

ჩანზორ შაგვულიძე, ღიანა ასათიანი

საინჟინრო ბრაზიკის სპეციალური კურსი

„ტექნიკური უნივერსიტეტი“

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ქანზორ შავგულიძე, ღიანა ასათიანი

საინჟინრო ბრაჟიკის სპეციალური კურსი



რეკომენდებულია საქართველოს
ტექნიკური უნივერსიტეტის
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ. 29.03.2017, ოქმი №1

თბილისი
2017

ანოტაცია

საინჟინრო გრაფიკაში არც თუ ისე იშვიათია შემთხვევები როცა ნახაზების შედგენის ძირითადი მეთოდების პარალელურად სპეციალური მხოლოდ ერთი რომელიმე დარგისათვის საჭირო მეთოდების გამოყენებასთან გვაქვს საქმე.

ნაშრომი ძირითადად გათვალისწინებულია სამთო-სამარკშეიდერო და გეოლოგიური სპეციალობის სტუდენტებისა და ინჟინერ-ტექნიკური პერსონალისთვის და მასში განხილულია დაგეგმილების ახალი ნიშნულიანი გეგმილის ცნების შემოტანის მეთოდი.

ა.შავგულიძე ლ. ასათიანი

საინჟინრო გრაფიკის აპეციალური კურსი

დამხმარე სახელმძღვანელო

საინჟინრო გრაფიკის სპეციალური კურსი

შესავალი

საინჟინრო გრაფიკის ზოგადი კურსიდან ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ ეს საგანი შეისწავლის სივრცითი ფიგურების გეომეტრიულ თვისებებსა და ურთიერთდამოკიდებულებას მათი გრაფიკული ასახვის საშუალებით. ასეთი ასახვა ხორციელდება სიბრტყეზე ან სხვა რომელიმე ზედაპირზე სივრცის დაგეგმილების მეთოდებით.

დაგეგმილების პროცესში ორიგინალსა (სივრცეში მოცემული ფიგურა) და მის ანასახს (ორიგინალის ასახვის შედეგად მიღებული ფიგურა) შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ სივრცეში განსაზღვრულ ფიგურას (ორიგინალს) შეესაბამება ასახვის შედეგად მიღებული ერთადერთი ფიგურა (ანასახი) და პირიქით სიბრტყეზე (ან რომელიმე სხვა ზედაპირზე) მოცემულ ფიგურას (ანასახს) შეესაბამება სივრცეში მდებარე ერთადერთი ფიგურა (ორიგინალი).

ორიგინალისა და ანასახის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, როგორც ამას ადრე გავეცანით, პარალელურ და კერძოდ ორთოგონალურ გეგმილებში სხვადასხვანაირად ხორციელდება. ქვემოთ, როცა ჩვენ დაგეგმილების ახალ, ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდს გავეცნობით, დავინახავთ, რომ ეს მეთოდი ორთოგონალური გეგმილების ყველა თვისებას შეინარჩუნებს და ორ-სამ გეგმილთა სიბრტყეზე აგებული გეგმილებისაგან განსხვავებით ორიგინალისა და ანასახის ურთიერთცალსახა შესაბამისობის პირობას ერთი გეგმილი და ნიშნული (რიცხვითი მაჩვენებელი) განაპირობებს.

პირობითი აღნიშვნების სისტემა და ტერმინოლოგია

ძირითადი პირობითი აღნიშვნების სისტემა და ტერმინოლოგია შერჩეულია მხაზველობითი გეომეტრიისა და ხაზვის სტაბილურ სახელმძღვანელოებში გავრცელებული აღნიშვნებისა და ტერმინების მიხედვით. მხედველობაშია მიღებული აგრეთვე სამთო საქმეში მათი გამოყენების სპეციფიკა.

1. სივრცეში განლაგებული წერტილები აღნიშნულია ლათინური ანბანის ასომთავრულებით: A, B, C, D, E, F...

2. სივრცეში განლაგებული წრფეები და წირები: ლათინური ანბანის ნუსხური ასოებით $a_0, b_0, c_0 \dots$

3. სიბრტყეები და საერთო ზედაპირები – ბერძნული ანბანის ასომთავრულით: $\alpha, \beta, \mu, \Delta \dots$

4. ძირითადი გეგმილთა სიბრტყე, როდესაც მას ჰორიზონტალური მდებარეობა უკავია, აღინიშნება Π ასოთი და ნიშნულთ, რომელიც აღნიშნავს მის დონეს (აბსოლუტური ან პირობითი დონის ზედაპირიდან) ზომის გარკვეულ ერთეულებში. მაგალითად: $\Pi(0), \Pi(5), \Pi(100)$ და ა.შ.

5. კოორდინატთა სისტემის ღერძები სივრცეში და გეგმაზე:

OX – აბსცისების ღერძი;

OY – ორდინატების ღერძი;

OZ – აპლიკატების ღერძი.

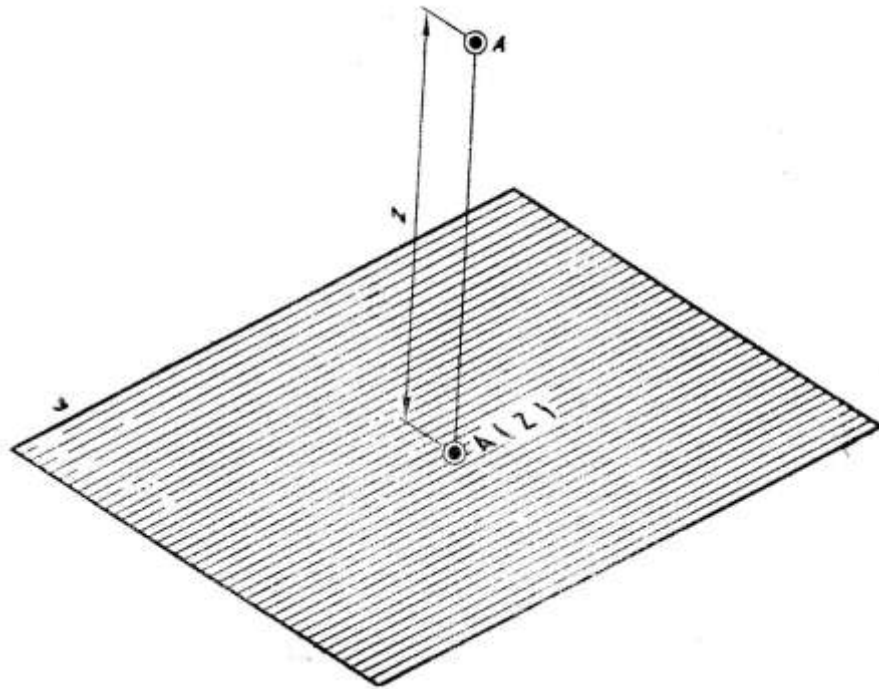
პირველი თავი

ძირითადი დებულებანი

§1. ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის არსი და მისი გამოყენება

1. მეთოდის არსი.

როდესაც დასაგეგმილებელი ობიექტის ერთი მიმართულებით გავრცელება საგრძნობლად აღემატება მის მეორე მიმართულებით გავრცელებას (მაგალითად, დელამიწის რელიეფის გამოხაზვის დროს), მაშინ ჩვენთვის აქამდე ცნობილი დაგეგმილების მეთოდები (მაგალითად, მონჟის მეთოდი) პრინციპულ წინააღმდეგობას აწეობს. ასეთ შემთხვევებში ძირითადად იყენებენ ე.წ. ნიშნულებიანი გეგმილების ანუ, როგორც მას ხშირად უწოდებენ რიცხვით ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდს. ამ მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს: სივრცის მოცემული წერტილის ორთოგონალური დაგეგმილებით რაიმე ერთ სიბრტყეზე, რომელსაც ძირითადი გეგმილთა სიბრტყე ეწოდება, მიიღება ამ წერტილის გეგმილი. ორიგინალსა და ანასახს შორის ურთიერთცალსახა დამოკიდებულების განსაზღვრისათვის წერტილის გეგმილს გეგმილთა სიბრტყეზე მარჯვენა მხრიდან ეწერება რიცხვი Z (ნიშნული), რომელიც განსაზღვრავს მოცემული წერტილის დაშორებას გეგმილთა სიბრტყიდან (ნახ. 1). ასეთ შემთხვევაში წერტილის მდებარეობა სივრცეში ცალსახად განსაზღვრულია ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის მიმართ.



ნახ. 1.

საინჟინრო პრაქტიკაში საჭიროა, რომ დასაგეგმილებელი სივრცითი ობიექტები განისაზღვროს რომელიმე კოორდინატა სისტემის მიმართ. ამის გამო, ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდს პრაქტიკულად რომელიმე კოორდინატა სისტემაზე დაყრდნობით განიხილავენ.

2. ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების სისტემაზე დაყრდნობით

განვიხილოთ სამი ურთიერთმართობული გეგმილთა სიბრტყისაგან შედგენილი სამწახნაგა (ნახ. 2). X, Y და Z ღერძებისათვის შემოვიღოთ ზომის ერთეული (n), ანათვლების სათავედ მივიღოთ გეგმილთა სიბრტყეების შესვედრის O წერტილი. მიღებული O_{xyz} სისტემა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების სისტემა სივრცეში.

OEA(Z) A ტეხილს, რომელიც განსაზღვრავს A წერტილის მდებარეობას სივრცეში O_{xyz} სისტემის მიმართ, საკოორდინატო ტეხილი ეწოდება; მის შემადგენელ გვერდებს კი – საკოორდინატო მონაკვეთები: OE-აბსცისა და აღინიშნება x ასოთი, EA(Z) – ორდინატა და აღინიშნება y ასოთი, ხოლო A(Z) A- აპლიკატა და აღინიშნება z ასოთი.

საკოორდინატო მონაკვეთებს, გაზომილს მიღებული ზომის ერთეულებში (n), მოცემული წერტილის კოორდინატები ეწოდება. მაგალითად, აღებულ შემთხვევაში მოცემული A წერტილი შემდეგი კოორდინატებითაა გამოსახული:

$$x = \frac{OE}{n} - \text{აბსცისა};$$

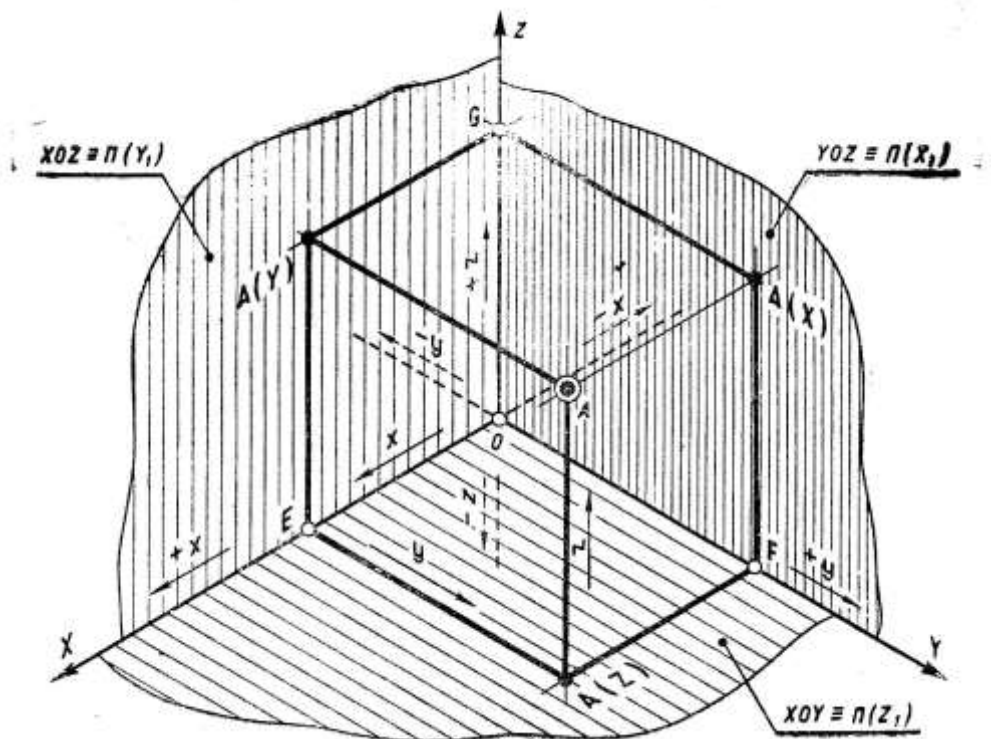
$$y = \frac{EA(Z)}{n} - \text{ორდინატა};$$

$$z = \frac{A(Z)A}{n} - \text{აპლიკატა}.$$

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ A წერტილის კოორდინატები შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც ამ წერტილის დაშორებანი საკოორდინატო სიბრტყეებიდან, ხოლო A(Z), A(Y) და A(X) წერტილები, როგორც მისი ორთოგონალური გეგმილები საკოორდინატო სიბრტყეებზე. შევნიშნოთ ისიც, რომ საკოორდინატო მონაკვეთები OE, OF=EA(Z) და OG=A(Z)A შესაძლოა მიღებულ იქნეს A წერტილის კოორდინატთა ღერძებზე ორთოგონალური დაგეგმილებითაც.

სამთო-სამარქშიდერო პრაქტიკაში ძირითად გეგმილთა სიბრტყეს პორიზონტალურ ან ვერტიკალურ მდებარეობაში იღებენ (უპირატესობა პირველს აქვს მინიჭებული). აქედან გამომდინარე, განხილული სისტემის ნებისმიერი საკოორდინატო სიბრტყე შესაძლოა მიღებულ იქნეს ძირითად გეგმილთა სიბრტყედ და მის მიმართ ჩამოყალიბდეს სივრცითი წერტილის ეპიურზე მოცემის პირობები.

მაგალითად, ძირითად გეგმილთა სიბრტყედ მივიღოთ O_{xyz} სისტემის XOY საკოორდინატო სიბრტყე. როგორც ვხედავთ, მას ამ სისტემაში ჰორიზონტალური მდებარეობა უკავია (ნახ. 2). აღვნიშნოთ ეს უკანასკნელი $\Pi(Z)$ -ით და შევთანხმდეთ, რომ Π -ს მარჯვნივ მინაწერი ნიშნული (Z) რიცხობრივად გამოსახავს გეგმილთა სიბრტყის დაშორებას რაიმე პირობითი ან აბსოლუტური დონის ზედაპირიდან (პირველ შემთხვევაში გეგმილთა სიბრტყის დონე პირობითი იქნება, მეორეში – აბსოლუტური).



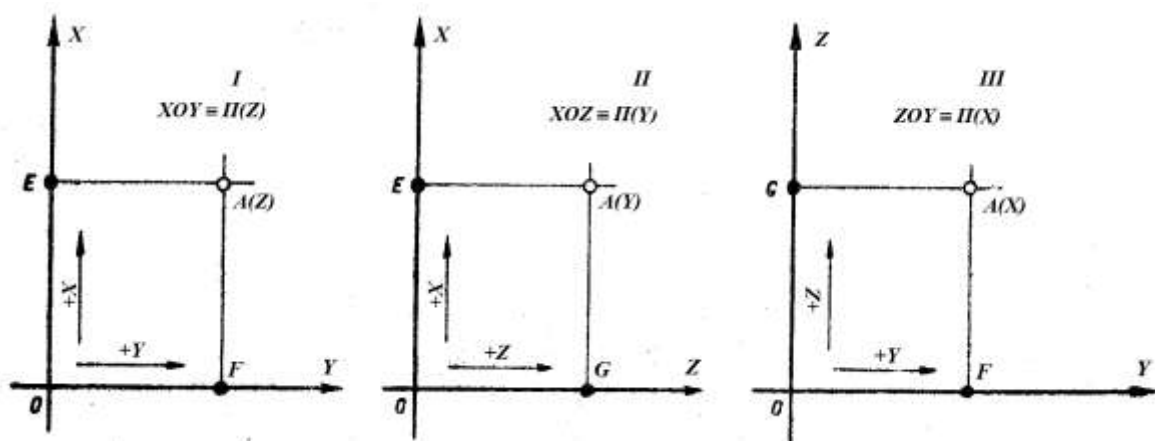
ნახ. 2.

გეგმილთა სიბრტყეზე მოთავსებული და OE და OF საკოორდინატო მონაკვეთებით განსაზღვრული $A(Z)$ წერტილი სივრცის ერთადერთი A წერტილის გეგმილად შეიძლება ჩაითვალოს, თუ ფრჩხილებში ჩასმული ნიშნული (Z), მოცემული წერტილის გეგმილთა სიბრტყიდან დაშორების მონაკვეთს გამოსახავს (ნახ. 3-1).

ეპიურზე ანუ გეგმაზე კოორდინატთა სისტემის ორიენტირების საკითხი განხილულია გეოდეზიის სახელმძღვანელოში (მაგალითად, A.C. Чеботарев. Геодезия, ч. 1, Москва, 1955, §§51-56), ჩვენ კი მივიღოთ საკოორდინატო ღერძების განლაგების პირობითი სისტემა, კერძოდ ისეთი, როგორიც მე-3 ნახაზზეა მოცემული. ამ ნახაზზე თანმიმდევრობით ნაჩვენებია საკოორდინატო ღერძების პირობითი განლაგება ეპიურზე, იმის შესაბამისად, თუ რომელი საკოორდინატო

სიბრტყეა მიღებული ძირითად გეგმილთა სიბრტყედ, აქვე შევნიშნავთ, რომ სამთო საქმეში OX (ან OZ) ღერძის დადებითი მიმართულება ჩვეულებრივად მერიდიანის ჩრდილოეთის მიმართულების თანხვედენილია.

თუ ძირითად გეგმილთა სიბრტყედ XOZ საკოორდინატო სიბრტყეს მივიღებთ, შევთანხმდებით, რომ მას ყოველთვის აღვნიშნავთ $\Pi(Y)$ -ით (სადაც Y – გეგმილთა სიბრტყის ნიშნულია). ამ შემთხვევაში A წერტილის მდებარეობა ეპიურზე განისაზღვრება OE და OG საკოორდინატო მონაკვეთებით და ნიშნულით (Y), რომელიც მიღებული ზომის ერთეულებში ორდინატების მონაკვეთს გამოსახავს (ნახ. 3-II), ხოლო თუ ძირითად გეგმილთა სიბრტყედ YOZ საკოორდინატო სიბრტყეს მივიღებთ, შევთანხმდეთ, რომ მას ყოველთვის აღვნიშნავთ $\Pi(X)$ -ით (სადაც X – გეგმილთა სიბრტყის პირობითი ნიშნულია). ამ შემთხვევაში A წერტილის მდებარეობა ეპიურზე განისაზღვრება OF და OG საკოორდინატო მონაკვეთებით და ნიშნულით (X), რომელიც მიღებული ზომის ერთეულებში აბსცისების მონაკვეთს გამოსახავს (ნახ. 3-III).



ნახ. 3.

იმისათვის, რომ წერტილის კოორდინატების ყოველი სამეული სივრცის მხოლოდ ერთადერთ წერტილთან იყოს დაკავშირებული, გარდა ეპიურზე საკოორდინატო ღერძების მოცემული სისტემისა, საჭიროა დავადგინოთ ნიშნულებისადმი ნიშნის (+ ან -) მიკუთვნების წესი. ამასთან დაკავშირებით ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ორი პირობა:

1) ძირითად გეგმილთა სიბრტყედ მიჩნეული საკოორდინატო სიბრტყის ღერძთა მონაკვეთები სათავიდან ზევით და მარჯვნივ მივიღოთ დადებითად, სათავიდან ქვევით და მარცხნივ – უარყოფითად (ნახ. 3).

2) წერტილის ნიშნულის ნიშანი განისაზღვროს ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის მიმართ:

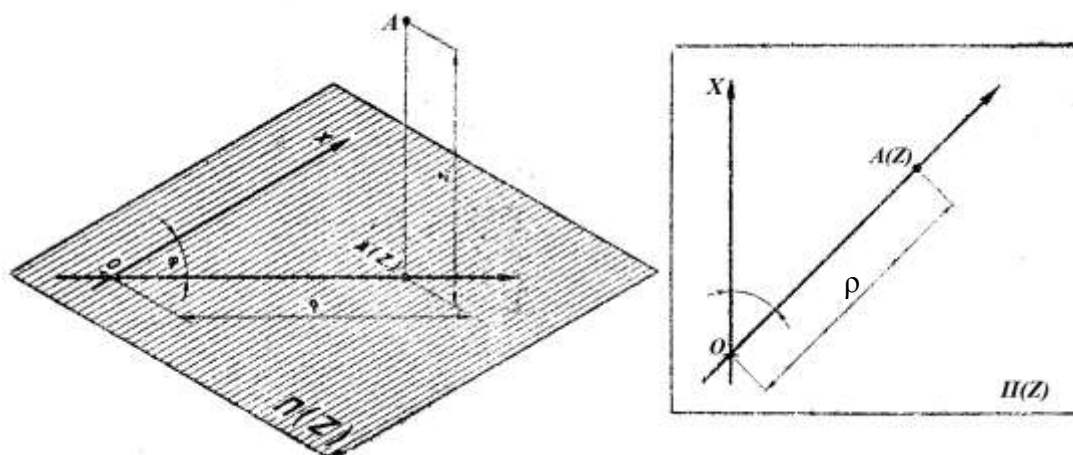
ა) $XOY \equiv \Pi(Z)$ – ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის ზემოთ განლაგებული წერტილებისათვის ნიშნულები მივიღოთ დადებითად, ქვემოთ განლაგებული წერტილებისათვის უარყოფითად (ნახ. 3-I).

ბ) $XOZ \equiv \Pi(Y)$ – ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის მარჯვნივ განლაგებული წერტილებისათვის ნიშნულები მივიღოთ დადებითად, მარცხნივ განლაგებული წერტილებისათვის კი – უარყოფითად, იმ პირობით, თუ დამკვირვებელი პირისახით OZ მიმართულებით დადგება (ნახ. 3-II).

გ) $ZOY \equiv \Pi(X)$ – ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის მარჯვნივ განლაგებული წერტილებისათვის ნიშნულები მივიღოთ დადებითად, მარცხნივ განლაგებული წერტილებისათვის – უარყოფითად, იმ პირობით თუ დამკვირვებელი პირისახით OY მიმართულებით დადგება (ნახ. 3-III).

3. ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი პოლარული კოორდინატების სისტემაზე დაყრდნობით

გავეცნოთ სიბრტყის წერტილთა სხვა სპეციალურ კოორდინაციას (ნახ. 4). ავიღოთ სიბრტყეზე ერთი საკოორდინატო ღერძი OX და ვუწოდოთ მას პოლარული ღერძი. ამავე სიბრტყის ნებისმიერი A წერტილი შევაერთოთ O სათავესთან ანუ პოლუსთან. მიღებული OA მონაკვეთი აღვნიშნოთ ρ ასოთი და ვუწოდოთ მას პოლარული რადიუს-ვექტორი. კუთხე, რომელზედაც მობრუნდება OX ღერძი φ რადიურ-ვექტორთან შესათავსებლად, აღვნიშნოთ φ ასოთი და ვუწოდოთ მას პოლარული კუთხე. ამ კუთხეს ჩავთვლით დადებითად, თუ OX ღერძის მობრუნება რადიუს-ვექტორთან შესათავსებლად ხდება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. წინააღმდეგ შემთხვევაში იგივე კუთხე უარყოფითად უნდა ჩავთვალოთ რადიუს-ვექტორის იმ ნაწილს, რომელსაც შეუთავსდება OX ღერძის დადებითი მიმართულება (OX ღერძის დადებითი მიმართულება მერიდიანის ჩრდილოეთის მიმართულების თანხვედრის მიხედვით) φ კუთხით მობრუნების დროს, ვუწოდოთ დადებითი ნაწილი, მეორეს კი – უარყოფითი ნაწილი. ამრიგად, A წერტილს სიბრტყეზე შეგვიძლია დავუკავშიროთ რიცხვების წყვილი – ρ და φ , რაც ასე ჩაიწერება: $A(\rho, \varphi)$. აღნიშნულ წყვილს წერტილის პოლარული კოორდინატები ეწოდება, ხოლო მიღებულ სისტემას – პოლარული კოორდინატების სისტემა.



ნახ. 4.

შეგნიშნოთ, რომ სამთო საქმეში უპირატესად დადებით პოლარულ კოორდინატებს იყენებენ.

პოლარული კოორდინატები მარტივად უკავშირდება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებს. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მე-5 ნახაზი, საიდანაც ადვილად მიიღება შემდეგი დამოკიდებულება:

$$x = \rho \cos \phi;$$

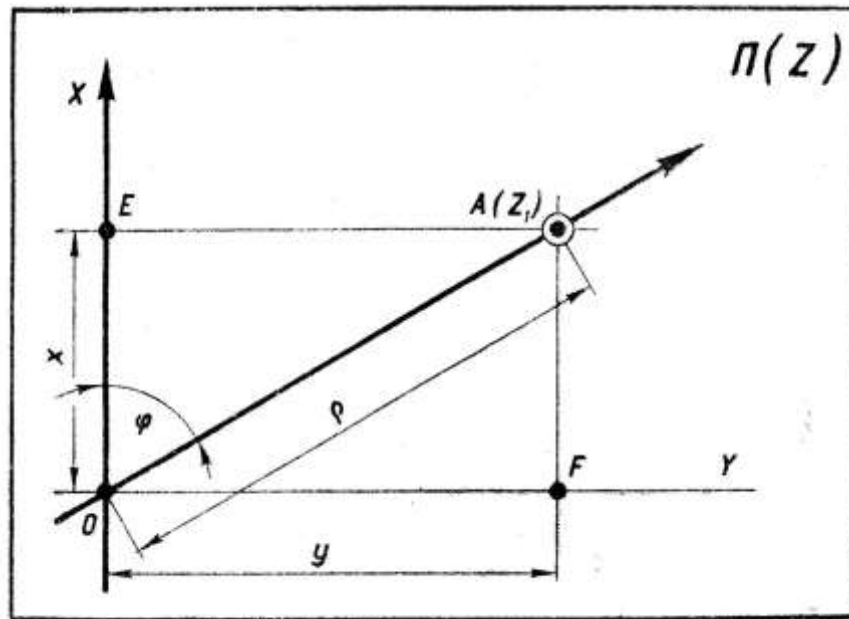
$$y = \rho \sin \phi.$$

დეკარტის კოორდინატების მიხედვით შესაძლებელია პოლარული კოორდინატების განსაზღვრა:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{აქ } \rho \text{ ყოველთვის დადებითია)}$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x}$$

თუ განხილული კოორდინატთა სისტემის $\Pi(Z)$ სიბრტყეს მივიღებთ ძირითად გეგმილთა სიბრტყედ, ხოლო ამ სისტემაში განსაზღვრულ წერტილს გვერდით მიუწეროთ რიცხვს, რომელიც გამოსახავს მის დაშორებას ძირითადი



ნახ. 5.

გეგმილთა სიბრტყიდან, მივიღებთ სივრცითი წერტილის ეპიურზე მოცემის საკმარის პირობებს. $A(\rho, \varphi, Z_1)$, სადაც φ და ρ პოლარული კოორდინატებია, Z_1 კი – A წერტილის ნიშნული.

