ზაურ ჯაბუა

ექსპერიმენტული მონაცემების მათემატიკური დამუშავების მეთოდები

თბილისი 2012

წინამდებარე სახელმძღვანელოს მიზანია ექსპერიმენტატორს მისცეს ის აუცილებელი ცოდნა რაც საჭიროა ფიზიკური ექსპერიმენტის მონაცემების დასამუშავებლად და გასაანალიზებლად. მოცემულია რეკომენდაციები გასაზომი სიდიდეების ჭეშმარიტი მნიშვნელობის წერტილოვანი და ინტეგრალური მნიშვნელობების შესასაფასებლად, ასევე ემპირიული ფორმულების პარამეტრების დასადგენად, რომელთა შერჩევაც ხდება უმცირესი კვადრატების მეთოდით. მოცემულია რეკომენდაციები ემპირიული ფორმულების შესარჩევად, კერძოდ მრავაწევრის ოპტიმალური ხარისხის და ტრიგონომეტრიული პოლინომის ოპტიმალური რიგის შესარჩევად. მოყვანილია ჰიპოთეზესების შემოწმების უმარტივესი მეთოდები და კორელაციური დამოკიდებულებების ძირითადი მონაცემებები. განხილულია ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული ფუნქციების რიცხვითი დიფერენცირებისა ინტეგრების ეფექტური მეთოდები. ყველა რეკომენდაციას თან ახლავს პრაქტიკული მაგალითები.

წიგნი განკუთვნილია სტუდენტების, მაგისტრანტების, დოქტორანტებისა და მკვლევარებისათვის ვისაც საქმე აქვს ფიზიკურ ექსპერიმენტთან და მისი შედეგების დამუშავებასთან.

ფიზიკური ექსპერიმენტის მონაცემების მათემატიკური დამუშავების თანამედროვე მეთოდები საშუალებას იძლევა ღრმად და საფუძვლიანად გაანალიზებულ იქნას მიღებული მონაცემები და მათ საფუძველზე გაკეთებულ იქნას სწორი დასკვნები. ამ მეთოდების უცოდინრობა ან არასრული ცოდნა სერიოზულ სიძნელეებს ქმნის და შესაბამისად იწვევს არასაკმარისად დასაბუთებული და გამარტივებული ხერხების გამოყენებას. ამასთან ერთად უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ტიპის ამოცანებში გამოყენებული საკითხები არცთუ მრავალრიცხოვანია და მათი პრაქტიკული გამოყენების მიზნით ათვისება დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მკითხველს უნდა გააჩნდეს უმაღლესი მათემატიკის ცოდნა იმ მოცულობით რასაც ითვალისწინებს უმაღლესი ტექნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის საწავლო კურსი, ალბათობის თეორიის ჩათვლით. მნიშვნელოვანია იმის შეგნება, რომ ექსპერიმენტული მონაცემების მათემატიკური დამუშავებისას მიღებული შედეგები საიმედოა გარკვეული ალბათობით

რეცენზენტები:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის, ასოცირებული პროფესორი,
აკადემიური დოქტორი ბეჟან კოტია

სოხუმის სახელწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი ვახტანგ ცხადაია

თავი I. გაზომვის ცდომილებები

1.1. გაზომვის ცნება

ფიზიკური ექსპერიმენტის მიზანია ამა თუ იმ სიდიდის გაზომვა, რაც საშუალებას გვაძლევს კავშირი დავამყაროთ სხვადასხვა სიდიდეებს შორის და ამით ჩავწვდეთ ფიზიკური მოვლენის არსს. მაგალითად, ერთი შეხედვით ძნელად დასაჯერებელია, რომ სინათლის ორ სხივის ზედდებისას შეიძლება წარმოიქმნას ბნელი უბანი, ანუ სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ადგილი ჰქონდეს ინტერფერენციას. შესაბამისი ექსპერიმენტის ჩატარება და ფიზიკური სიდიდეების გაზომვა კი გვარწმუნებს, რომ ინერფერენციას მართლაც აქვს ადგილი და ის ემორჩილება გარკვეულ ობიქტურ კანონებს. ფიზიკოსი ექსპერიმენტატორი ბუნების კანონების შესწავლისას, ცდილობს გამოყოს ის თავისებურებები, რომლებიც მას არსებითად ეჩვენება (წინააღმდეგ შემთხვევაში შეუძლებელია მოცემული მოვლენის შესწავლა, ვინაიდან ამ მოვლენას სხვა მოვლებთან უსასრულოდ დიდი რაოდენობის კავშირი გააჩნია) და ამის შემდეგ ახდენს გამოყოფილი მოვლენის განზოგადოებას, აგებს თეორიას და აკეთებს შესაბამის დასკვნებს, რომელთა შემოწმებაც ხდება ექსპერიმენტის მეშვეობით.

გაზომვა ეწოდება გასაზომი სიდიდის შედარებას ამავე სახის ერთეულად აღებულ სიდიდესთან. ამ დროს ჩვენ ვიგებთ თუ რამდენჯერ მეტია ან ნაკლები გასაზომი სიდიდე ერთეულად აღებულ სიდიდესთან (ეტალონთან) შედარებით. მაგალითად, თუ ვზომავთ თოკის სიგრძეს მეტრობით, ჩვენ ვადგენთ თუ რამდენი მეტრიანისგან შედგება ეს თოკი. ამ გაზომვას საფუძვლად უდევს მეტრის ეტალონი. სხეულის მასის გაზომვისას მას ვადარებთ მასის ეტალონს – კილოგრამს.

გაზომვის შედეგად ვიღებთ გარკვეულ რიცხვებს, რომელთა დამუშავებასაც ვახდენთ მომდევნო ეტაპზე გარკვეული დასკვნების გასაკეთებლად.

ქვემოთ მოყვანილია მითითებები და რჩევები, რომლებიც დაგეხმარებათ ექსპერიმენტული მონაცების რეგიასტრაციასა და დამუშავებაში.

1.2. გაზომვის შედეგების ჩაწერა, გრაფიკები

ეცადეთ ექსპერიმენტის მონაცემები ყოველთვის ჩაწეროთ ცხრილის სახით. ასეთი ჩანაწერი კომპაქტურია და ადვილი წასაკითხი. ერთი და იმავე სიდიდის მნიშვნელობები უმჯობესია ჩაწეროთ ვერტიკალურ სვეტში, ვინაიდან თვალისთვის ასე უფრო იოლია ციფრების აღქმა. ყოველი სვეტის დასაწყისში დაწერეთ შესაბამისი სიდიდის დასახელება ან სიმბოლო და უჩვენეთ ერთეული. განზომილების ერთეულს მიეცით ისეთი ათობითი მამრავლი, რომ ჩაწერილი მონაცემები მოთავსდეს 0.1 – დან 1 000 –მდე ინტერვალში. მაგალითად $0.026 = 26 \cdot 10^{-3}$.

განვიხილოთ ცხრილი 1, რომელიც წარმოადგენს რაღაც დიდი ცხრილის ნაწილს სხვადასხვა მასალის იუნგის მოდულისთვის.

ცხრილი 1

მასალა	იუნგის მოდული E, 10^{11} ნ·მ$^{-2}$
რკინა	2.11

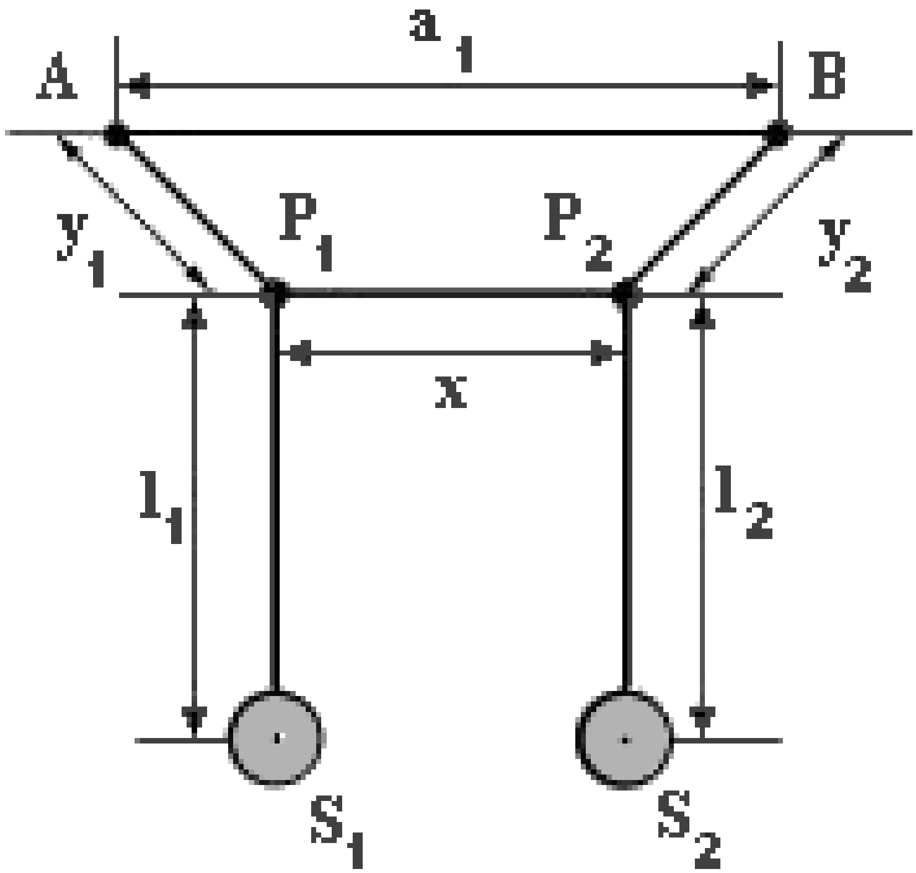
რეკომდებულია ისარგებლოთ ჩანაწერით, როდესაც ფიზიკური სიდიდის შემდეგ დასმულია მძიმე და ნაჩვენებია ერთეული, მოცემულ შემთხვევაში - 10^{11} ნ·მ^2. ასეთი ჩანაწერი გასაგებია და ალბათ გაურკვევლობას არ იწვევს. ერთეული ნაჩვენებია სვეტის დასაწყისში და ამდენად აუცილებელი არაა მისი განმეორება ყველა მნიშვნელობისთვის. ცხრილში უნდა მოვერიდოთ ზედმეტ განმეორებებს, ცხადია რაც ნაკლებია მეორე ხარისხოვანი მით ადვილია მთავარის დანახვა.

გაზომვის ყველა შედეგი ჩაწერეთ მაშინათვე და ყოველგვარი დამუშავების გარეშე. ამ წესიდან გამონაკლისი არ არსებობს. არ ჩაატაროთ არავითარი, თუნდაც მარტივი არითმეტიკული მოქმედებები ზეპირად, მანამ სანამ შედეგს არ ჩაწერთ ცხრილში. მაგალითად, ვთქვათ დენის სიდიდის მისაღებად საჭიროა ამპერმეტრის ჩვენების ორზე გაყოფა. ჩაწერეთ ხელსაწყოს ჩვენება პირდაპირ და არ გაყოთ ორზე. ცხადია თუ რატომ უნდა მოვიქცეთ ასე: თუ თქვენ ორზე გაყოფისას შეცდებით, მისი გამოსწორება შემდეგ საკმაოდ გაძნელდება. გაზომვის ჩატარებისა და ჩანაწერის გაკეთებისას კიდევ ერთხელ დახედეთ ხელსაწყოს და გადაამოწმეთ ჩანაწერი. ამრიგად დახედეთ, ჩაიწერეთ, შეამოწმეთ.

ძალიან ცუდია, როდესაც აწარმოებენ ახალ-ახალ გაზომვებს, ისე, რომ არ ატარებენ საშუალედო ანალიზს და სჯერდებიან მხოლოდ საბოლოო განხილვას. ექსპერიმენტის შედეგების ნაწილის ანალიზისას ხშირად ვლინდება გარკვეული შეუსაბამობები, რომლებიც აუცილებელს ხდიან შესაბამისი კორექტივები შეტანილ იქნან ექსპერიმენტის მსვლელობაში. გარდა ამისა შესაძლებელია შედეგების ერთმა სერიამ გამოიწვიოს ექსპერიმენტის მიმდინარეობის შეცვლა.

არსებობს ძველი ჩინური ანდაზა “ერთი ნახატი სჯობს ათას სიტყვას”. ექსპერიმენტის ჩანაწერებში და ანგარიშში ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვს სქემებს. სქემა, რომელსაც თან ერთვის რამდენიმე განმარტება, ხშირად გაცილებით უკეთესად აღწერს ექსპერიმენტის იდეას ვიდრე ვიდრე ამ სქემის აღწერა მხოლოდ სიტყვებით. ქვემოთ მოყვანილია ერთმანეთთან დაკავშირებული ქანქარების რხევის შესასწავლი დანადგარის ნაწილის აღწერის ორი ვარიანტი (ნახ.1).

ვარიანტი I. ჰორიზონტალური ღეროს A და B წერტილებში მიმაგრებულია ძაფი, მათთან P_1 და P_2 წერტილებში მოსრიალე კვანძების სახით დამატებით მიმაგრებულია კიდევ ორი ძაფი, რომლებზეც კიდია ორი S_1 და S_2 სფერო. AB, AP_1, BP_2 და P_1P_2 უბნების სიგრძეები აღნიშნულია შესაბამისად a_1, y_1, y_2 და x. მანძილი P_1 კვანძიდან S_1 ბირთვის ცენტრამდე ტოლია l_1, მანძილი P_2 კვანძიდან S_2 ბირთვის ცენტრამდე ტოლია l_2. ქანქარებს შორის მანძილების ცვლას ვახდენთ x მანძილის ცვლილებით, რისთვისაც P_1 და P_2 კვანძებს გადავააადგილებთ AP_1P_2B ძაფის გასწვრივ, ისე რომ სისტემის სიმეტრია არ დაირღვეს, ანუ შენარჩუნდეს ტოლობა $y_1 = y_2$.



ნახ.1.

ვარიანტი II. მოწყობილობის სქემა მოყვანილია ნახ.1-ზე. AP_1P_2B არის ძაფის მთლიანი მონაკვეთი, ხოლო P_1 და P_2 მოსრიალე კვანძები. კავშირს ვცვლით კვანძების გადაადგილებით x სიდიდის ცვლილებით, ამასთან $y_1 = y_2$.

ცხადია აღწერის მეორე ვარიანტი უფრო გასაგებია და ლაკონური.

სქემა უნდა იყოს რაც შეიძლება მარტივი და მასზე ნაჩვენები უნდა იყოს მხოლოდ ის დეტალები რაც უშუალოდ ექსპერიმენტს ეხება.

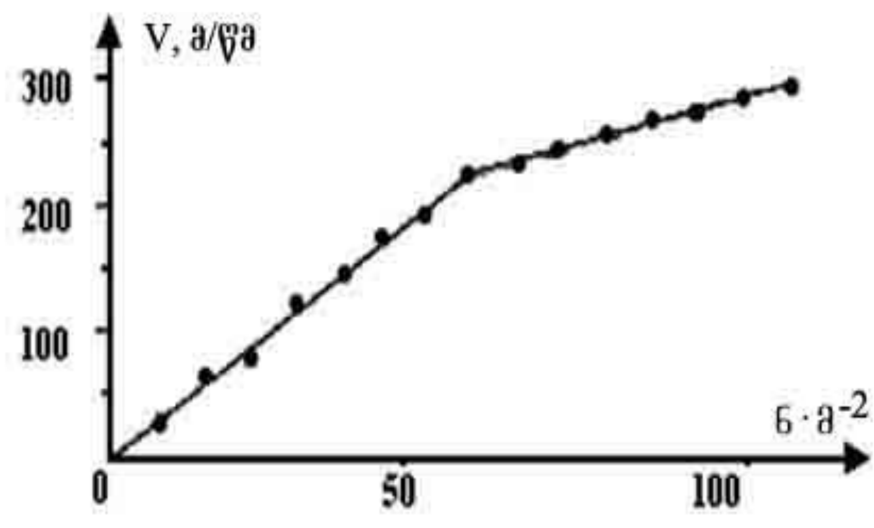
ექსპერიმენტის შედეგების დამუშავებაში ძალიან დიდ როლს თამაშობენ გრაფიკები. ისინი, ჯერ ერთი, საშუალებას იძლევიან დავადგინოთ ზოგიერთი სიდიდე, მაგალითად დახრა, ან მონაკვეთი, რომელსაც გრაფიკი მოკვეთს ღერძებს და ა.შ. მეორეც და მთავარი – გრაფიკებს იყენებენ თვასაჩინოებისთვის. მაგალითად, დავუშვათ, ვზომავთ წყლის დინების სიჩქარეს მილში, როგორც წნევათა სხვაობის ფუნქციას და ჩვენი მიზანია დავადგინოთ თუ როდის ხდება დინების ლამინარული რეჟიმიდან ტურბულენტურზე გადასვლა.

გაზომვის შედეგები მოყვანილია ცხრილში 2.

ცხრილი 2

წნევათა სხვაობა, ნ·მ$^{-2}$	საშუალო სიჩქარე, მმ/წმ	წნევათა სხვაობა, ნ·მ$^{-2}$	საშუალო სიჩქარე, მმ/წმ
7,8	35	78,3	245
15,6	65	86,0	258
23,4	78	87,6	258
31,3	126	93,9	271
39,0	142	101,6	277
46,9	171	109,6	284
54,7	194	118,0	290
62,6	226		

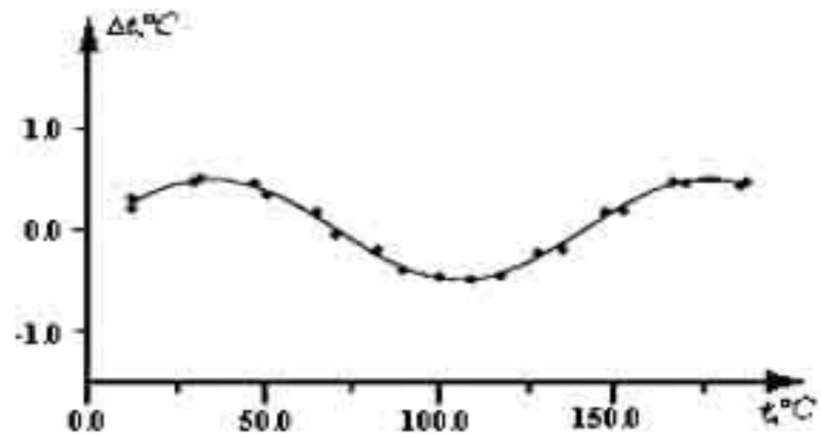
ნაკადი ლამინარული რჩება მანამ სანამ მისი სიჩქარე პროპორციულია წნევათა სხვაობის. ცხრილში მოყვანილი მონაცემებით იმის თქმა თუ როდის ირღვევა პროპორციულობა ძნელი სათქმელია, სხვა საქმეა, როდესაც მონაცემები მოყვანილია გრაფიკის სახით (ნახ. 2), ამ შემთხვევაში მაშინათვე ჩანს წერტილი, რომელშიც პროპორციულობა ირღვევა.



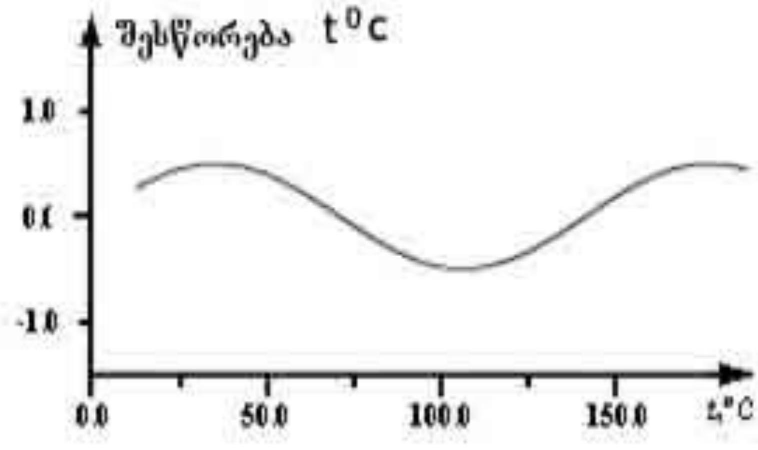
ნახ.2

გრაფიკები საშუალება იძლევიან უფრო თვასაჩინოდ შევადაროთ ერთმანეთს ექსპერიმენტული და თეორიული მონაცემები

მესამეც, ექსპერიმენტულ ნაშრომში გრაფიკებს იყენებენ ორ სიდიდეს შორის ემპირიული თანაფარდობის დასადგენად. მაგალითად ვაგრადუირებთ რა საკუთარ თერმომეტრს რაიმე ეტალონური თერმომეტრით, ვადგენთ შესწორებას როგორც თერმომეტრის შესწორების ფუნქციას (ნახ.3). გრაფიკზე მიღებულ წერტილებზე ვავლებთ მდოვრე მრუდს (ნახ.4), რომელსაც შემდგომში ვიყენებთ თერმომეტრის ჩვენების კორექციისთვის.



ნახ.3



ნახ.4

მასშტაბი. გრაფიკის აგებისას ჰორიზონტალურ ღერძზე იღებენ დამოუკიდებელ ცვლადს, ხოლო ვერტიკალურზე – გაზომილ სიდიდეს. გრაფიკების ასაგებად იყენებენ სხვადასხვა ქაღალდს: ჩვეულებრივი წრფივი მასშტაბით (მილიმეტრული) და ლოგარითმული მასშტაბით. ეს უკანასკნელი ორი სახისაა ნახევრად ლოგარითმული (ამ შემთხვევაში ლოგარითმები აღებულია მხოლოდ ერთ ღერძზე) და ორმაგად ლოგარითმული (როდესაც ორივე ღერძზე ლოგარითმებია აღებული). ნახევარლოგარითმული ქაღალდი მოსახერხებელია მაშინ, როდესაც ცვლადებს შორის კავშირი ლოგარითმული ან ექსპონენციალური ხასიათისაა ($\boldsymbol{y = B_0 + B_1 e^{kx}}$), ხოლო თუ ამ კავშირს აქვს $\boldsymbol{k^x}$ სახე სადაც $\boldsymbol{k}$ უცნობი სიდიდეა, უმჯობესია ავიღოთ ორმაგი ლოგარითმული ქაღალდი.

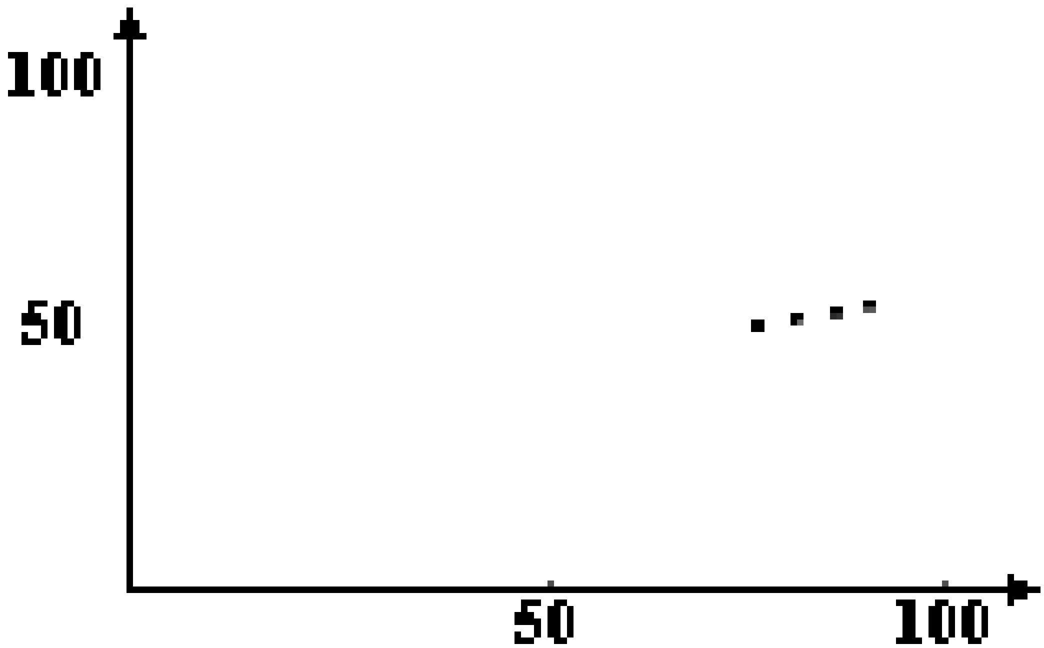
ვთქვათ მილიმეტრულ ქაღალდზე ვაგებთ გრაფიკს. მასშტაბის არჩევისას უნდა გამოვიდეთ შემდეგი მოსაზრებებიდან:

1) ექსპერიმენტული წერტილები არ უნდა იყვნენ ერთმანეთთან ძალიან ახლოს ნახ.5), ვინაიდან ამ შემთხვევაში ძნელია სასარგებლო იფორმაციის აღება. ექსპერიმენტული წერტილები ერთმანეთისგან აზრიანი ინტერვალით უნდა დავაშოროთ, როგორც ეს მაგალითად ნახ. 6 – ზეა ნაჩვენები. თუ x და y სიდიდეების საწყისი მნიშვნელობები საკმაოდაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან მაშინ მიზანშეწონილია დანაყოფების ათვლა ღერძებიდან დავიწყოთ ისეთი მნიშვნელობებიდან, რომლებიც მხოლოდ ცოტათი განსხვავდებიან ცდით მიღებული იმ მნიშვნელობისგან, რომელიც შესაბამის ღერძზე უნდა დავიტანოთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში გრაფიკზე მივიღებთ უსაფუძვლოდ დიდ ცარიელ ადგილს. ღერძებზე მასშტაბური დანაყოფების დატანის შემდეგ მათ სიახლოვეს უნდა დავსვათ შესაბამისი რიცხვები.

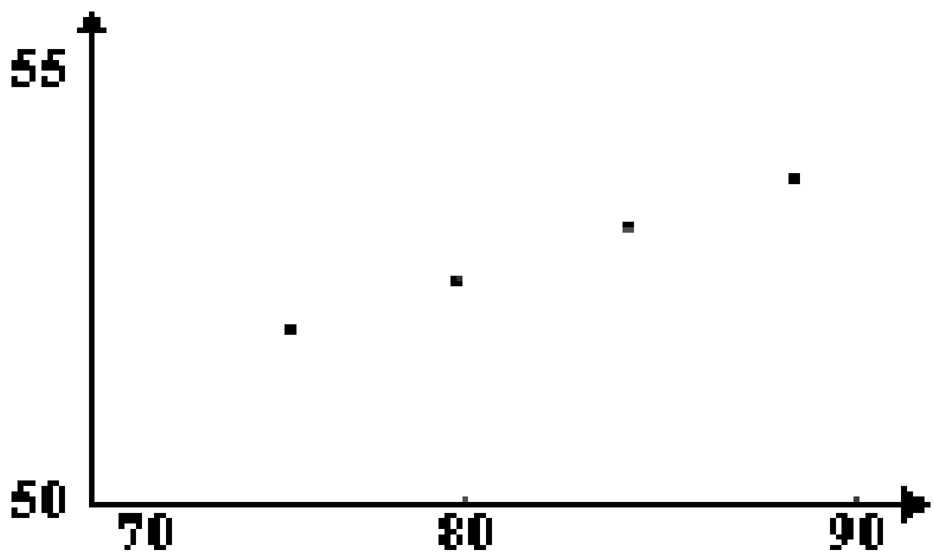
2) მასშტაბი უნდა იყოს მარტივი. ყველაზე მოსახერხებელია როდესაც გაზომილი სიდიდის ერთეულს (ან 0.1, ან 10, ან 100 და ა.შ.) შეესაბამება 1 სანტიმეტრი. ასევე შეიძლება ისეთი მასშტაბი შეირჩეს, რომ 1 სმ შეესაბამაბოდეს 2 ან 5 ერთეულს. სხვა მასშტაბებს თავი უნდა ავარიდოთ თუნდაც იმიტომ წინააღმდეგ შემთხვევაში მოგვიწევს არითმეტიკული მოქმედებების ჩატარება ზეპირად;

3) ზოგჯერ მასშტაბის შერჩევა ხდება თეორიული მოსაზრებების საფუძველზე. ასე მაგალითად, თუ ჩვენ გვაინტერესებს, თუ რამდენად აკმაყოფილებენ გაზომილი სიდიდეები $y = kx$ თანაფარდობას, მაშინ ჩვენს გრაფიკზე x უნდა ემთხვეოდეს კოორდინატთა სისტემის დასაწყისს.

საზომი ერთეულები. ისევე როგორც ცხრილების შემთხვევაში, ათობითი მამრავლი მოსახერხებელია მივანიჭოთ საზომ ერთეულს. მაშინ გრაფიკზე დანაყოფები შეიძლება აღვნიშნოთ ციფრებით 1, 2, 3 ⋯ ან 10, 20, 30 ⋯, და არა 10000, 20000 და ა.შ., ან 0.0001, 0.0002 და ა.შ. კოორდინატთა ღერძებზე უნდა მოვიყვანოთ სახელწოდება ან სიმბოლოები. საზომი ერთეულები უნდა ვუჩვენოთ ისეთივე ხერხით, როგორც ეს გავაკეთეთ ცხრილებში, ანუ ათობითი მამრავლები უნდა მივაკუთვნოთ საზომ ერთეულს.



ნახ.5. მასშტაბი არასწორადაა შერჩეული

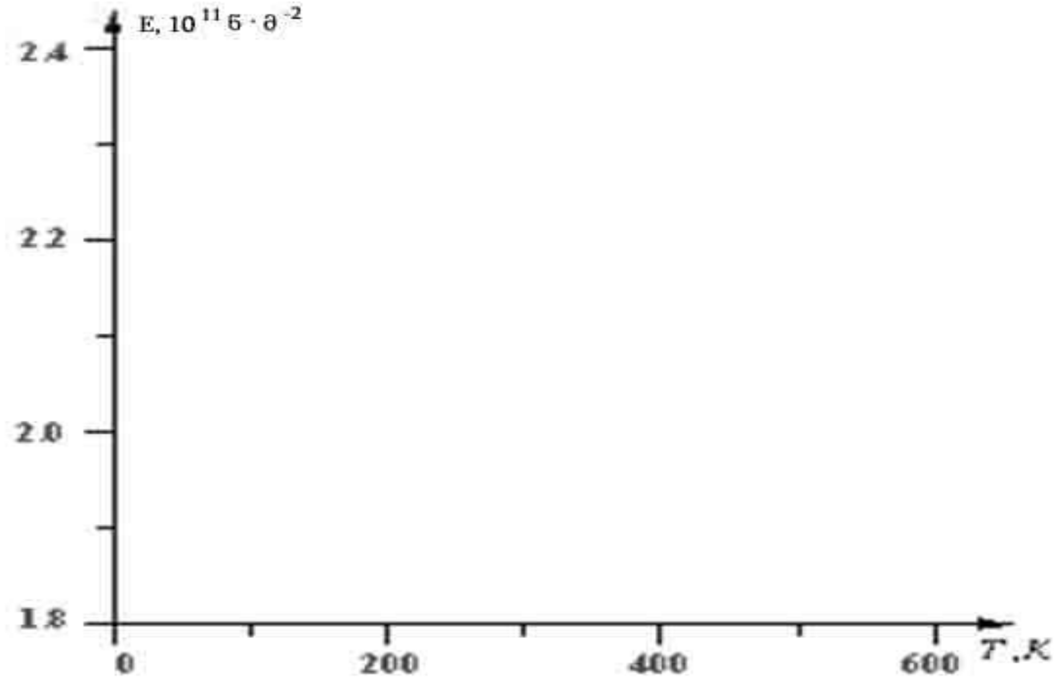


ნახ.6. მასშტაბი უკეთესადაა შერჩეული

ისევე როგორც ცხრილების შემთხვევაში, ათობითი მამრავლი მოსახერხებელია მივანიჭოთ საზომ ერთეულს. მაშინ გრაფიკზე დანაყოფები შეიძლება აღვნიშნოთ ციფრებით 1, 2, 3 ··· ან 10, 20, 30 ···, და არა 10000, 20000

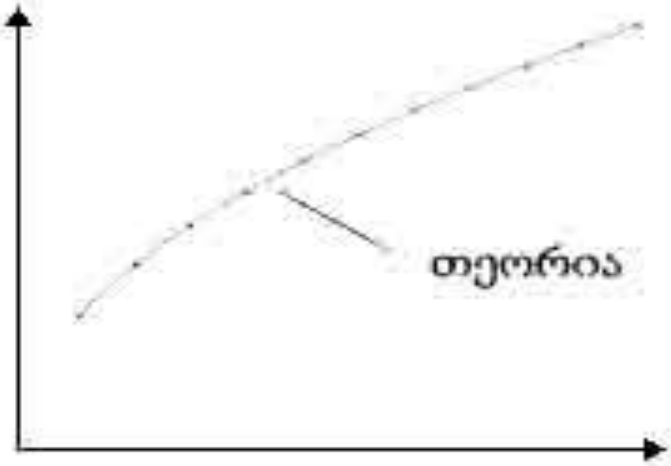
და ა.შ., ან 0.0001, 0.0002 და ა.შ. კოორდინატთა ღერძებზე უნდა მოვიყვანოთ სახელწოდება ან სიმბოლოები. ნახ.7-ზე თუ როგორ უნდა გავაკეთოთ წარწერები კოორდინატთა ღერძებზე და მივუთითოთ საზომი ერთეულები

როგორ ავაგოთ გრაფიკი. გრაფიკის აგების მიზანია ექსპერიმენტის შედეგების თვალსაჩინოდ წარმოჩენა, ამიტომ ის მაქსიმალურად ცხადი უნდა იყოს. ქვემოთ მოყვანილია გრაფიკების აგებისთვის სასარგებლო რამდენიმე რჩევა, რომლებიც გამოყენებული უნდა იყოს თითოეული კონკრეტული შემთხვევის გათვალისწინებით.

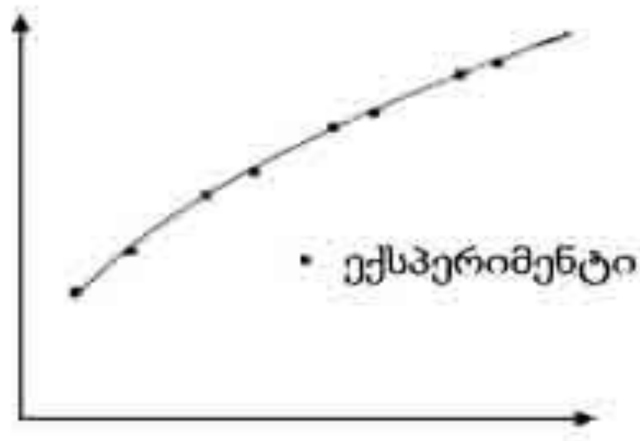


ნახ.7. იუნგის მოდულის დამოკიდებულება ტემპერატურაზე

როცა გრაფიკზე თეორიული მრუდი მოჰყავთ ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შედარების მიზნით, მაშინ წერტილები, რომლებზედაც ეს წირი ტარდება შეირჩევა საკუთარი შეხედულების მიხედვით და უმჯობესია ისინი დავიტანოთ ფანქრით ზედმეტი გამუქების გარეშე, რათა საჭიროების შემთხვევაში შესაძლო იყოს მათი წაშლა. ქსპერიმენტული წერტილები კი უნდა დავიტანოთ მუქად. მაგალითები მოყვანილია ქვემოთ ნახ.8 და 9-ზე



ნახ. 8

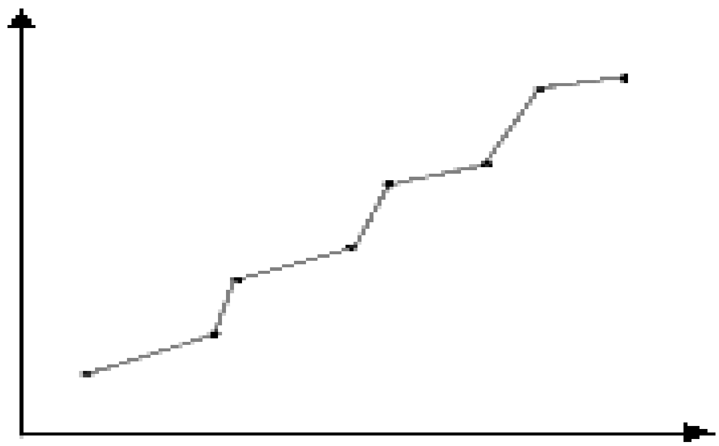


ნახ.9.

