



კრებული მათემატიკაში

ეკონომიკისა და პიზნუსის სპეციალური
სტუდენტებისათვის

ამონაკრები სახელმძღვანელოდან:
"უმაღლესი მათემატიკა—
საპარაოიმოები არასპეციალური
ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის",
ისუ გამომცემლობა, 2004წ

სახელმძღვანელოს
ავტორები:

მერი გელაშვილი,
ქეთევან კიკვაძე,
ქეთევან ლოსაბერიძე,
ლოლიტა მალრაძე,
რუსუდან მესხია (ხელმძღვანელი),
ნანა სვანიძე

ამონაკრების შემდგენლები:
თამაზ ზერეკიძე და რუსუდან მესხია
(ფაილი მოამზადა ნიკო გუნიამ)

2011-12 სასწავლო წელი

შინაარსი

მოქმედებები სიმრავლეებზე 3

მატრიცები და დეტერმინანტები 4

- მატრიცები (§2.4) 4
- დეტერმინანტები (§2.5) 5
- შებრუნებული მატრიცი (§2.6) 5
- მატრიცის რანგი (§ 2.7) 6

წრფივ განტოლებათა სისტემები 6

- წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა. კრამერის თეორემა (§2.8); წრფივი სისტემის ამოხსნის მატრიცული ხერხი (§ 2.9); კრონეკერ-კაპელის თეორემა (§ 2.10.) წრფივი სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით (§2.11.) 6

ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები 8

- დეკარტის მართკუთხა და პოლარული კოორდინატები სიბრტყეზე. მანძილი ორ წერტილს შორის. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობი (§. 3.1.) 8
- წრფე სიბრტყეზე (§3.2) 9
 - ძირითადი ამოცანები წრფეზე 10
- მეორე რიგის წირები (§ 3.3.) 12
 - წრეწირი 12
 - ელიფსი 12
 - ჰიპერბოლა 12
 - პარაბოლა 13
- ექვთორული ალგებრა (§3.4) 13

ზღვარი 14

- ფუნქცია (§ 4.1) 14
- მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი (§4.2) 15
- ფუნქციის ზღვარი. უწყვეტობა (§ 4.3) 16
 - ტოლფასი უსასრულოდ მცირე ფუნქციები და მათთან დაკავშირებული ზღვრები 16

დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები 17

- ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი (§4.4) 17
- განუზღვრელობის გახსნის ლოპიტალის წესი (§4.5) 19
- ფუნქციის მონოტონურობა და ექსტრემუმი (§4.6) 20
- ფუნქციის გრაფიკის ამოხსნეილობა და ჩახსენეილობა. გაღუნვის წერტილები (§ 4.7) 20
- გრაფიკის ასიმპტოტები (§ 4.8) 21

ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება (§ 4.9) 21

მრავალი ცვლადის ფუნქცია 23

- ორი ცვლადის ფუნქცია (§5.1) 23
- ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი (§ 5.2) 23
- ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობა. ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები. სრული დიფერენციალი. რთული ფუნქციის გაწარმოება (§5.3) მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალები (§5.4.) 24
- ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი (§ 5.5) 25

ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტები 25

- პირველადი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი (§6.1) 25
- §6.2 ცვლადის გარდაქმნა განუსაზღვრელ ინტეგრალში (ჩასმის ხერხი) 26
- ნაწილობითი ინტეგრება (§6.3) 27
- კვადრატული სამწევრის შემცველი უმარტივესი ინტეგრალები (§6.4) 27
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ინტეგრება (§6.5) 28
- განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება; ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა (§7.1) 28
- განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ჩასმის ხერხით (§7.2) 28
- განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით (§7.3) 29
- ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა (§8.1) 29
- წირის სიგრძის გამოთვლა* 30
- ბრუნვითი სხეულის მოცულობის გამოთვლა (§8.3) 30

დიფერენციალური განტოლებები 30

- განცალკეულად ცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება (§ 10.2) 30
- პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება (§10.4.) 31
- მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება (§10.10.) 31

მოქმედებები სიმრავლეზე

◇

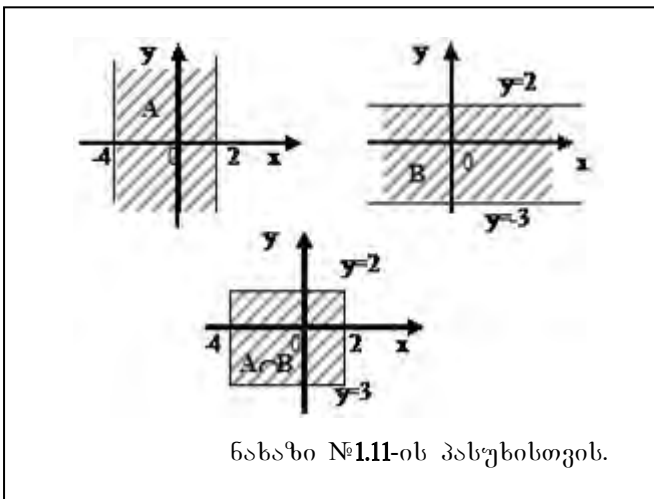
- 1.1. დაადგინეთ შემდეგი ორი ჩანაწერიდან, რომელია სწორი:
 ა) $\{4,5\} \in \{4,5, \{4,5,7\}\}$, თუ $\{4,5\} \subset \{4,5, \{4,5,7\}\}$.
 ბ) $\{3,4\} \in \{3,4, \{3,4\}\}$, თუ $\{3,4\} \subset \{3,4, \{3,4\}\}$.
- 1.2. მოცემულია $A = \{-3, -1, 0, 2, 5, 6\}$, $B = \{-3, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{0, -3, 11\}$. იპოვეთ $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C$, $(A \setminus B) \cap C$.
- 1.3. $A = (-2, 3)$ და $B = [1, +\infty)$. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ სიმრავლეები და გამოსახეთ ისინი რიცხვით წრფეზე.

◇ ქვემოთ მოცემული სიმრავლეები წარმოადგინეთ მათი ელემენტების დასახელებით

- 1.4. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)\sqrt{x^2-4x+3} = 0\}$.
- 1.5. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + \frac{3}{x} \leq 5, x > 0\}$.
- 1.6. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{9} \leq 3^x \leq 12\}$.
- 1.7. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \log_2(x+10) < 4\}$.
- 1.8. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x + \cos x = 2\}$.
- 1.9. მოცემულია სიმრავლეები $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 9x \geq -8\}$ და $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 12 \leq 0\}$. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$ სიმრავლეები.

პასუხები:

- 1.1. ა) სწორია $\{4,5\} \subset \{4,5, \{4,5,7\}\}$, ბ) სწორია ორივე.
 1.2. $(A \cup B) \cap C = \{-3, 0\}$, $(A \cap B) \cup C = \{-3, 2, 5, 0, 11\}$, $(A \setminus B) \cap C = \{0\}$.
 1.3. $A \cup B = (-2, +\infty)$, $A \cap B = [1, 3)$, $A \setminus B = (-2, 1)$, $B \setminus A = [3, +\infty)$.
 1.4. $A = \{1, 3\}$ 1.5. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 1.7. $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; 1.8. $B = \emptyset$; 1.9. $A \cup B = A = (-\infty, -8] \cup [-1, +\infty)$,

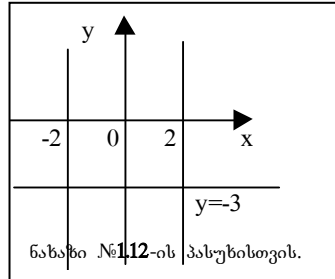


$A \cap B = B = [3; 4]$, $A \setminus B = (-\infty, -8] \cup [-1, 3) \cup (4; +\infty)$, $B \setminus A = \emptyset$.

- 1.10. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| \geq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 4 < 0\}$. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

საკორდინატო სიბრტყეზე გამოსახეთ შემდეგი სიმრავლეები:

- 1.11. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq 2\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq y \leq 2\}$, იპოვეთ $A \cap B$.
- 1.12. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 4)(y + 3) = 0\}$. (იხ.ნახ.)



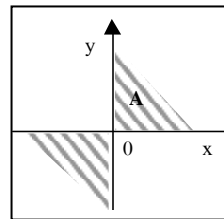
- 1.13. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 5y + 1 = 0, 2x + 3y + 3 = 0\}$.
- 1.14. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$.
- 1.15. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq y \leq -x^2\}$.

◇ დაამტკიცეთ, რომ

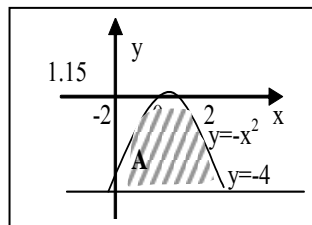
- 1.16. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
 1.17. $A \subset U, B \subset U$, მაშინ $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$.
 $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$.

- 1.10. $A \cup B = A = (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$, $A \cap B = B = \emptyset$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = \emptyset$;
 1.11. (იხ. ნახ.)
 1.12. B არის $x = -2$, $x = 2$ და $y = -3$ წრფეების წერტილთა ერთობლიობა

- 1.13. $B = \left\{ A \left(-\frac{18}{19}; -\frac{7}{19} \right) \right\}$ სიმრავლე ერთი A წერტილისაგან შედგება.



1.14 ↗



1.15 ↗

მატრიცები და ღებრმინანტები

მატრიცები (§2.4)

2.95. შეკრიბეთ მატრიცები

$$\text{ა) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ და } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ბ) } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ და } B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.96. მოცემულია მატრიცები

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ და } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

იპოვეთ: ა) $3A-2B$; ბ) $A-3B$; გ) $-4B$.

2.97. იპოვეთ B მატრიცი, თუ $2A+3B=C$, სადა

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

◇ გადაამრავლეთ მატრიცები

$$2.98. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2.99. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

$$2.100. \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2.101. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.102. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad 2.103. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.104. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad 2.105. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2.106. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ მატრიცი გაამრავლეთ მის$$

ტრანსპონირებულზე.

2.107. მოცემულია მატრიცები

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ და } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

გამოთვალეთ AB და BA .

◇ შეასრულეთ მოქმედებები (2.108-2.111):

$$2.108. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 \quad 2.109. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^3$$

$$2.110. \left[\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right]^n$$

$$2.111. \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -7 & 17 & 4 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \right]^5$$

პასუხები:

$$2.95. \text{ ა) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ბ) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.96. \text{ ა) } \begin{pmatrix} 7 & -11 & 5 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{ ბ) } \begin{pmatrix} 0 & -13 & 4 \\ 5 & -9 & -3 \end{pmatrix}, \text{ ბ) } \begin{pmatrix} -4 & -16 & 4 \\ 4 & -12 & -8 \end{pmatrix}. \quad 2.97. \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.98. \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \quad 2.99. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad 2.100. \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ -1 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$2.101. \begin{pmatrix} -2 & -5 & 12 \\ 4 & 8 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2.102. \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad 2.103. \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 10 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}, \quad 2.104. (3)$$

$$2.105. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ -1 & -8 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2.106. \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}, \quad 2.107. \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 7 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$2.108. \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ -4 & 9 & 5 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2.109. \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}, \quad 2.110. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.111. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2.112) 11. \quad 2.113) \sin(\alpha - \beta).$$

დეტერმინანტები (§2.5)

◇ გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

2.112. $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$, 2.113. $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix}$,

2.114. $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$, 2.115. $\begin{vmatrix} a+bi & a+b \\ a-b & a-bi \end{vmatrix}$,

2.116. $\begin{vmatrix} a+b & a^2 \\ ab & a^2-ab+b^2 \end{vmatrix}$,

2.117. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, 2.118. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$,

2.119. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, 2.120. $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$,

2.121. $\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\sin \beta & \cos \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta & \sin \beta \\ \cos^2(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$,

2.122. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$

◇ დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

2.123. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

2.124. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

2.126. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

◇ ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2.127. $\begin{vmatrix} 3 & -x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, 2.128. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 5 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & x \end{vmatrix}$,

2.129. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ x & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix}$,

2.130. $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$, 2.131. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

◇ ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

2.133. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$; 2.134. $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

◇ გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

2.135. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, 2.136. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,

2.137. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 2.138. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$,

პასუხები:

2.114. $-\cos 2\alpha$. 2.115. $2b^2$. 2.116. b^3 . 2.117. -48 . 2.118. 8 . 2.119. 0 .
2.120. $-2x$. 2.121. $\sin(\alpha+\beta)$. 2.122. $(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$. 2.127. -5 .
2.128. $\{2; 0,5\}$. 2.129. 0 . 2.130. $\{9; 2\}$. 2.131. $\{2; 3\}$. 2.133. $x > 3,5$.
2.134. $-6 < x < 4$. 2.135. -241 . 2.136. 160 . 2.137. 0 . 2.138. -21 .

შებრუნებული მატრიცი (§2.6)

◇ იპოვეთ მატრიცის შებრუნებული (2.140-2.144).

2.140. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, 2.141. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,

2.142. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 2.144. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & -10 \end{pmatrix}$.

◇ იპოვეთ X მატრიცი შემდეგი განტოლებიდან (2.145-2.152)

2.145. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$,

2.146. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$,

2.147.
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix},$$

2.148.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

2.149.
$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (6-3),$$

2.151.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 16 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

პასუხები:

2.140. $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, 2.141. $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

2.142. $-\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & 6 \\ -2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$, 2.143. $-\frac{1}{34} \begin{pmatrix} 12 & -14 & -18 & -2 \\ 7 & 6 & -19 & -4 \\ 9 & -2 & -5 & -10 \\ -17 & 0 & 17 & 0 \end{pmatrix}$

2.144. მატრიცი გადაგვარებულია. 2.145. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

2.146. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, 2.147. $\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -8 & -51 \\ -3 & -23 \end{pmatrix}$, 2.148. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.149. (a, -a, 3 a), სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

2.151. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 18 & -12 & 3 \\ -47 & 34 & -8 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

მატრიცის რანგი (§ 2.7)

◇ გამოთვალეთ შემდეგ მატრიცთა რანგი

2.153. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 2.154. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

2.155. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, 2.156. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$,

2.157. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 5 & 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 2.158. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

2.159. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, 2.160. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & +2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$,

2.161. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 2.162. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$;

2.163. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, 2.164. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

პასუხები:

2.153). 3. 2.154). 2. 2.155). 3. 2.156). 2. 2.157). 2. 2.158). 2. 2.159). 3. 2.160). 2. 2.161). 3. 2.162). 2. 2.163). 1. 2.164). 5.

წრფივ განტოლებათა სისტემები

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა. კრამერის თეორემა (§2.8); წრფივი სისტემის ამოხსნის მატრიცული ხერხი (§ 2.9); კრონეკერ-კაპელიის თეორემა (§ 2.10.) წრფივი სისტემის ამოხსნა ბაუსის მეთოდით (§2.11.)

◇ ამოხსენით სისტემები კრამერის ფორმულებით:

2.165. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 4x_1 - x_2 = 13. \end{cases}$ 2.166. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, \\ 35x_1 - 18x_2 = 69. \end{cases}$

2.167. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 7 = 0. \end{cases}$ 2.168. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

2.169. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2.170. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = -4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 10. \end{cases}$

2.171. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 8, \\ 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$ 2.172. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.173. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 7, \\ 3x_1 + x_3 = 13 \\ x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$ 2.174. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

2.175. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 7. \end{cases}$

პასუხები:

2.165). $x_1=3, x_2=1$. 2.166). $x_1=3, x_2=2$. 2.167). $x_1=1, x_2=1$. 2.168). $x_1=x_2=0$. 2.169). (0;0;0) 2.170). (2;2;1). 2.171). (1;3;2). 2.172). (5;1;4). 2.173). (3;1;4). 2.174). (1;1;-1;1) 2.175). (1;0;2;3).

◇ კრონეკერ-კაპელის თეორემის გამოყენებით შეისწავლეთ სისტემათა **თავსებადობის საკითხი** და იპოვეთ ზოგადი ამონახსნი

2.178.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 = 5. \end{cases}$$
 2.179.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 = 0. \end{cases}$$

2.180.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$
 2.181.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2.182.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$
 2.183.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

2.184.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$
 2.185.
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2.186.
$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$
 2.187.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 0. \end{cases}$$

2.188.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

2.189.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$
 2.190.

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

2.191.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

პასუხები:

2.178. სისტემა არათავსებადია. 2.179. $x_1=2t, x_2=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.180. $x_1=t, x_2=3-2t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.181. სისტემა არათავსებადია. 2.182. $x_1=-5t+2, x_2=-2t+\frac{1}{2}, x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.183. $x_1=\lambda, x_2=t, x_3=\lambda-2t-1, \lambda$ და t ნებისმიერია. 2.184. $x_1=t-\frac{1}{7}, x_2=t+\frac{12}{7}, x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.185. $x_1=-13t, x_2=5t, x_3=7t$. სადაც t ნებისმიერია. 2.186. $x_1=-5t, x_2=-14t, x_3=-3t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.187. $x_1=k-4t, x_2=k, x_3=t$, სადაც k და t ნებისმიერია. 2.188. $x_1=\frac{1}{5}(11-t), x_2=\frac{2}{5}(t-1), x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.189. $x_1=\frac{3-4t}{14}, x_2=\frac{7-2t}{2}, x_3=\frac{27-8t}{14}, x_4=t$, სადაც t

ნებისმიერია. 2.190. $x_1=t, x_2=-13+3t, x_3=-7; x_4=0$. 2.191. $x_1=\frac{15}{9}, x_2=-1; x_3=\frac{4}{3}$.

