეფარდება ($n=3$; $n=6$).

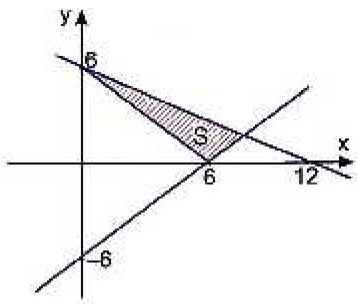
13 იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხედის გვერდის სიგრძე, თუ მისი ფართობია $150\sqrt{3}$ სმ.

14 დაამთავრეთ ცხრილის შევსება:

	R	r	S	a
წესიერი სამკუთხედი				5
წესიერი ოთხკუთხედი		4		
წესიერი ექვსკუთხედი	3			

გ

15 იპოვეთ ნახაზზე დაშტრიხული სამკუთხედის ფართობი.



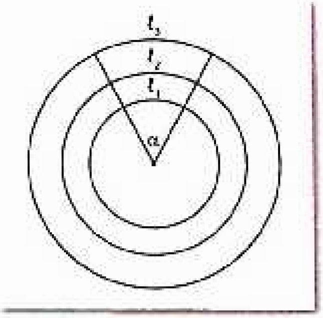
16 ა) ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობაა 2. დაამტკიცეთ, რომ მათი ნამრავლი არ შეიძლება იყოს სრული კვადრატი.

ბ) ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობაა სამი, მათი ნამრავლი კი სრული კვადრატია. იპოვეთ ასეთი რიცხვების ყველა წყვილი.

17 $(A+1)\vdots 3$ დაამტკიცეთ, რომ $(4+7A)\vdots 3$.

18 A+2 და 35–B იყოფა 11-ზე. დაამტკიცეთ, რომ $(A+B)\vdots 11$.

2 კუთხის რადიანული ზომა



განვიხილოთ კონცენტრული წრეწირები. α ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალების სიგრძეები აღვნიშნოთ ℓ_1; ℓ_2; ℓ_3; ...; ℓ_n ($\ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < . . . < \ell_n$), რადიუსები კი R_1; R_2; ...; R_n ($R_1 < R_2 < . . . < R_n$).

$\ell_1=\frac{\pi R_1}{180}\alpha$, $\ell_2=\frac{\pi R_2}{180}\alpha$, ..., $\ell_n=\frac{\pi R_n}{180}\alpha$, ე.ი. $\frac{\ell_1}{R_1}=\frac{\ell_2}{R_2}=...=\frac{\ell_n}{R_n}$,

რაც იმას ნიშნავს, რომ ცენტრალური კუთხისთვის მისი შესაბამისი რკალის სიგრძის შეფარდება რადიუსთან მუდმივი სიდიდეა. მაშასადამე, კუთხის გასაზომად შეგვიძლია შემოვიღოთ ახალი საზომი, ამ საზომს კუთხის რადიანული ზომა ეწოდება.

კუთხის რადიანული ზომა რიცხვია. ეს რიცხვი ტოლია ამ კუთხის ტოლი ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალის სიგრძის რადიუსთან შეფარდებისა.

გასახსენებლად!
წრეწირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით
$\ell=2\pi R$.

როგორც ვიცით, გაშლილი კუთხის გრადუსული ზომაა 180° და მას შეესაბამება წრეწირის ნახევარი, ე.ი. 180°-იანი კუთხის რადიანული ზომაა π. ე.ი. π რად=180°, ეს ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ

1რად · π =180°, მაშასადამე,

1რად = $\frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''$.

$1°=\frac{\pi}{180}$ რად.

როგორც წესი, განზომილება „რადიანი" (რად) არ იწერება, მაგალითად,

$30° = \frac{\pi}{6}$ რად $= \frac{\pi}{6}$.

ამოცანა.

წარმოადგინეთ: ა) $\frac{\pi}{12}$ გრადუსული ზომით; ბ) 50° რადიანული ზომით.

ა) 1რად = $\frac{180°}{\pi}$, ე.ი. $\frac{\pi}{12}$ რად$=\frac{180°}{\pi}\cdot\frac{\pi}{12}=15°$.

ბ) $1°=\frac{\pi}{180}$, ე.ი. $50°=\frac{\pi}{180}\cdot 50=\frac{5\pi}{18}$.

სავარჯიშოები:

1 გადაიყვანეთ რადიანულ ზომებში შემდეგი კუთხეები: $\alpha=10°$; $\alpha=30°$; $\alpha=50°$; $\alpha=70°$; $\alpha=100°$; $\alpha=135°$.

2 გადაიყვანეთ გრადუსულ ზომებში შემდეგი კუთხეები: $\alpha=\frac{\pi}{20}$; $\alpha=\frac{\pi}{6}$; $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\alpha=0$; $\alpha=\pi$; $\alpha=3$; $\alpha=\frac{1}{6}$.

3 იპოვეთ: $\sin\frac{\pi}{6}$; $\cos\frac{\pi}{3}$; $tg\frac{\pi}{4}$; $ctg\frac{\pi}{2}$.

4 გამოთვალეთ:

ა) $2\sin\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}$; ბ) $\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}tg\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{4}$;

გ) $2\sin^2\frac{\pi}{4}2\sin^2\frac{\pi}{3}\cdot tg^2\frac{\pi}{4}$; დ) $4tg45^\circ+2\cos90^\circ+3\sin90^\circ-\cos135^\circ$.

5 იპოვეთ:

ა) $\sin\alpha+\cos\alpha$, თუ $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

ბ) $\cos2\alpha+\cos3\alpha$, თუ $\alpha=\frac{\pi}{12}$;

გ) $\sin2\alpha+tg\alpha-\frac{2}{tg\alpha}$, თუ $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

დ) $tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})$, თუ $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

6 შეავსეთ ცხრილი:

კუთხის რადიონალური ზომა	კუთხის გრადუსული ზომა
2π	
	60°
$\frac{3\pi}{5}$	
$\frac{7\pi}{12}$	
	135°
	150°

7 რამდენი 0-ით ბოლოვდება 125!

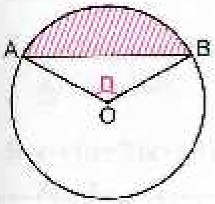
8 დაამტკიცეთ, რომ ა) $(n^5+4n) \vdots 5$, ბ) $n(n^2-1) \vdots 3$ ნებისმიერი ნატურალური n-ისთვის.

9 ნატურალური m და n რიცხვებისათვის სრულდება $(m-n)^2=\frac{4mn}{m+n-1}$. დაამტკიცეთ, რომ $m+n$ სრული კვადრატია.

3 სეგმენტი, სეგმენტის ფართობი

წრეში ჩახაზულია კვადრატი. იპოვეთ კვადრატის გარეთ დარჩენილი წრის ნაწილების ფართობთა ჯამი.

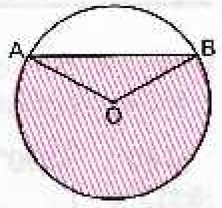
ქორდით შემოსაზღვრულ წრის ნაწილს სეგმენტი ეწოდება.



AB ქორდით მიღებული მცირე სეგმენტის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

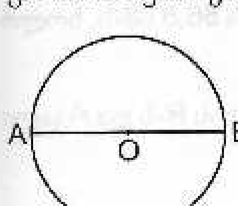
$$S_{სეგ}=S_{სექტ}-S_{\triangle AOB}=\frac{\pi R^2}{360}\cdot n-\frac{1}{2}R^2\sin n°.$$

გასახსენებლად!
წრის ფართობი, რომლის რადიუსია R, გამოითვლება ფორმულით: $S=\pi R^2$



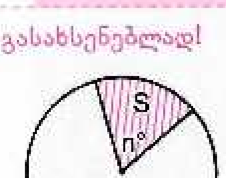
AB ქორდით მიღებული დიდი სეგმენტის ფართობი $S_{სეგ}=S_{სექტ}+S_{\triangle AOB}$.

უმეტესად, დიდი სეგმენტის ფართობის ანგარიშისას უმჯობესია, წრის ფართობს გამოვაკლოთ მცირე სეგმენტის ფართობი.



თუ ქორდა დიამეტრია, $S_{სეგ}=\frac{\pi R^2}{2}$.

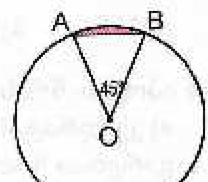
გასახსენებლად!



n°-იანი ცენტრალური კუთხის შესაბამისი სექტორის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\frac{\pi R^2}{360}n.$$

ამოცანა.



იპოვეთ 45°-იანი რკალის შესაბამისი სეგმენტის ფართობი, თუ R=5სმ. ამოხსნა:

$$S_{AOB\,სექტ}=\frac{\pi R^2}{360}\cdot 45=\frac{\pi R^2}{8}.$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}R^2\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{4}R^2.$$

$$S_{სეგ}=\frac{\pi R^2}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}R^2=R^2\frac{\pi-2\sqrt{2}}{8}=\frac{25}{8}(\pi-2\sqrt{2}).$$

მართალია თუ არა, რომ:

- ორ წრეს ტოლი ფართობი აქვს, თუ ისინი ტოლი ფართობის სამკუთხედებზეა შემოხაზული;
- ორ წრეს ტოლი ფართობი აქვს, თუ ისინი ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედებშია ჩახაზული;
- თუ ორ წრეში ტოლი ქორდებით მიღებულ მცირე სეგმენტებს ტოლი ფართობი აქვს, მაშინ ეს წრეები ტოლდიდია.

- დაადგინეთ წრეში ჩახაზული სამკუთხედის სახე, თუ ამ სამკუთხედის გვერდებით მიღებული სეგმენტებიდან

  ა) ორს ტოლი ფართობები აქვთ;

  ბ) ერთ-ერთის ფართობია $\frac{\pi R^2}{2}$.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ R-რადიუსიანი წრიული სეგმენტის ფართობი, თუ მისი შესაბამისი ცენტრალური კუთხეა:

ა) 40°; ბ) 90°; გ) 150°; დ) 240°; ე) 300°; ვ) 330°.

2 იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ იმ სექტორის ფართობი, რომლის ცენტრალური კუთხეა 72°, უდრის 157 მ²-ს.

3 იპოვეთ სექტორის კუთხე, თუ მისი ფართობი უდრის 56,8 სმ-ს, ხოლო რადიუსი 6 სმ-ია.

4 იპოვეთ სეგმენტის ფართობი, თუ მისი რადიუსი უდრის R-ს და რკალი შეიცავს:

ა) 90°; ბ) 60°; გ) 45°; დ) 30°-ს.

5 იპოვეთ სეგმენტის ფართობი, თუ ქორდა უდრის a-ს, რკალი კი შეიცავს:

ა) 120°; ბ) 90°; გ) 60°-ს.

6 იპოვეთ წრის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მასში ჩახაზული:
ა) კვადრატის; ბ) წესიერი სამკუთხედის; გ) წესიერი ექვსკუთხედის გარეთაა მოთავსებული. წრის რადიუსია 25 სმ.

7 დაამთავრეთ ცხრილის შევსება, თუ R – წრეწირის რადიუსია, ℓ – წრეწირის სიგრძე, S – ფართობი, a – მასში ჩაწერილი, b კი შემოხაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდი

R	ℓ	S	a	b
			5	
				3
		9π		
	8π			
6				

8 იპოვეთ ორი წყვილი მაინც, რომელიც აკმაყოფილებს $2x^3=y^4$ ტოლობას.

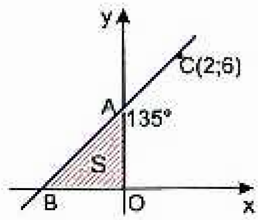
9 $x^2+(a+3)x+a+2=0$

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-2$ უ.მ. x_1x_2.

10 $2x^2-2(m+2)x+m-1=0 \quad x_1=x_2^{-1}$

$x_1+x_2=?$

11 იპოვეთ ნახაზზე დაშტრიხული სამკუთხედის ფართობი.



12 განსაზღვრეთ x-ის მნიშვნელობა, თუ $\frac{9^{-\frac{2}{3}}\cdot 81^{\frac{4}{3}}}{0{,}2^{-1}\cdot 0{,}6\cdot x}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{27^{-1}}}$.

ჯგუფური მეცადინეობა

4 ვითამაშოთ

ყურადღებით წაიკითხეთ თამაშები და ჩამოაყალიბეთ სწორად თამაშის სტრატეგია.

1. მოცემულია წესიერი 20-კუთხედი. ერთ სვლაზე ვავლებთ დიაგონალს, ოღონდ ისე, რომ არ გადაკვეთოს უკვე გავლებული არც ერთი დიაგონალი. მოგებულია ის, ვინც ბოლო სვლას გააკეთებს.

2. მოცემულია წესიერი ა) 12-კუთხედი, ბ) 11-კუთხედი. ერთ სვლაზე ვაფერადებთ ერთ ან ორ მეზობელ წვეროს. მოგებულია ის, ვინც ბოლო სვლას გააკეთებს.

3. თამაშობს ორი მოთამაშე. წრეწირზე მოცემულია 20 წერტილი. ერთ სვლაზე შეიძლება გაავლო ქორდა, ოღონდ ისეთი, რომ არ გადაკვეთოს უკვე გავლებული არც ერთი ქორდა. წაგებულია ის, ვინც ვერ გააკეთებს სვლას.

4. გვირილას აქვს ა) 12 ფურცელი, ბ) 11 ფურცელი. ერთ სვლაზე შეიძლება მოვაძროთ ან ერთი ან ორი მეზობელი ფურცელი. წააგებს ის, ვინც ვეღარ გააკეთებს სვლას.

5. 11×11 უჯრიან ფურცელზე ერთ სვლაზე აფერადებენ ერთ ან ორ უჯრას. წაგებულია ის, ვინც სვლას ვერ გააკეთებს.

პროექტი:

ქვემოთ მოყვანილი თამაშებისათვის ჩამოაყალიბეთ მომგებიანი სტრატეგია.

1. კოლოფში დევს 300 ასანთის ღერი. ერთ სვლაზე შეგიძლიათ აიღოთ არა უმეტეს კოლოფში არსებული ღერების ნახევრისა. წააგებს ის, ვინც სვლას ვერ გააკეთებს.

2. თამაში იწყება რიცხვი 60-იდან. ერთ სვლაზე შესაძლებელია შევამციროთ რიცხვი მისი ერთ-ერთი გამყოფით. წაგებულია ის, ვინც მიიღებს ნულს.

3. გვაქვს ქვების 2 გროვა, 30 და 20 ქვით. ერთ სვლაზე შესაძლებელია ერთი გროვიდან ნებისმიერი რაოდენობის ქვის აღება. წაგებულია ის, ვინც სვლას ვერ გააკეთებს.

VI თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1 არსებობს თუ არა წესიერი მრავალკუთხედი, რომლის ყველა კუთხე $145°$-ია?

2 რამდენი დიაგონალი აქვს წესიერ მრავალკუთხედს, რომლის შიგა კუთხე $108°$-ია?

3 წრეწირში ჩახაზულია 18 სმ პერიმეტრის მქონე წესიერი ექვსკუთხედი. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

4 12 სმ რადიუსის მქონე წრეწირში ჩახაზულია წესიერი ხუთკუთხედი. იპოვეთ მისი პერიმეტრი.

5 წრეწირის რადიუსია $4\sqrt{3}$ სმ. მასში ჩახაზული 12 სმ-ის სიგრძის გვერდის მქონე წესიერი მრავალკუთხედი. იპოვეთ მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა.

6 18 სმ-ის სიგრძის გვერდის მქონე წესიერი ექვსკუთხედზე შემოხაზულია წრეწირი. იპოვეთ ამ წრეწირში ჩახაზული კვადრატის პერიმეტრი.

7 წრეწირის სიგრძე 36π სმ-ია. იპოვეთ ამ წრეწირის $60°$-იანი რკალის მომჭიმავი ქორდის სიგრძე.

8 გამოთვალეთ r რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზული წესიერი სამკუთხედის ფართობი.

9 წესიერ სამკუთხედში, რომლის გვერდი არის $a=4$, ჩახაზულია წრეწირი, რომელშიაც ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხედი. იპოვეთ ექვსკუთხედის ფარ-თობი.

10 წრეწირში ჩახაზული წესიერი რვაკუთხედის ფართობი უდრის $16\sqrt{\frac{2}{3}}$. იპოვეთ ამავე წრეწირში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის ფართობი.

11 წრეწირში ჩახაზული წესიერი თორმეტკუთხედის ფართობი უდრის $18\sqrt{2}$ იპოვეთ იმავე წრეწირში ჩახაზული წესიერი რვაკუთხედის ფართობი.

12 წესიერი ექვსკუთხედის ფართობია 24 სმ². იპოვეთ ამ ექვსკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობი.

13 წესიერ n-კუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი უდრის r-ს. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, თუ $n=7$, $r = 58\cos\frac{\pi}{7}$.

14 მიმდევრობით შეერთებულია წესიერი 12-კუთხედის 6 გვერდის შუა წერტილები თითო გვერდის გამოტოვებით. იპოვეთ მიღებული წესიერი 6-კუთხედის გვერდი, თუ 12-კუთხედის გვერდი უდრის a-ს.

15 იპოვეთ მოცემული a ქორდით მოჭიმული რკალის სიგრძე, თუ რკალის გრადუსული ზომაა: ა) $60°$; ბ) $90°$; გ) $120°$.

16 იპოვეთ წრეწირის სიგრძე, თუ ის მასში ჩახაზული კვადრატის პერიმეტრზე 5სმ- ით მეტია.

17 მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია ნახევარწრე ისე, რომ მისი დიამეტრი მდებარეობს ჰიპოტენუზაზე და მისი ცენტრი ჰიპოტენუზას ჰყოფს 15 სმ და 20 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ ნახევარწრის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია კათეტებთან მისი შეხების წერტილებს შორის.

18 იპოვეთ წრის ფართობი, თუ წრეწირის სიგრძეა ℓ.

19 იპოვეთ წრის ფართობი, თუ მასში ჩახაზული კვადრატის ფართობია $\frac{15}{\pi}$.

20 იპოვეთ წრის ფართობი, თუ ის მასზე შემოხაზული კვადრატის ფართობზე 4,3 $მ^2$-ით ნაკლებია.

21 სამკუთხედის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეების ფართობთა შეფარდება.

22 იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრის ფართობი, თუ კათეტების გეგმილები ჰიპოტენუზაზე უდრის 9 მ-ს და 16 მ-ს.

23* მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრი უდრის 24 სმ-ს, მისი ფართობი კი 24 $სმ^2$-ია. იპოვეთ შემოხაზული წრის ფართობი.

24 მართკუთხედის პერიმეტრი 14 სმ-ია, მასზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძე კი – 5π სმ. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი.

25 მართკუთხედის პერიმეტრი 44 სმ-ია, მასზე შემოხაზული წრის ფართობი კი – 65π სმ. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

26 მართკუთხედის პერიმეტრი 26 სმ-ია, ფართობი კი – 40 $სმ^2$. იპოვეთ მასზე შემოხაზული წრის ფართობი.

27 რომბი, რომლის გვერდი მცირე დიაგონალს უდრის, R-რადიუსიანი წრის ტოლდიდია. იპოვეთ რომბის გვერდი.

28 რომბის ფართობია $\frac{8}{\pi}$, ხოლო მასში ჩახაზული წრის ფართობი – $\sqrt{3}$.
იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა.

29 იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ ამ სამკუთხედის ფუძე ტოლია 24 სმ-ის, ფერდი კი 13 სმ-ია.

30 ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდის სიგრძე 54 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის შიგნით მოთავსებულ ყველა იმ კონცენტრულ წრეთა რაოდენობა, რომელთა ცენტრი სამკუთხედის სიმაღლეთა გადაკვეთის წერტილია და რადიუსის სი-გრძე კი მთელი რიცხვით გამოისახება.

31 წრეზე შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია. ტრაპეციის მახვილი კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ წრის ფართობის ტრაპეციის ფართობთან შეფარდება, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

32 ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე უდრის α-ს. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობის შეფარდება სამკუთხედის ფართობად, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{4}$.

33 წრეზე შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია. რომლის ერთი კუთხეა 150° და შუამონაკვეთი 40 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ წრის ფართობი.

34 ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია BC=1 და AD=3, ისეთია, რომ შეიძლება ჩაიხაზოს და შემოიხაზოს წრეწირი. იპოვეთ შემოხაზული წრის ფართობი.

35 ორი წრის საერთო ქორდით მოჭიმულია 60°-იანი და 120°-იანი რკალები. იპოვეთ ამ წრეების ფართობთა შეფარდება.

36 იპოვეთ ფართობი წრიული რგოლისა, რომელიც ერთი და იმავე ცენტრის მქონე ორ წრეწირს შორისაა მოთავსებული, თუ წრეწირების რადიუსებია: 4 სმ და 6 სმ.

37 წრის ფართობი, რომლის რადიუსი არის R, მისივე კონცენტრული ორი წრეწირით გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ ამ წრეწირთა რადიუსები.

38* წესიერ სამკუთხედში ჩახაზულია და მასზე შემოხაზულია წრეწირები. იპოვეთ მიღებული რგოლის ფართობი, თუ სამკუთხედის გვერდი უდრის a-ს.

39 იპოვეთ წესიერ ექვსკუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეების ფართობთა შეფარდება.

40 იპოვეთ სექტორის ცენტრალური კუთხე, თუ სექტორის ფართობი შეადგენს ფართობის: ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) $\frac{15}{16}$.

41* სექტორის ცენტრალური კუთხე უდრის 60°-ს, რადიუსი კი უდრის R-ს. იპოვეთ სექტორში ჩახაზული წრის რადიუსი.

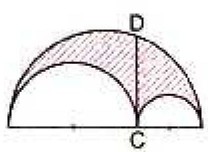
42* ABC რკალის ბოლოებზე გავლებულია წრეწირის მხებები D წერტილში გადაკვეთამდე. იპოვეთ ორ მხებსა და რკალს შორის მოთავსებული DABC ფიგურის ფართობი, თუ წრეწირის რადიუსი უდრის R-ს და რკალი შეიცავს: 1) 90°-ს; 2) 120°-ს; 3) 60°-ს.

43* ორი წრეწირი, რომელთა რადიუსები r და $3r$, გარედან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია ორ წრეწირსა და მათ საერთო გარე მხებს შორის.

44 R რადიუსის მქონე წრეში, ცენტრის სხვადასხვა მხარეს გავლებულია პარალელური ქორდები, რომელთაგან ერთი ჭიმავს 60°-იან რკალს, ხოლო მეორე – 120°-იანს. იპოვეთ ქორდებს შორის მოთავსებული წრის ნაწილის ფართობი.

45 წრეწირში ჩახაზული კვადრატის გვერდი უდრის $\frac{4}{\sqrt{\pi-2}}$. იპოვეთ მის მიერ ჩამოკვეთილ სეგმენტთა ფართობების ჯამი.

46 ნახაზზე დაშტრიხულ ფიგურას ეწოდება "არქიმედეს არბელოსი". დაამტკიცეთ, რომ "არქიმედეს არბელოსის" ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S=\frac{1}{4}\pi CD^2$.



შეამოწმე შენი ცოდნა:

I ვარიანტი

1 დაადგინეთ წესიერი მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა, თუ მას დიაგონალი ყოფს ორ ტრაპეციად.

2 მოცემულია m და n კუთხა წესიერი მრავალკუთხედები, რომლის შიგა კუთხეა მეტი, თუ $m>n$.

3 მოცემულია წესიერი n-კუთხედი. იპოვეთ n, თუ ა) n-კუთხედის შიგა და გარე კუთხეები ტოლია; ბ) $R=2r$.

4 მოცემულია n და m კუთხა წესიერი მრავალკუთხედები შეადარეთ a_n და a_m, თუ $n>m$ და ისინი ერთ წრეწირშია ჰახაზული.

5 ჩამოაყალიბეთ მოცემული დებულების საწინააღმდეგო დებულება და დაადგინეთ სამართლიანია თუ არა იგი:

ა) ნესიერი მრავალკუთხედის ყველა გვერდი ტოლია;

ბ) წესიერი მრავალკუთხედი შემოხაზული და ჩახაზული მრავალკუთხედია;

გ) ნესიერ n-კუთხედს აქვს n სიმეტრიის ღერძი.

6 წრიდან ამოჭრეს სექტორი, რომლის რკალის გრადუსული ზომაა α და რომ ლის ფართობიც ორჯერ ნაკლებია წრის დარჩენილი ნაწილის ფართობზე.

დაადგინეთ მახვილია, მართი თუ ბლაგვი α კუთხე.

7 იპოვეთ R=5სმ წრის 7 სმ-ის სიგრძის ქორდით მიღებული მცირე სეგმენტის ფართობი.

8 იპოვეთ წესიერი რვაკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდის სიგრძეა 15 სმ.

9 იპოვეთ ნესიერ ხუთკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსის სიგრძე, თუ $a_5=5$ სმ.

10 იპოვეთ წესიერი მრავალკუთხედის გვერდის სიგრძე, თუ R=10სმ და r=8სმ.

11 ცხრილის ყოველ სტრიქონში ჩასვით ერთი ან რამდენიმე „+", რომელიც გვიჩვენებს თუ n-ის რომელი მნიშვნელობებისათვის აქვს წესიერ n-კუთხედს აღნიშნული თვისება.

① n=3
② n=4
③ n=6

	თვისება	1	2	3
მაგალითი	ასეთ წესიერ n-კუთხედში შიგა კუთხეები არ არის მახვილი.	–	+	+
1.	ასეთ წესიერ n-კუთხედში ყველა კუთხე მახვილია.			
2.	ასეთ წესიერ n-კუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი გვერდის ტოლია.			
3.	ასეთ წესიერ n-კუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი რვაჯერ ნაკლებია პერიმეტრზე.			
4.	ასეთ წესიერ n-კუთხედში არის სიმეტრიის ცენტრი.			
5.	ასეთი წესიერი n-კუთხედი სიმეტრიის ღერძით იყოფა ორ სამკუთხედად.			

12 შეიძლება თუ არა, რომ წესიერი ექვსკუთხედი მისი ცენტრის მიმართ ბლაგვი კუთხით მობრუნებისას თავის თავზე აისახოს.

13 განსაზღვრეთ n-ის უმცირესი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც წესიერ n-კუთხედს აქვს 15 სიმეტრიის ღერძი და არა აქვს სიმეტრიის ცენტრი.

14 მართალია თუ არა, რომ წესიერი მრავალკუთხედების გვერდების შუაწერტილები სხვა წესიერი მრავალკუთხედის წვეროებია.

15 წესიერ მრავალკუთხედს აქვს ზუსტად 6 სიმეტრიის ღერძი. დაადგინეთ, აქვს თუ არა მას სიმეტრიის ცენტრი.

II ვარიანტი

1 დაადგინეთ წესიერი მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა, თუ მას ერთი წვეროდან გამოსული ორი დიაგონალი ყოფს სამ ტოლფერდა სამკუთხედად.

2 მოცემულია n და m კუთხა წესიერი მრავალკუთხედები, რომლის გარე კუთხეა მეტი, თუ $m>n$.

3 მოცემულია წესიერი n-კუთხედი. იპოვეთ n, თუ:

ა) გარე კუთხე ორჯერ მეტია შიგა კუთხეზე; ბ) $a_n=R$; გ) $R=2r$.

4 შეადარეთ a_n და a_m, თუ $n>m$ და ისინი ერთ წრეზეა შემოხაზული.

5 ჩამოაყალიბეთ მოცემული დებულების საწინააღმდეგო დებულება და დაადგინეთ სამართლიანია თუ არა იგი:

ა) წესიერი მრავალკუთხედის ყველა კუთხე ტოლია;

ბ) წესიერ მრავალკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრე-წირების ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევა;

გ) თუ წესიერი მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა ლუწია, მაშინ მას აქვს სიმეტრიის ცენტრი.

6 წრიდან ამოჭრეს სექტორი, რომლის გრადუსული ზომაა α, ამასთან სექტორის ფართობი სამჯერ ნაკლებია წრის დანარჩენი ნაწილის ფართობზე. დაადგინეთ მახვილია, ბლაგვი თუ მართი α კუთხე.

7 იპოვეთ $R=10$ სმ წრის 12 სმ სიგრძის ქორდით მიღებული სეგმენტის ფართობი.

8 იპოვეთ წესიერი რვაკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდის სიგრძეა 20 სმ.

9 იპოვეთ წესიერ ხუთკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსის სიგრძე, თუ $a_5=3$ სმ.

10 იპოვეთ წესიერი მრავალკუთხედის გვერდის სიგრძე, თუ $R=5$სმ და $r=3$სმ.

11 ცხრილის ყოველ სტრიქონში ჩასვით ერთი ან რამდენიმე „+", რომელიც გვიჩვენებს თუ n-ის რომელი მნიშვნელობებისათვის აქვს წესიერ n-კუთხედს აღნიშნული თვისება.

① n=3
② n=4
③ n=6

	თვისება	1	2	3
მაგალითი	ასეთ წესიერ n-კუთხედში შიგა კუთხეები არ არის მახვილი.	–	+	+
1.	ასეთ წესიერ n-კუთხედში ყველა კუთხე მახვილია.			
2.	ასეთ წესიერ n-კუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი გვერდის ტოლია.			
3.	ასეთ წესიერ n-კუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი რვაჯერ ნაკლებია პერიმეტრზე.			
4.	ასეთ წესიერ n-კუთხედში არის სიმეტრიის ცენტრი.			
5.	ასეთი წესიერი n-კუთხედი სიმეტრიის ღერძით იყოფა ორ სამკუთხედად.			

12 შეიძლება თუ არა, რომ წესიერი ექვსკუთხედი მისი ცენტრის მიმართ მახვილი კუთხით მობრუნებისას თავის თავზე აისახოს.

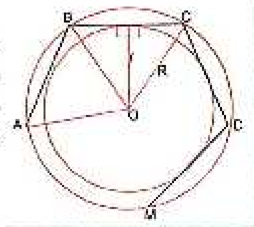
13 განსაზღვრავთ n-ის უმცირესი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც წესიერ n-კუთხედს აქვს 15 სიმეტრიის ღერძი და აქვს სიმეტრიის ცენტრი.

14 მართალია თუ არა, რომ ნეაიერ 2n-კუთხედში თუ შევაერთებთ წვეროებს თითოს გამოტოვებით, მივიღებთ წესიერ n-კუთხედს.

15 წესიერ მრავალკუთხედს ქვს ზუსტად 5 სიმეტრიის ღერძი. დაადგინეთ, აქვს თუ არა მას სიმეტრიის ცენტრი.

VI თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- წესიერ მრავალკუთხედზე შემოიხაზება და მასში ჩაიხაზება წრეწირი. ამასთან, ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევა. ამ წერტილს წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრი ეწოდება.



- $a_n=2R\sin\frac{180°}{n}$ და $a_n=2r\,tg\frac{180°}{n}$

- $S_n=\frac{n}{2}\cdot R^2\sin\frac{360°}{n}$ ან $S_n=n\cdot r^2 tg\frac{180°}{n}$.

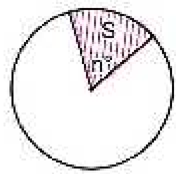
- 1რად $=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'45''$.

  $1°=\frac{\pi}{180}$ რად.

- გასახსენებლად!

  $n°$-იანი ცენტრალური კუთხის შესაბამისი სექტორის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\frac{\pi R^2}{360}n.$$



VII თავი

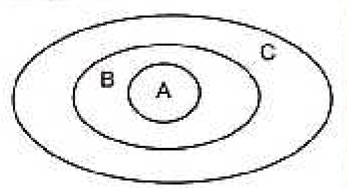
ამ თავში გადმოცემული მასალა მიზნად ისახავს ლოგიკური აზროვნების განვითარებას. თქვენ შეძლებთ მოცემული დებულებებიდან სწორი დასკვნის გამოტანას, მოცემული რთული წინადადების საწინააღმდეგო და ეკვივალენტური წინადადების ჩამოყალიბებას.

გაიღრმავებთ ცოდნას მათემატიკურ სტატისტიკასა და ალბათობათა თეორიაში.

VII თავი

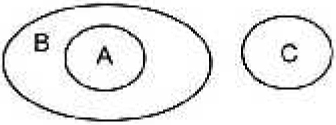
1 ლოგიკური მსჯელობა

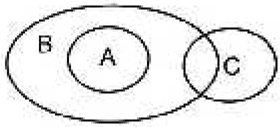
ჰქონდეს სწორი მსჯელობის უნარი, გამოიტანოს სწორი დასკვნა არსებული მონაცემების საფუძველზე, ადამიანისათვის აუცილებელია მისი საქმიანობის ნებისმიერ სფეროში: მეცნიერებასა თუ ტექნიკაში, იურისპრუდენციასა თუ დიპლომატიაში, სამხედრო საქმიანობასა თუ უბრალოდ ყოველდღიურ ცხოვრებაში. ჯერ კიდევ ძვ. წ. აღ. IV ს. უდიდესმა ბერძენმა ფილოსოფოსმა არისტოტელემ (ძვ. წ. აღ. 384-322 წწ.) გამოიკვლია მსჯელობის სხვადასხვა ფორმები, შემოიტანა ცნება „სილოგიზმისა" - ესაა მსჯელობა, სადაც მოცემული ორი დებულებიდან გამომდინარეობს მესამე. მაგალითად, ასეთი მსჯელობა: „ყველა ამფიბია წყალში ცხოვრობს. ყველამ, ვინც წყალში ცხოვრობს, იცის ცურვა. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყველა ამფიბიამ იცის ცურვა" - სილოგიზმია. ლოგიკური მსჯელობები შესაძლებელია გეომეტრიულად ასე გამოვსახოთ: B იყოს წყალში მცხოვრები არსებები. A - ამფიბიები, C - ყველა, ვინც იცის ცურვა. მივიღებთ შემდეგი სახის ვენის დიაგრამას (ნახ. 1); საზოგადოდ კი მოცემული დიაგრამა ასე შეგვიძლია წავიკითხოთ: თუ ყველა a-სთვის სრულდება b და თუ ყველა b-სთვის სრულდება c, მაშინ აქედან გამომდინარეობს, რომ ყველა a-თვის შესრულდება c.



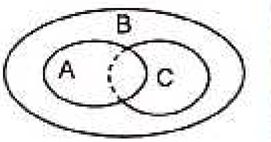
ნახ. 1

წაიკითხეთ სილოგიზმი, რომელიც დიაგრამის სახითაა მოცემული.

ა) 

ბ) 

განვიხილოთ ასეთი მსჯელობა: „ყველა ადამიანი აზროვნებს. ყველა ბიჭი აზროვნებს, ე.ი. ყველა ბიჭი ადამიანია". მიუხედავად იმისა, რომ მიღებული დასკვნა სწორია, მსჯელობა - არასწორია. განხილული მსჯელობა გამოვსახოთ ეილერ-ვენის დიაგრამებით. A იყოს ადამიანთა სიმრავლე, B - მოაზროვნე არსებების სიმრავლე. C - ბიჭების სიმრავლე. მსჯელობის პირველი წინადადებიდან ჩანს, რომ $A \subset B$, მეორე წინადადებიდან - $C \subset B$. მაგრამ A და C სიმრავლეებს აქვთ თუ არა საერთო ელემენტები მსჯელობაში არაფერია ნათქვამი, ამიტომ მოცემული ორი წინადადებიდან გამომდინარე შესაძლებელია, რომ $A \cap C = \varnothing$, ან $A \cap C \neq \varnothing$; ე.ი. მოცემული ორი წინადადებიდან აუცილებლად არ გამომდინარეობს დასკვნა: „ყველა ბიჭი ადამიანია".