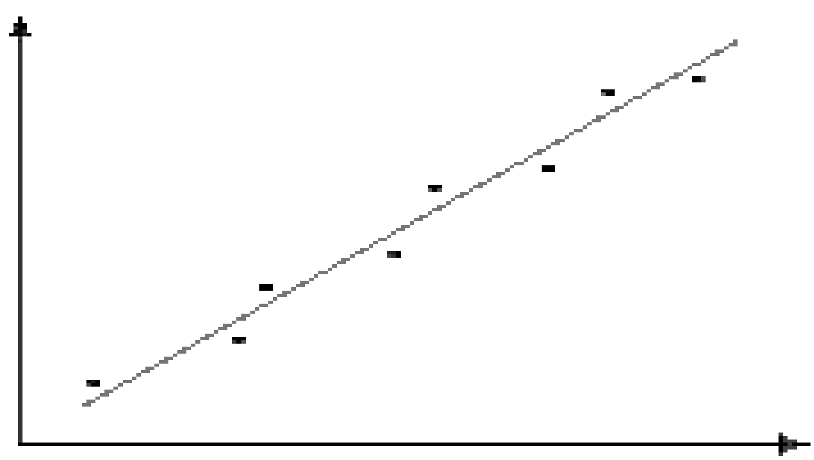
ნახ. 8 – წარმოადგენს წარუმატებელ მაგალითს ვინაიდან მასზე ექსპერიმეტული წერტილები დატანილია ძალიან წვრილად და მათი გარჩევა ძნელია თეორიული გათვლებით მიღებული წერტილებისგან რომლებზედაც გატარებულია თეორიული წირი.

ნახ.9 –ზე თეორიული გათვლებით მიღებული წერტილები არ ჩანს, ხოლო ექსპერიმენტული წერტილები კარგადაა გამოკვეთილი.

ზოგჯერ სასარგებლოა ექსპერიმენტულ წერტილებზე გავატაროთ “საუკეთესო” მდორე წირი. ყურადღება მიაქციეთ ტერმინს – მდორე წირი. დამწყები ექსპრიმენტატორები ხშრად ექსპერიმენტულ წერტილებს აერთებენ უბრალოდ ტეხილი წირით, როგორც ეს ნახ 10.ზეა ეს ნაჩვენები. ამით ნაჩვენებია, რომ ორ სიდიდეს შორის თანაფარდობა აიწერება ტეხილით, რაც ნაკლებად ალბათურია. უფრო მოსალოდნელია, რომ ეს დამოკიდებულება აიწერება მრუდი წირით და წერტილების გადახრა გამოწვეულია, გაზომვის შემთხვევითი ცდომილებებით.



ნახ.10



ნახ. 11

ექსპერიმენტის შედეგად მიღებულ წერტილებზე წირის გატარებისას უნდა ვისარგებლოთ შემდეგი წესებით:

1) რაც მეტი გადაღუნვის წერტილები და უსწორმასწორებები აქვს მრუდს მით ნაკლებ ალბათურია ისინი და ასეთი განსაკუთრებულობების შესამოწმებლად საჭიროა შესაბამის არეებში უფრო ზუსტი გაზომვების ჩატარება;

2) მრუდი ისე უნდა გატარდეს, რომ ის რაც შეიძლება ახლოს იყოს ექსპერიმენტულ წერტილებთან და მის ორივე მხარეს წერტილების ერთნაირი რაოდენობა უნდა იყოს განთავსებული;

3) შესაძლებლობის ფარგლებში ექსპერიმენტული წერტილები ძალიან დიდად არ უნდა იყოს დაშორებული მრუდიდან, უმჯობესია დავუშვათ ორი სამი მცირე გადახრა ვიდრე ერთი დიდი;

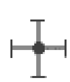
იმ შემთხვევაში, როდესაც მოცემული გვაქვს თეორიული მრუდი, უმჯობესია ექსპერიმენტის შედეგად მიღებულ წერტილებზე არ გავატაროთ “მდოვრე” მრუდი”, ვინაიდან ის შეიძლება არ შეესაბამებოდეს ფაქტიურ მონაცემებს და ამან შეიძლება ხელი შეგვიშალოს ექსპერიმენტის შედეგების თეორიულთან პირდაპირ შედარებაში

სხვადასხვა ნივთიერებებზე ან სხვადასხვა პირობებში გაზომვის შედეგად მიღებული შედეგები უმჯობესია აღვნიშნოთ სხვადასხვა ნიშნაკებით: მაგალითად ნათელი რგოლებით, მუქი რგოლებით, ჯვრებით და ა.შ. ამასთან ერთად საჭიროა ზომიერების დაცვაც, თუ გრაფიკი ძალიან გადაიტვირთა უმჯობესია ცალკეული ჯგუფისთვის სპეციალური გრაფიკი ავაგოთ.

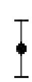
კოორდინატთა ღერძებზე დანაყოფები და გრაფიკი უკეთესია დასაწყისში ავაგოთ ფანქრით, ვინაიდან შესაძლებელია მოგვინდეს მასშტაბის შეცვლა ან არასწორად დასმული წერტილების გასწორება.

მას შემდეგ რაც მასშტაბი შერჩეულია სწორად და ექსპერიმენტული წერტილები დასმულია საჭირო სიზუსტით შეგვიძლია ექსპერიმენტული წერტილები გავამუქოთ და გავატაროთ მუქი მრუდი შესაბამისი ხელსაწყოთი. გრაფიკის აგების შემდეგ მას უნდა დავაწეროთ დასახელება, რომელიც უნდა მოიცავდეს მოკლე შინაარს იმისა თუ რას აჩვენებს ეს გრაფიკი.

ექსპერიმენტული მონაცემის ცდომილების საჩვენებლად ქსპერიმენტული წერტილი უნდა დავსვათ ცდომილების მაჩვენებელი მონაკვეთის შიგნით, როგორც ეს ნახ.12 – ზე არის ნაჩვენები.



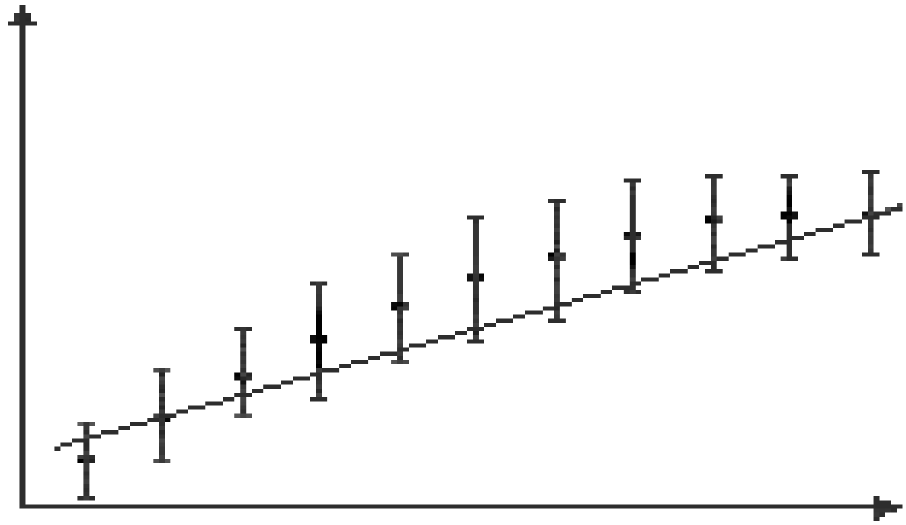
ან



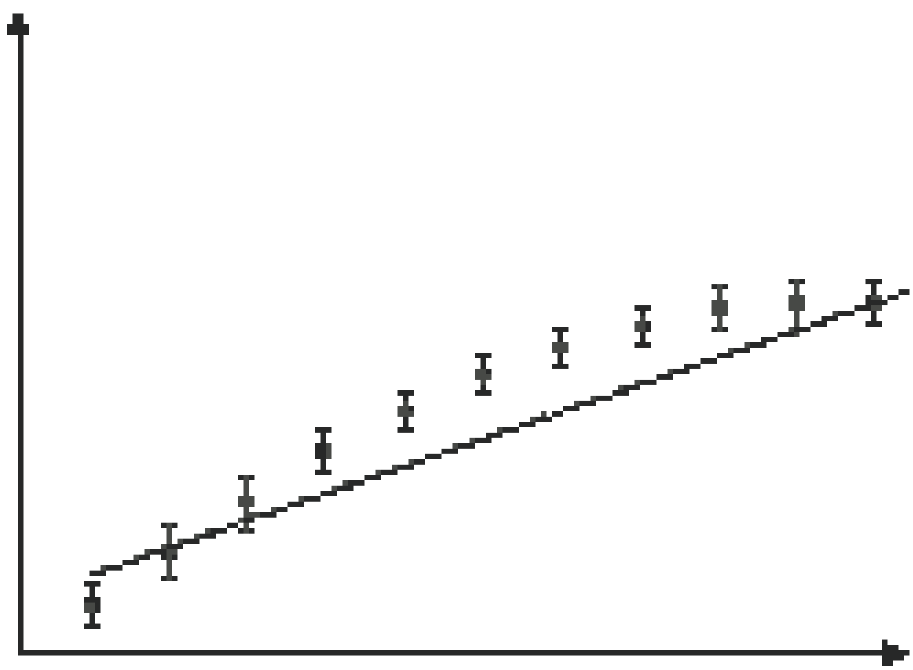
ნახ.12

ასეთი აღნიშვნების დატანა დიდ დროს მოითხოვს, ართულებს გრაფიკს და ამდენად ის უნდა გამოვიყენოთ მხოლოდ მაშინ, როდესაც ეს აუცილებელია,

ანუ როდესაც ცდომილებების სიდიდეზე დამოკიდებულია თეორიული მრუდიდან ექსპერიმენტული წერტილების გადახრა (ნახ.13 და ნახ. 14).



ნახ.13



ნახ.14

როგორც ვხედავთ ექსპერიმენტული წერტილების გადახრა წრფიდან ორივე გრაფიკზე ერთნაირია, მაგრამ 13 გრაფიკზე გადხრა ალბათ არაარსებითია, ხოლო 14 – ზე კი არსებითი. ცდომილებებს ჩვეულებრივ მიუთითებენ მაშინაც, როდესაც ის სხვადასხვაა სხვადასხვა ექსპერიმენტული წერტილისთვის.

1.3. გაზომვის სახეები

გაზომვები ორი სახისაა:

პირდაპირი და არაპირდაპირი.

პირდაპირი გაზომვა ეწოდება ისეთ გაზომვას, როდესაც ჩვენთვის საინტერესო სიდიდე იზომება უშუალოდ (მასა, სიგრძე, დროის ინტერვალი, ტემპერატურის ცვლილება და ა.შ.)

არაპირდაპირი გაზომვები ისეთი გაზომვებია, როდესაც ფიზიკური სიდიდე განისაზღვრება (გამოითვლება) სხვა, მასთან ფუნქციონალურად დაკავშირებული, ფიზიკური სიდიდეების უშუალო გაზომვის შედეგების გამოყენებით. მაგალითად თანაბარი წრფივი მოძრაობის სიჩქარე გამოითვლება გავლილი მანძილისა და შესაბამისი დროის გაზომვის საფუძველზე, სხეულის სიმკვრივე გამოითვლება მასისა და მოცულობის გაზომვის საფუძველზე და ა.შ.

1.4. გაზომვის ცდომილება. ცდომილების სახები

არცერთი გაზომვა არ შეიძლება ჩატარდეს აბსოლუტურად ზუსტად. მისი შედეგი ყოველთვის შეიცავს გარკვეულ შეცდომას, ან როგორც ხშირად ამბობენ, დამძიმებულია ცდომილებით. გაზომვების ჩატარებისას ჩვენ ვსარგებლობთ არა უშუალოდ ეტალონით არამედ მისი ასლით და თვითონ ეს ასლებიც ზუსტად არ არიან ეტალონის ტოლი, ვინაიდან მათი დამზადების დროსაც ადგილი აქვს გარკვეულ ცდომილებებს.

იმის საჩვენებლად თუ რამდენად ახლოსაა გაზომვის შედეგი ნამდვილ მნიშვნელობასთან, მიღებულ შედეგთან ერთად მიუთითებენ გაზომვის ცდომილებას. მაგალითად, ვთქვათ გავზომეთ ლინზის ფოკუსური მანძილი f და დავწერეთ, რომ

$$f = 256 \pm 2 \text{ მმ} \quad (1)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ფოკუსური მანძილი მოთავსებულია 254 და 258 მმ შორის. ამ ტოლობას ალბათური ხასიათი აქვს, ვინაიდან ჩვენ არ შეგვიძლია დარწმუნებით ვთქვათ, რომ სიდიდე ძევს მოცემულ საზღვრებში, არსებობს მხოლოდ ამის რაღაც გარკვეული ალბათობა და ამდენად (1) ტოლობა უნდა შევასოთ იმ ალბათობის მითითებით რა ალბათობითაც მას აზრი აქვს (ამის შესახებ ქვემოთ იქნება ლაპარაკი).

უნდა გავაცნობიეროთ, რომ რაღაც სიდიდის გაზომვისას ჩვენს მიერ დაშვებული ცდომილება არ იქნება ნაკლები იმ ცდომილებაზე, რომელსაც უშვებს გამზომი ხელსაწყო. უფრო გასაგებად, რომ ვთქვათ თუ გვაქვს სახაზავი რომლის სიგრძეც დადგენილია 0,1 % ცდომილებით (ანუ 1 მმ სიზუსტით 1 მეტრიანი სახაზავისთვის), ჩვენ ვერ გავზომავთ სიგრძეს, მაგალითად 0,01% სიზუსტით.

გაზომვის ამოცანას წარმოადგენს არა მარტო თვითონ გასაზომი სიდიდის პოვნა, არამედ გაზომვის ცდომილების დადგენაც. მაშასადამე ქსპერიმენტის წარმატებული ჩატარებისათვის საჭიროა:

1) ექსპერიმენტის ისე დაგეგმვა, რომ გაზომვის ცდომილება შეესაბამებოდეს დასმულ ამოცანას;

2) უნდა შეფასდეს მიღებული შედეგის სიზუსტე;

3) ჩატარდეს მიღებული შედეგების ანალიზი და გაკეთდეს სწორი დასკვნები.

არის თუ არა ყოველთვის საჭირო გაზომვების ჩატარება მაქსიმალური სიზუსტით? თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ რაც უფრო დიდი სიზუსტით მოვინდომებთ გაზომვის ჩატარებას მით უფრო ძნელია ამის გაკეთება, უნდა დავასკვნათ, რომ გაზომვა უნდა ჩატარდეს არა მაქსიმალური სიზუსტით არამედ მხოლოდ იმ სიზუსტით რასაც მოითხოვს მოცემული ამოცანა. მაგალითად, მაგიდის დამზადებისას სრულებით საკმარისია 0,5 სმ სიზუსტე რაც შეადგენს $\sim 0{,}5\%$; საკისრის ზოგიერთი დეტალის დამზადებისას აუცილებელია 0,001 მმ ანუ 0,01% სიზუსტე, მაგრამ სინათლის გამოსხივების სპექტრალური ხაზების ტალღის სიგრძის გაზომვისას ზოგჯერ აუცილებელია 10^{-11} სმ ანუ 10^{-5} % სიზუსტე. ამასთან ერთად უნდა ვიცოდეთ, რომ არცთუ იშვიათად გაზომვის ცდომილების შემცირება საშუალებას იძლევა, აღმოჩენილ იქნას ახალი კანონზომიერებები და ამის მრავალი მაგალითი არსებობს.

მაგალითად ცნობილია მასის შენახვის კანონი, რომლის მიხედვითაც ქიმიურ რეაქციაში მონაწილე ნივთიერებების მასათა ჯამი რეაქციამდე ტოლია რეაქციის შემდეგ მიღებული ნივთიერებების მასათა ჯამის. მაგრამ ქიმიური რეაქციის დროს ადგილი აქვს ენერგიის გამოყოფას ან შთანთქმას და აინშტაინის ფორმულის თანახმად $E = mc^2$ (E –გამოყოფილი ან შთანთქმული ენერგიაა, m - მასა, c - სინათლის სიჩქარე), ამიტომ მორეაგირე ნივთიერებების მასები განსხვავებული იქნება რეაქციის შემდეგ მიღებული ნივთიერების მასების ჯამის. ნახშირის წვისას ეს განსხვავება შეადგენს 1 გ-ს 3 000 ტ ნახშირზე. ამ განსხვავების შესამჩნევად საჭიროა გაზომვის ჩატარება ძალიან მაღალი სიზუსტით - $3 \cdot 10^{-8}\%$. ეს იმას ნიშნავს, რომ მასათა შენახვის კანონი ნახშირის წვისას სამართლიანია $3 \cdot 10^{-8}\%$ - მდე სიზუსტით გაზომვების ჩატარებისას. შევნიშნოთ, რომ ასეთი სიზუსტის მიღწევა აწონვით შეუძლებელია და ამიტომ აღნიშნული ცვლილება დადგენილ იქნა არაპირდაპირი მეთოდებით.

გაზომვის სიზუსტის გაზრდის სხვა სასარგებლო მაგალითია 1932 წელს წყალბადის მძიმე იზოტოპის – დეიტერიუმის აღმოჩენა, რომელიც მიღწეულ იქნა ჩვეულებრივი წყლის სიმკვრივის მაღალი სიზუსტით გაზომვით. დეიტერიუმი მხოლოდ უმნიშვნელოდ ზრდის წყლის სიმკვრივეს.

ზუსტად ასევე 1894 წელს რელეის მიერ ზუსტი გაზომვებით დადგენილ იქნა, რომ ჰაერიდან გამოყოფილი აზოტის სიმკვრივე რამდენადმე აღემატებოდა სუფთა ამიაკის დაშლით მიღებული აზოტის სიმკვრივეს. ეს სხვაობა ძალიან მცირე იყო, სულ რაღაც 5 მგ/ლ, მაგრამ მან რამსეის და რელეის საშუალება მისცა 1895 წელს აღმოეჩინათ ინერტული აირი – არგონი.

ცდომილებები სამი სახისაა: უხეში, სისტემატური და შემთხვევითი

უხეში ცდომილება ისეთი ცდომილებაა, რომელიც გამოწვეულია ექსპერიმენტატორის მიერ გაზომვის პირობების დარღვევით ან მისი უყურადღებობით, მაგალითად ექსპერიმენტატორმა დაკვირვებათა ცხრილში 11-ის ნაცვლად ჩაწერა 12. უხეში ცდომილება შეიძლება გამოწვეული ხელსაწყოს დაზიანებით, ექსპერიმენტში გაუთვალისწინებელი შემთხვევის ჩარევით და სხვა. უხეში ცდომილება როგორც წესი მთელი ექსპერიმენტის შემთხვევაში მხოლოდ ერთი-ორჯერ იჩენს თავს. უხეში ცდომილების აღმოჩენისას შესაბამისი მონაცემი უკუგდებულ უნდა იქნას და თუ ეს შესაძლებელია გაზომვები თავიდან ჩატარდეს. უხეში ცდომილებების თავიდან აცილების ერთ-ერთი გზაა გაზომვების ჩატარება მაქსიმალური ყურადღებით, იმავე სიდიდის გაზომვა სხვა ექსპერიმენტატორის მიერ და ა.შ. გაზომვის უხეში ცდომილების ერთ-ერთი გარეგანი მაჩვენებელია მისი მკვეთრი განსხვავება სხვა გაზომილი სიდიდეებისგან. არსებობს უხეში ცდომილების გამორიცხვის ზოგიერთ მათემატიკურ მეთოდი, რომლებსაც ქვემოთ შევეხებით.

სისტემატური ცდომილებები ეწოდებათ ცდომილებებს, რომლებიც გამოწვეულია ისეთი ფაქტორებით, რომლებიც ერთნაირად მოქმედებენ ერთიდაიმავე გაზომვების მრავალჯერადი ჩატარების დროს. სისტემატური ცდომილების მაგალითია თეფშებიანი სასწორით გაზომვების ჩატარება არაზუსტი საწონებით. ვთქვათ გვაქვს საწონი რომლის წონა ნამდვილი წონისგან (ვთქვათ 1000 გ) განსხვავდება 0,1 გ-ით, მაშინ ჩვენს მიერ აწონილი სხეულის წონა ნამდვილისგან მეტი ან ნაკლები იქნება 0,1 გ-ით და ნამდვილი წონის დასადგენად ცხადია მიღებულ მნიშვნელობას უნდა მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ 0,1 გ. სისტემატური ცდომილების მეორე მაგალითია სხეულის აწონვა ჰაერში. არქიმედეს კანონის თანახმად ჰაერში აწონილი სხეულის წონა განსხვავდება ნამდვილი წონისგან ამ სხეულის მიერ გამოდევნილი ჰაერის წონით (გავიხსენოთ არქიმედეს კანონი: სითხეში ან აირში მოთავსებულ სხეულზე მოქმედებს ვერტიკალურად ზევით მიმართული ამომგდები ძალა, რომელიც ამ სხეულის მიერ გამოდევნილი სითხის ან აირის წონის ტოლია). ეს მსჯელობა სამართლიანია საწონისთვისაც. სწორი წონის მისაღებად, აწონვის პროცესის ჩატარების შემდეგ საჭიროა სათანადო შესწორების შეტანა, თუ ამას

არ გავაკეთებთ გაზომვის შედეგები “დამძიმებული” იქნება სისტემატური ცდომილებით.

მოყვანილი ორივე მაგალითი სისტემატურ ცდომილებას მიეკუთვნება, მაგრამ მათ შორის არსებობს არსებითი განსხვავებაც. მეორე შემთხვევაში ადვილად შეიძლება გამოვთვალოთ წონის დანაკარგი. ამისათვის საჭიროა ვიცოდეთ ჰაერის, საწონის მასალის და ასაწონი სხეულის სიმკვრივე, ასევე საწონისა და ასაწონი სხეულების მოცულობები. სიმკვრივეების მნიშვნელობები საკმაოდ მაღალი სიზუსტით შეიძლება ავიღოთ ცნობარებიდან. ამისგან განსხვავებით პირველ შემთხვევაში საწონის წონაზე შესწორება უმრავლეს შემთხვევაში უცნობია. მის შესახებ მხოლოდ იმის თქმა შეიძლება, რომ ის არ აღემატება 0.1 გ-ს, ანუ 0,01%. ამდენად საწონის არაზუსტ სიდიდეზე შესწორების შეტანა შეუძლებელია და შეგვიძლია დავწეროთ მხოლოდ ის, რომ სხეულის წონა ტოლია

$$P = (1000 \pm 0{,}1)\ \text{გ}$$

თუ საწონის წონის სხვა რამ არ არის ცნობილი, გარდა იმისა, რომ მისი ცდომილება არ აღემატება 0,1 გ-ს, არავითარი სხვა გაზომვები ამ საწონებით უფრო ზუსტ მნიშვნელობებს ვერ მოგვცემს.

სისტემატური ცდომილების წყარო შეიძლება იყოს გამზომი ხელსაწყოს არასწორი რეგულირება, რამაც შეიძლება გამოიწვიოს ათვლის დასაწყისის წანაცვლება ერთ ან მეორე მხარეს რაღაც მუდმივი სიდიდით, თუ ხელსაწყოს სკალა თანაბარია, ხოლო თუ სკალა არათანაბარია მაშინ ათვლის დასაწყისის წანაცვლება შეიძლება სხვა გარკვეულ კანონს ექვემდებარებოდეს. სისტემატური ცდომილების სხვა მაგალითია გარეშე პირობების ცვლილება, მაგალითად ტემპერატურის, თუ ცნობილია მათი გავლენა გაზომვის შედეგებზე.

სისტემატური ცდომილების გამოვლენა მოითხოვს სპეციალური კვლევების ჩატარებას (მაგალითად ერთიდაიგივე სიდიდის გაზომვა სხვადასხვა მეთოდებით ან ცნობილი სიდიდეების ეტალონების გაზომვების ჩატარება ერთიდაიგივე ხელსაწყოებით).

თუ სისტემატური ცდომილებები დადგენილია ისინი შეიძლება ადვილად გავითვალისწინოთ შესაბამისი შესწორებების შეტანით.

შემთხვევითი ცდომილებები ეწოდებათ ისეთ ცდომილებებს, რომლებიც გაზომვის შედეგებში რჩებიან მას შემდეგ რაც გამორიცხულია ყველა უხეში ცდომილება და სისტემატური ცდომილებები. შემთხვევითი ცდომილებები გამოწვეულია მრავალი ისეთი ფაქტორით, რომელთა გავლენაც იმდენად უმნიშვნელოა, რომ მათი გამოყოფა და გათვალისწინება გაზომვის ტექნიკის განვითარების მოცემულ ეტაპზე შეუძლებელია. მაგალითად შემთხვევითი ცდომილების მიზეზი შეიძლება იყოს ჰაერის რხევა თეფშებიანი სასწორით აწონვის დროს, როდესაც ეს რხევა სხდასხვანაირად მოქმედებს სასწორის თეფშებზე; მტვრის ნაწილაკები, რომლებიც შეიძლება განლაგდნენ საწონებზე; სხვადასხვა ხახუნი სასწორის მარცხენა და მარჯვენა ბერკეტებში და ა.შ.

შემთხვევითი ცდომილება ამ ფაქტორების ჯამური ზემოქმედების შედეგია. შემთხვევითი ცდომილების თავიდან აცილება შეუძლებელია. მათი მოშორება გაზომვის თითოეული შედეგიდან ასევე შეუძლებელია, თუმცა ალბათობის თეორიის გამოყენებით ხერხდება მათი გავლენის შეფასება გასაზომ სიდიდეზე, რაც საბოლოოდ საშუალებას იძლევა გასაზომი სიდიდე დადგინდეს რაც შეიძლება მცირე ცდომილებით, იმ ცდომილებებთან შედარებით, რომლებსაც ცალკე აღებული გაზომვები იძლევიან.

1.5. აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებები

ამა თუ იმ გაზომვის სიზუსტეს ახასიათებენ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებებით.

გაზომვის აბსოლუტური ცდომილება $\Delta \boldsymbol{x}$ ეწოდება გაზომილ $\boldsymbol{x}$ სიდიდესა და გასაზომი სიდიდის ნამდვილ $\boldsymbol{x_{ნ}}$ მნიშვნელობას შორის სხვაობის აბსოლუტურ მნიშვნელობას და მისი ერთეულია გასაზომი სიდიდის ერთეული. ვინაიდან გასაზომი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობის განსაზღვრა შეუძლებელია, იყენებენ მის მოქმედ მნიშცნელობას $\boldsymbol{x_{მ}}$. მოქმედი მნიშვნელობის პოვნა ხდება ცდების მეშვეობით მაღალი სიზუსტის მეთოდებისა და ხელსაწყოების გამოყენებით. ის უმნიშვნელოდ განსხვავდება ნამდვილი მნიშვნელობისგან და პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას შეიძლება ნამდვილი მნიშვნელობის ნაცვლად ავიღოთ მოქმედი მნიშვნელობა. მაშასადამე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta \boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x_{მ}} - \boldsymbol{x}|$$

აბსოლუტური ცდომილება სრულყოფილად ვერ ახასიათებს გაზომვის ხარისხს. მაგალითად თუ ავტოკალმის სიგრძეს გავზომავთ 1 სმ სიზუსტით, ეს იქნება ძალიან დაბალი სიზუსტე (≈ 10%), მაგრამ თუ ამავე 1 სმ სიზუსტით გავზომავთ მანძილს თბილისიდან ბათუმამდე ეს მეტისმეტად მაღალი სიზუსტე იქნება (≈0,8$\cdot \mathbf{10^{-5}}$%).

ამდენად აბსოლუტური ცდომილების მითითება ბევრ არაფერს გვეუბნება ნამდვილი სიზუსტის შესახებ, თუ ერთმანეთს არ შევადარებთ აბსოლუტურ ცდომილებას და თვით გასაზომი სიდიდის მნიშვნელობას. ამ თვალსაზრისით გაცილებით მეტ და რაც მთავარია ზუსტ ინფორმაციას შეიცავს ფარდობითი ცდომილება. გაზომვის ფარდობითი ცდომილება $\boldsymbol{\delta}$, ეწოდება აბსოლუტური ცდომილების ფარდობას გასაზომი სიდიდის ნამდვილ (მოქმედ) მნიშვნელობასთან და ხშირად გამოისახება პროცენტებით, ე.ი. გვაქვს

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x_{მ}}} \cdot \mathbf{100}\%$$

გარდა ამისა აბსოლუტური ცდომილება, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, იზომება იმავე ერთელებში რა ერთეულებში იზომება გასაზომი სიდიდე, და თუ

ზომის ერთეული შევცვალეთ მისი მნიშვნელობაც შეიცვლება, რაც გარკვეულ უხერხულობებს ქმნის.

აბსოლუტური ცდომილება ახასიათებს მეთოდს, რომელიც გაზომვისთვის იქნა არჩეული, ხოლო ფარდობითი ცდომილება კი - გაზომვის ხარისხს.

გაზომვის სიზუსტე ეწოდება ფარდობითი ცდომილების შებრუნებულ სიდიდეს $\mathbf{1/\delta}$.

1.6. სისტემატური ცდომილებები

სისტემატური ცდომილებები შეიძლება ზოგიერთ შემთხვევაში იმდენად დიდი იყოს, რომ მნიშვნელოვნად დაამახინჯოს გაზომვის შედეგები. სისტემატური ცდომილებები შეიძლება ოთხ ჯგუფად დაიყოს:

1) ცდომილებები, რომელთა ბუნებაც ჩვენთვის ცნობილია და რომელთა სიდიდეც შეიძლება ზუსტად იქნას განსაზღვრული. ასეთი ცდომილებები შეიძლება თავიდან იქნას აცილებული შესაბამისი შესწორებების შეტანით. მაგალითად სიგრძის გაზომვისას შესაძლებელია აუცილებელი გახდეს შესწორებების შეტანა, რომლებიც დაკავშირებულია გასაზომი სხეულის და საზომი სახაზავის ზომების ტემპერატურულ ცვლილებებთან; წონის გაზომვისას – ცდომილება, რომელიც გამოწვეულია ჰაერში წონის "დანაკარგთან", რომელიც თავის მხრივ გამოწვეულია ჰაერის ტემპერატურაზე, ტენიანობაზე, ატმოსფერულ წნევაზე და ა.შ. ცდომილებების ასეთი წყაროები ზედმიწევნით გულდასმით უნდა გაანალიზდეს, განისაზღვროს შესწორებები და გათვალისწინებულ იქნას საბოლოო შედეგებში. ამასთან ნებისმიერი გაზომვის დროს უნდა გამოვიჩინოთ გონიერი მიდგომა. ვნახოთ ეს სიგრძის გაზომვის მაგალითზე. ვთქვათ ვზომავთ ბრინჯაოს ცილინდრის დიამეტრს 0^0C ტემპერატურაზე დამზადებული ფოლადის სახაზავით და გაზომვას ვაწარმოებთ 25^0C ტემპერატურაზე. დავუშვათ ცილინდრის დიამეტრია 10 სმ და გვინდა მისი სიდიდის დადგენა 0^0C - ზე. ბრინჯაოს წრფივი გაფართოების კოეფიციენტი შეადგენს $19 \cdot 10^{-6}$ 1/გრად, ხოლო ფოლადის - $11 \cdot 10^{-6}$ 1/გრად. ადვილი საჩვენებელია, რომ 25^0C -მდე გახურებისას სახაზავის დაგრძელება იქნება 0,027 მმ, ხოლო დიამეტრის – 0,047 მმ. ამ სიდიდეების სხვაობა ტოლია 0,02 მმ-ის, რაც შეადგენს ჩვენი გაზომვის შესწორებას.

მოვიყვანოთ სხვა მაგალითი: ვთქვათ სხეულს ვწონით არათანაბარი სიგრძის მხრების მქონე ბერკეტიანი სასწორით. დავუშვათ მხრებს შორის სხვაობა შეადგენს 0.001 მმ-ს. თუ მხრების მთლიანი სიგრძეა 70 მმ და ასაწონი სხეულის მასაა 200 გ მარტივი გამოთვლებით დავადგენთ, რომ სისტემატური ცდომილება იქნება 2.68 მგ. ამ გაზომვის სისტემატური ცდომილების გამორიცხვა შესაძლებელია აწონვის სპეციალური მეთოდების გამოყენებით (გაუსის მეთოდი, მენდელეევის მეთოდი და ა.შ.)

ჩვეულებრივ ფოლადის სახაზავს გააჩნია მილიმეტრული დანაყოფები. თუ დავუშვებთ, რომ თვალით შესაძლებელია შედარებით დამაჯერებლად შევაფასოთ 0.2 მმ-ის ტოლი დანაყოფი, მაშინ 0.2 მმ იქნება ის სიზუსტე, რომელიც მიიღწევა მოცემული გამზომი ხელსაწყოთი. სწორედ ასეთი სიზუსტითაა დატანილი დანაყოფები სახაზავზე. როგორც ვხედავთ ტემპარატურული ცდომილება 0,02 მმ გაცილებით ნაკლებია სახაზავის დანაყოფის ფასზე და ამდენად ამ ცდომილებაზე შესწორების შეტანა უაზროა. სხვა საქმეა თუ გაზომვას ვაწარმოებთ მიკრომეტრით – ხელსაწყოთი, რომელიც გაზომვის საშუალებას იძლევა 0,001 მმ სიზუსტით. ამ შემთხვევაში შესწორების – 0,02 მმ შეყვანა არა მარტო მიზანშეწონილია არამედ აუცილებელიც.

2) ცნობილი წარმოშობის ცდომილებები, რომელთა სიდიდეც უცნობია, მაგრამ ვიცით, რომ ის არ აღემატება რაღაც გარკვეულ მნიშვნელობას. მათ რიცხვს მიეკუთვნება ჩვენს მიერ ნახსენები გამზომი ხელსაწყოების ცდომილებები, რომლებიც ზოგჯერ ხელსაწყოს კლასით განისაზღვრება. თუ ხელსაწყოს სკალაზე ნაჩვენებია სიზუსტის კლასი მაგ. 0.5, ეს იმას ნიშნავს, რომ ხელსაწყოს ჩვენება სწორია სიზუსტით მთელი სკალის 0.5%-ით. სხვანაირად, რომ ვთქვათ თუ ხელსაწყოს მთელი სკალა შეესაბამება მაგ. 150 ვოლტს, მაშინ გაზომვის ცდომილება არ აღემატება 0.75 ვოლტს. ცხადია ასეთი ხელსაწყოთი შეუძლებელია გაზომვის ჩატარება მაგალითად 0.01 ვ სიზუსტით თუ სპეციალურ რაიმე კომპენსაციურ სქემებს არ შევქმნით.

