დავით თევზაძე

ლოგიკის მინიმალური კურსი

დამხმარე სახელმძღვანელო IB – ევროკავკასიური უნივერსიტეტის სტუდენტებისათვის

თბილისი
2009

შინაარსი

წინასწასიტყვაობა

წიგნის მიზანია გაუადვილოს სტუდენტებს ზოგიერთი იმ თემის გააზრება, რომელიც, როგორც პრაქტიკამ გვაჩვენა, გარკვეულ წილად, იწვევს სირთულეებს ლოგიკის სტანდარტული კურსის ათვისებისას. ის შეიძლება გამოყენებულ იქნას როგორც დამოუკიდებლად, ასევე ლ.მჭედლიშვილისა და ნ.ივანიძის სახელმძღვანელოსთან ერთად (იხ.: **ლ.მჭედლიშვილი, ნ.ივანიძე. ლოგიკა. თბილისი, 2003წ.**). სათაურში სიტყვა "მინიმალური" ნიშნავს, რომ აქ გადმოცემული მასალა წარმოადგენს ცოდნის იმ აუცილებელ მინიმუმს, რომელიც უმცირესი დადებითი შეფასებისთვისაა საჭირო.

შესავალი: რას სწავლობს ლოგიკა და რის ცოდნას გვაძლევს ეს წიგნი?

ლოგიკა, ისევე როგორც სხვა მეცნიერებები, დაადგენს ჭეშმარიტებებს. ამიტომ, როდესაც ვსვამთ კითხვას, რას სწავლობს ლოგიკა, პირველ რიგში ვგულისხმობთ იმას, თუ რა სახის ჭეშმარიტებებზეა საუბარი ლოგიკაში, განსხვავებით, ვთქვათ, ფიზიკის, მათემატიკის, ანდა თუნდაც ისტორიის ჭეშმარიტებებისგან.

ნათქვამში რომ გავერკვეთ, ყურადღება მივაქციოთ შემდეგს:

(1). ფიზიკა, ზოგადად, აღწერს ბუნებას, და მიჩნეულია, რომ ამ აღწერის შედეგად დაადგენს იმ კანონზომიერებებს, რომელიც ფიზიკურ სინამდვილეში მოქმედებს. ამგვარად, ის დებულებები, რომელიც ფიზიკის ძირითად შინაარს შეადგენს, ერთგვარად, ასახავს იმას, რაც ფიზიკურ სამყაროში ხდება. როდესაც ექსპერიმენტით, ანდა სხვა გზით ვრწმუნდებით, რომ რომელიმე დებულება ზუსტად ასახავს ამ ხდომილებებს, ჩვენ საქმე გვაქვს ჭეშმარიტებასთან, რომელსაც ფიზიკის მეცნიერება დაადგენს.

(2). ანალოგიურად, მათემატიკაც აღწერს რაღაც სინამდვილეს, რომელიც ბუნებისგან განსხვავებით, არამატერიალურია იმ აზრით, რომ მის ობიექტებს, ასე ვთქვათ, ხელით ვერ “შევეხებით” იმდაგვარად, როგორც ეს ფიზიკური ობიექტების შემთხვევაში შეგვიძლია გავაკეთოთ. ამიტომაც, რთულია მოვძებნოთ სამყაროში მათემატიკის დებულებათა შესატყვისი ისეთი ხდომილებები, რომელიც მათი ადექვატურობის საზომი გახდებოდა. თუმცა, მათემატიკური თეორიების აგებისას, ჩვენ გარკვეული პრინციპებით ვხელმძღვანელობთ და თუ კი ჩვენ მიერ გამოთქმული დებულება თანხმობაშია ამ პრინციპებთან, ვიტყვით, რომ დაგვიდგენია მათემატიკური ჭეშმარიტება. უნდა აღინიშნოს, რომ ხშირად ეს თანხმობა საკმაოდ რთული დასანახია და ჩვენი გონებრივი რესურსის სრულ მობილიზებას გულისხმობს. საბოლოოდ, აღნიშნული თანხმობა მათემატიკური დაფუძნების სახეს იღებს და თუ კი ეს დაფუძნება უნაკლოა დასაბუთების თვალსაზრისით, შეგვიძლია თამამად ვთქვათ, რომ ჩვენი დებულება ჭეშმარიტია თავდაპირველად დადგენილი პრინციპებით მართულ სივრცეში.

(3). სხვაგვარადაა საქმე ისტორიული ჭეშმარიტებების დადგენისას. აქ ჩვენ მიერ გამოთქმული წინადადებები თანხმობაში უნდა იყოს იმასთან, რაც საზოგადოების განვითარების გარკვეულ ეტაპზე, ამა თუ იმ ხალხის გარშემო ხდებოდა. სირთულეს ის გარემოება ქმნის, რომ ხშირად, ჩვენ სხვათა დამოწმებით, ანუ იმ პირთა აღწერების საშუალებით ვმსჯელობთ, რომლებიც ამ მოვლენათა თანამედროვენი იყვნენ, ან ამ მოვლენათა შესახებ სხვათა მონათხრობით იციან. სხვა სიტყვებით, ჩვენ საშუალება არა გვაქვს ჩვენს უშუალო განცდას დავეყრდნოთ, ანდა დავეყრდნოთ ექსპერიმენტს, როგორც ფიზიკაში, ან დასაბუთებას, როგორც მათემატიკაში. ეს კი სხვადასხვა ინტერპრეტაციის საშუალებას იძლევა, რაც, ხშირად, ისტორიკოსებს შორის დავის საფუძველს წარმოადგენს.

თუმცა ისტორიულ მეცნიერებასაც გააჩნია გარკვეული ხერხები, რომ ცოდნა, რომელსაც ის განაპირობებს, სანდოობის უფრო მაღალი ხარისხი ჰქონდეს, ვიდრე ეს უბრალო ვარაუდს გააჩნია. ასეთია, როგორც არქეოლოგიის მონაცემთა ანალიზი, ასევე იმ ტექსტების სანდოობის შემოწმების მთოდოლოგიები, რომელიც, როგორც ისტორიული წყაროები, შემოგვრჩა, და რომელთა დამუშავების მეთოდიკა დროთა მანძილზე იხვეწება. საისტორიო წყაროებად შეგვიძლია მივიჩნიოთ არა მხოლოდ თხრობა რომელიმე ამბისა, არამედ იმ პერიოდის დოკუმენტები, რომელიც მოცემული დროის მონაკვეთში ადამიანთა შორის ურთიერთობების დარეგულირებისთვის იყო შექმნილი: ბრძანებები, კანონთა კრებულები, სასამართლო ოქმები თუ სხვა ჩანაწერები, ხელშეკრულებები, ანგარიშები, საშემოსავლო დოკუმენტები და ბევრი სხვა, რასაც დღეს ჩვენ, შესაძლოა, ყურადღებასაც არც ვაქცევთ.

თუ ამგვარ მსჯელობას გავყვებით, ვნახავთ, რომ ყოველი მეცნიერება, გარკვეულ წილად, ჩვენი სამყაროს შესახებ ცოდნას განაპირობებს იმით, რომ ყველაფერს, რაც ჩვენს გარშემოა, ჭეშმარიტად მიჩნეული წინადადებებით აღწერს. თუმცა, ჭეშმარიტად მიჩნევის საფუძვლების სხვადასხვაობის გამო, ის სხვადსვაგვარია თავისი სანდოობის ხარისხის მიხედვით. იმ მეთოდების წყალობით, რასაც ფიზიკა ეყრდნობა, ფიზიკურ მოვლენათა ცოდნა გაცილებით უკეთ არის დაფუძნებული,

ვიდრე, იგივე ისტორიული მეცნიერებისა. მაგრამ კითხვა ჩნდება თვითონ ცოდნისა და კარგად დაფუძნებული ცოდნის შესახებ. რა არის ეს? როგორ არის შესაძლებელი ჭეშმარიტ წინადადებათა ჭეშმარიტების ხარისხის განსაზღვრა და რა არის ჩვენი რწმენის საფუძველი, როდესაც რაიმეზე ვამბობთ, რომ ის ჭეშმარიტია? მეტიც, რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს ჩვენი ცოდნა, რომ მასზე ვთქვათ ეს მეცნიერული ცოდნაა და განვასხვავოთ ის ბანალურ ჭეშმარიტებათაგან, რომელიც ჩვენს ყოველდღიურობას აღწერს? მაგალითად, ჭეშმარიტებაა "$\mathbf{e=mc^2}$" და თუ კი დღეს მზე ანათებს, ჭეშმარიტია აგრეთვე **"დღეს კარგი ამინდია"**. რა ქმნის ამ ცოდნათა შორის სხვაობას და რა არის ის, რაც მეცნიერულ ცოდნას დასაბუთებულობის მეტ ხარისხს ანიჭებს? სხვა სიტყვებით, **რა არის დასაბუთება და როგორია მისი ბუნება?** ეს გახლავთ **ძირითადი** კითხვა, რომელსაც **ლოგიკა, როგორც მეცნიერება,** პასუხობს. ანუ, ლოგიკა იკვლევს და ეძიებს იმას, თუ რა იქნებოდა **ჭეშმარიტი** დასაბუთების შესახებ, თუ კი დასაბუთებას შესწავლის საგნად თავად ვაქცევდით.

რაც შეეხება **ლოგიკას,** როგორც **სასწავლო დისციპლინას**, მისი ამოცანაა, უკეთეს შემთხვევაში, გაგვაცნოს თუ რას მიაღწია ამ მიმართულებით კაცობრიობამ და რა პროგრესს შეიძლება ველოდეთ კიდევ. ხოლო ***ლოგიკის მინიმალური კურსის*** დანიშნულებაა დავეუფლოთ ლოგიკურ ტექსტებთან მუშაობის ჩვევას, პირველ რიგში, იგულისხმება სახელმძღვანელოები.

თავი I. ზოგადი ცნობები სიმრავლეთა თეორიის შესახებ

§1. სიმრავლეები და მათი ელემენტები. ქვესიმრავლე. ცარიელი, უნივერსალური და ერთეულოვანი სიმრავლეები. ვენის დიაგრამები.

სიტყვას **სიმრავლე** ჩვენ ვიხმართ საგანთა ნებისმიერი ერთობლიობის აღსაწერად, რომლებიც რაღაც ნიშნით არიან გაერთიანებული. მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ კლასში მყოფ სტუდენტთა სიმრავლეზე, ანდა ამავე კლასში მყოფ გოგონათა სიმრავლეზე. თუ ნაგულისხმევ საკლასო ოთახს არ გავცდებით, შეგვიძლია ასევე ვილაპარაკოთ სკამების სიმრავლეზე, რომელიც ამ საკლასო ოთახშია, ანდა სიმრავლეზე რომლიც მხოლოდ საკლასო ოთახში მყოფი საგნებისაგან არის შედგენილი. მაშინ, მასში მოექცევა როგორც სკამები, ასევე მაგიდები (ან მერხები), დაფა, წიგნები, სტუდენტთა ხელჩანთები, ცარცი ან მარკერი და ა.შ., ანუ ყველაფერი ის, რასაც შეგვიძლია ხელი მოვკიდოთ და ამჟამად აქ, ამ საკლასო ოთახში იმყოფება. საგანთა სხვადასხვაობის მიუხედავად, მათ საერთო რამ თვისება გააჩნიათ: **ისინი ამჟამად და აქ, ამ საკლასო ოთახში არიან თავმოყრილი**. მეტიც, იმავე საკლასო ოთახის შიგნით ჩვენ კიდევ გვაქვს საშუალება სიმრავლის გაფართოებისა, თუ კი მასში მყოფ სულიერ და უსულო საგანთა ერთობლიობას განვიხილავთ. ეს ერთობლიობა, სულ ცოტა ერთ დამატებით ობიექტს შეიცავს, რომელიც აქამდე არ გვიხსენებია, კერძოდ, პროფესორს, რომელიც **ამჟამად** სტუდენტებს, შესაძლოა, ლექციას უტარებდეს. საგანთა სიმრავლეები, რომლებიც ამ საკლასო ოთახით შემოვფარგლეთ, განსხვავებულნია იმ აზრით, რომ მათი შემადგენელი ობიექტები, ანუ ის საგნები, რომლებიც ერთობლიობებს ქმნიან, თავად არიან განსხვავებულნი. მაგალითად, **ამ კლასში მყოფი სკამების სიმრავლე** განსხვადება როგორც **ამ კლასში მყოფი მაგიდების სიმრავლისაგან,** ასევე **ამ კლასში მყოფი სტუდენტების სიმრავლისგან.** საინტერესოა, რომ ეს განსხვავება, შესაძლოა, რაოდენობრივიც აღმოჩნდეს, ვინაიდან დასაშვებია, რომ განხილვის მომენტში კლასში საერთოდ არ იმყოფებოდეს არც ერთი სტუდენტი, ანდა იმყოფებოდეს იმაზე მეტი, ვიდრე სკამი. თუ ჩვენს მსჯელობას ოდნავ განვავრცობთ, ვნახავთ, რომ სიმრავლეები თავად შეიძლება იქცნენ იმ ობიექტებად, რომელთა სიმრავლედ განხილვა ისევე აზრიანი იყოს, როგორც **სკამების სიმრავლისა.** მაგალითად, იმავე საკლასო ოთახის ფარგლებს რომ არ გავცდეთ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ **ამ კლასში არსებული ყველა საგნის სიმრავლე** ემთხვევა სიმრავლეს, რომელსაც ერთობლოვად ქმნიან მასში მყოფი სკამების, მაგიდების, დაფების, ქალ-ვაჟი სტუდენტების, მათი პირადი ნივთების, დაფების, მარკერების, ცარცის ნაჭრების და ა.შ. სიმრავლეები. ცხადია, საგანთა სიმრავლეების დახასიათებისას ამ საგანთა თვისებებს, რა თქმა უნდა მნიშვნელობა აქვს, მაგრამ, მეორეს მხრივ, ზოგჯერ, ყველა მათი სხვა თვისება, გარდა ამჟამად ამ სიმრავლის საგნად ყოფნისა, გარკვეულ წილად, მნიშვნელობას კარგავს. მაგალითად, მე თუ მინდა **ამ კლასში მყოფი სტუდენტების სიმრავლის** შესახებ (რაც იგივეა, **ამ კლასში მყოფ სტუდენტებზე**) რაიმე ზოგადი მსჯელობა გამოვთქვა, ჩემთვის, ცხადია, სულ ერთი უნდა იყოს ქალია ეს სტუდენტი, თუ ვაჟი.

ამით ჩვენ იმის თქმა გვინდა, რომ ხშირად არანაირი მნიშვნელობა არა აქვს იმას, თუ რა საგნებისგან შედგენილ სიმრავლეებს ვიხილავთ, არამედ მნიშვნელოვანია ის, რომ ეს საგნები გარკვეულ ერთობლიობას ქმნიან და მათზე მსჯელობა ერთობლივადაა შესაძლებელი, როგორც სიმრავლეზე. საკლასო ოთახის ფარგლებს რომ გავცდეთ, სიმრავლეთა მაგალითების მოტანა მრავლად შეიძლება: კავკასიონის მწვერვლთა სიმრავლე, აზიის კონტინენტის ტბების სიმრავლე, ევროპული ქალაქების ქუჩების სიმრავლე, ამერიკაში მცხოვრები პოლონელების სიმრავლე და ა.შ. განსაკუთრებით მოსახერხებელია საუბარი რიცხვთა სიმრავლეეზე და ამის უამრავი მაგალითია ჩვენთვის ცნობილი სტანდარტული მათემატიკის კურსიდან: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ლუწ რიცხვთა სიმრავლე, იმ რიცხვთა სიმრავლე რომელიც 100-ზე ნაკლებია და უნაშთოდ იყოფა 3-ზე და ა.შ. ამგვარად, რა საგნები შეადგენს სიმრავლეს, ერთგვარად, ნაკლებმნიშვნელოვანი ხდება, თუ კი თავად სიმრავლეებზე ვაპირებთ საუბარს. რა თავისებურებანი გააჩნია სიმრავლეებს, რა დამოკიდებულებანი შეიძლება არსებობდეს მათ შორის, როგორ შეიძლება სიმრავლეებით ოპერირება, ანდა რა გამოყენება შეიძლება მოეძებნოს მათი თვისებების აღწერას, ის კითხვებია, რაზედაც პასუხს მეცნიერების (უფრო ზუსტად, მათემეტიკური მეცნიერების) ერთ-ერთი დარგი – **სიმრავლეთა თეორია** იძლევა. იმისათვის, რომ, გარკვეულწილად, გაგვიადვილდეს სიმრავლეებზე მსჯელობა, ან სიმრავლეებით ოპერირება, შევთანხმდეთ შემდეგზე:

1.1. საგანს, რომელიც რაიმე სიმრავლის ობიექტადაა მოაზრებული, ამ სიმრავლის **ელემენტი** ეწოდება. ელემენტი, ნებისმიერ სიმრავლესთან მიმართებაში ხასიათდება იმით, რომ ის ამ სიმრავლეს ან **ეკუთვნის**, ან **არ ეკუთვნის**. მაგალითად, მე თუ სტუდენტი ვარ, რომელიც ამ საკლასო ოთახში იმყოფება, მე ვარ ამ კლასში მყოფი სტუდენტების სიმრავლის ელემენტი და ამგვარად, ვეკუთვნი ამ სიმრავლეს. მეორეს მხრივ, როგორც ასეთი, მე არ ვეკუთვნი ამ კლასში მყოფი სკამების სიმრავლეს. საზოგადოდ, მიღებულია, რომ სიმრავლეთა აღსანიშნავად იხმარონ ლათინური ანბანის დიდი ასოები, ინდექსებით ან მათ გარეშე (მაგ., **$A, B, C, \dots A_1, B_1, C_1, \dots$**). სიმრავლის ელემენტების ზოგადი აღნიშვნისათვის იხმარება ამავე ანბანის პატარა ასოები, ასევე ინდექსებით, ან მათ გარეშე ამ ანბანის ბოლოდან (მაგ **., $x, y, z, \dots x_1, y_1, z_1 \dots$**), ხოლო ანბანის საწყისი პატარა ასოები (ინდექსებით, ან მათ გარეშე), გამოიყენებულია მოცემულ სიმრავლეში კონკრეტული საგნის მისათითებლად. იმისათვის რომ მიკუთვნება გამოვხატოთ, იხმარება ნიშანი **$\in$** ხოლო როდესაც ამას არა აქვს ადგილი, იხმარება ნიშანი **$\notin$.** სხვა სიტყვებით, ჩანაწერი **$x \in A$** იკითხება როგორც "**x** არის **A** სიმრავლის ელემენტი", ხოლო ჩანაწერი **$x \notin A$ -** "**x** არ არის **A** სიმრავლის ელემენტი".

1.2. ითვლება, რომ სიმრავლე **მოცემულია,** თუ კი მოცემულია ამ სიმრავლის ყველა ელემენტის ჩამონათვალი, ანდა განსაზღვრულია წესი, რომლითაც

ნებისმიერი მოცემული ელემენტისათვის ცალსახად შეგვიძლია განვსაზღვროთ არის თუ არა ის ამ სიმრავლის ელემენტი. მეორე განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია, როდესაც საქმე ისეთ სიმრავლეებთან გვაქვს, რომლებიც ძალიან ბევრ ელემენტს შეიცავს, ანდა მათი რაოდენობა უსასრულოა. მაგალითად, **მზის სიტემაში მყოფი ასტეროიდთა სიმრავლე,** სავარაუდოდ, სასრულია, თუმცა მისი ჩამონათვალის სახით მოცემა, ალბათ, შეუძლებელი იქნებოდა. მეორეს მხრივ, **მზის სისტემის პლანეტათა სიმრავლის** განსაზღვრა შესაძლებელია არსებული (ან უკვე ცნობილი) პლანეტების სახელების ჩამოთვლით. სხვათა შორის, **მზის სისტემის პლანეტათა სიმრავლე** და **ჩვენთვის ცნობილი პლანეტების სიმრავლე,** შესაძლოა, სხვადასხვაც იყოს. თუ, ვთქვათ, გვაქვს რაიმე სიმრავლე **A,** და ვიცით, რომ ის ოთხი **a,b,c** და **d** ელემენტისაგან შედგება, მაშინ, მიღებულია, რომ მისი ჩამონათვალის სახით ჩაწერა შემდეგნაირად მოხდეს: **A = {a,b,c,d}.** ხოლო ჩანაწერი **{x: x∈A}** იკითხება როგორც "**იმ** (ან, **ყველა იმ) ელემენტთა სიმრავლე, რომელიც ეკუთვნის A-ს**" და აღნიშნავს იმ ვითარებას, როდესაც სიმრავლე გასაზღვრულია გარკვეული წესით. ჩვენ შემთხვევაში, ეს წესი ელემენტის **A-**სადმი კუთვნლებას გულისხმობს. სხვა სიტყვებით, **x** შეიძლება იყოს ან **a**, ან **b**, ან **c**, ან **d**.

1.3. ზოგჯერ ხდება, რომ სიმრავლეთა განხილვისას ისეთ ვითარებას ვაწყდებით, როდესაც ერთი სიმრავლე მთლიანად შეიცავს მეორე სიმრავლის ელემენტებს, ანდა ეს ელემენტები ერთი და იგივეა. მაგალითად, ლუწი **რიცხვების სიმრავლე** შეიცავს **20-ზე ნაკლები ლუწი რიცხვების სიმრავლეს,** ხოლო **იმ რიცხვთა სიმრავლე, რომლის 2-ზე გაყოფაა შესაძლებელი,** მას მთლიანად ემთხვევა. როდესაც ადგილი აქვს ან ერთ, ან მეორე შემთხვევას, ვამბობთ, რომ მეორე სიმრავლე პირველის **ქვესიმრავლეს** წარმოადგენს. ამის ჩაწერა შემდეგნაირად ხდება: ვთქვათ, ჩვენი სიმრავლეებია **A** და **B.** ჩანაწერი **A⊆B,** ან **B⊇A** ნიშნავს, რომ **A** ქვესიმრავლეა **B-**სი. როდესაც ასეთი რამ არ ხდება, ვხმარობთ ნიშანს **⊈** ან **⊉** შესაბამისად. როდესაც ხაზი გვინდა გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ რაიმე სიმრავლე, ვთქვათ, იგივე **A,** არის მეორე სიმრავლის (ვთქვათ, **B**-ს) ქვესიმრავლე, თუმცა ამ უკანასკნელს არ ემთხვევა, ვხმარობთ შემდეგი სახის ჩანაწერს **A⊂B,** ან **B⊃A** და ვამბობთ, რომ **A საკუთრივი ქვესიმრავლეა B** –სი. იგივეს ჩაწერა, სხვათაშორის, სხვანაირადაც შეიძლება: **A⊆B** იგივეა, რაც **{x:** თუ **x∈A,** მაშინ **x∈B}.**

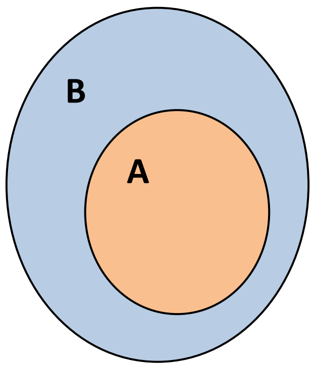
1.4. დავუბრუნდეთ ჩვენს საკლასო ოთახს. ვთქვათ, ამ მომენტისათვის მასში არც ერთი სტუდენტი არ იმყოფება. მაშინ რას უნდა ნიშნავდეს გამოთქმა **ამ კლასში ამჟამად აქ მყოფი სტუდენტების სიმრავლე?** რა თქმა უნდა, სიცარიელეს. სხვა სიტყვებით, სიმრავლე, რომელიც ელემენტებს არ შეიცავს (ანუ არ არსებობს ისეთი საგანი, რომელიც მისი ელემენტი იქნებოდა) **არის ცარიელი.** ცარიელი სიმრავლის აღსანიშნავად, ჩვეულებრივ, ხმარობენ **∅** სიმბოლოს. მაშასადამე, თუ **A** ცარიელი სიმრავლეა, ეს ასეთნაირად

შეგვიძლია ჩაწეროთ: **A=∅,** ანდა **A**-თვის ვიხმაროთ ჩანაწერი: **{x: x∈A** და **x∉A}.** საკითხი, თუ რატომ გვჭირდება ასეთ სიმრავლეებზე ლაპარაკი, და ხომ არ ჯობია, საერთოდ უგულვებელვყოთ ისინი, სინამდვილეში არც ისე მარტივია. ამიტომ აქ მასზე არ შევჩერდებით. შევთანხმდეთ, რომ ცარიელ სიმრავლესაც ისეთივე უფლება აქვს იყოს მსჯელობისა თუ განსჯის ობიექტი, როგორც მათემატიკაში **0**-ს. სხვათა შორის, მათი თვისებებიც საოცარ მსგავსებას ამჟღავნებენ.

1.5. გარდა ცარიელი სიმრავლისა, მიღებულია ვისაუბროთ ასევე ორი სახის მეტად თავისებურ სიმრვლეებზე. ესენია **უნივერსალური სიმრავლე** და **ერთეულოვანი სიმრავლეები.** პირველ სიმრავლეზე ლაპარაკისას ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმ გარემოებას, თუ როგორ არის შემოსაზღვრული არე იმ ობიექტებისა, რომელიც ჩვენი მსჯელობის საგნადაა ქცეული. ზოგადად, ეს სხვადასხვა ველებია, და განსხვავება, ხშირად, ფრიად მნიშვნელოვან ხასიათს ატარებს. ზემოთ მოტანილ მაგალითში ჩვენი ყურადღების ობიექტი კონკრეტული საკლასო ოთახი იყო, რომლის გარეთ ჩვენ არ გავდიოდით და სხვადასხვა სიმრავლეებსაც მის შიგნით ვარჩევდით. ამ შემთხვევაში, უნივერსალური სიმრავლის როლს (მას ზოგჯერ **ბჭობის უნივერსუმსაც** ეძახიან) **ამ კლასში არსებული ყველა საგნის სიმრავლე ასრულებს**. სხვა შემთხვევაში, ანუ როდესაც ჩვენი განსჯა სხვა ობიექტებზეა მიმართული, ვთქვათ, იგივე პლანეტებზე, ანდა ნატურალურ რიცხვებზე, **ბჭობის უნივერსუმიც** და **უნივერსალური სიმრავლეც** შესაბამისად **ციურ სხეულთა სიმრავლე** და **რიცხვთა ღერძი** შეიძლება რომ იყოს. ვამბობთ, რომ **შეიძლება**, ვინაიდან, მათ გარდა, სხვაგვარი უნივერსუმებიცაა შესაძლებელი. ეს იმაზეა დამოკიდებული, თუ რა დონეზე ვირჩევთ იმ საზღვრებს, რომლის იქით მსჯელობისას გასვლას არ ვაპირებთ. მაგალითად, იგივე პლანეტებთან დაკავშირებით, ეს უნივერსუმი, სულ მცირე, **მზის სისტემა** შეიძლება რომ იყოს, ანდა, სულაც, **სამყაროში არსებულ გალაქტიკათა ერთობლიობა.** ნატურალური რიცხვებისთვის კი **მთელი რიცხვების,** ანდა, სულაც **ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე.** სხვათა შორის, ამის გამო, სასარგებლოა, რომ სიმრავლეებით ოპერირებისას, კარგად გვქონდეს **განსაზღვრული** ის უნივერსუმი, რომლის ქვესიმრავლეებსაც ჩვენი განსახილველი სიმრავლეები წარმოადგენს. უნივერსალური სიმრავლის აღსანიშნავად მიღებულია ვიხმაროთ **U** (პირველი ასო სიტყვისა UNIVERSAL). რაც შეეხება ერთეულოვან სიმრავლეებს, ანუ სიმრავლეებს, რომლებიც მხოლოდ ერთ ელემენტს შეიცავს, შესაძლოა, გააზრებისას იგივე სირთულეები ახლდეს, რაც ცარიელი სიმრავლის გააზრებას. შევთანხმდეთ, რომ ამჯერად ეს სირთულეები არ გვაინტერესებს, ხოლო ერთელემენტიანი სიმრავლეების შენარჩუნება ისევე სასარგებლოა (უფრო, ალბათ, მოსახერხებელი) როგორც ცარიელისა.