მსჯელობის ფორმა ითვლება სწორად, თუ მოცემული წინადადებების ჭეშმარიტებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს დასკვნის ჭეშმარიტება. განხილული მსჯელობის ანალოგიური ფორმა აქვს შემდეგ მსჯელობას. „ყველა კურდღელი ცხოველია, ლომი ცხოველია, ე.ი. ლომი კურდღელია." ამ მსჯელობის ორივე მოცემული წინადადება ჭეშმარიტია, მაგრამ დასკვნა მცდარია.

სწორია თუ არა მსჯელობა?

1 „თუ არც ერთი a არ არის b, მაგრამ ყველა c არის a, მაშინ არც ერთი c არ არის b.

2 თუ არც ერთი b არ არის a და არც ერთი c არ არის b, მაშინ ზოგიერთი c არ არის a.

3 თუ ყველა a არის b და არც ერთი c არ არის a, მაშინ არც ერთი c არ არის b.

პასუხი დაასაბუთეთ, დახაზეთ შესაბამისი ეილერ-ვენის დიაგრამა, მოიყვანეთ ასეთი მსჯელობის ნიმუში.

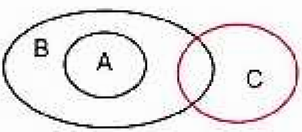
მაგალითი.

სწორია თუ არა მსჯელობა:

ა) ყველა თევზი დაცურავს, ზოგიერთი მცურავი არსება მტაცებელია, აქედან გამომდინარეობს, რომ ზოგიერთი თევზი მტაცებელია.

ამოხსნა:

A იყოს სიმრავლე ყველა თევზისა. B სიმრავლე — ყველა მცურავი არსებისა, ხოლო C – მტაცებლებისა. რადგან ყველა თევზი ცურავს, ამიტომ $A \subset B$. რადგან ზოგიერთი მცურავი არსება მტაცებელია, ამიტომ $B \cap C \neq \varnothing$. მაგრამ ეს სულაც არ ნიშნავს, რომ A და C სიმრავლეებსაც ექნებათ საერთო ელემენტი. თუმცა არც იმას ნიშნავს, რომ აუცილებლად $A \cap C = \varnothing$. უბრალოდ A და C სიმრავლეების თანაკვეთაზე მსჯელობაში არაფერია ნათქვამი. ე.ი. მოცემული მსჯელობა მცდარია.

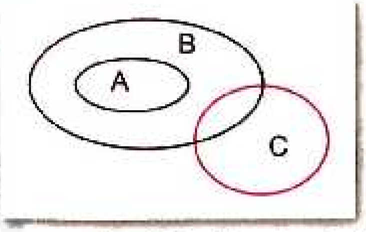


გვახსოვდეს!
ლოგიკას დასაშვებად მიაჩნია მსჯელობის ის ფორმა, რომელიც გარანტირებულად უზრუნველყოფს ჭეშმარიტ შედეგს ყველა იმ შემთხვევაში, როცა საწყისი მონაცემები ჭეშმარიტია.

ბ) ყველა ჩიტი გალობს და არც ერთი ჩიტი არ არის ყვითელნისკარტა, მაშინ არც ერთი მგალობელი არსება არ იქნება ყვითელნისკარტა.

ამოხსნა:

A იყოს ჩიტების სიმრავლე, B - მგალობელი არსებების სიმრავლე, C კი - ყვითელნისკარტების სიმრავლე. რადგან არც ერთი ჩიტი არ არის ყვითელნისკარტა, ამიტომ $A \cap C = \varnothing$. მოცემულ მსჯელობაში არ ჩანს B და C სიმრავლეებს აქვთ თუ არა საერთო ელემენტები (ე.ი. შესაძლებელია $B \cap C = \varnothing$ ან $B \cap C \neq \varnothing$). ე.ი. მსჯელობა მცდარია.



ყოველი ცნება თავის თავში გულისხმობს მის მოცულობას - ესაა იმ ობიექტთა სიმრავლე, რომლებსაც ეს ცნება მოიცავს. მაგალითად, ცნება „ლომის" მოცულობაში შედის ყველა ლომი, რომლებსაც უცხოვრია, ცხოვრობს თუ იცხოვრებს დედამიწაზე. თუ ერთი რომელიმე ცნების მოცულობა შედის მეორე ცნების მოცულობაში, მაშინ მეორეს ეწოდება პირველის განზოგადება. პირველს კი - მეორის კერძო შემთხვევა: მაგალითად, ცნებებიდან „მერცხალი", „ფრინველი", „მერცხალი" - კერძო ცნებაა, ხოლო „ფრინველი" - ზოგადი.

■ მოცემული წყვილებიდან დაასახელეთ რომელია ზოგადი და რომელი კერძო ცნება: ა) „პროფესია - მასწავლებელი", ბ) ფეხბურთელი - სპორტსმენი, გ) მოსწავლე - ბავშვი.

სავარჯიშოები:

1 ააგეთ მოცემული წინადადების შესაბამისი ეილერ-ვენის დიაგრამა:

ა) ყველა რომბი პარალელოგრამია.

ბ) ზოგიერთი კვადრატი რომბია.

გ) X^{ა} კლასის ყველა მოსწავლე შავთმიანია. ნინო ქერაა.

დ) ყველა ცხვარი უკუდოა, ყველა უკუდო არსება რუხი ფერისაა.

2 ეილერ-ვენის დიაგრამების საშუალებით აჩვენეთ, რომ თუ არც ერთი y არ არის x, მაშინ არც ერთი x არ არის y.

3 მოცემულია, რომ ჭეშმარიტია წინადადება:

„ყველა კვადრატი რომბია და ზოგიერთი რომბი პარალელოგრამია". გამომდინარეობს თუ არა ამ წინადადებიდან, რომ ზოგიერთი კვადრატი შესაძლოა იყოს პარალელოგრამი.

4 სწორია თუ არა მსჯელობა:

ა) „ყველა ვაშლი ხილია, ზოგიერთი ხილი არ არის მჟავე, ამიტომ ზოგიერთი ვაშლი არ არის მჟავე".

ბ) „თუ არც ერთი ძაღლი არ არის მგელი და ზოგიერთი მგელი მტაცებელია, მაშინ ზოგიერთი მტაცებელი არ არის ძაღლი".

გ) „თუ ზოგიერთი მეათე კლასელი ათოსანია, ზოგიერთი მეათეკლასელი ქერაა და ზოგიერთი ქერა ათოსანია, მაშინ ზოგიერთი ათოსანი მეათეკლასელიცაა და ქერაც".

დ) „თუ ზოგიერთი სტუდენტი ბანკში მუშაობს, ხოლო ბანკის ზოგიერთი თანამშრომელი დაოჯახებულია, მაშინ ზოგიერთი სტუდენტი დაოჯახებულია".

5 რომელი დასკვნა გამომდინარეობს აუცილებლად მოცემული ორი დებულებიდან?

ა) ყველა კვადრატი მართკუთხედია.

ყველა მართკუთხედი პარალელოგრამია.

ბ) ყველა მე-10 კლასელი ათოსანია.

ნინი არ არის ათოსანი.

გ) არც ერთი ცხოველი არ დაფრინავს.

პაკო ცხოველია.

დ) ყველა ქართველი საქართველოში ცხოვრობს.

ივანე საქართველოში ცხოვრობს.

6 სწორია თუ არა მსჯელობა (პასუხი დაასაბუთეთ):

ა) არც ერთი სტუდენტი არ მუშაობს. არც ერთი შავგვრემანი არ არის სტუდენტი, მაშინ ზოგიერთი შავგვრემანი არ მუშაობს.

ბ) ყველა ბულბული გალობს, არც ერთი იადონი არ არის ბულბული, მაშინ არც ერთი იადონი არ გალობს.

გ) თუ არც ერთი ლომი არ არის ფრინველი და ყველა ლომი ჯუნგლებში ცხოვრობს, მაშინ არც ერთი ფრინველი არ ბინადრობს ჯუნგლებში.

დ) ყველა ადამიანი ცოცხალი არსებაა, ყველა ადამიანი მოკვდავია, ე.ი. ყველა მოკვდავი ცოცხალი არსებაა.

7 მოცემული წყვილებიდან დაასახელეთ რომელია ზოგადი და რომელი კერძო ცნება, თუკი ასეთი მიმართება ამ ცნებებს შორის არსებობს:

ა) მათემატიკოსი - მეცნიერი;

ბ) ტოლგვერდა სამკუთხედი - წესიერი მრავალკუთხედი;

გ) სკამი - ავეჯი;

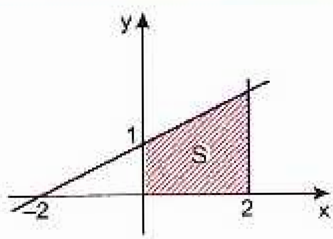
დ) მართკუთხედი - რომბი;

ე) პარალელოგრამი - ტრაპეცია;

ვ) ტრაპეცია - ოთხკუთხედი.

---

8 იპოვეთ ნახაზზე დაშტრიხული ოთხკუთხედის ფართობი.



9 x, y და z ნატურალური რიცხვებია. ამასთან $x^2+y^2=z^2$. დაამტკიცეთ, რომ ერთ-ერთი მაინც x და y რიცხვებიდან აუცილებლად იყოფა 3-ზე.

10 x, y და z ნატურალური რიცხვებისთვის სრულდება $x^2+y^2=z^2$. დაამტკიცეთ, რომ $xy \vdots 12$.

2 ოპერაციები გამონათქვამებზე

მათემატიკური ლოგიკის ძირითადი ცნება გამონათქვამია. გავიხსენოთ: გამონათქვამი არის თხრობითი წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტ ან მცდარ აზრს გამოხატავს.

■ ჭეშმარიტია თუ მცდარი გამონათქვამი?

ა) $7 \leq 7$;

ბ) გიორგი ჭყონდიდელი დავით აღმაშენებლის აღმზრდელია.

გ) $(2^{738}-8^{371}) \vdots 10$;

დ) H_2SO_4 - მჟავაა.

გასულ წლებში ჩვენ გავეცანით რთულ გამონათქვამს, რომელიც შეერთებულია „ან“, „და“ კავშირებით, ასევე მოცემულის საწინააღმდეგო გამონათქვამს.

■ ჩამოაყალიბეთ მოცემულის საწინააღმდეგო წინადადება

ა) ყველა მართკუთხედი პარალელოგრამია;

ბ) ყველა არწივი მტაცებელია;

გ) ჩვენი სკოლის ზოგიერთი მე-10 კლასელი ათოსანია.

$A \vee B$	$A \wedge B$
იკითხება:	
A ან B	A და B

გადაიხაზეთ რვეულში და შეავსეთ ცხრილი:

A	B	$\overline{A}$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \vee \overline{A}$	$\overline{A} \wedge A$	$\overline{A} \wedge B$	$\overline{A} \vee B$	$\overline{\overline{A}}$
ჭ	ჭ								
ჭ	მ								
მ	ჭ								
მ	მ								

ცხრილი 2:

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
ჭ	ჭ					
მ	ჭ					
ჭ	მ					
მ	მ					

ცხრილი 3:

A	B	$A \vee B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
ჭ	ჭ					
ჭ	მ					
მ	ჭ					
მ	მ					

1 შეადარეთ ერთმანეთს ა) $\overline{A \vee B}$ და $\bar{A} \wedge \bar{B}$ გამონათქვამები.
ბ) $\overline{A \wedge B}$ და $\bar{A} \vee \bar{B}$ გამონათქვამები. გამოიტანეთ გონივრული დასკვნა.

2 ჩამოაყალიბეთ მოცემულის საწინააღმდეგო წინადადება:
ა) მსხალი ყვითელია და ტკბილი.
ბ) დღეს არც ციოდა და არც წვიმდა.
გ) ხვალ ან თეატრში წავალ ან მეგობართან.
დ) 738 იყოფა 9-ზეც და 4-ზეც.

მაგალითი.

ერთი ექსპერტი ამბობს, რომ ეკლესია ააშენეს ბიზანტიელებმა IX საუკუნეში, მეორე ამბობს, რომ ეკლესია ქართველებმა ააშენეს VIII საუკუნეში, ხოლო მესამე ამბობს, რომ ეკლესია ბიზანტიელებს არ უშენებიათ და იგი აშენებულია X საუკუნეში. დამოუკიდებელმა ექსპერტიზამ აჩვენა, რომ თითოეული მათგანი სანახევროდაა მართალი (ცდება ან თარიღში ან ეროვნებაში). ვინ და როდის ააშენა ეკლესია?

ამოხსნა:
მოცემული ამოცანის პირობა ცხრილის სახით ასე გამოიყურება:

	ეროვნება	საუკუნე
I	ბ	IX
II	ქ	VIII
III	ბ	X

გამონათქვამები „ეკლესია ააშენეს ბიზანტიელებმა" და „ეკლესია არ აუშენებიათ ბიზანტიელებს" ურთიერთ საწინააღმდეგო წინადადებებია, ამიტომ თუ ერთი მცდარია, მაშინ მეორე ჭეშმარიტია. ე.ი. შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

1

	ეროვნება	საუკუნე
I	+	–
II	–	–
III	–	+

2

	ეროვნება	საუკუნე
I	–	+
II	+	–
III	+	–

„+" – ჭ
„–" – მ

1-ლი ცხრილიდან ჩანს ეკლესია X საუკუნეშია აშენებული და იგი ბიზანტიელებმა ააშენეს. ასეთ შემთხვევაში მე-2 ექსპერტის ორივე გამონათქვამი მცდარია. მე-2 ცხრილიდან ჩანს, რომ ეკლესია არ აუშენებიათ ბიზანტიელებს და ეკლესია აშენებულია IX საუკუნეში. ამრიგად, მე-2 ცხრილიდან დავასკვენით, რომ ეკლესია აუშენებიათ ქართველებს IX საუკუნეში.

სავარჯიშოები:

1 რას ეწოდება გამონათქვამი?

2 რა შემთხვევაშია „ან" კავშირით შეერთებული ორი გამონათქვამისგან შედგენილი გამონათქვამი მცდარი? ჭეშმარიტი?

3 რა შემთხვევაშია „და" კავშირით შეერთებული ორი გამონათქვამისგან შედგენილი გამონათქვამი მცდარი? ჭეშმარიტი?

4 მიუთითეთ შემდეგი წინადადებებიდან რომელია გამონათქვამი:
ა) ყველა მეათეკლასელი მათემატიკას 10-ზე სწავლობს.
ბ) თიკა გუშინ იყავი გამოფენაზე?
გ) ოთხკუთხედს, რომლის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია, პარალელოგრამი ეწოდება.
დ) თბილისში იანვრის თვის საშუალო ტემპერატურა 25°-ია.

5 ჩამოაყალიბეთ „ან" და „და" კავშირით შეერთებული გამონათქვამი და მიუთითეთ ჭეშმარიტია იგი თუ მცდარი.

6 ჩამოაყალიბეთ მოცემულის საწინააღმდეგო წინადადება:
ა) 2 რაციონალური რიცხვია;
ბ) $8>4$;
გ) $9\leq 5$;
დ) ყველა ნატურალური რიცხვი იყოფა 3-ზე;
ე) არსებობენ 5-ის ჯერადი ნატურალური რიცხვები;
ვ) 225 არ იყოფა 3-ზე;
ზ) არსებობს რომბი, რომლის დიაგონალები ტოლია.

7 ჭეშმარიტია თუ მცდარი შემდეგი გამონათქვამი:
ა) 252 იყოფა 2-ზეც და 9-ზეც;
ბ) 2 მარტივი რიცხვიცაა და ლუწი რიცხვიც;
გ) 136 ან 3-ზე იყოფა ან 9-ზე;
დ) $5<7<11$;
ე) რომბის დიაგონალები მართობულია და ტოლია;
ვ) $19\geq 19$.

8 მოცემულია გამონათქვამები: A: ნინოს ქიმია უყვარს; B: საბას მათემატიკა უყვარს; C: ეკა ცურვაზე დადის. ჩამოაყალიბეთ შემდეგი გამონათქვამები:
ა) $A\vee B$; ბ) $C\wedge A$; გ) $A\wedge\bar{B}$; დ) $\bar{A}\vee B\vee\bar{C}$;
ე) $A\vee C$; ვ) $\overline{A\wedge B}$; ზ) $\bar{A}\vee\bar{C}$; თ) $\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C}$.

9 ჩამოაყალიბეთ მოცემულის საწინააღმდეგო წინადადება:
ა) ლომები ცხოვრობენ აფრიკაში;
ბ) ვაშლი წითელია;
გ) ლიკას კლასიკური მუსიკა უყვარს;
დ) 7 იყოფა 3-ზე;
ე) $\triangle ABC$ ბლაგვკუთხაა.

10 ჩამოაყალიბეთ მოცემულის საწინააღმდეგო წინადადება:

ა) 12 იყოფა 3-ზე და 8 იყოფა 5-ზე;

ბ) ოთახი დიდია და ნათელი;

გ) ხვალ იწვიმებს და ყინვაც იქნება;

დ) ხვალ ან იწვიმებს ან ყინვა იქნება;

ე) დასასვენებლად ან გუდაურში წავალ ან ბაკურიანში;

ვ) ნიკა ან თეატრში წავა ან ფეხბურთზე.

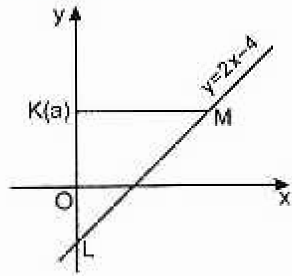
11 მასწავლებლის შეკითხვაზე, თუ ვინ გატეხა ფანჯრის მინა, მოსწავლეებმა ასე უპასუხეს:

ნიკამ თქვა, რომ მინა გიორგიმ გატეხა. გიორგიმ თქვა, რომ მინა საბამ გატეხა. საბა ამტკიცებდა, რომ გიორგი ტყუოდა. ლუკა კი ამბობდა, რომ ეს მას არ ჩაუდენია. მასწავლებელმა ისიც გაარკვია, რომ მხოლოდ ერთი ბავშვი ამბობდა სიმართლეს.

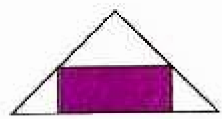
ვინ გატეხა მინა?

---

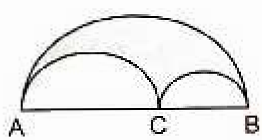
12 იპოვეთ ნახაზზე მიღებული სამკუთხედის ფართობი, თუ OL=OK და MK⊥OK.



13 ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის ჰიპოტენუზა 10 სმ-ია, ჩახაზეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი. იპოვეთ ამ მართკუთხედის გვერდების სიგრძე.



14 AB=12 სმ სიგრძის მონაკვეთზე აღებულია C წერტილი. AC, BC და AB მონაკვეთებზე როგორც დიამეტრზე აგებულია ნახევარწრეწირები. იპოვეთ CB, თუ გამუქებული ფიგურის ფართობი უდიდესია.



3 იმპლიკაცია. ეკვივალენცია

მათემატიკურ მსჯელობებში, ასევე ჩვეულებრივ საუბარში ხშირად ვხმარობთ რთულ წინადადებებს, რომლებიც შედგენილია „თუ..., მაშინ ..." სიტყვების საშუალებით. საზოგადოდ თუ გვაქვს ორი A და B გამონათქვამი, მათგან შესაძლოა შედგეს ასეთი წინადადება: „თუ ჭეშმარიტია A, მაშინ ჭეშმარიტია B", ან მოკლედ: „თუ A, მაშინ B". ასეთ წინადადებას A და B გამონათქვამების იმპლიკაციას უწოდებენ და ასე აღნიშნავენ:

$$A \to B$$

A-ს პირობა, B-ს კი დასკვნა ეწოდება.

ვთქვათ, A არის „კვირას მზიანი ამინდი იქნება". B კი — „ჩვენ ანანურში წავალთ", მაშინ $A \to B$ იქნება: „თუ კვირას მზიანი ამინდი იქნება, მაშინ ჩვენ ანანურში წავალთ". როგორ ფიქრობთ, აღმოჩნდება თუ არა ეს წინადადება მცდარი, თუ კვირას იქნება ღრუბლიანი ამინდი და ჩვენ მაინც წავალთ ანანურში, ან კვირას იქნება ღრუბლიანი ამინდი და ჩვენ არ წავალთ ანანურში. დიახ, ორივე შემთხვევაში „$A \to B$" წინადადება ჭეშმარიტი იქნება. მაგრამ, თუ კვირას მზიანი დღე გათენდება და ანანურში არ წავალთ, მაშინ კი წინადადება აღმოჩნდება მცდარი.

■ „თუ დღეს ორშაბათია, მაშინ ხვალ სამშაბათი იქნება". როგორ ფიქრობთ, კვირის რომელ დღეს იქნება მცდარი ეს გამონათქვამი?

ამრიგად, იმპლიკაციის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილს ექნება 1-ლი ცხრილი სახე.

ცხრილი 1.

A	B	A→B
ჭ	ჭ	ჭ
მ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ
მ	მ	ჭ

ე.ი. $A \to B$ იმპლიკაცია მცდარია მხოლოდ მაშინ, როცა A ჭეშმარიტია და B მცდარი.

ორი, A და B გამონათქვამიდან, შესაძლებელია შევადგინოთ ახალი გამონათქვამი: „A მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B" ამ გამონათქვამს A და B გამონათქვამების ეკვივალენცია ეწოდება და აღინიშნება ასე:

$$A \leftrightarrow B.$$

$A \leftrightarrow B$ ჭეშმარიტია, თუ A და B ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია ან ორივე მცდარია. ხოლო თუ A და B გამონათქვამებიდან ერთი მცდარია, მეორე კი ჭეშმარიტი, მაშინ $A \leftrightarrow B$ ეკვივალენცია მცდარია. მაგალითად, „2151 იყოფა 9-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ციფრთა ჯამი იყოფა 9-ზე". გამონათქვამს აქვს სახე $A \leftrightarrow B$ და რადგან ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია, ამიტომ $A \leftrightarrow B$-ც ჭეშმარიტია. ასევე „2152 იყოფა 9-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ციფრთა ჯამი იყოფა 9-ზე". გამონათქვამიც ჭეშმარიტია, რადგან როგორც A, ასევე B გამონათქვამი მცდარია.

ცხრილი 2.

A	B	A↔B
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ
მ	ჭ	მ
მ	მ	ჭ

■ მოიყვანეთ $A \leftrightarrow B$ ეკვივალენციის მაგალითი, როცა A და B გამონათქვამებიდან ერთი მცდარია, მეორე კი ჭეშმარიტი.

■ მოცემულია ორი გამონათქვამი: A: „MNKP ოთხკუთხედი ტოლფერდა ტრაპეციაა" და B: „MNKP ოთხკუთხედში დიაგონალები ტოლია". შეადგინეთ შემდეგი გამონათქვამი და მიუთითეთ ჭეშმარიტია ის თუ მცდარი:

ა) $A \to B$; ბ) $B \to A$; გ) $A \leftrightarrow B$; დ) $\bar{B} \to \bar{A}$.

როგორც ვნახეთ, კონკრეტული გამონათქვამებიდან $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ლოგიკური ოპერაციების საშუალებით შესაძლებელია რთული გამონათქვამის შედგენა (პარაგრაფის დასაწყისში განხილული მაგალითი). მათემატიკური ლოგიკის ერთ-ერთი ნაწილი, ლოგიკის ალგებრა შეისწავლის მოცემული გამონათქვამებისგან შედგენილი გამოსახულების თვისებებს. ლოგიკის ალგებრაში $A, B, C, \ldots$ ასოები უკვე აღნიშნავენ არა მარტო კონკრეტულ გამონათქვამებს, არამედ ლოგიკურ ცვლადებს, რომელიც ღებულობს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას „ჭ" და „მ"-ს. შესაძლოა, რომ გარეგნულად განსხვავებული ორი ლოგიკური გამოსახულების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი ერთნაირი იყოს. მაგალითად, წინა პარაგრაფის მე-2 და მე-3 ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილის ბოლო ორი სვეტი ერთმანეთს ემთხვევა (ისინი არიან ერთდროულად ჭეშმარიტი ან მცდარი მიუხედავად იმისა, თუ რა გამონათქვამია აღნიშნული A ან B ასოებით). ლოგიკის ალგებრაში ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ეს ორი ლოგიკური გამოსახულება ლოგიკურად ეკვივალენტურია და წერენ $x \Leftrightarrow y$. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

ა) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$ (1)

ბ) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$ (2)

x და y ლოგიკური გამოსახულებები ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \leftrightarrow y$ ეკვივალენცია ჭეშმარიტია ლოგიკური ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.

მაგალითად: 1) A: „a იყოფა 2-ზე", B: „a^2 იყოფა 4-ზე".

A წინადადება, ასევე B-ც ჭეშმარიტია, თუ a ლუწი რიცხვია და მცდარია, როცა a კენტია, ამიტომ

$(a \vdots 2) \Leftrightarrow (a^2 \vdots 4)$

■ მოიყვანეთ მაგალითი (1) და (2) სახის ეკვივალენტობისა.

1 აჩვენეთ, რომ: ა) $A \vee A \Leftrightarrow A \wedge A \Leftrightarrow A$; ბ) $\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow A$

2 ჭეშმარიტია თუ არა, რომ (პასუხი დაასაბუთეთ):

ა) $(\angle A + \angle B = 90°) \Leftrightarrow (\triangle ABC$-ში $\angle C = 90°)$;

ბ) (ABCD პარალელოგრამია) $\Leftrightarrow$ ($AB = CD$);

გ) (ABCD რომბია) $\Leftrightarrow$ ($AB = BC = CD = AD$).

$A \to B$ (1) იმპლიკაციისაგან შესაძლებელია მივიღოთ:

1. $B \to A$ იმპლიკაცია (პირობასა და დასკვნას ადგილები აქვს შეცვლილი), რომელსაც $A \to B$-ს შებრუნებული ეწოდება.

2. $\bar{A} \to \bar{B}$ იმპლიკაცია, რომელშიც პირობა და დასკვნა შეცვლილია მათი უარყოფით და რომელსაც $A \to B$-ს მოპირდაპირე ეწოდება.

$\bar{B} \to \bar{A}$ იმპლიკაცია არის $A \to B$ იმპლიკაციის შებრუნებულის მოპირდაპირე.

1 შეადგინეთ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი და აჩვენეთ, რომ:

ა) $(A \to B) \Leftrightarrow (\bar{B} \to \bar{A})$

ბ) $(A \to B) \Leftrightarrow (\bar{A} \vee B)$

მაგალითი.

აჩვენეთ, რომ $\overline{A \to B} \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$

$A \to B \Leftrightarrow \bar{B} \to \bar{A}$
$\overline{A \to B} \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$

ამოხსნა:

I. ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\overline{A \to B} \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$

A	B	$\bar{B}$	$A \to B$	$\overline{A \to B}$	$A \wedge \bar{B}$
ჭ	ჭ	მ	ჭ	მ	მ
ჭ	მ	ჭ	მ	ჭ	ჭ
მ	ჭ	მ	ჭ	მ	მ
მ	მ	ჭ	ჭ	მ	მ

II. თუ გამოვიყენებთ $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$ (1) და $A \to B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B$ (2) წესს, მივიღებთ:

$$\overline{A \to B} \Leftrightarrow \qquad |\,(2)$$
$$\Leftrightarrow (\overline{\bar{A} \vee B}) \Leftrightarrow \qquad |\,(1)$$
$$\Leftrightarrow (\bar{\bar{A}} \wedge \bar{B}) \Leftrightarrow \qquad |\,\bar{\bar{A}} = A$$
$$\Leftrightarrow (A \wedge \bar{B})$$ რ.დ.გ.

ამრიგად, იმისათვის, რომ უარვყოთ იმპლიკაცია, საკმარისია ვაჩვენოთ რომ პირობა ჭეშმარიტია, დასკვნა კი მცდარი.

სავარჯიშოები:

1 აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი A გამონათქვამისათვის სრულდება:

ა) $\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow A$; ბ) $A \wedge \bar{A} \Leftrightarrow$ მც; გ) $A \vee A \Leftrightarrow$ ჭ;

დ) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

ე) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

2 მოცემულია გამონათქვამები: 1) A: „MNK სამკუთხედი ტოლფერდაა", B: „MNK სამკუთხედში ორი კუთხე ტოლია".

2) A: „ABCD ოთხკუთხედში $\angle A+\angle C=180°$", B: „ABCD ოთხკუთხედზე შემოხაზულია წრეწირი".

ჩამოაყალიბეთ სიტყვებით შემდეგი გამონათქვამი და დაადგინეთ ჭეშმარიტია იგი თუ მცდარი:

ა) $A \to B$; ბ) $B \to A$; გ) $\overline{A} \to B$; დ) $\overline{B} \to A$;

ე) $\overline{A} \to \overline{B}$; ვ) $\overline{B} \to \overline{A}$; ზ) $A \to \overline{B}$; თ) $B \to \overline{A}$.

3 ჩამოაყალიბეთ მოცემულის შებრუნებული წინადადება:

ა) ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

ბ) თუ წერტილი თანაბრადაა დაშორებული კუთხის გვერდებიდან, მაშინ იგი ამ კუთხის ბისექტრისაზე მდებარეობს.

გ) მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია.

დ) თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია, მაშინ ასეთ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი.

ე) თუ ადამიანი კეთილია, მაშინ ის ლამაზია.

4 მოცემულ იმპლიკაციაში გამოყავით პირობა და დასკვნა და ჩამოაყალიბეთ მოცემულის შებრუნებული, მოპირდაპირე, მოპირდაპირის შებრუნებული. განსაზღვრეთ რომელია ჭეშმარიტი და რომელი მცდარი (ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული წინადადება ჭეშმარიტია):

ა) თუ ნინოს ცისფერი თვალები აქვს, მაშინ იგი ქერათმიანია;

ბ) თუ გიორგი უნივერსიტეტში სწავლობს, მაშინ მან იცის ინგლისური;

გ) თუ წერტილი თანაბრადაა დაშორებული მონაკვეთის ბოლოებიდან, მაშინ იგი ამ მონაკვეთის შუამართობზე მდებარეობს;

დ) თუ ΔABC ტოლგვერდაა, მაშინ ABC სამკუთხედის სამივე კუთხე ტოლია;

ე) თუ მოსწავლემ ყველა საგანში დადებითი ნიშანი დაიმსახურა, მაშინ ეს მოსწავლე გადავა შემდეგ კლასში;

ვ) თუ ხვალ მათემატიკაში 10-ს მივიღებ, მაშინ კვირას დედა თეატრში წამიყვანს.

5 დაამტკიცეთ შემდეგი ეკვივალენტობა.

ა) $(A\wedge B)\vee A \Leftrightarrow A$; ბ) $(A\vee B)\wedge A \Leftrightarrow A$; გ) $(A\vee B)\wedge \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}\wedge B$.

6 მოიფიქრეთ ორ-ორი წინადადება, რომლებიც მოცემულ ლოგიკურ სტრუქტურას შეესაბამება:

ა) $\overline{A}\to B$; ბ) $\overline{A\wedge B} \leftrightarrow \overline{A}\vee\overline{B}$; გ) $\overline{A\vee B} \leftrightarrow \overline{A}\wedge\overline{B}$.

7 ჩამოაყალიბეთ მოცემულის საწინააღმდეგო წინადადება:

ა) თუ რიცხვი იყოფა 12-ზე, მაშინ ეს რიცხვი გაიყოფა 3-ზე;

ბ) თუ რიცხვი არ იყოფა 4-ზე ან 9-ზე, მაშინ ეს რიცხვი გაიყოფა 3-ზე;

გ) თუ ეკამ უნარებში 85 ქულა დააგროვა, მაშინ იგი აიღებს ვაუჩერს;

დ) თუ წვიმიანი ამინდია, მაშინ საბა ფეხბურთს არ თამაშობს;

ე) ხვალ ან იწვიმებს ან ღრუბლიანი ამინდი იქნება;

ვ) ზაზას ან ქიმია გამოიძახებს, ან ბიოლოგია;

ზ) თიკო ან ქურთუკს ვერ იყიდის ან ფეხსაცმელს;

თ) კვადრატი არის რომბიც და მართკუთხედიც;

ი) ტრაპეცია არც პარალელოგრამია და არც ოთხკუთხედი.

8 ჩამოაყალიბეთ მოცემულის ეკვივალენტური წინადადება.

ა) თუ ირინა ევროპელია, მაშინ ის ქერაა;

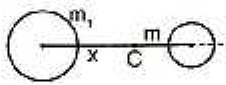
ბ) თუ ბავშვი 6-ზე ნაკლები წლისაა, მაშინ ის სკოლაში არ დადის;

გ) თუ ოთხკუთხედის ოთხივე გვერდი ტოლი არ არის, მაშინ ის რომბი არ არის;

დ) თუ ABCD მართკუთხედია, მაშინ ABCD ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლია.

გ

$$F = k\frac{mm_1}{x^2}$$



9 დედამიწასა და მთვარეს შორის მანძილი დაახლოებით $3{,}84 \cdot 10^5$ კმ-ია. მთვარის მასა 81,5-ჯერ ნაკლებია დედამიწის მასაზე. დედამიწის ცენტრიდან რა მანძილზე გაუტოლდება ერთმანეთს დედამიწისა და მთვარის მიზიდულობის ძალები ერთმანეთს.

10 რა სიმაღლის უნდა იყოს სატელევიზიო ანძა, რომ სატელევიზიო გადაცემები $\ell=200$კმ რადიუსში მიიღებოდეს.

11 დაამტკიცეთ, რომ ერთ წრეში ჩახაზული ყველა მართკუთხედიდან უდიდესი ფართობი აქვს კვადრატს.

4 ლოგიკური გამომდინარეობა

ჩვეულებრივი საუბრისას, ასევე მათემატიკური თეორემების ჩამოყალიბებისას „თუ..., მაშინ..." წინადადება გულისხმობს, მიზეზ-შედეგობრივ კავშირს. მაგალითად, „თუ ნიკას ტემპერატურა 37° ექნება, მაშინ ის სკოლაში ვერ წავა".

ლოგიკის ალგებრაში მნიშვნელოვანი როლი უჭირავს ლოგიკურ გამომდინარეობას. ადვილი მისახვედრია, რომ თუ A ჭეშმარიტია, მაშინ $A \vee B$-ც ჭეშმარიტია. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ A-ს ჭეშმარიტებიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს $A \vee B$-ს ჭეშმარიტება. ასევე, თუ ჭეშმარიტია $A \wedge B$, მაშინ ჭეშმარიტია A და ამბობენ $A \wedge B$-დან ლოგიკურად გამომდინარეობს A.

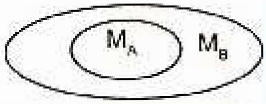
იმპლიკაცია - ეს ლოგიკური ოპერაციაა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს მოცემული ორი A და B გამონათქვამიდან შევადგინოთ მესამე $A \to B$ გამონათქვამი. ლოგიკური გამომდინარეობა კი მიმართებაა ორ ლოგიკურ გამოსახულებას შორის.

B ლოგიკურად გამომდინარეობს A-დან, თუ B ჭეშმარიტია, ყველა იმ შემთხვევაში, როცა ჭეშმარიტია A.

წინადადება „A-დან ლოგიკურად გამომდინარეობს B" აღვნიშნოთ ასე:

$$A \Rightarrow B$$

თუ $A \Rightarrow B$ და A წინადადება ჭეშმარიტია რაღაც M_A, ხოლო B კი – M_B სიმრავლეზე, მაშინ $M_A \subset M_B$.



თუ $A \Rightarrow B$ და $B \Rightarrow A$, მაშინ $A \Leftrightarrow B$ და ამბობენ A და B ლოგიკურად ეკვივალენტურია.

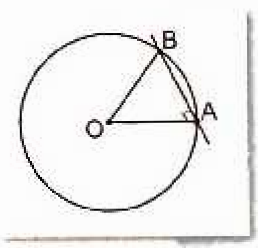
„თუ თბილისი საქართველოს დედაქალაქია, მაშინ რიონი შავ ზღვაში ჩაედინება" - ჭეშმარიტი იმპლიკაციაა, მაგრამ არა ლოგიკური გამომდინარეობა.

