თ. ყიფიანი, დ. ბიწაძე,
თ. მეგრელიძე, თ. ჭურაძე

პოპულარული მათემატიკა ინჟინრებისთვის

„ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თ. ყიფიანი, დ. ბიწაძე,

თ. მეგრელიძე, თ. ჭურაძე

პოპულარული მათემატიკა ინჟინრებისთვის

რეგისტრირებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ. 02.07.2009, ოქმი №6

თბილისი
2009

ნაშრომი წარმოადგენს დამხმარე სახელმძღვანელოს, რომელშიც ძირითადი აქცენტი გაკეთებულია პროფესიონალურ მიმართულებაზე მათემატიკის სწავლებაში.

განკუთვნილია ტექნიკური პროფილის უმაღლეს საგანმანათლებლო დაწესებულებათა ბაკალავრებისა და მაგისტრებისათვის.

რეცენზენტები: სრ. პროფ. რ. ომანაძე

ას. პროფ. გ. დათუკიშვილი

ISBN 978-9941-14-689-3

http://www.gtu.ge/publishinghouse/

შესავალი

თანამედროვე პირობებში, როდესაც სწრაფი ტემპით მიმდინარეობს, როგორც საბუნებისმეტყველო, ისე ჰუმანიტარულ მეცნიერებათა მათემატიზაციის პროცესი, მაღალკვალიფიციური კადრების აღზრდისათვის დიდი მნიშვნელობა ენიჭება მათ კარგ მათემატიკურ მომზადებას. მათემატიკურ განათლებას კი ადამიანი თეორიული და პრაქტიკული ხასიათის სავარჯიშოების ღრმა და საფუძვლიანი შესწავლის შედეგად იღებს.

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს სახელმძღვანელოს შექმნის ცდას, რომელშიც ძირითადი აქცენტი გაკეთებულია პროფესიონალური მიმართულებაზე მათემატიკის სწავლებაში.

წიგნის მიზანია – სხვადასხვა საწარმოო პროცესისა და ფიზიკური მოვლენის აღწერისას მათემატიკური კანონზომიერების წარმოჩინების და მათემატიკის გამოყენებით დასმული ამოცანების ამოხსნის უნარების შეძენა.

მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დარგი, რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული გამოყენებით და კერძოდ, საინჟინრო ამოცანებთან არის დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, ამდენად, ჩვენი არჩევანიც სწორად ამ დარგზე შევაჩერეთ.

წიგნი ძირითად განკუთვნილია ტექნიკური პროფილის უმაღლეს საგანმანათლებლო დაწესებულებათა ბაკალავრებისა და მაგისტრებისათვის.

თავი I

წარმოებული და დიფერენციალი

ვთქვათ, x_1 და x_2 არგუმენტის ორი მნიშვნელობაა, ხოლო $y_1 = f(x_1)$ და $y_2 = f(x_2)$ კი $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები. სხვაობას $\Delta x = x_2 - x_1$ უწოდებენ არგუმენტის ნაზრდს, ხოლო სხვაობას $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \Delta f$ ფუნქციის ნაზრდს $[x_1, x_2]$ მონაკვეთზე.

$y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში ეწოდება ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, (თუ ეს ზღვარი არსებობს), როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფის ნულისაკენ

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ანუ} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

გეომეტრიულად, წარმოებული $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი მოცემულ x წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტია, ანუ $y' = tg\alpha$.

ფუნქციის წარმოებული არის ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე x წერტილში.

ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულები

1. $(C)' = 0 (C = const)$
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$

   $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

   $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ 11. $(arcctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

გაწარმოების ძირითადი წესები

ვთქვათ, $u = u(x)$ და $v = v(x)$ ფუნქციები წარმოებადია, მაშინ

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 3. $(c \cdot v)' = c \cdot u'(c = const)$

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ 4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$

5. თუ $y = f(u)$ და $u = u(x)$, ანუ, $y = f(u(x))$, სადაც $f(u)$ და $u(x)$ ფუნქციები წარმოებადია, მაშინ $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი).

6. ვთქვათ, რაიმე შუალედში $y = f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $x = g(y)$. თუ $f'(x)$ წარმოებული არსებობს და არ უდრის ნულს, მაშინ $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, ანუ $g'(y) = \frac{1}{f'(g'(y))}$ (შექცეული ფუნქციის გაწარმოების წესი).

ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის ოპერაციას გაწარმოება ეწოდება.

თუ ფუნქციას x-ის მოცემული მნიშვნელობისათვის აქვს წარმოებული, მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში.

ვთქვათ მოცემულია (a, b) შუალედზე დიფერენცირებადი (ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი (a, b) შუალედზე, თუ

იგი დიფერენცირებადია $(a,b)=\{x, a<x<b\}$ სიმრავლის ყოველ წერტილში) $y=f(x)$ ფუნქცია, $x\in(a,b)$. განსაზღვრების თანახმად

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\,, \tag{1}$$

ხოლო ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრების თანახმად, საკმაოდ მცირე $|\Delta x|$-თვის

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\approx f'(x)\,, \tag{2}$$

საიდანაც შეიძლება დაიწეროს მიახლოებითი ტოლობა $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot\Delta x$, ან, მეორენაირად,

$$\Delta y\approx f'(x)\cdot\Delta x\,. \tag{3}$$

ფუნქციის ნაზრდის აღნიშნულ მიახლოებით მნიშვნელობას ეწოდება ფუნქციის დიფერენციალი, აღინიშნება dy სიმბოლოთი და $dy=f'(x)\Delta x$. შევნიშნოთ, რომ

$$dx=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x\,, \tag{4}$$

ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალისათვის მიიღება გამოსახულება

$$dy=f'(x)dx\,. \tag{5}$$

(2) და (4)-დან მიიღება ფორმულა

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)dx\,, \tag{6}$$

რომელიც გამოიყენება ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლისას.

(5)-ის გათვალისწინებით კი ვღებულობთ

$$\Delta y\approx dy\,. \tag{7}$$

მხოლოდ წრფივი ფუნქციისთვის $y=ax+b$ გვაქვს $\Delta y=dy$.

(7) ფორმულა გამოიყენება ფუნქციის ნაზრდის მიახლოებით გამოთვლისას.

1. h_0 სიმაღლიდან, v_0 საწყისი სიჩქარით, ვერტიკალურად ზევით ასროლილი სხეული მოძრაობს $h(t)=h_0+v_0t-\frac{gt^2}{2}$ (მ) კანონის მიხედვით. ვიპოვოთ სიმაღლე დედამიწის ზედაპირიდან, რომელზედაც სხეული იმყოფება დროის იმ მომენტში, როცა სხეულის სიჩქარე 2-ჯერ ნაკლებია საწყისი სიჩქარეზე, თუ $h_0=4\frac{53}{80}$ მ; $v_0=3$ მ/წმ; $g\approx 10$ მ/წმ^2.

ამოხსნა: რადგან, სიჩქარე არის გზის წარმოებული დროით, ამიტომ, სხეულის სიჩქარე t მომენტისათვის იქნება $v(t)=h'(t)=$ $=v_0-gt$. პირობის თანახმად $v(t)=\frac{1}{2}v_0$; გვაქვს: $v_0-gt=\frac{1}{2}v_0$, აქედან $t=\frac{v_0}{2g}$, საიდანაც, შესაბამისი მნიშვნელობების ჩასმით მიიღება, რომ $t=\frac{3}{20}$ და $h\left(\frac{3}{20}\right)=4\frac{53}{80}+3\cdot\frac{3}{20}-\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{9}{400}=5$ (მ).

პასუხი: $t=\frac{3}{20}$ წამის შემდეგ სხეულის სიჩქარე 2-ჯერ ნაკლები იქნება საწყის სიჩქარეზე და იგი დედამიწის ზედაპირიდან დაშორებული იქნება 5 მ-ით.

2. სხეული, რომლის მასაა 200 კგ, მოძრაობს წრფივად $S(t)=2t^3-t^2$ (სმ) კანონით. იპოვეთ მასზე მოქმედი ძალა t=2წმ მომენტში.

ამოხსნა: რადგან, აჩქარება არის გზის მეორე რიგის წარმოებული დროით, ანუ სიჩქარის წარმოებული დროით, ამიტომ გვაქვს

$$v(t)=S'(t)=6t^2-2t$$

$$a(t) = v'(t) = S''(t) = 12t - 2 .$$

სხეულის აჩქარება t = 2წმ მომენტისათვის იქნება $a(2) = 12 \cdot 2 -$ $-2 = 22$ (სმ/წმ²)= 0,22 (მ/წმ²). სხეულზე მოქმედი ძალა t= 2 წმ-ის შემდეგ იქნება $F = ma(2) = 200$ კგ ·0,22 მ/წმ² = 44 ნ.

3. სპილენძის კუბიკის წიბო 5 სმ-ის ტოლია, მისი ყველა წახნაგი გახეხეს, რის შედეგადაც მისი წონა 0,96 გრამით შემცირდა, ხოლო სპილენძის კუთრი წონაა 8 გრ. განსაზღვრეთ რამდენით შემცირდა კუბის ზომები, ანუ, რამდენზე დამოკლდა მისი წიბო.

ამოხსნა: კუბის მოცულობა $V = x^3$, სადაც x –კუბის წიბოა. მოცულობა ტოლია: წონა გაყოფილი კუთრი წონაზე $V = \frac{p}{d}$. კუბის მოცულობის ცვლილება $\Delta v = \frac{0{,}96}{8} = 0{,}12$ სმ³. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\Delta v \approx dv$, და რომ $dv = 3x^2 dx$, გვექნება $0{,}12 = 3 \cdot 5^2 \cdot \Delta x$, აქედან

$$\Delta x = \frac{0{,}12}{3 \cdot 25} = 0{,}0016 \text{ სმ.}$$

პასუხი: კუბის წიბო დამოკლდა 0,0016 სმ-ზე.

4. იპოვეთ სფერული შრის მოცულობის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ გარე დიამეტრი 10 სმ-ია, ხოლო სისქე $\frac{1}{8}$ სმ.

ამოხსნა: x დიამეტრის მქონე სფეროს მოცულობა $V = \frac{1}{6}\pi x^3$. ცხადია, რომ სფერული შრის ზუსტი მოცულობა წარმოადგენს ორი სფეროს მოცულობათა სხვაობას დიამეტრებით, შესაბამისად, 10 სმ და $9\frac{7}{8}$ სმ. ΔV-ს მიახლოებითი მნიშვნელობის მისაღებად შემოვიფარგლებით dV-ს გამოთვლით.

$$dV = \frac{1}{2}\pi x^2 dx$$

და იმის გათვალისწინებით, რომ $x = 10$, $dx = -\frac{1}{8}$ მივიღებთ $\Delta V \approx dV = 19{,}63$ სმ^3 (ნიშანი მინუსი, რომელიც იმის მაჩვენებელია, რომ როცა x კლებულობს, V-ც კლებულობს უგულვებელყოფილია). ზუსტი მნიშვნელობა კი უდრის $\Delta V = 19{,}4$ სმ^3.

5. იპოვეთ ბირთვის მოცულობის ნაზრდის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ მისი R რადიუსი გაიზარდა dR მცირე სიდიდით.

ამოხსნა: ბირთვის მოცულობა

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 ,$$

ამიტომ

$$\Delta V \approx dV = 4\pi R^2 dR$$

აქედან მიიღება:

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{dR}{R} .$$

თუ რადიუსისა და მოცულობის ნაზრდს გამოვსახავთ პროცენტებში, მივიღებთ, რომ რადიუსის $p\%$ -ით გაზრდისას, მოცულობა იზრდება $3p\%$-ით.

6. საინჟინრო ამოცანებში ხშირად გამოიყენება შემდეგი მიახლოებითი ფორმულა

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a} ,$$

სადაც რიცხვი b არის საკმაოდ მცირე a-თან შედარებით.

ამოხსნა: დავუშვათ, რომ $f(x) = \sqrt{1 + x}$. საზოგადოდ, გვაქვს

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta f(x)\approx df(x)=f'(x)\Delta x\ ,$$

ამრიგად,

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x)\approx f(x)+df(x)=f(x)+f'(x)\Delta x\ ,$$

კერძოდ, $x=0$ –თვის

$$f(\Delta x)\approx f(0)+f'(0)\Delta x\ .$$

რამდენადაც

$$\sqrt{a^2+b}=a\sqrt{1+\frac{b}{a^2}}=af\left(\frac{b}{a^2}\right),$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\frac{b}{a^2}=\Delta x$, მივიღებთ

$$\sqrt{a^2+b}=af(\Delta x)\approx a\big(f(0)+f'(0)\cdot\Delta x\big).$$

რადგან, $f(0)=1$ და $f'(0)=\frac{1}{2}$, საბოლოოდ ვასკვნით, რომ

$$\sqrt{a^2+b}\approx a\left(1+\frac{1}{2}\Delta x\right)=a\left(1+\frac{b}{2a^2}\right)=a+\frac{b}{2a}\ .$$

7. გამოთვალეთ

$$y=\sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$$

ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა, როცა $x=0{,}15$.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ მიახლოებითი ფორმულა

$$y(x+\Delta x)\approx y(x)+dy\ .$$

ავიღოთ $x=0$, $\Delta x=0{,}15$, მაშინ

$$y'=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^4}\cdot\frac{(-4)}{(2+x)^2}\ ;$$

$$y'(0)=-\frac{1}{5}\ ,\quad dy=-\frac{1}{5}\cdot 0{,}15=-0{,}03\ .$$

ე.ი.

$$y(0{,}15)\approx y(0)+dy=1-0{,}03=0{,}97.$$

ზუსტი მნიშვნელობა

$$y(0{,}15) = 0{,}9702\ ,$$

10^{-4} სიზუსტით.

8. დედამიწის თავისუფლად ვარდნილი სხეულის მოძრაობის კანონი მიახლოებით აღიწერება ფორმულით

$$s = 4{,}9t^2,$$

სადაც s გამოსახავს სიმაღლეს მეტრებში, t დროს წამებში. იპოვეთ სიჩქარე და აჩქარება: ა) დროის ნებისმიერ მომენტში; ბ) პირველი წამის ბოლოს; გ) მეხუთე წამის ბოლოს.

ამოხსნა: ა) $s = 4{,}9t^2$ – გაწარმოებით მიიღება:

$$\frac{ds}{dt} = v = 9{,}8t \quad \text{მ/წმ}. \tag{1}$$

კიდევ ერთხელ გაწარმოებით გვექნება:

$$\frac{dv}{dt} = j = g = 9{,}8\ \text{მ/წმ}^2, \tag{2}$$

აქედან ჩანს, რომ ვარდნილი სხეულის აჩქარება მუდმივი სიდიდეა.

ბ) პირველი წამის ბოლოს v და j-ს მნიშვნელობები იქნება:

$$v = 9{,}8\cdot 1\ \text{მ/წმ} = 9{,}8\ \text{მ/წმ},$$

$$j = g = 9{,}8\ \text{მ/წმ}^2.$$

გ) v და j-ს მნიშვნელობების საპოვნელად მეხუთე წამის ბოლოს შესაბამისად გვექნება:

$$v = 9{,}8\cdot 5\ \text{მ/წმ} = 49\ \text{მ/წმ},$$

$$j = g = 9{,}8\ \text{მ/წმ}^2.$$

9. მოცემულია მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებები. დროის მითითებული მომენტისათვის იპოვეთ გავლილი მანძილი, სიჩქარე და აჩქარება:

ა) $s = t^3 + 2t^2;\ t = 2,$ პასუხი: $s = 16,\quad v = 20,\quad j = 16.$

ბ) $s = t^2 + 2t;\ t = 3.$ $s = 15,\quad v = 8,\quad j = 2.$

გ) $s = 3 - 4t;\ t = 4.$ $s = -13,\quad v = -4,\quad j = 0.$

დ) $x = 2t - t^2;\ t = 1.$ $x = 1,\quad v = 0,\quad j = -2.$

ე) $y = 2t - t^3;\ t = 0.$ $y = 0,\quad v = 2,\quad j = 0.$

ვ) $h = 20t + 16t^2;\ t = 10.$ $h = 1800,\quad v = 340,\quad j = 32.$

10. ვერტიკალურად ზევით v_1 მ/წმ სიჩქარით ასროლილი სხეულის მიერ t წმ-ში მიღწეული s სიმაღლეზე (მეტრებში), მოიცემა ფორმულით

$$s = v_1 t - 4{,}9t^2 .$$

იპოვეთ:

ა) სიჩქარე და აჩქარება დროის ნებისმიერ მომენტში თუ v_1=100 მ/წმ;

ბ) მეორე წამის ბოლოს;

გ) მეთხუთმეტე წამის ბოლოს;

ჰაერის წინააღმდეგობა უგულვებელყოფილია.

პასუხი: ა) $v = v_1 - 9{,}8t;$ $j = -g = -9{,}8;$

ბ) v =80,4 მ/წმ; $j = -g = -9{,}8$ მ/წმ^2;

გ) $v = -47$ მ/წმ^2, $j = -g = -9{,}8$ მ/წმ^2.

11. ვერტიკალურად ზევით გაშვებული ზარბაზნის გულა გამოფრინდა 196 მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ: ა) მისი სიჩქარის სიდიდე მეათე წამის ბოლოს; ბ) რა დროში აღწევს იგი მაქსიმალურ სიმაღლეს?

პასუხი: ა) 98 მ/წმ;
ბ) 20 წმ.

12. სადგურიდან გამოსული მატარებელი t დროის შემდეგ იმყოფება $s = t^3 + 2t^2 + 3t$ კმ-ზე სადგურიდან. იპოვეთ მისი აჩქარება: ა) t დროის ბოლოსათვის; ბ) 2 სთ-ის ბოლოს:

პასუხი: ა) $j = 6t + 4$; ბ) $j = 16$.

13. დროის t მომენტში მატარებელი იმყოფება $\frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$ მანძილზე გამოსვლის ადგილიდან. იპოვეთ: ა) მატარებლის სიჩქარე და აჩქარება; ბ) დროის რომელ მომენტში გაჩერდება მატარებელი და შეიცვლის მიმართულებას. გ) აღწერეთ მატარებლის მოძრაობის ხასიათი პირველი ათი საათის განმავლობაში.

პასუხი: ა) $v = t^3 - 12t^2 + 32t$; $j = 3t^2 - 24t + 32$, ბ) 4 და 8 საათის ბოლოს; გ) მატარებელი იმოძრავებს პირდაპირ პირველი ოთხი საათის მანძილზე; უკუ მიმართულებით – მეორე ოთხი საათის მანძილზე; კვლავ პირდაპირ პირველი რვა საათის ამოწურვამდე.

14. 25 კგ მასის მქონე სხეული მოძრაობს წრფივად $s = \ln(1 + t^2)$ მ კანონით. ვიპოვოთ სხეულის კინეტიკური ენერგია $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ მოძრაობის დაწყებიდან 2 წმ-ის შემდეგ.

პასუხი: 8 ჯოული.

15. მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება მოცემულია ფორმულით $s = 30t - 6t^2$ მ. იპოვეთ მატერიალური წერტილის მოძრაობის სიჩქარე და აჩქარება 2,5 წამის ბოლოსთვის.

პასუხი: $v = 0; j = -12$..

16. მოცემულია $s = 2t + 3t^2 + 4t^3$ მ; იპოვეთ სიჩქარე და აჩქარება: ა) საწყის t =0 მომენტში; ბ) მოძრაობის დაწყებიდან 5 წამის შემდეგ.

პასუხი: ა) v =2 მ/წმ, j =6 მ/წმ^2.

ბ) v =332 მ/წმ, j=126 მ/წმ^2.

17. მოცემულია $s = \dfrac{a}{t} + bt^2$, სადაც a და b მუდმივებია; იპოვეთ სიჩქარე და აჩქარება დროის ნებისმიერი t მომენტისათვის.