მივიღოთ, რომ Z_1 ნიშნული დადებითია, თუ წერტილი მოთავსებულია ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის ზემოთ (ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის ჰორიზონტალური მდებარეობის დროს) ან მარჯვნივ (ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის ვერტიკალური მდებარეობის დროს), წინააღმდეგ შემთხვევაში ნიშნული უარყოფითი იქნება.

§2. წერტილის, წრფისა და სიბრტყის დაგეგმილება

1. წინაპირობები

ვიდრე უშუალოდ საკითხის განხილვას შევეუდგებოდეთ, მივიღოთ რამდენიმე წინაპირობა:

ა) ზომის ერთეულად მივიღოთ მეტრი და რიცხობრივი მაჩვენებლები ვიხმართ განზომილების ერთეულების მიუწერლად;

ბ) ჩვენს მიერ შედგენილ ეპიურს, მომავალში ვუწოდოთ გეგმა, რომელზედაც, როგორც წესი, მოცემული იქნება გამოსახულების ანუ ნახაზის მასშტაბი;

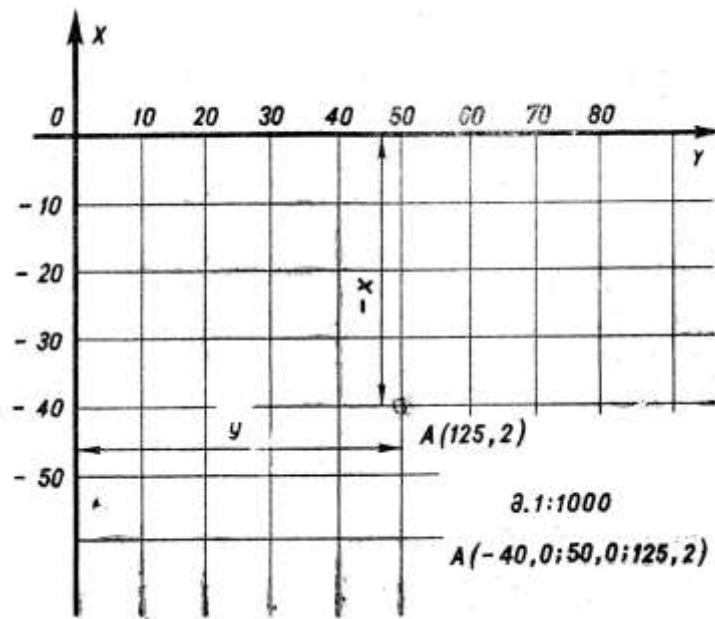
გ) წერტილის ნიშნული. შეიძლება გამოისახოს მთელი ან ათწილადი რიცხვებით; მძიმის შემდეგ ათწილადი ნიშნების რაოდენობა დამოკიდებულია მოთხოვნილ სიზუსტეზე და ნახაზის მასშტაბზე;

დ) ორ წერტილს შორის სიმაღლეთა სხვაობა ნიშნავს მათი ნიშნულების სხვაობას. იგი აღინიშნება h ასოთი, რომელსაც ქვემო ინდექსის სახით მიუწერება წერტილების აღმნიშვნელი ასოები. მაგალითად, h_{AB} ნიშნავს A და B წერტილების სიმაღლეთა სხვაობას. მივიღოთ, რომ ასეთი ორი წერტილიდან ერთ-ერთი იქნება გამოსავალი. თუ მეორე მასზე მაღლა აღმოჩნდება, გვექნება აღმავეალი მიმართულება და დადებითი სხვაობა, წინააღმდეგ შემთხვევაში – დადმავეალი მიმართულება და უარყოფითი სხვაობა. h -ის ქვემო ინდექსში პირველად გამოსავალი წერტილი აღინიშნება (მაგალითად h_{AB} – გამოსავალია A წერტილი, h_{CD} – გამოსავალია C წერტილი და ა.შ.).

2. მოცემული კოორდინატებით წერტილის ნიშნულიანი გეგმილის აგება

მოცემულია A წერტილი, რომლისთვისაც $x = -40,0$; $y = 50,0$ და $z = 125,2$. ნახაზის მასშტაბია 1:1000, ავაროთ A წერტილის ნიშნულიანი გეგმილი მოცემული მართკუთხა კოორდინატების მიხედვით.

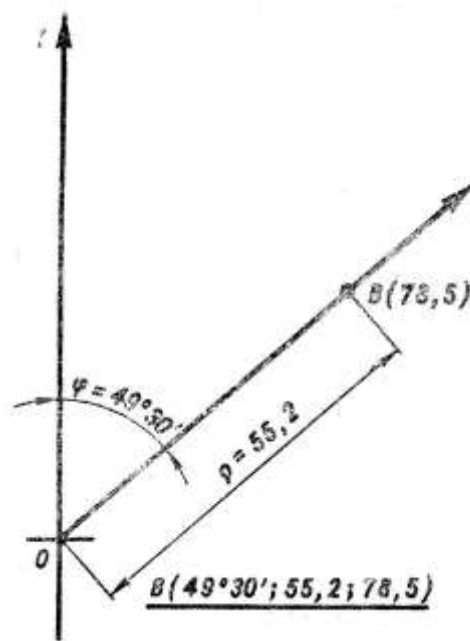
ავაროთ მოცემული მასშტაბის შესაბამისი საკოორდინატო ბადე (ნახ. 6) და დავნიშნოთ კოორდინატა ღერძების O სათავე. მოცემული კოორდინატებიდან აბსციები უარყოფითია, ხოლო ორდინატა და აპლიკატა – დადებითი. ჯერ აბსცისების ღერძზე მოვზომოთ $x = -40,0$ ერთეული, შემდეგ ორდინატების ღერძზე – $y = 50,0$ ერთეული. აბსცისების ღერძზე მიღებულ წერტილზე გავატაროთ ორდინატების ღერძის პარალელური წრფე, ხოლო ორდინატების ღერძზე მიღებულ წერტილზე კი, აბსცისების პარალელური. მათი გადაკვეთის წერტილი მოცემული A წერტილის გეგმილი იქნება. თუ ამ წერტილს მარჯვენა მხრიდან ფრჩხილებში მიუწეროთ მესამე კოორდინატის რიცხვით მნიშვნელობას ($z = 125,2$), მივიღებთ მოცემული წერტილის (ორიგინალის) ნიშნულიან გეგმილს (ანასახს) – A(125,2) ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე.



ნახ. 6.

მოცემულია B წერტილი, რომლისთვისაც $\rho = 55,2$, $\varphi = 49^{\circ}30'$, $z = 78,5$. ნახაზის მასშტაბია 1:1000. ავადოთ B წერტილის ნიშნულიანი გეგმილი მოცემული პოლარული კოორდინატების მიხედვით (ნახ. 7).

გაავადოთ პოლარული OY ღერძი, ავადოთ O სათადეში გამადალი და OX ღერძთან $\varphi = 49^{\circ}30'$ კუთხით დახრილი პოლარული რადიუს-ვექტორი, სათადიდან მოვზომოთ მოცემული პოლარული კოორდინატი $\rho = 55,2$. მიდებულ B წერტილს მარჯვენა მხრიდან მიუწეროთ მესამე კოორდინატის ($z = 78,5$) რიცხვითი მნიშვნელობა. მივიღებთ პოლარული კოორდინატებით მოცემული წერტილის ნიშნულიან გეგმილს B (78,5).

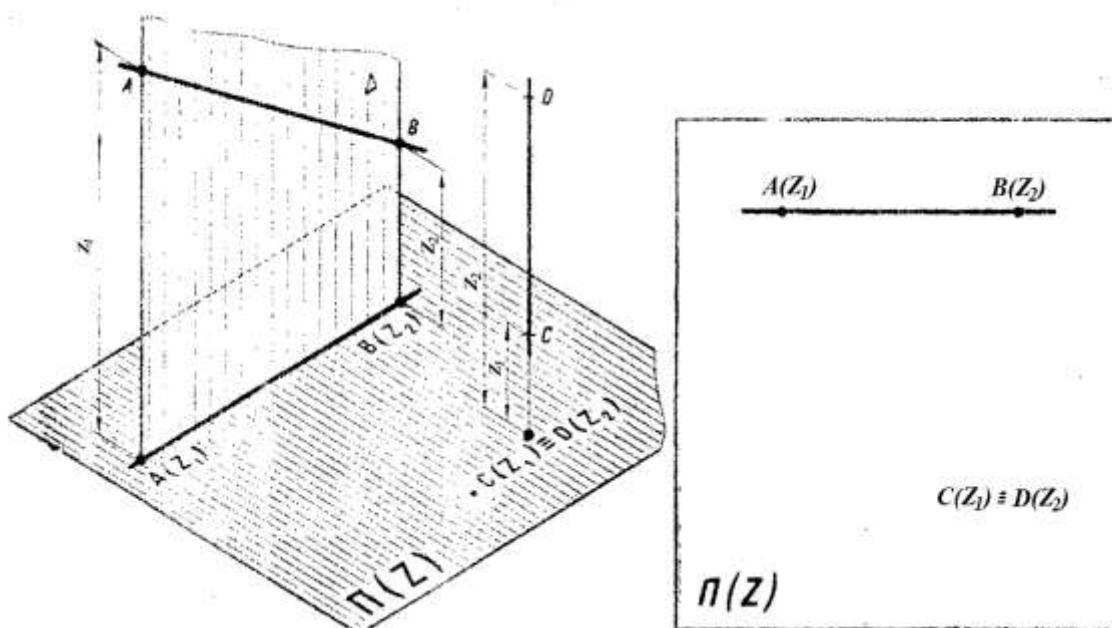


ნახ. 7.

3. წრფის დაგეგმილება

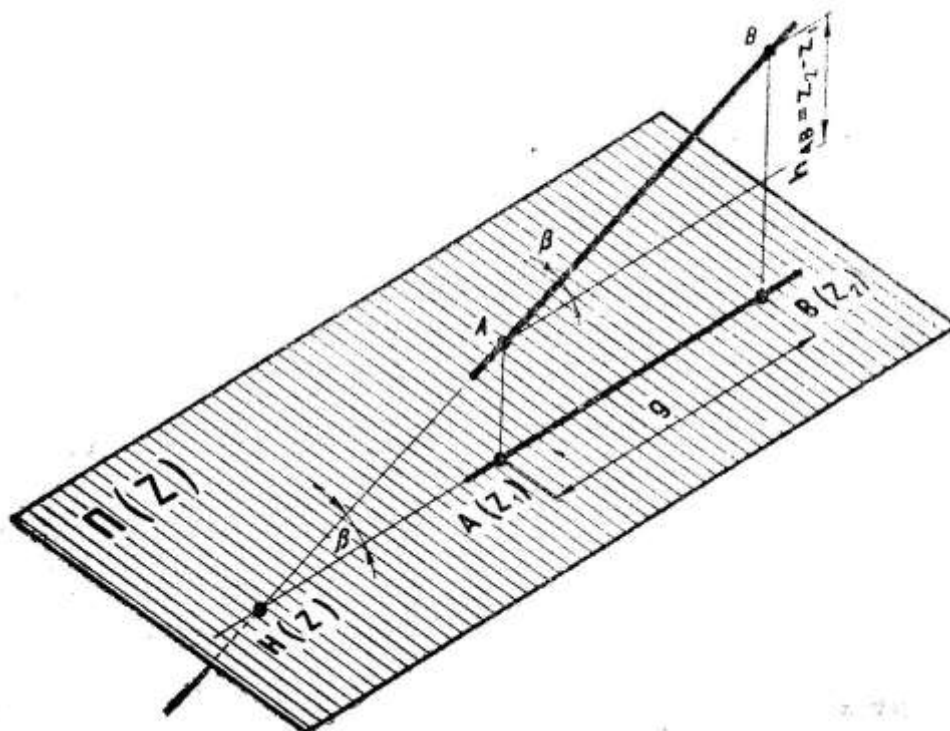
წრფის გეგმილი, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ამ წრფეზე მდებარე ყველა წერტილების ერთობლიობა, ისევ წრფეა. გამონაკლისს შეადგენს გეგმილთა სიბრტყის მართობული ანუ მაგეგმილებელი წრფე, რომლის ნიშნულიანი გეგმილი წერტილს წარმოადგენს.

თუ სივრცეში აღებული წრფის ნებისმიერ ორ წერტილს ჩვენთვის ცნობილი წესით დავაგეგმილებთ და მიღებულ გეგმილებს წრფით შევაერთებთ, მივიღებთ მოცემული წრფის გეგმილს. შებრუნებული პირობაც სრულიად განსაზღვრული ხასიათისაა – გეგმაზე აღებულ ყოველ ორ წერტილს სივრცეში ერთადერთი წრფე შეესაბამება (ნახ. 8). შემოვიღოთ ზოგიერთი განსაზღვრა, ტერმინი და აღნიშვნა. წრფის მონაკვეთის გეგმილს ვუწოდოთ ქვედებული და აღვნიშნოთ g ასოთი, რომელსაც ქვემოთ ინდექსის სახით მიეწერება წრფის განმსაზღვრელი ელემენტები. მაგალითად, g_{AB} ნიშნავს AB წრფის ქვედებულს, g_a – a წრფის ქვედებულს და ა.შ.



ნახ. 8.

უმცირეს კუთხეს, რომელსაც მოცემული წრფე გეგმილთა სიბრტყესთან შეადგენს, ვუწოდოთ ამ წრფის დახრის კუთხე და აღვნიშნოთ β ასოთი (ნახ. 9).



ნახ. 9.

წრფის გეგმილთა სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილს ვუწოდოთ ამ წრფის კვალი და აღვნიშნოთ ქვემოინდექსიანი H -ით. მაგალითად H_{AB} ნიშნავს AB წრფის კვალს.

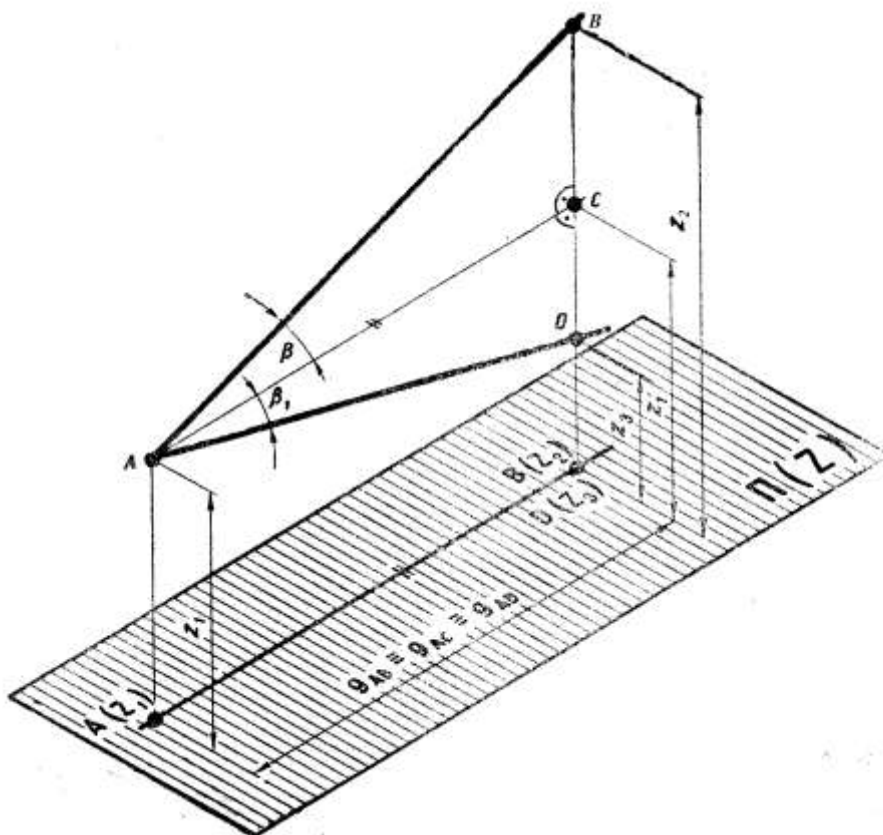
წრფის მონაკვეთის ბოლოების სიმაღლეთა სხვაობის შეფარდების მისი ქვედებულის სიგრძესთან ვუწოდოთ მოცემული წრფის ქანობი და აღვნიშნოთ i ასოთი.

თუ AB მიმართულება აღმავალია, მაშინ მის დახრის კუთხეს აღმართის კუთხე ვუწოდოთ (ნახ. 10), ამ დროს ქანობი დადებითი იქნება. წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება დაღმართის კუთხე და უარყოფითი ქანობი. საილუსტრაციოდ გავარჩიოთ მე-10 ნახაზი:

$$\Delta ABC\text{-დან } \operatorname{tg}\beta = \frac{z_2 - z_1}{g_{AB}} = \frac{h_{AB}}{g_{AB}} = i \text{ (ქანობი დადებითია);}$$

$$\Delta ACD\text{-დან } \operatorname{tg}\beta = \frac{z_2 - z_1}{g_{AD}} = \frac{h_{AD}}{g_{AD}} = i \text{ (ქანობი უარყოფითია).}$$

განვიხილოთ გეგმაზე წრფის მოცემის მეორე შემთხვევა. წრფე საგნებით განსაზღვრულია თუ მოცემულია მისი ერთი წერტილი და მიმართულება. წრფის მიმართულება ორი კუთხური სიდიდით განისაზღვრება: ჰორიზონტალურ სიბრტყეში – განვრცობის α კუთხით და ვერტიკალურ სიბრტყეში – გეგმილთა სიბრტყის მიმართ დახრის β კუთხით.

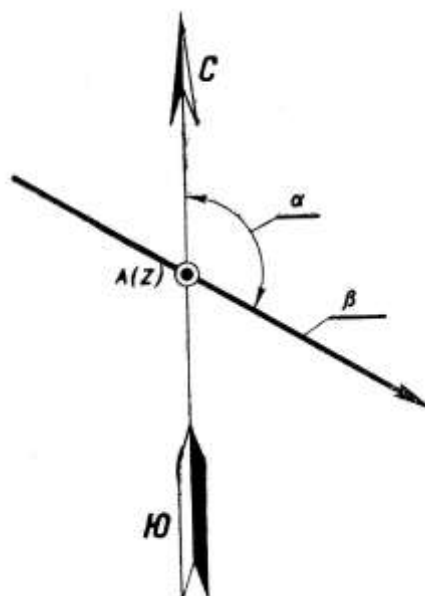


ნახ. 10

წრფის განვრცობის კუთხე ეწოდება მარჯვენა ვექტორულ კუთხეს, ათვლილს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, აბსცისების ღერძის დადებითი მიმართულებიდან (ან მერიდიანის ჩრდილოეთ მიმართულებიდან) წრფის გეგმილამდე.

მივიღოთ, რომ მოცემული წერტილი იქნება გამოსავალი. ამის მიხედვით, თუ ამ წერტილში წრფის განვრცობით (აღინიშნება ისრით) დახრის კუთხე დადებითია, გვექნება აღმავალი მიმართულება და დადებითი ქანობი, წინააღმდეგ შემთხვევაში – დაღმავალი მიმართულება და უარყოფითი ქანობი.

მე-11 ნახაზზე ნაჩვენებია გეგმაზე წრფის მოცემის განხილული შემთხვევა, სახელდობრ, როდესაც ცნობილია წრფის ერთი წერტილი (A) და მიმართულება (α და β).



ნახ. 11.

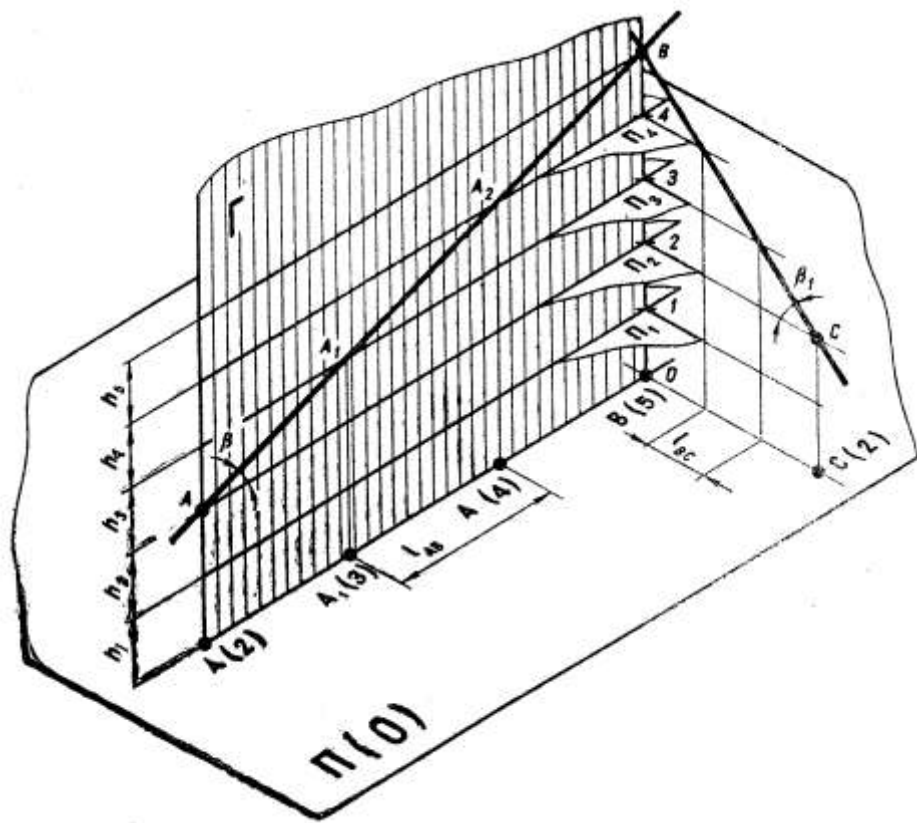
4. წრფის გრადუირება

მრავალი ამოცანისათვის საჭიროა, რომ წრფის გეგმილზე აღნიშნული იყოს წერტილების რიგი, რომელთა ნიშნულები მთელი რიცხვები იქნება. ასეთი წერტილების მოძებნას წრფის გრადუირება ეწოდება.

მოცემულია სივრცის AB მონაკვეთი და მისი გეგმილი $\Pi(O)$ გეგმილთა სიბრტყეზე. წარმოვიდგინოთ, რომ გეგმილთა სიბრტყის ზემოთ გატარებულია $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ დონის სიბრტყეები, რომელთა დონეები თანმიმდევრულად მაღლდება მიღებული ზომის თითო ერთეულით (ნახ. 12). ნახ. 12.

ყოველ ორ მეზობელ პარალელურ სიბრტყეს შორის უმოკლეს მანძილს კვეთის სიმაღლე ეწოდება და აღინიშნება h ასოთი ($h_1 = h_2 = h_3 = \dots$). მოცემული

წრფის გადაკვეთა ასეთ სიბრტყესთან მოხდება შესაბამისი სიბრტყის დონის ნიშნულიან წერტილში. რადგან თითოეული სიბრტყის დონე ჩვენი შეთანხმებით მთელი რიცხვია: ამ გზით მიღებული წერტილების ($A_1, A_2, A_3 \dots$) ნიშნულებიც მთელი რიცხვები იქნება. თუ ორი მეზობელი წერტილის სიმაღლეთა სხვაობა ერთი ერთეულის ტოლია (მაგ., A_1 და A_2), მაშინ ასეთ წერტილებს შორის მოქცეული მონაკვეთის ქვედებულს მოცემული წრფის ინტერვალი ეწოდება და აღინიშნება l ასოთი, რომელსაც ქვემო ინდექსად ეწერება თვით წრფის მონაკვეთის განმსაზღვრელი ასოები. მაგალითად l_{AB} ნიშნავს A და B წერტილებით განსაზღვრული წრფის მონაკვეთის ინტერვალს. შესაძლოა შეგვხვდეს ასეთი აღნიშვნაც – l_a . ეს ნიშნავს, რომ l ინტერვალი ეკუთვნის წრფეს, რომელიც a ასოთია აღნიშნული.



ნახ. 12.

შევნიშნოთ, რომ ინტერვალი და ქანობი ურთიერთშებრუნებული სიდიდეებია. მაგალითად, როცა $g = l$, ქანობის ფორმულა შემდეგ სახეს ღებულობს:

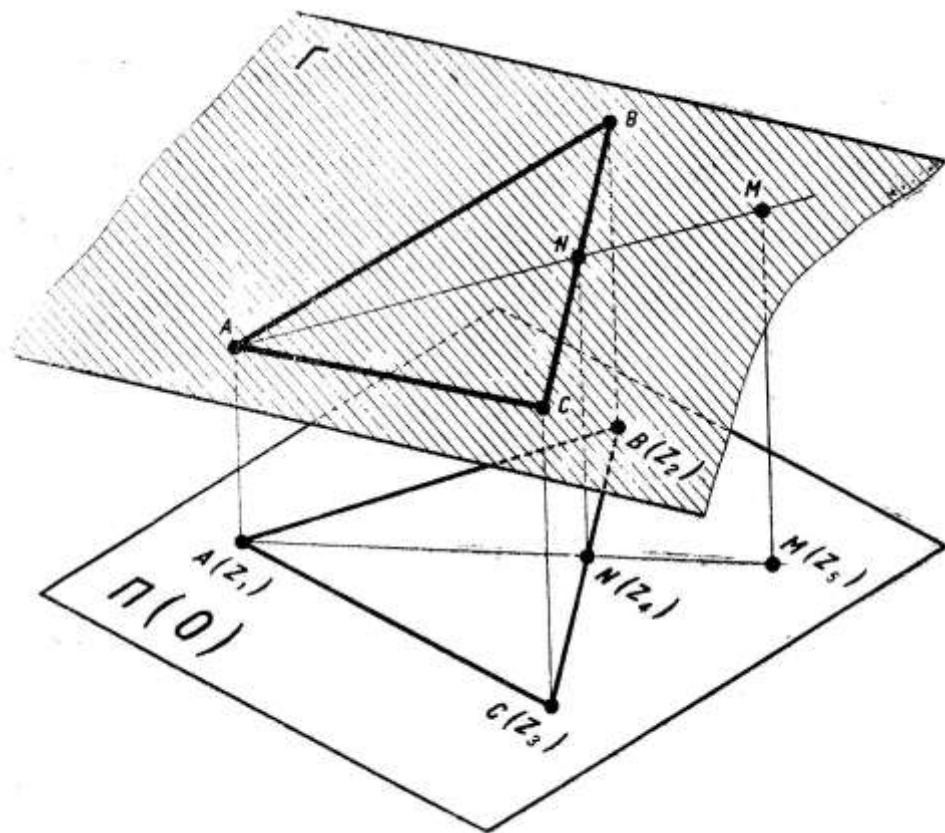
$$i = \frac{1}{l}; \quad \text{აქედან} \quad l = \frac{1}{i} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \operatorname{ctg} \beta.$$

მე-12 ნახაზზე ნაჩვენებია მეორე წრფეც (BC), რომლის დახრის კუთხე მეტია AB წრფის დახრის β კუთხეზე. ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ რაც უფრო მეტია დახრის კუთხე, მით უფრო მცირეა ინიტერვალი და პირიქით.