მსჯელობა, რომელსაც თეორემების დასამტკიცებლად ვიყენებთ, ლოგიკურ გამომდინარეობას ეფუძნება. ამასთან, იმისათვის, რომ გარანტირებული გვქონდეს დასკვნის ჭეშმარიტება, საჭიროა დარწმუნებული ვიყოთ პირობის ჭეშმარიტებაში.

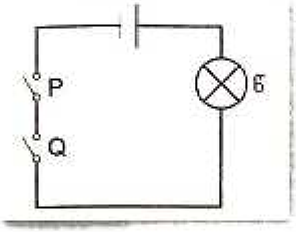
მათემატიკური თეორემის დამტკიცება ხშირად ე.წ. „საწინააღმდეგოს დაშვების გზით ხდება. ჩამოაყალიბებენ დასამტკიცებელ დებულებას და დაუშვებენ, რომ ეს დებულება არ არის ჭეშმარიტი და თუ შევძელით თეორემის პირობის ან ადრე დამტკიცებული სხვა რომელიმე დებულების უარყოფა, ამით მოცემული თეორემა დამტკიცებული იქნება.

ე.ი. $A \Rightarrow B$-ს დასამტკიცებლად უშვებენ, რომ ჭეშმარიტია $\overline{B}$ და თუ დამტკიცდა $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, მაშინ ამით დამტკიცებულად ითვლება $A \Rightarrow B$ თეორემა. მაგალითად: დავამტკიცოთ, რომ წრფე, რომელიც რადიუსის ბოლოზეა გავლებული მის მართობულად, წრეწირის მხებს წარმოადგენს.

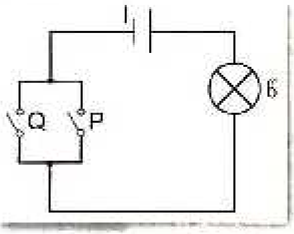
ე.ი. მოცემულია, რომ AB წრფე მართობულია OA რადიუსის. დავუშვათ საწინააღმდეგო: AB წრფე არ წარმოადგენს (O;OA) წრეწირის მხებს, მაშინ ის კვეთს წრეწირს A-სგან განსხვავებულ B წერტილში. ΔAOB ტოლფერდაა (OA=OB) და $\angle OAB=90°$, მაშინ $\angle OBA=90°$, რაც შეუძლებელია, ე.ი. ჩვენი დაშვება, რომ AB წრეწირის მხებს არ წარმოადგენს არასწორია. მაშასადამე, AB წრეწირის მხებია.



ალბათ ფიქრობთ, რომ ლოგიკის ალგებრა ძალიან შორსაა პრაქტიკისგან. ეს რომ ასე არ არის, ამაში დაგვეხმარება შემდეგი: ვთქვათ, წრედი შედგება დენის წყაროსაგან, რომელიც შეერთებულია ნათურასთან გამტარით და P ჩამრთველით. P შესაძლებელია იყოს ჩართული ან გამორთული. მდგომარეობას „P ჩართულია" შევუსაბამოთ „ჭ", ხოლო „P გამორთულია" - „მ".



I. დენის წყაროსა და ნათურას შორის მოვათავსოთ ორი P და Q ჩამრთველი, რომლებიც ერთმანეთთან შეერთებულია მიმდევრობით. ასეთ შემთხვევაში წრედი იქნება ჩაკეტილი, თუ ორივე ჩამრთველი ჩართულია და იქნება გამორთული, როცა P და Q ჩამრთველებიდან ერთი მაინც გამორთულია, ე.ი. ამ შემთხვევაში წრედის მუშაობას აღწერს $P \wedge Q$ გამოსახულება.



II. თუ P და Q შეერთებულია დენის წყაროსთან და ნათურასთან პარალელურად, მაშინ წრედი ჩაკეტილია როცა ერთი მაინც ჩამრთველი იქნება ჩართული. ასეთი წრედის მუშაობა აღიწერება $A \vee B$ გამოსახულებით.

სავარჯიშოები:

1 მოცემული წინადადებებიდან რომელია ჭეშმარიტი? (თუ წინადადება მცდარია, მოიყვანეთ შესაბამისი კონტრმაგალითი).

ა) $(a \in Z) \Rightarrow (a \in R)$; ბ) $(m<5) \Rightarrow (m<4)$, $\forall m \in R$-თვის;

გ) $(m<5) \Rightarrow (m<7)$; დ) $(a \vdots 55) \Rightarrow (a \vdots 11)$;

ე) $(ab \vdots 5) \Rightarrow (a \vdots 5$ ან $b \vdots 5)$.

2 მოცემულ წინადადებებში წერტილების ნაცვლად ჩასვით „$\Leftrightarrow$", „$\Rightarrow$" ან „$\Leftarrow$", სიმბოლო ისე, რომ მიიღოთ ჭეშმარიტი წინადადება.

ა) (a არის 3-ზე მეტი მარტივი რიცხვი) ... ($(a-1)(a+1)$ იყოფა 6-ზე);

ბ) $(a \vdots 6 \wedge a \vdots 4)$ ... $(a \vdots 24)$;

გ) $(AB=CD)$ ... ($ABCD$ პარალელოგრამია);

დ) $(x>7)$ ... $(x>10)$;

ე) $(a \vdots 7 \wedge b \vdots 7)$ ... $((a+b) \vdots 7)$;

ვ) $(\angle AOB + \angle BOC = 180°)$ ... ($\angle AOB$ და $\angle AOC$ მოსაზღვრე კუთხეებია).

3 დაამტკიცეთ, რომ წინადადება ჭეშმარიტია:

ა) $(a \vdots 3) \Leftrightarrow (a^2 \vdots 9)$; ბ) $(a \,\overline{\vdots}\, 3) \Leftrightarrow (a^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3))$;

გ) $(13a \vdots 5) \Leftrightarrow (a \vdots 5)$; დ) $(ab \vdots 7) \Leftrightarrow (a \vdots 7 \vee b \vdots 7)$.

4 მოცემულ თეორემებში გამოყავით პირობა და დასკვნა:

ა) მოსაზღვრე კუთხეთა ჯამი 180°-ია;

ბ) ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია;

გ) სამკუთხედის გარე კუთხეთა ჯამი 360°-ია;

დ) რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია.

5 მოცემული თეორემები ჩამოაყალიბეთ „თუ A, მაშინ B" ფორმით.

ა) ვერტიკალური კუთხეები ტოლია;

ბ) ტოლგვერდა სამკუთხედის კუთხეები ტოლია;

გ) მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია;

დ) ტოლი ქორდები ტოლ რკალებს ჭიმავენ.

6 მოიყვანეთ თეორემათა მაგალითები, რომლებსაც შემდეგი წყობა აქვთ:

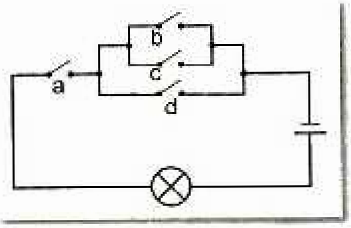
ა) თუ A და B, მაშინ C; ბ) თუ A, მაშინ B და C;

გ) თუ A ან B, მაშინ C; დ) თუ A, მაშინ B ან C.

7 დახაზეთ წრედი, რომელიც შეესაბამება შემდეგ გამოსახულებას:

ა) $(x \vee y) \wedge (z \vee x) \wedge z$; ბ) $x \vee (x \wedge y) \wedge (y \rightarrow z)$.

8 შეადგინეთ გამოსახულება, რომელიც შესაბამება ნახაზზე მოცემულ სქემას. ჩამოაყალიბეთ პირობა, თუ რა შემთხვევაში იქნება წრედი ჩაკეტილი. შეეცადეთ გაამარტივოთ მოცემული წრედი.



9 სამი წევრისგან შედგენილ საბჭოს ფარული კენჭისყრისას ხმათა უმრავლესობით გამოაქვს გადაწყვეტილება. შეადგინეთ ისეთი სქემა, რომ თითოეული წევრის მიერ მიცემული დადებითი ხმა გამოიხატოს ღილაკის დაჭერით (ჩამრთველი ჩაირთო) და იმ შემთხვევაში, თუ გადაწყვეტილება მიღებულია (და მხოლოდ ასეთ შემთხვევაში) აინთოს ნათურა.

გ

10 a სიგრძის მავთულისგან უნდა გავაკეთოთ კვადრატი და ტოლგვერდა სამკუთხედი. როგორ უნდა გაჭრათ მავთული, რომ მიღებული ფიგურების ფართობების ჯამი იყოს უმცირესი.

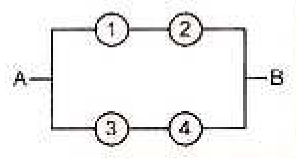
11* განსაზღვრეთ a კოეფიციენტი ისე, რომ განტოლების ფესვების კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი:

ა) $x^2+(2-a)x-a-3=0$; ბ) $x^2+(1+2a)x+a^2-1=0$.

5 ამოცანები ალბათობათა თეორიიდან

> ალბათობათა სწორი გათვლა ესაა ჩვენი სამყაროს ჭეშმარიტი ლოგიკა.
>
> ჯეიმს მაქსველი

ამოცანა 1.



ნახაზზე მოცემულია სქემა, სადაც ორი წყვილი ჩამრთველი პარალელურადაა შეერთებული. შემთხვევით შესაძლებელია, რომ ყოველი ჩამრთველი იყოს ჩართული (+) ან გამორთული (–), შედეგად კი დენი A წერტილიდან B-ს მიეწოდება ან არ მიეწოდება. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ დენი A-დან B-ს მიეწოდება?

$$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$$

დენი გადის A-დან B-კენ

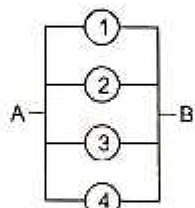
ამოხსნა:
თქვენ შეგიძლიათ ჩამოწეროთ ყველა შესაძლო შემთხვევა და შემდეგ გადაითვალოთ მათი რაოდენობა, მაგრამ უმჯობესია ასე დავთვალოთ: რადგან ყოველ ჩამრთველს აქვს ორი მდგომარეობა „+“ და „–“ ამიტომ ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი $n=2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4=16$.

- ჩამოწერეთ ყველა შესაძლო შემთხვევა, როცა A-დან B-კენ დენი გადის.
  ე.ი. P(დენი გადის)$=\dfrac{7}{16}$.
- იპოვეთ $P(\overline{\text{დენი გადის}})$.

შეასრულეთ პირველი ამოცანის ანალოგიური ამოცანა მოცემული სქემებისთვის

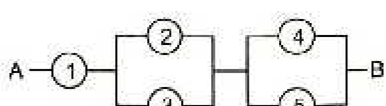
ა)

ბ)



გ)

დ)

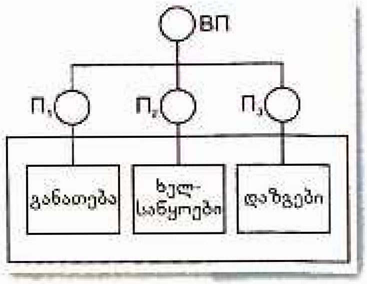


ამოცანა 2.

სქემაზე, რომელზეც მოცემულია სახელოსნოსთვის მიწოდებული დენის განაწილება, გათვალისწინებულია ოთხი დამცველი. A იყოს – გადაიწვა შემავალი დამცველი (В.П).

B_i - გადაიწვა $П_i$ დამცველი (i = 1,2,3).

C - გათიშულია სახელოსნო.



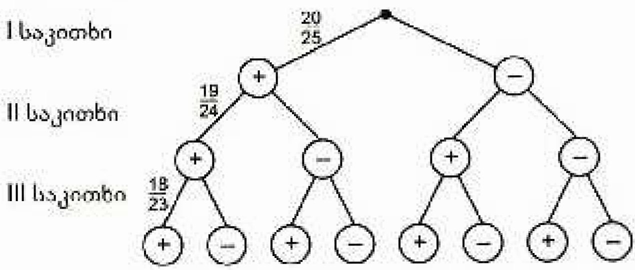
■ აჩვენეთ, რომ A, $\overline{A_1}$, B_i და $\overline{B}_i$ ხდომილობებით C და $\overline{C}$ ხდომილობა ასე გამოისახება:

$C=A+B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$. ე.ი. $\overline{C}=\overline{A_1} \cdot (\overline{B}_1+\overline{B}_2+\overline{B}_3)$ (1)

ამოცანა 3.

გამოცდაზე გასულმა სტუდენტმა 25 საკითხიდან მხოლოდ 20 ისწავლა. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ ლექტორის მიერ მიცემული სამი საკითხიდან მან სამივე საკითხი იცოდა.

ამოხსნა:
შევადგინოთ ხე.



■ შეავსეთ ხის დანარჩენი წიბოები შესაბამისი ალბათობებით, გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ სტუდენტმა ა) არც ერთი საკითხი არ იცის; ბ) გამოცდა ვერ ჩააბარა (2 მაინც არ იცის); გ) გამოცდა ჩააბარა (2 მაინც იცის).

ე.ი. $P=\frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \approx 0,5$

როგორც ვნახეთ, ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტმა იცოდა პირველი საკითხი, არის $P=\frac{20}{25}$. ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტმა იცოდა მეორე საკითხიც, იმის გათვალისწინებით, რომ მან იცოდა პირველი (უკვე მოხდა A) არის $P_A(B)=\frac{19}{24}$. ასევე იმისი ალბათობა, რომ მან იცოდა მესამე საკითხი (იმის გათვალისწინებით, რომ იცოდა პირველი და მეორე საკითხი (ე.ი. მოხდა A და B). არის $P_{AB}(C)=\frac{18}{23}$.

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$
$= P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)$

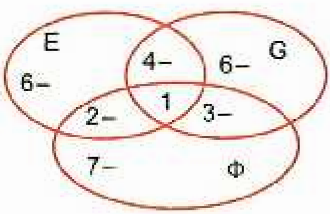
$P_A(B)$-ს B ხდომილობის პირობითი ალბათობა ეწოდება, ე.ი. ესაა B ხდომილობის ალბათობა იმ პირობით, რომ A უკვე მოხდა. თუ გავიხსენებთ ნამრავლის ალბათობის ფორმულას, მაშინ

$$P_A(B)=\frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

■ აჩვენეთ, რომ $P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A)$.

ამოცანა 4.

კვლევითი ინსტიტუტის ექვსმა თანამშრომელმა იცის ინგლისური, ექვსმა - გერმანული, შვიდმა - ფრანგული, ოთხმა ინგლისური და გერმანული, სამმა - გერმანული და ფრანგული, ორმა ფრანგული და ინგლისური, ერთმა კი - სამივე ენა. ცნობილია აგრეთვე, რომ თითოეულმა თანამშრომელმა რომელიმე ენა მაინც იცის.



შეავსეთ სქემა და უპასუხეთ:

ა) რამდენი თანამშრომელია ინსტიტუტში?

ბ) რამდენმა იცის მხოლოდ ინგლისური?

გ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით არჩეულმა თანამშრომელმა იცის მხოლოდ 1) ერთი ენა? 2) ორი ენა?

დ) იპოვეთ $N(A \cup B \cup C)$ თუ $A \cap B \cap C \neq \varnothing$.

N(A) – A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა

ამოცანა 5.

ოთხი მონადირე ერთდროულად ესვრის კურდღელს. თითოეულისთვის მიზანში მოხვედრის ალბათობა $\frac{2}{3}$-ია. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ კურდღელი დაიჭრება.

ამოხსნა:

გადავნომროთ მონადირეები და A_k-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა. „k-ურმა მონადირემ მოარტყა კურდღელს", k=1,2,3,4. ეს ხდომილობები დამოუკიდებელნი არიან და $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{2}{3}$. ხდომილობა „კურდღელი დაიჭრა" იქნება $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{80}{81} \approx 98\%.$$

■ აჩვენეთ, რომ თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ $\overline{A}$ და $\overline{B}$-იც დამოუკიდებელი ხდომილობები იქნებიან.

ამოცანა 6.

დროის რაღაც პერიოდის განმავლობაში ბაქტერიის დაღუპვის ალბათობა $\frac{1}{4}$-ია, ცოცხლად დარჩენისაც - $\frac{1}{4}$, ხოლო ორად გაყოფისა - $\frac{1}{2}$. დროის მომდევნო პერიოდში ყოველი ბაქტერიისთვის იგივე მეორდება. რამდენი ბაქტერია და რა ალბათობით იქნება ცოცხალი დროის მეორე პერიოდის ბოლოს?

ამოხსნა:

დროის მეორე პერიოდის ბოლოს აღმოჩნდება ცოცხალი:

0 ბაქტერია - A_0 ხდომილობა.

1 ბაქტერია - A_1 ხდომილობა.

2 ბაქტერია - A_2 ხდომილობა.

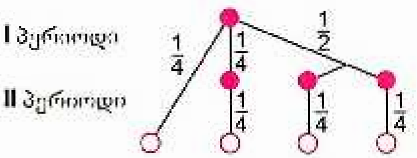
3 ბაქტერია - A_3 ხდომილობა.

4 ბაქტერია - A_4 ხდომილობა.

I. A_0 ხდომილობისთვის:

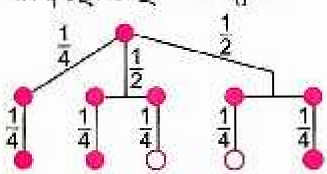
● - ცოცხალი.

○ - დაიღუპა.

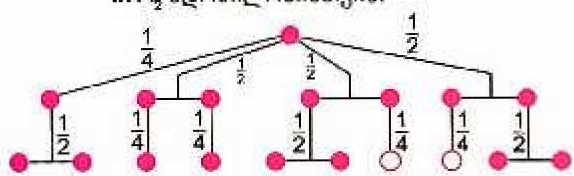


$$P(A_0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{32}$$

I. A_1 ხდომილობისთვის.



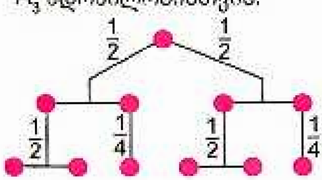
II. A_2 ხდომილობისთვის.



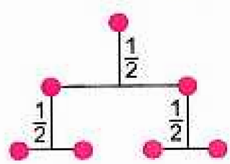
$$P(A_1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$P(A_2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{32}$$

A_3 ხდომილობისთვის.



A_4 ხდომილობისთვის.



$$P(A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$P(A_4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

სავარჯიშოები:

1 სპორტლოტოს ბარათზე შემთხვევით გადახაზულია ორი რიცხვი. A იყოს ხდომილობა: „გადახაზულია ერთი მაინც მარტივი რიცხვი", ხოლო B — „გადახაზულია ერთი მაინც ლუწი რიცხვი". განსაზღვრეთ, რა ხდომილობაა (მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითები):

ა) $A_1=AB$; ბ) $A_2=A+B$; გ) $A_3=\overline{A}\cdot B$; დ) $A_3=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

2 კლასის ხელმძღვანელმა თავისი კლასის შესახებ თქვა: კლასში 45 მოსწავლეა, მათ შორის 25 ვაჟია. 30 მოსწავლის მოსწრება არაა 8-ზე ნაკლები, მათ შორის 16 ვაჟია. სპორტით დაკავებულია 28 მოსწავლე, მათ შორისაა 18 ვაჟი და ის 17 მოსწავლე, რომლის მოსწრება არაა 8-ზე ნაკლები. 15 ვაჟის მოსწრება არაა 8-ზე ნაკლები და დაკავებულია

სპორტით. აჩვენეთ, რომ ამ მონაცემებში შეცდომაა. შეასწორეთ ერთ-ერთი მონაცემი ისე, რომ შეცდომა გასწორდეს.

3 პირველ 100 ნატურალურ რიცხვში რამდენია ისეთი, რომელიც არ იყოფა არც 2-ზე, არც 3-ზე და არც 5-ზე.

4 პირველ 1000 ნატურალურ რიცხვში რამდენია ისეთი, რომელიც არ იყოფა არც 3-ზე, არც 5-ზე და არც 7-ზე.

5 გვაქვს 7 კონვერტი და 5 სხვადასხვა მარკა. რამდენნაირადაა შესაძლებელი შევარჩიოთ წერილის გასაგზავნად მარკიანი კონვერტი?

6 რამდენნაირადაა შესაძლებელი ჭადრაკის დაფაზე შევარჩიოთ ორი სხვადასხვა ფერის კვადრატი? ორი ერთნაირი ფერის კვადრატი?

7 რამდენი სიტყვა მიიღება, თუ სიტყვა „ვაზა"-ში ასოებს ადგილებს შევუცვლით (ყველა შესაძლო ვარიანტი).

8 რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ნებისმიერი წლის იანვარში იქნება ხუთი კვირა დღე.

9 შვიდ ერთნაირ ბარათზე აწერია ასოები „თ", „ბ", „ი", „ლ", „ი", „ს", „ი". ერთიმეორის მიყოლებით შემთხვევით იღებენ თითო ბარათს და აწყობენ ერთმანეთის გვერდიგვერდ. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ მიიღება სიტყვა „თბილისი"?

10 მე-10 ამოცანა ამოხსენით იმ შემთხვევაში, თუ გვაქვს ბარათები
ა) ასოებით „თ", „ე", „ლ", „ა", „ვ", „ი" და მისაღები სიტყვა „თელავი".
ბ) ციფრებით 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 და მიიღება ლუწი რიცხვი?

11 ესვრიან სამიზნეს. განხორციელდა სამი გასროლა. A_k არის ხდომილობა: „k-ური გასროლისას მოარტყა მიზანში", $k=1,2,3$. $\cup, \cap$ სიმბოლოებით, $\bar{A}_k$ და A_k ხდომილობებით ჩაწერეთ ხდომილობა:

ა) A: „სამივე გასროლა მიზანში მოხვდა"

ბ) B: „სამივე აცდა"

გ) C: „ერთი მაინც მოხვდა მიზანს"

დ) D: „ერთი მაინც აცდა მიზანს"

ე) M: „არა ნაკლებ ორჯერ მოარტყა მიზანს"

ვ) K: „არა უმეტეს ორჯერ მოარტყა მიზანს"

ზ) F: „არა უმეტეს ერთხელ მოარტყა მიზანს"

თ) E: „მხოლოდ ერთხელ მოარტყა მიზანს"

ი) F: „მხოლოდ ორჯერ მოარტყა მიზანს"

12 დაასახელეთ მოცემული ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა:

ა) საფასური მოვიდა ორჯერ - ცდა: მონეტას აგდებენ 1) ორჯერ, 2) სამჯერ;

ბ) მიზანში მოარტყა პირველი ან მეორე გასროლისას - ცდა: მიზანს ისვრიან 2-ჯერ;

გ) ბურთი კარში 3-ჯერ გაიტანა - ცდა: ბურთს კარში ურტყამენ 3-ჯერ;

დ) კამათელზე მოვიდა 1-იანი ან საშიანი - ცდა: აგორებენ კამათელს ერთხელ;

ე) ურნიდან ამოღებული ორივე ბირთვი წითელია - ცდა: ურნიდან, რომელშიც 3 წითელი და 4 თეთრი ბირთვია, იღებენ ორ ბირთვს;

13 ხელსაწყო ორი ბლოკისგან შედგება. პირველი ბლოკი შედგება ორი ერთნაირი დეტალისგან და მუშაობს, თუ წესრიგშია ერთი მათგანი მაინც. მეორე ბლოკი შედგება სამი ერთნაირი დეტალისგან და მუშაობს, თუ წესრიგშია ორი მათგანი მაინც. თვითონ ხელსაწყო მუშაობს მაშინ, თუ მუშაობს ორივე ბლოკი.

A_k ხდომილობაა: „წესრიგშია პირველი ბლოკის k-ური დეტალი". k=1,2

B_n „წესრიგშია მეორე ბლოკის n-ური დეტალი" n=1,2,3

A_k, B_n, $\overline{A_k}$ და $\overline{B_n}$-ით გამოსახეთ ხდომილობა.

ა) A - „მუშაობს პირველი ბლოკი";

ბ) B - „მუშაობს მეორე ბლოკი";

გ) C - „არ მუშაობს პირველი ბლოკი";

დ) D - „არ მუშაობს მეორე ბლოკი";

ე) M - „ხელსაწყო არ მუშაობს";

ვ) K - „ხელსაწყო მუშაობს".

14 გამოიყვანეთ ფორმულა $P(A+B+C)$, როცა $A\cap B\cap C\neq 0$.

15 ერთსა და იმავე დღეს იმართება სამი მატჩი: ფეხბურთში, კალათბურთში და რაგბში. ალბათობა იმისა, რომ ბექა იყიდის ბილეთს ფეხბურთის მატჩზე არის 0,3, კალათბურთზე - 0,4, ხოლო რაგბზე - 0,2. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ბექა ა) იყიდის რომელიმე მატჩის ბილეთს? ბ) შეიძენს ბილეთს ან რაგბზე ან ფეხბურთზე?

16 წიგნების მაღაზიაში ოთხი ყუთია, თითოში კი – 4 ლატარიის ბილეთი. ცნობილია, რომ ყოველ ყუთში მხოლოდ ერთი ბილეთია მომგებიანი. საბამ გადაწყვიტა, რომ ყოველი ყუთიდან თითო ბილეთი ამოიღოს. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ამოღებული ოთხი ბილეთიდან ერთი მაინც იქნება მომგებიანი.

17 ოთხი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ისვრის მიზანში. ცნობილია, რომ თითოეული ყოველი ოთხი გასროლიდან მიზანში მხოლოდ ერთხელ ახვედრებს. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ მიზანი დაზიანდება.

18 თაროზე დალაგებულია ექვსი ერთნაირი ფორმის საღებავიანი ქილა. მათგან 3 წითელია და 3 ლურჯი. ყუთები ერთმანეთისგან არ განირჩევა. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით აღებული სამი ქილიდან სამივე ერთი ფერის აღმოჩნდება?

გ

19 ჩაატარეთ ცდა:

ა) ასანთის კოლოფის წახნაგები გადანომრეთ. ისროლეთ და შედეგი ჩაინიშნეთ რვეულში.

ბ) ოთხკუთხა პირამიდის, რომლის ყველა წიბო ტოლია, წახნაგები გადანომრეთ, ისროლეთ და შედეგი ჩაინიშნეთ რვეულში.

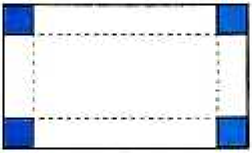
ცდა ჩაატარეთ 50-ჯერ.

1. გამოთვალეთ თითოეული ნომრის მოსვლის სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე.

2. მიღებული შედეგები შეაჯერეთ თანაკლასელების მიერ მიღებულ შედეგებთან (ცდათა რაოდენობა გახდება 50n).

3. გამოთქვით ვარაუდი, რას უდრის თითოეული ნომრის მოსვლის ალბათობა.

20 30×50 მუყაოს ნაჭრისგან უნდა ამოვჭრათ კუთხეები ისე, რომ როცა მას გადავკეცავთ, ნახატზე მინიშნებულ წყვეტილ ხაზებზე, მივიღოთ უდიდესი გვერდითი ზედაპირის მქონე ყუთი. იპოვეთ ასეთი ყუთის ზომები.



21 თბილისიდან ოზურგეთისაკენ 80 კმ/სთ სიჩქარით გავიდა მსუბუქი ავტომობილი. იმავდროულად ქუთაისიდან თბილისისაკენ 40 კმ/სთ სიჩქარით გამოვიდა სატვირთო მანქანა. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენი საათის განმავლობაში იქნება მსუბუქი ავტომობილი

ა) უფრო მეტი, ბ) უფრო ნაკლები, გ) ტოლი მანძილით დაშორებული თბილისიდან, ვიდრე სატვირთო მანქანა?

6 სტატისტიკის ელემენტები

1. თქვენი კლასის მოსწავლეებს შორის ჩაატარეთ გამოკითხვა „ყველაზე პოპულარული სპორტის სახეობა" შემდეგნაირად: დაარიგეთ ბარათები, სადაც ჩამოწერილი იქნება სპორტის ხუთი სახეობა. ყოველმა მოსწავლემ სპორტის თითოეულ სახეობას დაუწეროს ციფრები 1, 2, 3, 4, 5; იმის მიხედვით, თუ რომელ სახეობას ანიჭებს უპირატესობას. დააჯამეთ მიღებული შედეგები.

2. ჩაატარეთ ასეთივე გამოკითხვა: „ყველაზე საყვარელი საგანი", საყვარელი ლიტერატურული გმირი".

ვიცით, მონაცემთა შეგროვების ხერხებია: დაკვირვება და შედეგის დაფიქსირება, გამოკითხვა, ცდის ჩატარება, გაზომვა, სხვადასხვა ცნობარების გამოყენება. შემდეგ კი მიღებული შედეგების დასამუშავებლად საჭიროა ამ მონაცემების წარმოდგენა მოსახერხებელი ფორმით – სხვადასხვა დიაგრამების სახით. რიცხვითი მონაცემების დასახასიათებლად ვიყენებთ მონაცემთა სიხშირის, ფარდობითი სიხშირის ცნებას, ცენტრალური ტენდენციის საზომებს: მედიანას, მოდას, მონაცემთა საშუალოს, გაფანტულობის საზომს, გაბნევის დიაპაზონს, საშუალო კვადრატულ გადახრას (სტანდარტულ გადახრას).

ცხრილში მოცემულია სკოლის პირველობაზე 10^1 და 10^2 კლასების მიერ კალათბურთში მოპოვებული ქულების რაოდენობა:

10^1	0	30	5	20	10
10^2	9	10	18	12	16

■ იპოვეთ ერთი მოთამაშის მიერ გატანილი საშუალო ქულა თითოეულ გუნდში.

მე-10^1 კლასისთვის საშუალო კვადრატული გადახრა (საშუალოდან გადახრის ზომა) იქნება:

$$S=\sqrt{\frac{(13-0)^2+(13-30)^2+(13-5)^2+(13-20)^2+(13-10)^2}{5}}\approx 24{,}1$$

ხოლო მე-10^2-თვის:

$$S=\sqrt{\frac{(13-9)^2+(13-10)^2+(13-18)^2+(13-12)^2+(13-16)^2}{5}}\approx 7{,}8$$

ე.ი. საშუალო ქულასთან უფრო ახლოს მე-10^2 კლასის მიერ მოპოვებულ ქულათა რაოდენობებია.

გასახსენებლად!

$$S^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

სადაც $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

■ ააგეთ პირველი ცხრილის შესაბამისი წერტილოვანი დიაგრამა.

■ იპოვეთ მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონი.

ამოცანა.

ცხრილში მოცემულია შემთხვევით შერჩეული 100 სტუდენტი გოგონას სიმაღლის გაზომვის შედეგები:

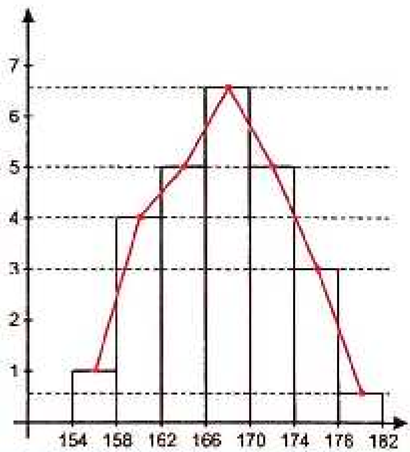
სიმაღლე	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
რაოდენობა	4	16	20	26	20	12	2

ავაგოთ სიხშირეთა, ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა. შევადგინოთ ცხრილი:

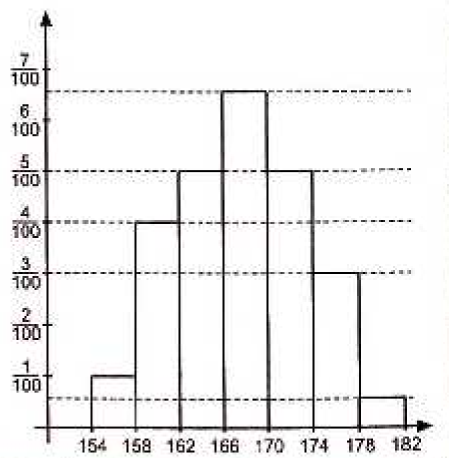
ინტერ-ვალი	[154-158]	[158-162]	[162-166]	[166-170]	[170-174]	[174-178]	[178-182]
სიხშირე n_k	4	16	20	26	20	12	2
$\frac{n_k}{d}$	1	4	5	6,5	5	3	0,5
ფარდ. სიხშირე $h_k=\frac{n_k}{n}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{26}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{2}{100}$
$\frac{h_k}{d}=\frac{n_k}{dn}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{6,5}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{0,5}{100}$

სადაც n_k - მონაცემის სიხშირეა, d ინტერვალის სიგრძე,
h_k - ფარდობითი სიხშირე.

სიხშირეთა ჰისტოგრამა



ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა



■ რა აქვთ საერთო და რით განსხვავდებიან ერთმანეთისგან ნახაზზე მოცემული სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა?

ჰისტოგრამის ზედა ფუძეების შუანერტილების შემაერთებელ ტეხილსაც პოლიგონს უწოდებენ (წითელი ტეხილი).

სავარჯიშოები:

1 მოიძიეთ ინფორმაცია და ჩამოწერეთ: ა) მსოფლიოს ათი ყველაზე გრძელი მდინარე, ბ) 10 უდიდესი ტბა, გ) 10 ყველაზე მაღალი მთა, დ) ფართობით ყველაზე დიდი 10 სახელმწიფო.
შეადგინეთ შესაბამისი სვეტოვანი დიაგრამა. მიუთითეთ ინფორმაციის წყარო.

2 გამოკითხეთ თქვენი სკოლის IX; X; XI კლასის მოსწავლეები და მოიპოვეთ ინფორმაცია. ა) რომელ სპორტულ სექციაში არიან გაერთიანებული. ბ) რამდენი დადის ქართულ, ევროპულ ცეკვებზე; გ) რამდენი შეისწავლის კლასიკურ მუსიკას და რამდენი ქართულ ხალხურ სიმღერას. შეადგინეთ შესაბამისი წრიული დიაგრამა. დააკვირდით მიღებულ შედეგებს კიდევ რა ინფორმაციის მიღება შეძლებით? დასვით გონივრული შეკითხვები.

3 წინა ამოცანის მიხედვით იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით არჩეული მოსწავლე (IX-X ან XI კლასელი) ა) შეისწავლის ქართულ ხალხურ სიმღერაა, ბ) დადის ევროპულ ცეკვებზე გ) დადის ცურვაზე. დ) დადის სპორტის რომელიმე სახეობაზე.

4 ქვემოთ მოცემულ დაკვირვებათა სიხშირული განაწილებისთვის ააგეთ პოლიგონი, გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო და შერჩევითი დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა:

ა)

ვარიანტი	1	3	4	5	6
აბს.სიხშირე	4	5	10	12	15

ბ)

ვარიანტი	2	3	5	6
აბს.სიხშირე	10	15	5	20

გ)

ვარი-ანტი	−2	−1	0	2	5	6
ფარდ. სიხ-შირე	0.1	0.15	0.25	0.2	0.1	0.2

დ)

ვარი-ანტი	−1	1	3	4	6
ფარდ. სიხ-შირე	0.3	0.15	0.2	0.15	0.2

5 მოცემული ამონარჩევისთვის ააგეთ ჰისტოგრამა, პოლიგონი:

ა)

ინტერ-ვალის ნომერი	ინტერვა-ლის საზღვარი	ფარ-დობითი სიხშირე
1	[1;5)	10
2	[5;9)	30
3	[9;13)	80
4	[13;17)	92
5	[17;21]	100

ბ)

ინტერ-ვალის ნომერი	ინტერვა-ლის საზღვარი	ფარ-დობითი სიხშირე
1	[−5;−2)	4
2	[−2;1)	10
3	[1;4)	30
4	[4;7)	70
5	[7;10)	90
6	[10;13]	94

6 ცხრილში მოცემულია შემთხვევით არჩეული 25 მუშის კვირეული ხელფასი ($-ში)

ინტერვალი	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)	[50;55)	[55;60]
სიხშირე	2	3	3	8	6	2	2

ა) განსაზღვრეთ საშუალო, მედიანა.