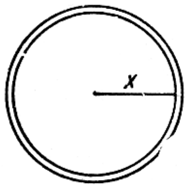
პასუხი: $v = -\dfrac{a}{t^2} + 2bt$; $j = \dfrac{2a}{t^3} + 2b$.

18. t წამის ბოლოს სხეული ფლობს სიჩქარეს $3t^2 + 2t$ მ/წმ; იპოვეთ მისი აჩქარების სიდიდე: ა) ნებისმიერ მომენტში; ბ)მოძრაობის დაწყებიდან 4 წამის შემდეგ.

პასუხი: ა) $j = 6t + 2$ მ/წმ^2;

ბ) j =26 მ/წმ^2.

19. მეტალის წრიული დისკი ფართოდება სითბოსაგან ისე, რომ მისი რადიუსი თანაბრად იზრდება 0,01 სმ/წმ-ით. რა სიჩქარით იზრდება მისი ფართობი, თუ რადიუსის სიგრძე 2 სმ-ია?



ნახ. 1

ამოხსნა: ვთქვათ, დისკის რადიუსია x და ფართობია y. გვაქვს $y = \pi x^2$, გაწარმოებით:

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi x \cdot \frac{dx}{dt} . \qquad (1)$$

ამრიგად, ყოველ წამს დისკის ფართობი იზრდება კვად-

რატულ სანტიმეტრებში $2\pi x$-ჯერ სწრაფად, ვიდრე იზრდება რადიუსი წრფივ სანტიმეტრებში

$$x = 2,\ \frac{dx}{dt} = 0{,}01,\quad \frac{dy}{dt} = ?$$

(1)-დან მივიღებთ:

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi \cdot 2 \cdot 0{,}01 \approx 0{,}04 \cdot 3{,}14 \approx 0{,}13 \text{ მ/წმ}^2.$$

20. მანძილის დროზე დამოკიდებულება მატერიალური წერტილის წრფივი მოძრაობისას მოცემულია განტოლებით

$$s = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{8}$$

(t – წამებში, s – მეტრებში).

განსაზღვრეთ მოძრაობის სიჩქარე 2 წმ-ის შემდეგ.

ამოხსნა: ვპოულობთ მანძილის წარმოებულს დროით:

$$\frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi t}{8}\ ,$$

$t = 2$ –თვის გვექნება: $\frac{ds}{dt} = 16 + \frac{1}{8}\sqrt{2} \approx 16{,}18$. მაშასადამე $v \approx 16{,}18$ მ/წმ.

21. $y = x(8-x)$ პარაბოლაზე მოძრაობს წერტილი ისე, რომ მისი აბსცისა იცვლება t დროზე დამოკიდებულებით, კანონით $x = t\sqrt{t}$ (t – წამებში, x – მეტრებში). როგორია ორდინატის ცვლილების სიჩქარე წერტილში $M(1;\,7)$?

ამოხსნა: თავდაპირველად ვიპოვოთ ორდინატის ცვლილების კანონი, რისთვისაც პარაბოლის განტოლებაში x უნდა შევცვალოთ t –თი:

$$y = 8t\sqrt{t} - t^3$$

ორდინატის ცვლილების სიჩქარე განისაზღვრება ორდინატის დროით წარმოებულით: $y'_t = 12\sqrt{t} - 3t^2$.

$M(1;\ 7)$ წერტილისათვის $t=1$, მაშასადამე, ვღებულობთ: $y'_{t=1}=9$, ანუ ორდინატის ცვლილების სიჩქარე 9 მ/წმ-ის ტოლია:

22. გზის დროზე დამოკიდებულება მოცემულია $s=t\cdot\ln(t+1)$ (t – წამებში, x – მეტრებში) განტოლებით. იპოვეთ მოძრაობის სიჩქარე მეორე წამის ბოლოს.

პასუხი: 1,76 მ/წმ.

23. კუბურ პარაბოლაზე მოძრაობს წერტილი ისე, რომ მისი ორდინატის ცვლილება t დროზე დამოკიდებულებით აღიწერება $y=ax^3$ კანონით. როგორია აბსცისის დროზე დამოკიდებულების ცვლილების სიჩქარე?

პასუხი: $x'_t=\sqrt[3]{a}$

24. x იალქნიანი ნავის ყოველდღიური წარმოების ღირებულება $G(x)$ (ათას დოლარებში) მოცემულია ფორმულით (ნახ. 2).

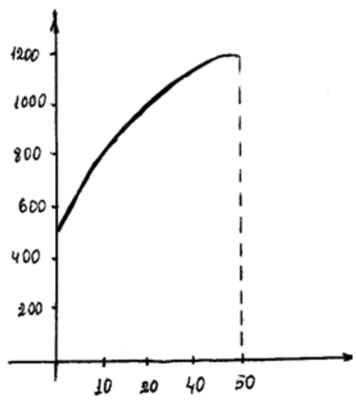
$G(x)=575+25x-0{,}25x^2$,

$(0\le x\le 50)$.

იპოვეთ:

ა) 31 ნავის მიახლოებითი ღირებულება;

ბ) 31 ნავის ზუსტი ღირებულება.



ნახ. 2

ამოხსნა: ა) რადგან, $G'(x)=25-0{,}5x$ წარმოადგენს $G(x)$ ღირებულების ცვლილების სიჩქარეს, ამიტომ, 31 ნავის მიახლოებითი ღირებულება იქნება $G'(30)=25-0{,}5\cdot 30=10$, ანუ 10000\$.

ბ) 31 ნავის ზუსტი ღირებულება ტოლია

$$\frac{G(31)-G(30)}{31-30}=575+25\cdot 31-0{,}25\cdot 31^2-575-25\cdot 30+$$

$$+0{,}25\cdot 30^0=25(31-30)-0{,}25(31^2-30^2)=25-15{,}25=9{,}65\text{ , ანუ}$$

9750$.

25. x კალკულატორის ყოველდღიური წარმოების ღირებულება $G(x)$ (ასეულ დოლარებში) მოცემულია ფორმულით

$$G(x)=10+\sqrt{2x+16}\ , \qquad 0\le x\le 50\ .$$

იპოვეთ ა) 25 კალკულატორის მიახლოებითი ღირებულება;

ბ) 25 კალკულატორის ზუსტი ღირებულება.

პასუხი: ა) 12,5 $
ბ) 12,31 $.

თავი II

ფუნქციის გამოკვლევა ექსტრემუმზე

ფუნქციას ეწოდება ზრდადი (კლებადი) რაიმე შუალედში, თუ ამ შუალედში არგუმენტის ყოველ მეტ მნიშვნელობას ფუნქციის მეტი (ნაკლები) მნიშვნელობა შეესაბამება. როგორც ზრდად, ისე კლებად ფუნქციებს მონოტონური ფუნქციები ეწოდება. თუ ფუნქცია მონოტონური არ არის, მაშინ მისი განსაზღვრის არე შეიძლება დავყოთ სასრულ მონოტონურობის შუალედებად.

წერტილებს, სადაც უწყვეტი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია, ფუნქციის სტაციონარული წერტილები ეწოდება, ხოლო წერტილებს, სადაც უწყვეტი ფუნქციის წარმოებული ნულია ან არ არსებობს – ფუნქციის კრიტიკული წერტილები.

მოცემული $y = f(x)$ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედების მოძებნის წესი:

ა) ვიპოვით $f'(x)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები, რომლებიც $y = f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს დაყოფენ მონოტონურობის შუალედებად;

ბ) განვსაზღვროთ თითოეულ მიღებულ შუალედში $f'(x)$ წარმოებულის ნიშანი. შუალედები, რომლებშიაც $f'(x) > 0$ წარმოადგენენ ზრდადობის შუალედებს, ხოლო შუალედები, რომლებშიაც $f'(x) < 0$ -კლებადობის შუალედებს.

$x = x_0$ წერტილს ეწოდება $y = f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი

მიდამო, რომ ამ მიდამოს x_0-ისაგან განსხვავებული ყველა x-ებისათვის სრულდება უტოლობა $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$. ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს მისი ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობებს ამ წერტილებზე ფუნქციის ექსტრემუმები.

ფუნქციას ექსტრემუმები შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ კრიტიკულ წერტილებზე, თუმცა, ყველა კრიტიკული წერტილი შეიძლება არ იყოს ექსტრემუმის წერტილი. ექსტრემუმის წერტილები არის მხოლოდ ის წერტილები, რომლებზედაც გავლისას ფუნქციის წარმოებული იცვლის ნიშანს; კერძოდ, თუ კრიტიკულ $x = x_0$ წერტილზე გავლისას (დადებითი მიმართულებით) $f'(x)$ წარმოებული იცვლის ნიშანს დადებითიდან უარყოფითისაკენ (უარყოფითიდან დადებითისაკენ), მაშინ $x = x_0$ წერტილი არის მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი.

ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები განსხვავდება ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობის ცნებისაგან, რადგანაც, შესაძლებელია მოცემულ მონაკვეთზე ფუნქციას ექსტრემუმი არ ჰქონდეს, მაგრამ უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობას მაინც აღწევდეს.

$y = f(x)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების საპოვნელად საჭიროა: მოცემულ სეგმენტზე ვიპოვოთ ყველა კრიტიკული წერტილი; გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულ მონაკვეთში (სეგმენტზე) მოთავსებულ კრიტიკულ წერტილებსა და სეგმენტის ბოლოებზე – შევადაროთ ეს მნიშვნელობები ერთმანეთს – მათგან უდიდესი იქნება ფუნქციის

უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო უმცირესი – ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

თუ R^2 სივრცის (სიბრტყის) D სიმრავლის ყოველ $P(x, y)$ წერტილს რაიმე f წესით შეესაბამება გარკვეული z რიცხვი, მაშინ D სიმრავლეზე განსაზღვრულია P წერტილის ფუნქცია, ანუ ორი x და y არგუმენტების z ფუნქცია $z = f(x, y)$. თუ $P_0(x_0; y_0) \in D$, მაშინ

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

სხვაობებს ეწოდებათ, შესაბამისად, $z = f(x, y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდები x-ის და y-ის მიმართ, ხელს ზღვრებს (თუ ისინი არსებობენ)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

და

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

შესაბამისად, კერძო წარმოებულები x ცვლადით (y ცვლადით) წერტილში $(x_0; y_0)$. თუ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ ფუნქციებს აქვს წარმოებული x (y ცვლადით) წერტილში $(x_0; y_0)$, მაშინ მათ ეწოდებათ $z = f(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები – ორი ცვლადის ფუნქციისათვის. ისინი აღინიშნებიან, შესაბამისად, ასე:

$$z''_{xx},\ z''_{xy},\ z''_{yx},\ z''_{yy}, \text{ ან ასე: } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

შევნიშნოთ, შემდეგი: თუ

$$z = f(u,v),$$

სადაც $u = g(x,y)$ და $v = h(x,y)$, მაშინ

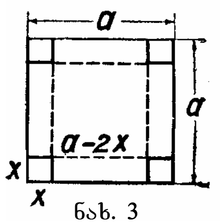
$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$ – ორი ცვლადის რთული ფუნქციის კერძო წარმოებულებია.

$P_0(x_0; y_0)$ წერტილს ეწოდება $z = f(x,y)$ ფუნქციის მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომლის ყოველი (x,y) წერტილისთვის $f(x) \le f(x_0, y_0)$ $(f(x) \ge f(x_0, y_0))$. წერტილს ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, თუ იგი არის ამ ფუნქციის ან მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილი. ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ფუნქციის ექსტრემუმები ჰქვია.

ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის აუცილებელ და საკმარის პირობებს იძლევიან შემდეგი თეორემები: ა) თუ ორი ცვლადის ფუნქციას რაიმე წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაშინ ამ წერტილში თითოეული კერძო წარმოებული ან ნულის ტოლია, ან არ არსებობს. ბ) ვთქვათ, $(x_0; y_0)$ წერტილში $z = f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია ნულის ტოლი I რიგის წარმოებულები და უწყვეტი II რიგის წარმოებულები: $A = f''_{xx}(x_0; y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0; y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ და $C = f''_{yy}(x_0; y_0)$, მაშინ: თუ $AC - B^2 > 0$, ფუნქციას $(x_0; y_0)$ წერტილში აქვს ექსტრემუმი, სახელდობრ – მინიმუმი, როცა $A > 0$ და მაქსიმუმი, როცა $A < 0$; თუ $AC - B^2 < 0$, ფუნქციას $(x_0; y_0)$ წერტილში ექსტრემუმი არ აქვს; თუ $AC - B^2 = 0$, გვაქვს საეჭვო შემთხვევა –

ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი (მაქსიმუმი ან მინიმუმი), შეიძლება არ ჰქონდეს ექსტრემუმი.

1. კვადრატის ფორმის რკინის ფურცლისგან, რომლის გვერდია a, კუთხეებში უნდა ჩამოიჭრას ოთხი კვადრატი ისე, რომ დარჩენილი ნაწილისაგან მოღუნვის შემდეგ მივიღოთ უდიდესი მოცულობის ღია ყუთი. იპოვეთ ამოსაჭრელი კვად-რატების გვერდის სიგრძე.



ნახ. 3

ამოხსნა: ვთქვათ, ამოჭრილი კვადრატის გვერდი x; მაშინ იმ კვადრატის გვერდი, რომელიც ქმნის ყუთის ფსკერს, ტოლი იქნება $a-2x$, ხოლო მისი მოცულობა:

$$V=(a-2x)^2 x\ ,\ \left(0\le x\le\frac{a}{2}\right).$$

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა გვაქვს:

$$\frac{dV}{dx}=(a-2x)^2-4x(a-2x)=a^2-8ax+12x^2\ ;$$

ამოვხსნათ განტოლება

$$12x^2-8ax+a=0$$

მივიღებთ

$$x_1=\frac{a}{6},\quad x_2=\frac{a}{2}\ .$$

რადგან $V(0)=0,\quad V\left(\frac{a}{2}\right)=0$, ცხადია $x_1=\frac{a}{6}$-თვის გვექნება უდიდესი მოცულობის კოლოფი და ეს მოცულობა იქნება $\frac{2a^3}{27}$. ამრიგად, ამოჭრილი კვადრატის გვერდი შეადგენს მოცემული კვადრატის გვერდის მეექვსედს.

2. მართკუთხედის ფორმის თუნუქის ფურცლისაგან, რომლის გვერდებია 8 დმ და 5 დმ, კუთხეებში ოთხი კვად-

რატის ჩამოჭრით, უნდათ დაამზადონ ზემოდან ღია ყუთი, რომლის მოცულობა იქნება უდიდესი. როგორი უნდა იყოს ამოსაჭრელი კვადრატების გვერდის სიგრძე?

პასუხი: 1 დმ.

3. განსაზღვრეთ 32 მ^2 მოცულობის, კვადრატის ფორმის მქონე ფსკერის, აუზის განზომილებანი იმ პირობით, რომ მისი კედლებისა და ფსკერის მოპირკეთებაზე დაიხარჯოს უმცირესი რაოდენობის მასალა.

ამოხსნა: აღვნიშნოთ ფუძის გვერდი x-ით, ხოლო სიმაღლე y-ით, მაშინ აუზის მოცულობა

$$V = x^2 y = 32, \tag{1}$$

ხოლო მოსაპირკეთებელი S ზედაპირი

$$S = x^2 + 4xy.$$

(1)-დან y გამოვსახოთ x-ით, მივიღებთ:

$$S = x^2 + 4x\frac{V}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}.$$

მოვძებნოთ მიღებული ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $(0, \infty)$-ში.

გვაქვს:

$$S' = 2x - \frac{128}{x^2}, \quad 2x - \frac{128}{x^2} = 0\,, x = 4\,.$$

ნაპოვნი $x = 4$ წერტილი, ცხადია, წარმოადგენს მინიმუმის წერტილს S ფუნქციისათვის, რადგან, მას უდიდესი მნიშვნელობა არ გააჩნია (იგი უსასრულოდ ზრდადია, როცა $x \to 0$ და $x \to \infty$).

მაშასადამე, აუზის საძიებელი ზომებია $x = 4$ მ, $y = 2$ მ.

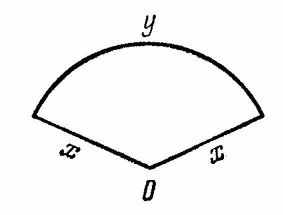
4. ყვავილნარის შემოსაღობად, რომელსაც უნდა ჰქონდეს წრიული სექტორის ფორმა, გვაქვს 20 მ სიგრძის მავთული. რა სიგრძის უნდა იყოს წრის რადიუსი, რომ ყვავილნარის ფართობი იყოს უდიდესი?

ამოხსნა: აღვნიშნოთ წრის რადიუსი x-ით, ხოლო სექტორის რკალის სიგრძე y-ით (ნახ. 4), მაშინ

$$20 = 2x + y,$$

საიდანაც

$$y = 2(10 - x).$$



ნახ. 4

წრიული სექტორის ფართობი $S = \frac{1}{2}xy = x(10 - x) \quad (0 \le x \le 10)$.

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა.

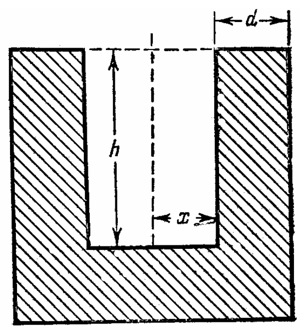
გვაქვს:

$$S'(x) = 10 - 2x = 0, \quad x = 5.$$

რადგან, უმცირესი მნიშვნელობა $S = 0$ მიიღწევა [0, 10] სეგმენტის ბოლოებზე, ამიტომ $x = 5$-თვის გვექნება უდიდესი ფართობი.

5. უნდა დამზადდეს V_0 მოცულობის ღია ცილინდრული რეზერვუარი. მასალის სისქეა d. როგორი უნდა იყოს რეზერვუარის ზომები, რომ მის დამზადებაზე დაიხარჯოს მასალის რაც შეიძლება მცირე რაოდენობა?

მე-5 ნახაზზე მოცემულია რეზერვუარის ჭრილი.



ნახ. 5

ვთქვათ, შიგა ცილინდრის რადიუსია x, ხოლო სიმაღლე კი h.

რეზერვუარის ფსკერისა და კედლების მასალის მოცულობა იქნება:

$$V = \pi(x+d)^2 d + \pi\left[(x+d)^2 - x^2\right]h =$$
$$= \pi d(x+d)^2 + \pi h(2xd + d^2)\,. \qquad (1)$$

მეორეს მხრივ, პირობით

$$V_0 = \pi x^2 h\,,$$

აქედან

$$h = \frac{V_0}{\pi x^2}\,;$$

საბოლოოდ (1) მიიღებს სახეს:

$$V = \pi d(x+d)^2 + \frac{\pi V_0}{\pi x^2}(2xd + d^2) = \pi d(x+d)^2 + \frac{2V_0 d}{x} + \frac{V_0 d^2}{x^2}.$$

მოითხოვება $V(x)$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობის მოძებნა $(0, \infty)$-ში.

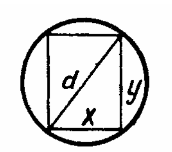
$$V'(x) = 2\pi d(x+d) - \frac{2V_0 d}{x^2} - \frac{2V_0 d^2}{x^3} = \frac{2d(x+d)(\pi x^3 - V_0)}{x^3}.$$

ერთადერთი დადებითი ფესვი წარმოებულისა არის $x = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$.

სწორედ იგი წარმოადგენს საძიებელ კრიტიკულ წერტილს და შესაბამისად,

$$h = \frac{V_0 \sqrt[3]{\pi^2}}{\pi \sqrt[3]{V_0^2}} = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}} = x$$

6. ცნობილია, რომ მართკუთხედის ფორმის განივი კვეთის (ნახ. 6) ძელის სიმტკიცე იცვლება სიმაღლის კვადრატის და სიგანის პროპორციულად. როგორი იქნება უდიდესი



ნახ. 6

სიმტკიცის ძელის ზომები, რომელიც შეიძლება გამოიჭრას d დიამეტრის წრიული მორისგან?

