მ. მუმლაძე, ს. ცოტნიაშვილი, კ. ცერცვაძე

ბიზნესის მათემატიკა

„ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

მ. მუმლაძე, ს. ცოტნიაშვილი, კ. ცერცვაძე

ბიზნესის მათემატიკა

დამტკიცებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ

თბილისი
2009

მათემატიკური ანალიზის მნიშვნელოვან ნაწილებს წარმოადგენს ინტეგრალური აღრიცხვა და მწკრივთა თეორია. სწორედ ამ ნაწილების და მათი პრაქტიკული გამოყენების ელემენტებია შეტანილი წინამდებარე სახელმძღვანელოში.

სახელმძღვანელოში შეტანილია აგრეთვე ალბათობის თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები.

სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი პროფესიული სკოლის, ასევე ეკონომიკური და საინჟინრო სპეციალობების ბაკალავრიატის სტუდენტებისათვის.

ISBN 978-9941-14-631-2
http://www.gtu.ge/publishinghouse/

Verba volant,
scripta manent

შინაარსი

თავი 5

ორჯერადი ინტეგრალები

თავი 6

მრუდწირული ინტეგრალები

თავი 7

დიფერენციალური განტოლებები

თავი 8

ხდომილობა და მისი ალბათობა

შესავალი

მათემატიკური ანალიზი არის მათემატიკის ნაწილი, რომელშიც ფუნქციები შეისწავლება ზღვართა მეთოდებით. ზღვრის ცნება მჭიდროდარ არის დაკავშირებული უსასრულოდ მცირე სიდიდის ცნებასთან. შეიძლება ითქვას, რომ მათემატიკური ანალიზი შეისწავლის ფუნქციებს უსასრულოდ მცირეთა მეთოდებით.

სახელწოდება „მათემატიკური ანალიზი'' არის სახელწოდების „უსასრულოდ მცირეთა ანალიზის'' შემოკლებული სახეცვლილება; მაგრამ ისიც შემოკლებულია და ამდენად საგანს უფრო ზუსტად აღწერს სახელწოდება „ანალიზი უსასრულოდ მცირეთა საშუალებით''. ბუნებასა და ტექნიკაში, ყველგან გვხვდება მოძრაობა, პროცესები, რომლებიც აღიწერება ფუნქციების მეშვეობით; ფუნქციის მეშვეობით, ასევე შეიძლება აღიწეროს ბუნების კანონები. აქედან გამომდინარე, მათემატიკური ანალიზი არის ფუნქციის შესწავლის საშუალება.

მათემატიკურ ანალიზს საფუძველი ჩაუყარეს და განავითარეს ისეთმა ცნობილმა ბუნებისმეტყველებმა, როგორებიც იყვნენ ნიუტონი, ლაიბნიცი, ფერმა, ეილერი, აბელი და სხვა.

მათემატიკური ანალიზის მნიშვნელოვან ნაწილებს წარმოადგენს ინტეგრალური აღრიცხვა და მწკრივთა თეორია. სწორედ ამ ნაწილების და მათი პრაქტიკული გამოყენების ელემენტებია შეტანილი წინამდებარე სახელმძღვანელოში.

სახელმძღვანელოში შეტანილია აგრეთვე ალბათობის თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები.

ალბათობის თეორია, როგორც მეცნიერება აღმოცენდა მეჩვიდმეტე საუკუნის შუა წლებში. თავდაპირველად იგი დაკავშირებული იყო აზარტული თამაშების ანალიზთან. ამ ანალიზისას წამოჭრილმა პრობლემებმა და ამოცანებმა, რომლებიც ვერ იხსნებოდ ნენ მაშინ არსებული მათემატიკური მეთოდების საშუალებით, მიიყვანა მეცნიერებიახალი იდეების და ცნებების წარმოქმნამდე. ასეთი იდეები და ცნებები გვხვდება ცნობილი მათემატიკოსების ფერმას, პასკალის, ჰიუგენსის, ბერნულის და სხვათა ნაშრომებში.

მიუხედავად იმისა, რომ ალბათობის თეორია განვითარების სამ საუკუნეზე მეტს ითვლის, მათემატიკის სრულუფლებიანი დარგის სტატუსი მოიპოვა მეოცე საუკუნის 30-იან წლებში, რუსი მათემატიკოსის ა.ნ.კოლმოგოროვის შრომების გამოქვეყნების შემდეგ. მან ჩამოაყალიბა ალბათობის თეორიის აქსიომები, რომელთა საფუძველზე ალბათობის თეორია წარმოადგენს მკაცრ მათემატიკურ დისციპლინას.

ალბათობის თეორიას ეფუძნება მათემატიკური სტატისტიკა. გარკვეული აზრით, რო გორც ვნახავთ, მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანები წარმოადგენენ ალბათობის თეორიის ამოცანების შებრუნებულ ამოცანებს.

სახელმძღვანელოს იმ ნაწილის, რომელიც მოიცავს ინტეგრალური აღრიცხვის და მწკრივთა თეორიის ელემენტებს, ავტორები არიან გორის უნივერსიტეტის პროფესორები: მალხაზ მუმლაძე და სოსო ცოტნიაშვილი. იმ ნაწილის კი, რომელიც მოიცავს ალბათობის თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტებს, ამავე უნივერსიტეტის პროფესორი კარლო ცერცვაძე.

ავტორები დიდ მადლობას უხდიან პროფესორ ჯემალ ქირიას სახელმძღვანელოს რედაქტირებისთვის და ღირებული შენიშვნებისათვის.

სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი პროფესიული სკოლის, ასევე ეკონომიკური და საინჟინრო სპეციალობების ბაკალავრიატის სტუდენტებისათვის.

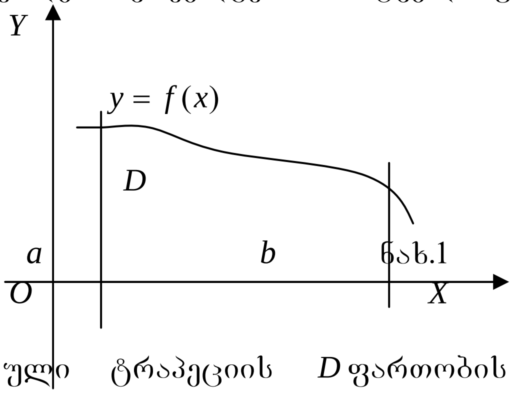
თავი1
განსაზღვრული ინტეგრალი
1. ფართობის ამოცანა

ვთქვათ, მოცემულია სასრულ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $y = f(x)$ ფუნქცია, $f(x) \geq 0$, ყოველი $x \in [a,b]$ წერტილისათვის.

ფიგურას, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან OX რიცხვით ღერძზე მდებარე $[a,b]$ მონაკვეთით, გვერდებიდან კი $x = a$ და $x = b$ წრფეებით, მრუდწირულ ტრაპეციას უწოდებენ (ნახ.1).

შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $f(a) = 0$ ან $f(a) = 0$. ასეთ შემთხვევებში მრუდწირული ტრაპეციის გვერდი მოიჭიმება წერტილში.

ყოველი ბრტყელი ფიგურა შეიძლება დავანაწილოთ რამდენიმე მრუდწირულ ტრაპეციად, რომელთა ფართობების ჯამი ტოლი იქნება მოცემული ფიგურის ფართობისა. თუ მოვახერხებთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოთვლას, მაშინ შევძლებთ ყოველგვარი ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლას.



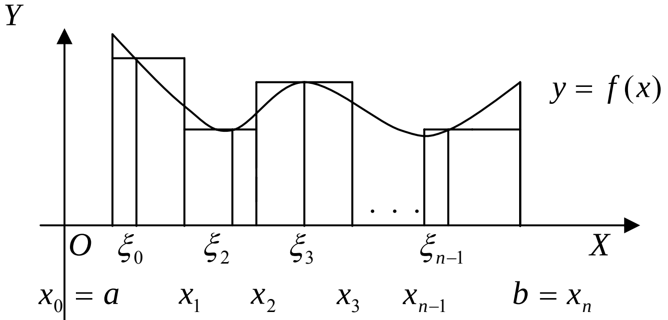
ნახ.1

მრუდწირული ტრაპეციის D ფართობის გამოსათვლელად $[a,b]$ სეგმენტი ნებისმიერად დავყოთ n ნაწილად. ვთქვათ, დაყოფის წერტილები განლაგებული არიან $[a,b]$ სეგმენტზე ასეთნაირად:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

დაყოფის წერტილებიდან $x_k, k = 1,2,3,\ldots,n-1$ აღვმართოთ მართობები $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაკვეთამდე. თითოეული ამ გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები იქნება $(x_k, f(x_k))$. ავაგოთ ფიგურა შედგენილი მართკუთხედებისგან, რომელთა ფუძეებია მონაკვეთები $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$, ხოლო სიმაღლეები თითოეული ამ მონაკვეთის რომელიმე $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ წერტილში აღმართული მართობები გრაფიკის გადაკვეთამდე.

თითოეული მართობის სიგრძე $f(\xi_k)$ რიცხვის ტოლია.



ნახ.2

აღვნიშნოთ აგებული ფიგურის (ნახ.2) ფართობი სიმბოლოთი, მაშინ

$$S_n = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

ანუ

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ , \tag{1}$$

სადაც $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ წარმოადგენს $[x_k, x_{k+1}]$ მონაკვეთის სიგრძეს.

ადვილია მიხვედრა, რომ მრუდწირილი ტრაპეციის ფართობი მიახლოებით ტოლია აგებული ფიგურის ფართობისა და შეგვიძლია დავწეროთ:

$$D \approx S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ . \tag{2}$$

თუ (1) გამოსახულებაში თანდათან გავზრდით $[a,b]$ სეგმენტის დამყოფი წერტილების რიცხვს ისე, რომ დაყოფით მიღებული მონაკვეთების მაქსიმალურისიგრძე $\max \Delta x_k$ მიისწრაფვოდეს ნულისაკენ, გეომეტრიული მოსაზრებით, შეიძლება დავასკვნათ, რომ (2) მიახლოებითი ტოლობის სიზუსტე თანდათან გაიზრდება და დაყოფის წერტილების უსასრულო გაზრდით ზუსტი გახდება.

(1) ჯამს $[a,b]$ სეგმენტზე $y = f(x)$ ფუნქციის **რიმანის ინტეგრალური ჯამი** ეწოდება.

ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე და ღებულობს როგორც არაუარყოფით, ასევე უარყოფით მნიშვნელობებს.

განსაზღვრება 1.1. თუ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ $y = f(x)$ ფუნქციის რიმანის ჯამების მიმდევრობას:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k, n = 1,2,3,...,n,...$$

გააჩნია სასრული ზღვარი, როდესაც სეგმენტის დამყოფი წერტილების რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება ისე, რომ დაყოფით მიღებული მონაკვეთების მაქსიმალური სიგრძე მიისწრაფვის ნულისკენ და ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებილი $\xi_k \in [a,b]$ წერ- ტილის ამორჩევაზე, მაშინ ამბობენ, რომ $y = f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმე-ნტზე, ხოლო ზღვარს:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

უწოდებენ $y = f(x)$ ფუნქციის **განსაზღვრულ ინტეგრალს** $[a,b]$ სეგმენტზე.

განსაზღვრულ ინტეგრალს აღნიშნავენ ასე: $\int_a^b f(x)dx$.

მაშასადამე

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ .$$

განსაზღვრული ინტეგრალის $\int_a^b f(x)dx$ გამოსახულებაში $f(x)$ ფუნქციას

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ეწოდება, x ცვლადს- საინტეგრაციო ცვლადი, a და b რიცხვებს- შესაბამისად, ინტეგრირების ქვედა და ზედა საზღვრები.

შენიშვნა: განსაზღვრულ ინტეგრალთან დაკავშირებით უნდა აღვნიშნოთ, რომ არსებობენ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული წყვეტადი ფუნქციები, რომლებისთვისაც რიმანის ჯამების მიმდევრობა კრებადია და, შესაბამისად, არსებობს მათი ინტეგრალები. ასევე არსებობს ფუნქციები, რომლებიც არა ინტეგრებადია მოცემულ სეგმენტზე.

ადგილი აქვს თეორემებს:

თეორემა 1.1. ყოველი $[a,b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი $y=f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე.

თეორემა 1.2. ყოველი $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

2. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა პირდაპირ, მისი განსაზღვრებიდან ძალიან ძნელია მარტივ შემთხვაშიც კი. პრაქტიკაში გამოიყენება ზოგადი და უფრო იოლი მეთოდი, რომელიც გამომდინარეობს განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებებიდან, რომლ- ებსაც მოვიყვანთ დამტკიცების გარეშე.

თვისება 1. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ
ფუნქცია $f(x)+\varphi(x)$ ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b [f(x)\pm\varphi(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b \varphi(x)dx\,.$$

თვისება 2. თუ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ფუნქცია $kf(x)$, სადაც k რაიმე რიცხვია, ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx\,.$$

ინტეგრალის განსაზღვრისას ვგულისხმობდით, რომ $a<b$. თუ $a>b$, მაშინ შეთანხმების საფუძველზე ითვლება, რომ

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx\,.$$

აქედან გამომდინარეობს ტოლობა:

$$\int_a^a f(x)dx=0\,.$$

თვისება 3. თუ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე და ინტეგრირების სეგმენტი $[a,b]$ გაყოფილია ნაწილებად $[a,c]$, $[c,b]$, მაშინ არსებობენ ინტეგრალები:

$$\int_a^c f(x)dx\,,\ \int_c^b f(x)dx$$

და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_b^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\,.$$

თვისება 4. თუ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე $f(x)\ge 0$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0\,.$$

უკანასკნელი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $[a,b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია ინარჩუნებს ნიშანს

$$\int_a^b f(x)dx=0\,,$$

მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f(x)=0$.
ამ თვისებიდან ასევე გამომდინარეობს: თუ $f(x)\le\varphi(x)$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx .$$

თვისება 5. თუ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე და ფუნქციის მნიშვნელობები ამ სეგმენტზე მოთავსებულია m და M რიცხვებს შორის, მაშინ

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx \le M(b-a) .$$

უკანასკნელი თვისება ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით განსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი მოთავსებულია $[a,b]$ ფუძისა და, შესაბამისად, m და M სიმაღლეების მქონე მართკუთხედების ფართობებს შორის.
ეს თვისება შეიძლება გამოყენებული იქნას ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის დროს.
თვისება 6. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს ისეთი $c\in[a,b]$ წერტილი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) .$$

3. ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი ფორმულა

განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული იმაზე თუ რა სიმბოლოთი იქნება აღნიშნული საინტეგრაციო ცვლადი. ასე, რომ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f)(t)dt = \int_a^b f(z)dz = ...$$

განვიხილოთ ახლა ინტეგრალი, რომლის ინტეგრირების ზედა საზღვარი ცვლადი x სიდიდეა. ასეთი ინტეგრალი x ცვლადის ფუნქციაა:

$$I(x)=\int_a^x f(t)dt .$$

ამ ფუნქციას **ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით** ეწოდება.
თეორემა 1.3. ინტეგრალი ზედა საზღვრით,

$$I(x)=\int_a^x f(t)dt ,$$

x ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\frac{dI(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]= f(x) .$$

ეს თვისება გვიჩვენებს, რომ ინტეგრალი ზედა საზღვრით წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთ პირველყოფილ ფუნქციას:

$$\int f(x)dx = I(x)+C ,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.
რადგან

$$I(x)=\int_a^x f(t)dt ,$$

$f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთ პირველყოფილი ფუნქციაა, ამიტომ

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C^*,$$

სადაც $F(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის რომელიმე პირველყოფილ ფუნქციას, C^* -კონკრეტული რიცხვია. ვიპოვოთ C^*. დავუშვათ $x = a$, მაშინ

$$0 = \int_a^a f(t)dt = F(a) + C^*,$$

აქედან $C = -F(a)$ და

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

თუ ახლა $x = b$, მივიღებთ:

$$\int_a^x f(t)dt = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

ეს ფორმულა წარმოადგენს **ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითად ფორმულას,** მეორნაირად მას **ნიუტონ- ლაიბნიცის ფორმულასაც** უწოდებენ.
სხვაობა $F(b) - F(a)$ აღინიშნება ასე:

$$F(x)\,|_a^b.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$F(x)\,|_a^b = \int_a^b f(x)dx,$$

სადაც $F'(x) = f(x)$.

მაგალითი. 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^1 x^2 dx$.

ამოხსნა:

$$\int_0^1 x^2 dx = 2x\,|_0^1 = 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

ამოხსნა:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\,|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

ამოხსნა:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\,\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2.$$

განვიხილოთ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის რამდენიმე მეთოდი:
ა) **ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდი.**
როგორც ვიცით, განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოსათვლელად ვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას

$$\int udv = uv - \int vdu \,,$$

სადაც $u = u(x), v = v(x)$.

ვთქვათ $G(x)$ წარმოადგენს $\int vdu$ სიმრავლის ერთ-ერთ ელემენტს, მაშინ ფუნქცია $uv - G(x)$ იქნება $\int udv$ სიმრავლის ელემენტი. აქედან გამომდინარე:

$$\int_a^b udv = uv\,|_a^b - G(x)\,|_a^b \,,$$

მაშასადამე

$$\int_a^b udv = uv\,|_a^b - \int_a^b vdu \,. \qquad (4)$$

ბოლო ტოლობას ეწოდება ნაწილობითი ინტეგრების წესი განსაზღვრული ინტეგრალისთვის.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$.

ამოხსნა:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x = x\sin x\,|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = \frac{\pi}{2}\cdot 1 - 0\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \cos x\,|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_1^e x\ln xdx$. ამოხსნა:

$$\int_1^e x\ln xdx = \int_1^e \ln xd\,\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x\,|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}d\ln x = \frac{x^2}{2}\ln x\,|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\,|_1^e - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\,|_1^e =$$

$$\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{e^2}{4} + \frac{1^2}{4} = \frac{e^2}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^{\pi} e^x\cos xdx$.

ამოხსნა: ორჯერ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი, გვექნება:

$$\int_0^{\pi} e^x\sin xdx = -\int_0^{\pi} e^x d\cos x = -e^x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos xde^x = -e^x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x\cos xdx =$$

$$2e^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x d\sin x = 2e^x + e^x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin xde^x = 2e^x - \int_0^{\pi} e^x sinxdx.$$

აქედან

$$2\int_0^{\pi} e^x\sin xdx = 2e^x \quad \text{ანუ} \quad \int_0^{\pi} e^x\sin xdx = e^x\,.$$

ბ) **ჩასმის მეთოდი**. ზოგჯერ საინტეგრაციო ცვლადის გარდაქმნა აიოლებს განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლას.

ადგილი აქვს თეორემას:

თეორემა 1.4. ვთქვათ მოცემულია ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$, სადაც $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე. დავუშვათ, $x=\varphi(t)$ რაიმე დიფერენცირებადი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, ამასთან, $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ და $\varphi(t)\in[a,b]$, როდესაც $t\in[\alpha,\beta]$. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{5}$$

ამ თეორემის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია გარდავქმნათ საინტეგრაციო ცვლადი, გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი ინტეგრირების ახალ საზღვრებში.

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^3 \sqrt{3^2-x^2}dx$.

ამოხსნა:

$\int_0^3 \sqrt{3^2-x^2}dx$ ინტეგრალის გამოსათვლელად მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა. დავუშვ- ათ, $x=3\sin t$. როდესაც x ღებულობს მნიშვნელობას 0-დან 3-მდე, მაშინ t იცვლება $[0,\frac{\pi}{2}]$ შუალედში. (5) ფორმულის გამოყენება გვაძლევს:

$$\int_0^3 \sqrt{3^2-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3^2-3^2\sin^2 t}\,3\cos tdt=3^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=3^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=$$

$$=3^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{3^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt=\frac{3^2}{2}t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt=\frac{3^2\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt.$$

ბოლო ინტეგრალში ასევე მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა: $y=2t$, მაშინ y ცვლადი მიიღებს მნიშვნელობას $0-$დან π-მდე და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int_0^3 \sqrt{3^2-x^2}dx=\frac{3^2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos ydy=\frac{3^2\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin y\,|_0^{\pi}=\frac{3^2\pi}{4}.$$

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ ცვლადის გარდაქმნა, $x=t^2$, ამ გარდაქმნის დროს გვექნება:

$dx=2dt$, t იცვლება $[0,1]$ შუალედში, მაშასადამე:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^1 \frac{2tdt}{1+t}.$$

კიდევ გამოვიყენოთ ცვლადის გარდაქმნა, $1+t=z$, გვექნება: $dt=dz$, z იცვლება $[1,2]$

შუალედში, მაშასადამე

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int_0^1 \frac{tdt}{1+t}=2\int_1^2 \frac{z-1}{z}dz=2\int_1^2 dz-2\int_1^2 \frac{dz}{z}=2z\Big|_1^2-2\ln z\Big|_1^2=4-2-2\ln 2=2-2\ln 2.$$

მაგალითი 9. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$.

ამოხსნა: მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა, $tgx = t$, გვექნება $\frac{1}{\cos^2 x}dx = dt$ და t იცვლება $[0,1]$ შუალედში. ე.ი.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{\cos^2 xdt}{1+a^2\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+tg^2x+a^2tg^2x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2+a^2t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+(a^2+1)t^2}.$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ ცვლადის გარდაქმნას $z = t\sqrt{a^2+1}$, გვექნება $\frac{dz}{\sqrt{a^2+1}} = dt$

და z იცვლება $[0,\sqrt{a^2+1}]$ შუალედში. საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \int_0^{\sqrt{a^2+1}} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} arctgz\Big|_0^{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} arctg\sqrt{a^2+1}.$$

მაგალითი 10. განვიხილოთ ინტეგრალი სიმეტრიულ $[-a,a]$ სეგმენტზე: $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, სადაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ლუწია ანუ $f(x) = f(-x)$.

ამოხსნა:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{b} f(x)dx.$$

პირველ შესაკრებში მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $x = -t$, გვექნება $dx = -dt$, ინტეგრირების საზღვარები გახდება შესაბამისად 0 და a. გვექნება:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

მაგალითი 11. განვიხილოთ ინტეგრალი $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, სიმეტრიულ $[-a,a]$ სეგმენტზე,

სადაც

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია ანუ $f(x) = -f(-x)$.

ამოხსნა:

თუ იგივე მსჯელობას გავიმეორებთ მივიღებთ:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{b} f(x)dx = 0.$$

4. არასაკუთრივი ინტეგრალები

განსაზღვრული ინტეგრალის ცნების შემოტანისას ვგულისხმობდით, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია განსაზღვრული იყო ინტეგრირების $[a,b]$ სასრულ სეგმენტზე.

ზოგჯერ საჭიროა უარი ვთქვათ ამ შეზღუდვებზე და განვიხილოთ ფუნქციის ინტეგრალები უსასრულო შუალედზე ან ინტეგრალები სასრულ შუალედზე, შემოუსაზღვრელი ფუნქციის შემთხვევაში.

ამ შემთხვევებში ვერ ვისარგებლებთ ინტეგრალის 1-ლი განსაზღვრებით. მოვიყვანოთ ინტეგრალის განსაზღვრება ასეთი შემთხვევებისთვის.

განსაზღვრება 1.2. თუ $y=f(x)$ ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,b]$ სეგმენტზე, სადაც $b\in[a,\infty)$ და არსებობს ზღვარი:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

მაშინ მას უწოდებენ $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივ ინტეგრალს უსასრულო შუალედზე და აღნიშნავენ ასე: $\int_a^\infty f(x)dx$.

ანალოგიურად განისაზღვრება არასაკუთრივი ინტეგრალები:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to b}}\int_a^b f(x)dx.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^\infty\frac{dx}{x^2},a>0$.

ამოხსნა:

$$\int_a^\infty\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{x}\Big|_a^b]=\lim_{b\to\infty}[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}]=\frac{1}{a}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^\infty\frac{8a^2}{x^2+4a^2}dx$.

ამოხსნა:

$$\int_0^\infty\frac{8a^2}{x^2+4a^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{8a^2}{x^2+4a^2}dx=8a^2\lim_{b\to\infty}[\frac{1}{2a}arctg\frac{x}{2a}\Big|_0^b=$$

$$=4a^2\lim_{b\to\infty}[arctg\frac{b}{2a}-arctg0]=4a^2\frac{\pi}{2}=2\pi a^2.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_1^\infty\frac{dx}{x}$.

ამოხსნა:

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}[\ln x\Big|_1^b]=\lim_{b\to\infty}[\ln b-0]=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი არ არსებობს.

განსაზღვრება 1.3. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტის შიგნით, ანუ ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,b-\varepsilon]$ სეგმენტზე, სადაც $0<\varepsilon\le b-a$, მაგრამ $f(x)\to\infty$, როდესაც $x\to b$, ამასთან, არსებობს სასრული ზღვარი $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან და აღინიშნება ასე: $\int_a^b f(x)dx$.

ანალოგიურად განისაზღვრება არასაკუთრივი ინტეგრალი, თუ $f(x)\to\infty$, როდესაც $x\to a$:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

ამოხსნა:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}[\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a-\varepsilon}] = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

ამოხსნა:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}[\ln x\Big|_\varepsilon^1] = \lim_{\varepsilon\to 0}[\ln 1 - \ln\varepsilon] = \infty.$$

მაშასადამე არასაკუთრივი ინტეგრალი არ არსებობს.

ვთქვათ, თუ $f(x)\to\infty$, როდესაც $x\to c$, სადაც $c\in(a,b)$. თუ ერთდროულად არსებობ ენ ზღვრები:

$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ და $\lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$, სადაც $\varepsilon>0, \delta>0$, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან $[a,b]$ სეგმენტზე ეწოდება ამ ზღვართა ჯამს და აღინიშნება ასე: $\int_a^b f(x)dx$. მაშასადამე

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

ამოხსნა:

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to\varepsilon}\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\delta\to 0}\int_{0+\delta}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{2}}\Big|_{0+\delta}^{8} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{3}{2}(0-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(-1)^{\frac{2}{3}}) + \lim_{\delta\to 0}(\frac{3}{2}8^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(0+\delta)^{\frac{2}{3}}) = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}.$$

მაგალითი. 7. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{-a}^a \frac{dx}{x^2}$.

ამოხსნა:

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-a}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to 0}[-\frac{1}{x}\Big|_{-a}^{0-\varepsilon}] + \lim_{\delta\to 0}[-\frac{1}{x}\Big|_{0+\delta}^{a}] = \lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{a}] + \lim_{\delta\to 0}[\frac{1}{-a} + \frac{1}{\delta}] = \infty.$$

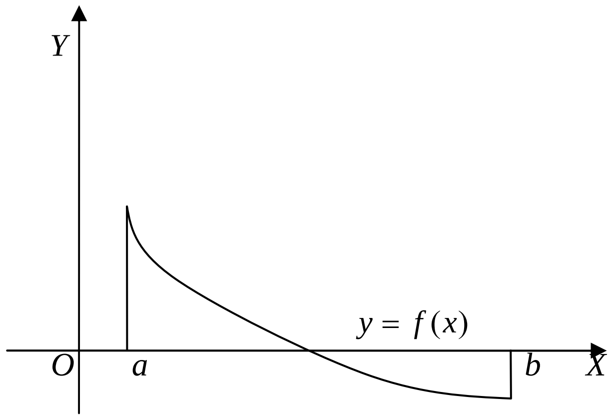
5. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება

5.1. ფართობის გამოთვლა სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურისათვის

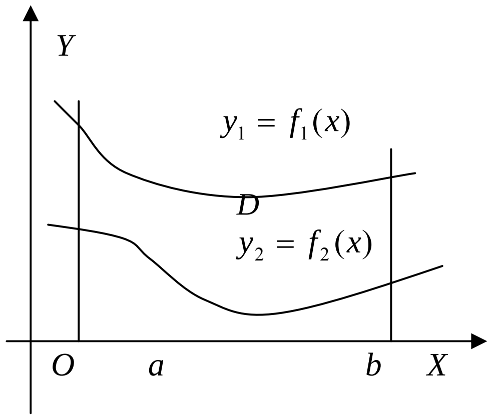
როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, $y=f(x)$ განსაზღვრული ინტეგრალი $[.a,b]$ სეგმენტზე წარმოადგენს იმ ფიგურის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან OX ღერძით, გვერდებიდან $x=a$ და $x=b$ წრფეებით(ნახ.3). მაგ- რამ ზემოთ ვგულისხმობდით, რომ ამ შემთხვევაში ადგილი ჰქონდა პირობას $f(x)\ge 0$. თუ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი გადაჰკვეთს $0X$ ღერძს ან მთლიანად მდებარეობს ამ ღერძის ქვემოთ ანუ $[.a,b]$ სეგმენტის

ფარგლებში $f(x) \le 0$, ამ დროს საქმე გვექნება ფიგურასთან, რომლის ნაწილი ზემოდან იქნება შემოსაზღვრული ფუნქციის გრაფიკით, ნაწილი- ქვემოდან. ასეთ დროს რიმანის ჯამის ზოგიერთი ან ყველა შესაკრები იქნება უარყოფითი. მაგრამ ფართობი დადებითი სიდიდეა, ამიტომ აღწერილი ფიგურის, რომელსაც ასევე მრუდწირული ტრაპეცია ეწოდება, ფართობი D შეიძლება გამოვსახოთ ფორმულით

$$D = \int_a^b | f(x) | \, dx \quad . \qquad (1)$$



ნახ. 3



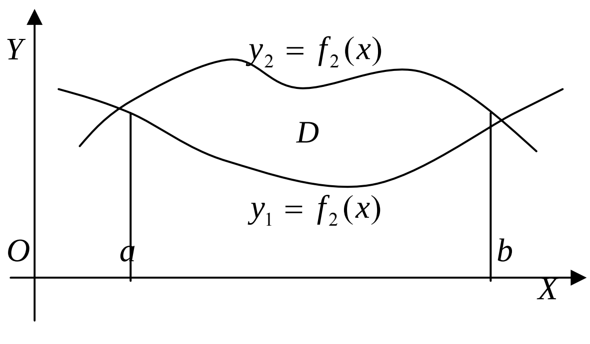
ნახ. 4

ახლა განვიხილოთ ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x = a$ და $x = b$ წრფეებით, ზემოდან $y_1 = f_1(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან $y_2 = f_2(x)$ ფუნქციის გრაფიკით.

ასეთი ფიგურა გამოსახულია ნახაზზე (ნახ.4) მისი ფართობი წარმოადგენს ორი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობთა სხვაობას და გამოისახება ასე:

$$D = \int_a^b | f_1(x) - f_2(x) | \, dx . \qquad (2)$$

ანალოგიურად გამოისახება იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია მხოლოდ ორი წირით, რომლებიც $y_1 = f_1(x)$ და $y_2 = f_2(x)$ ფუნქციების გრაფიკებს წარმოადგენენ (ნახ.5).



ნახ.5

მაგალითი 1. გმოვთვალოთ $y = \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$ ფუნქციის გრაფიკით და OX ღერძით შე მოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ამოხსნა:

როდესაც $0 \le x \le \pi$, ფუნქცია $\sin x \ge 0$, როდესაც $\pi \le x \le 2\pi$, ფუნქცია $\sin x \le 0$, ამიტომ

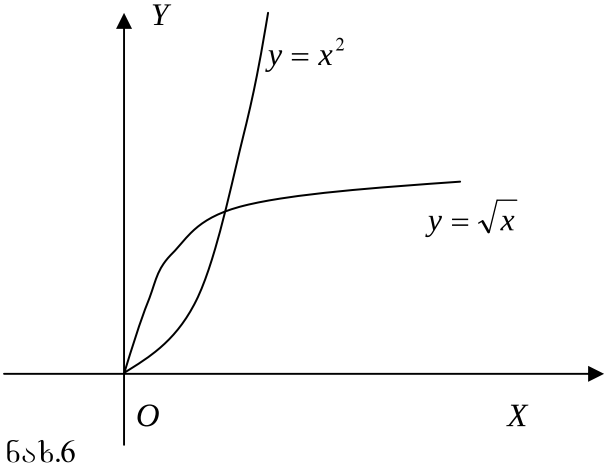
$$D=\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}-\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=1+1+1+1=4\,.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია პარაბოლებით: $y_1=x^2$ და $y_2=\sqrt{x}$.

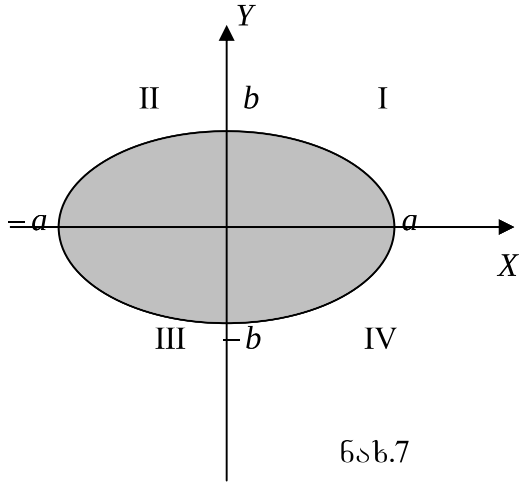
ამოხსნა:

ვიპოვოთ ამ პარაბოლათა ურთიერთგადაკვეთის წერტილები. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლება

$x^2=\sqrt{x}$. მივიღებთ $x_1=0, x_2=1$. ფიგურა, რომლის ფართობსაც ვეძებთ მოცემულია ნახაზზე (ნახ.6).



ნახ.6



ნახ.7

მისი ფართობი იქნება

$$D=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\,.$$

ვთქვათ მრუდწირული ტრაპეციის ზემოდან შემომსაზღვრელი წირი მოცემულია პარამეტრული ფორმით: $x=x(t), y=y(t),$ სადაც $t_0\le t\le T$. მაშინ (1) ფორმულა x ცვლადის $x=x(t)$ გარდაქმნის შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$D=\int_{t_0}^{T}y(t)x'(t)dt\,.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

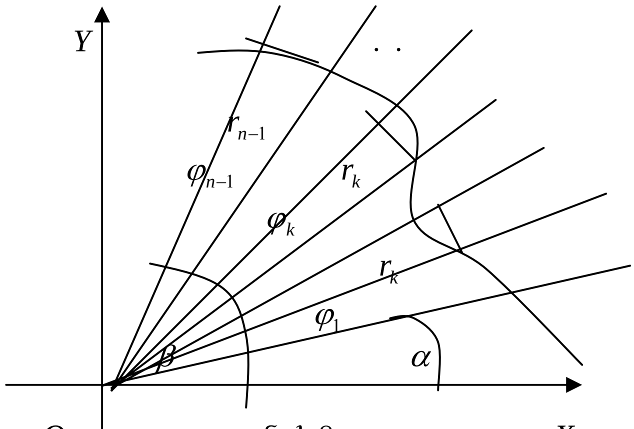
ამოხსნა: ჩავწეროთ ელიფსის განტოლება პარამეტრულად, გვექნება: $x=a\cos t, y=b\sin t$, სადაც $0\le\alpha\le 2t$. რადგანაც ელიფსი სიმეტრიული ფიგურაა(ნახ.7), ჯერ გამოვთვალოთ ელიფსის იმ ნაწილით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, რომელიც იმყოფება საკოორდინატო სიბრტყის I მეოთხედში

$$\frac{1}{4}D=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}ydx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t(-a\sin t)dt=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{}\sin^2 tdt=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

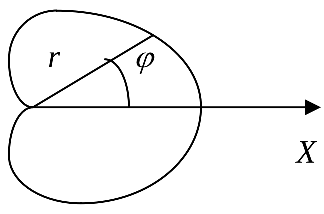
$$=-ab\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}dt+\frac{ab}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos 2tdt=\frac{-ab}{2}t+\frac{ab}{4}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{\pi ab}{4}.$$

საბოლოოდ ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი $D=\pi ab$.

მაგალითი 4. განვიხილოთ ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია ერთი წერტილიდან გამოსული ორი სხივით და ამ სხივების თითოჯერ გადამკვეთი წირით. ასეთ ფიგურას **მრუდწირული სექტორი** ეწოდება (ნახ.8 ა).
ამოხსნა:
ვთქვათ, სხივები, რომლებიც შემოსაზღვრავენ მრუდწირულ სექტორს გამოდიან კოორდინატთა სათავიდან და შეადგენენ OX ღერძთან, შესაბამისად, კუთხეებს: α და β , $\alpha < \beta$.
გამოვიყენოთ კოორდინატთა პოლარული სისტემა და სექტორის შემომსაზღვრელი წირის განტოლება გამოვსახოთ პოლარულ კოორდინატებში: $r = r(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$.



ნახ.8.ა



ნახ.8.ბ

გამოვთვალოთ მიახლოებით სექტორის ფართობი. ამისათვის დავყოთ სექტორი n ნაწილად
სხივებით. ვთქვათ, φ_k წარმოადგენს კუთხეს k ნომრის სხივსა და OX ღერძს შორის, ხოლო $\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k, k = 0,1,2,...,n-1, \varphi_0 = \alpha, \varphi_n = \beta$. ამგვარად, მივიღებთ მცირე მრუდწირულ სექტორებს, რომლებიც შეიძლება ჩავთვალოთ წრიულ სექტორებად. თითოეული ამ წრიული სექტორის ფართობი ტოლია:

$$\frac{1}{2} r_k^2 \Delta\varphi_k = \frac{1}{2}[r(\varphi_k)]^2 \Delta\varphi_k .$$

აქედან გამომდინარე, მთელი მრუდწირული სექტორის ფართობი მიახლოებით ტოლი იქნება სიდიდის:

$$D = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}[r(\varphi_k)]^2 \Delta\varphi_k ,$$

რომელიც წარმოადგენს რიმანის ჯამს $\frac{1}{2} r(\varphi)$ ფუნქციისათვის $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე.
ცხადია, როდესაც $n \to \infty$, უკანასკნელი ტოლობის სიზუსტე იზრდება, ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$D = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi . \qquad (3)$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია **კარდიოიდით** ანუ წირით, რომლის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში არის: $r = a(1 + \cos\varphi)$ (ნახ. 8 ბ).
ამოხსნა: ასეთი ფართობის გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ (3)

ფორმულა, გვექნება:

$$D=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi=$$

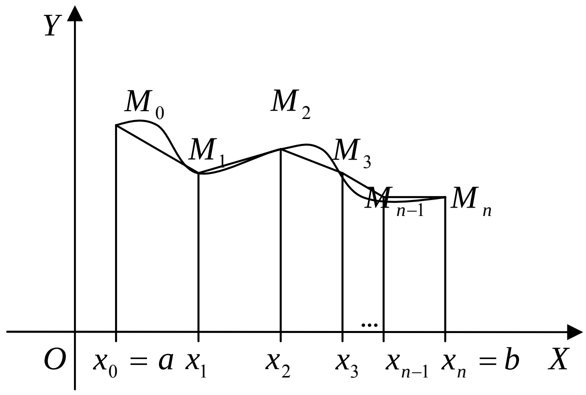
$$=\frac{1}{2}a^2(\int_0^{2\pi}d\varphi+2\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi+\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi)=\pi a^2+0+\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\pi a^2+\frac{1}{4}2\pi a^2+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi d2\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

5.2 წირის რკალის სიგრძის გამოთვლა

ვთქვათ, წირი მოცემულია განტოლებით $y=f(x)$, სადაც $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და წარმოებადია $[a,b]$ სეგმენტზე.

დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით: $a=x_0,x_1,x_2,...x_k,...,x_n=b$. აღვნიშნოთ x_k აბსცისის შესაბამისი წერტილი წირზე M_k-ით, $M_k(x_k,f(x_k))$ (ნახ.9).



ნახ.9

ამგვარად, ავაგეთ ტეხილი $M_0M_1...M_n$. მისი თითოეული რგოლის სიგრძე

$$|M_kM_{k+1}|=\sqrt{|x_{k+1}-x_k|^2+|f(x_{k+1})-f(x_k)|^2}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k,$$

$$\Delta y_k=f(x_{k+1})-f(x_k).$$

გვექნება:

$$|M_kM_{k+1}|=\sqrt{\Delta x_k{}^2+\Delta y_k{}^2}.$$

აქედან

$$|M_kM_{k+1}|=\sqrt{1+(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k})^2}\Delta x_k.$$

თუ გამოვიყენებთ ლაგრანჟის თეორემას, სასრული ნაზრდის შესახებ $[x_k,x_{k+1}]$მონაკვეთზე, გვექნება:

$$\Delta y_k=f'(\xi_n)\Delta x_k,$$

სადაც $x_k\le\xi_k\le x_k+\Delta x_k=x_{n+1}$.

აქედან ვღებულობთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$|M_kM_{k+1}|=\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k\,.$$

მთელი ტეხილის სიგრძე

$$l_n=\sum_{k=0}^{n-1}|M_kM_{k+1}|=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+[f(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k\,. \qquad (1)$$

(1) ფორმულის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს რიმანის ინტეგრალურ ჯამს $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ ფუნქციისთვის $[a,b]$ სეგმენტზე.

თუ $n\to\infty$ და $\Delta x_k\to 0$, როდესაც $k=0,1,2,...,n-1$. მაშინ რიცხვს

$$L=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_k\to 0}} l_n\,,$$

ეწოდება $y=f(x)$ განტოლებით განსაზღვრული წირის M_0M_n რკალის სიგრძე.

თუ (1) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე მივიღებთ:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,. \qquad (2)$$

თუ წირი მოცემულია პარამეტრული განტოლებებით $x=x(t),y=y(t)$, სადაც $(x(t_0),y(t_0))$ კოორდინატების მქონე წერტილი შეესაბამება M_0 წერტილს, $(x(T),y(T))$

კოორდინატების მქონე წერტილი კი M_n წერტილს, ასეთ შემთხვევაში რკალის სიგრძე

$$L=\int_{t_0}^{T}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\,. \qquad (3)$$

თუ წირი მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში, განტოლებით $r=r(\varphi)$, სადაც $\varphi=\alpha$ შეესაბამება M_0 წერტილს, $\varphi=\beta$ კი შეესაბამება M_n წერტილს, მაშინ თუ t პარამეტრის ნაცვლად გამოვიყენებთ φ პარამეტრს, გვექნება:

$$x(\varphi)=r(\varphi)\cos\varphi, y(\varphi)=r(\varphi)\sin\varphi\,.$$

აქედან

$$[x'(\varphi)]^2+[y'(\varphi)]^2=[r'(\varphi)\cos\varphi]^2-2r'(\varphi)\cos\varphi\cdot r(\varphi)\sin\varphi+[r(\varphi)\sin\varphi]^2=$$

$$=[r'(\varphi)\sin\varphi]^2+2r'(\varphi)\sin\varphi\cdot r(\varphi)\cos\varphi+[r(\varphi)\cos\varphi]^2=[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2\,.$$

მაშასადამე

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi\,. \qquad (4)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ წირის სიგრძე, რომელიც მოცემულია განტოლებით $y=x^{\frac{3}{2}}$, თუ x იცვლება კოორდინატთა სათავიდან $x=5$ წერტილამდე.

ამოხსნა: $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, მაშინ $\sqrt{1+[y']^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x=\frac{1}{2}}\sqrt{4+9x}$. (3) ფორმულიდან გვექნება:

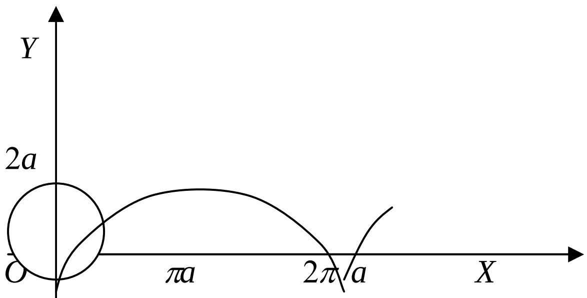
$$L=\frac{1}{2}\int_0^5\sqrt{4+9x}dx=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{9}(4+9x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^5=\frac{1}{27}(49^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}})=\frac{335}{27}\,.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ავტომობილის a რადიუსის მქონე ბორბლის რაიმე წერტილის მიერ, ბორბლის ერთჯერ შემოტრიალებისას, შემოწერილი რკალის სიგრძე.

ამოხსნა: ბორბლის ტრიალის დროს მისი რაიმე წერტილი მოძრაობს წირზე, რომელსაც **ციკლოიდა** ეწოდება(ნახ.10). მისი პარამეტრული განტოლებაა:

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),$$

სადაც t პარამეტრი იცვლება $[0.2\pi]$ შუალედში.



ნახ. 10

$x'(t) = a(1 - \cos t), y' = a(-\sin t)$, ამიტომ საძიებელი რკალის სიგრძე ტოლია

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2(-\sin t)^2}\, dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 2a(-2\cos\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = 8a$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ კარდიოიდის $r = a(1 + \cos\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi$ რკალის სიგრძე(ნახ.8 ბ) ამოხსნა: გამოვიყენოთ (4) ფორმულა

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2(-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\varphi} \sqrt{a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi^2}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} 4\,|\cos\frac{\varphi}{2}|\, d\frac{\varphi}{2} = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2} + 4\int_{\pi}^{2\pi} -\cos\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2} =$$

$$4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} - 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = 8a.$$

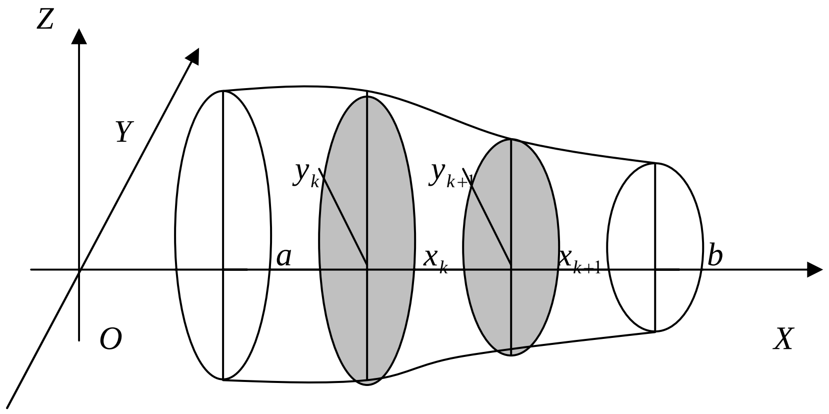
5.3 ბრუნვითი სხეულის მოცულობა

ვთქვათ, წირი მოცემული განტოლებით $y = f(x)$, სადაც x ცვლადი ღებულობს მნიშვნელობებს $[a,b]$ სეგმენტიდან, ბრუნავს OX ღერძის გარშემო. გამოვთვალოთ მოცულობა სხეულისა, რომელიც შემოსაზღვრულია წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირისა და $x = a, y = b$ სიბრტყეებით.

დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით: $a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots, x_n = b$. ამ აბსცი- სების შესაბამისი ორდინატები აღვნიშნოთ $y_k, y_k = f(x_k)$.

OX ღერძის დაყოფის ყოველ წერტილში გავავლოთ ამ ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყეები. ეს სიბრტყეები დაყოფენ სხეულს ფენებად(ნახ.11). თითოეული ეს ფენა შეიძლება მიახლოებით ჩავთვალოთ წრიულ ცილინდრად. ამ ცილინდრის სიმაღლეა: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, ხოლო ფუძეთა რადიუსი- y_k. ცილინდრის მოცულობა იქნება:

$$\Delta v_k = \pi y_k^2 \Delta x_k.$$



ნახ.11

მთელი სხეულის V მოცულობისათვის კი ადგილი ექნება მიხლოებით ტოლობას:

$$V \approx \sum_{0}^{n-1} \pi y_k^2 \Delta x_k .$$

ბუნებრივია სხეულის მოცულობა იქნება უკანასკნელი მიახლოებითი ტოლობის მარჯ- ვენა მხარის ზღვარი, როდესაც დაყოფის წერტილთა რაოდენობა მიისწრაფვის უსასრულობისკენ ისე, რომ დაყოფით მიღებული მონაკვეთების მაქსიმალური სიგრძე Δx_k მისწრაფვის ნულისაკენ. მაშასადამე

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{0}^{n-1} \pi y_k^2 \Delta x_k .$$

აქედან

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \quad \text{ანუ} \quad V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx . \qquad (1)$$

თუ წირი მოცემულია პარამეტრული განტოლებებით $x = x(t), y = y(t)$, სადაც $t_0 \le t \le T$.

ასეთ შემთხვევაში

$$V = \pi \int_{t_0}^{T} [y(t)]^2 x'(t) dt . \qquad (2)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული **ელიფსოიდით** შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

ამოხსნა: ელიფსის განტოლებიდან $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, როდესაც $-a \le x \le a$. (1) ფორმულით მივიღებთ:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(\int_{-a}^{a} a^2 dx - \int_{-a}^{a} x^2 dx\right) = 2\pi a b^2 - \frac{\pi b^2}{a^2}\frac{1}{3}x^3\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2 .$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ იგივე ელიფსის მიერ OY ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ელიფსოიდით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

ამოხსნა: ასეთ შემთხვევაში, ელიფსის განტოლებიდან $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$, როდესაც $-b \le x \le b$. სხეულის მოცულობა იქნება:

$$V = \pi\int_{-b}^{b}\frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)dy = \frac{4}{3}\pi a^2 b\,.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ ციკლოიდის პირველი თაღის OY ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ბრუნვითი ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

ამოხსნა: ციკლოიდის პარამეტრული განტოლებაა

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

ციკლოიდის პირველი თაღი აღიწერება t პარამეტრის ცვლილებით 0-დან 2π-მდე.

ამიტომ საძიებელი მოცულობა, (2) ფორმულის თანახმად, ტოლია

$$V = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3[\int_0^{2\pi}(1-3\cos t)dt +$$

$$+\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}(1+\cos 2t)dt - \int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t] = \pi a^3[t - 3\sin t + \frac{3}{2}t +$$

$$+\frac{3}{4}\sin 2t - \sin t + \frac{1}{3}\sin^3 t]\Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ კარდიოიდის პოლარული ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა(ნახ.8 ა).

ამოხსნა: კარდიოიდის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში არის:

$$r = a(1+\cos\varphi)\,.$$

მისი პარამეტრული განტოლება იქნება:

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

გამოვიყენოთ (2) ფორმულა, გვექნება:

$$V = \pi\int_0^{2\pi}\{a^2(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi[a(-\sin\varphi)\cos\varphi - a(1+\cos\varphi)\sin\varphi]\}d\varphi =$$

$$= -\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3\sin^3\varphi d\varphi - \pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi\sin\varphi\cos\varphi d\varphi =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^4(1-\cos\varphi)d\cos\varphi +$$

$$+\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3(1-\cos\varphi)\cos\varphi d\cos\varphi = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^4(2-(1+\cos\varphi))d(1+\cos\varphi) +$$

$$+\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3(2-(1+\cos\varphi))(-1+(1+\cos\varphi))d(1+\cos\varphi).$$

მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $t=1+\cos\varphi$ და გავითვალისწინოთ, რომ ამ გარდაქმნის დროს, როდესაც φ ცვლადი იზრდება t ცვლადი ღებულობს მნიშვნელობას 2-დან 0-მდე. ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ (2) ფორმულაში t პარამეტრი იცვლება $t_0 \le t \le T$ შუალედში, გვექნება:

$$V=-\pi a^3\int_2^0 t^4(2-t)dt-\pi a^3\int_2^0 t^3(2-t)(-1+t)dt=-\pi a^3(\int_2^0 2t^4dt-\int_2^0 t^5dt-$$

$$-\int_2^0 2t^3dt+\int_2^0 2t^4dt+\int_2^0 t^4dt-\int_2^0 t^5dt)=$$

$$-\pi a^3(2\frac{t^5}{5}\Big|_2^0-\frac{t^6}{6}\Big|_2^0-2\frac{t^4}{4}\Bigg|_2^0+2\frac{t^5}{5}\Big|_2^0+\frac{t^5}{5}\Bigg|_2^0-\frac{t^6}{6}\Big|_2^0)=$$

$$=-\pi a^3(-2\cdot\frac{32}{5}+\frac{64}{6}+2\cdot\frac{16}{4}-2\cdot\frac{32}{5}-\frac{32}{5}+\frac{64}{6})=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

5.4. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი

ვთქვათ, წირი მოცემული განტოლებით $y=f(x)$, სადაც x ცვლადი ღებულობს მნიშვ- ნელობებს $[a,b]$ სეგმენტიდან და $f(x)$ უწყვეტად წარმოებადია, ბრუნავს OX ღერძის გარშემო. გამოვთვალოთ წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=a, y=b$ სიბრტყეებით.

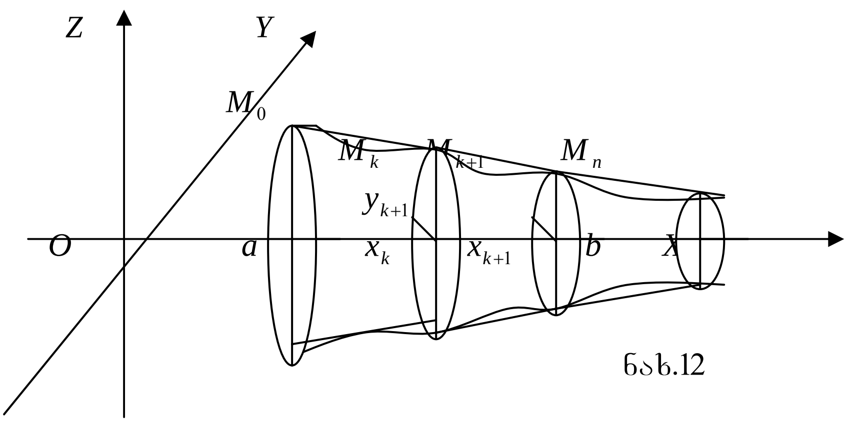
დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით: $a=x_0,x_1,x_2,...x_k,...,x_n=b$. ამ აბსცისების შესაბამისი ორდინატები აღვნიშნოთ $y_k, y_k=f(x_k)$, ხოლო (x_k,y_k) კოორდინატების მქონე წერტილი M_k-ით $i=0,1,2,...,n$.

თუ ყოველ რკალს M_kM_{k+1} შევცვლით M_kM_{k+1} მონაკვეთით მაშინ $M_0M_1M_2...M_n$ ტეხილის ბრუნვით მივიღებთ ზედაპირს, რომელიც შედგება წაკვეთილი კონუსების გვერდითი ზედაპირებისგან(ნახ.12). ეს გვერდითი ზედაპირები გამოითვლება ფორმულით:

$$2\pi\frac{y_k+y_{k+1}}{2}|M_kM_{k+1}|,$$

სადაც $|M_kM_{k+1}|$ ტეხილის ერთი M_kM_{k+1} მონაკვეთის სიგრძეა, მაგრამ 5..2 ქვეთავიდან ვიცით, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$|M_kM_{k+1}|=\sqrt{1+[f'(x_k)]}\Delta x_k=\sqrt{1+[y_k']^2}\Delta x_k.$$



ნახ.12

$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$, მგრამ $f(x)$ უწყვეტია, ამიტომ, როდესაც $\Delta x_k \to 0$ ასევე გვაქვს, რომ $\Delta y_k \to 0$. აქედან გამომდინარე, როდესაც Δx_k საკმაოდ მცირეა, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $y_k \approx y_{k+1}$. ამ ფაქტის გათვალისწინებით:

$$2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} | M_k M_{k+1} | \approx 2\pi y_k \sqrt{1+[y_k']^2} \Delta x_k .$$

აქედან, ბრუნვითი ზედაპირის საძიებელი D ფართობისთვის გვექნება მიახლოებითი ტოლობა:

$$D \approx \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi y_k \sqrt{1+[y_k']^2} \Delta x_k , \tag{1}$$

რომლის მარჯვენა მხარეც წარმოადგენს $2\pi y\sqrt{1+[y']^2}$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს. $[a,b]$ სეგმენტზე.

თუ $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფის წერტილების რაოდენობას გავზრდით ისე, რომ მიღებული მცირე სეგმენტების მაქსიმალური სიგრძე შემცირდეს, (1) მიახლოებითი ტოლობის სიზუსტე გაიზრდება. აქედან გამომდინარე თუ გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ:

$$D = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi y_k \sqrt{1+[y_k']^2} \Delta x_k ,$$

საბოლოოდ კი შეგვიძლია დავწეროთ:

$$D = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+[y']^2}\, dx , \tag{2}$$

სადაც $y = f(x)$.

ვთქვათ ახლა წირი მოცემულია პარამეტრულად $x = x(t), y = y(t)$, სადაც $(x(t_0), y(t_0))$ კოორდინატების მქონე წერტილი შეესაბამება M_0 წერტილს, $(x(T), y(T))$
კოორდინატების მქონე წერტილი კი M_n წერტილს. 5.2 ქვეთავიდან გავიხსენოთ ფორმულა:

$$| M_k M_{k+1} | = \sqrt{{\Delta x_k}^2 + {\Delta y_k}^2} .$$

გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე t პარამეტრის Δt_k ნაზრდზე, მივიღებთ:

$$\frac{[M_k M_{k+1}]}{\Delta t_k} = \sqrt{\frac{\Delta x_k^2}{\Delta t_k^2} + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta t_k^2}} .$$

გადავიდეთ ამ ტოლობის ორივე მხარეს ზღვარზე როდესაც $\Delta t_k \to 0$ მივიღებთ

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} \frac{[M_k M_{k+1}]}{\Delta t_k} = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sqrt{\frac{\Delta x_k^2}{\Delta t_k^2} + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta t_k^2}} .$$

სიდიდეს

$$(\lim_{\Delta t_k \to 0} \frac{[M_k M_{k+1}]}{\Delta t_k}) \Delta t_k$$

უწოდებენ წირის **რკალის დიფერენციალს** M_k წერტილში და აღნიშნავენ ds სიმბოლოთი. ცხადია, $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt, dt = \Delta t$. აქედან გამომდინარე, პარამეტრულად მოცემული წირის რკალის სიგრძის, ჩვენთვის კარგად ცნობილი, ფორმულა ასედაც ჩაიწერება:

$$L = \int_{t_0}^{T} ds .$$

წრის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა კი ასე:

$$D = 2\pi \int_{t_0}^{T} y(t) ds . \qquad (3)$$

(3) ფორმულა იგივეა, რაც

$$D = 2\pi \int_{t_0}^{T} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt . \qquad (4)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ ელიფსის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა: ელიფსის განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 .$$

მიღებული ტოლობის გაწარმოებით

$$2yy' = -2\frac{b^2}{a^2} x , yy' = -\frac{b^2}{a_2} x .$$

აქედან

$$y\sqrt{1 + [y']^2} = \sqrt{y^2 + [yy']^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^4}{a^4} x^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2} .$$

ელიფსის ექსცენტრისიტეტი $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$.

საძიებელი ფართობი იქნება

$$D = 2\pi \frac{b}{a} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx = 4\pi \frac{b}{a} \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon_2 x^2 dx} = 4\pi \frac{b}{a} (\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon} \arcsin \frac{\varepsilon x}{a})\Big|_0^a =$$

$$2\pi \frac{b}{a} (a\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} + a^2 \arcsin \varepsilon) = 2\pi ab(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \arcsin \varepsilon).$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ პარამეტრულად მოცემული

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),$$

ციკლოიდის პირველი თაღის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა: ციკლოიდის(ნახ.9) პირველი თაღი აღიწერება t პარამეტრის ცვლილებით, სეგმენტზე $[0,2\pi]$.

$$y = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2 \frac{t}{2} \; x'(t) = a - a\cos t , \; y'(t) = a\sin t,$$

$$ds = \sqrt{a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t dt} = \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos t dt} =$$

$$= \sqrt{2a^2 - 2a^2 (1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}) dt} = \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} dt} = 2a \sin \frac{t}{2} dt.$$

(3) ფორმულით საძიებელი ფართობი:

$$D = 2\pi\int_0^{2\pi} 2a\sin^2\frac{t}{2}2a\sin\frac{t}{2}dt = 2\pi\int_0^{2\pi} 4a^2\sin^3\frac{t}{2}dt = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 udu =$$

$$= 16\pi a^2(\frac{\cos^3 u}{3} - \cos u)\Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2,$$

$$u = \frac{t}{2}.$$

5.5. მექანიკური და ფიზიკური სიდიდეების გამოთვლა
5.5.1. წირის სტატიკური მომენტი და სიმძიმის ცენტრი

როგორც ცნობილია, m მასის მატერიალური წერტილის **სტატიკური მომენტი** I_R რაი- მე R ღერძის მიმართ ეწოდება ამ წერტილის მასისა და წერტილიდან ღერძამდე d მანძილის ნამრავლს $I_L = md$. მატერიალურ წერტილთა სისტემის სტატიკური მომენტი კი ამ სისტემაში შემავალი ყველა წერტილის სტატიკური მომენტების ჯამს.