ზოგჯერ ხელსაწყოს კორპუსზე დატანილია მაქსიმალური ცდომილებების მიშვნელობები, ზოგჯერ ცდომილებები მითითებულია პასპორტში. ჩვეულებრივ მოცემულია აბსოლუტური ცდომილების მნიშვნელობა, რომელიც იძულებული ვართ ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ მთელ სკალაზე, თუ არ არის მოცემული შესწორების სპეციალური ცხრილი.

ზემოთ აღწერილი სისტემატური ცდომილებების გამორიცხვა შეუძლებელია, მაგრამ როგორც წესი ცნობილია მათი მაქსიმალური სიდიდეები და მაგალითად თუ ძაბვა გავზომეთ ზემოთ ნახსენები ვოლტმეტრით და მივიღეთ მნიშვნელობა $\boldsymbol{V} =$ 47.6 ვ ეს იმას ნიშნავს, რომ ძაბვის მნიშვნელობა ძევს 46.8 და 48.4 შორის, ანუ შეგვიძლია დავწეროთ $\boldsymbol{V} = (\mathbf{47.6} \pm \mathbf{0.75})$ვ.

კიდევ ერთი მაგალითი: ვთქვათ მიკრომეტრის პასპორტში წერია, რომ “დასაშვები ცდომილება შეადგენს $\pm\mathbf{0.004}$ მმ-ს $+\mathbf{20} \pm \mathbf{4^0}\boldsymbol{C}$ –ზე” ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული მიკრომეტრით გაზომილი სხეულის ზომას პასპორტში მითითებულ ტემპერატურაზე გააჩნია $\pm\mathbf{0.004}$ მმ ცდომილება გაზომვის ნებისმიერი შედეგისას.

3) სისტემატური ცდომილებები, რომლებიც განპირობებულია გასაზომი ობიექტის თვისებებით. ეს ცდომილებები ხშირად დაიყვანება შემთხვევით ცდომილებებზე. მაგალითად ვთქვათ გვინდა რაიმე მასალის ელექტროგამტარობის დადგენა, რისთვისაც ავიღეთ გამტარის ნაჭერი, რომელსაც გააჩნია რაიმე დეფექტი (გამსხვილება, არაერთგვაროვნება და ა.შ),

ცხადია ელექტროგამტარობის განსაზღვრაში დაშვებული იქნება გარკვეული ცდომილება. განმეორებითი გაზომვა მოგვცემს იმავე შედეგს, ანუ დაშვებულია გარკვეული სისტემატური ცდომილება. გავზომოთ ასეთი გამტარის რამდენიმე ნაჭერის ელექტროგამტარობა და მოვძებნოთ საშუალო მნიშვნელობა, რომლის სიდიდეც შეიძლება მეტი ან ნაკლები იყოს ცალკეული გამტარების ელექტროგამტარობის სიდიდიდეზე, შესაბამისად ამ გაზომვების ცდომილებები შეიძლება მივაკუთვნოთ შემთხვევით ცდომილებებს.

4) სისტემატური ცდომილების მესამე სახე ყველაზე სახიფათოა. ეს ის ცდომილებებია, რომელთა არსებობის შესახებ ჩვენ ეჭვიც კი შეიძლება არ გვქონდეს მაგრამ მათი ზეგავლენა მნიშვნელოვანი შეიძლება იყოს. ისინი თავს იჩენენ როგორც წესი რთული გაზომვების დროს და ხშირად როცა გვგონია, რომ გაზომვა ჩატარებულია 2 – 3% სიზუსტით, ამ დროს ცდომილებამ შეიძლება გადააჭარბოს გასაზომი სიდიდის მნიშვნელობას 2-3 ჯერ და მეტჯერაც. ასე მაგალითად თუ ვადგენთ რაღაც ლითონის ბირთვის სიმკვრივეს და ამისთვის გავზომეთ წონა და მოცულობა, დავუშვებთ ძალიან უხეშ ცდომილებას, თუ ეს ბირთვი შიგნით შეიცავს სიღრუვეს, რომლის შესახებაც ჩვენ წარმოდგენაც არ გვქონდა და რომელიც ბირთვის ჩამოსხმის დროს გაჩნდა.

საჭიროა გვახსოვდეს შემდეგი მარტივი წესები:

1) თუ სისტემატური ცდომილება განმსაზღვრელია, ანუ თუ მისი სიდიდე არსებითად აღემატება შემთხვევით ცდომილებას, რომელიც მოცემულ მეთოდს ახასიათებს, საკმარისია გაზომვა ჩატარდეს მხოლოდ ერთხელ;

2) თუ შემთხვევითი ცდომილება აღემატება სისტემატურს, გაზომვები უნდა ჩატარდეს რამდენჯერმე. გაზომვათა რაოდენობა იმდენი უნდა იყოს, რომ საშუალო არითმეტიკულის შემთხვევითი ცდომილება ნაკლები იყოს სისტემატურ ცდომილებაზე, ისე, რომ ეს უკანასკნელი იყოს მთლიანი ცდომილების განმსაზღვრელი.

ამასთან უნდა აღვნიშნოთ, რომ შეიძლება მხოლოდ ერთი გაზომვით დავკმაყოფილდეთ მხოლოდ მაშინ, როდესაც რაღაც სხვა წყაროებიდან ცნობილია, რომ შემთხვევითი ცდომილების სიდიდე ნაკლებია სისტემატურზე. ეს ხდება მაშინ, როდესაც გაზომვებს ვაწარმოებთ მეთოდით, რომლის ცდომილებები რაღაც ხარისხით ცნობილია. მაგალითად, ვთქვათ ვზომავთ კალმის სიგრძეს სახაზავით, რომლის დანაყოფის ფასია 1 მმ, მაშინ შეიძლება დარწმუნებული ვიყოთ, რომ შემთხვევითი ცდომილება გაცილებით ნაკლებია 1 მმ-ზე და შეიძლება დავკმაყოფილდეთ ერთი გაზომვით. ზუსტად ასევე ჩვენ ვიცით, რომ ჩვეულებრივი სავაჭრო სასწორზე აწონვისას შემთხვევითი ცდომილება ნაკლებია 5 გ-ზე, მაშინ როდესაც ასეთი სასწორის დანაყოფის ფასიც 5 გ-ია და შესაბამისად სისტემატური ცდომილება ახლოსაა ამ მონაცემთან. შესაბამისად ასეთ სასწორზე აწონვა უნდა ჩავატაროთ ერთხელ, რაც პრაქტიკაში ასეც ხორციელდება. პირიქით, ზოგიერთი მარკის ზუსტი

ლაბორატორიული სასწორის შემთხვევითი ცდომილება მეტია სისტემატურ ცდომილებაზე და ამდენად გაზომვები უნდა ჩატარდეს რამდენიმეჯერ.

1.7.კავშირი სისტემატურ ცდომილებასა და შემთხვევით ცდომილებას შორის

ცნობილია მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან სისტემატური ცდომილებები გადაყვანილ იქნან შემთხვევითში, მათ რანდომიზაცია ეწოდება. ამ მეთოდებით პრაქტიკულად გამოირიცხება მრავალი უცნობის სიტემატური ცდომილება.

მოვიყვანოთ ამის ორი მაგალითი. ვთქვათ გვინდა განვსაზღვროთ სასოფლო სამეურნეო ნაკვეთის მოსავლიანობა. ამისათვის ავიღოთ მოსავალი ამ ნაკვეთის რაღაც მცირე ფართობზე და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ მთლიანი ნაკვეთის საკონტროლო ფართის ფარდობასთან. ამრიგად მიღებული სიდიდე დამძიმებული იქნება სისტემატური ცდომილებით, რომელიც დაკავშირებულია იმასთან, რომ მოსავლიანობა ნაკვეთის ერთი ნაწილიდან მეორეზე გადასვლისას იცვლება. იმისათვის, რომ ეს თავიდან ავიცილოთ საჭიროა მთლიანი ნაკვეთი დავყოთ პატარა ერთნაირი ფართობის კვადრატებად, დავნომროთ ისინი, დავიტანოთ ნომრები ქაღალდებზე და ლატარიის წესით ამოვიღოთ. ამრიგად ნაკვეთის სხვადასხვა უბანში სხვადასხვა მოსავლიანობით გამოწვეულ სისტემატურ ცდომილებას ჩვენ გადავიყვანთ შემთხვევით ცდომილებაში.

განვიხილოთ სხვა მაგალითი: ვთქვათ ვზომავთ ღეროს დაგრძელებას გაჭიმვით. თუ გვეცოდინება სიგრძის ცვლილება და ღეროს დრეკადობის მახასიათებელი სიდიდეების ტემპერატურაზე დამოკიდებულება, შეგვიძლია შევიტანოთ შესაბამისი შესწორებები. იმ შემთხვევაში თუ არ ვიცით აღნიშნული სიდიდეების ტემპერატურისგან დამოკიდებულება საჭიროა გაზომვები ჩავატაროთ შემთხვევით აღებულ ტემპერატურებზე შეგვიძლია. ამ შემთხვევაში ცდომილება, რომელიც გამოწვეულია ტემპერატურის ცვლილებით იქნება შემთხვევითი ცდომილება, ხოლო საბოლოოო შედეგი – შეესაბამება საშუალო ტემპერატურას.

ცხადია სისტემატური ცდომილების გამორიცხვის ასეთი ხერხის გამოყენება ყოველთვის არაა შესაძლებელი. ამდენად მიზანშეწონილია სისტემატური და შემთხვევითი ცდომილებების ერთმანეთისაგან გამოყოფა.

თავი 2

ალბათობისა და შემთხვევითი ცდომილებების თეორიის ელემენტები

2.1. შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა

ხდომილობა ეწოდება რაიმე მოვლენას, რომელიც შეიძლება მოხდეს ან არა. ხდომილობა სამი სახისაა აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი.

ხდომილობას ეწოდება აუცილებელი თუ ცდის ჩატარების მოცემულ პირობებში ის აუცილებლად მოხდება. მაგალითად თუ ურნაში დევს ხუთი ცალი შავი ბურთი, იქიდან ამოღებული ერთი ბურთი აუცილებლად შავი იქნება. ხდომილობას ეწოდება შეუძლებელი თუ თუ ცდის ჩატარების მოცემულ პირობებში ის ვერ მოხდება. მაგალითად თუ ურნაში დევს მხოლოდ შავი ბურთები იქიდან თეთრი ბურთის ამოღება შეუძლებელია. ხდომილობას ეწოდება შემთხვევითი თუ ცდის მოცემულ პირობებში ის შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს. მაგალითად თუ ყუთში დევს ერთი შავი და ერთი თეთრი ბურთი, იქიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთი ან შავი იქნება ან არა. მოვიყვანოთ შემთხვევითი და არაშემთხვევითი ხდომილობების მაგალითები. მზის დაბნელების დასაწყისი და დასასრული შესაძლებელია ზუსტად იქნას ნაწინასწარმეტყველები და ამდენად ის არ მიეკუთვნება შემთხვევით ხდომილებას. ასევე არაა შემთხვევითი ხდომილება მატარებლის მოსვლა სადგურში ვინაიდან მატარებლები მოძრაობენ წინასწარ განსაზღვრული გრაფიკით. მაგრამ ტაქსის მოსვლა სადგურში შემთხვევითი მოვლენაა, ვინადან ის წინასწარ არაა ზუსტად გაწერილი.

უფრო დეტალური განხილვა გვიჩვენებს, რომ მოყვანილ ორ მაგალითს შორის მკვეთრი განსხვავების მითითება ყოველთვის არაა შესაძლებელი.

მართლაც, მატარებლის სადგურზე მოსვლა მითითებულია საათებსა და წუთებში. შემთხვევითი არაა, რომ მაგალითად მატარებელი ბათუმი-თბილისი თბილისის სადგურში შემოდის 6 სთ-და 15 წთ-ზე. მაგრამ თუ უფრო ზუსტად დავაკვირდებით მატარებლის გაჩერებას, მაშინვე დავრწმუნდებით, რომ ყოველდღე ეს ხდება სხვადასხვა დროს: დღეს მაგალითად ეს მოხდა 6 სთ-ზე, 15 წთ-ზე და 19 წმ-ზე., გუშინ 6 სთ-ზე, 15 წთ-ზე და 56 წმ-ზე, გუშინწინ 6 სთ-ზე, 15 წთ-ზე და 8 წმ-ზე და ა.შ. ამდენად ბათუმი-თბილისის მატარებლის ჩამოსვლა თბილისში წამების სიზუსტით შემთხვევითი მოვლენაა, იგივე მოვლენა წუთების სიზუსტით – კანონზომიერი. ზუსტად იგივე შეიძლება ითქვას მზის დაბნელების შესახებ. ის გამოთვლილია მზის სისტემის სხეულების მოძრაობის კანონების საფუძველზე გარკვეული სიზუსტით. სწორედ ეს განაპირობებს მზის დაბნელების დასაწყისისა და დამთავრების სიზუსტის განსაზღვრას. ამ კუთხით მზის დაბნელება არაა შემთხვევითი მოვლენა, მაგრამ იმ სიზუსტეზე მეტი სიზუსტით რა სიზუსტითაც დადგენილია პლანეტების მოძრაობის კანონები მზის დაბნელება შემთხვევითი მოვლენაა.

სპეციალურად ჩატარებული გამეორებადი ცდები (ექსპერიმენტები) თავიანთი შედეგების მიხედვით შეიძლება იყოს კანონზომიერი ან შემთხვევითი.

ცდას ეწოდება კანონზომიერი, თუ ცდის ჩატარებამდე შესაძლებელია მისი შედეგების ცალსახად წინასწარმეტყველება და მას არ გააჩნია ურთიერთგამორიცხავი შედეგები. მაალითად მაგიდიდან რამდენჯერაც არ უნდა ჩამოვაგდოთ ბურთი ის ყოველთვის დაეცემა იატაკზე. შევნიშნოთ, რომ ურთიერთგამორიცხავი ხდომილობები ეწოდებათ ისეთ ხდომილობებს, როდესაც ერთი მათგანის განხორციელების შემთხვევაში სხვა ხდომილობები

გამოირიცხება. მაგალითად ერთი კამათელის გაგორებისას თუ ამოვიდა 3 წერტილი ის გამორიცხავს სხვა რაოდენობის წერტილების ამოსვლას. არაურთიერთგამომრიცხავი (თავსებადი) ხდომილობების განხორციელების შემთხვევაში ერთი ხდომილობის განხორციელება ხელს არ უშლის მეორე ხდომილობის განხორციელებას. მაგალითად ვთქვათ ვაგორებთ ორ კამათელს, A ხდომილობა იყოს პირველ კამათელზე 6 წერტილის ამოსვლა, ხოლო B - მეორეზე 5 წერტილი ამოსვლა. ცხადია პირველი ხდომილობა ხელს არ უშლის მეორეს და პირიქით.

ცდას ეწოდება შემთხვევითი, თუ ცდის ჩატარებამდე შეუძლებელია მისი შედეგის წინასწარმეტყველება, მაგრამ შესაძლებელია ჩასატარებელი ცდის ყველა ურთიერთგამომრიცხავი ხდომილობის დასახელება. შემთხვევითი ცდის მარტივი მაგალითია ერთი კამათელის გაგორება. ცხადია ამ შემთხვევაში შეიძლება ამოვიდეს 1, 2, 3, 4, 5, 6 წერტილი. ე.ი. სულ შესაძლებელია ექვსი ურთიერთგამორიცხავი ხდომილობა, თითოეული მათგანი ელემენტარულ ხდომილობას წარმოადგენს. მაშასადამე ელემენტარული ხდომილობა ეწოდება მოცემული ცდის ყველა შესაძლო შედეგს, თუ ის ამავე ცდის სხვა შედეგებთან წყვილ-წყვილად არათავსებადია.

რაიმე A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობას ეწოდება ისეთ C ხდომილობას, რომელის განხორციელების შემთხვევაში ადგილი არა აქვს A ხდომილობის განხორციელებას და აღინიშნება სიმბოლოთი $\bar{A}$. მაგალითად ვთქვათ A არის ერთ კამათელზე კენტი რაოდენობის წერტილების ამოსვლა $A = \{1,\ 3,\ 5\}$ მაშინ მისი საწინააღმდეგო ხდომილობა იქნება $\bar{A} = \{2,\ 4,\ 6\}$.

A და B ხდომილობებს თავსებად ხდომილობებს უწოდებენ, თუ A და B ხდომილობების თანაკვეთა ხდება, ხოლო თუ თანაკვეთას ადგილი არა აქვს მაშინ ხდომილობებს არათავსებად ხდომილობებს უწოდებენ. ორი A და B ხდომილობების თანაკვეთა ეწოდება ისეთ C ხდომილობას, რომლის შემადგენელი ერთი ელემენტარული ხდომილობა მაინც ერთდროულად წარმოადგენს როგორც A ხდომილობის ასევე B ხდომილობის ელემენტარულ ხდომილობას. თუ თუ A და B ხდომილობების თანაკვეთა არ ხდება, მაშინ მათ არათავსებად ხდომილობებს უწოდებენ.

ხდომილობას დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ ერთი მათგანის განხორციელება ან არ განხორციელება არანაირ გავლენას არ ახდენს მეორე ხდომილობის განხორციელებაზე ან არ განხორციელებაზე. მაგალითად როცა ვაგორებთ ორ კამათელს, მაშინ პირველ კამათელზე ამოსული წერტილების რაოდენობა არავითარ გავლენას არ ახდენს მეორე კამათელზე ამოსული წერტილების რაოდენობაზე.

მოკლედ განვიხილოთ ისეთი ცნებები, როგორებიცაა ფარდობითი სიხშირე და ალბათობა. ვთქვათ ვაგდებთ მონეტას და გვაინტერესებს “საფასურის” ან “ბორჯღალის” მოსვლა თუ როგორ არის დაკავშირებული მონეტის აგდების რაოდენობასთან. ვთქვათ 100 აგდებისას “საფასური” ამოვიდა 44-ჯერ, ხოლო

“ბორჯღალი” – 56-ჯერ. მაშინ ვიტყვით, რომ “საფასურის” ამოსვლის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{44}{100} = 0{,}44$ ან 44%, ბორჯღალის ამოსვლის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{56}{100} = 0{,}56$ ან 56%. ვთქვათ 200 ცდის შემდეგ შესაბამისად “საფასური” ამოვიდა 108-ჯერ, ხოლო “ბორჯღალი” – 92-ჯერ, მაშინ ვიტყვით რომ “საფასურის” ამოსვლის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{108}{100} = 0{,}54$ ან 54%, ხოლო “ბორჯღალის” ამოსვლის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{92}{200} = 0{,}46$ ან 46%. როგორც სპეციალურად ჩატარებულმა ცდებმა აჩვენეს ცდების რიცხვის შემდგომი ზრდისას როგორც “საფასურის” ისე “ბორჯღალის” ამოსვლის ფარდობითი სიხშირე მერყეობს 50% ფარგლებში.

მოცემულ ცდაში რომელიმე შემთხვევითი ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ეწოდება, განხორციელებული ხდომილობების რაოდენობის შეფარდებას ცდების მთლიან რაოდენობასთან.

მოცემულ ცდაში რომელიმე შემთხვევითი ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ეწოდება განხორციელებული ხდომილობის რაოდენობის შეფარდებას ცდების საერთო რაოდენობასთან.

რამდენიმე ხდომილობას ტოლშესაძლო ეწოდება, თუ მათი განხორციელების შანსი მოცემულ ცდაში ერთნაირია. მაგალითად ერთი კამათელის გაგორებისას 1, 2, 3, 4, 5, 6 რაოდენობის წერტილების ამოსვლის შანსი ერთნაირია და თითოეული მათგანის ამოსვლა კი - ტოლშესაძლო. A ხდომილობის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობა ეწოდება იმ ხდომილობას, რომლის განხორციელებაც გვსურს მოცემულ ცდაში.

მაგალითად თუ ვაგორებთ ერთ კამათელს და გვსურს ლუწი რაოდენობის წერტილების ამოსვლა, მაშინ ამ ცდის ხელშემყწობი ელემენტარული ხდომილობები იქნება 2, 4, 6 წერტილების ამოსვლა.

რაიმე ტოლშესაძლო ელემენტარული ხდომილობებისგან შემდგარი A ხდომილობის ალბათობა ეწოდება ამ A ხდომილობების ხელშემწყობი ხდომილობების რაოდენობის შეფარდებას ამავე A ხდომილობის შემადგენელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობასთან. n-ით აღვნიშნოთ A ხდომილობის ხელშემწობ ხდომილობათა რაოდენობა, ხოლო m-ით A ხდომილობის ყველა შემადგენელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, მაშინ A ხდომილობის ალბათობა $P(A)$ გამოითვლება ფორმულით

$$P(A) = \frac{n}{m}$$

ალბათობათა თეორიის ძირითადი კანონის თანახმად, რომელსაც დიდი რიცხვების კანონსაც უწოდებენ, ჩატარებული ცდების საკმაოდ დიდი რაოდენობის შემთხვევაში, რაიმე შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა გარკვეული მიახლოებით ამავე ხდომილობის ფარდობითი სიხშირის ტოლია.

ეს თანაფარდობა საშუალებას გვაძლევს ცდით საკმაოდ კარგი მიახლოებით გავთვალოთ ჩვენთვის უცნობი შემთხვევითი ცდომილების ალბათობა.

მოკლედ შევეხოთ ხდომილობათა ჯამის, საწინააღმდეგო ხდომილობის და ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოთვლას.

მტკიცდება, რომ ორი არათავსებადი ხდომილობის ჯამის ალბათობა შემადგენელი ხდომილობების ალბათობათა ჯამის ტოლია

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

თუ A და B ხდომილობები თავსებადია, მაშინ სამართლიანია ტოლობა

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

რაღაც A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა ტოლია 1 გამოკლებული A ხდომილობის ალბათობა

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

ვთქვათ A და B დამოუკიდებელი ხდომლობებია, ხოლო C იყოს ხდომილობა, რომელიც ხორციელდება მხოლოდ მაშინ როდესაც ერთდროულად ხორციელდება A და B ხდომილობები. მაშინ ამბობენ, რომ C ხდომილობა წარმოადგენს A და B ხდომილობების ნამრავლს. მტკიცდება, რომ ორი დამოუკიდებელი ხდომილობის ნამრავლის ალბათობა თანამამრავლი ხდომილობების ალბათობათა ნამრავლის ტოლია

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

სიმარტივისთვის განვიხილოთ შემთხვევითი ხდომილობის უფრო თვალსაჩინო მაგალითი. ვთქვათ გვაქვს ურნა, რომელშიც ჩაყრილია ზომითა და წონით ერთნაირი სიდიდის შავი და თეთრი ფერის ბურთულები. ვინაიდან ბურთულები ერთმანეთისგან განსხვავდებიან მხოლოდ ფერით და სხვა არაფრით, თუ ურნაში არ ჩავიხედავთ ვერ მივხდებით თუ რა ფერის ბურთი ამოვიღეთ. ამოვიღოთ ურნიდან ბურთი, ჩავინიშნოთ და ისევ ჩავდოთ ურნაში შევურიოთ ბურთები და გავიმეოროთ ამოღების ოპერაცია რამოდენიმეჯერ.

თუ ურნაში იდო n ცალი თეთრი და n ცალი შავი ბურთი, მაშინ ჩვენ საშუალოდ ეს ბურთები უნდა ამოგვეღო ერთნაირი რაოდენობით. სხვანაირად ეს ასე შეიძლება გამოვსახოთ: სულ ურნაში $2n$ ბურთია, მათ შორის n – თეთრია. თეთრი ბურთულების რაოდენობის შეფარდება ბურთულების საერთო რაოდენობასთან წარმოადგენს თეთრი ბურთულების ამოღების ალბათობას. მოცემულ შემთხვევაში ის ტოლია $n/2n = 1/2$. ცხადია ასეთივეა შავი ბურთულების ამოღების ალბათობაც. თუ ბურთულების რაოდენობა სხვადასხვაა, მაგალითად, თეთრი ბურთულების რაოდენობა ორჯერ მეტია, ვიდრე შავების მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ თეთრი ბურთულების ამოღების ალბათობა ტოლი იქნება 2/3, ხოლო შავის 1/3.

$$P(a) + P(b) = 1$$

ჩვენ შეგვიძლია ხდომილებების ალბათობა გამოვთვალოთ მხოლოდ მაშინ, როდესაც ცნობილია თუ რამდენი სახის ხდომილება შეიძლება არსებობდეს.

მოცემულ შემთხვევაში უნდა ვიცოდეთ ურნაში მოთავსებული თეთრი (a) და შავი (b) ბურთულების რაოდენობა. ხშირად ეს ჩვენთვის ცნობილი არაა და გვიწევს შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა – თეთრი და შავი ბურთულების ამოღების სიხშირით უნდა დავადგინოთ ამა თუ იმ ბურთულია ამოღების ალბათობა. ვთქვათ ჩავატარეთ N ცდა, ანუ N-ჯერ ამოვიღეთ ბურთულები და თითოეულ შემთხვევაში ჩავინიშნეთ ფერი და ბურთულა დავაბრუნეთ უკან. ვთქვათ K-ჯერ ამოვიღეთ თეთრი ბურთულა, მაშინ თეთრი ბურთულას ამოღების სიხშირე ეწოდება სიდიდეს

$$\frac{K}{N}$$

ალბათობის თეორიის ძირითადი კანონი – დიდი რიცხვების კანონი – ამტკიცებს, რომ დიდი რაოდენობის N ცდის შემთხვევაში ჩვენთვის სასურველი მოვლენის სიხშირე რამდენადაც გვინდა მცირედ განსხვავდება ამ მოვლენის ალბათობისგან, სხვანაირად, რომ ვთქვათ თუ

$$P(a) = \frac{a}{a+b}$$

(ამასათან a და b ჩვენთვის უცნობია), ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ საკმაოდ დიდი N, ისე, რომ შესრულდეს თანაფარდობა

$$\left|P(a) - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{N}}\right| < \varepsilon$$

სადაც ε - რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

ეს თანაფარდობა საშუალებას გვაძლევს ცდით საკმაოდ კარგი მიახლოებით გავთვალოთ ჩვენთვის უცნობი შემთხვევითი ცდომილების ალბათობა.

ამრიგად არაშემთხვევითი ხდომილობისგან განსხვავებით, რომელთა შესახებაც ჩვენ შეიძლება ზუსტი ცოდნა გვქონდეს, ექნება მას ადგილი თუ არა, შემთხვევითი ხდომილობის შესახებ ამის თქმა შეუძლებელია. ასეთი ხდომილობის გამოჩენის სიხშირე განისაზღვრება მისი ალბათობით. ალბათური შეფასება შეიძლება საკმაოდ საიმედო იყოს და შესაბამისად ჩვენ შეგვიძლია მას დავეყრდნოთ ჩვენთვის მნიშვნელოვანი ხდომილებების წინასწარმეტყველებისას და ხშირად არცთუ უფრო ცუდად, იმ შემთხვევასთან შედარებით, როდესაც საქმე გვაქვს ხდომილობების შესახებ საიმედო მონაცემებთან.

ვთქვათ გვაქვს ლატარიის ერთი ბილეთი, ლატარიისა რომლის ყოველ ათ ბილეთზე მოდის ერთი მოგება. თითოეული ბილეთისთვის მოგების ალბათობა შეადგენს 0.1 და შესაბამისად ის რომ ის არ მოიგებს შეადგენს - 0.9.

ცხადია, რომ ამ ბილეთის მფლობელი არ იქნება განსაკუთრებით გაოცებული არც მოგებით და არც წაგებით. ვთქვათ, მას გააჩნია ასეთი 50 ბილეთი. რა იქნება ალბათობა იმისა, რომ მათგან ერთი მაიც მოიგებს. ალბათობის თეორიაში მტკიცდება, რომ ალბათობა იმისა, რომ ერთდროულად მოხდება რამდენიმე ხდომილება, რომლებიც ხდება ერთმანეთისაგან

დამოუკიდებლად ტოლია თითოეულ ხდომილებათა ალბათობათა ნამრავლის. მოცემულ შემთხვევაში ალბათობა იმისა, რომ პირველი მოცემული 50 ბილეთიდან ვერ მოიგებს ტოლია 0.9, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ვერ მოიგებს მეორე მათგანი ისევ იქნება – 0.9 (თუმცა შევნიშნოთ, რომ მეორე ბილეთისათვის, რომ ის არ მოიგებს ალბათობა იქნება რამდენადმე მეტი, ვინაიდან მონაწილე ბილეთების რაოდენობა ერთით ნაკლებია – პირველი ჩვენს მიერ გათვალისწინებულია როგორც არამოგებული. ატარიის ბილეთების დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ეს ისეთი დეტალია, რომ ის შეგვიძლია უგულებელვყოთ). მოცემულ პირობებში ალბათობა იმისა, რომ ვერ მოიგებს ვერც პირველი და ვერც მეორე იქნება $0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}9^2 = 0{,}81$. ზუსტად ასევე ალბათობა იმისა, რომ ვერ მოიგებს ვერც პირველი, ვერც მეორე, ვერც მესამე ბილეთი იქნება $0{,}9^3$, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ვერ მოიგებს ვერც ერთი ბილეთი 50 ბილეთიდან იქნება, - $0{,}9^{50}$ ანუ დაახლოებით 0,005.

მეორეს მხრივ ალბათობა იმისა, რომ მოიგებს ყველა 50 ბილეთი იქნება გაცილებით ნაკლები $0{,}1^{50}$-ზე. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ როგორც პირველი ისე მეორე ხდომილობა პრაქტიკულად არასოდეს არ განხორციელდება. ყველაზე ალბათურია, რომ 50 ბილეთიდან მოიგებს 5 ბილეთი, მაგრამ 4 ან 6 ბილეთის მოგების ალათობაც საკმაოდ მაღალია. ნაკლებ ალბათური იქნება 3 ან 7 ბილეთის მოგების ალბათობა. ალბათობის თეორია საშუალებას იძლევა გათვლილ იქნას თითოეული ამ ხდომილობის ალბათობა. ეს მონაცემები მოყვანილია ცხრილ 3-ში.

ცხადია ცხრილში მოყვანილი ყველა ალბათობის ჯამი ერთის ტოლია, ვინაიდან არავითარი სხვა ხდომილობა, გარდა ცხრილში მოცემულისა, არ ხდება

ცხრილი 3. ლატარიაში მოგების ალბათობები (არსებული 50 ბილეთიდან მოგების n ალბათობა, როდესაც ერთი ბილეთის მოგების ალბათობა შეადგენს 0.1)

n	$P(n)$	n	$P(n)$
0	0.0051	7	0.1077
1	0.0290	8	0.0643
2	0.07790	9	0.0334
3	0.01387	10	0.0191
4	0.1809		
5	0.1850	$P(0) + P(1) + \cdots + p(10)$	0.9913
6	0.1541	$P(11) + P(12) + \cdots + p(50)$	0.0087

ხდომილობათა ასეთ სისტემას სრული ეწოდება.

ისმის კითხვა როგორი უნდა იყოს ხდომილობის ალბათობა, რომ მისი განხორციელება იყოს უტყუარი. ამ კითხვაზე პასუხი მნიშვნელოვნად სუბიექტურია და ძირითადად დამოკიდებულია იმაზე თუ რამდენად არსებითია მოსალოდნელი ხდომილობა. განვიხილოთ ეს საკითხი ორ მაგალითზე:

სტატისტიკა მეტყველებს, რომ დანიშნული კონცერტების 5% არ შედგება ხოლმე. მიუხედავად ამისა, ავიღებთ რა ბილეთს, მივდივართ კონცერტზე და დარწმუნებული ვართ, რომ ის შედგება, თუმცა მისი ალბათობა მხოლოდ 0.95 -ის ტოლია. ამასთან თვითმფრინავებით ფრენისას კატასტროფების ალბათობა 5%, რომ იყოს ჩვენ ალბათ უარს ვიტყოდით საჰაერო ტრანსპორტით სარგებლობაზე.

იმისთვის, რომ მშვიდობიანობის პერიოდში არ გავრისკოთ საკუთარი სიცოცხლით, ალბათ საკმარისია, რომ სიკვდილიანობის ალბათობა იყოს არა უმეტეს 0.0001. თუმცა სხვადასხვა ადამიანი სხვადასხვანაირად ეკიდება რისკს, მაგრამ ყველაზე ფრთხილებიც კი ადვილად წავლენ მასზე თუ თუ არახელსაყრელი შემთხვევის ალბათობა შეადგენს $10^{-6} - 10^{-7}$. ასეთია მაგალითად დიდი ქალაქის ქუჩაში საავტომობილო კატასტროფაში მოყოლების ალბათობა, მაგრამ მიუხედავად ამისა არავის ეშინია ქუჩაში გამოსვლა.

ამრიგად შეგვიძლია პრაქტიკულად საკმარისად ჩათვალოთ ალბათობა, რომელიც ერთისგან განსხვავდება $10^{-6} - 10^{-7}$-ით, ხოლო პარაქტიკულად შეუძლებლად თუ – თუ მისი განხორციელების ალბათობა ნაკლებია $10^{-6} - 10^{-7}$- ზე.

შევნიშნოთ, რომ ცდის საკმაოდ დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ეს უკანასკნელი შემთხვევები მაინც ხორციელდება, და მიუხედავად იმისა, რომ ალბათობა იმისა, რომ ადამიანი მოჰყვეს ავტოკატასტროფაში ნაკლებია 10^{-6} -ზე, მილიონიან ქალაქში ის მაინც ხორციელდება.

ყოველივე ზემოთ თქმულის მიუხედავად, შეიძლება მოვიყვანოთ იმის მაგალითი, როდესაც ალბათობა იმდენად მცირეა, რომ ის არასოდეს არ განხორციელდება და არც შეიძლება განხორციელდეს. ამ ალბათობის შეფასება შეიძლება სამყაროს ასაკის T და იმ უმცირესი t დროის შეფასებით, რომლის განმავლობაშიც შეიაძლება განხორციელდეს რაღაც ელემენტარული აქტი. თანამედროვე კოსმოლოგიური წარმოდგენებით $T \approx 10^{10}$ წელს და $t \approx 10^{-30}$წმ-ს. თუ გავითვალისწინებთ სამყაროს ზომებს, ელემენტარული მოცულობების რაოდენობა n იქნება 10^{150} ეს იმას ნიშნავს სამყაროს არსებობის პერიოდში სულ განხორციელდა $tn \approx 10^{250}$ ელემენტარული აქტი. ამასთან ერთად ე.წ. "ბორელის სასწაულის" ალბათობა – ალბათობა იმისა, რომ მაიმუნი ყოველგვარი დახმარების გარეშე შემთხვევით კომპიუტერზე კლავიშების დაჭერით დაწერს რაიმე გააზრებულ ტექსტს, მაგალითად ვაჟა-ფშაველას სტუმარ-მასპინძელს, როგორც მარტივი გამოთვლები აჩვენებენ შეადგენს 10^{-2000}, რაც იმდენად ნაკლებია 10^{-200}-ზე ანუ ელემენტარული აქტის განხორციელების ალბათობაზე, რომ "ბორელის სასწაულის" განხორციელების ალბათობა არამარტო ნაკლებ ალბათურია არამედ პრაქტიკულად შეუძლებელიც.