ამოხსნა: ვთქვათ x წარმოადგენს სიგანეს და y კი ძელის სიმაღლეს. პირობით ძელს ექნება უდიდესი სიმტკიცე, როდესაც xy^2 მიაღწევს მაქსიმუმს. ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$y^2 = d^2 - x^2,$$

მაშასადამე, უნდა მოიძებნოს შემდეგი ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა

$$f(x) = x(d^2 - x^2) = d^2 x - x^3.$$

გვაქვს:

$$f'(x) = d^2 - 3x^2.$$

$$d^2 - 3x^2 = 0,$$

საბოლოოდ, ვღებულობთ, რომ $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ არის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოცემული ფუნქცია ღებულობს უდიდეს მნიშვნელობას. შესაბამისად, თუ ძელი ისეა გამოხერხილი, რომ

სიმაღლე უდრის მორის დიამეტრის $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ -ს,

სიგანე უდრის მორის დიამეტრის $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ -ს,

მაშინ ძელი იქნება უდიდესი სიმტკიცის.

7. ცნობილია, რომ მართკუთხედის ფორმის განივი კვეთის ძელის სიხისტე იცვლება სიმაღლის კუბის და ფუძის პროპორციულად. იპოვეთ უდიდესი სიხისტის მქონე ძელის ზომები,

რომელიც შეიძლება გამოიჭრას d დიამეტრის წრიული მორისგან:

პასუხი: $\frac{d}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}d$.

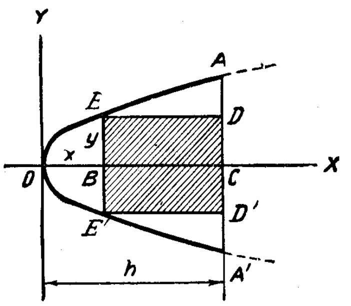
8. მრგვალი ძელისგან უნდა გამოიჭრას კოჭი, რომლის კვეთა მართკუთხედია, ისე რომ ნარჩენების რაოდენობა მინიმალური იყოს. იპოვეთ მართკუთხედის ზომები.

პასუხი: $\frac{d}{\sqrt{2}}$; $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

9. მოცემულ ბირთვში ჩავხაზოთ უდიდესი გვერდითი ზედაპირის მქონე ცილინდრი.

პასუხი: $H = R\sqrt{2}$

10. როგორი იქნება სიგანე მაქსიმალური ფართობის მართკუთხედისა, რომელიც შეიძლება ჩაიხაზოს პარაბოლის მოცემულ OAA' სეგმენტში?



ნახ. 7

მითითება: (ნახ. 7) თუ $OC = h$, $BC = h - x$ და $EE' = 2y$. მაშინ $EDD'E'$ მართკუთხედის ფართობი იქნება:

$$2(h-x)y.$$

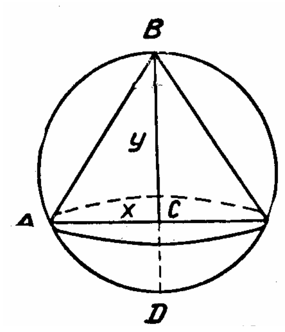
მაგრამ, E წერტილი ძევს $y^2 = 2px$ პარაბოლაზე, ამიტომ, საკვლევ ფუნქციას ექნება სახე:

$$f(x) = 2(h-x)\sqrt{2px}$$

პასუხი: $\frac{2}{3}h$.

11. იპოვეთ მაქსიმალური მოცულობის კონუსის სიმაღლე, რომელიც შეიძლება ჩაიხაზოს მოცემულ r რადიუსის მქონე სფეროში.

მითითება: კონუსის მოცულობა ტოლია



ნახ. 8

$$\frac{1}{3}\pi x^2 y,$$

მაგრამ

$$x^2 = BC \cdot CD = y(2r - y);$$

ამიტომ საკვლევი ფუნქცია იქნება

$$f(y) = \frac{\pi}{3} y^2 (2r - y) .$$

პასუხი: $\frac{4}{3} r$,

12. იპოვეთ მაქსიმალური მოცულობის ცილინდრის სიმაღლე, რომელიც შეიძლება ჩაიხაზოს მოცემულ კონუსში (ნახ. 9).

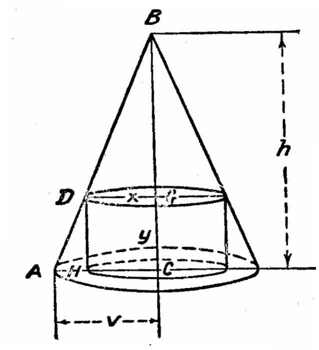
მითითება: ვთქვათ, $AC = r$ და $BC = h$. ცილინდრის მოცულობა იქნება $\pi x^2 y$. მართკუთხა ABC და DBG სამკუთხედებიდან გვაქვს: $r : x = h : (h - y)$,

საიდანაც

$$x = \frac{r(h - y)}{h} .$$

ამდენად, ჩვენ საკვლევ ფუნქციას ექნება სახე

$$f(y) = \pi \frac{r^2}{h^2} y (h - y)^2 .$$



ნახ. 9

პასუხი: სიმაღლეა $\frac{1}{3} h$.

13. მრგვალი მაგიდის ცენტრის თავზე უნდა დაიკიდოს ნათურა. რა სიმაღლეზე უნდა დაიკიდოს ეს ნათურა, რომ მაგიდის ნაპირები მაქსიმალურად იყოს განათებული.

ამოხსნა: ფიზიკიდან ცნობილია, რომ A წერტილში განათებულობა გამოითვლება ფორმულით

$$I = \frac{K\sin\varphi}{l^2}, \text{ (ნახ. 10)}$$

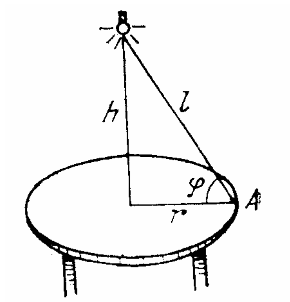
K – პროპორციულობის კოეფიციენტია (შუქის წყაროს ძალა).

თუ შევნიშნავთ, რომ

$$\cos\varphi = \frac{r}{l},$$

მივიღებთ

$$I = \frac{K}{r^2}\sin\varphi\cos^2\varphi.$$



ნახ. 10

საჭიროა ვიპოვოთ ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედზე. გვაქვს

$$I' = \frac{K}{r^2}\left(\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi\right) = 0.$$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსენი, ეს არის φ_0 კუთხე, რომლისთვისაც

$$tg\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

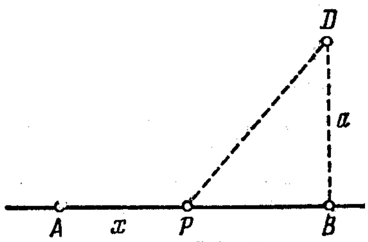
ვინაიდან, $I(0) = I\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $I > 0$, როცა $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, ვღებულობთ, რომ როცა $\varphi = \varphi_0$ I ღებულობს უდიდეს მნიშვნელობას. საძიებელი სიმაღლე იქნება

$$h = rtg\varphi_0 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7r \ .$$

14. V მოცულობის ქილას აქვს ცილინდრის ფორმა. როგორი უნდა იყოს მისი ზომების შეფარდება (სიმაღლე h და დიამეტრი $2R$), რათა მის დამზადებაზე დაიხარჯოს თუნუქის მინიმალური რაოდენობა?

პასუხი: $h = 2R = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$.

15. საჭიროა D ქალაქის გზატკეცილით დაკავშირება რკინიგზის სწორხაზოვან მაგისტრალთან, რომელზედაც განთავსებულია A ქალაქი, DB დაშორება რკინიგზამდე a-ს ტოლია. AB მანძილი რკინიგზის გასწვრივ l-ის ტოლია. გადაზიდვათა ღირებულება გზატკეცილზე m-ჯერ იაფია გადაზიდვათა ღირებულებაზე რკინიგზით ($m > 1$). როგორ გავატაროთ DP გზატკეცილი რკინიგზისკენ, რომ გადაზიდვათა ღირებულება ქარხნიდან ქალაქამდე იყოს მინიმალური?



ნახ. 11

ამოხსნა: უპირველეს ყოვლისა ცხადია, რომ გზატკეცილი აგრეთვე უნდა იყოს სწორხაზოვანი (ორი მოცემული წერტილის შემაერთებელ ნებისმიერ წირს შორის წრფე უმოკლესია). ამასთან, P პუნქტი ვერ იქნება A წერტილის მარცხნივ და ვერც B-ს მარჯვნივ, თუ AP მანძილს x-ით აღვნიშნავთ, მაშინ ზემოთ ნათქვამი ნიშნავს შემდეგს: $0 \le x \le l$.

ვთქვათ, გადაზიდვათა ღირებულება რკინიგზაზე არის k; მაშინ გადაზიდვათა ღირებულება გზატკეცილზე იქნება km, ხოლო გადაზიდვათა საერთო ღირებულება D-დან A-ში იქნება

$$N = kx + km\sqrt{a^2 + (l-x)^2}\ .$$

ამრიგად, საჭიროა მოიძებნოს მინიმალური მნიშვნელობა ფუნქციისა

$$f(x) = x + m\sqrt{a^2 + (x-l)^2}\ ,\quad 0 \le x \le l\ .$$

განვიხილოთ

$$f'(x) = 1 + \frac{m(x-l)}{\sqrt{a^2 + (x-l)^2}}.$$

ადვილად მიიღება, რომ $f'(s) = 0$ მხოლოდ ერთ წერტილში

$$x = l - \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}}.$$

თუ ეს წერტილი ეკუთვნის $[0,l]$ სეგმენტს, ანუ, თუ

$$l \ge \frac{a}{\sqrt{m^2-1}} \text{ ან } \frac{a}{l} \le \sqrt{m^2 - 1}\ ,$$

მაშინ მითითებულ წერტილში მიიღწევა გადაზიდვათა მინიმალური ღირებულება (ამის შემოწმება ადვილია). თუკი უკანასკნელი უტოლობა არ სრულდება, მაშინ $f(x)$ ზრდადია $[0,l]$-ში და ამიტომ გადაზიდვათა მინიმალური ღირებულება მიიღწევა x= 0-ში.

16. ორი თვითმფრინავი ფრინავს ერთ სიბრტყეში და სწორხაზოვნად 120° კუთხით დახრით, ერთი და იმავე v კმ/სთ სიჩქარით. რომელიღაც მომენტში ერთი თვითმფრინავი მივიდა მოძრაობის ხაზის გადაკვეთის წერტილში, ხოლო მეორე ვერ

მიუახლოვდა მას a კმ-ით. რა დროის შემდეგ იქნება თვითმფრინავებს შორის მანძილი მინიმალური და რისი ტოლია იგი?

პასუხი: $\dfrac{a}{2v}$ საათის შემდეგ და $S=\dfrac{a}{2}$ კმ.

17. B პუნქტი მდებარეობს 60 კმ-ზე რკინიგზიდან. დაშორება რკინიგზის გასწვრივ A პუნქტიდან B პუნქტის უახლოეს C წერტილიდამდე შეადგენს 285 კმ-ს. C წერტილიდან რა მანძილზე უნდა ავაშენოთ სადგური, რათა დაიხარჯოს მინიმალური დრო A და B პუნქტებს შორის გადაადგილებაზე, თუ მოძრაობის სიჩქარე რკინიგზის გასწვრივ 52 კმ/სთ-ია, ხოლო მოძრაობის სიჩქარე გზადკეცილზე 20 კმ/სთ-ის ტოლია?

პასუხი: x = 25 კმ; $t=8$ სთ 15 წთ.

18. ტურისტი მიდის A პუნქტიდან, რომელიც მდებარეობს გზატკეცილზე, B პუნქტში, რომელიც მდებარეობს 8 კმ-ში გზატკეცილიდან. მანძილი A-დან B-მდე წრფის გასწვრივ 17 კმ-ია. რა ადგილზე უნდა გადაუხვიოს ტურისტმა გზატკეცილიდან, რათა უმოკლეს დროში მივიდეს B პუნქტში, თუ მისი სიჩქარე გზატკეცილზე 5 კმ/სთ-ია, ხოლო ბილიკზე 3 კმ/სთ?

პასუხი: A-დან 9 კმ-ზე.

19. არხი, რომლის სიგანე 27 მ-ია, მართი კუთხით ეცემა 64 მ-ის მეორე არხში. როგორია უდიდესი სიგრძე მორების, რომლებიც შეიძლება დავაცუროთ არხების ამ სისტემაში?

პასუხი: 125 მ.

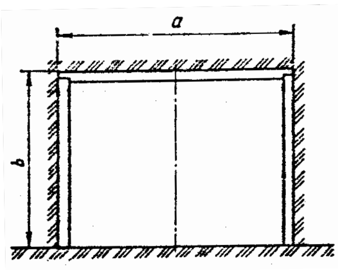
20. შტანგური სამაგრით გამაგრებული სამთო გამონამუშევრის კვეთი არის მართკუთხედი (ნახ. 12). განივი კვეთის ფართობი $S=4{,}7$ მ^2. იპოვეთ სამაგრის ჩარჩოს უმცირესი პერიმეტრი.

ამოხსნა: სამაგრის ჩარჩოს პერიმეტრი $L = a + 2b$, ფართობი $S = ab$.

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$L(b) = \frac{S}{b} + 2b$$

ვიპოვოთ $L(b)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $(0,\infty)$ ინტერვალში.



ნახ. 12

გვაქვს:

$$L'(b) = -\frac{S}{b^2} + 2\,.$$

ამოვხსნათ განტოლება $L'(b) = 0$. მივიღებთ $b = \sqrt{S/2}$.

მიღებული წერტილში $L(b)$ ფუნქცია ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას

$$L_{\min} = 2\sqrt{2}\sqrt{S}\,,\quad a = \frac{\sqrt{2}S}{\sqrt{S}} = \sqrt{2S}\,.$$

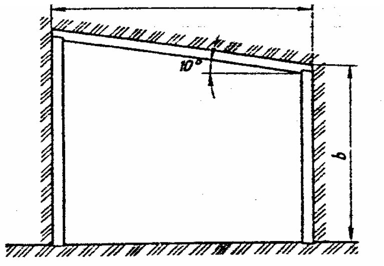
ე.ი. $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2S}}{\sqrt{S}} = 2$

ამოცანის პირობისათვის

$$L_{\min} = 2\sqrt{2}\sqrt{4{,}7} \approx 6{,}13 \quad \text{მ.}$$

21. შრის დაცემისას, როცა დაცემის კუთხე არ აღემატება 12°, გამოიყენება შტანგური სამაგრით გამაგრებული გამონამუშევარი დახრილი ჭერით (ნახ. 13). გამონამუშევრის განივი კვეთის ფართობი $S = 5{,}0$ მ^2. იპოვეთ სამაგრის ჩარჩის პერიმეტრი.

ამოხსნა: პერიმეტრი



ნახ. 13

$$L = 2b + atg10° + \frac{q}{\cos 10°}\,.$$

რადგან ფართობი

$$S = (2b + atg10°)\frac{a}{2}\,,$$

ამიტომ $b = \dfrac{S}{a} - a\dfrac{tg10°}{2}$ და

$$L(a) = \frac{2S}{a} - atg10° + atg10° +$$

$$+\frac{a}{\cos 10°} = \frac{2S}{a} + \frac{a}{\cos 10°}\,.$$

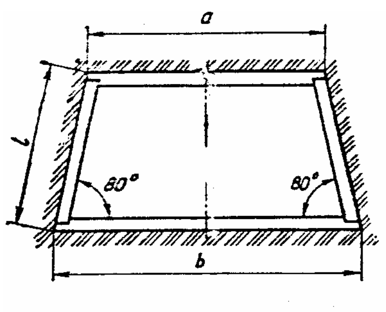
$L(a)$ ფუნქციის ექსტრემუმზე გამოკვლევის შედეგად მივიღებთ

$$L_{\min} = \frac{2S}{a_{\min}} + \frac{a_{\min}}{\cos 10°} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 10°}}\sqrt{S}\,, \qquad a_{\min} = \sqrt{2S\cos 10°}\,.$$

ამოცანის პირობისათვის

$$L_{\lim} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 10°}}\sqrt{5} = 2\sqrt{\frac{10}{\cos 10°}} \approx 6{,}37 \text{ მ.}$$

22. სამაგრი ჩარჩოთი გამაგრებული სამთო გამონამუშევრის კვეთი არის ტოლფერდა ტრაპეცია, გვერდითი დგარებების დახრილობის კუთხე უდრის 80° (ნახ. 14) (შრის დაცემის კუთხე მეტია 10° და ნაკლებია 55°). განივი კვეთის ფართობი S=5,95 მ^2. იპოვეთ სამაგრი ჩარჩოსი უმცირესი პერიმეტრი.



ნახ. 14

ამოხსნა: საძებნი პერიმეტრი

$$L = a + b + 2l$$

კვეთის ფართობი $S = \frac{a+b}{2}$, სადაც $h = l\sin 80°$,

საიდანაც

$$a + b = \frac{2S}{h} = \frac{2S}{l\sin 80°},$$

ამიტომ

$$L(l) = \frac{2S}{l\sin 80°} + 2l.$$

$L(l)$ ფუნქციის ექსტრემუმზე გამოკვლევის შედეგად მივიღებთ

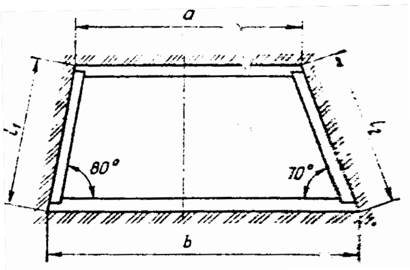
$$l_{\min} = \sqrt{\frac{S}{\sin 80°}}, \quad L_{\min} = \frac{2S}{l_{\min}\sin 80°} + 2l_{\min} = 4l_{\min}.$$

ამოცანის პირობისათვის

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{5,95}{\sin 80°}} \approx 2,46 \text{ მ},$$

$$L_{\min} \approx 9,84 \text{ მ}.$$

23. სამაგრი ჩარჩოთი გამაგრებული სამთო გამონამუშევრის კვეთი არის ტრაპეცია, რომლის ფუძესთან მდებარე კუთხეები 70° და 80°. (ნახ. 15) შრის დაცემის კუთხე უდრის 70°, განივი კვეთის ფართობი S = 6,22 მ^2. იპოვეთ სამაგრი ჩარჩოსი უმცირესი პერიმეტრი.



ნახ. 15

ამოხსნა: კვეთის პერიმეტრი

$$L = a + b + l_1 + l_2,$$

სადაც

$$l_2 = \frac{h}{\sin 80°}, \quad l_3 = \frac{h}{\sin 70°}$$

ფართობი კი $S = \frac{a+b}{2}h$, საიდანაც

$$a+b = \frac{2S}{h},$$

ამიტომ

$$L(h) = \frac{2S}{h} + \frac{h}{\sin 80°} + \frac{h}{\sin 70°}.$$

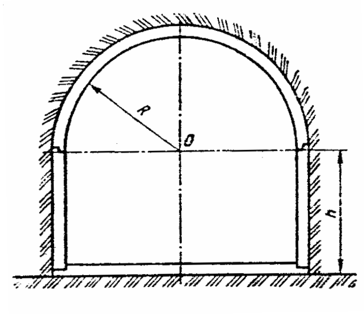
$L(h)$ ფუნქციის ექსტრემუმზე გამოკვლევისას მივიღებთ

$$h_{\min} = \sqrt{\frac{2S}{\frac{1}{\sin 80°} + \frac{1}{\sin 70°}}}.$$

როცა S =6,22 მ^2, მაშინ

$$h_{\min} \approx 2{,}45 \text{ მ}, \; L_{\min} \approx 10{,}17 \text{ მ}.$$

24. ფოლადის თაღოვანი სამაგრით გამაგრებულია სამთო გამონამუშევრის კვეთი შედგება მართკუთხედისგან და ნახევარწრისგან (ნახ. 16). გამონამუშევრის (მაგალითად წოლხვრელის) განივი კვეთის ფართობი S=7,6 მ^2. როგორი უნდა იყოს ნახევარწრის რადიუსი, რომ კვეთის პერიმეტრი იყოს უმცირესი?