ვთქვათ, $y = f(x)$ განტოლებით მოცემულია მატერიალური წირი AB, რომელზეც მასა გადანაწილებულია $\rho(x)$ სიმკვრვით წირის ყველა წერტილში. დავყოთ AB წირი n ნაწილად წერტილებით:

$$A = M_0, M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-1}, M_n = B,$$

დაყოფით მიღებული თითოეული რკალის სიგრძე აღვნიშნოთ s_k სიმბოლოთი

$$k = 0,1,2,...n-1.$$

როგორც 5.2. ქვეთავიდან ვიცით

$$s_k \approx \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2},$$

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, სადაც (x_k, y_k) წარმოადგენს $M_k k = 0,1,2,...,n$ წერტილის კოორდინატებს. თუ ჩავთვლით, რომ წირის დაყოფის წერტილთა რაოდენობა საკმაოდ
დიდია, წირის თითოეული $M_k M_{k+1}$ რკალი შეიძლება ჩაითვალოს მატერიალურ წერტილად. აქედან გამომდინარე, მისი მასა მიახლოებით იქნება $\rho(x_k)s_k$, ხოლო მისი სტატიკური მომენტი OX ღერძის მიმართ $y_k\rho(x_k)s_k$. მთელი წირის სტატიკური მომენტი I_X, OX ღერძის მიმართ, მიახლოებითი გამოითვლება, როგორც, მისი შემადგენელი ელემენტარული მატერიალური რკალების სისტემის, სტატიკური მომენტების ჯამი:

$$I_X \approx \sum_{k=0}^{n-1} y_k\rho(x_k)s_k.$$

ტოლობა ზუსტი იქნება თუ გადავალთ ინტეგრალზე, მივიღებთ:

$$I_X = \int_a^b y(x)\rho(x)\sqrt{1+[y(x)]^2 dx}, \qquad (1)$$

სადაც $a = x_0, b = x_n$.

თუ წირს ჩავწერთ პარამეტრული განტოლებით, სადაც s პარამეტრი იცვლება $[0, L]$ შუალედში, სადაც L წირის სიგრძეა, მაშინ

$$x = x(s), y = y(s),$$

ρ სიმკვრივეც s პარამეტრის ფუნქცია, გვექნება:

$$I_X = \int_0^L y(s)\rho(s)ds\,. \qquad (2)$$

ანალოგიურად AB წირის სტატიკური მომომენტი OY ღერძის მიმართ, იქნება:

$$I_y = \int_{f(a)}^{f(b)} x(y)\rho(y)\sqrt{1+[x(y)]^2 dy}\,, \qquad (3)$$

$$I_y = \int_0^L x(s)\rho(s)ds\,. \qquad (4)$$

მატერიალურ წერტილთა სისტემის **სიმძიმის ცენტრი** ეწოდება წერტილს, რომელშიც სისტემის მთელი ჯამური მასის მოთავსებით იგივე სტატიკური მომენტი ექნება რაიმე R ღერძის მიმართ, რა სტატიკური მომენტიც აქვს სისტემას ამ ღერძის მიმართ.

აქედან გამომდინარე, მატერიალური წირის სიმძიმის ცენტრის $C(\xi,\eta)$ კოორდინატების საპოვნელად შეგვიძლია დავწეროთ განტოლებები:

$$\xi M = I_Y, \eta M = I_X\,, \qquad (5)$$

ამ განტოლებებიდან გვექნება

$$\xi = \frac{I_Y}{M}, \eta = \frac{I_X}{M}\,. \qquad (6)$$

საბოლოოდ

$$\xi = \frac{\int_0^L x(s)\rho(s)ds}{\int_0^L \rho(s)ds}, \quad \eta = \frac{\int_0^L y(s)\rho(s)ds}{\int_0^L \rho(s)ds}, \qquad (7)$$

სადაც $\int_0^L \rho(s)ds$ ინტეგრალით გამოთვლილია მატერიალური წირის M მასა.

ჩავთვალოთ, რომ მატერიალურ წირზე მასა თანაბრადაა გადანაწილებული და სიმკვრივის ფუნქცია $\rho(s)=1$. (6) ტოლობებიდან მეორე გავამრავლოთ 2π სიდიდეზე, მივიღებთ:

$$2\pi\eta M = 2\pi\int_0^L yds\,.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს წირის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობს, მარცხენა მხარეზე $M = L$. აქედან გამომდინარე წირის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი ტოლია ამ წირის სიგრძისა და მისი სიმძიმის ცენტრით შემოწერილი წრეწირის სიგრძის ნამრავლის

$$D = 2\pi\eta L. \qquad (8)$$

ამ ფორმულას **გულდენის პირველი ფორმულა** ეწოდება.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ პარამეტრული განტოლებით მოცემული წირის, რომელსაც **ასტროიდა** ეწოდება, იმ ნაწილის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც განისაზღვრება t პარამეტრის ცვლილებით$[0,\frac{\pi}{2}]$ შუალედში(ნახ.13 ა).

მოხსნა: (8) ფორმულიდან გვექნება: $\eta = \frac{D}{2\pi L}$.

$$D = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)ds = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{[-3a\cos^2 t\sin t]^2 + [3a\sin^2 t\cos t]^2}\,dt =$$

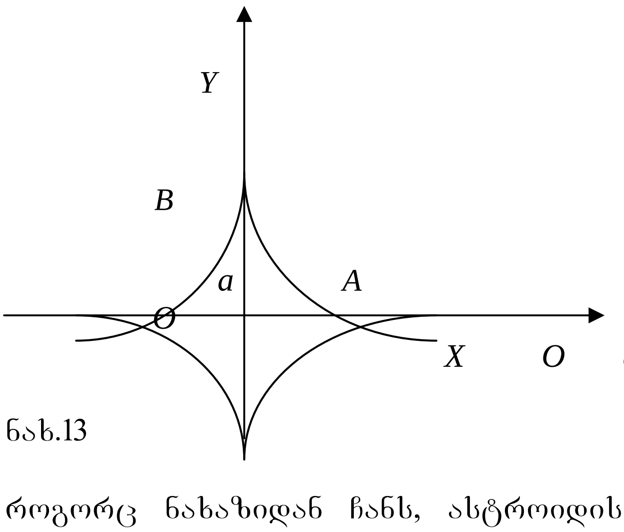
$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin^3 t\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = 6\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t dt = 6\pi a^2(\frac{1}{5}\sin^5 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{5}\pi a^2.$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[-3a\cos^2 t\sin t]^2 + [3a\sin^2 t\cos t]^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}\,dt =$$

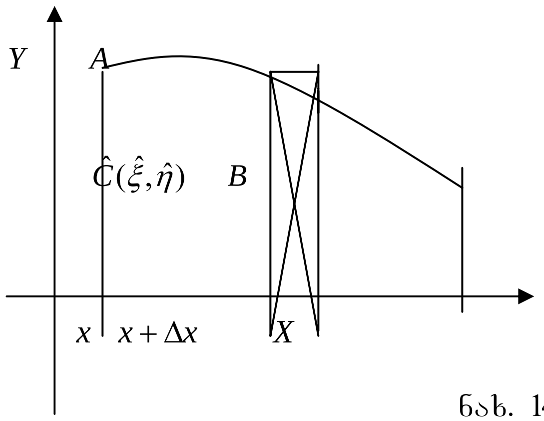
$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt = \frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt = \frac{3}{4}a\int_0^{\pi}\sin u du = \frac{3}{4}a(-\cos u)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}a.$$

.

მაშასადამე $\eta = \frac{2}{5}a.$



ნახ.13



ნახ. 14

როგორც ნახაზიდან ჩანს, ასტროიდის მიერ OY ღერძის გარშემო ბრუნვისას იგივე ფართობის ზედაპირი მიიღება, ამიტომ სიმძიმის ცენტრის აბსცისაც იგივე უნდა იყოს, გვექნება: $\xi = \frac{2}{5}a.$

5.5.2. ბრტყელი ფიგურის სტატიკური მომენტი და სიმძიმის ცენტრი

ვთქვათ მოცემულია მრუდწირული ტრაპეცია(ნახ.13), რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან OX ღერძით, გვერდებიდან $x = a$ და $x = b$ წრფეებით. ვთქვათ, მასა ამ ფიგურაზე თანაბრად არის გადანაწილებული სიმკვრივით $\rho = 1$, ასეთ შემთხვევაში მრუდწირული ტრაპეციის ყოველი ΔD ელემენტის მასა ტოლი იქნება მისი ფართობის.

ამოვჭრათ ტრაპეციიდან ზოლი ფუძით Δx. რადგან Δx მცირეა, ჩავთვალით ეს ზოლი მართკუთხედად(ნახ.14). ვთქვათ, ზოლის ფართობია ΔD. მისი სიმძიმის ცენტრი $\hat{C}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ მდებარეობს მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში. ზოლის სიმაღლეს აღვნიშნოთ y-ით, სიმძიმის ცენტრის ორდინატი-

$\hat{\eta}=\dfrac{1}{2}y$, აბსცისა-

$\hat{\xi}=x+\dfrac{\Delta x}{2}$. ზოლის სტატიკური მომენტი OX ღერძის მიმართ იყოს ΔI_X, ხოლო OY ღე- რძის მიმართ- ΔI_Y. ზოლის მასა იქნება $\Delta D=y\Delta x$. აქედან

$$\Delta I_X\approx\frac{y}{2}y\Delta x,\Delta I_Y\approx y\Delta x(x+\Delta x)=xy\Delta x+\frac{1}{2}y[\Delta x]^2.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ Δx მცირეა, კიდევ უფრო მცირე იქნება სიდიდე $\dfrac{1}{2}[\Delta x]^2$.

ამ ფაქტის გათვალისწინებით მთელი ტრაპეციის სტატიკური მომენტებსათვის გვექნება მიხლოებითი ტოლობები:

$$I_X\approx\sum\frac{y^2}{2}\Delta,I_Y\approx\sum xy\Delta x. \qquad (9)$$

თუ ამ ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta x\to 0$, მვიღებთ უკვე ზუსტ გამოსახულებებს სტატიკური მომენტებისათვის:

$$I_X=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,I_Y=\int_a^b xydx. \qquad (10)$$

ვთქვათ მრუდწირული ტრაპეციის სიმძიმის ცენტრია $C(\xi,\eta)$. სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$\xi M=I_Y,\eta M=I_X.$$

სადაც M ტრაპეციის მასაა. აქედან, საბოლოოდ, სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებისათვის გვექნება:

$$\xi=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\quad \eta=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}. \qquad (11)$$

სადაც, ჩვენ შემთხვევაში, $M=\int_a^b ydx$ ანუ ტრაპეციის მასა მისი ფართობის ტოლია.

უკანასკნელი ტოლობებიდან მეორის ორივე მხარე გავამრავლოთ $2\pi D$ სიდიდეზე, მივიღებთ:

$$2\pi D\eta=\pi\int_a^b y^2dx.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\pi\int_a^b y^2dx$ ტოლია მრუდწირული ტრაპეციის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობისა, მივიღებთ:

$$V=2\pi D\eta. \qquad (12)$$

მიღებულ ფორმულას **გულდენის მეორე ფორმულა** ეწოდება.

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ბრტყელი ფიგურის მასთან თანაუკვეთი ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა ტოლია ამ ფიგურის

ფართობისა და მისი სიმძიმის ცენტრის მიერ ღერძის გარშემო შემოწერილი წრეწირის სიგრძის ნამრავლის.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ციკლოიდის(ნახ.9) პირველი თაღით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრი.

ამოხსნა: ციკლოიდის პარამეტრული განტოლებაა

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

მისი პირველი თაღი აღიწერება t პარამეტრის $[0,2\pi]$ შუალედში ცვლილებით. ჯერ ვიპოვოთ ფართობი:

$$D = \int_0^{2\pi} ydx = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 tdt = \int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt = a^2(1-\sin t)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$2\pi a^2 + \frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a^2}{2} = 3\pi a^2.$$

შემდეგ მოცულობა:

$$V = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3[\int_0^{2\pi}(1-3\cos t)dt +$$

$$+\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}(1+\cos 2t)dt - \int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t] = \pi a^3[t - 3\sin t + \frac{3}{2}t +$$

$$+\frac{3}{4}\sin 2t - \sin t + \frac{1}{3}\sin^3 t]\Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

თუ გამოვიყენებთ გულდენის მეორე ფორმულას, მივიღებთ: $5\pi^2 a^3 = 2\pi 3\pi a^2\eta$. აქედან სიმძიმის ცენტრის ორდინატი

$$\eta = \frac{V}{2\pi D} = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi 3\pi a^2} = \frac{5}{6}a.$$

ციკლოიდის პირველი თაღით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეცია სიმეტრიულ- ია $x = \pi a$ წრფის მიმართ, ამიტომ სიმძიმის ცენტრი ამ წრფეზე მდებარეობს. აქედან გამომდინარე, მისი აბსცისა $\xi = \pi a$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ იმ ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით $y = x^2, y = \sqrt{x}$ (ნახ.7).

ამოხსნა: სტატიკური მომენტების განსაზღვრებიდან და (9), (10) ფორმულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი:

$$\xi = \frac{\int_0^1 x(\sqrt{x}-x^2)dx}{\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx}, \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)^2 dx}{\int_0^1(\sqrt{x}-x^{2)}dx}.$$

$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx = \int_0^1\sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1 + \frac{x^{2+1}}{2+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x(\sqrt{x}-x^2)dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx - \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\Big|_0^1 + \frac{x^{3+1}}{3+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)^2 dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 2x^{\frac{3}{2}}dx + \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}.$$

ამ გამოთვლებიდან გამომდინარე $\xi = \frac{3}{20}, \eta = \frac{3}{20}$.

5.5.3. ცვლადი სიჩქარით მოძრავი მატერიალური წერტილის მიერ გავლილი მანძილი

ვთქვათ მატერიალური წერტილი მოძრაობს სიჩქარით, რომელიც წარმოადგენს დროის უწყვეტ ფუნქციას $v = v(t)$ და საჭიროა გავიგოთ მის მიერ დროის T_0 მომენტიდან T_1 მომენტამდე გავლილი მანძილი S.

დავყოთ$[T_0, T_1]$ შუალედი n ნაწილად დროის მომენტებით

$T_0 = t_0, t_1, t_2, ...t_k, ..., t_n = T_1$. მა-
ტერიალური წერტილის მიერ დროის მცირე $[t_1, t_{t+1}]$ მონაკვეთში გავლილი მანძილი
მიახლოებით ტოლი იქნება სიდიდის, სადაც $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$. აქედან გამომდინარე, მთელ $[T_0, T_1]$ მონაკვეთში გავლილი მანძილისათვის გვექნება მიახლოებითი ტოლობა:

$$S \approx \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i) v(t_i) \,. \tag{13}$$

რაც უფრო მეტ ნაწილად დავყოფთ $[T_0, T_1]$ შუალედს, ისე რომ დაყოფით მიღებული მონაკვეთების მაქსიმალური სიგრძე $\max \Delta_i$ მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, (13) ტოლობის სიზუსტე თანდათან უფრო გაიზრდება. ამიტომ როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევებშია, ადგილი ექნება ზუსტ ტოლობას:

$$S = \int_{T_0}^{T_1} v(t)dt \,. \tag{14}$$

(14) ფორმულიდან შეიძლება განვსაზღვროთ საშუალო სიჩქარე:

$$\bar{v} = \frac{\int_{T_0}^{T_1} v(t)dt}{T_1 - T_0}.$$

ანალოგიური ფორმულა გვექნება დროის T_0 მომენტიდან T_1 მომენტამდე ცვლადი აჩქარებით მოძრავი მატერიალური წერტილის სიჩქარის ნაზრდის გამოსათვლელად:

$$\Delta v = \int_{T_0}^{T_1} a(t)dt \,,$$

სადაც $a(t)$ დროში ცვლადი აჩქარებაა.

რაც შეეხება მატერიალური წერტილის სიჩქარეს T_1 მომენტში იგი განისაზღვრება ტოლობით:

$$v(T_1) = v(T_0) + \Delta v = v(T_0) + \int_{T_0}^{T_1} a(t)dt\ . \qquad (15)$$

5.5.4 განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

(13) ფორმულის ანალოგიურ ფორმულებთან გვექნება საქმე, როდესაც გვინდა გამოვთვალოთ **საწარმოს მოგება** ან **გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა** დროის T_0 მომენტიდან T_1 მომენტამდე:

$$P = \int_{T_0}^{T_1} M(t)dt\ ,$$

სადაც $M(t)$ დროის t მომენტში მიღებული მოგებაა ან საწარმოს მიერ დროის t მომენტში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა(სიმძლავრე).

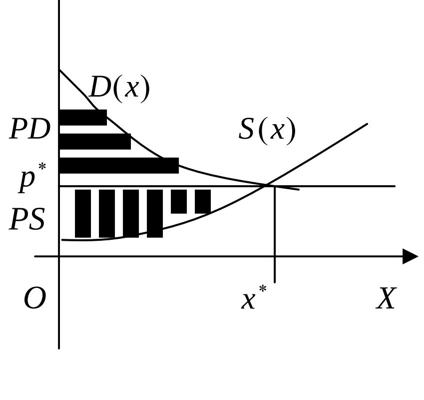
(15) ფორმულის ანალოგიურ ფორმულასთან გვექნება საქმე თუ გვინდა გამოვთვალოთ **საწარმოს შემოსავალი** ან **საწარმოო ხარჯების** რაოდენობა დროის T_1 მომენტამდე:

$$R(T_1) = R(T_0) + \int_{T_0}^{T_1} N(t)dt\ ,$$

სადაც $N(t)$ შემოსავლის ან საწარმოო ხარჯების ზრდის სიჩქარეა დროის t მომენტში, $R(T_0)$ კი- დროის T_0 მომენტამდე მიღებული შემოსავალი ან გაწეული ხარჯები. ვთქვათ, ახლა $N_1(t)$ საწარმოს შემოსავლის ზრდის სიჩქარეა, $N_2(t)$ კი- ხარჯების ზრ-დის სიჩქარეა, მაშინ, სანამ $N_1(t) \geq N_2(t)$, საწარმო იმუშავებს მოგებაზე, დროის ეს ინტერვალი იქნება $[0, T^*]$, სადაც T^* დროის ის მომენტია, როდესაც $N_1(t) = N_2(t)$. აქედან გამომდინარე, საწარმოს **მაქსიმალური მოგება**

$$L = \int_0^{T^*} [N_1(t) - N_2(t)]dt\ .$$

ფუნქციას $p = D(x)$, სადაც p რაიმე პროდუქციის საცალო ფასია, ხოლო x იმ მომხ-მარებელთა რაოდენობა, რომელთაც სურთ ამ ფასად შეიძინონ პროდუქციის ერთეულილი. ამ ფუნქციას **მოთხოვნის ფუნქცია** ეწოდება, ხოლო ფუნქციას $p = S(x)$, სადაც x აღნიშნული პროდუქციის იმ მწარმოებლთა რაოდენობაა, რომელთაც სურთ p ფასად გაყიდონ პროდუქციის ერთეული, **მიწოდების ფუნქცია**. წერტილს კოორდინატებით(x^*, p^*) წონასწორობის **ბაზრის წერტილი** ეწოდება (ნახ.15). ცხადია, ბაზარზე **წონასწორობის** მიღწევამდე, **ჭარბი მოთხოვნის** რაოდენობა PD და **ჭარბი პროდუქციის** რაოდენობაPS შესაბამისად, გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:



ნახ.15

$$PD=\int_0^{x^*}(D(x)-p^*)dx,\ \ PS=\int_0^{x^*}(p^*-S(x))dx$$

6. სავარჯიშოები 1-ლი თავისათვის

I გამოთვალეთ ინტეგრალები: 1) $\int_1^2 x^2dx$, 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x^2+\frac{1}{x^2})dx$, 3) $\int_1^4\sqrt{x}dx$, 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4xdx$, 5) $\int_0^{\pi}\sin 2xdx$,6) $\int_0^2 f(x)dx$, თუ $f(x)=\begin{cases}x^2, 0\le x<1,\\ \sqrt{x}, 1\le x\le 2.\end{cases}$, 7) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx$, 8) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, 9) $\int_o^1 e^{2x}dx$, 10) $\int_1^4\frac{e^x}{e^x-1}dx$, 11) $\int_0^1 e^x(e^x-1)dx$, 12) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$, 13) $\int_0^1\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$, 14) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2dx}$, 15) $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, 16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos xdx$, 17) $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$, 18) $\int_0^1 xe^xdx$, 19) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin xdx$, 20) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\sqrt{x}dx$, 21) $\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx$, 22) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{\sin^2 x}$. II.გამოვთვალოთ შემდეგი წირებითშემოსაზღვრულ ბრტყელ ფიგურათა ფართობები: ა) $y=6x-x^2, y=0$,ბ) $y=x^2+1, y=0, x=0, x=2$; გ) $y=8+2x-x^2, y=2x+4$, დ) $y=x^2-4x, y=0$, ე) $y=\ln x, y=0, x=2, x=8$, ვ) $y=\sin x, y=\frac{2}{\pi}x$,ზ) $y=\arcsin x, x=\frac{1}{2}, y=0$. III. იპოვეთ რკალების სიგრძეები წერტილებს შორის ა) $y=e^x$, $x=0, x=e$; ბ) $y=\ln x, x=\sqrt{3}, x=\sqrt{8}$; გ) $y=\arcsin(e^{-x}), x=0, x=1$. IV. გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობა: ა) $y=x-x^2, x=0$,OX ღერძის გარშემო; ბ) $y=x^3, x=0, y=1$, OY ღერძის გარშემო; გ) $y=\sin^2 x, x=0, x=\pi$, OX ღერძის გარშემო. V. გამოთვალეთ შემდეგი წირების რკალით ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი: ა) $y=\sin x, x=0, x=\frac{\pi}{2}$, OX ღერძის გარშემო; ბ) $y=e^{-x}, x=0, x=\infty$, OX ღერძის გარშემო; გ) $y=\ln x, y=0, y=-\infty$, OY ღერძის გარშემო.

თავი 2
რიცხვითი მწკრივები
1. ძირითადი ცნებები

ვთქვათ მოცემულია სიდიდეთა რაიმე მიმდევრობა $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$. უსასრულო ჯამს:

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ..., \qquad (1)$$

რომლის შესაკრებებიც მოცემული მიმდევრობის წევრებია **მწკრივი** ეწოდება.

თუ სიდიდეები $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ რიცხვებია, მწკრივს **რიცხვითი მწკრივი** ეწოდება, თუ ფუნქციებია, ფუნქციონალური მწკრივი.

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ რიცხვით მწკრივებს. u_n სიდიდეს მწკრივის ზოგადი წევრი ეწოდება.

განვიხილოთ ჯამები:

$$\begin{aligned} &s_1 = u_1, \\ &s_2 = u_1 + u_2, \\ &s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ &s_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\ &.................................., \\ &s_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n. \end{aligned} \qquad (2)$$

ამ ჯამებს (1) მწკრივის კერძო ჯამები ეწოდება.

განსაზღვრება 2.1. თუ (1) მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობას

$$s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...$$

გააჩნია სასრული ზღვარი, მაშინ მწკრივს ეწოდება **კრებადი**, ხოლო ზღვარს $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ეწოდება **მწკრივის ჯამი.**

თუ კერძო ჯამების მიმდევრობას სასრული ზღვარი არ გააჩნია, მაშინ მწკრივს ეწოდება **განშლადი.**

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ ჩვენთვის კარგად ცნობილი მწკრივის, გეომეტრიული პროგრესიის,

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n + ... \qquad (3)$$

კრებადობის საკითხი.

სკოლის მათემატიკის კურსიდან ვიცით, რომ პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი, როდესაც $q \neq 1$, გამოისახება ფორმულით:

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

აქედან გამომდინარე

$$\lim_{n\to\infty} s^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n}{1 - q}.$$

თუ $|q| < 1$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ და $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1 - q}$. მაშასადამე, თუ $|q| < 1$, (3) მწკრივი კრებადია.

დავუშვათ, $|q| > 1$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ და, აქედან გამომდინარე, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (3) მწკრივი განშლადია.

დავუშვათ, ეხლა $q = 1$, მაშინ (3) მწკრივს ექნება სახე $1 + 1 + 1 + ...$.

ამ მწკრივის კერძო ჯამია $s_n = 1+1+...+1 = n$, $s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, ამგვარად, ასეთ შემთხვევში, (3) მწკრივი განშლადია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა $q = -1$, (3) მწკრივს ექნება სახე $1-1+1-1+...$. ამ მწკრივის კერძო ჯამები, თუ n ლუწია, ტოლია ნულის; ხოლო, თუ n კენტია, მაშინ ეს კერძო ჯამები ტოლია ერთის. ასეთ შემთხვევაში $\lim_{n\to\infty} s_n$ არ არსებობს, მაშასადამე (3) მწკრივი განშლადია.

მწკრივის აღნიშვნისთვის გამოიყენება, აგრეთვე შემოკლებული ჩაწერა:

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

2. კრებადი მწკრივის თვისებები

რიცხვითი მწკრივების თვისებები ჩამოვაყალიბოთ თეორემების სახით.

თეორემა 2.1. თუ მოცემული

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

მწკრივიდან ამოვიღებთ პირველ k წევრს, მაშინ მიღებული მწკრივი

$$u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + ... + u_n + ... = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n \qquad (2)$$

კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ კრებადია მოცემული მწკრივი.

(2) მწკრივს (1) **მწკრივის ნაშთი** ეწოდება.

თეორემა 2.2. თუ მწკრივები

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ...$$

კრებადია და მათი ჯამები ტოლია შესაბამისად A და B, მაშინ მწკრივი, რომელიც მიიღება მოცემული მწკრივების წევრ-წევრად შეკრებით ან გამოკლებით:

$$u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm ... \pm u_n \pm ...,$$

ასევე კრებადია და მისი ჯამი ტოლია $A \pm B$.

თეორემა 2.3. თუ მწკრივი

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

კრებადია და მისი ჯამია A, მაშინ მწკრივი

$$Cu_1 + Cu_2 + Cu_3 + ... + Cu_n + ...,$$

სადაც C რაიმე რიცხვია, ასევე კრებადია და მისი ჯამი ტოლია CA.

შემდეგი თვისება წარმოადგენს მწკრივის კრებადობის აუცილებელ პირობას.

თეორემა 2.4. თუ მწკრივი

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

კრებადია, მაშინ მისი ზოგადი წევრი u_n მიისწრაფვის ნულისკენ n ინდექსის უსასრულო ზრდის დროს ანუ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

ამ თვისებიდან გამომდინარეობს შემდეგი ფაქტი, თუ მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფის ნულისკენ, n ინდექსის უსასრულო ზრდის დროს, მაშინ მწკრივი განშლადია. მაგრამ, მწკრივის ზოგადი წევრის ნულისკენ მისწრაფება ანუ პირობა $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ არ არის საკმარისი მწკრივის კრებადობისთვის. მართლაც განვიხილოთ მწკრივი:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \qquad (3)$$

რომელსაც **ჰარმონიულ მწკრივს** უწოდებენ. ცხადია, მისი ზოგადი წევრისათვის $u_n=\frac{1}{n}$ სრულდება პირობა $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

დავაჯგუფოთ (3) მწკრივის შესაკრებები შემდეგნაირად:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{32}\right)+\ldots. \qquad (4)$$

როგორც ვხედავთ შესაკრებთა თითოეული ჯგუფის ბოლო შესაკრებს აქვს სახე: $\frac{1}{2^n}$ და მეზობელი ჯგუფების ბოლო შესაკრებებს შორის ასეთი სახის რიცხვები არ გვხვდება, ამასთან, რაც უფრო მარცხნივ მდებარეობს შესაკრებთა ჯგუფი, მით მეტია მის ბოლო შესაკრებში მნიშვნელის ხარისხი.

განვიხილოთ მწკრივი

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots, \qquad (5)$$

სადაც

$$v_1=1, v_2=\frac{1}{2}, v_3=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right), v_4=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right),\ldots$$

ადვილია მიხვედრა, რომ ამ მწკრივის თითოეული წევრი v_n პირველის გარდა, შედგბა 2^{n-2} შესაკრებისგან.

განვიხილოთ ასევე მწკრივი

$$w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n+\ldots, \qquad (6)$$

სადაც

$$w_1=1, w_2=\frac{1}{2}, w_3=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right), w_4=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right), w_5=\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right),$$

$$w_6=\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}\right),\ldots.$$

ამ მწკრივის თითოეული წევრისათვის, გარდა პირველისა, გვაქვს $w_n=\frac{1}{2}$.

თუ $n\ge 3$, გვაქვს $v_n>w_n$. აქედან გამომდინარე, (5) და (6) მწკრივების კერძო ჯამებისთვის გვექნება: $s'_n>s''_n$.

$$s''_n=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n-1}=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

აქედან გამომდინარე, გვექნება $\lim_{n\to\infty}s''_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\infty$. რადგან $s'_n>s''_n$, ასევე გვექნება $\lim_{n\to\infty}s'_n=\infty$. მაშასადამე (5) მწკრივი განშლადია.

თუ s_k, $k=1,2,3,\ldots$ (3) მწკრივის კერძო ჯამებია, მაშინ არსებობს ისეთი $k_1,k_2,k_3,\ldots k_n,\ldots$, რომ $s_{k_n}=s'_n$. ამასთან, თუ $n\to\infty$, მაშინ $k_n\to\infty$. მიმდევრობის ზღვრის ერთ-ერთი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ კრებადი მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობა კრებადია. ამიტომ, თუ მიმდევრობა $s_1,s_2,\ldots,s_k,\ldots$ კრებადია, კრებადი უნდა იყოს მისი ქვემიმდევრობაც: $s_{k_1},s_{k_2},\ldots,s_{k_n},\ldots$, მაგრამ $s_{k_n}=s'_n$ და

$\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = \infty$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასდამე (3) მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა განშლადია. მიუხედავად იმისა, რომ (3) მწკრივის ზოგადი წევრი მიისწრაფვის ნულისაკენ, ეს მწკრივი არ არის კრებადი. სე-იგი მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა (თეორემა 2.4) არ ყოფილა საკმარისი მისი კრებადობისთვის.

3. დადებით წევრებიანი რიცხვითი მწკრივის კრებადობის ნიშნები

მწკრივს $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ ეწოდება დადებითწევრებიანი, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობას $u_n \geq 0, n=1,2,3,\ldots,$.

მოვიყვანოთ ასეთი მწკრივების კრებადობის ნიშნები.

1. მწკრივის კრებადობის შედარების ნიშანი. თუ მოცემულია ორი დადებითწევრებიანი მწკრივი

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \tag{1}$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots, \tag{2}$$

რომლებისთვისაც ადგილი აქვს პირობას

$$v_n \leq u_n, n=1,2,3,\ldots$$

მაშინ, თუ კრებადია (1) მწკრივი, კრებადი იქნება (2) მწკრივიც. ასევე, თუ განშლადია (2) მწკრივი, განშლადი იქნება (1) მწკრივიც.

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე შემდეგი მწკრივი:

$$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots \tag{3}$$

ამოხსნა: გამოვიყენოთ შედარების ნიშანი როგორც ცნობილია $\sin x \leq x$, როდესაც $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$. აქედან გამომდინარე, რადგან $0 \leq \dfrac{\pi}{2^n} \leq \dfrac{\pi}{2}, n=1,2,3,\ldots,$ გვექნება

$$\sin\frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2^n}, n=1,2,\ldots.$$

მწკრივი

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\ldots+\frac{\pi}{2^n}+\ldots \tag{4}$$

წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას, $q=\dfrac{1}{2}<1$, ამიტომ იგი კრებადია. შედარების ნიშნიდან გამომდინარე კრებადი იქნება (3) მწკრივიც.

2. მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანი. თუ დადებითწევრებიანი

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

მწკრივისთვის, დაწყებული n ინდექსის(ნომრის) რომელიღაც მნიშვნელობიდან, ადგი-ლი აქვს უტოლობას:

$$\frac{y_{n+1}}{u_n} \leq q < 1,$$

სადაც q დამოკიდებული არაა n-ის მნიშვნელობაზე, მაშინ მოცემული მწკრივი კრებადია.

ასევე, თუ დაწყებული n ინდექსის რომელიღაც მნიშვნელობიდან, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\frac{y_{n+1}}{u_n} > 1,$$

მაშინ მწკრივი განშლადია.

დალამბერის ნიშანი შეიძლება ზღვრული ფორმითაც იქნეს წარმოდგენილი: თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, მაშინ

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$$

მწკრივი კრებადია, როდესაც $q<1$ და განშლადი, როდესაც $q>1$.

თუ $q=1$, მაშინ მწკრივი შეიძლება კრებადი იყოს, შეიძლება განშლადი, ასეთ შემთხვევაში მწკრივის კრებადობის სხვა ნიშანი უნდა გამოვიყენოთ.

მაგალითი 2. გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე შემდეგი მწკრივი:

$$\frac{1}{3}+\frac{2^2}{3^2 2!}+\frac{3^3}{3^3 3!}+\frac{4^4}{3^4 4!}+...+\frac{n^n}{3^n n!}+....$$

ამოხსნა: გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}3^n n!}{n^n 3^{n+1}(b+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{3(n+1)n^n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{1}{3}e<1.$$

აქედან დავასკვნით, რომ მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 3. გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე შემდეგი მწკრივი:

$$\sqrt{2}+\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{5}+...+\frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1}+....$$

ამოხსნა: როგორც წინა მაგალითში

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}(2n-1)}{(2n+1)(\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}>1.$$

მაშასადამე მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 4. გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე შემდეგი მწკრივი:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაშიც დალამბერის ნიშანი გვაძლევს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2}=1.$$

მაშასადამე მწკრივის კრებადობაზე ვერაფერს ვიტყვით.

3. მწკრივის კრებადობის კოშის ნიშანი. თუ დადებითწევრებიანი

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$$

მწკრივისთვის, დაწყებული n ინდექსის(ნომრის) რომელიღაც მნიშვნელობიდან, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\sqrt[n]{u_n}<q<1,$$

სადაც q დამოკიდებული არაა n-ის მნიშვნელობაზე, მაშინ მოცემული მწკრივი კრებადია. ასევე, თუ დაწყებული n ინდექსის რომელიღაც მნიშვნელობიდან, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\sqrt[n]{u_n}.>1,$$

მაშინ მწკრივი განშლადია.

კოშის ნიშანი შეიძლება ზღვრული ფორმითაც იქნეს წარმოდგენილი:

თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, მაშინ

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$$

მწკრივი კრებადია, როდესაც $q<1$ და განშლადი, როდესაც $q>1$.

როგორც დალამბერის ნიშნის შემთხვევაში, აქაც გვაქვს: თუ $q=1$, მაშინ მწკრივი შეიძლება კრებადი იყოს, შეიძლება განშლადი. ასეთ შემთხვევაშიც მწკრივის კრებადობის სხვა ნიშანი უნდა გამოვიყენოთ.

მაგალითი 5. გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე შემდეგი მწკრივი:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

ამოხსნა: გამოვიყენოთ მწკრივის კრებადობის კოშის ნიშნის ზღვრული ფორმა.

$$u_n=\frac{n}{2^n}\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{2}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{2}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n}=\frac{1}{2}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{n^1}}=\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}<1.$$

მაშასადამე, მწკრივი კრებადია. აქ ზღვრის გამოსათვლელად გამოყენებულ იქნა ლოპიტალის წესი $\dfrac{\ln n}{n}$ სახის წილადისთვის.

მაგალითი 6. გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე შემდეგი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n.$$

ამოხსნა: გამოვიყენოთ კოშის ნიშანი

$$u_n=\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n,$$

$\sqrt[n]{\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n}=\dfrac{n+1}{2n-1}$, ადვილი მისახვედრია, რომ, როდესაც $n>5$, მაშინ $\dfrac{n+1}{2n-1}<\dfrac{2}{3}<1$. მაშასადამე მწკრივი კრებადია.

4. მწკრივის კრებადობის კოშის ინტეგრალური ნიშანი. თუ დადებით წევრებიანი

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$$

მწკრივის ზოგადი წევრი მიისწრაფვის ნულისკენ და ნატურალური არგუმენტის ფუნქცია

$$u_n=f(n),$$

ისეთია, რომ $f(x)$ განსაზღვრულია $[1,\infty)$ შუალედზე; ამასთან, არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_1^{\infty}f(x)dx,$$

მაშინ მწკრივი იქნება კრებადი, წინააღმდეგ შემთხვევაში განშლადი.

მაგალითი 7. გამოვიკვლიოთ დადებით წევრებიანი

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

მწკრივის კრებადობა.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ კოშის ინტეგრალური ნიშანი

$$f(n)=\frac{1}{n\ln n}.$$

აქედან გამომდინარე გვექნება არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}dx.$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{a\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^a=\lim_{a\to\infty}[\ln(\ln a)-\ln(\ln 2)]=\infty,$$

მაშასადამე მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 8. გამოვიკვლიოთ დადებითწევრებიანი

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \qquad (5)$$

მწკრივის კრებადობა.

ამოხსნა: აქაც გამოვიყენოთ კოშის ინტეგრალური ნიშანი

$$f(x)=\frac{1}{x^\alpha}.$$

გვექნება არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx.$$

თუ $\alpha>1$, მაშინ

$$\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{a\to\infty}[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^a=\lim_{a\to\infty}[\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}]=\frac{1}{\alpha-1}.$$

მაშასადამე არასაკუთრივი ინტეგრალი არსებობს და მწკრივი კრებადია.

თუ $\alpha<1$, მაშინ

$$\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{a\to\infty}[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^a=\lim_{a\to\infty}[\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}]=\infty.$$

ამ შემთხვევაში მწკრივი განშლადია.

თუ $\alpha=1$, მაშინ გვექნება

$$\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{1}{x}dx=\lim_{a\to\infty}\ln x\Big|_1^a=\infty.$$

მაშასადამე მწკრივი განშლადია.

ამ მაგალითიდან გამომდინარე მწკრივი

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

კრებადია.

(5) მწკრივს **განზოგადებული ჰარმონიული** მწკრივი ეწოდება. იგი ხშირად გამოიყენება მწკრივთა კრებადობის შედარების ნიშნის გამოყენების დროს.

4. ნიშანცვლადი მწკრივები

თუ მწკრივის $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ წევრებს შორის გვხვდება როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი წევრები, მაშინ მწკრივს **ნიშანცვლადი** ეწოდება. ნიშანცვლად მწკრივებს შორის, ხშირად გვხვდება ისეთები, რომლებშიც იცვლება ყოველი მომდევნო წევრის ნიშანი. ასეთ მწკრივებს აქვთ სახე

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots,$$

ან სახე

$$-u_1+u_2-u_3+u_4-\ldots+(-1)^n u_n+\ldots,$$

სადაც სიდიდეები $u_n n=1,2,3,...$ დადებითია. ასეთ მწკრივებს **ნიშანმონაცვლე** ეწოდება. ნიშანმონაცვლე მწკრივებისთვის არსებობს კრებადობის საკმარისი ნიშანი:

ნიშანმონაცვლე მწკრივის კრებადობის ლაიბნიცის ნიშანი. თუ ნიშანმონაცვლე

$$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n-1}u_n+...,$$

$$-u_1+u_2-u_3+u_4-...+(-1)^n u_n+...$$

მწკრივების წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობები კლებადია და ზოგადი წევრები მიისწრაფვიან ნულისკენ, როდესაც n მიისწრაფვის უსასრულობისკენ, მაშინ ეს მწკრივები კრებადია.

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ შემდეგი მწკრივი კრებადობაზე:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+....$$

ამოხსნა: ლაიბნიცის ნიშნიდან გამომდინარე, კრებადია.

მაგალითი 2. გამოვიკვლიოთ შემდეგი მწკრივი კრებადობაზე:

$$-\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}-\frac{7}{3\cdot 4}+...+(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}+....$$

ამოხსნა: მწკრივი კრებადია რადგან

$$|u_{n+1}|<|u_n| \text{ და } \lim_{n\to\to}u_n=0.$$

ლაიბნიცის ნიშანი არ წარმოადგენს ნიშანმონაცვლე მწკრივის კრებადობის აუცილებელ პირობას. ეს კარგად ჩანს შემდეგი მაგალითიდან.

მაგალითი 3. გამოვიკვლიოთ მწკრივი:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+... \tag{1}$$

კრებადობაზე.

ამოხსნა: ამ მწკრივისთვის ლაიბნიცის პირობა $|u_{n+1}|<|u_n|$ არ სრულდება, მაგრამ მწკრივი კრებადია. მართლაც, ეს მწკრივი შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{(2n-1)^3}+... \tag{2}$$

და

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}...+\frac{1}{(2n)^2}+... \tag{3}$$

მწკრივების სხვაობის სახით. თუ შევადარებთ (2) მწკრივს კრებად

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}+...$$

მწკრივთან და (3) მწკრივს კრებად

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$$

მწკრივთან, დადებით წევრებიანმწკრივების შედარების ნიშნიდან დავინახავთ, რომ ეს მწკრივები კრებადია. მაშასადამე, კრებადი იქნება მათი სხვაობაც, რაც (1) მწკრივის ტოლია.

5. მწკრივთა აბსოლიტური და პირობითი კრებადობა

განვიხილოთ მწკრივი

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+..., \tag{1}$$

რომლის წევრებიც ნებისმიერი ნიშნისაა.

შევადგინოთ მწკრივი

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+...+|u_n|+..., \qquad (2)$$

რომლის წევრებიც წარმოადგენს (1) მწკრივის შესაბამისი წევრების აბსოლუტურ მნიშვნელობებს.

განსაზღვრება 2.2. (1) მწკრივს ეწოდება **აბსოლუტურად კრებადი,** თუ (2) მწკრივი კრებადია.

(1) მწკრივს ეწოდება **პირობითად კრებადი**, თუ იგი კრებადია, მაგრამ (2) მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 1. მწკრივი

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$$

პირობითად კრებადია, რადგან მისი წევრების აბსოლიტურ მნიშვნელობებისგან შედგენილი, ჩვენთვის კარგად ცნობილი ჰარმონიული მწკრივი,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...,$$

განშლადია.

მწკრივის აბსოლიტურ კრებადობასა და ჩვეულებრივ კრებადობას შორის არსებობს კავშირი, რომელიც შემდეგი თეორემით განისაზღვრება.

თეორემა 2.5. თუ (1) მწკრივი კრებადია აბსოლუტურად, მაშინ იგი ჩვეულებრივადაც კრებადია.

მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობის დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ კრებადობის ყველა ის ნიშანი, რომელსაც ვიყენებთ დადებითწევრებიანი მწკრივებისთვის.

თეორემა 2.6 (კოშის თეორემა). თუ აბსოლუტურად კრებად მწკრივებში წევრების მიმდევრობას ნებისმიერად შევცვლით, მაშინ მიღებული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი იქნება და მისი ჯამი მოცემული მწკრივის ჯამის ტოლია.

ასეთ ფაქტს ადგილი არ აქვს პირობითად კრებადი მწკრივებისთვის. მართლაც, განვიხილოთ მწკრივი

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+..., \qquad (3)$$

როგორც ვიცით, ეს მწკრივი პირობითად კრებადია. ვთქვათ, მისი ჯამია A.

გადავანაცვლოთ ამ მწკრივში წევრები ისე, რომ ყოველი დადებითნიშნიანი წევრის შემდეგ მოდიოდეს ორი მომდევნო უარყოფითი წევრი:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-... \qquad (4)$$

დავაჯგუფოთ ამ მწკრივში წევრები შემდეგნაირად:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}-\frac{1}{12}+....$$

მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+...=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...\right)=\frac{1}{2}A.$$

მაშასადამე, (3) მწკრივის წევრების გადანაცვლებით მიღებული (4) მწკრივის ჯამი ორჯერ ნაკლებია (3) მწკრივის ჯამზე.

6. რიცხვითი მწკრივების გამოყენება

მაგალითი 1. რას უდრის კრედიტის ღირებულება L, თუ მისი სიდიდეა

A, ყოველთვიური საპროცენტო განაკვეთი $n\%$, კრედიტის დაფარვის ვადა m წელი, კრედიტის დაფარვა ხდება ყოველთვიურად ერთი და იგივე სიდიდის თანხით.

ამოხსნა: ყოველთვიურად კრედიტის დასაფარავად შესატანი თანხაა $B = \dfrac{A}{m \times 12}$.

პირველ თვეში შესატანი თანხაა $a_1 = B + A \times \dfrac{n}{100}$, მეორე თვეში- $a_2 = B + (A - B) \times \dfrac{n}{100}$, მესამე თვეში შესატანი $a_3 = B + (A - 2B) \times \dfrac{n}{100}$ და ასე

შემდეგ $a_{12m} = B + [A - (12m - 1)B] \times \dfrac{n}{100}$. აქედან გამომდინარე, კრედიტის ღირებულებაა

$$A \times \frac{n}{100} + (A - B)\frac{n}{100} \times (A - 2B) \times \frac{n}{100} + ... + (A - (12m - 1)B] \times \frac{n}{100} =$$

$$= \frac{n}{100}\{A + (A - B) + (A - 2B) + [A - (12m - 1)B]\} =$$

$$= \frac{n}{100}\{12mA - [B + 2B + ... + (12m - 1)B]\}$$

თუ გავიხსენებთ არითმეტიკული პროგრესიის ჯამის ფორმულას, გვექნება:

$$B + 2B + ... + (12m - 1)B = \frac{12m - 1}{2} 12mB = (72m^2 - 6m)B.$$

აქედან

$$L = \frac{n}{100}[12mA - (72m^2 - 6m)\frac{A}{12m}] = \frac{n}{100}(6m + \frac{1}{2})A.$$

მაგალითი 2. სახელმწიფომ გადაწყვიტა ეკონომიკის სტიმულირების მიზნით შემოიღოს საგადასახადო შეღავათები. ვთქვათ, ადამიანმა მიიღო საგადახადო შე ღავათი 600 ლარი და დახარჯა თანხის 80%. ვთქვათ, ადამიანთა ჯგუფი, რომელიც ამ დახარჯულ თანხას იღებს, ჯამურად, როგორც ხელფასის ნაწილს, ხარჯავს მის 80%, ასევე, ადამიანთა სხვა ჯგუფი რომელიც, იღებს, ჯამურად, როგორც ხელფასის ნაწილს, წინა დახარჯულ ჯამურ თანხას, ხარჯავს ამ თანხის 80% და ასე გრძელდება უსასრულოდ. გამოვთვალოთ ერთი 600–ლარიანი საგადასახადო შეღავთის ეკონომიკური ეფექტურობა.

ამოხსნა: ყველა იმ ადამიანის დახარჯულ ჯამური შრომის ღირებულება, რომლებიც დასაქმდნენ 600- ლარიანი არაპირდაპირი ინვესტიციით, შეიძლება წარმოვადგინოთ უსასრულოდ კლებადი $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის სახით, რომლის პირველი წევრია $a_1 = 0{,}8 \cdot 600 = 480$, ხოლო მნიშვნელი- $q = 0{,}8$.

თუ გავიხსენებთ უსასრულოდ კლებად გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულას, გვექნება:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{480}{0{,}2} = 2400.$$

მაშასადამე, ერთი 600- ლარიანი საგადასახადო შეღავთი იწვევს 2400 ლარი ღირებულების დახარჯული შრომის რაოდენობის ანაზღაურებას და შესაბამისი ნამატი პროდუქციის შექმნას.

მაგალითი 3. ვთქვათ, რეზერვუარი იცლება მის ფსკერში არსებული ნახვრეტიდან სიჩქარით, რომელიც წარმოადგენს დისკრეტულ დროის ფუნქციას

და აქვს სახე: $v(n)=\frac{c}{e^{kn}}, c>0, k>0$, ვიპოვოთ რეზერვუარში არსებული ნივთიერების რაოდენობა.

ამოხსნა: რეზერვუარში დროის საწყის მომენტში არსებული ნივთიერების რაოდენობა

ტოლია რეზერვუარის მთლიანად დაცლის, მისგან გადმოღვრილი მთელი ნივთიერების რაოდენობისა. ეს რაოდენობა კი წარმოადგენს შემდეგი მწკრივის:

$$\frac{c}{e^k}+\frac{c}{e^{2k}}+\frac{c}{e^{3k}}+\ldots+\frac{c}{e^{nk}}+\ldots$$

ჯამს, რომელიც ტოლია:

$$c\frac{\frac{1}{e^k}}{1-\frac{1}{e^k}}=c\frac{1}{e^k-1}.$$

7. სავარჯიშოები მე-2 თავისათვის

1. იპოვეთ შემდეგი მწკრივების ჯამი:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1})$, ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}]$, გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^n}$, დ) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{10^{2n}}+\frac{50}{10^{2n+1}})$,

ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{10^n}$.

2. კრებადია თუ განშლადი შემდეგი მწკრივები:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+1}$, ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$.

3. შედარების ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$, ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}-1}$, გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$, დ) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n}$, ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$, ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

4. დალამბერის ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)!}$, ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$, გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$, ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$, დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$.

5. გამოიკვლიეთ აბსოლუტურ და პირობით კრებადობაზე შემდეგი მწკრივები:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}$, გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$, დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n!}$, ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$, ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$.

თავი 3
ხარისხოვანი მწკრივები
1. ძირითადი ცნებები

ვთქვათ, მოცემულია ერთ და იგივე შუალედზე განსაზღვრულ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), ..., u_n(x), ...$$

ფუნქციონალური მწკრივი ეწოდება უსასრულო ჯამ

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \qquad (1)$$

თუ ჩავსვამთ ამ მწკრივის თითოეულ წევრში x ცვლადის ფიქსირებულ მნიშვნელობას ფუნქციათა საერთო განსაზღვრის არიდან, მივიღებთ რიცხვით მწკრივს, რომელიც შეიძლება კრებადი იყოს, შეიძლება განშლადი. ვთქვათ, D იმ წერტილთა სიმრავლეა ფუნქციათა საერთო განსაზღვრის არიდან, რომელთა ჩასმითაც x ცვლადის ადგილზე, მიიღება კრებადი მწკრივი. განვიხილოთ D სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც სიმრავლის თითოეულ წერტილს შეუსაბამებს იმ რიცხვითი მწკრივის ჯამს, რომელიც მიიღება (1) მწკრივისაგან x ცვლადის მაგივრად ამ წერტილის ჩასმით. ასეთ ფუნქციას, თუ D ცარიელი სიმრავლე არ არის, უწოდებენ (1) ფუნქციონალური მწკრივის ჯამს, ხოლო D სიმრავლეს (1) მწკრივის **კრებადობის არეს**.

ფუნქციონალური მწკრივებიდან ჩვენ განვიხილავთ ხარისხოვან მწკრივებს.

2. ხარისხოვანი მწკრივები. აბელის თეორემა

განსაზღვრება 3.1. ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება შემდეგი სახის მწკრივს:

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^2, \qquad (2)$$

სადაც x_0 მოცემული რიცხვია, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ - ცნობილი რიცხვითი კოეფიციენტები.

თუ $x_0=0$, მაშინ (2) მწკრივი მიიღებს სახეს:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n.$$

ცხადია, ყოველი ხარისხოვანი მწკრივი იკრიბება $x=0$ წერტილში და მისი ჯამია a_0.

არსებობენ ხარისხოვანი მწკრივები, რომლებიც იკრიბებიან მხოლოდ $x=0$ წერტილში, მაგალითად, მწკრივი $\sum_{n-1}^{\infty}(nx)^n$. მართლაც, როდესაც $n\to\infty$, $n-$ის რომელიღაც მნიშვნელობისთვის $nx_0>2$. აქედან გამომდინარე, $(nx_0)^n>2^n$ და

$$\lim_{n\to\infty}(nx_0)^2>\lim_{n\to\infty}2^n=\infty.$$

მაშასადამე, არ სრულდება მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა არც ერთი $x\neq 0$ წერტილისთვის.

არსებობენ ხარისხოვანი მწკრივები, რომლებიც კრებადია მთელ $(-\infty,\infty)$ შუალედზე. მართლაც მწკრივი

$$\sum_{n-1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n \qquad (3)$$

კრებადია ყოველი $x_0 \in (-\infty, \infty)$ წერტილისთვის, რადგანაც როდესაც $n \to \infty$, $n-$ის რომე- ლიღაც მნიშვნელობისთვის $|\frac{n}{x_0}| < \frac{1}{2^n}$ და თუ შევადარებთ (4) მწკრივს კრებად $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^2}$

მწკრივს, მწკრივთა შედარების ნიშნიდან დავადგენთ, რომ ის კრებადია.

არსებობენ მწკრივები, რომლებიც კრებადია ნამდვილ რიცხვთა ღერძის წერტილების ნაწილზე და განშლადია დანარჩენ წერტილებზე. მართლაც მწკრივი

$$\sum_{n-1}^{\infty} (\frac{x}{3})^n \qquad (4)$$

კრებადია როდესაც $-3 < x < 3$, რადგან ამ შემთხვევაში იგი წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელიცაა $q = \frac{x}{3}$, $|q| = |\frac{x}{3}| < \frac{1}{3} < 1$. თუ $x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$, მაშინ (5) მწკრივი განშლადია, რადგან პროგრესიის მნიშვნელის მოდული $|q| = |\frac{x}{3}| > 1$.

ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან თეორემას:

თეორემა 3.1 (აბელის თეორემა). 1) თუ ხარისხოვანი მწკრივი

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad (5)$$

კრებადია $x = x_0$ წერტილში, მაშინ იგი აბსოლუტურად კრებადია ნებისმიერ x წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$|x| < |x_0|.$$

2) თუ ხარისხოვანი მწკრივი განშლადია $x = x_0$, მაშინ იგი განშლადია ნებისმიერ x წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას: $|x| > |x_0|$.

აბელის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ზღვრული რიცხვი $R > 0$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები: (5) მწკრივი კრებადია x ცვლადის ყველა იმ მნიშვნელობისთვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას: $|x| < R$

და მწკრივი განშლადია x ცვლადის ყველა იმ მნიშვნელობისთვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას: $|x| > R$.

ამ R რიცხვს (5) მწკრივის **კრებადობის რადიუსს** უწოდებენ.

თუ მწკრივი კრებადია მხოლოდ ერთ $x = 0$ წერტილში, მაშინ კრებადობის რადიუსი $R = 0$.

თუ მწკრივი კრებადია რიცხვითი ღერძის ნებისმიერ წერტილში, მაშინ $R = \infty$.

$(-R, R)$ ინტერვალი (1) მწკრივის კრებადობის არეს წარმოადგენს. აბელის თეორემა არაფერს გვეუბნება $(-R, R)$ ინტერვალის საზღვრებზე: $x = -R$, $x = R$, მწკრივის კრებადობაზე, ამიტომ ამ წერტილებში მწკრივის კრებადობა უნდა შემოწმდეს ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში.

გამოვთვალოთ (5) მწკრივის კრებადობის რადიუსი R. ამისთვის გამოვიყენოთ მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანი $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ მწკრივისთვის

$$\lim_{n \to 0} |\frac{a_{n+1} x^n}{a_n x^n}| = |x| \lim_{n \to 0} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

სადაც

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

თუ $r|x|<1$,მაშინ (5) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, თუ $r|x|>1$, მაშინ განშლადი. მაშასადამე (5) მწკრივი კრებადია, როდესაც $|x|<\frac{1}{r}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ და განშლადი, როდესაც $|x|>\frac{1}{r}=\lim_{n}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. აქედან გამომდინარე (5) მწკრივის კრებადობის რადიუსი გამოითვლება ტოლობით:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{6}$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ მწკრივის კრებადობის რადიუსი.

ამოხსნა: (6) ფორმულით გვექნება

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$ მწკრივის კრებადობის რადიუსი და კრებადობის არე.

ამოხსნა: (6) ფორმულით გვექნება:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

მაშასადამე $R=1, D=(-1,1)$.

გამოვიკვლიოთ მწკრივის კრებადობის საკითხი კრებადობის არის ბოლოებზე.

როდესაც $x=1$, მაშინ მიიღება

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

ჰარმონიული მწკრივი, რომელიც განშლადია.

როდესაც $x=-1$, მაშინ საქმე გვაქვს

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$$

მწკრივთან, რომელიც, როგორც ვიცით, პირობითად კრებადია.

თუ მოვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x=y-x_0$, მაშინ (5) მწკრივი გარდაიქმნება (2) მწკრივად. აქედან გამომდინარე, თუ x ცვლადი ღებულობს მნიშვნელობას (5) მწკრივის კრებადობის არიდან- $(-R,R)$, მაშინ y იცვლება ინტერვალში (x_0-R,x_0+R), ამიტომ (2) მწკრივის კრებადობის რადიუსი იგივე იქნება, კრებადობის არე კი შეიცვლ- ება და გახდება (x_0-R,x_0+R).

როგორც რიცხვითი მწკრივები, ხარისხოვანი მწკრივებიც შეიძლება შევკრიბოთ ან მისი ყოველი წევრი გავამრავლოთ რაიმე მუდმივ რიცხვზე.

თუ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ მწკრივის კრებადობის რადიუსია R_1, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ მწკრივის კრებადობის რადიუსი კი-R_2, მაშინ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ მწკრივის კრებადობის რადიუსი R აკმაყოფილებს უტოლობას: $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

თუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ მწკრივის კრებადობის რადიუსია R_1, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n x^n$ მწკრივის კრებადობის რადიუსი R დააკმაყოფილებს უტოლობას: $R \geq R_1$.

3 ხარისხოვანი მწკრივის თვისებები

თეორემა 3.2. თუ ხარისხოვანი მწკრივი $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ კრებადია $(-R, R)$ შუალედზე, მაშინ მისი ჯამი $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას ამ შუალედის შიგნით.

თეორემა 3.3. კრებადი ხარისხოვანი მწკრივი შეიძლება წევრ-წევრად გავაწარმოვოთ კრებადობის $(-R, R)$ შუალედის შიგნით.

ეს ნიშნავს, რომ თუ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, მაშინ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a \ + 2a_1 x + 3a_2 x^2 + ...,$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x^2 + ... \quad .$$

....

გაწარმოებით მიღებული მწკრივების კრებადობის რადიუსები იგივე იქნება, რაც იყო მოცემული მწკრივის კრებადობის რადიუსი.

თეორემა 3.4. კრებადი ხარისხოვანი მწკრივი შეიძლება წევრ-წევრად გავაინტეგროთ ყოველ შუალედზე$[a,b]$, რომელიც მდებარეობს კრებადობის $(-R, R)$ შუალედის შიგნით. მაგალითად

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x dx + \int_a^b a_2 x^2 dx + ... + \int_a^b a_n x^n + = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + ... + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + ...$$

ამასთან, კრებადობის რადიუსი დარჩება იგივე $(-R, R)$.

4. ტეილორის ფორმულა

ვთქვათ, ფუნქცია $f(x)$ განსაზღვრულია და აქვს უწყვეტი წარმოებული $f'(x)$ რაიმე x_0 წერტილის მიდამოში. მაშინ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით გვაქვს

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt .$$

თუ $f'(x)$ წარმოებადია x_0 წერტილის მიდამოში ნაწილობითი ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) = -f(t)(x-t)\Big|_{x_o}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt =$$

$$f(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt.$$

აქედან გამომდინარე

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x)_0 + \int_{x_0}^{x} f'(t)(x-t)dt\,.$$

თუ $f''(x)$ წარმოებადია x_0 წერტილის მიდამოში, ანალოგიურად მივიღებთ:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x)_0 + \frac{1}{2} f''(x)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt\,.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია მეოთხე რიგამდე, ასევ გვექნება:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x)_0 + \frac{1}{2!} f''(x)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x} f^{(4)}(t)(x-t)^3\,dt\,.$$

ამ პროცესს გავაგრძელებთ და დავრწმუნდებით, რომ თუ $f(x)$ წარმოებადია $n+1$ რიგამდე ადგილი ექნება ფორმულას:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + .. + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0) + ... +$$
$$+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n. \qquad (1)$$

ამ ფორმულას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **ტეილორის ფორმულა** x_0 წერტილში, ნაშთის ინტეგრალური ფორმით. ფუნქციას

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-x_0)^n dt \qquad (2)$$

კი ნაშთითი წევრი ეწოდება.

თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას ინტეგრალისთვის, (2) ფუნქცია ჩაიწერება ასე

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{(n)!}\int_{x_0}^{x}(x-x_0)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (3)$$

სადაც $x_0 \le \xi \le x$. ნაშთითი წევრის ამ ფორმას **ლაგრანჟის ფორმა** ეწოდება.

თუ ჩავთვლით, რომ $f(x) = f^{(0)}(x)$ და გავითვალისწინებთ (3) ფორმულას ტეილორის ფორმულა შეიძლება უფრო კომპაქტურად ჩავწეროთ:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n}\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,. \qquad (4)$$

(1) ან (5) ფორმულის მარჯვენა მხარეს უწოდებენ ფუნქციის გაშლას $(x-x_0)$ ორწევრის ხარისხებად x_0 წერტილში, n რიგამდე.

ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრისთვის გვაქვს:

$$|\,f(x) - \sum_{n=1}^{n}\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,| = |\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,| \le \frac{\max|\,f^{(n+1)}(x)\,|}{(n+1)!}\delta^{n+1}, \qquad (5)$$

სადაც δ წარმოადგენს x_0 წერტილის განხილული მიდამოს სიგრძეს.

განვიხილოთ ტეილორის ფორმულა ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციისათვის $x_0=0$ წერტილში:

1. $f(x)=e^x$.

როგორც ვიცით, ამ ფუნქციის წარმოებულები ნებისმიერ რიგამდე ერთი და იგივეა:

$(e^x)^{(k)}=e^x$.