1.6. **ვენის დიაგრამები. 1881** წელს ბრიტანეთში გამოიცა ბრიტანელი ლოგიკოსისა და ფილოსოფოსის **ჯონ ვენის** (1834-19230) წიგნი სათაურით

სიმბოლური ლოგიკა *(Symbolic Logic),* სადაც, სიმრავლეებზე საუბრისას მან სისტემური სახით გამოიყენა ე.წ. **დიაგრამების მეთოდი**, რომელიც ძალიან მალე პოპულარული გახდა მეცნიერთა შორის. დღეს მას წარმატებით იყენებენ სიმრავლეთა თეორიაში, ლოგიკაში, სტატისტიკასა და კომპიუტერულ მეცნიერებებში. ამის გამო, ამ მეთოდს, მის საპატივცემულოდ, **ვენის დიაგრამები ეწოდა.** მეთოდის არსი ძალიან მარტივია. თვალსაჩინოებისთვის, სიმრავლეები წრეებითაა წარმოდგენილი, რომლებიც ზოგჯერ კვეთენ, ზოგჯერ ფარავენ ან ნაწილობრივ ფარავენ ერთმანეთს. მგალითად. თუ გვაქვს ორი, **A** და **B** სიმრვლე, მაშინ ის, რომ პირველი მეორეს საკუთრივი ქვესიმრავლეა, ვენის დიაგრამით შემდეგნაირად გამოიხატება:



A⊂B

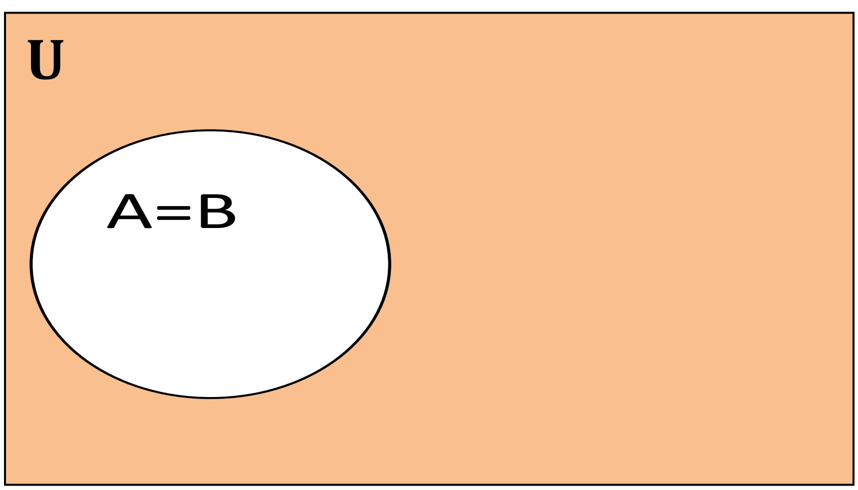
ქვემოთ, ვენის დიაგრამებს ხშირად მივმართავთ სიმრავლეთა სხვადასხვა თვისებებისა და მათ შორის არსებული მიმართებების აღსაწერად.

§2. ძირითადი დამოკიდებულებები სიმრავლეებს შორის.

ის, რომ სიმრავლეები უნდა განსხვავდებოდნენ იმ ობიექტებისაგან, რომლებიც მათ ელემენტებს წარმოადგენს, თითქოს თავისთავად გასაგები და ცხადი რამ უნდა იყოს. მართლაც **ამ კლასში მყოფი სკამების ციმრავლე** სრულებითაც არ არის სკამი, ხოლო **ამ კლასში მყოფი სტუდენტების სიმრავლე** არ არის სტუდენტი. თუმცა ეს ყოველთვის ასე არაა, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით, თუ კი ისეთ ერთობლიობაზე დავიწყებთ მსჯელობას, როგორსაც, მაგალითად, **ყველა სიმრავლის სიმრავლე** ქმნის. თუმცა ამაზე ცოტა ქვემოთ. ამჟამად, ჩვენ სულ სხვა პრობლემა გვაინტერესებს. ცხადია, რომ სიმრავლეები თავად შეიძლება ქმნიდნენ სიმრავლეებს. მაგალითად, ვარსკვლავთა სისტემები, რომლებიც ციურ სხეულთა გარკვეულ სიმრავლეებს ქმნიან, უფრო დიდი სისტემების, გალაქტიკების ელემენტებად შეგვიძლია მოვიაზროთ. ეს უკანასკნელნი, ასევე ქმნიან გარკვეულ ერთობლიობას და ა.შ. უფრო თვალსაჩინო მაგალითების მოძიებაცაა შესაძლებელი, თუ კი ჩვენს უნივერსუმად რიცხვთა ღერძს მოვიაზრებთ. იმ

უამრავი შესაძლებლობის განხილვიდან, რასაც აღნიშნული უნივერსუმი სხვადასვა სიმრავლეთა ასაგებად იძლევა, შეგვიძლია ერთ საინტერესო გარემოებას მივაქციოთ ყურადღება: როგორი ორი **არაცარიელი** სიმრავლეც არ უნდა ავიღოთ, **მათ შორის მხოლოდ ხუთი დამოკიდებულებაა შესაძლებელი.** კერძოდ, სიმრავლეები შეილება **ემთხვეოდნენ** ერთმანეთს, შესაძლოა ისინი **ნაწილობრივ ემთხვეოდნენ** ერთმანეთს, შეიძლება რომ ერთი იყოს მეორეს ნაწილი, ანდა შესაძლოა ეს დამოკიდებულება პირიქით ხორციელდებოდეს, და ბოლოს, სიმრავლეები საერთოდ არ "ეხებოდნენ" ერთმანეთს, სხვა სიტყვებით, არ არსებობდეს მოცემულ უნივერსუმში ისთი ელემენტი, რომელიც მათ, შესაძლოა, საერთო ქონდეთ. განვიხილოთ ეს ვითარებები ცალ-ცალკე. ვთქვათ ჩვენი უნივერსუმია **U** და მასში ნებისმიერად შევარჩიეთ ორი **არაცარიელი** სიმრავლე **A** და **B**:

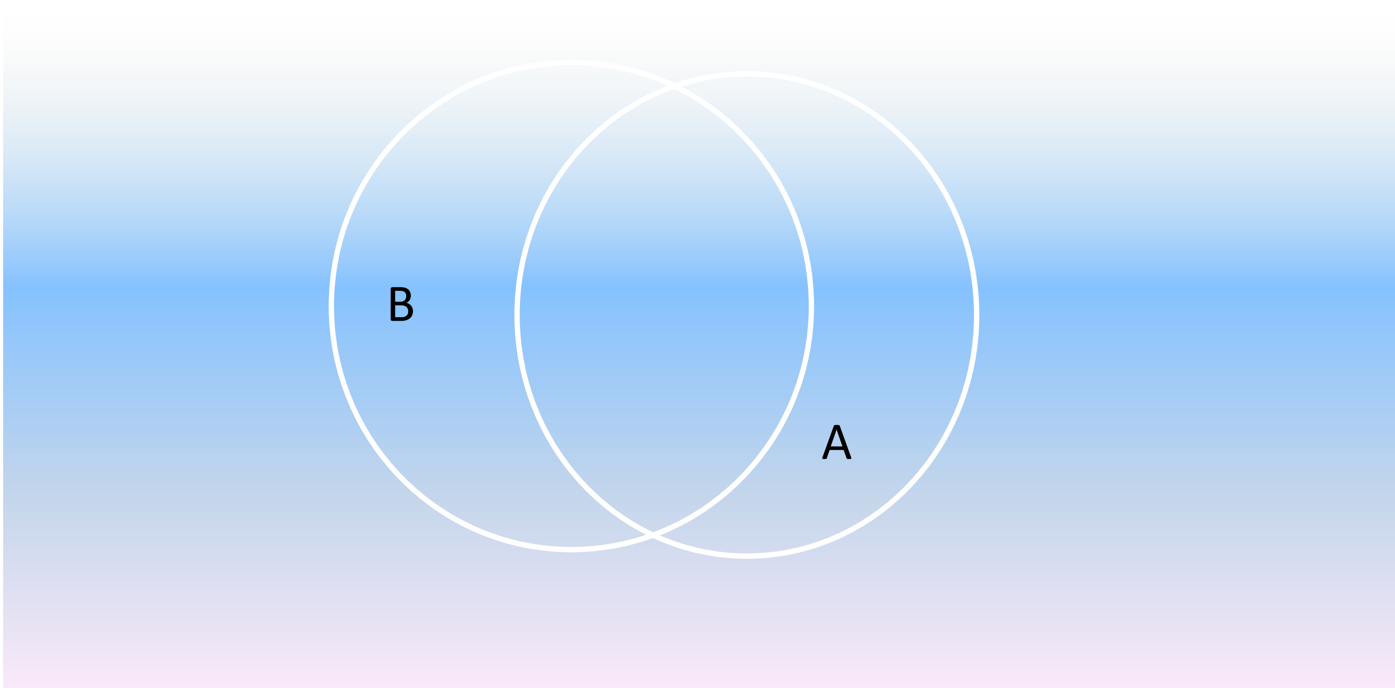
2.1. **რას უნდა ნიშნავდეს, რომ ისინი ერთმანეთს ემთხვევა?** როგორცა ჩანს, სხვას არაფერს, გარდა იმისა, რომ ორივე სიმრავლე ერთი და იგივე ელემენტებისაგანაა შედგენილი. სხვა სიტვებით. თუ **x∈ A,** მაშინ **x∈ B,** და პირიქითაც, თუ რაიმე ელემენტი, ვთქვათ **y** ეკუთვნის **B**-ს (**y∈ B),** მაშინ **y** ეკუთვნის **A**-ს (**y∈ A).** სხვათა შორის, ეს ვითარება ერთი წინადადებითაც შეგვიძლია გამოვთქვათ: ნებისმიერი ელემენტისათვის **U**-დან, თუ იქიდან, რომ ის ეკუთვნის **A**-ს, გამოდის, რომ ის ამავდროულად ეკუთვნის **B**-ს, და პირიქით, მაშინ ეს სიმრავლეები **იგვეობრივი** სიმრავლეები არიან. ვენის დიაგრამაზე ეს შეიძლება ასე აღიბეჭდოს:



სიმრავლეთა მაგალითები, რომლებიც ერთმანეთს ემთხვევა იმ აზრით, რომ ერთი და იგივე ელემენტებისგან შედგებიან, მრავლად შეგვიძლია მოვიტანოთ

და ეს სავარჯიშოს სახით შეიძლება გაკეთდეს. აქ ყურადღება მივაქციოთ ერთ საინტერესო გარემოებას, რომელიც ჩვენი განმარტებიდან გამოდის: **ყველა ცარიელი სიმრავლე ერთმანეთის იგივეობრივია** (რატომ?), რასაც ვერ ვიტყვით, თუნდაც, ერთელემენტიან სიმრავლეებზე (რატომ?).

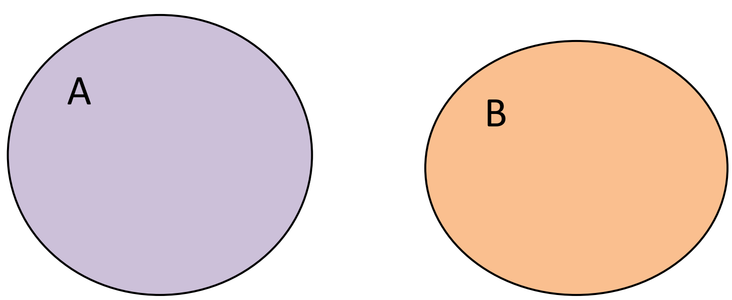
2.2. რას უნდა ნიშნავდეს ის გარემოება, რომ მოცემული სიმრავლეები ნაწილობრივ ემთხვევა ერთმანეთს? აქაც საინტერესო ვითარება გვაქვს. ნაწილობრივ დამთხვევა ნიშნავს რომ **A** და **B** სიმრავლეებს, რომელთაგან არც ერთი არ არის მეორის ქვესიმრავლე, რაღაც ელემენტები (თუნდაც ერთი) საერთო აქვთ. სხვა სიტყვებით, უნივერსუმში უნდა არსებობდეს ერთი ელემენტი მაინც ისეთი, რომ ის ეკუთვნის როგორც ერთ, ისე მეორე სიმრავლესაც. ბუნებრივია, ასეთი ელემენტი მეტიც შეიძლება რომ იყოს. ნაწილობრივ ემხთვევა ერთმანეთს, მაგალითად, მამაკაცებისა და სამხედრო მოსამსახურეთა, 20 წლამდე ვაჟებისა და სტუდენტი ვაჟების, პოეტებისა და მომღერლების სიმრავლეები. მაშასადამე, პირობა იმისა, რომ **A** და **B** სიმრავლეები ნაწილობრივ ემთხვევა ერთმანეთს, არის ის, რომ $\mathbf{A \nsubseteq B}$ და $\mathbf{B \nsubseteq A}$ და, ამავე დროს, უნივერსუმში არსებს ისეთი ობიექტი (ობიექტები), ვთქვათ **a**, რომლისთვისაც სამართლიანია როგორც $\mathbf{a \in A}$, ასევე $\mathbf{a \in B}$. ვენის დიაგრამით ეს შეიძლება ასე გამოისახოს:



მოცემულ დიაგრამაზე **A** და **B** სიმრავლეების ურთიერთგადამფარავი (გადამკვეთი) ნაწილი კარგ წარმოდგენას გვიქმნის იმაზე, თუ რას ნიშნავს რომ ისინი ერთმანეთს ნაწილობრივ ემთხვევა.

2.3. **ახლა ვნახოთ თუ რასთან გვაქვს საქმე, როდესაც ერთი სიმრავლე მეორის ნაწილია:** ეს ის შემთხვევაა, როდესაც ერთი სიმრავლე მეორის საკუთრივ ქვესიმრავლეს წარმოადგენს. სხვა სიტყვებით, მისი ყოველი ელემენტი ამავე დროს მეორის ელემენტიცაა, ხოლო მეორეს დამატებით, სხვა ელემენტებიც გააჩნია. წინა პარაგრაფში მოტანილი დიაგრამა სწორედ ამ შემთხვევას ასახავს. სხვათა შორის, აქედან ერთი, მეტად საინტერესო, გარემოება გამოდის: **ცარიელი სიმრავლე ყველა სხვა სიმრავლის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს** (რატომ?).

2.4. **რა ვითარებასთან გვაქვს საქმე, როდესაც არაცარიელი სიმრავლეები, ასე ვთქვათ, ერთმანეთს არ "ეხებიან"?** ასეთ სიმრავლეებს **გამიჯნულ სიმრავლეებს** უწოდებენ. ბუნებრივია, ვიფიქროთ, რომ **A** და **B** სიმრავლეები გამიჯნულები მხოლოდ მაშინ იქნებიან, როდესაც მათ არც ერთი საერთო ელემენტი არ გააჩნიათ. ასეთი სიმრავლეების მაგალითების მოძიება საკმაოდ ადვილია. უნივერსუმად, მაგალითად რომ ჩვენი საკლასო ოთახი ავიღოთ, **ამ კლასში მყოფი სკამების ციმრავლე** და **ამ კლასში მყოფი სტუდენტების სიმრავლე** სწორედაც რომ გამიჯნულები უნდა იყოს, ვინაიდან არც ერთი სტუდენტი არ არის სკამი და არც ერთი სკამი, თავის მხრივ, არ არის სტუდენტი. ანუ, საქმე გვაქვს შემდეგ ვითარებასთან: ნებისმიერი ელემენტისათვის **U**-დან, თუ იქიდან, რომ ის ეკუთვნის **A**-ს, გამოდის, რომ ის არ ეკუთვნის **B**-ს, და პირიქით, თუ კი ის ეკუთვნის **B**-ს, მაშინ ის არ ეკუთვნის **A**-ს, ხოლო **A** და **B** არაცარიელი სიმრავლეებია **U**-დან, მაშინ **A** და **B** გამიჯნული სიმრავლეებია. ვენის დიაგრამაზე ეს შეიძლება ასე აღიბეჭდოს:



ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ **არაცარიელ სიმრავლეებს შორის სხვა არანაირი დამოკიდებულება არ არსებობს**, თუმცა, ერთ-ერთი აუცილებლად ხორციელდება. სავარჯიშოს სახით, შეგვიძლია დავასაბუთოთ ისიც, რომ თუ ადგილი აქვს ერთ-ერთს, მაშინ სხვა არც ერთი განხორციელებული არ იქნება. დასაბუთებისათვის შეიძლება ვენის დიაგრამები გამოვიყენოთ.

§3. ოპერაციები სიმრავლეებზე:

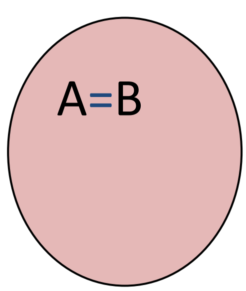
ცოტა ხნით დავივიწყოთ, რომ სიმრავლეები ნებისმიერ ელემენტთა ერთობლიობებს წარმოადგენს და მათ როგორც გარკვეული ტიპის მათემატიკურ ობიექტებს, ისე შევხედოთ. მათემატიკური ობიექტების ერთ-ერთ მნიშნელოვან თავისებურებას წარმოადგენს ის, რომ მათზე გარკვეული ოპერაციების ჩატარებაა შესაძლებელი. მაგალითად, ნატურლური რიცხვებისათვის ესენია შეკრება, გამოკლება და გამრავლება. გაყოფას, როგორც ცნობილია, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს გარეთ გავყავართ. ვნახოთ, რა ოპერაციებია შესაძლებელი, თუ რიცხვების ნაცვლად თავად სიმრავლეები გვაქვს? თავდაპირველად, ჩამოვყალიბდეთ, თუ რას დავარქვათ **ოპერაცია** სიმრავლეებზე**?** შინაარსობრივად ეს ისეთ მოქმედებას გულისხმობს, რომელიც ორი, ან მეტი სიმრავლიდან სავსებით კონკრეტულ, ახალ სიმრავლეს გვაძლევს (ანუ მიგვითითებს იმ წესზე, თუ როგორ უნდა აიგოს ეს ახალი სიმრავლე, როდესაც რაღაც მოცემულობა გაგავაჩნია). შედარებისთვის, გავიხსენოთ, თუ როგორ განვსაზღვრავდით არითმეტიკულ მოქმედებებს მათემატიკის სასკოლო კურსში. სხვათაშორის, სიმრავლეებზე განსახორციელებელი ოპერაციები ძალიან ჰგავს კიდეც არითმეტიკულ მოქმედებებს იმ აზრითაც, რომ წესები, რომელიც ძალაშია არითმეტიკული მოქმედებისთვის, ასევე ძალაშია ამ ოპერაციებისთვისაც.

3.1. გაერთიანება და მისი თვისები. ორი **A** და **B** სიმრავლის გაერთიანებად მიჩნეულია ისეთი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ყველა ელემენტს **A-** დან და ყველა ელემენტს **B-**დან. სხვა სიტყვებით, **A** და **B** სიმრავლის გაერთიანება აგებულია **A** და **B** სიმრავლის ელემენტების თავმოყრით, შეერთებით.

მაგალითად, ლუწი და კენტი ნატურალური რიცხვების სიმრავლეთა გაერთიანება არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე.

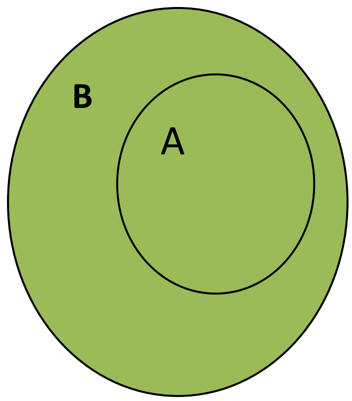
სიმრავლეთა გაერთიანების ოპერაციის აღსანიშნავად იხმარება სიმბოლო $\cup$, რომელიც მოცემულ სიმრავლეთა შორის იწერება. ასე, რომ ჩანაწერი **A∪B** ნიშნავს **A** და **B** სიმრავლეების გაერთიანებას.

3.1.1. ვთქვათ, **A=B. რას უნდა წარმოადგენდეს მაშინ A∪B?** დავუშვათ, გვაქვს **A=B={a,b,c,d},** ანუ, **A= {a,b,c,d},** და **B={a,b,c,d}.** თუ ჩვენს გამარტებას მოვიშველიებთ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ **A∪B=A** ანდა, რაც იგივეა, **A∪B=B.** თვალსაჩინოებისათვის მივმართოთ ვენის დიაგრამას:



ერთ-ერთი შედეგი, სხვათა შორის, არის ის, რომ $\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$.

3.1.2. ვთქვათ, **$A\subset B$. რას უნდა წარმოადგენდეს მაშინ $A\cup B$**? დავუშვათ **$A=\{a, c\}$,** ხოლო **$B=\{a,b,c,d\}$.** გაერთიანების გამარტება მოვიშველიოთ და ვნახავთ, რომ ამ შემთხვევაში, **B**, ასე ვთქვათ, “შთანთქავს” **A**-ს, ანუ, რაც იგივეა, რომ **$A\cup B=B$.** თვალსაჩინოებისათვის მივმართოთ ვენის დიაგრამას:



ეს არც უნდა იყოს გასაკვირი. მაგალითად, ლუწი და ნატურალური რიცხვების სიმრავლეთა გაერთიანება ხომ ისევ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა.

3.1.3. ვთქვათ, **$A\supset B$. რას უნდა წარმოადგენდეს $A\cup B$**? პასუხს ადვილად მივაგნებთ, თუ კი წინა შემთხვევაში **A** და **B** სიმრავლეებს ადგილებს შევუნაცვლებთ.

1.4. ვთქვათ, **A** და **B** ნაწილობრივ ემთხვევა ერთმანეთს**. რას უნდა წარმოადგენდეს** ასეთ შემთხვევაში **$A\cup B$**? დავუშვათ **$A=\{a,b, c\}$,** ხოლო **$B=\{c,d,j\}$.** გამარტების თანახმად ეს უნდა იყოს **$\{a,b, c,d,j\}$,** სხვა სიტყვებით, ეს არის სიმრავლე, რომელიც მათი საერთო ელემენტების გარდა შეიცავს მათ იმ ელემენტებაც, რომელიც მათ განსხვავებული გააჩნიათ. **სავარჯიშოს სახით ააგეთ შესაბამისი ვენის დიაგრამა**.

3.1.5. ვთქვათ, **A** და **B** გამიჯნული სიმრავლეებია. **რას უნდა წარმოადგენდეს $A\cup B$?** განმარტების მიხედვით, ეს **A** და **B** სიმრავლის ელემენტების მექანიკური შეერთებით მიღებული სიმრავლე იქნება.

3.1.6. ვთქვათ, **A** ცარიელი სიმრავლეა. ადვილი სანახავია, რომ მისი გაერთიანება ნებისმიერ სხვა არაცარიელ სიმრავლესთან თავად ამ სიმრავლის იგივეობრივი იქნება.

3.1.7. თუ **A** უნივერსალური სიმრავლეა, ასევე ადვილი სანახავია, რომ მისი გაერთიანება სხვა ნებისმიერ სიმრავლესთან ისევ **A** იქნება **(ახსენით 3.1.6 და 3.1.7)**

3.1.8. ვენის დიაგრამების გამოყენებითა და გაერთიანების განმარტებაზე დაყრდნობით, სავარჯიშოს სახით, ავხსნათ გაერთიანების შემდეგი ძირითადი თვისებები:

A⊆A∪B

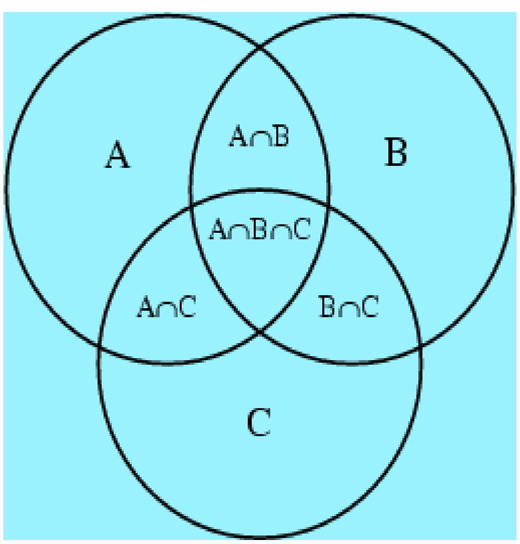
A⊆A∪A

A∪B⊆B∪A

B∪A⊆A∪B

((A∪B)∪C))⊆(A∪(B∪C))⊆(A ∪B∪C)

3.2. კვეთა. ზემოთ ჩვენ ერთმანეთის ნაწილობრივ გადამფარავ სიმრავლეებზე ვისაუბრეთ. ხშირად, ასეთ სიმრავლეებს ურთიერთგადამკვეთ სიმრავლეებს, ხოლო თავად გადაფარვას, კვეთას უწოდბენ. კვეთა ოპერციადაც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომლის საშუალებით, ორი ან მეტი სიმრავლიდან ახალი სიმრავლე შეგვიძლია გამოვყოთ, რომელიც ხასიათდება იმით, რომ შედგება იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებისაგან, რომელის მოცემულ სიმრავლეებს საერთო აქვთ. კვეთას ∩ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. სხვანაირად, ეს შეიძლება შემდეგნაირადაც გამოვთქვათ: **x∈(A∩B)** ზუსტად მაშინ,როდესაც **x∈A** და **x∈B,** ანდა, სხვა სიტყვებით, **x∈A** და **x∈B,** სადაც **A** და **B** არაცარიელი სიმრავლეებია **U**-დან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც **x∈(A∩B).** თუ კარგად დავაკვირდებით ქვემოთ მოტანილ დიაგრამას, სადაც სამი სიმრავლის შემთხვევაა მოცემული, კარგად დავინახავთ, თუ რა იგულისხმება კვეთაში.