ნახ. 16

ამოხსნა: კვეთის პერიმეტრი $L = 2h + 2R + \pi R$, ფართობი კი

$$S = 2hR + \frac{\pi R^2}{2},$$

საიდანაც

$$h=\frac{S}{2R}-\frac{\pi R}{4}.$$

ამიტომ

$$L(R)=\frac{S}{R}-\frac{\pi R}{2}+(2+\pi)R .$$

$L(R)$ ფუნქციის ექსტრემუმზე გამოკვლევისას მივიღებთ

$$R_{\min}=\sqrt{\frac{2S}{4-\pi}};\quad L_{\min}=\frac{4+\pi}{2}R_{\min}+\frac{S}{R_{\min}}.$$

როცა $S=7{,}6$ მ^2, მაშინ

$$R_{\min}=\sqrt{\frac{2\cdot 7{,}6}{4+\pi}}\approx 1{,}4 \text{ მ.}$$

$$L_{\min}=\frac{4+\pi}{2}1{,}46+\frac{7{,}6}{1{,}46}\approx 10{,}4 \text{ მ.}$$

25. ექსკავატორის ჩამჩას (სწორი მექანიკური ნიჩაბის) აქვს ზემოდან გახსნილი მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა, $V=3{,}2$ მ^3 მოცულობით. როგორი უნდა იყოს ჩამჩას ზომები, რომ მისი დამზადებაზე დაიხარჯოს მინიმალური რაოდენობის მასალა, თუ ცნობილია, რომ სიმაღლე h ტოლია l სიგრძის. (კედლების სისქე არ გაითვალისწინება).

ამოხსნა: ჩამჩას მოცულობა

$$V=hbl=bh^2,$$

სადაც $b-$ სიგანეა.

რადგან $l=h$, ამიტომ ფართობი

$$S=bh+2bh+2hl=3bh+2h^2.$$

რადგან $b=V/h^2$, ამიტომ

$$S(h)=\frac{3V}{h}+2h^2.$$

ვიპოვოთ $S(h)$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

$$S'(h) = -\frac{3V}{h^2} + 4h\,.$$

$S'(h) = 0$ განტოლებიდან მივიღებთ, რომ $h = \sqrt[3]{3V/4}$; $S'(0{,}5h_{კრიტ}) < 0$, $S'(2h_{კრიტ}) > 0$, ამიტომ $h = h_{კრიტ.}$ წერტილში $S(h)$ ფუნქციას გააჩნია მინიმუმი, ე.ი.

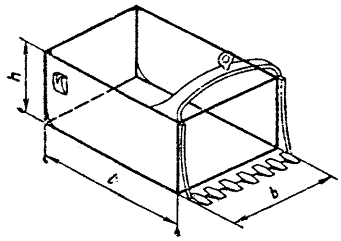
$$h_{\min} = 0{,}91\sqrt[3]{V}, \quad b_{\min} = 1{,}2\sqrt[3]{V}, \quad S_{\min} = \frac{3V}{h_{\min}} + 2h_{\min}^2\,.$$

როცა $V = 3{,}2$ მ³, მაშინ

$$h_{\min} = 0{,}91\sqrt[3]{3{,}2} \approx 1{,}35 \quad \text{მ},$$

$$b_{\min} = 1{,}2\sqrt[3]{3{,}2} \approx 1{,}77 \quad \text{მ}.$$

26. დრაგლაინის ჩამჩა წარმოადგენს კოლოფისებრი ფორმის შენადუღ კონსტრუქციას, რომელიც აღჭურვილია კბილებით. ჩამჩას გააჩნია ზემოდან გახსნილი პარალელეპიპედის ფორმა წინა კედლის გარეშე (ნახ. 17).



ნახ. 17

ჩამჩას მოცულობა $V = 15$მ³, როგორი ზომების ჩამჩა უნდა იყოს, რომ მისი დამზადებაზე დაიხარჯოს მინიმალური რაოდენობა მასალა, თუ ცნობილია, რომ $l = 1{,}2b$?

ამოხსნა: ჩამჩას მოცულობა

$$V = blh = 1{,}2b^2h\,,$$

ფართობი კი

$$S = lb + 2lh + bh = 1{,}2b^2 + 3{,}4bh\,.$$

გამოვსახოთ h სიდიდე V-ს და b-ს საშუალებით:

$$h = \frac{V}{1{,}2b^2}.$$

თუ ჩავსვათ h-ის ეს მნიშვნელობა ფართობის ფორმულაში, მივიღებთ

$$S(b) = 1{,}2b^2 + 2{,}83\frac{V}{b}.$$

$S(b)$ ფუნქციის ექსტრემუმზე გამოკვლევისას მივიღებთ

$$b_{\min} = \sqrt[3]{\frac{2{,}83V}{2{,}4}} \approx 1{,}09\sqrt[3]{V};$$

$$l_{\min} = 1{,}2b = 1{,}3\sqrt[3]{V};$$

$$h_{\min} = \frac{V}{1{,}2b_{\min}^2} = 0{,}7\sqrt[3]{V};$$

$$S_{\min} = 1{,}2b_{\min}^2 + 2{,}83\frac{V}{b_{\min}};$$

$$h_{\min}/b_{\min} = 0{,}64.$$

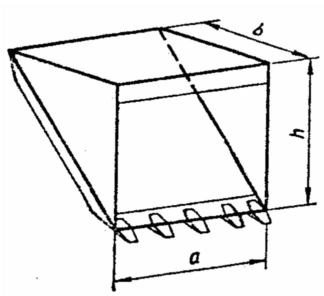
ამოცანის პირობის თანახმად V = 15 მ^3, ამიტომ

$$b_{\min} = 1{,}09\sqrt[3]{15} = 2{,}7 \quad \text{მ};$$

$$l_{\min} = 1{,}3\sqrt[3]{15} = 3{,}2 \quad \text{მ};$$

$$h_{\min} = 0{,}7\sqrt[3]{15} = 17 \quad \text{მ};$$

$$S_{\min} = 1{,}2\cdot 2{,}7^2 + 2{,}83\cdot\frac{15}{27} = 24{,}47 \quad \text{მ}^2.$$



ნახ. 18

27. ექსკავატორის ჩამჩა (შებრუნებული ნიჩაბის) არის მართი სამკუთხა პრიზმა გვერდითი წახნაგის გარეშე (ნახ. 18). ჩამჩას მოცულობა V=0,15 მ^3. როგორი ზომების ჩამჩა უნდა იყოს, რომ მისი დამზადებაზე დაიხარჯოს მინიმალური რაოდენო-

ბის მასალა, თუ ცნობილია, რომ $h = a$ (კედლების სისქე არ გაითვალისწინება).

ამოხსნა: ჩამჩას მოცულობა

$$V = \frac{hb}{2} \cdot a = \frac{h^2}{2} b ,$$

ზედაპირის ფართობი

$$S = 2ab + a\sqrt{h^2 + b^2} = 2hb + h\sqrt{h^2 + b^2} .$$

რადგან $b = \dfrac{2V}{h^2}$, ამიტომ

$$S(h) = \frac{4V}{h} + h\sqrt{\frac{4V^2}{h^4} + h^2} = \frac{4V}{h} + \sqrt{\frac{4V^2}{h^2} + h^4} .$$

გამოვიკვლიოთ $S(h)$ ფუნქცია ექსტრემუმზე.

$$S'(h) = -\frac{4V}{h^2} + \frac{2h^6 - 4V^2}{h^3\sqrt{\dfrac{4V^2}{h^2} + h^4}}.$$

გავუტოლოთ $S'(h)$ ნულს

$$\frac{2h^6 - 4V^2}{h^3\sqrt{\dfrac{4V^2}{h^2} + h^4}} - \frac{4V}{h^2} = 0,$$

ან

$$h^6 - 2V^2 = 2V\sqrt{4V^2 + h^6} .$$

აღვნიშნოთ $h^6 + 4V^2 = x^2$, საიდანაც $h^6 = x^2 - 4V^2$. მაშინ

$$x^2 - 6V^2 = 2Vx ,$$

მაშინ

$$x^2 - 2Vx - 6V^2 = 0$$

და

$$x_{1,2} = V \pm \sqrt{7V^2} = V \pm V\sqrt{7} .$$

რადგან $x = \sqrt{h^6 + 4V^2} > 0$, ვიღებთ

$$x = V + \sqrt{7}V = V(1 + \sqrt{7}),$$

$$h^6 = x^2 - 4V^2 = V^2(4+2\sqrt{7}),$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ

$$h_{\text{კრიტ.}} = \sqrt[6]{4+2\sqrt{7}}\sqrt[3]{V}.$$

$S'(0{,}5h_{\text{კრიტ.}}) < 0$, $S'(2h_{\text{კრიტ.}}) > 0$ მ, ამიტომ $h = h_{\text{კრიტ.}}$ წერტილში $S(h)$ ფუნქციას გააჩნია მინიმუმი

$$h_{\min} = \sqrt[6]{4+2\sqrt{7}}\sqrt[3]{V} \approx 1{,}45\sqrt[3]{V},$$

$$b_{\min} = \frac{2V}{h_{\min}^2} \approx 0{,}96\sqrt[3]{V},$$

$$S_{\min} = \frac{4}{h_{\min}} + \sqrt{\frac{4V^2}{h_{\min}^2} + h_{\min}^4} \approx 5{,}26\sqrt[3]{V^2}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა V=0,15 მ^3

$$h_{\min} \approx 1{,}45\sqrt[3]{0{,}15} = 0{,}77 \text{ მ};$$

$$b_{\min} \approx 0{,}95\sqrt[3]{0{,}15} = 0{,}5 \text{ მ};$$

$$S_{\min} \approx 5{,}26\sqrt[3]{0{,}15^2} = 1{,}49 \text{ მ}^2,$$

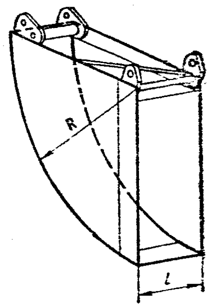
$$tg\alpha_{\min} = \frac{b_{\min}}{h_{\min}} = \frac{0{,}95\sqrt[3]{V}}{1{,}45\sqrt[3]{V}} = 0{,}65517241,$$

ე.ი. $$\alpha_{\min} \approx 33°14'.$$

28. ექსკავატორს, რომელიც იყენება სადრენაჟო და მოსწორებუს სამუშაოებისათვის, გააჩნია წრიული ცილინდრის მეოთხედის, გვერდითი წახნაგის გარეშე ფორმის ჩამჩა (ნახ. 19) ჩამჩას მოცულობა V=0,23 მ^3. რისი ტოლი უნდა იყოს ნახევარწრის რადიუსი, რომ ჩამჩას დამზადებაზე დაიხარჯოს მინიმალური რაოდენობის მასალა?

ამოხსნა: ჩამჩას მოცულობა $V = \dfrac{\pi R^2}{4}l$, ზედაპირის ფართობი

$$S = \frac{\pi R^2}{2} + Rl + \frac{\pi R}{2} l.$$



ნახ. 19

რადგან $l = \frac{4V}{\pi R^2}$, ამიტომ

$$S(R) = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{4V}{\pi R} + \frac{2V}{R},$$

$$S'(R) = \pi R - \frac{4V}{\pi R^2} - \frac{2V}{R^2}.$$

$S'(R) = 0$ განტოლებიდან მივიღებთ

$$R_{კრ} = \sqrt[3]{\frac{2\pi + 4}{\pi}} \sqrt[3]{V}.$$

$S'(0{,}5R_{კრ}) < 0$, $S'(2R_{კრ}) > 0$, ამიტომ $R=R_{კრიტ}$. წერტილში $S(t)$ ფუნქციას გააჩნია მინიმუმი

$$R_{\min} \approx 1{,}48\sqrt[3]{V},$$

$$l_{\min} = \frac{4V}{\pi R^2} \approx 0{,}58\sqrt[3]{V},$$

$$S_{\min} = \frac{\pi R_{\min}^2}{2} + \frac{4V}{\pi R^2} + \frac{2V}{R_{\min}}.$$

როცა $V = 0{,}23$ მ^3, მაშინ

$$R_{\min} = 1{,}48\sqrt[3]{0{,}23} \approx 0{,}91 \text{ სმ;}$$

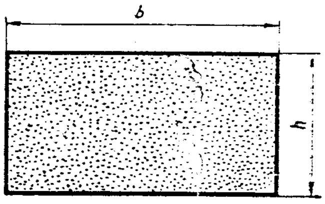
$$l_{\min} \approx 0{,}58\sqrt[3]{0{,}23} \approx 0{,}36 \text{ მ;}$$

$$S_{\min} = \frac{\pi \cdot 0{,}91^2}{2} + \frac{4 \cdot 0{,}23}{\pi \cdot 0{,}91} + \frac{2 \cdot 0{,}23}{0{,}91} \approx 1{,}3 + 0{,}32 + 0{,}5 = 2{,}13 \text{ მ}^3.$$

29. ფხვიერი ტვირთის ტრანსპორტირების დროს გამოიყენება დახურული ღარი, რომლის კვეთა არის მართკუთხედი. განსაზღვრეთ მოცემული პერიმეტრის მქონე ღარის ზომები, რომლებისათვის კვეთის ფართობი იქნება მაქსიმალური (ნახ. 20).

ამოხსნა: ღარის პერიმეტრი

$$P = 2b + 2h,$$



ნახ. 20

კვეთის ფართობი კი $S = bh$.

პირველი ტოლობიდან $h = \frac{P-2b}{2}$, ამიტომ

$$S = \frac{b(P-2b)}{2} = \frac{P}{2}b - b^2.$$

$S(b)$ ფუნქციის ექსტრემუმზე გამოკვლევის შედეგად მივიღებთ, რომ ამ ფუნქციას $b = \frac{P}{4}$ წერტილში გააჩნია მაქსიმუმი და

$$b_{\max} = \frac{P}{4}; \;\; h_{\max} = \frac{P-2b_{\max}}{2} = \frac{P}{4} = b_{\max}.$$

ე.ი. ღარის კვეთი უნდა იყოს კვადრატი, რომლის ფართობი

$$S_{\max} = \frac{P^2}{16}.$$

მაგალითად, თუ $P = 2$ მ, მაშინ

$$P_{\max} = \frac{P}{4} = 0{,}5 \text{ მ};$$

$$S_{\max} = \frac{P^2}{16} = 0{,}25 \text{ მ}^2.$$

30. საწვავსაპოხი მასალების ტრანსპორტირების დროს გამოიყენება ცილინდრის ფორმის ცისტერნები, l – სიგრძის და R-ფუძის რადიუსით. განსაზღვრეთ V=120 მ^3 მქონე მოცულობის ცისტერნის ზომები, რომლებისათვის მისი დამზადებაზე დაიხარჯება მინიმალური რაოდენობის მასალა (კედლების სისქე არ ითვალისწინება).

ამოხსნა: ცისტერნის მოცულობა

$$V = \pi R^2 l\ ,$$

ზედაპირის ფართობი

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rl\ .$$

ამ ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

ვიპოვოთ $S(b)$ ფუნქციის მინიმუმი. გვაქვს

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}\ ,$$

$$4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0\ ;$$

საიდანაც

$$R_{\text{კრიტ.}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\ ;$$

$$S'(0{,}5R_{\text{კრიტ.}}) < 0\ ,\ \ S'(2R_{\text{კრიტ.}}) > 0\ ,$$

ამიტომ $R = R_{\text{კრიტ.}}$ წერტილში $S(R)$ ფუნქციას გააჩნია მინიმუმი

$$R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};\quad l_{\min} = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{(2\pi)^2}}} = \frac{V}{\sqrt[3]{\dfrac{\pi^3V^2}{4\pi^4}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R_{\min}\,;$$

$$S_{\min} = 2\pi R_{\min}^2 + \frac{2V}{R_{\min}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}\ .$$

კერძოდ, თუ V=120 მ^3, მაშინ

$$R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{120}{2\pi}} = 2{,}67 \text{ მ};$$

$$l_{\min} = \frac{V}{\pi R_{\min}^2} = \frac{120}{\pi\cdot 2{,}67^2} = 5{,}34 \text{ მ}.$$

ე.ი. ცისტერნის დიამეტრი უნდა უდრიდეს მის სიგრძეს.

სინამდვილეში ეს არ ხდება სხვადასხვა ფაქტორების გამო. ამიტომ, განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

ვიპოვოთ V – მოცულობის მქონე ცისტერნის ზომები, რომლებისათვის შენადუღი ნაკერების სიგრძე იქნება მინიმალური.

ამოხსნა: შენადუღი ნაკერების სიგრძე

$$L = 4\pi R + l\ .$$

რადგან $l = \dfrac{V}{\pi R^2}$, ამიტომ

$$L(R) = 4\pi R + \frac{V}{\pi R^2}.$$

ვიპოვოთ $L(R)$ ფუნქციის მინიმუმს

$$L'(R) = 4\pi - \frac{2V}{\pi R^3};$$

$$4\pi - \frac{2V}{\pi R^3} = 0\ ;$$

$$R_{\text{კრიტ.}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}\ ;$$

$$L'(0{,}5R_{\text{კრიტ.}}) < 0\ ;\ L'(2R_{\text{კრიტ.}}) > 0\ ,$$

ამიტომ $R = R_{\text{კრიტ.}}$ წერტილში $L(R)$ ფუნქციას აქვს მინიმუმი

$$R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}\ ;\ l_{\min} = \frac{V}{\pi R_{\min}^2} = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{4\pi^4}}} = \sqrt[3]{4\pi V}\ ;$$

$$\frac{l_{\min}}{R_{\min}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi V}}{\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi^2}}} = \sqrt[3]{8\pi^2} = 2\pi\ ,$$

ან

$$\frac{l_{\min}}{2R_{\min}} = \pi\ ;$$

$$L_{\min} = 4\pi R_{\min} + l_{\min} = 6\pi R_{\min}\ ,$$

ე.ი. შენადუღი ნაკერების სიგრძე იქნება მინიმალური, როცა ცისტერნის სიგრძე π-ჯერ მეტია დიამეტრზე.

კერძოდ, თუ V=120 მ^3, მაშინ

$$R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{120}{2\pi^2}} \approx 1{,}825 \quad \text{მ};$$

$$l_{\min} = 2\pi R \approx 2\pi \cdot 1{,}825 \approx 11{,}46 \text{ მ}.$$

31. შახტაში წყლის თანაბარი მოწოდებისათვის იყენებენ სამარაგო რეზერვუარებს, რომლებსაც აქვთ ზემოდან გახსნილი ცილინდრის ფორმა. ვიპოვოთ V=500 მ^3 მოცულობის მქონე რეზერვუარის ისეთი ზომები, რომლებისათვის მის დამზადებაზე დაიხარჯება რკინაბეტონის მინიმალური რაოდენობა.

ამოხსნა: რეზერვუარია მოცულობა და ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულებით

$$V = \pi R^2 H; \quad S = \pi R^2 + 2\pi RH .$$

რადგან $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$, ამიტომ

$$S(R) = \pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

ვიპოვოთ $S(R)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი

$$S'(R) = 2\pi R - \frac{2V}{R^2}, \quad S'(R) = 0 ,$$

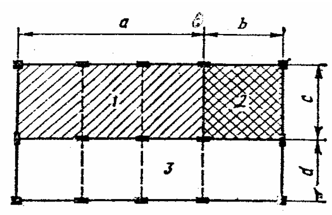
საიდანაც

$$R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} , \ \ S_{\min} = \pi R_{\min}^2 + \frac{2V}{R_{\min}} ,$$

$$H_{\min} = \frac{V}{\pi R_{\min}^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\dfrac{V^2}{\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = R_{\min} .$$

ე.ი. რეზერვუარის სიმაღლე უნდა იყოს ორჯერ ნაკლები ფუძის დიამეტრზე.