◇ გამოიკვლიეთ და ამოხსენით შემდეგი სისტემები:

2.193.
$$\begin{cases} ax_1 - x_2 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 = 5. \end{cases}$$
 2.194.
$$\begin{cases} x_1 - ax_2 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 = 10. \end{cases}$$

2.195.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 2. \end{cases}$$
 2.196.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ ax_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

2.197.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$
 2.198.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1. \end{cases}$$

პასუხები:

2.193. ა) თუ $a \neq 2$, მაშინ $x_1 = \frac{4}{3a-6}, x_2 = \frac{5a-18}{6-3a}$. ბ) თუ $a=2$, მაშინ სისტემა არათავსებადია. 2.194. ა) თუ $a \neq 2$, მაშინ $x_1 = \frac{10+5a}{2+a}, x_2=0$, ბ) თუ $a=2, x_1=5-2t, x_2=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.195. ა) თუ $a \neq 4$, მაშინ $x_1 = \frac{2a-5}{4-a}, x_2 = \frac{17-3a}{4-a}, x_3 = \frac{1}{a-4}$, ბ) თუ $a=4$, სისტემა არათავსებადია. 2.196. ა) თუ $a \neq 2$, მაშინ $x_1=x_2=x_3=0$. ბ) $a=2$, მაშინ $x_1=4t, x_2=-6t, x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.197. ა) როცა $a \neq 5$, მაშინ $x_1=x_2=x_3=0$. ბ) როცა $a=5$, სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე: $x_1 = \frac{1}{2}t, x_2 = \frac{5}{4}t, x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.198. თუ $a \neq 3$, მაშინ $x_1 = \frac{1}{a+3}(-8ab-9b+6a+13), x_2 = \frac{1}{a+3}(9a+18b-5ab+16), x_3 = \frac{2b-7}{a+3}$. ბ) როცა $a=3, b \neq \frac{1}{3}$, მაშინ სისტემა არათავსებადია. გ) როცა $a=3$ და $b = \frac{1}{3}$, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე: $x_1 = \frac{5t-1}{7}, x_2 = \frac{11t-1}{7}, x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია.

◇ შემდეგი სისტემები ჩაწერეთ მატრიცულად და ამოხსენით:

$$2.199. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases} \quad 2.200. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$2.201. \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 17, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

$$2.202. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -9, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -9, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

პასუხები: 2.199. (3,2,1). 2.200. (-2,0,-1).

2.201. სისტემის მატრიცი გადაგვარებულია, შებრუნებული არ გააჩნია. 2.202. (2, -2, 0, 1)

◇ გაუსის მეთოდით ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი სისტემები:

$$2.203. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases} \quad 2.204. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

$$2.205. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

$$2.206. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

$$2.207. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 16, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 - 3x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = -3. \end{cases}$$

$$2.208. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 5. \end{cases}$$

პასუხები: 2.203. (-1,3,2). 2.204. (1,5,2). 2.205. (1,2,3,4) 2.206. სისტემა არათავსებადია. 2.207. (1,2,3,4). 2.208. სისტემა არათავსებადია.

ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

დეკარტის მართკუთხა და კოლარული კოორდინატები სიბრტყეზე. მანძილი ორ წერტილს შორის. მონაკვეთის ბაჟოვა მოცემული ვარდობი (§. 3.1)

- 3.1. ააგეთ წერტილები: $M_1(5,2)$, $M_2(-3,1)$, $M_3(-4,-2)$, $M_4(4,-3)$, $M_5(6,0)$, $M_6(0,3)$, $M_7(0,-4)$.
- 3.7. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(-2;2)$, $B(1;1)$ და $C(-1,3)$, არის მართკუთხა.
- 3.8. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(-3;-1)$, $B(-1;0)$ და $C(-2,-3)$, არის ტოლფერდა.
- 3.9. ორდინატა დერძზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის დაშორება $M(4,-6)$ წერტილიდან არის 5 ერთეული.
- 3.10. უჩვენეთ, რომ ოთხკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(7;-2)$, $B(10;2)$, $C(1,5)$ და $D(-2,1)$ პარალელოგრამია.
- 3.11. მოცემულია წესიერი სამკუთხედის ორი წვერო: $A(3;-2)$, $B(8;10)$, მოძებნეთ ფართობი.
- 3.15. კოორდინატა დერძებზე იპოვეთ წერტილები, რომელთაგან თითოეული თანატოლად არის დაშორებული $A(1;1)$ და $B(3;7)$ წერტილებიდან.

- 3.16. $A(x;4)$ და $B(-6;y)$ წერტილებს შორის მონაკვეთი $C(-1;1)$ წერტილით იყოფა შუაზე. იპოვეთ A და B წერტილები.
- 3.17. $A(8;-2)$ და $B(2;4)$ წერტილებს შორის მონაკვეთი დაყავით ექვს ტოლ ნაწილად. გამოთვალეთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები.
- 3.18. $A(3;0)$ და $B(5;-4)$ წერტილებს შორის მონაკვეთი დაყავით ოთხ ტოლ ნაწილად. გამოთვალეთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები.
- 3.20. იპოვეთ $A(1;4)$, $B(-5;0)$, $C(-2;-1)$ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი.
- 3.21. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(2;-1)$, $B(4;-2)$ და $C(10;3)$. იპოვეთ კუთხის ბისექტრისისა და BC გვერდის გადაკვეთის წერტილი.
- 3.22. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(4;1)$, $B(7;5)$ და $C(-4;7)$. რა ნაწილებად ყოფს A კუთხის ბისექტრისა მოპირდაპირე BC გვერდს?
- 3.25. რომის გვერდია 14 სმ, ხოლო ორი მოპირდაპირე წვეროა $A(3,1)$ და $B(8,6)$. გამოთვალეთ რომის ფართობი.
- 3.26. აჩვენეთ, რომ $A(8;3)$, $B(5;-2)$ და $C(-1;-12)$ წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე.
- 3.27. მოცემულია კვარდატის ორი მოპირდაპირე წვერო $A(1;-2)$ და $C(-1;2)$. მოძებნეთ მისი ფართობი.

- 3.32. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო: $A(1;8)$, $B(5;-1)$ და მედიანების გადაკვეთის წერტილი $M(1;3)$. მოძებნეთ სამკუთხედის მესამე წვერო.
3.35. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო $A(2;3)$ და $B(4;-3)$. სამკუთხედის ფართობია 20. იპოვეთ მესამე C წვეროს აბსცისი, თუ ორდინატია 5.

პასუხები:

- 3.9). $(0;-3)$ და $(0;-9)$. 3.11). $\frac{169\sqrt{3}}{4}$. 3.15). $(14;0)$ და $(0; \frac{14}{3})$.
3.16). $A(4;4)$ და $B(-6;-2)$. 3.17). $(7;-1)$; $(6;0)$; $(5;1)$; $(4;2)$; $(3;3)$.
3.18). $(3,5; -1)$, $(4;-2)$ და $(4,5;-3)$. 3.20). $M(-2;1)$. 3.21). $M(5,2;-1)$.
3.22). $BM = \frac{5\sqrt{5}}{3}$; $CM = \frac{10\sqrt{5}}{3}$. 3.23). 5 და $\sqrt{481}$.
3.24). ა) 3,5; ბ) 10; გ) წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ.
3.25). $5\sqrt{367}$ სმ². 3.27).10. 3.28). $\arctg \frac{11}{12}$. 3.30) 26; 3.27).10.
3.32) $C(-3;2)$. 3.35) $8 \operatorname{arctg} -5 \frac{1}{3}$.

წრფე სიბრტყეში (§3.2)

- 3.36. მოცემულია წრფე $3x-2y+11=0$. წერტილებიდან $M_1(1;7)$, $M_2(-3;1)$, $M_3(1;4)$, $M_4(-5;8)$, $M_5(0,0)$, $M_6(3;10)$ რომელი მდებარეობს მასზე და რომელი არა.
3.37. $(2;a)$ და $B(b;-4)$ წერტილები მდებარეობენ $3x-y+5=0$ წრფეზე. მოძებნეთ a და b .
3.38. მოძებნეთ $3x-2y-12=0$ წრფის გადაკვეთის წერტილები საკოორდინატო ღერძებთან და ააგეთ ეს წრფე.
3.39. წრფე გადის $A(3;4)$ და $B(5;-2)$ წერტილებზე. გამოთვალეთ ამ წრფის კუთხური კოეფიციენტი და ორდინატოა ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთი.
3.40. მოძებნეთ შემდეგი წრფეების საკუთხო კოეფიციენტები და ორდინატოა ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთები: ა) $2x-y-3=0$; ბ) $2x+3y-5=0$; გ) $2y+5=0$; დ) $3x-7=0$; ე) $x+y=0$.
3.41. რა კუთხეს ადგენენ X ღერძთან შემდეგი წრფეები:
ა) $x+y-3=0$; ბ) $2x+3y-5=0$; გ) $x-y-2=0$; დ) $x=5y$.
3.42. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატოა სათავეზე და X ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს შემდეგ კუთხეს:
ა) 45° ; ბ) 135° ; გ) 30° ; დ) 180° .
3.43. ააგეთ წრფეები: ა) $2x+3y-6=0$; ბ) $3x+5y=0$; გ) $2x+5=0$; დ) $3y-7=0$; ე) $2x-4y+5=0$; ვ) $4y=0$.
3.44. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(0;-4)$ წერტილზე და OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს $\frac{\pi}{3}$ კუთხეს.
3.45. წრფეთა შემდეგი განტოლებები გადაწერეთ განტოლებებზე ღერძთა მონაკვეთებში:
ა) $2x+3y+36=0$; ბ) $7x-8y=0$; გ) $5x+3=0$; დ) $x+y+3=0$; ე) $x+3=0$; ვ) $x-5y-11=0$.

- 3.46. დაწერეთ იმ წრფის ზოგადი განტოლება, რომელიც საკოორდინატო ღერძებზე კვეთს $p = -\frac{2}{3}$ და $q = \frac{3}{7}$ მონაკვეთებს.

- 3.47. წრფე საკოორდინატო ღერძებზე კვეთს ტოლ დადებით მონაკვეთებს. დაწერეთ მისი განტოლება, თუ საკოორდინატო ღერძებთან მის მიერ შედგენილი სამკუთხედის ფართობი 72 კვ. ერთეულია.
3.48. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც საკოორდინატო ღერძებზე კვეთს ტოლ მონაკვეთებს და ღერძებს შორის მისი მონაკვეთის სიგრძეა $7\sqrt{2}$ ერთეული.
3.49. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც აბსცისთა ღერძზე კვეთს ორჯერ მეტი სიგრძის მონაკვეთს, ვიდრე ორდინატოა ღერძზე და გადის $A(4;3)$ წერტილზე.

- 3.50. მოცემულია წრფის განტოლება $\frac{x+1}{3} - \frac{y-1}{4} = 0$.

გადაწერეთ ეს განტოლება წრფის ა) განტოლებაზე კუთხური კოეფიციენტით ბ) განტოლებაზე ღერძთა მონაკვეთებში; გ) ზოგადი სახის განტოლებაზე; დ) ნორმალური სახის განტოლებაზე.

- 3.51. მიეცით ნორმალური სახე წრფეთა შემდეგ განტოლებებს:
ა) $5x-12y-26=0$; ბ) $x \sin 20^\circ + y \cos 20^\circ + 3=0$;
გ) $3x+1=0$;
დ) $2y-1=0$; ე) $2x-y-1=0$;
ვ) $3x+4y-5=0$.
ზ) $6x+8y+5=0$; თ) $\sqrt{3}x+y-2=0$;
ი) $3x+y=0$.

პასუხები:

- 3.36. მდებარეობენ M_1, M_2, M_6 წერტილები. 3.37. $a=11$; $b=-3$. 3.38. $A(4;0)$; $B(0;-6)$. 3.39. $k=-3$, $b=13$. 3.40. ა) $k=2$, $b=-3$;
 $b = -\frac{5}{2}$;
ბ) $k = -\frac{2}{3}$; $b = \frac{5}{3}$; გ) $k=0$; დ) წრფე პარალელურია ოყ ღერძის. ე) $k=-1$; $b=0$; 3.41. ა) $\frac{3}{4}\pi$; ბ) $\frac{\pi}{4}$; გ) $\arctg\left(-\frac{2}{3}\right)$;
დ) $\arctg \frac{1}{5}$. 3.42. $y=x$; ბ) $y=-x$; გ) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$; დ) $y=0$. 3.44. $y = \sqrt{3}x - 4$.
3.45. ა) $\frac{x}{-18} + \frac{y}{-12} = 1$; ბ) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-3} = 1$; ვ) $\frac{x}{11} + \frac{y}{11/5} = 1$; ბ) გ) და ე) წრფის არასრული განტოლებები ღერძთა მონაკვეთებში არ გადაწერება. 3.46. $9x-14y+6=0$.
3.47. $x+y-12=0$. 3.48. $x+y+7=0$; $x-y+7=0$; $x+y-7=0$; $x-y-7=0$. 3.49. $x+2y-10=0$. 3.50. ა) $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$; ბ) $\frac{x}{-7/4} + \frac{y}{7/3} = 1$; გ) $4x-3y+7=0$,
დ) $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{7}{5} = 0$. 3.51. ა) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - 2 = 0$; ბ) $-x \cos 70^\circ - y \sin 70^\circ - 3 = 0$; გ) $-x - \frac{1}{3} = 0$; დ) $y - \frac{1}{2} = 0$; ე) $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$;

v) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$; z) $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{2} = 0$; T) $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$; i)
 $\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y = 0$.

ძირითადი ამოცანები წრფეზე

- 3.56. $M(2;-1)$ წერტილზე გაატარეთ წრფე, რომელიც $3x - 2y + 5 = 0$ წრფის პარალელურია.
- 3.57. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(2;-3)$ წერტილზე და $M_1(1;2)$ და $M_2(-1;-5)$ წერტილებზე გამავალი წრფის პარალელურია.
- 3.58. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(1;2)$ წერტილზე და $M_1(4;3)$ და $M_2(-2;1)$ წერტილებზე გამავალი წრფის მართობია.
- 3.59. კვადრატის ერთი გვერდის ბოლო წერტილებია $A(2;3)$ და $B(-2;0)$. ვიპოვოთ კვადრატის გვერდების განტოლებანი.
- 3.60. მოძებნეთ შემდეგ წრფეთა გადაკვეთის წერტილები:
ა) $2x - 3y + 5 = 0, x + 2y - 1 = 0$;
ბ) $x - 3y + 4 = 0, 2x + 6y - 1 = 0$;
გ) $2x - 4y + 1 = 0, 3x - 6y - 7 = 0$;
დ) $2x - 3 = 0, 3y + 2 = 0$;
ე) $x - 1, 5y + 1 = 0, 2x - 3y + 2 = 0$.
- 3.61. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $5x - y - 11 = 0, x + 5y + 3 = 0$ და $2x - 3y + 6 = 0$. მოძებნეთ მისი წვეროები.
- 3.62. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $x - 2y + 3 = 0, 2x + 3y - 8 = 0, 5x + 4y - 27 = 0$. გამოთვალეთ მისი ფართობი.
- 3.63. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გავლებულია $x - 3 = 0$ და $2x + 3y - 12 = 0$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე $5x - 4y - 17 = 0$ წრფის პარალელურად.
- 3.64. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(-3;2)$ წერტილზე და 60° კუთხითაა დახრილი $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ წრფისადმი.
- 3.66. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გავლებულია $3x - y - 3 = 0$ და $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{2}$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე პირველი წრფის მართობულად.
- 3.67. იპოვეთ მანძილი შემდეგ პარალელურ წრფეებს შორის:
ა) $x - 2y + 5 = 0, 2x - 4y + 1 = 0$.
ბ) $3x - 4y + 7 = 0, 3x - 4y - 18 = 0$.
გ) $3x + 4y - 6 = 0, 6x + 8y - 7 = 0$.

- 3.78. მოძებნეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $(1;1)$ წერტილიდან დაშორებულია 2 ერთეულით, ხოლო $(3;2)$ წერტილიდან - 4 ერთეულით.
- 3.79. აბსცისთა ღერძზე მოძებნეთ წერტილი, რომელიც ტოლი მანძილითაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან და $15x - 8y + 34 = 0$ წრფიდან.
- 3.81. მოცემულია წრფე $8x + 15y + 68 = 0$. დაწერეთ მისგან 3 ერთეულით დაშორებული პარალელური წრფის განტოლება.
- 3.82. კვადრატის ორი გვერდია $3x + y - 1 = 0$ და $6x + 2y + 11 = 0$. გამოთვალეთ მისი ფართობი.
- 3.83. დაწერეთ $2x + 3y - 18 = 0$ და $x - 5y + 17 = 0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გამავალი აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფის განტოლება.
- 3.87. დაწერეთ $A(-1;3)$ და $B(5;-2)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის შუა წერტილზე გამავალი, AB -ს მართობული წრფის განტოლება.
- 3.83. მოძებნეთ რომის წვეროები, თუ მისი ორი გვერდის განტოლებაა $3x + y - 1 = 0$ და $3x + y + 7 = 0$, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალის - $x - y + 5 = 0$.
- 3.89. რომის ორი მოპირდაპირე წვეროა $A(4; 7)$ და $C(8; 3)$, ხოლო ფართობი - 32 კვ. ერთეული. დაწერეთ რომის გვერდების განტოლებები.
- 3.90. კვადრატის ერთ-ერთი გვერდის განტოლებაა $x - y + 1 = 0$, ხოლო დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია $M(4;1)$. შეადგინეთ დანარჩენი გვერდების განტოლებები.
- 3.91. პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლებაა $x = 1$ და $x - y - 1 = 0$. $M(3; 6)$ მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. დაწერეთ დიაგონალების განტოლებები.
- 3.92. იპოვეთ $A(2;-2)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $x + 3y - 6 = 0$ წრფის მიმართ.
- 3.93. დაწერეთ წრფის განტოლება, თუ $A(1;3)$ წერტილი წარმოადგენს სათავიდან ამ წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძეს.
- 3.95. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მართობულია $5x + 12y - 1 = 0$ წრფის და $M(3;1)$ წერტილიდან დაშორებულია 2 ერთეულით.
- 3.96. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია $3x - 2y + 1 = 0$ წრფისა $M(5; 1)$ წერტილის მიმართ.
- 3.97. მოცემულია $\triangle ABC$ -ს წვეროები:
ა) $A(-2; 8), B(10; 3)$ და $C(16; 11)$;
ბ) $A(-1; 5), B(11;0)$ და $C(17; 8)$;
გ) $A(6;7), B(-6;2)$ და $C(-10;5)$;
იპოვეთ:
1) გვერდების განტოლებები;
2) A წვეროდან გავლებული მედიანის განტოლება;
3) მედიანების გადაკვეთის წერტილი;
4) B კუთხის ბისექტრისის განტოლება;
5) ამ ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილი AC გვერდთან;
6) A წერტილიდან BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლის განტოლება და სიგრძე;
7) სამკუთხედის ფართობი;
- 3.107. დაწერეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ ცნობილია მათი შუა წერტილების კოორდინატები $D(1;3), E(-2;1) F(4;-2)$.