5. სიბრტყის განსაზღვრა გეგმაზე

სამი წერტილი, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ, ერთადერთ სიბრტყეს განსაზღვრავენ სივრცეში, ავიღოთ სივრცის სამი ნებისმიერი წერტილი (A,B,C) და ჩვენთვის ცნობილი წესით დავაგეგმლოთ (ნახ. 13). თვალსაჩინოებისათვის მოცემული წერტილები შევაერთოთ წრფეებით.

სამი, არაერთწრფეზე მდებარე წერტილით სიბრტყის მოცემის შემთხვევაში გეგმაზე ცალსახად განისაზღვრება ამ სიბრტყის კუთვნილი ყველა დანარჩენი წერტილი. მაგალითად, ABC სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილისათვის შეიძლება განისაზღვროს ნიშნული (Z) ისე, რომ მიღებულმა $M(Z)$ გეგმილმა მოცემულ ABC სიბრტყეზე მდებარე ერთადერთი M წერტილი განსაზღვროს.



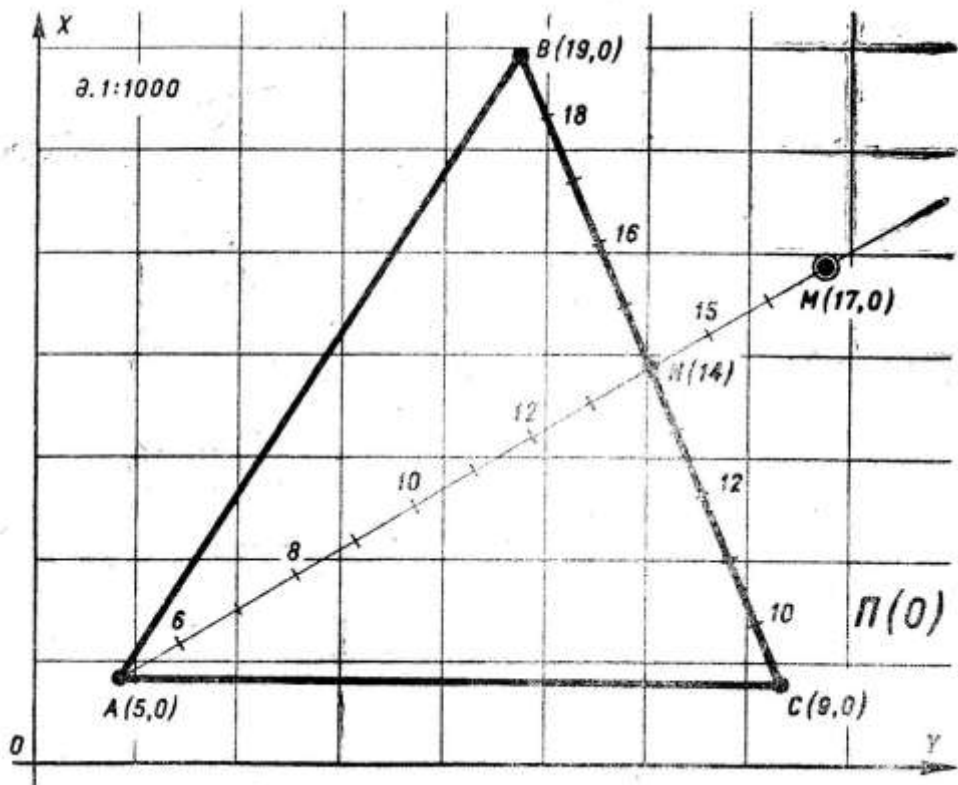
ნახ. 13.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მე-14 ნახაზი. გეგმაზე მოცემულია ABC სიბრტყე და M წერტილი. საჭიროა განისაზღვროს M წერტილის ნიშნული ისე, რომ მისი შესაბამისი წერტილი სივრცეში მოცემული სიბრტყის (ABC) კუთვნილი იყოს. ამისათვის შეგვიძლია ასე მოვიქცეთ:

ა) A(5,0) წერტილი შევაერთოთ M წერტილთან და B(19,0) C(9,0) მონაკვეთის გრადუირებით განსაზღვროთ $N = AM \times BC$ წერტილის ნიშნული;

ბ) AN მონაკვეთის გრადუირებით განისაზღვრება M წერტილის ნიშნული – 17,0. მიღებული M(17,0) წერტილი ABC სიბრტყეზე მდებარე M წერტილი გეგმილი იქნება (ძირითადი გეომეტრიული ფიგურების; წერტილის, წრფისა და სიბრტყის ურთიერთკუთვნილების საკითხი განიხილება ქვემოთ, მეორე თავში).

განხილული ნახაზების მიხედვით შეგვიძლია ვიმსჯელოთ სიბრტყის განსაზღვრის სხვა შემთხვევებზედაც. მაგალითად, თუ მოცემული წერტილებიდან შევაერთებთ მხოლოდ ორს (მაგ., A-სა და B-ს, ნახ. 13), მივიღებთ წრფითა (AB) და მის გარეშე მდებარე წერტილით (C) სიბრტყის განსაზღვრის შემთხვევას. თუ ABC სამკუთხედის (ნახ. 13) მხოლოდ ორ გვერდს (მაგ., AB და AC) გამოვსახავთ – მივიღებთ შემთხვევას, როცა სიბრტყე ორი გადაკვეთილი წრფითაა განსაზღვრული. შევნიშნოთ, რომ არსებობს გეგმაზე სიბრტყის მოცემის კიდევ ერთი შემთხვევა, სახელდობრ როცა იგი განსაზღვრულია ორი პარალელური წრფით (წრფეთა პარალელობის პირობები განიხილება ქვემოთ, მესამე თავში).



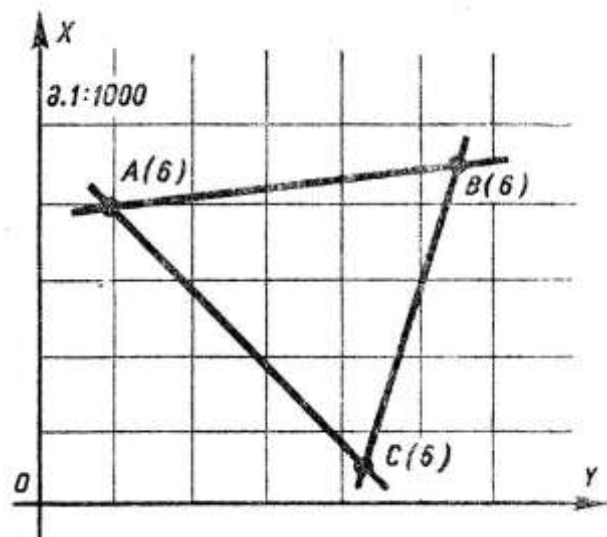
ნახ. 14.

როგორც ვხედავთ, გეგმაზე სიბრტყის მოცემის ჩამოთვლილი შემთხვევები წარმოადგენს არაერთ წრფეზე მდებარე სამი ანუ სამი არაკოლინეარული წერტილით სიბრტყის განსაზღვრის შედეგებს.

სიბრტყე სივრცეში ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის მიმართ სამი უმთავრესი მდებარეობით ხასიათდება. ესენია:

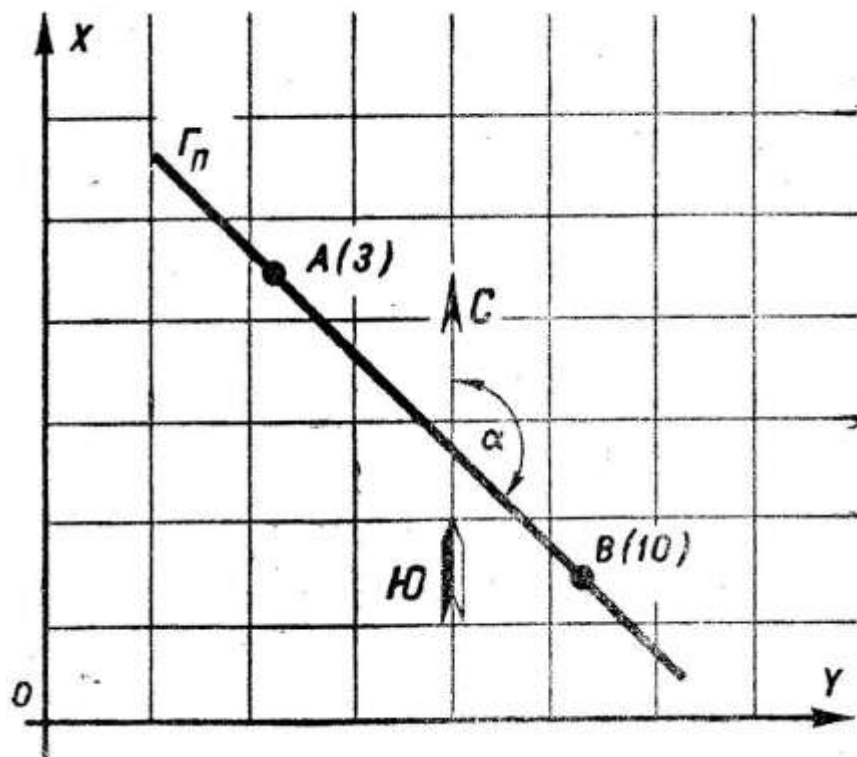
ა) ზოგადი მდებარეობის ანუ ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის მიმართ დახრილი სიბრტყე (ნახ. 14);

ბ) ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. ასეთი მდებარეობის სიბრტყეს დონის სიბრტყეს ეწოდება (ნახ. 15). შესაბამისად, ასეთ სიბრტყეში მდებარე ყოველი წრფე – დონის წრფეა (გეგმილთა სიბრტყის პარალელური წრფე);



ნახ. 15.

გ) ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის მართობული სიბრტყე, ასეთი მდებარეობის სიბრტყეს მაგეგმილებელი სიბრტყე ეწოდება (ნახ. 16). იგი შესაძლოა გეგმაზე მოცემულ იქნეს განსაზღვრული წრფის სახით.

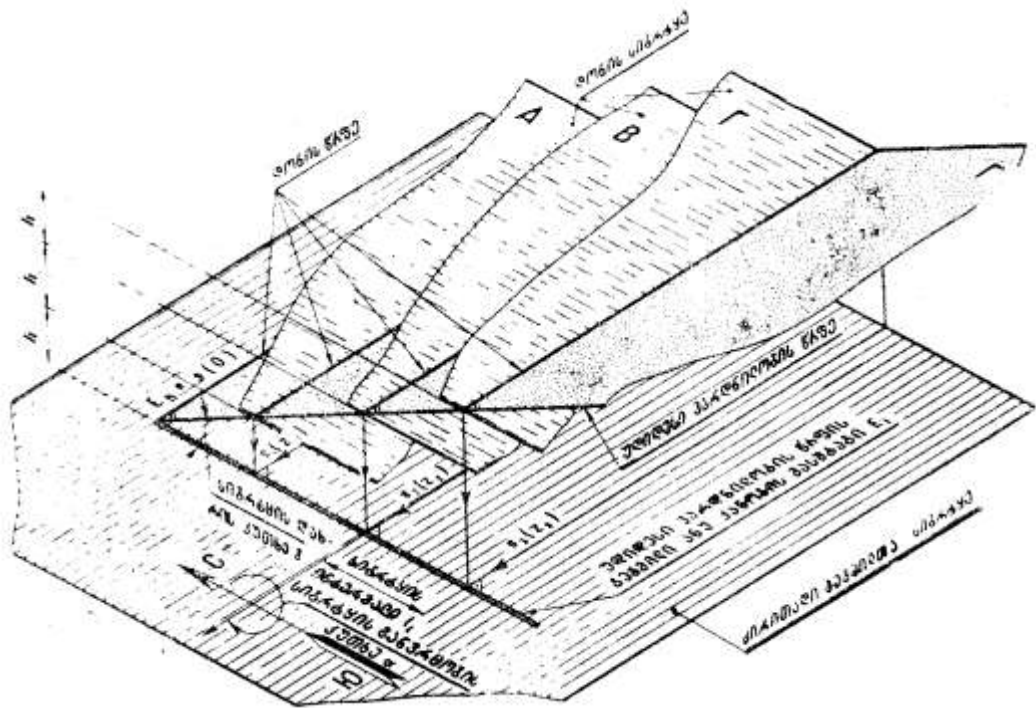


ნახ. 16.

განვიხილოთ ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის დაგეგმილების კიდევ ერთი შემთხვევა, რომელიც განსაკუთრებით გავრცელებულია ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში. ამასთან დაკავშირებით, განვიხილოთ 17-ე ნახაზი. მოცემულია ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის მიმართ დახრილი ანუ ზოგადი მდებარეობის E სიბრტყე. გავატაროთ E სიბრტყის მკვეთი და ერთმანეთისაგან თანაბრად დაშორებული A, B, Γ... დონის სიბრტყეები. ორ უახლოეს პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილს კვეთის სიმაღლე ვუწოდოთ და აღვნიშნოთ h ასოთი.

დავნიშნოთ ასეთი კვეთის სიმაღლეების რიგი $h_1 = h_2 = h_3 = \dots$ და ა.შ. A, B, Γ, დონის სიბრტყეები E სიბრტყესთან დონის წრფეებზე გადაიკვეთებიან. თითოეული ასეთი დონის წრფეს ექნება თავისი გეგმილი და ნიშნული ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე ($s(O), s_1(Z_1), s_2(Z_2) \dots$).

გავიხსენოთ, რომ პარალელურ გეგმილებში პარალელური წრფეები პარალელურ წრფეებად გეგმილდებიან. ასევე ჩვენ შემთხვევაშიც: ვინაიდან მიღებული დონის წრფეები სივრცეში ურთიერთპარალელურები არიან: ამის გამო, მათი გეგმილებიც ურთიერთპარალელური წრფეების სახით გამოისახება. რადგანაც აღნიშნული დონის წრფეები სივრცეში ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით არიან დაშორებული, გეგმაზედაც ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით დაშორებულ წრფეებს მოგვცემენ. როგორც ვიცით, ორი პარალელური წრფე სივრცეში ერთადერთ სიბრტყეს განსაზღვრავს. აქედან გამომდინარე, ჩვენ შემთხვევაში გეგმაზე მიღებული დონის წრფეების ნებისმიერი წყვილი სივრცეში მოცემულ ერთადერთ E სიბრტყეს განსაზღვრავს. სიბრტყის განსაზღვრის განხილულ ვარიანტს გეგმაზე სიბრტყის დონის წრფეებით ანუ ჰორიზონტალებით მოცემა ეწოდება. გეგმაზე სიბრტყის განსაზღვრისათვის პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება მისი მახასიათებელი სხვა ელემენტებიც: სახელდობრ: სიბრტყის უდიდესი ვარდნილობის წრფე, დახრის კუთხე, ინტერვალი, ქანობის მასშტაბი, განვრცობის კუთხე (ნახ. 17).



ნახ. 17.

სიბრტყის უდიდესი ვარდნილობის წრფე ეწოდება ამ სიბრტყეში აღებულ და ამავე სიბრტყის დონის წრფეების ანუ ჰორიზონტალების მიმართ მართობულ წრფეს.

სიბრტყის ძირითადი გეგმილთა სიბრტყისადმი დახრის ორწახნაგა კუთხე იზომება მისი უდიდესი ვარდნილობის წრფის გეგმილთა სიბრტყისადმი დახრის ხაზოვანი კუთხით. იგი აღინიშნება δ ასოთი. სიბრტყის დახრის კუთხეს ხშირად სიბრტყის ვარდნილობის კუთხესაც უწოდებენ.

უდიდესი ვარდნილობის წრფის მონაკვეთს, ორ მეზობელ დონის წრფეს შორის, კვეთის დახრილი სიმაღლე ჰქვია, ხოლო ამ დახრილი სიმაღლის გეგმილს k_i , მოცემული სიბრტყის ინტერვალი, მოცემული კვეთის სიმაღლისათვის. სიბრტყის ინტერვალზე l ასოთი აღინიშნება, რომელსაც წრფის ინტერვალისაგან განსხვავებით ქვემო ინდექსად სიბრტყის აღმნიშვნელი ასო აქვს მიწერილი.

უდიდესი ვარდნილობის წრფის გეგმილს ქანობის მასშტაბი ეწოდება. იგი აღინიშნება სიბრტყის აღმნიშვნელი ასოთი, რომელსაც ქვემო ინდექსად i ასო უკეთდება (მაგალითად E_i). აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ გრადუირების დროს გამოყენებული კვეთის სიმაღლე და მოცემული სიბრტყის მკვეთ პარალელურ სიბრტყეთა შორის მანძილი ერთმანეთის ტოლია, ქანობის მასშტაბის გრადუირების შედეგად მიღებული მონაკვეთები აღებული სიბრტყის ინტერვალის ტოლია.

თუ დამკვირვებელი პირისახით უდიდესი ვარდნილობის წრფის აღმავლობისაკენ დადგება, მაშინ მარჯვენა მიმართულებას პირობითი სიბრტყის განვრცობას უწოდებენ. თუ სიბრტყე პორიზონტალებითაა მოცემული, მაშინ ამ სიბრტყის განვრცობა პორიზონტალებზე ისრით აღინიშნება.

ხშირად საჭიროა მოცემული სიბრტყის განვრცობის ორიენტირება ქვეყნის მხარეების მიმართ. ამისათვის იყენებენ სიბრტყის განვრცობის აზიმუტს ან დირექციულ კუთხეს.

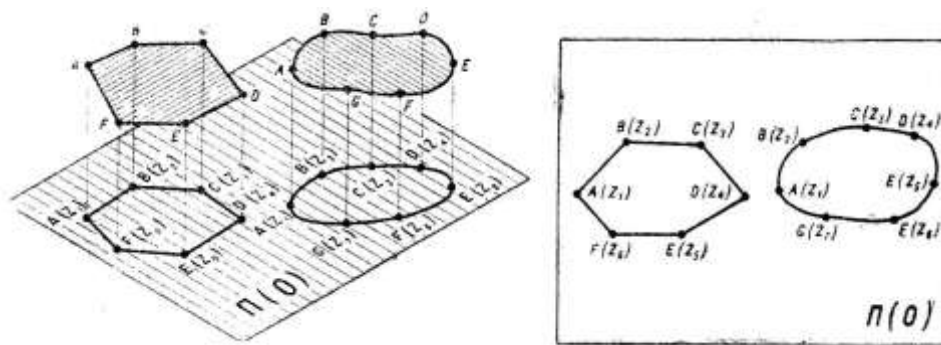
სიბრტყის განვრცობის დირექციული კუთხე ეწოდება მარჯვენა ვექტორულ კუთხეს, რომელიც აითვლება მერიდიანების ჩრდილოეთის (ან აბსცისების დადებითი) მიმართულებიდან სიბრტყის პორიზონტალების მიმართულებამდე. ხშირად ამ კუთხეს სიბრტყის განვრცობის კუთხეს უწოდებენ და აღნიშნავენ α ასოთი.

მოცემული სიბრტყის ძირითად გეგმილთა სიბრტყესთან გადაკვეთის წრფეს ანუ სიბრტყის იმ პორიზონტალს, რომელსაც გეგმილთა სიბრტყის ნიშნული ექნება, სიბრტყის კვალი ეწოდება. სიბრტყის კვალი აღინიშნება სიბრტყის აღმნიშვნელი ასოთი, რომელსაც ქვემო ინდექსად გეგმილთა სიბრტყის აღმნიშვნელი ასო აქვს. მაგალითად, $E_{II'}$, Δ_{II} და ა.შ.

6. ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურების დაგეგმილება

მხაზველობითი გეომეტრიის კურსიდან ჩვენ ვიცნობთ ბრტყელ გეომეტრიულ ფიგურებს (ნაკვეთებს), ანუ სიბრტყის ნაწილებს შემოსაზღვრულს ჩაკეტილი ტეხილით ან მრუდე წირით. პირველს ბრტყელი მრავალკუთხედი ეწოდება (ყველა წვერო ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული), ხოლო მეორეს – ბრტყელი მრუდე ნაკვთი (სემომსაზღვრელი ჩაკეტილი წირის ყველა წერტილი ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული).

ბრტყელი ფიგურების გამოსახვა ნიშნულებიან გეგმილებში ძნელი არ არის და ეყრდნობა წერტილების დაგეგმილების საკითხს. მაგალითად, ბრტყელი მრავალკუთხედის დასაგეგმილებლად საკმარისია მისი წვეროების, ხოლო ბრტყელი მრუდე ნაკვთისათვის – მახასიათებელი წერტილების დაგეგმილება. მიღებული გეგმილები კი უნდა შეერთდეს იმავე თანამიმდევრობით, როგორც შეერთებულია მათი შესაბამისი წერტილები გეომეტრიულ ფიგურაში (ნახ. 18).



ნახ. 18.

თუ მოცემული ბრტყელი ფიგურა (მრავალკუთხედი ან მრუდე ნაკვეთი) დახრილია გეგმილთა სიბრტყის მიმართ, მაშინ მის ასეთ მდებარეობას ზოგადი მდებარეობა ეწოდება. თუ ფიგურის სიბრტყე გეგმილთა სიბრტყის პარალელურია, მაშინ იგი დაგეგმილების დროს არ მაჩინჯდება და გეგმილთა სიბრტყეზე ნატურალური ფორმითა და ზომით აისახება. თუ ფიგურის სიბრტყე გეგმილთა სიბრტყის მართობულია, ასეთ შემთხვევაში მოცემული ბრტყელი ფიგურა წრფის მონაკვეთის სახით გეგმილდება.

§3. ორთოგონალური გეგმილის გარდაქმნის ზოგიერთი ხერხების გამოყენება ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში

1. ზოგადი ცნებები.

სივრცითი ამოცანების ამოხსნა გეგმაზე ხშირად რთულდება იმის გამო, რომ მოცემული გეომეტრიული ობიექტებისა (ორიგინალები) და გეგმილთა სიბრტყეების ურთიერთგანლაგება ამა თუ იმ ამოცანის ამოხსნისათვის არახელსაყრელია. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ ორთოგონალური გეგმილების გარდაქმნის ზოგიერთი ხერხი, რომლებიც ჩვენს მიერ რამდენადმე ახალი ინტერპრეტაციით არიან დამუშავებული ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდისათვის.

მხაზველობით გეომეტრიაში შეისწავლება აღნიშნული გარდაქმნების ორი ძირითადი გზა:

1. სივრცითი ობიექტების და გეგმილთა სიბრტყეების ურთიერთგანლაგების შეცვლა, ზოგადიდან კერძოზე გადასვლის მიზნით;

2. დაგეგმილების მიმართულების შეცვლა (მაგალითად, ორთოგონალურიდან კონუსურზე), ერთდროულად ახალი გეგმილთა სიბრტყის შემოტანით ან ძველი სისტემის დატოვებით.

არსებობს სივრცითი ობიექტების და გეგმილთა სიბრტყეების ურთიერთგანლაგების შეცვლის ორი ძირითადი ხერხი:

ა) გეგმილთა სიბრტყეების აღებული სისტემის შეცვლა ისე, რომ სივრცის უძრავი ობიექტი აღმოჩნდეს კერძო დამოკიდებულებაში გეგმილთა სიბრტყეების ახალი სისტემის მიმართ (გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხი);

ბ) ობიექტის გადაადგილება სივრცეში ისე, რომ იგი აღმოჩნდეს კერძო დამოკიდებულებაში გეგმილთა სიბრტყეების მოცემული სისტემის მიმართ (ბრუნვის ხერხი).

2. გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხი.

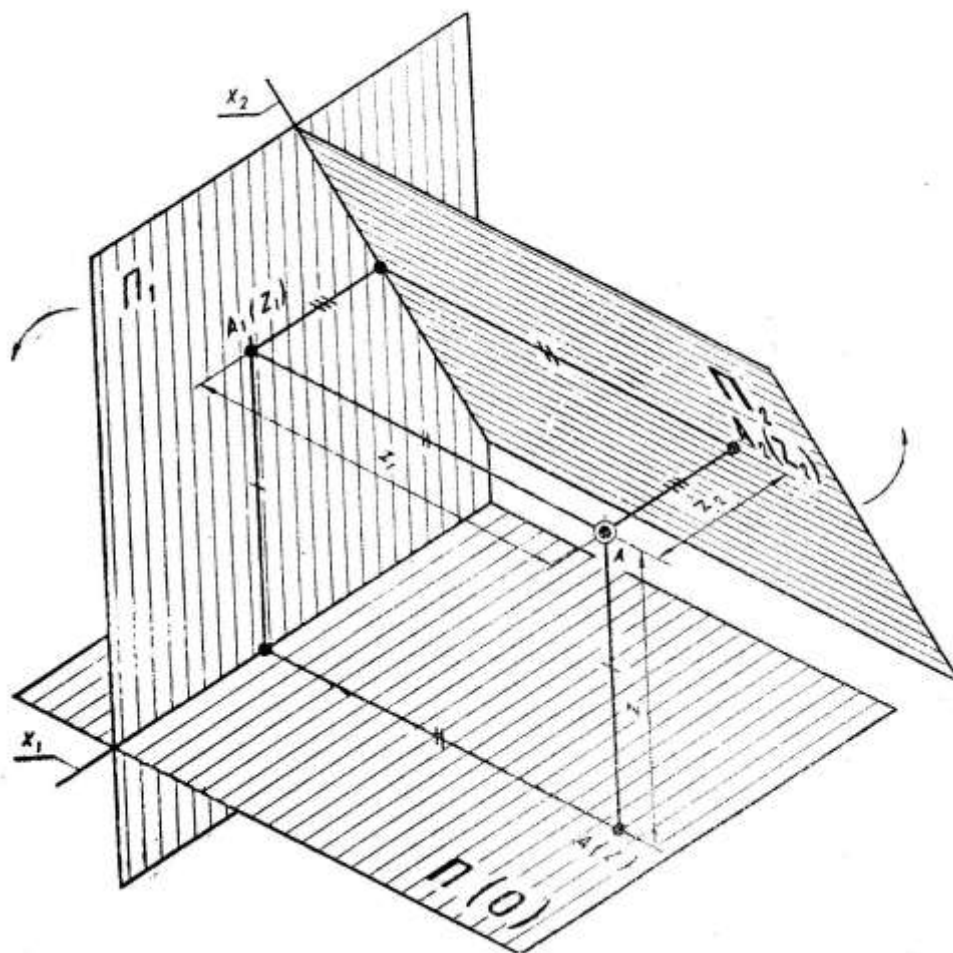
ახალი გეგმილთა სიბრტყე შეიძლება იყოს ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის პარალელური ან მართობული.

პირველ შემთხვევაში მარტივად იცვლება გეგმილთა სიბრტყის და. შესაბამისად, დასაგეგმილებელი ობიექტის მახასიათებელი წერტილების ნიშნულებიც. პირობით შემთხვევაში, რომ თუ ახალი სიბრტყე აღებული იქნება ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის ზევით (ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის ჰორიზონტალური მდებარეობისათვის) ან მარჯვნივ (ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის ვერტიკალური მდებარეობისათვის), მაშინ მისი ნიშნული იყოს დადებითი, წინააღმდეგ შემთხვევაში – უარყოფითი.