2.2. ცდომილების ალბათობის შეფასება

ფიზიკური სიდიდეების გაზომვისას იმ შემთხვევაში, როდესაც ძირითად როლს თამაშობენ შემთხვევითი ცდომილებები მაშინ გაზომვის სიზუსტე შეიძლება შეფასდეს მხოლოდ გარკვეული ალბათობით. მართლაც, შემთხვევით ცდომილებებს ადგილი აქვს იმ მიზეზებით, რომლებიც შემთხვევით ხასიათს ატარებენ და რომელთა გათვალისწინებაც შეუძლებელია მაგრამ გავლენას ახდენენ გაზომვის საბოლოო შედეგზე. ზოგიერთი ეს ცდომილება დადებითია, ზოგიერთიც – უარყოფითი. საბოლოო ცდომილებას, რომელიც მიიღება ამ ცდომილებების შეკრებით, შეიძლება სხვადასხვა მნიშვნელობა ჰქონდეს, მაგრამ თითოეულ მათგანს, ზოგადად, რომ ვთქვათ სხვადასხვა ალბათობა შეესაბამება.

მოვიყვანოთ ნათქვამის ილუსტრაცია. დავუშვათ უნდა ავწონოთ ასი ნიმუში და გვაქვს საწონები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ აწონვა ჩავატაროთ 0.05 გ სიზუსტით (მაგალითად იმიტომ, რომ ყველაზე პატარა საწონი, რომელიც გაგვაჩნია ტოლია 0.1 გ). ვთქვათ სასწორის კონსტრუქცია ისეთია, რომ მის თეფშზე არ შეიძლება 1 – ზე მეტი ნიმუშის დადება. ისმის კითხვა რა ცდომილებას დავუშვებთ ყველა ასივე ნივთის ჯამური წონის დადგენისას?

ჩვენ ვიცით, რომ თითოეული აწონვისას ცდომილება შეიძლება იყოს, როგორც დადებითი ისე უარყოფითი, ამასთან ერთად ის არ აღემატება 0.05. ბუნებრივია, რომ აწონვისას ჩვენ ერთნაირი რაოდენობით დავუშვებთ ცდომილებას როგორც ერთი, ისე მეორე მიმართულებით. ე.ი. + 0.05 გ ცდომილების დაშვების ალბათობა ტოლია - 0.05 ცდომილების დაშვების ალბათობის. მაშინ $P(+0.05)=P(-0.05)=1/2$.

ამასთან ჩვენ ვუშვებთ, რომ ცალკეული ცდომილებები ერთმანეთისგან განსხვავდება მხოლოდ ნიშნით და აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია 0.05. ასეთი დაშვებები მხოლოდ ზრდის საერთო შედეგის ცდომილებას, მაგრამ ამ შემთხვევაში ეს არაარსებითია. ვთქვათ პირველი გაზომვისას დავუშვით ცდომილება +0.05, რომლის ალბათობაც როგორც ზემოთ ვთქვით ტოლია $1/2$. ალბათობა იმისა, რომ მეორე გაზომვის ცდომილებაც ტოლი იქნება +0.05- ის, ალბათობათა ნამრავლის წესის თანახმად იქნება $(1/2)^2=1/4$. ბოლოს ალბათობა იმისა, რომ ყველა ასივე გაზომვის ცდომილება დადებითი ნიშნის ტოლია, გამოიანგარიშება ფორმულით $(1/2)^{99}$, ანუ დაახლოებით $2\cdot10^{-31}$. ასეთი ალბათობა, როგორც ეს ზემოთ ვთქვით პრაქტიკულად ნულის ტოლია. ანუ შეუძლებელია საერთო წონის 5 გ შემთხვევაში დავუშვათ ცდომილება $(0.05\cdot100)$, ვინაიდან ასეთი ცდომილების ალბათობა მცირედ აღემატება 0-ს. ჩვენ შევარჩიეთ ყველაზე არახელსაყრელი შემთხვევა. სხვანაირად შეიძლება ვთქვათ რომ აწონვის ასეთ პირობებში ნამდვილი ცდომილება არ იქნება 5 გ-ზე მეტი. ჩვენ ავირჩიეთ ისეთი შემთხვევა, როცა ყველა ცდომილება მაქსიმალურია და თაც ერთი ნიშნის. ალბათობის თეორია საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ თუ როგორი იქნება სხვა სიდიდის ცდომილების დაშვების ალბათობა. ამისთვის

შემოვიყვანოთ საშუალო კვადრატული და საშუალო არითმეტიკული ცდომილების ალბათობის ცნება.

2.3.შემთხვევითი ცდომილების კლასიფიკაცია. ცდომილების განაწილების კანონები

გაზომვათა შემთხვევითი ცდომილების გამოსავლენად საჭიროა გაზომვები ჩავატაროთ რამოდენიმეჯერ. თუ თითოეული გაზომვა მოგვცემს ცალკეული გაზომვებისგან განსხვავებულ მნიშვნელობებს, საქმე გვაქვს სიტუაციასთან, როდესაც შემთხვევითი ცდომილება თამაშობს არსებით როლს.

გასაზომი სიდიდის ყველაზე ალბათურ სიდიდედ მიიღება ყველა გაზომილი სიდიდის საშუალო არითმეტიკული $\bar{x}$ (გავიხსენოთ, რომ საშუალო არითმეტიკულის მისაღებად უნდა შევკრიბოთ ყველა გაზომილი სიდიდე და გავყოთ მათ რაოდენობაზე).

სანამ ვუპასუხებდეთ კითხვას თუ რამდენი გაზომვის ჩატარებაა აუცილებელი, დავუშვათ, რომ ჩავატარეთ n რაოდენობის გაზომვა, რომელთაგან თითოეული ჩატარებულია ერთი და იმავე მეთოდით. ასეთ გაზომვებს თანაბარ წერტილოვანი ეწოდება.

ფიზიკური სიდიდიდეების გაზომვის მონაცემების ანალიზისთვის იყენებენ გრაფიკულ მასალას, რომელსაც ჰოსტოგრამა ეწოდება. მისი აგების პროცედურის ილუსტრაციისთვის განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ რაღაც დეტალის დიამეტრი გავზომეთ 125 – ჯერ, გაზომვისას უდიდესი მნიშვნელობა იყო 10.7 მმ, ხოლო უმცირესი – 9.0 მმ. ჰისტოგრამის ასაგებად უნდა ჩავატაროთ შემდეგი ოპერაციები:

1)განვსაზღვროთ ჩატარებული ოპერაციების რაოდენობა N. ჩვენს შემთხვევაში $N = 125$;

2)განვსაზღვროთ ინტერვალი გაზომილი დიამეტრის მინიმალურ და მაქსიმალურ სიდიდეებს შორის. ჩვენს შემთხვევაში $R = 10{,}7 - 9.0$ მმ $= 1.7$ მმ;

3)მონაცემების რაოდენობის მიხედვით მთელი ინტერვალი დავყოთ თანაბარ კლასებად C. კლასების საჭირო რაოდენობა C შეიძლება შევარჩიოთ ცხრილიდან 2. ჩვენს შემთხვევაში $N = 125$ - თვის კლასების რაოდენობა იცვლება 7 – დან 12 –მდე. სიმარტივისათვის ავიღოთ $C = 10$

ცხრილი 4. ჰისტოგრამების კლასების რაოდენობა

მონაცემთა რაოდენობა (წერტილები)	კლასების რაოდენობა
50 –ზე ნაკლები	5 - 7
50 – 100	6 – 10
100 – 250	7 – 12
50-ზე მეტი	10 - 20

ვთქვათ გაზომვების შედეგად მივიღეთ შემდეგი მონაცემები:

ცხრილი.5. დეტალის დიამეტრის გაზომვის შედეგები

გაზომვის ნომერი	დეტალის დიამეტრი, მმ
1	**2**
1	9.5
2	9.6
3	9.7
4	9.4
5	9.5
6	9.0
7	9.5
8	9.6
9	9.3
10	9.5
11	9.5
12	9.5
13	9.6
14	9.6
15	9.1
16	9.5
17	9.8
18	9.8
19	9.1
20	9.1
21	9.1
22	9.5
23	9.6
24	9.7
25	9.2
26	9.5
27	9,6
28	9.1
29	9.9
30	10.0
31	9.1
32	9.5
33	9.2
34	9.5
35	9.2
36	9.6
37	9.6

38	9.5
39	9.7
40	9.8
41	9.4
42	9.7
43	9.5
44	9.7
45	9.8
46	9.4
48	9.7
49	10.1
50	9.8
51	10.2
52	9.6
53	10.2
54	10.1
55	9.3
56	9.7
57	10.5
58	9.5
59	10.2
60	9.8
61	9.3
62	9.6
63	9.4
64	10.1
65	10.2
66	9.6
67	9.7
68	9.8
69	9.4
70	10.2
71	9.4
72	9.3
73	10.1
74	10.6
75	9.3
76	9.9
77	9.3
78	9.7
79	10.0
80	9.4
81	9.8
82	10.0
83	9.5
84	9.9

85	9.6
86	9.9
87	9.3
88	9.9
89	9.9
90	9.7
91	10.3
92	9.4
93	9.9
94	10.0
95	10.6
96	9.3
97	9.3
98	10.6
99	10.0
100	9.4
101	9.7
102	9.9
103	9.8
104	10.0
105	9.9
106	9.9
107	9.7
108	9.9
109	10.0
110	9.8
111	10.6
112	10.0
113	9.8
114	10.0
115	9.7
116	10.5
117	9.8
117	10.1
118	10.2
119	9.7
120	10.4
121	9.8
122	9.7
123	9.9
124	9.9
125	9.7

4)განვსაზღვროთ თითოეული კლასის სიგანე, რისთვისაც ვისარგებლოთ ფორმულით $H = R/C = 1.7/10 = 0{,}17 \quad = 0.2$ მმ. ფორმულიდან ჩანს, რომ მოცემული კლასისთვის სიგანე დამრგვალებულია 0.2 – მდე. კლასის სიგანე ყოველთვის უნდა დამრგვალდეს ათობითი ნიშნის მეტ სიდიდემდე ვიდრე ეს გვაქვს გაზომვებში. ჩვენს შემთხვევაში, როგორც ეს ცხრილიდან ჩანს კლასის სიგანე დამრგვალებულია მძიმის შემდეგ პირველ ათობით ნიშნამდე;

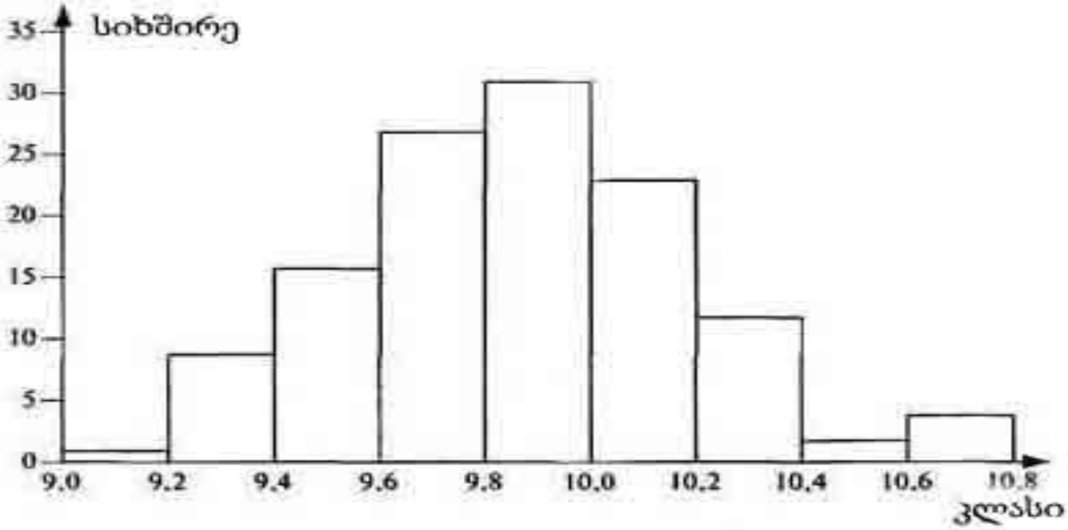
5) დავადგინოთ თითოეული კლასის ზედა და ქვედა საზღვრები. ამისათვის ჯერ უნდა ჩავთვალოთ, რომ ყველა მონაცემის ქვედა საზღვარი – ესაა პირველი კლასის ქვედა საზღვარი, მაშინ ამ კლასის ზედა საზღვარი მიიღება მისთვის კლასის სიგანის მიმატებით. ჩვენს შემთხვევაში ნახვრეტის დიამეტრის მნიშვნელობა პირველ კლასში იცვლება 9.0 – დან 9.2 – მდე. შემდეგი კლასი იწყება 9.2 – დან და მთავრდება 9.4 – ით და ა.შ. უნდა გვახსოვდეს, რომ კლასის ქვედა საზღვარი ეკუთვნის მოცემულ კლსს, ანუ კლასის ქვედა საზღვარს მიეკუთვნება მნიშვნელობები, რომლებიც მეტია ან ტოლი (≥) ქვედა საზღვრის მნიშვნელობის. კლასის ზედა საზღვარი კი მას არ მიეკუთვნება, ანუ მას მიეკუთვნება ზედა საზღვრისგან მკაცრად ნაკლები (<) მნიშვნელობა. ჩვენს შემთხვევაში 9.2 მმ – ის ტოლი სასაზღვრო მნიშვნელობა მიეკუთვნება მეორე კლასს და არა პირველს.

6) ჰისტოგრამის აგების გასამარტივებლად ყველა მონაცემი უნდა შევიყვანოთ ცხრილში, როგორც ეს ქვემოთაა მოყვანილი

ცხრილი 6. ჰისტოგრამის გამარტივებულად ასაგები ცხრილი

კლასი	ქვედა მნიშვნელობა	ზედა მნიშვნელობა	სიხშირე	სულ
1	9.0		/	1
2	9.2		///// ////	9
3	9.4		///// ///// ///// /	16
4	9.6		///// ///// ///// ///// //	27
5	9.8		///// ///// ///// ///// ///// ///// ///// /	31
6	10.0		///// ///// ///// ///// ///	23
7	10.2		///// ///// //	12
8	10.4		//	2
9	10.6		///	4
10	10.8			0

7) ჰორიზონტალურ ღერძზე გადავზომოთ კლასები, ხოლო ვერტიკალურზე - სიხშირეები. სიხშირეების განაწილება ნაჩვენებია სვეტებით



ნახ.15. ჰისტოგრამა

ჰისტოგრამების ფორმა გვიჩვენებს თუ რამდენად თანაბრადაა განაწილებული მონაცემები შუა ნაწილის მიმართ. ჰისტოგრამას სიმეტრიული ეწოდება, თუ შუა ნაწილი მას ორ მიახლოებით თანაბარ ნაწილად ჰყოფს, როგორც ეს ნახაზზეა მოყვნილი. ასიმეტრიული ჰისტოგრამის შემთხვევაში ცხადია შუა ნაწილის მიმართ სიმეტრია დარღვეულია.

მონაცემების ამ რიგს შერჩევა ეწოდება და ის საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ გაზომვის შედეგები. ასეთი შეფასების სიდიდეა $\bar{x}$, მაგრამ ის არ წარმოადგენს გასაზომი სიდიდის ნამდვილ მნიშვნელობას, საჭიროა შეფასდეს მისი ცდომილება. დავუშვათ შევაფასეთ ცდომილების სიდიდე Δx. მაშინ გაზომვის შედეგი შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad (2)$$

ვინაიდან გაზომვის $\bar{x}$ და ცდომილების Δx შეფასებითი სიდიდეები ზუსტი არაა, (2) გაზომვის სიდიდის ჩანაწერს უნდა მიეთითოს მისი საიმედოობა P. საიმედოობის ან სანდოობის ალბათობის ქვეშ იგულისხმება ალბათობა იმისა, რომ გასაზომი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობა მოთავსებულია (2) ფორმულაში მითითებულ ინტერვალში, რომელსაც ნდობის ინტერვალი ეწოდება. მაგალითად, ვთქვათ გავზომეთ რაღაც ღეროს სიგრძე და საბოლოო შედეგი ასე ჩავწერეთ

$$l = 8.34 \pm 0.02 \text{ მმ}, \ (P = 0.95)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ 100 შანსიდან 95 –ში გაზომილი ღეროს სიგრძის ნამდვილი მნიშვნელობა მოქცეულია შუალედში 8.32 – დან 8.36 – მდე. ამრიგად

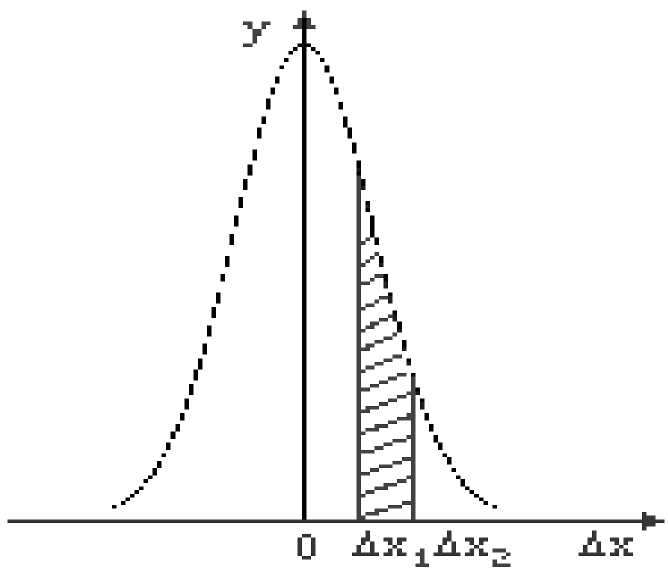
ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ (2) შერჩევის მეშვეობით მოვძებნოთ გაზომვების შედეგების შეფასება $\bar{x}$, მისი ცდომილება Δx და საიმედობა.

ეს ამოცანა შეიძლება გადაწყდეს ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდებით.

უმრავლეს შემთხვევაში შემთხვევითი ცდომილებები ემორჩილება განაწილების ნორმალურ კანონს, რომელიც დადგენილ იქნა გაუსის მიერ და ასე ჩაიწერება:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

სადაც Δx წარმოადგენს გადახრას ნამდვილი მნიშვნელობისგან, σ - საშუალო კვადრატული გადხრაა, σ^2 - დისპერსიაა, რომლის სიდიდეც ახასიათებს შემთხვევითი სიდიდეების გაფანტვას. ამ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი ნაჩვენებია ნახ 16-ზე.



ნახ.16. გაუსის განაწილების სახე

გაუსის ფორმულა გამოყვანილია შემდეგი დაშვებების გამოყენებით:

1) გაზომვის ცდომილებების შეუძლიათ მიიღონ უწყვეტი მნიშვნელობები;

2) დაკვირვებათა დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ერთნაირი სიდიდის მაგრამ საწინააღმდეგო ნიშნის ცდომილებები ერთნაირი სიხშირით გვხვდება;

3) ცდომილებების გამოჩენის ალბათობა მცირდება ცდომილების სიდიდის გაზრდასთან ერთად. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ დიდი ცდომილებები გვხვდება უფრო იშვიათად ვიდრე მცირე სიდიდის ცდომილებები.

შევნიშნოთ, რომ გაუსის ფორმულის გამოყვანისას მიღებულია გარკვეული დაშვებები, რომელთა მკაცრად დასაბუთებაც შეუძლებელია. გარდა ამისა 1-3 დაშვებები, რომლებიც მიღებული იყო გაუსის ფორმულის გამოყვანისას,

მკაცრად არასოდეს არ სრულდება. ეს გამომდინარეობს თუნდაც იქიდან, რომ ცდომილებები არასოდეს არ შეიძლება იყოს რაგინდ მცირე. მაგალითად როდესაც ვზომავთ თოკის სიგრძეს შემოსაზღვრული ვართ ატომების ზომებით ($\approx 10^{-8}$ სმ), ელექტრული მუხტის გაზომვისას კი - ელემენტარული მუხტის სიდიდით e ($4.8 \cdot 10^{-10} CGSE$) და ა.შ.

ეს მრუდები საშუალებას იძლევა დავადგინოთ, თუ რა სიხშირით შეიძლება გამოჩნდეს ამა თუ იმ სიდიდის ცდომილებები. გაუსის ფორმულა ექსპერიმენტულად არაერთგზის არის შემოწმებული, რომლებმაც აჩვენეს, რომ თუნდაც იმ უბნებში სადაც ცდომილებები ძალიან დიდი არ არის, ის შესანიშნავად ეთანხმება ექსპერიმეტულ მონაცემებს.

მიუხედავად იმისა, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში ექსპერიმენტული მონაცემები უკეთესად აიწერებიან სხვა ფუნქციებით, მაინც სარგებლობენ განაწილების ნორმალური კანონით, უშვებენ რა მის სისწორეს როგორც თავისდავად ცხადს. სინამდვილეში საქმე უფრო რთულადაა. ამ კანონთან დაკავშირებით ხშირად სარკასტულად შენიშნავენ, რომ “ექსპერიმენტატორები ენდობიამ მას მათემატიკოსების დამტკიცებაზე დაყრდნობით, ხოლო მათემატიკოსები – ფიზიკოსების ექსპერიმეტებზე დაყრდნობით”. მათემატიკური მტკიცების არასიმკაცრე ჩვენ ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ. რაც შეეხება ექსპერიმეტალურ დასაბუთებას, ის არაფერს გვაძლევს გარდა ჰისტოგრამისა და ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ მაინტერპოლირებელი ფუნქცია, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ჰისტოგრამის წერტილები (თუნდაც მაშინ როდესაც ის საკმაოდ დეტალურადაა აგებული) ისე ავაგოთ, რომ ცდომილების შემთხვევითი ხასიათის გამო ისინი არ დაემთხვევიან ჰისტოგრამის წერტილებს, მაგრამ მაინც არსებობს ნორმალური განაწილების გამოყენების სერიოზული საფუძველი. მისი განსაკუთრებული მნიშვნელობა მდგომარეობს შემდეგში: იმ კერძო შემთხვევებში, როდესაც ჯამური ცდომილება ვლინდება სხვადასხვა ფაქტორების ერთდროული მოქმედებით, რომელთაგან თითოეულს მცირე წვლილი შეაქვს საერთო ცდომილებაში, რა კანონსაც არ უნდა შეესაბამებოდეს მათი განაწილებები, ჯამური განაწილება ყოველთვის შეესაბამება გაუსის განაწილებას.

ცხრილი 7. ცდომილებების განაწილება სამკუთხედის კუთხეების ჯამის გაზომვისას (დაკვირვებათა საერთო რაოდენობა 470, საშუალო კვადრატული ცდომილება $\boldsymbol{\sigma = 0.40''}$)

ცდომილების საზღვრები ($''$)	დაკვირვებათა რაოდენობა მოცემული ცდომილებით	
	ცდით მიღებული	გაუსის ფორმულით გამოთვლილი

0.0-0.1	94	92.3
0.1-0.2	88	86.5
0.2-0.3	78	76.7
0.3-0.4	58	64.0
0.4-0.5	51	49.8
0.5-0.6	36	36.7
0.6-0.7	26	25.4
0.7-0.8	14	16.9
0.8-0.9	9	9
0.9-1	7	6.1
1-ზე მეტი	9	1.1

გაუსის განაწილების გამოყენების ძირითადი პირობაა ის, რომ არ არსებობს დომინირებადი ცდომილების ცალკეული წყაროები. მის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ სამკუთხედის კუთხეების ჯამის გაზომვის შედეგები, რომლებიც ჩატარებულია გეოდეზიური გადაღებით. როგორც ცხრილი 7 – დან ვხედავთ გათვლილი და დამზერილი ცდომილებები ერთმანეთს საკმაოდ კარგად ემთხვევა თუ არ გავითვალისწინებთ ბოლო მონაცემებს სადაც გაუსის მიხედვით უნდა იყოს 1.1, ხოლო ცდით მიღებულია 9. მიღებული შეუსაბამობა 8 –ჯერ, $\Delta x \geq 1''$ შემთხვევისათვის, არ უნდა იყოს გასაკვირი, ვინაიდან გაუსის ფორმულა ყოველთვის სამართლიანია Δx მცირე მნიშვნელობებისთვის. რაც შეეხება ცდომილების დიდ მნიშვნელობებს იქ ექსტრაპოლაცია უხეშია და შედეგიც ზუსტი არ არის.

როგორც ნახაზიდან ვხედავთ (3) ფუნქციას მაქსიმუმი გააჩნია წერტილში $x = 0$, გარდა ამისა ის ლუწია. (3) ფუნქციის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც მოქცეულია მრუდს და Δx ღერძის ორი ორდინატის Δx_1 და Δx_2 შესაბამის წერტილებს (დაშტრიხული ფართი) შორის რიცხობრივად ტოლია ალბათობისა, რომლითაც ნებისმიერ გაზომილი სიდიდე ხვდება მოცემულ (Δx_1, Δx_2) ინტერვალში. ვინაიდან მრუდი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ იმ ცდომილებების ალბათობები, რომლებიც სიდიდით ტოლია და ნიშნით საწინააღმდეგო ერთმანეთის ტოლია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გასაზომი სიდიდის შესაფასებლად შეგვიძლია ავიღოთ არჩევის ყველა ელემენტის საშუალო მნიშვნელობა

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i}^{n} x_i}{n} \qquad (4)$$

სადაც n გაზომვათა რაოდენობაა.

ამრიგად თუ თუ ერთი და იმავე პირობებში ჩატარებულია n გაზომვა, მაშინ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, გაზომილი სიდიდის ყველაზე ალბათური მნიშვნელობაა მისი საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობა $\bar{x}$ სიდიდე. ის მიისწრაფის გაზომილი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობისკენ, როდესაც გაზომვების რაოდენობა $n \to \infty$.

ცალკეული გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილება ეწოდება სიდიდეს

$$S = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x}-x_{\mathrm{i}})^2}{n-1}} \quad (5)$$

ის ახასიათებს ყოველი ცალკეული გაზომვის ცდომილებას. როცა $n \to \infty$ მაშინ S მიისწრაფის σ-კენ

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} S \ \ (6)$$

σ გაზრდასთან ერთად იზრდება ანათვლების ფანტვა და მცირდება გაზომვის სიზუსტე.

საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული ცდომილება ეწოდება სიდიდეს

$$S_r = \sqrt{\frac{\sum_1^n(\bar{x}-x_{\mathrm{i}})^2}{n(n-1)}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \ (7)$$

ეს უკანასკნელი გამოსახავს გაზომვის სიზუსტის ზრდის ფუნდამენტურ კანონს გაზომვების რაოდენობის ზრდისას. S_r ცდომილება ახასიათებს სიზუსტეს რომლითაც მიიღება გაზომილი სიდიდის $\bar{x}$ საშუალო მნიშვნელობა.

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \ \ (8)$$

ცდომილების გაანგარიშების ეს მეთოდიკა კარგ შედეგებს (0.68 საიმედოობით) იძლევა მხოლოდ იმ შემთხვევაში როდესაც, ერთი და იგივე სიდიდე გაზომილია არანაკლებ 30 – 50 ჯერ.

α აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ გაზომვის შედეგი ნამდვილი მნიშვნელობისგან განსხვავდება არა უმეტეს Δx-ით და ის ასე ჩაიწერება

$$P(-\Delta x < x - \bar{x} < \Delta x) = \alpha \ \text{ან}$$

$$P(\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x) = \alpha \quad (9)$$

α ალბათობას ეწოდება ნდობის ალბათობა ან ნდობის კოეფიციენტი. მნიშვნელობების ინტერვალს $x - \Delta x$-დან $x + \Delta x$-მდე ეწოდება ნდობის ინტერვალი. გამოსახულება (9) გვიჩვენებს, რომ გაზომვის შედეგი α ტოლი ალბათობით არ გამოდის ნდობის ინტერვალიდან. ცხადია რაც მეტ საიმედოობას მოვითხოვთ მით მეტი იქნება ნდობის ინტერვალი და პირიქით რაც მეტი სიდიდის ნდობის ინტერვალს მოვითხოვთ მით მეტია ალბათობა იმისა, რომ გაზომვის შედეგი არ გამოვა მის საზღვრებს გარეთ.

ჩვენ მივედით მეტად მნიშვნელოვან დასკვნამდე: შემთხვევითი ცდომილების დასახასიათებლად საჭიროა ორი რიცხვის დასახელება, რომელთაგან ერთია თვით ცდომილების სიდიდე (ანუ ნდობის ინტერვალი) და მეორე - ნდობის ალბათობა. მხოლოდ ცდომილების სიდიდის დასახელება მისი შესაბამისი ნდობის ინტერვალის მითითების გარეშე გარკვეულწილად აზრს მოკლებულია ვინაიდან ჩვენ არ ვიცით რამდენად საიმედოა ჩვენი მონაცემები. ნდობის ალბათობის ცოდნა კი საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ მიღებული შედეგის საიმედოობა.

საიმედოობის ხარისხი საბოლოოდ მაინც დამოკიდებულია ჩატარებული გაზომვების ხარისხზე.

ცხადია თვითმფრინავის დეტალების საიმედობაა გაცილებით უფრო მაღალი უნდა იყოს ვიდრე მოტორიანი ნავის, ხოლო ამ უკანასკნელის დეტალების საიმედოობა უნდა აღემატებოდეს ხელის ურიკის დეტალების საიმედოობას.

მაღალი ხარისხის საიმედობაა საჭირო პასუხსაგები გაზომვების ჩატარებისას, ეს იმას ნიშნავს, რომ ისინი მოითხოვენ მეტი ნდობის ინტერვალის არჩევას (σ წილებში), სხვანაირად, რომ ვთქვათ იმავე სიდიდის (Δx) ცდომილების მისაღებად საჭიროა გაზომვების ჩატარება მეტი სიზუსტით, ე.ი. საჭიროა σ სიდიდე ამა თუ იმ ხერხით შემცირდეს საჭირო რიცხვჯერ. ასეთი მიზნის მიღწევის გზაა გაზომვების რიცხვის მრავალჯერადი გაზრდა.

ჩვეულებრივი გაზომვებისას საკმარისია გაზომვების ჩატარება 0.90 - 0.95 ნდობის ალბათობით, ხოლო გაზომვებისთვის, რომლებსაც მოეთხოვება ძალიან მაღალი საიმედოობა საჭიროა 0.999 ნდობის ალბათობის მიღწევა. ამაზე მაღალი ნდობის ალბათობა ძალიან ბევრ შემთხვევაში საჭირო არაა.

ძალიან ხშირად, ცდომილების ძირითადი რიცხობრივი მახასიათებლის სახით, მოსახერხებელია სტანდარტული ცდომილების გამოყენება, რომელსაც შეესაბამება სრულიად განსაზღვრული საიმედოობის ალბათობა 0.68, (ჩვენ აქაც და მომავალშიც ვგულისხმობთ, რომ ცდომილებები განაწილებულია ნორმალური კანონით). ნდობის ინტერვალის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის, გაუსის ფორმულით, შესაძლებელია გათვლილ იქნას ნდობის ალბათობა. ეს გათვლები მოცემულია სპეციალურ ცხრილებში (იხ. დანართი ცხრილი 1)

მოვიყვანოთ ამ ცხრილის გამოყენების მაგალითები.

ვთქვათ რაღაც გაზომვებისას ჩვენ მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელობები: $x = 1.27$, $\sigma = 0.032$. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ცალკეული გაზომვის მნიშვნელობები მოთავსებული იქნება შუალედში $1.26 < x < 1.28$. ჩვენს მიერ დადგენილი ნდობის ინტერვალია ± 0.01, რაც შეადგენს (σ წილში) $0.01 : 0.032 = 0.31$. დანართის 1 ცხრილიდან ვხედავთ, რომ ნდობის ალბათობა $\varepsilon = 0.3$-თვის შეადგენს 0.24. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ გაზომვების დაახლოებით 1/4 მოთავსებული იქნება ცდომილების ± 0.01 შუალედში. განსაზღვროთ ახლა ნდობის ალბათობა საზღვრებისთვის $1.20 < x_i < 1.34$. ამ ინტერვალის მნიშვნელობა გამოსახული σ წილებში, იქნება $\varepsilon = 0.07 : 0.032 \approx 2.2$. დანართის 1 ცხრილის მიხედვით ვპოულობთ α მნიშვნელობას $\varepsilon = 2.2$-თვის, რაც 0.97 –ის ტოლია. ეს იმას ნიშნავს, რომ გაზომვების შედეგების დაახლოებით 97% განთავსდება ამ ინტერვალში.

დავსვათ მეორე კითხვა: როგორი საიმედოობის ინტერვალი უნდა ავირჩიოთ, იმავე გაზომვებისთვის, ისე რომ შდეგების დაახლოებით 98% განთავსდეს ამ ინტერვალში? იმავე ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $\alpha =$ 0.98 შეესაბამება მნიშვნელობა $\varepsilon = 2.2$ და შესაბამისად $\alpha\varepsilon = 0.032 \cdot 2{,}4 \approx 0.777$ და მითითითებულ ნდობის ალბათობას შეესაბამება ინტერვალი 1.193$< x < 1.347$ ან დამრგალებულად 1.19$< x < 1.35$. ზოგჯერ მიღებული შედეგი ასეც შეიძლება ჩაიწეროს $x = 1.27 \pm 0.08$ ნდობის ალბათობით 0.98. ამრიგად შემთხვევითი ცდომილების აღმოსაჩენად საჭიროა დავადგინოთ ორი რიცხვი – ნდობის ინტერვალი (ცდომილების სიდიდე) და ნდობის ალბათობა. საშუალო კვადრატულ ცდომილებას σ შეესაბამება ნდობის ინტერვალი 0.68, გაორმაგებულ საშუალო კვადრატულ ცდომილებას – (2σ) - ნდობის ალბათობა 0.95, გასამმაგებულის (3σ) - 0.997

ცდომილების სხვა მნიშვნელობებისთვის ნდობის ალბათობა განისაზღვრება დანართის 1 ცხრილით.

ზემოთ მოყვანილი ცდომილების სამი მნიშვნელობა სასურველია ვიცოდეთ ზეპირად, რადგან ჩვეულებრივ, როგორც წიგნებში ისე სტატიებში, როცა მოცემულია საშუალო კვადრატული ცდომილება, ჩვეულებრივ არ მოიცემა ნდობის ინტერვალი. თუ გვეცოდინება ზემოთ მოყვანილი სამი რიცხვი, ეს საკმარისია იმისთვის, რომ გავერკვეთ გაზომვის საიმედოობაში იმ შემთხვევაში როდესაც მოცემულია საშუალო კვადრატული ცდომილება ან ვარიაციის კოეფიციენტი.