სახელმძღვანელოს ავტორები: მერი გელაშვილი, ქეთ. კიკვაძე, ქეთ. ლოსაბერიძე, ლოლიტა მალრაძე, რუსუდან მესხია, ნანა სვანიძე; ამოკრები თამაზ ზერეკიძემ და რუსუდან მესხიამ; ფაილი მოამზადა ნიკო გუნიაძე.

პასუხები:

3.56. $3x-2y-8=0$. 3.57. $7x-2y-20=0$. 3.58. $3x+y-5=0$. 3.59. $3x-4y+6=0$;
 $4x+3y-17=0$; $4x+3y+8=0$ da $3x-4y+31=0$ an $3x-4y-19=0$. 3.60. a) $(-1;1)$
 ბ) $(-\frac{7}{4}; \frac{3}{4})$, გ) წრფეები ერთმანეთს პარალელურია, დ)
 $(\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$, ე) ეს წრფეები ერთმანეთს კმთხვევა. 3.61. $A(2;-1)$;
 $B(3;4)$; $C(-3;0)$. 3.62. 7 kv.erT. 3.63. $5x-4y-7=0$. 3.64.
 $\sqrt{3}x+y+3\sqrt{3}-2=0$. 3.65. $2x+y-7=0$. da $x-2y-6=0$. 3.66. $11x+33y-$
 $156=0$. 3.67. a) $\frac{9\sqrt{5}}{10}$, b) 5, გ) 0,5. 3.74. $y-2=\frac{-6\pm\sqrt{21}}{6}(x+1)$. 3.75.

$4x-3y+5=0$; $4x-3y-25=0$. 3.76. $x-4=0$ da $7x+24y-100=0$. 3.77. $3x-$
 $4y+3=0$ an $4x-3y-4=0$. 3.78. $3x+4y+3=0$; $x+1=0$. 3.79. $(-\frac{2}{9}; \frac{37}{9})$. 3.80.
 $4x-3y-10=0$ da $4x-3y+15=0$. $12x+5y-26=0$ da $12x+5y+39=0$. 3.81.
 $8x+15y+17=0$; $8x+15y+119=0$. 3.82. 4,225 kv.erT. 3.83. $y-4=0$. 3.84.
 $3x+y+1=0$. 3.85. $M(3;-3)$. 3.86. $3x-y-10=0$ (AB), $x-2y=0$ (BC),
 $2x+y-5=0$ (AC). 3.87. $12x-10y-19=0$. 3.88. $(0; 1)$, $(-3;2)$; $(-4;5)$ da $(-1;4)$.
 3.89. $3x-y-5=0$; $x-3y+17=0$, $3x-y-21=0$; $x-3y+1=0$. 3.90. $x-y-7=0$; $x+y-$
 $9=0$; $x+y-1=0$. 3.91. $x+y-9=0$, $3x-y-3=0$. 3.92. $(4;4)$. 3.93. $x+3y-10=0$. 3.
 95. $12x-5y-31\pm 26=0$. 3.96. $3x-2y-27=0$. 3.97. ix. exrili:

		a)	b)	გ)
1.	AB გვერდის განტოლება	$5x+12y-86=0$	$5x+12y-55=0$	$5x-12y+54=0$
	BC გვერდის განტოლება	$4x-3y-31=0$	$4x-3y-44=0$	$3x+4y+10=0$
	AC გვერდის განტოლება	$x-6y+50=0$	$x-6y+31=0$	$x-8y+50=0$
2.	AD მედიანის განტოლება	$x+15y-118=0$	$x+15y-74=0$	$x-4y+22=0$
3.	მედიანების გადაკვეთის წერტილი	$(8; \frac{22}{3})$	$(9; \frac{13}{3})$	$(-\frac{10}{3}; \frac{14}{3})$
4.	BE ბისექტრისის განტოლება	$11x+3y-10=0$	$11x+3y-121=0$	$8x-y+50=0$
5.	ბისექტრისის გადაკვეთა AC გვერდთან	$(\frac{188}{23}; \frac{223}{23})$	$(\frac{211}{23}; \frac{154}{23})$	$(-\frac{50}{9}; \frac{50}{9})$
6.	h_A სიმაღლის განტოლება	$3x+4y-32=0$	$3x+4y-17=0$	$4x-3y-3=0$
	h_A სიმაღლის სიგრძე	12,6	12,6	11,2
7.	სამკუთხედის ფართობი	63	63	63
8.	$\angle C$	$\arctg \frac{21}{22}$	$\arctg \frac{21}{22}$	$\arctg \frac{28}{29}$
9.	წვეროზე გამავალი AC-ს პარალელური BM წრფის განტოლება.	$x-6y+8=0$	$x-6y-11=0$	$x-8y+22=0$
10	მანძილი B წვეროდან AD მედიანამდე	$\frac{63}{\sqrt{226}}$	$\frac{63}{\sqrt{226}}$	$\frac{8}{\sqrt{17}}$
		d)	e)	v)
1.	AB გვერდის განტოლება	$5x-12y-25=0$	$5x-12y-67=0$	$5x-12y+79=0$
	BC გვერდის განტოლება	$3x+4y+41=0$	$3x+4y+27=0$	$4x-3y-38=0$
	AC გვერდის განტოლება	$x-8y-5=0$	$x-8y-19=0$	$x-6y+43=0$
2.	AD მედიანის განტოლება	$x-4y-5=0$	$x-4y-15=0$	$x+15y-104=0$
3.	მედიანების გადაკვეთის წერტილი	$(-\frac{13}{3}; -\frac{7}{3})$	$(\frac{5}{3}; -\frac{10}{3})$	$(9; \frac{19}{3})$
4.	BE ბისექტრისის განტოლება	$8x-y+51=0$	$8x-y+2=0$	$11x+3y-127=0$
5.	ბისექტრისის გადაკვეთა AC გვერდთან	$(-\frac{59}{9}; -\frac{13}{9})$	$(-\frac{5}{9}; -\frac{22}{9})$	$(\frac{211}{23}; \frac{200}{23})$
6.	h_A სიმაღლის განტოლება	$4x-3y-20=0$	$4x-3y-47=0$	$3x+4y-25=0$
	h_A სიმაღლის სიგრძე	11,2	11,2	12,6
7.	სამკუთხედის ფართობი	28	28	63
8.	$\angle C$	$\arctg \frac{28}{29}$	$\arctg \frac{28}{29}$	$\arctg \frac{21}{22}$
9.	B წვეროზე გამავალი AC-ს პარალელური BM წრფის განტოლება.	$x-8y-29=0$	$x-8y-47=0$	$x-6y+1=0$
10	მანძილი B წვეროდან AD მედიანამდე	$\frac{8}{\sqrt{17}}$	$\frac{8}{\sqrt{17}}$	$\frac{63}{\sqrt{226}}$

3.107. $x+2y-7=0$, $5x+3y+7=0$, $2x-3y-14=0$.

მეორე რიბის წირები (§ 3.3.)

წრეწირი

- 3.111. დაწერეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც $A(2;2)$ წერტილზე გადის და აქვს ცენტრი $C(0;3)$ წერტილში.
- 3.112. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე წრეწირის შემდეგი განტოლებები:
(a) $x^2+y^2-2x+4y=0$, (b) $x^2+y^2-6y+5=0$,
(c) $x^2-2x+y^2-4y-20=0$ (d) $x^2+y^2-4y=0$.
- 3.113. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის წერტილებზე: $(0;1)$, $(3;0)$ და $(-1;2)$.
- 3.115. მოცემულია $(x+3)^2+(y-5)^2=25$ წრეწირი. იპოვეთ მისი იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც $5x+10y-12=0$ წრფის მართობულია.
- 3.116. მოცემულია $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ წრეწირი. დაწერეთ იმ მხების განტოლება, რომელიც გადის: (ა) $A(2;0)$; (ბ) $B(3;-1)$, (გ) $C(3;-3)$, (დ) $D(0;-4)$ წერტილებში.
- 3.117. დაწერეთ $x^2+y^2-8x+2y-8=0$ წრეწირისადმი, $A(7;-5)$ წერტილიდან გავლებული მხების განტოლება.
- 3.118. (ობ. 113) შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის გადის $M_1(10;9)$, $M_2(4;-5)$ და $M_3(0;5)$ წერტილებზე.
- 3.119. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია წერტილები $A(4;5)$ და $B(-2;1)$.
- 3.120. დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება $5x-12y-24=0$ წრფეს და ცენტრი აქვს $C(6;7)$ წერტილში.
- 3.123. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება საკოორდინატო ღერძებს და გადის $(1;2)$ წერტილზე.
- 3.135. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ: 1. ფოკუსებს შორის მანძილი 6-ის ტოლია, ხოლო დიდი ნახევარღერძი - 5-ის, 2. დიდი ნახევარღერძია 10, ხოლო ექსცენტრისიტეტი -0,8.

პასუხები:

- 3.111. $x^2+y^2-6y+4=0$. 3.113. $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. 3.115. $2x-y+11=0$
3.116. $6x+2y-2=0$, $2x+y-5=0$, $2x-y-9=0$, $x+2y+8=0$. 3.117. $3x-4y-41=0$.
3.118. $(x-7)^2+(y-2)^2=57$. 3.119. $(x-1)^2+(y-4)^2=13$. 3.120. $(x-6)^2+(y-7)^2=36$. 3.123. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.
3.135. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

ელიფსი

- 3.136. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ:
1). მცირე ნახევარღერძია 3, ხოლო ექსცენტრის-იტეტი $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
2). ნახევარღერძების ჯამია 10, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი - $4\sqrt{5}$.
- 3.137. იპოვეთ ღერძთა სიგრძეები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ელიფსებისა:
1). $9x^2+25y^2=225$; 2). $16x^2+y^2=16$;
3). $25x^2+169y^2=4225$; 4). $9x^2+y^2=36$.

- 3.138. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ერთ-ერთი ფოკუსიდან დიდი ღერძის ბოლოებამდე მანძილია 7 და 1.
- 3.145. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც 5 ერთეულითაა დაშორებული მცირე ღერძიდან.
- 3.146. $x=-5$ წრფეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $x^2+5y^2=20$ ელიფსის მარცხენა ფოკუსიდან და ზედა წვეროდან.
- 3.147. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც 3-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული მარჯვენა ფოკუსიდან, ვიდრე მარცხენადაა.
- 3.148. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ იგი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, ფოკუსები მდებარეობს აბსცისთა ღერძზე, დირექტრისებს შორის მანძილია 5, ხოლო ფოკუსებს შორის - 4.

პასუხები: 3.136. 1. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 3.137.

1. $2a=10$; $2b=6$; $F_1(-4;0)$; $F_2(4;0)$; $c = \frac{4}{5}$. 2. $2a=2$, $2b=8$, $F_1(0;\sqrt{15})$,
 $F_2(0;-\sqrt{15})$, $c = \frac{\sqrt{15}}{4}$. 3. $2a=26$; $2b=10$; $F_1(-12;0)$; $F_2(12;0)$;
 $c = \frac{12}{13}$. 4. $2a=4$; $2b=12$; $F_1(0;4\sqrt{2})$; $F_2(0;-4\sqrt{2})$; $c = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 3.138.
 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. 3.139. 1) $(3;-3)$; $(\frac{69}{13}; \frac{21}{13})$; 2) $(3; \frac{8}{5})$; 3) არ
იკვეთება. 3.140. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. 3.141. 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) 0,8. 3.142.
 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$; $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $r_1=3$, $r_2=9$. 3.144. $\frac{2b^2}{a}$ 3.145. $(\pm 5; \pm 2)$.
3.146. $(-5;7)$. 3.147. $(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \pm \frac{2\sqrt{6}}{3})$. 3.148. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

ჰიპერბოლა

- 3.158. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ: 1. ფოკუსებს შორის მანძილია 10 და წარმოსახვითი ნახევარღერძი - 4; 2. ნამდვილი ნახევარღერძია $2\sqrt{5}$ და ექსცენტრისიტეტი - $\sqrt{1,2}$.
- 3.159. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1. ფოკუსებს შორის მანძილია 16 და ექსცენტრისიტეტი - $\frac{4}{3}$; 2. წარმოსახვითი ნახევარღერძია 5 და ექსცენტრისიტეტი - $\frac{3}{2}$.
- 3.160. იპოვეთ ღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ჰიპერბოლების 1. $4x^2-9y^2=25$; 2. $9y^2-16x^2=114$.

- 3.161. იპოვეთ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი; 2. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსი მოთავსებულია oy ღერძზე სათავეს სიმეტრიულად, ხოლო ნახევარღერძებია 6 და 12.
- 3.162. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ ის გადის $M((-5;3))$ წერტილზე და მისი ექსცენტრისიტეტი ტოლია $\sqrt{2}$ -ის.

პასუხები:

- 3.158. 1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$ 3.159. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$,
2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{25} = 1$ 3.160. 1) $2a=5$; $2b = \frac{10}{3}$; $F_1(-\frac{5}{6}\sqrt{13}; 0)$; $F_2(\frac{5}{6}\sqrt{13}; 0)$;
 $\ell = \frac{\sqrt{13}}{3}$. 2) $2a=6$; $2b=8$; $F_1(0;5)$; $F_2(0;-5)$; $\ell = \frac{5}{4}$. 3.161. $a=3$; $b=4$;
 $F_1(-5;0)$; $F_2(5;0)$; $\ell = \frac{5}{3}$. 2) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{36} = 1$. 3.162. $x^2 - y^2 = 16$.

პარაბოლა

- 3.171. იპოვეთ $y^2=24x$ პარაბოლის ფოკუსი და დირექტრისის განტოლება.
- 3.172. დაწერეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსია $F(-7;0)$ წერტილი, ხოლო დირექტრისის განტოლებაა $x-7=0$.
- 3.173. შედგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც 1. სიმეტრიულია ox ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და $M(1;-4)$ წერტილზე; 2. სიმეტრიულია oy ღერძის მიმართ, ფოკუსი მოთავსებულია $F(0;2)$ წერტილში, ხოლო წვერო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.
- 3.174. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც 1. სიმეტრიულია oy ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და $M(6;-2)$ წერტილზე; 2. სიმეტრიულია ox ღერძის მიმართ, ფოკუსი $F(3;0)$ წერტილშია, ხოლო წვერო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.
- 3.177. $y^2=4,5x$ პარაბოლის $M(x;y)$ წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილია 9,125. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე.
- 3.179. იპოვეთ შემდეგი წრფეების და პარაბოლების გადაკვეთის წერტილები:
1. $x+y-3=0$, $y^2=4x$. 2. $3x+4y-12=0$, $y^2=-9x$.
3. $3x-2y+6=0$, $y^2=-6x$.
- 3.183. დაწერეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(-3; 1)$, ხოლო დირექტრისი $y+7=0$.
- 3.184. დაწერეთ $y^2=6x$ პარაბოლისადმი $M(4;5)$ წერტილიდან გავლებული მხებების განტოლებები.
- 3.185. გამოიყვანეთ იმის პირობა, რომ $y=kx+b$ წრფე ეხებოდეს $y^2=2px$ პარაბოლს.

პასუხები:

- 3.163. $y = \pm \frac{4}{3}x$; $\ell = \frac{5}{4}$. 3.164. $(\pm\sqrt{6}; \pm\sqrt{2})$. 3.165. 1) (10;2), (-10;-2) 2) (10;-2); 3) არ იკვეთება. 3.166. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 3.167. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$;
2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. 3.168. $(10; \pm \frac{9}{2})$. 3.169. $(\frac{48}{5}; \pm \frac{3}{5}\sqrt{119})$ 3.170. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.
3.171. $F(6;0)$; $x=-6$. 3.172. $y^2=-28x$ 3.173. 1) $y^2=16x$. 2) $x^2=8y$.
3.174. 1) $x^2=-18y$. 2) $y^2=12x$. 3.177.10. 3.179. 1) (-6;9); (2;1). 2) (-4;6).
3) არ იკვეთება. 3.183. $(x+3)^2=16(y+3)$. 3.184. $3x-4y+8=0$ და $x-2y+6=0$.
3.185. $p=2bk$.

