Дмитрий Письменный

Конспект лекций по высшей математике

Тридцать шесть лекций

1 часть

Дмитрий Письменный

Конспект лекций по высшей математике

1 часть

Тридцать шесть лекций

АЙРИС ПРЕСС
РОЛЬФ
МОСКВА
2000

ББК 22.1я73
П34

Письменный Д. Т.

П34 Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Рольф, 2000. – 288 с., с илл.

ISBN 5-7836-0311-2

Настоящий курс лекций предназначен для всех категорий студентов, изучающих в том или ином объеме высшую математику.

Первая часть содержит необходимый материал по 9-ти разделам курса высшей математики, которые обычно изучаются студентами на первом курсе вуза (техникума) — линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, комплексные числа, и основы математического анализа (функции, пределы, производная, определенный и неопределенный интеграл, функции нескольких переменных).

Изложение теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, ведется на доступном, по возможности строгом языке.

ISBN 5-7836-0311 2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Глава IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Глава V. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Глава VI. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Глава VIII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено, в первую очередь, для студентов инженерно-технических специальностей; может быть полезным для всех категорий студентов, изучающих в том или ином объеме высшую математику. Оно представляет собой конспект лекций в 2 частях. Первая часть адресована, в основном, первокурсникам. Набор освещаемых вопросов хорошо виден из оглавления.

Данный конспект содержит необходимый материал по девяти разделам курса высшей математики. Изложение теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, ведется на доступном, по возможности строгом языке.

Пособие может быть использовано студентами также для самостоятельного изучения соответствующего материала, является базой для подготовки к семестровым экзаменам по высшей математике на 1-м курсе.

Кроме того, книга должна помочь студенту и в тех случаях, когда он что-то не успел записать на лекции, какие-то лекции были пропущены, в чем-то трудно (или нет времени) разобраться по другим учебникам, когда некоторые вопросы «слишком длинны» в его конспектах или много фактического материала, который следует изучить за ограниченное количество недель, дней.

Автор надеется, что данное пособие будет способствовать более глубокому изучению студентами курса высшей математики.

Список обозначений:

◔ ● — начало и конец решения примера или задачи;

❏ ■ — начало и конец доказательства;

 — важные определения

 — «обратите особое внимание!»

В рамку заключены формулы, которые важно помнить.

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Лекции 1–3

§ 1. МАТРИЦЫ

1.1. Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1,m}$ (т. е. $i = 1, 2, 3, \dots, m$) — номер строки, $j = \overline{1,n}$ (т. е. $j = 1, 2, 3, \dots, n$) — номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее ***элементами***. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют ***главную диагональ***.

Матрицы ***равны между собой***, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е.

$$A = B, \quad \text{если } a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{где } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей ***n-го порядка***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Обозначается буквой E.

Пример 1.1.

$$E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица 3-го порядка.

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

— единичная матрица n-го порядка.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой O. Имеет вид

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется ***вектором*** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = (b_1\ b_2\ \ldots\ b_n).$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е. $(5)_{1\times1}$ есть 5.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной. Обозначается A^T.

Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = (1\ 0)$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

1.2. Действия над матрицами

Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Пример 1.2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется *разность матриц*.

Умножение на число

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* k называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Пример 1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ k = 2,\ A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется *противоположной матрице* A.

Разность матриц $A - B$ можно определить так: $A - B = A + (-B)$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими *свойствами:*

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$,

где A, B, C — матрицы, α и β — числа

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Привести к каноническому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2\\-1&2&0&1\\5&0&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&5&2&3\\0&-15&-6&-9\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&2&3\\0&-15&-6&-9\end{pmatrix}\\ \quad\quad :5\quad :2\quad :3\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&-3&-3&-3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Произведение матриц

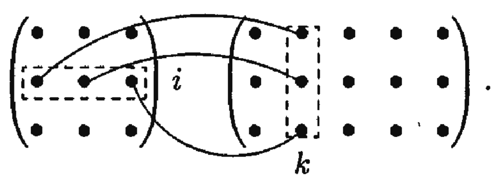
Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на матрицу* $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\dots+a_{in}b_{nk},\quad \text{где } i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p},$$

т. е. элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:



Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Легко показать, что $A\cdot E=E\cdot A=A$, где A — квадратная матрица, E — единичная матрица того же размера.

Пример 1.5. $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}_{2\times 3}\times\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}_{3\times 2}=$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Пример 1.6. $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}$. Тогда произведение $A\cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A (3) не совпадает с числом строк матрицы B (2). При этом определено произведение $B\times A$, которое считают следующим образом:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+9&2+3&1+0\\1+6&2+2&1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&5&1\\7&4&1\end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB = BA$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$,

если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Основные понятия

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее *определителем*, следующим образом:

1. $n = 1$. $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.

2. $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

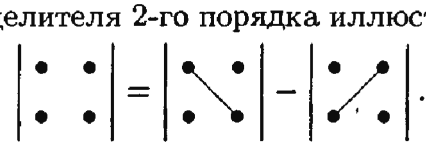
3. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определитель матрицы A также называют ее *детерминантом*. Правило вычисления детерминанта для матрицы порядка N является довольно сложным для восприятия и применения. Однако известны методы, позволяющие реализовать вычисление определителей высоких порядков на основе определителей низших порядков. Один из методов основан на свойстве разложения определителя по элементам некоторого ряда (с. 17, свойство 7). При этом заметим, что определители невысоких порядков (1, 2, 3) желательно уметь вычислять согласно определению.

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



Пример 2.1. Найти определители матриц

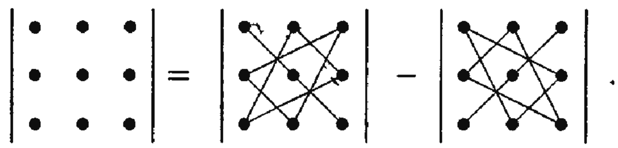
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 12-(-15) = 27;$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (или Саррюса), которое символически можно записать так:



(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

(основания треугольников параллельны побочной диагонали)

Пример 2.2. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\det A =$$
$$= 5\cdot 1\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4)\cdot 6 + 3\cdot 0\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot(-2)\cdot(-3) - 0\cdot(-4)\cdot 5 =$$
$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

2.2. Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторые из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

Свойство 1 («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Иными словами,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем строки и столбцы будем просто называть *рядами определителя*.

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Свойство 3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

❑ Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot 0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Свойство 5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Свойство 6 («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Пример 2.3. Доказать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32} \end{vmatrix}.$$

❍ Решение: Действительно, используя свойства 5, 4 и 3, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \Delta + k\cdot 0 = \Delta. \qquad \bullet$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $n-1$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}.

Так, если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$.

Так, $A_{11} = +m_{11}$, $A_{32} = -m_{32}$.

Свойство 7 («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-его порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

❑ В самом деле, имеем

$$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$
$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta.$$ ■

Свойство 7 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример 2.4. Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

● Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т. к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 3 \cdot (7 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 7 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 4) +$$
$$+ (5 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 8 - (-1) \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 5 \cdot 7 \cdot 2) -$$
$$- (5 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 0 \cdot 8 - 3 \cdot 1 \cdot 5 - 7 \cdot 7 \cdot 2) = 122.$$ ●

Свойство 8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

§ 3. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ МАТРИЦЫ

3.1. Основные понятия

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если определитель $\Delta = \det A$ не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$) матрица A называется ***вырожденной***.

Матрицей, ***союзной к матрице*** A, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \qquad (3.1)$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

3.2. Обратная матрица

Теорема 3.1. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

❑ Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{причем } \det A \neq 0.$$

Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и найдем произведение матриц A и A^*:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \ldots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \ldots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \ldots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E,$$

т. е.

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E. \tag{3.2}$$

Здесь мы использовали свойства 7 и 8 определителей (см. п. 2.2).

Аналогично убеждаемся, что

$$A^* \cdot A = \det A \cdot E. \tag{3.3}$$

Равенства (3.2) и (3.3) перепишем в виде

$$A \cdot \frac{A^*}{\det A} = E \quad \text{и} \quad \frac{A^*}{\det A} \cdot A = E.$$

Сравнивая полученные результаты с определением (3.1), получаем

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.} \qquad \blacksquare$$

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример 3.1. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: 1) Находим $\det A$: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$.

2) Находим A^*: $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{22} = 2$, поэтому $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Находим A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \qquad \bullet$$

Пример 3.2. Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\lambda - 12 - 0 + 2\lambda = 4\lambda - 9.$$

Если $4\lambda - 9 \neq 0$, т. е. $\lambda \neq \frac{9}{4}$, то $\Delta A \neq 0$, т. е. матрица A невырожденная, имеет обратную. ●

Пример 3.3. Показать, что матрица A является обратной для B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Найдем произведение матриц A и B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично $B \cdot A = E$. Следовательно, матрица A является обратной для B. ●

3.3. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \leqslant \min(m; n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются ***минорами этой матрицы.*** В матрице A пунктиром выделен минор 2-го порядка. (Заметим, что таких миноров можно составить $C_m^k \cdot C_n^k$ штук, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k.)

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется ***рангом матрицы***. Обозначается r, $r(A)$ или $\operatorname{rang} A$.

Очевидно, что $0 \leqslant r \leqslant \min(m;n)$, где $\min(m;n)$ — меньшее из чисел m и n.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным***. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Пример 3.4. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Все миноры 3-го порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Значит, $r(A) = 2$. Базисный минор стоит на пересечении 2 и 3 строки с 1 и 3 столбцами. ●

Отметим *свойства ранга матрицы*:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы (см. с. 12).

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

Пример 3.5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

используя результаты примера 1.4.

Решение: В примере 1.4 показано, что

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен $r(A) = 2$. ●

§ 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ называются *коэффициентами* системы, числа b_i — *свободными членами*. Подлежат нахождению числа x_n.

Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме***

$$\boxed{A \cdot X = B.}$$

Здесь A — матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец из неизвестных x_j,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор-столбец из свободных членов b_i.

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $\dots$, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему — это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

4.2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности этой системы дает *теорема Кронекера–Капелли*.

Теорема 4.1. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Примем ее без доказательства.

Правила практического разыскания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем.

Теорема 4.2. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 4.3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A) = r(\overline{A}) = r$, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r (напоминание: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют *главными* и оставляют слева, а остальные $n-r$ неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Пример 4.1. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 1,$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad r(\overline{A}) = 2 \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

Таким образом, $r(A) \neq r(\overline{A})$, следовательно, система несовместна. ●

Пример 4.2. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + \ \ x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - \ \ x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение: $r(A) = r(\overline{A}) = 2$. Берем два первых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \boxed{x_3 + x_4} = 1, \\ x_1 - 2x_2 + \boxed{x_3 - x_4} = -1. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2. \end{cases} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 & 1 \\ -1 - x_1 + 2x_2 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - 4x_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_1 + 2x_2 \\ 1 & -1 - x_1 + 2x_2 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно, $x_3 = -x_1 + 2x_2$, $x_4 = 1$ — общее решение. Положив, например, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, получаем одно из частных решений: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. ●

4.3. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной*.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.} \tag{4.1}$$

Отыскание решения системы по формуле (4.1) называют *матричным способом* решения системы.

Матричное равенство (4.1) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично: $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n}} \tag{4.2}$$

называются ***формулами Крамера***.

Итак, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено матричным способом (4.1) либо по формулам Крамера (4.2).

Пример 4.3. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

❍ Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$. Значит, $x_1 = \frac{7}{7} = 1$, $x_2 = \frac{14}{7} = 2$. ●

4.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

где $k \leqslant n$, $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,k}$. Коэффициенты a_{ii} называются *главными* элементами системы.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Прямой ход.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (4.3), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого (используя элементарные преобразования системы). Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(i, j = \overline{2,m})$ — новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы (4.3) к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, т. е. равенства вида $0 = 0$, их отбрасывают. Если же появится уравнение вида $0 = b_i$, а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

Второй этап (*обратный ход*) заключается в решении ступенчатой системы. Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$; затем находим $x_{k-2}, \ldots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Замечания: 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т. е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $(x_{n-2}, \ldots, x_1)$.

2. На практике удобнее работать не с системой (4.3), а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример 4.4. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение: В результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Поэтому общее решение системы: $x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3$; $x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1$. Если положить, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. ●

Пример 4.5. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение: Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \quad\;\; x_2 \qquad\; = 1, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$. ●

4.5. Системы линейных однородных уравнений

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна ($r(A) = r(\overline{A})$), она имеет *нулевое (тривиальное) решение* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

При каких условиях однородная система имеет и ненулевые решения?

Теорема 4.4. Для того, чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, т. е. $r < n$.

❑ **Необходимость.**

Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то, очевидно, $r \leqslant n$. Пусть $r = n$. Тогда один из миноров размера $n \times n$ отличен от нуля. Поэтому соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0$, $\Delta_i = 0$, $\Delta \neq 0$. Значит, других, кроме тривиальных, решений нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то $r < n$.

Достаточность.

Пусть $r < n$. Тогда однородная система, будучи совместной, является неопределенной. Значит, она имеет бесчисленное множество решений, т. е. имеет и ненулевые решения. ■

Пусть дана однородная система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема 4.5. Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю, т. е. $\Delta = 0$.

☐ Если система имеет ненулевые решения, то $\Delta = 0$. Ибо при $\Delta \neq 0$ система имеет только единственное, нулевое решение. Если же $\Delta = 0$, то ранг r основной матрицы системы меньше числа неизвестных, т. е. $r < n$. И, значит, система имеет бесконечное множество (ненулевых) решений. ■

Пример 4.6. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

◯ Решение: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$ $\left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\right)$, $n = 3$. Так как $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3$. Стало быть, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2x_3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3x_3$ — общее решение.

Положив $x_3 = 0$, получаем одно частное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Положив $x_3 = 1$, получаем второе частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$ и т. д. ●

Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Лекции 4–6

§ 5. ВЕКТОРЫ

5.1. Основные понятия

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются *скалярными*. Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объем, температура, работа, масса.

Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называют *векторными*. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

Вектор — это направленный прямолинейный отрезок, т. е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если A — начало вектора, а B — его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. Вектор $\overline{BA}$ (у него начало в точке B, а конец в точке A) называется ***противоположным*** вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$.

Длиной или *модулем* вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\bar{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается через $\bar{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется *ортом* вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}^0$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***равными*** ($\bar{a} = \bar{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку O пространства.

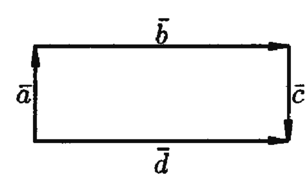


Рис. 1.

На рисунке 1 векторы образуют прямоугольник. Справедливо равенство $\bar{b} = \bar{d}$, но $\bar{a} \neq \bar{c}$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ — противоположные, $\bar{a} = -\bar{c}$.

Равные векторы называют также *свободными*.

Три вектора в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

5.2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB} = \bar{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется *суммой* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$ (см. рис. 2).

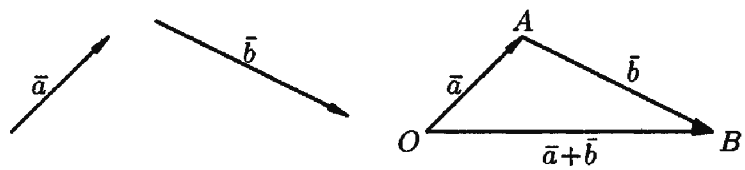


Рис. 2.

Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника*.

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма* (см. рис. 3).

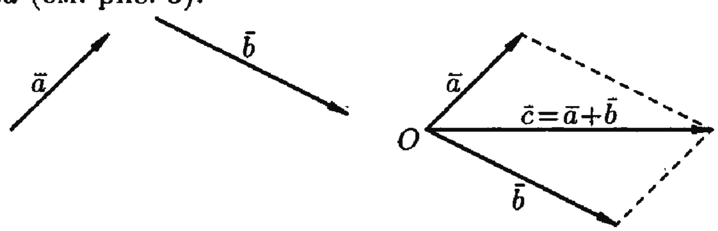


Рис. 3.

На рисунке 4 показано сложение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

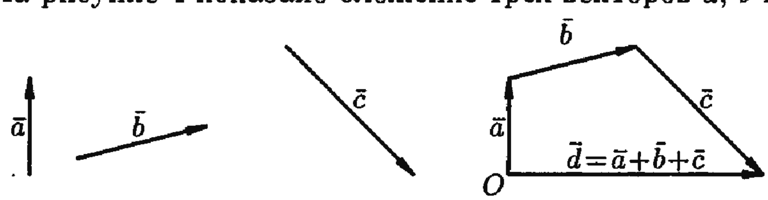


Рис. 4.

Под *разностью* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (см. рис. 5).

Рис. 5.

Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая — разностью (см. рис. 6).

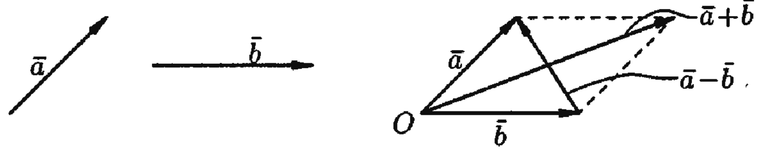


Рис. 6.

Можно вычитать векторы по правилу: $\bar a - \bar b = \bar a + (-\bar b)$, т. е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\bar a$ с вектором, противоположным вектору $\bar b$.

Произведением вектора $\bar a$ ***на скаляр*** (***число***) λ называется вектор $\lambda \cdot \bar a$ (или $\bar a \cdot \lambda$), который имеет длину $|\lambda| \cdot |\bar a|$, коллинеарен вектору $\bar a$, имеет направление вектора $\bar a$, если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$. Например, если дан вектор $\xrightarrow{\bar a}$, то векторы $3\bar a$ и $-2\bar a$ будут иметь вид $\xrightarrow{\quad 3\bar a \quad}$ и $\xleftarrow{\ -2\bar a\ }$.

Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения:

1) если $\bar b = \lambda \cdot \bar a$, то $\bar b \parallel \bar a$. Наоборот, если $\bar b \parallel \bar a$, $(\bar a \neq \bar 0)$, то при некотором λ верно равенство $\bar b = \lambda \bar a$;

2) всегда $\bar a = |\bar a| \cdot \bar a^0$, т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\bar a + \bar b = \bar b + \bar a$,
2. $(\bar a + \bar b) + \bar c = \bar a + (\bar b + \bar c)$,
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \bar a) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \bar a$,
4. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar a = \lambda_1 \cdot \bar a + \lambda_2 \cdot \bar a$,
5. $\lambda \cdot (\bar a + \bar b) = \lambda \cdot \bar a + \lambda \cdot \bar b$.

Эти свойства позволяют проводить преобразования в линейных операциях с вектором так, как это делается в обычной алгебре: слагаемые менять местами, вводить скобки, группировать, выносить за скобки как скалярные, так и векторные общие множители.

5.3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, т. е. направленная прямая.

Проекцией точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось.

Точка M_1 есть точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси (см. рис. 7).

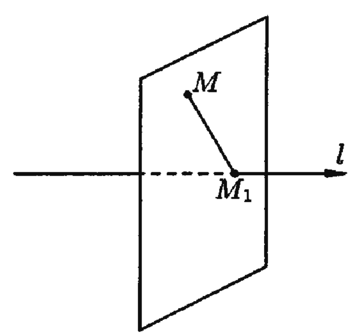


Рис. 7.

Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на ось совпадает с M.

Пусть $\overline{AB}$ — произвольный вектор ($\overline{AB} \neq \overline{0}$). Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B вектора $\overline{AB}$ и рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$.

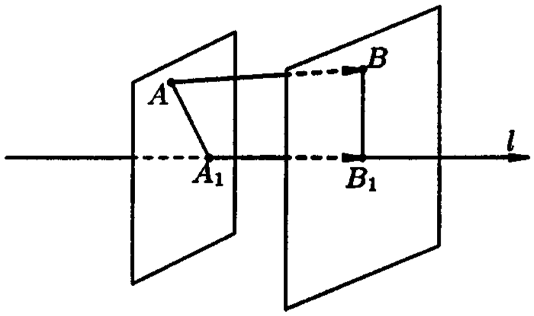


Рис. 8.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены (см. рис. 8). Если точки A_1 и B_1 совпадают ($\overline{A_1B_1} = \overline{0}$), то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается так: $\text{пр}_l \overline{AB}$. Если $\overline{AB} = \overline{0}$ или $\overline{AB} \perp l$, то $\text{пр}_l \overline{AB} = 0$.

Угол φ ***между вектором*** $\bar{a}$ и осью l (или угол между двумя векторами) изображен на рисунке 9. Очевидно, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

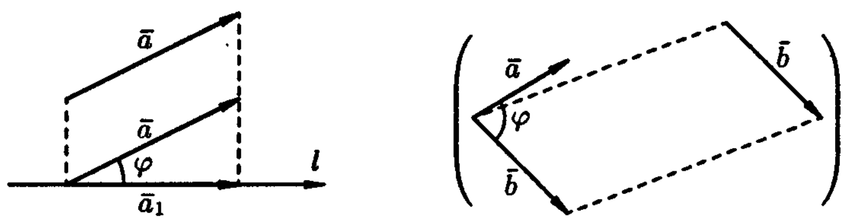


Рис. 9.

Рассмотрим некоторые *основные свойства проекций.*

Свойство 1. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т. е. $\text{пр}_l \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$.

❑ Если $\varphi = (\widehat{\bar{a}, l}) < \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_l \bar{a} = +|\bar{a}_1| = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$.

Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ($\varphi \leqslant \pi$), то $\text{пр}_l \bar{a} = -|\bar{a}_1| = -|\bar{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$ (см. рис. 10).

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_l \bar{a} = 0 = |a| \cos\varphi$. ■

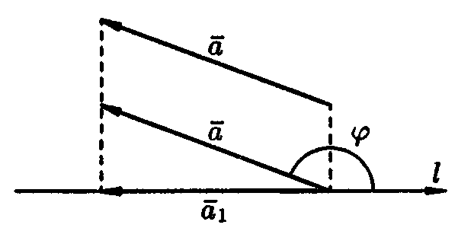


Рис. 10.

Следствие 5.1. **Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол — прямой.**

Следствие 5.2. **Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.**

Свойство 2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось.

❑ Пусть, например, $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Имеем $\text{пр}_l\,\bar{d} = +|\bar{d}_1| = +|\bar{a}_1| + |\bar{b}_1| - |\bar{c}_1|$, т. е. $\text{пр}_l(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = \text{пр}_l\,\bar{a} + \text{пр}_l\,\bar{b} + \text{пр}_l\,\bar{c}$ (см. рис. 11). ■

Свойство 3. При умножении вектора $\bar{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т. е.

$$\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_l\,\bar{a}.$$

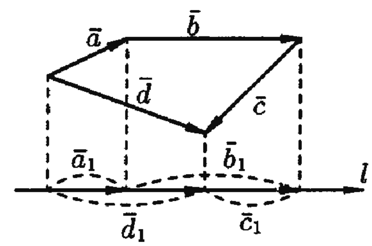


Рис. 11.

❑ При $\lambda > 0$ имеем $\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{a}) = |\lambda\bar{a}| \cdot \cos\varphi =$ (свойство 1) $= \lambda \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l\,\bar{a}$.

При $\lambda < 0$: $\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{a}) = |\lambda\bar{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -\lambda \cdot |\bar{a}| \cdot (-\cos\varphi) = \lambda \cdot \bar{a} \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l\,\bar{a}$. Свойство справедливо, очевидно, и при $\lambda = 0$. ■

Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

5.4. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy и Oz единичные векторы (орты), обозначаемые $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ соответственно (см. рис. 12).

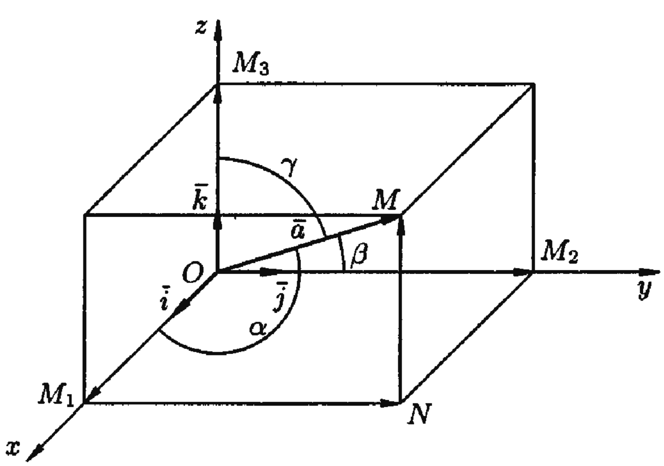


Рис. 12.

Выберем произвольный вектор $\bar{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\bar{a} = \overline{OM}$.

Найдем проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. Тогда $\text{пр}_x\,\bar{a} = |\overline{OM}_1|$, $\text{пр}_y\,\bar{a} = |\overline{OM}_2|$, $\text{пр}_z\,\bar{a} = |\overline{OM}_3|$. По определению суммы нескольких векторов находим $\bar{a} = \overline{OM}_1 + \overline{M_1N} + \overline{NM}$.

А так как $\overline{M_1N} = \overline{OM}_2$, $\overline{NM} = \overline{OM}_3$, то

$$\bar{a} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3. \qquad (5.1)$$

Но

$$\overline{OM}_1 = |\overline{OM}_1| \cdot \bar{i}, \quad \overline{OM}_2 = |\overline{OM}_2| \cdot \bar{j}, \quad \overline{OM}_3 = |\overline{OM}_3| \cdot \bar{k}. \tag{5.2}$$

Обозначим проекции вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно через a_x, a_y и a_z, т. е. $|\overline{OM}_1| = a_x$, $|\overline{OM}_2| = a_y$, $|\overline{OM}_3| = a_z$. Тогда из равенств (5.1) и (5.2) получаем

$$\boxed{\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.} \tag{5.3}$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется ***разложением вектора по ортам координатных осей.*** Числа a_x, a_y, a_z называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$, т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство (5.3) часто записывают в символическом виде: $\bar{a} = (a_x; a_y; z_z)$.

Равенство $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ означает, что $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$.

Зная проекции вектора $\bar{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора. На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать $|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM}_1|^2 + |\overline{OM}_2|^2 + |\overline{OM}_3|^2$, т. е.

$$|\bar{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{5.4}$$

Отсюда

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},}$$

т. е. ***модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.***

Пусть углы вектора $\bar{a}$ с осями Ox, Oy и Oz соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$a_x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma. \tag{5.5}$$

Или, что то же самое,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\bar{a}$.

Подставим выражения (5.5) в равенство (5.4), получаем

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\alpha + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\beta + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\gamma.$$

Сократив на $|\bar{a}|^2 \neq 0$, получим соотношение

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,}$$

т. е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.***

Легко заметить, что координатами единичного вектора $\bar{e}$ являются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, т. е. $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Итак, задав координаты вектора, всегда можно определить его модуль и направление, т. е. сам вектор.

5.5. Действия над векторами, заданными проекциями

Пусть векторы $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ заданы своими проекциями на оси координат Ox, Oy, Oz или, что то же самое

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}.$$

Линейные операции над векторами

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно записать:

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$, или кратко $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$. То есть *при сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются).*

2. $\lambda\bar{a} = \lambda a_x \cdot \bar{i} + \lambda a_y \cdot \bar{j} + \lambda a_z \cdot \bar{k}$ или короче $\lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$. То есть *при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.*

Равенство векторов

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что *два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны* тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$, т. е.

$$\boxed{\bar{a} = \bar{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}}$$

Коллинеарность векторов

Выясним условия коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координатами.

Так как $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то можно записать $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$, где λ — некоторое число. То есть

$$a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = \lambda(b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}) = \lambda b_x \cdot \bar{i} + \lambda b_y \cdot \bar{j} + \lambda b_z \cdot \bar{k}.$$

Отсюда

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z,$$

т. е.

$$\frac{a_x}{b_x} = \lambda, \quad \frac{a_y}{b_y} = \lambda, \quad \frac{a_z}{b_z} = \lambda \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Таким образом, *проекции коллинеарных векторов пропорциональны.* Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Координаты точки

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Для любой точки M координаты вектора $\overline{OM}$ называются *координатами точки M*. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки

M, обозначается $\bar{r}$, т. е. $\overline{OM} = \bar{r}$. Следовательно, координаты точки — это координаты ее радиус-вектора

$$\bar{r} = (x; y; z) \quad \text{или} \quad \bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

Координаты точки M записываются в виде $M(x; y; z)$.

Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\bar{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Имеем (см. рис. 13):

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} =$$
$$= (x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}) - (x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

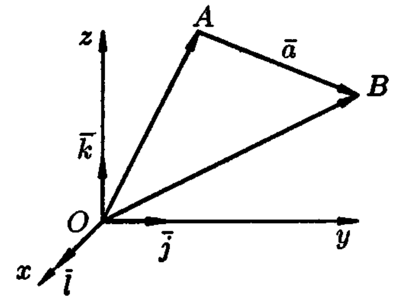


Рис. 13.

Следовательно, ***координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала:*** $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

§ 6. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

6.1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется ***число***, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b}$ (или $(\bar{a}, \bar{b})$). Итак, по определению,

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi,} \tag{6.1}$$

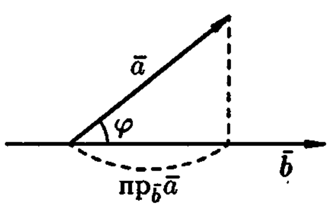


Рис. 14.

где $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$.

Формуле (6.1) можно придать иной вид. Так как $|\bar{a}| \cos\varphi = \text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a}$, (см. рис. 14), а $|\bar{b}| \cos\varphi = \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b}$, то получаем:

$$\boxed{\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a},} \tag{6.2}$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.

6.2. Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение обладает переместительным свойством: $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.

❑ $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$, а $\bar{b}\bar{a} = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{a}})$. И так как $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}|$, как произведение чисел и $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{a}})$, то $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$. ■

2. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя: $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\bar{b})$.

❑ $(\lambda\bar{a})\bar{b}=|\bar{b}|\cdot \text{пр}_{\bar{b}}\,\lambda\bar{a}=\lambda\cdot|\bar{b}|\cdot \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}=\lambda(\bar{a}\bar{b})$. ■

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством: $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$.

❑ $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c})=|\bar{a}|\cdot(\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}+\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{c})=|\bar{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}+|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{c}=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$. ■

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.

❑ $\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cos 0=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|=|\bar{a}|^2$. ■

В частности: $\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1$.

Если вектор $\bar{a}$ возвести скалярно в квадрат и затем извлечь корень, то получим не первоначальный вектор, а его модуль $|\bar{a}|$, т. е. $\sqrt{\bar{a}^2}=|\bar{a}|$ $(\sqrt{\bar{a}^2}\neq\bar{a})$.

Пример 6.1. Найти длину вектора $\bar{c}=3\bar{a}-4\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\pi}{3}$.

❍ Решение:

$$|\bar{c}|=\sqrt{\bar{c}^2}=\sqrt{(3\bar{a}-4\bar{b})^2}=\sqrt{9\bar{a}^2-24\bar{a}\bar{b}+16\bar{b}^2}=$$

$$=\sqrt{9\cdot 4-24\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+16\cdot 9}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}. \quad ●$$

5. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е. если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $\bar{a}\bar{b}=0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\bar{a}\bar{b}=0$ и $\bar{a}\neq\bar{0}\neq\bar{b}$, то $\bar{a}\perp\bar{b}$.

❑ Так как $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi=\cos\frac{\pi}{2}=0$. Следовательно, $\bar{a}\cdot\bar{b}=$

$=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot 0=0$. Если же $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ и $|\bar{a}|\neq 0$, $|\bar{b}|\neq 0$, то $\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=0$. Отсюда $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=90^\circ$, т. е. $\bar{a}\perp\bar{b}$. В частности:

$$\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0. \quad ■$$

6.3. Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}.$$

Найдем скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены (что законно в силу свойств линейности скалярного произведения) и пользуясь таблицей скалярного произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$

$$\begin{aligned} = \quad & a_xb_x\bar{i}\bar{i} + a_xb_y\bar{i}\bar{j} + a_xb_z\bar{i}\bar{k} + \\ + \; & a_yb_x\bar{j}\bar{i} + a_yb_y\bar{j}\bar{j} + a_yb_z\bar{j}\bar{k} + \\ + \; & a_zb_x\bar{k}\bar{i} + a_zb_y\bar{k}\bar{j} + a_zb_z\bar{k}\bar{k} \quad = \end{aligned}$$

$$= a_xb_x + 0 + 0 + 0 + a_yb_y + 0 + 0 + 0 + a_zb_z,$$

т. е.

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.}$$

Итак, *скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

Пример 6.2. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин $A(-4;-4;4)$, $B(-3;2;2)$, $C(2;5;1)$, $D(3;-2;2)$, взаимно перпендикулярны.

Решение: Составим вектора $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, лежащие на диагоналях данного четырехугольника. Имеем: $\overline{AC} = (6;9;-3)$ и $\overline{BD} = (6;-4;0)$. Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 36 - 36 - 0 = 0.$$

Отсюда следует, что $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. ●

6.4. Некоторые приложения скалярного произведения

Угол между векторами

Определение угла φ между ненулевыми векторами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}, \quad \text{т. е.} \quad \cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \iff a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Проекция вектора на заданное направление

Нахождение проекции вектора $\bar{a}$ на направление, заданное вектором $\bar{b}$, может осуществляться по формуле

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} \quad \left(\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}\right), \qquad \text{т. е.} \qquad \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Работа постоянной силы

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\bar{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overline{AB} = \bar{S}$ (см. рис. 15).

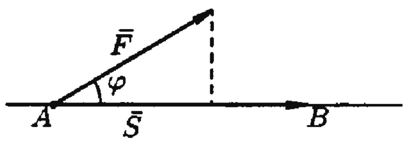


Рис. 15.

Из физики известно, что работа силы $\bar{F}$ при перемещении $\bar{S}$ равна

$$A = F \cdot S \cdot \cos\varphi \quad \text{т. е.} \quad A = \bar{F} \cdot \bar{S}.$$

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Пример 6.3. Вычислить работу, произведенную силой $\bar{F} = (3; 2; 4)$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2; 4; 6)$ в положение $B(4; 2; 7)$. Под каким углом к AB направлена сила $\bar{F}$?

Решение: Находим $\bar{S} = \overline{AB} = (2, -2, 1)$. Стало быть,

$$A = \bar{F} \cdot \bar{S} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 6 \text{ (ед. работы)}.$$

Угол φ между $\bar{F}$ и $\bar{S}$ находим по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\bar{F} \cdot \bar{S}}{|\bar{F}| \cdot |\bar{S}|}$, т. е.

$$\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{9+4+16} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{29} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{29}}, \quad \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{29}}.$$ ●

§ 7. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

7.1. Определение векторного произведения

Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют ***правую тройку***, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и ***левую***, если по часовой (см. рис. 16).

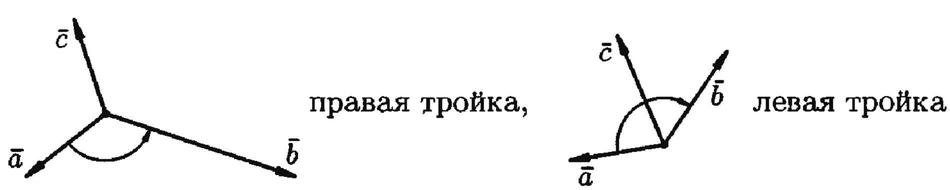


Рис. 16.

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется *вектор* $\bar{c}$, который:

1) перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах (см. рис. 17), т. е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}});$$

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

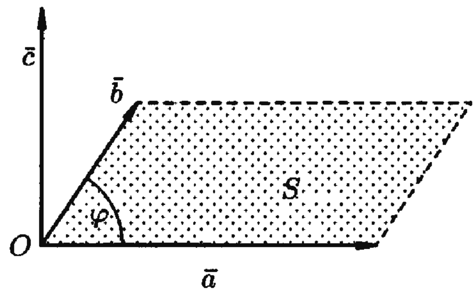


Рис. 17.

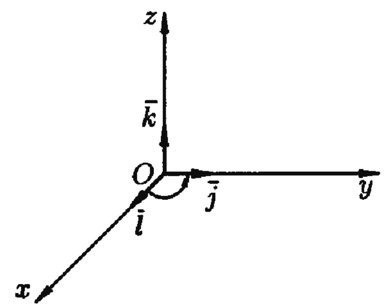


Рис. 18.

Векторное произведение обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ (см. рис. 18):

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

Докажем, например, что $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$.

❑ 1) $\bar{k} \perp \bar{i}$, $\bar{k} \perp \bar{j}$;

2) $|\bar{k}| = 1$, но $|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \sin 90° = 1$;

3) векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ образуют правую тройку (см. рис. 16). ■

7.2. Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т. е. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ (см. рис. 19).

❑ Векторы $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{b} \times \bar{a}$ коллинеарны, имеют одинаковые модули (площадь параллелограмма остается неизменной), но противоположно направлены (тройки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b}, \bar{b} \times \bar{a}$ противоположной ориентации). Стало быть, $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$. ■

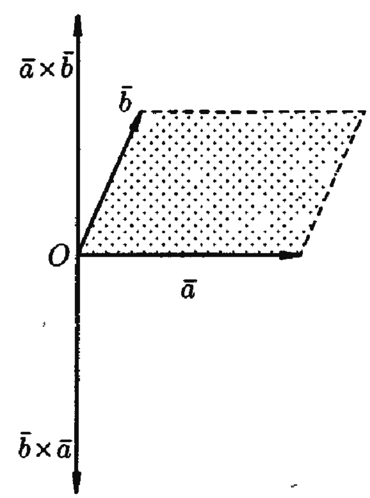


Рис. 19.

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е. $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$.

❏ Пусть $\lambda > 0$. Вектор $\lambda(\bar{a} \times \bar{b})$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Вектор $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$ также перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (векторы $\bar{a}$, $\lambda\bar{a}$ лежат в одной плоскости). Значит, векторы $\lambda(\bar{a} \times \bar{b})$ и $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$ коллинеарны. Очевидно, что и направления их совпадают. Имеют одинаковую длину:

$$|\lambda(\bar{a} \times \bar{b})| = \lambda|\bar{a} \times \bar{b}| = \lambda|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$

и

$$|(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}| = |\lambda\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\lambda\bar{a}, \bar{b}}) = \lambda|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b}).$$

Поэтому $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = \lambda\bar{a} \times \bar{b}$. Аналогично доказывается при $\lambda < 0$. ■

3. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е. $\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

❏ Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то угол между ними равен 0° или 180°. Но тогда $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0$. Значит, $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Если же $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, то $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi = 0$. Но тогда $\varphi = 0°$ или $\varphi = 180°$, т. е. $\bar{a} \parallel \bar{b}$. ■

В частности, $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$.

4. Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

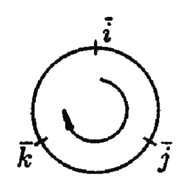
Примем без доказательства.

7.3. Выражение векторного произведения через координаты

Мы будем использовать таблицу векторного произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Чтобы не ошибиться со знаком, удобно пользоваться схемой:



если направление кратчайшего пути от первого вектора к второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадает — третий вектор берется со знаком «минус».

Пусть заданы два вектора $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$. Найдем векторное произведение этих векторов, перемножая их как многочлены (согласно свойств векторного произведения):

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \times (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$

$$= a_x b_x(\bar{i}\times\bar{i}) + a_x b_y(\bar{i}\times\bar{j}) + a_x b_z(\bar{i}\times\bar{k}) + a_y b_x(\bar{j}\times\bar{i}) + a_y b_y(\bar{j}\times\bar{j}) +$$
$$+ a_y b_z(\bar{j}\times\bar{k}) + a_z b_x(\bar{k}\times\bar{i}) + a_z b_y(\bar{k}\times\bar{j}) + a_z b_z(\bar{k}\times\bar{k}) =$$
$$= \bar{0} + a_x b_y\bar{k} - a_x b_z\bar{j} - a_y b_x\bar{k} + \bar{0} + a_y b_z\bar{i} + a_z b_x\bar{j} - a_z b_y\bar{i} + \bar{0} =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k},$$

т. е.

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}. \tag{7.1}$$

Полученную формулу можно записать еще короче:

$$\boxed{\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},} \tag{7.2}$$

так как правая часть равенства (7.1) соответствует разложению определителя третьего порядка по элементам первой строки. Равенство (7.2) легко запоминается.

7.4. Некоторые приложения векторного произведения

Установление коллинеарности векторов

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}$ (и наоборот), т. е.

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \bar{a}\parallel\bar{b}.$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\varphi$, т. е. $S_{\text{пар}} = |\bar{a}\times\bar{b}|$. И, значит, $S_\triangle = \frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|$.

Определение момента силы относительно точки

Пусть в точке A приложена сила $\bar{F} = \overline{AB}$ и пусть O — некоторая точка пространства (см. рис. 20).

Из физики известно, что *моментом силы* $\bar{F}$ относительно точки O называется вектор $\bar{M}$, который проходит через точку O и:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

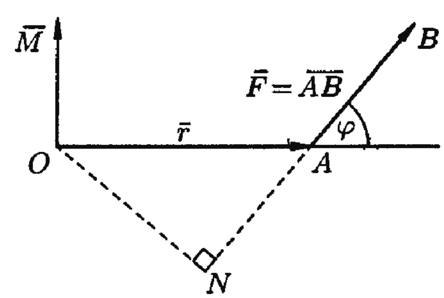


Рис. 20.

2) численно равен произведению силы на плечо

$$|\overline{M}| = |\overline{F}| \cdot ON = |\overline{F}| \cdot |\overline{r}| \cdot \sin\varphi = |\overline{F}| \cdot |\overline{OA}| \sin(\widehat{\overline{F}, \overline{OA}});$$

3) образует правую тройку с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$.

Стало быть, $\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F}$.

Нахождение линейной скорости вращения

Скорость $\bar{v}$ точки M твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, где $\bar{r} = \overline{OM}$, где O — некоторая неподвижная точка оси (см. рис. 21).

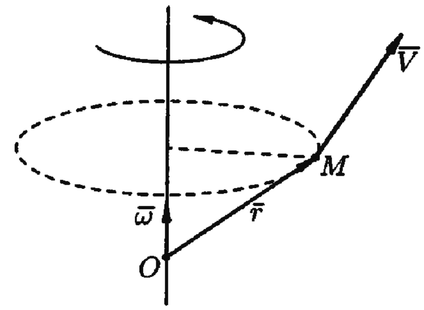


Рис. 21.

§ 8. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

8.1. Определения смешанного произведения, его геометрический смысл

Рассмотрим произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, составленное следующим образом: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

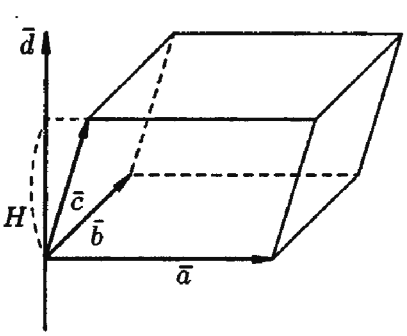


Рис. 22.

Выясним геометрический смысл выражения $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ (см. рис. 22).

Имеем: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{c} = |\bar{d}| \cdot \text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c}$, $|\bar{d}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c} = H$ для правой тройки векторов и $\text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c} = -H$ для левой, где H — высота параллелепипеда. Получаем: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = S \cdot (\pm H)$, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$, где V — объем параллелепипеда, образованного векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

8.2. Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$.

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер.

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Действительно, $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$ и $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = \pm V$. Знак в правой части этих равенств берем один и тот же, так как тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$ — одной ориентации.

Следовательно, $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$. Это позволяет записывать смешанное произведение векторов $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$ в виде $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ без знаков векторного, скалярного умножения.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т. е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$.

Действительно, такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении, меняющей у произведения знак.

4. Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

☐ Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — компланарны.

Допустим, что это не так. Можно было бы построить параллелепипед с объемом $V \neq 0$. Но так как $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \pm V$, то получили бы, что $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \neq 0$. Это противоречит условию: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

Обратно, пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — компланарны. Тогда вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, и, следовательно, $\bar{d} \perp \bar{c}$. Поэтому $\bar{d} \cdot \bar{c} = 0$, т. е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$. ■

8.3. Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы векторы $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$, $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$. Найдем их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений:

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \right) \cdot (c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z. \quad (8.1)$$

Полученную формулу можно записать короче:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

так как правая часть равенства (8.1) представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки.

Итак, смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

8.4. Некоторые приложения смешанного произведения

Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Определение взаимной ориентации векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ основано на следующих соображениях. Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — правая тройка; если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая тройка.

Установление компланарности векторов

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю ($\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, $\bar{c} \neq \bar{0}$):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \iff \text{векторы } \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} \text{ компланарны.}$$

Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ вычисляется как $V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$, а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен $V = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$.

Пример 8.1. Вершинами пирамиды служат точки $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$ и $D(3;0;-2)$. Найти объем пирамиды.

Решение: Находим векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (-1;-3;-2), \quad \bar{b} = \overline{AC} = (1;3;-1), \quad \bar{c} = \overline{AD} = (2;-2;-5).$$

Находим $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-17) + 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-8) = 17 - 9 + 16 = 24.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$.

Глава III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Лекции 7–9

§ 9. СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

9.1. Основные понятия

Под ***системой координат*** на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости. Одной из таких систем является ***прямоугольная*** (*декартова*) ***система координат***.

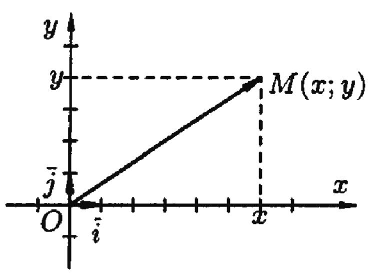


Рис. 23.

Прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми — осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Эти оси называют *осями координат*, точку их пересечения O — *началом координат*. Одну из осей называют *осью абсцисс* (осью Ox), другую — осью *ординат* (осью Oy) (рис. 23).

На рисунках ось абсцисс обычно располагают горизонтально и направленной слева направо, а ось ординат — вертикально и направленной снизу вверх. Оси координат делят плоскость на четыре области — *четверти* (или *квадранты*).

Единичные векторы осей обозначают $\bar{i}$ и $\bar{j}$ ($|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$).

Систему координат обозначают Oxy (или $O\bar{i}\bar{j}$), а плоскость, в которой расположена система координат, называют *координатной плоскостью*.

Рассмотрим произвольную точку M плоскости Oxy. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M.

Координатами точки M в системе координат Oxy ($O\bar{i}\bar{j}$) называются координаты радиуса-вектора $\overline{OM}$. Если $\overline{OM} = (x; y)$, то координаты точки M записывают так: $M(x;y)$, число x называется ***абсциссой*** точки M, y — ***ординатой*** точки M.

Эти два числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Другой практически важной системой координат является *полярная система координат*. Полярная система координат задается точкой O, называемой *полюсом*, лучом Op, называемым *полярной осью*, и единичным вектором $\bar{e}$ того же направления, что и луч Op.

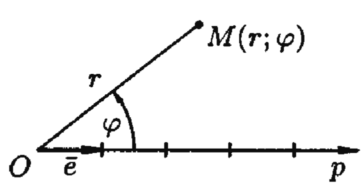


Рис. 24.

Возьмем на плоскости точку M, не совпадающую с O. Положение точки M определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет углов ведется в направлении, противоположном движению часовой стрелки) (см. рис. 24).

Числа r и φ называются ***полярными координатами*** точки M, пишут $M(r;\varphi)$, при этом r называют ***полярным радиусом***, φ — ***полярным углом.***

Для получения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком $(-\pi;\pi]$ (или $0 \leqslant \varphi < 2\pi$), а полярный радиус — $[0;\infty)$. В этом случае каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ, и обратно.

Установим связь между прямоугольными и полярными координатами. Для этого совместим полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось — с положительной полуосью Ox. Пусть x и y — прямоугольные координаты точки M, а r и φ — ее полярные координаты.

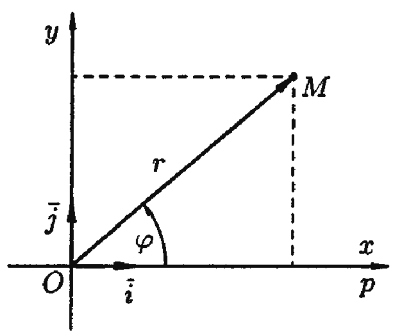


Рис. 25.

Из рисунка 25 видно, что прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные координаты точки следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Полярные же координаты точки M выражаются через ее декартовы координаты (тот же рисунок) такими формулами:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Определяя величину φ, следует установить (по знакам x и y) четверть, в которой лежит искомый угол, и учитывать, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Пример 9.1. Дана точка $M(-1;-\sqrt{3})$. Найти полярные координаты точки M.

Решение: Находим r и φ:

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}.$$

Отсюда $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но так как точка M лежит в 3-й четверти, то $n = -1$ и $\varphi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$. Итак, полярные координаты точки M есть $r = 2$, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, т. е. $M\left(2; \frac{-2\pi}{3}\right)$. ●

9.2. Основные приложения метода координат на плоскости

Расстояние между двумя точками

Требуется найти расстояние d между точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ плоскости Oxy.

Решение: Искомое расстояние d равно длине вектора $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, т. е.

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad ●$$

Деление отрезка в данном отношении

Требуется разделить отрезок AB, соединяющий точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ в заданном отношении $\lambda > 0$, т. е. найти координаты точки $M(x;y)$ отрезка AB такой, что $\frac{AM}{MB} = \lambda$ (см. рис. 26).

❍ Решение: Введем в рассмотрение векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$. Точка M делит отрезок AB в отношении λ, если

$$\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}. \tag{9.1}$$

Но $\overline{AM} = (x-x_1;y-y_1)$, т. е. $\overline{AM} = (x-x_1)\bar{i} + (y-y_1)\bar{j}$ и $\overline{MB} = (x_2-x;y_2-y)$, т. е. $\overline{MB} = (x_2-x)\bar{i} + (y_2-y)\bar{j}$. Уравнение (9.1) принимает вид

$$(x-x_1)\bar{i} + (y-y_1)\bar{j} = \lambda(x_2-x)\bar{i} + \lambda(y_2-y)\bar{j}.$$

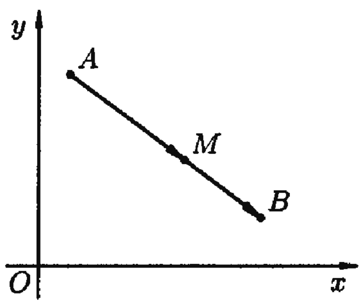


Рис. 26.

Учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, получаем

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \tag{9.2}$$

и

$$y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y, \quad \text{т. е.} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{9.3}$$

Формулы (9.2) и (9.3) называются *формулами деления отрезка в данном отношении*. В частности, при $\lambda = 1$, т. е. если $AM = MB$, то они примут вид $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$. В этом случае точка $M(x;y)$ является *серединой отрезка* AB. ●

Замечание: Если $\lambda = 0$, то это означает, что точки A и M совпадают, если $\lambda < 0$, то точка M лежит вне отрезка AB — говорят, что точка M делит отрезок AB внешним образом ($\lambda \neq -1$, т. к. в противном случае $\frac{AM}{MB} = -1$, т. е. $AM + MB = 0$, т. е. $AB = 0$).

Площадь треугольника

Требуется найти площадь треугольника ABC с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$.

❍ Решение: Опустим из вершин A, B, C перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на ось Ox (см. рис. 27). Очевидно, что

$$S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}.$$

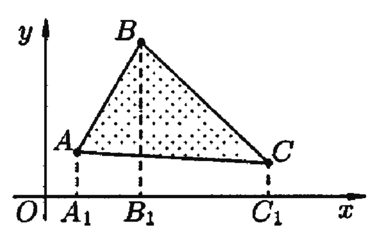


Рис. 27.

Поэтому

$$S_{ABC} = \frac{y_1+y_2}{2}\cdot(x_2-x_1) + \frac{y_2+y_3}{2}\cdot(x_3-x_2) - \frac{y_1+y_3}{2}\cdot(x_3-x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_2 + x_3y_3 -$$

$$- x_2y_3 - x_3y_1 + x_1y_1 - x_3y_3 + x_1y_3) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_3(y_2 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) - x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_3 - y_1)) =$$

$$= \frac{1}{2}((y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

●

Замечание: Если при вычислении площади треугольника получим $S = 0$, то это означает, что точки A, B, C лежат на одной прямой, если же получим отрицательное число, то следует взять его модуль.

9.3. Преобразование системы координат

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называется ***преобразованием системы координат.***

Рассмотрим два случая преобразования одной прямоугольной системы координат в другую. Полученные формулы устанавливают зависимость между координатами произвольной точки плоскости в разных системах координат.

Параллельный перенос осей координат

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Под ***параллельным переносом*** осей координат понимают переход от системы координат Oxy к новой системе $O_1x_1y_1$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными.

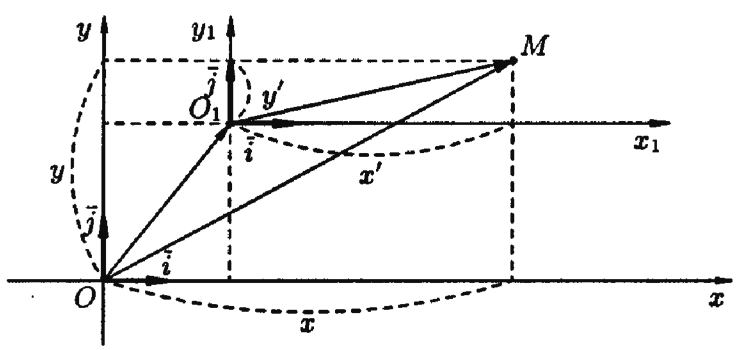


Рис. 28.

