

საქართველოს საპატრიარქოს წმიდა ანდრია
პირველწოდებულის სახელობის ქართული
უნივერსიტეტი

ჯგუფთა თეორია და სიმეტრიები ფიზიკაში

ირაკლი მაჩაბელი

2013

სარჩევნო

I. სიმრავლეები და სივრცეები	1
1. სიმრავლეთა თვისებები	1
2. ტოპოლოგიური სიმრავლეები. მეტრიკული სივრცეები	8
3. ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეები. სივრცის სეპარაბელობა, კომპაქტურობა და ბმულობა.	12
4. უწყვეტი ფუნქციონალები და ოპერატორები	16
5. წრფივი სივრცეები, წრფივი ფუნქციონალები და წრფივი ოპერატორები	18
6. წრფივი სივრცის ბაზისი	27
7. უნიტარული სივრცეები	31
II. ალგებრები და ჯგუფები	36
9. ალგებრები	36
10. ჯგუფები	43
11. ჯგუფების პარამეტრიზაცია	50
12. ინვარიანტული ინტეგრება. ინფინიტეზიმალური გარდაქმნები. გენერატორები.	57
13. გადანაცვლებათა ჯგუფი	64
14. ქვეჯგუფები. კელის თეორემა	69
15. მოსაზღვრე კლასები. ლაგრანჟის თეორემა	76
16. შეუღლებული ელემენტები და კლასები. ინვარიანტული ქვეჯგუფები. ფაქტორჯგუფები	80
17. ჯგუფების პირდაპირი და დეკარტეს ნამრავლი	84
18. დანაწილებები	88
19. კავშირი ჯგუფებსა და ალგებრებს შორის	92
III. წარმოდგენათა ზოგადი თეორია	99
20. წარმოდგენათა დაყვანადობის კრიტერიუმი	101
21. შურის ლემები. ხასიათების ორთოგონალობა	109
22. ფუნქციის გაშლა დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციებად	112
23. წარმოდგენათა კრონეკერული ნამრავლი	115
24. განტოლებასთან დაკავშირებული ჯგუფი. კაზიმირის ოპერატორები	120
IV. გადანაცვლებათა ჯგუფის წარმოდგენები	125
25. გადანაცვლებათა ჯგუფის ხასიათების დათვლა	126
26. გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისის აგება	135
27. ფრობენიუსისა და იამანუჩის წარმოდგენები. რეგულარული წარმოდგენა	145
28. იუნგ-იამანუჩის წარმოდგენის პროექტორები	158
29. იმანანტები და \mathcal{A} -ფუნქციები	171

30. სიმეტრიული ჯგუფის წარმოდგენათა ნამრავლის დაყვანადობა. S -ფუნქციების გარე და შიდა ნამრავლები	177
31. დიფერენციალური ოპერატორები (S -ფუნქციების “გაყოფა”)	187
V. წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფი	190
32. წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის ტენზორული წარმოდგენები	191
33. ინვარიანტული მატრიცები	197
34. წარმოდგენათა კომპოზიციის კანონი GL_n ჯგუფისათვის	209
35. წრფივი ჯგუფების დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციების აგება	218
VI. წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის ქვეჯგუფების წარმოდგენები	228
36. ჯგუფები SL_n , U_n , და SU_n	230
37. წარმოდგენათა რედუქციის ფორმულები. საბაზისო ფუნქციების რედუქციული სახე	238
38. უნიტარული ჯგუფების კაზიმირის ოპერატორები	245
39. ნაწილაკთა სპინი და იზოსპინი	251
40. ბირთვების სპინ-იზოსპინური მულტიპლეტები	263
41. SU_3 ჯგუფი და ელემენტარული ნაწილაკების კლასიფიკაცია	267
42. ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფები	275
43. ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფების დაუყვანადი წარმოდგენები	283
44. წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის რედუქცია სიმეტრიულ ჯგუფზე	292
45. ორთოგონალური ჯგუფის სპინური წარმოდგენები	295
46. ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფების კაზიმირის ოპერატორები	302
47. საბაზისო ფუნქციების აგება ორთოგონალური ჯგუფისათვის	307
48. ბრუნვის ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების ბაზისის აგება	317
49. ჯგუფთა თეორიის მეთოდების გამოყენება ატომის სპექტროსკოპიის ამოცანებისათვის.	329

I. სიმრავლები და სივრცეები

1. სიმრავლეთა თვისებები

სიმრავლე მათემატიკის ფუნდამენტური ცნებაა და, როგორც ყველა ფუნდამენტური ცნება, იგი განმარტებას არ საჭიროებს. სიმრავლის ქვემოთ იგულისხმება ნებისმიერ ობიექტთა ერთობლიობა. თვით ამ ობიექტებს სიმრავლის ელემენტები ეწოდება. განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ სიმრავლის ცნება ყოვლისმომცველია და ყველაფერი შეგვიძლია დავაჯგუფოთ ამა თუ იმ სიმრავლედ. მაგალითად:

1) წრფის წერტილები შეადგენენ სიმრავლეს, რომლის ელემენტები ეს წერტილებია;

2) ნატურალური რიცხვები ერთიდან ექვსამდე შეადგენენ სიმრავლეს, რომლის ელემენტებია 1, 2, 3, 4, 5 და 6;

3) ნებისმიერი გარდაქმნები, რომლებსაც ვატარებთ ფიზიკის ობიექტებზე, ადგენენ ამ გარდაქმნათა სიმრავლეს;

4) ყველა ნატურალური რიცხვი ადგენს სიმრავლეს, რომელიც ასოთი აღინიშნება.

დავალეზა 1.1: მოიყვანეთ სიმრავლის მაგალითები.

სიმრავლეს აღნიშნავენ ფიგურული ფრჩხილებით: $\{x\}$, სადაც x სიმრავლის ელემენტია ან ელემენტები. მაგალითად, ზემომოყვანილი პირველი მაგალითისათვის x გარბის წრფის ყველა წერტილების მნიშვნელობას და სიმრავლე ამ შემთხვევაში უთვლადი და უსასრულოა. 2) სიმრავლე ასე ჩაიწერება: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ და სიმრავლე თვლადი და სასრულია. 3) შემთხვევაში x აღნიშნავს ფიზიკურ ობიექტებზე ჩატარებულ გარდაქმნებს და, იმის მიხედვით, როგორია ეს გარდაქმნები, სიმრავლის თვისებებიც განსხვავებული იქნება.

მაგალითად, თუ x -ის ქვეშ იგულისხმება კოორდინატა გარდაქმნები კოორდინატა სისტემის სივრცეში ბრუნვის დროს, მაშინ სიმრავლე უთვლადი და უსასრულოა; თუ x სისტემის კოორდინატა გადასმია, მაშინ სიმრავლე თვლადი და სასრულია და ა.შ. 4) მაგალითის შემთხვევაში x აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვს და სიმრავლე უსასრულო და თვლადია.

როგორც ვხედავთ, ელემენტთა რიცხვის მიხედვით სიმრავლე შეიძლება იყოს თვლადი ან უთვლადი და სასრული ან უსასრულო. თუ არსებობს ურთიერთ ცალსახა კავშირი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტებსა და რაღაც სიმრავლის ელემენტებს შორის, მაშინ ამ უკანასკნელს თვლადი სიმრავლე ეწოდება.

დავალება 1.2: ა) მოახდინეთ თქვენ მიერ მაგალითად მოყვანილი სიმრავლეების კლასიფიკაცია.

ბ) როგორი სიმრავლეა $[0,1]$ მონაკვეთის წერტილთა სიმრავლე?

ის, რომ x ელემენტი $A \equiv \{ x \}$ სიმრავლეს ეკუთვნის, ასე ჩაიწერება:

$$x \in A \quad (1.1)$$

ჩაწერა

$$x \notin A \quad (1.2)$$

ნიშნავს, რომ x არ შედიას A სიმრავლეში. სიმრავლის ელემენტები შეიძლება თვითონ წარმოადგენდნენ სიმრავლებს.

თუ ორი სიმრავლე ერთსა და იმავე ელემენტებისაგან შედგება, მაშინ ეს სიმრავლეები ტოლია. მაგალითად, $\{4,3,1\} = \{3,4,1,4,3\}$, რადგანაც უკანასკნელში რიცხვები 3 და 4 უბრალოდ გამეორებულია.

სიმრავლე შეიძლება შედგებოდეს ერთი, მაგალითად, a ელემენტისაგან: $\{ a \}$.

დავალება 1.3: რას ნიშნავს $\{\{a\}\}$ და $\{\{\{ a \}\}\}$?

ნიშნით \emptyset აღინიშნება სიმრავლე, რომელსაც არც ერთი ელემენტი არ გააჩნია და მას ცარიელ სიმრავლეს უწოდებენ. შეიძლება ისე მოხდეს, რომ A სიმრავლის ყველა ელემენტი შედიოდეს B სიმრავლეში. მაშინ A სიმრავლეს B -ს ქვესიმრავლეს უწოდებენ და ასე აღნიშნავენ $A \subseteq B$. (ასეთი ჩაწერა ნიშნავს, რომ A სიმრავლე შეიძლება

B -ს ემთხვეოდეს კიდეც). მაგალითად, ბრუნვები Z ღერძის გარშემო - $R(x,y)$ - სივრცული $R(x,y,z)$ ბრუნვების ქვესიმრავლეს შეადგენენ:

$$R(x,y) \subset R(x,y,z) \quad (1.3)$$

ყოველი სიმრავლე თავისი თავის ქვესიმრავლეა: $A \subseteq A$. ასევე, ცარიელი სიმრავლე შედის ნებისმერ სიმრავლეში: $\emptyset \subset A$.

A სიმრავლის მისგან განსხვავებულ არაცარიელ ნაწილს A -ს **ნამდვილ** ან **საკუთარ** ქვესიმრავლეს უწოდებენ და ასე აღნიშნავენ: $B \subset A$.

ცხადია, რომ, თუ $A \subseteq B$ და $B \subseteq A$, მაშინ $A=B$.

თუ $A \subseteq B$ და $B \subseteq C$, მაშინ $A \subseteq C$ და ა.შ.

დავალება 1.4: იპოვეთ ანალოგიური თანაფარდობები.

ვთქვათ, P აღნიშნავს სიმრავლის ელემენტთა რაღაც თვისებას. ჩაწერა $P(x)$ ნიშნავს, რომ x ელემენტს გააჩნია ეს თვისება. $\{x \mid P(x)\}$ ჩანაწერი აღნიშნავს იმ x ელემენტების სიმრავლეს, რომელთაც P თვისება გააჩნია. მაგალითად, $\{x \mid x > 5, x \in \mathbb{N}\}$ წარმოადგენს იმ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც 5-ზე მეტია.

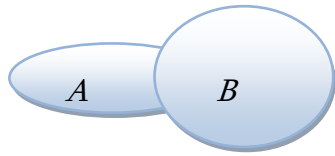
დავალება 1.5: იპოვეთ სიმრავლეები:

ა) $\{x \mid 2 < x \leq 7\}$;

ბ) $\{x \mid x < 0, x \in \mathbb{N}\}$.

შემოტანილი სიმრავლის ცნება უზოგადესია და, მიუხედავად ამისა, შესაძლებელია მასზე **ოპერაციების** ცნების შემოღება.

A და B სიმრავლეების **გაერთიანება** (**ჯამი**) ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც ერთდროულად A და B სიმრავლეების ელემენტებს შეიცავს. იგი ასე აღნიშნება $A \cup B$ და მისი აზრი განსაკუთრებით ნათელია დიაგრამაზე, რომელიც წარმოადგენილია ნახაზზე 1.1.



ნახ. 1.1

თუ სიმრავლეს შეკრული კონტურით აღვნიშნავთ, მაშინ A და B სიმრავლეების გაერთიანება იქნება ნახ. 1.1-ზე ნაჩვენები გამუქებული არე. სიმრავლის განმარტების შესაბამისად, გაერთიანებაში სიმრავლეთა საერთო ელემენტების მითითება საჭირო არ არის.

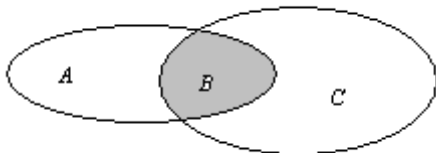
დავალება 1.6: იპოვეთ:

- ა) $A \cup A$;
- ბ) $A \cup \emptyset$;
- გ) $A \cup B$, თუ $A \subset B$;
- დ) კომუტატურია თუ არა გაერთიანების ოპერაცია, ე.ი. სრულდება თუ არა ტოლობა $A \cup B = B \cup A$.

გამოსახულება

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \equiv \bigcup_{i=1}^n A_i \quad (1.4)$$

არის $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ სიმრავლეთა ჯამი.



ნახ. 1.2

ორი A და C სიმრავლის **თანაკვეთა** $A \cap C$ ეწოდება ისეთ B სიმრავლეს, რომელიც A და C სიმრავლეების საერთო ელემენტებს შეიცავს. გრაფიკულად A და C სიმრავლეების თანაკვეთა B წარმოდგენილია ნახ. 1.2-ზე.

დავალება 1.7: იპოვეთ:

- ა) $A \cap A$;
- ბ) $A \cap \emptyset$;
- გ) $A \cap B$, თუ $A \subset B$;
- დ) $N \cap R$, თუ N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო R – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;
- ე) კომუტატურია თუ არა თანაკვეთის ოპერაცია?

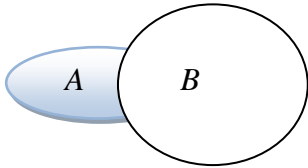
ვ) იპოვეთ სამგანზომილებიან დეკარტეს კოორდინატთა ღერძების ბრუნვის სიმრავლისა და ამ ღერძების არეკვლის სიმრავლის თანაკვეთა.

გამოსახულება

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \equiv \prod_{i=1}^n A_i \quad (1.5)$$

აღნიშნავს $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ სიმრავლეების თანაკვეთას.

ორი A და B სიმრავლის **სხვაობა** $A \setminus B$ ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც A სიმრავლის ისეთ ელემენტებს შეიცავს, რომლებიც არ ეკუთვნის B -ს. გრაფიკულად A და B სიმრავლეების სხვაობა წარმოდგენილია ნახ. 1.2-ზე გამუქებული სახით.

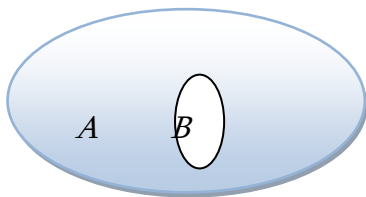


ნახ. 1.3

დავალება 1.8: იპოვეთ:

- ა) $A \setminus A$;
- ბ) $A \setminus \emptyset$;
- გ) $B \setminus A$, თუ $A \subset B$;
- დ) კომუტატიურია თუ არა გამოკვლების ოპერაცია?

სიმრავლეთა ჯამი და სხვაობა არ არის ურთიერთ შებრუნებული ოპერაციები, ე.ი. ის, რომ $A \cup B = C$, არ ნიშნავს, რომ $A = C \setminus B$.



ნახ. 1.4

თუ $B \subseteq A$, მაშინ სხვაობას $A \setminus B$ ეწოდება B სიმრავლის დამატება A -ში და ასე აღინიშნება: $A - B$. ნახ. 1.4-ზე B სიმრავლის დამატება A -ში გამოსახულია გამუქებული სახით. სიმრავლეთა გაერთიანება, თანაკვეთა და გამოკლება **ბინარული** ოპერაციებია, რაც ნიშნავს, რომ მათ განსახორციელებლად საჭიროა ორი სიმრავლე მაინც.

მაგალითად, რიცხვებისათვის ბინარული ოპერაციებია შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა. სიმრავლის დამატება **უნარული ოპერაციაა**, რადგან შეგვიძლია ვთქვათ, რომ იგი არის ყველაფერი B სიმრავლის გარდა. რიცხვებისთვის უნარული ოპერაციებია ახარისხება და ამოფესვა.

რიგ შემთხვევებში მეტად მნიშვნელოვანია ორი სიმრავლის შედარება. ამისთვის საჭიროა მათ ელემენტებს შორის კავშირის დამყარება სრულიად ნებისმიერი წესით. ორ სიმრავლეს შორის ურთიერთ ცალსახა კავშირი მყარდება თუ $a \in A$ ელემენტს შევუსაბამებთ ერთ და მხოლოდ ერთ ელემენტს $b \in B$ მეორე სიმრავლიდან ისე, რომ ამასთან ყოველ $b \in B$ ელემენტს შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი $a \in A$ ელემენტი პირველი სიმრავლიდან. ასეთ სიმრავლეებს **ექვივალენტურს** ვუწოდებთ. ექვივალენტობის ჩაიწერება ასე ხდება:

$$A \sim B \quad (1.6)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ნებისმიერი თვლადი სიმრავლე ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის ან მისი რომელიმე ქვესიმრავლის ექვივალენტურია.

- დავალება 1.9:**
- ა) როგორი სიმრავლეებია N სიმრავლის ექვივალენტური? მოიყვანეთ ასეთი სიმრავლეების მაგალითები.
 - ბ) N სიმრავლის რომელი ქვესიმრავლეა ექვივალენტური სასრული ჯგუფის? მოიყვანეთ მაგალითები.

აშკარაა ექვივალენტობის ასეთი თვისებები:

რეფლექტიულობა: $A \sim B$;

სიმეტრიულობა: თუ $A \sim B$, მაშინ $B \sim A$;

ტრანზისტიულობა: თუ $A \sim B$, ხოლო $B \sim C$, მაშინ $A \sim C$.

- დავალება 1.10:** შეამოწმეთ ექვივალენტობის ეს თვისებები თქვენ მიერ მოყვანილ მაგალითებზე.

სიმრავლეთა შედარებისთვის მეტად მოხერხებულია სიმრავლის სიმძლავრის ცნების შემოღება. შევუსაბამოთ A სიმრავლეს ნებისმიერი ობიექტი $|A|$ ისეთი წესით, რომ $|A|$ ობიექტი იყოს B სიმრავლისთვის ისეთივე წესით შემოღებული $|B|$ ობიექტის ტოლი მხოლოდ იმ შემთხვევში, თუ $A \sim B$, მაშინ ასეთნაირად არჩეულ $|A|$ ობიექტს A სიმრავლის სიმძლავრე ან კარდინალური რიცხვი ეწოდება.

გასაგებია, რომ სასრული სიმრავლეებისათვის კარდინალურ რიცხვად ყველაზე მოსახერხებელია მათი ელემენტების რაოდენობის გამოყენება.

დავალება 1.11: მოიფიქრეთ, კიდევ რა შეიძლება ავიღოთ სასრული სიმრავლის სიმძლავრედ?

ცარიელი სიმრავლის სიმძლავრედ იღებენ 0-ს, ხოლო ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის კარდინალურ რიცხვს ებრაული ასო \aleph_0 -ით (ალეფ ნულით) აღნიშნავენ. ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლის სიმძლავრეს \aleph -ით ან C -თი აღნიშნავენ და მას **კონტინუუმის სიმძლავრე** ეწოდება.

მას შემდეგ, რაც შემოტანილია კარდინალური რიცხვის ცნება, სიმრავლეთა შედარება დადის კარდინალური რიცხვების შედარებაზე. თუ ორი სიმრავლე ექვივალენტურია – $A \sim B$, მაშინ $|A|=|B|$; თუ $A \subset B$, მაშინ $|A| < |B|$; ხოლო თუ $A \supset B$, მაშინ $|A| > |B|$.

- დავალება 1.12:**
- ა) შეამოწმეთ ეს თანაფარდობები სასრული სიმრავლეების მაგალითზე.
 - ბ) დაამტკიცეთ, რომ უსასრულო სიმრავლის უმცრესი სიმძლავრე \aleph -ია.
 - გ) დაამტკიცეთ, რომ თვლადი სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლე თვლადია.

შემოყვანილი სიმძლავრეების ცნება მეტად ზოგადია, ამიტომ ფიზიკურ ამოცანებში მათი გამოყენებისათვის საჭიროა სიმრავლეებზე გარკვეული შეზღუდვების დადება, რასაც შემდგომ პარაგრაფებში გავაკეთებთ.

2. ტოპოლოგიური სიმრავლეები. მეტრიკული სივრცეები

ნებისმიერ სიმრავლეს, რომლისთვისაც დადგენილია ზღვრული გადასვლის ცნება, ეწოდება **ტოპოლოგიური სიმრავლე**. ამ სახელწოდების მაგივრად ხმარობენ, აგრეთვე, ასეთ ტერმინსაც **ტოპოლოგიური ან აბსტრაქტული სივრცე**.

სიმრავლეში **ზღვრული გადასვლის** დადგენა მოითხოვს სივრცის ორ ნებისმიერ ელემენტს შორის გარკვეული კანონის დადგენას. უმარტივესი კანონი, რომელიც შეიძლება დადგინდეს სიმრავლის ორ ელემენტს შორის ეს არის მათზე გარკვეული წესით რიცხვის მიწერა. ამ პროცედურას **სიმრავლის მეტრიზაციას** უწოდებენ, ხოლო თვით რიცხვს **მანძილი** ან **მეტრიკა** ჰქვია. ასეთ **სიმრავლეს** კი სივრცეს უწოდებენ.

მეტრიკული სივრცე ეწოდება ნებისმიერ R სიმრავლეს, რომელშიც მის ორ ნებისმიერ, **წერტილად** წოდებულ, ელემენტს $x, y \in R$ – შორის ნებისმიერი წესით განსაზღვრულია რიცხვი $\rho(x,y)$, რომელსაც **მანძილს** ან **მეტრიკას** უწოდებენ იმ შემთხვევაში, თუ იგი აკმაყოფილებს ასეთ აქსიომებს:

1. **სიმეტრიის აქსიომა:** $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
2. **იგივეობის აქსიომა:** $\rho(x,y) > 0$, თუ $x \neq y$ და $\rho(x,x) = 0$;
3. **სამკუთხედის აქსიომა:** $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$.

მეტრიკული სივრცის მაგალითად მოვიყვანოთ n -წევრების სიმრავლე, მასში განსაზღვრული მეტრიკით. n -წევრი ეწოდება ნებისმიერი n რიცხვის ერთობლიობას:

$$x \equiv (x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) \quad (2.1)$$

ამ ერთობლიობას ვუწოდოთ n -წევრების სიმრავლის **წერტილი**, ხოლო $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$ რიცხვებს – ამ წერტილის **კოორდინატები**. კოორდინატების ნებისმიერი შეცვლა გვაძლევს სიმრავლის ახალ ელემენტს. სიმრავლის ნებისმიერ ორ ელემენტს, x -სა და x' -ს, შორის მანძილი ასეთი წესით განვსაზღვროთ:

$$\rho(x,x') = \sqrt{(x^1 - x'^1)^2 + (x^2 - x'^2)^2 + \dots + (x^n - x'^n)^2} \quad (2.2)$$

ადვილია ჩვენება, რომ ასეთნაირად განმარტებული ρ აკმაყოფილებს მეტრიკის სამივე აქსიომას.

დავალება 2.1: აჩვენეთ ეს.

თუ $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$ რიცხვები ნამდვილია, მაშინ (2.1) n -წევრების სიმრავლეს (2.2) ფორმულით განსაზღვრული მეტრიკით ევკლიდის n -განზომილებიან სივრცეს უწოდებენ. როდესაც $n = 1$, მაშინ გვაქვს **წრფე** (წრფივი სიმრავლე), $n = 2$ გვაძლევს **სიბრტყეს**, ხოლო $n = 3$ – **სივრცეს**. ევკლიდის სივრცე ასე აღინიშნება – E_n .

ევკლიდის სივრცეში გამოყოფენ ქვესიმრავლებებს: სეგმენტს, ინტერვალს და სფეროს. თუ E_n სივრცის ქვესიმრავლის წერტილთა კოორდინატებისათვის სრულდება უტოლობები:

$$a^1 \leq x^1 \leq b^1, a^2 \leq x^2 \leq b^2, \dots, a^n \leq x^n \leq b^n \quad (2.3)$$

სადაც a და b ევკლიდის სივრცის ელემენტებია, მაშინ ამ ქვესიმრავლეს $[a, b]$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ და n -განზომილებიან **სეგმენტს** უწოდებენ. ამგვარად,

$$[a, b] = \{x \mid a, b, x \in E_n, a^i \leq x^i \leq b^i, i=1, 2, \dots, n\} \quad (2.4)$$

ინტერვალი არის E_n სივრცის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$a^1 < x^1 < b^1, a^2 < x^2 < b^2, \dots, a^n < x^n < b^n \quad (2.5)$$

ე.ი.:

$$(a, b) = \{x \mid a, b, x \in E_n, a^i < x^i < b^i, i=1, 2, \dots, n\} \quad (2.6)$$

n -განზომილებიანი **სფერო** ცენტრით $x_0(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ წერტილში და r რადიუსით, ისეთ $x \in E_n$ წერტილთა სიმრავლეა, რომლებისთვისაც სრულდება უტოლობა:

$$\rho(x_0, x) \leq r \quad (2.7)$$

ე.ი., r რადიუსიანი სფერო ყოფილა ასეთი სიმრავლე:

$$\{x \mid x_0, x \in E_n, \rho(x_0, x) \leq r\} \quad (2.8)$$

სიმრავლეს ეწოდება **შემოსაზღვრული ზემოდან** (ქვემოდან) თუ არსებობს მისი ისეთი წერტილი b (a), რომ სიმრავლის ყველა ელემენტი აკმაყოფილებს უტოლობას $x \leq b$ ($x \geq a$). თუ სიმრავლე შემოზღვრულია ზემოდანაც და ქვემოდანაც და ქვემოდანაც, მას **შემოსაზღვრული სიმრავლე** ეწოდება.

წერტილს $m \equiv \inf A$ ეწოდება A სიმრავლის ქვედა ზღვარი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება სიმრავლის ერთი x წერტილი მაინც ისეთი, რომ $x < m + \varepsilon$ და თუ m -ის მარცხნივ არ არსებობს სიმრავლის არც ერთი წერტილი.

წერტილს $M \equiv \sup A$ ეწოდება A სიმრავლის ზედა ზღვარი, თუ ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვისთვის მოიძებნება სიმრავლის ერთი x წერტილი მაინც ისეთი, რომ $x > M - \varepsilon$ და თუ M -ის მარჯვნივ არ არსებობს სიმრავლის არც ერთი წერტილი.

- დავალება 2.2:**
- ა) შემოსაზღვრულობის აზრით როგორი სიმრავლეებია სეგმენტი $[a, b]$, ინტერვალი (a, b) , სფერო, ნახევარსეგმენტი $[a, b)$ და $(a, b]$;
 - ბ) როგორი სიმრავლეა $\{x \mid x_0, x \in E_n, \rho(x_0, x) < r\}$;
 - გ) ეკუთვნის თუ არა ამ სიმრავლეების ზედა და ქვედა ზღვრები თვით სიმრავლეებს?

თუ A წრფივი სიმრავლის ყველა x წერტილს გარკვეული f კანონით შევუსაბამებთ B წრფივი სიმრავლის ერთ ან რამდენიმე ელემენტს, მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლეზე განსაზღვრულია ფუნქცია $y = f(x)$ ფუნქცია მნიშვნელობათა არით B სიმრავლიდან.

მოვიყვანოთ მეტრიკული სივრცეების კიდევ რამდენიმე მაგალითი:

1. განვიხილოთ სივრცე, შედგენილი $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქციებისაგან მეტრიკით

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in [a, b]} |f_1(x) - f_2(x)| \quad (2.9)$$

არის მეტრიკული სივრცე, რომელიც აღნიშნება $C[a, b]$ -თი.

2. $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი $x(t)$ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთათვის არსებობს ინტეგრალი

$$\int_a^b |x(t)|^p dt$$

მეტრიკით

$$\rho(x_1, x_2) = \left\{ \int_a^b |x_1(t) - x_2(t)|^p dt \right\}^{1/p} \quad (2.10)$$

აღგენს მეტრიკულ სივრცეს, რომელსაც აღნიშნავენ ასოთი L_p .

3. რიცხვითი მიმდევრობების $x = (x^1, x^2, x^3, \dots)$ სიმრავლე, რომელთათვის იკრიბება ასეთი ჯამი

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p$$

მეტრიკით

$$\rho(x, y) = \sqrt[p]{|x^i - y^i|^p} \quad (2.11)$$

ადგენს მეტრიკულ სივრცეს, რომელსაც ასე აღნიშნავენ l_p ასოთი.

დავალება 2.3: შეამოწმეთ მეტრიკის აქსიომების შესრულება ამ სივრცეებისათვის.

R მეტრიკულ სივრცეში გამოვყოთ $\{x_n\}$ მიმდევრობა. ეს მიმდევრობა იქნება ფუნდამენტური, თუ $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$, როდესაც $n, m \rightarrow \infty$. R მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება სრული, თუ მასში ყველა ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადია, ე.ი., ყოველი $\{x_n\}$ ფუნდამენტური მიმდევრობისთვის არსებობს ისეთი წერტილი $x_0 \in R$, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad (2.12)$$

ზემოთ მოყვანილი ყველა სივრცე სრულია.

3. ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეები. სივრცის სეპარაბელობა, კომპაქტურობა და ბმულობა.

n -განზომილებიანი სივრცის წერტილთა ერთობლიობას შემოსაზღვრული ეწოდება, თუ არსებობს ამ სიმრავლის ყველა წერტილის მომცველი n -განზომილებიანი სეგნტები. ნებისმიერი ε რადიუსის მქონე n -განზომილებიანი სფეროს შიდა არეს, რომელიც შეიცავს მოცემულ x წერტილს, ამ წერტილის მახლობლობა ეწოდება და ასე აღინიშნება: $u(x, \varepsilon)$.

წერტილს A სიმრავლის ზღვრული წერტილი ეწოდება, თუ მისი ნებისმიერი მახლობლობა შეიცავს A სიმრავლის უსასრულოდ ბევრ წერტილს. განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ სასრულ სიმრავლეს არ გააჩნია ზღვრული წერტილები. $[0,1]$ სეგმენტზე მდებარე რაციონალურ რიცხვთა (r) სიმრავლეს ზღვრულ წერტილებად ამ სიმრავლის ყველა წერტილი აქვს, აქედან რაციონალური რიცხვები ეკუთვნიან (r) სიმრავლეს, ხოლო ირაციონალური რიცხვები არ ეკუთვნიან მას.

- დავალება 3.1:**
- ა) აქვს თუ არა ზღვრული წერტილები $\{1/n\}$ სიმრავლეს, სადაც $n \in \mathbb{N}$ და \mathbb{N} ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა?
 - ბ) აქვს თუ არა ზღვრული წერტილები მთელი რიცხვების სიმრავლეს?

A სიმრავლის ყველა ზღვრული წერტილების სიმრავლეს A სიმრავლის წარმოებული სიმრავლე ეწოდება და ასე აღინიშნება: A' . თუ A სიმრავლე შეიცავს A' სიმრავლეს, მაშინ A სიმრავლეს ჩაკეტილი სიმრავლე ეწოდება. ამგვარად, A სიმრავლე ჩაკეტილია თუ $A' \subseteq A$, ამასთან A' შეიძლება ცარიელიც იყოს.

დავალება 3.2:

ჩაკეტილია თუ არა

- ა) $\{1/n\}$ სიმრავლეს, სადაც $n \in \mathbb{N}$ და N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა?
- ბ) $[0,1]$ სეგმენტზე მდებარე რაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეები?
- გ) მთელი რიცხვების სიმრავლე?
- დ) ნებისმიერი სასრული სიმრავლე?

თუ სიმრავლის ყველა წერტილი ზღვრულია, მაშინ ამ სიმრავლეს **თავის თავში მკვრივს** უწოდებენ, ხოლო თუ სიმრავლე ემთხვევა თავის წარმოებულ სიმრავლეს, მაშინ მას **სრულქმნილი სიმრავლე** ჰქვია. თუ სიმრავლე მკვრივია, მაშინ $A' \supseteq A$, ხოლო თუ იგი სრულქმნილია, მაშინ $A' = A$. სრულქმნილი სიმრავლე ერთდროულად ჩაკეტილიც არის და მკვრივიც.

დავალება 3.3:

- ა) წინა დავალებაში ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელია ჩაკეტილი ან სრულქმნილი?
- ბ) არის თუ არა ჩაკეტილი სიმრავლე $\{1/n\} \cup \{0\}$?

თუ სიმრავლე მხოლოდ არაზღვრულ წერტილებს შეიცავს, მაშინ მას **იზოლირებულ სიმრავლეს** ეძახიან. მაგალითად, ნებისმიერი სასრული სიმრავლე იზოლირებულია.

დავალება 3.4:

- არის თუ არა იზოლირებული
- ა) რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე?
- ბ) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე?

სიმრავლის ξ წერტილს ეწოდება **შიდა წერტილი**, თუ სიმრავლეში ეს წერტილი თავისი რაღაც $u(\xi, \epsilon)$ მახლობლობით შედის. თუ წერტილის მახლობლობა სიმრავლის არც ერთ წერტილს არ შეიცავს, მას **გარე წერტილი** ეწოდება. თუ ξ წერტილის $u(\xi, \epsilon)$ მახლობლობა შეიცავს როგორც სიმრავლის წერტილებს, ისე იმ წერტილებს, რომლებიც არ შედის სიმრავლეში, მაშინ წერტილს **სასაზღვრო**

წერტილი ეწოდება. მაგალითად, (a,b) ინტერვალის ნებისმიერი წერტილი შინაგანია, ხოლო $[a,b]$ სეგმენტის a და b წერტილები სასაზღვროა.

თუ სიმრავლე მხოლოდ შინაგანი წერტილებისგან შედგება, მაშინ მას ღია სიმრავლე ჰქვია. მაგალითად ინტერვალი ღია სიმრავლეა.

A სიმრავლის გაერთიანებას მის წარმოებულ სიმრავლესთან A სიმრავლის ჩართვა ეწოდება. იგი ასე აღინიშნება: $\bar{A} = A \cup A'$.

გამოვყოთ R მეტრიკულ სივრცეში თვლადი D ქვესიმრავლე. თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისა და ნებისმიერი $x \in R$ წერტილისათვის მოიძებნება ისეთი წერტილი $x' \in D$, რომ $\rho(x, x') < \varepsilon$, მაშინ D სიმრავლეს R სივრცის თვლადი ჩონჩხი ეწოდება.

მეტრიკულ სივრცეს სეპარაბელური ეწოდება, თუ მას გააჩნია თვლადი ჩონჩხი. ჩვენ მიერ განხილული სივრცეებიდან C , E_n , l_p და L_p - სეპარაბელური სივრცეებია.

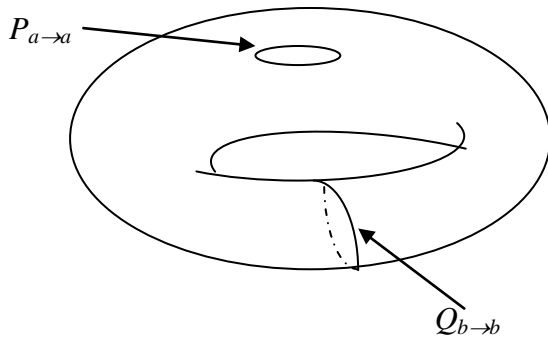
მეტრიკულ სივრცეში შემავალ A სიმრავლეს ეწოდება კომპაქტური, თუ მისი წერტილების ნებისმიერი უსასრულო მიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს კრებადი ქვემიმდევრობა. თუ ამ მიმდევრობათა ზღვრული წერტილები A სიმრავლეშია, მაშინ მას ეწოდება კომპაქტური თავის თავში, წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი კომპაქტურია სივრცეში.

n -განზომილებიანი ევკლიდის სივრცის ნებისმიერი უსასრულო შემოსაზღვრული ქვესიმრავლე კომპაქტურია. ასევე კომპაქტურია ქვესიმრავლეები C , l_p და L_p სივრცეებში.

ვთქვათ, ტოპოლოგიური A სიმრავლე შეუძლებელია წარმოვიდგინოთ ორი ღია გადაუკვეთავი სიმრავლის გაერთიანებად. მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლე ბმულია. ცხადია, რომ ყველა დისკრეტული სიმრავლე არ არის ბმული, ხოლო ბმულობა უწყვეტი გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტულია, ე.ი., არ იცვლება.

დავუშვათ, რომ A სიმრავლის ორი a და b წერტილს აკავშირებს $P_{a \rightarrow b}$ გზა; ეს ნიშნავს, რომ a -დან b წერტილში შესაძლებელია უწყვეტად გადასვლა. თუ b ემთხვევა a წერტილს, ე.ი., გადაადგილების შემდეგ მივდივართ საწყის მდგომარეობაში, მაშინ გვექნება ჩაკეტილი გზა $P_{a \rightarrow a}$ ან ნულოვანი გზა.

ამბობენ, რომ ორი გზა – $P_{a \rightarrow a}$ და $Q_{b \rightarrow b}$ ჰომოტოპიურია თუ არსებობს გზის ისეთი უწყვეტი დეფორმაცია, რომელიც უცვლელს ტოვებს გზის ბოლო წერტილებს. ასეთი გზების მაგალითია მოყვანილი ნახ. 3.1-ზე.



ნახ. 3.1

ამ ნახაზზე მოყვანილია ტორის ზედაპირი. როგორც ვხედავთ, $P_{a \rightarrow a}$ ჩაკეტილი გზა არ შემოუვლის ტორის რგოლს, მაშინ როდესაც $Q_{b \rightarrow b}$ შემოუვლის. ცხადია, რომ ეს ორი გზა ჰომოტოპიური არ არის, არ იქნება ამ ორივე გზის ჰომოტოპიური არც ის გზა, რომელიც ტორის რგოლს ორჯერ შემოუვლის.

ტოპოლოგიურ სიმრავლეს **ცალადბმულს** უწოდებენ, თუ ყველა ჩაკეტილი გზა მასზე ნულოვანი გზის ჰომოტოპიურია. წინააღმდეგ შემთხვევაში სიმრავლე **მრავლადბმულია**. ზემომოყვანილ მაგალითში ტორის წერტილების სიმრავლე მრავლადბმულია.

4. უწყვეტი ფუნქციონალები და ოპერატორები

ფუნქციის ცნება ცნობილია მათემატიკის ელემენტარული კურსებიდან. თუ ამ განსაზღვრებას გავიაზრებთ ზემოთ შემოყვანილი ცნებების საფუძველზე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფუნქცია ამყარებს კავშირს ევკლიდის ორი წრფივი სივრცის წერტილებს შორის. ბუნებრივად იბადება კითხვა: შეიძლება თუ არა ასეთი შესაბამისობის დამყარება, როდესაც ერთ-ერთი ან ორვე სივრცე არა ევკლიდის წრფივი სივრცეა, არამედ ნებისმიერი სიმრავლე? პასუხი ამ კითხვაზე დადებითია, რასაც მივყავართ ფუნქციონალისა და ოპერატორის ცნებამდე.

ვთქვათ, გვაქვს ნებისმიერი $A=\{x\}$ სიმრავლე. თუ A სიმრავლის ნებისმიერ x ელემენტს გარკვეული წესით შევუსაბამებთ რაღაც ნამდვლ რიცხვს $y \in E_1$ (E_1 ევკლიდის ერთგანზომილებიანი სივრცეა)

$$y = U x, \quad (4.1)$$

მაშინ $U x$ ეწოდება E სიმრავლეზე განსაზღვრული **ფუნქციონალი**.

გარკვეული წესით შესაბამისობა გულისხმობს ნებისმიერ წესს, რომლის მიხედვით ნებისმიერი სივრცის ელემენტს ეთანადება რიცხვი. ასე, მაგალითად, თუ $x(x^1, x^2, x^3)$ სამგანზომილებიანი ვექტორია, მაშინ $|x|$, სადაც $||$ აღნიშნავს $x \in E_3$ ვექტორის სიგრძეს $\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, წარმოადგენს ფუნქციონალს.

დავალეზა 4.1: მოიყვანეთ ფუნქციონალების სხვა მაგალითები.

მეტრიკულ სივრცეში შესაძლებელია კრებადი მიმდევრობის გამოყოფა. თუ ფუნქციონალს ასეთ სივრცეში განვსაზღვრავთ, მაშინ შეიძლება უწყვეტი ფუნქციონალის ცნების შემოღება.

$M \subseteq R$ სიმრავლეზე განმარტებულ U ფუნქციონალს ეწოდება **უწყვეტი ფუნქციონალი** $x_0 \in M$ წერტილში, თუ M სიმრავლის ნებისმიერი მიმდევრობისათვის x^1, x^2, x^3, \dots , რომელიც R -ის მეტრიკის აზრით იკრიბება x_0 წერტილისკენ, რიცხვითი მიმდევრობა

$$y_1 = U x_1, y_2 = U x_2, y_3 = U x_3, \dots \quad (4.2)$$

იკრიბება რიცხვისკენ $y_0=Ux_0$. სიმრავლის ყველა წერტილში უწყვეტ ფუნქციონალს M სიმრავლეზე უწყვეტი ფუნქციონალი ჰქვია.

სავსებით ანალოგიურად შეიძლება ოპერატორის ცნების შემოყვანა. ოპერატორი ახორციელებს გადასახვას ერთი მეტრიკული სივრციდან მეორეში. თუ გვაქვს ორი სიმრავლე A და B და თუ ყოველ ელემენტს $x \in A$ შესაბამისობაში მოვუყვანთ გარკვეული \hat{O} კანონით B სიმრავლის ერთ ან რამდენიმე y ელემენტს, მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლეზე განსაზღვრულია ოპერატორი $y=\hat{O}x$ მნიშვნელობათა არით B სიმრავლიდან.

დავალება 4.2: მოიყვანეთ ოპერატორების მაგალითები.

მეტრიკულ სივრცეში ზღვრული გადასვლის შესაძლებლობა გვადლევს საშუალებას შემოვიღოთ უწყვეტი ოპერატორის ცნება:

R მეტრიკული სივრცის $L \subseteq R$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ \hat{O} ოპერატორს მნიშვნელობათა არით R მეტრიკული სივრცის $N \subseteq R$ სიმრავლიდან ეწოდება უწყვეტი ოპერატორი $x_0 \in R$ წერტილში, თუ სიმრავლის წერტილთა ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც R სივრცის მეტრიკის აზრით იკრიბება $x_0 \in R$ წერტილისკენ, N სიმრავლის შესაბამისი $\{x_n\}$ მიმდევრობა

$$y_1 = \hat{O} x_1, y_2 = \hat{O} x_2, y_3 = \hat{O} x_3, \dots \quad (4.3)$$

R სივრცის მეტრიკის აზრით იკრიბება $y_0 \in \hat{O} x_0$ წერტილისაკენ.

უწყვეტი ფუნაქციონალის მაგალითია ინტეგრალი

$$\int_a^x f(\varphi) d\varphi$$

ცვლადი ზედა საზღვრით, რომელიც განსაზღვრული უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეზე მნიშვნელობათა არით იგივე სიმრავლიდან წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციონალს.

დავალება 4.3: მოიყვანეთ უწყვეტი ფუნქციონალებისა და უწყვეტი ოპერატორების მაგალითები.

5. წრფივი სივრცეები, წრფივი ფუნქციონალები და წრფივი ოპერატორები

სიმრავლეებში შესაძლებელია მათი ელემენტებისათვის კომპოზიციის კანონების ანუ ოპერაციების შემოყვანა. განიხილება ორი ასეთი ოპერაცია. ერთ-ერთს უწოდებენ “შეკრებას” არითმეტიკული შეკრების ანალოგიით, ხოლო მეორეს “გამრავლებას”.

კომპოზიციის კანონი ასე შეიძლება განვმარტოთ: ნებისმიერი ორი A და B სიმრავლეების $a \in A$ და $b \in B$ ელემენტების გადასახვას მესამე C სიმრავლის $c \in C$ ელემენტში კომპოზიციის კანონს უწოდებენ და ასე აღნიშნავენ: $f: A \otimes B \Rightarrow C$, ან $a \otimes b = c$.

დავალება 5.1: ა) კომპოზიციის რა კანონები იცით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისათვის?
ბ) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლისათვის?
გ) შეიძლება თუ არა A და B სიმრავლეები დაემთხვენ ერთმანეთს?

კომპოზიციის კანონს კომუტატური ეწოდება თუ $a \otimes b = b \otimes a$ ანუ $f(a, b) = f(b, a)$. გადასახვათა ნამრავლი $f \cdot g$ არის თანმიმდევრული გადასახვა, ჯერ უნდა ჩავატაროთ g და მერე f .

სიმრავლეში შემოყვანილი ოპერაციები სავსებით ნებისმიერია, მაგრამ ისინი უნდა აკმაყოფილებდნენ რამდენიმე აქსიომას.

ვთქვათ, G სიმრავლეა, ხოლო a, b და c ამ სიმრავლის ელემენტები. შევიტანოთ G სიმრავლეში გამრავლებისა და შეკრების ოპერაციები. შეკრება არითმეტიკის მსგავსად აღვნიშნოთ “+” ნიშნით, გამრავლება კი ან წერტილით აღვნიშნება, ან საერთოდ არ აღვნიშნება სპეციალური სიმბოლოთი: უბრალოდ ორი ელემენტი დაწერილი ერთად აღვნიშნავს მათ ნამრავლს. ოპერაციებმა უნდა დააკმაყოფილოს მოთხოვნები, მოყვანილი ცხრილში 5.1.

როგორც წესი, სიმრავლისთვის შემოტანილ შეკრების ოპერაციას კომუტატურს იღებენ, ხოლო გამრავლება შეიძლება კომუტატური იყოს ან არ იყოს.

დავალება 5.2: ა) შეამოწმეთ, რომ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები აკმაყოფილებენ 5.1 ცხრილის ყველა აქსიომას.

ბ) არიან თუ არა ეს ოპერაციები კომუტატური?

ცხრილი 5.1

I. ოპერაციები სავსებით განსაზღვრულია	
<i>A0. $a + b \in G$</i>	<i>M0. $a b \in G$</i>
II. ასოციაციურობის კანონი	
<i>A1. $(a + b) + c = a + (b + c)$</i>	<i>M1. $(ab)c = a(bc)$</i>
III. კომუტატურობის კანონი	
<i>A2. $a + b = b + a$</i>	<i>M2. $ab = ba$</i>
IV. ნულისა და ერთიანის არსებობა	
<i>A3. არსებობს ისეთი ელემენტი $\theta \in G$, რომ ყველა $a \in G$ ელემენტისათვის $a + \theta = a$</i>	<i>M3. არსებობს ისეთი ელემენტი $e \in G$, რომ ყველა $a \in G$ ელემენტისათვის $ae = ea = a$</i>
V. საწინააღმდეგო და შებრუნებული ელემენტების არსებობა	
<i>A4. არსებობს ისეთი ელემენტი $-a \in G$, რომ ყველა $a \in G$ ელემენტისათვის $a + (-a) = \theta$</i>	<i>M4. არსებობს ისეთი ელემენტი $a^{-1} \in G$, რომ ყველა $a \in G$ ელემენტისათვის $a a^{-1} = a^{-1} a = e$</i>
VI. დისტრიბუტიურობის კანონები	
<i>D1. $a(b + c) = ab + ac$; D2. $(b + c)a = ba + ca$</i>	

სულ არ არის სავალდებულო ყველა სიმრავლეში ორივე ოპერაცია შევიტანოთ: არის სიმრავლეები სადაც ერთი ოპერაციაა შეტანილი და მას, როგორც წესი, გამრავლების ოპერაციას უწოდებენ. ცხადია, თუ შემოტანილია ერთი ოპერაცია, დისტრიბუტიურობის კანონები ავტომატურად გამოირიცხება.

არ არის სავალდებულო, რომ სიმრავლეში შეტანილმა ოპერაციამ ყველა აქსიომა დააკმაყოფილოს: შესაძლებელია, რომ კმაყოფილდებოდეს აქსიომების ნაწილი. იმის მიხედვით რა ოპერაციებია შეტანილი სიმრავლეში და რომელი აქსიომა სრულდება, არჩევენ სხვადასხვა სახის სიმრავლეებს. მაგალითად:

თუ სიმრავლეში განსაზღვრულია ორივე ოპერაცია და ყველა ჩამოთვლილი აქსიომა სრულდება ერთდროულად, მაშინ ასეთ სიმრავლეს ველი ეწოდება.

თუ სიმრავლეში განსაზღვრულია ორივე ოპერაცია, მაგრამ სრულდება მხოლოდ $A0-A4$, $M0$, $M1$, $D1$ და $D2$ აქსიომები, მაშინ ასეთ სიმრავლეს რგოლი ეწოდება.

თუ სიმრავლეში განსაზღვრულია მხოლოდ ერთი ოპერაცია – გამრავლება – და სრულდება მხოლოდ $M0$, $M1$, და $M3$ აქსიომები, მაშინ ასეთ სიმრავლეს მონოიდი ეწოდება.

თუ მონოიდში სრულდება $M4$ აქსიომაც, მაშინ სიმრავლეს ჯგუფი ეწოდება.

ამ განმარტებიდან ჩანს, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არითმეტიკული გამრავლებით, შეკრებითა და გამოკლებით ველს წარმოადგენს.

დავალება 5.3: ა) არის თუ არა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე შეკრებითა და გამრავლებით ველი?
ბ) მოიყვანეთ ველისა და რგოლის მაგალითები.

როგორც ვნახეთ, სიმრავლეთა გარდასახვები ერთმანეთში დამოკიდებულია ამ სიმრავლეთა ელემენტებზე განსაზღვრულ ოპერაციებზე. თვით გარდასახვები შეიძლება სხვასხვა სახის იყოს. ასე, მაგალითად:

G მონოიდის G' მონოიდში ისეთ გარდასახვას, რომლის დროსაც სრულდება ტოლობა $f(x,y)=f(x) f(y)$ ყველა x და y -სთვის G მონოიდიდან

და რომელსაც, ამავე დროს, G მონოიდის ერთეულოვანი ელემენტი გადაყავს G' მონოიდის ერთიანში, **ჰომომორფიზმი** ეწოდება.

ჰომომორფიზმს $f: G \Rightarrow G'$ ეწოდება **იზომორფიზმი**, თუ არსებობს შებრუნებული ჰომომორფიზმი $f: G' \Rightarrow G$ ისეთი, რომ $f \circ g$ და $g \circ f$ იგივერი გარდასახვებია. იზომორფიზმი ასე აღინიშნება: $G' \approx G$.

თუ $G' = G$, მაშინ იზომორფიზმს **ავტომორფიზმს** უწოდებენ.

ჯგუფის ჰომომორფიზმს თავის თავში **ენდომორფიზმი** ჰქვია.

იზომორფიზმს ასეც განსაზღვრავენ: თუ G მონოიდის G' მონოიდში გარდასახვის დროს G მონოიდის ყოველ ელემენტს შეესაბამება G' მონოიდის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი, მაშინ ამ გარდასახვას იზომორფიზმი ეწოდება.

დავალება 5.4: ა) არის თუ არა ეს განსაზღვრება პირველის ექვივალენტური?
ბ) ანალოგიურად განსაზღვრეთ ავტომორფიზმი.

არსებობს კიდევ ერთი ოპერაცია, რომელიც შეკრებისა და გამრავლების გარდა, შემოჰყავთ სიმრავლეებში. ეს არის სიმრავლის ელემენტის სკალარზე გამრავლება. **სკალარს** ეძახიან ველის ელემენტს, ხოლო სკალარზე გამრავლების ოპერაცია უნდა აკმაყოფილებდეს ასეთ პირობებს.

ვთქვათ, a და b ნებისმიერი L სიმრავლის ელემენტებია, ხოლო λ და μ არის R ველის ელემენტები. აგრეთვე, $\theta \in L$ და $0 \in R$ ამ სიმრავლეების ნულოვანი ელემენტებია. ამ პირობებში **სკალარზე გამრავლების** ოპერაცია უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ აქსიომებს:

SM0. $\lambda a \in L$ – ოპერაცია სავსებით განსაზღვრულია;

SM1. $I a = a$, სადაც $I \in R$ – ველის ერთეულოვანი ელემენტია;

SM2. $\lambda (a+b) = \lambda a + \lambda b$ – წრფივობა;

SM3. $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$ – დისტრიბუტივობა;

SM4. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ – ასოციატიურობა;

SM5. $\lambda\theta = \theta$ და $0a = \theta$.

დავალება 5.5: აჩვენეთ, რომ სამგანზომილებიანი ვექტორების რიცხვზე გამრავლება აკმაყოფილებს სკალარზე გამრავლების ყველა აქსიომას.

ახლა შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფიზიკისათვის მნიშვნელოვანი სიმრავლე, რომელსაც წრფივი ვექტორული სივრცე ეწოდება.

სიმრავლეს, რომელშიც განსაზღვრულია შეკრება და R ველის სკალარზე გამრავლება A0-A2 და SM0-SM5 აქსიომების დაცვით, წრფივი სისტემა ეწოდება.

თუ წრფივი სისტემა ამავე დროს მეტრიკული სივრცეც არის, მაშინ მას ეწოდება წრფივი ვექტორული სივრცე, (ან, მოკლედ, წრფივი სივრცე) R ველზე.

დავალება 5.6: ჩამოაყალიბეთ წრფივი სივრცის სრული განსაზღვრება.

წრფივ ვექტორულ სივრცეს ეწოდება **ნორმირებული სივრცე**, თუ მის ნებისმიერ a ელემენტს შეესაბამება ნორმად წოდებული დადებითი რიცხვი $\|a\|$, რომელიც ასეთ აქსიომებს აკმაყოფილებს:

N1. თუ $\|a\|=0$, მაშინ $a = \theta$;

N2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$, სადაც $\lambda \in R$ ველს;

N3. $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$;

N4. $\rho(a,b) = \|a - b\|$, სადაც $-b = \lambda b$, როდესაც $\lambda = -1$.

დავალება 5.7: რა წარმოადგენს ნორმას ევკლიდის სამგანზომილებიან სივრცეში? აკმაყოფილებს თუ არა იგი ნორმის აქსიომებს?

აღვნიშნოთ, რომ N4 აქსიომით შემოღებული მანძილი აკმაყოფილებს მანძილის ყველა აქსიომას.

დავალება 5.8: შეამოწმეთ ეს დებულება.

სრულ ნორმირებულ სივრცეს **ბანახის სივრცე** ეწოდება. მაგალითად, ბანახის სივრცის მაგალითებია მე-2 პარაგრაფში განხილული სივრცეები, თუ მათ ნორმებს ასე შევარჩევთ:

ა) E_n სივრცისთვის - $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x^i|^2}$;

ბ) C სივრცეში - $\|y\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t)|$;

გ) l_p სივრცეში - $\|x\| = \{\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p\}^{1/p}$;

დ) L_p სივრცეში - $\|x\| = \{\int_a^b |x(t)|^p dt\}^{1/p}$.

რადგან წრფივი ვექტორული სივრცეები დიდ როლს თამაშობს ფიზიკაში საჭიროა მათზე ფუნქციონალებისა და ოპერატორების განსაზღვრა. როგორც ზოგადი განსაზღვრებიდან ჩანს, წრფივმა ფუნქციონალებმა წრფივი ნორმირებული სივრცეები უნდა გადასახოს ევკლიდის E_1 სივრცეში.

წრფივი ფუნქციონალი ეწოდება წრფივ ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციონალს, რომელსაც ადიტივობის თვისება გააჩნია:

$$U(x_1 + x_2) = U x_1 + U x_2 \tag{5.1}$$

წრფივ ნორმირებულ L სივრცეზე განსაზღვრულ ფუნქციონალს ეწოდება **შემოსაზღვრული ფუნქციონალი**, თუ არსებობს ისეთი დადებითი α რიცხვი, რომ $|Ux| < \alpha \|x\|$ ყველა x ელემენტისთვის L სივრციდან. უმცირეს α რიცხვს კი **ფუნქციონალის ნორმა** ეწოდება, ე.ი.,

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} |Ux| / \|x\| \tag{5.2}$$

მაგალითად, C სივრცეზე განსაზღვროთ ფუნქციონალი

$$Ax = \int_a^b x(t) y_0(t) dt$$

სადაც $x(t)$ და $y_0(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $y_0(t)$ ამავე დროს ფიქსირებული ფუნქციაა, მაშინ Ax ფუნქციონალის ნორმა უდრის:

$$\int_b^a |y_0(t)| dt$$

მართლაც,

$$\left| \int_a^b x(t)y_0(t) dt \right| = \|x\| \int_a^b |y_0(t)| dt$$

დავალება 5.9: მოიყვანეთ წრფივი ფუნქციონალის ნორმის სხვა მაგალითები.

L სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ $U_1 x, U_2 x, \dots, U_n x, \dots$ ფუნქციონალთა მიმდევრობას ეწოდება **ნელად კრებადი** Ux წრფივი ფუნქციონალისკენ, თუ მათი ნორმა შემოსაზღვრულია – $\|U_n\| < M$ – და

$$U_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ux$$

ნებისმიერი x -სთვის L სივრციდან. ნელად კრებადობა ასე აღინიშნება:

$$U_n \rightarrow U \quad (5.3)$$

თუ $U_n x \rightarrow Ux$ კრებადობასთან ერთად წრფივი ფუნქციონალის ნორმაც იკრიბება, მაშინ ფუნქციონალთა მიმდევრობის ასეთ კრებადობას **ძლიერად კრებადობა** ჰქვია და იგი ასე აღინიშნება: $U_n x \rightarrow Ux$.

იმ შემთხვევაში თუ საჭიროა ერთი წრფივი ნორმირებული სივრცის მეორე წრფივ სივრცეში გარდასახვა მაშინ საჭიროა წრფივი ოპერატორის ცნების შემოყვანა:

წრფივ ნორმირებულ L სივრცეზე განსაზღვრულ ადიტივობის თვისების მქონე უწყვეტ ოპერატორს **წრფივი ოპერატორი** ეწოდება. წრფივ \hat{O} ოპერატორს **შემოსაზღვრული ოპერატორი** ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი $\alpha \geq 0$ რიცხვი, რომ $|\hat{O}x| < \alpha \|x\|$ ყველა x ელემენტისთვის L სივრციდან. უმცირეს α რიცხვს კი **ოპერატორის ნორმა** ეწოდება, ე.ი.,

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} |\hat{O}x| / \|x\| \quad (5.4)$$

მაგალითები:

1) C სივრცეზე განსაზღვრული ინტეგრალი

$$\hat{O}x = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

წრფივი ოპერატორია. მართლაც, ადიტივობა გამომდინარეობს ინტეგრალის ადიტივობის თვისებიდან, ხოლო უწყვეტობა მოწმდება ინტეგრალის ნიშნის შიგნით ზღვარზე გადასვლით. ამგვარად, ინტეგრალი წრფივი ოპერატორია $C[a,b]$ სიმრავლეზე.

2) წარმოებულის ოპერატორი

$$\hat{O}x = dx(t)/dt, \text{ სადაც } x(t) \in C$$

არ არის წრფივი ოპერატორი. მართლაც, ცნობილია, რომ ფუნქციების მიმდევრობის ზღვრის წარმოებული შეიძლება არ უდრიდეს ამ მიმდევრობის ფუნქციების წარმოებულთა ზღვარს. ამიტომ, მიუხედავად იმისა, რომ გაწარმოება ადიტიურია, იგი არ არის უწყვეტი ოპერატორი.

დავალება 5.10: მოიყვანეთ წრფივი ოპერატორების სხვა მაგალითები.

წრფივ ოპერატორებს გააჩნია თვისებები, მოყვანილი ქვემოთ:

1. უწყვეტობა;

2. ადიტიობა: $\hat{O}(x_1 + x_2) = \hat{O}x_1 + \hat{O}x_2$;

3. ნულოვანი ელემენტის შესაბამისობა: $\hat{O}\theta_x = \hat{O}\theta_y$, სადაც $\theta_x X$ სივრცის ელემენტია, ხოლო $\theta_y - Y$ სივრცისა.

4. კენტობა: $\hat{O}(-x) = -\hat{O}x$;

5. ერთგვაროვნება: $\hat{O}(\alpha x) = \alpha \hat{O}x$, სადაც α ნამდვილი რიცხვია;

6. დისტრიბუტიობა: $\hat{O}(\sum \alpha_k x_k) = \sum \alpha_k \hat{O}x_k$, სადაც α_k ნამდვილი რიცხვებია;

7. ყველა წრფივი ოპერატორი შემოსაზღვრულია, ყველა შემოსაზღვრული და ადიტიური ოპერატორი წრფივია;

8. $\|\hat{O}x\| \leq \|\hat{O}\| \|x\|$;

9. წრფივი ოპერატორი, უწყვეტი X სივრცის რაღაც x_0 წერტილზე, უწყვეტია ამ სივრცის ნებისმიერ სხვა წერტილზეც;

10. თავის თავში კომპაქტურ სიმრავლეზე განსაზღვრული წრფივი ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლე კომპაქტურია თავის თავში.

დავალება 5.11: შეამოწმეთ ეს თვისებები ინტეგრალზე, წარმოებულზე, კომპლექსურად შეუღლების ოპერატორზე.

შემოჰყავთ წრფივი ოპერატორების შეკრებისა და ჯამის ოპერაციები:

ორი \hat{O}_1 და \hat{O}_2 წრფივი ოპერატორის ჯამი ეწოდება ისეთ $\hat{O} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2$ ოპერატორს, რომელიც ასე მოქმედებს სიმრავლის x ელემენტზე:

$$\hat{O} x = \hat{O}_1 x + \hat{O}_2 x \quad (5.5)$$

ორი \hat{O}_1 და \hat{O}_2 წრფივი ოპერატორის ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\hat{O} = \hat{O}_1 \hat{O}_2$ ოპერატორს, რომელიც ასე მოქმედებს სიმრავლის x ელემენტზე:

$$\hat{O} x = \hat{O}_1 (\hat{O}_2 x) \quad (5.6)$$

შესაძლებელია წრფივი ოპერატორის სუსტი და ძლიერი კრებადობის განსაზღვრა.

ამბობენ, რომ \hat{O} ოპერატორი სუსტად იკრიბება ნულისკენ –

$$\hat{O}(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

– თუ ვექტორი

$$\hat{O}(t)x \rightarrow 0. \quad t \rightarrow \infty$$

ამბობენ, რომ \hat{O} ოპერატორი ძლიერად იკრიბება ნულისკენ –

$$\hat{O}(t) \Rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

– თუ ვექტორი

$$\hat{O}(t)x \Rightarrow 0. \quad t \rightarrow \infty$$

ოპერატორებისთვის კიდევ ერთი სახის კრებადობა არსებობს: ეს არის კრებადობა ნორმით, რაც, ფაქტობრივად, თანაბრად კრებადობას ნიშნავს.

ამბობენ, რომ \hat{O} ოპერატორი ნორმით იკრიბება ნულისკენ – თუ

$$\lim \|\hat{O}\| = 0.$$

6. წრფივი სივრცის ბაზისი

წრფივი სივრცის ელემენტებს, როგორც ვთქვით, ჩვეულებრივ ვექტორებს უწოდებენ და ბეჭდვისას მუქი ფერის ასოებით აღნიშნავენ x . წერის დროს ასოს თავზე ისარს უკეთებენ \vec{x} . L სივრცის x_1, x_2, \dots, x_n ვექტორების წრფივი კომბინაცია ასეთი სახის ჯამს ეწოდება:

$$x = \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots + \alpha^n x_n \quad (6.1)$$

სადაც $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ კოეფიციენტები, ზოგადად, კომპლექსური რიცხვებია.

შემდეგისთვის შევთანხმდეთ, რომ ზედა და ქვედა განმეორებული ინდექსებით იგულისხმება აჯამვა, მაშინ (6.1) ფორმულა მოკლედ ასე ჩაიწირება:

$$x = \alpha^i x_i \quad (6.1')$$

ამბობენ, რომ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელი არიან, თუ ნულოვანი ვექტორი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ამ ვექტორების წრფივი კომბინაცია:

$$\alpha^i x_i = \Theta \quad (6.2)$$

სადაც Θ L_n სივრცის ნულოვანი ვექტორია. განტოლების ტრივიალური ამოხსნა $-\alpha^1 = \alpha^2 = \dots = \alpha^n = 0$ გამორიცხულია. ამიტომ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელი არიან მაშინ, თუ (6.2) განტოლებას არა აქვს სხვა ამონახსნი ტრივიალური ამონახსნის გარდა.

წრფივ სივრცეში შეიძლება n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორის პოვნა ისეთის, რომ ნებისმიერი $(n+1)$ -ე ვექტორი უკვე მათზე წრფივად დამოკიდებული იქნება. წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების მაქსიმალურ n რიცხვს L_n წრფივი ვექტორული სივრცის განზომილება ეწოდება. კერძო შემთხვევაში n შეიძლება უსასრულოდ იყოს.

ამბობენ, რომ ნებისმიერი u_1, u_2, \dots, u_n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები ადგენენ საბაზისო ვექტორების (ორტების) სისტემას ან, მოკლედ, ბაზისს L_n სივრცეში. ეს ვექტორები ქმნიან კოორდინატთა სისტემას სივრცეში. L_n სივრცის ნებისმიერი ვექტორი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ საბაზისო ვექტორების წრფივი

კომბინაციის სახით. მართლაც, თუ $\{e_i\}$ ვექტორების სიმრავლე ბაზისს წარმოადგენს, მაშინ განტოლებას

$$\beta x + \alpha^i e_i = \Theta \quad (6.3)$$

აქვს არატრივიალური ამოხსნები, ამასთან ყველა ამ ამონახში β არ შეიძლება იყოს ნული, რადგან ამ შემთხვევაში გამოვა, რომ

$$\alpha^i e_i = \Theta$$

განტოლებას არატრივიალური ამონახსნები აქვს და $\{e_i\}$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულნი არიან, რაც არ შეიძლება, რადგან პირობის თანახმად $\{e_i\}$ ვექტორები სივრცის ბაზისს ადგენენ. ამიტომ (6.3) განტოლებიდან შესაძლებელია x ვექტორის პოვნა:

$$x = -(\alpha^i / \beta) e_i \equiv x^i e_i \quad (6.4)$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა. $\{x^i\}$ რიცხვების სიმრავლეს ეწოდება x ვექტორის კოორდინატები $\{e_i\}$ ბაზისში.

ცხადია, რომ საბაზისო ვექტორების შერჩევა შესაძლებელია უამრავი გზით, ამიტომ ბაზისიც შეიძლება ამდენივე იყოს. ერთსა და იმავე ვექტორს სხვადასხვა ბაზისის მიმართ სხვადასხვა კოორდინატები ექნება. თვით ვექტორს, როგორც სიმრავლის ელემენტს აქვს შინაგანი აზრი, ე.ი., არ არის დამოკიდებული ბაზისის შერჩევაზე, მაშინ როდესაც მისი აღწერა კოორდინატების საშუალებით იცვლება ერთი ბაზისიდან მეორეში გადასვლის დროს.

დავალება 6.1: ამ პარაგრაფის ყველა დებულება შეამოწმეთ ევკლიდის სამგანზომილებიანი სივრცის ვექტორების მაგალითზე.

თუ მოცემულია ერთი ბაზისი, ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ყველა სხვა ბაზისი. მართლაც, (6.4) ტოლობის გამოყენებით შეგვიძლია ავაგოთ $\{e'_j\}$ ვექტორების სისტემა:

$$e'_j = a_j^i e_i \quad j=1, \dots, n \quad (6.5)$$

ამ გამოსახულებაში a_j^i კოეფიციენტები ადგენენ კვადრატულ მატრიცას. იმისთვის, რომ $\{e'_j\}$ ვექტორების სისტემამ შექმნას ბაზისი, საჭიროა $a \equiv [a_j^i]$ მატრიცა იყოს არასინგულარული, ანუ მისი დეტერმინანტი უნდა განსხვავდებოდეს ნულისაგან. ყველა ბაზისი L_n სივრცეში მიიღება, თუ მატრიცა გარბის n -რანგის წრფივად დამოუკიდებელი არასინგულარული მატრიცების სიმრავლეს.

დავამყაროთ კავშირი ერთსა და იმავე ვექტორის კოორდინატებს შორის სხვადასხვა ბაზისში. (6.4) ტოლობის ძალით:

$$x = x^i e_i = x'^j e'_j \quad (6.6)$$

e'_i ვექტორების ნაცვლად ტოლობაში ჩავსვათ (6.5) ტოლობა. შედეგად გვექნება:

$$x^i e_i = x'^j a_j^i e_i$$

e_i ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო

$$x^i = x'^j a_j^i = \tilde{a}^i_j x'^j \quad (6.7)$$

აქ \tilde{a} აღნიშნავს a მატრიცის ტრანსპონირებულ მატრიცას ანუ მატრიცას, რომელშიც გადაადგილებულია სტრიქონები და სვეტები:

$$a_j^i = \tilde{a}^i_j$$

მატრიცული სახით (6.7) ასე ჩაიწერება:

$$x = \tilde{a} x' \quad (6.7')$$

სადაც x ასეთ სვეტ-მატრიცას აღნიშნავს:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

ამგვარად, ერთი ბაზისიდან მეორეზე გადასვლის დროს კავშირი ვექტორის კოორდინატებს შორის ხორციელდება ბაზისებს შორის გადასვლის მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცის საშუალებით.

ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ვექტორებს შინაგანი აზრი აქვთ, ამიტომ ისინი ბაზისის არჩევაზე არ არიან დამოკიდებული. ბაზისის მიხედვით იცვლება მხოლოდ ვექტორის კოორდინატები, ანუ ვექტორის წარმოდგენა ამა თუ იმ ბაზისში. ოპერატორებს ვექტორები გადაჰყავს ერთმანეთში ბაზისისგან დამოუკიდებლად, ამიტომ მათაც შინაგანი აზრი აქვთ. რაღაც ბაზისში ჩაწერილი ვექტორები ერთმანეთში გადავლენ ოპერატორის წარმოდგენის საშუალებით ამ ბაზისში. ვიპოვოთ ოპერატორის წარმოდგენა გარკვეული ბაზისის მიმართ.

ვთქვათ, გვაქვს გადაუგვარებელი წრფივი ოპერატორი \hat{O} , ე.ი. ოპერატორი, რომელიც ცალსახა კავშირს ახორციელებს ორ ვექტორს შორის:

$$x = \hat{O} y \quad (6.9)$$

ჩავწეროთ y ვექტორი $\{e_i\}$ ბაზისში:

$$y = y^i e_i$$

მაშინ (6.8) ტოლობიდან \hat{O} ოპერატორის წრფივობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\mathbf{x} = y^i \hat{O} \mathbf{e}_i \quad (6.10)$$

აქედან ჩანს, რომ \mathbf{x} ვექტორს $\{\mathbf{e}'_i = \hat{O} \mathbf{e}_i\}$ ბაზისის მიმართ იგივე კოორდინატები აქვს, როგორც \mathbf{y} ვექტორს $\{\mathbf{e}_i\}$ ბაზისში. ვიცით, რომ ახალი ბაზისის ვექტორები ძველი საბაზისო ვექტორების წრფივი კომბინაციაა, ანუ

$$\mathbf{e}'_i = O_i^j \mathbf{e}_j$$

ამ გამოსახულებაში O_i^j კომპლექსური რიცხვები ადგენენ კვადრატულ მატრიცას ჩავსვათ ეს გამოსახულება (6.10) ფორმულაში, საიდანაც მივიღებთ, რომ ფიქსირებული $\{\mathbf{e}_i\}$ ბაზისის შემთხვევაში:

$$x^j \mathbf{e}_j = y^i O_i^j \mathbf{e}_j$$

საიდანაც $\{\mathbf{e}_i\}$ საბაზისო ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო

$$x^j = \tilde{O}^j_i y^i \quad (6.11)$$

ან მატრიცულ აღნიშვნებში

$$\mathbf{x} = \tilde{O} \mathbf{y} \quad (6.11')$$

ამგვარად, ფიქსირებული ბაზისის მიმართ ერთი ვექტორის კოორდინატების გადაყვანას მეორის კოორდინატებში ახორციელებს მატრიცები. ეს მატრიცები წარმოადგენენ წრფივ ოპერატორებს ფიქსირებული ბაზისის მიმართ.

7. უნიტარული სივრცეები

ცხადია, რომ მეტრიზაცია (მეტრიკის ანუ მანძილის შემოყვანა) ზღვრული გადასვლის ერთადერთი საშუალება არ არის ტოპოლოგიური სივრცეების განსაზღვრავად. მეორე, მეტად გავრცელებული საშუალება არის წრფივი ვექტორული სივრცის ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის შემოღება. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება რიცხვს (ზოგადად, კომპლექსურს). ეს რიცხვი მოიძებნება წრფივი ვექტორული სივრცის ორ ვექტორს - x -სა და y -ს შორის - გარკვეული კანონის დადგენით.

ეს წესი შემდეგში მდგომარეობს: L_n წრფივი ვექტორული სივრცის ორ x და y ვექტორს შევუსაბამოთ კომპლექსური რიცხვი (x, y) , რომელიც ასეთ აქსიომებს აკამყოფილებს:

$$S1. (x, y) = (y, x)^*;$$

$$S2. (x, \alpha y) = \alpha (x, y);$$

$$S3. (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$$

$$S4. (x, x) \geq 0 \text{ და } (x, x) = 0 \text{ მხოლოდ მაშინ, როდესაც } x = \theta.$$

S4 თვისება, ფაქტობრივად, ნორმის შემოღებაა, ამიტომ ასეთნაირად შემოღებული სივრცე ნორმირებული იქნება.

დავალება 7.1: შეამოწმეთ ამ აქსიომების სამართლიანობა ევკლიდის სამგანზომილებიან სივრცეში განსაზღვრულ სკალარულ ნამრავლზე.

წრფივ სივრცეს, რომელშიც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი, უნიტარული სივრცე ეწოდება. თუ სკალარულ ნამრავს სხვადასხვა გზით შემოვიყვანთ, მივიღებთ განსხვავებულ უნიტარულ სივრცეებს.

უნიტარულ სივრცეებში შესაძლებელია ვექტორის ნორმირება, ე.ი., მისი მიყვანა ერთეულოვან სიგრძეზე. მართლაც, თუ L_n წრფივი ვექტორული სივრცის ნებისმიერი x ვექტორის მაგივრად შემოვიღებთ ახალ ვექტორს

$$x' = \frac{x}{\sqrt{(x,x)}}, \quad (7.1)$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$(x', x') = 1 \quad (7.1')$$

ვექტორის მსგავსად სკალარულ ნამრავლსაც *შინაგანი აზრი აქვს*. მისი წარმოდგენის მისაღებად იგი ვექტორის კოორდინატების საშუალებით უნდა გამოვსახოთ. ამისთვის ჯერ საბაზისო ვექტორების სკალარული ნამრავლი განვსაზღვროთ. გამნარტების თანახმად იგი იქნება:

$$m_{ij} = (e_i, e_j) \quad (7.2)$$

S1 აქსიომის ძალით

$$m_{ij} = m_{ji}^* \quad (7.3)$$

m_{ij} რიცხვები ადგენენ $n \times n$ რიგის კვადრატულ მატრიცას, რომელსაც **მეტრიკულ მატრიცას** ეძახიან. (7.3) ტოლობა ამ მატრიცის ერთ საინტერესო თვისებას აღწერს: *იგი თავის ტრანსპონირებულსა და კომპლექსურად შეუღლებულ მატრიცას უდრის*. ტრანსპონირებულ და კომპლექსურად შეუღლებულ მატრიცას **ერმიტულად შეუღლებული მატრიცა** ეწოდება და "+" ზედა ინდექსით აღინიშნება. ე.ი., m მატრიცის ერმიტულად შეუღლებული მატრიცა არის m^\dagger . თუ მატრიცა ემთხვევა თავის ერმიტულად შეუღლებულ მატრიცას, მაშინ მას **თვითშეუღლებული ან ერმიტული მატრიცა** ეწოდება. რადგან (7.3) ტოლობის ძალით $m = m^\dagger$, ამიტომ მერტიკული მატრიცა ერმიტული მატრიცა ყოფილა.

- დავალება 7.2:**
- ა) რა წარმოადგენს რიცხვის ერმიტულად შეუღლებულს?
 - ბ) როგორი რიცხვია ერმიტული?
 - გ) მოიყვანეთ ერმიტული მატრიცების მაგალითები.
 - დ) როგორია (6.8) სვეტ-მატრიცის ერმიტულად შეუღლებული?
 - ე) რას უდრის ევკლიდის სამგანზომილებიანი სივრცის მეტრიკული მატრიცა? არის თუ არა იგი ერმიტული?

ახლა ჩავწეროთ სკალარული ნამრავლი შემადგენელი ვექტორების კოორდინატების საშუალებით. ამისთვის ჩავწეროთ x და y ვექტორები $\{e_i\}$ ბაზისში და ვისარგებლოთ აქსიომებითა და (7.2) ფორმულით. მივიღებთ:

$$(x, y) = (x^i e_i, y^j e_j) = x^i m_{ij} y^j \quad (7.4)$$

თუ x და y ვექტორებს წარმოვიდგენთ (6.8) სვეტ-მატრიცის სახით, მაშინ (7.4) ტოლობა მატრიცული სახით ასე ჩაიწერება:

$$(x, y) = x^\dagger m y \quad (7.5)$$

დავალება 7.3: ჩაწერეთ მდგენელებში ევკლიდის სამგანზომილებიანი სივრცის ვექტორთა სკალარული ნამრავლი.

$\{e_i\}$ ბაზისს ეწოდება **ორთოგონალური ბაზისი**, თუ მისი ვექტორები ასე არიან შერჩეული:

$$(e_i, e_j) = 0, \text{ როდესაც } i \neq j$$

თუ ამავე დროს საბაზისო ვექტორები ერთზე არიან ნორმირებული, მაშინ ბაზისს **ორთონორმირებული ბაზისი** ეწოდება და საბაზისო ვექტორები ასეთ პირობას აკმაყოფილებენ:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad (7.6)$$

ცხადია, რომ ორთონორმირებული ბაზისის შემთხვევაში მეტრიკული მატრიცა ერთეულოვანი მატრიცის ტოლია.

შეიძლება ისე მოხდეს, რომ მატრიცის ერმიტულად შეუღლებული მატრიცა საწყისი მატრიცის შებრუნებული იყოს

$$A^\dagger = A^{-1} \quad (7.2)$$

ასეთ შემთხვევაში მატრიცას **უნიტარული მატრიცა** ეწოდება.

დავალება 7.4: მოიყვანეთ უნიტარული მატრიცების მაგალითები.

უნიტარული მატრიცების როლი ფიზიკაში მეტად დიდია. მართლაც, ფიზიკაში გამოყენებული ბაზისები, როგორც წესი, ორთონორმირებული არის, ხოლო ერთი ორთონორმირებული ბაზისიდან მეორეში გადასვლა ხორციელდება უნიტარული მატრიცების საშუალებით. მართლაც, თუ $\{e_i, e_j\}$ და $\{e'_i, e'_j\}$ ბაზისები

ორთონორმირებულნი არიან, ხოლო გადასვლას მათ შორის a მატრიცა ახორციელებს, მაშინ

$$\delta_{ij} = (e'_i, e'_j) = (a_i^k e_k, a_j^l e_l) = a_i^k a_j^l \delta_{kl} = \sum a_i^k a_j^k \quad (7.6)$$

ან მატრიცული სახით ეს ასე გამოისახება:

$$a^\dagger a = 1, \quad \text{ე.ი.} \quad a^\dagger = a^{-1} \quad (7.7)$$

თუ გავიხსენებთ სისრულის პირობას, ცხადი გახდება, რომ უნიტარულ სივრცეში შეიძლება სისრულის მოთხოვნის შემოყვანა. სრულ უნიტარულ სივრცეს გილბერტის სივრცე ეწოდება. ცხადია, რომ გილბერტის სივრცე ბანახის სივრცეს წარმოადგენს.

ახლა ვნახოთ, რა შეესაბამება ერმიტულად შეუღლების ოპერაციას ოპერატორებისათვის? ვისარგებლოთ იმით, რომ ოპერატორის მატრიცულ წარმოდგენის ერმიტულად შეუღლების ოპერაციას შეესაბამება ტრანსპონირება და კომპლექსურად შეუღლება. დავთვალოთ $(x, \hat{O} y)$ გამოსახულება რაღაც $\{e_i\}$ ბაზისის მიმართ:

$$\begin{aligned} (x, \hat{O} y) &= (x^i e_i, O_k^j y^k e_j) = O_k^j x^i y^k \delta_{ij} \\ &= \hat{O}_j^k x^i y^k = (\hat{O}^*_{j^k} x^j e_k, y^i e_i) = (O^\dagger x, y) \end{aligned}$$

ამგვარად, ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორი განისაზღვრება ასეთი ტოლობით:

$$(x, \hat{O} y) = (\hat{O}^\dagger x, y) \quad (7.8)$$

ეს განსაზღვრება მოითხოვს მხოლოდ საკალრული ნამრავლის განმარტებას და არ მოითხოვს რაიმე კონკრეტულ ბაზისს. ამგვარად, ერმიტულად შეუღლების ოპერაციას, განსაზღვრულს (7.8) ფორმულით, შინაგანი აზრი აქვს.

უნიტარულ სივრცეში ადვილია O_k^i მატრიცული ელემენტის პოვნაც. მართლაც, (7.8) ტოლობიდან

$$(x, \hat{O} x) = \hat{O}_{jk} x^j x^k$$

მეორე მხრივ,

$$(x, \hat{O} x) = x^*{}^j x^k (e_j, \hat{O} e_k)$$

ორი უკანასკნელი ტოლობის შედარება გვაძლევს:

$$\hat{O}_{jk} = (e_j, \hat{O} e_k) \quad (7.9)$$

დავალება 7.5: იპოვეთ \hat{O}^\dagger თუ $\hat{O} = d/dx$ ოპერატორია, განსაზღვრული $\{f(x)\}$ უწყვეტი ფუნქციების წრფივ ვექტორულ სივრცეში. ფუნქციები განსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე.

II. ალგებრები და ჯგუფები

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით ფიზიკისათვის ისეთ მნიშვნელოვან სიმრავლეებს, როგორცაა ალგებრები და ჯგუფები. წინა თავის მსგავსად აქაც ყურადღება, ძირითადად, გამოყენებით მხარეზე გამახვილდება და არა ზუსტ მათემატიკურ დამტკიცებებზე.

9. ალგებრები

განვიხილოთ n -განზომილებიანი წრფივი ვექტორული L სივრცე ნამდვილი ან წარმოსახვითი რიცხვების R ველზე და ამ სივრცეში ავირჩიოთ ბაზისი $\{e_i\}$. შემოვიყვანოთ ვექტორთა გამრავლების ოპერაცია და ეს ოპერაცია აღვნიშნოთ ასე: $[e_i, e_j]$. ვთქვათ ოპერაცია ასეთ აქსიომებს აკმაყოფილებს:

$$A1. [\alpha e_i + \beta e_j, e_k] = \alpha [e_i, e_k] + \beta [e_j, e_k], \text{ წრფივობა;} \quad (9.1)$$

$$A2. [e_i, e_j] = \gamma_{ij}^k e_k. \quad (9.2)$$

აქ α, β და $\gamma_{ij}^k \in R$ სკალარებია, γ_{ij}^k რიცხვებს სტრუქტურულ კონსტანტებს უწოდებენ.

დავალება 9.1: ა) (9.2) ტოლობის გამოყენებით დაწერეთ ალგებრის ნებისმიერი ორი ვექტორის ნამრავლის გამოსახულება კოორდინატებში.

ბ) დაწერეთ წრფივობის პირობა $a, b, c \in L$ ვექტორებისთვის.

გ) დაამტკიცეთ, რომ ევკლიდის სამგანზომილებიანი სივრცე ადგენს ალგებრას.

თუ (9.1) და (9.2) აქსიომებს დავუმატებთ კიდევ ორ მოთხოვნას ასეთი სახით:

$$A3. [e_i, e_k] = -[e_k, e_i], \text{ ანტისიმეტრიულობა;} \quad (9.1)$$

$$A4. [[e_i, e_j], e_k] + [[e_i, e_j], e_k] + [[e_i, e_j], e_k] = 0, \text{ იაკობის უტოლობა. } (9.2)$$

მაშინ მივიღებთ ალგებრათა განსაკუთრებულ კლასს, რომელსაც ლის ალგებრები ჰქვია. განმარტებიდან ჩანს, რომ ლის ალგებრები ზოგადი ალგებრების ქვესიმრავლეს ქმნიან. ცხადია, რომ (9.1)-(9.4) აქსიომები შეიძლება განისაზღვროს ალგებრის ნებისმიერი ვექტორისათვის და არა მარტო ბაზისისათვის.

დავალება 9.2: ა) დაწერეთ ეს აქსიომები ვექტორებისათვის.

ბ) შეამოწმეთ, რომ ლის ალგებრაში ვექტორთა გამრავლება შეიძლება აკმაყოფილებდეს ასეთ პირობას:

$$[a, b] = ab - ba \quad (ab \neq ba) \quad (9.5)$$

გ) არის თუ არა ევკლიდის სივრცე ლის ალგებრა?

დ) აკმაყოფილებს თუ არა ევკლიდის სივრცის ელემენტები (9.5) პირობას?

(9.2) პირობიდან ცხადია, რომ ალგებრის ყოველ ბაზისს თავისი სტრუქტურული კონსტანტები აქვს.

თუ ალგებრის სამი ნებისმიერი ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] \quad (9.6)$$

მაშინ ალგებრას ასოციატიური ალგებრა ეწოდება.

დავალება 9.3: ა) ასოციატიურია თუ არა ლის ალგებრა?

ალგებრის ყოველ a ელემენტს შეგვიძლია შევუსაბამოთ მატრიცა, შედგენილი მისი კოორდინატებისა და სტრუქტურული კონსტანტებისაგან. მართლაც, თუ ავირჩიეთ ბაზისი $\{e_i\}$, მაშინ a ელემენტს ეთანადება მატრიცა

$$A = [a^i \gamma_{l i}^k] \quad (9.7)$$

რომლის მატრიცული ელემენტებია

$$A_{l i}^k = a^i \gamma_{l i}^k \quad (9.8)$$

ალგებრის რომელიმე სხვა b ელემენტისათვის მატრიცას ასეთი სახე ექნება:

$$B = [b^i \gamma_{l i}^k] \quad (9.9)$$

A და B მატრიცების გადამრავლება გვაძლევს:

$$AB = [a^i \gamma_{li}^k b^j \gamma_{kj}^l] \quad (9.10)$$

მეორე მხრივ, ალგებრის a და b ელემენტების ნამრავლს

$$[a, b] = a^i b^j \gamma_{ij}^l e_l$$

შეესაბამება მატრიცა

$$[a^i b^j \gamma_{ij}^k \gamma_{mk}^n]$$

ასოციატიურ ალგებრებში ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\gamma_{ij}^k \gamma_{mk}^n = \gamma_{mj}^k \gamma_{ki}^n \quad (9.11)$$

დავალება 9.4: დაამტკიცეთ ეს ტოლობა.

(9.11) ტოლობის გათვალისწინებით ბოლო მატრიცა ასე გადაიწერება:

$$[a^i b^j \gamma_{mi}^k \gamma_{kj}^n]$$

რომლის შედარება (9.10) მატრიცასთან გვარწმუნებს, რომ ალგებრის ელემენტების ნამრავლს შეესაბამება მათი წარმოდგენის მატრიცების ნამრავლი. ამიტომ (9.7) წესით აგებული მატრიცები თვითონ ადგენენ ასოციატიურ ალგებრას, რომელიც საწყისი ალგებრის ექვივალენტურია და მას საწყისი ალგებრის რეგულარულ მატრიცულ წარმოდგენას უწოდებენ. ცხადია, რომ რეგულარული მატრიცული წარმოდგენა ერთადერთი წარმოდგენა არ არის.

დავალება 9.5: ა) მოიფიქრეთ სხვა მატრიცული წარმოდგენები.

ბ) როგორ იქცევა რეგულარული წარმოდგენა ბაზისიდან ბაზისზე გადასვლი შემთხვევაში?

ალგებრის ელემენტის კვალი ეწოდება ასეთ გამოსახულებას:

$$\text{Tr } a = a^i \gamma_{ki}^k$$

დავალება 9.6: იპოვეთ ევკლიდის ალგებრის x ელემენტის კვალი.

ასოციატიური ალგებრის უმარტივესი მაგალითია ორელემენტიანი ალგებრა ანუ, როგორც ამბობენ, მეორე რიგის ალგებრა $\{e_1, e_2\}$, გამრავლების ასეთი ტაბულით:

$$[e_1, e_1] = e_1, [e_1, e_2] = e_2, [e_2, e_2] = [e_2, e_1] = e_1, \quad (9.12)$$

დავალება 9.7: ასოციატიურია თუ არა ეს ალგებრა?

თუ ალგებრა n^2 -ის რიგისაა, მაშინ მისი საბაზისო ფუნქციები შეგვიძლია ორი ინდექსით დავნიშნოთ ისე, რომ თითოეული ამ ინდექსთაგან გარბოდეს მნიშვნელობებს 1-დან n -მდე. ვთქვათ, ეს ბაზისია $\{ \varepsilon_{ij} \}$ და იგი აკმაყოფილებს პირობას:

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{lk} = \varepsilon_{ik} \delta_{jl} \quad (9.13)$$

ამ შემთხვევაში ალგებრა პირდაპირ მატრიცული ალგებრის ექვივალენტურია, რადგან მის ნებისმიერ ელემენტს $x = \xi^{ij} \varepsilon_{ij}$ შეგვიძლია შევუსაბამოთ მატრიცა $[\xi^{ij}]$. ასეთ ალგებრას **მარტივი მატრიცული ალგებრა** ეწოდება.

მაგალითად, მეოთხე რიგის უმარტივესი ალგებრა იქნება ალგებრა გამრავლების ასეთი ტაბულით:

$$\begin{aligned} [e_1, e_1] &= e_1, [e_2, e_1] = e_2, [e_3, e_1] = 0, [e_4, e_1] = 0, \\ [e_1, e_2] &= 0, [e_2, e_2] = 0, [e_3, e_2] = e_1, [e_4, e_2] = e_2, \\ [e_1, e_3] &= e_3, [e_2, e_3] = e_4, [e_3, e_3] = 0, [e_4, e_3] = 0, \\ [e_1, e_4] &= 0, [e_2, e_4] = 0, [e_3, e_4] = e_3, [e_4, e_4] = e_4, \end{aligned} \quad (9.14)$$

დავალება 9.8: შეამოწმეთ, რომ ეს მარტივი მატრიცული ალგებრაა?

ვთქვათ, A ალგებრაა, ხოლო მისი რაღაც B ქვესიმრავლე ჩაკეტილია გამრავლების მიმართ. ეს ნიშნავს, რომ B ქვესიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტის გადამრავლებით ისევ B ქვესიმრავლის ელემენტი მიიღება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ B ქვესიმრავლე A ალგებრის **ქვეალგებრაა**. ეს ასე აღინიშნება: $B \subset A$.

ABA გამოსახულებით აღვნიშნოთ სიმრავლე, რომელიც შედგენილი ასეთნაირად: $[a_1, [b, a_2]]$, აქ a_1 და a_2 გარბიან A ალგებრის ყველა ელემენტის მნიშვნელობას, ხოლო $b - B$ ქვეალგებრის ელემენტებისა. თუ $A B A$ სიმრავლის ყველა

ელემენტი ეკუთვნის B ქვეალგებრას, მაშინ B -ს ინვარიანტული ქვეალგებრა ანუ იდეალი ჰქვია.

თუ A ალგებრას ორი B_1 და B_2 იდეალი აქვს ისე, რომ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ და $B_1 \cup B_2 = A$, მაშინ ამბობენ, რომ A ალგებრა დაყვანადია და B_1 და B_2 იდეალების პირდაპირ ჯამს წარმოადგენს. პირდაპირი ჯამი ასე აღინიშნება:

$$A = B_1 \oplus B_2$$

თუ ასეთი ოპერაციის ჩატარება შეუძლებელია, მაშინ ალგებრას დაყვანადი ალგებრა ეწოდება.

დავალება 9.9: დაყვანადია თუ არა ევკლიდის ალგებრა და ალგებრები, განსაზღვრული (9.12) და (9.14) ტოლობებით?

თუ $A = B_1 \oplus B_2$, მაშინ A ალგებრის ნებისმიერი ორი ელემენტის x -ისა და y -ის ნამრავლი ასე წარმოიდგინება:

$$[x, y] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] \quad (9.15)$$

სადაც $x_1, y_1 \in B_1$ და $x_2, y_2 \in B_2$.

მართლაც, A ალგებრის განმარტების ძალით დაყვანადი ალგებრის ელემენტები ასე წარმოიდგინება:

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2$$

ამიტომ

$$[x, y] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] + [x_1, y_2] + [x_2, y_1]$$

მაგრამ $[x_1, y_2]$ და $[x_2, y_1]$ ელემენტები ეკუთვნის იდეალების გადაკვეთას, რომელიც განმარტებით ცარიელია, ამიტომ ეს ელემენტები ნულის ტოლია, რითაც დამტკიცდა (9.15) ტოლობა.

ალგებრის მოდული ეწოდება ისეთ m ელემენტს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ასეთ ტოლობებს:

$$[x, m] = [m, x] = x$$

ნებისმიერი x ელემენტისათვის ალგებრიდან. თუ ალგებრას აქვს მოდული m , მაშინ ელემენტთა ერთობლიობა $m\xi$, სადაც ξ სკალარია, იზომორფულია კომპლექსური რიცხვების სიმრავლის და $m\xi$ შეგვიძლია კომპლექსურ რიცხვად ჩავთვალოთ.

დავალება 9.10: ა) იპოვეთ მოდული მარტივ მატრიცულ ალგებრაში, ლის ალგებრაში,
 ბ) რა არის მოდული ევკლიდის ალგებრაში, (9.12) და (9.14) ტოლობებით განსაზღვრულ ალგებრებში?

ალგებრის ელემენტებს შორის შეიძლება სხვა საინტერესო თვისებების ელემენტების მონახვა. მაგალითად, x ელემენტს ეწოდება **ნილპოტენტური** ელემენტი, თუ მოიძებნება ნატურალური რიცხვი n ისეთი, რომ $x^n=0$. n რიცხვს **ნილპოტენტობის ხარისხი** ეწოდება.

დავალება 9.11: ა) იპოვეთ ნილპოტენტური ელემენტები ევკლიდის ალგებრაში, (9.12) და (9.14) ტოლობებით განსაზღვრულ ალგებრებში?

თუ x ნილპოტენტია და, ამავე დროს, xy და yx ელემენტებიც ნილპოტენტებია ალგებრის ნებისმიერი y ელემენტისათვის, მაშინ x ელემენტს ეწოდება **ჭეშმარიტად ნილპოტენტური ელემენტი**,

დავალება 9.12: ა) იპოვეთ ჭეშმარიტად ნილპოტენტური ელემენტები ევკლიდის ალგებრაში, (9.12) და (9.14) ტოლობებით განსაზღვრულ ალგებრებში?

არანულოვან x ელემენტს A ალგებრაში ეწოდება **იდემპოტენტი**, თუ

$$x^2 = x$$

ალგებრის x ელემენტს ეწოდება **პრინციპული იდემპოტენტი**, თუ A ალგებრაში არ არსებობს ისეთი იდემპოტენტი u , რომ

$$xu = ux = 0.$$

დავალება 9.13: მოიყვანეთ იდემპოტენტისა და პრინციპული იდემპოტენტები ზემომოყვანილი ალგებრებიდან.

იდემპოტენტების, ნილპოტენტებისა და მოდულების შესწავლით შესაძლებელია ალგებრის დაყვანადობის საკითხის შესწავლა. ასე, მაგალითად, არსებობს თეორემა რომლის ძალითაც

ალგებრა, რომელშიც არ არის ნილპოტენტი და რომელსაც, ამავე დროს, გააჩნია იდეალი – დაყვანადია.

ან მეორე ასეთი თეორემა:

ყოველი ალგებრა, რომელსაც არ გააჩნია ჭეშმარიტი ნილპოტენტი, გამოისახება როგორც მარტივი მატრიცული ალგებრების პირდაპირი ჯამი.

მსგავსი თეორემები ძალაშია ლის ალგებრისთვისაც. ლის ალგებრას ეწოდება **მარტივი**, თუ მას არ გააჩნია იდეალი განსხვავებული თვით ალგებრისაგან და ეწოდება **ნახვრადმარტივი**, თუ მას არ გააჩნია კომუტატური იდეალი.

დავალება 9.14: როგორი ალგებრაა ევკლიდის ალგებრა?

10. ჯგუფები

მე-5 პარაგრაფში სხვა სიმრავლეთან ერთად შემოვიყვანეთ ჯგუფის ცნება. მაგრამ, რადგანაც ამის შემდეგ ჩვენ ჯგუფებს შევისწავლით, კვლავ მოვიყვანოთ ჯგუფის განმარტება.

განვიხილოთ G სიმრავლე, რომელშიც შეტანილია გამრავლების ოპერაცია და ეს ოპერაცია ასეთ აქსიომებს აკმაყოფილებს:

G1. ჯგუფი ჩაკეტილია გამრავლების მიმართ. ე.ი., თუ g_1 და $g_2 \in G$, მაშინ $g_1 g_2 = g_3 \in G$;

G2. გამრავლება ასოციაციურია. ე.ი., $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$;

G3. არსებობს ერთიანი, ე.ი., ჯგუფში მოიძებნება ისეთი e ელემენტი, რომ $eg = ge = g$ ყველა g ელემენტისათვის G ჯგუფიდან;

G4. არსებობს შებრუნებული ელემენტი, ე.ი., ჯგუფში მოიძებნება ისეთი g^{-1} ელემენტი, რომ $g^{-1} g = g g^{-1} = e$ ყველა g ელემენტისათვის G ჯგუფიდან;

თუ G სიმრავლეში შეტანილი გამრავლების ოპერაცია ყველა ამ აქსიომას აკმაყოფილებს, მაშინ სიმრავლეს **ჯგუფი** ეწოდება. ჯგუფს, რომელშიც გამრავლება კომუტატურია, **აბელის ჯგუფი** ეწოდება.

არსებობს სიმრავლეები, რომლებშიც ჯგუფის აქსიომები ნაწილობრივ სრულდება. მათ შორის ყველაზე გავრცელებულია **კვაზიჯგუფი**, სიმრავლე, რომელშიც სრულდება G1, G3, და G4 აქსიომები. ასევე, არის **ლუპა** (სრულდება G1, და G3 აქსიომები) და **ნახევარჯგუფი** (სრულდება G1, და G2 აქსიომები).

ჯგუფის აქსიომებიდან გამომდინარე, შესაძლებელია ჯგუფის ელემენტის ხარისხების განსაზღვრა:

$$g^2 = g g, \quad g^3 = g g g, \quad \text{და ა.შ.}$$

ასევე, არსებობს ელემენტის უარყოფითი ხარისხი:

$$g^{-m} = (g^{-1})^m = (g^m)^{-1}. \quad (10.1)$$

ამბობენ, რომ g ელემენტი უსასრულო რიგისაა, თუ მისი ყველა ხარისხი განსხვავდება ერთმანეთისაგან. თუ არსებობს უმცირესი დადებითი რიცხვი n ისეთი, რომ $g^n = e$, მაშინ ამბობენ, რომ g ელემენტი n რიგისაა. თუ არსებობს, აგრეთვე, ისეთი დადებითი k რიცხვი, რომ $g^k = e$, მაშინ $k \geq n$ და იგი n რიცხვის ჯერადია.

დავალება 10.1: აჩვენეთ ეს.

თუ g ელემენტი n რიგისაა, მაშინ ყველა ელემენტი

$$g^0 = e, g, g^2, \dots, g^{n-1}$$

ერთმანეთისგან განსხვავდება.

ჯგუფს, ელემენტების სასრული რაოდენობით, **სასრული ჯგუფი** ეწოდება. შესაძლებელია, ჯგუფის ყველა ელემენტი წარმოადგენდეს ერთი ელემენტის ხარისხებს, მაშინ ჯგუფს **ციკლური ჯგუფი** ეწოდება.

აბსტრაქტული ჯგუფი ეწოდება ისეთ ჯგუფს, რომლის ელემენტები მხოლოდ სიმბოლოებია და სხვა არავითარი აზრი არა აქვთ. შესაძლებელია ჯგუფის იზომორფული გადასახვა რაღაც ოპერაციების ან სხვა მათემატიკური ობიექტების სიმრავლეებში (მაგალითად, მატრიცების, ბრუნვების, უნიტარული გარდაქმნების, წრფივი გარდაქმნების და ა.შ. ჯგუფებში). მას **აბსტრაქტული ჯგუფის რეალიზაცია** ეწოდება, ხოლო რეალიზაციის შედეგს – ჯგუფის წარმოდგენა.

სასრულ აბსტრაქტულ ჯგუფებს, ჩვეულებრივ, წერენ ცხრილის სახით. ცხრილის სვეტები და სტრიქონები დანომრილია ჯგუფის ელემენტების სახელებით, ხოლო მათ გადაკვეთაზე იწერება ნამრავლის შესაბამისი ელემენტი.

მაგალითად, ავაგოთ მესამე რიგის ჯგუფი. მისი სამი განსხვავებული ელემენტი აღვნიშნოთ ასე: e , a და b . e -თი აღნიშნულია ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი. ახლა შევადგინოთ ელემენტთა ნამრავლები: e -ზე გამრავლება ტრივიალურია: $ea=ae=a$ და $eb=be=b$. ასევე გასაგებია, რომ $ab \neq a$ და $ab \neq b$, წინააღმდეგ შემთხვევაში ან a ან b e -ს ტოლი უნდა იყოს, რაც შეუძლებელია, რადგან სამივე ელემენტი ჯგუფში განსხვავებულია. ამიტომ ერთად ერთი ვარიანტი გვრჩება, რომ $ab=e$. ასევე, $ba=e$.

ახლა შევისწავლოთ ელემენტთა ხარისხები. $a^2 \neq e$, წინააღმდეგ შემთხვევაში a იქნებოდა ტოლი b -სი. მართლაც, თუ $a^2 = e$, მაშინ ამ ტოლობის მარჯვნიდან¹ b -ზე გამრავლებით მივიღებთ $a^2 b = b$, ხოლო რადგან $ab = e$, ამიტომ დაგვრჩება, რომ $a = b$. ასევე, $a^2 \neq a$, წინააღმდეგ შემთხვევაში a e -ს ტოლი იქნებოდა. ამიტომ გვრჩება, რომ $a^2 = b$. ანალოგიური მსჯელობით მივალთ დასკვნამდე, რომ $b^2 = a$.

საბოლოოდ, ჯგუფურ ცხრილს ექნება ასეთი სახე:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

რადგან ერთიანზე გამრავლება ტრივიალურია, ამიტომ პირველი სტრიქონი ემთხვევა მეორეს, ხოლო პირველი სვეტი – მეორე სვეტს. ამიტომ, ცხრილის ჩაწერის გამარტივების მიზნით პირველ სტრიქონსა და პირველ სვეტს არ წერენ. და ამგვარად, მესამე რიგის აბსტრაქტული ჯგუფის გამრავლების ცხრილს საბოლოოდ ასეთი სახე ექნება:

e	a	b	(10.2)
a	b	e	
b	e	a	

- დავალბა 10.2:** ა) იპოვეთ ჯგუფის ელემენტების შებრუნებული ელემენტები.
 ბ) არის თუ არა მესამე რიგის აბსტრაქტული ჯგუფი ციკლური?