32. შახტის დამხმარე ჭაურის ბლოკის შენობა შედგება სამი განყოფილებიდან: 1 – რკინის სამაგრის და დანადგარის საწყობი; 2 – მატერიალური საწყობი; 3 – ცეხი, შახტის დამხმარე პერსონალისთვის. ბლოკის ყველა კედლების სიგრძე L=336 მ. დამხმარე ცეხის სიგრძე ორჯერ მეტია სიგანეზე და უდრის ორივე საწყობების სიგრძეების ჯამს (ნახ. 21). როგორი უნდა იყოს შენობის ზომები, რომ ორი საწყობის ფართობების ჯამი იყოს უდიდესი.



ნახ. 21

ამოხსნა: ყველა კედლების სიგრძე

$$L = 3(a+b) + 2(c+d) + c .$$

საწყობის ფართობი

$$S = (a+b)c .$$

რადგან $a+b = 2d$, ამიტომ $S = 2dc$; $L = 8d + 3c$, საიდანაც $2d = (L-3c)/4$.

ე.ი.

$$S(c) = c\frac{L-3c}{4} = \frac{L}{4}c - \frac{3}{4}c^2$$

გამოვაკვლიოთ $S(c)$ ფუნქცია ექსტრემუმზე

$$S'(c) = \frac{L}{4} - \frac{3}{2}c , \ S'(s) = 0 , c_{\text{კრიტ.}} = \frac{L}{6} .$$

$S'(0{,}5c_{\text{кр}}) > 0$, $S'(2c_{\text{кр}}) < 0$, ფუნქციას გააჩნია მაქსიმუმი

$$c_{\max} = \frac{L}{6}, \ d_{\max} = \frac{L-3c_{\max}}{8} = \frac{L-\dfrac{L}{2}}{8} = \frac{L}{16},$$

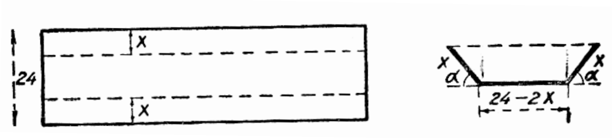
$$(a+b)_{\max} = 2d_{\max} = \frac{L}{8}, \ \ S_{\max} = 2dc = \frac{L}{8}\cdot\frac{L}{6} = \frac{L^2}{48}.$$

ამოცანის პირობისთვის

$$c_{\max} = \frac{336}{6} = 56 \text{ მ}; \quad d_{\max} = \frac{336}{16} = 21 \text{ მ};$$

$$(a+b)_{\max} = 42 \text{ მ}; \quad S_{\max} = 2332 \quad \text{მ}^2.$$

33. რკინის ფურცელს აქვს გრძელი მართკუთხედის ფორმა, სიგრძით 24 სმ. საჭიროა მისი გადაღუნვა წყვეტილ-წერტილოვან ხაზებზე და გვერდებს ისეთი დახრის მიცემა, რომ მივიღოთ პრიზმული ჭურჭელი მაქსიმალური ტევადობის (ნახ. 22).



ნახ. 22

ამოხსნა: ამოცანაში მოითხოვება გვქონდეს მაქსიმალური ფართობის განივი კვეთა. ეს კვეთა არის ტრაპეცია, რომელსაც აქვს: ქვედა ფუძე $24-2x$, ზედა ფუძე $24-2x+2x\cos\alpha$, სიმაღლე $x\sin\alpha$. ამიტომ A ფართობი მოიცემა ფორმულით

$$A = 24x\sin\alpha - 2x^2\sin\alpha + x^2\sin\alpha\cos\alpha .$$

გვაქვს:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 24x\sin\alpha - 4x\sin\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha ,$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 24x\cos\alpha - 2x^2\cos\alpha + x^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

გავუტოლებთ, რა ამ კერძო წარმოებულებს ნულს, გვექნება ორი განტოლება

$$2\sin\alpha(12-2x+x\cos\alpha) = 0,$$

$$x[24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)] = 0 .$$

ერთ-ერთი ამონახსნი ამ სისტემისა არის α=0 და x=0, მაგრამ მას არ აქვს აზრი დასმული რეალური ამოცანის პირობებში, დავუშვებთ, რა, რომ $\alpha \neq 0$ და $x \neq 0$, გვაქვს: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ და x=8. ფიზიკური ამოცანა ნათლად მიგვანიშნებს ჩვენ იმაზე, რომ მაქსიმუმი უნდა არსებობდეს. ეს ნიშნავს, რომ იგი უნდა მიიღებოდეს, როცა α=60° და 8 სმ.

34. ვაჩვენოთ, რომ ყველაზე ეკონომიური ზომები მართკუთხოვანი აუზისათვის არის: ფუძე კვადრატი და სიღრმე – ფუძის გვერდის სიგრძის ნახევარი.

35. ფარდულს აქვს ცილინდრის ფორმა, მასზე დაშენებული კონუსური თავით. მოცემული v მოცულობის ასეთი ფარდულის დასამზადებლად რა ზომების შემთხვევაში დაიხარჯება მასალის მინიმუმი?

პასუხი: თუ x ფარდულის ფუძის რადიუსია, y ცილინდრული ნაწილის სიმაღლე z კონუსური ნაწილის სიმაღლე, მაშინ განზომილებათა პროპორციებია:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{2}{3}; \quad 2y = z.$$

36. ვაჩვენოთ, რომ მოცემული მოცულობის მართკუთხა პარალელეპიპედის S ზედაპირი იქნება მინიმალური, როცა სხეული არის კუბი.

37. იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებანი, რომლისთვისაც მოცემული S სრული ზედაპირის პირობებში გვექნება მაქსიმალური მოცულობა.

პასუხი: $x = y = z$, $V_{\max} = \frac{S}{6} \cdot \sqrt{\frac{S}{6}}$.

38. a დავყოთ სამ ისეთ ნაწილად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

ამოხსნა: ვთქვათ, პირველი ნაწილია x, მეორე y, მაშინ მესამე ნაწილი იქნება

$$a-(x+y)=a-x-y\ ,$$

ხოლო საკვლევი ფუნქცია იქნება

$$f(x,y)=(a-x-y)xy.$$

გვაქვს:

$$\frac{df}{\partial x}=ay-2xy-y^2=0\ ;\ \frac{df}{\partial y}=ax-2xy-x^2=0.$$

ამ განტოლებათა ამოხსნა მოგვცემს

$$x=\frac{a}{3};\quad y=\frac{a}{3}$$

(ამრიგად, დაყოფა წარმოებს სამ ტოლ ნაწილად)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2y;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=a-2x-2y\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x;$$

$$\Delta=4xy-(a-2x-3y)^2\ .$$

თუ

$$x=\frac{a}{3}\ \text{ და }\ y=\frac{a}{3}\ .$$

მაშინ

$$\Delta=\frac{a^2}{3}>0\ ,$$

მაგრამ, რამდენადაც

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2}{3}a\ ,$$

ცხადია,

$$x=\frac{a}{3},\ y=\frac{a}{3}\text{-სთვის}$$

ნამრავლი იქნება უდიდესი და ეს უდიდესი მნიშვნელობაა $\frac{a^3}{27}$.

თავი III

ინტეგრალი. დიფერენციალური განტოლებები

მრავალნაირი თეორიული და გამოყენებითი ხასიათის საკითხის განხილვისას საჭირო ხდება უცნობი ფუნქციის აღდგენა მისი წარმოებულის საშუალებით.

$F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელი მოცემულ შუალედში, თუ ამ შუალედის ყველა x წერტილისათვის $F'(x)=f(x)$.

შევნიშნოთ, რომ:

ა) თუ $F(x)$ ფუნქცია $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელია, მაშინ $F(x)+c$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირვანდელს $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$.

ბ) თუ $F(x)$ ფუნქცია $f(x)$-ის პირვანდელია, მაშინ $F(x)+c$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია $f(x)$-ის ზოგადი სახის პირველადი ფუნქცია, ე.ი. ერთიდაიგივე ფუნქციის ორი პირვანდელი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ მუდმივ შესაკრებით.

გ) თუ $f(x)$-ის პირვანდელი $F(x)$; $g(x)$-ის პირვანდელი $G(x)$, მაშინ $(f(x)+g(x))$-ის პირვანდელია $F(x)+G(x)$.

დ) თუ $F(x)$ არის $f(x)$-ის პირვანდელი, ხოლო k მუდმივია, მაშინ $kF(x)$ არის $kf(x)$-ის პირვანდელი.

ე) თუ $F(x)$ არის $f(x)$-ის პირვანდელი, ხოლო k და b მუდმივებია, მაშინ $\frac{1}{k}F(kx+b)$ არის $f(kx+b)$-ს პირვანდელი.

მოცემული ფუნქციის პირვანდელის მოძებნა ფუნქციის ინტეგრება ეწოდება და წარმოადგენს ფუნქციის გაწარმოების შებრუნებული ოპერაციას.

მოცემული $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირვანდელი $F(x)$ ფუნქციისა და ნებისმიერი c მუდმივის $F(x)+c$ ჯამს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი და აღინიშნება

$$\int f(x)dx = F(x)+c,$$

ამასთან, $f(x)$-ის ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, $f(x)dx$ - ინტეგრალქვეშა გამოსახულება, x ცვლადს – ინტეგრების ცვლადი.

განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, ანუ $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,

2) $\int F'(x)dx = F(x)+c,$ ანუ $\int dF(x) = F(x)+c,$

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, სადაც k ნებისმიერი მუდმივია,

4) $\int \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,

5) თუ $\int f(x)dx = F(x)+c$, მაშინ $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

ძირითად ინტეგრალთა ცხრილი:

1) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \ (\alpha \neq -1)$;

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+c$;

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$;

$\int e^x dx = e^x + c$

4) $\int \cos x dx = \sin x + c$;

5) $\int \sin x dx = -\cos x + c$;

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$;

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c = -arcctgx + c$;

11) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$; 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c$.

12) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$;

პირვანდელის მოძებნის უმარტივესი ხერხებია: ა) ცვლადის გარდაქმნისა და ბ) ნაწილობრივი ინტეგრების;

ა) თუ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია პირვანდელი, ხოლო $x = \varphi(t)$ რაიმე შუალედზე წარმოებადი ისეთი ფუნქციაა, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე შედის $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეში, მაშინ $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ფუნქციასაც გააჩნია პირვანდელი და $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$;

ბ) თუ $u(x)$ და $v(x)$ რაიმე შუალედზე წარმოებადი ისეთი ფუნქციებია, რომ $u'(x) \cdot v(x)$ ფუნქციას გააჩნია პირვანდელი, მაშინ $u(x) \cdot v'(x)$ ფუნქციასაც გააჩნია პირვანდელი და $\int u(x)b(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx$.

$f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი a-დან b-მდე ეწოდება ამ ფუნქციის $F(x)$ პირვანდელის $F(b) - F(a)$ ნაზრდს, და აღინიშნება

$$\int_a^b f(x)dx,$$

ე.ი. თუ $F'(x) = f(x)$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

ამ ტოლობას ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა ეწოდება.

განსაზღვრულ ინტეგრალს აქვს მრავალმხრივი გამოყენება:

1) განსაზღვრული ინტეგრალის საშუალებით შესაძლებე-

ლია ბრტყელ ფიგურათა ფართობების გამოთვლა:

თუ $y = f(x)$ უწყვეტი და არაუარყოფითი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობია $S = \int_a^b f(x)dx$;

თუ $f_1(x) \le f_2(x)$ წარმოადგენენ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციებს, მაშინ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $f_1(x) \le f_2(x)$ ფუნქციებითა და $x = a$, $x = b$ წირებით, გამოითვლება ფორმულით

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

2) იმ წირის სიგრძე, რომელიც მოიცემა $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, გამოითვლება ფორმულით

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

3) იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $[a,b]$ სეგმენტზე არაუარყოფითი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკითა და $x = a$, $x = b$ წირებით შემოსაზღვრული ბრტყელი ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო, გამოითვლება ფორმულით

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

4) თუ M მატერიალური წერტილი Ox ღერძზე $\vec{F}$, ძალის მოქმედებით, რომლის მიმართულება ემთხვევა Ox ღერძის მიმართულებას, მაშინ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული W

მუშაობა, როცა M წერტილი გადაადგილდება $x = a$ წერტილი-დან $x = b$ წერტილამდე, გამოითვლება ფორმულით

$$W = \int_a^b F(x)dx .$$

5) ზედაპირიდან h სიღრმეზე მოთავსებულ რაიმე S ფართობის ფიგურაზე მოქმედი სითხის წნევა P ტოლია

$$P = \rho g h S ,$$

სადაც $\rho g h$ არის წნევა, რომელიც მოდის h სიღრმეზე ფარ-თობის ერთეულზე, g თავისუფალი ვარდნის აჩქარება და ρ სითხის სიმკვრივე (პასკალის კანონი).

განტოლებას, რომელიც ამყარებს კავშირს დამოუკიდებელ x ცვლადსა, მის უცნობ y ფუნქციასა და ამ ფუნქციის წარმო-ებულებს შორის დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

დიფერენციალური განტოლების რიგი ეწოდება მასში შემავალი უცნობი ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულის რიგს.

დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც ამოხსნილია უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ, ეწოდება ნორმალური სახის დიფერენციალური განტოლება; მაგალითად, I რიგის დიფერენციალური განტოლება ნორმალური სახის შემდეგია:

$$y' = f(x, y) ,$$

ამასთან $y(x_0) = y_0$ პირობას ეწოდება საწყისი პირობა, ხოლო ამოცანას, ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების ის ამო-ნახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას, ეწოდება კოშის ამოცანა.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას დიფერენცია-

ლური განტოლების ინტეგრებას უწოდებენ, ხოლო ამონახსნს კი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს.

1. დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით – ასე ეწოდება შემდეგი სახის დიფერენციალურ განტოლებას

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(d)\cdot\varphi_2(y)dy=0,$$

აქედან

$$\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_2(y)}dy+\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=0\,,$$

ხოლო განტოლების ინტეგრალი იქნება

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_2(y)}dy=C\,.$$

2) პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $f(x, y)$ არის ნულოვანი რიგის ($f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება n-ური რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ, თუ $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$) ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ.

ერთგვაროვანი განტოლება შეიძლება მიყვანილი იქნას $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ სახეზე ჩასმით

$$y=tx\,,$$

სადაც t ახალი უცნობი ფუნქციაა.

3) პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\,,$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია.

როდესაც $Q(x) \equiv 0$, განტოლებას ეწოდება წრფივი ერთგვაროვანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში – არაერთგვაროვანი. განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

4. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება – ასე ეწოდება

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

სახის განტოლებას, სადაც a_1 და a_2 მუდმივებია. განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$y = \overline{y} + y^*,$$

სადაც $\overline{y}$ არის მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების (თუ $f(x) = 0$, მაშინ განტოლება ერთგვაროვანია) ზოგადი ამონახსნი, ხოლო y^* კი მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნი. განტოლებას $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ ეწოდება მოცემული დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი განტოლება, რომლის ფესვების ხასიათი განსაზღვრავს $\overline{y}$-ის სახეს: კერძოდ, გვაქვს შემთხვევები:

ა) $k_1 \neq k_2$, $\overline{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

ბ) $k_1 = k_2 = k$, $\overline{y} = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$,

გ) $\begin{matrix} k_1 = a + ib \\ k_2 = a - ib \end{matrix}$ $\overline{y} = e^{kx}(C_1 \cos\beta + C_2 \sin\beta x)$

ყველგან იგულისხმება, რომ C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

რაც შეეხება y^*-ის მოძებნას, ზოგ შემთხვევაში, როცა მარჯვენა მხარეში $f(x)$-ს აქვს სპეციალური სახე, კერძოდ ამონახსნი შეიძლება ვეძებით განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით. განვიხილოთ შემთხვევები: ა) $f(x) = P_n(x)$, სადაც $f_n(x)$ არის n-ური ხარისხის მრავალწევრი. აქ განიხილება კერძო შემთხვევები: Iა) თუ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ნულოვანი ფესვი, მაშინ ვეძებოთ $y^x = x^e Q_n(x)$ სახით, სადაც e არის მახასიათებელი განტოლების ნულოვანი ფესვის ჯერადობა, $Q_n(x)$ კი n-ური ხარისხის პოლინომია. IIა) თუ მახასიათებელ განტოლებას არა აქვს ნულოვანი ფესვი, მაშინ ვეძებოთ $y^x = Q_n(x)$ სახით.

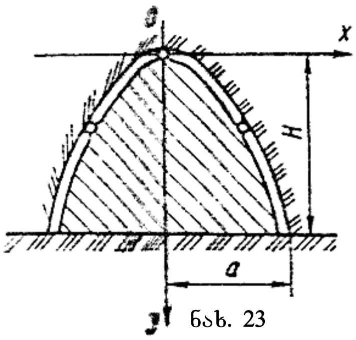
ბ) $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, ქვეშემთხვევებით: Iბ) თუ a არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ $y^x = Q_n(x)e^{ax} \cdot x^e$ სახით, სადაც e მახასიათებელი განტოლების ფესვის ჯერადობაა. IIბ) თუ a არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ $y^x = Q_n(x)e^{ax}$ სახით.

გ) $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$ შემთხვევა შემდეგ ქვეშემთხვევებში: Iგ) როდესაც $i\beta$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, კერძო ამონახსნს ვეძებთ სახით $y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, ხოლო IIგ) თუ $i\beta$ მახასიათებელი განტოლების ფესვია, მაშინ $y^* = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.

1. იპოვეთ თაღოვანი სამსახსრიანი სამაგრით გამაგრებული წოლხვრელის კვეთის ფართობი (ნახ. 23), თუ სამთო წნევის

შედეგად სამაგრმა მიიღო პარაბოლის ფორმა. კვეთის ზომებია $H = 2{,}90$ მ; $a = 1{,}65$ გ.

ამოხსნა: პარაბოლის განტოლება აღებულ კოორდინატთა სისტემაში (ნახ. 23) არის $y = Ax^2$. როცა $x = \pm a$, მაშინ $y = H$, ამიტომ $H = Aa^2$, საიდანაც $A = \dfrac{H}{a^2}$. ე.ი. $y = \left(\dfrac{H}{a^2}\right)x^2$. კვეთის ფართობი უდრის



ნახ. 23

$$S = \int_{-a}^{a} y\,dx = \frac{H}{a^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{2}{3}Ha.$$

ამოცანის პირობაში

$$S = \frac{2}{3}\cdot 2{,}96\cdot 1{,}65 \approx 3{,}256 \text{ მ}^2.$$

2. $v_0 = 10$ მ/წმ გალიის ქვემოთ მოძრაობის დროს ხდება ბაგირის გაწყვეტა (ნახ. 24). იპოვეთ:

ა) გალიის სიჩქარე თავისუფალი ვარდნის ბოლოს თუ თავისუფალი ვარდნის დრო (ანუ დრო გაწყვეტის მომენტიდან საპარაშუტო მოწყობილობის ჩართვამდე) უდრის 0,2 წმ.

ბ) გალიის თავისუფალი ვარდნის დროს გავლილი მანძილი.

ამოხსნა: ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა, სადაც Oy მიმართებულია ქვემოთ. თავისუფალი ვარდნა ხდება $\vec{P} = m\vec{g}$, (m – გალიის მასა) ძალის მოქმედების შედეგად (ნახ. 24).