Пусть начало новой системы координат точка O_1 имеет координаты $(x_0; y_0)$ в старой системе координат Oxy, т. е. $O_1(x_0; y_0)$. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в системе Oxy через $(x; y)$, а в новой системе $O_1x_1y_1$ через $(x'; y')$ (см. рис. 28).

Рассмотрим векторы

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}, \quad \overline{OO_1} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}, \quad \overline{O_1M} = x'\bar{i} + y'\bar{j}.$$

Так как $\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}$, то $x\bar{i} + y\bar{j} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + x'\bar{i} + y'\bar{j}$, т. е.

$$x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} = (x_0 + x') \cdot \bar{i} + (y_0 + y') \cdot \bar{j}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}}$$

Полученные формулы позволяют находить старые координаты x и y по известным новым x' и y' и наоборот.

Поворот осей координат

Под *поворотом осей координат* понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

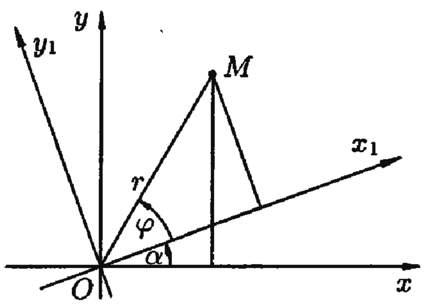


Рис. 29.

Пусть новая система $O_1x_1y_1$ получена поворотом системы Oxy на угол α.

Пусть M — произвольная точка плоскости, $(x; y)$ — ее координаты в старой системе и $(x'; y')$ — в новой системе.

Введем две полярные системы координат с общим полюсом O и полярными осями Ox и Ox_1 (масштаб одинаков). Полярный радиус r в обеих системах одинаков, а полярные углы соответственно равны $\alpha + \varphi$ и φ, где φ — полярный угол в новой полярной системе.

По формулам перехода от полярных координат к прямоугольным имеем

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\alpha + \varphi), \\ y = r \cdot \sin(\alpha + \varphi), \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \cdot \cos\alpha - r\sin\varphi \cdot \sin\alpha, \\ y = r\cos\varphi \cdot \sin\alpha + r\sin\varphi \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

Но $r\cos\varphi = x'$ и $r\sin\varphi = y'$. Поэтому

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}}$$

Полученные формулы называются ***формулами поворота осей.*** Они позволяют определять старые координаты $(x; y)$ произвольной точки M через новые координаты $(x'; y')$ этой же точки M, и наоборот.

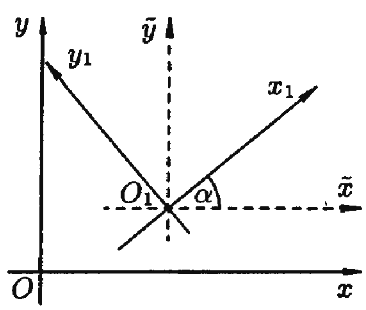


Рис. 30.

Если новая система координат $O_1x_1y_1$ получена из старой Oxy путем параллельного переноса осей координат и последующим поворотом осей на угол α (см. рис. 30), то путем введения вспомогательной системы $O_1\tilde{x}\tilde{y}$ легко получить формулы

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha + x_0, \\ y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha + y_0, \end{cases}$$

выражающие старые координаты x и y произвольной точки через ее новые координаты x' и y'.

§ 10. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

10.1. Основные понятия

Линия на плоскости рассматривается (задается) как *множество точек*, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние R от некоторой фиксированной точки O (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел — ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е. равенства, связывающего координаты точек линии).

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x;y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Так, для того чтобы установить лежит ли точка $A(x_0; y_0)$ на данной линии, достаточно проверить (не прибегая к геометрическим построениям), удовлетворяют ли координаты точки A уравнению этой линии в выбранной системе координат.

Пример 10.1. Лежат ли точки $K(-2;1)$ и $L(1;1)$ на линии $2x+y+3=0$?

Решение: Подставив в уравнение вместо x и y координаты точки K, получим $2 \cdot (-2) + 1 + 3 = 0$. Следовательно, точка K лежит на данной линии. Точка L не лежит на данной линии, т. к. $2 \cdot 1 + 1 + 3 \neq 0$. ●

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x;y) = 0$ и $F_2(x;y) = 0$, сводится к отысканию точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих линий, т. е. сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x;y) = 0, \\ F_2(x;y) = 0. \end{cases}$$

Если эта система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются.

Аналогичным образом вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат.

Уравнение $F(r;\varphi) = 0$ называется *уравнением данной линии в полярной системе координат*, если координаты любой точки, лежащей на этой линии, и только они, удовлетворяют этому уравнению.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{10.1}$$

где x и y — координаты произвольной точки $M(x;y)$, лежащей на данной линии, а t — переменная, называемая *параметром*; параметр t определяет положение точки $(x;y)$ на плоскости.

Например, если $x = t + 1$, $y = t^2$, то значению параметра $t = 2$ соответствует на плоскости точка $(3;4)$, т. к. $x = 2 + 1 = 3$, $y = 2^2 = 4$.

Если параметр t изменяется, то точка на плоскости перемещается, описывая данную линию. Такой способ задания линии называется *параметрическим*, а уравнения (10.1) — *параметрическими уравнениями линии*.

Чтобы перейти от параметрических уравнений линии к уравнению вида $F(x;y) = 0$, надо каким-либо способом из двух уравнений исключить параметр t. Например, от уравнений $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$ путем подстановки $t = x$ во второе уравнение, легко получить уравнение $y = x^2$; или $y - x^2 = 0$, т. е. вида $F(x;y) = 0$. Однако, заметим, такой переход не всегда целесообразен и не всегда возможен.

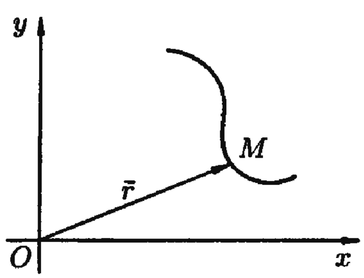


Рис. 31.

Линию на плоскости можно задать *векторным уравнением* $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где t — скалярный переменный параметр. Каждому значению t_0 соответствует определенный вектор $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0)$ плоскости. При изменении параметра t конец вектора $\bar{r} = \bar{r}(t)$ опишет некоторую линию (см. рис. 31).

Векторному уравнению линии $\bar{r} = \bar{r}(t)$ в системе координат Oxy соответствуют два скалярных уравнения (10.1), т. е. уравнения проекций на оси координат векторного уравнения линии есть ее параметрические уравнения.

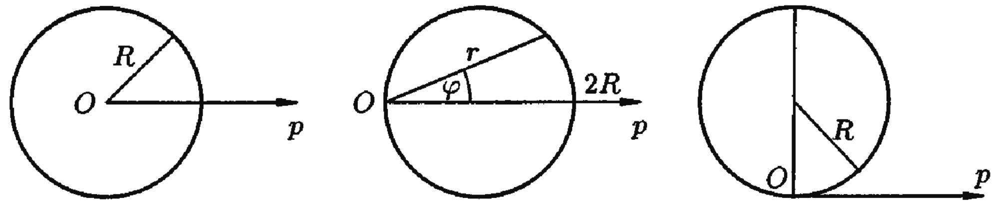
Векторное уравнение и параметрические уравнения линии имеют механический смысл. Если точка перемещается на плоскости, то указанные уравнения называются *уравнениями движения*, а линия — *траекторией* точки, параметр t при этом есть время.

Итак, всякой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение вида $F(x;y) = 0$.

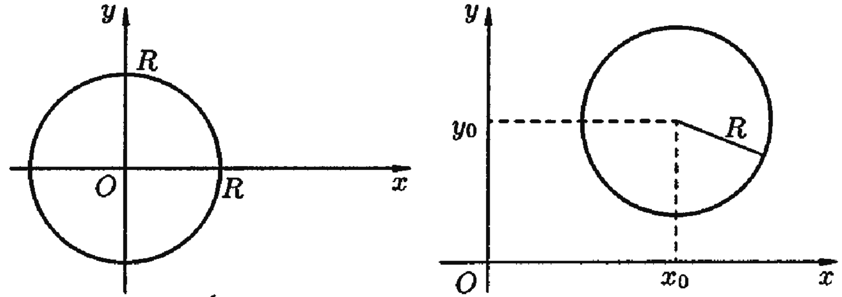
Всякому уравнению вида $F(x;y) = 0$ соответствует, вообще говоря, некоторая линия, свойства которой определяются данным уравнением (выражение «вообще говоря» означает, что сказанное допускает исключения. Так, уравнению $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ соответствует не линия, а точка $(2;3)$; уравнению $x^2 + y^2 + 5 = 0$ на плоскости не соответствует никакой геометрический образ).

В аналитической геометрии на плоскости возникают две основные задачи. Первая: зная геометрические свойства кривой, найти ее уравнение; вторая: зная уравнение кривой, изучить ее форму и свойства.

На рисунках 32–40 приведены примеры некоторых кривых и указаны их уравнения.



$r = R$ $\qquad$ $r = 2R \cdot \cos\varphi$ $\qquad$ $r = 2R \cdot \sin\varphi$



$x^2 + y^2 = R^2$ или $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases}$ $\qquad$ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Рис. 32. ***Окружность радиуса R***

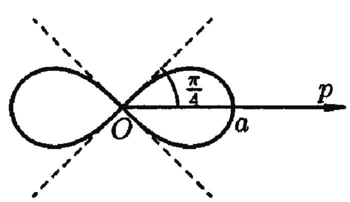


Рис. 33. ***Лемниската Бернулли***

Уравнение в прямоугольных координатах: $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$, $a > 0$; в полярных координатах: $r = a \cdot \sqrt{\cos 2\varphi}$.

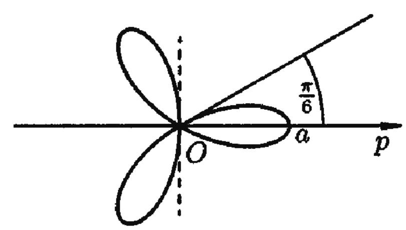


Рис. 34. ***Трехлепестковая роза***

В полярных координатах ее уравнение имеет вид $r = a \cdot \cos 3\varphi$, где $a > 0$.

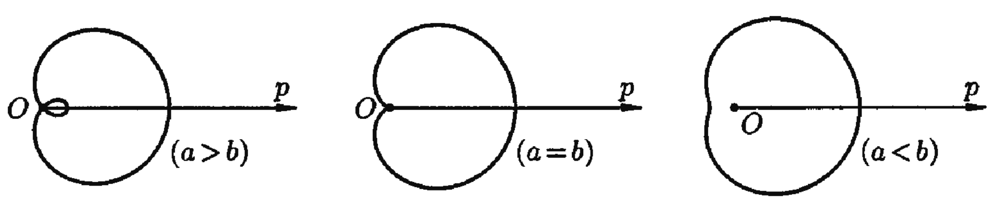


Рис. 35. ***Улитка Паскаля***

Уравнение в полярных координатах имеет вид $r = b + a\cos\varphi$.

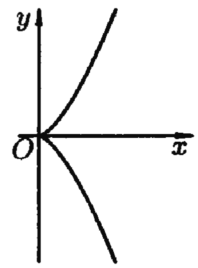


Рис. 36. ***Полукубическая парабола***
Уравнение кривой $y^2 = x^3$ или

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$$

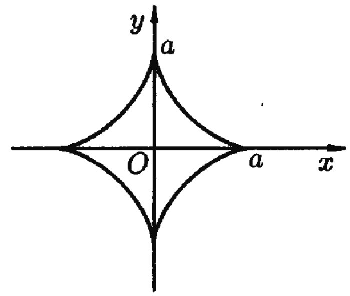


Рис. 37. ***Астроида***
Уравнение в прямоугольных координатах: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t. \end{cases}$$

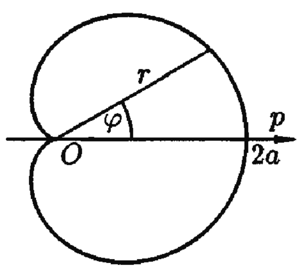


Рис. 38. ***Кардиоида***
Уравнение в полярных координатах имеет вид $r = a(1 + \cos\varphi)$, где $a > 0$. Кардиоида — частный случай улитки Паскаля ($a = b$).

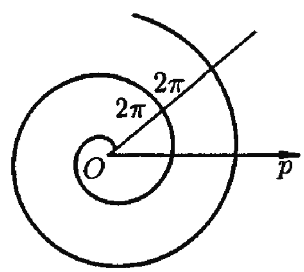


Рис. 39. ***Спираль Архимеда***
Уравнение кривой в полярных координатах $r = a\varphi$, где $a > 0$ — постоянное.

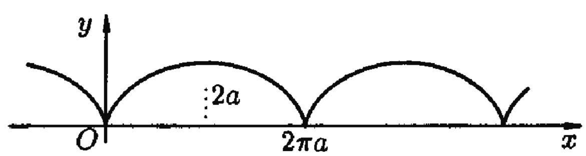


Рис. 40. ***Циклоида***

Параметрические уравнения циклоиды имеют вид $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ где $a > 0$. Циклоида — это кривая, которую описывает фиксированная точка окружности, катящаяся без скольжения по неподвижной прямой.

10.2. Уравнения прямой на плоскости

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости Oxy задана произвольная прямая, не параллельная оси Oy. Ее положение вполне определяется ординатой b точки $N(0;b)$ пересечения с осью Oy и углом α между осью Ox и прямой (см. рис. 41).

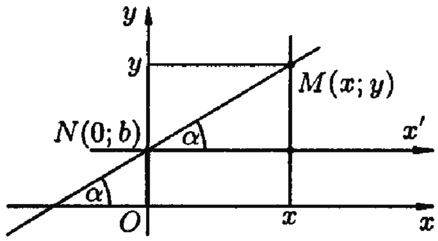


Рис. 41.

Под углом α $(0 \leqslant \alpha < \pi)$ наклона прямой понимается наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения прямой и оси Ox против часовой стрелки ось Ox до ее совпадения с прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x;y)$ (см. рис. 41). Проведем через точку N ось Nx', параллельную оси Ox и одинаково с ней направленную. Угол между осью Nx' и прямой равен α. В системе $Nx'y$ точка M имеет координаты x и $y-b$. Из определения тангенса угла следует равенство $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-b}{x}$, т. е. $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$. Введем обозначение $\operatorname{tg}\alpha = k$, получаем уравнение

$$\boxed{y = kx + b,} \tag{10.2}$$

которому удовлетворяют координаты любой точки $M(x;y)$ прямой. Можно убедиться, что координаты любой точки $P(x;y)$, лежащей вне данной прямой, уравнению (10.2) не удовлетворяют.

Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ называется ***угловым коэффициентом*** прямой, а уравнение (10.2) — ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***.

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и, следовательно, уравнение этой прямой будет иметь вид $y = kx$.

Если прямая параллельна оси Ox, то $\alpha=0$, следовательно, $k=\operatorname{tg}\alpha=0$ и уравнение (10.2) примет вид $y = b$.

Если прямая параллельна оси Oy, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, уравнение (10.2) теряет смысл, т. к. для нее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид

$$x = a, \tag{10.3}$$

где a — абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox. Отметим, что уравнения (10.2) и (10.3) есть уравнения первой степени.

Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение первой степени относительно x и y в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{10.4}$$

где A, B, C — произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Покажем, что уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии. Возможны два случая.

Если $B = 0$, то уравнение (10.4) имеет вид $Ax + C = 0$, причем $A \neq 0$, т. е. $x = -\frac{C}{A}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

Если $B \neq 0$, то из уравнения (10.4) получаем $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$.

Итак, уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии, оно называется *общим уравнением прямой.*

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A = 0$, то уравнение приводится к виду $y = -\frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox;

2) если $B = 0$, то прямая параллельна оси Oy;

3) если $C = 0$, то получаем $Ax + By = 0$. Уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0; 0)$, прямая проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k. Уравнение этой прямой можно записать в виде $y = kx + b$, где b — пока неизвестная величина. Так как прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $y_0 = kx_0 + b$. Отсюда $b = y_0 - kx_0$. Подставляя значение b в уравнение $y = kx + b$, получим искомое уравнение прямой $y = kx + y_0 - kx_0$, т. е.

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0).} \tag{10.5}$$

Уравнение (10.5) с различными значениями k называют также *уравнениями пучка прямых* с центром в точке $M(x_0; y_0)$. Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{10.6}$$

где k — пока неизвестный коэффициент.

Так как прямая проходит через точку $M_2(x_2; y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (10.6): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда находим $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя найденное значение k в уравнение (10.6), получим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.} \tag{10.7}$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Если $x_2 = x_1$, то прямая, проходящая через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y = y_1$, прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a; 0)$, а ось Oy — в точке $M_2(0; b)$ (см. рис. 42). В этом случае уравнение (10.7) примет вид

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.}$$

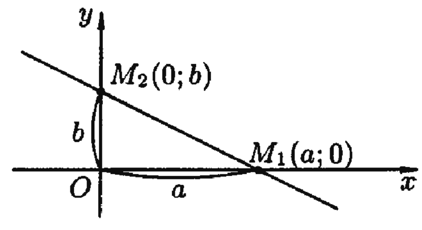


Рис. 42.

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\bar{n} = (A; B)$.

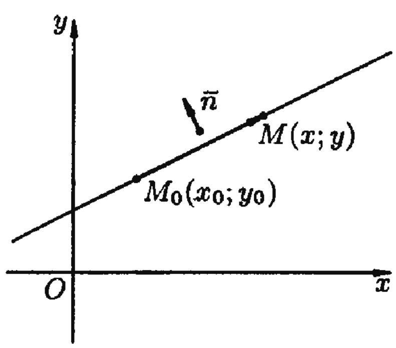


Рис. 43.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x; y)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ (см. рис. 43). Поскольку векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, то есть

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \tag{10.8}$$

Уравнение (10.8) называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору*.

Вектор $\bar{n} = (A; B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой*.

Уравнение (10.8) можно переписать в виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{10.9}$$

где A и B — координаты нормального вектора, $C = -Ax_0 - By_0$ — свободный член. Уравнение (10.9) есть общее уравнение прямой (см. (10.4)).

Полярное уравнение прямой

Найдем уравнение прямой в полярных координатах. Ее положение можно определить, указав расстояние p от полюса O до данной прямой и угол α между полярной осью OP и осью l, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (см. рис. 44).

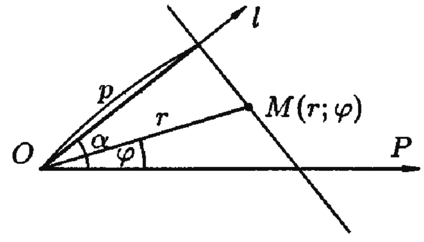


Рис. 44.

Для любой точки $M(r;\varphi)$ на данной прямой имеем:

$$\text{пр}_l\,\overline{OM} = p.$$

С другой стороны,

$$\text{пр}_l\,\overline{OM} = |\overline{OM}| \cdot \cos(\alpha - \varphi) = r \cdot \cos(\varphi - \alpha).$$

Следовательно,

$$\boxed{r\cos(\varphi - \alpha) = p.} \tag{10.10}$$

Полученное уравнение (10.10) и есть *уравнение прямой в полярных координатах.*

Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая определяется заданием p и α (см. рис. 45). Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy. Введем полярную систему, взяв O за полюс и Ox за полярную ось. Уравнение прямой можно записать в виде

$$r \cdot \cos(\varphi - \alpha) - p = 0, \quad \text{т. е.} \quad r \cdot \cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0.$$

Но, в силу формул, связывающих прямоугольные и полярные координаты, имеем: $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$. Следовательно, уравнение (10.10) прямой в прямоугольной системе координат примет вид

$$\boxed{x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0.} \tag{10.11}$$

Уравнение (10.11) называется *нормальным уравнением прямой.*

Покажем, как привести уравнение (10.4) прямой к виду (10.11).

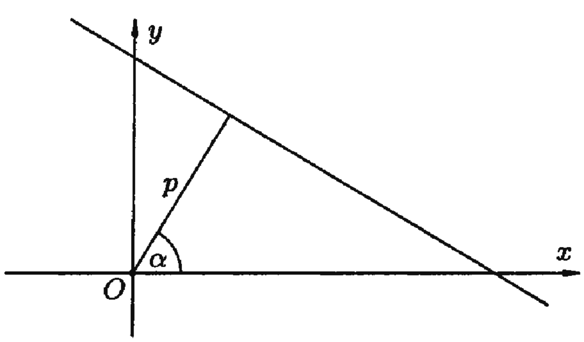


Рис. 45.

Умножим все члены уравнения (10.4) на некоторый множитель $\lambda \neq 0$. Получим $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$. Это уравнение должно обратиться в уравнение (10.11). Следовательно, должны выполняться равенства: $\lambda A = \cos\alpha$, $\lambda B = \sin\alpha$, $\lambda C = -p$. Из первых двух равенств находим $\lambda^2A^2 + \lambda^2B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, т. е. $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Множитель λ называется *нормирующим множителем.* Согласно третьему равенству $\lambda C = -p$ знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

Пример 10.2. Привести уравнение $-3x + 4y + 15 = 0$ к нормальному виду.

Решение: Находим нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{-\sqrt{(-3)^2+4^2}} = -\dfrac{1}{5}$. Умножая данное уравнение на λ, получим искомое нормальное уравнение прямой: $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$. ●

10.3. Прямая линия на плоскости. Основные задачи

Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис. 46).

Требуется найти угол φ, на который надо повернуть в положительном направлении прямую L_1 вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой L_2.

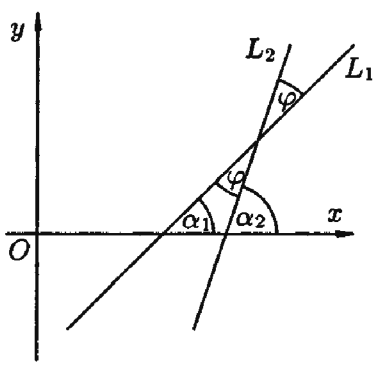


Рис. 46.

❍ Решение: Имеем $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема о внешнем угле треугольника) или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},} \tag{10.12}$$

откуда легко получим величину искомого угла. ●

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая — второй, то правая часть формулы (10.12) берется по модулю, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Из формулы (10.12) следует $k_2 - k_1 = 0$, т. е. $k_2 = k_1$. И обратно, если прямые L_1 и L_2 таковы, что $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т. е. прямые параллельны. Следовательно, *условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:* $k_1 = k_2$.

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$. Отсюда $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, т. е. $k_1 \cdot k_2 = -1$ (или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$). Справедливо и обратное утверждение. Таким образом, *условием перпендикулярности прямых является равенство* $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$ (см. рис. 47). Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L.

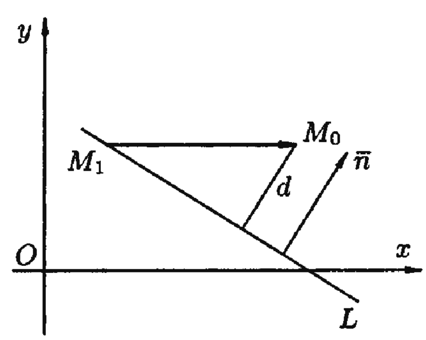


Рис. 47.

❍ Решение: Расстояние d от точки M_0 до прямой L равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1)$ — произвольная точка прямой L, на направление нормального вектора $\bar{n} = (A; B)$. Следовательно,

$$d = |\,\text{пр}_{\bar{n}}\, \overline{M_1M_0}| = \left| \frac{\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| =$$

$$= \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т. е. $C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},} \tag{10.13}$$

что и требовалось получить. ●

Пример 10.3. Найти расстояние от точки $M_0(2; -1)$ до прямой $3x + 4y - 22 = 0$.

Решение: По формуле (10.13) получаем

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4.$$ ●

§ 11. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

11.1. Основные понятия

Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{11.1}$$

Коэффициенты уравнения — действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля. Такие линии называются *линиями (кривыми) второго порядка.* Ниже будет установлено, что уравнение (11.1) определяет на плоскости окружность, эллипс, гиперболу или параболу. Прежде, чем переходить к этому утверждению, изучим свойства перечисленных кривых.

11.2. Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что ***окружностью*** радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$. Пусть точка M_0 в прямоугольной системе координат Oxy имеет координаты x_0, y_0, а $M(x; y)$ — произвольная точка окружности (см. рис. 48).

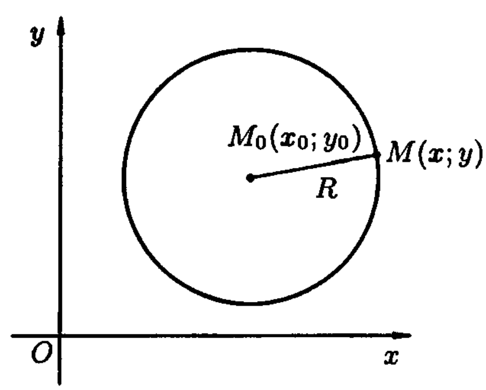


Рис. 48.

Тогда из условия $M_0M = R$ получаем уравнение

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R,$$

то есть

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2.} \tag{11.2}$$

Уравнению (11.2) удовлетворяют координаты любой точки $M(x;y)$ данной окружности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на окружности.

Уравнение (11.2) называется *каноническим уравнением окружности.*

В частности, полагая $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получим уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение окружности (11.2) после несложных преобразований примет вид $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$. При сравнении этого уравнения с общим уравнением (11.1) кривой второго порядка легко заметить, что для уравнения окружности выполнены два условия:

1) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой;

2) отсутствует член, содержащий произведение xy текущих координат.

Рассмотрим обратную задачу. Положив в уравнении (11.1) значения $B = 0$ и $A = C \neq 0$, получим

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{11.3}$$

Преобразуем это уравнение:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

т. е.

$$x^2 + y^2 + \frac{2D}{A}x + \frac{D^2}{A^2} + y^2 + 2\frac{E}{A}y + \frac{E^2}{A^2} + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{A^2} - \frac{E^2}{A^2} = 0,$$

т. е.

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2 + \left(y+\frac{E}{A}\right)^2 = \frac{E^2}{A^2} + \frac{D^2}{A^2} - \frac{F}{A}. \tag{11.4}$$

Отсюда следует, что уравнение (11.3) определяет окружность при условии $\frac{E^2}{A^2} + \frac{D^2}{A^2} - \frac{F}{A} > 0$. Ее центр находится в точке $O_1\left(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{A}\right)$, а радиус

$$R = \sqrt{\frac{E^2}{A^2} + \frac{D^2}{A^2} - \frac{F}{A}}.$$

Если же $\frac{E^2}{A^2} + \frac{D^2}{A^2} - \frac{F}{A} = 0$, то уравнение (11.3) имеет вид

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2 + \left(y+\frac{E}{A}\right)^2 = 0.$$

Ему удовлетворяют координаты единственной точки $O_1\left(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{A}\right)$. В этом случае говорят: «окружность выродилась в точку» (имеет нулевой радиус).

Если $\frac{E^2}{A^2} + \frac{D^2}{A^2} - \frac{F}{A} < 0$, то уравнение (11.4), а следовательно, и равносильное уравнение (11.3), не определяет никакой линии, так как правая часть уравнения (11.4) отрицательна, а левая часть — не отрицательна (говорят: «окружность мнимая»).

11.3. Эллипс

Каноническое уравнение эллипса

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

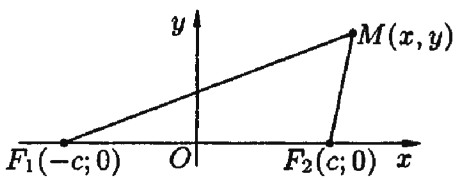


Рис. 49.

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов — через $2a$ (см. рис. 49). По определению $2a > 2c$, т. е. $a > c$.

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда, согласно определению эллипса, $MF_1 + MF_2 = 2a$, т. е.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{11.5}$$

Это, по сути, и есть уравнение эллипса.

Преобразуем уравнение (11.5) к более простому виду следующим образом:

$$\begin{gathered}
\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},\\
x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,\\
a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx,\\
a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,\\
(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).
\end{gathered}$$

Так как $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Положим

$$\boxed{a^2 - c^2 = b^2.} \tag{11.6}$$

Тогда последнее уравнение примет вид $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{11.7}$$

Можно доказать, что уравнение (11.7) равносильно исходному уравнению. Оно называется ***каноническим уравнением эллипса.***

Эллипс — кривая второго порядка.

Исследование формы эллипса по его уравнению

Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением.

1. Уравнение (11.7) содержит x и y только в четных степенях, поэтому если точка $(x; y)$ принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат точки $(x; -y)$, $(-x; y)$, $(-x; -y)$. Отсюда следует, что эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0; 0)$, которую называют *центром эллипса.*

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Положив $y = 0$, находим две точки $A_1(a; 0)$ и $A_2(-a; 0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс (см. рис. 50). Положив в уравнении (11.7) $x = 0$, находим точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0; b)$ и $B_2(0; -b)$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса*. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно *большой и малой осями* эллипса. Числа a и b называются соответственно большой и малой *полуосями* эллипса.

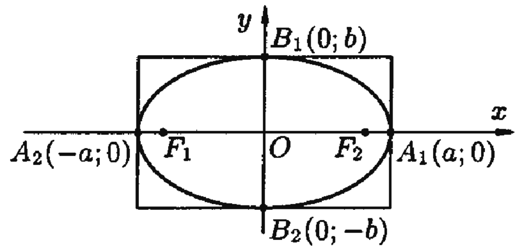


Рис. 50.

3. Из уравнения (11.7) следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т. е. имеют место неравенства $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ или $-a \leqslant x \leqslant a$ и $-b \leqslant y \leqslant b$. Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. В уравнении (11.7) сумма неотрицательных слагаемых $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ равна единице. Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться, т. е. если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается и наоборот.

Из сказанного следует, что эллипс имеет форму, изображенную на рис. 50 (овальная замкнутая кривая).

Дополнительные сведения об эллипсе

Форма эллипса зависит от отношения $\frac{b}{a}$. При $b = a$ эллипс превращается в окружность, уравнение эллипса (11.7) принимает вид $x^2+y^2 = a^2$. В качестве характеристики формы эллипса чаще пользуются отношением $\frac{c}{a}$.

Отношение $\frac{c}{a}$ половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса называется ***эксцентриситетом эллипса*** и обозначается буквой ε («эпсилон»):

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a},} \tag{11.8}$$

причем $0<\varepsilon<1$, так как $0<c<a$. С учетом равенства (11.6) формулу (11.8) можно переписать в виде

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

т. е.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее сплющенным; если положить $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.

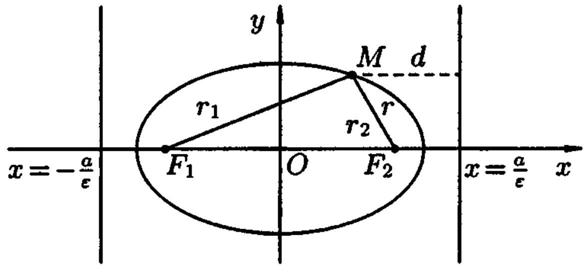


Рис. 51.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2 (см. рис. 51). Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются *фокальными радиусами* точки M. Очевидно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Имеют место формулы

$$r_1 = a + \varepsilon x \quad \text{и} \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами*** эллипса. Значение директрисы эллипса выявляется следующим утверждением.

Теорема 11.1. Если r — расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Из равенства (11.6) следует, что $a > b$. Если же $a < b$, то уравнение (11.7) определяет эллипс, большая ось которого $2b$ лежит на оси Oy, а малая ось $2a$ — на оси Ox (см. рис. 52). Фокусы такого эллипса находятся в точках $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

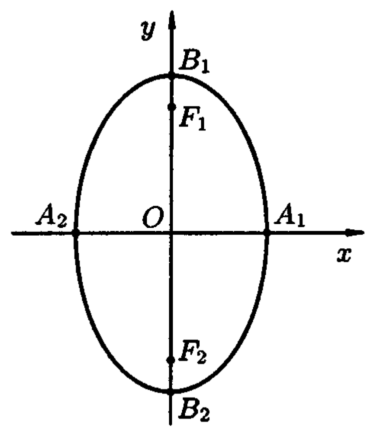


Рис. 52.

11.4. Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

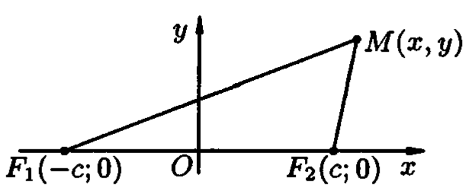


Рис. 53.

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а модуль разности расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов через $2a$. По определению $2a < 2c$, т. е. $a < c$.

Для вывода уравнения гиперболы выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпало с серединой отрезка F_1F_2 (см. рис. 53). Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка гиперболы. Тогда согласно определению гиперболы $|MF_1 - MF_2| = 2a$ или $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$, т. е.

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$. После упрощений, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим ***каноническое уравнение гиперболы***

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \tag{11.9}$$

где

$$\boxed{b^2 = c^2 - a^2.} \tag{11.10}$$

Гипербола есть линия второго порядка.

Исследование формы гиперболы по ее уравнению

Установим форму гиперболы, пользуясь ее каконическим уравнением.

1. Уравнение (11.9) содержит x и y только в четных степенях. Следовательно, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют ***центром гиперболы***.

2. Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Положив $y = 0$ в уравнении (11.9), находим две точки пересечения гиперболы с осью Ox: $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$. Положив $x = 0$ в (11.9), получаем $y^2 = -b^2$, чего быть не может. Следовательно, гипербола ось Oy не пересекает.

Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются ***вершинами*** гиперболы, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ — ***действительной осью***, отрезок $OA_1 = OA_2 = a$ — ***действительной полуосью*** гиперболы.

Отрезок B_1B_2 ($B_1B_2 = 2b$), соединяющий точки $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$ называется ***мнимой осью***, число b — ***мнимой полуосью***. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется ***основным прямоугольником гиперболы***.

3. Из уравнения (11.9) следует, что уменьшаемое $\frac{x^2}{a^2}$ не меньше единицы, т. е. что $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$ или $|x| \geqslant a$. Это означает, что точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ (*правая ветвь* гиперболы) и слева от прямой $x = -a$ (*левая ветвь* гиперболы).

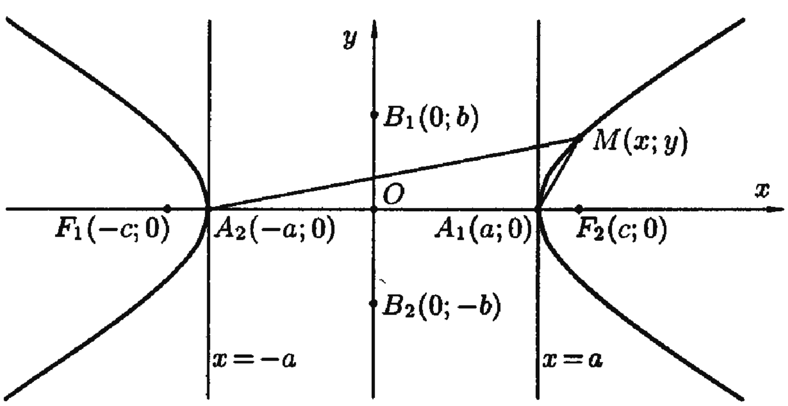


Рис. 54.

4. Из уравнения (11.9) гиперболы видно, что когда $|x|$ возрастает, то и $|y|$ возрастает. Это следует из того, что разность $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ сохраняет постоянное значение, равное единице.

Из сказанного следует, что гипербола имеет форму, изображенную на рисунке 54 (кривая, состоящая из двух неограниченных ветвей).

Асимптоты гиперболы

Прямая L называется *асимптотой* неограниченной кривой K, если расстояние d от точки M кривой K до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M вдоль кривой K от начала координат. На рисунке 55 приведена иллюстрация понятия асимптоты: прямая L является асимптотой для кривой K.

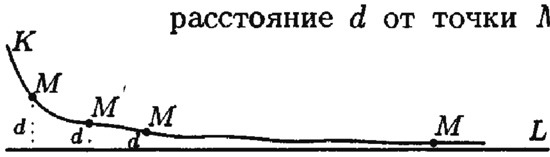


Рис. 55.

Покажем, что гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеет две асимптоты:

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.} \tag{11.11}$$

Так как прямые (11.11) и гипербола (11.9) симметричны относительно координатных осей, то достаточно рассмотреть только те точки указанных линий, которые расположены в первой четверти.

Возьмем на прямой $y = \frac{b}{a}x$ точку N имеющей ту же абсциссу x, что и точка $M(x; y)$ на гиперболе $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (см. рис. 56), и найдем разность MN между ординатами прямой и ветви гиперболы:

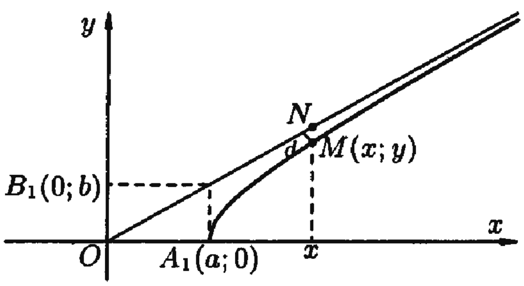


Рис. 56.

$$MN = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Как видно, по мере возрастания x знаменатель дроби увеличивается; числитель — есть постоянная величина. Стало быть, длина отрезка MN стремится к нулю. Так как MN больше расстояния d от точки M до прямой, то d и подавно стремится к нулю. Итак, прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы (11.9).

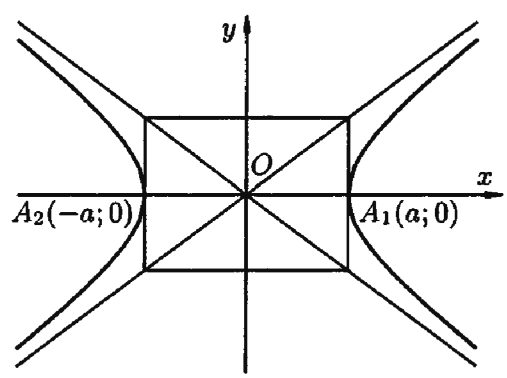


Рис. 57.

При построении гиперболы (11.9) целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы (см. рис. 57), провести прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, — асимптоты гиперболы и отметить вершины A_1 и A_2 гиперболы.

Уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат оси координат

Гипербола (11.9) называется ***равносторонней***, если ее полуоси равны ($a = b$). Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (11.12)$$

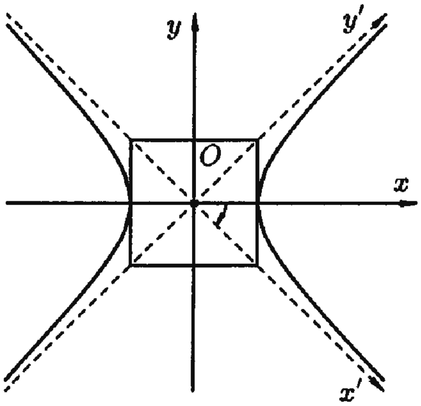


Рис. 58.

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения $y = x$ и $y = -x$ и, следовательно, являются биссектрисами координатных углов.

Рассмотрим уравнение этой гиперболы в новой системе координат $Ox'y'$ (см. рис. 58), полученной из старой поворотом осей координат на угол $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Используем формулы поворота осей координат (их вывод показан на с. 52):

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Подставляем значения x и y в уравнение (11.12):

$$\left(x'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - y'\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 - \left(x'\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + y'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = a^2,$$

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2 - \frac{1}{2}(-x'+y')^2 = a^2, \quad x'\cdot y' = \frac{a^2}{2}, \text{ или } y' = \frac{k}{x'},$$

где $k = \frac{a^2}{2}$.

Уравнение равносторонней гиперболы, для которой оси Ox и Oy являются асимптотами, будет иметь вид $y = \frac{k}{x}$.

Дополнительные сведения о гиперболе

Эксцентриситетом гиперболы (11.9) называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси гиперболы, обозначается ε:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}.}$$

Так как для гиперболы $c > a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы: $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы. Действительно, из равенства (11.10) следует, что $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1$, т. е. $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ и $\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$ ее полуосей, а значит, тем более вытянут ее основной прямоугольник.

Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$. Действительно,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{\frac{2a^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

Фокальные радиусы $r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ для точек правой ветви гиперболы имеют вид $r_1 = \varepsilon x + a$ и $r_2 = \varepsilon x - a$, а для левой — $r_1 = -(\varepsilon x + a)$ и $r_2 = -(\varepsilon x - a)$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Это значит, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы, левая — между центром и левой вершиной.

Директрисы гиперболы имеют то же свойство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, что и директрисы эллипса.

Кривая, определяемая уравнением $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, также есть гипербола, действительная ось $2b$ которой расположена на оси Oy, а мнимая ось $2a$ — на оси Ox. На рисунке 59 она изображена пунктиром.

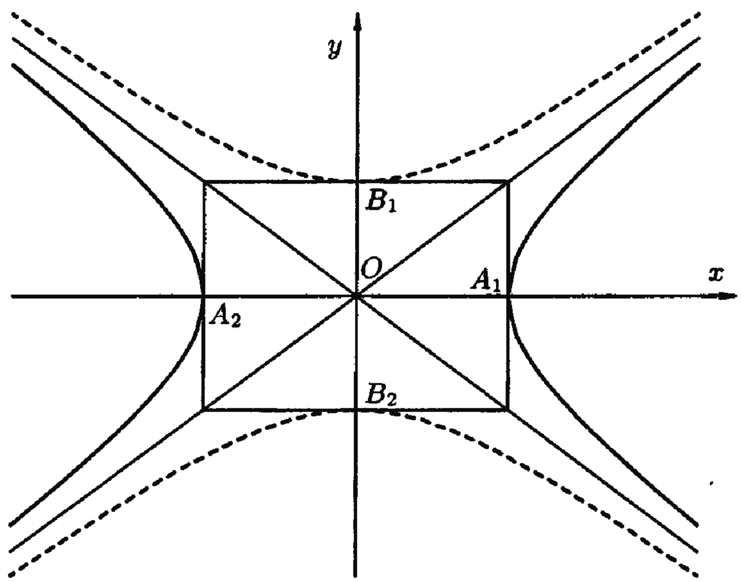


Рис. 59.

Очевидно, что гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ имеют общие асимптоты. Такие гиперболы называются *сопряженными*.

11.5. Парабола

Каноническое уравнение параболы

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*. Расстояние от фокуса F до директрисы называется *параметром* параболы и обозначается через p ($p > 0$).

Для вывода уравнения параболы выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в на-

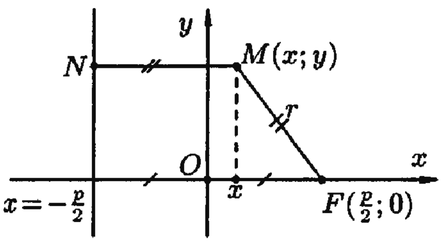


Рис. 60.

правлении от директрисы к F, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой (см. рис. 60). В выбранной системе фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x=-\frac{p}{2}$, или $x+\frac{p}{2}=0$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка параболы. Соединим точку M с F. Проведем отрезок MN перпендикулярно директрисе. Согласно определению параболы $MF=MN$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}, \quad \text{а} \quad MN=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

т. е.

$$\boxed{y^2=2px.} \tag{11.13}$$

Уравнение (11.13) называется *каноническим уравнением параболы*. Парабола есть линия второго порядка.

Исследование форм параболы по ее уравнению

1. В уравнении (11.13) переменная y входит в четной степени, значит, парабола симметрична относительно оси Ox; ось Ox является *осью симметрии* параболы.

2. Так как $p>0$, то из (11.13) следует, что $x\geqslant 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

3. При $x=0$ имеем $y=0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат.

4. При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает. Парабола $y^2=2px$ имеет вид (форму), изображенный на рисунке 61. Точка $O(0;0)$ называется *вершиной параболы*, отрезок $FM=r$ называется *фокальным радиусом* точки M.

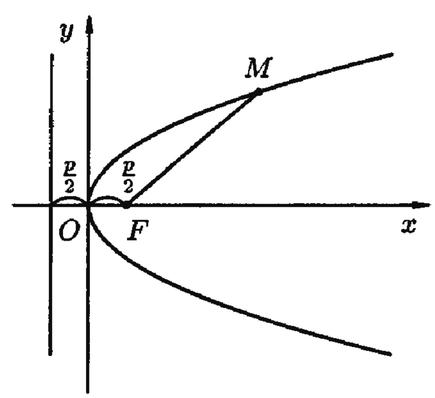


Рис. 61.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют параболы, они изображены на рисунке 62.

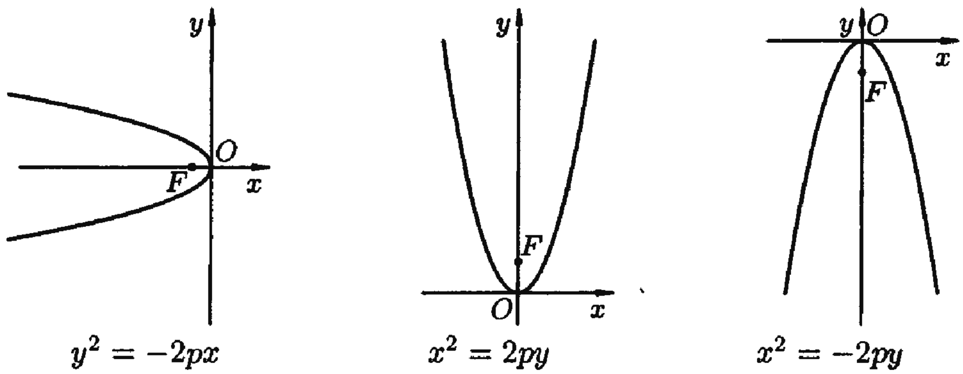


Рис. 62.

Нетрудно показать, что график квадратного трехчлена $y = Ax^2 + Bx + C$, где $A \neq 0$, B и C любые действительные числа, представляет собой параболу в смысле приведенного выше ее определения.

11.6. Общее уравнение линий второго порядка

Уравнения кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

Найдем сначала уравнение эллипса с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$, оси симметрии которого параллельны координатным осям Ox и Oy и полуоси соответственно равны a и b. Поместим в центре эллипса O_1 начало новой системы координат $O_1x'y'$, оси которой O_1x' и O_1y' параллельны соответствующим осям Ox и Oy и одинаково с ними направленны (см. рис. 63).

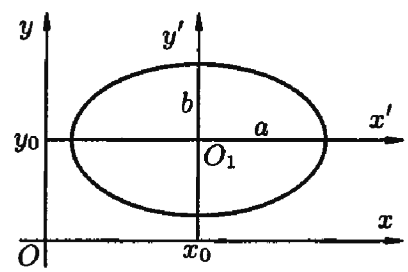


Рис. 63.

В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Так как $x' = x - x_0$, $y' = x - y_0$ (формулы параллельного переноса, см. с. 52), то в старой системе координат уравнение эллипса запишется в виде

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Аналогично рассуждая, получим уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$ и полуосями a и b (см. рис. 64):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

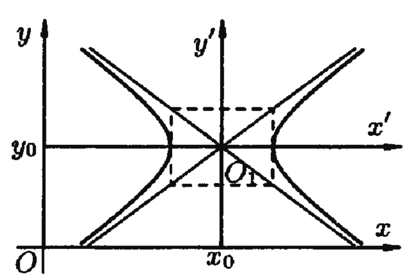


Рис. 64.

И, наконец, параболы, изображенные на рисунке 65, имеют соответствующие уравнения.

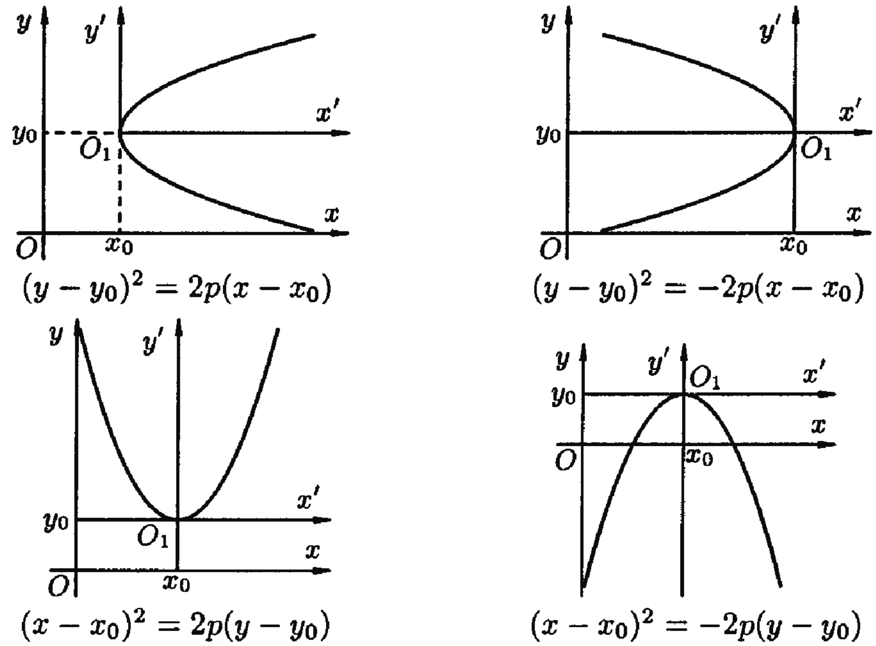


Рис. 65.

Уравнение $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Уравнения эллипса, гиперболы, параболы и уравнение окружности $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ после преобразований (раскрыть скобки, перенести все члены уравнения в одну сторону, привести подобные члены, ввести новые обозначения для коэффициентов) можно записать с помощью *единого* уравнения вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{11.14}$$

где коэффициенты A и C не равны нулю одновременно.

Возникает вопрос: всякое ли уравнение вида (11.14) определяет одну из кривых (окружность, эллипс, гипербола, парабола) второго порядка? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 11.2. Уравнение (11.14) всегда определяет: либо окружность (при $A=C$), либо эллипс (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = 0$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) — в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы — в пару пересекающихся прямых, для параболы — в пару параллельных прямых.

Пример 11.1. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$.

Решение: Предложенное уравнение определяет эллипс ($A \cdot C = 4 \cdot 5 > 0$). Действительно, проделаем следующие преобразования:

$$4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 5(y^2 - 6y + 9) - 25 - 45 + 10 = 0,$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y-3)^2 = 60, \quad \frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1.$$

Получилось каноническое уравнение эллипса с центром в $O_1\left(-\frac{5}{2}; 3\right)$ и полуосями $a = \sqrt{15}$ и $b = \sqrt{12}$. ●

Пример 11.2. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$.

Решение: Указанное уравнение определяет параболу ($C = 0$). Действительно,

$$x^2 + 10x + 25 - 2y + 11 - 25 = 0,$$
$$(x+5)^2 = 2y + 14, \quad (x+5)^2 = 2(y+7).$$

Получилось каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(-5; -7)$ и $p = 1$. ●

Пример 11.3. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0$ ($A \cdot C = -4 < 0$).

Решение: Преобразуем уравнение:

$$4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 8y + 16) - 4 + 16 - 12 = 0,$$
$$4(x+1)^2 - (y+4)^2 = 0,$$
$$(2(x+1) + (y+4)) \cdot (2(x+1) - (y+4)) = 0,$$
$$(2x + y + 6)(2x - y - 2) = 0.$$

Это уравнение определяет две пересекающиеся прямые $2x + y + 6 = 0$ и $2x - y - 2 = 0$. ●

Общее уравнение второго порядка

Рассмотрим теперь общее уравнение второй степени с двумя неизвестными:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (11.15)$$

Оно отличается от уравнения (11.14) наличием члена с произведением координат ($B \neq 0$). Можно, путем поворота координатных осей на угол α, преобразовать это уравнение, чтобы в нем член с произведением координат отсутствовал.

Используя формулы поворота осей (с. 52)

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

выразим старые координаты через новые:

$$\begin{aligned}A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +\\ + C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) +\\ + 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0.\end{aligned}$$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент при $x' \cdot y'$ обратился в нуль, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

т. е.

$$(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0, \tag{11.16}$$

т. е.

$$2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}. \tag{11.17}$$

Таким образом, при повороте осей на угол α, удовлетворяющий условию (11.17), уравнение (11.15) сводится к уравнению (11.14).

Вывод: общее уравнение второго порядка (11.15) определяет на плоскости (если не считать случаев вырождения и распадения) следующие кривые: окружность, эллипс, гиперболу, параболу.

Замечание: Если $A = C$, то уравнение (11.17) теряет смысл. В этом случае $\cos 2\alpha = 0$ (см. (11.16)), тогда $2\alpha = 90°$, т. е. $\alpha = 45°$. Итак, при $A = C$ систему координат следует повернуть на $45°$.

Глава IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Лекции 10–12

§ 12. УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

12.1. Основные понятия

Поверхность и ее уравнение

Поверхность в пространстве можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Например, ***сфера*** радиуса R с центром в точке O_1 есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точки O_1 на расстоянии R.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z — их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются ***текущими координатами*** точек поверхности.