ვექტორული ალგებრა (§3.4)

- 3.188. მოცემულია \vec{a} და \vec{b} ვექტორები. ააგეთ შემდეგი ვექტორები:
(ა) $2\vec{a}$; (ბ) $-\vec{a} - 2\vec{b}$; $\frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{a}$; $\frac{1}{3}\vec{a} - 3\vec{b}$.
- 3.189. OACB პარალელოგრამში $\vec{OA} = \vec{a}$ და $\vec{OB} = \vec{b}$. ვიპოვოთ \vec{MO} , \vec{MA} , \vec{MB} და \vec{MC} ვექტორები, სადა C M პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია.
- 3.192. \vec{a} ვექტორი მოცემულია მისი ბოლო წერტილების კოორდინატებით $A(2;4;-3)$ და $B(-4;4;-5)$. ვიპოვოთ \vec{AB} ვექტორის შუა წერტილის კოორდინატები.
- 3.193. ვიპოვოთ \vec{a} და \vec{b} სხვაობა ვექტორებისა $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ და $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$.
- 3.196. მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{a} = (2; 1; -2)$ და $\vec{b} = (1; -4; 2)$. ვიპოვოთ ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი და მათ შორის კუთხე.
- 3.197. განვსაზღვროთ ABC სამკუთხედის კუთხეები, თუ მისი წვეროების კოორდინატებია $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ და $C(0; 0; 5)$.
- 3.199. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(4;-1;-2)$ და $\vec{b}(2;1;2)$. განვსაზღვროთ: 1) ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, 2) მათ შორის კუთხე; 3) \vec{a} ვექტორის გეგმილი \vec{b} -ზე; 4) \vec{b} ვექტორის გეგმილი \vec{a} ვექტორზე.
- 3.200. ვიპოვოთ კუთხე იმ პარალელოგრამის დიაგონალებს შორის, რომელიც აგებულია ვექტორებზე $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ და $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$.
- 3.201. ვიპოვოთ იმ პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძე, რომელიც აგებულია ვექტორებზე $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ და $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, სადაც \vec{m} და \vec{n} ერთეულოვანი ვექტორებია, რომელთა შორის კუთხე 60° -ის ტოლია.
(მითითება. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}$).
- 3.204. ვიპოვოთ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომელიც აგებულია ვექტორებზე $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ და

$\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, სადაც \vec{m} და \vec{n} ერთეულოვანი ვექტორებია, რომელთა შორის კუთხე $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

3.205. დავადგინოთ კომპლანარულია თუ არა ვექტორები:

1) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

2) $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{c} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

3.206. ვაჩვენოთ, რომ $A(1;0;7)$, $B(-1;-1;2)$, $C(2;-2;2)$ და $D(0;1;9)$ წერტილები ერთ სიბრტყეზე მდებარეობენ (მითითება. განვიხილოთ \vec{AB} , \vec{AC} და \vec{AD} ვექტორები).

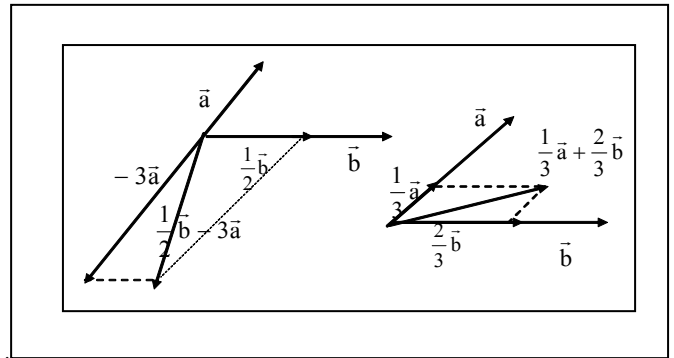
3.207. ვიპოვოთ იმ პარალელეპიპედის მოცულობა, რომელიც აგებულია ვექტორებზე: $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ და $\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$.

3.208. მოცემულია პირამიდის წვეროები $O(-5;4;8)$; $A(2;3;1)$; $B(4;1;-2)$; $C(6;3;7)$. ვიპოვოთ h სიმაღლის სიგრძე, რომელიც წვეროდან დაშვებულია ABC წახნაგზე.

(*მითითება.* ვიპოვოთ პირამიდის მოცულობა და BC წახნაგის შ ფართობი, h გამოვთვალოთ ფორმულიდან $V = \frac{1}{3}Sh$).

პასუხები:

3.188.



3.189. $-\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$; $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a})$; $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. 3.190. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$

3.191. $|\vec{R}| = 23,173$; $\alpha = 17^\circ 46'$; $\beta = 27^\circ 14'$.

3.192. $x=-1, y=4, z=-4$. 3.193. $\vec{a} + \vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 10\vec{k}$.

3.194. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\beta = \frac{1}{3}$; $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$

3.195. $\vec{c} = -\frac{6}{7}\vec{i} + \frac{2}{7}\vec{j} - \frac{3}{7}\vec{k}$. 3.196. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = -6$; $\cos\varphi = -0,436$;

$\varphi \approx 116^\circ 51'$ 3.197. $\angle B = \angle C = 45^\circ$ 3.198. $\text{გვბ.}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$; $\text{გვბ.}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

3.199. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3$, $\varphi = 77^\circ 24'$, $\text{გვბ.}_{\vec{b}} \vec{a} = 1$; $\text{გვბ.}_{\vec{a}} \vec{b} = 0,655$. 3.200. $\varphi = 90^\circ$.

3.201. $\sqrt{7}$ და $\sqrt{13}$.

3.202. $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = -7\vec{i} + 51\vec{j} - 48\vec{k}$; $|[\vec{a} \cdot \vec{b}]| = \sqrt{4954} \approx 70,385$.

$\cos\alpha = \frac{-7}{70,385} = -0,099$; $\cos\beta = 0,724$; $\cos\gamma = -0,682$. 3.203. $S = 2\sqrt{22}$

3.204. $S = 1,5$ 3.205. 1) არა; 2) დიახ 3.206. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} = 0$, ვექტორები კომპლანარულია, ე.ი. A, B, C, D წერტილები ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს. 3.207. $V = 12$ 3.208. $h = 11$.

ზღვარი

ფუნქცია (§ 4.1)

◇ დაადგინეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და გამოთვალეთ მისი მნიშვნელობა მითითებულ წერტილში.

4.1. $f(x) = x - 1$, $f\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) = ?$ 4.2 $F(x) = \frac{x}{x - \lg 2}$, $F(\lg 4) = ?$

4.3. $R(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, $R\left(\tg \frac{\pi}{12}\right) = ?$ 4.4. $Q(x) = \sqrt{x + 2}$,

$Q(0,25) = ?$ 4.5. $S(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $S\left(\frac{1}{2}\sqrt{35}\right) = ?$ 4.6.

$\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $\varphi(2\sqrt{2}) = ?$ 4.7. $\psi(x) = 10^x$, $\psi(\lg 3) = ?$ 4.8. $g(x) = \lg(b - 10)$, $g(0,1) = ?$

პასუხები: 4.1) 0; 4.2) 2; 4.3). $-\frac{2}{3}$. 4.4). 1,5. 4.5). 0,5. 4.6). 3.

4.7). 3. 4.8). -1.

◇ დაადგინეთ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე.

4.9. $y = \frac{|x|}{x}$; 4. 10. $y = \frac{1}{\sqrt{6 - 3x}}$; 4.11. $y = \lg |x|$;

4.12 $y = \sqrt{3 - 3^{-x}}$; 4.13. $y = \lg(x^2 - 1)$;

4.14. $y = \sqrt{-x^2 + x + 6}$;

4.15. $y = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 6}$; 4.16. $y = \lg(x(x - 1)(x - 2))$.

4.17. $y_1 = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 1}}$, $y_2 = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 1}}$;

4.18. $y_1 = \lg(5 - 2x) + \lg(x^2 - 1)$, $y_2 = \lg((5 - 2x) \cdot \lg(x^2 - 1))$;

4.19. $y_1 = \lg(x - 3)^2$, $y_2 = 2\lg(x - 3)$;

4.20. $y_1 = 10^{\frac{2}{x-2}}$, $y_2 = \frac{2}{x-2}$.

პასუხები:

4.9). $x \neq 0$. 4.10). $(-\infty; 2)$. 4.11). $(1; \infty)$. 4.12). $(-1; \infty)$. 4.13). $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.
4.14). $(-2; 3)$. 4.15). $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. 4.16). $(-2; 0) \cup (1; \infty)$.

4.17). $D(y_1) = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. $D(y_2) = [2; \infty)$. 4.18). $D(y_1) = (-\infty; -1) \cup \left(1; \frac{5}{2}\right)$,

$D(y_2) = (-\infty; -1) \cup \left(1; \frac{5}{2}\right)$ 4.19). $D(y_1) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $D(y_2) = (3; \infty)$.

4.20). $D(y_1) = (2; \infty)$; $D(y_2) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

◇ ახვევთ, რომ შემდეგი ფუნქციები ლუწია

4.21. $y = 2 - |x|$; 4.22. $y = \frac{\sin x}{x}$; 4.23. $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$.

◇ ახვევთ, რომ შემდეგი ფუნქციები კენტია

4.24. $y = \frac{|x|}{x}$; 4.25. $y = x + \sin x$; 4.26. $y = 2^x - 2^{-x}$.

◇ დაადგინეთ ფუნქციის ლუწ-კენტობის საკითხი

4.27. $y = 2 + \sin x$; 4.28. $y = x^2 - \cos x$; 4.29. $y = \frac{x}{\sin x}$;

4.30. $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$; 4.31. $y = 10^x + 10^{-x}$;

4.32. $y = 10^x - 10^{-x}$; 4.33. $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

4.34. $y = \lg(\cos x)$; 4.35. $y = 2^{\sin x}$;

4.36. $y = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}$.

პასუხები: 4.27. არც ლუწია, არც კენტი. 4.28. ლუწია. 4.29. ლუწია. 4.30. კენტი. 4.31. ლუწია. 4.32. კენტი. 4.33. ლუწია. 4.34. ლუწია. 4.35. არც ლუწია, არც კენტი. 4.36. ლუწია.

მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი (§4.2)

4.37. იპოვეთ a_n მიმდევრობის პირველი ხუთი წევრი, თუ

ა) $a_n = 1 + (-1)^n$; ბ) $a_n = (-1)^n n$; გ) $a_n = \frac{n}{n+1}$;

დ) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ე) $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n$.

4.38. შეადგინეთ ზოგადი წევრის ფორმულა, თუ ცნობილია მისი რამდენიმე პირველი წევრი

ა) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \dots$ ბ) $\frac{1}{5}, \frac{3}{1}, \frac{5}{17}, 7, \frac{1}{23}, \dots$ გ) 0, 1, 0, 1,

დ) -1, 1, -1, 1, ე) 0, 2, 0, 4, 06, ..

4.38' დავამტკიცეთ, რომ

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$, 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{3n} = \frac{1}{3}$,

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$, 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ \infty, & |a| > 1 \end{cases}$.

გამოთვალეთ

4.39. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n + 7}{2n^3 - 4}$; 4.40. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n - 5}{11 - n - n^2}$;

4.41. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 1}{4n^5 - 1}$. 4.42. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^3 - 7n^2}{7n^2 - 8}$

4.43. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^3 - (2n+1)^3}{1-3n-2n^2}$; 4.45. ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n+1}{3n+1}}$;

ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n+1}{3n^2+1}}$; გ) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n^2+1}{3n+1}}$; დ) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1-n^2}{3n+1}}$;

ე) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{3n+1}}$; ვ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{3n^2+1}}$; ზ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2+1}{3n+1}}$;

თ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-n^2}{3n+1}}$. 4.46. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^{n+1} - 2^{n+2}}$.

4.47. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 10^n}{3^n + 5}$. 4.49. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+\dots+3n}{\sqrt{2n^4+5n^2+2}}$.

4.50. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+9+\dots+3^n}{2+4+\dots+2^n}$. 4.51. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+7} - \sqrt{n-7})$

4.52. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n+1} - \sqrt{n-1})$. 4.53. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{n-1})$.

4.54. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n - 5} - \sqrt{n^2 - 5n + 3})$.

4.55. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2})$.

4.56. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n-1)!}{(n+2)!}$. 4.57. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)!(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$.

4.58. ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{2n-1}$, ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{3n-5}\right)^{2n-1}$.

4.59. ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}}$, ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{3n-1}\right)^{n+5}$.

4.60. ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$, ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^{-n+2}$,

4.61. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+3}{2n^2-1}\right)^{1-n^2}$, 4.62. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{5n-1}\right)^{3n}$.

პასუხები:

4.37. ა) 0,2,0,2,0; ბ) -1, 2, -3, 4, -5. გ) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$;

დ) $\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 11}$; ე) 1, 0, $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}$; 4.38. ა) $a_n = \frac{1}{5n}$;

ბ) $a_n = \frac{2n-1}{6n-1}$; გ) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$; დ) $a_n = (-1)^n$; ე) $\frac{n}{2}(1+(-1)^n)$;

4.39. $\frac{1}{2}$; 4.40. -4. 4.41. 0; 4.42. ∞ . 4.43. 12. 4.44. $\frac{\ell}{m}$;

4.45. ა) $\sqrt[3]{2}$; ბ) 1; გ) ∞ ; დ) 0; ე) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; ვ) 1; ზ) 0; თ) ∞ .

- 4.46. $\frac{1}{5}$. 4.47. ∞ . 4.48. ა) 1; ბ) $\frac{2}{\sqrt{2}}$. 4.49. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. 4.50. ∞ . 4.51. 0.
4.52. ∞ . 4.53. ∞ . 4.54. $\frac{3}{2}$. 4.55. 0. 4.56. 0. 4.57. 1. 4.58. ა) e^6 , ბ)
0.4. 4.59. ა) $e^{-\frac{2}{3}}$; ბ) ∞ . 4.60. ა) e^2 ; ბ) 0. 4.61. $\frac{1}{e^2}$. 4.62. $e^{\frac{9}{5}}$.

უწყვეტობის ზღვარი. უწყვეტობა (§ 4.3)

◇ გამოთვალეთ ($\frac{0}{0}$ ტიპის განუზღვრელობა)

- 4.63. ა) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; ბ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; გ)
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$. 4. 64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + 3x^3}$.
4. 65. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$. 4. 66. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$. 4. 67.
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$. 4. 68. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 5x + 6)^3}{(x^2 + x - 12)^3}$.
4.69. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 1}{x+1}$.
4.70. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2 - 2x}$; 4.71. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.
4.72. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$. 4.73. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$.
4.74. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$.
4.75. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{81+x^2} - 9}{\sqrt{25+x^2} - 5}$. 4.76. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}{x^2}$.
4.77. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$. 4.78. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{4 - \sqrt[3]{x}}{8 - \sqrt{x}}$.

პასუხები:

- 4.63. ა) 1; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) 0. 4.64. 3. 4.65. $\frac{1}{2}$. 4.66. $\frac{1}{6}$. 4.67. $\frac{3}{4}$.
4.68. $\frac{1}{343}$. 4.69. ∞ . 4.70. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. 4.71. 3. 4.72. $-\frac{1}{16}$.
4.73. $\frac{1}{144}$. 4.74. $\frac{4}{3}$. 4.75. $\frac{5}{9}$. 4.76. $\frac{1}{3}$. 4.77. $\frac{3}{2}$. 4.78. $\frac{1}{3}$.

გამოთვალეთ ($\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობა)

- 4.79. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + 7}{2x^5 + 3x^4 + 1}$. 4.80. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 5x - 6}{x^3 + 3x^2 + 7x - 1}$.
4.81. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 1}{2x^3 - 3x^2 + x}$.

- 4.82. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 4x + 5)(x^2 + x + 1)}{(x+2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x - 1)}$.
4.83. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 7}}$. 4.84. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 + 1}}$.
4.85. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 5x^2 + 1}}{4x + 2}$. 4.86. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 3^x}{2^{x+1} + 3^2}$.
4.87. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{2^x + 5}$.
4.88. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}{5x + 2}$.
4.89. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 5x + 1}}{3x - 1}$.

- პასუხები:** 4.79. 0. 4.80. ∞ . 4.81. $\frac{3}{2}$. 4.82. 2. 4.83. 3. 4.84.
2. 4.85. $-\frac{1}{4}$. 4.86. -1. 4.87. 0. 4.88. 0. 4.89. $-\frac{2}{3}$.

გამოთვალეთ ($\infty - \infty$ განუზღვრელობა)

- 4.90. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$.
4.91. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d} \right)$.
4.92. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$. 4.93. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$.
4.94. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 1} \right)$.
4.95. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \right)$. 4.96. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x-b} - \sqrt{x} \right)$.
4.97. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x^3 + 2} - \sqrt{x} \right)$. 4.98. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x+1) - \ln x \right)$.
4. 99. ა) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - 3^x)$ ბ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x - 3^x)$

- პასუხები:** 4.90. $\frac{1}{6}$. 4.91. $\frac{a-c}{2}$. 4.92. $\frac{1}{4}$. 4.93. 0. 4.94. -1. 4.95.
0. 4.96. 0. 4.97. 2. 4.98. 0. 4.99. ა) $-\infty$ ბ) 0.

ტოლფასი უსასრულოდ მცირე ფუნქციები და მათთან დაკავშირებული ზღვრები

- 4.100. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x}$. 4.102. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$.
4.103. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x \cdot \cos \beta x}{x^2}$. 4.104. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{x^2}$;
4.105. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{5x}$. 4.106. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$. 4.107. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$
4.109. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$. 4.110. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0}$.