ნიუტონის II კანონის თანახმად $\overrightarrow{ma} = \vec{P} = m\vec{g}$, საიდანაც $\vec{a} = \vec{g}$. აჩქარების პროექცია Oy-ზე $a_y = g$, ან $\dfrac{dv_y}{dt} = g$, ამიტომ

$$v_y = gt + C.$$

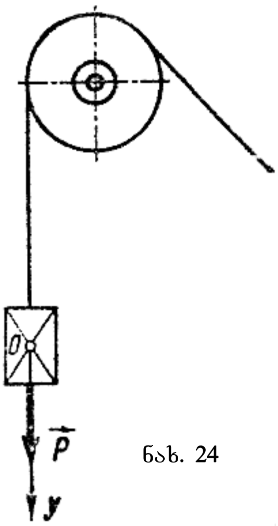
თუ $t = 0$, მაშინ $v_y = v_0$, საიდანაც $v_0 = C$, ე.ი.

$$v_y = v_0 + gt \text{ , ან } \frac{dy}{dt} = v_0 + gt \text{ .}$$

ვიპოვოთ პირველადი ფუნქცია

$$y(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{2} + C_1 \text{ ,}$$

$y(0) = 0$, $t = 0$ საწყისი პირობიდან ვღებულობთ $C_1 = 0$. ე.ი.



ნახ. 24

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 t,$$

$$v = v_0 + gt \text{ .}$$

როცა $t = 0,2$ წმ და $v_0 = 10$ მ/წმ

$$v = 10 + 9,8 \cdot 0,2 \ = \ 11,96 \text{ მ/წმ,}$$

$$y = 10 \cdot 0,2 + \frac{9,8 \cdot 0,2^2}{2} \approx 2,2 \text{ მ.}$$

3. მადნის გამდიდრების აპარატურაში დახრილ სიბრტყეზე, რომლის დახრილობის კუთხე α=30°, საწყისი სიჩქარის გარეშე სრიალებს მადნის ორი ნაჭერი. რისი ტოლია იქნება მათი სიჩქარე დახრილი სიბრტყის ბოლოში (ნახ. 25), თუ სიბრტყის სიგრძე $s = 1$ მ, f_1 =0.5, f_2 =0,3 – ხახუნის კოეფიციენტები.

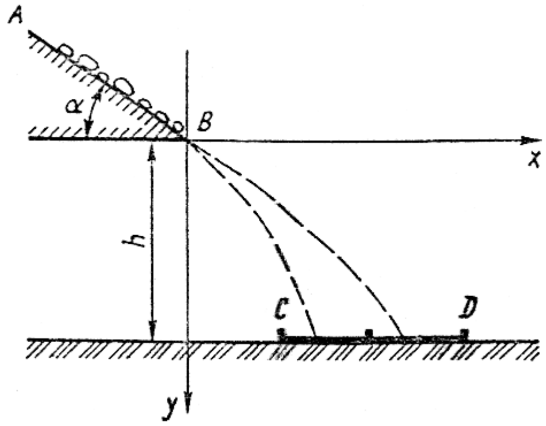
ამოხსნა: დავშალოთ მადნის ნაჭრის წონა P შემადგენებელ ძალებად:

$$T = P\cos 60^\circ = 0,5P; \quad N = P\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} P.$$

სხეულზე მომქმედი ძალა ნიუტონის II კანონის თანახმად

$$\vec{F} = m\vec{a} ,$$

სადაც $\vec{a}$ – აჩქარება.



ნახ. 25

მეორეს მხრივ

$$\vec{F} = \vec{T} - \vec{N}f ,$$

სადაც $\vec{T}$ - ძალა, რომელიც მოქმედებს მოძრაობის მომართულებით, $\vec{N}f$ – ხახუნის ძალა, რომელიც მოქმედებს T-ს საწინააღმდეგოდ.

ე.ი.

$$m\vec{a} = \vec{T} - \vec{N}f ,$$

$\vec{a}$, $\vec{T}$ და $\vec{N}f$ პროექციებისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$ma = T - Nf .$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$P = mg , \quad a = \frac{dv}{dt} = v'(t) ,$$

მივიღებთ

$$mv'(t) = 0{,}5mg - \frac{\sqrt{3}}{2}mgf\ ,$$

საიდანაც

$$v'(t) = 0{,}5g - \frac{\sqrt{3}}{2}gf.$$

ვიპოვოთ $v'(t)$ ფუნქციის პირველადი

$$v(t) = \left(0{,}5g - \frac{\sqrt{3}}{2}gf\right)t + C\ ,$$

$t = 0,\ \ v_0 = 0$ საწყისი პირობიდან $v(0) = 0 = C$.

ე.ი.

$$v(t) = \left(0{,}5g - \frac{\sqrt{3}}{2}gf\right)t.$$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)\ ,$$

$$s'(t) = \left(0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2}f\right)gt.$$

ვიპოვოთ $s'(t)$ ფუნქციის პირველადი

$$s(t) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\cdot g\cdot\frac{t^2}{2} + C_1\ .$$

$s(0) = 0$ საწყისი პირობიდან $C_1 = 0$, ამიტომ

$$s(t) = \left(\frac{1}{2}g - \frac{\sqrt{3}}{2}gf\right)\frac{t^2}{2} = \frac{g}{4}(1-\sqrt{3}f)t^2$$

მოძრაობის ბოლოს ადგილი ექნება ტოლობას

$$s(t_\kappa) = \frac{g}{4}(1-\sqrt{3})t_\kappa^2 = 1 \quad \text{საიდანაც} \quad t_\kappa = \frac{2}{(g(1-\sqrt{3}f))^{1/2}}.$$

ე.ი.

$$v_{\kappa} = \left(0{,}5g - \frac{\sqrt{3}}{2}gf\right)t_{\kappa} = \frac{g}{2}(1-\sqrt{3}g)\frac{3}{(g(1-\sqrt{3}f))^{1/2}} = \sqrt{g(1-\sqrt{3}f)}.$$

თუ ჩავსვამთ ამ ტოლობაში f_1 = 0,5 და f_2 = 0,3, მივიღებთ

$$v_{\kappa_1} = \sqrt{9{,}81(1-\sqrt{3}\cdot 0{,}5)} \approx 1{,}15 \quad \text{მ/წმ};$$

$$v_{\kappa_2} = \sqrt{9{,}81(1-\sqrt{3}\cdot 0{,}3)} \approx 2{,}17 \quad \text{მ/წმ},$$

ე.ი. $v_1 \neq v_2$, რაც აძლევს საშუალებას მადნის სხვადასხვა ნაჭრების განცალებას.

4. მინის ქილებში თავსდება საკონსერვო მრეწველობის პროდუქტები და იხუფება თუნუქის ხუფებით დამხუფ მანქანებზე. ამ ოპერაციის შესრულების დროს ქილა ბრუნვით მოძრაობაში იმყოფება. იპოვეთ მაქსიმალურად დასაშვები ბრუნთა რიცხვი.

ამოხსნა: ჰიდრავლიკიდან ცნობილია, რომ ბრუნავ ჭურჭელში სითხის ზედაპირი პარაბოლოიდის სახეს ღებულობს (ნახ. 26). მის განივკვეთში პარაბოლის განტოლება იქნება

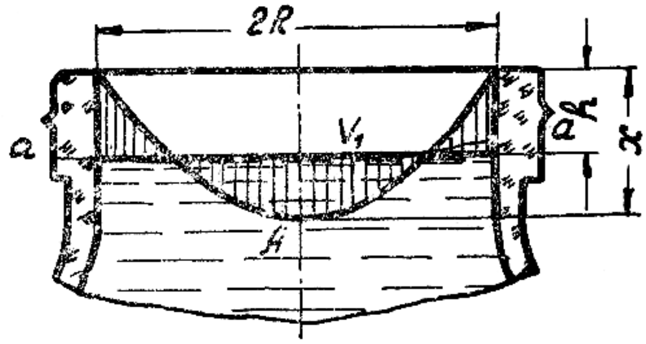
$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

დამტკიცებულია, რომ

$$p = \left(\frac{30}{n}\right)^2, \qquad (2)$$

სადაც n –ჭურჭლის ბრუნთა რიცხვია.

თუ მანძილს სითხის დონიდან ქილის ნაპირამდე აღვნიშნავთ h-ით, მაშინ შეიძლება განისაზღვროს ქილის ისეთი კრიტიკული ბრუნთა რიცხვი – $n_კ$, რომლის დროსაც სითხე მიადგება ნაპირს, და მისი ზედაპირი პარაბოლოიდის სახეს ღებულობს.



ნახ. 26

ქილის ყელის შეუვსებელი ნაწილის მოცულობა მისი უძრავი მდებარეობისათვის იქნება

$$V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot h\,,$$

სადაც $R-$ ქილის ყელის შიგა რადიუსია.

პარაბოლოიდის მოცულობა

$$V_2 = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi \int_0^x 2pxdx = \pi p x^2$$

როცა $n = n_კ$, მაშინ უნდა შესრულდეს $V_1 = V_2$ ტოლობა, ე.ი.

$$px^2 = R^2 h\,,$$

ან

$$x^2 = \frac{R^2 \cdot h}{p}\,. \tag{3}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ (1)-ში $y = R$, გვექნება

$$x = \frac{R^2}{2p}\,. \tag{4}$$

(3) და (4)-დან ვღებულობთ

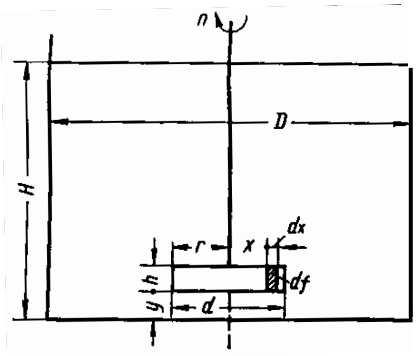
$$p = \frac{R^2}{4 \cdot h}\,, \tag{5}$$

(2) და (5)-დან კი მოიძებნება ქილის კრიტიკული ბრუნთა რიცხვი

$$n_{\max} = 60\frac{\sqrt{h}}{R} \text{ ბრ/წთ},$$

სადაც h და R მეტრებით გამოისახება.

5. იპოვეთ ჰორიზონტალური ნიჩბების მქონე შემრევის გამშვები მოთხოვნილი სიჩქარე (ნახ. 27) ნიჩბების z წყვილისათვის.



ნახ. 27

ამოხსნა: შემრევის ნიჩბის ბრუნვისას მოძრაობაში მოდის სითხის რაღაც მოცულობა. იმასთან დაკავშირებით, რომ ნიჩბის სხვადასხვა ნაწილს, რომელიც იმყოფება სხვადასხვა მანძილზე ბრუნვის ღერძიდან, აქვს სხვადასხვა ბრუნვის სიჩქარე, შედეგად კი იხარჯება სითხის ბრუნვაში მოსაყვანად ენერგიის განსხვავებული რაოდენობა, განვიხილოთ ნიჩბის ელემენტარული ფართობის სითხეზე მოქმედება ზღვრებში, როდესაც წრიული სიჩქარე შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ.

გამოვყოთ ჰორიზონტალური ნიჩბიდან (ნახ. 27) უსასრულოდ მცირე ელემენტარული ფართობი df ბრუნვის ღერძიდან x მანძილზე.

ამ ფართობის სიდიდე იქნება

$$df = h\,dx\,, \tag{1}$$

სადაც $h-$ ნიჩბის სიმაღლეა მ-ში.

ნიჩბის ბრუნვის დროს ელემენტარულ ფართობს *df*-ს ერთ წამში მოძრაობაში მოყავს სითხის ელემენტარული მოცულობა, ტოლი

$$d\upsilon = \psi\omega df \text{ მ}^3/\text{წმ} \qquad (2)$$

სადაც ω – ელემენტარული ფართობის წრიული სიჩქარეა, მ/წმ;

ψ – კოეფიციენტი, რომელიც ითვალისწინებს სითხის ნაკადის კვეთის ფართობის ზრდას ნიჩბის ელემენ-ტარული ფართობის ფარდობასთან, დამოკიდებული $\frac{r}{h}$ მნიშვნელობაზე, სადაც r – ნიჩბის რადიუსია, მ-ში.

r/h	1	2	4	10	18	∞
ψ	1,1	1,15	1,19	1,29	1.4	2

ელემენტარული მუშაობა წმ-ში დახარჯული ელემენტარული *dv* მოცულობის სითხის მოძრაობაში მოსაყვანად, შეიძლება გაანგარიშებული იქნას როგორც კინეტიკური ენერგია

$$dN_n = \frac{dm\omega^2}{2}, \qquad (3)$$

სადაც $dm = \frac{dv\gamma}{g}$,

γ – სითხის სიმძიმის კუთრი ძალაა (კუთრი წონა);

g – თავისუფლად ვარდნის აჩქარება.

მაშინ

$$dN_n = \frac{dv\gamma\omega^2}{2g}.$$

(2)-დან *dv*-ს მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ

$$dN_n = \frac{\psi\omega df\gamma\omega^2}{2g} = \frac{\psi df\gamma\omega^3}{2g}. \qquad (4)$$

ელემენტარული ფართობის წრიული სიჩქარე ტოლია $\omega = 2\pi nx$ მ/წმ, სადაც n –შემრევი ლილვის ბრუნვის სიხშირე წმ-ში.

ω და df მნიშვნელობის ჩასმით გვექნება

$$dN_n = \frac{\psi hdx\gamma(2\pi)^3 n^3 x^3}{2g}. \tag{5}$$

რადგან x იცვლება 0-დან r-მდე (5) განტოლების გაინტეგრებით ზღვრებში $x = 0$-დან $x = r$-მდე, მივიღებთ ერთი ნიჩბისათვის აუცილებელ მუშაობას წმ-ში

$$N_n = \frac{(2\pi)^3 \psi\gamma n^3 hr^4}{2g \cdot 4} \text{ ვტ (კგ.მ/წმ).} \tag{6}$$

$\dfrac{\gamma}{g} = \rho$ და $r = \dfrac{d}{2}$ ჩასმით და 2-ზე გაყოფის შემდეგ მივიღებთ ერთი წყვილი ნიჩბის გამშვებ მოთხოვნილ სიმძლავრეს

$$N_n = 2\frac{(2\pi)^3 \psi\rho n^3 hd^4}{2 \cdot 64} \text{ ვტ (კგ.მ/წმ).} \tag{7}$$

შესაბამისად z წყვილი ნიჩბებიანის გამშვები მოთხოვნილი სიმძლავრე ტოლია

$$N_n = 2z\frac{(2\pi)^3 \psi\rho n^3 hd^4}{2 \cdot 64} = 3{,}87\psi\rho n^3 hd^4 z \text{ ვტ (კგ.მ/წმ)} \tag{8}$$

ან

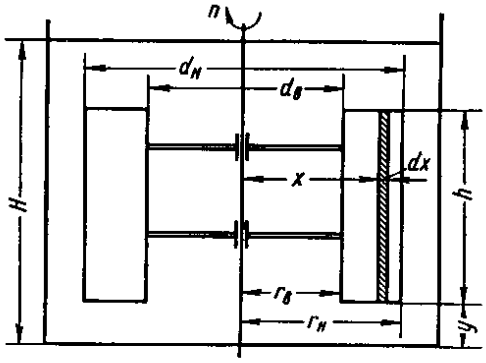
$$N_n = 0{,}038\psi\rho n^3 hd^4 z \text{ კვტ.} \tag{9}$$

6. იპოვეთ ვერტიკალური ნიჩბების მქონე შემრევის გამშვები მოთხოვნილი სიჩქარე (ნახ. 28) ნიჩბების z წყვილისთვის.

ამოხსნა: ვერტიკალური ნიჩბებიანი შემრევის მოთხოვნილი სიმძლავრის გაანგარიშების მეთოდიკა ანალოგიური ჰორიზონტალურ ნიჩბებიანი შემრევის გაანგარიშებისა. ნახ. 28-ზე მოცემულია ვერტიკალურ ნიჩბებიანი შემრევის საანგარიშო სქემა.

ჰორიზონტალურ ნიჩბებიანი შემრევის ანალოგიურად ჩატარებული გაანგარიშებებით, მივიღებთ ელემენტარული სიმძლავრის საანგარიშო ფორმულა

$$dN_n = \frac{\psi h dx \gamma (2\pi)^3 n^3 x^3}{2g}. \tag{1}$$



ნახ. 28

ვერტიკალურ ნიჩბებიანი შემრევებისათვის x იცვლება r_b-დან r_h-მდე. განტოლების აღნიშნულ ინტერვალში ინტეგრებით და აუცილებელი მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ მოთხოვნილი გამშვები სიმძლავრის მნიშვნელობას z წყვილიანი ვერტიკალურ ნიჩბებიანი შემრევისათვის

$$N_n = 3{,}87\psi\rho h n^3 z(d_н^4 - d_в^4) \text{ ვტ (კგ.მ/წმ)} \tag{2}$$

ან

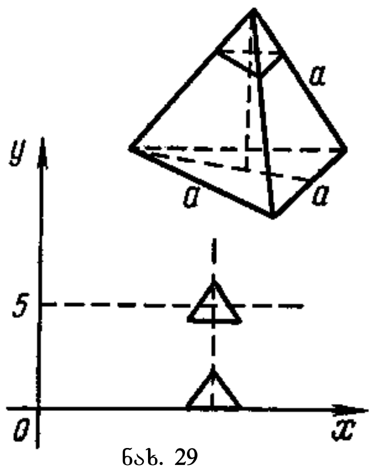
$$N_n = 0{,}038\psi\rho h n^3 z(d_н^4 - d_в^4) \text{ კვტ}. \tag{3}$$

7. რა მუშაობა უნდა შესრულდეს ზამბარის 4 სმ-ით გაჭიმვისათვის, თუკი ცნობილია, რომ 1 ნიუტონი ძალის მოქმედებით იგი იჭიმება 1 სმ-ზე?

ამოხსნა: ჰუკის კანონის თანახმად X ძალა (ნიუტონებში), რომელიც ზამბარას x მ-ზე ჭიმავს, ტოლია $X = kx$. პროპორციულობის k კოეფიციენტს ვიპოვით პირობიდან: როდესაც x=0,01, მაშინ $X = 1$ ნ; მაშასადამე, $k = \dfrac{1}{0{,}01} = 100$ და $X = 100x$, შესაბამისად,

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08 \text{ ჯ}.$$

8. რა მუშაობას ხარჯავს ამწე კრანი 5მ სიღრმის მდინარიდან რკინა-ბეტონის შენადნობის ამოსაღებად, თუ მას აქვს წესიერი ტეტრაედრის ფორმა რომლის წიბოს სიგრძეა 1 მ და რკინა-ბეტონის სიმკვრივე კი 2500 კგ/მ^3-ის ტოლია (ნახ. 29).