Уравнение поверхности позволяет изучение геометрических свойств поверхности заменить исследованием его уравнения. Так, для того, чтобы узнать, лежит ли точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на данной поверхности, достаточно подставить координаты точки M_1 в уравнение поверхности вместо переменных: если эти координаты удовлетворяют уравнению, то точка лежит на поверхности, если не удовлетворяют — не лежит.

Уравнение сферы

Найдем уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1(x_0; y_0; z_0)$. Согласно определению сферы расстояние любой ее точки $M(x; y; z)$ от центра $O_1(x_0; y_0; z_0)$ равно радиусу R, т. е. $O_1M = R$. Но $O_1M = |\overline{O_1M}|$, где $\overline{O_1M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Следовательно,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

или

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.}$$

Это и есть искомое уравнение сферы. Ему удовлетворяют координаты любой ее точки и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на данной сфере.

Если центр сферы O_1 совпадает с началом координат, то уравнение сферы принимает вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Если же дано уравнение вида $F(x;y;z) = 0$, то оно, вообще говоря, определяет в пространстве некоторую поверхность.

Выражение «вообще говоря» означает, что в отдельных случаях уравнение $F(x;y;z) = 0$ может определять не поверхность, а точку, линию или вовсе не определять никакой геометрический образ. Говорят, «поверхность вырождается».

Так, уравнению $2x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют никакие действительные значения x, y, z. Уравнению $0 \cdot x^2 + y^2 + z^2 = 0$ удовлетворяют лишь координаты точек, лежащих на оси Ox (из уравнения следует: $y = 0$, $z = 0$, а x — любое число).

Итак, поверхность в пространстве можно задать геометрически и аналитически. Отсюда вытекает постановка двух основных задач:

1. Дана поверхность как геометрическое место точек. Найти уравнение этой поверхности.

2. Дано уравнение $F(x;y;z) = 0$. Исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.

Уравнения линии в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей (см. рис. 66) или как геометрическое место точек, общих двум поверхностям.

Если $F_1(x;y;z) = 0$ и $F_2(x;y;z) = 0$ — уравнения двух поверхностей, определяющих линию L, то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x;y;z) = 0, \\ F_2(x;y;z) = 0. \end{cases} \tag{12.1}$$

Уравнения системы (12.1) называются ***уравнениями линии в пространстве***. Например, $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ есть уравнения оси Ox.

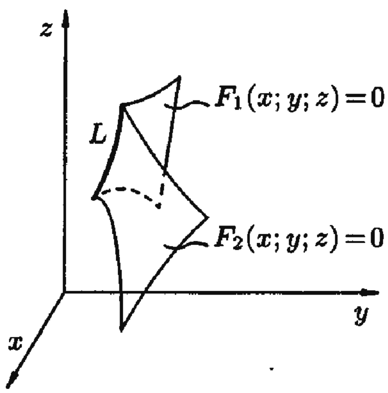


Рис. 66.

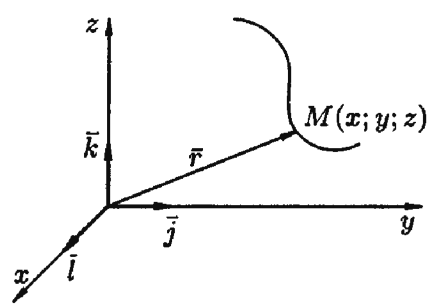


Рис. 67.

Линию в пространстве можно рассматривать как траекторию движения точки (см. рис. 67). В этом случае ее задают ***векторным уравнением***

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{12.2}$$

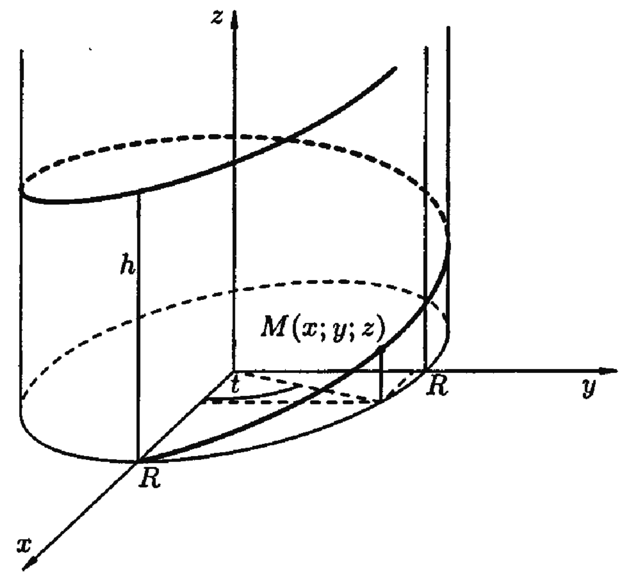


Рис. 68.

или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

проекций вектора (12.2) на оси координат.

Например, параметрические уравнения *винтовой линии* имеют вид

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = \dfrac{h}{2\pi}t. \end{cases}$$

Если точка M равномерно движется по образующей кругового цилиндра, а сам цилиндр равномерно вращается вокруг оси, то точка M описывает винтовую линию (см. рис. 68).

12.2. Уравнения плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\bar{n} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости (см. рис. 69). Выведем уравнение плоскости Q. Возьмем на ней произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.

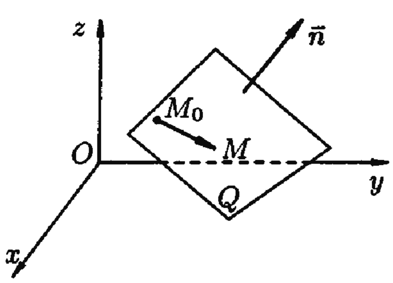


Рис. 69.

При любом расположении точки M на плоскости Q векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, т. е.

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \qquad (12.3)$$

Координаты любой точки плоскости Q удовлетворяют уравнению (12.3), координаты точек, не лежащих на плоскости Q, этому уравнению не удовлетворяют (для них $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} \neq 0$).

Уравнение (12.3) называется ***уравнением плоскости, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{n} = (A; B; C)$. Оно первой степени относительно текущих координат x, y и z. Вектор $\bar{n} = (A; B; C)$ называется ***нормальным вектором плоскости***.

Придавая коэффициентам A, B и C уравнения (12.3) различные значения, можно получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку M_0. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется *связкой плоскостей*, а уравнение (12.3) — *уравнением связки плоскостей*.

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим общее уравнение первой степени с тремя переменными x, y и z:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (12.4)$$

Полагая, что по крайней мере один из коэффициентов A, B или C не равен нулю, например $B \neq 0$, перепишем уравнение (12.4) в виде

$$A(x-0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z-0) = 0. \qquad (12.5)$$

Сравнивая уравнение (12.5) с уравнением (12.3), видим, что уравнения (12.4) и (12.5) являются уравнением плоскости с нормальным вектором $\bar{n} = (A; B; C)$, проходящей через точку $M_1\left(0; -\frac{D}{B}; 0\right)$.

Итак, уравнение (12.4) определяет в системе координат $Oxyz$ некоторую плоскость. Уравнение (12.4) называется ***общим уравнением плоскости***.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. *Если* $D = 0$, то оно принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0;0;0)$. Следовательно, в этом случае *плоскость проходит через начало координат.*

2. *Если* $C = 0$, то имеем уравнение $Ax + By + D = 0$. Нормальный вектор $\bar{n} = (A; B; 0)$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, *плоскость параллельна оси* Oz; если $B = 0$ — параллельна оси Oy, $A = 0$ — параллельна оси Ox.

3. *Если* $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O(0;0;0)$ параллельно оси Oz, т. е. плоскость $Ax + By = 0$ *проходит через ось* Oz. Аналогично, уравнениям $By + Cz = 0$ и $Ax + Cz = 0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy.

4. *Если* $A = B = 0$, то уравнение (12.4) принимает вид $Cz + D = 0$, т. е. $z = -\frac{D}{C}$. Плоскость *параллельна плоскости* Oxy. Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

5. *Если* $A = B = D = 0$, то уравнение (12.4) примет вид $Cz = 0$, т. е. $z = 0$. Это *уравнение плоскости* Oxy. Аналогично: $y = 0$ — уравнение плоскости Oxz; $x = 0$ — уравнение плоскости Oyz.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим векторы $\overline{M_1M} = (x-x_1; y-y_1; z-z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1)$. Эти векторы лежат на плоскости Q, следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получаем $\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$, т. е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.} \tag{12.6}$$

Уравнение (12.6) есть *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и c, т. е. проходит через три точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$ (см. рис. 70).

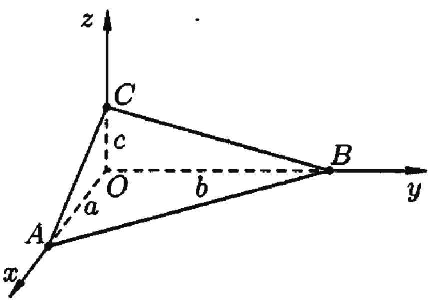


Рис. 70.

Подставляя координаты этих точек в уравнение (12.6), получаем

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем $bcx - abc + abz + acy = 0$, т. е. $bcx + acy + abz = abc$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{12.7}$$

Уравнение (12.7) называется ***уравнением плоскости в отрезках на осях***. Им удобно пользоваться при построении плоскости.

Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости Q вполне определяется заданием единичного вектора $\bar{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK, опущенного на плоскость из начала координат, и длиной p этого перпендикуляра (см. рис. 71).

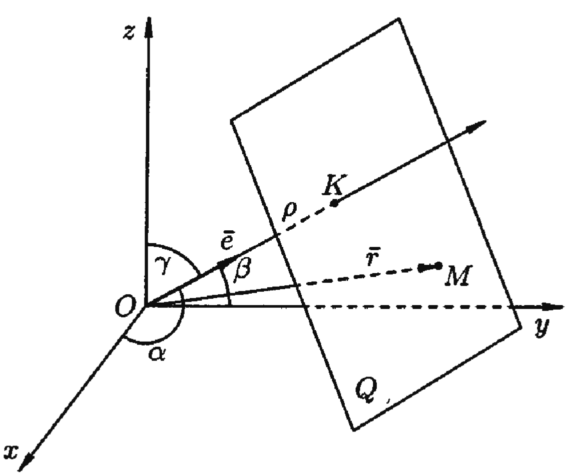


Рис. 71.

Пусть $OK = p$, а α, β, γ — углы, образованные единичным вектором $\bar{e}$ с осями Ox, Oy и Oz. Тогда $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и соединим ее с началом координат. Образуем вектор $\bar{r} = \overline{OM} = (x;y;z)$.

При любом положении точки M на плоскости Q проекция радиус-вектора $\bar{r}$ на направление вектора $\bar{e}$ всегда равно p: $\text{пр}_{\bar{e}}\,\bar{r} = p$, т. е. $\bar{r}\cdot\bar{e} = p$ или

$$\boxed{\bar{r}\cdot\bar{e} - p = 0.} \tag{12.8}$$

Уравнение (12.8) называется *нормальным уравнением плоскости в векторной форме*. Зная координаты векторов $\bar{r}$ и $\bar{e}$, уравнение (12.8) перепишем в виде

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.} \tag{12.9}$$

Уравнение (12.9) называется ***нормальным уравнением плоскости в координатной форме***.

Отметим, что общее уравнение плоскости (12.4) можно привести к нормальному уравнению (12.9) так, как это делалось для уравнения прямой на плоскости. А именно: умножить обе части уравнения (12.4) на нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

12.3. Плоскость. Основные задачи

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Под ***углом между плоскостями*** Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов (см. рис. 72). Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$ или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

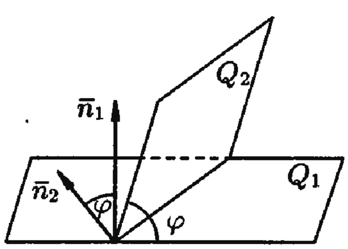


Рис. 72.

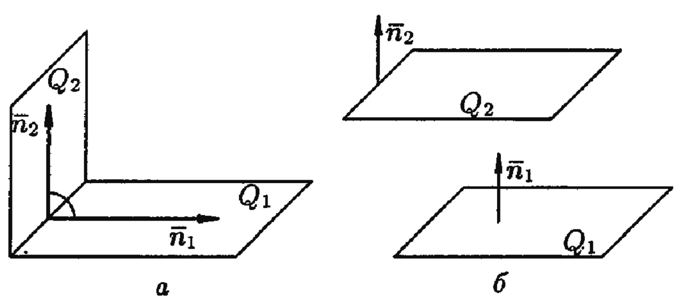


Рис. 73.

Если плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны (см. рис. 73, *а*), то таковы же их нормали, т. е. $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, т. е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Полученное равенство есть *условие перпендикулярности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны (см. рис. 73, *б*), то будут параллельны и их нормали $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда, как известно, координаты векторов пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Это и есть *условие параллельности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$

Вывод этой формулы такой же, как вывод формулы расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ (см. с. 61).

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — произвольная точка плоскости Q, на направление нормального вектора $\bar{n} = (A; B; C)$ (см. рис. 74). Следовательно,

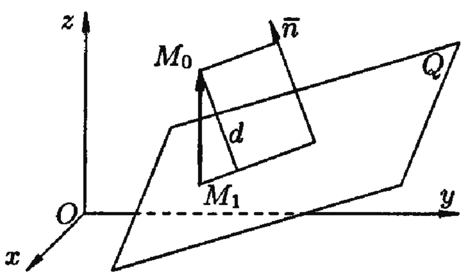


Рис. 74.

$$d = |\,\text{пр}_{\bar{n}}\,\overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right| =$$
$$= \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

А так как точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит плоскости Q, то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad \text{т. е.} \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

Поэтому $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Отметим, что если плоскость Q задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости Q может быть найдено по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|.$$

12.4. Уравнения прямой в пространстве

Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_0 на прямой и вектор $\bar{S}$, параллельный этой прямой. Вектор $\bar{S}$ называется ***направляющим вектором прямой***. Пусть прямая L задана ее точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{S} = (m; n; p)$. Возьмем на прямой L произвольную точку $M(x; y; z)$. Обо-

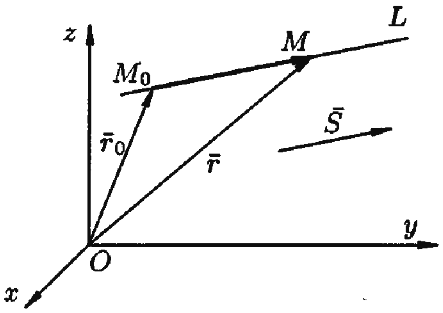


Рис. 75.

значим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$. Очевидно, что три вектора $\bar{r}_0$, $\bar{r}$ и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}. \tag{12.10}$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на прямой L, параллелен направляющему вектору $\bar{S}$, поэтому $\overline{M_0M} = t\bar{S}$, где t — скалярный множитель, называемый *параметром*, может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой (см. рис. 75).

Уравнение (12.10) можно записать в виде

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}.} \tag{12.11}$$

Полученное уравнение называется ***векторным уравнением прямой***.

Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\bar{r} = (x; y; z)$, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\bar{S} = (tm; tn; tp)$, уравнение (12.11) можно записать в виде

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}} \tag{12.12}$$

Они называются *параметрическими уравнениями прямой* в пространстве.

Канонические уравнения прямой

Пусть $\bar{S}=(m; n; p)$ — направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x; y; z)$ прямой L, параллелен вектору $\bar{S}$. Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и вектора $\bar{S} = (m; n; p)$ пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.} \tag{12.13}$$

Уравнения (12.13) называются ***каноническими уравнениями прямой*** в пространстве.

Замечания: 1) Уравнения (12.13) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (12.12), исключив параметр t. Из уравнений (12.12) находим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

2) Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (12.13) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2;-4;1)$ перпендикулярно оси Oz (проекция вектора $\bar{S}$ на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z=1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z-1=0$.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

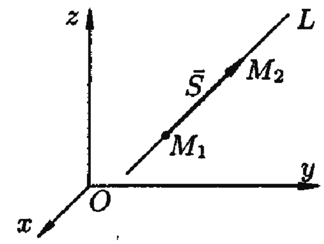


Рис. 76.

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. В качестве направляющего вектора $\bar{S}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2}=$ $=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, т. е. $\bar{S}=\overline{M_1M_2}$ (см. рис. 76). Следовательно, $m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$, $p=z_2-z_1$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, то, согласно уравнениям (12.13), уравнения прямой L имеют вид

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.} \qquad (12.14)$$

Уравнения (12.14) называются ***уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.***

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (12.15)$$

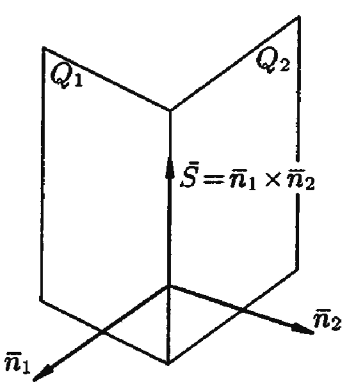


Рис. 77.

Каждое из уравнений этой системы определяет плоскость. Если плоскости не параллельны (координаты векторов $\bar{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ и $\bar{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ не пропорциональны), то система (12.15) определяет прямую L как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы (см. рис. 77). Уравнения (12.15) называют *общими уравнениями прямой.*

От общих уравнений (12.15) можно перейти к каноническим уравнениям (12.13). Координаты точки M_0 на прямой L получаем из системы уравнений (12.15), придав одной из координат произвольное значение (например, $z=0$).

Так как прямая L перпендикулярна векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, то за направляющий вектор $\bar{S}$ прямой L можно принять векторное произведение $\bar{n}_1\times\bar{n}_2$:

$$\bar{S}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание: Канонические уравнения прямой легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнения (12.14).

Пример 12.1. Написать канонические уравнения прямой L, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y-3z+5=0. \end{cases}$$

Решение: Положим $z=0$ и решим систему $\begin{cases} x+y=-1, \\ 2x-y=-5. \end{cases}$ Находим точку $M_1(-2;1;0) \in L$. Положим $y=0$ и решим систему $\begin{cases} x-z=-1, \\ 2x-3z=-5. \end{cases}$ Находим вторую точку $M_2(2;0;3)$ прямой L. Записываем уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}.$$

12.5. Прямая линия в пространстве. Основные задачи

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

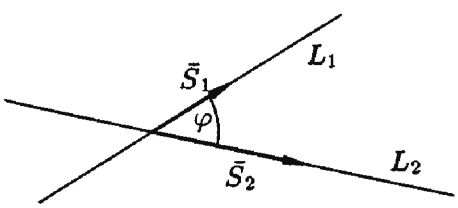


Рис. 78.

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $S_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $S_2=(m_2;n_2;p_2)$ (см. рис. 78). Поэтому, по известной формуле для косинуса угла между векторами, получаем $\cos\varphi=\dfrac{\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2}{|\bar{S}_1|\cdot|\bar{S}_2|}$ или

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.} \tag{12.16}$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (12.16) следует взять по модулю.

Если *прямые L_1 и L_2 перпендикулярны*, то в этом и только в этом случае имеем $\cos\varphi=0$. Следовательно, числитель дроби (12.16) равен нулю, т. е. $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Если *прямые L_1 и L_2 параллельны*, то параллельны их направляющие векторы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Пример 12.2. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y-z-1=0, \\ 2x-y+3x+5=0. \end{cases}$$

Решение: Очевидно, $\bar{S}_1 = (2; -1; 3)$, а $\bar{S}_2 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, где $\bar{n}_1 = (2; 1; -1)$, $\bar{n}_2 = (2; -1; 3)$. Отсюда следует, что $\bar{S}_2 = (2; -8; -4)$. Так как $\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = 4 + 8 - 12 = 0$, то $\varphi = 90°$. ●

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

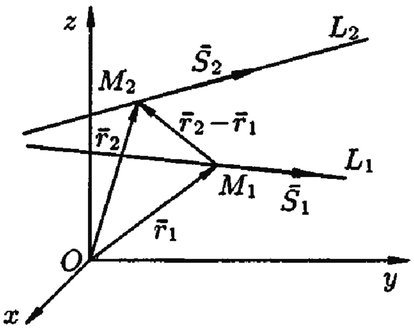


Рис. 79.

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x - x_1}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Их направляющие векторы соответственно $\bar{S}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{S}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ (см. рис. 79).

Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_1$; прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_2$. Тогда

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ и $\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{S}_1\bar{S}_2 = 0$, т. е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.}$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, то есть либо пересекаются, если $\bar{S}_2 \neq \lambda \bar{S}_1$, либо параллельны, если $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$.

12.6. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L уравнениями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

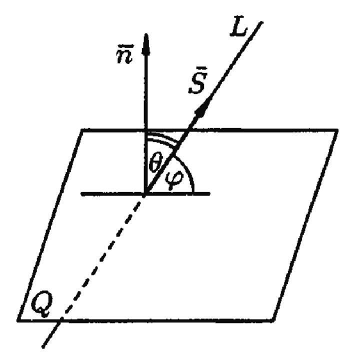


Рис. 80.

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ — угол между векторами $\bar{n} = (A; B; C)$ и $\bar{S} = (m; n; p)$ (см. рис. 80). Тогда $\cos\theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{S}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{S}|}$. При этом $\sin\varphi = \pm\cos\theta$: если $\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$; если $\theta > \frac{\pi}{2}$, то

$\cos\theta = \cos(\pi - \varphi) = -\sin\varphi$.

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{12.17}$$

Острый угол между плоскостью Q и прямой L можно найти, взяв в формуле (12.17) модуль правой части.

Если *прямая L параллельна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ перпендикулярны (см. рис. 81), а потому $\bar{S} \cdot \bar{n} = 0$, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0$$

является ***условием параллельности*** прямой и плоскости.

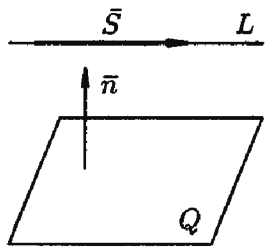


Рис. 81.

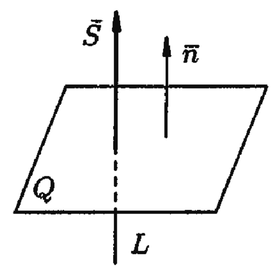


Рис. 82.

Если *прямая L перпендикулярна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ параллельны (см. рис. 82). Поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

являются ***условиями перпендикулярности*** прямой и плоскости.

Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{12.18}$$

с плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{12.19}$$

Для этого надо решить систему уравнений (12.18) и (12.19). Проще всего это сделать, записав уравнения прямой (12.18) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости (12.19), получаем уравнение $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$ или

$$t(Am + Bn + Cp) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \tag{12.20}$$

Если прямая L не параллельна плоскости, т. е. если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то из равенства (12.20) находим значение t:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Рассмотрим теперь случай, когда $Am + Bn + Cp = 0$ ($L \parallel Q$):

а) если $F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая L параллельна плоскости и пересекать ее не будет (уравнение (12.20) решения не имеет, так как имеет вид $0 \cdot t + F = 0$, где $F \neq 0$);

б) если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то уравнение (12.20) имеет вид $t \cdot 0 + 0 = 0$; ему удовлетворяет любое значение t, любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Заключаем: прямая лежит в плоскости. Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

является ***условием принадлежности прямой плоскости.***

12.7. Цилиндрические поверхности

Поверхность, образованная движением прямой L, которая перемещается в пространстве, сохраняя постоянное направление и пересекая каждый раз некоторую кривую K, называется ***цилиндрической поверхностью*** или ***цилиндром.*** При этом кривая K называется ***направляющей*** цилиндра, а прямая L — его ***образующей*** (см. рис. 83).

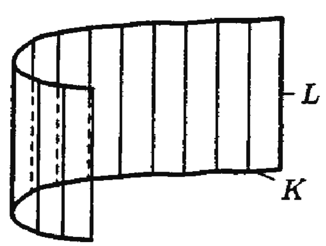


Рис. 83.

Будем рассматривать цилиндрические поверхности, направляющие которых лежат в одной из координатных плоскостей, а образующие параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости.

Пусть в плоскости Oxy лежит некоторая линия K, уравнение которой

$$F(x; y) = 0. \qquad (12.21)$$

Построим цилиндр с образующими параллельными оси Oz и направляющей K.

Теорема 12.1. Уравнение цилиндра, образующие которого параллельны оси Oz, имеет вид (12.21), т. е. не содержит координаты z.

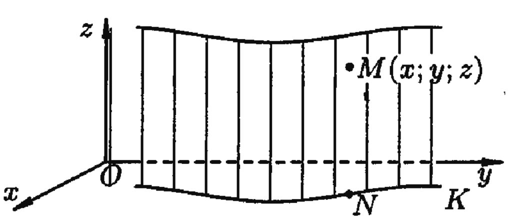


Рис. 84.

❑ Возьмем на цилиндре любую точку $M(x; y; z)$ (см. рис. 84). Она лежит на какой-то образующей. Пусть N — точка пересечения этой образующей с плоскостью Oxy. Следовательно, точка N лежит на кривой K и ее координаты удовлетворяют уравнению (12.21).

Но точка M имеет такие же абсциссу x и ординату y, что и точка N. Следовательно, уравнению (12.21) удовлетворяют и координаты точки $M(x;y;z)$, так как оно не содержит z. И так как M — это любая точка цилиндра, то уравнение (12.21) и будет уравнением этого цилиндра. ■

Теперь ясно, что $F(x;z)=0$ есть уравнение цилиндра с образующими, параллельными оси Oy, а $F(y;z)=0$ — с образующими, параллельными оси Ox. Название цилиндра определяется названием направляющей. Если направляющей служит эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в плоскости Oxy, то соответствующая цилиндрическая поверхность называется ***эллиптическим цилиндром*** (см. рис. 85).

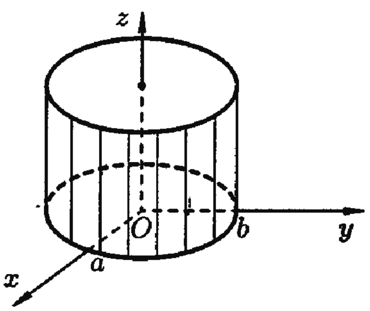


Рис. 85.

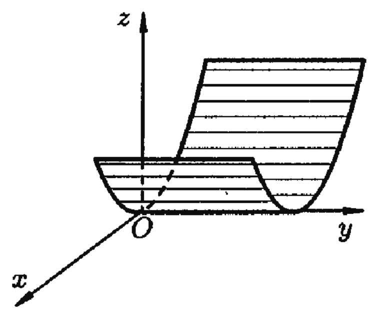


Рис. 86.

Частным случаем эллиптического цилиндра является ***круговой цилиндр***, его уравнение $x^2+y^2=R^2$. Уравнение $x^2=2pz$ определяет в пространстве ***параболический цилиндр*** (см. рис. 86). Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

определяет в пространстве ***гиперболический цилиндр*** (см. рис. 87).

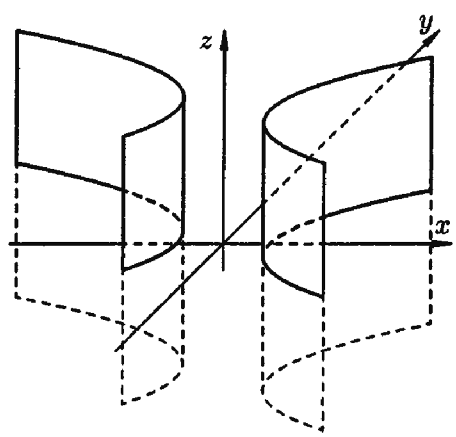


Рис. 87.

Все эти поверхности называются ***цилиндрами второго порядка***, так как их уравнения есть уравнения второй степени относительно текущих координат x, y и z.

12.8. Поверхности вращения. Конические поверхности

Поверхность, образованная вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, называется *поверхностью вращения*. Пусть некоторая кривая L лежит в плоскости Oyz. Уравнения этой кривой

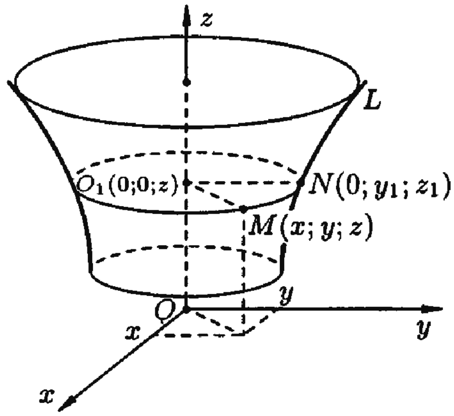


Рис. 88.

запишутся в виде

$$\begin{cases} F(y;z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \qquad (12.22)$$

Найдем уравнение поверхности, образованной вращением кривой L вокруг оси Oz.

Возьмем на поверхности произвольную точку $M(x;y;z)$ (см. рис. 88). Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную оси Oz, и обозначим точки пересечения ее с осью Oz и кривой L соответственно через O_1 и N. Обозначим координаты точки N через $(0;y_1;z_1)$. Отрезки O_1M и O_1N являются радиусами одной и той же окружности. Поэтому $O_1M = O_1N$. Но $O_1M = \sqrt{x^2+y^2}$, $O_1N = |y_1|$. Следовательно, $|y_1| = \sqrt{x^2+y^2}$ или $y_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Кроме того, очевидно, $z_1 = z$.

Так как точка N лежит на кривой L, то ее координаты удовлетворяют уравнению (12.22). Стало быть, $F(y_1;z_1) = 0$. Исключая вспомогательные координаты y_1 и z_1 точки N, приходим к уравнению

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2};z) = 0. \qquad (12.23)$$

Уравнение (12.23) — искомое уравнение поверхности вращения, ему удовлетворяют координаты любой точки M этой поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на поверхности вращения.

Как видно, уравнение (12.23) получается из (12.22) простой заменой y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, координата z сохраняется.

Понятно, что если кривая (12.22) вращается вокруг оси Oy, то уравнение поверхности вращения имеет вид

$$F(y;\pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0;$$

если кривая лежит в плоскости Oxy $(z = 0)$ и ее уравнение $F(x;y) = 0$, то уравнение поверхности вращения, образованной вращением кривой вокруг оси Ox, есть $F(x;\pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$.

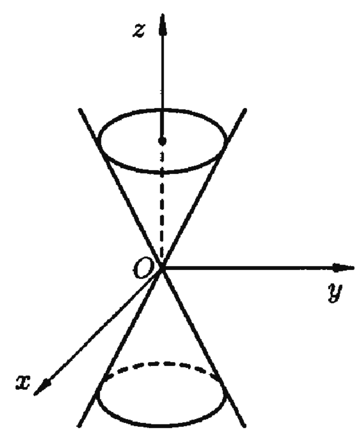


Рис. 89.

Так, например, вращая прямую $y = z$ вокруг оси Oz (см. рис. 89), получим поверхность вращения (ее уравнение $\pm\sqrt{x^2+y^2} = z$ или $x^2+y^2 = z^2$). Она называется конусом второго порядка.

Поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через данную точку P и пересекающими данную плоскую линию L (не проходящую через P), называется ***конической поверхностью*** или ***конусом***. При этом линия L называется ***направляющей*** конуса, точка P — ее ***вершиной***, а прямая, описывающая поверхность, называется ***образующей***.

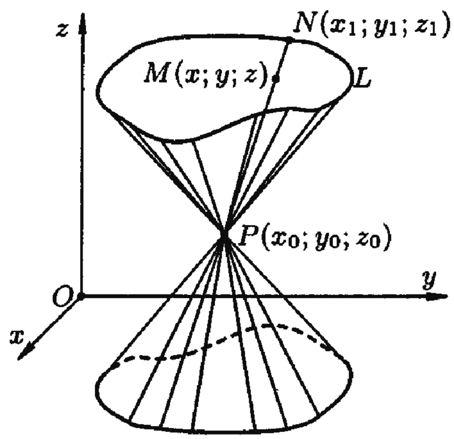


Рис. 90.

Пусть направляющая L задана уравнениями

$$\begin{cases} F_1(x;y;z)=0, \\ F_2(x;y;z)=0, \end{cases} \tag{12.24}$$

а точка $P(x_0;y_0;z_0)$ — вершина конуса. Найдем уравнение конуса.

Возьмем на поверхности конуса произвольную точку $M(x;y;z)$ (см. рис. 90). Образующая, проходящая через точки P и M, пересечет направляющую L в некоторой точке $N(x_1;y_1;z_1)$. Координаты точки N удовлетворяют уравнениям (12.24) направляющей:

$$\begin{cases} F_1(x_1;y_1;z_1)=0, \\ F_2(x_1;y_1;z_1)=0. \end{cases} \tag{12.25}$$

Канонические уравнения образующих, проходящих через точки P и N, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{12.26}$$

Исключая x_1, y_1 и z_1 из уравнений (12.25) и (12.26), получим уравнение конической поверхности, связывающее текущие координаты x, y и z.

Пример 12.3. Составить уравнение конуса с вершиной в точке $O(0;0;0)$, если направляющей служит эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащий в плоскости $z=c$.

○ Решение: Пусть $M(x;y;z)$ — любая точка конуса. Канонические уравнения образующих, проходящих через точки $(0;0;0)$ и точку $(x_1;y_1;z_1)$ пересечения образующей OM с эллипсом будут $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}$. Исключим x_1, y_1 и z_1 из этих уравнений и уравнения

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \tag{12.27}$$

(точка $(x_1;y_1;z_1)$ лежит на эллипсе), $z_1=c$. Имеем: $\frac{x}{x_1}=\frac{z}{c}$, $\frac{y}{y_1}=\frac{z}{c}$. Отсюда $x_1=c\cdot\frac{x}{z}$ и $y_1=c\cdot\frac{y}{z}$. Подставляя значения x_1 и y_1 в уравнение эллипса (12.27), получим

$$\frac{c^2\cdot x^2}{z^2\cdot a^2}+\frac{c^2\cdot y^2}{z^2\cdot b^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}.$$

Это и есть искомое уравнение конуса. ●

12.9. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

По заданному уравнению поверхности второго порядка (т. е. поверхности, уравнение которой в прямоугольной системе координат является алгебраическим уравнением второй степени) будем определять ее геометрический вид. Для этого применим так называемый *метод сечений:* исследование вида поверхности будем производить при помощи изучения линий пересечения данной поверхности с координатными плоскостями или плоскостями, им параллельными.

Эллипсоид

Исследуем поверхность, заданную уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.} \tag{12.28}$$

Рассмотрим сечения поверхности (12.28) с плоскостями, параллельными плоскости xOy. Уравнения таких плоскостей: $z = h$, где h — любое число.

Линия, получаемая в сечении, определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \tag{12.29}$$

Исследуем уравнения (12.29):

а) Если $|h| > c$, $c > 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$. Точек пересечения поверхности (12.28) с плоскостями $z = h$ не существует.

б) Если $|h| = c$, т. е. $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Линия пересечения (12.29) вырождается в две точки $(0; 0; c)$ и $(0; 0; -c)$. Плоскости $z = c$ и $z = -c$ касаются данной поверхности.

в) Если $|h| < c$, то уравнения (12.29) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

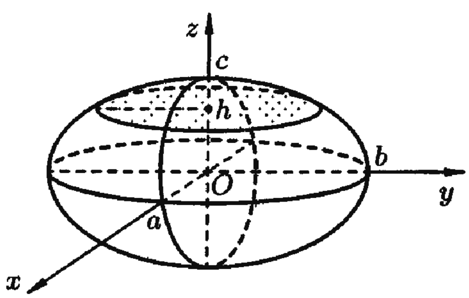


Рис. 91.

Как видно, линия пересечения есть эллипс с полуосями (см. рис. 91)

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

При этом чем меньше $|h|$, тем больше полуоси a_1 и b_1. При $h = 0$ они достигают своих наибольших значений: $a_1 = a$, $b_1 = b$. Уравнения (12.29) примут вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ h = 0. \end{cases}$$

Аналогичные результаты получим, если рассмотрим сечения поверхности (12.28) плоскостями $x = h$ и $y = h$.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить поверхность (12.28) как замкнутую овальную поверхность. Поверхность (12.28) называется ***эллипсоидом***. Величины a, b и c называются ***полуосями*** эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется ***трехосным***; если какие-либо две полуоси равны, трехосный эллипсоид превращается в ***эллипсоид вращения***; если $a = b = c$, то — в ***сферу*** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Однополостный гиперболоид

Исследуем поверхность, заданную уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.} \qquad (12.30)$$

Пересекая поверхность (12.30) плоскостью $z = h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Как видно, этой линией является эллипс с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

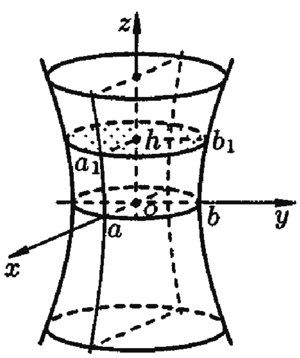


Рис. 92.

Полуоси a_1 и b_1 достигают своего наименьшего значения при $h = 0$: $a_1 = a$, $b_1 = b$. При возрастании $|h|$ полуоси эллипса будут увеличиваться.

Если пересекать поверхность (12.30) плоскостями $x = h$ или $y = h$, то в сечении получим гиперболы. Найдем, например, линию пересечения поверхности (12.30) с плоскостью Oyz, уравнение которой $x = 0$. Эта линия пересечения описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Как видно, эта линия есть гипербола (см. рис. 92).

Анализ этих сечений показывает, что поверхность, определяемая уравнением (12.30), имеет форму бесконечной расширяющейся трубки. Поверхность (12.30) называется ***однополостным гиперболоидом***.

Замечание: можно доказать, что через любую точку гиперболоида (12.30) проходят две прямые, лежащие на нем.

Двухполостный гиперболоид

Пусть поверхность задана уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.} \qquad (12.31)$$

Если поверхность (12.31) пересечь плоскостями $z = h$, то линия пересечения определяется уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases} \qquad (12.32)$$

Отсюда следует, что:

а) если $|h| < c$, то плоскости $z = h$ не пересекают поверхности;

б) если $|h| = c$, то плоскости $z = \pm c$ касаются данной поверхности соответственно в точках $(0; 0; c)$ и $(0; 0; -c)$.

в) если $|h| > c$, то уравнения (12.32) могут быть переписаны так

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Эти уравнения определяют эллипс, полуоси которого возрастают с ростом $|h|$.

Пересекая поверхность (12.31) координатными плоскостями Oyz $(x = 0)$ и Oxz $(y = 0)$, получим в сечении гиперболы, уравнения которых соответственно имеют вид

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

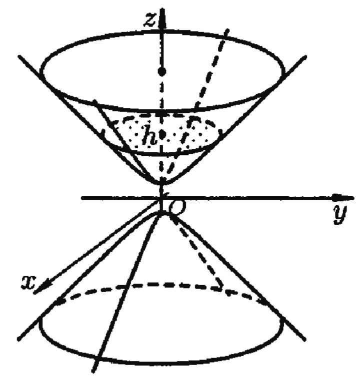


Рис. 93.

У обеих гипербол действительной осью является ось Oz. Метод сечения позволяет изобразить поверхность (см. рис. 93), определяемую уравнением (12.31), как поверхность, состоящую из двух полостей, имеющих форму выпуклых неограниченных чаш. Поверхность (12.31) называется ***двухполостным гиперболоидом***.

Эллиптический параболоид

Исследуем поверхность, заданную уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,} \tag{12.33}$$

где $p > 0$, $q > 0$. Рассечем поверхность (12.33) плоскостями $z = h$. В сечении получим линию, уравнения которой есть

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

Если $h < 0$, то плоскости $z = h$ поверхности не пересекают; если $h = 0$, то плоскость $z = 0$ касается поверхности в точке $(0; 0; 0)$; если $h > 0$, то в сечении имеем эллипс, уравнение которого имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

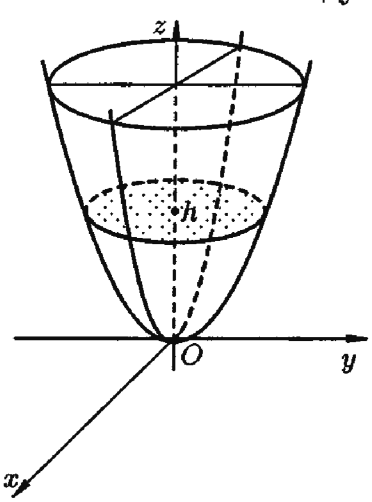


Рис. 94.

Его полуоси возрастают с ростом h.

При пересечении поверхности (12.33) координатными плоскостями Oxz и Oyz получатся соответственно параболы $z = \dfrac{x^2}{2p}$ и $z = \dfrac{y^2}{2q}$. Таким образом, поверхность, определяемая уравнением (12.33), имеет вид выпуклой, бесконечно расширяющейся чаши (см. рис. 94). Поверхность (12.33) называется ***эллиптическим параболоидом***.

Гиперболический параболоид

Исследуем поверхность, определяемую уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,} \qquad (12.34)$$

где $p > 0$, $q > 0$. Рассечем поверхность (12.34) плоскостями $z = h$. Получим кривую

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

которая при всех значениях $h \neq 0$ является гиперболой. При $h > 0$ ее действительные оси параллельны оси Ox; при $h < 0$ — параллельны оси Oy; при $h = 0$ линия пересечения $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$ распадается на пару пересекающихся прямых $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ и $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$. При пересечении поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxz ($y = h$), будут получаться параболы

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z + \dfrac{h^2}{2q}\right), \\ y = h, \end{cases}$$

ветви которых направлены вверх. При $y=0$ в сечении получается парабола

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases}$$

с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz.

Пересекая поверхность (12.34) плоскостями $x = h$, получим параболы $y^2 = -2q\left(z - \frac{h^2}{2p}\right)$, ветви которых направлены вниз.

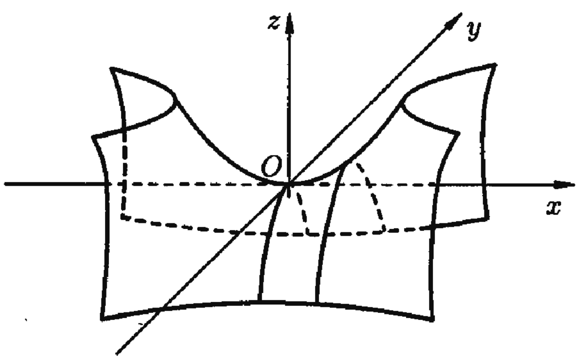


Рис. 95.

Анализ линии пересечения позволяет определить вид поверхности: она имеет вид седла (см. рис. 95). Поверхность (12.34) называется ***гиперболическим параболоидом***.

Конус второго порядка

Исследуем уравнение поверхности

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.} \qquad (12.35)$$

Пересечем поверхность (12.35) плоскостями $z = h$. Линия пересечения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$, $z = h$. При $h = 0$ она вырождается в точку $(0;0;0)$. При $h \neq 0$ в сечении будем получать эллипсы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2h^2}{c^2}} + \dfrac{y^2}{\frac{b^2h^2}{c^2}} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Полуоси этих эллипсов будут возрастать при возрастании $|h|$.

Рассечем поверхность (12.35) плоскостью Oyz ($x = 0$). Получится линия

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

распадающаяся на две пересекающиеся прямые

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

При пересечении поверхности (12.35) плоскостью $y = 0$ получим линию

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

также распадающуюся на две пересекающиеся прямые

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$$

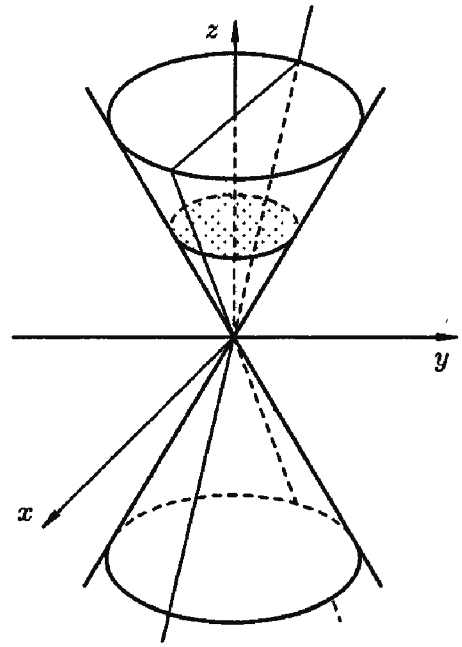


Рис. 96.

Поверхность, определяемая уравнением (12.35), называется ***конусом второго порядка***, имеет вид, изображенный на рисунке 96.

Поверхности, составленные из прямых линий, называются ***линейчатыми***. Такими поверхностями являются цилиндрические, конические поверхности, а также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Глава V. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Лекции 13–22

§ 13. МНОЖЕСТВА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

13.1. Основные понятия

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под ***множеством*** понимают совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве студентов института, о множестве рыб в Черном море, о множестве корней уравнения $x^2+2x+2=$ $=0$, о множестве всех натуральных чисел и т. д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами***. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а их элементы — малыми буквами $a, b, \ldots$ $\ldots, x, y, \ldots$

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \overline{\in} X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, обозначается символом $\varnothing$.

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, запись $A = \{1, 3, 15\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 1, 3 и 15; запись $A = \{x : \ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так $A \subset B$ («A включено в B») или $B \supset A$ («множество B включает в себя множество A»).

Говорят, что множества A и B ***равны*** или ***совпадают***, и пишут $A=B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму) множеств обозначают $A \cup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x : \ x \in A$ или $x \in B\}$.

Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение (произведение) множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x : \ \ x \in A \ \text{ и } \ x \in B\}$.

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать *некоторые* простейшие логические символы:

$\alpha \implies \beta$ — означает «из предложения α *следует* предложение β»;

$\alpha \iff \beta$ — «предложения α и β равносильны», т. е. из α следует β и из β следует α;

$\forall$ — означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ — «существует», «найдется»;

: — «имеет место», «такое что»;

$\mapsto$ — «соответствие».

Например: 1) запись $\forall x \in A : \alpha$ означает: «для всякого элемента $x \in A$ имеет место предложение α»;

2) $(x \in A \cup B) \iff (x \in A \quad \text{или} \quad x \in B)$; эта запись определяет объединение множеств A и B.

13.2. Числовые множества. Множество действительных чисел

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; \ldots; n; \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0; \pm1; \pm2; \ldots; \pm n; \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ — множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Множество $\mathbb{R}$ содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2} = 0{,}5$ $(= 0{,}500\ldots)$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ — рациональные числа.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Теорема 13.1. Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2.

❏ Допустим, что существует рациональное число, представленное несократимой дробью $\frac{m}{n}$, квадрат которого равен 2. Тогда имеем:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \quad \text{т. е. } m^2 = 2n^2.$$

Отсюда следует, что m^2 (а значит, и m) — четное число, т. е. $m = 2k$. Подставив $m = 2k$ в равенство $m^2 = 2n^2$, получим $4k^2 = 2n^2$, т. е. $2k^2 = n^2$. Отсюда следует, что число n — четное, т. е. $n = 2l$. Но тогда дробь $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$ сократима. Это противоречит допущению, что $\frac{m}{n}$ дробь несократима. Следовательно, не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2. ■

Иррациональное число выражается бесконечной непериодической дробью. Так, $\sqrt{2} = 1{,}4142356\ldots$, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ — иррациональные числа. Можно сказать: множество действительных чисел есть множество всех бесконечных десятичных дробей. И записать

$$\mathbb{R} = \{x : \ x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\}, \quad \text{где } a \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел обладает следующими свойствами.

1. Оно *упорядоченное*: для любых двух различных чисел a и b имеет место одно из двух соотношений $a < b$ либо $b < a$.

2. Множество $\mathbb{R}$ *плотное*: между любыми двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел x, т. е. чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$.

Так, если $a < b$, то одним из них является число $\frac{a+b}{2}$

$$\left(a < b \implies 2a < a+b \text{ и } a+b < 2b \implies 2a < a+b < 2b \implies a < \frac{a+b}{2} < b\right).$$

3. Множество $\mathbb{R}$ *непрерывное*. Пусть множество $\mathbb{R}$ разбито на два непустых класса A и B таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе и для каждой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a < b$. Тогда (свойство непрерывности) существует единственное число c, удовлетворяющее неравенству $a \leqslant c \leqslant b$ ($\forall a \in A$, $\forall b \in B$). Оно отделяет числа класса A от чисел класса B. Число c является либо наибольшим числом в классе A (тогда в классе B нет наименьшего числа), либо наименьшим числом в классе B (тогда в классе A нет наибольшего).

Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Это означает, что каждому числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует определенная (единственная) точка числовой оси и, наоборот, каждой точке оси соответствует определенное (единственное) действительное число. Поэтому вместо слова «число» часто говорят «точка».

13.3. Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть a и b — действительные числа, причем $a < b$.

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x : \ a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a; b) = \{x : \ a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток);

$[a; b) = \{x : \ a \leqslant x < b\}$;

$(a; b] = \{x : \ a < x \leqslant b\}$ — полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty; b] = \{x : \ x \leqslant b\}$; $\quad [a, +\infty) = \{x : \ x \geqslant a\}$;

$(-\infty; b) = \{x : \ x < b\}$; $\quad (a, +\infty) = \{x : \ x > a\}$;

$(-\infty, \infty) = \{x : \ -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$ — бесконечные интервалы (промежутки).

Числа a и b называются соответственно левым и правым *концами* этих промежутков. Символы $-\infty$ и $+\infty$ не числа, это символическое обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси от начала 0 влево и вправо.

Пусть x_0 — любое действительное число (точка на числовой прямой). ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ***ε-окрестностью*** точки x_0. Число x_0 называется ***центром***, а число ε — ***радиусом***.

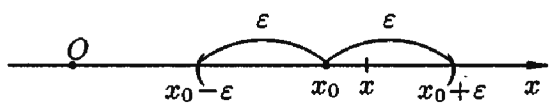


Рис. 97.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0 (см. рис. 97).

§ 14. ФУНКЦИЯ

14.1. Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f : X \to Y$. Говорят еще, что функция f ***отображает*** множество X на множество Y.

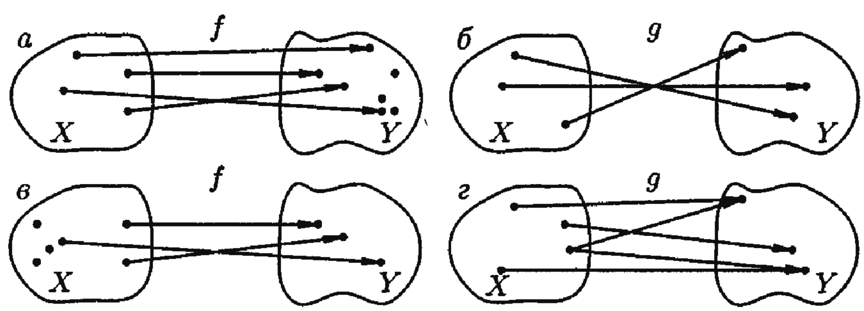


Рис. 98.

Например, соответствия f и g, изображенные на рисунке 98 *а* и *б*, являются функциями, а на рисунке 98 *в* и *г* — нет. В случае *в* — не каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. В случае *г* не соблюдается условие однозначности.

Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

14.2. Числовые функции. График функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $f : X \to Y$.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т. е. $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$), то функцию f называют ***числовой функцией***. В дальнейшем будем изучать (как правило) числовые функции, для краткости будем именовать их просто функциями и записывать $y = f(x)$.

Переменная x называется при этом *аргументом* или независимой переменной, а y — *функцией* или *зависимой переменной* (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*. Иногда функциональную зависимость y от x пишут в виде $y = y(x)$, не вводя новой буквы (f) для обозначения зависимости.

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывают так: $f(a)$. Например, если $f(x) = 2x^2 - 3$, то $f(0) = -3$, $f(2) = 5$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

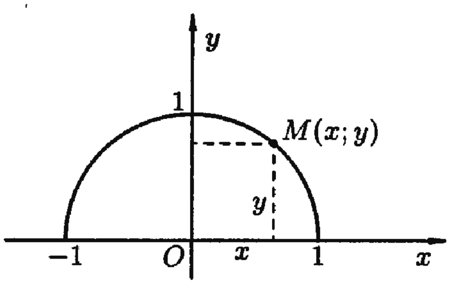


Рис. 99.

Например, графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса $R = 1$ с центром в $O(0; 0)$ (см. рис. 99).

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например:

$$1)\ S = \pi R^2; \quad 2)\ y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x < 2, \\ x - 4 & \text{при } x \geqslant 2; \end{cases} \quad 3)\ y^2 - 4x = 0.$$

Если область определения функции $y = f(x)$ не указана, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл. Так, областью определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является отрезок $[-1; 1]$.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Графический способ: задается график функции.

Часто графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Значения функции y, соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

14.3. Основные характеристики функции

1. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется ***четной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$; ***нечетной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной — относительно начала координат.

Например, $y = x^2$, $y = \sqrt{1+x^2}$, $y = \ln|x|$ — четные функции; а $y = \sin x$, $y = x^3$ — нечетные функции; $y = x - 1$, $y = \sqrt{x}$ — функции общего вида, т. е. не четные и не нечетные.

2. Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$ аргументов из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется ***возрастающей*** на множестве D_1; $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функция называется ***неубывающей*** на множестве D_1; $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется ***убывающей*** на множестве D_1; $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функция называется ***невозрастающей*** на множестве D_1.

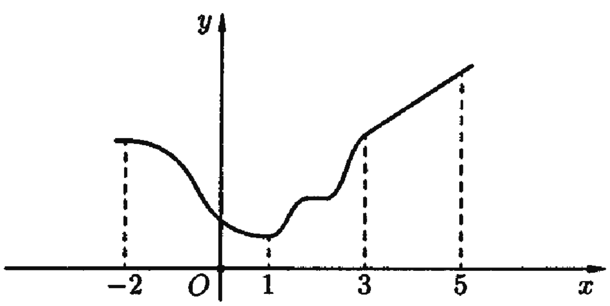


Рис. 100.