მოვიყვანოთ ამ ჯგუფის რეალიზაციის ერთ-ერთი მაგალითი. a ელემენტი იყოს xy სიბრტყეში z ღერძის გარშემო საათის ისრის მიმართულებით 120° -იანი კუთხით შემობრუნება, ხოლო b იყოს იმავე ღერძის გარშემო იმავე მიმართულებით 240° -იანი კუთხით შემობრუნება. მაშინ ადვილია დარწმუნება იმაში, რომ ასეთი რეალიზაციისათვის (10.2) ცხრილი სრულდება.

¹ მიაქციეთ ყურადღება, რომ ჯგუფებისთვის მნიშვნელობა აქვს საიდან ვამრავლებთ ელემენტს, მარჯვნიდან თუ მარცხნიდან. თუ ჯგუფი კომუტატურია (აბელის ჯგუფი), მაშინ, ცხადია, ამას მნიშვნელობა არ ექნება, მაგრამ თუ გამრავლება არ არის კომუტატური, მაშინ სხვადასხვა პასუხი მიიღება და ამის გაუთვალისწინებლობის შემთხვევაში შეცდომას დაუშვებთ.

დავალბა 10.3: ა) შეამოწმეთ ეს.

ბ) იპოვეთ ჯგუფის რეალიზაციის შებრუნებული ელემენტები.

გ) ააგეთ მეოთხე და მეხუთე რიგის აბსტრაქტული ჯგუფების შესაბამისი ცხრილები. გაითვალისწინეთ, რომ მეოთხე რიგის ჯგუფისთვის არსებობს ორი განსხვავებული სტრუქტურა.

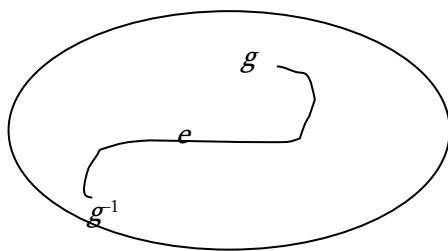
დ) მოიყვანეთ ამ ჯგუფების რეალიზაციის მაგალითები.

ჯგუფის განსაზღვრება არ ზღუდავს ელემენტთა რაოდენობას ჯგუფში და ეს რიცხვი შეიძლება უსასრულოც იყოს. უფრო მეტიც, ელემენტი ელემენტში შეიძლება უწყვეტად გადადიოდეს და, ამდენად, ჯგუფი შეიძლება უწყვეტ სიმრავლეს წარმოადგენდეს. მაგალითად, ბრუნვები სამგანზომილებიან სივრცეში ადგენენ ჯგუფს, რომელსაც **ბრუნვის ჯგუფი** ეწოდება და მას აღნიშნავენ ასე: SO_3 ან R_3 . რადგან მობრუნების კუთხეების სიმრავლე უწყვეტ სივრცეს ქმნის, ამიტომ, ცხადია, ჯგუფის ელემენტთა სივრცეც უწყვეტი სიმრავლეა.

უწყვეტ ჯგუფებს რიგი დამახასიათებელი თვისებები აქვს, რომლებიც არ ახასიათებს სასრულ ჯგუფებს, ან რომელთაც არა აქვს არსებითი მნიშვნელობა სასრული ჯგუფებისათვის. მაგალითად, ასეთია “ერთგვაროვნება”, რომელიც სასრულ ჯგუფებსაც ახასიათებს, მაგრამ ეს იმდენად ბუნებრივია ამ ჯგუფებისათვის, რომ მასზე ყურადღებას არ ამახვილებენ. განვსაზღვროთ ეს თვისება: ჯგუფში არსებობს ორი სახის ტრანსლაცია – **მარჯვენა წანაცვლება** $g \rightarrow g g_0$ და **მარცხენა წანაცვლება** $g \rightarrow g_0 g$. აქ g ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტია, ხოლო g_0 – ფიქსირებული ელემენტი. ცხადია, რომ ტრანსლაციების საშუალებით შესაძლებელია ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტის მიღება. თუ ჯგუფში განსაზღვრულია რაღაც მათემატიკური კონსტრუქცია (მეტრიკა, მოცულობა, წარმოებული და ა.შ.), იგი წანაცვლების საშუალებით შეუცვლელად შეგვიძლია გადავიტანოთ ჯგუფის ნებისმიერ წერტილში. ამ თვისებას ეძახიან **ერთგვაროვნებას**. უწყვეტ ჯგუფებში ეს თვისება საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ საჭირო კონსტრუქცია მხოლოდ ერთ წერტილში, სადაც ამის გაკეთება ყველაზე მარტივია და შემდეგ გადავიტანოთ იგი მთელს

ჯგუფში. როგორც წესი, ასეთი წერტილი უწყვეტ ჯგუფში ერთეულოვანი ელემენტი e არის.

ტოპოლოგიურ სიმრავლეზე განსაზღვრულ ჯგუფს ტოპოლოგიური ჯგუფი ეწოდება. განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ ტოპოლოგიურ ჯგუფში $g_1 g_2$ ნამრავლი უწყვეტად არის დაკავშირებული g_1 და g_2 ელემენტებთან ისევე, როგორც g ელემენტი უწყვეტად უკავშირდება g^{-1} ელემენტს. თუ ტოპოლოგიურ ჯგუფს გრაფიკულ სიბრტყის სახით გამოვსახავთ (ნახ. 10.1), მაშინ g და g^{-1} ელემენტები სიმეტრიულად განლაგდებიან e ელემენტზე გამავალ წირზე.



ნახ. 10.1

ტოპოლოგიურ ჯგუფს ბმული ეწოდება, თუ მისი ორი ნებისმიერი წერტილი (ელემენტი) შეიძლება შეერთდეს მრუდით, რომელიც ამ ჯგუფის სიმრავლის გარეთ არ გავა. მაგალითად, ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული სამგანზომილებიანი ბრუნვების ჯგუფი უწყვეტია.

დავალება 10.4: ა) მოიყვანეთ ბმული ჯგუფების სხვა მაგალითები.

ბ) ბმულია თუ არა სასრული ჯგუფი?

ვთქვათ, G ჯგუფია. აღვნიშნოთ G_0 -ით ჯგუფის ქვესიმრავლე, რომლის ყველა ელემენტი უწყვეტად არის დაკავშირებული e -სთან. ასეთ ქვესიმრავლეს ფურცელი ეწოდება. ვთქვათ, ფურცლის ელემენტების გარდა ჯგუფში კიდევ არის ელემენტი σ_1 , რომელიც არ შედის ფურცელში და, ამგვარად, უწყვეტად არ უკავშირდება ერთეულოვან ელემენტს. ასეთ ელემენტს არეკვლა ეწოდება. გასაგებია, რომ სიმრავლე $\{\sigma_1 g_0 | \text{ნებისმიერი } g_0 \in G_0 \text{ ელემენტისათვის}\}$ ქმნის დამოუკიდებელ ფურცელს, რომელიც e ელემენტს უწყვეტად არ უკავშირდება. ეს ფურცელი G_1 -ით აღვნიშნოთ. თუ არსებობს კიდევ სხვა არეკვლები $\sigma_2, \sigma_3, \dots$, მაშინ ჯგუფი იშლება ახალ დამოუკიდებელ ფურცლებად G_2, G_3, \dots . უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ორი არეკვლის ნამრავლი ისევ არეკვლას გვაძლევს.

დავალება 10.5: ა) დაამტკიცეთ ბოლო დებულება.

ბ) შეიძლება თუ არა სასრული ჯგუფის დაშლა ფურცლებად?

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი ლის ჯგუფის ფურცლებად დაშლაზე. განვიხილოთ ლორენცის საკუთრივი გარდაქმნების ჯგუფი – \mathcal{L} . ეს ისეთი წრფივი გარდაქმნების ჯგუფია. რომელიც ოთხგანზომილებიან წრფივ ვექტორულ სივრცეში ინახავს კვადრატულ ფორმას – $(x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2$, სადაც $(x)^2$ ასეთი გამოსახულებაა:

$$(x)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (10.3)$$

თუ კვადრატული ფორმის შენახვის პირობას ლორენცის L გარდაქმნისათვის გამოვიყენებთ ($L \in \mathcal{L}$), მაშინ მივიღებთ მატრიცულ ტოლობას:

$$R = L R L \quad (10.4)$$

სადაც R ასეთი მატრიცაა:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

დავალება 10.6: მიიღეთ (10.4) ტოლობა.

თუ ვიპოვით (10.4) ტოლობის დეტერმინანტს, გვექნება ასეთი პირობა:

$$(\det L)^2 = 1 \quad (10.5)$$

დავალება 10.7: ა) მიიღეთ (10.5) ტოლობა.

ბ) რამდენ პარამეტრიანია ლორენცის საკუთრივი გარდაქმნების ჯგუფი?

(10.5) ტოლობის თანახმად, ლორენცის ჯგუფი ორ ფურცლად იშლება: ერთი შეესაბამება $\det L = 1$ პირობას, ხოლო მეორე – $\det L = -1$ -ს. გასაგებია, რომ ეს ორი ფურცელი ერთმანეთში უწყვეტად არ გადადის. მაგრამ ეს ჯერ კიდევ არ არის სრული სურათი. მართლაც, თუ ამოვიწერთ (10.4) მატრიცების გამრავლების შედეგად მიღებული მატრიცის პირველ სტრიქონს, მივიღებთ:

$$(L^0_0)^2 - (L^1_0)^2 - (L^2_0)^2 - (L^3_0)^2 = 1 \quad (10.6)$$

რაც L^0_0 მატრიცული ელემენტისათვის გვაძლევს:

$$(L^0_0) = \pm \sqrt{1 + (L^1_0)^2 + (L^2_0)^2 + (L^3_0)^2} \quad (10.7)$$

ფესქვემა გამოსახულება ამ ტოლობაში ყოველთვის ერთზე მეტია, ამიტომ $L^0_0 \geq 1$ ან $L^0_0 \leq -1$ და ვერ იღებს მნიშვნელობებს -1 -სა და $+1$ -ს შორის, რაც ნიშნავს, რომ ლორენცის გარდაქმნები კიდევ ორ დამატებით ფურცელს ქმნიან. საბოლოოდ, ლორენცის საკუთრივი გარდაქმნების ჯგუფი ოთხ ფურცელს ქმნის:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^+_{++} + \mathcal{L}^+_{-+} + \mathcal{L}^-_{-+} + \mathcal{L}^-_{--} \quad (10.8)$$

ფურცლების აღსანიშნავად ზედა ინდექსი მიუთითებს გარდაქმნათა შესაბამისი მატრიცების ნიშანს ($\text{sign det } L$), ხოლო ქვედა ინდექსი L^0_0 მატრიცული ელემენტის ნიშანს ($\text{sign } L^0_0$).

11. ჯგუფების პარამეტრიზაცია

ამბობენ, რომ ჯგუფში შეტანილია პარამეტრები, თუ ჯგუფის ელემენტები ურთიერთცალსახად არის გადასახული n -წევრების ან ევკლიდის n -განზომილებიან სივრცეში. თუ ჯგუფში პარამეტრებია შეტანილი, მას **პარამეტრულ ჯგუფს** უწოდებენ. ამგვარად, პარამეტრულ ჯგუფში ყოველ $g \in G$ ელემენტს გარკვეული წესით შეესაბამება n პარამეტრი:

$$g = g(t^1, t^2, \dots, t^n)$$

t^1, t^2, \dots, t^n რიცხვებს **ჯგუფის პარამეტრები** ეწოდება. ამასთან პარამეტრიზაცია შეიძლება იყოს **ლოკალური**, რაც ნიშნავს, რომ ჯგუფის სხვადასხვა არეში შესაძლებელია სხვადასხვა კოორდინატების შემოღება. თუ ჯგუფის t^1, t^2, \dots, t^n პარამეტრებს შორის არ არსებობს ფუნქციონალური კავშირები, მაშინ ასეთ პარამეტრებს **არსებით პარამეტრებს** უწოდებენ. ამბობენ რომ ჯგუფს აქვს n -ის ტოლი **განზომილება**, თუ მისი პარამეტრიზაცია შეიძლება n არსებითი პარამეტრით. ერთეულოვან ელემენტს, ჩვეულებრივ, ნულოვან პარამეტრებს მიაწერენ.

მოვიყვანოთ ჯგუფის პარამეტრიზაციის მაგალითები.

1. განვიხილოთ გარდაქმნა

$$x' = a x + b \tag{11.1}$$

აქ a და b პარამეტრები უწყვეტად იცვლებიან $-\infty$ -დან $+\infty$ -მდე. გარდაქმნა ადგენს ჯგუფს. მართლაც, ორი მიმდევრობითი გარდაქმნა

$$x'' = a_2 x' + b_2 = a_2(a_1 x + b_1) + b_2 = a_1 a_2 x + (a_2 b_1 + b_2)$$

ზუსტად (11.1) ტიპის გარდაქმნაა და ამით სრულდება ჯგუფის $G1$ აქსიომა. ასოციაციურობის შემოწმებაც გვაძლევს, რომ გარდაქმნების მიმდევრობა პასუხზე არ მოქმედებს. მართლაც:

$$x''' = a_3 x'' + b_3 = a_3(a_2 x' + b_2) + b_3 = a_3 a_2 a_1 x + (a_3 a_2 b_1 + a_3 b_2 + b_3)$$

ახლა, თუ ჯერ მეორე გარდაქმნას ჩავატარებთ და შემდეგ პირველს, მივიღებთ:

$$x''' = a_3 x'' + b_3 = a_3(a_1 x' + b_1) + b_3 = a_3 a_1 a_2 x + (a_3 a_1 b_2 + a_3 b_1 + b_3)$$

რაც აბსოლუტურად იგივე გარდაქმნაა, მართალია, განსხვავებული პარამეტრებით. ამგვარად, ასოციატივობაც დაცულია.

ერთეულოვანი ელემენტის პარამეტრები ასეთია: $a=1$, $b=0$, ხოლო შებრუნებული ელემენტი მიიღება თუ ჩავსვამთ ასეთ პარამეტრებს: $1/a$, $-b/a$. მართლაც,

$$x'' = a x' + b = a (1/a x - b/a) + b = x$$

რაც იგივე გარდაქმნას იძლევა.

ამგვარად, (11.1) გარდაქმნისათვის ჯგუფის ყველა აქსიომა სრულდება და ეს გარდაქმნა მართლაც ადგენს ჯგუფს. a და b პარამეტრები ერთმანეთზე არ არიან დამოკიდებული, ამიტომ ჯგუფი ორპარამეტრიანი ყოფილა.

2. განვიხილოთ სამგანზომილებიანი ბრუნვების ჯგუფი SO_3 . იგი მოქმედებს ევკლიდის სამგანზომილებიან სივრცეში, რომლის ვექტორები სვეტ-მატრიცებს წაამოადგენს:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

სადაც x^1 , x^2 და x^3 \mathbf{x} ვექტორის კოორდინატებია. ბრუნვის ჯგუფის ელემენტის მოქმედებით ამ ვექტორზე ახალი \mathbf{x}' ვექტორი მიიღება:

$$\mathbf{x}' = R \mathbf{x} \quad (11.3)$$

ეს ვექტორი მიიღება \mathbf{x} ვექტორის მობრუნებით სივრცეში. რადგანაც ბრუნვა არ ცვლის ვექტორის სიგრძეს (ნორმას), ამიტომ R ისეთი გარდაქმნაა, რომელიც ინახავს კვადრატულ ფორმას, ანუ

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \quad (11.4)$$

ვიცით, რომ ვექტორზე ოპერატორის მოქმედება მის კოორდინატებზე შესაბამისი მატრიცის მოქმედების ექვივალენტურია, ე.ი.,

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^1_1 & g^1_2 & g^1_3 \\ g^2_1 & g^2_2 & g^2_3 \\ g^3_1 & g^3_2 & g^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

ანუ

$$x'^i = g^i_k x^k, \quad i=1, 2, 3 \quad (11.5')$$

ამ ტოლობით განსაზღვრული x^i -ის ჩასმა (11.4) ფორმულაში მოგვცემს ასეთ ექვს პირობას:

$$\sum_{j=1}^3 (g^k_j)^2 = 1, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\sum_{j=1}^3 g^1_j g^2_j = \sum_{j=1}^3 g^1_j g^3_j = \sum_{j=1}^3 g^2_j g^3_j = 0 \quad (11.6)$$

ეს პირობები ედება (11.5) გამოსახულებაში შემავალ g მატრიცის 9 ელემენტს. ამგვარად, მატრიცის 9 ელემენტიდან მხოლოდ სამია წრფივად დამოუკიდებელი, ყველა სხვა პარამეტრი კი ამ სამი პარამეტრით შეგვიძლია გამოვსახოთ. ამიტომ ბრუნვის SO_3 ჯგუფი სამგანზომილებიანი ვექტორების სივრცეში სამპარამეტრიანი ყოფილა.

ახლა შევამოწმოთ, როგორ სრულდება აქსიომები g მატრიცით წარმოდგენილი ბრუნვის ჯგუფისათვის. ორი 3×3 რიგის მატრიცის ნამრავლი ისევე ასეთივე მატრიცაა, ამიტომ ნამრავლი სავსებით განსაზღვრულია. ასოციატივობა ცხადია მატრიცების გამრავლების წესიდან. ერთეულოვანი ელემენტი ერთეულოვანი მატრიცის ტოლია:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

რაც შეეხება შებრუნებულ ელემენტს მის როლს ასრულებს g მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

დავალბა 11.1: გამოარკვეთ, რამდენ პარამეტრიანია ქვემოთ ჩამოთვლილი ჯგუფები, რომლებიც მოქმედებენ n -განზომილებიან L_n წრფივ ვექტორულ სივრცეში:

1. წრფივ გარდაქმნათა GL_n ჯგუფი;
2. უნიმოდულარულ წრფივ გარდაქმნათა SL_n ჯგუფი. ეს ისეთი გარდაქმნების ჯგუფია, რომლის მატრიცების დეტერმინანტი ერთი ტოლია.
3. უნიტარული გარდაქმნების ჯგუფი U_n . ამ გარდაქმნების ჯგუფს უნიტარული მატრიცები შეესაბამება: $U^\dagger U = 1$.

4. უნიტარული უნიმოდულარული გარდაქმნების ჯგუფი SU_n . ესეც უნიტარული გარდაქმნების ჯგუფია ერთი დამატებითი პირობით, რომ მატრიცების დეტერმინანტი ერთის ტოლია.
5. ორთოგონალური გარდაქმნების ჯგუფი O_n . გარდაქმნები L_n სივრცეში ინახავენ კვადრატულ ფორმას $x'^2 = x^2$.

გავნიხილოთ პარამეტრული G ჯგუფის ორი ელემენტი $g_1(t^1, t^2, \dots, t^n)$ და $g_2(t'^1, t'^2, \dots, t'^n)$. მათი ნამრავლის პარამეტრები აღვნიშნოთ ასე: $t''^1, t''^2, \dots, t''^n$. ეს პარამეტრები წარმოადგენენ g_1 და g_2 ელემენტების პარამეტრების ფუნქციებს:

$$t''^i = f^i(t^1, t^2, \dots, t^n, t'^1, t'^2, \dots, t'^n). \quad (11.8)$$

ტოპოლოგიური G ჯგუფისათვის $F\{f^i\}$ ფუნქციების სიმრავლე უწყვეტია. იგივე ითქმის შებრუნებული ელემენტის პარამეტრების გამომსახველ ფუნქციაზე.

G პარამეტრულ ჯგუფს ეწოდება **ლის ჯგუფი**, თუ მისი ელემენტების გამრავლების გამომსახველი F ფუნქციები და შებრუნებულ ელემენტზე გადასვლის ფუნქციები სამჯერ უწყვეტად წარმოებადნი არიან. შეიძლება ჩვენება, რომ სამჯერ უწყვეტად წარმოებადობა იგივეა, რაც ანალიზურობა. ჩვენ მიერ ყველა ზემოდასახელებული ჯგუფი ლის ჯგუფია.

კიდევ ერთ-ერთი საინტერესო თვისება, დამახასიათებელი უწყვეტი ჯგუფებისათვის, არის კომპაქტურობა. ლის ჯგუფს ეწოდება **კომპაქტური ჯგუფი**, თუ პარამეტრიზაციის დროს მასთან თანადობაში მოყვანილი ევკლიდის სივრცე კომპაქტურია, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას **ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი** ეწოდება.

ვაჩვენოთ მაგალითად, რომ ორთოგონალური გარდაქმნების O_n ჯგუფი კომპაქტურია. O_n ჯგუფი შეიცავს გარდაქმნებს, რომლებიც ინახავენ კვადრატულ ფორმას:

$$x^2 = \sum_{k=1}^n (x^k)^2$$

O_n ჯგუფის გარდაქმნის მატრიცები ასეთ პირობას აკმაყოფილებენ:

$$\tilde{g} g = e$$

ბოლო ტოლობა მატრიცული ელემენტებისათვის ასე გადაიწერება:

$$\sum_{k=1}^n g^i_k g^j_k = \delta^{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, \infty$$

ბოლო გამოსახულებაში გავუტოლოთ i და j ინდექსები ერთმანეთს და ავჯამოთ. მივიღებთ, რომ:

$$\sum_{i,k=1}^n (g^i_k)^2 = n$$

საიდანაც ჩანს, რომ O_n ჯგუფის პარამეტრების სივრცე შემოსაზღვრულია და, ამგვარად, კომპაქტურია, რაც O_n ჯგუფის კომპაქტურობასაც ამტკიცებს.

არსებობს პარამეტრების არსებითობის შემოწმების კრიტერიუმი. მოვიყვანოთ იგი. ვთქვათ, ლის ჯგუფის გარდაქმნას ასეთი პარამეტრული სახე აქვს:

$$x'^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n, a_1, a_2, \dots, a_r), \quad i = 1, \dots, \infty \quad (11.9)$$

რაც ვექტორული სახით გაცილებით მარტივად ჩაიწერება:

$$x' = f(x, a), \quad i = 1, \dots, \infty \quad (11.9')$$

ცხადია, რომ a ვექტორი არ არის x ვექტორების სივრცის ვექტორი. უბრალოდ, სიმოკლისათვის, r პარამეტრს ფორმალურად ვექტორის სახით ვწერთ. x' და f კი სვეტ-ვექტორებია.

ლის ჯგუფის განმარტების შესაბამისად f^i ფუნქციები a პარამეტრების ანალიზური ფუნქციებია. თუ ყველა პარამეტრი არსებითი არ არის, მაშინ $\{a_r\}$ სიმრავლის მახლობლობაში შეიძლება ისეთი პარამეტრების მოძებნა, რომლებიც იგივე გარდაქმნას იძლევიან. აღვნიშნოთ პარამეტრების ეს სიმრავლე $\{a_i + \varepsilon_i\}$ -ით. სადაც ε_i არის a_i პარამეტრებზე დამოკიდებული ნებისმიერი მცირე სიდიდეები. მაშინ, ზემონათქვამის თანახმად:

$$f^i(x, a) = f^i(x, a + \varepsilon), \quad (11.10)$$

x ვექტორის ყველა მნიშვნელობისათვის. (11.10) ტოლობის მარჯვენა მხარე გავშალოთ ε_i მცირე რიცხვების მწკრივად, რაც მოგვცემს:

$$0 = \sum_{k=1}^r \varepsilon_k(a) [\partial f^i(x, a) / \partial a_k] + \text{მაღალი რიგის წევრები}$$

მიღებული ტოლობა გავყოთ რომელიღაც ფიქსირებულ ε_i რიცხვზე და მივასწრაფოთ ε_k რიცხვები ნულისკენ. ბოლო ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველ წევრში ორი ერთნაირი რიგის წევრის შეფარდების ზღვარი რაღაც $\chi_k(a)$

ფუნქციას მოგვცემს, მაშინ როდესაც ყველა დანარჩენი წევრი ნულის ტოლი გახდება. ამიტომ ბოლო ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\sum_{k=1}^r \chi_k(\mathbf{a}) \chi_k(\mathbf{a}) [\partial f^i(\mathbf{x}, \mathbf{a}) / \partial a_k] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.11)$$

ყველა \mathbf{x} ვექტორისა და \mathbf{a} პარამეტრისათვის. a_1, a_2, \dots, a_r პარამეტრები არსებითია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არ შეიძლება ისეთი r დამოუკიდებელი $\chi_k(\mathbf{a})$ ფუნქციის პოვნა, რომელიც (11.11) ტოლობას დააკმაყოფილებს ყველა i ინდექსის, \mathbf{x} ვექტორისა და \mathbf{a} პარამეტრისათვის.

არსებითი პარამეტრების პოვნის მაგალითის სახით განვიხილოთ ე.წ. პროექტიული გარდაქმნების ჯგუფი. მისი გარდაქმნა ასე ჩაიწერება:

$$x' = (a_1 x + a_2) / (a_3 x + a_4) \quad (11.12)$$

შეიძლება ჩვენება, რომ ამ ჯგუფის \mathbf{a} და \mathbf{b} პარამეტრიანი ორი ელემენტის ნამრავლის \mathbf{c} პარამეტრები ასეთი ტოლობებით გამოისახება:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1 + a_2 b_3 & c_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ c_3 &= a_3 b_1 + a_4 b_3 & c_4 &= a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{aligned}$$

დავალება 11.2: ა) აჩვენეთ ეს;

ბ) იპოვეთ პროექტიული ჯგუფის ერთეულოვანი და შებრუნებული ელემენტების პარამეტრები.

(11.11) კრიტერიუმები პროექტიული ჯგუფისთვის გვაძლევს ასეთ განტოლებას:

$$\begin{aligned} &\chi_1 [x / (a_3 x + a_4)] + \chi_2 [1 / (a_3 x + a_4)] - \\ &- \chi_3 [(a_1 (x)^2 + a_3 x) / (a_3 x + a_4)^2] - \chi_4 [(a_1 x + a_2) / (a_3 x + a_4)^2] = 0 \end{aligned}$$

ანუ

$$[\chi_1 a_3 - \chi_3 a_1] (x)^2 + [\chi_1 a_4 + \chi_2 a_3 - \chi_3 a_2 - \chi_4 a_1] x + [\chi_2 a_4 - \chi_4 a_2] = 0$$

რადგან, კრიტერიუმის თანახმად, ეს პირობა ნებისმიერი x -სთვის უნდა შესრულდეს, ამიტომ χ_i ფუნქციებისთვის გვაქვს განტოლებათა ასეთი სისტემა:

$$a_3 \chi_1 - a_1 \chi_3 = 0; \quad a_4 \chi_1 + a_3 \chi_2 - a_2 \chi_3 - a_1 \chi_4 = 0; \quad a_4 \chi_2 - a_2 \chi_4 = 0$$

სამი განტოლების ამოსახსნელად ოთხი უცნობისთვის ერთ-ერთი χ_i უცნობი შეგვიძლია ნებისმიერად ავირჩიოთ. დავუშვათ, რომ $\chi_4 = a_4/a_4 = 1$. მაშინ განტოლებათა სისტემა დანარჩენი უცნობი ფუნქციებისთვის მოგვცემს:

$$\chi_1 = a_1/a_4; \quad \chi_2 = a_2/a_4; \quad \chi_3 = a_3/a_4;$$

მოყვანილ მაგალითში ჩვენ ვიპოვეთ χ_i უცნობი ფუნქციები, რაც ნიშნავს, რომ პროექტიული ჯგუფის ყველა ოთხი პარამეტრი – a_1, a_2, a_3 და a_4 – არსებითი არ არის, რადგან დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

ნული არ არის, ამიტომ ყველა a_i პარამეტრი შეგვიძლია მასზე გავყოთ, რაც ახალ პარამეტრებს მოგვცემს:

$$a'_i = a_i / \Delta$$

ამ პარამეტრებისთვის პროექტიული გარდაქმნა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x' = (a'_1 x + a'_2) / (a'_3 x + a'_4)$$

თვით პარამეტრებს კი ასეთი პირობა დაედებათ:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ a'_3 & a'_4 \end{vmatrix} = 1$$

ეს ტოლობა ერთ დამატებით პირობას ადებს პროექტიული ჯგუფის პარამეტრებს. ამიტომ დამოუკიდებელი პარამეტრი სამი ყოფილა და შესაბამისად, პროექტიული ჯგუფი სამპარამეტრიანი ჯგუფია.

12. ინვარიანტული ინტეგრება. ინფინიტეზიმალური

გარდაქმნები. გენერატორები.

ჯგუფების სხვა თვისებებიდან მეტად მნიშვნელოვანია ჯგუფზე ფუნქციის განსაზღვრის შესაძლებლობა. განვიხილოთ სასრული ჯგუფი G და მასზე განსაზღვრული ფუნქცია $f(g)$. ჯგუფზე ფუნქციის განსაზღვრა სხვადასხვა გზით შეიძლება. ზოგიერთს ამ შესაძლებლობებიდან ქვევით განვიხილავთ. ახლა კი ჩავთვალოთ, რომ ჯგუფის g ელემენტი ნაბისმიერი წესით არის დაკავშირებული რაღაც $f(g)$ ფუნქციასთან. განვიხილოთ ჯამი:

$$\sum_{g \in G} f(g) = \sum_G f(g_0 g) \quad (12.1)$$

სადაც g_0 ფიქსირებული ელემენტია ჯგუფიდან. როდესაც ელემენტს ვიღებთ სასრული ჯგუფიდან, ბუნებრივად იგულისხმება, რომ თითოეულ ელემენტს ერთნაირი წონა აქვს. ეს ნიშნავს, რომ მასზე გასაზღვრული ფუნქციის არსი არ იცვლება ერთი ელემენტიდან მეორეზე გადასვლით. თუ გვინდა (12.1) ფორმულის განზოგადოება ლის ჯგუფისათვის, უნდა შემოვიღოთ ისეთი მოთხოვნა, რომელიც სასრული ჯგუფისთვის g და $g_0 g$ ელემენტების წონათა ტოლობის ანალოგიური იქნება. ამ მიზნით ლის ჯგუფის სიმრავლეში გამოვყოთ g ელემენტის მახლობლობა და ამ მახლობლობაში განვსაზღვროთ მოცულობა $d\tau_g$ ისეთნაირად, რომ $g' = g_0^{-1}g$ ელემენტის მახლობლობაში განსაზღვრული მოცულობაც $d\tau_{g'}$ მოცულობის ტოლი იყოს:

$$d\tau_g = d\tau_{g'} \quad (12.2)$$

როგორც ვხედავთ, მოცულობის შემოტანა სრულებით ნებისმიერია, ერთადერთი მოთხოვნა ის არის, რომ მოცულობა უნდა აკმაყოფილებდეს (12.2) პირობას. ასეთნაირად შემოყვანილ მოცულობას მარცხენა ინვარიანტულ ზომას უწოდებენ. შეიძლება მარჯვენა ინვარიანტული ზომის შემოღებაც. ამ შემთხვევაში ტოლი უნდა იყოს მოცულობები:

$$d \tau_g = d \tau_{g^{-1}} \quad (12.3)$$

სადაც $g^{-1} = g g_0^{-1}$.

ახლა უკვე შესაძლებელია (12.1) ფორმულის განზოგადოება ლის ჯგუფებისთვის. ამ მიზნით ჯამი ინტეგრალით უნდა შევცვალოთ:

$$\int_{g \in G} d \tau_g f(g) = \int_G d \tau_g f(g_0 g) \quad (12.3)$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ჯგუფზე განსაზღვრული ინვარიანტული ინტეგრება.

მოვიყვანოთ ინვარიანტული ინტეგრების მაგალითები. განვიხილოთ ბრუნვები φ კუთხეზე ფიქსირებული ღერძის გარშემო. რადგან $\varphi + 2\pi$ კუთხეზე φ კუთხეზე მობრუნების იგივეურია, ამიტომ ამ ჯგუფზე განსაზღვრული ფუნქციები პერიოდული იქნება 2π პერიოდით. რადგან ამ შემთხვევაში $g g_0$ ელემენტი $\varphi + \varphi_0$ კუთხეზე შემობრუნებას ნიშნავს, ამიტომ (12.3) ტოლობიდან გვექნება:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d \varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi + \varphi_0) d \varphi$$

რადგან $f(\varphi)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული პერიოდული ფუნქციაა, ეს ტოლობა ავტომატურად სრულდება და მოყვანილ მაგალითში ინვარიანტული ინტეგრება ნულიდან 2π -მდე φ კუთხით ჩვეულებრივი ინტეგრება ყოფილა.

შეიძლება ჩვენება, რომ სამგაზომილებიანი ბრუნვების SO_3 ჯგუფისათვის ინვარიანტული ინტეგრება ასეთი ფორმულით გამოისახება:

$$\int f(\varphi) d \tau_g = \int_0^{2\pi} d \varphi_1 \int_0^{2\pi} d \varphi_2 \int_0^\pi f(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \sin \theta d \theta$$

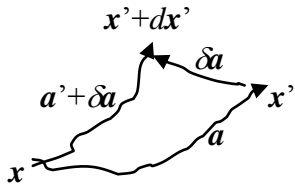
სადაც $\varphi_1, \theta, \varphi_2$ ეილერის კუთხეებია.

უწყვეტი ჯგუფების შემთხვევაში შესაძლებელია მათ გარდაქმნებს შევუსაბამოთ გარკვეული ოპერატორები. ამ ოპერატორებს საზღვრავენ ერთიანის მახლობლობაში, რადგან ჯგუფის ერთგვაროვნების თვისების გამო შემდგომში ამ კონსტრუქციების გავრცელება მთელი ჯგუფის მრავალსახეობაზეა შესაძლებელია. ერთიანის მახლობლობაში განსაზღვრულ გარდაქმნებს ინფინიტეზიმალური გარდაქმნები ეწოდება. შემოვიყვანოთ ინფინიტეზიმალური გარდაქმნები.

ვიცით, რომ ლის ჯგუფი პარამეტრულია და ამიტომ მისი გარდაქმნა $\{x\}$ ვექტორულ სივრცეში ასე ჩაიწერება:

$$\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \quad (12.4)$$

ამ ფორმულაში იგივე აღნიშვნებია გამოყენებული, როგორც (11.9) ფორმულაში. (12.4) ფორმულას \mathbf{x} ვექტორი უწყვეტად გადაყავს \mathbf{x}' -ში a_k პარამეტრების $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0)$ საწყისი მნიშვნელობიდან ნებისმიერ მნიშვნელობამდე უწყვეტ ცვლილებასთან ერთად.



ნახ. 12.1

თუ \mathbf{a} პარამეტრების ცვლილებას \mathbf{x} ვექტორი უწყვეტად გადაყავს \mathbf{x}' -ში, მაშინ პარამეტრების მეზობელ მნიშვნელობას \mathbf{x} ვექტორი $\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'$ წერტილში გადაყავს. მეორე მხრივ, შეგვიძლია ვიპოვოთ პარამეტრების ისეთი ცვლილება $\delta \mathbf{a}$, რომელსაც \mathbf{x}' ვექტორი იგივე $\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'$ წერტილში გადაყავს. გრაფიკულად ზემონათქვამი გამოსახულია ნახ. 12.1-ზე

ნახაზიდან ჩანს, რომ ადგილი აქვს ასეთ ტოლობებს:

$$\mathbf{x}' + d\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{a} + \delta \mathbf{a}) \quad (12.5)$$

$$\mathbf{x}' + d\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x}', \delta \mathbf{a}) \quad (12.6)$$

ბოლო ტოლობა გავშალოთ მწკრივად $\delta \mathbf{a}$ პარამეტრის ხარისხებად და პარამეტრის სიმცირის გამო შემოვისაზღვროთ პარამეტრის წრფივი წევრით. მაშინ $d\mathbf{x}'$ ვექტორის მდგენელისთვის მივიღებთ:

$$d x'^i = [\partial \varphi^i(\mathbf{x}', \mathbf{a}) / \partial a_\alpha]_{a=0} \delta a_\alpha \quad (12.7)$$

შევთანხმდეთ, რომ მნიშვნელში მოთავსებული სიდიდის ქვედა ინდექსი მრიცხველში ზედა ინდექსად გადადის და (12.7) ტოლობის მარჯვენა მხარის კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება

$$U^{i\alpha}(\mathbf{x}') \equiv [\partial \varphi^i(\mathbf{x}', \mathbf{a}) / \partial a_\alpha]_{a=0} \quad (12.7')$$

მაშინ (12.7) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$d x'^i = U^{i\alpha}(\mathbf{x}') \delta a_\alpha$$

ამ გამოსახულებაში α ინდექსით იგულისხმება აჯამვა. დავუშვათ, რომ $\{\mathbf{x}\}$ სივრცეზე გასაზღვრულია $F(\mathbf{x})$ ფუნქცია. ამ ფუნქციის უსასრულოდ მცირე

ცვლილება შეგვიძლია დავაკავშიროთ ჯგუფის გარდაქმნასთან. მართლაც, (12.7) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial F}{\partial x^i} U^{i\alpha}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{a}_\alpha \quad (12.8)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$X^\alpha = U^{i\alpha}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (12.9)$$

მაშინ (12.8) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$dF = \delta \mathbf{a}_\alpha X^\alpha F$$

ამგვარად, F ფუნქციის უსასრულოდ მცირე გარდაქმნას X^α ოპერატორები ახორციელებენ. ამ ოპერატორებს ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორები ანუ გენერატორები ეწოდება. ჯგუფის გენერატორები გვიჩვენებენ როგორ იცვლებიან წრფივ ვექტორულ სივრცეში განსაზღვრული ფუნქციები, როდესაც ამ სივრცის ვექტორები ჯგუფურ გარდაქმნებს განიცდიან.

მოვიყვანოთ მაგალითები გენერატორების აგებაზე.

1. განვიხილოთ ჯგუფი, რომლის გარდაქმნები ასეთი სახისაა:

$$x' = ax + b$$

როგორც მე-11 პარაგრაფში ვნახეთ, ამ ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტის პარამეტრებია $(1, 0)$. ინფინიტეზიმალური გარდაქმნები, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტის მახლობლობაში განისაზღვრება. ამიტომ ამ გარდაქმნებს ასეთი სახე ექნება:

$$x' = (1 + \delta a)x + \delta b = x + x \delta a + \delta b$$

ვიპოვოთ $U^{i\alpha}(\mathbf{x})$ ფუნქციები. x ვექტორი ამ მაგალითში ერთგანზომილებიანია. ამიტომ i ინდექსი ერთ მნიშვნელობას იღებს: $i = 1$. სამაგიეროდ, პარამეტრი ორი გვაქვს და α ინდექსი ორ მნიშვნელობას იღებს: $\alpha = 1$ და 2 . ამიტომ (12.7) ფორმულის ძალით გვექნება ორი ფუნქცია:

$$U^{11}(x) = x \text{ და } U^{12}(x) = 1$$

რისი ჩასმა (12.9) გენერატორებისთვის ასეთ გამოსახულებებს მოგვცემს:

$$X^1 = x \frac{\partial}{\partial x} \text{ და } X^2 = \frac{\partial}{\partial x}$$

ცხადია, რომ $\{X^1, X^2\}$ სიმრავლე ჩაკეტილია კომუტატორის ოპერაციის მიმართ. მართლაც,

$$[X^1, X^2] = X^1 X^2 - X^2 X^1 = -\partial / \partial x = -X^2$$

ეს ნიშნავს რომ $\{X^1, X^2\}$ სიმრავლე ლის ალგებრას ადგენს.

2. განვიხილოთ ბრუნვა z ღერძის გარშემო. სიბრტყეზე ბრუნვა ერთპარამეტრიანი ჯგუფია. აღვნიშნოთ ეს პარამეტრი φ კუთხით

დავალება 12.1: აჩვენეთ ეს.

სიბრტყის ვექტორის ორი კოორდინატი x^1 და x^2 ბრუნვისას ასე გარდაიქმნება:

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 \cos \varphi + x^2 \sin \varphi \\ x'^2 &= -x^1 \sin \varphi + x^2 \cos \varphi \end{aligned}$$

დავალება 12.2: როგორ გამოისახება ბრუნვა z ღერძის გარშემო სამგანზომილებიან შემთხვევაში?

ამ შემთხვევაში $U^{i\alpha}(x)$ ფუნქციები ტოლი იქნება:

$$\begin{aligned} U^{11} &= [-x^1 \sin \varphi + x^2 \cos \varphi]_{\varphi=0} = x^2 \\ U^{21} &= [-x^1 \cos \varphi + x^2 \sin \varphi]_{\varphi=0} = -x^1 \end{aligned}$$

ამიტომ ორგანზომილებიანი ბრუნვების ჯგუფის ერთადერთი გენერატორი იქნება:

$$X^1 = -x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}$$

ეს ოპერატორი კვანტურ მექანიკაში მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ოპერატორს წარმოადგენს.

ვიცით, რომ ვექტორულ სივრცეში არჩეული ბაზისის მიმართ ოპერატორები მატრიცებს წარმოადგენენ. იგივე ითქმის გენერატორებზე, რომლებიც წრფივ ვექტორულ სივრცეში ოპერატორებს წარმოადგენენ. ვაჩვენოთ, რომ, თუ გარკვეულ ბაზისში ჯგუფის გარდაქმნას $T(a_1, a_2, \dots, a_r)$ ოპერატორი ახორციელებს, მაშინ გენერატორებს ასეთი სახე ექნება:

$$X^i = \left[\frac{\partial T(a_1, a_2, \dots, a_r)}{\partial a_i} \right]_{a=0} \quad (12.10)$$

მართლაც, გავიხსენოთ, რომ ერთეულოვან e ელემენტს ნულოვანი პარამეტრები შეესაბამება. მაშინ ნულის მახლობლობაში ნებისმიერი $T(a_1, a_2, \dots, a_r)$ მატრიცა მცირე δa_i პარამეტრების მიხედვით მწკრივად შეგვიძლია გავშალოთ:

$$T(\delta a_i) = I + \delta a_i X^i + O(\delta a_i) \quad (12.11)$$

აქ I ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო $O(\delta a_i)$ შესაკრები δa_i მცირე სიდიდეების მიხედვით მაღალი რიგის შემცველი წევრია. ცხადია, რომ δa_i მცირე სიდიდის პირველ ხარისხთან მდგომი X^i გამოსახულება მოიცემა (12.10) ფორმულით, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

მაგალითისთვის განვიხილოთ ბრუნვის SO_3 ჯგუფი. როგორც ვიცით ეს ჯგუფი სამპარამეტრიანია. ყოველ ბრუნვას შევუსაბამოთ ბრუნვის ღერძის მიმართულების ვექტორი სიდიდით ამ ღერძის გარშემო შემობრუნების კუთხის ტოლი. ვექტორის ξ^1 , ξ^2 და ξ^3 მდგენელები კოორდინატა ღერძებზე ჩავთვალოთ ჯგუფის პარამეტრებად. მაშინ x ღერძის გარშემო ξ^1 კუთხეზე შემობრუნება ასეთი მატრიცით აღიწერება:

$$T(\xi^1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi^1 & \sin \xi^1 \\ 0 & -\sin \xi^1 & \cos \xi^1 \end{pmatrix} \quad (12.12)$$

(12.10) ფორმულის გამოყენება X^1 გენერატორისთვის ასეთ გამოსახულებას მოგვცემს:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.13)$$

ანალოგიურად,

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.14)$$

და

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.15)$$

ადვილია იმის ჩვენება, რომ

$$[X^i, X^j] = \varepsilon^{ij}_k X^k \quad (12.16)$$

სადაც ε^{ij}_k სრულიად ანტისიმეტრიული მესამე რანგის ტენზორია. ბოლო ტოლობა გვიჩვენებს, რომ SO_3 ჯგუფის გენერატორებიც ლის ალგებრას ადგენენ.

ზემოთ ჯგუფის რიგი განვსაზღვრეთ როგორც არსებითი პარამეტრების რიცხვი. გენერატორების შემოყვანისას ვნახეთ, რომ მათი რიცხვიც არსებითი პარამეტრების რიცხვს ემთხვევა, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ჯგუფის რიგი გენერატორების რაოდენობას გვაძლევს.

- დავალება 12.3:**
- ა) შეამოწმეთ (12.16) ტოლობა.
 - ბ) გამოიყვანეთ (12.14) და (12.15) ფორმულები.
 - გ) აჩვენეთ, რომ უნიტარული ჯგუფის შესაბამისი გენერატორები ერმიტულია, ხოლო უნიმოდულარული გენერატორების კვალი ნულის ტოლია.

3. გადანაცვლებათა ჯგუფი

სიმრავლის თავის თავში ცალსახა გადასახვას **გადანაცვლება** ეწოდება. გადანაცვლება აღინიშნება მრგვალი ფრჩხილების სახით, რომელშიც ორ რიგად მთელი რიცხვები წერია. რიცხვთა ზედა სტრიქონი სიმრავლის ელემენტთა მიმდევრობითი ადგილების ნომრებს აღნიშნავს, ხოლო ქვედა სტრიქონის რიცხვები – იმ ადგილების ნომრებს, რომელზედაც მოხვდნენ ეს ელემენტები გადანაცვლების შემდეგ. მაგალითად, გადანაცვლება

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

გვიჩვენებს, რომ ის ელემენტი, რომელსაც თავიდან პირველი ნომერი მივანიჭეთ, გადაჯდა მესამე ადგილზე, თავიდან მესამე ნომრად მყოფი ელემენტი, ახლა პირველ ადგილზეა, ხოლო მეორე ელემენტი თავის ადგილზე დარჩა.

გადასასმელ ელემენტთა რაოდენობას **გადანაცვლების რიგი** ეწოდება.

ერთეულოვანი ელემენტი e , ანუ **იგივური გადანაცვლება**, ყველა ელემენტს თავის ადგილზე ტოვებს და ამიტომ მას ასეთი სახე ექნება:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

შემოყავთ **გადანაცვლებათა ნამრავლის** ცნება. ეს ისეთი გადანაცვლებაა, როდესაც თანმიმდევრობით ხორციელდება ჯერ მარჯვენა, ხოლო შემდეგ – მარცხენა გადანაცვლება. მაგალითად, გადავამრავლოთ გადანაცვლებები

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

დავიწყით პირველი ელემენტით. მარჯვენა გადანაცვლებას პირველი ელემენტი გადაყავს მესამე ადგილზე, მარცხენა კი მესამე ადგილზე მყოფ ელემენტს პირველ ადგილზე სვამს. ამიტომ ამ ორი გადანაცვლების შედეგად პირველი ელემენტი ადგილზე რჩება. ახლა მეორე ელემენტის გადანაცვლებები ვნახოთ. მარჯვენა გადანაცვლებაში იგი ადგილზე რჩება, ხოლო მარცხენა მას მესამე ადგილზე სვამს. საბოლოოდ, მეორე ელემენტი აღმოჩნდება მესამე ადგილზე.

ბოლოს, მესამე ელემენტი ჯერ პირველ ადგილზე გადავა, ხოლო მარჯვენა გადანაცვლების გამო საბოლოოდ მეორე ადგილზე დარჩება. ამგვარად:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ცხადია, რომ გადანაცვლებათა ნამრავლი კომუტატური არ არის.

დავალება 13.1: შეამოწმეთ ეს მტკიცებულება რამდენიმე მაგალითზე.

გადანაცვლებების ჩაწერა მნიშვნელოვნად მარტივდება, თუ მათ ჩავწერთ, ე.წ., ციკლების საშუალებით. ციკლი მრგვალ ფრჩხილებში ერთსტრიქონიანი რიცხვების ერთობლიობას წარმოადგენს. გადანაცვლების ციკლების საშუალებით გადასაწერად პირველი ფრჩხილი უნდა დავიწყოთ ერთიანით. შემდეგ დავწეროთ ის ციფრი, რომელიც გადანაცვლებაში ზის ერთიანის ქვევით, ანუ ის ადგილი, სადაც გადავიდა სიმრავლის პირველი ელემენტი. შემდეგ ვნახოთ გადანაცვლებაში, რა ზის ამ მეორე რიცხვის ქვემოთ და ა.შ. მანამ, სანამ არ აღმოჩნდება, რომ ჩაწერილი რიცხვი გავიდა პირველ ადგილზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოცემული ციკლი დაიხურა და იწყება მეორე ციკლის შევსება. მეორე ციკლი უნდა დაიწყოს იმ რიცხვით, რომელიც არ შედის პირველ ციკლში, წინააღმდეგ შემთხვევაში ისევ პირველ ციკლს მივიღებთ, რომელშიც რიცხვების მიმდევრობაა შეცვლილი, მაგრამ ამით არაფერი იცვლება. მეორე ციკლის შევსების შემდეგ, ივსება მესამე ციკლი და ა.შ. ციკლების შედგენა გაცილებით უფრო ადვილია გასაგებად მაგალითის შემთხვევაში. მაგალითად, განვიხილოთ მერვე რიგის ასეთი გადანაცვლება:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad (13.1)$$

როგორც ვთქვით, დავიწყოთ ერთიანით, თუმცა ხაზგასასმელია, რომ არა აქვს მნიშვნელობა რომელი ციფრით დავიწყებთ, პასუხი იგივე იქნება. მოყვანილ მაგალითში 1 გადადის 2-ში, 2 გადადის 4-ში, ხოლო 4 – 1-ში, რითაც პირველი ციკლი იხურება და იგი ასეთი სახისაა: (124). მეორე ციკლი დავიწყობთ 3-ით. 3-ის შემდეგ 5-ია და 5-ის შემდეგ 3. ამიტომ ვიღებთ ორის სიგრძის ციკლს (35). მოყვანილ გადანაცვლებაში 6 გადადის 6-ში, ამიტომ 6 წარმოქმნის ერთის

სიგრძის ციკლს (6), ხოლო ბოლო ორი რიცხვი ერთიანდება ორის სიგრძის ციკლში (78). საბოლოოდ, შეგვიძლია დავასკვნათ რომ (13.1) გადანაცვლება ციკლების სახით ასე ჩაიწერება:

$$(124)(35)(6)(78) \quad (13.1')$$

ციკლის რიგი ეწოდება ხარისხს, რომელშიც აყვანილი ციკლი ერთიანს იძლევა.

ციკლებს ასეთი თვისებები გააჩნია:

1. ერთი გადანაცვლების შესაბამისი ციკლები არ შეიცავენ ერთნაირ რიცხვებს, ამიტომ მათი გადასმა შესაძლებელია;
2. თუ ცნობილია გადანაცვლების რიგი, მაშინ ერთის სიგრძის ციკლების მოყვანას აზრი ეკარგება და მათ არ წერენ;
3. ციკლის შიგნით რიცხვების ციკლური გადანაცვლება არ ცვლის ციკლს, მაგალითად, $(124)=(241)=(412)$;
4. ციკლის სიგრე ციკლის რიგის ტოლია.
5. ორის სიგრძის ციკლს **ტრანსპოზიციას** უწოდებენ.

ამ თვისებების გათვალისწინებით (13.1') გადანაცვლება ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$(124)(35)(78) = (412)(78)(35) = (53)(78) (241) \text{ და ა.შ.}$$

ციკლების საშუალებით ჩაწერილი გადანაცვლებების გადამრავლება გადანაცვლებათა გადამრავლების წესის მიხედვით ხდება. მაგალითად:

$$(124) \cdot (12)(34) = (143)$$

ნებისმიერი ციკლი შეიძლება ჩაიწეროს ტრანსპოზიციების ნამრავლის სახით. მაგალითად,

$$(123\dots n) = (1n)(1(n-1))\dots(13)(12) \quad (13.2)$$

$$\text{ან} \quad (123\dots n) = (12)(23)(34)\dots((n-1)n) \quad (13.3)$$

დავალეზა 13.2: შეამოწმეთ ამ ტოლობების სისწორე.

გადასასმელი სიმბოლოთა რიცხვისა და დამოუკიდებელი ციკლების რაოდენობის სხვაობას **გადანაცვლების დეკრემენტი** ეწოდება. გადანაცვლებებს ლუწი (კენტი) დეკრემენტით **ლუწი (კენტი) გადანაცვლებები** ეწოდება.

ახლა დავამტკიცოთ ერთი მარტივი თეორემა.

თეორემა 13.1: მოცემული გადანაცვლების ტრანსპოზიციაზე გამრავლების შედეგად გადანაცვლების დეკრემენტი ერთით იცვლება.

დამტკიცება: მოცემული გადანაცვლება (ab) ტრანსპოზიციაზე გავამრავლოთ. ცხადია, რიცხვების სიმბოლოებით შეცვლა არ ცვლის გამრავლების წესს და ციკლების თვისებებს. ჯერ დავუშვათ, რომ მოცემულ გადანაცვლებაში a და b სიმბოლოები ერთ ციკლში იმყოფებიან და მას ასეთი სახე აქვს:

$$(ak...xbl...y)$$

ეს ციკლი (ab) -ზე მარცხნიდან გავამრავლოთ. მივიღებთ:

$$(ab) \cdot (ak...xbl...y) = (ak...x)(bl...y)$$

ახლა მარჯვნიდან გავამრავლოთ:

$$(ak...xbl...y) \cdot (ab) = (al...y)(bk...x)$$

როგორც ვხედავთ, ორივე შემთხვევაში დამოუკიდებელი ციკლების რაოდენობა ერთით გაიზარდა, ამიტომ დეკრემენტი ერთით შემცირდა.

ახლა დავუშვათ, რომ a და b სიმბოლოები სხვადასხვა ციკლებში ისხდნენ. (ab) ტრანსპოზიციაზე გამრავლება გვამღევს:

$$(ab) \cdot (ak...x)(bl...y) = (ak...xbl...y)$$

და $(ab)(ak...x)(bl...y) \cdot (ab) = (al...ybk...x)$

ამჯერად დამოუკიდებელი ციკლების რაოდენობა ერთით შემცირდა და, შესაბამისად, დეკრემენტი ერთით გაიზარდა. ამით თეორემა **დამტკიცებულია**.

თეორემა 13.2: n სიმბოლოების გადანაცვლებები გადანაცვლებათა გამრავლების წესით ადგენენ ჯგუფს, რომელსაც **გადანაცვლებათა ან სიმეტრიული ჯგუფი** ეწოდება და ასე აღინიშნება S_n .

დავალება 13.3: დაამტკიცეთ ეს თეორემა.

S_n ჯგუფი $n!$ ელემენტს შეიცავს. მართლაც, n ობიექტი $n!$ გზით შეიძლება გადაისვას. თითოეული გადასმა კი წარმოადგენს გადანაცვლებათა ჯგუფის ელემენტს.

გადანაცვლებებისაგან კიდევ ერთი ჯგუფის შედგენა შეიძლება: n რიგის ლუწი გადანაცვლებები ადგენენ ე.წ. **ნიშანცვლად ჯგუფს**, რომელსაც A_n -ით აღნიშნავენ.

დავალება 13.4: ადგენენ თუ არა ჯგუფს კენტი გადანაცვლებები?

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი თეორემა.

თეორემა 13.3: გადანაცვლებების რიგი მისი ციკლების სიგრძეების უმცირესი საერთო ჯერადია

დავალება 13.4: დაამტკიცეთ ეს თეორემა.

14. ქვეჯგუფები. კელის თეორემა

თუ G ჯგუფის H სიმრავლე თვითონ წარმოადგენს ჯგუფს G ჯგუფზე განსაზღვრული გამრავლების ოპერაციის მიმართ, მაშინ H სიმრავლეს G ჯგუფის ქვეჯგუფი ეწოდება და ასე აღინიშნება: $H \subset G$. ყველა ჯგუფში არსებობს ორი ტრივიალური ქვეჯგუფი, ეს არის ერთეულოვანი ელემენტი და მთელი ჯგუფი. მათ არასაკუთრივ ქვეჯგუფებს უწოდებენ. ჯგუფთა თეორიის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს ჯგუფის არატრივიალური, ან, როგორც მათ ეძახიან, საკუთრივი ქვეჯგუფების პოვნა.

თეორემა 14.1: G ჯგუფისა და H ქვეჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტები ერთმანეთს ემთხვევიან.

დამტკიცება: გავიხსენოთ, რომ ალგებრის მოდულის მსგავსად ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი (ერთიანი) იდემპოტენტია, ანუ $e^2=e$. ამასთან ის ერთადერთი უნდა იყოს. მართლაც, თუ არსებობს კიდევ ერთი იდემპოტენტი x , მაშინ ტოლობათა ასეთ ჯაჭვს ექნება ადგილი:

$$x = (x^{-1} x) x = x^{-1} x^2 = x^{-1} x = e$$

ამგვარად, იდემპოტენტი x ემთხვევა e ერთეულოვან ელემენტს, რაც ამტკიცებს, რომ ჯგუფში ერთადერთი იდემპოტენტია e ერთეულოვანი ელემენტი. რადგან განსაზღვრებით ქვეჯგუფი თვითონ ადგენს ჯგუფს ჯგუფური გამრავლების მიმართ, ამიტომ ერთეულოვანი ელემენტი უნდა ემთხვეოდეს ჯგუფის ელემენტს, რითაც თეორემა დამტკიცებულია.

მოვძებნოთ მაგალითისათვის ქვეჯგუფები S_3 ჯგუფში. ამ ჯგუფს ექვსი დამოუკიდებელი ელემენტი გააჩნია:

$$e, (12), (13), (23), (123), (132) \tag{14.1}$$

ამ ელემენტებიდან ასეთი საკუთრივი ჯგუფების შედგენა შეიძლება:

$$\mathcal{A}_3: e, (123), (132)$$

$$\mathcal{H}_3: e, (12)$$

$$\mathcal{H}_3: e, (13)$$

$$\mathcal{H}_3: e, (23) \tag{14.2}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ რომ ბოლო სამი ქვეჯგუფი ერთმანეთისაგან არ განსხვავდება, რადგან ისინი მიიღებიან სიმბოლოების (რიცხვების) გადარქმევით. ამიტომ, ფაქტობრივად, გვაქვს მხოლოდ ორი საკუთრივი ქვეჯგუფი – სამელებმენტისა და ორელებმენტისა.

დავალება 14.1: დაამტკიცეთ, რომ ეს ქვეჯგუფები ადგენენ ჯგუფებს.

განვიხილოთ m ფურცლისაგან შედგენილი ლის ჯგუფი. ცხადია, რომ ყველა ფურცლიდან მხოლოდ ერთეულოვანი ელემენტის შემცველი ფურცელი შეიძლება შეიცავდეს ქვეჯგუფებს.

დავალება 14.2: რატომ არის ეს ასე?

სასრული ჯგუფებისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს კელის თეორემას. იგი ასე ყალიბდება:

თეორემა 14.2 (კელის თეორემა): n რიგის ნებისმიერი G ჯგუფი გადანაცვლებათა S_n ჯგუფის რაღაც ქვეჯგუფის იზომორფულია.

დამტკიცება: განვიხილოთ G ჯგუფის ნებისმიერი g ელემენტი. განვსაზღვროთ გარდასახვა $R(g): x \mapsto xg$ ნებისმიერი x -ისა და g -სთვის G ჯგუფიდან. ავტომორფიზმისა და გადანაცვლების განმარტებების თანახმად გასაგებია, რომ გარდასახვა წარმოადგენს გადანაცვლებას, თუ იგი ავტომორფიზმია.

ვაჩვენოთ, რომ $R(g)$ გარდასახვა ავტომორფიზმია. ჯერ ერთი, $R(g): G \Rightarrow G$, რადგან მას $xg^{-1} \in G$ ელემენტი გადაჰყავს x ელემენტში. მართლაც,

$$R(g): xg^{-1} \Rightarrow (xg^{-1})g = x \in G$$

გარდა ამისა, $R(g)$ ცალსახა გარდასახვაა. მართლაც, $x_1g=x_2g$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $x_1=x_2$. ამგვარად, $R(g)$ გარდასახვას G ჯგუფს თავის თავში და ამიტომ, განმარტების ძალით, გადანაცვლებაა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $R(g)$ იზომორფული გარდასახვაა. რადგან

$$R(g_1)R(g_2): x \Rightarrow (xg_1)g_2 = x(g_1g_2)$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$R(g_1)R(g_2) = R(g_1g_2)$$

ამის გამო

$$R(g)R^{-1}(g) = 1$$

იგივური გარდასახვაა და, განმარტების ძალით, $R(g)$ იზომორფიზმია. ყველაფერი ზემოთქმული ამტკიცებს, რომ $R(g)$ ახორციელებს ავტომორფიზმს და, გარდა ამისა, ადგენს ჯგუფს, რომელიც გადანაცვლებათა S_n ჯგუფის რაღაც ქვეჯგუფის იზომორფულია. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

კელის თეორემა მეტად მნიშვნელოვანია, რადგანაც იგი საშუალებას იძლევა გადანაცვლებათა S_n ჯგუფის თვისებების შესწავლის მეოხებით შევისწავლოთ ყველა სასრული ჯგუფი. მართლაც კელის თეორემის გამოყენებით ავაგოთ მესამე რიგის აბსტრაქტული ჯგუფი, რომელიც (10.2) ცხრილით არის მოცემული. (14.2) გამოსახულების თანახმად, S_3 ჯგუფს ორი ქვეჯგუფი აქვს. ამათგან მესამე რიგის აბსტრაქტული ჯგუფის იზომორფულობის კანდიდატად მხოლოდ \mathcal{A}_3 ქვეჯგუფი შეიძლება ჩაითვალოს, რადგან ის ერთადერთი შეიცავს სამ ელემენტს. თუ ახლა ასეთ შესაბამისობას გავაკეთებთ:

$$a \Leftrightarrow (123), b \Leftrightarrow (132), e \Leftrightarrow e$$

მაშინ მივიღებთ ზუსტად (10.2) ცხრილს.

სასრული ჯგუფის იზომორფულ გადანაცვლებათა ქვეჯგუფებს ასეთი საერთო თვისებები აქვს:

1. ისინი გადანაცვლებათა S_n ჯგუფის n -ური რიგის ქვეჯგუფები არიან.
2. ამ ქვეჯგუფებში შემავალი გადანაცვლებები, იგივე რის გარდა, არც ერთ სიმბოლოს არ ტოვებს თავის ადგილზე.

პირველი თვისება ადვილი გასაგებია, რაც შეეხება მეორეს, მის დასამტკიცებლად განვიხილოთ გადანაცვლება $\pi(b): a_i \leftrightarrow ba_i$, მაშინ გამოდის, რომ $a_i = ba_i$, რაც მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როდესაც $b=e$.

ზემომოყვანილი თვისებების მქონე გადანაცვლებებს **სწორი გადანაცვლებები** ეწოდება. სწორი განაცვლებების განმარტებიდან გამომდინარეობს მათი შემდეგი თვისებები:

ა) თუ სწორი გადანაცვლებების ქვეჯგუფში არსებობს გადანაცვლება π_1 , რომელიც n სიმბოლოს m -ით ცვლის, მაშინ მასში არ შეიძლება იყოს გადანაცვლება π_2 , რომელიც იგივე სიმბოლოებს უცვლის ადგილს. მართლაც, თუ π_2 ეკუთვნის იგივე ქვეჯგუფს, მაშინ $\pi_1 \pi_2^{-1}$ -იც ამ ქვეჯგუფის ელემენტია და იგი თავის ადგილზე ტოვებს n და m სიმბოლოებს სწორი გადანაცვლებათა მეორე თვისების გამო ასეთმა გადანაცვლებამ ადგილზე უნდა დატოვოს სხვა სიმბოლოებიც, ამიტომ $\pi_1 \pi_2^{-1} = e$ და $\pi_1 = \pi_2$.

ბ) ამ ქვეჯგუფის გადანაცვლებები შეიცავენ ერთნაირი სიგრძის ციკლებს. ეს ნიშნავს, რომ ქვეჯგუფის გადანაცვლებაში არ შეიძლება იყოს განსხვავებული სიგრძის ციკლები. ამ განმარტებით ერთეულოვანი ელემენტი შედის ქვეჯგუფში, რადგან იგი მხოლოდ ერთის სიგრძის ციკლებისაგან შედგება. ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ გადანაცვლება, რომელიც შეიცავს განსხვავებული სიგრძის ციკლებს. ვთქვათ, ერთის სიგრძე არის l , ხოლო მეორესი – j და $l < j$. მაშინ π^l გადანაცვლება უცვლელს ტოვებს l სიგრძის ციკლის სიმბოლოებს, მაგრამ, ამავე დროს, სხვა ციკლების სიმბოლოები უცვლელი არ რჩება. თუ π გადანაცვლება სწორი გადანაცვლებების ქვეჯგუფს ეკუთვნის, მაშინ მისი ნებისმიერი ხარისხიც, მათ შორის l -ც იგივე ქვეჯგუფს უნდა

ეკუთვნოდეს, ხოლო ზემომოყვანილი მსჯელობის შესაბამისად π არ ყოფილა სწორი გადანაცვლება, რითაც ბ) დებულების სისწორე დამტკიცებულია.

სწორ გადანაცვლებათა თვისებების გამოყენებით ავაგოთ მეოთხე რიგის აბსტრაქტული ჯგუფი. კელის თეორემის ძალით იგი უნდა ვეძებოთ S_4 ჯგუფის ქვეჯგუფებს შორის. S_4 ჯგუფი ასეთი ელემენტებისაგან შედგება:

$$\begin{aligned}
 &e, \\
 &(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), \\
 &(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), \\
 &(12)(34), (13)(24), (14)(23), \\
 &(12), (13), (14), (23), (24), (34).
 \end{aligned} \tag{14.3}$$

ყველა ამ ელემენტიდან სწორი გადანაცვლებები თავმოყრილია პირველ, მეორე და მეოთხე სტრიქონებში. მეოთხე რიგის ჯგუფის აგება დავიწყით (1234) ელემენტით. მაშინ ა) თვისების გათვალისწინებით მასთან ერთად ჯგუფში უნდა შედიოდნენ ელემენტები (13)(24), (1432) და e ელემენტები. ამგვარად მივიღებთ ციკლურ ჯგუფს:

$$e, (1234), (13)(24), (1432) \tag{14.4}$$

დავალება 14.3: შეამოწმეთ, რომ მოყვანილი ელემენტები მართლაც ადგენენ ციკლურ ჯგუფს.

თუ დავიწყეთ ოთხის სიგრძის ნებისმიერი სხვა ციკლიდან, მივიღებთ (14.4) ჯგუფის იზომორფულ ჯგუფს. ამიტომ ავირჩიოთ ელემენტი მეოთხე სტრიქონიდან, მაგალითად, (12)(34). მასთან, ერთეულოვან ელემენტთან ერთად, გაერთიანდებიან ამ სტრიქონის დარჩენილი ელემენტები. ამგვარად, მეოთხე რიგის აბსტრაქტული ჯგუფის მეორე სტრუქტურას ასეთი სახე ექნება:

$$e, (12)(34), (13)(24), (14)(32) \tag{14.5}$$

- დავალება 14.3:** ა) შეამოწმეთ, რომ მოყვანილი ელემენტები მართლაც ადგენენ ციკლურ ჯგუფს.
- ბ) კელის თეორემის გამოყენებით ააგეთ მეექვსე რიგის აბსტრაქტული ჯგუფის შესაძლო სტრუქტურები.
- გ) აჩვენეთ, რომ მეექვსე რიგის აბსტრაქტული ჯგუფის არაციკლური სტრუქტურა S_3 ჯგუფის იზომორფულია.

მოვიყვანოთ ქვეჯგუფების კიდევ რამდენიმე მაგალითი:

1. განვიხილოთ ოთხგანზომილებიანი უნიტარული ნორმირებული სივრცე ასეთი სკალარული ნამრავლით:

$$(x, y) = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (14.6)$$

სადაც მეტრიკული მატრიცა

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \alpha=\beta=0 \\ -1, & \text{თუ } \alpha=\beta=1,2,3 \\ 0, & \text{თუ } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (14.6')$$

ნორმა ამ სივრცეში ასეა განსაზღვრული:

$$\|x\| = (x, x) = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (14.7)$$

ამ სივრცეს **მინკოვსკის სივრცე** ეწოდება. განვიხილოთ ამ სივრცის x ვექტორებზე ჩატარებული ასეთი გარდაქმნები:

$$x'^\alpha = a^\alpha + \lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad (14.8)$$

თუ ეს გარდაქმნები ინახავენ კვადრატულ ფორმას:

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (14.9)$$

მაშინ ისინი ადგენენ ჯგუფს, რომელსაც **პუანკარეს ან ლორენცის არაერთგვაროვან ჯგუფს** უწოდებენ. ცხადია, რომ მე-10 პარაგრაფში შემოტანილი ლორენცის L_4 ჯგუფი პუანკარეს ჯგუფის ქვეჯგუფია. (14.8) ჯგუფიდან გამოიყოფა კიდევ ერთი ქვეჯგუფი, რომელსაც **ტრანსლაციების ჯგუფს** უწოდებენ. იგი ასეთ გარდაქმნებს შეიცავს:

$$x'^{\alpha} = a^{\alpha} + x^{\alpha} \quad (14.10)$$

დავალება 14.4: აჩვენეთ, რომ ლორენცის L_4 ჯგუფი და ტრანსლაციების ჯგუფები პუნკარეს ჯგუფის ქვეჯგუფებია.

2. ორთოგონალური გარდაქმნები წარმოადგენენ უნიტარული ჯგუფის გარდაქმნების კერძო სახეს ნამდვილი ვექტორები სივრცეში. ამიტომ ცხადია, რომ

$$U_n \supset O_n$$

დავალება 14.5: არის თუ არა O_n ჯგუფი SU_n ჯგუფის ქვეჯგუფი?

ბოლოს მოვიყვანოთ ზემოთ ნახსენები ჯგუფების ცხრილი მათი მახასიათებლებით (იხ. ცხრილი 14.1)

დავალება 14.6: შეავსეთ 14.1 ცხრილის ბოლო ორი სტრიქონი

ჯგუფი	სახელი	პარამეტრების რაოდენობა	არსებითი პარამეტრები	გარდაქმნის სახე	პირობები პარამეტრებზე	გამრავლების წესი	შებრუნებული ელემენტი	ერთეულოვანი ელემენტი	ფურცლების რაოდენობა
GL_n	წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფი	$2n^2$	$2n^2$	$x'=Ax$, სადაც A არის (nxn) რიგის კომპლექსური მატრიცა	-----	მატრიცების გამრავლება	A^{-1}	ერთეულოვანი მატრიცა	1
SL_n	უნიმოდულარულ წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფი	$2n^2$	$2n^2 - 2$	იგივე, რაც ზედა	1 პირობა: $\det A=1$	მატრიცების გამრავლება	A^{-1}	ერთეულოვანი მატრიცა	1
U_n	უნიტარულ გარდაქმნათა ჯგუფი	$2n^2$	n^2	იგივე, რაც ზედა	$n+2n(n-1)/2$ პირობა: $A^\dagger A=1$	მატრიცების გამრავლება	A^{-1}	ერთეულოვანი მატრიცა	1
SU_n	უნიტარულ უნიმოდულარულ გარდაქმნათა ჯგუფი	$2n^2$	$n^2 - 1$	იგივე, რაც ზედა	წინა პირობას ემატება $\det A=1$	მატრიცების გამრავლება	A^{-1}	ერთეულოვანი მატრიცა	1
O_n	ორთოგონალურ გარდაქმნათა ჯგუფი	n^2	$n(n-1)/2$	$x'=Ox$, სადაც O არის (nxn) რიგის ნამდვილი მატრიცა	$n+n(n-1)/2$ პირობა: $\sum x_i'^2 = \sum x_i^2$	მატრიცების გამრავლება	A^{-1}	ერთეულოვანი მატრიცა	2 ($\det O = \pm 1$)
	ერთგანზომილებიან პროექტიულ გარდაქმნათა ჯგუფი	4	3	$x'=[a_1x + a_2]/[a_3x + a_4]$	1 პირობა: $\det a=1$	$c_1=b_1a_1 + b_2a_3$ $c_2=b_1a_2 + b_2a_4$ $c_3=b_3a_1 + b_4a_3$ $c_4=b_3a_2 + b_4a_4$	$\bar{a}_1 = a_1/\Delta, \bar{a}_2 = -a_2/\Delta,$ $\bar{a}_3 = -a_3/\Delta, \bar{a}_4 = a_4/\Delta,$ $\Delta = a_1a_4 - a_2a_3$	$a_1 = a_4 = 1$ $a_2 = a_3 = 0$	1
S_n	გადანაცვლებათა ჯგუფი	----	---	გადანაცვლებები	-----	ჯერ მარჯვენა გადანაცვლება, მერე მარცხენა	ციკლი, წაკითხული მარჯვნიდან მარცხნივ	(1)(2)...(n)	n!
SO_n	საკუთრივ ორთოგონალურ გარდაქმნათა ჯგუფი	n^2	$n(n-1)/2$	$x'=Ox$, სადაც O არის (nxn) რიგის ნამდვილი მატრიცა	$n+n(n-1)/2$ პირობა	მატრიცების გამრავლება	A^{-1}	ერთეულოვანი მატრიცა	1 ($\det O = +1$)
	პუანკარეს ჯგუფი								
L_n	ლორენცის ჯგუფი								

15. მოსაზღვრე კლასები. ლაგრანჟის თეორემა

ვთქვათ მოცემულია ჯგუფი G და მისი ქვეჯგუფი H . ასო h -ით აღვნიშნოთ H ქვეჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი, ხოლო g_0 -ით G ჯგუფის ფიქსირებული ელემენტი. მაშინ სიმრავლეს $\{hg_0\}$ ეწოდება **H -ით მარცხენა მოსაზღვრე კლასი** და ასე აღვნიშნება – Hg_0 . ანალოგიურად, $\{g_0h\}$ სიმრავლეს **H -ით მარჯვენა მოსაზღვრე კლასი** ეწოდება და ასე აღვნიშნება g_0H .

მოსაზღვრე კლასების უმნიშვნელოვანესი თვისება ჩამოყალიბებულია თეორემაში.

თეორემა 15.1: G ჯგუფის ორი მარჯვენა (მარცხენა) მოსაზღვრე კლასი ან არ გადაიკვეთება, ან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ემთხვევა ერთმანეთს. H -ით მოსაზღვრე კლასები და H ქვეჯგუფი ერთი სიმძლავრის სიმრავლეებია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $z \in Hg_0$ და $z \in Hg_1$. მაშინ, განმარტების ძალით, $z = h_1g_0 = h_2g_1$, ამიტომ $g_0 = h_1^{-1}h_2g_1$. თუ ეს ტოლობა გავამრავლებთ H ქვეჯგუფის ნებისმიერ h ელემენტზე, მარცხნივ მივიღებთ Hg_0 კლასის ელემენტს

$$hg_0 = hh_1^{-1}h_2g_1 = h'g_1$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $Hg_0 \subseteq Hg_1$. ანალოგიურად,

$$hg_1 = hh_1^{-1}h_2g_0 = h''g_0$$

ანუ $Hg_1 \subseteq Hg_0$. საიდანაჯ ცხადია, რომ

$$Hg_1 = Hg_0$$

მარჯვენა მოსაზღვრე კლასისთვის დამტკიცება სავსებით ანალოგიურია. გადასახვების $h \leftrightarrow hg_0$ და $h \leftrightarrow g_0h$ ცალსახობა გვიჩვენებს, რომ H , Hg_0 და g_0H სიმრავლეები ექვივალენტურია, ე.ი., მათ ერთნაირი სიმძლავრეები აქვთ. ამით **თეორემა დამტკიცებულია**.

ცხადია, რომ g_0 ელემენტი ეკუთვნის ორივე $-Hg_0$ და g_0H - კლასს. მართლაც, $g_0 = e g_0 = g_0 e$. ამ ელემენტს მოსაზღვრე კლასის წარმომადგენელი ეწოდება.

იმის აღსანიშნავად, რომ მოსაზღვრე კლასები არ გადაკვეთენ ერთმანეთს და ამავე დროს ამოწურავენ მთელ G ჯგუფს, შემოღებულია ასეთი ჩაწერა:

$$G = H \oplus Hg_2 \oplus Hg_3 \oplus \dots \oplus Hg_r \quad (15.1)$$

\oplus ნიშანს *პირდაპირი ჯამი* ეწოდება. რადგან $(Hg)^{-1}$, მარცხენა მოსაზღვრე კლასის ელემენტების შებრუნებული სიმრავლე, ემთხვევა $(g_0H)^{-1} = Hg_0^{-1}$, ამიტომ მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასები ერთმანეთის ექვივალენტურია, ანუ ერთნაირი სიმძლავრის სიმრავლეებია. ზემოთქმულის ძალით (15.1) ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$G = H \oplus g_2^{-1}H \oplus g_3^{-1}H \oplus \dots \oplus g_r^{-1}H \quad (15.2)$$

r რიცხვს, რომელიც მოსაზღვრე კლასების კარდინალურ რიცხვს წარმოადგენს, H *ქვეჯგუფის ინდექსს* უწოდებენ G ჯგუფში და ასე აღნიშნავენ: $[G:H]$.

ერთეულოვანი ელემენტი ადგენს ქვეჯგუფს და ერთიანით მოსაზღვრე კლასები, ცხადია, თითო-თითო ელემენტს შეიცავენ, ამიტომ სასრული ჯგუფის რიგი ერთეულოვანი ქვეჯგუფის ინდექსის ტოლია.

აბსტრაქტული ჯგუფების თეორიაში უდიდესი მნიშვნელობა აქვს ლაგრანჟის თეორემას, რომელიც ასე ყალიბდება:

თეორემა 15.2 (ლაგრანჟის თეორემა): G ჯგუფის რიგი უდრის H ქვეჯგუფის რიგის ნამრავლს H ქვეჯგუფის ინდექსზე G ჯგუფში.

დამტკიცება: $r=[G:H]$ ცალი შეუღლებული კლასიდან ჯგუფი იმდენ ელემენტს შეიცავს, რამდენი ელემენტიც არის ქვეჯგუფში. რადგან კლასების რაოდენობა r რიცხვის ტოლი, ამიტომ ცხადია, რომ ჯგუფის რიგი

$$n = r m$$

სადაც m რიცხვი ქვეჯგუფის რიგს აღნიშნავს. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

მოვიყვანოთ კიდევ სამი თეორემა ინდექსებისათვის:

თეორემა 15.3: თუ $G \supseteq H \supseteq K$, მაშინ $[G:K] = [G:H] [H:K]$.

დაამტკიცეთ თეორემა დამოუკიდებლად.

თეორემა 15.4 (უტოლობა ინდექსებისათვის): $[A \cup B : B] \geq [A : A \cap B]$,

დაამტკიცეთ თეორემა დამოუკიდებლად.

თეორემა 15.5 (ტოლობა ინდექსებისათვის): თუ რიცხვები $[A \cup B : B]$ და $[A \cup B : A]$ სასრულია და ურთიერთმარტივი, მაშინ $[A \cup B : B] = [A : A \cap B]$ და $[A \cup B : A] = [A : A \cap B]$.

დაამტკიცეთ თეორემა დამოუკიდებლად.

ლაგრანჟის თეორემას ასეთი შედეგი აქვს:

თეორემა 15.6: ჯგუფის ელემენტთა რიგები ჯგუფის რიგის გამყოფია.

დამტკიცება: თუ $g \in G$ ჯგუფს და იგი h რიგისაა, მაშინ ცხადია, რომ სიმრავლე $g^0 = e, g, g^2, \dots, g^{h-1}$ ადგენს ციკლურ ქვეჯგუფს G ჯგუფში, რომლის რიგი ემთხვევა ელემენტის რიგს და, ამგვარად, ლაგრანჟის თეორემის ძალით, ჯგუფის ელემენტის რიგის გამყოფია. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

დავალება 15.1: ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებით ააგეთ მერვე რიგის აბსტრაქტული ჯგუფების შესაძლო სტრუქტურები.

16. შეუღლებული ელემენტები და კლასები. ინვარიანტული ქვეჯგუფები. ფაქტორჯგუფები

ვთქვათ, G ჯგუფია, ხოლო S მისი რაღაც ქვესიმრავლე. S' სიმრავლეს, მიღებულს S სიმრავლის ყოველი s ელემენტის ტრანსფორმაციით G ჯგუფის ფიქსირებული g ელემენტით, S სიმრავლის შეუღლებული სიმრავლე ეწოდება. S' სიმრავლეს ზოგჯერ ასეც აღნიშნავენ: S^g .

S და S' სიმრავლეები ტოლი სიმძლავრისაა. მართლაც, S' სიმრავლის ელემენტები ასეთი სახისაა: $g^{-1}sg$. გარდასახვა $s \leftrightarrow g^{-1}sg$ ურთიერთ ცალსახაა. ამიტომ S და S' სიმრავლეები ექვივალენტურია და მათი სიმძლავრეები ტოლია. S სიმრავლის შეუღლებულ S' სიმრავლეთა სიმრავლეს შეუღლებულ სიმრავლეთა კლასი ეწოდება.

ნებისმიერი სიმრავლე, შეუღლებული ქვეჯგუფთან, თვითონაც ქვეჯგუფია. მართლაც, თუ H ქვეჯგუფია, მაშინ მის ნებისმიერ h ელემენტს აქვს შებრუნებული h^{-1} და გვაქვს $(g^{-1}hg)^{-1} = g^{-1}h^{-1}g$. ამის გარდა, $g^{-1}h_1g \cdot g^{-1}h_2g = g^{-1}h_1h_2g$, რაც ნიშნავს, რომ სიმრავლე $g^{-1}Hg$ ადგენს ქვეჯგუფს.

თუ G ჯგუფში არსებობს ისეთი g ელემენტები, რომელთათვისაც $S'=S$, მაშინ ასეთი g ელემენტები ადგენენ ჯგუფს. რადგან $g_1^{-1}Sg_1=S$ ამიტომ ასევე $g_1Sg_1^{-1}=S$. თუ, ამავე დროს, $g_2^{-1}Sg_2=S$, მაშინ $(g_1 g_2)^{-1}S(g_1 g_2)=S$, რაც ნიშნავს, რომ g ელემენტები ადგენენ ქვეჯგუფს.

$g \in G$ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლისთვისაც $g^{-1}Sg=S$, ეწოდება S სიმრავლის ნორმალიზატორი G ჯგუფში და იგი ასე აღინიშნება: $N_G(S)$. ცხადია, რომ $N_G(S)$ ქვეჯგუფია.

დავალება 16.1: აჩვენეთ ეს.

ქვეჯგუფს, შედგენილს G ჯგუფის ისეთი ელემენტებისგან, რომლებისთვისაც $g^{-1}Sg=S$, ეწოდება S სიმრავლის ნორმალიზატორი G ჯგუფში და იგი ასე აღინიშნება: $N_G(S)$. ცხადია, რომ $N_G(S)$ G ჯგუფის ქვეჯგუფია.

ქვეჯგუფს, შედგენილს G ჯგუფის ისეთი x ელემენტებისაგან, რომელთათვისაც $x^{-1}sx=s$, ეწოდება S სიმრავლის ცენტრალიზატორი და ასე აღინიშნება: $Z_G(S)$. თუ სიმრავლე ერთელემენტიანია, მაშინ ნორმალიზატორი ემთხვევა ცენტრალიზატორს. G ჯგუფის ცენტრალიზატორს G -ში ეწოდება **ჯგუფის ცენტრი**.

თუ S სიმრავლე ერთელემენტიანია, მაშინ მასთან შეუღლებული ელემენტები G ჯგუფში ადგენენ **შეუღლებულ ელემენტთა კლასს**.

გადანაცვლებათა ჯგუფში შეუღლებულ ელემენტებს აქვთ თვისებები, რომლებიც ორ ქვედა თეორემაშია ჩამოყალიბებული.

თეორემა 16.1: გადანაცვლებათა ჯგუფში ორი გადანაცვლება შეუღლებული მხოლოდ მაშინ, თუ მათ ერთნაირი სიგრძის ციკლები აქვთ.

თეორემა 16.2: შეუღლებულ ელემენტთა კლასებს S_n ჯგუფში ერთნაირი ციკლური სტრუქტურა აქვთ.

დავალება 16.2: დაამტკიცეთ ეს თეორემები.

S_4 ჯგუფის ელემენტები, მოყვანილი (14.3) გამოსახულებაში დალაგებული შეუღლებულ ელემენტთა კლასებად სტრიქონების მიხედვით. ამგვარად, S_4 ჯგუფში შეუღლებულ ელემენტთა 5 კლასი ყოფილა. შევნიშნოთ რომ e ელემენტი ყველა S_n ჯგუფში ცალკე კლასს ქმნის.

G ჯგუფის H ქვეჯგუფს ეწოდება **ინვარიანტული ქვეჯგუფი** ან **ნორალური გამყოფი**, თუ $g^{-1}Hg=H$ ყველა g ელემენტისთვის G ჯგუფიდან. წინა პარაგრაფის ტერმინებში H ქვეჯგუფი ინვარიანტული, თუ მისი ნორმალიზატორი G ჯგუფში თვით G ჯგუფია. ცხადია, რომ e და G ყოველთვის წარმოადგენენ ტრივიალურ ინვარიანტულ ქვეჯგუფებს. მათ გარდა ყველა ინვარიანტულ ქვეჯგუფებს **ნამდვილი ინვარიანტული ქვეჯგუფები** ეწოდება.

H ქვეჯგუფი ინვარიანტულია G -ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყოველი მარჯვენა მოსაზღვრე კლასი ამავე დროს მარცხენა მოსაზღვრე კლასიცაა.

დავალება 16.3: დაამტკიცეთ ეს დებულება.

G ჯგუფს რომელიც არ შეიცავს ნამდვილ ნორმალურ გამყოფს, ეწოდება **მარტივი ჯგუფი**. მაგალითად, ყველა სასრული ჯგუფი, რომლის რიგი მარტივი რიცხვია, მარტივი ჯგუფია.

თუ $f: G \rightarrow H$ ჰომომორფიზმია, რომლის დროს G ჯგუფის T სიმრავლე გადაისახება H ჯგუფის ერთიანში, მაშინ T სიმრავლე G ჯგუფის ინვარიანტული ქვეჯგუფია.

თეორემა 16.3: თუ $f: G \rightarrow H$ ჰომომორფიზმია, რომლის დროს G ჯგუფის T სიმრავლე გადაისახება H ჯგუფის ერთიანში, მაშინ T სიმრავლე G ჯგუფის ინვარიანტული ქვეჯგუფია. G ჯგუფის ორ ელემენტს H ჯგუფში ერთი და იგივე სახე აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი ერთსა და იმავე მოსაზღვრე კლასში იმყოფებიან.

დამტკიცება: როგორც მე-14 პარაგრაფში აღვნიშნეთ, G ჯგუფის ერთიანი გადაისახება H ჯგუფის ერთიანში – $f: e \rightarrow e$, ე.ი. $e \in T$. თუ $t \in T$ ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტია ისეთი, რომ $f: t \rightarrow e$, ხოლო $f: t^{-1} \rightarrow u$, მაშინ $e = t t^{-1} \rightarrow u$. მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ e უნდა გადაისახოს ისევ e -ში. ამიტომ u ერთეულოვანი ელემენტი ყოფილა. თუ ახლა დავუშვებთ, რომ $t_1 \rightarrow e$ და $t_2 \rightarrow e$, მაშინ $t_1 t_2 \rightarrow e$, ანუ $t_1 t_2 \in T$. ამით ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ T სიმრავლე ჯგუფის ყველა აქსიომას აკმაყოფილებს და, ამგვარად, G ჯგუფის ქვეჯგუფს წარმოადგენს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ T ინვარიანტული ქვეჯგუფია. ვთქვათ, $g \in G$ და $t \in T$. ასევე, ვთქვათ, რომ $f: g \rightarrow h$, $f: t \rightarrow e$ და $f: g^{-1} \rightarrow h^{-1}$. მაშინ $g^{-1} t g \rightarrow h^{-1} e h = e$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $g^{-1} t g \in T$. ამიტომ T ქვეჯგუფი ნორმალური გამყოფი ყოფილა და მას $f: G \rightarrow H$ ჰომომორფიზმის ბირთვის უწოდებენ.

ახლა თეორემის მეორე ნაწილი დავამტკიცოთ. თუ $g \rightarrow u$ და $g' \rightarrow u$, სადაც $x, y \in G$, ხოლო $u \in T$, მაშინ $g g'^{-1} \rightarrow e$, ე.ი. $g g'^{-1} \in T$, საიდანაც ვასკვნით, რომ $g \in T g'$, ანუ $g = t g'$, მაშინ $g = t g' \rightarrow u$, რაც ნიშნავს, რომ g -სა და g' -ის სახეები ერთნაირია. ამით დასრულდა თეორემის დამტკიცება.

მოვიყვანოთ ინვარიანტული ქვეჯგუფის მაგალითი. მე-14 პარაგრაფში ჩვენ შემოვიყვანეთ პუნკარეს ჯგუფი, რომლის გარდაქმნებს ასეთი სახე აქვს:

$$x^\alpha = a^\alpha + \lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad (16.1)$$

ფორმალურად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ პუნკარეს ჯგუფის ელემენტი ასეთი სახისაა: $\{a, \lambda\}$. მე-14 პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ ტრანსლაციები ადგენენ ჯგუფს. ვნახოთ, არის ეს ჯგუფი ინვარიანტული თუ არა? ფორმალურად ტრანსლაციები შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ: $\{a, e\}$, სადაც e არის ლორენცის ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი. განვიხილოთ ტრანსლაციის ჯგუფის შეუღლებულ ელემენტთა კლასი. ფორმალურ ჩაწერაში მას ასეთი სახე ექნება:

$$\{b, \lambda\}\{a, e\}\{a, \lambda\}^{-1} \quad (16.2)$$

რადგან გამრავლებას პუნკარეს ჯგუფში ასეთი სახე აქვს:

$$\{b, \lambda\}\{a, \mu\} = \{b + \lambda a, \lambda \mu\} \quad (16.3)$$

ხოლო შებრუნებული ელემენტი ასეთია:

$$\{b, \lambda\}\{a, \mu\} = \{b + \lambda a, \lambda \mu\} \quad (16.4)$$

ამიტომ (16.2) ნამრავლი იქნება:

$$\{b, \lambda\}\{a, e\}\{a, \lambda\}^{-1} = \{\lambda a, e\} \quad (16.5)$$

რაც ისევ ტრანსლაციაა და ამიტომ ტრანსლაციები პუნკარეს ჯგუფში ადგენენ ინვარიანტულ ქვეჯგუფს.

დავალება 16.4: ა) მიიღეთ (16.5) ტოლობა.

ბ) გამოარკვიეთ, ადგენს თუ არა ლორენცის ჯგუფი ინვარიანტულ ქვეჯგუფს პუნკარეს ჯგუფში?

17. ჯგუფების პირდაპირი და დეკარტეს ნამრავლი

ვთქვათ, გვაქვს ორი ჯგუფი A და B . ამ ჯგუფების ელემენტები დავაწყვილოთ ნებისმიერი გზით და ჩავწეროთ ასეთი სახით: (a, b) , სადაც $a \in A$ და $b \in B$. ჩვენ მიერ შედგენილი წყვილებისათვის გამრავლება ასეთი წესით განვსაზღვროთ:

$$(a_1, b_1) (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \quad (17.1)$$

ამ შემთხვევაში წყვილების სიმრავლე ადგენს ჯგუფს, რომელსაც A და B ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი ეწოდება. ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი ასე აღინიშნება: $A \times B$. ნათელია, რომ პირდაპირ ნამრავლში ერთეულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს (e_A, e_B) , სადაც $e_A \in A$ და $e_B \in B$.

აშკარაა, რომ გარდასახვა $f: (a, b) \Leftrightarrow (b, a)$ ცალსახაა, ამიტომ $A \times B = B \times A$, რაც ნიშნავს, რომ ეს ორი ჯგუფი იზომორფულია. ამიტომ თანამამრავლთა მიმდევრობას პირდაპირ ნამრავლში მნიშვნელობა არა აქვს.

გარდასახვები $\alpha: a \Leftrightarrow (a, e_B)$ და $\beta: b \Leftrightarrow (e_A, b)$ წარმოადგენენ იზომორფიზმს $A \times B$ ჯგუფის $\{(a, e_B)\}$ და $\{(e_A, b)\}$ ქვეჯგუფებსა და A და B ჯგუფებს შორის. თუ ამ ქვეჯგუფებს გავაიგივებთ A და B ჯგუფებთან, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $A \times B$ ჯგუფი თავისი A და B ქვეჯგუფების პირდაპირი ნამრავლია.

A ჯგუფის ნებისმიერი a ელემენტი კომუტირებს B ჯგუფის ნებისმიერ b ელემენტთან. მართლაც,

$$(a, e_B) (e_A, b) = (a, b) = (e_A, b) (a, e_B)$$

ანუ $ab=ba$.

შებრუნებულ ელემენტებს პირდაპირ ნამრავლში ასეთი სახე აქვს:

$$(a, b) = (a^{-1}, b^{-1})$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$(a_1, b_1)^{-1} (a_2, e_B) (a_1, b_1) = (a_1^{-1} a_2 a_1, e_B)$$

საიდანაც ცხადია, რომ A ქვეჯგუფი $A \times B$ პირდაპირი ნამრავლის ნორმალური გამყოფია. ასევე B ქვეჯგუფიც $A \times B$ პირდაპირი ნამრავლის ინვარიანტული ქვეჯგუფია.

დავალება 17.1: ა) რას უდრის A და B ჯგუფების თანაკვეთა $A \cap B$?

ბ) რას უდრის A და B ჯგუფების გაერთიანება $A \cup B$?

განვაზოგადოთ პირდაპირი ნამრავლის ცნება ჯგუფების ნებისმიერი რაოდენობის შემთხვევაზე. ვთქვათ, გვაქვს ჯგუფთა სიმრავლე $\{A_i\}$, სადაც i ინდექსი გარბის მნიშვნელობებს რიცხვთა რაღაც I სიმრავლიდან. შევადგინოთ ფორმალური ნამრავლები:

$$\prod_{i \in I} a_i$$

რომლებიც წარმოადგენენ თითოეული A_i ჯგუფიდან ერთდროულად ამორჩეული ელემენტების სისტემას. ყველა ფორმალური ნამრავლი გამრავლების ასეთი წესით:

$$\prod_{i \in I} a_i \prod_{i \in I} b_i = \prod_{i \in I} c_i$$

სადაც

$$c_i = a_i b_i \tag{17.2}$$

ადგენს ჯგუფს, რომელსაც A_i ჯგუფების დეკარტეს ნამრავლი ჰქვია. დეკარტეს ნამრავლის ქვეჯგუფს, რომელშიც $a_i = e$ ყველა ინდექსისთვის, გარდა მათი სასრული რიცხვისა, ეწოდება A_i ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი.

მოვიყვანოთ მაგალითები.

1. დავუშვათ გვაქვს ორი L_n და L_m , სათანადოთ, n და m განზომილების ვექტორული სივრცეები. განვიხილოთ $n+m$ განზომილების ვექტორული სივრცე, რომლის ვექტორები წარმოიდგინება ცალსახად, როგორც

$$x = x_1 \oplus x_2$$

L_n და L_m ვექტორების პირდაპირი ჯამი. პირდაპირი ჯამის ქვეშ გვესმის შესაკრები ვექტორების კოორდინატების ასეთი ფორმალური გაერთიანება:

$$x = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \dots \\ x_1^n \\ x_2^1 \\ \dots \\ x_2^m \end{pmatrix}$$

თუ L_n და L_m სივრცეებში მოქმედებენ უნიტარული ჯგუფები, შესაბამისად, U_n და U_m , მაშინ ეს ჯგუფები $L=L_n \oplus L_m$ სივრცეში აინდუცირებენ U_n და U_m ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლის ჯგუფს $U_n \times U_m$, რომელიც, ზოგადად, L სივრცეში მოქმედი U_{n+m} ჯგუფის ქვეჯგუფს წარმოადგენს:

$$U_{n+m} \supset U_n \times U_m$$

2. განვიხილოთ N ნაწილაკისაგან შემდგარი ფიზიკური სისტემა, რომლის მდგომარეობა არ იცვლება მისი სივრცეში ორიენტაციის მიხედვით. მაშინ ამბობენ, რომ ეს სისტემა ინვარიანტული არის სივრცეში ბრუნვების მიმართ. ჯგუფთა თეორიის ენაზე ეს ნიშნავს, რომ სისტემის მდგომარეობები ბრუნვის SO_3 ჯგუფის გარდაქმნების ობიექტებს წარმოადგენენ, ე.ი. SO_3 ჯგუფის გარდაქმნები მოქმედებენ ჩვენი სისტემის მდგომარეობებზე აგებულ წრფივ ვექტორულ სივრცეში. გარდა ამისა, სისტემას გარკვეული თვისებები ექნება მასში შემავალი N ნაწილაკის გადასმების მიმართაც. ამგვარად, ზემოაღებულ ვექტორულ სივრცეში მოქმედებენ, აგრეთვე, S_n ჯგუფის გარდაქმნებიც. ეს ნიშნავს, რომ აგებულ სისტემას ექნება $3N$ თავისუფლების ხარისხი, ხოლო სივრცე იქნება $3N$ -განზომილებიანი. მართლაც, აგებული სივრცე წარმოადგენს სამგანზომილებიანი ნაწილაკების სივრცის პირდაპირ ნამრავლს. თითოეული ნაწილაკის სივრცის ვექტორებზე იმოქმედებს SO_3 ჯგუფის გარდაქმნები, ხოლო ამ სივრცეთა გადასმას განახორციელებს გადანაცვლებათა S_n ჯგუფი. ამგვარად, $3N$ -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში იმოქმედებს $SO_3 \times S_n$ ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი, რომელიც იგივე სივრცეში მოქმედი $3N$ -განზომილებიანი წრფივი გარდაქმნების GL_{3N} ჯგუფის ქვეჯგუფი იქნება:

$$GL_{3N} \supset SO_3 \times S_n$$

3. სულაც არ არის სავალდებულო, რომ ორი ვექტორული სივრცე ისე იყოს განსხვავებული, როგორც ეს წინა მაგალითში იყო. მართლაც, თუ L_n და L_m , სათანადოთ, n და m განზომილების წრფივი ვექტორული სივრცეები, ხოლო U_n და U_m მათში შესაბამისად მოქმედი ჯგუფები, მაშინ $n \times m$ -განზომილებიან L სივრცეში, რომელიც დაჭიმულია L_n და L_m წრფივი ვექტორული სივრცეების ვექტორთა ნამრავლებისგან შედგენილი ვექტორების ბაზისზე, იმოქმედებს $U_n \times U_m$ ჯგუფი, რომელიც, ზოგადად, იქნება L სივრცეში მოქმედი $U_{n \times m}$ ჯგუფის ქვეჯგუფი:

$$U_{n+m} \supset U_n \times U_m$$

L სივრცის ვექტორებს კი ასეთი სახე ექნება:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 y^1 \\ x^1 y^2 \\ \dots \\ x^1 y^m \\ x^2 y^1 \\ \dots \\ x^2 y^m \\ \dots \\ x^n y^m \end{pmatrix}$$

18. დანაწილებები

განვიხლოთ p -უცნობიანი განტოლება

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = n \quad (18.1)$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ უცნობებია, ხოლო n – ფიქსირებული რიცხვი, რომელიც ასეთ პირობას აკმაყოფილებს:

$$n \geq p$$

(18.1) განტოლების ამონახსნები ვეძებთ მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლეში, თან ეს რიცხვები უნდა ადგენდნენ კლებად მიმდევრობას:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (18.2)$$

ამონახსნების სიმრავლე შემდგომში ასე აღვნიშნოთ:

$$\{\lambda\} \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (18.3)$$

და ვუწოდოთ მათ n რიცხვის დანაწილება. მაგალითად, $n=4$ რიცხვის დანაწილებები ასეთია:

$$\{4\ 0\ 0\ 0\}, \{3\ 1\ 0\ 0\}, \{2\ 2\ 0\ 0\}, \{2\ 1\ 1\ 0\}, \{1\ 1\ 1\ 1\}$$

ჩაწერის შემოკლების მიზნით ნულებს არ წერენ, ხოლო გამეორებულ რიცხვებს ხარისხის სახით წარმოადგენენ. ამიტომ 4-ის დანაწილება, ჯობია, ასე ჩაიწეროს:

$$\{4\}, \{3\ 1\}, \{2^2\}, \{2\ 1^2\}, \{1^4\},$$

თითოეულ დანაწილებას უკავშირებენ გრაფებს ან იუნგის დიაგრამებს, რომელსაც უჯრების საშუალებით ასეთნაირად აგებენ: პირველ სტრიქონში ათავსებენ λ_1 უჯრას, მეორეში – λ_2 უჯრას და ა.შ. შეიძლება საქმის გაადვილება უჯრების მაგივრად წერტილების დასმით. მაგალითად, დანაწილება $\{321\}$ იუნგის დიაგრამის სახით ასე წარმოიდგინება:



ან ასე

• • •
• •
•

$\{\lambda\}$ დანაწილების შეუღლებული დანაწილება ეწოდება ისეთ $\{\tilde{\lambda}\}$ დანაწილებას, რომელიც მიიღება თუ იუნგის დიაგრამის სვეტებს სტიქონებად გამოვიყენებთ. მაგალითად, იუნგის $\{21^2\}$ დიაგრამისათვის შეუღლებული იქნება $\{31\}$ დიაგრამა. ზოგად ფორმულას შეუღლებული დანაწილების თითოეული წევრისათვის ასეთი სახე აქვს:

$$\{\tilde{\lambda}\} = \{ n^{\lambda_n}, (n-1)^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}, (n-2)^{\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1}}, \dots, 2^{\lambda_2-\lambda_3}, 1^{\lambda_1-\lambda_2} \} \quad (18.4)$$

თუ ამ გამოსახულებაში $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ ნულის ტოლია, ეს ნიშნავს, რომ შესაბამისი i რიცხვი აღარ იქნება $\{\tilde{\lambda}\}$ დანაწილებაში.

დავალება 18.1: ა) იპოვეთ ქვემომოყვანილი იუნგის დიაგრამების შებრუნებულები: $\{21^2\}$, $\{6431\}$, $\{8^271^4\}$, $\{4321\}$, $\{2^4\}$, $\{41^4\}$. ისარგებლეთ როგორც გრაფიკული მეთოდით, ასევე (18.4) ფორმულით.

n რიცხვის დანაწილებათა რაოდენობა უდრის x^n წევრის კოეფიციენტს ასეთი წილადის გაშლაში

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots} \quad (18.5)$$

დანაწილებების რაოდენობა იძლევა საშუალებას ვიპოვოთ გადანაცვლებათა S_n ჯგუფის კლასების რაოდენობა:

თეორემა 18.1: S_n ჯგუფის კლასების რიცხვი უდრის n რიცხვის დანაწილებათა რაოდენობას.