სხვათა შორის, ამ დიაგრამიდან კარგად ჩანს ისიც, თუ რა უნდა იყოს კვეთა, თუ კი სიმრავლეთა ძირითად დამოკიდებულებებს დავუბრუნდებით და იმ შემთხვევებს ვნახავთ, როდესაც სიმრავლეები ერთმანეთს ნაწილობრივ არ ფარავენ:

3.2.1. თუ **A⊂B,** მაშინ **A∩B=A**

3.2.2. თუ **A⊃B,** მაშინ **A∩B=B**

3.2.3. ხოლო, როდესაც **A** და **B** გამიჯნული (არაცარიელი) სიმრავლეებია, ბუნებრივია, მათი კვეთა ცარიელი სიმრავლე იქნება. ამიტომ, ის რომ სიმრავლეები გამიჯნულია, შესაძლოა შემდეგნაირადაც ჩავწეროთ: **A∩B=∅,** სადაც **A** და **B** არაცარიელი სიმრავლეებია **U**-დან.

3.2.4 ვთქვათ, **A** ცარიელი სიმრავლეა. ადვილი სანახავია, რომ მისი კვეთა ნებისმიერ სხვა არაცარიელ სიმრავლესთან ისევ ცარიელი სიმრავლე იქნება.

3.2.5. თუ **A** უნივერსალური სიმრავლეა, ასევე ადვილი სანახავია, რომ მისი კვეთა სხვა ნებისმიერ სიმრავლესთან ამ უკანასკნელის ტოლი იქნება**(**ახსენით **3.2.4** და **3.2.5)**

3.1.8. ვენის დიაგრამების გამოყენებითა და კვეთის განმარტებაზე დაყრდნობით სავარჯიშოს სახით, ავხსნათ კვეთის შემდეგი ძირითადი თვისებები:

A∩B⊆A

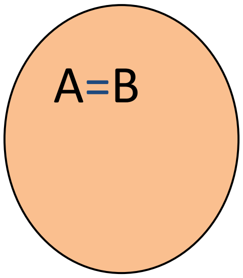
A∩B⊆B

A∩B⊆B∩A

((A∩B) ∩C))⊆(A∩(B∩C))⊆(A ∩B∩C)

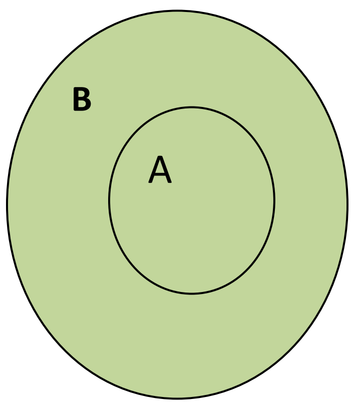
3.3. სხვაობა: სიმრავლეთა სხვაობად, ჩვეულებრივ, მიჩნეულია ისეთი სიმრავლე, რომელიც აგებულია საკლები სიმრავლის იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც არ ეკუთვნის მაკლებს. სხვაობისთვის ხშირად ხმარობენ სიმბოლოს "–"' როგორც ეს მათემატიკაშია მიღებული. ზოგჯერ, სხვა სიმბოლოსაც ხმარობენ. ვნახოთ, რა უნდა იყოს ორი სიმრავლის სხვაობა, მათი ძირითადი დამოკიდებულებების რეალიზაციის შემთხვევაში:

3.3.1. ვთქვათ, **A=B. რას უნდა წარმოადგენდეს მაშინ A-B?**
თვალსაჩინოებისათვის მივმართოთ ვენის დიაგრამას:



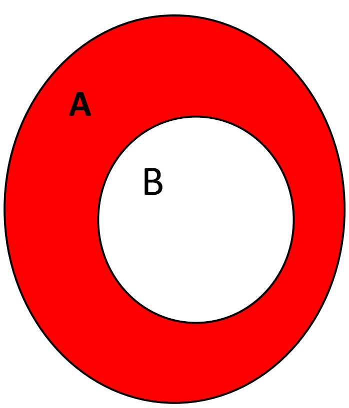
ვინაიდან, **A-**ში არ მოიძებნება ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის **B-**ს, ამიტომ ეს სხვაობა ცარიელი სიმრავლე უნდა იყოს, რაც, როგორცა ჩანს, ბუნებრივიცაა.

3.3.2. ვთქვათ, **A⊂B. რას უნდა წარმოადგენდეს მაშინ A-B**? სხვაობის გამარტება მოვიშველიოთ და ვნახავთ, რომ ამ შემთხვევაში, ვინაიდან **B** "შთანთქავს" **A**-ს, სხვა სიტყვებით, **A**-ში არ მოიძებნება ელემენტი, რომელიც, ამავდროულად, **B**-ს ელემეტი არ არის, ამიტომ **A-B=Ø.** თვალსაჩინოებისათვის მივმართოთ ვენის დიაგრამას:



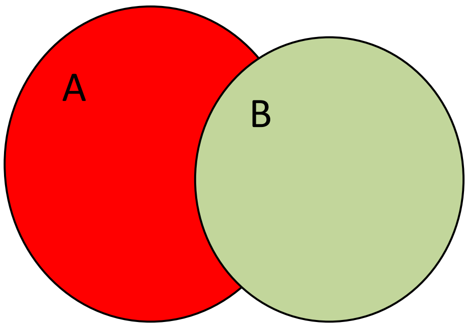
A-B=Ø

3.3.3. ვთქვათ, **A⊃B. რას უნდა წარმოადგენდეს A-B**? პასუხს ადვილად მივაგნებთ, თუ კი წინა შემთხვევაში **A** და **B**–ს ადგილებს შევუნაცვლებთ.



ამ შემთხვევაში, "მშთანთქმელი" სიმრავლე არის **A,** და როგორც ასეთს, აუცილებლად გააჩნია ისეთი ელემენტები, რომლებიც არ გააჩნია **B**–ს. შესაბამის ვენის დიაგრამაზე **A** სიმრავლის წითლად მონიშნული ნაწილი სწორედ (**A-B)-**ს წარმოადგენს. სხვათა შორის, ამ დიაგრამაზე ისიც ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში, **(A-B)=A-(A∩B).**

3.3.4. ვთქვათ, **A** და **B** ნაწილობრივ ემთხვევა ერთმანეთს**. რას უნდა წარმოადგენდეს ასეთ შემთხვევაში A-B**? დავუშვათ **A= {a,b, c },** ხოლო **B={c,d,j}.** გამარტების თანახმად ეს უნდა იყოს **{a,b},** სხვა სიტყვებით, ეს არის სიმრავლე, რომელიც **A-**ს მხოლოდ იმ ელემენტებს შეიცავს, რომელიც არ ეკუთვნის მათ კვეთას. ანუ, **A-B=A-(A∩B).**

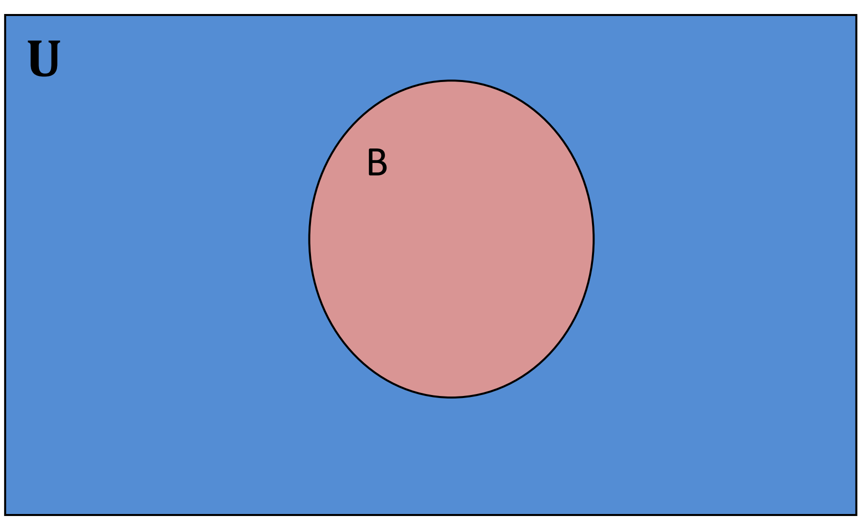


ვენის დიაგრამაზე **A** სიმრავლის წითლად მონიშნული ნაწილი სწორედ (**A-B)-**ს წარმოადგენს.

3.3.5. ვთქვათ, **A** და **B** გამიჯნული სიმრავლეებია. **რას უნდა წარმოადგენდეს A-B?** განმარტების მიხედვით, ეს არის **A .**

3.3.6. ვთქვათ, **A** ცარიელი სიმრავლეა. ადვილი სანახავია, რომ მისი და სხვა ნებისმიერ სიმრავლის სხვაობა ისევ ცარიელი სიმრალეა: **A-B=A**

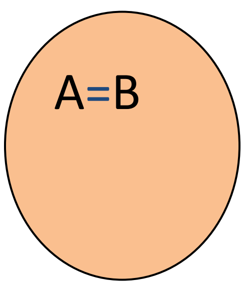
3.3.7. თუ **A** უნივერსალური სიმრავლეა, მაშინ მისი სხვაობა ნებისმიერ სხვა სიმრავლესთან წარმოადგენს მთელ დანარჩენ უნივერსუმს ამ სიმრავლის ელემენტების გარდა.



შესაბამის ვენის დიაგრამაზე ეს სხვაობა მოლურჯო ფერითაა მონიშნული. სხვათა შორის, მას განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება და ამის გამო, სპეციალური ტერმინითა და სიმბოლოთი აღნიშნავენ. უნივერსალური და მოცემული სიმრავლის სხვაობას ამ სიმრავლის **დამატება** ეწოდება და მას შტრიხით გამოხატავენ. მაგალითად, თუ **B** მოცემული სიმრავლეა, მაშინ მისი დამატება იქნება **B′.** სხვა სიტყვებით: **U-B=B′.** აქედან, სხვათა შორის, გამოდის ისიც, რომ **U-B′=B** და **B′∪B=U,** ხოლო **B′∩B=∅.**

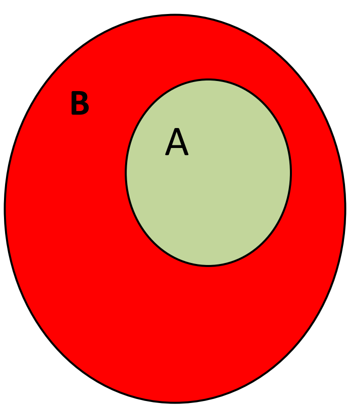
3.4. სიმეტრიული სხვაობა. სიმრავლეთა თეორიაში განიხილავენ სხვაობის კიდევ ერთ, მეტად საინტერესო სახეობას, ე.წ. **სიმეტრიული სხვაობა.** რას წარმოადგენს სიმრავლე, რომელიც ამ ოპერაციის შედგად არის მიღებული? ითვლება, რომ **A** და **B** სიმრავლეთა სიმეტრიული სხვაობა არის ისეთი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებს, რომლებიც ეკუთვნის მხოლოდ **A-**ს, ანდა მხოლოდ **B-**ს. მაგალითად, თუ გვაქვს, რომ **A= {a,b, c },** და **B={c,d,j},** მაშინ მათი სიმეტრული სხვაობა იქნება სიმრავლე **{a,b, d,j}.** ვნახოთ, რა სურათი გვექნება, შესაბამის ვენის დიაგრამას თუ მივმართავთ და სიმრავლეთა შორის ძირითად მიმართებებს გავითვალისწინებთ. სიმეტრიული სხვაობისათვის ვიხმაროთ ნიშანი **"/".**

3.4.1. A=B



ვინაიდან, **A-**ში არ მოიძებნება ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის **B-**ს, და პირიქით, ამიტომ ეს სხვაობა იქნება **∅**.

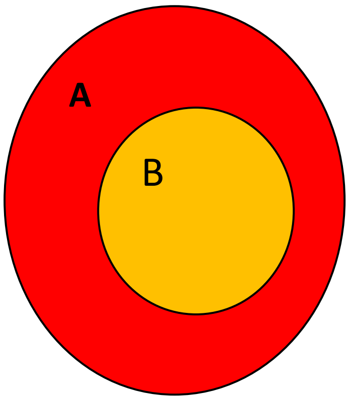
3.4.2. A⊂B.



განმარტება მოვიშველიოთ და ვნახავთ, რომ ამ შემთხვევაში, ვინაიდან **B** "შთანთქავს" **A**-ს, სხვა სიტყვებით, **A**-ში არ მოიძებნება ელემენტი, რომელიც, ამავდროულად, **B**-ს ელემეტი არ არის, ამიტომ ეს სხვაობა იქნება **B**-ს მხოლოდ იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომელიც არ გააჩნია **A**-ს,

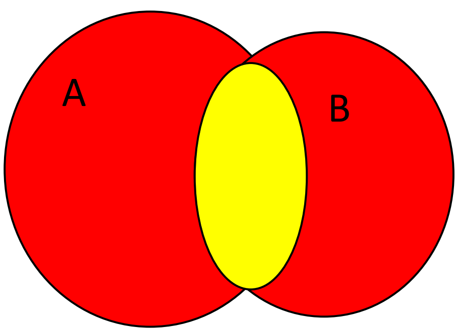
სხვა სიტყვებით, ის დაემთხვევა (**B-A**)-ს, რაც შესაბამის დიაგრამაზე წითლითაა მონიშნული.

3.4.3. **A⊃B.**



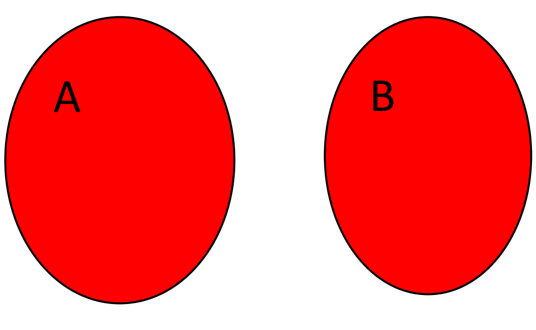
ამ შემთხვევაში, “მშთანთქმელი” სიმრავლე არის **A,** ამიტომ სიმეტრიული სხვაობა იგივეა, რაც (**A-B**).

3.4.4. **A∩ B ≠∅.**



ვენის დიაგრამაზე **A** და **B** სიმრავლეთა წითლად მონიშნული ნაწილი სწორედ საძიებელ სიმრავლეს წარმოადგენს.

3.4.5. **A∩ B =∅.**



ვენის დიაგრამაზე **A** და **B** სიმრავლეთა წითლად მონიშვნა იმაზე მიანიშნებს, რომ ამ შემთხვევაში, განმარტებიდან გამომდინარე, საძიებელი სიმრავლე მოცემულ სიმრავლეთა გაერთიანებას წარმოადგენს.

3.4.6. ვთქვათ, **A** ცარიელი სიმრავლეა. ადვილი სანახავია, რომ ნებისმიერი არაცარიელი **B-**სთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

- **A/A=∅**
- **A/B=B**
- **B/A=B**

ახსენით, რატომ?

3.4.7. თუ **A** უნივერსალური სიმრავლეა, მაშინ მისი სიმეტრული სხვაობა ნებისმიერ სხვა სიმრავლესთან წარმოადგენს მთელ დანარჩენ უნივერსუმს ამ სიმრავლის ელემენტების გარდა. სხვათა შორის, ეს 3.4.2 და 3.4.3.-დან გამომდინარეობს. ამგვარად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სიმეტრული სხვაობა, ზოგ შემთხვევაში, ემთხვევა სხვაობას, თუმცა ეს ორი სხვადასხვა ოპერაციაა.

3.5. სიმრავლეთა (კარტეზიანული) ნამრავლი. სიმრავლეებისათვის კიდევ ერთი ოპერაცია შეგვიძლია განვსაზღვროთ, ე.წ. მათი კარტეზიანული ნამრავლი. თუ მოცემული გვაქვს ორი **A** და **B** სიმრავლე, აღნიშნული ნამრავლი ისეთი სიმრავლეა, რომელიც შედგენილია წყვილებისაგან რომელთა პირველი წევრი **A** სიმრავლის ელემენტია, ხოლო მეორე წევრი - **B** სიმრავლისა. ნამრავლში ყველა ასეთი წყვილია მოცემული. მაგალითად, თუ **A** არის $\{a_1,a_2,a_3\}$, ხოლო **B** არის $\{b_1,b_2,b_3\}$, მაშინ კარტეზიანული ნამრავლი იქნება წყვილების შემდეგი სიმრავლე: $\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_1,b_2\rangle,\langle a_1,b_3\rangle,\langle a_2,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_2,b_3\rangle,\langle a_3,b_1\rangle,\langle a_3,b_2\rangle,\langle a_3,b_3\rangle\}$. სიმრავლეების კარტეზიანულ ნამრავლს X-ით აღნიშნავენ.

§4. უსასრულო სიმრავლეები და მათთან დაკავშირებული ზოგიერთი სიძნელე. რასელის პარადოქსი.

პირველ პარაგრაფში, სიმრავლების აღწერისას, ჩვენ უსასრულო სიმრავლეებიც ვახსენეთ. ის, რომ სიმრავლის უსასრულობა გონებისათვის უცხო არ უნდა იყოს და მისი მოაზრება, გარკვეულწილად, ბუნებრივიც კი ჩანს, თითქო საბაბსაც იძლევა იმისათვის, რომ მათზე ისევე, როგორც ჩვეულებრივ, სასრულ სიმრავლეებზე ვილაპარაკოთ. პრაქტიკულად, ჩვენ ასეც ვიქცევით. მაგალითად, წინადადებებში

"*სამყაროში ვარსკვლავთა რაოდენობა უსასრულოა*" და

"*ყველა ნატურალური რიცხვი არის მთელი და დადებითი რიცხვი*",

რომლებსაც ჩვეულებრივ წარმოვთქვამთ, და მეტიც, ჭეშმარიტადაც მივიჩნევთ, იგულისხმება, რომ აღნიშნული უსასრულობა გონებისთვის ისეთივე მოცემულობაა,

როგორც "*ამ საკლასო ოთახში მაგიდებისა და სკამების სიმრავლე*" . ეს რომ ასე არ იყოს, მაშინ მათი ჭეშმარიტებადაც მიჩნევა გაგვიძნელდებოდა. არადა, თუ კი პირველზე, ვთქვათ, რამე ფილოსოფიურ მოსაზრებათა გამო, ვინმემ შეიძლება ეჭვი გამოთქვას, მეორე წინადადება უეჭველადაა მიჩნეული. მიუხედავად ამისა, უსასრულო სიმრავლეები მეტად სპეციფიკური სიმრავლეებია და მათ გარკვეული "უცნაურობები" ახასიათებს. ერთ-ერთი ასეთი "უცნაურობაა", მაგალითად, ის, რომ რაოდენობრივი თვალსაზრისით, უსასრულო სიმრავლეები თავისივე საკუთრივი ქვესიმრავლეების ტოლძალოვანია. როდესაც ვამბობთ "ტოლძალოვანი", ვგულისხმობთ, რომ მოცემულ სიმრავლეებს **ელემენტთა ერთი და იგივე რაოდენობა გააჩნია**, რაც, სხვათა შორის, სრულებითაც არ ნიშნავს მათ იგივეობას, მიუხედავად იმისა, რომ იგივეობრივი სიმრავლეები ტოლძალოვანია. მაგალითად, ტოლძალოვანია ნატურალურ და ლუწ რიცხვთა სიმრავლეები, თუმცა ვერ ვიტყვით, რომ ისინი იგივეობრივია. სასრული სიმრავლეების ტოლძალოვნების საჩვენებლად, ხშირად შემდეგ პროცედურას მიმართავენ: ცდილობენ ერთი სიმრავლის ელემენტები შეუთანადონ (ასე ვთქვათ, "მიაბან") მეორე სიმრავლის ელემენტებს ისეთნაირად, რომ თითოეულ ელემენტს მხოლოდ ერთი ელემენტი ეთანადებოდეს. თუ ასეთი "მიბმის" შედეგად, ერთი სიმრავლის ყველა ელემენტს აღმოაჩნდა თავისი "წყვილი" მეორე სიმრავლეში და პირიქით, მაშინ ვიტყვით, რომ ისინი ტოლძალოვანი ყოფილან. შესაძლოა ისე აღმოჩნდეს, რომ ერთი სიმრავლის ყველა ელემენტს ყავს თავისი "მეწყვილე" მეორე სიმრავლეში, ხოლო მეორე სიმრავლის ელემენტებს შორის არის ისეთებიც, რომლებიც შეწყვილების გარეშეა დარჩენილი, მაშინ ეს სიმრავლეები არ იქნება ტოლძალოვანი. სხვათა შორის, ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ **მეორე სიმრავლის სიმძლავრე მეტია** პირველისაზე, რაც სხვას არაფერს ნიშნავს, გარდა იმისა, რომ მეორე სიმრავლეში უფრო მეტი ელემეტია ვიდრე პირველში. მაგალითად, თუ ჩვენს საკლასო ოთახს გავიხსენებთ, შეგვიძლია წაროვიდგინოთ, რომ მასში მაგიდების რაოდენობა ნაკლებია სკამების რაოდენობაზე, ხოლო ეს უკანასკნელი ტოლია კლასში ამჟამად მყოფი სტუდენტების რაოდენობისა. მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ **ამ კლასში მყოფი სტუდენტების** და **ამ კლასში მყოფი სკამების** სიმრავლეები ტოლძალოვანია, ხოლო **ამ კლასში მყოფი სკამების** და **ამ კლასში მყოფი მაგიდების** სიმრავლეები ტოლძალოვანი არაა და პირველი, ასე ვთქვათ, **მეტია** მეორეზე. ამ მაგალითიდან, სხვათა შორის, კარგად ჩანს ისიც, რომ შესაძლოა სასრილი სიმრავლეები ტოლძალოვანი არ იყონ, მაგრამ ეს არ ნიშნავს იმას, რომ რომელიმე მეორის ქვესიმრავლეა. იმაში, რომ უსასრულო სიმრავლეები თავისივე საკუთრივი ქვესიმრავლეების ტოლძალოვანია, ადვილად დავრწმუნდებით, თუ კი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს ლუწი რიცხვების სიმრავლეს შევადარებთ. სხვა სიტყვებით, ეს ნიშნავს, **რომ უსასრულო სიმრავლეებისათვის, მთელი მისი ნაწილის ტოლია**. მეტიც, თუ უსასრულო სიმრავლეს მის უსასრულო ქვესიმრავლეს გამოვაკლებთ, შედეგად, ზოგჯერ, ისევ უსასრულო სიმრავლეს ვიღებთ. ჩვენს მაგალითში, ნატურალურ და ლუწ რიცხვთა სიმრავლეების სხვაობა კენტი რიცხვების სიმრავლეს გვაძლევს, რომელიც ისევე უსასრულოა, როგორც ლუწი რიცხვების

სიმრავლე. ასევე “უცნაურობად” შეგვიძლია მივიჩნიოთ ის გარემოებაც, რომ თუ უსასრულო სიმრავლეს რაიმე ელემენტს (ელემენტებს) დავამატებთ, შედეგად ისევ უსასრულო სიმრავლე გვექნება. ეს, ფაქტიურად, ნიშნავს იმას, რომ სიმრავლე, რომელიც თუნდაც ერთი ელემენტით მეტს შეიცავს, ტოლია სიმრავლისა, რომელსაც ეს ელემენტი აკლია, რაც სავსებით გამორიცხულია, თუ კი საქმე სასრულ სიმრავლეებთან გვექნებოდა.

ის, რომ სიმრავლეთა უსასრულობა გარკვეულ სირთულეებს შეიცავდა, მათემატიკოსებისათვის იმთავითვე ცხადი შეიქნა, როგორც კი მათ ამ სიმრავლეებით ოპერირება დაიწყეს და სიმრავლეთა თეორიის მათემატიკის დასაფუძნებლად გამოყენება ცადეს. მეტიც, სულ მალე აღმოჩენილ იქნა რიგი სიძნელეებისა, რომელთა გადალახვა, ერთი შეხედვით, შეუძლებელიც ჩანდა და რომლებმაც მათემატიკის დაფუძნების ყველა იმდროინდელი ცდა ღრმა კრიზისში მოაქცია. ეს სიძნელეები სიმრავლეთა თეორიის **პარადოქსების** (ან **ანტინომიების**) სახელითაა ცნობილი და მე-20 საიკუნის დასაწყისის მათემატიკოსთა და ლოგიკოსთა განსაკუთრებული ყურადღების ობიექტს წარმოადგენდა. **პარადოქსი, ან ანტინომია** ისეთ ვითარებას ჰქვია, როდესაც სავსებით მისაღები დებულებებიდან ურთიერთ გამომრიცხავ დასკვნებამდე (წინააღმდეგობამდე) მივდივართ. ყველაზე ცნობილი ამ პარადოქსებიდან ე.წ. **რასელის პარადოქსია,** რომელიც მან 1901 წლის გაზაფხულზე აღმოაჩინა, როდესაც თავის ცნობილ წიგნზე ***Principles of Mathematics*** (მათემატიკის პრინციპები) (1903), მუშაობდა. პარადოქსი ჩნდება ისეთი სიმრავლეების განხილვისას, **რომლებიც თავის თავს ელემენტად არ შეიცავს.** ადრე ჩვენ გაკვრით შევეხეთ ასეთ სიმრავლეებს, როდესაც აღვნიშნეთ, რომ **ამ საკლასო ოთახში მყოფი მაგიდების სიმრავლე** თავად მაგიდა არ არის. მეტიც, სიმრავლეთა უმრავლესობა, რომელთანაც ჩვენ საქმე გვაქვს, სწორედ რომ ასეთი სიმრავლეებია. მაგალითად, რიცხვთა ნებისმიერი სიმრავლე არ არის რიცხვი, ხოლო ვარსკვლავების სიმრავლე არ არის ვარსკვლავი. ასე, რომ სავსებით ბუნებრივი ჩანს განვიხილოთ ყველა ასეთი სიმრავლის სიმრავლე, ანუ **სიმრავლე ყველა ისეთი სიმრავლისა (ვთქვათ, K), რომლებიც თავის თავის ელემენტი არაა.** ახლა დავსვათ კითხვა, არის თუ არა **K** თავის თავის ელემენტი? პასუხი გამაოგნებელია: თუ $K \in K$, მაშინ $K \notin K$, ხოლო თუ $K \notin K$, მაშინ $K \in K$. რასელის პარადოქსის რამოდენიმე სახესხვაობა არსებობს, რომელთაგან, ზოგიერთი, საკმაოდ სახალისოა. მაგალითად, **სოფლის დალაქის** პარადოქსი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: დადგენილია, რომ სოფლის დალაქი ემსახურება სოფლის მხოლოდ იმ მაცხოვრებლებს რომლებიც თვითონ არ იპარსავენ წვერს და მის გარდა არავინ არავის არ პარსავს. **ვინ უნდა გაპარსოს თავად დალაქი?** უნდა ითქვას, რომ თავის დროზე, სიმრავლისთეორიული პარადოქსების აღმოჩენამ მნიშვნელოვანო როლი შეასრულა მათემატიკისა და ლოგიკის განვითარებაში. თუმცა, მეტს აქ ამაზე არ შევჩერდებით: ეს მეტად სპეციფიკური, საინტერსო და ღრმა თემაა.