ამიტომ, ტეილორის ფორმულას $x_0=0$ წერტილში ნაშთითი წევრის ლაგრანჟის ფორმით, ექნება სახე:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

2. $f(x)=\sin x$.

$$(\sin x)'=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}+x),(\sin x)''=(\sin(\frac{\pi}{2}+x))'=\sin(2\frac{\pi}{2}+x),...,(\sin x)^{(n)}=\sin(n\frac{\pi}{2}+x).$$

აქედან გამომდინარე, $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$. როდესაც n ლუწია $f^{(n)}(0)=0$, როდესაც n კენტია, ანუ როდესაც $n=2k+1$, ადგილი აქვს ტოლობას $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$.

ამგვარად, ტეილორის ფორმულას $\sin x$ ფუნქციისთვის, $x_0=0$ წერტილში, ნაშთის ლაგრანჟის ფორმით, აქვს სახე:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}\cos\xi,$$

სადაც $0\le\xi\le x$.

3. $f(x)=\cos x$.

ისევე, როგორც $\sin x$ ფუნქციისთვის

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(n\frac{\pi}{2}+x),$$

ლუწი $n=2k$ რიცხვებისთვის

$$(\cos x)^{(2k)}=\cos(2k\frac{\pi}{2}+x)=\cos(k\pi+x)=(-1)^k\cos x,$$

კენტი $n=2k+1$ რიცხვებისთვის

$$(\cos x)^{(2k+1)}=\cos(k\pi+\frac{\pi}{2}+x)=(-1)^{k+1}\sin x.$$

აქედან გამომდინარე, ტეილორის ფორმულას $\cos x$ ფუნქციისთვის, $x_0=0$ წერტილში, ნაშთის ლაგრანჟის ფორმით, აქვს სახე:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}\cos\xi,$$

სადაც $0\le\xi\le x$.

4. $f(x)=\ln(1+x)$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},.....$$

ინდუქციით მივიღებთ

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

და

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

ამგვარად, ტეილორის ფორმულას $\ln(1+x)$ ფუნქციისთვის, $x_0=0$ წერტილში, ნაშთის ლაგრანჟის ფორმით, აქვს სახე:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}},$$

სადაც $0\le\xi\le x$.

მაგალითი 1. გავშალოთ ფუნქცია $f(x)=e^x$ ტეილორის ფორმულით $x_0=0$ წერტილში
მესამე რიგამდე.

ამოხსნა:

$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ f'''(x)=e^x,\ f(x)=e^x$ და $f(0)=1, f'(0)=1, f''(0)=1, f'''(0)=1, f^{(4)}(0)$.

აქედან გამომდინარე, ყოველი $x\in R$ ნამდვილი რიცხვისთვის

$$e^x=1+x\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{e^\xi}{4!}x^4,$$

სადაც $0<\xi\le x$.

მაგალითი 2. გავშალოთ ფუნქცია $f(x)=\sin x$ ტეილორის ფორმულით x_0 წერტილში მესამე რიგამდე.

ამოხსნა: $(\sin x)'=\cos x, (\sin x)''=-\sin x, (\sin x)'''=-\cos x, (\sin x)^{(4)}=\sin x$.

აქედან გამომდინარე

$$\sin x=\sin x_0+\cos x_0\cdot(x-x_0)+\frac{-\sin x_0}{2}(x-x_0)^2+\frac{-\cos x_0}{3!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{\sin\xi}{4!}(x-x_0)^4.$$

(5) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ფუნქციათა მიახლოებითი მნი- შვნელობანი მოცემული სიზუსტით.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\sin 1$ $\varepsilon=0{,}0001$ სიზუსტით.

ამოხსნა:

$$|\sin 1-1-\frac{1^3}{3!}+\frac{1^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{1^{2n+1}}{(2n+1)!}|\le|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}1^{2n+3}|\cdot\max|\cos\xi|\le\varepsilon=0{,}0001$$

ანუ

$$|\sin 1-1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}|\le|\frac{1}{(2n+3)!}|\le\varepsilon=0{,}0001.$$

აქედან გამომდინარეობს, $(2n+3)!\ge 10000$. ამ უტოლობიდან მივიღებთ $n\ge 4$. მაშასადამე
$\sin 1$-ის $\varepsilon=0{,}0001$ სიზუსტით გამოსათვლელად საკმარისია გავშალოთ ფუნქცია $\sin x$ ტეილორის ფორმულით, მეოთხე რიგამდე, $x_0=0$ წერტილში.

5. ტეილორის მწკრივი

ვთქვათ, ფუნქცია $f(x)$ განსაზღვრულია და აქვს უწყვეტი წარმოებულები ნებისმიერ რიგამდე, რაიმე x_0 წერტილის მიდამოში.

ხარისხოვან მწკრივს

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **ტეილორის მწკრივი** x_0 წერტილში.

ტეილორის მწკრივს, როდესაც $x_0=0$, **მაკლორენის მწკრივი** ეწოდება.

განვიხილოთ ტეილორის მწკრივი ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციისათვის:

1. $f(x)=e^x$.

ვთქვათ, $x_0=0$, მაშინ ამ წერტილში ფუნქციის ტეილორის მწკრივს ექნება სახე:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

მწკრივის ზოგადი წევრია $u_n=\frac{x^n}{n!}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$, ამიტომ მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშნიდან გამომდინარე, (1) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ნებისმიერი $x\in R$ რიცხვისთვის. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობიდან გამომდინარე $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$. (1) მწკრივის კერძო ჯამი

$$S_k=\sum_{n=0}^{k}\frac{x^n}{n!}=e^x-R_k=e^x-\sum_{n=0}^{k}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}x^{\xi}.$$

$$\lim_{k\to\infty}(e^x-R_k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{x^n}{n!}=e^x-\lim_{k\to\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}x^{\xi}=e^x-0=e^x.$$

საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

მაშასადამე $f(x)=e^x$ ტოლია თავისი ტეილორის მწკრივის ჯამის.

2. $f(x)=\sin x$.

ფუნქციის ტეილორის მწკრივს $x_0=0$ წერტილში ექნება სახე:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{2}$$

მისი ზოგადი წევრი $u_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, იგი დალამბერის ნიშნით კრებადია:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)}=0.$$

ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=0$. (2) მწკრივის კერძო ჯამი

$$S_k=\sum_{n=0}^{k}(-1)^k\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x-R_k=\sin x-\sum_{n=0}^{k}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+3}}{(k+1)!}\cos\xi.$$

$$\lim_{k\to\infty}(\sin x-R_k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(-1)^k\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x-\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}x^{2n+3}\cos\xi=\sin x-0=\sin x.$$

საბოლოოდ

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. $f(x) = \cos x$.

$\sin x$ ფუნქციის ანალოგიურად, $\cos x$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივისთვის $x_0 = 0$ წერ- ტილში გვექნება:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}. \tag{3}$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$.

ფუნქციის ტეილორის მწკრივს $x_0 = 0$ წერტილში ექნება სახე:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{4}$$

(4) მწკრივის ზოგადი წევრია

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

(4) მწკრივის კრებადობის რადიუსი

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \right| = 1.$$

მაშასადამე მწკრივი კრებადია ყველა $x \in (-1,1)$ წერტილისთვის. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = 0.$$

როგორც წინა შემთხვევაში:

$$\lim_{k\to\infty} (\ln(1+x) - R_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) - \lim_{k\to\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{k+1}} = \ln(1+x) - 0 = \ln(1+x)$$

.

მაშასადამე

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{5}$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$

ფუნქციის ტეილორის მწკრივს $x_0 = 0$ წერტილში ექნება სახე:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n. \tag{6}$$

როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევაში, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ეს მწკრივი კრებადია, კრებადობის რადიუსით $R = 1$, მისი ჯამი კი უდრის $(1+x)^\alpha$.

6. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ამ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი $x_0 = 0$ წერტილში არის

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}\,, \qquad (7)$$

რომლის კრებადობის რადიუსია $R=1$.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\sqrt{2}$.

ამოხსნა: (6) ფორმულით გვექნება:

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}x^n+\ldots$$

აქედან გამომდინარე

$$\sqrt{2}=\sqrt{1+1}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\frac{1}{2!}+\frac{3}{8}\frac{1}{3!}-\frac{15}{16}\frac{1}{4!}+..+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)-(\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}+\ldots.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ რიცხვი π.

ამოხსნა: (7) მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით მივიღებთ:.

$$arctgx=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\ldots.$$

$$\pi=4arctg1=4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots).$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

ამოხსნა: ამ ინტეგრალის გამოთვლა ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით შეუძლებელია, ვინაიდან e^{-x^2} ფუნქციის პირველყოფილი არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციის საშუალებით. ამიტომ გავშალოთ ფუნქცია e^{-x^2} ტეილორის მწკრივად, გვექნება:

$$e^{-x^2}=1+\frac{-x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{-x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots.$$

3.4 თეორემის ძალით

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{-x^2}{1!}dx+\int_0^1\frac{x^4}{2!}dx+\int_0^1\frac{-x^6}{3!}dx+\ldots+\int_0^1(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}dx+\ldots$$

ანუ

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)n!}+\ldots.$$

მიღებული ტოლობა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

6. სავარჯიშოები მე-3 თავისათვის

I. იპოვეთ შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივების კრებადობის არე:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n.2^n}$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^{2n-1}x^n$, 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 4) $\sum_{n=0}^{\infty}3^2x^{n^2}$, 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(\frac{x}{2})^n$, 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$, 7) $\sum_{n=1}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$, 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^3}}{n^n}$.

II. ეტეილორის მწკრივად და იპოვეთ კრებადობის რადიუსები შემდეგი ფუნქციებისთვის: 1) $a^x, a>0$, 2) $\sin^2 x$, 3) $\ln(2+x)$, 4) $\cos^2 x$, 5) xe^{-2x^2}, 6) $\cos 2x$, 7) e^{x^2},

9) $\dfrac{x}{9+x^2}$, 10) $\int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt$, 11) $\int\limits_0^x \dfrac{\ln(1+t)}{t}\,dt$, 12) $(1+e^x)^3$, 13) $\int\limits_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, 14) $\ln(x^2+3x+2)$, 15) $\sin^2 x\cos^2 x$, 16) $\dfrac{1}{4-x^4}$.

თავი 4
მრავალი ცვლადის ფუნქციები
1. ძირითადი ცნებები

ბუნებაში და პრაქტიკული საქმიანობის დროს ხშირად გვხვდება ისეთი სიდიდეები, რომელთა ცვლილებაც სხვა რამოდენიმე სიდიდის ცვლილებაზეა დამოკიდებული. ამის საფუძველზე ბუნებრივია, ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნება უნდა გაფართოვდეს და შემოვიდეს მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცნება.

განსაზღვრება 4.1. ვთქვათ $X_1, X_2, ..., X_n, Y$ რიცხვითი სიმრავლის ქვესიმრავლეებია. შესაბამისობას, რომელიც $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ დეკარტის ნამრავლის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს Y სიმრავლის ერთ, სრულიად განსაზღვრულ ელემენტს **მრავალი ცვლადის ფუნქცია ეწოდება.**

მრავალი ცვლადის ფუნქციას აღნიშნავენ ასე:

$$f : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Y .$$

$(x_1, x_2, ...x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ ელემენტის შესაბამისი $y \in Y$ ელემენტი აღინიშნება ასე:

$y = f(x_1, x_2, ...x_n)$. უკანასკნელი ჩანაწერი, ხშირად ფუნქციის აღსანიშნადაც გამოიყენება. $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ სიმრავლეს **ფუნქციის განსაზღვრის არე** ეწოდება, Y სიმრავლეს **ფუნქციის ცვლილების არე.**

თუ $n = 1$, საქმე გვექნება ჩვენთვის კარგად ცნობილ ერთი ცვლადის ფუნქციასთან, თუ $n = 2$ საქმე გვექნება ორი ცვლადის ფუნქციასთან, თუ $n = 3$, სამი ცვლადის ფუნქციასთან და ასე შემდეგ.

ჩვენ განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია $z = f(x, y)$. ყველაფერი რაც ნათქვამი იქნება ქვემოთ, ასეთი ფუნქციებისათვის მართებული იქნება ნებისმიერი რაოდენობის ცვლადის ფუნქციებისთვისაც.

ყოველ რიცხვით (x, y) წყვილს ცალსახად შეესაბამება ისეთი წერტილი საკოორდინატო სიბრტყეზე, რომლის კოორდინატებიც წარმოდგენილია მოცემული წყვილით. ამიტომ ნებისმიერი ორი ცვლადის ფუნქცია წარმოადგენს სიბრტყის წერტილების შესაბამისობას რიცხვითი სიმრავლის ელემენტებთან. ასევე, სამი ცვლადის ფუნქცია წარმოადგენს სივრცის წერტილების შესაბამისობას რიცხვითი სიმრავლის ელემენტებთან. შესაბამისად, ორი ან სამი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრის არედ შეიძლება ჩაითვალოს წერტილთა სიმრავლე სიბრტყეზე ან სივრცეში. x, y ცვლადებს $z = f(x, y)$ ფუნქციის არგუმენტებს უწოდებენ.

მაგალითები: 1. $z = x^2 + 2y + 1$ წარმოადგენს ორი ცვლადის ფუნქციას, x და y ცვლადებს შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი, ნამდვილი რიცხვით მნიშვნელობა,, ამიტომ მისი განსაზღვრის არეა $R^2 = R \times R$ სიმრავლე. ასევე z ცვლადსაც შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვითი მნიშვნელობანი, ამიტომ მისი ცვლილების არეა R სიმრავლე.

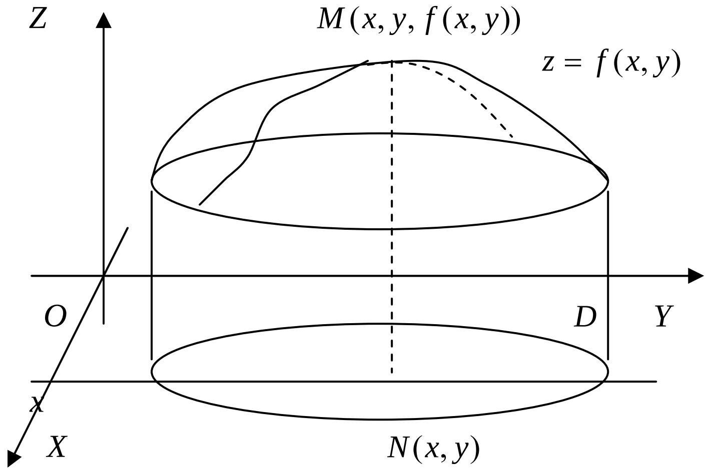
2. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ წარმოადგენს სამი ცვლადის ფუნქციას. x, y, z ცვლადებს შუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი, ნამდვილი რიცხვით მნიშვნელობა, ამიტომ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $R^3 = R \times R \times R$ სიმრავლე. u ცვლადი ღებულობს მხოლოდ არაუარყოფით ნამდვილ მნიშვნელობებს, ამიტომ ფუნქციის ცვლილების არეა $R^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$ სიმრავლე.

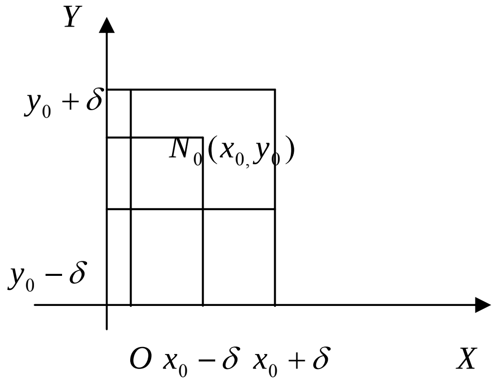
3. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ისეთი წყვილების ქვესიმ-რავლე $R^2 = R \times R$ სიმრავლეში, რომელთა კომპონენტებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $x^2 + y^2 \leq 1$. ცვლილების არეა R^+. $x^2 + y^2 \leq 1$ უტოლობა განსაზღვრავს

იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს. მოცემულ კერძო შემთხვევაში ეს სიმრავლეა წრე, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით 1.

ისევე, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის, არსებობს **ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკის** ცნებაც. $z = f(x, y)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება სამგანზომილებიანი სივრცის ისეთი წერტილების სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატებია $(x, y, f(x, y))$ (ნახ.16).

მარტივ შემთხვევაში, ეს სიმრავლე წარმოადგენს ზედაპირს, რომლის განტოლებაცაა $z = f(x, y)$.





ნახ.16 ნახ.17

შემოვიტანოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი ცნება.

ვთქვათ $\delta > 0$ რაიმე არაუარყოფითი რიცხვია, $N_0(x_0, y_0)$ რაიმე წერტილია სიბრტყეზე.

სიბრტყის იმ $N(x, y)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$0 < |x - x_0| < \delta, 0 < |y - y_0| < \delta,$$

$N_0(x_0, y_0)$ **წერტილის** δ **მიდამო** ეწოდება.

ვიტყვით, რომ $N(x, y)$ წერტილი მიისწრაფვის $N_0(x_0, y_0)$ წერტილისკენ, თუ მანძილი ამ წერტილებს შორის მიისწრაფვის ნულისაკენ ანუ

$$\lim |NN_0| = \lim \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 0.$$

უკანასკნელ ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x \to x_0$ და $y \to y_0$.

$N_0(x_0, y_0)$ წერტილს ეწოდება სიბრტყეზე მოთავსებული D არის ზღვრული წერტილი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, D არეში არსებობს ისეთი $N(x, y)$ წერტილი, რომ

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon, 0 < |y - y_0| < \varepsilon.$$

$N_0(x_0, y_0)$ წერტილის δ მიდამო გეომეტრიულად წარმოადგენს იმ კვადრატის შიგა წერტილების სიმრავლეს, რომლის ცენტრია $N_0(x_0, y_0)$ წერტილი, ხოლო გვერდები 2δ სიგრძის მონაკვეთებია(ნახ.17).

განსაზღვრება 4..2. A რიცხვს ეწოდება $z = f(x,y)$ **ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი** $N_0(x_0,y_0)$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს რიცხვი $\delta > 0$, რომ როდესაც

$$0 < |x - x_0| < \delta ,\ 0 < |y - y_0| < \delta ,$$

მაშინ

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon .$$

ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი $N_0(x_0,y_0)$ წერტილში აღინიშნება ასე:

$$A = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \quad \text{ან} \quad A = \lim_{N(x,y)\to N_0(x_0,y_0)} f(x,y) .$$

განსაზღვრება 4.3. რაიმე D არეზე განსაზღვრულ $z = f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $N_0(x_0,y_0) \in D$ წერტილში, თუ ამ ფუნქციის ზღვარი მოცემულ წერტილში ემთხვევა მის მნიშვნელობას ამ წერტილში ანუ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0) .$$

თუ ფუნქცია უწყვეტია D არის თითოეულ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქცია უწყვეტია ამ არეზე.

სიდიდეებს $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ უწოდებენ შესაბამის არგუმენტთა ნაზრდებს, ხოლო

სიდიდეს $\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ ფუნქციის ნაზრდს.

ფუნქციის $z = f(x,y)$ უწყვეტობა $N_0(x_0,y_0)$ წერტილში ნიშნავს, რომ ფუნქციის ნაზრდი $\Delta z \to 0$ როდესაც $\Delta x \to 0$ და $\Delta y \to 0$ ანუ არგუმენტთა უსასრულოდ მცირე ნაზრდებს შეესაბამება უსასრულოდ მცირე ფუნქციის ნაზრდი.

სიბრტყის იმ წერტილს სადაც ფუნქციის უწყვეტობის პირობა ირღვევა, **ფუნქციის წყვეტის წერტილი** ეწოდება.

მაგალითები: 1 $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ ფუნქციის ერთადერთი წყვეტის წერტილია კოორდინატებით $x = 0, y = 0$.

2.
$$z = \begin{cases} \dfrac{1}{x - y}, x \neq y \\ 1, x = y \end{cases},$$

ფუნქცის წყვეტის წერტილია ყველა ის წერტილი, რომლისთვისაც $x = y$.

2. ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $z = f(x,y)$ განსაზღვრული რაიმე D არეზე და

$$N_0(x_0,y_0) \in D .$$

განვიხილოთ სიდიდე

$$\Delta z_x = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) ,$$

ამ სიდიდეს მოცემული ფუნქციის კერძო ნაზრდი ეწოდება x არგუმენტის მიმართ. ანალოგიურად განისაზღვრება ფუნქციის კერძო ნაზრდი y არგუმენტის მიმართ:

$$\Delta z_y = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) .$$

განსაზღვრება 4.4. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} ,$$

მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქციას $z = f(x,y)$ გააჩნია **კერძო წარმოებული** $N_0(x_0, y_0) \in D$
წერტილში x არგუმენტის მიმართ, ზღვარს კი უწოდებენ ფუნქციის კერძო წარმოებულს x არგუმენტის მიმართ, ამ წერტილში.

ამ კერძო წარმოებულის აღსანიშნად გამოიყენება ერთ-ერთი შემდეგი სიმბოლოებიდან: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x, f'_x$. თუ საჭიროა მივუთითოთ, რომელ წერტილშა ფუნქციის კერძო წარმოებული, მაშინ ვიყენებთ აღნიშვნებს:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, f'_x(x_0, y_0).$$

ანალოგიურად, თუ არსებობს სასრული ზღვარი

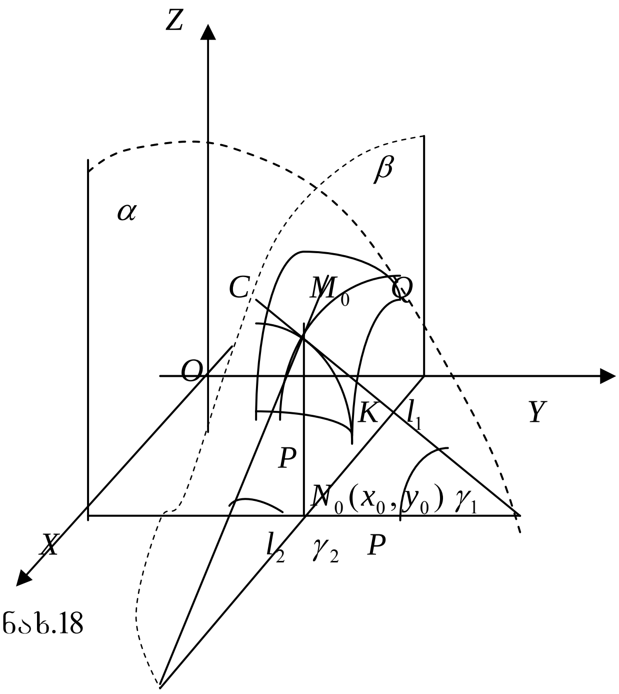
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქციას $z = f(x,y)$ გააჩნია კერძო წარმოებული $N_0(x_0, y_0) \in D$ წერტილში y არგუმენტის მიმართ, ზღვარს კი უწოდებენ ფუნქციის კერძო წარმოებულს y არგუმენტის მიმართ, ამ წერტილში.

ამ კერძო წარმოებულის აღნიშვნები წინა შემთხვევის ანალოგიურია.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $z = ax^2 + \sin^3(x + 2y^2)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები z'_x და z'_y.

ამოხსნა: როგორც კერძო წარმოებულების განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ გამოვთვალოთ კერძო წარმოებული ერთ ერთი არგუმენტის მიმართ, საჭიროა მეორე არგუმენტი ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ და ფუნქცია ჩავთვალოთ ერთი ცვლადის ფუნქციდ, შემდეგ გამოვთვალოთ ამ ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებული $z'_x = 2ax + 3\sin^2(x + 2y^2), z'_y = 6y\sin^2(x + 2y^2)$.



ნახ.18

გავარკვიოთ, რა გეომეტრიული აზრი აქვთ $z = f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებს $N_0(x_0, y_0) \in D$ წერტილში(ნახ. 18).

განვიხილოთ $z = f(x, y)$ განტოლებით განსაზღვრული ზედაპირი სამგანზომილებიან $Oxyz$ სივრცეში. $N_0(x_0, y_0) \in D$ წერტილს ამ ზედაპირზე შეესაბამება წერტილი $M_0(x_0, y_0, z_0)$, სადაც $z_0 = f(x_0, y_0)$.

$N_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გავატაროთ სიბრტყე α, რომელიც პარალელურია YOZ სიბრტყის. მისი განტოლება იქნება $x = x_0$.

ცხადია ეს სიბრტყე გადაკვეთს ზედაპირს რაღაც CK წირზე და გაივლის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე. წირი, რომელიც მიიღება სიბრტყის და ზედაპირის გადაკვეთით, შეიძლება წარმოვადგინოთ განტოლებათა სისტემით

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases},$$

ან ერთი განტოლებით $z = f(x_0, y)$, რომელიც მიიღება ამ სისტემიდან.

ფუნქცია $z = f(x_0, y)$ ერთი ცვლადის ფუნქციაა. $z = f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული $z'_y = f'_y(x_0, y_0)$ იქნება ამ ერთი ცვლადის ფუნქციის ჩვეულებრივი წარმოებული $y = y_0$ წერტილში. აქედან გამომდინარე, $z'_y = f'_y(x_0, y_0)$ წარმოადგენს CK წირის l_1 მხების საკუთხო კოეფიციენტს ანუ l_1 მხების XOY სიბრტყესთან დახრის კუთხის ტანგენსს.

ახლა $N_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გავატაროთ სიბრტყე α, რომელიც პარალელურია XOZ სიბრტყის. მისი განტოლება იქნება: $y = y_0$. ამ სიბრტყის ზედაპირთან კვეთით მიღებული PQ წირის განტოლება იქნება $z = f(x_0, y)$. კერძო წარმოებული $z'_y = f'_y(x_0, y_0)$ წარმოადგენს PQ წირის l_2 მხების საკუთხო კოეფიციენტს ანუ l_2 მხების XOY სიბრტყესთან დახრის კუთხის ტანგენსს.

3. ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $z = f(x, y)$ განსაზღვრული რაიმე D არეზე, ამასთან D არეზე არსებობს $z'_x = f'_x(x_0, y_0), z'_y = f'_y(x_0, y_0)$ კერძო წარმოებულები.

ვთქვათ $N_0(x_0, y_0) \in D$, განვიხილოთ სიდიდე $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, ამ სიდიდეს $z = f(x, y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი ეწოდება.

განსაზღვრება 4..5. $z = f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება **დიფერენცირებადი ფუნქცია** $N_0(x_0, y_0)$ წერტილში, თუ მისი სრული ნაზრდი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x)\Delta x + \beta(\Delta y)\Delta y, \qquad (1)$$

სადაც A და B რაიმე რიცხვებია, $\alpha(\Delta x), \beta(\Delta y)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0, \lim_{\Delta y \to 0} \beta(\Delta y) = 0.$$

(1) ტოლობის მარჯვენა მხარის წრფივ ნაწილს $A\Delta x + B\Delta y$ ეწოდება $z = f(x, y)$ ფუნქცის **სრული დიფერენციალი** $N_0(x_0, y_0)$ წერტილში და აღინიშნება ასე:

$$dz\Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = A\Delta x + B\Delta y.$$

როგორც ვხედავთ, სრული დიფერენციალი წარმოადგენს Δx და Δy არგუმენტების წრფივ ფუნქციას.
დავადგინოთ A და B რიცხვების მნიშვნელობანი. ამისათვის (1) ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ ჯერ Δx-ზე, შემდეგ მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta x \to 0$, მივიღებთ:

$$f_x'(x_0, y_0) = A.$$

ანალოგიურად, (1) ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ ჯერ Δy-ზე, შემდეგ მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta y \to 0$, მივიღებთ:

$$f_y'(x_0, y_0) = B.$$

ამ დაზუსტებების შემდეგ, $z = f(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი $N_0(x_0, y_0)$ წერტილში, შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც Δx და Δy არგუმენტების კონკრეტული წრფივი ფუნქცია

$$dz\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y.$$

თუ ჩავთვლით, რომ x და y ცვლადების დიფერენციალები dx, dy იგივეა, რაც ამ ცვლადების ნაზრდები Δx და Δy, შეიძლება დავწეროთ

$$dz\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = f_x'(x_0, y_0)dx + f_y'(x_0, y_0)dy.$$

თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია D არის ნებისმიერ წერტილში, მაშინ მას უწოდებენ დიფერენცირებადს D არეზე.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$z = ax^2 + \sin^3(x + 2y^2)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი $N(\pi, \frac{\pi}{2})$ წერტილში.

ამოხსნა:

$$dz\Big|_{\substack{x=\pi\\ y=\frac{\pi}{2}}} = (2ax + 3\sin^2(x + 2y^2))_x'\Big|_{\substack{x=\pi\\ y=\frac{\pi}{0}}} dx + (6y\sin^2(x + 2y^2))_y'\Big|_{\substack{x=\pi\\ y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}} dy = (2a\pi + 3)dx + 3\pi dy.$$

სრული დიფერენციალი საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა, მართლაც

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_x'(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x)\Delta x + \beta(\Delta y)\Delta y.$$

Δx და Δy ნაზრდების საკმაოდ მცირე მნიშვნელობებისთვის გვექნება მიახლოებითი ტოლობა:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_x'(x_0, y_0)\Delta y.$$

ამ მიახლოებითი ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_x'(x_0, y_0)\Delta y.$$

თუ $x_0 \le x \le x_0 + \Delta x$ და $y_0 \le y \le y_0 + \Delta y$, საკმაოდ მცირე Δx და Δy ნაზრდების მნიშვნელო- ბებისთვის გვექნება:

$$f(x_0, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_x'(x_0, y_0)\Delta y. \qquad (2)$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $z = e^{xy}$ ფუნქციის მნიშვნელობა, როდესაც $x = 0{,}35, y = -0{,}5$.
ამოხსნა: (2) ფორმულით:

$$z = e^{0{,}35\cdot(-0{,}5)} = e^{0\cdot 0} + (-0{,}5)e^0 0{,}35 + 0{,}35e^0(-0{,}5) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65.$$

4. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი

როგორც ცნობილია, D არეზე დიფერენცირებადი $z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს ზედაპირს. ამოვირჩიოთ წერტილი $N_0(x_0,y_0)$ D არეში.

ამ წერტილის ამორჩევით განისაზღვრება წერტილი ზედაპირზე $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. როგორც გეომეტრიიდან არის ცნობილი, **ზედაპირის მხები სიბრტყე** მოცემულ წერტილში წარმოადგენს სიბრტყეს, რომელიც გადის ზედაპირის ამ წერტილზე გამავალ მის ნებისმიერ ორ მხებ წრფეზე და ეს სიბრტყე ერთადერთია.

ასეთი სიბრტყის განტოლება, ზოგადად, უნდა იყოსშემდეგი სახის:

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0).$$

ზედაპირის l_1 და l_2 მხები წრფეები (ნახ.18), ცხადია, მდებარეობენ $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, წერტილში გამავალ მხებ სიბრტყეზე.

l_1 წრფის წერტილთა კოორდინატები (x_0,y,z) სახისაა, რადგანაც ეს წრფე მხებ სიბრტყეზე მდებარეობს, ამიტომ l_1 წრფის წერტილებისთვის ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას:

$$z-z_0=B(y-y_0).$$

მეორე მხრივ, l_1 წრფის განტოლებაა:

$$z-z_0=f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

მაშასადამე

$$B=f'_y(x_0,y_0).$$

ანალოგიურად შეიძლება გამოვთვალოთ A სიდიდის მნიშვნელობაც, გვექნება:

$$A=f'_x(x_0,y_0).$$

ამ გამოთვლების შემდეგ მხები სიბრტყის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0). \qquad (1)$$

განსაზღვრება 4..6. ზედაპირის M_0 წერტილში მხები სიბრტყის მართობულ წრფეს, რომელიც ამავე წერტილზე გადის, M_0 წერტილში **ზედაპირის ნორმალი** ეწოდება.

როგორც ანალიზური გეომეტრიიდან არის ცნობილი (1) სახის განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყის $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილში გამავალი მართობული წრფის განტოლებას უნდა ჰქონდეს სახე:

$$\frac{z-z_0}{-1}=\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}. \qquad (2)$$

აქედან გამომდინარე (2) ნორმალის განტოლებაა.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $z=2x^2+3y^2$ პარაბოლოიდის $M_0(1,1,5)$ წერტილში მხები სიბრტყის და ნორმალის განტოლებანი.

ამოხსნა:

$$(2x^2+3y^2)'_x\big|_{x=1}=4x\big|_{x=1}=4,\ (2x^2+3y^2)'_y\big|_{y=1}=6y\big|_{y=1}=6.$$

აქედან გამომდინარე, მხები სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$z-5=4(x-1)+6(y-1).$$

ნორმალის განტოლება კი

$$\frac{z-5}{-1}=\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{6}.$$

5. რთული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $z = f(u,v)$ განსაზღვრული და დიფერენცირებადი რაიმე U არეზე. ვთქვათ, u და v, თავის მხრივ წარმოადგენს x და y

ცვლადების ფუნქც-იებს: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, რომლებიც განსაზღვრული არიან და დიფერენცირებადი რაიმე D არეზე და რომელთა მნიშვნელობისგან შედგენილი წყვილები (u,v) შედის U არეში.

ასეთ შემთხვევაში z წარმოადგენს რთულ ფუნქციას

$$z = f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y).$$

დავაფიქსიროთ y ცვლადი და x ცვლადს მივცეთ ნაზრდი Δx. როგორც მე-3 ქვეთავიდან დან ვიცით:

$$\Delta z = f_u' \Delta u_x + f_v' \Delta v_x + \alpha(\Delta u)\Delta u_x + \beta(\Delta v)\Delta v_x .$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ Δx-ზე მივიღებთ:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f_u' \frac{\Delta u_x}{\Delta x} + f_v' \frac{\Delta v_x}{\Delta x} + \alpha(\Delta u_x)\frac{\Delta u_x}{\Delta x} + \beta(\Delta v_x)\frac{\Delta v_x}{\Delta x} . \qquad (1)$$

$u = u(x,y)$ და $v = v(x,y)$ უწყვეტი ფუნქციებია, ამიტომ თუ $\Delta x \to 0$, მაშინ $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$.

თუ (1) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta x \to 0$ და გავითვალისწინებთ, რომ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0, \lim\limits_{\Delta y \to 0} \beta(\Delta y) = 0$, მივიღებთ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u' \frac{\partial u}{\partial x} + f_v' \frac{\partial v}{\partial x} . \qquad (2)$$

ანალოგიურად, თუ დავაფიქსირებთ x ცვლადს და y ცვლადს მივცემთ ნაზრდს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_u' \frac{\partial u}{\partial y} + f_v' \frac{\partial v}{\partial y} . \qquad (3)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $z = \sin((\ln(xy)e^{x+y})$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$.

ამოხსნა:

$u = \ln xy$, $v = e^{x+y}$, $z = \sin uv$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \sin uv}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \sin uv}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \cos(\ln(xy)e^{x+y})e^{x+y}\frac{1}{x} + \cos(\ln(xy)e^{x+y})\ln(xy)e^{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \sin uv}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \sin uv}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \cos(\ln(xy)e^{x+y})e^{x+y}\frac{1}{y} + \cos(\ln(xy)e^{x+y})\ln(xy)e^{y}.$$

თუ მოცემულია ფუნქცია $z = f(x,y)$ და $x = x(t), y = y(t)$, მაშინ $z = f(x(t), y(t))$ წარ- მოადგენს t არგუმენტის რთულ ფუნქციას და $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

$z = f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$ რთული ფუნქციის დიფერენციალი

$$dz = F_x' dx + F_y'$$

როგორც (2) და (3) ფორმულებიდან ჩანს, შემდეგი სახის უნდა იყოს:

$$dz = (f'_u\frac{\partial u}{\partial x} + f'_v\frac{\partial v}{\partial x})dx + (f'_u\frac{\partial u}{\partial y} + f'_v\frac{\partial v}{\partial y})dy\,.$$

ეს ტოლობა გარდავქმნათ შემდეგნაირად

$$dz = f'_u(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) + f'_v(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy)\,. \qquad (4)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\,,\ dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\,,$$

(4) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$dz = f'_u du + f'_v dv\,.$$

როგორც ვხედავთ, იმის მიუხედავად იქნება u და v ცვლადები დამოუკიდებელი, თუ თითოეული მათგანი დამოკიდებული იქნება სხვა x და y ცვლადებზე, ადგილი აქვს **სრული დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტულობას** ანუ უცვლელობას.

სრული დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტულობას ცხადია აქვს ფორმალური და არა შინაარსობრივი ხასიათი. როდესაც u და v ცვლადები დამოუკიდებელნი არიან, du და dv სიდიდეები წარმოადგენენ ამ ცვლადების მუდმივ ნაზრდებს, მაშინ, როდესაც $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, du და dv სიდიდეები წარმოადგენენ ამ ფუნქციების დიფერენციალებს.

სრული დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტულობა საშუალებას გვაძლევს ვაჩვენოთ შემდეგი ფორმულების სამართლიანობა:

$$d(f \pm g) = df \pm dg, d(fg) = fdg + gdf, d(\frac{f}{g}) = \frac{gdf - fdg}{g^2}\,.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $z = \ln(x^2 + y^2)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი.

ამოხსნა:

$z = \ln u$,სადაც $u = x^2 + y^2$. აქედან $dz = \frac{\partial \ln u}{\partial u} = \frac{1}{u}du$, $du = 2xdx + 2ydy$.

საბოლოოდ:

$$dz = \frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2}\,.$$

6. არაცხადი ფუნქცია და მისი წარმოებული

ვთქვათ ფუნქცია $z = F(x, y)$ განსაზღვრულია რაიმე D არეზე. განვიხილოთ განტოლება

$$F(x, y) = 0\,. \qquad (1)$$

ამ განტოლებით ცვლადები x და y ერთმანეთთან გარკვეულ ურთიერთკავშირში არი- ან. თუ x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რაიმე რიცხვითი შუალედიდან, არსებობს y ცვლადის ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც x ცვლადის ამ მნიშვნელობასთან ერთად აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, მაშინ საქმე გვაქვს **არაცხად ფუნქციასთან** $y = f(x)$, რომელიც განისაზღვრება (1) განტოლებით.

შეიძლება სხვანაირადაც იყოს, y ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რაიმე რიცხვითი შუალედიდან, არსებობდეს x ცვლადის ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც y ცვლადის ამ მნიშვნელობასთან ერთად აკმაყოფილებს (1) განტოლებას მაშინ (1) განტოლება განსაზღვრავს არაცხად ფუნქცის $x = \varphi(y)$.

როდესაც ვლაპარაკობთ არაცხად ფუნქციაზე, მხედველობაში გვაქვს ფუნქციის მოცემის ერთ-ერთი ხერხი და არა მისი რაიმე თვისება. ზოგიერთ შემთხვევაში

შესაძლებელია (1) განტოლების ამოხსნა ერთ-ერთი ცვლადის მიმართ, მაშინ ადვილად გადავდივართ არაცხადი ფუნქციიდან ჩვეულებრივ ფუნქციაზე.

მაგალითად

$$F(x,y)=x^3+y^2(x-1)=0$$

არაცხადი ფუნქციიდან ადვილად ვღებულობთ ჩვეულებრივ ფუნქციას:

$$y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\,.$$

მაგრამ ეს ყოველთვის არ ხერხდება. მაგალითად, $x^y=y^x$ განტოლების ამოხსნა შეუძლებელია რომელიმე ცვლადის მიმართ. ანუ არ შეგვიძლია ცხადად წამოვადგინოთ შესაბამისობა $y=f(x)$ ან $x=\varphi(y)$.

არაცხადად მოცემული ფუნქცია რეალური ფუნქციაა, ასეთი ფუნქციები მრავალი ამოცანის გადაჭრის პროცესში შეიძლება შეგვხვდეს, ამიტომ წამოიჭრება მათი დიფერენცრებადობის საკითხიც.

ვთქვათ,

$$F(x,y)=0$$

განტოლება განსაზღვრავს $y=f(x)$ არაცხად ფუნქციას. ამ არაცხადი ფუნქციისთვის, ცხადია, ადგილი აქვს იგივურ ტოლობას:

$$F(x,y(x))=0\,.$$

გავაწარმოოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე x ცვლადით, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\,.$$

ამ უკანასკნელ ტოლობაში, თუ ჩავთვლით, რომ $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$, გვექნება:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,. \qquad (2)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y^3+3y=x$ განტოლებით მოცემული $y=f(x)$ არაცხადი ფუნქციის წარმოებული $\dfrac{dy}{dx}$.

ამოხსნა: $F(x,y)=y^3+3y-x=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-1$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=3y^2+3$. (2) ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-1}{3y^2+3}=\frac{1}{3(y^2+1)}\,.$$

მაგალითი 2. ვთქვათ, არაცხადი ფუნქცია მოცემულია განტოლებით

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\,.$$

ვიპოვოთ $\dfrac{dy}{dx}$.

ამოხსნა:

$$F(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{a}=0,$$

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$. (2) ფორმულის გამოყენებით, გვექნება: $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$ ჰიპერბოლის მხები, რომელიც გადის $M(1,5)$ წერტილზე.

ამოხსნა:

ეს ამოცანა, $F(x,y)=\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}-1=0$ განტოლებით მოცემული, $y=f(x)$ არაცხადი ფუნქციის გრაფიკის მხების პოვნის ამოცანის ეკვივალენტურია.

ასეთი ფუნქციის გრაფიკის, $M(1,5)$ წერტილზე გამავალი, მხები წრფის განტოლებას ექნება სახე:

$$y-y_0=\frac{dy}{dx}(x-x_0)\,.$$

ფუნქციის გრაფიკის მხების საკუთხო კოეფიციენტი ტოლია ამ ფუნქციის წარმოებულისა, შესაბამის წერტილში

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{3^2}$,$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{2y}{4^2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{4^2 x}{3^2 y}$. აქედან გამომდინარე, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\ y=5}}=\frac{4^2}{3^2\cdot 5}$ და მხების განტოლება იქნება:

$$y-5=\frac{16}{45}(x-1)\,.$$

7. მაღალი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები

ვთქვათ, ფუნქცია $z=f(x,y)$ განსაზღვრულია და დიფერენცირებადი რაიმე D არეზე. მისი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, რომლებიც ასევე ორი ცვლადის ფუნქციებია, შესაძლებელია აღმოჩნდნენ დიფერენცირებადი რაიმე არეზე. თუ მოვახდენთ მათი გაწარ- მოებას x და y ცვლადებით, გვექნება $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}$, $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}$, $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}$ კერძო წარმოებულები. მათ უწოდებენ $z=f(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს და აღნიშნავენ, შესაბამისად, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ან f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}, სიმბოლოებით.

მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ უწოდებენ შერეულ კერძო წარმოებულებს.

თუ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულებიც ასევე დიფერენცირებადი ფუნქციებია რაიმე არეზე, შეიძლება განვიხილოთ მათი კერძო წარმოებულებიც, რომლებსაც მოცემულ $z=f(x,y)$ ფუნქციის მესამე რიგის კერძო წარმოებულებს

უწოდებენ. მათ აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ ან f'''_{xxx}, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ ან f'''_{xxy}, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ ან f'''_{xyy}, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ ან f'''_{yyy}.

ანალოგიურად განისაზღვრება მეოთხე რიგის, მეხუთე რიგის და ასე შემდეგ კერძო წარმოებულები.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $z = x^3 + x^2 y + y^3$ ფუნქციის ყველა მეორე რიგის კერძო წარმოე-ბული.

ამოხსნა:

პირველი რიგის კერძო წარმოებულებია:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2\,.$$

მეორე რიგის კერძო წარმოებულებია:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\,,\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = 2x\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y\,.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $z = arctg\,\frac{y}{x}$ ფუნქციის ყველა მეორე რიგის კერძო წარმოებული.

ამოხსნა: პირველი რიგის კერძო წარმოებულებია:

$$z'_x = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,,\ z'_y = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

მეორე რიგის კერძო წარმოებულებია:

$$z''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,\ z''_{xy} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

$$z''_{yx} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2-y^2)^2}\,,$$

$$z''_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

ამ ორივე მაგალითში, მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულები წარმოებულები
ერთმანეთის ტოლი აღმოჩნდა. გარკვეულ პირობებში ეს ზოგადი ფაქტია. ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა 4.1(შვარცის თეორემა). თუ $z = f(x,y)$ ფუნქციას $N_0(x_0, y_0)$ წერტილში და მის რაიმე მიდამოში გააჩნია უწყვეტი მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულები $f''_{xy}(x,y)$ და $f''_{yx}(x,y)$, მაშინ გაწარმოების თანამიმდევრობას მნიშვნელობა არ აქვს ანუ

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)\,.$$

როგორც ვიცით, $z = f(x,y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი
$N_0(x_0, y_0)$ წერტილში
ტოლია:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y\,.$$

ეს სიდიდე დამოკიდებულია $x, y, \Delta x, \Delta y$ ცვლადებზე. ვიპოვოთ მისი, როგორც x, y ცვლადებზე დამოკიდებული ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$d(dz) = d(f_x'dx + f_y'dy) = d(f_x'\Delta x + f_y'\Delta y) = f_{xx}''\Delta x\delta x + f_{xy}''\Delta x\delta y + f_{yx}''\Delta x\delta x + f_{yy}''\Delta y\delta y\,, \qquad (1)$$

სადაც δx და δy წარმოადგენს x, y არგუმენტების ნაზრდებს, რომლებიც განსხვავდებიან ამავე არგუმენტების $\Delta x, \Delta y$ ნაზრდებისაგან.

როდესაც $\delta x = \Delta x$ და $\delta y = \Delta y$, (1) სიდიდეს უწოდებენ $z = f(x, y)$ ფუნქციის **მეორე რიგის სრულ დიფერენციალს** და აღნიშნავენ ასე: $d^2 z$ ან $d^2 f(x, y)$.

შვარცის თეორემის თანახმად $f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y)$. ამიტომ ფუნქციის მეორე რიგის სრული დიფერენციალი, როდესაც $\delta x = \Delta x = dx$, $\delta y = \Delta y = dy$, გამოისახება ასე:

$$d^2 z = f_{xx}'' dx^2 + 2 f_{xy}'' dxdy + f_{yy}'' dy^2 .$$

ფუნქციის მეორე რიგის სრული დიფერენციალის ფორმა უკვე აღარ არის ინვარიანტული, რადგანაც u და v ცვლადების x, y ცვლადებზე

დამოკიდებულების შემთხვევაში $\Delta u, \Delta v$ ნაზრდები უკვე აღარ იქნებიან მუდმივი სიდიდეები, ისინი დამოკიდებული იქნებიან x, y ცვლადებზე და (1) ტოლობაში გაჩნდება მათი კერძო წარმოებულები ამ ცვლადების მიმართ.

ანალოგიურად განისაზღვრება ფუნქციის უფრო მაღალი რიგის სრული დიფერენციალიც.

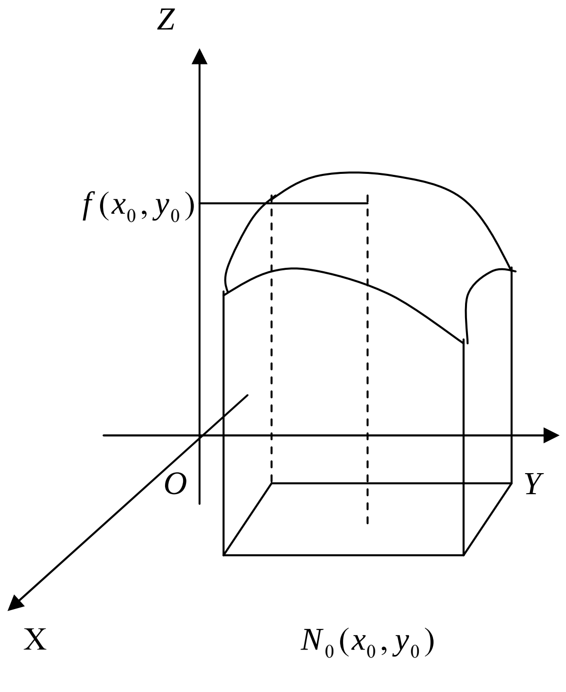
8. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

განსაზღვრება 4.7. $N_0(x_0, y_0)$ წერტილს ეწოდება $z = f(x, y)$ ფუნქციის მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიც $f(x_0, y_0)$ წარმოადგენს ფუნქციის უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას ანუ ამ მიდამოში ადგილი აქვს უტოლობას:

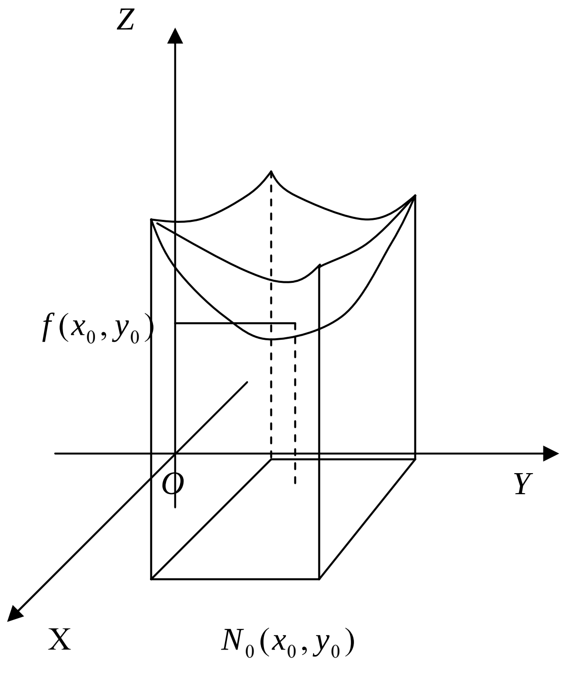
$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \; (f(x_0, y_0) < f(x, y)) .$$

ფუნქციის მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილებს **ექსტრემუმის წერტილები** ეწოდება.

გრაფიკულად ექსტრემუმის წერტილებს აქვთ სახე:



ნახ.19



ნახ.20

ვთქვათ $z = f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია და აღწევს მაქსიმუმს $N_0(x_0, y_0)$ წერტილში(ნახ.19. დავაფიქსიროთ $y = y_0$ და ვცვალოთ x. ფუნქცია $f(x, y_0)$ ერთი ცვლადის ფუნქციაა, იგი თავის მაქსიმუმს აღწევს, როდესაც $x = x_0$ და

$$f(x_0, y_0) > f(x, y_0),$$

x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც საკმარისად ახლოა x_0-თან.

როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციებისთვის, ამ შემთხვევაში

$$\frac{df(x,y_0)}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = 0.$$

ეხლა დავაფიქსიროთ $x = x_0$ და ვცვალოთ y. ერთი ცვლადის ფუნქცია $f(x_0, y)$ მაქსიმუმს აღწევს, როდესაც $y = y_0$, ამ შემთხვევაშიც

$$\frac{df(x_0,y)}{dy}\Big|_{y=y_0} = \frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}\Big|_{y=y_0} = 0.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ გვაქვს:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0\ ,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0. \qquad (1)$$

ანალოგიურ შედეგს მივიღებთ, იმ შემთხვევაშიც, თუ $N_0(x_0, y_0)$ მინიმუმის წერტილი იქნება. ამგვარად, (1) ტოლობა $z = f(x,y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციისათვის წარმოად- გენს აუცილებელ პირობას, რომ $N_0(x_0, y_0)$ იყოს ექსტრემუმის წერტილი.

მაგალითი 1. განვიხილოთ $z = x^2 - y^2$ ფუნქცია. გეომეტრიულად ამ ფუნქციით განსაზღვრული ზედაპირი წარმოადგენს ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს, მისი კერძო წარმოებულებია $z'_x = 2x, z'_y = -2y$. ეს წარმოებულები $N_0(0,0)$ წერტილში ღებულობენ ნულოვან მნიშვნელობას. $N_0(0,0)$ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა $z = 0$. თუ გავიხსენებთ, რომ წერტილი კოორდინატებით (0,0,0) ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდზე არ წარმოადგენს არც მაქსიმუმის არც მინიმუმის წერტილს, ვინაიდან არსებობენ წერტილები ამ ზედაპირზე, რომლებიც იმყოფებიან როგორც XOY სიბრტყის ზემოთ, ასევე მის ქვემოთ.

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ (1) ტოლობები არ წარმოადგენენ იმის საკმარის პირობას, რომ $N_0(0,0)$ იყოს მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილი.

წერტილებს, სადაც ფუნქციის კერძო წარმოებულები ნულის ტოლია **ფუნქციის კრიტიკული წერტილები** ეწოდება.

როგორც მე-4 ქვეთავიდანდან ვიცით, $z = f(x,y)$ ფუნქციით განსაზღვრული ზედაპირის $N_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი მხები სიბრტყის განტოლებაა:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(y - y_0).$$

თუ $N_0(x_0, y_0)$ წერტილი ფუნქციის კრიტიკული წერტილია, მაშინ

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0.$$

ასეთ შემთხვევაში მხები სიბრტყის განტოლებას ექნება სახე:

$$z - z_0 = 0.$$

ეს კი წარმოადგენს $N_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი XOY სიბრტყის პარალელური სიბრტყის, განტოლებას.

მაშასადამე, კრიტიკულ წერტილებში, მხები სიბრტყე XOY საკოორდინატო სიბრტყის პარალელურია.

ეხლა მოვიყვანოთ ფუნქციის ექსტრემუმის საკმარისი პირობები.

ვთქვათ, $N_0(x_0, y_0)$ წერტილი $z = f(x, y)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილია და ფუნქციას ამ წერტილში გააჩნია მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

$$f''_{xx}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = A,\ f''_{xy}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = B,\ f''_{yy}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = C\ .$$

შევადგინოთ გამოსახულება

$$\Delta = AC - B^2\ .$$

მაშინ:

1) თუ $\Delta > 0$, მაშინ ექსტრემუმი არსებობს.

ა) $N_0(x_0, y_0)$ წერტილი მინიმუმის წერტილია, თუ $A > 0$ ან $C > 0$.

ბ) $N_0(x_0, y_0)$ წერტილი მაქსიმუმის წერტილია, თუ $A < 0$ ან $C < 0$.

2) თუ $\Delta < 0$ ექსტრემუმი არ არსებობს.

3) თუ $\Delta > 0$ არაფრის თქმა არ შეიძლება, კვლევა უნდა გაგრძელდეს.

აქედან გამომდინარე $z = f(x, y)$ ფუნქციის გამოკვლევა ექსტრემუმზე უნდა მოხდეს შემდეგი პრაქტიკული ხერხით:

1) ვითვლით ფუნქციის კერძო წარმოებულებს:

$$f'_x(x, y) \text{ და } f'_y(x, y)\ .$$

2) ვპოულობთ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს, ამისათვის ვხსნით განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} f'_x(x, y), \\ f'_y(x, y). \end{cases}$$

3) ვითვლით მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს კრიტიკულ წერტილებში:

$$f''_{xx}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = A,\ f''_{xy}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = B,\ f''_{yy}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = C\ .$$

4) ვადგენთ $\Delta = AC - B^2$ გამოსახულებას და ვახდენთ მის ანალიზს.

მაგალითი 2. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია $z = x^3 + y^3 - 3axy, a > 0$ ექსტრემუმზე.

ამოხსნა: გამოვთვალოთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay\ ,\ f'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax\ .$$

ვიპოვოთ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები

$$\begin{cases} 3x^2 - 3ay = 0, \\ 3y^3 - 3ay = 0. \end{cases}$$

პირველი განტოლებიდან $y = \dfrac{x^2}{a}$, ამ ტოლობიდან და მეორე განტოლებიდან მივიღებთ: $\dfrac{x^4}{a^2} = ax$ ანუ $x(x^3 - a^3) = 0$. აქედან კი $x_1 = 0, x_2 = a$, შესაბამისად $y = 0, y = a$.

გამოვთვალოთ ფუნქციის მეორე კერძო წარმოებულები:

$$f'_{xx} = 6x,\ f'_{xy} = -3a,\ f'_{yy} = 6y\ .$$

$N_1(0,0)$ და $N_2(a, a)$ კრიტიკულ წერტილებში მათი მნიშვნელობა იქნება:

$N_1(0,0)$ წერტილისათვის

$$A = 0, B = -3a, C = 0\ .$$

$N_2(a, a)$ წერტილისთვის

$$A = 6a, B = -3a, C = 6a.$$

$N_1(0,0)$ წერტილისათვის

$$\Delta = AC - B^2 = 0 - 3a,$$

რადგან $a > 0$, ამიტომ

$$\Delta < 0.$$

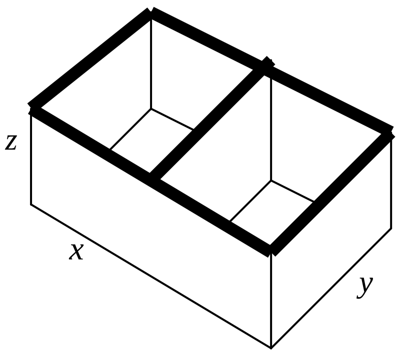
ეს კი ნიშნავს, რომ $N_1(0,0)$ წერტილში ექსტრემუმი არ არსებობს.

$N_2(a,a)$ წერტილისთვის

$$\Delta = AC - B^2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0.$$

ამიტომ $N_2(a,a)$ წერტილში ექსტრემუმი არსებობს. ამასთან, რადგან $A = 6a > 0$, საქმე გვაქვს მინიმუმის წერტილთან.

მაგალითი 3. ვთქვათ, უნდა დამზადდეს ყუთი, რომლის მოცულობა იქნება 48 კუბ. დეციმეტრი და შედგენილი იქნება ორი განყოფილებისაგან, რომლებიც გაყოფილია ერთმანეთისაგან ტიხრით. ვიპოვოთ იმ მასალის მინიმალური რაოდენობა, რომელიც საჭიროა ყუთის დასამზადებლად(ნახ.21).



ნახ.21

ამოხსნა: მასალის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა ყუთის დასამზადებლად, ტოლია სიდიდის: $M = xy + 2xz + 3yz$. ყუთის მოცულობა $V = xyz$. უკანასკნელი ტოლობიდან განვსაზღვროთ z, გვექნება $z = \frac{48}{xy}$. აქედან

$$M = xy + 2x\frac{48}{xy} + 3y\frac{48}{xy} = xy + \frac{96}{y} + \frac{144}{x}.$$

გამოვთვალოთ $M(x,y)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial x} = y - \dfrac{144}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x - \dfrac{96}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

მივიღებთ: $x = 6, y = 4$,

$$A = \frac{\partial^2 M(x,y)}{\partial x^2}\Big|_{x=6} = \frac{288}{x^3}\Big|_{x=6} = \frac{288}{216} = \frac{4}{3}, B = \frac{\partial^2 M(x,y)}{\partial x \partial y}\Big|_{\substack{x=6 \\ y=4}} = 1,$$

$$C = \frac{\partial^2 M(x,y)}{\partial y^2}\Big|_{y=4} = \frac{192}{y^3}\Big|_{y=4} = \frac{192}{64} = 3$$

და აქედან გამომდინარე: $z=\dfrac{48}{xy}=2$, $A=\dfrac{4}{3}>0, \Delta=AC-B^2=4-1=3>0$. ეს კი ნიშნავს, რომ საქმე გვაქვს მინიმუმის წერტილთან. ამგვარად, ყუთი რომ დავამზადოთ მინიმალური რაოდენობის მასალით საჭიროა მისი ზომები იყოს: სიგრძე $x=6$ დმ, სიგანე $y=4$ დმ, სიმაღლე $z=2$ დმ.

მაგალითი 4. ფირმა უშვებს x ათას A ტიპის პროდუქტს და y ათას B ტიპის პროდუქტს. პროდუქციის რეალიზაციით მიღებული შემოსავლის ფუნქციაა: $R(x,y)=2x+3y$, ხოლო ხარჯების ფუნქცია: $C(x,y)=x^2-2xy+2y^2+6x-9y+5$. რა რაოდენობით უნდა დამზადდეს თითოეული ტიპის პროდუქტი, რომ ფირმამ მიიღოს მაქსიმალური მოგება.

ამოხსნა: ფირმის მოგების ფუნქცია ტოლია:

$$P(x,y)=R(x,y)-C(x,y)=-4x-x^2+2xy-2y^2+12y-5.$$

მისი კრიტიკული წერტილების მოსაძებნად ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x}=-4-2x+2y=0, \\ \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2x-4y+12=0. \end{cases}$$

მივიღებთ: $x=2, y=4$. აქედან $A=-2, B=2, C=-4$, $\Delta=AC-B^2=8-4>4, A<0$. მაშასადამე, საქმე გვაქვს მაქსიმუმის წერტილთან. ამგვარად მაქსიმალური მოგების მისაღებად ფირმამ უნდა დაამზადოს 2000 ცალი A ტიპის და 4000 ცალი B ტიპის პროდუქტი.

სავარჯიშოები მე-4 თავისათვის

I. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების კერძო წარმოებულები.:

1) $z=4x+5y-6$, 2), $z=x^3-y^2+7x+3y+1$ 3) $z=x^2(y+x)$, 4) $z=e^{xy}$, 5) $z=x^2y-xy^2$,
6) $z=2x^2-xy+y^2-x-5y+8$, 7) $z=y^3+2x^2y^2-3x-2y+8$, 8) $z=x\ln y+x^2-4x-5y+3$.

II. იპოვეთ იპოვეთ შემდეგი რთული ფუნქციების კერძო წარმოებულები:

1) $z=\sin(x+y)$,2) $z=\ln(x^2+y)$,3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$,4) $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$,5) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, 6) $z=arctg\dfrac{y}{x}$.