დამტკიცება: გავიხსენოთ, რომ S_n ჯგუფის თითოეულ კლასს ერთნაირი ციკლური სტრუქტურა აქვს. კლასი ასეთი სიმბოლოთი შეგვიძლია დავახასიათოთ:

$$(\nu) \equiv (1^{\nu_1}, 1^{\nu_2}, \dots, 1^{\nu_n}) \quad (18.6)$$

სადაც ν_i გვიჩვენებს i -ს სიგრძის ციკლების რაოდენობას. რადგან სიმბოლოების სრული რაოდენობა n უნდა იყოს, ამიტომ

$$n \equiv 1\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + n\nu_n \quad (18.7)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_n &= \lambda_1 \\ \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_n &= \lambda_2 \\ \nu_3 + \dots + \nu_n &= \lambda_3 \\ &\dots \\ \nu_n &= \lambda_n \end{aligned} \quad (18.8)$$

ცხადია, რომ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n$ და $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. ამგვარად, ციკლური სტრუქტურის აღმნიშვნელი (ν) სიმბოლოს ჩვენ ცალსახად დავუკავშირეთ $\{\lambda\}$ დანაწილება, რითაც **თეორემა დამტკიცდა**.

კავშირს დანაწილებასა და გადანაცვლების ციკლურ სტრუქტურას შორის ახორციელებს (18.8) ფორმულები. შეიძლება მათი შებრუნებული ფორმულების პოვნაც. თუ (18.8) ფორმულების i -ურ სტრიქონს გამოვაკლებთ შემდეგ $-(i+1)$ სტრიქონს, მივიღებთ ν_i -ის გამოსახულებას:

$$\begin{aligned} \nu_i &= \lambda_i + \lambda_{i+1} \quad i \neq n \\ \nu_n &= \lambda_n \end{aligned} \quad (18.9)$$

18.1 თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ S_4 ჯგუფში შეუღლებულ ელემენტთა 5 კლასია, რაც ნათლად ჩანს (14.3) გამოსახულებიდან.

ახლა ვიპოვოთ გადანაცვლებათა რიცხვი S_n ჯგუფის $(\nu) \equiv (1^{\nu_1}, 1^{\nu_2}, \dots, 1^{\nu_n})$ სტრუქტურის კლასში. ამ ციკლების n ადგილზე n სიმბოლო უნდა განვალაგოთ. ცხადია, ეს შესაძლებელია. მაგრამ ამ დროს წარმოიშობა გამეორებები. მართლაც, თითოეული ციკლი განსახვავებულ სიმბოლოებს შეიცავს, ე.ი., ერთნაირი სიმბოლოები სხვადასხვა ციკლში არ შედის, ამიტომ i -ს სიგრძის ციკლების გადასმა $\nu_n!$ გზით მოგვცემს ერთსა და იმავე გადანაცვლებას. ეს ამცირებს გადანაცვლებათა რიცხვს $\nu_n!$ -ჯერ. ცნობილია აგრეთვე, რომ სიმბოლოების ციკლის შიგნით ციკლური გადასმა არ ცვლის ციკლს. i -ს სიგრძის ციკლში

შეიძლება i ციკლური გადანაცვლება მოვახდინოთ. მაგრამ i -ს სიგრძის ν_i ციკლი გვაქვს, ამიტომ $n!$ კიდევ i^{ν_i} -ზეც უნდა გავყოთ. ამიტომ განსხვავებულ გადანაცვლებათა რიცხვი S_n ჯგუფის $(\nu) \equiv (1^{\nu_1}, 1^{\nu_2}, \dots, 1^{\nu_n})$ სტრუქტურის კლასში ასეთი იქნება:

$$n_\nu = \frac{n!}{1^{\nu_1} \nu_1! 2^{\nu_2} \nu_2! \dots n^{\nu_n} \nu_n!} \quad (18.10)$$

19. კავშირი ჯგუფებსა და ალგებრებს შორის

ჯგუფებსა და ალგებრებს შორის მჭიდრო კავშირი არსებობს. ვნახოთ, რაში მდგომარეობს ეს კავშირები. შემოვიტანოთ რამდენიმე ახალი ცნება.

G ჯგუფის x და y ელემენტების კომუტატორი ეწოდება ჯგუფის ასეთი სახის ელემენტს:

$$x^{-1}y^{-1}xy$$

G ჯგუფის G' ქვეჯგუფს ეწოდება კომუტანტი ან წარმოებული ქვეჯგუფი, თუ იგი შედგენილი ყველა $x^{-1}y^{-1}xy$ კომუტატორისაგან.

დავალება 19.1: აჩვენეთ, რომ $x^{-1}y^{-1}xy$ ელემენტების სიმრავლე მართლაც ჯგუფია.

განვიხილოთ ჯგუფთა ჯაჭვი: $G \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq \dots$, სადაც $G^{(i)}$ ქვეჯგუფი $G^{(i+1)}$ ჯგუფის კომუტანტია. თუ ჯაჭვი წყდება სასრული რაოდენობის ჯგუფების შემდეგ ერთეულოვანი ქვეჯგუფზე, მაშინ G ჯგუფს ამოხსნადი ჯგუფი ეწოდება.

ახლა დავუბრუნდეთ კავშირს ჯგუფებსა და ალგებრებს შორის. განვიხილოთ სასრული ჯგუფი G ელემენტებით $e = g_0, g_1, g_2, \dots$ და ავაგოთ ალგებრა, რომლის $\{e_i\}$ ორტების გამრავლების კანონი ემთხვევა ჯგუფის გამრავლების კანონს, ანუ

$$[e_i, e_j] = e_k, \quad \text{თუ } g_i g_j = g_k \quad (19.1)$$

ამ ალგებრას ჯგუფის ფრობენიუსის ალგებრა ეწოდება. მისი განმარტებიდან ჩანს, რომ სტრუქტურული კონსტანტები ამ შემთხვევაში ასეთი რიცხვებია:

$$\gamma_{ij}^k = 1, \quad \text{თუ } g_i g_j = g_k \quad \text{და} \quad \gamma_{ij}^k = 0, \quad \text{თუ } g_i g_j \neq g_k \quad (19.2)$$

ასევე გასაგებია, რომ

$$\gamma_{ij}^i = \delta_j^0, \quad (j \text{ ინდექსით აჯამვა არ ხდება}) \quad (19.3)$$

ჩვეულებრივ ფრობენიუსის ალგებრის ბაზისის ელემენტებს იგივე ასოებით აღნიშნავენ, როგორც ჯგუფის ელემენტებს. ეს გასაგებია, რადგან (19.1) ფორმულის ძალით მათ შორის ურთიერთცალსახა კავშირი არსებობს. ამ შეთანხმების საფუძველზე ჩვენც აღვნიშნოთ ალგებრის ორტები g_i სიმბოლოთი, მაშინ ფრობენიუსის ალგებრის ნებისმიერი x ელემენტი ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$x = x^i g_i \quad (19.4)$$

ახლა დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ მეტად მნიშვნელოვან თეორემას.

თეორემა 19.1: სასრული ჯგუფის ფრობენიუსის ალგებრა გამოისახება როგორც მარტივი მატრიცული ალგებრების პირდაპირი ჯამი და მარტივ მატრიცულ ალგებრათა რიცხვი ფრობენიუსის F ალგებრაში შესაბამისი ჯგუფის შეუღლებულ ელემენტთა კლასების რიცხვის ტოლია.

ჩვენ ვიცით, რომ შეუღლებულ ელემენტთა კლასების რიცხვი გადანაცვლებათა S_n ჯგუფში ტოლია n რიცხვის დანაწილებათა რაოდენობისა. ამგვარად, გადანაცვლებათა ჯგუფის ფრობენიუსის ალგებრა იძლევა დანაწილებათა რაოდენობის ტოლ მარტივ მატრიცულ ალგებრებად.

თეორემის ძალით F ალგებრა ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_p \quad (19.5)$$

სადაც F_i ასოთი აღნიშნულია მარტივი მატრიცული ალგებრა, p შესაბამის ჯგუფში კლასების რაოდენობას აღნიშნავს. ამგვარად, სასრული ჯგუფი ჩვენ დავაკავშირეთ ფრობენიუსის ალგებრასთან. რას იძლევა ეს კავშირი, გამოვარკვევთ ქვევით, როდესაც ავაგებთ ჯგუფების წარმოდგენებს.

ახლა დავამყაროთ კავშირი ლის ჯგუფებსა და ალგებრებს შორის. ვთქვათ, გვაქვს ლის G ჯგუფის ორი ელემენტი $g(t^1, t^2, \dots, t^n)$ და $h(t^1, t^2, \dots, t^n)$. მათი ნამრავლის გამომსახველი ფუნქციის პარამეტრები, როგორც ვიცით (11.8) ფორმულიდან, იქნება:

$$t^{ij} = f^i(t^1, t^2, \dots, t^n, t^1, t^2, \dots, t^n). \quad (19.6)$$

შეთანხმების ძალით ერთეულოვანი ელემენტის კოორდინატები ნულის ტოლად უნდა ავიღოთ, ამიტომ

$$t^i = f^i(t^1, t^2, \dots, t^n, 0, 0, \dots, 0) \quad (19.7)$$

$$t'^i = f^i(0, 0, \dots, 0, t'^1, t'^2, \dots, t'^n) \quad (19.7')$$

აქედან ცხადია, რომ

$$\left. \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right|_e = \delta^i_j, \quad \left. \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \right|_e = \delta^i_j, \quad \left. \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} \right|_e = \left. \frac{\partial^2 f^i}{\partial y^j \partial y^k} \right|_e = 0. \quad (19.8)$$

როგორც ვიცით, ლის ჯგუფებში f^i ანალიზური ფუნქციაა. ამიტომ მისი მწკრივად გაშლა შეგვიძლია:

$$t^i = f^i(0, 0, \dots, 0) + \left. \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right|_e x^j + \left. \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \right|_e y^j + \left. \frac{\partial^2 f^i}{\partial y^j \partial y^k} \right|_e x^j y^k + O^i$$

სადაც O^i აღნიშნავს მესამე და უფრო მაღალი რიგის სიმცირის წევრებს x -სა და y -ის მიხედვით. (19.8) ტოლობის გათვალისწინებით ბოლო ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$t^i = e^i + x^i + y^i + a^i_{kl} x^k y^l + O^i \quad (19.9)$$

ამ ფორმულაში a^i_{kl} რიცხვებია. თუ ახლა შემოვიტანთ $q = x^{-1}y^{-1}xy$ კომუტატორს ჯგუფში, მაშინ მისი კოორდინატებისთვის მივიღებთ:

$$t^i = e^i + \gamma^i_{kl} x^k y^l \quad (19.10)$$

სადაც

$$\gamma^i_{kl} = a^i_{kl} - a^i_{lk} \quad (19.11)$$

ამ რიცხვებს ლის ჯგუფის სტრუქტურულ კონსტანტებს უწოდებენ. ქვევით ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ეს კონსტანტები ემთხვევიან ლის ალგებრის სტრუქტურულ კონსტანტებს.

განვიხილოთ $\{x(t)\}$ ერთპარამეტრიანი ელემენტების ოჯახი ლის ჯგუფში და ვთქვათ, რომ ეს ელემენტები აკმაყოფილებენ პირობას $x(0)=e$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს ერთეულოვან ელემენტზე გამავალი წირების ოჯახი.

განვიხილოთ, ე.წ., წარმოებადი წირები, ანუ ისეთი წირები, რომელთა $x^i(t)$ კოორდინატების წარმოებულები არსებობენ $t=0$ წერტილში:

$$\left. \frac{\partial x^i}{\partial t} \right|_{t=0} = X^i \quad i=1, \dots, r \quad (19.12)$$

$X(X^1, \dots, X^r)$ ვექტორს ეწოდება $x(t)$ წირის მხები ვექტორი $t=0$ წერტილში.

ავაგოთ ახლა ერთპარამეტრიანი წირების ოჯახი G ჯგუფზე. ვთქვათ, e წერტილს ისეთი Ω მახლობლობა გააჩნია, რომლის შიგნით შესაძლებელია ფესვის ამოღება, ე.ი., არსებობს $g^{1/2} \in \Omega$ ყოველი $g \in \Omega$ -სათვის. ფესვი ჯგუფის ელემენტიდან გაიგება ასეთნაირად: თუ h და g ჯგუფის ისეთი ელემენტებია, რომ $h^2=g$, მაშინ $h=g^{1/2}$. ამოფესვისა და გამრავლების ოპერაციებით შესაძლებელი ავაგოთ წირების სიმრავლე $\{g^r\}$, სადაც r ორობითი რაციონალური წილადია, ამასთან

$$g^{r_1+r_2} = g^{r_1} g^{r_2}$$

ზღვრული გადასვლის გამოყენებით შეგვიძლია ავაგოთ $\{g^\lambda\}$ წირების ოჯახი, სადაც λ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. ამასთან $g^0=e$ და $g^{\lambda+\mu} = g^\lambda g^\mu$, რაც ნიშნავს, რომ $\{g^\lambda\}$ სიმრავლე ჯგუფია. ამგვარად ჩვენ ავაგეთ **ლის ჯგუფის ერთპარამეტრიანი ქვეჯგუფი**, რომელის ელემენტები წარმოებადი წირების ერთ-ერთ მაგალითს წარმოადგენს.

განვიხილოთ $n \times n$ მატრიცებით წარმოდგენილი წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფი GL_n ჯგუფი, რომლის ერთეულოვანი ელემენტია

$$e = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$$

ავაგოთ ამ ჯგუფისათვის ერთპარამეტრიანი ქვეჯგუფი. ამისთვის Ω მახლობლობა განვსაზღვროთ პირობიდან

$$\|g - e\| < 1$$

სადაც $\|g\|$ აღნიშნავს g მატრიცის შესაბამისი წრფივი ოპერატორის ნორმას. ნებისმიერი მატრიცა $g \in G$, ამგვარად, წარმოიდგინება როგორც

$$g = e^X = e + X + X^2/2 + \dots$$

X მატრიცა მოიძებნება $\ln(e+y)$ ფუნქციის გამლით ($y=g-e$). ადვილია g -ს ნებისმიერი ხარისხის პოვნა:

$$g^\lambda = e^{\lambda X}$$

გავშალოთ ეს გამოსახულება:

$$g^\lambda = e^{\lambda X} = e + \lambda X + \dots$$

ამ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ X არის g^λ წირის მხევი ვექტორი $\lambda=0$ წერტილში.

ახლა $\{g^\lambda\}$ ქვეჯგუფში კომუტატორი ავაგოთ:

$$q = g^{-1} h^{-1} h g$$

სადაც $g = e^{\lambda X}$ და $h = e^{\lambda Y}$, მაშინ, ცხადია, რომ

$$q = e + \lambda 0 + \lambda^2 [X Y - Y X] + \dots$$

საიდანაც ჩანს, რომ q კომუტატორს $\lambda^2=0$ წერტილში მხეხად აქვს ვექტორი

$$z = [X, Y] = [X Y - Y X] \tag{19.14}$$

ვიპოვოთ ამ ვექტორის მდგენელები. (19.12) ფორმულის ანალოგიურად ისინი ასე განისაზღვრებიან

$$z^i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{q'^i(t) - q^i(t)}{t^2}$$

გამოსახულების მნიშვნელში t^2 -ის არსებობა გასაგებია, რადგან q კომუტატორია. ჩავსვათ აქ q^i -ს მნიშვნელობა (19.10) ფორმულიდან და გავითვალისწინოთ, რომ $q^i(0)=e$. მაშინ

$$z^i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma^i_{jk} x^j y^k}{t^2} = \gamma^i_{jk} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^j}{t} \frac{y^k}{t} \Big| = \gamma^i_{jk} X^j Y^k$$

ამგვარად, მივიღეთ ლის ალგებრის გამრავლების კანონი ისეთივე სტრუქტურული კონსტანტებით, როგორც აქვს შესაბამის ჯგუფს. (19.14) ტოლობით შემოტანილი ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტის მხევი ვექტორულ

სივრცეში აკმაყოფილებს ლის ალგებრის გამრავლებისათვის მოთხოვნილ ყველა აქსიომას და ამიტომ იგი ლის ალგებრა ყოფილა. (19.12) ტოლობიდან ცხადია, რომ ამ სივრცის საბაზისო ვექტორების მდგენელები წარმოადგენენ ჯგუფის გენერატორებს, რაც ადასტურებს მჭიდრო კავშირს ლის ჯგუფსა და მისი გენერატორებისაგან აგებულ ალგებრას შორის. როდესაც მე-11 პარაგრაფში განვიხილეთ ჯგუფის გენერატორების მაგალითები, ვნახეთ, რომ ისინი ადგენენ ალგებრებს. როგორც ახლა გამოჩნდა, ეს არ ყოფილა შემთხვევითი: ლის ყოველ ჯგუფთან დაკავშირებული ყოფილა ლის ალგებრა.

აღსანიშნავია, რომ შესაძლებელია შებრუნებული პროცესის ჩატარებაც: თუ ცნობილის ლის ალგებრა, შეგვიძლია ერთეულოვანი ელემენტის მახლობლობაში ჯგუფური გამრავლების აღდგენა. ეს დებულება **ლის თეორემის** სახელითაა ცნობილი.

მოვიყვანოთ ამის მაგალითად სამგანზომილებიანი ბრუნვის ჯგუფი. მისი ალგებრა მე-11 პარაგრაფის შესაბამისად ასეთ ალგებრას წარმოადგენს:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ახლა ვნახოთ, როგორ ვიპოვოთ ჯგუფი, თუ მოცემულია ეს ალგებრა. ვისარგებლოთ ეილერის კუთხეებით. ბრუნვა ეილერის კუთხეების საშუალებით ასე წარმოიდგინება: ჯერ XY სიბრტყეს შემოვაბრუნებთ Z ღერძის გარშემო ψ კუთხით, შემდეგ შემობრუნებას მოვახდენთ X ღერძის გარშემო θ კუთხით და, ბოლოს, ახლად მიღებული Z' ღერძის გარშემო მოვატრიალოთ φ კუთხით. მაშინ ნებისმიერი მობრუნება შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ასეთი სამი ოპერაციის ნამრავლის სახით:

$$g = g(\varphi, \theta, \psi) = X^3(\varphi) X^1(\theta) X^3(\psi) \quad (19.20)$$

სადაც

$$X^1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad X^3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ამგვარად, (19.20) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ორი ერთპარამეტრიანი $X^1(t)$ და $X^3(t)$ ქვეჯგუფი წარმოიშობს მთელს SO_3 ჯგუფს, რისი წინასწარმეტყველება შეიძლებოდა გამომდინარე $X^2 = [X^3, X^1]$ თანაფარდობიდან.

III. წარმოდგენათა ზოგადი თეორია

ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ჯგუფის ყოველი რეალიზაცია ადგენს ჯგუფის წარმოდგენას. ზოგადი ამოცანა, რომელიც წყდება ჯგუფების წარმოდგენეთ თეორიაში, შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს: ვთქვათ, გვაქვს $X=\{x\}$ წრფივი ვექტორული სივრცე, რომელზედაც განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქციები. ჩვეულებრივ ისაზღვრებიან წრფივი ფუნქციების კლასით. ვთქვათ, X სივრცეში განსაზღვრულია $G=\{g\}$ ჯგუფი, რომლის ელემენტებს გადაჰყავთ სივრცის ვექტორები ერთმანეთში: $x'=gx$. წერტილთა გარდაქმნა იწვევს ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციების ცვლილებას. აღვნიშნოთ ჯგუფის g ელემენტის წარმოდგენა T_g სიმბოლოთი. ამ ოპერატორის მოქმედება $f(x)$ ფუნქციაზე ასე გამოიხატება:

$$T_g f(x) = f(g^{-1}x)$$

წარმოდგენათა თეორიის ამოცანაა მოახდინოს $f(x)$ ფუნქციების კლასიფიკაცია G ჯგუფის გარდაქმნების მიმართ. მაგალითად, გადანაცვლებათა ჯგუფისათვის ეს კლასიფიკაცია გვიჩვენებს იცვლის თუ არა ნიშანს ფუნქცია ვექტორის კოორდინატთა გადასმის დროს. ამასთან ზოგი კოორდინატის გადასმისას ფუნქციამ შეიძლება შეიცვალოს ნიშანი, სხვების მიმართ – კი არა. შეიძლება დანარჩენი კოორდინატები განურჩეველი სიმეტრიის მდგომარეობაში იყვნენ. ფუნქციებს ანალოგიური თვისებები უნდა გააჩდეს სხვა ჯგუფების გარდაქმნის მიმართაც. ერთნაირი თვისებების მქონე ფუნქციები ჯგუფის გარდაქმნების მიმართ ერთმანეთში გარდაიქმნებიან და არ შეერევებიან სხვა თვისების მქონე ფუნქციებს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ფუნქციები ქმნიან ინვარიანტულ ქვესივრცეს. თუ ამ ქვესივრცეში შეუძლებელია ნაკლები განზომილების ინვარიანტული ქვესივრცის გამოყოფა, მაშინ ამბობენ, რომ T_g გარდაქმნის მიმართ გამოიყო მინიმალური ინვარიანტული დაუყვანადი

ქვესივრცე. წარმოდგენათა თეორიის მიზანია ასეთი დაუყვანადი ინვარიანტული ქვესივრცეების გამოყოფა და ჯგუფის იმ წარმოდგენების პოვნა, რომლებიც ახორციელებენ გარდაქმნებს ამ ქვესივრცეებში. ამ წარმოდგენებს **ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენები** ეწოდება.

მაგალითისთვის განვიხილოთ ტრანსლაციების ჯგუფი. ტრანსლაცია ასეთი ოპერაციაა:

$$T_a f(x) = f(x + a)$$

განვიხილოთ $\{e^{inx}\}$ ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც ერთმნეთისგან n რიცხვით განსხვავდებიან, და გავარკვიოთ, რა დაუყვანადი ინვარიანტული ქვესივრცეების გამოყოფაშიძლება ამ სივრცეში ტრანსლაციების ოპერაციების მიმართ. ტრანსლაციების მოქმედება სიმრავლის ფუნქციაზე ასე გამოისახება:

ამგვარად, e^{inx} ფუნქცია T_a ოპერატორის საკუთარი ფუნქცია ყოფილა და ფუნქციათა $\{e^{inx}\}$ სიმრავლე შეგვიძლია ჯგუფის წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციებად გამოვიყენოთ. რადგანაც ტრანსლაციების მოქმედებით ფუნქციები ერთმანეთში არ გადადის (არ იცვლება n რიცხვი), ამიტომ მინიმალური ინვარიანტული ქვესივრცე ერთგანზომილებიანი ყოფილა და, შესაბამისად, მას ერთადერთი საბაზისო ვექტორი e^{inx} ფუნქცია აქვს. ტრანსლაციების ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენაც, ცხადია, ერთგანზომილებიანი იქნება და წარმოიდგინება e^{ina} რიცხვით. ფუნქციასა და წარმოდგენის ერთგანზომილებიან მატრიცას ანუ რიცხვს აკავშირებს საერთო n .

ცნობილია, რომ ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება ფურიეს მწკრივად გაიშალოს ასეთნაირად:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

ამგვარად, ფურიე-მწკრივად გაშლა ყოფილა ფუნქციის გაშლა ტრანსლაციის ჯგუფის საბაზისო ფუნქციების სრული სისტემის მიხედვით.

20. წარმოდგენათა დაყვანადობის კრიტერიუმი

E წრფივ სივრცეში G ჯგუფის ჰომომორფიზმს ამ სივრცის წრფივ გარდაქმნებში $g \rightarrow T_g$ ჯგუფის წრფივი წარმოდგენა ეწოდება. ცხადია, წრფივი წარმოდგენებისათვის ადგილი აქვს ასეთ ტოლობებს:

$$T_{gh} = T_g T_h, \quad \text{და} \quad T_e = I$$

სადაც I ერთეულოვანი ოპერატორია. თუ ეს გადასახვა იზომორფულია, ამბობენ, რომ გვაქვს ჯგუფის ზუსტი წარმოდგენა.

ვნახოთ, როგორ მოქმედებენ ჯგუფის გარდაქმნები თვით E წრფივ სივრცეზე. თუ E_0 არის E სივრცის ქვესივრცე ისეთი, რომ

$$T_g E_0 = E_0$$

მაშინ E_0 -ს ინვარიანტული ქვესივრცე ყოფილა. ვთქვათ, $E_0 \subset E$ არატრივიალური ინვარიანტული ქვესივრცეა, რაც ნიშნავს, რომ $E_0 \neq \emptyset$ და $E_0 \neq E$. ამბობენ, რომ E სივრცე უშვებს ინვარიანტულ დამატებას, თუ E წარმოიდგინება ასეთი სახით:

$$E = E_0 + E' \tag{20.1}$$

სადაც E' ქვესივრცეც ჯგუფის გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტული ქვესივრცეა.

განვიხილოთ ორი წრფივი სივრცე $\{x\}=E$ და $\{x'\}=E'$. შევადგინოთ სივრცეთა ვექტორებიდან ბიწრფივი ფორმა (x, x') და ვუწოდოთ მას გადაუგვარებელი ბიწრფივი ფორმა, თუ ნებისმიერი $x \in E$ ვექტორისათვის არსებობს $x' \in E'$ ვექტორი ისეთი, რომ $(x, x') \neq 0$ და, პირიქით, ნებისმიერი $x' \in E'$ ვექტორისათვის არსებობს $x \in E$ ვექტორი ისეთი, რომ $(x, x') \neq 0$.

ახლა განვიხილოთ $G=\{g\}$ ჯგუფის წარმოდგენები $\{T_g\}$ და $\{T_g'\}$ E და E' სივრცეებში. ამ წარმოდგენებს ვუწოდოთ კონტრაგრედიენტული წარმოდგენები თუ არსებობს გადაუგვარებელი ბიწრფივი ფორმა, ინვარიანტული T_g და T_g' გარდაქმნების მიმართ:

$$(T_g x, T'_g x') = (x, x')$$

თუ E და E' სივრცეებს ერთნაირი განზომილება აქვს და შესაძლებელია მათი გაიგივება, მაშინ ბაზისის სათანადო შერჩევით (x, x') ფორმა დიაგონალურ სახეზე მიიყვანება და კონტრაგრედიენტულობის პირობა ასე ჩაიწერება:

$$T'_g = \tilde{T}_g^{-1} \quad (20.2)$$

ტილდა ოპერატორის თავზე აღნიშნავს ტრანსპონირებულ ოპერატორს.

გასაგებია, რომ წრფივი წარმოდგენა იგივეა, რაც მატრიცული წარმოდგენა და რომ არსებობს უსასრულო რაოდენობის ასეთი ექვივალენტური წარმოდგენები.

მოვიყვანოთ კონტრაგრედიენტული გარდაქმნის მაგალითი. განვიხილოთ გადასვლა წრფივი სივრცის ორ ბაზისს შორის:

$$e'_i = a_i^k e_k$$

როგორც ვიცით (6.7) ტოლობიდან, ამ შემთხვევაში გადასვლა ვექტორის კოორდინატებს შორის ხორციელდება ასეთი ფორმით:

$$x'^i = (\tilde{a}^i_k)^{-1} x^k$$

ამგვარად, საბაზისო ვექტორისა და კოორდინატა გარდაქმნები ბაზისიდან ბაზისში გადასვლის დროს კონტრაგრედიენტულნი ყოფილან. ამის მიხედვით არჩევენ ორი სახის გარდაქმნებს: საბაზისო ვექტორების გარდაქმნას **კოვარიანტულ გარდაქმნას** ეძახიან, ხოლო ვექტორთა კოორდინატების გარდაქმნას – **კონტრავარიანტულ გარდაქმნას**. ადვილი მისახვედრია, რომ ზემოთ მიწერილი ინდექსები კონტრავარიანტულია, მაშინ როდესაც ქვედა ინდექსები – კოვარიანტული. *ამავე დროს, მნიშვნელში დაწერილი სიდიდეების ქვედა ინდექსები კონტრავარიანტულია და ამ სიდიდის მრიცხველში მოხვედრის შემთხვევაში ისინი ზევით იწერება, მაშინ როდესაც მნიშვნელში მყოფი სიდიდის ზედა ინდექსები კოვარიანტული არის.*

აქამდე განხილულ ლის ჯგუფებში უკვე ფაქტობრივად გვქონდა ჯგუფის წრფივი წარმოდგენები. მართლაც, პარამეტრიზაცია ეს უკვე ნიშნავს ჯგუფის გადასახვას წრფივ სივრცეში, ე.ი., წრფივი წარმოდგენის აგებას.

ასევე შეიძლება გადანაცვლებათა ჯგუფის წრფივი წარმოდგენების აგება მატრიცების სახით. მართლაც, თუ ავაგებთ გადანაცვლებათა ჯგუფის ფრობენიუსის ალგებრას, რომელიც იშლება მარტივი მატრიცული ალგებრების პირდაპირ ჯამად (იხ., ფორმულა (19.5)), მაშინ ჯგუფის თითოეულ ელემენტს შეესაბამება მატრიცა. ეს მართალია, რადგან, როგორც გვახსოვს, ფრობენიუსის ალგებრის საბაზისო ელემენტებად მისი ჯგუფის შესაბამისი ელემენტები ავიღეთ. ამგვარად, ჯგუფის ელემენტს შეესაბამება იმდენი მატრიცული წარმოდგენა, რამდენიცაა ფრობენიუსის დაუყვანადი ქვეალგებრა. ამ წარმოდგენებს დაუყვანად წარმოდგენებს ეძახიან. როგორც მე-19 პარაგრაფში ვნახეთ, დაუყვანადი ქვეალგებრების რიცხვი ეთანადება შეუღლებულ ელემენტთა კლასების რიცხვს, რაც თავის მხრივ ჯგუფის რიგის დანაწილებათა რიცხვს უდრის. ამგვარად, გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენათა რაოდენობა ჯგუფის რიგის დანაწილებათა რიცხვს უდრის.

ნათქვამის საფუძველზე გადანაცვლებათა ჯგუფის წარმოდგენის მატრიცა სქემატურად შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\left(\begin{array}{cccc} [g_a^b]^{(1)} & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [g_a^b]^{(2)} & \dots & [0] \\ [0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & \dots & [g_a^b]^{(\lambda)} \end{array} \right) \quad (20.3)$$

ამ გამოსახულებაში $[g_a^b]^{(\lambda)}$ კვადრატული მატრიცაა, რომელიც გადანაცვლებათა ჯგუფის (λ) წარმოდგენას გამოსახავს. (λ) ინდექსები სხვადასხვა წარმოდგენებს ნომრავენ. ზოგიერთი წარმოდგენა შეიძლება გამეორდეს რამდენჯერმე, სხვები კი შეიძლება სულაც არ შემოვიდეს პირდაპირ ჯამში. $[0]$ ნულებისგან შედგენილ მატრიცებს წარმოადგენენ რომლებიც, ზოგადად, არ არიან კვადრატული მატრიცები. მთლიანი მატრიცა და არანულოვანი მატრიცები კი კვადრატულია. მატრიცა მოქმედებს სვეტ-ვექტორად დალაგებულ გადასასმელ ობიექტებზე. თითოეული დაუყვანადი მატრიცა თავისი რანგის ტოლი რაოდენობის ობიექტზე მოქმედებს და მის რიგში მყოფი ნულოვანი მატრიცების გამო არ შეეხება დანარჩენ ობიექტებს. ეს ნიშნავს, რომ სვეტ-ვექტორში გამოიყოფა ინვარიანტული ქვესივრცეები, როგორც ამაზე ზემოთ ვილაპარაკეთ.

(20.3) ჯგუფური მატრიცის კვალს, რომელიც მთავარ დიაგონალზე მჯდომი ელემენტების ჯამს წარმოადგენს, ჯგუფის შედგენილ ხასიათს უწოდებენ:

$$\phi(g) = Sp [g_a^b] = g_a^a \quad (20.4)$$

(20.3) ფორმულიდან ცხადია, რომ $\phi(g)$ წარმოადგენს ცალკეული დაუყვანადი წარმოდგენების შესაბამისი, ე.წ., მარტივი ხასიათების ჯამს:

$$\phi(g) = K_\lambda \chi^{(\lambda)}(g) \quad (20.5)$$

სადაც $\chi^{(\lambda)}(g)$ არის g ელემენტის ხასიათი λ დაუყვანად წარმოდგენაში, ხოლო $K_\lambda \geq 0$ მთელი დადებითი რიცხვია და მიუთითებს λ დაუყვანადი წარმოდგენის ჯერადობას ჯგუფის ელემენტის მთლიან წარმოდგენაში, რომელსაც დაყვანად წარმოდგენას უწოდებენ.

ზოგადად, დაყვანადობის თვისება ჯგუფის ნებისმიერ წარმოდგენას გააჩნია. როგორც ზევით დავამტკიცეთ წარმოდგენის მატრიცის ტრანსფორმაციით მივიღებთ მის ექვივალენტურ წარმოდგენებს. თუ ტრანსფორმაციის შედეგად ასეთ მატრიცას მივიღებთ

$$\begin{pmatrix} [g_a^b]^{(1)} & A \\ 0 & [g_a^b]^{(2)} \end{pmatrix} \quad (20.6)$$

მაშინ ამბობენ რომ წარმოდგენის მატრიცა დაყვანადია, ხოლო თუ A მატრიცაც უდრის ნულს – $A=0$, მაშინ წარმოდგენას სავსებით დაყვანადს უწოდებენ. ამგვარად, (20.3)-ით მოცემული მატრიცა სავსებით დაყვანადი ყოფილა.

თეორემა 20.1: ჯგუფის წარმოდგენა უნიტარული წარმოდგენის ექვივალენტურია.

დამტკიცება ჩავატაროთ ლის კომპატური ჯგუფებისათვის.

განვიხილოთ უნიტარული L სივრცე. ამ სივრცეში ჯგუფის გარდაქმნები აინდუცირებენ წრფივ $R(g)$ ოპერატორებს. თუ ეს ოპერატორები არ არიან უნატარულნი (x, y) სკალარული ნამრავლის მიმართ $(x, y \in L)$, მაშინ შეიძლება ახალი სკალარული ნამრავლის შემოღება, რომლის მიმართ ყველა $R(g)$ ოპერატორი უნიტარული იქნება. შემოვიღოთ ფუნქცია

$$f(g) = (R(g)x, R(g)y)$$

ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია G ჯგუფზე და კომპაქტური ჯგუფისათვის არსებობს ინვარიანტული ინტეგრალი:

$$\int_G f(h) dh = \int_G f(gh) dh = \int_G f(hg) dh$$

სადაც g ნებისმიერი ელემენტია G ჯგუფიდან. სკალარული ნამრავლი ასე განვმარტოთ:

$$(x, y)' = \int_G (R(h)x, R(h)y) dh \quad (20.7)$$

ცხადია, რომ ასეთნაირად განმარტებული სკალარული ნამრავლი აკმაყოფილებს სკალარული ნამრავლის ყველა საჭირო აქსიომას.

დავალება 20.1: აჩვენეთ ეს.

ადვილია ჩვენება, რომ ასეთი სკალარული ნამრავლისათვის ყველა $R(g)$ ოპერატორი უნიტარული იქნება. მართლაც,

$$\begin{aligned} (R(g)x, R(g)y)' &= \int_G (R(h)R(g)x, R(h)R(g)y) dh = \\ &= \int_G (R(hg)x, R(hg)y) dh = \int_G (R(h)x, R(h)y) dh = (x, y)' \end{aligned}$$

ე.ი., უნიტარობის პირობა დაცულია.

ახლა ვთქვათ, რომ $\{e_i\}$ ბაზისია L სივრცეში ორთონორმირებული ძველი სკალარული ნამრავლის მიმართ:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

$\{e_i'\}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ბაზისი, ორთონორმირებული ახალი სკალარული ნამრავლის მიმართ:

$$(e_i', e_j') = \delta_{ij}$$

ვთქვათ, რომ მოყვანილ ორ ბაზისს აკავშირებს A ოპერატორი:

$$Ae_i = e_j'$$

მაშინ ცხადია ასეთი ტოლობები:

$$(A x, A y)' = (A x^i e_i, A y^j e_j)' = (x^i e_i, y^j e_j)' = x^i * y^j \delta_{ij} = (x, y)$$

ანუ

$$(x, y)' = (A^{-1} x, A^{-1} y)$$

ახლა დავუშვათ, რომ

$$R'(g) = A^{-1} R(g) A^{-1}$$

მაშინ

$$(R' x, R' y) = (A^{-1} R A x, A^{-1} R A y) = (R A x, R A y)' = (A x, A y)' = (x, y)$$

ამგვარად, R' ოპერატორები უნიტარულნი არიან ძველი სკალარული ნამრავლის მიმართ. და თეორემა დამტკიცებულია.

ადვილია ჩვენება, რომ თეორემა ძალაშია სასრული ჯგუფებისთვისაც.

დავალება 20.1: აჩვენეთ ეს.

განვიხილოთ $\psi(x)$, განსაზღვრული L უნიტარულ სივრცეზე, რომელშიც აგებული გვაქვს ჯგუფის წარმოდგენა. L სივრცის x ვექტორები g ელემენტებით ასე გარდაიქმნიან: $x' = gx$. ამ გარდაქმნას თანადობაში მოვუყვანოთ ოპერატორი O_g , მოქმედი L სივრცის $\psi(x)$ ფუნქციებზე ასეთნაირად:

$$O_g \psi(x) = \psi(g^{-1}x) \quad (20.9)$$

ეს გამოსახულება ნიშნავს, რომ გარდაქმნილ ფუნქციას $\psi' = O_g \psi$ წერტილში $x' = gx$ ისეთივე მნიშვნელობა აქვს, როგორც გარდაუქმნელ ψ ფუნქციას x წერტილში. თუ $O_g \psi(x) = \psi(x)$ ან, (20.9) ტოლობის ძალით, $\psi(gx) = \psi(x)$, მასინ ამბობენ, რომ ψ ფუნქცია ინვარიანტულია O_g ოპერატორის ან g გარდაქმნის მიმართ.

თუ წარმოდგენა აგებულია n განზომილებიან L სივრცეში, მაშინ n რიცხვს ჯგუფის წარმოდგენის განზომილება ეწოდება. დავუშვათ, რომ ეს წარმოდგენა დაყვანადია და თან სრულად დაყვანადი, მაშინ დაყვანის შემდეგ მისი შესაბამისი მატრიცა კვადრიატულია (20.3) სახით წარმოგვიდგება და n რიცხვი დიაგონალზე განლაგებული დაუყვანადი მატრიცების რანგების ანუ

დაუყვანადი წარმოდგენების განზომილებების ჯამად წარმოგვიდგება. L სივრცის შესაბამისი ვექტორი კი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \dots \\ x'^{f_1} \\ \hline x''^1 \\ \dots \\ x''^{f_2} \\ \hline x'''^1 \\ \dots \\ x'''^{f_3} \\ \dots \end{pmatrix} \quad (20.10)$$

f_i ასოთი აღნიშნულია i -ური წარმოდგენის განზომილება, ხოლო წყვეტილი ხაზით გამოყოფილი ბლოკები L სივრცის ის ქვესივრცეები, რომელშიც მოქმედებს შესაბამისი დაუყვანადი წარმოდგენა. მაგალითად, f_1 რანგის $[g_a^b]^{(1)}$ წარმოდგენა მოქმედებს x' ვექტორის კოორდინატებზე და მხოლოდ მათზე. $[g_a^b]^{(2)}$ მატრიცა აწარმოებს მეორე ბლოკის კოორდინატების გარდაქმნას ერთმანეთში ისე, რომ არ შემოყავს დანარჩენი ბლოკების კოორდინატები და ა.შ.

ამგვარად, მივდივართ დასკვნამდე, რომელიც დაყვანადობის შინაგანი კრიტერიუმის სახელით არის ცნობილი:

თუ L სივრცეში, რომელშიც ვაგებთ ჯგუფის წრფივ წარმოდგენას, არსებობს ჯგუფის ელემენტის წარმომდგენი ყველა წრფივი გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტული ქვესივრცე, მაშინ ეს წარმოდგენა დაყვანადია.

ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის უმარტივესი სახეა რეგულარული წარმოდგენა. ავაგოთ იგი.

ვთქვათ, φ კოორდინატთა რაღაც ფუნქციაა, რომელსაც სიმეტრიის არავითარი თვისება არ გააჩნია G ჯგუფის გარდაქმნათა მიმართ. $g \in G$ ოპერაციების მოქმედება ამ ფუნქციაზე

$$\varphi_g = g \varphi \quad (20.11)$$

წარმოშობს წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციების $\{\varphi_g\}$ სიმრავლეს, რომელიც ადგენს G ჯგუფის მიმართ ინვარიანტულ ქვესივრცეს. მართლაც, განვიხილოთ G ჯგუფის g' ელემენტის მოქმედება (20.11) ფუნქციაზე:

$$g' \varphi_g = g' g \varphi = g'' \varphi = \varphi_{g''} \quad (20.12)$$

ამგვარად, $\{\varphi_g\}$ სიმრავლე ჩაკეტილია ჯგუფის გარდაქმნების მიმართ და ზემოთქმულის საფუძველზე ადგენს G ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისს. თვით წარმოდგენას **რეგულარული წარმოდგენა** ეწოდება. (20.12) ფორმულიდან ჩანს, რომ რეგულარული წარმოდგენის მატრიცებიდან ყველას ერთეულოვანი ელემენტის გამომსახველი მატრიცის გარდა ნულოვანი დიაგონალური ელემენტების აქვს. იგივე გარდაქმნა წარმოიდგინება ერთეულოვანი მატრიცით.

21. შურის ლემები. ხასიათების ორთოგონალობა

წინა პარაგრაფში ჩვენ შემოვიყვანეთ ჯგუფის ხასიათების ცნება. ისინი წარმოდგენის მატრიცების კვალს წარმოადგენენ. მათ ორთოგონალობის თვისება აქვს და ამის დასამტკიცებლად საჭიროა ე.წ. შურის ლემების შემოყვანა.

თეორემა 21.1 (შურის I ლემა): თუ X ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცაა, ხოლო U – მუდმივი მატრიცა, რომელიც კომუტირებს X მატრიცასთან, მაშინ U ერთეულოვანი მატრიცის ჯერადია.

დამტკიცება: განვიხილოთ განტოლება

$$\hat{U}x = ux$$

სადაც x იმ სივრცის ვექტორია, რომელშიც არის აგებული X დაუყვანადი წარმოდგენა. \hat{U} ოპერატორი U მატრიცის შესაბამისი წრფივი ოპერატორია, ხოლო ამ u – ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობა. ვთქვათ, x_1 ვექტორი u_1 საკუთარი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთარი ვექტორია. რადგან X კომუტირებს U -სთან, ამიტომ, ცხადია, რომ Xx_1 ვექტორიც \hat{U} ოპერატორის საკუთარი ვექტორია. ამგვარად, u_1 -ის შესაბამისი ქვესივრცე ჯგუფის გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტული ყოფილა, რაც დაყვანადობის კრიტერიუმის საფუძველზე იძლევა საშუალებას ვამტკიცოთ, რომ წარმოდგენა დაყვანადია, რაც ლემის პირობის თანახმად გამორიცხებულია. ამიტომ ან x_1 ვექტორი ადგენს მთელ ინვარიანტულ ქვესივრცეს, ან იგი ნულოვანი ვექტორი არის. პირველი შესაძლებლობიდან გამოდის, რომ \hat{U} ოპერატორს ერთადერთი საკუთარი მნიშვნელობა აქვს და მატრიცული სახით იგი ასეთი უნდა იყოს:

$$U = \lambda I$$

სადაც I ერთეულოვანი მატრიცაა. მეორე შესაძლებლობა ტრივიალურ შედეგს იძლევა, რომ $\hat{U} = 0$. რითაც ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 21.2 (შურის II ლემა): თუ X' ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცაა, განსხვავებული X დაუყვანადი წარმოდგენისაგან, მაშინ ტოლობიდან

$$U X = X' U \quad (20.1)$$

გამომდინარეობს, რომ ან $X = X'$ და U არასინგულარული მატრიცაა ($\det U \neq 0$), ან $U=0$.

დამტკიცება საკმაოდ გრძელია და არ იძლევა რაიმე ახალ ინფორმაციას, ამიტომ მას გამოვტოვებთ.

ახლა გადავიდეთ ხასიათების ორთოგონალობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, M_i მატრიცა G ჯგუფის წარმოდგენას ქმნის. დავუშვათ, აგრეთვე, რომ U ნებისმიერი $f \times f$ რიგის ფიქსირებული მატრიცაა. შევადგინოთ ასეთი ახალი მატრიცები:

$$V = \sum_i M_i^{-1} U M_i \quad (20.2)$$

$$V_1 = \sum_i M_i'^{-1} U M_i \quad (20.3)$$

სადაც აჯამვა წარმოებს ჯგუფის ყოველი i -რი ელემენტით. გავამრავლოთ (20.2) მარცხნიდან M_j^{-1} , ხოლო მარჯვნიდან M_j -ზე. მაშინ მივიღებთ:

$$M_j^{-1} V M_j = \sum_i M_j^{-1} M_i^{-1} U M_i M_j = \sum_k M_k^{-1} U M_k = V \quad (20.4)$$

ტოლობა გვიჩვენებს, რომ V მატრიცა კომუტირებს წარმოდგენის M_i მატრიცებთან და, თუ M_i დაუყვანადია, მაშინ შურის I ლემის ძალით

$$V = \lambda I \quad (20.5)$$

ანალოგიურად,

$$M_j'^{-1} V_1 M_j = \sum_i M_j'^{-1} M_i'^{-1} U M_i M_j = \sum_k M_k'^{-1} U M_k = V_1$$

საიდანაც $V_1 M_j = M_j' V_1$, რაც შურის მეორე ლემის თანახმად გვადლევეს, რომ $V_1=0$, თუ M_j' დაუყვანადი წარმოდგენაა და არ არის M_j მატრიცის ექვივალენტური. ამ შემთხვევაში

$$\sum_i M_k'^{-1} U M_k = 0 \quad (20.6)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $M_i = [g_i^s]$ და $U = [u_i^s]$, მაშინ (20.2) ტოლობიდან გვექნება:

$$\sum_{g \in G} (g^{-1})^s u^q_r g^r_t = \lambda \delta^s_t$$

გავატოლოთ s და t ინდექსები და ავჯამოთ გატოლებული ინდექსით, მივიღებთ:

$$n u^q_q = \lambda f$$

სადაც n ჯგუფის რიგია, ხოლო f – წარმოდგენის განზომილება. ამგვარად,

$$\lambda = (n / f) Sp U$$

და

$$\sum_{g \in G} (g^{-1})^s u^q_r g^r_t = (n / f) u^q_q \delta^s_t = (n / f) u^q_r \delta^r_q \delta^s_t$$

რადგან U ნებისმიერი ფიქსირებული მატრიცაა, ამიტომ ბოლო ტოლობა რომ დაკმაყოფილდეს, u^q_r მატრიცული ელემენტების წინ მდგომი კოეფიციენტები უნდა ტოლი იყოს, რაც გვამღებს:

$$\sum_{g \in G} (g^{-1})^s g^r_t = (n / f) \delta^r_q \delta^s_t$$

თუ გავატოლებთ s და q ინდექსებს ისევე, როგორც r და t ინდექსებს და ავჯამავთ გატოლებული ინდექსებით, მივიღებთ:

$$\sum_{g \in G} \chi^{\{\mu\}}(g) \chi^{\{\mu\}}(g^{-1}) = n \tag{20.7}$$

აქ $\{\mu\}$ წარმოდგენის აღმნიშვნელი სიმბოლოა. ზუსტად ანალოგიურად (20.6)

ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\sum_{g \in G} \chi^{\{\mu\}}(g) \chi^{\{\nu\}}(g^{-1}) = 0 \tag{20.8}$$

ბოლო ორი ტოლობა ერთიანად ასე ჩაიწერება:

$$\sum_{g \in G} \chi^{\{\mu\}}(g) \chi^{\{\nu\}}(g^{-1}) = n \delta^{\mu\nu} \tag{20.9}$$

22. ფუნქციის გაშლა დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო

ფუნქციებად

L ვექტორულ სივრცეში განვსაზღვროთ $\{\psi_i\}$ ფუნქციები და მათზე მოქმედი O_g ოპერატორი, რომელიც L სივრცის x ვექტორების სასრული G ჯგუფის g გარდაქმნას შეესაბამება. თუ $\{\psi_i\}$ ფუნქციები ადგენენ L სივრცის ბაზისს, მაშინ $O_g \psi_i(x)$ ფუნქციები $\{\psi_i\}$ ფუნქციების წრფივ კომბინაციებად წარმოიდგინება:

$$O_g \psi_i(x) = g^j \psi_j(x) \quad (22.1)$$

ადვილია ჩვენება, რომ g^j_i რიცხვებისაგან აგებული მატრიცები ქმნიან g გარდაქმნების წარმოდგენის მატრიცებს. მე-20 პარაგრაფიდან ვიცით, რომ g მატრიცები შეგვიძლია უნიტარულად ჩავთვალოთ. ამ შემთხვევაში $\{\psi_i\}$ ფუნქციებს წარმოდგენის ბაზისს უწოდებენ. თუ g წარმოდგენა დაუყვანადია, მაშინ ფუნქციები დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისს ადგენენ.

ვთქვათ g მატრიცა $f^{(\lambda)}$ განზომილების უნიტარული დაუყვანადი წარმოდგენაა. $\{\lambda\}$ წარმოდგენის აღმნიშვნელი ინდექსია, რადგან წარმოდგენები სხვადასხვა შეიძლება იყოს. მაშინ $\{\lambda\}$ წარმოდგენისათვის (22.1) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$O_g \psi^{(\lambda)}_i(x) = g^{(\lambda)j} \psi^{(\lambda)}_j(x) \quad (22.2)$$

სადაც $\{\psi_i^{(\lambda)}\}$ ფუნქციები O_g ოპერატორის საკუთარი ფუნქციებია.

ამბობენ, რომ $\psi_i^{(\lambda)}$ ფუნქცია გარდაიქმნება $g^{(\lambda)}$ წარმოდგენის i -ური სტრიქონით, თუ არსებობს ისეთი $\{\psi_j^{(\lambda)}\}$ პარტნიორი ფუნქციები, რომლებიც ერთდროულად აკმაყოფილებენ (22.2) ტოლობას. იმის პირობა, რომ $\psi_i^{(\lambda)}$ ფუნქცია გარდაიქმნება $g^{(\lambda)}$ წარმოდგენის i -ური სტრიქონით ასე ჩაიწერება:

$$\sum_g g^{(\lambda) * i} O_g \psi^{(\lambda)}_i = (n/f^{(\lambda)}) \psi^{(\lambda)}_i \quad (22.3)$$

გამოსახულებაში აჯამვა წარმოებს მხოლოდ ჯგუფის ელემენტებით, ხოლო n ჯგუფის რიგია. $\psi_i^{(\lambda)}$ ფუნქციის პარტნიორი ფუნქციები კი ასეთ პირობას აკმაყოფილებენ:

$$\psi^{\{\lambda\}}_j = (f^{\{\lambda\}}/n) \sum_g g^{\{\lambda\} * k}_i O_g \psi^{\{\lambda\}}_i \delta^k_j \quad (22.4)$$

თუ $g^{\{\alpha\tau\}}$ ($\tau=1, \dots, c$) O_g ოპერატორების ჯგუფის ყველა დაუყვანადი წარმოდგენაა, მაშინ ყოველი F ფუნქცია, რომელზედაც ეს ოპერატორები მოქმედებენ შეგვიძლია ჩავწეროთ ასეთნაირად:

$$F = \sum_{\tau=1}^c \sum_{i=1}^{f^{\{\alpha\tau\}}} \psi^{\{\alpha\tau\}}_i \quad (22.5)$$

სადაც $\psi^{\{\alpha\tau\}}_i$ ეკუთვნის $\psi^{\{\alpha\tau\}}_i$ წარმოდგენის i -ურ სტრიქონს.

წარმოდგენის თეორიის ძირითადი ამოცანაა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების პოვნა. ეს გულისხმობს დაუყვანადი წარმოდგენების რაოდენობის დადგენას, მათი განზომილებების გამოთვლას, მათ კონკრეტულ აგებას, დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისის პოვნას და ა.შ.

დაუყვანადი წარმოდგენების განზომილებები ჯგუფის რიგთან არიან დაკავშირებული. ვიპოვოთ ეს კავშირი:

$$\sum_g g^{\{\lambda\} * i}_i O_g F = \sum_g g^{\{\lambda\} * i}_i O_g \sum_{\tau=1}^c \sum_{i=1}^{f^{\{\alpha\tau\}}} \psi^{\{\alpha\tau\}}_i = (n/f^{\{\lambda\}}) \psi^{\{\lambda\}}_i \quad (22.6)$$

გავამრავლოთ ბოლო ტოლობა $(f^{\{\lambda\}}/n)$ გამოსახულებაზე და ავჯამოთ i და λ ინდექსებით, მივიღებთ

$$F = \sum_{\lambda} \sum_i \sum_g (f^{\{\lambda\}}/n) g^{\{\lambda\} * i}_i O_g F \quad (22.7)$$

ტოლობას ნებისმიერი F ფუნქციისათვის აქვს ადგილი. ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\sum_{\lambda} \sum_i (f^{\{\lambda\}}/n) g^{\{\lambda\} * i}_i = \begin{cases} 1, & \text{თუ } g = e \\ 0, & \text{თუ } g \neq e \end{cases}$$

ცხადია, რომ როცა $g = e$, მაშინ $g^{\{\lambda\} * i}_i = 1$ და (22.7) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\sum_{\lambda} \sum_i (f^{\{\lambda\}}/n) = \sum_{\lambda} (f^{\{\lambda\}^2}/n) = 1 \quad (22.8)$$

რითაც დამტკიცდა, რომ დაუყვანადი წარმოდგენების კვადრატების ჯამი ჯგუფის რიგის ტოლი ყოფილა.

ზემოთ მოყვანილი დებულებები შეიძლება განზოგადოვდეს იმ შემთხვევაზე, როდესაც ისინი არ იქნებიან დამოკიდებულნი წარმოდგენის კონკრეტულ სახეზე და გამოდგებიან ყველა ექვივალენტური წარმოდგენისათვის. მაგალითად, შეიძლება ჩვენება, რომ

$$\sum_g g^{\{\lambda\} * i}_i O_g \psi^{\{\lambda\}}_j = (n/f^{\{\lambda\}}) \psi^{\{\lambda\}}_j \delta_{ij}$$

გამოსახულებაში აჯამვა i ინდექსით არ ხდება. თუ ახლა ეს გამოსახულება ავჯამეთ i ინდექსით 1-დან $f^{[\lambda]}$ -მდე, მაშინ გვექნება:

$$\sum_g \chi^{[\lambda]}(g) * O_g \psi^{[\lambda]}_j = (n/f^{[\lambda]}) \psi^{[\lambda]}_j, \quad j=1, 2, \dots, f^{[\lambda]} \quad (22.9)$$

ცხადია, რომ ამ ტოლობას $\psi^{[\lambda]}_j$ ფუნქციებთან ერთად აკმაყოფილებს მათი ნაბისმიერი წრფივი კომბინაცია. ამიტომ ამბობენ, რომ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (22.9) ტოლობას ეკუთვნის $g^{[\lambda]}$ წარმოდგენას:

$$(n/f^{[\lambda]}) \psi^{[\lambda]} = \sum_g \chi^{[\lambda]}(g) * O_g \psi^{[\lambda]} \quad (22.10)$$

ამიტომ ნებისმიერი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც

$$F = \sum_{\lambda} \psi^{[\lambda]} \quad (22.11)$$

ისმის კითხვა, როგორ შევადგინოთ ნებისმიერი ფუნქციიდან ის ფუნქცია, რომელიც $g^{[\lambda]}$ წარმოდგენის i -ური სტრიქონით გარდაიქმნება ან თვითონ $g^{[\lambda]}$ წარმოდგენას ეკუთვნის. (22.6) ტოლობიდან ჩანს, რომ თუ ნებისმიერ F ფუნქციაზე ვიმოქმედებთ პროექციული ოპერატორით:

$$P^{[\lambda]}_i = \sum_g (f^{[\lambda]}/n) g^{[\lambda]*i} O_g \quad (22.12)$$

მივიღებთ ფუნქციას, რომელიც გარდაიქმნება $g^{[\lambda]}$ წარმოდგენის i -ური სტრიქონით. (22.12) გამოსახულებაში არ ხდება აჯამვა i ინდექსით.

ანალოგიურად შეგვიძლია ავაგოთ პროექტორი, რომელიც ნებისმიერ ფუნქციას გარდაქმნის ფუნქციად, რომელიც $g^{[\lambda]}$ წარმოდგენას ეკუთვნის. ამ ოპერატორს ასეთი სახე აქვს:

$$P^{[\lambda]} = \sum_g (f^{[\lambda]}/n) \chi^{[\lambda]*} O_g \quad (22.13)$$

დაწვრილებით პროექტორების აგებაზე გავჩერდებით, როდესაც გავივლით გადანაცვლებათა ჯგუფის წარმოდგენებს.

23. წარმოდგენათა კრონეკერული ნამრავლი

ფიზიკურ ამოცანების ფადასაწყვეტად საჭირო ხდება ჯგუფის ორი წარმოდგენის ერთმანეთზე გადამრავლება. ამ საკითხს ნაწილობრივ შევხებით მე-17 პარაგრაფში. ახლა ზოგადად განვიხილოთ ეს პრობლემა წარმოდგენათა თეორიის თვალსაზრისით. დაწვრილებით საკითხს კონკრეტული ჯგუფების შესწავლის დროს განვიხილავთ.

ვთქვათ, L ვექტორულ სივრცეში მოქმედებს G ჯგუფის ორი დაუყვანადი წარმოდგენა $g^{\{\lambda\}}$ და $g^{\{\mu\}}$, რომელთა განზომილებები, შესაბამისად, არის $f^{\{\lambda\}}$ და $f^{\{\mu\}}$. ეს ნიშნავს, რომ ჩვენ გვაქვს G ჯგუფის ჰომომორფული მატრიცები, რომლებიც ახორციელებენ ვექტორთა გარდაქმნას, შესაბამისად, $f^{\{\lambda\}}$ განზომილების $L_x \subset L$ და $f^{\{\mu\}}$ განზომილების $L_y \subset L$ ქცევისრეცეებში. ე.ი. გვაქვს:

$$\begin{aligned} x'^i &= g^{\{\lambda\}i}_j x^j \quad i, j = 1, \dots, f^{\{\lambda\}} \\ y'^k &= g^{\{\mu\}k}_l x^l, \quad k, l = 1, \dots, f^{\{\mu\}} \end{aligned}$$

ეს ორი ტოლობა ერთმანეთზე გადავამრავლოთ. მივიღებთ:

$$x'^i y'^k = g^{\{\lambda\}i}_j g^{\{\mu\}k}_l x^j x^l \tag{23.1}$$

$x'^i y'^k$ და $x^j x^l$ სიდიდეები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ვექტორთა ორინდექსიანი კომპონენტები $f^{\{\lambda\}} \times f^{\{\mu\}}$ განზომილების ახალ L' სივრცეში. ამიტომ (23.1) ამყარებს კავშირს G ჯგუფის g ელემენტსა და წრფივ გარდაქმნას შორის L' სივრცეში:

$$x'^i y'^k = g^{\{\lambda\} \times \{\mu\} ik}_{jl} x^j x^l \tag{23.2}$$

სადაც

$$g^{\{\lambda\} \times \{\mu\} ik}_{jl} = g^{\{\lambda\}i}_j g^{\{\mu\}k}_l \tag{23.3}$$

მატრიცები ადგენენ G ჯგუფის ახალ წარმოდგენას.

დავალება 23.1: აჩვენეთ, რომ (23.3) მატრიცები ადგენენ ჯგუფს.

მატრიცების (23.3) ნამრავლს **მატრიცების პირდაპირი ნამრავლი** ეწოდება. ამ შემთხვევაში ერთი მატრიცის თითოეული ელემენტი მეორე მატრიცის ყველა ელემენტზე მრავლდება და ეს ნამრავლები ქმნიან (23.3) მატრიცის მატრიცულ ელემენტებს. პირდაპირი ნამრავლის დროს არ არის საჭირო, რომ მატრიცები

კვადრატული იყოს და მათ ერთნაირი რანგი ჰქონდეთ. მაგალითად, გავამრავლოთ ასეთი ორი მატრიცა:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha & a\beta & b\alpha & b\beta \\ c\alpha & c\beta & d\alpha & d\beta \end{bmatrix}$$

(23.3) მატრიცები ადგენენ G ჯგუფის **ტენზორულ წარმოდგენას**, ხოლო თვით ასეთ ნამრავლს **კრონეკერული ნამრავლი** ეწოდება.

ადვილია ჩვენება, რომ კრონეკერული ნამრავლის ხასიათი თანამამრავლ წარმოდგენათა სახიათების ნამრავლის ტოლია.

დავალეზა 23.2: დაამტკიცეთ ეს დებულება.

ორი კრონეკერული წარმოდგენის კრონეკერული ნამრავლით მიღებული წარმოდგენა, ზოგადად, დაყვანადია. ისმის კითხვა, როგორ შეიძლება მისი დაყვანა? თეორიულად ამის გაკეთება შეიძლება მიღებული მატრიცის რაღაც არასინგულარული მატრიცით მისი **ტრანსფორმაციის** საშუალებით, ე.ი., ასეთი ოპერაციის ჩატარებით

$$S g^{\{\lambda\} \times \{\mu\}} S^{-1}$$

თუ ასეთი S მატრიცა მოიძებნა და ოპერაცია ჩატარდა, შედეგად მიიღება ე.წ. კლებშ-ჟორდანის მწკრივი, რომელსაც ფორმალურად ასე წერენ:

$$g^{\{\lambda\} \times \{\mu\}} = (\lambda \mu | \nu) g^{\{\nu\}} \quad (23.4)$$

ამ გამოსახულებაში $g^{\{\nu\}}$ დაუყვანადი წარმოდგენაა, რომელიც პირდაპირ ნამრავლში შედის, ν ინდექსით აჯამვა წარმოებს, თუმცა ეს არ არის არითმეტიკული ჯამი და მას **პირდაპირ ჯამს** უწოდებენ და მას (20.3) ფორმულით მოცემული სახე აქვს. $(\lambda \mu | \nu)$ კოეფიციენტი გვიჩვენებს $g^{\{\nu\}}$ დაუყვანადი წარმოდგენის ჯერადობას $g^{\{\lambda\} \times \{\mu\}}$ ნამრავლში. საქმე ის არის, რომ დაყვანადი მატრიცის დაყვანისას ზოგიერთი დაუყვანადი წარმოდგენა შეიძლება შემოვიდეს როგორც ერთხელ, ასევე რამდენჯერმე, ან სულაც არ შემოვიდეს. $(\lambda \mu | \nu)$ კოეფიციენტი სწორედ ამ რიცხვს გვიჩვენებს და იგი მთელი დადებითი რიცხვია ან ნული.

თუ (23.4) ტოლობიდან კვალს ვიპოვით, ვნახავთ, რომ

$$\phi^{\{\lambda\} \times \{\mu\}} = (\lambda \mu | \nu) \chi^{\{\nu\}} \quad (23.5)$$

რაც (20.5) ტოლობის ანალოგს წარმოადგენს. ამ ტოლობიდან ხასიათების ორთოგონალობის თვისების გამოყენებით ადვილად მივიღებთ:

$$(\lambda \mu | \nu) = (1/n) \sum_g \phi^{\{\lambda\} \times \{\mu\}}(g) \chi^{\{\nu\}}(g^{-1})$$

ვისარგებლოთ დავალება 23.2-ში დამტკიცებული ტოლობით,

$$\phi^{\{\lambda\} \times \{\mu\}} = \chi^{\{\lambda\}} \chi^{\{\mu\}} \quad (23.6)$$

მივიღებთ:

$$(\lambda \mu | \nu) = (1/n) \sum_g \chi^{\{\lambda\}}(g) \chi^{\{\mu\}}(g) \chi^{\{\nu\}}(g^{-1}) \quad (23.7)$$

ეს ფორმულა ჯერადობის მაჩვენებელი $(\lambda \mu | \nu)$ კოეფიციენტების გამოთვლის საშუალებას იძლევა დაუყვანადი წარმოდგენების ხასიათების საშუალებით. აღსანიშნავია $(\lambda \mu | \nu)$ კოეფიციენტების სიმეტრიის ასეთი თვისება:

$$(\lambda \mu | \nu) = (\mu \lambda | \nu) \quad (23.8)$$

რას ნიშნავს წარმოდგენათა კრონეკერული ნამრავლის დაყვანადობა იმ სივრცისათვის, რომელშიც აიგება ეს წარმოდგენა? როგორც მე-17 პარაგრაფში ვნახეთ, ეს სივრცე დაჭიმულია შემადგენელი სივრცის ვექტორების ნამრავლზე, რომელიც ასეთი სახით შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$\begin{pmatrix} \psi^{\{\lambda\}}_1 \psi^{\{\mu\}}_1 \\ \psi^{\{\lambda\}}_1 \psi^{\{\mu\}}_2 \\ \dots \\ \psi^{\{\lambda\}}_1 \psi^{\{\mu\}}_f \\ \psi^{\{\lambda\}}_2 \psi^{\{\mu\}}_1 \\ \dots \\ \psi^{\{\lambda\}}_2 \psi^{\{\mu\}}_f \\ \dots \\ \psi^{\{\lambda\}}_f \psi^{\{\mu\}}_f \end{pmatrix} \quad (23.9)$$

სადაც f და f' , შესაბამისად, $\{\lambda\}$ და $\{\mu\}$ დაუყვანადი წარმოდგენების განზომილებებია. ის ფაქტი, რომ ამ სივრცეში მოქმედი $g^{\{\lambda\} \times \{\mu\}}$ დაყვანადი წარმოდგენა დავიყვანეთ $g^{\{\nu\}}$ დაუყვანადი წარმოდგენების პირდაპირ ჯამზე უბრალოდ ნიშნავს, რომ (23.9) ვექტორებიდან შევადგინეთ ისეთი წრფივი კომბინაციები, რომ (23.9) სივრცე დაიყო იმდენ ინვარიანტულ ქვესივრცედ, რამდენი დაუყვანადი $g^{\{\nu\}}$ წარმოდგენაც გვაქვს (23.4) გაშლაში. საკითხი ის არის, როგორ ვიპოვოთ ეს წრფივი კომბინაციები?

განვიხილოთ $g^{\{\lambda\}}$ დაუყვანადი წარმოდგენის $f^{\{\lambda\}}$ საბაზისო ფუნქცია $\psi^{\{\lambda\}}_i$ ($i=1,2,\dots,f^{\{\lambda\}}$) და $g^{\{\mu\}}$ დაუყვანადი წარმოდგენის $f^{\{\mu\}}$ საბაზისო ფუნქცია $\psi^{\{\mu\}}_j$ ($j=$

$=1,2,\dots, f^{(\mu)}$). აღნიშნოთ $\Phi^{(\nu)}_k$ -თი ($k=1,2,\dots, f^{(\nu)}$) ფუნქციები, რომელიც ეკუთვნის $g^{(\lambda)} \times g^{(\mu)}$ ნამრავლში შემავალ $g^{(\nu)}$ დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისს. ცხადია, რომ ეს ფუნქციები იქნება $\psi^{(\lambda)}_i \psi^{(\mu)}_j$ ნამრავლების წრფივი კომბინაცია. ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $(\lambda \mu | \nu)$ კოეფიციენტი (23.5) გაშლაში განსხვავებულია ნულისაგან. თუ $(\lambda \mu | \nu) > 1$, მაშინ მოიძებნება $(\lambda \mu | \nu)$ რაოდენობის სიმრავლე, შედგენილი $\psi^{(\lambda)}_i \psi^{(\mu)}_j$ ნამრავლების წრფივი კომბინაციით, რომლებიც ერთმანეთისაგან უნდა განსხვავდებოდეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვერ მივიღებთ $f^{(\lambda)} f^{(\mu)}$ ცალ განსხვავებულ ფუნქციას, რაც უნდა მივიღოთ (23.9) წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციის გარდაქმნით. ეს ნიშნავს რომ $\Phi^{(\nu)}_k$ ფუნქციას კიდევ ერთი ინდექსი უნდა დავუმატოთ, რომელიც განასხვავებს $(\lambda \mu | \nu)$ ექვივალენტური დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციებს ერთმანეთისაგან. ეს დამატებითი ინდექსი აღნიშნოთ τ ასოთი. მაშინ საძიებელი ფუნქციები ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\Phi_s^{(\nu)\tau} = \sum_{i,j} \psi^{(\lambda)}_i \psi^{(\mu)}_j (\lambda i \mu j | \nu \tau s) \quad (23.10)$$

კოეფიციენტებს $(\lambda i \mu j | \nu \tau s)$ კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტებს უწოდებენ და მათი გამოთვლის სხვადასხვა გზები არსებობს სხვადასხვა ჯგუფებისათვის. რადგან $\Phi_s^{(\nu)\tau}$ ფუნქციების რაოდენობა უნდა ემთხვეოდეს $\psi^{(\lambda)}_i \psi^{(\mu)}_j$ ნამრავლების რაოდენობას, ამიტომ

$$\sum_{\nu} (\lambda \mu | \nu) = f^{(\lambda)} f^{(\mu)} \quad (23.11)$$

ბოლო ტოლობა აღნიშნავს, რომ კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტები ადგენენ $f^{(\lambda)} f^{(\mu)}$ რიგის კვადრატულ მატრიცას.

შესაძლებელია შებრუნებული ამოცანის გადაწყვეტაც: $\psi^{(\lambda)}_i \psi^{(\mu)}_j$ ნამრავლის გამოსახვა $\Phi_s^{(\nu)\tau}$ ფუნქციების საშუალებით. ეს ასეთი ტოლობით ხორციელდება:

$$\psi^{(\lambda)}_i \psi^{(\mu)}_j = \sum_{\nu,\tau} \Phi_s^{(\nu)\tau} (\nu \tau s | \lambda i \mu j), \quad i=1,2,\dots, f^{(\lambda)}, j=1,2,\dots, f^{(\mu)} \quad (23.12)$$

(23.12) და (23.10) გამოსახულებების შედარებიდან ჩანს, რომ კლებშ-ჟორდანის კოეფიციენტები **ორთონორმირებულნი** არიან:

$$\sum_{i,j} (\nu' \tau' s' | \lambda i \mu j) (\lambda i \mu j | \nu \tau s) = \delta_{\nu' \nu} \delta_{\tau' \tau} \delta_{s' s} \quad (23.13)$$

$$\sum_{\nu,\tau} (\lambda i' \mu j' | \nu \tau s) (\nu \tau s | \lambda i \mu j) = \delta_{i' i} \delta_{j' j} \quad (23.14)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ წარმოდგენები უნიტარულნი არიან, მაშინ

$$(\nu \tau s | \lambda i \mu j) = (\lambda i \mu j | \nu \tau s)^* \quad (23.15)$$

შეიძლება კლებშ-ჯორდანის კოეფიციენტების გამოსახვა წარმოდგენის მატრიცების საშუალებით. ამისთვის $\Phi_s^{\{\nu\}\tau}$ ფუნქციაზე ვიმოქმედოთ O_g ოპერატორით. (22.1) ტოლობის ძალით გვექნება:

$$O_g \Phi_s^{\{\nu\}\tau} = \sum_t g^{\{\nu\}\tau t} \Phi_t^{\{\nu\}\tau} = \sum_{t,i,j} \psi^{\{\lambda\}i} \psi^{\{\mu\}j} (\lambda i \mu j | \nu \tau t) g^{\{\nu\}\tau t_s}$$

მეორე მხრივ,

$$\begin{aligned} O_g \Phi_s^{\{\nu\}\tau} &= O_g \sum_{i,j} \psi^{\{\lambda\}i} \psi^{\{\mu\}j} (\lambda i \mu j | \nu \tau s) = \sum_{i,j} O_g \psi^{\{\lambda\}i} O_g \psi^{\{\mu\}j} (\lambda i \mu j | \nu \tau s) \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} \psi^{\{\lambda\}k} \psi^{\{\mu\}l} g^{\{\lambda\}k i} g^{\{\mu\}l j} (\lambda i \mu j | \nu \tau s) \end{aligned}$$

$\psi^{\{\lambda\}k} \psi^{\{\mu\}l}$ ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებლობის გამო ორი უკანასკნელი ტოლობის შედარებით ვიღებთ:

$$\sum_t (\lambda i \mu j | \nu \tau t) g^{\{\nu\}\tau t_s} = \sum_{k,l} g^{\{\lambda\}k i} g^{\{\mu\}l j} (\lambda k \mu l | \nu \tau s) \quad (23.16)$$

ამგვარად, მივიღეთ განტოლებათა სისტემა კლებშ-ჯორდანის კოეფიციენტების საპოვნელად. მათი ორთოგონალობის პირობის გამოყენებით (23.16) ტოლობა ასე შეიძლება გადაიწეროს:

$$g^{\{\lambda\}k i} g^{\{\mu\}l j} = \sum_{t,s} \sum_{\nu,\tau} (\lambda i \mu j | \nu \tau t) g^{\{\nu\}\tau t_s} (\nu \tau s | \lambda k \mu l) \quad (23.17)$$

დავალება 23.3: ა) გამოიყვანეთ (23.13), (23.14) და (23.15) ტოლობები.

ბ) მიიღეთ (23.17) ფორმულა.

24. განტოლებასთან დაკავშირებული ჯგუფი. კაზიმირის ოპერატორები

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ ჯგუფთა თეორიის ფიზიკაში გამოყენების ზოგად სქემას. ამ სქემის კონკრეტული რეალიზაცია მოგვიანებით მოხდება, როდესაც წარმოდგენთა აგებას შევისწავლით.

ფიზიკის ამოცანების გადაწყვეტა, როგორც წესი დაკავშირებულია დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნასთან. განტოლებების ზოგადი სახე ასე იწერება:

$$H \psi = \lambda \psi \quad (24.1)$$

აქ H დიფერენციალური ოპერატორია, ხოლო λ – რიცხვი. (24.1) განტოლების ψ ამოხსნას H ოპერატორის საკუთარ ფუნქციას, ხოლო λ რიცხვს საკუთარ მნიშვნელობას ეძახიან.

განვიხილოთ (24.1) განტოლების ამოხსნათა $\{\psi\}$ სივრცე და ვთქვათ, რომ ამ სივრცეში მოქმედი არასინგულარული წრფივი ოპერატორებიდან ავირჩიეთ იმ ოპერატორთა სიმრავლე, რომელიც კომუტირებს H ოპერატორთან. ადვილია ჩვენება, რომ ასეთი ოპერატორების სიმრავლე ადგენს $G=\{g\}$ ჯგუფს.

დავალება 24.1: დაამტკიცეთ, რომ H ოპერატორთან კომუტირებადი წრფივი არასინგულარული ოპერატორები ადგენენ ჯგუფს.

$G=\{g\}$ ოპერატორების ჯგუფი ინვარიანტულს ტოვებს (24.1) განტოლებას და მას განტოლების სიმეტრიის ჯგუფი ან $H\psi = \lambda\psi$ განტოლებასთან დაკავშირებული ჯგუფი ეწოდება.

ახლა ვნახოთ, რა როლი მიუძღვის G ჯგუფს (24.1) განტოლების ამოხსნაში? რადგან g ოპერატორები კომუტირებენ H ოპერატორთან, ამიტომ, თუ ψ ფუნქცია

არის (21.4) განტოლების ამოხსნა, $g\psi$ ფუნქციაც იგივე განტოლების ამოხსნა იქნება. ამგვარად, $\{\psi\}$ სიმრავლე ჩაკეტილია $G=\{g\}$ ჯგუფის გარდაქმნების მიმართ და ადგენს G ჯგუფის რაღაც, ზოგადად რომ ვილაპარაკოთ, დაყვანად წარმოდგენას. ჩვენ ვიცით, რომ დაყვანადობა ნიშნავს, რომ $\{\psi\}$ სივრცეში შესაძლებელია ინვარიანტული ქვესივრცეების გამოყოფა. თითოეული ეს ქვესივრცე იქნება დაკავშირებული λ საკუთარ მნიშვნელობასთან. ამგვარად, (24.1) განტოლებას ექნება იმდენი საკუთარი მნიშვნელობა, რამდენი დაუყვანადი წარმოდგენაც აქვს $G=\{g\}$ ჯგუფს $\{\psi\}$ სივრცეში. თუ გვაქვს საშუალება ავაგოთ G ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციები, მაშინ ჩვენ ვიპოვით რაღაც λ_1 საკუთარი მნიშვნელობის შესაბამის საკუთარი ფუნქციების სრულ კრებულს. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ λ_1 საკუთარი მნიშვნელობა გადაგვარებულია და გადაგვარების ხარისხი შესაბამისი დაუყვანადი წარმოდგენების განზომილების ტოლია.

თუ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, მაშინ ამ საკუთარი მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთარი ფუნქციების სივრცეებში მოქმედებენ არაექვივალენტური წარმოდგენები და, თუ გვაქვს G ჯგუფის ყველა დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციები, ამავე დროს, გვექონია (24.1) განტოლების ამონახსნების სრული სიმრავლე.

ეს მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ შეგვიძლია (24.1) განტოლების ამონახსნების პოვნა განტოლების ამოხსნის გარეშე. თუმცა გასათვალისწინებელია, რომ სამაგიეროდ საპოვნელია (24.1) განტოლებასთან დაკავშირებული ჯგუფის ყველა დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციები. იმის თქმა, რომ ეს ამოცანა უფრო მართივია, ვიდრე განტოლების ამოხსნა, შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა, ეს მიდგომა ბევრად ამსუბუქებს ფიზიკოსთა ცხოვრებას, განსაკუთრებით იმ შემთხვევებში, როდესაც არ არის ცნობილი H ოპერატორის ცხადი სახე, მაგრამ ემპირიული მასალის საფუძველზე შესაძლებელი ვიმსჯელოთ მისი სიმეტრიის თვისებების შესახებ. ასეთია მდგომარეობა ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში.

მართო საკუთარი ფუნქციების პოვნით არ ამოიწურება ჯგუფთა თეორიის გამოყენების უპირატესობა ფიზიკაში. მისი საშუალებით შესაძლებელია λ საკუთარ მნიშვნელობების პოვნაც. ვნახოთ, როგორ შეიძლება ამის გაკეთება?

ჯგუფთა თეორიაში ჯგუფის ყველა გარდაქმნასთან კომუტირებად ოპერატორს კაზიმირის ოპერატორი ეწოდება. ამ განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ H ოპერატორი (24.1) განტოლებასთან დაკავშირებული G ჯგუფის კაზიმირის ოპერატორია.

ჯგუფისთვის კაზიმირის ოპერატორის აგება შეიძლება ჯგუფის გენერატორების საშუალებით. განვიხილოთ სიდიდე:

$$\mathcal{G}_{ij} = \gamma_{il}^k \gamma_{jk}^l \quad (24.2)$$

სადაც γ_{il}^k ჯგუფის შესაბამისი ალგებრის სტრუქტურული კონსტანტებია, ხოლო \mathcal{G}_{ij} სიდიდეების ერთობლიობას ალგებრის მეტრიკული მატრიცა ან კილინგის ფორმა ეწოდება. თუ ეს მატრიცა გადაუგვარებელია (ეს პირობა კი ფიზიკისთვის საინტერესო ჯგუფების შემთხვევაში სრულდება), მაშინ მას აქვს შებრუნებული და

$$\mathcal{G}^{ik} \mathcal{G}_{kj} = \delta^i_j \quad (24.3)$$

როგორც ყოველთვის, X^j ასოთი ჯგუფის გენერატორი აღვნიშნოთ. მაშინ შეგვიძლია ასეთი ოპერატორის შემოტანა:

$$C = \mathcal{G}_{kj} X^k X^j \quad (24.4)$$

ამ ოპერატორს ჯგუფის კაზიმირის კვადრატული ოპერატორი ეწოდება. ადვილია ჩვენება, რომ C ოპერატორი კომუტირებს ყველა გენერატორთან:

$$[C, X^k] = 0 \quad (24.5)$$

დავალება 24.1: აჩვენეთ ეს.

ვიცით, რომ გენერატორები ჯგუფის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორებს წარმოადგენენ. ეს ოპერატორები კი ჯგუფის გარდაქმნის ოპერატორები არიან. ამგვარად კაზიმირის (24.4) ოპერატორი კომუტირებს ჯგუფის გარდაქმნის ოპერატორებთან.

თუ დაუყვანად წარმოდგენას განვიხილავთ, მაშინ შურის ლემების თანახმად, C ოპერატორი ერთეულოვანი ოპერატორის ჯერადია და, ამგვარად, მოცემული დაუყვანადი წარმოდგენის კაზიმირის ოპერატორი განისაზღვრება რიცხვით. ამ რიცხვით შესაძლებელია დაუყვანადი წარმოდგენის დახასიათება.

კომპაქტურ ჯგუფში ბაზისის სპეციალური არჩევით შესაძლებელია კლინგის ფორმის გამარტივება ისე, რომ

$$G_{kj} = \delta_{kj}$$

მაშინ კაზიმირის ოპერატორი ასეთი სახით ჩაიწერება:

$$C = \sum_k (X^k)^2 \quad (24.6)$$

კაზიმირის ოპერატორების სრული რიცხვი ალგებრის რანგის ტოლია. ამიტომ ალგებრის რანგი შეგვიძლია კაზიმირის ოპერატორების საშუალებითაც ვიპოვოთ. ამისთვის საჭიროა

$$[A, X] = 0$$

განტოლების ყველა დამოუკიდებელი ამოხსნის პოვნა. ამ განტოლებაში A ალგებრის ნებისმიერი ელემენტია. A ელემენტის ვარირებით ამოხსნების რიცხვი მინიმუმამდე უნდა დავიყვანოთ. ამ მინიმალურ l რიცხვს ალგებრის რანგი ეწოდება.

ამის შემდეგ შეგვიძლია დავუბრუნდეთ კითხვას, რომელიც ზევით დავსვით: როგორ გვეხმარება ჯგუფთა თეორია (24.1) განტოლების საკუთარ მნიშვნელობათა პოვნაში? ზემოთქმულის საფუძველზე პასუხი ამ კითხვაზე ნათელია: H ოპერატორი, რომელიც კომუტირებს ჯგუფის გარდაქმნებთან, არის ამ ჯგუფის კაზიმირის ოპერატორი, ხოლო ამ ოპერატორთან დაკავშირებული რიცხვი, რომელიც დაუყვანადი წარმოდგენისთვის შეგვიძლია მოვძებნოთ, მაგალითად შურის ლემის დახმარებით ან სხვა გზით, წარმოადგენს H ოპერატორის საძიებელ საკუთარ მნიშვნელობას. H ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობათა სპექტრი დაკავშირებული განტოლებასთან დამოკიდებულია ლის ჯგუფის კომპაქტურობაზე: **კომპაქტური ჯგუფისათვის H ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობების სპექტრი დისკრეტულია.**

ამგვარად, ამ პარაგრაფში მოვხაზეთ ფიზიკაში ჯგუფთა თეორიის მეთოდების გამოყენების ზოგადი სქემა:

- 1) ფიზიკური ამოცანის შესაბამისი განტოლებისათვის ვეძებთ სიმეტრიის ჯგუფს;

- 2) ვპოულობთ ამ ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენებს;
- 3) ვაგებთ დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისს, რითაც ვპოულობთ საკუთარ ფუნქციებს;
- 4) ვეძებთ ჯგუფის კაზიმირის ოპერატორებს, რითაც ვპოულობთ, როგორც H ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობების სპექტრს, ასევე შესასწავლი სისტემის დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეების სრულ კრებულს, რადგან დანარჩენი კაზიმირის ოპერატორები კომუტირებენ H ოპერატორთან.

ამგვარად, ჯგუფთა თეორიის მეთოდები საშუალებას გვაძლევს სრულად შევისწავლოთ ფიზიკური სისტემა.

IV. გადანაცვლებათა ჯგუფის წარმოდგენები

წინა პარაგრაფებში ვნახეთ, რომ გადანაცვლებათა S_n ჯგუფის წარმოდგენების რიცხვი მასში კლასების რიცხვის ტოლია. ვიცით, ასევე, რომ კლასში შემავალ გადანაცვლებებს ერთნაირი ციკლური სტრუქტურა აქვთ, ხოლო ეს სტრუქტურა ცალსახად არის დაკავშირებული n რიცხვის დანაწილებასთან. ამიტომ ცხადია, რომ გადანაცვლებათა S_n ჯგუფის ყოველი დაუყვანადი წარმოდგენა ცალსახად ხასიათდება $\{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ დანაწილებით ანუ იუნგის სქემით (დიაგრამით). ქვევით დავინახავთ, რომ იუნგის დიაგრამების გამოყენება მეტად მოსახერხებელია გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების დასახასიათებლად. ამიტომ შევთანხმდეთ, რომ ამის შემდეგ გადანაცვლებათა ჯგუფის $g^{(\lambda)}$ დაუყვანადი წარმოდგენის ინდექსად სწორედ $\{\lambda\}$ იუნგის სქემას გამოვიყენებთ.

25. გადანაცვლებათა ჯგუფის ხასიათების დათვლა

არსებობს გადანაცვლებათა ჯგუფის ხასიათების დათვლის სხვადასხვა მეთოდები. ჯერ ჩვენ დამტკიცების გარეშე მოვიყვანთ ფრობენიუსის ფორმულას, რომელიც მარტივი ხასიათების დათვლის საშუალებას იძლევა.

განვიხილოთ S_n ჯგუფი. C_ρ -თი აღნიშნოთ $(1^\alpha, 2^\beta, \dots, n^\omega)$ ციკლური სტრუქტურის მქონე კლასი. განვიხილოთ დამოუკიდებელი ცვლადები:

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

სადაც ინდექსი $m \geq n$. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$s_r = \sum_{i=1}^m (x_i)^r \quad (25.1)$$

და შევადგინოთ C_ρ კლასის შესაბამისი ნამრავლი:

$$s_\rho = s_1^\alpha s_2^\beta \dots s_n^\omega \quad (25.2)$$

განვიხილოთ, აგრეთვე, დეტერმინანტი:

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i,j} (x_i - x_j) = \sum_{\pi} (-1)^{d_\pi} \pi x_1^{m-1} x_2^{m-2} \dots x_{m-1} \quad (25.3)$$

აქ \sum ასოთი აღნიშნულია $1, 2, \dots, (m-1)$ ინდექსთა ნებისმიერი გადანაცვლება, ხოლო d_π ამ გადანაცვლების დეკრემენტია. ცხადია, Δ ფუნქცია ნიშანს იცვლის ყოველი ორი ინდექსის გადანაცვლებისას.

$s_\rho \Delta(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ფუნქციაც ნიშანცვლადია და მის გაშლაში ორი ერთნაირი ხარისხის შემცველი წევრის კოეფიციენტი ნულის ტოლია. ამიტომ ამ გაშლაში შეგვიძლია x -ის ხარისხები შეგვიძლია კლებად რიგად დავალაგოთ:

$$s_\rho \Delta(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{\{\lambda\}, \pi} (-1)^{d_\pi} \chi_\rho^{\{\lambda\}} \pi x_1^{\lambda_1 + m - 1} x_2^{\lambda_2 + m - 2} \dots x_{m-1}^{\lambda_{m-1}} \quad (25.4)$$

ფრობენიუსის თეორემაში მტკიცდება, რომ (25.4) გაშლაში შემოსული $\chi_\rho^{\{\lambda\}}$ კოეფიციენტები წარმოადგენენ C_ρ კლასის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის მარტივ ხასიათებს.

თეორემის უკეთ გაგების მიზნით მოვიყვანოთ მაგალითი: ვიპოვოთ S_3 ჯგუფის მარტივი ხასიათები. ამისთვის ვისარგებლოთ ასეთი ფორმულით:

$$[\sum_{i=1}^m x_i]^k = \sum_{\{\lambda\}, \pi} \frac{k!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_k!} \pi x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_m^{\lambda_k} \quad (25.5)$$

სადაც $\{\lambda\}$ აღნიშნავს k რიცხვის დანაწილებას და აჯამვა წარმოებს ყველა შესაძლო დანაწილებით. π – ქვედა ინდექსების ყველა შესაძლო არაიგივური გადანაცვლება. ახლა დავუბრუნდეთ S_3 ჯგუფს. ვიცით, რომ ამ ჯგუფში სამი კლასია ციკლური სტრუქტურით: $(1^3)=(111)$, $(1^2 1)=(12)$ და $(3^1)=(3)$. მათი შესაბამისი \mathfrak{P} ფუნქციები ასეთი სახისა იქნება:

$$s_{(111)} = s_1^3 = (\sum_i x_i)^3 = \sum_{\pi} \pi x_1^3 + 3 \sum_{\pi} \pi x_1^2 x_2 + 6 \sum_{\pi} \pi x_1 x_2 x_3$$

ჯამები ამ გამოსახულებაში ასე უნდა იყოს გაგებული:

$$\sum \pi x_1^3 = x_1^3 x_2^0 x_3^0 + x_1^0 x_2^3 x_3^0 + x_1^0 x_2^0 x_3^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

$$\sum \pi x_1^2 x_2 = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$$

$$\sum \pi x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3$$

ასევე,

$$s_{(12)} = s_1 s_2 = (\sum_i x_i) (\sum_k x_k^2) = \sum_{\pi} \pi x_1^3 + \sum_{\pi} \pi x_1^2 x_2$$

$$s_{(3)} = s_3 = (\sum_i x_i^3) = \sum_{\pi} \pi x_1^3$$

ახლა უკვე შესაძლებელია (25.4) გამოსახულების აგება:

$$\begin{aligned} s_{(111)} \Delta(x_1, x_2, x_3) &= (\sum_{\pi} \pi x_1^3 + 3 \sum_{\pi} \pi x_1^2 x_2 + 6 \sum_{\pi} \pi x_1 x_2 x_3) \sum_{\pi'} \pi' (-)^{d_{\pi'}} x_1^2 x_2^1 x_3^0 \\ &= \sum_{\pi} \pi \sum_{\pi'} \pi' (-)^{d_{\pi'}} [x_1^5 x_2 + x_1^4 x_2^2 + x_1^3 x_2^2 x_3 + 3x_1^4 x_2^2 + 3x_1^3 x_2 x_3^2 + 3x_1^2 x_2^3 x_3 + 6x_1^3 x_2^2 x_3] \end{aligned}$$

ზემოთქმულის ძალით ჯამში გამოტოვებული ყველა წევრი, რომელშიც სხვადასხვა x -ებს ერთნაირი ხარისხები აქვს. π' გადანაცვლებებით შეგვიძლია ეს მრავალწევრი დავიყვანოთ კლებადი ხარისხების წევრების ჯამზე:

$$\begin{aligned} s_{(111)} \Delta(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{\pi} \pi [x_1^5 x_2 - x_1^4 x_2^2 + x_1^3 x_2^2 x_3 + 3x_1^4 x_2^2 - 3x_1^3 x_2^2 x_3 - 3x_1^2 x_2^3 x_3 + 6x_1^3 x_2^2 x_3] \\ &= \sum_{\pi} \pi [1 \cdot x_1^5 x_2 x_3^0 + 2 \cdot x_1^4 x_2^2 x_3^0 + 1 \cdot x_1^3 x_2^2 x_3^1] \end{aligned}$$

(25.4) ტოლობის თანახმად x -ების ხარისხები შედგენილია $\{\lambda\}$ დანაწილების დახმარებით. ამიტომ იმის გათვალისწინებით, რომ (25.4) ტოლობის ხარისხებში შემავალი $m=3$ ბოლო გამოსახულებისთვის მივიღებთ, რომ $5 = \lambda_1 + m - 1 = \lambda_1 + 2$, საიდანაც $\lambda_1 = 3$. ასევე ვიპოვიან, რომ $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. ეს ნიშნავს, რომ $(1^3)=(111)$ კლასის ხასიათი $\{3\}$

დაუყვანად წარმოდგენაში 1-ის ტოლი ყოფილა, {21} წარმოდგენაში 2-ია, ხოლო {1³} წარმოდგენაში კი 1:

$$\chi^{\{3\}}_{(111)} = 1, \quad \chi^{\{21\}}_{(111)} = 2, \quad \chi^{\{111\}}_{(111)} = 1 \quad (25.6)$$

ასევე დაითვლება დანარჩენი ხასიათებიც.

დავალება 25.1: დათვალეთ ეს ხასიათები.

ხასიათებს წარმოადგენენ ცხრილის სახით. S_3 ჯგუფისათვის მას ასეთი სახე აქვს:

ცხრილი 25.1

კლასი	1^3	$1^1 2^1$	3^1
კლასის რიგი	1	3	2
$\chi^{\{3\}}$	1	1	1
$\chi^{\{21\}}$	2	0	-1
$\chi^{\{111\}}$	1	-1	1

როგორც ვიცით, (1^n) ციკლური სტრუქტურის მქონე კლასში ერთადერთი ელემენტია – გადანაცვლებათა ჯგუფის ერთიანი. მას ერთეულოვანი მატრიცა შეესაბამება და ამიტომ გასაგებია, რომ მისი მისი კვალი ანუ ხასიათი დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილებას ემთხვევა. ამგვარად, S_n ჯგუფის (1^n) ციკლური სტრუქტურის მქონე კლასის ხასიათები იძლევა გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების განზომილებებს. ასე, 25.1 ცხრილიდან ცანს, რომ S_3 ჯგუფის {3} და {1³} წარმოდგენები ერთგანზომილებიანია, ხოლო {21} წარმოდგენა – ორგანზომილებიანი.

ფრობენიუსის ფორმულის გამოყენებით შესაძლებელია S_n ჯგუფის { λ } დაუყვანადი წარმოდგენის წარმოდგენის ზოგადი გამოსახულების გამოთვლა. სანამ

ამ გამოსახულების მიღებას შევუდგებოდით, საჭიროა რამდენიმე სასარგებლო განსაზღვრების შემოტანა.

განვიხილოთ დამოუკიდებელი ცვლადები x_1, x_2, \dots, x_n და მათგან შევადგინოთ $\{\lambda\}$ დანაწილების შესაბამისი ნამრავლი ასეთნაირად:

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \quad (25.7)$$

მოვახდინოთ ცვლადთა ინდექსების ისეთი გადანაცვლებები, რომლებიც x_i ცვლადის λ_i ხარისხს x_{i+1} ცვლადის λ_{i+1} ხარისხზე მეტს ან ტოლს ტოვებენ ნებისმიერი i ინდექსისთვის. მაშინ ასეთ გადანაცვლებებს **მესერულ გადანაცვლებებს** უწოდებან.

მაგალითად, $x_1^3 x_2 x_3$ ნამრავლის მესერული გადანაცვლებებია:

$$x_1^3 x_2 x_3, x_1^2 x_2 x_1 x_3, x_1^2 x_2 x_3 x_1, x_1 x_2 x_1^2 x_3, x_1 x_2 x_1 x_3 x_1, x_1 x_2 x_3 x_1^2 \quad (25.8)$$

$\{31^2\}$ დანაწილების შესაბამისი იუნგის სქემა ასეთია:



იუნგის ეს სქემა $x_1^3 x_2 x_3$ ნამრავლის მესერულ გადანაცვლებასთან ასეა დაკავშირებული: პირველი სტრიქონის უჯრედები განკუთვნილია x_1 ცვლადისთვის და მათში უნდა ჩაიწეროს რომელ ადგილზე დგას (25.8) ნამრავლებში ეს ცვლადი. მეორე სტრიქონი განკუთვნილია x_2 ცვლადისთვის და მათში იწერება ამ ცვლადის ადგილები, მესამე სტრიქონი ეკუთვნის x_3 ცვლადს და ა.შ. თუ შევავსებთ მოცემულ იუნგის სქემას აღწერილი წესით, მივიღებთ ასეთ გამოსახულებებს:

1 2 3	1 2 4	1 2 5	1 3 4	1 3 5	1 4 5
4	3	3	2	2	2
5	5	4	5	4	3

ასეთნაირად შევსებულ იუნგის სქემებს **იუნგის ტაბულები** ეწოდება. როგორც ვხედავთ, მესერული გადანაცვლების შესაბამისი იუნგის ტაბულებში ციფრები იზრდება მარჯვნივ და ქვევით. ასეთ ტაბულებს **იუნგის რეგულარული ტაბულები** ეწოდება. ამის შემდეგ, თუ ეს სპეციალურად არ იქნება ხაზგასმული, ჩვენ

ვისარგებლებთ მხოლოდ იუნგის რეგულარული ტაბულებით და მათ უბრალოდ იუნგის ტაბულებს დავუძახებთ.

ფრობენიუსის ფორმულაში (25.7) ნამრავლი შეესაბამება ერთეულოვან ელემენტს, რომლის კოეფიციენტი $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის (1^n) კლასის ხასიათია ან, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამ წარმოდგენის $f^{(\lambda)}$ განზომილება. ფრობენიუსის ფორმულის გამოყენებიდან ცხადია, რომ ეს რიცხვი იუნგის სტანდარტული ტაბულების რიცხვის ტოლია. ამგვარად, გადანაცვლების ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილების საპოვნელად წარმოდგენის შესაბამისი იუნგის სქემა უნდა შევავსოთ ციფრებით 1-დან n -მდე რეგულარული ტაბულების მისაღებად და ამ ტაბულების რიცხვი მოგვცემს შესაბამისი დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილებას.

მაგალითად, დავთვალოთ S_6 ჯგუფის $\{2^3\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილება. შესაბამის იუნგის სქემას ასეთი სახე აქვს:



ამ სქემიდან 5 რეგულარული ტაბულა შეიძლება შედგეს:

1 2	1 3	1 3	1 2	1 2
3 4	2 4	2 5	3 5	2 5
5 6	5 6	4 6	4 6	3 6

ამგვარად, S_6 ჯგუფის $\{2^3\}$ დაუყვანადი წარმოდგენა ხუთგანზომილებიანია.

როგორც ვხედავთ, S_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილების პოვნა გრაფიკულად საკმაოდ ადვილი საქმე ყოფილა, მაგრამ ცხადია, ეს მტკიცება მხოლოდ პატარა n -ებისათვის არის სამართლიანი: დიდი n -ებისათვის ამ მეთოდის გამოყენება საკმაოდ შრომატევადი საქმეა. ამიტომ აჯობებს ზოგადი ანალიზური ფორმულის გამოყვანა. ვიპოვოთ ეს ფორმულა.

ფრობენიუსის ფორმულიდან ცნობილია, რომ ეს რიცხვი უდრის

$$x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_m^{l_m} \quad (25.9)$$

წევრის კოეფიციენტს

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_m) \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^n$$

გამოსახულებაში. (25.9) ფორმულაში ასეთი აღნიშვნაა გაკეთებული:

$$l_i \equiv \lambda_i + m - i$$

ამ გამოსახულებაში m სიმბოლო $\{\lambda\}$ იუნგის სქემაში სტრიქონების რიცხვია. Δ დეტერმინანტს ასეთი სახე აქვს:

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{\pi} (-)^{d_{\pi}} \pi x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

მეორე მხრივ, ადგილი აქვს (25.5) ფორმულას, სადაც ჯამი წარმოებს n რიცხვის ყველა λ დანაწილებით ანუ იუნგის სქემით. იმისთვის, რომ ბოლო ორი გამოსახულების ნამრავლმა გაშლაში მოგვცეს ჩვენთვის საჭირო წევრი, უნდა დავუშვათ, რომ

$$\lambda_i \equiv l_i - k_i$$

მაშინ, ცხადია, გაშლის კოეფიციენტი იქნება:

$$\chi^{\{\lambda\}}(1^n) = n! \sum_{\pi} (-)^{d_{\pi}} \pi \prod_{i=1}^m 1/(l_i - k_i)!$$

ჯამი ამ გამოსახულებაში დეტერმინანტს წარმოადგენს. ამიტომ

$$\chi^{\{\lambda\}}(1^n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{[l_1 - (m-1)]!} & \frac{1}{[l_1 - (m-2)]!} & \dots & \frac{1}{l_1!} \\ \frac{1}{[l_2 - (m-1)]!} & \frac{1}{[l_2 - (m-2)]!} & \dots & \frac{1}{l_2!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის პირველი სტრიქონიდან გამოვიტანოთ $1/l_1!$, მერე სტრიქონიდან $1/l_2!$ და ა.შ. მაშინ ასეთი გამოსახულება დაგვრჩება:

$$\chi^{\{\lambda\}}(1^n) = \frac{n!}{l_1! l_2! \dots l_m!} \begin{vmatrix} l_1(l_1-1) \dots (l_1-m+2), & l_1(l_1-1) \dots (l_1-m+3), & \dots, & l_1, & 1 \\ l_2(l_2-1) \dots (l_2-m+2), & l_2(l_2-1) \dots (l_2-m+3), & \dots, & l_2, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_m(l_m-1) \dots (l_m-m+2), & l_m(l_m-1) \dots (l_m-m+3), & \dots, & l_m, & 1 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის სვეტების გამოკლებით მივიღებთ:

$$\chi^{\{\lambda\}(1^n)} = \frac{n!}{l_1! l_2! \dots l_m!} \begin{vmatrix} l_1^{m-1} & l_1^{m-2} & \dots & l_1 & 1 \\ l_2^{m-1} & l_2^{m-2} & \dots & l_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_m^{m-1} & l_m^{m-2} & \dots & l_m & 1 \end{vmatrix}$$

და, საბოლოოდ, $\chi^{\{\lambda\}(1^n)}$ ხასიათის მქონე S_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის $f^{\{\lambda\}}$ განზომილებისათვის ასეთ გამოსახულებას მივიღებთ:

$$f^{\{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m\}} = \frac{n!}{l_1! l_2! \dots l_m!} \prod_{i,j} (l_i - l_j) \quad (25.10)$$

სადაც

$$l_i = \lambda_i + m - i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (25.10')$$

როგორც ვნახეთ, იუნგის ტაბულები საშუალებას იძლევიან დავთვალოთ გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების განზომილებები, როგორც იუნგის რეგულარული ტაბულების აგებით, ასევე, (25.10) ფორმულის გამოყენებით. ამით მათი როლი ჯგუფის წარმოდგენეთა შესწავლაში სრულად არ ამოიწურება. ეს მხოლოდ ერთ-ერთი მაგალითია.

მოვიყვანოთ მათი გამოყენების მეორე მაგალითი. დავთვალოთ გადანაცვლებათა ჯგუფის ხასიათები გრაფიკული გზით იუნგის სქემების გამოყენებით. ამისთვის უნდა განვსაზოგადოთ იუნგის რეგულარული ტაბულების ცნება. მართლაც, აქამდე რეგულარულ ტაბულებს ვაგებდით მხოლოდ ერთეულოვანი ელემენტის შემცველი კლასისათვის, რომელიც ასეთი სახისაა: (1^n) . ამიტომ იუნგის სქემას ვავსებდით n განასხვავებული ინდექსით. თუ, ზოგადად, გვაქვს $(1^\alpha, 2^\beta, 3^\gamma, \dots)$ კლასი, რომელიც S_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენას შეესაბამება, მაშინ α ცალი განსხვავებული ინდექსი უნდა ავიღოთ (მაგალითად, $1, 2, \dots, \alpha$), β ცალი – წყვილ-წყვილი ერთნაირი ინდექსებისა (მაგალითად, $\alpha+1, \alpha+1, \alpha+2, \alpha+2, \alpha+3, \alpha+3, \dots$), γ ცალი – სამ-სამი ერთნაირი ინდექსებისა და ა.შ. ეს ინდექსები იუნგის სქემაში ისე უნდა განლაგდეს, რომ ერთსახელა ინდექსები (რიცხვები) უნდა განლაგდნენ ერთ სტრიქონში მანამ, სანამ არ დაილევინ ან სანამ შევსებული უჯრების რიცხვი სტრიქონში ერთით არ გადააჭარბებს წინა სტრიქონში შევსებული უჯრების რიცხვს. ამგვარად, ერთსახელა რიცხვებმა კიბის ფორმის უწყვეტი ხაზები უნდა შექმნან:



$$(25.11)$$

ამასთან, მეორე მოთხოვნა, რომელიც შევსებას ეხება, არის ის, რომ ციფრები უნდა იზრდებოდნენ მარცხნიდან მარჯვნივ და ზევიდან ქვევით. პროცედურა უნდა ჩატარდეს იქამდე, სანამ ყველა რიცხვი არ დაილევს და იუნგის სქემა სრულად არ იქნება შევსებული.