7 ქვემოთ მოცემულია ერთ-ერთ მარკეტში თვეების მიხედვით შემოსული თანხა ათას ლარობით.

თვე	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
ლარი	10	8	6	7	9	7	12	14	14	12	10	9

ა) ააგეთ შესაბამისი სვეტოვანი დიაგრამა, ხაზოვანი დიაგრამა.
ბ) იპოვეთ მარკეტის წლიური შემოსავალი.
გ) იპოვეთ მარკეტის საშუალო თვიური შემოსავალი.
დ) რამდენი პროცენტით მეტი ივაჭრა მარკეტმა ზაფხულის თვეებში, ვიდრე ზამთრის თვეებში.

8 რა მიგაჩნიათ იმის აუცილებელ პირობად (ერთი ან რამდენიმე), რომ სკოლაში კარგი ცოდნა მიიღოთ.
შეაჯერეთ თითოეული მოსწავლის წიერ მიღებული შედეგები შეადგინეთ შესაბამისი წრიული დიაგრამა. გამოიტანეთ გონივრული დასკვნა.

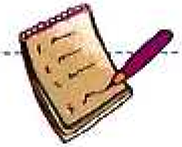
9* წრფე გადის A წერტილზე და კვეთს $y=x^2$ პარაბოლას M და N წერტილებში ისე, რომ მათი ორდინატთა ჯამი უმცირესია. დაწერეთ ამ წრფის განტოლება , თუ:
ა) A(4;18) ბ) A(3;10) გ) A(-2;5) დ) A(–1;4).

10 გვაქვს ℓ სიგრძის მავთული. როგორ გავაკეთოთ მისგან უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი?

პროექტი:

ჩამოწერეთ სემესტრის განმაელობაში მათემატიკაში, მშობლიურ ლიტერატურაში, ისტორიაში, ფიზიკაში, ბიოლოგიაში მიღებული ნიშნები. გამოთვალეთ თითოეული მოსწავლისთვის თითოეულ საგანში მიღებულ ქულათა სიხშირე, მოდა, მედიანა, საშუალო, დიაპაზონი დაადგინეთ კლასის საშუალო მოსწრება (პროცენტებში) თითოეულ ამ საგანში, შეადგინეთ შესაბამისი წრიული დიაგრამა. გამოიტანეთ გონივრული დასკვნა.

შეამოწმე შენი ცოდნა:



მოცემულია წინადადებები:

A: ყველა მოცემული რიცხვი თხუთმეტის ჯერადია;

B: მოცემული რიცხვებიდან მხოლოდ ზოგიერთებია სამის ჯერადი;

C: მოცემული რიცხვებიდან არც ერთი არ არის ხუთის ჯერადი;

D: მოცემული რიცხვებიდან თითოეული იყოფა სამზეც და ხუთზეც;

E: მოცემული რიცხვებიდან მხოლოდ ზოგიერთები არ არის თხუთმეტის ჯერადი;

F: მოცემული რიცხვებიდან ზოგიერთებია თხუთმეტის ჯერადი.

1 თუ ზემოთ მოყვანილი წინადადებიდან ჭეშმარიტია პირველი წინადადება, მაშინ მცდარი იქნება მხოლოდ:

ა) B; ბ) B; C; E; გ) B; C; დ) C; E; F.

2 თუ ზემოთ მოყვანილი წინადადებიდან ჭეშმარიტია მეორე წინადადება, მაშინ მცდარი იქნება მხოლოდ:

ა) A; D; ბ) A; F; გ) C; F; დ) D; F.

3 თუ ზემოთ მოყვანილი წინადადებიდან ჭეშმარიტია მესამე წინადადება, მაშინ მცდარი იქნება მხოლოდ:

ა) A; D; ბ) A; B; E; გ) A; D; E; F; დ) E; F.

4 თუ ზემოთ მოყვანილი წინადადებიდან ჭეშმარიტია F წინადადება, მაშინ მცდარი იქნება მხოლოდ:

ა) C; ბ) A; D; გ) B; C; დ) E; C.

5 A: თუ ოთხკუთხედი მართკუთხედია, მაშინ მისი დიაგონალები ტოლია. მოცემული წინადადების ეკვივალენტური წინადადებაა:

ა) თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი მართკუთხედია;

ბ) თუ ოთხკუთხედი არ არის მართკუთხედი, მაშინ მისი დიაგონალები არ არის ტოლი;

გ) თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები არ არის ტოლი, მაშინ ეს ოთხკუთხედი არ არის მართკუთხედი;

დ) თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები არ არის ტოლი, მაშინ ეს ოთხკუთხედი მართკუთხედია.

6 ლატარის ბილეთები გადანომრილია რიცხვებით 1-დან 200-ის ჩათვლით. იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბილეთის ნომერი იყოფა 7-ზე ან 20-ზე ტოლია:

ა) $\frac{22}{200}$; ბ) 0; გ) $\frac{28}{200}$; დ) $\frac{37}{200}$.

7 ალბათობა იმისა, რომ აღებულ სამუშაოს ერთი ხელოსანი დროზე დაამთავრებს არის 0,9, ხოლო მეორისა – 0,95. იმის ალბათობა, რომ ერთი მაინც ხელოსანი შეძლებს სამუშაოს დროზე დამთავრებას არის (ისინი ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად მუშაობენ):

ა) 0,995; ბ) 0,14; გ) 0,855; დ) 0,005.

8 20 დეტალისგან შედგენილ პარტიაში 5 არასტანდარტული დეტალია. შემთხვევითი თანმიმდევრობით იღებენ ოთხ დეტალს (უკან დაუბრუნებლად). იმის ალბათობა, რომ პირველი ორი დეტალი იქნება არასტანდარტული, ხოლო მე-3 და მე-4 სტანდარტული არის:

ა) $\frac{35}{969}$; ბ) $\frac{21}{857}$; გ) $\frac{35}{909}$; დ) $\frac{18}{736}$.

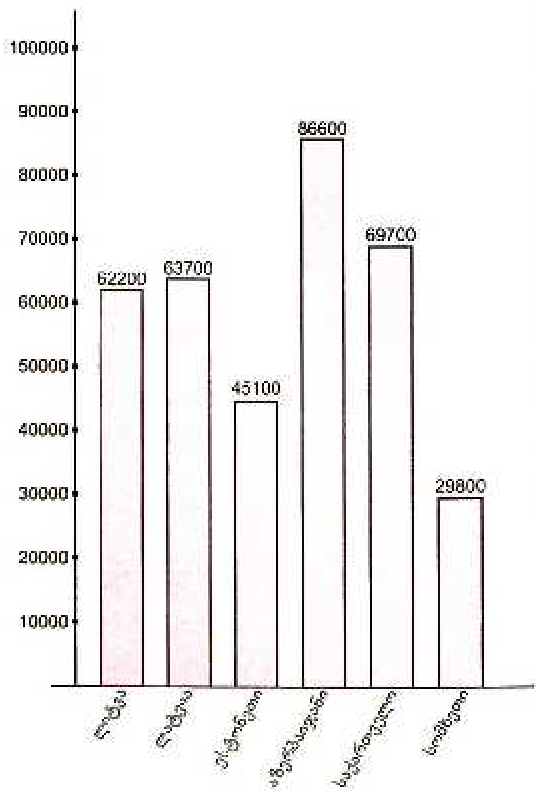
9 დიაგრამაზე მოყვანილია რამდენიმე სახელმწიფო ტერიტორიების ფართობები კვადრატულ კილომეტრებში:

ა) რას უდრის საქართველოს, სომხეთისა და აზერბაიჯანის საერთო ფართობი?

ბ) რა პროცენტია საქართველოს ფართობი აზერბაიჯანის ფართობისა?

გ) რამდენი პროცენტით მეტია საქართველოს ფართობი ესტონეთის ფართობზე?

დ) რას უდრის ბალტიისპირეთის სახელმწიფოთა საერთო ფართობი?



VII თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1 დაწერეთ მოცემულის საწინააღმდეგო წინადადება:
ა) „არც ერთი იხვი არ არის ჭრელი";
ბ) ზოგიერთი იხვი ჭრელია;
გ) ყველა იხვი ჭრელია; დ) იხვი ან ჭრელია ან დაფრინავს;
ე) იხვი ჭრელია და ცურავს.

2 დაწერეთ მოცემულის ექვივალენტური წინადადება:
ა) თუ ნიკა უნივერსიტეტში სწავლობს, მაშინ ის სტუდენტია;
ბ) თუ მოსწავლე ბეჯითია, მაშინ ის კარგად სწავლობს;
გ) თუ რიცხვი იყოფა 4-ზე და 9-ზე, მაშინ იგი გაიყოფა 36-ზე;
დ) თუ ხვალ მზიანი ამინდი იქნება, მაშინ ნინო ან მეგობრებთან წავა ან კინოში.

3 წიგნების თაროზე შემთხვევითი თანამიმდევრობით დაალაგეს შვიდი წიგნი, რომელთა შორის ოთხი ქართულია და სამი — ინგლისური. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ერთენოვანი წიგნები იქნება ერთმანეთის გვერდი გვერდ.

4 კოლოფში 4 წითელი და 6 მწვანე ფანქარია. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით ამოღებული სამი ფანქრიდან ორი წითელი იქნება.

5 ოცდაათი ჟეტონი გადანომრილია რიცხვებით 11-დან 40-ის ჩათვლით. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით არჩეული ჟეტონის ნომრის ციფრთა ჯამი იქნება 5-ის ან 9-ის ტოლი?

6 ურნაში 2 თეთრი, 3 შავი და 2 წითელი ბირთვია. ურნიდან შემთხვევით იღებენ თითო ბირთვს უკან ჩაუბრუნებლად. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ თეთრ ბირთვს ამოიღებენ უფრო ადრე, ვიდრე შავს.

7 ჩამოწერეთ საქართველოს 6 უდიდესი ქალაქი: ა) მოსახლეობის მიხედვით; ბ) ფართობის მიხედვით. შეადგინეთ შესაბამისი სვეტოვანი, წრიული დიაგრამა.

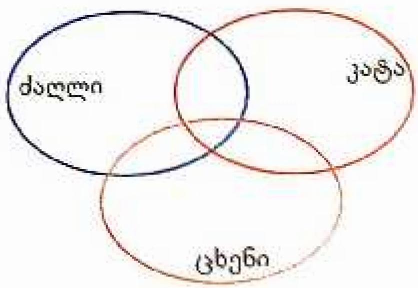
8 ქვემოთ მოცემულია ორი სხვადასხვა ფირმის თანამშრომელთა თვიური ხელფასები ლარებში:

I. 3000; 1500; 800; 1200; 1500; 1000; 700; 700; 700; 800.

II. 5000; 1800; 800; 800; 1200; 800; 500; 400; 400; 400.

იპოვეთ: მონაცემთა მოდა, საშუალო, მედიანა, დიაპაზონი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა.

9 ერთ სოფელში 72 ოჯახია, რომელთაგან 25 ოჯახს ჰყავს ძაღლი, 35 ოჯახს — კატა, 20 ოჯახს კი ცხენი. ამასთან ძაღლი და კატა ჰყავს 15 ოჯახს, კატა და ცხენი 10 ოჯახს, ძაღლი და ცხენი 5 ოჯახს, ხოლო ძაღლი, ცხენი და კატა 2 ოჯახს. შეავსეთ სქემა და უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს.



რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებულ ოჯახს:

ა) არ ჰყავს არც ერთი ამ ცხოველებიდან;

ბ) ჰყავს მხოლოდ ძაღლი;

გ) ჰყავს კატა და არ ჰყავს ძაღლი;

დ) ჰყავს ცხენი და არ ჰყავს კატა;

ე) ჰყავს კატა ან ცხენი.

10 ჩამოწერეთ საქართველოს 6 უდიდესი ქალაქი:

ა) მოსახლეობის მიხედვით;

ბ) ფართობის მიხედვით. შეადგინეთ შესაბამისი სვეტოვანი, წრიული დიაგრამა.

11 ქვემოთ მოცემულია ორი სხვადასხვა ფირმის თანამშრომელთა თვიური ხელფასები ლარებში:

I. 3000; 1500; 800; 1200; 1500; 1000; 700; 700; 700; 800.

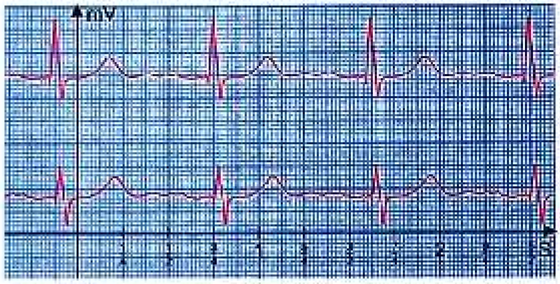
II. 5000; 1800; 800; 800; 1200; 800; 500; 400; 400; 400.

იპოვეთ: მონაცემთა მოდა, საშუალო, მედიანა, დიაპაზონი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა.

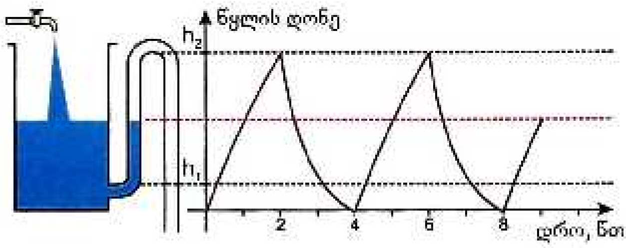
VIII თავი

ამ თავში გაეცნობით პერიოდულ ფუნქციებს; შეისწავლით ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს და მათ თვისებებს, ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობების გამოთვლას როგორც გრადუსული, ისე რადიანული კუთხეებისთვის. ელემენტარულ ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნების მეთოდებს.

1 პერიოდული ფუნქცია



ნახ. 1



ნახ. 2

■ 1-ელ ნახაზზე მოცემულია გულის ცემის ელექტროკარდიოგრამა.

ა) რომელია ჯანმრთელი და რომელი ავადმყოფი გულის კარდიოგრამა? რით განსხვავდებიან ისინი ერთმანეთისგან, რა აქვთ საერთო?

ბ) იპოვეთ დროის შუალედი გულისცემებს შორის.

ბუნებასა თუ ცხოვრებაში ბევრი მოვლენაა, რომელიც პერიოდულად მეორდება. მე-2 ნახაზზე მოცემულია ფუნქცია f: დრო → წყლის დონე ჭურჭელში წყლის უწყვეტი გადინებისას.
f აღწერს პროცესს, რომელიც ყოველ **4** წუთში მეორდება. დროის ნებისმიერი **t** მომენტისთვის წყლის **f(t)** დონე ემთხვევა **4** წუთის შემდეგ წყლის დონეს, რაც შესაძლებელია ასე ჩავწეროთ:

$$f(t+4) = f(t)$$

f ფუნქციას ეწოდება პერიოდიული T≠0 პერიოდით, თუ **f** ფუნქციის განსაზღვრის არიდან აღებული ყოველი **x**-თვის **x–T** და **x+T** რიცხვებიც აგრეთვე განსაზღვრის არეს ეკუთვნიან და სრულდება ტოლობა:

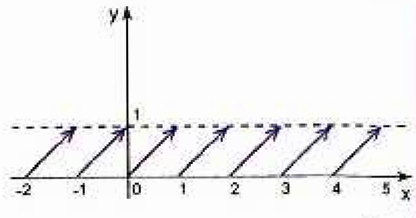
$$f(x+T) = f(x) = f(x-T).$$

1 აჩვენეთ, რომ, თუ **y=f(x)** ფუნქციის პერიოდი არის **T**, მაშინ **kT**-ც, სადაც **k∈Z** იქნება ფუნქციის პერიოდი, ე.ი. შესრულდება:

$$f(x+kT) = f(x), \quad k\in Z.$$

2 რამდენი პერიოდი შესაძლოა ჰქონდეს პერიოდულ ფუნქციას?

ყურადღება: შემდგომში პერიოდის ქვეშ პერიოდთა უსასრულო სიმრავლიდან ვიგულისხმოთ ერთი განსაზღვრული პერიოდი, კერძოდ, უმცირესი დადებითი პერიოდი (თუკი არსებობს). უმცირესი დადებითი პერიოდი T_0-ით აღვნიშნოთ. თუ T_0 არის f ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი, მაშინ f ფუნქციის ყველა პერიოდი T_0-ის ჯერადია. ე.ი. თუ T ნებისმიერი პერიოდია, მაშინ $T=nT_0$. მაგალითად, თქვენ უკვე იცნობთ $y=\{x\}$, სადაც $\{x\}=x-[x]$ ფუნქციაა (ნახ.1).

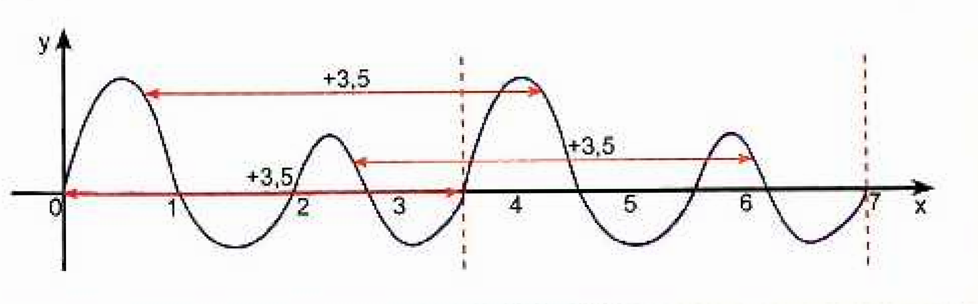


ნახ. 1

- იპოვეთ $\{0,3\}$, $\{1,3\}$, $\{8,3\}$, $\{-2,7\}$, $\{0,8\}$, $\{8,6\}$, $\{-2,2\}$.
- არის თუ არა $y=\{x\}$ ფუნქცია პერიოდული? დადებითი პასუხის შემთხვევაში იპოვეთ მისი პერიოდი.

მაგალითი.

ნახაზზე მოცემულია პერიოდული ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ უმცირესი დადებითი პერიოდი, T_0.



ამოხსნა:

ნახაზიდან ჩანს, რომ არგუმენტის მნიშვნელობების ყოველი 3,5-ით გაზრდის შემდეგ მეორდება ფუნქციის მნიშვნელობები. ე.ი. $T_0=3,5$.

სავარჯიშოები:

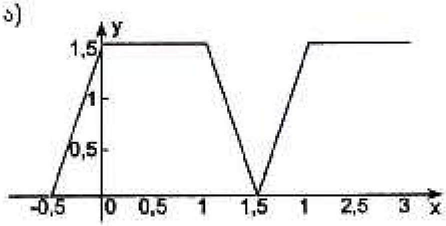
1 ქვემოთ მოცემული ფუნქციებიდან რომელია პერიოდული?
ა) f: დრო → ბურთის ხტომის სიმაღლე დაგდებისას;
ბ) f: დრო → დედამიწის დაშორება მზიდან;
გ) f: მთელი რიცხვი → ამ რიცხვის 7-ზე გაყოფის ნაშთი;
დ) f: რიცხვი → მისი წილადი ნაწილი;
ე) f: რიცხვი → მისი გამყოფთა რაოდენობა.

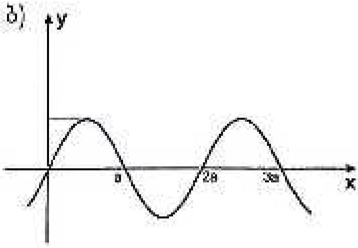
2 მოცემულია ფუნქცია (დირიხლეს ფუნქცია).

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია} \\ -1, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია} \end{cases}$$

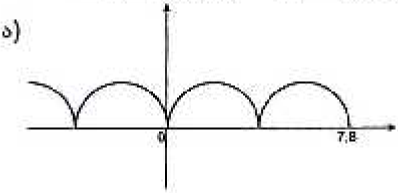
არის თუ არა მოცემული ფუნქცია პერიოდული დადებითი პასუხის შემთხვევაში იპოვეთ მისი პერიოდი, უმცირესი დადებითი პერიოდი.

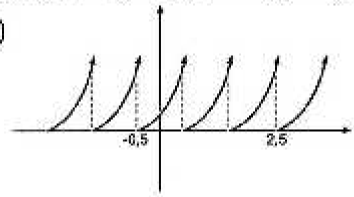
3 ნახაზზე მოცემულია R სიმრავლეზე განსაზღვრული პერიოდული ფუნქციის გრაფიკის ნაწილი. შეავსეთ იგი მთელ განსაზღვრის არეზე. იპოვეთ ამ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

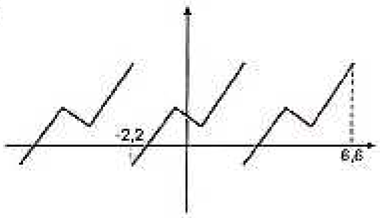
ა)


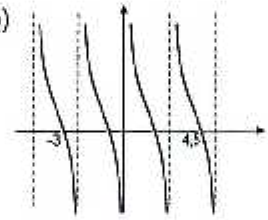
ბ)


4 ნახაზზე მოცემულია პერიოდული f ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ $T_0(f)$.

ა)


ბ)


გ)


დ)


5 შესაძლებელია თუ არა, რომ პერიოდულმა ფუნქციამ პერიოდით **T**, დააკმაყოფილოს პირობა: $f(2T)=2f(T)$?
თუ შესაძლებელია, მაშინ რა შემთხვევაში? მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითები.

6 ცნობილია, რომ $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია $T=1$ პერიოდით და $[0;\ 1)$ შუალედზე აქვს სახე: 1) $y=x^2-x$; 2) $y=x^3-x^2$.
იპოვეთ: ა) $f(2)$; ბ) $f(1,5)$; გ) $f(-13\frac{1}{8})$.

7 $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი მთელი რიცხვისთვის და პერიოდულია პერიოდით 3. იპოვეთ $f(-10)$, თუ $f(2)=10$.

8 ცნობილია, რომ $f(x)$ ფუნქცია კენტია და პერიოდულია პერიოდით 4. იპოვეთ $f(-19)$, თუ $f(3)=7$.

9 ცნობილია, რომ $g(x)$ ფუნქცია კენტია და პერიოდულია პერიოდით 1. იპოვეთ $f(-8,3)$, თუ $f(2,3)=2$.

10* ცნობილია, რომ $f(x)$ ფუნქციისათვის სრულდება $f(x+2)=-f(x)$ ნებისმიერი $x\in R$. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით **4**.

11* $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x \in R$ და $f(x) \neq 1$ და ნებისმიერი x-ისთვის სრულდება ტოლობა $f(x+2)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. იპოვეთ $f(2000)$, თუ $f(2)=3$.

12 ფირმის მეპატრონეს სურს ხუთ წელიწადში პროდუქციის მოცულობა 85%-ით გაზარდოს. როგორი უნდა იყოს პროდუქციის მოცულობის ზრდის საშუალო წლიური პროცენტი?

13 რამდენი ფესვი აქვს $\sqrt{6-5x-x^2}\,(x-4)=0$ განტოლებას?

14 იპოვეთ m-ის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც სისტემას ამონახსნი არ აქვს:

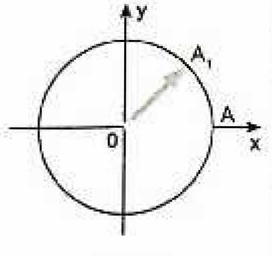
ა) $\begin{cases} 2x+(9m^2-2)y=3m \\ x+y=1 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} 2mx+y=6m^2-5m+1 \\ x+2my=0 \end{cases}$;

15 იპოვეთ c და d-ს პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც სისტემის ამონახსნია $x=1$ და $y=1$:

$$\begin{cases} (c+1)x+(c+1)y=-x \\ (d-1)x+(5-2d)y=c+4 \end{cases}.$$

16 სამმა მუშამ კედელი ააშენა ისე, რომ პირველმა იმუშავა 6, მეორემ 4 საათი და მესამემ 7 საათი. თუ პირველი იმუშავებდა 4 საათი, მეორე — 2 საათი და მესამე — 5 საათი, მაშინ შესრულდებოდა სამუშაოს 2/3 ნაწილი. რამდენ საათში ააშენებს კედელს სამივე მუშა ერთად?

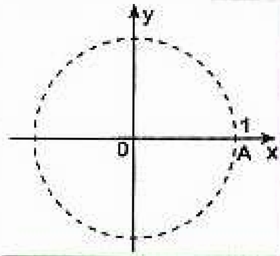
ჯგუფური მეცადინეობა



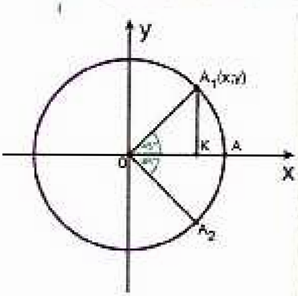
ნახ. 1

1. აიღეთ ფერადი ფურცელი. დახაზეთ მასზე მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა და წრეწირი, რომლის ცენტრია O(0,0). გამოჭერით ისარი (ისრის სიგრძე წრეწირის რადიუსის ტოლი იყოს) (ნახ. 1) და დაამაგრეთ ჭიკარტით O(0;0) წერტილში.

ა) მოაბრუნეთ ისარი 45°-იანი, 90°-იანი, 120°-იანი, 360°-იანი კუთხით და მონიშნეთ წრეწირზე შესაბამისი წერტილები (წერტილები, რომლებზეც გაჩერდება ისარი). A_1, B_1,...,



ბ) ისარი გააჩერეთ A_1 წერტილთან. მოაბრუნეთ 180°-იანი, 360°-იანი კუთხით. რა შეგიძლიათ თქვათ მიღებულ წერტილებზე?



ნახ. 2

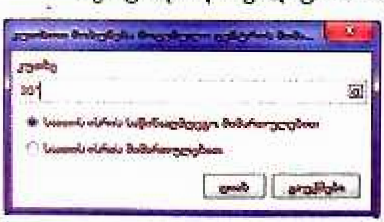
2. ისარი გააჩერეთ A(1;0) წერტილთან (ჩათვალეთ, რომ წრეწირის რადიუსი 1 ერთეულის ტოლია). მოაბრუნეთ A წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ ა) 45°-იანი კუთხით საათის ისრის საწინააღმდეგო, შემდეგ კი საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. იპოვეთ მიღებულ წერტილთა კოორდინატები.

ამოხსნა: ვთქვათ, $A_1(x;y)$ (ნახ. 2) $OA_1=OA_2=1$, OA_1 და OA_2 მონაკვეთები OX სხივთან 45°-იან კუთხეს ქმნიან, ე.ი. OA_1 და OA_2 სიმეტრიული მონაკვეთებია X ღერძის მიმართ, ამიტომ $A_2(x;-y)$. განვიხილოთ ΔOA_1K. $OK=OA_1\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$A_1K=OA_1\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ე.ი. $A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ და $A_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. გაეცით პასუხი მე-2 ამოცანაში დასმულ შეკითხვებს, თუ A წერტილს მოვაბრუნებთ: ა) 90°იანი, ბ) 120°-იანი, გ) 150°-იანი, დ) 210°-იანი კუთხით.

მოცემული ამოცანა შეასრულეთ კომპიუტერში (პროგრამა GeoGebra-ში). მარცხნიდან მე-6 ლოგოში მოძებნეთ რეჟიმი „წრეწირი ცენტრითა და რადიუსით" და ააგეთ R=1 რადიუსიანი წრეწირი ცენტრით O(0,0) წერტილში (შეგიძლიათ მე-11 ლოგოში მოძებნოთ რეჟიმი „გაზრდა", დააწკაპოთ წრეწირზე). ა) მონიშნეთ წრეწირზე A(1;0) წერტილი და „გადატანა" რეჟიმის საშუალებით ამოძრავეთ წერტილი წრეწირზე. რა გარდაქმნა ხდება? აღწერეთ პროცესი.

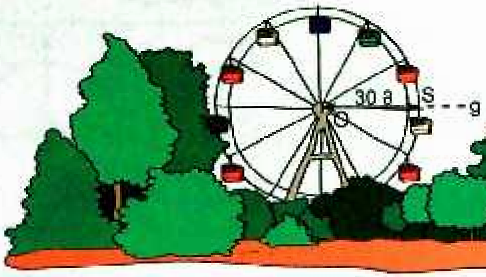


ბ) მარცხნიდან მე-9 ლოგოში მოძებნეთ რეჟიმი „კუთხით მობრუნება მოცემული ცენტრის მიმართ". მოაბრუნეთ A(1;0) წერტილი 30°-იანი, 90°-იანი კუთხით (არ დაგავიწყდეთ კუთხის სიდიდეზე „°"-ის მიწერა). თქვენი აზრით, მაქსიმუმ რამდენ გრადუსიანი კუთხით შეგიძლიათ მოაბრუნოთ წერტილი?

- რა გაიგეთ ამ დავალებების შესრულების შედეგად? კიდევ რისი გაგება გსურთ? რა შეკითხვები გაგიჩნდათ?

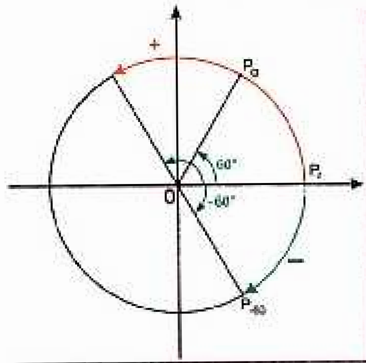
2 სინუსისა და კოსინუსის განმარტება

1. ეშმაკის ბორბალზე 12 კალათა წრეზეა განლაგებული. მობრუნების კუთხე კალათისა O ცენტრის მიმართ აითვლება S წერტილიდან.



ა) თუ კალათი, რომელიც S წერტილში იყო, მობრუნდა O ცენტრის მიმართ (საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით) 30°-იანი, 60°-იანი, 120°-იანი, 240°-იანი, 360°-იანი კუთხით, მაშინ რა სიმაღლეზე იქნება იგი g ღერძიდან;
ბ) აჩვენეთ, რომ ფუნქცია f: მობრუნების კუთხე → კალათის დაკიდების წერტილიდან g წრფემდე მანძილი – პერიოდული ფუნქციაა. იპოვეთ მისი პერიოდი.

გეომეტრიის კურსიდან ვიცით, რომ კუთხის გრადუსული ზომა მოთავსებულია 0°-სა და 180°-ს (ჩათვლით) შორის, მაგრამ თუ კუთხეს განვიხილავთ, როგორც ბრუნვის შედეგს, მაშინ მობრუნების კუთხე შესაძლოა იყოს ნებისმიერი, $-\infty$-დან $+\infty$-მდე.

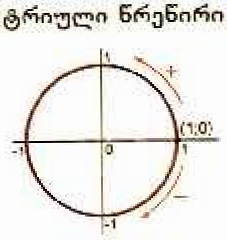


ნახაზზე მოცემულია წრეწირი ცენტრით O(0,0) წერტილში და რადიუსით 1. ასეთ წრეწირს **ერთეულოვან წრეწირს** უწოდებენ. O წერტილის მიმართ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით α კუთხით მობრუნებისას $P_0(1;0)$ წერტილი გადადის P_α წერტილში (OP_0 რადიუსი — OP_α რადიუსში). ასეთ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ მობრუნების კუთხე დადებითია.
თუ P_0 წერტილს საათის ისრის მიმართულებით მოვაბრუნებთ O წერტილის მიმართ, მაგალითად, 60°-იანი კუთხით, მაშინ ვამბობთ, რომ მობრუნების კუთხე უარყოფითია, ანუ მობრუნების კუთხეა –60°.

ა) იქნება თუ არა ზემოთ განხილული შესაბამისობა f: $\alpha \to P_\alpha$ ფუნქცია? პასუხი დაასაბუთეთ.
ბ) იპოვეთ ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე წერტილი $f(30°)$; $f(30°+360°)$; $f(30°+720°)$; $f(30°+360°n)$, $n \in z$, სადაც f: $\alpha \to P_\alpha$.
გ) არის თუ არა f ფუნქცია პერიოდული? დადებითი პასუხის შემთხვევაში იპოვეთ უმცირესი დადებითი პერიოდი T_0.

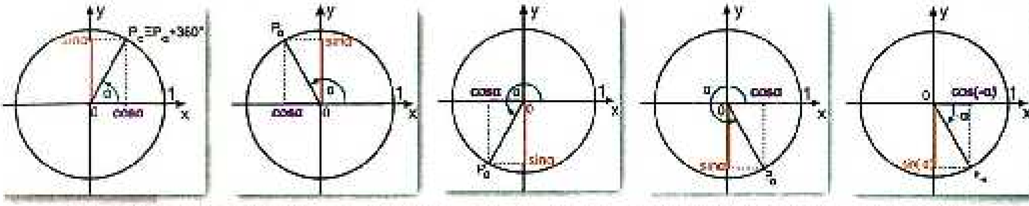
გაიხსენეთ რას ეწოდება მახვილი კუთხის სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი.

ერთეულოვან წრეწირს, რომელზეც მოცემულია ათვლის სათავე O(1;0) და დადებითი მიმართულება, **ტრიგონომეტრიული წრეწირი** ეწოდება.



განვაზოგადოთ ეს განმარტებანი ნებისმიერი α კუთხისათვის.

P_α წერტილის ორდინატას α კუთხის სინუსი ($\sin\alpha$), ხოლო აბსცისას - კოსინუსი ($\cos\alpha$) ეწოდება, სადაც P_α არის $P_0(1;0)$ წერტილის კოორდინატთა სათავის გარშემო α კუთხით მობრუნებით მიღებული წერტილი.



არის თუ არა შესაბამისობა
$f: \alpha \to y(P_\alpha)$ (P_α წერტილის ორდინატა),
$g: \alpha \to x(P_\alpha)$ (P_α წერტილის აბსცისა) ფუნქცია? პასუხი დაასაბუთეთ.

ადვილი მისახვედრია, რომ სინუს და კოსინუს ფუნქციები პერიოდულია, სადაც $T_0=360°$, ე.ი. ნებისმიერი α კუთხისთვის სრულდება:

$$\sin(\alpha+360°k)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+360°k)=\cos\alpha,\ k\in z$$

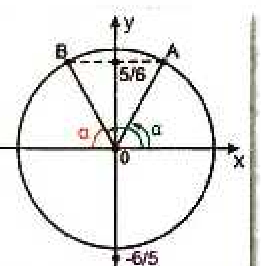
მაგალითების საშუალებით აჩვენეთ, რომ სინუს და კოსინუს ფუნქციათა პერიოდი არ შეიძლება იყოს 360°-ზე ნაკლები (განიხილეთ $T_0=180°$, გაიაზრეთ, რატომ მაინცა და მაინც 180°).

მაგალითი 1.

იპოვეთ ყველა ის კუთხე, რომელიც მოთავსებულია [0°;360°) შუალედში და რომლის სინუსი ა) $\frac{5}{6}$-ია, ბ) $-\frac{6}{5}$-ია.

ამოხსნა:

ა) ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე უნდა ვიპოვოთ წერტილი (წერტილები), რომლის ორდინატა $\frac{5}{6}$-ია. ასეთი წერტილებია $A\left(*;\frac{5}{6}\right)$ და $B\left(*;\frac{5}{6}\right)$, შესაბამისი კუთხეებია: α და 180°-α. კალკულატორის საშუალებით შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ α≈56,2°. ე.ი. საძიებელი კუთხეების მიახლოებითი გრადუსული ზომებია: 56,2° და 123,8°.