თავი II. პროპოზიციული ლოგიკის საწყისი ცნებები და ძირითადი კანონები

§1. რას ვუწოდებთ პროპოზიციულ ლოგიკას? მარტივი და რთული წინადადებები. საწინადადებო მაკავშირებლები.

პროპოზიციურ, ანუ წინადადებათა ლოგიკას, ვუწოდებთ ლოგიკის იმ ნაწილს, რომელიც შეისწავლის წინადადებთა შორის არსებულ დამოკიდებულებებს, რომელნიც, თავის მხრივ, მხოლოდ და მხოლოდ, ამ წინადადებათა აგების თავისებურებებითაა გაპირობებული. ავხსნათ ეს ვითარება კარგად: წინადადებათა მთელი ერთობლიობა, რომელიც ჩვენი განხილვის ობიექტად შეგვიძლია მოვიაზროთ (ასეთს კი, ძირითადად, რაიმე ენის, ვთქვათ, იგივე ქართულის, თხრობითი წინადადებების ერთობლიობა შეადგენს), პირობითად, შეგვიძლია ორ ნაწილად გავყოთ. ერთ ნაწილს ის წინადადებები შეადგენს, რომელიც, ასე ვთქვათ, **მარტივია,** იმ აზრით, რომ მათი დანაწევრება შემადგენელ წინადადებებად შეუძლებელია, ვინაიდან ისინი ამდაგვარ ნაწილებს არ შეიცავს. მაგალითად, ქართულ ენაში ასეთი იქნებოდა

მე ვხედავ მზეს, ანდა

თბილისში აქტიური პოლიტიკური ცხოვრებაა, ანდა

კავკასია მნიშვნელოვანი გეოპოლიტიკური რეგიონია.

ყველა ამ წინადადებას, მათი შინაარსისა და მათი შემადგენელი სიტყვების რაოდენობის სახვადასვაობის მიუხედავად, ერთი რამ აერთიანებს: **არც ერთი მათგანი არ შეიცავს ისეთ კომპონენტს, რომელიც თავად შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც დამოუკიდებელი წინადადება.** სწორედ ასეთ წინადადებებს ვუწოდებთ **მარტივს.** ზოგჯერ მათ **ატომარულ** წინადადებებსაც უწოდებენ, ხაზი რომ გაუსვან იმ ვითებას, რომ მათგან შეგვიძლია ავაგოთ სხვა, უფრო რთული წინადადებები ისევე, როგორც მოლეკულა იგება ატომისგან. ამ მეორე ჯგუფს **რთული წინადადები** ჰქვია და მათი აგებისათვის ჩვეულებრივი, სამეტყველო ენა უამრავ საშუალებას ფლობს, რომლებიც ამ ენის სინტაქსშია აღწერილი. ქვემოთ, ჩვენ ამ საშუალებათა შეზღუდული რაოდენობის განხილვით შემოვიფარგლებით. ეს ბუნებრივიცაა, ვინაიდან ჩვენ არა ენის სინტაქსს ვიკვლევთ, არამედ გარკვეული სინტაქსური საშუალებებით აგებული წინადადებების ურთიერთდამოკიდებულებას. ამგვარად, ფრაზა ***წინადადებთა შორის არსებულ დამოკიდებულებებს, რომელნიც, მხოლოდ და მხოლოდ, ამ წინადადებათა აგების თავისებურებებითაა გაპირობებული*** სწორედ ამ აზრით უნდა გავიგოთ. აქედან, სხვათა შორის, ერთი საინტერესო ვითარება გამომდინარეობს: ვინაიდან ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ წინადადებათა დაკავშირების თავისებურება, ანუ ის წესი, **თუ როგორ არის წინადადება აგებული,** ამიტომ არანაირი მნიშვნელობა არა აქვს იმ ვითარებას, თუ რთული წინადადების კომპონენტები რა შინაარსის მატარებელია. ჩვენი ინტერესის სფერო არა რთული წინადადების შინაარსი, არამედ მისი აგების სქემაა. შედეგად,

ჩვენ ყოველთვის ავარიდებთ თავს წინადადების შინაარს და მხოლოდ იმ საშუალებებზე მივმართავთ ყურადღებას, რითაც ის იგება. ამ საშუალებებს, ჩვეულებრივ, **საწინადადებო მაკავშირებლებს** ვუწოდებთ. ეს უკანასკნელნი, თავის მხრივ, ერთგვარი ოპერაციებია, რომლებიც, თუ კი მათ წინადადებებს მივუყენებთ, შედეგად ისევ წინადადებას მივიღებთ. მაგალითად, ზემოთმოყვანილი წინადადებებიდან, ისეთი მაკავშირებლის გამოყენებით, როგორიცაა სიტყვა **'და'** შეგვიძლია სხვადასხვა წინადადებები ავაგოთ, მიუხედავად იმისა, რომ ჩვეულებრივ სამეტყველო ენაში ზოგიერთი მათგანის გამოთქმისაგან, სულ ცოტა, თავს შევიკავებდით:

- ***i.*** *მე ვხედავ მზეს* ***და*** *თბილისში აქტიური პოლიტიკური ცხოვრებაა,*
- ***ii.*** *თბილისში აქტიური პოლიტიკური ცხოვრებაა* ***და*** *თბილისში აქტიური პოლიტიკური ცხოვრებაა,*
- **iii.** *კავკასია მნიშვნელოვანი გეოპოლიტიკური რეგიონია* ***და*** *მე ვხედავ მზეს* და სხვ.

აქაც მნიშვნელოვანი არა მათი შინაარსი, არამედ მათი აგების თავისებურებაა, რაც იმაში მჟღავნდება, რომ თითოეული მათგანი **'და'** მაკავშირებლის გამოყენებით არის აგებული და ამ აზრით, ერთნაირებია. შინაარსისგან ამდაგვარ დამოუკიდებლობას ხაზი რომ გავუსვან, პროპოზიციურ ლოგიკაში ე.წ. **საწინადადებო ცვლადებს** იყენებენ. ეს გახლავთ ლათინური ანბანის ასოები, რომლებიც იმდაგვარადვე გამოიყენება, როგორც ამას მათემატიკაში აკეთებენ, იმ განსხვავებით, რომ რიცხვების ნაცვლად, ცვლადების მნიშვნელობად აქ წინადადებები იგულისხმება. მაგალითად, თუ წინადადებას ***მე ვხედავ მზეს*** აღვნიშნავთ ასოთი **p**, ხოლო წინადადებას ***თბილისში აქტიური პოლიტიკური ცხოვრებაა*** ასოთი **q**, მაშინ წინადადება ***მე ვხედავ მზეს და თბილისში აქტიური პოლიტიკური ცხოვრებაა*** ასეთ სახე მიიღებს: **'p და q'**. ბუნებრივია, **p**-სა და **q**-ს ნაცვლად ნებისმიერი სხვა თხრობითი წინადადება შეგვიძლია ვიხმაროთ და თითოეულს იგივე სახე ექნება. სინამდვილეში, თვითონ გამოსახულება **'p და q'** არანაირ წინადადებას არ წარმოადგენს, არამედ წინადადებად იქცევა მხოლოდ მას შემდეგ, რაც ლათინური ასოების ნაცვლად მასში ქართული ენის რონელიმე თხრობითი წინადადებაა (ან ორი სხვადასვა წინადადებაა) ჩანაცვლებული. ქართულ ენას იმიტომ გავუსვით ხაზი, რომ **'და'** მაკავშირებელი ქართულ ენას ეკუთვნის. მის ნაცლად რომ გვქონოდა შინაარსობრივად იგივე, თუმცა ენობრივად განსხვავებული მაკავშირებელი **'and',** მაშინ ინგლისური წინადადებები უნდა ჩაგვესვა. ეს ვითარება ორ რამეზე მიგვანიშნებს:

1. **'p და q'** –ს მაგვარი გამოსახულებები ერთგავარი ყალიბები, ფორმებია, რომლების წინადადებად მხოლოდ მათში მყოფი ცვლადების შესაბამისი ენის წინადადებებით შენაცვლებით გარდაიქმნება. მათ ხშირად, ასევე, **საწინადადებო ფორმებად,** ან **ფორმულებად** მოიხსენიებენ. ეს ვითარება ყოველთვის უნდა ვიქონიოთ მხედველობაში, მიუხედავად იმისა აშკარად ვიხმართ ფრაზას **საწინადადებო ფორმა (**ან **ფორმულას)** თუ არა.
2. იმისათვის, რომ ჩვენი განხილვებისას მხოლოდ ქართულ ენაზე არ ვიყოთ მიბმული, როგორცა ჩანს, მაკავშირებლებისთვისაც გარკვეული სიმბოლოებია შემოსატანი, მსგავსად მათემატიკისა, სადაც. ვთქვათ, '+' აღნიშნავს ქართულად **შეკრებას,** ხოლო ინგლისურად, **add**-ს. თუმცა გამოსახულება **a+b** ორივე ენაზე ერთი და იგივე შინაარსის მატარებელია.

> ამის მიზეზია, სწორედ ის რომ **a+b=b+a** აზრიანია, მიუხედავად იმისა თუ რა ენაზე წავიკითხავთ მას.

უფრო დაწვრილებით მაკავშირებლებსა და მათ თვისებებზე, ასევე მათი საშუალებით აგებულ წინადადებათა ურთიერთდამოკიდებულებაზე და მიმართებებზე შემდეგ პარაგრაფებში გვექნება საუბარი.

§2. წინადადებათა ჭეშმარიტებითი მნიშვნელობა. ჭეშმარიტებითი ცხრილები

თხრობით წინადადებებს, გარდა იმისა, რომ ისინი შესაძლოა მარტივი, ან რთული აგებულებისა იყოს, გააჩნიათ კიდევ ერთი თავისებურება: მათი ერთი ნაწილი შეიძლება ჭეშმარიტი იყოს, ხოლო მეორე ნაწილი – მცდარი. ხშირად, წინადადებათა ჭეშმარიტება ან მცდარობა ადვილი ამოსაცნობია, ზოგჯერ კი ამისათვის ფიქრია საჭირო. ზოგჯერ ისეც ხდება, რომ გვიჭირს თქმა წინადადება ჭეშმარიტია თუ მცდარი არა იმის გამო, რომ შესაბამისი ცოდნა არ გაგვაჩნია, არამედ იმის გამო, რომ წინადადებაში გამოთქმული აზრი (დებულება) რეალობაში არაფერს არ ეხება, არაფრის მიმართაა გამოთქმული. მაგალითად, წინადადება ***კენტავრს ოთხი ფეხი აქვს.*** ჭეშმარიტია ის თუ მცდარი? თუ მივიჩნევთ, რომ ბერძნული მითოლოგიის მიხედვით, კენტავრი ნახევრად ცხენია, თანაც წელს ქვემოთ, მაშინ თითქო ჭეშმარიტი დებულება გამოგვითქვამს. მაგრამ თუ გავიხსენებთ, რომ რეალობაში ასეთი არსება არავის შეხვედრია და სავარაუდოდაც არ შეხვდება, მაშინ გაუგებარია, რას გააჩნია ოთხი ფეხი? და თუ კი ამის სახელი **არაფერია**, სამართლიანია ვივარაუდოთ, რომ აღნიშნული წინადადება მცდარია. სხვათა შორის, მსგავსი წინადადებების გააზრებას ღრმა ფილოსოფიური კონოტაციები გააჩნია და საკმაოდ სცილდება ლოგიკის მეცნიერების ფარგლებს. სხვა დროს რომ ამგვარი გაუგებრობანი თავიდან ავიცილოთ, რამოდენიმე დაშვების თაობაზე შევთანხმდეთ:

a) წინადადებანი, რომელთანაც ჩვენ საქმე გვექნება, აუცილებლად ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი

b) შეუძლებელია, რომელიმე წინადადება ერთდროულად მცდარიც იყოს და ჭეშმარიტიც

ამ დაშვებებიდან ერთს **გამორიცხული მესამის**, ხოლო მეორეს – **წინააღმდეგობის შეუძლებლობის კანონს** უწოდებენ. მსჯელობა იმაზე, თუ ამ ორ კანონს, რომელიც ლოგიკის განვითარების მანძილზე მნიშვნელოვან როლს თამაშობდა, რატომ ვუწოდეთ **დაშვება,** საკმაოდ შორს წაგვიყვანდა. გვინდა უბრალოდ ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ ლოგიკა **სხვა დაშვებებიდანაც აიგება, ოღონდ ეს იქნება უკვე სხვა ლოგიკა და არა ის, რომლის აღწერასაც ვაპირებდით.**

სხვათა შორის, ახლა შეგვიძლია დავსვათ საკმაოდ საინტერესო კითხვა: როგორი იქნება რთული წინადადების ჭეშმარიტებითი მნიშვნელობა, თუ კი ცნობილია მისი შემადგენელი წინადადებების ჭეშმარიტებითი მნიშვნელობანი? სხვა სიტყვებით, არის თუ არა რაიმე კავშირი რთული წინადადების ჭეშმარიტება-მცდარობასა და მისი კომპონენტების ჭეშმარიტება-მცდარობას შორის? ამ კითვაზე რომ პასუხი გავცეთ, კიდევ ერთ რამეზე შევთანხმდეთ:

c) წინადადებანი, რომელთანაც ჩვენ საქმე გვექნება, მხოლოდ და მხოლოდ ისეთი მაკავშირებლებითაა აგებული, როგორიცაა **'და', 'ან', 'თუ – მაშინ', 'მაშინ და მხოლოდ მაშინ'** , და **'მცდარია, რომ'.** შესაბამისად, წინადადებებს, რომელიც ჩვენი ინტერერსის ობიექტია აქვთ ერთ-ერთი სახე შემდეგიდან: **'. . . და ___', '. . . ან ___ ', 'თუ . . . , მაშინ ____', '. . . . მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ____'** და **'მცდარია, რომ ____'**, სადაც წერტილებითა და ტირეებით მონიშნული ადგილი რაიმე ჭეშმარიტ ან მცდარ წინადადებას გულისხმობს.

ყველა ამ მაკავშირებელს ლოგიკაში თავისი სახელი აქვს და მათ სპეციალური სიმბოლოებით აღნიშნავენ. აღნიშნული ტიპის წინადადებები ყველაზე ხშირად გვხდება არა მარტო მათემატიკური დასაბუთებების, არამედ, საერთოდ, მსჯელობისას. ამგვარად, ეს არჩევანი არც თუ მთლად ნებისმიერია. განვიხილოთ ისინი ცალ-ცალკე.

§2.1 ჭეშმარიტებითი ცხრილები: კონიუნქცია. რთულ წინადადებას, რომელიც **'და'** მაკავშირებლის საშუალებითაა აგებული, ჩვეულებრივ, **კონიუნქციას** უწოდებენ. საინტერესოა, რომ კონიუნქცია ჰქვია როგორც მაკავშირებელს, ასევე მისი საშუალებით აგებულ წინადადებასაც. კონიუნქციური წინადადება, შეიძლება ითქვას, ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული ტიპია წინადადებებისა როგორც სამეტყველო ენაში, ასევე მეცნიერული დასაბუთებებისას. სიმბოლო, რომლითაც კონიუნქციას აღვნიშნავთ, არის: $\wedge$ და ის პირველსა და მეორე წინადადებს, ან ამ წინადადებათა აღმნიშვნელ სიმბოლოებს შორის თავსდება. აღნიშნულ წინადადებებსა და სიმბოლოებს **კონიუნქციის წევრებს**, ანუ **კონიუნქტებს** ვეძახით. მაგალითად, ზემოთ მოტანილ საწინადადებო ფორმას **'p და q'** –ს ამიერიდან ასე ჩავწერთ: **($p \wedge q$)**, სადაც **p**-ც და **q**-ც კონიუნქციის წევრებს წარმოადგენს. თუმცა ლიტერატურაში სხვა სიმბოლოებიც იხმარება. თითოეული სიმბოლოს არჩევა ავტორის გამოვნებაზეა დამოკიდებული. რაიმე პრინციპული მოსაზრება ამ არჩევანს არ განსაზღვრავს. ერთადერთი, რაც ავტორს მოეთხოვება, არის ის, რომ მან სიმბოლოები არ აურიოს და ერთი და იგივე სიმბოლო, ერთი ტექსტის შიგნით, ერთი და იგივე მნიშვნელობით იხმაროს. ჩვენ მიერ შერჩეული სიმბოლო ერთ-ერთი ყველაზე ხშირად ხმარებული ვარიანტია. ახლა ვცადოთ და პასუხი გავცეთ ჩვენს კითხვას კონიუნქციასთან მიმართებაში: **შეგვიძლია თუ არა კონიუნქციის ჭეშმარიტებისა ან მცდარობის დადაგენა მხოლოდ მისი შემადგენელი წინადადებების ჭეშმარიტებისა ან მცდარობის ცოდნიდან გამომდინარე, ისე რომ ამისათვის არ გახდეს საჭირო მთლიანი წინადადების შინაარსის კვლევა?** პასუხს მივაგნებთ, თუ კარგად დავუკვირდებით თავად კონიუნქციის რაობას. რას გვეუბნება კონიუნქცია? კონიუნქცია გვეუბნება, რომ პირველი წინადადებით გამოთქმული მოსაზრება და მეორე წინადადებით გამოთქმული მოსაზრება ერთდროულად ჭეშმარიტი მოსაზრებები გახლავთ. სხვა სიტყვებით, მე თუ გამოვთქვამ **($p \wedge q$),** მე მივიჩნევ და ვცდილობ დაგარწმუნოთ, რომ ადგილი აქვს როგორც **p**-თი აღნიშნულ ვითარებას, ასევე იმ ვითარებას, რომელიც აღნიშნულია **q**-თი. იმ შემთხვევაში, თუ მე განზრახ არ ვიტყუები, ანდა არ ვცდები უნებლიედ, ეს ასეცაა. მაგრამ რას ნიშნავს **ადგილი აქვს როგორც p-თი, ისე q-თი აღნიშნულ ვითარებას?** ეს ნიშნავს მხოლოდ იმას, რომ ჭეშმარიტია როგორც **p,** ასევე **q.** ამგვარად, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ როდესაც ვიცით, რომ მოცემული კონიუნქციის ორივე კონიუნქტი ჭეშმარიტია, კონიუნქცია ჭეშმარიტია, რასაც არ

უნდა შეეხებოდეს მისი შინაარსი. ახლა დავუშვათ, რომ ერთ-ერთი კონიუნქტი მოცემულ კონიუნქციაში მცდარია და ჩვენ ამ მცდარობის დადგენა მოვახერხეთ. ბუნებრივია, ვიფიქროთ, რომ მთლიანად კონიუნქციაც მცდარ დებულებას წარმოგვიდგენს. ეს ასეცაა. როდესაც მე ვცდილობ დაგარწმუნოთ იმაში, რომ ადგილი აქვს **(p∧q)-**ს, ხოლო აღმოჩნდება, რომ ერთ-ერთი არ ასახავს იმას, რაც ხდება, თქვენ სრული უფლება გაქვთ მითხრათ, რომ **(p∧q)** (მთლიანობაში) მცდარია. ასევე ბუნებრივია, **(p∧q)** მცდარად მივიჩნიოთ, როდესაც მცდარია **p** და მცდარია **q.**

საინტერესოა, რომ ყველაფერ ამას ცხრილის სახე შეიძლება მიეცეს. ციფრებით 1 და 0 აღვნიშნოთ შესაბამისად 'ჭეშმარიტი' და 'მცდარი'. მაშინ, **p–**ზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ის შეიძლება იღებდეს მნიშვნელობას 1, ან იღებდეს მნიშვნელობას 0. მაგრამ იგივეს თქმა შეგვიძლია **q-**ზეც. ამგვარად, ვარიანტები, რომელიც შესაძლებელია რომ **(p∧q)-**სთვის გავვიხილოთ, გამოგვივა ოთხი. კერძოდ

i. (1 ∧ 1)
ii. (1 ∧ 0)
iii. (0 ∧ 1)
iv. (0 ∧ 0)

სხვა სიტყვებით,

ჭეშმარიტია ***p*** **∧** *ჭეშმარიტია* ***q*** (i)

ჭეშმარიტია ***p*** **∧** *მცდარია* ***p*** (ii)

მცდარია ***p*** **∧** *ჭეშმარიტია* ***p*** (iii)

მცდარია ***p*** **∧** *მცდარია* ***q*** (iv).

ახლა, ვინაიდან ვიცით, თუ თითოეული კომბინაცია რას გვაძლევს, ადვილად ავაგებთ ცხრილსაც, რომელსაც **კონიუნქციის ჭეშმარიტებით ცხრილს** ვუწოდებთ. ცხრილის აგებისას ვიხელმძღვანელოთ შემდეგით: ჯერ დავადგენთ ჭეშმარიტებით მნიშვნელობებს კონიუნქტებისათვის, ხოლო შემდეგ, მთელი კონიუნქციისათვის. შედეგად, გვექნება სამი ოთხ-ოთხ სტრიქონიანი პარალელური სვეტი. თითოეული სატრიქონის პირველი ორი ციფრი (1 ან 0) გვაძლევს კონიუნქტების ჭეშმარიტებით მნიშვნელობას, ხოლო ბოლო ციფრი, კონუნქტთა მოცემული მნიშვნელობისათვის, თავად კონიუნქციის მნიშვნელობას იძლევა.

ცხრილი 1. კონიუნქცია

p	q	p∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ეს ცხრილი საინტერესოა იმითაც, რომ, პრაქტიკულად, იძლევა საშუალებას ყოველთვის ვიცოდეთ კონიუნქციის ჭეშმარიტება, თუ კი მისი კომპონენტების ჭეშმარიტებითი ფასი გვაქვს დადგენილი. მეტიც, ასეთი ცოდნის მისაღებად სხვა დამატებითი ცოდნა არ არის საჭირო. ასევე საინტერესოა ის გარემოებაც, რომ **კონიუნქცია ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ კი მისი ორივე კონიუნქტი ჭეშმარიტია.** სხვა პირობა კონიუნქციის ჭეშმარიტებას არ ადევს.

§2.2. ჭეშმარიტებითი ცხრილები: დისიუნქცია. ახლა შევხედოთ, რას გვაძლევს მაკავშირებელი **'ან'.** რთულ წინადადებას, რომელიც **'ან'** მაკავშირებლის საშუალებითაა აგებული, **დისიუნქციას** უწოდებენ, ხოლო მის წევრებს – **დისიუნქტებს.** სიმბოლო '∨' **,** ჩვეულებრივ, სწორედ დისიუნქციის აღსანიშნავად იხმარება და, კონიუნქციის მსგავსად, ისიც დისიუნქტებს შორის თავსდება. მაშასადამე, გამოსახულებას, რომელსაც დისიუნქციას ვეძახით, ექნება შემდეგი სახე: **(p∨q).** შეგვიძლია თუ არა დისიუნქციისთვისაც ავაგოთ ისეთივე ცხრილი, როგორც ეს კონიუნქციის შემთხვევაში გამოგვივიდა. დიდი ალბათობით, როგორც ჩანს, კი. თუმცა, ამავე ალბათობით, სავარაუდოდ, ეს ცხრილი განსხვავებული უნდა იყოს. სხვაობას კონიუნქციასა და დასიუნქციას შორის მათი ენაში გამოყენების სემანტიკური თავისებურება განაპირობებს. რაზე მიგვანიშნებს **'ან'** მაკავშირებლის საშუალებით დაკვშირებული ორი წინადადება? იმაზე ხომ არა, რომ ორი ხდომილებიდან, რომლებიც ამ წინადადებებითაა აღწერილი, ერთ-ერთი მაინც უნდა რეალიზდეს? მაგალითად, როგორ შევხედოთ წინადადებას

> *თბილისში აქტიური პოლიტიკური ცხოვრებაა **ან** კავკასია მნიშვნელოვანი გეოპოლიტიკური რეგიონია **?***

როდის იქნებოდა ის ჭეშმარიტი? ცხადია, თუ *თბილისში არანაირი პოლტიკური აქტიობა არ მიმდინარეობს*, და *არც კავკასია წარმოადგენს მსოფლიოს წამყვან სახელმწიფოთა პოლიტიკური ინტერესის სფეროს*, მაშინ მთლიანი წინადადება მცდარია. სხვა სიტყვებით, იმ შემთხვევაში, როდესაც ორივე დისიუნქტი მცდარია, **დისიუნქცია აუცილებლად მცდარი იქნება.**

ჩვეულებრივ, ასევე არ ბადებს შეკითხვებს ვითარება, როდესაც *თბილისში აქტიური პოლიტიკური ცხოვრება **რეალობაა,*** ხოლო *კავკასია **მაინც არ წარმოადგენს** მსოფლიოს წამყვან სახელმწიფოთა პოლიტიკური ინტერესის სფეროს.* ამგვარ ვითარებას ჩვენ იმის დასტურად მივიჩნევდით, რომ მთლიანობაში, ზემოთ მოტანილი გამონათქვამი ჭეშმარიტი წინადადებაა.