ამის შემდეგ უნდა დავითვალოთ სტრიქონები, რომლებშიც ერთნაირი ინდექსებია მოთავსებული. თუ ისინი ლუწი რაოდენობის სტრიქონებში განლაგდნენ, მაშინ განლაგებას უარყოფითი განლაგება ეწოდება და მას შეესაბამება – 1. თუ ერთნაირი ინდექსები კენტი რაოდენობის სტრიქონებში განლაგდნენ, მაშინ გვაქვს დადებითი განლაგება, რომელსაც +1 შეესაბამება. თითოეული ტაბულისათვის დადებითი და უარყოფითი განლაგებების შესაბამისი ციფრები (+1 და –1) ერთმანეთზე მრავლდება და შედეგად ან +1 ან –1 მივიღებთ. ყველა ტაბულის შესაბამისი ± 1 -ების ალგებრული ჯამი გვაძლევს S_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის $(1^\alpha, 2^\beta, 3^\gamma, \dots)$ კლასის ხასიათს. ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ ინდექსების არჩევას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს; მთავარია, რომ \mathbb{Z} ცალი განსხვავებული ინდექსი იყოს, \mathbb{Z} ცალი წყვილი და ა.შ.

მეთოდის ნათელსაყოფად მოყვანოთ მაგალითი: დავთვალოთ $\chi_{(1^1 2^2 15^1)}^{\{16, 2, 2\}}$ ხასიათი. შესაბამის იუნგის სქემას ასეთი სახე ექნება:

••••••••••••••••••••
••
••

ინდექსები შემდეგნაირად შევარჩიოთ: ავიღოთ 15 ერთიანი, 2-2 ორიანი და სამიანი და 1 ოთხიანი. მაშინ მოყვანილი იუნგის სქემა ოთხნაირად შეიძლება შეივსოს:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 4	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 4
2 2	2 3
3 3	2 3
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 4	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3 3 4
1 3	1 2
1 3	1 2

სხვა ტაბულები, რომლებიც აკმაყოფილებენ განზოგადოებული რეგულარული ტაბულების მოთხოვნებს, არ არსებობს. პირველ ტაბულაში ერთნაირი ინდექსები

განსხვავებულ სტრიქონებში არ მეორდება: ერთიანები, ორიანები და სამიანები განლაგებულია თითო-თითო სტრიქონში, ამიტომ ტაბულას შეესაბამება +1. მეორე ტაბულასაც +1 შეესაბამება, რადგან 2 და 3 ინდექსები ორ სტრიქონშია განლაგებული, ამიტომ -1 -1-ზე უნდა გადავამრავლოთ, რაც +1-ს გვაძლევს. შემდეგ ორ ტაბულაში ერთი ლუწი განლაგება გვაქვს (ერთიანები) და ერთიც – კენტი (მესამე ტაბულაში სამიანები, მეოთხეში კი – ორიანები). ამიტომ მათ -1 შეესაბამება. თუ ამ რიცხვებს შევკრიბავთ, მივიღებთ, რომ

$$\chi^{\{16,2,2\}}(1^1 2^2 15^1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

იმის საილუსტრაციოდ, რომ ინდექსების შერჩევას მნიშვნელობა არა აქვს და შეგვიძლია მათი ისე შერჩევა, რომ გავაადვილოთ ხასიათების დათვლა, მოვიყვანოთ იგივე მაგალითი. თუ შევარჩევთ ერთ ერთიანს, 2-2 ორიანსა და სამიანს და თხუთმეტ ოთხიანს, მაშინ ტაბულის აუგებლად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ხასიათია ნულია, რადგან იუნგის სქემაში ერთიანების, ორიანებისა და სამიანების ნებისმიერი განლაგების შემთხვევაში, ოთხიანების განლაგება უწყვეტად, (25.11) სქემით შეუძლებელია.

დავალეზა 25.1: დათვალეთ ხასიათები $\chi^{\{8,3,2,1\}}(1^2 2^2 4^2)$, $\chi^{\{5,5,3,2,1\}}(1^1 5^1 7^1)$, $\chi^{\{3,2,1\}}(2^3)$, $\chi^{\{4,2\}}(2^3)$.

26. გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისის აგება

ჩვენ ვნახეთ, რომ დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილება ემთხვევა (1ⁿ) კლასის შესაბამისი იუნგის ტაბულების რიცხვს. რადგან განზომილება, ამის გარდა, ემთხვევა დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციათა რიცხვს, ამიტომ იუნგის ტაბულები შეიძლება გამოვიყენოთ დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციების აღსანიშნავად. ანალოგია იუნგის ტაბულებსა და საბაზისო ფუნქციებს შორის გაცილებით უფრო ღრმაა, ვიდრე ეს ერთი შეხედვით ჩანს, და ამ ანალოგიის გარკვევას შევუდგებით ახლა.

როგორც ვნახეთ, (1ⁿ) კლასის შესაბამისი იუნგის რეგულარული ტაბულების ასაგებად 1-დან n -მდე განსხვავებული რიცხვები უნდა მოვათავსოთ იუნგის სქემაში მაჯვნივ და ქვევით ზრდადი მიმდევრობით. მათი წაკითხვაც იგივე წესით უნდა მოვახდინოთ – მარცხნიდან მარჯვნივ და ქვევით. მაგალითად,

$$\begin{array}{c} 1\ 3\ 4 \\ 2\ 6 \\ 5 \end{array}$$

ტაბულა ასე წაკითხება: 134265. ორი ტაბულის შესადარებლად შევთანხმდეთ შემდეგზე: ერთი ტაბულა უსწრებს მეორეს, თუ მათი წაკითხვისას, პირველი განსხვავებული ციფრი პირველ ტაბულაში ნაკლებია მეორისაზე. ტაბულების სწორი რიგის დროს წინა ტაბულა უნდა უსწრებდეს მომდევნოს. მაგალითად, {42} იუნგის სქემის შესაბამისი ტაბულების სწორი რიგი ასეთია:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1234 & < & 1235 & < & 1236 & < & 1245 & < & 1246 & < & 1256 & < & 1345 & < & 1346 & < & 1356 \\ 56 & < & 46 & < & 45 & < & 36 & < & 35 & < & 34 & < & 26 & < & 25 & < & 24 \end{array} \quad (26.1)$$

ნიშანი “<” ნახმარია მნიშვნელობით “უსწრებს”. პირველ ტაბულას სწორ რიგში “უფროსი ტაბულა” ეწოდება, ხოლო ბოლოს – “უმცროსი ტაბულა”. რადგან

თითოეულ ტაბულასთან შესაბამისობაში მოგვყავს დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქცია, ამიტომ უფროსი ტაბულის შესაბამის ფუნქციას “**უფროსი ვექტორი**” ვუწოდოთ, ხოლო უმცროსი ტაბულისას – “**უმცროსი ვექტორი**”.

გადანაცვლების ოპერატორის მოქმედება ნებისმიერ ფუნქციაზე ახდენს ამ ფუნქციის არგუმენტში შემავალი კოორდინატების გადასმას. გადასმის შედეგად ფუნქციამ შეიძლება ნიშანი შეიცვალოს, ან არ შეიცვალოს, ან ასეთი არავითარი სიმეტრია არ გამოიჩინოს. ამის მიხედვით შეგვიძლია სამი ტიპის ფუნქციის გარჩევა: ფუნქციები, რომლებიც არგუმენტების გარკვეული წყვილების გადანაცვლებისას ნიშანს იცვლიან, მათ **ანტისიმეტრიული ფუნქციები** ეწოდებათ; ფუნქციები, რომლებიც არგუმენტების გარკვეული წყვილების გადანაცვლებისას ნიშანს არ იცვლიან, მათ **სიმეტრიული ფუნქციები** ეწოდებათ და, ბოლოს, **განურჩეველი სიმეტრიის ფუნქციები**, რომლებიც არგუმენტების გარკვეული წყვილების გადანაცვლების მიმართ არ ამჟღავნებენ სიმეტრიის გარკვეულ თვისებებს. რადგან ფუნქციებთან ცალსახად დავაკავშირეთ იუნგის ტაბულები, ამიტომ საჭიროა ფუნქციათა ზემოაღწერილი თვისებები გადავიტანოთ იუნგის ტაბულებზეც. შევთანხმდეთ, რომ იუნგის სქემის სტრიქონში ჩაწერილი ინდექსების ნებისმიერი წყვილის გადასმის მიმართ ფუნქცია არ იცვლის ნიშანს. იგივე სქემის სვეტში ჩაწერილი ინდექსების ნებისმიერი წყვილის გადასმა შესაბამის ფუნქციას უცვლის ნიშანს, ხოლო დიაგონალურად განთავსებული ინდექსების წყვილების გადასმის მიმართ ფუნქცია განურჩეველ სიმეტრიას ამჟღავნებს. მაგალითად,

1 2 4

3 6

5

ტაბულაში 1, 2, 4 ინდექსების ნებისმიერი წყვილის გადასმა ფუნქციის ნიშანს არ ცვლის მაშინ, როდესაც 1, 3, 5 ინდექსებიდან შედგენილი წყვილების გადასმა ფუნქციას ნიშანს უცვლის. 4, 5, 6 ინდექსების ნებისმიერი წყვილისა და 2, 3 ინდექსების გადასმის მიმართ კი ფუნქცია განურჩეველი სიმეტრიის მდგომარეობაში იმყოფება.

ყველაზე მარტივია S_2 ჯგუფის საბაზისო ფუნქციების აგება. მართლაც, ჯგუფს ორი წარმოდგენა აქვს – $\{2\}$ და $\{12\}$. თითოეულს თითო ფუნქცია აქვს:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} = (\frac{1}{2}) \{ \psi(x^1, x^2) + \psi(x^2, x^1) \} \quad (26.2)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = (\frac{1}{2}) \{ \psi(x^1, y^2) - \psi(y^2, x^1) \} \quad (26.3)$$

ხაზი გავუსვით იმ გარემოებას, რომ იუნგის სქემის ერთ სტრიქონში მოთავსებულ უჯრებს ერთი და იგივე ვექტორი შეესაბამება ((26.2) შემთხვევაში x), ხოლო სხვადასხვა სტრიქონის უჯრებს – განსხვავებული ((26.3) შემთხვევაში x და y). როგორც ვხედავთ, S_2 ჯგუფში საბაზისო ფუნქციების აგება ინტუიციით არის შესაძლებელი. მაგრამ დიდი რიგის ჯგუფებისთვის საჭიროა ზოგადი მეთოდის შემოყვანა.

ადვილი მისახვედრია, რომ ჯგუფის დაუყვანადი ქვეალგებრის იდემპოტენტი ასეთ მატრიცას წარმოადგენს:

$$diag (1^r, 0^{f-r}) \quad (26.4)$$

აქ r დაუყვანადი ქვეალგებრის რიგია, ხოლო f მთელი ალგებრისა. იდემპოტენტი A (26.6) ფორმულით მოცემულ სახეზე დადის მისი რაღაც არასინგულარული S მატრიცით ტრანსფორმაციის საშუალებით SAS^{-1} . S ოპერატორი შესაბამის ფუნქციაზე მოქმედებით გარდაქმნის ბაზისს ასე, რომ სვეტ-ვექტორის პირველ r სტრიქონზე დაჯდება მოცემული დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისი საბაზისო ფუნქციები, ხოლო (26.4) იდემპოტენტის მოქმედება ფუნქციათა მთელი სივრციდან საჭირო სიმეტრიის ქვესივრცეს გამოჭრის. ამრიგად, თუ ავაგეთ იუნგის სქემის შესაბამისი იდემპოტენტი, იგი იქნება პროექციული ოპერატორი და მისი მოქმედებით ნებისმიერ ფუნქციაზე საჭირო სიმეტრიის ფუნქციას მივიღებთ.

სამიხედი იდემპოტენტი ასე ავაგოთ: $\{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ იუნგის სქემის i -ური სტრიქონის λ_i სიმბოლოების გადანაცვლებებისაგან შევადგინოთ S_{λ_i} სიმეტრიული

ჯგუფი. ამ ჯგუფის ელემენტების ჯამი აღვნიშნოთ \mathcal{F} -თი. შევადგინოთ ყველა ასეთი ჯამის ნამრავლი:

$$P = s_1 s_2 \dots s_n$$

ახლა შევდგინოთ გადანაცვლებათა ჯგუფები სვეტებში მოთავსებული ინდექსებისაგან და დავწეროთ ამ გადანაცვლებების ალგებრული ჯამი s_i^- , სადაც ლუწი გადანაცვლებები შედიან პლიუს ნიშნით, უარყოფითები კი – მინუს ნიშნით. ასეთი ჯამების ნამრავლები აღვნიშნოთ N ასოთი:

$$N = s_1^- s_2^- \dots s_n^-$$

ცხადია, რომ P ნამრავლებში ელემენტთა რაოდენობა $\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!$ -ის ტოლია, ხოლო N ნამრავლებში – $\tilde{\lambda}_1! \tilde{\lambda}_2! \dots \tilde{\lambda}_n!$ -ის, სადაც, როგორც ყოველთვის, $\{\tilde{\lambda}\} = \{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n\}$ აღნიშნავს იუნგის $\{\lambda\}$ სქემის შეუღლებულ სქემას. ძნელი საჩვენებელი არ არის, რომ

$$NP / \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n! \tilde{\lambda}_1! \tilde{\lambda}_2! \dots \tilde{\lambda}_n! \quad (26.5)$$

იდემპოტენტია.

დავალება 26.1: აჩვენეთ ეს.

იმის გამო, რომ (26.5) ოპერატორია, შესაძლებელია მისი პროექციულ ოპერატორად გამოყენება. მაგრამ ამისთვის საჭიროა დავრწმუნდეთ, რომ იგი დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისს იძლევა. დ. ე. ლიტლვუდმა დაამტკიცა, რომ დაუყვანადი ალგებრის შესაბამის იდემპოტენტს ასეთი სახე აქვს:

$$Y^{\{\lambda\}} = (f^{\{\lambda\}} / n!) NP \quad (26.6)$$

$f^{\{\lambda\}}$ არის S_n გადანაცვლებათა ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილება. (26.6) ოპერატორი გამოდგება გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის პროექციულ ოპერატორად. მას **იუნგის პროექტორს** უწოდებენ.

როგორც ზევით აღვნიშნეთ, იდემპოტენტის დიაგონალური სახე მოიცემა (26.4) ფორმულით და ამიტომ მისი მოქმედება ფუნქციათა სივრცეზე იმ ბაზისში, რომელშიც ეს ოპერატორი დიაგონალურია, გამოჭრის r რანგის ინვარიანტულ ქვესივრცეს. თუ ოპერატორი დაუყვანად ალგებრას შეესაბამება, ქვესივრცეც

დაუყვანადი იქნება. ეს ნიშნავს, რომ იუნგის ოპერატორის მოქმედება ნებისმიერ ფუნქციაზე იძლევა გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისს.

მაგალითისათვის ავაგოთ S_3 ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების ბაზისები. S_3 ჯგუფისათვის გვაქვს სამი დაუყვანადი წარმოდგენა: $\{3\}$, $\{21\}$ და $\{1^3\}$. ამ წარმოდგენებიდან პირველი და მესამე ერთგანზომილებიანია, ხოლო მეორე – ორგანზომილებიანი. შესაბამის ტაბულებს ასეთი სახე აქვს:

$$\begin{aligned} \{3\} \text{ წარმოდგენისათვის:} & \quad 1 \ 2 \ 3 \\ \\ \{21\} \text{ წარმოდგენისათვის:} & \quad 1 \ 2 \quad 1 \ 3 \\ & \quad 3 \quad , \quad 2 \\ \\ \{1^3\} \text{ წარმოდგენისათვის:} & \quad 1 \\ & \quad 2 \\ & \quad 3 \end{aligned}$$

ამგვარად, გვაქვს იუნგის 4 პროექტორი:

$$\begin{aligned} Y^{\{3\}} &= (1/6) [e + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)] \\ Y_1^{\{21\}} &= (1/3) [e + (12) - (13) - (123)] \\ Y_2^{\{21\}} &= (1/3) [e - (12) + (13) - (132)] \\ Y^{\{111\}} &= (1/6) [e - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)] \end{aligned} \tag{26.7}$$

განვიხილოთ სიმეტრიის არმქონე ნებისმიერი ფუნქცია $\psi(x_1y_2z_3)$. S_3 ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციების მისაღებად მასზე (26.7) ოპერატორებით ვიმოქმედოთ. შედეგად მივიღებთ საჭირო სიმეტრიის ფუნქციებს:

$$\begin{aligned} 1 \ 2 \ 3 &= (1/6) [\psi(x_1y_2z_3) + \psi(x_2y_1z_3) + \psi(x_3y_2z_1) + \psi(x_1y_3z_2) + \psi(x_2y_3z_1) + \psi(x_3y_1z_2)] \\ 1 \ 2 \\ 3 &= (1/3) [\psi(x_1y_2z_3) + \psi(x_2y_1z_3) - \psi(x_3y_2z_1) - \psi(x_2y_3z_1)] \\ 1 \ 3 \\ 2 &= (1/3) [\psi(x_1y_2z_3) - \psi(x_2y_1z_3) + \psi(x_3y_2z_1) - \psi(x_3y_1z_2)] \\ 1 \\ 2 &= (1/6) [\psi(x_1y_2z_3) - \psi(x_2y_1z_3) - \psi(x_3y_2z_1) - \psi(x_1y_3z_2) + \psi(x_2y_3z_1) + \psi(x_3y_1z_2)] \\ 3 \end{aligned} \tag{26.8}$$

ადვილია იმის შემოწმება, რომ (26.8) ფუნქციების ჯამი იგივეურად $\psi(x_1, y_2, z_3)$ ფუნქციის ტოლია, რაც გვარწმუნებს რომ ნებისმიერი სიმეტრიის ფუნქციათა სივრცეში ჩვენ გამოვყავით საჭირო სიმეტრიის ქვესივრცეები. მართლაც,

$$1 \ 2 \ 3$$

ფუნქცია სიმეტრიულია ინდექსების ყველა წყვილის გადამსმის მიმართ. ფუნქციები

$$\begin{matrix} 1 \ 2 & 1 \ 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

ანტისიმეტრიულია, შესაბამისად, (13) და (12) გადამსმების მიმართ, ხოლო ფუნქცია

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

ანტისიმეტრიულია ინდექსების ნებისმიერი წყვილის გადამსმის მიმართ.

ამგვარად, ჩვენ დავრწმუნდით, რომ იუნგის ტაბულების საშუალებით შესაძლებელია გადანაცვლებათა ჯგუფის საბაზისო ფუნქციების აგება იუნგის პროექტორის მოქმედებით ნებისმიერი სიმეტრიის ფუნქციაზე.

დავალება 26.2: ააგეთ S_4 ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციები.

პარაგრაფის ბოლოს მოვიყვანოთ რამდენიმე თეორემა იუნგის პროექტორების შესახებ:

თეორემა 26.1: სხვასხვა დანაწილების შესაბამისი იუნგის ორი პროექტორის ნამრავლი ნულის ტოლია.

დამტკიცება: დამტკიცება ცხადია, რადგან შესაბამისი ტაბულები სხვადასხვა ქვეალგებრებს მიეკუთვნება.

თეორემა 26.2: თუ $Y^{(\lambda)} = (f^{(\lambda)}/n!)N^{(\lambda)}P^{(\lambda)}$ და $Y^{(\mu)} = (f^{(\mu)}/n!)N^{(\mu)}P^{(\mu)}$ ორი გასხვავებული სქემის შესაბამისი პროექტორია ისეთი, რომ ორი სიმბოლო $Y^{(\lambda)}$ სქემის ერთ სტრიქონში იგივეა, რაც $Y^{(\mu)}$ სქემის იგივე ნომრის სვეტში, მაშინ $N^{(\lambda)}P^{(\mu)}$, $P^{(\mu)}N^{(\lambda)}$ და $Y^{(\lambda)}Y^{(\mu)}$ ნულის ტოლია.

დამტკიცება: როგორც ზევით, s_k სიმბოლოთი აღვნიშნოთ k -ური სტრიქონის ინდექსებისგან შედგენილი სიმეტრიული ჯგუფის ელემენტთა ჯამი და, ვთქვათ, ამ სტრიქონში გვაქვს ინდექსები α და β . ცხადია, რომ

$$s_k = s_k(\alpha\beta) = (\alpha\beta)s_k$$

ამიტომ

$$s_k = \frac{1}{2} [e + (\alpha\beta)] \quad s_k = \frac{1}{2} s_k [e + (\alpha\beta)] \quad (26.9)$$

s_k^- სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მეორე სქემის k -ური სვეტის ინდექსებისგან შედგენილი სიმეტრიული ჯგუფის ელემენტების ნიშანცვლადი ჯამი. თეორემის პირობის თანახმად, ეს სვეტი შეიცავს იგივე α და β ინდექსებს. რადგან

$$s_k^- = -s_k^-(\alpha\beta) = -(\alpha\beta)s_k^-$$

ამიტომ

$$s_k^- = \frac{1}{2} [e - (\alpha\beta)] \quad s_k^- = \frac{1}{2} s_k^- [e - (\alpha\beta)] \quad (26.10)$$

ამგვარად,

$$s_k s_k^- = \frac{1}{4} s_k [e + (\alpha\beta)] [e - (\alpha\beta)] s_k^- = 0$$

რითაც თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 26.3: თუ Y_1 და Y_2 ერთი და იგივე დაუყვანადი წარმოდგენის იუნგის პროექტორებია და Y_1 პროექტორის შესაბამისი ტაბულა უსწრებს Y_2 -ის ტაბულას, მაშინ $Y_2 Y_1 = 0$.

დავალება 26.3: დაამტკიცეთ ეს თეორემა.

ამ პარაგრაფში ვნახეთ, რომ იუნგის ტაბულების საშუალებით შესაძლებელია S_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისის აგება. ქვევით ვაჩვენებთ, რომ იუნგის სქემების საშუალებით შესაძლებელია დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცის აგებაც.

შემოვიყვანოთ პრაქტიკული გამოყენებისათვის მოხერხებული აღნიშვნები:

P ნამრავლში შემავალი იუნგის ტაბულის სტრიქონებში შემავალი ინდექსებისგან შედგენილი გადანაცვლებების ჯამები გამოვსახოთ შესაბამისი ინდექსებით, რომლებიც ჩასმულია მართობ ხაზებში – $|\alpha\beta\gamma\dots|$ და მათ სიმეტრიზატორები ვუწოდოთ, ხოლო N ნამრავლში შემავალი ნიშანცვლადი ჯამები – მართკუთხა ფრჩხილებით – $[\mu\nu\dots]$ და მათ ანტისიმეტრიზატორები ვუწოდოთ. შეთანხმების ნათელსაყოფად მიყვანოთ

მაგალითი 26-1: გამოვსახოთ მიღებულ აღნიშვნებში ქვემოთ მოყვანილი იუნგის ტაბულის პროექტორი

$$\begin{array}{c} 1\ 2\ 3 \\ 4\ 5 \\ 6\ 7 \end{array} = [146] [257] |123| |45| |67| \quad (26-11)$$

რადგან, შეთანხმების ძალით,

$$[146] = e^{-(14)-(16)-(46)+(146)+(164)},$$

$$[257] = e^{-(14)-(16)-(46)+(146)+(164)},$$

$$|123| = e^{+(12)+(13)+(23)+(123)+(132)},$$

$$|45| = e^{+(45)}$$

და $|67| = e^{+(67)}$.

ამიტომ (26-11) პროექტორს (ნორმირების გარეშე) ასეთი სახე აქვს:

$$Y = \{ e^{-(14)-(16)-(46)+(146)+(164)} \} \{ e^{-(14)-(16)-(46)+(146)+(164)} \} \times \\ \times \{ e^{+(12)+(13)+(23)+(123)+(132)} \} \{ e^{+(45)} \} \{ e^{+(67)} \}$$

მაგალითი 26-2: ავაგოთ იუნგის პროექტორები S_4 ჯგუფის $\{31\}$ დაუყვანადი წარმოდგენისათვის. წარმოდგენა სამგანზომილებიანია და ასეთი სამი ტაბულა შეესაბამება:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ & & 2 \end{array}$$

შესაბამისი პროექტორები იქნება:

$$Y_1 = (3/4!) [14] |123|$$

$$Y_2 = (3/4!) [13] |124|$$

$$Y_3 = (3/4!) [12] |134|$$

ადვილია შემოწმება, რომ პროექტორები იდემპოტენტებია და შერეული პროექტორების ნამრავლი ნულის ტოლია. მართლაც,

$$Y_1 Y_1 = (1/8)^2 [14] |123| [14] |123|$$

გავშალოთ მეორე ანტისიმეტრიზატორი [14] და გარდავქმნათ ბოლო სამი წევრი შემდაგნაირად:

$$|123| \{e - (14)\} |123| = |123|^2 - |123| (14) |123|$$

ადვილია იმის ჩვენება, რომ $|123|^2 = 6|123|$, ხოლო $|123| = \{e + (12) + (13)\} |23|$. ამიტომ,

$$\begin{aligned} |123| \{e - (14)\} |123| &= 6|123| - \{e + (12) + (13)\} (14) |23| |123| \\ &= 6|123| - (14) \{e + (24) + (34)\} 2 |123| \end{aligned}$$

ამიტომ, პროექტორის კვადრეტი იქნება

$$\begin{aligned} Y_1^2 &= (1/8)^2 [14] \{6|123| - (14) \{e + (24) + (34)\} 2|123|\} \\ &= (1/8)^2 \{6[14] |123| + 2 [14] \{e + (24) + (34)\} |123|\} \end{aligned}$$

მეორე წევრის ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული სამი წევრიდან მხოლოდ e გვაძლევს არანულოვან წვლილს. მართლაც,

$$[14] \{(24) + (34)\} |123| = \{(24) [12] + (34) [13]\} |123| = 0$$

ამიტომ,

$$Y_1^2 = (1/8) 2 \{6[14] |123| + 2 [14] |123|\} = (1/8) 28 [14] |123| = Y_1$$

ასევე შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ დანარჩენი ორი პროექტორიც ერთნაირად ნორმირებული.

დავთვალოთ ახლა შერეული ნამრავლები:

$$Y_1 Y_2 = (1/8) 2 [14] |123| [13] |124|$$

დავთვალოთ ასეთი ნამრავლი

$$\begin{aligned} |123| [13] &= \{ e + (12) + (13) + (23) + (123) + (132) \} \{ e - (13) \} \\ &= e + (12) + (13) + (23) + (123) + (132) - (13) - (132) - e - (123) - (23) - (12) = 0 \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$Y_1 Y_2 = 0$$

ასევე, შეიძლება შემოწმება, რომ ამ შემთხვევაში ყველა სხვადასხვა სახელიანი პროექტორების ნამრავლები ნულს უდრის.

დავალება 26-6: დაამტკიცეთ, რომ

ა) $|123|_2 = 6|123|$

ბ) $|123| = \{ e + (12) + (13) \} |23|$

გ) $[123]_2 = 6[123]$

დ) $[123] = \{ e - (12) - (13) \} |23|$

ე) $Y_2^2 = Y_2$

ვ) $Y_3^2 = Y_3$

ზ) $Y_1 Y_3 = Y_2 Y_3 = Y_2 Y_1 = Y_2 Y_3 = Y_3 Y_1 = Y_3 Y_2 = 0$

თ) $|123| [12] = 0$

ი) $|123| |12| = 2|123|$

ამ პარაგრაფში ჩვენ ვნახეთ, როგორ შეიძლება იუნგის ტაბულების საშუალებით გადანაცვლების ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისის აგება, შემდეგ პარაგრაფში ვნახავთ, როგორ შეიძლება ტაბულების საშუალებით გადანაცვლების ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცების პოვნა.

27. ფრობენიუსისა და იამანუჩის წარმოდგენები.

რეგულარული წარმოდგენა

ჯგუფთა ზოგადი თეორიიდან ვიცით, რომ ყოველი ჯგუფისათვის უამრავი წარმოდგენა არსებობს. გადანაცვლებათა ჯგუფისათვის განვიხილავთ სამ წარმოდგენას – ფრობენიუსის, იმანუჩისა და რეგულარულ წარმოდგენებს.

დავიწყოთ ფრობენიუსის წარმოდგენით. ავაგოთ ფრობენიუსის ალგებრის დაუყვანადი ქვეალგებრის მარტივი მატრიცული წარმოდგენა, საიდანაც შეიძლება ჯგუფის ელემენტის დაუყვანადი წარმოდგენის აგება. მართლაც, როგორც ვიცით, ფრობენიუსის ალგებრის საბაზისო ელემენტებად გამოიყენება სიმეტრიული ჯგუფის π ელემენტები (გადანაცვლებები). ალგებრის ჩაწერა დაუყვანადი მატრიცული ალგებრების ჯამად ნიშნავს ახალ $\{ e_{ij} \}$ ბაზისზე გადასვლას. ცხადია, არსებობს კავშირი ძველ $\{\pi\}$ ბაზისსა და ახალ ბაზისს შორის:

$$e_{ij} = \sum_{\pi} a_{ij} (\pi^{-1}) \pi$$

თუ არსებობს e_{ij} საბაზისო ფუნქციების პოვნის შესაძლებლობა, მაშინ წინა განტოლებების ამოხსნით შეიძლება π გადანაცვლების მატრიცული სახის პოვნა, რაც იძლევა საძიებელ ფრობენიუსის წარმოდგენას.

აღვნიშნოთ A_j ასოთი $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისი j -ური ტაბულა, ხოლო π_{ij} -თი – გადანაცვლება, რომელსაც A_j ტაბულა A_i -ში გადაჰყავს. ამგვარად,

$$P_i \pi_{ij} = \pi_{ij} P_j \quad (27.1)$$

$$N_i \pi_{ij} = \pi_{ij} N_j \quad (27.2)$$

და
$$\pi_{ij} \pi_{jk} = \pi_{ik} \quad (27.3)$$

განვიხილოთ $\{\lambda\}$ იუნგის სქემის შესაბამისი ტაბულები $A_1, A_2, \dots, A_{f^{(\lambda)}}$, ისე დალაგებული, რომ ყოველი A_i ტაბულა უსწრებდეს A_j თუ $i < j$. გამოთვლების გამარტივების მიზნით იუნგის პროექტორის ნორმირების $(f^{(\lambda)}/n!)$ კოეფიციენტი შევიტანოთ P ნამრავლში და შემდეგ P -ს ნაცვლად ვიგულისხმოთ $(f^{(\lambda)}/n!) P$.

თუ $Y_i = N_i P_i$, მაშინ $i < j$ -სათვის წინა პარაგრაფში მოყვანილი თეორემის ძალით $N_j P_j N_i P_i = 0$ და, კერძოდ, $P_j N_i = 0$. თუ ისე მოხდა, რომ A_i -ს რაღაც სვეტში მოხვდა ინდექსთა წყვილი,

მოთავსებული A_j -ს იგივე ნომრის სტრიქონში, მაშინ ცხადია, რომ $P_i N_j = 0$. ამ შემთხვევისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$e_{ij} = N_i \pi_{ij} P_j \quad (27.4)$$

შეიძლება ჩვენება, რომ

$$e_{ij} e_{jk} = e_{ik}$$

და რომ

$$e_{ij} e_{lk} = 0$$

ამგვარად, (27.4) ფორმულით განსაზღვრული გამოსახულება იძლევა მარტივი მატრიცული ალგებრის ბაზისს.

დავალება 27.1: დაამტკიცეთ ბოლო ორი ტოლობა.

(27.4) აღნიშვნის შემოღების დროს ჩვენ საკმაოდ მკაცრი პირობა მოვითხოვეთ, სახელდობრ ის, რომ A_i -ს ერთ-ერთ სვეტში უნდა ყოფილიყო ინდექსების წყვილი, რომელიც A_j ტაბულის ერთსახელა სტრიქონში უნდა მოხვედრილიყო. სამწუხაროდ, ეს ასე ყოველთვის არ არის.

მაგალითი 27.1: განვიხილოთ S_5 ჯგუფის ხუთგანზომილებიანი {32} წარმოდგენის შესაბამისი ტაბულები:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 = & 1 & 2 & 3 & \\ & 4 & 5 & & \\ A_2 = & 1 & 2 & 4 & \\ & & 3 & 5 & \\ A_3 = & 1 & 2 & 5 & \\ & & 3 & 4 & \\ A_4 = & 1 & 3 & 4 & \\ & & 2 & 5 & \\ A_5 = & 1 & 3 & 5 & \\ & & 2 & 4 & \end{array}$$

წინა პარაგრაფში მიღებული შეთანხმების ძალით მოყვანილი ტაბულების შესაბამისი პროექტორები ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \binom{1}{24} [14] [25] |123| |45| \\ Y_2 &= \binom{1}{24} [13] [25] |124| |35| \\ Y_3 &= \binom{1}{24} [13] [24] |125| |34| \\ Y_4 &= \binom{1}{24} [12] [35] |134| |25| \\ Y'_5 &= \binom{1}{24} [12] [34] |135| |24| \end{aligned}$$

ტაბულების შედარებიდან, ცხადია, რომ $Y_i Y_j = Y_i \delta_{ij}$ გარდა ერთი შემთხვევის – $Y_5 Y_1 \neq 0$. ეს მოხდა იმის გამო, რომ ინდექსები 2 და 5 მეხუთე ტაბულაში არ არიან განლაგებული პირველ სტრიქონში მაშინ, როდესაც პირველ ტაბულაში ისინი პირველ სვეტში არიან. ამის გამო

მეხუთე ტაბულა სახეცვლილებას მოითხოვს და მას ამის აღსანიშნავად შტრიხი გავუკეთეთ. ტაბულის სახეცვლილების შესახებ ქვევით გვექნება ლაპარაკი.

ტაბულების ერთმანეთში გადამყვან განაწვლებებს ასეთი სახე აქვს:

$$\begin{array}{ll}
 \pi_{12} = (34), & \pi_{21} = (34), \\
 \pi_{13} = (345), & \pi_{31} = (354), \\
 \pi_{14} = (243), & \pi_{41} = (234), \\
 \pi_{15} = (2453), & \pi_{51} = (2354), \\
 \pi_{23} = (45), & \pi_{32} = (45), \\
 \pi_{24} = (23), & \pi_{42} = (23), \\
 \pi_{25} = (23)(45), & \pi_{52} = (23)(45), \\
 \pi_{34} = (23)(45), & \pi_{43} = (23)(45), \\
 \pi_{35} = (23), & \pi_{53} = (23), \\
 \pi_{45} = (45), & \pi_{54} = (45),
 \end{array}$$

აქ π_{ij} განაწვლებას i ტაბულა გადაყავს j ტაბულაში. ამგ ვარად, მარტივ მატრიცულ ალგებრას ასეთი სახე აქვს:

$$e_{ii} = N_i P_i = A_i, \quad e_{ij} = N_i \pi_{ij} P_j \quad (27-5)$$

კიდევ ერთხელ გავუსვათ ხაზი იმ გარემოებას, რომ P_5 მოითხოვს სახეცვლილებას. (27-5) ელემენტები მარტივ მატრიცულ ალგებრას რომ ადგენს, ადვილად დავრწმუნდებით, თუ შევამოწმებთ, რომ

$$(e_{ii})^2 = e_{ii} \quad \text{და} \quad e_{ij} e_{lk} = e_{ij} \delta_{lk} \quad (27-6)$$

ჯერჯერობით ეს ეხება ყველა ინდექსს, გარდა 5-ისა. ასე, მაგალითად, (27-5) ტოლობის ძალით

$$e_{12} = ({}^1/_{24}) [14] [25] (34) |124| |35| = (1/24) [14] [25] |123| |45| (34) = e_{11} (34)$$

$$e_{21} = ({}^1/_{24}) [13] [25] (34) |123| |45| = (1/24) (34) [14] [25] |123| |45| = (34) e_{11}$$

ამიტომ,

$$e_{12} e_{21} = e_{11} (34) (34) e_{11} = (e_{11})^2 = e_{11}$$

დავალეზა 27-1: შეამოწმეთ მაგალითში მოყვანილი ყველა მტკიცება.

მოყვანილი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ (27-6) ტოლობით განსაზღვრული სიდიდეები ყოველთვის არ ადგენენ მარტივ მატრიცულ ალგებრას და საჭიროა ამ გამოსახულების მოდერნიზაცია.

ამ მიზანს ემსახურება ლიტლვუდის შემდეგი თეორემა:

თეორემა 27-1: თუ $f^{(\lambda)}$ სტანდარტული ტაბულა A_1, A_2, \dots, A_f , წინმსწრები მიმდევრობით არის დალაგებული, N_i წარმოადგენს $f^{(\lambda)}/n!$ ფაქტორზე გამრავლებულ ანტისიმეტრიზატორთა ნამრავლს, P_i – სიმეტრიზატორების ნამრავლს, ხოლო π_{ij} გადანაცვლებაა, რომელსაც A_i ტაბულა A_j ტაბულაში გადაყავს, მაშინ ქვეალგებრის მარტივი მატრიცული წარმოდგენა მოიცემა ფორმულით

$$e_{ij} = P_i N_i M_j \quad (27-7)$$

სადაც M_j აღნიშნავს ასეთ წევრს:

$$M_j = 1 - \sum_i \theta_{ij} \pi_{ij} + \sum_{i,k} \theta_{ki} \theta_{ij} \pi_{kj} - \sum_{i,k,l} \theta_{lk} \theta_{ki} \theta_{ij} \pi_{lj} + \dots \quad (27-8)$$

სადაც

$$\theta_{ij} = (-)^d,$$

ხოლო d არის π_{ij} გადანაცვლების დეკრემენტი.

თეორემა მოგვყავს დამტკიცების გარეშე.

თეორემის ნათელსაყოფად მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი 27.2: ბოლო თეორემის ძალით წინა მაგალითში მოყვანილი შეუსაბამობა მოიხსნება თუ ალგებრის საბაზისო e_{55} ვექტორს განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად:

$$e_{55} = N_5 P_5 M_5$$

(27-8) ფორმულის ძალით

$$e_{55} = N_5 P_5 M_5$$

ამიტომ მეხუთე პროექტორის სწორი ფორმა ასეთი იქნება:

$$Y_5 = \binom{1}{24} [12] [34] |135| |24| \{1 + (2354)\}$$

თუ გავითვალისწინებთ ასეთ ტოლობას,

$$|135| |24|(2354) = |135| |24| (35) (24) (2354) = |135| |24| (25)$$

მაშინ მივიღებთ მეხუთე პროექტორის საბოლოო სახეს:

$$Y_5 = ({}^1/_{24}) [12] [34] |135| |24| |25|$$

ახლა შეიძლება შევამოწმოთ, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული მეხუთე პროექტორით, (27-6) ალგებრა მართლაც ადგენს სრულ მარტივ მატრიცულ ალგებრას.

დავალება 27-2: შეამოწმეთ ეს მტკიცება.

ზოგადად, ფრობენიუსის ალგებრის განსაზღვრა ხდება (27-6) ფორმულის მსგავსი თანაფარდობის საშუალებით:

$$e_{ii} = Y_{ii}, \quad (e_{ii})^2 = e_{ii} \quad \text{და} \quad e_{ij} e_{lk} = e_{ij} \delta_{lk} \quad (27-9)$$

ამ გამოსახულებაში ინდექსები იცვლება 1-დან n -მდე. ალგებრის ყველა არადიაგონალური ელემენტი ადვილად გამოისახება დიაგონალური ელემენტის საშუალებით. მართლაც,

$$e_{ij} = N_i \pi_{ij} P_j M_j = \pi_{ij} N_j P_j M_j = \pi_{ij} e_{jj} \quad (27-10)$$

ალგებრა საშუალებას იძლევა ავსაგოთ გადანაცვლების ჯგუფის ფრობენიუსის წარმოდგენა. ეს ლიტლვუდის შემდეგი თეორემის საშუალებით ხერხდება:

თეორემა 27-2: გადანაცვლების ჯგუფის π ელემენტის შესაბამისი მატრიცა $\{\lambda\}$ დანაწილების

შესაბამის მარტივ მატრიცულ ალგებრაში არის ასეთი მატრიცა $- [b_{st}(\pi)]$,

სადაც $b_{st}(\pi)$ არის π^{-1} ელემენტის კოეფიციენტი გამოსახულებაში

$$n! N_t \pi_{ts} P_s M_t / f^{(\lambda)} \quad (27-11)$$

დამტკიცება: ფრობენიუსის ალგებრის დაუყვანადი ქვეალგებრის საბაზისო ელემენტს ასეთი სახე აქვს:

$$e_{ij} = \sum_{\pi} a_{ij}(\pi) \pi^{-1} \quad (27-12)$$

ამ ტოლობიდან შეიძლება π გადანაცვლების პოვნა:

$$\pi = \sum b_{ji}(\pi) e_{ij} + \phi_{\pi} \quad (27-13)$$

სადაც ϕ_π ნაწილი ეკუთვნის სხვა ქვეალგებრას. ეხლა დავთვალოთ $e_{ij}\pi$ ელემენტის კვალი ორი გზით. ერთი მხრივ,

$$\text{Tr } e_{ij} \pi = \text{Tr } \sum a_{ij}(\pi) \pi^{-1} \pi = n! a_{ij}(\pi)$$

მეორე მხრივ,

$$b_{ij}(\pi) = n! / f^{(\lambda)} a_{ji}(\pi)$$

ამ ორი ტოლობის შედარება გვაძლევს,

$$b_{ij}(\pi) = n! / f^{(\lambda)} a_{ji}(\pi)$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

(27-13) ფორმულიდან ნათელია, რომ წარმოდგენის მატრიცული ელემენტები შეიძლება იყოს ნოლი, ერთი ან მინუს ერთი.

მაგალითი 27.3: მოვიყვანოთ მაგალითი თეორემის გამოყენებაზე და ავაგოთ S_3 ჯგუფის {21} დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისი მატრიცები. ამ წარმოდგენას, როგორც ვიცით, ორი ტაბულ შეესაბამება:

$$\begin{array}{cc} 12 & 13 \\ 3 & 2 \end{array}$$

ცხადია, რომ $M_1=M_2=1$, $f^{(\lambda)}=2$, ხოლო $n!=6$. ამიტომ

$$3 P_1 = e + (12), \quad 3 P_2 = e + (13), \quad N_1 = e - (13), \quad N_2 = e - (12)$$

ამის გარდა, ცხადია, რომ $\sigma_{12} = \sigma_{21} = (23)$. ამიტომ ფრობენიუსის ალგებრის {21} დაუყვანადი ქვეალგებრის შესაბამისი ელემენტები ასეთი ფორმულებით გამოისახება:

$$3 e_{11} = e + (12) - (13) - (123)$$

$$3 e_{22} = e + (13) - (12) - (132)$$

$$3 e_{12} = (23) + (132) - (123) - (13)$$

$$3 e_{21} = (23) + (123) - (132) - (12)$$

ამ გამოსახულებებიდან თუ ამოვკრიბეთ კოეფიციენტებ, რომლებიც π^{-1} გადანაცვლებებთან დგანან, მაშინ π გადანაცვლებებისათვის ასეთ მატრიცებს მივიღებთ:

$$\begin{array}{ccc} e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (12) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & (13) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ (23) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & (123) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (132) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

დავალება 27.2: ა) შეამოწმეთ, რომ ეს მატრიცები მართლაც ადგენენ S_3 ჯგუფის წარმოდგენებს.

ბ) ააგეთ S_4 ჯგუფის $\{31\}$ და $\{2^2\}$ დაუყვანადი წარმოდგენების მატრიცები.

ფიზიკაში გამოიყენება S_n ჯგუფის წარმოდგენა აგებული იამანუჩის მიერ. ამიტომ მას გადანაცვლებათა ჯგუფის იამანუჩის წარმოდგენა ეწოდება. **იამანუჩის წარმოდგენის** საბაზისო ფუნქციები ადგენენ

$$S_n \supset S_{n-1} \supset S_{n-2} \supset \dots \supset S_2 \supset S_1$$

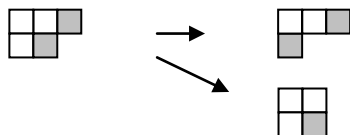
ჯგუფთა ჯაჭვის დაუყვანადი წარმოდგენების ბაზისს. ეს ნიშნავს, რომ ფუნქციებში უნდა ჩანდეს, როგორ მივიღეთ ერთნაწილაკოვანი ფუნქციიდან n -ნაწილაკოვანი ფუნქცია. გადასვლას მაღალი რანგის ჯგუფიდან ან მისი წარმოდგენიდან უფრო დაბალზე ჯგუფის ან წარმოდგენის რედუქციას უწოდებენ.

მაგალითისათვის განვიხილოთ S_5 ჯგუფის $\{32\}$ დაუყვანადი წარმოდგენა და ვნახოთ რა გზებით შეიძლება ამ წარმოდგენის რედუქცია ერთნაწილაკოვან წარმოდგენამდე? განსახილველ წარმოდგენას ასეთი იუნგის სქემა შეესაბამება:

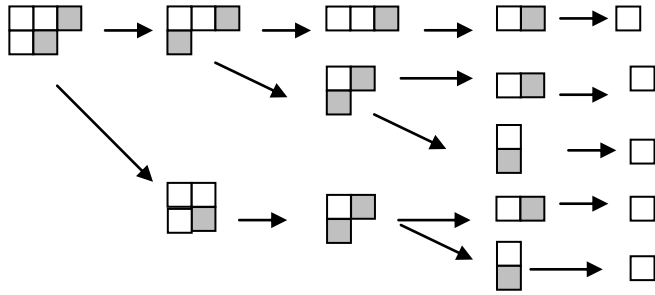


(27.17)

ამ სქემიდან შეიძლება მხოლოდ დაჩრდილული უჯრების მოშორება, წინააღმდეგ შემთხვევაში იუნგის არასტანდარტულ სქემებს მივიღებთ. ამგვარად, სქემიდან S_4 ჯგუფის მხოლოდ ორ დაუყვანად წარმოდგენაზე შეგვიძლია გადავიდეთ:



მიღებული სქემებიდანაც, კვლავ, მხოლოდ დაჩრდილული უჯრების მოშორება შეიძლება. თუ ასე გავაგრძელებთ, მივიღებთ რედუქციის 5 შტოს:



იუნგის სქემების საშუალებით რედუქციებს ასეთი სახე აქვს:

$$\begin{aligned}
 \{32\} &\supset \{31\} \supset \{3\} \supset \{2\} \supset \{1\} \\
 \{32\} &\supset \{31\} \supset \{21\} \supset \{2\} \supset \{1\} \\
 \{32\} &\supset \{31\} \supset \{21\} \supset \{1^2\} \supset \{1\} \\
 \{32\} &\supset \{2^2\} \supset \{21\} \supset \{2\} \supset \{1\} \\
 \{32\} &\supset \{2^2\} \supset \{21\} \supset \{1^2\} \supset \{1\}
 \end{aligned}
 \tag{27.18}$$

დავალება 27.3: მოიყვანეთ S_6 ჯგუფის $\{321\}$ წარმოდგენის ყველა შესაძლო რედუქცია.

საბაზისო ფუნქციების აღსანიშნავად იამანუჩიმ შემოიღო სპეციალური სიმბოლო, რომელშიც თანმიმდებრობით მითითებულია იმ სტრიქონის ნომრები, საიდანაც არის მოშორებული მომდევნო უჯრები. გასაგებია, რომ ამ სიმბოლოებს იამანუჩის სიმბოლოები ეწოდება. მაგალითად, (27.18) რედუქციებიდან პირველს იამანუჩის ასეთი სიმბოლო შეესაბამება: $|22111\rangle$, რადგან $\{32\}$ სქემას უჯრა მეორე სტრიქონიდან ჩამოვაშორეთ, $\{31\}$ -საც მეორედან, ხოლო შემდეგ ჩამოშორება, ბოლო ერთი უჯრის ჩათვლით, მხოლოდ პირველი სტრიქონიდან ხდებოდა. მეორე რედუქციის შესაბამისი იამანუჩის სიმბოლო არის $|21211\rangle$.

დავალება 27.4: ა) დაწერეთ იამანუჩის სიმბოლოები (27.18) გამოსახულების დანარჩენი სამი რედუქციისათვის.

ბ) დაწერეთ იამანუჩის სიმბოლოები 27.3 დავალებაში თქვენ მიერ მოყვანილი რედუქციებისათვის.

ცხადია ცალსახა კავშირი იამანუჩის სიმბოლოზსა და იუნგის ტაბულებს შორის ეს კავშირი მყარდება, თუ იუნგის სქემაში უჯრებს შევავსებთ რიცხვების კლებადი მიმდევრობით დაწყებული n -დან, რომელსაც ჩავსვამთ პირველ მოშორებულ უჯრაში, მეორე მოშორებულ უჯრაში ჩავსვამთ $(n-1)$ და ა.შ. მაგალითად, S_6 ჯგუფის $\{321\}$ წარმოდგენის $|312121\rangle$ იამანუჩის სიმბოლოს შეესაბამება ასეთი ტაბულა:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \\ 6 & & \end{array} \quad (27.19)$$

ზემონათქვამის გათვალისწინებით შემდგომში იამანუჩის სიმბოლოს მაგივრად გამოვიყენებთ იუნგის ტაბულებს.

საბაზისო ფუნქციების ზემოთ მოცემული მეთოდი იძლევა ფუნქციათა ორთოგონალურ სიმრავლეს. ეს მტკიცება გასაგებია, რადგან კარგად ჩანს, რომ ასეთნაირად აგებული ფუნქციები ხასიათდებიან დაუყვანადი წარმოდგენების სხვადასხვა მიმდევრობით. თუ ამასთან საბაზისო ფუნქციებს ვანორმირებთ, მაშინ გვექნება ფუნქციათა ორთონორმირებული სისტემა. ამ სისტემას **იამანუჩის წარმოდგენის ბაზისს** უწოდებენ.

ახლა ავაგოთ სიმეტრიული ჯგუფის იამანუჩის დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცა. ჩვენ ვიცით, რომ ნებისმიერი გადანაცვლება დაიყვანება ტრანსპოზიციათა ნამრავლზე. მაგალითად, (13.3) ტოლობის ძალით:

$$(1234 \dots (n-1)n) = (12) (23) (34) \dots ((n-1)n) \quad (27.20)$$

იამანუჩის რეცეპტი $((i-1)i)$ ტრანსპოზიციის დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცის პოვნის საშუალებას იძლევა. ამის შემდეგ, ბოლო ფორმულის საშუალებით შესაძლებელია ნებისმიერი გადანაცვლების დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცის პოვნა შესაბამისი ტრანსპოზიციათა მატრიცების გამრავლების გზით.

იამანუჩის წარმოდგენაში ტრანსპოზიციის კვადრატული მატრიცის სვეტები და სტრიქონები დანომრილია შესაბამისი წარმოდგენის იუნგის სქემის რეგულარული ტაბულებით. ეს ტაბულები აღვნიშნოთ A_i ასოთი. მაშინ $((i-1)i)$ ტრანსპოზიციის შესაბამისი დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცა აიგება იუნგ-იამანუჩის შემდეგი თეორემის დახმარებით.

თეორემა 27.2: $((i-1) i)$ ტრანსპოზიციის შესაბამისი $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცა ნამდვილია. მისი ელემენტები ნულისგან განსხვავდება მხოლოდ სამ შემთხვევაში:

1. $g_{AA}^{(\lambda)}(i-1, i) = 1$, თუ A ტაბულაში $i-1$ და i ინდექსები ერთ სტრიქონში არიან მოთავსებული;
2. $g_{AA}^{(\lambda)}(i-1, i) = -1$, თუ A ტაბულაში $i-1$ და i ინდექსები ერთ სვეტში არიან მოთავსებული;
3. თუ A_k და A_l ($A_k < A_l$) ტაბულები ერთმანეთისგან მხოლოდ $i-1$ და i ინდექსების გადანაცვლებით განსხვავდებიან, მაშინ ნულისგან განსხვავებული ელემენტები A_k და A_l სვეტების A_k და A_l სტრიქონების გადაკვეთაზე განლაგდება და უდრის:

		$\dots \quad A_k \quad \dots \quad A_l \quad \dots$	
$D^{(\lambda)} =$	$\left(\begin{array}{cccc} \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & -1/d & \dots & \sqrt{1-1/d^2} \dots \\ \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & \sqrt{1-1/d^2} \dots & \dots & 1/d \dots \\ \dots & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$	(27.21)	

ამ გამოსახულებაში d არის, ე.წ., **აქსიალური მანძილი** და იგი მიუთითებს იმ უჯრების რიცხვს, რომელიც უნდა გავიაროთ იუნგის ტაბულაში ვერტიკალურად ან ჰორიზონტალურად იმისთვის, რომ $(i-1)$ ინდექსიდან მივიდეთ i ინდექსამდე.

დამტკიცება არ მოგვყავს.

აქსიალური მანძილისა და A_k და A_l ტაბულების განმარტებიდან ცხადია, რომ

$$d^{(i-1, i)}_{A_k} = d^{(i-1, i)}_{A_l}$$

მაგალითად, (27.19) ტაბულაში აქსიალური მანძილი 6-სა და 5 ინდექსებს შორის ტოლია $d^{(5,6)} = d^{(6,5)} = 4$, $d^{(4,5)} = d^{(5,4)} = 2$ და ა.შ.

მაგალითი 27.4: თეორემის გამოყენების უკეთ გაგების მიზნით ავაგოთ (23) ტრანსპოზიციის დაუყვანადი მატრიცა S_6 ჯგუფის $\{2^3\}$ წარმოდგენაში. წარმოდგენა ხუთგანზომილებიანია და მისი ხუთი ტაბულა უფროსობის მიხედვით ასე ლაგდება:

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} 1\ 2 \\ 3\ 4 \\ 5\ 6 \end{array} &
 \begin{array}{c} 1\ 2 \\ 3\ 5 \\ 4\ 6 \end{array} &
 \begin{array}{c} 1\ 3 \\ 2\ 4 \\ 5\ 6 \end{array} &
 \begin{array}{c} 1\ 3 \\ 2\ 5 \\ 4\ 6 \end{array} &
 \begin{array}{c} 1\ 4 \\ 2\ 5 \\ 3\ 6 \end{array} \\
 A_1 = & A_2 = & A_3 = & A_4 = & A_5 =
 \end{array} \quad (27.22)$$

2 და 3 ინდექსებისათვის აქსიალური მანძილი ამ ტაბულებისათვის ასეთია:

$$d_{A_1} = 2, \quad d_{A_2} = 2, \quad d_{A_3} = 2, \quad d_{A_4} = 2, \quad d_{A_5} = 1$$

იუნგ-იამანუჩის თეორემის ძალით $\{2^3\}$ დაუყვანად წარმოდგენაში ნულისაგან განსხვავებულია (23) ტრანსპოზიციის შემდეგი ელემენტები:

$$\begin{aligned}
 D_{A_1 A_1} &= -\frac{1}{2}, \quad D_{A_1 A_2} = \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad D_{A_2 A_2} = -\frac{1}{2}, \quad D_{A_2 A_4} = \sqrt{\frac{3}{4}}, \\
 D_{A_3 A_1} &= \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad D_{A_3 A_3} = -\frac{1}{2}, \quad D_{A_4 A_2} = \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad D_{A_4 A_4} = -\frac{1}{2}, \quad D_{A_5 A_5} = -1
 \end{aligned}$$

საბოლოოდ, მატრიცა ასეთ სახე მიიღებს:

$$D^{(222)}(23) = \begin{array}{c|ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \hline A_1 & -\frac{1}{2} & 0 & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ A_3 & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ A_4 & 0 & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \quad (27.23)$$

დავალეზა 27.5: იბოვეთ S_6 ჯგუფის $\{2^3\}$ წარმოდგენაში გადანაცვლებები (123) და (132).

იამანუჩის წარმოდგენის აგების გზა უზრუნველყოფს მატრიცების რედუცირებულ ფორმას. ეს ნიშნავს, რომ თუ რაღაც π_1 გადანაცვლება ეკუთვნის S_{n-2} ჯგუფს, მაშინ მისი დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცული ელემენტი S_n ჯგუფში

დაკავშირებული S_{n-2} ჯგუფში მისი დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცულ ელემენტთან ასეთი ფორმულით:

$$D^{[\lambda]}_{AB}(\pi_1) = \delta_{A''B''} D^{[\lambda'']}_{A''B''}(\pi_1) \quad (27.24)$$

სადაც λ'' აღნიშნავს იუნგის სქემას, მიღებულს λ სქემიდან $n-1$ და n ინდექსების შესაბამისი უჯრების დაკლებით, ხოლო A'' და B'' ტაბულებია, მიღებული A და B ტაბულებიდან $n-1$ და n სიმბოლოიანი უჯრების ჩამოშორებით. ბოლო ფორმულა საკმაოდ აადვილებს S_n ჯგუფის იამანუჩის წარმოდგენის აგებას ისეთი გადანაცვლებებისათვის, რომლებიც შედიან S_{n-2} ჯგუფშიც. მართლაც, თუ A და B ტაბულებიდან $n-1$ და n სიმბოლოიანი უჯრების ჩამოშორებით მიღებული იუნგის ტაბულების ერთნაირია, მაშინ S_n ჯგუფის წარმოდგენის მატრიცული ელემენტები ემთხვევიან ერთმანეთს. წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცული ელემენტების ნულის ტოლია.

დავალება 27.6: ეს დებულებანი შეამოწმეთ ტექსტში განხილული და 27.5 დავალებაში გამოთვლილი მატრიცების მაგალითებზე $S_6 \supset S_4$ რედუქციისათვის.

ასევე მარტივდება წარმოდგენის პოვნა შეუღლებული ტაბულისათვის. როგორც ცნობილია, შეუღლებულ ტაბულებში სვეტები შეცვლილია სტრიქონებით და პირიქით. ამიტომ ორი ინდექსი, რომელიც პირდაპირ ტაბულაში ერთ სტრიქონშია, შებრუნებულ ტაბულეში ერთ სვეტში იქნება და პირიქით. ეს ნიშნავს, რომ იუნგ-იამანუჩის თეორემით 1. და 2. პუნქტებში განსაზღვრული მატრიცული ელემენტები ნიშანს იცვლიან. იგივე მოსდის თეორემის 3. პუნქტში განსაზღვრულ მატრიცულ ელემენტებსაც.

დავალება 27.7: დაამტკიცეთ ეს დებულება.

ამგვარად, შეუღლებული ტაბულის შესაბამისი ტრანსპოზიციის მატრიცა განსხვავდება პირდაპირი ტაბულის მატრიცისაგან მინუსი ნიშნით.

მოყვანილი ორი წარმოდგენის გარდა შესაძლებელია კიდევ ერთი წარმოდგენის აგება – ეს არის **გადანაცვლებათა ჯგუფის რეგულარული წარმოდგენა**. მე-20 პარაგრაფის შედეგების მიხედვით ეს ისეთი მატრიცული წარმოდგენაა, რომელიც ჯგუფის ბაზისის შესაბამისი სვეტ-ვექტორების შესაბამის სტრიქონებს გადასვამს. მაგალითად, S_3 ჯგუფის (12) ტრანსპოზიციის რეგულარულ მატრიცულ წარმოდგენას ასეთი სახე აქვს:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (27.25)$$

მართლაც, რადგან

$$(12) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

იგივე მოქმედებას ახდენს ზევით მოყვანილი მატრიცაც:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

რაც ასაბუთებს, რომ (27.25) მატრიცა წარმოადგენს (12) ტრანსპოზიციის რეგულარულ წარმოდგენას:

$$(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

დავალება 27.8: ააგეთ S_3 ჯგუფის დანარჩენი ელემენტების შესაბამისი რეგულარული წარმოდგენები.

28. იუნგ-იამანუჩის წარმოდგენის პროექტორები

26-ე პარაგრაფში შემოტანილი იუნგის წარმოდგენის პროექტორების განსაზღვრება შესაძლებელია განზოგადდეს იამანუჩის წარმოდგენისთვისაც. ძირითადი განსხვავება ამ ორ წარმოდგენას შორის ის არის, რომ იამანუჩის წარმოდგენა საბაზისო ფუნქციათა გენეალოგიურ შედგენილობას ითვალისწინებს, ე.ი., ამ წარმოდგენაში ჩანს რა დაუყვანადი წარმოდგენები ახასიათებს ყველა იმ მრავალნაწილაკოვან ფუნქციას, რომელიც მიიღება ერთნაწილაკოვანი ფუნქციიდან მასზე თითო-თითო ფუნქციის დამატებით. ამიტომ, თუ გვინდა იამანუჩის წარმოდგენის შესაბამისი პროექტორის დაწერა, უნდა დავწეროთ ჯერ ის პროექტორი, რომელიც ორნაწილაკოვანი სისტემის მდგომარეობს აღწერს (ერთნაწილაკოვანი მდგომარეობა ტრივიალურია და ამიტომ მას არ ვითვალისწინებთ), შემდეგ – სამნაწილაკოვანი სისტემის მდგომარეობის აღმწერი პროექტორი და ა.შ., სანამ არ მივალთ საბოლოო n -ნაწილაკოვან მდგომარეობამდე.

ამგვარად, პროექტორს იუნგ-იამანუჩის $\{ \lambda \}$ დაუყვანად წარმოდგენაში ასეთი სახე უნდა ჰქონდეს:

$$\mathcal{Y}^{\{ \lambda \}} = Y(2) Y(3) Y(4) \dots Y(n) \quad (28.1)$$

ამ გამოსახულებაში $\mathcal{Y}^{\{ \lambda \}}$ წარმოადგენს პროექტორს იამანუჩის წარმოდგენაში, რომელსაც **იუნგ-იამანუჩის პროექტორი** ვუწოდით, ხოლო $Y(i)$ არის i -ნაწილაკოვანი სისტემის შესაბამისი იუნგის პროექტორი. იუნგის უფროსი ტაბულის შესაბამის პროექტორს **უფროსი პროექტორი** ვუწოდოთ.

მაგალითად, ავგოთ იამანუჩის წარმოდგენის შესაბამისი პროექტორები S_6 ჯგუფის $\{3^2\}$ წარმოდგენისათვის. შესაბამის ტაბულებს ასეთი სახე აქვს:

1 2 3	1 2 4	1 2 5	1 3 4	1 3 5
4 5 6	3 5 6	3 4 6	2 5 6	2 4 6

პროექტორის აგება რეალურად ორი ნაწილაკის პროექტორით უნდა დავიწყოთ, რადგან ერთი ნაწილაკის პროექტორი ტრივიალურია და 1-ს უდრის. 26-ე

პარაგრაფის შესაბამისად პირველი ტაბულისთვის ორი ნაწილაკის იუნგის პროექტორი $|12\rangle$ -ის ტოლია, სამი ნაწილაკისა $|123\rangle$ არის, ოთხის $[14]|123\rangle$ -ია, ხუთის – $[14][25]|123|45\rangle$ და, ბოლოს, ექვსი ნაწილაკისთვის პროექტორს ასეთი სახე აქვს: $[14][25][36]|123|456\rangle$. ზემოთ მიღებული შეთანხმების ძალით, იამანუჩის წარმოდგენის შესაბამისი პროექტორი ყველა ამ პროექტორის ნამრავლი უნდა იყოს:

$$\mathcal{Y}_1^{\{3^3\}} = |12\rangle \cdot |123\rangle \cdot [14]|123\rangle \cdot [14][25]|123|45\rangle \cdot [14][25][36]|123|456\rangle \quad (28.2)$$

მეორე ტაბულისთვის პროექტორს ასეთი სახე ექნება:

$$\mathcal{Y}_2^{\{3^3\}} = |12\rangle \cdot [13]|12\rangle \cdot [13]|124\rangle \cdot [13][25]|124|35\rangle \cdot [13][25][46]|124|356\rangle \quad (28.3)$$

დავალება 28.1: ააგეთ S_6 ჯგუფის $\{3^2\}$ წარმოდგენის დანარჩენი პროექტორები.

თუ 27–ე პარაგრაფში მიღებულ შეთანხმებას დავიცავთ იმის თაობაზე, რომ ანტისიმეტრიზატორებში ვიგულისხმებთ ნორმირების კოეფიციენტებს $f^{(\lambda)}/n!$, სადაც $f^{(\lambda)}$ S_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ წარმოდგენის განზომილებაა, მაშინ ზემოთ განსაზღვრული პროექტორები, ცხადია, ნორმირებული იქნება.

ამგვარად, შემოღებული პროექტორები სიმეტრიზატორებისა და ანტისიმეტრიზატორების ნამრავლებს წარმოადგენს და მათი გამოყენებისთვის საჭიროა მათზე ოპერაციების ჩატარება. ეს ოპერაციები ნიშნის სიზუსტით ერთიდაიგივე შედეგს იძლევა, ამიტომ უფრო მოხერხებული იქნება სიმეტრიზატორები და ანტისიმეტრიზატორები გავაერთიანოთ ერთ ზოგად ცნებაში და მისთვის სახელი **პერმუტატორი** შემოვიღოთ. პერმუტატორის აღსანიშნავად გამოვიყენოთ ასეთი აღნიშვნა – $\langle \dots \rangle$. ეხლა შესაძლებელია პერმუტატორების ალგებრის ელემენტების ჩამოყალიბება:

1. ინდექსების მიმდევრობას პერმუტატორში არა აქვს არსებითი მნიშვნელობა, ამიტომ ქვევით, როგორც წესი, ციფრებს პერმუტატორში ზრდადი მიმდევრობით დავალაგებთ.

2. თუ (ij) ტრანსპოზიციაა, მაშინ ადვილია ჩვენება, რომ

$$\langle 1\ 2\ 3\ \dots\ q \rangle (ij) = (ij) \langle 1\ 2\ 3\ \dots\ q \rangle,$$

თუ პერმუტატორი არ შეიცავს არც ერთს i და j ინდექსებიდან, ან შეიცავს ორთავეს ერთდროულად და

$$\langle 1\ 2\ 3\ \dots\ i\ \dots\ j\ \dots\ q \rangle (ij) = (ij) \langle 1\ 2\ 3\ \dots\ j\ \dots\ i\ \dots\ q \rangle,$$

თუ i და j ინდექსებიდან ერთერთია პერმუტატორში.

დავალება 28.2: დაამტკიცეთ მოყვანილი ტოლობები.

3. ადგილი აქვს ასეთ ტოლობას:

$$\begin{aligned} \langle 1\ 2\ 3\ \dots\ i\ \dots\ j\ \dots\ q \rangle &= \pm (ij) \langle 1\ 2\ 3\ \dots\ i\ \dots\ j\ \dots\ q \rangle \\ &= \pm \langle 1\ 2\ 3\ \dots\ i\ \dots\ j\ \dots\ q \rangle (ij) \end{aligned} \quad (28.4)$$

ამასთან, ზედა ნიშანი სიმეტრიზატორს ეკუთვნის, ქვედა კი – ანტისიმეტრიზატორს.

დავალება 28.3: დაამტკიცეთ მოყვანილი ტოლობები.

4. პერმუტატორიდან შეიძლება ნაკლები სიგრძის პერმუტატორის გამოყოფა.

მაგალითად, სამართლიანია ასეთი ფორმულები:

$$\langle 1\ 2\ 3\ \dots\ q \rangle = (e \pm \sum_{i=2}^q (1\ i)) \langle 2\ 3\ \dots\ q \rangle \quad (28.5)$$

$$\langle 1\ 2\ 3\ \dots\ q \rangle = \langle 1\ 2 \rangle (e \pm \sum_{i=3}^q [(1\ i) + (2\ i)] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=3}^q (1\ i)(2\ j)) \langle 3\ 4\ \dots\ q \rangle \quad (28.6)$$

$$\begin{aligned} \langle 1\ 2\ 3\ \dots\ q \rangle &= \langle 1\ 2\ 3 \rangle (e \pm \sum_{i=3}^q [(1\ i) + (2\ i) + (3\ i)] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=3}^q (1\ i)(2\ j) + (1\ i)(3\ j) + (2\ i)(3\ j)] + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{i \neq j \neq k=3}^q (1\ i)(2\ j)(3\ k)) \langle 4\ 5\ \dots\ q \rangle \end{aligned} \quad (28.7)$$

და ა.შ. ამ გამოსახულებებში e ერთეულოვანი გადანაცვლებაა, ნიშანი “პლუსი” გამოიყენება სიმეტრიზატორისთვის, ხოლო “მინუსი” – ანტისიმეტრიზატორისათვის. ამასთან, ორივე პერმუტატორი მრგვალი ფრჩხილების ერთ-ერთ მხარეზე შეიძლება იყოს.

დავალება 28.4: დაამტკიცეთ მოყვანილი ტოლობები და ბოლო წინადადების სისწორე.

5. დიდ გამოყენებას პოვებს ასეთი თანაფარდობა გადანაცვლებებისათვის:

$$(1\ i)(2\ j) = (1\ 2)(i\ j)(1\ i)(2\ j) = (1\ j)(2\ i)(1\ 2)(i\ j) \quad (28.8)$$

6. პერმუტატორთა ალგებრისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს აგრეთვე ასეთ ტოლობას:

$$\begin{aligned} \langle 1\ 2\ 3 \dots i \dots j \dots a \rangle (i\ k)(j\ l) \langle b \dots i \dots j \dots q \rangle = \\ = \pm \langle 1\ 2\ 3 \dots i \dots j \dots q \rangle (i\ l)(j\ k) \langle b \dots i \dots j \dots q \rangle \end{aligned} \quad (28.9)$$

ნიშანი პლუსი აიღება, თუ ტრანსლაციების ნამრავლი აღებულია ერთსახელა პერმუტატორებს შორის (ორივე სიმეტრიზატორია ან ორივე ანტისიმეტრიზატორი), ხოლო მინუსი, თუ ტრანსლაციები ჩასმულია სხვადასხვა სახელიან პერმუტატორებს შორის.

დავალება 28.5: დაამტკიცეთ (28.8) და (28.9) ტოლობები.

7. მოყვანილი თანაფარდობების გარდა მეტად სასარგებლოა ნორმირებული იუნგის პროექტორების იდეალპოტენცობის თვისება:

$$(Y_i^{[\lambda]})^2 = (q! / f^{[\lambda]}) Y_i^{[\lambda]} \quad (28.10)$$

ამიტომ გასაგები ხდება ასეთი თანაფარდობის სისწორე:

$$[14][25] |123||45| \cdot [14][25] |123||45| = 24 [14][25] |123||45|$$

8. (28.10) თვისების გამოყენებით შესაძლებელია პერმუტატორთა ნამრავლში პერმუტატორის დამატებაც. მაგალითად,

$$|123|[14][25] |123||45| = \frac{1}{2} |123||45| [14][25] |123||45|$$

9. საჭიროა პერმუტატორთა ერმიტულად შეუღლებულის განსაზღვრა. ამისთვის უნდა ვიპოვოთ ნებისმიერი გადანაცვლების ერმიტულად შეუღლებული რადგან

$$\pi^\dagger = \pi^{-1} \quad (28.11)$$

ხოლო პერმუტატორი შეიცავს S_q ჯგუფის ყველა ელემენტის ჯამს, ამიტომ გასაგებია, რომ

$$\langle 1, 2, 3, \dots, q \rangle^\dagger = \langle 1, 2, 3, \dots, q \rangle \quad (28.12)$$

10. კიდევ ერთი შენიშვნა. პერმუტატორებით აგებული პროექტორები უნდა მოქმედებდნენ ერთსადაიმავე ფუნქციაზე. ასე, მაგალითად, იუნგის ტაბულის შესაბამისი პროექტორის მეორე უჯრაში მოთავსებული ინდექსი უნდა მოქმედებდეს ფუნქციის მეორე ცვლადზე. მაშინ როდესაც პროექტორის მეორე უჯრაში სამიანი წერია ის მოქმედებს ფუნქციის მესამე ცვლადზე და არა მეორე ადგილზე მჯდარ ინდექსზე. ამ შეუსაბამობის თავიდან ასაცილებლად ფუნქციაში ცვლადები ისე უნდა გადავაწყოთ, რომ პროექტორის ყოველ ინდექსს ფუნქციაში თავისი შესაბამისი ცვლადი შეხვდეს. ამის გაკეთება ადვილია, თუ ფუნქციაზე ვიმოქმედებთ გადანაცვლებით, რომელსაც უფროსი ტაბულა გადაჰყვს მოცემულ ტაბულაში (გავიხსენოთ, რომ უფროს ტაბულაში ინდექსები სწორი მიმდევრობით არის დალაგებული). თუ ახლა ამ გადანაცვლებას პროექტორს მივაკუთვნებთ და მას პროექტორის პერმუტატორებში გავატარებთ, მაშინ პროექტორებს წინ დაუჯდება მოცემული ტაბულის უფროსში გადამყვანი გადანაცვლება, ხოლო პროექტორებში ერთიდაიგივე ინდექსები გვექნება. ამით ყველა პროექტორი ერთიდაიგივე ცვლადების ერთობლიობაზე იმოქმედებს.

ბოლო მოთხოვნის ნათელსაყოფად მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი 28.1: ავაგოთ პროექტორები იამანუჩის წარმოდგენაში S_4 ჯგუფის {31} წარმოდგენისათვის. მიღებული შეთანხმებების საფუძველზე მათ ასეთი სახე ექნებათ:

$$\mathcal{Y}_1^{(31)} = \frac{1}{2}|12| \cdot \frac{1}{6}|123| \cdot \frac{1}{8}[14]|123\rangle = \frac{1}{96}|12||123|[14]|123|$$

$$\mathcal{Y}_2^{(31)} = \frac{1}{2}|12| \cdot \frac{1}{3}[13]|12| \cdot \frac{1}{8}[13]|124| \cdot (34) = \frac{1}{48}(34)|12|[14]|12|[14]|123|$$

$$\mathcal{Y}_3^{(31)} = \frac{1}{2}[12](\frac{1}{3}[12]|13|)(\frac{1}{8}[12]|134|)(243) = \frac{1}{48}(243)[14][14]|12|[14]|123|$$

როგორც ვხედავთ, წინ დაწერილი გადანაცვლების გამოკლებით, პროექტორები შეიცავს ერთსადაიმავე ინდექსებს საჭირო მიმდევრობით. პერმუტატორთა თვისებების გამოყენებით მოყვანილი გამოსახულებები შეიძლება საკმაოდ გამარტივდეს. მართლაც,

$$|12||123| = 2|123|$$

$$|12|[14]|12|[14] = 3|12|[14]$$

$$[14][14]|12|[14]|123| = 2 \times 3[14]|123|$$

ამიტომ პროექტორებისათვის გვექნება ასეთი გამოსახულებები:

$$\mathcal{Y}_1^{[31]} = 1/48|123|[14]|123|$$

$$\mathcal{Y}_2^{[31]} = 1/16(34)|12|[14]|123| \quad (28.13)$$

$$\mathcal{Y}_3^{[31]} = 1/8(234)[14]|123|$$

გასაგებია, რომ კოეფიციენტები პროექტორების წინ არ გამოდგება მათი მოქმედების შედეგად მიღებული გადანაცვლების ჯგუფის ფუნქციების ნორმირებისათვის, რადგან მათი მოვალეობაა უზრუნველყონ პროექტორების იდეალპოტენტურობა. ამიტომ შემდგომში პროექტორებს არ ვანორმირებთ. ნორმირებული ფუნქციების მისაღებად საცდელ ფუნქციად უნდა ავიღოთ ერთზე ნორმირებული ფუნქცია და პროექტორის მოქმედების შედეგად მიღებული გამოსახულება კვლავ ერთზე უნდა ვანორმიროთ. მაგალითად, (28.13) პროექტორების მოქმედება ნებისმიერი სიმეტრიის $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ფუნქციაზე მოგვცემს S_4 ჯგუფის {31} წარმოდგენის ასეთ საბაზისო ფუნქციებს:

$$\begin{aligned} \Psi_1^{[31]} = 1/\sqrt{72} [& 3\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) + 3\varphi(x_2, x_1, x_3, x_4) + 3\varphi(x_3, x_2, x_1, x_4) \\ & + 3\varphi(x_1, x_3, x_2, x_4) + 3\varphi(x_3, x_1, x_2, x_4) + 3\varphi(x_2, x_3, x_1, x_4) \\ & - \varphi(x_4, x_2, x_3, x_1) - \varphi(x_1, x_4, x_3, x_2) - \varphi(x_1, x_2, x_4, x_3) \\ & - \varphi(x_4, x_1, x_3, x_2) - \varphi(x_2, x_4, x_3, x_1) - \varphi(x_2, x_1, x_4, x_3) \\ & - \varphi(x_4, x_2, x_1, x_3) - \varphi(x_3, x_2, x_4, x_1) - \varphi(x_3, x_4, x_1, x_2) \\ & - \varphi(x_1, x_4, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_3, x_4, x_2) - \varphi(x_4, x_3, x_2, x_1) \\ & - \varphi(x_4, x_1, x_2, x_3) - \varphi(x_3, x_4, x_2, x_1) - \varphi(x_3, x_1, x_4, x_2) \\ & - \varphi(x_4, x_3, x_1, x_2) - \varphi(x_2, x_3, x_4, x_1) - \varphi(x_2, x_4, x_1, x_3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{[31]} = 1/\sqrt{36} [& 2\varphi(x_1, x_2, x_4, x_3) + 2\varphi(x_2, x_1, x_4, x_3) + 2\varphi(x_3, x_2, x_4, x_1) \\ & + 2\varphi(x_1, x_3, x_4, x_2) + 2\varphi(x_3, x_1, x_4, x_2) + 2\varphi(x_2, x_3, x_4, x_1) \\ & - \varphi(x_4, x_2, x_3, x_1) - \varphi(x_1, x_4, x_3, x_2) - \varphi(x_4, x_1, x_3, x_2) \\ & - \varphi(x_2, x_4, x_3, x_1) - \varphi(x_4, x_2, x_1, x_3) - \varphi(x_3, x_4, x_2, x_1) \end{aligned} \quad (28.14)$$

$$\begin{aligned}
& - \varphi(x_4, x_3, x_2, x_1) - \varphi(x_1, x_4, x_2, x_3) - \varphi(x_4, x_1, x_2, x_3) \\
& - \varphi(x_3, x_4, x_2, x_1) - \varphi(x_4, x_3, x_1, x_2) - \varphi(x_2, x_4, x_1, x_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3^{\{31\}} = & 1/\sqrt{12} [\varphi(x_1, x_4, x_3, x_2) + \varphi(x_2, x_4, x_3, x_1) + \varphi(x_3, x_4, x_1, x_2) \\
& + \varphi(x_1, x_4, x_2, x_3) + \varphi(x_3, x_4, x_2, x_1) + \varphi(x_2, x_4, x_1, x_3) \\
& - \varphi(x_4, x_2, x_3, x_1) - \varphi(x_4, x_1, x_3, x_2) - \varphi(x_4, x_2, x_1, x_3) \\
& - \varphi(x_4, x_3, x_2, x_1) - \varphi(x_4, x_1, x_2, x_3) - \varphi(x_4, x_1, x_2, x_3)]
\end{aligned}$$

ნორმირების კოეფიციენტების მიღებისას გამოიყენება ფუნქციათა ნორმირების ასეთი თანაფარდობა:

$$\langle \varphi(x_i, x_j, x_k, x_l) | \varphi(x_m, x_n, x_p, x_q) \rangle^2 = \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kp} \delta_{lq} \quad (28.15)$$

ადვილია იმაში დარწმუნება, რომ მიღებული (28.14) ფუნქციები თანაფარდობა (28.15)-ის გამოყენებით აკმაყოფილებენ ორთოგონალობისა და ნორმირების პირობებს.

დავალეზა 28.6: დაამტკიცეთ ეს დებულება.

მაგალითად, გავიხსენოთ (28.2) და (28.3) ტოლობებით განსაზღვრული და 28.1 დავალეზაში მიღებული S_6 ჯგუფის $\{3^2\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის პროექტორები და ზემოთ მოყვანილი წესების საშუალებით გავამარტივოთ ისინი. ადვილია ჩვენება, რომ მათ ასეთი სახე ექნებათ (ნორმირების კოეფიციენტების გარეშე):

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_1^{\{33\}} &= |123| |456| [14][25][36] |123| |456| \\
\mathcal{Y}_2^{\{33\}} &= (34) |123| |56| [14][25][36] |123| |456| \\
\mathcal{Y}_3^{\{33\}} &= (35) |12| [14][25][36] |123| |456| \\
\mathcal{Y}_4^{\{33\}} &= (24) |56| [14][25][36] |123| |456| \\
\mathcal{Y}_5^{\{33\}} &= (2354) [14][25][36] |123| |456|
\end{aligned} \quad (28.16)$$

² < > ფრჩხილები ამ გამოსახულებაში აღნიშნავს φ ფუნქციათა სკალარულ ნამრავლს და არა პერმუტატორს.

გადანაცვლებები მეორე-მეხუთე ოპერატორების წინ დასხდნენ ჩვენი მე-10 შეთანხმების შესაბამისად. ხაზგასასმელია ის ფაქტიც, რომ ყველა პროექტორი ერთსა და იმავე ინდექსების პერმუტატორებს შეიცავს, ოღონდ სხვადასხვა მიმდევრობით.

დავალება 28.7: მიიღეთ (28.16) პროექტორები.

ადვილია შემჩნევა, რომ ხუთივე პროექტორს აქვს საერთო ნაწილი, რომელიც შესაბამისი იუნგის პროექტორის ტოლია:

$$Q^{\{33\}} \equiv Y_1^{\{33\}} = [14][25][36] |123| |456| \quad (28.17)$$

ეს ნაწილი, ცხადია, არ არის დამოკიდებული იამანუჩის სიმბოლოზე ანუ ტაბულის ნომერზე ხოლო ამ ნომერზე დამოკიდებულ ნაწილებს ასეთი სახე აქვთ:

$$\begin{aligned} T_1^{\{33\}} &= |123| |456| \\ T_2^{\{33\}} &= (34) |123| |56| \\ T_3^{\{33\}} &= (35) |12| \\ T_4^{\{33\}} &= (24) |56| \\ T_5^{\{33\}} &= (2354) \end{aligned} \quad (28.18)$$

მაგალითში მოყვანილი თვისება საერთოა იამანუჩის წარმოდგენის ყველა პროექტორისათვის და, ზოგადად, ეს პროექტორები ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\mathcal{Q}_j^{\{\lambda\}} = T_j^{\{\lambda\}} Q^{\{\lambda\}} \quad (28.19)$$

$Q^{\{\lambda\}}$ ოპერატორის ზოგადი სახის დაწერა ადვილია, თუ უფროს ტაბულას ზოგადად ჩავწერთ:

1	2	...	a-1	a	...	b-1	b	...	c-1
c	c+1	...	d-1	d	...	i-1	i		
.
j	j+1	...	l-1	l					

მაშინ გასაგებია, რომ $Q^{\{\lambda\}}$ ოპერატორი ასეთი სახის იქნება:

$$\begin{aligned} Q^{\{\lambda\}} &= [1c \dots j] [2(c+1) \dots (j+1)] \dots [a \ d \dots l] \dots [bi] |12 \dots (a-1)a \dots (b-1)b \dots (c-1)| \\ &\quad |c(c+1) \dots (d-1)d \dots (i-1)i| \dots |j(j+1) \dots (l-1)l| \end{aligned} \quad (28.20)$$

სამწუხაროდ, გამარტივებული T ოპერატორის ზოგადი სახის დაწერა ასევე ადვილი არ არის, თუმცა მისი დაწერა ზოგადად შესაძლებელია უფროსი პროექტორისათვის. მას ასეთი სახე აქვს:

$$T_1^{\{\lambda\}} = |12 \dots (a-1)a \dots (b-1)b \dots (c-1) \parallel c(c+1) \dots (d-1)d \dots (i-1)i \dots |j(j+1) \dots (l-1)l| \quad (28.21)$$

და, შესაბამისად, უფროს პროექტორს ასეთი სახე ექნება:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1^{\{\lambda\}} = & |12 \dots (a-1)a \dots (b-1)b \dots (c-1) \parallel c(c+1) \dots (d-1)d \dots (i-1)i \dots \\ & |j(j+1) \dots (l-1)l| [1c \dots j] [2(c+1) \dots (j+1)] \dots [a \ d \dots l] \dots [bi] \\ & |12 \dots (a-1)a \dots (b-1)b \dots (c-1) \parallel c(c+1) \dots (d-1)d \dots (i-1)i \dots \\ & |j(j+1) \dots (l-1)l| \end{aligned} \quad (28.22)$$

ზოგი იუნგის სქემისთვის ამის გაკეთება შესაძლებელია. მაგალითად, ა) q -უჯრიანი ერთსტრიქონიანი იუნგის სქემისთვის – $\{\lambda\}=\{q\}$ და ბ) ასეთი ტიპის q -უჯრიანი იუნგის სქემისთვის – $\{\lambda\} = \{q-1, 1\}$. პირველ შემთხვევაში

$$T_1^{\{q\}} = 1 \quad (28.23)$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში

$$T_j^{\{q-1,1\}} = (q-j+1, q-j+2, \dots, q) |123 \dots (q-j)| \quad (28.24)$$

როგორც ზევით, აქაც მრგვალი ფრჩხილები გადანაცვლებებს აღნიშნავენ, ხოლო სწორი ფრჩხილები – სიმეტრიზატორებს. შევთანხმდეთ, რომ $|123 \dots (q-j)| = 1$, როცა $j = (q-1)$, ხოლო $(q-j+1, q-j+2, \dots, q) = 1$, როცა $j = 1$.

დავალება 28.8: მიიღეთ (28.23) და (28.24) ოპერატორები.

ნათელია, რომ ამ შემთხვევებში შესაძლებელია \mathcal{Y} -ოპერატორების ცხადი სახის დაწერაც.

$$\mathcal{Y}_1^{\{q\}} = |123 \dots q| \quad (28.25)$$

$$\mathcal{Y}_j^{\{q-1,1\}} = (q-j+1, q-j+2, \dots, q) |123 \dots (q-j)| [1q] |123 \dots q-1| \quad (28.26)$$

შესაძლებელია სხვა პროექტორების ზოგადი სახის დაწერაც, მაგრამ ამისთვის \mathcal{Y} -ოპერატორების j ინდექსის ნაცვლად საჭირო ხდება იამანუჩის სიმბოლოების გამოყენება.

(28.19) ფორმულებით განსაზღვრულ იუნგ-იამანუჩის პროექტორებს ასეთი საინტერესო თვისება აქვთ:

$$\mathcal{Y}_{j, \{\lambda'\}^\dagger} \mathcal{Y}_j^{\{\lambda\}} = M_j^{\{\lambda\}} \mathcal{Y}_1^{\{\lambda\}} \delta_{\lambda' j'} \quad (28.27)$$

აქ $\mathcal{Y}_1^{\{\lambda\}}$ უფროსი პროექტორია, $M_j^{\{\lambda\}}$ რაღაც რიცხვებია, რომელთა დათვლა ყველა კონკრეტულ შემთხვევაში შესაძლებელია, ხოლო (28.23) და (28.24) ფორმულების შემთხვევაში შესაძლებელია მათი ზოგადი გამოსახულების დაწერა:

$$M_1^{\{q\}} = q! \quad (28.28)$$

$$M_j^{\{q-1, 1\}} = (q-j-1)! (q-j+1)! \quad (28.29)$$

დავალება 28.9: მიიღეთ ბოლო ორი ფორმულა.

როგორც მე-20 პარაგრაფში ვნახეთ, შეუღლებული დანაწილებების შესაბამის იუნგის სქემებში შეცვლილია სტრიქონები სვეტებით და პირიქით. ასეთი სქემების შესაბამისი დაუყვანადი წარმოდგენები გადანაცვლებათა ჯგუფში სიმეტრიულებია. ეს ნიშნავს, რომ წარმოდგენებს ერთნაირი განზომილებები აქვს, წარმოდგენის მატრიცების მატრიცული ელემენტები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ნიშნით და ა.შ.

დავალება 28.10: აჩვენეთ ეს.

ამიტომ იუნგ-იამანუჩის პროექტორები შეიძლება აიგოს მხოლოდ პირდაპირი წარმოდგენებისათვის (ხაზი გავუსვათ, რომ პირდაპირი წარმოდგენების არჩევა პირობითია!), ხოლო შეუღლებული წარმოდგენებისათვის ავიღოთ იგივე პროექტორები, ოღონდ შევცვალოთ სიმეტრიზატორები ანტისიმეტრიზატორებით და ანტისიმეტრიზატორები – სიმეტრიზატორებით. ამ წესის გამოყენებით კიდეც ორი ტიპის იუნგის სქემისათვის ადვილად შეგვიძლია ზოგადი ფორმულების დაწერა იუნგ-იამანუჩის პროექტორებისათვის. მართლაც, რადგან

$$\{1^q\} = \{\tilde{q}\} \text{ და } \{21^{q-2}\} = \{\overline{q-1, 1}\}$$

ამიტომ

$$y_j^{\{1^q\}} = [12 \dots q] \quad (28.30)$$

ხოლო

$$y_j^{\{21^{q-2}\}} = ((q-j+1)(q-j+2) \dots q) [12 \dots (q-j)] |1q| [12 \dots (q-j)] \quad (28.31)$$

ამგვარად, S_q ჯგუფის $\{\lambda\}$ იუნგის სქემით მოცემულ იამანუჩის წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციას საბოლოოდ ასეთი ზოგადი სახე ექნება:

$$\Psi_j^{\{\lambda\}} = N_j^{\{\lambda\}} \mathcal{Y}_j^{\{\lambda\}} \varphi(1, 2, \dots, q) \quad (28.32)$$

აქ $\mathcal{Y}_j^{\{\lambda\}}$ პროექტორი განისაზღვრება (28.19) ფორმულით, φ განუსაზღვრელი გადანაცვლებითი სიმეტრიის მქონე ფუნქციაა, დამოკიდებული ნაწილაკთა კოორდინატებზე x_1, x_2, \dots, x_q . $N_j^{\{\lambda\}}$ ნორმირების კოეფიციენტია, რომლის დასათვლელად გამოვიყენოთ ფუნქციათა ორთონორმირების პირობა და (28.35) გამოსახულება. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_j^{\{\lambda'\}} | \Psi_j^{\{\lambda\}} \rangle &= N_j^{\{\lambda'\}} N_j^{\{\lambda\}} \langle \varphi | \mathcal{Y}_j^{\{\lambda'\}} \dagger \mathcal{Y}_j^{\{\lambda\}} | \varphi \rangle \\ &= (N_j^{\{\lambda\}})^2 \delta_j^{j', \lambda, \lambda'} M_j^{\{\lambda\}} \langle \varphi | \mathcal{Y}_1^{\{\lambda\}} | \varphi \rangle \\ &\equiv \delta_j^{j', \lambda, \lambda'} M_j^{\{\lambda\}} C^{\{\lambda\}} (N_j^{\{\lambda\}})^2 \end{aligned} \quad (28.33)$$

აქ შემოღებულია ასეთი აღნიშვნა

$$C^{\{\lambda\}} = \langle \varphi | \mathcal{Y}_1^{\{\lambda\}} | \varphi \rangle \quad (28.34)$$

იამანუჩის სიმბოლოსგან დამოუკიდებელი მატრიცული ელემენტისათვის. (28.35) ტოლობის საშუალებით შესაძლებელია ფუნქციის ნორმირების კოეფიციენტის განსაზღვრა:

$$N_j^{\{\lambda\}} = \frac{1}{\sqrt{M_j^{\{\lambda\}} C^{\{\lambda\}}}} \quad (28.35)$$

უფროსი პროექტორის ზოგადი სახე (28.22) საშუალებას გვაძლევს დავითვალოთ $C^{\{\lambda\}}$ მატრიცული ელემენტის ზოგადი სახე და ასევე $M_j^{\{\lambda\}}$ რიცხვი. მართლაც, ადვილი მისახვედრია, რომ ორთოგონალობის გამო (28.34) გამოსახულებაში ნულისაგან განსხვავებულ შედეგს მოგვცემს

$$\mathcal{Y}_1^{\{\lambda\}}$$

პროექტორის მხოლოდ ერთეულოვანი გადანაცვლება და, ამიტომ $C^{(\lambda)}$ რიცხვი უბრალოდ ერთეულოვანი გადანაცვლების წინ მდგომი კოეფიციენტი ყოფილა. ამ კოეფიციენტის საპოვნელად გავშალოთ ჯერ (28.22) გამოსახულების შუაში მყოფი ანტისიმეტრიზატორები. მიღებულ ჯამში მხოლოდ ერთეულოვანი ელემენტი შეიტანს წვლილს, რადგან ანტისიმეტრიზატორთა გადანაცვლებები, განმარტების შესაბამისად, არ შეიძლება დაემთხვეს სიმეტრიზატორში მყოფი გადანაცვლებების შებრუნებულ გადანაცვლებებს. თუ სიმოკლისთვის სიმეტრიზატორში მოთავსებულ გამოსახულებებს აღვნიშნავთ რომაული ციფრებით I, II, III და ა.შ., მაშინ დაგვრჩება სიმეტრიზატორთა კვადრატების ასეთი ნამრავლები $|I|^2 |II|^2 |III|^2 \dots$, რაც (28.10) ტოლობის გამო გვაძლევს:

$$|I|^2 |II|^2 |III|^2 \dots = \lambda_1! \lambda_2! \lambda_3! \dots |I| |II| |III| \dots \quad (28.36)$$

სადაც λ_i აღნიშნავს $\{\lambda\} = \{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots\}$ იუნგის სქემის i -ურ სტრიქონში ინდექსების რაოდენობას. დარჩენილი ოპერატორების გადანაცვლებებიდან ორთოგონალობის გამო $C^{(\lambda)}$ მატრიცულ ელემენტში კვლავ მხოლოდ ერთეულოვანი გადანაცვლება მოგვცემს ნულისგან განსხვავებულ შედეგს და, ამიტომ, საძიებელი რიცხვი იქნება:

$$C^{(\lambda)} = \lambda_1! \lambda_2! \lambda_3! \dots \lambda_q! \quad (28.37)$$

დავალება 28.10: დათვალეთ $C^{(\lambda)}$ რიცხვები ასეთი იუნგის სქემებისათვის: {31}, {22}, {21³}, {6}, {51}, {42} და {32}.

ანალოგიურად შეიძლება ჩვენება, რომ

$$M_1^{(\lambda)} = \lambda_1! \lambda_2! \lambda_3! \dots \lambda_q! (q!/f^{(\lambda)}) \quad (28.38)$$

როგორც ზევით, აქაც $f^{(\lambda)}$ აღნიშნავს S_q ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილებას.

დავალება 28.11: აჩვენეთ (28.38) ფორმულის სისწორე და გამოთვალეთ ეს რიცხვები (28.10) დავალებაში მოყვანილი იუნგის სქემებისათვის.

ადვილია ნორმირების კოეფიციენტების პოვნა $\{q\}$ და $\{(q-1)1\}$ იუნგის სქემებით მოცემული დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციებისათვის:

$$N^{\{q\}} = (1/\sqrt{q!}) \quad (28.39)$$

$$N_j^{\{(q-1)1\}} = 1/\sqrt{(q-j-1)!(q-j+1)!(q-1)!} \quad (28.39')$$

ანალოგიურად,

$$N^{\{1^q\}} = 1/\sqrt{q!} \quad (28.40)$$

$$N_j^{\{21^{q-2}\}} = 1/\sqrt{(q-j-1)!(q-j+1)!(q-1)!} \quad (28.40')$$

ასევე შეიძლება უფროსი პროექტორის შესაბამისი საბაზისო ფუნქციის ნორმირების კოეფიციენტის ზოგადად პოვნა:

$$N_1^{\{\lambda\}} = \frac{f^{\{\lambda\}}}{\lambda_1! \lambda_2! \lambda_3! \dots \lambda_q! \sqrt{q!}} \quad (28.41)$$

დავალება 28.12: დაამტკიცეთ ბოლო 5 ტოლობა.

29. იმანანტები და S -ფუნქციები

ზემოთ ჩვენ ვნახეთ, რომ სიმეტრიული S_n ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენებს n რიცხვის დანაწილება, ან, რაც იგივეა, იუნგის სქემა, ცალსახად ახასიათებს. გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების კრონეკერული ნამრავლის საპოვნელად, როგორც დ. ე. ლიტლვუდმა აჩვენა, შესაძლებელი ყოფილა იუნგის სქემებზე ისეთი ოპერაციების შემოღება, რომელიც პირდაპირ S_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების კლებშ-ჟორდანის მწკრივს იძლევა (იხ. ფორმულა (23.4)). ამ მიზნით ლიტლვუდმა მოახდინა იუნგის სქემების ცნების განზოგადოება და მათ გარკვეული წესით ცალსახად დაუკავშირა ფუნქციები, რომელსაც შურის ფუნქციები ან S -ფუნქციები უწოდა. შემოვიყვანოთ ეს ფუნქციები.

განვიხილოთ n^2 რიგის მატრიცა $[a_{st}]$. π ასოთი აღვნიშნოთ $1, 2, 3, \dots, n$ რიცხვების ის გადანაცვლება, რომელიც ამ რიცხვების ახალ l_1, l_2, \dots, l_n მიმდევრობას იძლევა. მოყვანილი მატრიცის ელემენტებიდან შევადგინოთ ასეთი ნამრავლი:

$$\mathcal{P}_\pi = a_{1l_1} a_{2l_2} \dots a_{nl_n} \quad (29.1)$$

ცხადია, რომ ასეთ \mathcal{P}_π ნამრავლთა რაოდენობა გადანაცვლებათა $n!$ რიცხვის ტოლია. როგორც ყოველთვის, $\chi^{\{\lambda\}}(\pi)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ π გადანაცვლების ხასიათი S_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანად წარმოდგენაში. ახლა შესაძლებელია მატრიცასთან დაკავშირებული ახალი მათემატიკური სიდიდის შემოყვანა, რომელიც 1934 წ. დ. ე. ლიტლვუდმა და ა. რ. რიჩარდსონმა შემოიღეს: სიდიდეს

$$[a_{st}]^{\{\lambda\}} = \sum_{\pi} \chi^{\{\lambda\}}(\pi) \mathcal{P}_\pi \quad (29.2)$$

ეწოდება $[a_{st}]$ მატრიცის იმანანტი, დაკავშირებული $\{\lambda\}$ დანაწილებასთან.

მაგალითად, ავაგოთ მესამე რიგის მატრიცის იმანანტები. ამისთვის 25.1 ცხრილში მოყვანილი S_3 ჯგუფის ხასიათები უნდა გამოვიყენოთ. მაშინ $\{3\}$ დანაწილებასთან დაკავშირებულ იმანანტს ასეთი სახე ექნება:

$$[a_{st}]^{\{3\}} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

ამ გამოსახულებას მათემატიკაში მატრიცის პერმანენეტს უწოდებენ. მეორე იმანანტი იქნება:

$$[a_{st}]^{\{21\}} = 2 a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{21} a_{32}$$

ხოლო მესამე

$$[a_{st}]^{\{111\}} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

მათემატიკაში კარგად ცნობილი **მატრიცის დეტერმინანტია**. ამგვარად, მატრიცის იმანანტი პერმანენეტისა და დეტერმინანტის განზოგადოებას წარმოადგენს. დეტერმინანტი $\{1^n\}$ იუნგის სქემას შეესაბამება, ხოლო პერმანენტი – $\{n\}$ იუნგის სქემას.

იმანანტის განმარტებიდან ცხადია, რომ მატრიცის ტრანსფორმაცია გადანაცვლების მატრიცით იმანანტს ინვარიანტულს ტოვებს.

დავალეზა 29.1: აჩვენეთ ეს.

იმანანტებთან შესაძლებელია გარკვეული ფუნქციების დაკავშირება. ეს ფუნქციები ლიტლვუდმა შემოიტანა, მათ შურის პატივსაცემად **შურის ფუნქციები** ან **S-ფუნქციები** უწოდა. ფუნქციები ჩვეულებრივ ფუნქციებს წარმოადგენენ და ისინი ცალსახად არიან დაკავშირებულნი შესაბამის იუნგიოს სქემებთან. მათი ხმარება ამარტივებს $\{\lambda\}$ წარმოდგენების სხვადასხვა თვისებების შესწავლას და წარმოდგენებთან დაკავშირებული თეორემების დამტკიცებას. ამიტომ შემდგომში "იუნგის სქემის" ნაცვლად ხშირად ვიხმართ "S-ფუნქციას". ქვევით შემოყვნილია S-ფუნქციები, მაგრამ ეს ნაწილი სავალდებულო არ არის.

განვიხილოთ ახლა n ცვლადი:

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

ამ სიდიდეებისაგან სხვადასხვა გზით შესაძლებელია სიმეტრიული ფუნქციების აგება. **სიმეტრიული ფუნქციები** ეწოდება ცვლადების ისეთ კომბინაციებს, რომლებიც არ იცვლიან ნიშანს ცვლადთა ინდექსების არც ერთი გადანაცვლების მიმართ.

სიმეტრიული ფუნქციების ერთ-ერთი ტიპი დაკავშირებულია ასეთ განტოლებასთან:

$$g(x) = \prod_{r=1}^n (x - \alpha_r) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-)^n a_n = 0$$

ამ განტოლების a_i კოეფიციენტები α_r სიდიდეების ასეთ სიმეტრიულ ფუნქციებს წარმოადგენენ:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

$$a_2 = \sum_{i < k} \pi \alpha_i \alpha_k, \tag{29.3}$$

$$a_3 = \sum \pi \sum_{i < k < j = 1}^n \pi \alpha_i \alpha_k \alpha_j,$$

.....

ამ გამოსახულებებში აჯამვა წარმოებს S_n ჯგუფის ყველა გადანაცვლებით.

მეორე ტიპის ფუნქციები დაკავშირებულია ასეთ ფუნქციასთან

$$F(x) = 1/f(x)$$

სადაც $f(x) = \prod_{r=1}^n (1 - \alpha_r x) = \sum_{i=1}^n (-)^i a_i x^i$

თუ ფუნქცია $F(x)$ გავშალეთ x -ის ხარისხების მწკრივად,

$$\begin{aligned} F(x) &= \prod (1 + \alpha_r x + \alpha_r^2 x^2 + \dots) = 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots + h_r x^r + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} h_i x^i \end{aligned}$$

მაშინ მივიღებთ სიმეტრიული h_i ფუნქციების ახალ ტიპს, რომლებსაც ასეთი სახე აქვს:

$$h_0 = 1,$$

$$h_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i,$$

$$h_2 = \sum \pi \sum_{i < k = 1}^{\infty} \pi \alpha_i \alpha_k, \tag{29.4}$$

$$h_3 = \sum \pi \sum_{i < k < j = 1}^{\infty} \pi \alpha_i \alpha_k \alpha_j,$$

.....

h_i ფუნქციებისაგან განსხვავებით აჯამვა შეიცავს ინდექსთა ტოლობასაც.