მეორე შემთხვევისათვის, ე.ი. როცა ახალი გეგმილთა სიბრტყე ძირითადის მართობულია, განვიხილოთ ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხის გამოყენების შემდეგი გზა:

ჩვეულებრივი წესით სივრცის A წერტილი დავაგეგმილოთ ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე ($\Pi(O)$) და დავნიშნოთ მისი ნიშნულიანი გეგმილი – $A(Z)$ (ნახ. 19). შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთა სიბრტყე $\Pi_1(\Pi \perp \Pi(O))$, მასზე ორთოგონალურად დავაგეგმილოთ იგივე A წერტილი და დავნიშნოთ მისი ახალი გეგმილი Π_1 სიბრტყეზე – $A_1(Z_1)$. შევთანხმდით, რომ ყოველი ახალი გეგმილთა სიბრტყის შემოტანას აღრიცხავს ამ სიბრტყეზე მიღებული გეგმილის ქვემო ინდექსი (მაგალითად, A_2 – ახალი გეგმილთა სიბრტყის ორჯერ შემოტანაზე მიუთითებს). ძველი და ახალი გეგმილთა სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე, ანუ

გეგმილთდერძი, აღვნიშნოთ X ასოთი, რომელსაც მიწერილი ექნება ქვემო ინდექსი ($x_1, x_2, x_3, \dots$)

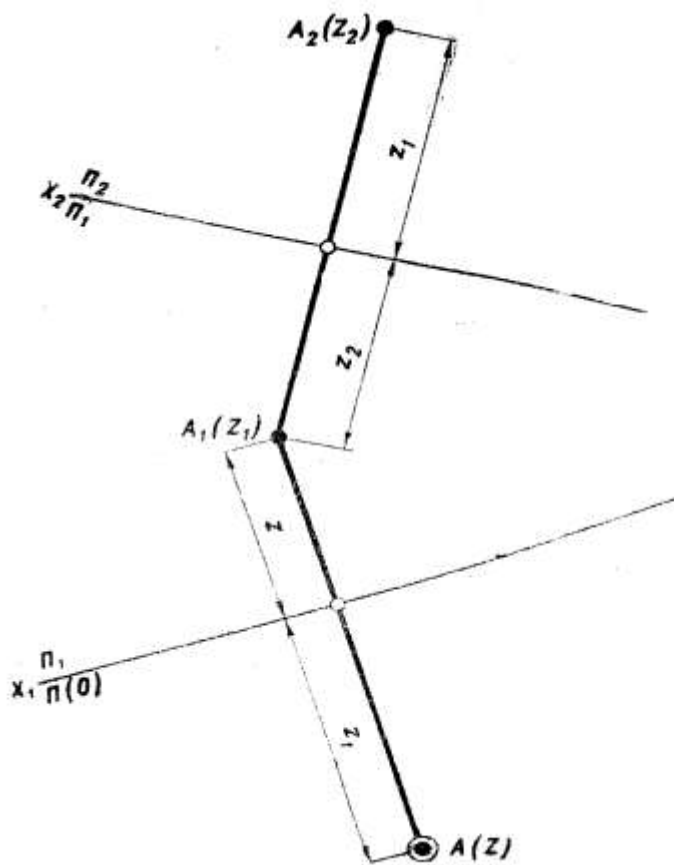


ნახ. 19.

იმ პირობით, რომ ეს უკანასკნელი ყოველი ახალი გეგმილთა სიბრტყის შემოტანას აღრიცხავს და გარდა ამისა, ყოველი ახალი სისტემის ნომერს უზღვენებს.

კვლავ მოვახდინოთ გეგმილთა სიბრტყის შეცვლა. შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთა სიბრტყე $\Pi_2(\Pi_2 \perp \Pi_1)$ და პირველის ანალოგიურად მასზე დავნიშნოთ A წერტილის ახალი გეგმილი $A_2(Z_2)$.

ახალი გეგმილთა სიბრტყის შემოტანა გეგმაზე x ღერძის გაღვლებით ვაჩვენოთ (ნახ. 20).



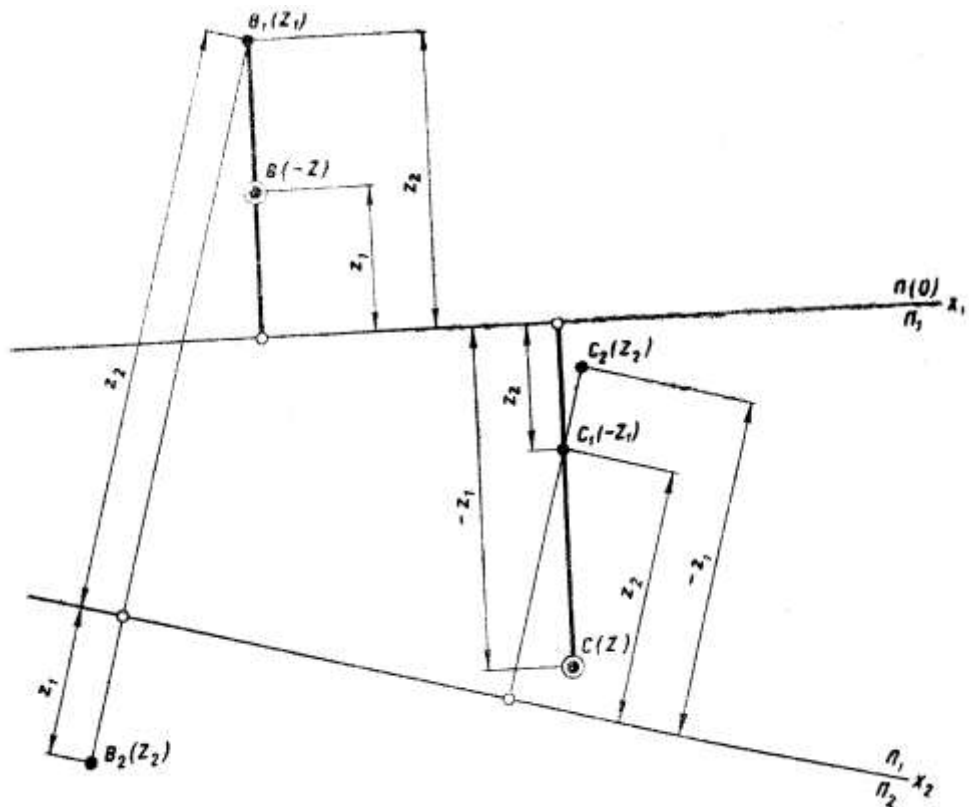
ნახ. 20.

მივიღოთ, რომ ყოველი ასეთი ღერძი მიმართული იქნება მარცხნიდან მარჯვნივ და მარცხენად ჩაითვლება ის მხარე, საითაც სწვრია x .

შეთავსების შემდეგ ღერძის მიმართ გეგმილთა სიბრტყეების განლაგებაში გარკვევისათვის გავაკეთოთ შესაბამისი მინაწერები. მაგალითად, ჩვენს შემთხვევაში (ნახ. 20), x_1 ღერძის ქვემოთ წერია $\Pi(O)$, ხოლო ზემოთ – Π_1 . აქედან გამომდინარეობს A წერტილის ძველი და ახალი გეგმილების განლაგება x_1 ღერძის მიმართ.

სივრცის ნებისმიერი წერტილის რაიმე ახალ გეგმილთა სიბრტყეზე დაგეგმილების საკითხში დავაზუსტოთ ამ სიბრტყის მიმართ წერტილის ნიშნულის ნიშნის განსაზღვრის პირობები. საფუძვლად მივიღოთ §1-ში აღნიშნული შეთანხმება და დავადგინოთ შემდეგი პირობა: ყოველი ახალი სიბრტყე ძირითად გეგმილთა სიბრტყესთანაა შეთავსებული; ეს შეთავსება, როგორც წესი, უნდა მოხდეს ახალი სიბრტყის შემოებრუნებით საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ დამკვირვებელი იმყოფება ღერძის მარცხნივ და იყურება მის გასწვრივ.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ 21-ე ნახაზი. აქ ნაჩვენებია B და C წერტილების ახალი გეგმილების აგება.



ნახ. 21.

B წერტილი უარყოფითნიშნულიანია ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის $\Pi(O)$ მიმართ, ხოლო C უარყოფითნიშნულებიანია ახალი გეგმილთა სიბრტყის (Π_1) მიმართ.

განვიხილოთ ახალი გეგმილების ნიშნულების განსაზღვრის ხერხი, ამისათვის დაეუბრუნდეთ 20-ე ნახაზს. x_1 სისტემაში A წერტილის ახალი გეგმილის საპოვნელად საკმარისია მოცემული $A(Z)$ გეგმილიდან x_1 ღერძზე დაეშვათ მართობი და ამავე მართობზე, ღერძის ზემოთ ან ქვემოთ (ეს დამოკიდებულია ნიშნულის ნიშანზე), გადავზომოთ მონაკვეთი, რომელიც Z-ის რიცხვითი მნიშვნელობის, ანუ წერტილის ძირითადი $\Pi(O)$ გეგმილთა სიბრტყიდან დაშორების ტოლი იქნება. ამ გზით Π_1 გეგმილთა სიბრტყეზე ავაგებთ A წერტილის ახალ გეგმილს, რომელსაც A_1 -ით აღვნიშნავთ. რაც შეეხება მის ნიშნულს (Z_1), იგი მიიღება $A(Z)$ გეგმილიდან x_1 ღერძამდე მანძილის უშუალო გაზომვით. მართლაც, სივრცეში სწორედ ეს გამოსახავს მანძილს მოცემული A წერტილიდან ჩვენს მიერ შემოტანილ Π_1 გეგმილთა სიბრტყემდე

აღნიშვნებისა და მოქმედებების რეკომენდებული სისტემა ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხის გამოყენების მარტივ შესაძლებლობას იძლევა.

ახალი გეგმილებისათვის ნიშნულების გამოთვლა კი, როგორც ამას უშუალოდ ამოცანების გადაწყვეტის დროს დავინახავთ, ჩატარებული გრაფიკული აგებების სიზუსტის ერთ-ერთი მაჩვენებელი იქნება.

3. ბრუნვის ხერხი

განვიხილოთ ბრტყელი წერტილოვანი ველის ბრუნვის ყველაზე გავრცელებული შემთხვევა – შეთავსება (ნახ. 22). ამ დროს ბრუნვა ხდება დონის წრფის გარშემო, ამავე დონის სიბრტყესთან შეთავსებამდე.

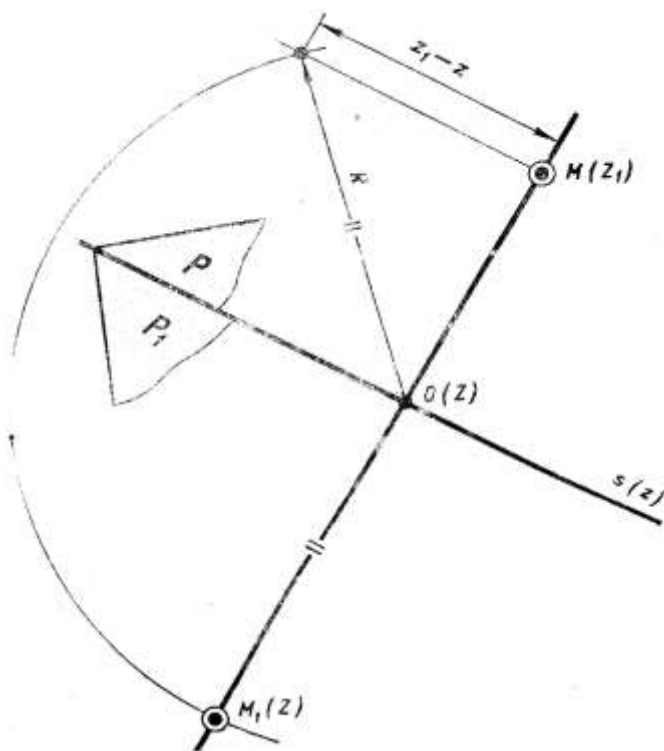
მოცემული წერტილის კოორდინატის გარშემო ბრუნვით რაიმე დონის სიბრტყესთან შეთავსებისათვის საჭიროა ბრუნვის რადიუსის (R) განსაზღვრა. უკანასკნელი წარმოადგენს უმოკლეს მანძილს მოცემული წერტილიდან ბრუნვის ღერძამდე. ამ მანძილის საპოვნელად საკმარისია მოცემული წერტილის გეგმილიდან ($M(Z_1)$) დავუშვათ მართობი ბრუნვის ღერძის გეგმილზე ($s(z)$) და ვიპოვოთ მიღებული მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდე სამკუთხედის წესით.

შენიშვნა: მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდის განსაზღვრის საკითხი განხილულია

მესამე თავში – „მეტრული ამოცანები“.

აღსანიშნავია, რომ შესათავსებელი წერტილების სიმრავლის შემთხვევაში ასეთი სამკუთხედების აგება ართულებს გრაფიკულ სამუშაოს და ამცირებს შედეგის სიზუსტეს. ამასთან დაკავშირებით, განვიხილოთ შეთავსების სხვა ვარიანტები, რომლებიც ხასიათდებიან გრაფიკული სამუშაოების ნაკლები სირთულით და მეტი თვალსაჩინოებით.

წინასწარ მივიღოთ აღნიშვნების გარკვეული სისტემა – მოცემულ წერტილს ახალ მდებარეობაში გადატანის შემდეგ მივაკუთვნოთ იმ სიბრტყის ნიშნული, რომელთანაც მოვახდინეთ მისი შეთავსება. შეთავსებული წერტილი აღვნიშნოთ იმავე ასოთი, რომლითაც იგი თავის პირვანდელ მდგომარეობაში იყო აღნიშნული. განსხვავებისათვის დავუმატოთ რიცხვითი მაჩვენებელი ქვემო ინდექსის სახით, იმ პირობით, რომ ეს უკანასკნელი ამ წერტილის ქვემო ინდექსის სახით, იმ პირობით, რომ ეს უკანასკნელი ამ წერტილის ბრუნთა რაოდენობას გამოსახავს. ბრუნვის ღერძი აღვნიშნოთ s ასოთი, რომელსაც მარჯვნივ ფრჩხილებში მიწერილი ექნება შესაბამისი დონის ნიშნული.



პირველი ვარიანტი. მოცემულია P ბრტყელი ველის A, B, C და D წერტილები (ნახ. 23). საჭიროა შევათავსოთ ეს წერტილები $s(z)$ ჰორიზონტალის დონის სიბრტყესთან. მივიღოთ $s(z)$ ბრუნვის ღერძად და ცნობილი ხერხით (ბრუნვის რადიუსის განსაზღვრა სამკუთხედის წესით), $A(z_1)$ წერტილი შევათავსოთ $s(z)$ ჰორიზონტალის დონის P_1 სიბრტყესთან.

შეთავსებული $A_1(Z)$ წერტილის პოვნის შემდეგ ნახაზზე წარმოიქმნება ნათესაური შესაბამისობა, რომელიც მოცემულია A და A_1 წერტილებით და s წრფით. ამრიგად, P და P_1 სიბრტყეები წარმოადგენენ ნათესაურად შესაბამის სიბრტყეებს, $s(Z)$ – შესაბამისობის ღერძს, AA_1 – შესაბამისობის მიმართულებას და A და A_1 წერტილები ნათესაურად შესაბამის წერტილებს.

გამოვიყენოთ ნათესაური შესაბამისობის ცნობილი თვისებები (იხ. Н. Глаголев, Проективная Геометрия, Москва, 1964) და დანარჩენი წერტილების შესათავსებლად განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა:

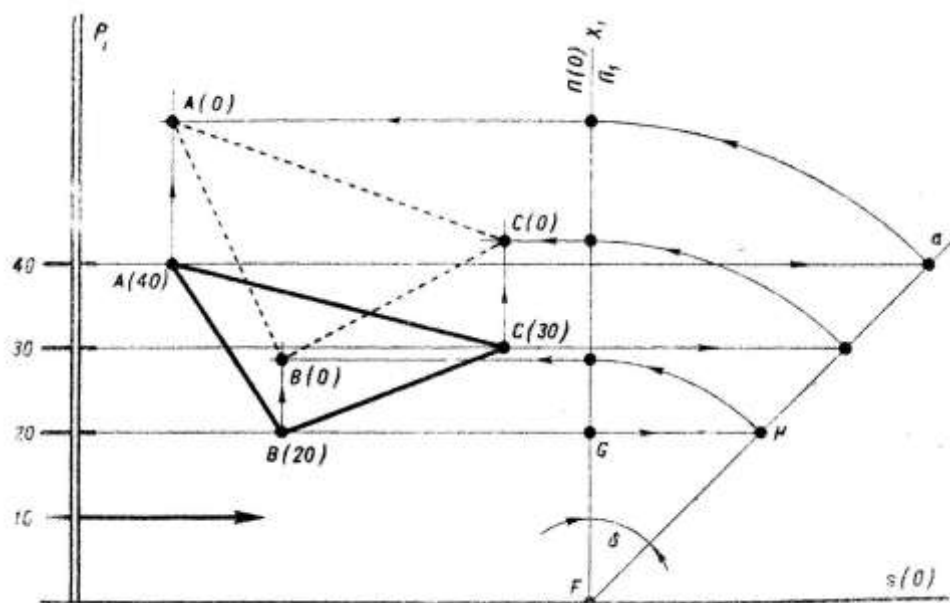
1) მოცემული წერტილი $A(Z_1)$ შევაერთოთ $B(Z_2)$ წერტილთან. AB წრფის ბრუნვის ღერძთან გადაკვეთის $E(Z)$ წერტილი შევაერთოთ $A(Z_1)$ წერტილთან. B წერტილი, AA_1 მიმართულების პარალელურად, გადავიტანოთ $E(Z)A_1(Z)$ წრფეზე. მიღებული $B_1(Z)$ წერტილი მოცემული $B(Z_2)$ წერტილის P_1 სიბრტყესთან – შეთავსება იქნება;

2) $C(Z_3)$ წერტილის P_1 სიბრტყესთან შესათავსებლად გავატაროთ დამხმარე წრფეები – $CF \parallel AE$, $FC_1 \parallel EA_1$ და $CC_1 \parallel AA_1$, მიღებული $C_1(Z)$ წერტილი მოცემული $C(Z_3)$ წერტილის P_1 სიბრტყესთან შეთავსება იქნება.

3) იმისათვის, რომ $D(Z_4)$ წერტილი შევათავსოთ P_1 სიბრტყესთან, გავატაროთ მასზე ბრუნვის ღერძის პარალელური წრფე, რომელიც AE წრფეს M წერტილში გადაკვეთს. ვიპოვოთ M წერტილის შეთავსება P_1 სიბრტყესთან – M_1 . უკანასკნელზე გავატაროთ ბრუნვის ღერძის პარალელური წრფე და მასზე გადმოვიტანოთ მოცემული $D(Z_4)$ წერტილი. ამრიგად, მივიღებთ შეთავსებულ $D_1(Z)$ წერტილს.

სამივე შემთხვევა ერთმანეთის ტოლფასია, არჩევა კი დამოკიდებულია ამოცანის ხასიათზე და შესათავსებელი წერტილების განლაგებაზე.

მეორე ვარიანტი. განვიხილოთ ABC სამკუთხედის შეთავსება. ვთქვათ, ამ სამკუთხედის სიბრტყე (P) ძირითად გეგმილთა სიბრტყისადმი დახრილია δ კუთხით (ნახ. 24). ვისარგებლოთ გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლისა და ბრუნვის ხერხების ერთობლივი გამოყენებით.



ნახ. 24.

მოცემული ნაკეთი ვაბრუნოთ P სიბრტყის კვალის ($s(0)$) გარშემო უახლოესი გზით ძირითად გეგმილთა სიბრტყესთან შეთავსებამდე. შეთავსების შემდეგ წერტილების ახალი გეგმილების ასაგებად შემოვიტანოთ ახალი Π_1 სიბრტყე ისე, რომ P სიბრტყეს მის მიმართ მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა ეჭიროს. ავავოთ P სიბრტყის a კვალი Π_1 სიბრტყეზე. შეთავსებისათვის საჭირო შემდგომი მოქმედებანი ნახაზზე ისრებითაა ნაჩვენები.

მაგალითად, A_1 წერტილის მოსაძებნად ვისარგებლოთ FGH მართკუთხა სამკუთხედით, რომელიც a კვალის აგების შემდეგ ნახაზზე თითქმის თავისთავად გამოისახება. ამ სამკუთხედის ჰიპოტენუზა (FH) წარმოადგენს შეთავსებისათვის საჭირო ბრუნვის რადიუსს.

შეთავსების განხილული ვარიანტების გამოყენების დროს დამხმარე გრაფიკული აგებანი, ძირითადად სისტემატიზებული წრფეების გავლებით ხორციელდება, ამით, სხვა ანალოგიურ ხერხებთან შედარებით, საგრძნობლად მცირდება გრაფიკული სამუშაოს მოცულობა და, შესაბამისად, დიდდება მიღებული შედეგის სიზუსტე.

მეორე თავი
პოზიციური ამოცანები
§4. დამხმარე პოზიციური ამოცანები

1. ზოგადი ცნობები

პოზიციურ ამოცანებში, ძირითადად, გაერთიანებულია გეომეტრიული ფიგურების ურთიერთკუთვნილებისა და თანაკვეთის ამოცანები. მაგალითად, როგორცაა წერტილის აღება წრფეზე და ზედაპირზე, წრფის აღება ზედაპირზე, მოცემულ წრფეზე ზედაპირის გატარება, წრფისა და ზედაპირის ან ორი ზედაპირის თანაკვეთა და სხვ.

პოზიციური ამოცანების გადაწყვეტაში არ მონაწილეობს გეომეტრიული ფიგურების ე.წ. მეტრული თვისებები, ე.ი. ის თვისებები, რომლებიც შესაძლოა გამოვლინდეს გაზომვების შედეგად.

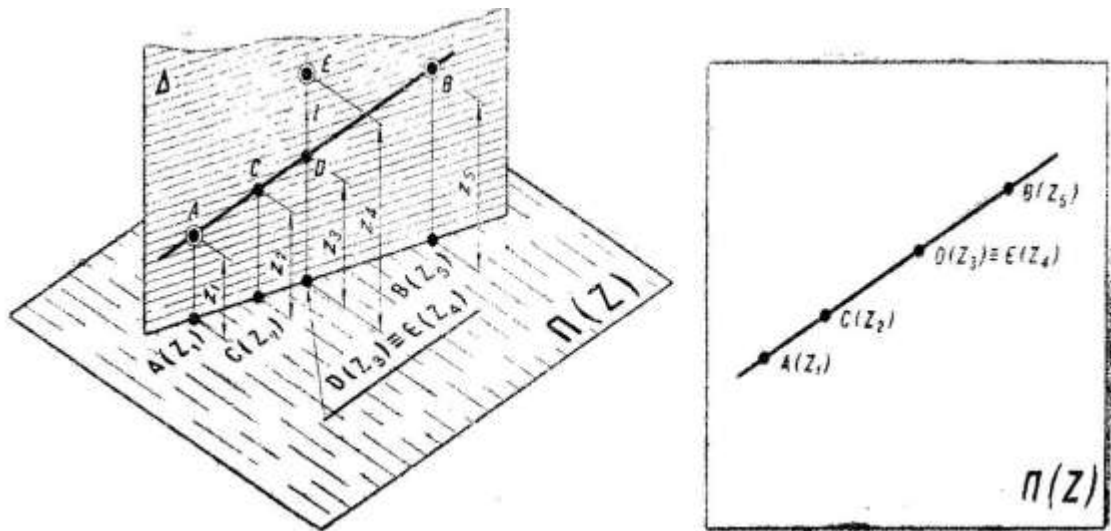
ძირითადი პოზიციური ამოცანებია: 1) წრფის სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილისა და 2) ორი სიბრტყის თანაკვეთის წრფის განსაზღვრა.

ვიდრე ძირითადი ამოცანების გადაწყვეტას შევუდგებოდეთ, საჭიროა განვიხილოთ დამხმარე პოზიციური ამოცანები.

2. წერტილი წრფეზე

ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში წერტილისა და წრფის კუთვნილების პირობა ასეთნაირად განისაზღვრება: თუ წერტილი სივრცეში რაიმე წრფეს ეკუთვნის, მაშინ გეგმაზე წერტილის გეგმილი ძევს წრფის გეგმილზე და შეთავსების წერტილში წრფესა და წერტილს ერთი და იგივე ნიშნული გააჩნიათ.

ამის დასადასტურებლად განვიხილოთ 25-ე ნახაზი. როგორც თვალსაჩინო გამოსახულებიდან ჩანს, წერტილის გეგმილი წრფის გეგმილს მხოლოდ ორ შემთხვევაში შეიძლება დაემთხვეს – ერთი, როცა წერტილი ძევს წრფეზე (მაგ., C და D წერტილები) და მეორე, როცა წერტილი არ ძევს წრფეზე, მაგრამ მოთავსებულია ამ წრფეზე გამავალ მაგეგმილებელ Δ სიბრტყეში (მაგალითად, E წერტილი). ამ ორი შემთხვევის ერთმანეთისაგან განსასხვავებლად განვიხილოთ E და D წერტილები. ისინი გეგმილთა სიბრტყის მართობულ ერთი და იგივე Δ სიბრტყის l მაგეგმილებელ სხივზე მდებარეობენ. ამიტომ მათი გეგმილები გეგმაზე AB წრფის გეგმილის ერთ წერტილში არიან შეთავსებული; მიუხედავად ამისა, მათი ნიშნულების მიხედვით იოლად ირკვევა, თუ რომელი ძევს წრფეზე და რომელი მის გარეთ.

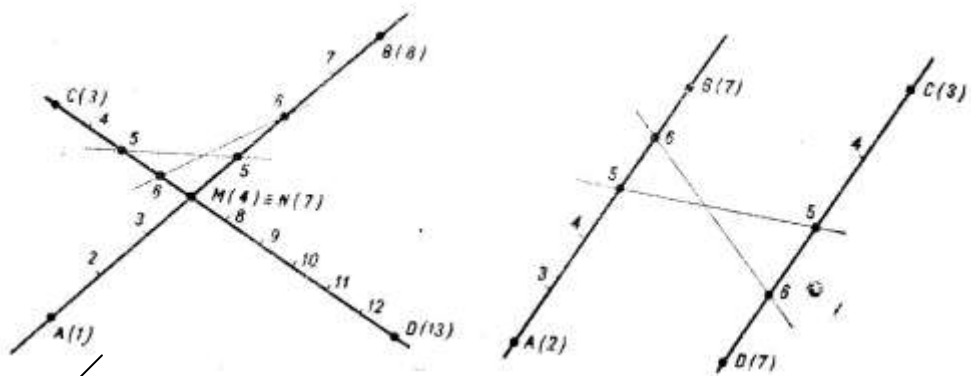


ნახ. 25.