საშუალო კვადრატულ ცდომილებასთან ერთად ზოგჯერ სარგებლობენ (10) ფორმულით გამოთვლილი საშუალო არითმეტიკული ცდომილებით.

$$r_n = \frac{\sum_1^n |\bar{x} - x_i|}{n} \quad (10)$$

დაკვირვებათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში (პრაქტიკულად $n > 30$) s და r შორის არსებობს მარტივი თანაფარდობა

$$s = 1.25\, r \text{ ან } r = 0.8\, s$$

მკაცრად, რომ ვთქვათ ეს თანაფარდობები სამართლიანია მხოლოდ σ და ρ-თვის, მაგრამ არა s ან r-თვის. მცირე n-თვის, თანაფარდობა s/r მნიშვნელოვნად განსხვავდება ზღვრული მნიშვნელობისგან, ამასათან როგორც წესი

$$\frac{s}{r} > \frac{\sigma}{\rho}$$

უმრავლეს შემთხვევაში მიზანშეწონილია ვისარგებლოთ სიდიდით s და არა r. უპირველეს ყოვლისა იმიტომ, რომ ვსარგებლობთ რა სტანდარტული ცდომილებით s, უფრო მარტივია განვსაზღვროთ ნდობის ალბათობის ინტერვალები, რომლებიც სპეციალური ცხრილებშია მოცემული. საშუალო არითმეტიკული ცდომილების r, უპირატესობას წარმოადგენს ის, რომ მისი გაანგარიშება გაცილებით მარტივია. ვიდრე s. ქვემოთ მოყვანილია მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევა პრაქტიკულად თავი ავარიდოთ ამ

სიძნელეებს. ცხადია n-ის დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაში სულერთია თუ რომელი ცდომილებით ვისარგებლებთ, ვინაიდან მათ შორის არსებობს (20) თანაფარდობა. n- ის მცირე მნიშვნელობების დროს, ზემოთ მოყვანილი მიზეზების გამო ყოველთვის უნდა ვისარგებლოთ სტანდარტული ცდომილებით ან ვარიაციის კოეფიციენტით

$$w = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (11)$$

თუ გაზომვების n მცირე რაოდენობებისათვის ვისარგებლებთ არითმეტიკული ცდომილებით, უფრო სწორი იქნება თუ გამოვიყენებთ არა (11) ფორმულას არამედ ვისარგებლებთ თანაფარდობით

$$r = \frac{\sum_1^n |\bar{x} - x_i|}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (12)$$

n დიდი მნიშვნელობების დროს განსხვავება ამ ორი ფორმულით მოცემულ მნიშვნელობებს შორის უმნიშვნელოა. ნდობის ინტერვალის გათვლები ჩვენ ჩავატარეთ იმ შემთხვევებისთვის როდესაც გაზომვის შედეგები განაწილებული იყო ნორმალური კანონით.

არცთუ იშვიათად, როგორც ეს ზემოთ იყო ნათქვამი, ყოველთვის არაა ცნობილი ცდომილების განაწილების კანონი და ის განსხვავებულია ნორმალურისგან. დისპერსიის გამოთვლა ამ შემთხვევაშიც საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ნდობის ინტერვალი, გამოვიყენებთ რა ჩებიშევის უტოლობას, რომელიც მიღებულია განაწილების ნებისმიერი კანონისთვის და ამდენად გააჩნია ზოგადი ხასიათი.

დავუშვათ, რომ ძველებურად σ წარმოადგენს საშუალო კვადრატულ გადახრას, ხოლო α არის ნებისმიერი 1-ზე მეტი რიცხვი. ამ შემთხვევაში ჩებიშევის უტოლობა ასე ჩაიწერება

$$(|\bar{x} - x| > \sigma\alpha) < \frac{1}{\alpha^2} \qquad (13)$$

საინტერესოა ნდობის ინტერვალისა და მათი შესაბამისი ალბათობების გამოთვლების შედეგების შედარება ნორმალური განაწილებისა და ჩებიშევის უტოლობით შეფასებულ მნიშვნელობებს შორის თავისუფალი განაწილებისთვის. ეს შედარება მოყვნილია 8 ცხრილში.

ცხრილი 8

$\alpha\sigma$	$P_{ნორმ}$	PR
1	0.32	-
1.5	0.13	0.8
2	0.05	0.25
3	0.003	0.11

ცხრილიდან ჩანს, რომ დიდი გადახრების ალბათობები თავისუფალი განაწილებისთვის არსებითად მეტია ნორმალურთან შედარებით: ეს ბუნებრივად შედეგია იმისა, რომ ჩებიშევის უტოლობის გამოყვანა ეყრდობა განაწილების უფრო ზოგად კანონებს.

აქედან შეიძლება გავაკეთოთ ზოგადი დასკვნა: ანალიზის დაწყების წინ, რამდენადაც ეს შესაძლებელია, უნდა დავრწმუნდეთ განაწილების კანონის ნორმალურთან სიახლოვეში და ვისარგებლოთ ნდობის ინტერვალების შესაბამისი შეფასებებით.

2.4.შემთხვევითი ცდომილებების შეკრების კანონი. სტატისტიკური წონები

დავუშვათ ჩვენი გასაზომი Z სიდიდე წარმოადგენს ორი X და Y სიდიდის ჯამს ან სხვაობას, რომელთა გაზომვის შედეგები დამოუკიდებელია. მაშინ, თუ S_x^2, S_y^2, S_z^2 წარმოადგენს შესაბამისად X, Y, Z სიდიდეების დისპერსიას შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$S_z^2 = S_x^2 + S_y^2 \quad (14)$$

$$\text{ან } S_z^2 = \left|\sqrt{S_x^2 + S_y^2}\right|$$

თუ Z წარმოადგენს არა ორი, არამედ მეტ შესაკრებთა ჯამს, ცდომილებათა შეკრების კანონი იგივე იქნება, ანუ ჯამის ან სხვაობის საშუალო კვადრატული ცდომილება ტოლია დისპერსიათა ჯამიდან ან სხვაობიდან კვადრატული ფესვის აბსოლუტური მნიშვნელობის.

ეს მეტად მნიშვნელოვანი გარემოებაა და აუცილებელია გვახსოვდეს, რომ ჯამური ცდომილების მოსაძებნად საჭიროა შევკრიბოთ არა საკუთრივ ცდომილებები, არამედ მათი კვადრატები.

ცხადია, თუ ჩვენ გამოვთვალეთ არა თვით საშუალო კვადრატული S ან σ ცდომილებები არამედ, საშუალო არითმეტიკული ცდომილებები r ან ρ, მაშინ ასეთი ცდომილებების შეკრების კანონს აქვს, მაგალითად, შემდეგი სახე

$$\rho_z = \sqrt{\rho_X^2 + \rho_Y^2}$$

ცდომილებათა შეკრების კანონიდან გამომდინარეობს ორი ძალიან მნიშვნელოვანი კანონი. პირველი მათგანი მიეკუთვნება თითოეული ცდომილების როლს ჯამურ ცდომილებაში. ის მდგომარეობს იმაში, რომ თითოეული ცდომილების მნიშვნელობა ძალიან სწრაფად ეცემა მათ შემცირებასთან ერთად. ვაჩვენოთ ეს მაგალითზე. ვთქვათ X და Y ორი შესაკრებიდან თითოეული გაზომილია საშუალო კვადრატული ცდომილებით S_X და S_y და ამასთან ცნობილია, რომ S_Y ორჯერ ნაკლებია S_X. მაშინ ჯამის $Z = X + Y$ ცდომილება იქნება

$$S_Z^2 = S_X^2 + S_Y^2 = S_X^2 + \left(\frac{S_x}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}S_X^2$$

საიდანაც $S_X \approx 1.1S_X$.

სხვანაირად, რომ ვთქვათ თუ ერთ ერთი ცდომილებათაგანი ორჯერ ნაკლებია მეორეზე, მთლიანი ცდომილება გაიზარდა მცირე ცდომილების ხარჯზე მხოლოდ 10%, რაც ჩვეულებრივ თამაშობს ძალიან მცირე როლს. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ ჩვენ გვსურს გავზარდოთ Z სიდიდის გაზომვის სიზუსტე საჭიროა უპირველეს ყოვლისა შევამციროთ იმ სიდიდის გაზომვის ცდომილება, რომელიც მეტია, ანუ X სიდიდის ცდომილება. თუ ჩვენ უცვლელად დავტოვებთ X სიდიდის გაზომვის ცდომილებას, მაშინ რაც არ უნდა გავზარდოთ Y სიდიდის გაზომვის სიზუსტე, ჩვენ ვერანაირად ვერ შევამცირებთ საბოლოო Z სიდიდის ცდომილებას 10%-ზე მეტად.

ეს დასკვნა ყოველთვის უნდა გვახსოვდეს და გაზომვის სიზუსტის გაზრდისას პირველ რიგში უნდა უნდა შევამციროთ ის ცდომილება, რომელიც ყველაზე დიდია. ცხადია თუ შესაკრებების რაოდენობა დიდია – ორი და მეტი, მცირე ცდომილებებს მნიშვნელოვანი წვლილი შეაქვთ ჯამურ ცდომილებაში.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ჩვენთვის საჭირო Z სიდიდე ორი დამოუკიდებლად გაზომილი სიდიდეების სხვაობას წარმოადგენს (14) ფორმულიდან გამოდის, რომ მისი ფარდობითი ცდომილება

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\sqrt{\Delta^2 X + \Delta^2 Y}}{X - Y}$$

მით მეტი იქნება, რაც ნაკლებია $|X - Y|$ ხოლო ფარდობითი ცდომილება იზრდება უსასრულობამდე, თუ $X \to Y$.

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ შეუძლებელია მივაღწიოთ გაზომვის მაღალ სიზუსტეს, თუ გაზომვებს ავაგებთ ისე, რომ მას ვეძებთ როგორც დამოუკიდებელი გაზომვების მცირე სხვაობას, რომლებიც მნიშვნელოვნად აღემატება საძებნ მნიშვნელობას. ამის საწინააღმდეგოდ ჯამის ფარდობითი ცდომილება

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\sqrt{\Delta^2 X + \Delta^2 Y}}{X + Y}$$

დამოკიდებული არაა X და Y სიდიდეების თანაფარდობაზე.

შემდეგი დასკვნა, რომელიც გამოდინარეობს ცდომილებათა ჯამის კანონიდან, ეხება საშუალო არითმეტიკულის ცდომილების გამოთვლას. ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ საშუალო არითმეტიკული დამძიმებულია ნაკლები ცდომილებით, ვიდრე ცალკეული გაზომვების ცდომილება. ეს დასკვნა შეგვიძლია ჩავწეროთ რაოდენობრივი ფორმით. ვთქვათ $x_1; x_2; x_3; \cdots, x_n$ ცალკეული გაზომვების შედეგებია, ამასთან თითოეული მათგანი ხასიათდება ერთნაირი დისპერსიით S^2. ჩავწეროთ Y სიდიდე შემდეგნაირად:

$$y = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \frac{x_3}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n} \quad (15)$$

ამ სიდიდის დისპერსია S_y^2 (14) ფორმულის ძალით ასე განისაზღვრება

$$S_y^2 = \frac{S^2}{n^2} + \frac{S^2}{n^2} + \frac{S^2}{n^2} + \cdots + \frac{S^2}{n^2} \quad (16)$$

მაგრამ განმარტების ძალით y წარმოადგენს x_i ყველა სიდიდის საშუალო არითმეტიკულს და შეგვიძლია დავწეროთ

$$S_y = S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (17)$$

მაშასადამე საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული ცდომილება ტოლია ცალკეული გაზომვების საშუალო კვადრატული ცდომილების განაყოფისა კვადრატულ ფესვზე გაზომვათა რაოდენობიდან.

ესაა ფუნდამენტური კანონი, რომლის ძალითაც გაზომვათა რაოდენობის გაზრდა იწვევს სიზუსტის გაზრდას. ამ კანონიდან გამომდინარეობს, რომ თუ გვსურს გაზომვის სიზუსტის გაზრდა ორჯერ, საჭიროა ერთის ნაცვლად ოთხი გაზომვის ჩატარება; სიზუსტის სამჯერ გასაზრდელად გაზომვათა რაოდენობა უნდა გავზარდოთ ცხრაჯერ; და ბოლოს გაზომვათა რაოდენობის გაზრდა 100-ჯერ გამოიწვევს სიზუსტის გაზრდას 10-ჯერ.

ეს მტკიცება ცხადია სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევისთვის როცა გაზომვის ცდომილებას შემთხვევითი ხასიათი აქვს. ამ პირობებში თუ გაზომვათა n რაოდენობას ავიღებთ საკმაოდ დიდს, ჩვენ შეგვიძლია მნიშვნელოვნად შევამციროთ გაზომვის ცდომილება. ეს მეთოდი საკმაოდ ხშირად გამოიყენება, განსაკუთრებით სუსტი ელექტრული სიგნალების გაზომვის დროს.

ვთქვათ ვწონით 100 ნიმუშს და ერთი აწონვის საშუალო კვადრატული ცდომილებაა 0.05 გ და თითოეულ ნიმუშს ვწონით ცალცალკე.

ზემოთ მოყვანილის ძალით ჯამური წონის განსაზღვრის ცდომილება იქნება

$$S_p = \sqrt{\sum_{1}^{100} S_i^2}$$

ვინაიდან ყველა გაზომვის ცდომილება ერთნაირია და სულ გაზომვათა რაოდენობა 100-ის ტოლია, ჯამური წონის ცდომილება იქნება

$$S_p = S\sqrt{100} = 10S = 10 \cdot 0.05 = 0.5 \text{ გ.}$$

სხვანაირად, რომ ვთქვათ ჩვენ შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ ჯამური წონის 1000 გაზომვიდან, რომლებიც ჩატარებულია ზემოთ მოყვანილი წესით, დაახლოებით 320 მოგვცემს გაზომილი სიდიდიდან 0.5 გ-ზე მეტ გადახრას, მხოლოდ 50 – 1 გ –ზე მეტ გადახრას და დაახლოებით სამი 1.5 გ და მეტ გადახრას.

პრაქტიკული მუშაობისას ძალიან მნიშვნელოვანია ერთმანეთისგან მკაცრად გავმიჯნოთ ცალკეული გაზომვის S საშუალო კვადრატული ცდომილების გამოყენება და საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული ცდომილება $S_{\bar{x}}$.

ეს უკანასკნელი გამოიყენება ყოველთვის, როდესაც გვინდა შევაფასოთ იმ რიცხის ცდომილება, რომელსაც ვიღებთ ყველა ჩატარებული გაზომვების შედეგად.

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვინდა დავახასიათოთ გაზომვის მოცემული მეთოდის სიზუსტე, ის უნდა დავახასიათოთ S ცდომილებით.

განვიხილოთ ეს შემდეგ მაგალითზე.

ვთქვათ გამტარის წინაღობის (R) დასადგენად ჩავატარეთ ათი გაზომვა, რომელთა შედეგები მოცემულია ცხრილ 9-ში.

წინაღობის გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილება S_R ტოლია 0.6 ომი-ის, ან თუ გადავალთ ფარდობით ცდომილებაზე, მოცემული გაზომვისთვის ვარიაციის კოეფიციენტი შეადგენს დაახლოებით 0.2%. მაგრამ გამოყენებული მეთოდის კვადრატული ცდმილება S შეადგენს 1.8 ომს, ხოლო ვარიაციის კოეფიციენტი – დაახლოებით 0.7%

ცხრილი 9. წინაღობის გაზომვის შედეგები

გაზომვის ნომერი	R, ომი	გაზომვის ნომერი	R,ომი
1	275	6	274
2	273	7	276
3	275	8	275
4	275	9	272
5	278	10	274

$$R = \frac{\sum R_i}{10} = 274.7, \qquad S = 1.8$$

$$S_{\bar{R}} = \frac{1.8}{\sqrt{10}} \approx 0.6$$

თუ ჩვენი მიზანია იმ მეთოდის აღწერა, რომლითაც გაზომვებისას ვსარგებლობთ, უნდა მივუთითოთ სწორედ ეს სიდიდე და ვიცით რა ის შეგვიძლია შევარჩიოთ გაზომვათა საჭირო რაოდენობა რათა მივაღწიოთ გაზომვის საბოლოო შედეგის სასურველ შემთხვევით ცდომილებას.

ვთქვათ, ერთი და იმავე მეთოდით და ერთი და იმავე სიზუსტით ჩავატარეთ k რაოდენობის გაზომვების სერია. პირველ სერიაში გაზომვათა რაოდენობა იყოს n_1, მეორეში - n_2 და ა.შ. მე - k -ში - n_k. თუ თითოეული გაზომვა

ხასიათდება σ ცდომილებით, მაშინ საშუალო არითმეტიკულის ცდომილება სერიისთვის რომლის ნომერია i (17) ფორმულის თანახმად გამოითვლება ფორმულით

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} \quad (18)$$

ცხადია, რომ თუ ერთ სერიაში ჩატარებულია ოთხჯერ მეტი გაზომვა, ვიდრე მეორეში, მაშინ ამ სერიაში გაზომვების ცდომილება შესაბამისად ორჯერ ნაკლები იქნება.

თუ გვინდა გაზომვის სიზუსტის გაზრდის მიზნით ორივე სერიის შედეგების გასაშუალება, უნდა გავითვალისწინოთ ის გარემოება, რომ ერთი შედეგი მიღებულია ორჯერ ნაკლები ცდომილებით. ამ მიზნით შემოაქვთ სტატისტიკური წონის ცნება ან უბრალოდ დაკვირვების წონის ცნება. მოცემულ შემთხვევაში P_i წონად უნდა მივიღოთ რიცხვი, რომელიც პროპორციულია სერიაში დაკვირვებათა რაოდენობის და დავუშვათ, რომ

$$P_i = Kn_i \quad (19)$$

ჩავსვამთ, რა აქ (17) განსაზღვრულ n_i მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$P_i = \frac{k\sigma^2}{\sigma_i^2} \quad (20)$$

და თუ შემოვიღებთ პროპორციულობის კოეფიციენტს $K = k\sigma^2$, მივიღებთ

$$P_i = \frac{K}{\sigma_i^2} \quad (21)$$

თუ მიღებული შედეგები ჩატარებულია სხვადასხვა პირობებში და ამასთან თითოეული შედეგისთვის ცნობილია საშუალო კვადრატული ცდომილება σ_i, მაშინ ამ შემთხვევაშიც შედეგების დამუშავებისთვის შეგვიძლია მათ მივანიჭოთ გარკვეული წონები P_i, და ასევე დავუშვათ

$$P_i = \frac{B}{\sigma_i^2}$$

აქ B - ნებისმიერი რიცხვია. ის ჩვეულებრივ ისე შეირჩევა, რომ P_i სიდიდეები იყოს რაც შეიძლება მცირე რიცხვები. ხშირად ისე ხდება, რომ σ_i სიდიდეები წინასწარ არაა ცნობილი და ცალკეულ გაზომვებს მიეწერება წონების ხვადასხვა მნიშვნელობები გარკვეული მოსაზრებების გამო, მაგალითად ექსპერიმენტატორის კვალიფიკაცია; გამზომი ხელსაწყოების სიზუსტეს და ა.შ.

ცხადია იმ წონის შემოღება, რომელიც შეფასებულია "თვალით" არ შეიძლება ჩაითვალოს მკაცრ ხერხად, მიუხედავად ამისა ის საშუალებას იძლევა გამოყენებულ იქნას მთელი გაზომვების ერთობლიობა. ანდა

შევნიშნოთ, რომ თუ ცალკეული გაზომვების წონები ერთმანეთისგან განსხვავდება 10-ჯერ და მეტად, უმჯობესია განხილვის არიდან მოვიშოროთ მცირე წონის მქონე მონაცემები, ვინაიდან მათმა მხედველობაში მიღებამ შეიძლება გააფუჭოს საიმედო შედეგები.

2.5. ნდობის ინტერვალისა და ნდობის ალბათობის დადგენა

ადრე ჩვენ დანართის 1 ცხრილის დახმარებით ვიპოვეთ ნდობის ალბათობები ცალკეული გაზომვებისთვის x_i, ე.ი. დავთვალეთ ალბათობები იმისა, რომ x_i არ გადაიხრება ნამდვილი მნიშვნელობისგან Δx-ზე მეტად. ცხადია, უფრო მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ თუ რამდენად გადაიხრება ნამდვილი x მნიშვნელობისგან ჩვენი გაზომვების საშუალო არითმეტიკული $\bar{x}$. ამისთვის ასევე შეიძლება გამოვიყენოთ დანართის 1 ცხრილი, ოღონდ σ_{x_i} ნაცვლად უნდა ავიღოთ $\sigma_{\bar{x}}$ სიდიდე, ანუ $\sigma_{x_i}/\sqrt{n}$. მაშინ ε არგუმენტისთვის, რომლითაც შევდივართ დანართის 1 ცხრილში, გვექნება შემდეგი მნიშვნელობა

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\Delta x\sqrt{n}}{\sigma_{x_i}} \quad (22)$$

ჩვენ ახლა ვიცით, თუ როგორ უნდა განვსაზღვროთ ნდობის ალბათობა ნებისმიერი ნდობის ინტერვალისთვის, თუ ცნობილია საშუალო კვადრატული ცდომილება σ. მაგრამ ამ უკანასკნელის დასადგენად, საჭიროა დიდი რაოდენობის გაზომვების ჩატარება, რაც ყოველთვის არაა შესაძლებელი და მოსახერხებელი. მაშინ როდესაც გაზომვებს ვატარებთ კარგად ცნობილი კვლევის მეთოდებით, რომელთა ცდომილობები ასევე კარგადაა ცნობილი, ჩვენ ყოველთვის წინასწარ ვიცით σ მნიშვნელობა. როგორც ცნობილია მეთოდის ცდომილება განისაზღვრება გაზომვების ჩატარებისას და ჩვეულებრივ შეგვიძლია დავადგინოთ მხოლოდ S_n, რომელიც შეესაბამება ამა თუ იმ, მაგრამ მხოლოდ მცირე რაოდენობის გაზომვებს n (S_2, S_3, $\cdots, S_n$ აქ ცალკეული გაზომვების საშუალო კვადრატული ცდომილებებია, რომლებიც განსაზღვრულია (23) ფორმულით ორი, სამი და მეტი გაზომვებისთვის).

$$\overline{\log x} = \frac{\sum_1^n \log x_i}{n} \ (23)$$

თუ ნდობის ალბათობის შესაფასებლად ჩავთვლით, რომ ჩვენს მიერ მიღებული S_n მნიშვნელობები ემთხვევიან σ, მაშინ ნდობის ინტერვალის დასადგენად გამოვიყენებთ დანართის 1 ცხრილს და ამით ვიპოვით α არასწორ (გაზრდილ) მნიშვნელობებს.

ეს იმის შედეგია, რომ საშუალო კვადრატული ცდომილების პოვნისას გაზომვების მცირე რაოდენობის დროს, ვპოულობთ ამ უკანასკნელს დაბალი სიზუსტით. ამ ფაქტით გამოწვეული ცდომილების განსაზღვრისას დაშვებული

ცდომილება იწვევს იმას, რომ როცა S_n ვცვლით σ, ჩვენ ვამცირებთ ჩვენი შეფასების საიმედოობას, თანაც მით მეტად, რაც ნაკლებია n.

ვთქვათ განვსაზღვრეთ შერჩევითი დისპერსია S_n^2 დაკვირვებათა რაღაც რიცხვისთვის n და გვინდა დავადგინოთ ჩვენს მიერ შერჩეული $\mp\Delta x$ ნდობის ინტერვალისთვის განვსაზღვროთ მისი შესაბამისი ნდობის ალბათობა.

ცხადია, თუ (22) ფორმულაში σ შევცლით S_n-ით, ასეთ ნდობის ინტერვალს შეესაბამება ნაკლები ნდობის ალბათობა. იმისთვის, რომ ეს გავითვალისწინოთ შესაძლებელია Δx წარმოვადგინოთ შედეგი სახით

$$\Delta x = \frac{t_{\alpha n} S_n}{\sqrt{n}}$$

საიდანაც

$$t_{\alpha n} = \frac{\Delta x \sqrt{n}}{S_n} \quad (24)$$

როგორც ვხედავთ აქ $t_{\alpha n}$ წარმოადგენს ε ანალოგს: ის იმავე როლს თამაშობს, ოღონდ ის მაინც და მაინც დიდი არაა იმ შემთხვევაში როდესაც გაზომვათა რაოდენობა რომლის მიხედვითაც დადგენილია ცდომილება ε_n დიდია. $t_{\alpha n}$ მნიშვნელობები, რომლებსაც სტიუდენტის კოეფიციენტი ეწოდება გამოთვლილია ალბათობის თეორიის გამოყენებით n და α სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის და მოყვანილია დანართის 2 ცხრილში. მასში მოყვანილი სიდიდეების შედარება დანართის 1 ცხრილში მოყვანილ სიდიდეებთან გვიჩვენებს, რომ გაზომვების n დიდი რაოდენობის შემთხვევაში $t_{\alpha n}$ მიისწრაფვის ε შესაბამისი მნიშვნელობებისკენ. ეს ბუნებრივია, ვინაიდან n გაზრდით S_n მიისწარფის σ - კენ.

სტიუდენტის კოეფიციენტის გამოყენებით შეგვიძლია (9) ტოლობა ასე გადავწეროთ

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha n}\frac{S_n}{\sqrt{n}} < x < \bar{x} + t_{\alpha n}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \alpha \quad (25)$$

ამ თანაფარდობისა და 2 ცხრილის გამოყენებით, ადვილად განისაზღვრება ნდობის ინტერვალები და ნდობის ალბათობები ნებისმიერი მცირე რაოდენობის გაზომვებისთვის.

მოვიყვანოთ შესაბამისი მაგალითები. ვთქვათ რაღაც სიდიდის 5 გაზომვის საშუალო არითმეტიკულია 31.2, ამავე 5 გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილებაა 0.24. ჩვენ გვინდა ვიპოვოთ ნდობის ინტერვალი იმისა, რომ საშუალო არითმეტიკული ნამდვილი მნიშვნელობისგან განსხვავდება არა უმეტეს 0.2-ით, ე.ი. შესრულდება უტოლობა $31.0 < x < 31.4$. $t_{\alpha n}$ მნიშვნელობა ვიპოვოთ მიღებული შედეგის ჩასმით (24) ფორმულაში, მაშინ

$$t_{\alpha,5} = \frac{0.2\sqrt{5}}{0.24} = 1.86$$

დანართის 2 ცხრილიდან ვპოულობთ $n = 5$ - თვის როცა $\alpha = 0.8$, $t_{\alpha n} = 1.5$ და როცა $\alpha = 0.9$, $t_{\alpha 0.9;5} = 2.1$.

ზოგადად, რომ ვთქვათ ჩვეულებრივ შეიძლება დავკმაყოფილდეთ პასუხით, რომ ნდობის ინტერვალი ამ შემთხვევისთვის მოთავსებულია შუალედში 0.8 და 0.9. თუ უფრო ზუსტი მნიშვნელობის დადგენა გვსურს მაშინ, უნდა გამოვთვალოთ პროპორციული ნაწილი იმის მსგავსად როგორც ეს ხდება ლოგარითმული ცხრილების გამოყენებისას.

ჩვენთვის საჭირო სიდიდეს გამოვთვლით პროპორციიდან

$$\frac{\Delta x}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{t_{\alpha n} - t_{0.8;n}}{t_{0.8;n} - t_{0.9;n}}$$

საიდანაც

$$\Delta x = 0.1\frac{0.36}{0.6}=0.06, \quad \alpha = \alpha_1 + \Delta x = 0.8 + 0.06 = 0.86$$

ამრიგად ნდობის ალბათობა ამ შემთხვევისთვის 0.86 – ის ტოლია.

ვიპოვოთ ახლა ნდობის ალბათობა 10 გაზომვისა და იმავე საშუალო კვადრატული ცდომილების 0.24 და ნდობის ინტერვალისთვის 31.0 – 31.4. (24) ფორმულით განვსაზღვრავთ

$$t_{\alpha,10} = \frac{0.2\sqrt{10}}{0.24} \approx 2.6$$

დანართის 2 ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ უახლოესი ნაკლები მნიშვნელობაა

$$t_{\alpha,10} = 2.3 \text{ როცა } \alpha = 0.95$$

და უახლოესი მეტი მნიშვნელობა კი

$$t_{\alpha,10} = 2.8 \quad \text{როცა } \alpha = 0.98$$

პროპორციულ ნაწილს ვიპოვით თანაფარდობიდან

$$\Delta\alpha = \frac{0.3 \cdot 0.03}{0.5} \approx 0.02$$

საბოლოოდ $\alpha = 0.97$

2.6. გაზომვათა აუცილებელი რაოდენობა

როგორც ზემოთ მივუთითეთ შემთხვევითი ცდომილების შესამცირებლად შესაძლებელია ორი ხერხის გამოყენება: გაზომვის სიზუსტის ამაღლება, ანუ σ შემცირება და გაზომვების რიცხვის გაზრდა, ანუ

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

თანაფარდობის გამოყენება. ჩავთავალოთ, რომ გაზომვის ტექნიკის გაუმჯობესების ყველა გზა გამოყენებულია. დავუშვათ, რომ ხელსაწყოს სიზუსტის კლასით და სხვა ანალოგიური გარემოებებით განპირობებული ცდომილებაა δ.

ცნობილია, რომ შემთხვევითი ცდომილების შემცირება მიზანშეწონილია მანამადე სანამ გაზომვის სრული ცდომილება მთლიანად არ განისაზღვრება სისტემატური ცდომილებით. ამისათვის საჭიროა, რომ ნდობის ინტერვალი, რომელიც შერჩეულია ნდობის არჩეული ინტერვალით, არსებითად ნაკლები იყოს სისტემატურ ცდომილებაზე, ანუ

$$\Delta x \ll \delta \quad (26)$$

ცხადია უნდა შევთანხმდეთ, თუ ნდობის რა ხარისხი და შემთხვევითი ცდომილების რა სიდიდე გვჭირდება, სხვანაირად Δx და δ რა თანაფარდობებს ვთვლით დასაშვებად (26) პირობის შესაბამისად. ამ გარემოების მკაცრი შეფასება ძნელია, მაგრამ შეიძლება გამოვიდეთ იმ მოსაზრებიდან, რომ როგორც წესი 10%-ზე მეტი სიზუსტით გაზომვის აუცილებლობა არაა საჭირო ხოლმე. ეს იმას ნიშნავს, რომ როცა $\Delta x \le \delta/10$, (26) პირობა შეიძლება შესრულებულად ჩავთვალოთ. პრაქტიკულად ნაკლებად მკაცრი პირობითაც შეიძლება დავკმაყოფილდეთ $\Delta x \le \delta/3$ ან თუნდაც $\Delta x \le \delta/2$.

საიმედოობა α, რომლითაც გვინდა დავადგინოთ ნდობის ინტერვალი, უმრავლეს შემთხვევაში არ უნდა აღემატებოდეს 0.95, თუმცა ზოგჯერ საჭიროა α უფრო მაღალი მნიშვნელობებიც. გაზომვების საჭირო რაოდენობის გამოსათვლელად დანართში განთავსებულია 4 ცხრილი. მოვიყვანოთ მისი გამოყენების მაგალითები.

1)ვთქვათ ვზომავთ ბირთვის დიამეტრს მიკრომეტრით რომლის ცდომილებაა 1 მკმ. ერთი გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილებააა 2.3 მკმ. რამდენი გაზომვა უნდა ჩავატაროთ, რომ მივიღოთ არა უმეტეს 1.5-ზე მეტი ცდომილება საიმედოობით 0.95?

ვთქვათ $\Delta x = \delta/2 = 0.5$ მკმ; $S_n = 2.3$ მკმ, $\Delta x = 0.5/2.3$, $\delta = 0.22$. დანართის 4 ცხრილის სვეტში ვპოულობთ $\alpha = 0.95$; როცა $\varepsilon = 0.3$; $n = 46$ და $\varepsilon = 0.2$-თვის $n = 100$. შევადგინოთ შესაბამისი პროპორცია, ადვილად გამოვთვლით, რომ $\varepsilon = \Delta x/s = 0.22$ - თვის $n \approx 57$.

სხვანაირად, რომ ვთქვათ საჭიროა ჩავატაროთ 60 – მდე გაზომვა, იმისთვის, რომ შემთხვევითმა ცდომილებამ საერთო ცდომილება შეცვალოს არაუმეტეს 1.5 – ჯერ.

საინტერესოა რამდენი გაზომვა უნდა ჩავატაროთ, რომ გაზომვის პირობები უფრო მკაცრი იყოს. კერძოდ შემთხვევითი და სისტემატური ცდომილებები დაახლოებით ტოლი იყოს. ამ შემთხვევისთვის ვუშვებთ $\delta = \Delta x = 0.45S$ და იმავე დანართის 4 ცხრილიდან ვპოულობთ (როცა $\alpha = 0.95$) $n \approx 23$

ვხედავთ, რომ ორივე მაგალითში გაზომვების საჭირო რაოდენობა საკმაოდ დიდია მაგრამ შესრულებადი.

1)რაღაც გაზომვებისთვის ვარიაციის კოეფიციენტი w შეადგენს 1%. სისტემატური ცდომილება კი – $\delta = 0.1\%$, რამდენი გაზომვა უნდა ჩავატაროთ, რომ შემთხვევითმა ცდომილებამ გავლენა არ მოახდინოს?

ვინაიდან შემთხვევითი ცდომილებები ფარდობით ერთეულებშია მოცემული, სამართლიანია თანაფარდობა

$$\frac{\Delta x_{ფარდ}}{\omega} = \frac{\Delta x}{S} = \frac{0.05}{1}.$$

ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ იმავე ნდობის ინტერვალისთვის $\alpha = 0.95$ და $\Delta x/S = 0.05$ – თვის $n = 1500$ (!)

პრაქტიკულად ამ რაოდენობის გაზომვების ჩატარება ძალიან ძნელია.

მოყვანილი მაგალითებიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ გაზომვების რაოდენობის გაზრდით შესაძლებელია თავიდან ავიცილოთ შემთხვევითი ცდომილების გავლენა გაზომვის საბოლოო შედეგზე, მხოლოდ მაშინ, როდესაც საშუალო კვადრატული ცდომილება მხოლოდ და მხოლოდ რამოდენიმეჯერ აღემატება სისტემატურ ცდომილებას. რეალურად ეს შესაძლებელია მაშინ, როდესაც $\sigma \leq 5\,\delta$. σ დიდი მნიშვნელობების დროს კი როგორც ეს 4 ცხრილიდან ჩანს, საჭიროა ასი, ათასი ზოგჯერ კი რამდენიმე ათასი გაზომვის ჩატარება. ამ შემთხვევაში საჭიროა რადიკალურად შეიცვალოს გაზომვის მეთოდიკა, რათა შემცირდეს შემთხვევითი ცდომილება.

2.7. უხეში ცდომილების აღმოჩენა

ისეთი გაზომვების ჩატარებისას, როდესაც ადგილი აქვს შემთხვევით ცდომილებებს, შეიძლება ისეთი მონაცემი მივიღოთ, რომელიც მნიშვნელოვნად განსხვადება სხვა მონაცემებისგან. ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ მაღალ ცდომილებებს დაბალი ალბათობა გააჩნიათ და თუ გაზომვის შედეგებში შეგვხვდა ერთი ისეთი შედეგი, რომელიც მკვეთრად განსხვავდება სხვებისგან მას ცხადია ვერ ვენდობით და უნდა უკუვაგდოთ. მოვიყვანოთ შესაბამისი მაგალითი. 5 ცხრილში მოყვანილია რაღაც სხეულის სიგრძის გაზომვის შედეგები

ცხრილი 10. სიგრძის გაზომვის შედეგები

გაზომვის ნომერი	l
1	258.5
2	255.4
3	256.6
4	256.7

5	257.0
6	256.5
7	256.7
8	255.3
9	256.0
10	256.0
11	256.3
12	256.5
13	256.0
14	256.3
15	256.9

ცხრილის მონაცემებით ვპოულობთ საშუალო არითმეტიკულ მნიშვნელობას $l = 257.11$ ყველაზე მონაცემის, მათ შორის პირველი და მეათე მნიშვნელობის, გათვალისწინებით. მაგრამ მეათე მონაცემი 266,0 აშკარად უხეში შეცდომაა. 5 –ის ნაცვლად წერია 6. თუ ამ მონაცემს უკუვაგდებთ მივიღებთ $l = 256,48$. მაგრამ ამ რიგში საეჭვოა ასევე შედეგი 258.5 (შესაძლებელია წერია 8 ნაცლად 6 – ისა). თუ უკუვაგდებთ ამ მონაცემსაც მაშინ საშუალო არითმეტიკული გახდება $l = 256.32$. ძნელი მისახვედრი არაა, რომ ასეთი უკუგდების მეთოდი საიმედო არაა. ასე თუ გავაგრძელებთ მივიღებთ სავსებით დაუსაბუთებელ და ფიქტიურ სიზუსტეს. მართლაც, S სიდიდედ, ზემოთ ნათქვამის და მე-10 ცხრილში მოყვნილი მონაცემების საშუალებით, მიიღება 2.6. თუ უკუვაგდებთ №1 და №10 მონაცემებს, S ტოლი აღმოჩნდება 0.5. ამ გზით თუ უკუვაგდებთ №5, №8 და №15 მონაცემებს, მაშინ $l = 256.40$ და S ტოლი აღმოჩნდება 0.1. ცხადია ასეთი დაბალი ცდომილება მიღებულ იქნა როგორც უკანონო უკუგდებების შედეგი. ამიტომ საჭიროა, ობიექტურად შევაფასოთ საეჭვო მონაცემები და დავასკვნათ ისინი უხეში შეცდომებია, თუ შემთხვევითი ცდომილებები? ეს საკითხი შეიძლება გადაწყდეს შემდეგი მოსაზრებების საფუძველზე: ჩვენ შეგვიძლია რაღაც გაზომვა ჩავთვალოთ უხეშ ცდომილებად (x_k), თუ ასეთი მონაცემის შემთხვევით გამოჩენის ალბათობა მოცემულ მონაცემებში ძალიან დაბალია.