მესამე ტიპის სიმეტრიული ფუნქციები ჩვენ უკვე შეგვხვდა ფრობენიუსის ფორმულის განხილვისას (იხ. ფორმულა (25.1)) და მათ ასეთი სახე ჰქონდათ:

$$s_r = \sum_{i=1}^n \alpha_i^r,$$

ახლა ვიპოვოთ კავშირი შემოტანილ სიმეტრიულ ფუნქციებს შორის. გამოვიყენოთ ასეთი იგივეობა:

$$\begin{aligned} 1 \equiv f(x) F(x) &= \sum_{i=0}^n (-)^i a_i x^i \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} (-)^i a_i h_k x^{i+k} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^r (-)^{r-k} a_{r-k} h_k \right) x^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-)^r \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-)^k a_{r-k} h_k \right] x^r \end{aligned}$$

სადაც x^r ცვლადების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო

$$\sum_{k=0}^r (-)^k a_{r-k} h_k \tag{29.5}$$

გარდა ამისა გვაქვს ასეთი ტოლობა:

$$\ln f(x) = \sum \ln (1 - a_r x)$$

და, ასევე,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{1}{\sum_{i=0}^n (-)^i a_i x^i} \sum_{k=0}^n k (-)^k a_k x^{k-1} = \frac{1}{\prod (1-\alpha_r x)} \sum_r (-)\alpha_r \prod_{k \neq r} (1-\alpha_k x) = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha_r x)} \sum_r (-)\alpha_r = -\sum_r \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_r^{i+1} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^n \alpha_r^i \right) x^{i-1} \end{aligned}$$

ბოლო წევრის მრგვალ ფრჩხილებში მოთავსებული ჯამი s_r სიმეტრიულ ფუნქციას წარმოადგენს. ამიტომ,

$$f'(x) = -f(x) \sum_{r=1}^{\infty} s_r x^r = -\sum_{i=1}^{\infty} (-)^i a_i x^i \sum_{r=1}^{\infty} s_r x^{r-1}$$

საიდანაც

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-)^i a_i x^{i-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{k+1} (-)^{k-r} a_{k-r+1} s_r x^r$$

და, საბოლოოდ,

$$k a_k = \sum_{i=1}^k (-)^{i+1} a_{k-i} s_i \quad k = 1, 2, \dots, r, \dots$$

ამგვარად, მივიღეთ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$a_r = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 & s_2 \\ s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 & s_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \dots & r-1 & s_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \dots & s_1 & r \end{vmatrix}} = \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & \dots & s_2 & s_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{r!} |Z_r| \quad (29.6)$$

ამგვარად, a_r სიმეტრიული ფუნქცია გამოისახა s_r ფუნქციებისაგან აგებული $[Z_r]$ მატრიცის დეტერმინანტის სახით

ანალოგიურად,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_r s_r x^{r-1}$$

და

$$\sum_{k=1}^{\infty} k h_k x^k = \sum_{j=0}^{\infty} h_j x^j \cdot \sum_r s_r x^{r-1}$$

საიდანაც ასეთი განტოლება მიიღება:

$$r h_r = \sum_{k=1}^r h_{r-k} s_k \quad r = 1, 2, \dots, k, \dots$$

რისი ამოხსნაც იძლევა:

$$h_r = \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & \dots & s_2 & s_1 \end{vmatrix} \quad (29.7)$$

მნელი დასამტკიცებელი არ არის, რომ ეს დეტერმინანტი $[Z_r]$ მატრიცის პერმანენტი.

დავალბა 29.2: დაამტკიცეთ ეს დებულება.

მიღებული აღნიშვნების გამოყენებით ბოლო ორი დანომრილი ტოლობა იმანანტების საშუალებით ასე შეიძლება გადაიწეროს:

$$\begin{aligned} r! a_r &= [Z_r]^{\{1^r\}} \\ r! h_r &= [Z_r]^{\{r\}} \end{aligned}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები $a_r = \{1^r\}$ და $h_r = \{r\}$. მაშინ

$$\begin{aligned} r! \{1^r\} &= [Z_r]^{\{1^r\}} \\ r! \{r\} &= [Z_r]^{\{r\}} \end{aligned} \quad (29.8)$$

მიღებული შედეგი საშუალებას გვაძლევს, იმანანტების შემოღების ანალოგიურად, განვაზოგადოთ სიმეტრიული ფუნქციების ცნება და ჩავთვალოთ, რომ r რიცხვის დანარჩენ დანაწილებებთანაც დაკავშირებულია სიმეტრიული ფუნქციები, რომლებიც ასეთი გამოსახულებით განისაზღვრება:

$$r! \{\lambda\} = [Z_r]^{\{\lambda\}} \quad (29.9)$$

ან ტოლობით განსაზღვრულ $\{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ ფუნქციას **შურის ფუნქცია** ან, მოკლედ, **S-ფუნქცია** ეწოდება.

ამგვარად, რიცხვის დანაწილებასთან და, ასევე, იუნგის სქემასთან ცალსახად ყოფილა დაკავშირებული შურის ფუნქციაც. ოპერაციები ამ ფუნქციებზე, შეიძლება გამოვიყენოთ შესაბამისი იუნგის სქემების ან, რაც იგივეა, ჯგუფთა დაუყვანადი წარმოდგენების მისაღებად.

მნელი არ არის $[Z]^{\{\lambda\}}$ იმანანტის გაშლაში შემავალი \mathcal{F}_π ნამრავლების დაყვანა ρ კლასის რიგის, ხასიათისა და s_ρ ფუნქციის ნამრავლზე. დაყვანის შედეგად მიიღება ასეთი გამოსახულება:

$$r! \{\lambda\} = \sum_{\rho} h_{\rho} \chi_{\rho}^{\{\lambda\}} s_{\rho} \quad (29.10)$$

ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვსახოთ შურის ფუნქციები როგორც s_ρ სიმეტრიული ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. თუ (19.10) გამოსახულებას გავამრავლებთ $\chi_\rho^{(\lambda)}$ ხასიათზე და ავჯამავთ $\{\lambda\}$ იუნგის სქემებით ხასიათების ორთოგონალობის გამო მივიღებთ შებრუნებულ ფორმულას:

$$s_\rho = \sum_{\{\lambda\}} \chi_\rho^{(\lambda)} \{\lambda\} \quad (29.11)$$

$\{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ S-ფუნქციის შემადგენელი რიცხვების ჯამს

$$w_\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r \quad (29.12)$$

S-ფუნქციის წონა ეწოდება. შურის ფუნქციის განმარტებიდან ჩანს, რომ თუ მისი w წონა მეტია ვიდრე S-ფუნქციის შემადგენელი ცვლადთა რაოდენობა, მაშინ შესაბამისი S-ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელნი არიან. წინააღმდეგ შემთხვევაში შესაძლებელია ჩვენება, რომ ისინი იგივურად ნულის ტოლი არიან.

მოცემულ პარაგრაფში ყოველ დანაწილებას, ან იუნგის სქემას, ცალხახად დავუკავშირეთ S-ფუნქცია, რომლებიც ნამდვილ ფუნქციებს წამოადგენენ და ამიტომ მათზე ადვილია სხვადასხვა ოპერაციების ჩატარება, რაც ჯგუფთა წარმოდგენათა თეორიისათვის ბევრი სასარგებლო თანაფარდობის მიღების საშუალებას მოგვცემს. ამას მიეძღვნება შემდეგი პარაგრაფები.

30. სიმეტრიული ჯგუფის წარმოდგენათა ნამრავლის დაყვანადობა. S -ფუნქციების გარე და შიდა ნამრავლები

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ S -ფუნქციების გამოყენებას ჯგუფთა თეორიის წარმოდგენათა თეორიის ამოცანათა ამოხსნაში. დასაწყისში განვიხილოთ ორი, შესაბამისად, n და m ნაწილაკებისაგან შემდგარი სისტემა და, ვთქვათ, რომ პირველი სისტემის ნაწილაკთა სიმეტრიის თვისებები აღიწერება S_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ იუნგის სქემით, ხოლო მეორესი – S_m ჯგუფის $\{\mu\}$ იუნგის სქემით. ახლა გავაერთიანოთ ეს ორი სისტემა და გამოვარკვიოთ, რა სიმეტრიის რა თვისებები ექნება მიღებულ სისტემას? თავიდანვე გასაგებია ამ სისტემის ასეთი თვისებები:

- სისტემის სიმეტრიის ჯგუფი იქნება S_{n+m} ;
- მის დამახასიათებელ იუნგის სქემებს ექნებათ $n+m$ უჯრა;
- ყველა $n+m$ -უჯრიანი სისტემა არ გამოდგება მის აღსაწერად.

მართლაც, ორი ქვესისტემის ერთ მთლიან სისტემად მექანიკურად გაერთიანება ვერ დაარღვევს ქვესისტემების საწყის სიმეტრიებს და ყველა $n+m$ -უჯრიანი სისტემიდან დაგვრჩება მხოლოდ ისეთები, რომლებშიც n ნაწილაკის სიმეტრია აღიწერება $\{\lambda\}$ იუნგის სქემით, ხოლო m ნაწილაკისა – $\{\mu\}$ იუნგის სქემით. ამ პროცედურის განხორციელება ხდება S -ფუნქციების გარე ნამრავლის განსაზღვრით, რომელიც ჩამოყალიბებულია ცნობილ **ლიტლვუდის თეორემაში**. თეორემა იძლევა $\{\lambda\}$ და $\{\mu\}$ S -ფუნქციების გადამრავლების ისეთ წესს, რომლის შედეგი პირდაპირ იძლევა S_{n+m} ჯგუფის მხოლოდ იმ წარმოდგენებს, რომელთა n ნაწილაკის ქვესისტემას გააჩნია $\{\lambda\}$ იუნგის სქემით განსაზღვრული სიმეტრია, ხოლო m ნაწილაკის ქვესისტემას – $\{\mu\}$ იუნგის სქემით განსაზღვრული სიმეტრია. ჩამოვყალიბოთ ახლა ეს თეორემა:

თეორემა 30.1 (ლიტლვუდის I თეორემა): $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ და $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ S -ფუნქციების

გარე გამრავლების შედეგად მიღებულ ჯამში მხოლოდ ის ფუნქციები შედის, რომლებიც $\{\lambda\}$ იუნგის სქემიდან მიიღება მასზე ყველა დაშვებული გზით μ_1 ერთნაირი α სიმბოლოს მიწერით, ამის შემდეგ მიღებულ სქემებზე კვლავ ყველა დაშვებული გზით μ_2

ერთნაირი β სიმბოლოს მიწერით და ასე შემდეგ, μ_n ერთნაირი სიმბოლოების მიწერით, ოღონდ, მიწერის დროს უნდა დაცული იყოს ორი პირობა:

- a. ნებისმიერი მიწერის შედეგად უნდა მივიღოთ რეგულარული იუნგის სქემები, რომელშიც ერთნაირი სიმბოლოები არც ერთ სვეტში არ მეორდება;
- b. თუ დამატებული სიმბოლოების სრულ კრებულს წავიკითხავთ მარჯვნიდან მარცხნივ და ქვევით, უნდა მივიღოთ ის მესერული გადანაცვლება.

დამტკიცება შესაძლებელია ზუსტად, მაგრამ ჩვენ მას არ მოვიყვანთ.

ინტუიციურად კი თეორემის სისწორე გასაგებია. ჯერ ერთი $\{\lambda\}$ იუნგის სქემის სიმეტრია უცვლელია, მეორეც, მას ისეთნაირად ვუმატებთ $\{\mu\}$ სქემის სტრიქონის უჯრებს, რომ ისინი ან ერთსადაიმავე სტრიქონში არიან, ან დიაგონალურად განლაგდებიან, რაც ნიშნავს, რომ მათ განუსაზღვრელი სიმეტრია აქვთ. ამით კი $\{\mu\}$ სქემის სიმეტრია არ ირღვევა. აქედანვე გასაგებია, რომ გარე ნამრავლი კომუტატიურია.

მიღებული შედეგი სიმბოლურად ასე ჩავწეროთ:

$$\{\lambda\} \times \{\mu\} = \sum \Gamma_{\lambda\mu\nu} \{\nu\} \tag{30.1}$$

თეორემის სილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი: გავამრავლოთ S_3 ჯგუფის $\{21\}$ დაუყვანადი წარმოდგენა მეორე S_3 ჯგუფის $\{21\}$ დაუყვანად წარმოდგენაზე. 30.1 თეორემის გამოყენებით ასეთ შედეგს მივიღებთ:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \bullet\bullet & \alpha\alpha & \bullet\bullet & \alpha\alpha & \bullet\bullet & \alpha\alpha & \bullet\bullet & \alpha & \bullet\bullet & \alpha & \bullet\bullet & \alpha & \bullet\bullet & \alpha & \bullet\bullet & & \bullet\bullet \\ \bullet & \times \beta & = & \bullet\beta & + & \bullet & + & \bullet\alpha\beta & + & \bullet\alpha & + & \bullet\beta & + & \bullet & + & \bullet\alpha & + & \bullet\alpha \\ & & & & & \beta & & & & \beta & & \alpha & & \alpha & & \alpha\beta & & \alpha \\ & & & & & & & & & & & & & \beta & & & & \beta \end{array}$$

რაც S -ფუნქციების ენაზე გვაძლევს:

$$\{21\} \times \{21\} = \{42\} + \{41^2\} + \{3^2\} + 2\{321\} + \{31^3\} + \{2^3\} + \{2^21^2\}$$

როგორც ვხედავთ, ამ ნამრავლში არ შემოვიდა S_n ჯგუფის ასეთი წარმოდგენები: $\{6\}$, $\{51\}$, $\{21^4\}$ და $\{1^6\}$, რომელთა სიმეტრიები არ ეთანხმება თანამამრავლ წარმოდგენათა სიმეტრიებს.

შემდგომში გარე ნამრავლის აღსანიშნავად \times ნიშანს აღარ ვიხმართ და პირდაპირ მივუწერთ ერთმანეთს გასამრავლებელ სქემებს, მაგალითად, ასე: $\{21\}\{21\}$.

დავალეზა 30.1: იპოვეთ ასეთი გარე ნამრავლები: ა) $\{3\}\{3\}$; ბ) $\{4\}\{21\}$; გ) $\{2\}\{4\}$;
 დ) $\{31\}\{42\}$; ე) $\{22\}\{312\}$; ვ) $\{213\}\{31\}$; ზ) $\{42\}\{21\}$; თ) $\{33\}\{32\}$;
 ი) $\{221\}\{32\}$.

ეს არის წარმოდგენათა თეორიის ამოცანების ერთი დიდი კლასი, სადაც S -ფუნქციების გამოყენება ამარტივებს ამოცანების ამოხსნას. მეორე დიდი კლასი დაკავშირებულია 23-ე პარაგრაფში შემოტანილ კრონეკერული ნამრავლის დაყვანასთან. განვიხილოთ S_n ჯგუფის ორი დაყვანადი წარმოდგენა $\{\lambda\}$ და $\{\mu\}$. $\{\lambda\}$ წარმოდგენის შესაბამისი f^{λ} -განზომილების წარმოდგენის მატრიცა აღვნიშნოთ $[a_{st}]$ -თი, ხოლო $\{\mu\}$ წარმოდგენის შესაბამისი f^{μ} -განზომილების წარმოდგენის მატრიცა – $[b_{pq}]$ -თი. შევადგინოთ ამ მატრიცების პირდაპირი ნამრავლი $[a_{st} \times b_{pq}]$. ეს მატრიცა $f^{\lambda} f^{\mu}$ განზომილებისა და, ზოგადად რომ ვთქვათ, დაყვანადი იქნება. როგორც ვიცით, მისი დაყვანის ზოგადი რეცეპტი ასეთია: უნდა მოვძებნოთ ისეთი X მატრიცა, რომლის საშუალებით ტრანსფორმირებული $[a_{st} \times b_{pq}]$ მატრიცა კვაზიდიագონალურ სახეზე დაიყვანება:

$$X [a_{st} \cdot b_{pq}] X^{-1} = \begin{pmatrix} [\alpha_{st}] & & & & \\ & [\beta_{st}] & & & \\ & & [\gamma_{st}] & & \\ & & & \dots & \\ & & & & [\omega_{st}] \end{pmatrix} \quad (30.2)$$

ამის შემდეგ უნდა დავრწმუნდეთ, რომ $[\alpha_{st}]$, $[\beta_{st}]$, ..., $[\omega_{st}]$ ბლოკების შემდგომი დაყვანა შეუძლებელია და ამით ჩვენი ამოცანა დასრულებული იქნება. მოყვანილი სქემა საკმაოდ მარტივად გამოიყურება, მაგრამ მისი პრაქტიკული განხორციელება დიდ სიძნელებთან არის დაკავშირებული. და, აი, აქ კვლავ S -ფუნქციები

ფასდაუდებელ სამსახურს გაგვიწევს. მართლაც, შესაძლებელია S -ფუნქციების ნამრავლის ისეთნაირად განსაზღვრა, რომ გამრავლების შედეგად პირდაპირ ჯამში მიღებული S -ფუნქციები სწორედ იმ წარმოდგენებს გვაძლევდეს, რომლებიც დაუყვანად $[\alpha_{st}]$, $[\beta_{st}]$, ..., $[\omega_{st}]$ მატრიცებს შეესაბამებოდეს. ეს ამოცანაც ლიტლვუდის მიერ არის გადაწყვეტილი. გამრავლების ახალ წესს მან **შიდა ნამრავლი** უწოდა. მაგრამ შიდა ნამრავლის შემოღებამდე საჭიროა S -ფუნქციების ცნების განზოგადოება.

S -ფუნქციის შემოყვანისას იგი ცალსახად დავაკავშირეთ $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ დანაწილებასთან, რომელშიც რიცხვები, შეთანხმების ძალით, კლებად მიმდევრობას ადგენენ: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. S -ფუნქციებისათვის ეს მოთხოვნა სულაც არ არის სავალდებულო, რადგან განმარტების ძალით (იხ. (29.9) ფორმულა) S -ფუნქცია წარმოადგენს მატრიცის იმანანტს და მატრიცის რიცხვები შეიძლება ნებისმიერი მთელი რიცხვები იყოს დადებითი და უარყოფითი, დალაგებული ნებისმიერი მიმდევრობით. თუ S -ფუნქციაში დადებითი რიცხვები კლებად მიმდევრობად არის დალაგებული, მაშინ S -ფუნქციას კანონიკური სახის S -ფუნქცია ეწოდება. ნებისმიერი სახის S -ფუნქცია იმანანტთა თვისებების გამოყენებით შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე ან ნულზე. S -ფუნქციების კანონიკურ სახეზე დაყვანა ხდება ქვევით მოყვანილი წესების გამოყენებით.

S -ფუნქციის ნებისმიერი ორი მომდევნო წევრი შეიძლება გადაისვას, ამასთან, წინგადასმულს ერთიანი აკლდება, ხოლო უკან გადასმულს ერთიანი ემატება, თვითონ S -ფუნქციას კი ნიშანი ეცვლება:

$$\{\dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \dots\} = - \{\dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}-1, \lambda_i+1, \lambda_{i+2}, \dots\} \quad (30.3)$$

(30.3) ტოლობა იძლევა საშუალებას ორი ასეთი წესი ჩამოვაყალიბოთ:

1). თუ S -ფუნქციის ერთ-ერთი წევრი მომდევნოზე ერთით ნაკლებია, მაშინ ასეთი S -ფუნქცია იგივეურად ნულის ტოლია:

$$\{\lambda\} = 0, \text{ თუ } \lambda_{i+1} = \lambda_i + 1$$

2). თუ S -ფუნქციის უკანასკნელი წევრი უარყოფითია, მაშინ S -ფუნქცია იგივეურად ნულია.

მოვიყვანოთ მაგალითები ამ წესების გამოყენებაზე:

$$\begin{aligned} \{2 \ 4 \ 6 \ -1 \ 2\} &= - \{2 \ 5 \ 5 \ -1 \ 2\} = \{2 \ 5 \ 5 \ 1 \ 0\} = - \{4 \ 3 \ 5 \ 1 \ 0\} = \{4 \ 4 \ 4 \ 1 \ 0\} = \{431\} \\ \{4 \ 3 \ 6 \ 1 \ 3\} &= - \{4 \ 5 \ 4 \ 1 \ 3\} = 0 \end{aligned}$$

$$\{6\ 3\ 8\ -2\ 1\} = -\{6\ 3\ 8\ 0\ -1\} = 0.$$

დავალება 30.2: დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე შემდეგი S -ფუნქციები: ა) $\{1\ 3\ 5\}$; ბ) $\{-3\ 3\ 6\ 4\}$; გ) $\{2\ -2\ 4\ 7\}$; დ) $\{-1\ -3\ 4\ 8\}$; ე) $\{4\ 4\ 2\ 2\ 5\}$; ვ) $\{3\ -1\ 3\}$; ზ) $\{4\ -3\ 2\ 2\ 5\}$; თ) $\{-2\ -3\ 3\ 3\}$; ი) $\{6\ 4\ 8\ -1\ 2\ 3\}$.

მოხერხებულია S -ფუნქციის შემოკლებული სახით ჩაწერა. იგი ასეთი ფრჩხილებით აღვნიშნოთ: $\langle \rangle$. აღვნიშნოთ w ასოთი S -ფუნქციის წონა, ანუ მასში შემავალი რიცხვების ჯამი: $w = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. მაშინ შემოკლებული S -ფუნქცია ასე განისაზღვრება:

$$\langle \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \rangle \equiv \{w - s, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\} \quad (30.4)$$

ამ გამოსახულებაში $s = \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n$ და მას S -ფუნქციის სიღრმეს უწოდებენ.

მაგალითად, განვიხილოთ შემოკლებული S -ფუნქცია $\langle 2\ 1 \rangle$. განმარტების ძალით იგი ტოლია:

$$\langle 2\ 1 \rangle \equiv \{(w - 3)\ 2\ 1\}$$

როგორც ვხედავთ, ფორმულა გამოდგება ნებისმიერი წონის S -ფუნქციისათვის და ამით არის მოხერხებული შემოკლებული S -ფუნქციების გამოყენება. მაგალითად, ბოლო შემოკლებული ფუნქცია $w = 2$ წონისათვის ტოლია:

$$\langle 2\ 1 \rangle = \{-1\ 2\ 1\} = -\{1\ 0\ 1\} = 0$$

$w = 3$ წონისათვის იგი ტოლია:

$$\langle 2\ 1 \rangle = \{0\ 2\ 1\} = -\{1\ 1\ 1\} = -\{1^3\}$$

$w = 4$ წონისათვის გვექნება:

$$\langle 2\ 1 \rangle = \{1\ 2\ 1\} = 0$$

ადვილია მიხვედრა, რომ $w \geq 5$ წონისათვის S -ფუნქცია ყოველთვის დადებითია და ზოგადად ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$\langle 2\ 1 \rangle = \{w - 3\ 2\ 1\}, \text{ როდესაც } w \geq 5$$

დავალება 30.3: რა კავშირში უნდა იყოს S -ფუნქციის წონა და სიღრმე, რომ მათი ჩასმის შემდეგ S -ფუნქცია პირდაპირ კანონიკურ სახეს იღებდეს?

როგორც ვხედავთ, შემოკლებული ჩაწერა ზოგადია, რამდენადაც იგი გულისხმობს ნებისმიერი წონის S -ფუნქციას.

ახლა უკვე შესაძლებელია დავუბრუნდეთ S -ფუნქციას შიდა ნამრავლს. გარე ნამრავლისაგან განსხვავებით მას “ \cdot ” ნიშნით აღვნიშნავთ. შიდა ნამრავლი განმარტებულია შემოკლებული S -ფუნქციებისათვის და მისი პოვნა შეიძლება ლიტლვუდის შემდეგი თეორემის საშუალებით:

თეორემა 30.2 (ლიტლვუდის II თეორემა): n წონის ორი $\langle \lambda \rangle$ და $\langle \mu \rangle$ S -ფუნქციის შიდა ნამრავლი მოიცემა ფორმულით:

$$\langle \lambda \rangle \cdot \langle \mu \rangle = \sum (\lambda \mu | \nu) \langle \nu \rangle \quad (30.5)$$

სადაც $\langle \nu \rangle$ S -ფუნქციები და $(\lambda \mu | \nu)$ კოეფიციენტები მოიძებნება ჩვეულებრივი S -ფუნქციების ქვევით მოყვანილი ნამრავლებიდან:

$$\sum_{\nu} (\lambda \mu | \nu) \{ \nu \} = \sum \Gamma_{\alpha\beta\xi\lambda} \Gamma_{\alpha\beta\eta\mu} \{ \xi \} \{ \eta \} (\{ \beta \} \cdot \{ \gamma \}) \quad (30.6)$$

აქ $\Gamma_{\alpha\beta\xi\lambda}$ კოეფიციენტი განსაზღვრავს $\{ \lambda \}$ S -ფუნქციის გამოჩენის ჯერადობას $\{ \alpha \} \times \{ \beta \} \times \{ \xi \}$ S -ფუნქციების სამმაგ ნამრავლში, $\Gamma_{\alpha\beta\eta\mu}$ არის $\{ \mu \}$ S -ფუნქციის ჯერადობა $\{ \alpha \} \times \{ \gamma \} \times \{ \eta \}$ ნამრავლში; აჯამვა გამოსახულების მარჯვენა მხარეში წარმოებს $\{ \alpha \}$, $\{ \beta \}$ და $\{ \gamma \}$ ყველა შესაძლო დანაწილებით, თანაც $\{ \beta \}$ და $\{ \gamma \}$ ერთი და იგივე რიცხვის დანაწილებებია, მაგრამ სავალდებულო არ არის, რომ მაინც და მაინც ერთნაირი დანაწილებები იყოს. აჯამვა შეიცავს შემთხვევებს $\{ \alpha \} = 0$ და $\{ \beta \} = \{ \gamma \} = 0$, ამასთან $\{ 0 \} \{ 0 \} = \{ 0 \}$.

დამტკიცება საკმაოდ გრძელია და მას არ მოვიყვანთ.

ხაზგასასმელია შიდა ნამრავლის ასეთი თვისებები: ა) შიდა ნამრავლი კომუტატურია; ბ) მიღებული S -ფუნქციები უნდა დაყვანილ იქნას კანონიკურ სახეზე; გ) შიდა ნამრავლის თანამამრავლები ერთნაირი წონის S -ფუნქციებია.

როგორ ვხედავთ, ლიტლვუდის ეს თეორემა შიდა ნამრავლის პოვნის რეკურენტულ გზას იძლევა. მაგრამ, სამაგიეროდ, ნაპოვნი პასუხი გამოდგება ნებისმიერი წონის S -ფუნქციებისათვის.

მოვიყვანოთ ერთი მაგალითი ლიტლვუდის II თეორემის გამოყენებაზე. ვიპოვოთ $\langle 1 \rangle \cdot \langle 2 \rangle$ შიდა ნამრავლი. თეორემის შესაბამისად (30.6) გამოსახულებაში შემავალი S -ფუნქციები ასეთია: $\{\lambda\} = \{1\}$ და $\{\mu\} = \{2\}$, ამიტომ $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ და $\{\gamma\}$ დანაწილებებისათვის სამი შესაძლებლობა გვექნება:

1. $\{\alpha\} = \{0\}$, $\{\beta\} = \{\gamma\} = \{0\}$;
2. $\{\alpha\} = \{1\}$, $\{\beta\} = \{\gamma\} = \{0\}$;
3. $\{\alpha\} = \{0\}$, $\{\beta\} = \{\gamma\} = \{1\}$.

განვიხილოთ ყველა ეს შემთხვევა ცალცალკე:

1. $\Gamma_{\alpha\beta\xi\lambda} = 1$, როდესაც $\{\xi\} = \{1\}$ და $\Gamma_{\alpha\beta\eta\mu} = 1$, როდესაც $\{\eta\} = \{2\}$. ყველა სხვა შემთხვევაში ეს კოეფიციენტები ნულის ტოლია. ამიტომ (30.6) განტოლების მარჯვენა მხარის ჯამში პირველი წევრი იქნება:

$$\Gamma_{\{0\}\{0\}\{1\}\{1\}} \Gamma_{\{0\}\{0\}\{2\}\{2\}} \{1\}\{2\}(\{0\} \cdot \{0\}) = \{1\}\{2\}\{0\} = \{3\} + \{21\}$$

2. ამ შემთხვევაში $\{\xi\} = \{0\}$ და $\{\eta\} = \{1\}$. ამგვარად, შემდეგი წევრი უდრის

$$\{0\}\{1\}(\{0\} \cdot \{0\}) = \{1\}$$

3. ეს ის შემთხვევაა, როდესაც გვიხდება რეკურენტობის გამოყენება. მართლაც, ამ შემთხვევაში საჭიროა $\{1\} \cdot \{1\}$ შიდა ნამრავლის გამოყენება. შეიძლება ჩვენება, რომ $\{1\} \cdot \{1\} = \{1\}$.

დავალება 30.4: აჩვენეთ ეს.

გარდა ამისა, $\{\xi\} = \{0\}$ და $\{\eta\} = \{1\}$. ამიტომ (30.6) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ასეთი წევრები დაემატება:

$$\{0\}\{1\}(\{1\} \cdot \{1\}) = \{1\}\{1\} = \{2\} + \{1^2\}$$

მიღებული შედეგების ერთად შეკრება (30.6) გამოსახულებაში გვაძლევს:

$$\sum_{\nu} (\lambda \mu | \nu) \{ \nu \} = \{3\} + \{21\} + \{1\} + \{2\} + \{1^2\}$$

რაც საშუალებას გვაძლევს ჩავსვათ მიღებული ჩვეულებრივი S -ფუნქციები შემოკლებული ფუნქციების სახით (30.5) გამოსახულებაში. ამიტომ მივიღებთ საბოლოო შედეგს ასეთი სახით:

$$\langle 1 \rangle \cdot \langle 2 \rangle = \langle 3 \rangle + \langle 21 \rangle + \langle 2 \rangle + \langle 1^2 \rangle + \langle 1 \rangle$$

როგორც აღვნიშნეთ, ეს ფორმულა გამოდგება ნებისმიერი წონის S -ფუნქციებისათვის. მაგალითად, ოთხის წონის S -ფუნქციებისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \{3\ 1\} \cdot \{2^2\} &= \{1\ 3\} + \{1\ 2\ 1\} + \{2^2\} + \{2\ 1^2\} + \{3\ 1\} \\ &= -\{2^2\} + 0 + \{2^2\} + \{2\ 1^2\} + \{3\ 1\} = \{3\ 1\} + \{2\ 1^2\} \end{aligned}$$

ხუთის წონის ფუნქციებისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \{4\ 1\} \cdot \{3\ 2\} &= \{2\ 3\} + \{2^2\ 1\} + \{3\ 2\} + \{3\ 1^2\} + \{4\ 1\} \\ &= \{4\ 1\} + \{3\ 1^2\} + \{3\ 2\} + \{2^2\ 1\} \end{aligned}$$

და ა.შ.

დავალება 30.5: ა) იპოვეთ $\langle 1 \rangle \cdot \langle 2 \rangle$ შიდა ნამრავლი 6, 7 და 8 წონის S -ფუნქციებისათვის;

ბ) იპოვეთ შიდა ნამრავლები $\langle 1 \rangle \cdot \langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle \cdot \langle 2 \rangle$, $\langle 2 \rangle \cdot \langle 12 \rangle$ და $\langle 1 \rangle \cdot \langle 3 \rangle$.

განსაკუთრებით თვალსაჩინოა შიდა ნამრავლის შინაარსის გაგება, თუ S -ფუნქციებს შესაბამისობაში მოვუყვანთ სათანადო დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციებს. განვიხილოთ S_2 ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენები $\{2\}$ და $\{1^2\}$. $\{2\}$ წარმოდგენას შეესაბამება ნაწილაკთა გადანაცვლებების მიმართ სრულიად სიმეტრიული საბაზო ფუნქცია, ხოლო $\{1^2\}$ -ს – სრულიად ანტისიმეტრიული. ცხადია, რომ ორი სიმეტრიული ფუნქციის ნამრავლი ისევ სიმეტრიული ფუნქციაა, სიმეტრიულის ნამრავლი ანტისიმეტრიულზე – ანტისიმეტრიული, ხოლო ორი ანტისიმეტრიული ფუნქციის ნამრავლი გვაძლევს სიმეტრიულ ფუნქციას. წარმოდგენათა შიდა ნამრავლების ენაზე ეს ნიშნავს, რომ

$$\{2\} \cdot \{2\} = \{2\}; \{2\} \cdot \{1^2\} = \{1^2\} \cdot \{2\} = \{1^2\}; \{1^2\} \cdot \{1^2\} = \{2\}$$

სა ჯგუფისათვის სრულიად სიმეტრიული წარმოდგენის {3}-ისა და სრულიად ანტისიმეტრიული წარმოდგენის {1³}-ის გარდა გვაქვს შერეული სიმეტრიის წარმოდგენას – {21}. იგი თვითშეუღლებული წარმოდგენაა, ე.ი., $\{\bar{21}\} = \{21\}$. ცხადია, რომ {3}-ის ნამრავლი სა ჯგუფის ნებისმიერ წარმოდგენაზე არ ცვლის ამ წარმოდგენას, {1³}-ის ნამრავლი კი ცვლის წარმოდგენას მის შეუღლებულზე. ამგვარად,

$$\begin{aligned} \{3\} \cdot \{3\} &= \{3\}; \quad \{3\} \cdot \{1^3\} = \{1^3\}; \quad \{3\} \cdot \{21\} = \{21\}; \\ \{1^3\} \cdot \{3\} &= \{1^3\}; \quad \{1^3\} \cdot \{1^3\} = \{3\}; \quad \{1^3\} \cdot \{21\} = \{\bar{21}\} = \{21\} \end{aligned}$$

რაც შეეხება {21}·{21} იგი სა ჯგუფის ყველა დაუყვანად წარმოდგენას შეიცავს:

$$\{21\} \cdot \{21\} = \{3\} + \{21\} + \{1^3\}$$

დავალეზა 30.6: დაამტკიცეთ ეს ტოლობა.

ბოლო ტოლობის სისწორეში დარწმუნება შესაძლებელია წარმოდგენათა განზომილებების შემოწმებით: მარცხენა მხარის განზომილებაა $2 \times 2 = 4$, მაშინ როდესაც მარჯვენა მხარის განზომილებაა $1 + 2 + 1 = 4$, რაც სწორია.

ანალოგიურ მსჯელობებით მივიღებთ ზოგად გამოსახულებებს:

$$\{n\} \cdot \{\lambda\} = \{\lambda\}; \quad \{1^n\} \cdot \{\lambda\} = \{\bar{\lambda}\}$$

ამ გამოსახულებაში n წარმოდგენს რიცხვს და არა დანაწილებას.

დავალეზა 30.7: ლიტლვუდის II თეორემის გამოყენებით დაამტკიცეთ რომ $\{n\} \cdot \{\lambda\} = \{\lambda\}$.

მოვიყვანოთ შიდა ნამრავლების რამდენიმე ზოგადი ფორმულა:

$$\{n-1 \ 1\} \cdot \{n-1 \ 1\} = \{n\} + \{n-1 \ 1\} + \{n-2 \ 2\} + \{n-2 \ 1^2\};$$

$$\{n-1 \ 1\} \cdot \{n-2 \ 2\} = \{n-1 \ 1\} + \{n-2 \ 2\} + \{n-2 \ 1^2\} + \{n-3 \ 3\} + \{n-3 \ 21\};$$

$$\{n-1 \ 1\} \cdot \{n-2 \ 1^2\} = \{n-1 \ 1\} + \{n-2 \ 2\} + \{n-2 \ 1^2\} + \{n-3 \ 2 \ 1\} + \{n-3 \ 1^3\};$$

$$\begin{aligned} \{n-2 \ 2\} \cdot \{n-2 \ 2\} &= \{n\} + \{n-1 \ 1\} + 2\{n-2 \ 2\} + \{n-2 \ 1^2\} + \{n-3 \ 3\} + 2\{n-3 \ 2 \ 1\} + \{n-3 \ 1^3\} + \\ &+ \{n-4 \ 4\} + \{n-4 \ 3 \ 1\} + \{n-4 \ 2^2\}. \end{aligned}$$

შეიძლება ზოგადი ფორმულის მიღება შემოკლებული S -ფუნქციებისთვის. მაგალითად,

$$\langle a \rangle \cdot \langle 1 \rangle = \langle a+1 \rangle + \langle a-1 \rangle + \langle a \rangle + \langle a-1 \rangle + \langle a-1 \rangle$$

სადაც a ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია.

ბოლოს ჩამოვყალიბოთ რამდენიმე ზოგადი წესი, რომელიც აადვილებს შიდა ნამრავლების გამოთვლას:

1. თუ

$$\{\lambda\} \cdot \{\mu\} = \sum (\lambda \mu | \nu) \{\nu\}$$

მაშინ

$$\{\lambda\} \cdot \{\tilde{\mu}\} = \sum (\lambda \mu | \nu) \{\tilde{\nu}\}.$$

2. $\{\tilde{\lambda}\} \cdot \{\tilde{\mu}\} = \{\lambda\} \cdot \{\mu\}$

3. $\{\lambda\} \cdot \{\mu\}$ შიდა ნამრავლი შეიცავს სრულიად ანტისიმეტრიულ წარმოდგენას $\{1^n\}$ წარმოდგენას (n წარმოდგენების წონაა) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\{\tilde{\lambda}\} = \{\mu\}$.

დავალება 30.8: ა) როდის შეიცავს $\{\lambda\} \cdot \{\mu\}$ შიდა ნამრავლი სრულიად სიმეტრიულ $\{n\}$ წარმოდგენას?

31. დიფერენციალური ოპერატორები (S -ფუნქციების “გაყოფა”)

ამ თავის ბოლოს მოვიყვანოთ S -ფუნქციათა ალგებრის კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი საკითხი – S -ფუნქციათა გამრავლების საპირისპირო ოპერაციები. გარე ნამრავლებისათვის ასეთი ოპერაცია შემოღებული იყო ფუქსის (A. J. Foulkes) მიერ და მას ფუქსის დიფერენციალურ ოპერატორს უწოდებენ. ოპერატორი ასეთი ტოლობით განისაზღვრება:

$$D(\{\lambda\})\{\mu\} = \sum \Gamma_{\lambda \nu \mu} \{\nu\} \quad (31.1)$$

სადაც, $\Gamma_{\lambda \nu \mu}$ ოპერატორი მოიძებნება $\{\lambda\}$ და $\{\nu\}$ ოპერატორების გარე ნამრავლიდან:

$$\{\lambda\} \times \{\nu\} = \sum \Gamma_{\lambda \nu \mu} \{\mu\} \quad (31.2)$$

ამ განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ ფუქსის ოპერატორების საშუალებით ვპოულობთ ყველა იმ S -ფუნქციას, რომელთა გარე ნამრავლი $\{\lambda\}$ S -ფუნქციაზე გვაძლევს $\{\mu\}$ S -ფუნქციას. მაგალითად,

$$\{\lambda\} \times \{\nu\} = \sum \Gamma_{\lambda \nu \mu} \{\mu\} \quad (31.2)$$

მართლაც, $\{4\}$, $\{31\}$ და $\{22\}$ S -ფუნქციების ნამრავლი $\{2\}$ -ზე სხვა S -ფუნქციებთან ერთად შეიცავს $\{42\}$ -საც და არ არსებობს 4 -ის წონის სხვა S -ფუნქცია, რომელიც იგივე შედეგს იძლევა.

ზემოთ ფუქსის ოპერატორს გარე ნამრავლის საპირისპირო ოპერაცია ვუწოდეთ. ეს იმიტომ მოხდა, რომ ეს ორი ოპერაცია არ არის შებრუნებული. შებრუნებული ოპერაციის განმარტებით მათი მიმდევრობით გამოყენება იგივე გარდაქმნას იძლევა, რასაც ადგილი არა აქვს ფუქსის ოპერატორის შემთხვევაში.

დავალება 31.1: აჩვენეთ ეს მოყვანილ მაგალითზე.

ხაზი უნდა გაესვას იმას, რომ (31.1) გამოსახულებაში $\{\nu\}$ წარმოდგენას იგივე $\Gamma_{\lambda \nu \mu}$ ჯერადობა აქვს, რაც $\{\mu\}$ წარმოდგენას $\{\lambda\} \times \{\nu\}$ ნამრავლში. მაგალითად,

$$D(\{21\})\{321\} = \{3\} + 2\{21\} + \{1^3\}$$

რადგან $\{21\} \times \{21\}$ ნამრავლში $\{321\}$ წარმოდგენა ორის ჯერადობით შემოდის.

ადვილია ფუქსის ოპერატორის ასეთი თვისებების გაგება:

$$D(\{\lambda\} + \{\mu\}) = D(\{\lambda\}) + D(\{\mu\}) \quad (31.3)$$

$$D(\{\lambda\} \times \{\mu\}) = D(\{\lambda\}) D(\{\mu\}) \quad (31.4)$$

$$D(\{0\}) = 1 \quad (31.5)$$

დავალება 31.2: გამოთვალეთ რას უდრის ასეთი გამოსახულებები: ა) $D\{2\}\{32\}$; ბ) $D\{1^2\}\{41^2\}$; გ) $D\{21\}\{52\}$; დ) $D\{\lambda\}\{\lambda\}$; ე) $D\{\lambda\}\{\tilde{\lambda}\}$; ვ) $D\{1^3\}\{321\}$.

ფუქსის ოპერატორის ანალოგიით შემოვიღოთ შიდა ნამრავლის საპირისპირო დიფერენციალური ოპერატორი ასეთი ტოლობით:

$$d(\{\lambda\})\{\mu\} = \sum (\lambda \nu | \mu) \{\nu\} \quad (31.6)$$

სადაც $(\lambda \nu | \mu)$ კოეფიციენტები განისაზღვრებიან ასეთი შიდა ნამრავლებიდან:

$$\{\lambda\} \cdot \{\nu\} = \sum (\lambda \nu | \mu) \{\mu\} \quad (31.7)$$

გასაგებია, რომ (31.6) და (31.7) ტოლობებში შემავალი ყველა S -ფუნქცია ერთი წონისაა. მაგალითად,

$$d(\{21\})\{21\} = \{3\} + \{21\} + \{1^3\}$$

მართლაც, $\{3\}$, $\{21\}$ და $\{13\}$ S -ფუნქციების შიდა ნამრავლები $\{21\}$ -ზე შეიცავენ $\{21\}$ S -ფუნქციას.

d ოპერატორს ასეთი თვისებები გააჩნია:

$$d(\{\lambda\} + \{\mu\}) = d(\{\lambda\}) + d(\{\mu\}) \quad (31.8)$$

$$d(\{\lambda\} \cdot \{\mu\}) = d(\{\lambda\}) d(\{\mu\}) \quad (31.9)$$

$$d(\{0\}) = 1 \quad (31.10)$$

$$d(\{\tilde{\lambda}\})\{\mu\} = \sum (\lambda \nu | \mu) \{\tilde{\nu}\} \quad (31.11)$$

$$d(\{\lambda\})\{1^n\} = \{\tilde{\lambda}\} \quad (31.12)$$

$$d(\{\lambda\})\{n\} = \{\lambda\} \quad (31.13)$$

როგორც ვნახეთ S -ფუნქციებზე გასაზღვრული დიფერენციალური ოპერატორები საკმაოდ ფორმალურ ხასიათს ატარებენ, მაგრამ, როგორც შემდგომში დავრწმუნდებით, მათი საშუალებით ბევრი სასარგებლო ფორმულის

მოხერხებულად ჩაწერა შესაძლებელი. ამიტომ მათი პრაქტიკული გამოყენების საკითხი გადავდოთ ამ ფორმულების გამოყვანამდე.

დავალება 31.3: გამოთვალეთ რას უდრის ასეთი გამოსახულებები: ა) $d\{32\}\{32\}$; ბ) $d\{1^2\}\{1^2\}$; გ) $d\{41\}\{5\}$; დ) $d\{\lambda\}\{\lambda\}$; ე) $d\{\lambda\}\{\bar{\lambda}\}$; ვ) $d\{1^3\}\{3\}$.

V. წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფი

ამ თავში ჩვენ შევუდგებით წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების შესწავლას. მეორე თავში, როდესაც ეს ჯგუფი შემოვიყვანეთ, ვნახეთ, რომ მის ქვეჯგუფებს ფიზიკაში ძალიან დიდი მნიშვნელობა ენიჭება. ამიტომ ფიზიკისთვის საჭირო ქვეჯგუფების შესასწავლად ჩვენ წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის შესწავლით დავიწყებთ და შემდეგ გადავალთ ფიზიკისათვის საჭირო ქვეჯგუფებზე. ეს მიდგომა ეწინააღმდეგება მიღებულ პრაქტიკას, როდესაც ჯგუფთა თეორიის შესწავლა იწყება ბრუნვის ჯგუფით და შემდეგ გადადიან უფრო რთულ ჯგუფებზე. ქვევით დავინახავთ, რომ N -ფუნქციების გამოყენებით წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის შესწავლით მივიღებთ თანაფარდობებს, რომლებიდანაც ადვილად გადავალთ ქვეჯგუფების თვისებების შესწავლაზე. ასეთი მიდგომა საშუალებას მოგვცემს დავადგინოთ ყველა ქვეჯგუფისათვის საერთო კანონზომიერებანი და შემუშავდეს ამოცანათა ამოხსნის საერთო მეთოდები. პირველი, რითაც უნდა დავიწყოთ დასახული ამოცანის გადაწყვეტა, არის წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის ტენზორული წარმოდგენების შემოყვანა.

32. წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის ტენზორული წარმოდგენები

ზემოთ ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ პარამეტრიზაცია, ანუ ჯგუფში კოორდინატების შეტანა, ნიშნავს ჯგუფის წარმოდგენის აგებას. მართლაც, ჯგუფის ჰომომორფული გადასახვა ევკლიდის n -განზომილებიან სივრცეში, აინდუცირებს ამ სივრცეში წრფივი გარდაქმნების ან, რაც იგივეა, მატრიცების ჯგუფს, რომელიც გარდაქმნის ევკლიდის სივრცის ვექტორებს:

$$x' = T_g x \quad (32.1)$$

თუ სივრცეში რაღაც $\{e_i\}$ ბაზისს ავირჩევთ, მაშინ მატრიცული სახით (32.1) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$x'^i = g^i_k x^k \quad (32.1')$$

ამ შემთხვევაში $[g^i_k]$ მატრიცას წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის ფუნდამენტური წარმოდგენა ეწოდება.

ფიზიკაში უფრო რთული გარდაქმნები გამოიყენება. ასე, მაგალითად, შევადგინოთ ორი ვექტორის ფორმალური ნამრავლი:

$$x y = x^i y^j e_i e_j \quad (32.2)$$

ვნახოთ, როგორ გარდაიქმნება $x^i y^j$ სიდიდეთა ერთობლიობა, თუ ერთი ვექტორი (32.1') კანონით გარდაიქმნება. ამისთვის $x'^i y'^j$ ნამრავლში ჩავსვათ გამოსახულება (32.1'). მაშინ ეს ნამრავლი ასეთი კანონით გარდაიქმნება:

$$x'^i y'^j = g^i_k g^j_l x^k y^l \quad (32.3)$$

ამგვარად, ვექტორის კოორდინატთა ორმაგი ნამრავლი გარდაიქმნება n^2 რანგის

$$g \times g \equiv [g^i_k] \times [g^j_l] \quad (32.3')$$

მატრიცის საშუალებით, რომელიც ორი ფუნდამენტური წარმოდგენის მატრიცის პირდაპირი ნამრავლის ტოლია. მათემატიკურ ობიექტებს, რომლებიც გარდაიქმნებიან როგორც ორი ვექტორის კოორდინატთა ნამრავლები მეორე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორები ეწოდება. ისინი აღინიშნებიან t^{ij} სიმბოლოთი და

გარდაიქმნებიან $g \times g$ მატრიცით. მე-20 პარაგრაფში ჩვენ ვნახეთ, რომ ნებისმიერი g გარდაქმნისათვის არსებობს კონტრავარიანტული გარდაქმნა

$$\tilde{g}^{-1} \equiv h,$$

რომლითაც საბაზისო ვექტორები გარდაიქმნება:

$$e'_i \equiv h_i^k e_k \quad (32.4)$$

მეორე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორის აგების ანალოგიურად შეიძლება მეორე რანგის კოვარიანტული ტენზორის აგება, რომლის საშუალებითაც გარდაიქმნება ორი საბაზისო ვექტორის ნამრავლი:

$$e'_i e'_j \equiv h_i^k h_j^l e_k e_l \quad (32.5)$$

მათემატიკურ ობიექტებს, რომლებიც საბაზისო ვექტორების ნამრავლის ანალოგიურად გარდაიქმნება მეორე რანგის კოვარიანტული ტენზორები ეწოდება, აღინიშნებიან t_{ij} სიმბოლოთი და გარდაიქმნებიან $h \times h$ მატრიცების პირდაპირი ნამრავლით.

სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია შემოვიტანოთ მესამე რანგის კონტრავარიანტული t^{ijk} და კოვარიანტული t_{ijk} ტენზორები. ასევე შესაძლებელია ნებისმიერი უფრო მაღალი რანგის ტენზორების შემოტანა. მაგალითად, p -ური რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი $t^{i_1 i_2 i_3 \dots i_p}$ არის მათემატიკური ობიექტი, რომელიც g მატრიცის p -ჯერადი პირდაპირი ნამრავლით გარდაიქმნება:

$$A^{(p)}_g \equiv g \times g \times \dots \times g \quad (p \text{ თანამამრავლი}) \quad (32.6)$$

p -ური რანგის კოვარიანტული ტენზორი $t_{i_1 i_2 i_3 \dots i_p}$ არის მათემატიკური ობიექტი, რომელიც h მატრიცის p -ჯერადი პირდაპირი ნამრავლით გარდაიქმნება:

$$B^{(q)}_g \equiv h \times h \times \dots \times h = \tilde{g}^{-1} \times \tilde{g}^{-1} \times \dots \times \tilde{g}^{-1} \quad (p \text{ თანამამრავლი}) \quad (32.7)$$

არსებობს შერეული ტენზორიც. ასე, მაგალითად, p -ჯერ კონტრავარიანტული და q -ჯერ კოვარიანტული შერეული ტენზორი $t^{i_1 i_2 i_3 \dots i_p}_{j_1 j_2 j_3 \dots j_q}$ g მატრიცის p -ჯერადი და h მატრიცის q -ჯერადი პირდაპირი ნამრავლით გარდაიქმნება.

თუ g მატრიცა ადგენს GL_n წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის ფუნდამენტურ წარმოდგენას, მაშინ გასაგებია, რომ $A^{(p)}$ მატრიცა ადგენს იგივე ჯგუფის წარმოდგენას p რანგის კონტრავარიანტულ ტენზორულ სივრცეში, ხოლო $B^{(q)}$ მატრიცა ადგენს წარმოდგენას q რანგის კოვარიანტულ ტენზორულ სივრცეში. ამ წარმოდგენებს

ტენზორული წარმოდგენები ეწოდებათ და ისინი შემდგომში ჩვენი კვლევის ობიექტებს წარმოადგენენ. შესაძლებელია ტენზორული წარმოდგენის აგება შერეული ტენზორების სივრცეშიც.

ხშირად ტენზორების ნაცვლად მოსახერხებელია პოლიწრფივი ფორმების ანუ კონკომიტანტების ხმარება. ამ შემთხვევაში კოვარიანტული ტენზორი იცვლება ასეთი ფორმით:

$$P(x, y, \dots, w) \equiv t_{i_1 i_2 i_3 \dots i_p} x^{i_1} y^{i_2} \dots w^{i_p} \quad (32.8)$$

სადაც x, y, \dots, w წრფივი სივრცის ვექტორებია, ჩაწერილი სვეტ-ვექტორების სახით. (32.8) კონკომიტანტი გარდაიქმნება კონტრავარიანტული $g \in GL_n$ გარდაქმნის შესაბამისი T_g ოპერატორით ასეთნაირად:

$$T_g P(x, y, \dots, w) = P(g^{-1}x, g^{-1}y, \dots, g^{-1}w) \quad (32.9)$$

T_g ოპერატორები ადგენენ ჯგუფის წარმოდგენებს ამ პოლიწრფივ ფორმათა სივრცეში. ამასთან გასაგებია, რომ გარდაქმნილ ფორმას

$$P' = T_g P$$

კოეფიციენტად ტენზორი აქვს:

$$t'_{j_1 j_2 \dots j_p} = h_{j_1}^{i_1} h_{j_2}^{i_2} \dots h_{j_p}^{i_p} t_{i_1 i_2 \dots i_p} \quad (32.10)$$

ე.ი., გარდაქმნა კოვარიანტული B_g მატრიცითა ხდება. ანალოგიურად, ოპერატორები

$$T_g P(x, y, \dots, w) = P(x g, y g, \dots, w g) \quad (32.11)$$

სადაც x, y, \dots, w წრფივი სივრცის ვექტორებია, ჩაწერილი სტრიქონების სახით გარდაიქმნებიან კოვარიანტულად და ადგენენ A_g წარმოდგენის ექვივალენტურ წარმოდგენას.

ტენზორების შეცვლა კონკომიტანტებით GL_n ჯგუფის წრფივ ფუნქციათა კლასში წარმოდგენის ტოლფასია, ეს ფუნქციები ვექტორულ x, y, \dots, w ცვლადებზე არიან დამოკიდებული.

ახლა ტენზორული წარმოდგენების დაყვანადობის საკითხს შევეხოთ:

(32.6) და (32.7) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ n -განზომილებიან L_n წრფივ ვექტორულ სივრცეში მოქმედი GL_n ჯგუფის ფუნდამენტური წარმოდგენა n^p განზომილების $F_p \equiv \{t^{i_1 i_2 \dots i_p}\}$ ტენზორულ სივრცეში წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფს აინდუცირებს და, ამდენად, ამ სივრცის ტენზორები ადგენენ GL_n ჯგუფის

ტენზორული წარმოდგენი ბაზისს. თუ ამ ბაზისზე დაჭიმულ სივრცეში გამოვყოფთ ინვარიანტულ ქვესივრცეებს, მაშინ ჯგუფთა თეორიის ზოგადი თეორიის ძალით ვიპოვით GL_n ჯგუფის დაუყვანად ტენზორულ წარმოდგენებს.

ტენზორულ სივრცეში ინვარიანტული ქვესივრცეების გამოყოფის ამოცანა, თურმე, დადის გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანადი ინვარიანტული ქვესივრცეების პოვნაზე. ეს ასეთი თეორემით მტკიცდება:

თეორემა 32.1: F_p ტენზორული სივრცის ქვესივრცეები, ინვარიანტული S_p სიმეტრიული ჯგუფის გარდაქმნათა მიმართ, ინვარიანტულნი რჩებიან GL_n ჯგუფის $A^{(p)}_g$ გარდაქმნების მიმართაც.

დამტკიცება: განვიხილოთ F_p სივრცის $t^{i_1 i_2 \dots i_p}$ ტენზორის გარდაქმნა ტენზორული წარმოდგენის $A^{(p)}_g$ მატრიცით და S_p ჯგუფის რაღაც π გადანაცვლებით. π გადანაცვლება ცვლის i_1, i_2, \dots, i_p ინდექსების მიმდევრობას ახალზე, მაგალითად, ასეთზე: i_1, i_2, \dots, i_p , ხოლო $A^{(p)}_g$ მატრიცა ასე გარდაქმნის $t^{i_1 i_2 \dots i_p}$ ტენზორს:

$$t^{i_1 i_2 \dots i_p} = g_{i_1}^{j_1} g_{i_2}^{j_2} \dots g_{i_p}^{j_p} t^{j_1 j_2 \dots j_p} \quad (32.12)$$

ვიმოქმედოთ ამ გამოსახულებაზე π გადანაცვლებით. მივიღებთ:

$$\pi A^{(p)}_g t^{i_1 i_2 \dots i_p} = t^{i'_1 i'_2 \dots i'_p} = g_{i'_1}^{j'_1} g_{i'_2}^{j'_2} \dots g_{i'_p}^{j'_p} t^{j'_1 j'_2 \dots j'_p} \quad (32.13)$$

ფორმულაში მოყვანილი g მატრიცის მატრიცული ელემენტები ჩვეულებრივი რიცხვებია და შეიძლება მათი გადალაგება ისეთნაირად, რომ j ინდექსები დაუბრუნდნენ პირვანდელ მიმდევრობას. მაშინ (32.13) ფორმულის მარჯვენა მხარის მატრიცული ელემენტების ნამრავლში მივიღებთ i ინდექსების ახალ მიმდევრობას, რომელიც საწყისი მიმდევრობიდან π გადანაცვლებით მიიღება:

$$\pi(i_1, i_2, \dots, i_p) = i'_1, i'_2, \dots, i'_p \quad (32.14)$$

რადგან i ინდექსები (32.13) გამოსახულებაში აჯამვის ინდექსია, მათ შეიძლება სახელები გადავარქვათ და მატრიცულ ელემენტებში დავუბრუნდეთ i ინდექსების საწყის მიმდევრობას. მაშინ t ტენზორის ინდექსები შეიცვლიან ადგილებს ისე, როგორც ამას π გადანაცვლება გააკეთებდა. ამიტომ (32.13) გამოსახულება ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\pi A^{(p)}_g t^{j_1 j_2 \dots j_p} = g_{i_1}^{j_1} g_{i_2}^{j_2} \dots g_{i_p}^{j_p} \pi t^{i_1 i_2 \dots i_p}$$

ანუ, მოკლედ,

$$\pi A^{(p)}_g = A^{(p)}_g \pi \quad (32.15)$$

რაც იმას მიუთითებს, რომ *წრფივი გარდაქმნები კომუტირებენ გადანაცვლებებთან და ქვესივრცეები, ინვარიანტული გადანაცვლებების მიმართ, ინვარიანტული რჩებიან GL_n ჯგუფის გარდაქმნების მიმართაც. ამით თეორემა დამტკიცებულია.*

თეორემა სამართლიანია ასევე კოვარიანტული და შერეული წარმოდგენებისათვისაც.

თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ F_p სივრცის ტენზორები ქმნიან გადანაცვლებათა ჯგუფის დაუყვანადი სივრცის ბაზისს და ამიტომ $A^{(p)}_g$ ტენზორულ წარმოდგენაში იმდენი დაუყვანადი წარმოდგენაა, რამდენი დაუყვანადი წარმოდგენაცაა S_p გადანაცვლებათა ჯგუფში. ეს რაოდენობა კი, როგორც ვიცით, p რიცხვის დანაწილებათა ან იუნგის სქემების რაოდენობის ტოლია. ამიტომ ლოგიკურია, რომ *წრფივი ჯგუფის დაუყვანადი ტენზორული წარმოდგენებიც, სიმეტრიული ჯგუფის წარმოდგენების მსგავსად, S-ფუნქციებით დავახასიათოთ.*

გასაგებია, რომ F_3 ტენზორულ სივრცეში ინვარიანტული ქვესივრცეების გამოყოფა უნდა მოხდეს იუნგის სიმეტრიზატორებით. განვიხილოთ, მაგალითად, მეორე რანგის ტენზორული სივრცე $\{t^{ij}\}$. ცხადია, რომ ამ სივრცის ნებისმიერი ტენზორი t^{ij} ასე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$t^{ij} = \frac{1}{2} (t^{ij} + t^{ji}) + \frac{1}{2} (t^{ij} - t^{ji}) \quad (32.16)$$

ეს იგივე გარდაქმნა გვიჩვენებს, რომ მეორე რანგის ნებისმიერი ტენზორი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ინდექსების გადასმის მიმართ სიმეტრიული

$$S^{ij} = \frac{1}{2} (t^{ij} + t^{ji}) \text{ და ინდექსების გადასმის მიმართ ანტისიმეტრიული } A^{ij} = \frac{1}{2} (t^{ij} - t^{ji})$$

ტენზორების ჯამი. ეს ნიშნავს, რომ მეორე რანგის ტენზორული სივრცე უშვებს ორ ინვარიანტულ ქვესივრცეს – სიმეტრიულსა და ანტისიმეტრიულს, რომლებიც, სათანადოდ, $\{2\}$ და $\{1^2\}$ იუნგის სქემებს შეესაბამება. (32.16) შედეგის პირდაპირი მიღება შეიძლება იუნგის $Y^{\{2\}}$ და $Y^{\{1^2\}}$ პროექტორების გამოყენებით. მართლაც,

$$Y^{\{2\}} t^{ij} = \frac{1}{2} [e + (12)] = \frac{1}{2} (t^{ij} + t^{ji})$$

$$Y^{12} t^{ij} = \frac{1}{2} [e - (12)] = \frac{1}{2} (t^{ij} - t^{ji})$$

ანალოგიურად შეიძლება ნებისმიერი p რანგის სივრცეში ინვარიანტული დაუყვანადი ქვესივრცეების გამოყოფა S_p ჯგუფის იუნგის სიმეტრიზატორების გამოყენებით.

ამ პარაგრაფის ბოლოს კიდევ ერთ საკითხს შევხვით: დავადგინოთ, რა სახე აქვს GL_n ჯგუფის გენერატორებს ტენზორული წარმოდგენისათვის? ფუნდამენტური წარმოდგენის მატრიცა, როგორც ვიცით, ასეა დაკავშირებული ჯგუფის X გენერატორთან:

$$g = e^{iX}$$

ამიტომ (32.6 და 7) ტენზორული წარმოდგენების გენერატორები ფუნდამენტური წარმოდგენების გენერატორების ჯამი იქნება. ამ ჯამის ზუსტი ჩაწერისათვის დავნომროთ ფუნდამენტური წარმოდგენის ვექტორები α_i ინდექსით (აქ i იცვლება 1-დან n -მდე, ხოლო n ფუნდამენტური წარმოდგენის განზომილებაა). ტენზორული წარმოდგენის საბაზისო ვექტორი $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ინდექსების ფუნქცია იქნება. იგი ასე აღვნიშნოთ:

$$| \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle \quad (32.17)$$

მაშინ p რანგის ტენზორული წარმოდგენის \mathcal{G}_p^i გენერატორის მოქმედება (32.17) ფუნქციაზე ტოლი იქნება:

$$\mathcal{G}_p^i | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle = \sum_{r=1}^p \sum_{\beta=1}^n (X^i)_{\alpha_r \beta} | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \beta, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \rangle \quad (32.18)$$

33. ინვარიანტული მატრიცები

წინა პარაგრაფში ვნახეთ, რომ p რანგის ტენზორული წარმოდგენა არის ფუნდამენტური მატრიცების p -ჯერადი პირდაპირი ნამრავლი. ცხადია, რომ ზოგადად, ეს ნამრავლი დაყვანადია და ჩვენი ამოცანა ამ პარაგრაფში იქნება GL_n წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისი მატრიცის აგება. ამ პროგრამის განხორციელება საკმაოდ მარტივდება იუნგის სქემების ფორმალიზმის გამოყენებით.

აღვნიშნოთ X და Y ასოებით L_n წრფივი ვექტორული სივრცის ორი ვექტორი, ჩაწერილი სვეტ-ვექტორების სახით რაღაც ბაზისში. $g \equiv [g^s]$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ GL_n ჯგუფის გარდაქმნის მატრიცა, რომელსაც Y ვექტორი X -ში გადაყავს:

$$X = g Y \quad (33.1)$$

ვიცით, რომ g მატრიცა აინდუცირებს p რანგის ტენზორულ წარმოდგენას, თუ ვიპოვით გარდაქმნებს, რომლებიც გარდაიქმნებიან X ვექტორის x^i კოორდინატებისაგან შედგენილი p -ური რანგის ასეთი ერთგვაროვანი ნამრავლები:

$$(x^1)^p, (x^2)^p, \dots, (x^n)^p, (x^1)^{p-1} x^2, (x^1)^{p-1} x^3, \dots, x^1 x^2 x^3 \dots x^p \quad (33.2)$$

შევადგინოთ ანალოგიური ნამრავლები Y ვექტორის y^j კოორდინატებისგან და ვიპოვოთ ასეთი კოორდინატების გარდაქმნის კოეფიციენტები, რომლებიც იქნება საძიებელი გარდაქმნის მატრიცის მატრიცული ელემენტები. ამ მატრიცის რანგი უდრის $n+p-1$ რიცხვის ჯუფდებას³ p -დ

$$\binom{n+p-1}{p}$$

³ ჯუფთება ასე განიმარტება: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

და მას g მატრიცის p -ური რანგის ინდუცირებული მატრიცა ეწოდება. აღვნიშნოთ იგი $g^{(p)}$ სიმბოლოთი. ამ მატრიცებს ასეთი თვისება ახასიათებს:

$$\text{თუ } AB = C, \text{ მაშინ } A^{(p)} B^{(p)} = C^{(p)} \quad (33.3)$$

X და Y ვექტორების კოორდინატებიდან შეგვიძლია, ასევე, შევადგინოთ დეტერმინანტული ფორმები. X ვექტორისათვის ფორმები ასე აღვნიშნოთ:

$$|x^t_s| \quad (33.4)$$

ეს ფორმები (33.1) გარდაქმნის გამოყენებით Y ვექტორის ანალოგიურ ფორმებში გარდაქმნება რაღაც მატრიცით, რომლის რანგი უდრის

$$\binom{n}{p}$$

და ამ მატრიცას g მატრიცის p -ური რანგის შედგენილი მატრიცა ეწოდება. მისთვის ასეთი აღნიშვნა შემოვიღოთ – $g^{(1^n)}$. ცხადია, რომ ეს მატრიცები (33.3) პირობის მსგავს პირობას აკმაყოფილებენ:

$$\text{თუ } AB = C, \text{ მაშინ } A^{(1^n)} B^{(1^n)} = C^{(1^n)} \quad (33.5)$$

იმისთვის რომ ნათელი გახდეს ზემომოყვანილი ზოგადი მსჯელობა, მოვიყვანოთ ინდუცირებული და შედგენილი მატრიცების მაგალითები.

განვიხილოთ GL_2 ჯგუფის მატრიცა, რომელიც, ცხადია, 2×2 რიგისა იქნება. იგი ასე აღვნიშნოთ:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(33.1) გარდაქმნა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \quad (33.6)$$

მეორე რანგის ინდუცირებული მატრიცა ამ შემთხვევაში განმარტების თანახმად 3×3 რიგისა იქნება და იგი გარდაქმნის ასეთ ვექტორს:

$$\begin{pmatrix} (x^1)^2 \\ x^1 x^2 \\ (x^2)^2 \end{pmatrix}$$

(33.6) გამოსახულების გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$(x^1)^2 = (a y^1 + b y^2)^2 = a^2 (y^1)^2 + 2 a b y^1 y^2 + b^2 (y^2)^2$$

თუ სხვა ერთგვაროვან ნამრავლებსაც ანალოგიურად გამოვითვლით, მივიღებთ, რომ GL_2 ჯგუფის მეორე რანგის ინდუცირებულ მატრიცას ასეთი სახე ექნება:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad + bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{bmatrix} \quad (33.7)$$

დავალება 33.1: ა) მიიღეთ (33.7) მატრიცა.

ბ) იპოვეთ GL_2 ჯგუფის მესამე რანგის ინდუცირებული მატრიცა.

გ) იპოვეთ GL_3 ჯგუფის მეორე რანგის ინდუცირებული მატრიცა.

ახლა ვიპოვოთ GL_3 ჯგუფის მეორე რანგის შედგენილი მატრიცა. ფუნდამენტური მატრიცა ამ შემთხვევაში ასეთ გარდაქმნას ახორციელებს:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \quad (33.8')$$

დეტერმინანტული ფორმების შესადგენად უნდა გავიხსენოთ, რომ ასეთი ფორმების შედგენა ერთი ვექტორიდან შეუძლებელია; ისინი იგივეურად ნულის ტოლია. ამიტომ დეტერმინანტულ ფორმებს ასეთი სახე ექნება:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \\ x_1^1 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^3 \\ x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 x_2^2 - x_1^2 x_2^1 \\ x_1^1 x_2^3 - x_1^3 x_2^1 \\ x_1^2 x_2^3 - x_1^3 x_2^2 \end{pmatrix}$$

ამ ფორმებში ჩავსვათ (33.8') გარდაქმნა. მაშინ GL_3 ჯგუფის მეორე რანგის შედგენილი მატრიცისათვის მივიღებთ:

$$g^{\{1^2\}} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (33.8)$$

დავალება 33.2: ა) მიიღეთ (33.8) მატრიცა.

ბ) იპოვეთ GL_3 ჯგუფის მესამე რანგის შედგენილი მატრიცა.

გ) იპოვეთ GL_2 ჯგუფის მეორე რანგის შედგენილი მატრიცა.

შესაძლებელია განვაზოგადოთ ინდუცირებული და შედგენილი მატრიცების ცნება და შემოვიყვანოთ ე.წ. ინვარიანტული მატრიცები ასეთი წესით:

ვთქვათ, $I(A)$ A მატრიცის ელემენტებისაგან შედგენილი ერთგვაროვანი პოლინომების მატრიცაა. თუ $I(A)$ მატრიცები აკმაყოფილებენ პირობას

$$I(A) I(B) = I(AB) \quad (33.9)$$

მაშინ $I(A)$ მატრიცას A მატრიცის ინვარიანტულ მატრიცას უწოდებენ.

ინდუცირებული $g^{\{p\}}$ მატრიცისა და შედგენილი $g^{\{1^n\}}$ მატრიცის ანალოგიით ინვარიანტული მატრიცა აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $g^{\{\lambda\}}$, სადაც $\{\lambda\}$ p რიცხვის დანაწილება ანუ იუნგის სქემაა და იგი GL_n ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენას ახასიათებს.

თეორემა 33.1: თუ g მატრიცა გარბის GL_n ჯგუფის გარდაქმნების მნიშვნელობებს, მაშინ $I(g)$ მატრიცა ადგენს ამ ჯგუფის საძიებელ ტენზორულ წარმოდგენებს.

დამტკიცება მარტივია (33.9) ტოლობის გათვალისწინებით.

დავალება 33.3: დაამტკიცეთ ეს თეორემა.

$I(g)$ წარმოდგენის ექვივალენტური წარმოდგენის ასაგებად უნდა მოვახდინოთ $I(g)$ მატრიცის ტრანსფორმაცია რაღაც არასინგულარული მატრიცით, თუ შედეგად მივიღებთ კვაზიდიագონალურ მატრიცას, რომლის დიაგონალური ბლოკები ვეღარ დაიყვანება კვაზიდიագონალურ სახეზე, მაშინ როგორც ვიცით, წარმოდგენა სავსებით დაყვანადი იქნება, ხოლო მიღებული ბლოკები ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენასა ქმნიან.

ჩვენი ამოცანაა ფუნდამენტური წარმოდგენის მატრიციდან დაუყვანადი ინვარიანტული მატრიცის აგება.

ზემოთ ვნახეთ, რომ ინდუცირებული და შედგენილი მატრიცები წარმოადგენენ ფუნდამენტური მატრიცის ელემენტების ერთგვაროვან პოლინომების კომბინაციებს. ასევე, ინვარიანტული მატრიცის ელემენტები იქნება ფუნდამენტური მატრიცის ელემენტების ერთგვაროვანი პოლინომების კომბინაციები. საკითხი იმაშია, როგორ შევადგინოთ ეს კომბინაციები?

სანამ ამ კითხვაზე პასუხს გავცემდეთ, საჭიროა რამდენიმე შენიშვნის გაკეთება. პირველი, რასაც ხაზი უნდა გაესვას, არის ის, რომ p რიცხვზე, ე.ი. **ტენზორული სივრცის რანგზე შეზღუდვა არ არსებობს: იგი შეიძლება იყოს ფუნდამენტური წარმოდგენის სივრცის n განზომილების ტოლი, მასზე მეტი ან ნაკლები.**

მეორე, გავიხსენოთ იუნგის ტაბულების აგების წესი გადანაცვლებათა S_p ჯგუფისათვის და მოვახდინოთ მისი განზოგადოება GL_n წრფივ გარდაქმნათა

ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენისათვის. გადანაცვლებათა S_p ჯგუფის შემთხვევაში ჩვენ p განსხვავებული ობიექტი გვქონდა და ისინი უნდა გაგვენაწილებინა იუნგის სქემის p უჯრაში. ამიტომ იუნგის სქემის უჯრები განსხვავებული ინდექსებით ივსებოდა. GL_n ჯგუფის შემთხვევაში $\{\lambda\}$ სქემის p უჯრაში უნდა განაწილდეს n ცლადი – L_n წრფივი ვექტორული სივრცის ვექტორის კოორდინატები. როგორც ზევით ვახსენეთ ამ ორ რიცხვს შორის არავითარი კავშირი არ არსებობს და ისინი ნებისმიერი შეიძლება იყოს. ამასთან აკრძალული არ არის ერთი და იგივე ცვლადის მრავალჯერ გამოყენება, მაგრამ ისე, რომ გამეორებული ცვლადები მხოლოდ სიმეტრიულ მდგომარეობაში იყვნენ მოთავსებული, ე.ი. არ უნდა მოხვდნენ იუნგის ტაბულის ერთსა და იმავე სვეტში. წინააღმდეგ შემთხვევაში იგივეურ ნულს მივიღებთ. ამიტომ GL_n ჯგუფისათვის ვიღებთ $\{\lambda\}$ იუნგის სქემაში ინდექსების შევსების ასეთ წესებს:

1. $\{\lambda\}$ იუნგის სქემის p უჯრაში ვავსებთ ინდექსებს 1-დან n -მდე;
2. შეიძლება ერთი და იგივე ინდექსის გამეორება ან გამოტოვება;
3. ერთნაირი ინდექსების ერთ სვეტში მოხვედრა არ შეიძლება;
4. ინდექსების ჩაწერისას უნდა დავიცვათ მათი ზრდის პრინციპი მარცხნიდან მარჯვნივ და ზევიდან ქვევით.

ამ წესების დაცვით აგებულ ტაბულებს იუნგის რეგულარული ტაბულები GL_n ჯგუფისათვის ან ვეილის ტაბულები ეწოდება. მაგალითად, GL_3 ჯგუფის $\{2^2\}$ წარმოდგენისათვის ასეთი რეგულარული ტაბულები არსებობს:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & & & & \\ 2 & 2 & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 2 & 3 & & \\ & & & 3 & 3 & \\ & & & & 1 & 2 \\ & & & & 2 & 3 \\ & & & & & 3 & 3 \\ & & & & & & 2 & 2 \\ & & & & & & 3 & 3 \end{array} \quad (33.12)$$

ახლა შევადგინოთ $g=[g_s^t]$ ფუნდამენტური მატრიცის ელემენტებიდან ასეთი მონომი:

$$P_A^B(g) = \frac{1}{r_B} g_{i_1}^{j_1} g_{i_2}^{j_2} \dots g_{i_p}^{j_p} \quad (33.13)$$

აქ A და B ვეილის რეგულარულ ტაბულებს აღნიშნავენ, ხოლო (i_1, i_2, \dots, i_p) და (j_1, j_2, \dots, j_p) ინდექსთა ისეთი რეგულარული მიმდევრობებია, სათანადოდ, A და B

ტაბულებში, რომელიც მიიღება ტაბულის ინდექსების წაკითხვით მარცხნიდან მარჯვნივ და ზევიდან ქვევით. მაგალითად, (33.12) ტაბულებისათვის რეგულარული მიმდევრობები ასეთი იქნება:

$$(1122) \quad (1123) \quad (1133) \quad (1223) \quad (1233) \quad (2233) \quad (33.14)$$

(33.13) გამოსახულებაში r_B რიცხვი ტოლია

$$r_B = \sigma_1! \sigma_2! \dots \sigma_p! \quad (33.15)$$

სადაც σ_k გვიჩვენებს ვეილის B ტაბულის ერთ განსაზღვრულ სტრიქონში რამდენჯერ წერია k ინდექსი. მაგალითად, (33.12) ტაბულებიდან პირველისათვის $\sigma_1=\sigma_2=2$, მეორისათვის – $\sigma_1=2, \sigma_2=\sigma_3=1$, ხოლო მესამისათვის $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=1$, რადგან ინდექსი 2 ორ სხვადასხვა სტრიქონში მეორდება.

28-ე პარაგრაფის ანალოგიით თითოეულ ვეილის A ტაბულას დავუკავშიროთ $\mathcal{E}_j^{[\lambda]}$ პროექტორი იუნგ-იამანუჩის წარმოდგენაში (28,19) ფორმულის საშუალებით. განსხვავებული j ინდექსის წარმოდგენები ექვივალენტურნი არიან. ეს ნიშნავს, რომ, თუმცა მათ სხვადასხვა საბაზისო ფუნქციები აქვთ, ეს ფუნქციები ერთნაირი წარმოდგენის მატრიცებით გარდაიქმნებიან. (28.19) ფორმულიდან ჩანს, რომ ყველა $\mathcal{E}_j^{[\lambda]}$ პროექტორს აქვს საერთო ნაწილი $Q^{[\lambda]}$, რომელიც j ინდექსზე არ არის დამოკიდებული. ამიტომ, ლოგიკურია, წარმოდგენის მატრიცის აგებისას ვისარგებლოთ სწორედ ამ საერთო ნაწილით, მით უმეტეს, შეიძლება ჩვენება, რომ $Q^{[\lambda]}$ ოპერატორით მიღებულ შედეგზე $\mathcal{E}_j^{[\lambda]}$ პროექტორის j ინდექსზე დამოკიდებული $T_j^{[\lambda]}$ ოპერატორის მოქმედება შედეგს არ ცვლის და მხოლოდ ართულებს გამოთვლებს. ამ მსჯელობიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ სრული $\mathcal{E}_j^{[\lambda]}$ პროექტორის გამოყენება საჭიროა მხოლოდ საბაზისო ფუნქციების აგებისას, ხოლო წარმოდგენის მატრიცის აგების დროს ვისარგებლებთ მხოლოდ $Q^{[\lambda]}$ ოპერატორით.

მაგალითად, (33.12) ტაბულებისათვის $Q^{[2^2]}$ ოპერატორს ასეთი სახე აქვს:

$$Q^{[2^2]} = [13][24]12||34| \quad (33.16)$$

ახლა უკვე შესაძლებელია მოვიყვანოთ თეორემა, რომლის საშუალებითაც ვიპოვით ინვარიანტულ მატრიცას, რომელიც GL_n ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენას იძლევა. ეს ამოცანა დ.ე. ლიტლვუდმა გადაწყვიტა, მაგრამ მისი ამოხსნის ნაკლი იმაში მდგომარეობს, რომ საჭიროა მიღებული შედეგის მიყვანა

დაუყვანად სახეზე. ჩვენ მოვიყვანთ თეორემის გაუმჯობესებულ ვარიანტს, რომელიც პირდაპირ ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენას იძლევა.

თეორემა 33.2: მატრიცა

$$I^{\{\lambda\}}(g) = |Q^{\{\lambda\}} P_A^B(g)| \quad (33.17)$$

რომლის სტრიქონებს ნომრავს $\{\lambda\}$ წარმოდგენის რომელიღაც A ტაბულის რეგულარული მიმდევრობა, ხოლო სვეტებს – B ტაბულის რეგულარული მიმდევრობა და $Q^{\{\lambda\}}$ ოპერატორის გადანაცვლებები მოქმედებენ (33.13) ტოლობით განსაზღვრული $P_A^B(g)$ მონომის მხოლოდ ზედა ინდექსებზე, იძლევა $g=[g_s^j]$ ფუნდამენტური წარმოდგენის მატრიცის $\{\lambda\}$ წარმოდგენის შესაბამის დაუყვანად ინვარიანტულ მატრიცას.

დამტკიცება: ინვარიანტული მატრიცის განსაზღვრების პირველი მოთხოვნა ამ შემთხვევაში შესრულებულია: $I^{\{\lambda\}}$ მატრიცის ელემენტები g მატრიცის ელემენტებისგან შედგენილი ერთგვაროვანი პოლინომებია. ვაჩვენოთ, რომ მეორე მოთხოვნაც კმაყოფილდება, ე.ი., რომ $g \rightarrow I$ გადასახვა ჰომომორფულია. განვიხილოთ სამი $n \times n$ რიგის მატრიცა დაკავშირებული ასეთი თანაფარდობით:

$$g = a b \quad (33.18)$$

ანუ

$$g_i^k = a_i^j b_j^k \quad (33.19)$$

და ვაჩვენოთ, რომ მატრიცების ელემენტებისაგან (33.17) წესით აგებული მატრიცები აკმაყოფილებენ პირობას

$$I_i^k(g) = I_i^j(a) I_j^k(b) \quad (33.20)$$

ამ ტოლობაში ჩავსვათ მატრიცული ელემენტები (33.17) გამოსახულებიდან. მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
Q^{\{\lambda\}} P_A^B(g) &= \sum_C Q^{\{\lambda\}} P_A^C(g) Q^{\{\lambda\}} P_C^B(g) = \\
&= Q^{\{\lambda\}} \frac{1}{r_B} \sum'_{k_1 k_2 \dots k_p} Q^{\{\lambda\}} \frac{1}{r_C} a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} \dots a_{i_p}^{k_p} \cdot b_{i_1}^{k_1} b_{i_2}^{k_2} \dots b_{i_p}^{k_p}
\end{aligned} \tag{33.21}$$

შტრიხი ჯამზე მიუთითებს, რომ C ტაბულის რეგულარობის გამო (33.21) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში დაცული უნდა იყოს ინდექსების ზრდადობის პრინციპი:

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \dots$$

მაგრამ, რადგან ჯამის ქვეშ არის $Q^{\{\lambda\}}$ ოპერატორი, რომლის გადანაცვლებები ამ წესს არღვევენ, ხოლო $(1/r_c)$ მამრავლი კვეცავს ერთნაირი ინდექსის გადასმით მიღებულ ჯერადობებს, ამიტომ გასაგებია, რომ (33.21) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში შტრიხიანი ჯამი ჩვეულებრივი ჯამით უნდა შეიცვალოს თუ $Q^{\{\lambda\}} \frac{1}{r_C}$ ოპერატორს 1-ით შევცვლით. ამიტომ დაგვრჩება:

$$\begin{aligned}
Q^{\{\lambda\}} P_A^B(g) &= Q^{\{\lambda\}} \frac{1}{r_B} \sum_{k_1 k_2 \dots k_p} a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} \dots a_{i_p}^{k_p} \cdot b_{i_1}^{k_1} b_{i_2}^{k_2} \dots b_{i_p}^{k_p} = \\
&= Q^{\{\lambda\}} \frac{1}{r_B} \sum_{k_1 k_2 \dots k_p} g_{i_1}^{k_1} g_{i_2}^{k_2} \dots g_{i_p}^{k_p}
\end{aligned} \tag{33.21}$$

თუ გავიხსენებთ $P_A^B(g)$ მონომის (33.13) განსაზღვრებას, ვნახავთ, რომ მივიღეთ იგივეობა, რაც (33.20) ტოლობის სისწორეს ამტკიცებს. ეს ნიშნავს, რომ ჩვენ მიერ აგებული მატრიცა მართლაც ინვარიანტული ყოფილა. მატრიცის დაუყვანადობას კი ის ამტკიცებს, რომ ტაბულების აგების წესით ჩვენ გამოვრიცხეთ ნულის ტოლი და ერთნაირი პოლინომების მიღება. ამგვარად, თეორემა დამტკიცებულია.

$I^{\{\lambda\}}$ დაუყვანადი ინვარიანტული მატრიცის აგების გზიდან ცხადია ამ მატრიცის განზომილება: იგი ტოლია შესაბამისი რეგულარული ტაბულების რიცხვისა. რადგან ეს მატრიცა არის GL_n ჯგუფის p -ური რანგის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი ტენზორული წარმოდგენა, ამიტომ ცხადია, რომ ამ წარმოდგენის განზომილება $\{\lambda\}$ იუნგის სქემიდან მიღებული რეგულარული ტაბულების რიცხვის ტოლია. ცხადია, არსებობს $\{\lambda\}$ წარმოდგენის განზომილების დათვლის ანალიზური გზაც.

ჩვენ დამტკიცების გარეშე მოვიყვანთ ანალიზურ ფორმულას. მას ასეთი სახე აქვს:

$$F^{\{\lambda\}} = \frac{\prod_{i < j} (l_i - l_j)}{(n-1)!(n-2)! \dots 2!1!} \quad (33.23)$$

სადაც l_i რიცხვები ასეთი თანაფარდობით განისაზღვრებიან:

$$l_i = \lambda_i + n - i \quad (33.24)$$

მაგალითად, GL_3 ჯგუფის $\{2^2\}$ განზომილება (33.13) ტაბულების შესაბამისად 6-ის ტოლია. (33.24) ფორმულის თანახმად

$$l_1 = 2+3-1=4, \quad l_2 = 2+3-2=3, \quad l_3 = 0+3-3=0$$

ხოლო (33.23) ფორმულა ამ წარმოდგენის განზომილებისათვის გვაძლევს

$$F^{\{2^2\}} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 3}{2!1!} = 6$$

და მივიღეთ ის, რაც უნდა მიგველო.

მოვიყვანოთ მაგალითი ინვარიანტული მატრიცის აგებაზე. 33.2 თეორემის გამოყენებით ვიპოვოთ GL_2 ჯგუფის $\{31\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისის გარდაქმნის მატრიცა. GL_2 ჯგუფის ფუნდამენტური წარმოდგენის მატრიცას ასეთი სახე აქვს:

$$G = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{bmatrix} \quad (33.25)$$

GL_2 ჯგუფის $\{31\}$ დაუყვანადი წარმოდგენა სამგანზომილებიანია და მას ასეთი რეგულარული ტაბულები შეესაბამება:

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 \end{matrix} \quad (33.26)$$

(33.17) მატრიცის ელემენტებში შემავალი $Q^{\{\lambda\}}$ ოპერატორი 33.2 თეორემის ძალით მოქმედებს P_A^B მონომის მხოლოდ ზედა ინდექსებზე და მისი მოქმედება (33.26) ტაბულების შესაბამისი ინდექსების მიმდევრობებზე ასეთ შედეგს იძლევა:

$$\begin{aligned}
Q^{(31)} A &= [14] |123| (1112) = 6 [(1112) - (2111)] \\
Q^{(31)} B &= 2 [(1122) + (1212) - (2121) - (2211)] \\
Q^{(31)} C &= 2 [(1222) - (2221)]
\end{aligned}
\tag{33.27}$$

ამიტომ $(1/r_B)$ კოეფიციენტის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}
Q^{(31)} P_A^A &= a_1^1 a_1^1 a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_1^1 a_1^1 a_2^1 = (a_1^1)^2 \det G \\
Q^{(31)} P_A^B &= 2 [a_1^1 a_1^1 a_1^2 a_2^2 - a_1^2 a_1^1 a_1^2 a_2^1] = 2 a_1^1 a_1^2 \det G \\
Q^{(31)} P_A^C &= a_1^1 a_1^2 a_1^2 a_2^2 - a_1^2 a_1^2 a_1^2 a_2^1 = (a_1^2)^2 \det G
\end{aligned}$$

დავალება 33.4: იპოვეთ (33.17) მატრიცის დანარჩენი წევრები.

საბოლოოდ საძიებელი მატრიცა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{bmatrix}^{\{31\}} = \det G \begin{bmatrix} (a_1^1)^2 & 2a_1^1 a_2^1 & (a_1^2)^2 \\ a_1^1 a_2^1 & a_1^1 a_2^2 + a_1^2 a_2^1 & a_1^2 a_2^2 \\ (a_2^1)^2 & 2a_2^1 a_2^2 & (a_2^2)^2 \end{bmatrix}
\tag{33.28}$$

- დავალება 33.5:** ა) ააგეთ GL_2 ჯგუფის $\{21\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცა;
 ბ) იპოვეთ GL_3 ჯგუფის $\{21\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცა;
 გ) იპოვეთ GL_2 ჯგუფის $\{2^2\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცა;
 დ) იპოვეთ GL_3 ჯგუფის $\{2^2\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცა.

ამგვარად, 33.2 თეორემა გვაძლევს GL_n ჯგუფის ნებისმიერი რანგის $\{\lambda\}$ ტენზორული დაუყვანადი წარმოდგენის მატრიცას, რომელიც აიგება ჯგუფის ფუნდამენტური წარმოდგენიდან. გავიხსენოთ, რომ GL_n ჯგუფის ფუნდამენტური წარმოდგენა მიიღება ჯგუფის პარამეტრიზაციის შედეგად.

ამ პარაგრაფის შედეგები მოკლედ ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

1. სიმეტრიული ჯგუფის სრული ანალოგიით GL_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენები სავსებით ხასიათდებიან S -ფუნქციებით;
2. ფუნდამენტური წარმოდგენა აღიწერება $\{1\}$ იუნგის სქემით;
3. p რანგის ტენზორული წარმოდგენები ხასიათდებიან p წონის $\{\lambda\}$ S -ფუნქციით;
4. შესაბამისი ტენზორული წარმოდგენის მატრიცა ცალსახად აიგება S -ფუნქციების ფარმალიზმის გამოყენებით.

დავალება 33.6: რას წარმოადგენს GL_n ჯგუფისათვის $\{0\}$ S -ფუნქციის შესაბამისი მატრიცა?

აქვე ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ GL_n ჯგუფისათვის არ არსებობს ისეთი $\{\lambda\}$ წარმოდგენები, რომელთა შესაბამისი იუნგის სქემებში n -ზე მეტი სტრიქონია. ეს ცხადია ვეილის ტაბულების აგების 3) წესიდან.

34. წარმოდგენათა კომპოზიციის კანონი GL_n

ჯგუფისათვის

განვიხილოთ GL_n ჯგუფის g ფუნდამენტური წარმოდგენის მატრიციდან აგებული ორი ინვარიანტული მატრიცა: ერთ-ერთი მათგანი – $T^{\{\lambda\}}(g)$ – შეესაბამება $\{\lambda\}$ დაუყვანად ტენზორულ წარმოდგენას, ხოლო მეორე – $T^{\{\mu\}}(g)$ – $\{\mu\}$ დაუყვანად ტენზორულ წარმოდგენას. შევადგინოთ ამ მატრიცების პირდაპირი ნამრავლი:

$$T^{\{\lambda\}}(g) \times T^{\{\mu\}}(g) \quad (34.1)$$

გასაგებია, რომ ეს მატრიცა ისევ წარმოდგენაა GL_n ჯგუფისათვის, მაგრამ, ზოგადად, დაყვანადი და ამიტომ, ჯგუფთა წარმოდგენის თეორიის მოთხოვნების შესაბამისად, საჭიროებს დაყვანას, ე.ი., მიყვანას კვაზიდრეგონალურ სახეზე (იხ. ფორმულა (20.3)). ასეთი ოპერაციის ჩატარება ძლიერ მარტივდება S -ფუნქციების ფორმალიზმში.

გავიხსენოთ, რომ GL_n ჯგუფის p რანგის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი ტენზორული წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციათა სიმრავლე ინვარიანტულია S_p ჯგუფის გადანაცვლებათა მიმართ, ე.ი., ეს სივრცე S_p ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციათა სივრცეც არის. ასევე, S_q ჯგუფის $\{\mu\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციათა სივრცე q რანგის $\{\mu\}$ დაუყვანადი ტენზორული წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციათა სივრცეც არის. გასაგებია, რომ (34.1) ნამრავლის საბაზისო ფუნქციათა სივრცე $p+q$ რანგის ტენზორების სივრცე იქნება. ჩვენი ამოცანა, ამგვარად, დადის S_p და S_q ჯგუფების $\{\lambda\}$ და $\{\mu\}$ დაუყვანადი წარმოდგენების სივრცეებიდან აგებული S_{p+q} ჯგუფის წარმოდგენის სივრცის დაუყვანად კომპონენტებად დაშლა. ეს ამოცანა ჩვენ უკვე 30-ე პარაგრაფში გადავწყვიტეთ S -ფუნქციების გარე ნამრავლის შემოღებით (იხ. ფორმულა (30.1)). ზემოთქმულის ძალით:

$$T^{\{\lambda\}}(g) \times T^{\{\mu\}}(g) = \sum_{\nu} \Gamma_{\lambda\mu\nu} T^{\{\nu\}} \quad (34.2)$$

სადაც $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ კოეფიციენტები და $\{\nu\}$ S -ფუნქციები მოიძებნება ასეთი გარე ნამრავლიდან:

$$\{\lambda\} \times \{\mu\} = \sum_{\nu} \Gamma_{\lambda\mu\nu} \{\nu\} \quad (34.3)$$

(34.2) ჩაწერა ფორმალურია და აღნიშნავს კვაზიდიագონალურ მატრიცას, რომლის ბლოკებს $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ -ჯერ $T^{\{\nu\}}(g)$ ინვარიანტული მატრიცები წარმოადგენენ.

მაგალითად, რადგან $\{2\} \times \{2\} = \{4\} + \{31\} + \{2^2\}$, ამიტომ შესაბამისი დაყვანილი ინვარიანტული მატრიცა ასე გამოისახება:

$$T^{\{2\}}(g) \times T^{\{2\}}(g) = \begin{bmatrix} [T^{\{4\}}] & [0] & [0] \\ [0] & [T^{\{31\}}] & [0] \\ [0] & [0] & [T^{\{2^2\}}] \end{bmatrix}$$

ინვარიანტული დაყვანადი მატრიცების აგება ჩვენ წინა პარაგრაფში ვისწავლეთ, ამიტომ ამოცანა სავსებით გადაწყვეტილია.

დავალება 34.1: მოიყვანეთ მაგალითები, როდესაც კვაზიდიագონალური მატრიცა გამეორდება ორჯერ.

გადანაცვლებათა S_p ჯგუფისაგან განსხვავებით GL_n ჯგუფში არსებობს ახალი კომპოზიციის კანონი, რომელსაც ახლა შემოვიყვანთ. შევნიშნოთ, რომ ფუნდამენტური წარმოდგენის განსაზღვრება GL_n ჯგუფისათვის არ არის ცალსახა. მართლაც, მაგალითისათვის განვიხილოთ ორნაწილაკოვანი სისტემა, რომელიც წრფივი გარდაქმნების GL_n ჯგუფით აღიწერება. ამ სისტემის ფუნდამენტური წარმოდგენა უნდა აიგოს $2n$ -განზომილებიან წრფივ ვექტორულ სივრცეში. ეს შეესაბამება GL_{2n} ჯგუფს და ჯგუფის გარდაქმნების ფუნდამენტური წარმოდგენა არის $2n \times 2n$ რიგის მატრიცა. ამ ამოცანას სხვანაირადაც შეგვიძლია მივუდგეთ: თითოეული ნაწილაკის მდგომარეობები გარდაიქმნება GL_n ჯგუფის

შესაბამისი მატრიცებით. ამიტომ ორნაწილაკოვანი სისტემა აღიწერება $2 GL_n$ ჯგუფის პირდაპირი ნამრავლით $GL_n \times GL_n$ და ფუნდამენტური წარმოდგენა ამ შემთხვევაში იქნება n^2 რიგის ორი მატრიცის პირდაპირი ნამრავლი. მაშინ GL_{2n} ჯგუფის ზემოთ აგებული ფუნდამენტური წარმოდგენის მატრიცა იქნება ორი GL_n მატრიცის პირდაპირი ნამრავლისაგან შედგენილი ინვარიანტული მატრიცა, რომელთაგან თითოეული დაუყვანადია GL_n ჯგუფის თვალსაზრისით, მაგრამ, ზოგადად, დაყვანადი იქნება GL_{2n} ჯგუფის თვალსაზრისით. ამ შემთხვევაში ასე იქცევიან: განიხილავენ **ჯგუფთა ჯაჭვს**:

$$GL_{2n} \supset GL_n \times GL_n \quad (34.3)$$

და ახდენენ წარმოდგენათა რედუქციას ამ ჯაჭვის მიხედვით. ეს ნიშნავს, რომ ეძებენ $GL_n \times GL_n$ ჯგუფების იმ დაუყვანადი წარმოდგენების პირდაპირ ჯამს, რომლებიც შედიან GL_{2n} ჯგუფის მოცემულ დაუყვანად წარმოდგენაში. ზოგადად, შესაძლებელია წარმოდგენათა რედუქციის ასეთი ჯაჭვის განხილვა:

$$GL_m \supset GL_n \quad (34.3')$$

სადაც მოითხოვება GL_n ჯგუფის იმ დაუყვანადი წარმოდგენების მოძებნა, რომლებიც შედის GL_m ჯგუფის ფიქსირებულ დაუყვანად წარმოდგენაში.

მათემატიკურად ამ ამოცანის გადაწყვეტა მარტივდება ისევე S -ფუნქციების გამოყენებით. განვიხილოთ წრფივი გარდაქმნების GL_n ჯგუფი და დავუშვათ, რომ მისი გარდაქმნის ფუნდამენტური მატრიცა არის g მატრიცა. ამ მატრიციდან წინა პარაგრაფში განხილული რეცეპტით ავაგოთ GL_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისი ინვარიანტული მატრიცა $I^{\{\lambda\}}(g)$. შესაძლებელია, ეს მატრიცა GL_n ჯგუფზე უფრო დიდი რანგის რაღაც GL_m ჯგუფის ($m > n$) ფუნდამენტური წარმოდგენა აღმოჩნდეს. თუ ვიპოვით GL_m ჯგუფის $\{\mu\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამის ინვარიანტულ მატრიცას, იგი ინვარიანტული მატრიცისათვის მიღებულ აღნიშვნებში ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$I^{\{\mu\}}(I^{\{\lambda\}}(g)) \quad (34.4)$$

ეს მატრიცა ინვარიანტული მატრიცის თვისების გამო დაუყვანადია GL_m ჯგუფის თვალსაზრისით, მაგრამ არსაიდან ჩანს, რომ იგი დაუყვანადი იქნება

GL_n ჯგუფის თვალსაზრისითაც. ამიტომ წარმოდგენათა თეორიის სტანდარტული პროცედურის შესაბამისად, უნდა მოვახდინოთ (34.4) მატრიცის ტრანსფორმაცია რაღაც S მატრიცით, რომელიც ამ მატრიცას კვაზიდიagonalურ სახეზე მიიყვანს და იგი ფორმალურად ასეთი პირდაპირი ჯამით გამოისახება:

$$I^{\{\mu\}}(I^{\{\lambda\}}(g)) = \sum_{\{\nu\}} K_{\lambda\mu\nu} I^{\{\nu\}}(g) \quad (34.5)$$

წერტილი ჯამის ნიშნის თავზე აღნიშნავს პირდაპირ ჯამს.

(34.5) ტოლობით მოცემული ოპერაცია ვერ აღიწერება S -ფუნქციებზე აქამდე შემოტანილი ვერც ერთი ოპერაციით. ამიტომ დ. ე. ლიტლვუდმა განსაზღვრა S -ფუნქციების ახალი ტიპის გამრავლება, რომელსაც გარე ან ჩვეულებრივი პლეთიზმი უწოდა. ეს ოპერაცია \otimes სიმბოლოთი აღინიშნება და ასე განისაზღვრება:

$$\{\lambda\} \otimes \{\mu\} = \sum_{\{\nu\}} K_{\lambda\mu\nu} \{\nu\} \quad (34.6)$$

სადაც $\{\nu\}$ S -ფუნქციები და $K_{\lambda\mu\nu}$ კოეფიციენტები სწორედ იმ $\{\nu\}$ დაუყვანად წარმოდგენებსა მათ ჯერადობებს იძლევიან, რომლებიც (34.4) მატრიცის კვაზიდიagonalურ სახეზე მიყვანის დროს მიიღებიან.

პლეთიზმის განმარტებიდან ჩანს, რომ იგი კომუტატური არ არის. ლიტლვუდმა დაადგინა ამ ოპერაციის შემდეგი თვისებები:

- I. $\{\lambda\} \otimes \{\mu\} \{\nu\} = (\{\lambda\} \otimes \{\mu\})(\{\lambda\} \otimes \{\nu\})$;
- II. $\{\lambda\} \otimes (\{\mu\} \pm \{\nu\}) = (\{\lambda\} \otimes \{\mu\}) \pm (\{\lambda\} \otimes \{\nu\})$;
- III. $(\{\lambda\} + \{\nu\}) \otimes \{\mu\} = \sum_{\{\mu_1\}\{\mu_2\}} \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu} (\{\lambda\} \otimes \{\mu_1\})(\{\nu\} \otimes \{\mu_2\})$,

სადაც აჯამვა წარმოებს ყველა იმ $\{\mu_1\}$ და $\{\mu_2\}$ S -ფუნქციით, რომელთა გარე ნამრავლი $\{\mu\}$ S -ფუნქციას იძლევა. $\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu}$ ამ ფუნქციის ჯერადობაა $\{\mu_1\} \times \{\mu_2\}$ გარე ნამრავლში;

- IV. $(\{\lambda\} - \{\nu\}) \otimes \{\mu\} = \sum_{\{\mu_1\}\{\mu_2\}} (-)^r \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu} (\{\lambda\} \otimes \{\mu_1\}) [\{\nu\} \otimes \{\mu_2\}]$;

სადაც μ_2 არის r რიცხვის დანაწილება, შეუღლებული $\{\mu_2\}$ S -ფუნქციასთან;

$$V. (\{\lambda\}\{\nu\} \otimes \{\mu\} = \sum_{\{\mu_1\}\{\mu_2\}} (\mu_1 \mu_2 | \mu) (\{\lambda\} \otimes \{\mu_1\}) [\{\nu\} \otimes \{\mu_2\}];$$

სადაც $(\mu_1 \mu_2 | \mu)$ გვიჩვენებს $\{\mu\}$ წარმოდგენის ჯერადობას $\{\mu_1\} \circ \{\mu_2\}$ შიდა ნამრავლში;

$$VI. (\{\lambda\} \otimes \{\mu\}) \otimes \{\nu\} = \{\lambda\} \otimes (\{\mu\} \otimes \{\nu\}).$$

გავიხსენოთ 31-ე პარაგრაფში შემოტანილი დიფერენციალური ოპერატორები. მათი საშუალებით გაცილებით უფრო მოხერხებული ფორმით შეგვიძლია გადავწეროთ პლეთიზმის III, IV და V თვისებები:

$$III'. (\{\lambda\} + \{\nu\}) \otimes \{\mu\} = \sum_{\{\omega\}} (\{\lambda\} \otimes \{\omega\}) [\{\nu\} \otimes D(\{\omega\})\{\mu\}]; \quad (34.7)$$

$$IV'. (\{\lambda\} - \{\nu\}) \otimes \{\mu\} = \sum_{\{\omega\}} (-)^r (\{\lambda\} \otimes \{\omega\}) [\{\nu\} \otimes D(\{\omega\})\{\mu\}]; \quad (34.8)$$

ორივე ფორმულაში აჯამვა წარმოებს იმ $\{\omega\}$ S -ფუნქციით, რომლის r წონა იცვლება 0-დან $\{\omega\}$ S -ფუნქციის w_ω წონამდე;

$$V'. (\{\lambda\}\{\nu\}) \otimes \{\mu\} = \sum_{\{\zeta\}} (\{\lambda\} \otimes \{\zeta\}) [\{\nu\} \otimes d(\{\zeta\})\{\mu\}]; \quad (34.9)$$

სადაც აჯამვა წარმოებს ყველა იმ $\{\mu\}$ S -ფუნქციის w_μ წონის ყველა შესაძლო დანაწილებით.