ასევე ეჭვს არ გამოიწვევდა სიტუაცია, როდესაც *თბილისში პოლიტიკური ცხოვრება **მინელებულია,*** ხოლო *კავკასია **მაინც წარმოადგენს** მსოფლიოს წამყვან სახელმწიფოთა პოლიტიკური ინტერესის სფეროს,* ვთქვათ, თუნდაც *შუააზიური ენერგორესურსების ტრანზიტის გაადვილების* თვალსაზრისით. ვინაიდან, ამ შემთხვევაშიც ,მივიჩნევთ, რომ მთლიანობაში, ზემოთ მოტანილი გამონათქვამი ჭეშმარიტი წინადადებაა. სხვა სიტყვებით, **დისიუნქცია ჭეშმარიტია, თუ კი მისი ერთ-ერთი დისიუნქტი არის ჭეშმარიტი.** მაგრამ რა ხდება იმ შემთხვევაში, თუ კი ჭეშმარიტია **ორივე დისიუნქტი?** სხვა სიტყვებით, **'ან'** მაკავშირებლის ხმარება აუცილებლობით ხომ არ გამორიცხავს ერთ-ერთი ხდომილების რეალიზაციის შესაძლებლობას, თუ კი

ვიცით, რომ მეორე უკვე რეალიზებულია? ჩვენი მაგალითის მიხედვით თუ ვიმსჯელებთ, თითქოს, ეს ასე არ უნდა იყოს: მართლაც, კავკასიისადმი გეოპოლიტიკური ინტერესი არ არის დამოკიდებული თბილისში პოლიტიკური ამინდის ცვალებადობაზე. თუმცა, ასევე შესაძლებელია ისეთი მაგალითების მოტანაც, როდესაც ერთი კომპონენტის ჭეშმარიტება სწორედაც, რომ მეორე კომპონენტის მცდარობას გულისხმობს. მაგალითად, ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებისათვის **x** და **y,** თუ კი ისინი სხვადასხავა რიცხვებია, **(x>y)** ∨ **(y>x)** არის ჭეშმარიტი წინადადება. მაგრამ, **(x>y) –**ის ჭეშმარიტება, ცხადია, გამორიცხავს **(y>x) –**ის ჭეშმარიტებას. **როგორ მოვიქცეთ, რომ არც ერთი ეს შინაარსი არ დავკარგოთ?** ენობრივ დონეზე შეგვიძლია შევთანხმდეთ, რომ **'ან'** მაკავშირებლის ხმარება შევზღუდოთ მხოლოდ ისეთი შემთხვევებით, სადაც ისეთი მკაცრი პირობა, რომ მხოლოდ ერთი დისიუნქტი უნდა იყოს ჭეშმარიტი, არ მოქმედებს. ეს, ასე ვთქვათ, **არაგამომრიცხავი დისიუნქციაა.** ხოლო იმ შემთხვევბისთვის, როდესაც პირობა ასეთი მკაცრია, მაკავშირებლად ვიხმაროთ **'ან - ან' (გამომრიცხავი დისიუნქცია).** შესაბამისად, სიმბოლო **'∨',** და სახელი დისიუნქცია შევინარჩუნოთ პირველი შემთხვევისათვის, ანუ **არაგამომრიცხავი დისიუნქციისათვის.** მეორე შემთხვევისთვის კი გამოხატვის სხვა საშუალებები ვიპოვოთ. რა თქმა უნდა, ეს არ არის ერთადერთი გამოსავალი, თუმცა საკითხისადმი მიდგომის ყველაზე გავრცელებული და მოხერხებული ფორმაა. აღნიშნულიდან გამომდინარე, ადვილად შეგვიძლია ავაგოთ **ჭეშმარიტებითი ცხრილი დისიუნქციისათვის.** ამისათვის ჩვენ იმავე მეთოდს გამოვიყენებთ, რაც კონიუნქციის ცხრილის ასაგებად ვიხმარეთ.

ცხრილი 2. დისიუნქცია

p	q	p∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ამ ცხრილიდან არა მარტო კარგად ჩანს, თუ როგორ ვუყურებთ დისიუნქციას, არამედ ისიც, თუ რა განასხვავებს მას კონიუნქციისგანაც: **დისიუნქცია მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი ორივე დისიუნქტი მცდარია.** სხვა პირობა დისიუნქციის მცდარობას არ ადევს.

§2.3. ჭეშმარიტებითი ცხრილები: უარყოფა. უარყოფას ვუწოდებთ ისეთ ფრაზებს, როგორიცაა **'მცდარია, რომ',** ან **'არ არის მართალი, რომ',** ან **'ტყუილია, რომ'** და სხვ. აღნიშნული ფრაზები, რომელიც რაიმე მოცემულ წინადადებას წინიდან დაერთვის, მიანიშნებს იმაზე, რომ ამ წინადადებით გამოთქმული მოსაზრება მცდარია, არ არის ჭეშმარიტი. მკაცრად თუ ვიმსჯელებთ, უარყოფა მაკავშირებელს არ წარმოადგენს, ვინაიდან მისი საშუალებით არ ხდება ორი, ან მეტი წინადადების დაკავშირება, არამედ ერთი, კონკრეტულად მოცემული შინაარსის უარყოფა. მიაუხედავად ამისა, იმის გამო, რომ უარყოფის გამოყენების შედეგად ისევ მცდარ ან ჭეშმარიტ წინადადებას ვიღებთ, მას მაკავშირებლებთან ერთად განვიხილავთ. ხშირად, ასეთი მიდგომა მოსახეხებელია. იქიდან

გამომდინარე, რაც ვთქვით, ადვილი მისახვედრია, რომ ჭეშმარიტი წინადადების უარყოფა მცდარია, ხოლო მცდარი წინადადების უარყოფა – ჭეშმარიტი. უარყოფასაც, ისევე როგორც სხვა ლოგიკურ მაკავშირებელს, განსაკუთრებული სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ჩვენ ამისათვის ვიხმართ სიმბოლოს **'¬',** რომელსაც უარსაყოფი წინადადების, ანდა მისი გამომსახველი სიმბოლოს წინ დავწერთ. ამრიგად, ჩანაწერი **'¬p'** აღნიშნავს, რომ 'მცდარია **p**'. უარყოფისთვის ჭეშმარიტებითი ცხრილის ასაგებად აღარ დაგვჭირდება ოთხი სახავდასხვა შემთხვევის განხილვა, ვინაიდან საქმე ორის ნაცვლად, **ერთ უარსაყოფ წინადადებასთან** გვაქვს.

ცხრილი 3. უარყოფა

p	¬p
1	**0**
0	**1**

ამგვარად, წინადადება, რომელიც უარყოფის სიმბოლოს შეიცავს, **ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც უარსაყოფი წინადადება არის მცდარი.** ეს ვითარება თანხმობაშია ჩვენს ინტუიციასთან და, სხვათა შორის, ეყრდნობა ჩვენი დაშვებებიდან ერთ-ერთს, კერძოდ, **(a)-**ს (იხ. **§2**).

§2.4. ჭეშმარიტებითი ცხრილები: იმპლიკაცია. იმპლიკაციას ისეთ რთულ წინადადებას ვუწოდებთ, რომელსაც, ზოგადად, შემდეგი ფორმა გააჩნია: **'თუ . . . , მაშინ ____'.** მას ზოგჯერ პირობით წინადადებას, ანდა გამომდინარეობასაც უწოდებენ. თუმცა, ამ ბოლო სიტყვის ხმარებას გარკვეული სიფრთხილე ჭირდება, ვინაიდან ის შეიძლება მიზეზ-შედეგობრივ კავშირსაც გულისხმობდეს, რაც იმპლიკაციის განხილვის შემთხვევაში, ჩვენ, საზოგადოდ, გვინდა, რომ თავიდან ავიცილოთ. '**თუ**'-ს შემდეგ მყოფ წინადადებას **ანტეცედენტი** ჰქვია, ხოლო წინადადებას, რომელიც სიტყვა '**მაშინ**'-ის შემდეგ გვხვდება ჰქვია **კონსექვენტი.** პირველი ტერმინის სინონიმებია **პირობა, წანამძღვარი, დაშვება, ვარაუდი.** მეორე ტერმინის სინონიმებად ხმარობენ **შედეგი, დასკვნა.** იმპლიკაცია, ისევე როგორც აქამდე განხილული რთული წინადადებები, ხშირად იხმარება როგორც ყოველდღიურ მეტყველებაში, ასევე მეცნიერებაში. განსაკუთრებით ბევრი მაგალითი იმპლიკაციური წინადადებებისა შეგვიძლია მათემატიკაში მოვიძიოთ. პრაქტიკულად, მათემატიკურ თეორემათა დიდი ნაწილი, აშკარად ან ფარულად, იმპლიკაციას წარმოადგენს. სიმბოლო, რომელიც იმპლიკაციის აღსანიშნავად მეტწილად იხმარება, არის **'⊃'.** მასაც, ისევე როგორც კონიუნქციისა და დისიუნქციის შემთხვევაში, იმპლიკაციის შემადგენელ წინადადებათა შორის ვათავსებთ. ამგვარად, გამოსახულება **'p⊃q'** იკითხება როგორც **'თუ p, მაშინ q'**. ახლა ვნახოთ, თუ როგორ მივუდგეთ ჭეშმარიტებითი ცხრილის აგებას იმპლიკაციისთვის? ინტუიციურად, იმპლიკაციის გამოთქმისას, ჩვენ ვცდილობთ ვაჩვენოთ, რომ **პირობა გულისხმობს შედეგს.** სხვა სიტყვებით, ანტეცედენტის ჭეშმარიტება განსაზღვრავს კონსექვენტის ჭეშმარიტებასაც. ხოლო როდესაც კონსექვენტი მცდარია, ეს იმის ნიშანი უნდა იყოს, რომ ანტეცედენტიც მცდარი ყოფილა. ყოველ შემთხვევაში, **ჩვენ არ გვინდა, რომ ჭეშმარიტი პირობიდან**

მცდარი შედეგი გვქონდეს. ეს გარემოება გვკარნახობს, რომ ძალაში უნდა იყოს შემდეგი სამი პირობა:

i. თუ ანტეცედენტიც და კონსექვენტიც ჭეშმარიტია, იმპლიკაციაც შეშმარიტია.
ii. თუ ანტეცედენტი ჭეშმარიტია, ხოლო კონსექვენტი მცდარი, მაშინ იმპლიკაციაც მცდარი იქნება
iii. თუ მცდარია როგორც ანტეცედენტი, ასევე კონსექვენტი, იმპლიკაცია ჭეშმარიტია.

მაგრამ რა ვითარებაა, როდესაც ანტეცედენტი მცდარია, ხოლო კონსექვენტი ჭეშმარიტი? სამწუხაროდ, აქაც იმავე ფსიქოლოგიურ ბარიერს ვაწყდებით, როგორსაც დისიუნქციის განხილვისას გადავაწყდით. ჩვენი ჩვევა, ვიხმაროთ ენა როგორც კომუნიკაციის ძირითადი საშუალება, განაპირობებს ენობრივ გამოსახულებათა მაქსიმალურ შინაარსობრივ დატვირთულობას. იმლიკაციის შემთხვევაში ეს პირობასა და შედეგს შორის ნაგულისმებ ერთგვარ კავშირში მჟღავნდება. ზოგჯერ ეს მიზეზობრივი, ზოგჯერ კი შინაარსობრივი კავშირებია. ყოველ შემთხვევაში, ჩვენ არ ვართ განწყობილი, რომ იმ შემთხვევებში, როდესაც ასეთი კავშირი ცხადად არა ჩანს, იმპლკაციური წინადადება ჭეშმარიტად მივიჩნიოთ. ასევე ნაკლებად ვართ განწყობილი ჭეშმარიტად მივიჩნიოთ იმპლიკაცია, როდესაც დადასტურებულად ვიცით, რომ ანტეცედენტი მცდარია, ხოლო კონსექვენტი ჭეშმარიტი. ნებისმიერი არგუმენტაცია ამ ფსიქოლოგიურ ბარიერს გადააწყდება და დამაჯერბლობის ხარისხს დაკარგავს. ამიტომ გზა აქაც ერთია: უნდა ვიპოვოთ ისეთი ვარიანტი, რომელიც ყველაზე ახლოა იმასთან, **რაც გვინდა** და შემდეგ, ამ ვარიანტზე შევთანხმდეთ, რამდენადაც არ უნდა გვეხამუშებოდეს მისი მიღება. თუ გავიხსენებთ, ერთის მხრივ, რომ წინადადებათა შინაარსობრივ განხილვაზე უარი გვაქვს ნათქვამი, ხოლო, მეორეს მხრივ, იმას, რომ **არ გვინდა, ჭეშმარიტი პირობიდან მცდარი შედეგი გვქონდეს,** ხოლო დანარჩენს გადამწყვეტი მნიშვნელობა არა ქვს, ადვილად შევთანხმდებით იმაზეც, რომ როდესაც ანტეცედენტი მცდარია, ხოლო კონსექვენტი ჭეშმარიტი, იმპლიკაცია ჭეშმარიტია. ამგვარად, იმპლიკაციისათვის გვექნება შემდეგი ცხრილი:

ცხრილი 4. იმპლიკაცია

p	q	p⊃q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ამგვარად, წინადადება, რომელიც იმპლიკაციის სიმბოლოს შეიცავს, **მცდარია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ანტეცედენტი ჭეშმარიტია, ხოლო კონსექვენტი - მცდარი.**

§2.5. ჭეშმარიტებითი ცხრილები: ექვივალენტობა. რთულ წინადადებას, რომელიც მისი შემადგენელი წინადადებების იგივეობრიობას დაადგენს, ვუწოდებთ ექვივალენტობას. ექვივალენტობის სინონიმებია **ტოლფასობა, ორმხრივი გამომდინარეობა** და ა.შ. დამაკავშირებელი ფრაზა, რომელიც ჩვეულებრივ

მოიხმარება, განსაკუთრებით მათემატიკაში, არის **'მაშინ და მხოლოდ მაშინ'.** თუმცა არსებობს მისი ისეთი შემცვლელები, როგორისაა, მაგალითად, **'საკმარისი და აუცილებელი',** ან მისი რომელიმე სინონიმი. სიმბოლო, რომელიც ამისათვის იხმარება, შემდეგია: **'≡'** და ის, ისევე როგორც სხვა შემთხვევებში, როდესაც საქმე ორი წინადადების დაკავშირებასთან გვქონდა, წინადადებებს შორის იწერება. ასე, რომ გამოსახულება **(p≡q)** უბრალოდ ნიშნავს იმას, რომ **p** და **q** იგივეობრივ წინადადებებადაა მიჩნეული. თუმცა, იგივეობას სხვადასხვა განზომილება აქვს. წინადადებები შესაძლებელია იგივეობრივნი იყვნენენ იმ აზრით, რომ ერთსა და იმავე შინაარსს გამოთქვამდნენ, ოღონდ ენის სხვადასხვა გამომსახველობითი საშუალებების გამოყენებით. სხვათა შორის, ეს ერთ-ერთი მოტივაციაა იმისათვის, რომ ივეობის გამომთქმელ წინადადებებს ყურადღება მივაქციოთ. ასევე შესაძლებელია იგივეობა ეხებოდეს არა შინაარს, **არამედ იმ ჭეშმარიტებით მნიშვნელობას,** რომელიც **p**-თი **და q**-თია გამოთქმული. არსებობს კიდევ სხვა განზომილებანი, მაგრამ ჩვენ აქ შევჩერდეთ, ვინაიდან ჩვენთვის საინტერესო სწორედ რთული წინადადების ჭეშმარიტება-მცდარობის დამოკიდებულებაა შემადგენელი წინადადებების ჭეშმარიტება-მცდარობასთან. თუ ამ ვითარებიდან გამოვალთ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ **(p≡q)** ჭეშმარიტი შეიძლება იყოს მხოლოდ მაშინ, როდესაც **p**-საც და **q**-საც ერთნაირი ჭეშმარიტებითი მახასიათებლები აქვს, კერძოდ, **ორივე ერთდროულად ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი.** სხვა შემთხვევაში ექვივალენტობის გამომთქმელი წინადადება იქნება მცდარი. ამაზე დაყრდნობით არ უნდა გაგვიჭირდეს შესაბამისი ცხრილის აგებაც.

ცხრილი 5. ექვივალენტობა

p	q	p≡q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

§3. დამოკიდებულებანი საწინადადებო მაკავშირებლებს შორის.

მას შემდეგ, რაც გავეცანით ძირითად მაკავშირებელთა როლს რთული წინადადებების აგებაში და გავარკვიეთ მათი თავისებურებანი ჭეშმარიტება-მცდარობის თვალსაზრისით, ბუნებრივია დაისვას კითხვა, არსებობს თუ არა მათ შორისაც რაიმე სახის დამოკიდებულება? სხვა სიტყვებით, როგორ ურთიერთმოქმედებენ ისინი, თუ კი ასეთი რამ საერთოდ შესაძლებელია? ამ კითხვის კანონიერებაზე, სულ ცოტა ორი რამ მიგვანიშნებს. ჯერ ერთი, ანალოგია მათემატიკასთან: ვიცით, რომ ისეთი მატემატიკური მუდმივები, როგორიცაა **+**, -, × და **:** შეგვიძლია არა მარტო ერთმანეთის მეშვეობით გამოვხატოთ, არამედ ერთი და იმავე მეთემატიკური ფრაზის (ფორმულის) შიგნით, მათი საშუალებით გარკვეული მანიპულაციები გავაკეთოთ, რაც საბოლოოდ, გამოთვლებს გვიიოლებს. მაგალითად, ვიცით როგორ მოვიქცეთ, როდესაც ჯამს რაიმე რიცხვზე ვამრავლებთ, ვინაიდან ვიცით, რომ **+**-ს და **×**-ს გააჩნია შემდეგი თავისებურება:

c ×(a+b) = (c×a) + (c×b). რაიმე მსგავსს ხომ არ შეიძლება ქონდეს ადგილი საწინადადებო მკავშირებლების შემთხვევაში? ამ აზრს ისიც აძლიერებს, რომ **'p⊃q'** მსაგავს და სხვა ფორმულებშიც, როგორც **p,** ისე **q** შესაძლებელია, რომ ნებისმიერი აგებულებისა იყოს. ანუ, ვითარება, როდესაც ერთი ფორმულის შიგნით სხვადასვა მაკავშირებლებით აგებული ნაწილები გვხდება, სავსებით ბუნებრივი და მისაღები ჩანს. თუმცა, სანამ საკითხს გავარკვევდეთ, ნებისმიერი ფორმულის განხილვისას, ჩვენ გარანტირებული უნდა ვიყოთ იმ აზრით, რომ აღნიშნული ფორმულა ყოველთვის გამოხატავს რაიმე დასრულებულ წინადადებას, თუ კი მასში ლათინური ანბანის ასოების ნაცვლად, ანუ საწინადადებო ცვლადების ნაცვლად, რომელიმე ენის (ვთქვათ, იგივე ქართულის) წინადადებებს ჩავანაცვლებთ. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენ გარანტირებული უნდა ვიყოთ, რომ ჩვენი ფორმულები **სწორად არის აგებული.** ამ გარანტიას ერთადერთი რამ უზრუნველყოფს: ჩვენ უნდა შევთანხმდეთ წესებზე, რომლითაც ფორმულებს ვადგენთ საწინადადებო მაკავშირებლების გამოყენებით და მხოლოდ ასეთნაირად აგებული ფორმულები მივიჩნიოთ ფორმულებად. ისევ მათემატიკას რომ მივმართოთ ანალოგიისთვის, რაღაც მსგავსს იქაც ვნახავთ. მაგალითად, არავინ ჩათვლიდა აზრიანად **c ab) = + c×a)c×b)** გამოსახულიბის განხილვას, ანდა საერთოდ არ მიიჩნევდა მას ფორმულად, მაშინ როდესაც იმავე ნიშნების საშუალებებით აგებული გამოსახულება **c ×(a+b) = (c×a) + (c×b)** არითმეტიკის ერთ-ერთ ძირითად დებულებას გამოხატავს. ამგვარად, შევთანხმდეთ შემდეგზე:

3.1. წინადადებათა (ფორმულათა) ასაგებად გვაქვს შემდეგი საშუალებები:

- ლათინური ანბანის პატარა ასოები, ინდექსებით(ან მათ გარეშე), რომლებსაც მარტივ ან რთულ თხრობით წინადადებათა აღსანიშავად ვიხმართ.
- საწინადადებო მაკავშირებლები **¬, ∧, ∨, ⊃, ≡**
- მარჯვენა და მარცხენა მრგვალი ან კვადრატული ფრჩხილები **(,), [,]** რომლებიც სასვენი ნიშნების როლს ასრულებენ.
- გარდა ზემოთ ჩამოთვლილისა, წინადადებათა (ფორმულათა) ასაგებად სხვას არაფერს არ ვიხმართ.

3.2. ჩანაწერი, რომელიც (3.1)-ში მითითებული სიმბოლოებითაა შედგენილი, წარმოადგენს ფორმულას მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ კი ის აკმაყოფილებს შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

- ის არის ცალკე მდგომი ლათინური ანბანის ერთ-ერთი ასო, ინდექსით, ან მის გარეშე, რომელიც (3.1)-ის პირობაშია ნაგულისხმები.
- თუ რაიმე **p** და **q** არის ფორმულა, მაშინ ასევე ფორმულებია **¬(p), (p ∧q), (p ∨q), (p⊃q), (p ≡q)** .
- არც ერთი სხვა გამოსახულება, რომელიც ზემოთ განსაზღვრულ პირობებში არ ჯდება, ანუ, სხვა რამ პირობებზე დაყრნობით არის აგებული, ფორმულას არ წარმოადგენს.

ახლა შეგვიძლია ჩვენს ძირითად თემას დავუბრუნდეთ და ვნახოთ, თუ რა დამოკიდებულებანი შეიძლება აღმოჩნდეს თავად მაკავშირებლებს შორის. დავიწყოთ, ერთი შეხედვით, მარტივი შემთხვევით, უარყოფით. **რას გვაძლევს ამ კუთხით ¬(p)?** თუ **p** მარტივია, პასუხი წინა პარაგრაფში მოცემულ ცხრილში (ცხრილი 3) უნდა ვეძიოთ. მაგრამ რასთან გვაქვს საქმე, როდესაც **p** რთული წინადადებაა? ჩვენი შეთანხმების თანახმად, თუ კი ის რთულია, მას შეიძლება ჰქონდეს შემდეგი ხუთი სახიდან ერთ-ერთი

i. **p** თვითონ წარმოადგენს უარყოფას
ii. **p** წარმოადგენს კონიუნქციას
iii. **p** წარმოადგენს დისიუნქციას
iv. **p** წარმოადგენს იმპლიკაციას
v. **p** წარმოადგენს ექვივალენტობას

განვიხილოთ ეს შემთხვევები:

i. **p** თვითონ წარმოადგენს უარყოფას. მაშინ **¬(p)** შემდეგ სახეს მიიღებს, **¬(¬r)** სადც **¬r** არის **p**. ვნახოთ, ამ შემთხვევაში, რას მოგვცემდა ჩვენი ცხრილი, რომელიც უარყოფისათვის შევადგინეთ

r	¬r	¬¬r
1	0	1
0	1	0

ძალიან საინტერესო რამეს მივაგენით: თუ წინადადებას ორჯერ ვუარყოფთ, ისევ იმავე წინადადებას მივიღებთ. ეს მეტად მნიშვნელოვანი კანონია და მას **ორმაგი უარყოფის კანონს** ეძახიან. სიმბოლურად ის შემდეგნაირად შეგვიძლია ჩავწეროთ: **¬¬p≡ p.**

ii. **p** წარმოადგენს კონიუნქციას. . მაშინ **¬(p)** შემდეგ სახეს მიიღებს, **¬(r∧s)** სადც **(r∧s)** არის **p**. დავაკვირდეთ ამ წინადადების შინაარსს. ის გვეუბმება, რომ კონიუნქცია **(r∧s)** არის მცდარი. ეს კი, თავის მხრივ, თუ კონიუნქციისთვის აგებულ ცხრილს გავიხსენებთ, უნდა ნიშნავდეს იმას, რომ მცდარია მისი ან ერთი კონიუნქტი, ან მეორე კონიუნქტი, ან ორივე ერთად. რაც შემდეგნაირად ჩაიწერება **(¬r∨¬s).** სხვა სიტყვებით, კონიუნქციის უარყოფა თითოეული კონიუნქტის უარყოფათა დისიუნქცია ყოფილა. ესეც მნიშვნელოვანი დებულებაა და ის **დე მორგანის** კანონის სახელითაა ცნობილი. გამოვიყენოთ ცხრილი და დავრწმუნდეთ მის სისწორეში. ანუ ვნახოთ, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს **r** და **s, ¬(r∧s)≡ (¬r∨¬s)** არის ჭეშმარიტი დებულება.

r	s	¬r	¬s	(r∧s)	¬(r∧s)	(¬r∨¬s)
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

ახლა, თუ ამ ცხრილში ბოლო ორ სვეტს შევადარებთ, დავრწმუნდებით ჩვენი დებულების სისწორეში.

iii. ახლა, ვთქვათ, **p** არის **(rVs).** ბუნებრივია, წინა შემთხვევის განხილვის შემდეგ, გაგვიჩნდეს იმნაირივე შედეგის მოლოდინი. სხვა სიტყვებით, **¬(rVs)≡(¬r∧¬s)**. მივმართოთ ცხრილს.

r	s	¬r	¬s	(rVs)	¬(rVs)	(¬r∧¬s)
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

აქაც, ბოლო ორი სვეტის შედარება, გვარწმუნებს ჩვენი დებულების სისწორეში. სხვათა შორის, ესეც დე მორგანის კანონია.

iv. ვნახოთ, რა სიტუაცია გვექნება, თუ კი იმპლიკაციას ვუარყოფთ. სხვა სიტყვებით, რა უნდა იყოს ¬**(p⊃q)?** თუ იმპლიკაციის დახასიათებას გავიხსენებთ, მივხვდებით, რომ მისი უარყოფა უბრალოდ უნდა ნიშნავდეს მისი ანტეცედენტის ჭეშმარიტებასა და კონსექვენტის მცდარობას. ანუ, ძალაში უნდა იყოს შემდეგი ფორმულა **¬(p⊃q)≡(p∧¬q).** შევამოწმოთ ცხრილის მეშვეობით.

p	q	¬q	(p⊃q)	¬(p⊃q)	(p∧¬q)
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

აღნიშნული გარემოება იმითაც არის საინტერესო, რომ თუ დე მორგანისა და ორმაგი უარყოფის კანონებს მოვიშველიებთ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ **(p⊃q)≡(¬pVq),** რასაც, თავის მხრივ, უფრო საინტერესო შედეგამდე მივყავართ:

როგორც ჩანს, ჩვენ თავისუფლად შეგვეძლო იმპლიკაციის სიმბოლოს გარეშე მასში ნაგულისხმები შინაარსი გამოგვეხატა.

v. და ბოლოს, ვნახოთ რას წარმოადგენს ექვივალენტობის უარყოფა. ცხრილის გარეშეც, ადვილი მისხვედრია, რომ ასეთი წინადადება მხოლოდ მაშინ იქნება ჭეშმარიტი, როდესაც მის კომპონენტებს სხვადასხვა ჭეშმარიტებითი მნიშვნელობანი გააჩნია. მაგრამ ეს ხომ მაშინ ხდება, როდესაც ერთი კომპონენეტის ჭეშმარიტება გამორიცხავს მეორე კომპონენტის ჭეშმარიტებას და პირიქით. ეს კი ზუსტად ის არის, რასაც მაკავშირებელი **'ან – ან'** გულისხმობდა. ასე, რომ ექვივალენტობის უარყოფა გამომრიცხავი **ან**-ის ტოლფასი ყოფილა.