თუ ჩვენთვის ცნობილია σ ზუსტი მნიშვნელობა, მაშინ როგორც ვიცით იმ მონაცემის გამოვლენის ალბათობა, რომელიც საშუალო არითმეტიკულისგან $\bar{x}$ განსხვავდება 3σ-ით, ტოლია 0.003; და ყველა გაზომვა, რომელიც იძლევა $\bar{x}$ - გან ამ ან მეტი სიდიდით განსხვავებულ შედეგს შეიძლება უკუვაგდოთ, როგორც ნაკლებად ალბათური. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ჩვენ ვთვლით, რომ ყველა შედეგი, რომლის გამოვლენის ალბათობა 0.003 – ზე ნაკლებია უხეში შეცდომაა.. უგულებელვყოფთ რა ასეთ მონაცემებს ვუშვებთ, რომ მაინც არსებობს მცირე, მაგრამ ნულისგან განსხვავებული ალბათობა იმისა, რომ უგულებელყოფილი მონაცემები არ არის უხეში ცდომილება, არამედ ბუნებრივ სტატისტიკურ გადახრას წარმოადგენს. მაგრამ თუ ასეთი ნაკლებ

ალბათური შემთხვევა მოხდება, ე.ი. არასწორად იქნება უკუგდებული, ჩვეულებრივ ეს არ გამოიწვევს გაზომვის შედეგის არსებით გაუარესებას.

მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ გაზომვათა რიგში იმ შედეგის გამოჩენის ალბათობა, რომელიც 3σ-ზე მეტჯერ განსხვავდება საშუალო მნიშვნელობისგან ყოველთვის, მეტია 0.003. მართლაც ალბათობა იმისა, რომ პირველი გაზომვის შედეგი არ განსხვავდება ნამდვილი მნიშვნელობისგან 3σ -ზე მეტჯერ, შეადგენს 1 – 0.003 = 0.097. ხოლო ალბათობა იმისა, რომ გაზომვის პირველი და მეორე შედეგი არ გამოვა ნაჩვენები საზღვრიდან, ალბათობათა გამრავლების წესის თანახმად შეადგენს $(1-0.003)^2$.

შესაბამისად β ალბათობა იმისა, რომ n რაოდენობის გაზომვებიდან არცერთი მათგანი საშუალო მნიშვნელობიდან არ განსხვავდება 3σ-ით, ტოლია

$$\beta = (1-0.003)^n$$

არცთუ დიდი $n-$ თვის მიახლოებით შეიძლება დავწეროთ $(1-0.003)^n = 1 - 0.003n$.

ეს იმას ნიშნავს, რომ ალბათობა იმისა, რომ 10 გაზომვიდან თუნდაც ერთი შემთხვევით განსხვავდება საშუალო მნიშვნელობისგან 3σ-ზე მეტით, იქნება არა 0.003, არამედ. 0.03 ანუ 3%, ხოლო 100 გაზომვისას ასეთი მოვლენის ალბათობა უკვე შეადგენს დაახლოებით 30%.

ჩვეულებრივ ჩატარებული გაზომვების რაოდენობა ძალიან დიდი არაა, იშვიათად აღემატება 10 – 20. ამ დროს σ ზუსტი მნიშვნელობა უცნობია. შესაბამისად იმ შედეგების უგულებელყოფა, რომლებიც საშუალოსგან განსხვავდება 3σ - ზე მეტით, არ შეიძლება.

გაზომვების საერთო რიგიდან ამოვარდნილი შემთხვევითი შედეგების β ალბათობების გასათვლელად (როცა $n < 25$), ალბათობათა თეორიის თანახმად გათვლილი შედეგები მოყვანილია დანართის 5 ცხრილში. როცა n მეტია 25-ზე, გაანგარიშებების საწარმოებლად შეიძლება დავუშვათ $S_n = \sigma$ და β შეფასება მოვახდინოთ ფორმულით

$$\beta \approx \alpha^n$$

აქ α წარმოადგენს ნდობის ალბათობას, რომელიც განსაზღვრულია ნორმალური განაწილებისთვის (α აიღება დანართის 1 ცხრილიდან)

5 ცხრილის გამოსაყენებლად ვითვლით საშუალო არითმეტიკულს $\bar{x}$ და საშუალო კვადრატულ ცდომილებას, საეჭვო S_k ჩათვლით, რომელიც ჩვენი აზრით დაუშვებლად დიდია ან მცირე.

ვითვლით ამ გაზომვის ფარდობით გადახრას საშუალო არითმეტიკულისგან, რომელიც გამოსახულია საშუალო კვადრატული ცდომილების წილებში

$$v_{მაქს} = \left|\frac{\bar{x} - x_k}{S_n}\right| \qquad (27)$$

5 ცხრილიდან ვპოულობთ, თუ როგორ β ალბათობას შეესაბამება მიღებული $v_{მაქს}$. ცხადია უნდა შევთანხდეთ იმაში თუ β რა მნიშვნელობისთვის უკუვაგდებთ შედეგს.

5 ცხრილი შედგენილია ისე, რომ β ყველაზე პატარა მნიშვნელობა მასში ტოლია 0.01. უფრო დაბალი ალბათობის მქონე შედეგების დატოვება არამიზანშეწონილია.

მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ თუ ზოგჯერ ცალკეულ გადახრებს ჩავთლით უხეშ ცდომილებად და უკუვაგდებთ, ასეთი “შემთხვევითი” უკუგდება არ მიგვიყვანს გაზომილი სიდიდის მნიშვნელოვან ცვლილებამდე. მნიშვნელოვანია უკუგდება მოვახდინოთ არა ინტუიციურად არამედ სრულებით განსაზღვრული კრიტერიუმებით.

ჩვენს შემთხვევაში $l_{10} = 266$ და მიიღება $v_{მაქს} = (266.0 - 257.1)/2.6 = 3.42$. $v_{მაქს}$ უდიდესი მნიშვნელობა როცა $n = 15$, დანართის 5 ცხრილის მიხედვით, ტოლია 2.80, რასაც შეესაბამება $\beta = 0.01$. ვინაიდან $v_{მაქს}$ გაზრდით β მცირდება, როცა $v_{მაქს} = 3.42$ β გაცილებით ნაკლები უნდა იყოს 0.01 – ზე. β ასეთი მონაცემები ცხრილში არ არის. პირობიდან $\beta \ll 0.01$, გამომდინარეობს, რომ შედეგი 266.0 უხეში შეცდომაა და ის უგულებელყოფილ უნდა იქნას. დარჩენილ მონაცემებში საეჭვოა შედეგი 257.5. მისთვის $v_{მაქს}$ ღებულობს სიდიდეს (258.5 – 126.5)/2=1.0. დანართის 5 ცხრილიდან ჩანს, რომ ამ მნიშვნელობას შეესაბამება $\beta > 0.1$, და შედეგი 258.5 ცხადია უნდა დარჩეს.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი. 15 გაზომვის შედეგის მიხედვით ვერცხლისწყლის სიმკვრივე ρ ტოლია 13.59504 გ/სმ^3, საშუალო კვადრატული ცდომილება კი $S_{15} = 5 \cdot 10^{-5}$ გ/სმ^3. გაზომვის შედეგებში ურევია ერთი მონაცემი $\rho =$13.59504 გ/სმ^3. ამისთვის

$$v_{მაქს} = \frac{1359518 - 1359504}{5 \cdot 10^{-5}} = 2.6$$

$n = 15$ მნიშვნელობისთვის $v_{მაქს}$ შეესაბამება $\beta \approx 0.025$.

ამრიგად უკუვაგდებთ რა ამ მნიშვნელობას, 0.975 – ის ტოლი ალბათობით შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ სწორად მოვიქეცით, ე.ი. ეს მონაცემი უხეში შეცდომაა.

თუ ამ მონაცემს დავტოვებდით, ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ის ρ საშუალო მნიშვნელობას შეცვლიდა მხოლოდ 0.00001 -ით, ე.ი. სიდიდით, რომელიც ნაკლებია S-ზე და ამიტომ არ თამაშობს არავითარ პრაქტიკულ როლს. შესაბამისად რაიმე მონაცემის უკუგდებისას უნდა დავაკვირდეთ თუ რამდენად ცვლის ის საბოლოო შედეგს.

თუ მოცემული შედეგის გამოჩენის ალბათობა ძევს $0.1 < \beta < 0.01$ შუალედში, ერთნაირად დასაშვებია მისი დატოვება და უარყოფაც. იმ შემთხვევებში როდესაც β გადის ამ ფარგლებიდან მაშინ ეს საკითხი ცალსახად წყდება.

2.8. არაპირდაპირი გაზომვების ცდომილებები

ხშირად ჩვენ პირდაპირ ვზომავთ არა ჩვენთვის უშუალოდ საინტერესო სიდიდეს, არამედ სხვა სიდიდეს, რომელიც მასთან დაკავშირებულია ამა თუ იმ წესით. მაგალითად მართკუთხედის ფართობის გამოსათვლელად ვზომავთ სიგრძეს (a), სიგანეს (b) და შემდეგ მათი მეშვეობით ვითვლით ფართობს $S = a \cdot b$.

ტემპერატურის გაზომვისას ვერცხლისწყლის თერმომეტრით ვზომავთ ვერცხლისწყლის სვეტის დაგრძელებას, რომელიც ტემპერატურის ცვლილებასთან და მოცულობითი გაფართოების კანონთან დაკავშირებულია ფორმულით

$$t_2 - t_1 = \frac{(h_2 - h_1)\pi r^2}{v_0(\gamma_2 - \gamma_1)}$$

სადაც t_1 და t_2 - საწყისი და საბოლოო ტემპერატურებია. v_0 - ვერცხლისწყლის ბურთულის მოცულობა, γ_2- ვერცხლისწყლის სითბური გაფართოების კოეფიციენტი, γ_1- მინის სითბური გაფართოების კოეფიციენტი, h_1 და h_2 - ვერცხლისწყლის სვეტის საწყისი და საბოლოო სიმაღლეებია, r – თერმომეტრის კაპილარის რადიუსია.

ასეთი გაზომვების დროს, რომელსაც არაპირდაპირი გაზომვები ეწოდებათ, ასევე აუცილებელია ვიცოდეთ ცდომილებების გამოთვლა.

შეიძლება გვქონდეს შემდეგი ორი შემთხვევა:

1)ჩვენთვის საინტერესო სიდიდე დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ გაზომვად სიდიდეზე;

2)ჩვენთვის საინტერესო სიდიდე დამოკიდებულია რამდენიმე სიდიდეზე.

ჯერ განვიხილოთ მარტივი შემთხვევები.

1)ვთქვათ ჩვენთვის საინტერესო სიდიდე Y უშუალოდ გაზომვად X სიდიდესთან დაკავშირებულია წრფივი კანონით

$$Y = kX + b \quad (28)$$

სადაც k და b მუდმივი სიდიდეებია. ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ X გაიზრდება ან შემცირდება ΔX-ით, მაშინ შესაბამისად Y შემცირდება ან გაიზრდება $k\Delta X$ სიდიდით. მართლაც ვთქვათ X გაიზარდა ΔX – ით, მაშინ (28) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$Y + \Delta Y = k(X + \Delta X) + b \qquad (29)$$

(29) გამოვაკლოთ (28), მივიღებთ

$$\Delta Y = k\Delta X$$

ცხადია აქ ΔY წარმოადგენს Y გაზომვის ცდომილებას.

ზოგადად როცა $Y = f(X)$, მაშინ ცდომილებებისთის, რომლებიც გაცილებით ნაკლებია გასაზომ სიდიდესთან შედარებით, საკმარისი სიზუსტით შეიძლება დავწეროთ

$$\Delta Y = f^{I}(X)\Delta X \qquad (30)$$

შევნიშნოთ, რომ (30) ფორმულა შეიძლება სამართლიანი არ იყოს $f(X)$ ფუნქციის ექსტრემუმის სიახლოვეს, სადაც $f^{I}(X)$ ნულის ტოლი ხდება.

თუ გვსურს ფარდობითი ცდომილების გამოთვლა, (30) – დან ადვილად მივიღებთ

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f^{I}(X)}{f(X)}\Delta X \qquad (31)$$

ცდომილების გამოთვლის ეს ხერხი ერთნაირად გამოსადეგია შემთხვევითი და სისტემატური ცდომილებებისთვის.

2) როდესაც ჩვენთვის საინტერესო სიდიდე წარმოადგენს სხვადასხვა $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ სიდიდეების ჯამს მაშინ შემთხვევითი ცდომილების გამოსათვლელ ფორმულას, როგორ ეს ზემოთ ვაჩვენეთ, გააჩნია (14) ფორმულის სახე.

$$Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \quad \text{მაშინ}$$

$$\sigma_Y^2 = \left(X_1 X_2 \sigma_{X_3}\right)^2 + \left(X_1 X_3 \sigma_{X_1}\right)^2 + \left(X_3 X_2 \sigma_{X_1}\right)^2 \quad (32)$$

ანალოგიური ფორმულა სამართლიანია თანამამრავლთა დიდი რაოდენობის შემთხვევაშიც

თუ $Y = X_1/X_2$, მაშინ

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_{X_1}^2}{X_2^2} + \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^2 \sigma_{X_2}^2 \quad (33)$$

(32) და (33) შემთხვევისთვის ფარდობით ცდომილებას აქვს ერთნაირი სახე

$$\left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_2}}{X_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_3}}{X_3}\right)^2 \quad (34)$$

ანალოგიურად

$$\left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_2}}{X_2}\right)^2 \quad (35)$$

დიფერენციალური აღრიცხვის აღნიშვნების გამოყენებით, $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ ცვლადების Y ფუნქციისათვის მისი ცდომილების ფუნქცია შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$\sigma_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\sigma_{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\sigma_2\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_3}\sigma_{X_3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\sigma_{X_n}\right)^2} \quad (36)$$

(32) და (36) ფორმულები ინარჩუნებენ თავიანთ სახეს მაშინაც, როდესაც σ ცდომილების ნაცლად ავიღებთ საშუალო კვდრატულ ცდომილებას S_n ან საშუალო არითმეტიკულ ცდომილებას r. ზოგადად

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2} \quad (37)$$

Y სიდიდის ფარდობითი ცდომილება ადვილად გამოითვლება, თუ დავწერთ

$$\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 = \sum_1^n \left(\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2$$

ვინაიდან

$$\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial X_i}\Delta X_i = \frac{\partial lnf}{\partial X_i}$$

ფარდობითი ცდომილებისთვის მივიღებთ

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial lnf}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2} \quad (38)$$

შეიძლება დაიბადოს კითხვა, როგორ შეიძლება სწორად გამოთვლილ იქნას საშუალო არითმეტიკული და გაზომვის ცდომილება არაპირდაპირი გაზომვებისას? თუ $y = f(x)$ და გაზომვები გვაძლევს მონაცემთა x_i რიგს, მაშინ შესაძლებელია ორნაირად მოვიქცეთ:

1)გამოვთვალოთ $\bar{x} = \sum x_i/n$ და მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ $y = f(x)$ განტოლებაში, მივიღებთ $\bar{y} = f(\bar{x})$;

2)თითოეული x_i - თვის გამოთვალოთ $y_i = f(x_i)$ და შემდეგ $\bar{y}$ გამოვთვალოთ თანაფარდობით

$$y = \frac{\sum_1^n y_i}{n}$$

შესაბამისად შეიძლება ორი გზით განვსაზღვროთ y სიდიდის ცდომილება, განვსაზღვრავთ რა $\bar{x}$, შემდეგი ფორმულით

$$\Delta y = f^I(x)\Delta x$$

ან y_i მნიშვნელობების გამოთვლით და y -ის გამოთვლით ჩვეულებრივი ფორმულით

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y - y_i)^2}{n-1}}$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ ცდომილების სიდიდეები მცირეა გასაზომ სიდიდესთან შედარებით (სწორედ ეს უდევს საფუძვლად ყველა ჩვენს

ფორმულას), მაში ორივე ხერხი იძლევა ერთნაირ შედეგს, ამიტომ მნიშვნელობა არა აქვს თუ რომელ ხერხს გამოვიყენებთ.

ამ დროს უნდა ვიხელმძღვანელოთ ანგარიშის ჩატარების სიმარტივით. ამ მხრივ უმჯობესია პირველი ხერხი. გარდა ამისა, თუ გაზომვის შედეგები განაწილებულია ნორმალური კანონით, მაშინ σ სიდიდე განაწილებულია, ზოგადად რომ ვთქვათ ნორმალუსგან განსხვავებული კანონით. ამიტომ ნდობის ინტერვალის დადგენისთვის დანართის 2 ცხრილით უმჯობესია ვისარგებლოთ პირველი ხერხით.

2.9. სხვადასხვა წარმოშობის შემთხვევითი ცდომილებები

არაპირდაპირი გაზომვებისას ჩვენთვის საჭირო შედეგი დამძიმებულია შემთხვევითი ცდომილებებით, რომლებიც სხვადასხვაა X_i სიდიდისთვის, რომლებზედაც დამოკიდებულია ჩვენთვის საჭირო Y სიდიდე. ჯამური ცდომილება ამ შემთხვევაშიც განისაზღვრება ჩვენთვის ცნობილი შემთხვევითი ცდომილებების შეკრების კანონით. გაანგარიშებები უმჯობესია ჩავატაროთ ფარდობითი ცდომილებებით.

ვაჩვენოთ ეს სიმკვრივის დადგენის მაგალითზე. ვთქვათ გვაქვს მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომელიც დამზადებულია ნივთიერებისგან რომლის სიმკვრივის დადგენაც გვსურს. მისი წიბოს სიგრძეები იყოს X_1, X_2, X_3. სიმკვრივის დასადგენად ვისარგებლოთ ფორმულით $\rho = m/V$. სადაც m - პარალელეპიპედის მასაა, V- მოცულობა, ჩვენ ვზომავთ წიბოების სიგრძეებს და ნიმუშის მასას. ვთქვათ $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3}$ წიბოებისის სიგრძეების საშუალო კვადრატული ცდომილებებია, σ_m - მასის გაზომვის ცდომილებაა. ჩვენ შეგვიძლია (34) ფორმულის ძალით დავწეროთ

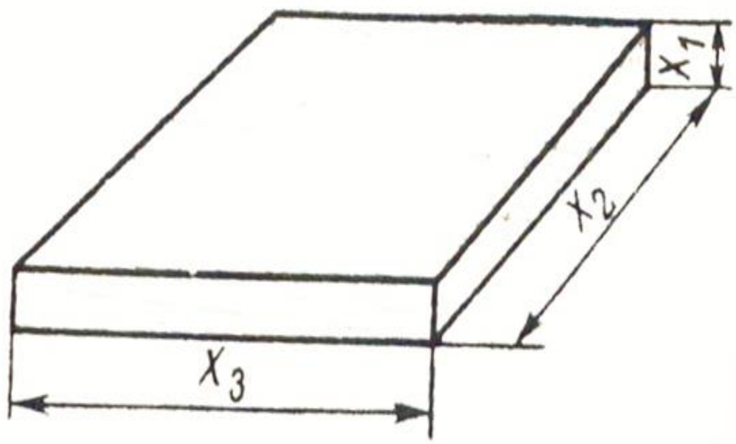
$$\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_2}}{X_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_3}}{X_3}\right)^2$$

ვთქვათ გაზომვას ვაწარმოებთ სასწორით, რომელიც უზრუნველყოფს გაზომვას 1 მგ სიზუსტით, როცა ნიმუშის მასაა 10 გ. მაშინ $\sigma_m/m \approx 10^{-4} \approx 10^{-2}\%$.

ვთქვათ ჩვენი სხეულის მოცულობა შეადგენს 1 სმ^3.. თუ გვსურს, რომ გაზომვის ცდომილება განპირობებული იყოს ძირითადად აწონვის სიზუსტით, აუცილებელია, რომ წიბოების სიგრძეების გაზომვის ცდომილება ნაკლები იყოს აწონვის სიზუსტეზე, ე.ი. $\sigma_x/X < 10^{-4}$; ეს წახნაგების 1 სმ ზომის შემთხვევაში ნიშნავს, რომ σ_x ნაკლები უნდა იყოს 10^{-4} სმ-ზე. თუ ჩვენს განკარგულებაშია მაგალითად შტანგერფარგლის მსგავსი ინსრუმენტები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან გაზომვები ჩატარდეს 0.01 სმ-დე სიზუსტით, ცხადია, რომ სასურველ სიზუსტეს ვერ მივაღწევთ, ვინაიდან სიგრძის გაზომვის სიზუსტე შეადგენს მხოლოდ 1%. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია უფრო ნაკლები სიზუსტის სასწორით ვისარგებლოთ, რომელიც რამდენიმე ათეულჯერ ნაკლებ სიზუსტეს უზრუნველყოფს, ასეთია ე.წ. ტექნიკური სასწორები. ასეთი მიდგომა უფრო მიზანშეწონილია რადგან მოითხოვს ნაკლებ დანახარჯებს და

დროს. მაგრამ თუ ჩვენთვის მაინც უფრო მნიშვნელოვანია 10^{-2} % სიზუსტის მიღწევა, აუცილებელია მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოების სიგრძეების გაზომვა მიკრომეტრით, რომელიც საშუალებას იძლევა სიგრძეები გაიზომოს 10^{-3} მმ სიზუსტით და აწონვა კი მოხდეს ანალიზური სასწორით.

მოყვანილ მაგალითზე შეიძლება თვალი მივადევნოთ კიდევ სხვა თვისებებს რომლებიც უზრუნველყოფენ ჯამურ ცდომილებებს და რომლებიც ცდომილებათა შეკრების კანონის შედეგია. დავუშვათ, რომ ჩვენს პარალელეპიპედს გააჩნია ნახ.17-ზე გამოსახული ფორმა $X_1 \ll X_2 \approx X_3$.



ნახ.17. მართკუთხა პარალელეპიპედი

სიგრძის გამზომი ხელსაწყოების უმრავლესობა იძლევა ΔX ცდომილებას, რომელიც თითქმის არაა დამოკიდებული გასაზომ სიგრძეზე (მოცემული ხელსაწყოების გაზომვის ფარგლებში). აბსოლუტური ცდომილება მუდმივია. ამიტომ დავუშვათ $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_{x_2} = \sigma_x$ მაგრამ ამ შემთხვევაში

$$\frac{\sigma_{x_1}}{X_1} \gg \frac{\sigma_{x_2}}{X_2} \approx \frac{\sigma_{x_3}}{X_3},$$

და განმსაზღვრელი იქნება ყველაზე მცირე წიბოს გაზომვის ცდომილება. პრაქტიკულად თუ ერთი წიბო 3 – 4 – ჯერ ნაკლებია დანარჩენ ორზე, მაშინ ამ უკანასკნელი ორის გაზომვის ცდომილება შეიძლება უგულებელვყოთ.

ამრიგად (36) ფორმულა ყოველთვის იძლევა იმის საშუალებას, რომ შეფასდეს ცალკეული რგოლის ცდომილების როლი გაზომვის პროცესის სხვადასხვა რგოლებში. ამასთან გაზომვის პირობები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ თითოეული რგოლის ფარდობითი ცდომილება მიახლოებით ერთნაირი იყოს. წინააღმდეგ შემთხვევაში შედეგის სიზუსტე ჩვეულებრივ განპირობებულია ერთ-ერთი სიდიდით, სახელდობრ იმით, რომლის გაზომვის სიზუსტეც ყველაზე დაბალია.

2.10. სისტემატური და შემთხვევითი ცდომილებების გათვალისწინება

ზემოთ ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ გაზომვები ისე უნდა იყოს ორგანიზებული, რომ საბოლოო შედეგის სიზუსტე განპირობებული იყოს მხოლოდ გაზომვების სისტემატური ცდომილებებით, რომელიც როგორც წესი დამოკიდებულია გამზომი ხელსაწყოს სიზუსტეზე. ამასთან რეკომენდებული იყო გაზომვების ჩატარება იმ რაოდენობით, რომ გაზომვის შემთხვევითი ცდომილება უმნიშვნელოდ ყოფილიყო განსხვავებული სისტემატური ცდომილებისგან.

მაგრამ ყოველთვის ვერ ხერხდება საჭირო რაოდენობის გაზომვების ჩატარება. მას შეიძლება ხელი შეუშალოს გაზომვების სიძვირემ, გაზომვების დიდმა ან მცირე ხანგრძლოვობამ. ამდენად ხშირად იძულებული ვართ შევეგუოთ სიტუაციას, როდესაც გაზომვის სისტემატური და შემთხვევითი ცდომილებები თითქმის ერთნაირია და ამდენად ერთნაირად განაპირობებენ საბოლოო შედეგის სიზუსტეს. სამწუხაროდ ამ შემთხვევაში ძალიან ძნელია მიეცეს მკაცრი განმარტება გაზომვის ჯამურ ცდომილებას.

როცა საქმე გვაქვს მხოლოდ გამზომი ხელსაწყოს ცდომილებასთან მაგალითად, მაგალითად ამპერმეტრთან, რომლის ცდომილებააა ± 0.75 მა, ჩვენ ცხადია არ ვიცით რა მოცემული ხელსაწყოს თვისებები, არაფერი არ შეგვიძლია ვთქვათ იმის შესახებ თუ როგორია ალბათობა იმისა, რომ დაშვებული იქნება ცდომილება + 0.2 ან - 0.3. ჩვენ ვიცით, მხოლოდ შესაძლო ცდომილების ზედა ზღვარი. თუ ასეთ სისტემატურ ცდომილებას დაემატება შემთხვევითი ცდომილება, მაშინ ჩვენ ცხადია ასევე ვერაფერს ვიტყვით სხვადასხვა სიდიდის ცდომილების გაჩენის ალბათობის შესახებ, თუმცა შეგვიძლია შევაფასოთ ჯამური ცდომილება.

მართლაც თუ სისტემატურ ცდომილებას აღვნიშნავთ δ, დისპერსიას - σ^2, მაშინ ჯამური ცდომილების ზედა ზღვარად შეიძლება მივიღოთ

$$\sum = \delta + 2\sigma \quad (39)$$

მართლაც 0.95 – ზე მაღალი ალბათობით შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ გაზომვის შედეგები არ იქნება განსხვავებული ნამდვილი მნიშვნელობისგან უფრო მეტად ვიდრე $\delta + 2\sigma$.

შეკრების ასეთი კანონი შეიძლება გავავრცელოთ ნებისმიერი წარმომავლობის სისტემატურ ცდომილებაზე.

კიდევ ერთხელ გავუსვათ ხაზი იმას, რომ სისტემატური და შემთხვევითი ცდომილების აჯამვა აქტუალურია მხოლოდ მაშინ როდესაც ერთი მათგანი არაუმეტეს რამოდენიმეჯერ აღემატება მეორეს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ცდომილების სიდიდედ უნდა მივიღოთ ის, რომელიც უფრო დიდია.

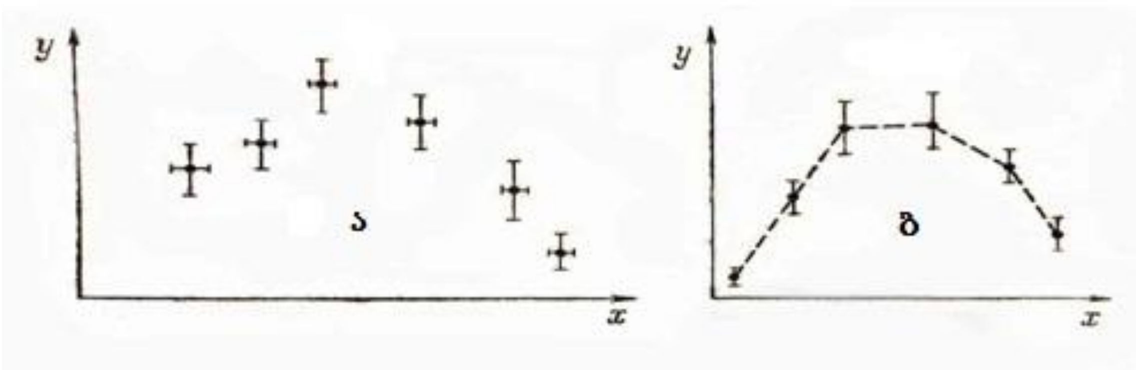
სინამდვილეში თუ სისტემატურ ცდომილებას აღვნიშნავთ δ, ხოლო გაზომვის ცდომილების სიდიდედ უნდა ავიღოთ მხოლოდ დიდი ცდომილება.

2.11. მაინტერპოლირებელი მრუდების მოძებნა

ძალიან ხშირად შესასწავლი სიდიდე იცვლება ცდის ჩატარების პირობების შესაბამისად, ხოლო გაზომვის ამოცანაა რაც შეიძლება ზუსტად მოვძებნოთ ფუნქციონალური დამოკიდებულება, რომელიც აღწერს ჩვენთვის საინტერესო სიდიდის ცვლილებას.

ამის მაგალითია გამტარის წინაღობის დამოკიდებულება მის ტემპერატურაზე, აირის სიმკვრივის დამოკიდებულება წნევაზე, სითხის სიბლანტის დამოკიდებულება ტეპერატურაზე და ა.შ. გაზომვის შედეგად ვიღებთ გასაზომი სიდიდის სხვადასხვა მნიშვნელობას, რომლებიც შეიძლება ჩავთვალოთ სიბრტყეზე კოორდინატებად.

ვთქვათ ვზომავთ რაღაც y სიდიდეს, რომელიც დამოკიდებულია x - ზე. თითოეული x_i - თვის ვატარებთ მთელ რიგ გაზომვებს და ვიღებთ $\bar{y}_i$, რომლისთვისაც ვადგენთ ნდობის ინტერვალს $\Delta\bar{y}_i$. იმ შემთხვევაშიც, როდესაც x_i სიდიდეები შეუძლებელია ზუსტად დავადგინოთ, მათთვისაც ცნობილია მნიშვნელობები $\bar{x}_i$, რომლებიც შეესაბამებიან ნდობის Δx_i ინტერვალს. $\bar{x}_i$ და $\bar{y}_i$ შეიძლება განიხილოთ, როგორც სიბრტყეზე კოორდინატები, რაც საშუალებას იძლევა ჩვენი მონაცემები წარმოვადგინოთ გრაფიკის სახით. (18ა).



ნახ.18. მაინტერპოლირებელი მრუდები

თითოეულ წერტილთან მონიშნული მონაკვეთები გვიჩვენებენ ნდობის ინტერვალს, რომლებიც შეესაბამებიან $\bar{x}_i$ და $\bar{y}_i$ საშუალო მნიშვნელობებს. ჩვეულებრივ მონიშნავენ ნდობის ინტერვალებს, რომელთა ნდობის ალბათობა შეესაბამება 0.7 ან 0.95. მოცემული გრაფიკის ყოველი წერტილისთვის არჩეული ნდობის ალბათობის ინტერვალი ნაჩვენები უნდა იყოს. თუ ერთ ერთი კოორდინატი, მაგალითად x პრაქტიკულად ზუსტადაა დადგენილი, მაშინ გრაფიკზე აჩვენებენ მხოლოდ მეორე კოორდინატის y ნდობის ინტერვალს, და მას ექნება ნახ.18ბ-ზე ნაჩვენები სახე. ცხადია, რომ ნდობის ინტერვალები სხადასხვა წერტილებში შეიძლება სხვადასხვა იყოს. ნახ.18-ზე მოყვანილი გრაფიკები საშუალებას იძლევა ამა თუ იმ სიზუსტით დავადგინოთ

ფუნქიონალური დამოკიდებულება x და y შორის.. ამდენად როგორც ეს ხდება მსგავსი ამოცანების შემთხვევაში, ამა თუ იმ ფუნქციის შერჩევა შესაძლებელია მხოლოდ ამა თუ იმ ხარისხის საიმედოობით. უფრო მეტიც არსებობს მრავალი ფუნქცია, რომლებიც რაგინდ კარგად შეესაბამება ნახ.13 დიაგრამას. მათემატიკური შესაბამისობის თვალსაზრისით უკეთესია ასეთ ფუნქციად შევარჩიოთ ტეხილი წირი $(x_1y_1),(x_2y_2),(x_3y_3),\cdots,(x_ny_n)$, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ.18ბ-ზე პუნქტირით. მაგრამ ცხადია ასეთი წირი არ იძლევა არაფერს ახალს მოცემულ დიაგრამასთან შედარებით და ჩვეულებრივ, ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ რაღაც ფიზიკურ კანონებზე დაყრდნობით ავაგოთ მდოვრე მრუდი, რომელიც კარგად აღწერს მიღებულ ექსპერიმენტულ მონაცემებს. ამ სახით ამოცანა საკმაოდ განუსაზღვრელია, მაგრამ ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში არსებობს ანალიზური ამოხსნის გზები. ამ ამოხსნის ძირითადი გზაა უმცირესი კვადრატების მეთოდი.

განვიხილოთ ეს მეთოდი კონკრეტულ მაგალითზე. 11 ცხრილში მოყვანილია რაიმე წინააღმდეგობაში ტყვიის შეღწევის სიღრმის მნიშვნელობები, როგორც მისი ენერგიის ფუნქცია (ნდობის ინტერვალები მოცემული არაა. E და l მოცემულია პირობით ერთეულებში) ეს წერტილები დატანილია გრაფიკზე ნახ. 19.