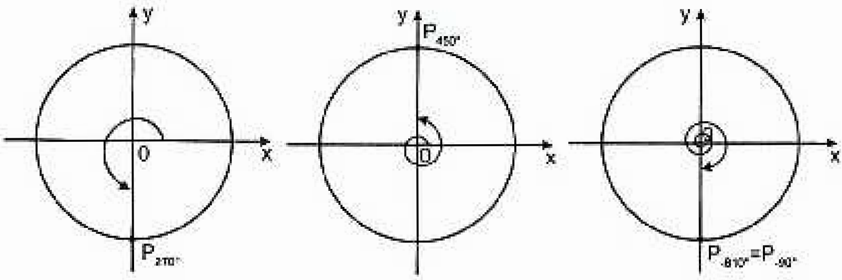
ბ) რადგან $-\frac{6}{5}<-1$, ამიტომ ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე წერტილი, რომლის ორდინატაც $-\frac{6}{5}$-ია, არ არსებობს. შესაბამისად არ იარსებებს კუთხე, რომლის სინუსი $-\frac{6}{5}$-ია.

მაშასადამე, ნებისმიერი კუთხის სინუსი და კოსინუსი მნიშვნელობებს [−1;1] შუალედიდან ღებულობს და პირიქით $a\in[-1;1]$-თვის იარსებებს კუთხე (თან უამრავი), რომლის სინუსიც (კოსინუსიც) a-ს ტოლია.

მაგალითი 2.

ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც შეესაბამება შემდეგ კუთხეს: ა) 270°; ბ) 450°; გ) –810°.

ამოხსნა:



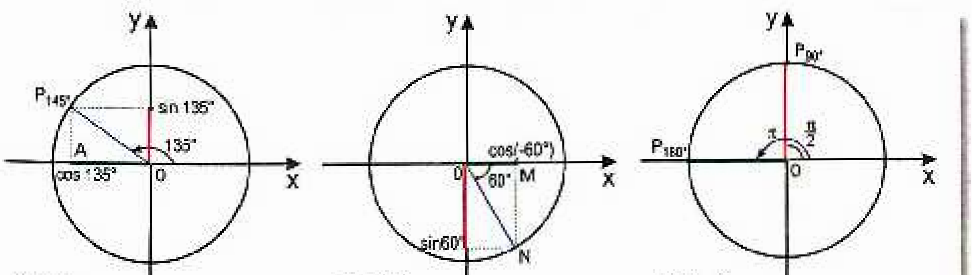
ა) $270° \to (0;-1)$

ბ) $450°=360°+90°$, $450° \to (0;1)$ ერთი სრული ბრუნი დადებითი მიმართულებით და $+90°$

გ) $-810° = -2\cdot 360-90°$. $-810° \to (0;-1)$. ორი სრული ბრუნი უარყოფითი მიმართულებით და $-90°$.

მაგალითი 3.

გამოთვალეთ: ა) $\sin135°$; $\cos135°$; ბ) $\sin(-60°)$; $\cos(-60°)$;
გ) $\sin90°$; $\cos90°$; დ) $\sin180°$; $\cos180°$.



ნახ. 1 ნახ. 2 ნახ. 3

ამოხსნა:

საჭიროა ვიპოვოთ მოცემულ კუთხეთა შესაბამისი წერტილები (კოორდინატები) ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე.

ა) ΔOAP-დან ($P=P_{135°}$) $OA=AP=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ე.ი. $\sin135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ბ) ΔOMN-დან (ნახ.2) $OM = \frac{1}{2}$; $MN = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

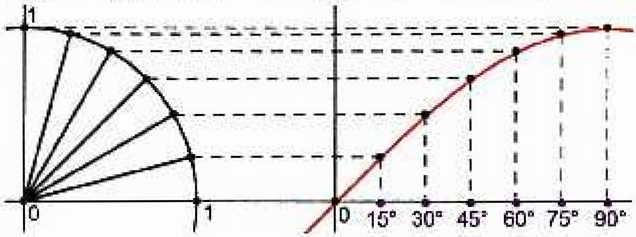
ე.ი. $\sin(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-60°) = -\frac{1}{2}$;

გ) მე-3 ნახაზიდან $\sin90°=y(P_{90°})=1$; $\cos90°=x(P_{90°})=0$;

დ) $\sin180°=y(P_{180°})=0$ და $\cos180°=x(P_{180°})= -1$.

სავარჯიშოები:

1 ა) აღწერეთ ნახაზზე მოცემული სინუს ფუნქციის აგების პროცესი წერტილების საშუალებით, როცა $0 \le \alpha \le 90°$.
ბ) ააგეთ სინუს ფუნქციის გრაფიკი $\alpha \in [-90°; 90°]$-თვის.



2 ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე იპოვეთ მოცემული კუთხის შესაბამისი წერტილი:
ა) 120°; ბ) 150°; გ) 230°; დ) 540°;
ე) 480°; ვ) -60°; ზ) -720°; თ) -120°.

3 რომელ მეოთხედშია მოცემული კუთხის შესაბამისი P_α წერტილი, თუ:
ა) $\alpha=135°$; ბ) $\alpha=277°$; გ) $\alpha=245°$; დ) $\alpha=-150°$;
ე) $\alpha=-210°$; ვ) $\alpha=-380°$; ზ) $\alpha=2000°$; თ) $\alpha=-195°$.

4 შესაძლებელია თუ არა α და $-\alpha$ კუთხეები ერთსა და იმავე მეოთხედში ბოლოვდებოდეს? დადებითი პასუხის შემთხვევაში მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითები.

5 დაწერეთ იმ კუთხეთა ზოგადი სახე, რომელთა შესაბამისი წერტილი ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე არის:
ა) $P(1;0)$; ბ) $P(0;1)$ გ) $P(-1;0)$;
დ) $P(0;-1)$; ე) $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; ვ) $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$;
ზ) $P\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; თ) $P\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. ა) გადაიხაზეთ მოცემული ცხრილი რვეულში.
ბ) იანგარიშეთ ტრიგონომეტრიული წრეწირის საშუალებით და შეავსეთ ცხრილი.

α	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sinα	0								
cosα	1								

7 ისარგებლეთ მე-6 ამოცანის ცხრილში მიღებული შედეგებით და იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:
ა) $2\sin30°\cos120°$; ბ) $\sin0°\cos150°$; გ) $\cos60°+\sin90°$.
დ) $\sin180°+\cos0°$; ე) $\sin120°+\cos30°$; ვ) $\cos150°+\sin60°$;
ზ) $\sin45°\cos135°$. თ) $\cos45°+\sin135°$.

8 ტრიგონომეტრიული წრეწირის საშუალებით იპოვეთ ყველა α, თუ:

ა) $\sin\alpha=\sin15°$; ბ) $\sin\alpha=\sin60°$; გ) $\cos\alpha=\cos20°$;

დ) $\sin\alpha=\sin65°$; ე) $\cos\alpha=\cos210°$; ვ) $\sin\alpha=\sin90°$.

9 რომელი α კუთხეებისთვის შესრულდება:

ა) $\sin\alpha=\cos\alpha$; ბ) $\sin\alpha=-\cos\alpha$.

10 კალკულატორის საშუალებით იპოვეთ ყველა ის კუთხე, რომლებიც მოთავსებულია 0°-სა და 360°-ს შორის და რომლებისთვისაც სრულდება:

ა) $\sin\alpha=0{,}2$; ბ) $\cos\alpha=0{,}6$; გ) $\sin\alpha=0{,}615$; დ) $\sin\alpha=0{,}35$.

11 კალკულატორის საშუალებით გამოთვალეთ:

ა) $\sin15°$; ბ) $\cos75°$; გ) $\sin65°$; დ) $\cos135°$;

ე) $\cos85°$; ვ) $\sin37°$; ზ) $\sin27°$; თ) $\sin87°$.

12 არსებობს თუ არა ისეთი α კუთხე, რომლისთვისაც სრულდება:

ა) $\sin\alpha=0,(35)$; ბ) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$; გ) $\cos\alpha=-\dfrac{5}{4}$;

დ) $\sin\alpha=\sqrt{2}-1$; ე) $\cos\alpha=\sqrt{2}+1$; ვ) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{5}$.

13 იპოვეთ:

ა) $\sin\alpha+\cos2\alpha$, თუ $\alpha=30°$; ბ) $\sin4\alpha+\cos2\alpha$, თუ $\alpha=15°$;

გ) $\sin2\alpha-\cos\alpha$, თუ $\alpha=45°$; დ) $\cos\dfrac{3\alpha}{2}+\sin\dfrac{3\alpha}{2}$, თუ $\alpha=90°$;

ე) $\sin4\alpha-\cos4\alpha$, თუ $\alpha=7°30'$; ვ) $\sin3\alpha+\cos3\alpha$, თუ $\alpha=20°$.

14 რა კუთხით მობრუნდება საათის წუთების ისარი:

ა) 5 წუთის შემდეგ? ბ) 25 წუთის შემდეგ?

გ) 38 წუთის შემდეგ? დ) 128 წუთის შემდეგ?

15 იპოვეთ ბრუნვის სიჩქარე საათის:

ა) დიდი ისრისა; ბ) პატარა ისრისა.

16 რა მანძილს შემოწერს საათის წუთების ისარი 1 საათში, თუ ისრის სიგრძე:

ა) 12 სმ-ია; ბ) 20 სმ-ია; გ) 5 სმ-ია; დ) 10 სმ-ია.

17 აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი α კუთხისთვის $|\sin\alpha|+|\cos\alpha| \geq 1$.

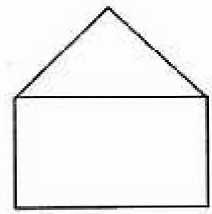
18 ტრიგონომეტრიული წრეწირის საშუალებით ააგეთ α კუთხე, თუ (მითითება: $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, ააგეთ $y=\frac{1}{2}$ წრფე):

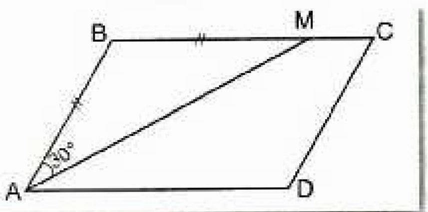
ა) $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$; ბ) $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$; გ) $\cos\alpha=-\dfrac{3}{4}$; დ) $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

მოცემული დავალებებიდან ერთ-ერთი შეასრულეთ კომპიუტერში, ამობეჭდეთ, წარმოადგინეთ გაკვეთილზე.

19 სამკუთხედის გვერდებია 5; 6; 9. იპოვეთ მისი გვერდების შუაწერტილების შეერთებით მიღებული სამკუთხედის ფართობი.

20* ასაშენებელია ნაგებობა, რომელსაც უნდა ჰქონდეს მართკუთხედს ზემოდან დამატებული ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმა და 10-ის ტოლი პერიმეტრი. რისი ტოლი უნდა იყოს მართკუთხედის გვერდები, რომ ნაგებობას ჰქონდეს უდიდესი ფართობი?





21 ნახაზის მიხედვით იპოვეთ ABCD პარალელოგრამის B წერტილიდან დაშვებულ სიმაღლეებს შორის კუთხე.

22 (x_n) მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით $x_n=-n^2+11n-28$. იპოვეთ n-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ამ მიმდევრობის წევრი ნატურალურია.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

23 ტრიგონომეტრიული წრეწირის საშუალებით გაარკვიეთ რომელია მეტი?
ა) sin20° თუ sin70°; ბ) sin(-40°) თუ sin(-10°); გ) sin120° თუ sin240°;
დ) cos20° თუ cos70°; ე) cos70° თუ cos140°; ვ) cos(-100°) თუ cos(-50°).

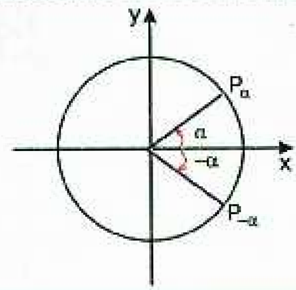
24 იპოვეთ მოცემული რიცხვის ნიშანი:
ა) sin20°; ბ) sin130°; გ) sin220°; დ) sin300°;
ე) cos20°; ვ) cos130°; ზ) cos220°; თ) cos300°.
დააკვირდით მიღებულ შედეგებს და გამოიტანეთ გონივრული დასკვნა.

25 ააგეთ კომპიუტერში ტრიგონომეტრიული წრეწირი, მონიშნეთ მასზე A(0;-1). გაააქტიურეთ კურსორი (რეჟიმი „გადატანა") და ამოძრავეთ A წერტილი საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. დააკვირდით როგორ იცვლება A წერტილის ა) ორდინატა? ბ) აბსცისა? კარგად გაიაზრეთ პირველ, მეორე, მესამე დავალებებში მიღებული შედეგები და გამოიტანეთ გონივრული დასკვნა.

3 სინუს და კოსინუს ფუნქციის ზოგიერთი თვისება

1 ა) ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე იპოვეთ $P_{45°}$ და $P_{-45°}$; $P_{120°}$ და $P_{-120°}$ წერტილები და გამოთვალეთ: sin45° და sin(-45°); cos45° და cos(-45°); sin120° და sin(-120°), cos120° და cos(-120°).

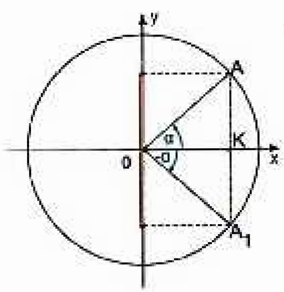
ბ) დააკვირდით მიღებულ შედეგებს და გამოიტანეთ გონივრული დასკვნა.



ჩამოვაყალიბოთ sinα და cosα ფუნქციათა თვისებები.

sinα ფუნქცია

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
ე.ი. კენტია



cosα ფუნქცია

1. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
ე.ი. ფუნქცია ლუწია

მართლაც Δ AOA_1 ტოლფერდა სამკუთხედია. OK ბისექტრისაა, ამიტომ OK მედიანაცაა და სიმაღლეც. ე.ი. A და A_1 წერტილები სიმეტრიული წერტილებია x-ღერძის მიმართ. აქედან $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$. და $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

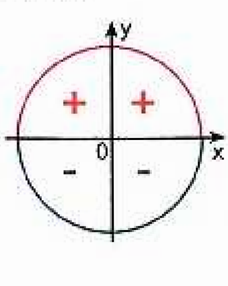
2. ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია 360°, ე.ი.

$$\sin(\alpha+360°n)= \sin\alpha,\ n\in Z.$$

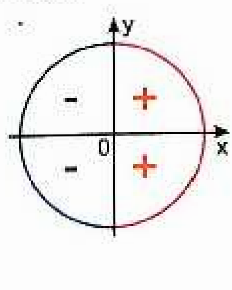
2. ფუნქცია პერიოდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია 360°, ე.ი.

$$\cos(\alpha+360°n)= \cos\alpha,\ n\in Z.$$

3. sinα-ს ნიშანი ემთხვევა P_α წერტილის ორდინატას ნიშანს, ე.ი.



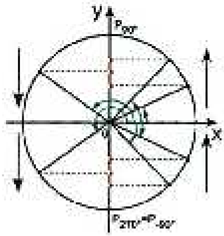
3. cosα-ს ნიშანი ემთხვევა P_α წერტილის აბსცისას ნიშანს, ე.ი.

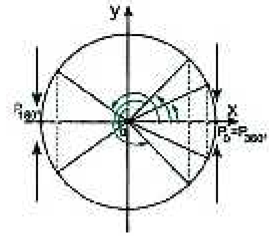


α კუთხე იმ მეოთხედის კუთხეა, რომელშიც მდებარეობს მისი შესაბამისი P_α წერტილი.

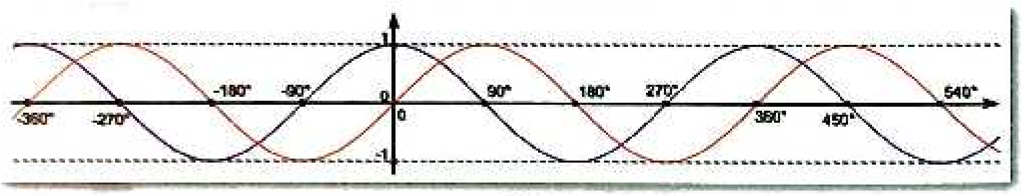
4. თუ α კუთხე იზრდება -90°-დან 90°-მდე, მაშინ შესაბამისი წერტილის ორდინატაც იზრდება -1-დან 1-მდე და მაშასადამე α კუთხის სინუსიც იზრდება.
თუ α კუთხე იზრდება 90°-დან 270°-მდე შესაბამისი სინუსი მცირდება 1-დან -1-მდე.

4. თუ α კუთხე იზრდება 0°-დან 180°-მდე, მაშინ შესაბამისი წერტილის აბსცისა და შესაბამისად კოსინუსიც მცირდება 1-დან -1-მდე, ხოლო, თუ α კუთხე იზრდება 180°-დან 360°-მდე, შესაბამისი კოსინუსი იზრდება -1-დან 1-მდე.





1-ელ ნახაზზე მოცემულია სინუს (წითელი წირი) და კოსინუს (ლურჯი წირი) ფუნქციათა გრაფიკები.



ნახ. 1

მაგალითი.

გამოთვალეთ: ა) sin1170°+ cos780°; ბ) sin(−900°).

ა) sin1170°=sin(360·3+90°)=sin90°=1.
$\cos(780°)=\cos(2\cdot360°+60°)=\cos60°=\frac{1}{2}$, ე.ი. $\sin1170°+\cos780°=\frac{3}{2}$.

ბ) sin(−900°) = −sin(900°) = −sin(2·360°+180°) = −sin180° = 0.

სავარჯიშოები:

1 რომელი საკოორდინატო მეოთხედის α კუთხისთვის სრულდება:
ა) sinα>0 და cosα<0; ბ) sinα>0 და cosα>0;
გ) sinα:cosα < 0; დ) sinα·cosα > 0.

2 იპოვეთ გამოსახულების ნიშანი (ტრიგონომეტრიული წრეწირის გარეშე):
ა) sin137°·cos(-18°); ბ) sin2130°·cos180°;
გ) cos279°; დ) cos150°·sin1136°;
ე) cos780°·sin(-136°); ვ) sin(−2010°)cos(−230°).

3 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\sin(-30°)$; ბ) $\sin(-45°)$; გ) $\sin(-180°)$; დ) $\cos(-30°)$;
ე) $\sin(-60°)$; ვ) $\cos(-45°)$; ზ) $\sin(-90°)$; თ) $\cos(-90°)$.

4 რომელია მეტი? (პასუხი დაასაბუთეთ).

ა) $\sin70°$ თუ $\sin35°$; ბ) $\cos70°$ თუ $\cos35°$;
გ) $\sin40°$ თუ $\sin165°$; დ) $\sin20°$ თუ $\sin75°$;
ე) $\cos150°$ თუ $\cos15°$; ვ) $\sin55°$ თუ $\cos125°$;
ზ) $\sin5°\cdot\cos95°$ თუ $\sin5°$; თ) $\cos15°$ თუ $\cos15°\cdot\cos105°$.

5 აჩვენეთ შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

ა) $\sin770°=\sin50°$; ბ) $\cos3265°=\cos25°$; გ) $\sin1130°=\sin50°$.

6 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\sin1470°$ ბ) $\cos(-720°)$; გ) $\sin1500°$; დ) $\cos3660°$;
ე) $\sin(-1170°)$; ვ) $\sin2490°$; ზ) $\sin^2 1845°$; თ) $\cos^2 1980°$;
ი) $\cos(-2220°)$; კ) $\sin^2 2220°$; ლ) $\cos1410°$; მ) $\sin2190°$.

7 შესაძლებელია თუ არა, რომ განტოლებას ჰქონდეს ამონახსენი (პასუხი დაასაბუთეთ)?

ა) $\sin x+\cos x=2$; ბ) $3\sin x-5\cos x=8$; გ) $\sin x\cdot\cos x=1$;
დ) $\sin2x-\cos2x=2$; ე) $\sin3x\cdot\cos3x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; ვ) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}+1$.

8 იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $y=\sin3x$; ბ) $y=\cos2x$; გ) $y=\sin x+\cos x$; დ) $y=3\sin x+\cos2x$.

9 m-ის რა მნიშვნელობისთვისაა შესაძლებელი ტოლობა:

ა) $\sin\alpha=\frac{m}{3}$; ბ) $\cos5\alpha=\frac{2+m}{m}$;
გ) $\sin\alpha=\frac{m^2-1}{2}$; დ) $\cos11\alpha=m^2-2$;
ე) $\sin(\alpha+25)°=\frac{m^2}{5}$; ვ) $\cos(\alpha+5)°=m^2+2$.

10 ლუწია თუ კენტი ფუნქცია?

ა) $y=\sin3x$; ბ) $y=\sin x+\cos2x$;
გ) $y=\sin x-3$; დ) $y=\cos2x+4$;
ე) $y=\sin^2x-\cos x$; ვ) $y=\cos^2 3x-\sin^2 x$;
ზ) $y=\sin x\cos x$; თ) $y=\sin^2 x\cos x$.

11 იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე:

ა) $y=2\sin\frac{x}{4}$; ბ) $y=3\cos(x-5)$; გ) $y=4\cos\frac{x}{3}+2$;
დ) $y=\sqrt{2}\cos x-1$; ე) $y=5\sin\sqrt{2}x-\frac{1}{2}$; ვ) $y=(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sin3x$.

12 გამოთვალეთ:

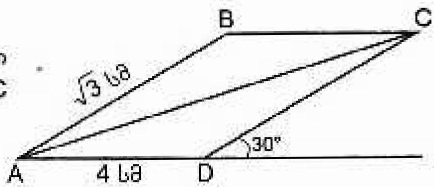
ა) $2\sin180° - 2\cos270°$; ბ) $3\sin^2 45° - 2\sin^2 60° \cdot \cos30°$;

გ) $3\cos^2 180° - 4\sin^2 60° + 3\cos45°$; დ) $2\sin45° - 3\cos30° + 5\sin360° \cos37°$;

ე) $145\sin537° \cos270° - 3\cos45°$; ვ) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$.

13 პარალელოგრამში მახვილი კუთხე 60°-ია, ხოლო გვერდები 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ დიდი დიაგონალი.

14 ნახაზის მიხედვით იპოვეთ ABCD პარალელოგრამის AC დიაგონალი.



15 იპოვეთ $\sqrt{(3-a)(5+a)}$, თუ $\sqrt{3-a} + \sqrt{5+a} = 4$.

16* როგორია $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის დისკრიმინანტი (დადებითი, უარყოფითი, ნულის ტოლი), თუ ცნობილია, რომ $a(a-b+c)<0$.

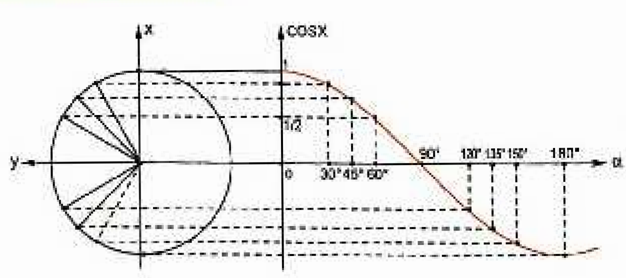
17 „ტოლფერდა სამკუთხედის მედიანა ბისექტრისაცაა და სიმაღლეც". ეს წინადადება:

ა) ჭეშმარიტია ყოველთვის ბ) შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი

გ) ყოველთვის მცდარია.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

18 ნახაზზე მოცემულია $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება. აღწერეთ გრაფიკის აგების პროცესი.

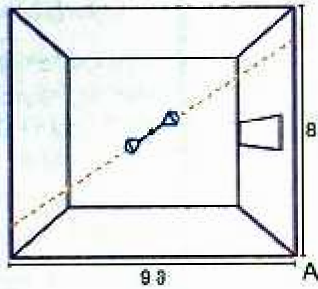


4 tgα და ctgα ფუნქციები და მათი თვისებები

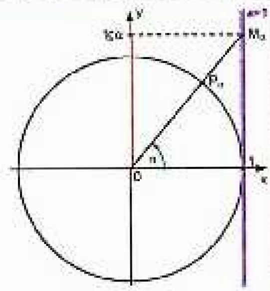
1. მარიკას სარდაფის ჭერზე მიმაგრებულია მბრუნავი ჭაღი ორი მანათობლით. უძრაობისას ერთი მანათობელი მიმართულია ზუსტად კარის შუა ნაწილისაკენ.

ა) კარის შუა ნაწილიდან რა მანძილზე მიანათებს ნათურა, თუ ჭაღი მობრუნდება 30°-იანი (150°-იანი, 210°-იანი) კუთხით?

ბ) რა კუთხით უნდა მობრუნდეს ჭაღი, რომ ნათურამ A წერტილს მიანათოს?

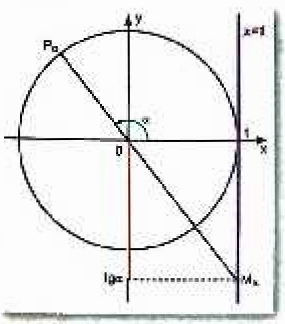
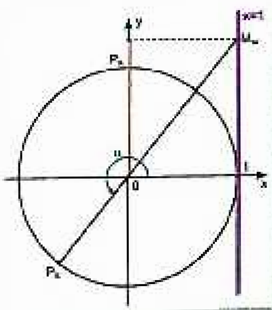
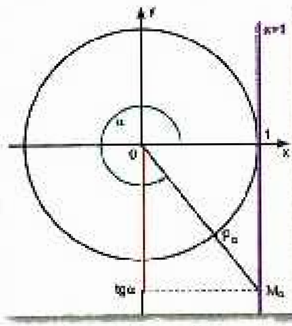


1-ელ ნახაზზე მოცემულია მობრუნების α კუთხე და მისი შესაბამისი წერტილი ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე. OP_α წრფისა და $x=1$ განტოლებით მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ M_α-ით. M_α წერტილის ორდინატას α კუთხის ტანგენსი ვუწოდოთ. $x=1$ წრფეს კი - ტანგენსების ღერძი.

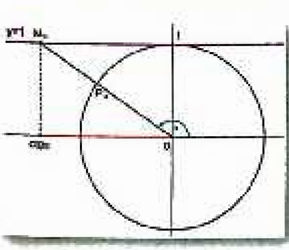
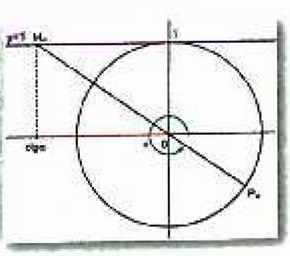
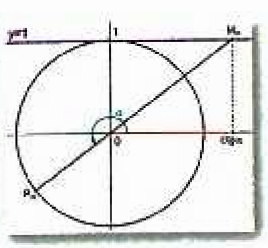
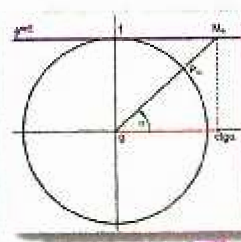


ნახ. 1

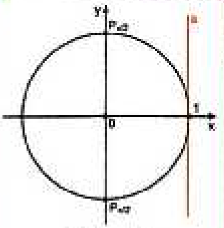
α კუთხის ტანგენსი (tgα) ეწოდება ტანგენსების ღერძზე α კუთხის შესაბამისი წერტილის ორდინატას.

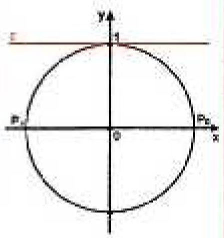
OP_α წრფისა და $y=1$ წრფის გადაკვეთის წერტილის აბსცისას α კუთხის კოტანგენსი (ctgα) ეწოდება. $y=1$ წრფეს კოტანგენსების ღერძი ვუწოდოთ.

- არის თუ არა შესაბამისობა $\alpha \to tg\alpha$, $\alpha \to ctg\alpha$, ფუნქცია? (პასუხი დაასაბუთეთ).
- ტანგენსების, ასევე კოტანგენსების ღერძზე იპოვეთ: ა) $M_{30°}$, $M_{210°}$; ბ) $M_{45°}$, $M_{225°}$; გ) $M_{-30°}$; $M_{150°}$; დ) M_{α}, $M_{180°+\alpha}$, $M_{\alpha-180°}$, $M_{\alpha+360°}$, $k \in z$.
  რა დასკვნის გამოტანა შეძელით განხილული მაგალითებიდან?
- რას უდრის $tg\varphi$ ($ctg\varphi$) ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი? (პასუხი დაასაბუთეთ).



$OP_{\frac{\pi}{2}} \parallel a$



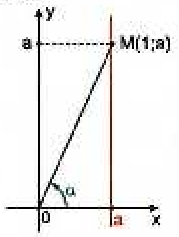
$OP_0 \parallel c$

თუკი ყველაფერი სწორად გაიაზრეთ, ადვილად მიხვდებით, რომ $tg\alpha$ და $ctg\alpha$ ფუნქციები პერიოდული ფუნქციებია, პერიოდით $180°$.

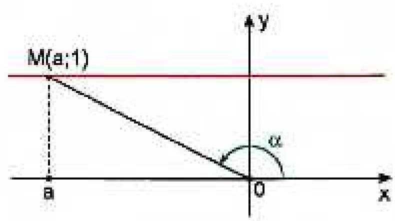
ე.ი. $tg(\alpha+180°k)=tg\alpha$
$ctg(\alpha+180°k)=ctg\alpha$, $k \in Z$

თან $\alpha=90°+180°k$, $k \in Z$-თვის ტანგენსი განსაზღვრული არ არის, ხოლო $\alpha=180°k$, $k \in Z$-თვის კი კოტანგენსი არ არის განსაზღვრული.

ვთქვათ a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, $a \in R$. განვიხილოთ $M(1;a)$ წერტილი, მაშინ $tg\angle MOA=a$ ე.ი. $tg\alpha$ შესაძლებელია უდრიდეს ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს. ანალოგიურადაა შესაძლებელი ვაჩვენოთ, რომ $ctg\alpha$-მაც შესაძლოა მიიღოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის ტოლი მნიშვნელობა.



$tg\alpha=a$, $\forall a \in R$



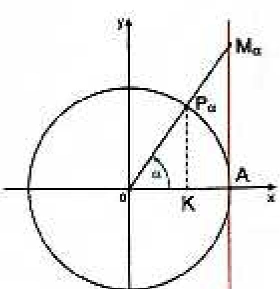
$ctg\alpha=a$, $\forall a \in R$

ვაჩვენოთ, რომ $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

1. $y(M_\alpha)>0$ (ნახ. 2).

ა) $(\triangle OAM_\alpha \sim \triangle OKP_\alpha) \Rightarrow \left(\frac{AM_\alpha}{OA} = \frac{KP_\alpha}{OK}\right) \Rightarrow$

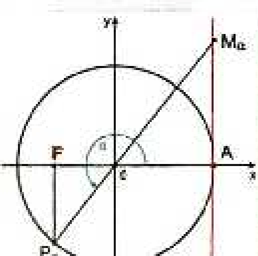
$\Rightarrow \left(\frac{tg\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) \Rightarrow tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



ნახ. 2

ბ) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y(P_\alpha)}{x(P_\alpha)} = \frac{-FP_\alpha}{-OF} = \frac{FP_\alpha}{OF}$ (ნახ. 3)

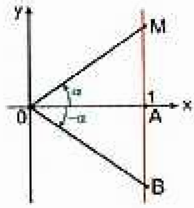
$\triangle OFP_\alpha \sim \triangle OAM_\alpha \Rightarrow \frac{FP_\alpha}{OF} = \frac{M_\alpha A}{OA} = M_\alpha A = tg\alpha$, ე.ი. $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



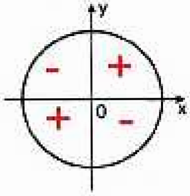
ნახ. 3

1. დაამტკიცეთ, რომ ა) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ იმ შემთხვევაში, როცა $y(M_\alpha)<0$
ბ) $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

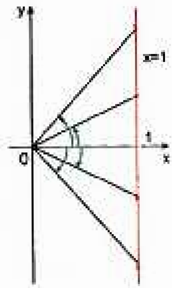
გავეცნოთ tgα ფუნქციის კიდევ სხვა თვისებებს.



1. $tg(-\alpha)=-tg\alpha$ ფუნქცია კენტია. მართლაც ΔMOB-ში OA ბისექტრისაცაა და სიმაღლეც. ე.ი. იქნება მედიანაც MA=MB. აქედან $tg(\alpha)=-tg\alpha$.



2. tgα-ს ნიშანი ემთხვევა ტანგენსების ღერძზე შესაბამისი M_α წერტილის ორდინატის ნიშანს. ამიტომ tgα-ს მეოთხედების მიხედვით ექნება ისეთი ნიშნები, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები.



3. თუ α იზრდება $-90°$-დან $90°$-მდე, იზრდება შესაბამისი M_α წერტილის ორდინატიც და აქედან გამომდინარე იზრდება კუთხის ტანგენსიც.

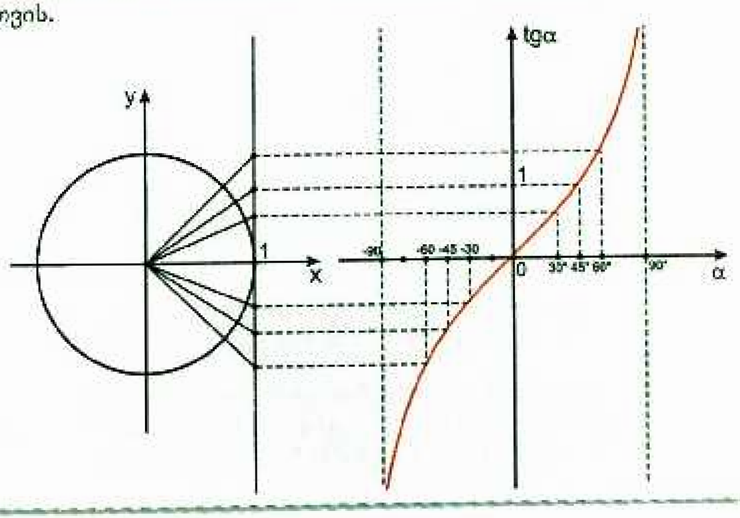
ამავე დროს, რაც უფრო უახლოვდება α კუთხე 90°-ს, თან რჩება რა 90°-ზე ნაკლები, შესაბამისი წერტილის ორდინატა და, მაშასადამე, α კუთხის ტანგენსიც უსაზღვროდ იზრდება.

α კუთხის ტანგენსმა (tgα-მ) შესაძლოა მიიღოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის ტოლი მნიშვნელობა. მართლაც, ნებისმიერი $b \in R$ რიცხვისთვის ტანგენსების ღერძზე იარსებებს M(1;b) წერტილი და შესაბამისად $tg\widehat{MOA}=b$, სადაც A(1;0).

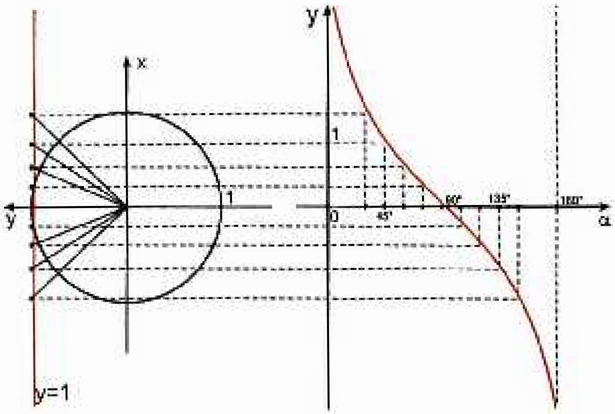
1. ნახაზზე მოცემულია tgα ფუნქციის გრაფიკის აგება $\alpha \in (-90°;90°)$-სთვის ფუნქციის პერიოდულობის გათვალისწინებით $tg(\alpha+180°k)=tg\alpha$, $k \in z$. ააგეთ tgα ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $\alpha \in (90°; 270°)$-თვის;   ბ) $\alpha \in (-270°; -90°)$-თვის.

2. ჩამოაყალიბეთ და დაასაბუთეთ tgα-ს ანალოგიური თვისებები ctgα ფუნქციისთვის.