4.111. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2}$. 4.112. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.
 4.113. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \operatorname{arctg}^2 x}{3x^2 + \operatorname{arctg}^2 x}$. 4.114. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2}$.
 4.115. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 2x}$. 4.116. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x}$.
 4.117. $\lim_{z \rightarrow 2} (2-z) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} z$. 4.118. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\frac{\pi}{6} - x\right) \operatorname{tg} 3x$.
 4.119. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{x}$. 4.120. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 + x}$.
 4.121. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x}$. 4.122. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+4x)}$.
 4.123. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x \sin x)}{\operatorname{arctg} x^2}$. 4.124. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$.
 4.125. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$. 4.126. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{\operatorname{tg} x}}{x}$.
 4.127. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right)$. 4.128. ა) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 - x + 4}\right)^x$. ბ)
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - x + 4}{x^2 + 3x - 1}\right)^x$. 4.129. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.
 4.130. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)^{x^2 + 1}$. 4.131. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 8}{x - 2}\right)^x$.

4.132. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$. 4.133. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$.
 4.134. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$. 4.135. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{2x^2 - 4}\right)^{5-x^2}$.
 4.136. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$. 4.137. $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$.
 4.138. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$.

პასუხები:

4.100. 0. 4.101. $\cos \alpha$. 4.102. $\frac{25}{2}$. 4.103. $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$; 4.104. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4.105. $\frac{4}{5}$. 4.106. ∞ . 4.107. $\frac{m}{n}$. 4.108. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. 4.109. $\frac{1}{2}$. 4.110. $\frac{1}{\cos^2 x_0}$.
 4.111. $\frac{1}{2}$. 4.112. $\frac{1}{2}$. 4.113. $\frac{1}{4}$. 4.114. 2. 4.115. $\frac{5}{2}$. 4.116. $\sqrt{2}$. 4.117. $\frac{4}{\pi}$. 4.118. $\frac{1}{3}$. 4.119. -3. 4.120. $\ln \frac{5}{4}$. 4.121. $\frac{1}{2}$. 4.122. $\frac{1}{2}$. 4.123. 3.
 4.124. $a^b \ln a$. 4.125. e^2 . 4.126. 1. 4.127. $\ln 3$. 4.128. ა) 0; ბ) ∞ . 4.129. e^3 .
 4.130. e. 4.131. e^{10} . 4.132. $e^{\frac{1}{2}}$. 4.133. e^{a-b} . 4.134. $e^{\frac{1}{2}}$. 4.135. $e^{\frac{7}{2}}$.
 4.136. $\frac{1}{e}$. 4.137. e. 4.138. 1.

დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

ფუნქციის წარმოებულ და დიფერენციალი (§4.4)

◇ იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

4.167. $y = 3^5 + 5^3 + x$. 4.168. $y = x^n + nx$.
 4.169. $y = mx^n + nx^m$. 4.170. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 0,1x^9$.
 4.171. $y = \frac{2}{x^4} + \frac{3\sqrt[3]{x}}{x} + \frac{5}{4\sqrt{x^3}} + 1$.
 4.172. $y = \frac{5x^2 + 4\sqrt[3]{x} + 3x^4}{2\sqrt{x}}$.
 4.173. $y = \frac{u^2 + 2\sqrt[3]{u} + 5}{u^3}$, $y'(1)$. 4.174. $y = \frac{2x^3 + x^6 + 1}{3}$.
 4.175. $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$. 4.176. $y = 2e^x + \ln x$.
 4.177. $y = 2^x \cdot e^x$.
 4.178. $y = x \operatorname{tg} x + c \operatorname{tg} x$. 4.180. $y = 3x^3 \ln x - x^3$.

4.181. $y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}}$. 4.182. $y = 4 \sin x + x \cos x + \cos 2$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$
 4.183. $y = x^2 \operatorname{arctg} x - 2 \operatorname{arctg} x$, $y'(1) = ?$ 4.184. $y = \frac{3^x}{\arcsin x}$
 4.185. $y = \frac{x^{10}}{10^x} + 10^3 \ln 10$. 4.186. $y = \frac{1+3^x}{1-3^x}$.
 4.187. $y = (\sqrt[5]{x} + 2x^3) \log_2 x$. 4.188. $y = \frac{\arccos x}{x^2}$.
 4.189. $y = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$. 4.190. $y = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$

პასუხები:

4.167. 1. 4.168. $n(x^{n-1} + 1)$. 4.169. $\ln(x^{n-1} + x^{m-1})$. 4.170. $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + 0,9x^8$
 4.171. $-\frac{8}{x^5} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{15}{4\sqrt[4]{x^7}}$. 4.172. $\frac{15}{4}\sqrt{x} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^7}} + \frac{21}{4\sqrt{x^5}}$.

4.173. $y' = -\frac{1}{u^2} - \frac{16}{3}u^{-\frac{11}{3}} - 15u^{-4}$, $y'(1) = -\frac{64}{3}$. 4.174. $2x^2(1+x^3)$ 4.175.
 $\frac{-3x^2+2x+2}{(x^2-x+1)^2}$. 4.176. $2e^x + \frac{1}{x}$. 4.177. $2^x \cdot e^x(\ln 2 + 1)$.
 4.178. $\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$. 4.179. $\frac{-4}{\sqrt[3]{x^2}(2+3\sqrt[3]{x})^2}$ 4.180. $9x^2 \ln x$. 4.181.
 $\frac{2^{3x} \ln \frac{8}{9}}{3^{2x}} = \left(\frac{8}{9}\right)^x \ln \frac{8}{9}$. 4.182. $5 \cos x - x \sin x$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
 4.183. $y' = 2x \operatorname{arctg} x + \frac{x^2+2}{x^2+1}$; $y'(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}$. 4.184.
 $\frac{3^x(\operatorname{arcsin} x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \ln 3 - 1)}{\sqrt{1-x^2}(\operatorname{arcsin} x)^2}$. 4.185. $\frac{10x^9 - x^{10} \cdot \ln 10}{10^x}$. 4.186. $\frac{2 \ln 3 \cdot 3^x}{(1-3^x)^2}$.
 4.187. $\left(\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + 6x^2\right) \log_2 x + (\sqrt[5]{x} + 2x^3) \frac{1}{x \cdot \ln 2}$. 4.188. $\frac{-(x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{arccos} x)}{x^3 \sqrt{1-x^2}}$.
 4.189. $-\cos x$. 4.190. $-\frac{1}{(2+\sqrt{x})^2}$

◇ იპოვეთ რთული ფუნქციის წარმომავლები:

4.191. $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$.
 4.192. $y = x \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$. 4.193. $y = \cos^3\left(\frac{x}{3}\right)$.
 4.194. $y = (2x^2 + 4x + 5)^9$. 4.195. $y = \sqrt[3]{1 + \sin^2 \sqrt{x}}$.
 4.196. $y = 5^{\operatorname{tg}^2 2x} + \operatorname{ctg}^3 x$. 4.197. $y = \sqrt{\frac{4-x^2}{4+x^2}}$ იპოვეთ
 $y'(0)$. 4.198. $y = \sqrt{1 - (\arccos x)^2}$.
 4.199. $y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.
 4.200. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}$. 4.202. $y = -\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 2 \ln \sin \frac{x}{2}$.
 4.203. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x^2-1}$. 4.204. $y = e^{-x} - \sin e^{-x} \cdot \cos e^{-x}$.
 4.205. $y = 1 - e^{\sin^2 3x} \cdot \cos^2 3x$.
 4.206. $y = -\ln\left(\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x\right)$. 4.207. $y = \ln \frac{x^5}{x^5+2}$.
 4.208. $y = \log_5(\cos^2 x + 1)$. 4.209. $y = 3^{\sqrt[3]{x^3+3}}$.

პასუხები:

4.191. $\frac{6(x+1)}{x(2x+3)}$. 4.192. $\arccos \frac{x}{2}$. 4.193. $-\sin \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3}$.
 4.194. $36(2x^2+4x+5)^8(x+1)$. 4.195. $\frac{\sin 2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(1+\sin^2 \sqrt{x})^2}}$.
 4.196. $\frac{4 \ln 5 \cdot 5^{\operatorname{tg}^2 2x} \cdot \operatorname{tg} 2x}{\cos^2 2x} - \frac{3 \operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}$. 4.197. $-\sqrt{\frac{4+x^2}{4-x^2}} \cdot \frac{8x}{(4+x^2)^2}$; $y'(0) = 0$.
 4.198. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1 - (\arccos x)^2} (1-x^2)}$. 4.199. $\frac{1}{2} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

4.200. $\frac{1}{\sin \frac{2x+1}{2}}$. 4.201. $\frac{1}{\cos x}$. 4.202. $\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}$. 4.203. $\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$.
 4.204. $-2e^x \sin^2 e^x$ 4.205. $3e^{\sin^2 3x} \cdot \sin 6x \cdot \sin^2 3x$.
 4.206. $\frac{1}{\sin x}$. 4.207. $\frac{10}{x(x^5+2)}$. 4.208. $\frac{-\sin 2x}{\ln 5 \cdot (\cos^2 x + 1)}$.
 4.209. $\frac{3^{\sqrt[3]{x^3+3}} \cdot x^2 \cdot \ln 3}{\sqrt[3]{(x^3+3)^2}}$.

◇ გამოიყენეთ ლოგარითმული წარმომავალი და გააწარმოეთ შემდეგი ფუნქციები:

4.222. $y = x^{\sqrt{x}}$. 4.223. $y = x^{\frac{1}{x}}$. 4.224. $y = x^{\sin(x+1)}$.
 4.225. $y = (\sin x)^x$. 4.226. $y = (\ln x)^x$.
 4.228. $y = x^{x^3} + 3^{x^x}$. 4.229. $y = (\arcsin x)^x$.
 4.230. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. 4.231. $y = (x^2 + 4)^{\cos x}$.
 4.233. $y = \frac{(x+3)^3 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$. 4.234. $y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-4)^2}{x^7}}$.

პასუხები: 4.222. $x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$. 4.223. $x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

4.224. $x^{\sin(x+1)} \left(\cos(x+1) \ln x + \frac{\sin(x+1)}{x} \right)$. 4.225. $(\sin x)^x (\ln \sin x + x \cdot \operatorname{ctg} x)$.
 4.226. $(\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$.
 4.227. $-(\cos x)^{\arccos x} \left(\frac{\ln \cos x}{\sqrt{1-x^2}} + \arccos x \cdot \operatorname{tg} x \right)$.
 4.228. $x^{x^3} \cdot x^2 (3 \ln x + 1) + 3^{x^x} \cdot \ln 3 \cdot x^x (\ln x + 1)$.
 4.229. $(\arcsin x)^x \left(\ln(\arcsin x) + \frac{x}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} \right)$.
 4.230. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x+1} \right)$.
 4.231. $(x^2 + 4)^{\cos x} \left(-\sin x \cdot \ln(x^2 + 4) + \frac{2x \cos x}{x^2 + 4} \right)$.
 4.232. $x^3 e^{x^2} \sin 2x \left(\frac{3}{x} + 2x + 2 \operatorname{ctg} 2x \right)$.
 4.233. $\frac{(x+3)^3 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3} \left(\frac{3}{x+3} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{3}{x+5} \right)$.
 4.234. $\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-4)^2}{x^7}} \left(\frac{1}{3(x+2)} + \frac{2}{x-4} - \frac{7}{x} \right)$.

◇ იპოვეთ მდლლი რიგის წარმოებულები

4.235. $y = -\frac{22}{x+5}$, $y'' = ?$ $y''' = ?$

4.237. $y = -\frac{1}{9}x \cdot \sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$, $y'' = ?$

4.238. $y = \frac{x}{6(x+1)}$, $y''' = ?$

4.239. $y = \frac{1}{2}\ln^2 x$, $y''' = ?$

4.240. $y = (2x+3)^{\frac{7}{2}}$, $y''' = ?$ 4.241. $y = e^{ax}$, $y^{(n)} = ?$

4.242. $y = \sin(kx+b)$, $y^{(n)} = ?$

4.243. $y = \cos(-4x+3)$, $y^{(n)} = ?$ 4.244. $y = \frac{1}{x+a}$,

პასუხები: 4.235. $-\frac{44}{(x+5)^3}$ 4.236. $\ln x$. 4.237. $x - \sin 3x$.

4.238. $\frac{1}{(x+1)^4}$ 4.239. $\frac{2\ln x - 3}{x^3}$. 4.240. $105\sqrt{2x+3}$. 4.241. $a^n e^{ax}$.

4.242. $k^n \sin\left(kx+b+n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$. 4.243. $(-4)^n \cos\left(-4x+3+\frac{n\pi}{2}\right)$.

4.244. $(-1)^n n! \frac{1}{(x+a)^{n+1}}$.

◇ იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების დიფერენციალი:

4.247. $y = \frac{e^{3x}}{3} + \sin^2(x^3+1)$. 4.248. $y = x^n \cdot \ln^2 x$.

4.249. $y = \operatorname{tg}^4(2x+1)$. 4.250. $y = \frac{e^{\sin^2 x}}{a^3}$.

4.251. $y = \ln^3(\cos^2 x + 4)$. 4.252. $y = \operatorname{arctg}(3^x)$.

4.253. $y = \sqrt[3]{2x^2+3x+4}$. 4.254. $y = 2^{\operatorname{tg}^3 4x}$.

4.255. $y = x^{2x} + x^2$. 4.256. $y = \lg^2(x^2+25)$.

პასუხები:

4.247. $(e^{3x} + 3x^2 \sin 2(x^3+1))dx$. 4.248. $x^{n-1} \ln x (n \ln x + 2) dx$.

4.249. $\frac{8 \operatorname{tg}^3(2x+1)}{\cos^2(2x+1)} dx$. 4.250. $\frac{e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x}{a^3} dx$

4.251. $\frac{-3 \ln^2(\cos^2 x + 4) \sin 2x}{\cos^2 x + 4} dx$. 4.252. $\frac{3^x \ln 3}{1+3^{2x}} dx$.

4.253. $\frac{4x+3}{3\sqrt{(2x^2+3x+4)^2}} dx$. 4.254. $12 \ln 2 \cdot 2^{\operatorname{tg}^3 4x} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\cos^2 4x} dx$.

4.255. $(x^x(\ln x + 1) + 2x) dx$. 4.256. $\frac{4}{\ln 10} \lg(x^2+25) \cdot \frac{x}{x^2+25} dx$.

**განუზღვრელობის ბასისის ლოპიტალის
წესი (§4.5)**

◇ გახსენით $\frac{0}{0}$ და $\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობები ლოპიტალის წესით

4.257. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 6}{4x^3 + 3x^2 + x - 8}$. 4.258. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\ln(1+x)}$.

4.259. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x+\ln(x-1)}{2-\sqrt{4x-x^2}}$. 4.260. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^3 x}$.

4.261. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. 4.262. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin ax}{\ln \operatorname{tg} bx}$.

4.263. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$. 4.264. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$.

4.265. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{2}\pi - 3 \operatorname{arctg} x}{e^x - 1}$. 4.266. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

4.267. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x^n}$, $n > 0$. 4.268. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2x^2-7)}{2x^2-5x+2}$.

4.271. $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$. 4.272. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}$.

4.273. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$. 4.274. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{5^x}$.

პასუხები:

4.257. 1. 4.258. $\ln \frac{a}{b}$. 4.259. -2 . 4.260. $\frac{1}{3}$. 4.261. ∞ . 4.262. 1.

4.263. $\frac{2}{3\sqrt{2}}$. 4.264. $\frac{a^2}{b^2}$. 4.265. $\frac{3}{2}$. 4.266. 2. 4.267. 0. 4.268. $\frac{8}{3}$.

4.269. 0. 4.270. 1. 4.271. 1. 4.272. 0. 4.273. $-\infty$. 4.274. 0.

◇ გახსენით $0 \cdot \infty$ და $\infty - \infty$ ტიპის განუზღვრელობები ლოპიტალის წესით

4.275. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} \pi x)$. 4.276. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arcsin} x \cdot \operatorname{ctg} x)$. 4.277.

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x$. 4.278. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(3^{\frac{1}{x}} - 1)$.

4.279. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$. 4.280. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$. 4.281.

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{x}$. 4.282. $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \cdot \operatorname{ctg} \pi(x-2)$.

პასუხები:

- 4.275. $\frac{1}{\pi}$. 4.276. 1. 4.277. 0. 4.278. $\ln 3$. 4.279. 0. 4.280. $-\frac{1}{2}$. 4.281.
a. 4.282. $\frac{1}{\pi}$.

◇ გახსენით 0^0 , ∞^0 , 1^∞ ტიპის განუზღვრელობები

- 4.285. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$. 4.286. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{\sin x}$.
4.287. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctg x)^{\sin x}$. 4.288. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$.
4.289. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{4}{x^2}}$. 4.290. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tg x)^{x - \frac{\pi}{2}}$.
4.291. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4}{\pi} \arctg x \right)^{\frac{1}{x-1}}$. 4.292. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$.
4.293. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$. 4.294. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

პასუხები:

- 4.285. 1. 4.286. 1. 4.287. 1. 4.288. 3. 4.289. e^{-2} . 4.290. 1. 4.291. e^π .
4.292. e . 4.293. 1. 4.294. $e^{-\frac{1}{2}}$.

**ფუნქციის მონოტონურობა და
მაქსიმუმი (§4.6)**

◇ დაადგინეთ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები და იპოვეთ ექსტრემუმი.