7)იპოვეთ $\dfrac{dz}{dt}$,თუ $\dfrac{dz}{dt}$ $z=\dfrac{x}{y}$, $x=e^t, y=\ln t$,8)იპოვეთ $\dfrac{dz}{dt}$

თუ $z=\ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}, x=3t^2, y=\sqrt{t^2+1}$.

III. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

1) $z=\sqrt{2xy+y^2}$, 2) $z=\ln(x^2+y^2)$, 3) $z=\sin(xy)$, 4) $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$, 5) $z=x^y$.

IV. იპოვეთ შემდეგი არაცხადი ფუნქციების ჩვეულებრივი წარმოებულები:

1) $x^4+2\sqrt{xy^5}=0$, 2) $xy+e^{\frac{y}{x}}=0$, 3) $\sin xy+x^2=0$, 5) $\ln\sin(x+y)-tg(xy)=0$,

6) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}}+1=0$.

V. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა სრული დიფერენციალები:

1) $z = x^2 + y^2 - 3xy$, 2) $z = \sin^2 x + \cos^2 y$, 3) $z = yx^y$, 4) $z = \ln(x^2 + y^2)$, 5) $z = \ln tg\dfrac{y}{x}$,

6) $z = x^2 y^2$.

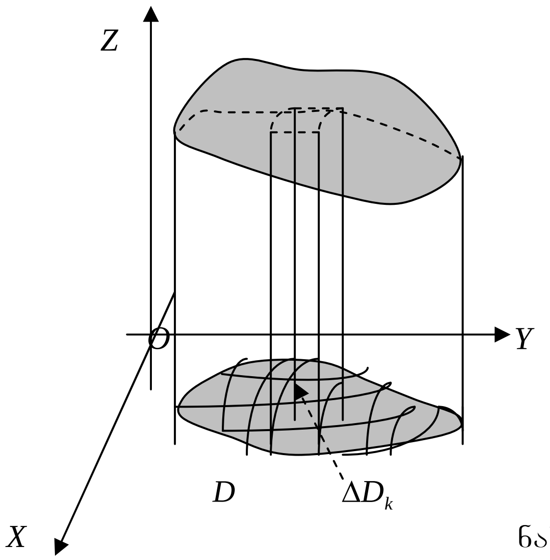
VI. გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე შემდეგი ფუნქციები:

1) $z = (x-1)^2 + 2y^2$, 2) $z = x^2 + xy + y^2 2x - y$, 3) $z = x^3 y - 2y^2$, 4) $z = (x-1)^2 - 2y^2$,

5) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, 6) $z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$.

თავი 5.
ორჯერადი ინტეგრალები
1. ცილინდრული სხეულის მოცულობა და ორჯერადი ინტეგრალის ცნება

ვთქვათ, XOY საკოორდინატო სიბრტყის D არეზე განსაზღვრულია $z = f(x, y)$ არაუარყოფითი ფუნქცია. განვიხილოთ სამგანზომილებიანი სხეული, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია მოცემული ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან შემოსაზღვრულია XOY სიბრტყით, გვერდებიდან ცილინდრული ზედაპირით, რომლის მსახველიც Z ღერძის პარალელურია, მიმმართველი წირი კი-D არის შემომსაზღვრელი კონტური. ასეთ სხეულს ცილინდრული სხეული ეწოდება(ნახ.22)



ნახ.22

D არეს კი ამ ცილუნდრული სხეულის ფუძე. განხილული ცილინდრული სხეულის მოცულობა აღვნიშნოთ V სიმბოლოთი.

დავყოთ D არე n ნაწილად თითოეული ეს ნაწილი აღვნიშნოთ ΔD_k სიმბოლოთი $k = 1,2,...,n.$. ამ მცირე არეთა ფართობები აღვნიშნოთ ΔS_k სიმბოლოთი.

განვიხილოთ ცილინდრული სხეულები, რომლებსაც ფუძედ აქვთ დაყოფით მიღებული მცირე ΔD_k არეები და ზემოდან შემოსაზღვრული არიან $z = f(x, y)$ განტოლებით განსაზღვრული ზედაპირის იმ ნაწილებით, რომლებიც პროექცირდებიან ამ მცირე არეებზე.

ამოვირჩიოთ თითოეულ ΔD_k არეში ნებისმიერი წერტილი $N_k(\xi_k, \eta_k)$,. შევცვალოთ თითოეული ცილინდრული სხეული ცილინდრებით, რომელთა სიმაღლეები ტოლია $f(\xi_k, \eta_k)$, $k = 1,2,3,...$.

ამ ცილინდრების მოცულობათა ჯამი

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k \ . \qquad (1)$$

ცხადია, რაღაც მიახლოებით, ტოლია ცილინდრული სხეულის მოცულობისა. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k \ . \qquad (2)$$

XOY სიბრტყის რაიმე D არის დიამეტრი d_D ეწოდება $\{d(M,N)\}$ სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს, $d=\sup\limits_{M,N\in D}\{d(M,N)\}$, სადაც $d(M,N)$ მანძილია D არის ნებისმიერ ორ, M და N წერტილს შორის.

თანდათან უფრო მეტ ნაწილად დავყოთ D არე ისე, რომ დაყოფით მიღებული ΔD_k ნაწილების მაქსიმალური დიამეტრი d_{D_k} მიისწრაფოდეს ნულისკენ. ასეთ შემთხვევაში მოსალოდნელია (2) მიახლოებითი ტოლობა თანდათან უფრო ზუსტი გახდეს და უსასრულობაში ამ მიახლოებითი ტოლობის მარჯვენა მხარე დაემთხვას მარცხენა მხარეს. მაშინ ცილინდრული სხეულის მოცულობისთვის გვექნება:

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max d_{D_K}\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k\,. \tag{3}$$

(3) ჯამს, $z=f(x,y)$ ფუნქციის რიმანის ჯამი ეწოდება, D არის თითოეულ დაყოფას თავისი რიმანის ჯამი შეესაბამება.

ამგვარად. საქმე გვაქვს $z=f(x,y)$ ფუნქციის რიმანის ჯამების მიმდევრობასთან D არეზე.

განსაზღვრება 5.1. თუ $z=f(x,y)$ ფუნქციის რიმანის ჯამების მიმდევრობას D არეზე გააჩნია ზღვარი, როდესაც დაყოფის ნაწილების რიცხვი უსასრულოდ იზრდება ისე, რომ ამ ნაწილების მაქსიმალური დიამეტრი მიისწრაფის ნულისკენ. ამასთან ეს ზღვარი დამოკიდებული არ არის ΔD_k არეში $N_k(\xi_k,\eta_k)$ წერტილის შერჩევაზე, მაშინ ამბობენ, რომ $z=f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია D არეზე. ხოლო ზღვარს:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max d_{D_K}\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k$$

უწოდებენ ამ ფუნქციის ორჯერად ინტეგრალს D არეზე და აღნიშნავენ ასე:

$$\iint\limits_D f(x,y)ds\,.$$

$f(x,y)$ ფუნქციას ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ეწოდება, D არეს- საინტეგაციო არე, ds სიდიდეს- ფართობის ელემენტი.

როგორც დავინახეთ, ორჯერადი ინტეგრალი გეომეტრიულად წარმოადგენს $z=f(x,y)$ ფუნქციით განსაზღვრული ცილინდრული სხეულის მოცულობას ანუ გვაქვს

$$V=\iint\limits_D f(x,y)ds\,.$$

მტკიცდება თეორემა:

თეორემა 5.1. ნებისმიერი D არეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია ამ არეზე.

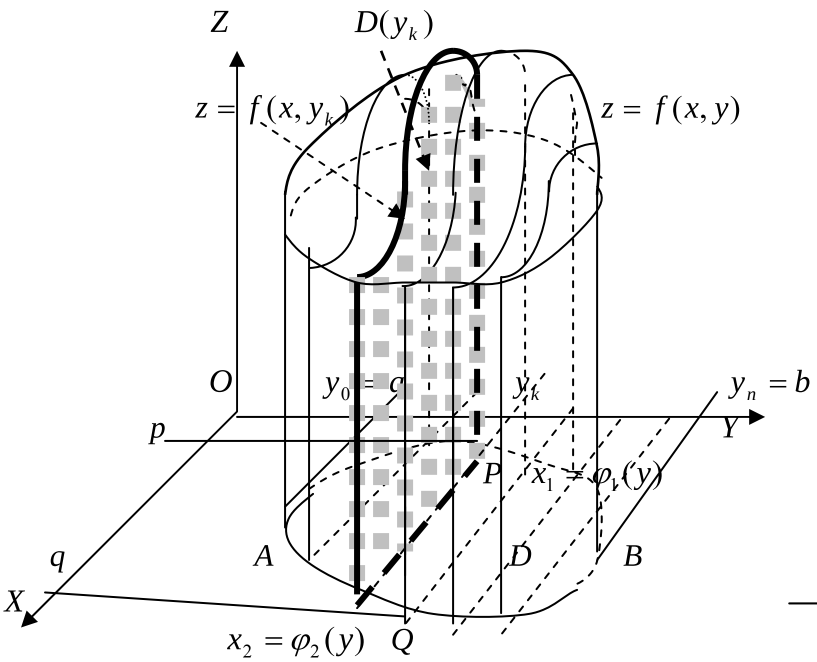
როგორც დავინახეთ, ინტეგრალი ორი ცვლადის ფუნქციისათვის განისაზღვრება ზუსტად ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალის ანალოგიურად. ამიტომ ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალის ყველა თვისება, ახასიათებს ორჯერად ინტეგრალსაც.

2. განმეორებითი ინტეგრალები და ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა

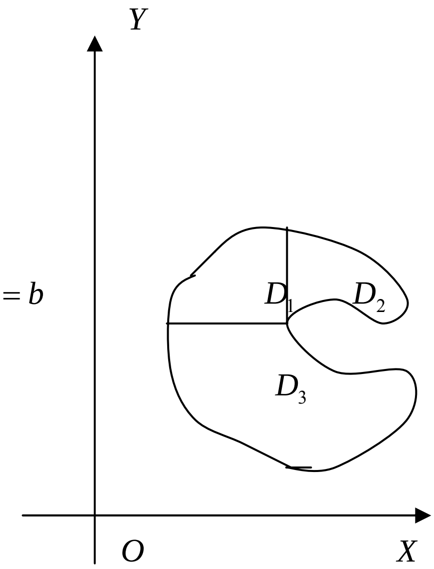
როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, ცილინდრული სხეულის, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $z=f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან D- არით, მოცულობა გამოისახება ფორმულით:

$$V=\iint_D f(x,y)ds$$

გამოვთვალოთ ეს მოცულობა სხვანაირად. დავუშვთ, რომ D არე ისეთია, რომ მისი შემომსაზღვრელი კონტური XOY საკოორდინატო სიბრტყის ღერძების პარალელურ წრფეებს გადაჰკვეთს არაუმეტეს ორ წერტილში(ნახ.23).



ნახ.23



ნახ..24

გავავლოთ XOY საკოორდინატო სიბრტყეში OX ღერძის პარალელური წრფეები, რომლებიც ეხებიან D არის შემომსაზღვრელ კონტურს. შეხების A და B წერტილები ამ კონტურს ყოფენ ორ ნაწილად, ეს ნაწილები წირებს წარმოადგენენ. ვთქვათ, მათი განტოლებებია:

$$x_1=\varphi_1(y), x_2=\varphi_2(y).$$

OY ღერძზე სეგმენტი $[a,b]$, სადაც a და b წარმოადგენენ A და B წერტილების აბსცისებს, შესაბამისად, დავყოთ n ნაწილად, წერტილებით:

$$a=y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n=b.$$

ყოველ y_k წერტილზე, $k=1,2,...,n-1$, გავატაროთ XOZ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეები. ეს სიბრტყეები, ცილინდრულ სხეულთან თანაკვეთაში, გვაძლევენ მრუდწირულ ტრაპეციებს.

განვიხილოთ მრუდწირული ტრაპეცია, რომელიც $y=y_k$ სიბრტყეზე მდებარეობს. ეს ტრაპეცია ზემოდან შემოსაზღვრულია წირით, რომლის განტოლება $z=f(x,y_k)$, ქვემოდან $[\varphi_1(y_k),\varphi_2(y_k)]$ მონაკვეთით. როგორც ერთჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრებიდან ვიცით, ტრაპეციის ფართობი

$$S(y_k)=\int_{\varphi_1(y_k)}^{\varphi_2(y_k)} f(x,y_k)dx.$$

აქედან გამომდინარე, ყოველი $y\in[a,b]$ წერტილისთვის, გვექნება:

$$S(y)=\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

მაშინ ცილინდრული სხეულის მოცულობისთვის გვექნება მიახლოებით ტოლობა:

$$V \approx \sum_{k=0}^{n-1} S(y_k)\Delta y_k .$$

თუ თანდათან გავზრდით $[a,b]$ სეგმენტის დამყოფი წერტილების რიცხვს ისე, რომ Δy_k სეგმენტების მაქსიმალური სიგრძეც შემცირდეს, უკანასკნელი მიახლოებითი ტოლობა უფრო ზუსტი გახდება. აქედან გამომდინარე, ადგილი ექნება ზუსტ ტოლობას:

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta y_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} S(y_k)\Delta y_k ,$$

ანუ

$$V = \int_a^b S(y)dy .$$

საბოლოოდ ვღებულობთ **განმეორებით ინტეგრალს**

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy . \qquad (1)$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$V = \int_p^q \left(\int_{\phi_{11}(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx , \qquad (2)$$

სადაც $x_1 = \varphi_1(y), x_2 = \varphi_2(y)$ იმ წირებს წარმოადგენენ, რომლებადაც ყოფენ D არის შემომსაზღვრელ კონტურს XOY საკოორდინატო სიბრტყეში OY ღერძის პარალელურ მხებ წრფეებზე მდებარე შეხების P და Q წერტილები.

აქედ გამომდინარე ორჯერადი ინტეგრალისთვის, გვექნება:

$$\iint_D f(x,y)ds = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int_p^q \left(\int_{\phi_{11}(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx . \qquad (3)$$

ორჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრისას ვგულისხმობდით, რომ $f(x,y) \geq 0$. ვთქვათ, ეს პირობა არ სრულდება, მაშინ დავყოთ D არე ისეთ D_1, D_2 ნაწილებად, სადაც ფუნქცია ნიშანს ინარჩუნებს. ვთქვათ, D_2 არეზე ფუნქცია უარყოფითია, ამ არეებზე ავიღოთ $|f(x,y)|$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალი

$$\iint_{D_2} |f(x,y)|\, ds$$

და ჩავთვალოთ, რომ

$$\iint_D f(x,y)ds = -\iint_{D_2} |f(x,y)|\, ds .$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_{D_1} f(x,y)ds + \iint_{D_2} f(x,y)ds .$$

ორჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრისას ასევე ვგულისხმობდით, რომ D არის შემომსაზღვრელი კონტური, საკოორდინატო ღერძების პარალელური წრფეებით,

გადაიკვეთებოდა არა უმეტეს ორ წერტილში. ვთქვათ გადაკვეთის წერტილების რიცხვი მეტია, მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია არე საკოორდინატო ღერძების პარალელური წრფეებით დავყოთ ისეთ ნაწილებად, რომ ამ ნაწილების

შემომსაზღვრელმა კონტურებმა წრფეები გადაკვეთოს არა უმეტეს ორ წერტილში (ნახ.24).

ასეთ შემთხვევაში ინტეგრალს გამოვითვლით დაყოფით მიღებულ თითოეულ არეზე. ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_{D_1} f(x,y)ds + \iint_{D_2} f(x,y)ds + \iint_{D_3} f(x,y)ds\,.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $z = x^2 - y - 4$ ზეაპირით, XOY და XOZ საკოორდინატო სიბრტყეებით შემოსაზღვრული ცილინდრული სხეულის მოცულობა.

ამოხსნა: ასეთი ცილინდრული სხეულის ფუძეაპარაბოლით და $y = x^2 - 4$ და X ღერძით შემოსაზღვრული ბრტყელი ფიგურა, X ღერძი ამ პარაბოლას გადაჰკვეთს $x = -2$ და $x = 2$ წერტილებში. ფუძის კონტური შედგება $y == x^2 - 4$ პარაბოლის ნაწილისაგან და [-2,2] მონაკვეთისაგან X ღერძზე. აქედან გამომდინარე, თუ გამოვიყენებთ (2) ფორმულას, გვექნება:

$$V = \int_{-2}^{2}\left(\int_{x^2-4}^{0}(x^2 - y - 4)dy\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(x^2\int_{x^2-4}^{0}dy - \int_{x^2-4}^{0}ydy - 4\int_{x^2-4}^{0}dy\right)dx =$$

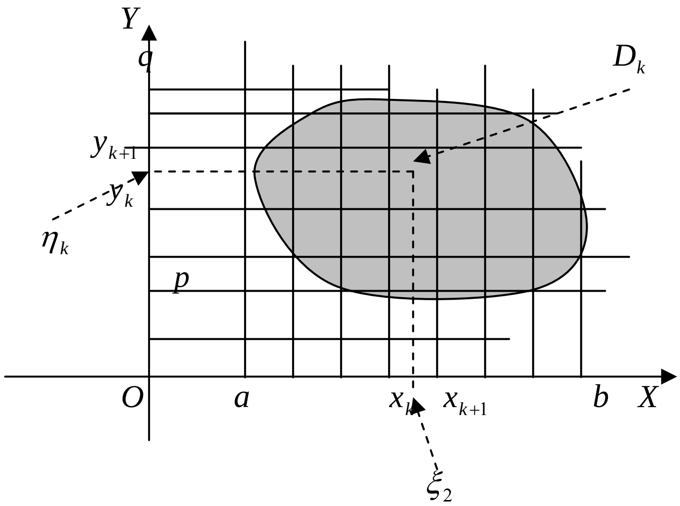
$$= \int_{x^2-4}^{0}(x^2(0 - x^2 + 4) - \frac{1}{2}(0 - (x^2 - 4)^2) -$$

$$-4(0 - x^2 + 4)))dx = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^4dx + 4\int_{-2}^{2}x^2dx =$$

$$- -\frac{1}{10}x^5\Big|_{-2}^{2} + \frac{4}{3}x^3\Big|_{-2}^{2} = -\frac{32}{10} - \frac{32}{10} + \frac{24}{3} + \frac{24}{3} = 16 - 10{,}4 = 5{,}6.$$

3. ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა მართკუთხა და პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში

ვთქვათ ვთქვათ XOY საკოორდინატო სიბრტყის D არეზე განსაზღვრულია $z = f(x,y)$ არაუარყოფითი ფუნქცია. დავყოთ D არე X და ღერძების პარალელური წრფეებით შედგენილი ბადით(ნახ.25).



ნახ. 25

თითოეული დანაყოფის D_k ფართობი, ცხადია იქნება $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ სადაც

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, k = 0,1,2,...,n-1\,.$$

თითოეული დანაყოფიდან ავიღოთ ნებისმიერი (ξ_k, η_k) წერტილი, თუ $z = f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, გვექნება:

$$\iint_D f(x,y)ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_k \to 0 \\ \max\Delta y_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k \Delta y_k \,.$$

D_k დანაყოფის ფართობის გამოსახულება $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ იძლევა საფუძველს დავწეროთ ტოლობა $ds = dxdy$, მაშასადამე

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_D f(x,y)dxdy \,.$$

წინა პარაგრაფში გამოყვანილი ფორმულების საშუალებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int_p^q \left(\int_{\phi_{11}(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \,.$$

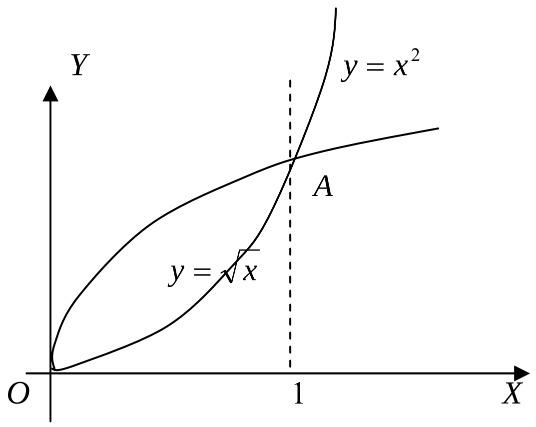
ეს ფორმულა ძალაშია მაშინაც, როდესაც $z = f(x,y)$ ფუნქცია არ ინარჩუნებს ნიშანს D არეზე.

მაგალითი.1. გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალი

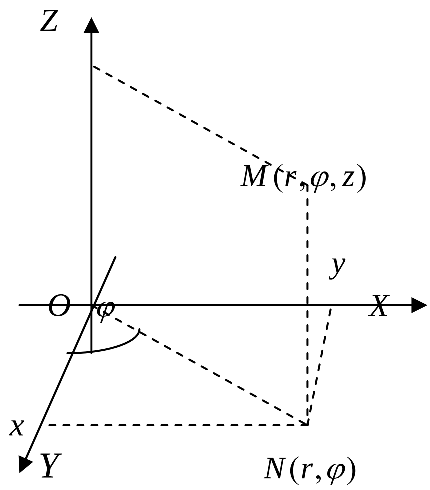
$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია პარაბოლებით: $y = x^2, x = y^2$.

ამოხსნა: ეს პარაბოლები ერთმანეთს კვეთენ წერტილებში, რომელთა აბსცისებია 0 და 1 (ნახ.26).



ნახ.26.



ნახ.27

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x^2(\sqrt{x}-x^2)dx + \frac{1}{3}\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}}-x^6)dx = \int_0^1 \sqrt{x^5}\,dx - \int_0^1 x^4 dx + \frac{1}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx - \frac{1}{3}\int_0^1 x^6 dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}+1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{7} = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} + \frac{2}{15} - \frac{1}{21} = \frac{6}{35}.$$

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემასთან ერთად, სივრცეში გამოიყენება პოლარულ კოორდინატთა სისტემა. პოლარულ კოორდინატთა სისტემაშიც წერტილის მდებარეობა სივრცეში, ცალსახად განისაზღვრება რიცხვთა სამეულით: $r,\varphi,,z$. ეს სამეული მიიღება შემდეგნაირად(ნახ.26): ვთქვათ, სივრცეში უკვე გვაქვს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა $OXYZ$,სივრცეში არსებულ M წერტილიდან დავუშვათ მართობი OXY სიბრტყეზე. ამ მართობის ფუძე N შევაერთოთ კოორდინატთა O სათავესთან. ამ ოპერაციების შედეგად მივიღებთ სამ სიდიდეს: $r=|ON|$ სადაც ტოლობის მარჯვენა მხარეს გვაქვს ON მონაკვეთის სიგრძე, φ-კუთხე OX ღერძსა და ON მონაკვეთს შორის, z კი– წარმოადგენს M წერტილის აპლიკატს.

კუთხე φ აითვლება დადებითი მიმართულებით ანუ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით და იცვლება $[0,2\pi]$ შუალედში, $r \geq 0$, ხოლო $z \in (-\infty,\infty)$.

ცხადია რიცხვთა ეს სამეული ცალსახად განსაზღვრავს M წერტილს სივრცეში. პოლარულ კოორდინატთა სისტემა მართკუთხა კოორდინატთა სისტემასთან დაკავშირებულია შემდეგნაირად:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z\,, \qquad (1)$$

ან შემდეგნაირად:

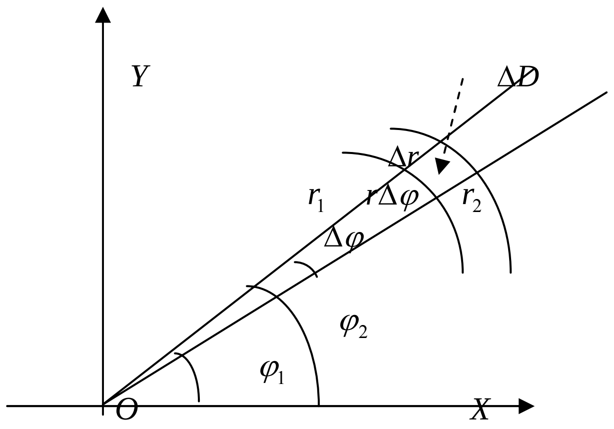
$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = Arctg\frac{y}{x}, z = z.$$

თუ მოცემულია ფუნქცია $z = f(x,y)$, პოლარულ საკოორდინატო ცვლადებზე გადასვლით გვექნება: $z = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = g(r,\varphi)$.

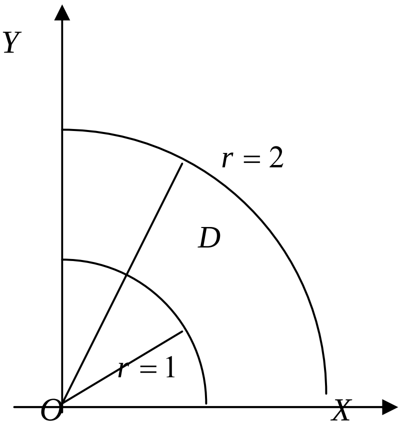
ვთქვათ, OXY სიბრტყეზე მოცემულია ΔD მცირე ზომის არე, რომლიც ორი მხრიდან შემოსაზღვრულია კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი ორი l_1, l_2 სხივით, ორი მხარე კი r_1, r_2- რადიუსიანი რკალებით(ნახ.28).

ΔD არის ფართობი: $\Delta S = r\Delta\varphi\Delta r$.

ვთქათ, $z = f(r,\varphi)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და ინტეგრებადი D არეზე. თუ D არეს
დავყოფთ სათავიდან გამოსული სხივებით და რადიალური რკალებით შედგენილი ბადით, დაყოფის თითოეული არე ისეთივე იქნება როგორიც იყო ზემოთ განხილული ΔD არე. რადგან $z = f(r,\varphi)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, D არეის ასეთნაირი დაყოფებით განსაზღვრული მისი რიმანის ჯამების მიმდევრობა კრებადი იქნება და გვექნება:



ნახ.28



ნახ.29

$$\iint_D f(r,\varphi)ds = \lim_{\substack{\Delta S\to 0 \\ n\to\infty}} \sum f(r,\varphi) r\Delta\varphi\Delta r\,, \qquad (2)$$

სადაც n დაყოფის ელემენტთა რაოდენობაა, ΔS - დაყოფის ელემენტთა მაქსილალური ფართობი.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $dr = \Delta r, d\varphi = \Delta\varphi$, გვექნება $ds = r\Delta\varphi\Delta r$. საბოლოოდ

$$\iint_D f(r,\varphi)ds = \iint_D f(r,\varphi) r d\varphi dr\,. \qquad (3)$$

თუ D არე შემოსაზღვრულია წირებით: $r = \rho_1(\varphi), r = \rho_2(\varphi), \varphi \in [\alpha,\beta\}$, რომელთა განტოლებებიც მოცემულია პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ

$$\iint_D f(r,\varphi) r d\varphi dr = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(r,\varphi) r \right) d\varphi\,. \qquad (4)$$

თუ O კოორდინატთა სათავე D არის შიგნითაა მოთავსებული, მაშინ კუთხე φ იცვლება $[0,2\pi]$ შუალედში და (3) ფორმულას აქვს სახე:

$$\iint_D f(r,\varphi) r d\varphi dr = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\rho(\varphi)} f(r,\varphi) r \right) d\varphi\,. \qquad (5)$$

ზოგჯერ ინტეგრალის გამოთვლა პოლარულ კოორდინატებში უფრო მოხერხებულია, ამიტომ თუ მოცემულია D არეზე ინტეგრებადი ფუნქცია $z = f(x,y)$ და გვინდა გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\iint_D f(x,y)dxdy\,,$$

(1) ფორმულების გამოყენებით შეგვიძლია გადავიდეთ პოლარულ კოორდინატებზე, გვექნება

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, \sin\varphi) r d\varphi dr \qquad (6)$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\iint_D (x+y)dxdy$,სადაც D არე წარმოადგენს OX, OY ღერძებითა და $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$ წრეწირთა რკალებით შემოსაზღვრულ ფიგურას(ნახ.29).

ამოხსნა: გადავიდეთ პოლარულ კოორდინატებზე, არის შემომსაზღვრელი რკალების განტოლებები იქნება$1 = \rho_1(\varphi), 2 = \rho_2(\varphi)$, აქედან გამომდინარე,

მივიღებთ:

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \iint\limits_D (r\cos\varphi + \sin) r d\varphi dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_1^2 (r\cos\varphi + r\sin\varphi) r dr \right) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{7}{3} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi =$$

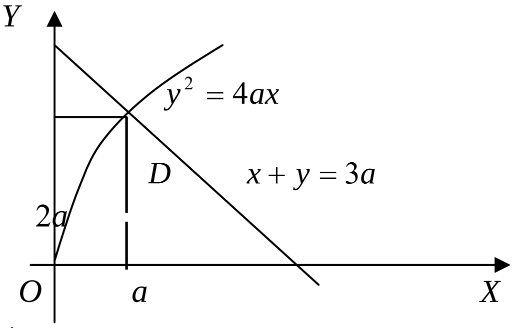
$$= \frac{7}{3}(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{14}{3}.$$

4. ორჯერადი ინტეგრალის გამოყენება

4.1. ბრტყელი ფიგურის ფართობი

განვიხილოთ ინტეგრალი $\iint\limits_D ds$,თუ გავიხსენებთ ორჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრას, ეს ინტეგრალი ტოლია იქნება D არის ფართობის. აქედან გამომდინარე ორჯერადი ინტეგრალი შეძლება გამოვიყენოთ ბრტყელი ფიგურეათა ფართობების საანგარიშოდ.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია OX ღერძით $y^2 = 4ax$ პარაბოლით და $x + y = 3a$ წრფით, $a > 0$ (ნახ.30).



ნახ.30

ამოხსნა:

ვიპოვოთ პარაბოლის და წრფის გადაკვეთის წერტილი, ამისთვის ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x + y = 3a, \\ y^2 = 4ax. \end{cases}$$

მივიღებთ $y^2 + 4ay + 12a^2 = 0$, აქედან $y_1 = -2a + 4a = 2a, y_2 - 2a - 4a = -6a$. რადგან ჩვენ გვაინტერესებს y ცვლადის არაუარყოფითი მნიშვნელობები, ამიტომ ავიღებთ მხოლოდ $y_1 = 2a$ მნიშვნელობას. მაშასადამე y იცვლება 0- დან $2a$ - მდე, ამ დროს x იცვლება $x_1 = \dfrac{y^2}{4a}$ – დან $x_2 = 3a - y$ - მდე.

ამგვარად გვექნება:

$$\iint\limits_D ds = \int\limits_0^{2a} \Big(\int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx \Big) dy = \int\limits_0^{2a} (3a - y\frac{y^2}{4a}) dy = 3ay - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12a}\Big|_{y=0}^{y=2a} =$$

$$6a^2 - 2a^2 - \frac{8}{12}a^2 = \frac{10}{3}a^2.$$

4.2. ზედაპირის ფართობი

ვთქვათ მოცემულია $z = f(x,y)$ განტოლებით განსაზღვრული S ზედაპირი. დავაფიქსიროთ რაიმე $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი ამ ზედაპირზე. ამ წერტილში და $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

კერძო წარმოებულები აღვნიშნოთ, შესაბამისად, p და q სიმბოლოებით. ჩავთვალოთ, რომ $f(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ უწყვეტი ფუნქციებია.

როგორც ვიცით ზედაპირის $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილში მხები სიბრტყის განტოლებაა:

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

ამავე წერტილში ნორმალის განტოლება იქნება:

$$\frac{z - z_0}{-1} = \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

ამ ნორმალის მიმმართველი კოსინუსებია:

$$\cos\alpha = \frac{\pm p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \cos\beta = \frac{\pm q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

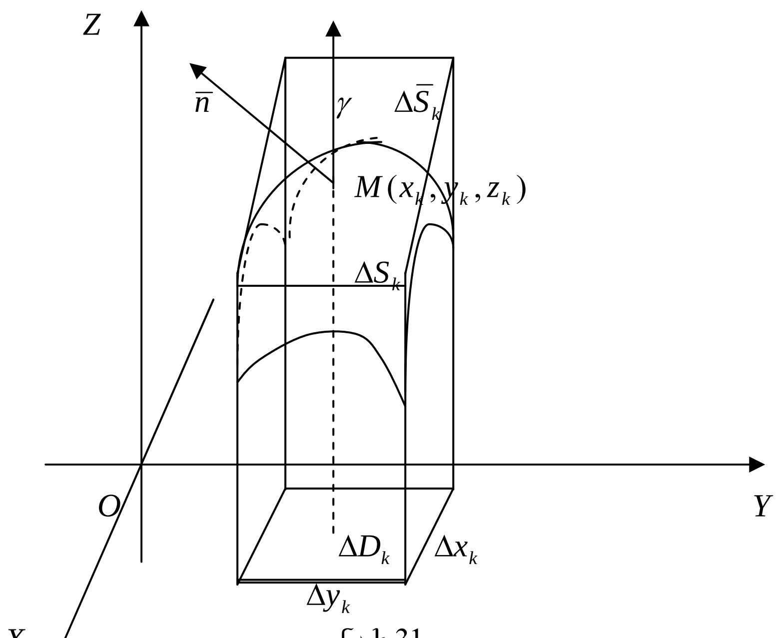
$$\cos\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

ზედაპირის პროექცია OXY სიბრტყეზე აღვნიშნოთ D სიმბოლოთი. დავყოთ D არე ნაწილებად $\Delta D_k, k = 1,2,...,n$. თითოეული ამ ნაწილიდან აღვმართოთ ცილინდრი ზედაპირის გადაკვეთამდე. გადაკვეთაში მივიღებთ ზედაპირის ΔS_k ნაწილს. ავიღოთ ამ ნაწილზე $M_k(x_k,y_k,z_k)$ წერტილი და გავავლოთ ამ წერტილში მხები სიბრტყე. აგებული ცილინდრი გავაგრძელოთ მხები სიბრტყის გადაკვეთამდე. ცილინდრი მხებ სიბრტყეს ამოკვეთს ნაწილს, რომელიც აღვნიშნოთ $\Delta\bar{S}_k$-ით. თითოეული აგებული ცილინდრისთვის გვექნება შესაბამისი მხები სიბრტყის ნაწილი $\Delta\bar{S}_k, k = 1,2,...,n$. მხებ სიბრტყეთა ეს ნაწილები ქმნიან მრავალკუთხედს, რომელშიც ჩაწერილია S ზედაპირი.

განსაზღვრება 5.2. S **ზედაპირის ფართობი** ეწოდება ზღვარ

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_{\Delta D_k}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \Delta\bar{S}_k, \qquad (1)$$

სადაც $d_{\Delta D_k}$ წარმოადგენს D არის ΔD_k ნაწილის დიამეტრს.



ნახ.31

გამოვთვალოთ ახლა მოცემული ზედაპირის ფართობი. $M_k(x_k, y_k, z_k)$ წერტილზე გამავალი მხები სიბრტყის $\Delta\bar{S}_k$ ნაწილის მიერ OXY სიბრტყესთან შედგენილი კუთხე ტოლია მოცემულ წერტილში ზედაპირის $\bar{n}$ ნორმალსა და Z ღერძს შორის კუთხის, რომელიც ზემოთ აღნიშნული გვაქვს γ სიმბოლოთი(ნახ. 31).

ვთქვათ ΔD_k არის ფართობი ტოლია $\Delta\tilde{S}_k$, მაშინ $\Delta\tilde{S}_k = \Delta\bar{S}_k \cos\gamma$. აქედან

$$\Delta\bar{S}_k = \frac{\Delta\tilde{S}}{\cos\gamma},$$

მაგრამ რადგანაც $\cos\gamma = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, ამიტომ $\Delta\bar{S}_k = \pm\sqrt{1+p^2+q^2}$.

ნორმალის მიმართულება ავირჩიოთ ისე, რომ $0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$, მაშინ გვექნება $\cos\gamma > 0$ და

$$\Delta\bar{S}_k = +\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

ზედაპირის ფართობის განსაზღვრების თანახმად:

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_{\Delta D_k}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \Delta\bar{S}_k = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_{\Delta D_k}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+p^2+q^2}. \qquad (2)$$

(2) ფორმულის მარჯვენა მხარე ტოლია ორჯერადი ინტეგრალის $\iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,ds$, მაშასადამე ჩვენი ზედაპირის ფართობი

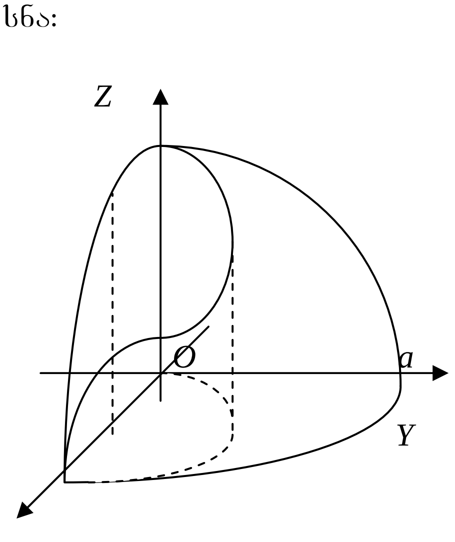
$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,ds,$$

სადაც $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ და $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

აქ განვიხილეთ ის შემთხვევა, როდესაც ზედაპირი გადაკვეთს z ღერძის პარალელურ წრფეებს მხოლოდ ერთ წერტილში, წინააღმდეგ შემთხვევაში ზედაპირს დავყოფთ ასეთ ნაწილებად, გამოვთვლით თითოეული ნაწილის ფართობს და შედეგებს შევკრებთ. იმის მიხედვით, თუ რა მდებარეობა აქვს ზედაპირს $OXYZ$ სივრცეში, ზოგჯერ ხელსაყრელია განვიხილოთ მისი პროექცია YOZ ან XOZ სიბრტყეში.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ სფერული ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელსაც ამოჭრის სფეროს ცენტრზე გამავალი ცილინდრი, თუ სფეროს განტოლებაა $x^2+y^2+z^2=a$, ცილინდრის განტოლება კი $(x-\dfrac{a}{2})^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$(ნახ.32).

ამოხსნა:



X ნახ.32

ცილინდრის ფუძის შემომსაზღვრელი წრიული კონტურის განტოლება იქნება $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. გამოვთვალოთ p და q სიდიდეები

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

აქედან $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$. ჩვენთვის საინტერესო ზედაპირის ფართობი

$$S=\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}ds,$$

სადაც D წარმოადგენს $(x-\frac{a}{2})^2+y^2\le\frac{a^2}{4}$ უტოლობით განსაზღვრულ წრეს.

ჩვენი ზედაპირი OXZ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიულია, ამიტომ ზედაპირის ფართობის მეოთხედისთვის გვექნება:

$$\frac{S}{4}=\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}ds=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-(x-\frac{a}{2})^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy\right)dx=$$

$$=a\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}[\int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-(x-\frac{a}{2})^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2-x^2}}}dy]dx=a\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}[\sqrt{a^2-x^2}\int_0^{\sqrt{\frac{\frac{a^2}{4}-(x-\frac{a}{2})^2}{a^2-x^2}}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=$$

$$=a\int_0^a\arcsin u\Big|_0^{\sqrt{\frac{x}{a+x}}}dx=a\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\cdot tgt\frac{1}{\cos^2 t}dt=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\cdot tgtdtgt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\cdot dtg^2t=$$

$$=a^2t\cdot tg^2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^2tdt=a^2\frac{\pi}{4}-a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{\cos^2 t}-1)dt=a^2\frac{\pi}{4}-a^2tg\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+a^2\frac{\pi}{4}=$$

$$a^2(\frac{\pi}{4}-1),$$

სადაც $t=\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}$ და $dx=tgt\frac{1}{\cos^2 t}dt$. მაშასადამე $S=4a^2(\frac{\pi}{4}-1)$.

4.3. ბრტყელი ფიგურის მასა, სიმძიმის ცენტრი და სტატიკური მომენტი

ვთქვათ, მოცემულია მატერიალური სხეული D, რომელიც წარმოადგენს ბრტყელ ფიგურას. ვთქვათ, ასევე, m მასა გადანაწილებულია ამ ფიგურაზე $\rho=\rho(N)$ ზედაპირული სიმკვრივით, სადაც N ფიგურის ცვლადი წერტილია. რომ გავიგოთ ფიგურის მასა, იგი უნდა დავყოთ მცირე $\Delta D_k, k=1,2,...,n.$ ნაწილებად, რომელთა სიმკვრივე შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ. თუ N_k

წარმოადგენს ფიგურის ΔD_k ნაწილის წერტილს. ამ ნაწილის მასა Δm_k მიახლოებით ტოლია სიდიდის $\rho(N_k)\Delta S_k$, სადაც ΔS_k წარმოადგენს ΔD_k ნაწილის

ფართობს. აქედან გამომდინარე, მთელი ფიგურისათვის შეიძლება დავწეროთ მიახლოებითი ტოლობა:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta S_k \ .$$

თუ ფიგურას დავყოფთ უფრო მცირე დიამეტრის ნაწილებად, მიახლოებითი ტოლობის სიზუსტე გაიზრდება, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_{\Delta D_K}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta S_k$$

ანუ

$$m = \iint_D \rho(N)ds \ .$$

როგორც ვიცით, ფიგურის ΔD_k ნაწილის სტატიკური მომენტი OX ღერძის მიმართ, მიახლოებით შეიძლება გამოისახოს ფორმულით:

$$I_x^{\Delta D_k} = y_k \Delta m_k = y_k \rho(N_k)\Delta S_k \ ,$$

სადაც y_k წარმოადგენს N_k წერტილის ორდინატს, რომელიც შეგვიძლია მიახლოებით ჩავთვალოთ, ფიგურის ΔD_k ნაწილიდან OX ღერძამდე მანძილად.

აქედან გამომდინარე, მთელი D ბრტყელი ფიგურის სტატიკური მომენტი OX ღერძის მიმართ ტოლი იქნება სიდიდის:

$$I_x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_{\Delta D_K}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} y_k \rho(N_k)\Delta S_k \ ,$$

ანუ

$$I_x = \iint_D y\rho(N)ds \ .$$

ანალოგიურად გამოითვლება სტატიკური მომენტი OY ღერძის მიმართაც:

$$I_y = \iint_D x\rho(N)ds .$$

ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრის $C(\xi,\eta)$ კოორდინატები, როგორც ვიცით, განისაზღვრება ტოლობებით:

$$\xi = \frac{I_y}{m}, \eta = \frac{I_x}{m} \ .$$

აქედან გამომდინარე, საბოლოოდ

$$\xi = \frac{\iint_D x\rho(N)ds}{\iint_D \rho(N)ds}, \eta = \frac{\iint_D y\rho(N)ds}{\iint_D \rho(N)ds} .$$

თუ ბრტყელი ფიგურა ერთგვაროვანია ანუ $\rho(n) = C$, სადაც C მუდმივი სიდიდეა, წინა ფორმულებს ექნებათ სახე:

$$\xi = \frac{\iint_D xds}{\iint_D ds}, \ \eta = \frac{\iint_D yds}{\iint_D ds} .$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ერთგვაროვანი, $x^2+y^2 \le a^2, y \ge 0$ უტოლობით განსაზღვრული D ნახევარწრის სიმძიმის ცენტრი.

ამოხსნა: ვთქვათ, ნახევარწრის სიმძიმის ცენტრია $C(\xi,\eta)$. ჩავთვალოთ, რომ მასის განაწილების სიმკვრივე $\rho(N)=1$. ნახევარწრე D შემოსაზღვრულია ნახევარწრეწირით:

$$x^2+y^2=a^2, y \ge 0,$$

აქედან $y=\sqrt{a^2-x^2}$. ჯერ გამოვთვალოთ სტატიკური მომენტი I_x

$$I_x=\iint\limits_D yds=\int\limits_{-a}^{a}\left(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ydy\right)dx=\int\limits_{-a}^{a}\frac{1}{2}(a^2-x^2)dx=\frac{1}{2}({}^2ax-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-a}^{a}=\frac{2}{3}a^3.$$

ნახევარწრის მასა, როცა $\rho(N)=1$, ტოლი იქნება მისი ფართობის: $\frac{\pi a^2}{2}$.

ამ გამოთვლებიდან გვექნება

$$\xi=\frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{\pi a^2}{2}}=\frac{4a}{3\pi}.$$

რაც შეეხება ფიგურის სიმძიმის ცენტრის ორდინატს, იგი შეიძლება გამოვთვალოთ უშუალოდ. მართლაც, ჩვენი ნახევარწრე წარმოადგენს ერთგვაროვან ბრტყელ მატერიალურ სხეულს, რომელიც სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ. ასეთ შემთხვევაში სიმძიმის ცენტრი OY ღერძზე მდებარეობს. მაშასადამე ნახევარწრის სიმძიმის ცენტრი ყოფილა წერტილი $C(0,\frac{4a}{3\pi})$.

4.4. ორჯერადი ინტეგრალის სხვა გამოყენებები

ვთქვათ ფუნქცია $z=f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და ინტეგრებადი D არეზე. ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა ამ არეზე ეწოდება სიდიდეს

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{\iint\limits_D dxdy},$$

სადაც მნიშვნელში მყოფი ინტეგრალი წარმოადგენს D არის ფართობს.

მაგალითი 1. ვთქვათ, მთავრობამ გადაწყვიტა ეკონომიკის სტიმულირების მიზნით გააკეთოს ერთჯერადი 10% საგადასახადო შეღავათი, რის შედეგადაც მოსალოდნელია ეკონომიკაში დამატებით y მილიარდი დოლარის ინვესტიცია, სადაც $5 \le y \le 7$. თუ ყოველი ფიზიკური პირი ან კორპორაცია დახარჯავს აღნიშნული ირიბი ინვესტიციით მიღებული შემოსავლების x ნაწილს, სადაც $0{,}6 \le x \le 0{,}8$. ეკონომიკაში ცნობილი მრავლობითობის პრინციპის თანახმად, მთლიანი ეკონომიკური ეფექტი (ფულად ერთეულებში) გამოისახება ფორმულით: $S(x,y)=\frac{y}{1-x}$. ვიპოვოთ საგადასახადო შეღავათის საშუალო ეკონომიკური ეფექტ

ამოხსნა: საშუალო ეკონომიკური ეფექტი $\overline{S}=\dfrac{\iint\limits_D \dfrac{y}{1-x}dxdy}{0{,}4}$, სადაც D წარმოადგენს მართკუთხა არეს, რომელიც განისაზღვრება უტოლობებით $0{,}6\le x\le 0.8; 5\le y\le 7$.

$$\iint\limits_D \frac{y}{1-x}dxdy=\int\limits_{0,6}^{0,8}dx(\int\limits_5^7 \frac{y}{1-x}dy)=\int\limits_{0,6}^{0,8}(\frac{y^2}{2(1-x)}\Big|_{y=5}^{y=7})dx=\int\limits_{0,6}^{0,2}\frac{12}{1-x}dx=-\int\limits_{0,4}^{0,2}\frac{12}{z}dz=$$

$$=-12\ln z\Big|_{z=0,4}^{z=0,2}=-12\ln 0{,}2+12\ln 0{,}4=12\ln 2=12\ln 2.$$

აქედან $\overline{S}=\dfrac{12\ln 2}{0{,}4}=30\ln 2\approx 20{,}8$ მილიარდ დოლარს.

მაგალითი 2. **კობ-დუგლასის წარმოების ფუნქცია.** თუ წარმოებაში მოვახდენთ x ათასი, $10\le x\le 20$, სამუშაოსაათის და y მილიონი დოლარის, $1\le y\le 2$ ინვესტიციას, მაშინ წარმოებული რაიმე დეტალის ათას ერთეულთა რაოდენობა $N(x,y)=x^{0,75}y^{0,5}$. ვიპოვოთ წარმოებული დეტალების საშუალო რაოდენობა

ამოხსნა:

$$\overline{N}=\frac{1}{10}\iint\limits_D x^{0,75}y^{0,25}dxdy=\int\limits_{10}^{20}x^{0,75}\int\limits_1^2 y^{0,25}dy=\frac{x^{0,75}}{1{,}75}\Big|_{x=10}^{x=20}\frac{y^{1,25}}{1{,}25}=$$

$$\frac{8}{175}(2^{1,25}-1)(20^{1,75}-10^{1,75})=8{,}375$$

ათას ერთეულს.

მაგალითი 3. ავტომობილის დამუხრუჭების მანძილი იანგარიშება ფორმულით:

$$L=0{,}0000133xy^2,$$

სადაც x ავტომობილის წონაა, y-ავტომობილის სიჩქარე. გავიგოთ საშუალო დამუხრუჭების მანძილი ავტომობილებისთვის, რომელთა წონა 2000 და 3000 კილოგრამს შორისაა, სიჩქარე კი 75 და 90 კილომეტრ/საათს შორის.

ამოხსნა:

$$\overline{L}=\frac{1}{15000}\iint\limits_D 0{,}0000133xy^2dxdy=\frac{0{,}0000133}{15000}\frac{x^2}{2}\Big|_{x=2000}^{x=3000}\frac{y^3}{3}\Big|_{y=75}^{y=95}=2{,}512 \text{ კმ.}$$

სავარჯიშოები მე-5 თავისათვის

I. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალები:

1) $\iint\limits_D \dfrac{xdxdy}{x^2+y^2}$, სადაც D წარმოადგენს $y=\dfrac{x^2}{2}$ პარაბოლით და $y=x$ წრფით შემოსაზღვრულ არეს; 2) გადადით პოლარულ კოორდინატებზე და გამოთვალეთ $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, სადაც D წარმოადგენს $x^2+y^2=5$ წრეწირით შემოსაზღვრულ წრეს;

3) $\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy$, სადაც D წარმოადგენს სამკუთხედს წვეროებით $O(0,0), A(1,-1), B(1,1)$;

4) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}$, სადაც D წარმოადგენს წრეს რადიუსით a, რომელიც ეხება საკოორდინატო ღერძებს და მდებარეობს პირველ მეოთხედში.

II. გამოთვალთ არეთა ფართობები, რომლებიც შემოსაზღვრულია:

1) $y^2 = 10x + 25, y^2 = -6x + 9$
პარაბოლებით;2) $r = a(1 + \cos\varphi), r = a\cos\varphi, a > 0$ წირებით;
3) $x = y, x = 2y, x + y = a, x + 3y = a, a > 0$ წრფეებით.

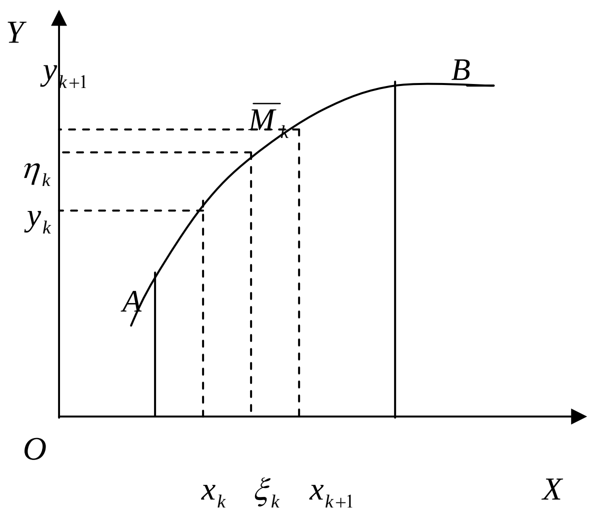
III. გამოთვალეთ მოცულობები სხეულებისა, რომლებიც შემოსაზღვრულია ზედაპირებით:

1) $az = y^{2,}, x^2 + y^2 = r^2, z = 0$;2) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + z = 6, z = 0$;3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

თავი 6
მრუდწირული ინტეგრალები
1. პირველი გვარის მრუდწირული ინტეგრალი

ვთქვათ სიბრტყეზე მდებარე არაჩაკეტილი l წირის რკალზე, რომლის ბოლოებია წერტილები A, B, განსაზღვრულია $z = f(M)$ ფუნქცია, სადაც $M(x, y)$ რკალის ცვლადი წერტილია.

$f(M) = f(x, y)$, დავყოთ AB რკალი n ნაწილად, ნებისმიერად, წერტილებით $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_3), \dots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ (ნახ.33).



ნახ. 33

დავუშვათ $A = M_0(x_0, y_0), B = M_n(x_n, y_n)$ და ავიღოთ ნებისმიერად $\overline{M}_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი $M_k M_{k+1}$ რკალიდან, Δl_k იყოს ამ რკალის სიგრძე, $\max \Delta l_k$ იყოს AB რკალის n ნაწილად დაყოფით მიღებული რკალების სიგრძეთა მაქსიმუმი. განვიხილოთ ჯამი:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k, \qquad (1)$$

განსაზღვრება 6.1. თუ არსებობს (1) ჯამის ზღვარი:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta l_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k,$$

რომელიც დამოკიდებული არაა $\overline{M}_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილის არჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს უწოდებენ $z = f(M)$ ფუნქციის **პირველი გვარის მრუდწირული ინტეგრალს** AB რკალზე და აღნიშნავენ ასე:

$$\int_{AB} f(x, y)dl.$$

ვთქვათ l წირი მოცემულია პარამეტრულად, უწყვეტად წარმოებადი $x = x(t), y = y(t)$ ფუნქციებით, სადაც t პარამეტრი იცვლება $[T_1, T_2]$ შუალედში და AB რკალის ბოლოების კოორდინატებია, შესაბამისად:

$$A(x(t_0), y(t_0)), B(x(T), y(T)); t_0, T \in [T_1, T_2].$$

დავყოთ $[t_0, T]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$, შესაბამისად, AB რკალიც დაიყოფა n ნაწილად წერტილებით $M_1(x(t_1), y(t_1)), M_2(x(t_2), y(t_3)), ..., M_{n-1}(x(t_{n-1}), y(t_{n-1}))$.

$f(M) = f(x, y)$ ფუნქცია წარმოადგენს რთულ ფუნქციას:

$$f(M) = f(x, y) = f(x(t), y(t)),$$
$$f(M_k) = f(x(t_k), y(t_k)).$$

როგორც ვიცით, $M_k M_{k+1}$ რკალის სიგრძისათვის გვაქვს მიახლოებითი ტოლობა:

$$\Delta l_k \approx \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \approx \sqrt{(x'(t_k))^2 + (y'(t_k))^2} \cdot \Delta t_k.$$

ასევე ვიცით, რომ რკალის dl დიფერენციალისთვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt.$$

ყოველივე აქედან

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{t_0}^{T} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \qquad (2)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეს გვაქვს განსაზღვრული ინტეგრალი, რომლის გამოთვლის მეთოდი ჩვენთვის უკვე ნაცნობია. მაშასადამე, პირველი გვარის მრუდწირული ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლაზე.

ვთქვათ, ეხლა წირი მოცემულია განტოლებით $y = y(x)$. ასეთ შემთხვევაში შეიძლება
პირდაპირ დავწეროთ წირის პარამეტრული განტოლება:
$x = x, y = y(x)$, სადაც პარამეტრის როლს ასრულებს x ცვლადი. დავუშვათ A წერტილის კოორდინატებია $(a, y(a))$, B წერტილის კი $(b, y(b))$. მაშინ რკალის წერტილებისთვის x ცვლადი ღებულობს მნიშვნელობებს $[a, b]$ შუალედიდან, ამიტომ, (2) ფორმულაში თუ შევცვლით t პარამეტრს x პარამეტრით, გვექნება:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{a}^{b} f(x, y(x)) \sqrt{(1 + (y'(x))^2} dx.$$

მაგალითი. 1. გამოვთვალოთ პირველი გვარის მრუდწირული ინტეგრალი $\int_{AB} xydl$, AB რკალზე, რომელიც წარმოადგენს $x^2 + y^2 = a^2$ წრეწირის, საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში მდებარე ნაწილს.

ამოხსნა: გადავიდეთ წრეწირის პარამეტრულ განტოლებაზე $x = a\cos t, y = a\sin t$, სადაც საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე წრეწირის ნაწილისთვის t პარამეტრი იცვლება შუალედში: $[0, \frac{\pi}{2}]$. ასეთ შემთხვევაში (2) ფორმულით გვექნება:

$$\int_{AB} xydl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\sin t\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}dt =$$

$$= a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos tdt = \frac{1}{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2tdt = \frac{1}{4}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2td2t = \frac{1}{4}a^3\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}a^3\cos\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^3 = \frac{a^3}{2}.$$

2. მეორე გვარის მრუდწირული ინტეგრალი

ვთქვათ სიბრტყეზე მდებარე არაჩაკეტილი l წირის რკალზე, რომლის ბოლოებია წერტილები A, B, განსაზღვრულია ორი ფუნქცია $P = P(x, y)$ და $Q = Q(x, y)$. დავყოთ AB რკალი n ნაწილად, ნებისმიერად:

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_3), ..., M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

დავუშვათ, $A = M_0(x_0, y_0), B = M_n(x_n, y_n)$, ავიღოთ ნებისმიერად $\overline{M}_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი $M_k M_{k+1}$ რკალიდან და გამოვთვალოთ ამ წერტილში ფუნქციათა მნიშვნელობები $P(\xi_k, \eta_k)$ და $Q(\xi_k, \eta_k)$. განვიხილოთ ჯამი:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k, \qquad (1)$$

სადაც $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.

განსაზღვრება 6.2. თუ არსებობს (1) ჯამის ზღვარი:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_k \to 0 \\ \max\Delta y_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k,$$

რომელიც დამოკიდებული არაა $\overline{M}_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილის ამორჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს უწოდებენ **მეორე გვარის მრუდწირულ ინტეგრალს** $P = P(x, y)$ და $Q = Q(x, y)$ ფუნქციებისათვის, AB რკალზე და აღნიშნავენ ასე:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

თუ დაყოფის წერტილების ათვლას დავიწყებთ B წერტილიდან, მაშინ

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

სიდიდეები ნიშანს შეიცვლიან, განსხვავებით Δl_k სიდიდისგან, რომელიც რკალის სიგრძეს წარმოადგენს და ყოველთვის დადებითია.

აქედან გამომდინარე, მეორე გვარის მრუდწირული ინტეგრალი, განსხვავებით პირველი გვარის მრუდწირული ინტეგრალისაგან, ინტეგრების მიმართულების შეცვლით, ნიშანს შეიცვლის. მაშასადამე ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \qquad (2)$$

ვთქვათ β_k წარმოადგენს კუთხეს $M_k M_{k+1}$ ქორდასა და OX ღერძს შორის(ნახ.34).

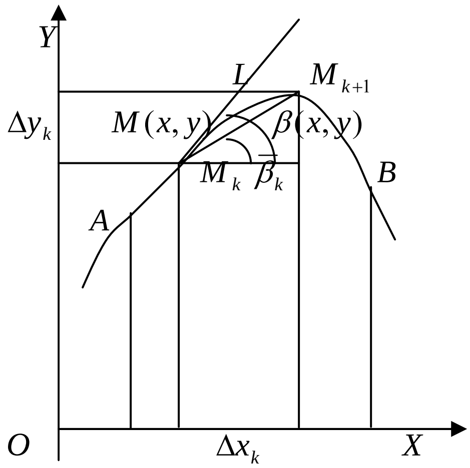
ნახაზიდან ჩანს, რომ $\Delta x_k \approx \Delta l_k \cos\overline{\beta}_k, \Delta y_k \approx \Delta l_k \sin\overline{\beta}_k$, სადაც Δl_k წარმოადგენს $M_k M_{k+1}$ რკალის სიგრძეს. თუ გადავალთ დიფერენციალზე გვექნება:

$$dx = \cos\beta(x,y)dl, dy = \sin(x,y)\beta dl . \quad (3)$$

უკანასკნელ ტოლობებში $\beta(x,y)$ კუთხეა წირის ცვლად M წერტილში გამავალ L მხებსა და OX ღერძს შორის, თუ გავითვალისწინებთ (3) ტოლობებს, გვექნება:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} [P(x,y)\cos\beta(x,y) + Q(x,y)\sin\beta(x,y)]dl . \quad (4)$$

(4) ტოლობა გვიჩვენებს კავშირს პირველი და მეორე გვარის მრუდწირულ ინტეგრალებს შორის.



ნახ.34

ვთქვათ, l წირი მოცემულია პარამეტრულად, უწყვეტად წარმოებადი $x = x(t), y = y(t)$ ფუნქციებით, სადაც t პარამეტრი იცვლება$[T_1, T_2]$ შუალედში და AB რკალის ბოლოების კოორდინატებია, შესაბამისად:

$$A(x(t_0), y(t_0)), B(x(T), y(T)); t_0, T \in [T_1, T_2] .$$

დავყოთ$[t_0, T]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით$t_1, t_2, ..., t_{n-1}$, შესაბამისად, AB რკალიც დაიყოფა n ნაწილად წერტილებით $M_1(x(t_1), y(t_1)), M_2(x(t_2), y(t_3)), ..., M_{n-1}(x(t_{n-1}), y(t_{n-1}))$. ამ დროს $P = P(x,y)$ და $Q = Q(x,y)$ ფუნქციები წარმოადგენენ რთულ ფუნქციებს:

$$P = P(x,y) = P(x(t), y(t)), Q = Q(x,y) + Q(X(t), y(t)) ,$$

ამასთან $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$. თუ გავითვალისწინებთ უკანასკნელ მიმართებებს. გვექნება:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_0}^{t} [P(x(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt . \quad (5)$$

ამგვარად, მეორე გვარის მრუდწირული ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანეთ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლაზე.