პლეთიზმის გამოთვლა რეკურენტული გზით შესაძლებელია მოყვანილი თვისებების გამოყენებით. ცხადია, რომ

$$\{\mu\} \otimes \{1\} = \{\mu\}, \quad \{1\} \otimes \{\mu\} = \{\mu\}, \quad \{\mu\} \otimes \{0\} = \{0\} = 1, \quad \{0\} \otimes \{\mu\} = \{0\} = 1 \quad (34.10)$$

ახლა შეგვიძლია მაგალითის სახით გამოვთვალოთ რამდენიმე მარტივი პლეთიზმი. განვიხილოთ ასეთი პლეთიზმი:

$$\{2\} \otimes (\{1\}\{1\}) = (\{2\} \otimes \{1\}) (\{2\} \otimes \{1\}) = \{2\}\{2\} = \{4\} + \{32\} + \{2^2\} \quad (34.11)$$

მეორე მხრივ, რადგან $\{1\}\{1\} = \{2\} + \{1^2\}$, ამიტომ

$$\{2\} \otimes (\{1\}\{1\}) = \{2\} \otimes (\{2\} + \{1^2\}) = \{2\} \otimes \{2\} + \{2\} \otimes \{1^2\}$$

რაც (34.11) შედარებისას იძლევა:

$$\{2\} \otimes \{2\} + \{2\} \otimes \{1^2\} = \{4\} + \{31\} + \{2^2\} \quad (34.12)$$

გარდა ამისა,

$$(\{1\}\{1\})\otimes\{2\}=(\{1\}\otimes\{2\})(\{1\}\otimes\{2\})+(\{1\}\otimes\{1^2\})(\{1\}\otimes\{1^2\})=\{4\}+\{31\}+2\{2^2\}+\{21^2\}+\{1^4\}$$

ამავე დროს,

$$\begin{aligned} (\{1\}\{1\})\otimes\{2\} &= (\{2\}+\{1^2\})\otimes\{2\} = (\{2\}\otimes\{0\})(\{1^2\}\otimes\{2\}) + (\{2\}\otimes\{1\})(\{1^2\}\otimes\{1\}) \\ &+ (\{2\}\otimes\{2\})(\{1^2\}\otimes\{0\}) = \{1^2\}\otimes\{2\} + \{31\} + \{21^2\} + \{2\}\otimes\{2\} \end{aligned}$$

რაც წინა ტოლობასთან შედარებით გვაძლევს, რომ

$$\{1^2\}\otimes\{2\} + \{2\}\otimes\{2\} = \{4\} + 2\{2^2\} + \{1^2\}$$

(34.12) ტოლობასთან შედარება გვაძლევს საბოლოო შედეგს:

$$\{2\}\otimes\{2\} = \{4\} + \{2^2\} \quad (34.13)$$

$$\{2\}\otimes\{1^2\} = \{31\} \quad (34.14)$$

$$\{1^2\}\otimes\{2\} = \{2^2\} + \{1^4\} \quad (34.15)$$

ასევე შეიძლება გამოვთვალოთ, რომ

$$\{1^2\}\otimes\{1^2\} = \{21^2\}$$

ამგვარად, გვაქვს ორის წონის ყველა N -ფუნქციის პლეთიზმი.

დავალება 34.2: ა) გამოიყვანეთ ბოლო თანაფარდობა;

ბ) იპოვეთ ორის წონის N -ფუნქციების პლეთიზმი სამის წონის N -ფუნქციებთან;

გ) იპოვეთ სამის წონის N -ფუნქციების პლეთიზმი ორის წონის N -ფუნქციებთან;

დ) იპოვეთ სამის წონის ყველა N -ფუნქციის პლეთიზმი.

სამწუხაროდ, არ არსებობს თეორემა, რომელიც მოგვცემდა პლეთიზმის გამოთვლის ზოგად წესს. არაპირდაპირი მეთოდებიდან ყველაზე მოხერხებულია

“ლიტლვუდის მესამე მეთოდის” სახელით ცნობილი თეორემა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

თეორემა 34.1: გაშლაში:

$$\{\lambda\} \otimes \{\mu\} = \sum_{\nu} \{\nu\} \quad (34.16)$$

$\{\mu\}$ S -ფუნქციების პოვნა შეიძლება ასეთი გარე ნამრავლიდან:

$$[\{\lambda\} \otimes D(\{1\})\{\mu\}][D(\{1\})\{\lambda\}] = \sum_{\nu} D(\{1\})\{\nu\} \quad (34.17)$$

სადაც $D(\{1\})$ ფუქსის ოპერატორია.

(34.17) ფორმულის მარცხენა მხარის S -ფუნქციების გადამრავლების შედეგად მიღებული $\{\eta\}$ S -ფუნქციების ჯამი უნდა გადაიწეროს, როგორც $D(\{1\})$ ოპერატორის მოქმედება რაღაც $\{\nu\}$ S -ფუნქციაზე. სწორედ ეს $\{\nu\}$ S -ფუნქციები ფიგურირებენ (34.16) ჯამში. როგორც ვხედავთ, მეთოდი რეკურენტულია და მოითხოვს $\{\mu\}$ S -ფუნქციის წონაზე ერთით ნაკლები წონის $D(\{1\})\{\mu\}$ S -ფუნქციების $\{\lambda\}$ S -ფუნქციასთან პლეთიზმების ცოდნას. მაგრამ, სამწუხაროდ, როგორც ქვევით დავრწმუნდებით ეს მეთოდის ერთადერთი ნაკლი არ არის: $\{\eta\}$ S -ფუნქციებიდან $\{\nu\}$ ფუნქციების აღდგენა ყოველთვის ცალსახა არ არის და დამატებით თეორემებს მოითხოვს.

მეთოდის ნათელსაყოფად მოვიყვანოთ მაგალითი. განვიხილოთ პლეთიზმი $\{3\} \otimes \{2\}$. ვიპოვოთ (34.17) ტოლობის მარცხენა მხარე:

$$[\{3\} \otimes D(\{1\})\{2\}][D(\{1\})\{3\}] = [\{3\} \otimes \{1\}]\{2\} = \{5\} + \{41\} + \{32\}$$

ახლა უნდა აღვადგინოთ $\{\nu\}$ ფუნქციები და აქ წარმოიშობა არაცალსახობა. მართლაც, ზედა ტოლობის მარჯვენა მხარე ორი გზით შეგვიძლია მივიღოთ:

$$\begin{aligned} \{5\} + \{41\} + \{32\} &= D(\{1\})[\{6\} + \{42\}] \\ &= D(\{1\})[\{51\} + \{3^2\}] \end{aligned}$$

რომელია ამათგან სწორი პასუხი, გაურკვეველია. თუ დავთვლით $\{3\} \otimes \{1^2\}$ პლეთიზმს, ზუსტად ასეთსავე პასუხს მივიღებთ. ეს ნიშნავს, რომ ერთ-ერთი მათგანი პირველ პლეთიზმს ეკუთვნის, მეორე კი – მეორეს. საკითხავია, რომელი რომელს?

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა თეორემები დამტკიცებული იბრაჰიმის მიერ. სანამ თეორემებს მოვიყვანოთ, საჭიროა ერთი ახალი ცნების შემოტანა. ყოველ გარე ნამრავლში $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\} \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots\}$ აუცილებლად არსებობს ერთი $\{\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \lambda_3 + \mu_3, \dots\}$ წევრი, ამიტომ მას გარე ნამრავლის მთავარ წევრს უწოდებენ. იბრაჰიმის თეორემებში ასეთი წევრი იღებს მონაწილეობას.

თეორემა 33.2 (იბრაჰიმის პირველი თეორემა):

$\{\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \lambda_3 + \mu_3, \dots\} \otimes \{\nu\}$ პლეთიზმი შეიცავს

$$[\{\lambda\} \otimes \{\nu_1\}] [\{\mu\} \otimes \{\nu_2\}]$$

გარე ნამრავლის მთავარ წევრებს, სადაც შიდა ნამრავლი $\{\nu_1\} \circ \{\nu_2\} = \{\nu\}$

თეორემა 33.3 (იბრაჰიმის მეორე თეორემა):

$\{\lambda\} \otimes \{\mu_1 + \nu_1, \mu_2 + \nu_2, \mu_3 + \nu_3, \dots\}$ პლეთიზმი შეიცავს

$$[\{\lambda\} \otimes \{\mu\}] [\{\lambda\} \otimes \{\nu\}]$$

გარე ნამრავლის მთავარ წევრებს.

თეორემების გამოყენებით შესაძლებელია პასუხი გაეცეს ზედა კითხვას. მართლაც, განვიხილოთ $\{3\} \otimes \{1^2\}$ პლეთიზმი. რადგან

$$\{3\} = \{2+1\}$$

და $\{1^2\} = \{2\} \circ \{1\} = \{1\} \circ \{2\}$

ამიტომ გვაქვს ორი განსხვავებული (34.19) ნამრავლი (გამოყენებულია (34.13) და (34.14) ფორმულები):

$$[\{2\} \otimes \{2\}] [\{1\} \otimes \{1^2\}] = [\{4\} + \{2^2\}] \{1^2\} \tag{34.22}$$

და $[\{2\} \otimes \{1^2\}] [\{1\} \otimes \{2\}] = [\{31\}] \{2\} \tag{34.23}$

(34.22) ნამრავლში მთავარი წევრები უდრის $\{51\}$ -სა და $\{3^2\}$ -ს, ხოლო (34.23)-ში – $\{51\}$ -ს. საიდანაც იბრაჰიმის I თეორემის შესაბამისად ვასკვნით, რომ

$$\{3\} \otimes \{1^2\} = \{51\} + \{3^2\}$$

გასაგებია, რომ ამის გამო $\{3\} \otimes \{2\} = \{6\} + \{42\}$, მაგრამ იბრაჰიმის II თეორემის გამოყენების მიზნით დავამტკიცოთ ეს. რადგან

$$\{2\} = \{1+1\}$$

ამიტომ (34.21)-დან გვაქვს:

$$[\{3\} \otimes \{1\}][\{3\} \otimes \{1\}] = [\{3\}][\{3\}]$$

ამ ნამრავლის მთავარი წევრი $\{6\}$ N -ფუნქციაა. მართალია იგი არა შეიცავს $\{42\}$ ფუნქციას, მაგრამ იბრაჰიმის თეორემები არ გულისხმობენ საძიებელი ფუნქციების მოცემას იგივე ჯერადობით, რომლითაც ისინი შედიან (36.16) ჯამში. რადგან ჩვენს შემთხვევაში ერთ-ერთი წევრი – $\{6\}$ – დადგენილია, მეორე – $\{42\}$ – ცალსახად აღდგება. ამგვარად, დამტკიცებულია, რომ

$$\{3\} \otimes \{2\} = \{6\} + \{42\}$$

პარაგრაფის ბოლოს მოვიყვანოთ შემდგომში გამოსაყენებელი პლეთიზმების ზოგადი ფორმულები. მაგალითად, თუ n რიცხვია და არა დანაწილება, მაშინ

$$\{n\} \otimes \{2\} = \sum_{r=0}^{\langle n/2 \rangle} \{2n - 2r, 2r\} \quad (34.24)$$

სადაც ასეთი აღნიშვნაა შემოღებული:

$$\langle n/2 \rangle = \begin{cases} n/2, & \text{თუ } n \text{ ლუწია} \\ (n-1)/2, & \text{თუ } n \text{ კენტია} \end{cases} \quad (34.25)$$

ასევე,

$$\{n\} \otimes \{1^2\} = \sum_{r=0}^{\langle (n-1)/2 \rangle} \{2n - 1 - 2r, 2r + 1\} \quad (34.26)$$

პლეთიზმის გამოთვლას ამარტივებს ასეთი თანაფარდობანი:

$$\text{თუ} \quad \{\lambda\} \otimes \{\mu\} = \sum_{\nu} \{\nu\}$$

$$\text{მაშინ} \quad \{\tilde{\lambda}\} \otimes \{\mu\} = \sum_{\nu} \{\tilde{\nu}\} \quad (34.27)$$

ლუწი წონის $\{\lambda\}$ ფუნქციებისათვის. არსებობს ასეთი თანაფარდობაც:

$$\{\tilde{\lambda}\} \otimes \{\tilde{\mu}\} = \sum_{\nu} \{\nu\} \quad (34.28)$$

როგორც ყოველთვის ტილდა შეუღლებულ იუნგის სქემას აღნიშნავს.

35. წრფივი ჯგუფების დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციების აგება

33-ე პარაგრაფში ვნახეთ, რომ GL_n ჯგუფის ტენზორული წარმოდგენის განზომილება ვეილის შესაბამისი რეგულარული ტაბულების რიცხვის ტოლია. ამგვარად, ეს ტაბულები, გადანაცვლებათა ჯგუფის შემთხვევის მსგავსად, შეგვიძლია დავაკავშიროთ ამ წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციებთან. იმისთვის, რომ ტაბულები მართლაც საბაზისო ფუნქციებს შეესაბამებოდნენ საჭიროა დავიცვათ გარკვეული წესები. ვნახოთ, რაში მდგომარეობს ეს წესები? დავიწყოთ GL_n ჯგუფის ფუნდამენტური {1} წარმოდგენით.

სივრცეს, რომელშიც ეს წარმოდგენა მოქმედებს, აიგივებენ ნაწილაკის ფიზიკური მდგომარეობის სივრცესთან. კვანტურ მექანიკაში ნაწილაკის ფიზიკური მდგომარეობა ხასიათდება რაღაცა ფიზიკური სიდიდეების შესაბამისი მუდმივი რიცხვებით, რომელთაც ნაწილაკის კვანტურ რიცხვებს უწოდებენ. თუ მოცემულია კვანტური რიცხვების სრული კრებული, მაშინ ნაწილაკის კვანტური მდგომარეობა სავსებით განსაზღვრულია. ვთქვათ, ნაწილაკის კვანტური მდგომარეობა აღიწერება α_i სიმბოლოთი, რომელიც აერთიანებს ნაწილაკის დამახასიათებელ ყველა კვანტურ რიცხვს. ნაწილაკის მდგომარეობის ვექტორი ასეთნაირად აღვნიშნოთ:

$$|\alpha_i\rangle \tag{35.1}$$

ნაწილაკის ფიზიკური მდგომარეობის სივრცე დაჭიმულია ამ მდგომარეობის ვექტორებზე. (35.1) ფუნქციები ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$|\alpha_i\rangle = \hat{\alpha}_i |0\rangle \tag{35.2}$$

სადაც $|0\rangle$ ე.წ. ვაკუუმურ მდგომარეობას აღნიშნავს, რომელზე მოქმედებითაც $\hat{\alpha}_i$ ფიზიკური მდგომარეობის გაჩენის ოპერატორი გააჩენს შესაბამის მდგომარეობაში

მყოფ ნაწილაკს. (35.2) ფუნქციის ერმიტულად შეუღლებული ფუნქცია ასეთი სახისა:

$$\langle \alpha_i | = \langle 0 | \hat{a}^\dagger_i \quad (35.3)$$

აქ $\langle 0 |$ ვაკუუმური მდგომარეობის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორია, ხოლო \hat{a}^\dagger_i ოპერატორი მოქმედებს მარცხნივ და წარმოადგენს α_i კვანტური მდგომარეობის მქონე ნაწილაკის გაქრობის ოპერატორს. ცხადია, რომ

$$\langle 0 | \hat{a}^\dagger_i = \hat{a}^\dagger_i | 0 \rangle = 0 \quad (35.4)$$

ხაზი უნდა გაესვას იმ მდგომარეობას, რომ ვაკუუმური მდგომარეობა $| 0 \rangle$ სრულიად სიმეტრიულია, ე.ი., ჯგუფების გარდაქმნები მას ვერ ცვლიან.

(35.1) ფუნქციების ორთონორმირების პირობებში გაჩენა-გაქრობის ოპერატორებს ედება პირობები:

$$\hat{a}^\dagger_i \hat{a}_j \pm \hat{a}_j \hat{a}^\dagger_i = \delta_{ij}, \quad \hat{a}^\dagger_i \hat{a}^\dagger_j \pm \hat{a}^\dagger_j \hat{a}^\dagger_i = \hat{a}_i \hat{a}_j \pm \hat{a}_j \hat{a}_i = 0 \quad (35.5)$$

მართლაც, თუ გაჩენა-გაქრობის ოპერატორები აკმაყოფილებენ (35.5) პირობებს მაშინ

$$\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \langle 0 | \hat{a}^\dagger_i \alpha_j | 0 \rangle = \langle 0 | \delta_{ij} \mp \alpha_j \hat{a}^\dagger_i | 0 \rangle = \delta_{ij} \quad (35.6)$$

ამგვარად, ფუნდამენტური $\{1\}$ წარმოადგენს საბაზისო ფუნქციები ორთონორმირებულნი ყოფილან.

ახლა უკვე შესაძლებელია $\{1\}$ იუნგის სქემის შესაბამისი ვეილის ტაბულა გავაიგივოთ გაჩენის \hat{a}_i ოპერატორთან:

$$\boxed{i} \equiv \hat{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (35.7)$$

ამის შემდეგ იუნგის რეგულარულ ტაბულებს GL_n ჯგუფისთვის უბრალოდ α_i სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. ამიტომ GL_n ჯგუფის ფუნდამენტურ წარმოადგენას n განსხვავებული ტაბულა შეესაბამება

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (35.8)$$

რომლებიც {1} დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციებს აღწერენ. ფიზიკური ამოცანებისათვის ეს ფუნქციები ერთნაწილაკოვან მდგომარეობებს შეესაბამება. მრავალნაწილაკოვანი მდგომარეობების შესაბამისი ფუნქციები უნდა ვეძებოთ GL_n ჯგუფის ტენზორული დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციებში. ასე, q -ნაწილაკოვანი სისტემის მდგომარეობები აღიწერებიან q -ური რანგის ტენზორული წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციებით. ეს ფუნქციები (35.8) ფუნქციებისაგან შედგენილ ერთგვაროვან პოლინომებს წარმოადგენენ. ვნახოთ, როგორ შევადგინოთ ეს პოლინომები, რომ შეიძლებოდეს მათი გამოყენება საბაზისო ფუნქციებად?

პირველ რიგში უნდა შევადგინოთ (35.8) ფუნქციებიდან მონომები. ამისთვის $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ინდექსებით შევავსოთ q რანგის დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისი q -უჯრიანი $\{\lambda\}$ იუნგის სქემა ისე, რომ მივიღოთ იუნგის რეგულარული ტაბულა. შემდეგ ამოვწეროთ ოპერატორები იმ მიმდევრობით, როგორც ისინი გვხვდებიან რეგულარულ ტაბულაში, თუ ამ ინდექსებს წავიკითხავთ მარცხნიდან მარჯვნივ, დაწყებული პირველი სტრიქონიდან ქვევით. მივიღებთ გაჩენის ოპერატორების ნამრავლებს ანუ მონომებს, რომლებიდანაც უნდა შედგეს საჭირო სიმეტრიის პოლინომები ანუ საბაზისო ფუნქციები. მიღებულ მონომებს ვუწოდოთ **პროექციები**. მათი აგების გზიდან ჩანს, რომ პროექციების რიცხვი ემთხვევა დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილებას, ან, რაც იგივე, საბაზისო ფუნქციების რაოდენობას.

მაგალითისათვის ავაგოთ პროექციები GL_3 ჯგუფის {21} დაუყვანადი წარმოდგენისათვის. გვექნება 8 ტაბულა:

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{array} \quad (35.9)$$

და, შესაბამისად, გვაქვს 8 პროექცია:

$$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_1 \alpha_3, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \alpha_1 \alpha_3 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_3 \alpha_3, \alpha_2 \alpha_2 \alpha_3, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_3 \quad (35.10)$$

ამ ფუნქციების პირდაპირი გამოყენება საბაზისო ფუნქციებად შეუძლებელია შემდეგი მიზეზის გამო: ტოლობა (32.6) მიგვითითებს, რომ q

რანგის ტენზორული დაუყვანადი წარმოდგენები უნდა ვეძებოთ $\{1\}$ ფუნდამენტური წარმოდგენის q -ჯერად დაყვანად ნამრავლში:

$$\{1\} \times \{1\} \times \dots \times \{1\} \quad (q\text{-ჯერ}) \quad (35.11)$$

გ. ვეილმა აჩვენა რომ ეს ნამრავლი იშლება q წონის $\{\lambda\}$ იუნგის სქემის შესაბამის დაუყვანად წარმოდგენებად ასეთი სახით:

$$\{1\} \times \{1\} \times \dots \times \{1\} = \sum_{\lambda} f^{(\lambda)} \{\lambda\} \quad (35.12)$$

სადაც $f^{(\lambda)}$ გადანაცვლებათა S_q ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილებაა. მაგალითად,

$$\{1\} \times \{1\} \times \{1\} = \{3\} + 2\{21\} + \{1^3\} \quad (35.13)$$

დავალეზა 35.1: დაამტკიცეთ (35.12) ფორმულა.

ახლა გასაგებია, რატომაა შეუძლებელი (35.10) ფუნქციების გამოყენება $\{21\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისად: (35.13) ტოლობიდან ჩანს, რომ $\{1\} \times \{1\} \times \{1\}$ ნამრავლში შედის ორი ერთნაირი გადანაცვლებითი სიმეტრიის მქონე დაუყვანადი წარმოდგენა $\{21\}$, რომელთაგან თითოეულს უნდა ჰქონდეს 8 წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქცია და ეს ორი სიმრავლე უნდა ერთმანეთის ორთოგონალური იყოს. ამგვარად ისმის ჯერადი წარმოდგენების ერთმანეთისაგან გარჩევის საკითხი. ასეთი წარმოდგენების გასარჩევად, 28-ე პარაგრაფის მსგავსად, მათ მივუწეროთ იამანუჩის სიმბოლოს აზრის მქონე ინდექსი $j (1 \leq j \leq f^{(\lambda)})$. $\{\lambda\}_1$ და $\{\lambda\}_2$ ჯერადი წარმოდგენების შესაბამისი ფუნქციების სიმრავლეები წრფივად დამოუკიდებელნი და ურთიერთ-ორთოგონალურნი უნდა იყვნენ. ისინი უნდა ასახავდნენ მათი აგების განსხვავებულ გზებს ან, როგორც ამბობენ მათ **გენეალოგიურ სტრუქტურას**. (35.13) ფორმულის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ $\{21\}$ წარმოდგენიდან ერთ-ერთი მიღებულია $\{2\} \times \{1\}$ ნამრავლიდან, ხოლო მეორე – $\{1^2\} \times \{1\}$ ნამრავლიდან. ამიტომ პირველი წარმოდგენის ფუნქციათა სიმრავლეში პირველ და მეორე ადგილზე მდგომი გაჩენის ოპერატორები უნდა ადგენდნენ

სიმეტრიულ წყვილს, ხოლო მეორე წარმოდგენის ფუნქციებში – ანტისიმეტრიულს.

გავიხსენოთ 28-ე პარაგრაფში შემოტანილი იუნგ-იამანუჩის წარმოდგენის შესაბამისი პროექტორები. მათი მოქმედება ნებისმიერ ფუნქციაზე იძლევა $\{\lambda\}$ იუნგის სქემით განსაზღვრული გადანაცვლებითი სიმეტრიის მქონე მდგომარეობას, რომელშიც ასახულია ამ მდგომარეობის გენეალოგია. ვიმოქმედოთ ამ პროექტორით GL_n ჯგუფისთვის შედგენილ პროექციებზე. $\mathcal{E}^{\{\lambda\}}_j$ პროექტორში შემავალი გადანაცვლებები მოქმედებენ პროექციის თანამამრავლ გაჩენის ოპერატორების ადგილებზე, გადასვამენ α_i ოპერატორებს და ადგენენ საჭირო სიმეტრიის მქონე პოლინომებს. სიმოვლისათვის პროექცია აღვნიშნოთ φ ასოთი. პროექციებიდან მიღებული საჭირო სიმეტრიის პოლინომები ასეთნაირად აღვნიშნოთ:

$$|\{\lambda\}_j \varphi\rangle = \mathcal{N}_j^{\{\lambda\}}(\varphi) \mathcal{E}^{\{\lambda\}}_j \varphi \quad (35.14)$$

აქ $\mathcal{N}_j^{\{\lambda\}}(\varphi)$ ფუნქციის ნორმირების კოეფიციენტს აღვნიშნავს, $\mathcal{E}^{\{\lambda\}}_j$ პროექტორია, ხოლო φ – პროექცია. (35.14) ფუნქცია შეიძლება გამოვიყენოთ GL_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციად.

(35.14) ფუნქციების შედარება (28.32) ფორმულით მოცემული გადანაცვლებების ჯგუფის საბაზისო ფუნქციებთან გვიჩვენებს, რომ განსხვავება ამ ფუნქციებს შორის მხოლოდ პროექციაშია. ყველა სხვა თანაფარდობა, რომელიც არ შეეხება φ პროექციას, ძალაში რჩება წრფივი გარდაქმნათა ჯგუფისთვისაც. რაც შეეხება პროექციას, S_q ჯგუფის შემთხვევაში φ პროექცია დამოკიდებულია q განსხვავებულ ინდექსზე და ამიტომ $\mathcal{E}^{\{\lambda\}}_j$ პროექტორის გადანაცვლებებიდან მხოლოდ e ერთეულოვანი ელემენტი არ ცვლის პროექციას. GL_n ჯგუფის შემთხვევაში, როგორც ვნახეთ, φ პროექცია შეიძლება შეიცავდეს ერთნაირ თანამამრავლებს, ამიტომ გარკვეული გადანაცვლებებით შეგვიძლია ასეთი პროექციების ერთმანეთზე დაყვანა. GL_n ჯგუფის წარმოდგენები განსხვავებული $\{\lambda\}$ იუნგის სქემით, ან ერთნაირი $\{\lambda\}$ -თი და განსხვავებული იამანუჩის j სიმბოლოთი ორთოგონალურნი არიან, რადგან ორთოგონალობა გამოწვეულია $\mathcal{E}^{\{\lambda\}}_j$ პროექტორების თვისებებით და არ ეხება φ პროექციებს.

ორთოგონალობის საკითხი რთულდება მოცემული $\{\lambda\}_j$ წარმოდგენის შიგნით, რადგან ერთნაირი ინდექსების შემცველი პროექციებისათვის (35.14) ფუნქციები ორთოგონალური აღარ არიან. მართლაც, ვთქვათ, φ და φ' პროექციები ერთნაირ ინდექსებს შეიცავენ. (35.10) მაგალითში, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ და $\alpha_1\alpha_3\alpha_2$ პროექციები (23) გადანაცვლებით გადადიან ერთმანეთში. ვთქვათ, π არის გადანაცვლება, რომელსაც φ' პროექცია φ -ში გადაყავს:

$$\varphi = \pi \varphi'$$

მაშინ (28.33) ტოლობის გამოყენებით გვექნება:

$$\langle \{\lambda\}_j \varphi' | \{\lambda\}_j \varphi \rangle = (\mathcal{N}_j^{(\lambda)}(\varphi))^2 M^{(\lambda)}_j \langle \varphi | \pi \mathcal{E}^{(\lambda)}_1 | \varphi \rangle \quad (35.15)$$

ეს გამოსახულება ვექტორის სხვადასხვა კოორდინატის ორთოგონალობის გამო ნულის ტოლი უნდა იყოს. მაგრამ განხილულ შემთხვევაში ეს ასე არ არის. მართლაც, თუ $\mathcal{E}^{(\lambda)}_1$ პროექტორი π^{-1} გადანაცვლებას შეიცავს, მაშინ $\pi \mathcal{E}^{(\lambda)}_j$ ოპერატორი შეიცავს ერთეულოვან ელემენტს და გამოსახულება ნულის ტოლი კი არა, არამედ e -ს ჯერადობის ტოლი იქნება. ამ სირთულის თავიდან ასაცილებლად თავიდანვე მოვახდინოთ ერთნაირი შემცველობის პროექციების (კოორდინატების) ორთოგონალიზაცია, მაგალითად, **გრამ-შმიდტის მეთოდით**.

ვთქვათ, გვაქვს ერთნაირი შედგენილობის რამდენიმე პროექცია:

$$\varphi_0, \varphi_a = \pi_a \varphi_0, \varphi_b = \pi_b \varphi_0, \dots$$

ამ პროექციების ნაცვლად შემოვიღოთ ახალი პროექციები ასეთი თანაფარდობით:

$$\varphi_1 = \varphi_0;$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + a \varphi_a; \quad (35.15)$$

$$\varphi_3 = \varphi_0 + a' \varphi_a + b \varphi_b;$$

.....

ამ ფუნქციათა a, a', b, \dots უცნობი კოეფიციენტები ისე ავირჩიოთ, რომ ახალი პროექციები ერთმანეთის ორთოგონალური იყოს. ამისთვის კი საჭიროა, რომ

$$C_{kl} \langle \varphi_k | \mathcal{E}^{(\lambda)}_1 | \varphi_l \rangle = 0 \quad (35.16)$$

საიდანაც უცნობი კოეფიციენტებისათვის განტოლებათა ასეთ სისტემას ვიღებთ:

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_1 | \mathcal{E}_1^{(1)} | \varphi_2 \rangle &= C_{11} + a C_{1a}; \\
 \langle \varphi_1 | \mathcal{E}_1^{(1)} | \varphi_3 \rangle &= C_{11} + a' C_{1a} + b C_{1b}; \\
 \langle \varphi_2 | \mathcal{E}_1^{(1)} | \varphi_3 \rangle &= C_{11} + a C_{1a} + a' C_{1a} + b C_{1b} + a a' C_{aa} + a b C_{ab};
 \end{aligned}
 \tag{35.17}$$

.....

ადვილია იმის დამტკიცება, რომ

$$C_{ab} = C_{ba}$$

დავალება 35.2: დაამტკიცეთ ეს ტოლობა.

(35.17) სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:

$$a = C_{11} / C_{1a}; \quad a' = -\frac{C_{1a}C_{1b} - C_{11}C_{ab}}{C_{1b}C_{aa} - C_{1a}C_{ab}}; \quad b = -\frac{C_{11}C_{aa} - C_{1a}^2}{C_{1b}C_{aa} - C_{1a}C_{ab}}. \tag{35.18}$$

მაგალითისათვის ვნახოთ, როგორი სახე ექნება (35.10) პროექციებს, როდესაც მოვახდენთ მათ ორთოგონალიზაციას. არაორთოგონალური მოყვანილი რვა პროექტიდან ორია: $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ და $\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2$. დავთვალოთ მათთვის C_{11} და C_{1a} .

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 | |12\rangle [13] |12\rangle | \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle = \\
 &= \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 | \{2|12\rangle - |12\rangle (13) |12\rangle\} | \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle = 2; \\
 C_{12} &= \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 | |12\rangle [13] |12\rangle | \alpha_1 \alpha_3 \alpha_2 \rangle = \\
 &= \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 | \{2|12\rangle - |12\rangle (13) |12\rangle\} |(23)\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle = \\
 &= \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 | \{2(23)|12\rangle - |12\rangle |23\rangle\} | \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle = -1
 \end{aligned}$$

ამიტომ (35.17) ამოხსნებში კოეფიციენტი $a=2$ და ორთოგონალური პროექციები იქნება:

$$\varphi_1 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad \text{და} \quad \varphi_2 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 2 \alpha_1 \alpha_3 \alpha_2$$

დავალება 35.3: ა) შეამოწმეთ ამ პროექციების ორთოგონალობა.

ბ) GL_3 ჯგუფის $\{42\}$ წარმოდგენაში არის ერთნაირი შემადგენლობის 3 პროექცია. იპოვეთ ეს პროექციები და მოახდინეთ მათი ორთოგონალიზაცია. შეამოწმეთ მიღებული პროექციების ორთოგონალობა.

ამგვარად, პროექციების ორთოგონალობის საკითხი დაუყვანადი წარმოდგენის შიგნით მოგვარებულია (35.15) ტოლობების საშუალებით.

განვიხილოთ ახლა (35.14) ფორმულით გასაზღვრული საბაზისო ფუნქციების ცალსახობის საკითხი. ამასთან დაკავშირებით არსებობს **გელფანდ-ციტლის თეორემა**, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

თეორემა 35.1: ჯგუფთა ჯაჭვის:

$$GL_n \supset GL_{n-1} \supset GL_{n-2} \supset \dots GL_2 \supset GL_1 \quad (35.19)$$

დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება მთელი დადებითი რიცხვების ასეთი ტაბულით:

$$\mu = \begin{pmatrix} m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \dots & m_{n-1n} & m_{nn} \\ m_{1n-1} & m_{2n-1} & \dots & m_{n-1n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & m_{12} & m_{22} & & & \\ & & m_{11} & & & \end{pmatrix} \quad (35.20)$$

აქ m_{ik} მთელი დადებითი რიცხვებია (ნულის ჩათვლით), რომლებიც ასეთ პირობას აკმაყოფილებენ:

$$m_{ik} \leq m_{i+1k}, \quad i \leq k$$

ამ თეორემის **დამტკიცება** არ მოგვყავს.

ჩვენ მიერ მოყვანილი (35.14) ფუნქციები აკმაყოფილებენ გელფანდ-ცეიტლის თეორემის ყველა პირობას. მართლაც, ჯერ ერთი, $\mathcal{G}^{\{\lambda\}}_1$ პროექტორის აგების გზიდან ჩანს, რომ (35.14) ფუნქცია (35.19) ჯგუფთა ჯაჭვის შესაბამისი ფუნქციაა; მეორეც, (35.20) ტაბულის პირველი სტრიქონის რიცხვებად ავირჩიოთ GL_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისი $\{\lambda\}$ იუნგის სქემის სტრიქონებში შემავალი უჯრების რაოდენობები:

$$m_{1n} = \lambda_1, \quad m_{2n} = \lambda_2, \quad \dots, \quad m_{nn} = \lambda_n$$

თუ სქემის სტრიქონების რიცხვი n -ზე ნაკლებია, მაშინ ტაბულის რიცხვები ნულებით შევავსოთ, რაც თეორემით დაშვებულია. მოყვანილი რიცხვები აკმაყოფილებენ (35.21) პირობას.

მეორე სტრიქონის რიცხვებად ავირჩიოთ GL_{n-1} ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისი $\{\lambda'\}$ იუნგის სქემის სტრიქონებში შემავალი უჯრების რაოდენობები. $\{\lambda'\}$ იუნგის სქემის მისაღებად $\{\lambda\}$ იუნგის სქემიდან ყველა ის უჯრა უნდა მოვაშოროთ, რომელიც ამ ბოლოში α_n ერთნაწილაკოვან მდგომარეობას უკავია. ამიტომ ამ შემთხვევაშიც (35.21) პირობა კმაყოფილდება. ამგვარად,

$$m_{1n-1} = \lambda'_1, \quad m_{2n-1} = \lambda'_2, \quad \dots, \quad m_{n-1n-1} = \lambda'_{n-1}$$

თუ ახლა ამის მსგავსად განვიხილავთ GL_{n-2} , GL_{n-3} და ა.შ. ქვეჯგუფების შესაბამის იუნგის სქემებს, მაშინ (35.20) ტაბულის ყველა შესაბამის რიცხვს მივიღებთ. ამით ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ (35.14) ბაზისი ხასიათდება (35.20) ტაბულით და, ამგვარად, წარმოადგენს გელფანდ-ცეიტლინის ბაზისს, რაც იმის მომასწავებელია, რომ ჩვენ მიერ არჩეული ბაზისი ცალსახაა.

ვიპოვოთ ახლა (35.14) ფუნქციის ნორმირების კოეფიციენტი. (28.35) ფორმულის ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\mathcal{N}_j^{\{\lambda\}}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{M_j^{\{\lambda\}} C_\varphi^{\{\lambda\}}}} \quad (35.22)$$

სადაც $M_j^{(\lambda)}$ იგივე რიცხვებია, რაც (28.35) ფორმულაში. ისინი მხოლოდ გადანაცვლებათა ჯგუფით არიან განსაზღვრულნი. GL_n ჯგუფის თვისებებზე $C_\varphi^{(\lambda)}$ კოეფიციენტი არის დამოკიდებული. ისინი ასე განიმარტებიან:

$$C_\varphi^{(\lambda)} = \langle \varphi | \mathcal{Y}_1^{(\lambda)} | \varphi \rangle \quad (35.23)$$

აქ φ GL_n ჯგუფის პროექციას აღნიშნავს, $\mathcal{Y}_1^{(\lambda)}$ ოპერატორი კი სიმეტრიული ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის უფროსი პროექტორია.

ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ GL_n ჯგუფის ორთონორმირებული ბაზისი, რომელშიც არა გვაქვს გადაგვარებული მდგომარეობები, ე.ი. ყოველი ფუნქცია ცალსახად განსაზღვრავს სისტემის q -ნაწილაკობრივ მდგომარეობას. ეს საბაზისო ფუნქცია მოიცემა (35.14) გამოსახულებით, ხოლო მისი ნორმირების კოეფიციენტი განისაზღვრება (35.22) ფორმულით.

VI. წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის ქვეჯგუფების წარმოდგენები

მეათე პარაგრაფში უკვე ვახსენეთ წრფივ გარდაქმნათა GL_n ჯგუფის ზოგიერთი ქვეჯგუფები. სანამ შევუდგებით ამ ჯგუფების წარმოდგენების აგებას, ჩამოვთვალოთ ის ჯგუფები, რომლებზეც ქვევით გვექნება საუბარი.

- პირველ რიგში დავასახელებთ არსი წრფივი გარდაქმნების GL_n ჯგუფს, რომელიც იმით განსხვავდება GL_n ჯგუფისაგან, რომ მისი პარამეტრიზაცია ხდება არსი რიცხვებით. ამგვარად, $2n^2$ -პარამეტრიანი GL_n ჯგუფისაგან განსხვავებით GL_n ჯგუფში n^2 პარამეტრია;

- SL_n სპეციალური წრფივი გარდაქმნების ჯგუფი ან უნიმოდულარული წრფივი გარდაქმნების ჯგუფი აერთიანებს ისეთ მატრიცულ გარდაქმნებს, რომელთა დეტერმინანტი ერთის ტოლია. ეს ჯგუფი $(2n^2 - 2)$ -პარამეტრიანი;

- SL_n სპეციალური არსი წრფივი გარდაქმნების ჯგუფი არის არს-პარამეტრიანი ჯგუფი, რომლის გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი ერთს უდრის;

- U_n უნიტარული გარდაქმნების ჯგუფი, რომლის მატრიცები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$U^\dagger U = 1 \tag{VI.1}$$

- SU_n უნიტარული უნიმოდულარული გარდაქმნების ჯგუფი, რომლის მატრიცები (VI.1) პირობასთან ერთად აკმაყოფილებენ კიდევ პირობას:

$$\det U = 1 \tag{VI.2}$$

- O_n ორთოგონალური გარდაქმნების ჯგუფი აერთიანებს წრფივ გარდაქმნებს, რომლებიც ინახავს *კანონიკურ კვადრატულ ფორმას*:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i x^i y^i \tag{VI.3}$$

- Sp_n სიმპლექტურ გარდაქმნათა ჯგუფი, რომლის გარდაქმნები ინახავენ *ნიშანცვლად* ანუ *ჯვარედინად სიმეტრიულ ფორმას*. ამ ფორმას ასეთი სახე აქვს:

$$/x, y/ = g_{ik} x^i y^k, \quad (g_{ik} = -g_{ki}) \quad (VI.4)$$

- SO_n სპეციალურ ორთოგონალურ გარდაქმნათა ჯგუფი, რომელიც (VI.3) ფორმის შენახვის გარდა, როგორც ყველა სპეციალური ჯგუფი, შეიცავს მხოლოდ ერთის ტოლი დეტერმინანტის მქონე გარდაქმნათა მატრიცებს. ამ ჯგუფებს n -განზომილებიან ბრუნვის ჯგუფებს უწოდებენ. სამგანზომილებიან სივრცეში ბრუნვები ამ ჯგუფების ერთ-ერთ მაგალითს წარმოადგენს.

ცხადია, რომ არსი გარდაქმნების ჯგუფების წარმოდგენები სავსებით იდენტურნი არიან იმ ჯგუფებისა, სადაც პარამეტრები კომპლექსურნი არიან და კომპლექსურპარამეტრიან ჯგუფებზე მიღებული შედეგები შეგვიძლია პირდაპირ გადავიტანოთ არსი პარამეტრების მქონე შესაბამის ჯგუფებზე. ამიტომ ქვევით GL_n' და SL_n' ჯგუფებზე სპეციალურად აღარ გავჩერდებით.

36. ჯგუფები SL_n , U_n , და SU_n

წინა თავში უკვე ვნახეთ, რომ GL_n ჯგუფის r რანგის დაუყვანადი ტენზორული წარმოდგენა შედგენილია $\{1\}$ ფუნდამენტური წარმოდგენის მატრიცული ელემენტების r რანგის ერთგვაროვანი პოლინომებისაგან. გასაგებია, რომ GL_n ჯგუფის ნებისმიერი H_n ქვეჯგუფის r რანგის ტენზორული წარმოდგენაც ერთგვაროვანი პოლინომებისაგან აიგება. ამავე დროს, შესაძლებელია, რომ $GL_n \supset H_n$ რედუქციის დროს წარმოდგენა, დაუყვანადი GL_n ჯგუფის თვალსაზრისით, დაყვანადი გახდეს H_n ქვეჯგუფის თვალსაზრისით. ამ შემთხვევაში შესაძლებელი ყოფილა ჯგუფის წარმოდგენის ისე გარდაქმნა, რომ r რანგის პოლინომების რაღაც $P_\nu(g)$ ერთობლიობა იქცეს ნულად g გარდაქმნებისათვის H_n ქვეჯგუფიდან ისე, რომ არ იყოს ნული ყველა g გარდაქმნისათვის GL_n -დან.

თეორემა 36.1: GL_n ჯგუფის წარმოდგენები დაუყვანადებად რჩებიან, როდესაც გადავდივართ ამ ჯგუფის შემდეგ ქვეჯგუფებზე: GL_n' , SL_n , SL_n' , U_n' და SU_n .

დამტკიცება: ცხადია, თეორემა ყველა ქვეჯგუფისთვის ცალკე უნდა დამტკიცდეს. ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა ჯერ

$$GL_n \supset GL_n'$$

რედუქციისათვის. თუ GL_n' ჯგუფის წარმოდგენა დაყვანადია, მაშინ $P_\nu(g)$ პოლინომების ნაწილი ნულის ტოლი უნდა იყოს არგუმენტების ნებისმიერი არსი მნიშვნელობისათვის. ცნობილი, რომ, თუ მრავალწევრთა ერთობლიობა ნულის ტოლი ხდება არგუმენტების ყველა არსი მნიშვნელობისათვის, იგი ნულია

საერთოდ არგუმენტების ყველა მნიშვნელობისათვის. ამიტომ წარმოდგენა, დაყვანადი GL_n' ჯგუფის თვალსაზრისით, დაყვანადი იქნება GL_n ჯგუფის თვალსაზრისითაც და პირიქით, GL_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენა დაუყვანადია მაშინაც, როდესაც შემოვიზღუდებით არსი პარამეტრიანი მატრიცებით.

ახლა გავიხილოთ

$$GL_n \supset U_n$$

რედუქცია. შეიძლება ჩვენება, რომ უნიტარული U გარდაქმნა წარმოიდგინება როგორც $U=e^{-iS}$, სადაც S ერმიტული მატრიცაა. ერთიანის მახლობლობაში U მატრიცებს ასეთი სახე ექნება:

$$U \supset 1 - i S$$

სადაც S ინფინიტეზიმალური ერმიტული მატრიცაა. ამგვარად, U_n ჯგუფის ალგებრის მისაღებად უნდა ავაგოთ ერმიტული ოპერატორების სივრცე. ამ სივრცის n^2 საბაზისო ვექტორი ასე ავირჩიოთ:

• $X^{j k} = X^{k j} = 1$, თუ $k \neq j$ და ორივე ინდექსი ფიქსირებულია, ხოლო დანარჩენი ინდექსებისათვის ნულის ტოლია; (36.1)

• $X'^{j k} = -X'^{k j} = i$, თუ $k \neq j$ და ორივე ინდექსი ფიქსირებულია, ხოლო დანარჩენი ინდექსებისათვის ნულის ტოლია;

• $X^{k k} = 1$, თუ $k = j$ და ორივე ინდექსი ფიქსირებულია, ხოლო დანარჩენი ინდექსებისათვის ნულის ტოლია.

U_n ჯგუფის ალგებრა ასეთი ვექტორების სივრცეა:

$$x = \alpha_{ij} X^{ij} \tag{36.2}$$

სადაც X^{ij} გენერატორები (36.1) პირობით მოიცემა, ხოლო α_{ij} კოეფიციენტები არსი რიცხვებია. განსხვავებით GL_n ჯგუფის ალგებრისაგან, სადაც ისინი

კომპლექსურ რიცხვებს წარმოადგენენ. თუ ახლა $GL_n \supset GL_n'$ რედუქციისათვის ჩატარებულ მსჯელობის ანალოგიურ მსჯელობას ჩავატერებთ, დავრწმუნდებით, რომ GL_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენები დაუყვანადი რჩება U_n ჯგუფისთვისაც.

- დავალება 36.1:** ა) აჩვენეთ, რომ თუ U უნიტარულია, მაშინ $U=e^{-iS}$, სადაც S ერმიტულია;
- ბ) აჩვენეთ, რომ GL_n ჯგუფის რედუქცია SL_n, SL_n', SU_n , ჯგუფებზე GL_n ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენას დაუყვანადად ტოვებს.

მართალია SL_n, U_n და SU_n ჯგუფებზე რედუქციის დროს GL_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენები დაუყვანადად რჩებიან, მაგრამ ისინი შეიძლება დამოუკიდებელნი არ იყვნენ. მართლაც, $\{1^n\}$ სრულიად ანტისიმეტრიული წარმოდგენა ჩამოთვლილი ჯგუფებისთვის ერთგანზომილებიანია და მას ერთადერთი ტაბულა შეესაბამება –

1
2
...
n

რომლის შესაბამისი ფუნქცია წარმოადგენს დეტერმინანტს:

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \dots \\ \hline n \\ \hline \end{array} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \quad (36.3)$$

სადაც x_1, x_2, \dots, x_n ფუნდამენტური სივრცის ვექტორებია. ამ ფუნქციის შესაბამისი ინვარიანტული მატრიცა უბრალოდ g მატრიცის დეტერმინანტის ტოლია.

- დავალება 36.2:** ა) აჩვენეთ ეს;

ბ) გამოიყვანეთ (36.3) ტოლობა.

ამიტომ ყველა უნიმოდულარული ანუ სპეციალური ჯგუფისათვის, რომლებისთვისაც $\det g=1$, $\{1^n\}$ წარმოდგენა 1-ის ტოლი ყოფილა და ადგილი ჰქონია ექვივალენტობის ასეთ პირობას:

$$\{1^n\} \sim \{0\}$$

სრულიად ანალოგიურად შეიძლება ჩვენება, რომ $\{r^n\}$ წარმოდგენისათვის, სადაც r რიცხვია, ინვარიანტული მატრიცა $(\det g)^n$ -ის ტოლია, ე.ი., უნიმოდულარული ჯგუფებისათვის

$$\{r^n\} \sim \{0\}$$

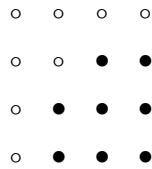
ზემონათქვამიდან ასეთი დასკვნის გამოტანა შეიძლება: თუ ნებისმიერ იუნგის სქემას $\{\lambda\}=\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ მარცხნიდან ნებისმიერი r რაოდენობის n სიგრძის სვეტებს მივაშენებთ, ამით $\{\lambda\}$ წარმოდგენა არ შეიცვლება, რადგან, ფაქტობრივად, წარმოდგენის მატრიცას ერთიანზე გამრავლებით $-(\det g)^r=1$. საბოლოოდ, ვასკვნით, რომ GL_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის SL_n , SL_n' და SU_n ჯგუფებზე რედუქციის დროს გვაქვს ბოლო სამი ჯგუფის წარმოდგენეთა ექვივალენტობის ასეთი პირობები:

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \sim \{\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_2 - \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n\} \quad (36.5)$$

უნიმოდულარულ ჯგუფებში კიდევ ერთი ექვივალენტობის პირობა არსებობს:

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \sim \{\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_1 - \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1 - \lambda_2\} \quad (36.6)$$

რაც ნიშნავს, რომ უნიმოდულარული ჯგუფის $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ წარმოდგენა ისეთი წარმოდგენის ექვივალენტურია, რომლის შესაბამისი იუნგის სქემა, მიხატული $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ სქემაზე ქვემოდან ავსებს ამ უკანასკნელს n -სტრიქონიან სქემამდე ანუ ჯგუფის $\{r^n\} \sim \{0\}$ სკალარამდე. მაგალითად, SU_4 ჯგუფში განვიხილოთ $\{421^2\}$ წარმოდგენა და შევავსოთ იგი $\{4^4\} \sim \{0\}$ სქემამდე:



როგორც ნახაზიდან ჩანს, $\{421^2\}$ წარმოდგენა $\{3^22\}$ წარმოდგენის ექვივალენტური ყოფილა (ნახაზზე მუქი შავი წერტილებით აღნიშნული სქემა დალაგებული კლებადობის პრინციპით). უფრო ზოგადად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

$$\{1^{n-r}\} \sim \{1^r\}; \{s^{n-r}\} \sim \{s^r\} \quad (36.7)$$

დავალება 36.3: აჩვენეთ (36.6) თანაფარდობის სამართლიანობა.

ბირთვულ ფიზიკასა და ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში SU_3 ჯგუფი დიდ როლს თამაშობს. ფიზიკის ამ დარგებში მისი წარმოდგენების აღსანიშნავად განსხვავებული აღნიშვნებია შემოყვანილი. მაგალითად, ბირთვულ ფიზიკაში S -ფუნქციების მაგივრად SU_3 ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენები, ე.წ., ელიოტის (λ, μ) სიმბოლოთი აღინიშნება. გასაგებია, რომ იგი ცალსახად არის დაკავშირებული S -ფუნქციებთან. მოვიყვანოთ ეს კავშირი. გავიხსენოთ, რომ SU_3 ჯგუფში მხოლოდ სამსტრიქონიანი იუნგის სქემებია დაშვებული. აღვნიშნოთ ეს სქემა ასე: $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$. ასეთი სქემა (36.5) თანაფარდობის ძალით ექვივალენტურია სქემისა

$$\{v_1, v_2\} \sim \{\rho_1 - \rho_3, \rho_2 - \rho_3\}$$

ელიოტის λ და μ სიმბოლოები ასე უკავშირდება v -ებსა და ρ -ებს:

$$\lambda = v_1 - v_2 = \rho_1 - \rho_2; \quad \mu = v_2 = \rho_2 - \rho_3 \quad (36.8)$$

დავალება 36.4: ა) იპოვეთ ელიოტის სიმბოლოები SU_3 ჯგუფის ასეთი წარმოდგენებისათვის: $\{1^3\}$, $\{21\}$, $\{3\}$, $\{1^2\}$, $\{521\}$, $\{3^2\}$, $\{87^2\}$, $\{3^3\}$.

ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში SU_3 ჯგუფის წარმოდგენათა აღსანიშნავად გამოიყენება $D(m,n)$ სიმბოლო, სადაც m რიცხვი წარმოდგენაში შემავალი ინვარიანტული ცვლადების ანუ $\{\rho\}$ იუნგის სქემაში ერთსტრიქონიანი სვეტების რაოდენობას აღნიშნავს, ხოლო n – კოვარიანტული ცვლადების, ანუ ორსტრიქონიანი სვეტების რაოდენობას. SU_3 ჯგუფის წარმოდგენებში გვხვდება კიდევ სამსტრიქონიანი სვეტებიც, რომლებიც სკალარს შეესაბამება და (35.7)-ის ძალით

$$\{1^3\} \sim \{0\}$$

წარმოდგენები $\{1^2\} \sim \{1\}$ სამგანზომილებიანია და ორივე ვექტორს შეესაბამება SU_3 ჯგუფის გარდაქმნათა სივრცეში, ოღონდ $\{1\}$ ნამდვილი ვექტორია (ინვარიანტული ცვლადი), ხოლო $\{1^2\}$ – აქსიალური ვექტორია (კოვარიანტული ცვლადი). მაგალითად, ჩვენთვის კარგად ცნობილი ნამრავლი $\{21\} \cdot \{21\}$, რომელიც SU_3 ჯგუფისათვის შემდეგი გამოსახულების ექვივალენტურია:

$$\{21\} \cdot \{21\} \sim \{42\} + \{3\} + \{3^2\} + 2\{21\} + \{0\} \quad (36.9)$$

$D(m,n)$ სიმბოლოებში ასე ჩაიწერება:

$$D(1,1) \cdot D(1,1) = D(2,2) + D(3,0) + D(0,3) + 2D(1,1) + D(0,0) \quad (36.10)$$

ცხადია, წარმოდგენათა კომპოზიციის კანონი შეიძლება ჩამოყალიბდეს პირდაპირ ელიოტისა ან $D(m,n)$ სიმბოლოებისათვის.

დავალება: 36.5: ჩამოაყალიბეთ SU_3 ჯგუფის წარმოდგენათა კომპოზიციის კანონი ელიოტისა და $D(m,n)$ სიმბოლოებისათვის.

ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში წარმოდგენათა კომპოზიციის კანონი ხშირად წარმოდგენების განზომილებების საშუალებით გამოისახება. მაგალითად, (36.10) ტოლობა ასე იწერება:

$$8 \times 8 = 27 + 10 + \overline{10} + 2 \times 8 + 1 \quad (36.11)$$

სადაც $\overline{10}$ აღნიშნავს 10 წარმოდგენის შეუღლებულს. იუნგის სქემების ენაზე $10 = \{3\}$, ხოლო $\overline{10} = \{3^2\}$. წარმოდგენათა განზომილებების დათვლა შეიძლება იუნგის რეგულარული ტაბულების აგებითა ან (33.23) ფორმულის გამოყენებით.

დავალება 36.6: აჩვენეთ, რომ (36.11) და (36.9) ფორმულები ერთიდაიგივეა.

განვიხილოთ ახლა დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისის აგების საკითხი GL_n ჯგუფის იმ ქვეჯგუფებისათვის, რომელთა დაუყვანადი წარმოდგენები დაუყვანადად რჩებიან GL_n ჯგუფის მათზე რედუქციის დროს. საბაზისო ფუნქციები 35-ე პარაგრაფში აღწერილი მეთოდებით აიგება. ხაზი მხოლოდ იმ გარემოებას უნდა გაესვას, რომ, როდესაც ვლაპარაკობთ უნიმოდულარული ჯგუფების ექვივალენტურ წარმოდგენებზე, *ექვივალენტური წარმოდგენების ბაზისები განსხვავებულია*.

მაგალითად, განვიხილოთ GL_2 ჯგუფის ორი ექვივალენტური წარმოდგენა: $\{1\}$ და $\{21\}$. მათი გარდაქმნების მატრიცები ინვარიანტული მატრიცების აგების წესით არის, შესაბამისად, $g = [g_s^t]$ და $\det g [g_s^t] = [g_s^t]$, რადგან უნიმოდულარული ჯგუფისთვის $\det g = 1$. წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციები კი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. თუ ფუნდამენტური $\{1\}$ წარმოდგენისათვის ასეთი ორი ფუნქცია გვაქვს:

$$\psi_1^{\{1\}} = \alpha |0\rangle; \quad \psi_2^{\{1\}} = \beta |0\rangle \quad (36.12)$$

$\{21\}$ წარმოდგენისათვის 35-ე პარაგრაფის შედეგების შესაბამისად გვექნება ორი ექვივალენტური კრებული. პირველი –

$$\psi_1^{\{21\}} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2 \alpha\alpha\beta - \alpha\beta\alpha - \beta\alpha\alpha) |0\rangle ;$$

$$\psi_2^{\{21\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha\beta\alpha - \beta\alpha\alpha) |0\rangle \quad (36.13)$$

და მეორე –

$$\varphi_1^{\{21\}} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2 \alpha\beta\beta - \beta\beta\alpha - \beta\alpha\beta) |0\rangle ;$$

$$\varphi_2^{\{21\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha\beta\beta - \beta\alpha\beta) |0\rangle \quad (36.14)$$

დავალება 36.7: ა) მიიღეთ (36.12) და (36.13) ფუნქციები;

ბ) შეამოწმეთ ამ ფუნქციათა ორთონორმირება.

37. წარმოდგენათა რედუქციის ფორმულები. საბაზისო ფუნქციების რედუქციული სახე

34-ე პარაგრაფში წარმოდგენათა რედუქციის საკითხი უკვე იყო დასმული და მის გადასაწყვეტად შემოღებული იყო S -ფუნქციების პლეთიზმის ოპერაცია. ამ პარაგრაფში უნიტარული ჯგუფისათვის პლეთიზმების გამოყენებით მივიღებთ სასრებლო ფორმულებს რედუქციებისათვის, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება ფიზიკურ ამოცანებში. როდესაც მე-17 პარაგრაფში მოვიყვანეთ ჯგუფთა პირდაპირი ნამრავლის მაგალითები, ვნახეთ, რომ უნიტარულ ჯგუფებში გვხვდება ასეთი ტიპის რედუქციები:

$$U_{n+m} \supset U_n \times U_m \tag{37.1}$$

$$U_{n\ m} \supset U_n \times U_m \tag{37.2}$$

იქვე აღვნიშნეთ, რომ (37.1) ნამრავლის დროს U_n და U_m ჯგუფების საბაზისო სივრცეების ვექტორები იკრიბება და U_{n+m} ფუნდამენტური წარმოდგენის ვექტორი, რომელსაც ქვევით $\{1\}_{nm}$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, ცალკე სივრცეთა ფუნდამენტური $\{1\}_n$ და $\{1\}_m$ ვექტორების ჯამი იქნება. ამიტომ U_n და U_m ჯგუფების იმ დაუყვანადი წარმოდგენების საპოვნელად, რომლებიც შედიან U_{n+m} ჯგუფის $\{\lambda\}$ წარმოდგენაში, საჭიროა ვიპოვოთ პლეთიზმი:

$$(\{1\}_n + \{1\}_m) \otimes \{\lambda\}_{n+m}$$

თუ (34.7) ფორმულას გამოვიყენებთ და ვისარგებლებთ ტოლობით $\{1\} \otimes \{\kappa\} = \{\kappa\}$, (37.1) რედუქციისათვის გვექნება ფორმულა:

$$\{\lambda\}_{n+m} \supset \sum_{\kappa} [\{\kappa\}]_n \cdot [D(\{\kappa\}\{\lambda\})]_m \tag{37.3}$$

ამ გამოსახულებაში აჯამვა ყველა იმ დასაშვები $\{\kappa\}$ იუნგის სქემით წარმოებს, რომელთა წონა 0-დან $\{\lambda\}$ იუნგის სქემის წონამდე იცვლება. ქვედა ინდექსები

მართკუთხა ფრჩხილებთან მიუთითებს, რომ მიღებული S -ფუნქციები შეესაბამებიან სათანადო ჯგუფების დაუყვანად წარმოდგენებს.

მაგალითად,

$$U_6 \supset U_2 \times U_4$$

რედუქცია განვიხილოთ U_6 ჯგუფის $\{1^3\}$ წარმოდგენისათვის. (37.3) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\{1^3\}_6 \supset \{0\}_2 \{1^3\}_4 + \{1\}_2 \{1^2\}_4 + \{1^2\}_2 \{1\}_4$$

(ქვედა ინდექსები ჯგუფის რიგს მიუთითებს). აჯამვაში არ შემოვიდა წევრი $\{1^3\}_2 \{0\}_4$, რადგან $\{1^3\}$ წარმოდგენა U_2 ჯგუფისათვის იგივურად ნულის ტოლია.

პრაქტიკულად დიდი მნიშვნელობა აქვს რედუქციას:

$$U_n \supset U_{n-1} \times U_1$$

რომლისთვისაც (37.3) ფორმულა მარტივდება. მართლაც, U_1 ჯგუფის წარმოდგენები სკალარებს წარმოადგენენ და ერთსტრიქონიანი სქემებით აღიწერებიან. ამიტომ $\{\kappa\}$ უბრალოდ რიცხვი იქნება და არა დანაწილება. ამიტომ (37.3) ასე გადაიწერება:

$$\{\lambda\}_n \supset \sum_{r=0}^{w_\lambda} \{r\}_1 \cdot [D(\{r\})\{\lambda\}]_{n-1} \quad (37.4)$$

როგორც წესი, U_1 ჯგუფის წარმოდგენებს არ მიუთითებენ. ამიტომ (37.4) ფორმულა (31.1) ფორმულისა და იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ $\Gamma_{r, \nu, \lambda} = 1$ თუ r რიცხვია, ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\{\lambda\}_n \supset \sum_{r=0}^{w_\lambda} [D(\{r\})\{\lambda\}]_{n-1} \quad (37.5)$$

ამ ფორმულას **განშტოების ფორმულა** ეწოდება და გვამღევეს U_{n-1} ჯგუფის იმ დაუყვანად წარმოდგენებს, რომლებზედაც იშლება U_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ წარმოდგენა.

დავალბა 37.1: იპოვეთ განშტოების ფორმულა ასეთი წარმოდგენებისათვის: $\{1^4\}$, $\{42\}$, $\{531\}$, $\{2^3\}$, $\{3^2\}$ და $\{61^5\}$.

ახლა განვიხილოთ (37.2) რედუქცია. ამ შემთხვევაში U_n ჯგუფის ფუნდამენტური წარმოდგენა $\{1\}_{nm}$ არის U_n და U_m ჯგუფების საბაზისო ვექტორების პირდაპირი ნამრავლი

$$\{1\}_{nm} \supset \{1\}_n \times \{1\}_m \quad (37.6)$$

ვისარგებლოთ (34.8) ფორმულით და გამოვიყენოთ (34.10) ტოლობიდან მეორე, მაშინ გვექნება:

$$\{\lambda\}_{nm} \supset \sum_v \{v\}_n \cdot [d(\{v\})\{\lambda\}]_m \quad (37.7)$$

აქ ჯამი წარმოებს $\{\lambda\}_{nm}$ S-ფუნქციის w_λ წონის ყველა შესაძლო დანაწილებით.

მაგალითად, განვიხილოთ $U_6 \supset U_2 \times U_3$ რედუქცია U_6 ჯგუფის $\{21\}_6$ წარმოდგენისათვის. (37.7) ფორმულა გვაძლევს:

$$\{21\}_6 \supset \{3\}_2 \{21\}_3 + \{21\}_2 \{3\}_3 + \{21\}_2 \{21\}_3 + \{21\}_2 \{1^3\}_3$$

გასაგებია, რომ ჯამში არ შევიდა $\{1^3\}_2$ წარმოდგენა, რომელიც იგივურად ნულის ტოლია.

(37.7) ფორმულა მარტივდება ორ შემთხვევაში: როდესაც $\{\lambda\}_{nm} = \{r\}$, ე.ი., გვაქვს სრულიად სიმეტრიული წარმოდგენა, და როდესაც $\{\lambda\}_{nm} = \{1^r\}$ – სრულიად ანტისიმეტრიული წარმოდგენისათვის. მართლაც, 31-ე პარაგრაფიდან ვიცით, რომ $d(\{v\})\{r\} = \{v\}$, ხოლო $d(\{v\})\{1^r\} = \{\tilde{v}\}$, ამიტომ

$$\{r\}_{nm} \supset \sum_v \{v\}_n \{v\}_m \quad (37.8)$$

მიღებული ფორმულა ცნობილია ვეილის ფორმულის სახელწოდებით. სრულიად ანტისიმეტრიული წარმოდგენის შემთხვევაში გვექნება:

$$\{1^r\}_{nm} \supset \sum_v \{v\}_n \{\tilde{v}\}_m \quad (37.9)$$

განვიხილოთ ახლა საბაზისო ფუნქციების აგების საკითხი იმ შემთხვევაში, როდესაც საქმე ეხება (35.19) ფორმულით მოცემული რედუქციისაგან განსხვავებულ რედუქციებს.

ფიზიკურ ამოცანებში ხშირად არის საჭირო (37.2) რედუქციისათვის ისეთი სპეციფიკური საბაზისო ფუნქციების აგება, რომელებიც U_{nm} ჯგუფის $\{A\}_{nm}$ დაუყვანად წარმოდგენასთან ერთად ხასიათდებიან აგრეთვე U_n ჯგუფის $\{\nu\}_n$ და U_m ჯგუფის $\{\mu\}_m$ დაუყვანადი წარმოდგენების ფიქსირებული მნიშვნელობებითაც. 35-ე პარაგრაფის შედეგების მიხედვით შეგვიძლია ავაგოთ ქვეჯგუფთა დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციები:

$$|\{\nu\}_i \varphi_n\rangle \text{ და } |\{\mu\}_j \varphi_m\rangle$$

ეს ფუნქციები, როგორც ვიცით, წარმოადგენენ U_n და U_m ჯგუფების $\{1\}_n$ და $\{1\}_m$ ფუნდამენტური წარმოდგენების საბაზისო ვექტორთა ნამრავლების კომბინაციებს, რომელთაც $\{\nu\}_i$ და $\{\mu\}_j$ გადანაცვლებითი სიმეტრიები გააჩნიათ. გადავამრავლოთ ეს ფუნქციები ერთმანეთზე ისეთნაირად, რომ ორ ფუნქციაში ერთნაირ ადგილზე მდგომი ფუნდამენტური ვექტორები გავაერთიანოთ წყვილებში, რომელებიც ერთი ინდექსის როლს შეასრულებენ. (37.6) ფორმულის თანახმად ასეთი წყვილი U_{nm} ჯგუფის $\{1\}_{nm}$ ფუნდამენტური წარმოდგენის საბაზისო ვექტორის კომპონენტია. ფუნქციათა ასეთი ნამრავლი შესაბამისი წარმოდგენების მატრიცების პირდაპირ ნამრავლს ან იუნგის სკემების შიდა ნამრავლს შეესაბამება, ამიტომ მას საბაზისო ფუნქციების შიდა ნამრავლი ვუწოდოთ. აგებიდან ჩანს, რომ ფუნქციათა შიდა ნამრავლი ხასიათდება $\{\nu\}_i$ და $\{\mu\}_j$ დაუყვანადი წარმოდგენების ფიქსირებული მნიშვნელობებით. მიღებული ფუნქცია უკვე არის U_{nm} ჯგუფის შესაბამისი ფუნქცია, მაგრამ ჯერ არ არის $\{A\}_J$ დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქცია. $\{A\}_J$ გადანაცვლებითი სიმეტრიის მინიჭება, როგორც ვიცით, ამ ფუნქციაზე $\mathcal{A}^{\{A\}_J}$ პროექტორის მოქმედებითაა შესაძლებელი. საბოლოოდ, საძიებელი საბაზისო ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$|\{A\}_J; (\{\nu\}_i \varphi_n; \{\mu\}_j \varphi_m)\rangle = \mathcal{N} \mathcal{A}^{\{A\}_J} ((\mathcal{A}^{\{\nu\}_i} \varphi_n) \cdot (\mathcal{A}^{\{\mu\}_j} \varphi_m)) \quad (37.10)$$

აქ \mathcal{N} ნორმირების კოეფიციენტი, ხოლო “ \circ ” ნიშანი შიდა ნამრავლს აღნიშნავს. ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ სამივე პროექტორი – $\mathcal{Y}^{\{A\}}_j$, $\mathcal{Y}^{\{\nu\}}_i$ და $\mathcal{Y}^{\{\mu\}}_j$ – ერთი და იგივე განზომილების სივრცეებში მოქმედებენ.

(37.10) ფუნქციის ჩაწერა მთლად ზუსტი არ არის, რადგან, სინამდვილეში, ფუნქცია არ არის დამოკიდებული იამანუჩის i და j სიმბოლოებზე. მართლაც, $\mathcal{Y}^{\{A\}}_j$ პროექტორის მოქმედება შიდა ნამრავლზე ან ერთსა და იმავე პასუხს იძლევა ნიშნის სიზუსტით ან ნულია. ფუნქციის ნიშნის არჩევა, ცხადია, ნებისმიერია. მაგრამ უნდა მივიღოთ რაღაც შეთანხმება ფაზაზე, ანუ ფუნქციის ნიშანზე: რომელი ავირჩიოთ, პლუსი თუ მინუსი? ნიშნის არჩევა ასე მოვახდინოთ: დავადგინოთ $|\{\nu\}_i \phi_n\rangle |\{\mu\}_j \phi_m\rangle$ შიდა ნამრავლების დალაგების წესი. დავიწყოთ $i=1$ -დან და j ვცვალოთ 1-დან $f^{\{\mu\}}$ -მდე. შემდეგ $i=2$ ავიღოთ და j ინდექსს კვლავ ყველა მნიშვნელობა მივანიჭოთ. ეს პროცედურა განვაგრძოთ i ინდექსის ბოლო $f^{\{\nu\}}$ მნიშვნელობამდე. ასეთნაირად მიღებული მიმდევრობის წევრებზე, დაწყებული პირველიდან, მიმდევრობით ვიმოქმედოთ $\mathcal{Y}^{\{A\}}_j$ პროექტორით. ნულისაგან განსხვავებული პირველივე ნიშანი მივიღოთ სწორ ფაზად და ეს **ფაზური შეთანხმება** დავიცვათ ყოველთვის. მაშინ ჩვენი ფუნქცია აღარ იქნება i და j ინდექსებზე დამოკიდებული, რადგან მათი მნიშვნელობები დაფიქსირდება ფაზური შეთანხმებით. ეს ფიქსირებული მნიშვნელობები აღვნიშნოთ o ინდექსით. მაშინ (37.10) ფუნქცია ასე გადაიწერება:

$$|\{A\}_J: (\{\nu\}_i \phi_n; \{\mu\}_j \phi_m)\rangle = \mathcal{N} \mathcal{Y}^{\{A\}}_J ((\mathcal{Y}^{\{\nu\}}_o \phi_n) \circ (\mathcal{Y}^{\{\mu\}}_o \phi_m)) \quad (37.11)$$

მაგალითისათვის განვიხილოთ U_4 ჯგუფის სრულიად სიმეტრიული $\{3\}$ წარმოდგენის რედუქცია U_2 ქვეჯგუფების $\{21\}$ წარმოდგენებზე, ანუ ასეთი ჯაჭვი:

$$\{3\}_4 \supset \{21\}_2 \times \{21\}_2 \quad (37.12)$$

ერთერთი U_2 ქვეჯგუფის ფუნდამენტური წარმოდგენის ვექტორები აღვნიშნოთ u' -თა და d' -ით, ხოლო მეორესი – u -თი და d -თი. (37.6) თანაფარდობის გათვალისწინებით ფუნქციათა შიდა ნამრავლის წყვილებისათვის ასეთი აღნიშვნები შემოვიღოთ:

$$\alpha \equiv (u', u); \quad \beta \equiv (u', d); \quad \gamma \equiv (d', u); \quad \delta \equiv (d', d);$$

მაშინ ფუნქციათა შიდა ნამრავლისათვის ასეთ გამოსახულებას მივიღებთ:

$$\begin{aligned} | \{21\}_1 u'u'd' \rangle \cdot | \{21\}_1 u u d \rangle &= (1/6)[2 u'u'd' - u'd'u' - d'u'u'] [2 u'u'd' - u'd'u' - d'u'u'] \\ &= (1/6)[4\alpha\alpha\delta - 2\alpha\beta\gamma - 2\beta\alpha\gamma - 2\alpha\gamma\beta + \alpha\delta\alpha + \beta\gamma\alpha - 2\gamma\alpha\beta + \gamma\beta\alpha + \delta\alpha\alpha] \end{aligned}$$

თუ ამ ნამრავლზე ვიმოქმედებთ $\mathcal{Q}^{\{3\}}$ პროექტორით, მივიღებთ:

$\{3\}$:

$$\begin{aligned} (\{21\}_1 u'u'd') \cdot (\{21\}_1 u u d) &= \mathcal{N} |123| [\alpha\alpha\delta - \alpha\beta\gamma] \\ &= (1/18)[2\alpha\alpha\delta + 2\alpha\delta\alpha + 2\delta\alpha\alpha - \alpha\beta\gamma - \beta\alpha\gamma - \alpha\gamma\beta - \gamma\beta\alpha - \beta\gamma\alpha - \gamma\alpha\beta] \quad (37.13) \end{aligned}$$

თუ ახლა შევადგინეთ სხვა შესაძლო შიდა ნამრავლები, სახელდობრ,

$$| \{21\}_1 u'u'd' \rangle \cdot | \{21\}_2 u u d \rangle; | \{21\}_2 u'u'd' \rangle \cdot | \{21\}_1 u u d \rangle; | \{21\}_2 u'u'd' \rangle \cdot | \{21\}_2 u u d \rangle$$

და მათზე ვიმოქმედებთ $\mathcal{Q}^{\{3\}}$ პროექტორით, დავრწმუნდებით, რომ მივიღებთ ან ნულს ან (37.13) შედეგს. ფაზური შეთანხმებით (37.13) ფუნქცია განსაზღვრავს ფუნქციის სწორ ნიშანს.

დავალება 37.2: ა) აჩვენეთ ეს.

ბ) იპოვეთ (37.12) რედუქციის შესაბამისი საბაზისო ფუნქციები U_4 ჯგუფის $\{21\}_1$, $\{21\}_2$ და $\{1^3\}$ წარმოდგენებისათვის. აჩვენეთ, რომ შედეგები არ არის დამოკიდებული U_2 ჯგუფის წარმოდგენების იამანუჩის სიმბოლოებზე.

ფუნქციათა შიდა ნამრავლთან ერთად საჭიროა ფუნქციათა გარე ნამრავლის შემოღებაც (37.1) რედუქციისათვის. ამ შემთხვევაში U_n და U_m ჯგუფების $\{\nu\}$ და $\{\mu\}$ დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციები წარმოადგენენ პოლინომებს, შედგენილს $\{1\}_n$ და $\{1\}_m$ ფუნდამენტური წარმოდგენის ვექტორებისაგან. U_{n+m} ჯგუფის $\{1\}_{n+m}$ ფუნდამენტური წარმოდგენის $n+m$ საბაზისო ვექტორი ქვეჯგუფთა ფუნდამენტური ვექტორების მექანიკურ გაერთიანებას წარმოადგენს. ამიტომ $\{1\}_{n+m}$ ჯგუფის ვექტორთა დანომრვა ასე

ჩავატაროთ: 1-დან n -მდე ინდექსები მივაკუთვნოთ $\{1\}_n$ წარმოდგენის ვექტორებს, ხოლო ინდექსები $\{1\}_m$ წარმოდგენისათვის აღვნიშნოთ $(n+1)$ -დან $(n+m)$ -მდე. სათანადოდ, $\mathcal{Y}^{\{\nu\}}$ პროექტორის გადანაცვლებები მოქმედებენ $1, 2, \dots, n$ ინდექსების მქონე ვექტორებზე, ხოლო $\mathcal{Y}^{\{\mu\}}$ პროექტორისა – $(n+1), (n+2), \dots, (n+m)$ ინდექსებზე. ვიმოქმედოთ ამ ოპერატორებით სათანადო პროექციებზე და მიღებული ფუნქციები გავამრავლოთ ერთმანეთზე ისე, რომ პირველი ფუნქციის ვექტორები განლაგდნენ 1-დან n -მდე ადგილებზე, ხოლო მეორე ფუნქციისა – $(n+1)$ -დან $(n+m)$ -მდე ადგილებზე. ამგვარად მიიღება $(n+m)$ ვექტორების ერთგვაროვანი ნამრავლებისაგან შედგენილი პოლინომები, რომელსაც ფუნქციების გარე ნამრავლი ეწოდება.

მაგალითად, შევადგინოთ $|\{3\} \alpha \alpha \beta\rangle$ და $|\{21\}_2 \alpha \beta \gamma\rangle$ ფუნქციების გარე ნამრავლი. რადგან

$$|\{3\} \alpha \alpha \beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha \alpha \beta + \alpha \beta \alpha + \beta \alpha \alpha)$$

ხოლო $|\{21\}_2 \alpha \beta \gamma\rangle = 1/2 (\alpha \gamma \beta + \beta \gamma \alpha - \gamma \alpha \beta - \gamma \beta \alpha)$

ამიტომ ამ ფუნქციათა გარე ნამრავლი იქნება:

$$|\{3\} \alpha \alpha \beta\rangle \times |\{21\}_2 \alpha \beta \gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} (\alpha \alpha \beta \alpha \gamma \beta + \alpha \beta \alpha \alpha \gamma \beta + \beta \alpha \alpha \alpha \gamma \beta + \alpha \alpha \beta \gamma \alpha + \alpha \beta \alpha \gamma \alpha + \beta \alpha \alpha \beta \gamma \alpha - \alpha \alpha \beta \gamma \alpha \beta - \alpha \beta \alpha \gamma \alpha \beta - \beta \alpha \alpha \gamma \alpha \beta - \alpha \alpha \beta \gamma \beta \alpha - \alpha \beta \alpha \gamma \beta \alpha - \beta \alpha \alpha \gamma \beta \alpha)$$

რადგან $\mathcal{Y}^{\{\nu\}}$ და $\mathcal{Y}^{\{\mu\}}$ პროექტორები სხვადასხვა სივრცეებში მოქმედებენ, ამიტომ ისინი კომუტირებენ როგორც ერთმანეთში, ასევე მეორე პროექტორის პროექციებთან. ამიტომ გასაგებია, რომ რომ ადგილი ექნება ასეთ ტოლობას:

$$|\{\nu\} \varphi_1\rangle |\{\mu\}_k \varphi_2\rangle = \mathcal{N} \mathcal{Y}_j^{\{\nu\}} \mathcal{Y}_k^{\{\mu\}} \varphi_1 \varphi_2 \tag{37.14}$$

\mathcal{N} სიმბოლო ამ გამოსახულებაში ნორმირების კოეფიციენტია.

38. უნიტარული ჯგუფების კაზიმირის ოპერატორები

ჩვენ ვნახეთ, რომ S -ფუნქციები უნივერსალურ სიდიდეებს წარმოადგენენ ჯგუფთა წარმოდგენებისათვის: ისინი იძლევიან წარმოდგენების აგების საშუალებას, მათ ბაზისს, კომპოზიციის კანონს, რედუქციებს. წარმოდგენების ერთ-ერთი ძირითადი მახასიათებელია ჯგუფის კაზიმირის ოპერატორი, რომელიც, როგორც ვიცით, ჯგუფის ინვარიანტებს წარმოადგენენ. S -ფუნქციების ანუ იუნგის სქემების საშუალებით შესაძლებელია ჯგუფების კაზიმირის ოპერატორების გამოთვლა. ეს შესაძლებლობა პერელომოვმა და პოპოვმა აჩვენეს და ჩვენ ახლა U_n და SU_n ჯგუფებისათვის კაზიმირის ოპერატორებს დავითვლით.

24-ე პარაგრაფში (24.4) ტოლობით შემოყვანილი იყო ჯგუფის კაზიმირის კვადრატული ოპერატორი, რომელიც შესაბამისი ალგებრის გენერატორების ორმაგ ნამრავლს წარმოადგენდა. შესაძლებელი ყოფილა p რიგის კაზიმირის ოპერატორის შემოყვანა p რაოდენობის გენერატორის ნამრავლის სახით. ჩვენ ვიცით, რომ გენერატორები ადგენენ ჯგუფის შესაბამისი ლის ალგებრის ბაზისს. ბაზისის შერჩევა ნებისმიერია. ავირჩიოთ ჯგუფის გენერატორები $[A_j^i]$ მატრიცის სახით, სადაც j -ური სტრიქონის i -ურ სვეტთან გადაკვეთაზე ზის ერთიანი. ყველა დანარჩენი მატრიცული ელემენტი კი ნულის ტოლია. ამგვარად, j და i ინდექსები ნომრავენ მატრიცებს და არა მატრიცულ ელემენტებს. ამიტომ ქვევით მატრიცებს პირდაპირ A_j^i სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. ასეთნაირად შემოტანილი გენერატორების კომუტაციის თანაფარდობა იქნება:

$$[A_j^i, A_l^k] = \delta_l^i A_j^k - \delta_j^k A_l^i \quad (38.1)$$

დავალება 38.1: შეამოწმეთ ეს თანაფარდობა.

ამასთან, SU_n ჯგუფებისათვის (38.1) პირობასთან ერთად უნდა შესრულდეს დამატებითი პირობა:

$$\sum_{i=1}^n A_i^i = 0 \quad (38.2)$$

დავალება 38.2: ამოწერეთ U_2 , U_3 , SU_2 და SU_3 ჯგუფების გენერატორები.

ახლა შესაძლებელია p რიგის კაზიმირის ოპერატორის განსაზღვრა ტოლობით

$$C_p = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p=1}^n A_{i_1}^{i_2} A_{i_2}^{i_3} \dots A_{i_{p-1}}^{i_p} A_{i_p}^{i_1} \quad (38.3)$$

ეს ოპერატორი მართლაც კომუტირებს ყველა A_j^k გენერატორთან.

ვიპოვოთ (38.3) ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობა $\{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ წარმოდგენაში. ეს საკუთარი მნიშვნელობა $C_p^{(\lambda)}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. მის საპოვნელად C_p ოპერატორი ვამოქმედოთ $\{\lambda\}$ წარმოდგენის უფროს ψ_0 ვექტორზე, რომელიც 38.1 ნახაზზეა წარმოდგენილი:

1	1	...	1
2	2	...	2
...			
$n-1$	$n-1$...	$n-1$
n	n	...	n

ნახ. 38.1

როგორც ვიცით უფროს ვექტორში პირველი სტრიქონის λ_1 უჯრა ერთიანებით არის შევსებული, მეორე სტრიქონის λ_2 უჯრა – ორიანებით და ა.შ. n -ური სტრიქონის λ_n უჯრა შევსებულია n ინდექსებით.

გადავწეროთ (38.3) ოპერატორი მოხერხებული სახით:

$$C_p = \sum_{i,j=1}^n (B^{(p-1)})_j^i A_i^j \quad (38.4)$$

სადაც შემოღებულია აღიშვნა:

$$B_p = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{p-2}=1}^n A_{i_1}^{i_1} A_{i_2}^{i_2} \dots A_j^{i_{p-2}} \quad (38.5)$$

A_j^i გენერატორის განმარტების ძალით მისი მოქმედება ტენზორული სივრცის ნებისმიერ ვექტორზე გამოიხატება j ინდექსის i ინდექსით შეცვლაში. მაგრამ, თუ უფროს ვექტორში j -ის შევცვლით მასზე ნაკლები i ინდექსით, მაშინ იუნგის ტაბულათა თვისების გამო ასეთი ტაბულა ნულის ტოლი გახდება, ამგვარად,

$$A_j^i \psi_0 = 0, \quad \text{თუ } i < j \quad (38.6)$$

ცხადია, თუ $i > j$, მაშინ არსებობს შესაძლებლობა ჩავსვათ i ინდექსი j -ის მაგივრად j -ური სტრიქონის იმ სვეტებში, რომლებიც არ გადაიფარებიან i -ურ სტრიქონთან.

შევნიშნოთ, რომ (38.5) ტოლობით განსაზღვრულ $(B^{(p-1)})_j^i$ ოპერატორს ისეთივე ტრანსფორმაციული თვისებები აქვს, როგორც A_j^i გენერატორს, ამიტომ

$$(B^{(p-1)})_j^i \psi_0 = 0, \quad \text{თუ } i < j \quad (38.7)$$

და $[A_j^i, (B^{(p-1)})_l^k] = \delta_j^k (B^{(p-1)})_l^i - \delta_l^i (B^{(p-1)})_j^k \quad (38.8)$

ვიმოქმედოთ ψ_0 ფუნქციაზე C_p ოპერატორით და დავიტოვოთ მხოლოდ არანულოვანი წევრები:

$$C_p \psi_0 = \sum_{i=1}^n (B^{(p-1)})_i^i A_i^i \psi_0 + \sum_{i>j} (B^{(p-1)})_i^j A_j^i \psi_0$$

ამ გამოსხულების მარჯვენა მხარეს დავუმატოთ ნულოვანი წევრი

$$- \sum_{i>j} A_j^i (B^{(p-1)})_i^j \psi_0$$

და გამოვიყენოთ (38.8) ტოლობა, მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} C_p \psi_0 &= \sum_{i=1}^n (B^{(p-1)})_i^i A_i^i \psi_0 + \sum_{i>j} [(B^{(p-1)})_i^j, A_j^i] \psi_0 = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n (B^{(p-1)})_i^i A_i^i \psi_0 + \sum_{i>j} [(B^{(p-1)})_j^j - (B^{(p-1)})_i^i] \right\} \psi_0 \end{aligned} \quad (38.9)$$

გავითვალისწინოთ ახლა, რომ i -ური ინდექსით დაკავებულ უჯრაზე A_i^i გენერატორის მოქმედება ერთიანს გვაძლევს. მაშინ გასაგებია, რომ

$$A_i^i \psi_0 = m_i \psi_0$$

სადაც

$$m_i = \begin{cases} \lambda_i & U_n \text{ ჯგუფისათვის} \\ \lambda_i - w/n & SU_n \text{ ჯგუფისათვის} \end{cases} \quad (38.11)$$

აქ w აღნიშნავს $\{\lambda\}$ S -ფუნქციის წონას. რადგან

$$\sum_{i>j} (B^{(p-1)})_j^j = \sum_{i=1}^n (n-1) (B^{(p-1)})_i^i$$

და

$$\sum_{i>j} (B^{(p-1)})_i^i = \sum_{i=1}^n (i-1) (B^{(p-1)})_i^i$$

ამიტომ (38.10) ტოლობის გათვალისწინებით (38.9) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$C_p \psi_0 = \sum_{i=1}^n (m_i + n + 1 - 2i) (B^{(p-1)})_i^i \psi_0 \quad (38.12)$$

$(B^{(p-1)})_i^i$ სიდიდე რეკურენტულად გამოვთვალოთ. ადვილია ჩვენება, რომ

$$(B^{(q)})_i^i \psi_0 = \sum_{j=1}^n (B^{(q-1)})_j^j A_i^j \psi_0 = \sum_{j=1}^n a_{ij} (B^{(q-1)})_j^j \psi_0 \quad (38.13)$$

სადაც a_{ij} მატრიცა უდრის

$$a_{ij} = (m_i + n - i) \delta_{ij} - \Theta_{ij} \quad (38.14)$$

სადაც

$$\Theta_{ij} = \begin{cases} 1, & i < j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

(38.13) ფორმულა საშუალებს გვაძლევს თანდათანობით დავაკლოთ ხარისხი B ოპერატორს. ვისარგებლოთ ასეთი თანაფარდობებით:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = m_j + n + 1 - 2j \quad \text{და} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = m_i \quad (38.15)$$

მაშინ კაზიმირის ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$C_p^{\{\lambda\}} = \sum_{i,j=1}^n (a^p)_{ij} \quad (38.16)$$

ამგვარად, კაზიმირის ოპერატორის გამოთვლა დავიდა a მატრიცის ხარისხის პოვნაზე.

ტოლობები (38.14) და (38.11) საშუალებას იძლევიან დავაკავშიროთ ერთმანეთთან U_n და SU_n ჯგუფების კაზიმირის ოპერატორები. ადვილია ჩვენება, რომ a მატრიცისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$a^{SU} = a^U - (w/n)I \quad (38.17)$$

სადაც I ერთეულოვანი მატრიცაა. ბოლო ტოლობის საშუალებით ადვილია კაზიმირის ოპერატორების დაკავშირება ერთმანეთთან:

$$C_p^U = \sum_{\alpha=1}^p \frac{p!}{\alpha!(p-\alpha)!} \left(\frac{w}{n}\right)^{p-\alpha} C_\alpha^{SU} \quad (38.18)$$

$$C_p^{SU} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{p!}{\alpha!(p-\alpha)!} \left(-\frac{w}{n}\right)^{p-\alpha} C_\alpha^U \quad (38.18')$$

ბოლოს მოვიყვანოთ რამდენიმე შემთხვევა, როდესაც კაზიმირის ოპერატორი მარტივდება. ჯერ-ერთი, ნულოვანი რანგის კაზიმირის ოპერატორისათვის გვაქვს:

$$C_0^{SU} = C_0^U = n \quad (38.19)$$

კაზიმირის პირველი რანგის ოპერატორებისათვის ასეთი შედეგია:

$$C_1^U = w; \quad C_1^{SU} = 0 \quad (38.20)$$

მარტივია კაზიმირის ოპერატორების სახე სრულიად სიმეტრიული $\{k\}$ და სრულიად ანტისიმეტრიული $\{1^k\}$ წარმოდგენებისათვის. სახელდობრ, მათ ასეთი სახე აქვთ:

$$C_p^U(\{k\}) = k(k+n-1)^{p-1} \quad (38.21)$$

$$C_p^U(\{1^k\}) = k(n+1-k)^{p-1} \quad (38.22)$$

ფიზიკაში განსაკუთრებულ როლს თამაშობს კაზიმირის კვადრატული ოპერატორი. მისი ზოგადი სახის დაწერაც ადვილია. მას ასეთი სახე აქვს:

$$C_2^U = C_2^{SU} + (w/n) = \sum_{i=1}^n [\lambda_i^2 + (n+1-2i)\lambda_i] \quad (38.20)$$

როგორც ვხედავთ, კაზიმირის ოპერატორები გარდა იმისა, რომ ახასიათებენ ჯგუფის თვისებებს, სივრცის თვისებებსაც აღწერენ. მაგალითად, ნულოვანი რანგის კაზიმირის ოპერატორები, მოცემული (39.19) ფორმულებით, ფუნდამენტური წარმოდგენის განზომილებას იძლევიან; პირველი რანგის C_1^U ოპერატორი – ტენზორული სივრცის რანგს და ა.შ.

39. ნაწილაკთა სპინი და იზოსპინი

ამ პარაგრაფში განხილული იქნება ფიზიკური ამოცანები, რომელთა გადაწყვეტა შესაძლებელი უნიტარული ჯგუფების წარმოდგენათა თეორიის გამოყენებით. პირველი ამ ამოცანებიდან დაკავშირებულია ელექტრონის სპინთან.

1922 წელს **შტერნმა** და **გერლახმა** აღმოაჩინეს, რომ მაგნიტურ ველში გატარებისას ელექტრონთა ნაკადი ორ შტოდ იყოფა. ეს იმას მიუთითებს, რომ ელექტრონები ორი სახისა არსებობს და რადგან მათ ერთმანეთისაგან ანსხვავებს მაგნიტური ველი, ეს განსხვავება დაკავშირებულია ელექტრონის მაგნიტურ თვისებებთან. ყოველ ელექტრონს გააჩნია **საკუთარი მაგნიტური მომენტი**, ამასთან ელექტრონების ნაწილს გააჩნია დადებითი მაგნიტური მომენტი, ხოლო მეორე ნაწილს – უარყოფითი. იქამდე ცნობილი ყველა მაგნიტური მომენტი დაკავშირებული იყო მექანიკურ მომენტთან. ამიტომ გადაწყვიტეს, რომ ელექტრონი ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო და ეს მექანიკური მოძრაობა ქმნის ელექტრონის საკუთარ მაგნიტურ მომენტს. ელექტრონის **საკუთარ მექანიკურ მომენტს** ინგლისური სიტყვა “**სპინი**” (ბრუნვა) უწოდეს. მასთან დაკავშირებული ვექტორული ოპერატორი S , ხოლო მასთან ელექტრონის საკუთარი მაგნიტური მომენტი ასეთნაირად გამოითვლება:

$$M^s = - (e / m c) S \quad (39.1)$$

ამ გამოსახულებაში e აღნიშნავს ელექტრონის მუხტს, m – მის მასას, ხოლო c სინათლის სიჩქარეა. მართალია, თუმცა შემდგომში გამოირკვა, რომ ელექტრონის “ბრუნვა” თავისი ღერძის გარშემო დაუშვებელია ფიზიკის თანამედროვე წარმოდგენების შესაბამისად, მაგრამ სპინის ცნება დარჩა ფიზიკაში და მას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს მთელს თანამედროვე ფიზიკაში.

სპინთან დაკავშირებულია **მოძრაობის ინტეგრალები**, ე.ი., მუდმივი რიცხვები, რომლებიც ახასიათებენ ელექტრონთა და სხვა ელემენტარული ნაწილაკების სისტემებს. სპინთან დაკავშირებული მოძრაობის ინტეგრალები

წარმოადგენენ S ოპერატორის კვადრატისა და მისი z პროექციის საკუთარ მნიშვნელობებს. პლანკის \hbar მუდმივას ერთეულებში საკუთარი მნიშვნელობები ასე გამოისახება:

$$\widehat{S}^2 \psi = S(S+1) \psi \quad (39.2)$$

$$\widehat{S}_z \psi = m_s \psi \quad (39.2')$$

ამ გამოსახულებებში s მთელი ან ნახევარმთელი რიცხვია, მაგალითად, $1/2$, 1 , $3/2$, 2 და ა.შ., ხოლო $m_s = -s, -s+1, -s+2, \dots, s-1, s$. ზემოთქმულის თანახმად თავისუფალი ელექტრონის მდგომარეობას შეესაბამება (39.2, 2') ოპერატორების შემდეგი მნიშვნელობები:

$$S = 1/2 \quad \text{და} \quad m_s = \pm 1/2 \quad (39.2)$$

ხოლო საკუთარ ფუნქციებს წარმოადგენენ ე.წ. *ორკომპონენტანი სპინორები* χ_{s,m_s} :

$$\begin{aligned} \chi_{1/2, 1/2} &\equiv u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \chi_{1/2, -1/2} &\equiv d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (39.3)$$

ბაზისის ასეთი არჩევისას S ოპერატორის შესაბამისი მატრიცა ასეთ სახეს იღებს:

$$S = (1/2) \sigma \quad (39.4)$$

σ ვექტორული მატრიცის მდგენელებს კი ასეთი სახე აქვთ:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (39.5)$$

ამ მატრიცებს *პაულის მატრიცები* ეწოდება.

ვაჯამებთ რა ზემოთქმულს, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ თავისუფალი ელექტრონის სპინური მდგომარეობა ორჯერად გადაგვარებულია და ამ გადაგვარების მოსახსნელად საჭიროა მაგნიტური ველის ჩართვა. ასეთია

ამოცანის ფიზიკური მონაცემები. ახლა ჩამოვყალიბოთ იგი ჯგუფთა თეორიის ენაზე.

ელექტრონის მდგომარეობის (39.3) ვექტორებზე, როგორც ბაზისზე, დავჭიმოთ წრფივი ვექტორული სივრცე, რომელიც რაღაც ჯგუფის ორგანზომილებიანი ფუნდამენტური წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციათა სივრცე იქნება. მინიმალური ასეთი ჯგუფი არის SU_2 ჯგუფი, რომლის გარდაქმნებით ტრანსფორმირდებიან სპინური ფუნქციები

$$u = \alpha |0\rangle \quad \text{და} \quad d = \beta |0\rangle \quad (39.6)$$

სადაც α “აჩენს” ელექტრონის სპინურ მდგომარეობას ($S=1/2, m_s=1/2$), ხოლო β კი – მდგომარეობას ($S=1/2, m_s=-1/2$). ამგვარად, ჩვენ ჩავთვალეთ, რომ ელექტრონის სპინურ მდგომარეობის აღმწერ განტოლებასთან დაკავშირებული ჯგუფია არის SU_2 . მისი გარდაქმნების ფუნდამენტურ მატრიცას ექნება სახე:

$$g = \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 \\ g_2^1 & g_2^2 \end{bmatrix} \quad (39.7)$$

სადაც $g_j^k = r_j^k \exp(i\varphi_j^k)$ კომპლექსური პარამეტრებია. არსებითი პარამეტრების დასადგენად გამოვიყენოთ g მატრიცის უნიტარობის პირობები, რომლებიც გვაძლევენ:

$$\begin{aligned} (r_1^1)^2 + (r_2^1)^2 &= 1; & (r_1^2)^2 + (r_2^2)^2 &= 1; \\ r_1^1 r_1^2 \exp(i\varphi_1^2 - \varphi_1^1) &= -r_2^1 r_2^2 \exp(i\varphi_2^2 - \varphi_2^1) \end{aligned}$$

როგორც 14.1 ცხრილიდან ჩანს, U_2 ჯგუფის ოთხი არსებითი პარამეტრი აქვს, ამიტომ ზემოთ დაწერილი რვაუცნობიანი განტოლებების ამოსახსნელად ნებისმიერად ავირჩიოთ ოთხი პარამეტრი და ვიპოვოთ დანარჩენი ოთხი მათი საშუალებით. ნებისმიერი პარამეტრები ასე შევარჩიოთ:

$$\begin{aligned} r_1^1 &= -r_2^2 \equiv r; & r_1^2 &= r_2^1 = \sqrt{1-r^2}; \\ \varphi_1^1 + \varphi_2^2 &= \varphi_1^2 + \varphi_2^1 \equiv \varphi + \psi \end{aligned}$$

ბოლო თანაფარდობის ამოხსნა ასე ჩავწეროთ:

$$\varphi_1^2 = (1/2) (\varphi + \psi) - f$$

$$\varphi_2^1 = (1/2) (\varphi + \psi) + f$$

საბოლოოდ, (39.7) უნიტარულ მატრიცა ოთხ პარამეტრზე (r, φ, ψ, f) იქნება დამოკიდებული და ასეთი სახე ექნება:

$$g = \begin{bmatrix} r e^{i\varphi} & \sqrt{1-r^2} e^{(i/2)(\varphi+\psi-2f)} \\ \sqrt{1-r^2} e^{(i/2)(\varphi+\psi+2f)} & -r e^{i\psi} \end{bmatrix} \quad (39.8)$$

გავიხსენოთ ახლა მე-12 პარაგრაფში მოცემული გენერატორების გამოსათვლელი ფორმულა (12.10), რომელსაც ჩვენს შემთხვევაში ასეთი სახე ექნება:

$$X^i = \left[\frac{\partial g}{\partial a_i} \right]_{\mathbf{a}=0}$$

სადაც \mathbf{a} ვექტორი ჩვენი ამოცანის ოთხივე არს პარამეტრს გულისხმობს. ფორმულის გამოყენება U_2 ჯგუფისათვის შემდეგ გენერატორებს გვაძლევს:

$$X^1 = \left[\frac{\partial g}{\partial r} \right]_{r=\varphi=\psi=f=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad X'^2 = \left[\frac{\partial g}{\partial \varphi} \right]_0 = \begin{bmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X'^3 = \left[\frac{\partial g}{\partial \psi} \right]_0 = \begin{bmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{bmatrix}; \quad X^4 = \left[\frac{\partial g}{\partial \varphi} \right]_0 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

მიღებული შედეგების ანალიზი ორ შენიშვნას წარმოშობს:

პირველი, X'^2 და X'^3 გენერატორები ერთმანეთის ტოლი გამოვიდა. ეს არც არის გასაკვირი, რადგან 2×2 მატრიცების სივრცე ოთხგანზომილებიანია, ე.ი. მასში ოთხი წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტი უნდა იყოს. მიღებულ სამ დამოუკიდებელ მატრიცასთან (ავირჩიოთ, მაგალითად, X^1, X'^2 და X^4) ერთად, მეოთხე ერთეულოვანი I მატრიცა იქნება;

და *მეორე*, X'^2 მატრიცა ერითული არ არის მაშინ როდესაც უნიტარული ჯგუფებისათვის გენერატორები ერმიტულნი უნდა იყვნენ. თუ X'^2 მატრიცას გავამრავლებთ მუდმივ $2i$ რიცხვზე, მატრიცა ერმიტული გახდება და ეს წინააღმდეგობაც დაძლეული იქნება.

ჩვენ მივიღეთ U_2 ჯგუფის ალგებრის I -საგან განსხვავებული სამი გენერატორი:

$$X^2 \equiv \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad X^4 \equiv \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad X^1 \equiv \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (39.9)$$

რომლებიც პაულის მატრიცებს ემთხვევა. მიღებული გენერატორები ამავე დროს SU_2 ჯგუფის გენერატორებსაც წარმოადგენენ, რადგან SU_2 -ის გენერატორები უნიტარობის პირობასთან ერთად, უნდა ასეთ პირობასაც აკმაყოფილებდნენ:

$$\text{Tr } X^i = 0$$

რაც, როგორც ვხედავთ, კმაყოფილდება.

ამგვარად, მივიღეთ, რომ ელექტრონის სპინის S ოპერატორი SU_2 ჯგუფის გენერატორებთან ყოფილა დაკავშირებული (39.4) ტოლობით. წინა პარაგრაფში ჩვენ დავამყარეთ კავშირები გენერატორებს, კაზიმირის ოპერატორებსა და S -ფუნქციებს შორის. გამოვიყენოთ ეს კავშირები ელექტრონის ამოცანისათვის. ვიცით, რომ SU_2 ჯგუფის წარმოდგენა მაქსიმუმ ორკომპონენტის იუნგის $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ სქემით აღიწერება. ეს წარმოდგენა კი ერთკომპონენტია $\{\lambda_1 - \lambda_2\}$ სქემის ექვივალენტურია. ამიტომ სპინის ამოცანის შემთხვევაში იუნგის სქემა $\{\lambda\}$ დანაწილებას არ შეესაბამება და λ უბრალოდ რიცხვია. თუ გავიხსენებთ, რომ SU_2 ჯგუფის ფუნდამენტურ წარმოდგენას $\{1\}$ შეესაბამება $S=1/2$ მომენტი, მაშინ $\{\lambda\}$ წარმოდგენის შესაბამისი მომენტი იქნება

$$S = \frac{\lambda}{2} \quad (39.10)$$

ამიტომ შემდგომში λ რიცხვისთვის მიღებულ შედეგებში მომენტზე გადასასვლელად ეს რიცხვი ორზე უნდა გავყოთ.

$\{\lambda\}$ წარმოდგენის კვადრატული კაზიმირის ოპერატორის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (38.21) ფორმულა, მივიღებთ:

$$C_2(\{\lambda\}) = \lambda(\lambda + 1)$$

თუ ზემოთქმულის შესაბამისად λ რიცხვს ორზე გავყოფთ, მივიღებთ (39.2) ფორმულით მოცემული სპინური მომენტის კვადრატის ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობას.