Например, функция, заданная графиком (см. рис. 100), убывает на интервале $(-2;1)$, не убывает на интервале $(1;5)$, возрастает на интервале $(3;5)$.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D_1 называются ***монотонными*** на этом множестве, а возрастающие и убывающие — ***строго монотонными.*** Интервалы, в которых функция монотонна, называются ***интервалами монотонности.*** На рисунке (выше) функция строго монотонна на $(-2;1)$ и $(3;5)$; монотонна на $(1;3)$.

3. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве D, называют ***ограниченной*** на этом множестве, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$ (короткая запись: $y = f(x)$, $x \in D$, называется ограниченной на D, если $\exists M > 0 : \forall x \in D \implies$

$\Longrightarrow\ |f(x)| \leqslant M$). Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми $y = -M$ и $y = M$ (см. рис. 101).

4. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется ***периодической*** на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что при каждом $x \in D$ значение $(x + T) \in D$ и $f(x + T) = f(x)$. При этом число T называется ***периодом*** функции. Если T — период функции, то ее периодами будут также числа $m \cdot T$, где $m = \pm 1; \pm 2, \ldots$ Так, для $y = \sin x$ периодами будут числа $\pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi, \ldots$ Основной период (наименьший положительный) — это период $T = 2\pi$. Вообще обычно за основной период берут наименьшее положительное число T, удовлетворяющее равенству $f(x + T) = f(x)$.

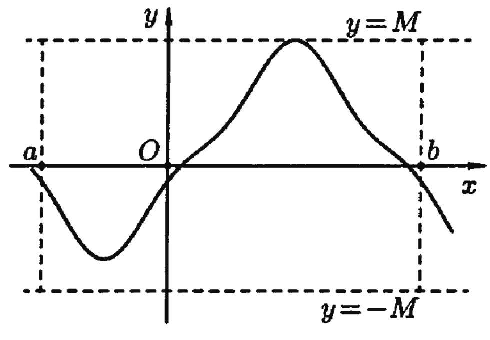


Рис. 101.

14.4. Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D (см. рис. 102). Такая функция $\varphi(y)$ называется ***обратной*** к функции $f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными. Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x)=y$ относительно x (если это возможно).

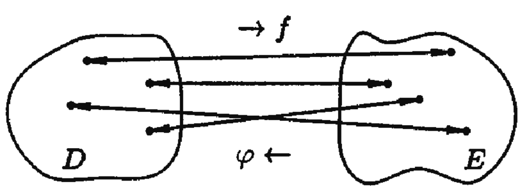


Рис. 102.

Примеры:

1. Для функции $y = 2x$ обратной функцией является функция $x = \frac{1}{2}y$;

2. Для функции $y = x^2$, $x \in [0; 1]$, обратной функцией является $x = \sqrt{y}$; заметим, что для функции $y = x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$, обратной не существует, т. к. одному значению y соответствует два значения x (так, если $y = \frac{1}{4}$, то $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$).

Из определения обратной функции вытекает, что функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами D и E. Отсюда следует, что любая ***строго монотонная функция имеет обратную.*** При этом если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Заметим, что функция $y = f(x)$ и обратная ей $x = \varphi(y)$ изображаются одной и той же кривой, т. е. графики их совпадают. Если же условиться, что, как обычно, независимую переменную (т. е. аргумент) обозначить через x, а зависимую переменную через y, то функция обратная функции $y = f(x)$ запишется в виде $y = \varphi(x)$.

Это означает, что точка $M_1(x_0; y_0)$ кривой $y = f(x)$ становится точкой $M_2(y_0; x_0)$ кривой $y = \varphi(x)$. Но точки M_1 и M_2 симметричны относительно прямой $y = x$ (см. рис. 103). Поэтому ***графики взаимно обратных функций*** $y = f(x)$ ***и*** $y = \varphi(x)$ ***симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.***

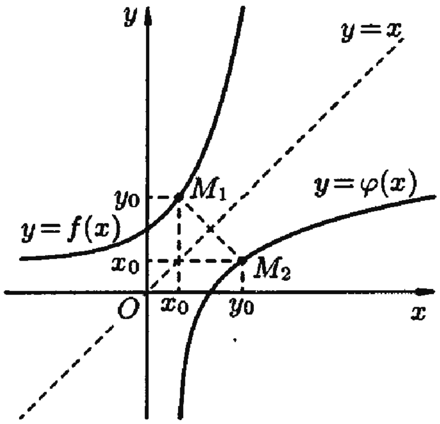


Рис. 103.

14.5. Сложная функция

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ на множестве D_1, причем для $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $u = f(\varphi(x))$, которая называется ***сложной функцией*** от x (или ***суперпозицией*** заданных функций, или ***функцией от функции***).

Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* сложной функции.

Например, функция $y = \sin 2x$ есть суперпозиция двух функций $y = \sin u$ и $u = 2x$. Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

14.6. Основные элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями называют следующие функции.

1) *Показательная* функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. На рис. 104 показаны графики показательных функций, соответствующие различным основаниям степени.

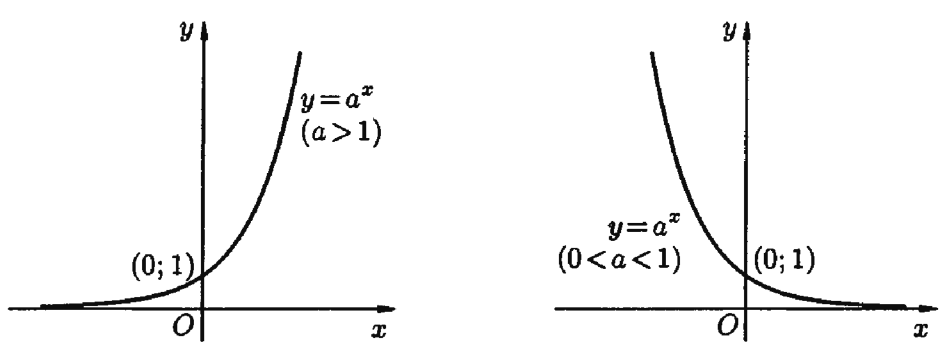


Рис. 104.

2) *Степенная* функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным показателям степени, предоставлены на рис. 105.

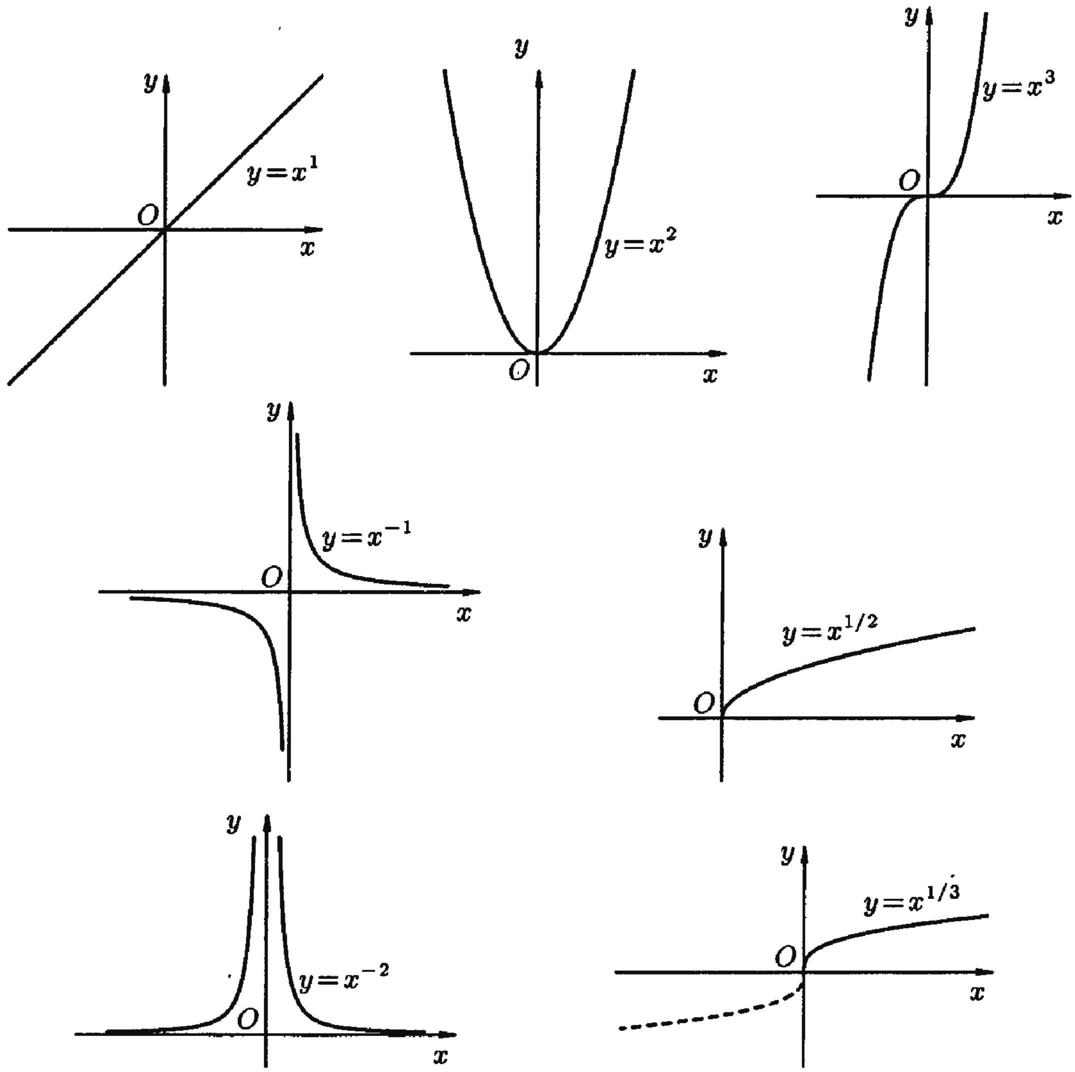


Рис. 105.

3) *Логарифмическая* функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; Графики логарифмических функций, соответствующие различным основаниям, показаны на рис. 106.

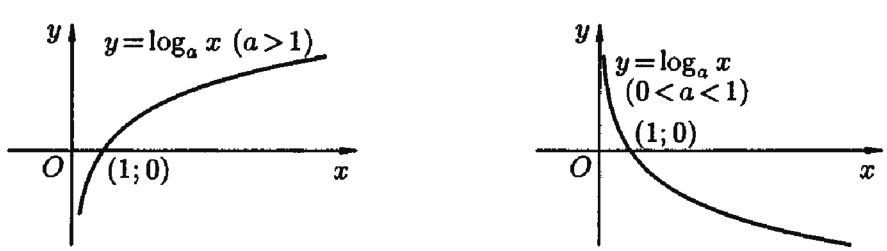


Рис. 106.

4) *Тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; Графики тригонометрических функций имеют вид, показанный на рис. 107.

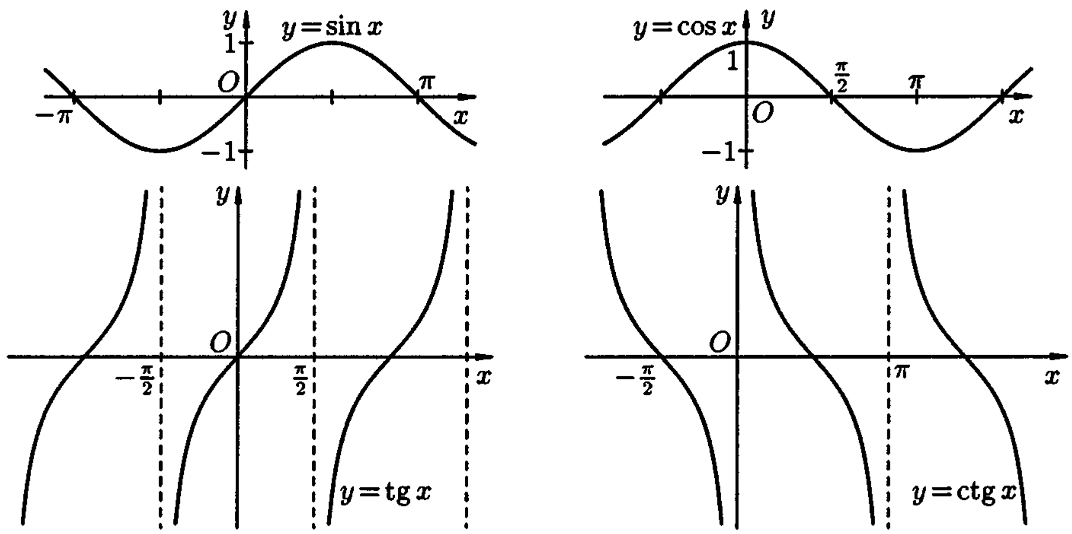


Рис. 107.

5) *Обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. На рис. 108 показаны графики обратных тригонометрических функций.

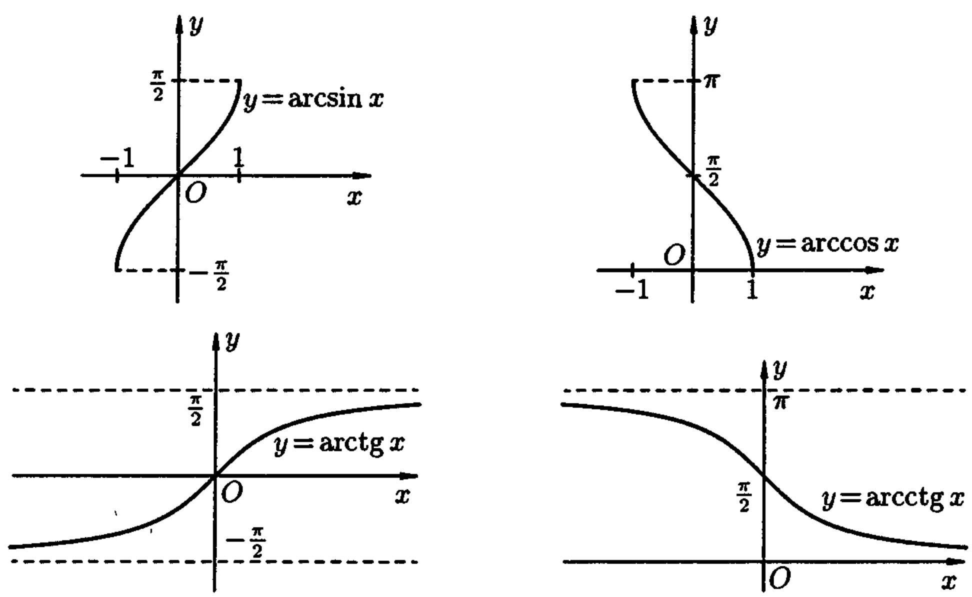


Рис. 108.

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***.

Примерами элементарных функций могут служить функции

$$y = 3^{\cos\sqrt{x}}; \quad y = \arcsin\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{tg} x}{8x^2+3}; \quad y = \lg(2+x^3).$$

Примерами *неэлементарных* функций могут служить функции

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases} \quad y = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$y = 1 - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \frac{x^7}{7!\cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot(2n+1)} + \dots$$

§ 15. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

15.1. Числовая последовательность

Под ***числовой последовательностью*** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ понимается функция

$$\boxed{x_n = f(n),} \tag{15.1}$$

заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$ или x_n, $n \in \mathbb{N}$. Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 — вторым,..., x_n — ***общим*** или ***n-м членом последовательности***.

Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена. Формула (15.1) позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n, по ней можно сразу вычислить любой член последовательности. Так, равенства

$$v_n = n^2+1, \quad z_n = (-1)^n \cdot n, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

задают соответственно последовательности

$$v_n = \{2, 5, 10, \dots, n^2+1, \dots\}; \qquad z_n = \{-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, \dots\};$$

$$y_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}; \qquad u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant M.$$

В противном случае последовательность называется неограниченной. Легко видеть, что последовательности y_n и u_n ограничены, а v_n и z_n — неограничены.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***), если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \geqslant a_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Все эти последовательности называются ***монотонными*** последовательностями. Последовательности v_n, y_n и u_n монотонные, а z_n — не монотонная.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c, то ее называют *постоянной*.

Другой способ задания числовых последовательностей — *рекуррентный способ*. В нем задается начальный элемент x_1 (первый член последовательности) и правило определения n-го элемента по $(n-1)$-му:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Таким образом, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ и т. д. При таком способе задания последовательности для определения 100-го члена надо сначала посчитать все 99 предыдущих.

15.2. Предел числовой последовательности

Можно заметить, что члены последовательности u_n неограниченно приближаются к числу 1. В этом случае говорят, что последовательность u_n, $n \in \mathbb{N}$ стремится к пределу 1.

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{15.2}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная x_n, пробегающая последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$) имеет предел, равный числу a (или x_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к* a.

Коротко определение предела можно записать так:

$$\boxed{(\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \iff \lim_{n\to\infty} x_n = a.}$$

Пример 15.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

Решение: По определению, число 1 будет пределом последовательности $x_n = \dfrac{n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, если $\forall\varepsilon > 0$ *найдется* натуральное число N, такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$, т. е. $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Оно справедливо для всех $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. для всех $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ — целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$ (целая часть числа x; обозначаемая $[x]$, есть наибольшее целое число, не превосходящее x; так $[3] = 3$, $[5{,}2] = 5$).

Если $\varepsilon > 1$, то в качестве N можно взять $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Итак, $\forall\varepsilon > 0$ указано соответствующее значение N. Это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$. ●

Заметим, что число N зависит от ε. Так, если $\varepsilon = \frac{3}{26}$, то

$$N = \left[\frac{1}{\frac{3}{26}}\right] = \left[\frac{26}{3}\right] = \left[8\frac{2}{3}\right] = 8;$$

если $\varepsilon = 0{,}01$, то

$$N = \left[\frac{1}{\frac{1}{100}}\right] = [100] = 100.$$

Поэтому иногда записывают $N = N(\varepsilon)$.

Выясним геометрический смысл определения предела последовательности.

Неравенство (15.2) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которые показывают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a.

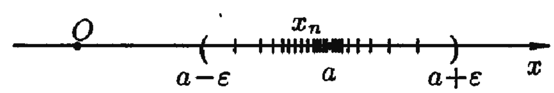


Рис. 109.

Поэтому определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε-окрестность точки a (см. рис. 109).

Ясно, что чем меньше ε, тем больше число N, но в любом случае внутри ε-окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное их число.

Отсюда следует, что ***сходящаяся последовательность имеет только один предел.*** Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся.*** Таковой является, например, последовательность v_n (см. с. 107).

Постоянная последовательность $x_n = c$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предел, равный числу c, т. е. $\lim c = c$. Действительно, для $\forall\varepsilon > 0$ при всех натуральных n выполняется неравенство (15.2). Имеем $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

15.3. Предельный переход в неравенствах

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$.

Теорема 15.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \leqslant y_n$, то $a \leqslant b$.

❑ Допустим, что $a > b$. Из равенств $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ и $|y_n - b| < \varepsilon$, т. е. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Тогда: $x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, т. е. $x_n > \frac{a+b}{2}$ и $y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, т. е. $y_n < \frac{a+b}{2}$. Отсюда следует, что $x_n > y_n$. Это противоречит условию $x_n \leqslant y_n$. Следовательно, $a \leqslant b$. ■

Теорема 15.2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и справедливо неравенство $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(Примем без доказательства.)

15.4. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число e. Натуральные логарифмы

Не всякая последовательность имеет предел. Сформулируем без доказательства признак существования предела последовательности.

Теорема 15.3 (Вейерштрасс). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

В качестве примера на применение этого признака рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

По формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot b^n.$$

Полагая $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (15.3)$$

Из равенства (15.3) следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает, поэтому величины $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\ldots$ возрастают. Поэтому последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — *возрастающая*, при этом

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2. \tag{15.4}$$

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства (15.3) на единицу; правая часть увеличится, получим неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Усилим полученное неравенство, заменив числа $3, 4, 5, \ldots$, стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2 = 3. \tag{15.5}$$

Итак, последовательность *ограничена*, при этом для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства (15.4) и (15.5):

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, обозначаемый обычно буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{15.6}$$

Число e называют *неперовым* числом. Число e иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 ($e = 2{,}718281828459045\ldots$). Число e принято за основание натуральных логарифмов: логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$, т. е. $\ln x = \log_e x$.

Найдем связь между натуральным и десятичным логарифмами. По определению логарифма имеем $x = e^{\ln x}$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию 10:

$$\lg x = \lg(e^{\ln x}), \quad \text{т. е. } \lg x = \ln x\cdot\lg e.$$

Пользуясь десятичными логарифмами, находим $\lg e \approx 0{,}4343$. Значит, $\lg x \approx 0{,}4343\cdot\ln x$. Из этой формулы следует, что $\ln x \approx \frac{1}{0{,}4343}\lg x$, т. е. $\ln x \approx 2{,}3026\lg x$. Полученные формулы дают связь между натуральными и десятичными логарифмами.

§ 16. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

16.1. Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции в точке.

Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $n \in \mathbb{N}$ $(x_n \neq x_0)$, сходящейся к x_0 (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к числу A (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$. Геометрический смысл предела функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A.

Определение 2 (на «языке ε-δ», или по Коши). Число A называется ***пределом функции в точке*** x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Это определение коротко можно записать так:

$$\Bigl(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x:\ \underbrace{|x - x_0| < \delta,\quad x \neq x_0}_{\text{или } 0 < |x - x_0| < \delta} \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\Bigr) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предела функции: $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$ (см. рис. 110). Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

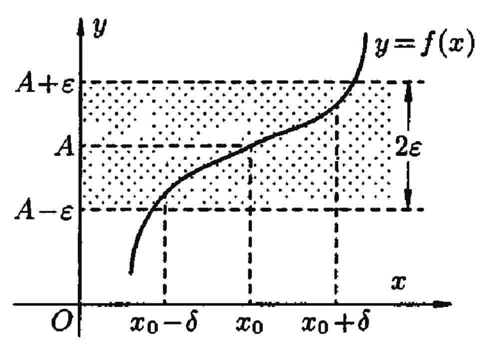


Рис. 110.

Пример 16.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x - 1) = 5$.

Решение: Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-3| < \delta$, выполняется неравенство $|(2x-1)-5| < \varepsilon$, т. е. $|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, видим, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-3| < \delta\left(=\frac{\varepsilon}{2}\right)$, выполняется неравенство $|(2x-1)-5| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1) = 5$. ●

Пример 16.2. Доказать, что, если $f(x) = c$, то $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

Решение: Для $\forall\varepsilon > 0$ можно взять $\forall\delta > 0$. Тогда при $|x-x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ имеем $|f(x)-c| = |c-c| = 0 < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$. ●

16.2. Односторонние пределы

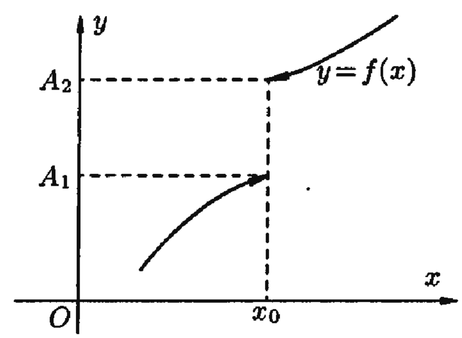


Рис. 111.

В определении предела функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Число A_1 называется ***пределом функции $y = f(x)$ слева*** в точке x_0, если для любого число $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0-\delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ или коротко: $f(x_0-0) = A_1$ (обозначение Дирихле) (см. рис. 111).

Аналогично определяется *предел функции справа*, запишем его с помощью символов:

$$\Big(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x \in (x_0; x_0+\delta) \implies |f(x)-A_2| < \varepsilon\Big) \iff$$

$$\iff \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2.$$

Коротко предел справа обозначают $f(x_0+0) = A_2$.

Пределы функции слева и справа называются ***односторонними*** пределами. Очевидно, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ и они равны, то существует предел $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $A = f(x_0-0)$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

16.3. Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; \infty)$. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротко это определение можно записать так:

$$\boxed{\Big(\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x:\ |x| > M \implies |f(x) - A| < \varepsilon\Big) \iff \lim_{x\to\infty} f(x) = A.}$$

Если $x \to +\infty$, то пишут $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, если $x \to -\infty$, то — $A = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Геометрический смысл этого определения таков: для $\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0$, что при $x \in (-\infty; -M)$ или $x \in (M; +\infty)$ соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A, т. е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$ (см. рис. 112).

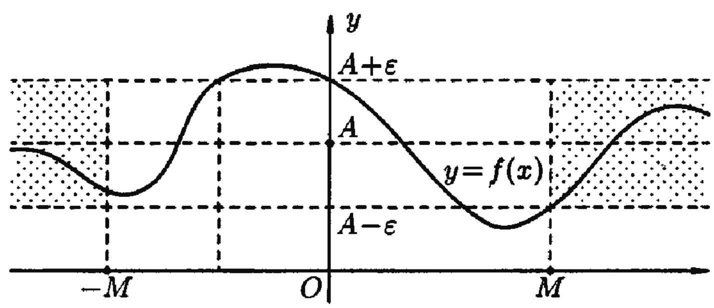


Рис. 112.

16.4. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Коротко:

$$\boxed{\Big(\forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x:\ |x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0 \implies |f(x)|>M\Big) \iff \lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.}$$

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x \to 2$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$ и принимает лишь положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$; если лишь отрицательные значения, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Функция $y = f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется ***бесконечно большой при*** $x \to \infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $N = N(M) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Коротко:

$$\Big(\forall M > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; \forall x: \quad |x| > N \implies |f(x)| > M\Big) \iff \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Например, $y = 2^x$ есть б.б.ф. при $x \to \infty$.

Отметим, что если аргумент x, стремясь к бесконечности, принимает лишь натуральные значения, т. е. $x \in \mathbb{N}$, то соответствующая б.б.ф. становится бесконечно большой последовательностью. Например, последовательность $v_n = n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$, является бесконечно большой последовательностью. Очевидно, *всякая б.б.ф. в окрестности* точки x_0 *является неограниченной* в этой окрестности. Обратное утверждение неверно: неограниченная функция может и не быть б.б.ф. (Например, $y = x \sin x$.)

Однако, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, *где A — конечное число, то функция $f(x)$ ограничена* в окрестности точки x_0.

Действительно, из определения предела функции следует, что при $x \to x_0$ выполняется условие $|f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, а это и означает, что функция $f(x)$ ограничена.

§ 17. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ (Б.М.Ф.)

17.1. Определения и основные теоремы

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой при*** $x \to x_0$, если

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.} \tag{17.1}$$

По определению предела функции равенство (17.1) означает: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогично определяется б.м.ф. при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$: во всех этих случаях $f(x) \to 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α, β и т. д.

Примерами б.м.ф. служат функции $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 2$ при $x \to 2$; $y = \sin x$ при $x \to \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Другой пример: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, — бесконечно малая последовательность.

Теорема 17.1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

❑ Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две б.м. функции при $x \to x_0$. Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, т. е. для *любого* $\varepsilon > 0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется число

$\delta_1>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta_1$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{17.2}$$

и $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$, т. е.

$$\left(\forall\frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \ \exists\delta_2 > 0 \ \ \forall x: \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_2\right) \implies |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17.3}$$

Пусть δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняются оба неравенства (17.2) и (17.3). Следовательно, имеет место соотношение

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \ \ \forall x: \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon.$$

Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha(x)+\beta(x)) = 0$, т. е. $\alpha(x)+\beta(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$. ■

Аналогично проводится доказательство для любого конечного числа б.м. функций.

Теорема 17.2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

❑ Пусть функция $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$. Тогда существует такое число $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \tag{17.4}$$

для всех x из δ_1-окрестности точки x_0. И пусть $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$. Тогда для *любого* $\varepsilon > 0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ найдется такое число $\delta_2 > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_2$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{17.5}$$

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняются оба неравенства (17.4) и (17.5). Следовательно, $|f(x)\cdot\alpha(x)| = |f(x)|\cdot|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon$. А это означает, что произведение $f(x) \cdot \alpha(x)$ при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция. ■

Следствие 17.1. Так как всякая б.м.ф. ограничена, то из теоремы (17.2) вытекает: произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая.

Следствие 17.2. Произведение б.м.ф. на число есть функция бесконечно малая.

Теорема 17.3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

❑ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\neq 0$. Функция $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}$ может быть представлена в виде произведения б.м.ф. $\alpha(x)$ на ограниченную функцию $\dfrac{1}{f(x)}$. Но тогда из теоремы (17.2) вытекает, что частное $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}=\alpha(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}$ есть функция бесконечно малая.

Покажем, что функция $\dfrac{1}{f(x)}$ ограниченная. Возьмем $\varepsilon<|a|$. Тогда, на основании определения предела, найдется $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$. А так как $\varepsilon>|f(x)-a|=|a-f(x)|\geqslant|a|-|f(x)|$, то $|a|-|f(x)|<\varepsilon$, т. е. $|f(x)|>|a|-\varepsilon>0$. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|=\frac{1}{|f(x)|}<\frac{1}{|a|-\varepsilon}=M,$$

т. е. функция $\dfrac{1}{f(x)}$ — ограниченная. ■

Теорема 17.4. Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая ($\alpha\neq 0$), то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция $f(x)$ — бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая.

❑ Пусть $\alpha(x)$ есть б.м.ф. при $x\to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Тогда

$$\Big(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:\ \ 0<|x-x_0|<\delta\Big)\implies|\alpha(x)|<\varepsilon,$$

т. е. $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right|>M$, где $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$. А это означает, что функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая. Аналогично доказывается обратное утверждение. ■

Замечание: Доказательства теорем приводились для случая, когда $x\to x_0$, но они справедливы и для случая, когда $x\to\infty$..

Пример 17.1. Показать, что функция

$$f(x)=(x-1)^2\cdot\sin^3\frac{1}{x-1}$$

при $x\to 1$ является бесконечно малой.

○ Решение: Так как $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$, то функция $\varphi(x)=(x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x\to1$. Функция $g(x)=\sin^3\frac{1}{x-1}$, $x\neq1$, ограничена $\left|\sin^3\frac{1}{x-1}\right|\leqslant1$.

Функция $f(x)=(x-1)^2\cdot\sin^3\frac{1}{x-1}$ представляет собой произведение ограниченной функции ($g(x)$) на бесконечно малую ($\varphi(x)$). Значит, $f(x)$ — бесконечно малая при $x\to1$. ●

17.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

Теорема 17.5. Если функция $f(x)$ имеем предел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т. е. если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, то $f(x)=A+\alpha(x)$.

❑ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. Следовательно,

$$\Big(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta\Big)\implies|f(x)-A|<\varepsilon,$$

т. е. $|f(x)-A-0|<\varepsilon$. Это означает, что функция $f(x)-A$ имеет предел, равный нулю, т. е. является б.м.ф., которую обозначим через $\alpha(x)$: $f(x)-A=\alpha(x)$. Отсюда $f(x)=A+\alpha(x)$. ■

Теорема 17.6 (обратная). Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то число A является пределом функции $f(x)$, т. е. если $f(x)=A+\alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

❑ Пусть $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x\to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Тогда

$$\Big(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta\Big)\implies|\alpha(x)|<\varepsilon.$$

А так как по условию $f(x)=A+\alpha(x)$, то $\alpha(x)=f(x)-A$. Получаем

$$\Big(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta\Big)\implies|f(x)-A|<\varepsilon.$$

А это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. ■

Пример 17.2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to2}(5+x)=7$.

○ Решение: Функцию $5+x$ можно представить в виде суммы числа 7 и б.м.ф. $x-2$ (при $x\to2$), т. е. выполнено равенство $5+x=7+(x-2)$. Следовательно, по теореме 17.6 получаем $\lim\limits_{x\to2}(5+x)=7$. ●

17.3. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции. Формулировка и доказательство теорем для случаев, когда $x \to x_0$ и $x \to \infty$, аналогичны. В приводимых теоремах будем считать, что пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ существуют.

Теорема 17.7. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

❑ Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$. Тогда по теореме 17.5 о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Следовательно, $f(x) + \varphi(x) = A + B + (\alpha(x) + \beta(x))$. Здесь $\alpha(x) + \beta(x)$ — б.м.ф. как сумма б.м.ф. По теореме 17.6 о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x). \qquad \blacksquare$$

В случае разности функций доказательство аналогично.

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Следствие 17.3. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

❑ Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$. По теореме 17.7 имеем:

$$0 = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = A - B.$$

Отсюда $A - B = 0$, т. е. $A = B$. ■

Теорема 17.8. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

❑ Доказательство аналогично предыдущему, проведем его без особых пояснений. Так как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$, то

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad \varphi(x) = B + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м.ф. Следовательно,

$$f(x) \cdot \varphi(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)),$$

т. е.

$$f(x) \cdot \varphi(x) = AB + (A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)).$$

Выражение в скобках есть б.м.ф. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = A\cdot B,$$

т. е.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0}\varphi(x). \quad \blacksquare$$

Отметим, что теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Следствие 17.4. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x).$$

❑ $\lim\limits_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x).$ ■

Следствие 17.5. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$. В частности, $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $n\in\mathbb{N}$.

❑ $$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = \lim_{x\to x_0}\underbrace{(f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x))}_{n\text{ сомножителей}} = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to x_0} f(x) =$$
$$= \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n. \quad \blacksquare$$

Теорема 17.9. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} \quad \left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0\right).$$

❑ Доказательство аналогично предыдущему. Из равенств

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = B\neq 0$$

следуют соотношения $f(x) = A+\alpha(x)$ и $\varphi(x) = B+\beta(x)$. Тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B}\right) = \frac{A}{B} + \frac{B\cdot\alpha(x) - A\cdot\beta(x)}{B^2+B\cdot\beta(x)}.$$

Второе слагаемое есть б.м.ф. как частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел.

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$. ■

Рассмотрим *пример*.

Пример 17.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+7)$.

Решение:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+7)=\lim_{x\to 1}3x^2-\lim_{x\to 1}2x+\lim_{x\to 1}7=$$
$$=3\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-2\lim_{x\to 1}x+7=3\cdot 1-2+7=8.$$

Пример 17.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение: Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, т. к. предел знаменателя, при $x\to 2$, равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x-2\neq 0$ ($x\to 2$, но $x\neq 2$):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Пример 17.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

Решение: Здесь мы имеем дело с *неопределенностью вида* $\frac{\infty}{\infty}$. Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}=\frac{1}{2}.$$

Функция $2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ есть сумма числа 2 и б.м.ф., поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2;\quad \lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=4.$$

17.4. Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Например, функция $y=\sin x$ при $x\to\infty$ предела не имеет. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

Теорема 17.10 (о пределе промежуточной функции). Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т. е. если

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = A, \tag{17.6}$$

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x), \tag{17.7}$$

то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

❑ Из равенств (17.6) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют две окрестности δ_1 и δ_2 точки x_0, в одной из которых выполняется неравенство $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$, т. е.

$$-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon, \tag{17.8}$$

а в другой $|g(x) - A| < \varepsilon$, т. е.

$$-\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon. \tag{17.9}$$

Пусть δ — меньшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда в δ-окрестности точки x_0 выполняются оба неравенства (17.8) и (17.9).

Из неравенств (17.7) находим, что

$$\varphi(x) - A \leqslant f(x) - A \leqslant g(x) - A. \tag{17.10}$$

С учетом неравенств (17.8) и (17.9) из неравенства (17.10) следуют неравенства $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$ или $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Мы доказали, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x: \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ■

Теорему 17.10 иногда шутливо называют «принципом двух милиционеров». Роль «милиционеров» играют функции $\varphi(x)$ и $g(x)$, функция $f(x)$ «следует за милиционерами».

Теорема 17.11 (о пределе монотонной функции). Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ или ее правый предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Доказательство этой теоремы не приводим.

Следствие 17.6. Ограниченная монотонная последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел.

17.5. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,} \tag{17.11}$$

называемый ***первым замечательным пределом.*** Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю. Докажем равенство (17.11).

❑ Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла MOB через x (см. рис. 113). Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке $|AM| = \sin x$, дуга MB численно равна центральному углу x, $|BC| = \operatorname{tg} x$. Очевидно, имеем $S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектора } MOB} < S_{\triangle COB}$. На основании соответствующих формул геометрии получаем $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Разделим неравенства на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то по признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

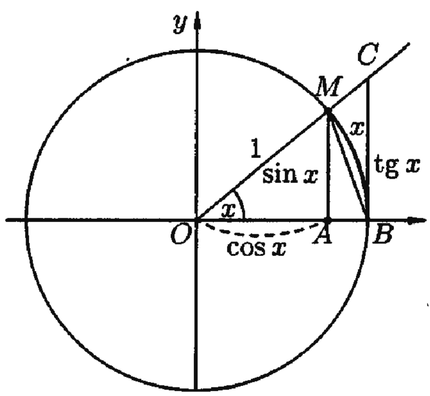


Рис. 113.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{17.12}$$

Пусть теперь $x < 0$. Имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x > 0$. Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{17.13}$$

Из равенств (17.12) и (17.13) вытекает равенство (17.11). ■

Пример 17.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$.

○ Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \to 0$ и $t \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}. \quad ●$$

Пример 17.7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

○ Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1.$

●

17.6. Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, равный e (см. (15.6)):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{17.14}$$

Докажем, что к числу e стремится и функция $x_n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ ($x \in \mathbb{R}$):

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.} \tag{17.15}$$

1. Пусть $x \to +\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \leqslant x < n+1$, где $n = [x]$ — это целая часть x. Отсюда следует $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$, $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Если $x \to +\infty$, то $n \to \infty$. Поэтому, согласно (17.14), имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{17.16}$$

2. Пусть $x \to -\infty$. Сделаем подстановку $-x = t$, тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^1 = e \cdot 1 = e. \tag{17.17}$$

Из равенств (17.16) и (17.17) вытекает равенство (17.15).

Если в равенстве (17.15) положить $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha \to 0$ при $x \to \infty$), оно запишется в виде

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.} \tag{17.18}$$

Равенства (17.15) и (17.18) называются ***вторым замечательным пределом***. Они широко используются при вычислении пределов. В приложениях анализа большую роль играет показательная функция с основанием e. Функция $y = e^x$ называется ***экспоненциальной***, употребляется также обозначение $e^x = \exp(x)$.

Пример 17.8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \to \infty$ при $x \to \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e\cdot e = e^2.$$

§ 18. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

18.1. Сравнение бесконечно малых функций

Как известно, сумма, разность и произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая. Отношение же двух б.м.ф. может вести себя различным образом: быть конечным числом, быть бесконечно большой функцией, бесконечно малой или вообще не стремиться ни к какому пределу.

Две б.м.ф. сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ ($A \in \mathbb{R}$), то α и β называются *бесконечно малыми одного порядка.*
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = 0$, то α называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем β.
3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α называется *бесконечно малой более низкого порядка*, чем β.
4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β называются *несравнимыми бесконечно малыми.*

Отметим, что таковы же правила сравнения б.м.ф. при $x \to \pm\infty$, $x \to x_0 \pm 0$.

Пример 18.1. Сравнить порядок функций $\alpha = 3x^2$ и $\beta = 14x^2$ при $x \to \infty$.

Решение: При $x \to 0$ это б.м.ф. одного порядка, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{14x^2} = \frac{3}{14} \neq 0.$$

Говорят, что б.м.ф. α и β одного порядка стремятся к нулю с примерно одинаковой скоростью.

Пример 18.2. Являются ли функции $\alpha = 3x^4$ и $\beta = 7x$ б.м.ф. одного порядка при $x \to 0$?

Решение: При $x \to 0$ функция α есть б.м.ф. более высокого порядка, чем β, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^4}{7x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3}{7} = 0$. В этом случае б.м.ф. α стремится к нулю быстрее, чем β. ●

Пример 18.3. Сравнить порядок функций $\alpha = \operatorname{tg} x$ и $\beta = x^2$ при $x \to 0$.

Решение: Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} = \infty,$$

то α есть б.м.ф. более низкого порядка, чем β. ●

Пример 18.4. Можно ли сравнить функции $\alpha = x\cdot\sin\frac{1}{x}$ и $\beta = x$ при $x \to 0$?

Решение: Функции $\alpha = x\cdot\sin\frac{1}{x}$ и $\beta = x$ при $x \to 0$ являются несравнимыми б.м.ф., так как предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует. ●

18.2. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них

Среди бесконечно малых функций одного порядка особую роль играют так называемые эквивалентные бесконечно малые.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** (при $x \to x_0$); это обозначается так: $\alpha \sim \beta$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Теорема 18.1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

❑ Пусть $\alpha \sim \alpha'$ и $\beta \sim \beta'$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha'}\cdot\frac{\beta'}{\beta'}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\beta}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'} = 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'},$$

т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}$.

Очевидно также, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta'}$. ■

Теорема 18.2. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

❑ Пусть $\alpha \sim \beta$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = \lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha} = 1-1=0,$$

аналогично $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha-\beta}{\beta} = 0$. ■

Справедливо и обратное утверждение: если разность б.м.ф. α и β есть бесконечно малая высшего порядка, чем α или β, то α и β — эквивалентные бесконечно малые.

Действительно, так как $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha} = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, т. е. $1-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha} = 0$. Отсюда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, т. е. $\alpha \sim \beta$. Аналогично, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\beta} = 0$, то $\alpha \sim \beta$.

Теорема 18.3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

❑ Докажем теорему для двух функций. Пусть $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $x \to x_0$, причем α — б.м.ф. высшего порядка, чем β, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}+1 = 0+1=1.$$

Следовательно, $\alpha+\beta \sim \beta$ при $x \to x_0$. ■

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется *главной частью этой суммы.*

Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется *отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.*

Пример 18.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2}{\sin 2x}$.

❍ Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$, поскольку $3x+7x^2 \sim 3x$ и $\sin 2x \sim 2x$ при $x \to 0$. ●

18.3. Применение эквивалентных бесконечно малых функций

Вычисление пределов

Для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ часто бывают полезным применять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций. Как известно, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$. Приведем еще примеры эквивалентных б.м.ф.

Пример 18.6. Покажем, что $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ (\frac{x}{2}\to 0)}}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1\cdot 1 = 1.$ ●

Пример 18.7. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение: Обозначим $\arcsin x = t$. Тогда $x = \sin t$ и $t \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$. ●

Пример 18.8. Покажем, что $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$.

Решение: Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{x}{2}\cdot(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{2}{2} = 1,$$

то $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$. ●

Ниже приведены *важнейшие эквивалентности*, которые используются при вычислении пределов:

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x$ $(x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ $(x \to 0)$;
5. $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$;
6. $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$;
7. $a^x - 1 \sim x\cdot\ln a$ $(x \to 0)$;
8. $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$;
9. $\log_a(1+x) \sim x\cdot\log_a e$ $(x \to 0)$;
10. $(1+x)^k - 1 \sim k\cdot x$, $k > 0$ $(x \to 0)$;
    в частности, $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$.

Пример 18.9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

Решение: Так как $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$ ●

Пример 18.10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1)$.

Решение: Обозначим $\frac{1}{x}=t$, из $x\to\infty$ следует $t\to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^t-1)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot t=\lim_{t\to 0}1=1.$$

Пример 18.11. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2-5x+4}$.

Решение: Так как $\arcsin(x-1)\sim(x-1)$ при $x\to 1$, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{3}.$$

Приближенные вычисления

Если $\alpha\sim\beta$, то, отбрасывая в равенстве $\alpha=\beta+(\alpha-\beta)$ бесконечно малую более высокого порядка, т. е. $\alpha-\beta$, получим приближенное равенство $\alpha\approx\beta$.

Оно позволяет выражать одни бесконечно малые через другие. Приведенные выше важнейшие эквивалентности служат источником ряда приближенных формул.

Приведенные формулы справедливы при малых x, и они тем точнее, чем меньше x.

Например, графики функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=x$ в окрестности точки 0 практически не различимы (см. рис. 114), а кривая $y=\sin x$ в окрестности точки 0 сливается с прямой $y=x$ (рис. 115). На рисунках 116–118 проиллюстрированы некоторые из важнейших эквивалентностей, о которых говорилось выше.

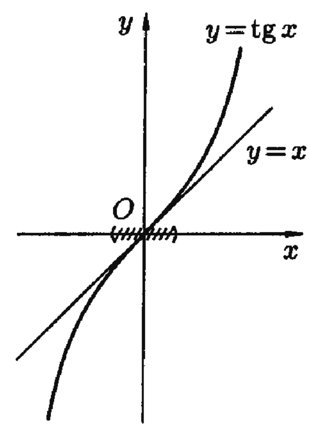


Рис. 114. $\operatorname{tg}x\approx x\ (x\to 0)$

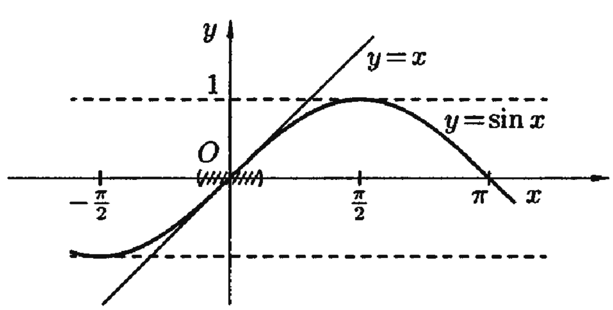


Рис. 115. $\sin x\approx x\ (x\to 0)$

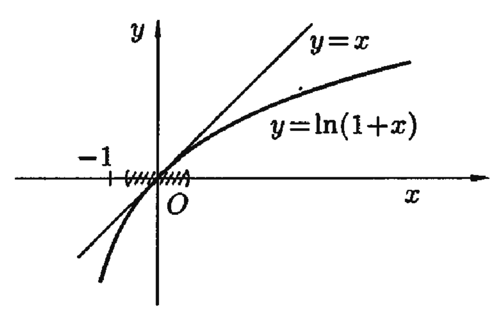


Рис. 116. $\ln(1+x)\approx x\ (x\to 0)$

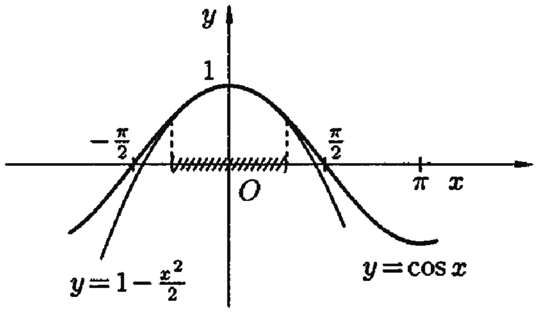


Рис. 117. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$

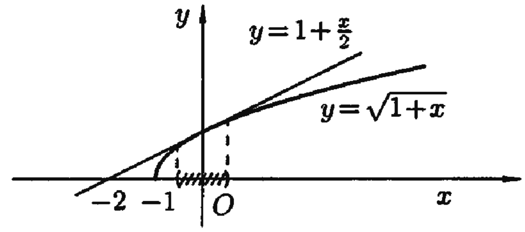


Рис. 118. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ $(x \to 0)$

Пример 18.12. Найти приближенное значение для $\ln 1{,}032$.

Решение: $\ln 1{,}032 = \ln(1 + 0{,}032) \approx 0{,}032$ Для сравнения результата по таблице логарифмов находим, что $\ln 1{,}032 = 0{,}031498\ldots$ ●

§ 19. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

19.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).} \qquad (19.1)$$

Равенство (19.1) означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;

2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т. е. выполняется равенство (19.1).

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то равенство (19.1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0). \qquad (19.2)$$

Это означает, что *при нахождении предела непрерывной функции* $f(x)$ *можно перейти к пределу под знаком функции*, то есть *в функцию* $f(x)$ *вместо аргумента* x *подставить его предельное значение* x_0.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = e$. В первом равенстве функция и предел поменялись местами (см. (19.2)) в силу непрерывности функции e^x.

Пример 19.1. Вычислить $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1.$$

Отметим, что $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a;b)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$. Для любого $x \in (a;b)$ разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента x в точке x_0* и обозначается Δx («дельта x»): $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции $f(x)$ в точке x_0* и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ (см. рис. 119).

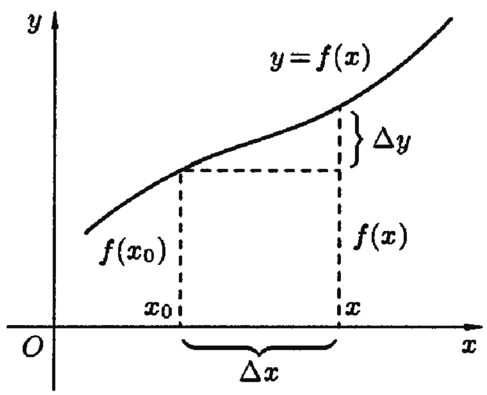


Рис. 119.

Очевидно, приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Запишем равенство (19.1) в новых обозначениях. Так как условия $x \to x_0$ и $x - x_0 \to 0$ одинаковы, то равенство (19.1) принимает вид $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$ или

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0.} \qquad (19.3)$$

Полученное равенство (19.3) является еще одним определением непрерывности функции в точке: функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство (19.3), т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Исследуя непрерывность функции в точке, применяют либо первое (равенство (19.1)), либо второе (равенство (19.3)) определение.

Пример 19.2. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin x$.

Решение: Функция $y = \sin x$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

Возьмем произвольную точку x и найдем приращение Δy:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, так как произведение ограниченной функции и б.м.ф. есть б.м.ф.

Согласно определению (19.3), функция $y = \sin x$ непрерывна в точке x.

Аналогично доказывается, что функция $y = \cos x$ также непрерывна.

19.2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) и в точке $x = a$ *непрерывна справа* $\left(\text{т. е. } \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)\right)$, а в точке $x = b$ *непрерывна слева* $\left(\text{т. е. } \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)\right)$.

19.3. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва этой функции***. Если $x = x_0$ — точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

1. Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0 = 2$ (см. рис. 120).

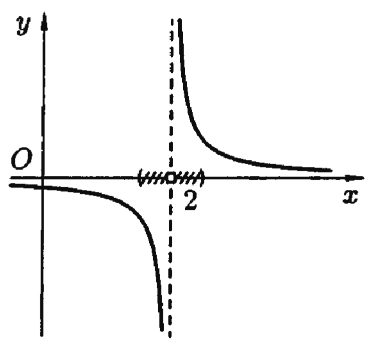


Рис. 120.

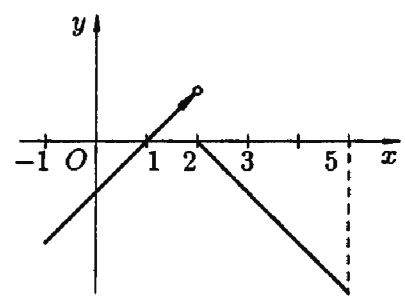


Рис. 121.

2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \to x_0$.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если} \quad -1 \leqslant x < 2, \\ 2 - x, & \text{если} \quad 2 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases}$$

определена в точке $x_0 = 2$ $\quad (f(2) = 0)$, однако в точке $x_0 = 2$ имеет разрыв (см. рис. 121), т. к. эта функция не имеет предела при $x \to 2$:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = 1, \text{ а } \lim_{x \to 2+0} f(x) = 0.$$

3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Например, функция (см. рис. 122)

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Здесь $x_0 = 0$ — точка разрыва:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а $g(x_0) = g(0) = 2$.

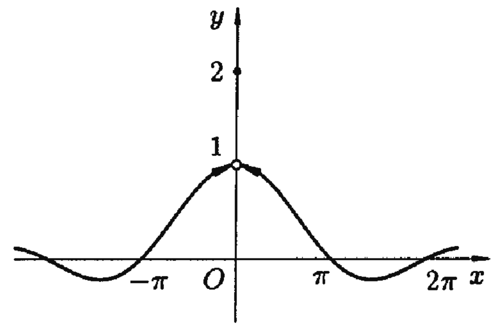


Рис. 122.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*; б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется *точкой конечного разрыва*. Величину $|A_1 - A_2|$ называют ***скачком функции*** в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

1. Обратимся к функциям, рассмотренным выше (см. рис. 120). $y = \frac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$ — точка разрыва второго рода.

2. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } -1 \leqslant x < 2, \\ 2 - x, & \text{если } 2 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases}$$

$x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода, скачок функции равен $|1 - 0| = 1$.

3. Для функции

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода. Положив $g(x) = 1$ (вместо $g(x) = 2$) при $x = 0$, разрыв устранится, функция станет непрерывной.

Пример 19.3. Дана функция $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$. Найти точки разрыва, выяснить их тип.

Решение: Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Очевидно, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 3, \\ -1 & \text{при } x < 3. \end{cases}$ Следовательно, $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = -1$. Поэтому в точке $x = 3$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен $1 - (-1) = 2$. ●

19.4. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций

Теоремы о непрерывности функций следуют непосредственно из соответствующих теорем о пределах.

Теорема 19.1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).

❑ Пусть функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на некотором множестве X и x_0 — любое значение из этого множества. Докажем, например, непрерывность произведения $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$. Применяя теорему о пределе произведения, получим:

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f(x_0)\cdot\varphi(x_0) = F(x_0).$$

Итак, $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, что и доказывает непрерывность функции $f(x) \cdot \varphi(x)$ в точке x_0. ■

Теорема 19.2. Пусть функции $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.

❑ В силу непрерывности функции $u = \varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т. е. при $x \to x_0$ имеем $u \to u_0$. Поэтому вследствие непрерывности функции $y = f(u)$ имеем:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Это и доказывает, что сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0. ■

Теорема 19.3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$ оси Ox, то обратная функция $y = \varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c; d]$ оси Oy (без доказательства).