ხშირად საქმე გვაქვს ისეთ მეორე გვარის მრუდწირული ინტეგრალთან, როდესაც ინტეგრალქვეშა გამოსახულება შეიცავს მხოლოდ ერთ შესაკრებს:

$$\int_{AB} f(x,y)dx = \int_0^T f(x(t), y(t))x'(t)dt ,$$

$$\int_{AB} f(x,y)dy = \int_0^T f(x(t), y(t))y'(t)dt .$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც წირი მოცემულია განტოლებით $y = y(x)$ ასეთ შემთხვევაში შეიძლება პირდაპირ დავწეროთ წირის პარამეტრული განტოლება:

$x = x, y = y(x)$, სადაც პარამეტრის როლს ასრულებს x ცვლადი. დავუშვათ A წერტილის კოორდინატებია $(a, y(a))$, B წერტილის კი- $(b, y(b))$. მაშინ რკალის წერტილებისთვის x ცვლადი ღებულობს მნიშვნელობებს $[a,b]$ შუალედიდან, ამიტომ, (2) ფორმულაში, თუ შევცვლით t პარამეტრს x პარამეტრით, გვექნება:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)dx\,. \qquad (6)$$

შენიშვნა: თუ AB რკალი l წირზე შედგება $AC, CD, ..., FB$ ნაწილებისგან, მაშინ მრუდწირული ინტეგრალის განსაზღვრიდან გამომდინარე

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{CD} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + ...$$
$$... + \int_{FB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (7)$$

მრუდწირული ინტეგრალის განსაზღვრისას ვგულისხმობდით, რომ AB რკალი l წირზე არ წარმოადგენდა შეკრულ კონტურს. თუ $C = AB$ რკალი შეკრული კონტურია ანუ $A = B$, მაშინ ამ კონტურზე ავიღებთ რაიმე D წერტილს, მხედველობაში მივიღებთ უკანასკნელ ფორმულას, რის შედეგადაც გვექნება:

$$\int_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AD} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{DB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int_{AD} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{DA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (8)$$

ინტეგრება AD და DA რკალებზე ხდება ერთი და იგივე მიმართულებით ანუ A წერტილიდან D წერტილისკენ, პირველ შესაკრებში; D წერტილიდან A წერტილისკენ, მეორე შესაკრებში. ამასთან, დადებით მიმართულებად ითვლება ის მიმართულება, რომლის დროსაც კონტურზე მოძრაობისას მის მიერ შემოსაზღვრული არე რჩება ჩვენგან მარცხნივ. მრუდწირული ინტეგრალი ჩაკეტილ C კონტურზე აღინიშნება ასე:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\int_{AB} xydx + (y-x)dy$ ინტეგრალის მნიშვნელობა

$A(0,0)$ და $B(1,1)$

წერტილების შემაერთებელ რკალზე, თუ:

1) AB წარმოადგენს მონაკვეთს წრფეზე $y = x$,
2) AB წარმოადგენს რკალს პარაბოლაზე $y = x^2$,
3) AB წარმოადგენს რკალს კუბურ პარაბოლაზე $y = x^3$.

ამოხსნა:

1) ამ შემთხვევაში წირის პარამეტრულ განტოლებას აქვს სახე: $x = x, y = x$, სადაც x

პარამეტრი იცვლება შუალედში $[0,1]$. გვექნება:

$$\int_{AB} xydx + (y-x)dy = \int_0^1 [x^2 - (x-x)]dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2) ამ შემთხვევაში წირის პარამეტრული განტოლებაა $x = x, y = x^2$, სადაც x პარამეტრი იცვლება შუალედში $[0,1]$. გვექნება:

$$\int_{AB} xydx + (y-x)dy = \int_0^1 [x^3 - (x^2 - x)]2dx = 3\int_0^1 x^3 dx - 2\int_0^1 x^2 = \frac{3x^3}{4} - \frac{2x^2}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

3) ამ შემთხვევაში წირის პარამეტრული განტოლებაა $x = x, y = x^3$, სადაც x პარამეტრი იცვლება შუალედში $[0,1]$. გვექნება:

$$\int_{AB} xydx + (y-x)dy = \int_0^1 [x^4 - (x^3 - x)]3x^2 dx = 3\int_0^1 x^5 dx + \int_0^1 x^4 dx - 3\int_0^1 x^3 dx$$

$$\frac{x^6}{2} + \frac{{}^5x}{5} - \frac{3x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{20}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\oint_C P(x+y)dx + 2xdy$ ინტეგრალის მნიშვნელობა, სადაც C წარმოადგენს $y = x^2$ და $y = \sqrt{x}$ ფუნქციების გრაფიკთა ნაწილებისგან წარმოქმნილ შეკრულ კონტურს.

ამოხსნა: C კონტური შედგება ორი სხვადასხვა წირზე მდებარე, OA და OA რკალებისაგან, რომელთაგან პირველი შეიძლება წარმოვადგინოთ პარამეტრული განტოლებით: $x = x, y = x^2, x \in [0,1]$, მეორე შემდეგი პარამეტრული განტოლებით: $x = x, y = \sqrt{x}, x \in [0,1]$. გვექნება:

$$\oint_C (x+y)dx + 2xdy = \int_{OA} (x+y)dx + 2xdy + \int_{AO} (x+y)dx + 2xdy,$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა მხარის ინტეგრირება ხდება პირველ შესაკრებში მეორე წირზე მდებარე OA რკალზე; მეორე შესაკრებში კი- პირველ წირზე მდებარე AO რკალზე

$$-\int_{OA} (x+y)dx + 2xdy = \int_{AO} (x+y)dx + 2xdy,$$

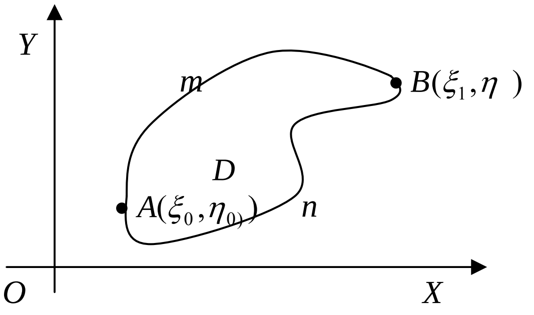
ამიტომ

$$\oint (x+y)dx + 2xdy = \int_{OA} (x+y)dx + 2xdy - \int_{OA} (x+y)dx + 2xdy = \int_0^1 (x + \sqrt{x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{x}})dx -$$

$$-\int_0^1 (x + x^2 + 2x2x)dx = \int_0^1 (x + 2\sqrt{x})dx + \int_0^1 (x + 5x^2)dx = (\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}})\Big|_0^1 - ((\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3)\Big|_0^1) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = 3$$

ვთქვათ, XOY სიბრტყეზე მოცემულია D არე, რომელიც შემოსაზღვრულია ერთი მთლიანი, ჩაკეტილი კონტურით. ასეთ არეებს **სრულად ბმულ არეებს** უწოდებენ(ნახ.33). ავიღოთ ორი $A(\xi_0,\eta_0), B(\xi_1,\eta_1)$ წერტილი D არის შიგნით. ვთქვათ, ფუნქციები $P(x,y), Q(x,y)$ განსაზღვრულია ამ არეზე. შევაერთოთ A და B წერტილები ორი ნებისმიერი AnB და AmB რკალებით და



ნახ. 35

განვიხილოთ მრუდწირული ინტეგრალები:

$$\int_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,,\ \int_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,, \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,. \qquad (9)$$

ბოლო ინტეგრალი განსაზღვრულია $C = AnB + BmA$ ჩაკეტილ კონტურზე, იგი ნულის ტოლი იქნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\int_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,. \qquad (10)$$

რადგანაც AnB და AmB რკალები ნებისმიერად არის აღებული, ამიტომ (10) ტოლობა ნიშნავს, რომ მრუდწირული ინტეგრალი $P(x,y), Q(x,y)$ ფუნქციებისაგან, დამოკიდებული არ არის A და B წერტილების შემაერთებელი წირის შერჩევაზე ანუ **დამოკიდებული არ არის ინტეგრირების გზის შერჩევაზე.**

მტკიცდება თეორემა:

თეორემა 6.1. სრულად ბმულ D არეზე განსაზღვრული $P(x,y), Q(x,y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებისთვის მრუდწირული ინტეგრალი $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ არ არის დამოკიდეული A და B წერტილების შემაერთებელი წირის შერჩევაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, რო- დესაც

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,. \qquad (11)$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ინტეგრალი $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ დამოკიდებული არ არის ინტეგრირების გზის შერჩევაზე, მაშინ ინტეგრალი $\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ყოველ ჩაკეტილ D არეში მოთავსებულ C კონტურზე.

3. მეორე გვარის მრუდწირული ინტეგრალის მექანიკური მნიშვნელობა

ვთქვათ, OYX სიბრტყეზე მოცემულია D არე, რომლის თითოეულ წერტილში მოდებულია ძალა $\vec{F}\,(x,y)$. დავუშვათ, მატერიალური წერტილი მოძრაობს ამ ეგრეთ წოდებული **ძალური ველის** მოქმედებით რაიმე l წირზე. გამოვთვალოთ **მუშაობა** E, რომელიც სრულდება ამ ველის მიერ მატერიალური წერტილის წირის A წერტილიდან B წერტილამდე გადაადგილებისას.

დავყოთ AB რკალი n ნაწილად, ნებისმიერად, წერტილებით:

$$M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_3), \ldots, M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})\,.$$

დავუშვათ, $A = M_0(x_0,y_0), B = M_n(x_n,y_n)$. ვთქვათ, $\vec{F}\,(x,y)$ ძალის გეგმილები OX და OY ღერძებზე, შესაბამისად, ტოლია $f_1(x,y)$ და $f_2(x,y)$ სიდიდეების. თუ AB რკალის დაყოფით მიღებული რკალების მაქსიმალური სიგრძე Δl საკმაოდ მცირეა, მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $M_k M_{k+1}$ რკალის წერტილებზე მოდებული ძალები მიახლოებით ტოლია $\vec{F}(\xi_k,\eta_k)$ სიდიდის, სადაც (ξ_k,η_k) წარმოადგენს ამ რკალზე მოთავსებულ, ნებისმიერად არჩეულ წერტილის კოორდინატებს. აქედან გამომდინარე, იმ მუშაოა E_k, რომელიც სრულდება, ველის მიერ, მატერიალური წერტილის გადაადგილებისას $M_k M_{k+1}$ რკალის გასწვრივ

დაახლოებით ტოლია: $E_k \approx f_1(\xi_k\eta_k)\Delta x_k + f_2(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$, სადაც $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.

წირის A წერტილიდან B წერტილამდე გადაადგილებისას გვექნება მიახლოებითი ტოლობა

$$E \approx \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + f_2(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k ,$$

რაც უფრო მეტ ნაწილებად დავყოფთ AB რკალს, ისე რომ Δl სიდიდე სულ უფრო და უფრო შემცირდეს, ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ ზუსტ ტოლობას:

$$E = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta l\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + f_2(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k ,$$

მაშასადამე

$$E = \int_{AB} f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ მეორე გვარის მრუდწირული ინტეგრალის მნიშვნელობა წარმოადგენს ძალური ველის მიერ მატერიალური წერტილის რაიმე წირზე მოძრაობისას შესრულებულ მუშაობას.

მაგალითი 1. $x = a\cos t, y = a\sin t, t \in [0,2\pi]$ პარამეტრული განტოლებით განსაზღვრულ წრეწირზე მოდებულია $\vec{F}(P,Q)$ ძალური ველის მიერ შესრულებული მუშაობა, სადაც $P = x + y, Q = 2x$, მატერიალური წერტილის ამ წრეწირზე მოძრაობისას.

ამოხსნა: როგორც აღვნიშნეთ, ეს მუშაობა გამოითვლება ფორმულით:

$$E = \int_C (x+y)dx + 2xdy ,$$

სადაც C მოცემული წრეწირია.

$$P = a(\cos t + \sin t); q = 2a\sin t,$$
$$dx = -a\sin tdt, dy = a\cos tdt.$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით

$$E = \int_C (x+y)dx + 2xdy = \int_0^{2x} [-a^2(\cos t + \sin t)\sin t + 2a^2\cos^2 t]dt =$$

$$= \int_0^{2x} [2\cos^2 t - \sin^2 t - \cos t\sin t]dt = a^2\int_0^{2x} [(1+\cos 2x) - \frac{1}{2}(1-\cos 2t) - \frac{1}{2}\sin 2t]dt =$$

$$= a^2\int_0^{2x} dt + a^2\int_0^{2x}\cos 2tdt - \frac{a^2}{2}\int_0^{2x} dt + \frac{a^2}{2}\int_0^{2x}\cos 2tdt - \frac{a^2}{2}\int_0^{2x}\sin 2tdt = a^2 t\Big|_0^{2x} + \frac{a^2}{2}\sin 2t\Big|_0^{2x} -$$

$$-\frac{a^2}{2}t\Big|_0^{2x} + \frac{a^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{2x} + \frac{a^2}{4}\cos 2t\Big|_0^{2x} = 2\pi a^2 - \pi a^2 = \pi a^2.$$

სავარჯიშოები მე-6 თავისათვის

I გამოთვალეთ შემდეგი პირველი გვარის მრუდწირული ინტეგრალები:

1) $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, სადაც C წრფის მონაკვეთია, რომელიც აერთებს წერტილებს $O(0,0), A(1,2)$; 2) $\int_C xyds$, სადაც C წარმოადგენს $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის მეოთხედს,

რომელიც მდებარეობს საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში; 3) $\int\limits_C (x+z)ds$, სადაც C წარმოადგენს $x=t, y=\dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}, z=t^3, 0 \le t \le 1$ წირის რკალს.

II. გამოთვალეთ შემდეგი მეორე გვარის მრუდწირული ინტეგრალები:

1) $\int\limits_{AB} (x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$, სადაც AB წარმოადგენს $y=x^2$ პარაბოლის რკალს რომელიც მოქცეულია $A(1,1)$ და $B(2,4)$ წერტილებს შორის; 2) $\int\limits_C y^2dx+y^2dy$, სადაც C წარმოადგენს $x=a\cos t, y=b\sin t$ ელიფსის ზედა ნახევარს და ინტეგრირება ხდება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით; 3) $\int\limits_{AB} \cos ydx-\sin xdy$, სადაც წარმოადგენს მეორე საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისას. A წერტილის აბსცისია 2, B წერტილის ორდინატი- 2.

თავი 7
დიფერენციალური განტოლებები
1. ძირითადი ცნებები

ჩვეულებრივი n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლება ეწოდება განტოლებას:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \qquad (1)$$

სადაც F თავისი არგუმენტების უწყვეტი ფუნქციაა.

(1) განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს n რიგამდე წარმოებადი ფუნქცია $y = \varphi(x)$, რომლის ჩასმა განტოლებაში იწვევს მის იგივურ ტოლობად გადაქცევას.

განსაზღვრიდან გამომდინარე პირველი და მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს ექნებათ სახე:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0; \; F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

ხშირად n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლება მიცემულია ასეთი სახით:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (2)$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება რომ იყოს n-ური რიგის, F ფუნქცია აუცილებლად დამოკიდებული უნდა იყოს $\frac{d^ny}{dx^2}$ არგუმენტზე, მიუხედავად იმისა, იგი დამოკიდებული იქნება თუ არა სხვა არგუმენტებზე.

განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება: $\frac{dy}{dx} = f(x)$. (3) ამ განტოლების მარცხენა მხარეს დგას მისი $y = \varphi(x)$ ამონახსნის წარმოებული, რომელიც ტოლია $f(x)$ ფუნქციისა, ამიტომ ადგილი ექნება ტოლობას $\int \frac{dy}{dx} = \int f(x)dx$ აქედან გამომდინარე გვექნება ტოლობაც $y = \int f(x)dx$. მაშასადამე (3) განტოლების ამონახსნი ერთადერთი კი არ არის, არამედ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლით პარამეტრიზებულ ფუნქციათა სიმრავლეს, ვინაიდან ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი სწორედ ასეთ სიმრავლეს წარმოადგენს. მაშასადამე (3)განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$y = \varphi(x, C), \qquad (4)$$

სადა C პარამეტრია, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში.

ეხლა განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x). \qquad (5)$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარეს დგას მისი $y = \varphi(x)$ ამონახსნის მეორე რიგის წარმოებული, ამიტომ ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$\int \frac{d^2y}{dx^2}dx = \int f(x)dx, \int\left(\int \frac{d^2y}{dx^2}dx\right)dx = \int\left(\int f(x)dx\right)dx.$$

საბოლოოდ კი მივიღებთ:

$$y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx.$$

მაშასადამე (3) განტოლების ამონახსნი ერთადერთი კი არ არის, არამედ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა წყვილებით პარამეტრიზებულ ფუნქციათა

სიმრავლეს, რადგანაც ფუნქციის ორჯერ მიმდევრობით აღებული განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს ასეთ სიმრავლეს.

$$y = \varphi(x; C_1, C_2), \tag{6}$$

სადაც C_1, C_2 პარამეტრებია, რომლებიც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან ღებულობენ მნიშვნელობებს.

(3) და (5) განტოლებების (4) და (6) ტიპის ამონახსნებს შესაბამისად უწოდებენ ამ განტოლებების **ზოგად ამონახსნებს.** თუ პარამეტრებს C, C_1, C_2 მივცემთ რაიმე კონკრეტულ მნიშვნელობებს $C = C_0 C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, მაშინ მივიღებთ ეგრეთწოდებულ **კერძო ამონახსნებს** შესაბამისად:

$$y = \varphi(x, C_0)\,,\, y = \varphi(x; C_1^0, C_2^0). \tag{7}$$

ზოგადი ამონახსნის ცნება გვაქვს (1) სახის განტოლებებისთვისაც. მტკიცდება, რომ (1) სახის განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე: $y = \varphi(x; C_1, C_2, ..., C_n)$. თუ $C_1, C_2, ..., C_n$ პარამეტრებს მივცემთ კონკრეტულ მნიშვნელობებს $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, მივიღებთ განტოლების კერძო ამონახსნს- $y = (x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$. მაშასადამე შეიძლება ვილაპარაკოთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგად და კერძო ამონახსნებზე, განტოლების ნებისმიერი რიგის შემთხვევაშიც.

ჩავთვალოთ x და y დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატებად სიბრტყეზე. ვთქვათ, ფუნქცია $y = \varphi(x)$ (2) განტოლების რაიმე ამონახსნია, ამ ფუნქციის გრაფიკს (2) განტოლების **ინტეგრალური წირი** ეწოდება.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ძებნის დროს, ხშირად ისმება ეგრეთწოდებული **კოშის ამოცანა:** ვიპოვოთ (1) ან (2) განტოლების ისეთი ამონახსნი $y = \varphi(x)$, რომ

$$\varphi(x_0) = y_0^0, \varphi'(x_0) = y_0^1, \varphi''(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \tag{8}$$

სადაც $x_0, y_0^0, y_0^1, y_0^2, ..., y_0^{n-1}$ წინასწარ მოცემული რიცხვებია. (8) პირობებს კოშის ამოცანის **საწყისი პირობები** ეწოდება.

განსაზღვრება7.1 ვიტყვით, რომ

$$D = \{(x, y_1, y_2, ..., y_n) \,|\, x_0 - a \le x \le x_0 + a\,, y_0^i - b_i \le y_i \le y_0^i + b_i, i = 12, ..., n\}$$

არეზე განსაზღვრული ფუნქცია $f(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ აკმაყოფილებს **ლიფშიცის პირობას,** თუ არსებობს ისეთი $N > 0$ ნამდვილი რიცხვი, რომ ყოველი x-ისათვის, რომელიც აკმაყო ფილებს უტოლობას $|x - x_0| \le a$ და $y_i, i = 1,2,...,n$ ცვლადების ყოველი ორი $y_i^1, i = 1,2,...,n$ და $y_i^2, i = 1,2,...,n$ მნიშვნელობათა სისტემისთვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $\left|y_i^1 - y_0^i\right| \le b_i, \left|y_i^2 - y_0^i\right| \le b_i, i = 1,2,...,n$ სრულდება პირობა:

$$\left| f(x, y_i^1, y_i^1, ..., y_i^1) - f(x, y_i^2, y_i^2, ..., y_i^2) \right| \le \sum_{i=1}^{n} N \left| y_i^1 - y_i^2 \right|.$$

n რიგის (2) სახის განტოლებისათვის, კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა გამომდინარეობს შემდეგი თეორემიდან:

თეორემა 7.1.(კოშის თეორემა): ვთქვათ,

$D = \{(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \,|\, x_0 - a \le x \le x_0 + a, y_0 - b \le y \le y_0 + b, y_0^{(i)} - b_i \le y^{(i)} \le y_0^{(i)} + b_i;$
$i = 1,2,...n-1\}$

მართკუთხედზე განსაზღვრული ფუნქცია $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ აკმაყოფილებს

ლიფშიცის პირობას და შემოსაზღვრულია-$|\,f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})\,| < M$. მაშინ არსებობს

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y = \varphi(x)$, რომელიც განსაზღვრულია $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ შუალედზე, სადაც $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\varphi(x_0) = y_0^0, \varphi'(x_0) = y_0^1, \varphi''(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1},$$

სადაც $x_0, y_0^0, y_0^1, y_0^2, ..., y_0^{n-1}$ წინასწარ მოცემული რიცხვებია.

როგორც კოშის თეორემა გვიჩვენებს, როდესაც (2) განტოლების მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობებს, მისი ამონახსნი არსებობს, ერთადერთია და აკმაყოფილებს პირობებს $\varphi(x_0) = y_0^0, \varphi'(x_0) = y_0^1, \varphi''(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$, სადაც x_0 და y_0 წინასწარ მოცემული რიცხვებია.

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ XOY საკოორდინატო სიბრტყის ნებისმიერად დაფიქსირებულ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის (2) განტოლების მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი.

თუ ვცვლით კოშის ამოცანის საწყის პირობებს, მივიღებთ (2) დიფერენციალური განტოლების სხვადასხვა ამონახსნს, ამიტომ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე: $y = \varphi\left(x; x_0, y_0^0, y_0^1, y_0^2, ..., y_0^{n-1}\right)$, სადაც x_0 დაფიქსირებული რიცხვია, $y_0^0, y_0^1, y_0^2, ..., y_0^{n-1}$- ცვლადი სიდიდეები, რომლებიც ღებულობენ მნიშვნელობას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან.

2. უმარტივესი პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები

2.1. დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით

დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით შემდეგი სახისაა:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y), \tag{1}$$

სადაც მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ორ სხვადასხვა არგუმენტზე დამოკიდებულ ფუნქციის ნამრავლს. ეს განტოლება გარდავქმნათ შემდეგნაირად: გავყოთ ორივე მხარე $\varphi(y)$- ზე და შემდეგ გავამრავლოთ dx-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx.$$

მივიღეთ ტოლობა, რომლის მარცხენა მხარე დამოკიდებულია y არგუმენტზე, მარჯვენა კი x არგუმენტზე, ამასთან ტოლობის ორივე მხარეს გვაქვს რაღაც ფუნქციების დიფერენციალები. თუ ავიღებთ ორივე მხარის განუსაზღვრელ ინტეგრალებს, მივიღებთ ტოლობას:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx. \tag{2}$$

მიღებული ტოლობა წარმოადგენს x და y ცვლად სიდიდეებს შორის არაცხადი სახის დამოკიდებულებას:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{3}$$

რომლის საშუალებითაც y ცვლადი, ზოგ შემთხვევაში, შეიძლება გამოვსახოთ x და C ცვლადების საშუალებით. ასეთ შემთხვევაში მივიღებთ (1) განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$y=\phi(x,C),$$

თუ ასეთი რამ არ მოხერხდა ანუ თუ y ცვლადი არ გამისახება (3) ტოლობიდან დანარჩენი ცვლადების საშუალებით, მაშინ (1) განტოლება (3) ტოლობის მიღებით, მაინც ითვლება ამოხსნილად და (3) ტოლობას უწოდებენ ამ განტოლების **ზოგად ინტეგრალს**.

მაგალითი . ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით

$$\frac{dy}{dx}=y\sin x. \tag{4}$$

ამოხსნა: ამ განტოლების გარდაქმნით ვღებულობთ:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\sin x dx. \tag{5}$$

თუ მოვახდენთ ტოლობის ორივე მხარის ინტეგრირებას, მივიღებთ

$$\ln|y|=-\cos x+C.$$

მაშასადამე ჩვენი განტოლების ზოგადი ამონახსნა იქნება:

$$y=e^{-\cos x}=e^{C}e^{-\cos x}=Ce^{-\cos x}.$$

თუ $C=C_0$, გვექნება კერძო ამონახსნი:

$$y=C_0e^{-\cos x}.$$

თუ (x_0,y_0) (4) განტოლების მარჯვენა მხარის განსაზღვრის არის ისეთი წერტილია, რომელიც მდებარეობს ამ განტოლების ინტეგრალურ წირზე, ამ შემთხვევაში $y_0\geq 0$, მაშინ (5) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{t}+C_0=\int_{x_0}^{x}\sin tdt+C_1. \tag{6}$$

გვექნება: $\ln y=\int_{x_0}^{x}\sin tdt+C$, სადაც $C=C_1+\ln y_0-C_0$, აქედან $y=e^{C}e^{\int_{x_0}^{x}\sin tdt}=Ce^{\int_{x_0}^{x}\sin tdt}$.

როდესაც $x=x_0$, მაშინ $y=y_0$, ამიტომ $y_0=C$. მაშასადამე იმ ინტეგრალური წირის განტოლება ანუ (4) განტოლების კერძო ამონახსნი იქნება:

$$y=y_0e^{\int_{x_0}^{x}\sin tdt}.$$

2.2. პირველი რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

ორი ცვლადის ფუნქციას $y=f(x,y)$ ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ ნებისმიერი $t\in R$ ნამდვილი რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $f(x,y)=f(tx,ty)$.

დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

ეწოდება ერთგვაროვანი თუ მისი მარჯვენა მხარე $f(x,y)$ წარმოადგენს ერთგვაროვან ფუნქციას.

რადგან $f(x,y)$ ერთგვაროვანი ფუნქციაა, ამიტომ $f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$. აქედან გამომდინარე, (1) განტოლებას ექნება შემდეგ სახე:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(1,\frac{y}{x}\right). \qquad (2)$$

შემოვიტანოთ ცვლადთა გარდაქმნა $u=\frac{y}{x}$, მაშინ $y=ux$ და $\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}x$. ამის შემდეგ (2) განტოლების ნაცვლად გვექნება:

$$u+\frac{du}{dx}x=f(1,u),\ \text{ანუ}\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\big(f(1,u)-u\big).$$

ბოლო განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს x და u ცვლადებზე დამოკიდებულ ფუნქციათა ნამრავლს. ამგვარად (1) განტოლება დავიყვანეთ განცალებადცვლადებიან პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებამდე, რომლის ამოხსნაც უკვე ვიცით.

მაგალითი. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

ამოხსნა: განტოლების მარჯვენა მხარე ერთგვაროვანი ფუნქციაა. მართლაც:

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{2}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=f(1,\frac{x}{y}).$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $y=ux$, მაშინ $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ და განტოლება მიიღებს სახეს: $u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}$. ამ განტოლებიდან მივიღებთ $x\frac{du}{dx}=\frac{u+u^3}{1-u^2}$. ეს კი წარმოადგენს განტ- ოლებას განცალებადი ცვლადებით:

$$\frac{dx}{x}=\frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du.$$

ამ განტოლებისთვის შეგვიძლია დავწეროთ ზოგადი ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du.$$

თუ გამოვთვლით ტოლობის ორივე მხარეს მდგომ განუსაზღვრელ ინტეგრალებს, მივი- ღებთ $\ln x=\ln(u^2+1)-\ln u+\ln C$. აქედან გვექნება $\frac{x(u^2+1)}{u}=C$. ჩავსვათ ამ ტოლობაში u ცვლადიც მაგიერ $\frac{y}{x}$, მივიღებთ განტოლების ზოგად ინტეგრალს $x^2+y^2=yC$.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ განტოლების ამონახსნია ასევე ფუნქცია $y=0$, რაც მოწმდება უშუალოდ.

2.3. წრფივი პირველი რიგის დიფერენციალრი განტოლება

წრფივ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \qquad (1)$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ საერთო განსაზღვრის არის მქონე ფუნქცებია.

თუ $Q(x)=0$, მაშინ (1) განტოლებას ეწოდება წრფივი პირველი რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება და აქვს სახე:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0.$$

იგი წარმოადგენს განცალებადცვლადებიან განტოლებას და მისი ზოგადი ამონახსნია

$$y=Ce^{\int -P(x)dx}.$$

თუ $Q(x)\neq 0$, მაშინ (1) განტოლებას ეწოდება წრფივი, არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. მის ამოსახსნელად ვიყენებთ ეგრეთწოდებულ **მუდმივთა ვარიაციის მეთოდს**, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: (1) განტოლების ამონახსნს ვეძებთ ასეთი ფუნქციის სახით:

$$y=C(x)e^{\int -P(x)dx}, \qquad (2)$$

რომლის ჩასმითაც (1) განტოლებაში მივიღებთ:

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{\int -P(x)dx}-C(x)e^{\int -P(x)dx}P(x)+P(x)C(x)e^{\int -P(x)dx}=Q(x),$$

აქედან ვღებულობთ:

$$C(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}+C.$$

თუ ჩავსვამთ $C(x)$-ის გამოთვლილ მნიშვნელობას (2) ტოლობაში მივიღებთ (1) განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$y=e^{\int -P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right). \qquad (3)$$

მაგალითი. ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების

$$\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$$

ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ (3) ფორმულა, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს:

$$y=e^{-\int dx}\left(\int e^{-x}e^{\int dx}dx+C\right),$$

საბოლოოდ $y=e^{-x}(x+C)$.

2.4. ბერნულის დიფერენციალური განტოლება

ბერნულის დიფერენციალური განტოლება ეწოდება განტოლებას:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}. \qquad (1)$$

თუ $n=0$, ცხადია, ბერნულის განტოლება წარმოადგენს პირველი რიგის წრფივ არაერთგვაროვან განტოლებას, ხოლო თუ $n=1$- პირველი რიგის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას.

ვთქვათ, $n>1$, მაშინ თუ (1) განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ y^{n}-ზე მივიღებთ:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x).$$

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $z=y^{-n+1}$, გვექნება $\frac{dz}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$. აქედან ვღებულობთ:

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)P(x)z=(-n+1)Q(x).$$

ეს განტოლება წრფივი, პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებაა, რომლის ამოხსნის მეთოდიც ზემოთ განვიხილეთ.

თუ $n>0$ (1) განტოლებას აქვს აგრეთვე ტრივიალური ამონახსნიც $y=0$.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა: აქ $n=3$, გამოვიყენოთ გარდაქმნა: $z=\frac{1}{y^{3-1}}=\frac{1}{y^2}$, გვექნება $\frac{dz}{dx}=-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx}$.

ბოლო ტოლობის გათვალისწინებით და განტოლების y^3-ზე გაყოფით მივიღებთ $\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}+x\frac{1}{y^2}=x^3$. აქედან გვექნება: $\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$.

მიღებული განტოლება წარმოადგენს წრფივ, პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, მისი ზოგადი ამონახსნია:

$$z=e^{\int 2xdx}\left(-2\int x^3e^{\int -2xdx}dx+C\right)$$

ანუ $z=e^{x^2}(\int -2x^3e^{-x^2}dx+C)=e^{x^2}(\int x^2de^{-x^2}+C)=e^{x^2}(e^{-x^2}x^2+e^{-x^2}+C)=x^2+1+Ce^x$.

რადგან $z=\frac{1}{y^2}$, ამიტომ საბოლოოდ გვექნება.

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{x^2}}}.$$

2.5.. განტოლება სრულ დიფერენციალებში

განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{1}$$

თუ (1) განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს რომელიღაც $u(x;y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს ანუ:

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

მაშინ (1) დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება **განტოლება სრულ დიფერენციალებში**. ცხადია ეს განტოლება პირველი რიგისაა.

თეორემა 7.2. (ეილერის თეორემა). $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ გამოსახულება მაშინ და მხოლ-ოდ მაშინ წარმოადგენს რაიმე $u(x;y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, როდესაც

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

ამ ფაქტის გათვალისწინებით ავაგოთ (1) განტოლების ამონახსნი. დავუშვათ, (1) განტოლებაა სრულ დიფერენციალებში, მაშინ არსებობს ისეთი ფუნქცია $u(x,y)$, რომ $\frac{\partial u(x;y)}{\partial x}=M(x,y)$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ და $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. ამ ტო-ლობის x ცვლადით ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt+\varphi(y).$$

მიღებული ტოლობის y ცვლადით გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt+\varphi'(y),$$

ბოლო ტოლობიდან $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ და $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$N(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(t,y)}{\partial t}dt+\varphi'(y),$$

ანუ $N(x,y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)$. აქედან გამომდინარე $\varphi'(y)=N(x_0,y)$ და

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0;\tau)d\tau+C.$$

მაშასადამე

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}N(x_0,\tau)d\tau+C.$$

$u(x,y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი $du=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

რადგანაც $du=0$, ამიტომ $u(x,y)=const$ და ტოლობა $\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}N(x_0,\tau)d\tau=C$ წარმოადგენს (1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

აქ ყველგან იგულისხმება, რომ წერტილი (x_0,y_0) შედის უწყვეტად წარმოებადი $M(x,y)$ და $N(x;y)$ ფუნქციების საერთო განსაზღვრის არეში.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=12xy$, მაშასადამე საქმე გვაქვს განტოლებასთან სრულ დიფერენციალებში. $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2$, აქედან $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)$.

გამოვთვალოთ $\varphi'(y)$. $\varphi'(y)=\frac{\partial u}{\partial y}-6x^2y=N-6x^2y=4y^3$, აქედან $\varphi(y)=y^4+C$, მაშასადამე

$$u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4=C$$

წარმოადგენს განტოლების ზოგად ინტეგრალს

3. წრფივი, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებანი

წრფივი, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება ეწოდება განტოლებას:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad (1)$$

სადაც $f(x), a_i(x), i = 1,2$ საერთო (a,b) განსაზღვრის არის მქონე უწყვეტი ფუნქციებია. თუ $f(x) = 0$, მაშინ განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, სხვა შემთხვევაში არაერთგვაროვანი.

ფუნქცია

$$-(a_1(x)y' + a_2(x)y) + f(x) \qquad (2)$$

განსაზღვრულია არეზე, რომელიც განისაზღვრება უტოლობებით:

$$x_0 - a \le x \le x_0 + a,$$
$$y_0 - b \le y \le y_0 + b,$$
$$y_0^1 - b \le y' \le y_0^1 + b.$$

შემოსაზღვრულია და როგორც x, y, y' ცვლადების ფუნქცია, აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, ამიტომ როგორც ამ თავის 1-ლ ქვეთავში ვაჩვენეთ, $(y')' = -(a_1(x)y' + a_2(x)y)$ განტოლებიისათვის კოშის ამოცანას ექნება ერთადერთი ამონახსნი $y = \varphi(x)$ რომელიც განსაზღვრულია $[x_0 - h; x_0 + h]$ სეგმენტზე, სადაც $h \le a$. a,b რიცხვები შეიძლება იყოს უსასრულოდ დიდიც.

მტკიცდება, რომ (1) განტოლებისთვის ანუ მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამონახსნი განსაზღვრულია $f(x), a_i(x), i = 1,2$ ფუნქციების საერთო განსაზღვრის არეზე, ჩვენ შემთხვევაში $(a;b)$ ინტერვალზე.

განვიხილოთ შესაბამისობა L, რომელიც მეორე რიგამდე წარმოებად y ფუნქციას შეუსაბამებს სიდიდეს $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$, ცხადია, რომ ეს შესაბამისობა წრფივია ანუ $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2], L[ky] = kL[y]$. L შესაბამისობას **წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი ეწოდება.**

3.1. წრფივი, ერთგვაროვანი, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ მეორე რიგის **წრფივი, ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:**

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (3)$$

ეს განტოლება ასედაც შეიძლება ჩავწეროთ: $L[y] = 0$.

თუ y_1, y_2 ფუნქციები $L[y] = 0$ განტოლების კერძო ამონახსნებია, მაშინ $\alpha y_1 + \beta y_2$, სადაც α, β ნებისმიერი მუდმივებია, ასევე მისი კერძო ამონახსნი იქნება.

მართლაც, რადგანაც $L[y_1] = 0, L[y_2] = 0$, ამიტომ L ოპერატორის წრფივობის გამო გვექნება

$$L[\alpha y_1 \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2] = 0. \qquad (4)$$

(3)განტოლებისორ $y_1(x), y_2(x)$ ამონახსნს, რომელებიც განსაზღვრულია (a,b) შუალედზე, ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული,** თუ არსებობენ ნამდვილი რიცხვები: α_1, α_2 ,რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია

ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას: $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$. თუ ეს ამონახსნები არ არიან წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მათ უწოდებენ **წრფივად დამოუკიდებელს.**

ვთქვათ (3) განტოლების ამონახსნები $y_1(x), y_2(x)$ პირველ რიგამდე წარმოებადი ფუნქციებია, განვიხილოთ დეტერმინანტი:

$$W(y_1, y_2) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ y_1' y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 . \tag{5}$$

ამ დეტერმინანტს (3) განტოლების $y_1(x), y_2(x)$ ამონახსნთა სისტემის **ვრონსკის დეტერმინანტი** ეწოდება.

ვრონსკის დეტერმინანტს აქვს შემდეგი თვისებები, რომლებიც თეორემების სახითაა ჩამოყალიბებული:

თეორემა 7.3. თუ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ მისი ვრონსკის დეტერმინანტი $W(x)$ ნულის ტოლია.

თეორემა 7.24 თუ y_1, y_2 (3) განტოლების კერძო ამონახსნებისაგან შედგენილი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა, მაშინ მისი ვრონსკის დეტერმინანტი $W(x) \neq 0$ ყველა $x \in (a;b)$ წერტილისათვის.

(3) განტოლების y_1, y_2, რომლებიც შეადგენენ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას ამ განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა ეწოდება.

(3) განტოლებისათვის არსებობს ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. მართლაც, განვიხილოთ რიცხვითი დეტერმინანტი, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან:

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

ასეთი დეტერმინანტის აგება ყოველთვის არის შესაძლებელი. მართლაც, ვთქვათ, y_1 , y_2 (3) განტოლების ისეთი ამონახსნებია, რომლებიც აკმაყოფილებენს პირობებს:

$$y_1(x_0) = a_{11}, y_1^{(1)}(x_0) = a_{21} .$$
$$y_2(x_0) = a_{12}, y_2^{(1)}(x_0) = a_{22} .$$

თუ განვიხილავთ ამონახსნთა სისტემას y_1, y_2, ცხადია მისი ვრონსკის დეტერმინანტის მნიშვნელობა x_0 წერტილში

$$W(x_0) \neq 0 .$$

აქედან გამომდინარე, y_1, y_2 სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

(3) განტოლების ზოგადი ამონახსნი y ჩაიწერება ასე: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, სადაც y_1, y_2 ამ განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა, $C_i, i = 1,2$ ნებისმიერი მუდმივებია. მართლაც, ვთქვათ, y ამონახსნი აკმაყოფილებს პირობას:

$$y(x_0) = y_0^0, y^{(1)}(x_0) = y_0^1 .$$

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} C_1 y_0^1 + C_2 y_0^2 &= y_0 \\ C_1 y_{01}^1 + C_2 y_{01}^2 &= y_0^1 \end{aligned} , \tag{6}$$

სადაც $y_{01}^1 = y_1'(x_0), y_{02}^2 = y_2'(x_0)$.

განტოლებათა ამ სისტემის დეტერმინანტია $W(x_0)$, იგი არ უდრის ნულს, რადგან სისტემა y_1, y_2 წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. განვიხილოთ ფუნქცია $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, ცხადია ეს ფუნქცია, (6)

ტოლობებიდან გამომდინარე, აკმაყოფილებს პირობებს: $\bar{y}(x_0)=y_0^0, \bar{y}^{(1)}(x_0)=y_0^1$, ამიტომ კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის გამო $y=\bar{y}=C_1^0 y_1+C_2^0 y_2$. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ ჩვენი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოდგინდება ასე:

$$y=C_1 y_1+C_2 y_2 .$$

თუ y_1, y_2, y_3 (3) განტოლების ამონახსნებია, მაშინ ისინი შეადგენენ წრფივად დამოკიდებულ სისტემას.

მართლაც თუ y_1, y_2 წრფივად დამოკიდებული სისტემაა, მაშინ მისი მომცველი სისტემა y_1, y_2, y_3 ასევე წრფივად დამოკიდებულია. თუ y_1, y_2 წრფივად დამოუკიდებული სისტემაა, მაშინ $y_3=C_1 y_1+C_2 y_2$. ამიტომ $C_1 y_1+C_2 y_2+(-y_3)=0$. ეს ნიშნავს, რომ სისტემა y_1, y_2 წრფივად დამოკიდებულია.

თუ განტოლებებს $y''+a_1'(x)y'+a_2'(x)y=0,\ y'+a_1''(x)y'+a_2''(x)y=0$ აქვთ საერთო ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან.

მართლაც, დავუშვათ $a_i'(x)\neq a_i''(x), i=1,2.$, მაშინ თუ განვიხილავთ ამ ორი განტოლების სხვაობას: $(a_1'(x)-a_1''(x))y'+(a_2'(x)-a_2''(x))y=0$ იგი იქნება პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, მას ექნება ზუსტად ერთი ფუნქციის შემცველი ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. მოცემული განტოლებების ყველა ამონახსნი ასევე მათი სხვაობის ამონახსნიცაა. განტოლებების საერთო ფუნდამენტური ამონახსნი კი შეიცავს ზუსტად ორ ფუნქციას ამგვარად მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე ჩვენი დაშვება არ ყოფილა სწორი, ამიტომ $a_i'(x)=a_i''(x)$.

ეხლა ავაგოთ ისეთი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება, რომლის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა წინასწარ მოცემული: y_1, y_2 წრფივად დამოკიდებული სისტემაა. განვიხილოთ დეტერმინანტი:

$$\begin{vmatrix} y_1 y_2 y \\ y_1^{(1)} y_2^{(1)} y^{(1)} \\ y_1^{(2)} y_2^{(2)} y^{(2)} \end{vmatrix},$$

რომლის ბოლო სვეტი შედგება საძიებელი ფუნქციისა და მისი წარმოებულებისაგან. თუ ამ დეტერმინანტს გავუტოლებთ ნულს და გავშლით ბოლო სვეტის მიმართ მივიღებთ მეორე რიგის განტოლებას:

$$A_0 y''+A_1 y'+A_2 y=0, \tag{7}$$

სადაც $A_i=(-1)^{i+2+1}M_{i,3}$, სადაც $M_{i,3}$ i-ური, $i=1,2,3$ სტრიქონის და მესამე სვეტის ამოღებით მიღებული მინორია, $A_0=W[y_1,y_2]=W(x)$. თუ გავყოფთ (7) განტოლების ორივე მხარეს A_0 -ზე მივიღებთ განტოლებას:

$$y''+a_1 y'+\ldots+a_2 y=0, \tag{8}$$

სადაც

$$a_1=-\frac{\begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ y_1^{(2)} y_2^{(2)}. \end{vmatrix}}{W(x)}=-\frac{W'(x)}{W(x)}, \tag{9}$$

სადაც $W'(x)$ ვრონსკის დეტერმინანტის წარმოებულია.

განვიხილოთ პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$W'(x)+a_1W(x)=0 \qquad (10)$$

როგორც ვიცით, მისი ზოგადი ამონახსნია $W(x)=e^{-\int a_1dx}$, რაც შეეხება კერძო ამონახსნს, თუ დავსვამთ (10) განტოლებისთვის კოშის ამოცანას საწყისი პირობებით: $x=x_0$, $W_0=W(x_0)$, გვექნება კერძო ამონახსნიც:

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}a_1dt}, \qquad (11)$$

(10) და (11) ტოლობებს **ლიულვილის ფორმულები** ეწოდება.

მაგალითი. გამოვიყენოთ ლიულვილის (11) ფორმულა $y''+a_1y+a_2y=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად, როდესაც ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსნი - y_1.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული განტოლებისათვის ვრონსკის დეტერმინანტი და გამოვიყენოთ ლიულვილის ფორმულა:

$$\begin{vmatrix} y_1 y \\ y_1' y' \end{vmatrix}=Ce^{-\int a_1dx},$$

აქედან $y_1y'-y_1'y=Ce^{-\int a_1dx}$. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ y_1^2-ზე მივიღებთ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y_1}\right)=\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1dx}.$$

აქედან კი საბოლოოდ გვექნება: $y=y_1\left(\int\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1dx}dx\right)$.

3.2.წრფივი, არაერთგვაროვანი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

წრფივი, არაერთგვაროვანი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება ეწოდება განტოლებას:

$$L[y]=y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x), \qquad (1)$$

სადაც მარჯვენა მხარე $f(x)$ იგივურად არ უდრის ნულს.

წრფივ, ერთგვაროვან n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლებას, რომელსაც იგივე კოეფიციენტები აქვს,

$$L[y]=y+a_1(x)y'+a_2(x)y=0, \qquad (2)$$

უწოდებენ (1) არაერთგვაროვანი განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას.

ვთქვათ (1) განტოლების კერძო ამონახსნია $Y(x)$, მაშინ გვექნება $L[Y]=f(x)$, შემოვიტანოთ ახალი საძიებელი ფუნქცია z

$$y=Y+z. \qquad (3)$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება(1) განტოლებაში, მივიღებთ $L[y]=L[Y]+L[z]=f(x)$, რადგან $Y(x)$ (1) განტოლების ამონახსნია, ამიტომ $L[z]=0$. მაშასადამე z ფუნქცია წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს. ვთქვათ ეხლა (2) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა y_1,y_2, მაშინ მის ზოგად ამონახსნს როგორც წინა პარაგრაფიდან არის ცნობილი, აქვს სახე: $C_1y_1+C_2y_2$. ჩავსვათ ეს

გამოსახულება z-ის მაგივრად (3) ფორმულაში, მივიღებთ (1) განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + Y. \qquad (4)$$

მაშასადამე თუ ცნობილია (1) განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი, მაშინ ამ განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს აღნიშნული კერძო ამონახსნისა და შესაბამისი (2) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის ჯამს.

ამგვარად წრფივი არაერთგვაროვანი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად, საკმარისია ვიცოდეთ ამ განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნი და შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.

ეგრეწოდებული **ლაგრანჟის მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით** ვიპოვოთ (1) განტოლების კერძო ამონახსნი.

ვთქვათ, y_1, y_2 (2) ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა. (2) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

სადაც C_1, C_2 მუდმივი სიდიდეებია. ვეძებოთ (1) არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი ასეთი სახით:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2, \qquad (5)$$

სადაც $C_1(x), C_2(x)$ წარმოადგენენ x ცვლადზე დამოკიდებულ უცნობ ფუნქციებს.

ვიპოვოთ ეს ფუნქციები. ამისათვის გავაწარმოოთ (5) ტოლობა, მივიღებთ:

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' + y_1 \frac{dC_1(x)}{dx} + y_2 \frac{dC_2(x)}{dx}. \qquad (6)$$

რადგან (1) განტოლების ამონახსნს ვეძებთ (5) სახით, ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ მის წარმოებულსაც ერთგვაროვანი განტოლების შემთხვევის ანალოგიურად, უნდა ჰქონდეს სახე:

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'. \qquad (7)$$

ამიტომ გავუტოლოთ ნულს (6)ტოლობის მარჯვენა მხარის შესაკრებთა იმ ნაწილის ჯამი, რომლებიც შეიცავენ $C_i(x), i = 1,2$ ფუნქციების წარმოებულებს.

$$y_1 \frac{dC_1(x)}{dx} + y_2 \frac{dC_2(x)}{dx} = 0. \quad (8)$$

გავაწარმოოთ ეხლა (8) ტოლობა, მივიღებთ

$$y'' = C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2'' + \ldots + C_n(x) y_n'' + y_1' \frac{dC_1(x)}{dx} + y_2' \frac{dC_2(x)}{dx} + \ldots + y_n' \frac{dC_n(x)}{dx}. \qquad (9)$$

შევიტანოთ (1) განტოლებაში (5),(9) ტოლობების მარჯვენა ნაწილები და აგრეთვე საძიებელი ამონახსნის წარმოებულის (7) გამოსახულება, მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{2} C_i (y_i'' + a_1(x) y_i' + \ldots + a_2(x) y_i + y_1' \frac{dC_1(x)}{dx} + y_2' \frac{dC_2(x)}{dx} = f(x).$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში C_i ფუნქციებთან მდგომი თანამამრავლები ნულის ტოლია, რადგან თითოეული $y_i, i = 1,2$ წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს. აქედან გამომდინარე:

$$y_1' \frac{dC_1(x)}{dx} + y_2' \frac{dC_2(x)}{dx} = f(x).$$

ამგვარად, მივიღეთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა $\frac{dC_1(x)}{dx}, \frac{dC_2(x)}{dx}$ უცნობების მიმართ

$$y_1\frac{dC_1(x)}{dx}+y_2\frac{dC_2(x)}{dx}+...+y_n\frac{dC_n(x)}{dx}=0,$$

$$y_1'\frac{dC_1(x)}{dx}+y_2'\frac{dC_2(x)}{dx}+...+y_n'\frac{dC_n(x)}{dx}=0.$$

ამ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი წარმოადგენს (2) ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტს, ამიტომ განსხვავებული იქნება ნულისგან. მაშასადამე ალგებრულ სისტემას ამონახსნი აქვს და ერთადერთია. ამ ამონახსნის თითოეული კომპონენტი $\frac{dC_i(x)}{dx}=\varphi_i(x), i=1,2$, სადაც თითოეული $\varphi_i(x)$ წარმოადგენს x ცვლადის უწყვეტ ფუნქციას. მათი ინტეგრირებით ვღებულობთ:

$$C_i(x)=\int\varphi_i(x)dx, i=1,2.$$

მაშასადამე (1) განტოლების კერძო ამონახსნია:

$$\bar{y}=\sum_{i=1}^{2}y_i\int\varphi_i(x)dx.$$

საბოლოოდ (1) წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\sum_{i=1}^{2}y_i\int\varphi_i(x)dx,$$

სადაც C_1,C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი. ამოვხსნათ არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება $xy''-y'=x^2$.

ამოხსნა: შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება იქნება: $xy''-y'=0$. იგი ადვილად იხსნება შემდეგნაირად: $\frac{y''}{y'}=\frac{1}{x}$, $\frac{dy'}{y'}=\frac{dx}{x}$, $\ln y'=\ln x+C, y'=Cx, y=\frac{C}{2}x^2+D$. აქედან გამომდინარე, ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა იქნება $1,x^2$. ვეძებოთ მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ასეთი სახით $y=C_1+C_2x^2$. შესაბამისად გვექნება:

$$\frac{dC_2}{dx}=\frac{1}{2},C_2=\frac{x}{2}+\gamma_2,\frac{dC_1}{dx}=-\frac{x^2}{2},C_1=-\frac{x^3}{6}+\gamma_1.$$

საბოლოოდ საძიებელი ზოგადი ამონახსნი

$$y=\gamma_1+\gamma_2x^2+\frac{x^3}{3},$$

სადაც γ_1,γ_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

4. წრფივი მუდმივ კოეფიციენტებიანი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებები

განვიხილოთ წრფივი მუდმივ კოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება:

$$L[y]=y'+...+a_1y'+a_2y=0. \qquad (1)$$

ამ განტოლებაში ვგულისხმობთ, რომ a_1,a_2 ნამდვილი რიცხვებია. ვიპოვოთ ამ განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.

ამისათვის მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ვეძებოთ მისი კერძო ამონახსნები ასეთი სახით: $y=e^{kx}$. მაშინ

$$y'=ke^{kx}, y''=k^2e^{kx}.$$

თუ ჩავსვამთ ამ მონაცემებს (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$L\left[e^{kx}\right]=e^{kx}\left(k^2+a_1k+a_2\right)=0\,.$$

(2)

ფრჩხილებში მოთავსებულ მრავალწევრს (1) განტოლების მახასიათებელ მრავალწევრს უწოდებენ. (2) ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს ორი თანამამრავლის ნამრავლს, რომელთაგან პირველი - e^{kx} არასოდეს ნული არ არის, მეორე თანამამრავლი:

$$F(k)=k^2+a_1k+a_2 \qquad (3)$$

ნულის ტოლია k ცვლადის იმ მნიშვნელობებისთვის, რომლებიც წარმოადგენენ (3) მრავალწევრის ფესვებს. ამის გამო, $y=e^{k'x}$ იქნება (1) განტოლების ამონახსნი, მხოლოდ მაშინ, როდესაც k' წარმოადგენს (1) განტოლების მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვს.

შემთხვევა 1.

ეს ის შემთხვევაა, როდესაც (2) მახასიათებელ მრავალწევრს გააჩნია 2 განსხვავებული ფესვი: k_1,k_2, მაშინ გვექნება ამონახსნთა სისტემა:

$$y_1=e^{k_1x},y_2=e^{k_2x}\,. \qquad (4)$$

ვაჩვენოთ, რომ (4) სისტემა წარმოადგენს (1) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. ამისათვის განვიხილოთ ვრონსკის დეტერმინანტი:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{k_1x}e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x}k_2e^{k_2x}. \end{vmatrix}=e^{(k_1+k_2)}\begin{vmatrix} 11 \\ k_1k_2 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი დეტერმინანტი ნული არ არის, თუ რიცხვები: k_1,k_2 განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, რადგანაც ჩვენ შემთხვევაში k_1,k_2 წარმოადგენს (3) მრავალწევრის განსხვავებულ ფესვებს, ამიტომ $W(x)\neq 0$. შედეგად (4) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია და წარმოადგენს (1) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც (3) მრავალწევრს აქვს 2 განსხვავებული კომპლექსური ფესვი.

ვთქვათ, (1) განტოლების მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვი $k_1=u+iv$, მაშინ მისი შეუღლებული რიცხვი $k_2=u-iv$ ასევე იქნება ამ მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვი. k_1 ფესვისთვის გვექნება:

$$\begin{aligned}0&=L\left[e^{(u+iv)x}\right]=L\left[e^{ux}(\cos vx+ivx)\right]=L\left[e^{ux}\cos vx+ie^{ux}\sin vc\right]=\\&=L\left[e^{ux}\cos vx\right]+L\left[e^{ux}i\sin vx\right]=L\left[e^{ux}\cos vx\right]+iL\left[e^{ux}\sin vx\right]\end{aligned}.$$

მიღებული ტოლობიდან გვაქვს:

$$L\left[e^{ux}\cos vx\right]=-iL\left[e^{ux}\sin vx\right],$$

ნიშნავს, რომ $L\left[e^{ux}\cos vx\right]=0, L\left[e^{ux}\sin vx\right]=0$. მაშასადამე $y_1=e^{ux}\cos vx, y_2=e^{ux}\sin vx$ ფუნქციები წარმოადგენენ (1) განტოლების ნამდვილ ამონახსნებს და, ცხადია, შეადგენენ ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას.

შემთხვევა 2.

ეს ის შემთხვევაა, როდესაც მახასიათებელ მრავალწევრს გააჩნია ჯერადი ფესვები. ამ შემთხვევაში განსხვავებულ ფესვთა რაოდენობა (4) ტოლია ერთის, $k'=k_1=k_2$. ცხადია ერთი კერძო ამონახსნია $y=e^{k'x}$. რომ მივიღოთ მეორე ამონახსნი, რომელიც ამ ამონახსნთან შეადგენს ფუნდამენტურ სისტემას, შევისწავლოთ L დიფერენციალური ოპერატორის მოქმედება uv ნამრავლზე. როგორც ვიცით

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$uv = uv$$

თუ გავამრავლებთ პირველ სტრიქონს 1-ზე, მეორე სტრიქონს a_1-ზე, მესამე სტრიქონს a_2-ზე და შემდეგ შევკრებთ, მივიღებთ:

$$L[uv] = vL[u] + \frac{v'}{1!}L_1[u] + \frac{v''}{2!}L_2[u], \tag{6}$$

სადაც:

$$L_1[u] = 2u' + a_1 u\,,$$
$$L_2[u] = 2u\,.$$

თითოეული $L_r, r = 1,2$ წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ ოპერატორს. ცხადია, მათი მახასიათებელი მრავალწევრი $F_r(k) = F^{(r)}(k), r = 1,2$, სადაც $F(k)$ (1) განტოლების მახასიათებელი მრავალწევრია.

გამოვთვალოთ ეხლა (6), თუ $u = e^{kx}$ და $v = x$

$$L[xe^{kx}] = xL[e^{kx}] + L_1(e^{kx}).$$

რადგან $L_1[e^{kx}] = e^{kx}F'(k)$, ამიტომ გვექნება:

$$L[xe^{kx}] = e^{kx}(xF(k) + F'(k)). \tag{7}$$

k' არის (1) განტოლების მახასიათებელი მრავალწევრის ორის ჯერადობის ფესვი,, მაშინ

$$F(k') = 0, F'(k') = 0\,.$$

თუ (7) ტოლობაში k-ს მაგივრად შევიტანთ k', მივიღებთ $L[xe^{k'x}] = 0$, მაშასადამე ფუნქცია $y = xe^{k'x}$ წარმოადგენს კერძო ამონახსნს. ცხადია, ფუნქციათა სისტემა $e^{k'x}, xe^{k'x}$ წრფივად დამოუკიდებელია და ფუნდამენტური (1) განტოლებისთვის.

რაც ითქვა ამ პარაგრაფში, შეეხებოდა წრფივი, ერთგვაროვანი, მუდმივ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის აგებას.

რაც შეეხება არაერთგვაროვან:

$$L[y] = y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{8}$$

დიფერენციალურ განტოლებას, შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის საფუძველზე, მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით, შეგვიძლია მოვძებნოთ მისი კერძო ამონახსნი და შემდეგ, ვიცით რა შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, როგორც ზემოთ აღვწერეთ, შეგვიძლია გამოვსახოთ ამ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნიც.

5. დიფერენციალური განტოლებების გამოყენება

5.1. ნივთიერების წარმოქმნის და დაშლის განტოლებები

ნივთიერებათა წარმოქმნის და დაშლის ბევრი პროცესი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: ნივთიერების რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე პროპორციულია მოცემულ მომენტში ნივთიერების რაოდენობაზე დამოკიდებული რაღაც ფუნქციის და ასევე ამ ნივთიერების ხასიათზე, გარემო პირობებზე(ტემპერატურა, წნევა განათებულობა და სხვა).

ვთქვათ, ნივთიერების რაოდენობა დროის t მომენტში არის $x(t)$. მისი ცვლილების სიჩქარე იქნება $\frac{dx(t)}{dt}$. ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, გვექნება:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k(t) f(x) . \qquad (1)$$

როდესაც ნივთიერების მახასიათებლები და გარემო პირობები მუდმივია $k(t)$ კოეფიციენტიც იქნება მუდმივი. (1) წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას განცალებადი ცვლადებით. მისი ამოხსნის მეთოდები ჩვენთვის უკვე ცნობილია.

მაგალითი 1. ბაქტერიათა გამრავლების მოდელი. ვთქვათ კონკრეტული სახის ბაქტერიათა ჯამური მასა დროის t მომენტში არის $x(t)$ და მათი გამრავლება ხდება მუდმივ გარემოში ანუ პროპორციულობის კოეფიციენტი k მუდმივია.

ასეთ შემთხვევაში ბაქტერიათა გამრავლების პროცესი აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx . \qquad (2)$$

პირობის თანახმად $x(t)$ და $x'(t)$ არაუარყოფითი სიდიდეებია ამიტომ k კოეფიციენტიც არაუარყოფითია. საინტერესოა შემთხვევა, როდესაც $k > 0$, რადგან თუ $k = 0$, არავითარი გამრავლება არ ხდება.

(2) განტოლება წრფივი, პირველი რიგის განტოლებაა, მისი ზოგადი ამონახსნია $x = Ce^{kt}$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. თუ ვიცით k კოეფიციენტის მნიშვნელობა და ბაქტერიათა მასა m_0 დროის ფიქსირებულ t_0 მომენტში ანუ $x(t_0) = m_0$, მაშინ

$$m_0 = Ce^{kt}, C = m_0 e^{-kt_0} ,$$

აქედან გამომდინარე: $x(t) = m_0 e^{k(t-t_0)}$.

მაგალითი 2. რადიოაქტიური დაშლა. ექსპერიმენტებით დადგენილია, რომ რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის სიჩქარე პროპორციულია დროის მოცემულ მომენტამდე დაუშლელი ნივთიერების რაოდენობისა.

თუ $x(t)$ წარმოადგენს დროის t მომენტამდე დარჩენილი დაუშლელი ნივთიერების მასას, მაშინ დაშლის სიჩქარე $\frac{dx(t)}{dt}$ აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t) . \qquad (3)$$

ნიშანი მინუსი, განტოლების მარჯვენა მხარეს, ნიშნავს, რომ ხდება ნივთიერების რაოდენობის შემცირება და არა გაზრდა.