ნახ. 29

ამოხსნა: ტეტრაედრის სიმაღლეა $h = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}$ მ, მოცულობა კი $V = \dfrac{1}{12}\sqrt{2}$ მ^3. შენადნობის წონა წყალში $P = \dfrac{1}{12}\sqrt{2}\cdot 2500\cdot 0{,}98 - \dfrac{1}{12}\sqrt{2}\cdot 1000\cdot \cdot 9{,}8 = 1225\sqrt{2}$ ნ, ამიტომ მუშაობა, რომელიც საჭიროა შენადნობის წყლის ზედაპირზე ამოსაღებად, რათა მისი წვერო გამოჩნდეს, იქნება:

$$A_0 = 1225\sqrt{5}(5-h) = 1225\sqrt{2}\left(5 - \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \cong 7227{,}5 \text{ ჯ}.$$

ახლა ვიპოვოთ ის A_1 მუშაობა, რომელიც საჭიროა შენადნობის წყლიდან ამოსაღებად. ვთქვათ, ტეტრაედრის წვერო

ამოწეულია $5+y$ სიმაღლეზე, მაშინ წყლის ზემოთ ამოწეული მცირე ტეტრაედრის მოცულობა ტოლი იქნება $\frac{1}{8}y^3\cdot 3\sqrt{3}$, ხოლო მთლიანი ტეტრაედრისა

$$P(y)=\frac{2500\cdot 9{,}8}{12}\sqrt{2}-\left(\frac{1}{12}\sqrt{2}-\frac{1}{8}y^3 3\sqrt{3}\right)1000\cdot 9{,}8 \text{ ნ.}$$

მაშასადამე

$$A_1=\int_0^h\left(\frac{24500}{12}\sqrt{2}-\frac{9800}{12}\sqrt{2}+\frac{9800}{8}3y^2\sqrt{3}\right)dy=$$

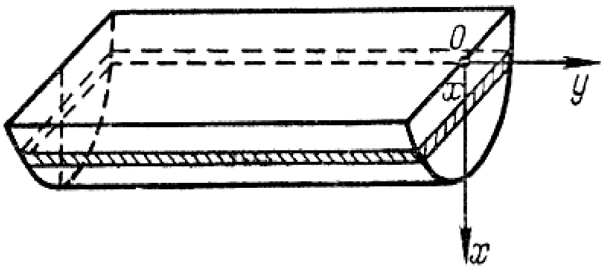
$$=\int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{6}}(1225\sqrt{2}+3675\sqrt{3}y^3)dy=$$

$$=\left[1225\sqrt{y}+\frac{2675}{4}\sqrt{3}y^4\right]_0^{\frac{1}{3}\sqrt{6}}\approx 2082{,}5 \text{ ჯ.}$$

აქედან

$$A=A_0+A_1=7127{,}5\ +\ 2082{,}5\ =\ 9310\ \text{ჯ}=9{,}31\ \text{კჯ.}$$

9. იპოვეთ ის მუშაობა, რომელიც იხარჯება გობიდან წყლის გადმოქაჩვამდე, თუ გობს ნახევარცილინდრის ფორმა აქვს a სიგრძითა და r რადიუსით (ნახ. 30).



ნახ. 30

ამოხსნა: წყლის ელემენტარული ფენის მოცულობა, რომელიც მდებარეობს x სიღრმეზე a სიგრძით, $m = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ სიგანითა და dx სისქით, ტოლია

$$dV = amdx = 2a\sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

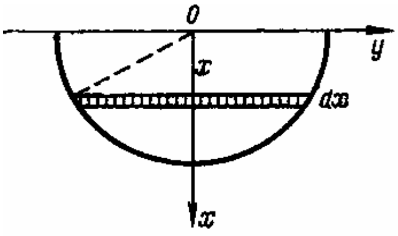
ელემენტარული მუშაობა, რომელიც საჭიროა შესრულდეს წყლის ამ ფენის x სიმაღლეზე, ამოსატანად, ტოლია

$$dA = 2\rho gax\sqrt{r^2 - x^2}\,dx,$$

სადაც ρ წყლის სიმკვრივეა. უკანასკნელიდან გამომდინარე

$$A = 2a\rho g\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -a\rho g\left[\frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r = \frac{2}{3}\rho g a r^3.$$

10. იპოვეთ წნევის სიდიდე ნახევარწრის ფორმის ვერტიკალურ კედელზე, თუ დიამეტრია 6 მ და იმყოფება წყლის ზედაპირზე (ნახ. 31). წყლის სიმკვრივე $\rho =$ 1000 კგ/მ³?



ნახ. 31

ამოხსნა: ფართობის ელემენტზე წნევის დიფერენციალი გამოისახება ასე:

$$dP = 2\rho gx\sqrt{9 - x^2}\,dx = 19600x\sqrt{9 - x^2}\,dx\ ,$$

საიდანაც

$$P = 19600\int_0^3 x\sqrt{9 - x^2}\,dx = -\frac{19600}{3}(9 - x^2)\Big|_0^3 =$$
$$= 176400\text{H} = 176{,}4 \text{ კნ}.$$

11. ცილინდრულ ავზში, რომლის სიმაღლეა h =3,5მ და რადიუსია r = 1,5 მ, ჩასხმულია ბენზინი. იპოვეთ ბენზინის წნევა ავზის კედლებზე, თუ ρ= 900 კგ/მ³.

ამოხსნა: წნევის ელემენტი კედლის ზედაპირზე გამოყოფილ ზოლში გამოისახება ასე:

$$dP = \rho g \cdot 2\pi r x dx \,,$$

აქედან

$$P = 2\pi r \rho g \int_0^h x dx = \rho g \pi h^2 = 9{,}8\pi \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}5^2 \cdot 900 =$$

$$= 161700\pi \text{ ნ} = 161{,}7\,\pi \text{ კნ}.$$

12. წყალსადენის მილის დიამეტრია 6 სმ. მისი ერთი ბოლო უერთდება ავზს, რომელშიაც წყლის დონე 100 სმ-ით მაღლაა მილის ზედა ნაწილიდან, ხოლო მეორე დახურულია სახურავით. იპოვეთ სახურავზე სრული წნევა.

ამოხსნა: სახურავი წარმოადგენს 3 სმ რადიუსის წრეს. დავყოთ ეს წრე წყლის ზედაპირის პარალელური ზოლებით. განვიხილოთ ელემენტარული ზოლი, რომელიც ცენტრიდან დაშორებულია y მანძილით და რომლის სიგანეა dy. მისი ფართობი (მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეთა სიზუსტით) არის

$$dS = 2\sqrt{9 - y^2}\,dy \quad \text{სმ}^2.$$

ამ ელემენტზე მოქმედი წნევის ძალაა

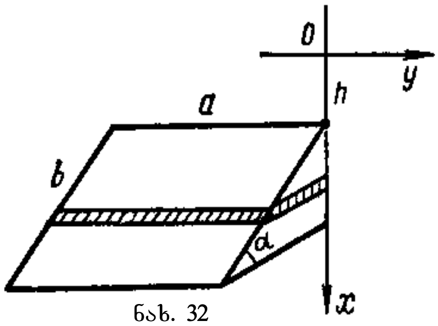
$$dP = 2\rho g(103 - y)\sqrt{9 - y^3}\,dy = 1960(103 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy \,,$$

$$P = 1960\int_{-3}^{3}(103 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy =$$

$$=1960\left[103\left(\frac{y}{2}\sqrt{2-y^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{y}{3}\right)+\frac{1}{3}(9-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{3}=$$

$=980\cdot 927\pi = 908460\pi$ ერგ. $\approx 0{,}09\pi$ ჯ.

13. რა წნევას განიცდის a სიგრძისა და b სიგანის $(a>b)$ მართკუთხა ფირფიტა, თუ იგი დახრილია სითხის ჰორიზონტისადმი α კუთხით და მისი გვერდი წყალში ჩამოშვებულია h სიღრმეზე (ნახ. 32).



ნახ. 32

ამოხსნა: x სიღრმეში გამოყოფილი ელემენტარული ზოლის ფართობი იქნება:

$$dS=\frac{a\cdot dx}{\sin\alpha}.$$

შესაბამისად, ამ ელემენტზე მოქმედი წნევის ძალა, ანუ, წნევის ელემენტი

$$dP=a\frac{dx}{\sin\alpha}x\rho g$$

(ρ სითხის სიმკვრივეა).

უკანასკნელი ფორმულიდან:

$$P=a\rho g\int_h^{h+b\sin\alpha}\frac{xdx}{\sin\alpha}=\frac{a\rho g}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_h^{h+b\sin\alpha}=$$

$$=\frac{a\rho g}{2\sin\alpha}\left[(h^2+2bh\sin\alpha+b^2\sin^2\alpha)-h^2\right]=ab\rho g\left(h+\frac{1}{2}b\sin\alpha\right).$$

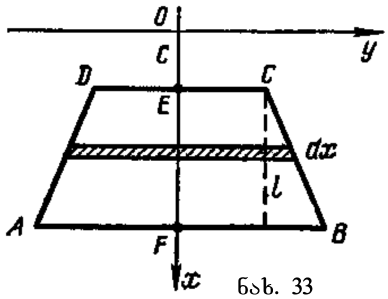
14. რა წნევას განიცდის ტოლფერდა ტრაპეციის ფორმის (ფუძეებით a და b და სიმაღლით h) ფირფიტა, რომელიც ჩაშვებულია სითხეში C სიღრმეზე (ნახ. 33).

ამოხსნა: ელემენტარული ზოლის ფართობი გამოისახება ასე:

$$dS = (a + 2t)dx\ ,$$

სადაც

$l = \dfrac{b-a}{2h}(x-c)$, (l შეიძლება განისაზღვროს სამკუთხედების მსგავსებიდან). წნევა შეიძლება გამოისახოს ინტეგრალით:



ნახ. 33

$$P = \rho g \int_{c}^{c+h} \left[a + \frac{b-a}{h}(x-c) \right] x dx =$$

$$= \rho g \left[\frac{ax^2}{2} + \frac{b-a}{h}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{cx^2}{2} \right) \right]_{c}^{c+h} = \left[\frac{a+b}{2}ch + \frac{h^2}{6}(a+2b) \right] \rho g.$$

15. იპოვეთ მუშაობა, რომელიც იხარჯება კონუსური ფორმის ჭურჭლიდან წყლის ამოსატუმბად, თუ ჭურჭლის ფუძე მდებარეობს ჰორიზონტალურად, წვეროზე ქვემოთ და ამასთან, ფუძის რადიუსია r, ხოლო სიმაღლე კი h.

პასუხი: $A = \dfrac{1}{4}\pi\rho g r^2 h^2$.

16. ცილინდრული ცისტერნიდან ტუმბავენ სითხეს. რა სამუშაო იხარჯება, თუ ცისტერნის სიმაღლეა a და დიამეტრი d?

პასუხი: $A = \dfrac{1}{6}\pi\rho g a d^3$

17. ამწე კრანით და მის წვეროზე დამაგრებული ბაგირის მეშვეობით წყლიდან ამოაქვს კონუსური ფორმის ქვა. რა მუშაობას ასრულებს ამწე კრანი ქვის წყლიდან მთლიანად ამოღებაზე, თუ კონუსის სიმაღლე წყლის ზედაპირზე იმყოფება

და კონუსის ფუძის რადიუსია 1 მ, სიმაღლეა 3მ, სიმკვრივეა 2,5 გ/სმ^3.

მითითება. ამ ამოცანაში $P(y)=14700\pi+\dfrac{9800}{27}\pi y^3$ ნ.

პასუხი: $A=51450\pi$ ჯ.

18. თუჯის მართი კონუსი, რომლის სიმაღლეა 40 სმ და ფუძის რადიუსი 40 სმ, იმყოფება ნავთობის სავსე აუზის ფსკერზე. იპოვეთ მუშაობა, რომელიც საჭიროა შესრულდეს ამ კონუსის ამოსაღებად აუზიდან, თუ თუჯის სიმკვრივეა ρ_1=7,22 გ/სმ^3, ხოლო ნავთობის სიმკვრივეა ρ_1 =0,89 გ/სმ^3.

მითითება. აქ $P(y)$ უტოლდება კონუსის მიერ გამოძევებული ნავთობის წონას, ანუ,

$$P(y)=\frac{1}{3}\pi\cdot 40^3\rho_1 g-\left(\frac{1}{3}\pi\cdot 40^3-\frac{1}{3}\pi y^3\right)\rho_2 g\,.$$

პასუხი: $A=547{,}8\pi$ ჯ.

19. 24 სმ დიამეტრისა და 80 სმ სიგრძის ცილინდრული ბალონი ავსებულია გაზით 2 კპა. წნევის ქვეშ. რა მუშაობა უნდა შესრულდეს ორჯერ მცირე მოცულობამდე გაზის იზოთერმული შეკუმშვისათვის?

პასუხი: $A\approx 50{,}7$ ჯ.

20. სამკუთხა ფირფიტა წვეროთი ზემოთ მოთავსებულია ρ სიმკვრივის სითხეში. იპოვეთ სითხის წნევა ფირფიტაზე, თუ სამკუთხედის ფუძეა a, სიმაღლე h და სამკუთხედის წვერო მდებარეობს ზედაპირზე.

პასუხი: $P=\dfrac{1}{3}\rho gah^2$.

21. იპოვეთ ბენზინის წნევა ავზის კედლებზე სიღრმის ყოველ მეტრზე, თუ ავზს აქვს ცილინდრის ფორმა და ამ ცილინდრის სიმაღლეა $h=4$ მ, რადიუსი $r=$ 2 მ ($\rho=900$ კგ/სმ³).

პასუხი: $P_1=17{,}64\pi$ კნ; $P_3=158.76\pi$ კნ; $P_2=70{,}56\pi$ კნ; $P_4=282{,}24\pi$ კნ.

22. 6 მ სიმაღლის ცილინდრული რეზერვუარი დგას ვერტიკალურად და სავსეა წყლით. ფუძის დიამეტრი 4 მ-ია. რა დროში დაიცლება რეზერვუარი $\frac{1}{12}$ მ-ის ტოლი რადიუსიანი წრიული ხვრელით, რომელიც გაკეთებულია რეზერვუარის ფსკერზე.

ამოხსნა: დასმული ამოცანის ამოსახსნელად უნდა ვისარგებლოთ ბერნულის ფორმულით:

$$v=\sigma\sqrt{2gh}.$$

რომელიც განსაზღვრავს სითხის გამოდინების სიჩქარეს რეზერვუარის ხვრელიდან, რომელიც მდებარეობს h მ-ზე დაბლა სითხის თავისუფალი ზედაპირიდან. აქ g =9,8 მ/წმ² სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, σ მუდმივი კოეფიციენტი, რომელიც სითხის თვისებებზეა დამოკიდებული (წყლისთვის $\sigma\approx$ 0,6).

ვთქვათ წყლის გამოდინების დაწყებიდან t წამის შემდეგ რეზერვუარში დარჩენილი წყლის დონე იყოს h მ, ხოლო dt დროში დაიკლო კიდევ dh მ-ით $(dh<0)$. დავითვალოთ დროის ამ მცირე dt მონაკვეთში გამოდინებული წყლის მოცულობა ორი ხერხით:

1) პირველ რიგში, ეს $d\omega$ მოცულობა ტოლია ცილინდრული ფენის მოცულობისა სიმაღლით $|dh|$ და რადიუსით r, რომელიც რეზერვუარის ფუძის რადიუსის ტოლია (r =2 მ). ამრიგად,

$$d\omega = \pi r^2 \mid dh \mid = -\pi r^2 dh \ .$$

2) მეორეც, ეს მოცულობა ტოლია ცილინდრის მოცულობისა რომლის ფუძეა რეზერვუარის ფსკერზე არსებული ხვრელი და სიმაღლეა vdt (v გამოდინების სიჩქარეა). თუ ხვრელის რადიუსია ρ $\left(\rho = \frac{1}{12}\text{ მ}\right)$, მაშინ

$$d\omega = \pi\rho^2 vdt = \pi\rho^2 \sigma\sqrt{2gh}dt \ .$$

თუ გავუტოლებთ მიღებულ მოცულობათა გამოსახულებებს, მიიღება განტოლება

$$-r^2 dh = \sigma\rho^2 \sqrt{2gh}dt \ .$$

გვაქვს დიფერენციალური განტოლება. ცვლადთა განცალებით მიიღება

$$dt = -\frac{r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

ინტეგრებით კი:

$$t = C - \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h} \ .$$

$t = 0,\ h = h_0\ = 6$ მ მონაცემებით C მუდმივისათვის მიიღება

$$C = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h_0} \ .$$

ამრიგად, t და h სიდიდეებს შორის კავშირი განისაზღვრება განტოლებით

$$t = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right),$$

ხოლო გამოდინების მთელი T დროის მოსაძებნად საჭიროა უკანასკნელ გამოსახულებაში ავიღოთ h=0.

ამრიგად,

$$T = \frac{2r^2\sqrt{h_0}}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}.$$

საბოლოოდ, ამოცანის მოცემულობებში: r=2მ, h_0 = 6მ, σ =9,6მ, $\rho = \frac{1}{12}$ მ, g =9,8 მ/წმ²), ვპოულობთ

$$T \approx 1062 \text{ წმ} \approx 17,7 \text{ წთ}.$$

23. ოთახში, სადაც ტემპერატურა 20°C-ია, სადაც სხეულის ტემპერატურა 20 წუთის განმავლობაში დაეცა 100°C-დან 60°C-მდე. იპოვეთ სხეულის გაგრილების კანონი; რამდენი წუთის შემდეგ გაგრილდება იგი 30°C-მდე.

ამოხსნა: ნიუტონის კანონის ძალით (გაგრილების სიჩქარე პროპორციულია ტემპერატურათა სხვაობის) შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-20)\,, \text{ ანუ } \frac{dT}{T-20} = k\cdot dt\,,$$

საიდანაც

$$\ln(T-20) = kt + \ln C\,.$$

t = 0, T = 100°0-თვის უკანასკნელი ფორმულიდან მივიღებთ, რომ C =80; ხოლო t =20, T =60°-თვის მივიღებთ, რომ $\ln 40 = 20k + \ln 80$, საიდანაც $k = -\frac{1}{20}\ln 2$.

საბოლოოდ:

$$T - 20 = 80\cdot e^{-\frac{1}{20}t\cdot\ln 2} = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}},$$

საიდანაც

$$T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

კერძოდ, $T = 30°$-თვის გვაქვს: $10 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, ანუ, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{8}$.

ამრიგად, $\frac{t}{20} = 3$ და $t = 60$ წთ.

24. განსაზღვრეთ დრო, რომელიც საჭიროა ზიარჭურჭელში (ორი შეერთებული ჭურჭელი). სითხის ერთნაირ დონეზე დადგომისათვის, თუ მცირე ხვრელის ფართობი, რომელიც არსებობს ჭურჭლებს შორის, ტოლია ω მ^2-ის; პირველი ჭურჭლის ჰორიზონტალური კვეთის ფართობია S_1 მ^2, მეორესი S_2 მ^2; საწყის მომენტში სითხის დონე პირველ ჭურჭელში h_1 მ სიმაღლეზეა ხვრელიდან, მეორეში კი h_2 მ-ის სიმაღლეზე $(h_2 < h_1)$.

ამოხსნა: ვთქვათ, t წამის შემდეგ სითხის გადინების დაწყებიდან, წყლის დონე პირველ ჭურჭელში შემცირდა z_1 მ-მდე, მეორეში კი z_2 მ-მდე; შემდგომი, უსასრულოდ მცირე dt დროის შუალედში პირველში წყლის დონე შემცირდა dz_1 მ-ით $(dz_1 < 0)$ და მეორეში კი dz_2 მ-ით $(dz_2 > 0)$. რადგან, სითხის მოცულობის შემცირება პირველ ჭურჭელში უდრის მის იმდენივე გადიდებას მეორეში, გვექნება:

$$S_1|dz_1| = S_2|dz_2|, \text{ ანუ } \quad -S_1 dz_1 = S_2 dz_2,$$

აქედან

$$dz_1 = -\frac{S_1}{S_2} dz_1.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $u=z_1-z_2$, მაშინ სითხის გადინების სიჩქარე ჭურჭლებს შორის ხვრელის საშუალებით შეიძლება ვიპოვოთ ბერნულის ფორმულით

$$v=\sigma\sqrt{2gu} \ ,$$

სადაც საჭიროა დავუშვათ, რომ ხვრელი იმყოფება $u=z_1-z_2$ სიღრმეზე სითხის თავისუფალი ზედაპირიდან. სითხის მოცულობა, რომელიც გაედინება dt დროში, რომელიც $-S_1dz_1$-ის ტოლია, ამავე დროს ტოლი იქნება $v\omega dt=\sigma\omega\sqrt{2gu}dt$. ამრიგად, გვაქვს:

$$-S_1dz_1=\sigma\omega\sqrt{2gu}dt.$$

მაგრამ

$$du=dz_1-dz=dz_1+\frac{S_1}{S_2}dz_1$$

ამიტომ $dz_1=\dfrac{S}{S_1+S_2}du$; მიღებული გამოსახულების ჩასმით წინა განტოლებაში, მიიღება $-\dfrac{S_1S_2}{S_1+S_2}du=\sigma\omega\sqrt{2gu}dt$, ანუ დიფერენციალური განტოლება

$$dt=-\frac{S_1S_2}{(S_1+S_2)\sigma\omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}} \ .$$

ამ უკანასკნელის ინტეგრებით გვაქვს:

$$t=C-\frac{S_1S_2}{(S_1+S_2)\sigma\omega\sqrt{2g}}\cdot 2\sqrt{u} \ .$$

როცა $t=0$, $u=h_1-h_2$, მივიღებთ: $C=\dfrac{S_1S_2\sqrt{2(h_1-h_2)}}{(S_1+S_2)\sigma\omega\sqrt{2g}}$. საძიებელი T დრო, რომელიც საჭიროა იმისათვის, რომ ჭურჭელში სითხეთა დონეები გათანაბრდეს, იქნება (უნდა დავუშვათ, რომ $u=0$)

$$T = C = \frac{S_1 S_2 \sqrt{2(h_1 - h_2)}}{(S_1 + S_2)\sigma\omega\sqrt{2g}}.$$

25. ცილინდრული რეზერვუარი სიგრძით 6 მ და დიამეტრით 4 მ დევს ჰორიზონტალურად. რა დროში იცვლება რეზერვუარი, თუ $\frac{1}{12}$ მ რადიუსის ხვრელი მდებარეობს ცილინდრის ყველაზე ქვედა მსახველის დონეზე.