Так, например, функция $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, в силу теоремы 19.1, есть функция непрерывная для всех значений x, кроме тех, для которых $\cos x = 0$, т. е. кроме значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Функции $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arcctg} x$, в силу теоремы 19.3, непрерывны при всех значениях x, при которых эти функции определены.

Можно доказать, что ***все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.***

Как известно, *элементарной* называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций. Поэтому из приведенных выше теорем вытекает: ***всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.***

Этот важный результат позволяет, в частности, легко находить пределы элементарных функций в точках, где они определены.

Пример 19.4. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{\operatorname{ctg} x}$.

○ Решение: Функция $2^{\operatorname{ctg} x}$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{4}$, поэтому $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{\operatorname{ctg} x} = 2^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}} = 2^1 = 2$. ●

19.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их в виде теорем, не приводя доказательств.

Теорема 19.4 (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Изображенная на рисунке 123 функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, принимает свое наибольшее значение M в точке x_1, а наименьшее m — в точке x_2. Для любого $x \in [a; b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

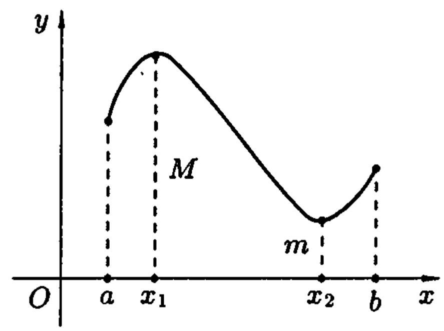


Рис. 123.

Следствие 19.1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 19.5 (Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

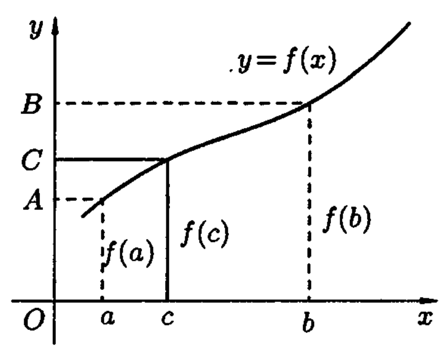


Рис. 124.

Геометрически теорема очевидна (см. рис. 124).

Для любого числа C, заключенного между A и B, найдется точка c внутри этого отрезка такая, что $f(c) = C$. Прямая $y = C$ пересечет график функции по крайней мере в одной точке.

Следствие 19.2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox (см. рис. 125).

Следствие 19.2 лежит в основе так называемого «*метода половинного деления*», который используется для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$.

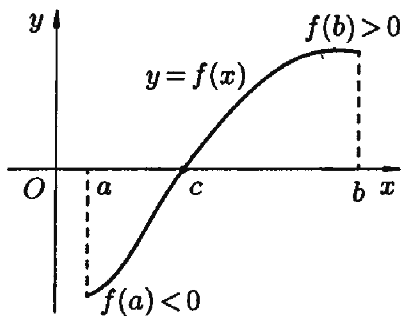


Рис. 125.

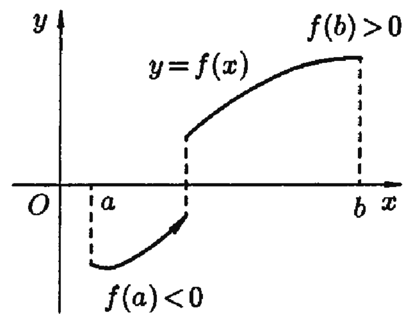


Рис. 126.

Утверждения теорем 19.4 и 19.5, вообще говоря, делаются неверными, если нарушены какие-либо из ее условий: функция непрерывна не на отрезке $[a;b]$, а в интервале $(a;b)$, либо функция на отрезке $[a;b]$ имеет разрыв.

Рисунок 126 показывает это для следствия теоремы 19.5: график разрывной функции не пересекает ось Ox.

Пример 19.5. Определить с точностью до $\varepsilon = 0{,}00001$ корень уравнения $e^{2x+1} + x^2 - 5 = 0$, принадлежащий отрезку $[0;1]$, применив метод половинного деления.

Решение: Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$.

Шаг 1. Вычисляем $\varphi = f(a)$ и $\psi = f(b)$, где $a = 0$, $b = 1$.

Шаг 2. Вычисляем $x = \frac{a+b}{2}$.

Шаг 3. Вычисляем $y = f(x)$. Если $f(x) = 0$, то x — корень уравнения.

Шаг 4. При $f(x) \neq 0$ если $y \cdot \varphi < 0$, то полагаем $b = x$; $\psi = y$, иначе полагаем $a = x$, $\varphi = y$.

Шаг 5. Если $b - a - \varepsilon < 0$ то задача решена. В качестве искомого корня (с заданной точностью ε) принимается величина $x = \frac{a+b}{2}$. Иначе процесс деления отрезка $[a;b]$ пополам продолжаем, возвращаясь к шагу 2.

В результате произведенных действий получим: $x = 0{,}29589$. ●

§ 20. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

20.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

Скорость прямолинейного движения

Пусть материальная точка (некоторое тело) M движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = S$ до некоторой фиксированной точки O. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т. е. $S = S(t)$.

Это равенство называют *законом движения точки.* Требуется найти скорость движения точки.

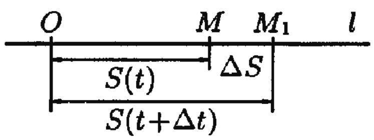


Рис. 127.

Если в некоторый момент времени t точка занимает положение M, то в момент времени $t + \Delta t$ (Δt — приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1 = S + \Delta S$ (ΔS — приращение расстояния) (см. рис. 127). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$.

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость* движения точки за время Δt:

$$V_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения точки в данный момент времени* (или мгновенной скоростью). Обозначив эту скорость через V, получим

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \qquad (20.1)$$

Касательная к кривой

Дадим сначала общее определение касательной к кривой.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (см. рис. 128).

Прямую MM_1, проходящую через эти точки, называют *секущей.*

Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT.

Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_1.

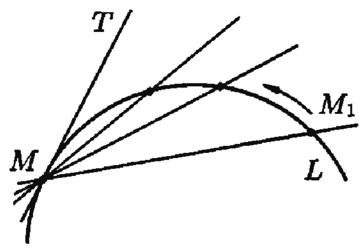


Рис. 128.

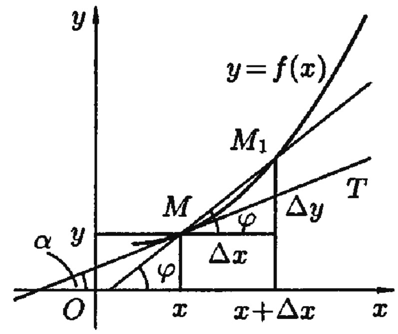


Рис. 129.

Рассмотрим теперь график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющий в точке $M(x;y)$ невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол касательной с осью Ox.

Для этого проведем через точку M и точку M_1 графика с абсциссой $x + \Delta x$ секущую (см. рис. 129). Обозначим через φ — угол между секущей MM_1 и осью Ox. На рисунке видно, что угловой коэффициент секущей равен

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки M, переходит в касательную. Угол $\varphi \to \alpha$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$.

Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (20.2)$$

К нахождению пределов вида (20.1) и (20.2) приводят решения и множества других задач. Можно показать, что:

- если $Q = Q(t)$ — количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t, то *сила тока в момент времени* t равна

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}; \qquad (20.3)$$

- если $N = N(t)$ — количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t, то *скорость химической реакции в момент времени* t равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}; \qquad (20.4)$$

– если $m = m(x)$ — масса неоднородного стержня между точками $O(0;0)$ и $M(x;0)$, то ***линейная плотность стержня в точке*** x есть

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \tag{20.5}$$

Пределы (20.1)–(20.5) имеют одинаковый вид; везде требуется найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Этот предел называют *производной*. Эти пределы можно записать так:

$$V = S'_t; \quad \operatorname{tg}\alpha = y'_x; \quad I = Q'_t; \quad V = N'_t; \quad S = m'_x$$

(читается «V равно S штрих по t», «тангенс α равен y штрих по x» и т. д.).

20.2. Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a;b)$. Проделаем следующие операции:

– аргументу $x \in (a;b)$ дадим приращение Δx: $x + \Delta x \in (a;b)$;

– найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

– составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

– найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов f'_x, $f'(x)$; y'; $\frac{dy}{dx}$; y'_x.

Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Итак, по определению

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, ***произведенная*** из данной функции.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;b)$, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается одним из символов: $f'(x_0)$, $y'\big|_{x=x_0}$ или $y'(x_0)$.

Пример 20.1. Найти производную функции $y = C$, $C = \text{const}$.

Решение:

– Значению x даем приращение Δx;

– находим приращение функции Δy: $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = C-C = 0$;
– значит, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$;
– следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 0 = 0$, т. е. $(c)' = 0$. ●

Пример 20.2. Найти производную функции $y = x^2$.

❍ Решение:
– Аргументу x даем приращение Δx;
– находим Δy: $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$;
– составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;
– находим предел этого отношения:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$. ●

В задаче про скорость прямолинейного движения было получено $V = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Это равенство перепишем в виде $V = S'_t$, т. е. *скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t.* В этом заключается *механический смысл производной.*

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то ***производная y' есть скорость протекания этого процесса.*** В этом состоит ***физический смысл производной.***

В задаче про касательную к кривой был найден угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это равенство перепишем в виде $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = k$, т. е. ***производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x.*** В этом заключается ***геометрический смысл производной.***

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$ (см. рис. 130), то угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении $(y - y_0 = k(x - x_0))$, можно записать ***уравнение касательной***: $y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой.***

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому *уравнение нормали* имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$ (если $f'(x_0) \neq 0$).

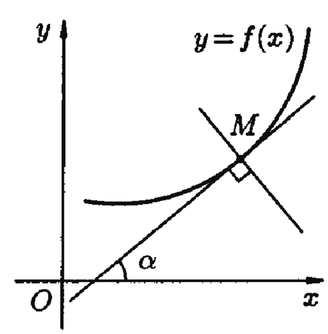


Рис. 130.

20.3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 20.1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

❑ Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Отсюда, по теореме 17.5 о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x. ■

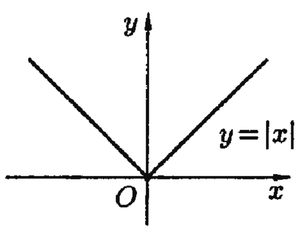


Рис. 131.

Обратная теорема неверна: непрерывная функция может не иметь производной. Примером такой функции является функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Изображенная на рисунке 131 функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней.

Действительно, в точке $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т. е. функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, график функции не имеет касательной в точке $O(0; 0)$.

Замечания: 1. Существуют односторонние пределы функции $y = |x|$ в точке $x = 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. В таких случаях говорят, что функция имеет ***односторонние производные*** (или «производные слева и справа»), и обозначают соответственно $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Если $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, то производная в точке не существует. Не существует производной и в точках разрыва функции.

2. Производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама не обязательно является непрерывной.

Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале $(a; b)$, то функция называется ***гладкой***.

20.4. Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

Теорема 20.2. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

❑ Обозначим $y = u \pm v$. По определению производной и основным теоремам о пределах получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

т. е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. ■

Теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Теорема 20.3. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$.

❑ Пусть $y = uv$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \cdot u(x) + u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) =$$

$$= v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= u' \cdot v + u \cdot v' + 0 \cdot u' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

т. е. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. ■

При доказательстве теоремы использовалась теорема о связи непрерывности и дифференцируемости: так как функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы, то они и непрерывны, поэтому $\Delta v \to 0$ и $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Можно показать, что:

а) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где $c = \text{const}$;

б) $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

Теорема 20.4. Производная частного двух функций $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

❑ Пусть $y = \frac{u}{v}$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v(x) + \Delta v) v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v^2 + v \cdot \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} =$$

$$= \frac{v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

т. е. $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. ■

Следствие 20.1. $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{1}{c} \cdot u'$.

Следствие 20.2. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}$, где $c = \text{const}$.

20.5. Производная сложной и обратной функций

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ — сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема 20.5. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

❑ По условию $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ или

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u, \tag{20.6}$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, поэтому

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x, \text{ где } \beta \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Подставив значение Δu в равенство (20.6), получим

$$\Delta y = y'_u(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x) + \alpha(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x),$$

т. е.

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha \cdot \Delta x + \alpha \cdot \beta \cdot \Delta x.$$

Разделив полученное равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. ■

Итак, для нахождения производной сложной функции надо ***производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.***

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции.

Теорема 20.6. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a; b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

❑ Рассмотрим обратную функцию $x = \varphi(y)$. Дадим аргументу y приращение $\Delta y \neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Поэтому можно записать

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{20.7}$$

Если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение $\Delta x \to 0$. И так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то из (20.7) следуют равенства

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}, \text{ т. е. } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$ ■

Таким образом, ***производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.***

Правило дифференцирования обратной функции записывают так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Пример 20.3. Найти производную функции $y = \log_2^3 \operatorname{tg} x^4$.

Решение: Данная функция является сложной. Ее можно представить в виде цепочки «простых» функций: $y = u^3$, где $u = \log_2 z$, где $z = \operatorname{tg} q$, где $q = x^4$. По правилу дифференцирования сложной функции ($y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_q \cdot q'_x$) получаем:

$$y'_x = 3 \cdot \log_2^2 \operatorname{tg} x^4 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^4 \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3.$$ ●

Пример 20.4. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение: Обратная функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$ ●

20.6. Производные основных элементарных функций

Степенная функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Дадим аргументу x приращение Δx. Функция $y = x^n$ получит приращение $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$. По формуле бинома Ньютона имеем

$$\Delta y = \left(x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n\right) - x^n =$$

$$= n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \cdot + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$

$$= n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Находим предел составленного отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}\right) = n \cdot x^{n-1}.$$

Таким образом,

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Например, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $x' = 1$.

Ниже (см. замечание на с. 148) будет показано, что формула производной степенной функции справедлива при любом $n \in \mathbb{R}$ (а не только натуральном).

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = e^x$. Придав аргументу x приращение Δx, находим приращение функции Δy: $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$. Стало быть, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

При вычислении предела воспользовались эквивалентностью $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Итак, $y' = e^x$, т. е.

$$(e^x)' = e^x.$$

Теперь рассмотрим функцию $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $a^x = e^{x \ln a}$, то по формуле производной сложной функции находим:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Таким образом, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Пример 20.5. Найти производную функции $y = 7^{x^2 - 4x}$.

❍ Решение: Используя формулу производной сложной функции и формулу производной показательной функции, находим

$$y' = (7^{x^2-4x})' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (x^2 - 4x)' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (2x - 4).$$ ●

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = \ln x$.

Для нее

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись эквивалентностью $\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

т. е. $y' = \frac{1}{x}$ или $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Теперь рассмотрим функцию $y = \log_a x$.

Так как $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, то

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Таким образом, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Пример 20.6. Найти производную функции $y = \ln(x^4 - 2x^2 + 6)$.

❍ Решение: $y' = \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 6} \cdot (x^4 - 2x^2 + 6)' = \frac{4x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 6}$. ●

Производную логарифмической функции $y = \log_a x$ можно найти иначе. Так как обратной для нее функцией является $x = a^y$, то по формуле производной обратной функции имеем:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Для функции $y = \sin x$ имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись первым замечательным пределом $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x,$$

т. е. $y' = \cos x$ или $(\sin x)' = \cos x$.

Найдем производную функции $y = \cos x$, воспользовавшись формулой производной сложной функции:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x,$$

т. е. $(\cos x)' = -\sin x$.

Для нахождения производных функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся формулой производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Проделав аналогичные операции, получим формулу

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Этот результат можно получить иначе:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2} - x)} \cdot (-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 20.7. Найти производную функции $y = \cos 2x$.

Решение: $(\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$. ●

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

Пусть $y = \arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $x' = \cos y \neq 0$.

По правилу дифференцирования обратных функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично получаем, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Эту формулу можно получить проще: так как $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Она является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому, по правилу дифференцирования обратных функций, получаем, что

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны отношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

т. е. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Пример 20.8. Найти производные функций: 1) $y = \arccos x^2$; 2) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$; 3) $y = (1+5x-3x^3)^4$; 4) $y = \arccos\sqrt{x}$; 5) $y = \log_2^3(3+2^{-x})$.

Решение: 1) $(\arccos x^2)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

2) $(x \cdot \operatorname{arctg} x)' = x' \cdot \operatorname{arctg} x + x \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$;

3) $((1+5x-3x^3)^4)' = 4(1+5x-3x^3)^3 \cdot (5-9x^2)$;

4) $(\arccos\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

5) $(\log_2^3(3+2^{-x}))' = 3\log_2^2(3+2^{-x}) \cdot \frac{1}{(3+2^{-x})\ln 3} \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1)$. ●

Замечание: Найдем производную степенной функции $y = x^\alpha$ с любым показателем $\alpha \in \mathbb{R}$. В этом случае функция рассматривается для $x > 0$.

Можно записать $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$. По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\cdot\ln x})' = e^{\alpha\cdot\ln x}\cdot(\alpha\cdot\ln x)' = \alpha\cdot e^{\alpha\cdot\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot\frac{x^\alpha}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1},$$

т. е. $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

Формула остается справедливой и для $x < 0$, если функция $y = x^\alpha$ существует:

$$(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

при всех $x \neq 0$.

Пример 20.9. Показать, что функция $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} + C$ удовлетворяет уравнению $x^3 \cdot y' + 1 = x^4$.

Решение: Находим y':

$$y' = \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot(-2)x^{-3} + 0,$$

т. е. $y' = x - \frac{1}{x^3}$. Подставляем значение y' в данное уравнение:

$$x^3\cdot\left(x - \frac{1}{x^3}\right) + 1 = x^4, \quad \text{т. е.} \quad x^4 - 1 + 1 = x^4, \quad 0 = 0.$$

Функция удовлетворяет данному уравнению. ●

20.7. Гиперболические функции и их производные

В математике, механике, электротехнике и некоторых других дисциплинах встречаются *гиперболические функции*, определяемые следующими формулами:

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус;

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус («цепная линия»);

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ и $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ — гиперболический тангенс и котангенс, где e — неперово число.

На рисунках 132–135 показаны графики гиперболических функций.

Между гиперболическими функциями существуют следующие основные зависимости:

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$

$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh} y;$

$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} y;$

$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x\cdot\operatorname{th} y};$

$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x; \qquad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$

Все эти формулы вытекают из определения гиперболических функций.

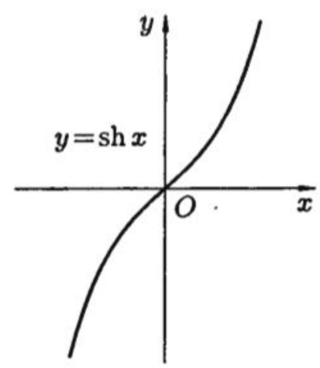


Рис. 132.

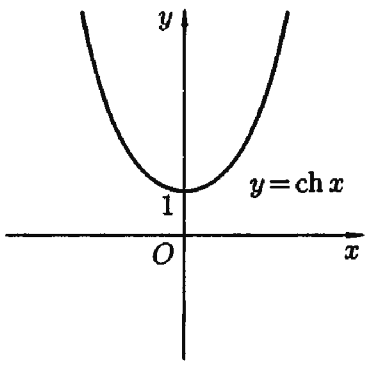


Рис. 133.

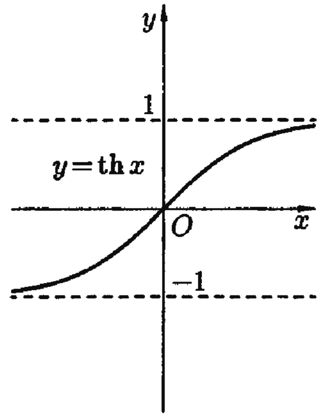


Рис. 134.

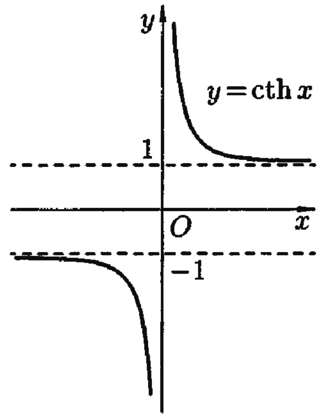


Рис. 135.

Например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Геометрическая интерпретация гиперболических функций (см. рис. 137) аналогична интерпретации тригонометрических функций (см. рис. 136).

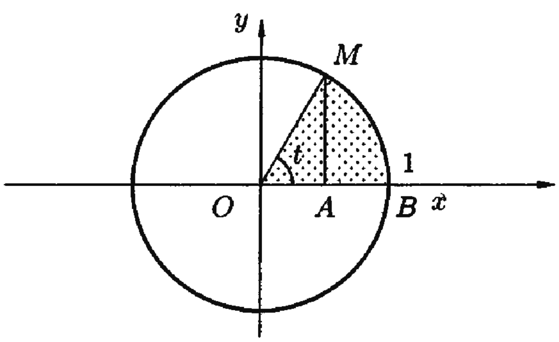


Рис. 136. Параметрические уравнения $x = \cos t$ и $y = \sin t$ определяют окружность $x^2 + y^2 = 1$, причем $OA = \cos t$, $AM = \sin t$

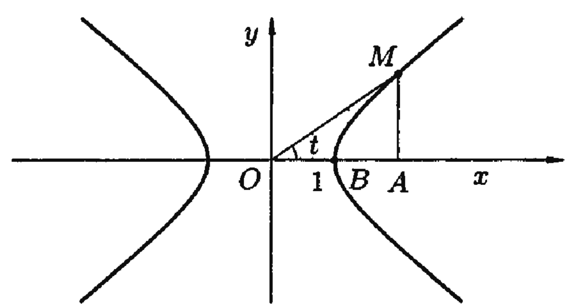


Рис. 137. Параметрические уравнения $x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$ определяют гиперболу $x^2 - y^2 = 1$, причем $OA = \operatorname{ch} t$, $AM = \operatorname{sh} t$

Найдем производные гиперболических функций:

$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$, т. е. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$, т. е. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

т. е. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \text{ т. е. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

20.8. Таблица производных

Выведенные правила дифференцирования, формулы производных основных элементарных функций запишем в виде таблицы.

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций. Поэтому в приведенной ниже таблице формул дифференцирования аргумент «x» заменен на промежуточный аргумент «u».

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
15. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;
16. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Для вычисления производных надо знать лишь правила дифференцирования и формулы производных основных элементарных функций, строго соблюдать эти правила при выполнении упражнений.

Пример 20.10. Найти производную функции $y = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$.

Решение:

$$y' = (x^4 - 3x^3 + 2x - 1)' = (x^4)' - (3x^3)' + (2x)' - (1)' =$$
$$= 4x^3 - 3(x^3)' + 2(x)' - 0 = 4x^3 - 9x^2 + 2.$$

Надо стараться обходиться без лишних записей.

Пример 20.11. Найти производную функции $y = \dfrac{2x^3}{\operatorname{tg} x}$.

○ Решение:

$$y' = \left(\frac{2x^3}{\operatorname{tg} x}\right)' = 2 \cdot \frac{(x^3)' \cdot \operatorname{tg} x - x^3 \cdot (\operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{tg} x)^2} = 2 \cdot \frac{3x^2 \cdot \operatorname{tg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x)^2}. \quad \bullet$$

Производная найдена. В процессе решения использованы правила 2, 3 и формулы 2, 7.

Пример 20.12. Найти производную функции $y = \cos(\ln^{12} 2x)$.

○ Решение: Коротко: $y' = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2$.

Решение с пояснениями: данную функцию можно представить следующим образом: $y = \cos u$, $u = t^{12}$, $t = \ln z$, $z = 2x$. Производную сложной функции найдем по правилу $y'_x = y'_u \cdot u'_t \cdot t'_z \cdot z'_x$ (здесь промежуточных аргументов три):

$$y'_x = -\sin u \cdot 12 \cdot t^{11} \cdot \frac{1}{z} \cdot 2,$$

т. е.

$$y'_x = -\sin t^{12} \cdot 12 \cdot (\ln z)^{11} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2,$$

т. е.

$$y'_x = -\sin(\ln z)^{12} \cdot 12 \cdot \ln^{11} z \cdot \frac{1}{x},$$

т. е.

$$y'_x = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \cdot \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}.$$

Окончательно

$$y'_x = -12 \cdot \sin(\ln^{12} 2x) \cdot \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}. \quad \bullet$$

§ 21. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

21.1. Неявно заданная функция

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y, то функция *задана в явном виде* (явная функция).

Под ***неявным заданием*** функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x; y) = 0$, не разрешенного относительно y.

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот.

Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно y (например, $y + 2x + \cos y - 1 = 0$ или $2^y - x + y = 0$).

Если неявная функция задана уравнением $F(x; y) = 0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y: ***достаточно продифференцировать это уравнение***

по x, рассматривая при этом y как функцию x, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

Пример 21.1. Найти производную функции y, заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение: Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Из полученного соотношения

$$3x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

следует, что $y^2 y' - xy' = y - x^2$, т. е. $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$. ●

21.2. Функция, заданная параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{21.1}$$

где t — вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_x, считая, что функции (21.1) имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{21.2}$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (21.1), можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$.

С учетом равенства (21.2) получаем

$$\boxed{y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}, \quad \text{т. е.} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.}$$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример 21.2. Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x.

Решение: Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$. Следовательно, $y'_x = \dfrac{2t}{3t^2}$, т. е. $y'_x = \dfrac{2}{3t}$. ●

В этом *можно* убедиться, найдя непосредственно зависимость y от x. Действительно, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y'_x = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т. е. $y = \dfrac{2}{3t}$.

§ 22. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию *сначала прологарифмировать*. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием*.

Пример 22.1. Найти производную функции $y=\frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}$.

Решение: Можно найти y' с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \tfrac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 - 3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем y':

$$y' = y\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right),$$

т. е.

$$y' = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right). \quad \bullet$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая ***степенно-показательная функция*** $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – заданные дифференцируемые функции от x. Найдем производную этой функции:

$$\ln y = v\cdot\ln u, \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\cdot y' = v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u', \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad y' = y\left(v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right),$$

т. е.

$$y' = u^v\left(v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right),$$

или

$$\boxed{(u^v)' = u^v\cdot\ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'.} \qquad (22.1)$$

Сформулируем правило запоминания формулы (22.1): производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии $u = \mathrm{const}$, и производной степенной функции, при условии $v = \mathrm{const}$.

Пример 22.2. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

Решение: Пользуясь формулой (22.1), получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln \sin 2x \cdot 2x + (x^2+1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2.$$

Отметим, что запоминать формулу (22.1) необязательно, легче запомнить суть логарифмического дифференцирования.

§ 23. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

23.1. Производные высших порядков явно заданной функции

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'' $\left(\text{или } f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),\ \frac{dy'}{dx}\right)$. Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''' $\left(\text{или } f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\right)$. Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка:

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.}$$

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках (y^V или $y^{(5)}$ — производная пятого порядка).

Пример 23.1. Найти производную 13-го порядка функции $y = \sin x$.

Решение:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right),$$

. . . .

$$y^{(13)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 13\right).$$

23.2. Механический смысл производной второго порядка

Пусть материальная точка M движется прямолинейно по закону $S = f(t)$. Как уже известно, производная S'_t равна скорости точки в данный момент времени: $S'_t = V$.

Покажем, что *вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки*, т. е. $S''_t = a$.

Пусть в момент времени t скорость точки равна V, а в момент $t+\Delta t$ — скорость равна $V + \Delta V$, т. е. за промежуток времени Δt скорость изменилась на величину ΔV.

Отношение $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ выражает среднее ускорение движения точки за время Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется ускорением точки M в данный момент t и обозначается буквой a: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = a$, т. е. $V' = a$.

Но $V = S'_t$. Поэтому $a = (S'_t)'$, т. е. $a = S''_t$

23.3. Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F(x; y) = 0$.

Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Пример 23.2. Найти y''', если $x^2 + y^2 = 1$.

Решение: Дифференцируем уравнение $x^2+y^2-1 = 0$ по x: $2x+2y\cdot y' = 0$. Отсюда $y' = -\frac{x}{y}$. Далее имеем: $y'' = -\frac{1\cdot y - x\cdot y'}{y^2}$, т. е. $y'' = -\frac{y - x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$ (так как $x^2+y^2=1$), следовательно, $y''' = -\frac{-1\cdot 3y^2\cdot y'}{y^6} = \frac{3}{y^4}\cdot\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3x}{y^5}$. ●

23.4. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Как известно, первая производная y'_x находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{23.1}$$

Найдем вторую производную от функции заданной параметрически. Из определения второй производной и равенства (23.1) следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

т. е.

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.} \tag{23.2}$$

Аналогично получаем

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y^{IV}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \quad \ldots$$

Пример 23.3. Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение: По формуле (23.1)

$$y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Тогда по формуле (23.2)

$$y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Заметим, что найти y''_{xx} можно по преобразованной формуле (23.2):

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\frac{y'_t}{x'_t})'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3},$$

запоминать которую вряд ли стоит.

§ 24. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

24.1. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x) \cdot \Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющихся бесконечно малыми при

$\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ называют ***главной частью приращения*** функции Δy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{24.1}$$

Дифференциал dy называют также ***дифференциалом первого порядка***. Найдем дифференциал независимой переменной x, т. е. дифференциал функции $y = x$.

Так как $y' = x' = 1$, то, согласно формуле (24.1), имеем $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (24.1) можно записать так:

$$\boxed{dy = f'(x)dx,} \tag{24.2}$$

иными словами, ***дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.***

Из формулы (24.2) следует равенство $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$. Теперь обозначение производной $\dfrac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов dy и dx.

Пример 24.1. Найти дифференциал функции

$$f(x) = 3x^2 - \sin(1 + 2x).$$

Решение: По формуле $dy = f'(x)\,dx$ находим

$$dy = (3x^2 - \sin(1 + 2x))'\,dx = (6x - 2\cos(1 + 2x))\,dx.$$

Пример 24.2. Найти дифференциал функции

$$y = \ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Вычислить dy при $x = 0$, $dx = 0{,}1$.

Решение:

$$dy = (\ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1})'\,dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx.$$

Подставив $x = 0$ и $dx = 0{,}1$, получим

$$dy\Big|_{\substack{x=0,\\ dx=0{,}1}} = \left(\frac{10}{2} + 0\right)0{,}1 = 0{,}5.$$

24.2. Геометрический смысл дифференциала функции

Выясним геометрический смысл дифференциала.

Для этого проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x + \Delta x$ (см. рис. 138). На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MAB имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}, \text{ т. е. } |AB| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x.$$

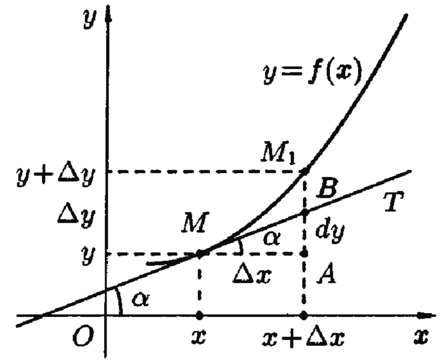


Рис. 138.

Но, согласно геометрическому смыслу производной, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Поэтому $AB = f'(x) \cdot \Delta x$.

Сравнивая полученный результат с формулой (24.1), получаем $dy = AB$, т. е. ***дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.***

В этом и состоит геометрический смысл дифференциала.

24.3. Основные теоремы о дифференциалах

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции ($dy = f'(x)\,dx$) и соответствующие теоремы о производных.

Например, так как производная функции $y = c$ равна нулю, то дифференциал постоянной величины равен нулю: $dy = c'\,dx = 0 \cdot dx = 0$.

Теорема 24.1. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$d(u+v) = du + dv,$$
$$d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

❏ Докажем, например, вторую формулу. По определению дифференциала имеем:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = v \cdot u'dx + u \cdot v'dx = v\,du + u\,dv. \quad \blacksquare$$

Теорема 24.2. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

❑ Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ две дифференцируемые функции, образующие сложную функцию $y = f(\varphi(x))$. По теореме о производной сложной функции можно написать

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Умножив обе части этого равенства на dx, получаем $y'_x\,dx = y'_u \cdot u'_x\,dx$. Но $y'_x\,dx = dy$ и $u'_x\,dx = du$. Следовательно, последнее равенство можно переписать так:

$$dy = y'_u \cdot du.$$ ■

Сравнивая формулы $dy = y'_x \cdot dx$ и $dy = y'_u \cdot du$, видим, что первый дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента.

Это свойство дифференциала называют ***инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала.***

Формула $dy = y'_x \cdot dx$ по внешнему виду совпадает с формулой $dy = y'_u \cdot du$, но между ними есть принципиальное отличие: в первой формуле x — независимая переменная, следовательно, $dx = \Delta x$, во второй формуле u есть функция от x, поэтому, вообще говоря, $du \neq \Delta u$.

С помощью определения дифференциала и основных теорем о дифференциалах легко преобразовать таблицу производных в таблицу дифференциалов.

Например, $d(\cos u) = (\cos u)'_u \cdot du = -\sin u \cdot du$.

24.4. Таблица дифференциалов

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$, в частности, $d(cu) = c \cdot du$;
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, в частности, $d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c\,dv}{v^2}$;
4. $dy = y'_x\,dx$, если $y = f(x)$;
5. $dy = y'_u \cdot du$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
6. $dc = 0$;
7. $d(u^\alpha) = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot du$;
8. $d(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot du$, в частности, $d(e^u) = e^u \cdot du$;
9. $d(\log_a u) = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot du$, в частности, $d(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot du$;
10. $d(\sin u) = \cos u\,du$;
11. $d(\cos u) = -\sin u\,du$;
12. $d(\operatorname{tg} u) = \frac{1}{\cos^2 u}\,du$;
13. $d(\operatorname{ctg} u) = -\frac{1}{\sin^2 u}\,du$;
14. $d(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;
15. $d(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$;
16. $d(\operatorname{arctg} u) = \frac{1}{1+u^2}\,du$;
17. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\frac{1}{1+u^2}\,du$;
18. $d(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u\,du$;
19. $d(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u\,du$;
20. $d(\operatorname{th} u) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\,du$;
21. $d(\operatorname{cth} u) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\,du$.

24.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Как уже известно, приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в виде $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy, \tag{24.3}$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции, поэтому формула (24.3) широко применяется в вычислительной практике.

Пример 24.3. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Решение: Применяем формулу (24.3): $\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x.$

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}001}} = (3 \cdot 4 - 2) \cdot 0{,}001 = 10 \cdot 0{,}001 = 0{,}01.$$

Итак, $\Delta y \approx 0{,}01$.

Посмотрим, какую погрешность допустили, вычислив дифференциал функции вместо ее приращения. Для этого найдем Δy:

$$\begin{aligned}\Delta y &= ((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1) - (x^3 - 2x + 1) = \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 1 - x^3 + 2x - 1 = \\ &= \Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2);\end{aligned}$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}001}} = 0{,}001(3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + 0{,}001^2 - 2) = 0{,}010006.$$

Абсолютная погрешность приближения равна

$$|\Delta y - dy| = |0{,}010006 - 0{,}01| = 0{,}000006.$$

Подставляя в равенство (24.3) значения Δy и dy, получим

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

или

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.} \tag{24.4}$$

Формула (24.4) *используется для вычислений приближенных значений функций.*

Пример 24.4. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$. По формуле (24.4) имеем:

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \cdot \Delta x,$$

т. е.

$$\operatorname{arctg}(x+\Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1+x^2}.$$

Так как $x + \Delta x = 1{,}05$, то при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}05$ получаем:

$$\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0{,}05}{1+1} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}810. \qquad \bullet$$

Можно показать, что абсолютная погрешность формулы (24.4) не превышает величины $M \cdot (\Delta x)^2$, где M — наибольшее значение $|f''(x)|$ на сегменте $[x; x+\Delta x]$ (см. с. 167).

Пример 24.5. Какой путь пройдет тело при свободном падении на Луне за 10,04 с от начала падения. Уравнение свободного падения тела $H = \frac{g_л \cdot t^2}{2}$, $g_л = 1{,}6$ м/с^2.

○ Решение: Требуется найти $H(10{,}04)$. Воспользуемся приближенной формулой ($\Delta H \approx dH$)

$$H(t+\Delta t) \approx H(t) + H'(t) \cdot \Delta t.$$

При $t = 10$ *с* и $\Delta t = dt = 0{,}04$ с, $H'(t) = g_л t$, находим

$$H(10{,}04) \approx \frac{1{,}6 \cdot 100}{2} + 1{,}6 \cdot 10 \cdot 0{,}04 = 80 + 0{,}64 = 80{,}64 \text{ (м)}. \qquad \bullet$$

Задача (для самостоятельного решения). Тело массой $m = 20$ кг движется со скоростью $v = 10{,}02$ м/с. Вычислить приближенно кинетическую энергию тела $\left(E_к = \frac{mv^2}{2};\ E_к(10{,}02) \approx 1004 \text{ (Дж)}\right)$.

24.6. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x — ***независимая переменная***. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ есть также функция x; можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее ***вторым дифференциалом*** (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y или $d^2 f(x)$.

Итак, по определению $d^2y = d(dy)$. Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$.

Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x, то при дифференцировании считаем dx постоянным:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)' \cdot dx = f''(x)\,dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2,$$

т. е.

$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \tag{24.5}$$

Здесь dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Аналогично определяется и находится дифференциал третьего порядка:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)\,dx^2) = f'''(x)(dx)^3.$$

И, вообще, дифференциал n-го порядка есть дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Отсюда находим, что $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$. В частности, при $n = 1, 2, 3$ соответственно получаем:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3},$$

т. е. производную функции можно рассматривать как отношение ее дифференциала соответствующего порядка к соответствующей степени дифференциала независимой переменной.

Отметим, что все приведенные выше формулы справедливы только, если x — независимая переменная. Если же функцию $y = f(x)$, где x — ***функция от какой-то другой независимой переменной***, то дифференциалы второго и выше порядков не обладают свойством инвариантности формы и вычисляются по другим формулам. Покажем это на примере дифференциала второго порядка.

Используя формулу дифференциала произведения $(d(u{\cdot}v){=}v\,du{+}u\,dv)$, получаем:

$$d^2y = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx + f'(x)\cdot d(dx) = f''(x)\,dx\cdot dx + f'(x)\cdot d^2x,$$

т. е.

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\cdot d^2x. \tag{24.6}$$

Сравнивая формулы (24.5) и (24.6), убеждаемся, что в случае сложной функции формула дифференциала второго порядка изменяется: появляется второе слагаемое $f'(x)\cdot d^2x$.

Ясно, что если x — независимая переменная, то

$$d^2x = d(dx) = d(1\cdot dx) = dx\cdot d(1) = dx\cdot 0 = 0$$

и формула (24.6) переходит в формулу (24.5).

Пример 24.6. Найти d^2y, если $y = e^{3x}$ и x — независимая переменная.

Решение: Так как $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$, то по формуле (24.5) имеем $d^2y = 9e^{3x}\,dx^2$. ●

Пример 24.7. Найти d^2y, если $y = x^2$ и $x = t^3 + 1$ и t — независимая переменная.

Решение: Используем формулу (24.6): так как

$$y' = 2x, \quad y'' = 2, \quad dx = 3t^2\,dt, \quad d^2x = 6t\,dt^2,$$

то

$$d^2y = 2dx^2 + 2x\cdot 6t\,dt^2 = 2(3t^2\,dt)^2 + 2(t^3+1)6t\,dt^2 =$$
$$= 18t^4\,dt^2 + 12t^4\,dt^2 + 12t\,dt^2 = (30t^4 + 12t)\,dt^2.$$

Другое решение: $y = x^2$, $x = t^3 + 1$. Следовательно, $y = (t^3+1)^2$. Тогда по формуле (24.5)

$$d^2y = y''\cdot dt^2,$$

т. е.

$$d^2y = (30t^4 + 12t)\,dt^2.$$ ●

§ 25. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

25.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение.

Теорема 25.1 (Ролль). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$.

❑ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений, соответственно, M и m. Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a;b]$ и, следовательно, ее производная $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка $[a;b]$.

Если $M \neq m$, то функция достигает хотя бы одно из значений M или m во *внутренней* точке c интервала $(a;b)$, так как $f(a) = f(b)$.

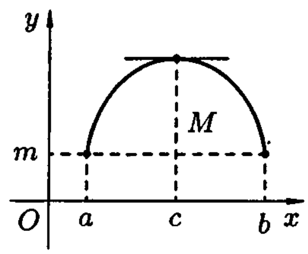


Рис. 139.

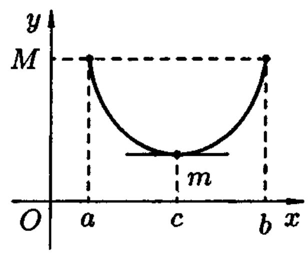


Рис. 140.

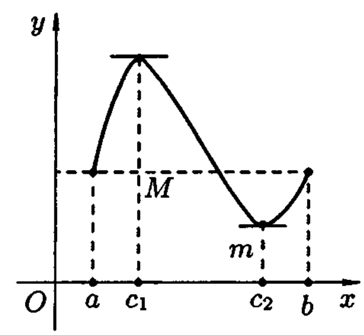


Рис. 141.

Пусть, например, функция принимает значение M в точке $x=c\in(a;b)$, т. е. $f(c) = M$. Тогда для всех $x \in (a;b)$ выполняется соотношение

$$f(c) \geqslant f(x). \tag{25.1}$$

Найдем производную $f'(x)$ в точке $x = c$:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

В силу условия (25.1) верно неравенство $f(c+\Delta x) - f(c) \leqslant 0$. Если $\Delta x > 0$ (т. е. $\Delta x \to 0$ справа от точки $x = c$), то

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0 \quad \text{и поэтому} \quad f'(c) \leqslant 0.$$

Если $\Delta x < 0$, то

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geqslant 0 \text{ и } f'(c) \geqslant 0.$$

Таким образом, $f'(c) = 0$.

В случае, когда $f(c) = m$, доказательство аналогичное. ■

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox (см. рис. 139 и 140). На рисунке 141 таких точек две.

Теорема 25.2 (Коши). Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

❑ Отметим, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка c, такая, что $\varphi'(c) = 0$, чего не может быть по условию теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a)).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, так как является линейной комбинацией функций $f(x)$ и $\varphi(x)$; на концах отрезка она принимает одинаковые значения $F(a) = F(b) = 0$.

На основании теоремы Ролля найдется точка $x = c \in (a;b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$, следовательно,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c) = 0.$$

Отсюда следует

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c) \quad \text{и} \quad \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$ ■

Теорема 25.3 (Лагранж). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{25.2}$$

❍ Решение: Теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши. Действительно, положив $\varphi(x) = x$, находим $\varphi(b) - \varphi(a) = b - a$, $\varphi'(x) = 1$, $\varphi'(c) = 1$.

Подставляя эти значения в формулу $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, получаем $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ или $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. ●

Полученную формулу называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой о конечном приращении***: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a;b]$ равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.

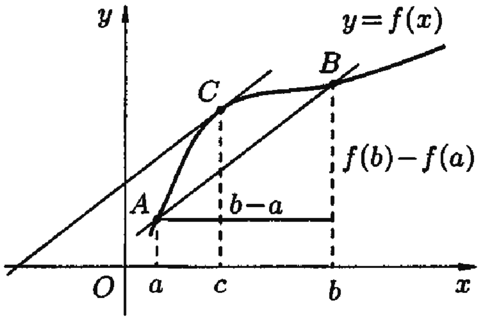


Рис. 142.

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Запишем формулу (25.2) в виде $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, где $a < c < b$. Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент секущей AB, а величина $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой $x = c$.

Следовательно, геометрический смысл теоремы Лагранжа таков: на графике функции $y=f(x)$ найдется точка $C(c; f(c))$ (см. рис. 142), в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.

Следствие 25.1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

❑ Пусть $f'(x) = 0$ для $\forall x \in (a;b)$. Возьмем произвольные x_1 и x_2 из $(a;b)$ и пусть $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа $\exists c \in (x_1;x_2)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Но по условию $f'(x) = 0$, стало быть, $f'(c) = 0$, где $x_1 < c < x_2$. Поэтому имеем $f(x_2) - f(x_1) = 0$, т. е. $f(x_2) = f(x_1)$. А так как x_1 и x_2 — произвольные точки из интервала $(a;b)$, то $\forall x \in (a;b)$ имеем $f(x) = c$. ■

Следствие 25.2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

❑ Пусть $f_1'(x)=f_2'(x)$ при $x\in(a;b)$. Тогда $(f_1(x)-f_2(x))'=f_1'(x)-f_2'(x)=0$. Следовательно, согласно следствию 25.1, функция $f_1(x) - f_2(x)$ есть постоянная, т. е. $f_1(x) - f_2(x) = C$ для $\forall x \in (a;b)$. ■

Пример 25.1. Доказать, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, где $x \in [-1;1]$.

○ Решение: Пусть $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Тогда $\forall x \in (-1;1)$ имеем $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Отсюда следует, что $f(x) = C$, т. е. $\arcsin x + \arccos x = C$. Положив $x = 0$, находим $0 + \frac{\pi}{2} = C$, т. е. $C = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Это равенство выполняется и при $x = \pm 1$ (проверьте!). ●

Аналогично доказывается, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Формуле Лагранжа можно придать другой вид. Применив теорему Лагранжа к отрезку $[x; x + \Delta x]$ $(\Delta x > 0)$, будем иметь

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x. \qquad (25.3)$$

Каждое число $c \in (x; x + \Delta x)$ можно записать в виде $c = x + \theta\Delta x$, где $0 < \theta < 1$ (действительно, $x < c < x + \Delta x \Longrightarrow 0 < c - x < \Delta x \Longrightarrow$ $\Longrightarrow 0 < \frac{c-x}{\Delta x} < 1$; положим $\frac{c-x}{\Delta x} = \theta \Longrightarrow c = x + \theta\Delta x$). Формула (25.3) примет вид

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$.

Используя теорему Лагранжа, можно оценить точность приближенного равенства $\Delta y \approx dy$. Сделаем это, считая, что функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$:

$$\Delta y - dy = (f(x + \Delta x) - f(x)) - f'(x)\Delta x = f'(c)\Delta x - f'(x)\Delta x =$$
$$= (f'(c) - f'(x))\Delta x = f''(c_1)(c - x)\Delta x,$$

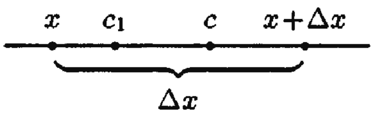


Рис. 143.

где $c_1 \in (x; c)$ (рис. 143).

Итак, $\Delta y - dy = f''(c_1)(c - x)\Delta x$. Пусть $M = \max\limits_{[x;x+\Delta x]} |f''(x)|$. Так как $|c - x| < \Delta x$, а $f''(c_1) \leqslant M$, то получаем оценку $|\Delta y - dy| \leqslant M|\Delta x|^2$.

25.2. Правила Лопиталя

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, который основан на применении производных.

Теорема 25.4 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$.

❑ Применим к функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ теорему Коши для отрезка $[x_0; x]$, лежащего в окрестности точки x_0. Тогда $\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, где c лежит между x_0 и x (рис. 144). Учитывая, что $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$, получаем

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{25.4}$$

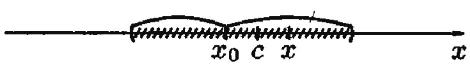


Рис. 144.

При $x \to x_0$, величина c также стремится к x_0; перейдем в равенстве (25.4) к пределу:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$, то $\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}=l$. Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=l$. ■

Коротко полученную формулу читают так: предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Замечания: 1. Теорема 25.4 верна и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x=x_0$, но $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$. Достаточно положить $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ и $\varphi(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

2. Теорема 25.4 справедлива и в том случае, когда $x\to\infty$. Действительно, положив $x=\dfrac{1}{z}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to0}\frac{f(\frac{1}{z})}{\varphi(\frac{1}{z})}=\lim_{z\to0}\frac{(f(\frac{1}{z}))'}{(\varphi(\frac{1}{z}))'}=\lim_{z\to0}\frac{f'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})}{\varphi'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, теорему 25.4 можно применить еще раз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$$

и т. д.

Пример 25.2. Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x\ln x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x\ln x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\ln x+1}=1$. ●

Пример 25.3. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{6\sin6x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{6\cos6x}{1}=9.$$ ●

Теорема 25.4 дает возможность раскрывать неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Сформулируем без доказательства теорему о раскрытии неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 25.5 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$).
Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, точки x_0), в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Пример 25.4. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cdot\cos^2 5x}{\cos^2 3x\cdot 5} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 10x}{1+\cos 6x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-10\sin 10x}{-6\sin 6x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 10x}{\sin 6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{10\cos 10x}{6\cos 6x} = \frac{5}{3}.$$

2-й способ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \left[\begin{array}{c} x-\frac{\pi}{2}=t \\ t\to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\frac{3}{2}\pi+3t)}{\operatorname{tg}(\frac{5}{2}\pi+5t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{ctg} 3t}{\operatorname{ctg} 5t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5t}{\operatorname{tg} 3t} = \frac{5}{3}.$$

Раскрытие неопределенностей различных видов

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, которые называют *основными*. Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

1. Пусть $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда очевидны следующие преобразования:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\varphi(x)) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \left(\text{или } \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right).$$

Например,

$$\lim_{x\to 2} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}(2-x) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

2. Пусть $f(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда можно поступить так:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-\varphi(x)) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

На практике бывает проще, *например,*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

3. Пусть или $f(x)\to 1$ и $\varphi(x)\to\infty$, или $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to 0$, или $f(x)\to 0$ и $\varphi(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ удобно сначала прологарифмировать выражение $A=f(x)^{\varphi(x)}$.

Пример 25.5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение: Имеем неопределенность вида 1^∞. Логарифмируем выражение $A=(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$, получим: $\ln A=\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x$. Затем находим предел:

$$\lim_{x\to 0}\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}=-2,$$

т. е. $\ln\lim\limits_{x\to 0}A=-2$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}A=e^{-2}$, и $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$. ●

Решение можно оформить короче, если воспользоваться «готовой» формулой

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)}=\exp\Bigl(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)\Bigr)$$

(использовано основное логарифмическое тождество: $f^\varphi=e^{\ln f^\varphi}$).

Пример 25.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{\operatorname{tg}x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}=[\infty^0]=\exp\Bigl(\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}x\ln\frac{1}{x}\Bigr)=\exp\Bigl(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg}x}\Bigr)=$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{x(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)=e^{0\cdot 1}=e^0=1.$$ ●

Пример 25.7. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x^{-2}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Найти $f'(x)$. (Дополнительно: найти $f^{(n)}(0)$.)

Решение: При $x\neq 0$ имеем

$$f'(x)=e^{-x^{-2}}\cdot\left(-x^{-2}\right)'=2e^{-x^{-2}}\cdot x^{-3}.$$

При $x=0$ по определению производной:

$$f'(0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(0+\lambda)-f(0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda}.$$

Делаем замену $y=\frac{1}{\lambda^2}$ и применяем правило Лопиталя

$$\lim_{\lambda\to 0}\left|\frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda}\right|=\lim_{y\to\infty}\frac{\sqrt{y}}{e^y}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{y}\cdot e^y}=0.$$

Таким образом,

$$f'(x)=\begin{cases}2x^{-3}\cdot e^{-x^{-2}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Аналогично можно показать, что $f^{(n)}(0)=0$. ●

25.3. Возрастание и убывание функций

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

Теорема 25.6 (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) для $\forall x \in (a;b)$.

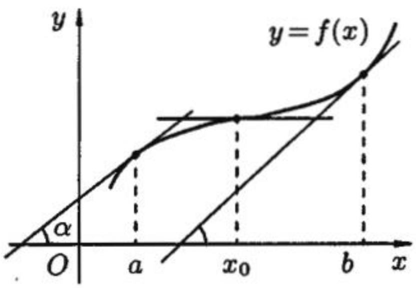


Рис. 145.

❑ Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$. Возьмем произвольные точки x и $x+\Delta x$ на интервале $(a;b)$ и рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Функция $f(x)$ возрастает, поэтому если $\Delta x > 0$, то $x+\Delta x > x$ и $f(x+\Delta x) > f(x)$; если $\Delta x < 0$, то $x+\Delta x < x$ и $f(x+\Delta x) < f(x)$. В обоих случаях $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$, так как числитель и знаменатель дроби имеют одинаковые знаки. По условию теоремы функция $f(x)$ имеет производную в точке x и является пределом рассматриваемого отношения. Следовательно, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0$. ■

Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ убывает на интервале $(a;b)$.

Геометрически теорема 25.6 означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox или в некоторых точках (на рисунке 145 в точке с абсциссой x_0) параллельны оси Ox.

Теорема 25.7 (достаточные условия). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

❑ Пусть $f'(x) > 0$. Возьмем точки x_1 и x_2 из интервала $(a;b)$, причем $x_1 < x_2$. Применим к отрезку $[x_1;x_2]$ теорему Лагранжа: $f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1)$, где $c \in (x_1;x_2)$. По условию $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, $f(x_2)-f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция $f(x)$ на интервале $(a;b)$ возрастает. ■

Рассмотренные теоремы 25.6 и 25.7 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность. *Напомним*, что функция возрастающая или убывающая называется *монотонной* (см. с. 102).

Пример 25.8. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на возрастание и убывание.

Решение: Функция определена на $\mathbb{R} = (-\infty;\infty)$. Ее производная равна: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1;1)$.