(3) განტოლების ზოგადი ამონახსნია $x(t) = Ce^{-kt}$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. მისი მნიშვნელობა, ისევე როგორც წინა მაგალითში, გამოითვლება ფორმულით: $C = m_0 e^{kt_0}$, სადაც m_0 ნივთიერების მასაა დროის ფიქსირებულ t_0 მომენტში. მაშასადამე რადიოაქტიური და- შლის პროცესი აღიწერება ფუნქციით:

$$x(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)} . \qquad (4)$$

პრაქტიკაში რადიოაქტიური დაშლის სიჩქარე ხასიათდება ეგრეთწოდებული **ნახევარ-დაშლის პერიოდით** ანუ იმ დროით, რომელშიც ხდება არსებული ნივთიერების ნახევრის დაშლა. აღვნიშნოთ ნახევარდაშლის პერიოდი T სიმბოლოთი. გამოვსახოთ k ნახევარდა-ლის T პერიოდის საშუალებით.

(4) ფორმულიდან, როდესაც $t=t_0+T$, გვექნება $\frac{m_0}{2}=m_0e^{-kT}$, ამიტომ $kT=\ln 2, k=\frac{\ln 2}{T}$. ამგვარად, $x(t)=m_0e^{-\frac{t-t_0}{T}\ln 2}$ ანუ $x(t)=m_0 2^{-\frac{t-t_0}{T}}$. კერძოდ, როდესაც $t_0=0$, მაშინ $x(t)=m_0 2^{-\frac{t}{T}}$.

5.2. ჰარმონიული რხევები

განვიხილოთ განტოლება

$$x''+\omega^2 x=0. \tag{1}$$

ამ განტოლების მახასიათებელი მრავალწევრია $k^2+\omega^2$. კომპლექსური ფესვებია: $k_1=i\omega, k_2=-i\omega$. აქედან გამომდინარე, (1) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა $y_1=\cos\omega t, y_2=\sin\omega t$, ზოგადი ამონახსნი

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t. \tag{2}$$

ვაჩვენოთ, რომ არსებობენ რიცხვები A,α, რომ $C_1=A\cos\alpha, C_2=-A\sin\alpha$. თუ განვიხილავთ ამ ტოლობებს როგორც ორუცნობიან ალგებრულ განტოლებებს დავინახავთ, რომ მათ ამონახსნი აქვთ. ამიტომ (2) ამონახსნი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$x=A\cos\alpha\cos\omega t-A\sin\alpha\sin\omega t$$

ანუ

$$x=A\cos(\omega t+\alpha), \tag{3}$$

სადაც A,α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

თუ ჩავთვლით, რომ t ცვლადი წარმოადგენს დროით პარამეტრს, (2) ფუნქცია აღწერს ეგრეთწოდებულ **ჰარმონიულ რხევით პროცესს.** $|A|$რიცხვს უწოდებენ **რხევის ამპლიტუდას,** α რიცხვს **რხევის საწყის ფაზას,** (1) განტოლებას კი **ჰარმონიული რხევის განტოლებას.**

ადვილი მისახვედრია, რომ დროის ერთეულში რხევათა რიცხვი

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi},$$

ამ რიცხვს **რხევის სიხშირე** ეწოდება.

ვთქვათ (1) განტოლებისთვის მოცემული გვაქვს კოშის ამოცანის საწყისი პირობები:

$$x(0)=x_0, x'(0)=v_0. \tag{4}$$

(2) ზოგადი ამონახსნიდან მივიღებთ $C_1=x_0, C_2=\frac{v_0}{\omega}$. აქედან გამომდინარე, კერძო ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება (4) საწყის პირობებს იქნება:

$$x=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

ამ ფუნქციით აღწერილი რხევის ამპლიტუდის გამოსათვლელად უნდა ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$:\begin{cases} A\cos\alpha=x_0, \\ -A\sin\alpha=\frac{v_0}{\omega}. \end{cases}$$

ამ სისტემიდან მივიღებთ

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2},$$

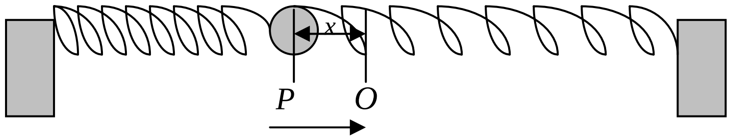
საიდანაც

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \qquad (5)$$

რაც შეეხება საწყის ფაზას

$$\alpha = \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}. \qquad (6)$$

მაგალითი 1. წერტილის რხევა F დრეკადი ძალის მოქმედებით. ვთქვათ m მასის მქონე P წერტილზე F ძალით მოქმედებს დრეკადი ზამბარა(ნახ.36).



ნახ. 36

ნიუტონის კანონისთანახმად, P წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $mx'' = F$. **ჰუკის კანონის** მიხედვით, დრეკადი ძალა პირდაპირპროპორციულია P წერტილის O წონასწორობის მდგომარეობიდან გადახრის სიდიდის და მიმართულია წერტილის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ $F = -kx$, სადაც $k > 0$.

ამგვარად, გვექნება განტოლება

$$mx'' + kx = 0. \qquad (7)$$

ეს განტოლება ჰარმონიული რხევის განტოლებაა სიხშირით $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

შესაბამისად კოშის ამოცანის ამონახსნი (7) განტოლებისათვის, $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ საწყისი პირობებით, იქნება:

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

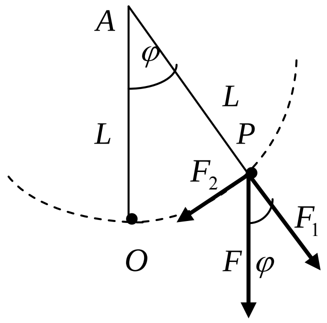
აქედან გამომდინარე ჰარმონიული რხევის ამპლიტუდა

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}.$$

როგორც ვხედავთ, P წერტილის რხევის სიხშირე ω დამოკიდებული არ არის საწყის პირობებზე, იგი დამოკიდებულია მხოლოდ წერტილის მასაზე და ზამბარის დრეკადობაზე. რაც შეეხება ამპლიტუდას და საწყის ფაზას, მათი გამოსათვლელი ფორმულებიდან გამომდინარე, ისინი არსებითად არიან დამოკიდებული საწყის პირობებზე.

მაგალითი. 2. მათემატიკური საქანის (ქანქარის) მცირე რხევები. მათემატიკური საქანი წარმოად- გენს m მასის P წერტილს, რომელიც სიმძიმის ძალის

მეშვეობით მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში მოთავსებულ წრეწირზე. აღნიშნული წრეწირის რადიუსს **საქანის სიგრძე** ეწოდება(ნახ. 37).



ნახ.37

საქანის მოძრაობის წრეწირზე შემოვიტანოთ საკუთხო კოორდინატი φ, წრეწირზე ყველაზე დაბლა მყოფი წერტილი აღვნიშნოთ O სიმბოლოთი, დადებითად ჩავთვალოთ მიმართულება მარცხნიდან მარჯვნივ.

P წერტილზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $F = mg$, რომელიც მიმართულია ვერტიკალურად ქვემოთ. აღნიშნული ძალა იყოფა მდგენელებად F_1, F_2. პირველი ძალა F_1 მიმართულია წრეწირის რადიუსის გასწვრივ და არ იწვევს მოძრაობას, იგი გაწონასწორებულია სხვა სახის ძალებით. მეორე F_2 ძალა მიმართულია წრეწირის მხების გასწვრივ და იწ-ვევს P წერტილის მოძრაობას. F_2 ძალის სიდიდე ტოლია $mg\sin\varphi$. ეს ძალა ეწინააღ- მდეგება φ კუთხის გაზრდას, ამიტომ საქანის მოძრაობის განტოლება უნდა იყოს:

$$mL\varphi'' = -mg\sin\varphi,$$

სადაც φ'' კუთხური აჩქარებაა, L-წრეწირის რადიუსი ანუ საქანის სიგრძე, $L\varphi''$-ხაზოვანი აჩქარება. თუ მიღებული განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ m მასაზე, მივიღებთ

$$L\varphi'' = -g\sin\varphi,$$

რომელსაც **მათემატიკური საქანის განტოლება**ეწოდება.

ამ განტოლების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, ამიტომ ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას,
როდესაც ადგილი აქვს ეგრეთწოდებულ მცირე რხევებს ანუ, როდესაც φ კუთხის სიდიდე იცვლება საკმაოდ მცირე ინტერვალში. როგორც ვიცით მცირე

კუთხეებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $\sin\varphi \approx \varphi$. ამ პირობის შედეგად მივიღებთ განტო-ლებას:

$$L\varphi'' + g\varphi = 0,$$

რომელსაც **მათემატიკური საქანის მცირე რხევების განტოლება** ეწოდება.

ცხადია, ეს განტოლება წარმოადგენს ჰარმონიული რხევის განტოლებას, მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\varphi = A(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \alpha)$$

ან

$$\varphi = C_1\cos\sqrt{\frac{g}{L}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{g}{L}}t.$$

როგორც წინა შემთხვევაში, შეიძლება განვიხილოთ კოშის ამოცანა შესაბამისი საწყისი პირობებით და ამოვხსნათ იგი.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ საქანის მცირე რხევების სიხშირე ω დამოკიდებულია მხოლოდ საქანის სიგრძეზე და მცირდება მისი გაზრდის შემთხვევაში. სიხშირისთვის გვაქვს ფორმულა:

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\ ,$$

სადაც $g \approx 9{,}8$ მ/წმ^2, L საქანის სიგრძე.

სავარჯიშოები მე-7 თავისათვის

I ამოხსენით განტოლებანი განცალებადი ცვლადებით:

1) $xy' - y = y^2$, 2) $y'tgx = y$, 3) $xyy' = 1 - x^2$, 4) $y'\sin x = y\ln x$; $y = 1$, როდესაც $x = \dfrac{\pi}{2}$.

II. ამოხსენით ერთგვაროვანი განტოლებანი:

1) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$, 2) $ydx + (2\sqrt{xy} - y)dy$, 3) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$,
4) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$; $y = 1$, როდესაც $x = 2$.

III. ამოხსენით პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი:

1) $y' - \dfrac{y}{x} = x$, 2) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^2$, 3) $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$, 4) $xy' + y - e^x = 0$; $y = b$, როდესაც $x = a$.

IV. ამოხსენით განტოლებანი სრულ დიფერენციალებში:

1) $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$, 2) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$, 3) $xdx + ydy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

V. ამოხსენით მეორე რიგის მუდმივ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებანი: 1) $y'' - 5y' + 6y = 0$, 2) $y'' - 9y = 0$, 3) $y'' + 2y' + y = 0$, 4) $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y = 5, y' = 8$, როდესაც $x = 0$.

VI. ამოხსენით მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით:

1) $y'' + y = tgx$, 2) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, 3) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$, 4) $y'' - 2y = 4x^2e^{x^2}$, 5) $y'' + y = ctgx$.

თავი 8
1.ხდომილობა. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე

ალბათობის თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა "ხდომილობა", რომელიც თავის მხრივ განიმარტება ცდის (ექსპერიმენტის) დახმარებით. (ცდა) ექსპერიმენტი ეწოდება პირობათა გარკვეული კომპლექსის განხორციელებას. მაგალითად: 1. ლილვის დიამეტრის გაზომვა; 2. დეტალის შემოწმება ვარგისიობაზე; 3.კამათლის გაგორება; 4. მონეტის აგდება და ა.შ. იგულისხმება, რომ:

1) ექსპერიმენტის ჩატარებამდე შესაძლებელია ყველა შესაძლო შედეგის მითითება;

2) ექსპერიმენტის ჩატარებამდე შეუძლებელია მისი შედეგის ცალსახად განსაზღვრა;

3) შესაძლებელია ექსპერიმენტის მრავალჯერადი განმეორება.

ექსპერიმენტი აღიწერება მისი ურთიერთგამომრიცხავი შედეგების ჩამონათვალით. ამ შედეგებს ელემენტარული ხდომილობები ეწოდება, ხოლო მათ სრულ ერთობლიობას – ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე, რომელსაც აღვნიშნავთ **Ω**-ასოთი, ხოლო ელემენტარულ ხდომილობას ω –ასოთი ინდექსით ან უინდექსოთ.

მაგალითი 1. ვთქვათ, ექსპერიმენტი ნიშნავს სიმეტრიული მონეტის აგდებას. ვაკვირდებით, რა „მოდის" დავარდნილ მონეტაზე. ამ ექსპერიმენტის შედეგები:„გერბის მოსვლა" (გ) და „საფასურის მოსვლა" (ს). ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება: **Ω**={გ,ს}.

მაგალითი 2. აგორებენ ერთ კამათელს. ცდას ექვსი შედეგი შეიძლება ჰქონდეს (ზედა წახნაგზე წერტილების რაოდენობა). ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება: **Ω**={1,2,3,4,5,6}.

მაგალითი 3. აგდებენ ორ სხვადასხვა მონეტას. აქ ოთხი შესაძლო შედეგია მოსალოდნელი (ვასხვავებთ, რომელ მონეტაზე რა მოვიდა). ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება: **Ω**={გგ,გს,სგ,სს}.

მაგალითი 4. მონეტას აგდებენ გერბის პირველ გამოჩენამდე. აქ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება:

Ω={გ,სგ,სსგ,სссგ,...}.

მაგალითი 5. მსროლელი ესვრის წრიული ფორმის სამიზნეს, რომელსაც ყოველი გასროლისას ახვედრებს. თუ წრის რადიუსია R და სამიზნის სიბრტყეში შემოღებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომლის სათავე სამიზნის ცენტრშია და ცდის თითოეულ შედეგს (სამიზნის განსაზღვრულ წერტილში

მოხვედრას) შევუსაბამებთ ამ წერტილის კოორდინატებს, მაშინ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება ყველა ისეთი რიცხვითი წყვილის ერთობლიობა, რომლებიც შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\Omega=\{(x,y)|x^2+y^2\leq R^2\}.$$

პირველ სამ მაგალითში ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე სასრულია, მეოთხე მაგალითში–თვლადი, ხოლო მეხუთე მაგალითში ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე არაა თვლადი.

ელემენტარული ხდომილობების რაიმე ერთობლიობას შედგენილ ხდომილობას, ან უბრალოდ ხდომილობას უწოდებენ. ამრიგად, ხდომილობა, ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლეა.

ვიტყვით, რომ ცდის შედეგად ხდება A ხდომილობა, თუ ცდას მოჰყვა ისეთი ელემენტარულ ხდომილობა, რომელიც A ხდომილობას ეკუთვნის.

განიხილება სამი სახის ხდომილობა: აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი.

განსაზღვრება. ხდომილობას, რომელსაც ყოველი ცდის შედეგად აქვს ადგილი აუცილებელი ხდომილობა ეწოდება. აუცილებელ ხდომილობას აღვნიშნავთ $\Omega-$ ასოთი.

განსაზღვრება. ხდომილობას, რომელსაც ადგილი არ შეიძლება ჰქონდეს არც ერთი ცდის შედეგად შეუძლებელი ხდომილობა ეწოდება. შეუძლებელ ხდომილობას აღვნიშნავთ $\theta-$ასოთი.

განსაზღვრება. ხდომილობას, რომელსაც ცდის შედეგად შეიძლება ჰქონდეს ან არ ჰქონდეს ადგილი შემთხვევითი ხდომილობა ეწოდება. შემთხვევით ხდომილობებს აღვნიშნავთ ლათინური ანბანის დიდი ასოებით, ინდექსით ან უინდექსოდ: A, B, C, D_4,K_5 და ა.შ.

2. მოქმედებები ხდომილობებზე

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ A ხდომილობა იწვევს B ხდომილობას , თუ B ხდომილობას ადგილი აქვს ყოველთვის, როცა ხდება A ხდომილობა. სიმბოლურად ჩავწერთ: A⊂B, იკითხება „A ხდომილობა იწვევს B ხდომილობას".

მაგალითი. ვთქვათ, A არის ხდომილობა, „შემთხვევით დასახელებული ნატურალური რიცხვი მარტივია" ხოლო B იყოს ხდომილობა „შემთხვევით დასახელებული ნატურალური რიცხვი კენტია". ცხადია, A⊂B, რადგანაც ნებისმიერი მარტივი რიცხვი აუცილებლად კენტიცაა.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ხდომილობა იწვევს აუცილებელ ხდომილობას, $A\subset\Omega$. ასევე, ნებისმიერი ხდომილობა იწვევს თავის თავს, $A\subset A$.

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ელემენტარული ხდომილობა და ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად.

განსაზღვრება. B ხდომილობას ვუწოდებთ ელემენტარულ ხდომილობას, თუ არ არსებობს ისეთი A ხდომილობა, რომელიც იწვევს B ხდომილობას და განსხვავებულია B-სგან.

განსაზღვრება. ექსპერიმენტთან დაკავშირებულ ყველა ელემენტარულ ხდომილებათა ერთობლიობას ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე ეწოდება და აღვნიშნავთ Ω –ასოთი, რომელსაც აუცილებელ ხდომილობასთან გავაიგივებთ.

განსაზღვრება. ორი A და B ხდომილობის გაერთიანება ეწოდება ისეთ C ხდომილობას რომელსაც ადგილი აქვს მაშინ, როდესაც ხდება ან A ხდომილობა ან B ხდომილიბა, ან ორთავე. იმ ფაქტს, რომ A ხდომილობის გაერთიანება B ხდომილობასთან არის C ხდომილობა სიმბოლურად აღვნიშნავთ: $A\cup B=C$.

მაგალითი 6. ვთქვათ, ექსპერიმენტი მდგომარეობს ყუთიდან ბურთულის ამოღებაში, რომელშიც 20 ერთნაირი ბურთულაა, გადანომრილი 1-დან 20-მდე. A-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბურთულის ნომერი ლუწი რიცხვია, ხოლო B-თი შემთხვევით ამოღებული ბურთულის ნომერი მეტია 9-ზე. ე.ი. $A=\{2;4;6;8;10;12;14;16;18;20\}$; $B=\{10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20\}$.

განმარტების თანახმად: $A\cup B=\{2;4;6;8;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20\}$.

ხდომილობების გაერთიანების ოპერაციას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ნებისმიერი A და B ხდომილობისათის $A\cup B= B\cup A$ (კომუტატიურობა);

2. ნებისმიერიA, B და C ხდომილობისათის $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (ასოციაციურობა);

3. თუ $A\subset B$ მაშინ $A\cup B= B$; $A\cup A = A$; $A\cup \emptyset = A$.

განსაზღვრება. ორი A და B ხდომილობის თანაკვეთა ეწოდება ისეთ C ხდომილობას, რომელსაც ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება A და B ხდომილობა ერთდროულად. იმ ფაქტს, რომ A ხდომილობის თანაკვეთა B ხდომილობასთან არის C ხდომილობა სიმბოლურად აღვნიშნავთ: $A\cap B=C$. განხილულ მე-6 მაგალითში განმარტების თანახმად:

$A\cap B=\{10;12;14;16;18;20\}$.

ხდომილობების კვეთას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ნებისმიერი A და B B B ხდომილობისათის $A \cap B = B \cap A$; (კომუტატიურობა);

2. ნებისმიერი A, B B B და C ხდომილობისათის$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; (ასოციაციურობა);

3. თუ $A \subset B$ მაშინ $A \cap B = A$; $A \cap A = A$; $A \cap \theta = \theta$.

ხდომილობათა გაერთიანებისა და კვეთის ოპერაციებს შორის კავშირი გამოისახება შემდეგი თანაფარდობით:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (დისტრიბუციულობა).

განსაზღვრება. ორი A და B ხდომილობის სხვაობა ეწოდება ისეთ C ხდომილობას, რომელსაც ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც ხდება A და არ ხდება B ხდომილობა. იმ ფაქტს, რომ A ხდომილობის სხვაობა B ხდომილოდასთან არის C ხდომილობა სიმბოლურად აღვნიშნავთ: $A-B=C$. განხილულ მე-6 მაგალითში განმარტების თანახმად:

$$A-B=\{2;4;6;8\};\ B-A=\{11;13;15;17;19\}.$$

განსაზღვრება. ორი A და B ხდომილობის სიმეტრიული სხვაობა ეწოდება ისეთ C ხდომილობას, რომელსაც ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება ან A ხდომილობა ან B ხდომილიბა, მაგრამ არა ორთავე ერთდროულად. იმ ფაქტს, რომ A ხდომილობის სიმეტრიული სხვაობა B ხდომილობასთან არის C ხდომილობა სიმბოლურად ავღნიშნავთ: $A\Delta B=C$. განხილულ მე-6 მაგალითში განმარტების თანახმად:

$$A\Delta B=\{2;4;6;8;11;13;15;17;19\}.$$

განსაზღვრება. A ხდომილობის უარყოფა ეწოდება $\Omega - A$ ხდომილობას და აღინიშნება $\bar{A}$ სიმბოლოთი: $\bar{A}=\Omega - A$. განხილულ მე-6 მაგალითში განმარტების თანახმად:

$$\bar{A}=\{1;3;5;7;9;11;13;15;17;19\};\quad \bar{B} = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}.$$

ხდომილობის უარყოფის უარყოფა თვით ეს ხდომილობაა, $\bar{\bar{A}}=A$.

ხდომილობათა გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციები შეიძლება განისაზღვროს მაშინაც როდესაც გვაქვს თვლადი რაოდენობის ხდომილობები: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots$ მაშინ

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = C$$

არის ხდომილობა, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც ხდება $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots$ ხდომილობებიდან ერთი მაინც;

ხოლო

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = C$$

არის ხდომილობა, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც ხდება ყოველი $A_1, A_2, \dots A_3, \dots$ ხდომილობა.

განსაზღვრება. ორ A და B ხდომილობას ეწოდება უთავსებადი ხდომილობები თუ მათი ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია, ე.ი. $A \cap B = \theta$.

განსაზღვრება. $.A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ხდომილობათა ერთობლიობას ეწოდება წყვილ წყვილად უთავსებადი ხდომილობები თუ ნებისმიერი ორი მათგანი უთავსებადი ხდომილობებია. $A_i \cap A_j = \theta$ თუ $i \neq j$ $i,j=1,2,3,\dots,n$.

განსაზღვრება. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ხდომილობათა ერთობლიობას ეწოდება ხდომილობათა სრული ჯგუფი, თუ ისინი წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია და მათი გაერთიანება აუცილებელი ხდომილობაა, ე.ი. შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ 2. $A_i \cap A_j = \theta$ თუ $i \neq j$ $i,j=1,2,3,\dots,n$.

მაგალითი. ამწყობმა საამქრომ მიიღო სამ სხვადასხვა მექანიკურ საამქროში დამზადებული ერთი დასახელების n დეტალი, მათ შორის n_1 დამზადებულია პირველ საამქროში, n_2 მეორე საამქროში, ხოლო დანარჩენი $n_3 = n - (n_1 + n_2)$ მესამე საამქროში.

H_1– იყოს ხდომილობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი დეტალი დამზადებულია პირველ საამქროში, H_2–ხდომილობა იმისა, რომ ეს დეტალი დამზადებულია მეორე საამქროში, H_3– დეტალი დამზადებულია მესამე საამქროში. ხდომილობები H_1, H_2, H_3 ქმნიან ხდომილობათა სრულ ჯგუფს, ცხადია:

$$H_1 \cap H_2 = \theta;\ H_1 \cap H_3 = \theta;\ H_2 \cap H_3 = \theta;\ H_1 + H_2 + H_3 = \Omega.$$

სავარჯიშო მაგალითები

1)A არის ხდომილობა–კამათელზე მოვიდა ლუწი რიცხვი, B არის ხდომილობა –კამათელზე მოვიდა 3-იანი, C არის ხდომილობა –კამათელზე მოვიდა 5-იანი. რას ნიშნავს ხდომილობები: $\bar{A}$?; $\bar{B}$?; $\bar{C}$?; $A \cup B \cup C$?; $A \cap B$? $B \cap \bar{C}$?

2) ხარატის მიერ დამზადებული დეტალი შეიძლება იყოს პირველი ხარისხის (ხდომიოლობა A), მეორე ხარისხის (ხდომილობა B), მესამე ხარისხის (ხდომილობა C) რაში მდგომარეობს ხდომილობები: $A \cup B$?;$A \cup B \cup C$?; $\overline{(B \cup C)}$? $\overline{(A \cup B)}$.

3) [0, 1] ინტერვალზე ალალბედზე ვირჩევთ წერტილს. A_n არის ხდომილობა– ალალბედზე არჩეული წერტილი ეკუთვნის [0, $\frac{n}{n+1}$[ინტერვალს, B_n არის ხდომილობა– ალალბედზე არჩეული წერტილი ეკუთვნის]0, $\frac{1}{n}$[ინტერვალს. რას ნიშნავს $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ და $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ ხდომილობები?

4) განსაზღვრეთ A და B ხდომილობები, თუ $A \cup B = \bar{A}$; $A \cap B = \bar{A}$.

5) იპოვეთ ყველა C ხდომილობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $A \cap C = A \cap B$.

3. ალბათობის აქსიომური განმარტება

დავუშვათ, **Ω** ნებისმიერი ნებისმიერი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეა როგორც ვიცით, ხდომილობა წარმოადგენს **Ω** სივრცის ქვესიმრავლეს. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ხდომილობათა F კლასი (ხდომილობათა ერთობლიობა).

განსაზღვრება. ხდომილობათა F კლასს ეწოდება ალგებრა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.შეუძლებელი და აუცილებელი ხდომილობები ეკუთვნის Fკლასს, ე. ი.

θ∈F;Ω∈F.

2. თუ ხდომილობა ეკუთვნის Fკლასს, მაშინ მისი უარყოფაც ეკუთვნის

Fკლასს, ე.ი. $(A \in F) \Longrightarrow (\bar{A} \in F)$.

3. თუ ხდომილობები A და B ეკუთვნიან Fკლასს, მაშინ მათი გაერთიანებაც ეკუთვნის F კლასს, ე. ი. $(A \in F,\ B \in F) \Rightarrow ((A \cup B) \in F)$.

განსაზღვრება. ხდომილობათა F კლასს ეწოდება σ ალგებრა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.შეუძლებელი და აუცილებელი ხდომილობები ეკუთვნის Fკლასს, ე. ი.

θ∈F;Ω∈F.

2. თუ ხდომილობა ეკუთვნის Fკლასს, მაშინ მისი უარყოფაც

ეკუთვნის Fკლასს, ე.ი. $(A \in F) \Rightarrow \bar{A} \in F$.

3. თუ ხდომილობები $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ეკუთვნიან Fკლასს, მაშინ მათი გაერთიანებაც და თანაკვეთაც ეკუთვნის F კლასს, ე.ი. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

განსაზღვრება. P რიცხვით ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია F $\sigma-$ ალგებრის ელემენტებისათვის ეწოდება ალბათობა, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ სამ აქსიომას:

1. არაუარყოფითობის აქსიომა. ნებისმიერი A ხომილობისათვის Fკლასიდან, $P(A) \geq 0$;

2.ნორმირების აქსიომა. აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა ერთის ტოლია, $P(\Omega)=1$;

3.თვლადი ადიტიურობის აქსიომა. თუ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n, \ldots$ წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ მათი გაერთიანების ალბათობა შესაბამისი ალბათობების ჯამის ტოლია

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

ალბათობის ზემომოყვანილი განსაზაღვრება ეკუთვნის გამოჩენილ რუს მათემატიკოსს ა. კოლმოგოროვს, რომლის საპატივცემულოდ მას კოლმოგოროვის აქსიომებს უწოდებენ.

ალბათობის აქსიომური განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი ძირითადი თვისებები:

თვისება1. შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლია, $P(\theta)=0$.

დამტკიცება: შეუძლებელი ხდომილობა წარმოვადგინოთ, როგორც თვლადი რაოდენობის შეუძლებელი ხდომილობების გაერთიანება:

$$\theta = \theta + \theta + \theta + \cdots + \theta + \cdots$$

მაშინ მესამე აქსიომს თანახმად:

$$P(\theta)=P(\theta)+P(\theta)+P(\theta)+\ldots+P(\theta)+\ldots \qquad (1)$$

პირველი აქსიომს თანახმად $P(\theta) \geq 0$, რომლის გათვალისწინებითაც (1) ტოლობას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $P(\theta)=0$.

თვისება 2. თუ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ სასრული რაოდენობის წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ მათი გაერთიანების ალბათობა შესაბამისი ალბათობების ჯამის ტოლია

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

დამტკიცება: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ხდომილობათა გაერთიანება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \theta \cup \theta \cup \dots \cup \theta \dots \qquad (2)$$

(2) ტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი ხდომილობები წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, თუ გავითვალისწინებთ მე-3 აქსიომას და პირველ შედეგს მივიღებთ:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \theta \cup \theta \cup \dots \cup \theta \dots)=$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\dots P(A_n)+P(\theta)+P(\vartheta)+..+P(\theta)+\dots.=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\dots P(A_n)$$

თვისება 3. თუ A ხდომილობა იწვევს B ხდომილობას, მაშინ A ხდომილობის ალბათობა ნაკლებია ან ტოლი B ხდომილობის ალბათობაზე $P(A) \leq PB)$ და P(B-A)=P(B)-P(A).

დამტკიცება: რადგან A იწვევს B- ს შეიძლება დავწეროთ: B=A+(B-A), ამასთანავე A და (B-A) ხდომილობები უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ მე-2 თვისების თანახმად

$$P(B)=P(A)+P(B-A) \qquad (3)$$

1-ლი აქსიომის თანახმად $P(B-A)\geq 0$ (3)-დან დავასკვნით:

$$P(A)\leq P(B); \qquad P(B-A)=P(B)-P(A).$$

თვისება 4. ორი ხდომილობის გაერთიანების ალბათობა ტოლია ამ ხდომილობების შესაბამისი ალბათობების ჯამს გამოკლებული მათი ერთდროულად მოხდენის ალბათობა:

$$P(A\cup B)= P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

დამტკიცება: ორი A და **B** ხდომილობების გაერთიანება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$A\cup B= (A-A\cap B)\cup(B-A\cap B)\cup(A\cap B) . \qquad (4)$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მე-4 ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი ხდომილობები უთავსებადი ხდმილობებია. მე-2 და მე-3 თვისების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$P(A\cup B)=P(A-A\cap B)+P(B-A\cap B)+P(A\cap B) = P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)+P(AB))=$$

$$= P(A)+P(B)-P(AB).$$

მე-4 თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ $P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$.

თვისება 5. საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა ტოლია ერთს გამოკლებული მოცემული ხდომილობის ალბათობა, ე.ი. $P(\bar{A})=1-P(A)$.

დამტკიცება: საწინააღმდეგო ხდომილობის განმარტების თანახმად: $\bar{A}=\Omega-A$, მაშინ მე-2 თვისების და ნორმირების აქსიომის თანახმად:

$$P(\bar{A})=P(\Omega-A)=P(\Omega)-P(A)=1-P(A).$$

განსაზღვრება. სამეულს $\{\Omega, F, P\}$ სადაც: Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა; F-σალგებრა; P-ალბათობა, ალბათური სივრცე ეწოდება.

4. ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება

დავუშვათ, ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შეიცავს სასრული რაოდენობის ელემენტარულ ხდომილობებს

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\dots,\omega_n\}.$$

ω_i ელემენტარულ ხდომილობას შევუსაბამოთ p_i რიცხვი, $i=1,2,3,\dots,n$, რომლებიც აკმაყოფილებენ შედეგ ორ პირობას:

1. $0\leq p_i\leq 1$,

2 $p_1+p_2+p_3+\dots+p_n=1$.

ცხადია, რომ ასეთი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ნებისმიერი ქვესიმრავლე წარმოადგენს ხდომილობას.

ვთქვათ, A ნებისმიერი ხდომილობაა Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრციდან რომელიც შეიცავს k ელემენტარულ ხდომილობას: $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\omega_{i_3},\dots,\omega_{i_k}\}$.

ქვემოთ მოცემულ განსაზღვრებას ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება ეწოდება.

განსაზღვრება. A ხდომილობის ალბათობა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P(A)=p_{i_1}+p_{i_2}+p_{i_3}+\dots+p_{i_k}.$$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული ალბათობა აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

1. ნებისმიერი A ხდომილობის ალბათობა არაუარყოფითი რიცხვია, $P(A)\geq 0$.

2. $P(\Omega)=1$, მართლაც, განსაზღვრების თანახმად, $P(\Omega)=p_1+p_2+p_3+\dots+p_n=1$.

3. თუ A და B უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ P(AUB)=P(A)+P(B). მართლაც, ვთქვათ: A={$\omega_{i_1},\omega_{1_2},\omega_{i_3},\ldots,\omega_{i_k}$}; B={$\omega_{j_1},\omega_{j_2},\omega_{j},\ldots,\omega_{j_m}$}. მაშინ AUB={$\omega_{i_1},\omega_{1_2},\omega_{i_3},\ldots,\omega_{i_k},\omega_{j_1},\omega_{j_2},\omega_{j_3},\ldots,\omega_{j_m}$}.

განსაზღვრების თანახმად,

P(AUB)=p_{i_1}+p_{i_2}+$p_{i_3}+\cdots+p_{i_k}$+p_{j_1}+p_{j_2}+$p_{j_3}+\cdots+p_{j_m}$=**P(A)+P(B).**

ზემოთ ნაჩვენები სამი პირობის შესრულებით ფაქტიურად შევამოწმეთ, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული ალბათობა აკმაყოფილებს კოლმოგოროვის სამივე აქსიომას. აქედან გამომდინარე, ადგილი ექნება აქსიომებიდან გამომდინარე ძირითად შედეგებს.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ელემენტარულ ხდომილობათა ალბათობები ტოლია ანუ შემთხვევითი ექსპერიმენტის ყველა შედეგი ერთნაირადაა მოსალოდნელი, ე.ი. $p_1=p_2=p_3=\cdots=p_n$, (ამ შემთხვევას კლასიკური სქემა ეწოდება). მაშინ მე-2 თვისების თანახმად:

$$p_1=p_2=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}\ .$$

თუ Aხდომილობა შეიცავს k რაოდენობის ელემენტარულ ხდომილობას მაშინ P(A) $=\frac{k}{n}$. ე.ი. ხდომილობის ალბათობა ტოლია მისი ხელშემწყობ შედეგების რაოდენობა შეფარდებული ყველა შესაძლო შედეგების რაოდენობასთან.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე **Ω** შეიცავს თვლადი რაოდენობის ელემენტარულ ხდომილობებს:

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n,\ldots\}$.

ასეთი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ნებისმიერი ქვესიმრავლე A წარმოადგენს ხდომილობას, რომელიც შეიძლება შეიცავდეს თვლადი რაოდენობის ელემენტებს:

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{1_2},\omega_{i_3},\ldots,\omega_{i_k},\ldots\}.$$

ω_i ელემენტარულ ხდომილობას შევუსაბამოთ p_i რიცხვი, i=1,2,3,…,n,… რომლებიც აკმაყოფილებენ შედეგ ორ პირობას:

1. $0\le p_i\le 1$,
2. $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n+\cdots=1$.

A ხდომილობის ალბათობა განვსაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\mathbf{P(A)}=\sum_{\omega_i\in A}p_i.$$

სასრული ელემენტარული ხდომილობათა სივრცისათვის ზემოთ ნაჩვენებ თვისებებს დაემატება ე.წ. თვლადი ადიტიურობის თვისება: თუ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots$ წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$.

მაგალითი. აგდებენ ორ გარჩევად კამათელს ან ორჯერ აგდებენ ერთ კამათელს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: 1) მოსულ ქულათა ჯამი ტოლია 8-ის; 2) მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია ან ტოლი 5-ზე. 3) მოსულ ქულათა ჯამი მეტია 10-ზე.

ამოხსნა. i იყოს პირველ კამათელზე მოსული ქულათა რიცხვი, ხოლო j მეორე კამათელზე მოსულ ქულათა რიცხვი. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება:

Ω={

$(i,j)|i = 1,2,\dots,6; j = 1,2,\dots,6\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5), (1,6),(2,1), (2,2), (2,3),$(2, 4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3), (5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

A-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ჯამი ტოლია 8-ის; B-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია ან ტოლი 5-ზე; C-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ჯამი მეტია 10-ზე, მაშინ A={$(i+j) = 8| i = 1,2,\dots,6; j = 1,2,\dots,6\}$={(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)};

B={$(i+j) \le 5| i = 1,2,\dots,6; j = 1,2,\dots,6\}$={(1,1),(1,2),(1,3)(1,4),(2,1)(2,2),(2,3)(3,1),(3,2),(4,1) };

C={$(i+j) > 10| i = 1,2,\dots,6; j = 1,2,\dots,6\}$={(5,6),(6,5),(6,6)}.

გვაქვს კლასიკური სქემა. p_{ij}-თი აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ პირველ კამათელზე მოვიდა i ქულა, ხოლო მეორეზე j ქულა ($i = 1,2,\dots,6; j = 1,2,\dots,6$). $p_{ij} = \frac{1}{36}$.

$P(A) = p_{2\,6} + p_{3\,5} + p_{4\,4} + p_{5\,3} + p_{6\,2} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36};$ ანალოგიურად მივიღებთ: $P(B) = \frac{10}{36};\ P(C) = \frac{3}{36}.$

მაგალითი. სიმეტრიულ მონეტას აგდებენ გერბის პირველ გამოჩენამდე. 1) ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გერბი პირველად მოვა ლუწნომრიან ცდაში.

ამოხსნა. აქ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება:

Ω={(გ),(ს,გ),(ს,ს,გ),(ს,ს,ს,გ),...}.

A იყოს ხდომილობა იმისა, რომ გერბი პირველად მოვა ლუწნომრიან ცდაში, მაშინ

A={(ს,გ),(ს,ს,ს,გ),(ს,ს,ს,ს,ს,გ),...}.

ω_k აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ k-ურ ცდაში მოვიდა გერბი, ხოლო წინა ყველა $(k-1)$ ცდაში საფასური (ω_1=(გ), ω_2=(ს,გ), ω_3=(ს,ს,გ),...). მიღებული აღნიშვნით $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\dots\}$, A={$\omega_2,\omega_4,\omega_6,\dots$}. ω_k ელემენტარულ ხდომილობას შევუსაბამოთ $p_k=P(\omega_k)=\frac{1}{2^k}$ ალბათობა. ადვილად მოწმდება ნორმირების პირობა, მართლაც

$$P(\Omega)=p_1+p_2+p_3+\dots+p_n+\dots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულა, თუ b_1 პირველი წევრია და $|q|<1$, მაშინ

$$b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3+\dots=\frac{b_1}{1-q}\ .$$

საძიებელი A ხდომილობის ალბათობა

$$P(A)=p_2+p_4+p_6+\dots=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\ .$$

სავარჯიშო მაგალითები

1) ყუთში, ერთმანეთისაგან მხოლოდ ფერით განსხვავებული, 10 თეთრი და 20 შავი ბურთულაა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერის იქნება?

2) ალალბედზე ასახელებენ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება 24-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს რიცხვი წარმოადგენს 24-ის გამყოფს?

3) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე დასახელებული ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი 12 იქნება?

4) სასტუმროში 15 სტუმარია, მათგან 10 ტურისტია, 5 ბიზნესმენი. ალალბედზე ირჩევენ 3 სტუმარს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამივე ტურისტია?

5) k რაოდენობის სტუმარი ალალბედზე ნაწილდება სასტუმროს n რაოდენობის ნომერში. ყოველ ნომერში შეიძლება მოთავსდეს $1,2,\dots,k$ რაოდენობის სტუმარი. რას უდრია ალბათობა იმისა, რომ პირველ ნომერში მოთავსდება k_1 რაოდენობის სტუმარი, მეორეში k_2-რაოდენობის და ა. შ. n-ურ ნომერში k_n სტუმარი ($k_1+k_2+\dots+k_n$=n)?

6) 12 სტუდენტს შორის 8 ფრიადოსანია. ამ ჯგუფიდან ალალბედზე აირჩიეს 9 სტუდენტი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 5 ფრიადოსანია.

7) ხარატის მიერ დამზადებული სტანდარტული დეტალების ფარდობითი სიხშირე მდგრადია და ყოველთვის 0,9-ის ტოლია. რამდენი დეტალი დაამზადა ხარატმა ცვლის განმავლობაში, თუ არასტანდარტული დეტალების რაოდენობა 50-ის ტოლი აღმოჩნდა?

8) ხარისხის სახელმწიფო ინსპექტორი სასურსათო მაღაზიაში ამოწმებს რძის პროდუქტებს. ცნობილია, რომ რძის 20 პაკეტიდან ორი ამჟავებულია. ინსპექტორი შემთხვევით ირჩევს 2 პაკეტს 20-დან. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის:

ა) არც ერთი არ იქნება ამჟავებული; ბ) მხოლოდ ერთი იქნება ამჟავებული; გ) ორივე ამჟავებული იქნება.

5. ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრება

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრებიდან მოითხოვება, რომ **Ω** ელემენტარული ხდომილობათა სივრცე შეიცავდეს სასრული ან თვლადი რაოდენობის ელემენტებს. პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი სახის ექსპერიმენტები რომელთა შესაბამისი ელემენტარული ხდომილობათა სივრცე არათვლადია ასეთ შემთხვევაში ხდომილობები, რომელთათვისაც არსებობს ალბათობები, ეკუთვნიან გარკვეულ კლასს (ეს კლასი, როგორც ალბათობის აქსიომური განმარტებისას აღვნიშნეთ არის $\sigma-$ალგებრა) საილუსტრაციოდ ჩვენ შემოვიფარგლებით ე.წ. ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრებით, სადაც **Ω** ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცედ განიხილება რაიმე გეომეტრიული ობიექტი: წრფის სასრული მონაკვეთი; წრეწირი; რკალი; წრე; სიბრტყის სასრული ფართობის მქონე ნაწილი; სასრული მოცულობის სივრცული სხეული და ა.შ.

განსაზღვრება. დავუშვათ, **Ω** ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე წარმოადგენს რაიმე გეომეტრიულ ობიექტს: წრფის სასრული მონაკვეთი; წრეწირი; სიბრტყის სასრული ფართობის მქონე ნაწილი, სასრული მოცულობის მქონე სივრცული სხეული, და ა.შ. **A** ხდომილობის ალბათობა ვუწოდოთ წილადს

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|},$$

სადაც $|A|$ და $|\Omega|$ წარმოდგენს A ხდომილობისა და **Ω** სივრცის ზომას, შესაბამისად.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული ალბათობა აკმაყოფილებს კოლმოგოროვის სამივე აქსიომას.

მაგალითი. კვადრატში, რომლის გვერდი 10 სანტიმეტრია ჩახაზულია წრე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კვადრატში შემთხვევით აღებული წერტილი წრეში მოხვდება.

ამოხსნა. **Ω** ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა კვადრატის წერტილები, რომლის ფართობია 100 კვ.სანტიმეტრი. A ხდომილობას, რომლის ალბათობასაც ვეძებთ, არის წრის, წერტილები რომლის ფართობია 25π. ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრების თანახმად:

$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{25\pi}{100}=\frac{\pi}{4}$.

სავარჯიშო მაგალითები.

1) R-რადიუსიან წრეში მოთავსებულია r-რადიუსიანი მცირე წრე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დიდ წრეში ალალბედზე დასმული წერტილი მცირე წრეშიც მოხვდება.

2) 1 მეტრის სიგანისა და 2 მეტრის სიგრძის მაგიდაზე მოთავსებულია 10 სმ სიგანისა და 20 სმ სიგრძის ფურცელი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მაგიდაზე ალალბედზე დასმული წერტილი ფურცელზე არ მოხვდება.

3) R-რადიუსიან წრეში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში ალალბედზე დასმული წერტილი მოხვდება სამკუთხედშიც.

4) ქარიშხალმა დააზიანა სატელეფონო ხაზი 160-ე და 290-ე კილომეტრებს შორის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დაზიანება მოხდა ხაზის მე-200-240 კილომეტრებს შორის.

6.პირობითი ალბათობა. ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა.

ვთქვათ, {Ω;F;P} ალბათური სივრცეა, ხოლო A და B ნებისმიერი ხდომილობებია F კლასიდან ისეთი, რომ P(B)>0. დავსვათ შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ A ხდომილობის ალბათობა თუ ცნობილია, რომ B ხდომილობას ჰქონდა ადგილი? ასეთი სახის ალბათობას ეწოდება A ხდომილობის ალბათობა B პირობით და აღინიშნება $P(A|B)$ სიმბოლოთი და იკითხება შემდეგნაირად: A ხდომილობის ალბათობა B პირობით.

მაგალითი. ვთქვათ, ცნობილია, რომ ერთი კამათლის გაგორებისას მოვიდა ლუწი ციფრი და გვაინტერესებს ალბათობა იმისა, რომ ეს ციფრი არის ორიანი. ამ ალბათობის საპოვნელად ვისარგებლოთ ალბათობის კლასიკური

განსაზღვრებით, ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობა არის 3, ხოლო ხელშემწყობ შემთხვევათა რაოდენობა 1, ე.ი. საძიებელი ალბათობა იქნება $\frac{1}{3}$ და არა $\frac{1}{6}$ როგორც იქნებოდა იქნებოდა იმ შემთხვევაში, არავითარი წინა პირობა, რომ არ ყოფილიყო ცნობილი. მაშასადამე, საზოგადოდ დავასკვნით, რომ $P(A) \neq P(A|B)$.

განსაზღვრება. A ხდომილობის ალბათობა B პირობით ეწოდება წილადს რომლის მრიცხველია A და B ხდომილობების ერთდროულად მოხდენის ალბათობა მნიშვნელი კი B პირობის ალბათობა ე.ი.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ თუ } P(B) > 0 \qquad (1)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ პირობითი ალბათობა აკმაყოფილებს ალბათობის სამივე აქსიომას.

პირობითი ალბათობის განსაზღვრების თანახმად:

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}, \text{ თუ } P(A) > 0 \qquad (2)$$

რადგან AB=BA, (1) და (2)-დან დავწერთ:

$$P(AB)=P(BA)=P(B)P(A|B)=P(B)P(B|A) \qquad (3)$$

(3) წარმოადგენს ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელ ფორმულას ორი თანამამრავლისათვის, რომელიც შეიძლება განზოგადდეს თანამამრავლთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის:

$$P(A_1A_2A_3 \dots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\dots P(A_n|A_{n-1}A_{n-2}\dots A_1). \qquad (4)$$

მაგალითი. სტუდენტმა პროგრამით გათვალისწინებული 50 საკითხიდან მოამზადა 40. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტს შეხვდება ბილეთი, რომლის სამივე საკითხი მომზადებული აქვს?

ამოხსნა. A_1 აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ სტუდენტს შეხვდა ბილეთი რომლის პირველი საკითხი მომზადებული აქვს, A_2 აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ სტუდენტს შეხვდა ბილეთი, რომლის მეორე საკითხი მომზადებული აქვს, A_3 აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ სტუდენტს შეხვდა ბილეთი, რომლის მესამე საკითხი მომზადებული აქვს. ჩვენ გვაინტერესებს $A_1A_2A_3$ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა. (4) ტოლობის თანახმად:

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)=\frac{40}{50}\frac{39}{49}\frac{38}{48}=\frac{147}{490}.$$

სავარჯიშო მაგალითები

1) ყუთში 20 თეთრი და 15 შავი ბურთულაა. რიგრიგობით იღებენ თითო ბურთულას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მეორე ბურთულა თეთრი იქნება თუ ცნობილია, რომ პირველი იყო შავი?

2) ამწყობმა საამქრომ მიიღო 100 დეტალი, რომელთაგან 5 არასტანდარტულია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული სამი დეტალიდან სამივე არასტანდარტული იქნება?

3) 25-კაციან ჯგუფში 7 ოთხოსანი და 3 ხუთოსანი სტუდენტია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე გამოძახებული სამი სტუდენტიდან: ა) სამივე ხუთოსანი იქნება; ბ) სამივე ოთხოსანი იქნება; გ) არც ერთი არ იქნება ოთხოსანი ან ხუთოსანი?

ხდომილობათა დამოუკიდებლობა

განსაზღვრება. ორ A და B ხდომილობას ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ მათი ერთდროულად მოხდენის ალბათობა შესაბამისი ალბათობების ნამრავლის ტოლია:

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (1)$$

დაუშვათ $P(A)>0, P(B)>0$, პირობითი ალბათობის განმარტების თანახმად:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad (2)$$

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}. \qquad (3)$$

ვთქვათ, A და B დამოკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ თუ გავითვალისწინებთ (1) ტოლობას (2) და (3) ტოლობებში მივიღებთ:

$$P(A|B)=P(A), \quad P(B|A)=P(B),$$

ანუ, თუ ხდომილობები დამოუკიდებლებია, მაშინ ერთი ხდომილობის მოხდენა არ ცვლის მეორის მოხდენის ალბათობას.

განსაზღვრება. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ხდომილობებს ეწოდება წყვილ – წყვილად დამოუკიდებელი, თუ ნებისმიერი i და k-სათვის $i \le n, k \le n$, $i \ne k$,

$$P(A_iA_k)=P(A_i)P(A_k). \qquad (4)$$

განსაზღვრება. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ხდომილობებს ეწოდება დამოუკიდებელი ერთობლიობაში, თუ ნებისმიერი k ხდომილობისათვის $k \le n$, მათი ერთდროულად მოხდენის ალბათობა შესაბამისი ალბათობების ნამრავლის ტოლია:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}\dots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})P(A_{i_3})\dots P(A_{i_k}). \qquad (5)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ხდომილობები დამოუკიდებლებია ერთობლობაში, მაშინ ისინი წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლებიცაა. მართლაც (5) ტოლობაში, როცა k=2,

მივიღებთ (4) ტოლობას. მაგრამ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობიდან არ გამომდინარეობს დამოუკიდებლობა ერთობლიობაში. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი. (ბერნშტეინი) ერთგვაროვანი მასალისგან დამზადებული ტეტრაედრის სამ წახნაგზე აწერია ციფრები 1, 2, და 3, ხოლო მეოთხე წახნაგზე ეს სამივე ციფრი ერთად. A_k იყოს ხდომილობა იმისა, რომ ზემოთ ასროლილი ტეტრაედრი დაეცა წახნაგზე, რომელზეც აწერია ციფრი k (k=1, 2, 3).

ვაჩვენოთ, რომ ეს ხდომილობები წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი ხდომილობებია. ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების თანახმად:

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2}\ ;\quad P(A_1A_2)=\frac{1}{4};\ P(A_1A_3)=\frac{1}{4};\ P(A_2A_3)=\frac{1}{4}\ .$$

და რადგანაც სრულდება პირობები:

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2);\ \ P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3);\ \ P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$$

ხდომილობები A_1, A_2, A_3 წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი ხდომილობებია.

ახლა გამოვიკვლიოთ ამ ხდომილობების ერთობლიობაში დამოუკიდებლობა. რადგან $p(A_1A_2A_3)=\frac{1}{4}$, ხოლო $P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8}$, ამიტომ

$$P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

ე.ი. A_1, A_2, A_3 ხდომილობები ერთობლიობაში დამოკიდებელი ხდომილობებია, მიუხედავად მათი წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობისა.

სავარჯიშო მაგალითები

1) ალბათობა იმისა, რომ ავტომობილი შეკეთების გარეშე გაივლის 100000 კმ-ს ყოველთვის მუდმივია და უდრის 0,8. რას უდრია ალბათობა იმისა, რომ სამი მიღებული ავტომანქანიდან სამივე შეკეთების გარეშე გაივლის 100000 კმ-ს?

2) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ოთხი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას ოთხივეზე ერთი და იგივე რიცხვი მოვა?

3) ერთი მსროლელისთვის მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0,8, მეორისათის-0,9. რას უდრია ალბათობა იმისა, რომ ერთდროულად გასროლისას ერთი მოახვედრებს მიზანში, მეორე კი ააცდენს?

სრული ალბათობის ფორმულა. ბაიესის ფორმულა

ვთქვათ, **{Ω;F;P}** ალბათური სივრცეა, ხოლო

$H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$

ხდომილობათა სრული ჯგუფია, მაშინ ნებისმიერი A ხდომილობის ალბათობა F კლასიდან გამოითვლება ფორმულით

P(A)=$P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)+\ldots+P(H_n)P(A|H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A|H_i)$.

(1)

მართლაც, რადგან $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ ხდომილობათა სრული ჯგუფია

$$H_1 + H_2 + H_3 + \cdots + H_n = \Omega \qquad (2)$$

(2) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ A ხდომილობაზე და გავითვალისწინოთ, რომ AΩ=A, მივიღებთ

$$A = AH_1 + AH_2 + AH_3 + \cdots + AH_n\ . \qquad (3)$$

რადგან $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ ხდომილობები წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, წყვილ-წყვილად უთავსებადი იქნება $AH_1, AH_2, AH_3, \ldots, AH_n$ ხდომილობებიც. თუ (3) ტოლობაში გამოვიყენებთ სასრული ადიტიურობის და ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელ ფორმულას, მივიღებთ

$$P(A)=P(AH_1) + P(AH_2) + P(AH_3) + \cdots + P(AH_n)=$$

$$=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+ \qquad P(H_3)P(A|H_3)+\ldots+P(H_n)P(A|H_n)$$

(4)

(4) ფორმულას სრული ალბათობის ფორმულა ეწოდება.

მაგალითი. ამწყობმა საამქრომ მიიღო სამ სხვადასხვა მექანიკურ საამქროში დამზადებული ერთი დასახელების 2000 დეტალი, მათ შორის 600 დამზადებულია პირველ საამქროში, 650 – მეორე საამქროში, ხოლო 750 –მესამე საამქროში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი არასტანდარტული აღმოჩნდება, თუ ცნობილია, რომ პირველი საამქრო საშუალოდ 95% სტანდარტულ პროდუქციას უშვებს, მეორე საამქრო – 99%-ს, ხოლო მესამე საამქრო – 98%-ს?

ამოხსნა. A იყოს ხდომილობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი არასტანდარტული აღმოჩნდება. H_1–ხდომილობა იმისა, რომ ეს დეტალი დამზადებულია პირველ საამქროში, H_2–ხდომილობა იმისა, რომ ეს დეტალი დამზადებულია მეორე საამქროში, H_3– დეტალი დამზადებულია მესამე საამქროში. ხდომილობები H_1, H_2, H_3 ქმნიან ხდომილობათა სრულ ჯგუფს, $H_1 \cap H_2 = \emptyset;\ H_1 \cap H_3 = \emptyset;\ H_2 \cap H_3 = \emptyset;\ H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega.$ ცხადია

$$A = AH_1 + AH_2 + AH_3.$$

სრული ალბათობის ფორმულის თანხმად

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)$$

$P(H_1)$, $P(H_2)$ და $P(H_3)$ გამოითვლება ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების გამოყენებით:

$$P(H_1)=\frac{600}{2000}=0,3;\quad P(H_2)=\frac{650}{2000}=0,325;\quad P(H_3)=\frac{750}{2000}=0,375;$$

$$P(A|H_1)=1-0,95=0,005;\ P(A|H_2)=1-0,99=0,01;\ P(A|H_3)=1-0,98=0.02.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$P(A)=0,3.0,05+0,325.0,01+0,375.0,02=0,02575.$$

სრული ალბათობის ფორმულაში შემავალ $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ ხდომილობებს ჰიპოთეზებს უწოდებენ. (4) ფორმულით ნებისმიერი A ხდომილობის ალბათობას ვითვლით ჰიპოთეზათა ცნობილი ალბათობებისა და ხდომილობის პირობითი ალბათობების საშუალებით. პრაქტიკაში ხშირად საჭირო ხდება შებრუნებული ამოცანის გადაწყვეტა. კერძოდ მოცემულია ჰიპოთეზათა $P(H_1)$, $P(H_2)$,..., $P(H_n)$ ალბათობები და გვაინტერესებს, თუ როგორ შეიცვლებიან ისინი, თუ ცნობილია, რომ A ხდომილობა მოხდა. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ H_i ხდომილობის ალბათობა A პირობით. პირობითი ალბათობის და ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის განმარტების თანახმად:

$$P(H_i|A)=\frac{P(AH_i)}{P(A)}=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$$

თუ უკანასკნელში გავითვალისწინებთ სრული ალბათობის ფორმულას მივიღებთ:

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)} \qquad (5)$$

(5) ფორმულა წარმოადგენს ბაიესის ფორმულას, რომელსაც ჰიპოთეზათა ალბათობის ფორმულასაც უწოდებენ. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\sum_{i=1}^{n}P(H_i|A)=1.$$

მაგალითი. წინა მაგალითის პირობებში, დავუშვათ, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი აღმოჩნდა არასტანდარტული და გვაინტერესებს, თუ როგორი ალბათობით შეიძლება მივაკუთვნოთ ეს დეტალი თითოეულ საამქროს.

ამოხსნა. უნდა ვიპოვოთ $P(H_i|A)$ (i=1,2,3).

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{0,3.0,05}{0,02575}=\frac{60}{103},$$

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{0,325.0,01}{0,02575}=\frac{13}{103},$$

$$P(H_3|A)=\frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)}=\frac{0,375.0,02}{0,02575}=\frac{30}{103}.$$

სავარჯიშო მაგალითები

1) ერთ ყუთში მოთავსებულია პირველი ხარატის მიერ დამზადებული 100 დეტალი, მეორე ხარატის მიერ დამზადებული 80 დეტალი, მესამე ხარატის მიერ დამზადებული 120 დეტალი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ალალბედზე ამოღებული დეტალი სტანდარტული იქნება, თუ პირველი ხარატი საშუალოდ 95% სტანდარტულ დეტალს ამზადებს, მეორე ხარატი– 98%-ს, მესამე კი– 90%-ს.

2) საწყობში მოიტანეს ერთი დასახელების 1000 დეტალი, მათ შორის 300 დამზადებულია პირველ საამქროში, 200– მეორე საამქროში, ხოლო 500–მესამე საამქროში. ცნობილია, რომ პირველ საამქროში მზადდება საშუალოდ 95% სტანდარტული დეტალი, მეორეში–90%, მესამეში კი–85%. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული დეტალი სტანდარტული იქნება.

3) ამწყობი საამქროსათვის სამაგრს ამზადებს სამი ავტომატი, პირველი იძლევა საჭირო სამაგრების 25%-ს, მეორე–35%-ს, მესამე კი–40%-ს. პირველი ავტომატი საშუალოდ იძლევა 0,1% წუნს, მეორე–0,3%, მესამე კი–0,2%-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამწყობი საამქრო მიიღებს წუნდებულ სამაგრს და ალბათობა იმისა, თუ სამაგრი წუნდებული აღმოჩნდა, ის პირველი საამქროს მიერაა დამზადებული.

4) ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანს დააზიანებს არის 0,6. ხოლო მეორისათვის -0,7. ორივე მსროლელმა ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად გაისროლა, რის შედეგაც სამიზნე დაზიანდა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიზანი პირველმა მსროლელმა დააზიანა?

5) გზაზე, სადაც ბენზინგასამართი სადგურია, გამოვლილ სატვირთო ავტომობილთა რიცხვი ისე შეეფარდება მსუბუქ ავტომობილთა რიცხვს, როგორც 2/3. ალბათობა იმისა, რომ გამვლელი ავტომობილი ბენზინით გაიმართება, სატვირთო ავტომობილისთვის არის 0,1, ხოლო მსუბუქი ავტომობილისათვის 0,2. გასამართ სადგურთან მივიდა ავტომანქანა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ავტომანქანა სატვირთოა?

6) პირველ კურსელთა 60% ვაჟია. ვაჟების 80%-ს და გოგონების 75%-ს აქვს ფეხბურთის აბონემენტი. დამლაგებელმა პირველ კურსელთა აუდიტორიაში იპოვა აბონემენტი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს აბონემენტი ვაჟისაა?

7) ჯგუფში 20 სტუდენტია, რომელთა შორის 4 ხუთოსანია, 10 ოთხოსანი და 6 სამოსანი. ალბათობა იმისა, რომ დაფასთან გამოძახებული სტუდენტი ამოცანას ამოხსნის ხუთოსანისთვის 0,9-ის ტოლია, ოთხოსანისათვის –0,7-ის, სამოსანისათვის კი–0,5-ის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ: ა) დაფასთან

ალალბედზე გამოძახებული სტუდენტი ამოცანას ამოხსნის; ბ) დაფასთან ალალბედზე გამოძახებული ორივე სტუდენტი ამოცანას ამოხსნის.

8) ავადმყოფი გრძნობს ძლიერ ტკივილებს გულის არეში, რაც სტატისტიკურად 50%-ის შემთხვევაში შეიძლება გამოიწვიოს K დაავადებამ, 30%-ის შემთხვევაში L დაავადებამ, ხოლო 20%-ის შემთხვევაში M დაავადებამ. უბნის ექიმთან მკურნალობის შემთხვევაში K დავადების განკურნების ალბათობა 0,7-ის ტოლია, L-ისა–0,8-ის, ხოლო M –ისა კი –0,9-ის. ავადმყოფი უბნის ექიმმა განკურნა, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ავადმყოფს ჰქონდა K დავადება?