აღწერეთ ctgα ფუნქციის გრაფიკის აგების პროცესი α∈(0;180)-თვის, რომელიც ნახაზზეა მოცემული.



მაგალითი 1.

იპოვეთ tg240°;

ამოხსნა:

$tg240° = tg(180° + 60°) = tg60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}$ | $T(tg) = 180°k,\ k \in z.$

მაგალითი 2.

რომელია მეტი: ა) tg40° თუ tg70°; ბ) tg40° თუ tg210°?

ამოხსნა:

ა) 40°; 70° ∈(–90°;90°), რადგან 40°<70°, ამიტომ tg40°<tg70°.
ბ) 210° ∈(90°; 270°),
tg210°=tg30°, 30°; 40° ∈(–90°;90°);
რადგან 40°>30°, ამიტომ tg40°>tg30°,
ე.ი. tg40°>tg210°.

სავარჯიშოები:

1 ტრანსპორტირის საშუალებით ააგეთ α კუთხე და ტანგენსების ღერძზე იპოვეთ tgα-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ:
ა) α=30°; ბ) α=20°; გ) α=250°; დ) α=57°; ე) α=265°.

2 კალკულატორის საშუალებით იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა
ა) tg15°; ბ) tg(–40°); გ) ctg(20°); დ) ctg170°; ე) tg197°.

3 იპოვეთ ყველა α კუთხე, რომლებისთვისაც სრულდება:
ა) tgα=1; ბ) tgα=$\sqrt{3}$ გ) tgα=–1; დ) tgα=0; ე) ctgα=0.

4 გადაიხაზეთ ცხრილი რვეულში და შეავსეთ:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$tg\alpha$									
$ctg\alpha$									

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

OM_α სხივის ნაცვლად დააწკაპეთ OM_α-ის განტოლებაზე (ალგებრის ფანჯარაში), შემდეგ ისევ დააწკაპეთ „აჩვენე ობიექტი". სხივი „გაქრება". O და M_α წერტილებზე ააგეთ მონაკვეთი

5 ააგეთ GeoGebra-ს სამუშაო ფურცელზე ტრიგონომეტრიული წრეწირი. ააგეთ მობრუნების კუთხე (მე-9 ლოგო) და იპოვეთ $tg\alpha$-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა (მითითება: იპოვეთ მობრუნების კუთხის შესაბამისი წერტილი ტანგენსების ღერძზე), თუ:
ა) $\alpha=40°$; ბ) $\alpha=130°$; გ) $\alpha=75°$; დ) $\alpha=175°$.
(შესაბამისი ნახაზი წარმოადგინეთ გაკვეთილზე).

6 შეასრულეთ მე-5 ამოცანა იმ პირობით, რომ იპოვოთ $ctg\alpha$.

7 ტანგენსების ღერძის (კოტანგენსების ღერძის) საშუალებით ააგეთ α კუთხე, თუ:
ა) $tg\alpha=2$; ბ) $tg\alpha=8$; გ) $ctg\alpha=-1,5$; დ) $tg\alpha=\sqrt{3}$; ე) $ctg\alpha=-\sqrt{3}$.

8 შეასრულეთ მე-7 ამოცანა კომპიუტერში. ნახაზი წარმოადგინეთ გაკვეთილზე.

9 იპოვეთ ყველა α კუთხე, რომლისთვისაც სრულდება:
ა) $tg\alpha=tg20°$; ბ) $ctg\alpha=ctg(-18°)$;
გ) $tg\alpha=tg(-27°)$; დ) $ctg\alpha=ctg137°$.

10 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:
ა) $tg210°$; ბ) $ctg330°$; გ) $tg(-60)$; დ) $tg45°-ctg60°$;
ე) $3tg^2180°+3,5ctg^237°\cdot tg180°$; ვ) $2tg60°-3ctg30°$; ზ) $tg30°+2\sin30°$.

11 იპოვეთ გამოსახულების ნიშანი:
ა) $tg95°\cdot ctg125°$; ბ) $\cos17°\cdot tg137°$; გ) $tg395°\cdot ctg277°$;
დ) $3tg180°+ctg575°$; ე) $5tg157°+ctg270°$; ვ) $tg235°\cdot ctg137°$.

12 რომელი მეოთხედის კუთხეა α, თუ:
ა) $\sin\alpha>0$ და $tg\alpha<0$; ბ) $\cos\alpha<0$ და $tg\alpha>0$; გ) $tg\alpha\cdot\sin\alpha<0$;
დ) $\sin\alpha<0$ და $ctg\alpha>0$; ე) $\cos\alpha>0$ და $ctg\alpha<0$; ვ) $\cos\alpha\cdot ctg\alpha>0$.

13 ტანგენსების ღერძზე დაშტრიხეთ ყველა P_α წერტილი, რომლებისთვისაც სრულდება:
ა) $tg\alpha<1$; ბ) $tg\alpha>-2$; გ) $tg\alpha>\sqrt{3}$; დ)* $|tg\alpha|>1$.

14 ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე წითლად შეაფერადეთ ყველა ის P_α წერტილი, რომლისთვისაც სრულდება:
ა) $\sin\alpha<\frac{1}{2}$; ბ) $\cos\alpha>-\frac{3}{4}$; გ) $tg\alpha>1$; დ) $ctg\alpha<\sqrt{3}$.
ე) $\sin\alpha<-\frac{1}{2}$; ვ) $\cos\alpha>\frac{1}{2}$; ზ) $tg\alpha>-1$; თ) $ctg\alpha<-2$.

15 შეადარეთ ერთმანეთს:

ა) $tg(-35°)$ და $tg18°$; ბ) $tg(-20°)$ და $tg160°$; გ) $tg37°$ და $tg125°$;
ა) $tg(-17°)$ და $tg0°$; ბ) $tg97°$ და $tg16°$; გ) $tg(-57°)$ და $tg34°$.

16 გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $2a\sin45°-3a\cos0°+a\,tg45°$;

ბ) $4a^2\sin^4 45°-6ab\,tg^2 30°+b^2 tg^2 45°$;

გ) $\cos(-45°)-3|tg(-30°)|+\sin(-45°)-4\sin^2(-30°)$;

დ) $\dfrac{\sin^3(-30°)-2tg(-60°)-1}{2-4tg45°\cos^2(-60°)}$.

17 დაალაგეთ ზრდის მიხედვით:

ა) $\sin15°$, $\sin(-85)°$, $\sin85°$, $\sin0°$;

ბ) $\cos15°$, $\cos95°$, $\cos137°$, $\cos0°$;

გ) $tg(-57°)$, $tg0°$, $tg(-85°)$, $tg37°$;

დ) $ctg90°$, $ctg17°$, $ctg93°$, $ctg157°$.

18 იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $y=tg2x$; ბ) $y=ctg3x$; გ) $y=tgx+ctgx$; დ) $y=tg\frac{x}{2}$.

---

19 რისი ტოლია a, თუ წერტილი $(4-a;\ a)$ მდებარეობს $y=-\dfrac{12}{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე.

20 რისი ტოლია იმ მართკუთხედის გვერდები, რომელსაც 10 მ პერიმეტრის მქონე მართკუთხედებს შორის უდიდესი ფართობი აქვს.

21 თუ სამართლიანია წინადადება: „თუ არ მოიღრუბლა, მაშინ არ გათოვდება", მაშინ შემდეგი წინადადებებიდან ყოველთვის სამართლიანია:

ა) თუ გათოვდა, მაშინ მოღრუბლულია;

ბ) თუ თოვს, მაშინ მოღრუბლული არ არის;

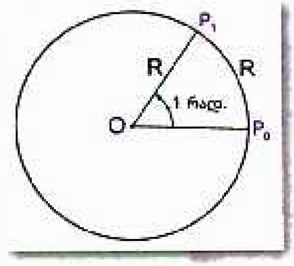
გ) თუ მოიღრუბლა, მაშინ გათოვდება;

დ) თუ არ თოვს, მაშინ მოღრუბლული არ არის;

ე) თუ არ თოვს, მაშინ მოღრუბლულია.

5 რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

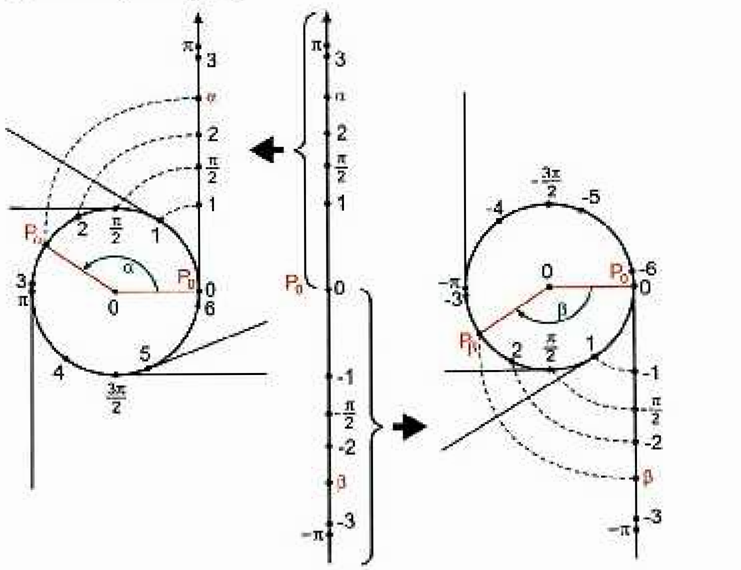
- გამოსახეთ გრადუსული ზომით: $\frac{\pi}{6}$; π; $\frac{\pi}{3}$.
- გამოსახეთ რადიანული ზომით:
  $45°$; $120°$; $90°$; $180°$; $270°$; $360°$; $-90°$.



ვიცით, კუთხის საზომ ერთეულად, გარდა გრადუსისა, მინუტისა, მიღებულია რადიანი.

გავიხსენოთ: 1 რადიანის ტოლი კუთხე არის ისეთი ცენტრალური კუთხე, რომლის რკალის სიგრძე წრეწირის რადიუსის ტოლია.

მაშასადამე, ჩვენ უკვე შეგვიძლია ყოველ x რიცხვს შევუსაბამოთ ტრიგონომეტრიული წრეწირის წერტილი.
ასახვა $x \to P_x$ (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ერთეულოვან წრეწირზე) შესაძლებელია თვალსაჩინოდ ასე წარმოვადგინოთ:
P_0 წერტილზე გავატაროთ $x=1$ წრფე, რომელზეც ავირჩიოთ იგივე მიმართულება, რაც y ღერძს აქვს. წარმოვიდგინოთ უსასრულო ძაფი, რომელიც გაჭიმულია ამ ღერძის გასწვრივ, თან დამაგრებულია P_0 წერტილში. ძაფის ორივე ბოლო „დავახვიოთ" ერთეულოვან წრეწირზე ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები.

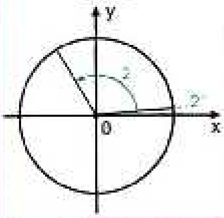


ძაფის ის წერტილი, რომლის ორდინატი P_0x ღერძზე (საწყის მდგომარეობაში) იყო x, დახვევის შემდეგ დაემთხვევა P_x წერტილს. იმავე P_x წერტილს შეუთავსდება P_0x ღერძის ყველა $x+2\pi n$, $n \in Z$ წერტილიც.
ცხადია, თუ $0<x<2\pi$, მაშინ P_0P_x რკალის სიგრძე x-ის ტოლი იქნება, ამიტომ ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე ნაცვლად P_x წერტილისა წერენ უბრალოდ x-ს.

„1′" — ერთი მინუტი. $60' = 1°$.

$1° = \frac{\pi}{180}$ რად. $\approx 0{,}017$რად.

2° ≠ 2



ტრიგონომეტრიაში უმეტესად ვიყენებთ კუთხის რადიანულ ზომას. ჩვეულებრივ „φ=1რად." ან „φ=3რად" და ა.შ. აღნიშვნა „რად"-ს შამოაშორებენ და წერენ უბრალოდ φ=1; φ=3 და ა.შ. მაშასადამე, ჩანაწერი sin3 ნიშნავს „სინუსი 3 რად. კუთხისა". $\sin\frac{\pi}{3}$ ნიშნავს „სინუსი $\frac{\pi}{3}$ რად. კუთხისა".

sinx - ნიშნავს „სინუსი x რად. კუთხისა".

cosx - ნიშნავს „კოსინუსი x რად. კუთხისა".

მაშასადამე, უკვე შესაძლებელია განვიხილოთ რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

$x \to \sin x$, $y=\sin x$

$x \to \cos x$, $y=\cos x$

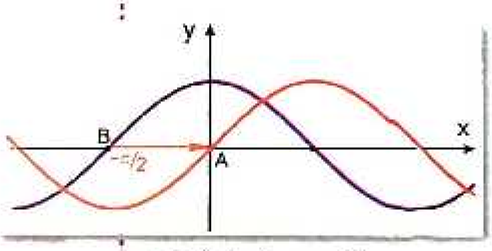
$x \to \mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{tg}x$

$x \to \mathrm{ctg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$

ჩამოწერეთ რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებები, მიუთითეთ მათი:

1. განსაზღვრის არე;
2. მნიშვნელობათა სიმრავლე;
3. პერიოდულობა;
4. ლუწობა და კენტობა;
5. ნიშანმუდმივობის შუალედები;
6. ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები;
7. ფუნქციის ნულები;
8. წერტილები, სადაც ფუნქცია ღებულობს უდიდეს, უმცირეს (თუკი არსებობს) მნიშვნელობას.

2. გახსენით GeoGebra პროგრამაში სამუშაო ფურცელი. გახსენით სახატავი არე. დააწკაპეთ „x ღერძი", „რიცხვები", „მანძილი", მარჯვნივ ისარზე ჩამონაშალში მოძებნეთ $\frac{\pi}{2}$ და იგივე გაიმეორეთ y ღერძზე, ოღონდ ჩამონაშალში მონიშნეთ „1". მიეცით ფერი სახატავ არეს, ბადეს, ღერძებს. ბრძანებების ველში შეიტანეთ y=cos(x). დააწკაპეთ „Enter"-ს და ააგეთ y=cos(x) ფუნქციის გრაფიკი (შეაფერადეთ).



ააგეთ $\overline{BA}$ ვექტორი (მე-3 ლოგო, რეჟიმი „ვექტორი 2 წერტილს შორის"). დააწკაპეთ რეჟიმ „გადატანა ვექტორით" (მე-9 ლოგო). გადაიტანეთ y=cos(x) ფუნქციის გრაფიკი $\overline{BA}$ ვექტორით. შეაფერადეთ. გამოიტანეთ გონივრული დასკვნა. ამობეჭდეთ. წარმოადგინეთ გაკვეთილზე.

- რა წირი მიიღეთ?

შეაფერადეთ მიღებული წირი და ააგეთ y=sin(x) ფუნქციის გრაფიკი. რა დასკვნის გამოტან ა შეგიძლიათ? მიღებული წირი ისევ გადაიტანეთ 3-ჯერ. ფუნქციის რომელი თვისების დემონსტრირება მოხდა?

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ მოცემული კუთხის რადიანული ზომა:

ა) 315°; ბ) -240°; გ) 210°; დ) 135°; ე) 120°;
ვ) 75°; ზ) -72°; თ) 18°; ი) 15°; კ) 6°.

2 იპოვეთ იმ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლის რადიანული ზომაა:

ა) $-\frac{7\pi}{4}$; ბ) $\frac{4\pi}{3}$; გ) $-\frac{20\pi}{3}$; დ) $\frac{13\pi}{5}$; ე) $-\frac{20\pi}{3}$
ვ) $-\frac{4\pi}{5}$; ზ) $\frac{4\pi}{15}$; თ) $\frac{5\pi}{36}$; ი) $\frac{\pi}{20}$; კ) $\frac{\pi}{15}$.

3 იპოვეთ ბრუნვის სიჩქარე (რადიანი სთ-ში):

ა) საათის დიდი ისრის; ბ) წუთების ისრის.

4 იპოვეთ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლითაც მობრუნდება წუთების ისარი და იპოვეთ მისი ბოლოს მიერ გავლილი მანძილი, თუ ისარი ბრუნავს 2 სმ რადიუსიან წრეწირზე:

ა) 5 წთ-ში; ბ) 18 წთ-ში; გ) 1 სთ და 15 წთ-ში; დ) 3 სთ და 24 წთ.

5 წრეწირის რადიუსი 1,5 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ

ა) იმ რკალის გრადუსული და რადიანული ზომა, რომლის სიგრძეა 4 სმ;
ბ) იმ რკალის სიგრძე, რომელიც შეესაბამება ცენტრალურ კუთხეს 135°, $\frac{7\pi}{6}$.

6 კბილანური ბორბლის სრული მობრუნებისას მეორე ბორბალი აკეთებს ორ სრულ ბრუნს მოპირდაპირე მიმართულებით. რამდენ გრადუსიან კუთხეზე მობრუნდება მეორე ბორბალი, თუ პირველი ბორბლის მობრუნების კუთხეა:

ა) 330°; ბ) 900°; გ) 1550°.

7 გამოსახეთ წესიერი n კუთხედის შიგა კუთხე გრადუსებში და რადიანებში, თუ:

ა) n=3; ბ) n=4; გ) n=5; დ) n=8; ე) n=12.

8 სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3:4. გამოსახეთ სამკუთხედის კუთხეები:

ა) გრადუსებში; ბ) რადიანებში.

9 ოთხკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 7:8:9:12. იპოვეთ ამ კუთხეთა ზომა:

ა) გრადუსებში; ბ) რადიანებში.

10 მოცემული კუთხე გამოსახეთ რადიანებში და მიეცით სახე $2\pi k+\alpha$, სადაც $k\in Z$, ხოლო $0\leq\alpha<360°$.

ა) 760°; ბ) 510°; გ) -980°; დ) 1080°;
ე) 3780°; ვ) -750°; ზ) -1250°; თ) -1040°.

11 გადაიხაზეთ რვეულში და შეავსეთ ცხრილი:

კუთხე (გრადუსებში)	30					
კუთხე (რადიანებში)		$\frac{\pi}{5}$			22	
რადიუსი (სმ-ში)	2		10	5		
რკალის სიგრძე (სმ)		2	5			10
სექტორის ფართობი (სმ²)				50	25	50

გ

12 იპოვეთ (a_n) მიმდევრობის იმ წევრის ნომერი, რომელიც უდრის 1) 1-ს; 2) 7-ს; 3) –11-ს, თუ:
ა) $a_n=2n-1$ ბ) $a_n=n^2-n-5$.

13 იპოვეთ (a_n) მიმდევრობის უდიდესი და უმცირესი წევრები (თუკი არსებობს), თუ:
ა) $a_n=-n^2+4n+5$; ბ) n^2-n-12.

14 გემი გადის გზას A-დან B პუნქტამდე მდინარის დინების მიმართულებით 3 სთ-ში, ხოლო უკან ბრუნდება 4 სთ-ში. რა დროში გადის A-დან B-მდე გზას ტივი.

პროექტი:

ტრიგონომეტრია ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს „სამკუთხედის გაზომვას" — trigonon - სამკუთხედი, metreo - ვზომავ".
ტრიგონომეტრია მათემატიკის ნაწილია, რომელიც სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის თანაფარდობას ადგენს.

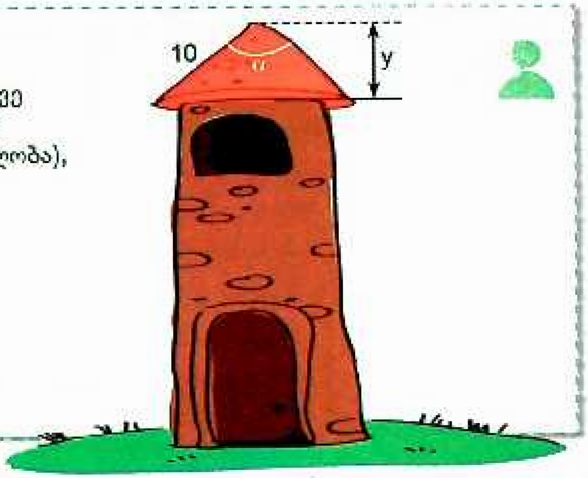
ტრიგონომეტრია გამოიყენება ასტრონომიაში (მაგალითად, მანძილი ვარსვლავებამდე), გეოგრაფიაში, ფიზიკაში, ნავიგაციაში.
ჯერ კიდევ მე-2 ათასწლეულში ჩვ.წ. აღრიცხვამდე იყენებდნენ ტრიგონომეტრიას პირამიდების აგებისას. აჰმესის პაპირუსში (1680-1620 ჩვ.წ.აღ-მდე) დასმულია ტრიგონომეტრიასთან დაკავშირებული პრობლემაც. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები sin, cos, tg, ctg, როგორც წრეწირში გავლებულ მონაკვეთთა სიგრძეებს შორის თანაფართობანი გვხვდება V-X საუკუნის ინდოელ და არაბ მათემატიკოსთა შრომებში. ინდოელმა მათემატიკოსმა არიაბხატამ (V ს.) იცოდა არა მარტო $\sin^2a+\cos^2a=1$, არამედ ნახევარი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფორმულებიც.

- დაამუშავეთ თემა: როგორ ვითარდებოდა ტრიგონომეტრია.

6 ტრიგონომეტრიული განტოლება

1. $\sin x = a$

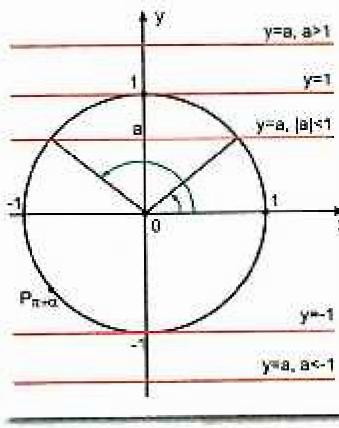
1. ნახაზის მიხედვით დაწერეთ გუმბათის სიმაღლის (y-ის) დამოკიდებულება მისსავე „გაშლის კუთხეზე" და იპოვეთ გუმბათის „გაშლის კუთხე" (მიახლოებითი მნიშვნელობა), თუ $y=6$ და $x=10$.



2. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sin 2x=\frac{1}{2}$,   ბ) $\cos(x-1)=1$.

$\sin x=a$ განტოლების ამოსახსნელად საჭიროა ვიპოვოთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთა შესაბამისი P_x წერტილის ორდინატა გაუტოლდება a-ს. გავატაროთ $y=a$ წრფე.



1. თუ $|a|>1$, $y=a$ წრფეს ტრიგონომეტრიულ წრეწირთან საერთო წერტილი არ ექნება, ე.ი. $\begin{cases}\sin x = a\\ |a|>1\end{cases}$ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს.

2. $|a|\le 1$, ამ შემთხვევაში $y=a$ წრფეს ტრიგონომეტრიულ წრეწირთან აქვს ერთი ($|a|=1$) ან ორი ($|a|<1$) საერთო წერტილი. დაწვრილებით გავეცნოთ ამ შემთხვევას.

განვიხილოთ ა) $\sin x=\frac{1}{3}$; ბ) $\sin x=-\frac{2}{3}$ განტოლება.

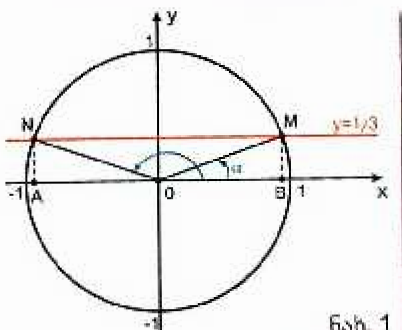
ა) როგორც ვხედავთ, $y=\frac{1}{3}$ წრფე ტრიგონომეტრიულ წრეწირს ორ M და N წერტილში კვეთს.

$\Delta ANO = \Delta OMB \Rightarrow \angle AON=\angle MOB$ (ნახ. 1).

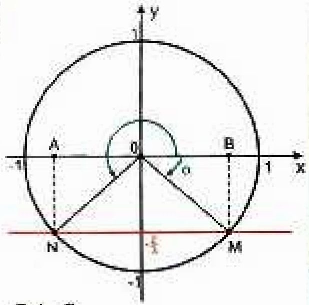
თუ $\angle BOM$-ს α-ით აღვნიშნავთ, მაშინ ადვილი სანახავია, რომ $\angle BON=\pi-\alpha$.

თუ გავითვალისწინებთ ფუნქციის პერიოდულობას, მივიღებთ, რომ განტოლების ამონახსენი იქნება თითოეული ამ კუთხეებიდან:

$$\alpha+2\pi k;\quad \pi-\alpha+2\pi k=-\alpha+\pi(2k+1),\ k\in Z.$$



ნახ. 1

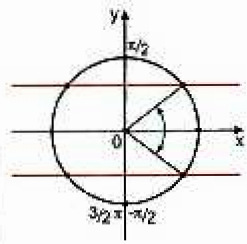


ნახ. 2

ბ) $\sin x=-\frac{2}{3}$. წინას ანალოგიური მსჯელობით, თუ კუთხეს, რომლის შესაბამისი წერტილი ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე არის M_1, აღვნიშნავთ α-თი (ნახ. 2), მაშინ N იქნება შესაბამისი წერტილი $\pi-\alpha$ კუთხისა, მართლაც, რადგან $\alpha<0$, ამიტომ $\angle AON=|\alpha|=-\alpha$. აქედან კი $\pi+\angle AON=\pi-\alpha$. მივიღეთ, რომ $\sin x=-\frac{2}{3}$ განტოლების ამონახსენია თითოეული შემდეგი კუთხეებიდან:

$$\alpha+2\pi k;\ \ \pi-\alpha+2\pi k=-\alpha+\pi(2k+1),\ k\in Z.$$

განხილული მაგალითებიდან ვამჩნევთ, რომ $\sin x=a$, $|a|\le 1$ განტოლებას $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსენი.



a რიცხვის არკსინუსი არის $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ([−90°;90°]) შუალედში მოთავსებული კუთხე, რომლის სინუსი a-ს ტოლია.

α კუთხეს, რომლისთვისაც სრულდება:

1. $\sin\alpha=a$, $|a|\le 1$, 2. $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$,

a რიცხვის არკსინუსი ეწოდება და აღინიშნება ასე: α = **arcsin a**.

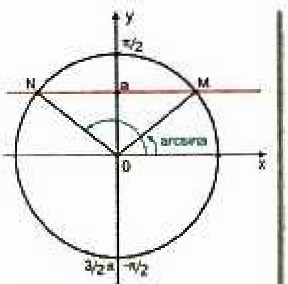
განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ arcsina გამოსახულებას აზრი აქვს, როცა $|a|\le 1$.

$$\sin(\arcsin a)=a$$
$$-\frac{\pi}{2}\le\arcsin a\le\frac{\pi}{2}$$

აჩვენეთ, რომ $\arcsin(-a)=-\arcsin a$

მაგალითად: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ რადგან $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ და სრულდება: $-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}$

იპოვეთ: $\arcsin\frac{1}{2}$; $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.



ამრიგად, საზოგადოდ:

$\begin{cases}\sin x=a\\ |a|\le 1\end{cases}$ განტოლებას $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში აქვს ერთადერთი ამონახსენი — arcsina. ხოლო $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსენი იქნება: $\pi-\arcsin a$.

y=sinx ფუნქციის პერიოდულობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ განტოლების ყველა ამონახსენი მოცემულია შემდეგი ფორმულებით:

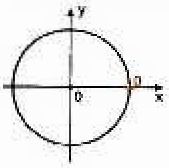
$$x=\arcsin a+2\pi k,\ k\in Z \qquad (1)$$

$$x=\pi-\arcsin a+2\pi k=-\arcsin a+\pi(2k+1),\ k\in Z \qquad (2)$$

ამ ორი ფორმულის გაერთიანებით მიიღება შემდეგი ფორმულა:

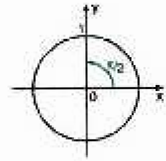
$$x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in Z \qquad (3)$$

აჩვენეთ, რომ ლუწი n=2k-სთვის (3) ფორმულა ემთხვევა (1) ფორმულას, ხოლო კენტი n=2k+1-სთვის — (2) ფორმულას



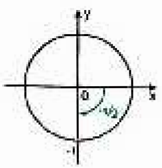
ა) თუ a=0, მაშინ $\sin x=0$.

რადგან $\arcsin 0=0$, ამიტომ $x=\pi n,\ n\in Z$ (5).



ბ) a=1, მაშინ ერთი პერიოდის სიგრძის $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right)$ შუალედში $\sin x=1$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსენი:

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z \qquad (6)$$



გ) a=-1 წინას ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

$$(\sin x=-1)\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\ ,\ k\in Z \qquad (7)$$

1. აჩვენეთ, რომ (3) ფორმულა მოიცავს (6) და (7) ფორმულებსაც.

2. ამოხსენით პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული ამოცანაც.

მაგალითი 1.

ამოხსენით განტოლება: ა) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\sin(x+15°)=-\frac{1}{2}$.

ამოხსნა:

ა) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ \ k\in Z$

$\Leftrightarrow x=(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k,\ \ k\in Z$

$x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$

ბ) $\sin(x+15°)=-\frac{1}{2}$.

რადგან კუთხე გამოსახულია გრადუსებით, ამიტომ ვისარგებლებთ ფორმულით:
$x=(-1)^k \arcsin a+180°k,\ k\in Z$.

$x+15°=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+180°k$.

$x=(-1)^k(-30°)-15°+180°k$.

$x=(-1)^{k+1}30°-15°+180°k$, $k\in Z$.

$\left\{\begin{array}{l}\sin x=a\\ |a|>1\end{array}\right\}\Rightarrow x\in\varnothing$.

$\left\{\begin{array}{l}\sin x=a\\ |a|<1\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ k\in Z$

$(\sin x=0\ \Leftrightarrow x=\pi k,\ k\in Z$

$\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

$\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

$\sin x=-a,\ |a|<1$

$x=(-1)^{k+1}\arcsin a+\pi k$

$k\in Z$

მაგალითი 2.

ამოხსენით განტოლება: $2\sin^2x + 3\sin x - 2 = 0$.

ამოხსნა:

ა) $z \equiv \sin x$ მივიღებთ:

$2z^2+3z-2=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}$ ან $z=-2$

აქედან, $\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in z$

ან $\sin x=-2 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

პასუხი: $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

სავარჯიშოები:

1 გამოიანგარიშეთ:

ა) $\arcsin 1-\frac{1}{2}\arcsin 0+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

ბ) $\arcsin(-1)-5\arcsin 0+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$; ბ) $\sin(x+40^\circ)=\frac{1}{2}$; გ) $\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

დ) $\sin\left(\frac{x}{7}-3\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; ე) $\sin\left(\frac{1}{2}-3x\right)=-1$; ვ) $\sin\left(\frac{x}{4}-2\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

ზ) $\sin(3x+60^\circ)=1$; თ) $\sin(6x-18^\circ)=0$; ი) $\sin\left(5-\frac{x}{3}\right)=1$.

3 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\sin(\arcsin 0{,}7)$; ბ) $\sin(\arcsin 0{,}4)$; გ) $\sin(\arcsin(\sqrt{3}-\sqrt{2}))$;

დ) $\sin(\arcsin(-0{,}3))$; ე) $\sin(\arcsin(\sqrt{2}-1)$; ვ) $\sin(\arcsin\frac{1}{2})$.

4 რომელი მეოთხედის კუთხეა:

ა) $\arcsin(-0{,}1)$; ბ) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; გ) $\arcsin\left(\sqrt{5}-2\right)$;

დ) $\arcsin\left(1-\sqrt{2}\right)$; ე) $\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)$; ვ) $\arcsin\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$.

5 ამოხსენით განტოლება:

ა) $2\sin^2x-3\sin x+1=0$; ბ) $\sin^2x-\sin x+\frac{1}{4}=0$; გ) $5\sin x+\sin^2x=0$;

დ) $\sin^2x+2\sin x=0$; ე) $\sin^2x-\sin x-1=0$; ვ) $\left(\sin x+\frac{1}{7}\right)(\sin x-3)=0$.

6 ამოხსენით განტოლება:

ა) $6-6\sin^2(x+20^\circ)=5\sin(x+20^\circ)$; ბ) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-3=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

გ) $\sin^2(-x)+\sin(-x)-2=0$; დ) $1+4\sin^2(5\pi+3x)=5\sin(3x+16\pi)$.

7 იპოვეთ განტოლების ამონახსნი, რომელიც მითითებულ შუალედის ეკუთვნის:

ა) $\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

ბ) $\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, $[-270°; 0]$.

ბ

8 სამართლიანია შემდეგი დებულება: „ბექამ ტესტურ გამოცდაში 70 ქულა დააგროვა". ქვემოთ ჩამოთვლილი ოთხი დებულებიდან რომელი უნდა ავიღოთ მეორე დებულებად, რომ შემდეგი დასკვნა გამოვიტანოთ: „ბექა ჩაირიცხა უნივერსიტეტში"?

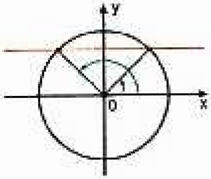
ა) ყველა აბიტურიენტი, რომელმაც ტესტურ გამოცდაში დააგროვა 60 ან მეტი ქულა, ჩაირიცხა უნივერსიტეტში;

ბ) ყველა აბიტურიენტმა, რომელიც ჩაირიცხა უნივერსიტეტში, ტესტურ გამოცდაში დააგროვა ზუსტად 70 ქულა;

გ) ზოგიერთი აბიტურიენტი, რომელმაც ტესტურ გამოცდაში დააგროვა 60 ან მეტი ქულა, ჩაირიცხა უნივერსიტეტში;

დ) არც ერთი აბიტურიენტი, რომელმაც ტესტურ გამოცდაში დააგროვა 60-ზე მეტი ქულა, არ ჩარიცხულა უნივერსიტეტში.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:



9 აჩვენეთ, რომ თუ $\sin x = \sin y$, მაშინ $x = (-1)^k y + \pi k$, $k \in z$ (1).

10 ამოხსენით განტოლება:

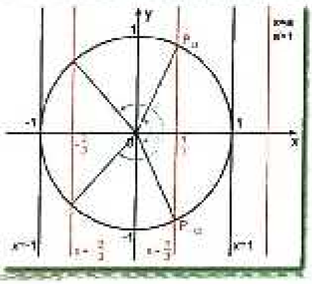
ა) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

ბ) $\sin 2x = \sin 4x$;   გ) $\sin(2x+3) + \sin(3x+2) = 0$.

2. $\cos x=a$ განტოლება

იმისათვის, რომ ამოვხსნათ $\cos x=a$ განტოლება, საჭიროა ვიპოვოთ x კუთხის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთა შესაბამისი P_x წერტილის (ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე მდებარე) აბსცისა გაუტოლდება a-ს. გავატაროთ $x=a$ წრფე.

1. თუ $|a|>1$, მაშინ $x=a$ წრფესა და ტრიგონომეტრიულ წრეწირს საერთო წერტილი არა აქვთ. შესაბამისად, $\cos x=a$, $|a|>1$ განტოლებას ამონახსენი არ ექნება.
2. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $|a|\le 1$. ამ შემთხვევაში $x=a$ წრფესა და წრეწირს აქვს ერთი ($|a|=1$) ან ორი ($|a|<1$) საერთო წერტილი.


ნახ. 1

ამოხსენით განტოლება (ნახ. 1):

ა) $\cos x = \frac{1}{3}$; ბ) $\cos x = -\frac{2}{3}$.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ $\cos x=a$, $|a|\le 1$ განტოლების ერთი ფესვი აუცილებლად $[0;\pi]$ შუალედშია. მას a რიცხვის არკკოსინუსს უწოდებენ და აღნიშნავენ ასე: $\arccos a$.

a რიცხვის არკკოსინუსი არის $[0;\pi]$ ($[0°;180°]$) შუალედში მოთავსებული კუთხე, რომლის კოსინუსი a-ს ტოლია.

$\alpha = \arccos a$, თუ 1. $\alpha\in[0;\pi]$;
2. $\cos\alpha = a$.