ამავენაირად, სხვათა შორის, შეგვიძლია ყველა მაკავშირებელი გავსინჯოთ, რაც საშუალებას მოგვცემს ბევრი საინტერესო კავშირი დავინახოთ მათ შორის. თუმცა ამჯერად, ამას თავს ავარიდებთ, ვინაიდან აღნიშნული, ძირითადად, მექანიკურ სამუშაოს შეადგენს, და სავარჯიშოს სახით შეიძლება გაკეთდეს.

ახლა ყურადღება მივაქციოთ შემდეგ ვითარებას: ზემოთ მოტანილი ცხრილების ბოლო ორი სვეტის შედარებისას, ორივე წარმოდგენილი ფორმულა ერთსა და იმავე ჭეშმარიტებით მნიშვნელობას იღებდა მიუხედავად იმისა თუ როგორი მნიშვნელობები მიეწერებოდა მათ ატომარულ შემადგენლებს, რამაც მოგვცა, სხვათა შორის, საშუალება დაგვეწერა, რომ **¬¬p≡ p, ¬(r∧s)≡ (¬r∨¬s) , ¬(r∨s)≡ (¬r∧¬s)** და **¬(p⊃q)≡(p∧¬q).** მაგრამ თუ ყურადრებას თვით ამ ექვივალენტობებზე გადავიტანთ, ერთ საინტერესო მომენტს აღმოვაჩენთ. ისინი მუდმივად ჭეშმარიტი ფორმებია იმ აზრით, რომ როგორი მნიშვნელობანიც არ უნდა მივუსადაგოთ მათ ატომარულ შემადგენლებს, ისინი მაინც ჭეშმარიტები იქნებიან. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, ზემოთმოტანილ ცხრილებს დავამატოთ კიდევ თითო სვეტი და შედეგს შევხედოთ.

¬¬p≡ p

p	¬p	¬¬p	¬¬p≡ p
1	0	1	1
0	1	0	1

¬(r∧s)≡ (¬r∨¬s)

r	s	¬r	¬s	(r∧s)	¬(r∧s)	(¬r∨¬s)	¬(r∧s) ≡ (¬r∨¬s)
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

¬(rVs)≡ (¬r∧¬s)

r	s	¬r	¬s	(rVs)	¬(rVs)	(¬r∧¬s)	¬(rVs) ≡ (¬r∧¬s)
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

¬(p⊃q)≡(p∧¬q)

p	q	¬q	(p⊃q)	¬(p⊃q)	(p∧¬q)	¬(p⊃q) ≡ (p∧¬q)
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

ამდაგვარ საწინადადებო ფორმებს, რომლებიც მათი ატომარული შემადგენლების ჭეშმარიტებითი მნიშვნელობის მიუხედავად, ყოველთვის ჭეშმარიტია, ლოგიკაში **ტავტოლოგიას** ეძახიან. ტავტოლოგიაზე შეიძლება ითქვას, რომ ის ჭეშმარიტია თავისი ფორმის გამო. სხვა სიტყვებით, ის ისეთნაირადაა აგებული, რომ რა შინაარსიც არ უნდა მივანიჭოთ მის კომპონენტებს, ის მაინც ჭეშმარიტი იქნება. ტავტოლოგიის უარყოფას უწოდებენ **წინააღმდეგობას.** ბუნებრივია, წინააღმდეგობა ყოველთვის მცდარია.

§4. პროპოზიციური ლოგიკის ძირითადი კანონები.

ქვემოთ ჩამოვთვლით იმ ძირითად დამოკიდებულებებს, რომელთაც, ხშირად, პროპოზიციური ლოგიკის კანონებს ეძახიან.ზოგიერთი მათგანი უკვე ნაცნობია ჩვენთვის, ხოლო დანარჩენების შინაარსი ადვილი გასააზრებელია. ყოველ შეთხვევაში, მათი ტავტოლოგიურობის შემოწმება ადვილად შეიძლება ჭეშმარიტებითი ცხრილებით.

((p⊃q)∧p)⊃q	**მოდუს პონენსი**
((p⊃q)∧¬q)⊃¬p	**მოდუს ტოლენსი**
(p⊃q)⊃((q⊃r)⊃(p⊃r))	**ჰიპოთეზური სილოგიზმი**

$((p \lor q) \land \neg p) \supset q$	დისიუნქციური სილოგიზმი
$((p \supset q) \land (r \supset s)) \supset ((p \lor r) \supset (q \lor s))$	კონსტრუქციული დილემა
$((p \supset q) \land (r \supset s)) \supset ((\neg q \lor \neg s) \supset (\neg p \lor \neg r))$	დესტრუქციული დილემა
$(p \land q) \supset p$ $(p \land q) \supset q$	სიმპლიფიკაცია (გამარტივება)
$p \supset (p \lor q)$ $q \supset (p \lor q)$	დისიუნქტის დამატება
$(p \supset q) \supset ((p \supset r) \supset (p \supset (q \land r)))$	კომპოზიცია
$(\neg\neg p) \equiv p$	ორმაგი უარყოფის კანონი
$(p \land q) \equiv (q \land p)$	გადანაცვლების (კომუტაციის) კანონი კონიუნქციისათვის
$(p \lor q) \equiv (q \lor p)$	გადანაცვლების კანონი დისიუნქციისათვის
$(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$	გადანაცვლების კანონი ექვივალენტობისთვის
$((p \land q) \land r) \equiv (p \land (q \land r))$	დაჯგუფების (ასოციაციურობის) კანონი კონიუნქციისათვის
$((p \lor q) \lor r) \equiv (p \lor (q \lor r))$	დაჯგუფების კანონი დისიუნქციისათვის
$(p \land (q \lor r)) \equiv ((p \land q) \lor (p \land r))$	განაწილების (დისტრიბუციის) კანონი კონიუნქციისა დისიუნქციის მიმართ
$(p \lor (q \land r)) \equiv ((p \lor q) \land (p \lor r))$	განაწილების კანონი დისიუნქციისა კონიუნქციის მიმართ
$\neg(p \land q) \equiv (\neg p \lor \neg q)$ $\neg(p \lor q) \equiv (\neg p \land \neg q)$	დე მორგანის კანონები
$(p \supset q) \equiv (\neg p \lor q)$ $\neg (p \supset q) \equiv (p \land \neg q)$	იმპლიკაციის ელიმინაციის (მოცილების) კანონები
$(p \supset q) \equiv (\neg q \supset \neg p)$ $(q \supset p) \equiv (\neg p \supset \neg q)$	კონტრაპოზიციის კანონები

$(p \supset q) \equiv ((p \supset q) \wedge (q \supset p))$	**ეკვივალენტობის ელიმინაციის კანონი**
$p \vee \neg p$	**გამორიცხული მესამის კანონი**
$\neg(p \wedge \neg p)$	**წინააღმდეგობის შეუძლებლობის კანონი**

კარგი იქნება, თუ ამ ფორმულების შინაარსში გავერკვევით, და იმ პრინციპებს დავიმახსოვრებთ, რაც მათი საშუალებითაა გამოთქმული. ამ პრინციპებზე დაყრდნობით ბევრი დებულების დასაბუთება მარტივდება.

თავი III. პრედიკატთა ლოგიკის საწყისი ცნებები და ძირითადი კანონები

§1. რას ვუწოდებთ პრედიკატთა ლოგიკას?

მას შემდეგ, რაც გავეცანით პროპოზიციური ლოგიკის ძირითად ცნებებსა და გამომსახველობით საშუალებებს, თითქოს ადვილად უნდა შევძლოთ ჩვეულებრივი სამეტყველო ენით გამოთქმული არგუმენტების სიმბოლოების ენაზე "გადათარგმნა", ისე, რომ თუ კი ჩვენი არგუმენტაცია სწორი იყო, სიმბოლურ ენაზე თარგმნილი, ის ტავტოლოგიად გარდაიქმნას. ზოგჯერ ეს მართლაც ასეა. განვიხილოთ მაგალითი:

- *თუ თოვს, მაშინ არ წვიმს*
- *წვიმს*
- *მაშასადამე არ თოვს.*

პროპოზიციური ლოგიკის გამომსახველობით საშუალებებს თუ მოვიშველიებთ, ვნახავთ, რომ აქ გვაქვს ორი საბაზო წინადადება, კერძოდ, "*თოვს*" და "*წვიმს*" და მათგან ნაწარმოები ორი უარყოფითი წინადადება და ერთი პირობითი წინადადება. მოვნიშნოთ საბაზო წინადადებები პროპოზიციური ცვლადებით შესაბამისად **p** და **q.** მაშინ ჩვენი არგუმენტი შემდეგ სახეს მიიღებს:

- $p \supset \neg q$
- q
- $\neg p$

მივცეთ ამ არგუმენტს ჩვენთვის უფრო ჩვეული სახე, შემდეგი მოსაზრებებიდან გამომდინარე: ის რაც წერია, სინამდვილეში ნიშნავს იმას, რომ თუ ჭეშმარიტია $p \supset \neg q$ და ჭეშმარიტია q მაშინ ჭეშმარიტია $\neg p$, რაც ნიშნავს $((p \supset \neg q) \wedge q) \supset \neg p)$ წინადადების ჭეშმარიტებას. მართლაც, ის რომ ეს ტავტოლოგიაა, ადვილი სანახავია იმ მეთოდებითაც, რომელიც უკვე ვიცით. თუმცა, ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ეს ხდება **ზოგჯერ** და **არა ყოველთვის**. ეს თუ მართლაც ასეა, მაშინ პროპოზიციური ლოგიკა საკმარისი არ ყოფილა იმისათვის, რომ ჩვენ მიერ გამოთქმული ყველა არგუმენტი აღვწეროთ. ეს კი სერიოზული ნაკლია, და უნდა ვცადოთ, რომ მოვხსნათ. მართლაც, პირველი მაგალითის ანალოგიით, განვიხილოთ შემდეგი არგუმენტაცია:

- *ამ უნივერსიტეტის ყველა სტუდენტი სწავლობს ლოგიკას*
- *გიორგი ამ უნივერსიტეტის სტუდენტია*
- *მაშასადამე, გიორგი სწავლობს ლოგიკას.*

მიუხედავად იმისა, რომ არგუმენტი კორექტული ჩანს, ჩვენ გაგვიჭირდება მისი კორექტულობა პროპოზიციური ლოგიკის საშუალებებით ავსახოთ. მართლაც, ამ არგუმენტში სამი საბაზო წინადადებაა:

- ✓ *უნივერსიტეტის ყველა სტუდენტი სწავლობს ლოგიკას,*
- ✓ *გიორგი უნივერსიტეტის სტუდენტია,*
- ✓ *გიორგი სწავლობს ლოგიკას.*

ავირჩიოთ მათთვის პროპოზიციური ცვლადები, ვთქვათ, **p**, **q** და **r**. მაგრამ, ამ შემთხვევაში, თუ კი წინა მაგალითის ანალოგიას გავყვებით, წინადადება **p∧q⊃r,** ზოგადად, არ არის ჭეშმარიტი, რაც ეჭვის ქვეშ აყენებს, ჩვენს, ერთი შეხედვით, უეჭველ არგუმენტაციას, რომ **რაც სამართლიანია ყველასთვის, სამართლიანი უნდა იყოს ერთ-ერთისთვისაც.** სხვა სიტყვებით, **პროპოზიციური ლოგიკა საკმარისი არ ყოფილა იმისათვის, რომ ჩვენ მიერ გამოთქმული ყველა არგუმენტი აღვწეროთ** და, მაშასადამე, უნდა ვნახოთ გზა, მისი საშუალებების გაძლიერებისათვის. უხეშად რომ ვთქვათ, სწორედ ეს არის პრედიკატთა ლოგიკის მიზანი და დანიშნულება. თუ როგორ არის ეს შესაძლებელი, მომდევნო პარაგრაფებში ვნახავთ.

§2. საწინადადებო ფორმები, პრედიკატები, ცვლადები და კონსტანტები.

§2.1 მარტივი წინადადების სტრუქტურა. წინადადებათა ლოგიკაში, რომელიც აქამდე ჩვენი მსჯელობის ძირითად შინაარს შეადგენდა, მარტივ წინადადებას, ერთიან, დაუნაწევრებელ მთლიანობად განვიხილავდით. ეს გარკვეული მოსაზრებით იყო ნაკარნახევი. კერძოდ, ჩვენ ვცდილობდით, ერთის მხრივ, საწინადადებო მაკავშირებლების როლი წარმოგვეჩინა, ხოლო მეორეს მხრივ, სრულად გვენახა რთული წინადადებების სტრუქტურიდან გამომდინარე ლოგიკისათვის საინტერესო მიმართებები და შეძლებისდაგვარად აღგვეწერა ისინი. ახლა, ანალოგიური ამოცანა მარტივ წინადადებებთან მიმართებაში დგება. **რას წარმოადგენს მარტივი წინადადება სტრუქტურულად? რა კომპონენტებისაგან შედგება? რა ლოგიკური მიმართებები შეიძლება დამყარდეს მარტივი წინადადების კომპონენტებს, ანდა თავად მარტივ წინადადებებს შორის, თუ კი მათ სტრუქტურას დავეყრდნობით? და ბოლოს, რამდენადაა შესაძლებელი ამ მიმართებათა ერთგვარი განზოგადება იმ აზრით, რომ მათი ფორმულების სახით წარმოდგენა შევძლოთ და რას მოგვცემს ეს?**

ცნობილია, რომ სამეტყველო ენის ნებისმიერი წინადადება, რომელიც რაიმე ვითარებას აღწერს (თხრობითი წინადადება), სულ ცოტა, ორ კომპონენტს მაინც შეიცავს: ესენია ის, რასაც აღვწერთ (როგორც მომქმედს, ანდა მოქმედების ობიექტს, და რასაც გრამატიკაში **ქვემდებარეს** ეძახიან), და ის, რისი საშუალებითაც მის, ანდა მასზე განხორციელებულ მოქმედებას აღვწერთ (და რასაც **შემასმენელს** უწოდებენ). მეტიც, როდესაც გვაქვს ქვემდებარე და შემასმენელი, ამბობენ, რომ ვითარება პრაქტიკულად აღწერილია და რომ

სხვა სიტყვის, ანდა სიტყვათა ჯგუფის დამატება, მხოლოდ “აფერადებს“ შინაარს. ამგვარად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მარტივი თხრობითი წინადადების სტრუქტურის ღერძი არის **ქვემდებარე-შემასმენელი** . სხვა სიტყვებით, აქ გვაქვს ის, რაზედაც რაიმე გამოითქმის და ისიც, რაც გამოითქმის. პირველი მიუთითებს საგანს, ხოლო მეორე, ამ საგნის დახასიათებას იძლევა. მაგლითად,

1. *„ბუცეფალი“ ცხენის სახელია*
2. *ამ საკლასო ოთახის მერხები დაზიანებულია*
3. *დედამიწა პლანეტაა.*

ზოგადად, რა შინაარსის მატარებელია თხრობითი წინადადება? ყოველ თხრობით წინადადებაში დადასტურებულია ან უარყოფილია რომ ესა და ეს საგნები არის ასეთი და ასეთი. ჩვენ შემთხვევაში, მაგალითად, **ვადასტურებთ**, რომ სახელი „ბუცეფალი“ **ჰქვია ცხენს**, რომ საკლასო ოთახში მყოფი მერხები **არის დაზიანებული,** ხოლო **დედამიწა არის ერთ-ერთი პლანეტა.** სხვა სიტყვებით, წინადადებაში საგანს (საგნებს) მიეწერება გარკვეული **ნიშან-თვისებები**, ანდა უარიყოფა, რომ მათ ეს ნიშან-თვისებები გააჩნია. მაგალითად, თუ ვიტყოდით, რომ

4. *დედამიწა არ არის პლანეტა*

მართალია, მცდარ წინადადებას გამოვთქვამდით, მაგრამ **მაინც წინადადებას** გამოვთქვამდით, რომელშიც მცდარად **არის უარყოფილი ის გარემოება, რომ დედამიწა არის პლანეტა.** ზოგჯერ, თხრობითი წინადადებანი არა საგანთა დახასიათებას, არამედ მათ შორის **დამოკიდებულებას** აღწერს. მაგალითად,

5. *ვანო და კოტე მეზობლებია*
6. *ჟირაფი სპილოზე მაღალია*
7. *ძალოსანი ასანიძე უფრო ღონიერია, ვიდრე ჩოგბურთელი შარაპოვა*, და ა.შ.

საგნები, რომლთა შესახებაც წინადადებას გამოვთქვამთ, სხვადსხვა ბუნებისაა: სულიერი არსებანი, უსულო, წარმოსახვითი, აბსტრაქტული. ყველაფერი, რასაც შესაძლოა ჩვენი აზროვნების თვალსაწიერი გაწვდეს, რაც შეიძლება ჩვენი მსჯელობის ობიექტად იქცეს და რაზედაც, საერთოდ, **შეგვიძლია რაიმე გამოვთქვათ,** წარმოადგენს საგანს, რომელიც შეიძლება გარკვეული სიზუსტით აღიწეროს, და ეს აღწერა თხრობითი წინადადებით გამოითქვას. მაგრამ აღნიშნული აღწერა რომ აზრიანი გამოგვივიდეს, ჩვენ, სულ ცოტა, ორი ტიპის ობიექტები გვჭირდება ენაში: **სახელები საგნებისათვის** და **სახელები იმ ნიშან-თვისებებისათვის, ან დამოკიდებულებისთვის, რომლებსაც ამ საგნების მიმართ გამოვთქვამთ.** პირველს, ლოგიკაში **ტერმებს,** ხოლო მეორეს – **პრედიკატებს** ვეძახით. სწორედ ამ ორი ტიპის გამოსახულებებია, რომლებიც პრედიკატთა ლოგიკის ასაგებად ძირითად „სამშენებლო“ მასალას წარმოადგენს.

§2.2. პრედიკატები, ცვლადები და კონსტანტები. დავუბრუნდეთ ჩვენს მაგალითებს და ვცადოთ გავერკვეთ თუ რას წარმოადგენს პრედიკატი? იქიდან გამომდინარე, რაც ვთქვით, ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ მოცემული წინადადებებიდან, თუ სახელების აღმნიშვნელ სიტყვებს ამოვაგდებთ, რაც დაგვრჩება, სწორედ პრედიკატიც ის უნდა იყოს. ამ გზას თუ გავყვებით, გვექნება შემდეგი

- *––– ცხენის სახელია*
- *––– დაზიანებულია*
- *––– პლანეტაა.*
- *–––– და –––– მეზობლებია*
- *–––– მაღალია ვიდრე –––––*
- *–––– უფრო ღონიერია, ვიდრე ––––*
- *–––– (არ) არის პლანეტა*

თუ კარგად დავკვირდებით, ვნახავთ, რომ აღნიშნული გამოსახულებები წინადადებებად იქცევა მაშინათვე, თუ კი ცარიელ ადგილებს ნებისმიერი სახელებით, და არა მხოლოდ ჩვენ მაგალითებში მოტანილი სახელებით, შევავსებთ. ზოგიერთი გამოსახულების წინადადებად ქცევას კი ერთი სახელი არ ყოფნის: ორია საჭირო. ის, რომ ასეთი რამ შესაძლებელია (ანუ ამ გამოსახულებათა წინადადებებად გარდაქმნაა შესაძლებელი), მიგვითითებს იმაზე, რომ საქმე, სინამდვილეში, **საწინადადებო ფორმებთან** გვაქვს. თუმცა ეს ფორმები არსებითად განსხვავდება იმ ფორმებისგან, რომლებიც პროპოზიციურ ლოგიკაში გვხდებოდა. იქ, საწინადადებო ცვლადები **წინადადებებით** უნდა შეგვეცვალა, რომ წინადადება მიგვეღო. აქ კი, თუ ცარიელ ადგილებს **ცვლადებად** აღვიქვამთ, იმისათვის, რომ აზრიანი წინადადება მივიღოთ, **კონკრეტულ ობიექტთა კონკრეტული სახელები** უნდა ვიხმაროთ. მაშასადამე, ცვლადები, თუ მათ ვიხმართ, თავისი ბუნებით, იმავე ყაიდისაა, როგორსაც მათემატიკაში ვხვდებოდით, როდესაც, მაგალითად ვწერდით **$x \geq 5$,** ანდა **$x \neq y$.** თუმცა ეს არ უნდა იწვევდეს გაკვირვებას, ვინაიდან **„მეტია ან ტოლი“**, ანდა **„არ არის იგივე, რაც“** ისეთივე პრედიკატებია, როგორც სხვა დანარჩენები. უბრალოდ, ამ ბოლო შემთხვევაში, ამ პედიკატთა აზრიან წინადადებებად გარდაქმნისათვის **x** და **y** რიცხვთა ღერძზე უნდა იყოს განსაზღვრული, ხოლო როდესაც, მაგალითად, ვამბობთ, რომ **ვიღაც სხვაზე უფრო ღონიერია,** ეს **სხვა** და ეს **ვიღაც,** ცოცხალ არსებათა სამყაროს უნდა ეკუთვნოდნენ.

იმისათვის, რომ ჩვენი მსჯელობა უფრო საგნობრივი გავხადოთ, შევთანხმდეთ შემდეგზე:

შეთანხმება 2.1. **U** იყოს უნივერსუმი, რომელსაც **განსჯის,** ან **ბჭობის** უნივერსუმს ვუწოდებთ, და ყველა პრედიკატი, რომელსაც მოვიხმართ, ამ უნივერსუმზე იყოს განსაზღვრული იმ აზრით, რომ შეგვიძლია ჩვენი პრედიკატებით აღნიშნული თვისებები და დამოკიდებულებები აზრიანად მივუყენოთ უნივერსუმის ობიექტებს.

ბჭობის უნივერსუმის ობიექტთა სახელდებისათვის ვიხმაროთ ლათინური ანბანის დასაწყისი მცირე ასოები ინდექსებით, ან მათ გარეშე, და მათ **ერთეულოვანი სახელები,** ან **კონსტანტები** ვუწოდოთ. მაგალითად, კონსტანტებია **a,b, c,. . . a_1,b_1,c_1**… უნივერსუმის ობიექტთა ნებისმიერი მითითებისათვის ვიხმაროთ მცირე ასოები იმავე ანბანის ბოლოდან, ინდექსებით ან მათ გარეშე, და მათ **ცვლადები** ვუწოდოთ. მაშასადამე ცვლადები იქნება **x,y,z,. . . x_1, y_1, z_1,. . .** პრედიკატებისთვის ვიხმაროთ ამავე ანბანის შუიდან მთავრული ასოები, ინდექსებით ან მათ გარეშე, რომლის გვერდით ფრჩხილებში მითითებული იქნება ცვლადების ის რაოდენობა, რომელთა შენაცვლებაცაა აუცილებელი კონსტანტებით, რომ ეს პრედიკატიანი გამოსახულება აზრიან წინადადებად გარდაიქმნას. მაგალითად, საპრედიკატო გამოსახულებები იქნებოდა **P(x), P_1(x,y), Q(a,x)** და ა.შ. საპრედიკატო გამოსახულებაში კონსტანტებით შესანაცვლებელ ცვლადთა რაოდენობა ამ გამოსახულების ე.წ. **ადგილიანობას** (ზოგჯერ ვიტყვით, **პრედიკატის ადგილიანობას)** განსაზღვრავს. მაგალითად, ჩვენ შემთხვევაში, **P** ერთადგილიანი პრედიკატია, ხოლო **P_1** – ორი. აუცილებლად მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ გამოსახულება **Q(a,x)** ერთადგილანია, რადგან მის წინადადებად გარდაქმნას ერთი ცვლადის შენაცვლება სჭირდება. თუმცა, როგორც წინადადება, ის რაღაც მიმართების გამომთქმელია **P_1** – ის მსგავსად. ერთადგილიან პრედიკატებს ხშირად უწოდებენ **თვისებებს,** ხოლო ორ და მეტადგილიან პრედიკატებს - **მიმართებებს.**

მაგალითი 1. U იყოს ადამიანთა სიმრავლე. კონსატანტა **a** აღნიშნავდეს ვანოს, ხოლო კონსტანტა **b –** კოტეს. **P(x,y)** იყოს ადამიანთა სიმრავლეზე განსაზღვრული პრედიკატი „———— **მეზობელია** ————“. მაშინ გამოსახულება **P(a,b)** რეალურად წარმოადგენს ჩვენ მიერ ზემოთ მოტანილი წინადადებებიდან ერთ-ერთს, კერძოდ, **(5)-**ს. ხოლო გამოსახულებანი **P(a,x)** და **P(x,b)** შესაბამისად იკთხება როგორც **„მეზობელია ვანოსი“** და **„მეზობელია კოტესი“**. ბუნებრივია, ისინი განსხვავდებიან როგორც ერთმანეთისგან, ასევე საწყისი ორადგილიანი პრედიკატისგანაც.

მაგალითი 2. U იყოს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. კონსტანტა **a** აღნიშნავდეს **7**-ს, ხოლო კონსტანტა **b** აღნიშნავდეს **3**-ს. **P(x)** იყოს პრედიკატი **$x \geq 5$,** ანუ, თვისება **„იყოს ხუთზე მეტი“.** მაშინ გამოსახულება **P(a)** რეალურად აღნიშნავს მცდარ წინადადებას, ხოლო გამოსახულებანი **P(b) –** ჭეშმარიტს.

§3. კავანტორები და კვანტორებიან წინადადებათა ჭეშმარიტებითი მნიშვნელობები.