8 დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა. ბერნულის სქემა

ვთქვათ, ვატარებთ რაიმე ცდას, რომლის განმეორებაც შეიძლება მრავალჯერ და ვაკვირდებით A ხდომილობის მოხდენის ფაქტს. ვიტყვით, რომ ადგილი აქვს წარმატებას, თუ A ხდომილობა მოხდა მოცემულ ცდაში, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, ადგილი აქვს მარცხს.

მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტისას საინტერესოა არა რომელიმე კონკრეტული ცდის შედეგი, არამედ წარმატებათა საერთო რაოდენობა ცდათა გარკვეულ სერიაში. მაგალითად, თუ მსროლელი ისვრის მიზანში 50-ჯერ საინტერესოა არა რომელიმე კონკრეტული ცდის შედეგი, არამედ ის თუ რამდენჯერ დააზიანა სამიზნე.

განსაზღვრება. ცდათა ისეთ მიმდევრობას, რომლის ნებისმიერი ცდის შედეგი გავლენას არ ახდენს მომდევნო ცდების შესაძლო შედეგთა ალბათობებზე, დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა ეწოდება.

ცდას, რომელშიც ვაკვირდებით A ხდომილობის მოხდენის ან არმოხდენის ფაქტს ორშედეგიანი, ან ბინარული ცდა ეწოდება. A ხდომილობის მოხდენის (წარმატების) ალბათობა აღვნიშნოთ p –თი, ხოლო არმოხდენის (მარცხის) q-Ti: $P(A)=p$; $P(\bar{A})=q$; $p+q=1$.

განსაზღვრება. ორშედეგიან დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობას, წარმატების მუდმივი ალბათობით, ბერნულის სქემა ეწოდება.

დავუშვათ ვატარებთ n დამოუკიდებელ ცდას, k-თი აღვნიშნოთ წარმატებათა რიცხვი n დამოუკიდებელ ცდაში, ხოლო $P_n(k)$-თი ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში ადგილი ექნება k წარმატებას.

მაგალითი. მიზანში ისვრიან სამჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება: ა) არც ერთხელ, ბ) ერთჯერ, გ) ორჯერ, დ) სამჯერ? თუ მიზანში მოხვედრის ალბათობა ყოველ ცდაში ტოლია 0,7.

ამოხსნა. A_i-ურით აღვნიშნოთ i-ურ ცდაში მიზანში მოხვედრის (წარმატების) ხდომილობა, მაშინ $\bar{A}_i$ იქნება i-ურ ცდაში აცილების (მარცხის) ხდომილობა. ავაგოთ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე

$$\Omega=\{(A_1A_2A_3); (A_1A_2\bar{A}_3); (A_1\bar{A}_2A_3); (\bar{A}_1A_2A_3); (A_1\bar{A}_2\bar{A}_3);(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3); (\bar{A}_1\bar{A}_2A_3);(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\}.$$

B_k-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ წარმატებას ადგილი ჰქონდა k-ჯერ:

$$B_0=(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3);\ B_1=(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3);$$

$$B_2=(A_1A_2\bar{A}_3)+(A_1\bar{A}_2A_3)+(\bar{A}_1A_2A_3);\ B_3=(A_1A_2A_3).$$

რადგანაც A_1, A_2, A_3 დამოუკიდებელი ხდომილობებია, დამოუკიდებელი იქნება $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ ხდომილობებიც. თუ გამოვიყენებთ დამოუკიდებელი ხდომილობების ნამრავლის და უთავსებადი ხდომილობათა ჯამის ალბათობების გამოსათვლელ ფორმულებს, მივიღებთ:

$P_3(0)=P(B_0)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=0{,}3.0{,}3.0{,}3=0{,}027;$

$P_3(1)=P(B_1)=P((A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3))=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+$

$+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=0{,}7.0{,}3.0{,}3+0{,}3.0{,}7.0{,}3+0{,}3.0{,}3.0{,}7=0{,}189;$

$P_3(2)=P(B_2)=P((A_1A_2\bar{A}_3)+(A_1\bar{A}_2A_3)+(\bar{A}_1A_2A_3))=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+$

$+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}7.0{,}7.0{,}3+0{,}7.0{,}3.0{,}7+0{,}3.0{,}7.0{,}7=0{,}441;$

$P_3(3)=P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}7.0{,}7.0.7=0{,}343.$

თეორემა. ბერნულის სქემის n დამოუკიდებელ ცდაში k წარმატების $P_n(k)$ ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$P_n(k)=C_n^k p^n q^{n-k},$$

სადაც p წარმატების ალბათობაა, q=1-p მარცხის, ხოლო $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ **–ჯუფდებათა რიცხვი n ელემენტიდან k ელემენტად.**

დამტკიცება. A_i-ურით აღვნიშნოთ i-ურ ცდაში წარმატების ხდომილობა, მაშინ $\bar{A}_i$ იქნება i-ურ ცდაში მარცხის ხდომილობა. ცდის n-ჯერ განმეორების შედეგად წარმატების k-ჯერ მოხდენის ხდომილობა აღვნიშნოთ B-თი. იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

$$B=(A_1A_2A_3\ldots A_k\bar{A}_{k+1}\bar{A}_{k+2}\ldots\bar{A}_n+\bar{A}_1A_2A_3\ldots A_kA_{k+1}\bar{A}_{k+2}\ldots\bar{A}_n+\ldots+$$

$$+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\ldots\bar{A}_{n-k}A_{n-k+1}A_{n-k+2}+\ldots.+A_n. \qquad (1)$$

ხდომილობები: $(A_1A_2A_3\ldots A_k\bar{A}_{k+1}\bar{A}_{k+2}\ldots\bar{A}_n)$; $(\bar{A}_1A_2A_3\ldots A_kA_{k+1}\bar{A}_{k+2}\ldots\bar{A}_n)$;…;

($\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \ldots \bar{A}_{n-k}A_{n-k+1}A_{n-k+2}+\ldots+A_n$) წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, მათი რაოდენობა იქნება იმდენი, რამდენ ჯუფდებაც შეიძლება შევადგინოთ n ელემენტიდან k ელემენტად. ცდათა დამოუკიდებლობის გამო, თითოეული ხდომილობის ალბათობა მასში შემავალი ხდომილობების ალბათობების ნამრავლის ტოლია.

თუ (1) ტოლობაში გამოვიყენებთ დაომუკიდებელი ხდომილობების ნამრავლის და უთავსებადი ხდომილობათა ჯამის ალბათობების გამოსათვლელ ფორმულებს, მივიღებთ:

$P_n(k)= P(B)= P(A_1A_2A_3 \ldots A_k\bar{A}_{k+1}\bar{A}_{k+2} \ldots \bar{A}_n) + P(\bar{A}_1A_2A_3 \ldots A_kA_{k+1}\bar{A}_{k+2} \ldots \bar{A}_n)+$

$+\ldots+P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \ldots \bar{A}_{n-k}A_{n-k+1}A_{n-k+2}+\ldots+A_n)=$

$= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \ldots P(A_k)P(\bar{A}_{k+1})P(\bar{A}_{k+2}) \ldots P(\bar{A}_n) + \quad +P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) \ldots P(A_k)P(A_{k+1})P(\bar{A}_{k+2}) \ldots P(\bar{A}_n)+\ldots+$

$+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) \ldots P(\bar{A}_{n-k})P(A_{n-k+1})P(A_{n-k+2})+\ldots+P(A_n)=$

$$=p^kq^{n-k} + p^kq^{n-k} + p^kq^{n-k} + \cdots + p^kq^{n-k} = C_n^kp^nq^{n-k}. \qquad (3)$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. (3) ფორმულას ბერნულის ფორმულა ეწოდება. ბერნულის ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია გამოვითვალოთ შემდეგი ალბათობები:

1) ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში ადგილი ექნება არანაკლებ i წარმატებას:

$$P_n(k\geq i)=\sum_{k=i}^{n} C_n^kp^nq^{n-k};$$

2) ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში ადგილი ექნება არა უმეტეს i წარმატებას:

$$P_n(k\leq i)=\sum_{k=0}^{i} C_n^kp^nq^{n-k};$$

3) ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში წარმატებათა რიცხვი არ აღემატება i-ს და არანაკლებია j-ზე:

$$P_n(j\leq k \leq i)=\sum_{k=j}^{i} C_n^kp^nq^{n-k};$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ ,

$$P_n(0\leq k \leq n)=\sum_{k=0}^{n} C_n^kp^nq^{n-k}=(p+q)^n = 1.$$

სავარჯიშო მაგალითები

1) ოჯახში 5 ბავშვია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 2 ვაჟია, თუ ცნობილია, რომ ვაჟის დაბადების ალბათობა 0, 51-ის ტოლია.

2) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 5 ავტომობილიდან ზუსტად 4 იქნება სტანდარტული, თუ ცნობილია, რომ ამ მარკის ავტომობილების სტანდარტულობის ალბათობა მუდმივია და ტოლია 0,9-ის.

3) ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა, რომლის მოხდენის ალბათობა ყოველ ექსპერიმენტში 0,9-ის ტოლია, ხუთჯერ ჩატარებულ ექსპერიმენტში მოხდება არანაკლებ ოთხისა.

4) მიზანი დაზიანებულად ჩაითვლება, თუ სამიზნეს მოხვდება არანაკლებ სამი ჭურვი. იპოვეთ სამიზნის დაზიანების ალბათობა ხუთი გასროლის შემდეგ, თუ ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა 0,8-ის ტოლია.

5) ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ამოხსნის მოცემულ ამოცანას, არის 0,8. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ იგი მიიღებს ჩათვლას თუ ცნობილია, რომ მან 5 მოცემული ამოცანიდან უნდა ამოხსნას არანაკლებ 4 ამოცანა.

პოლინარული სქემა. უალბათესი რიცხვი

პრაქტიკაში ხშირად საქმე გვაქვს ისეთ ექსპერიმენტთან, რომლის შესაძლო შედეგთა რიცხვი მეტია ორზე. ასეთ შემთხვევაში შესაძლებელია ბერნული სქემის განზოგადება.

ვთქვათ, რაიმე ექსპერიმენტის შესაძლო შედეგებია $A_1, A_2, \dots, A_m$, ხოლო მათი შესაბამისი ალბათობები $p_1, p_2, \dots, p_m$ ე.ი. $p_i = P(A_i)$. ცხადია, რომ

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1.$$

$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$-ით აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში A_1 ხდომილობას ადგილი ექნება n_1-ჯერ, A_2 ხდომილობას ადგილი ექნება n_2-ჯერ და ა.შ. A_m ხდომილობას ადგილი ექნება n_m-ჯერ.

შევნიშნოთ, რომ $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. თუ $0 < P_i < 1$, i=1,2,...,m , მაშინ მართებულია ფორმულა:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}.$$

$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$-ს უწოდებენ პოლინარულ ალბათობას.

მაგალითი. 1000 დეტალისაგან შემდგარი პარტიიდან არჩევენ 5 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათგან 3 იქნება პირველი ხარისხის, ერთი–მეორე ხარისხის და ერთიც–მესამე ხარისხის, თუ ცნობილია, რომ მთელ პარტიაში არის 700 პირველი ხარისხის, 200–მეორე ხარისხის და 100–მესამე ხარისხის დეტალი.

ამოხსნა. (იგულისხმება, რომ შერჩეულ დეტალს შემოწმების შემდეგ უკან აბრუნებენ). p_k-თი აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული დეტალი იქნება k–ური ხარისხის (k=1,2,3). ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად გვექნება:

p_1=0,7; $p_2 = 0,2$; $p_3 = 0,1$.

თუ ვისარგებლებთ პოლინარული ალბათობის ფორმულით, მივიღებთ:

$$p_5(3,1,1)= \frac{5!}{3!1!1!}0,7^2.0,2.0,1=0,1372.$$

n დამოუკიდებელ ცდაში წარმატებათა იმ რიცხვს რომლისთვისაც ბინომური ალბათობა $P_n(k)$ ყველაზე დიდ მნიშვნელობას იღებს უალბათესი რიცხვი ეწოდება. უალბათესი რიცხვის საპოვნელად, ფიქსრებული n>1- სათვის ბინომური ალბათობა $P_n(k)$ განვიხილოთ, როგორც k-ს (k=0,1,2,...,n) ფუნქცია. ის ზრდადია k-ს იმ მნიშვნელობებისათვის, როცა $P_n(k+1) > P_n(k)$; ხოლო კლებადი, როცა $P_n(k+1) < P_n(k)$.

განვიხილოთ ფარდობა:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1}p^{k+1}q^{n-(k+1)}}{C_n^k p^n q^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}p}{\frac{n!}{k!(n-k)!}q} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q},$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}>1, \text{ როცა } \quad k<np-q \qquad (1)$$

ე.ი. $P_n(k)$, როგორც k-ს (k=0,1,2,...,n) ფუნქცია ზრდია, როცა k<np-q ;

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}<1 \quad \text{როცა} \quad k>np-q , \qquad (2)$$

ე.ი. $P_n(k)$, როგორც k-ს (k=0,1,2,...,n) ფუნქცია კლებადია, როცა k>np-q . (1) და (2)-დან დავასკვნით, რომ $P_n(k)$-ს, როგორც k-ს (k=0,1,2,...,n) ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას იღებს, როცა k=[np-q] (სიმბოლო [np-q] ნიშნავს (np-q)-ს მთელ ნაწილს). უალბათესი რიცხვის საპოვნელად მივიღებთ ფორმულას

$$k_0 = [np-q]=[np-(1-p)]=[(n+1)p-1] .$$

თუ ((n+1)p-1) მთელი რიცხვია, მაშინ $P_n(k)$-ს გააჩნია ორი მაქსიმუმი ((n+1)p-1) და (n+1)p წერტილებში.

მაგალითი. თუ ბერნულის სქემაში ცდათა რიცხვი n=19, p=0,36. უალბათესი რიცხვი k_0 =[np-q]=[19.0,36-0,64]=[7,2]=7. თუ ცდათა რიცხვი n=19, p=0,15. მაშინ np-q= =19.0,15-0,85=2 ,ე.ი.გვექნება ორი უალბათესი რიცხვი 2 და 3.

სავარჯიშო მაგალითები

1) ჯგუფში 10 სტუდენტია, მათ შორის 5 ფრიადოსანია, 3 კარგოსანი, დანარჩენი 2 კი სამოსანი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 6 შერჩეული სტუდენტიდან სამი ფრიადოსანია, ორი კარგოსანი, ერთი სამოსანი.

2) ამწყობმა საამქრომ ერთი და იგივე დასახელების 12 დეტალი მიიღო. მათგან 5 დამზადებულია პირველ ავტომატზე, 4-მეორე ავტომატზე, 3– მესამეზე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 5 შერჩეული დეტალიდან სამი დამზადებულია პირველ ავტომატზე, თითო კი მეორე და მესამე ავტომატებზე.

3) ალბათობა იმისა, რომ ხარატის მიერ დამზადებული დეტალი არასტანდარტულია უდრის 0,1-ს. იპოვეთ არასტანდარტულ დეტალთა უალბათესი რიცხვი, თუ ხარატმა 30 დეტალი დაამზადა.

4) მექანიკურმა საამქრომ გამოუშვა 10000 დეტალი. ალბათობა იმისა, რომ დეტალი სტანდარტული იქნება 0,77-ის ტოლია. იპოვეთ სტანდარტულ დეტალთა უალბათესი რიცხვი.

5) ხდომილობის ალბათობა ყოველ ცდაში 0,3-ია. რამდენი დამოუკიდებელი ცდაა საჭირო, რომ ამ ხდომილობის მოსვლის უალბათესი რიცხვი იყოს 60?

6) იპოვეთ ხდომილობის მოხდენის ალბათობა, თუ ცნობილია, რომ 39 დამოუკიდებელ ცდაში ამ ხდომლობის მოხდენის უალბათესი რიცხვი 25-ის ტოლია.

10.მუავრ-ლაპლასის ლოკალური და ინტეგრალური თეორემები

ბერნულის ფორმულის გამოყენება პრაქტიკულად საკმაოდ ძნელია, როცა ცდათა რიცხვი დიდია. მაგალითად, თუ n=1500, p=0,75, k=850:

$$P_{1500}(850)=C_{1500}^{850}(0,75)^{850}(0,25)^{650},$$

რაც საკმაოდ მოუხერხებელი გამოსათვლელია.

ამ სიძნელის გადასალახავად გამოიყენება მუავრ-ლაპლასის ლოკალურ თეორემა:

თეორემა. ბერნულის სქემის n ცდაში k წარმატების ალბათობა $P_n(k)$ მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

სადაც $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, ხოლო $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილის სახით (დანართი 1). აქვე შევნიშნოთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია ლუწია $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

მაგალითი. ალბათობა იმისა, რომ ხარატის მიერ დამზადებული დეტალი სტანდარტული იქნება 0,8-ის ტოლია, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ხარატის მიერ დამზადებული 1000 დეტალიდან 8020 სტანდარტული აღმოჩნდება.

ამოხსნა. შემოღებულ აღნიშვნებში: n=1000; p=0,8; q=1-0,8=0,2; k=8020.

საძიებელი ალბათობა:

$$P_{1000}(8020)=\frac{1}{\sqrt{1000.0,8.0,2}}\varphi(x)=\frac{1}{40}\varphi(x),$$

სადაც

$$x=\frac{8020-0,8.1000}{40}=0,5 \ .$$

ცხრილში (დანართი) ვპოულობთ, რომ $\varphi(0,5)$=0,3521, ამიტომ

$$P_{1000}(8020)=\frac{1}{40}\varphi(0,5)=\frac{1}{40}.0,3521=0,0088.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაინტერესებს ალბათობა იმისა, რომ წარმატებათა რიცხვი k მოთავსებულია რაიმე შუალედში $P_n(k_1<k<k_2)$ და n დიდი რიცხვია სარგებლობენ ფორმულით, რომელიც მიიღება ლაპლასის ინტეგრალური თეორიების საფუძველზე.

თეორემა. ბერნულის სქემის n ცდაში ალბათობა იმისა, რომ წარმატებათა რაოდენობა k მოთავსებული იქნება k_1 და k_2 რიცხვებს შორის, მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით:

$$P_n(k_1<k<k_2)\approx\Phi(\mathrm{b})-\Phi(\mathrm{a}),$$

სადაც

$$b=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\ , \qquad a=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\ ,$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

$\Phi(x)$ ფუნქციას ალბათობის ინტეგრალი ანუ ლაპლასის ფუნქცია ეწოდება. იგი არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით, მისი

მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილის სახით (დანართი 2). შევნიშნოთ, რომ $\Phi(x)$ კენტი ფუნქციაა $\Phi(-x)= -\Phi(x)$.

მაგალითი. ალბათობა იმისა, რომ ამწყობი საამქროს მიერ მიღებული დეტალი აღმოჩნდება არასტანდარტული 0,1-ის ტოლია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 1600 მიღებულ დეტალში სტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა იქნება არანაკლებ 1400-სა.

ამოხსნა. მოცემულობის თანახმად: n=1600; p=0,9; q=0,1; k_1=1400; k_2=1600;

$$b=\frac{1600-1600.0,9}{\sqrt{1600.0,9.0,1}}=\frac{160}{12}=13,(3);\ a=\frac{1400-1600.0,9}{\sqrt{1600.0,9.0,1}}=\frac{-40}{12}=3,(3).$$

$$P_{1600}(1400\leq k\leq 1600)\approx \Phi(13,3)-\Phi(-3,3)=\Phi(13,3)+\Phi(3,3)=$$

=0,5+0,4996= 0,9996.

პუასონის ფორმულა

როგორც ვანხეთ, როდესაც ცდათა რიცხვი საკმაოდ დიდია, სარგებლობენ მუავრ-ლაპლასის მიახლოებითი ფორმულით. ამ შემთხვევაში დაშვებული ცდომილება მით მეტია, რაც უფრო მცირეა წარმატების ალბათობა. როდესაც წარმატების ალბათობა p<0,1, მიმართავენ პუასონის მიახლოებით ფორმულას.

ამოცანა ისმის ასე, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილება მოხდება ზუსტად k-ჯერ, თუ ცდათა რიცხვი n ძალიან დიდია, ხოლო თითოეულ ცდაში წარმატების ალბათობა ახლოსაა ნულთან (ასეთ ხდომილობებს იშვიათი ხდომილობები ეწოდება).

პუასონის ფორმულის გამოყენებისას გაკეთებულია ერთი მნიშვნელოვანი დაშვება: ნამრავლი np ინარჩუნებს მუდმივ λ მნიშვნელობა ანუ $P=\frac{\lambda}{n}$.

თეორემა. ბერნულის სქემის n ცდაში k წარმატების ალბათობა $P_n(k)$ მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

მაგალითი. ტრანსპორტირებისას მზა პროდუქციის დაზიანების ალბათობა არის 0,0002. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გაგზავნილი 5000 ერთეულიდან დაზიანდება 3.

ამოხსნა. n=5000; p=0,0002;k=3; λ=np=5000.0,0002=1.

პუასონის ფორმულის თანახმად:

$$P_{5000}(3)=\frac{e^{-1}}{3!}=\frac{1}{6e}=0,06.$$

სავარჯიშო მაგალითები

1) ღვინის ქარხანას გამოუგზავნეს 5000 ცალი მუხის კასრი. ალბათობა იმისა, რომ კასრი გზაში დაზიანდება 0,0002-ის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ქარხანაში მიღებული კასრებიდან სამი კასრი დაზიანებული აღმოჩნდება.

2) ვაჟის დაბადების ალბათობაა 0,51. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 100 ახალშობილი ბავშვიდან 50 ვაჟია.

3) 1000 ადამიანში 8 ექიმია. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, შემთხვევით არჩეული 100 ადამიანიდან არც ერთი ექიმი არ იქნება.

4) გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ 200 აგდების შემთხვევაში ლითონის მონეტაზე მოვა გერბი არანაკლებ 95-ჯერ და არა უმეტეს 105-ჯერ.

5) კამათლის გაგორება ხდება 12000-ჯერ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ „6'' მოსვლის რიცხვი მოთავსებული იქნება (1900; 2100) შუალედში.

6) მსროლელის მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთ გასროლაზე უდრის 0,75-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 100 გასროლიდან მსროლელი მიზანში მოახვედრებს არანაკლებ 70-ჯერ.

7) ალბათობა იმისა, რომ შეძენილი იქნება ლატარიის წამგებიანი ბილეთი უდრის 0,1-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 600 ნაყიდი ბილეთიდან წამგებიანი ბილეთების რაოდენობა იქნება არანაკლებ 48 და არა უმეტეს 55-სა.

თავი 9

1. შემთხვევითი სიდიდე და მისი განაწილების კანონი.

ალბათობის თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა შემთხვევითი სიდიდის ცნება. სანამ შემთხვევით სიდიდეს განვმარტავთ განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი: კამათლის გაგორებისას ცდის შედეგი არის ამა თუ იმ წახნაგის ზემოთ მოქცევა. რადგან კამათლის წახნაგებზე დასმულია წერტილები 1-დან 6-ის ჩათვლით, ცდის შედეგს შევუსაბამოთ რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს ზემოთ მოქცეულ წახნაგზე წერტილების რაოდენობას. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია შემოვიტანოთ X –სიდიდე, რომელსაც შეუძლია მიიღოს 1,2,3,4,5 და 6-ის ტოლი მნიშვნელობები იმისდა მიხედვით, თუ რომელი წახნაგი აღმოჩნდა ზემოთ მოქცეული. ორი კამათლის გაგორებისას შეგვიძლია შემოვიტანოთ X –სიდიდე, რომელსაც შეუძლია მიიღოს 2,3,4,...,12 -ის ტოლი მნიშვნელობები (ქულათა ჯამი) იმისდა მიხედვით, თუ რომელ წახნაგები აღმოჩნდნენ ზემოთ მოქცეული პირველ და მეორე კამათლზე. შევნიშნოთ, რომ ცდებს ყოველთვის არ გააჩნია ისეთი შედეგი, რომლელებიც რიცხვით გამოისახებიან. მაგალითად, ყუთში

მოთავსებულია, ერთნაირი ზომის, თეთრი, შავი, წითელი და მწვანე ბურთულები. ალალბედზე ამოღებული ბურთულა შეიძლება აღმოჩნდეს ამ ოთხი ფერიდან ერთ-ერთი. ცხადია, ელემენტარული ხდომილობები რიცხვებით არ გამოისახება, მაგრამ, შეგვიძლია განვიხილოთ X –სიდიდე, რომელსაც შეუძლია მიიღოს 1,2,3 და 4-ის ტოლი მნიშვნელობები იმისდა მიხედვით, თუ რომელი ფერისაა ალალბედზე ამოღებული ბურთულა.

განხილული მაგალითებიდან შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ შესაძლებელია ნეისმიერი ცდა აღიწეროს რიცვითი სიდიდით, რომლის მნიშვნელობა დამოკიდებულია ცდის შედეგზე. ცდის შედეგები კი წარმოადგენენ ელემენტარულ ხდოილობათა სივრცის ელემენტებს, ე. ი. X –სიდიდე წარმოადგენს Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ω ელემენტებზე განსაზღვრულ ფუნქციას. ω-ზე მისი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ X(ω) სიმბოლოთი. დავუშვათ x ნებისმიერი რიცხვია. [X<x] ჩანაწერით აღვნიშნოით იმ ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც X(ω) <x, ე.ი. [X<x] არის Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლე.

განსაზღვრება. შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეზე განსაზღვრულ X(ω) ფუნქციას, რომელთათვისაც [X<x] სიმრავლე ყოველი x-რიცხვისათვის წარმოადგენს ხდომილობას, გარკვეული ალბათობით. შევნიშნოთ, რომ [X<x] სიმრავლესთან ერთად, ხდომილობებს წარმოადგენენ [X>x] და [X=x] სიმრავლეები და მათაც გარკვეული ალბათობები შეესაბამება.

განიხილება ორი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეები: დისკრეტული და უწყვეტი.

განსაზღვრება. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება დისკრეტული თუ ის იღებს სასრული ან თვლადი რაოდენობის მნიშვნელობებს. განვიხილოთ დისკრეტული ტიპის შემთხვევით სიდიდე, რომლის შესაძლო მნიშვნელობებია $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. (შევთანხმდეთ, შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ დალაგებულია ზრდის მიხედვით).

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$A_1 = [X = x_1],\ A_2 = [X = x_2], \dots, A_n = [X = x_n], \dots$$

როგორც ვიცით, [X=x_i] სიმრავლე ყოველი (i=1,2,...,n,...) წარმოადგენს ხდომილობას, გარკვეული ალბათობით:

$$P(A_i) = P[X = x_i] = p_i. \qquad (1)$$

განსაზღვრება. ცხრილს, რომლის პირველ სტრიქონში მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები, ხოლო მეორე სტრიქონში შესაბამისი ალბათობები შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი ეწოდება:

X	x_1	x_2	. .	x_k	. . .
P	p_1	p_1	. .	p_k	. . .

როგორც ვხედავთ განაწილების კანონი მოცემულია (1) ტოლობით. შევნიშნოთ, რომ $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots=\Omega$ და $A_i\cap A_j=\emptyset$, როცა i≠j ,ნორმირების აქსიომის და უთასებადი ხდომილობების ჯამის ალბათობის თვისების გამოყენებით მივიღებთ:

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots=1 \text{ ე.ი. } \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_{i=1}.$$

მაგალითი. შემთხვევითი სიდიდეს წარმოადგენს ორი კამათლის აგდებისას მოსული ქულათა ჯამი. შევადგინოთ ამ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{26}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

განვიხილოთ X შემთხვევითი სიდიდე და [X<x] ხდომილობა. ამ ხდომილობის ალბათობა $P[X<x]$ დამოკიდებულია x-ზე და წარმოადგენს ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ ფუნქციას. ამ ფუნქციას აღვნიშნავთ F(x)-ით და განაწილების ფუნქციას ვუწოდებთ: F(x)= $P[X<x]$.

განაწილების ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) განაწილების ფუნქცია არაკლებადია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე:

თუ $x_1<x_2$ მაშინ $F(x_1)\leq F(x_2)$;

2) F(+∞)=1, F(-∞)=0, როგორც ცნობილია $F(\pm\infty)=\lim_{x\to\infty}F(\pm x)$;

3) განაწილების ფუნქცია უწყეტია მარცხნიდან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის უნივერსალურ მახასიათებელს.

განაწილების ფუნქციის საშუალებით შეიძლება გამოვთვალოთ X შემთხვევითი სიდიდის რაიმე $[x_1,x_2]$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა:

P($x_1 < X \le x_2$)=P(X<x_2)-P(X<x_1)= F(x_2)−F(x_1);

განსაზღვრება. X შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება უწვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდე, თუ მისი განაწილების ფუნქცია წარმოიდგინება შემდეგი სახით: F(x)=$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, სადაც f არაუარყოფითი ფუნქციაა.

f ფუნციას X უწვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე ეწოდება. ცხადია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციასა და განაწილების სიმკვრივეს შორის არსებობს თანაფარდობა: $F'(x) = f(x)$.

X უწვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის რაიმე [x_1,x_2] ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა განაწილების f სიმკვრივის საშუალებით გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$P(x_1 < X \le x_2)=F(x_2)-F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt,$$

უკანასკნელი თანაფარდობიდან გამომდინარეობს უწვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივის ნორმირების პირობა: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$=1, მართლაც, F($+\infty$)−F($-\infty$) $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$=1.

სავარჯიშო მაგალითები

1) მსროლელი მიზანში ისვრის 3-ჯერ. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,4-ს. ყოველი მოხვედრისას მსროლელს ეთვლება 5 ქულა. დაწერეთ მიღებული ქულების განაწილების კანონი.

2) კამათელს აგორებენ 3-ჯერ. დაწერეთ 6-იანის მოსვლათა განაწილების კანონი.

3) მსროლელი, რომელსაც ოთხი ვაზნა აქვს, მიზანში ისვრის პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,8-ს. იპოვეთ დახაჯული ვაზნების განაწილების კანონი.

4) ალბათობა იმისა, რომ ბიბლიოთეკაში სტუდენტისათის საჭირო წიგნი თავისუფალია, უდრის 0,4-ს. შეადგინეთ იმ ბიბლიოთეკების განაწილების კანონი, რომლებიც უნდა ინახულოს სტუდენტმა, თუ ქალაქში ოთხი ბიბლიოთეკაა.

5) შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & X \le 0 \\ X^2, & 0 < X \le 1 \\ 1, & X > 1 \end{cases}$$

ვიპოვოთ (0,25; 0,75) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა.

6) შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით:

$$F(X) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{X_0}{X}\right)^{\alpha}, X > X_0 \\ 0, \quad X \le X_0 \end{cases}$$

იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე.

2. შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების დასახასიათებლად ხშირად საკმარისია რამდენიმე ისეთი რიცხვითი მაჩვენებლის ცოდნა, რომლებიც გამოხატავენ შემთხვევითი სიდიდის არსებით თვისებებს. ასეთი რიცხვითი მახასიათებლებია: შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი; შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია; სხვადასხვა რიგის საწყისი და ცენტრალური მომენტები; მედიანა; მოდა და სხვა.

ვთქვათ, მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

X	x_1	x_2	. .	x_k	. . .
P	p_1	p_2	. .	p_k	. . .

განსაზღვრება. დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება, მისი შესაძლო მნიშვნელობის შესაბამის ალბათობაზე ნამრავლის ჯამს, თუ ეს ჯამი არსებობს.

X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი აღინიშნება M(X) სიმბოლოთი:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \ , \qquad (1)$$

ე.ი. დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არსებობს თუ (1) ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგარი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. შევნიშნოთ, რომ თუ შემთხვევითი სიდიდე იღებს სასრული რაოდენობის სასრულ მნიშვნელობებს ეს ჯამი ყოველთვის იარსებებს.

ვთქვათ X, უწვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების სიმკვრივეა f.

განსაზღვრება. თუ ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ მას უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

მათემატიკურ ლოდინს გააჩნია შემდეგი ძირითადი თვისებები:

თვისება 1. მუდმივის მათემატიკური ლოდინი თვით ამ მუდმივის ტოლია. მართლაც, რაიმე C მუდმივი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც C მნიშვნელობას იღებს ალბათობით ერთი მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად: M(C)=1C=C.

თვისება 2. შემთხვევითი სიდიდეთა ჯამის მათემატიკური ლოდინი შესაკრებთ მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

ვთქვათ, X-ის შესაძლო მნიშვნელობებია $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, ხოლო შესაბამისი ალბათობები $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$. ანალოგიურად Y-ის შესაძლო მნიშვნელობებია $y_1, y_2, \dots, y_m, \dots$, ხოლო შესაბამისი ალბათობები $q_1, q_2, \dots, q_m, \dots$ მაშინ (X+Y) შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობებს: $(x_1+y_1), (x_1+y_2), \dots, (x_1+y_m), \dots, (x_2+y_1), (x_2+y_2), \dots, (x_2+y_m), \dots,$

$(x_n+y_1), (x_n+y_2), \dots, (x_n+y_m), \dots$ P_{ij}-თი აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას x_i, ხოლო Y შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას y_j: $P_{ij}=P[X=x_i, Y=y_j]$, i,j=1,2,3,... ; მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i+y_j)P_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}y_j\left(\sum_{i=1}^{\infty}P_{ij}\right). \quad (1)$$

სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად:

$$\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}=p_i;\ \sum_{i=1}^{\infty}P_{ij}=q_j. \qquad (2)$$

თუ (2)-ს გავითვალისწინებთ (1) ტოლობაში მივიღებთ:

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i+\sum_{j=1}^{\infty}y_j q_j=M(X)+M(Y).$$

მე-2 თვისება სამართლიანია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

თვისება 3. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი თანამამრავლთა მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის ტოლია:

$$M(XY)=M(X)M(Y).$$

გამოვიყენოთ მე-3 თვისების ჩვენების დროს მიღებული აღნიშვნები. XY ნამრავლის შესაძლო მნიშვნელობებია $(x_i y_j)$, ალბათობით $P_{ij}=P[X=x_i, Y=y_j]$, i,j=1,2,3,... რამდენადაც X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია $P_{ij}=p_i q_j$ მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად გვექნება: $M(XY)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i y_j)P_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i y_j)p_i q_j.=$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i \sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j = \qquad M(X)M(Y).$$

ზემოთ ნაჩვენები (1), (2) და (3) თვისებებიდან გამომდინარეობს

შედეგი. თუ a და b ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო X და Y შემთხვევითი სიდიდეები, მაშინ

$$M(aX+bY)=aM(x)+bM(y).$$

განსაზღვრება. **(X-a)** სხვაობას ეწოდება **X** შემთხვევითი სიდიდის გადახრა a რიცხვისგან. როცა a=M(X) , მაშინ **(X-M(X))** სხვაობას უბრალოდ გადახრა ეწოდება, ხოლო **(X-M(X))** შემთხვევით სიდიდეს კი – ცეტრირებულ შემთხვევითი სიდიდეს უწოდებენ.

თეორემა. ცენტრირებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია. M(**X-M(X)) =0.**

დამტკიცება. მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით მივიღებთ:

$$M(X-M(X)) = M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0.$$

მათემატიკური ლოდინი წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის ერთ-ერთ ძირითად რიცხვით მახასიათებელს, მაგრამ, როგორც შემდგომ ვნახავთ, მხოლოდ მათემატიკური ლოდინი არ კმარა შემთხვევითი სიდიდის დასახასიათებლად. კერძოდ, მათემატიკური ლოდინი არ იძლევა წარმოდგენას შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებზე და მათი გაფანტულობის შესახებ მათემატიკური ლოდინის ირგვლივ.

შემთხვევითი სიდიდის თავისი მათემატიკური ლოდინის ირგვლივ გაფანტულობის დასახასიათებლად სარგებლობენ რიცხვითი მახასიათებლით რომელსაც დისპერსია ეწოდება.

განსაზღვრება. გადახრის კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ეწოდება და აღინიშნება D(X) სიმბოლოთი:

$$D(X)=M[X - M(X)]^2.$$

მათემატიკურ ლოდინს განმარტების თანახმად:

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k - M(X)]^2 p_k,$$

როდესაც X არის დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x - M(X)]^2 f(x)\,dx,$$

თუ X უწვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების სიმკვრივეა f.

თუ გამოვიყენებთ მათემატიკური ლოდინის თვისებებს დისპერსიის გამოსათვლელად მივიღებთ უფრო მოხერხებულ ფორმულას:

$D(X)=M[X-M(X)]^2=M(X^2-2XM(X)+(M(X)^2)=M(X^2)-M(2XM(X))+(M(X))^2=$

$=M(X^2)-2(M(X))^2+(M(X))^2=M(X^2)-(M(X))^2.$

ე.ი. შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია უდრის მისი კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს გამოკლებული მათემატიკური ლოდინის კვადრატი.

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიას გაჩნია შემდეგი თვისებები:

თვისება 1. მუდმივის დისპერსია ნულის ტოლია.

მართლაც, $D(C)=M[C-M(C)]^2=M[C-C]^2=0$.

თვისება 2. მუდმივი თანამამრავლი გამოდის დისპერსიის ნიშნის გარეთ კვადრატში ახარისხებული:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

მართლაც,

$D(CX)=M((CX-M(CX))^2)=M[C(X-M(X)]^2)=M[C^2(X-M(X)]^2=$

$=C^2M[(X-M(X)]^2=C^2D(X).$

თვისება 3. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის დისპერსია შესაბამისი დისპერსიების ჯამის ტოლია

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

დისპერსიის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$D(X+Y)=M[(X+Y)-M(X+Y)]^2=M[(X-M(X))+(Y-M(Y)]^2=$$

$$=M[X-M(X)]^2+2M[X-M(X)][Y-M(Y)]+M[(Y-M(Y)]^2=$$

$$=D(X)+2M[X-M(X)]M[Y-M(Y)]+D(Y)=D(X)+D(Y),$$

რადგანაც

$$M[X-M(X)]=M[Y-M(Y)]=0.$$

განსაზღვრება. კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა ეწოდება და აღინიშნება $\sigma(X)$ სიმბოლოთი.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

შევნიშნოთ, რომ დისპერსიას გააჩნია შემთხვევით სიდიდის განზომილების კვადრატის განზომილება, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრას იგივე განზომილება აქვს, რაც შემთხვევით სიდიდეს, ამასთანავე ორთავე არაუარყოფითი სიდიდეებია და ახასიათებს მის გაფანტულობას მათემატიკური ლოდინის ირგვლივ. საშუალო კვადრატული გადახრას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

თვისება 1. $\sigma(CX)=|C|\sigma(X)$, სადაც C მუდმივია.

თვისება 2. თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}.$$

განსაზღვრება. შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც მიიღება ცენტრირებული შემთხვევით სიდიდის გაყოფით საშუალო კვადრატული გადახრაზე ნორმირებული შემთხვევით სიდიდე ეწოდება და აღინიშნება:

$$\dot{X}=\frac{X-M(X)}{\sigma(X)}.$$

ნორმირებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია, დისპერსია ერთის.

$$M(\dot{X})=M[\frac{X-M(X)}{\sigma(X)}]=\frac{1}{\sigma(X)}M[X-M(X)]=0,$$

$$D(\dot{X})=D[(\frac{X-M(X)}{\sigma(X)})]=\frac{1}{\sigma^2(X)}D[(X-M(X)]=\frac{1}{\sigma^2(X)}D[X]=1.$$

განსაზღვრება. შემთხვევითი სიდიდის k–ური ხარისხის მათემატიკურ ლოდინს k-რიგის საწყისი მომენტი ეწოდება და აღინიშნება α_k სიმბოლოთი:

$\alpha_k=M(X^k)$, k=0,1,2,3,....

განსაზღვრება. ცენტრირებული შემთხვევითი სიდიდის k-ური ხარისხის მათემატიკურ ლოდინს k-რიგის ცენტრალური მომენტი ეწოდება და აღინიშნება μ_k სიმბოლოთი:

$$\mu_k=M[X-M(X)]^k,\ k=0,1,2,3,....$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$\alpha_0=1;\ \alpha_1=M(X);\ \mu_0=1;\ \mu_1=0;\ \mu_2=D(X)=\alpha_2-\alpha_1;\ \mu_3=\alpha_2-3\alpha_2\alpha_1+2\alpha_1^3;$$

$$\mu_4=\alpha_4-4\alpha_3\alpha_1+6\alpha_2\alpha_2^2-3\alpha_1^4.$$

განსაზღვრება. მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდე რომლის განაწილების ფუნქციაა F(x), მაშინ მისი მედიანა ეწოდება ისეთ γ რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება პირობები: $F(\gamma)\le\frac{1}{2}$ და $F(\gamma+0)\ge\frac{1}{2}$, სადაც $F(\gamma+0)$, F ფუნქციის მარჯვენა ზღვარია γ წერტილზე.

განსაზღვრება. X შემთხვევითი სიდიდის ასიმეტრიის კოეფიციენტი ეწოდება $\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ რიცხვს და აღინიშნება სიმბოლოთი: $A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$.

განსაზღვრება. X შემთხვევითი სიდიდის ექცესი ეწოდება ($\frac{\mu_4}{\sigma^4}$-3) სიდიდეს და აღინიშნება სიმბოლოთი: E_x=($\frac{\mu_4}{\sigma^4}$-3).

განსაზღვრება. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის მოდა ეწოდება მის იმ შესაძლო მნიშვნელობას, რომლის შესაბამისი ალბათობა უდიდესია. უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის მოდა ეწოდება განაწილების სიმკვრივის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილს.

სავარჯიშო მაგალითები

1)X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

x	-5	2	3	4
p	0.4	0,3	0,1	0,2

ვიპოვოთ მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

1) ვიპოვოთ დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა, თუ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

x	131	140	160	180
p	0.05	0,10	0,25	0,60

3)ვიპოვოთ Z შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ ცნობილია, X და Y შემთხვევითი სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინები:

ა)$Z = X + 2Y,\ \ M(X) = 5,\ M(Y) = 3$

ბ)$Z = 3X + 4Y,\ \ M(X) = 2,\ M(Y) = 6.$

4) X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელი არიან. ვიპოვოთ $Z = 3X + 2Y$ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია, თუ ცნობილია, რომ $D(X) = 5,\ D(Y) = 6.$

5) X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით.

x	-2	0	1	2
p	0.4	0,3	0,1	0,2

ვიპოვოთ პირველი სამი რიგის საწყისი და ცენტრალური მომენტები.

6) X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია თანაბრად [3, 8] ინტერვალზე. ვიპოვოთ მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

თავი 10

განაწილების კანონთა ძირითადი სახეები

1. ბინომური განაწილება

განვიხილოთ ორშედეგიანი დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა. წარმატებათა რიცხვი სასრულ ცდათა მიმდევრობაში აღვნიშნოთ X –ით. ცხადია, იგი წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, განაწილების კანონით:

X	0	1	. . .	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	. . .	$P_n(n)$

განსაზღვრება. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება ბინომურად განაწილებული თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობებია 0,1,2,3,...,n. ხოლო შესაბამისი ალბათობები გამოითვლება ფორმულით:

$$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^n q^{n-k}.$$

ვიპოვთ ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

X_i-ით აღვნიშნოთ i-ურ ცდაში წარმატებათა რიცხვი (ცხადია, იგი უდრის ერთს ან ნულს), მაშინ $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$. შევნიშნოთ, რომ X_i შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს ექნება სახე: $\frac{X_i}{P}\ \frac{0}{1-p}\ \frac{1}{p}$, სადაც i=1,2,3,...n ; ე.ი. $M(X_i)$=0(1-p)+1p=p; $M(X_i^2)$=p; $D(X_i)$= $M(X_i^2)-M(X_i)$= p-p^2=p(1-p)=pq. თუ გამოვიყენებთ, დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის გამოსათვლელ ფორმულას, მივიღებთ:

$$M(X)=M(X_1+X_2+\cdots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)=p+p+\ldots+p=np\ ;$$

$$D(X)=D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)=pq+pq+\ldots+pq=npq.$$

2. პუასონის განაწილება

განსაზღვრება. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება პუასონის კანონით განაწილებული თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობებია 0, 1, 2, 3, … ,k,…. ხოლო შესაბამისი ალბათობები გამოითვლება ფორმულით:

$$P(X=k)=\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!},\ \mu > 0.$$

პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია ერთმანეთის ტოლია და ემთხვევა μ პარამეტრს:

$M(X) = D(X) = \mu.$

2. გეომეტრიული განაწილება

ვთქვათ, ბერნულის სქემით ცდებს ვატარებთ პირველ წარმატებამდე. ცდათა რიცხვი, რომელიც საჭიროა პირველ წარმატებამდე აღვნიშნოთ X-ით. ცხადია, X=k, (k=1,2,3,...,n,...) ნიშნავს, რომ წინა (k-1) ცდაში მარცხს ჰქონდა ადგილი, ხოლო k –ურ ცდაში წარმატებას. თუ გავითვალისწინებთ დამოუკიდებელ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელ ფორმულას, მივიღებთ:

$$P(X=k)=q^{k-1}p\ .$$

განსაზღვრება. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება გეომეტრიული კანონით განაწილებული თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობებია 0, 1, 2, 3, … ,k,…. ხოლო შესაბამისი ალბათობები გამოითვლება ფორმულით:

$$P(X=k)=q^{k-1}p\ .$$

გეომეტრიულად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $M(X) = \frac{1}{p}$, ხოლო დისპერსია $D(X)=\frac{q}{p^2}$.

3. თანაბარი განაწილების კანონი

განსაზღვრება. უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება [a,b] ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული თუ, მის განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

განაწილების სიმკვრივეა

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a,b] \\ 0, & x \in [a,b] \end{cases}$$

ვიპოვოთ $[a,b]$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[(X-M(X)]^2 f(x)\,dx=\int_a^b\left[x-\frac{a+b}{2}\right]^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{\left[x-\frac{a+b}{2}\right]^3}{3}\|_a^b=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\left[\frac{(b-a)^3}{8}-\frac{(a-b)^3}{8}\right]=\frac{(b-a)^2}{12}\ .$$

4. ნორმალური განაწილების კანონი

განსაზღვრება. უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება ნორმალური კანონით განაწილებული, თუ მის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

სადაც a და σ^2 რიცხვებია, რომლებსაც ნორმალური განაწილების პარამეტრები ეწოდება და შესაბამისად ტოლია შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის და დისპერსიის: $M(X)=a$; $D(X)=\sigma^2$. ნორმალური კანონით განაწილებული X შემთხვევით სიდიდე პარამეტრებით a და σ^2 აღინიშნება N(a , σ^2) სიმბოლოთი.

პრაქტიკაში დიდი გამოყენება აქვს ნორმალურ განაწილებას პარამეტრებით 0 და 1, მას სტანდარტული ნორმალური განაწილება ეწოდება.

სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივეა

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

ხოლო განაწილების ფუნქცია:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\ .$$

$F(X)$ ფუნქცია დაკავშირებულია ლაპლასის $\Phi(X)$ ფუნქციასთან ტოლობით

$$F(X)=\frac{1}{2}+\Phi(X).$$

ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია $N(a,\sigma^2)$ ნორმალური კანონით, მაშინ როგორც ვიცით სიმკვრივის საშუალებით შემთხვევითი სიდიდის რაიმე შუალედში მოხვედრის ალბათობა გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$P[\alpha < X < \beta] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

ცვლადთა გარდაქმნით ეს ალბათობა გამოისახება ლაპლასის $\Phi(X)$ ფუნქციის საშუალებით, კერძოდ

$$P[\alpha < X < \beta] = \Phi(\tfrac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi(\tfrac{\alpha-a}{\sigma}). \qquad (1)$$

მაგალითი. ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია $N(20{,}100)$ ნორმალური კანონით, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გადახრის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლები იქნება 3-ზე.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (1) ფორმულით:

$$P[|X-20|<3]=P[20-3<X<20+3] = P[17<X<23] = \Phi\left(\tfrac{23-20}{10}\right) - \Phi\left(\tfrac{17-20}{10}\right) =$$

$$= \Phi(\tfrac{3}{10}) - \Phi(-\tfrac{3}{10})=2\,\Phi(\tfrac{3}{10})=2.0{,}1179=0{,}2358.$$

განვიხილოთ (1) ტოლობის კერძო შემთხვევა, როდესაც $\alpha = a - 3\sigma$ და $\beta = a + 3\sigma$:

$$P[a-3\sigma < X < a+3\sigma] = \Phi(\tfrac{a+3\sigma-a}{\sigma}) - \Phi(\tfrac{a-3\sigma-a}{\sigma}) = \Phi(3)-\Phi(-3)=2\,\Phi(3)=0{,}9973.$$

ე.ი. 0,9973 ტოლი ალბათობით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ნორმალური კანონით განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობებს $[a-3\sigma,\ a+3\sigma]$ შუალედიდან. ამ ფაქტს ემყარება როგორც თეორიულ, ისე პრაქტიკულ ამოცანებში გამოყენების მქონე ე.წ. სამი სიგმას წესი, რომლის თანახმადაც, ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინიდან 3σ-ზე მეტი გადახრა პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდომილობაა.

გამა-განაწილება

განსაზღვრება. უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება გამა-კანონით განაწილებული, თუ იგი ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს და მის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

სადაც α და β განაწილების პარამეტრებია, ხოლო

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx$$

ეილერის მეორე გვარის ინტეგრალი.

გამა-კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შესაბამისად ტოლია:

$M(X) = \frac{\alpha}{\beta}$; $D(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

ბეტა-განაწილება

განსაზღვრება. უწყვეტი ტიპის X შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება ბეტა-კანონით განაწილებული, თუ იგი ღებულობს მნიშვნელობებს (0,1) ინტერვალიდან და მის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

სადაც α და β განაწილების პარამეტრებია.

ბეტა-კანონით განაწილებული გამა-კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შესაბამისად ტოლია:

$M(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$; $D(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(1+\alpha+\beta)}$.

χ^2 − განაწილება

ვთქვათ მოცემული გვაქვს დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები $X_1, X_2, \dots, X_n$ განაწილებით $N(0,1)$. განვსაზღვროთ ახალი შემთხვევითი სიდიდე χ^2 ტოლობით:

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2. \qquad (1)$$

განსაზღვრება. შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც მოცემულია (1) ტოლობით ეწოდება χ^2 კანონით განაწილებული, n თავისუფლების ხარისხით.

n რიცხვი გვიჩვენებს, თუ რამდენი შესაკრებია (1) ტოლობის მარჯვენა მხარეს და წარმოადგენს χ^2 კანონით განაწილების ერთადერთ პარამეტრს. ცხადია, $n \geq 1$.

n თავისუფლების ხარისხის მქონე χ^2 შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & , x>0\\ 0 & , x\le 0\end{cases}$$

n თავისუფლების ხარისხის მქონე χ^2 შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შესაბამისად ტოლია: $M(\chi^2)=n;\ D(\chi^2)=2n.$

სტიუდენტის განაწილება

ვთქვათ მოცემული $n+1$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდე $X, X_1, X_2, \dots, X_n$, რომლებიც განაწილებულია $N(0,\sigma^2)$. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევითი სიდიდეები:

$$Y=\sqrt{\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}{n}}\ ;\quad t=\frac{X}{Y}\ .$$

t შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\ .$$

t შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება სტიუდენტის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, მისი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, შესაბამისად, ტოლია: $M(t)=0$, როცა $n>1;\ D(t)=\frac{n}{n-2}$, როცა $n>2$.

თავი 11

დიდ რიცხვთა კანონი

1. ჩებიშევის უტოლობა

შემთხვევით სიდიდეთა დიდი რაოდენობის ჯამების ყოფაქცევა სპეციალურ გამოკვლევას საჭიროებს. მაგალითად, განვიხილოთ დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული $X_1, X_2, \dots, X_n$ შემთხვევითი სიდიდეების არითმეტიკული საშუალო მნიშვნელობა

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

აღვნიშნოთ:

$$M(X_i)=a, \quad D(X_i)=\sigma^2.$$

მაშინ

$$M(\bar{X})=M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)=\frac{1}{n}na=a, \quad (1)$$

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}. \quad (2)$$

როგორც ვხედავთ, $\bar{X}_n$ შემთხვევით სიდიდეს იგივე მათემატიკური ლოდინი აქვს, რაც თითოეულ შესაკრებს, მაგრამ დისპერსია n-ჯერ უფრო მცირეა, ვიდრე თითოეული შესაკრების. ე.ი. შესაკრებთა რაოდენობის ზრდასთან ერთად მცირდება გაფანტულობა თავისი საშუალოს მიმართ.

განვიხილოთ დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდე, რომელსაც გააჩნია სასრული დისპერსია და მათემატიკური ლოდინი: $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$.

ε იყოს წინასწარ დასახელებული რაიმე დადებითი რიცხვი. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშნელობას $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ინტერვალიდან.

ჩებიშევის უტოლობა. ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევითი სიდიდის თავისი მათემატიკური ლოდინიდან გადახრის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება ε-ს არანაკლებია, ვიდრე $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P[|X-a|<\varepsilon] \geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (3)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ხდომილობა:

$A=[|X-a|<\varepsilon]$

მაშინ

$$\bar{A}=[|X-a|\geq\varepsilon]$$

და რადგან

$$P(A)+P(\bar{A})=1,$$

გვექნება:

$$P[|X-a|<\varepsilon]=1-P[|X-a|\geq\varepsilon]. \quad (4)$$

ამიტომ, (3) უტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია $P[|X-a|\geq\varepsilon]$ ალბათობის შეფასება.

განმარტების თანახმად, X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - a)^2 p_i. \quad (5)$$

(5) მწკრივის მარჯვენა მხარეში თითოეული შესაკრები არაუარყოფითია, ამიტომ თუ ავჯამავთ მხოლოდ მათ ნაწილს, კერძოდ, იმ წევრებს, რომლებისთვისაც $|X - a| \geq \varepsilon$, ჯამი არ გაიზრდება.

$$D(X) \geq \sum_{|x-a|\geq\varepsilon}(x_i - a)^2 p_i.$$

ჯამი კიდევ უფრო შემცირდება, თუ ყოველ $(x_i - a)^2$-ს შევცვლით ε^2-ით:

$$D(X) \geq \sum_{|x-a|\geq\varepsilon}\varepsilon^2 p_i = \varepsilon^2 \sum_{|x-a|\geq\varepsilon} p_i = \varepsilon^2 P[|X - a| \geq \varepsilon] \ .$$

საიდანაც

$$P[|X - a| \geq \varepsilon] \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \ . \quad (6)$$

(4) ტოლობის ძალით

$$P[|X - a| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \ .$$

მაგალითი. შევაფასოთ ალბათობა $P[|X - M(X)| \geq 2]$, თუ ცნობილია, რომ $D(X) = 2$.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (6) ფორმულით, გვექნება

$$P[|X - M(X)| \geq 2] \leq \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

საზოგადოდ ჩებიშევის უტოლობა იძლევა მათემატიკური ლოდინისგან შემთხვევითი სიდიდის გადახრის მხოლოდ უხეშ შეფასებას, რასაც ადასტურებს შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი. ვთქვათ, M(X)=a, D(X)=σ^2 და $\varepsilon = 3\sigma$ მაშინ

$$P[|X - a| \geq 3\sigma] \leq \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9} = 0,(1).$$

თუ დავუშვებთ, რომ X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად a, σ^2 პარამეტრებით, მაშინ როგორც ვიცით, იმავე ხდომილობის ალბათობა დიდი სიზუსტით ტოლია 0,0027, რაც გაცილებით ნაკლებია ვიდრე 0,(1).

2. დიდ რიცხვთა კანონი

ვთქვათ, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, a მათემატიკური ლოდინითა და σ^2 დისპერსიით.

განვიხილოთ

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. (1) და (2) ფორმულის და (6) უტოლობის ძალით, ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვისათვის გვექნება:

$$P[|\bar{X}_n - M\bar{X}_n| > \varepsilon] = P[|\bar{X}_n - a| > \varepsilon] \leq \frac{D\bar{X}_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} .$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0$, როცა $n \to \infty$, მივიღებთ

$$P[|\bar{X}_n - a| > \varepsilon]=0.$$

უკანასკნელი თანაფარდობა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა შემთხვევით სიდიდეებს არ გააჩნიათ სასრული დისპერსია. საბოლოოდ შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ თეორემა, რომელიც ცნობილია დიდ რიცხვთა კანონის სახელით.

თეორემა. (დიდ რიცხვთა კანონი) თუ $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია საერთო a მათემატიკური ლოდინით, მაშინ ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - a| > \varepsilon\} = 0.$$

განსაზღვრება. შემთხვევით სიდიდეთა $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ მიმდევრობას ეწოდება ალბათობით კრებადი Y შემთხვევით სიდიდისაკენ თუ ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\lim_{n\to\infty} P[|Y_n - Y| > \varepsilon] = 0.$$

თეორემა (ჩებიშევის თეორემა) თუ $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, რომელთა დისპერსიების მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ერთი და იგივე მუდმივით, ე.ი. $D(X_n) \leq C$, $n = 1, 2, 3, \dots$ მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

ჩებიშევის თეორემის არსი მდგომარეობს შემდეგში: მიუხედავად იმისა, რომ ცალკეულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებს შეუძლიათ მიიღონ თავისი მათემატიკური ლოდინისგან საგრძნობლად განსხვავებული მნიშვნელობები, დიდი რაოდენობის შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული (როგორც შემთხვევითი სიდიდე), გარკვეული აზრით, კარგავს შემთხვევითი სიდიდის ხასიათს. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, ცალკეულ შემთხვევით სიდიდეს შეიძლება გააჩნდეს დიდი გადახრა, მაგრამ მათი საშუალო არითმეტიკულის გადახრა საკმარისად მცირეა, როცა შესაკრებთა რიცხვი დიდია.

ჩებიშევის თეორემის კერძო სახეს წარმოადგენს ი. ბერნულის თეორემა, რომელიც დიდ რიცხვთა კანონის უმარტივეს ფორმას წარმოადგენს.

თეორემა. ვთქვათ, m არის A ხდომილობის მოხდენის რიცხვი n დამოუკიდებელ ცდაში. ვიგულისხმოთ, რომ თითოეულ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა არის p, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{m}{m} - p\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

შევნიშნოთ, რომ $\frac{m}{n}$ სიდიდე არის A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე, ხოლო p არის A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა. ბერნულის თეორემა აკავშირებს ამ ორ სიდიდეს: ფარდობით სიხშირეს და ალბათობას. პირველი ემპირიული სიდიდეა, მეორე კი – თეორიული. ბერნულის თეორემა იმაზე მიგვითითებს, რომ თუ ცდათა რიცხვი დიდია, როგორც შემდგომ ვნახავთ, მაშინ ფარდობითი სიხშირე ამავე ხდომილობის უცნობი თეორიული ალბათობის „კარგი" შეფასებაა. ეს თეორემა საშუალებას იძლევა ალბათობის თეორია, როგორც შემთხვევით ხდომილობათა კანონზომიერებების მათემატიკური მოდელი, დაუკავშირდეს პრაქტიკას, ე.ი. გვქონდეს ამა თუ იმ პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტის საშუალება.

სავარჯიშო მაგალითები

1) ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ $p_k = P[|X - M(X) < k\sigma|]$, $k = 1,2,3.$ ალბათობები, თუ X არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე.

2) X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი M(X)=1, ხოლ დისპერსია $D(X) = 0{,}04.$ ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ $0{,}5 < X < 1{,}5$ უტოლობის ალბათობა.

3) ვისარგებლოთ ჩებიშევის უტოლობით, შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ $|X - M(X)|$<0,2. თუ $D(X) = 0{,}004.$

4) მოცემულია $P[|X - M(X)| < \varepsilon] \geq 0{,}9$ და $D(X) = 0{,}009$ ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით ქვემოდან შევაფასოთ ε –ის მნიშვნელობა.

5) X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი M(X)=1, ხოლ დისპერსია $D(X) = 0{,}04.$ შევაფასოთ ქვემოდან შემდეგი ხდომილობების ალბათობები:

$$A = \{0{,}5 \leq X < 1{,}5\},\ B = \{0{,}75 \leq X < 1{,}35\},\ C = \{X < 2\}.$$

6) დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების კანონით:

x	0,3	0,6
	0,2	0,8

ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ $|X - M(X)| < 0,2$ უტოლობის ალბათობა.

7) დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების კანონით:

x	*0,1*	*0,4*	*0,6*
p	*0,2*	*0,3*	*0,5*

ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ $|X - M(X)| < \sqrt{0,4}$.