მაგალითად, $\arccos 1 = 0$, რადგან $0\in[0;\pi]$ და $\cos 0 = 1$.

იპოვეთ $\arccos\frac{1}{2}$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\arccos(-1)$.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\arccos a$ გამოსახულებას აზრი აქვს, როცა $|a|\le 1$,

$$\cos(\arccos a) = a.$$
და $0 \le \arccos a \le \pi$.

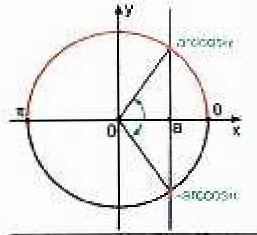
ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

უკვე შეგვიძლია ამოვხსნათ $\cos x=a$. $|a|\le 1$ (1) განტოლება. როგორც ვხედავთ (ნახ. 1) (1) განტოლებას $[0;\pi]$ შუალედში აქვს ერთადერთი ამონახსენი. ესაა $\arccos a$, ხოლო $(\pi;2\pi)$ შუალედში კი მეორე ამონახსენი (როცა ასეთი არსებობს) – $\arccos a$ (თუ $|a|<1$).

კოსინუსის პერიოდულობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ (1) განტოლების ყველა ამონახსენი მოცემულია შემდეგი ფორმულებით:

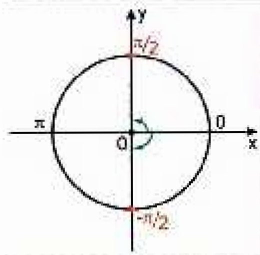
$$x = \arccos a + 2\pi k,\ k\in Z \quad (2)$$
$$x = -\arccos a + 2\pi k,\ k\in Z \quad (3)$$



ამ ორი ფორმულის გაერთიანებით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k\in Z \quad (4)$$

სასურველია, რომ როცა a=0; 1; -1, ვისარგებლოთ (1) განტოლების ამოხსნის სხვა ფორმულებით.



ა) თუ a=0, მაშინ cosx=0. $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ ამიტომ

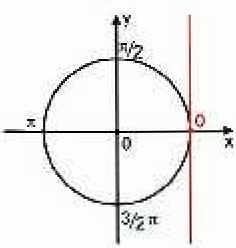
$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k\ ,\ k\in Z$$

მიღებული ფორმულა უფრო მოხერხებული იქნება, თუ ასე ჩავწერთ:

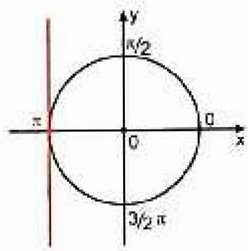
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k\ ,\ k\in Z \quad (5)$$

⊥ აჩვენეთ, რომ (5) ფორმულა k=2n და k=2n+1-თვის გვაძლევს შესაბამისად (2) და (3) ფორმულებს.

ბ) თუ a=1, მაშინ cosx=1.
arccos1=0, ამიტომ $x=2\pi k,\ k\in Z$.



გ) თუ a=-1, მაშინ cosx=-1.
arccos(-1)=π, ამიტომ $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$.



მაგალითი.

ამოხსენით განტოლება: ა) $\cos(x+20°)=\frac{1}{2}$; ბ) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ამოხსნა:

ა) $\cos(x+20°)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+20° = \pm\arccos\frac{1}{2}+360°k$

$\Leftrightarrow x=\pm60°-20°+360°k,\ k\in Z.$

რადგან კუთხე გრადუსებითაა გამოსახული ამიტომ ვისარგებლებთ ფორმულით: $x=\pm\arccos a\pm360°k$.

ბ) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3} = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k \Leftrightarrow$

$\arccos(-a) = \pi-\arccos a$

$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3} = \pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3} = \pm\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x= \pm\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{3}+2\pi k \Leftrightarrow x = \pm\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

სავარჯიშოები:

1 რომელი მეოთხედის კუთხეა:

ა) $\arccos(-0{,}9)$; ბ) $\arccos(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; გ) $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{4}$.

2 რა მნიშვნელობები შესაძლებელია მიიღოს x და y სიდიდეებმა, თუ:

ა) $y=\arccos x$? ბ) $y=\arcsin x$?

3 გამოთვალეთ:

ა) $\cos(\arccos 0{,}3)$; ბ) $\cos(\arccos(\sqrt{3}-\sqrt{2}))$; გ) $\cos(\arccos(\cos 1))$.

4 გამოთვალეთ:

ა) $\arccos 0-\arcsin 0+\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{3}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ბ) $\arccos(-1)-\arccos 1+6\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+6\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5 a-ს რა მნიშვნელობებისთვისაა arcsina და arccosa:

ა) ერთნაირნიშნიანი? ბ) სხვადასხვანიშნიანი?

6 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $\cos x(x-\frac{\neq}{5})=1$; გ) $\cos x(\frac{\neq}{6}-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

დ) $\cos(2x-15^\circ)=0$; ე) $\cos(4-2x)=-1$; ვ) $\cos(3x+270^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7 იპოვეთ განტოლების უმცირესი დადებითი ამონახსნი:

ა) $2\cos^2x+5\cos x-3=0$; ბ) $2\cos^2(x+\pi)-\sqrt{2}\cos(x+4\pi)+2\cos x-\sqrt{2}=0$;

გ) $(\cos x-\frac{1}{2})(\sin x+4)=0$; დ) $(\cos^2x-\frac{1}{2})(\sin x-3)=0$.

8 შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

ა) თუ, $a>0$, მაშინ arcsina __?__ მეოთხედის კუთხეა;

ბ) თუ, $a>0$, მაშინ arccosa __?__ მეოთხედის კუთხეა;

გ) თუ, $a<0$, მაშინ arcsina __?__ მეოთხედის კუთხეა, arccosa __?__ მეოთხედის კუთხეა.

9 დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\pi}{10}$; ბ) $\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{5}\right)=\frac{4\pi}{5}$;

გ) $\arcsin(\sin\frac{8}{3}\pi)=\frac{\neq}{3}$; დ) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{15}\right)=\frac{\pi}{15}$.

10 ამოხსენით განტოლება:

ა) $(\cos x-\frac{1}{2})(\cos^2x+2)=0$; ბ) $\cos^2x=\frac{1}{2}$;

გ) $\cos^2x+\cos x=2$; დ) $2\sin x+3\sin x\cos x=0$

11* ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos 5x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; ბ) $\cos x(2-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x=2$;

დ) $2-2\cos^2 x=3\cos x$; ე) $\cos^4 x+\cos^2 x=0$; ვ)* $\cos x=x^2-2x+2$.

12 დაამტკიცეთ, რომ $\sin x$-ს და $\cos x$-ს აქვს:

ა) სხვადასხვა ნიშნები, თუ x აკმაყოფილებს $\frac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}<0$ უტოლობას;

ბ) ერთნაირი ნიშნები, თუ x აკმაყოფილებს $\frac{2-3x-2x^2}{2x^2+3x-9}>0$ უტოლობას.

გ

13 რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს a, b და c კოეფიციენტები, რომ $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას ჰქონდეს:

ა) მოდულით ტოლი და ნიშნით განსხვავებული ფესვები

ბ) დადებითი ფესვები?

გ) უარყოფითი ფესვები?

დ) სხვადასხვა ნიშნის ფესვები

პასუხები დაასაბუთეთ.

14 იპოვეთ $\frac{x_2}{x_1+1}+\frac{x_1}{x_2+1}$, თუ $x^2-5x+3=0$, x_1 და x_2 განტოლების ფესვებია.

15 შემდეგი წინადადებებიდან მცდარი წინადადებებია:

ა) წრფე, რომელსაც წრეწირთან ერთზე მეტი საერთო წერტილი აქვს, შეიძლება იყოს ამ წრეწირის მხები.

ბ) ერთი წრეწირის ორი მხები შეიძლება იყოს პარალელური

გ) წრფე, რომელიც არ არის O ცენტრის მქონე წრეწირის OA რადიუსის მართობული, არ შეიძლება იყოს ამ წრეწირის მხები.

დ) წრეწირის ორი მხები შეიძლება იყოს მართობული.

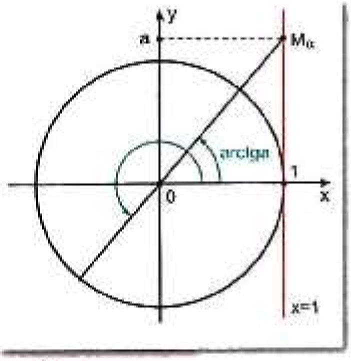
ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

16 აჩვენეთ, რომ, თუ $\cos x=\cos y$, მაშინ $x=\pm y+2\pi k$, $k\in Z$.

17 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; ბ) $\cos(3x+1)-\cos(2x-1)=0$.

3. tgx=a განტოლება



ნახ. 1

tgx=a განტოლების ამოსახსნელად საჭიროა ვიპოვოთ ყველა ის კუთხე, რომლის შესაბამისი წერტილის ორდინატა ტანგენსების ღერძზე a-ს ტოლია.

a რიცხვის არკტანგენსი ეწოდება $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში მოთავსებულ იმ კუთხეს, რომლის ტანგენსიც a-ს ტოლია და აღინიშნება ასე:

arctga

მაგალითად, $\text{arctg}1=\frac{\neq}{4}$, რადგან $\frac{\neq}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ და $\text{tg}\frac{\neq}{4}=1$.

გამოთვალეთ $\text{arctg}\sqrt{3}$; $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ arctga გამოსახულებას აზრი აქვს a-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და

$$\text{tg}(\text{arctg}a)=a$$

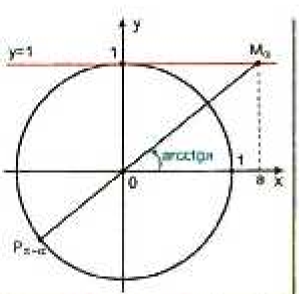
$$-\frac{\neq}{2}<\text{arctg}a<\frac{\neq}{2}$$

აჩვენეთ, რომ

$$\text{arctg}(-a)=-\text{arctg}\,a$$

ამოვხსნათ tgx = a (1) განტოლება: ერთი პერიოდის სიგრძის $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში (1) განტოლებას ერთადერთი ამონახსენი აქვს, ესაა arctga (ნახ. 1). ტანგენსის პერიოდულობის გათვალისწინებით (1) განტოლების ყველა ამონახსენი გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$x=\text{arctg}a+\pi k,\ k\in Z.$$



ამოვხსნათ ctgx=a განტოლება კოტანგენსების ღერძის საშუალებით, რისთვისაც საჭიროა ვიპოვოთ ყველა ის კუთხე, რომელთა შესაბამისი წერტილის აბსცისა კოტანგენსების ღერძზე a-ს ტოლია. ერთი პერიოდის სიგრძის (0; π) შუალედში ასეთი კუთხე ერთადერთია და მას **a რიცხვის არკკოტანგენსი** ეწოდება.

a რიცხვის არკკოტანგენსი არის **(0; π)** შუალედში მოთავსებული კუთხე, რომლის კოტანგენსიც **a**-ს ტოლია და აღინიშნება ასე:

arcctga.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ arcctga გამოსახულებას აზრი აქვს a-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის:

$$\text{ctg}(\text{arcctg}a)=a$$

$$0<\text{arcctg}a<\pi$$

აჩვენეთ, რომ

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$$

გამოიყენეთ კოტანგენსების ღერძი.

თუ გავითვალისწინებთ კოტანგენსის პერიოდულობას, მივიღებთ, რომ $\operatorname{ctg}x=a$ განტოლების ყველა ამონახსენი გამოისახება ფორმულით:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k\in Z.$$

მაგალითი.

ამოხსენით განტოლება: $\operatorname{tg}(45°-x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ამოხსნა:

$\operatorname{tg}(45°-x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$45°-x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + 180°k =$

$=30°+180°k \Leftrightarrow$

ე.ი. $x=15°-180°k,\ k\in Z$,

რაც შესაძლებელია ასეც ჩავწეროთ:

$x=15°+180°n,\ n\in Z.$

ან ასეც:

$\operatorname{tg}(45°-x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(x-45°) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 45° = -30°+180°k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=15°+180°k,\ k\in Z.$

სავარჯიშოები:

1 რომელი მეოთხედის კუთხეა:
ა) $\operatorname{arctg}5$; ბ) $\operatorname{arctg}(-12)$; გ) $\operatorname{arcctg}57$; დ) $\operatorname{arcctg}(-2)$.

2 გამოიანგარიშეთ:
ა) $\operatorname{arctg}1 - \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; ბ) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1)$.
გ) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; დ) $2\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}1$.

3 a-ს რა მნიშვნელობისთვისაა $\operatorname{arctg} a$ და $\operatorname{arcctg} a$:
ა) ერთნაირნიშნიანები; ბ) სხვადასხვანიშნიანები?

4 გამოთვალეთ:
ა) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}7)$; ბ) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}\right)$; გ) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}\right)$.

5 ამოხსენით განტოლება:
ა) $\operatorname{tg}4x=0$; ბ) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$; გ) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$;
დ) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=0$; ე) $\operatorname{tg}2x=7$; ვ) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=\sqrt{3}$;
ზ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=-\sqrt{3}$; თ) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; ი) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=1$.

6 ამოხსენით განტოლება:

ა) $tg^3x = 3tgx$; ბ) $tgx - tgx \cdot sinx=0$; გ) $tg^4x+3tg^3x=0$;
დ) $tg^2x-6tgx+5=0$; ე) $tg^2x+2tgx+5=0$; ვ) $tg^2x-8tgx+15=0$;
ზ) $tg^4x-1=0$; თ) $tg^2x+tgx=2$; ი) $3tg^2x=1$.

7 გამოთვალეთ:

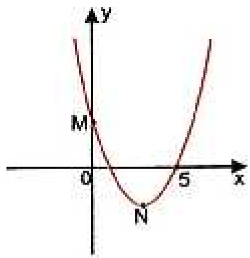
ა) $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{4\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)$; ბ) $\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

გ) $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{6}+\operatorname{tg}\pi\right)$; დ) $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$.

გ

8 სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი R-ის ტოლია, ხოლო მისი ერთ-ერთი გვერდი $R\sqrt{2}$ -ის. იპოვეთ ამ გვერდის მოპირდაპირე კუთხე.

9 ნახაზზე მოცემულია $y=x^2-6x+c$ ფუნქციის გრაფიკი. დაწერეთ M და N წერტილების კოორდინატები, სადაც N პარაბოლის წვეროა.



10* ყველა იმ წრფეს შორის, რომელიც გადის A(3;10) წერტილზე და კვეთს $y=x^2$ პარაბოლას M და N წერტილებში იპოვეთ ისეთი, რომლისთვისაც M და N წერტილების ორდინატების ჯამი მინიმალურია.

11 რამდენი განსხვავებული ამონახსნი აქვს $\sqrt{-x}(x^4-3x^3)=0$ განტოლებას?

12 $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ფესვები $x_1=4$ და $x_2=5$. იპოვეთ $a\left(\frac{x+5}{x}\right)^2+b\cdot\frac{x+5}{x}+c=0$ განტოლების ფესვები.

13 შეკრიბე და დაამრგვალე მეასედამდე სიზუსტით:

ა) 2,3769+9,001; ბ) 55,3312–71,09; გ) –5,007·0,002.

VIII თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1 პერიოდულია თუ არა ფუნქცია?

ა) $f(x)=5$; ბ) $f(x)=\frac{1}{x}$; გ) $f(x)=\sin^2 x$; დ) $f(x)=\cos x+5$.

2 გამოიყენეთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებები და ქვემოთ მოცემული ფუნქციების მნიშვნელობა ჩაწერეთ ისე, რომ არგუმენტი გამოისახოს გრადუსების ან რადიანების უმცირესი დადებითი რიცხვით:

ა) $\sin 405°$; ბ) $\cos\frac{17\neq}{5}$; გ) $\mathrm{tg}3333°$; დ) $\cos(-1985°)$;

ე) $\sin\left(-\frac{35\pi}{9}\right)$; ვ) $\mathrm{tg}\frac{2021\neq}{8}$; ზ) $\cos\frac{20\neq}{7}$; თ) $\mathrm{tg}\frac{45\neq}{4}$.

3 იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\frac{1}{\sin x-3}$; ბ) $y=\mathrm{tg}(x+\frac{\neq}{4})$; გ) $y=\frac{1}{\cos x}$; დ) $y=\frac{1}{\mathrm{tg}x-1}$.

4 დაალაგეთ ზრდის მიხედვით:

ა) $\sin 20°$; $\sin 100°$; $\sin(-30°)$; $\sin(-250°)$; $\sin 170°$;

ბ) $\sin 1{,}8$; $\sin 2{,}3$; $\sin\frac{7\neq}{3}$; $\sin(-1)$; $\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$;

გ) $\cos 1{,}2$; $\cos(-0{,}1)$; $\cos\frac{8\neq}{3}$; $\cos(-1)$; $\cos\frac{5\neq}{4}$; $\cos 3$;

დ) $\mathrm{tg}2$; $\mathrm{tg}4$; $\mathrm{tg}6$; $\mathrm{tg}(-8)$; $\mathrm{tg}\frac{\neq}{3}$; $\mathrm{tg}\frac{13\neq}{4}$;

5 ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე აღნიშნეთ ის P_α წერტილები, რომლებისთვისაც α-ს შესაბამისი მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ თანაფარდობას:

ა) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\sin\alpha<\frac{1}{2}$; გ) $|\sin\alpha|\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$;

დ) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; ე) $\cos\alpha>\frac{\sqrt{2}}{2}$; ვ) $|\cos\alpha|\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ზ) $\mathrm{tg}\alpha=-\sqrt{3}$; თ) $\mathrm{tg}\alpha<\sqrt{3}$; ი) $|\mathrm{tg}\alpha|<1$.

6 შემდეგი ფუნქციებიდან რომელია ლუწი? კენტი? არც ლუწი და არც კენტი?

ა) $y=\mathrm{tg}\frac{x}{7}+\mathrm{ctg}\frac{x}{7}$; ბ) $y=\sin 2x+\cos x$; გ) $y=\sin^2 x+5$;

დ) $y=\mathrm{tg}x\cdot\sin x$; ე) $y=\frac{\sin^2 x+\mathrm{tg}x}{\cos x}$; ვ) $y=\frac{\cos 2x+\sin^2 x}{\mathrm{tg}x}$;

ზ) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; თ) $5+3\sin^2 x-\mathrm{tg}x$; ი) $\frac{1-\cos x}{x^5}$.

7 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $2\sin\pi-2\cos\frac{3\neq}{2}+3\mathrm{tg}\frac{\neq}{4}-\mathrm{tg}\pi$; ბ) $3\sin^2\frac{\neq}{4}-2\sin^2\frac{\neq}{3}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\neq}{4}$;

გ) $4-\sin^2\frac{\neq}{2}+2\cos^2\frac{\neq}{3}-3\cos^2\frac{\neq}{6}$; დ) $\frac{3-\mathrm{tg}^2 45°+4\sin^2 30°}{4\cos^2 30°}$;

ე) $(2\sin 45°)^2-(3\mathrm{tg}30°)^2+(2\cos 30°)^2-(2\mathrm{tg}45°)^2$; ვ) $3\cos^2\pi-\left(2\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)^3-4\sin^2\frac{\pi}{3}+3\mathrm{tg}^3\pi$.

8 რომელი მეტია:

ა) $\arcsin\frac{1}{2}$, თუ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, თუ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

გ) $\mathrm{arctg}1$, თუ $\arccos\frac{1}{2}$; დ) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})$, თუ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

9* იპოვეთ მოცემული ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $y=2\sin\alpha$; ბ) $y=\cos 2x$; გ) $y=\frac{\mathrm{tg}x}{5}$;

ა) $y=\mathrm{tg}\frac{x}{5}$; ბ) $y=\cos(3x+1)$; გ) $y=(\sin(2x+2)$.

10 გამოთვალეთ:

ა) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

ბ) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

გ) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\mathrm{arctg}(-1)+\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\mathrm{arctg}1$;

დ) $\mathrm{arctg}(-1)+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11 დაალაგეთ ზრდის მიხედვით რიცხვები:

ა) $\arcsin 0{,}8$; $\arcsin(-0{,}3)$; $\arcsin 0{,}9$.

ბ) $\arccos 0{,}4$; $\arccos(-0{,}2)$; $\arccos(-0{,}8)$.

გ) $\mathrm{arctg}100$; $\mathrm{arctg}1$; $\mathrm{arctg}0{,}3$.

12 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $\sin x=\frac{1}{2}$; გ) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$; დ) $\cos 3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ე) $\mathrm{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; ვ) $\mathrm{tg}x=-1$; ზ) $\mathrm{ctg}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; თ) $\mathrm{ctg}x=1$.

13 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $\cos(1-x)=0$;

გ) $\mathrm{tg}\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; დ) $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{3}$.

14 იპოვეთ:

ა) $\sin\left(2\mathrm{arctg}1+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ბ) $\cos\left(5\mathrm{arctg}0+\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

გ) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; დ) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}1\right)$.

15 ტოლფერდა ტრაპეციის სიმაღლე უდრის h-ს, ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხე, რომელიც ფერდის მოპირდაპირედ მდებარეობს, ტოლია 2α-ს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

16 მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ფართობი S-ის ტოლია, ხოლო მახვილი კუთხეა α. იპოვეთ მანძილი მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან ჰიპოტენუზამდე.

17 R რადიუსის მქონე წრეწირზე შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია α მახვილი კუთხით. იპოვეთ ამ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ $R=5$ და $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

18 ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეზე აგებულია წესიერი სამკუთხედი. მისი სიმაღლე ტრაპეციის სიმაღლის ტოლია, ხოლო ფართობი ხუთჯერ ნაკლებია ტრაპეციის ფართობზე. იპოვეთ ტრაპეციის მახვილი კუთხე.

19 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos x(2\cos x+1)=0$;

ბ) $\frac{\cos x-\sqrt{5}}{\cos x-10}=\frac{\cos x}{\cos x+\sqrt{5}}$;

გ) $2\sin 2x\cdot\cos 2x-\sin 2x=0$;

დ) $\sin^2 x = 3+2\sin x$;

ე) $3\mathrm{tg}^2 x = 2-\mathrm{tg}x$;

ვ) $5(1-2\sin^2 x)-\sqrt{56}\sin x=0$.

20* ამოხსენით განტოლება და იპოვეთ მისი უმცირესი დადებითი ფესვი:

ა) $\sin\frac{\pi(x-2)}{3}=1$;

ბ) $\cos\frac{\pi(4x+3)}{6}=-1$;

ა) $\mathrm{tg}\,\pi x=1$;

ბ) $\mathrm{tg}\frac{\pi(2x-1)}{4}=-1$.

21 იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისათვისაც განტოლებას ამონახსნი გააჩნია:

ა) $4\sin x = a+1$;

ბ) $4\cos 3x = 3a+2$;

ა) $\cos x = a^2-1$;

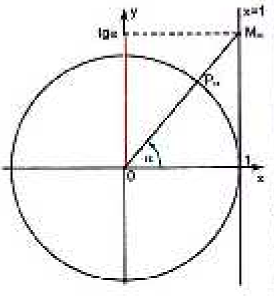
ბ) $\sin^2 x = a+4$.

VIII თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- f ფუნქციას ეწოდება პერიოდული $T\neq0$ პერიოდით, თუ f ფუნქციის განსაზღვრის არიდან აღებული ყოველი x-თვის $x-T$ და $x+T$ რიცხვებიც აგრეთვე განსაზღვრის არეს ეკუთვნიან და სრულდება ტოლობა:

$$f(x+T) = f(x) = f(x-T).$$

α კუთხის ტანგენსი ($tg\alpha$) ეწოდება ტანგენსების ღერძზე α კუთხის შესაბამისი წერტილის ორდინატას.



$$\sin(\arcsin a)=a$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \sin x = a \\ |a|>1 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing.$$

$$\begin{cases} \sin x = a \\ |a|<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k\in Z$$

$$(\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\ k\in Z$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in Z$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in Z$$

$\cos x=a$

$|a|<1$ $\quad$ $x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k\in Z$

$\cos x=1,$ $\quad$ $x=2\pi k$

$\cos x=1,$ $\quad$ $x=\pi+2\pi k$ $\quad$ $\cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$

$tg x = a$ $\quad$ $x=\mathrm{arctg}\, a + \pi k,\ k\in Z.$

პასუხები:

I თავი

1. **(1)** **3.** $f(x)=50(x-150)-800$. **4.** $x\sqrt{4R^2-x^2}$. **8.** $\frac{8}{45}S$; $\frac{12}{55}S$; $\frac{35}{99}S$. **10.** 32. **(2)** **5.** ა) ლუწი; ბ) კენტი; გ) კენტი; დ) ლუწი; ე) არც ლუწი, არც კენტი; ვ) არც ლუწი, არც კენტი; ზ) კენტი; თ) არც ლუწი, არც კენტი; ი) ლუწი; კ) კენტი; ლ) კენტი; მ) ლუწი. **7** არა. **8.** 0. **9.** თუ $b=0$ კენტია; თუ $k=0$ ლუწია. **11.** 1:2. **12.** $\frac{9\sqrt{7}}{16}$სმ². **(3)** **10.** ≈638ლ. **11.** $\frac{45(\sqrt{3}-1)}{2}$. **12.** დ). **13.** 5სმ. **(4)** **5.** ა) $-x^2-4x$; ბ) x^2+4x. **6.** ა) $\frac{5}{36}$; ბ) $\frac{5}{36}$; გ) $\frac{1}{36}$. **7.** $\frac{7}{192}$. **9.** $4x-3$.

2. **9.** ა) $k_1=k_2$; $b_1\neq b_2$; ბ) $k_1\neq k_2$; გ) $k_1=k_2$; $b_1=b_2$. **11.** $(3;-5)$. **12.** გ). **13.** $y=-\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}$. **17.** ა) $\varnothing$. ბ) $x=\pm5$; გ) $x=0$; დ) $x=3$; $x=1$.

3. **7.** $x=-\frac{b}{2a}$. **8.** ა) $D=0$; ბ) $D>0$; გ) $D<0$. **9.** $(-5;0)$; $(3;0)$; $(0;-15)$. **10.** ა) $[-6;6]$; ბ) $[-7;23]$; გ) $[-4;5]$. **11.** ა) $(-\infty;-4)$; ბ) -4; გ) $(-4;\infty)$; დ) $(0;\infty)$.

4. **1.** 9სმ. **2.** 1. **3.** −2. **4.** 10. **5.** 5;5. **6.** 2. **10.** ა) $\frac{9}{4}$; ბ) $\left(2;\frac{3}{2}\right)$. **13.** $\frac{a}{2}$. **14.** $\frac{P}{6-\sqrt{3}}$; $\frac{3-\sqrt{3}}{2(6-\sqrt{3})}P$. **15.** ბ) 7 სმ; გ) 24,5 სმ². **18.** 4:1. 19. $\frac{n(n-3)}{2}$. **22.** 8სმ.

5. **2.** $y(-5)=9$; $y(-3)=5$; $y(8)=17$. **3.** ა) $(0;-8)$; ბ) $\left(0;\frac{2}{3}\right)$. $(-7;0)$; $\left(\frac{1}{2};0\right)$. **4.** ა) $(0;\infty)$; ბ) $(0;\infty)$. **5.** ა) 1. $\varnothing$. 2. $(-\infty;0)$. 3. $[0;2]$; ბ) 1. $\varnothing$. 2. $(3;\infty)$. 3. $\varnothing$. **6.** $[3;\infty]$. **7.** $x^2-\pi$. **8.** 2.

6. **5.** ა) არა; ბ) კი; გ) არა; დ) კი. **7.** ა) 1/3; ბ) −1/2; გ) −1; დ) − 1/32. **8.** 2045; 4096. **9.** 8; 16; 24. **13.** 13 კმ/სთ. **15.** არა. **16.** არა. **17.** $a\in R$. **18.** 36 სმ². **19.** $18\sqrt{3}$. **20.** 420.

7. **1.** ა) $R\setminus\{0\}$ $(0;-1)$; ბ) $R\setminus\{-5\}$ $(-5;0)$; გ) $R\setminus\{3\}$ $(3;1)$. **9.** ა) ჭეშმარიტი; ბ) მცდარი; გ) ჭ; დ) ჭ. **13.** 3:80. **14.** 5 სმ. **15.** 42 სმ. **17.** ა) 5; ბ) 1. **18.** თუ $a\in(-\infty;0)$ $x\in\varnothing$; თუ $a=0$ ან $a\in(6\frac{1}{4};\infty)$ გვაქვს ორი ამონახსნი, თუ $a=6\frac{1}{4}$ — სამი ამონახსნი, თუ $a\in(0;6\frac{1}{4})$ — ოთხი ამონახსნი.

8 **1.** 15 წთ. **3.** $\frac{100}{\pi}$. **4.** ა) 2,5; ბ) 1500. **6.** 25; 50. **7.** 4.

I თავის დამატებითი სავარჯიშოები: **1.** ა) $R\setminus\{0;5\}$; ბ) $R\setminus\{-0,5;-5,5\}$; გ) R; დ) $R\setminus\{0;-1\}$; ე) $[-4;3]$; ვ) $[2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}]$. **2.** ა) ლუწი; ბ) კენტი; გ) ლუწი; დ) არც ლუწი, არც კენტი; ე) კენტი; ვ) არც ლუწი, არც კენტი. **7.** ა) კენტი; ბ) კენტი; გ) ლუწი; დ) ლუწი. **8.** ა) ლუწი; ბ) ლუწი; გ) კენტი; დ) არც ლუწი, არც კენტი. **9.** ა) $a=0$ ლუწია; $b=0$ კენტია; ბ) $b=0$ ლუწია, კენტი არ ხდება. **10.** −20. **11.** −5,4. **12.** ა) ჭ; ბ) ჭ; გ) მცდ. **13.** $[-1;2)$. **14.** ა) უდიდესი 2, უმცირესი არ არსებობს; ბ) უდიდესი 1, უმცირესი −1; გ) უმცირესი 0, უდიდესი 1,5; დ) უმცირესი $\sqrt{2,5}$, უდიდესი არ არსებობს. **15.** ა) უდიდესი 2,25, უმცირესი −4; ბ) უდიდესი $\frac{11}{3}$; უმცირესი 3; გ) უდიდესი $\frac{9}{10}$; უმცირესი 0. **16.** $a>0$; $c>0$; $b>0$. **17.** 6. **21.** ა) −12,5; ბ) −1,5.

II თავი

1. **2.** $\angle b=45°$; $\angle c=90°$; $AC=\sqrt{2}+1$; გ) $BC=\sqrt{3}+1$. $AC=3+\sqrt{3}$. **4.** $\angle A=60°$; $AC=2\sqrt{3}$. **5.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **8.** 5:4. **9.** 8სმ²; 24 სმ²; 24სმ²; 72სმ². **10.** 63.

2. **3.** 1; $\sqrt{3}$. **4.** 2,5. **5.** $0<h\leq\frac{a+b}{2}$. **7.** $40\sqrt{2}$. **8.** $a^2\sqrt{2}$. **10.** გ).

3. **1.** 66. **2.** 4,8. **3.** $\overset{\frown}{ACD} > \overset{\frown}{BCD}$. **4.** $AC=2$; $BC=4$.

4. **1.** $MC=1$; $\angle BMC=45°$. **4.** $\angle CMB=135°$; $\angle AMC=90°$; $AC=\sqrt{5}$. **5.** $MB=\sqrt{3}$; $CM=0,5\sqrt{3}$. **6.** $\sqrt{3}+1$; 30°. **7.** ა) $(-2;-1)$; $(1;2)$; ბ) $(-12;-2)$; $(22;-4)$; $(4;14)$; $(6;-20)$.

5. **1.** $MN=\sqrt{ab}$. **2.** $AC=\sqrt{ab}$. **3.** 60°; $AC=\sqrt{3}$. **6.** ა) ჭ; ბ) ჭ; გ) მცდ; დ) მცდ; ე) მცდ.

6. **1.** ოთხფეხა. **5.** იკვეთება AB წრფეზე. **10.** ა) $\frac{168}{13}$; ბ) $\frac{56}{5}$. **11.** 270 სმ².

8. **3.** დ) $\frac{c(a+b)}{a}$. **4.** დ) $\frac{a+b}{2}$. **5.** $\frac{b-a}{2}$. **10.** $b=0$; $k=-\frac{8}{5}$.

9. **1.** ა) YOZ სიბრტყეზე. **2.** ა) Oz ღერძზე; ბ) Oy ღერძზე. **3.** $\frac{9}{2}\sqrt{3}$. **4.** ა) 1; ბ) $\sqrt{5}$; გ) $\sqrt{3}$; დ) 3.

II თავის დამატებითი სავარჯიშოები: **4.** 126სმ². **5.** 150სმ² ან 42 სმ². **6.** 12სმ.

III თავი

1. **1.** ა) $\frac{2a}{3}$; ბ) $\frac{4a+7}{5}$; გ) თუ $a=0$, $x\in R$, თუ $a\neq0$, $x=1$; დ) თუ $b=1$, $x\in\varnothing$; თუ $b\neq1$, $x=\frac{2}{b-1}$; ე) თუ $b\neq3$, $x=\frac{3}{3-b}$; თუ $b=3$, $x\in\varnothing$; ვ) თუ $a\neq3$, $x=\frac{a-5}{a-3}$; თუ $a=3$, $x\in\varnothing$; ზ) თუ $a\neq-2$, $x=a-2$; თუ $a=-2$, $x\in R$; თ) თუ $b\neq3$ და $b\neq-2$, $x=\frac{1}{b-3}$; თუ $b=3$, $x\in\varnothing$; თუ $b=-2$, $x\in R$; ლ) თუ $a<-4$, $x\in\varnothing$; თუ $a=-4$, $x=-2$; თუ $a>-4$, $x=-2\pm\sqrt{4+a}$; მ) თუ $a=0$, $x=-2,5$; თუ $a>\frac{1}{5}$, $x\in\varnothing$; თუ $a=\frac{1}{5}$, $x=-5$; თუ $a<\frac{1}{5}$ და $a\neq0$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-5a}}{a}$. **3.** ა) **1.** $k=-5$; **2.** $k=3$; **3.** $k\neq3;-5$; გ) **1.** $k=-1$; **2.** $k\in\varnothing$; **3.** $k\neq1$. **6.** −5. **9.** ა) $a\neq2$; 3; ბ) $a=3$; გ) $a=2$. **13.** 6. **14.** −0,6.

2. **2.** ა) 2; ბ) 1; $\frac{5}{3}$. გ) $-\frac{1}{3}$; 7. დ) 2; 4; 0. **3.** ა) $R\setminus\{0\}$; ბ) $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$; გ) 0. დ) $\varnothing$. ე) $[-8,1;8,1]$; თ) R; ი) $R\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$; კ) 4; ლ) R; მ) $\varnothing$; ნ) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. ო) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$. 9. 7. **11.** ა) 24; ბ) 49; გ) 156. **12.** 0.

3. **1.** ა) 0; −4; 1; ბ) 0; $\frac{-11\pm5\sqrt{5}}{2}$; გ) $\frac{1}{3}$; $-\sqrt[3]{3}$; დ) $-\frac{1}{8}$; -2. **2.** 60კმ/სთ; 120 კ/სთ. **4.** ა) ±1; $\pm\sqrt{5}$; ბ) $\pm\sqrt{3}$; გ) $\varnothing$; ე) $\varnothing$. **6.** ა) 0; 1; ბ) 0; −2; გ) −1; დ) 2; 3; 1; 6; ე) 0; 1. **7.** ა) 7; ბ) 13. **8.** ა) 1; −2; $-\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$; 1; $\frac{1}{2}$; დ) 2; $\frac{1}{2}$. **9.** ა) 323; ბ) −7; 2. **10.** ა) 2; ბ) $-3\pm\sqrt{3}$; $1+\sqrt{5}$; გ) 1; დ) $x=1$. **13.** ა) −5; 7; −1; ბ) 0; 4; $\frac{25}{4}$; $-\frac{11}{4}$. **14.** 36°; 36°; 108°.