3. წრფეების ურთიერთდამოკიდებულება

სივრცეში ორი წრფე შეიძლება იყოს აცდენილი (აღმაცერი) გადაკვეთილი ან პარალელური. პირველ შემთხვევაში წრფეებს არ გააჩნიათ საერთო წერტილი და არ შეიძლება მათზე გატარდეს რაიმე ერთი საერთო სიბრტყე. მეორე და მესამე შემთხვევებში, ე.ი. როცა ორი წრფე ურთიერთგადაკვეთილი ან ურთიერთპარალელურია, მათზე შეიძლება ერთი და მხოლოდ ერთი სიბრტყის გატარება.

თუ ორი წრფე სივრცეში აცდენილია (ნახ. 26), მაშინ გეგმაზე მათი გეგმილების ურთიერთდამოკიდებულების ორი შემთხვევა განიხილება. სახელდობრ, ასეთი წრფეების გეგმილები ან იკვეთებიან ან ურთიერთპარალელურნი არიან. პირველ შემთხვევაში $(A(1)B(8) \times C(3)D(13))$ წრფეების აცდენილობა გამოირკვევა გეგმილების გადაკვეთის წერტილის შემოწმებით.

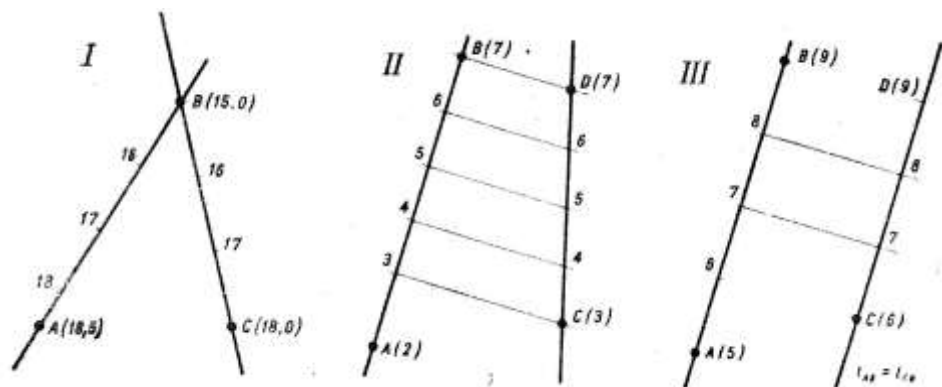


ნახ. 26.

ამ წერტილში წრფეებს სხვადასხვა ნიშნულები ექნებათ ($M(4) \subset AB$ და $N(7) \subset CD$) მეორე შემთხვევაში, ე.ი. როცა გეგმილები ურთიერთპარალელურია ($A(2) \parallel B(7) \parallel C(3) \parallel D(7)$), წრფეების აცდენილობის მაჩვენებელია დახრის კუთხეების უტოლობა, ინტერვალების უტოლობა ან ნიშნულების ზრდის განსხვავებული მიმართულება. გარდა ამისა, წრფეების აცდენილობის ერთ-ერთ მაჩვენებლად ისიც შეიძლება ჩაითვალოს, რომ აცდენილი წრფეების ერთნაირნიშნულიანი წერტილების შემაერთებელი წრფეები ურთიერთპარალელურნი არ არიან, მაგალითად, $5-5=6-6$.

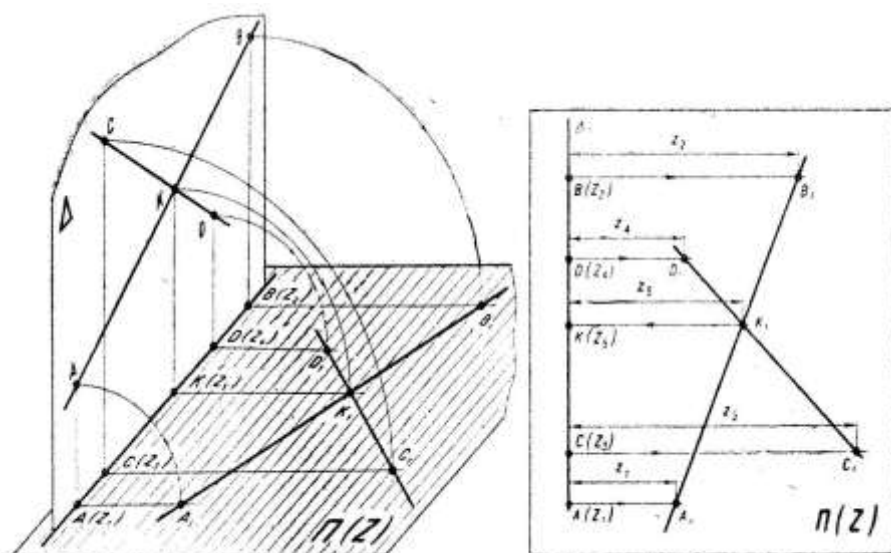
თუ ორი წრფე სივრცეში ერთმანეთს კვეთს ან ურთიერთპარალელურია (ნახ. 27), მაშინ გეგმაზე სამი ძირითადი შემთხვევა განიხილება:

- 1) წრფეთა გეგმიულები იკვეთებიან და თანაკვეთის წერტილი ნახაზის ფარგლებშია მოთავსებული (ნახ. 27-I);
- 2) წრფეთა გეგმილები იკვეთებიან, მაგრამ მათი თანაკვეთის წერტილი ნახაზის ფარგლებში არ არის მოთავსებული (ნახ. 27-II);
- 3) წრფეთა გეგმილები ურთიერთპარალელურნი არიან (ნახ. 27-III).



ნახ. 27.

პირველ შემთხვევაში, თუ მოცემული წრფეების გრადუირების შედეგად გეგმილების თანაკვეთის წერტილმა ერთი და იგივე სიდიდის ნიშნული მიიღო, ბუნებრივია, ეს წერტილი ჩაითვლება ორივე წრფის საერთო წერტილად და მოცემული წრფეები კი ურთიერთგადაკვეთილ წრფეებად.



ნახ. 28.

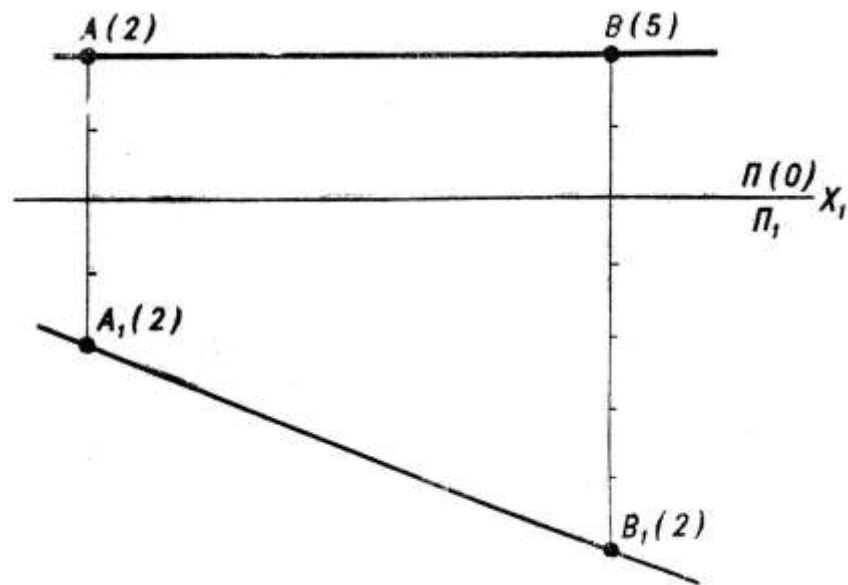
მეორე შემთხვევაში წრფეთა გადაკვეთილობის ერთ-ერთი მაჩვენებელია ერთნაირნიშნულიანი წერტილების შემაერთებელი წრფეების ურთიერთპარალელობა.

მესამე შემთხვევაში, თუ გეგმილების პარალელობასთან ერთად, ამ წრფეების დახრის კუთხეები (ან ინტერვალები) ტოლი აღმოჩნდება და აღმავლობის მიმართულებანი თანხვედრილი, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ასეთი წრფეები სივრცეში ურთიერთპარალელურნი არიან.

როგორც გამოჩანის, განვიხილოთ სივრცის ისეთი ორი ურთიერთგადაკვეთილი წრფე, რომლებზედაც გამავალი სიბრტყე მაგეგმილებელია (ნახ. 28). ასეთ შემთხვევაში გეგმაზე გეგმილები ერთმანეთს ემთხვევა. მათი დამოკიდებულების გამორკვევისათვის საკმარისია აღნიშნული მაგეგმილებელი სიბრტყე შევუთავსოთ ძირითად გეგმილთა სიბრტყეს ისე, როგორც ეს 32-ე ნახაზზეა ნაჩვენები.

4. ზოგადი მდებარეობის წრფის ღონის წრფედ გარდაქმნა

მოცემულია, ზოგადი მდებარეობის $A(2)B(5)$ წრფე. ამ წრფის ღონის წრფედ გარდაქმნისათვის ვისარგებლოთ გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხით (ნახ. 29). ახალი გეგმილთა სიბრტყე Π_1 დავაყენოთ $A(2)B(5)$ გეგმილის

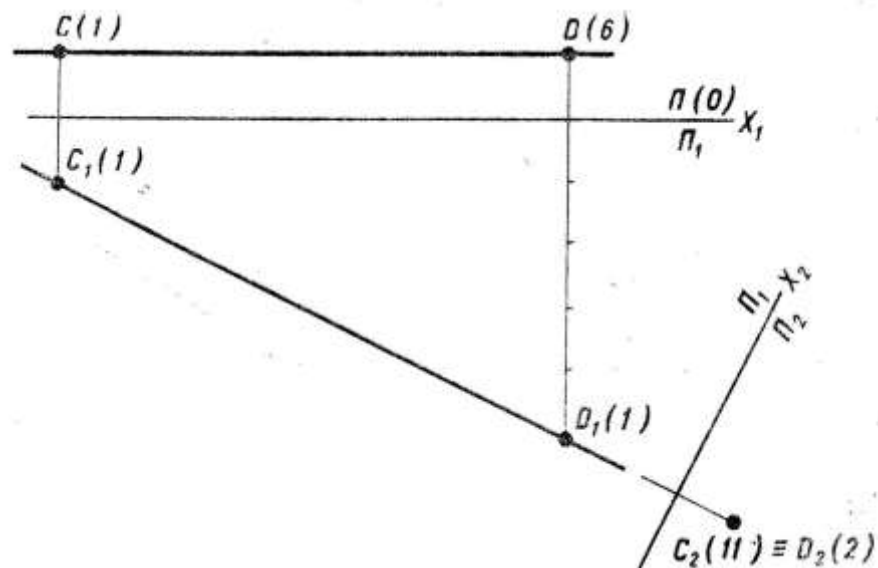


ნახ. 29.

პარალელურად, ე.ი. გეგმილთა ღერძი გაავალოთ $A(2)B(5)$ გეგმილის პარალელურად და ავაგოთ AB წრფის ახალი $A_1(2) B_1(2)$ გეგმილი x_1 სისტემაში. მოცემული AB წრფე x_1 სისტემაში დონის წრფედ გარდაიქმნება.

5. ზოგადი მდებარეობის წრფის მაგეგმილებელ წრფედ გარდაქმნა

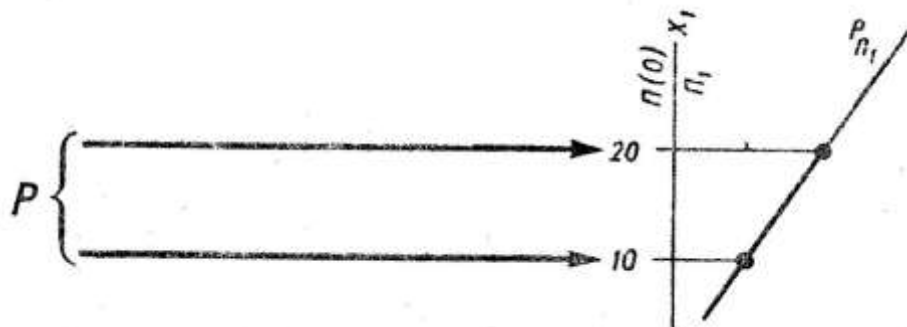
მოცემულია ზოგადი მდებარეობის წრფე $C(1)D(6)$. იმისათვის, რომ იგი მაგეგმილებელ წრფედ გარდაექმნათ, დაგვჭირდება გეგმილთა სიბრტყის ორჯერ შეცვლა (ნახ. 30). პირველად წრფე გარდაექმნათ Π_1 გეგმილთა სიბრტყის მიმართ დონის წრფედ. Π_2 გეგმილთა სიბრტყის შემოტანით ($\Pi_2 \perp C_1D_1$) მოცემული წრფე Π_2 გეგმილთა სიბრტყის მიმართ მაგეგმილებელ წრფედ გარდაიქმნება.



ნახ. 30.

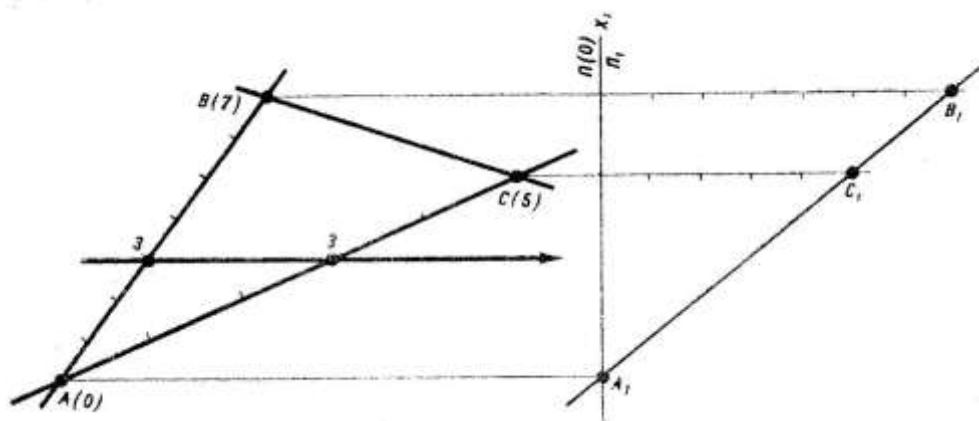
6. ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის გარდაქმნა მაგეგმილებელ სიბრტყედ.

ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე პორიზონტალებით. შევცვალოთ გეგმილთა სიბრტყე ახლით (Π_1), რომელიც მოცემული პორიზონტალის მართობული იქნება (ნახ. 31). ახალი გეგმილთა სიბრტყის ძირითად გეგმილთა სობრტყესთან შეთავსებით მივიღებთ P სიბრტყის P_{Π_1} კვალს Π_1 სიბრტყეზე. მოცემული სიბრტყე ახალი გეგმილთა სიბრტყის (Π_1) მაგეგმილებელი იქნება.



ნახ. 31.

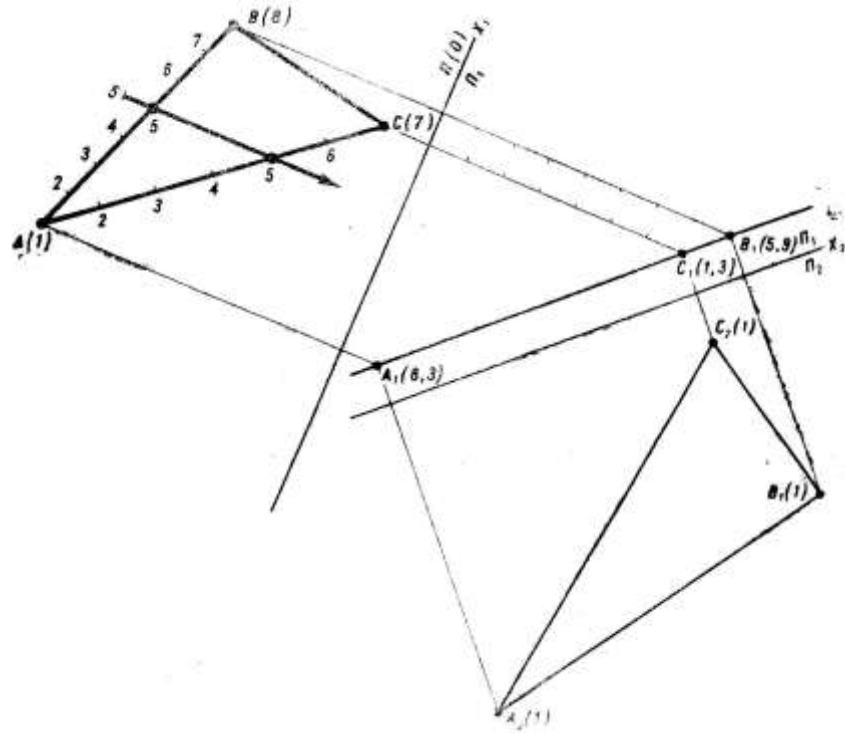
32-ე მახაზზე ნაჩვენებია შემთხვევა, როცა სიბრტყე მოცემულია სამი წერტილით.



ნახ. 32.

7. ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის გარდაქმნა დონის სიბრტყედ

მოცემულია ABC სიბრტყე (ნახ. 33), რომელსაც ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის ($\Pi(O)$) მიმართ ზოგადი მდებარეობა უკავია. იმისათვის, რომ მოცემული სიბრტყე დონის სობრტყედ გარდავქმნათ, საჭიროა გეგმილთა სიბრტყის ორჯერ შეცვლა. პირველად მოცემულ სიბრტყეს მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მივანიჭოთ, ხოლო მეორედ, გარდავქმნათ დონის სიბრტყედ.

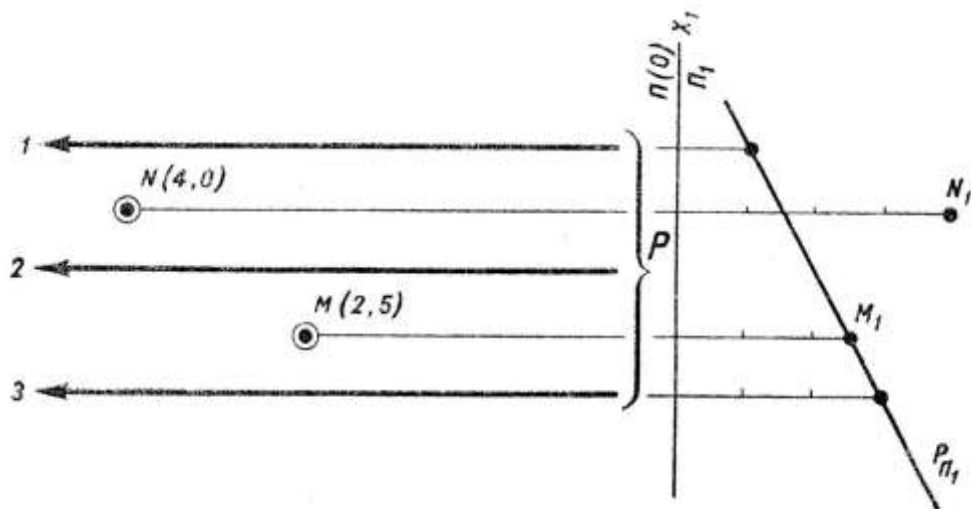


ნახ. 33.

8. სიბრტყეზე მდებარე წერტილი

როგორც ცნობილია, თუ წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, ეს იმას ნიშნავს, რომ ეს წერტილი ეკუთვნის წრფეს, რომელიც თავის მხრივ, ეკუთვნის სიბრტყეს. კერძო შემთხვევებში, როცა გვგმაზე ეს პირობები ცნობილია, რაიმე დამხმარე აგებები საჭირო არ არის, განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა:

ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე და M და N წერტილები. იმის გამოსარკვევად, თუ რომელი მათგანი ეკუთვნის P სიბრტყეს და რომელი არა, ვისარგებლოთ გვემდებარება სიბრტყეების შეცვლის ხერხით (ნახ. 34).



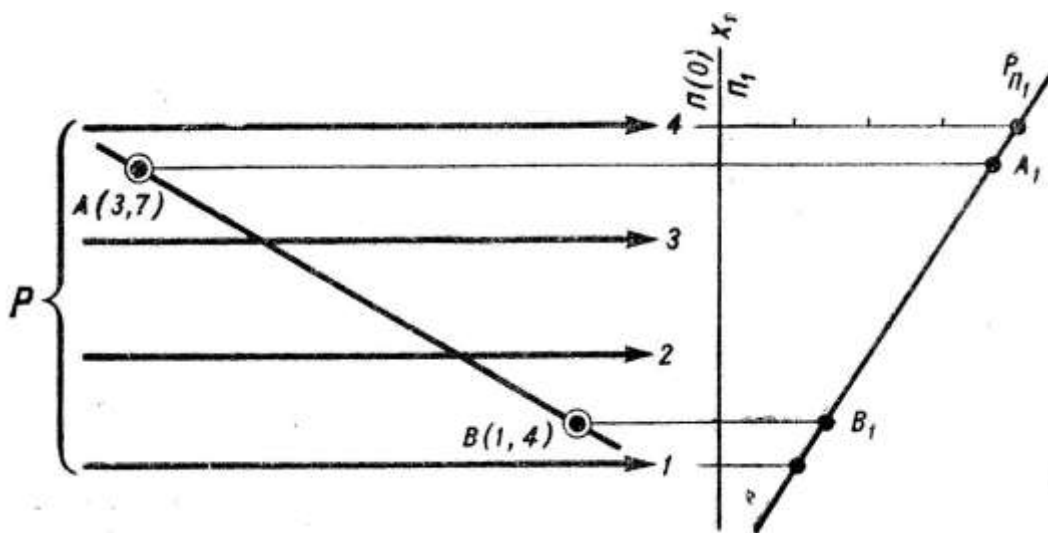
ნახ. 34.

შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთა სიბრტყე (Π_1) ისეთნაირად, რომ მოცემულ სიბრტყეს მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მივანიჭოთ. ახალ სისტემაში წერტილის გეგმილისა და სიბრტყოს P_{Π_1} კვალის ურთიერთდამოკიდებულება მოცემული წერტილის მოცემულ სიბრტყეზე მდებარეობის მაჩვენებელი იქნება. მაგალითად, აღებულ შემთხვევაში M წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, N კი – არა.

9. სიბრტყეზე მდებარე წრფე

როგორც ცნობილია, თუ წრფის რაიმე ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ მთლიანად ეს წრფე ეკუთვნის ამ სიბრტყეს. კერძო შემთხვევაში, თუ ასეთი ცალკეული პირობები ცნობილია გეგმაზე, დამხმარე აგებები საჭირო არ არის. ზოგად შემთხვევაში შეგვიძლია ვისარგებლოთ ქვემოთ ნაჩვენები გზით:

ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე და AB წრფე (ნახ. 35). მათი ურთიერთკუთვნილების დასადგენად ვისარგებლოთ გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხით. შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთა სიბრტყე (Π_1) ისეთნაირად, რომ მოცემულ სიბრტყეს მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მივანიჭოთ. შეთავსების შემდეგ წრფის ახალი გეგმილისა და სიბრტყის P_{Π_1} კვალის ურთიერთდამოკიდებულება მოცემული სიბრტყისა და წრფის ურთიერთკუთვნილების მაჩვენებელი იქნება.

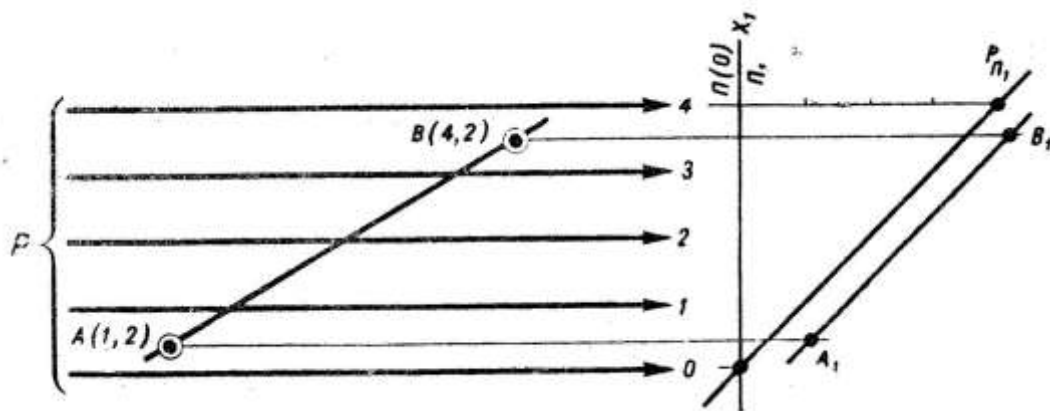


ნახ. 35.

10. სიბრტყის პარალელური წრფე.

წრფე სიბრტყის პარალელურია, თუ ეს წრფე პარალელურია ამ სიბრტყეში მდებარე რაიმე წრფისა. თუ ასეთი შესადარებელი წრფე გეგმაზე არსებობს, რაიმე დამხმარე აგებები საჭირო არ არის. ზოგად შემთხვევაში წრფისა და სიბრტყის პარალელობის დასადგენად შეგვიძლია ვისარგებლოთ გეგმილთა

სიბრტყეების შეცვლის ხერხით (ნახ. 36). ამ შემთხვევაშიც ახალი გეგმილთა სიბრტყე (Π_1) ისე უნდა იყოს შემოტანილი, რომ მოცემულმა სიბრტყემ მაგეგმილებელი სიბრტყის მდგომარეობა დაიკავოს. წრფის ახალი გეგმილისა (A_1B_1) და სიბრტყის კვალის (P_{Π_1}) მოცემული წრფისა (AB) და სიბრტყის (P) ურთიერთპარალელობის მაჩვენებელი იქნება.



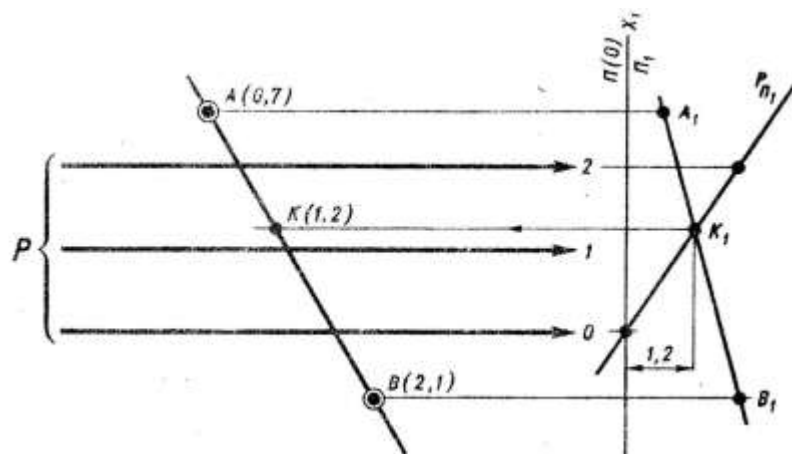
ნახ. 36.