Ответ: данная функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;\infty)$; убывает на интервале $(-1;1)$.

25.4. Максимум и минимум функций

Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

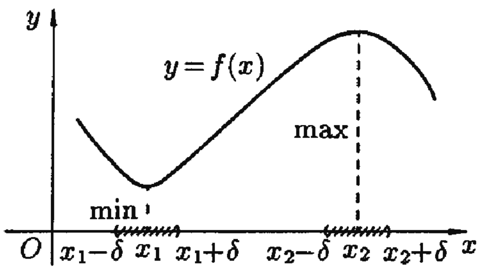


Рис. 146.

Аналогично определяется точка минимума функции: x_0 — *точка минимума* функции, если $\exists\delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > f(x_0)$. На рисунке 146 x_1 — точка минимума, а точка x_2 — точка максимума функции $y = f(x)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*) функции. Максимум (минимум) функции называется *экстремумом* функции.

Понятие экстремума всегда связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь *во внутренних точках* области определения. Рассмотрим условия существования экстремума функции.

Теорема 25.8 (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Пусть, для определенности, x_0 — точка максимума. Значит, в окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$. Но тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$, если $\Delta x > 0$, и $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, если $\Delta x < 0$. По условию теоремы производная $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ существует. Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x_0) \geqslant 0$, если $\Delta x < 0$, и $f'(x_0) \leqslant 0$, если $\Delta x > 0$. Поэтому $f'(x_0) = 0$. Аналогично доказывается утверждение теоремы 25.8, если x_0 — точка минимума функции $f(x)$. ■

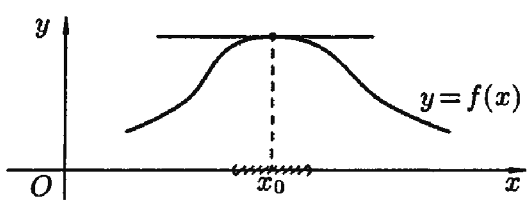


Рис. 147.

Геометрически равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox (см. рис. 147).

Отметим, что обратная теорема неверна, т. е. если $f'(x_0) = 0$, то это не значит, что x_0 —

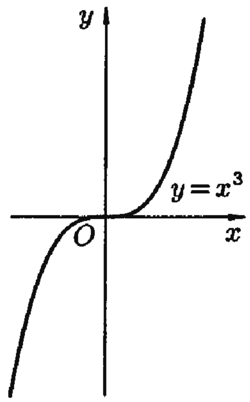


Рис. 148.

точка экстремума. Например, для функции $y = x^3$ ее производная $y' = 3x^2$ равна нулю при $x = 0$, но $x = 0$ не точка экстремума (см. рис. 148).

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ производной не имеет, но точка $x = 0$ — точка минимума (см. рис. 149).

Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются ***критическими***.

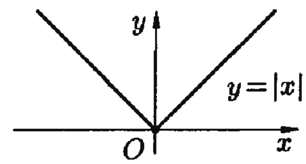


Рис. 149.

Теорема 25.9 (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) *производная* $f'(x)$ *меняет знак* с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.

❑ Рассмотрим δ-окрестность точки x_0. Пусть выполняются условия: $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$, а на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$ она убывает. Отсюда следует, что значение $f(x)$ в точке x_0 является наибольшим на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т. е. $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$. Это и означает, что x_0 — точка максимума функции.

Графическая интерпретация доказательства теоремы 25.9 представлена на рисунке 150.

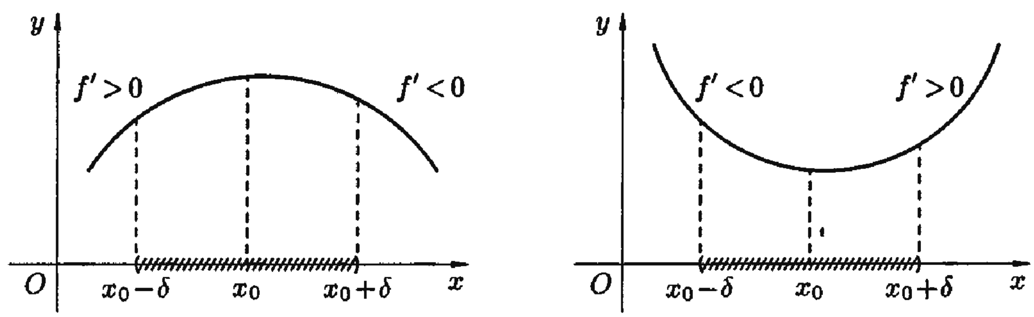


Рис. 150.

Аналогично теорема 25.9 доказывается для случая, когда $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$. ■

Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы. Из теорем 25.8 и 25.9 вытекает следующее правило исследования функции на экстремум:

1) найти критические точки функции $y = f(x)$;

2) выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;

3) исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из выбранных критических точек;

4) в соответствии с теоремой 25.9 (достаточное условие экстремума) выписать точки экстремума (если они есть) и вычислить значения функции в них.

Пример 25.9. Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение: Очевидно, $D(y) = \mathbb{R}$. Находим $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$, т. е. $y' = = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$.

Производная не существует при $x_1 = 0$ и равна нулю при $x_2 = 8$. Эти точки разбивают всю область определения данной функции на три интервала $(-\infty; 0)$, $(0; 8)$, $(8; \infty)$. Отметим на рисунке 151 знаки производной слева и справа от каждой из критических точек.

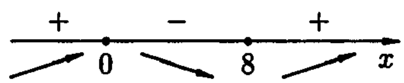


Рис. 151.

Следовательно, $x_1 = 0$ — точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 0$, и $x_2 = 8$ — точка минимума, $y_{\min} = y(8) = -\frac{4}{3}$. ●

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

Теорема 25.10. Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум — при $f''(x_0) > 0$.

Пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Так как

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0,$$

то $\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ в достаточно малой окрестности точки x_0. Если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$; если $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$.

Таким образом, при переходе через точку x_0 первая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, по теореме 25.9, x_0 есть точка минимума.

Аналогично доказывается, что если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция имеет максимум. ■

25.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Как известно, такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, т. е. при $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если $x_0 \in (a; b)$, то точку x_0 следует искать среди критических точек данной функции (см. рис. 152).

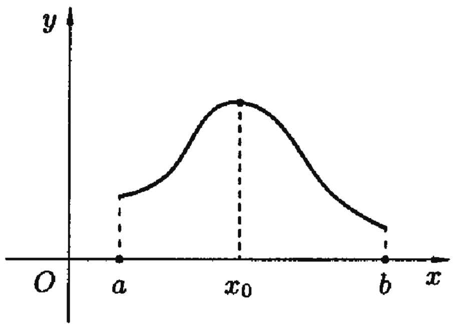


Рис. 152.

Получаем следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на $[a; b]$:

1) найти критические точки функции на интервале $(a; b)$;

2) вычислить значения функции в найденных критических точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$;

4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечания: 1. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет *лишь одну критическую точку* и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. На рисунке 152 $f(x_0) = f_{\text{нб}} = f_{\max}$ (нб — наибольшее, max — максимальное).

2. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ не имеет критических точек, то это озачает, что на нем функция монотонно возрастает или убывает. Следовательно, свое наибольшее значение (M) функция принимает на одном конце отрезка, а наименьшее (m) — на другом.

Пример 25.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение: Находим критические точки данной функции:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1);$$

$f'(x) = 0$ при $x_1 = 0 \in [-2; 1]$ и при $x_2 = -1 \in [-2; 1]$. Находим $f(0) = 1$, $f(-1) = 3 - 4 + 1 = 0$, $f(-2) = 48 - 32 + 1 = 17$, $f(1) = 8$. Итак, $f_{\text{нб}} \doteq 17$ в точке $x = -2$, $f_{\text{нм}} = 0$ в точке $x = -1$. ●

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин.

Практические задачи: транспортная задача о перевозке груза с минимальными затратами, задача об организации производственного процесса с целью получения максимальной прибыли и другие задачи, связанные с поиском оптимального решения, приводят к развитию и усовершенствованию методов отыскания наибольших и наименьших значений. Решением таких задач занимается особая ветвь математики — линейное программирование.

Рассмотрим более простую *задачу.*

Пример 25.11. Из шара радиуса R выточить цилиндр наибольшего объема. Каковы его размеры?

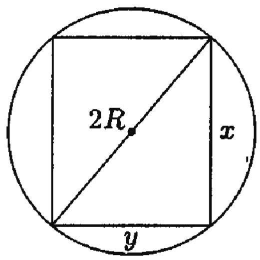


Рис. 153.

Решение: Обозначим через x и y высоту и диаметр цилиндра. Тогда, как видно из рисунка 153, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, а потому объем цилиндра

$$V = V(x) = \pi\left(\frac{4R^2 - x^2}{4}\right)x = \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{4},$$

где $x \in [0; 2R]$.

Находим наибольшее значение функции $V = V(x)$ на промежутке $[0; 2R]$. Так как $V'(x) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi x^2$, то $V'(x) = 0$ при $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, кроме того, $V''(x) = -\frac{3}{2}\pi x < 0$. Поэтому $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ — точка максимума. Так как функция имеет одну критическую точку, то цилиндр будет иметь наибольший объем (равный $V_{\max}$) при $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$; диаметр основания цилиндра равен

$$\sqrt{4R^2 - (2R\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

Таким образом, искомый цилиндр имеет высоту, равную $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$, и диаметр, равный $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$. ●

25.6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вверх*** на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба.*

На рисунке 154 кривая $y = f(x)$ выпукла вверх в интервале $(a; c)$, выпукла вниз в интервале $(c; b)$, точка $M(c; f(c))$ — точка перегиба.

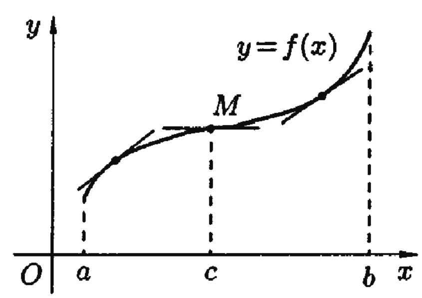


Рис. 154.

Интервалы выпуклости вниз и вверх находят с помощью следующей теоремы.

Теорема 25.11. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$ имеет отрицательную вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a; b)$ — график выпуклый вниз.

☐ Пусть $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a; b)$. Возьмем на графике функции произвольную точку M с абсциссой $x_0 \in (a; b)$ и проведем через M касательную (см. рис. 155). Покажем, что график функции расположен ниже этой касательной. Для этого сравним в точке $x \in (a; b)$ ординату y кривой $y = f(x)$ с ординатой $y_{\text{кас}}$ ее касательной. Уравнение касательной, как известно, есть

$$y_{\text{кас}} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{т. е.} \quad y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда $y - y_{\text{кас}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа, $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где c лежит между x_0 и x. Поэтому

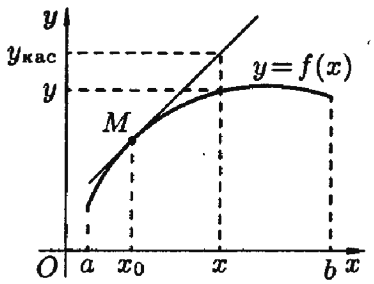


Рис. 155.

$$y - y_{\text{кас}} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

т. е.

$$y - y_{\text{кас}} = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0).$$

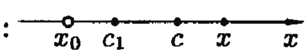
Разность $f'(c) - f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле Лагранжа:

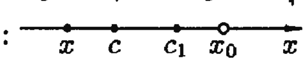
$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0),$$

где c_1 лежит между x_0 и c. Таким образом, получаем

$$y - y_{\text{кас}} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0).$$

Исследуем это равенство:

1) если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно, $y - y_{\text{кас}} < 0$, т. е. $y < y_{\text{кас}}$: 

2) если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно, $y - y_{\text{кас}} < 0$, т. е. $y < y_{\text{кас}}$: 

Итак, доказано, что во всех точках интервала $(a; b)$ ордината касательной больше ординаты графика, т. е. график функции выпуклый вверх. Аналогично доказывается, что при $f''(x) > 0$ график выпуклый вниз. ■

Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

Теорема 25.12 (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

□ Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Это значит, что слева от $x = x_0$ график выпуклый вверх, а справа — выпуклый вниз. Следовательно, точка $(x_0; f(x_0))$ графика функции является точкой перегиба.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$. ■

Пример 25.12. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

Решение: Находим, что $y' = 5x^4 - 1$, $y'' = 20x^3$. Вторая производная существует на всей числовой оси; $y'' = 0$ при $x = 0$.

Отмечаем, что $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Следовательно, график функции $y = x^5 - x + 5$ в интервале $(-\infty; 0)$ — выпуклый вверх, в интервале $(0; \infty)$ — выпуклый вниз. Точка $(0; 5)$ есть точка перегиба. ●

25.7. Асимптоты графика функции

Построение графика функции значительно облегчается, если знать его асимптоты. Понятие асимптоты рассматривалось при изучении формы гиперболы (см. с. 68).

Напомним, что *асимптотой* кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой (рис. 156).

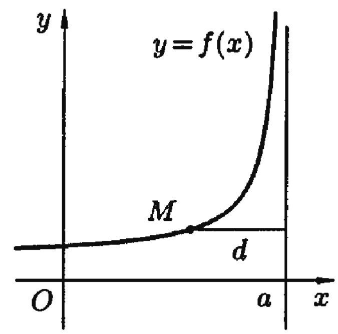


Рис. 156.

Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

Действительно, в этом случае непосредственно из рисунка 156 видно, что расстояние точки $M(x; y)$ кривой от прямой $x = a$ равно $d = |x - a|$. Если $x \to a$, то $d \to 0$. Согласно определению асимптоты, прямая $x = a$ является асимптотой кривой $y = f(x)$. Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения x, вблизи которых функция $f(x)$ неограниченно возрастает по модулю. Обычно это точки разрыва второго рода.

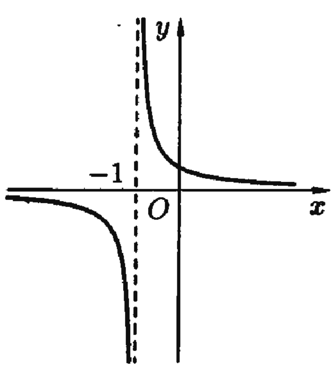


Рис. 157.

Например, кривая $y = \frac{2}{x+1}$ имеет вертикальную асимптоту (см. рис. 157) $x = -1$, так как $\lim\limits_{x\to -1+0} \frac{2}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1-0} \frac{2}{x+1} = -\infty$.

Уравнение *наклонной асимптоты* будем искать в виде

$$y = kx + b. \tag{25.5}$$

Найдем k и b.

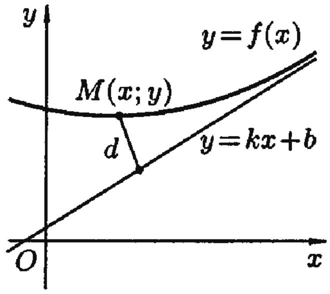


Рис. 158.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка кривой $y = f(x)$ (см. рис. 158). По формуле расстояния от точки до прямой $\left(d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|\right)$ находим расстояние от точки M до прямой (25.5): $d = \left|\frac{kx - y + b}{\sqrt{k^2 + 1}}\right|$.

Условие $d \to 0$ будет выполняться лишь тогда, когда числитель дроби стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}(kx - y + b) = 0. \tag{25.6}$$

Отсюда следует, что $kx - y + b = \alpha$, где $\alpha = \alpha(x)$ бесконечно малая: $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$. Разделив обе части равенства $y = b + kx - \alpha$ на x и перейдя к пределу при $x \to \infty$, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{x} + k - \frac{\alpha}{x}\right).$$

Так как $\frac{b}{x} \to 0$ и $\frac{\alpha}{x} \to 0$, то

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}.} \tag{25.7}$$

Из условия (25.6) находим b:

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty}(y - kx).} \tag{25.8}$$

Итак, если существует наклонная асимптота $y = kx + b$, то k и b находятся по формулам (25.7) и (25.8).

Верно и обратное утверждение: если существуют конечные пределы (25.7) и (25.8), то прямая (25.5) является наклонной асимптотой.

Если хотя бы один из пределов (25.7) или (25.8) не существует или равен бесконечности, то кривая $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Поэтому $y = b$ — уравнение *горизонтальной асимптоты.*

Замечание: Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (25.7) и (25.8) следует отдельно рассматривать случай, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.

Пример 25.13. Найти асимптоты графика функции $y = xe^x$.

Решение: Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, то график функции при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты не имеет.

При $x \to -\infty$ справедливы соотношения

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - 0x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$. ●

25.8. Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.

2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.

3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$).

4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

5. Найти асимптоты графика функции.

6. Найти интервалы монотонности функции.

7. Найти экстремумы функции.

8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции. Заметим, что приведенная схема исследования не является обязательной. В более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций, например 1, 2, 7. Если же график функции не совсем понятен и после выполнения всех восьми операций, то можно дополнительно исследовать функцию на периодичность, построить дополнительно несколько точек графика, выявить другие особенности функции. Иногда целесообразно выполнение операций исследования сопровождать постепенным построением графика функции.

Пример 25.14. Исследовать функцию $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение: Выполним все восемь операций предложенной выше схемы исследования.

1. Функция не определена при $x = 1$ и $x = -1$. Область ее определения состоит из трех интервалов $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$, а график из трех ветвей.

2. Если $x = 0$, то $y = 0$. График пересекает ось Oy в точке $O(0; 0)$; если $y = 0$, то $x = 0$. График пересекает ось Ox в точке $O(0; 0)$.

3. Функция знакоположительна ($y > 0$) в интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$; знакоотрицательна — в $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$.

4. Функция $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ является нечетной, т. к.

$$y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geqslant 0$.

5. Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

($k = 0$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$),

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1-x^2} - 0x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение $y = 0$. Прямая $y = 0$ является асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

6. Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},$$

то $y' > 0$ в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

7. Исследуем функцию на экстремум. Так как $y' = \dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$, то критическими точками являются точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ (y' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

8. Исследуем функцию на выпуклость. Находим y'':

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(1-x^2)^2 - (x^2+1)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

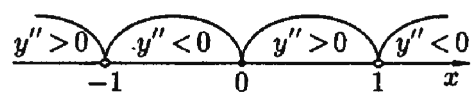


Рис. 159.

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. На рисунке 159 представлена схема изменения знаков второй производной исследуемой функции.

Точка $O(0,0)$ — точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1; 0)$ и $(1; \infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$.

График функции изображен на рисунке 160. ●

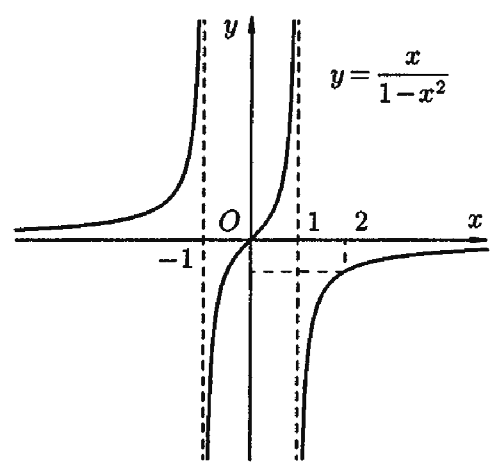


Рис. 160.

§ 26. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

В определении функции $y = f(x)$ не говорится о том, при помощи каких средств находятся значения y по значениям x. В тех случаях, когда функция является формулой вида $y = \dfrac{x^3}{5} - 5x + 7$, значения функции найти легко с помощью четырех арифметических действий. Но как найти значения, например, функций $y = \sin x$, $y = \ln(1+x)$ при любых (допустимых) значениях аргумента?

Для того, чтобы вычислить значения данной функции $y = f(x)$, ее заменяют многочленом $P_n(x)$ степени n, значения которого всегда и легко вычисляемы. Обоснование возможности представлять функцию многочленом дает формула Тейлора.

26.1. Формула Тейлора для многочлена

Пусть функция $f(x)$ есть многочлен $P_n(x)$ степени n:

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Преобразуем этот многочлен также в многочлен степени n относительно разности $x - x_0$, где x_0 — произвольное число, т. е. представим $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n. \qquad (26.1)$$

Для нахождения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$ продифференцируем n раз равенство (26.1):

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + \cdots + nA_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 2 \cdot 3A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4A_4(x - x_0) + \cdots + n(n-1)(n-2)A_n(x - x_0)^{n-3},$$

....

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1A_n.$$

Подставляя $x = x_0$ в полученные равенства и равенство (26.1), имеем:

$$\begin{array}{ll}
P_n(x_0) = A_0, & \text{т. е. } A_0 = P_n(x_0), \\
P_n'(x_0) = A_1, & \text{т. е. } A_1 = \dfrac{P_n'(x_0)}{1!}, \\
P_n''(x_0) = 2A_2, & \text{т. е. } A_2 = \dfrac{P_n''(x_0)}{2!}, \\
P_n'''(x_0) = 2 \cdot 3A_3, & \text{т. е. } A_3 = \dfrac{P_n'''(x_0)}{3!}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1A_n, & \text{т. е. } A_n = \dfrac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.
\end{array}$$

Подставляя найденные значения $A_0, A_1, \ldots, A_n$ в равенство (26.1), получим разложение многочлена n-й степени $P_n(x)$ по степеням $(x - x_0)$:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (26.2)$$

Формула (26.2) называется ***формулой Тейлора для многочлена*** $P_n(x)$ ***степени*** n.

Пример 26.1. Разложить многочлен $P(x) = -4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ по степеням $x + 1$.

Решение: Здесь $x_0 = -1$, $P'(x) = -12x^2 + 6x - 2$, $P''(x) = -24x + 6$, $P'''(x) = -24$. Поэтому $P(-1) = 10$, $P'(-1) = -20$, $P''(-1) = 30$, $P'''(-1) = -24$. Следовательно,

$$P(x) = 10 + \frac{-20}{1}(x + 1) + \frac{30}{2!}(x + 1)^2 + \frac{-24}{3!}(x + 1)^3,$$

т. е.

$$-4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 10 - 20(x + 1) + 15(x + 1)^2 - 4(x + 1)^3.$$ ●

26.2. Формула Тейлора для произвольной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Формула Тейлора позволяет, при определенных условиях, приближенно представить функцию $f(x)$ в виде многочлена и дать оценку погрешности этого приближения.

Теорема 26.1. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $c \in (x_0; x)$ такая, что справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1). \quad (26.3)$$

Формула (26.3) называется ***формулой Тейлора для функции*** $f(x)$. Эту формулу можно записать в виде $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется ***многочленом Тейлора***, а

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

называется ***остаточным членом*** формулы Тейлора, записанным в форме Лагранжа. $R_n(x)$ есть погрешность приближенного равенства

$f(x) \approx P_n(x)$. Таким образом, формула Тейлора дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом $y = P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

При $x_0 = 0$ получаем частный случай формулы Тейлора — ***формулу Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (26.4)$$

где c находится между 0 и x ($c = \theta x$, $0 < \theta < 1$).

При $n = 0$ формула Тейлора (26.3) имеет вид $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$ или $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, т. е. совпадает с формулой Лагранжа конечных приращений. Рассмотренная ранее формула для приближенных вычислений $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (см. «дифференциал функции») является частным случаем более точной формулы

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Пример 26.2. Найти число e с точностью до 0,001.

Решение: Запишем формулу Маклорена для функции $f(x) = e^x$. Находим производные этой функции: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n+1)}(x) = e^x$. Так как $f(0) = e^0 = 1$, $f'(0) = e^0 = 1, \ldots, f^{(n)}(0) = 1$, $f^{(n+1)}(c) = e^c$, то по формуле (26.4) имеем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Положим $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Для нахождения e с точностью 0,001 определим n из условия, что остаточный член $\frac{e^c}{(n+1)!}$ меньше 0,001. Так как $0 < c < 1$, то $e^c < 3$. Поэтому при $n = 6$ имеем

$$\frac{e^c}{7!} < \frac{3}{5040} = 0{,}0006 < 0{,}001.$$

Итак, получаем приближенное равенство

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx$$

$$\approx 2 + 0{,}5 + 0{,}1667 + 0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014 = 2{,}7181 \approx 2{,}718,$$

т. е. $e \approx 2{,}718$. ●

Приведем разложения по формуле Маклорена некоторых других элементарных функций:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \cos c,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \cos c,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!} x^n + \\ + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n)(1+c)^{\mu-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Глава VI. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Лекции 23–24

§ 27. ПОНЯТИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

27.1. Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i — так называемая ***мнимая единица***, $i^2 = -1$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется ***чисто мнимым***; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — ***мнимой частью*** z, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными*** ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются ***сопряженными***.

27.2. Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$ (см. рис. 161).

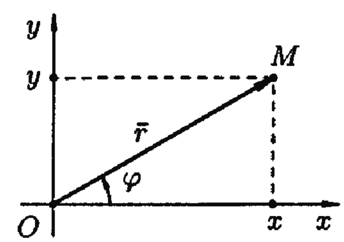


Рис. 161.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью***. Ось абсцисс называется ***действительной осью***, так как на ней лежат действительные числа $z = x + 0i = x$. Ось ординат называется ***мнимой осью***, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + iy$.

Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется ***модулем*** этого числа и обозначается $|z|$ или r. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется ***аргументом*** этого комплексного числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ — величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0, -1, 1, -2, 2\ldots)$: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z$ — ***главное значение аргумента***, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, т. е. $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$).

27.3. Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\bar{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$ (см. рис. 162). Тогда получаем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ или

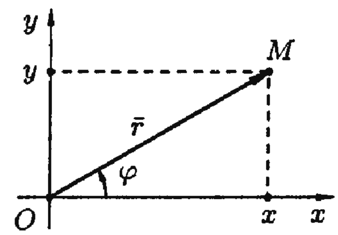


Рис. 162.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая запись комплексного числа называется ***тригонометрической формой***.

Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Например, $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Так как

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,$$

то

$$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2k\pi) = \cos(\arg z), \quad \sin\varphi = \sin(\arg z).$$

Поэтому при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа z, т. е. считать $\varphi = \arg z$.

Так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек II четверти,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

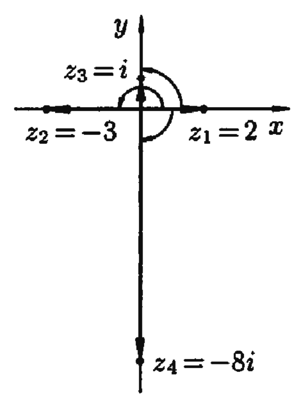


Рис. 163.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно (см. рис. 163). Например, $\arg z_1 = 0$ для $z_1 = 2$; $\arg z_2 = \pi$

для $z_2 = -3$; $\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$ для $z_3 = i$; и $\arg z_4 = -\frac{\pi}{2}$ для $z_4 = -8i$.

Используя *формулу Эйлера*

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,}$$

комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в так называемой ***показательной*** (или ***экспоненциальной***) ***форме*** $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$ — модуль комплексного числа, а угол $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ $(k = 0, -1, 1, -2, 2\ldots)$.

В силу формулы Эйлера, ***функция*** $e^{i\varphi}$ ***периодическая с основным периодом*** 2π. Для записи комплексного числа z в показательной форме, достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, т. е. считать $\varphi = \arg z$.

Пример 27.1. Записать комплексные числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение: Для z_1 имеем

$$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

т. е. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Поэтому

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Для z_2 имеем

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \arg z = \arg(-1) = \pi,$$

т. е. $\varphi = \pi$. Поэтому $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$. ●

§ 28. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

28.1. Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).} \tag{28.1}$$

Сложение комплексных чисел обладает ***переместительным*** (коммутативным) и ***сочетательным*** (ассоциативным) свойствами:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

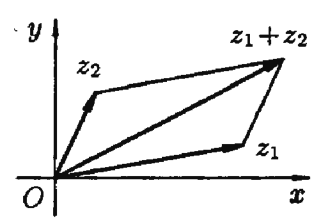


Рис. 164.

Из определения (28.1) следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы (см. рис. 164).

Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Это соотношение называется *неравенством треугольника*.

28.2. Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. ***Разностью*** двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1, т. е. $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то из этого определения легко получить z:

$$\boxed{z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).} \tag{28.2}$$

Из равенства (28.2) следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы (см. рис. 165).

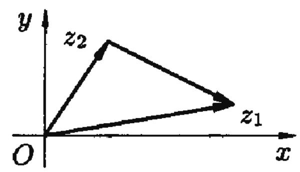


Рис. 165.

Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$. Отметим, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d,$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию d между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Поэтому, например, равенство $|z - 2i| = 1$ определяет на комплексной плоскости множество точек z, находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = 2i$, т. е. окружность с центром в $z_0 = 2i$ и радиусом 1.

28.3. Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).} \tag{28.3}$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$\boxed{i^2 = -1.} \tag{28.4}$$

Действительно, $i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$. Благодаря соотношению (28.4) формула (28.3) получается формально путем перемножения двучленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 =$$
$$= x_1x_2 + i^2y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Например,

$$(2 - 3i)(-5 + 4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$$

Заметим, что $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ — действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$
$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$
$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

В этом легко убедиться, используя определение (28.3).

Найдем произведение комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \end{aligned}$$

т. е.

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).}$$

Мы показали, что ***при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.***

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то

$$\boxed{z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).} \qquad (28.5)$$

Формула (28.5) называется ***формулой Муавра.***

Пример 28.1. Найти $(1+\sqrt{3}i)^9$.

Решение: Запишем сначала число $z = 1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \arg z = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big).$$

По формуле Муавра имеем

$$\begin{aligned} z^9 = (1+\sqrt{3}i)^9 &= 2^9\Big(\cos 9\frac{\pi}{3} + i\sin 9\frac{\pi}{3}\Big) = \\ &= 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^9(-1) = -512. \end{aligned}$$

28.4. Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению. ***Частным двух комплексных чисел*** z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т. е. $\frac{z_1}{z_2} = z$, если $z_2 z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, $z = x + iy$, то из равенства $(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$ следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.}$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 28.2. Выполнить деление $\frac{1+3i}{2+i}$.

Решение: $\dfrac{1+3i}{2+i} = \dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i+6i+3}{4+1} = \dfrac{5+5i}{5} = 1+i.$ ●

Для тригонометрической формы комплексного числа формула деления имеет вид

$$\boxed{\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).}$$

При делении комплексных чисел их модули, соответственно, делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются.

28.5. Извлечение корней из комплексных чисел

Извлечение корня n-й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т. е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots$ То есть $\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид

$$\boxed{\begin{gathered} \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{gathered}}$$

Получим n различных значений корня. При других значениях k, в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при $k = n$ имеем

$$\omega_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = \omega_0$$

$$(k = 0).$$

Итак, для любого $z \neq 0$ корень n-й степени из числа z имеет ровно n различных значений.

Пример 28.3. Найти значения а) $\sqrt[3]{i} = \omega$; б) $\sqrt{-1} = \omega$.

Решение: а) Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Стало быть,

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right),$$

$$k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ имеем

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 1$ имеем

$$\omega_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 2$ имеем

$$\omega_2 = \cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

б) Снова запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

Поэтому

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{2}, \quad k = 0, 1.$$

При $k = 0$ получаем $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, а при $k = 1$ получаем $\omega_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$. Таким образом, $\sqrt{-1} = i$ и $\sqrt{-1} = -i$. ●

Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекции 25–28

§ 29. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

29.1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции $f(x)$ найти ее производную* (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$* (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для любого $x \in (a; b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x)\,dx).$$

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — постоянная, поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теорема 29.1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C — постоянное число.

❑ Функция $F(x) + C$ является первообразной $f(x)$. Действительно, $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Пусть $\Phi(x)$ — некоторая другая, отличная от $F(x)$, первообразная функции $f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда для любого $x \in (a; b)$ имеем

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

А это означает (см. следствие 25.1), что

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

где C — постоянное число. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом от функции*** $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C.}$$

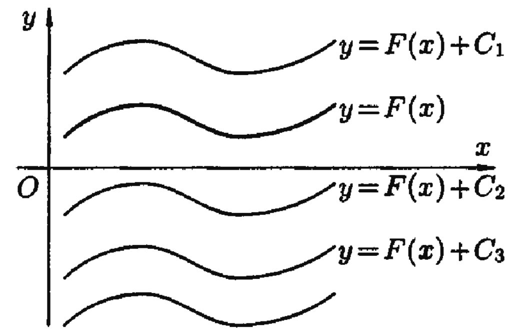


Рис. 166.

Здесь $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)\,dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — ***переменной интегрирования***, $\int$ — ***знаком неопределенного интеграла.***

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x)+C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства) (см. рис. 166). График каждой первообразной (кривой) называется ***интегральной кривой.***

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл?

Имеет место теорема, утверждающая, что «всякая непрерывная на $(a; b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную», а следовательно, и неопределенный интеграл.

29.2. Свойства неопределенного интеграла

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = f(x)\,dx, \qquad \Big(\int f(x)\,dx\Big)' = f(x).$$

❑ Действительно,

$$d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

и

$$\Big(\int f(x)\,dx\Big)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x). \qquad ■$$

Благодаря этому свойству *правильность интегрирования проверяется дифференцированием.* Например, равенство

$$\int (3x^2 + 4)\,dx = x^3 + 4x + C$$

верно, так как $(x^3 + 4x + C)' = 3x^2 + 4$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

❏ Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$ ■

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx, \quad a \neq 0 \text{ — постоянная.}$$

❏ Действительно,

$$\int af(x)\,dx = \int aF'(x)\,dx = \int (aF(x))'\,dx = \int d(aF(x)) =$$
$$= a \cdot F(x) + C_1 = a \cdot \left(F(x) + \frac{C_1}{a}\right) = a(F(x) + C) = a \int f(x)\,dx$$

$\left(\text{положили } \frac{C_1}{a} = C\right)$. ■

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

❏ Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int (F'(x) \pm G'(x))\,dx =$$
$$= \int (F(x) \pm G(x))'\,dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = F(x) \pm G(x) + C =$$
$$= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$$

где $C_1 \pm C_2 = C$. ■

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)\,du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

❏ Пусть x — независимая переменная, $f(x)$ — непрерывная функция и $F(x)$ — ее первообразная. Тогда $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции (см. с. 160) имеем

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du.$$

Отсюда $\int f(u)\,du = \int d(F(u)) = F(u) + C.$ ■

Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Так, из формулы $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ путем замены x на u $(u = \varphi(x))$ получаем $\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$. В частности,

$$\int \sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Пример 29.1. Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx$.

Решение:

$$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx = 2\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + \int x\,dx - 5\int dx =$$

$$= 2\frac{x^5}{5} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. ●

Пример 29.2. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{x}\,dx$.

Решение: $\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int (1 + \frac{1}{x})\,dx = x + \ln|x| + C$. ●

29.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления (таблица дифференциалов) и использования свойств неопределенного интеграла.

Например, так как

$$d(\sin u) = \cos u \cdot du,$$

то

$$\int \cos u\,du = \int d(\sin u) = \sin u + C.$$

Вывод ряда формул таблицы будет дан при рассмотрении основных методов интегрирования.

Интегралы в приводимой ниже таблице называются *табличными*. Их следует знать наизусть. В интегральном исчислении нет простых и универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных (т. е. интегрирования функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования).

В справедливости приведенных ниже формул можно убедиться, взяв дифференциал правой части, который будет равен подынтегральному выражению в левой части формулы.

Докажем, например, справедливость формулы 2. Функция $\frac{1}{u}$ определена и непрерывна для всех значений u, отличных от нуля.

Если $u > 0$, то $\ln|u| = \ln u$, тогда $d\ln|u| = d\ln u = \frac{du}{u}$. Поэтому $\int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln|u| + C$ при $u > 0$.

Если $u < 0$, то $\ln|u| = \ln(-u)$. Но $d\ln(-u) = \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u}$. Значит, $\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C = \ln|u| + C$ при $u < 0$.

Итак, формула 2 верна.

Аналогично, проверим формулу 15:

$$d\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+(\frac{u}{a})^2}\cdot\frac{1}{a}\,du = \frac{du}{a^2+u^2}.$$

Таблица основных интегралов

1. $\int u^\alpha\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
4. $\int e^u\,du = e^u + C;$
5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C \qquad \left(\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C\right);$
6. $\int \cos u\,du = \sin u + C \qquad \left(\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C\right);$
7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C;$
8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C;$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \qquad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C\right);$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \qquad \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C\right);$
11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$
12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C;$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

17. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C;$

18. $\displaystyle\int \sqrt{u^2\pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + C.$

§ 30. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

30.1. Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием***.

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «*подведения под знак дифференциала*»):

$$du = d(u+a), \quad a \text{ — число},$$

$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число},$$

$$u\cdot du = \frac{1}{2}d(u^2),$$

$$\cos u\,du = d(\sin u),$$

$$\sin u\,du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u}\,du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} = d(\operatorname{tg} u).$$

Вообще, $f'(u)\,du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$ (формула 2 таблицы интегралов);

2) $\displaystyle\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}\,d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$ (формула 1);

3) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \int dx =$
$= -\operatorname{ctg} x - x + C$ (формулы 10 и 1);

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}\cdot x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} + C$ (формула 13);

5) $\int \sin^2 6x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 12x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,dx = \frac{1}{2}x -$
$-\frac{1}{2}\int \cos 12x\,d(12x)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$ (формулы 1 и 6);

6) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx +$
$+\frac{1}{3}\int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3}\ln|x+2| +$
$+\frac{1}{3}\ln|x-1| + C;$

7) $\int \operatorname{tg} u\,du = \int \frac{\sin u\,du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$ (вывод формулы 7);

8) $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du + \int \frac{\sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du =$
$= \int \operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,d\left(\frac{u}{2}\right) + \int \operatorname{tg}\frac{u}{2}\,d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln\left|\sin\frac{u}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\right| + C =$
$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$ (вывод формулы 11);

9) $\int x(x+2)^9\,dx = \int (x+2-2)(x+2)^9\,dx = \int (x+2)^{10}\,dx - 2\int (x+2)^9\,dx =$
$= \int (x+2)^{10}\,d(x+2) - 2\int (x+2)^9\,d(x+2) = \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2\frac{(x+2)^{10}}{10} + C$
(формула 1);

10) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x\cdot\sin^2 x} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-5}\,d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^{-4} x}{-4} + C = \frac{1}{4\operatorname{ctg}^4 x} + C$
(формула 1);

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (x-1)^2}} =$
$= \ln\left|x - 1 + \sqrt{3-2x+x^2}\right| + C$ (формула 14);

12) $\int\left(4x^3-\dfrac{5}{\cos^2 2x}+3^{1-x}\right)dx=4\int x^3\,dx-\dfrac{5}{2}\int\dfrac{d(2x)}{\cos^2 2x}-\int 3^{1-x}\,d(1-x)=$
$= x^4-\dfrac{5}{2}\operatorname{tg}2x-\dfrac{3^{1-x}}{\ln 3}+C$ (формулы 1, 9, 3);

13) $\int x^3\cdot\sqrt[3]{1+x^2}\,dx=\int(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\cdot x\cdot(x^2+1-1)\,dx=\dfrac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{4}{3}}\,d(1+x^2)-$
$-\dfrac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\,d(1+x^2)=\dfrac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\dfrac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$

Как видно, вычисление интегралов иногда требует некоторой изобретательности, так сказать, «индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции».

Соответствующие навыки приобретаются в результате значительного числа упражнений.

30.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx=\varphi'(t)\,dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем ***формулу интегрирования подстановкой***

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.} \qquad (30.1)$$

Формула (30.1) также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t=\varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$, где $t=\varphi(x)$. Другими словами, формулу (30.1) можно применять справа налево.

Пример 30.1. Найти $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx$.

Решение: Положим $x=4t$, тогда $dx=4\,dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx=4\int e^t\,dt=4e^t+C=4e^{\frac{x}{4}}+C. \quad \bullet$$

Пример 30.2. Найти $\int x\cdot\sqrt{x-3}\,dx$.

Решение: Пусть $\sqrt{x-3}=t$, тогда $x=t^2+3$, $dx=2t\,dt$. Поэтому

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}\,dx=\int(t^2+3)\cdot t\cdot 2t\,dt=$$
$$=2\int(t^4+3t^2)\,dt=2\int t^4\,dt+6\int t^2\,dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+6\cdot\frac{t^3}{3}+C=$$
$$=\frac{2}{5}(x-3)^{5/2}+2(x-3)^{3/2}+C.$$

Пример 30.3. Получить формулу $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+C$.

Обозначим $t=\sqrt{u^2+a^2}+u$ (подстановка Эйлера). Тогда

$$dt=\frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}\,du+du,\quad \text{т. е.}\quad dt=\frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\frac{dt}{\sqrt{u^2+a^2}+u}=\frac{dt}{t}.$$

Стало быть,

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|u+\sqrt{u^2+a^2}|+C.$$

Пример 30.4. Найти $\int x\cdot(x+2)^{100}\,dx$.

Решение: Пусть $x+2=t$. Тогда $x=t-2$, $dx=dt$. Имеем:

$$\int x\cdot(x+2)^{100}\,dx=\int(t-2)\cdot t^{100}\,dt=\int t^{101}\,dt-2\int t^{100}\,dt=$$
$$=\frac{t^{102}}{102}-2\cdot\frac{t^{101}}{101}+C=\frac{(x+2)^{102}}{102}-\frac{2(x+2)^{101}}{101}+C.$$

Пример 30.5. Найти $\int\frac{dx}{e^x+1}$.

Решение: Обозначим $e^x=t$. Тогда $x=\ln t$, $dx=\frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{\frac{dt}{t}}{t+1}=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\frac{dt}{t^2+t}=$$
$$=\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}=-\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2-(t+\frac{1}{2})^2}=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right|+C=$$
$$=-\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right|=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.$$

Здесь используется формула 16 таблицы основных интегралов.

30.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\boxed{\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Полученная формула называется ***формулой интегрирования по частям***. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\cdot\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$. Удобно положить $P(x)\,dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 30.6. Найти $\int(2x+1)e^{3x}\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u = 2x+1 & \Longrightarrow & du = 2dx \\ dv = e^{3x}\,dx & \Longrightarrow & v = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right]$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int(2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \quad \bullet$$

Пример 30.7. Найти $\int \ln x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x - x + C. \quad \bullet$$

Пример 30.8. Найти $\int x^2 e^x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int e^x \cdot x\,dx. \tag{30.2}$$

Для вычисления интеграла $\int e^x x\,dx$ снова применим метод интегрирования по частям: $u = x$, $dv = e^x\,dx \Longrightarrow du = dx$, $v = e^x$. Значит,

$$\int e^x \cdot x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C. \tag{30.3}$$

Поэтому (см. (30.2)) $\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2(x \cdot e^x - e^x + C)$. ●

Пример 30.9. Найти $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = \operatorname{arctg} x & \Longrightarrow & du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \quad ●$$

§ 31. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

31.1. Понятия о рациональных функциях

Многочлен (некоторые сведения справочного характера)

Функция вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \tag{31.1}$$

где n — натуральное число, a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — постоянные коэффициенты, называется ***многочленом*** (или ***целой рациональной функцией***). Число n называется ***степенью*** многочлена.

Корнем многочлена (31.1) называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x, при котором многочлен обращается в нуль, т. е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 31.1. Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x), \tag{31.2}$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$.

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 31.2 (основная теорема алгебры). Всякий многочлен n-й степени ($n > 0$) имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Пользуясь основной теоремой алгебры, докажем теорему о разложении многочлена на линейные множители.

Теорема 31.3. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \tag{31.3}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена, a_0 — коэффициент многочлена при x^n.

❑ Рассмотрим многочлен (31.1). По теореме 31.2 он имеет корень. Обозначим его через x_1. Тогда имеет место соотношение (31.2). А так как $P_{n-1}(x)$ — также многочлен, то он имеет корень. Обозначим его через x_2. Тогда $P_{n-1}(x) = (x - x_2) \cdot P_{n-2}(x)$, где $P_{n-2}(x)$ — многочлен $(n-2)$-й степени. Следовательно, $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_{n-2}(x)$.

Продолжая этот процесс, получим в итоге:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \qquad \blacksquare$$

Множители $(x - x_i)$ в равенстве (31.3) называются ***линейными множителями***.

Пример 31.1. Разложить многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ на множители.

○ Решение: Многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ обращается в нуль при $x = -1, x = 1, x = 2$. Следовательно, $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$. ●

Пример 31.2. Представить выражение $x^3 - x^2 + 4x - 4$ в виде произведения линейных множителей.

○ Решение: Легко проверить, что $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x-2i)(x+2i)$. ●

Если в разложении многочлена (31.3) какой-либо корень встретился k раз, то он называется *корнем кратности* k. В случае $k = 1$ (т. е. корень встретился один раз) корень называется *простым*.

Разложение многочлена (31.3) можно записать в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}, \tag{31.4}$$

если корень x_1 имеет кратность k_1, корень x_2 — кратность k_2 и так далее. При этом $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, а r — число различных корней.

Например, разложение

$$P_8(x) = (x-3)(x+1)(x-4)(x-3)(x-3)x(x-4)(x-3)$$

можно записать так:

$$P_8(x) = (x-3)^4 \cdot (x+1) \cdot (x-4)^2 \cdot x.$$

Пользуясь теоремой 31.3, можно доказать следующие утверждения.

Теорема 31.4. Если многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Теорема 31.5. Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Например, если $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv x^3 - 3x^2 + 1$, то $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 1$.

Теорема 31.6. Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + ib$, то он имеет и сопряженный корень $a - ib$.

В разложении многочлена (31.3) комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители

$$(x - (a+ib)) \cdot (x - (a - ib)),$$

получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами $x^2 + px + q$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(x-(a+ib))(x-(a-ib)) &= ((x-a)-ib)((x-a)+ib) = \\ &= (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,\end{aligned}$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

С учетом вышеизложенного справедлив следующий факт.

Теорема 31.7. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т. е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r} \times \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}\dots(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}. \quad (31.5)\end{aligned}$$

При этом $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_m) = n$, все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней.

Примеры разложений (31.5):

1) $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$;

2) $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x-4)(x+4)$;

3) $x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9 = x^3(x^2 - 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) =$
$= (x^2 - 6x + 9)(x^3 - 1) = (x-3)^2 \cdot (x-1)(x^2+x+1)$.

Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональной функцией (или ***рациональной дробью***) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а $Q_n(x)$ — многочлен степени n.

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m < n$; в противном случае (если $m \geqslant n$) рациональная дробь называется ***неправильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, т. е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Например, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ — неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4 \qquad\qquad -5x + 9 & x - 2 \\
\underline{x^4 - 2x^3} \qquad\qquad\qquad & \overline{x^3 + 2x^2 + 4x + 3} \\
-\;2x^3 \qquad -5x + 9 & \\
\underline{2x^3 - 4x^2 \qquad\qquad} & \\
-\;4x^2 - 5x + 9 & \\
\underline{4x^2 - 8x \quad\;\;} & \\
-\;3x + 9 & \\
\underline{3x - 6} & \\
15. &
\end{array}$$

Получим частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 15$. Следовательно, $\dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \dfrac{15}{x - 2}$.

Правильные рациональные дроби вида

(I). $\dfrac{A}{x - a}$;

(II). $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k \geqslant 2,\ k \in \mathbb{N})$;

(III). $\dfrac{Mx + N}{x^2 + px + q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2 - 4q < 0$);

(IV). $\dfrac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ $(k \geqslant 2$, корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q — действительные числа, называются ***простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов***.

Теорема 31.8. Всякую *правильную* рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \ldots (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} +$$
$$+ \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \ldots$$
$$\cdots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \cdots + \frac{C_{s_1} x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} + \ldots$$
$$\cdots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_m x + q_m} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_m x + q_m)^2} + \cdots + \frac{M_{s_m} x + N_{s_m}}{(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}}, \quad (31.6)$$

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ — некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $\frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}$;

2) $\frac{x^3 + 1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$;

3) $\frac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ в равенстве (31.6) можно применить *метод сравнивания коэффициентов*. Суть метода такова:

1. В правой части равенства (31.6) приведем к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т. е.

$$P(x) \equiv S(x). \quad (31.7)$$

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (по теореме 31.5 о тождестве многочленов) в обеих частях тождества (31.7), получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, B_1, \ldots$

Пример 31.3. Представить дробь $\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение: Согласно теореме 31.8 имеем:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5},$$

т. е.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Отсюда следует

$$2x^2-3x-3\equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

т. е.

$$2x^2-3x-3\equiv (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C).$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получаем

$$\begin{cases} 2=A+B, \\ -3=-2A-B+C, \\ -3=5A-C. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $A=-1$, $B=3$, $C=-2$. Следовательно,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$ ●

Для нахождения неопределенных коэффициентов применяют также ***метод отдельных значений аргумента:*** после получения тождества (31.7) аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов (обычно полагают вместо x значения действительных корней многочлена $Q(x)$).

Пример 31.4. Представить дробь $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение: Имеем: $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$. Отсюда следует

$$3x-4\equiv A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Положим $x=0$, тогда $-4=-2A$, т. е. $A=2$; положим $x=2$, тогда $2=6B$, т. е. $B=\frac{1}{3}$; положим $x=-1$, тогда $-7=3C$, т. е. $C=-\frac{7}{3}$. Следовательно,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{2}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{7}{3}}{x+1}.$$ ●

31.2. Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

1. $\int\frac{A}{x-a}\,dx=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$ (формула (2) таблицы интегралов);

2. $\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=A\cdot\int(x-a)^{-k}\,d(x-a)=A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$ (формула (1));

3. Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$.

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим:

$$J = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx,$$

причем $q-\frac{p^2}{4} > 0$. Сделаем подстановку $x+\frac{p}{2} = t$. Тогда $x = t-\frac{p}{2}$, $dx = dt$. Положим $q-\frac{p^2}{4} = a^2$. Следовательно, используя формулы (2) и (15) таблицы интегралов, получаем

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}\,dt =$$
$$= M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\cdot\ln(t^2+a^2) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

т. е., возвращаясь к переменной x,

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Пример 31.5. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}\,dx$.

Решение: $x^2+2x+10 = (x+1)^2+9$. Сделаем подстановку $x+1=t$. Тогда $x = t-1$, $dx = dt$ и

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+9) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

4. Вычисление интеграла вида $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx$, $k \geqslant 2$, $q-\frac{p^2}{4} > 0$.

Данный интеграл подстановкой $x+\frac{p}{2} = t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad a^2 = q-\frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt =$$
$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right) = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right). \quad (31.8)$$

К последнему интегралу применим интегрирование по частям. Положим

$$u = t, \quad dv = \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad du = dt,$$

$$v = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}},$$

тогда

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} =$$

$$= \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\cdot J_{k-1}.$$

Подставляя найденный интеграл в равенство (31.8), получаем

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}\right),$$

т. е.

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k > 1$.

Пример 31.6. Найти интеграл $J_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

Решение: Здесь $a = 1$, $k = 3$. Так как

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C,$$

то

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}J_1 + \frac{t}{2\cdot(2-1)(t^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C,$$

$$J_3 = \frac{3}{4}J_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + C. \quad \bullet$$

31.3. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный в пунктах 1–3 материал позволяет сформулировать *общее правило интегрирования рациональных дробей.*

1. Если дробь неправильна, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби (см. пункт 2);

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 31.7. Найти интеграл $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$.

○ Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
x^5 \ + 2x^3 \ + 4x + 4 & x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^5 + 2x^4 + 2x^3} & x - 2 \\
-2x^4 \ + 4x + 4 & \\
-\ \underline{-2x^4 - 4x^3 - 4x^2} & \\
4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \text{ (остаток).} &
\end{array}$$

Получаем:

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2},$$

$$4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \equiv Ax(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2,$$

т. е.

$$4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \equiv (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (2A + 2B)x + 2B.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A + C = 4, \\ 2A + B + D = 4, \\ 2A + 2B = 4, \\ 2B = 4. \end{cases}$$

Находим: $B = 2$, $A = 0$, $C = 4$, $D = 2$. Стало быть,

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

и

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}\, dx = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1}\, dx.$$

Обозначим $x + 1 = t$, тогда $x = t - 1$ и $dx = dt$. Таким образом,

$$\int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1}\, dx = \int \frac{4t - 4 + 2}{t^2 + 1}\, dt = 4\int \frac{t\, dt}{t^2 + 1} - 2\int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) - 2 \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 2 \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}\, dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2 + 2x + 2) - 2\operatorname{arctg}(x + 1) + C. \quad \bullet$$

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

§ 32. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

32.1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R — знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x)\,dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, которая называется ***универсальной***.

Действительно, $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$. Поэтому

$$\int R(\sin x; \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он *всегда* приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\sin x$, т. е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\cos x$, т. е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *четна относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$ $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$.

Пример 32.1. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C. \quad \bullet$$

Пример 32.2. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение: Так как

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{1+(-\sin x)^2} = \frac{1}{1+\sin^2 x} = R(\sin x; \cos x),$$

то полагаем $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \quad \bullet$$

32.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t$, если n — целое положительное *нечетное* число;

2) подстановка $\cos x = t$, если m — целое положительное *нечетное* число;

3) формулы понижения порядка: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, если m и n — целые *неотрицательные четные* числа;

4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $m+n$ — есть четное отрицательное целое число.

Пример 32.3. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$.

Решение: Применим подстановку $\sin x = t$. Тогда $x = \arcsin t$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ и

$$I = \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4(1-t^2)^2\,dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8)\,dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C. \quad \bullet$$

Пример 32.4. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$.