- 4.295. $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$. 4.296. $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.
4.297. $y = 2 - x - x^2$. 4.298. $y = 2x^2 - x^4$.
4.299. $y = \frac{1}{4 + x^2}$. 4.300. $y = \frac{x}{1 + 4x^2}$.
4.301. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. 4.302. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.
4.303. $y = x\sqrt{8 - x^2}$. 4.304. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.
4.305. $y = \frac{x}{\ln x}$. 4.306. $y = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.
4.307. $y = 3^{x^3 - 6x^2 + 4}$. 4.308. $y = \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2 - 4x + 5}$.
4.309. $y = \ln x - \arctg x$. 4.310. $y = \ln(x^2 - 25)$.
4.311. $y = x^x$. 4.312. $y = e^{-x^2 + 4x + 1}$.

პასუხები:

- 4.295. კლებადია $(-\infty; 1)$, ზრდადია $(1; +\infty)$, $y_{\min}(1) = -1$.

- 4.296. კლებადია $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, ზრდადია $(-1; 1)$, $y_{\min}(-1) = -e^{-\frac{1}{2}}$, $y_{\max}(1) = e^{-\frac{1}{2}}$. 4.297. კლებადია $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, ზრდადია $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $y_{\max}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$. 4.298. კლებადია $(1; 0)$ $(1; +\infty)$, ზრდადია $(-\infty; -1)$ $(0; 1)$, $y_{\max}(-1) = 1$, $y_{\min}(0) = 0$; $y_{\max}(1) = 1$.
4.299. კლებადია $(0; \infty)$, ზრდადია $(-\infty; 0)$, $y_{\max}(0) = \frac{1}{4}$.
4.300. კლებადია $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, ზრდადია $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
 $y_{\min}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$; $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
4.301. კლებადია $(1; 3)$; ზრდადია $(-\infty; 1)$, $(3; \infty)$, $y_{\max}(1) = 0$; $y_{\min}(3) = -4$. 4.302. კლებადია, $(0; 1)$, $(1; 2)$, ზრდადია $(-\infty; 0)$ $(2; +\infty)$; $y_{\max}(0) = -2$; $y_{\min}(2) = 2$. 4.303. კლებადია $(-\sqrt{8}; -2)$ $(2; \sqrt{8})$ ზრდადია $(-2; 2)$ $y_{\max}(2) = 4$; $y_{\min}(-2) = -4$. 4.304. ზრდადია $(3; +\infty)$; კლებადია $(-\infty; 2)$, $y_{\min}(2) = 0$; $y_{\min}(3) = 0$. 4.305. კლებადია $(0; 1) \cup (1; e)$; ზრდადია $(e; +\infty)$ $y_{\min}(e) = e$. 4.306. ზრდადია $(3; +\infty)$, კლებადია $(-\infty; 3)$, $y_{\min}(3) = 1$. 4.307. ზრდადია $(-\infty; 0)$ $(4; +\infty)$ კლებადია $(0; 4)$, $y_{\max}(0) = 81$, $y_{\min}(4) = 3^{-28}$.

- 4.308. ზრდადია $(-\infty; 2)$, კლებადია $(2; +\infty)$, $y_{\max}(2) = \frac{1}{2}$. 4.309.
ზრდადია მთელ განსაზღვრის არეზე $(0; +\infty)$, ექსტრემუმი არ აქვს. 4.310. ზრდადია $(5; +\infty)$, კლებადია $(-\infty; 5)$; ექსტრემუმი არ აქვს. 4.311. კლებადია $(0; \frac{1}{e})$, ზრდადია $(\frac{1}{e}, +\infty)$, $y_{\min}\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}}$. 4.312. ზრდადია $(-\infty; 2)$, კლებადია $(2; +\infty)$; $y_{\max}(2) = e^5$.

◇ იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მითითებულ შუალედზე

- 4.313. $y = x^3$, $-1 \leq x \leq 3$.
4.314. $y = \arctg \frac{1-x}{1+x}$, $0 \leq x \leq 1$.
4.315. $y = x^3 \ln x$, $1 \leq x \leq e$.
4.316. $y = 3x - x^3$, $-2 \leq x \leq 3$.

- პასუხები:** 4.313. -1 და 27. 4.314. 0 და $\frac{\pi}{4}$. 4.315. 0 და e^2 .
4.316. -18 და 2.

**ფუნქციის ბრავიკის ამოზნექილობა და
ჩაზნექილობა. ბალუნვის წერტილები
(§ 4.7)**

◇ დაადგინეთ ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები. იპოვეთ გადაღუნვის წერტილები.

- 4.317. $y = x^6 - 6x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 3x$.
4.318. $y = x^5 - 5x^4 + \frac{20}{3}x^3 + 3x + 1$.

4.319. $y = x^7 + 7x + 1$. 4.320. $y = x^4 + 6x^2$.

4.321. $y = \frac{1}{x+3}$. 4.322. $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$.

4.323. $y = xe^{2x} + 1$. 4.324. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

4.325. $y = xe^x$. 4.326. $y = e^{-x^2}$. 4.327. $y = \frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$.

პასუხები: 4.317. $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ და $(3; \infty)$ ჩაზნექილია; $(1; 3)$ ამოზნექილია. გადაღუნვის წერტილებია $M_1(1; 5,5)$ და $M_2(3; -112,5)$. 4.318. $(-\infty; 0)$, $(1; 2)$ გრაფიკი ამოზნექილია; $(0; 1)$ $(2; \infty)$ ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილებია $M_1(0; 1)$ და $M_2(1; \frac{20}{3})$

და $M_3(2; \frac{37}{3})$. 4.319. $(-\infty; 0)$ -ზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(0; \infty)$ -

ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილია $M(0; 1)$. 4.320. გრაფიკი ყველგან ჩაზნექილია. გადაღუნვის წერტილი არ არსებობს.

4.321. $(-\infty; -3)$ -ზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(-3; \infty)$ - ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილი არ არსებობს. 4.322. $(-\infty; 2)$ -ზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(2; \infty)$ - ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილია $M(2; 3)$.

4.323. $(-\infty; -1)$ -ზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(-1; \infty)$ - ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილია $M(-1; 1 - \frac{1}{e^2})$.

4.324. $(-\infty; -1)$ -ზე და $(1; \infty)$ გრაფიკი ჩაზნექილია; $(-1; 1)$ - ამოზნექილია; გადაღუნვის წერტილია $M_1(-1; \sqrt[3]{2})$ და $M_2(1; \sqrt[3]{2})$.

4.325. $(-\infty; -2)$ -ზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(2; \infty)$ - ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილია $M(-2; -2e^2)$.

4.326. გრაფიკი ჩაზნექილია შუალედებზე $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}})$ და $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty)$; ამოზნექილია $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$;

გადაღუნვის წერტილია $M_1(\frac{1}{\sqrt{2}}; e^{\frac{1}{2}})$ და $M_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}; e^{-\frac{1}{2}})$.

4.327. $(-\infty; -1)$ და $(\frac{1}{2}; \infty)$ შუალედებზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(-1; \frac{1}{2})$ - ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილებია $M_1(-1; -2\sqrt{2})$ და $M_2(\frac{1}{2}; -\sqrt{5})$.

ბრაფიკის ასიმპტოტები (§ 4.8)

◇ იპოვეთ შემდეგი განტოლებებით მოცემულა წირთა (გრაფიკთა) ასიმპტოტები

4.328. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$. 4.329 $y = \frac{x^2}{(x+3)^2}$. 4.330.

$y = 2x + \frac{2}{x-1}$. 4.331. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2}$.

4.332. $y = \frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$. 4.333. $y = x + \frac{1}{x}$.

4.334 $y = \frac{2x}{x^2 - 4}$. 4.335. $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{2x^2 - x}$.

4.336. $y = \frac{e^x}{1+x}$. 4.337. $y = e^{x^2}$. 4.338. $y = \arctg x$.

4.340. $y = xe^{\frac{3}{x}} + 1$. 4.341. $y = x \cdot e^x$.

პასუხები: 4.328. $x = \pm 2$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y = x$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.329. $x = -3$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y = 1$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.330. $x = 1$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y = 2x$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.331. $x = -2$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y = x - 4$ დახრილი ასიმპტოტია.

4.332. ვერტიკალური ასიმპტოტი არ გააჩნია, $y = \pm 1$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია. 4.333. $x = 0$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y = x$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.334. $x = -2$ და $x = 2$ ვერტიკალური ასიმპტოტები; $y = 0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

4.335. $x = 0$ და $x = \frac{1}{2}$ ვერტიკალური ასიმპტოტები; $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ დახრილი ასიმპტოტია.

4.336. $x = -1$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y = 0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია (მარცხენა, როცა $x \rightarrow -\infty$).

4.337. $x = 0$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y = 1$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

4.338. $y = \frac{\pi}{2}$ და $y = -\frac{\pi}{2}$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია.

4.339. $y = \frac{b}{a}x$ დახრილი ასიმპტოტია.

4.340. $x = 0$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y = x + 4$ დახრილი ასიმპტოტია.

4.341. $y = 0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია როცა $x \rightarrow -\infty$.

ფუნქციის გამოკვლევა და ბრაფიკის აბეზა (§ 4.9)

◇ შეასრულეთ ფუნქციის სრული გამოკვლევა და ააგეთ მისი გრაფიკი.

4.342. $y = 2 + x^2 - \frac{x^4}{2}$. 4.343. $y = x^4 - 2x^3 + 3$.

4.344. $y = \frac{2x^2}{2x-1}$. 4.345. $y = \frac{2}{1-x^2}$. 4.346. $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$.

4.347. $y = \frac{x^2}{x+1}$. 4.348. $y = \frac{x^2}{1+x^2}$. 4.349. $y = \frac{x^2 - x - 6}{x-2}$.

4.350. $y = \frac{3}{x+2} - \frac{3}{x-2} - 1$. 4.351. $y = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$.

4.352. $y = \frac{e^x}{1+x}$.

პასუხები:

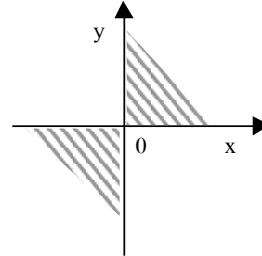
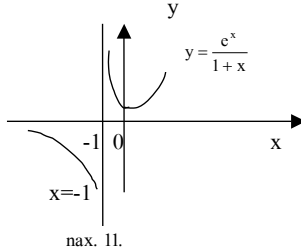
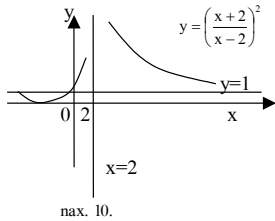
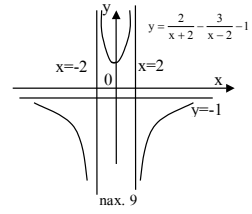
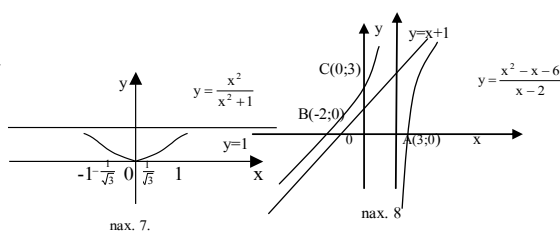
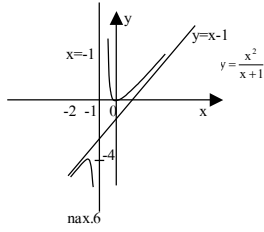
4.342. (გვ. 325. ნახ.1) $D(y) = \mathbb{R}$ ლუწია. დერძებთან თანაკვეთის წერტილებია $(0; 2)$ $(\pm \sqrt{3}; 2; 0)$. ასიმპტოტები არ გააჩნია.

ზრდადია შუალედებზე $(-\infty; -1)$ და $(0; 1)$, კლებადია $(-1; 0)$ და $(1; \infty)$.

$y_{\max}(\pm 1) = \frac{5}{2}$; $(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3})$ და $(\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty)$ შუალედებზე გრაფიკი ამოზნექილია.

$(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$ შუალედებზე გრაფიკი ჩაზნექილია.

წერტილები $(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{41}{18})$ და $(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{41}{18})$



მრავალი ცვლადის ფუნქცია

ორი ცვლადის ფუნქცია (§5.1)

◇ გამოთვალეთ ფუნქციის მნიშვნელობები მითითებულ წერტილებში

5.1. $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$, იპოვეთ $f(3;-2)$ და $f(-4;4)$.

5.2. $f(x,y)=\frac{(x-1)(y-1)}{x+y}$, იპოვეთ $f(1;-2)$ და $f(3;-2)$.

5.3. $f(x,t)=\frac{x-t+1}{x^2+t^2}$, იპოვეთ $f(2; 1)$ და $f(3; 0)$.

5.4. $f(u, v)=u+\ln|v|$, $f(6; 1)$ და $f(0; e^3)$.

◇ იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არე

5.5. $f(x,y)=2x^2-xy+y^3$.

5.6. $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2 - 1}$.

5.7. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$.

5.8. $f(x, y) = \sqrt{1 - (x + y)^2}$. 5.9. $f(x, y) = \ln(x - y)$.

5.10. $f(x,y)=5^{y^x}$. 5.11. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

5.12. $f(x, y) = \frac{1}{\lg(y - x^2)}$. 5.13. $f(x, y) = \arccos\left|\frac{x}{y}\right|$.

5.14. $f(x, y) = \ln\left|\frac{4 - x^2}{9 - y^2}\right|$.

5.15. $f(x, y) = \ln(4 - x^2) - \ln(9 - y^2)$.

5.16. $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}}$.

პასუხები: 5.1. 25 და 0. 5.2. 0 და -6. 5.3. $\frac{2}{5}$ და $\frac{4}{9}$. 5.4. 6 და 3.

5.5. განსაზღვრულია მთელ სიბრტყეზე. 5.6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty,$

$y \neq \pm 1\}$. 5.7. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 9\}$. 5.8. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, x-1 \leq y \leq x+1\}$. 5.9. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, y < x\}$. 5.10. განსაზღვრულია მთელ სიბრტყეზე. 5.11. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, x^2 + y^2 > 1\}$. 5.12. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2, y \neq x^2 + 1\}$. 5.13. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y|, (x,y) \neq (0;0)\}$. 5.14. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq \pm 2, y \neq \pm 3\}$. 5.15. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 2, |y| < 3\}$. 5.16. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \right\}$

ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი (§ 5.2)

◇ გამოთვალეთ:

5.17. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$. 5.18. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$.

5.19. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x}$. 5.20. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$. 5.21. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x + y}$.

5.22. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. 5.23. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$.

5.24. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

პასუხები: 5.17. 0. 5.18. 0. 5.19. 2. 5.20. e^k . 5.21. ზღვარი არ აქვს. 5.22. ზღვარი არ აქვს. 5.23. $-\frac{1}{4}$. 5.24. 0.

ორი ცვლადის ფუნქციის
დიფერენცირება. ორი ცვლადის
ფუნქციის კერძო წარმოებულები. სრული
დიფერენციალი. რთული ფუნქციის
გაწარმოება (§5.3) მაღალი რიგის კერძო
წარმოებულები და დიფერენციალები
(§5.4.)

◇ გამოთვალეთ

5.32. $f'_x(0,1)$, თუ $f(x,y)=x^2-3xy+y^4$.

5.33. $f'_y\left(\frac{1}{2};-1\right)$, თუ $f(x,y)=3^{x^2-y^2}$.

5.34. $f'_x\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$, თუ $f(x,y)=\sin^2(x-y)$.

5.35. $z'_x(2;-1)$, თუ $z=xy+\ln(x+y)$. 5.36. $z'_y\left(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$, თუ $z=\cos(3x+2y)$.

პასუხები:

5.32. -3. 5.33. $2\ln 3\sqrt[4]{27}$. 5.34. -1. 5.35. 0. 5.36. -3.

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა კერძო წარმოებულები

5.37. $z=x^3+y^3-3axy$. 5.38. $z=\frac{x-y}{x+y}$. 5.39. $z=\frac{y}{x}$.

5.40. $z=\sqrt{x^2-y^2}$. 5.41. $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.42. $z=\arctg\frac{y}{x}$. 5.43. $z=x^y$. 5.44. $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

5.45. $z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. 5.46. $z=\ln\cos\frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

5.47. $z=x^2\sin^2 y$. 5.48. $z=y^{\lg^2 x}$.

5.49. $z=(x^2+y^2)^{y^2}$. 5.50. $z=x^{\cos^2 y}$.

პასუხები:

5.37. $z'_x=3(x^2-ay)$, $z'_y=3(y^2-ax)$. 5.38. $z'_x=\frac{x}{(x+y)^2}$,

$z'_y=-\frac{y}{(x+y)^2}$. 5.39. $z'_x=-\frac{y}{x^2}$, $z'_y=\frac{1}{x}$.

5.40. $z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 5.41. $z'_x=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$z'_y=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. 5.42. $z'_x=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y=\frac{x}{x^2+y^2}$

5.43. $Z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$. 5.44. $z'_x=-\frac{y}{x^2}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$,

$z'_y=\frac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$. 5.45. $z'_x=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$,

$z'_y=-\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$. 5.46. $z'_x=-\frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{tg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$,

$z'_y=\frac{x+a}{2y\sqrt{y}}\operatorname{tg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$. 5.47. $z'_x=2x\sin^2 y$, $z'_y=x^2\sin 2y$.

5.48. $z'_x=2y^{\operatorname{tg}^2 x}\ln y\cdot\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$, $z'_y=\operatorname{tg}^2 x\cdot y^{\operatorname{tg}^2 x-2}$.

5.49. $z'_x=2xy^2(x^2+y^2)^{y^2-1}$,

$z'_y=(x^2+y^2)^{y^2}\cdot 2y\left(\ln(x^2+y^2)+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$.