§5. ძირითადი პოზიციური ამოცანები

1. წრფისა და სიბრტყის თანაკვეთის წერტილის განსაზღვრა

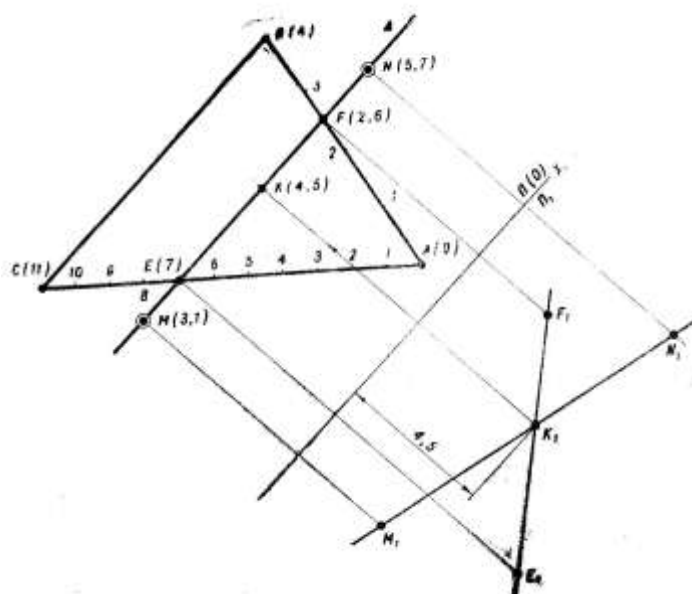
წრფე კვეთს სიბრტყეს, თუ მათ მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი გააჩნიათ. განვიხილოთ ასეთი წერტილის განსაზღვრის სამი შემთხვევა.

1) მოცემულია P სიბრტყე (ჰორიზონტალური) და $A(0,7)$ $B(2,1)$ წრფე (ნახ. 37). თანაკვეთის წერტილის საპოვნელად გამოვიყენოთ გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხი. ახალ x_1 სისტემაში $\Pi_1 \perp P$ და $K_1 = A_1B_1 \times P_{\Pi_1}$. K_1 წერტილის დაბრუნებით ძველ სისტემაში ვიპოვით საძიებელ K წერტილს. მიღებული წერტილის ნიშნული ორნაირად განისაზღვრება: K_1 გეგმილიდან x_1 ღერძამდე მანძილის უშუალო გაზომვით და AB წრფის გრადუირებით.



ნახ. 37.

2) მოცემულია ABC სიბრტყე და MN წრფე (ნახ. 38). თანაკვეთის წერტილის საპოვნელად მოცემულ წრფეზე გავატაროთ მაგებმილებელი Δ სიბრტყე. სამკუთხედის გვერდები Δ სიბრტყეს $E(7,0)$ და $F(2,6)$ წერტილებში გადაკვეთს (წრფის თანაკვეთა მაგებმილებელ სიბრტყესთან). ამრიგად, Δ სიბრტყეში მოთავსებული AB და EF წრფეების თანაკვეთა საძიებელი წერტილი იქნება. ამ წერტილის განსაზღვრისათვის შევცვალოთ გეგმილთა სიბრტყე ისე, რომ ახალ სისტემაში Δ სიბრტყემ დონის სიბრტყის მდებარეობა მიიღოს. K წერტილის ნიშნულის განსაზღვრა პირველი შემთხვევის ანალოგიურია.



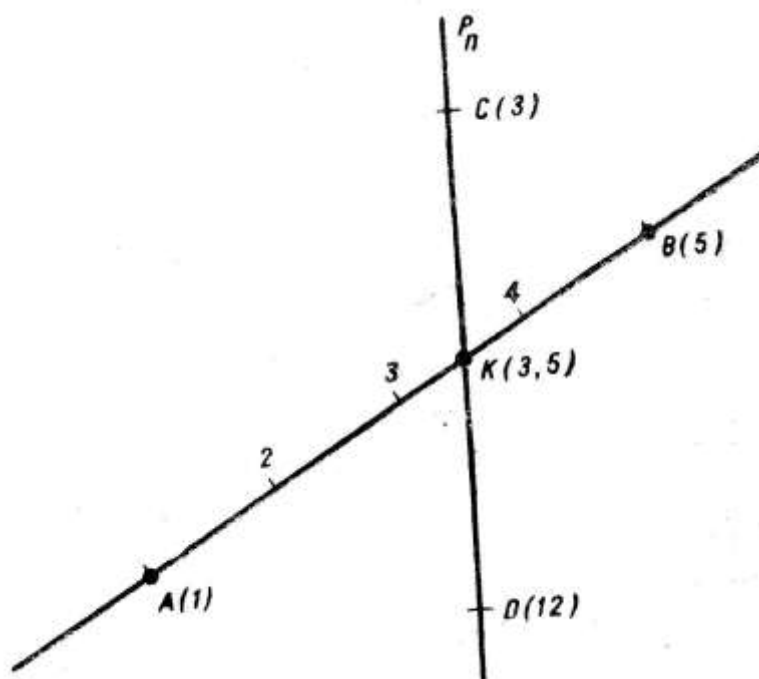
ნახ. 38.

ამ წერტილის განსაზღვრისათვის შევცვალოთ გეგმილთა სიბრტყე ისე, რომ ახალ სისტემაში Δ სიბრტყემ დონის სიბრტყის მდებარეობა მიიღოს. K წერტილის ნიშნულის განსაზღვრა პირველი შემთხვევის ანალოგიურია.

3) თუ მოცემული სიბრტყე მაგეგმილებელია (ნახ. 39), მაშინ სიბრტყის P_{Π} კეალის (რომელიც C და D წერტილებითაა განსაზღვრული) თანაკვეთა წრფის გეგმილთან საძიებელი K წერტილის გეგმილი იქნება, ე.ი.

$$K = P_{\Pi} \times AB$$

ასეთი წერტილის ნიშნულის განსაზღვრისათვის საჭიროა მოცემული წრფის გრაფირება.



ნახ. 39.

2. სიბრტყეების თანაკვეთა

ორი სიბრტყე სივრცეში შეიძლება იყოს პარალელური ან გადაკვეთილი. როგორც ვიცით, ორი სიბრტყე ერთმანეთს ერთ წრფეზე ჰკვეთს.

თუ ორი სიბრტყე სივრცეში ურთიერთპარალელურია, მაშინ გეგმაზე მათი პროექციონტალები ურთიერთპარალელურია, უდიდესი ვარდნილობის წრფეებს ტოლი ინტერვალები აქვთ და ვარდნილობათა მიმართულება თანხვედნილია. ამრიგად, სივრცეში ორი სიბრტყის პარალელობისათვის საჭიროა გეგმაზე მათი დახრის კუთხეები იყოს ერთნაირი, ხოლო განვრცობის წრფეები (პროექციონტალები) ურთიერთპარალელური.

როცა ორი სიბრტყის განმსაზღვრელი ვექტორები გვემაზე არ აკმაყოფილებენ პარალელობის პირობებს, ასეთი სიბრტყეები სივრცეში იკვეთებიან.

ორი სიბრტყის თანაკვეთის წრფის აგებისას ჯერ უნდა გამოირკვეს მათი ურთიერთანლაგება, ამისათვის ყურადღება უნდა მიექცეს შემდეგ პირობებს:

- 1) გადაკვეთილია თუ არა მათი ერთნაირნიშნულიანი ჰორიზონტალები;
- 2) ჰორიზონტალების პარალელობის შემთხვევაში, აქვთ თუ არა მათი ურთიერთსაწინააღმდეგო განვრცობები;
- 3) ჰორიზონტალების პარალელობის და მათ განვრცობათა თანმთხვევის დროს, აქვს თუ არა ადგილი მათი ინტერვალების უტოლობას.

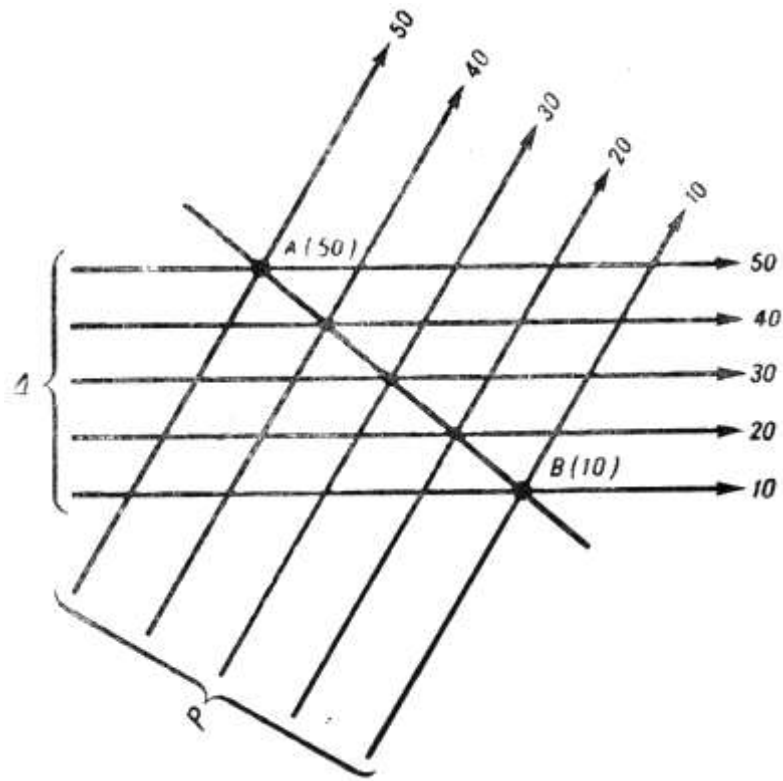
თუ ამ პირობებიდან ერთი მაინც შესრულებულია, მაშინ ასეთი ორი სიბრტყე სივრცეში გადაკვეთილ სიბრტყეებს წარმოადგენენ.

თანაკვეთის წრფის ასაგებად საკმარისია ვიცოდეთ ურთიერთმკვეთი სიბრტყეების ორი საერთო წერტილი ან ერთი საერთო წერტილი და საძიებელი წრფის მიმართულება.

არის შემთხვევები, როცა ორივე საერთო წერტილი ადვილად მოიძებნება და შესაბამისად თანაკვეთის წრფეც ნაპოვნი იქნება. ზოგჯერ გვემაზე იოლად იძებნება მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი. ამ შემთხვევაში საჭიროა თანაკვეთის წრფის მიმართულების განსაზღვრის შესაძლებლობის შემოწმება. არის შემთხვევები, როცა გვემაზე ვერც საერთო წერტილებს ვპოულობთ და არც თანაკვეთის წრფის მიმართულების დადგენაა შესაძლებელი.

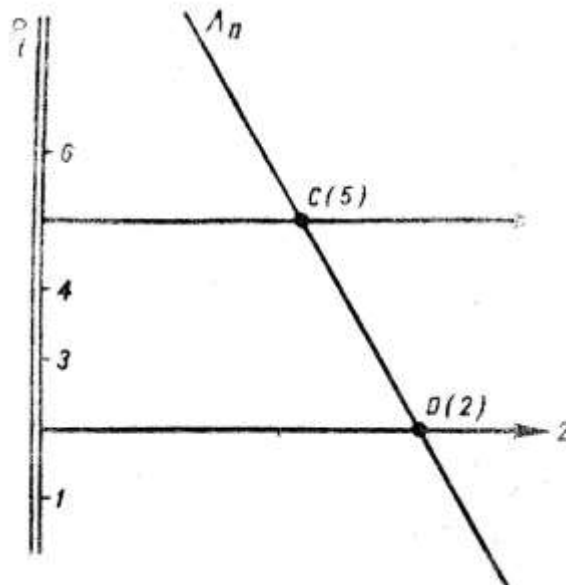
განვიხილოთ რამდენიმე გავრცელებული შემთხვევა.

- 1) სიბრტყეების თანაკვეთის წრფის აგება, როცა მათი ერთნაირნიშნულიანი ჰორიზონტალები იკვეთებიან ნახაზის ფარგლებში (ნახ. 40). დავნიშნოთ მოცემული P და Δ სიბრტყეების ერთნაირნიშნულიანი ჰორიზონტალების თანაკვეთის ორი წერტილი, მაგალითად $A(50)$ და $B(10)$. ამ წერტილების შემაერთებელი წრფე მოცემული სიბრტყეების თანაკვეთის წრფე იქნება.



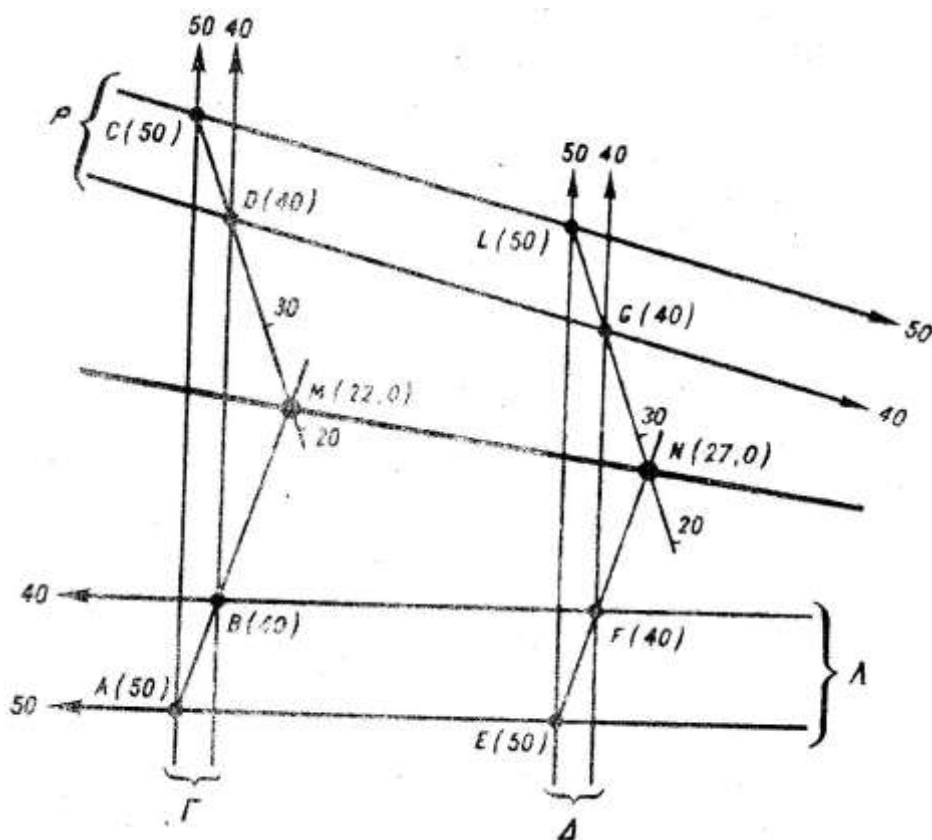
ნახ. 40.

2) სიბრტყეების თანაკვეთის წრფის აგება როცა ერთი მათგანი მაგეგმილებელია (ნახ. 41). ამ შემთხვევაში წინასწარ ცნობილია, რომ თანაკვეთის წრფის გეგმილი მაგეგმილებელი სიბრტყის კვალს დაემთხვევა. თანაკვეთის წრფის განსაზღვრისათვის საკმარისია გავავლოთ მოცემული ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის ორი პერიპონტალი და დავნიშნოთ მაგეგმილებელ სიბრტყესთან მათი თანაკვეთის ორი წერტილი. მიღებული $C(5)D(2)$ წრფე საძიებელი თანაკვეთის წრფე იქნება.



ნახ. 41.

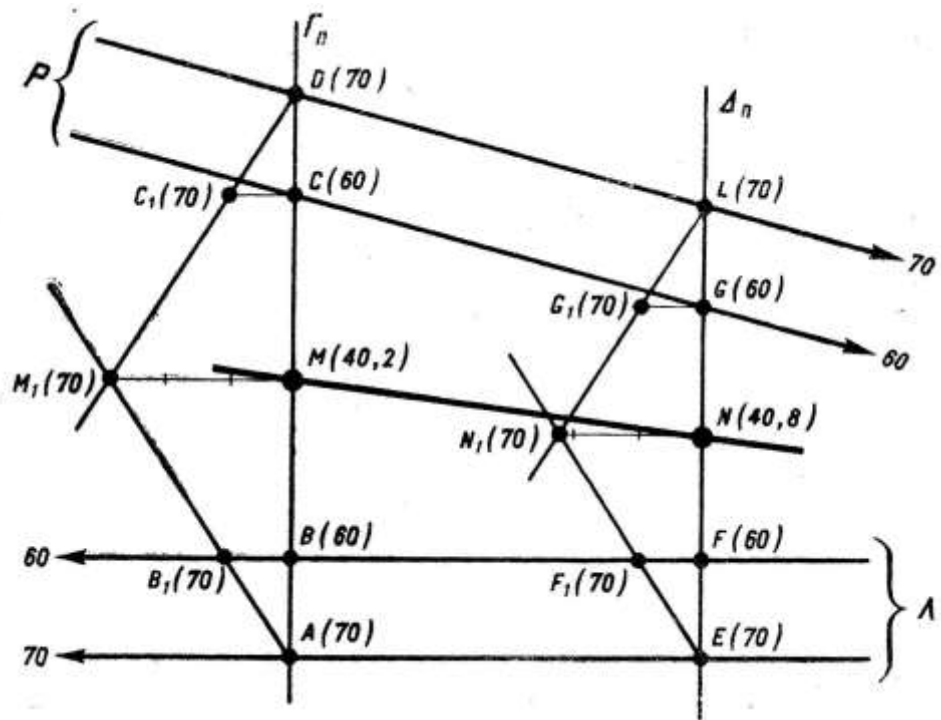
3) სიბრტყეების თანაკვეთის წრფის აგება, როცა მათი ერთნაირნიშნულიანი ჰორიზონტალები არ იკვეთებიან ნახაზის ფარგლებში (ნახ. 42-43). გამოვიყენოთ Γ და Δ დამხმარე სიბრტყეები (ნახ. 42). ამით ამოცანას დავიყვანთ იმ შემთხვევაზე, როცა ურთიერთმკვეთი სიბრტყეების ერთნაირნიშნულიანი ჰორიზონტალები ნახაზის ფარგლებში იკვეთებიან. სახელდობრ ჩვენთვის უკვე ცნობილი ხერხით ავაგებთ Γ და Δ სიბრტყეების თანაკვეთის $A(50)B(40)$ და Γ და P სიბრტყეების თანაკვეთის $C(50)D(40)$ წრფეებს. მიღებული წრფეების თანაკვეთის $M(22,0)$ წერტილი P და Δ სიბრტყეების საერთო წერტილი იქნება. ანალოგიურად, Δ სიბრტყის დახმარებით ავაგებთ მოცემული სიბრტყეებისათვის საერთო მეორე $N(27,0)$ წერტილს. მიღებული $M(22,0)N(27,0)$ წრფე მოცემული P და Δ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფე იქნება.



ნახ. 42.

43-ე ნახაზზე ნაჩვენებია შემთხვევა, როცა დამხმარე სიბრტყეებად გამოყენებულია მაგებმილებელი Γ და Δ სიბრტყეები. ეს მოქმედება სიმბოლურად ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$A \times \Gamma = A(70)B(60); P \times \Gamma = C(60)D(70); A(70)B(60) \times C(60)D(70) = M(40,2)$$



ნახ. 43.

$M(40,2)$ წერტილის ასაგებად დამხმარე Γ სიბრტყე შეთავსებულია ძირითად გეგმილთა სიბრტყესთან.

$$\Lambda \times \Delta = E(70)F(60);$$

$$P \times \Lambda = L(70)G(60);$$

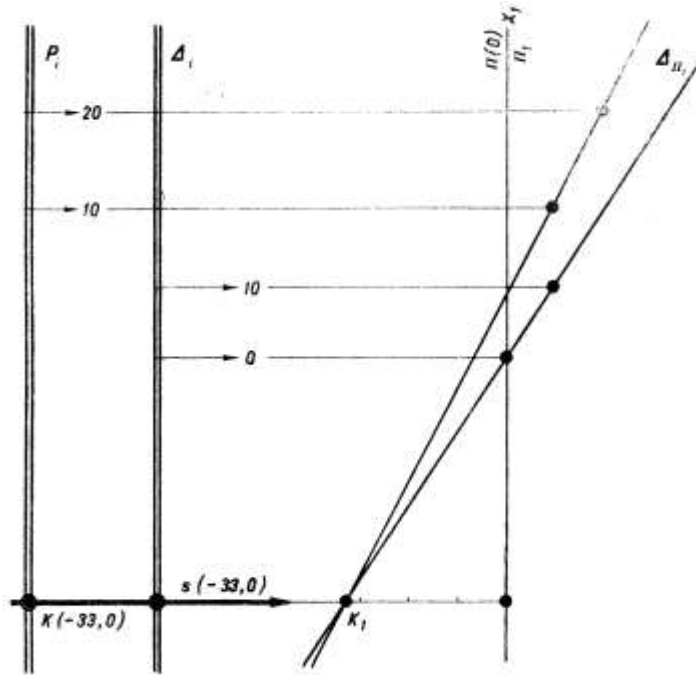
$$E(70)F(60) \times L(70)G(60) = N(40,8).$$

$N(40,8)$ წერტილის ასაგებად დამხმარე Λ სიბრტყე შეთავსებულია ძირითად გეგმილთა სიბრტყესთან.

მიღებული $M(40,2)N(40,8)$ წრფე მოცემული P და Λ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფე იქნება.

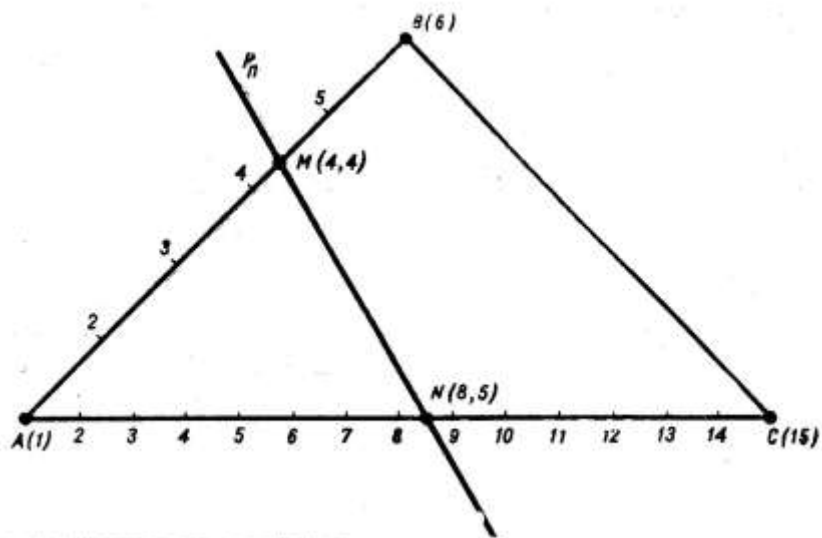
4) სიბრტყეების თანაკვეთის წრფის აგება, როცა მათი ქანობის მასშტაბები გეგმაზე ურთიერთპარალელურია (ნახ. 44). წინასწარ შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ ასეთ შემთხვევაში საძიებელი თანაკვეთის წრფე მკვეთი სიბრტყეების საერთო კორიზონტალი იქნება. ამის გამო საკმარისია ერთადერთი საერთო წერტილის აგება.

ვისარგებლოთ გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხით. ახალი გეგმილთა სიბრტყე Π_1 მოცემული სიბრტყეების ქანობის მასშტაბების (P_i და Δ_i) პარალელურად შემოვიტანოთ. ახალ x_1 სისტემაში P და Δ სიბრტყეების კვალების (P_{Π_1} და Δ_{Π_1}) გადაკვეთა ჩვენთვის საინტერესო წერტილს (K_1) მოგვცემს. უკანასკნელი დავაბრუნოთ ძველ სისტემაში.



. მიღებულ $K(33,0)$ წერტილზე გამავალი $s(33,0)$ პერიზონტალი საძიებელი თანაკვეთის წრფე იქნება.

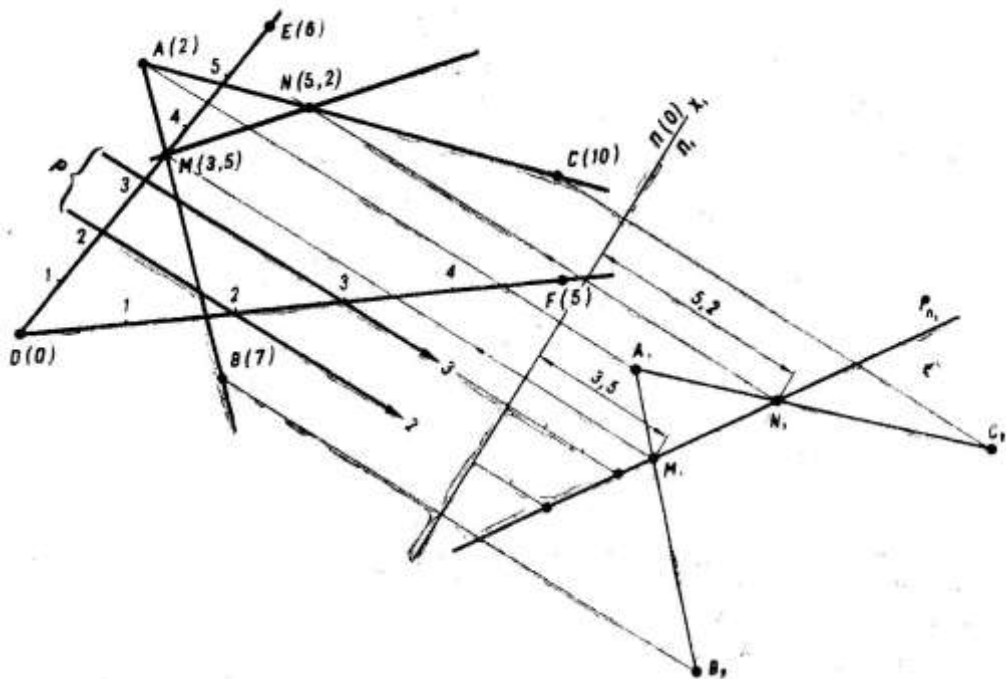
5) სიბრტყეების თანაკვეთის წრფის აგება, როცა ერთი მათგანი მაგეგმილებელია, ხოლო მეორე მოცემულია სამი წერტილით (ნახ. 45). თუ მოცემულ წერტილებს წრფეებით შევაერთებთ და ამ წრფეების გრადუირებით განვსაზღვრავთ სიბრტყის კვალის მათთან გადაკვეთის წერტილებს ნიშნულებს, მივიღებთ ABC სიბრტყის P სიბრტყესთან თანაკვეთის MN წრფეს. რასაკვირველია, ეს უკანასკნელი P_{Π} კვალზე იქნება მოთავსებული.



68b. 45.

6) სიბრტყეების თანაკვეთის წრფის აგება, როცა თითოეული მათგანი სამ-სამი წერტილითაა მოცემული (ნახ. 46).