Решение:

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C. \quad \bullet$$

Пример 32.5. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x\, dx.$

○ Решение: Здесь $m + n = -4$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{(\sqrt{1+t^2})^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}\,dt = \int t^{-3}\,dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2}\cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C. \quad \bullet$$

32.3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 32.6. Найти интеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x\, dx$.

○ Решение:

$$I = \int \sin 8x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin 6x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x - \frac{1}{6}\cos 6x\right) + C. \quad \bullet$$

§ 33. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

33.1. Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей. Их можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2 + bx + c =$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$. При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий — к сумме двух табличных интегралов.

Пример 33.1. Найти интегралы $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$.

Решение: Так как $4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right)$, то

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4((x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16})}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16}}}.$$

Сделаем подстановку $x + \frac{1}{4} = t$, $x = t - \frac{1}{4}$, $dx = dt$. Тогда

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 3/16}} = \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}\right| + C. \quad \bullet$$

Пример 33.2. Найти интеграл $I = \int \frac{x + 4}{\sqrt{6 - 2x - x^2}}\,dx$.

Решение: Так как $6 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 6) = -((x+1)^2 - 7) = 7 - (x+1)^2$, то подстановка имеет вид $x + 1 = t$, $x = t - 1$, $dx = dt$. Тогда

$$I = \int \frac{t - 1 + 4}{\sqrt{7 - t^2}}\,dt = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{7 - t^2}} + 3\int \frac{dt}{\sqrt{7 - t^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int (7 - t^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(7 - t^2) + 3\int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - t^2}} =$$
$$= -\sqrt{7 - t^2} + 3 \cdot \arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + C = 3\arcsin\frac{x + 1}{\sqrt{7}} - \sqrt{6 - 2x - x^2} + C. \quad \bullet$$

Интегралы типа $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n, можно вычислять, пользуясь формулой

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \tag{33.1}$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n - 1$ с неопределенными коэффициентами, λ — также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты находятся из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства (33.1):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \equiv \left(Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

после чего необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной x.

Пример 33.3. Найти интеграл $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx$.

Решение: По формуле (33.1) имеем:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2} + \lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \equiv A\cdot\sqrt{1-2x-x^2}+(Ax+B)\cdot\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}},$$

т. е.

$$x^2 \equiv A(1-2x-x^2)+(Ax+B)(-1-x)+\lambda,$$
$$x^2 \equiv A-2Ax-Ax^2-Ax-B-Ax^2-Bx+\lambda.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 1=-A-A & \text{при } x^2,\\ 0=-2A-A-B & \text{при } x^1,\\ 0=A-B+\lambda & \text{при } x^0. \end{cases}$$

Отсюда $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{3}{2}$, $\lambda=2$. Следовательно,

$$I=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

33.2. Дробно-линейная подстановка

Интегралы типа $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right)dx$, где a, b, c, d — действительные числа, $\alpha,\beta,\ldots,\delta,\gamma$ — натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta},\ldots,\frac{\delta}{\gamma}$.

Действительно, из подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ следует, что $x=\frac{b-dt^k}{ct^k-a}$ и $dx=\frac{-dkt^{k-1}(ct^k-a)-(b-dt^k)ckt^{k-1}}{(ct^k-a)^2}\,dt$, т. е. x и dx выражаются через рациональные функции от t. При этом и каждая степень дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию от t.

Пример 33.4. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}}$.

Решение: Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ есть 6. Поэтому полагаем $x+2 = t^6$, $x = t^6 - 2$, $dx = 6t^5\,dt$, $t = \sqrt[6]{x+2}$. Следовательно,

$$I = \int \frac{6t^5\,dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 6\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}\,dt =$$
$$= 6\int \Big(t + 1 + \frac{1}{t-1}\Big)\,dt = 3t^2 + 6t + 6\ln|t-1| + C =$$
$$= 3\cdot\sqrt[3]{x+2} + 6\cdot\sqrt[6]{x+2} + 6\ln\big|\sqrt[6]{x+2} - 1\big| + C.$$ ●

Пример 33.5. Указать подстановку для нахождения интегралов:

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}\,dx, \quad I_2 = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(1-x)^2}.$$

Решение: Для I_1 подстановка $x = t^2$, для I_2 подстановка $\frac{x+1}{x-1} = t^3$. ●

33.3. Тригонометрическая подстановка

Интегралы типа $\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx$, $\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$ приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих *тригонометрических подстановок:* $x = a\cdot\sin t$ для первого интеграла; $x = a\cdot\operatorname{tg} t$ для второго интеграла; $x = \frac{a}{\sin t}$ для третьего интеграла.

Пример 33.6. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

Решение: Положим $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$, $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Тогда

$$I = \int \frac{\sqrt{4 - 4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}\,dt =$$
$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C =$$
$$= C - \arcsin\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\Big(\arcsin\frac{x}{2}\Big) = C - \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$\Big(\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\Big).$$ ●

33.4. Интегралы типа $\int R(x; \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа, т. е. к интегралам типа $\int R(t; \sqrt{a^2-t^2})\,dt$, $\int R(t; \sqrt{a^2+t^2})\,dt$, $\int R(t; \sqrt{t^2-a^2})\,dt$. Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

Пример 33.7. Найти интеграл $I=\int \frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3}\,dx$.

Решение: Так как $x^2+2x-4=(x+1)^2-5$, то $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Поэтому $I=\int \frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}\,dt$. Положим $t=\frac{\sqrt5}{\sin z}$, $dt=\frac{-\sqrt5\cdot\cos z}{\sin^2 z}\,dz$, $z=\arcsin\frac{\sqrt5}{t}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z}-5}}{\frac{5\sqrt5}{\sin^3 z}}\cdot\frac{(-\sqrt5)\cos z}{\sin^2 z}\,dz = -\frac{1}{\sqrt5}\int\cos^2 z\,dz = \\
&= -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac12\int(1+\cos 2z)\,dz = -\frac{\sqrt5}{10}\Big(z+\frac12\sin 2z\Big)+C = \\
&= -\frac{\sqrt5}{10}\Big(\arcsin\frac{\sqrt5}{t}+\frac12\sin\Big(2\arcsin\frac{\sqrt5}{t}\Big)\Big)+C = \\
&= -\frac{\sqrt5}{10}\Big(\arcsin\frac{\sqrt5}{x+1}+\frac12\sin\Big(2\arcsin\frac{\sqrt5}{x+1}\Big)\Big)+C = \\
&= -\frac{\sqrt5}{10}\Big(\arcsin\frac{\sqrt5}{x+1}+\frac{\sqrt5\cdot\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^2}\Big)+C. \quad \bullet
\end{aligned}
$$

Замечание: Интеграл типа $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ целесообразно находить с помощью подстановки $x=\frac1t$.

33.5. Интегрирование дифференциального бинома

Интегралы типа $\int x^m\cdot(a+bx^n)^p\,dx$ (называемые интегралами от *дифференциального бинома*), где a, b — действительные числа; m, n, p — рациональные числа, берутся, как показал Чебышев П.А., лишь в случае, когда хотя бы одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым.

Рационализация интеграла в этих случаях осуществляется следующими подстановками:

1) если p — целое число, то подстановка $x=t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) если $\dfrac{m+1}{n}$ — целое число, то подстановка $a + bx^n = t^s$, где s — знаменатель дроби p;

3) если $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое число, то подстановка $a + bx^n = x^n \cdot t^s$, где s — знаменатель дроби p.

Во всех остальных случаях интегралы типа $\int x^m(a + bx^n)^p\,dx$ не выражаются через известные элементарные функции, т. е. «не берутся».

Пример 33.8. Найти интеграл $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение: Так как

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx,$$

то $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $\dfrac{m+1}{n} = 2$. Поэтому делаем подстановку $\sqrt[4]{x} + 1 = t^3$, $x = (t^3 - 1)^4$, $dx = 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2\,dt$, $t = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}$. Таким образом,

$$I = \int \frac{t}{(t^3-1)^2} \cdot 12t^2(t^3-1)^3\,dt = 12\int (t^6 - t^3)\,dt =$$
$$= 12 \cdot \frac{t^7}{7} - 12 \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7}(\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{7}{3}} - 3 \cdot (\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{4}{3}} + C.$$

§ 34. «БЕРУЩИЕСЯ» И «НЕБЕРУЩИЕСЯ» ИНТЕГРАЛЫ

Как уже отмечалось выше, операция интегрирования функций значительно сложнее операции дифференцирования функций. Не всегда выбранный путь интегрирования является наилучшим, более коротким, простым. Интегрирование часто может быть выполнено не единственным способом. Многое зависит от знания рекомендуемых многих искусственных приемов интегрирования, от сообразительности, от тренированности. Например, $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ можно найти, не используя рекомендуемую подстановку $\operatorname{tg} x = t$, а применив искусственный прием:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\cos^6 x}\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}\right) dx = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

Вряд ли стоит вычислять интеграл

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)}\,dx,$$

разлагая подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Заметив, что числитель $3x^2 + 4x + 1$ является производной знаменателя $x(x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x$, легко получить:

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)}\, dx = \int \frac{d(x^3 + 2x^2 + x)}{x^3 + 2x^2 + x} = \ln|x^3 + 2x^2 + x| + C.$$

На практике при вычислении неопределенных интегралов используют различные справочники, содержащие таблицы особенно часто встречающихся интегралов. В частности, «Таблицы неопределенных интегралов» М. Л. Смолянского.

Изученные методы интегрирования позволяют во многих случаях вычислить неопределенный интеграл, т. е. найти первообразную функцию для подынтегральной функции.

Как известно, ***всякая непрерывная функция имеет первообразную.*** В том случае, когда первообразная некоторой элементарной функции $f(x)$ является также элементарной функцией, говорят, что $\int f(x)\, dx$ *«берется»*, т. е. интеграл выражается через элементарные функции (или интеграл вычисляется). Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл *«не берется»* (или «его найти нельзя»).

Так, например, нельзя взять интеграл $\int \sqrt{x} \cdot \cos x\, dx$, так как не существует элементарной функции, производная от которой была бы равна $\sqrt{x} \cos x$. Приведем еще примеры «неберущихся» интегралов, которые имеют большое значение в приложениях:

$\int e^{-x^2}\, dx$ — интеграл Пуассона (теория вероятностей),

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм (теория чисел),

$\int \cos x^2\, dx$, $\int \sin x^2\, dx$ — интегралы Френеля (физика),

$\int \frac{\sin x}{x}\, dx$, $\int \frac{\cos x}{x}\, dx$ — интегральные синус и косинус,

$\int \frac{e^x}{x}\, dx$ — интегральная показательная функция.

Первообразные от функции e^{-x^2}, $\cos x^2$, $\frac{1}{\ln x}$ и других хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений для различных значений аргумента x.

Глава VIII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекции 29–33

§ 35. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ПРЕДЕЛ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, $a < b$. Выполним следующие действия.

1. С помощью точек $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ разобьем отрезок $[a, b]$ на n *частичных отрезков* $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ (см. рис. 167).

Рис. 167.

2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

3. Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

4. Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{35.1}$$

Сумма вида (35.1) называется ***интегральной суммой*** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max \Delta x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

5. Найдем предел интегральной суммы (35.1), когда $n \to \infty$ так, что $\lambda \to 0$.

Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел I, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число I называется ***определенным интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.} \tag{35.2}$$

Числа a и b называются соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***, $f(x)$ — ***подынтегральной функцией***, $f(x)\,dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — ***переменной интегрирования***, отрезок $[a;b]$ — ***областью*** (***отрезком***) *интегрирования*.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке.

Сформулируем теперь теорему существования определенного интеграла.

Теорема 35.1 (Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций, в частности для всякой ограниченной на отрезке функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва.

Укажем некоторые свойства определенного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения (35.2).

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(z)\,dz.$$

Это следует из того, что интегральная сумма (35.1), а следовательно, и ее предел (35.2) не зависят от того, какой буквой обозначается аргумент данной функции.

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3. Для любого действительного числа c: $\int\limits_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$.

§ 36. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geqslant 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ox, сбоку — прямыми $x = a$ и $x = b$, называется ***криволинейной трапецией***. Найдем площадь этой трапеции.

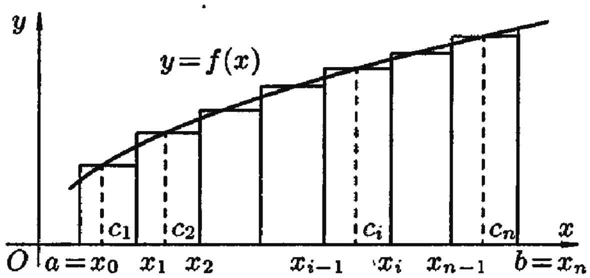


Рис. 168.

Для этого отрезок $[a;b]$ точками $a=x_0$, $x_1, \ldots, b = x_n$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ разобьем на n частичных отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2], \ldots, [x_{n-1};x_n]$. (см. рис. 168). В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ возьмем произвольную точку c_i и вычислим значение функции в ней, т. е. $f(c_i)$.

Умножим значением функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка. Произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма всех таких произведений

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_n$$

равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади S криволинейной трапеции:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i.$$

С уменьшением всех величин Δx_i точность приближения криволинейной трапеции ступенчатой фигурой и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел S, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \quad \text{то есть} \quad S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается под действием силы $\bar{F}$, направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину $F = F(x)$, где x — абсцисса движущейся точки M.

Найдем работу A силы $\bar{F}$ по перемещению точки M вдоль оси Ox из точки $x = a$ в точку $x = b$ $(a < b)$. Для этого отрезок $[a;b]$ точками $a = x_0$, $x_1, \ldots, b = x_n$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ разобьем на n частичных отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2], \ldots, [x_{n-1};x_n]$. Сила, действующая на отрезке $[x_{i-1};x_i]$, меняется от точки к точке. Но если длина отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ достаточно мала, то сила $\bar{F}$ на этом отрезке изменяется незначительно. Ее можно приближенно считать постоянной и равной значению функции $F = F(x)$ в произвольно выбранной точке $x = c_i \in [x_{i-1};x_i]$. Поэтому работа, совершенная этой силой на отрезке $[x_{i-1};x_i]$, равна произведению $F(c_i)\cdot\Delta x_i$. (Как работа постоянной силы $F(c_i)$ на участке $[x_{i-1};x_i]$.)

Приближенное значение работы A силы $\bar{F}$ на всем отрезке $[a; b]$ есть

$$A \approx F(c_1)\Delta x_1 + F(c_2)\Delta x_2 + \cdots + F(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i. \qquad (36.1)$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше длина Δx_i. Поэтому за точное значение работы A принимается предел суммы (36.1) при условии, что наибольшая длина λ частичных отрезков стремится к нулю:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Итак, *работа переменной силы $\bar{F}$, величина которой есть непрерывная функция $F = F(x)$, действующей на отрезке $[a; b]$, равна определенному интегралу от величины $F(x)$ силы, взятому по отрезку $[a; b]$.*

В этом состоит физический смысл определенного интеграла.

Аналогично можно показать, что путь S, пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определенному интегралу от скорости $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t)\,dt;$$

масса m неоднородного стержня на отрезке $[a; b]$ равна определенному интегралу от плотности $\gamma(x)$: $m = \int_a^b \gamma(x)\,dx$.

§ 37. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Теорема 37.1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная на $[a; b]$ ($F'(x) = f(x)$), то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (37.1)$$

❑ Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0$, $x_1, \ldots, b = x_n$ ($x_0 < x_1 < \cdots < x_n$) на n частичных отрезков $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$, как это показано на рис. 169.

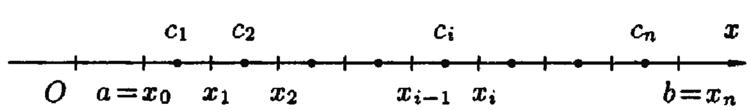


Рис. 169.

Рассмотрим тождество

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \big(F(x_n) - F(x_{n-1})\big) +$$
$$+ \big(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\big) + \dots + \big(F(x_2) - F(x_1)\big) + \big(F(x_1) - F(x_0)\big).$$

Преобразуем каждую разность в скобках по формуле Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Получим

$$F(b) - F(a) = F'(c_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) + F'(c_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots$$
$$\dots + F'(c_2) \cdot (x_2 - x_1) + F'(c_1)(x_1 - x_0) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

т. е.

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \tag{37.2}$$

где c_i есть некоторая точка интервала $(x_{i-1}; x_i)$. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$. Поэтому существует предел интегральной суммы, равный определенному интегралу от $f(x)$ на $[a; b]$.

Переходя в равенстве (37.2) к пределу при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, получаем

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

т. е.

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

■

Равенство (37.1) называется ***формулой Ньютона–Лейбница***.

Если ввести обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$, то формулу Ньютона–Лейбница (37.1) можно переписать так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b.$$

Формула Ньютона–Лейбница дает удобный способ вычисления определенного интеграла. Чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, надо найти ее первообразную функцию $F(x)$ и взять разность $F(b) - F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a; b]$.

Например, $\int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9 - 0 = 9$,

а $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4 + x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$.

Пример 37.1. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}\,dx$.

Решение:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} |\cos x|\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1+1 = 2. \quad \bullet$$

Пример 37.2. Вычислить интеграл $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение: $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$ ●

§ 38. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла, считая подынтегральную функцию интегрируемой на отрезке $[a;b]$. При выводе свойств будем использовать определение интеграла и формулу Ньютона–Лейбница.

1. *Если c — постоянное число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то*

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (38.1)$$

т. е. постоянный множитель c можно выносить за знак определенного интеграла.

❑ Составим интегральную сумму для функции $c\cdot f(x)$. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} c\cdot f(c_i)\Delta x_i = c\cdot\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} c\cdot f(x)\Delta x_i = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) = c\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Отсюда вытекает, что функция $c\cdot f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и справедлива формула (38.1). ■

2. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, тогда интегрируема на $[a;b]$ их сумма и*

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx, \qquad (38.2)$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

❑ $\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (f_1(c_i) + f_2(c_i))\Delta x_i =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_1(c_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_2(c_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \int\limits_a^b f_2(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Свойство 2 распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых.

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

Это свойство можно принять по определению. Это свойство также подтверждается формулой Ньютона–Лейбница.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

4. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$ *и* $a < c < b$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx, \tag{38.3}$$

т. е. интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка. Это свойство называют ***аддитивностью*** определенного интеграла (или свойством аддитивности).

❑ При разбиении отрезка $[a;b]$ на части включим точку c в число точек деления (это можно сделать ввиду независимости предела интегральной суммы от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части). Если $c = x_m$, то интегральную сумму можно разбить на две суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(c_i)\Delta x_i + \sum_{i=m}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Каждая из написанных сумм является интегральной соответственно для отрезков $[a;b]$, $[a;c]$ и $[c;b]$. Переходя к пределу в последнем равенстве при $n \to \infty$ $(\lambda \to 0)$, получим равенство (38.3). $\blacksquare$

Свойство 4 справедливо при любом расположении точек a, b, c (считаем, что функция $f(x)$ интегрируема на большем из получающихся отрезков).

Так, например, если $a < b < c$, то

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx - \int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

(использованы свойства 4 и 3).

5. «Теорема о среднем». *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $c \in [a; b]$ такая, что*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a).}$$

❑ По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$. Применяя к разности $F(b) - F(a)$ теорему Лагранжа (теорему о конечном приращении функции), получим

$$F(b) - F(a) = F'(c)\cdot(b-a) = f(c)\cdot(b-a). \quad ■$$

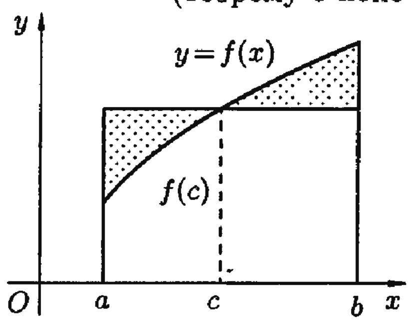


Рис. 170.

Свойство 5 («теорема о среднем») при $f(x) \geqslant 0$ имеет простой геометрический смысл: значение определенного интеграла равно, при некотором $c \in (a; b)$, площади прямоугольника с высотой $f(c)$ и основанием $b - a$ (см. рис. 170). Число

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx}$$

называется ***средним значением*** функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

6. *Если функция $f(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a; b]$, где $a < b$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ имеет тот же знак, что и функция.* Так, если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

❑ По «теореме о среднем» (свойство 5)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a),$$

где $c \in [a; b]$. А так как $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a; b]$, то и

$$f(c) \geqslant 0, \quad b - a > 0.$$

Поэтому $f(c)\cdot(b-a) \geqslant 0$, т. е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. ■

7. *Неравенство между непрерывными функциями на отрезке $[a; b]$, $(a < b)$ можно интегрировать.* Так, если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при $x \in [a; b]$, то $\int\limits_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f_2(x)\,dx$.

❑ Так как $f_2(x) - f_1(x) \geqslant 0$, то при $a < b$, согласно свойству 6, имеем

$$\int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx \geqslant 0.$$

Или, согласно свойству 2,

$$\int\limits_a^b f_2(x)\,dx - \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f_2(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

Отметим, что дифференцировать неравенства нельзя.

8. Оценка интеграла. *Если m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, $(a < b)$, то*

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{38.4}$$

❑ Так как для любого $x \in [a;b]$ имеем $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то, согласно свойству 7, имеем

$$\int\limits_a^b m\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b M\,dx.$$

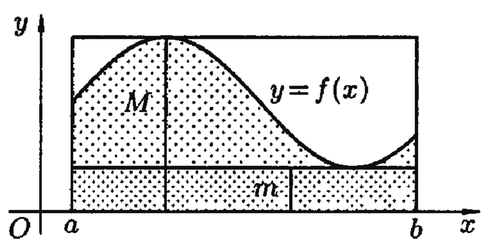


Рис. 171.

Применяя к крайним интегралам свойство 5, получаем

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad \blacksquare$$

Если $f(x) \geqslant 0$, то свойство 8 иллюстрируется геометрически: площадь криволинейной трапеции заключена между площадями прямоугольников, основание которых есть $[a;b]$, а высоты равны m и M (см. рис. 171).

9. *Модуль определенного интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции:*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx; \quad a < b.$$

❑ Применяя свойство 7 к очевидным неравенствам $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, получаем

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \qquad \blacksquare$$

10. *Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом*, т. е.

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$$

❑ По формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^x = F(x) - F(a).$$

Следовательно,

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)_x' = (F(x) - F(a))_x' = F'(x) - 0 = f(x). \qquad ■$$

Это означает, что *определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из первообразных подынтегральной функции.*

§ 39. ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

39.1. Формула Ньютона–Лейбница

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Применяется этот метод во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функции $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Например, $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

39.2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной)

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$.

Теорема 39.1. Если:
1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha;\beta]$;
2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha,\beta]$ является отрезок $[a;b]$;
3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$,

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt. \tag{39.1}$$

❑ Пусть $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Так как $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, то $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Поэтому по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Формула (39.1) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле.*

Отметим, что:

1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$;

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных!

Пример 39.1. Вычислить $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$.

○ Решение: Положим $x = 2\sin t$, тогда $dx = 2\cos t\,dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 16\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = 16\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt = 4\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)\,dt =$$

$$= 2\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi. \quad \bullet$$

39.3. Интегрирование по частям

Теорема 39.2. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \qquad (39.2)$$

❑ На отрезке $[a; b]$ имеет место равенство $(uv)' = u'v + uv'$. Следовательно, функция uv есть первообразная для непрерывной функции $u'v + uv'$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^b (u'v + uv')\,dx = uv\Big|_a^b.$$

Следовательно,

$$\int_a^b v \cdot u'\,dx + \int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b \implies$$

$$\implies \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b \implies \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \quad \blacksquare$$

Формула (39.2) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример 39.2. Вычислить $\int_1^e x \ln x\,dx$.

● Решение: Положим

$$\left[\begin{array}{lll} u = \ln x & \implies & du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx & \implies & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right].$$

Применяя формулу (39.2), получаем

$$\int_1^e x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1). \quad \bullet$$

Пример 39.3. Вычислить интеграл $\int_0^\pi x \sin x\,dx$.

● Решение: Интегрируем по частям. Положим

$$\left[\begin{array}{lll} u = x & \implies & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & \implies & v = -\cos x \end{array}\right].$$

Поэтому

$$J = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = -\pi \cdot (-1) + 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi. \quad \bullet$$

39.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a;a]$, симметричном относительно точки $x=0$. Докажем, что

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \qquad (39.3)$$

❏ Разобьем отрезок интегрирования $[-a;a]$ на части $[-a;0]$ и $[0;a]$. Тогда по свойству аддитивности

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx. \qquad (39.4)$$

В первом интеграле сделаем подстановку $x=-t$. Тогда

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

(согласно свойству: «определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования»). Возвращаясь к равенству (39.4), получим

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} (f(-x)+f(x))\,dx. \qquad (39.5)$$

Если функция $f(x)$ четная ($f(-x)=f(x)$), то $f(-x)+f(x)=2f(x)$; если функция $f(x)$ нечетная ($f(-x)=-f(x)$), то $f(-x)+f(x)=0$.

Следовательно, равенство (39.5) принимает вид (39.3). ■

Благодаря доказанной формуле можно, например, сразу, не производя вычислений, сказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\cdot\sin^3 x\,dx = 0, \qquad \int_{-3}^{3} e^{-x^2}\cdot\sin x\,dx = 0.$$

§ 40. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определенный интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, где промежуток интегрирования $[a;b]$ конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, называют еще *собственным интегралом.*

Рассмотрим так называемые ***несобственные интегралы***, т. е. определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

40.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то его называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.}$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится*.

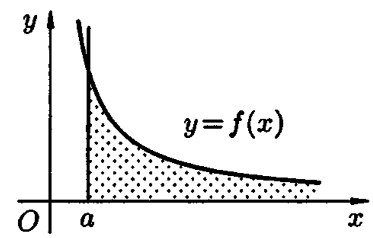


Рис. 172.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \text{где } c \text{ — произвольное число.}$$

В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа. Отметим, что если непрерывная функция $f(x) \geqslant 0$ на промежутке $[a; +\infty)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то он выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции (см. рис. 172).

Пример 40.1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x\,dx$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

Решение: 1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b x^{-2}\,dx = -\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^b = -(0-1) = 1$, интеграл сходится;

2) $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \cos x\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \sin x\Big|_a^0 = 0 - \lim\limits_{a\to-\infty} \sin a$, интеграл расходится, так как при $a \to -\infty$ предел $\lim\limits_{a\to-\infty} \sin a$ не существует.

3) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b = \infty$, интеграл расходится. ●

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл; достаточно лишь знать, сходится ли он или нет.

Приведем без доказательства некоторые признаки сходимости.

Теорема 40.1 (признак сравнения). Если на промежутке $[a; +\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

Пример 40.2. Сходится ли интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$?

○ Решение: При $x \geqslant 1$ имеем $\frac{1}{x^2(1+3^x)} < \frac{1}{x^2}$. Но интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$ также сходится (и его значение меньше 1). ●

Теорема 40.2. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$ ($f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$), то интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся (т. е. ведут себя одинаково в смысле сходимости).

Пример 40.3. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$.

○ Решение: Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$ сходится, так как интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2+1})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1. \quad ●$$

40.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x=b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.}$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится*.

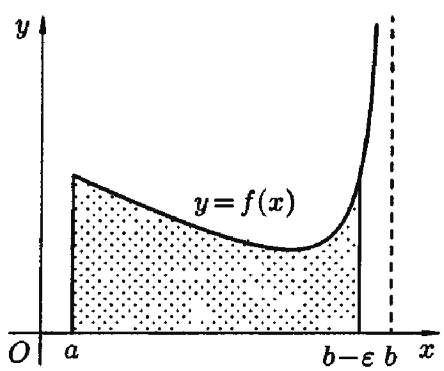


Рис. 173.

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x=a$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

В случае, когда $f(x)>0$, несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (разрыв в точке $x=b$) можно истолковать геометрически как площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции (см. рис. 173).

Пример 40.4. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение: При $x=0$ функция $y=\frac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв;

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty,$$

интеграл расходится. ●

Сформулируем признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 40.3. Пусть на промежутке $[a;b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x=b$ терпят бесконечный разрыв и удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$.

Теорема 40.4. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$ и в точке $x=b$ терпят разрыв. Если существует предел $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=k$, $0<k<\infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример 40.5. Сходится ли интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sin x}$?

Решение: Функция $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ имеет на $[0;1]$ единственный разрыв в точке $x=0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$. Интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1}=0-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon$$

расходится. И так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,$$

то интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sin x}$ также расходится. ●

§ 41. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

41.1. Схемы применения определенного интеграла

Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины A (площадь фигуры, объем тела, давление жидкости на вертикальную пластину и т. д.), связанной с отрезком $[a;b]$ изменения независимой переменной x. Предполагается, что эта величина A аддитивна, т. е. такая, что при разбиении отрезка $[a;b]$ точкой $c\in(a;b)$ на части

$[a;c]$ и $[c;b]$ значение величины A, соответствующее всему отрезку $[a;b]$, равно сумме ее значений, соответствующих $[a;c]$ и $[c;b]$.

Для нахождения этой величины A можно руководствоваться одной из двух схем: I схема (или метод *интегральных сумм*) и II схема (или *метод дифференциала*).

Первая схема базируется на определении определенного интеграла.

1. Точками $x_0 = a$, $x_1, \ldots, x_n = b$ разбить отрезок $[a;b]$ на n частей. В соответствии с этим, интересующая нас величина A разобьется на n «элементарных слагаемых» ΔA_i $(i = 1, \ldots, n)$: $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_n$.

2. Представить каждое «элементарное слагаемое» в виде произведения некоторой функции (определяемой из условия задачи), вычисленной в произвольной точке соответствующего отрезка на его длину: $\Delta A_i \approx f(c_i)\Delta x_i$.

При нахождении приближенного значения ΔA_i допустимы некоторые упрощения: дугу на малом участке можно заменить хордой, стягивающей ее концы; переменную скорость на малом участке можно приближенно считать постоянной и т. д.

Получим приближенное значение величины A в виде интегральной суммы:

$$A \approx f(c_1)\Delta x_1 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

3. Искомая величина A равна пределу интегральной суммы, т. е.

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Указанный «метод сумм», как видим, основан на представлении *интеграла как о сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.*

Схема I была применена для выяснения геометрического и физического смысла определенного интеграла.

Вторая схема представляет собой несколько видоизмененную схему I и называется «метод дифференциала» или «метод отбрасывания бесконечно малых высших порядков»:

1) на отрезке $[a;b]$ выбираем произвольное значение x и рассматриваем переменный отрезок $[a;x]$. На этом отрезке величина A становится функцией x: $A = A(x)$, т. е. считаем, что часть искомой величины A есть неизвестная функция $A(x)$, где $x \in [a;b]$ — один из параметров величины A;

2) находим главную часть приращения ΔA при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A = A(x)$: $dA = f(x)\,dx$, где $f(x)$, определяемая из условия задачи, функция переменной x (здесь также возможны различные упрощения);

3) считая, что $dA \approx \Delta A$ при $\Delta x \to 0$, находим искомую величину путем интегрирования dA в пределах от a до b:

$$A(b) = A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

41.2. Вычисление площадей плоских фигур

Прямоугольные координаты

Как уже было установлено (см. «геометрический смысл определенного интеграла»), площадь криволинейной трапеции, расположенной «выше» оси абсцисс ($f(x) \geqslant 0$), равна соответствующему определенному интегралу:

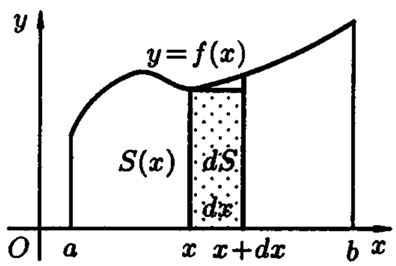


Рис. 174.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad S = \int_a^b y\,dx. \qquad (41.1)$$

Формула (41.1) получена путем применения схемы I — метода сумм. Обоснуем формулу (41.1), используя схему II. Пусть криволинейная трапеция ограничена линиями $y = f(x) \geqslant 0$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (см. рис. 174). Для нахождения площади S этой трапеции проделаем следующие операции:

1. Возьмем произвольное $x \in [a;b]$ и будем считать, что $S = S(x)$.

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$ ($x + \Delta x \in [a;b]$). Функция $S = S(x)$ получит приращение ΔS, представляющее собой площадь «элементарной криволинейной трапеции» (на рисунке она выделена).

Дифференциал площади dS есть главная часть приращения ΔS при $\Delta x \to 0$, и, очевидно, он равен площади прямоугольника с основанием dx и высотой y: $dS = y \cdot dx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем $S = \int_a^b y\,dx$.

Отметим, что если криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ox ($f(x) < 0$), то ее площадь может быть найдена по формуле

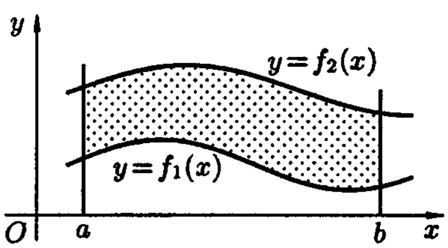


Рис. 175.

$$S = -\int_a^b y\,dx. \qquad (41.2)$$

Формулы (41.1) и (41.2) можно объединить в одну:

$$S = \left|\int_a^b y\,dx\right|.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ (при условии $f_2(x) \geqslant f_1(x)$) (см. рис. 175), можно найти по формуле

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Если плоская фигура имеет «сложную» форму (см. рис. 176), то прямыми, параллельными оси Oy, ее следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы.

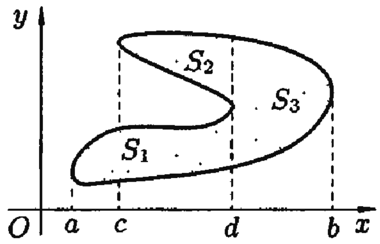


Рис. 176.

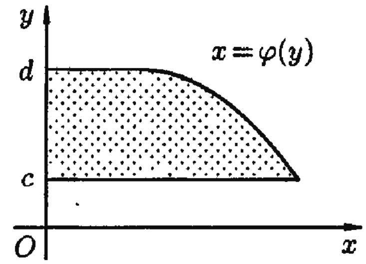


Рис. 177.

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y) \geqslant 0$ (см. рис. 177), то ее площадь находится по формуле $S = \int\limits_c^d x\,dy$.

И, наконец, если криволинейная трапеция ограничена *кривой, заданной параметрически*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, то площадь ее находится по формуле

$$S = \left| \int\limits_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)\,dt \right|,$$

где α и β определяются из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.

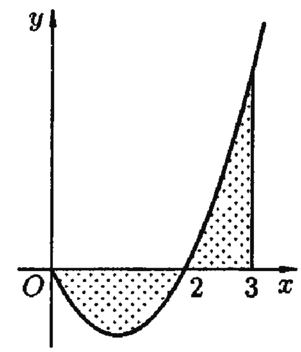


Рис. 178.

Пример 41.1. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = x^2 - 2x$ при $x \in [0; 3]$.

Решение: Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 178. Находим ее площадь S:

$$S = -\int\limits_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int\limits_2^3 (x^2 - 2x)\,dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 - x^2\Big|_2^3 = -\frac{8}{3} + 4 + \frac{27}{3} - \frac{8}{3} - 9 + 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}. \quad \bullet$$

Пример 41.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Решение: Найдем сначала $\frac{1}{4}$ площади S. Здесь x изменяется от 0 до a, следовательно, t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (см. рис. 179). Находим:

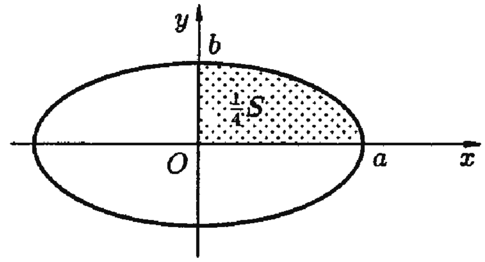


Рис. 179.

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_{\pi/2}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt =$$

$$= -ab\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\Big(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\Big) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4}S = \frac{\pi ab}{4}$. Значит, $S = \pi ab$. ●

Полярные координаты

Найдем площадь S *криволинейного сектора*, т. е. плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), где r и φ — полярные координаты (см. рис. 180). Для решения задачи используем схему II — *метод дифференциала*.

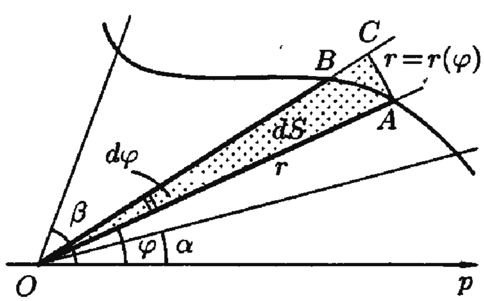


Рис. 180.

1. Будем считать часть искомой площади S как функцию угла φ, т. е. $S = S(\varphi)$, где $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ (если $\varphi = \alpha$, то $S(\alpha) = 0$, если $\varphi = \beta$, то $S(\beta) = S$).

2. Если текущий полярный угол φ получит приращение $\Delta\varphi = d\varphi$, то приращение площади ΔS равно площади «элементарного криволинейного сектора» OAB.

Дифференциал dS представляет собой главную часть приращения ΔS при $d\varphi \to 0$ и равен площади кругового сектора OAC (на рисунке она заштрихована) радиуса r с центральным углом $d\varphi$. Поэтому $dS = \frac{1}{2}r^2\cdot d\varphi$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $\varphi = \alpha$ до $\varphi = \beta$, получим искомую площадь

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.}$$

Пример 41.3. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a\cos 3\varphi$ (см. рис. 181).

Решение: Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. $\frac{1}{6}$ часть всей площади фигуры:

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6}(a\cos 3\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/6}\frac{1}{2}(1+\cos 6\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\big(\varphi\big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\big|_0^{\pi/6}\big) = \frac{a^2}{4}\big(\frac{\pi}{6}+0\big) = \frac{\pi a^2}{24},$$

т. е. $\frac{1}{6}S = \frac{\pi a^2}{24}$. Следовательно, $S = \frac{\pi a^2}{4}$. ●

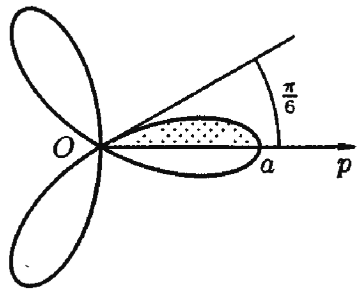


Рис. 181.

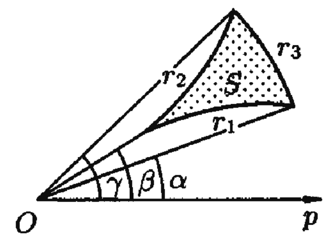


Рис. 182.

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то лучами, выходящими из полюса, ее следует разбить на криволинейные секторы, к которым применить полученную формулу для нахождения площади. Так, для фигуры, изображенной на рисунке 182, имеем:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\gamma} r_3^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r_1^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\gamma} r_2^2\,d\varphi.$$

41.3. Вычисление длины дуги плоской кривой

Прямоугольные координаты

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая AB, уравнение которой $y = f(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$.

Под ***длиной дуги*** AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

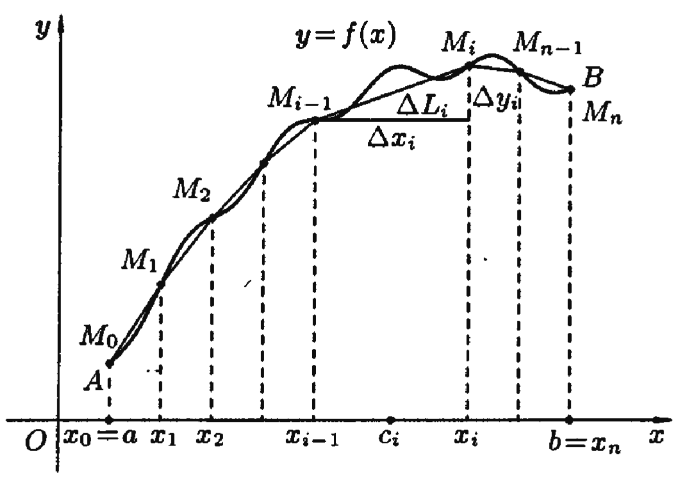


Рис. 183.

Покажем, что если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то кривая AB имеет длину, равную

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.} \qquad (41.3)$$

Применим схему I (метод сумм).

1. Точками $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей (см. рис. 183). Пусть этим точкам соответствуют точки $M_0 = A, M_1, \ldots, M_n = B$ на кривой AB. Проведем хорды $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta L_1, \Delta L_2, \ldots, \Delta L_n$. Получим ломаную $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$, длина которой равна $L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \cdots + \Delta L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$.

2. Длину хорды (или звена ломаной) ΔL_i можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и Δy_i:

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}, \text{ где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении функции $\Delta y_i = f'(c_i)\cdot\Delta x_i$, где $c_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Поэтому

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i)\cdot\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\cdot\Delta x_i,$$

а длина всей ломаной $M_0M_1\dots M_n$ равна

$$L_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta L_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\cdot\Delta x_i. \tag{41.4}$$

3. Длина l кривой AB, по определению, равна $l = \lim\limits_{\max\Delta L_i\to 0} L_n = \lim\limits_{\max\Delta L_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta L_i$. Заметим, что при $\Delta L_i \to 0$ также и $\Delta x_i \to 0$ ($\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$ и, следовательно, $|\Delta x_i| < \Delta L_i$). Функция $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, так как, по условию, непрерывна функция $f'(x)$. Следовательно, существует предел интегральной суммы (41.4), когда $\max\Delta x_i \to 0$:

$$l = \lim_{\substack{\max\Delta l_i\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\Delta x_i = \int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Таким образом, $l = \int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, или в сокращенной записи $l = \int\limits_a^b\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$.

Если уравнение кривой AB задано в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции с непрерывными производными и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то длина l кривой AB находится по формуле

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.} \tag{41.5}$$

Формула (41.5) может быть получена из формулы (41.3) подстановкой $x = x(t)$, $dx = x'(t)\,dt$, $f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Пример 41.4. Найти длину окружности радиуса R.

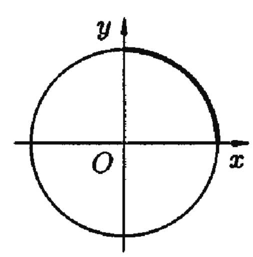


Рис. 184.

Решение: Найдем $\frac{1}{4}$ часть ее длины от точки $(0; R)$ до точки $(R; 0)$ (см. рис. 184). Так как $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, то

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = R\cdot\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = R\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Значит, $l = 2\pi R$. Если уравнение окружности записать в параметрическом виде $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, то

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R. \qquad \bullet$$

Вычисление длины дуги может быть основано на применении метода дифференциала. Покажем, как можно получить формулу (41.3), применив схему II (метод дифференциала).

1. Возьмем произвольное значение $x \in [a; b]$ и рассмотрим переменный отрезок $[a; x]$. На нем величина l становится функцией от x, т. е. $l = l(x)$ ($l(a) = 0$ и $l(b) = l$).

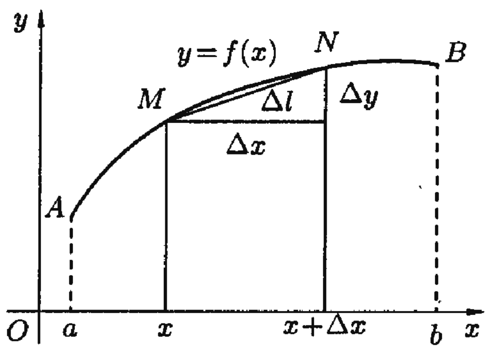


Рис. 185.

2. Находим дифференциал dl функции $l = l(x)$ при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$: $dl = l'(x)\,dx$. Найдем $l'(x)$, заменяя бесконечно малую дугу $\overset{\frown}{MN}$ хордой Δl, стягивающей эту дугу (см. рис. 185):

$$l'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'_x)^2}.$$

Стало быть, $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$.

3. Интегрируя dl в пределах от a до b, получаем $l = \int_a^b \sqrt{1 + {y'_x}^2}\, dx$.

Равенство $dl = \sqrt{1 + {y'_x}^2}\, dx$ называется формулой ***дифференциала дуги*** в прямоугольных координатах.

Так как $y'_x = \frac{dy}{dx}$, то

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Последняя формула представляет собой теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника MCT (см. рис. 186).

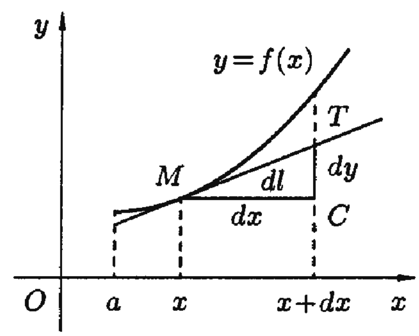


Рис. 186.

Полярные координаты

Пусть кривая AB задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Если в равенствах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, связывающих полярные и декартовы координаты, параметром считать угол φ, то кривую AB можно задать параметрически $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$ Тогда

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}.$$

Применяя формулу (41.5), получаем

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.}$$

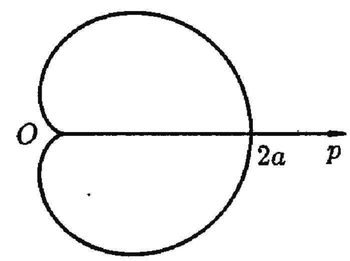


Рис. 187.

Пример 41.5. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение: Кардиоида $r = a(1 + \cos\varphi)$ имеет вид, изображенный на рисунке 187. Она симметрична относительно полярной оси. Найдем половину длины кардиоиды:

$$\frac{1}{2}l = \int_0^\pi \sqrt{(a(1+\cos\varphi))^2 + (a(-\sin\varphi))^2}\, d\varphi = a\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi =$$
$$= a\int_0^\pi \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 4a.$$

Таким образом, $\frac{1}{2}l = 4a$. Значит, $l = 8a$. ●

41.4. Вычисление объема тела

Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений

Пусть требуется найти объем V тела, причем известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox: $S = S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Применим схему II (метод дифференциала).

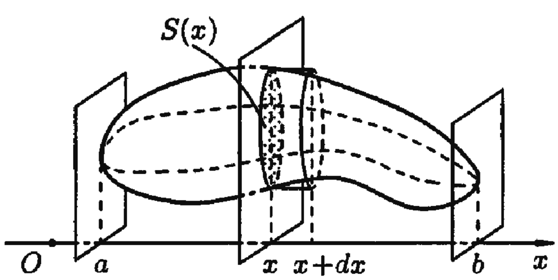


Рис. 188.

1. Через произвольную точку $x \in [a; b]$ проведем плоскость П, перпендикулярную оси Ox (см. рис. 188). Обозначим через $S(x)$ площадь сечения тела этой плоскостью; $S(x)$ считаем известной и непрерывно изменяющейся при изменении x. Через $v(x)$ обозначим объем части тела, лежащее левее плоскости П. Будем считать, что на отрезке $[a; x]$ величина v есть функция от x, т. е. $v = v(x)$ ($v(a) = 0$, $v(b) = V$).

2. Находим дифференциал dV функции $v = v(x)$. Он представляет собой «элементарный слой» тела, заключенный между параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox в точках x и $x + \Delta x$, который приближенно может быть принят за цилиндр с основанием $S(x)$ и высотой dx. Поэтому дифференциал объема $dV = S(x)\,dx$.

3. Находим искомую величину V путем интегрирования dA в пределах от a до b:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx.} \tag{41.6}$$

Полученная формула называется ***формулой объема тела по площади параллельных сечений.***

Пример 41.6. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение: Рассекая эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oyz и на расстоянии x от нее $(-a \leqslant x \leqslant a)$, получим эллипс (см. рис. 189):

$$\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2} + \frac{z^2}{(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2} = 1.$$

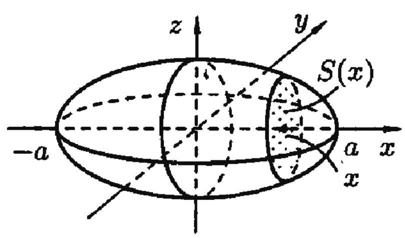


Рис. 189.

Площадь этого эллипса равна $S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Поэтому, по формуле (41.6), имеем

$$V = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \geqslant 0$, отрезком $a \leqslant x \leqslant b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 190). Полученная от вращения фигура называется *телом вращения.* Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, проведенной через произвольную точку x оси Ox ($x \in [a; b]$), есть круг с радиусом $y = f(x)$. Следовательно, $S(x) = \pi y^2$.

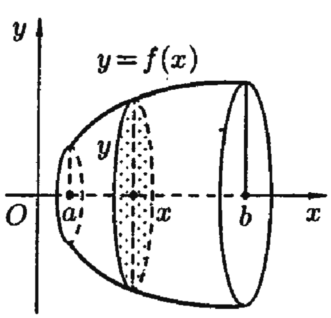


Рис. 190.

Применяя формулу (41.6) объема тела по площади параллельных сечений, получаем

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx.} \tag{41.7}$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geqslant 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$,

$y = d$ $(c < d)$, то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии с формулой (41.7), равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\, dy. \tag{41.8}$$

Пример 41.7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy (см. рис. 191).

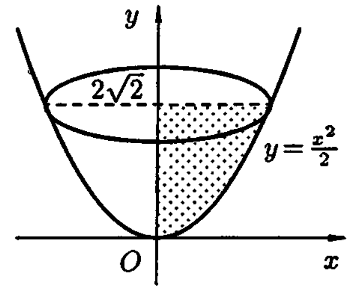


Рис. 191.

Решение: По формуле (41.8) находим:

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y\, dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi. \quad \bullet$$

41.5. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть кривая AB является графиком функции $y = f(x) \geqslant 0$, где $x \in [a; b]$, а функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на этом отрезке.

Найдем площадь S поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox.

Применим схему II (метод дифференциала).

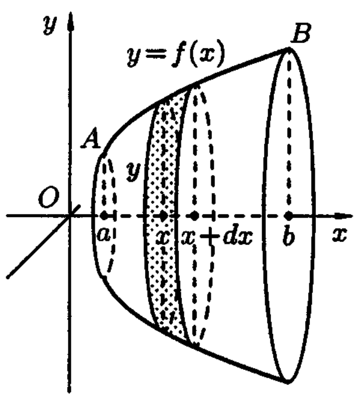


Рис. 192.

1. Через произвольную точку $x \in [a; b]$ проведем плоскость П, перпендикулярную оси Ox. Плоскость П пересекает поверхность вращения по окружности с радиусом $y = f(x)$ (см. рис. 192). Величина S поверхности части фигуры вращения, лежащей левее плоскости, является функцией от x, т. е. $s = s(x)$ ($s(a) = 0$ и $s(b) = S$).

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$. Через точку $x + dx \in [a; b]$ также проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox. Функция $s = s(x)$ получит приращение Δs, изображенного на рисунке в виде «пояска».

Найдем дифференциал площади ds, заменяя образованную между сечениями фигуру усеченным конусом, образующая которого равна dl, а радиусы оснований равны y и $y + dy$. Площадь его боковой поверхности равна $ds = \pi(y + y + dy) \cdot dl = 2\pi y\, dl + \pi\, dy\, dl$. Отбрасывая произведение $dy\, dl$ как бесконечно малую высшего порядка, чем ds, получаем $ds = 2\pi y\, dl$, или, так как $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$, то $ds = 2\pi y\sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx. \tag{41.9}$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то формула (41.9) для площади поверхности вращения принимает вид

$$\boxed{S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.}$$

Пример 41.8. Найти площадь поверхности шара радиуса R.

Решение: Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$, вокруг оси Ox. По формуле (41.9) находим

$$S = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\, dx = 2\pi R \cdot x\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2. \quad \bullet$$

Пример 41.9. Дана циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением ее вокруг оси Ox.

Решение: При вращении половины дуги циклоиды вокруг оси Ox площадь поверхности вращения равна

$$\frac{1}{2}S_x = 2\pi \int\limits_0^{\pi} a(1 - \cos t) \cdot \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi} a^2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= 4\pi a^2 \int\limits_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 8\pi a^2 \int\limits_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -8\pi a^2 \cdot 2 \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = -16\pi a^2 \left(\cos \frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3}\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -16\pi a^2 \left(0 - 1 - 0 + \frac{1}{3}\right) = -16\pi a^2 \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{32\pi a^2}{3},$$

т. е. $\frac{1}{2}S_x = \frac{32}{3}\pi a^2$. Следовательно, $S_x = \frac{64}{3}\pi a^2$. $\bullet$

41.6. Механические приложения определенного интеграла

Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается вдоль оси Ox под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$ ($a < b$), находится по формуле

$$A = \int_a^b F(x)\,dx \qquad (41.10)$$

(см. п. 36).

Пример 41.10. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

❍ Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м; следовательно, $100 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа на основании формулы (41.10) равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12{,}5 \text{ (Дж)}. \quad \bullet$$

Пример 41.11. Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать через край жидкость из вертикального цилиндрического резервуара высоты H м и радиусом основания R м.

❍ Решение: Работа, затрачиваемая на поднятие тела весом p на высоту h, равна $p \cdot h$. Но различные слои жидкости в резервуаре находятся на различных глубинах и высота поднятия (до края резервуара) различных слоев не одинакова.