4. **2.** ა) 26; ბ) 2; გ) $\varnothing$; დ) $\varnothing$; ე) 1; ვ) $\varnothing$; ზ) 2. **3.** ა) 5; ბ) $\varnothing$; გ) 13; დ) $\varnothing$; ე) 2; ვ) ±2; ზ) $-\frac{3}{4}$. **8.** ა) 1; 0,2; ბ) $(-3;4)$; დ) $(\pm1;\pm4)$; $(\pm1;\mp4)$. **9.** 9:8.

5. **2.** ა) $(-\infty;-8)$; ბ) $(16;\infty)$; გ) $(-20;-12)$; დ) $(20;32)$. **3.** ა) $(7;31)$; ბ) $(-221;55)$; გ) $\left(\frac{23}{120};\frac{5}{6}\right)$. **5.** ა) $(3;11,5)$. **6.** ა) $(-\infty;-5]\cup[2;\infty)$; ბ) $\left[-2;\frac{9}{2}\right]$; გ) $\left(-\frac{4}{5};3\right)$. **7.** ა) $(5;\infty)$; ბ) $(-\infty;8]$; გ) $[0;16]$; დ) $(-\infty;7]\setminus\{\pm2\}$. **9.** ა) $\left[0;\frac{4}{61}\right)$; ბ) $\varnothing$. **10.** ა) R; ბ) $\varnothing$; გ) $\varnothing$; დ) $R\setminus\{2\}$; ე) $\varnothing$; ვ) $x=-4$. **11.** ა).

6. **1.** ა) $\left(-\infty;\frac{11a-7}{2}\right)$; ბ) $\left(\frac{22a+5}{7};\infty\right)$; გ) თუ $a>-\frac{1}{2}$, $x\in\left(-\frac{6a}{2a+1};\infty\right)$, თუ $a=-\frac{1}{2}$, $x\in\varnothing$; თუ $a>0$, $x\in\left(\frac{1+5a}{a};\infty\right)$, თუ $a<0$, $x\in\left(-\infty;\frac{1+5a}{a}\right)$; თუ $a=0$, $x\in\varnothing$; დ) თუ $a>0$, $x\in(0;a)$; თუ $a<0$, $x\in(a;0)$; თუ $a=0$, $x\in\varnothing$; ვ) თუ $a=0$, $x\in\varnothing$; თუ $a>0$, $x\in(a;2a)$; თუ $a<0$, $x\in(2a;a)$. **2.** ა) $a>0$; ბ) $[1,2;\infty)$. **3.** ა) **1.** $a<-1$; **2.** $a=-1$; **3.** $a>-1$. ბ) **1.** $a>5$; **2.** $\varnothing$; **3.** $a\leq5$. გ) **1.** $(3;\infty)$; **2.** 3; **3.** $(-\infty;3)$. დ) **1.** $\left(\frac{2}{3};\infty\right)$; **2.** $\varnothing$; **3.** $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$. **4.** ა) 1. $(-\infty;3]$; 2. 5. ბ) 1. $(-\infty;1,5)$; 2. 6,5. **5.** ა) $a\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$; ბ) $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **6.** ა) $a=2$; $x=2$; ბ) $a=1$; $x=2$; გ) $a=1$; $x=3$; დ) $a=4$; $x=4$. **7.** $\left(-\infty;-\frac{1}{12}\right)$. **8.** ა) $[0;\infty)$; ბ) 0; გ) R; დ) R; ე) $(-\infty;2]$; ვ) $\varnothing$. **9.** ა) −2,5; ბ) $(-\infty;0]$.

7. **2.** ა) $[-7;-1]\cup[2,5;\infty)$. დ) $[-1;0]\cup\left[\frac{1}{2};1\right]$ **3.** ა) $(-\infty;-0,1)\cup\left(0,1;\frac{2}{3}\right)$; დ) $(-15;5,5)$. **4.** ა) $(-1;0)\cup$

$(0;\frac{3}{7})\cup\{-7\}$; ბ) $(-\infty;-\frac{5}{2}]\cup(0{,}3;4)\cup[17;\infty)\cup\{5\}$. **5.** ა) $[-3;\frac{1}{3})\cup[3;\infty)$; ბ) $(-\infty;0]\cup[0{,}1;7]$; გ) $[-2;0]\cup[2;5)\cup(5;\infty)$. **6.** 30 კგ. **9.** $(-\infty;0]\cup[1;\infty]$. **10.** $\frac{1}{24}$.

III თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1. ბ) $x\le 0{,}8$; ზ) $x=0$; $x=5$; თ) $x\in\varnothing$. **2.** ა) $(-1;7)$; ე) $[-7;-5]\cup[5;7]$. **3.** ა) $x\in R\setminus\{2{,}3;-2\}$; ბ) $x\in R\setminus\{-5;1\}$. 4. ა) 2; ბ) 2; გ) 3; დ) 4. **5.** ა) -2; ბ) $-0{,}5$; გ) 0 და 4; დ) 3 და -1. **6.** ა) $a>5$; ბ) $a>-2{,}5$; გ) $a\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$; დ) R. **7.** ა) $a<2$; ბ) $(0;1)$; გ) $a<1$; დ) $\varnothing$. **9.** ა) $(0;+\infty)$; ბ) $(4;+\infty)$. **10.** ა) $a\in\left(0;\frac{169}{4}\right)$; ბ) $a<0$ ან $a=\frac{169}{4}$. **11.** ა) -3 და 1; ბ) 2 და -1; გ) -3; დ) 1; ე) $+6$; ვ) -3 და 2; თ) 3 და -2. **12.** ა) -1; -4 და 2; ბ) $1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ და $1\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$; გ) $-5\pm\frac{\sqrt{21}}{6}$; დ) 10; ე) $1\pm\sqrt{2}$; ვ) -1; 1 და 4; ზ) -1; თ) -1 და 3. **13.** $\left(0;\frac{4}{3}\right)$. **14.** -1. **15.** ა) $(-8;1]$; ბ) $(-4;3)\cup(5;\infty)$; გ) $(-\infty;-2\sqrt{2}]\cup(2;2\sqrt{2})$ ე) $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right]\cup[7;8)$; ვ) $R\setminus\{7\}$; ზ) $R\setminus\{1\}$; თ) 4. **16.** ა) $(-2;0)$ და $x=5$; ბ) $(0;3]$ და $x=-2$. **17.** ა) $(-3;-2)$; ბ) $(-2;-1)\cup(2;3)$; გ) $(-\infty;4]$; დ) $[-8;-2)\cup(7;+\infty)$.

IV თავი

1. **1.** $\approx 7{,}2$. **2.** 7. **3.** $\frac{5}{13};\frac{33}{65};\frac{3}{5}$. **6.** $\frac{5}{6}$; $-0{,}1$. **7.** $\sqrt{19{,}375}$. **8.** $\frac{\sqrt{13}}{65}$. **9.** $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

2. **1.** 20 სმ; 30 სმ. **2.** 10 სმ; 15 სმ. **3.** 7 სმ; 11 სმ. **4.** 7 სმ; 4 სმ; 7 სმ; 9 სმ. **5.** 6 სმ. **6.** $\sqrt{10}$ სმ. **7.** 11. **8.** 14. **9.** 15 დმ; 25 დმ. **10.** 16,5. **11.** $\sqrt{43}$; $\sqrt{127}$. **12.** $a=4$, $b=1$. **13.** ფილოსოფოსები.

3. **1.** $\frac{5\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$; $5(\sqrt{3}-1)$. **2.** $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$; $\sin\beta=\sqrt{\frac{3}{7}}$; $4\sqrt{7}$. **4.** ა) $\cos\gamma=\frac{19}{32}$, $\cos\alpha=\frac{109}{112}$, $\cos\beta=-\frac{11}{28}$; ბ) $\frac{5}{7}, -\frac{1}{5}, \frac{29}{55}$. **5.** 15 სმ. **6.** 30° ან 150°. **7.** 3. **8.** ვერ დაფარავს. **9.** არა. **10.** 0.

4. **1.** $3\sqrt{6}$ მ. **2.** 10 მ. **3.** $\frac{9}{5}$მ. **4.** 15. **5.** 10 სმ. **6.** 6. **7.** $8\sqrt{10}$ სმ; $9\sqrt{5}$ სმ. **8.** ა) 4; ბ) $\frac{3}{2}$. **9.** 130. **10.** $\frac{9}{2}$. **11.** 1700 სმ². **12.** 10,625 სმ. **13.** ა) $\frac{1}{5a+2}$, ბ) $-\frac{3x-1}{2x+1}$. **15.** ა) 2; -4; ბ) $f(x)<0$ $x\in(-4;2)$, $f(x)>0$ $x\in(-\infty;-4)\cup(2;\infty)$; გ) $(-4;0)$ $(2;0)$ $(0;-8)$; დ) $(-\infty;-1)$ კლებადია; $(-1;\infty)$ ზრდადია. **16.** 3.

5. **5.** $5\sqrt{6}$. **7.** $3\sqrt{6}$; $0{,}5\sqrt{58}$; $0{,}5\sqrt{283}$.

IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები. **1.** 18 სმ; $4\sqrt{2}$ სმ. **2.** 10სმ; 14 სმ. **3.** 101 მ; 81 მ. **4.** 5,628. **5.** 6. **6.** 12. **7.** $2(20+10\sqrt{3})$. **8.** 98. **9.** $4\sqrt{\frac{2}{7}}$. **10.** ა) $R=24\frac{1}{4}$; $r=\frac{7}{3}$. **12.** 10,625. **13.** 15; $1\frac{2}{3}$. $4\frac{1}{3}$. **17.** მართკუთხა. **18.** 60°; $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **19.** $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ სმ. **21.** 60°. **22.** $AC=R=\sqrt{6-3\sqrt{3}}$. **23.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **24.** $\sqrt{2}$. **25.** 2.

V თავი

2. **5.** ა) $\sqrt{8}$; ბ) $\sqrt[3]{16}$; გ) $\sqrt[5]{64}$; დ) $\sqrt{\frac{4}{3}}$. **6.** ა) $\sqrt[4]{a^3}$; ბ) $-\sqrt[4]{-a^3}$; გ) $-\sqrt[4]{a^3}$; დ) $\sqrt[4]{-a^3}$. **8.** ა) $-\sqrt{a(a-5)}$; ბ) $-\sqrt{(a-5)(a-2)}$; გ) $\sqrt{a(a^2+25}$. **9.** ა) $6\sqrt{2}$; ბ) $-8\sqrt{a}$; გ) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}$. **12.** ა) $\sqrt[10]{x^7}$; ბ) $\sqrt{a}$; გ) $\sqrt[16]{21}$; $\sqrt[24]{x^{23}}$. **16.** ა) 3, თუ $x\in[2;3)$; $2\sqrt{x-2}+1$, თუ $x\ge 3$. ბ) 1; $x\ge 1$. **17.** ა) $3-\sqrt{2}$; ბ) $\sqrt{7}-2$; გ) 3. **18.** ა) 0; ბ) 0. **19.** ა) 0,6; ბ) $-\sqrt[3]{3}$; გ) 10; დ) $2\sqrt{5}$.

3. **7.** ა) 1; ბ) $\frac{1}{5}$; გ) 25; დ) $\sqrt{2}$; ზ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ი) $\frac{8}{27}$; **10.** ა) 3; ბ) 8. **12.** ა) $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$; ბ) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$. **15.** 19. **17.** ა) 1. ბ) $\sqrt{3}-2$. **18.** 300სმ². **19.** 72. **20.** 1°.

4. **1.** ა) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; ბ) -1. დ) 0. **2.** ა) $a^{-\frac{1}{4}}$; ბ) $\frac{a-b}{ab}$; გ) $\sqrt{x}$. **4.** ა) $-\sqrt{x}$; ბ) $-\sqrt{u}$; გ) $7\sqrt[3]{z}$; დ) $m^{\frac{2}{3}}$. **6.** ა) $\frac{1}{8}$; ბ) 2. **8.** ა) -2; ბ) 4; გ) 5; დ) 3^6. **9.** ა) -4; ბ) 10.

5. **3.** ა) $(231)_{10}=(1411)_5$; ბ) $(375)_{10}=(567)_8$; ე) $(51)_{10}=(110011)_2$. **4.** ა) (2457)9; ბ) $(1261)_7$. **5.** ა) 158;

გ) 5734. **6.** ა) რვაობითში. **12.** –12. **13.** 2,9.

V თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1. ა) 4; ბ) $-60\frac{1}{8}$; ზ) 1,5; თ) 8,6481; ი) 3; კ) 6; ლ) 20,5. **3.** ა) $\sqrt{x}$; ბ) x^2; გ) $\sqrt{a}$; დ) a^2; ე) $2p^{\frac{4}{3}}$; ვ) $8c^{\frac{1}{2}}$. **5.** ა) 3; ბ) 8. **6.** ა) $3-\sqrt{2}$; ბ) $\sqrt{7}-2$; გ) –7; დ) 3. **7.** ა) $\sqrt{3} > \sqrt{5}$; ბ) $3^{\sqrt{3}} > (\sqrt{3})^3$; გ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; დ) $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$. **9.** ა) $\frac{1}{2}$; ბ) 0; გ) $\frac{1}{196}$; დ) 0,25. **10.** ა) $3m^{-4}n^{-2}$; ბ) p^2; გ) $-a^{\frac{1}{4}}$; დ) $\sqrt{6x}$; **12.** ა) –1; ბ) 0; გ) 1; დ) 3x; ე) –3; ვ) 2; ზ) 2; თ) 0; ი) 5; კ) $\sqrt{x}$.

VI თავი

1. 1. ა) $2\sqrt{3}\,r$; ბ) 2a; გ) $\frac{2\sqrt{3}\,r}{3}$. **2.** ა) $\frac{R}{\sqrt{3}}$; ბ) $R\sqrt{2}$; გ) R. **3.** ა) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$; $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; ბ) $5\sqrt{2}$; გ) $5\sqrt{3}$. **5.** $2\sqrt{3}$ m. **6.** 27. **7.** 84. **9.** 72. **10.** 6,5. **11.** 6. **12.** 1; 2; $\sqrt{3}$; 2. **13.** 10 სმ. **15.** 30.

2. 5. ა) $\sqrt{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) 1. **7.** 31.

3. 1. ა) $R^2(\frac{\pi}{9}-\frac{1}{2}\sin 40°)$. **5.** ა) $\frac{q^2}{3}(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})$. **9.** 5. **10.** 5. **11.** 8.

VI თავის დამატებითი სავარჯიშოები.

1. არა. **2.** 5. **3.** 3სმ. **5.** 3. **6.** $72\sqrt{2}$. **7.** 18. **8.** $3\sqrt{3}\,r^2$. **9.** 18. **10.** 6. **11.** 24. **12.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi$. **13.** 58. **14.** $\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$. **15.** ა) $\frac{\pi a}{3}$; ბ) $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4}$; გ) $\frac{2\sqrt{3}\,\pi a}{9}$. **16.** $\frac{5\pi}{\pi 2\sqrt{2}}$. **17.** 6π. **18.** $\frac{\ell}{4\pi}$. **22.** 25π. **23.** 25π. **25.** 8სმ; 14სმ. **25.** $\frac{89\pi}{4}$. **28.** 60°. **30.** 15. **31.** $\frac{\neq}{8}$. **32.** 64π; $\sqrt{15}$. **33.** 100π. **34.** $\frac{7\pi}{3}$. **35.** 1:9. **36.** 20ϖ. **39.** 4:3. **41.** R/3. **42.** $R^2(1-\frac{\neq}{4})$. **43.** $r^2(4\sqrt{3}-\frac{11\pi}{4})$. **45.** 8.

VII თავი

1. 3. არა. **4.** ა) მცდ.; ბ) მცდ.; გ) მცდ; დ) მცდ. **5.** ა) ყველა კვადრატი პარალელოგრამია; ბ) ნინი არ არის მეათეკლასელი; გ) პაკო არ დაფრინავს; დ) ივანე შესაძლოა ქართველი იყოს. **6.** ა) მცდ.; ბ) მცდ.; გ) მცდ.; დ) მცდ. **7.** ა) ზოგადი - მეცნიერი; ბ) ზოგადი - წესიერი მართკუთხედი; გ) ზოგადი - ავეჯი; დ) არ არის; ე) არ არის; ვ) ზოგადი - ოთხკუთხედი. **8.** 3.

2. 6. ბ) 8≤4; გ) 9>5. **7.** ა) ჭ.; ბ) ჭ.; გ) მცდ.; დ) ჭ.; ე) მცდ.; ვ) ჭ. **11.** ლუკამ. **12.** 16. **13.** 2,5 და 5. **14.** 6.

4. 1. ა) ჭ.; ბ) მცდ.; გ) ჭ.; დ) ჭ.; ე) ჭ. **10.** $\frac{9}{9+4\sqrt{3}}$ a და $\frac{4\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$ a. **11.** ა) a=1; ბ) a=–1.

5. 3. 74. **5.** 35. **6.** 992. **7.** 12. **8.** $\frac{3}{7}$. **9.** $\frac{1}{840}$. **16.** 0,7. **18.** $\frac{1}{10}$. **20.** 30×10×10.

6. 9. ა) y=4x+2; ბ) y=3x+1; გ) y=–2x+1.

VIII თავი

1. 2. პერიოდულია. **4.** ა) 3,9; ბ) 1,5; გ) 4,4; დ) 2,5. **6.** ა) f(2)=0; f(1,5)=–0,25; $f\left(-13\frac{1}{6}\right)=-\frac{5}{6}$; ბ) f(2)=0; f(1,5)=$-\frac{1}{8}$; $f-13\frac{1}{6}=-\frac{25}{250}$; **7.** 10. **8.** –7. **9.** –2. **11.** 0,5 (მით. აჩვენეთ, რომ f(x) ფუნქცია პერიოდულია. **12.** 13%. **13.** ორი. **14.** ა) $-\frac{2}{3}$; ბ) $-\frac{1}{2}$. **15.** $c=-\frac{3}{2}$; $d=\frac{3}{2}$. **16.** 6 სთ.

2. 5. ა) 360°·n, n∈Z. თ) –30°+ 360°·n, n∈Z. **7.** ა) $-\frac{1}{2}$; ბ) 0; გ) $\frac{3}{2}$; დ) 1; ე) $\sqrt{3}$; ვ) 0; ზ) $-\frac{1}{2}$; თ) 0. **9.** ა) 45°+180°·n, n∈Z; ბ) 135°+180°·n, n∈Z. **12.** ა) კი; ბ) კი; გ) არა; დ) კი; ე) არა; ვ) კი. **13.** ა) 1; ბ) $\sqrt{3}$; გ) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) 0; ე) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; ვ) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; **14.** ა) 30°; ბ) 150°; გ) 228°; დ) 768°. **15.** ა) 360°სთ; ბ) 30°/სთ. **19.** $2{,}5\sqrt{2}$. **20.** $\frac{10(6+\sqrt{3})}{33}$; $\frac{5(5-\sqrt{3})}{11}$. **21.** 60°. **22.** 5; 6.

3. 1. ა) II; ბ) I; გ) II ან IV; დ) I ან III. **2.** ა) +; ბ) –; გ) +; დ) –; ე) –; ვ) –. **3.** ა) $-\frac{1}{2}$; ბ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) 0;

დ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** ა) $\frac{1}{2}$; ბ) 1; გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; დ) $\frac{1}{2}$. **8.** ა) 120°; ბ) 180°; გ) 360°; დ) 180°. **9.** ა) $m\in[-3;3]$; ბ) $m\in[\infty;-1)$; გ) $m\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$; დ) $m\in[-\sqrt{3};-1]\cup[1;\sqrt{3}]$; ე) $m\in[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$ ვ) $\varnothing$. **10.** ა) კენტია; ბ) არც ერთი; გ) არც ერთი; დ) ლუწია; ე) ლუწია; ვ) ლუწია; ზ) კენტია; თ) ლუწია. **11.** ა) $[-2;2]$; ბ) $[-3;3]$; გ) $[-2;6]$; დ) $[-\sqrt{2}-1;\sqrt{2}-1]$; ე) $\left[-5\frac{1}{2};4\frac{1}{2}\right]$; ვ) $[-\sqrt{5}+\sqrt{3};\sqrt{5}-\sqrt{3}]$. **13.** $2\sqrt{37}$ სმ. **14.** $\sqrt{31}$ სმ. **15.** 2. **16.** $D>0$. **17.** ბ).

4. 12. ა) II; ბ) III; გ) II; III; დ) II; III; ე) III; IV; ვ) I; II. **18.** ა) 90°; ბ) 60°; გ) 180°; დ) 360°. **19.** 6; −2. **20.** 2,5სმ; 2,5სმ. **21.** ა.

5. 3. ა) $\frac{\pi}{6}$რად/სთ; ბ) 2πრად/სთ. **4.** ა) 30°; $\frac{\pi}{3}$სმ. ბ) 108° და $\frac{6\pi}{5}$სმ; გ) 450° და 5πსმ; დ) 1224° და $\frac{68\pi}{5}$სმ. **5.** ა) $\left(\frac{480}{\pi}\right)^{\circ}$ ან $\frac{8\pi}{3}$; ბ) $\frac{9\pi}{8}$სმ და $\frac{7\pi}{4}$სმ. **6.** ა) −660°; ბ) −1800°; გ) −3100°. **7.** ა) 60° ან $\frac{\pi}{3}$; ბ) 90°; $\frac{\pi}{2}$; გ) 108°; $\frac{3\pi}{5}$; დ) 135°; $\frac{3\pi}{4}$; ე) 150°; $\frac{5\pi}{6}$. **8.** ა) 40°; 60°; 80°; ბ) $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{9}$. **10.** ა) 2·360°+40°; გ) −3·360°+100°. **12.** ბ. 1) 2. 2) 4. 3) $\varnothing$. **13.** $a_1=-12$. **14.** 24სთ.

6.

I. 1. ა) $\frac{7\pi}{2}$; ბ) $-\frac{13\pi}{12}$. **2.** ა) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$; $k\in Z$; ე) $\frac{1}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$; $k\in Z$; თ) $x=3^\circ+30^\circ k$; $k\in Z$. **5.** ა) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $k\in Z$; ბ) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $k\in Z$; გ) πk; $k\in Z$; დ) πk; $k\in Z$; ე) $(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi k$; $k\in Z$; ვ) $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4}+\pi k$; $k\in Z$. **6.** ა) $-\frac{\pi}{9}+(-1)^k\arcsin\frac{2}{3}+\pi k$; $k\in Z$; ბ) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $k\in Z$; გ) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $k\in Z$; დ) $\frac{1}{3}(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi}{3}k$; $k\in Z$; $\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$; $k\in Z$. **7.** ა) 0; $\frac{\pi}{6}$. ბ) −270°; −120°; −60°.

II. 1. ა) II; ბ) I; გ) III. **4.** ა) π; ბ) 4π. **5.** ა) (0;1); ბ) (−1;0). **6.** ა) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; $k\in Z$. ბ) $\frac{\neq}{5}+2\pi k$; გ) $\pi+2\pi k$; $-\frac{2}{3}\pi+2\pi k$; $k\in Z$; დ) $\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$; $k\in Z$; ე) $x=2+\frac{\pi}{2}+\pi k$; $k\in Z$; ვ) $\pm\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}k$; $k\in Z$. **7.** ა) $\frac{\pi}{3}$; ბ) $\frac{\pi}{4}$; გ) $\frac{\pi}{3}$; დ) $\frac{\pi}{6}$. **10.** ა) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$; $k\in Z$; გ) $\pi+2\pi k$; $k\in Z$. **11.** ა) $\pm\frac{3\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k$; $k\in Z$; ბ) $\pm\frac{5\pi}{6}+2+2\pi k$; $k\in Z$; გ) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $k\in Z$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $k\in Z$; ვ) $\varnothing$. **14.** $\frac{8}{3}$. **15.** ბ); დ).

III. 2. ა) $\frac{\pi}{6}$; ბ) $\frac{2\pi}{3}$; გ) $\frac{\pi}{2}$; დ) $\frac{13\pi}{6}$. **5.** ა) πk, $k\in Z$; ბ) $-\frac{7\pi}{24}+\pi k$; $k\in Z$; გ) $\frac{5\pi}{4}+3\pi k$; $k\in Z$; დ) $3\pi k$, $k\in Z$; ე) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}7+\pi k$; $k\in Z$; ვ) $-\frac{4\pi}{21}+\pi k$; $k\in Z$; ზ) $\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{3}k$; $k\in Z$; თ) $\frac{5\pi}{12}+5\pi k$; $k\in Z$; ი) $2\pi k$, $k\in Z$. **6.** ა) πk, $k\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$; $k\in Z$; ბ) πk; $k\in Z$; გ) πk, $\mathrm{arctg}(-3)+\pi k$, $k\in Z$; დ) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\mathrm{arctg}5+\pi k$, $k\in Z$; ე) $\varnothing$; ვ) $\mathrm{arctg}3+\pi k$; $\mathrm{arctg}5+\pi k$, $k\in Z$; ზ) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$; $k\in Z$; თ) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\mathrm{arctg}(-2)+\pi k$, $k\in Z$; ი) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$; $k\in Z$. **7.** ა) $-\frac{\pi}{4}$; ბ) $\frac{\pi}{4}$; გ) 0; დ) $\frac{\pi}{6}$. **8.** 45°. **9.** (0;5); (3;−4). **10.** $y=3x+1$. **11.** $x=0$. **12.** $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$.

VIII თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

3. ა) R; ბ) $R\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k\right\}$, $k\in Z$; გ) $R\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k\right\}$; დ) $R\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$, $k\in Z$; **6.** ა) კენტი; ბ) არც ერთი; გ) ლუწი; დ) ლუწი; ე) არც ერთი; ვ) კენტი; ზ) ლუწი; თ) არც ერთი; ი) კენტი. **9.** ა) 2π; ბ) π; გ) π; დ) 5π; ე) $\frac{\pi}{3}$; ვ) π. **14.** ა) 0; ბ) 0; გ) 1; დ) 1. **15.** $h^2\mathrm{ctg}\alpha$. **16.** $\frac{1}{3}\sqrt{S\cdot\sin 2\alpha}$. **17.** 60სმ. **18.** 30°. **19.** ა) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $k\in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $k\in Z$; გ) $\frac{\pi}{2}k$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$; $k\in Z$. **20.** ა) 3,5; ბ) 1,5; გ) 0,25; დ) 2. **21.** ა) $[-5;3]$; ბ) $\left[-2;\frac{2}{3}\right]$; გ) $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$; დ) $[-4;-3]$.

საგნობრივი საძიებელი

დამხმარე ლიტერატურა:

1. თ. გეგელია. მათემატიკის სპეციალური კურსი. „განათლება", თბილისი, 1980 წ.
2. ე. ბენდუქიძე. მათემატიკა. სერიოზული და სახალისო. "ნაკადული", თბილისი, 1988 წ.
3. ა. ბენდუქიძე. მათემატიკური ნარკვევები. "ლეგია", 1995 წ.
4. ჯ. კიკნაძე. აზრის ჯაჭვი. "ინტელექტი". თბილისი, 2001 წ.
5. მ. კოპალეიშვილი. მოგზაურობა რიცხვთა სამყაროში. „განათლება", 1989 წ.
6. თ. ებანოიძე. წერილები. ქართველ მათემატიკოსებზე. "მეცნიერება", 1981 წ.
7. Энциклопедический словарь юного математика. Издательство „Педагогика". 1985 г.
8. С.В. Фомин. Системы счисления.
9. http:/google.com - golden section; www.solarviews.com; http:/primes.utm.edu. http:/olympiads.win.tue.nl; www.problems.ru; www.olimpiada.ru; www.zaba.ru; www.mathematics.ru

ბერძნული ანბანი

Α	α	ალფა
Β	β	ბეტა
Γ	γ	გამა
Δ	δ	დელტა
Ε	ε	ეფსილონი
Ζ	ζ	ძეტა
Η	η	ეტა
Θ	θ	თეტა
Ι	ι	იოტა
Κ	κ	კაპა
Λ	λ	ლამბდა
Μ	μ	მიუ
Ν	ν	ნიუ
	ξ	ქსი
Ο	ο	ომიკრონ
Π	π	პი
Ρ	ρ	რო
Σ	σ	სიგმა
Τ	τ	ტაუ
Υ	υ	იფსილონი
Φ	φ	ფი
Χ	χ	ხი
Ψ	ψ	ფსი
Ω	ω	ომეგა

ლათინური ანბანი

A	a	ა
B	b	ბე
C	c	ცე
D	d	დე
E	e	ე
F	f	ეფ
G	g	ჟე
H	h	ჰაშ
I	i	ი
J	j	იოტ, ჟი
K	k	კა
L	l	ელ
M	m	ემ
N	n	ენ
O	o	ო
P	p	პე
Q	q	ქუ
R	r	ერ
S	s	ეს
T	t	ტე
U	u	უ
V	v	ვე
W	w	დუბლ-ვე
X	x	იქს
Y	y	იგრეკ
Z	z	ზეტ

წიგნში გამოყენებული მათემატიკური ნიშნების ცხრილი

|a| — a რიცხვის მოდული
⋮ — იყოფა უნაშთოდ
⋮̸ — არ იყოფა უნაშთოდ
N — ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე
Z — მთელ რიცხვთა სიმრავლე
Q — რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე
R — ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე
{a;b} — სიმრავლე, რომლის ელემენტებია a და b
∈ — ეკუთვნის (სიმრავლეს)
∉ — არ ეკუთვნის (სიმრავლეს)
∅ — ცარიელი სიმრავლე
⊂ — ქვესიმრავლე (სიმრავლის)
∩ — თანაკვეთა (სიმრავლეთა)
∪ — გაერთიანება (სიმრავლეთა)
A\B — სხვაობა (სიმრავლეთა)
>, < — მკაცრი უტოლობის ნიშნები
⩾, ⩽ — არამკაცრი უტოლობის ნიშნები
a^n — a რიცხვის n ხარისხი
$\overline{ab}$ — ორნიშნა რიცხვი (a ათეულით, b ერთეულით)
∥ — პარალელურია
∦ — არ არის პარალელური
[x] — x-ის მთელი ნაწილი
{x} — x-ის წილადი ნაწილი

⊥ — მართობული
≡ — აღვნიშნოთ
⇒ — გამომდინარე
° — გრადუსი
( ) — ღია შუალედი
[ ); ( ] — ნახევრად ღია შუალედი
[ ] — ჩაკეტილი შუალედი
−∞ — მინუს უსასრულობა
∞ — პლუს უსასრულობა
$\sqrt{a}$ — არითმეტიკული კვადრატული ფესვი, რადიკალი
y=f(x) — ფუნქცია
$\overset{\frown}{AB}$ — AB რკალის გრადუსული ზომა
~ — მსგავსება
P(A) — A ხდომილობის მოხდენისალბათობა
⟶ — იმპლიკაცია
⟷ — ეკვივალენცია
$\underline{(a;k)}$ — სიბრტყე
$\overline{A}$ — A-ს უარყოფა
A∨B — A ან B
A∧B — A და B
A⇒B — A-დან ლოგიკურად გამომდინარეობს B
T_0 — უმცირესი დადებითი პერიოდი

ზომის ერთეულები

სიგრძის ერთეულები
1 კილომეტრი (კმ)=1000 მეტრი (მ)
1 მეტრი (მ)=10 დეციმეტრი (დმ)=100 სანტიმეტრი (სმ)
1 დეციმეტრი (დმ)=10 სანტიმეტრი (სმ)
1 სანტიმეტრი (სმ)=10 მილიმეტრი (მმ)

ფართობის ერთეულები
1 კვ. კილომეტრი (კმ²)=1000000 კვ. მეტრი (მ²)
1 ჰექტარი (ჰა)=100 არი (ა)=10000 კვ. მეტრი (მ²)
1 არი=100 კვ. მეტრი (მ²)

მასის ერთეულები
1 ტონა (ტ)=1000 კილოგრამი (კგ).
1 კილოგრამი (კგ)=1000 გრამი (გ)
1 ცენტნერი (ც)=100 კილოგრამი (კგ).
1 გრამი (გ)=1000 მილიგრამი (მგ)

დროის ერთეულები
1 წელი = 365 დღე-ღამე
1 დღე-ღამე=24 საათი (სთ)
1 საათი (სთ)=60 წუთი (წთ)
1 წუთი (წთ)=60 წამი (წმ)

მოცულობის ერთეულები
1 კუბ. მეტრი (მ³)=1000 კუბ. დეციმეტრი (დმ³)=1000000 კუბ. სანტიმეტრი (სმ³)
1 კუბ. დეციმეტრი (დმ³)=1000 კუბ. სანტიმეტრი (სმ³)
1 ლიტრი (ლ)=1 კუბ. დეციმეტრი (დმ³)
1 ჰექტოლიტრი (ჰლ)=100 ლიტრი (ლ)

ძველებური საზომი ერთეულების გამოსახვა მეტრული საზომი ერთეულებით

ხაზი ≈ 2,54 მმ	არშინი ≈ 71,12 სმ	საზღვაო მილი ≈ 1,85 კმ	გირვანქა ≈ 409,5 გ
დუიმი ≈ 2,54 სმ	საჟენი ≈ 2,13 მ	დესეტინა ≈ 1,09 ჰა	მისხალი ≈ 4,27 გ
გოჯი ≈ 4,45 სმ	ვერსი ≈ 1.067 კმ	ფუთი ≈ 16,38 კგ	კარატი (მეტრული) ≈ 0,2 გ
ფუტი ≈ 30,48 სმ	იარდი ≈ 91,44 სმ		

ᲖᲝᲒᲐᲓᲘ ᲒᲐᲜᲐᲗᲚᲔᲑᲘᲡ ᲔᲠᲝᲕᲜᲣᲚᲘ ᲛᲘᲖᲜᲔᲑᲘ

საქართველოში ზოგადი განათლების სისტემა მიზნად ისახავს შექმნას ხელსაყრელი პირობები ეროვნული და ზოგადსაკაცობრიო ღირებულებების მატარებელი, თავისუფალი პიროვნების ჩამოყალიბებისათვის. ამასთან ერთად, განათლების სისტემა უვითარებს მოზარდს გონებრივ და ფიზიკურ უნარ-ჩვევებს, აძლევს საჭირო ცოდნას, ამკვიდრებს ჯანსაღი ცხოვრების წესს, მოსწავლეებს უყალიბებს ლიბერალურ და დემოკრატიულ ღირებულებებზე დამყარებულ სამოქალაქო ცნობიერებას და ეხმარება მათ ოჯახის, საზოგადოებისა და სახელმწიფოს წინაშე საკუთარი უფლება-მოვალეობების გაცნობიერებაში.

საქართველოს ზოგადი განათლების სისტემაში მიღებული გამოცდილების საფუძველზე მოზარდმა უნდა შეძლოს:

ა) ქვეყნის ინტერესების, ტრადიციებისა და ღირებულებების მიმართ საკუთარი პასუხისმგებლობის გააზრება;

ბ) ბუნებრივი გარემო პირობების შენარჩუნება და დაცვა;

გ) ტექნოლოგიური თუ სხვა ინტელექტუალური მიღწევების ეფექტიანად გამოყენება; ინფორმაციის მოპოვება, დამუშავება და ანალიზი;

დ) დამოუკიდებლად ცხოვრება, გადაწყვეტილების მიღება;

ე) იყოს შემოქმედი, თავად შექმნას ღირებულებები და არ იცხოვროს მხოლოდ არსებულის ხარჯზე;

ვ) საკუთარი შესაძლებლობებისა და ინტერესების უწყვეტი განვითარება მთელი ცხოვრების განმავლობაში და მათი მაქსიმალური რეალიზება როგორც ქვეყნის შიგნით, ისე მის საზღვრებს გარეთაც;

ზ) კომუნიკაცია ინდივიდებთან და ჯგუფებთან;

თ) იყოს კანონმორჩილი, ტოლერანტი მოქალაქე.