5.50. $z'_x=\frac{\cos^2 y}{x^{\sin^2 y}}$, $z'_y=-\sin 2yx^{\cos^2 y}\ln x$

◇ იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა სრული დიფერენციალი

5.51. $z=x^2+3y^3-4xy$. 5.52. $z=x^2+y^2+3x+\ln 2$. 5.53. $z=3xy-2x^2-3y^2+1$. 5.54. $z=\arcsin\frac{x^2}{y^2}$. 5.55. $z=\frac{xy}{1+x^2}$.

5.56. $z=e^{\frac{x^2}{y}}$. 5.57. $z=\operatorname{ctg}(x^2-y^2)$. 5.58. $z=e^{\cos\frac{x}{y}}$

5.59. $z=\operatorname{arctg}(x^2+y^2)$. 5.60. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

5.61. $z=\ln\frac{x}{y}$. 5.62. $z=xy-\ln y+a^3$.

პასუხები:

5.51. $dz=(2x-4y)dx+(9y^2-4x)dy$. 5.52. $dz=(2x+3)dx+2ydy$. 5.53. $dz=(3y-4x)dx+(3x-6y)dy$

5.54. $dz=\frac{2x}{\sqrt{y^4-x^4}}(dx-xy^2dy)$. 5.55. $dz=\frac{y(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{x}{1+x^2}dy$.

5.56. $dz=e^{\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{x}{y}\left(2dx-\frac{x}{y}dy\right)$. 5.57. $dz=\frac{2}{\sin^2(x^2-y^2)}(-xdx+ydy)$

5.58. $dz=e^{\cos\frac{x}{y}}\sin\frac{x}{y}\left(-\frac{1}{y}dx+\frac{x}{y^2}dy\right)$.

5.59. $dz=\frac{2}{1+(x^2+y^2)^2}(xdx+ydy)$.

5.60. $dz=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xdx+ydy)$.

5.61. $dz=\frac{1}{x}dx-\frac{1}{y}dy$. 5.62. $dz=ydx+\left(x-\frac{1}{y}\right)dy$

◇ დიფერენციალის გამოყენებით მიახლოებით გამოთვალეთ შემდეგი სიდიდეები:

5.63. $(0,95)^{2,01}$. 5.64. $e^{0,7}\cdot\sin 0,8$. 5.65. $\cos 0,1\cdot\ln 1,0,3$.
5.66. $\sin 29^0\cdot\operatorname{tg} 46^0$.

◇ იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

5.67. $z=2y^5+3x^2y^3+y$. 5.68. $z=e^x(\cos y+x\sin y)$.

5.69. $z=\frac{x-y}{x+y}$. 5.70. $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.71. $z = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$. 5.72. $z = \sin^2(3x+5y)$.

5.73. $z = \lg(xy)$. 5.74. $z = (\cos x)^y$.

პასუხები:

5.63. $\approx 0,9$ 5.64. $\approx 0,8$ 5.65. $\approx 0,03$ 5.66. $\approx 0,505$ 5.67. $z''_{xx} = 6y^3$,

$z''_{xy} = z''_{yx} = 18xy^2$, $z''_{yy} = 40y^3 + 18x^2y$ 5.68.

$z''_{xx} = e^x (\cos y + (x+2) \sin y)$, $z''_{xy} = z''_{yx} = e^x (-\sin y + (x+1) \cos y)$,

$z''_{yy} = -e^x (\cos y + x \sin y)$ 5.69. $z''_{xx} = -4y(x+y)^{-3}$,

$z''_{xy} = z''_{yx} = 2(x-y)(x+y)^{-3}$, $z''_{yy} = 4x(x+y)^{-3}$.

5.70. $z''_{xx} = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$, $z''_{xy} = 2xy(x^2 + y^2)^{-2}$,

$z''_{yy} = -(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$. 5.71. $z''_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $z''_{xy} = 0$,

$z''_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$. 5.72. $z''_{xx} = 18\cos 2(3x+5y)$, $z''_{xy} = 30\cos 2(3x+5y)$, $z''_{yy} =$

$= 50\cos 2(3x+5y)$. 5.73. $z''_{xx} = \frac{2y^2 \sin(xy)}{\cos^3(xy)}$, $z''_{xy} = \frac{\cos^2(xy) + xy \sin(2xy)}{\cos^4(xy)}$,

$z''_{yy} = \frac{2x^2 \sin(xy)}{\cos^3(xy)}$. 5.74. $z''_{xx} = y(y-1)(\cos x)^{y-2} \cdot \sin^2 x - (\cos x)^y y$, $z''_{yy} =$

$= (\cos x)^y \ln^2 \cos x$, $z''_{xy} = -(\cos x)^{y-1} \sin x (y \ln \cos x + 1)$.

◇ იპოვეთ შემდეგ რთულ ფუნქციათა წარმოებულები

5.83. $z = 3 \ln(xy)$, $y = x^3 + 2x$. $\frac{dz}{dx} = ?$

5.84. $z = \arctg \frac{x}{y}$, $y = x^3$ $\frac{dz}{dx} = ?$

5.85. $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $y = \sqrt{x^2 + 4}$. $\frac{dz}{dx} = ?$

5.86. $z = (\arctg(xy+1))$, $y = \ln x$. $\frac{dz}{dx} = ?$

5.87. $z = x \sin \frac{x}{y}$, $x = t^4$, $y = t^3 + 1$. $\frac{dz}{dt} = ?$

5.88. $z = \arccos(x^2 - y^2)$, $x = 5t^2$, $y = 4t^3$. $\frac{dz}{dt} = ?$

5.89. $z = 3^{x^2+y^2}$, $x = \cos t$, $y = \sin 2t$. $\frac{dz}{dt} = ?$

5.90. $z = \lg(xy^2)$, $x = 2u^2 - v$, $y = 3u - v^2$. $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$

5.91. $z = e^{x^3+y^3}$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$. $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

პასუხები:

5.83. $\frac{12(x^2+1)}{x(x^2+2)}$. 5.84. $-\frac{2x}{x^4+1}$. 5.85. $\frac{2}{x^2+4}$.

5.86. $\frac{1+\ln x}{x^2 \ln^2 x + 2x \ln x + 2}$ 5.87. $4t^3 \sin \frac{t^4}{t^3+1} + t^4 \cos \frac{t^4}{t^3+1} \cdot \frac{t^6+4t^3}{(t^3+1)^2}$.

5.88. $\frac{t^3(96t^2-100)}{\sqrt{1-t^8(25-16t^2)^2}}$. 5.89. $2 \ln 3 \cdot 3^{\cos^2 t + \sin^2 2t} \left(-\frac{\sin 2t}{2} + \sin 4t \right)$.

5.90. $\frac{2(3u-v^2)(12u^2-2uv^2-3v)}{\cos^2((2u-v)(3u-v^2))}$.

5.91. $e^{u^3(\cos^3 v + \sin^3 v)} \frac{3}{2} u^3 \sin 2v (\sin v - \cos v)$.

ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი (§ 5.5)

◇ გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე შემდეგი ფუნქციები

5.92. $z = (x-1)^2 + 2y^2$. 5.93. $z = (x-1)^2 - 2y^2$. 5.94. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$. 5.95. $z = x^3 y^2 (6-x-y)$ $x > 0$, $y > 0$.

5.96. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. 5.97. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 6y + 9x + 1$.

5.98. $z = \frac{1}{2} x^2 + 3xy + y^3 - 12y + 15$.

5.99. $z = \frac{1}{3} x^3 - xy^2 + 2xy - 15x + 1$.

5.100. $z = x^3 - yx + x^2 + y^2 - 3y + 1$. 5.101. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.

პასუხები:

5.92. $z_{\min} = z(1,0) = 0$. 5.93. ექსტრემუმი არ აქვს. 5.94. $z_{\min} = z(1,0) = -1$. 5.95. $z_{\max} = z(3;2) = 108$.

5.96. $z_{\min} = z(\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = z(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = -8$. 5.97. $z_{\min} = z(-1, -1) = -7$.

5.98. $z_{\min} = z(-12, 4) = -41$. 5.99. $z_{\min} = z(4, -1) = -41 \frac{2}{3}$.

5.100. $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right) = -\frac{305}{96}$, $z_{\max} = z(-4; -1) = 43 \frac{2}{3}$ 5.101.

$z_{\min} = z(5, 2) = 30$.

ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტები

პირველადი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი (§6.1)

◇ ცხრილის ინტეგრალების გამოყენებით იპოვეთ:

6.1. $\int (3x+1)^2 dx$. 6.2. $\int \left(6x^2 + 4x + \frac{1}{x} \right) dx$.

6.3. $\int (1+x)(1+2x)(1+3x) dx$. 6.4. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$.

6.5. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$. 6.6. $\int (2^x - 3^x) \cdot 4^x dx$. 6.7. $\int e^x \left(1 + \frac{1}{x^3 e^x} \right) dx$.

6.8. $\int \left(\sqrt[3]{x} - 1 \right) \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 \right) dx$.

6.9. $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4} \right) dx$. 6.10. $\int \frac{(3^x - 4^x)^2}{12^x} dx$.

6.11. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$. 6.12. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$. 6.13. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.
6.14. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$. 6.15. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$.
6.16. $\int \frac{dx}{1 - \cos 2x}$. 6.17. $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$.
6.18. $\int \left[1 - \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 \right] dx$.

პასუხები:

6.1 $3x^3 + 3x^2 + x + C$. 6.2 $2x^3 + 2x^2 + \ln|x| + C$.
6.3 $\frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 3x^2 + x + C$. 6.4 $\frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$.
6.5 $-\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$. 6.6 $\frac{8^x}{\ln 8} - \frac{12^x}{\ln 12} + C$.
6.7 $e^x - \frac{1}{2x^2} + C$. 6.8 $\frac{1}{2}(x-1)^2$. 6.9 $2\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} + C$.
6.10 $\frac{1}{\ln \frac{3}{4}} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^x - \left(\frac{4}{3} \right)^x \right) - 2x - C$. 6.11 $\operatorname{tg} x - x + C$. 6.12 $-\operatorname{ctg} x - x + C$.
6.13 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$. 6.14 $2\operatorname{arctg} x - 3\operatorname{arcsin} x + C$. 6.15 $\sin x + \cos x + C$.
6.16 $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$. 6.17 $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$. 6.18 $\cos x + C$.

§6.2 ცვლადის ბარდაქმნა ბანუსაზღვრულ ინტეგრალში (ჩასმის ხერხი)

◇ ჩასმის ხერხის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

6.19. $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}$. 6.21. $\int \sqrt{3x+4} dx$.
6.22. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2x-3}}$.
6.23. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$. 6.24. $\int \frac{2x^2 dx}{4x^3+7}$. 6.25. $\int x\sqrt[3]{x^2+4} dx$.
6.26. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{7+x^4}}$. 6.27. $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+9}$. 6.28. $\int e^{5x} dx$.
6.29. $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$. 6.30. $\int \frac{e^x dx}{e^x+3}$. 6.31. $\int \frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.
6.32. $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)}$. 6.33. $\int x^2 e^{x^3} dx$. 6.34. $\int a^{\sin x} \cos x dx$.
6.35. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}$. 6.36. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

6.38. $\int x^2 \sin(1+x^3) dx$. 6.39. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$. 6.41. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$.
6.42. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$. 6.43. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.
6.44. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$. 6.46. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$. 6.47. $\int \frac{xdx}{3-2x}$.
6.48. $\int \frac{dx}{3+5x^2}$. 6.49. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+5x^2}}$. 6.56. $\int \frac{\ln^3 x dx}{x}$.
6.57. $\int \frac{\ln x dx}{x(1+\ln^4 x)}$. 6.58. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$. 6.59. $\int \operatorname{tg} x dx$.
6.60. $\int \operatorname{ctg} x dx$. 6.61. $\int \frac{\cos 2x dx}{(\cos x + \sin x)^2}$. 6.62. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+9}}$.
6.63. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{9-x^2}}$. 6.64. $\int \frac{x-1}{x^2-9} dx$. 6.75. $\int \frac{(\operatorname{arcsin} x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
6.89. $\int \frac{x}{2x-1} dx$. 6.90. $\int \frac{xdx}{4x^2+4x+5}$.
6.92. $\int \frac{xdx}{x^2+2x+10}$. 6.95. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$. 6.96. $\int \frac{5^x dx}{5^{2x}+10}$.

პასუხები:

6.19 $-\frac{1}{9(3x+2)^3}$. 6.20 $\frac{(ax+b)^{1-k}}{a(1-k)}$. 6.21 $\frac{2}{9}\sqrt{(3x+4)^3}$.
6.22 $\frac{3}{8}\sqrt{(2x-3)^4}$. 6.23 $\sqrt{x^2+4}$. 6.24 $\frac{1}{6}\ln|4x^3+7|$.
6.25 $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+4)^4}$. 6.26 $\frac{1}{2}\sqrt{7+x^4}$. 6.27 $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+9)$.
6.28 $\frac{1}{5}e^{5x}$. 6.29 $\frac{1}{3}\ln^3 x$. 6.30 $\ln(e^x+3)$. 6.31 $\frac{1}{\ln 2} 2^{\operatorname{arctg} x}$.
6.32 $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+2)$. 6.33 $\frac{1}{3}e^{x^3}$. 6.34 $\frac{1}{\ln a} a^{\sin x}$. 6.35 $2\sqrt{\operatorname{tg}+1}$.
6.36 $\operatorname{arctg}(x+1)$. 6.38 $-\frac{1}{3}\cos(1+x^3)$. 6.39 $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$.
6.41 $\frac{1}{\ln 2} \operatorname{arcsin} 2^x$. 6.42 $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|$. 6.43 $\operatorname{arcsin} \frac{2x+1}{\sqrt{5}}$.
6.44 $\ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right|$. 6.46 $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{3}}$. 6.47 $-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\ln|2x-3|$.
6.48 $\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \sqrt{3}x$. 6.49 $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln|\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2+3}|$. 6.56 $\frac{1}{4}\ln^4 x$. 6.57
 $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\ln^2 x)$. 6.58 $\frac{5}{2}\sqrt[5]{\sin^2 x}$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
6.59 $-\ln|\cos x|$. 6.60 $\ln|\sin x|$. 6.61 $\frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x)$.
6.62 $\sqrt{x^2+9} + 3\ln|x+\sqrt{x^2+9}|$. 6.63. $-\sqrt{9-x^2} + 3\operatorname{arcsin} \frac{x}{3}$, $x \neq 3$.
6.64 $\frac{1}{3}\ln|x-3|(x+3)^2$. 6.75 $\frac{1}{4}(\operatorname{arcsin} x)^4$, $x \neq \pm 1$.
6.89 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ln|2x-1|$. 6.90 $\frac{1}{8}\ln(4x^2+4x+5) - \frac{1}{8}\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2}$.

$$6.91 \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8 \ln|x-2|. \quad 6.92 \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 10) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3}.$$

$$6.93 \ 2\sqrt{4 + \ln x} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{4 + \ln x} - 2}{\sqrt{4 + \ln x} + 2} \right|$$

$$6.94 \ \operatorname{arcsin} x + \sqrt{1-x^2}. \quad 6.95 \ 2\sqrt{x+1} + \ln \frac{|\sqrt{x+1}-1|}{\sqrt{x+1}+1}.$$

$$6.96 \ \frac{1}{\sqrt{10 \ln 5}} \operatorname{arctg} \frac{5^x}{\sqrt{10}}.$$

ნაწილობითი ინტეგრება (§6.3)

◇ შემდეგ ინტეგრალთა გამოსათვლელად ისარგებლეთ ნაწილობითი ინტეგრების სერხით:

$$6.97. \int x \sin x dx. \quad 6.98. \int x \cos x dx. \quad 6.99. \int x \cdot 3^{-x} dx.$$

$$6.100. \int x \cdot 7^x dx. \quad 6.101. \int x e^{-x} dx. \quad 6.102. \int x \sin 2x dx.$$

$$6.103. \int x \cos 5x dx. \quad 6.104. \int \ln x dx. \quad 6.106. \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$6.107. \int \arcsin x dx.$$

$$6.110. \int \frac{x dx}{e^{2x}}. \quad 6.112. \int \frac{\ln x}{x^3} dx. \quad 6.113. \int \sin \ln x dx.$$

$$6.114. \int \cos \ln x dx. \quad 6.115. \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$6.118. \int e^x \cos x dx.$$

$$6.119. \int e^{ax} \sin bx dx. \quad 6.121. \int x^2 e^{-x} dx.$$

$$6.123. \int x \arcsin x dx. \quad 6.124. \int \ln(x^2 + 1) dx.$$

პასუხები:

$$6.97. -x \cos x + \sin x. \quad 6.98 \operatorname{sn} x + \cos x. \quad 6.99. -\frac{x 3^{-x}}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln^2 3}.$$

$$6.100. \frac{x \cdot 7^x}{\ln 7} - \frac{7^x}{\ln^2 7}. \quad 6.101. -x e^{-x} - e^{-x}.$$

$$6.102. -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x. \quad 6.103 \frac{1}{5} x \sin 5x + \frac{1}{25} \cos 5x.$$

$$6.104. x \ln x - x. \quad 6.106 \frac{(x^2 + 1)}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x.$$

$$6.107. x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}. \quad 6.110. -\frac{e^{-2x}}{4} (2x + 1).$$

$$6.112. -\frac{1}{4x^2} (1 + 2 \ln x). \quad 6.113 \frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x).$$

$$6.114 \frac{x}{2} \sin x + \cos x. \quad 6.115 \ x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x.$$

$$6.117 (e^x + 1) \ln(e^x + 1) - e^x. \quad 6.118 \frac{e^{2x}}{13} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x).$$

$$6.119 \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx). \quad 6.121 -e^{-x} (2 + 2x + x^2).$$

$$6.123 \frac{2x^2 - 1}{4} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2}.$$

$$6.124 \ x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x.$$

კვადრატული სამწევრის შემცველი შემატივების ინტეგრირება (§6.4)

◇ გამოთვალეთ კვადრატული სამწევრის შემცველი შემდეგი ინტეგრირებები:

$$6.127. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}. \quad 6.128. \int \frac{(x+1)dx}{x^2 - 2x + 5}.$$

$$6.129. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2}. \quad 6.130. \int \frac{(3x-2)dx}{x^2 - 4x + 5}.$$

$$6.132. \int \frac{(x+5)dx}{2x^2 + 2x + 3}. \quad 6.133. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$6.134. \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}. \quad 6.135. \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

$$6.136. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}.$$

$$6.13. \int \frac{(3x-6)dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}. \quad 6.138 \int \frac{(4x+7)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$$

$$6.139 \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}}.$$

პასუხები: $6.127 \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}}.$

$$6.128 \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2}. \quad 6.129 \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{5}}.$$

$$6.130 \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) + 4 \operatorname{arctg}(x-2).$$

$$6.132 \frac{1}{4} \ln|2x^2 + 2x + 3| + \frac{9}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{5}}.$$

$$6.133 \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right|.$$

$$6.134 \arcsin \frac{x+2}{3}. \quad 6.135 \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{4x-3}{5}.$$

$$6.136 \frac{1}{\sqrt{3}} \ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x-3}|. \quad 6.137 \ 3\sqrt{x^2-4x+5}.$$

$$6.138 -4\sqrt{3-2x-x^2} + 3 \arcsin \frac{x+1}{2}.$$

$$6.139 \sqrt{x^2 + 3x + 5} - \frac{1}{2} \ln \left| x + 1.5 + \sqrt{x^2 + 3x + 5} \right|.$$

**ტრიგონომეტრიული ფუნქციების
ინტეგრება (§6.5)**

◇ გამოთვალეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიდან შემდეგი ინტეგრალები:

6.161 $\int \cos^3 x dx$. 6.162 $\int \sin^3 x dx$. 6.164 $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.