პასუხი: $t \approx 18{,}4$ წთ.

26. კონუსურ ძაბრში, ω სმ^2 ფართობის ხვრელით და წვეროსთან 2α კუთხით, ჩასხმულია წყალი ხვრელიდან ქვეშ H სმ-ის დონეზე. იპოვეთ დამოკიდებულება ძაბრში წყლის ცვალებად h სიმაღლესა და გადინების t დროს შორის. განსაზღვრეთ გადინების სრული დრო. გამოთვალეთ იგი, როცა ω =0,1 სმ^2; α = 45°; H = 20 სმ.

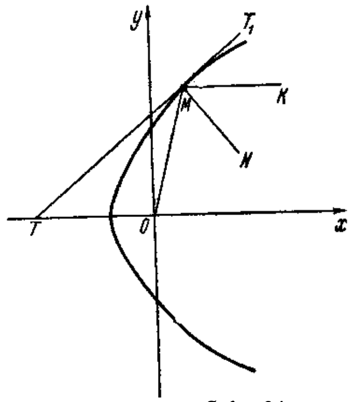
პასუხი: $t = \frac{2}{5}\frac{\pi tg^2\alpha}{\sigma\omega\sqrt{2g}}\left[H^{5/2} - h^{5/2}\right];$

$$T = \frac{2}{5}\frac{\pi tg^2\alpha}{\sigma\omega\sqrt{2g}} H^{5/2} \approx 844\text{წმ} \approx 14{,}1\,\text{წთ}.$$

27. როგორი ფორმისაა სარკე, რომელიც კრებს ყველა პარალელურ სხივს ერთ წერტილში.

ამოხსნა: ცხადია, სარკეს უნდა ჰქონდეს ფორმა ბრუნვითი ზედაპირისა, რომლის ღერძი პარალელურია სხივებისა, რომლებიც ეცემა მასზე. ამ ღერძად მივიღოთ Ox და ვიპოვოთ იმ $y=f(x)$ წირის განტოლება, რომლის ბრუნვით Ox-ის გარშემო მიიღება საძიებელი ზედაპირი. კოორდინატთა სისტემის სათავე მოვათავსოთ წერტილში, სადაც გროვდებიან არეკვლილი

სხივები. აღვნიშნოთ დაცემული სხივი KM-ით, არეკლილი MO-თი (ნახ. 34). M წერტილში გავავლოთ TT_1 მხები და MH ნორმალი, მაშინ OMT სამკუთხედი იქნება ტოლფერდა წვეროთი O წერტილში (რადგან $\angle OMT = \angle KMT_1 = \angle OTM = \alpha$). აქედან $OM = OT$, სადაც $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $OT = -x - \dfrac{y}{y'}$.



ნახ. 34

(მხების $Y - y = y'\,(X - x)$ განტოლებიდან, დავუშვებთ რა, რომ Y=0, ვღებულობთ $X = x - \dfrac{y}{y'}$, აქედან $OT = |X| = -X = \dfrac{y}{y'} + x)$. ამრიგად, გვაქვს დიფერენციალური განტოლება

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -x + \frac{y}{y'},$$

ანუ

$$\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)y' = y.$$

უკანასკნელი შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy - ydx = 0,$$

რომელიც წარმოადგენს ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. ჩასმით $x = ty$, იგი მიიღებს სახეს

$$\left(\sqrt{t^2 x^2 + y^2} + ty\right)dy - y(tdy + ydt) = 0.$$

ანუ

$$\sqrt{t^2+1}dt - ydt = 0.$$

მოვახდენთ რა ცვლადთა განცალებას და შემდეგ ინტეგრებას, მივიღებთ

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 0,$$

$$\ln y = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + \ln C,$$

საიდანაც

$$y = C\left(t + \sqrt{1+t^2}\right),$$

ანუ,

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{C}.$$

გამარტივების შემდეგ საბოლოოდ მიიღება

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right).$$

საძიებელი მრუდი წარმოადგენს პარაბოლას, ხოლო სარკეს აქვს ბრუნვითი პარაბოლოიდის ფორმა.

28. m მასის სხეული ვარდება ვერტიკალზე გარკვეული სიმაღლიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე. ვარდნისას სხეულზე მოქმედებს ჰაერის წინააღმდეგობა, რომელიც სხეულის სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია. იპოვეთ სხეულის მოძრაობის კანონი.

ამოხსნა: შემოვიტანოთ აღნიშვნები: გავლილი მანძილია s, სიჩქარე $v = \frac{ds}{dt}$, აჩქარება $w = \frac{d^2s}{dt^2}$. სხეულზე მოქმედი ძალებია: მისი წონა $P = mg$ (მოძრაობის მიმართულებით) და ჰაერის

წინააღმდეგობა $F = kv^2 = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ (მოძრაობის საწინააღმდეგოდ). ნიუტონის მეორე კანონის საფუძველზე მიიღება შემდეგი დიფერენციალური განტოლება

$$mw = P - kv^2 ,$$

ან, მეორენაირად,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 .$$

ეს უკანასკნელი, საწყისი $t = 0$, $s = 0$, $v = \frac{ds}{dt} = 0$ პირობების გათვალისწინებით გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 ,$$

სადანაც $\frac{mg}{k} = a^2$ -ის ჩასმით გვექნება:

$$\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{k}{m}dt .$$

ინტეგრებით კი $(v \le a)$ მიიღება:

$$\frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v} = \frac{k}{m}t + C_1 .$$

თუკი $t = 0$, $v = 0$ – უკანასკნელი გამოსახულებიდან მიიღება, რომ $C_1 = 0$. ამრიგად, გვაქვს

$$\ln\frac{a+v}{a-v} = \frac{2ak}{m}t .$$

აქედან

$$v = a\frac{e^{\frac{2ak}{m}t} - 1}{e^{\frac{2ak}{m}t} + 1} = a\frac{e^{\frac{ak}{m}t} - e^{-\frac{ak}{m}t}}{e^{\frac{ak}{m}t} + e^{-\frac{ak}{m}t}} = arh\frac{ak}{m}t ,$$

მაგრამ $\frac{ak}{m}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{k}{m}=\sqrt{\frac{kg}{m}}$;

შევცვლით, რა v-ს $\frac{ds}{dt}$-თი, s-ის მიმართ მიიღება განტოლება

$$\frac{ds}{dt}=ath\sqrt{\frac{kg}{m}}t\ ,$$

საიდანაც ინტეგრებით გვექნება:

$$S=\sqrt{\frac{m}{kg}}a\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_2=\frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_2\ .$$

რამდენადაც $s=0$-თვის t=0, უკანასკნელი გამოსახულებიდან მიიღება $C_2=0$.

ამრიგად, სხეულის ვარდნის კანონი ჰაერის წინააღმდეგობის გათვალისწინებით, რომელიც სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია, აღიწერება ფორმულით

$$s=\frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t\ ,$$

ხოლო მოძრაობის სიჩქარე იქნება

$$v=a\cdot t\sqrt{\frac{kg}{m}}t\ ,\ \text{აქ}\ \ a=\sqrt{\frac{mg}{k}}t.$$

საჭიროა აღინიშნოს, რომ ვარდნის სიჩქარე არ იზრდება უსასრულოდ, რადგან, $\lim\limits_{t\to\infty}v=a=\sqrt{\frac{P}{k}}$ $\left(\text{რადგან}\ \lim\limits_{t\to0}th\sqrt{\frac{kg}{m}}t=1\right)$,

სადაც P წარმოადგენს სხეულის წონას, ამასთან, პრაქტიკულად ვარდნის სიჩქარე აღწევს თავის ზღვრულ მნიშვნელობას საკმაოდ ჩქარა. სწორედ ასეთ სურათს აქვს ადგილი პრაქტიკულად გახანგრძლივებული დიდი სიჩქარით საპარაშუტო ხტომებისას.

29. (ამოცანა მეორე კოსმოსურ სიჩქარეზე). განსაზღვრეთ რა უმცირესი სიჩქარეა საჭირო, რათა m მასის, ვერტიკალურად ზემოთ ასროლილი სხეული აღარ დაბრუნდეს დედამიწაზე (ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია).

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნები

m – სხეულის მასა

M – დედამიწის მასა

R – დედამიწის რადიუსი 6370 კმ

g – სიმძიმის ძალის აჩქარება 981 სმ/წმ^2

K – გრავიტაციული მუდმივა

r – დაშორება მოძრავ სხეულსა და დედამიწის ცენტრს შორის.

უნდა აღინიშნოს, რომ სხეულის მოძრაობას აფერხებს დედამიწის მიზიდულობის f ძალა.

ნიუტონის მესამე კანონით $f = K\dfrac{m \cdot M}{r^2}$ (როცა $r \to \infty, f \to 0$).

მეორეს მხრივ, ნიუტონის მეორე კანონით $f = ma$ (a მოძრავი სხეულის აჩქარებაა). ჩვენს შემთხვევაში

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = r''(t)$$

და გვექნება:

$$f = m\frac{d^2 r}{dt^2}.$$

მოყვანილი ორი გამოსახულება f-თვის გვაძლევს უფლებას დავწეროთ

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -k\frac{mM}{r^2}. \qquad (1)$$

(ნიშანი (–) აღებულია იმიტომ, რომ f ძალა მიმართულია მოძრაობის საწინააღმდეგოდ). ჩვენ გვაინტერესებს საწყისი v_0 სიჩქარე $t = 0$ მომენტში. (1) განტოლების ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ ჩასმა

$$\frac{dr}{dt} = P(r) = v\ ,$$

მაშინ

$$\frac{d^2r}{dt^2} = P\frac{dp}{dr} = v\frac{dv}{dr}\ .$$

(1) მიიღებს სახეს

$$mv\frac{dv}{dr} = -k\frac{mM}{r^2}\ ,$$

რომლის ამოხსნით მივიღებთ

$$\frac{v^2}{2} = kM\cdot\frac{1}{r} + C\ . \tag{2}$$

საწყისი მონაცემების ($t = 0\ , r = R, v = v_0 = \dfrac{dr}{dt}$, სადაც v_0 საძიებელი სიჩქარეა) ჩასმით (2)-დან გვექნება

$$\frac{v_0^2}{2} = kM\cdot\frac{1}{R} + C_1$$

საიდანაც

$$C_1 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}.$$

საბოლოოდ (2)-დან

$$\frac{v^2}{2} = \frac{kM}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}\right). \tag{3}$$

რადგან r-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის (3)-ის მარჯვენა მხარე დადებითი სიდიდეა, ამას გარდა, რადგან, $\dfrac{kM}{r} \to 0$ როცა $r \to \infty$, გვექნება

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}} \ . \qquad (4)$$

განვსაზღვროთ დედამიწის M მასა, რისთვისაც კიდევ ერთხელ გამოვიყენოთ (1) ფორმულა:

$$mg = m\frac{kM}{R^2} \ ,$$

($r = R$, (–) ნიშანს ვტოვებთ) და

$$M = \frac{gR^2}{k}.$$

M-ის ამ მნიშვნელობის ჩასმით (4)-ში მივიღებთ, რომ მინიმალური სიჩქარე

$$v_0 = \sqrt{2Rg} = 11{,}2 \ \text{კმ/წმ}.$$

30. m მასის მატერიალური წერტილი მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ იმ აღმდგენი ძალის (ეს ის ძალაა, რომელიც მიისწრაფის დაუბრუნოს იგი წონასწორობას) გავლენით, რომელიც მიმართულია კოორდინატთა სათავისკენ და პროპორციულია მოძრავი წერტილის სათავიდან დაშორებისა. გარემო, რომელშიაც წარმოებს მოძრაობა, წერტილის მოძრაობას უწევს წინააღმდეგობას მოძრაობის სიჩქარის პროპორციულად. იპოვეთ მოძრაობის კანონი.

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნები: x' წერტილის სიჩქარე, x'' აჩქარება; მოქმედი ძალები: აღმდგენი $f_1 = -ax$ და გარემოს წინააღმდეგობის $f_2 = -bx'$. ნიუტონის მეორე კანონით

$$mx'' = -bx' - ax \ ,$$

ანუ, რაც იგივეა

$$mx'' + bx' + ax = 0 \ . \qquad (1)$$

ამრიგად, მიღებულია მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება, მისი მახასიათებელი განტოლებაა

$$mk^2 + bk + a = 0\,,$$

ხოლო ამ უკანასკნელის ფესვებია:

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ma}}{2m}.$$

1. თუ $b^2 - 4ma > 0$, მაშინ მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ორი ნამდვილი განსხვავებული ფესვი.

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ma}}{2m} = -r_1, \quad k_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ma}}{2m} = -r_2\,,$$

(1) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს კი ექნება სახე

$$x = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}$$

(განხილული ე.წ. აპერიოდული მოძრაობის შემთხვევაა).

2. თუ $b^2 - 4ma = 0$, მაშინ მახასიათებელი განტოლების ფესვები ნამდვილი და ტოლია

$$k_1 = k_2 = -\frac{b}{2m} = -r\,.$$

ამ შემთხვევაში მოძრაობის განტოლება იქნება

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-rt}.$$

3. ბოლოს, თუ $b^2 - 4ma < 0$, მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია კომპლექსურად შეუღლებული ფესვები

$$k_1 = -\alpha + \beta i, \quad k_2 = -\alpha - \beta i\,,$$

სადაც

$$\alpha = \frac{b}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4am - b^2}}{2m}.$$

მოძრაობის განტოლებას ამ შემთხვევაში ექნება სახე:

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t),$$

ან, მეორენაირად,

$$x = Ae^{-\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0),$$

სადაც

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{C_1}{A} \text{ და } \cos\varphi_0 = \frac{C_2}{A}.$$

(ქრობადი რხევა).

31. ამოხსენით ამოცანა № 29, თუ გარემოს წინააღმდეგობის ძალა ნულის ტოლია.

პასუხი: $x = C_1 \cdot \cos\beta t + C_2 \cdot \sin\beta t$, ან $x = A \cdot \sin(\varphi_0 + \beta t)$, $\beta = \sqrt{\frac{a}{m}}$.

32. კაუჭზე თავისუფლად დაკიდებული ჯაჭვი სრიალებს საკუთარი წონის გავლენით (ხახუნი უგულვებელსაყოფია). განსაზღვრეთ რა დროში ჩამოსრიალდება ჯაჭვი კაუჭიდან მთლიანად, თუ საწყის მომენტში კაუჭის ერთ მხარეს ეკიდა 10მ და მეორე 8 მ და ჯაჭვის სიჩქარე ნულია.

ამოხსნა: ვთქვათ, ჯაჭვის ერთი მეტრის წონაა P ნ. აღვნიშნით x-ით სიგრძე (მეტრებში) ჯაჭვის დიდი ნაწილისა, რომელიც გადმოეკიდება კაუჭიდან t წამის შემდეგ მოძრაობის დაწყებიდან. სიმძიმის ცენტრში მოდებულია $F = [x - (18 - x)]P$ ნ ძალა. ჯაჭვის მასაა $\frac{18}{g}P$ კგ, მისი აჩქარებაა – x'' მ/წმ^2. ჯაჭვის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$\frac{18}{g}Px'' = (2x-18)P\ ,$$

რომელიც ასე გადაიწერება

$$x'' - \frac{8}{9}x = -g\ .$$

მიღებული დიფერენციალური განტოლებისთვის საწყისი პირობებია: როცა $t=0$, $x=10$, $x'=0$.

მახასიათებელი განტოლების ფესვებისთვის, მარტივი გამოთვლებით მიიღება $K_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{3}$; არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამოხსნა უნდა ვეძებოთ სახით: $u = A$; სათანადო გამოთვლებით მივიღებთ, რომ $A = 9$.

ამრიგად, ზემოთ მოყვანილი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$x = C_1e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + C_2e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t} + 9\ .$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით მიიღება:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 9 = 10, \\ \frac{\sqrt{g}}{3}(C_1 - C_2) = 0, \end{cases}$$

სადაც $C_1 = C_2 = 0{,}5$. ამრიგად, საბოლოოდ

$$x = \frac{e^{\frac{\sqrt{g}}{3}} + e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}}}{2} + 9 = 9 + ch\frac{\sqrt{g}}{3}t\ .$$

დრო, რომლის განმავლობაშიც ჩამოსრიალდება მთლიანად ჯაჭვი, განისაზღვრება პირობით: $t = T$, $x = 18$; შესაბამისად,

$$18 = 9 + ch\frac{\sqrt{g}}{3}T\ ,$$

ანდა

$$\frac{e^{\frac{\sqrt{g}}{3}T}+e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}T}}{2}=9.$$

უკანასკნელი განტოლების ამოვხსნათ T-ს მიმართ, ვღებულობთ:

$$T=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+4\sqrt{5})\approx 2{,}76 \quad \text{წმ.}$$

33. ამოხსენით № 32 ამოცანა ხახუნის გათვალისწინებით – ჯაჭვისა და კაუჭებისა, თუ ხახუნის ძალა ტოლია ჯაჭვის 1 მ-ის წონისა.

მითითება. ჯაჭვის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$18\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=gx-(18-x)g-g\cdot 1.$$

პასუხი: $t=\dfrac{3}{\sqrt{g}}\ln(17+12\sqrt{2})$.

34. განსაზღვრეთ მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ მისი მასაა m და გადაადგილდება წრფეზე აღმდგენი ძალის გავლენით, (ეს ის ძალაა, რომელიც მიისწრაფის იგი წონასწორობის მდებარეობა) რომელიც მიმართულია გადაადგილების ათვლის სათავისკენ და პირდაპირპროპორციულია მოძრავი წერტილის მანძილის დაცილებისა ათვლის წერტილიდან; გარემოს წინააღმდეგობა უგულვებელყოფილია, მაგრამ წერტილზე მოქმედებს გარე ძალა $F=A\sin\omega t$.

პასუხი: $mx''+ax=A\cdot\sin\omega t$,

$$x=C_1\cos\beta t+C_2\cos\beta t+\frac{A}{a-m\omega^2}\sin\omega t, \text{ თუ } \omega\neq\beta=\sqrt{\frac{a}{m}}\ ;$$

$$x=C_1\cos\beta t+C_2\cos\beta t+\frac{At}{2\beta m}\cos\beta t, \text{ თუ } \omega=\beta=\sqrt{\frac{a}{m}}\ .$$

შინაარსი

იბეჭდება ავტორთა მიერ წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 03.07.2009. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 09.07.2009. ქაღალდის ზომა 60X84 1/16. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 5,5. ტირაჟი 100 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი ,,ტექნიკური უნივერსიტეტი'', თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant,
scripta manent