მომენტის პროექციის საპოვნელად უნდა მოვახდინოთ SU_2 ჯგუფის რედუქცია $SU_1 \times SU_1$ ნამრავლზე. ეს რედუქცია (37.1) ტიპისაა და, თუ დავთვლით ამ რედუქცია $\{1\}$ ფუნდამენტური წარმოდგენისათვის, გვექნება

$$\{1\}_2 \supset \{1\}_1 \{0\}_1 + \{0\}_1 \{1\}_1 \quad (39.11)$$

როგორც უკვე ვთქვით, $\{1\}_2$ წარმოდგენას შეესაბამება $\frac{1}{2}$ -ის ტოლი სპინური მომენტი, ხოლო $\frac{1}{2}$ -ის ტოლ მომენტს ორი პროექცია აქვს $+\frac{1}{2}$ და $-\frac{1}{2}$. დავაკავშიროთ პროექციები რედუქციით მიღებულ წარმოდგენებთან. შევთანხმდეთ, რომ პროექციის მისაღებად ნამრავლის პირველი წარმოდგენის გამომსახველ რიცხვს გამოვაკლოთ მეორე წარმოდგენის გამომსახველი რიცხვი და გავყოთ ორზე. მოყვანილ მაგალითში მივიღებთ სწორედ $+\frac{1}{2}$ -სა და $-\frac{1}{2}$ -ს.

განვიხილოთ ახლა ორი ელექტრონისაგან შემდგარი სისტემა. ჯგუფთა თეორიის ენაზე ჩვენ უნდა ვიპოვოთ SU_2 ჯგუფის მეორე რანგის დაუყვანადი წარმოდგენები, რისი განხორციელებაც შესაძლებელია ორი ფუნდამენტური წარმოდგენის პირდაპირი გადამრავლებით:

$$\{1\} \times \{1\} = \{2\} + \{1^2\} \sim \{2\} + \{0\}$$

კვანტური მექანიკის ენაზე ორელექტრონიანი სისტემის სრული სპინური მომენტის მისაღებად უნდა შევკრიბოთ ორი $\frac{1}{2}$ -სპინიანი მომენტი. თუ გავითვალისწინებთ (39.10) თანაფარდობას, მაშინ, ბოლო ნამრავლის შესაბამისად, ასეთი შეკრება მოგვცემს 1-სა და 0-ს:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 0$$

ახლა ავაგოთ მიღებული ორი წარმოდგენის – {2}-სა და {0}-ს – ბაზისი. SU_2 ჯგუფის {2} წარმოდგენა სამგანზომილებიანია და კვანტურ მექანიკაში მას ტრიპლეტურ მდგომარეობას უწოდებენ, მაშინ როდესაც ერთგანზომილებიან {0} მდგომარეობას სინგლეტური ჰქვია.

საბაზისო ფუნქციები აღვნიშნოთ $\chi_{s m_s} \equiv |\{\lambda\} m_s\rangle$ სიმბოლოთი და მის საპოვნელად გამოვიყენოთ იუნგ-იამანუჩის პროექტორები. მაშინ ტრიპლეტისთვის გვექნება:

$$\chi_{11} = \mathcal{Y}^{\{2\}} uu |0\rangle = u(1) u(2) |0\rangle \equiv |\{2\} 1\rangle$$

$$\chi_{10} = \mathcal{Y}^{\{2\}} ud |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (u(1) d(2) + d(1) u(2)) |0\rangle \equiv |\{2\} 0\rangle \quad (39.12)$$

$$\chi_{1-1} = \mathcal{Y}^{\{2\}} dd |0\rangle = d(1) d(2) |0\rangle \equiv |\{2\} -1\rangle$$

სინგლეტური მდგომარეობისათვის კი ასეთი ფუნქცია გვექნება:

$$\chi_{00} = \mathcal{Y}^{\{1^2\}} ud |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (u(1) d(2) - d(1) u(2)) |0\rangle \equiv |\{1^2\} 0\rangle \quad (39.12')$$

სამი ელექტრონისაგან შედგენილი სისტემის შემთხვევაში საჭიროა სამი ნახევარსპინიანი მომენტის შეკრება. ჯამური მომენტის საპოვნელად გამოვარკვიოთ რა წარმოდგენები შემოვა ამ შემთხვევაში? ამისთვის ვიპოვოთ სამი ფუნდამენტური წარმოდგენის ნამრავლი:

$$\{1\} \times \{1\} \times \{1\} = \{3\} + 2 \{21\} \sim \{3\} + 2 \{1\} \quad (39.13)$$

ან კვანტურმექანიკურ ენაზე:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + 2 \frac{1}{2} \quad (39.13')$$

ამგვარად, სამი $\frac{1}{2}$ -იანი მომენტის შეკრება გვაძლევს $3/2$ და $1/2$ სპინებს. (39.13)-ში გვაქვს ერთი სიმეტრიული და ორი შერეული სიმეტრიის წარმოდგენები. ბოლო ორი წარმოდგენა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი. ამიტომ მათ განსხვავებული საბაზისო ფუნქციები გააჩნიათ. ანტისიმეტრიული $\{1^3\}$ წარმოდგენა SU_2 ჯგუფში,

ცხადია, არ შემოდის. დავწეროთ ახლა სამელექტრონიანი სისტემის ტალღური ფუნქციები. იუნგ-იამანუჩის პროექტორებს ჩვენს შემთხვევაში ასეთი სახე ექნება:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{\{3\}} &= |123| \\ \mathcal{Y}_1^{\{21\}} &= |12|[13]|12| \\ \mathcal{Y}_2^{\{21\}} &= (23)[13]|12| \end{aligned} \quad (39.14)$$

{3} წარმოდგენა ოთხგანზომილებიანია და მას 4 პროექცია აქვს: uuu , uud , udd , ddd . შესაბამისი პროექტორის გამოყენება გვაძლევს:

$$\begin{aligned} \chi_{3/2 \ 3/2} &= u(1) u(2) u(3) |0\rangle \equiv |\{3\}3/2\rangle \\ \chi_{3/2 \ 1/2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (u(1) u(2)d(3) + u(1) d(2) u(3) + d(1) u(2) u(3)) |0\rangle \equiv |\{3\}1/2\rangle \\ \chi_{3/2 \ -1/2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (u(1) d(2)d(3) + d(1) u(2) d(3) + d(1) d(2) u(3)) |0\rangle \equiv |\{3\}-1/2\rangle \\ \chi_{3/2 \ -3/2} &= d(1) d(2) d(3) |0\rangle \equiv |\{3\}-3/2\rangle \end{aligned}$$

{21} წარმოდგენა ორგანზომილებიანია და მას 2 პროექცია აქვს: uud , udd . შესაბამისი პროექტორების გამოყენება გვაძლევს დამოუკიდებელი ფუნქციების ორ კრებულს: ერთს, $\{21\}_1$ წარმოდგენისათვის

$$\begin{aligned} \chi^{(1)}_{1/2 \ 1/2} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2u(1) u(2)d(3) - u(1) d(2) u(3) - d(1) u(2) u(3)) |0\rangle \equiv |\{21\}_1 1/2\rangle \\ \chi^{(1)}_{1/2 \ -1/2} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (u(1) d(2)d(3) + d(1) u(2) d(3) - 2d(1) d(2) u(3)) |0\rangle \equiv |\{21\}_1 -1/2\rangle \end{aligned}$$

და მეორეს, $\{21\}_2$ წარმოდგენისათვის

$$\begin{aligned} \chi^{(2)}_{1/2 \ 1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u(1) d(2) u(3) - d(1) u(2) u(3)) |0\rangle \equiv |\{21\}_2 1/2\rangle \\ \chi^{(2)}_{1/2 \ -1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u(1) d(2)d(3) - d(1) u(2) d(3)) |0\rangle \equiv |\{21\}_2 -1/2\rangle \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, ორ ექვივალენტურ წარმოდგენას განსხვავებული საბაზისო ფუნქციები ჰქონია და ეს ფუნქციები ორთოგონალურია. ანალოგიურად შეიძლება ნებისმიერი რაოდენობის ელექტრონთა სისტემის ტალღური ფუნქციების აგება.

დავალება 39.1: იპოვეთ ოთხი, ხუთი და ექვსი ელექტრონისაგან შედგენილი სისტემების მომენტები და მათი შესაბამისი ტალღური ფუნქციები.

მოყვანილ მაგალითებში გამოჩნდა კავშირი S -ფუნქციებსა და მომენტებს შორის, რომელიც საშუალებას იძლევა დავადგინოთ ე.წ. “**მომენტთა შეკრების წესი**”. კვანტურ მექანიკაში მომენტები განსაკუთრებულად იკრიბება. ნებისმიერი j_1 და j_2 მომენტების ჯამი გვაძლევს მომენტებს, რომლებიც $|j_1 - j_2|$ -დან $|j_1 + j_2|$ -მდე იცვლება ერთიანის დამატებით. მაგალითად, $3/2$ -ისა და 2 მომენტების შეკრება მომენტთა შეკრების წესის თანახმად იძლევა:

$$3/2 + 2 = 1/2 + 3/2 + 5/2 + 7/2$$

ზევით უკვე აღვნიშნეთ, რომ j_1 და j_2 მომენტებს, შესაბამისად, ასეთი იუნგის სქემები ეთანადება $\{2j_1\}$ და $\{2j_2\}$. ისიც ვიცით, რომ მომენტთა შეკრება წარმოდგენების გარე ნამრავლის ექვივალენტურია. ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $j_1 \geq j_2$. მაშინ (35.6) ექვივალენტობის პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\{2j_1\}\{2j_2\} \sim \sum_{k=0}^{2j_2} \{2j_1 + 2j_2 - 2k\} \tag{39.18}$$

თუ ახლა მომენტებს დავუბრუნდებით, მივიღებთ, რომ

$$j_1 + j_2 = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2, \dots, j_1 - j_2 + 1, j_1 - j_2$$

დავალება 39.2: იპოვეთ მომენტთა შეკრების წესი სამი მომენტისათვის.

შემდეგი ნაბიჯია მომენტების პროექციების პოვნა ანუ $\{2j\}_2$ წარმოდგენის რედუქცია $SU_1 \times SU_1$ ჯგუფების ნამრავლზე. როგორც (39.18) ფორმულისათვის შესაძლებელია ზოგადი თანაფარდობის მონახვა. (37.4) ფორმულის შესაბამისად მას ასეთი სახე აქვს:

$$\{2j\}_2 \supset \sum_{k=0}^{2j} \{2j-k\}_1 \{k\}_1 \quad (39.19)$$

(39.11) ფორმულის შემდეგ მიღებული შეთანხმების ძალით პროექციების მისაღებად პირველი იუნგის სქემის $2j-k$ რიცხვს უნდა გამოვაკლოთ მეორე იუნგის სქემის k რიცხვი და შედეგი გავყოთ ორზე. ე.ი. მომენტის პროექციას შეესაბამება $j-k$ რიცხვი. (39.19) ფორმულის შესაბამისად პროექციებისათვის მივიღებთ:

$$m_j = j, j-1, j-2, \dots, -j+1, -j \quad (39.20)$$

რაც სავსებით შეესაბამება კვანტური მექანიკის მტკიცებულებას, რომ j მომენტის პროექციები იცვლება j -დან $-j$ -მდე ერთიანის გამოკლებით.

დავალება 39.3: SU_2 ჯგუფის წარმოდგენების გამოყენებით შეკრიბეთ ქვემოთ მოყვანილი მომენტები და იპოვეთ მიღებული მომენტების პროექციები:

- ა) 4 და 2;
- ბ) 3, 1 და 3/2;
- გ) 3/2 და 3/2;
- დ) 1/2, 3/2, 5/2;
- ე) 2, 1/2, 1 და 1/2.

ჯგუფთა თეორიის მეთოდები სხვა ფიზიკური ამოცანებისთვისაც ამარტივებენ შედეგების მიღებას. განვიხილოთ, მაგალითად, ბირთვული ფიზიკის ცნობილი პრობლემა დაკავშირებული იზოსპინის გამოთვლასთან. ცნობილია, რომ ატომის ბირთვის შემადგენელი ნაწილაკები – ნეიტრონები და პროტონები – ძლიერ გვანან ერთმანეთს: ისინი თანაბარი უფლებებით ქმნიან ბირთვულ სისტემას, აქვთ თითქმის ტოლი მასები, მონაწილეობენ ბირთვულ ანუ ძლიერ ურთიერთქმედებებში და ა.შ. ძირითადი განსხვავება მათ შორის არის ის, რომ

პროტონს გააჩნია ელექტრული მუხტი, ელექტრონის მუხტის ერთეულებში +1-ის ტოლი, მაშინ როდესაც ნეიტრონს მუხტი არ გააჩნია. განსხვავება მასებს შორის სწორედ პროტონის მუხტით არის გამოწვეული (პროტონი ოდნავ მსუბუქია ნეიტრონზე). რადგან მუხტი და მასთან დაკავშირებული განსხვავებები დაკავშირებული ელექტრომაგნიტურ ურთიერთობებთან, ამიტომ ვერნერ კარლ ჰაიზენბერგმა დაუშვა, რომ ძლიერ ურთიერთქმედებებში პროტონიცა და ნეიტრონიც ერთი ნაწილაკის – “ნუკლონის” – ორჯერ გადაგვარებულ მდგომარეობას წარმოადგენენ ამ “გადაგვარების მოხსნა”, ე.ი., მათი ერთმანეთისაგან გარჩევა, ჰაიზენბერგის მიხედვით შესაძლებელია ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედების “ჩართვით”. ამაში მდგომარეობს ე.წ. ბირთვული ძალების მუხტური დამოუკიდებლობის პრინციპი. იდეა ელექტრონის სპინის ანალოგიით წარმოიშვა: ელექტრონი ჩვეულებრივ მდგომარეობაში ორჯერ გადაგვარებულ მდგომარეობას წარმოადგენს და მხოლოდ მაგნიტურ ველს შეუძლია ამ გადაგვარების მოხსნა და +1/2-სპინიანი ელექტრონის გარჩევა -1/2-სპინიანი ელექტრონისაგან. ელექტრონის ანალოგიით ჰაიზენბერგმა ნუკლონისათვის შემოიტანა იზოტოპური სპინის მომენტის ცნება. ამ მომენტის რიცხვითი მნიშვნელობა $I=1/2$, მას ორი პროექცია გააჩნია: $I_z=+1/2$ და $I_z=-1/2$, ამასთან $I_z=+1/2$ პროექცია პროტონს შეესაბამება, ხოლო $I_z=-1/2$ პროექცია – ნეიტრონს.

ჯგუფთა თეორიის ენაზე იზოტოპური სპინის ან, მოკლედ, იზოსპინის ამოცანა ასე ყალიბდება: SU_2 ჯგუფი არის ძლიერ ურთიერთქმედებასთან დაკავშირებული ჯგუფი, ანუ ძლიერი ურთიერთქმედება SU_2 -ინვარიანტულია და ნეიტრონისა და პროტონის ტალღური ფუნქციები გარდაიქმნებიან SU_2 ჯგუფის {1} ფუნდამენტური წარმოდგენით. ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედების ჩართვა ნიშნავს ასეთი რედუქციის ჩატარებას:

$$SU_2 \supset SU_1 \times SU_1 \quad (39.22)$$

სადაც SU_1 ჯგუფის წარმოდგენები განსაზღვრავენ ნეიტრონისა და პროტონის ფიზიკურ თვისებებს. მაგალითად, განვიხილოთ ფუნდამენტური წარმოდგენის რედუქცია. გვექნება:

$$\{1\}_2 \supset \{1\}_1 \times \{0\}_1 + \{0\}_1 \times \{1\}_1$$

თუ პირველი SU_1 ჯგუფის კაზიმირის ოპერატორად ნუკლონის მუხტს ჩავთვლით, მაშინ წარმოდგენა $\{1\}_1$ შეესაბამება პროტონს მუხტით +1, ხოლო წარმოდგენა $\{0\}_1$ – ნეიტრონს მუხტით 0. იზოსპინის პროექციების საპოვნელად გამოვიყენოთ იგივე მეთოდი, რომელსაც ელექტრონის სპინის საპოვნელად ვიყენებდით. მაშინ პროტონს იზოსპინის +1/2 პროექცია შეესაბამება, ხოლო ნეიტრონს – -1/2. კავშირი ნუკლონის მუხტსა და იზოსპინს შორის მოიცემა ფორმულით:

$$Q = I + I_z \quad (39.23)$$

ელექტრონისათვის ზემოთ მოყვანილი ყველა შედეგი პირდაპირ შეგვიძლია გადმოვიტანოთ ნუკლონისთვისაც თუ სპინის მაგივრად იზოსპინის ვიგულისხმებთ.

მოყვანილი მაგალითი წარმოადგენს შემთხვევას, როდესაც განტოლებასთან დაკავშირებული ჯგუფის დადგენა შესაძლებელია ისე, რომ არაფერი ვიცით თვით განტოლების შესახებ. მართლაც, ბირთვული ძალების სახე ცნობილი არ არის, მაგრამ, გამომდინარე მათი მუხტური დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზიდან, შეიძლება დადგინდეს მათი სიმეტრია და ამით ამოვხსნათ ამოცანა.

40. ბირთვების სპინ-იზოსპინური მულტიპლეტები

ამ პარაგრაფში მოყვანილი შედეგები იმ ამოცანათა რიცხს ეკუთვნის, რომლის ამოხსნა ადვილად ხდება ჯგუფთა თეორიის მეთოდებით და საკმაოდ მნელია სხვა გზებით. ლაპარაკია ბირთვების სპინ-იზოსპინურ მულტიპლეტებზე, ანუ სპინისა და იზოსპინის იმ მნიშვნელობებზე, რომელიც გააჩნიათ ბირთვებს, როგორც $1/2$ სპინისა და $1/2$ იზოსპინის მომენტების მქონე ნუკლონებისაგან შედგენილ სისტემებს. ნუკლონი ბირთვში შეიძლება იმყოფებოდეს ქვემოთ მოყვანილი ოთხი მდგომარეობდან ერთ-ერთში:

$$\begin{aligned}(u', u) &= (S_z = 1/2, I_z = 1/2) \equiv \alpha, \\(u', d) &= (S_z = 1/2, I_z = -1/2) \equiv \beta, \\(d', u) &= (S_z = -1/2, I_z = 1/2) \equiv \gamma, \\(d', d) &= (S_z = -1/2, I_z = -1/2) \equiv \delta.\end{aligned}\tag{40.1}$$

აქ u' და d' აღნიშნავენ ნუკლონის სპინურ, ხოლო u და d – იზოსპინურ მდგომარეობებს. ამგვარად, (40.1) თანაფარდობების თანახმად სპინ-იზოსპინური მდგომარეობა ბირთვში აღიწერება ოთხკომპონენტური ვექტორით –

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}\tag{40.2}$$

ეს ვექტორი SU_4 ჯგუფის ფუნდამენტური წარმოდგენით გარდაიქმნება. როგორც (40.1) თანაფარდობებიდან ჩანს, SU_4 ჯგუფის საბაზისო სივრცე ორი SU_2 ჯგუფის საბაზისო სივრცეების პირდაპირი ნამრავლია და, ამგვარად, ბირთვის, როგორც ნუკლონთა სისტემის, დამახასიათებელი ფუნქციები ჯგუფთა ასეთი ჯაჭვით გარდაიქმნებიან:

$$SU_4 \supset SU_2 \times SU_2\tag{40.3}$$

ამ გამოსახულებაშიც შტრიხიანი ჯგუფი აღწერს გარდაქმნებს სპინურ სივრცეში, ხოლო უშტრიხო – იზოსპინურში.

(40.3) რედუქცია საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ბირთვის სპინ-იზოსპინური მდგომარეობები SU_4 ჯგუფის ფიქსირებული $\{\lambda\}$ მდგომარეობისათვის, ე.ი., ვიპოვოთ ბირთვის დამახასიათებელი სპინ-იზოსპინური მულტიპლეტები. 37-ე პარაგრაფში ჩვენ ვიპოვეთ წარმოდგენათა რედუქციის ფორმულები. (40.3) რედუქციისათვის (37.7) ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ. მაგალითისათვის განვიხილოთ სამნუკლონიანი ბირთვი. მისი მდგომარეობები წარმოადგენს SU_4 ჯგუფის მესამე რანგის ტენზორული წარმოდგენის ბაზისს და ამიტომ ეს მდგომარეობები გარდიქმნიებიან SU_4 ჯგუფის $\{3\}$, $\{21\}$ ან $\{1^3\}$ წარმოდგენებიდან ერთ-ერთით. ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ კონკრეტულ ამოცანებში SU_4 ჯგუფის წარმოდგენის არჩევანი ცალსახად არის განსაზღვრული, მაგრამ ამისთვის საჭიროა ნუკლონთა სივრდული მდგომარეობების გათვალისწინება, რაც მოითხოვს ორთოგონალური ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების ცოდნას. ამიტომ ეს საკითხი გადავდოთ ორთოგონალური ჯგუფის შესწავლამდე. ახლა კი ვარჯიშის სახით SU_4 ჯგუფის სამივე წარმოდგენის მულტიპლეტები დავადგინოთ. (37.7) ფორმულის გამოყენება გვაძლევს:

$$\begin{aligned} \{3\}_4 &\supset \{3\}_2 \circ \{3\}_2 + \{21\}_2 \circ \{21\}_2 \\ \{21\}_4 &\supset \{3\}_2 \circ \{21\}_2 + \{21\}_2 \circ \{3\}_2 + \{21\}_2 \circ \{21\}_2 \\ \{1^3\}_4 &\supset \{21\}_2 \circ \{21\}_2 \end{aligned} \quad (40.4)$$

ფორმულების მარაჯვენა მხარეში არ არის მოყვანილი $\{1^3\}$ წარმოდგენები, რომლებიც SU_2 ჯგუფებისათვის იგივეურად ნულის ტოლია.

ახლა (39.10) თანაფარდობის საშუალებით შეგვიძლია (40.3) ფორმულებით მიღებული შედეგების გადაწერა ბირთვის სპინ-იზოსპინურ მულტიპლეტებში. ასე, $\{3\}_4$ მულტიპლეტი შეიცავს ასეთ სპინებსა და იზოსპინებს:

$$(S, I) = (3/2, 3/2) \quad \text{და} \quad (1/2, 1/2)$$

$\{21\}_4$ წარმოდგენის შესაბამისი მულტიპლეტები ასეთი სახისაა:

$$(3/2, 1/2), \quad (1/2, 3/2) \quad \text{და} \quad (1/2, 1/2)$$

და, ბოლოს, $\{1^3\}_4$ მდგომარეობაში მყოფი ბირთვი ასეთი სპინითა და იზოსპინით დახასიათდება:

$$(1/2, 1/2)$$

37-ე პარაგრაფში მოყვანილი წესების მიხედვით ძნელი არ არის (40.4) რედუქციების შესაბამისი საბაზისო ფუნქციების დაწერა. ეს ფუნქციები გარდაიქმნებიან SU_4 ჯგუფის $\{\lambda\}_j$ დაუყვანადი წარმოდგენით და აქვთ სპინის, იზოსპინისა მათი პროექციების ფიქსირებული მნიშვნელობები. აღვნიშნოთ ეს ფუნქციები ასე:

$$|\{\lambda\}_j; (S S_z, I I_z) \rangle$$

პროექციების დადებითი მნიშვნელობებისათვის ამ ფუნქციებს ასეთი სახე აქვთ (40.2) ვექტორის აღნიშვნებში:

$$|\{3\}; (3/2 \ 3/2, 3/2 \ 3/2) \rangle = \frac{1}{6} \mathcal{Y}^{\{3\}} \alpha\alpha\alpha;$$

$$|\{3\}; (3/2 \ 3/2, 3/2 \ 1/2) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} \mathcal{Y}^{\{3\}} \alpha\alpha\beta;$$

$$|\{3\}; (3/2 \ 1/2, 3/2 \ 3/2) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} \mathcal{Y}^{\{3\}} \alpha\alpha\gamma;$$

$$|\{3\}; (3/2 \ 1/2, 3/2 \ 1/2) \rangle = \frac{1}{6} \mathcal{Y}^{\{3\}} [\alpha\alpha\delta + 2\alpha\beta\gamma];$$

$$|\{3\}; (1/2 \ 1/2, 1/2 \ 1/2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \mathcal{Y}^{\{3\}} [\alpha\alpha\delta - \alpha\beta\gamma];$$

$$|\{21\}_j; (3/2 \ 3/2, 1/2 \ 1/2) \rangle = \frac{1}{6} \mathcal{Y}^{\{21\}_j} \alpha\alpha\beta;$$

$$|\{21\}_j; (3/2 \ 1/2, 1/2 \ 1/2) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} \mathcal{Y}^{\{21\}_j} [\alpha\alpha\delta + 2\alpha\beta\gamma];$$

$$|\{21\}_j; (1/2 \ 1/2, 3/2 \ 3/2) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} \mathcal{Y}^{\{21\}_j} \alpha\alpha\gamma;$$

$$|\{21\}_j; (1/2 \ 1/2, 3/2 \ 1/2) \rangle = \frac{1}{6} \mathcal{Y}^{\{21\}_j} [\alpha\alpha\delta + 2\alpha\beta\gamma];$$

$$|\{21\}_j; (1/2 \ 1/2, 1/2 \ 1/2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \mathcal{Y}^{\{21\}_j} [\alpha\alpha\delta + 2\alpha\beta\gamma];$$

$$|\{1^3\}; (1/2 \ 1/2, 1/2 \ 1/2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathcal{Y}^{\{1^3\}} \alpha\beta\gamma$$

როგორც აღვნიშნეთ, α, β, γ და δ პროექციების მნიშვნელობები განსაზღვრულია (40.1) თანაფარდობით, ხოლო $\mathcal{Y}^{\{l\}j}$ ოპერატორები შეიძლება გამოითვალოს (28.18,19) ფორმულებით.

დავალება 40.1: ა) მიიღეთ (40.5) განტოლებები. შეამოწმეთ $\{21\}_j$ წარმოდგენების შესაბამისი ფუნქციების ორთოგონალობა.
 ბ) იპოვეთ ოთხნუკლონიანი ბირთვის სპინ-იზოსპინური მულტიპლეტები და მათი შესაბამისი საბაზისო ფუნქციები.

უარყოფითი S_z და I_z პროექციების შესაბამისი საბაზისო ფუნქციების მისაღებად ასე უნდა მოვიქცეთ: I_z იზოსპინის ნიშნის შესაცვლელად ზედა ფუნქციების პროექციებში უნდა მოვახდინოთ ცვლილებები: $\alpha \leftrightarrow \beta$ და $\gamma \leftrightarrow \delta$, ამავე დროს ფუნქციას გაუჩნდება ფაზური მამრავლი $(-)^{(2I+1)/2}$; S_z იზოსპინის ნიშნის შესაცვლელად $\alpha \leftrightarrow \gamma$, $\beta \leftrightarrow \delta$ და გასათვალისწინებელია ფაზა $(-)^{(2S+1)/2}$; თუ ორივე პროექციას ეცვლება ნიშანი, მაშინ $\alpha \leftrightarrow \delta$, $\beta \leftrightarrow \gamma$ და ფუნქციას უჩნდება ფაზა $(-)^{S+I+1}$.

დავალება 40.2: დაამტკიცეთ წინა აბზაცის დებულებათა სამართლიანობა.

41. SU_3 ჯგუფი და ელემენტარული ნაწილაკების კლასიფიკაცია

ჯგუფთა თეორიის ფიზიკაში გამოყენების ერთ-ერთ სრულყოფილ და ლამაზ მაგალითს წარმოადგენს ელემენტარული ნაწილაკების კლასიფიკაცია SU_3 ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების მიხედვით. ქვემოთ ბარაიონთა მაგალითზე ჩვენ მოვახდენთ ამის დემონსტრირებას.

38-ე პარაგრაფში ჩვენ ვნახეთ, რომ ძლიერი ურთიერთქმედების მუხტური დამოუკიდებლობა ჯგუფთა თეორიის ენაზე მის SU_2 ინვარიანტობას ნიშნავს. ჰაიზენბერგის მიერ მუხტური დამოუკიდებლობის ჰიპოთეზის გამოთქმის დროს ძლიერად ურთიერთქმედი მხოლოდ ორი ნაწილაკი იყო ცნობილი – პროტონი და ნეიტრონი. შემდგომში მათ კიდევ დაემატა ნაწილაკები. ამასთან აღმოჩნდა, რომ ახალი ნაწილაკები პროტონისა და ნეიტრონისაგან მარტო იზოსპინით და მასით კი არ იყვნენ განსხვავებული, არამედ კიდევ ერთი კვანტური რიცხვით, რომელიც ძლიერ ურთიერთქმედებაში ინახება. ამ რიცხვს უცნაურობა უწოდეს.

ქვევით ცხრილში 41.1 მოყვანილია ძლიერად ურთიერთქმედი ნაწილაკების ერთი ოჯახი. ამ ნაწილაკებს ბარიონებს უწოდებენ და მათ $1/2$ -ის ტოლი სპინი აქვთ.

ცხრილში, როგორც ვხედავთ, მოყვანილი ბარიონების მასები, მუხტები (გაზომილი ელექტრონის მუხტებში), იზოსპინები, და უცნაურობები. ყველა ამ ნაწილაკს, როგორც აღვნიშნეთ $1/2$ -ის ტოლი სპინური მომენტი გააჩნია. ნაწილაკთა მასები საკმაოდ ახლოს არიან ერთმანეთთან და ყველა ნაწილაკი ძლიერად ურთიერთქმედებს. ამან მიურეი გელ-მანი და ჯორჯ ცვიიგი, ჰაიზენბერგის იდეის ანალოგიით, მიიყვანა დასკვნამდე, რომ ეს რვა ნაწილაკი ერთი ნაწილაკის – ბარიონის – რვაჯერ გადაგვარებული მდგომარეობის რაღაც

ურთიერთქმედებით გახლეჩის შედეგია. ამდენად, ძლიერი ურთიერთქმედების სიმეტრიის ჯგუფი უფრო მაღალი რიგისა ყოფილა, ვიდრე SU_2 ჯგუფია. ამ ჯგუფის დასადგენად საჭირო იყო ამ ახალი ჯგუფის რვაგანზომილებიანი წარმოდგენის პოვნა. გელ-მანისა და ცვეიგის ჰიპოთეზის შესაბამისად ეს არის SU_3 ჯგუფის {21} წარმოდგენა და ბარიონის მდგომარეობები ადგენენ SU_3 ჯგუფის {21} დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისს. იმისთვის, რომ ჰიპოთეზა თეორიად იქცეს, საჭიროა მისი საშუალებით მივიღოთ ექსპერიმენტული შედეგები, ჩვენს შემთხვევაში 41.1 ცხრილის მონაცემები.

ცხრილი 41.1

ნაწილაკი	მასა, მევ m	მუხტი Q	იზოსპინი I	პროექცია I_z	უცნაურობა s
p	938.3	+1	1/2	+1/2	0
n	939.6	0	1/2	-1/2	0
Λ^0	115.6	0	0	0	-1
Σ^+	1189.5	+1	1	+1	-1
Σ^0	1193.5	0	1	0	-1
Σ^-	1197.4	-1	1	-1	-1
Ξ^0	1314.7	0	1/2	+1/2	-2
Ξ^-	1321.2	-1	1/2	-1/2	-2

ის ექსპერიმენტული ფაქტი, რომ ბუნებაში ნაწილაკები ცხრილში მოყვანილი მდგომარეობით გვხვდება, მიუთითებს იმაზე, რომ SU_3 სიმეტრია დარღვეულია, ე.ი., ძლიერ ურთიერთქმედებას გააჩნია ნაწილი, რომელიც ნაწილაკებს ერთმანეთისაგან განასხვავებს. ჩვენ ვიცით, რომ სიმეტრიის დარღვევა ჯგუფებისათვის ნიშნავს რედუქციას უფრო დაბალი სიმეტრიის ჯგუფებზე. ჩვენს შემთხვევაში ეს რედუქცია ასეთი იქნება:

$$SU_3 \supset SU_2 \times SU_1 \quad (41.1)$$

ამ გამოსახულებაში SU_2 ჯგუფის კაზიმირის ოპერატორი მომენტთან (ამ შემთხვევაში იზოსპინთან) არის დაკავშირებული (39.10) თანაფარდობით, ხოლო SU_1 ჯგუფის იუნგის სქემა უნდა დავაკავშიროთ უცნაურობასთან. შევთანხმდეთ, რომ SU_1 ჯგუფის ერთრიცხვიან $\{k\}$ იუნგის სქემას შევუსაბამოთ უცნაურობა

$$s = -k \quad (41.2)$$

(41.1) ტოლობით მოცემული რედუქცია უნდა მოვახდინოთ SU_3 ჯგუფის $\{21\}$ დაუყვანად წარმოდგენაზე. გასაგებია, რომ ეს არის (37.1) ტიპის რედუქცია, ამიტომ (37.4) თანაფარდობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\{21\}_3 \supset \{21\}_2 \{0\}_1 + \{1^2\}_2 \{1\}_1 + \{2\}_2 \{1\}_1 + \{1\}_2 \{2\}_1 \quad (41.3)$$

ამის საფუძველზე SU_3 ჯგუფის $\{21\}$ ოქტეტს, ანუ რვანაწილაკოვან მულტიპლეტს, იზოსპინური და უცნაურობის ასეთი შედგენილობა ექნება:

$$\{21\}_3 \supset (I=1/2, s=0) + (I=0, s=-1) + (I=1, s=-1) + (I=1/2, s=-2) \quad (41.4)$$

თუ ახლა (41.4) გამოსახულების პირველ იზოტოპურ დუბლეტს გავაიგივებთ პროტონსა და ნეიტრონთან, სინგლეტს – Λ -ნაწილაკთან, ტრიპლეტს – Σ^+ , Σ^0 და Σ^- ჰიპერონებთან, ხოლო ბოლო იზოდუბლეტს – Ξ^0 და Ξ^- ნაწილაკებთან, მაშინ მივიღებთ 41.1 ცხრილს, რაც ამტკიცებს, რომ გელ-მან-ცვეიგის ჰიპოთეზა სამართლიანი ყოფილა.

ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში ცნობილია, რომ რეაქციებში ბარიონთა რიცხვი ინახება, ე.ი., რამდენი ბარიონი იღებს მონაწილეობას რეაქციაში მის დასაწყისში, იმდენივე ბარიონი გვაქვს რეაქციის დასრულების შემდეგ. ამიტომ ბარიონებს კიდევ ერთ კვანტურ რიცხვს მიაწერენ. მას ბარიონული კვანტური რიცხვი ეწოდება, მას B ასოთი აღნიშნავენ და 41.1 ცხრილის ნაწილაკთა ოჯახისათვის იგი ერთის ტოლად ითვლება ($B=1$). ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში არსებობს გელ-მან-ნიშიჯიმას თანაფარდობის სახელით ცნობილი ფორმულა, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს ნაწილაკის მუხტს, იზოსპინის პროექციას, უცნაურობასა და

ბარიონულ რიცხვს. ელექტრონის მუხტის ერთეულებში ამ თანაფარდობას ასეთი სახე აქვს:

$$Q = I_z + \frac{1}{2} (s + B) \quad (41.5)$$

41.1 ცხრილის საშუალებით შესაძლებელია დარწმუნება ამ თანაფარდობის სისწორეში.

დავალეზა 41.1: შეამოწმეთ ეს.

ახლახან დავრწმუნდით, რომ ბარიონთა 41.1 ოჯახი SU_3 ჯგუფის მესამე რანგის $\{21\}$ დაუყვანადი ტენზორული წარმოდგენით გარდაიქმნება. აქ ლოგიკურად ისმის კითხვა, რა ნაწილაკთა მდგომარეობების ვექტორები გარდაიქმნიან SU_3 ჯგუფის $\{1\}$ ფუნდამენტური წარმოდგენით? რადგან $\{1\}$ წარმოდგენა SU_3 ჯგუფში სამის ტოლია, ამიტომ ასეთი ნაწილაკების რიცხვი 3 ყოფილა. ამ ჰიპოთეტურ ნაწილაკებს გელ-მანმა **კვარკები** უწოდა. ამგვარად, კვარკები SU_3 სქემაში იმ ფუნდამენტურ ნაწილაკებს წარმოადგენენ, რომლებისგანაც აიგება ბარიონები.

ვნახოთ რა თვისებები გააჩნიათ კვარკებს? ჯერ ერთი, კვარკები აუცილებლად ფერმიონები უნდა იყვნენ და მათ $\frac{1}{2}$ -ის ტოლი სპინი უნდა ჰქონდეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში ბარიონებს ნახევრის ტოლი სპინი არ ექნებოდათ. დანარჩენი თვისებების გასაგებად უნდა მოვახდინოთ $\{1\}$ წარმოდგენის რედუქცია (41.1) სქემით. გვექნება:

$$\{1\}_3 \supset \{1\}_2 \{0\}_1 + \{0\}_2 \{1\}_1 \quad (41.6)$$

ეს ნიშნავს, რომ ნულოვანი უცნაურობის ორი კვარკი ადგენს იზოდუბლეტს ($I=1/2$), ხოლო მესამე კვარკი იზოსინგლეტია – $I=0$ – და აქვს უცნაურობა $s=-1$. კვარკებისათვის შემოღებულია ასეთი ინგლისური სახელები

up კვარკი: $u \equiv (I_z = +1/2, s = 0)$;

down კვარკი: $d \equiv (I_z = -1/2, s = 0)$;

strange კვარკი: $s \equiv (I_z = +1/2, s = 0)$.

u , d და d კვარკები გაერთიანებულნი არიან საერთო სახელით "სურნელი" (ინგლისურად flavour). ამგვარად, კვარკებს კიდევ ერთი კვანტური რიცხვი – სურნელი – ახასიათებს. თუ ვისარგებლებთ (41.5) ფორმულით, შეგვიძლია დავთვალოთ კვარკების მუხტები იმის გათვალისწინებით, რომ მათი ბარიონული რიცხვი უნდა $1/3$ იყოს. მართლაც, აღნიშნული ფორმულა გვაძლევს:

$$Q_u = +2/3, Q_d = -1/3, Q_s = -1/3. \quad (41.7)$$

როგორც ვხედავთ, კვარკებს ელექტრონის მუხტის წილადი მნიშვნელობა გააჩნიათ. ამით ისინი განსხვავდებიან აქამდე ფიზიკაში ცნობილი ყველა სხვა ნაწილაკისაგან.

ზემოთ ჩვენ ვნახეთ, რომ (41.3) რედუქციამ სწორად აღწერა 41.1 ცხრილში მოყვანილი იმ დროისთვის ცნობილი ყველა ნაწილაკის თვისებები. ეს უკვე თეორიის დიდი წარმატებაა. მაგრამ SU_3 სქემას გაცილებით უფრო დიდი წარმატება ერგო წილად – მან იწანასწარმეტყველა ნაწილაკის არსებობა, რომელიც შემდგომში ექსპერიმენტზე იქნა აღმოჩენილი. ქვემოთ ამაზე გვექნება ლაპარაკი.

41.1 ცხრილში მოყვანილი $1/2$ -სპინიანი ბარიონების გარდა არსებობს ბარიონთა კიდევ ერთი ოჯახი, რომელსაც $3/2$ -ის ტოლი სპინი აქვს. თუ SU_3 სიმეტრია სწორია, მაშინ თეორიამ ბარიონთა 41.1 ოჯახთან ერთად უნდა აღწეროს $3/2$ სპინის მქონე ბარიონებიც. ამგვარად, ჩვენს გათვლებში უნდა ჩავრთოთ სპინიც. სპინის გათვალისწინება ნიშნავს სიმეტრიის გაფართოებას SU_6 ჯგუფამდე. მართლაც, კვარკული მდგომარეობები ახლა სურნელის გარდა სპინსაც უნდა შეიცავდნენ. ამიტომ კვარკული მდგომარეობა მეექვსე რანგის ვექტორით აღიწერება:

$$\begin{pmatrix} u \uparrow \\ d \uparrow \\ s \uparrow \\ u \downarrow \\ d \downarrow \\ s \downarrow \end{pmatrix} \quad (41.8)$$

აქ \uparrow სიმბოლო აღნიშნავს კვარკს სპინის პროექციით $S_z=1/2$, ხოლო \downarrow – $S_z=-1/2$. ზემონათქვამის შესაბამისად ბარიონები უნდა ვეძებოთ SU_6 ჯგუფის მესამე რანგის ტენზორულ წარმოდგენებს შორის, რომელიც სამი ფუნდამენტური წარმოდგენის გადამრავლებით (სამი კვარკის შეერთებით) მიიღება:

$$\{1\} \times \{1\} \times \{1\} = \{3\} + 2 \{21\} + \{1^3\} \quad (41.9)$$

რაც ჩვეულებრივ წარმოდგენათა განზომილებებში ასე იწერება:

$$6 \times 6 \times 6 = 56 + 2 \cdot 70 + 20$$

ფიზიკაში, როგორც წესი, ენერგეტიკულად ყველაზე უფრო ხელსაყრელი მდგომარეობა სიმეტრიული მდგომარეობაა. აქედან გამომდინარე, ჩავთვალოთ, რომ 56-პლეთი არის საძიებელი ის მულტიპლეტი, სადაც არის მოთავსებული ბარიონთა საძიებელი ოჯახები. ამის დასადგენად მოვახდინოთ SU_6 ჯგუფის $\{3\}$ წარმოდგენის რედუქცია

$$SU_6 \supset SU_2^{\text{სპინი}} \times SU_3^{\text{სურნელი}}$$

ჯაჭვით, რაც $\{3\}$ წარმოდგენის შემთხვევაში მოგვცემს:

$$\{3\}_6 \supset \{3\}_2 \{3\}_3 + \{21\}_2 \{21\}_3 \quad (41.10)$$

გამოსახულების მარჯვენა მხარეში ჯამის პირველი წევრის სპინი $3/2$ -ია, მეორესი კი – $1/2$. რაც შეეხება სურნელს, წარმოდგენა $\{3\}_3$ დეკუპლეტია, ე.ი., შეიცავს 10 ნაწილაკს, $\{21\}_3$ წარმოდგენა კი ოქტეტია, რომლის ნაწილაკები 41.1 ცხრილით აღიწერება. ამგვარად, განზომილებების საშუალებით (41.10) ფორმულა ასე გადაიწერება:

$$56 = (S = 3/2, 10) + (S = 1/2, 8)$$

დავალება 41.2: აჩვენეთ, რომ $\{3\}_3$ წარმოდგენა მართლაც დეკუპლეტია.

დეკუპლეტის ნაწილაკებს სპინი $3/2$ -ის ტოლი აქვს, მაგრამ იმ დროისთვის, როდესაც ეს თეორია ჩამოყალიბდა ცნობილი იყო მხოლოდ 9 ბარიონი სპინით

3/2. ამგვარად, გელ-მან-ცვეიგის თეორიის დასასაბუთებლად საჭირო იყო კიდევ ერთი ნაწილაკის აღმოჩენა. ეს ნაწილაკი მართლაც იქნა აღმოჩენილი 1964 წელს ბრუკჰეივენის ეროვნულ ლაბორატორიაში, რაც აღნიშნული თეორიის სრულ ტრიუმფს წარმოადგენდა.

ახლა გავარკვიოთ, რა ნაწილაკები შედის დეკუპლეტში, ე.ი., როგორია მათი იზოტოპური სპინი და უცნაურობები. ამისთვის მოვახდინოთ $\{3\}_3$ წარმოდგენის რედუქცია (41.2) ჯგუფთა ჯაჭვით. შედეგად გვექნება:

$$\{3\}_3 \supset \{3\}_2\{0\}_1 + \{2\}_2\{1\}_1 + \{1\}_2\{2\}_1 + \{0\}_2\{3\}_1 \quad (41.11)$$

რაც იზოსპინური მომენტისა და უცნაურობისათვის ასეთ შედეგს იძლევა:

$$\{3\}_3 \supset (I=3/2, s=0) + (I=1, s=-1) + (I=1/2, s=-2) + (I=0, s=-3)$$

რედუქცია გვიჩვენებს, რომ 3/2-სპინიანი ბარიონებისათვის უნდა არსებობდეს შემდეგი იზომულტიპლეტები: $I=3/2$ კვადრუპლეტი (ოთხი ნაწილაკი) ნულოვანი უცნაურობით, $I=1$ ტრიპლეტი (სამი ნაწილაკი) უცნაურობით -1 , $I=1/2$ დუბლეტი (ორი ნაწილაკი) უცნაურობით -2 და, ბოლოს ერთი ნაწილაკი უცნაურობით -3 . სწორედ ეს ნაწილაკი იქნა აღმოჩენილი 1964 წელს, რამაც დაამტკიცა გელ-მან-ცვეიგის თეორიის სისწორე. ნაწილაკს Ω^- -ჰიპერონი უწოდეს (ჰიპერონებს ეძახიან უცნაურ ბარიონებს). თუ გამოვიყენებთ გელ-მან-ნიშიჯიმას თანაფარდობას, დავადგენთ, რომ Ω^- -ჰიპერონის მუხტი -1 -ია. SU_3 თეორია საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ ნაწილაკთა მასები და ამ, მაშინ ჰიპოთეტური ნაწილაკისათვის ნაპოვნი იყო მასა ტოლი 1670 მევ-ისა. ექსპერიმენტმა Ω^- -ჰიპერონისათვის მოგვცა 1672 მევ-ის მასა, რაც გასაკვირვი დამთხვევაა.

41.2 ცხრილში მოყვანილია მაქსიმალური I_x -ის მქონე ნაწილაკთა მასები. დანარჩენი ნაწილაკების მასები უმნიშვნელოდ განსხვავდება მოყვანილისაგან და ეს განსხვავება, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ გამოწვეულია განსხვავებით მუხტებში.

ბოლოს, სისრულისათვის მოვიყვანოთ დეკუპლეტის ნაწილაკთა ცხრილი, ანალოგიური 41.1 ცხრილისა:

ცხრილი 41.2

ნაწილაკი	მასა, მევ m	მუხტი Q	იზოსპინი I	პროექცია I_z	უცნაურობა s
Δ^{++}	1232	+2	3/2	+3/2	0
Δ^+		+1	3/2	+1/2	0
Δ^0		0	3/2	-1/2	0
Δ^-		-1	3/2	-3/2	0
Y^{*+}	1382	+1	1	+1	-1
Y^{*0}		0	1	0	-1
Y^{*-}		-1	1	-1	-1
Ξ^-	1530	0	1/2	+1/2	-2
Ξ^0		-1	1/2	-1/2	-2
Ω^-	1672	-1	0	0	-3

დავალება 41.3: იპოვეთ (41.9) ფორმულაში შემავალი $\{21\}_6$ 70-პლეტისა და $\{1^3\}_6$ 20-პლეტის იზოსპინური და უცნაურობის შემცველობა და მიღებული ნაწილაკების მუხტები.

42. ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფები

ამ თავის დასაწყისში იყო ნათქვამი, რომ უნიტარული ჯგუფებისაგან განსხვავებით ორთოგონალურ და სიმპლექტურ ქვეჯგუფებზე გადასვლის დროს წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენები დაყვანადი ხდებიან O_n ჯგუფისა და Sp_n ჯგუფის თვალსაზრისით. მათემატიკურად ეს გამოწვეულია იმით, რომ არსებობს ოპერაცია – **ტენზორის დაქვეითება**, რომელიც კომუტირებს ორთოგონალურ და სიმპლექტურ გარდაქმნებთან. ამიტომ GL_n ჯგუფის წარმოდგენათა სივრცეში გამოიყოფა ინვარიანტული ქვესივრცეები არა მარტო გადასმის ჯგუფის ოპერაციების მიმართ, არამედ დაქვეითების მიმართაც. გავარჩიოთ ეს საკითხი.

ორთოგონალური გარდაქმნების g მატრიცები აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\sum_i g_k^i g_j^i = \delta_{kj} \quad \text{და} \quad \sum_i g_i^k g_i^j = \delta^{kj} \quad (42.1)$$

სიმპლექტური გარდაქმნების a მატრიცები კი ასეთ პირობებს აკმაყოფილებენ:

$$\varepsilon_{kl} a_i^k a_j^l = \varepsilon_{ij} \quad (42.2)$$

სადაც ε_{ij} სრულიად სიმეტრიული მეორე რანგის ტენზორია და უდრის

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{როდესაც } j = i + 1 \\ -1, & \text{როდესაც } j = i - 1 \\ 0, & \text{ყველა სხვა შემთხვევაში.} \end{cases} \quad (42.3)$$

განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ *სიმპლექტური Sp_n ჯგუფი განსაზღვრულია მხოლოდ ლუწი n -ებისათვის.*

ახლა განვსაზღვროთ ტენზორის დაქვეითების ოპერაცია. ოპერაციას, რომელიც გვაძლევს ტენზორის კვალს ორი ნებისმიერი გატოლებული ინდექსით, დაქვეითების ოპერაცია ეწოდება.

მაგალითად, $t_{i_1 i_2 i_3 \dots i_p}$ ტენზორის დაქვეითება პირველი ორი ინდექსით გვაძლევს:

$$t^{(12)}_{i_3 i_4 \dots i_p} = \sum_{i_1 i_2} \delta^{i_1 i_2} t_{i_1 i_2 i_3 \dots i_p} = \sum_i t_{ii_3 \dots i_p}$$

როგორც ვხედავთ, დაქვეითებით p რანგის ტენზორიდან ვიღებთ $(p - 2)$ რანგის ტენზორს.

თეორემა 42.1: დაქვეითების ოპერაცია კომუტირებს ორთოგონალურ და სიმპლექტურ გარდაქმნებთან.

დავალება 42.1: დაამტკიცეთ ეს თეორემა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ტენზორები ნულოვანი კვალით ზოგად ტენზორულ სივრცეში ქმნიან ინვარიანტულ ქვესივრცეს ორთოგონალური და სიმპლექტური გარდაქმნების მიმართ. რომ დავრწმუნდეთ ამ დებულებაში დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 42.1: ნებისმიერი ტენზორული სივრცე

$$\{t_{i_1 i_2 \dots i_p}\} = \{f_{i_1 i_2 \dots i_p}\} + \{t^1_{i_1 i_2 \dots i_p}\} \quad (42.4)$$

სადაც t^1 არის ტენზორი ნულოვანი კვალით ინდექსთა ნებისმიერი წყვილით დაქვეითების მიმართ, ხოლო f ტენზორს ორთოგონალური გარდაქმნებისათვის ასეთი სახე აქვს:

$$f_{i_1 i_2 \dots i_p} = \delta_{i_1 i_2} G^{(12)}_{i_3 i_4 \dots i_p} + \dots + \delta_{i_\alpha i_\beta} G^{(\alpha\beta)}_{i_1 i_2 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} i_{\beta+1} \dots i_p} + \dots \quad (42.4')$$

სულ ამ გამოსახულებაში გვექნება $p(p-1)/2$ წევრი. ამდენივე წევრი იქნება f ტენზორის გამოსახულებაში სიმპლექტური ჯგუფისათვის და მას ასეთი სახე ექნება:

$$f_{i_1 i_2 \dots i_p} = \varepsilon_{i_1 i_2} G_{i_3 i_4 \dots i_p}^{(12)} + \dots + \varepsilon_{i_\alpha i_\beta} G_{i_1 i_2 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} i_{\beta+1} \dots i_p}^{(\alpha\beta)} + \dots \quad (42.4'')$$

დამტკიცება მოყვანილი იქნება ორთოგონალური ჯგუფისათვის. თეორემის დამტკიცება ნიშნავს ვაჩვენოთ, რომ $\{f\}$ და $\{t^1\}$ ქვესივრცეები ინვარიანტულია ორთოგონალური გარდაქმნების მიმართ და მათი თანაკვეთა ცარიელია: $f \cap t^1 = \emptyset$. ეს ნიშნავს, რომ მოყვანილი ქვესივრცეები “ორთოგონალურია”. t^1 ქვესივრცის ინვარიანტულობა ცხადია ორთოგონალური გარდაქმნებისა და დაქვეითების კომპუტირებიდან:

$$g_{i_1}^{j_1} g_{i_2}^{j_2} \dots g_{i_p}^{j_p} \left(\delta_{j_1 j_2} G_{j_3 j_4 \dots j_p}^{(12)} \right) = \delta_{i_1 i_2} g_{i_3}^{j_3} g_{i_4}^{j_4} \dots g_{i_p}^{j_p} G_{j_3 j_4 \dots j_p}^{(12)} = \delta_{i_1 i_2} G_{i_3 i_4 \dots i_p}^{(12)'}$$

აქედან ჩანს, რომ f ქვესივრცეც ინვარიანტულია O_n ჯგუფის გარდაქმნების მიმართ. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ამ ორი ქვესივრცის გადაკვეთა ცარიელია.

მართლაც,

$$\begin{aligned} \sum t^1_{i_1 i_2 \dots i_p} f_{i_1 i_2 \dots i_p} &= \sum t^1_{i_1 i_2 \dots i_p} \delta_{i_1 i_2} G_{i_3 i_4 \dots i_p}^{(12)} + \dots \\ &+ \sum t^1_{i_1 i_2 \dots i_p} \delta_{i_\alpha i_\beta} G_{i_1 i_2 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} i_{\beta+1} \dots i_p}^{(\alpha\beta)} + \dots = 0 \end{aligned}$$

ჯამი ამ გამოსახულებაში გამეორებული ინდექსებით წარმოებს. ნულთან ტოლობას კი განაპირობებს ის ფაქტი, რომ თეორემის პირობის ძალით t^1 ტენზორის კვალი ნებისმიერი ორი ინდექსით ნულის ტოლია.

ამით თეორემა ორთოგონალური ჯგუფისათვის დამტკიცებულია.

დავალება 42.2: დამტკიცეთ ეს თეორემა სიმპლექტური ჯგუფისათვის.

თეორემა გვიჩვენებს, რომ *ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფების წარმოდგენები უნდა ვეძებოთ ნულოვანი კვალის მქონე ტენზორების ქვესივრცეში.*

მაგალითად, ვიპოვოთ ნულოვანი კვალის მქონე t^1 ტენზორი მეორე რანგის ტენზორულ სივრცეში. თეორემის ძალით ასეთი ტენზორი ასე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$t_{ij} = \delta_{ij} G + t^1_{ij} \quad (42.5)$$

ვიპოვოთ ამ ტენზორის კვალი:

$$\sum t_{ii} = n G, \quad (t^1_{ii} = 0, \text{ პირობით})$$

ამიტომ

$$G = (1/n) \sum t_{ii}$$

რაც (42.5) ტოლობაში ჩასმის შემდეგ ნულოვანი კვალის მქონე მეორე რანგის ტენზორისთვის გვაძლევს:

$$t^1_{ij} = t_{ij} - (1/n) \delta_{ij} \sum t_{kk}$$

დავალება 42.3: იპოვეთ ნულოვანი კვალის მქონე ტენზორის კომპონენტები მესამე და მეოთხე რანგის ტენზორებისათვის.

ნულოვანი კვალის მქონე ტენზორების ქვესივრცე ინვარიანტულია ტენზორის ინდექსების გადასმის და, ე.ი., გადანაცვლებათა ჯგუფის გარდაქმნათა მიმართ. ეს ნიშნავს, რომ O_n და S_p_n ჯგუფების დაუყვანადი წარმოდგენების ბაზისის მისაღებად ნულოვანი კვალის მქონე ტენზორების ქვესივრცეზე უნდა ვიმოქმედოთ იუნგ-იამანუჩის სიმეტრიზატორებით, ე.ი., O_n და S_p_n ჯგუფების დაუყვანადი წარმოდგენებიც შეგვიძლია დავახასიათოთ იუნგის სქემებით. გასაგებია, რომ ამ ჯგუფების S -ფუნქციები განსხვავებულნი იქნებიან ჩვეულებრივი შურის ფუნქციებისაგან, რადგან მათ, GL_n ჯგუფის ფუნქციებთან

შედარებით, დამატებითი პირობები დაედებათ. მართლაც, O_n და Sp_n ჯგუფებისათვის ადგილი აქვს ასეთ თეორემას:

თეორემა 42.2: ნულოვანი კვალის მქონე ტენზორები, რომლებიც შეესაბამებიან წარმოდგენებს იუნგის სქემებით, სადაც პირველი ორი სვეტის უჯრების რიცხვი n -ზე მეტია, იგივეურად ნულის ტოლია.

დამტკიცება: ზოგადი შემთხვევისათვის არ მოგვყავს. თეორემის სისწორეს მაგალითზე ვაჩვენებთ. განვიხილოთ O_3 ჯგუფის $\{2^2\}$ წარმოდგენის შესაბამისი ტენზორული სივრცის საბაზისო ვექტორი. ზემოთქმულის თანახმად, მას ასეთი იუნგის ტაბულები შეესაბამება:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & i \\ \hline j & k \\ \hline \end{array}$$

i , j და k ინდექსები გარბიან მნიშვნელობებს 1-დან 3-მდე. i ინდექსი გამეორებულია იმისთვის, რომ მისი აჯამვით ვიპოვოთ ტენზორის კვალი. კვალის ნულთან ტოლობა გვამღვეს ორ დამოუკიდებელ პირობას:

$$\sum_{i=1}^3 \begin{array}{|c|c|} \hline i & i \\ \hline j & k \\ \hline \end{array} = 0; \quad (j \neq k) \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^3 \begin{array}{|c|c|} \hline i & i \\ \hline k & k \\ \hline \end{array} = 0$$

O_3 ჯგუფისათვის პირველი პირობა იძლევა:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} = 0 \tag{42.6}$$

ხოლო მეორე გვამღვეს სამ ტოლობას:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} = 0; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} = 0; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} = 0$$

თუ არასტანდარტული ტაბულებიდან სტანდარტულზე გადავალთ, მივიღებთ:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} = 0; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} = 0; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} = 0$$

განტოლებათა ამ სისტემას ერთადერთი ტრივიალური ამოხსნა აქვს:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

რაც (42.6) პირობასთან ერთად გვიჩვენებს, რომ $n=3$ -სათვის $\{2^2\}$ ტიპის ნულოვანი კვალის მქონე ტენზორები იგივეურად ნული ტოლია. ამით ვაჩვენებთ თეორემის სამართლიანობა O_3 ჯგუფის $\{2^2\}$ წარმოდგენისათვის.

უკვე აღვნიშნეთ, რომ S ფუნქციები O_n და Sp_n ჯგუფებისათვის განსხვავდება GL_n ჯგუფის იუნგის სქემებისაგან. ამიტომ მათ აღსანიშნავად განსხვავებული სიმბოლოები შემოვიღოთ. ასე, მაგალითად, ორთოგონალური ჯგუფის S -ფუნქციები ასე აღვნიშნოთ: $[\lambda]$, ხოლო სიმპლექტურისა კი ასე – $\{\lambda\}$.

როგორც აქამდე იყო, O_n და Sp_n ჯგუფების დაუყვანადი წარმოდგენების განზომილებები შეგვიძლია ვვიღოთ რეგულარული ტაბულების საშუალებით დავითვალოთ. მაგრამ უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ამ შემთხვევაში ყველა ტაბულა დამოუკიდებელი არ არის: კვალის ნულთან ტოლობა ზოგიერთ საბაზისო ფუნქციას ერთმანეთთან აკავშირებს, რაც ამცირებს დამოუკიდებელი ტაბულების რიცხვს და, შესაბამისად, განზომილებასაც. მაგალითად, დავთვალოთ O_3 ჯგუფის $[2]$ წარმოდგენის განზომილება. GL_3 ჯგუფისათვის ამ შემთხვევაში 6 რეგულარული ტაბულა გვაქვს:

$$\boxed{11} \quad \boxed{12} \quad \boxed{13} \quad \boxed{22} \quad \boxed{23} \quad \boxed{33}$$

ორთოგონალური ჯგუფისათვის შესაბამისი ტენზორის კვალის ნულთან ტოლობის გამო, სამი ტაბულა ერთმანეთთან არის დაკავშირებული:

$$11 + 22 + 33 = 0$$

საიდანაც შეგვიძლია ერთი საბაზისო ფუნქცია დანარჩენი ორით გამოვსახოთ, მაგალითად

$$33 = -11 - 22$$

ამიტომ O_3 ჯგუფის $[2]$ წარმოდგენის განზომილება 5 ყოფილა. ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ განზომილებების დათვლის გრაფიკული მეთოდი ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფებისათვის ნაკლებად არის

მოხერხებული, ვიდრე, მაგალითად, უნიტარული ჯგუფისათვის. ამიტომ ჯობს, ამ ჯგუფების განზომილებების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ანალიზური ფორმულები.

ამ ფორმულებს ასეთი სახე აქვთ: $[\lambda]$ წარმოდგენის განზომილება $O_{2\nu+1}$ ჯგუფისათვის ტოლია:

$$\mathcal{F}_{2\nu+1}^{[\lambda]} = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{(2\lambda_i + n - 2i)}{(n - 2i)!} \prod_{i < j=1}^{\nu} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)(\lambda_i + \lambda_j + n - j - i) \quad (42.7)$$

აქ $n=2\nu+1$. $O_{2\nu}$ ჯგუფისათვის განზომილება ითვლება ასეთი ფორმულით:

$$\mathcal{F}_{2\nu}^{[\lambda]} = 2^{\nu - \delta_{\lambda}^0} \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{(2i - 2)!} \prod_{i < j=1}^{\nu} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)(\lambda_i + \lambda_j + n - j - i) \quad (42.8)$$

ამ შემთხვევაში $n=2\nu$.

სიმპლექტური $Sp_{2\nu}$ ჯგუფის $\{\lambda\}$ წარმოდგენისათვის განზომილება უდრის

$$\mathcal{F}_{2\nu}^{\{\lambda\}} = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{\lambda_i + \nu - i + 1}{\nu - i + 1} \prod_{i < j=1}^{\nu} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)(\lambda_i + \lambda_j + 2\nu + 2 - j - i) \quad (42.9)$$

ადვილია ჩვენება, რომ ორთოგონალური გარდაქმნების დეტერმინანტი ± 1 -ს უდრის, ხოლო სიმპლექტური გარდაქმნები უნიმოდულარულნი არიან.

დავალება 42.4: აჩვენეთ ეს.

O_n ორთოგონალური ჯგუფის $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r]$ დაუყვანადი წარმოდგენისათვის შემოჰყავთ შეუღლებული წარმოდგენის ცნება. ინდექსი r იუნგის სქემაში, ცხადია, გამოხატავს სტრიქონების რიცხვს პირველ სვეტში. შეუღლებულ წარმოდგენას ისეთი იუნგის სქემა შეესაბამება, რომელშიც პირველი სვეტის უჯრების რიცხვი, $[\lambda]$ სქემასთან შედარებით, შეცვლილია $n-r$

რაოდენობის უჯრით. მაგალითად, O_3 ჯგუფის [31] წარმოდგენის შეუღლებული [31]* წარმოდგენა ტოლია

$$[31]^* \sim [3]$$

ცხადია, შეუღლებული წარმოდგენის ჩაწერა ზოგადად არის შესაძლებელი. მას ასეთი სახე აქვს:

$$[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r] = [n-r, \lambda_2, \dots, \lambda_r]$$

ერთი პირობა, რომელიც ედება ამ ტოლობას არის ის, რომ

$$n - r \geq \lambda_2$$

თუ შემოვისაზღვრებით საკუთარი ორთოგონალური გარდაქმნებით, ე.ი., უნიმოდულარული ორთოგონალური SO_n ჯგუფით, მაშინ შეუღლებული წარმოდგენა საწყისი წარმოდგენის ექვივალენტური იქნება:

$$[\lambda]^* \sim [\lambda]$$

ყველაზე ნათლად ამის ახსნა შეიძლება SO_3 ჯგუფის მაგალითზე. მართლაც, ამ ჯგუფისთვის $[11]^* \sim [1]$, რაც გასაგებია, რადგან ორივე წარმოდგენა SO_3 ჯგუფში სამგანზომილებიანია და აღწერს ვექტორს: [1] არის ჩვეულებრივი ვექტორი, ხოლო [11] – აქსიალური ვექტორი, რომელიც არეკვლის დროს იცვლის ნიშანს. SO_3 ჯგუფში არეკვლები არა გვაქვს, ამიტომ ორივე ვექტორი ერთმანეთის ექვივალენტურია, ე.ი., სივრცული ბრუნვების დროს ორივე ერთნაირად გარდაიქმნება.

43. ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფების დაუყვანადი წარმოდგენები

წინა პარაგრაფში ვნახეთ, რომ GL_n ჯგუფის წარმოდგენის ნებისმიერი ტენზორი $t_{i_1 i_2 \dots i_p}$ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც ორი ტენზორის პირდაპირი ჯამი:

$$t_{i_1 i_2 \dots i_p} = f_{i_1 i_2 \dots i_p} + t_{i_1 i_2 \dots i_p}^1 \quad (43.1)$$

სადაც $t_{i_1 i_2 \dots i_p}^1$ ტენზორების სივრცე არის დაუყვანადი ინვარიანტული ქვესივრცე, შედგენილი 1 წყვილი ინდექსების გატოლებით მიღებული ნულოვანი კვალის მქონე ტენზორებისაგან. $f_{i_1 i_2 \dots i_p}$ ქვესივრცე თუმცა ინვარიანტულია, მაგრამ დაყვანადია და შეიძლება ჩვენება, რომ იგი წარმოიდგინება ასეთი სახით:

$$f_{i_1 i_2 \dots i_p} = f'_{i_1 i_2 \dots i_p} + t_{i_1 i_2 \dots i_p}^2 \quad (43.2)$$

სადაც $t_{i_1 i_2 \dots i_p}^2$ იმ ტენზორთა ქვესივრცეა, რომელთა კვალი ნულის ტოლია ორი წყვილი ინდექსის გატოლების შედეგად:

$$t_{\dots i \dots i \dots k \dots k \dots}^2 = 0 \quad (43.2')$$

დავალება 43.1: აჩვენეთ (43.2) ტოლობის სამართლიანობა.

ამის შემდეგ ცხადია, რომ $\{f'\}$ ქვესიმრავლიდან იმ ტენზორთა ინვარიანტული ქვესივრცე შეიძლება გამოიყოს, რომელთა კვალი ნულის ტოლია სამი წყვილი ინდექსის გატოლების შედეგად და ა.შ. ამგვარად, ნებისმიერი ტიპის ტენზორი შეიძლება იმ ტენზორთა პირდაპირი ჯამის სახით იქნას

წარმოდგენილი, რომელთა კვალი ინდექსთა ერთი, ორი, სამი და ა.შ. წყვილის დაქვეითების შედეგად ნულის ტოლი გახდება.

ახლა დავსვათ GL_n ჯგუფის $\{\mu\}$ წარმოდგენის დაყვანადობის საკითხი ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფების თვალსაზრისით. შურის ფუნქციების ენაზე ეს ნიშნავს ასეთი პლეთიზმების პოვნას:

$$[1] \otimes \{\mu\} \text{ და } \{1\} \otimes \{\mu\}$$

სადაც ჩვენი შეთანხმებით $[1]$ აღნიშნავს O_n ორთოგონალური ჯგუფის ფუნდამენტურ წარმოდგენას, ხოლო $\{1\}$ – Sp_n სიმპლექტური ჯგუფისა. მოყვანილი პლეთიზმების პოვნას ემსახურება ორი თეორემა:

თეორემა 43.1: GL_n ჯგუფის $\{\mu\}$ წარმოდგენის რედუქციას O_n ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენებზე იძლევა პლეთიზმი

$$[1] \otimes \{\mu\} = \sum_v h_{\mu\nu} [v] \quad (43.4)$$

ამ გამოსახულებაში $h_{\mu\nu}$ კოეფიციენტების პოვნა შეიძლება ასეთი ფორმულის საშუალებით:

$$\bar{K}\{\mu\} \equiv [\sum_{r=0}^{\infty} D(\{2\} \otimes \{t\})] \{\mu\} = \sum_v h_{\mu\nu} \{v\} \quad (43.5)$$

დამტკიცება: მართლაც, როგორც ვნახეთ, O_n ჯგუფის ტენზორულ წარმოდგენათა სივრცე ზოგადი ტენზორული სივრციდან მიიღება ტენზორთა ნებისმიერი რაოდენობის ინდექსთა სიმეტრიული წყვილების დაქვეითების შედეგად. S -ფუნქციების ენაზე სიმეტრიული წყვილი $\{2\}$ იუნგის სქემით გამოისახება. ნებისმიერი წყვილების შესაბამისი ტენზორი, რომლითაც უნდა მოვახდინოთ $\{\mu\}$ ტიპის ტენზორის დაქვეითება, ასეთი პირდაპირი ჯამით მოიცემა:

$$\sum_r \{2\} \otimes \{t\} \quad (43.6)$$

ასეთი ტიპის ტენზორით დაქვეითება ნიშნავს $\{\mu\}$ ტენზორზე (43.6) არგუმენტის მქონე ფუქსის D -ოპერატორით მოქმედებას. D -ოპერატორის თვისებების გამო გვაქვს:

$$\bar{K} \equiv D(\sum_t \{2\} \otimes \{t\}) = \sum_t D(\{2\} \otimes \{t\}) \quad (43.7)$$

ამრიგად, (43.7)-ით განსაზღვრული \bar{K} ოპერატორის მოქმედება $\{\mu\}$ ტიპის ნებისმიერ ტენზორების სივრცეზე გამოყოფს ტენზორებს, დაქვეითებულს ინდექსთა ნებისმიერი რაოდენობის წყვილებით, რაც გვამლევს ორთოგონალური გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტულ დაუყვანად ქვესივრცეებს და, ე.ი., 43.1 თეორემის შესაბამის იმ $[1]$ წარმოდგენებს, რომელზედაც ხდება GL_n ჯგუფის $\{\mu\}$ წარმოდგენის რედუცირება.

მაგალითად, ვიპოვოთ GL_n ჯგუფის $\{42\}$ წარმოდგენის რედუქცია SO_3 ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენებზე. (43.7) ოპერატორის მოქმედება $\{42\}$ ფუნქციაზე გვამლევს:

$$\bar{K}\{42\} = \{42\} + \{4\} + \{31\} + \{2^2\} + \{2\} + \{2\} + \{0\}$$

42.2 თეორემის ძალით $\{42\}$ და $\{2^2\}$ ტიპის ტენზორები SO_3 ჯგუფისათვის იგივეურად ნულის ტოლნი არიან. ამის გარდა $\{31\}$ წარმოდგენა თავისი შეუღლებული $\{3\}$ წარმოდგენის ექვივალენტურია, ამიტომ, საბოლოოდ, $SU_3 \supset SO_3$ რედუქცია $\{42\}$ წარმოდგენისათვის გვამლევს:

$$[1] \otimes \{42\} = [4] + [3] + 2[2] + [0] \quad (43.8)$$

ადვილია 43.1 თეორემის ანალოგიური თეორემის ჩამოყალიბება სიმპლექტური ჯგუფისათვის. მართლაც, როგორც (42.4'') ფორმულიდან ჩანს, სიმპლექტური ჯგუფის შემთხვევაში დაქვეითება უნდა მოხდეს ინდექსთა ანტისიმეტრიული წყვილით $\{1^2\}$. ე.ი., $\{\mu\}$ ტენზორზე უნდა ვიმოქმედოთ

$$\bar{K}'\{\mu\} \equiv [\sum_{t=0}^{\infty} D(\{1^2\} \otimes \{t\})] \quad (43.9)$$

ოპერატორით და Sp_n ჯგუფისთვის ასეთი თეორემა გვექნება:

თეორემა 43.2: GL_n ჯგუფის $\{\mu\}$ წარმოდგენის რედუქციას Sp_n ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენებზე იძლევა პლეთიზმი

$$\{1\} \otimes \{\mu\} = \sum_{\nu} f_{\mu\nu} \{\nu\} \quad (43.10)$$

ამ გამოსახულებაში $f_{\mu\nu}$ კოეფიციენტების პოვნა შეიძლება ასეთი ფორმულის საშუალებით:

$$\bar{K}' \sum_{t=0}^{\infty} D(\{1^2\} \otimes \{t\}) = \sum_{\nu} f_{\mu\nu} \{\nu\} \quad (43.11)$$

დამტკიცება საკვებით ანალოგიურია წინა თეორემის დამტკიცებისა და ამიტომ მას არ მოვიყვანთ.

დავალება 43.2: დაამტკიცეთ თეორემა.

მაგალითად ისევ GL_n ჯგუფის $\{42\}$ წარმოდგენის რედუქცია მოვიყვანოთ, ამჯერად Sp_n ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენებზე. რადგან

$$\bar{K}'\{42\} = \{42\} + \{31\} + \{2\}$$

ამიტომ საძიებელ ფორმულას ასეთი სახე ექნება:

$$\{1\} \otimes \{42\} = \{42\} + \{31\} + \{2\} \quad (43.12)$$

დავალება 43.3: ა) იპოვეთ GL_n ჯგუფის $\{2\}$, $\{31\}$, $\{4\}$, $\{32\}$, $\{2^2\}$, $\{3^2\}$ და $\{2^21^2\}$ წარმოდგენების რედუქციები SO_3 ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენებზე.

ბ) იპოვეთ $\{1^2\}$, $\{31\}$, $\{21^2\}$, $\{32\}$, $\{2^2\}$, $\{3^2\}$ და $\{2^21^2\}$ წარმოდგენების რედუქციები Sp_n ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენებზე.

შემდგომში \hat{K} და \hat{K}' ოპერატორების მოხერხებული ხმარებისათვის მოვიყვანოთ მათი ცხადი სახის რამდენიმე საწყისი წევრი:

$$\hat{K}=1+D(\{2\})+D(\{4\})+D(\{2^2\})+D(\{6\})+D(\{42\})+D(\{2^3\})+D(\{8\})+D(\{62\})+\dots \quad (43.13)$$

$$\hat{K}'=1+D(\{1^2\})+D(\{2^2\})+D(\{1^4\})+D(\{3^2\})+D(\{2^21^2\})+D(\{1^6\})+D(\{4^2\})+\dots \quad (43.14)$$

დავალება 43.4: დაწერეთ ამ ფორმულებისათვის შემდეგი 5-5 წევრი.

როგორც ყველა სხვა ჯგუფისათვის O_n და Sp_n ჯგუფებისთვისაც ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საკითხს წარმოადგენს წარმოდგენათა კომპოზიციის კანონი. ამ კანონის საპოვნელად გადაყვანის ასეთი წესები უნდა გამოვიყენოთ:

გადაყვანის წესები 43.1:

1. გამოვსახოთ O_n და Sp_n ჯგუფების დაუყვანადი წარმოდგენების გამომსახველი S -ფუნქციები GL_n ჯგუფის წარმოდგენების შესაბამისი შურის ფუნქციების კომბინაციების საშუალებით;
2. მიღებული S -ფუნქციები გადავამრავლოთ ერთმანეთზე ჩვენთვის კარგად ცნობილი წესებით;
3. მიღებული შედეგი კვლავ გადავიყვანოთ O_n და Sp_n ჯგუფების დაუყვანად წარმოდგენებში.

ამ პროგრამის განსახორციელებლად საჭიროა \hat{K} და \hat{K}' ოპერატორების შებრუნებული ოპერატორების პოვნა.

ვაჩვენოთ, რომ \hat{K} ოპერატორის შებრუნებულ \hat{J} ოპერატორს ასეთი სახე აქვს:

$$\hat{J} = \sum_{s=0}^{\infty} D(\{2\} \otimes \{1^s\}) \quad (43.15)$$

პლეთიზმის თვისებების გამოყენებით ადვილია ჩვენება, რომ

$$\begin{aligned} \hat{J} \hat{K} &= \hat{K} \hat{J} = \sum_{s=0}^{\infty} D(\{2\} \otimes \{1^s\}) \sum_{t=0}^{\infty} D(\{2\} \otimes \{t\}) \\ &= D(\sum_{s,t} (-)^s [\{2\} \otimes \{1^s\}][\{2\} \otimes \{t\}]) \\ &= D([\{2\} - \{2\}] \otimes \{\lambda\}) = D(0) = 1 \end{aligned}$$

რაც ამტკიცებს, რომ \hat{J} ოპერატორი \hat{K} ოპერატორის შებრუნებულია.

ასევე შეიძლება ჩვენება, რომ \hat{K}' ოპერატორის შებრუნებულ \hat{J}' ოპერატორს ასეთი სახე აქვს:

$$\hat{J}' = \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s D(\{1^2\} \otimes \{1^s\}) \quad (43.16)$$

დავალება 43.5: აჩვენეთ ეს.

როგორც \hat{K} და \hat{K}' ოპერატორების შემთხვევაში ამოვიწეროთ რამდენიმე საწყისი წევრი \hat{J} და \hat{J}' ოპერატორებისათვისაც:

$$\hat{J} = 1 - D(\{2\}) + D(\{31\}) - D(\{41^2\}) - D(\{3^2\}) + D(\{51^3\}) + D(\{431\}) + \dots \quad (43.17)$$

$$\hat{J}' = 1 - D(\{1^2\}) + D(\{21^2\}) - D(\{31^3\}) - D(\{2^3\}) + D(\{41^4\}) + D(\{32^21\}) + \dots \quad (43.18)$$

ახლა უკვე შეიძლება კომპოზიციის კანონების ჩამოყალიბება. მაგალითად, O_n ჯგუფისათვის ადგილი აქვს ასეთ თეორემას:

თეორემა 43.3: O_n ჯგუფის ორი დაუყვანადი $[\lambda]$ და $[\mu]$ წარმოდგენის ნამრავლი ასეთი თანაფარდობით შეიძლება გამოითვალოს:

$$[\lambda][\mu] = \sum_{\nu} M_{\lambda\mu\nu} [\nu] \quad (43.19)$$

სადაც მარჯვენა მხარეზე ჯამის პოვნა ჩვეულებრივი S -ფუნქციებისათვის განსაზღვრული ასეთი ფორმულით არის შესაძლებელი:

$$\hat{K}[\hat{J}\{\lambda\}]\hat{J}\{\mu\} = \sum_{\nu} M_{\lambda\mu\nu} \{\nu\} \quad (43.20)$$

დამტკიცება არ მოგვყავს, თუმცა თეორემის სამართლიანობა ნათელია.

დავალება 43.6: დაამტკიცეთ ეს თეორემა.

მაგალითისათვის გავამრავლოთ [2] და [1²] წარმოდგენები. (43.17)

ფორმულის გამოყენება გვადლევს:

$$\begin{aligned} \tilde{K} [(2)-(0)]\{1^2\} &= \tilde{K} (\{31\} + \{21^2\} - \{1^2\}) = \\ &= \{31\} + \{2\} + \{1^2\} + \{21^2\} + \{1^2\} - \{1^2\} = \\ &= \{31\} + \{21^2\} + \{2\} + \{1^2\} \end{aligned}$$

ამგვარად, 43.3 თეორემის ძალით:

$$[2] [1^2] = [31] + [21^2] + [2] + [1^2]$$

43.3 თეორემის ანალოგიური თეორემა არსებობს სიმპლექტური ჯგუფისათვის:

თეორემა 43.4: Sp_n ჯგუფის ორი დაუყვანადი $\{\lambda\}$ და $\{\mu\}$ წარმოდგენის ნამრავლი ასეთი თანაფარდობით შეიძლება გამოითვალოს:

$$\{\lambda\}\{\mu\} = \sum_{\nu} N_{\lambda\mu\nu} \{\nu\} \quad (43.21)$$

სადაც მარჯვენა მხარის ჯამის პოვნა ჩვეულებრივი S -ფუნქციებისათვის განსაზღვრული ასეთი ფორმულით არის შესაძლებელი:

$$\tilde{K}'[\mathcal{J}'\{\lambda\}]\mathcal{J}'\{\mu\} = \sum_{\nu} N_{\lambda\mu\nu} \{\nu\} \quad (43.22)$$

დავალება 43.8: დაამტკიცეთ ეს თეორემა.

მოვიყვანოთ მაგალითი: გავამრავლოთ ორი ასეთი წარმოდგენა – $\{1^2\}$ და $\{1^2\}$.

(43.18) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \widehat{R}[(\{1^2\} - \{0\})(\{1^2\} - \{0\})] &= \widehat{R}(\{2^2\} + \{21^2\} + \{1^4\} - 2\{1^2\} + \{0\}) = \\ &= \{2^2\} + \{1^2\} + \{0\} + \{21^2\} + \{2\} + \{1^2\} + \{1^4\} + \{1^2\} + \{0\} - 2\{1^2\} - 2\{0\} + \{0\} = \\ &= \{2^2\} + \{21^2\} + \{1^4\} + \{2\} + \{1^2\} + \{0\} \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$\{1^2\} \{1^2\} = \{2^2\} + \{21^2\} + \{1^4\} + \{2\} + \{1^2\} + \{0\}$$

დავალეზა 43.9: იპოვეთ ნამრავლები: $[2][2]$, $[3][2]$, $[21][1^2]$, $[2^2][31]$, $[21][21]$. აგრეთვე:

$$\{1^2\} \{1^4\}, \{21^2\} \{2^2\}, \{21^2\} \{1^4\}, \{31^2\} \{21\}, \{21\} \{21\}.$$

თუ დაგვჭირდა ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფებისათვის კომპოზიციის სხვა კანონების განსაზღვრა, მაშინ, ცხადია, ისევ 43.1 გადაყვანის წესები უნდა გამოვიყენოთ, მაგალითად, ასეთი პლეთიზმები:

$$[\mu] \otimes \{\lambda\}, \{\mu\} \otimes \{\lambda\}, \{\mu\} \otimes \{\lambda\}, [\mu] \otimes [\lambda] \text{ და ა.შ.}$$

მოვიყვანოთ მაგალითი პლეთიზმის დათვლაზე, რაც ნათელს გახდის მისი პოვნის მეთოდოლოგიაზე. ვიპოვოთ:

$$\begin{aligned} [2] \otimes \{2\} &= (\{2\} - \{0\}) \otimes \{2\} = \{2\} \otimes \{2\} - \{2\} \otimes \{1\} + \{2\} \otimes \{0\} = \\ &= \{4\} + \{2^2\} - \{2\} + \{0\} \end{aligned}$$

ახლა ისევ ორთოგონალური ჯგუფების წარმოდგენებზე გადავიდეთ, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} [2] \otimes \{2\} &= [4] + [2] + [0] + [2^2] + [2] + [0] - [2] - [0] + [0] = \\ &= [4] + [2^2] + [2] + 2[0] \end{aligned}$$

დავალეზა 43.10: იპოვეთ ასეთი პლეთიზმები:

$$\begin{aligned} &[2] \otimes \{1^2\}; [1^2] \otimes \{2\}; [2] \otimes \{3\}; [3] \otimes \{1^2\}; [1^2] \otimes \{2\}; \\ &\{2\} \otimes \{1^2\}; \{1^2\} \otimes \{2\}; \{2\} \otimes \{3\}; \{3\} \otimes \{1^2\}; \{1^2\} \otimes \{2\}; \\ &[2] \otimes [1^2]; [1^2] \otimes [2]; [2] \otimes [3]; [3] \otimes [1^2]; [1^2] \otimes [2]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{2\} \otimes \{1^2\}; \{1^2\} \otimes \{2\}; \{2\} \otimes \{3\}; \{3\} \otimes \{1^2\}; \{1^2\} \otimes \{2\}; \\ & [2] \otimes \{1^2\}; [1^2] \otimes \{2\}; [2] \otimes \{3\}; [3] \otimes \{1^2\}; [1^2] \otimes \{2\}. \end{aligned}$$

პარაგრაფის ბოლოს მოვიყვანოთ $GL_n \supset O_n$ და $GL_n \supset Sp_n$ რედუქციების ზოგადი ფორმულები რამდენიმე მარტივი შემთხვევისათვის. თუ k რიცხვია (და არა დანაწილება), მაშინ

$$\begin{aligned} \{k\} &= \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} [k-2t]; \quad \{1^k\} = [1^k] \\ \{k\} &= \{k\}; \quad \{1^k\} = \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \{1^{k-2t}\} \end{aligned} \quad (43.23)$$

ეს ტოლობები შებრუნებული თანაფარდობების მიღების საშუალებას იძლევა. მათ ასეთი სახე აქვთ:

$$\begin{aligned} [k] &= \{k\} - \{k-2\}; \quad [1^k] = \{1^k\} \\ \{k\} &= [k]; \quad \{1^k\} = [1^k] - [1^{k-2}] \end{aligned} \quad (43.24)$$

44. წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის რედუქცია სიმეტრიულ ჯგუფზე

წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის მრავალრიცხოვან ქვეჯგუფებს შორის გადანაცვლებათა ჯგუფიც ფიგურირებს. როგორც ზევით ვნახეთ მას მნიშვნელოვანი როლი აქვს წრფივ გარდაქმნათა ჯგუფის თვისებების შესწავლაში. რადგანაც გადანაცვლებათა ჯგუფი GL_n ჯგუფის ქვეჯგუფია, ამიტომ გამოსარკვევის სიმეტრიული ჯგუფის რომელ წარმოდგენებს შეიცავს GL_n ჯგუფის ნებისმიერი $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენა?

S_n ჯგუფი GL_n ჯგუფის ისეთი ქვეჯგუფია, რომელიც ერთდროულად ინახავს ასეთ ფორმებს:

$$\mathcal{O}_n = \sum_i x_i^n \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (44.1)$$

GL_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის შემადგენელი S_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების, ანუ

$$GL_n \supset S_n \quad (44.2)$$

რედუქციის საპოვნელად რედუქციის საერთო იდეოლოგიის შესაბამისად უნდა ვიპოვოთ S_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის პლეთიზმი GL_n ჯგუფის იმ დაუყვანად წარმოდგენასთან, რომელშიც ვეძებთ გადანაცვლების ჯგუფის წარმოდგენებს. აქ, როგორც ზევით უკვე შეგვხვედრია შიდა ნამრავლის განმარტების დროს, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ გადანაცვლების აღმწერი სამიებელი S -ფუნქციის წონა იგივე უნდა იყოს, როგორც პლეთიზმის ნიშნის წინ მჯდომი S -ფუნქციის წონა. ამიტომ ეს პლეთიზმი განსხვავებული იქნება იმისაგან, რაც აქამდე შეგვხვედრია. ამ პლეთიზმს ლიტლვუდმა შიდა პლეთიზმი უწოდა და იგი ასეთი თეორემის საშუალებით განსაზღვრა:

თეორემა 44.1: გადანაცვლებათა S_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების აღმწერი შემოკლებული $\langle \nu \rangle$ S -ფუნქციების საპოვნელად, რომელიც შედის შიდა პლეთიზმში

$$\langle 1 \rangle \circ \{\mu\} = \sum_{\nu} V_{\mu\nu} \langle \nu \rangle, \quad (44.3)$$

საჭიროა გამოვთვალოთ ქვემოთ მოყვანილი \hat{L} ოპერატორის მოქმედება $\{\mu\}$ S -ფუნქციაზე

$$\begin{aligned} \hat{L} \{\mu\} \equiv & [\sum \{\lambda_2\} \{\lambda_3\} \dots \{\lambda_i\} D(\{2\} \otimes \{\lambda_2\}) D(\{3\} \otimes \{\lambda_3\}) \dots D(\{i\} \otimes \{\lambda_i\}) \times \\ & \times D(\{2\} \otimes \{r_2\}) D(\{3\} \otimes \{r_3\}) \dots D(\{j\} \otimes \{r_j\})] \{\mu\} = \sum_{\nu} V_{\mu\nu} \{\nu\} \end{aligned} \quad (44.4)$$

ამ ფორმულის მარცხენა მხარეში აჯამვა წარმოებს $\{\lambda_2\}, \{\lambda_3\}, \dots, \{\lambda_i\}$ დანაწილებებისა და r_1, r_2, \dots, r_j რიცხვების ყველა შესაძლო მნიშვნელობით, მათ შორის $\{\lambda_k\} = 0$ და $r_l = 0$ მნიშვნელობითაც. (44.3) ფორმულაში სიმბოლო “ \circ ” გამოიყენება შიდა პლეთიზმის აღსანიშნავად.

დამტკიცებას არ მოვიყვანთ, სამაგიეროდ, ჩავწერთ \hat{L} ოპერატორის რამდენიმე საწყის წევრს:

$$\begin{aligned} \hat{L} = & 1 + D(\{2\}) + \{1\}D(\{2\}) + \{1^2\}D(\{31\}) + \{1\}D(\{2\})D(\{2\}) + \\ & D(\{3\}) + \{1\}D(\{3\}) + \dots \end{aligned} \quad (44.5)$$

როგორც ვხედავთ, \hat{L} ოპერატორს გაცილებით უფრო რთული სახე აქვს, ვიდრე ანალოგიურ ოპერატორებს ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფებისათვის, რაც სავსებით მოსალოდნელი იყო.

ახლა თეორემის შინაარსში უკეთ გარკვევის მიზნით მოვიყვანოთ მაგალითი. განვიხილოთ GL_n ჯგუფის $\{31\}$ წარმოდგენა და (44.3-5) ფორმულების საშუალებით გავარკვიოთ S_n ჯგუფის რა დაუყვანადი წარმოდგენები შემოვა (44.2) რედუქციის დროს. გათვლები შემდეგ პასუხს გვაძლევს:

$$\langle 1 \rangle \circ \{31\} = \langle 31 \rangle + \langle 3 \rangle + 2\langle 21 \rangle + \langle 1^3 \rangle + 2\langle 2 \rangle + 3\langle 1^2 \rangle + 2\langle 1 \rangle$$

როგორც ყოველთვის შემოკლებული S -ფუნქციების გამოყენებისას, ეს ფორმულა ნებისმიერი n წონის იუნგის სქემისათვის გამოდგება. ამიტომ $n=4$ -სათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \{31\} \circ \{31\} &= \{031\} + \{13\} + 2\{121\} + \{1^4\} + 2\{2^2\} + 3\{21^2\} + 2\{31\} = \\ &= -\{21^2\} - \{2^2\} + 0 + \{1^4\} + 2\{2^2\} + 3\{21^2\} + 2\{31\} = 2\{31\} + 2\{21^2\} + \{2^2\} + \{1^4\} \end{aligned}$$

- დავალება 44.1:** ა) იპოვეთ $\langle 1 \rangle \circ \{31\}$ პლეთიზმი 5, 6 და 7 წონის იუნგის სქემებისათვის;
- ბ) იპოვეთ $\langle 1 \rangle \circ \{21\}$ პლეთიზმი 4, 5, 6 და 7 წონის იუნგის სქემებისათვის.

(44.4) ოპერატორში, როგორც ვხედავთ, შედის ოპერატორი $\sum_{r_2} D(\{2\} \otimes \{r_2\})$,

რომელიც GL_n ჯგუფის ორთოგონალურ ჯგუფზე რედუქციის \square_{\star} ოპერატორს წარმოადგენს. ეს ნიშნავს, რომ GL_n ჯგუფიდან სიმეტრიულ ჯგუფზე რედუქციის დროს ბუნებრივად ჯდება O_n ორთოგონალური ჯგუფი და ჩვენ შეგვიძლია

$$GL_n \supset O_n \supset S_n$$

ჯაჭვით რედუქციის ჩატარება GL_n ჯგუფის ნებისმიერ $\{\mu\}$ წარმოდგენაზე.

- დავალება 44.2:** მოახდინეთ $\{31\}$ და $\{21\}$ წარმოდგენების რედუქცია O_n ჯგუფზე, ხოლო მიღებული წარმოდგენები დაიყვანეთ გადანაცვლებათა ჯგუფის წარმოდგენებზე.

45. ორთოგონალური ჯგუფის სპინური წარმოდგენები

განვიხილოთ O_n ჯგუფის N -ური რიგის ტენზორული წარმოდგენა. ცხადია, ამ წარმოდგენის მატრიცები ადგენენ ჯგუფს და ეს ჯგუფი N -ური რიგის წრივი გარდაქმნების GL_N ჯგუფის რაღაც ქვეჯგუფის იზომორფულია.

შეიძლება ისეც მოხდეს, რომ GL_N ჯგუფის რაღაც G ქვეჯგუფს გააჩნია სასრული p რიგის ნორმალური გამყოფი Γ და O_n ჯგუფი G/Γ ფაქტორჯგუფის იზომორფული იყოს. ამ შემთხვევაში O_n ჯგუფს ექნება N რიგის p -სახა წარმოდგენა, რაც ნიშნავს, რომ O_n ჯგუფის ყოველ მატრიცას N რიგის p ისეთი მატრიცა შეესაბამება, რომ ორთოგონალური ჯგუფის ორი g და h მატრიცების gh ნამრავლს, ამ ნამრავლის შესაბამისი p მატრიციდან ერთ-ერთი ეთანადება.

დავუშვათ, რომ G ჯგუფის N -ური რიგის ტენზორული წარმოდგენა დაუყვანადია. მაშინ შურის ლემის ძალით Γ ნორმალური გამყოფი ერთეულოვანი მატრიცის ჯერადია. თავისი ბუნებით ჯერადობის მაჩვენებელი კოეფიციენტი ერთიანის p -ური რიგის ფესვი უნდა იყოს, რადგან Γ , როგორც ნორმალური გამყოფი, O_n ჯგუფის ერთიანში გადაისახება. ინფინიტეზიმალური ბრუნვების შესაბამისი p ცალი ელემენტი G ჯგუფიდან g -თი აღვნიშნოთ. ამ ელემენტებიდან მხოლოდ ერთი განსხვავდება ინფინიტეზიმალურად I_N ერთეულოვანი მატრიცისაგან. ეს ელემენტი z -ით აღვნიშნოთ. g და g^{-1} ელემენტები შეუღლებულნი არიან O_n -ში, ამიტომ z და z^{-1} ელემენტები შეუღლებულნი იქნებიან G -ში. აქედან გამომდინარეობს, რომ z -ის ხასიათი არსია. SO_n ჯგუფის ყოველი ელემენტის მიღება ინფინიტეზიმალური გარდაქმნით შეიძლება. მართლაც, ეს ჯგუფი არ შეიცავს არეკვლას, რომლის მიღება შეუძლებელია ინფინიტეზიმალური გარდაქმნით. ამიტომ SO_n ჯგუფის შესაბამისი ელემენტებს G -ში არსი ხასიათები აქვს. რადგან Γ ნორმალური გამყოფის ელემენტები ერთიანში გადაისახება, ამიტომ Γ -ც G -ს იმ ელემენტებს ეკუთვნის.

როგორც ზევით ვაჩვენეთ, Γ -ს რიცხვითი მამრავლები, ერთი მხრივ, ერთიანის p -ური ხარისხის ფესვებია, ხოლო, მეორე მხრივ, ეს ფესვები არსი

უნდა იყოს. ამგვარად, ეს რიცხვები მხოლოდ ± 1 შეიძლება იყოს. ე.ი., თუ O_n ჯგუფს p -სახე წარმოდგენა აქვს, p შეიძლება მხოლოდ ორი იყოს.

O_n ჯგუფის ორმაგად იზომორფულ G ჯგუფს გადამფარავ ან მომცველ ჯგუფს უწოდებენ.

ახლა მოვახდინოთ ზოგადი მსჯელობის ილუსტრაცია O_3 ჯგუფის მაგალითზე. U_2 ჯგუფის ფუნდამენტურ წარმოდგენას, როგორც ვიცით, ასეთი სახე აქვს:

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \quad (45.1)$$

ავაგოთ U_2 ჯგუფის $\{2\}$ ტენზორული წარმოდგენა. ინვარიანტული მატრიცების აგების წესის (33.7) ფორმულის თანახმად ამ მატრიცას ასეთი სახე ექნება:

$$g^{\{2\}} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ -ab^* & |a|^2 - |b|^2 & a^*b \\ b^{*2} & -2a^*b^* & a^{*2} \end{bmatrix} \quad (45.2)$$

ამ წარმოდგენის ბაზისი აღვნიშნოთ ასე:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

გადავიდეთ ახალ ბაზისზე:

$$x = (1/2)(u - w); \quad y = (1/2 i)(u + w); \quad z = v \quad (45.3)$$

ამ ბაზისში გარდაქმნის მატრიცას ასეთი სახე აქვს:

$$\overline{g^{\{2\}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a^2 - b^{*2} - b^2 + a^{*2}) & \frac{i}{2}(a^2 - b^{*2} + b^2 - a^{*2}) & ab + a^*b^* \\ -\frac{i}{2}(a^2 + b^{*2} - b^2 - a^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2 + b^{*2} + b^2 + a^{*2}) & -i(ab - a^*b^*) \\ -(ab + a^*b^*) & (ab - a^*b^*) & |a|^2 - |b|^2 \end{bmatrix} \quad (45.4)$$

როგორც ვხედავთ, მატრიცის ელემენტები არსია, ამის გარდა, მატრიცით გამოსახული გარდაქმნა ინახავს კვადრატულ ფორმას: $x^2 + y^2 + z^2$.

დავალება 45.1: ა) მიიღეთ მატრიცა (45.4);

ბ) აჩვენეთ, რომ მისი პარამეტრები არსია;

გ) აჩვენეთ, რომ ეს გარდაქმნა ინახავს კვადრატულ ფორმას.

ამგვარად, (45.4) მატრიცა არის O_3 ორთოგონალური ჯგუფის ფუნდამენტური წარმოდგენა. მაგრამ, ამავე დროს, იგი U_2 უნიტარული ჯგუფის მეორე რანგის {2} ტენზორული წარმოდგენაც არის. თუ გავიხსენებთ გადამფარავი ჯგუფის განმარტებას, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ U_2 ჯგუფი O_3 -ის გადამფარავი ჯგუფი ყოფილა. ისმის საკითხი, ორთოგონალური ჯგუფის ენაზე რა წარმოდგენა შეესაბამება U_2 გადამფარავი ჯგუფის {1} ფუნდამენტურ წარმოდგენას?

(45.1) მატრიცაში პარამეტრების შერჩევა

$$a = e^{i\alpha/2} \quad \text{და} \quad b = 0$$

სადაც α ეილერის კუთხეა, გვაძლევს მეორე რანგის ტენზორულ სივრცეში Z ლერძის გარშემო α კუთხეზე $R(0, 0, \alpha)$ ბრუნვის ექვივალენტურ გარდაქმნას:

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45.5)$$

ამაში დავრწმუნდებით, თუ შერჩეული პარამეტრების საშუალებით ავაგებთ $\overline{g^{[2]}}$ მატრიცას, რომელიც სამგანაზომილებიან სივრცეში ბრუნვებს შეესაბამება.

დავალება 45.2: დაამტკიცეთ ეს დებულება.

ასევე, თუ პარამეტრებს ასე შევარჩევთ:

$$a = \cos \beta / 2 \quad \text{და} \quad b = \sin \beta / 2$$

მაშინ მეორე რანგის წარმოდგენა ექვივალენტურია X ლერძის გარშემო β კუთხეზე $R(\beta, 0, 0)$ ბრუნვის ექვივალენტურია:

$$\begin{bmatrix} \cos\beta/2 & \sin\beta/2 \\ -\sin\beta/2 & \cos\beta/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (45.6)$$

დავალება 45.3: დაამტკიცეთ ეს დებულება.

გავიხსენოთ, რომ სამგანაზომილებიან სივრცეში ბრუნვა ეილერის კუთხეების საშუალებით გამოისახება როგორც α კუთხეზე Z ლერძის გარშემო

მობრუნება, შემდეგ, X ღერძის გარშემო β კუთხზე Z ღერძის მობრუნება და, ბოლოს, ახლადმიღებული Z' ღერძის გარშემო γ კუთხზე მობრუნება:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R(0, 0, \gamma) R(\beta, 0, 0) R(0, 0, \alpha)$$

რაც (45.5-6) ფორმულების გამოყენებით მეორე რანგის ტენზორული სივრცისათვის გვაძლევს ასეთ მატრიცას:

$$\begin{bmatrix} \cos\beta/2 e^{i(\alpha+\gamma)/2} & \sin\beta/2 e^{i(\gamma-\alpha)/2} \\ -\sin\beta/2 e^{i(\alpha-\gamma)/2} & \cos\beta/2 e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \end{bmatrix} \sim R(\mathbb{R}, \beta, \gamma) \quad (45.7)$$

გასაგებია, რომ ამ შემთხვევაში $R(0, 0, 0)$ იგივე ბრუნვას ორი მატრიცა შეესაბამება. ესენია

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{და} \quad -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (45.8)$$

(45.8) მატრიცები ადგენენ U_2 ჯგუფის I ინვარიანტულ ქვეჯგუფს და, ამგვარად, ბრუნვების ჰომომორფული U_2/I ფაქტორჯგუფი ყოფილა. ეს ნიშნავს, რომ სამგანზომილებიან სივრცეში ბრუნვას U_2 ჯგუფის ორგანზომილებიან ფუნდამენტურ სივრცეში ორი უნიტარული მატრიცა შეესაბამება:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \quad \text{და} \quad \begin{bmatrix} -a & -b \\ b^* & -a^* \end{bmatrix} \quad (45.9)$$

აღსანიშნავია, რომ ამ შემთხვევაში ორივე ნიშანს არსებითი მნიშვნელობა აქვს და მატრიცების ვერავითარი არჩევანი ვერ მოხსნის ამის აუცილებლობას. ამის საჩვენებლად განვიხილოთ მაგალითი: აღვნიშნოთ e სიმბოლოთი იგივე ბრუნვა $R(0, 0, 0)$. როგორც ვნახეთ, U_2 ჯგუფის გარდაქმნების ფუნდამენტურ სივრცეში იგივე ბრუნვას ორი მატრიცა შეესაბამება. ასევე ორი მატრიცა შეესაბამება Z ღერძის გარშემო π კუთხზე მობრუნებას – $R(0,0,\pi) \equiv g_\pi$. ეს მატრიცებია:

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \text{და} \quad \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad (45.10)$$

ავირჩიოთ (45.8) და (45.10) წყვილი მატრიცებიდან ერთ-ერთი, მაგალითად,

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{და} \quad g_\pi = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad (45.11)$$

ვიპოვოთ ჯგუფის ამ წარმოდგენების ნამრავლები:

$$e g_\pi = g_\pi e = g_\pi$$

მაგრამ, ამავე დროს,

$$g_\pi g_\pi = -e$$

როგორც ვხედავთ, ჩვენ მიერ არჩეული წყვილი არ არის ჩაკეტილი ჯგუფური გამრავლების მიმართ. ძნელი არ არის დავრწმუნდეთ იმაში, რომ წყვილის არჩევის ნებისმიერი ვარიანტის დროს ეს პრობლემა წარმოიშობა.

დავალეზა 45.4: დარწმუნდით ამაში.

თუ SO_3 ჯგუფიდან O_3 ჯგუფზე გადავალთ, მაშინ უნდა შემოვიტანოთ ინვერსიებიც. ინვერსიას უნიტარულ ჯგუფში ასეთი მატრიცა შეესაბამება:

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad (45.12)$$

აღსანიშნავია, რომ ეს მატრიცა ცალსახაა.

დავალეზა 45.5: აჩვენეთ, რომ (45.12) მატრიცის მეორე რანგის ინვარიანტული მატრიცა მართლაც ინვერსიას აღწერს.

ზემოთ მიღებული ტერმინოლოგიით U_2 ჯგუფი SO_3 ჯგუფის გადამფარავი (მომცველი) ჯგუფი ყოფილა. U_2 ჯგუფის ჯგუფური სივრცე ცალადბმულია და ამიტომ მას ცალსახა წარმოდგენები აქვს. მაგრამ, როგორც დავინახეთ, U_2 ჯგუფის მეორე რანგის {2} ტენზორული წარმოდგენა ბაზისის შესაბამისი შერჩევით ორთოგონალური ჯგუფის [1] ფუნდამენტური წარმოდგენის ექვივალენტური შეგვიძლია გავხადოთ.