6.165 $\int \cos^2 3x dx$. 6.171 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$. 6.172 $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.

6.173 $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$. 6.175 $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}$. 6.179 $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

6.180 $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. 6.184 $\int \operatorname{tg}^5 x dx$. 6.185 $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$.

6.186 $\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^4 x} dx$. 6.188 $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx$.

6.193 $\int \frac{dx}{\sin x}$. 6.194 $\int \frac{dx}{\cos x}$.

შედეგები: 6.193-ში ინტეგრალსი ისარგებლეთ ფორმულით:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

ხოლო 6.194-ში გამოიყენეთ დაყვანის წესი ($\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$), რომლის შემდეგ მისი გამოთვლა შესაძლებელი იქნება I-ის გამოყენებით.

პასუხები: 6.161 $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$. 6.162 $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x$.

6.164 $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x$. 6.165 $\frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \sin 6x$. 6.171 $-\frac{1}{\sin x}$.

6.172 $\frac{1}{\cos x}$. 6.173 $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x}$. 6.175 $\frac{\sin^3 x}{\cos x} - \frac{3}{2} x + \frac{3}{4} \sin 2x$.

6.179 $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x$. 6.180 $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$. 6.181 $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

6.184 $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x|$. 6.185 $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x$.

6.186 $\frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x$. 6.188 $3 \sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6}$.

6.193. $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$. 6.194. $\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|$.

**ბანსაზღვრული ინტეგრალის ცნება;
ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა (§7.1)**

◇ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

7.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; 7.2. $\int_0^{10} e^x dx$; 7.3. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$. 7.7. $\int_0^1 x^4 dx$;

7.8. $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$; 7.9. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 7.10. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$;

7.11. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$; 7.12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin 5x dx$;

7.13. $\int_0^{\frac{1}{6}} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; 7.14. $\int_{-9}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$;

7.15. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 7.16. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

7.17. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$; 7.18. $\int_1^2 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx$;

7.19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$; 7.20. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx$; 7.21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx$;

7.22. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$;

პასუხები:

7.1) 1. 7.2) $e^x - 1$. 7.3) $\frac{2}{3}$. 7.7) $\frac{1}{5}$. 7.8) $\frac{5}{3} + 6\sqrt{2}$. 7.9) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7.10) $\frac{\pi}{2}$. 7.11) $\frac{7}{3}$. 7.12) $\frac{2}{5}$. 7.13) $\frac{\pi}{18}$. 7.14) $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$.

7.15) $\sqrt{3} - 1$. 7.16) $\ln(\sqrt{2} + 1)$. 7.17) $\frac{7}{4}$.

7.18) $\frac{27}{10} \sqrt[3]{4} + \frac{24}{7} \sqrt{2} - 3 \frac{57}{70}$. 7.19) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$. 7.20) $1 - \frac{\pi}{4}$.

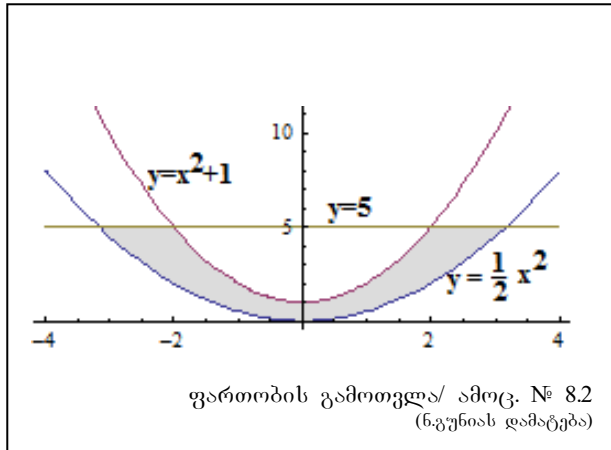
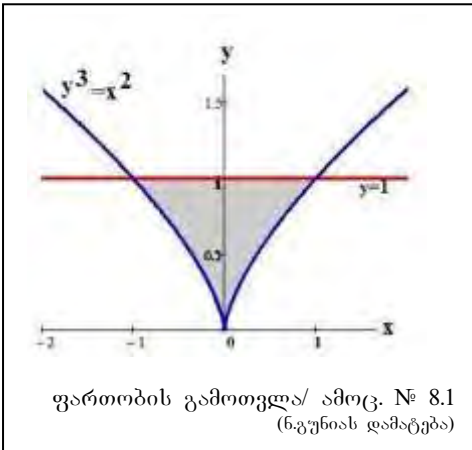
7.21) $\frac{\pi}{2} - 1$. 7.22) $\frac{\pi}{6} + \ln \sqrt{3}$.

**ბანსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა
ჩასმის ხერხით (§7.2)**

7.23 $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x \ln x}$. 7.24 $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. 7.26 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

7.27 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$. 7.28 $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$. 7.30 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

7.31 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$. 7.32 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$. 7.34 $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{x^4 + 4}$.



7.35 $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$. 7.38 $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

7.40 $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$. 7.41 $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

7.42 $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+2x+5}$. 7.44 $\int_1^2 \sin(2x-3)dx$.

7.46 $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$. 7.47 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$. 7.48 $\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$.

7.49 $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{x^4+1}$. 7.51 $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$. 7.52 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos 2x dx$.

პასუხები:

7.23) $\ln 3$. 7.24) $\arctg e - \frac{\pi}{4}$. 7.26) $\frac{7}{72}$. 7.27) $\ln \sqrt{2}$. 7.28) $\frac{e-1}{2e}$.

2.30. $\arctg 3 - \arctg 2$. 7.31) $\sqrt{2} - 1$. 7.32) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{27}$. 7.33) $\frac{4}{31\ln 5}$.

7.34) $\frac{1}{4}\ln 4$. 7.35) $-\frac{\pi}{6}$. 7.36) $\frac{\pi}{6}$. 7.37) $\frac{1}{4}\arctg \frac{3}{2}$.

7.38) $\frac{1}{3}\ln \frac{5+\sqrt{26}}{2+\sqrt{5}}$. 7.39) $\frac{2}{9}\pi$. 7.40) $\ln(1+\sqrt{2})$. 7.41) $\frac{1}{5}\ln \frac{4}{3}$.

7.42) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{8}$. 7.43) $\frac{1}{2}\ln 3$. 7.44) 0. 7.45) $\frac{1}{5}\arcsin \frac{5}{6}$. 7.46) $\frac{\pi}{18}$.

7.47) $-\frac{1}{3}$. 7.48) $\frac{1}{3}(e-1)$. 7.49) $-\frac{\pi}{8}$. 7.50) 1. 7.51) $\frac{\pi}{4}$. 7.52) $-\frac{2}{5}$.

ბანსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ნაწილობითი ინტეგრირების ხერხით (§7.3)

◇ ნაწილობითი ინტეგრირების ხერხით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

7.53 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$. 7.54 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$. 7.55 $\int_0^1 x e^x dx$.

7.56 $\int_0^1 (x^2 - 2x)e^x dx$. 7.57 $\int_1^e \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{x}}$. 7.58 $\int_1^2 x \log_2 x dx$.

7.59 $\int_0^1 x^2 \cdot 7^x dx$. 7.60 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x dx}{\cos^2 x}$. 7.61 $\int_0^1 \arctg x dx$.

7.62 $\int_1^e \ln^2 x dx$. 7.63 $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$. 7.64 $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

7.65 $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$. 7.66 $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$. 7.67 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

7.68 $\int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$.

პასუხები:

7.53) 1. 7.54) $\frac{\pi-2}{8}$. 7.55) 1. 7.56) $e-4$. 7.57) $\frac{9-3\sqrt[3]{e^2}}{4}$.

7.58) $2 - \frac{3}{4\ln 2}$. 7.59) $\frac{7\ln^2 7 - 14\ln 7 + 12}{\ln^3 7}$. 7.60) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \ln \lg \frac{\pi}{8}$.

7.61) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. 7.62) $e-2$. 7.63) $\pi^3 - 6\pi$. 7.64) 1. 7.65) $\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$.

7.66) $-\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$. 7.67) $\frac{\pi}{36}(9-4\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2}$. 7.68) $6\sqrt{e} - 8$.

ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა (§8.1)

◇ გამოთვალეთ იმ ფიგურათა ფართობები, რომლებიც შემოსაზღვრულია წირებით:

8.1. $y^3 = x^2$, $y = 1$. (იხ. ნახ. პასუხებთან) 8.2. $y = x^2 + 1$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 5$ (იხ. ნახ. პასუხებთან). 8.3. $y^2 = 9x$, $x^2 = 9y$.

8.4. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{20}$. 8.5. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. 8.6. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$. 8.7. $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$. 8.8. $y^2 = 2x$

+4, x=0. 8.9. $y = \ln x, x = e, y = 0$. 8.10. $y = 6x - x^2, y = 0$. 8.11. $y = x, y = 8, x = 0$. 8.12. $y^2 = 1 - x, x = -3$.
8.13. $y = x^2 + 4x + 5, x = 0, y = 1$. 8.14. $y = x^2, y^2 = 4x, y = 0, y = 1$. 8.15. $y = \frac{6}{x}, y = -x + 7$.

პასუხები: 8.1) 0,8. 8.2) $\frac{4}{3}(5\sqrt{10} - 8)$. 8.3) 27.

8.4) $2\arctg 2 - \frac{4}{15}$. 8.5) $\frac{32}{3}$. 8.6) $8\ln 2$. 8.7) 19,2. 8.8) $\frac{16}{3}$. 8.9)

1. 8.10) 36. 8.11) 12. 8.12) $\frac{32}{3}$. 8.13) $\frac{14}{3}$. 8.14) $\frac{16}{3}$.

8.15) $17\frac{1}{2} - 6\ln 6$.

წირის სიგრძის გამოთვლა*

8.16". იპოვეთ $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ ფუნქციის გრაფიკის იმ რკალის სიგრძე, რომლის ერთი ბოლოს აბსცისაა $x=0$, ხოლო მეორისა $-x=3$.

8.17". ვიპოვოთ $y = \ln \sin x$ წირის რკალის სიგრძე, თუ $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

8.18 ვიპოვოთ $y = \ln x$ წირის რკალის სიგრძე $\left(\frac{3}{4}, \ln \frac{3}{4}\right)$

წერტილიდან $\left(\frac{12}{5}, \ln \frac{12}{5}\right)$ წერტილამდე.

8.19 გამოთვალეთ $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელსაც მისგან $x = -1$ წრფე მოკვეთს.

8.20 გამოთვალეთ $y^2 = (x+1)^3$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელსაც მისგან $x = 4$ წრფე მოკვეთს.

8.21 გამოთვალეთ $y = \ln \cos x$ წირის რკალის სიგრძე (0;0)

წერტილიდან $\left(\frac{\pi}{4}; -\ln \sqrt{2}\right)$ წერტილამდე.

8.22 გამოთვალეთ $y = \ln(2\cos x)$ წირის რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია მისი Ox ღერძთან გადაკვეთის ორ მეზობელ წერტილს შორის.

პასუხები: 8.16") $\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$; 8.17") $2\ln 3$; 8.18)

1,35+ln2. 8.19) $\frac{28}{3}$. 8.20) $24\frac{22}{27}$. 8.21) $\ln \frac{\sqrt{2+2}}{2-\sqrt{2}}$.

8.22) $2\ln \ctg 15^\circ$.

ბრუნვის სხეულის მოცულობის გამოთვლა (§8.3)

8.26. გამოთვალეთ $y = 4x - x^2$ პარაბოლითა და $y = x$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა. (იხ. ნახ.)

8.27. გამოთვალეთ $y^2 = 4x$ პარაბოლითა და $y = 0, x = 4$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.28. გამოთვალეთ $y^2 = 4x$ და $x^2 = 4y$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული ფიგურის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.29. გამოთვალეთ აბსცისთა ღერძის გარშემო $y = \sin x$ სინუსოიდის ნახევარტალის $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.30. გამოთვალეთ $y = e^{2x}$ წირითა და $y = 0, x = 0$ და $x = y$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის, აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხები: 8.26) $\frac{108}{5}\pi$. 8.27) 32π . 8.28) $\frac{95}{5}\pi$. 8.29) $\frac{\pi}{2}$.

8.30) $\frac{\pi}{4}(e^4 - 1)$.

დიფერენციალური განტოლებები

ბანცალაბაღვლაღვლიანი დიფერენციალური განტოლება (§ 10.2)

◇ ამოხსენით შემდეგი განტოლებები და სადაც მოითხოვლია, იპოვეთ ის კერძო ინტეგრალები, რომლებიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს:

10.25. $y' = 3x^2 - 2x + 1; x = 1, y = 2$. 10.26. $xy' - y = 0; x = \frac{1}{2}, y = 2$.

10.27. $y' = y; x = -2, y = 2$. 10.28. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$;

10.29. $(1+y^2)dx + xydy = 0$. 10.30. $xyy' = 1 - x^2$.

10.31. $y'tg x = y$. 10.32. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.

10.34. $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$. 10.35. $(xy^2+x)dx + (y-x^2y)dy = 0$.

10.36. $yy' = \frac{1-2x}{y}$. 10.37. $xy' + y = y^2$.

10.38. $y' = 10^{x+y}$.

პასუხები: 10.25. $y = x^3 - x^2 + x + C; y = x^3 - x^2 + x + 1$. 10.26. $y = Cx;$

$y = 4x$. 10.27. $y = Ce^x; y = 4e^{x/2}$. 10.28. $(1-x)(1+y) = C$.

10.29. $x^2(1+y^2) = C$.

10.30. $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$. 10.31. $y = C \sin x$.

10.32. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$. 10.33. $y \sin x + \cos y - x \cos x + \sin x = C$.

10.34. $\sqrt{1+x^2} \cdot e^{\arctg y} = C$. 10.35. $1+y^2 = C(1-x^2)$.

10.36. $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$. 10.37. $Cx = \frac{y-1}{y}$.

**პირველი რიგის წრფივი
დიფერენციალური განტოლება (§10.4.)**

◇ ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

10.72. $y'+2y=4x$. 10.73. $y'+2xy=xe^{-x^2}$. 10.75. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$. 10.76. $y'+y=\cos x$. 10.77. $2ydx+(y^2-6x)dy=0$.

10.78. $y' = \frac{1}{2x-y^2}$. 10.79. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$.

10.80. $(1+y^2)dx=(\arctgy-x)dy$.

პასუხები: 10.72) $y=Ce^{-2x}+2x-1$. 10.73. $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$.

10.75. $y=(x+C)(1+x^2)$. 10.76. $y=Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$. 10.77. $y^2-2x=Cy^3$.

10.78. $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$. 10.79. $y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^4}{6}$.

10.80. $x = Ce^{-\arctgy} + \arctgy - 1$.

**მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი
წრფივი ერთგვაროვანი
დიფერენციალური განტოლება (§10.10.)**

◇ ამოხსენით განტოლებები

10.181. $y''+y'-2y=0$.

10.182. $y''-4y'=0$.

10.183. $y''+6y'+13y=0$.

10.184. $y''-2y'+y=0$.

10.185. $y''-4y'+3y=0$.

10.186. $y''+4y'+29y=0$.

პასუხები: 10.181. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. 10.182. $y=C_1e^{4x}+C_2$.

10.183. $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. 10.184. $y=e^x(C_1+C_2x)$.

10.185. $y=4e^x+2e^{3x}$. 10.186. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