თავი 12

მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები

1.მათემატიკური სტატისტიკის საგანი და ძირითადი ამოცანები

მათემატიკური სტატისტიკა, როგორც ალბათობის თეორია, შეისწავლის შემთხვევით მოვლენებს და მასთან დაკავშირებულ ამოცანებს. მათემატიკური სტატისტიკა იყენებს ალბათობის თეორიის მეთოდებს, სარგებლობს ანალოგიური ცნებებით, მაგრამ მიუხედავათ ამისა, იგი განიხილება როგორც დამოუკიდებელი საგანი. მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანები, გარკვეული აზრით, ალბათობის თეორიის ამოცანების შებრუნებულია. კერძოდ, თუ ალბათობის თეორიის ძირითადი ამოცანაა მოცემული ალბათური მოდელიდან სხვადასხვა რთული ხდომილობების ალბათობების გამოთვლა და ალბათური კანონზომიერებების დადგენა, მათემატიკური სტატისტიკის ძირითად (მიზანს) ამოცანას წარმოადგენს შემთხვევით მოვლენის დაკვირვებების საფუძველზე დასაბუთებული სტატისტიკური დასკვნების გამოტანა შესასწავლი შემთხვევითი მოვლენის ალბათური მოდელის შესახებ.

მაგალითისთვის განვიხილოთ ექსპერიმენტი, რომელშიც ვაკვირდებით რაიმე A ხდომილობის მოხდენა არ მოხდენისფაქტს. ჩვენი მიზანია დაკვირვებათა საფუძველზე ვიპოვოთ (შევაფასოთ) A ხდომილობის უცნობი $p=P(A)$ ალბათობა. საქმე გვაქვს მათემატიკური სტატისტიკის ტიპურ ამოცანასთან. თუ n ცდაში A ხდომილობას ადილი ჰქონდა m-ჯერ, უცნობი $P(A)$ ალბათობის შესაფასებლად ავიღოთ $\frac{m}{n}$ სიდიდე, რომელიც, გარკვეული აზრით, ახლოს უნდა იყოს $P(A)$ ალბათობასთან, როგორც შემდგომ ვნახეთ ამის გარანტიას იძლევა დიდ რიცხვთა კანონი.

უცნობ პარამეტრთა სტატისტიკური შეფასება წარმოადგენს მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას. განიხილება აგრეთვე არაპარამეტრული შეფასების ამოცანები (განაწილების კანონი, განაწილების ფუნქცია, სიმკვრივე,...), სტატისტიკური ჰიპოთეზები.

3. შერჩევითი მეთოდი

მათემატიკური სტატისტიკის კვლევის ერთ-ერთ ძირითად მეთოდს წარმოადგენს ე.წ. შერჩევითი მეთოდი. მისი არსის უკეთ გასარკვევად განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ გვაინტერესებს წუნდებულ დეტალთა რაოდენობის დადგენა ქარხნის მიერ გამოშვებული 1000000 დეტალიდან. ცხადია, ყველა დეტალის შემოწმება ძალზე შრომატევადი საქმეა, ზოგჯერ შეუძლებელიც (შეიძლება დეტალი შემოწმების შედეგად გაფუჭდეს), ამიტომ მოხერხებულია ქარხნის მიერ გამოშვებულ წუნდებულ დეტალთა რაოდენობაზე დასკვნა გავაკეთოთ მის რაღაც ნაწილზე დაკვირვების შედეგად.

განსაზღვრება. ერთგვაროვან ობიექტთა ერთობლიობის ზოგადი თვისებების კვლევის სტატისტიკურ მეთოდს, რომლის საფუძველია ამ ობიექტთა მხოლოდ ნაწილის შერჩევა და შესწავლა, შერჩევითი მეთოდი ეწოდება.

განსაზღვრება. ყველა იმ ერთგვაროვან ობიექტთა ერთობლიობას საიდანაც ხდება შერჩევა, გენერალური ერთობლიობა ეწოდება, ხოლო შერჩეული ელემენტთა ერთობლიობას, რომელთა შესწავლის საფუძველზე კეთდება დასკვნა გენერალური ერთობლიობის შესახებ, შერჩევითი ერთობლიობა ანუ შერჩევა ეწოდება.

იმისათვის, რომ შერჩევის საფუძველზე გაკეთებული დასკვნა იყოს ‘‘სწორი’’ საჭიროა შერჩევა იყოს წარმომადგენლობითი. დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად, შერჩევა იქნება წარმომადგენლობითი თუ იგი შემთხვევითია, ე.ი. გენერალური

ერთობლიობის ყოველ ობიექტს შერჩევაში მოხვედრის ერთნაირი ალბათობა აქვს.

შერჩევა შეიძლება განხორციელდეს ორნაირად: შერჩევა დაუბრუნებლად, როდესაც ყოველ შემოწმებულ ობიექტს აღარ ვაბრუნებთ გენერალურ ერთობლიობაში და შერჩევა დაბრუნებით, როდესაც ყოველ შემოწმებულ ობიექტს ვაბრუნებთ გენერალურ ერთობლიობაში, შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ შერჩევას დაბრუნებით. იგულისხმება, რომ შერჩევის პროცესი არ ცვლის გენერალური ერთობლიობის განაწილებას.

შერჩევით მეთოდს შეიძლება მიეცეს შემდეგი ინტერპრეტაციაც, რომელიც დაფუძნებული იქნება ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის და შემთხვევითი სიდიდის ცნებებზე. ამით საშუალება მოგვეცემა სტატისტიკური ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ და ამოვხსნათ ალბათობათა თეორიაში მიღებული მეთოდებით.

ვთქვათ, ვატარებთ რაიმე ცდას, რომლის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა **Ω**. განვიხილოთ **Ω** სივრცეზე X შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების ფუნქციაა F(x) . დავუშვათ ცდას ვიმეორებთ n-ჯერ , i-ური ცდის შედეგად X შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებული მნიშვნელობა აღვნიშნოთ x_i –ით. მივიღებთ მიმდევრობას:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n. \qquad \textbf{(1)}$$

აღნიშნული მიმდევრობა შეიძლება განვიხილოთ შემდეგნაირადაც: განვიხილოთ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \qquad (2)$$

რომლის ყოველი წევრი განაწილებულია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონით. x_i იყოს X_i შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებული რეალიზაცია (i=1,2,..,n). შემდგომში (1) და (2) მიმდევრობებს გავაიგივებთ.

განსაზღვრება. n მოცულობის შერჩევა F(x) განაწილების ფუნქციის მქონე გენერალური ერთობლიობიდან ეწოდება დამოუკიდებელ, ერთნაირად განაწილებულ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას, რომლის თითოეული წევრი განაწილებულია F(x) განაწილების კანონით. შემდგომში, X შემთხვევითი სიდიდის რეალიზაციის შედეგად მიღებულ მნიშვნელობებს დავალაგებთ ზრდის მიხედვით, მიმდევრობას

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \quad , \qquad \textbf{(3)}$$

ვარიაციული მწკრივი ეწოდება.

(3) მიმდევრობაში შესაძლებელია ელემენტთა განმეორება. ვთქვათ, სულ გვაქვს r განსხვავებული მნიშვნელობა $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$, ამასთან x_i –ური

შერჩევაში გვხდება n_i-ჯერ (i=1,2,..,r, $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$). n_i რიცხვს ეწოდება x_i–ური ელემენტის სიხშირე, ხოლო შეფარდებას $-W_i=\frac{n_i}{n}$ ფარდობითი სიხშირე .

შერჩევის ჩაწერა მოსახერხებელია ცხრილის სახით, რომლის პირველ სტრიქონში ჩაწერილია შერჩევის განსხვავებული მნიშვნელობები, ხოლო მეორე სტრიონში მათი შესაბამისი ფარდობითი სიხშირეები. ასეთ ცხრილს X შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკური განაწილების ცხრილი ეწოდება:

X	x_1	x_2	x_3	. . .	x_r	x_{r-1}
W	w_1	w_2	w_3	. . .	w_{r-1}	w_r

თუ X უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ განაწილების ცხრილის შესადგენად იქცევიან შემდეგნაირად: X შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებულ მნიშვნელობათა სიმრავლეს ვყოფთ k ნაწილად წერტილებით $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$.

განვიხილოთ ინტერვალები:

$$[y_0, y_1];\ ]y_1, y_2];\ ]y_2, y_3];\dots;]y_{k-1}, y_k] \ .$$

n_i-ით აღვნიშნოთ დაკვირვებათა ის რაოდენობა (1) შერჩევიდან, რომლებიც მოთავსდნენ $]y_{i-1}, y_i]$ ინტერვალში (i=1,2,..,k). ხოლო $W_i=\frac{n_i}{n}$.

X	$[y_0, y_1]$	$]y_1, y_2]$	. . .	$]y_{k-1}, y_k]$
W	w_1	w_2	. . .	w_k

4. განაწილების პარამეტრების სტატისტიკური შეფასება

განვიხილოთ რაიმე ობიექტთა გენერალური ერთობლიობა და, ვთქვათ, გვაინტერესებს ამ ობიექტთა რაიმე ნიშან-თვისების შესწავლა. დავუკავშიროთ მოცემულ გენერალურ ერთობლიობას შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ამ ნიშან-თვისებას შეესაბამება. ასეთი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი ამავე დროს წარმოადგენს გენერალური ერთობლიობის დასაკვირვებელ ნიშან-თვისების განაწილების კანონს. ამ განაწილების რიცხვით მახასიათებლებს ეწოდება გენერალური ერთობლიობის რიცხვითი პარამეტრები.

ვთქვათ, მოცემულია **n** მოცულობის შერჩევა F(x) განაწილების ფუნქციის მქონე გენერალური ერთობლიობიდან $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

განსაზღვრება. $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ სიდიდეების ნებისმიერ $S=S(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ ფუნქციას სტატისიკა ეწოდება.

სტატისტიკის მაგალითებია ფუნქციები:

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+X_3+\dots+X_n}{n}, \qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \quad \text{და ა.შ.}$$

X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად მიღებული სტატისტიკა X-ის უცნობი პარამეტრის შეფასებას წარმოადგენს, ამიტომ შემდგომში გავაიგივებთ სტატისტიკის და შეფასების ცნებებს. ცხადია, შეფასების ასეთი განმარტება ძალიან ზოგადია და გამოხატავს იმ მოსაზრებას, რომ შეფასებები უნდა ავაგოთ შერჩევის საშუალებით და არაფერს გვეუბნება, თუ რამდენად ახლოსაა იგი გენერალური ერთობლიობის შესაბამის რიცხვით მახასიათებლებთან.

განვიხილოთ X შემთხვევითი სიდიდე რომლის განაწილების ფუნქცია შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს $F(x,\theta)$. **n** მოცულობის $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ შერჩევის საშუალებით ვიპოვოთ უცნობი θ პარამეტრის გარკვეული აზრით ''კარგი'' შეფასება $\tilde{\theta}$. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, θ პარამეტრის შეფასება ეწოდება ნებისმიერ $\widetilde{\theta_n}=\tilde{\theta}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ ფუნქციას. ცხადია, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ თვითონაა შემთხვევითი სიდიდეები, ამიტომ $\widetilde{\theta_n}$ არის შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების კანონი დამოკიდებულია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონზე და შერჩევის მოცულობაზე.

იმისათვის, რომ θ პარამეტრის შეფასება იყოს პრაქტიკულად ღირებული, იგი უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ მოთხოვნებს.

განსაზღვრება. სტატისტიკურ შეფასებას ეწოდება წერტილოვანი შეფასება, თუ იგი განისაზღვრება ერთი რიცხვით. წერტილოვან შეფასებებს მოეთხოვება ძალდებულობა, ჩაუნაცვლებლობა და ეფექტურობა, რომლებსაც ქვემოთ განვმარტავთ.

განსაზღვრება. θ პარამეტრის $\widetilde{\theta_n}=\tilde{\theta}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ შეფასებას ეწოდება ჩაუნაცვლებელი (გადაუადგილებადი), თუ მისი მათემატიკური ლოდინი შერჩევის ნებისმიერი მოცულობისათვის უდრის შესაფასებელი პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას

$$M(\widetilde{\theta_n}) = \theta \,, \qquad (1)$$

როგორიც არ უნდა იყოს n.

განსაზღვრება. θ პარამეტრის $\widetilde{\theta_n} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ შეფასებას ეწოდება ძალდებული, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის სრულდება შემდეგი თანაფარდობა:

$$P[|\widetilde{\theta_n} - \theta| < \varepsilon] \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

განსაზღვრება. θ პარამეტრის $\widetilde{\theta_n}^{(1)}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ შეფასებას ეწოდება უფრო ეფექტური, ვიდრე $\widetilde{\theta_n}^{(2)}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, თუ $M(\widetilde{\theta_n}^{(1)}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) - \theta)^2 < M(\widetilde{\theta_n}^{(2)}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) - \theta)^2$. ეფექტურობის საზომად მიღებულია შეფარდება

$$e = \frac{M(\widetilde{\theta_n}^{(2)}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) - \theta)^2}{M(\widetilde{\theta_n}^{(1)}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) - \theta)^2}.$$

განვიხილოთ $\inf M(\widetilde{\theta_n} - \theta)^2$ ყველა შესაძლო $\widetilde{\theta_n}$-ის მიმართ. შეფასებას $\widetilde{\theta_n} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, რომლისთვისაც ეს ქვედა საზღვარი მიიღწევა ეწოდება ეფექტური შეფასება.

განსაზღვრება. θ პარამეტრის $\widetilde{\theta_n}^{(1)}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ შეფასებას ეწოდება ასიმპტოტურად ეფექტური შეფასება, რომლისთვისაც სრულდება ზღვრული ტოლობა:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M(\widetilde{\theta_n}\ (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) - \theta)^2}{\inf M(\widetilde{\theta_n}\ (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) - \theta)^2} = 1.$$

ამრიგად, როდესაც ვეძებთ უცნობი θ პარამეტრის $\widetilde{\theta_n} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ შეფასებას უნდა გავითვალისწინოთ ზემოთ მოყვანილი მოთხოვნები: ძალდებულობა, ჩაუნაცვლებლობა და ეფექტურობა.

მაგალითი. უცნობი მათემატიკური ლოდინის შესაფასებლად განვიხილოთ სტატისტიკა $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. ვთქვათ, მოცემულია **n** მოცულობის შერჩევა გენერალური ერთობლიობიდან $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$. შერჩევის განმარტების თანახმად, $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. აღვნიშნოთ:

$$M(X_i) = a, \quad D(X_i) = \sigma^2.$$

მაშინ

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k) = \frac{1}{n}na = a, \tag{1}$$

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{2}$$

ჩებიშევის უტოლობის თანახმად (2)-დან მივიღებთ:

$$P[|\bar{X} - a| > \varepsilon] \leq \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \to 0,$$

როცა $n \to \infty$.

აქედან ცხადია, რომ

$$P[|\bar{X} - a| < \varepsilon] \to 1, \text{ როცა } n \to \infty. \qquad (3)$$

(1) და (3) ტოლობები გვიჩვენებს, რომ შერჩევის საშუალო არითმეტიკული არის მათემატიკური ლოდინის ძალდებული და ჩაუნაცვლებელი შეფასება. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ უცნობი დისპერსიის შეფასება

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

არის ძალდებული და ჩაუნაცვლებელი შეფასება.

5. მომენტთა მეთოდი

განვიხილოთ X შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების ფუნქცია შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს. f(x,θ) იყოს განაწილების სიმკვრივე. მაშინ, ცხადია, მათემატიკური ლოდინი M(X) იქნება θ პარამეტრის ფუნქცია: M(X)=$m_1(\theta)$. ემპირიული საშუალო $\bar{X}$= $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ წარმოადგენს შერჩევითი მნიშვნელობების ფუნქციას.

განვიხილავთ ორი სახის მომენტს – თეორიულს და ემპირიულს. თეორიულს ვუწოდებთ გენერალური ერთობლიობის ჭეშმარიტ მომენტს, ხოლო ემპირიულს– შერჩევის საფუძველზე გამოთვლილ მომენტს.

მომენტთა მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდგომში: ხდება განაწილების თეორიული და ემპირიული შესაბამისი მომენტების გატოლება, რის შედეგადაც მიიღება განტოლება უცნობი θ პარამეტრის მიმართ: $m_1(\theta)$= $\bar{x}$, რომლის ამონახსნი $\widetilde{\theta_n} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ წარმოადგენს უცნობი θ პარამეტრის შეფასებას.

თუ შერჩევის საფუძველზე უნდა შეფასდეს არა ერთი, არამედ რამდენიმე, ვთქვათ, k- უცნობი პარამეტრი $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, მაშინ უნდა ვიპოვოთ გენერალური განაწილების პირველი, მეორე, და ა. შ. k-ური რიგის თეორიული მომენტები:

$$m_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k),\ m_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k),\ \dots\ , m_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k).$$

შემდეგ ვიპოვოთ შესაბამისი ემპირიული მომენტები:

$$\mu_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n),\quad \mu_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n),\ \dots\ ,\ \mu_k(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

და გავუტოლოთ ისინი ერთმანეთს:

$m_i(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k)=\mu_i(X_1,X_2,X_3,\dots,X_n)$,

(i=1,2,..,k). (4)

(4) სისტემის ამონახსენი:

$$\theta_i=\theta(X_1,X_2,X_3,\dots,X_n),\ (i=1,2,..,k)$$

წარმოადგენს უცნობი $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$ პარამეტრთა სტატიტიკურ შეფასებებს მომენტთა მეთოდით. მტკიცდება, რომ მომენტთა მეთოდით მიღებული შეფასებები ძალდებულია, მაგრამ არ არის ეფექტური და არც ასიმპტოტურად ეფექტური, მიუხედავათ ამისა, ამ მეთოდს, სიმარტივის გამო, გამოვიყენებთ მაშინ, როცა სხვა მეთოდებით ძნელდება შეფასებების პოვნა.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია **n** მოცულობის შერჩევა მაჩვენებლიანი განაწილების კანონის მქონე გენერალური ერთობლიობიდან $X_1,X_2,X_3,\dots,X_n$ და შესაფასებელია მისი ერთადერთი პარამეტრი μ. როგორც ვიცით, მაჩვენებლიანი განაწილების პირველი რიგის თეორიულ მომენტს აქვს სახე:

$$m_1 = \mu\int_0^{\infty} x\, e^{-\mu x}dx = \frac{1}{\mu}\ .$$

შერჩევის ანუ პირველი რიგის ემპირიული მომენტი არის $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$. მათი გატოლებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k,$$

საიდანაც μ შეფასება იქნება:

$$\hat{\mu}= \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}X_k} = \frac{1}{\bar{X}}\ .$$

5. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი

შერჩევის საშუალებით შეფასების პოვნის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მეთოდია მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი, შემუშავებული ცნობილი სტატისტიკოსის ფიშერის მიერ. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ მოცემულია **n** მოცულობის შერჩევა ($X_1,X_2,X_3,\dots,X_n$) X შემთხვევითი სიდიდიდან, რომლის განაწილების ფუნქცია შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს F(x,θ). f(x,θ) იყოს მისი განაწილების სიმკვრივე. შევეცადოთ ვიპოვოთ θ პარამეტრის ისეთი $\widetilde{\theta_n} = \tilde{\theta}(X_1,X_2,X_3,\dots,X_n)$ შეფასება, რომლისთვისაც მოცემული შერჩევის განხორციელების ალბათობა იქნება მაქსიმალური.

დამოუკიდებელი ხდომილობების ალბათობების გამრავლების წესის თანახმად, ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევითი სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად მივიღებთ ზუსტად მოცემულ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ შერჩევას არის

$$f(X_1, \theta).\ f(X_2, \theta) \dots\ f(X_n, \theta).$$

აღვნიშნოთ ეს გამოსახულება $L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ სიმბოლოთი:

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = f(X_1, \theta).\ f(X_2, \theta) \dots\ f(X_n, \theta). \qquad (1)$$

თუ შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტულია, მაშინ გვექნება:

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = P(X_1, \theta).\ P(X_2, \theta) \dots\ P(X_n, \theta), \qquad (2)$$

სადაც

$$P(X_i, \theta) = P(X = X_i),\ (i=1,2,..,n).$$

(1) და (2) ფორმულებით მოცემულ ფუნქციებს მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქციები ეწოდება. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდის არსიდან გამომდინარე, θ პარამეტრის შესაფასებლად უნდა ავიღოთ ისეთი $\bar{\theta}$, რომლისთვისაც ფუნქცია $L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ აღწევს მაქსიმუმს.

როგორც ვიცით, ფუნქცია $L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$, θ პარამეტრის მიმართ აღწევს მაქსიმუმს, როდესაც

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = 0\ . \qquad (3)$$

(3) განტოლების ამონახსნი იქნება მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით θ პარამეტრის შეფასება.

როგორც მათემატიკური ანალიზიდანაა ცნობილი, $L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ და $\ln L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ ფუნქციების მაქსიმუმის წერტილები ემთხვევა ერთმანეთს, ამიტომ გამოთვლების გამარტივების მიზნით (3) განტოლების ნაცვლად უკეთესია ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = \frac{1}{L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = 0. \qquad (4)$$

თუ შესაფასებელია არა ერთი, არამედ k უცნობი $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ პარამეტრი, მაშინ მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით შეფასებები მიიღება შემდეგი განტოლებათა სისტემის ამოხსნით:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = 0,\quad (i=1,2,..,k).$$

მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით მიღებულ შეფასებებს აქვს (გარკვეული აზრით) კარგი თვისებები:

1. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით მიღებული შეფასება არის ძალდებული.

2. θ პარამეტრის $\widetilde{\theta_n} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ შეფასება არის ასიმპტოტურად ეფექტური შეფასება.

3. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით მიღებული შეფასება ასიმპტოტურად ნორმალურია. რაც იმას ნიშნავს, რომ $\widetilde{\theta_n}$-ის, როგორც შემთხვევითი სიდიდის, განაწილება n-ის ზრდასთან ერთად მიისწრაფვის ნორმალური განაწილების კანონისაკენ.

4. თუ არსებობს θ პარამეტრის ეფექტური შეფასება, მაშინ (3) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც ემთხვევა ამ შეფასებას.

მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით მიღებულ შეფასებას აქვს უარყოფითი მხარეებიც, კერძოდ, ამ მეთოდით მიღებული შეფასებები ყოველთვის არ არის ჩაუნაცვლებადი. გარდა ამისა, დასაჯერობის განტოლება ზოგჯერ რთული ამოსახსნელია.

მაგალითი. ვთქვათ, ბერნულის ცდათა სქემაში შესაფასებელია "წარმატების" უცნობი p ალბათობა. მაშინ **(2)** ფორმულის თანახმად

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, p) = p^n (1-p)^{n-m}.$$

(4) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(X_1, X_2, \dots, X_n, p) = \frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p} = 0.$$

სადანაც ვპოვულობთ $\tilde{p}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = \frac{m}{n}$.

მაგალითი. განვიხილოთ ნორმალური განაწილების a და σ^2 პარამეტრების შეფასების პოვნის ამოცანა მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით.

ამ შემთხვევაში **(1)** და (4) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, a, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2\right];$$

$$\ln L(X_1, X_2, \dots, X_n, a, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2.$$

შეფასების საპოვნელად ვიპოვოთ

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln L(X_1, X_2, \dots, X_n, a, \sigma^2), \quad \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(X_1, X_2, \dots, X_n, a, \sigma^2)$$

და ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - a) = 0 \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 = 0 \end{cases}$$

მივიღებთ: $\tilde{a} = \frac{X_1+X_2+X_3+\dots+X_n}{n} = \bar{X}$; $\widetilde{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

როგორც ვხედავთ, მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით მიღებული მათემატიკური ლოდინის შეფასება ჩაუნაცვლებადია, ხოლო დისპერსიის შეფასება არაა ჩაუნაცვლებადი შეფასება.

6. ემპირიული განაწილების ფუნქცია

ჩვენ განვიხილეთ ისეთი ამოცანები, როდესაც ცნობილი იყო განაწილების სახე და უცნობი იყო მისი ზოგიერთი პარამეტრი (მათემატიკური ლოდინი, დისერსია და სხვა). X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების საშუალებით ვაკეთებდით უცნობი θ პარამეტრის, გარკვეული აზრით ''კარგი'' შეფასებას.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი ამოცანები, როდესაც შესაფასებელია არა მარტო განაწილების პარამეტრები, არამედ განაწილების ზოგადი სახეც და იგი უნდა დადგინდეს შერჩევის საფუძველზე, ამ ტიპის ამოცანებს არაპარამეტრული ამოცანები ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია **n** მოცულობის შერჩევა

$$(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n), \qquad (1)$$

X შემთხვევითი სიდიდიდან, რომლის განაწილების ფუნქცია უცნობია. შევეცადოთ (1) შერჩევის საფუძველზე ავაგოთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის შეფასება.

როგორც ვიცით, განაწილების ფუნქცია F(x)=P(X<x) წარმოადგენს იმის ალბათობას, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას I_x=] $-\infty$,x[ინტერვალიდან. აღვნიშნოთ w_x–ით (1) შერჩევის იმ მნიშვნელობათა რაოდენობა, რომლებიც ეკუთვნის I_x=] $-\infty$,x[ინტერვალს. დიდ რიცხვთა კანონით საკმაოდ დიდი n-ისათვის $P(X\in I_x)\approx \frac{w_x}{n}$.

განსაზღვრება. $\tilde{F}_n(x)$ ფუნქციას, რომელიც ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის განსაზღვრულია ტოლობით

$$\tilde{F}_n(x)= \frac{w_x}{n} \qquad (2)$$

ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის ემპირიული განაწილების ფუნქცია მიღებული (1) შერჩევის საფუძველზე.

შევნიშნოთ, რომ (1) შერჩევის მნიშვნელობები შემთხვევითი სიდიდებია, მათი საშუალებით განსაზღვრული $\tilde{F}_n(x)$ ფუნქციაც შემთხვევითი იქნება. $\tilde{F}_n(x)$ ფუნქციას, როგორც F(x) ფუნქციის შეფასებას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $\tilde{F}_n(x)$ ფუნქცია, განაწილების F(x) ფუნქციის არაგადადგილებადი შეფასებაა

$$M(\tilde{F}_n(x)) = F(x);$$

2. $\tilde{F}_n(x)$ ფუნქცია, არის განაწილების F(x) ფუნქციის ძალდებული შეფასება

$$P[|\tilde{F}_n(x) - F(x)| < \varepsilon] \to 0 \text{ როცა } n \to \infty.$$

X შემთხვევითი სიდიდის ემპირიული განაწილების ფუნქციას აქვს განაწილების ფუნქციის ყველა თვისება:

1. $\tilde{F}_n(-\infty)=0$, $\tilde{F}_n(+\infty)=1$;
2. თუ $x_1 > x_2$ მაშინ $\tilde{F}_n(x_1) \geq \tilde{F}_n(x_2)$ არაკლებადია;
3. $\tilde{F}_n(x)$ ფუნქცია მარცხნიდან უწყვეტია.

7. ნდობის ინტერვალები

ვთქვათ, მოცემულია **n** მოცულობის შერჩევა

$$(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) \quad (1)$$

X შემთხვევითი სიდიდიდან, რომლის განაწილების ფუნქცია $F(x,\theta)$ შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს. აქამდე უცნობი θ პარამეტრის შეფასებას ვახდენდით ერთი გარკვეული რიცხვით, რომელსაც წერტილოვან შეფასებას ვუწოდებთ. თუ ცდათა რიცხვი დიდია, ხოლო წერტილოვანი შეფასება ხასიათდება არაგადადგილებადობით და ძალდებულობით, მაშინ შეფასება $\tilde{\theta}$ ‘‘კარგად ცვლის’’ შესაფასებელ θ პარამეტრს.

როდესაც ცდათა რიცხვი არცთუ ისე დიდია, $\tilde{\theta}$ პარამეტრის შემთხვევითი ხასიათიდან გამომდინარე, შეიძლება მივიღოთ დიდი ცდომილობა. ამ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია (1) შერჩევის საფუძველზე ავაგოთ ისეთი $]\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2[$ ინტერვალი, რომ საკმაოდ დიდი α ალბათობით შეგვეძლოს ვთქვათ, რომ θ მოთავსებულია $]\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2[$ ინტერვალში, ($\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_1(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, $\tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_2(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$) რამდენადაც $\tilde{\theta}_1$ და $\tilde{\theta}_2$ შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო θ

ფიქსირებული რიცხვია, ამიტომ შეიძლება ვილაპარაკოთ $[\widetilde{\theta_1} < \theta < \widetilde{\theta_2}]$ ხდომილობის ალბათობაზე α=P$[\widetilde{\theta_1} < \theta < \widetilde{\theta_2}]$. α-ს ეწოდება ნდობის ალბათობა, ხოლო $]\widetilde{\theta_1}, \widetilde{\theta_2}[$ ინტერვალს α ალბათობის შესაბამისი ნდობის ინტერვალი.

განაწილების უცნობი θ პარამეტრის ყველაზე უხეშ შეფასებას წარმოადგენს $]-\infty,+\infty[$ ინტერვალი, α =1-ის ტოლი ალბათობით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\theta \in]-\infty,+\infty[$, მაგრამ, ცხადია, ასეთი შეფასება უვარგისია, რადგან იგი არ იძლევა არავითარ ინფორმაციას $\hat{\theta}$ პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობაზე. სასურველია ნდობის ინტერვალი ისე აიგოს, რომ მისი სიგრძე იყოს რაც შეიძლება მცირე, ხოლო α ნდობის ალბათობა, რაც შეიძლება დიდი. როგორც წესი, ორთავე ამოცანის ერთდროულად გადაწყვეტა შეუძლებელია, ამიტომ იქცევიან შემდეგნაირად: წინასწარ ირჩევენ α ნდობის ალბათობას ისე, რომ იგი ახლოს იყოს ერთთან და ეძებენ მის შესაბამის უმცირესი სიგრძის ნდობის ინტერვალს.

ნდობის ინტერვალის აგების პროცესი განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ამასთან დავუშვებთ, რომ X არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე a და σ^2 პარამეტრებით.

ვთქვათ, ვატარებთ რაღაც ფიზიკური სიდიდის ერთმანეთისგან დამოუკიდებელ გაზომვებს. ითვლება, რომ გაზომვის ცდომილობები განაწილებულია ნორმალურად, ამიტომ გაზომვის შედეგიც განაწილებულია ნორმალურად. თუ ადგილი არ აქვს სისტემატურ ცდომილობას შეგვიძლია ვთქვათ, რომ M(X)=a.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, გაზომვათა შედეგების დამუშავების ძირითადი ამოცანა ”გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობის დადგენა’’ მათემატიკურად ჩამოყალიბდება, როგორც ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის შეფასების ამოცანა.

ამ ამოცანის ამოხსნას დიდი n-სათვის იძლევა ემპირიული საშუალო:

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k .$$

თუ გაზომვათა რიცხვი n არცთუ ისე დიდია ცდომილება $\bar{X}$ და a-ს შორის შეიძლება საკმაოდ დიდი იყოს, ამიტომ საჭიროა აიგოს ისეთი $]a_1, a_2[$ ინტერვალი, რომელშიც მოცემული α ნდობის ალბათობით მოთავსებული იქნება a რიცხვი.

ნდობის ინტერვალის აგება განვიხილოთ ორ შემთხვევაში: 1. როცა σ ცნობილია. 2. როცა σ უცნობია.

1. ვთქვათ σ ცნობილია, ვიცით რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი ასევე განაწილებულია ნორმალურად, რადგან

X_k შემთხვევითი სიდიდეები ნორმალურადაა განაწილებული a და σ^2 პარამეტრებით.

$\bar{X}= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ შემთხვევითი სიდიდეც განაწილებულია ნორმალურად a და $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ პარამეტრებით.

განვიხილოთ ნორმირებული შემთხვევითი სიდიდიდე

$$U=\frac{\bar{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (1)$$

რომელიც განაწილებულია ნორმალურად პარამეტრებით 0 და 1, ამიტომ მოცემული α-სათვის ვიპოვოთ ისეთი t_α, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$P[-t_\alpha < U < t_\alpha]=\alpha, \qquad (2)$$

როგორც ვიცით, ალბათობა

$$P[-t_\alpha < U < t_\alpha]=\Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\ \Phi(t_\alpha)-1, \qquad (3)$$

სადაც Φ(X) არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია, Φ(X)=Φ(-X). t_α-ს მოსაძებნად უნდა ამოვხსნათ განტოლება

$$2\Phi(t_\alpha)= \alpha+1 \quad ანუ \quad t_\alpha= \Phi^{-1}(\frac{\alpha+1}{2}),$$

რომელიც საკმაო მიახლოებით იხსნება Φ ან Φ^{-1} ფუნქციის ცხრილის საშუალებით (იხ.დანართი 2).

გადავწეროთ (2) შემდეგი სახით:

$$P[-t_\alpha < \frac{\bar{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}} < t_\alpha]=\alpha$$

ანუ

$$P[\bar{X}- \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha<a<\bar{X}+ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha]= \alpha. \qquad (4)$$

ეს ნიშნავს იმას, რომ a მათემატიკური ლოდინის α ნდობის ალბათობის შესაბამისი ნდობის ინტერვალი არის

$$]\bar{X}- \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha,\ \bar{X}+ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha[\ . \qquad (5)$$

როგორც (5)-დან გამომდინარეობს, ნდობის ინტერვალის სიგრძე $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha$ დამოკიდებულია მხოლოდ შერჩევის მოცულობაზე, ამასთან, ცდათა რიცხვის ზრდასთან ერთად მცირდება. ინტერვალის ცენტრი მოთავსებულია $\bar{X}$ წერტილში.

2. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა σ უცნობია. ამ შემთხვევაში (1) გამოსახულებაში შედის ორი უცნობი –a და σ პარამეტრი. თუ σ პარამეტრის ნაცვლად ამ გამოსახულებაში შევიტანთ მის შეფასებას

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\quad ,$$

მივიღებთ

$$U=\frac{\bar{X}-a}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}\ . \qquad (6)$$

მტკიცდება, რომ U შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია ე.წ. სტიუდენტის განაწილება n თავისუფლების ხარისხით, რომლის განაწილების სიმკვრივეა $S_{n-1}(x)$.

იმისათვის, რომ ავაგოთ a მათემატიკური ლოდინის α ნდობის ალბათობის შესაბამისი ნდობის ინტერვალი, უნდა ვიპოვოთ ისეთი t_α, რომ შესრულდეს ტოლობა:

$$P[-t_\alpha < U < t_\alpha]=\alpha$$

ანუ ამოვხსნათ განტოლება:

$$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} S_{n-1}(x)\,dx=\alpha\ . \qquad (7)$$

ნდობის ინტერვალი მათემატიკური ლოდინისათვის α ნდობის ალბათობით იქნება:

$$]\bar{X}-\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}t_\alpha,\ \bar{X}+\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}t_\alpha[\ .$$

8. სტატისტიკური ჰიპოთეზები

ვთქვათ, მოცემულია ერთგვაროვან ობიექტთა გენერალური ერთობლიობა. X იყოს შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც გამოხატავს გენერალური ერთობლიობის ობიექტთა რაიმე ნიშან–თვისებას. გვაინტერესებს ამ შემთხვევითი სიდიდის უცნობი F(x) განაწილების ფუნქციის სახის დადგენა. გენერალური ერთობლიობის ბუნებიდან, შეიძლება გვქონდეს წინასწარი ვარაუდი (ჰიოთეზა), რომ განაწილების ფუნქციას აქვს რაღაც F(x) სახე. ანალოგიურად, თუ განაწილების ფუნქცია შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს, გარკვეული მოსაზრებით შეიძლება გამოვთქვათ ჰიპოთეზა $\theta=\theta_0$, სადაც θ_0 ცნობილი სიდიდეა.

ჰიპოთეზას ვუწოდოთ სტატისტიკური, თუ ის ეხება უცნობი განაწილების ფუნქციის სახეს ან უცნობ პარამეტრს.

ბუნებრივია, დაშვებულ ჰიპოთეზასთან ერთად განვიხილოთ მისი საწინააღმდეგო ჰიპოთეზაც. თუ შემოწმების შედეგად დაშვებული ჰიპოთეზა არ გამართლდა, მაშინ ადგილი ექნება მის საწინააღმდეგოს.

დაშვებულ (ძირითად) ჰიპოთეზას ეწოდება ნულოვანი და აღინიშნება H_0 სიმბოლოთი. მისგან განსხვავებულ ნებისმიერ ჰიპოთეზას ეწოდება ალტერნატიული და აღინიშნება H_1 სიმბოლოთი.

მაგალითად, თუ ნულოვანი ჰიპოთეზა მდგომარეობს იმაში, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $a=0$, მაშინ მისი ერთ-ერთი ალტერნატიული ჰიპოთეზა იქნება $a\neq 0$. ეს ფაქტი მოკლედ ასე ჩაიწერება: H_0: $a=0$; H_1: $a\neq 0$.

წესს, რომელიც განსაზღვრავს პირობებს, რომლის დროსაც შესამოწმებელ ჰიპოთეზას მივიღებთ ან უარვყოფთ ეწოდება სტატისტიკური კრიტერიუმი. ცხადია, ჰიპოთეზის შემოწმება ხდება იმ მონაცემების საფუძველზე, რომელსაც ვღებულობთ შერჩევიდან. ე.ი. სტატისტიკური კრიტერიუმი ადგენს წესს, თუ შემთხვევითი შერჩევის რა მონაცემების დროს მიიღება მოცემული ჰიპოთეზა და რა მონაცემების დროს არა.

სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების დროს შეიძლება დაშვებულ იქნეს ორი ტიპის შეცდომა ანუ, როგორც მათ უწოდებენ, პირველი ან მეორე გვარის შეცდომა.

შეცდომა პირველი გვარისაა, როდესაც ჭეშმარიტი H_0 ჰიპოთეზა მცდარად, ხოლო მეორე გვარისაა, როდესაც მცდარი H_0 ჰიპოთეზა ჩაითვლება ჭეშმარიტად.

H_0 ჰიპოთეზის შესამოწმებლად ავაგოთ სტატისტიკური კრიტერიუმი შემდეგნაირად:

1. შემოვიღოთ სპეციალურად შერჩეული შემთხვევითი სიდიდე, რომლის ზუსტი ან ზღვრული განაწილება ცნობილია. ცხადია, ეს სიდიდე შერჩევის მონაცემების ფუნქციაა. აღვნიშნოთ იგი K სიმბოლოთი (მას ჩვენ შემდგომში გავაიგივებთ სტატისტიკურ კრიტერიუმთან). მისი საშუალებით უნდა განვსაზღვროთ, მივიღებთ H_0 ჰიპოთეზას თუ უკუვაგდებთ მას.

2. დავაფიქსიროთ პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა α, რომელსაც მნიშვნელობის დონე ეწოდება. მნიშვნელობის დონე ეს ის საზღვარია, რომლის გადალახვის შემდეგ განსხვავება შერჩევის მონაცემებსა და ნულოვან ჰიპოთეზას შორის არსებითია, ე.ი. მონაცემები ნულოვანი ჰიპოთეზის წინააღმდეგია.

3. შემოვიღოთ H_0 -ს მიმართ ალტერნატიული ჰიპოთეზა H_1.

4. დავადგინოთ W კრიტიკული არე ანუ სტატისტიკური კრიტერიუმის იმ ნამდვილ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთა მიღებისას H_0 ჰიპოთეზა უკუიგდება. კრიტერიუმის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელებზეც H_0

ჰიპოთეზას მივიღებთ, ვუწოდოთ დასაშვებ მნიშვნელობათა არე. K წერტილს, რომელიც ყოფს კრიტიკულ და დასაშვებ მნიშვნელობათა არეებად, კრიტიკული წერტილი ეწოდება.

ზემოთ მოყვანილი ოთხი პუნქტი საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ სტატისტიკური კრიტერიუმი. პრაქტიკულად, შეიძლება თავიდანვე დავაფიქსიროთ პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა $\propto$ (ჩვეულებრივად $\propto$=0,1; 0,05; 0,02; 0,01). ყველა პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი კრიტერიუმისათვის შედგენილია ცხრილები და P(K∈W)=1 ტოლობიდან შეიძლება K_0 კრიტიკული წერტილის დადგენა. ჩვენ ვაგებთ კრიტიკულ არეს იმ მოსაზრებიდან, რომ ნულოვანი ჰიპოთეზის დროს კრიტერიუმის კრიტიკულ არეში მოხვედრის ალბათობაა $\propto$. სასურველია ვიცოდეთ, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კრიტერიუმი მოხვდება კრიტიკულ არეში, როცა სამართლიანია ალტერნატიული ჰიპოთეზა. ვუწოდოთ ამ ალბათობას კრიტერიუმის სიმძლავრე, სხვა სიტყვებით, კრიტერიუმის სიმძლავრე არის ალბათობა იმისა, რომ ნულოვან ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, თუ სამართლიანია ალტერნატიული ჰიპოთეზა.

ვთქვათ, მეორე გვარის შეცდომის ალბათობაა β, მაშინ კრიტერიუმის სიმძლავრე იქნება 1-β. აქედან ჩანს, რომ რაც უფრო მეტია კრიტერიუმის სიმძლავრე, მით უფრო მცირდება მეორე გვარის ალბათობა β.

ამრიგად, ალბათობა იმისა, რომ კრიტერიუმი ჩავარდება კრიტიკულ არეში, როცა სამართლიანია H_0 ჰიპოთეზა, უდრის $\propto$-ს და ამავე დროს ალბათობა იმისა, რომ კრიტერიუმი ჩავარდება კრიტიკულ არეში, როცა სამართლიანია H_1 ჰიპოთეზა, უნდა იყოს მაქსიმალური. ამ ორ პირობას ეწოდება კრიტერიუმის სიმძლავრის მაქსიმიზაციის პოსტულატი, რაც ანალიზურად ასე ჩაიწერება:

$$P(K \in W \mid H_0)=\propto ; \quad P(K \in W \mid H_1)=\max. \qquad (1)$$

სტატისტიკურ კრიტერიუმს, რომელიც აკმაყოფილებს ამ პოსტულატს, ეწოდება უმძლავრესი კრიტერიუმი.

როგორც ვნახეთ, რაც უფრო მცირეა $\propto$ და β, მით უფრო კარგი კრიტიკული არე გვაქვს, მაგრამ თუ შერჩევის n მოცულობა ფიქსირებულია, $\propto$ და β-ს ერთდროული შემცირება შეუძლებელია, რადგან თუ $\propto$-ს შევამცირებთ, მაშინ β გაიზრდება.

$\propto$ და β-ს ერთდროული შემცირების ერთადერთი გზა შერჩევის მოცულობის გაზრდაა, რომელიც, თავის მხრივ, სიძნელეებთან არის დაკავშირებული.

უმძლავრესი კრიტერიუმის აგება სტატისტიკურ ჰიპოთეზათა შემოწმების ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა. უმძლავრესი კრიტერიუმების აგების არართული მეთოდები დადგენილია მხოლოდ მარტივი ჰიპოთეზებისათვის. ჰიპოთეზას ეწოდება მარტივი, თუ იგი ცალსახად განსაზღვრავს განაწილების ფუნქციას, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჰიპოთეზას ეწოდება რთული. მაგალითად, ჰიპოთეზა იმისა, რომ ნორმალური განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის ნულს, ხოლო დისპერსია–ერთს მარტივი ჰიპოთეზაა, რადგან იგი ცალსახად განსაზღვრავს X შემხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას. ჰიპოთეზა, ნორმალურად განაწილებული შემხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის ნულს, დისპერსია ნებისმერი დადებითი რიცხვია, რთული ჰიპოთეზაა.

იმ შემთხვევაში, როცა H_0 და H_1 ჰიპოთეზები მარტივია, ადგილი აქვს ნეიმან-პირსონის თეორემას.

თეორემა. თუ ძირითადი ჰიპოთეზა H_0 და ალტერნატიული H_1 ჰიპოთეზა მარტივებია, შესაბამისად, H_0: $\theta=\theta_0$; H_1: $\theta=\theta_1$ და თუ L$(x_1,x_2,\dots,x_n,\theta_0)$, L$(x_1,x_2,\dots,x_n,\theta_1)$ წარმოადგენენ დასაჯერობის ფუნქციებს, გამოთვლილს H_0 და H_1 ჰიპოთეზებისათვის, ხოლო X შემთხვევითი სიდიდე, რომლიდანაც აღებულია შერჩევა, უწყვეტია, მაშინ არსებობს კრიტერიუმი, რომელიც არის უმძლავრესი H_0 ჰიპოთეზისათის H_1 ჰიპოთეზის მიმართ. კრიტიკული არე და თვითონ კრიტერიუმი განისაზღვრება უტოლობით

$$\mathrm{L}(x_1,x_2,\dots,x_n,\theta_0) \geq C\mathrm{L}(x_1,x_2,\dots,x_n,\theta_1), \qquad (1)$$

სადაც C დადებითი რიცხვია, რომლის მნიშვნელობა დამოკიდებულია მნიშვნელოვნების $\propto$ დონეზე.

მაგალითი. ვიპოვოთ უმძლავრესი კრიტრიუმი H_0 ჰიპოთეზისათის, რომელიც გულისხმობს, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არის a_0. H_1 ალტერნატივა გვეუბნება, რომ $a_1 \neq a_0$, ხოლო დისპერსია ცნობილია და უდრის σ^2, ხოლო ამოკრეფის მოცულობაა n.

ამოხსნა. შევადგინოთ დასაჯერობის ფუნქციები, როცა მათემატიკური ლოდინი არის შესაბამისად a_1 და a_0.

$$\mathrm{L}(X_1,X_2,\dots,X_n,a_1) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a_1)^2\right]$$

$$\mathrm{L}(X_1,X_2,\dots,X_n,a_0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a_0)^2\right]$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულებები (1)- ში, მივიღებთ:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a_1)^2\right] \geq C\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a_0)^2\right] \qquad (2)$$

მე-2 უტოლობის ორივე მხარის გალოგარითმებით და გარკვეული გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$(a_1-a_0)\sum_{i=1}^{n}x_i - n(a_1^2 - a_0^2) \geq \sigma^2 \ln C.$$

თუ უკანასკნელში გავითვალისწინებთ, რომ $\sum_{i=1}^{n}x_i = n\bar{X}$ და ამოვხსნით $\bar{X}$ მიმართ მივიღებთ:

$$\bar{X} \geq \frac{\sigma^2 \ln C + n(a_1^2 - a_0^2)}{n(a_1-a_0)} \equiv A, \text{ თუ } \quad a_1 - a_0 > 0$$

$$\bar{X} \leq \frac{\sigma^2 \ln C + n(a_1^2 - a_0^2)}{n(a_1-a_0)} \equiv B, \text{ თუ } \quad a_1 - a_0 < 0$$

ამგვარად, ნეიმან–პირსონის თეორემის ძალით, ვიპოვეთ კრიტერიუმი და განვსაზღვრეთ კრიტიკული არე: მართლაც, კრიტერიუმი უნდა ავიღოთ ამოკრეფით საშუალო $\bar{X}$: თუ $a_1 - a_0 > 0$, მაშინ კრიტიკულ არეში მოხვდება $\bar{X}$-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელიც გადააჭარბებს A რიცხვს. თუ $a_1 - a_0 < 0$, მაშინ კრიტიკულ არეში ჩავარდება $\bar{X}$-ის ყველა ის მნიშვნელობა რომელიც ნაკლებია B რიცხვზე. A და B რიცხვები უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ შესრულდეს (1) ტოლობა.

9. პარამეტრულ ჰიპოთეზათა შემოწმება

განვიხილოთ კრიტერიუმი, რომელიც მიეკუთვნება პარამეტრულ კრიტერიუმებს, ე.ი. ისეთ კრიტერიუმებს, რომლებიც განიხილავენ ჰიპოთეზებს განაწილების უცნობი პარამეტრების შესახებ, როცა განაწილების სახე ცნობილია.

დავუშვათ, n მოცულობის შერჩევა ხდება ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდიდან, რომლის მათემატიკური ლოდინი უცნობია, ხოლო დისპერსია σ^2 ცნობილია. მაშინ, როგორც ვიცით, შერჩევით საშუალოს

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad (1)$$

აგრეთვე აქვს ნორმალური განაწილება პარამეტრებით $(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. ვთქვათ, შესამოწმებელია ჰიპოთეზა $H_0: m = a_0$, H_1 ალტერნატიული ჰიპოთეზით H_1: $m = a_1$.

სტატისტიკურ კრიტერიუმად მივიღოთ შემთხვევითი სიდიდე:

$$U = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma}\sqrt{n} \ . \qquad (2)$$

თუ მნიშვნელოვნების დონე არის α, მაშინ კრიტიკული არე, რომელიც მეორე გვარის შეცდომას მინიმალურს გახდის, მოიძებნება a_1 სიდიდის მნიშვნელობის მიხედვით.

თუ $a_1 > a_0$, მაშინ კრიტიკული არე იქნება მარჯვნივ. ე. ი. მას ეკუთვნის (2) კრიტერიუმის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელიც გადააჭარბებს U_α კრიტიკულ წერტილს. თავის მხრივ, U_α ისეთია, რომ სრულდება უტოლობა

$$P(U > U_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{U_\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \alpha. \qquad (3)$$

აქედან, U_α კრიტიკული არის დადგენა სიძნელეს არ წარმოადგენს თუ ვისარგებლებთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების (პარამეტრებით (0,1)) ცხრილებით.

თუ $a_1 < a_0$, მაშინ კრიტიკული არე იქნება მარცხნივ, ე. ი. მას ეკუთვნის (2) კრიტერიუმის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელიც ნაკლებია U_α კრიტიკულ წერტილზე, სადაც U_α მოიძებნება ანალოგიურად.

მაგალითი. ვთქვათ, გენერალური ერთობლიობის განაწილება ნორმალურია, $N(a; 5)$. შერჩევის მოცულობა $n = 9$. შესამოწმებელია ჰიპოთეზა $H_0: m = a_0 = 2$, H_1 ალტერნატიული ჰიპოთეზით H_1: $m = a_1 = 3$. პირველ რიგში დავაფიქსიროთ მნშვნელობის დონე $\alpha = 0{,}05$. ვთქვათ, შერჩევითი საშუალო $\bar{X} = 1{,}3$. რადგან $a_1 > a_0$, ამიტომ ავაგოთ მარჯვენა კრიტიკული არე. (3) ტოლობის საფუძველზე და ნორმალური განაწილების ცხრილებით ვპოულობთ $U_{0.05} = 1{,}65$, ამიტომ კრიტიკულ არეს ეკუთვნის კრიტერიუმის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელიც გადააჭარბებს 1,65-ს. ჩვენ შემთხვევაში კრიტერიუმის მნიშვნელობა

$$U = \frac{2 - 1{,}3}{5}\sqrt{9} = 0{,}42 < 1{,}65,$$

რადგანაც ეს მნიშვნელობა კრიტიკული არის გარეთაა, ამიტომ არა გვაქვს საფუძველი უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც n მოცულობის შერჩევა ხდება ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდიდან, რომლის ორივე პარამეტრი, მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია უცნობია.

ამ შემთხვევაში სტატისტიკურ კრიტერიუმად მივიღოთ შემთხვევითი სიდიდე:

$$V = \frac{\bar{X}-a_0}{S}\sqrt{n-1} \ . \qquad (4)$$

სადაც S არის σ-ს შეფასება:

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \ .$$

მტკიცდება, რომ (4) სიდიდეს აქვს სტიუდენტის განაწილება $(n-1)$ თავისუფლების ხარისხით. კრიტიკული არის არჩევის პრინციპი იგივეა, რაც წინა მაგალითში იმ განსხვავებით, რომ კრიტიკული წერტილის დასაზუსტებლად გამოვიყენებთ სტიუდენტის განაწილების ცხრილს $(n-1)$ თავისუფლების ხარისხით.

მაგალითი. მოცემულია n=26 მოცულობის შერჩევა ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდიდან, რომლის ორივე პარამეტრი, მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია უცნობია.შევამოწმოთ ჰიპოთეზა H_0: $a_0 = 5{,}5$ თუ საწინააღმდეგოა H_1: $a_1 > 5{,}5$.

დავაფიქსიროთ მნიშვნელობის დონე: $\alpha = 0{,}01$. გამოვთვალოთ შერჩევის მონაცემებით $\bar{X}$ და S. ვთქვათ, $\bar{X} = 5{,}2$ და $S = 0{,}4$. რადგანაც $a_0 < a_1$, ვაგებთ მარცხენა კრიტიკულ არეს. სტიუდენტის განაწილების ცხრილებით, როცა თავისუფლების ხარისხი 26-1=25, ვპოულობთ: $P(V < -2{,}485) = 0{,}01$, ამიტომ კრიტიკულ არეს ეკუთვნის კრიტერიუმის მნიშვნელიბათა სიმრავლე, რომლებიც ნაკლებია -2,485-ზე. ჩვენ შემთხვევაში:

$$V = \frac{5{,}2-5{,}5}{0{,}4}\sqrt{25} = -3{,}75 < -2{,}485.$$

ე. ი. კრიტერიუმის მნიშვნელობა აღმოჩნდა კრიტიკულ არეში, ეს ნიშნავს, რომ უნდა უკუვაგდოთ H_0ჰიპოთეზა და მივიღოთ ალტერნატიული ჰიპოთეზა.

სავარჯიშო მაგალითები

1) X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10	9	6	5	13	16	12	1	15	6	14	7	15	8	16	20	15	10	14	11

დავყოთ (0; 20) შუალედი 4 ტოლ ნაწილად და შევადგინოთ სტატისტიკური განაწილების ცხრილი.

2) X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	6	1	3	4	10	4	1	9	2	1	5	8	5	6	6	6	7	4	3	5

ააგეთ სტატისტიკური განაწილების ცხრილი.

3) იპოვეთ შემდეგი სტატისტიკური მწკრივის საშუალებით მოცემული შერჩევის ემპირიული განაწილების ფუნქცია:

x_i	2	5	7	8
m_i	1	3	2	4

4) შემთხვევით შერჩეული 100 სტუდენტის სიმაღლის გაზომვის შედეგები აღმოჩნდა შემდეგი:

სიმაღლე	154-158	156-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
რაო-ბა	10	14	26	28	12	8	2

იპოვეთ შერჩევითი საშუალო და შერჩევითი დისპერსია.

4) ტრანზისტორის ერთ-ერთი პარამეტრის შემოწმებამ მოგვცა შემდეგი შედეგები:

ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
მნიშ-ბა	4,40	4,31	4,40	4,40	4,65	4,65	4,71	4,54	4,34	4,56

იპოვეთ შერჩევითი საშუალო მნიშვნელობა დაშერჩევითი დისპერსია.

6) ცნობილია, რომ X შემთხვევითი სიდიდეს გააჩნია ბინომური განაწილება. მომენტთა მეთოდის საშუალებით $(X_1, X_2, \dots, X_8)$ შერჩევაზე დაფუძნებით შევაფასოთ უცნობი წარმატების p ალბათობა, თუ:

ა) $X_1 = 25,\ X_2 = 34,\ X_3 = 12,\ X_4 = 36,\ X_5 = 18,\ X_6 = 33,\ X_7 = 16,\ X_8 = 17.$

ბ) $X_1 = 18,\ X_2 = 37,\ X_3 = 45,\ X_4 = 33,\ X_5 = 27,\ X_6 = 36,\ X_7 = 19,\ X_8 = 40.$

7) ცნობილია, რომ X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით $P(x = m) = \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha}$, სადაც α უცნობი პარამეტრია. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ შერჩევაზე დაფუძნებული α უცნობი პარამეტრის შეფასება, თუ შერჩევას აქვს შემდეგი სახე:

ა) 14, 13, 17, 15, 20, 25, 13, 22.

ბ) 12, 14, 9, 8, 15, 7, 11, 8.

8) მოცემულ ნივთიერებაში რკინის შემცველობაზე ხანგრძლივი დაკვირვების შედეგად დადგინდა სტანდარტული გადახრა 0,12%. იპოვეთ ნდობის 0,95 ალბათობით, ნივთიერებაში რკინის შემცველობის ნდობის ინტერვალი, თუ 6 ანალიზის შედეგად აღმოჩნდა, რომ საშუალო შემცველობაა 32,56%.

9) ნათურების დიდი პარტიიდან ალალბედზე შეარჩიეს 100 ნათურა. შერჩევიდან აღებული ნათურების ნათების საშუალო ხანგრძლივობა აღმოჩნდა 1000 სთ. იპოვეთ ნათურების მთელი პარტიის საშუალო ნათების დროის ნდობის ინტერვალი, ნდობის 0,95 ალბათობით, თუ ცნობილია, რომ ნათურის ნათების საშუალო კვადრატული გადახრა σ=40 სთ-ს.

დანართი1. $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3877	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2902
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1961	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1635	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

დანართი 2. $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0639	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0909	0948	0987	1026	1103	1064	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1386	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	5190	2224
0.6	2257	2291	2324	2356	2389	2421	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2793	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3728	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3906	3925	3943	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4648	4656	4664	4671	4678	4686	4692	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4930	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4958	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	0.4986		3.1	4990	3.2	49931	3.3	49952	3.4	49966
3.5	4998		3.6	4998	3.7	49989	3.8	49993	3.9	49995
4.0	499968									
4.5	499997									
5.0	49999997									

დანართი 3. χ^2 განაწილების კრიტიკული წერტილები

თავისუფლების ხარისხი ნ	მნიშვნელობის დონე					
	00.1	0.025	0.05	0.95	0.975	0.89
1	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.00098	0.00016
2	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.020
3	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	13.3	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	15.1	12.8	11.1	0.15	0.831	0.554
6	16.8	14.4	12.6	0.64	1.24	0.872
7	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.24
8	20.1	17.5	15.5	2.73	2.18	1.65
9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.09
10	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.56
11	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.05
12	26.2	23.3	21.0	5.23	4.40	3.57
13	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.11
14	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.66
15	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.23
16	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.81
17	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.41
18	34.8	31.5	28.9	9.39	8.23	7.01
19	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.63
20	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.26
21	38.9	35.5	32.7	11.6	10.3	8.90
22	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	8.54
23	41.6	38.1	35.2	13.1	11.7	10.2
24	43.0	39.4	36.4	13.8	12.4	10.9
25	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	45.6	41.9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	49.6	45.7	42.6	17.7	16.0	16.3
30	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0

ლიტერატურა

1. პ. ზერაგია, უმაღლესი მათემატიკის კურსი 1-2 ტომი. გამ."განათლება", თბილისი 1972წ

2. თ. თოფურია, უმაღლესი მათემატიკის კურსი 1-2 ტომი. გამ."განათლება", თბილისი 1975წ.

3. Слободская В.А., Краткий курс высшей математики. Издательство ,,Высшая школа,, Москва 1962г.

4. Глаголев А.А. , Солнцева Т.В. Курс высшей математики. изд. ,. Высшая школа., Москва 1971г .

5. Richard L. Faber, Marvin I. Fridman, James L. Kaplan., Applied calculus. " West publishing company". New york,1986.

6. Смирнов С.И., Курс высшей математики. т. 1-2.Москва, ,,Наука,, 1974 г.

7. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференцифльного и интегрального исчисления. т. 1-2. Москва, ,,Наука,,. 1770 г.

8. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под редакцией Б.П. Демидовича. Москва, ,,Наука,,. 1772 г.

9. Raymond A. Barnett, Michael R. Ziegler, Karl E. Byleen. Calculus for Business, Economics, Life Sciences & Social Sciences (11th Edition) (2007)

10. ბ. დოჭვირი, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბილისი: თსუ გამომცემლობა, 1984.

11. ჰ. კრინსკი, მათემატიკა ეკონომისტებისათის, თსუ გამომცემლობა, 1974.

12. ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მარი, ა. მოსიძე, ა. ტორონჯაძე, თ. ტორონჯაძე, თ. შერვაშიძე, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათის. თბილისი: ფონდი „ევრაზია", 2000.

13. გ. მანია, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბილისი: თსუ გამომცემლობა, 1976.

14. ი.სხირტლაძე, თ. ტუღუში, ა.ოსიძე, ა. ცივაძე, მ, ნადარეიშვილი, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბილისი: "განათლება", 1990.

15.გ. მანია, ნ. ანთელავა, ა. ედიბერიძე, ალბათობის თეორია მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანათა კრებული. თბილისი: თსუ გამომცემლობა, 1980.

16. გ. მარი, ა. მოსიძე, ზ. ციგროშვილი, სტატისტიკა. თბილისი: ESM ,1996.

17.თ. შერვაშიძე, ალბათობის თეორია. (ლექციათა კურსი) თბილისი: თსუ გამომცემლობა, 1980.

18.Боровков А.А., Теория вероятностей, Москва „Наука“ 1976.

19.Боровков А.А., Математическая статистика, Москва „Наука“ 1984.

20. Гнеденко Б.В. Курс теория вероятностей, Москва „Наука“ 1988.

21. Дубин-Барковский И.В., Смирнов Н. А., Курс теория вероятностей и математической статистики для технических приложений. Москва „Наука“ 1980.

22. Крамер Г., Математические методы статистики. Москва ,,Мир“ 1975.

23. Шириаев А.Н., Вероятность, Москва „Наука“ 1989.

ᲘᲑᲔᲭᲓᲔᲑᲐ ᲐᲕᲢᲝᲠᲗᲐ ᲛᲘᲔᲠ ᲬᲐᲠᲛᲝᲓᲒᲔᲜᲘᲚᲘ ᲡᲐᲮᲘᲗ

გადაეცა წარმოებას 28.05.2009. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 15.07.2009. ქაღალდის ზომა 60X84 1/8. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 12. ტირაჟი 100 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი ,,ტექნიკური უნივერსიტეტი'', თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant,
scripta manent