(42.7) ტოლობის საშუალებით დავთვალოთ SO_3 ჯგუფის წარმოდგენების განზომილებები. ვნახავთ, რომ [0] წარმოდგენა ერთგანზომილებიანია, და მას ერთგანზომილებიანი საკალარული სივრცე შეესაბამება. SO_3 ჯგუფის [1] ფუნდამენტურ წარმოდგენას 3-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე შეესაბამება, რაც [1] წარმოდგენისათვის პირველი რანგის ტენზორულ სივრცეს წარმოადგენს. [2] წარმოდგენა 5-განზომილებიანია, რაც ინვარიანტული მატრიცების ენაზე მეორე რანგის ტენზორულ სივრცეს წარმოადგენს და U_2 ჯგუფის თვალსაზრისით მეოთხე რანგის ტენზორული წარმოდგენა {4}-ის ექვივალენტურია და ა.შ., SO_3 ჯგუფის ყველა წარმოდგენას კენტი განზომილება აქვს და ყველა მათგანი U_2 ჯგუფის ლუწი რანგის ტენზორული წარმოდგენების ექვივალენტურია.

როგორც ვხედავთ, რატომღაც დაკარგულია ლუწი განზომილების წარმოდგენები, რომლებიც U_2 ჯგუფის კენტი რანგის ტენზორული წარმოდგენების ექვივალენტურია. ზემო მაგალითმა გვიჩვენა, რომ SO_3 ჯგუფის გარდაქმნები შეგვიძლია აღვწეროთ ორგანზომილებიანი (45.7) მატრიცითაც, რომელიც ამ ჯგუფის ორსახა წარმოდგენებს აღწერს. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ეს მატრიცა შეესაბამება SO_3 ჯგუფის $\frac{1}{2}$ რანგის ტენზორულ წარმოდგენას და მასში ყოველ ბრუნვას ორი მატრიცა შეესაბამება, მოცემული (45.9) გამოსახულებით. ეს წარმოდგენა S -ფუნქციების ენაზე აღვნიშნოთ $[\frac{1}{2}]$ სიმბოლოთი. ამ წარმოდგენას ორთოგონალური ჯგუფის სპინორული წარმოდგენა ეწოდება განსხვავებით [1] წარმოდგენისაგან, რომელსაც ნამდვილი წარმოდგენა ჰქვია.

თუ ამ ლოგიკას გავყვებით, მაშინ U_2 ჯგუფის {3} წარმოდგენას SO_3 ჯგუფის $3/2$ რანგის ტენზორულ წარმოდგენა შეესაბამება და ამ სპინორულ წარმოდგენას $[3/2]$ შურის ფუნქციით აღვწერთ. ამ მსჯელობის გაგრძელება შეგვიძლია და მივიღებთ, რომ SO_3 ჯგუფის სპინორული და ნამდვილი წარმოდგენები ადგენენ S -ფუნქციების რიგს:

$$[1/2], [1], [3/2], [2], [5/2], [3], \dots$$

რომელთა შესაბამისი ექვივალენტური გადამფარავი U_2 ჯგუფის წარმოდგენები ასეთია:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \dots$$

ორსახა წარმოდგენების წარმოშობის ზოგადი მიზეზების განხილვისას ამ პარაგრაფის დასაწყისში ვნახეთ, რომ ასეთი წარმოდგენების არსებობა არ არის დაკავშირებული ორთოგონალური ჯგუფის n რიგთან და რომ ისინი ნებისმიერი O_n ჯგუფისათვის უნდა არსებობდნენ.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\nu = \langle n / 2 \rangle$$

სადაც ν აღნიშნავს $n/2$ -ის მთელ ნაწილს. მაშინ O_n ჯგუფის სპინორული წარმოდგენის შესაბამისი ფუნქცია ასე აღინიშნება:

$$[(1/2)^\nu]$$

გასაგებია, რომ GL_n ჯგუფის ნებისმიერი $\{\mu\}$ წარმოდგენა შეიცავს სპინორულ წარმოდგენებს და მათ საპოვნელად საჭიროა ასეთი პლეთიზმის პოვნა:

$$[(1/2)^\nu] \otimes \{\mu\}$$

ლიტლვუდმა იპოვა ეს პლეთიზმი ფიზიკისათვის საჭირო შემთხვევებში SU_2 ჯგუფისათვის. მას ასეთი სახე აქვს:

$$[1/2] \otimes \{k\} = [k/2] \quad (45.15)$$

$$[1/2] \otimes \{\lambda_1 \lambda_2\} = \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right] \quad (45.16)$$

ცხადია, რომ პირველი ამ ტოლობებიდან არის მეორე ტოლობის კერძო შემთხვევა, როდესაც $\lambda_2=0$.

სპინორული წარმოდგენების კომპოზიციის კანონის დასადგენად ამ წარმოდგენების ექვივალენტურ გადამფარავი ჯგუფის წარმოდგენებზე უნდა გადავიდეთ, გადავამრავლოთ ისინი და დავუბრუნდეთ ისევ O_n ჯგუფის წარმოდგენებზე.

მაგალითად, ვნახოთ, რას უდრის $[2]$ და $[3/2]$ წარმოდგენების ნამრავლი? რადგან

$$\{4\} \{3\} = \{7\} + \{61\} + \{52\} + \{43\}$$

ამიტომ (45.16) თანაფარდობის გათვალისწინებით გვექნება:

$$[2] [3/2] = [7/2] + [5/2] + [3/2] + [1/2] \quad (47.17)$$

დავალება 45.6: სპინორული წარმოდგენების წნების გამოყენებით იპოვეთ ასეთი კვანტური მომენტების ჯამი:

$$3/2 + 3/2, 5 + 1/2, 2 + 4, 1/2 + 3/2$$

46. ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფების კაზიმირის ოპერატორები

O_n ჯგუფისა და Sp_n ჯგუფის ძირითადი განსხვავება უნიტარული ჯგუფისაგან იმაში მდგომარეობს, რომ ეს ჯგუფები აღწერენ სივრცეში მოძრაობის სიმეტრიებს მაშინ, როდესაც უნიტარული ჯგუფები სისტემის შინაგან სიმეტრიებს ახასიათებენ. ამიტომ ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფების გარდაქმნების ობიექტებს ნაწილაკთა სივრცული კოორდინატები წარმოადგენენ. O_n და Sp_n ჯგუფების გარდაქმნების ობიექტებად შეგვიძლია ავირჩიოთ ბაზისის ნებისმიერ სივრცულ სისტემაში, მაგალითად, დეკარტეს, სფერული ან სხვა სისტემაში. ჩვენი ახლანდელი მიზნებისათვის მოხერხებულია, ე.წ., კომპლექსური ბაზისის არჩევა. დეკარტეს ბაზისის

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \\ \dots \\ r^n \end{pmatrix} \quad (46.1)$$

ვექტორის კოორდინატებთან კომპლექსურის კოორდინატები ასეთ კავშირში არიან:

$$\begin{aligned} x^{\pm \nu} &= \mp \sqrt{1/2} (r^1 \pm ir^2) \\ x^{\pm(\nu-1)} &= \mp \sqrt{1/2} (r^3 \pm ir^4) \\ x^{\pm(\nu-2)} &= \mp \sqrt{1/2} (r^5 \pm ir^6) \\ &\dots \\ x^{\pm 1} &= \mp \sqrt{1/2} (r^{2\nu-1} \pm ir^{2\nu}) \end{aligned} \quad (46.2)$$

კენტი n -ებისათვის არსებობს კიდევ ერთი წევრი:

$$x^0 = r^n \quad (46.2')$$

ზედა ფორმულაში

$$\nu = (n - \delta_n)/2 \equiv \langle n/2 \rangle \quad (46.3)$$

სადაც
$$\delta_n = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (46.3')$$

ზედა რიცხვი **ლუწი** n -ებისათვის გამოიყენება, ქვედა კი – **კენტებისათვის**.

კომპლექსური ბაზისის ინდექსაციის შესაბამისად ორთოგონალური ჯგუფის იუნგის ტაბულის მისაღებად იუნგის სქემების უნდა შევავსოთ ასეთი ინდექსებით:

$$v, (v-1), (v-2), \dots, -(v-2), -(v-1), -v \quad (46.4)$$

კენტი n -ების შემთხვევაში ამ ინდექსებს შორის ნულიც არის, ლუწი n -ების შემთხვევაში კი +1-ის შემდეგ პირდაპირ -1 მოდის. ორთოგონალური ჯგუფის იუნგის ტაბულების მისაღებად იუნგის სქემები ინდექსების **კლებადი** მიმდევრობით უნდა შეივსოს, როგორც ეს (46.7) გამოსახულებით არის მოცემული. ამიტომ ორთოგონალური ჯგუფისათვის უფროს ტაბულას ასეთი სახე ექნება:

v	v	\dots	v	v
$(v-1)$	$(v-1)$	\dots		
$(v-2)$	$(v-2)$	\dots		
\dots				

(46.5)

ახლა შეგვიძლია ავაგოთ ორთოგონალური და სიმპლექტური ჯგუფების კაზიმირის ოპერატორები. მათ მისაღებად უნიტარული ჯგუფის ანალოგიით უფროს ვექტორზე ჯგუფის გენერატორებით უნდა ვიმოქმედოთ. 38-ე პარაგრაფის გამოთვლების მსგავსი გამოთვლებით $[\lambda] \equiv [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]$ ან $\{\lambda\} \equiv \{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n\}$ დაუყვანადი წარმოდგენებისათვის მივიღებთ:

$$C_p(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) = \sum_{j=-v}^v (a^p)_{ij} \quad (46.6)$$

სადაც a მატრიცის მატრიცულ ელემენტებს ასეთი სახე აქვს:

$$a_{ij} = (\lambda_i + \alpha) \delta_{ij} - \Theta_{ij} + \beta \frac{1+\varepsilon_i}{2} \delta_{i-i} \quad (46.7)$$

აქ

$$\Theta_{ij} = \begin{cases} 1, & i < j \\ 0, & i > j \end{cases}; \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i > 0 \\ 0, & i = 0 \\ -1, & i < 0 \end{cases}$$

$$l_i = m_i + r_i; \quad -m_i = m_{-i}; \quad m_i = \begin{cases} \lambda_i, & i > 0 \\ -\lambda_i, & i < 0 \end{cases}$$

(46.7) ფორმულაში შემავალი სხვა სიდიდეები მოყვანილია 46.1 ცხრილში:

ცხრილი 46.1

ჯგუფი	α	β	r_i	ν ინდექსები გარბიან მნიშვნელობებს
$O_{2\nu}$	$\nu-1$	1	$\nu \varepsilon_i - i$	$-\langle n/2 \rangle, -(\langle n/2 \rangle - 1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, (\langle n/2 \rangle - 1), \langle n/2 \rangle$
$O_{2\nu+1}$	$\nu - 1/2$	1	$(\nu + 1/2) \varepsilon_i - i$	$-\langle n/2 \rangle,$
$Sp_{2\nu}$	ν	-1	$(\nu+1) \varepsilon_i - i$	$-(\langle n/2 \rangle - 1), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, (\langle n/2 \rangle - 1), \langle n/2 \rangle$ $-\langle n/2 \rangle, -(\langle n/2 \rangle - 1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, (\langle n/2 \rangle - 1), \langle n/2 \rangle$

$O_{2\nu}$ ჯგუფის სპინორული წარმოდგენებისათვის კაზიმირის ოპერატორებს ასეთი სახე აქვს:

$$C_\nu''(\lambda_\nu \dots \lambda_1) = (-1)^{\nu(\nu-1)/2} 2^\nu \nu! l_1 l_2 \dots l_\nu \quad (46.8)$$

ვნახოთ, როგორ გამოიყენება ფიზიკაში გამოთვლილი კაზიმირის ოპერატორები. ამისათვის დავწეროთ მათი უმარტივესი კერძო სახეები. მაგალითად, O_n ჯგუფისათვის მეორე რანგის კაზიმირის ოპერატორს ასეთი სახე აქვს:

$$C_2^{(O_n)} = 2 \sum_{i=1}^n m_i^2 + 2r_i m_i \quad (46.9)$$

ბრუნვის SO_n ჯგუფისათვის ეს ოპერატორი ემთხვევა ორბიტალური მომენტის კვადრატის ოპერატორს:

$$C_2^{(SO_n)} \equiv L_n^2 = 1/2 X_j^i X_i^j$$

სადაც X_j^i ბრუნვის ჯგუფის გენერატორია. ოპერატორის სახე განსაკუთრებით მარტივდება სრულიად სიმეტრიული $[l]$ წარმოდგენისათვის:

$$L_n^2 = l(l+n-2) \quad (46.10)$$

$n=3$ -სათვის შედეგი კარგად არის ცნობილი კვანტური მექანიკიდან და იგი იძლევა იმპულსის მომენტის კვადრატის საკუთარ მნიშვნელობას პლანკის \hbar მუდმივას ერთეულებში:

$$C_2^{(SO_3)} = |L^2| = l(l+1) \quad (46.11)$$

თუ $n = 2$, მაშინ $C_2^{(SO_2)}$ ორბიტალური მომენტის პროექციის მნიშვნელობებს იძლევა:

$$C_2^{(SO_2)} \equiv m^2 = l^2 \quad (46.12)$$

და $m = \pm l$

მიღებული შედეგი საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ორბიტალური მომენტის შეკრების წესი და მისი პროექციის მნიშვნელობები.

ორბიტალურ (იმპულსის) მომენტს კვანტურ მექანიკაში L^2 ოპერატორის (46.15) საკუთარ მნიშვნელობას უწოდებენ. როგორც ვნახეთ, იგი ბრუნვის SO_3 ჯგუფის მეორე რანგის კაზიმირის ოპერატორი ყოფილა. თუ გავიხსენებთ, რომ SO_3 ჯგუფის წარმოდგენა არის სრულიად სიმეტრიული $[l]$ S -ფუნქცია, მაშინ გასაგები ხდება, რომ იუნგის სქემაში მჯდარი l რიცხვი პირდაპირ კაზიმირის ოპერატორის და, ამგვარად, ორბიტალური მომენტის ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობას იძლევა. ასევე, SO_2 ჯგუფის $[m]$ S -ფუნქცია პირდაპირ მომენტის $\pm m$ პროექციებს გვაძლევს.

გასაგებია, რომ ორბიტალურ მომენტთა შეკრების წესი დადის SO_3 ჯგუფის წარმოდგენათა გამრავლებაზე, ხოლო მომენტის პროექციის პოვნა – $SO_3 \supset SO_2$ რედუქციაზე. ამ დებულების საილუსტრაციოდ ვიპოვოთ **2** და **1** ორბიტალური მომენტის ვექტორების ჯამი. ამ ვექტორებს, როგორც ვთქვით, [2] და [1] იუნგის სქემები შეესაბამება. 44-ე პარაგრაფში მოყვანილი წესის თანახმად:

$$\begin{aligned} [2] [1] &= (\{2\} - \{0\})(\{1\}) = \{3\} + \{21\} - \{1\} = \\ &= [3] + [1] + [2] + [1] - [1] = [3] + [2] + [1] \end{aligned}$$

საიდანაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ **2** და **1** კვანტური ვექტორის ჯამი უდრის:

$$\mathbf{2 + 1 = 3 + 2 + 1}$$

რაც სრულ თანხმობაშია კვანტური მექანიკის შედეგებთან.

ახლა ვიპოვოთ $l=3$ ორბიტალური მომენტის ვექტორის პროექციები ერთ-ერთ ლერძზე (კვანტურ მექანიკაში ამ ლერძად ირჩევენ Z ლერძს). ამისთვის უნდა მოვხდინოთ SO_3 ჯგუფის [3] წარმოდგენის რედუქცია SO_2 ჯგუფის წარმოდგენებზე. ეს გვაძლევს:

$$\begin{aligned}
 [3]_3 &= \{3\}_3 - \{1\}_3 = \{3\}_2 + \{2\}_2 + \{1\}_2 + \{0\}_2 - \{1\}_2 - \{0\}_2 = \\
 &= \{3\}_2 + \{2\}_2 = [3]_2 + [1]_2 + [2]_2 + [0]_2
 \end{aligned}$$

რაც (46.16) ტოლობის თანახმად ნიშნავს, რომ კვანტურ ვექტორს 3 ასეთი z-პროექციები ჰქონია:

$$m_z = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$$

- დავალება 46.1:** ა) იპოვეთ ორბიტალური მომენტის ორი ვექტორის შეკრების ზოგადი წესი;
- ბ) იპოვეთ l ორბიტალური მომენტის ვექტორის z-პროექციების შესაძლო მნიშვნელობები.

ბრუნვის ჯგუფის სპინორული წარმოდგენების პლეთიზმების საპოვნელად უნდა გამოვიყენოთ (45.15-16) ფორმულები.

47. საბაზისო ფუნქციების აგება ორთოგონალური ჯგუფისათვის

უნიტარული ჯგუფის ანალოგიურად შესაძლებელია ორთოგონალური ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის სრული ბაზისის აგება იუნგის სქემებისა და ვეილის ტაბულების გამოყენებით. ტენზორის დაქვეითების ოპერაციის კომპუტირება ორთოგონალურ გარდაქმნებთან, როგორც ზემოთ ვნახეთ, იწვევს იმას, რომ იუნგის სქემები ორთოგონალური ჯგუფისათვის არსებითად სხვა შინაარსისაა, ვიდრე უნიტარული ჯგუფისათვის. ეს განსხვავება, ცხადია, საბაზისო ფუნქციების აგებაშიც გამოვლინდება და ახლა ვნახოთ, რა ცვლილებები უნდა შევიტანოთ აგების წესებში ორთოგონალური ჯგუფის იუნგის ტაბულებსა და საბაზისო ფუნქციებს შორის კავშირის დასამყარებლად.

წინა პარაგრაფში უკვე აღვნიშნეთ, რომ ორთოგონალური ჯგუფის $[λ]$ დაუყვანადი წარმოდგენის იუნგის სტანდარტული ტაბულის მისაღებად იუნგის სქემა უნდა შეივსოს ინდექსებით $ν, (ν-1), \dots, -ν, -(ν-1)$ ისე, რომ ინდექსების მნიშვნელობები კლებულობდეს მარცხნიდან მარჯვნივ და ზევიდან ქვევით (გავიხსენოთ, რომ GL_n ჯგუფისათვის ვხმარობდით ინდექსთა ზრდად მიმდევრობას). უნიტარული ჯგუფის მსგავსად, აქაც იუნგის თითოეულ ტაბულას მოვუყვანოთ თანადობაში O_n ჯგუფის [1] ფუნდამენტალური წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციათა ნამრავლი. ამ ფუნქციათა მიმდევრობას ნამრავლში ცალსახად განსაზღვრავს ინდექსთა მიმდევრობა ტაბულაში, წაკითხული მიმდევრობით პირველი სტრიქონიდან მარცხნიდან მარჯვნივ.

ასეთნაირად აგებული ტაბულების რიცხვი O_n ჯგუფის $[λ]$ დაუყვანადი წარმოდგენისათვის, როგორც წესი, აღემატება მოცემული დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილებას. ეს არც არის გასაკვირვი, რადგან ამ წესით ჩვენ ფაქტობრივად ავაგეთ U_n ჯგუფის $\{λ\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისი ტაბულები, ოღონდ ახალი ინდექსების გამოყენებით. ტაბულების რიცხვი, ან,

რაც იგივეა, $\{\lambda\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილება უდრის O_n ჯგუფის ყველა იმ $[\lambda_0], [\lambda_1], [\lambda_2], \dots$ დაუყვანადი წარმოდგენის განზომილებათა ჯამს, რომელზედაც რედუცირდება U_n ჯგუფის $\{\lambda\}$ წარმოდგენა. გასაგებია, რომ მიღებული ტაბულებიდან შეიძლება ერთოგონალური ჯგუფის საბაზისო ფუნქციების აგება, მაგრამ საკითხი იმაშია, როგორ ვიპოვოთ მიღებული ტაბულების ის კომბინაციები, რომლებიც შეესაბამებიან O_n ჯგუფის $[\lambda_0], [\lambda_1], [\lambda_2], \dots$ დაუყვანად წარმოდგენებს.

43-ე პარაგრაფში ვნახეთ, რომ $\{\lambda\}$ წარმოდგენაში შემავალი O_n ჯგუფის $[\lambda_0], [\lambda_1], [\lambda_2], \dots$ დაუყვანად წარმოდგენათა საპოვნელად $\{\lambda\}$ S-ფუნქციაზე უნდა ვიმოქმედოთ:

$$\hat{K} = \sum_{t=0}^{\infty} D(\{2\} \otimes \{t\}) \quad (47.1)$$

ოპერატორით, რაც ექვივალენტურია $\{\lambda\}$ ტიპის ტენზორის დაქვეითებისა 0, 1, 2, და ა.შ. წყვილი ინდექსებით. როგორც ვხედავთ, ქვედა ინდექსი $[\lambda_0], [\lambda_1], [\lambda_2], \dots$ მიმდევრობაში გვიჩვენებს დაქვეითებული წყვილების რაოდენობას.

იუნგის სქემების ენაზე დაქვეითება ნიშნავს იმას, რომ დაქვეითებული წყვილების შესაბამისი უჯრები უნდა შეივსოს ინდექსებით i და $-i$ და ავჯამოთ ამ ინდექსებით ν -დან $-\nu$ -მდე. ამგვარად, დაქვეითებული უჯრების შესაბამისი ვექტორებისაგან აიგება O_n ჯგუფის სკალარი:

$$\sum_i (-)^{i+1} x_\alpha^i x_\beta^{-i} \quad (47.2)$$

(47.2) გამოსახულებაში α და β იუნგის სქემის დაქვეითებული უჯრების ნომრებს აღნიშნავს. ნომრები, ცხადია, ზრდადი მიმდევრობით ლაგდება და, როგორც ყოველთვის, იწყება პირველი სტრიქონიდან და მოჰყვება მარცხნიდან მარჯვნივ. გასაგებია, რომ $[\lambda_0], [\lambda_1], [\lambda_2], \dots$ დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციებში გვექნება, შესაბამისად, ნული, ერთი, ორი და ა.შ. (47.2) ტიპის სკალარი.

გასათვალისწინებელია ის გარემოება, რომ $[\lambda_m]$ წარმოდგენა $\{\lambda\}$ წარმოდგენის დაყვანისას შეიძლება შემოვიდეს ერთზე მეტი ჯერადობით. ეს იმითაა გამოწვეული, რომ \hat{K} ოპერატორის ორი სხვადასხვა წევრის მოქმედებით $\{\lambda\}$ S-ფუნქციიდან შეიძლება ერთიდაიგივე $[\lambda_m]$ იუნგის სქემა მივიღოთ.

მაგალითად, განვიხილოთ

$$U_n \supset O_n \quad (47.3)$$

რედუქცია U_n ჯგუფის {42} დაუყვანადი წარმოდგენისათვის. ვიმოქმედოთ ამ S -ფუნქციაზე \hat{K} ოპერატორით:

$$\begin{aligned} \hat{K}\{42\} &= [1+D(\{2\})+D(\{4\})+D(\{2^2\})+D(\{42\})]\{42\}= \\ &= \{42\}+\{4\}+\{31\}+\{2^2\}+\{2\}+\{2\}+\{0\} \end{aligned} \quad (47.4)$$

ანუ (47.3) რედუქცია გვაძლევს:

$$\{42\} = [42] + [4] + [31] + [2^2] + 2[2] + [0] \quad (47.4')$$

როგორც ვხედავთ, U_n ჯგუფის {42} წარმოდგენაში O_n ჯგუფის [2] დაუყვანადი წარმოდგენა ორჯერ შემოდის: ერთხელ {4} ტიპის ტენზორით, ხოლო მეორედ კი {2²} ტიპის ტენზორით დაქვეითებისას.

საბაზისო ფუნქციის ცალსახა განსაზღვრისათვის (47.2) სკალარული ნამრავლებისგან შედგენილ ψ პროექციაზე უნდა ვიმოქმედოთ $\mathcal{E}^{\{2\}}$ პროექტორით, სადაც

$$\{\tau\} = \{2\} \otimes \{t\} \quad (47.5)$$

პროექტორის გადანაცვლებები შეიცავენ დაქვეითებული უჯრების ნომრებს და დაქვეითებული ვექტორებიდან ადგენენ { τ } ტიპის ტენზორს. დაქვეითებისგან დარჩენილი უჯრები ჩვეულებრივი წესით უნდა შეივსოს ν -დან $-\nu$ -მდე ინდექსებით და მიღებული ტაბულის შესაბამისი ერთნაწილაკოვანი მდგომარეობების ნამრავლისაგან შედგენილ ρ პროექციაზე უნდა ვიმოქმედოთ $\mathcal{E}^{\{\lambda_m\}}$ პროექტორით, რომელიც დაქვეითებისგან თავისუფალი უჯრების ნომრებზე მოქმედებს და ადგენს ამ უჯრების შესაბამისი ვექტორებისაგან $\{\lambda_m\}$ ტიპის ვექტორს. ორი მიღებული $\mathcal{E}^{\{2\}}\psi$ და $\mathcal{E}^{\{\lambda_m\}}\rho$ ფუნქციისაგან 37-ე პარაგრაფში აღწერილი რეცეპტით შევადგინოთ გარე ნამრავლი. თუ ამ ნამრავლს $\mathcal{E}^{\{\lambda\}}$ პროექტორით $\{\lambda\}$ სიმეტრიას მივანიჭებთ, მაშინ მიღებული ფუნქცია (47.3) რედუქციის შესაბამისი იქნება. ამგვარად, ორთოგონალური ჯგუფის საბაზისო ფუნქციის ცალსახა დახასიათებისათვის იგი უნდა იყოს დამოკიდებული $\{\lambda\}$, $[\lambda_m]$, და $[\tau]$ ინდექსებზე, სადაც τ (47.5) ფორმულით მოიძებნება.

იუნგის ტაბულაში ჩაწერილ ორთოგონალური ჯგუფის ინდექსთა ალგებრულ ჯამს O_n ჯგუფის ტაბულის წონა ვუწოდოთ და W ასოთი აღვნიშნოთ. გასაგებია, რომ ტაბულის წონაში ψ პროექციას წვლილი არ შეაქვს,

რადგან მისი წონა ნულია. ტაბულის წონაზე φ პროექცია არის დამოკიდებული. W რიცხვი უნდა ახასიათებდეს საბაზისო ფუნქციას და საბაზისო ფუნქცია აიგება როგორც W წონის მქონე ტაბულების წრფივი კომბინაცია. კომბინაციის შემადგენელი ერთ-ერთი ტაბულის შესაბამის ფუნქციას ასეთი სახე ექნება:

$$|\{\lambda\}_j: ([\tau]\psi \cdot [\lambda_m] \varphi(W)) \rangle = N' \mathcal{E}^{\{\lambda\}_j} (\mathcal{E}^{\{\lambda_m\}_1} \varphi(W) \cdot \mathcal{E}^{\{\tau\}_1} \psi) \quad (47.6)$$

აქ N' ნორმირების კოეფიციენტი, ψ – (47.2) ტიპის სკალართა ნამრავლი, $\varphi(W)$ აღნიშნავს W წონის იუნგის $[\lambda_m]$ ტაბულის ერთნაწილაკოვანი მდგომარეობიდან შედგენილ პროექციას, ხოლო ნიშანი “.“ ორი პროექციის პირდაპირ ნამრავალს აღნიშნავს.

როგორც ვხედავთ ზედა მსჯელობიდან, U_n ჯგუფისათვის აუცილებელი ტენზორული რანგის ტოლობა იმ იუნგის სქემის წონასთან, რომელიც აღწერს დაუყვანად წარმოდგენას, სულაც არ ყოფილა სავალდებულო ორთოგონალური ჯგუფებისათვის.

O_n ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქცია (47.6) ფუნქციების წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს და, ზოგადად, ასეთი სახე აქვს:

$$|\{\lambda\}_j: ([\tau]0^*[\lambda_m]W) \rangle = N \sum_{\varphi} K_{\varphi W}^{\lambda_m} \mathcal{E}^{\{\lambda\}_j} (\mathcal{E}^{\{\tau\}_1} \psi \cdot \mathcal{E}^{\{\lambda_m\}_1} \varphi(W)) \quad (47.7)$$

აჯამვა ამ გამოსახულებაში წარმოებს ფიქსირებული W წონის φ პროექციებით, $K_{\varphi W}^{\lambda_m}$ კოეფიციენტი კი ცალსახად განისაზღვრება ერთნაირი W წონის მქონე განსხვავებული $[\lambda_m]$ წარმოდგენების ფუნქციათა ორთოგონალობის პირობიდან.

თუ (47.6) სახით შედგენილი უფროსი ვექტორის $W=W_{max}$ წონა მაქსიმალურია მოცემული $[\lambda_m]$ იუნგის სქემებისათვის, მაშინ ამ წონის ტაბულა ერთადერთია და (47.7) ფორმულაშიც ერთადერთი წევრი გვრჩება. ამიტომ $K_{\varphi W}^{\lambda_m}$ კოეფიციენტი ამ შემთხვევაში ერთის ტოლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ.

$K_{\varphi W}^{\lambda_m}$ კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის $W < W_{max}$ შემთხვევაში უნდა განვიხილოთ U_n ჯგუფის $\{\lambda_m\}$ დაუყვანად წარმოდგენაში შემავალი O_n ჯგუფის ყველა ის დაუყვანადი წარმოდგენა, რომელთა საბაზისო ფუნქციათა წონა შეიძლება W -ს ტოლი იყოს. ამ დაუყვანადი წარმოდგენებიდან ერთ-ერთს, რომელსაც მაქსიმალური წონა აქვს მოცემული $[\lambda_m]$ წარმოდგენისათვის, აუცილებლად შეესაბამება სტანდარტული ტაბულა, რომელიც მოცემული W -

სათვის უფროსია. ამ ტაბულისათვის (47.7) ფუნქცია ცალსახად იქნება განსაზღვრული. ყველა დანარჩენი ფუნქციის პოვნა შეიძლება გრამ-შმიტის მეთოდით, რომელზეც უკვე გვქონდა ლაპარაკი 35-ე პარაგრაფში. ამ მეთოდის გამოყენებისას უნდა ვისარგებლოთ იმით, რომ (47.7) ჯამის ფუნქციები ნორმირებულნი არიან, მაგრამ ორთოგონალური შეიძლება არ იყვნენ. ამიტომ უნდა დავთვალოთ მათი სკალარული ნამრავლები, ანუ გადაფარვები, როგორც ამას ვაკეთებდით 35-ე პარაგრაფში გაჩენისა და გაქრობის ოპერატორების თვისებების გათვალისწინებით.

ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ ბაზისის აგების ზემოაღწერილი პროცესის განმავლობაში არ შეიძლება მიღებული არასტანდარტული ტაბულების გადაგდება, რადგან, ჯერ ერთი, დაქვეითებით მიღებული ტაბულები ჩვენს არჩევანზე არ არის დამოკიდებული და, მეორეც, \mathcal{Y}^{l_1} , \mathcal{Y}^{l_2} და \mathcal{Y}^{l_m} პროექტორების მოქმედებით არასტანდარტული ტაბულები შეიძლება გადავიდნენ სტანდარტულში.

მოვიყვანოთ ორთოგონალური ჯგუფის საბაზისო ფუნქციების აგების მაგალითი. ვიპოვოთ O_4 ჯგუფის $[2^2]$ წარმოდგენის ფუნქციები, რომელთა წონა $W=0$. ეს ფუნქციები აიგება U_4 ჯგუფის $\{2^2\}$ სიმეტრიის ტენზორულ სივრცეში. ამ შემთხვევაში ნულოვანი წონის ოთხი ტაბულა არსებობს:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -1 \\ \hline 1 & -2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline -1 & -2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline -2 & -2 \\ \hline \end{array} \text{ და } \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline \end{array} \quad (47.8)$$

U_4 ჯგუფის $\{2^2\}$ წარმოდგენა O_4 ჯგუფის კიდევ ორ წარმოდგენას შეიცავს, რომლის შესაბამისი ტაბულების წონა შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. ეს წარმოდგენებია $[2]$ და $[0]$, რომლებიც $\{2^2\}$ ტიპის ტენზორიდან, შესაბამისად, $\{2\}$ და $\{2^2\}$ ტიპის ტენზორებით დაქვეითების შედეგად მიიღება. ცხადია, რომ ნულოვანი წონის ტაბულა წარმოდგენისათვის $[0]$ არის უფროსი და იგი ტრივიალურ $1|0\rangle$ ფუნქციას შეესაბამება. ამიტომ ფუნქცია (47.7) სავსებით განისაზღვრება დაქვეითებაზე დამოკიდებული ნაწილით და მას ასეთი სახე აქვს:

$$| \{2^2\}_j; ([2^2]0^*[0] 0) \rangle = N \sum_{i,k=-2,-1}^{1,2} (-)^{i+k} \begin{array}{|c|c|} \hline i & -i \\ \hline k & -k \\ \hline \end{array} \quad (47.9)$$

თითოეული ტაბულა (47.9) ფორმულის ჯამში აღნიშნავს ფუნქციას, რომელშიც $\mathcal{Y}_1^{\{22\}}$ ოპერატორი მოქმედებს $(x^i x^{-i})(x^k x^{-k})$ პროექციაზე. მაგალითად,

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -2 \\ \hline -2 & 2 \\ \hline \end{array} &= N \mathcal{Y}_1^{\{22\}} x_1^2 x_2^{-2} x_3^{-2} x_4^2 |0\rangle = \\ &= (1/\sqrt{12}) [x_1^2 x_2^{-2} x_3^{-2} x_4^2 + x_1^{-2} x_2^2 x_3^{-2} x_4^2 + x_1^{-2} x_2^2 x_3^2 x_4^{-2} + \\ &\quad + x_1^2 x_2^{-2} x_3^2 x_4^{-2} - 2 x_1^2 x_2^2 x_3^{-2} x_4^{-2} - 2 x_1^{-2} x_2^{-2} x_3^2 x_4^2] \end{aligned} \quad (47.10)$$

(47.9) ჯამში შესული 16 ტაბულიდან დამოუკიდებელი მხოლოდ სამია. მართლაც, შევადაროთ მაგალითისათვის (47.10) მოყვანილი ტაბულის ფუნქცია $\mathcal{Y}_1^{\{22\}} x_1^2 x_2^{-2} x_3^{-2} x_4^2 |0\rangle$ და

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -2 \\ \hline 2 & -2 \\ \hline \end{array} \sim \mathcal{Y}_1^{\{22\}} x_1^2 x_2^{-2} x_3^2 x_4^{-2} |0\rangle$$

ტაბულის შესაბამისი ფუნქცია. ამ ფუნქციების პროექციები განსხვავდებიან (34) გადანაცვლებით. ამიტომ

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1^{\{22\}} x_1^2 x_2^{-2} x_3^2 x_4^{-2} |0\rangle &= |12| [13][24] |12||34| (34) x_1^2 x_2^{-2} x_3^{-2} x_4^2 |0\rangle \\ &= |12| [13][24] |12||34| x_1^2 x_2^{-2} x_3^{-2} x_4^2 |0\rangle = \mathcal{Y}_1^{\{22\}} x_1^2 x_2^{-2} x_3^{-2} x_4^2 |0\rangle \end{aligned}$$

ე.ი., მივიღეთ ისევ (47.10) ფუნქცია. ასევე შეიძლება ჩვენება, რომ ერთნაირი რიცხვითი შედგენილობის ყველა ტაბულა ერთმანეთის ტოლია $\mathcal{Y}_1^{\{22\}}$ ოპერატორის არსებობის გამო.

დავალება 47.1: შეადგინეთ (47.9) ფორმულაში შემავალი 16 ტაბულა და აჩვენეთ, რომ მათ შორის მხოლოდ სამია დამოუკიდებელი.

თუ გავითვალისწინებთ ტაბულების ტოლობას და ნიშნებს, მიღებულს მათი ერთმანეთზე დაყვანის დროს, მაშინ (47.9) ფორმულა ასე გადაიწერება:

$$|\{2^2\}_j; ([2^2]0^*[0] 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -2 \\ \hline 2 & -2 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 2 & -2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \right) \quad (47.11)$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ არასტანდარტული ტაბულები, რაც გამოწვეულია დაქვეითების ოპერაციით. მათი გადაფარვა სტანდარტულ ტაბულებთან ნულის ტოლი არ არის, ამიტომ მათი საშუალებით (47.8)

სტანდარტული ტაბულების ორთოგონალური კომბინაციები მოიძებნება. მაგალითისათვის ვიპოვოთ (47.11) მარჯვენა მხარის პირველი ტაბულის გადაფარვა (47.8) გამოსახულების მესამე სტანდერტულ ტაბულასთან:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -2 \\ \hline 2 & -2 \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline -2 & -2 \\ \hline \end{array} \right\rangle &= (1/12) \langle 0 | \mathcal{Y}_1^{\{22\}} x_1^2 x_2^{-2} x_3^2 x_4^{-2} | \mathcal{Y}_1^{\{22\}} x_1^2 x_2^2 x_3^{-2} x_4^{-2} | 0 \rangle = \\ &= (1/12) \langle 0 | x_1^2 x_2^{-2} x_3^2 x_4^{-2} | \mathcal{Y}_1^{\{22\}\dagger} \mathcal{Y}_1^{\{22\}} x_1^2 x_2^2 x_3^{-2} x_4^{-2} | 0 \rangle = \\ &= 2 \langle 0 | x_1^2 x_2^{-2} x_3^2 x_4^{-2} | \mathcal{Y}_1^{\{22\}} x_1^2 x_2^2 x_3^{-2} x_4^{-2} | 0 \rangle = -2 \end{aligned}$$

ამ ფორმულის გამოყვანისას ვისარგებლეთ ასეთი ტოლობებით:

$$\mathcal{Y}_1^{\{22\}\dagger} \mathcal{Y}_1^{\{22\}} = |12||34|[13][24]||12|. |12|[13][24]||12||34| = 24 \mathcal{Y}_1^{\{22\}}$$

და

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1^{\{22\}} x_1^2 x_2^2 x_3^{-2} x_4^{-2} &= (1/\sqrt{12}) [2 x_1^2 x_2^2 x_3^{-2} x_4^{-2} + 2 x_1^{-2} x_2^{-2} x_3^2 x_4^2 - x_1^{-2} x_2^2 x_3^2 x_4^{-2} \\ &\quad - x_1^2 x_2^{-2} x_3^{-2} x_4^2 - x_1^2 x_2^{-2} x_3^2 x_4^{-2} - x_1^{-2} x_2^2 x_3^{-2} x_4^2] \end{aligned}$$

მას შემდეგ, რაც ვიპოვეთ (47.11) ფუნქცია, შესაძლებელია O_4 ჯგუფის [2] წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციების აგება. O_4 ჯგუფის [2] იუნგის სქემას ნულოვანი წონის ორი ტაბულა გააჩნია - $\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -2 \\ \hline \end{array}$ და $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array}$. შესაბამისი ფუნქცია მიიღება $\{2^2\}$ წარმოდგენის ორი ინდექსის დაქვეითებით, ამიტომ ფუნქციას ასეთი სახე ექნება:

$$|\{2^2\}_j : ([2]0^*[2]0)\rangle = N \sum_i (-)^{i+1} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -2 \\ \hline i & -i \\ \hline \end{array} + k \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline i & -i \\ \hline \end{array} \right) \quad (47.12)$$

ავჯამოთ მარჯვენა მხარე i ინდექსით და გავაერთიანოთ მსგავსი წევრები, მივიღებთ:

$$|\{2^2\}_j : ([2]0^*[2]0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1-k+k^2)}} \left(- \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -2 \\ \hline 2 & -2 \\ \hline \end{array} + (1-k) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 2 & -2 \\ \hline \end{array} + k \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \right) \quad (47.13)$$

ამ ფუნქციის დაწერის დროს გრამ-შმიტის მეთოდის შესაბამისად პირველი წევრის კოეფიციენტი ნებისმიერად ავირჩიეთ და ერთის ტოლად ჩავთვალოთ. (47.13) ფუნქციის (47.11) ფუნქციების ორთოგონალობის პირობა k კოეფიციენტის პოვნის საშუალებას იძლევა. იგი ერთის ტოლი გამოდის: $k=1$. ამიტომ საძიებელი ფუნქციისათვის ასეთ გამოსახულებას მივიღებთ:

$$|\{2^2\}_j : ([2]0, \{2\})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(- \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -2 \\ \hline 2 & -2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 2 & -2 \\ \hline \end{array} \right) \quad (47.14)$$

O_4 ჯგუფის [2] დაუყვანად წარმოდგენას 10 სტანდარტული ტაბულა შეესაბამება, რომელთა წონებია $\pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$ და 0, თან, ნულოვანი წონის ორი ტაბულაა: $\begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$ და $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$. ამავე დროს, [2] წარმოდგენის განზომილება არის 9, რაც ნიშნავს, რომ ნულოვანი წონის ტაბულებიდან ერთი საბაზისო ფუნქცია უნდა შევადგინოთ და სწორედ ეს ფუნქციაა მოცემული (47.14) ფორმულით.

დავალება 47.2: ააგეთ O_4 ჯგუფის [2] დაუყვანადი წარმოდგენის.

ახლა უკვე შესაძლებელია O_4 ჯგუფის $[2^2]$ წარმოდგენის შესაბამისი ნულოვანი წონის ფუნქციის აგება. ამ წარმოდგენის განზომილება 10-ის ტოლია, მაშინ როდესაც შესაძლებელია 20 სტანდარტული ტაბულის აგება.

დავალება 47.3: ააგეთ O_4 ჯგუფის $[2^2]$ დაუყვანადი წარმოდგენის შესაბამისი სტანდარტული ტაბულები.

ამ ტაბულების წონებია: თითოჯერ $\pm 6, \pm 4$, ორ-ორჯერ $\pm 3, \pm 2, \pm 1$ და ოთხჯერ 0. როგორც ზემოთ დავრწმუნდით, ორი ნულოვანი წონის ტაბულას შეესაბამება [0] და [2] წარმოდგენების ორი ნულოვანი წონის ფუნქცია (იხ. (47.11, 47.14) ფორმულები), [2] დაუყვანადი წარმოდგენას ამის გარდა შეესაბამება $\pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$ წონის სტანდარტული ტაბულები, ამიტომ $[2^2]$ დაუყვანადი წარმოდგენისათვის დაგვრჩება $\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1$ და ორი 0 წონის ტაბულები. რადგან ტაბულების რიცხვი განზომილებას ემთხვევა, ეს ნიშნავს, რომ $[2^2]$ წარმოდგენას ნულოვანი წონის ორი დამოუკიდებელი ფუნქცია უნდა ჰქონდეს. ამ მდგომარეობების გასარჩევად წონას 0 მივაკუთვნოთ ინდექსები "1" და "2": 0_1 და 0_2 . პირველი ამ ფუნქციათაგანი ავირჩიოთ ასეთნაირად:

$$| \{ 2^2 \}_j : ([0] 0^* [2^2] 0_1) \rangle = N_1 \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

a და b კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრებიან ამ ფუნქციის (47.11 და 47.14) ფუნქციებთან ორთოგონალობის პირობებიდან. ისინი გვაძლევენ, რომ $a=2$ და $b=1$. ამიტომ პირველი საძიებელი ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$| \{2^2\}_j : ([0]0^*[2^2]0_1) \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline -2 & -2 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -1 \\ \hline 1 & -2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline \end{array} \right) \quad (47.15)$$

მეორე ფუნქცია ასე შევადგინოთ:

$$| \{2^2\}_j : ([0]0^*[2^2]0_2) \rangle = N_2 \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline -2 & -2 \\ \hline \end{array} + a' \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -1 \\ \hline 1 & -2 \\ \hline \end{array} + b' \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} + c' \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline -1 & -2 \\ \hline \end{array} \right)$$

ამ გამოსახულებაში შემავალი სამი კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის სამი ორთოგონალობის პირობა გვაქვს (47.11, 47.14 და 47.15) ფუნქციებთან, რაც გვადლევს, რომ $a' = 0$, $b' = 1$ და $c' = 2$. ამიტომ

$$| \{2^2\}_j : ([0]0^*[2^2]0_2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline -2 & -2 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline -1 & -2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline \end{array} \right) \quad (47.16)$$

ერთი შეხედვით შეიძლება ეჭვის შეტანა ორი დადებითად განსაზღვრული (47.15) და (47.16) ფუნქციის ორთოგონალობაში, მაგრამ, საქმე იმაშია, რომ ორი ერთნაირი წონის განსხვავებული სტანდარტული ტაბულის გადაფარვა უარყოფითია:

$$\left\langle \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline -1 & -2 \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -1 \\ \hline 1 & -2 \\ \hline \end{array} \right\rangle = -\frac{1}{2}$$

ამიტომ ეს ფუნქციები მართლაც ორთოგონალურნი ყოფილან.

დავალეზა 47.4: იპოვეთ O_4 ჯგუფის $[2^2]$, $[2]$ და $[0]$ დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციების სრული კრებული.

O_4 ჯგუფის $[2^2]$ დაუყვანადი წარმოდგენის ნულოვანი წონის საბაზისო ფუნქციების აგების დროს დავინახეთ, რომ $[2^2]$ წარმოდგენის შესაბამისი ფუნქცია მხოლოდ სტანდარტული ტაბულებისაგან აიგება, მაშინ როდესაც $[2]$ და $[0]$ წარმოდგენების ფუნქციები არასტანდარტული ტაბულებისაგან შედგებიან. ეს იმით არის გამოწვეული, რომ (47.11) და (47.14) ფუნქციები არიან მიღებული $[2^2]$ წარმოდგენის დაქვეითებით. თუ პირდაპირ $[2]$ და $[0]$ წარმოდგენების ფუნქციებს ავაგებთ, მაშინ ისინიც სტანდარტული ტაბულებისაგან იქნებიან შედგენილი. (47.11 და 47.14) ფუნქციები კი დაგვჭირდა იმისათვის, რომ გვეპოვა $[2^2]$ წარმოდგენის ფუნქციები.

დავალეზა 47.5: იპოვეთ O_4 ჯგუფის [2] დაუყვანადი წარმოდგენების საბაზისო ფუნქციების სრული კრებული.

ბირთვულ ფიზიკაში კარგად არის ცნობილი U_3 ჯგუფის {42} წარმოდგენის O_3 ჯგუფის [2] წარმოდგენაზე დაყვანის მაგალითი, როდესაც (47.4) ტოლობის შესაბამისად ეს წარმოდგენა ორჯერ შემოდის. ეს მდგომარეობები დაქვეითების ტენზორის ტიპებით განსხვავდება. შეიძლება ჩვენება, რომ სათანადო ფუნქციებს მაქსიმალური წონისათვის ასეთი სახე აქვს:

$$\begin{aligned}
 | \{42\}_1 : ([4]0^*[2^2]2) \rangle = & \frac{1}{36\sqrt{14}} |1234| [x_1^1 x_2^1 (x_3 x_4) (x_5 x_6) - \\
 & -3 x_1^1 x_5^1 (x_2 x_3) (x_4 x_6) -3 x_1^1 x_6^1 (x_2 x_3) (x_4 x_5) + \\
 & +2 x_1^1 x_2^1 (x_3 x_5) (x_4 x_6) +3 x_5^1 x_6^1 (x_1 x_2) (x_3 x_4)] |0 \rangle
 \end{aligned} \tag{47.17}$$

ხოლო მეორე ფუნქციას ასეთი სახე აქვს:

$$| \{42\}_1 : ([2^2]0^*[2^2]2) \rangle = \frac{1}{36} |1234| [x_1^1 x_2^1 ((x_3 x_4) (x_5 x_6) - (x_3 x_5) (x_4 x_6))] |0 \rangle \tag{47.18}$$

ამ გამოსახულებებში |1234| იუნგის სიმეტრიზატორია, ხოლო $(x_i x_j)$ x_i და x_j ვექტორების სკალარულ ნამრავლს აღნიშნავს. როგორც უშუალო გათვლები გვიჩვენებს, ამ ფუნქციათა გადაფარვა ნულის ტოლია, რაც ნიშნავს, რომ (47.17) და (47.18) ფუნქციები ორთოგონალურია.

დავალეზა 47.6: ააგეთ (47.17) და (47.18) ფუნქციები და აჩვენეთ მათი ორთოგონალობა.

48. ბრუნვის ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების ბაზისის აგება

წინა პარაგრაფში ორთოგონალური ჯგუფების ბაზისის აგების განვითარებული მეთოდიკა გამოვიყენოთ ბრუნვის ჯგუფის ბაზისის ასაგებად. SO_3 ჯგუფი ავირჩიეთ ამიტომ, რომ მისი ბაზისი დიდ ხანი ნაპოვნია და ყველასათვის კარგად ცნობილ სფერულ ფუნქციებს წარმოადგენს.

სფერული ფუნქციები ანუ ჰარმონიკები წარმოადგენენ ლაპლასის განტოლების ამოხსნათა სიმრავლის კუთხურ ნაწილს. ისინი გამოითვლებიან სფერულ კოორდინატებში და მათ უდიდესი გამოყენება აქვთ მეცნიერების მრავალ დარგში. ლაპლასის განტოლებას დეკარტეს კოორდინატებში მარტივი სახე აქვს:

$$\nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (48.1)$$

სადაც ∇^2 ლაპლასის ოპერატორია ანუ ლაპლასიანი და იგი უდრის $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2}$. განტოლების ამოხსნა ისახავს მიზნად ორჯერ წარმოებადი ნამდვილი x, y და z ცვლადების ნამდვილი ფუნქციის პოვნას.

სფერულ კოორდინატებში განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad (48.2)$$

განტოლება პირველად შეისწავლა დიდმა ფრანგმა მათემატიკოსმა პიერ-სიმონ ლაპლასმა და ამ განტოლების ამოხსნის მეთოდი მისგან მომდინარეობს.

განტოლება იხსნება ცვლადთა განცალკევების მეთოდით. ამისთვის უცნობი f ფუნქცია წარმოდგება ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით:

$$f(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

რაც $Y(\theta, \varphi)$ ფუნქციისათვის ასეთ განტოლებას იძლევა:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right) = -\lambda Y \quad (48.3)$$

თავის მხრივ, ეს განტოლებაც ამოიხსნება ცვლადთა ასეთი განცალკევებით $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ და შედეგად φ ცვლადისათვის მიიღება:

$$\partial^2 \Phi(\varphi) / \partial \varphi^2 = -m^2 \Phi(\varphi)$$

ამასთან λ -ს ანალოგიური განცალკევების მუდმივა m აუცილებლად დადებითი ან უარყოფითი მთელი რიცხვი უნდა იყოს, ხოლო $\Phi(\varphi)$ ფუნქცია არის კომპლექსური $e^{\pm im\varphi}$ ექსპონენტების წრფივი კომბინაცია. იმისთვის, რომ $Y(\theta, \varphi)$ ფუნქცია იყოს რეგულარული სფეროს სათავეში, საჭიროა, რომ ფუნქცია $\Theta(\theta)$ იყოს რეგულარული სათავეში, რაც წარმოადგენს შტურმ-ლიუვილის პრობლემას, და იგი კმაყოფილდება, თუ λ წარმოადგენს მთელი დადებითი $l \geq |m|$ რიცხვის ასეთ კომბინაციას:

$$\lambda = l(l+1)$$

ეს ადებს პირობას $Y(\theta, \varphi)$ ფუნქციას და იგი განისაზღვრება ფიქსირებული l და m რიცხვებისათვის და მას ამიტომ უწერენ l და m ინდექსებს: $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. შემდეგი ნაბიჯია ლეჟანდრის განტოლებაზე გადასვლა და მისი ამოხსნა.

როგორც ვხედავთ, (48.3) განტოლების პოვნა საკმაოდ შრომატევადი სამუშაოა და დიდ გარჯას მოითხოვს.

ჩვენ (48.3) განტოლების ამოხსნისათვის გამოვიყენებთ არატრადიციულ მეთოდს და გამოვალთ 24-ე პარაგრაფში მოყვანილი განტოლებასთან დაკავშირებული ჯგუფის საშუალებით დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მეთოდიდან.

პირველი, რაც უნდა გაკეთდეს, უნდა დადგინდეს (48.1) განტოლების სიმეტრიის ჯგუფი. ადვილია ჩვენება, რომ ბრუნვის სამგანზომილებიანი ჯგუფის გარდაქმნები ინვარიანტულს ტოვებს r^2 -ს, რადგან იგი განსაზღვრებით უდრის

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

კვადრატულ ფორმას. ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ბრუნვები კომპუტირებენ ლაპლასის ოპერატორთან და რომ ბრუნვების ჯგუფი ლაპლასიანთან დაკავშირებული ჯგუფია.

(48.3) განტოლების სიმეტრიის ჯგუფიც ბრუნვის SO_3 ჯგუფია, რადგან ეს განტოლება ლაპლასის ოპერატორის ნაწილია. ამიტომ მასში შემავალი λ კოეფიციენტი წარმოადგენს კაზიმირის ოპერატორს. SO_3 ჯგუფი კომპაქტურია, ამიტომ მასთან დაკავშირებული ოპერატორის სპექტრი დისკრეტულია, ხოლო მისი დაუყვანადი წარმოდგენა ერთსტრიქონიანი $[l]$ იუნგის სქემით აღიწერება. როგორც ეს 46-ე პარაგრაფში ვნახეთ, SO_3 ჯგუფის კვადრატული კაზიმირის ოპერატორი $[l]$ წარმოადგენისათვის უდრის $l(l+1)$ და ამიტომ, როგორც (48.3) განტოლების საკუთარი მნიშვნელობა, $\lambda = l(l+1)$.

ახლა ავაგოთ SO_3 ჯგუფის $[l]$ დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისი, რომელიც (48.3) განტოლების ამოხსნა იქნება. განვსაზღვროთ, რას მოგვცემს გაჩენის ოპერატორების მოქმედება? რადგან საქმე გვაქვს სამგანზომილებიანი სივრცულ ბრუნვებთან, ამიტომ ჯგუფის გარდაქმნების ობიექტები სივრცული დეკარტეს კოორდინატები x, y და z იქნება. როგორც ზევით ვთქვით, ორთოგონალური ჯგუფებისათვის მოხერხებულია კომპლექსური კოორდინატების გამოყენება.

სამგანზომილებიანი შემთხვევისათვის კავშირები კომპლექსურ, სფერულსა და დეკარტეს კოორდინატებს შორის მოყვანილია ქვემოთ:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi = -\sqrt{1/2}(x^{+1} - x^{-1}) \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi = i\sqrt{1/2}(x^{+1} + x^{-1}) \\ z &= r \cos\theta = x^0 \end{aligned} \quad (48.4)$$

შებრუნებულ ფორმულებს ასეთი სახე აქვთ:

$$\begin{aligned} x^{\pm 1} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\theta e^{\pm i\varphi} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy) \\ x^0 &= r \cos\theta = z \end{aligned} \quad (48.5)$$

და

$$\begin{aligned} r^2 &= -2x^{+1}x^{-1} + (x^0)^2 \\ \cos\theta &= x^0 / r \\ e^{2i\varphi} &= -x^{+1} / x^{-1} \end{aligned} \quad (48.6)$$

სკალარულ ნამრავლს ასეთი სახე აქვს:

$$(x \cdot x) = \sum_{\mu} (-)^{\delta_{\mu}^0} x^{\mu} x^{-\mu} \quad (48.7)$$

ხოლო ლაპლასის ოპერატორს ასეთი:

$$\nabla^2 f = -2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^{+1} \partial x^{-1}} + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^0)^2} = 0$$

როგორც (48.7) ტოლობასთან შედარება გვიჩვენებს, (48.6) ტოლობით გასაზღვრული r^2 სკალარული ნამრავლი ყოფილა. იგი ინვარიანტული რჩება ორთოგონალური გარდაქმნების დროს.

SO_3 ჯგუფის [1] დაუყვანადი წარმოდგენის ბაზისის ასაგებად ვისარგებლოთ კარტანის ბაზისით. ფუნქციის პროექცია წინა პარაგრაფში მიღებული შეთანხმების ძალით შესაბამისი ტაბულის წონით აღვნიშნოთ და მისთვის გამოვიყენოთ სიმბოლო m , რომელიც 46-ე პარაგრაფის შედეგების ძალით SO_3 ჯგუფის SO_2 ქვეჯგუფის კაზიმირის ოპერატორს წარმოადგენს და იგი იცვლება $+l$ -დან $-l$ -მდე. [1] წარმოდგენის საბაზისო ფუნქცია ორ ნაწილს შეიცავს: j რაოდენობის სკალარულ ნამრავლს, რომელიც $2j$ უჯრას ავსებს და $[2j]$ წარმოდგენას შეესაბამება. გასაგებია, რომ ამ წარმოდგენის პროექცია 0-ს შეესაბამება. ამიტომ ფუნქციას ასეთი სახე ექნება:

$$| [2j] 0 \rangle = N \mathcal{Y}^{[2j]} | [12] (-2 x_1^{+1} x_2^{-1} + x_1^0 x_2^0) \cdot [34] (-2 x_3^{+1} x_4^{-1} + x_3^0 x_4^0) \dots \\ | (2j-1) (2j) / (-2 x_{2j-1}^{+1} x_{2j}^{-1} + x_{2j-1}^0 x_{2j}^0) \rangle \quad (48.8)$$

როგორც ზევით, აქაც $| \cdot |$ სიმეტრიზატორებს აღვნიშნავენ, რომლებიც მათ შემდეგ მოთავსებული სკალარული ნამრავლების სიმეტრიზაციას ახდენენ. იუნგ-იამანუჩის პროექტორი ერთსტრიქონიანი იუნგის სქემისათვის უბრალოდ სიმეტრიზატორია, მას არ სჭირდება იამანუჩის სიმბოლო და ამ შემთხვევაში ასეთი სახე ექნება:

$$\mathcal{Y}^{[2j]} = | 1 2 3 4 \dots (2j-1) 2j | \quad (48.9)$$

პროექტორების თვისებების გამო ორ ინდექსიანი სიმეტრიზატორები $|12|$, $|34|$ და ა.შ. შევლენ სიმეტრიზატორში და დატოვებენ 2-იანებს, რომელთა შეტანა შესაძლებელია ნორმირებაში, რომელსაც შემდგომი გამოთვლებისათვის მნიშვნელობა არა აქვს. გავამარტივოთ გაჩენის ოპერატორების შემცველი წევრები იმის გათვალისწინებით, რომ მათ ქვედა ინდექსებს არსებითი მნიშვნელობა არ აქვთ და მხოლოდ იმ უჯრებს მიუთითებენ, რომელშიც ეს ოპერატორები სხედან. ფუნქციის წინ მჯდარი სიმეტრიზატორი საშუალებას იძლევა დავალაგოთ ყველა გაჩენის ოპერატორი პროექციების მიხედვით: ჯერ $+1$ პროექციის მქონე, შემდეგ ოპერატორები -1 პროექციით და ბოლოს ნულოვანი. ამიტომ გაჩენის ოპერატორებისათვის ასეთი აღნიშვნა შემოვიღოთ $\{n^+ n^- n^0\}$, სადაც

n^+ აღნიშნავს პლუსიანი პროექციების რაოდენობას, n^- მინუსიანი, ხოლო n^0 ნულოვანი პროექციის მქონე გაჩენის ოპერატორების რაოდენობას. მაშინ (48.8) ასე გადაიწერება:

$$|[2j] 0\rangle = N |1 2 3 4 \dots (2j-1) (2j)| [(-2\{110\} + \{002\}) \cdot (-2\{110\} + \{002\}) \dots (-2\{110\} + \{002\}) \rangle \quad (48.10)$$

სადაც სულ j ასეთი წევრი იქნება. რადგან $\{abc\} \cdot \{def\} = \{(a+d)(b+e)(c+f)\}$, ამიტომ შეგვიძლია (48.10) გამოსახულების გამარტივება:

$$|[2j] 0\rangle = N |1234 \dots (2j-1)(2j)| \left| \sum_{k=0}^j (-2)^{j-k} \binom{j}{k} \{(j-k)(j-k)(2k)\} \right\rangle \quad (48.11)$$

ფორმულაში $\binom{j}{k}$ აღნიშნავს ჯუფთებას j -დან k -დ და იგი უდრის:

$$\binom{j}{k} = \frac{j!}{k!(j-k)!} \quad (48.12)$$

$[l]$ იუნგის სქემის დანარჩენილი უჯრები ($2j$ -დან l -მდე) უნდა შეივსოს ინდექსებით $+1$, -1 და 0 ისე, რომ ჯამში ეს ინდექსები იძლეოდნენ m -ს. ამ რიცხვს ინდექსების რამდენიმე კომბინაცია შეიძლება იძლეოდეს და მათ ფუნქციაში სხვადასხვა წონა შეიძლება ჰქონდეთ. ეს წონები აღნიშნოთ C ასოთი და მათი პოვნისათვის უნდა გამოვიყენოთ ერთნაირი m წონისა და განსხვავებული ფუნქციათა ორთოგონალობა. ამგვარად, ჩვენი საბაზისო ფუნქციის ძირითად ნაწილს ასეთი ზოგადი სახე ექნება:

$$|[l-2j] m\rangle = N' |(2j+1)(2j+1) \dots (l-1)l| \times \left| \sum_{t=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle - j} C_t^{lmj} \left\{ \left(\langle \frac{l+m}{2} \rangle - j - t \right) \left(\left(\langle \frac{l-m}{2} \rangle - j - t \right) (\delta_{l-m} + 2t) \right) \right\} \right\rangle \quad (48.13)$$

სადაც $\langle \frac{l-m}{2} \rangle$, ისევე როგორც წინა პარაგრაფებში, აღნიშნავს $\frac{l-m}{2}$ -ის მთელ ნაწილს.

ამ ორი ფუნქციის პირდაპირი ნამრავლი მოგვცემს ჩვენს საძიებელ ფუნქციას. მას წინ ექნება პროექტორი $\mathcal{Y}^{(l)} = |123 \dots l|$, რომელშიც შევა (48.11) და (48.13) ფუნქციების სიმეტრიზატორები. საბოლოოდ, საძიებელი საბაზისო ფუნქციის ზოგადი სახე ასეთი იქნება:

$$|[l]: [2j] 0^* [l-2j] m\rangle = \mathcal{N} \mathcal{Y}^{(l)} \left| \sum_{k=0}^j (-2)^{j-k} \binom{j}{k} \times \sum_{t=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle - j} C_t^{lmj} \left\{ \left(\langle \frac{l+m}{2} \rangle - t - k \right) \left(\langle \frac{l-m}{2} \rangle - t - k \right) (\delta_{l-m} + 2(t+k)) \right\} \right\rangle \quad (48.14)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $t + k \equiv i$. მაშინ $t \leq i \leq t + j$. ამგვარად, ფუნქციას ასეთი სახე ექნება:

$$\begin{aligned}
 |[l]: [2j]0^*[l-2j] m\rangle = \mathcal{N} \mathcal{Y}^{(l)} \left| \sum_{t=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle - j} C_t^{lmj} \times \right. \\
 \left. \times \sum_{i=t}^{t+j} (-2)^{j-i+t} \binom{j}{i-t} \left\{ \left(\langle \frac{l+m}{2} \rangle - i \right) \left(\langle \frac{l-m}{2} \rangle - i \right) (\delta_{l-m} + 2i) \right\} \right\rangle \quad (48.15)
 \end{aligned}$$

მოცემული $l-2j$ წარმოდგენის უფროსი ვექტორი იქნება ფუნქცია, რომლის $m = l - 2j$. ამ ფუნქციის (48.13) ნაწილი იქნება უბრალოდ ერთი ფუნქცია:

$$\{(l-2j)00\}$$

ასევე ცალსახად განისაზღვრება $m = l - 2j - 1$ -ის შესაბამისი ფუნქციაც. მისი სახე ასეთი იქნება

$$\{(l-2j-1)01\}$$

როგორც ვიცით, ორთოგონალური ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენები მიიღებიან ძირითადი წარმოდგენიდან ორ-ორი უჯრის დაკლებით, ამიტომ შემდეგი ფუნქციის წონა საერთო იქნება ძირითადი ფუნქციისა და ერთი წყვილის დაქვეითებით მიღებული ფუნქციისათვის და აქედან დაწყებული ყველა სხვა ვექტორი ორი და მეტი ფუნქციის კომბინაცია იქნება, რომლის C კოეფიციენტები, როგორ ზემოთ აღვნიშნეთ, ნორმირების პირობიდან გაისაზღვრება. C კოეფიციენტების რაოდენობა უდრის $\langle \frac{l-2j-m}{2} \rangle + 1$ და ეს რიცხვი ერთნაირია არა მარტო უფროსი, არამედ ყველა სხვა m -ისა და $m-1$ წონის ფუნქციებისათვის.

ზემოთაქვამის საფუძველზე გავუტოლოთ $l-2j$ m -ს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
 |[l]: [l-m-\delta_{l-m}]0^*[m] m\rangle = \mathcal{N} \mathcal{Y}^{(l)} \left| \sum_{t=0}^0 C_0^{lmj} \times \right. \\
 \left. \times \sum_{i=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle} (-2)^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle - i} \binom{\langle \frac{l-m}{2} \rangle}{i} \left\{ \left(\langle \frac{l+m}{2} \rangle - i \right) \left(\langle \frac{l-m}{2} \rangle - i \right) (\delta_{l-m} + 2i) \right\} \right\rangle \quad (48.16)
 \end{aligned}$$

სადაც δ_{l-m} განსაზღვრულია (46.3') ფორმულით.

ორთოგონალობისათვის საჭირო სხვა ფუნქციების მიღება შესაძლებელი, თუ j -ს (48.15)-ში დავაკლებთ რაღაც მთელ დადებით რიცხვ n -ს, რომელიც შეიცვლება 0-დან $\langle \frac{l-m}{2} \rangle$ -მდე. მაშინ ფუნქციაში მჯდარი აჯამვის ინდექსი t შეიცვლება ნულიდან n -მდე, ხოლო აჯამვა i ინდექსით შეგვიძლია გავავრცელოთ 0-დან $\langle \frac{l-m}{2} \rangle$ -მდე, რადგან $\binom{j}{i-t}$ ამ დროს გახდება $\binom{\langle \frac{l-m}{2} \rangle - n}{i-t}$. შევთანხმდეთ, რომ

ჯუფთების ქვედა წევრი $i-t$ უარყოფითია ან ზედა წევრ $\langle \frac{l-m}{2} \rangle - n$ -ზე მეტი, მაშინ ჯუფთება $\binom{\langle \frac{l-m}{2} \rangle - n}{i-t}$ ნულის ტოლად ჩავთვალოთ. ამ შემთხვევაში (48.16)

ფორმულა ასე გადაიწერება:

$$[l]: [l-m-\delta_{l-m}-2n]0^*[m+2n] m \rangle = \mathcal{N} \mathcal{Y}^{(l)} \left| \sum_{t=0}^n C_t^{lmn} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle} (-2)^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle - i - n + t} \binom{\langle \frac{l-m}{2} \rangle - n}{i-t} \left\{ \left(\langle \frac{l+m}{2} \rangle - i \right) \left(\langle \frac{l-m}{2} \rangle - i \right) (\delta_{l-m} + 2i) \right\} \right\rangle \quad (48.17)$$

ჩაწერის შემოკლების მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$A(l m n t i) \equiv (-2)^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle - i - n + t} \binom{\langle \frac{l-m}{2} \rangle - n}{i-t} \quad (48.18)$$

და

$$|lmn\rangle = [l]: [l-m-\delta_{l-m}-2n]0^*[m+2n] m \rangle \quad (48.19)$$

ამიტომ

$$|lmn\rangle = \mathcal{N} \mathcal{Y}^{(l)} \left| \sum_{t=0}^n C_t^{lmn} \sum_{i=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle} A(l m n t i) \left\{ \left(\langle \frac{l+m}{2} \rangle - i \right) \left(\langle \frac{l-m}{2} \rangle - i \right) (\delta_{l-m} + 2i) \right\} \right\rangle \quad (48.20)$$

გავიხსენოთ პროექტორების თვისება:

$$\langle \mathcal{Y}_j^{(\lambda)} \varphi | \mathcal{Y}_j^{(\lambda)} \psi \rangle = \langle \varphi | \mathcal{Y}_j^{(\lambda)\dagger} \mathcal{Y}_j^{(\lambda)} \psi \rangle = \langle \varphi | \mathcal{Y}_1^{(\lambda)} \psi \rangle \quad (48.21)$$

როგორც ვხედავთ, გადაფარვის პოვნისას შეგვიძლია მხოლოდ ერთ ფუნქციაზე ვიმოქმედოთ სიმეტრიზატორით. შევთანხმდეთ, რომ ვიმოქმედებთ იმ ფუნქციაზე, რომლის n მეტია. სიმეტრიზატორის მოქმედება (48.20) ფუნქციაზე გვაძლევს:

$$|lmn\rangle = \mathcal{N} \left| \sum_{t=0}^n C_t^{lmn} \sum_{i=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle} A(l m n t i) \left(\langle \frac{l+m}{2} \rangle - i \right)! \left(\langle \frac{l-m}{2} \rangle - i \right)! \right. \\ \left. (\delta_{l-m} + 2i)! \left[\left\{ \left(\langle \frac{l+m}{2} \rangle - i \right) \left(\langle \frac{l-m}{2} \rangle - i \right) (\delta_{l-m} + 2i) \right\} + \dots \right] \right\rangle \quad (48.22)$$

აქ მრავალწერტილში იგულისხმება ის წევრები, რომლებშიც $+1$, -1 და 0 ინდექსები გადანაწილებულია სიმეტრიზატორის დარჩენილი გადანაცვლებების მიხედვით. (48.20) ფორმულის შესაბამისად ფუნქციათა გადაფარვის მარცხენა ნაწილში ასეთი წევრები არ გვექნება და ისინი წილს ვერ შეიტანენ საბოლოო შედეგში.

დავალება 48.1: დაამტკიცეთ (48.22) ფორმულის სისწორე.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$B(l m i) = \left(\left\langle \frac{l+m}{2} \right\rangle - i \right)! \left(\left\langle \frac{l-m}{2} \right\rangle - i \right)! (\delta_{l-m} + 2i)! \quad (48.23)$$

ამიტომ

$$|l m n\rangle = \mathcal{N} \left| \sum_{t=0}^n C_t^{lmn} \sum_{i=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle} A(l m n t i) B(l m i) \right. \\ \left. \left[\left\{ \left(\left\langle \frac{l+m}{2} \right\rangle - i \right) \left(\left\langle \frac{l-m}{2} \right\rangle - i \right) (\delta_{l-m} + 2i) \right\} + \dots \right] \right] \quad (48.24)$$

ახლა ვიპოვოთ ამ ფუნქციის გადაფარვა n -ზე ნაკლები s რიცხვის შესაბამის $|s\rangle$ ფუნქციასთან, რომელზეც, როგორც აღვნიშნეთ, აღარ არის საჭირო სიმეტრიზატორის მოქმედება. რადგან გადაფარვის საშუალებით C_t^{lmn} კოეფიციენტებია საპოვნელი, ამიტომ გადაფარვა ნულს უნდა გავუტოლოთ, რაც ნორმირების კოეფიციენტების შეკვეცის საშუალებას მოგვცემს. საბოლოოდ, გადაფარვისათვის გვექნება:

$$\langle l m s | l m n \rangle = \sum_{t=0}^n C_t^{lmn} \sum_{i=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle} A(l m n t i) B(l m i) \sum_{q=0}^s C_q^{lms} \sum_{k=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle} A(l m s q k) \times \\ \times \langle \left\{ \left(\left\langle \frac{l+m}{2} \right\rangle - k \right) \left(\left\langle \frac{l-m}{2} \right\rangle - k \right) (\delta_{l-m} + 2k) \right\} | \left\{ \left(\left\langle \frac{l+m}{2} \right\rangle - i \right) \left(\left\langle \frac{l-m}{2} \right\rangle - i \right) (\delta_{l-m} + 2i) \right\} + \dots \rangle = 0$$

ფუნქციათა გადაფარვა კრონეკერის δ_{ik} სიმბოლოს გვაძლევს და რიცხვით ნაწილში ჯამი k -თი აღარ გვექნება. საბოლოოდ, ასეთი გამოსახულება დაგვრჩება:

$$\langle l m s | l m n \rangle = \sum_{t=0}^n C_t^{lmn} \sum_{i=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle} A(l m n t i) B(l m i) \sum_{q=0}^s C_q^{lms} A(l m s q i) = 0 \quad (48.25)$$

ბოლო ჯამი ამ გამოსახულებაში წარმოადგენს $|s\rangle$ ფუნქციის რიცხვით ნაწილს, რომლის C_q^{lms} კოეფიციენტები დათვლილად იგულისხმება. აღნიშნოთ იგი ასე:

$$D(l m s i) = \sum_{q=0}^s C_q^{lms} A(l m s q i) \quad (48.26)$$

ორთოგონალიზაციის პროცედურა უნდა დავიწყოთ ერთი უცნობი C კოეფიციენტის შემცველი ვექტორის ორთოგონალიზაციით, რომელიცპორექციის სიდიდით უახლოესი ცნობილ უფროს ვექტორთან. მერე გადავიდეთ უფროსობით შემდეგ ვექტორზე, რომელიც უკვე ორ უცნობ კოეფიციენტს შეიცავს, ამიტომ იგი უნდა დავაორთოგონალოთ ორ წინა ცნობილ ფუნქციასთან და ა.შ. სანამ არ მივალთ ბოლო ფუნქციამდე, რომელიც შეესაბამება იუნგის სქემას დაქვეითებული ინდექსების გარეშე.

თუ C_t^{lmn} კოეფიციენტებისათვის მიღებულ (48.25) გამოსახულებაში შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$E_s^t(lmn) = \sum_{i=0}^{\langle \frac{l-m}{2} \rangle} A(l m n t i) B(l m i) D(l m s i) \quad (48.27)$$

მაშინ (48.25) ასე ჩაიწერება:

$$\langle lms | lmn \rangle = \sum_{t=0}^n C_t^{lmn} E_s^t(lmn) = 0 \quad (48.28)$$

რაც ნიშნავს, რომ უცნობი C_t^{lmn} უცნობი კოეფიციენტებისათვის მივიღეთ არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა, რადგან, როგორც ვიცით $C_0^{lmn}=1$ და ამიტომ $E_s^0(lm)$ რიცხვები განტოლების თავისუფალი წევრები იქნება:

$$\sum_{t=1}^n E_s^t(lmn) C_t^{lmn} = -E_s^0(lmn) \quad (48.29)$$

ინდექსი n (48.28)-ში ფიქსირებულია და იგი უნდა ვცვალოთ 1-დან $\langle \frac{l-m}{2} \rangle$ -მდე, ხოლო s იცვლება ნულიდან $(n-1)$ -მდე. ამიტომ გვექნება n განტოლებათა სისტემა. შეიძლება ჩვენება, რომ $E_s^i(lm)$ რიცხვებისაგან შედგენილ $n \times n$ მატრიცის

$$\begin{bmatrix} E_0^1 & E_0^2 & \dots & E_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n-1}^1 & E_{n-1}^2 & \dots & E_{n-1}^n \end{bmatrix}$$

დეტერმინანტი $\det [E_i^j]$ არასინგულარულია, ამიტომ სისტემას აქვს ამოხსნა და იგი ზოგადად ასე ჩაიწერება:

$$C_i^{lmn} = -\det [E_i^j | E_i^0] / \det [E_i^j] \quad (48.30)$$

აქ $[E_i^j | E_i^0]$ აღნიშნავს მატრიცას, რომელშიც i -ური სვეტი შეცვლილია თავისუფალი წევრებისაგან შედგენი სვეტით:

$$\begin{pmatrix} E_0^0 \\ E_1^0 \\ \vdots \\ E_{n-1}^0 \end{pmatrix}$$

საბაზისო ფუნქციის საპოვნელად ჩვენ ბევრი დამხმარე ფუნქციის პოვნა დაგვჭირდა, რომელთაც ასეთი სახე აქვთ:

$$|[l]: [l-m-\delta_{l-m}-2n]0^*[m+2n] m\rangle \quad (48.31)$$

ეს ფუნქციები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან n რიცხვით და ეთანადებიან იმ იუნგის სქემებს, რომელთა უჯრების ნაწილი შევსებული დაქვეითებული

ინდექსებით. დაქვეითება, როგორც ვიცით, უჯრათა წყვილის i და $-i$ ინდექსებით შევსებასა და მათ აჯამვას ნიშნავს ყველა მნიშვნელობით, რაც ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს შეესაბამება. ამიტომ დამხმარე ფუნქციები წარმოადგენენ $|[m+2n]m\rangle$ საბაზისო ფუნქციებს, გამრავლებულს სკალარზე, რომლებიც ნორმირების სათანადო შერჩევით შეგვიძლია ერთიანად გავხადოთ. ჩვენ მიერ საძიებელი საბაზისო ფუნქცია კი შეესაბამება იუნგის სქემას დაუქვეითებელი უჯრებით ანუ იმ შემთხვევას, როდესაც (48.31) ფუნქციაში $l-m-\delta_{l-m}-2n=0$, ანუ $n=\langle\frac{l-m}{2}\rangle$. მაშინ საძიებელი ფუნქცია აღარ იქნება დამოკიდებული n -ზე. $n_{max}=\langle\frac{l-m}{2}\rangle$ რიცხვის ჩასმა (48.20) ფუნქციაში გვაძლევს, რომ

$$A(l m \langle\frac{l-m}{2}\rangle t i) = \delta_{ti}$$

ამრიგად, SO_3 ჯგუფის $[l]$ დაუყვანადი წარმოდგენის საბაზისო ფუნქციას ასეთი სახე ექნება:

$$|[l]m\rangle = \mathcal{N} \left| \sum_{t=0}^{\langle\frac{l-m}{2}\rangle} C_t^{lm \langle\frac{l-m}{2}\rangle} \left\{ \left(\langle\frac{l+m}{2}\rangle - i \right) \left(\langle\frac{l-m}{2}\rangle - i \right) (\delta_{l-m} + 2i) \right\} \right\rangle \quad (48.32)$$

ფუნქციაში აღარ ვუთითებთ პროექტორს, რადგან იგი გამოთვლის დროს გათვალისწინებულია C კოეფიციენტში.

მაგალითი 48.1: გამოვთვალოთ $|[5]0\rangle$ ფუნქცია მის გამოსათვლელად დაგვჭირდება ასეთი დამხმარე ფუნქციები: $|[5]:[4]0*[1]0\rangle$ და $|[5]:[2]0*[3]0\rangle$. პირველი ფუნქცია უფროსია და მისი C კოეფიციენტი ერთის ტოლია. მეორე ფუნქციაში ერთი უცნობი კოეფიციენტია, რომელიც (48.29) განტოლების ძალით ტოლია ($n=1, s=0$):

$$C_1^{501} = -E_0^0/E_0^1 = \sum_{i=0}^4 \frac{A(5010i)B(50i)D(5000i)}{A(5011i)B(50i)D(5000i)}$$

(48.18) და (48.23) ფორმულებით დათვლილი A და B რიცხვები მოყვანილია 48.1 ცხრილში, რაც საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ C_1^{501} კოეფიციენტი:

$$C_1^{501} = 1/3$$

ცხრილის გამოყენებით შესაძლებელია ძირითადი საძიებელი $|[5]0\rangle$ ფუნქციის პოვნაც, რომლისთვისაც $n=2$.

ცხრილი 48.1

i	0	1	2
$B(501i)$	$2! 2! 1!$	$1! 1! 3!$	$0! 0! 5!$
$A(5000i)$	4	-4	1
$A(5010i)$	-2	1	0
$A(5011i)$	0	-2	1
$A(5020i)$	1	0	0
$A(5021i)$	0	1	0
$A(5022i)$	0	0	1
$D(500i)$	4	-4	1
$D(501i)$	-2	1/3	1/3

ამრიგად, საძიებელ დამხმარე ფუნქციას ასეთი სახე ჰქონია:

$$|[5]:[2]0*[3]0\rangle = N_1 (-6 \{221\} + \{113\} + \{005\}) \quad (48.33)$$

დავალება 48.2: შეამოწმეთ ცხრილის სისწორე.

დავალება 48.3: იპოვეთ ეს ფუნქცია (48.29) სისტემის გამოყენებით.

ფუნქციის კოეფიციენტებისათვის უნდა მიიღოთ:

$$C_1^{502} = 4/3 \text{ და } C_2^{502} = 2/15$$

ამიტომ ამ ფუნქციას გაერთმნიშვნელობისა და ფრჩხილებს გარეთ საერთო წევრების გატანის შემდეგ ასეთი სახე ექნება:

$$\begin{aligned} |[5] 0 \rangle &= N_2 [15 \{221\} + 20 \{113\} + 2 \{005\}] = \\ &= N_2 [15 (x^+)^2 (x^-)^2 (x^0) + 20 (x^+) (x^-) (x^0)^3 + 2 (x^0)^5] \end{aligned}$$

თუ გადავალთ სფერულ კოორდინატებზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} |[5] 0 \rangle &= N_2 \rho^5 \cos \theta [(15/4) \sin^4 \theta - (20/2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \cos^4 \theta] = \\ &= N_2' \rho^5 \cos \theta [15(1 - 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) - 40(\cos^2 \theta - \cos^4 \theta) + 8 \cos^4 \theta] = \\ &= N_2' \rho^5 \cos \theta [15 - 70 \cos^2 \theta + 63 \cos^4 \theta] \end{aligned}$$

თუ მიღებულ პასუხს შევადარებთ სფერული ფუნქციების ცხრილს, ვნახავთ, რომ მიგვიღია $Y_5^0(\theta, \varphi)$ ჰარმონიკა, რაც ამტკიცებს, რომ შესაძლებელია დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა მოყვანილი სქემის მიხედვით.

პარაგრაფის ბოლოს ვნახოთ, რას შეესაბამება (48.33) დამხმარე ფუნქცია. ამისთვის გავიღეთ მასში სფერულ კოორდინატებზე. გვექნება:

$$\begin{aligned} |[5]:[2]0*[3]0 \rangle &= N \rho^5 \cos \theta [-3(1 - 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) - (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta) + 2 \cos^4 \theta] = \\ &= \rho^5 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ $Y_3^0(\theta, \varphi)$ ჰარმონიკა. ასევე შეიძლება ჩვენება, რომ დამხმარე ფუნქცია

$$|[5]:[4]0*[1]0 \rangle \sim Y_1^0(\theta, \varphi)$$

ეს ნიშნავს, რომ ჩვენი დამხმარე ფუნქციები ჩვეულებრივი ჰარმონიკებია, ოღონდ უფრო დაბალი რიგის წარმოდგენებისათვის, გამრავლებული სკალარზე ρ^5 . პირდაპირ ამ ფუნქციების გამოყენება უფრო მაღალი რიგის წარმოდგენების ბაზისის საპოვნელად არ შეიძლება, რადგან ამ წარმოდგენების იუნგის სქემები მეტ უჯრებს შეიცავენ და “ზედმეტი” უჯრები აუცილებლად უნდა შევავსოთ დაქვეითებული ინდექსებით.

დავალება 48.4: იპოვეთ ასეთი საბაზისო ფუნქციები:

- ა) $|[5] 1 \rangle;$
- ბ) $|[5] 2 \rangle;$
- გ) $|[6] 0 \rangle;$
- დ) $|[6] 1 \rangle;$
- ე) $|[6] 2 \rangle.$

49. ჯგუფთა თეორიის მეთოდების გამოყენება ატომის სპექტროსკოპიის ამოცანებისათვის.

ატომის სპექტროსკოპია ითვალისწინებს ელექტრონთა მდგომარეობების კლასიფიკაციას ატომის შიგნით. კლასიფიკაციის ნაწილი უკვე ჩატარებული გვაქვს 39-ე პარაგრაფში, სადაც შევისწავლეთ ნაწილაკთა სპინური მდგომარეობები. მაგრამ ელექტრონებს ატომებში სპინური მდგომარეობის გარდა ახასიათებს ორბიტალური მოძრაობაც, რომელთანაც დაკავშირებულია ორბიტალური მომენტი l . 46-ე პარაგრაფში ჩვენ ვნახეთ, რომ ორბიტალური მომენტი SO_3 ჯგუფის გენერატორს წარმოადგენს. ამგვარად, SU_2 სპინური ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენების გარდა, ელექტრონის მდგომარეობა ატომში SO_3 ჯგუფის წარმოდგენითაც ნდა დავახასიათოთ. ამიტომ მისი ფუნდამენტური მდგომარეობის ვექტორი $\{1\}[l]$ S -ფუნქციების პირდაპირი ნამრავლებით უნდა აღვწეროთ. თუ გავიხსენებთ, რომ SU_2 წარმოდგენა $\{1\}$ ექვივალენტურია SO_3 ჯგუფის $[l/2]$ სპინური წარმოდგენისა, მაშინ ელექტრონის ფუნდამენტური წარმოდგენა ატომში ჩაიწერება როგორც SO_3 ჯგუფის ნამდვილი და სპინური წარმოდგენების ნამრავლი – $[l][l/2]$. გარდა ამისა უნდა დავადგინოთ ელექტრონების ატომში მდგომარეობის სიმეტრიის მაქსიმალური ჯგუფი და მისი რედუქციის გზა ბრუნვის ჯგუფამდე. უნდა ვიპოვოთ, აგრეთვე, მაქსიმალური ჯგუფის ის წარმოდგენა, რომელიც აღწერს l ორბიტაზე მოძრავ k ელექტრონის სისტემას.

სანამ ამ კითხვებზე პასუხს გავცემთ, საჭიროა რამდენიმე ცნების შემოტანა ატომური სპექტროსკოპიიდან. ჯერ ერთი, ორბიტებს ატომში საკუთარი სახელები აქვთ. ასე, $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ მომენტების მქონე ორბიტებს, შესაბამისად, ჰქვიათ $s, p, d, f, g, h, i, k, m, \dots$ ორბიტები. ზოგადად მათ L ასოთი აღნიშნავენ და თერმებს უწოდებენ. თერმს მარცხენა ზედა კუთხეში უწერენ

ინდექსს $2s+1$, სადაც s სპინური მომენტი და, ამგვარად, ატომში ელექტრონის კონფიგურაცია ასე იწერება:

$${}^{2s+1}L \quad (49.1)$$

მეორე, ელექტრონები, როგორც ყველა ნახევარსპინიანი ნაწილაკი, ფერმიონია, რაც მოითხოვს, რომ ელექტრონთა სისტემის ტალღური ფუნქცია უნდა იყოს ანტისიმეტრიული ელექტრონის ყველა კოორდინატის ერთდროული გადასმის მიმართ, ე.ი. უნდა აღიწერებოდეს მაქსიმალური ჯგუფის სრულიად ანტისიმეტრიული წარმოდგენით. და, ბოლოს, რადგან ელექტრონს ერთდროულად გააჩნია ორბიტალური და სპინური მექანიკური მომენტები, ამიტომ მათი მაგნიტური მომენტები ურთიერთქმედებენ და ქმნიან საერთო მაგნიტურ მომენტს, რომლის შესაბამისი მექანიკური მომენტი J ასოთი აღინიშნება და მას **სრული მომენტი** ეწოდება. თუ სპინური და ორბიტალური მაგნიტური მომენტების ურთიერთქმედება, ე.წ. **სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება**, საკამოდ სუსტია კულონურ ძალასთან შედარებით, მაშინ ელექტრონების სისტემის სრული ორბიტალური L და სრული S სპინური მომენტები ერთმნეთისაგან დამოუკიდებლად ინახება. ეს მომენტები ცალკეულ ნაწილაკთა l_i ორბიტალური და s_i სპინური მომენტების ჯამს წარმოადგენს:

$$L = \sum_i l_i \quad \text{და} \quad S = \sum_i s_i \quad (49.2)$$

ამ შემთხვევაში სრული მომენტი J სრული ორბიტალური და სრული სპინური მომენტების ჯამია

$$J = L + S \quad (49.3)$$

და ამბობენ, რომ ნაწილაკთა სისტემაში ადგილი აქვს **რასელ-საუნდერსის ანუ L-S ბმას**. ასეთი ბმები მსუბუქ ბირთვებში ხორციელდება.

თუ სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება კულონური ძალის რიგისაა, მაშინ მაშინ სისტემას ვეღარ დავახასიათებთ სრული L და S მომენტებით, რადგან ამ შემთხვევაში ცალკეული ელექტრონის სპინი და ორბიტალური მომენტები იკრიბება და ადგენენ ნაწილკის $j_i = l_i + s_i$ სრულ მომენტს, ხოლო სისტემის სრული მომენტი ამ შემთხვევაში ამ მომენტების ჯამია:

$$J = \sum_i j_i \quad (49.4)$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ადგილი აქვს **$j-j$ ბმას** და იგი მძიმე ბირთვებს ახასიათებს.

ამ წინასწარი მონაცემების მიღების შემდეგ შეგვიძლია დავუბრუნდეთ ზემოდასმულ კითხვებს და გავცეთ მასზე პასუხი. ელექტრონთა სისტემის მდგომარეობის სივრცე 2-განზომილებიანი სპინური და $(2l+1)$ -განზომილებიანი ორბიტალური სივრცეების პირდაპირი ნამრავლია, ამიტომ მაქსიმალური სიმეტრიის ჯგუფად ატომურ ფიზიკაში $SU_{2(2l+1)}$ ჯგუფი გამოიყენება. k ელექტრონის სისტემა, როგორც ფერმინთა სისტემა, ამ ჯგუფის $\{1^k\}$ დაუყვანადი წარმოდგენით ხასიათდება.

ფუნდამენტური წარმოდგენა, რომლისგანაც უნდა ავაგოთ $\{1^k\}$ ტენზორული წარმოდგენა, იმაზეა დამოკიდებული, რომელ ბმას ავირჩევთ. მაგალითად, $L-S$ ბმის შემთხვევაში საძიებელი ტენზორული წარმოდგენა უნდა აიგოს ცალკე სპინური და ცალკე ორბიტალური მდგომარეობებისათვის. ის რაც ვიცით პლეთიზმების შესახებ, საშუალება გვაძლევს დავასკვნათ, რომ $L-S$ ბმის შემთხვევაში გამოსათვლელი გვაქვს ასეთი პლეთიზმი:

$$([l][\frac{1}{2}]) \otimes \{1^k\} \tag{49.5}$$

$j-j$ ბმის შემთხვევაში ნაწილაკის განხილვას ცალ-ცალკე სპინურსა და ორბიტალურ სივრცეებში აზრი აღარა აქვს: ელექტრონის მდგომარეობის ფუნდამენტური სივრცე იქნება $[l]$ და $[\frac{1}{2}]$ წარმოდგენების ნამრავლის შედეგი:

$$[l][\frac{1}{2}] = [l + \frac{1}{2}] + [l - \frac{1}{2}] \tag{49.6}$$

დავალება 49.1: გამოიყვანეთ ეს ტოლობა.

ამიტომ საპოვნელია ასეთი პლეთიზმი:

$$([l + \frac{1}{2}] + [l - \frac{1}{2}]) \otimes \{1^k\} \tag{49.7}$$

ასევე განსხვავდება ერთმანეთისაგან მაქსიმალური ჯგუფის რედუქციის გზები. $L-S$ ბმისათვის ლოგიკურია ასეთი რედუქციის განხილვა:

$$SU_{2(2l+1)} \supset \begin{matrix} SU_2 & SU_2 & SU_2 & SU_1 \\ \times & \supset & \times & \supset & \times & \supset & \times \end{matrix} \supset \begin{matrix} SU_{2l+1} & SO_{2l+1} & SO_3 & SO_2 \end{matrix} \tag{49.8}$$

$j-j$ ბმისათვის (49.6) ფორმულის შესაბამისად ელექტრონის მდგომარეობის სივრცე ორ ქვესივრცედ იყოფა, რომელთაგან ერთი $j_+ = l + \frac{1}{2}$, ხოლო მეორე $j_- = l - \frac{1}{2}$, მომენტებს შეესაბამება. ეს ფაქტი რედუქციის გზაშიც უნდა აისახოს. ამიტომ $j-j$ ბმისათვის რედუქციას ასეთი სახე ექნება:

$$SU_{2(2l+1)} \supset \begin{matrix} SU^+_{2l+2} & SP^+_{2l+2} & SO^+_3 & SO^+_2 \\ \times & \supset & \times & \supset & \times & \supset & \times \\ SU^-_{2l} & SP^-_{2l} & SO^-_3 & SO^-_2 \end{matrix} \quad (49.9)$$

ახლა, როდესაც ყველა წინასწარი მონაცემი გვაქვს, შეიძლება მოვახდინოთ ატომის l ორბიტის k ელექტრონის სისტემის მდგომარეობათა კლასიფიკაცია. დავიწყოთ $L-S$ ბმით და ვიპოვოთ (49.5) პლეთიზმი.

$$([l] [\frac{1}{2}]) \otimes \{1^k\} = \sum_{r=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} ([\frac{1}{2}] \otimes \{k-r, r\}) ([l] \otimes \{2^r 1^{k-2r}\}) \quad (49.10)$$

პირველი, სპინური, თანამამრავლი ჯამში ბოლომდე გამოითვლება ზოგადად. მართლაც ამ პლეთიზმის პასუხი მოცემულია (45.16) ფორმულით:

$$[\frac{1}{2}] \otimes \{k-r, r\} = [k/2 - r] \quad (49.11)$$

ამ პლეთიზმის საშუალებით შეგვიძლია (49.1) თერმის სპინური ინდექსის პოვნა:

$$2s+1 = k - 2r + 1 \quad (49.12)$$

მეორე, ორბიტალური, თანამამრავლის $([l] \otimes \{2^r 1^{k-2r}\})$ გამოსათვლელად უნდა მოვახდინოთ SU_{2l+1} ჯგუფის $\{2^r 1^{k-2r}\}$ დაუყვანადი წარმოდგენის რედუქცია $SU_{2l+1} \supset SO_{2l+1}$ ჯაჭვის შესაბამისად. როგორც ვიცით, ეს ხდება (43.7) ტოლობით განსაზღვრული \hat{K} ოპერატორის საშუალებით. მისი მოქმედება ასეთ შედეგს მოგვცემს:

$$\{2^r 1^{k-2r}\} \supset \sum_{t=0}^r [2^{r-t} 1^{k-2r}]_{\{2^r 1^{k-2r}\}} \quad (49.13)$$

SO_{2l+1} ჯგუფის მიღებულ წარმოდგენას ინდექსად მითითებული აქვს SU_{2l+1} -ის დაყვანილი წარმოდგენა. ამ ტოლობის გათვალისწინებით (49.10) ჯამის მეორე თანამამრავლი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$[l] \otimes \{2^r 1^{k-2r}\} = \sum_{t=0}^r ([l] \otimes [2^{r-t} 1^{k-2r}])_{\{2^r 1^{k-2r}\}} \quad (49.14)$$

(49.14) ტოლობის მარჯვენა მხარის პლეთიზმები მოგვცემენ SO_3 ჯგუფის სამიბეღელ წარმოდგენებს, რომლებსაც, შეთანხმების ძალით, (49.12) ტოლობით მიღებული სპინის გათვალისწინებით თერმების სახით აღვნიშნავთ: ^{2s+1}L .

როდესაც ნაწილაკთა სისტემის სიმეტრია ჯგუფთა ჯაჭვით ხასიათდება, მაშინ ჯაჭვის თითოეული რგოლის დაუყვანადი წარმოდგენა იძლევა ამ სისტემის ტალღური ფუნქციის დამახასიათებელ კვანტურ რიცხვს. ამდენად, $L-S$

ბმის შემთხვევაში ატომში ელექტრონთა სისტემის ტალღური ფუნქცია ასეთი სახისა იქნება:

$$| \{1^k\}, \{2^r 1^{k-2r}\}, \{2^{r-t} 1^{k-2r}\}, {}^{k-2r+1}L, m, m_s \rangle \quad (49.15)$$

სადაც მოყვანილი წარმოდგენები ეკუთვნიან, შესაბამისად, $SU_{2(2l+1)}$, SU_{2l+1} , SO_{2l+1} , SU_2 , SO_3 , SO_2 , და SU_1 ჯგუფებს.

როგორც ყოველთვის ამ წესების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი. განვიხილოთ ორი ელექტრონი f გარსზე. ეს ნიშნავს, რომ თითოეულ ელექტრონს $l=3$ ორბიტალური მომენტი გააჩნია. ამიტომ (49.10) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} ([3] [1/2]) \otimes \{1^2\} &= \sum_{r=0}^1 ([1/2] \otimes \{2-r r\}) ([3] \otimes \sum_{t=0}^r [2^{r-t} 1^{k-2r}]) = \\ &= ([1/2] \otimes \{2\}) ([3] \otimes \{1^2\}) + ([1/2] \otimes \{1^2\}) ([3] \otimes (\{2\} + \{0\}))_{\{2\}} = \\ &= ([1]_s ([3] \otimes [1^2])_{\{11\}} + ([0]_s ([3] \otimes [2] + [3] \otimes [0])_{\{2\}}) = \quad (49.16) \\ &= ([1]_s ([5] + [3] + [1])_{\{11\}\{11\}} + ([0]_s ([6] + [4] + [2])_{\{2\}\{2\}} + ([0]_s ([0]_{\{2\}\{0\}}) \end{aligned}$$

მიღებული შედეგები დავაჯამოთ 49.1 ცხრილში, რომელშიც მითითებულია (49.8) ჯაჭვის ჯგუფები სპინური და ორბიტალური პროექციების გამოკლებით.

ცხრილი 49.1

$SU_{2(2l+1)}$	SU_{2l+1}	SO_{2l+1}	${}^{2s+1}L$	სპინ-ორბიტალურ მდგომარეობათა რაოდენობა
$\{1^2\}$	$\{1^2\}$	$[1^2]$	3p	$3 \times 3 = 9$
			3f	$3 \times 7 = 21$
			3h	$3 \times 11 = 33$
	$\{2\}$	$[2]$	1d	$1 \times 5 = 5$
			1g	$1 \times 9 = 9$
			1i	$1 \times 13 = 13$
			1s	$1 \times 1 = 1$
		$[0]$		

აქედან ჩანს, რომ ორი ელექტრონი ატომის f გარსში 91 განსხვავებულ მდგომარეობაში შეიძლება იყოს.

ახლა $j-j$ ბმა განვიხილოთ. მას (49.9) ჯაჭვი შეესაბამება. დავთვალოთ საჭირო პლეთიზმი:

$$\begin{aligned}
& ([j_+] + [j_-]) \otimes \{1^k\} = \sum_{r=0}^k ([j_+] \otimes \{1^r\}) ([j_-] \otimes \{1^{k-r}\}) = \\
& = \sum_{r=0}^k \sum_{p=0}^{\langle r/2 \rangle} \sum_{q=0}^{\langle (k-r)/2 \rangle} ([j_+] \otimes \{1^{r-p}\})_{\{1^r\}} ([j_-] \otimes \{1^{k-r-2q}\})_{\{1^{k-r}\}} = \\
& = \sum_{r,p,q} (\{2j_+\} \otimes \{1^{r-2p}\} - \{2j_+\} \otimes \{1^{r-2p-2}\})_{\{1^r\}} \{1^{r-2p}\} \times \\
& \times \{2j_-\} \otimes \{1^{k-r-2q}\} - \{2j_-\} \otimes \{1^{k-r-2q-2}\})_{\{1^{k-r}\}} \{1^{k-r-2q}\}. \tag{49.17}
\end{aligned}$$

ბოლო ეტაპზე გამოყენებულია ის ფაქტი, რომ $[j_+]$ და $[j_-]$ SO_3 ჯგუფის სპინორული წარმოდგენებია. $\{ \}$ ფრჩხილები სიმპლექტური ჯგუფის დაუყვანად წარმოდგენებს აღნიშნავენ. (49.17) ფორმულაში გათვლები მიყვანილია SO^+_3 და SO^-_3 ჯგუფის სპინორული წარმოდგენების გამოთვლამდე, რადგან შემდეგ ზოგადი გამოთვლების წარმოება ვეღარ ხერხდება. ფრჩხილების ინდექსებად ვიყენებთ ჯგუფთა (49.8) ჯაჭვის სათანადო რგოლებს. მიღებული j_+ და j_- მომენტები არ არიან ფიზიკური სიდიდეები და ამიტომ ისინი უნდა შეიკრიბონ სისტემის სრული J მომენტის მისაღებად. ამგვარად, $j-j$ ბმის დროს ფუნქცია ასეთი კვანტური რიცხვებით უნდა დახასიათდეს:

$$\{ \{1^k\}; \{1^r\}, \{1^{r-2p}\}, j_+; \{1^{k-r}\}, \{1^{k-r-2q}\}, j_-; JM \rangle \tag{49.18}$$

(49.17) ფორმულის გამოყენებაზე მოვიყვანოთ იგივე მაგალითი – 2 ელექტრონი f გარსზე:

$$\begin{aligned}
& ([\frac{7}{2}] + [\frac{5}{2}]) \otimes \{1^2\} = \sum_{r=0}^2 \sum_{p=0}^{\langle r/2 \rangle} \sum_{q=0}^{\langle (2-r)/2 \rangle} (\{7\} \otimes \{1^{r-2p}\} - \{7\} \otimes \{1^{r-2p-2}\})_{\{1^r\}} \{1^{r-2p}\} \\
& \times \{5\} \otimes \{1^{2-r-2q}\} - \{5\} \otimes \{1^{2-r-2q-2}\})_{\{1^{2-r}\}} \{1^{2-r-2q}\} = \\
& = ([0]_{\{0\}\{0\}})^+ ([2]_{\{1^2\}\{1^2\}} + [4]_{\{1^2\}\{1^2\}} + [0]_{\{1^2\}\{0\}})^- + [\frac{7}{2}]_{\{1\}\{1\}}^+ [\frac{5}{2}]_{\{1\}\{1\}}^- + \\
& + ([2]_{\{1^2\}\{1^2\}} + [4]_{\{1^2\}\{1^2\}} + [6]_{\{1^2\}\{1^2\}} +)^+ [0]_{\{0\}\{0\}}^-
\end{aligned}$$

მიღებული მდგომარეობები მოყვანილია ცხრილში 49.2.

როგორც მოსალოდნელი იყო, მივიღეთ 91 მდგომარეობა, რომელშიც შეიძლება იყოს ორი ელექტრონი f გარსზე $j-j$ ბმის შემთხვევაში.

დავალეზა 49.2: ა) იპოვეთ 3 ელექტრონის მდგომარეობები f გარსზე $L-S$ და $j-j$ ბმაში.

ბ) იპოვეთ 3 და 4 ელექტრონის მდგომარეობები d გარსზე $L-S$ და $j-j$ ბმაში.

ცხრილი 49.2

$SU_{2(2l+1)}$	SU^+_{2l+1}	SP^+_{2l+1}	$SO^+_{3(j_+)}$	SU^-_{2l+1}	SP^-_{2l+1}	$SO^-_{3(j_-)}$	J	მდგომარეობათა რაოდენობა
$\{1^2\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	0	$\{1^2\}$	$\{1^2\}$	2	2	5
						4	4	9
					$\{0\}$	0	0	1
	$\{1\}$	$\{1\}$	$7/2$	$\{1\}$	$\{1\}$	$5/2$	1	3
						2	5	
						3	7	
						4	9	
						5	11	
						6	13	
	$\{1^2\}$	$\{1^2\}$	2	$\{0\}$	$\{0\}$	0	2	5
			4				4	9
			6				6	13
		$\{0\}$	0	$\{0\}$	$\{0\}$	0	0	1