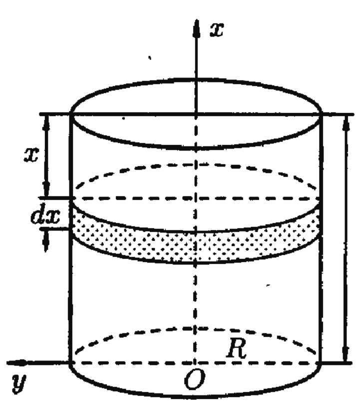


Рис. 193.

Для решения поставленной задачи применим схему II (метод дифференциала). Введем систему координат так, как указано на рисунке 193.

1. Работа, затрачиваемая на выкачивание из резервуара слоя жидкости толщиной x ($0 \leqslant x \leqslant H$), есть функция от x, т. е. $A = A(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant H$ ($A(0) = 0$, $A(H) = A_0$).

2. Находим главную часть приращения ΔA при изменении x на величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A(x)$.

Ввиду *малости dx считаем, что «элементарный» слой жидкости находится на одной глубине x* (от края резервуара) (см. рис. 193). Тогда $dA = dp \cdot x$, где dp — вес этого слоя; он равен $g \cdot \gamma\, dv$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, dv — объем «элементарного» слоя жидкости (на рисунке он выделен), т. е. $dp = g\gamma\, dv$. Объем указанного слоя жидкости, очевидно, равен $\pi R^2\, dx$, где dx — высота цилиндра (слоя), πR^2 — площадь его основания, т. е. $dv = \pi R^2\, dx$.

Таким образом, $dp = g\gamma \cdot \pi R^2\, dx$ и $dA = g\gamma\pi R^2\, dx \cdot x$.

3) Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = 0$ до $x = H$, находим

$$A_0 = \int\limits_0^H g\gamma\pi R^2 x\, dx = \frac{1}{2} g\gamma\pi R^2 H^2 \quad (\text{Дж}).$$ ●

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

❍ Решение: Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е. $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что $dS = v(t)\, dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$. ●

Отметим, что эту же формулу можно получить, пользуясь схемой I или II применения определенного интеграла.

Пример 41.12. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

❍ Решение: Если $v(t) = 10t + 2$ (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ($t = 0$) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int\limits_0^4 (10t + 2)\, dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (\text{м}).$$ ●

Давление жидкости на вертикальную пластинку

По закону Паскаля давление жидкости на горизонтальную пластину равно весу столба этой жидкости, имеющего основанием пластинку, а высотой — глубину ее погружения от свободной поверхности жидкости, т. е. $P = g \cdot \gamma \cdot S \cdot h$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, S — площадь пластинки, h — глубина ее погружения.

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$; система координат выбрана так, как указано на рисунке 194. Для нахождения давления P жидкости на эту пластину применим схему II (метод дифференциала).

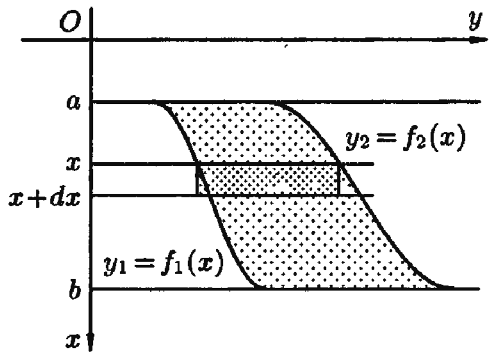


Рис. 194.

1. Пусть часть искомой величины P есть функция от x: $p = p(x)$, т. е. $p = p(x)$ — давление на часть пластины, соответствующее отрезку $[a; x]$ значений переменной x, где $x \in [a; b]$ $(p(a) = 0,\ p(b) = P)$.

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$. Функция $p(x)$ получит приращение Δp (на рисунке — полоска-слой толщины dx). Найдем дифференциал dp этой функции. Ввиду малости dx будем приближенно считать полоску прямоугольником, *все точки которого находятся на одной глубине x, т. е. пластинка эта — горизонтальная.*

Тогда по закону Паскаля $dp = g \cdot \gamma \underbrace{(y_2 - y_1) \cdot dx}_{S} \cdot \underbrace{x}_{h}$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получим

$$P = g \cdot \gamma \int_a^b (y_2 - y_1) x\, dx \quad \text{или} \quad P = g\gamma \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x\, dx.$$

Пример 41.13. Определить величину давления воды на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус R, а центр O находится на свободной поверхности воды (см. рис. 195).

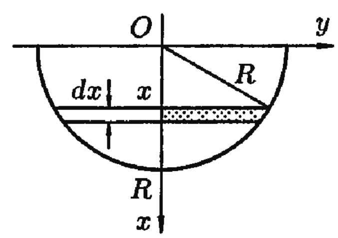


Рис. 195.

Решение: Воспользуемся полученной формулой для нахождения давления жидкости на вертикальную пластинку. В данном случае пластинка ограничена линиями $y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x = 0$, $x = R$. Поэтому

$$P = g\gamma \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right)\right) x\, dx =$$

$$= 2g\gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, x\, dx = 2g\gamma \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2}\, d(R^2 - x^2) =$$

$$= -g\gamma \cdot \frac{2\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}{3}\Bigg|_0^R = -\frac{2}{3} g\gamma (0 - R^3) = \frac{2}{3} g\gamma R^3.$$

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой

Пусть на плоскости Oxy задана система материальных точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$ соответственно с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Статическим моментом S_x системы материальных точек относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты (т. е. на расстояния этих точек от оси Ox): $S_x = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i$.

Аналогично определяется *статический момент* S_y этой системы относительно оси Oy: $S_y = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i$.

Если массы распределены непрерывным образом вдоль некоторой кривой, то для выражения статического момента понадобится интегрирование.

Пусть $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ — это уравнение материальной кривой AB. Будем считать ее однородной с постоянной линейной плотностью γ $(\gamma = \text{const})$.

Для произвольного $x \in [a; b]$ на кривой AB найдется точка с координатами $(x; y)$. Выделим на кривой элементарный участок длины dl, содержащий точку $(x; y)$. Тогда масса этого участка равна $\gamma\, dl$. Примем этот участок dl *приближенно за точку*, отстоящую от оси Ox на расстоянии y. Тогда дифференциал статического момента dS_x («элементарный момент») будет равен $\gamma\, dl \cdot y$, т. е. $dS_x = \gamma\, dl \cdot y$ (см. рис. 196).

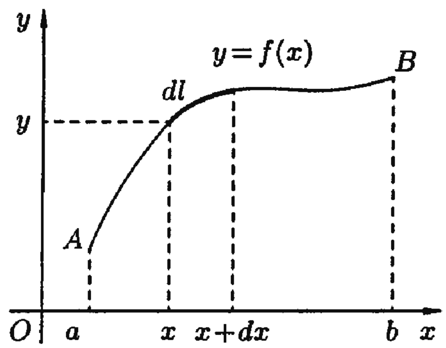


Рис. 196.

Отсюда следует, что статический момент S_x кривой AB относительно оси Ox равен

$$S_x = \gamma \int\limits_a^b y\, dl = \gamma \int\limits_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

Аналогично находим S_y:

$$S_y = \gamma \int\limits_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

Статические моменты S_x и S_y кривой позволяют легко установить положение ее центра тяжести (центра масс).

Центром тяжести материальной плоской кривой $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ называется точка плоскости, обладающая следующим свойством: если в этой то́чке сосредоточить всю массу m заданной кривой, то статический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статическому моменту всей кривой $y = f(x)$ относительно той же оси. Обозначим через $C(x_c; y_c)$ центр тяжести кривой AB.

Из определения центра тяжести следуют равенства $m \cdot x_c = S_y$ и $m \cdot y_c = S_x$ или $\gamma l \cdot x_c = S_y$ и $\gamma l \cdot y_c = S_x$. Отсюда $x_c = \dfrac{S_y}{\gamma l}$, $y_c = \dfrac{S_x}{\gamma l}$ или

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\, dl}{l} = \frac{\int\limits_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx}; \quad y_c = \frac{\int\limits_a^b y\, dl}{l} = \frac{\int\limits_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx}.$$

Пример 41.14. Найти центр тяжести однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первой координатной четверти (см. рис. 197).

Решение: Очевидно, длина указанной дуги окружности равна $\frac{\pi R}{2}$, т. е. $l = \frac{\pi R}{2}$. Найдем статический момент ее относительно оси Ox. Так как уравнение дуги есть $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, то ($\gamma = \text{const}$)

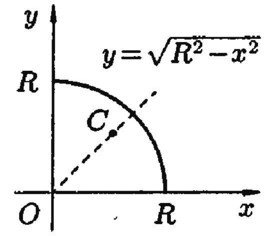


Рис. 197.

$$S_x = \gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= \gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = \gamma R \int_0^R dx = \gamma R x\Big|_0^R = \gamma R^2.$$

Стало быть,

$$y_c = \frac{S_x}{\gamma l} = \frac{\gamma R^2}{\gamma \cdot \frac{\pi R}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$

Так как данная дуга симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то $x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$. Итак, центр тяжести имеет координаты $\left(\frac{2R}{\pi}; \frac{2R}{\pi}\right)$. ●

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры

Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой $y = f(x) \geqslant 0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (см. рис. 198).

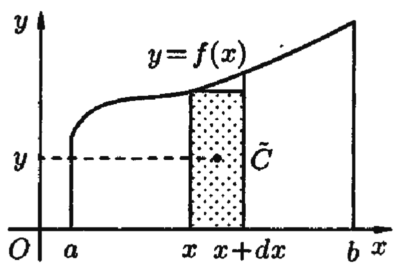


Рис. 198.

Будем считать, что поверхностная плотность пластинки постоянна ($\gamma = \text{const}$). Тогда масса всей пластинки равна $\gamma \cdot S$, т. е. $m = \gamma \int_a^b f(x)\, dx$. Выделим элементарный участок пластинки в виде бесконечно узкой вертикальной полосы и будем приближенно считать его прямоугольником.

Тогда масса его равна $\gamma \cdot y\, dx$. Центр тяжести $\tilde{C}$ прямоугольника лежит на пересечении диагоналей прямоугольника. Эта точка $\tilde{C}$ отстоит от оси Ox на $\frac{1}{2}y$, а от оси Oy на x (приближенно; точнее на расстоянии $x + \frac{1}{2}\Delta x$). Тогда для элементарных статических моментов относительно осей Ox и Oy выполнены соотношения

$$dS_x = \gamma \cdot y\, dx \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\gamma \cdot y^2\, dx \quad \text{и} \quad dS_y = \gamma \cdot y\, dx \cdot x = \gamma x y\, dx.$$

Следовательно, $S_x = \frac{1}{2}\gamma \int_a^b y^2\, dx$, $S_y = \gamma \int_a^b xy\, dx$.

По аналогии с плоской кривой получаем, обозначив координаты центра тяжести плоской фигуры (пластинки) через $C(x_c; y_c)$, что $m \cdot x_c = S_y$, $m \cdot y_c = S_x$. Отсюда

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{S_y}{\gamma S} \text{ и } y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{S_x}{\gamma S}$$

или

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}.$$

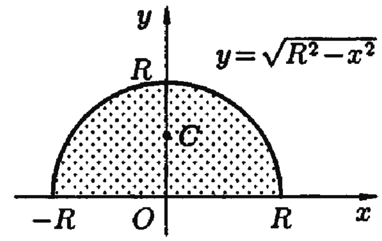


Рис. 199.

Пример 41.15. Найдем координаты центра тяжести полукруга $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$ $(\gamma = \text{const})$ (см. рис. 199).

Решение: Очевидно (ввиду симметрии фигуры относительно оси Oy), что $x_c = 0$. Площадь полукруга равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Находим S_x:

$$S_x = \frac{1}{2}\gamma \int\limits_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2\,dx = \frac{1}{2}\gamma(R^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma(R^3 + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3}) = \gamma \cdot \frac{2}{3}R^3.$$

Стало быть,

$$y_c = \frac{S_x}{\gamma S} = \frac{2\gamma R^3}{3\gamma\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}.$$

Итак, центр тяжести имеет координаты $C\left(0; \frac{4R}{3\pi}\right)$. ●

§ 42. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции $f(x)$. Если можно найти первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Но отыскание первообразной функции иногда весьма сложно; кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих и других случаях (например, функция $y = f(x)$ задана графически или таблично) прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближенного вычисления определенного интеграла — формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

42.1. Формула прямоугольников

Пусть на отрезке $[a;b]$, $a<b$, задана непрерывная функция $f(x)$. Требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок $[a;b]$, на n равных частей (отрезков) длины $h=\dfrac{b-a}{n}=x_i-x_{i-1}$ (*шаг разбиения*) с помощью точек $x_0=a$, $x_1,x_2,\ldots,x_n=b$. Можно записать, что $x_i=x_0+h\cdot i$, где $i=1,2,\ldots,n$ (см. рис. 200).

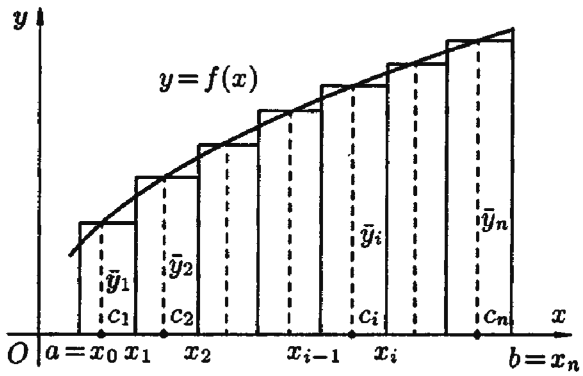


Рис. 200.

В середине $c_i=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\tilde{y}_i=f(c_i)$ графика функции $y=f(x)$. Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h\cdot\tilde{y}_i$.

Тогда сумма площадей всех n прямоугольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx h(\tilde{y}_1+\tilde{y}_2+\cdots+\tilde{y}_n)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\Big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\Big). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется ***формулой средних прямоугольников.***

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n|\leqslant\frac{(b-a)^3\cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a;b]$,

$$|R_n|=\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\Big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\Big)\right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x)=kx+b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x)=0$.

42.2. Формула трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей длины $h=\dfrac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a=x_0$, $x_1,x_2,\ldots,b=x_n$ (рис. 201). Пусть $y_0,y_1,\ldots,y_n$ —

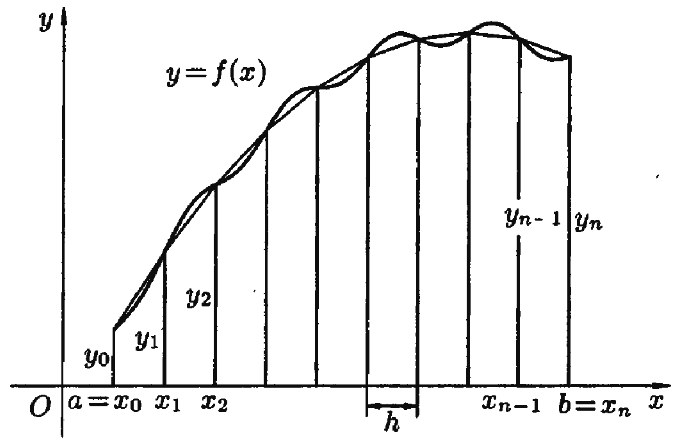


Рис. 201.

соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы для этих значений примут вид $x_i = a+h{\cdot}i$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Заменим кривую $y = f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат y_i и y_{i+1} $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot h + \frac{y_1+y_2}{2}\cdot h + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\Big(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\Big). \qquad (42.2)$$

Формула (42.2) называется ***формулой трапеций.***

Абсолютная погрешность R_n приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы $|R_n| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2$, где $M_2 = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$. Снова для линейной функции $y = kx + b$ формула (42.2) — точная.

42.3. Формула парабол (Симпсона)

Если заменить график функции $y = f(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ разбиения не отрезками прямых, как в методах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Предварительно найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком параболы $y = ax^2 + bx + c$, сбоку — прямыми $x = -h$, $x = h$ и снизу — отрезком $[-h; h]$.

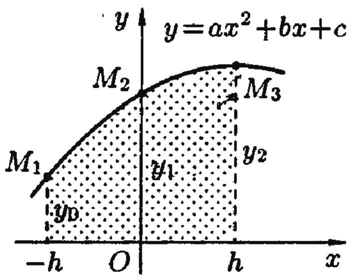


Рис. 202.

Пусть парабола проходит через три точки $M_1(-h; y_0)$, $M_2(0; y_1)$, $M_3(h; y_2)$, где $y_0 = ah^2 - bh + c$ — ордината параболы в точке $x = -h$; $y_1 = c$ — ордината параболы в точке $x = 0$; $y_2 = ah^2 + bh + c$ — ордината параболы в точке $x = h$ (см. рис. 202). Площадь S равна

$$S = \int\limits_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx =$$

$$= \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch. \qquad (42.3)$$

Выразим эту площадь через h, y_0, y_1, y_2. Из равенств для ординат y_i находим, что $c = y_1$, $a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$.

Подставляя эти значения c и a в равенство (42.3), получаем

$$S = \frac{2}{3}h^3 \cdot \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h \cdot y_1 =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \qquad (42.4)$$

Получим теперь формулу парабол для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Для этого отрезок $[a; b]$ разобьем на $2n$ равных частей (отрезков) длиной $h = \frac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$. В точках деления $a = x_0$, x_1, $x_2, \ldots, x_{2n-2}$, x_{2n-1}, $x_{2n} = b$ вычисляем значения подынтегральной функции $f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$, где $y_i = f(x_i)$ (см. рис. 203).

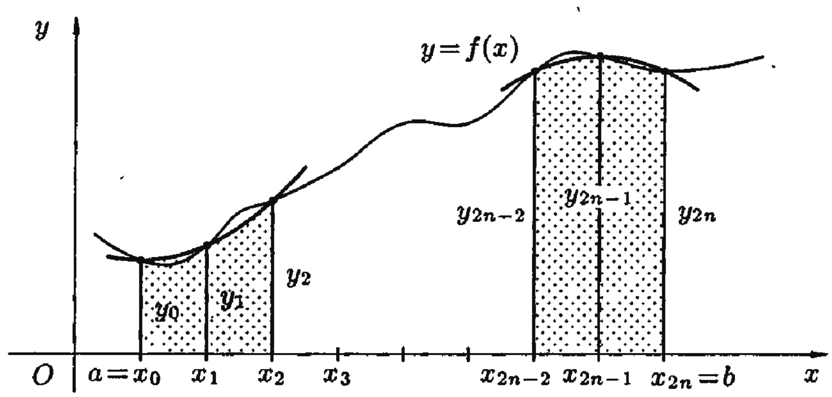


Рис. 203.

Заменяем каждую пару соседних элементарных криволинейных трапеций с основаниями, равными h, одной элементарной параболической трапецией с основанием, равным $2h$. На отрезке $[x_0; x_2]$ парабола проходит через три точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Используя формулу (42.4), находим

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Аналогично находим

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),\ \ldots,$$

$$S_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})\Big). \quad (42.5)$$

Формула (42.5) называется ***формулой парабол*** (или Симпсона).

Абсолютная погрешность вычисления по формуле (42.5) оценивается соотношением

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot M_4, \quad \text{где } M_4 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{IV}(x)|.$$

Отметим, что формула (42.5) дает точное значение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ во всех случаях, когда $f(x)$ — многочлен, степень которого меньше или равна трем (тогда $f^{IV} = 0$).

Пример 42.1. Вычислить $\int_0^2 x^3\,dx$, разбив отрезок интегрирования $[0; 2]$ на 4 части.

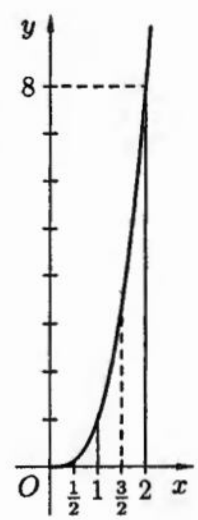


Рис. 204.

❍ Решение: Имеем: $f(x) = x^3$,

$$a = x_0 = 0;\ \ b = x_4 = 2,\ \ h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_0 = 0,\ \ y_0 = 0;\ \ x_1 = \frac{1}{2},\ \ y_1 = \frac{1}{8};\ \ x_2 = 1,\ \ y_2 = 1;$$

$$x_3 = \frac{3}{2},\ \ y_3 = \frac{27}{8};\ \ x_4 = 2,\ \ y_4 = 8;$$

(см. рис. 204)

а) по формуле прямоугольников:

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{y}_1 = \frac{1}{64}; \quad c_2 = \frac{3}{4}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{27}{64};$$
$$c_3 = \frac{5}{4}, \quad \tilde{y}_3 = \frac{125}{64}; \quad c_4 = \frac{7}{4}, \quad \tilde{y}_4 = \frac{343}{6},$$

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) = 3{,}875, \text{ т. е. } \int\limits_0^2 x^3\,dx \approx 3{,}875;$$

б) по формуле трапеции:

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8}\right) = 4{,}25, \text{ т. е. } \int\limits_0^2 x^3\,dx \approx 4{,}25;$$

в) по формуле парабол:

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx \approx \frac{2}{6 \cdot 2}\left(0 + 8 + 4\left(\frac{1}{8} + \frac{27}{8}\right) + 2 \cdot 1\right) = 4, \text{ т. е. } \int\limits_0^2 x^3\,dx \approx 4.$$

Точное значение интеграла $\int\limits_0^2 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 4$.

Абсолютные погрешности соответствующих формул таковы: а) 0,125; б) 0,25; в) 0.

Глава IX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лекции 34–36

Функции одной независимой переменной не охватывают *все* зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Будем рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Эти факты обобщаются на случай большего числа переменных. Кроме того, для функций двух переменных можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

§ 43. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

43.1. Основные понятия

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in \mathbb{R}$, называется ***функцией двух переменных***, определенной на множестве D со значениями в $\mathbb{R}$, и записывается в виде $z = f(x; y)$ или $f : D \to \mathbb{R}$. При этом x и y называются *независимыми переменными (аргументами)*, а z — *зависимой переменной (функцией)*.

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется *областью изменения* этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

Примером функции двух переменных может служить площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y: $S = xy$. Областью определения этой функции является множество $\{(x; y) \mid x > 0,\ y > 0\}$.

Функцию $z = f(x; y)$, где $(x; y) \in D$ можно понимать (рассматривать) как функцию точки $M(x; y)$ координатной плоскости Oxy. В частности, областью определения может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями. Линию, ограничивающую область, называют ***границей области***. Точки области, не лежащие на границе, называются ***внутренними***. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется ***открытой***. Область с присоединенной к ней границей называется ***замкнутой***, обозначается $\overline{D}$. Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Значение функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0; y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$ и называют *частным значением функции*.

Функция двух независимых переменных допускает геометрическое истолкование. Каждой точке $M_0(x_0; y_0)$ области D в системе координат $Oxyz$ соответствует точка $M(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$ — *аппликата* точки M. Совокупность всех таких точек представляет собой некоторую поверхность, которая и будет геометрически изображать данную функцию $z = f(x; y)$.

Например, функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ имеет областью определения круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$ и изображается верхней полусферой с центром в точке $O(0;0;0)$ и радиусом $R = 1$ (см. рис. 205).

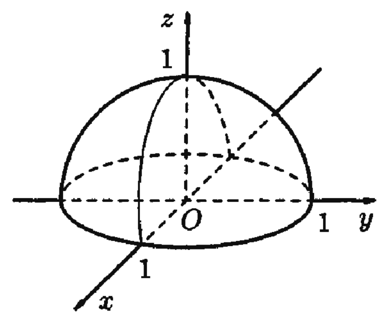


Рис. 205.

Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами: таблицей; аналитически, графиком. Будем пользоваться, как правило, аналитическим способом: когда функция задается с помощью формулы.

43.2. Предел функции

Для функции двух (и большего числа) переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично случаю функции одной переменной. Введем понятие окрестности точки. Множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, называется *$\delta$-окрестностью точки* $M_0(x_0;y_0)$. Другими словами, δ-окрестность точки M_0 — это все внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ (см. рис. 206).

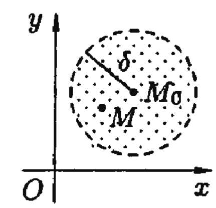


Рис. 206.

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x;y) - A| < \varepsilon$. Записывают:

$$\boxed{A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) \text{ или } A = \lim_{M \to M_0} f(M).}$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремится к M_0 (число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной $x \to x_0$ по двум направлениям: справа и слева!)

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется δ-окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$, что во всех ее точках $M(x;y)$, отличных от M_0, аппликаты соответствующих точек поверхности $z = f(x;y)$ отличаются от числа A по модулю меньше, чем на ε.

Пример 43.1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Решение: Будем приближаться к $O(0;0)$ по прямой $y = kx$, где k — некоторое число. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Функция $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$ предела не имеет, т. к. при разных значениях k предел функции не одинаков (функция имеет различные предельные значения). ●

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной (см. п. 17.3). Это означает, что справедливы утверждения: если функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве D и имеют в точке M_0 этого множества пределы A и B соответственно, то и функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M) \neq 0)$ имеют в точке M_0 пределы, которые соответственно равны $A \pm B$, $A \cdot B$, $\frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

43.3. Непрерывность функции двух переменных

Функция $z = f(x;y)$ (или $f(M)$) называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0;y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой ее окрестности,

б) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$,

в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т. е.

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва $z = f(x;y)$ могут образовывать целые *линии разрыва*. Так, функция $z = \dfrac{2}{y-x}$ имеет линию разрыва $y = x$.

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определение непрерывности функции $z = f(x;y)$ в точке. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0)$. Величины Δx и Δy называются *приращениями аргументов* x и y, а Δz — *полным приращением функции* $f(x;y)$ *в точке* $M_0(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x;y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0) \in D$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$, т. е. полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов x и y стремятся к нулю.

Пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложной функции из непрерывных функций приводит к непрерывным функциям — подобные теоремы имели место для функций одной переменной (см. п. 19.4).

43.4. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области

Приведем свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области (они аналогичны свойствам непрерывных на отрезке функций одной переменной — см. п. 19.5). Предварительно уточним понятие области.

Областью называется множество точек плоскости, обладающих свойствами открытости и связности.

Свойство открытости: каждая точка принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки.

Свойство связности: любые две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области.

Точка N_0 называется ***граничной точкой*** области D, если она не принадлежит D, но в любой окрестности ее лежат точки этой области. Совокупность граничных точек области D называется ***границей*** D. Область D с присоединенной к ней границей называется ***замкнутой*** областью, обозначается $\overline{D}$. Область называется ***ограниченной***, если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса R. В противном случае область называется ***неограниченной***. Примером неограниченной области может служить множество точек первого координатного угла, а примером ограниченной — δ-окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$.

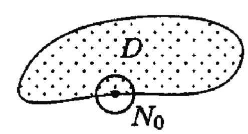


Рис. 207.

Теорема 43.1. Если функция $z = f(N)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области: а) ограничена, т. е. существует такое число $R > 0$, что для всех точек N в этой области выполняется неравенство $|f(N)| < R$; б) имеет точки, в которых принимает наименьшее m и наибольшее M значения; в) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между m и M.

Теорема дается без доказательства.

§ 44. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

44.1. Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение

y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется *частным приращением* z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0; y_0)$ обычно обозначают символами $f'_x(x_0; y_0)$, $f'_x\Big|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x; y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x; y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Пример 44.1. Найти частные производные функции $z = 2y + e^{x^2 - y} + 1$.

Решение:

$$z'_x = (2y + e^{x^2-y} + 1)'_x = (2y)'_x + (e^{x^2-y})'_x + (1)'_x =$$
$$= 0 + e^{x^2-y} \cdot (x^2 - y)'_x + 0 = e^{x^2-y} \cdot (2x - 0) = 2x \cdot e^{x^2-y};$$

$$z'_y = 2 + e^{x^2-y} \cdot (-1).$$

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Графиком функции $z = f(x;y)$ является некоторая поверхность (см. п. 12.1). График функции $z = f(x;y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной (см. п. 20.2), заключаем, что $f'_x(x_0;y_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между осью Ox и касательной, проведенной к кривой $z = f(x;y_0)$ в точке $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ (см. рис. 208).

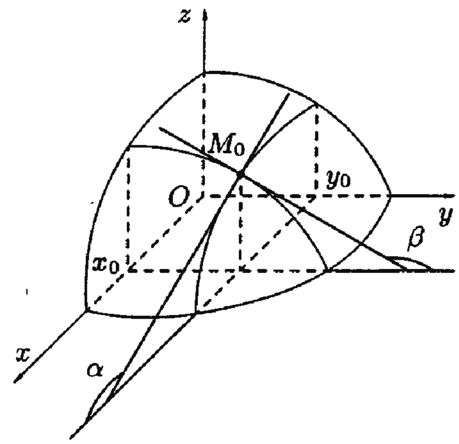


Рис. 208.

Аналогично, $f'_y(x_0;y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

44.2. Частные производные высших порядков

Частные производные $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют *частными производными первого порядка*. Их можно рассматривать как функции от $(x;y) \in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x;y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков. Так, $z'''_{xxy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}\right) = \dfrac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x^2}$ (или $(z'''_{xyx})'_x = z^{(4)}_{xyx^2}$) и т. д.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется ***смешанной частной производной***. Таковыми являются, например, z''_{xy}, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, z'''_{xyx}.

Пример 44.2. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

○ Решение: Так как $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$ и $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$, то

$$z''_{xy} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2,$$
$$z''_{yx} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$

Оказалось, что $z''_{xy} = z''_{yx}$. ●

Этот результат не случаен. Имеет место теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 44.1 (Шварц). Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z = f(x;y)$ имеем: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

44.3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$. Составим полное приращение функции в точке M:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x;y).$$

Функция $z = f(x;y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x;y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \qquad (44.1)$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Сумма первых двух слагаемых в равенстве (44.1) представляет собой *главную часть приращения функции.*

Главная часть приращение функции $z = f(x;y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y. \qquad (44.2)$$

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называют *частными дифференциалами.* Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому равенство (44.2) можно переписать в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy. \qquad (44.3)$$

Теорема 44.2 (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, причем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$.

❑ Так как функция дифференцируема в точке M, то имеет место равенство (44.1). Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$. Это означает, что функция непрерывна в точке M. Положив $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$ в равенстве (44.1), получим: $\Delta z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. Отсюда находим $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$, т. е. $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Таким образом, в точке M существует частная производная $f'_x(x;y) = A$. Аналогично доказывается, что в точке M существует частная производная $f'_y(x;y) = \frac{\partial x}{\partial y} = B$. ■

Равенство (44.1) можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \gamma, \tag{44.4}$$

где $\gamma = \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Отметим, что обратное утверждение не верно, т. е. из непрерывности функции или существования частных производных не следует дифференцируемость функции. Так, непрерывная функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ не дифференцируема в точке $(0;0)$.

Как следствие теоремы получаем формулу для вычисления полного дифференциала. Формула (44.3) принимает вид:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy} \tag{44.5}$$

или

$$\boxed{dz = d_x z + d_y z,}$$

где $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx$, $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$ — частные дифференциалы функции $z = f(x;y)$.

Теорема 44.3 (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой (44.5).

Примем теорему без доказательства.

Отметим, что для функции $y = f(x)$ одной переменной существование производной $f'(x)$ в точке является необходимым и достаточным условием ее дифференцируемости в этой точке.

Чтобы функция $z = f(x;y)$ была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

Арифметические свойства и правила исчисления дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

44.4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции $z = f(x;y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz. \tag{44.6}$$

Так как полное приращение $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$, равенство (44.6) можно переписать в следующем виде:

$$\boxed{f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y.} \tag{44.7}$$

Формулой (44.7) пользуются в приближенных расчетах.

Пример 44.3. Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

Решение: Рассмотрим функцию $z = x^y$. Тогда $1{,}02^{3{,}01} = (x+\Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y = 3$, $\Delta y = 0{,}01$. Воспользуемся формулой (44.7), предварительно найдя z'_x и z'_y: $z'_x = (x^y)'_x = y \cdot x^{y-1}$, $z'_y = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x$. Следовательно, $1{,}02^{3{,}01} \approx 1^3 + 3\cdot 1^{3-1}\cdot 0{,}02 + 1^3\cdot \ln 1\cdot 0{,}01$, т. е. $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}06$.

Для сравнения: используя микрокалькулятор, находим: $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}061418168$. ●

Отметим, что с помощью полного дифференциала можно найти: границы абсолютной и относительной погрешностей в приближенных вычислениях; приближенное значение полного приращения функции и т. д.

44.5. Дифференциалы высших порядков

Введем понятие дифференциала высшего порядка. Полный дифференциал функции (формула (44.5)) называют также дифференциалом первого порядка.

Пусть функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. *Дифференциал второго порядка* определяется по формуле $d^2z = d(dz)$. Найдем его:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x \cdot dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y \cdot dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)\cdot dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)\cdot dy.$$

Отсюда: $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$. Символически это записывается так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot z.$$

Аналогично можно получить формулу для *дифференциала третьего порядка*:

$$d^3z = d(d^2z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot z,$$

где

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}dy + 3\frac{\partial}{\partial x}dx \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что полученные формулы справедливы лишь в случае, когда переменные x и y функции $z = f(x;y)$ являются независимыми.

Пример 44.4. (*Для самостоятельного решения.*) Найти d^2z, если $z = x^3y^2$.

Ответ: $d^2z = 6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3\,dy^2$.

44.6. Производная сложной функции. Полная производная

Пусть $z = f(x;y)$ — функция двух переменных x и y, каждая из которых является функцией независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. В этом случае функция $z = f(x(t);y(t))$ является сложной функцией одной независимой переменной t; переменные x и y — *промежуточные переменные*.

Теорема 44.4. Если $z = f(x;y)$ — дифференцируемая в точке $M(x;y) \in D$ функция и $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — дифференцируемые функции независимой переменной t, то производная сложной функции $z(t) = f(x(t);y(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{44.8}$$

❑ Дадим независимой переменной t приращение Δt. Тогда функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращения Δx и Δy соответственно. Они, в свою очередь, вызовут приращение Δz функции z.

Так как по условию функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ (см. п. 44.3). Разделим выражение Δz на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Тогда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ в силу непрерывности функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ (по условию теоремы —

они дифференцируемые). Получаем:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\beta\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t},$$

т. е.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dt}+0\cdot\frac{dx}{dt}+0\cdot\frac{dy}{dt},$$

или

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

■

Частный случай: $z=f(x;y)$, где $y=y(x)$, т. е. $z=f(x;y(x))$ — сложная функция одной независимой переменной x. Этот случай сводится к предыдущему, причем роль переменной t играет x. Согласно формуле (44.8) имеем:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\quad\text{или}\quad\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.}\qquad(44.9)$$

Формула (44.9) носит название *формулы полной производной*.

Общий случай: $z=f(x;y)$, где $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$. Тогда $z=f(x(u;v);y(u;v))$ — сложная функция независимых переменных u и v. Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ можно найти, используя формулу (44.8) следующим образом. Зафиксировав v, заменяем в ней $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ соответствующими частными производными $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.}\qquad(44.10)$$

Аналогично получаем: $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$.

Таким образом, производная сложной функции (z) по каждой независимой переменной (u и v) равна сумме произведений частных производных этой функции (z) по ее промежуточным переменным (x и y) на их производные по соответствующей независимой переменной (u и v).

Пример 44.5. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\ln(x^2+y^2)$, $x=u\cdot v$, $y=\frac{u}{v}$.

Решение: Найдем $\frac{\partial z}{\partial u}$ ($\frac{\partial z}{\partial v}$ — самостоятельно), используя формулу (44.10):

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x\cdot v+\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y\cdot\frac{1}{v}.$$

Упростим правую часть полученного равенства:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2}{x^2+y^2}\left(x\cdot v+\frac{y}{v}\right)=\frac{2}{(uv)^2+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\left(uv\cdot v+\frac{u}{v\cdot v}\right)=$$

$$=\frac{2v^2}{u^2(v^4+1)}\cdot\frac{u\cdot(v^4+1)}{v^2}=\frac{2}{u},$$

т. е. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2}{u}$. ●

44.7. Инвариантность формы полного дифференциала

Используя правило дифференцирования сложной функции, можно показать, что полный дифференциал обладает *свойством инвариантности*: полный дифференциал функции $z=f(x;y)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли аргументы независимыми переменными или функциями независимых переменных.

❑ Пусть $z=f(x;y)$, где x и y — независимые переменные. Тогда полный дифференциал (1-го порядка) функции имеет вид $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$ (формула (44.5)).

Рассмотрим сложную функцию $z=f(x;y)$, где $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, т. е. функцию $z=f(x(u;v);y(u;v))=F(u;v)$, где u и v — независимые переменные. Тогда имеем:

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot dv=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv=$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot dv\right).$$

Выражения в скобках представляют собой полные дифференциалы dx и dy функций $x=x(u;v)$ и $y=y(u;v)$. Следовательно, и в этом случае,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy.$$

■

44.8. Дифференцирование неявной функции

Функция $z=f(x;y)$ называется *неявной*, если она задается уравнением

$$F(x;y;z)=0, \tag{44.11}$$

неразрешенным относительно z. Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z, заданной уравнением (44.11). Для этого, подставив в уравнение вместо z функцию $f(x;y)$, получим тождество $F(x;y;f(x;y))\equiv 0$. Частные производные по x и по y функции, тождественно равной нулю, также равны нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x;y;f(x;y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ (y — считаем постоянным),}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x;y;f(x;y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ (x — считаем постоянным),}$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \ (F'_z \neq 0). \tag{44.12}$$

Замечания.

а) Уравнение вида (44.11) не всегда определяет одну переменную как неявную функцию двух других. Так, уравнение $x^2+y^2+z^2-4=0$ определяет функции $z_1=\sqrt{4-x^2-y^2}$ и $z_2=-\sqrt{4-x^2-y^2}$, определенные в круге $x^2+y^2\leqslant 4$, $z_3=\sqrt{4-x^2-y^2}$, определенную в полукруге $x^2+y^2\leqslant 4$ при $y\geqslant 0$ и т. д., а уравнение $\cos(x+2y+3z)-4=0$ не определяет никакой функции.

Имеет место ***теорема существования неявной функции*** двух переменных: если функция $F(x;y;z)$ и ее производные $F'_x(x;y;z)$, $F'_y(x;y;z)$, $F'_z(x;y;z)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, причем $F(x_0;y_0;z_0)=0$, а $F'_z(x_0;y_0;z_0)\neq 0$, то существует окрестность точки M_0, в которой уравнение (44.11) определяет единственную функцию $z=f(x;y)$, непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки $(x_0;y_0)$ и такую, что $f(x_0;y_0)=z_0$.

б) Неявная функция $y=f(x)$ одной переменной задается уравнением $F(x;y)=0$. Можно показать, что в случае, если удовлетворены условия существования неявной функции одной переменной (имеется теорема, аналогичная вышеуказанной), то производная неявной функции находится по формуле

$$\boxed{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}} \quad (F'_y \neq 0).$$

Пример 44.6. Найти частные производные функции z, заданной уравнением $e^z+z-x^2y+1=0$.

Решение: Здесь $F(x;y;z)=e^z+z-x^2y+1$, $F'_x=-2xy$, $F'_y=-x^2$, $F'_z=e^z+1$. По формулам (44.12) имеем: $\frac{\partial z}{\partial x}=+\frac{2xy}{e^z+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{e^z+1}$. ●

Пример 44.7. Найти $\frac{dy}{dx}$, если неявная функция $y=f(x)$ задана уравнением $y^3+2y=2x$.

Решение: Здесь $F(x;y)=y^3+2y-2x$, $F'_x=-2$, $F'_y=3y^2+2$. Следовательно, $y'_x=-\frac{-2}{3y^2+2}$, т. е. $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3y^2+2}$. ●

§ 45. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим одно из геометрических приложений частных производных функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$ некоторой области $D \in \mathbb{R}^2$. Рассечем поверхность S, изображающую функцию z, плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ (см. рис. 209).

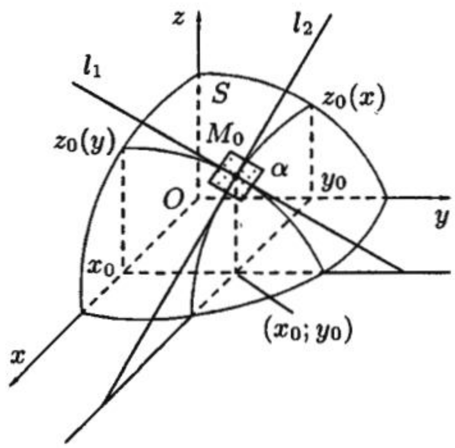


Рис. 209.

Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии $z_0(y)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение исходной функции $z = f(x;y)$ вместо x числа x_0. Точка $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ принадлежит кривой $z_0(y)$. В силу дифференцируемости функции z в точке M_0 функция $z_0(y)$ также является дифференцируемой в точке $y = y_0$. Следовательно, в этой точке в плоскости $x = x_0$ к кривой $z_0(y)$ может быть проведена касательная l_1.

Проводя аналогичные рассуждения для сечения $y = y_0$, построим касательную l_2 к кривой $z_0(x)$ в точке $x = x_0$. Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α, которая называется *касательной плоскостью* к поверхности S в точке M_0.

Составим ее уравнение. Так как плоскость α проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, то ее уравнение может быть записано в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

которое можно переписать так:

$$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \tag{45.1}$$

(разделив уравнение на $-C$ и обозначив $\frac{A}{-C} = A_1$, $\frac{B}{-C} = B_1$).

Найдем A_1 и B_1.

Уравнения касательных l_1 и l_2 имеют вид

$$z - z_0 = f'_y(x_0;y_0) \cdot (y - y_0), \quad x = x_0;$$
$$z - z_0 = f'_x(x_0;y_0) \cdot (x - x_0), \quad y = y_0$$

соответственно.

Касательная l_1 лежит в плоскости α, следовательно, координаты всех точек l_1 удовлетворяют уравнению (45.1). Этот факт можно записать в виде системы

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0;y_0)(y - y_0), \\ x = x_0, \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0). \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно B_1, получим, что $B_1 = f'_y(x_0;y_0)$.

Проводя аналогичные рассуждения для касательной l_2, легко установить, что $A_1 = f'_x(x_0;y_0)$.

Подставив значения A_1 и B_1 в уравнение (45.1), получаем искомое уравнение касательной плоскости:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0;y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0;y_0) \cdot (y - y_0).} \tag{45.2}$$

Прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее ***нормалью***.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости (см. с. 87), легко получить канонические уравнения нормали:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.} \tag{45.3}$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x;y;z)=0$, то уравнения (45.2) и (45.3), с учетом того, что частные производные могут быть найдены как производные неявной функции:

$$f'_x(x_0;y_0)=-\frac{F'_x(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)},\quad f'_y(x_0;y_0)=-\frac{F'_y(x_0;y_0)}{F'_z(x_0;y_0)}$$

(см. формулы (44.12)), примут соответственно вид

$$F'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0)\cdot(z-z_0)=0$$

и

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0)}.$$

Замечание. Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности получены для обыкновенных, т. е. не особых, точек поверхности. Точка M_0 поверхности называется *особой*, если в этой точке все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует. Такие точки мы не рассматриваем.

Пример 45.1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(1;-1;2)$.

Решение: Здесь $z'_x=f'_x(x;y)=2x$, $f'_y(x;y)=2y$, $f'_x(1;-1)=2$, $f'_y(1;-1)=-2$. Пользуясь формулами (45.2) и (45.3) получаем уравнение касательной плоскости: $z-2=2\cdot(x-1)-2\cdot(y+1)$ или $2x-2y-z-2=0$ и уравнение нормали: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$. ●

§ 46. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

46.1. Основные понятия

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной (см. п. 25.4).

Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой области D, точка $N(x_0;y_0)\in D$.

Точка $(x_0;y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z=f(x;y)$, если существует такая δ-окрестность точки $(x_0;y_0)$, что для каждой точки $(x;y)$, отличной от $(x_0;y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x;y)<f(x_0;y_0)$.

Аналогично определяется ***точка минимума*** функции: для всех точек $(x; y)$, отличных от $(x_0; y_0)$, из δ-окрестности точки $(x_0; y_0)$ выполняется неравенство: $f(x; y) > f(x_0; y_0)$.

На рисунке 210: N_1 — точка максимума, а N_2 — точка минимума функции $z = f(x; y)$.

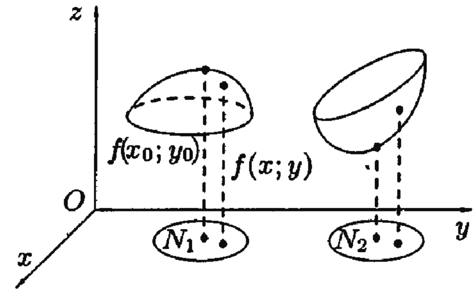


Рис. 210.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом*** (***минимумом***) функции. Максимум и минимум функции называют ее ***экстремумами***.

Отметим, что, в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют *локальный* (местный) характер: значение функции в точке $(x_0; y_0)$ сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к $(x_0; y_0)$. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

46.2. Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассмотрим условия существования экстремума функции.

Теорема 46.1 (необходимые условия экстремума). Если в точке $N(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0; y_0) = 0$, $f'_y(x_0; y_0) = 0$.

❑ Зафиксируем одну из переменных. Положим, например, $y = y_0$. Тогда получим функцию $f(x; y_0) = \varphi(x)$ одной переменной, которая имеет экстремум при $x = x_0$. Следовательно, согласно необходимому условию экстремума функции одной переменной (см. п. 25.4), $\varphi'(x_0) = 0$, т. е. $f'_x(x_0; y_0) = 0$.

Аналогично можно показать, что $f'_y(x_0; y_0) = 0$. ■

Геометрически равенства $f'_x(x_0; y_0) = 0$ и $f'_y(x_0; y_0) = 0$ означают, что в точке экстремума функции $z = f(x; y)$ касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию $f(x; y)$, параллельна плоскости Oxy, т. к. уравнение касательной плоскости есть $z = z_0$ (см. формулу (45.2)).

Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет максимум в точке $O(0; 0)$ (см. рис. 211), но не имеет в этой точке частных производных.

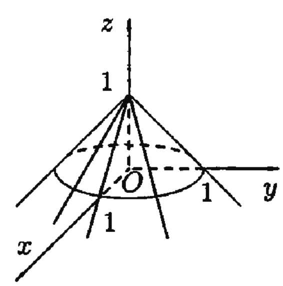


Рис. 211.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равны нулю, т. е. $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, называется ***стационарной точкой*** функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются ***критическими точками***.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Рассмотрим, например, функцию $z = xy$. Для нее точка $O(0;0)$ является критической (в ней $z'_x = y$ и $z'_y = x$ обращаются в ноль). Однако экстремума в ней функция $z = xy$ не имеет, т. к. в достаточно малой окрестности точки $O(0;0)$ найдутся точки для которых $z > 0$ (точки I и III четвертей) и $z < 0$ (точки II и IV четвертей).

Таким образом, для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

Теорема 46.2 (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $(x_0; y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0;y_0)$ значения $A = f''_{xx}(x_0;y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0;y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0;y_0)$. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

1. если $\Delta > 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;
2. если $\Delta < 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $(x_0;y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Примем без доказательства.

Пример 46.1. Найти экстремум функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Решение: Здесь $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки $M_1(6;3)$ и $M_2(0;0)$.

Находим частные производные второго порядка данной функции: $z''_{xx} = 6y - 6x$, $z''_{xy} = 6x$, $z''_{yy} = -12y^2$.

В точке $M_1(6;3)$ имеем: $A = -18$, $B = 36$, $C = -108$, отсюда

$$AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648,$$

т. е. $\Delta > 0$.

Так как $A < 0$, то в точке M_1 функция имеет локальный максимум: $z_{max} = z(6;3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 324 - 216 - 81 = 27$.

В точке $M_2(0;0)$: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ и, значит, $\Delta = 0$. Проведем дополнительное исследование. Значение функции z в точке M_2 равно нулю: $z(0;0) = 0$. Можно заметить, что $z = -y^4 < 0$ при $x = 0$, $y \neq 0$; $z = -x^3 > 0$ при $x < 0$, $y = 0$. Значит, в окрестности точки $M_2(0;0)$ функция z принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке M_2 функция экстремума не имеет. ●

46.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$. Тогда она достигает в некоторых точках $\overline{D}$ своего наибольшего M и наименьшего m значений (т. н. *глобальный экстремум*). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области $\overline{D}$, или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области $\overline{D}$ функции $z = f(x;y)$ состоит в следующем:

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие $\overline{D}$, и вычислить значения функции в них;

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;y)$ на границах области;

3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

Пример 46.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = -1{,}5$ (см. рис. 212).

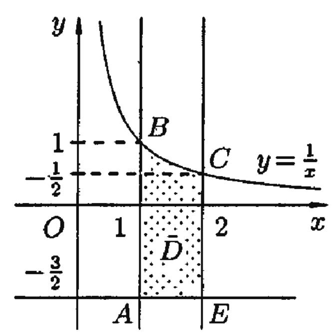


Рис. 212.

○ Решение: Здесь $z'_x = 2xy + y^2 + y$, $z'_y = x^2 + 2xy + x$.

1. Находим все критические точки:

$$\begin{cases} y(2x + y + 1) = 0, \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются точки $(0;0)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$, $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Ни одна из найденных точек не принадлежит области $\overline{D}$.

2. Исследуем функцию z на границе области, состоящей из участков AB, BC, CE и EA (рис. 212).

На участке AB: $x = 1$, $z = y^2 + 2y$, где $y \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$,
$z'_y = 2y + 2$, $2y + 2 = 0$, $y = -1$. Значения функции $z(-1) = -1$, $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$, $z(1) = 3$.

На участке BC: $y = \frac{1}{x}$, $z = x + \frac{1}{x} + 1$, где $x \in [1; 2]$,
$z'_x = 1 - \frac{1}{x^2}$, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1 \notin [1; 2]$. Значения функции $z(1) = 3$, $z(2) = 3{,}5$.

На участке CE: $x = 2$, $z = 2y^2 + 6y$, $y \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$,
$z'_y = 4y + 6$, $4y + 6 = 0$, $y = -\frac{3}{2}$. Значения функции $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -4{,}5$, $z\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}5$.

На участке AE: $y = -\frac{3}{2}$, $z = -\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4}x$, $x \in [1; 2]$,
$z'_x = -3x + \frac{3}{4}$, $-3x + \frac{3}{4} = 0$, $x = \frac{1}{4} \notin [1; 2]$. Значения функции $z(1) = -\frac{3}{4}$, $z(2) = -4{,}5$.

3. Сравнивая полученные результаты, имеем: $M = +3{,}5 = z\left(2; \frac{1}{2}\right) = z(C)$; а $m = -4{,}5 = z\left(2; -\frac{3}{2}\right) = z(E)$.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
15. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;
16. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Таблица основных интегралов

1. $\int u^\alpha\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

4. $\int e^u\,du = e^u + C;$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C \qquad \left(\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C\right);$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C \qquad \left(\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C\right);$

7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C;$

8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \qquad \left(\int \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C\right);$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \qquad \left(\int \dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C\right);$

11. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C;$

12. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C;$

15. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C;$

16. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\cdot\ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C;$

17. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \dfrac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

По вопросам оптовых закупок обращаться:
тел./факс: 785-29-25, 956-16-84,
e-mail: rolf@airis.ru
Адрес: Москва, пр. Мира, 106

Наш сайт: www.airis.ru

Вы можете приобрести наши книги
в киоске по адресу: пр. Мира, д. 106,
с 11[00] до 17[30], кроме субботы, воскресенья.

Адрес редакции: 129626, Москва, а/я 66

Издательство «Айрис-пресс» приглашает
к сотрудничеству авторов образовательной
и развивающей литературы.
По всем вопросам обращаться по тел.:
(095) 785-29-25, 956-16-84

Учебное издание

Дмитрий Трофимович Письменный

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
1 часть

Ведущий редактор: *В. В. Черноруцкий*
Редактор: *Л. В. Абламская*
Художественный редактор: *А. М. Кузнецов*
Обложка: *А. М. Драговой*
Иллюстрации: *Е. В. Панкратьев, А. Ю. Терская*
Технический редактор: *С. С. Коломеец*
Компьютерная верстка: *К. Е. Панкратьев*
Корректоры: *Н. С. Калашникова, З. А. Тихонова*

Подписано к печати 21.09.2000. Формат $70\times100\ ^1/_{16}$.
Печать офсетная. Гарнитура «Компьютер Модерн».
Печ. л. 18. Усл.-печ. л. 23,4.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 1748.

Налоговая льгота – общероссийский классификатор
продукции ОК–005–93, том 2 – 953000.

ЛР № 064657 от 27.06.96 г.
ООО «Рольф» г. Москва, пр. Мира, 106,
тел.: (095) 785-29-25.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Можайский полиграфический комбинат».
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

Дмитрий Письменный

Конспект лекций по высшей математике

Тридцать шесть лекций

1 часть

Д.Т. Письменный — автор бестселлера «Готовимся к экзаме по математике», выпускаемого в серии «Домашний репетитор» пособия, по которому за последни четыре года подготовились к экзаменам более 500 000 школьников и абитуриентов из России и других стран бывшего СССР

Вчерашний школьник, став студентом, зачастую «почивает на лаврах» и благополучно «заваливает» первый экзамен по математике, особенно если этот предмет не является профилирующим

Данная книга поможет студентам в условиях дефицита времени подготовиться к экзамену по высшей математике, чувствовать себя на нем уверенно, гарантировать себе положительную оценку, по крайней мере, на первом «взрослом» экзамене.

АЙРИС ПРЕСС

ISBN 5-7836-0311-1

9 785783 603112 >