ამ შემთხვევაში, საძიებელი თანაკვეთის წრფის აგებამდე, წინასწარ ავაგოთ მოცემული სიბრტყეების ჰორიზონტალები. ამით ამოცანას დავიყვანოთ ზემოთ განხილულ რომელიმე შემთხვევამდე.



ნახ. 46.

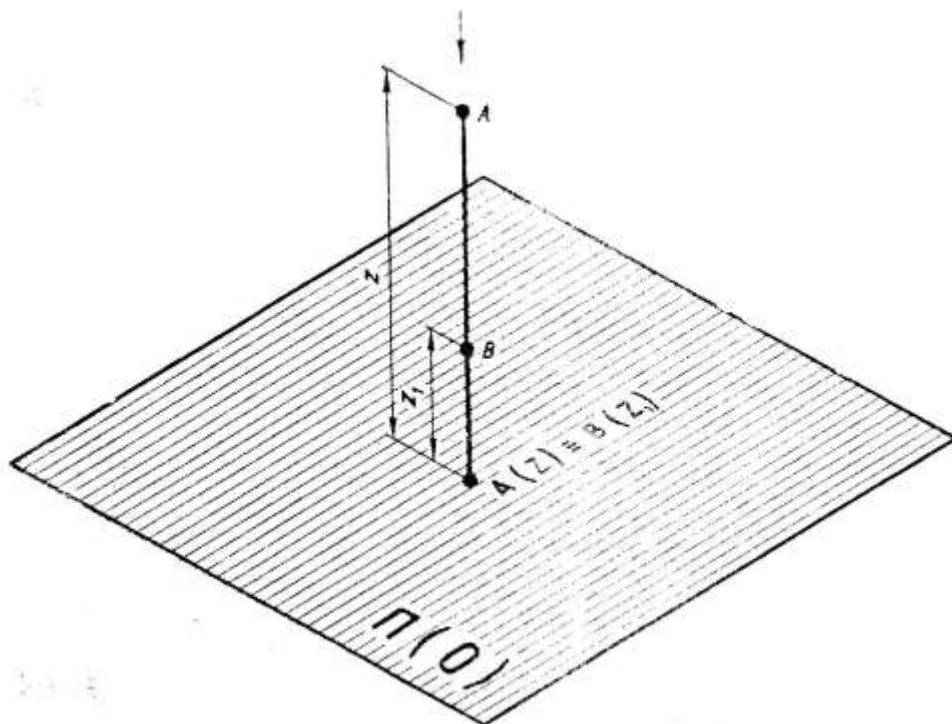
ამ შემთხვევაში, საძიებელი თანაკვეთის წრფის აგებამდე, წინასწარ ავაგოთ მოცემული სიბრტყეების ჰორიზონტალები. ამით ამოცანას დავიყვანოთ ზემოთ განხილულ რომელიმე შემთხვევამდე. ამისგან განსხვავებით, დასმული ამოცანა შეიძლება ამოვხსნათ გეგმილთა სიბრტყის შეცვლით (ნახ. 46). სახელდობრ, ისე, რომ ერთ-ერთ სიბრტყეს მივანიჭოთ მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა. ამით ახალ სისტემაში მივიღებთ 45-ე ნახაზზე განხილულ შემთხვევას. მიღებულ M_1 და N_1 წერტილების დაბრუნებით ძველ სისტემაში ავაგებთ საძიებელ $M(3,5)N(5,2)$ თანაკვეთის წრფეს.

3. ხილვადობის პირობითობა

ნახაზის თვალსაჩინოების გაზრდის მიზნით, მიმართავენ პირობით ხილვადობას. ჩვენი მხედველობის აპარატი ცენტრალური დაგეგმილების

პრინციპის ანალოგიურია, მაგრამ პარალელურ გეგმილებში შესრულებული ნახაზის დამზერის დროს ხედვის სხივები დაგეგმილების მიმართულების პარალელურად განიხილება.

ვთქვათ, A და B წერტილები განლაგებულია ხედვის სხივზე (ნახ. 47) (ნახაზზე დაგეგმილების, ანუ ნახაზის დამზერის მიმართულება ნაჩვენებია ისრით).



ნახ. 47.

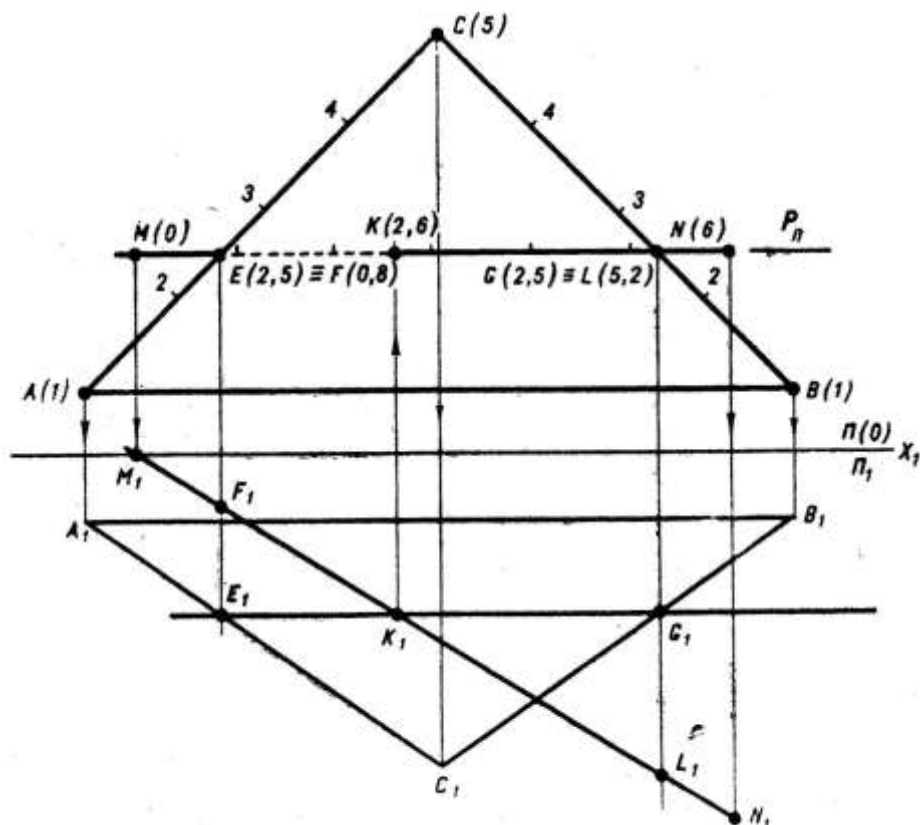
მოცემული წერტილების ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე ხილვადობის საკითხი შემდეგნაირად განიხილება: ხილვადია ის წერტილი, რომელიც უფრო დიდი მანძილითაა დაშორებული $\Pi(0)$ სიბრტყიდან. აღებულ შემთხვევაში A წერტილის დაშორება ძირითადი გეგმილთა სიბრტყიდან, ანუ ამ წერტილის ნიშნული (Z) მეტია B წერტილის ნიშნულზე (Z_1), რაც იმაზე მიუთითებს, რომ A წერტილი უფრო მაღლაა მოთავსებული, ვიდრე B . ამის გამო, B წერტილი ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე დაფარულია A წერტილით.

§6. ამოცანები ბრტყელ გეომეტრიულ ფიგურებზე

1. ბრტყელი ფიგურის თანაკვეთა წრფით

ეს ამოცანა წრფით სიბრტყის თანაკვეთის ამოცანის ანალოგიურია, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ აქ საქმე გვაქვს ჩაკეტილი ტეხილი (ან მრუდი) წირით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილთან.

განვიხილოთ ABC სამკუთხა ფირფიტის თანაკვეთა MN წრფით (ნახ. 48).



ნახ. 48.

თანაკვეთის წერტილის (K) ასაგებად MN წრფეზე გავატაროთ მაგეგმილებელი P სიბრტყე, რომელიც ABC სამკუთხედს EG წრფეზე გადაკვეთს. შევნიშნოთ, რომ $K = MN \times EG$

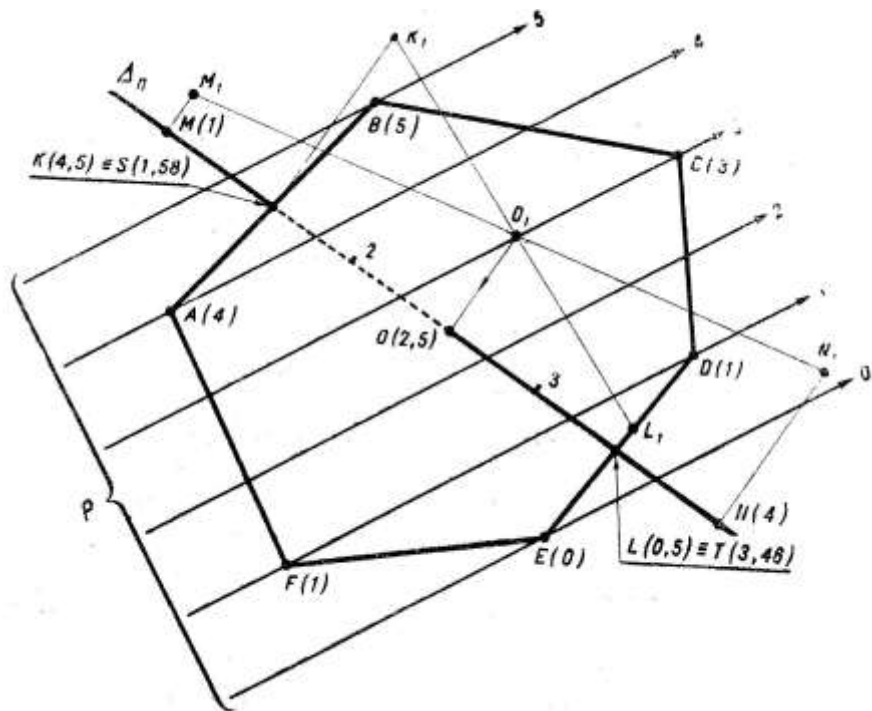
ვინაიდან MN და EG წრფეები ერთსა და იმავე P მაგეგმილებელ სიბრტყეში მდებარეობენ, ამიტომ ნახაზზე მათი თანაკვეთის წერტილი დამხმარე გრაფიკული აგებების გარეშე ვერ მოიძებნება. შევცვალოთ გეგმილთა სიბრტყე ისე, რომ ახალი Π_1 სიბრტყის მიმართ P სიბრტყე დონის სიბრტყედ გადავაქციოთ. x_1 სისტემაში კი იოლად განვსაზღვროთ K წერტილის მდებარეობას. მისი დაბრუნებით ძველ სისტემაში მივიღებთ ამოცანის პასუხს.

მივიღოთ, რომ ABC სამკუთხედი გაუმჭვირი მასალისაგანაა დამზადებული. ეს განაპირობებს MN წრფის ხილული და უხილავი ნაწილების არსებობას. ხილვადობის პირობებში გარკვევისათვის მიემართოთ შემდეგ მსჯელობას: AC და MN წრფეების გეგმილების თანაკვეთის წერტილში ფაქტიურად ორი წერტილია შეთავსებული. ერთი მათგანი (E) ეკუთვნის AC წრფეს, ხოლო მეორე (F) – MN-ს. მათი ნიშნულები კი გვიჩვენებენ, რომ ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის მიმართ E წერტილი ($E \subset AC$) უფრო მაღლა მდებარეობს, ვიდრე F ($F \subset MN$). აქედან გამომდინარე, MN წრფის FK მონაკვეთი უხილავი იქნება.

ანალოგიური მსჯელობის საფუძველზე MN წრფის KN მონაკვეთი მთლიანად ხილვადია.

49-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ABCDEF ბრტყელი ექსკვუთხედის თანაკვეთა MN წრფით. აქ თანაკვეთის წერტილის საპოვნელად MN წრფეზე გატარებულია მაგეგმილებელი Δ სიბრტყე, რომელიც თავისივე კვალის გარშემო შემობრუნებით შეთავსებულია ძირითად გეგმილთა სიბრტყესთან შეთავსების შემდეგ მივიღებთ:

$$O_1 = M_1N_1 \times K_1L_1$$



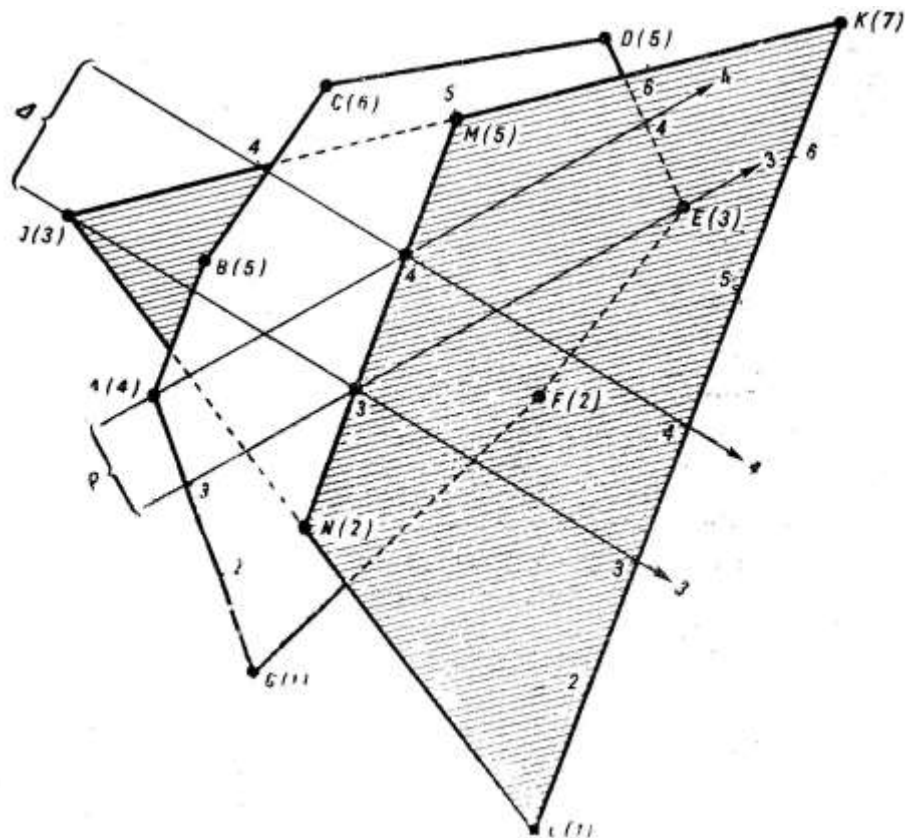
ნახ. 49

O_1 -ის დაბრუნებით MN წრფეზე მიღებულია საძიებელი $O(2,5)$ წერტილი. მკვეთი წრფის ხილული და უხილავი ნაწილები განსაზღვრულია ზემომოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე.

2. ბრტყელი ფიგურების თანაკვეთა

ეს ამოცანა ორი სიბრტყის თანაკვეთის წრფის აგების ანალოგიურია. იგი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც წრფით ბრტყელი ფიგურის ორჯერ გადაკვეთის შემთხვევა.

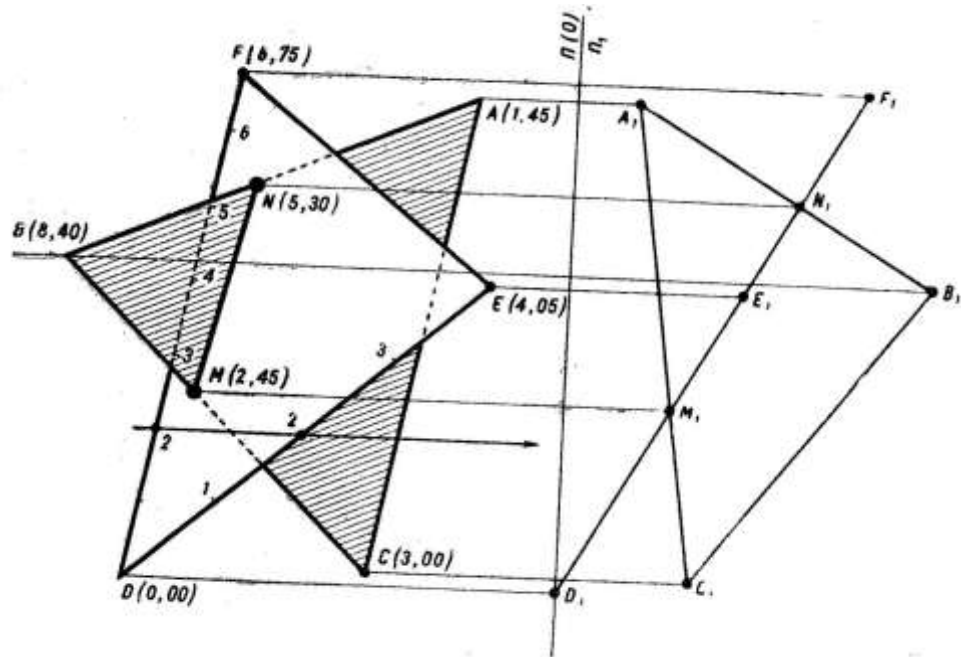
ვთქვათ, მოცემულია ABCDEFG და JKL ბრტყელი ფიგურები (ნახ. 50). ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს ორი სიბრტყის თანაკვეთის იმ სახესთან, როცა ერთნაირნიშნულიანი კორიზონტალები ნახაზის ფარგლებში იკვეთებიან. ამის საილუსტრაციოდ ავაგოთ როგორც ერთი, ისე მეორე ფიგურის ერთნაირნიშნულიანი კორიზონტალების ორი წყვილი. მათი თანაკვეთის წერტილების (3 და 4) შემაერთებელი წრფის ის მონაკვეთი, რომელიც საერთოა ორივე ფიგურისთვის, იქნება ამოცანის პასუხი. თუ წარმოვიდგენთ, რომ მოცემული ფიგურები გაუმჭირი მასალისგან დამზადებულ ფირფიტებს წარმოადგენს. რასაკვირველია, აქაც დაისმება ხილული და უხილავი ნაწილების გამორკვევის საკითხი.



ნახ. 50.

ანალოგიურ ამოცანებში ხშირად ხელსაყრელია გვემძილა სიბრტყეების შეცვლის ხერხის გამოყენებაც. ასეთი შემთხვევა ნაჩვენებია 51-ე ნახაზზე.

აქ ახალი სიბრტყე შემოტანილია ისე, რომ ერთ-ერთი ფიგურის სიბრტყეს (DEF) x_1 სისტემაში მინიჭებული აქვს მაგებმილებელი სიბრტყის მდებარეობა. ამავე სისტემაში უშუალოდაა განსაზღვრული ფიგურების თანაკვეთის M_1N_1 წრფე. ძველ სისტემაში დაბრუნებით ნაპოვნია ამოცანის პასუხი, ხილული და უხილავი ნაწილები განსაზღვრულია ჩვენთვის უკვე ცნობილი მსჯელობის საფუძველზე.



ნახ. 51.

მესამე თავი.

მეტრული ამოცანები

§7. ურთიერთმართობულობა

1. ზოგადი ცნობები

საინჟინრო პრაქტიკაში ხშირია შემთხვევა, როდესაც საჭიროა სხვადასხვა გეომეტრიული სიდიდეების, მაგალითად, მონაკვეთების სიგრძის, კუთხეების, ფართობებისა და სხვათა გაზომვა. ასეთ ამოცანებს, განსხვავებით პოზიციური ამოცანებისაგან, რომლებიც დაკავშირებული არიან დასაგეგმილებელი ფიგურების ურთიერთგანლაგებასთან სივრცეში, მეტრული ამოცანები ეწოდება.

მეტრული ამოცანების ამოხსნის დროს ზოგჯერ მიზანშეწონილია ეპიურის გარდაქმნის რომელიმე ხერხით სარგებლობა.

ხშირად მეტრული ამოცანა ითხოვს ურთიერთმართობული წრფეებისა და სიბრტყეების გამოყენებას. ამის გამო, აუცილებელია წინასწარ ჩამოყალიბდეს ის პირობები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ ნახაზზე ავაგოთ სივრცეში ურთიერთმართობული წრფეები და სიბრტყეები.

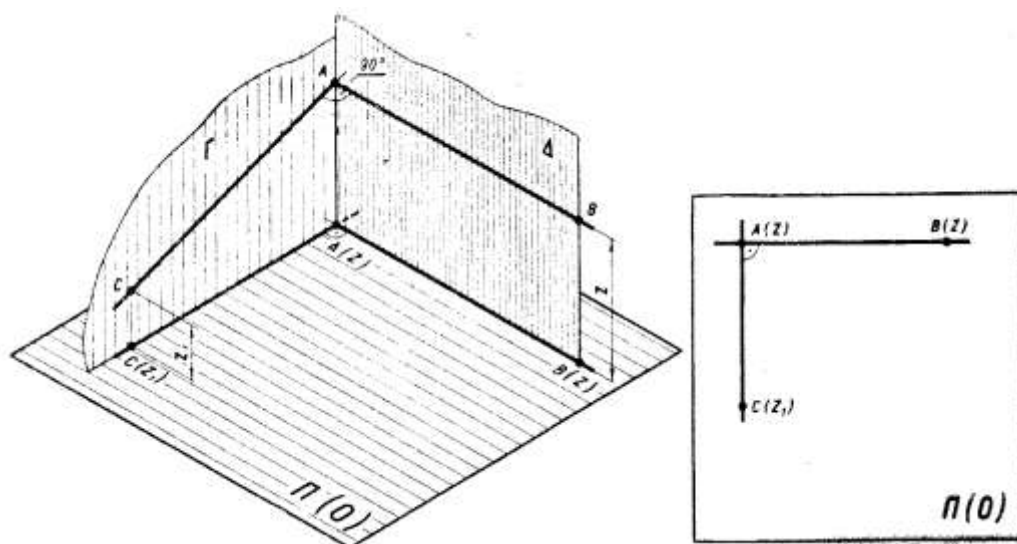
2. ურთიერთმართობული წრფეები

განვიხილოთ თეორემა, რომლის მეშვეობითაც შეგვეძლება ავაგოთ სივრცეში ურთიერთმართობული წრფეების ნიშნულებიანი გეგმილები, აგრეთვე ვიმსჯელოთ ნიშნულებიან გეგმილებში გამოხატული ორი წრფის სივრცეში ურთიერთმართობულობის საკითხებზე.

თეორემა: იმისათვის, რომ მართი კუთხე ორთოგონალურად ისევ მართ კუთხედ დაგეგმილდეს, აუცილებელი და საკმარისია კუთხის შემადგენელი გვერდებიდან ერთი მაინც იყოს ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის პარალელური, ხოლო მეორე არ იყოს უკანასკნელის მართობული.

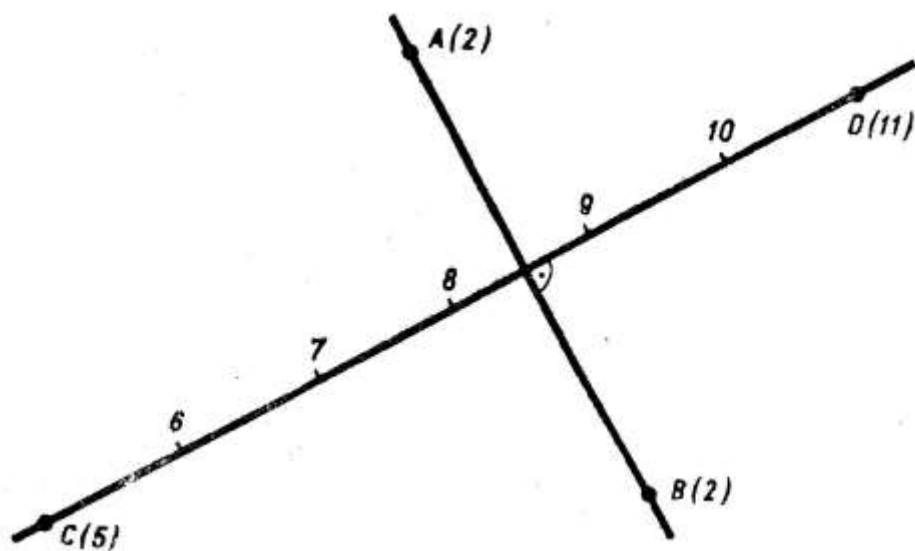
დამტკიცება: ვთქვათ CAB მართი კუთხის AB გვერდი წარმოადგენს პორიზონტალს (ნახ. 52). ავაგოთ მოცემული კუთხის ნიშნულებიანი გეგმილი $C(Z_1)A(Z)B(Z)$. დავამტკიცოთ, რომ $\angle C(Z_1)A(Z)B(Z)$ მართი კუთხეა. თეორემის პირობით $AB \parallel \Pi(O)$; აქედან გამომდინარე $AB \parallel A(Z)B(Z)$, $AA(Z) \perp \Pi(O)$, აქედან $AA(Z) \perp A(Z)B(Z)$. გამოდის, რომ AB გვერდი Γ სიბრტყეში მდებარე ორი ($AA(Z)$ და AC) წრფის მართობულია; მაშასადამე, $AB \perp \Gamma$. რადგან $AB \parallel A(Z)B(Z)$, ამიტომ $A(Z)B(Z) \perp \Gamma$ და შესაბამისად Γ სიბრტყეში მდებარე $A(Z)C(Z_1)$ წრფისა, ე.ი.

$A(Z)B(Z) \perp A(Z)C(Z_1)$ რის დამტკიცებაც გვინდოდა.



ნახ. 52.

ეს თეორემა ეხება მართი კუთხის, ანუ ურთიერთმართობული გადაკვეთილი წრფეების დაგეგმილებას. იგი ვრცელდება ურთიერთმართობული, აცდენილი წრფეების დაგეგმილებაზეც (ნახ. 53).



ნახ. 53.