ცვლადების ნაცვლად საწინადადებო ფორმაში ერთეულოვანი ტერმინის ჩასმა, ამგვარად, დასრულებულ წინადადებას გვაძლევს. თუმცა არსებობს სხვა გზაც, რასაც **კვანტორების** შემოტანას უკავშირებენ. ჩვეულებრივ სიტყვახმარებაში კვანტორები შეესატყვისება ისეთ ფრაზებს, როგორიცაა **ყველა** და **ზოგიერთი.**

მართლაც, თუ გვაქვს საწინადადებო ფორმა, მაგალითად, **“x ≥ 5“,** შემდეგი ორი გამოსახულება უკვე წინადადებას წარმოადგენს:

ა) ყველა x-თვის x ≥ 5

ბ) ზოგიერთი x-თვის x ≥5

ამათგან პირველი მცდარია, ხოლო მეორე ჭეშმარიტი. პირველს **ზოგადობის კვანტორი** ჰქვია, ხოლო მეორეს **არსებობის.** მათი აღნიშვნისათვის იხმარება სიმბოლოები ∀ და ∃ იმ ცვლადის მითითებით, რომელსაც ეს კვანტორები ეხება. თუ საწინადადებო ფორმაში ერთზე მეტი სხვადასხვა ცვლადი გვხდება, მაშინ მის წინადადებად გარდასაქმნელად, თუ კი მათ კონსტანტით არ ვცვლით, იმდენი კვანტორი გვჭირდება, რამდენი სხვადასვა ცვლადიცაა.

ცვლადები, რომელთა მიმართაც კვანტორი გამოიყენება, **ბმული** ცვლადი ეწოდება, ხოლო უკვანტორო ცვლადს - **თავისუფალი.** ამრიგად, **საწინადადებო ფორმა ერთ თავისუფალ ცვლადს მაინც შეიცავს.**

ზოგადობის კვანტორის შემცველ წინადადებას **ზოგადი წინადადება** ჰქვია. ხოლო არსებობის კვანტორის შემცველს - **კერძოობითი.** განვსაზღვროთ მათი ჭეშმარიტების პირობები:

ზოგადი წინადადება ∀x A(x) (იკითხება როგორც “ყოველი **x** ისეთია, რომ ჭეშმარიტია **A(x)“)** ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც **A(x)** საწინადადებო ფორმას აკმაყოფილებს **x** ცვლადის **ყოველი მნიშვნელობა** განსჯის უნივერსუმიდან.

კერძოობითი წინადადება ∃ x A(x) (იკითხება როგორც “არსებობს **x** ისეთი, რომ ჭეშმარიტია **A(x)“)** ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც **A(x)** საწინადადებო ფორმას აკმაყოფილებს **x ცვლადის ერთი მაინც** (ზოგიერთი) **მნიშვნელობა** განსჯის უნივერსუმიდან.

როდესაც საწინადადებო ფორმა ერთზე მეტ ცვლადს შეიცავს, მაშინ კვანტორები შესაძლოა თავსართის სახით დაჯგუფდნენ. ძალიან მნიშვნელოვანია შერეულ კვანტორთა წყვილები. ასეთი წყვილები ორგვარია, და ისინი კარგად უნდა გავანსხვავოთ ერთმანეთისგან;

- **∀x∃y** ნიშნავს **“**ყოველი **x**–თვის არსებობს **y** ისეთი, რომ“ და
- ∃x∀y ნიშნავს “არსებობს ისეთი **x**, რომ ყოველი **y**-თვის“, რაც საზოგადოდ ერთი და იგივე არ არის.

კვანტორების შემოტანა მძლავრ გამომსახველობით საშუალებებს იძლევა, იმისათვის რომ სხვადსხვა სახის მსჯელობათა მეტ-ნაკლებად ფორმალიზებული ანალიზი შევძლოთ.

მაგალითი 3. მარტივ წინადადებას, რომელშიც ორ პრედიკატს შორის კავშირი არის გამოთქმული, **მარტივი კატეგორიული წინადადება** ეწოდება. თეორია, რომელიც ასეთ წინადადებებს აღწერს, ლოგიკისათვის **არისტოტელეს** დროიდანაა ცნობილი და, რეალურად, ლოგიკის მეცნიერებისა და ლოგიკის სწავლების საფუძველს წარმოადგენდა

მარტივი კატეგორიული წინადადებებია:

a) ვარდი ყვავილია;
b) ზოგიერთი სკამი გატეხილია;
c) ადამიანი მოკვდავია და ა.შ.

იმ ტერმინებიდან, რომლებიც მარტივი კატეგორიული წინადადების ღერძს წარმოადგენს, ერთს, რაზედაც აზრს გამოვთქვამთ, ვუწოდებთ **სუბიექტს,** ხოლო მეორეს ვუწოდებთ **პრედიკატს.** სუბიექტი და პრედიკატი, ერთობლივად, მარტივი კატეგორიული წინადადების **ტერმინებს** წარმოადგენს. მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ სიტყვა **პრედიკატის** ხმარება, როდესაც მარტივი კატეგორიული წინადადებებზე ვსაუბრობთ, განსხვავებულია, იმისაგან, რაც ჩვენ დავადგინეთ. პრედიკატი აქ ტერმინის უფრო **პრედიკატის პოზიციაზე ყოფნას** ნიშნავს. ამის გამო, ერთი და იგივე ტერმინი, შესაძლოა, ერთ წინადადებაში **პრედიკატის ადგილას** ვიხილოთ, ხოლო მეორე შემთხვევაში – **სუბიექტისა.** ასეთ ვითარებაში, პირველ წინადადებაში ის პრედიკატი იქნება, ხოლო მეორე წინადადებაში – სუბიექტი. თუმცა, **ორივე პრედიკატია (§2.2)-ში დადგენილი აზრით.** ტერმინების აღრევის აქ არ უნდა შეგვეშინდეს, ვინაიდან, საზოგადოდ, მოძღვრებას მარტივი კატეგორიული წინადადებების შესახებ პრედიკატთა ლოგიკისგან დამოუკიდებლად განიხილავენ. ჩვენი მაგალითის დანიშნულება კი ისაა, რომ ვაჩვენოთ ამ ორი თეორიის ურთიერთკავშირის შესაძლებლობა. კერძოდ ის, რომ პრედიკატთა ლოგიკის გამომსახველობითი საშუალებები იძლევა შესაძლებლობას მარტივი კატეგორიული წინადადებების გამოთქმისა. თუ როგორ ხდება ეს, ამას ქვემოთ ვნახავთ. ზემოთ მოტანილ წინადადებებში ტერმინებია "ვარდი", "ყვავილი", "სკამი", "გატეხილი", "ადამიანი" და "მოკვდავი". აქედან, "ვარდი", "სკამი" და "ადამიანი", მოცემულ წინადადებებში, **სუბიექტებია,** ხოლო "ყვავილი", "გატეხილი" და "მოკვდავი" კი **პრედიკატები.** მარტივ კატეგორიულ წინადადებაში ტერმინებს შორის კავშირები შესაძლოა განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან **თვისებრივად** და **რაოდენობრივად:** რაოდენობრიობის მიხედვით მარტივი კატეგორიული წინადადება იყოფა ორად (ზოგადი და კერძო), რომელთაგან თითოეული ორ-ორად იყოფა უკვე თვისობრიობის მიხედვით, დადებითად, ან უარყოფითად. ასე რომ გვაქვს

i. ზოგად-დადებითი,
ii. ზოგად-უარყოფითი,
iii. კერძოობით-დადებითი, და
iv. კერძოობით-უარყოფითი მარტივი კატეგორიული წინადადებები

ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ სტრუქტურულად მარტივი კატეგორიული წინადადებები ორგვარი ელემენტებისაგან შედგება: **ტერმინები,** ანუ **სუბიექტი** და **პრედიკატი,** და ის, რაც ამ ტერმინების აზრიანად დაკავშირების შესაძლებლობას იძლევა, ის რაც გამოითქმის როგორც **არის, არ არის** ან **ყველა**

არის, არც ერთი არ არის, ზოგიერთი არის, ზოგიერთი არ არის. ეს ნიშნავს, რომ ერთი და იგივე ტერმინებით შეგვიძლია ავაგოთ სხვადასხვა ფორმის მარტივი კატეგორიული წინადადება.

მაგალითად ტერმინებიდან **ადამიანი** და **მოკვდავი** შეგვიძლია ავაგოთ

- ზოგად-დადებითი : *ყველა ადამიანი არის მოკვდავი*
- ზოგად-უარყოფითი: *არც ერთი ადამიანი არ არის მოკვდავი*
- კერძოობით-დადებითი: *ზოგიერთი ადამიანი არის მოკვდავი*
- კერძოობით-უარყოფითი: *ზოგიერთი ადამიანი არ არის მოკვდავი*

ზოგადად, თუ **S** და **P** შეაბამისად აღნიშნავს სუბიექტსა და პრედიკატს, ხოლო **a, e, i** და **o** აღნიშნავს **ზოგად-დადებით, ზოგად-უარყოფით, კერძოობით-დადებით და კერძოობით-უარყოფით კავშირს**, გვექნება შემდეგი სქემა:

მარტივი კატეგორიული წინადადების სახეობა	**სიმბოლური ჩანაწერი**	სიმბოლური ჩანაწერის წაკითვა
ზოგად-დადებითი	**SaP**	*ყველა* **S** *არის* **P**
ზოგად-უარყოფითი	**SeP**	*არც ერთი* **S** *არ არის* **P**
კერძოობით-დადებითი	**SiP**	*ზოგიერთი* **S** *არის* **P**
კერძოობით-უარყოფითი	**SoP**	*ზოგიერთი* **S** *არ არის* **P**

სინამდვილეში, ეს არის მარტივი კატეგორიული წინადადებების ტრადიციული ჩაწერის ფორმა, რომელიც საუკუნეების მანძილზე მოიხმარება ლოგიკაში, და ბევრი სახელმძღვანელო დღესაც ამ ჩანაწერებს იყენებს. თუმცა, ლოგიკაში კვანტორების შემოღების შემდეგ, ეს ჩანაწერები ნელ-ნელა ხმარებიდან გამოდის, ვინაიდან მათი ჩანაცვლება ადვილად შესაძლებელია კვანტორებიანი ფორმულებით. მარტივი კატეგორიული წინადადებები **SaP. SeP, SiP** და **SoP** კვანტორების გამოყენებით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

SaP	$\forall x(S(x) \supset P(x))$
SeP	$\forall x(S(x) \supset \neg P(x))$
SiP	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$
SoP	$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$

§3.1. კვანტორებიანი ფორმულების თვისებები. ქვემოთ მოცემულია იმ ფორმულათა ჩამონათვალი, რომელთა ცოდნა ამარტივებს კვანტორებიან ფორმულებთან მუშაობას იმ თვალსაზრისით, რომ გვაჩვენებს კვანტორების შემცველი ფორმულების ურთიერთდამოკიდებულებას, მათ მიმართებას პროპოზიციურ მაკავშირებლებთან და გვიჩვენებს იმ გზას, რომელსაც ერთი ფორმულიდან შეუძლია მეორემდე მიგვიყვანოს. მათ ზოგჯერ პრედიკატთა ლოგიკის კანონებს უწოდებენ

$\forall xA(x) \supset A(a)$	ზოგადობის კვანტორის მოცილების წესი
$A(a) \supset \exists xA(x)$	არსემობის კვანტორის შემოღების წესი
$\forall xA(x) \supset \exists xA(x)$	კვანტორთა დაქვემდებარების წესი
$\neg\forall xA(x) \equiv \exists x\neg A(x)$ $\neg\exists xA(x) \equiv \forall x\neg A(x)$	დე მორგანის კანონები კვანტორებისათვის
$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ $\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$ $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \supset \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ $\forall xA(x) \vee \forall x B(x) \supset \forall x(A(x) \vee B(x))$	დისტრიბუციის წესები კვანტორებისათვის
$\forall x\forall yR(xy) \equiv \forall y\forall xR(xy)$ $\exists x\exists yR(xy) \equiv \exists y\exists xR(xy)$ $\forall x(A(x) \supset B(x)) \equiv \neg\exists x (A(x) \wedge\neg B(x))$	ექვივალენტობის წესები
$\exists x\forall yR(xy) \supset \forall y\exists xR(xy)$ $\forall x(A(x) \supset B(x)) \supset (\forall xA(x) \supset \forall x B(x))$ $\forall xyA(x,y) \supset \forall zA(z,z)$	იმპლიკაციის წესები

აქაც, ასევე კარგი იქნება, თუ ამ ფორმულების შინაარსში გავერკვევით, და იმ პრინციპებს დავიმახსოვრებთ, რაც მათი საშუალებითაა გამოთქმული.

§3.2. პრედიკატები და სიმრავლეები. ვთქვათ, **U** არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე და ის ჩვენი განსჯის უნივერსუმს წარმოადგენს. ხოლო **P(x), Q(x)** და **R(x)** არის შემდეგი პრედიკატები

P(x) იყოს **(x≥25)**

Q(x) იყოს **(x+7=25)**

R(x) იყოს **(x<25)**

ადვილი სანახავია, რომ თითოეული მათგანი გარკვეული რიცხვებისათვის ჭეშმარიტია, ხოლო სხვა რიცხვებისათვის - არა. მაგალითად, **P(x)** ჭეშმარიტია 25-ს ზემოთ ყველა რიცხვისთვის, თავად 25-ის ჩათვლით, და ასეთ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. **Q(x)** ჭეშმარიტია ერთადერთი რიცხვისათვის და ეს რიცხვი არის 18. რაც შეეხება **R(x)**-ს, ის ჭეშმარიტია 1-დან 24-ის ჩათვლით რიცხვებისათვის.

შევთანხმდეთ შემდეგზე: D-ზე განსაზღვრული, რაიმე **S(x)** პრედიკატის **ჭეშმარიტების არე** ვუწოდოთ **D-**ს ელემენტთა იმ ქვესიმრავლეს, რომლებითვისაც **S(x)** პრედიკატი ჭეშმარიტია. სიმარტივისათვის, და იმის მიმანიშნებლად, რომ მოცემული სიმრავლე **S(x)** პრედიკატის ჭეშმარიტებითი არეა, აღვნიშნოთ ის **S**-ით. მაგალითად, ჩვენ შემთხვევაში, გვექნება

P(x) პრედიკატის ჭეშმარიტებითი არეა **U** სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლე **P = {x: x≥25},**

Q(x) პრედიკატის ჭეშმარიტებითი არეა **U** სიმრავლის ერთეულოვანი ქვესიმრავლე **Q =** {18}, ხოლო

R(x) პრედიკატის ჭეშმარიტებითი არეა **U** სიმრავლის სასრული ქვესიმრავლე **R = { x: 1≤x<25}.**

ვინაიდან სიმრავლეები რაღაც კორელაციაში გამოდიან პრედიკატებთან, საინტერესო იქნებოდა გვენახა, ხომ არ არსებობს რაიმე კავშირი სიმრავლის თეორიის კანონებსა და პრედიკატთა ლოგიკის დებულებებს შორის? გავსინჯოთ ეს შესაძლებლობა მაგალითზე:

ავიღოთ სიმრავლეთა თეორიის, რაიმე ჭეშმარიტი დებულება, ვთქვათ,

(1). (A⋃B)′ = (A′⋂B′)

და ვნახოთ, რა იქნებოდა მისი შესატყვისი ფორმულა პრედიკატთა ლოგიკაში. ამისათვის, სიმრავლის დამატებას შევხედოთ როგორც უარყოფას, გაერთიანებას, როგორც დისიუნქციას, კვეთას, როგორც კონიუნქციას, ხოლო ის გარემოება, რომ ზემოთ მოტანილი დებულება ძალაშია ნებისმიერი სიმრავლისათვის მოცემული

უნივერსუმიდან (თუ კი ამ უნივერსუმის ელემენტები ეკუთვნის ან ერთ, ამ მეორე სიმრავლეს), გამოვხატოთ ზოგადობის კვანტორის მეშვეობით. მაშინ გვექნება

(2). $\forall x(\neg(A(x) \wedge B(x)) \equiv (\neg A(x) \vee \neg B(x)))$.

ძალიან ჰგავს იმას, რომ **(1)** ჭეშმარიტია მაშინ, როდესაც ჭეშმარიტია **(2),** და პირიქით. ვნახოთ, მართლაც ასე არის თუ არა? განვიხილოთ პირველი ვარიანტი: ვიცით, რომ **(1)** არის ჭეშმარიტი. საკითხი დავსვათ ასე: შესაძლებელია თუ არა ამ პირობებში **(2)** იყოს მცდარი? ვთქვათ, რომ შესაძლებელია. მაგრამ რას ნიშნავს **(2)**-ს მცდარობა? ეს ნიშნავს, რომ ჭეშმარიტია მისი უარყოფა. ეს კი, თავის მხრივ, ნიშნავს იმას, რომ ჩვენს უნივერსუმში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ობიექტი, ვთქვათ, **a,** რომლისთვისაც სამართლიანია

$\neg(A(a) \wedge B(a)) \not\equiv (\neg A(a) \vee \neg B(a))$,

სხვა სიტყვებით, ორი $\neg(A(a) \wedge B(a))$ და $(\neg A(a) \vee \neg B(a))$ დებულებიდან არც ორივეა ერთდროულად ჭეშმარიტი, და არც ორივეა ერთდროულად მცდარი. მაშასადამე, თუ, ამ შემთხვევაში, ჭეშმარიტია $\neg(A(a) \wedge B(a))$, მაშინ მცდარი უნდა იყოს $(\neg A(a) \vee \neg B(a))$, და პირიქით. ვთქვათ, მართლაც ასეა. მაგრამ პირველის ჭეშმარიტება ნიშნავს, რომ $a \notin A$, ან $a \notin B$. ახლა შევხედოთ რას ნიშნავს, რომ მცდარია $\neg A(a) \vee \neg B(a)$? დიდი გამჭრიახობა არ ჭირდება იმის დანახვას, რომ ეს უნდა ნიშნავდეს შემდეგს: $a \in A$ და $a \in B$. მაგრამ ერთსა და იმავე ელემენტისთვის შეუძლებელია ერთდრულად ის კიდეც ეკუთვნოდეს რაიმეს და კიდეც არ ეკუთვნოდეს. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე ეს გზა არ ვარგა. მაშინ, იქნებ მეორე დებულებაა ჭეშმარიტი და პირველი მცდარი? ზუსტედ ისევე შეგვიძლია ვაჩვენით, რომ ეს შემთხვევაც შეუძლებელ შედეგს გვაძლევს. თუმცა ამ წინააღმდეგობამდე (შეუძლებელ შედეგებამდე) ჩვენ იმის დაშვეებამ მიგვიყვანა, რომ **(1)** ჭეშმარიტია, ხოლო **(2)** მცდარი. **ამიტომ ეს დაშვებაა თავად მცდარი** და უარი უნდა ვთქვათ მასზე. შედგად, მივიღებთ, რომ თუ **(1)** ჭეშმარიტია, **(2)** აუცილებლად ჭეშმარიტია. ანლოგიურად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ იმაშიც, რომ თუ **(2)** ჭეშმარიტია, **(1)** აუცილებლად ჭეშმარიტია.

სხვათაშორის, ის, რომ სიმრავლეთა თეორიის ჭეშმარიტ დებულებებსა და პრედიკატთა ლოგიკის დებულებებ შორის ასეთი დამიკიდებულება არსებობს, ძალიან ამარტივებს ზოგიერთ თემაზე მსჯელობას. გარდა ამისა, ის შესაძლებლობას იძლევა პრედიკატების განხილვისას ვენის დიაგრამები გამოვიყენოთ.

სავარჯიშოს სახით, განიხილეთ შემთხვევა, როდესაც საქმე ორადგილიან პრედიკატებს ეხება. **ძალაში იქნება თუ არა მათთვისაც იგივე?**

დამატება 1. ცოტა რამ დასაბუთების შესახებ

ადამიანები, ცხოვრების მანძილზე, ხშირად ცდილობენ ერთმანეთი დაარწმუნონ და ამის უამრავი მიზეზი გააჩნიათ: მაგალითად, პოლიტიკური მოღვაწეები ცდილობენ დაარწმუნონ სხვები მათ მიერ არჩეული პოლიტიკური კურსის მომგებიანობაში, რომ არჩევნებისთვის მოსახლეობის მხარდაჭერა მოიპოვონ. სასამართლო პროცესზე, პროკურორი ცდილობს მოსამართლის დარწმუნებას, რომ საბრალდებლო სკამზე მყოფი მართლაც დამნაშავეა, ხოლო ადვოკატი, იქვე, იმავე მოსამართლეს არწმუნებს იმაში, რომ საქმე საპირისპიროდაა წარმოდგენილი. მეცნიერები დავობენ ხშირად ერთსა და იმავე მონაცემთა ინტერპრეტირებისას და ეს დავა სხვა არაფერია, თუ არა ერთმანეთის დარწმუნების მცდელობა თავიანთი მიდგომის სისწორეში. უამრავი მსგავსი მაგალითის მოტანა შეიძლება. ნებისმიერ სიტუაციაში, როდესაც ადამიანები აზრს ცვლიან, მსჯელობენ, დავობენ, სიახლეს ნერგავენ და სხვ. ურთიერთდარწმუნების მცდელობასთან გვაქვს საქმე. საზოგადოდ, ყველა ამ შემთხვევაში, ერთსა და იმავე სქემას მიმართავენ ხოლმე: ჯერ თავიანთ მოსაზრებას გამოთქვამენ, ხოლო შემდეგ ცდილობენ გარკვეული, თავიანთი სიმართლის დამადასტურებელი არგუმენტების მოშველიებას, რომ ეს მოსაზრება დამაჯერებელი, ანუ სარწმუნო გახადონ. არგუმენტები, ჩვეულებრივ, მრავალგვარია და დამოკიდებულია როგორც მსმენელისა და მოსაუბრის ინტელექტზე, ასევე იმ საგნის რაობაზე, რომელიც განსჯის საბაბი გამხდარა. ხშირად, და პრაქტიკულად უმეტეს შემთხვევაში, არგუმენტი **დემონსტრირებით** შემოიფარგლება: მე **გაჩვენებთ** რამეს და ეს საკმარისი ხდება, რომ თქვენ **დარწმუნდეთ.** ამ დროს, ქვეცნობერად ვგულისხმობთ, რომ **ადამიანი საკუთარ მხედველობას ენდობა** და ეს ასეცაა. სხვათა შორის, ამიტომაცაა, რომ ზოგჯერ ვხმარობთ გამოთქმას "თუ თვალი არ მატყუებს". ვგულისხმობთ, რომ, საზოგადოდ, თვალი **არ გვატყუებს.** მართალია, დასარწმუნებლად ადამიანები ზოგჯერ ფიზიკურ ზემოქმედებასაც მიმართავენ. მაგალითად, როდესაც ბავშვი ცუდი საქციელის გამო ისჯება. მაგრამ, ვინაიდან ფიზიკური ზემოქმედება, ზოგადად, არგუმენტად არ აღიქმება, ამიტომ დასჯა მეტწილად აღზრდის არაეფექტურ მეთოდადაა მიჩნეული: **მე გიჯერებ არა იმიტომ, რომ შენ არგუმენტირებულად დამარწუნე იმაში, რომ რაც გავაკეთე ცუდია, არამედ იმიტომ, რომ დღეს შენი მეშინია.** ბუნებრივია, როგორც კი ეს შიში მთავრდება, იმავე ვითარებას ვუბრუნდებით: მე ისევ ცუდად ვიქცევი. სხვა სიტყვებით, შენ კი არ დამარწმუნე, შენ **მაიძულე** და ზოგადად, მე შენი არ მჯერა. აი ეს დგას ფიზიკური ზემოქმედების უკან და სინამდვილეში, არავითარ დარწმუნებასთან აქ საქმე არ გვაქვს. დარწმუნება არგუმენტის მოშველიებასთან არის ასოცირებული და მთელ ამ პროცესს ჩვენ **დასაბუთებას** ვეძახით. დავუბრუნდეთ არგუმენტების მრავალგვარობას. დემონსტრირება, სხვათაშორის, არ გულისხმობს მხოლოდ რაიმეზე მითითებას. ხშირად, ეს საკმაოდ რთული პროცედურაა: მაგალითად, როდესაც ფიზიკოსი, ან ნებისმიერი ბუნებათმცოდნე, ექსპერიმენტს აყენებს, ესეც დემონსტრირებაა. ასევე ხშირად, არგუმენტაციისას, ადამიანები მსგავსი მაგალითების მოშველიებას მიმართავენ და

ამას **ანალოგიით** დასაბუთებას უწოდებენ. ანალოგიებს, მაგალითად სასამართლო პრაქტიკაში მიმართავენ ხოლმე, როდესაც განაჩენის გამართლება ადრე მომხდარი მსგავსი შემთხვევისთვის მიღებული გადაწყვეტილებით სურთ. ამას, ზოგადად, პრეცენდენტულ სამართალს ეძახიან. სხვა უამრავი შემთხვევის აღწერა შეიძლება, როდესაც ყოველდღიურობაში ჩვენ სხვადასხვა არგუმენტს მოვიშველიებთ ხოლმე და ვფიქრობთ, რომ შევძელით როგორც ჩვენი სიმართლის დამტკიცება, ასევე მსმენელის დარწმუნებაც. თუმცა, ხშირად, რაც ჩვენ არგუმენტი გვგონია, არგუმენტს საერთოდ არ წარმოადგენს, ანდა წარმოადგენს, მაგრამ ის საკმარისი არ არის, რომ გამოთქმული მოსაზრება საბოლოოდ დავადასტუროთ. ამ მხრივ, სხვათაშორის, ყველაზე მომგებიანად, მათემატიკა გამოიყურება. შემთხვევითი არ არის ისეთი გავრცელებული გამონათქვამები, როგორიცაა *მათემატიკური სიზუსტით, მათემატიკურად გათვლილი, მათემატიკურად დასაბუთებული,* და სხვ. ეს გამონათქვამები, ზოგადად, მატემატიკაში გამოყენებული დასაბუთების ხერხების მიმართ ჩვენს საერთო ნდობაზე მიუთითებს. რა ხერხებია ეს? და შეგვიძლია თუ არა მათი იმდაგვარი აღწერა, რომ ჩვენს საკუთარ არგუმენტაციაში აქ გამოვლენილი სტრატეგიების გამოყენება შევძლოთ?