ცხრილი 11. ტყვიის წინაღობაში შეღწევის სიღრმე

გაზომვის ნომერი	E	l
1	41	4
2	50	8
3	81	10
4	104	14
5	120	15
6	139	20
7	154	19
8	180	23
9	208	26
10	241	30
11	250	31
12	269	36
13	301	37

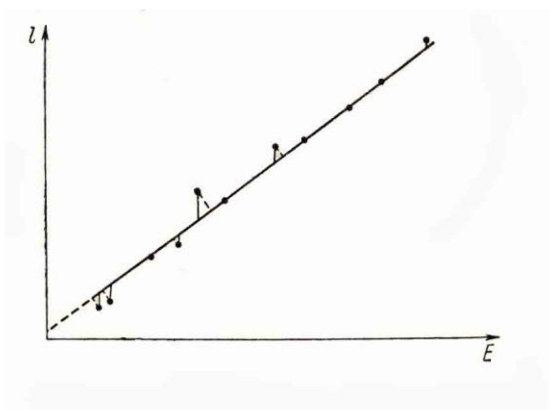
თეორიული მოსაზრების საფუძველზე შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ წინააღმდეგობაში ტყვიის შეღწევის სიღრმე პირდაპირპროპორციულია მისი ენერგიის. ამიტომ უნდა ვეძებოთ არა რაღაც ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ წერტილებს არამედ წრფე, რომელიც ყველაზე ნაკლებადაა გადახრილი ამ მონაცემებიდან. საძებნ წრფეს აქვს სახე

$$y = kx + b$$

k და b კოეფიციენტები საუკეთესო მიახლოებით უნდა იყოს შერჩეული. უმცირესი კვადრატების მეთოდით წრფის საპოვნელად უნდა მოვიქცეთ ასე: გავატაროთ წერტილების y_i ორდინატები საძებნი წრფის გადაკვეთამდე (ნახ.19). ამ ორდინატების მნიშვნელობები იქნება $(ax_i + b)$, მანძილი ორდინატის მიხედვით $x_i y_i$ წერტილიდან წრფემდე იქნება $(ax_i + b - y_i)$. დავუშვათ ეს წრფე საუკეთესოა, თუ ყველა ასეთი დაშორების კვადრატების ჯამი იქნება მინიმალური. ასეთი ჯამის მინიმუმის პოვნა ხდება დიფერენციალური აღრიცხვის წესებით.

k და b კოეფიციენტების საპოვნელად უნდა მოვძებნოთ შემდეგი ჯამის მინიმუმი $\sum_i^n (ax_i + b - y_i)^2$, ამისთვის გავუტოლოთ ნულს ამ ჯამის წარმოებულები k და b პარამეტრებით. მივიღებთ:

$$\frac{d}{dk} = \sum_i^n (ax_i + b - y_i)^2 = 0$$



ნახ.19. უმცირესი კვადრატების მეთოდისთვის

$$\frac{d}{db} = \sum_i^n (ax_i + b - y_i)^2 = 0$$

აქედან მარტივად მივიღებთ

$$nk + b \sum x_i - \sum y_i = 0$$

$$k\sum x_i + b\sum x_i^2 - \sum x_i y_i = 0$$

განტოლებათა ასეთ სისტემას ნორმალური ეწოდება და ადვილად ამოიხსნება k და b მიმართ. მონახსნს აქვს სახე

$$k = \frac{n\sum_i^n x_i y_i - \sum_i^n x_i - \sum_i^n y_i}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{n\sum_i^n x_i^2 \sum_i^n y_i^2 - \sum_i^n x_i - \sum_i^n x_i \sum_i^n x_i y_i}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

აქ ყველგან n დაკვირვებათა რაოდენობაა. აჯამვა ხდება ყველა წერტილის მიხედვით. 11 ცხრილით რიცხობრივი მონაცემების ჩასმა ჩვენს შემთხვევაში გვაძლევს $k = 0.124, b - 0.7$ და საძებნი წრფის განტოლება იქნება

$$y = 0.124x + 0.7$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ტყვიის ენერგია ნულის ტოლია, მაშინ ის საერთოდ ვერ შედის წინააღმდეგობაში. შესაბამისად უფრო სწორი იქნებოდა თუ წრფის განტოლებას მოვძებნით შემდეგი სახით

$$y = kx$$

მაგრამ გაზომილი ინტერვალის შიგნით მოძებნილი წრფე უკეთესად აკმაყოფილებს ექსპერიმენულ წერტილებს, ვიდრე წრფე, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე. თეორია საშუალებას იძლევა ასევე გამოვთვალოთ წრფიდან წერტილების გადახრის დისპერსია და k და b კოეფიციეტების დისპერსია. თუ S_0^2 - წერტილების დისპერსიაა, ხოლო S_k^2 და S_b^2 კი k და b კოეფიციენტების დისპერსა, მაშინ

$$S_0^2 = \frac{\sum_i^n y_i^2}{(n-2)} - \frac{(\sum_i^n y_i)^2}{n(n-2)} - \frac{(n\sum_1^n x_i y_i)^2}{\left|n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2\right|(n-2)n}$$

$$S_k^2 = \frac{S_0^2 n}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

$$S_b^2 = \frac{S_0^2 \sum_i^n x_i^2}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

ჩვენს შემთხვევაში ეს იძლევა $S_k = 4 \cdot 10^{-3}$ და $S_k = 0.7$.

ცხადია, ნებისმიერი დამოკიდებულება არ აიწერება წრფის განტოლებით. მაგრამ მთელ რიგ შემთხვევებში შესაძლებელია სათანადო გარდაქმნებით რთული დამოკიდებულება მივუახლოვოთ წრფივს. მაგალითად დამოკიდებულება $y = \frac{k}{x} + l$, შემოვიტანთ რა ცვლადს $z = 1/x$, მივიღებთ წრფივ დამოკიდებულებას y და z შორის. ზუსტად ასევე თუ $y = ab^x$, მისი გალოგარითმებით მივიღებთ წრფივ დამოკიდებულებას x და lgy შორის. ვისარგებლებთ რა წრფივი განტოლებებით შეიძლება მთელ რიგ შემთხვევებში მოვძებნოთ ოპტიმალური ფუნქციები. თეორია საშუალებას იძლევა მოძებნილ იქნას განტოლების კოეფიციენტები იმ შემთხვევაშიც როდესაც კავშირი გასაზომ სიდიდეებს შორის აიწერება უფრო რთული დამოკიდებულებებით.

ხაზი უნდა გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ უმცირესი კვადრატების მეთოდი არ იძლევა საშუალებას, ვუპასუხოთ კითხვას რა სახის ფუნქციები იძლევიან ექსპერიმენტული მონაცემების უკეთეს აპროქსიმაციას.

მაინტერპოლირებელი ფუნქციების სახეები მოცემული უნდა იყოს რაღაც ფიზიკური მოსაზრებების საფუძველზე. უმცირესი კვადრატების მეთოდი მხოლოდ იმის საშუალებას იძლევა, რომ შევარჩიოთ თუ რომელი წრფე, ექსპონენტა ან პარაბოლა წარმოადგენს უკეთეს წრფეს, ექსპონენტას თუ პარაბოლას.

ზოგადად, რომ ვთქვათ შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ რაც მეტ ასარჩევ პარამეტრებს შეიცავენ მაიტერპოლირებელი ფუნქციები მით უფრო ზუსტად ხდება მოცემული წერტილების აპროქსიმაცია. ამიტომ ნორმალური ინტერპოლაციის ამოცანა, როგორც ჩანს ასე ჩამოყალიბდება: არჩეულ იქნას მაიტერპოლირებელი ფუნქცია ისე, რომ პარამეტრების რაოდენობა იყოს რაც შეიძლება მცირე. ცხადია, რომ უმრავლეს შემთხვევებში ზოგადად ეს ამოცანა არ იხსნება და ჩვეულებრივ მისი დადაწყვეტა ხდება ან ფიზიკური მოსაზრებების საფუძველაზე ანდა ემპირიული ცდების საფუძველზე.

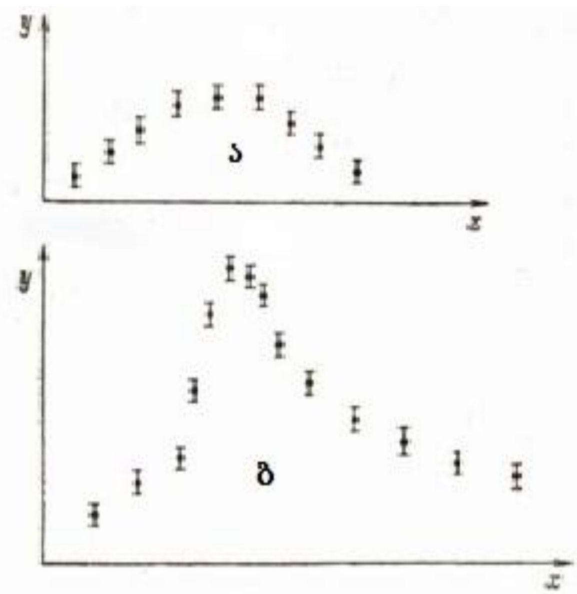
შევნიშნოთ, რომ უმცირესი კვადრატების მეთოდით გათვლები საკმაოდ შრომატევადია. არსებობს კარგად დამუშავებული სქემები, რომლებიც მნიშვნელოვნად ამარტივებენ გამოთვლებსა და კონტროლს. ისინი მოყვანილია სპეციალურ ლიტერატურაში.

უმცირესი კვადრატების მეთოდით განტოლების შედგენისას ჩვენ დავუშვით, რომ ცდომილებებს ემორჩილება მხოლოდ y_i, ხოლო x_i გაზომილია ზუსტად. თუ ეს ასე არაა მაშინ უნდა მოიძებნოს მაინტერპოლირებელი ფუნქცია ისე, რომ მანძილი $y_i x_i$ წერტილიდან საძებნ წრფემდე მინიმალური იყოს (ანუ უნდა დავუშვათ მართობი ჩვენი წერტილებიდან საძებნ წირზე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ.19 – ზე პუნქტირით). თუ y_i, და x_i გაზომვის ცდომილებები სხვადასხვაა მაშინ, მაინტერპოლირებელი წირის მოძებნისას ეს აუცილებად უნდა გავითვალისწინოთ, წერტილებისთვის შესაბამისი წონების მინიჭებით. ცხადია ეს ართულებს გამოთვლებს, მაგრამ ის უნდა ჩატარდეს ყოველთვის,

როდესაც გაზომვის ცდომილება არსებითად დამოკიდებულია გასაზომი სიდიდის მნიშვნელობაზე.

მაინტერპოლირებელი წირის მოძებნისას უმცირესი კვადრატების მეთოდით და მაინტერპოლირებელი ფუნქციის შერჩევისას უნდა დავიცვათ მთელი რიგი წესები, რათა არ დავუშვათ შეცდომები. ეს ეხება ინტერპოლაციის სხვა მეთოდებსაც.

იმისთვის რომ ინტერპოლაციამ მოგვცეს დამაკმყოფილებელი შედეგი, დარწმუნებული უნდა ვიყოთ, რომ გამოსაკვლევი დამოკიდებულება აიწერება “კარგი” ფუნქციით, ანუ ისეთი ფუნქციით, რომელსაც საკვლევ უბანში არ გააჩნა თავისებურებანი, წყვეტა და მეორე და მესამე რიგის წარმოებულების დიდი მნიშვნელობები. ანუ წირი საკმაოდ გლუვი უნდა იყოს. ამასთან გაზომილი წერტილები განთავსებული უნდა იყვნენ საკმარისად თანაბრად ერთმანეთისგან (20ა), მაგრამ ამასთან ერთად ეს წერტილები უნდა შეჯგუფდნენ საკმაოდ მჭიდროდ იმ ადგილებში სადაც ფუნქცია სწრაფად იცვლის თავის სიდიდეს (20ბ).

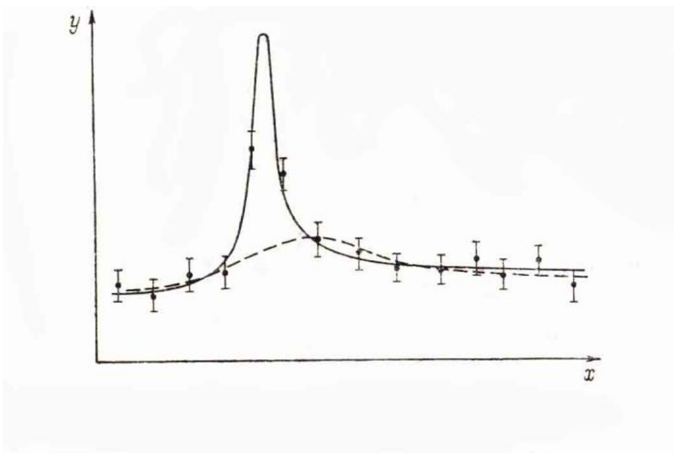


ნახ.20. დამოუკიდებელი ცვლადების ინტერვალების შერჩევა

მაშინ როდესაც $y = f(x)$ ფუნქციის შესახებ არაფერი არაა ცნობილი, უნდა დავკმაყოფილდეთ წერტილების თანაბარი განაწილებით, და ჩავატაროთ დამატებითი გაზომვები იმ უბნებში, რომლებიც საეჭვოდ ამოვარდნილი წერტილებით ხასიათდება. უნდა გვახსოვდეს, რომ წირის ინტერპოლაცია კიდურა წერტილების გარეთ დაუშვებელია.

მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს თუ როგორი უხეში ცდომილებები შეიძლება გამოიწვიოს უმცირესი კვადრატების მეთოდის არაკრიტიკულმა გამოყენებამ სწრაფად ცვლადი ფუნქციების შემთხვევაში.

დავუშვათ ცნობილია, რომ საძებნი დამოკიდებულება წარმოადგენს წირს, რომელსაც გააჩნია ერთი მახვილი მაქსიმუმი და ორი ნელა კლებადი “ფრთა” როგორც ეს ნახ. 20 – ზეა ნაჩვენები. მივიღებთ მთელ რიგ ერთნარი სიზუსტით გაზომილ ექსპერიმენტალურ წერტილებს. ცხადია მაქსიმუმთან განლაგებული წერტილების მცირე რაოდენობა უმნიშვნელო წილს შეიტანს სიდიდეში $\sum(y-y_i)^2$. ამის გამო მოყვანილი ჯამის მინიმუმი, უზრუნველყოფს მაიტერპოლირებელი წირის კარგ თანხვედრას ექსპერიმენტალურ წერტილებთან წირის “ფრთებზე”, მაგრამ სრულებით არ ასახავს წირის ქცევას მაქსიმუმის სიახლოვეს, და შესაბამისად უმცირესი კვადრატების მეთოდით მოძებნილმა წირმა შეიძლება გაიაროს ისე, როგორც ეს ნახ. 21 – ზეა მოყვანილი პუნქტირით.



ნახ.21. მაინტერპოლირებელი მრუდები ფუნქციებისთვის, რომლებსაც გააჩნიათ მკვეთრი მაქსიმუმი

ამრიგად იმ ადგილებში სადაც მრუდი მდოვრედ იცვლება დიდი რაოდენობის წერტილების დასმას მნიშვნელობა არა აქვს დაწვრილებით შესწავლილი უნდა იყოს გადაღუნვის ადგილები, მაქსიმუმის და მკვეთრი ნახტომების ადგილები. ცვლადების ცვლილების არე რაც შეიძლება ფართო უნდა იყოს, ვინაიდან ფართო ინტერვალის საზღვრებზე ხშირად აღმოჩდება აპარატურის ნაკლი და ისეთი მოვლენები, რომელთა გავლენაც ვლინდება არსებითად უფრო ადრე მაგრამ ზუსტად შეუძლებელია მისი დამაჯერებლად აღმოჩენა.

გაზომვების დაწყების წინ სასარგებლოა ჩატარდეს რამდენიმე სასინჯი გაზომვა ცვლადი სიდიდის ცვლილების მთელს ინტერვალში, რათა სწრაფად გავეცნოთ მოვლენის ძირითად მახასიათებლებს და სწორად დავგეგმოთ ექსპერიმენტის მსვლელობა.

სამუშაოს ბოლოს აუცილებლად უნდა დავუბრუნდეთ ექსპერიმენტული წირის დასაწყისს და გავიმეოროთ პირველი გაზომვები, უკეთესი იქნება თუ ამას გავაკეთებთ შებრუნებული მიმდევრობით. ამ დროს შეიძლება

აღმოვაჩინოთ ახალი საინტერესო თავისებურებები თვით მოვლენაში, მაგალითად ჰისტერეზისი.

ეს მაგალითი ნათლად გვიჩვენებს, თუ როგორ განსაკუთრებულ ყურადღებას მოითხოვს მაინტერპოლირებელი ფუნქციის მოძებნა

თავი 3. გამოთვლის მეთოდები

3.1. საშუალო არითმეტიკულის გამოთვლა

როგორც ვიცით საშუალო არითმეტიკულის მოსაძებნად საჭიროა ყველა რიცხვის შეკრება და შემდეგ ჯამის გაყოფა მათ რაოდენობაზე

$$\bar{x} = \frac{x_2 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

ეს გამოთვლები შრომატევადია, მაგრამ შესაძლებელია მათი გამარტივება. ავიღოთ რაიმე რიცხვი x_0, რომელიც ახლოსაა $\bar{x}$, მაშინ ეს უკანასკნელი ასე ჩაიწერება

$$\bar{x} = \frac{[x_0 + (x_1 - x_0)] + [x_0 + (x_2 - x_0)] + [x_0 + (x_3 - x_0)] \cdots + [x_0 + (x_n - x_0)]}{n} =$$

$$= x_0 + \frac{(x_1 - x_0) + (x_2 - x_0) + (x_3 - x_0) + \cdots + (x_n - x_0)}{n} \quad (40)$$

$(x_i - x_0)$ მცირე რიცხვებია, ვინაიდან x_0 შევარჩიეთ ახლოს $\bar{x}$-თან, ამდენად საშუალოს ჯამისა და სხვაობის პოვნა ძალიან გაადვილებულია. მაგალითისთვის მოვიყვანოთ გეოდეზიური სურათის ბაზისის სიგრძის გაზომვების რიგი (ცხრილი 7).

ცხრილი 12. გეოდეზიური ბაზისის გაზომვის შედეგების დამუშავება

n	x, ∂	x	$x_0 - 60$ $x_i - x_0$	$x_0' - 60$ $x_i - x_0'$	$(x_i - x_0)^2$	$(x_i - x_0')^2$
1	2	3	4	5	6	7

1	146.30876	76	+16	+6	256	36
2	146.30864	64	+4	-6	16	36
3	146.30856	56	-4	-14	16	186
4	146.30853	53	-7	-17	49	289
5	146.30850	50	-10	-20	100	400
6	146.30862	62	+2	-8	4	64
7	14630887	87	+27	+17	729	289
8	146.30862	62	+2	-8	4	64
9	146.30876	79	+19	+9	361	81
10	136.30873	73	+13	+3	169	9
	ჯამი	-	+62	-38	1704	1464

გათვლებს ამარტივებს ის, რომ გაზომვის მონაცემებში პირველი ექვსი ციფრი ერთნაირია (146.308).

გაზომვიდან გაზომვამდე იცვლება მხოლოდ ორი ციფრი. ნათელია, რომ საშუალო არითმეტიკულის და ცდომილების გამოთვლისას პირველ ექვს ციფრს შეიძლება ყურადღება არ მივაქციოთ და გავითვალისწინოთ მხოლოდ საბოლოო შედეგში.

ბოლო ორი ციფრი მოყვანილია მესამე სვეტში. ისინი ჩვენ ჯერ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც x_i გაზომვის შედეგები და მათთვის ჩავატაროთ გამოთვლები. x_0-ად მივიღოთ დამრგვალებული რიცხვი, რომელიც გვეჩვენება ყველაზე ახლოს საშუალო არითმეტიკულთან. ასეთი რიცხვია 146.30660 ($x_o = 60$)

$$\overline{x = 60 + \frac{60}{12}} = 66.2; \quad \bar{x}^I = 70 - \frac{38}{11} = 66.2; \; \bar{x} = 140.308662$$

მაშასადამე ვთვლით $x_0 = 146.30860$. 7 ცხრილის მეოთხე სვეტში ამოწერილია სხვაობები $(x_i - x_0)$, რომელთა ჯამის გამოთვლაც ზეპირადაც იოლია. საშუალო არითმეტიკულიც ასევე მარტივად მიიღება ამ სვეტის ციფრების აჯამვით. ის ტოლია 146.308662მ (ყურადღება მიაქციეთ, რომ საშუალო არითმეტიკულისთვის ნაჩვენებია ერთი ათობითი ნიშნით მეტი, ვიდრე ეს მოგვცა გაზომვებმა). გამოთვლების ასეთმა მეთოდმა საშუალება მოგვცა რვანიშნა რიცხვებზე ოპეაციები შეგვეცვალა ორნიშნა რიცხვებზე ოპერაციებით. ეს მნიშვნელოვნად ამცირებს გამოთვლების დროს.

გამოთვლების სისწორის გასაკონტროლებლად მოხერხებულია ავიღოთ x_0 -გან რამდენადმე განსხვავებული x_0^I რიცხვი, მაგალითად 146.30870. მეხუთე სვეტში მოყვანილია $(x_i - x_i^I)$ სხვაობები, ხოლო ბოლოში მათი ჯამი.. თუ გამოთვლები სწორია, მაშინ $\bar{x}$ მნიშვნელობები ტოლი იქნება, როგორც მეოთხე სვეტის ასევე მეხუთე სვეტის მიხედვით.

3.2. ცდომილებების გამოთვლა

ცდომილების გამოთვლა ჩავატაროთ იმავე 12 ცხრილის მეშვეობით.

საშუალო კვადრატული ცდომილების გამოთვლა ჩატარდება მარტივად თუ ჩავატარებთ (13) ფორმულის რამდენიმე მარტივ გარდაქმნას. ჩავწეროთ დისპერსიისთვის გამოსახულება, რომელშიც ჩატარებულია კვადრატში აყვანის ოპერაცია.

$$S_n^2 = \frac{\sum_1^n(\bar{x}-x_i)^2}{n-1} = \frac{(\bar{x}^2-2\bar{x}x_1+x_i^2)+\cdots+(\bar{x}^2-2\bar{x}x_n+x_n^2)}{n-1} =$$

$$= \frac{n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{n-1} - \frac{2\bar{x}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)}{n-1}$$

მაგრამ

$$\bar{x} = \frac{x_2+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$$

წარმოადგენს საშუალო არითმეტიკულს. და მისი ჩასმისა და მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$S_n^2 = \frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2)-\frac{(x_2+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2}{n}}{n-1} \quad (41)$$

თუ აქ შევიტანთ x_0 ანუ x_i შევცვლით $x_0+(x_i-x_0)$, საბოლოოდ მივიღებთ

$$S_n^2 = \frac{(x_0-x_1)^2+\cdots+(x_0-x_n)^2-\frac{[(x_0-x_1)+\cdots+(x_0-x_n)]^2}{n}}{n-1}$$

თუ x_0 ავარჩევთ ისე, რომ x_0-x_1 შეიცავდეს არა უმეტეს ერთი ორი ნიშნადი ციფრისა, გამოთვლები მარტივად ჩატარდება. ისინი შეიძლება ზეპირად ჩავატაროთ, თუმცა უმჯობესია ვისარგებლოთ კვადრატების და კვადრატული ფესვის ცხრილებით (დანართი).

კონტროლი ასევე უმჯობესია ჩავატაროთ x_0 ორი განსხვავებული მნიშვნელობის გამოყენებით, ვიანგარიშებთ რა თითოეული მათგანისთვის გამოთვლებს. ცხადია ორივე გათვლის შედეგები ერთმანეთს უნდა დაემთხვეს..

6 და 7 სვეტში ცდომილების გამოსათვლელად 12 ცხრილში მოყვანილია $(x_i-x_0)^2$ და $(x_i-x_0^I)^2$ მნიშვნელობები, ხოლო მათ ქვემოთ ამ კვადრატების ჯამები.

S_n გამოსათვლელად გამოვიყენოთ მიღებული ჯამები

$$S_n^2 = \frac{1704-\frac{(62)^2}{10}}{9} = 147$$

$$S_n^{I\ 2} = \frac{1464 - \left(\frac{38}{10}\right)^2}{9} = 147$$

ამრიგად S_n^2 ორივე სიდიდე ერთმანეთს დაემთხვა.

$$S_n = 12.3 \approx 12; \ S_{n\bar{x}} = \frac{12}{\sqrt{10}} \approx 3.6$$

გაზომვების დიდი რაოდენობისთვის გამოთვლები მნიშვნელოვნად გაადვილდება თუ მონაცემებს გარკვეული წესით დავაჯგუფებთ.

ცხრილი 13. დიდი რაოდენობის მონაცემების დამუშავება მონაცემების დაჯგუფებით

x_i	k	$x_0 = 128$			x_0'		
		$x_i - x_0$	$k(x_i - x_0)$	$k(x_i - x_0)^2$	$x_i - x_0'$	$k(x_i - x_0')$	$k(x_i - x_0')^2$
125	2	-3	-6	18	-4	-8	32
126	3	-2	-6	12	-3	-9	17
127	9	-1	-9	9	-2	-18	36
128	15	0	0	0	-1	-15	15
129	11	+1	+11	11	0	0	0
130	7	+2	+14	28	1	7	7
131	2	+3	+6	18	2	4	8
132	1	+4	+4	16	3	3	0
ჯამი	50	-	+14	+112	-	-36	+134

ყველაზე მოსახერეხებელია x_i მონაცემების დაჯგუფება ზრდის მიხედვით. მაგალითვისთვის ავიღოთ 50 მონაცემი, რომელთა საშუალებით მიღებულია მონაცემები: 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, ამასთან 125 დაიმზირებოდა ორჯერ, 126 - სამჯერ, 127 – ცხრაჯერ და ა.შ.

დავალაგოთ ჩვენი შედეგები და დამზერის რაოდენობა (k) თითოეული მათგანისთვის, როგორც ეს 13 ცხრილის პირველ და მეორე სვეტშია მოცემული.

ჩავატარეთ რა გამოთვლები x_0 ორი 128 და 129 მნიშვნელობებისთვის ვხედავთ, რომ ისინი დაემთხვნენ ერთმანეთს. ეს როგორც წესი იმის გარანტიაა, რომ გამოთვლები ჩატარებულია სწორად

$$\bar{x} = 128 + \frac{14}{50} = 128.28 \approx 128.3$$

$$\bar{x}^I = 129 - \frac{36}{50} = 128.28 \approx 128.3$$

$$S^2 = \frac{12 - \frac{14^2}{50}}{49} = 2.21$$

$$\bar{x}^{I\,2} = \frac{134 - \frac{36^2}{50}}{49} = 2.21$$

$$S = 1.49 \approx 1.5 \text{ და } S_{\bar{x}} = \frac{1.5}{\sqrt{50}} \approx 0.2$$

უმცირესი კვადრატის მეთოდით ინტერპოლირებისას გამოთვლები საკმაოდ შრომატევადია, მაგრამ არსებობს მთელი რიგი ხერხები, რომლებიც ამ გამოთვლებს ამარტივებს. ჩვენ აქ შევეხებით ძირითად ცნებებს.

თუ შესასწავლი დამოკიდებულება წრფივია, როგორც ეს ზემოთ იყო ნათქვამი, მარტივი გარდაქმნებით ხშირად ისინი დაიყვანება წრფეზე.

დიდი რაოდენობის წრფივი განტოლებებისთვის გამოთვლები საკმაოდ შრომატევადია. მათი გამარტივება შეიძლება შემდეგი ხერხით. მიახლოებითი მნიშვნელობისთვის აიღება ნებისმიერ ფუნქცია, რომელიც "თვალით" კარგად აღწერს ექსპერიმენტის მონაცემებს. ამის შემდეგ უნდა გამოვთვალოთ ექსპერიმენტული მონაცემების ორდინატებისა და აპროქსიმაციით მიღებული მონაცემების სხვაობა. მათ თან ერთვით უმცირესი კვადრატების მეთოდი. ამასთან რიცხვები რომელთანაც ურთიერთობა გვაქვს მნიშვნელოვნად მცირდება და გამოთვლებიც მნიშვნელოვნად მარტივდება. თუ იმ წერტილებს შორის არსებული Δx ინტერვალი, რომლებზედაც ხდება გაზომვა ერთმანეთის ტოლია, ეს იწვევს გამოთვლების მოცულობის შემცირებას და შესაძლებლობას იძლევა ვისარგებლოთ მზა ცხრილებით. ცხადია კომპიუტერული პროგრამების გამოყენება მნიშვნელოვნად აჩქარებს გამოთვლების წაერმოებას.

3.3. გამოთვლების სიზუსტის შესახებ

რიცხობრივი მონაცემების დამუშავების სიზუსტე შესაბამისობაში უნდა იყოს გაზომვების სიზუსტესთან. ათწილადების, საჭიროზე მეტი რაოდენობის ნიშნით, გამოთვლების ჩატარება მოითხოვს დიდ დროს და ენერგიას და ქმნის გაზომვის მაღალი სიზუსტის ილუზიას. მეორეს მხრივ ცხადია გაზომვის სიზუსტე არ უნდა გაურესდეს გამოთვლების უხეშად ჩატარებით.

ყველა შემთხვევაში უნდა დავიცვათ შემდეგი მარტივი წესები:

ცდომილება, რომელიც მიიღება გამოთვლების შედეგად, დაახლოებით ერთი რიგით (ე.ი. 10 — ჯერ) ნაკლები უნდა იყოს გაზომვის ცდომილებასთან შედარებით. ამ შემთხვევაში დარწმუნებული ვიქნებით, რომ არითმეტიკული მოქმედებების შედეგად არ გავაუარესებთ გაზომვის შედეგებს.

ვაჩვენოთ ეს მაგალითებზე

1) გამტარის ელექტროწინაღობის გამოსათვლელად ვთქვათ გავზომეთ მასში გამავალი დენის ძალა და ის ტოლი აღმოჩნდა 27.3 მა, ხოლო ძაბვის ვარდნა – 6.45 ვ. გამზომი ხელსაწყოების გარანტირებული ცდომილებაა 1%.

ომის კანონის ძალით, გამტარის წინაღობა გამოითვლება ფორმულით

$$R = \frac{U}{I} = \frac{6.45\ ვ}{27.3\ მა} = \frac{6.45\ ვ}{0.0273\ \ ა} = 236.2637\ \ \text{ომი}$$

სადაც U და I შესაბამისად ძაბვა და დენის ძალაა. ვინაიდან ისინი გაზომილია 1% სიზუსტით, R გაზომვის ცდომილება 1%-ზე რამდენადმე მაღალია. ამიტომ გამოთვლები მიზანშეწონილია ჩავატაროთ არა უზუსტეს ოთხი ციფრისა და შედეგი ასეთი სახით ჩავწეროთ 236.3 ომი.

საბოლოო შედეგის სიზუსტე შეიძლება შევაფასოთ იმის საფუძველზე, რომ თითოეული თანამამრავლი U და $1/I$ განსაზღვრულია 1% სიზუსტით. მათი ნამრავლი გამოითვლება რამდენადმე ნაკლები, მაგრამ არა უმცირეს 2% სიზუსტით. ამიტომ შედეგი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით $R = 235 \pm 4$ ომი. ამ შემთხვევაში ნდობის ალბათობის გამოთვლა შეუძლებელია, ვინაიდან ხელსაწყოს მითითებული სიზუსტე იძლევა ცდომილების მხოლოდ ზედა ზღვარს და არა მოცემული ხელსაწყოს ცდომილების განაწილების კანონს.

2) გამტარის წინაღობა განისაზღვრება მისი სიგრძის და დიამეტრის გაზომვით. კუთრი წინაღობა ცნობილია ფარდობითი ცდომილებით, რომელიც მნიშვნელონად აღემატება გასაზომი სიდიდეების ცდომილებებს.

ვთქვათ გამტარის l სიგრძის და d დიამეტრის 10-ჯერ გაზომვის შედეგად მივიღეთ შემდეგი მონაცემები: $l = 25.323$ მმ, $S_i = 0.12$ მმ, $d = 1.54$ მმ, $S_d = 0.21$ მმ. l სიდიდის საშუალო კვადრატული მნიშვნელობა იქნება

$$\frac{S_R^2}{R^2} = \frac{S_{d^2}^2}{(d^2)^2} + \frac{S_l^2}{l^2}$$

მივიღებთ რა მხედველობაში, რომ $S_{d^2} = S_{d*d} = 2_{sd}$ გვაქვს

$$\frac{S_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{2_{sd}}{d^2}\right)^2 + \frac{S_l^2}{l^2}}$$

ცხადია, ცდომილების საბოლოო მნიშვნელობის გამოთვლისას სიგრძის გამოთვლის ცდომილება შეიძლება არ მივიღოთ მხედველობაში. განივკვეთის ფართობის (დიამეტრის კვადრატი) გაზომვის ვარიაციის კოეფიციენტი იქნება

$S_{d^2}/d^2 = 2S_d/d^2 = 1{,}8\%$. თუ შემოვიფარგლებით ნდობის ალბათობით 0.95, დანართის ცხრილი 2 ამ შემთხვევისთვის იძლევა $t_{\alpha n} = 2.3$ და საშუალო არითმეტიკულის ფარდობითი ცდომილება ჩვენი ათი გაზომვისთვის იქნება

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1{,}8\% \cdot 2.3}{\sqrt{10}} \approx 1.3\%$$

ეს ცდომილება შეესაბამება ნდობის ინტერვალს 0.95.

ამრიგად R უნდა გამოვთვალოთ 1% -ზე ოდნავ მეტი სიზუსტით, ე.ი. უნდა შემოვისაზღვროთ მესამე ნიშნადი ციფრით.

სპილენძის გამტარის შემთხვევაში ოთახის ტემპერატურაზე მივიღებთ

$$R = 1.78 \cdot 10^{-6} \frac{\Delta l}{\pi d^2} = 2.42 \cdot 10^{-4} \text{ ომი}$$

ცდომილება შეადგენს 1.3%, ან $3 \cdot 10^{-6}$ ომი (ნდობის ალბათობით 0.95)

3.4 ნიშნების რაოდენობა ცდომილების განსაზღვრისას

ჩვენ ვიცით, რომ შემთხვევითი ცდომილების სიდიდე S_n, როგორც გაზომვის სიდიდეები, ექვემდებარება შემთხვევით რხევებს.

ადრე მოყვანილმა მაგალითებმა გვიჩვენეს, რომ გაზომვათა დიდი რაოდენობის შემთხვევაშიც კი ნდობის ინტერვალები σ - თვის საკმაოდ დიდი რიცხვებია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეცდომილება ყოველთვის საკმაოდ უხეშადაა განვსაზღვრული.

ათი გაზომვისას σ განისაზღვრება 30% სიზუსტით. ამიტომ, როგორც წესი, σ - თვის უნდა მოვიყვანოთ ერთი ნიშნადი ციფრი, თუ ის 3-ზე მეტია, და ორი ნიშნადი ციფრი თუ პირველი მათგანი ნაკლებია 4-ზე.

თუ S_{10} გამოვიდა 0.523 ტოლი, მაშინ მოგვყავს ერთი ციფრი $S = 0.5$; თუ $S_{10} = 0.124$, მაშინ უნდა მოვიყვანოთ ორი ნიშნადი ციფრი $S = 0.12$.

როცა $n = 25, S_{10} = 1/7$. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში აზრი არა აქვს σ - თვის გათვლები ჩავატაროთ და შედეგები მოვიყვანოთ ორ ნიშნად ციფრზე მეტი სიზუსტით, ე.ი. უნდა დავწეროთ $S = 2.3$, და არა 2.34 ან $S = 0.52$ და არა $S = 0.523$

დამრგვალების ჩატარება ყოველთვის აუცილებელია, ვინაიდან ზედმეტად ბევრი ციფრი ქმნის ცრუ წარმოდგენას σ გაზომვის ცდომილების შესახებ.