პირველ რიგში შევთანხმდეთ იმაზე, თუ რას დავარქვათ დასაბუთება. ჩავთვალოთ, რომ ენა, რომელსაც მოვიხმართ, არის პროპოზიციური ლოგიკის ენა, რომელიც, შესაძლოა, გამდიდრებული იყოს ზოგირთი სიმბოლოთი, რომ წინადადებათა ერთობლიობებზე მითითება შევძლოთ. იმ წარმოდგენებიდან გამომდინარე, რაც ჩვენ ინტუიციურად გაგვაჩნია, დასაბუთება წარმოადგენს გარკვეულ ჯაჭვს წინადადებებისა, რომლებიც თანამიმდევრობით, ასე ვთქვათ, **გვაახლოებენ** ჩვენს ძირითად, დასასაბუთებელ წინადადებასთან. ბუნებრივია, ჩავთვალოთ, რომ ამ ჯაჭვის ბოლო წინადადება უნდა იყოს სწორედ ის, რის დასაბუთებასაც ვლამობთ. მაშასადამე, რაიმე $\mathbf{t_n}$ ფორმულის დასაბუთება $\mathbf{t_1, t_2, t_3, .. t_{n-1}}$-დან არის $\mathbf{t_1, t_2, t_3, ... t_{n-1}, t_n}$ წინადადებათა თანამიმდევრობა, სადაც თითოეული $\mathbf{t_{i<n}}$, წარმოადგენს იმას, რასაც, ჩვეულებრივ, წანამძღვრებს ვუწოდებთ, და რომლებიც, თავის მხრივ წარმოადგენენ ან დაშვებებს, ასე ვთქვათ, ვარაუდებს, რომლებსაც დასაბუთება ეყრდნობა და რომელთა ჭეშმარიტება ჩვენთვის სარწმუნოა, ან ჩვენთვის უკვე ცნობილ (იმ აზრით, რომ მათი ჭეშმარიტება დასაბუთებული გვაქვს) ჭეშმარიტებებს, ან ამ ორი ტიპის დებულებებიდან გარკვეული წესების მიხედვით მიღებულ ახალ დებულებებს, ვინაიდან წესები, რომლებსაც ამ დროს ვეყრდნობით, ისეთნაირად გვაქვს შერჩეული, რომ ისინი თავდაპირველი წინადადებების ჭეშმარიტებას გვინარჩუნებენ. როდესაც გვინდა დავწეროთ, რომ $\mathbf{t_1, t_2, t_3, .. t_{n-1}}$-დან გამომდინარეობს $\mathbf{t_n}$, ვიხმართ შემდეგ ჩანაწერს: $\mathbf{t_1, t_2, t_3, ... t_{n-1} \vdash t_n}$. დავუკვირდეთ ჩვენი ჩანაწერის შინაარსს. ეს ხომ ნიშნავს იმას, რომ თუ ჭეშმარიტებია $\mathbf{t_1, t_2, t_3, ... t_{n-1}}$ ფორმულები, ასევე ჭეშმარიტი უნდა იყოს $\mathbf{t_n}$. ანუ, ჭეშმარიტი უნდა იყოს იმპლიკაცია $(\mathbf{t_1 \wedge t_2 \wedge t_3 \wedge ... \wedge t_{n-1} \supset t_n})$. მაგრამ ამის შემოწმება, საზოგადოდ, ხომ ჭეშმარიტებითი ცხრილებითაც შეიძლება? რა თქმა უნდა, შეიძლება, მაგრამ ეს ყოველთვის გამოსავალი არ არის და სერიოზულ დებულებათა დასასაბუთებლად

ჩვენ მას თითქმის არ მივმართავთ. იმას, რაც ახლა აღვწერეთ **პირდაპირ დასაბუთებას** უწოდებენ და ის დასაბუთების ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული, თუმცა, მეტწილად, რთული სტრატეგიაა.

პირდაპირი დასაბუთება, ძირითადად, ეყრდნობა იმპლიკაციის ტრანზიტულობის თვისებას, კერძოდ, თუ ვიცით, რომ **p⊃r** და, ამავე დროს, **r⊃q,** მაშინ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ **p⊃q**. **წესები**, რომლითაც, მაგალითად, პროპოზიციურ ლოგიკაში, ახალ ფორმულაზე გადასვლა ხდება, და რასაც **დასკვნის წესები** ჰქვია, მეტწილად,, ორია. ეს არის ე.წ. **modus ponens** (სრული სახელი modus ponendo ponens-კონსექვენტის დადასტურება (პონენდო) ანტეცედენტის დადასტურების (ponens) მეთოდით (modus)) და **ექვივალენტურ დებულებათა ურთიერთ ჩანაცვლება** უკვე არსებულ და ჭეშმარიტად მიჩნეულ წინადადებაში. ერთადერთი, რაც დასკვნის წესებს მოეთხოვება არის ის, რომ მათი გამოყენება **არ უნდა ცვლიდეს ჭეშმარიტი დებულების ჭეშმარიტებას** (ექვივალენტურ დებულებათა ურთიერთ ჩანაცვლების შემთხვევაში), და ორი ჭეშმარიტი დებულებიდან **მესამეზე გადასვლა**, ასევე უნდა ინარჩუნებდეს ჭეშმარიტებას (modus ponens –ის შემთხვევაში). ის, რომ ორივე ზემოხსენებული წესი ამ პირობებს აკმაყოფილებს, ადვილი დასანახია. მართლაც, თუ, ვთქვათ, **P(s)** არის პროპოზიციური ლოგიკის რაიმე რთული ფორმულა, სადაც მისი ერთ-ერთი საწინადადებო კომპონენტი, სულერთია როგორი, არის **s**, მაშინ თუ ვიცით, რომ **s≡q** (ვიცით, ნიშნავს, რომ ამ ექვივალენტობის დასაბუთება შეგვიძლია), და ვიცით, რომ **P(s)** ჭეშმარიტია, მაშინ ასევ ჭეშმარიტი უნდა იყოს **P(q),** რომელიც პირველისაგან მხოლოდ იმითაა განსხვავებული, რომ მასში **s**-ის ნაცვლად (ყველგან, ან ზოგან) წერია **q**. მართლაც, **s** შეიძლება იყოს **0**, ან შიძლება იყოს 1. როდესაც ის **0**-ია, ასთივეა **q**-ც, და ამ შემთხვევაში, თუ **P(s)** ჭეშმარიტია, მაშინ ასევე ჭეშმარიტი უნდა იყოს **P(q).** ანალოგიური მსჯელობა ძალაშია როდესაც **s** არის 1. modus ponens –ის შემთხვევაში საქმე უფრო მარტივადაა და ის **((p⊃q)∧p)⊃q** -ის ტავტოლოგიურობის შემოწმებით შემოიფარგლება.

არაპირდაპირი დასაბუთება. ზემოთ ვახსენეთ, რომ პირდაპირი დასაბუთება, ერთგვარად რთული სტრატეგიაა. ხშირად, პირდაპირი დასაბუთების პოვნა იმდენად რთული ამოცანაა, რომ მეტწილად, ცდილობენ, თუ შესაძლებელია, ის თავიდან აიცილონ და სხვა, უფრო იოლი და ინტუიციისთვის უფრო ნათელი მეთოდები იპოვონ. ამან განსაზღვრა დასაბუთების, ასე ვთქვათ, **არაპირდაპირი მეთოდების** ჩამოყალიბება როგორც ლოგიკაში, ასევე მათემატიკაში. ქვემოთ, ყურადღებას შევაჩერებთ ორზე, რომელიც ნათელ წარმოდგენას გვიქმნის თავად არაპირდაპირი მიდგომის არსზე.

კონტრაპოზიციით დასაბუთება ეყრდნობა ექვივალენტობას **(p⊃q) ≡ (¬q ⊃ ¬p).** მისი არსი მმდგომარეობს შემდეგში: იმისათვის რომ დავასაბუთოთ, რომ **(p⊃q)** დავუშვათ, რომ მცდარია **q** და თუ მივიღეთ ამ დაშვების საფუძველზე, რომ მცდარია **p,** მაშინ, ზემოთმოტანილი ექვივალენობის საფუძველზე, შეგვიძლია

დასაბუთებულად მივიჩნოთ **(p⊃q).** ერთადერთი პრობლემა, რომელსაც აქ შეიძლება გადავაწყდეთ, არის საწყისი, დასასაბუთებელი იმპლიკაციის სწორი კონტრაპოზიცური ფორმის პოვნა, რაც გამოუცდელი თვალისათვის, ზოგჯერ სულ არ არის ადვილი.

დასაბუთება წინააღმდეგობამდე მიყვანით. ამ მეთოდის ლათინური სახელია **reductio ad absurdum** და დასაბუთების ერთ-ერთ უძველეს გზას წარმოადგენს. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს: **(p⊃q)-** ს დასაბუთებისთვის დავუშვათ, რომ ჭეშმარიტია **p** და ჭეშმარიტია **¬q.** ახლა, თუ ჩვენ ლოგიკურად სწორი მსჯელობით მივედით იქამდე, რომ დავასაბუთეთ რაიმე **s** დებულების უარყოფა, ანუ მივიღეთ, რომ ჭეშმარიტი უნდა იყოს **¬s**, ხოლო **s**-ის შესახებ კი მანამდე ცნობილი იყო, რომ ის ჭეშმარიტია, გამოვა რომ **s** ერთდროულად ჭეშმარიტიცაა და მცდარიც (მცდარი უნდა იყოს, ვინაიდან შეშმარიტია მისი უარყოფა). ეს კი აბსურდია, რომლამდეც მიგვიყვანა თავდაპირველმა დაშვებამ, რომ ჭეშმარიტია **p** და ჭეშმარიტია **¬q.** მაშასადამე, თავად დაშვებაა მცდარი და ადგილი უნდა ჰქონდეს მის უარყოფას, რაც ნიშნავს, რომ ჭეშმარიტია **(p⊃q).** სხვათა შორის, ნათქვამში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ პროპოზიციური ლოგიკიდან გავიხსენებთ, რას ნიშნავს კონიუნქციის უარყოფა, რას ნიშნავს ორმაგი უარყოფა და როგორაა შესაძლებელი იმპლიკაციის ელიმინაცია.

მაგალითი 1.

იმისათვის, რომ უკეთ გავაცნობიეროთ ის, რაც დასაბუთების შესახებ ითქვა, ვცადოთ პროპოზიციური ლოგიკის რაიმე დებულების დასაბუთება ორივე მეთოდის გამოყენებით. ვთქვათ, ეს იყოს **(p∧¬p)⊃q**

1. **პირდაპირი დამტკიცება**: დავაზუსტოთ, უნდა დავუშვათ ანტეცედენტი და ვცადოთ მოვიდეთ კონსექვენტამდე(!)

1.1.	(p∧ ¬p)	დაშვება
1.2.	(p∧q⊃p)	პროპოზიციული ლოგიკის ტავტოლოგია
1.3.	(p∧¬p⊃p)	(1.2)-ში q-ს ნაცვლად ¬p
1.4.	p	modus ponens (1.1), (1.3)
1.5.	(p∧q⊃q)	პროპოზიციური ლოგოკის ტავტოლოგია
1.6.	(p∧¬p⊃¬p)	(1.5)-ში q-ს ნაცვლად ¬p
1.7.	¬p	modus ponens (1.1), (1.6)
1.8.	q⊃(q∨p)	პროპოზიციური ლოგოკის ტავტოლოგია
1.9.	¬p⊃(¬p∨q)	(1.8)-ში q-ს ნაცვლად ¬p p-ს ნაცვლად q
1.10.	¬p∨q	modus ponens (1.7), (1.9)
1.11.	p⊃q	(1.10)-დან იმპლიკაციის ელიმინაცია და modus ponens
1.12.	q	(1.4), (1.11), modus ponens

2. **ირიბი დასაბუთება.** დავაზუსტოთ: აქ ჯერ ვპოულობთ დასამტკიცებელი დებულების სწორ კონტრაპოზიციურ ვარიანტს და შემდეგ მას ვასაბუთებთ. **$(p\wedge\neg p)\supset q$** ფორმულის კონტრაპოზიცია იქნება **$\neg q\supset(\neg(p\wedge\neg p))$.** მაგრამ დე მორგანისა და ორმაგი უარყოფის კანონების ძალით ამ იმპლიკაციის კონსექვენტი არის (**$\neg p\vee p$**). ანუ, ჩვენი დასამტკიცებელი დებულება შემდეგ სახეს მიიღებს: **$\neg q\supset(\neg p\vee p)$.** ამ უკანასკნელის დსაბუთება ელემენტარულია (**$\neg p\vee p$**) ფორმულის ტავტოლოგუირობის გამო.

დამატება 2. სავარჯიშოები

სიმრავლეები

1. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი **A** და **B** სიმრავლისათვის სამართლიანია

$\varnothing \subset (A\cap B)\subseteq (AUB)$

შენიშვნა: დამტკიცებისა გამოიყენეთ **დამატება 1** –ში განხილული მეთოდები.

2. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი **A, B** და **C** სიმრალისათვის **U** უნივერსალური სიმრავლიდან, ადგილი აქვს შემდეგს:

2.1. AU (BUC) = (AUB)U C	2.1.´ A⋂(B⋂C) = (A⋂B)⋂C
2.2. AUB = BUA	2.2.´ A⋂B = B⋂A
2.3. AU(B⋂C) = (AUB)⋂ (AUC)	2.3.´ A⋂(BUC) =(A⋂B)∪(A⋂C)
2.4. AØ = A	2.4.´ A⋂**U** = A
2.5. AUA´ = **U**	2.5.´ A⋂A´ = Ø

შენიშვნა: მიაქციეთ ყურადღება, რომ **ჩვენება**, იგივე დემონსტრირებაა და მაშასადამე, გარკვეული აზრით, **დასაბუთებაც.**

3. ააგეთ ვენის დიაგრამები თითოეული ტოლობისათვის მე-2 სავარჯიშოდან.

4. ჩაწერეთ ის სიმრავლისთეორიული ტოლობები, რომლებიც პროპოზიციური ლოგიკის შემდეგ კანონებს შეესაბამება და დაამტკიცეთ მათი მართებულობა ვენის დიაგრამების საშუალებით.

$(p\wedge q) \equiv (q\wedge p)$
$(p v q) \equiv (q v p)$
$((p\wedge q)\wedge r)\equiv(p\wedge(q\wedge r))$
$((p v q) v r)\equiv (p v(q v r))$

$(p\wedge(q\vee r))\equiv ((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$
$(p\vee(q\wedge r)) \equiv((p\vee q)\wedge(p\vee r))$
$\neg (p\wedge q)\equiv(\neg p \vee \neg q)$

პროპოზიციული ლოგიკა

1. ავაგოთ ჭეშმარიტებითი ცხრილები შემდეგი ფორმულებისათვის
$((p\vee q)\vee r) \equiv(p\vee(q\vee r))$
$\neg (p\wedge q)\equiv(\neg p \vee \neg q)$
$\neg(p\supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$
$(p\supset q) \equiv ((p \supset q) \wedge (q \supset p))$
$(p\wedge(q\vee r)) \equiv ((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$

2. ჭეშმარიტებითი ცხრილების საშუალებით დავრწმუნდეთ, რომ **$(A\wedge P) \supset Q$** მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც **$A\supset(P\supset Q)$,** სადაც **A , P** და **Q** ნებისმიერი ფორმულებია პროპოზიციური ლოგიკიდან

3. **აქსიომატური თეორია** ვუწოდოთ დებულებათა ისეთ ერთობლიბას რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს:
   - **ვადგენთ საწყისი ტემინების სრულ სიას** (ტემინები, რომელთა განსაზღვრება საჭირო არ არის, ვინაიდან მათი მოხმარება კონტექსტებში ცხადად არის მიჩნეული)
   - **ვადგენთ საწყისი წინადადებების სიას,** ანუ წინადადებებისას, რომლებიც მიჩნეულია **ჭეშმარიტებებად** მათი გამამართლებებლი ბჭობის გარეშე. მათ სხვანაირად **აქსიომები** ჰქვია.
   - **ყველა სხვა ტერმინი,** რომელიც შესაძლოა გამოყენებული იქნას თეორიის დებულებათა ფორმულირებისას საწყისი ტერმინებით უნდა იყოს განსაზღვრული.
   - **ყველა დებულება, რომელიც აქსიომათა სიაში არ გვხვდება,** ჭეშმარიტად არის მიჩნეული მხოლოდ მას შემდეგ, თუ კი იგი გამოყვანილია აქსიომებიდან და უკვე დასაბუთებული(დამტკიცებული) დებულებებიდან დსაკვნის შეთანხმებული წესების მეშვეობით. ასეთ დებულებებს **მოცემული თეორიის თეორემები** ჰქვია.

ვთქვათ გვაქვს აქსიომატური თეორია, რომლის ენა შედგება პროპოზიციური ლოგიკის საწყისი სიმბოლოებისა და მათგან აგებული გამოსახულებებიგან, ხოლო აქსიომებია (მენდელსონი, 1976)

- **$p\supset(q\supset p)$**
- **$(p\supset(q\supset s))\supset((p\supset q)\supset(p\supset s))$**
- **$((\neg q\supset\neg p)\supset((\neg q\supset p)\supset q)$**

დასკვნის წესებად შევინარჩუნოთ modus ponens, და ჩანაცვლება. დავამტკიცოთ, რომ შემდეგი ფორმულები თეორემებია

- **$((p\vee q)\vee r) \equiv(p\vee(q\vee r))$**
- **$\neg (p\wedge q)\equiv(\neg p \vee \neg q)$**

- $\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$
- $(p \supset q) \equiv ((p \supset q) \wedge (q \supset p))$
- $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

4. **A** დებულებაზე ვიტყვით, რომ ის **ლოგიკურად გამომდინარეობს B –**დან, როდესაც იმპლიკაცია **B⊃A** არის ტავტოლოგია**.** ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი დებულებები ძალაშია:
   - **4.1.** **იგივეობის წესი:** ყოველი წინადადებიდან ლოგიკურად თავად ეს წინდადება გამომდინარეობს.
   - **4.2.** **წანამძღვართა ჩამატების წესი.** თუ წანამძღვართა გარკვეული ერთობლიობიდან გამომდინარეობს რაიმე დანასკვი, მაშინ როგორც არ უნდა გავაფართოვოთ წანამძღვართა წრე, ეს დანასკვი ძალაში რჩება.
   - **4.3.** **წანამძღვართა მოკლების წესი.** ჭარბი გამეორებების ამოღება წანამძღვათა სიმრავლიდან გამომდინარეობას არ ცვლის.
   - **4.4.** **გადანაცვლების წესი.** წანამძღვართა თანამიმდევრობის შეცვლა გამომდინარეობას არ ცვლის
   - **4.5.** **ლოგიკური გამომდინარეობის ტრანზიტულობის წესი.** წანამძღვართა შედეგების შედეგები თვითონ წანამძღვართა შედეგებია

მითითება: თითოეული წინადადება გამოხატეთ პროპოზიციური ლოგიკის ენაზე და აჩვენეთ, რომ მიღებული ფორმულები ტავტოლოგიებია.

პრედიკატთა ლოგიკა

თუ კი პროპოზიური ლოგიკის დასკვნის წესებს დავუმატებთ წესებს კვანტორებისთვისაც, შესაძლებელი გახდება თეორემების დამტიცება პრედიკატთა ლოგიკისთვისაც. მაგალითად, თუ დასკვნის წესად მივიღებთ

$$(K)\quad \frac{B \supset A(x)}{B \supset \forall x A(x)}$$

სადაც B არ შეიცავს x-ს თავისუფლად, ადვილად შეგვიძლია ვაჩვენოთ ე.წ. **განზოგადების წესის** მართებულობა, რომელიც გულისხმობს, რომ თუ ჭეშმარიტია A(x) , მაშინ ის ჭეშმარიტია ყოველი x-თვის, სხვა სიტყვებით, ჭეშმარიტია $\forall x A(x)$. ვნახოთ, როგორ არის ეს შესაძლებელი:

1. $A(x)$ დაშვება
2. $(p \vee \neg p) \supset A(x)$ დაშვებდან წინადადებათა ლოგიკის კანონის გამოყენებით და **modus ponens-**ით. **კონკრეტულად ვიყენებთ $p \supset (q \supset p)$, სადაც p-ში ვანაცვლებთ $A(x)$, ხოლო q-ში $(p \vee \neg p)$-ს** და **შემდეგ ვიყენებთ modus ponens-ს**

3. $(p \vee \neg p) \supset \forall x A(x)$ (2)-დან (K)-ს ძალით
4. $p \vee \neg p$ წინადადებათა ლოგიკის კანონი
5. $\forall x A(x)$ (3)-დან და (4)-დან modus ponens-ით

თუ გავიხსენებთ, თუ როგორ განვსაზღვრეთ დასაბუთება, დავრწმუნდებით, რომ ჩვენ მიერ წარმოდგენილი (1)-(5) წინადადებების თანმიმდევრობა არის (5) წინადადების დამტკიცება A(x) წანამძღვრიდან.

5.1.1.1. განზოგადების წესის გამოყენებით დავამტკიცოთ თეორემა $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$

5.1.1.2. ზოგადობის კვანტორის მოცილების წესის გამოყენებით დავამტკიცოთ თეორემა $\forall x(A \vee B(x)) \supset (A \vee \forall x B(x))$

5.1.1.3. კვანტორთა რა წესების გამოყენება დაგვჭირდება შემდეგი ფორმულების დასამტკიცებლად?

- $\forall x A(x) \equiv \neg\exists x \neg A(x)$
- $\forall x(A(x) \supset B(x)) \supset (\forall x A(x) \supset \forall x B(x))$
- $\forall x(A(x) \supset B(x)) \equiv \neg\exists x (A(x) \vee \neg B(x))$

5.1.1.4. ლოგიკური კვადრატი:

i. ორ მარტივ კატეგორიულ წინადადებაზე ვიტყვით, რომ ისინი ერთმანეთის **კონტრადიქტორულია**, თუ კი **შეუძლებელია, რომ ორივე ერთდროულიად იყოს ჭეშმარიტი, და ორივე ერთდროულად იყოს მცდარი.**

ii. ორ მარტივ კატეგორიულ წინადადებაზე ვიტყვით, რომ ისინი ერთმანეთის **კონტრარულია,** თუ კი **შეუძლებელია, რომ ორივე ერთდროულიად იყოს ჭეშმარიტი, მაგრამ შესაძლოა ორივე ერთდროულად იყოს მცდარი.**

iii. ორ მარტივ კატეგორიულ წინადადებაზე ვიტყვით, რომ ისინი ერთმანეთის **სუბკონტრარულია,** თუ კი **შეუძლებელია, რომ ორივე ერთდროულიად იყოს მცდარი, მაგრამ შესაძლოა ორივე ერთდროულად იყოს ჭეშმარიტი.**

iv. ორ მარტივ კატეგორიულ წინადადებაზე ვიტყვით, რომ ერთი მეორის **დაქვემდებარებულია** როდესაც პირველის ჭეშმარიტება აუცილებლად გულისხმობს მეორის ჭეშმარიტებას და არა პირუკუ, ანუ **დაქვემდებარებული წინადადება შესაძლოა ჭეშმარიტი იყოს, ხოლო მისი დამაქვემდებარებელი არა.** ქედან, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

კონტრარულია SaP და SeP;კონტრადიქტორულია წყვილები **(SaP და SoP) და (SeP და SiP); სუბკონტრარულია (SiP და SoP);** ხოლო **დაქვემდებარებულ წინადადებათა წყვილი** იქნება **(SaP და SiP) და (SeP და SoP).** ვთქვათ, **(S** a **P)** არის **A, (S** e **P)** არის **E, (S** i **P)** არის **I** და **(S** o **P)** არის **O**. ახლა, თუ დავხაზავთ კვადრატს, რომლოს ზედა კუთხეები იქნება **A** და **E,** ხოლო ქვედა კუთხეები, შესაბამისად, **I** და **O**, მივიღებთ იმას, რასაც ტრადიციულად **ლოგიკურ კვადრატს** უწოდებენ და მის შემოღებას არისტოტელეს მიაწერენ.

- დახაზეთ ლოგიკური კვადრატი და მიუთითეთ მსჯელობებს შორის კონტრარული, კოტრადიქტორული, სუბკონტრარული და დაქვემდებარების მიმართებები. რა მიმართება გვექნება დიაგონალზე?
- აგეთ მარტივი კატეგორიული წინადადებები შემდეგი ტემინებიდან:**რიცხვი, დადებითი, სიმრავლე, ქვესიმრავლე, ბიოლოგიური არსება, მოკვდავი, უკვდავი.** განსაზღვრეთ ვენის დიაგრამების მეთოდით, რომელი იქნება ჭეშმარიტი.

- ააგეთ ჭეშმარიტების ცხრილი მარტივი კატეგორიული წინადადებებისათვის. ვენის დიაგრამების მეთოდის გამოყენებით დაასაბუთეთ ამ ცხრილის მართებულობა.
- დაასაბუთეთ იმავე ცხრილის მართებულობა სიმრავლისთეორიული კანონების გამოყენებით.
- იმავე მეთოდებით, რაც მე-(4.3) და მე-4.4(3) სვარჯიშოებშია მითითებული განსაზღვრეთ (i) – (iv) პირობების სამართლიანობა.
- ლოგიკურ კვადრეტში მითითებული მიმართებები დაამტკიცეთ როგორც პრედიკატთა ლოგიკის თეორემები.

დამატება 3. რა წავიკითხოთ?

სავალდებულო წასაკითხი

ლ.მჭედლიშვილი, ნ.ივანიძე. **ლოგიკა.** თბ.2003

საგნის ღრმა შესწავლისათვის

1. ა.ტარსკი. **ლოგიკისა და დედუქციურ მეცნიერებათა შესავალი.** თბ. 1976
2. ს. კლინი. **მეტამათემატიკის შესავალი.** ნიუ იორკი, 1952; მოსკოვი, 1957
3. ს. კლინი. **მათემატიკური ლოგიკა.** ნიუ იორკი, 1967; მოსკოვი, 1973
4. ა. ჩერჩი. **მათემატიკური ლოგიკის შესავალი.** პრინსტონი, 1956; მოსკოვი, 1960
5. ე. მენდელსონი. **მათემატიკური ლოგიკის შესავალი**. ნიუ იორკი, 1963; მოსკოვი, 1976
6. ჰ. კარი. **მათემატიკური ლოგიკის საფუძვლები**. ნიუ იორკი, 1963; მოსკოვი, 1969
7. ვ. ქუაინი. **ლოგიკის მეთოდები**. ნიუ იორკი, 1955
8. ვ. ქუაინი. **ლოგიკის ფილოსოფია**. ნიუ იორკი, 1970; მოსკოვი, 2008
9. ა. ფრენკელი, ი.ბარ-ჰილელი. **სიმრავლეთა თეორიის საფუძვლები.** ამსტერდამი, 1958; მოსკოვი, 1966