დასკვნები

ზოგიერთ მეთოდურ ნაშრომში, რომლებიც პრაქტიკაში გამოიყენება, გაზომვის ცდომილებები გადმოცემულია საკმაოდ ერთფეროვნი სქემით და შეიცავს შემდეგ ძირითად მომენტებს:

1) თითოეული გაზომვა ტარდება რამდენჯერმე და ყველაზე ალბათურ მნიშვნელობად აიღება ცალკეული გაზომვების შედეგების საშუალო არითმეტიკული $\bar{x}$;

2) გამოითვლება შედეგის საშუალო არითმეტიკული ცდომილება;

3) გასაზომი x სიდიდის ცდომილებად მიიღება ან $\sum|\bar{x}-x_i|/R$, ან $|x_i-\bar{x}|$ სერიიდან მაქსიმალური მნიშვნელობა. ამ უკანასკნელს ხშირად უწოდებენ ცდომილების ზღვრულ ან მაქსიმალურ მნიშვნელობას;

4) $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ რამდენიმე ცვლადის ფუნქციის ცდომილება განისაზღვრება თანაფარდობით

$$\Delta f = \sum_n^1 \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right| \qquad (42)$$

ამ ფორმულით გამოთვლილ ცდომილებას ასევე ეწოდება ზღვრული, ან მაქსიმალური ცდომილება და ამასთან Δx_i ქვეშ ზოგჯერ იგულისხმება $|\bar{x}-x_i|$ ცდომილების საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობა, ზოგჯერ კი ამ ცდომილებების მაქსიმალური მნიშვნელობა.

ცდომილების სიზუსტის ამ გზით ჩატარებული შეფასება ნაკლებად სასარგებლოა და რაც განსაკუთრებით აღნიშვის ღირსია, სტუდენტი (ზოგჯერ უფრო გამოცდილი ექსპერიმენტატორიც) ასკვნის, რომ მრავალჯერადი გაზომვა საჭიროა მხოლოდ ცდომილების გამოსათვლელად.

იმ როლის შესახებ, რომელსაც მრავალჯერადი გაზომვები თამაშობენ საბოლოო შედეგის სიზუსტის გასაზრდელად ხშირად სათანადოდ განმარტებული და ხაზგასმული არ არის.

ზოგჯერ ნათქვამია, რომ ერჯერად ჩატარებულ გაზომვებს არავითარი ღერებულება არა აქვს. მასთან პრაქტიკა აჩვენებს, რომ მრავალი გაზომვა, რომლის შედეგებსაც ჩვენ წარმატებით ვიყენებთ, ჩატარებულია მხოლოდ ერთხელ. ასე იქცევიან ხშირად არა მარტო ტექნიკაში არამედ სამეცნიერო კვლევებშიც. ცხადია ერჯერადი გაზომვით შეიძლება შემოვიფარგლოთ მაშინ, როდესაც გაზომვის ცდომილება განპირობებულია არა შემთხვევითი ცდომილებით, არამედ გამზომი ხელსაწყოს უზუსტობით.

შევნიშნოთ, რომ გაზომვების რაოდენობის გაზრდა იწვევს ცდომილების რამდენად გინდა მცირე ზომამდე შემცირებას, თუმცა ეს პირდაპირ გამოდის თანაფარდობიდან

$$S_i = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

რომელიც არცთუ კრიტიკულად განიხილება.

(42) ფორმულის გამოყენება, ნაცვლად (37), რომელიც სამართლიანია დამოუკიდებელი გაზომვებისთვის, იწვევს, ზოგადად, რომ ვთქვათ ცდომილების გაზრდას.

ამაში არაფერია ცუდი, ის გარემოება რომ არა, რომ ცდომილების გადიდება თითოეულ კონკრეტულ შემთხვევაში უნდა იყოს შეფასებული, ვინაიდან ის დამოკიდებულია ცვლადების სიდიდესა და რაოდენობაზე.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის ნაზრდისგან განსხვავებით, რომელთანაც იდენტიფიცირდება გაზომვის ცდომილება, შემთხვევითი ცდომილების მითითებისთვის მოყვანილი უნდა იყოს არა ერთი, არამედ ორი მონაცემი – ცდომილების სიდიდე და ნდობის ალბათობა, რომელსა ეს ცდომილება შეესაბამება.

შევეხოთ საკითხს, რომელი ცდომილება – საშუალო არითმეტიკული თუ საშუალო კვადრატული ცდომილება უნდა გამოვთვალოთ?

ზოგჯერ ლაბორატორიულ ცნობარებში მოყვანილია წესი, რომ თუ გაზომვების რაოდენობა დიდია უნდა ვისარგებლოთ საშუალო კვადრატული ცდომილებით (S), ხოლო თუ მცირე – საშუალო არითმეტიკული ცდომილებით (r). ადვილი სანახავია, რომ ამ წესის გამოყენება არამიზანშეწონილია. მართლაც თუ n საკმაოდ დიდია, მაშინ r და S შორის არსებობს მარტივი კავშირი $r = 0.8\,S$.

შესაბამისად, პრინციპში დიდი მნიშვნელობა არა აქვს თუ რომელ ცდომილებას გამოვთვლით და შევჩერდეთ იმაზე, რომელიც უფრო მარტივი გამოსათვლელია, ანუ r-ზე, თუმცა გაზომვების მცირე რაოდენობისას უნდა ვისარგებლოთ საშუალო კვადრატული ცდომილებით, რომლისთვისაც ნდობის ალბათობის გამოთვლა მარტივია სტიუდენტის განაწილების ცხრილის გამოყენებით. ამასთან ერთად შევნიშნოთ, რომ საშუალო არითმეტიკული ცდომილების ნდობის ალბათობა საკმაოდ რთულად არის დაკავშირებული გაზომვების n რიცხვისგან და შესაბამისი ცხრილებიც არ არსებობს.

დანართი

I. ძირითადი ფორმულები

1. $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ საშუალო არითმეტიკული

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$$

2. შეწონილი საშუალო

$$x_i = \frac{\sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i}$$

3. აბსოლუტური ცდომილება

$$\Delta x_i = x - x_i$$

ან

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

აქ $\bar{x}$-გასაზომი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობაა, ხოლო x-ნამდვილი მნიშვნელობა. ვინაიდან როგორც წესი ნამდვილი მნიშვნელობა უცნობია სარგებლობენ ფორმულით

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

4. ფარდობითი ცდომილება

$$\Delta x_{ფარდ} = \frac{\Delta x_i}{x}, \text{ ან } \Delta x_{ფარდ} = \frac{\Delta x_i}{\bar{x}}$$

5. გაზომვათა n რაოდენობიასას ცალკეული გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილება

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

6.შერჩევითი დისპერსია

$$S_n^2 = \frac{\sum_1^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}$$

7.გენერალური დისპერსია

$$\sigma^2 = \lim_{n \to \infty} S_n^2$$

8.გაზომვის წონა

$$p = \frac{k}{\sigma^2}$$

9.არათანაბარწერტილოვანი გაზომვის დისპერსია

$$S_n^2 = \frac{\sum_1^n p(\bar{x} - x_i)^2}{n\sum_1^n p_i}$$

10.ვარიაციის კოეფიციენტი

$$w = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \ (\text{გენერალური})$$

$$w_n = \frac{S_n}{\bar{x}} \cdot 100\% \ (\text{შერჩევითი})$$

11.საშუალო არითმეტიკული ცდომილება შერჩევითი)

$$r_n = \frac{|\bar{x} - x_1| + |\bar{x} - x_2| + \cdots + |\bar{x} - x_i|}{n} = \frac{\sum_1^n |\bar{x} - x_i|}{n}$$

12.გენერალური საშუალო არითმეტიკული ცდომილება

$$\rho = \lim_{n \to \infty} r_n$$

13.კავშირი საშუალო არითმეტიკულ და საშუალო კვადრატულ ცდომილებას შორის

$$\rho = 0.80\sigma; \quad \alpha = 1.25\rho$$

14.ნდობის ინტერვალი ინტერვალებისთვის

Δx	σ	2σ	3σ
α	0.68	0.95	0.097

15.დისპერსიის შეკრების კანონი:

$$\text{თუ } Z = X + Y, \text{ მაშინ } S_z^2 = S_x^2 + S_y^2$$

16.საშუალო არითმეტიკულის ცდომილება

$$S_{n\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

17.სტიუდენტის კოეფიციენტი

$$t_{\alpha_n} = \frac{\sqrt{n}\Delta x}{S_n}$$

18.შემთხვევითი დამოუკიდებელი ცდომილებების შეკრების კანონი

$$\text{თუ } Y = X_1 \cdot X_2 \cdots X_3$$

მაშინ $\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\Delta X_n}{X_n}\right)^2$; თუ $Y = \frac{X_1}{X_2}$, მაშინ

$$\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2;$$

თუ $Y = AX + B$, სადაც A და B მუდმივი სიდიდეებია, მაშინ $\Delta Y = A\Delta X$

19.ჩებიშევის უტოლობა

$$P(|\bar{x} - x_i| < \alpha\sigma) < \frac{1}{\alpha^2}$$

20.ფუნქციის შემთხვევითი ცდომილება

$$\text{თუ } Y = f(X), \text{ მაშინ } \Delta Y = f^I(X)\Delta X$$

და

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f^I(X)}{f(X)}\Delta X;$$

თუ $Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, მაშინ $\Delta Y = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2}$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial lnf}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2}$$

21.უმცირესი კვადრატების მეთოდი

$$y = kx + b,$$

$$k = \frac{n\sum_i^n x_i y_i - \sum_i^n x_i - \sum_i^n y_i}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{n\sum_i^n x_i^2 \sum_i^n y_i^2 - \sum_i^n x_i - \sum_i^n x_i \sum_i^n x_i y_i}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

$$S_0^2 = \frac{\sum_i^n y_i^2}{(n-2)} - \frac{(\sum_i^n y_i)^2}{n(n-2)} - \frac{(n\sum_1^n x_i y_i)^2}{\left|n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2\right|(n-2)n}$$

$$S_k^2 = \frac{S_0^2 n}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

$$S_b^2 = \frac{S_0^2 \sum_i^n x_i^2}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

II. ფორმულები, რომლებიც ამარტივებენ გამოთვლებს

1.საშუალო არითმეტიკული

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - x_0),$$

სადაც x_0 - $\bar{x}$ - თან ახლოს მყოფი ნებისმიერი რიცხვია

2.საშუალო კვადრატული ცდომილება

ა)ერთეული გაზომვის

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_0 - x_i)^2 - \frac{|\sum_1^n (x_0 - x_i)|^2}{n}}{n-1}}$$

ბ)საშუალო არითმეტიკულის

$$S_{n\bar{x}} = \sqrt{\frac{n\sum_1^n (x_0 - x_i)^2 - |\sum_1^n (x_0 - x_i)|^2}{n-1}}$$

III. ძირითადი ცხრილები

ცხრილი 1
ნდობის ალბათობები α ინტერვალისთვის გამოსახული საშუალო კვადრატული ცდომილების წილებში $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\alpha}$
ლაპლასის ფუნქცია: $2\Theta = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon = \alpha$

ε	α	ε	α	ε	α
0	0	1.2	0.77	2.6	0.990
0.05	0.04	1.3	0.80	2.7	0.993
0.1	0.08	1.4	0.84	2.8	0.995
0.15	0.12	1.5	0.87	2.9	0.996
0.2	0.16	1.6	0.89	3.0	0.997
0.3	0.24	1.7	0.91	3.1	0.9981
0.4	0.31	1.8	0.93	3.2	0.9986
0.5	0.38	1.9	0.94	3.3	0.9990
0.6	0.45	2.0	0.95	3.4	0.9993
0.7	0.55	2.1	0.964	3.5	0.9995
0.8	0.57	2.2	0.972	3.6	0.9997
0.9	0.63	2.3	0.973	3.7	0.9998
1.0	0.68	2.4	0.984	3.8	0.99986
1.1	0.73	2.5	0.988	3.9	0.99990
					0.99993

ცხრილი 2
სტიუდენტის კოეფიციენტები t_{α_n}

n	α					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
2	0.16	0.33	0.51	0.73	1.00	1.38
3	0.14	0.45	0.45	0.62	1.82	1.06
4	0.14	0.42	0.42	0.58	1.77	0.98
5	0.13	0.41	0.41	0.57	1.74	0.94
6	0.13	0.27	0.41	0.56	1.73	0.92
7	0.13	0.27	0.40	0.55	1.72	0.90
8	0.13	0.26	0.40	0.55	1.71	0.90
9	0.13	0.26	0.40	0.54	1.71	0.90
10	0.13	0.26	0.40	0.54	1.70	0.88
11	0.13	0.26	0.40	0.54	1.70	0.88
12	0.13	0.26	0.40	0.54	1.70	0.87
13	0.13	0.26	0.40	0.54	1.70	0.87
14	0.13	0.26	0.39	0.54	1.69	0.87
15	0.13	0.26	0.39	0.54	1.69	0.87
16	0.13	0.26	0.39	0.54	1.69	0.88
17	0.13	0.26	0.39	0.54	1.69	0.86
18	0.13	0.26	0.39	0.53	1.69	0.86
19	0.13	0.26	0.39	0.53	1.69	0.86
20	0.13	0.26	0.39	0.53	1.69	0.86
21	0.13	0.26	0.39	0.53	1.69	0.86
22	0.13	0.26	0.39	0.53	1.69	0.86
23	0.13	0.26	0.39	0.53	1.69	0.86
24	0.13	0.26	0.39	0.53	1.69	0.86
25	0.13	0.26	0.39	0.53	1.69	0.86
26	0.13	0.26	0.39	0.53	1.68	0.86
27	0.13	0.26	0.39	0.53	1.68	0.86
28	0.13	0.26	0.39	0.53	1.68	0.86
29	0.13	0.26	0.39	0.53	1.68	0.86
30	0.13	0.26	0.39	0.53	1.69	0.85
40	0.13	0.26	.39	0.53	1.68	0.85
60	0.13	0.25	.39	0.53	1.68	0.85
120	0.13	0.25	.39	0.53	1.68	0.85
∞	0.13	0.25	.39	0.53	1.67	0.86

ცხრილი 2 (გაგრძელება

n	α						
	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
2	2.0	3.1	6.3	12.7	31.8	63.7	636.6
3	1.3	1.9	2.9	4.3	7.0	9.9	31.6
4	1.3	1.6	2.4	4.3	4.5	5.8	12.9
5	1.2	1.5	2.1	4.3	3.7	4.6	3.6
6	1.2	1.5	2.0	2.6	3.4	4.0	6.9
7	1.1	1.4	1.9	2.4	3.1	3.7	6.0
8	1.1	1.4	1.9	2.4	3.0	3.5	5.4
9	1.1	1.4	1.9	2.3	2.9	3.4	5.0
10	1.1	1.4	1.8	2.3	2.8	3.3	4.9
11	1.1	1.4	1.8	2.2	2.8	3.2	4.6
12	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.5
13	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.3
14	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.0	4.2
15	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	3.0	4.1
16	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	2.9	4.0
17	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
18	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
19	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	3.9
20	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9	3.9
21	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
22	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
23	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3,8
24	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
25	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
26	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
27	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
28	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
29	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
30	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
40	1.1	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.6
60	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.5
120	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.6	3.4
∞	1.0	1.3	1.6	2.0	2.3	2.6	3.3

ცხრილი 3
ნდობის ინტერვალი σ-თვის

α	0.99		0.98		0.95		0.90	
γ / n	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
2	0.36	160	0.39	80	0.45	32	0.51	16
3	0.43	14	0.47	10	0.52	6.3	0.58	4.4
4	0.48	6.5	0.51	5.1	0.57	3.7	0.62	2.9
5	0.52	4.4	0.55	3.7	0.60	2.9	0.65	2.4
5	0.55	3.5	0.58	3.0	0.62	2.5	0.67	2.1
7	0.57	3.0	0.60	2.6	0.64	2.2	0.68	1.9
8	0.59	2.7	0.62	2.4	0.66	2.0	0.70	1.8
9	0.60	2.4	0.63	2.2	0.68	1.9	0.72	1.7
10	0.62	2.3	0.64	2.1	0.69	1.8	0.73	1.6
11	0.63	2.2	0.66	2.0	0.70	1.7	0.74	1.6
12	0.64	2.1	0.67	1.9	0.71	1.6	0.75	1.5
13	0.65	2.0	0.68	1.8	0.72	1.6	0.76	1.5
14	0.66	1.9	0.69	1.8	0.73	1.6	0.76	1.5
15	0.67	1.8	0.69	1.7	0.73	1.5	0.77	1.5
16	0.68	1.8	0.70	1.7	0.74	1.5	0.77	1.4
17	0.68	1,8	0.71	1.7	0.75	1.5	0.79	1.4
18	0.69	1.7	0.72	1.6	0.75	1.5	0.79	1.4
19	0.70	1.7	0.73	1.6	0.76	1.5	0.79	1.4
20	0.70	1.7	0.75	1.5	0.76	1.4	0.81	1.4
25	0.73	1.6	0.77	1.4	0.76	1.3	0.83	1.3
30	0.74	1.5	0.79	1.3	0.80	1.3	0.85	1.3
40	0.77	1.4	0.79	1.3	0.82	1.2	0.86	1.2
50	0.79	1.3	0.81	1.2	0.84	1.2	0.88	1.2
70	0.82	1.3	0.84	1.2	0.86	1.2	0.89	1.2
100	0.85	1.2	0.86	1.2	0.88	1.2	0.90	1.1
200	0.89	1.1	0.90	1.1	0.91	1.1	0.93	1.1

ცხრილი 4

აუცილებელ გაზომვათა რაოდენობა ε ტოლი შემთხვევითი ცდომილების α საიმედოობით მისაღწევად

$\varepsilon = \frac{\Delta x}{S}$	α					
	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	0.999
1.0	2	3	5	7	11	17
0.5	3	6	13	18	31	50
0.4	4	8	19	27	46	74
0.3	6	13	32	46	78	130
0.2	13	29	70	100	170	280
0.1	47	110	270	390	700	1100
0.05	180	430	1100	1500	2700	4300
0.01	4500	1100	27000	38000	66000	11000

ცხრილი 5

უხეში ცდომილების შეფასება

$v_{მაქს} = \left|\frac{\bar{x} - x_k}{S}\right|$ n გაზომვათა რიგში β ალბათობისთვის

n	β			
	0.1	0.05	0.025	0.01
3	1.41	1.41	1.41	1.41
4	1.65	1.69	1.71	1.72
5	1.79	1.87	1.92	1.96
6	1.89	2.00	2.07	2.13
7	1.97	2.09	2.18	2.27
8	2.04	2.17	2.27	2.37
9	2.10	2.24	2.35	2.46
10	2.15	2.29	2.41	2.54
11	2.19	2.34	2.47	2.61
12	2.23	2.39	2.52	2.66
13	2.26	2.43	2.56	2.71
14	2.30	2.46	2.60	2.76
15	2.33	2.49	2.64	2.80
16	2.35	2.52	2.67	2.84
17	2.38	2.55	2.70	2.87
18	2.40	2.58	2.73	2.90
19	2.43	2.60	2.75	2.93
21	2.45	2.62	2.78	2.96
21	2.47	2.64	2.80	2.98
22	2.49	2.66	2.82	3.01
23	2.50	2.68	2.84	3.03
24	2.52	2.70	2.86	3.05
25	2.54	2.72	2.88	3.07

IV. პირდაპირი და არაპირდაპირი გაზომვების ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავების ზოგიერთი მაგალითი

ა) .პირდაპირი გაზომვები.

ამ შემთხვევაში რეკომენდებულია ოპერაციების შემდეგი მიმდევრობა:

1). გაზომვის თითოეული მონაცემი შეიტანეთ ცხრილში

2). გამოთვალეთ n გაზომვის საშუალო მნიშვნელობა

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

3). გამოინგარიშეთ ცალკეული გაზომვის ცდომილება

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

4). გამოინგარიშეთ ცალკეული გაზომვის ცდომილების კვადრატი

$$(\Delta x_1)^2, (\Delta x_1)^2, \cdots, (\Delta x_n)^2$$

5). გამოინაგარიშეთ საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული ცდომილება

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta x)^2}{n(n-1)}}$$

6). აიღეთ საიმედოობის მნიშვნელობა (ჩვეულებრივ იღებენ $p = 0.95$)

7). საიმედოობის მოცემული p და გაზომვის n რაოდენობისაგან გამომდინარე, განსაზღვრეთ სტიუდენტის კოეფიციენტის მნიშვნელობა t

8). გამოიანგარიშეთ ნდობის ინტერვალი (გაზომვის ცდომილება)

$$\Delta x = S_r \cdot t$$

9). თუ გაზომვის შედეგის ცდომილება Δx ტოლი ან დაახლოებით ერთი სიდიდის აღმოჩნდა ხელსაწყოს ცდომილებისა δ, მაშინ ნდობის ინტერვალის საზღვრად აიღეთ

$$\Delta x = \sqrt{(S_r \cdot t)^2 + \delta^2}$$

თუ ერთი ცდომილება ნაკლებია მეორეზე სამჯერ ან მეტჯერ, უფრო ნალები მოიშორეთ

10). საბოლოოშედეგი ჩაწერეთ შემდეგი სახით

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

11). შეაფასეთ გაზომვის შედეგის ფარდობითი ცდომილება

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$$

ვნახოთ თუ როგორ გამოიყენება ზემოთ მოყვანილი ფორმულები კონკრეტული რიცხვებისთვის

ვთქვათ გავზომეთ ღეროს დიამეტრი d (სისტემატური ცდომილება იყოს 0.005 მმ). გაზომვის შედეგები შევიტანოთ ცხრილის მეორე გრაფაში. მოვძებნოთ $\bar{x}$ და ცხრილის მესამე გრაფაში შევიტანოთ სხვაობები $d-\bar{x}$, ხოლო მეოთხეში – ამ სხვაობის კვადრატები

n	d, მმ	$d-x$	$(d-\bar{x})^2$
1	4.02	+ 0.01	0.0001
2	3.98	- 0.03	0.0009
3	3.97	- 0.04	0.0016
4	4.01	+ 0.00	0.0000
5	4.05	+ 0.04	0.0016
6	4.03	+ 0.02	0.0004
$\sum$	24.06	-	0.0046

$$\bar{x}=\frac{\sum_1^n x_i}{n}=\frac{\sum_1^6 d_i}{6}=\frac{24.06}{6}=4.01 \text{ მმ}$$

$$S_r=\sqrt{\frac{\sum_1^n(\Delta x)^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{\sum_1^6((d-\bar{x})^2)^2}{6\cdot 5}}=\sqrt{\frac{0.0046}{30}}=0.01238 \text{ მმ}$$

როგორც ზემოთ მივუთითეთ საიმედოობის სიდიდედ ავიღოთ $p = 0.95$ და 6 გაზომისთვის სტიუდენტის ცხრილიდან მოვძებნოთ $t=2.57$. აბსოლუტური ცდომილება ვიანგარიშოთ ფორმულით $\Delta x=S_r\cdot t=0.01238\cdot 2.57=0.04$ მმ შევადაროთ შემთხვევითი და სისტემატური ცდომილებები

$$\frac{\Delta}{\delta}=\frac{0.04}{0.005}=8$$

ვინაიდან $\delta<\Delta$ ამიტომ $\delta=0.005$ შეიძლება უკუვაგდოთ.
საბოლოო შედეგი ასე ჩავწეროთ $d=(4.01\pm 0.04)$ როცა $p = 0.95$

$$\varepsilon=\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\%=\frac{0.04}{4.01}\cdot 100\%\approx 1\%$$

ბ).არაპირდაპირი გაზომვები

როგორც ზემოთ იყო მითითებული არაპირდაპირი გაზომვების დროს ჩვენთვის საინტერესო სიდიდე წარმოადგენს უშუალოდ გაზომვადი ერთი ან რამდენიმე სიდიდის ფუნქციას

$$N = f(x, y, z, \dots) \quad (43)$$

როგორც ალბათობის თეორიიდან გამომდინარეობს სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა მიიღება ამ უკანასკნელში გაზომილი სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობის ჩასმით

$$\bar{N} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \quad (44)$$

საჭიროა მოვძებნოთ ამ ფუნქციის აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებები, თუ ცნობილია დამოუკიდებელი სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობები.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა, როცა შეცდომა სისტემატურია ან შეცდომა შემთხვევითია. შისტემატური ცდომილების შემთხვევაში არაპირდაპირი გაზომვების შესახებ ერთიანი აზრი დღემდე არ არსებობს. მაგრამ თუ გამოვალთ არაპირდაპირი გაზომვების სისტემატური ცდომილების განმარტებიდან მიზანშეწონილია სისტემატური ცდომილებები ვიანგარიშოთ ფორმულებით

$$\delta N = \pm\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right| + \cdots\right] \quad (45) \quad \text{ან}$$

$$\delta N = \pm\bar{N}\left[\left|\frac{\partial lnf}{\partial x}\delta x\right| + \left|\frac{\partial lnf}{\partial y}\delta y\right| + \left|\frac{\partial lnf}{\partial z}\delta z\right| + \cdots\right] \quad (46)$$

სადაც

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \dots$$

არის

$$N = f(x, y, z, \dots)$$

ფუნქციის კერძო წარმოებულები $x, y, z, \dots$ გამოთვლილი იმ პირობით, რომ ყველა არგუმენტი გარდა იმათი, რომლებითაც ჩატარებულია გაზომვა მუდმივი სიდიდეებია. $\delta x, \delta y, \delta z$ არგუმენტების სისტემატური ცდომილებებია. (45) ფორმულით სარგებობა მოსახერხებელია მაშინ, როდესაც ფუნქციას $N = f(x, y, z, \dots)$ აქვს არგუმენტების ჯამის ან სხვაობის სახე, ხოლო (46) ფორმულით მაშინ როდესაც ფუნქციას აქვს არგუმენტების ნამრავლს ან ფარდობის სახე.

არაპირდაპირი გაზომვების შემთხვევითი ცდომილების საანგარიშოდ უნდა ვისარგებლოთ ფორმულებით

$$\Delta N = \pm\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \cdots\right] \quad (47) \quad \text{ან}$$

$$\Delta N = \pm\bar{N}\left[\left(\frac{\partial lnf}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial lnf}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial lnf}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \cdots\right] \quad (48)$$

სადაც $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ არის არგუმენტების ნდობის ინტერვალები $x, y, z, \dots$ არგუმენტების მოცემული ნდობის ალბათობებისთვის. მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ Δx, Δy, Δz, ... ინტერვალები აღებული უნდა იყოს ერთნაირი ნდობის ალბათობებისთვის $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = P$. ამ შემთხვევაში ΔN ნდობის ინტერვალისთვის საიმედოობა ასევე ტოლი იქნება P.

ხშირად შეიმჩნევა შემთხვევა, როდესაც სისტემატური ცდომილება და შემთხვევითი ცდომილება დაახლოებით ერთნაირია და ორივენი ერთნაირად

განაპირობებენ გაზომვის სიზუსტეს. ამ შემთხვევაში სრული ცდომილება $\sum$ განისაზღვრება როგორც კვადრატული ჯამი შემთხვევითი Δ და სისტემატური δ ცდომილებებისა, არა ნაკლებ P ალბათობით.სადაც P შემთხვევითი ცდომილების ნდობის ალბათობაა:

$$\sum \quad =\sqrt{\Delta^2+\delta^2}$$

არაპირდაპირი გაზომვებისას, აღწარმოებად პირობებში ფუქციას პოულობენ ცალკეული გაზომვებისთვის, ხოლო ნდობიდ ინტერვალს მოსაძებნი სიდიდის მისაღებად გამოთვლიან იმ მეთოდიკით, რომელიც გამოიყენება პირდაპირი გაზომვებისთვის.

უნდა აღინიშნოს, რომ როდესაც ფუნქციონალური დამოკიდებულება მოცემულია გალოგარითმებისთვის ხელსაყრელი ფორმულით, უფრო მარტივია განვსაზღვროთ ფარდობითი ცდომილება, ხოლო შემდეგ თანაფარდობიდან $\Delta N=\varepsilon\bar{N}$ მოვძებნოთ აბსოლუტური ცდომილება.

გათვლების დაწყებამდე ყოველთვის უნდა ვიფიქროთ ჩასატარებელ გათვლებზე და დავწეროთ ფორმულები, რომლებითაც ვისარგებლებთ ცდომილებების გამოსათვლელად. ეს ფორმულები საშუალებას მოგვცემენ დავადგინოთ თუ რა გაზომვები უნდა ჩავატაროთ განსაკუთრებული ყურადღებით და რომლებზე არ ღირს დიდი დროის დახარჯვა.

რაპირდაპირი გაზომვების შედეგების დამუშავებისას რეკომენდებულია ოპერაციების შემდეგი მიმდევრობა:

1).პირდაპირი გაზომვის ყველა სიდიდე დაამუშავეთ პირდაპირი გაზომვების შედეგების დამუშავების მეთოდებით. ამასთან გასაზომი სიდიდისთვის აიღეთ ნდობიდ ერთნაირიმნიშვნელობა P

2).არაპირდაპირი გაზომვის ცდომილება შეაფასეთ (45) და (46) ფორმულებით, სადაც წარმოებულები გამოთვალეთ სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობისთვის. თუ ცალკეული გაზომვის ცდომილება დიფერენცირების შედეგში შედის რამდენჯერმე, უნდა დავაჯგუფოთ ის წევრები ერთად, რომლებიც შეიცავენ ერთნაირ დიფერენციალს, და ავიღოთ დიფერენციალის წინ ფრჩხილებში მდგომი წევრების მოდული; ხოლო ნიშანი d ნაცვლად ავიღოთ Δ ან δ

3)თუ სისტემატური და შემთხვევითი ცდომილებების მნიშვნელობები ახლოსააა ერთმანეთთან ისინი უნდა შევკრიბოთ ცდომილების შეკრების კანონით. თუ ერთი ცდომილება ნაკლებია მეორეზე 3-ჯერ ან მეტჯერ უფრო ნაკლები უნდა უკუვაგდოთ.

4). გაზომვის შედეგები ჩაწერეთ შემდეგი სახით

$$N=f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\dots)\pm\Delta f$$

5). განსაზღვრეთ არაპირდაპირი გაზომვების სერიის ფარდობითი ცდომილება

$$\varepsilon=\frac{\Delta f}{f}.100\%$$

მოვიყვანოთ არაპირდაპირი გაზომვების დამუშავების მაგალითი

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ცილინდრის მოცულობა ფორმულით

$$v = \pi d^2 h \quad (49)$$

სადაც d ცილინდრის დიამეტრია, ხოლო h- ცილინდრის სიმაღლე. ორივე ეს სიდიდე განისაზღვრება პირდაპირი გაზომვით. ვთვათ გაზომვებმა მოგვცეს შემდეგი შედეგები: $d = (4.01 \pm 0.03)$ მმ და $h = (8.65 \pm 0.02)$მმ ერთნაირი $p = 0.95$ საიმედოობით. მოცულობის საშუალო მნიშვნელობა იქნება

$$v = 3.14 \cdot (4.01)^2 \cdot 8.65 \text{ მმ}^3$$

გავალოგარითმოთ (49)

$$lnV = ln\pi + 2lnd + lnh - ln4$$

$$\frac{\partial lnV}{\partial d} = \frac{2}{d}$$

$$\frac{\partial lnV}{\partial h} = \frac{2}{d}$$

$$\Delta V = \pm \bar{V} \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}$$

$$\Delta V = \pm 109.19 \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 0.03}{4.01}\right)^2 + \left(\frac{0.02}{8.65}\right)^2} \approx 1.65 \text{ მმ}^3$$

ვინაიდან გაზომვა ჩატარებულია მიკრომეტრით, რომლის დანაყოფის ფასია 0.01 მმ, სისტემატური ცდომილეა $\delta d = \delta h = 0.01$ მმ. სისტემატური ცდომილება δV იქნება

$$\delta V = \pm \bar{V} \left(2 \cdot \frac{\delta d}{d} + \frac{\delta h}{h}\right) = 109.19 \left(\frac{2 \cdot 0.01}{4.01} + \frac{0.01}{8.65}\right) \approx 0.67 \text{ მმ}^3$$

სისტემატური ცდომილება შესადარია შემთხვევითი ცდომილების და შესაბამისად

$$\Delta V = \sqrt{(1.65)^2 + (0.67)^2} = 1.78 \approx 2\text{მმ}^3$$

ამრიგად გაზომვის შედეგია

$$V = (109 \pm 2) \text{ მმ}^3 \quad p = 0.95\text{-თვის}$$

$$\varepsilon = \frac{2}{109} \cdot 100\% \approx 2\%$$

მაგალითი 2. მოძებნეთ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილების მნიშვნელობები შემდეგი ფუნქციონალური დამოკიდებულებისთვის

$$\tau = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{2m_1 m_2}$$

ამ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია ჯერ მოვძებნოთ ფარდობითი ცდომილება. მაშინ

$$d = \left[ln\left(\frac{m_1 + m_2 - m_3}{2m_1 m_2}\right)\right] = d[ln(m_1 + m_2 - m_3) - ln2 - lnm_1 - lnm_2] =$$

$$= d[ln(m_1 + m_2 - m_3)] - d(ln2) - d(lnm_1) - d(lnm_2) =$$

$$= \frac{d(m_1 + m_2 - m_3)}{m_1 + m_2 - m_3} - \frac{dm_1}{m_1} - \frac{dm_2}{m_2} = \frac{dm_1}{m_1 + m_2 - m_3} + \frac{dm_2}{m_1 + m_2 - m_3} - \frac{dm_3}{m_1 + m_2 - m_3} -$$

$$-\frac{dm_1}{m_1} - \frac{dm_2}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1 + m_2 - m_3} - \frac{1}{m_1}\right) dm_1 + \left(\frac{1}{m_1 + m_2 - m_3} - \frac{1}{m_2}\right) dm_2 -$$

$$-\frac{dm_3}{m_1 + m_2 - m_3} = \frac{m_2 - m_3}{m_1(m_1 + m_2 - m_3)} dm_1 + \frac{m_1 - m_3}{m_2(m_1 + m_2 - m_3)} dm_2 -$$

$$-\frac{dm_3}{m_1 + m_2 - m_3} = \frac{m_2 - m_3}{m_1(m_1 + m_2 - m_3)} dm_1 + \frac{m_1 - m_3}{m_2(m_1 + m_2 - m_3)} dm_2 -$$

$$-\frac{1}{m_1 + m_2 - m_3} dm_3$$

(48) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\varepsilon = \frac{\Delta\tau}{\bar{\tau}} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{m_2 - m_3}{m_1(m_1 + m_2 - m_3)}\right]^2 (\Delta m_1)^2 + \left[\frac{m_1 - m_3}{m\ \ (m_1 + m_2 - m_3)}\right]^2 (\Delta m_1)^2 + \left[\frac{dm_3}{m_1 + m_2 - m_3}\right]^2}$$

აბსოლუტური შემთხვევითი ცდომილება მოიძებნება ფორმულიდან

$$\Delta\tau = \varepsilon \cdot \bar{\tau}$$

(46) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\varepsilon = \frac{\delta\tau}{\bar{\tau}} = \left|\frac{m_2 - m_3}{m_1(m_1 + m_2 - m_3)}\delta m_1\right| + \left|\frac{m_1 - m_3}{m_2(m_1 + m_2 - m_3)}\delta m_2\right| + \left|\frac{\delta m_3}{m_1 + m_2 - m_3}\right|$$

აბსოლუტურ სისტემატურ ცდომილებას მოვძებნით გამოსახულებიდან

$$\delta\tau = \varepsilon \cdot \bar{\tau}$$

ლიტერატურა

1.ი.სხირტლაძე, თ.ტუღუში, ა.ოსიძე, ა. ცივაძე, მ. ნადარეიშვილი. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბ. 1980
2.ვ.ცხადაია,ზ.ჯაბუა. ტესტებისა და ამოცანების კრებული მათემატიკაში. თბ. 2009
2. Л.З.Румшинский. Математическая обработка результатов эксперимента.М., 1971
3. А.И.Заидель. Ошибки измерении физических величин. Л., 1974

ს ა რ ჩ ე ვ ი