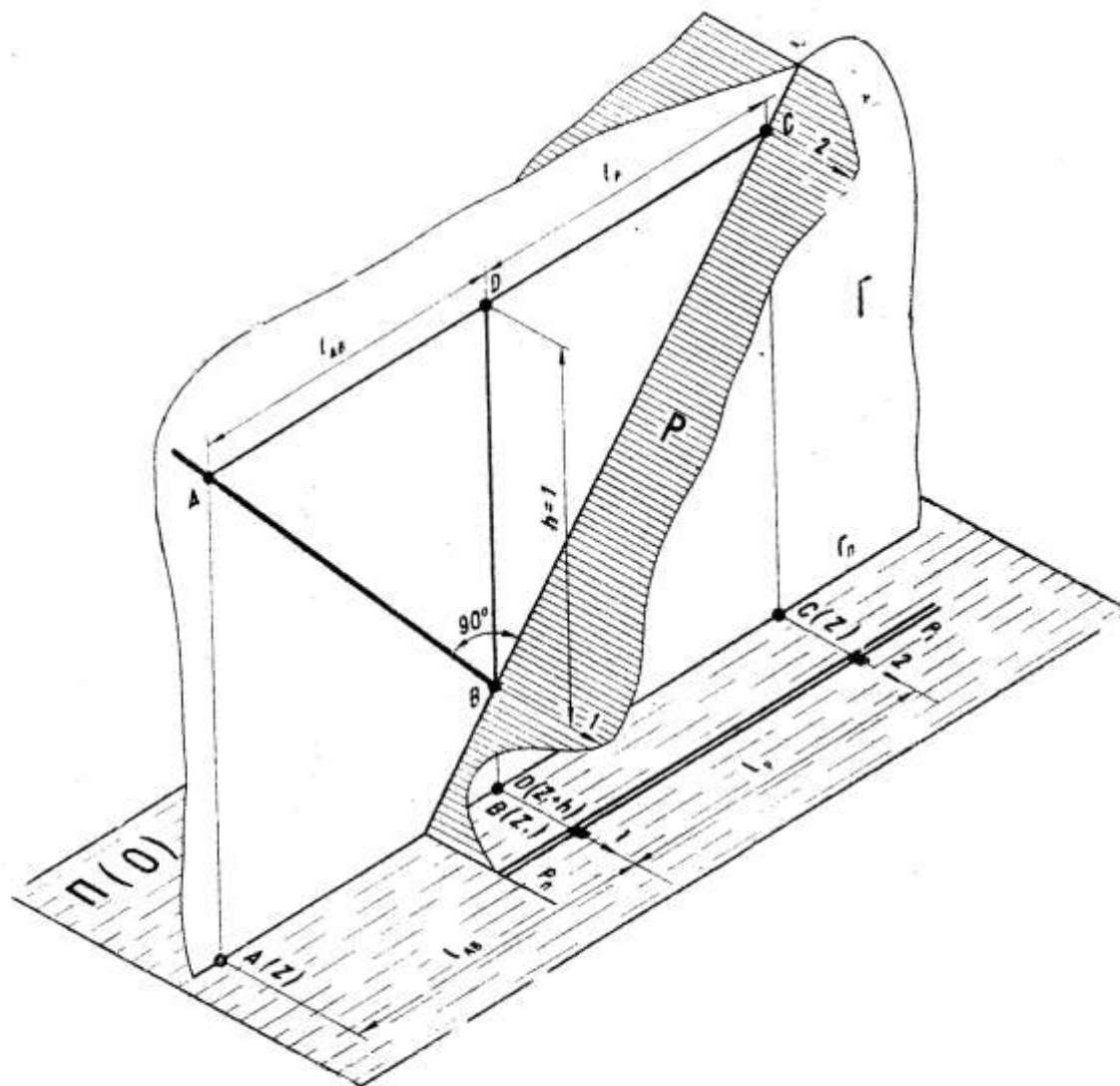
3. წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმართობულობა

განვიხილოთ თეორემა, რომლის მეშვეობითაც შეგვეძლება ავაგოთ სივრცეში ურთიერთმართობული წრფისა და სიბრტყის ნიშნულებიანი გეგმილი; აგრეთვე ვიმსჯელოთ ნიშნულებიანი გეგმილებში გამოხატული წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმართობულობის საკითხზე.

თეორემა: თუ სივრცეში წრფე სიბრტყის მართობულია, მაშინ გეგმაზე ამ წრფის გეგმილი ქანობის მასშტაბის პარალელურია (ანუ პერიპროექტალუბის

მართობი), ხოლო მისი ინტერვალის სიდიდე სიბრტყის ინტერვალის სიდიდის შებრუნებული.

დამტკიცება: განვიხილოთ 54-ე ნახაზი. აქ ნაჩვენებია ზოგადი მდებარეობის P სიბრტყისა და მისი მართობი AB წრფის თვალსაჩინო სურათი. ორი წრფის ურთიერთმართობულობის თეორემის ძალით AB წრფის გეგმილი P სიბრტყის გამომსახველი პორიზონტალების მართობულია, ე.ი. ამავე სიბრტყის ქანობის მასშტაბის პარალელური $A(Z)B(Z_1) \parallel P_1$



ნახ. 54.

ამით მტკიცდება თეორემის პირველი ნაწილი. მეორე ნაწილის, ე.ი. წრფისა და სიბრტყის ინტერვალების ურთიერთშებრუნებულობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ABC მართკუთხა სამკუთხედი. მართი კუთხის B წვეროდან AC ჰიპოტენუზაზე დაშვებული BD სიმაღლე, ჩვენივე შერჩევით, კვეთის სიმაღლის ტოლია ($h = 1$). ამავე სამკუთხედიდან შეგვიძლია დავწეროთ ცნობილი ფარდობა:

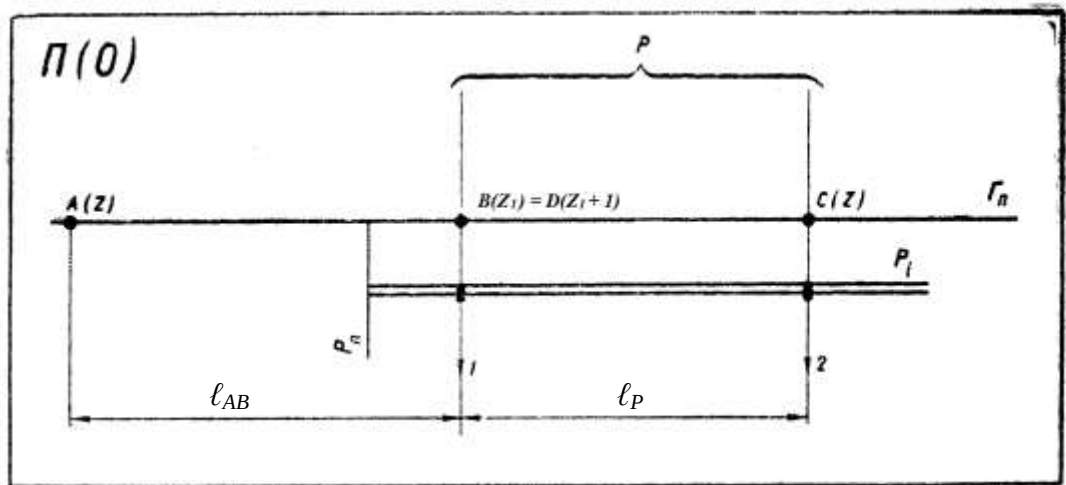
$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC} \dots\dots (1)$$

სადაც $AD = l_{AB}$ (AB წრფის ინტერვალი), $DC = l_P$ (P სიბრტყის ინტერვალი), ხოლო $BD = h$ (კვეთის სიმაღლე). ამ მნიშვნელობების ჩასმით (1) ფარდობაში მივიღებთ:

$$\frac{l_{AB}}{h} = \frac{h}{l_P}, \quad \text{როცა } h = 1\text{მ, მაშინ}$$

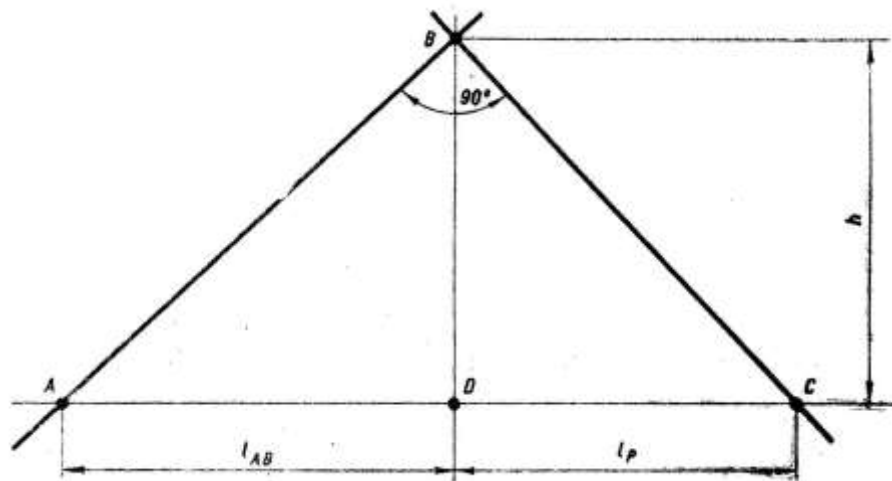
$$l_{AB} = \frac{1}{l_P}, \quad \text{რის დამტკიცებაც გვინდოდა.}$$

55-ე ნახაზზე ნახვენებია ურთიერთმართობული წრფისა და სიბრტყის გრაფიკული გამოსახულება გეგმაზე.



ნახ. 55.

54-ე ნახაზიდან შეგვიძლია, აგრეთვე დავადგინოთ სიბრტყის მართობული წრფის ინტერვალის გამოთვლის გრაფიკული ხერხი, როდესაც ცნობილია სიბრტყის ინტერვალი ან პირიქით.



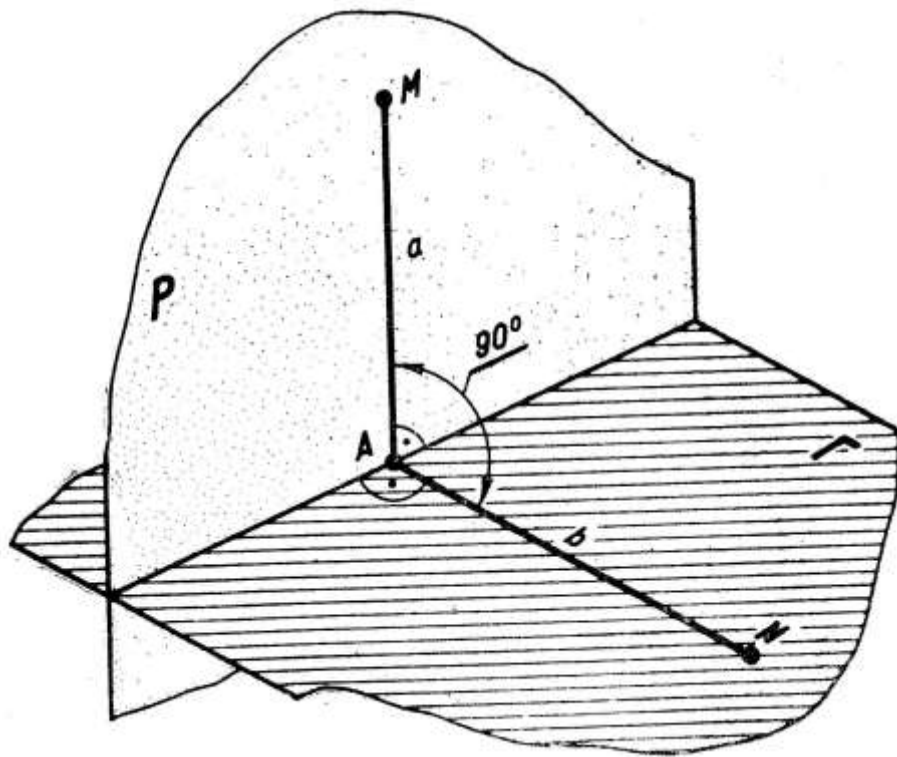
ნახ. 56.

ცალკე განვიხილოთ ABC სამკუთხედი. 56-ე ნახაზზე იგი პირობით გადმობრუნებულია ისე, რომ მართი კუთხის B წვერო ზევითაა მოქცეული (ეს არის სამკუთხედის სწორედ ის მდებარეობა, რომელიც რეკომენდებულია აღნიშნული ხერხის გამოყენების დროს).

56-ე ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ თუ წინასწარ მოცემული გვექნება სიბრტყის ინტერვალი და კვეთის სიმაღლე, შევძლებთ ამ სიბრტყის მართობული წრფის ინტერვალის განსაზღვრას, და პირიქით.

4. ურთიერთმართობული სიბრტყეები

სტერეომეტრიიდან ცნობილია, რომ თუ ორი სიბრტყე (P და Γ) ურთიერთმართობულია, მაშინ თითოეული მათგანი გადის მეორე სიბრტყეს მართობულ წრფეზე (ნახ. 57). მაგალითად, P სიბრტყე გადის Γ სიბრტყეზე მართობულ წრფეზე (a), ხოლო Γ სიბრტყე – P სიბრტყის მართობულ წრფეზე (b).

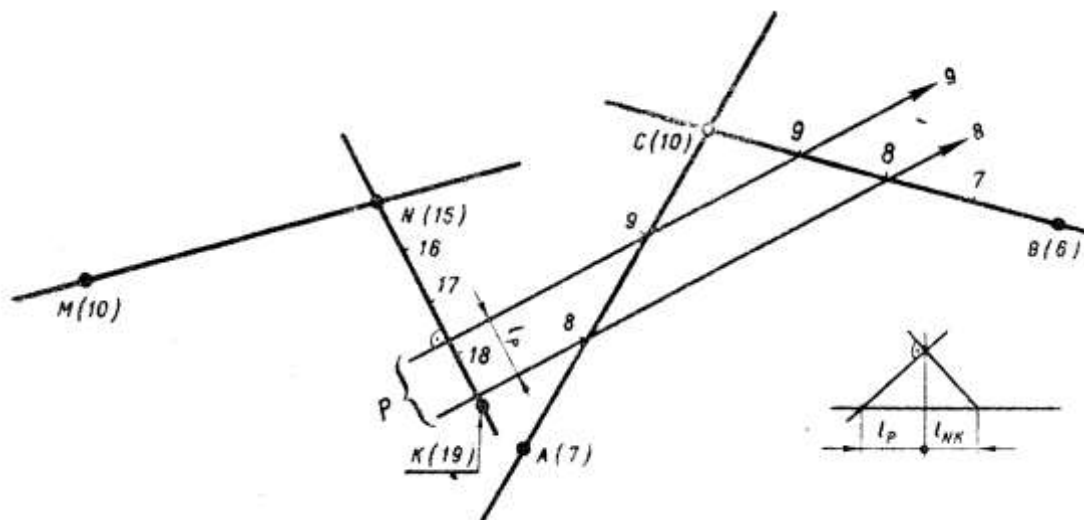


ნახ. 57.

სივრცის M წერტილზე (ნახ. 57) შეიძლება გატარდეს Γ სიბრტყის მართობული სიბრტყეების უსასრულო სიმრავლე, რომელიც გაივლის M წერტილიდან Γ სიბრტყეზე დაშვებულ a მართობზე.

მივიღოთ ეს განმარტებები მხედველობაში და განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, მოცემულია ზოგადი მდებარეობის MN წრფე და ABC სიბრტყე. საჭიროა მოცემულ წრფეზე გავატაროთ მოცემული სიბრტყის მართობული სიბრტყე (ნახ. 58).



ნახ. 58.

მოცემული წრფის ნებისმიერი წერტილიდან (მაგალითად, N) დავუშვათ მართობი ABC სიბრტყეზე. ამისათვის დაგვჭირდება ABC სიბრტყის ორი პორიზონტალის აგება და დაშვებული მართობისათვის ინტერვალის გამოთვლა.

მიღებული სიბრტყე, რომელიც MN და NK ურთიერთმკვეთი წრფეებით იქნება განსაზღვრული – მოცემული სიბრტყის მართობი იქნება.

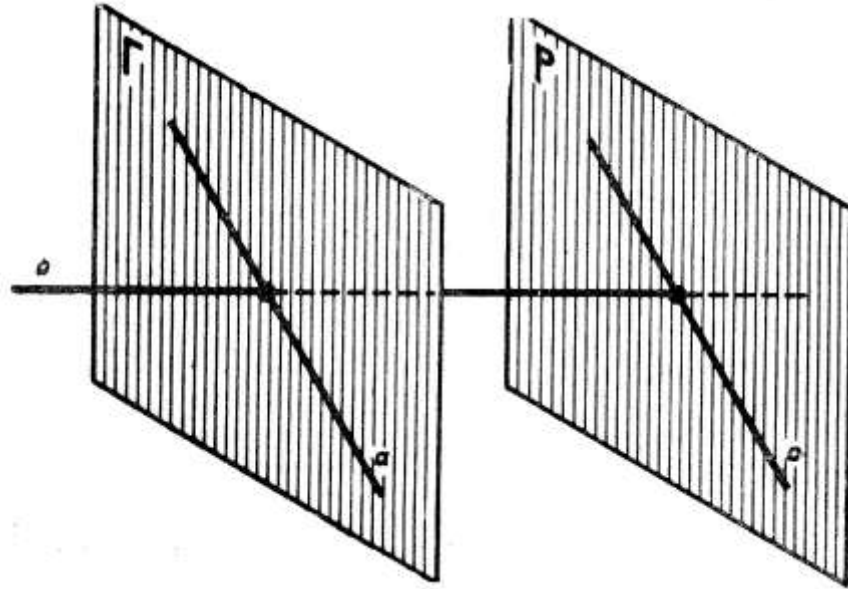
ამ მაალითის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დებულება: თუ გვემაზე მოცემული ორი სიბრტყიდან ერთზე შესაძლებელია გავატაროთ მეორის მართობული წრფე, ასეთი სიბრტყეები სივრცეში ურთიერთმართობულნი არიან.

5. ზოგადი მდებარეობის წრფეების ურთიერთმართობულობა

ზოგადი მდებარეობის წრფეებს შორის მოთავსებული მართი კუთხე ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე, როგორც წესი, დამახინჯებულად გეგმილდება. იმისათვის, რომ გვემაზე გამოვარკვიოთ ორი ზოგადი მდებარეობის წრფის მართობულობა, ვიხელმძღვანელოთ შემდეგი პირობით:

გვემაზე მოცემული ორი წრფე სივრცეში მხოლოდ იმ შემთხვევაშია ურთიერთმართობული, თუ შეიძლება თითოეულ მათგანზე მეორის მიმართ მართობული სიბრტყის გატარება.

ეს პირობა შეგვიძლია გავიგოთ ასე (ნახ. 59): თუ რაიმე a და b წრფეები ურთიერთმართობულია, მაშინ a -ზე შესაძლებელია გატარდეს Γ სიბრტყე b -ს მართობულად, ეს სიბრტყე კი, თავის მხრივ, პარალელური იქნება b -ს მართობული რაიმე P სიბრტყის. გამოდის, რომ a წრფე პარალელური უნდა იყოს P სიბრტყის და ამიტომ ამ სიბრტყეში მდებარე ერთი რაიმე c წრფისა.



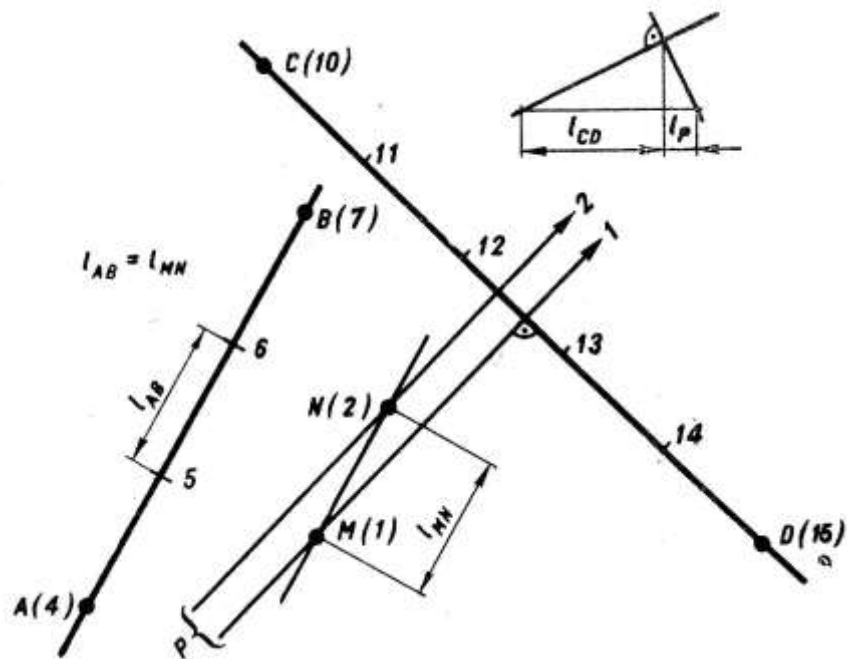
ნახ. 59.

ამრიგად, იმისათვის, რომ ზოგადი მდებარეობის a და b წრფეები ურთიერთმართობულნი იყვნენ სივრცეში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ გეგმაზე ერთ-ერთი წრფე (მაგალითად, a) იყოს მეორე წრფის (მაგალითად, b) მართობულ P სიბრტყეში მდებარე წრფის (c) პარალელური. ეს დამოკიდებულია სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$a \parallel c; c \subset P; P \perp b$$

ვთქვათ, გეგმაზე მოცემულია ორი ზოგადი მდებარეობის AB და CD წრფეები (ნახ. 60). მათი ურთიერთმართობულობის გამოსარკვევად საჭიროა გავატაროთ ერთ-ერთი წრფის (მაგალითად, CD) მართობი P სიბრტყე. თუ ამ სიბრტყეში შესაძლებელი იქნება მეორე წრფის (ანუ AB) პარალელური რაიმე MN წრფის გავლენა, ე.ი. თუ დაცული იქნება პარალელურობის, კუთვნილებისა და მართობულობის შემდეგი პირობა:

$$AB \parallel MN; M \subset NP; P \perp CD,$$



ნახ. 60.

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოცემული AB და CD წრფეები სივრცეში ურთიერთმართობულნი არიან.

ჩამოთვლილი პირობებისა და განხილული მაგალითის საფუძველზე შესაძლებლობა გვქმნება დავადგინოთ გვემაზე მოცემული ზოგადი მდებარეობის ორი წრფის ურთიერთმართობულობა სივრცეში; გარდა ამისა, საჭიროების შემთხვევაში ავაგოთ მოცემული ზოგადი მდებარეობის ერთი წრფის მართობული წრფე.

§8. მონაკვეთების, კუთხეებისა და ფართობების გაზომვა

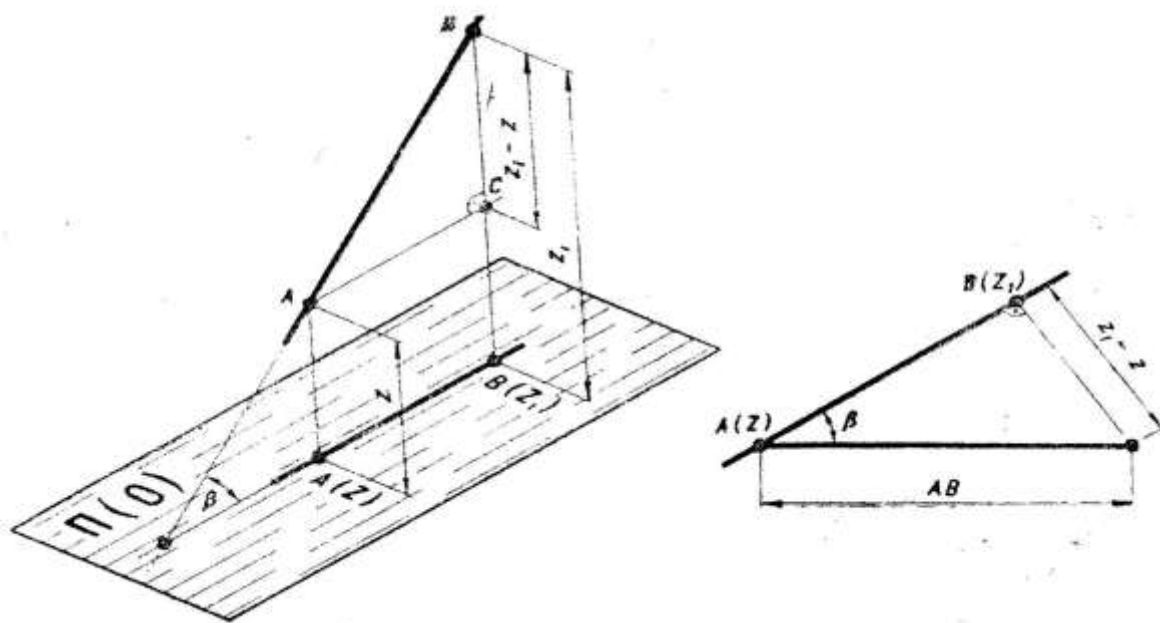
1. წრფის მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდისა და ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან დახრის კუთხის გაზომვა

როგორც ცნობილია, წრფის მონაკვეთი თავისი ნამდვილი სიდიდით მხოლოდ ერთადერთ შემთხვევაში გეგმილდება, როცა იგი ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის პარალელურია. ყველა სხვა შემთხვევაში მონაკვეთის გეგმილი, ანუ ქვედებული ნაკლებია მის ნატურალურ ზომაზე. ამასთან დაკავშირებით, ხშირია შემთხვევა, როდესაც დასმული ამოცანა მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდის გაზომვას ითვალისწინებს. განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

სამკუთხედის ხერხი. A წერტილზე (ნახ. 61) გავატაროთ $A(Z)B(Z)$ გეგმილის პარალელური წრფე. $\triangle ABC$ მართკუთხა სამკუთხედია, რომელშიც ჰიპოტენუზა

დასაგეგმილებელი მონაკვეთის (AB) ნატურალური სიდიდეა, AC კათეტი – მისი გეგმილი, ხოლო მეორე BC კათეტი – A და B წერტილების სიმაღლეთა სხვაობა. აქედან გამომდინარე, მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდე უდრის ისეთ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზას, რომლის ერთი კათეტიც ამ მონაკვეთის ნიშნულებიანი გეგმილი, ხოლო მეორე – მონაკვეთის ბოლო წერტილების სიმაღლეთა სხვაობა.

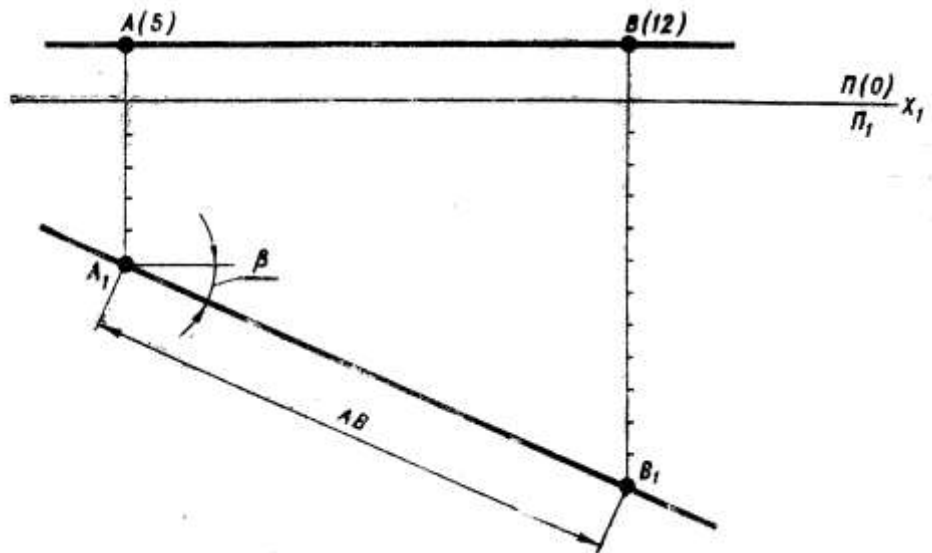
შევნიშნოთ, რომ მონაკვეთის ნამდვილ სიდიდესთან ერთად აქვე იზომება მისი ძირითად გეგმილთა სიბრტყისადმი დახრის β კუთხე (ნახ. 61).



ნახ. 61.

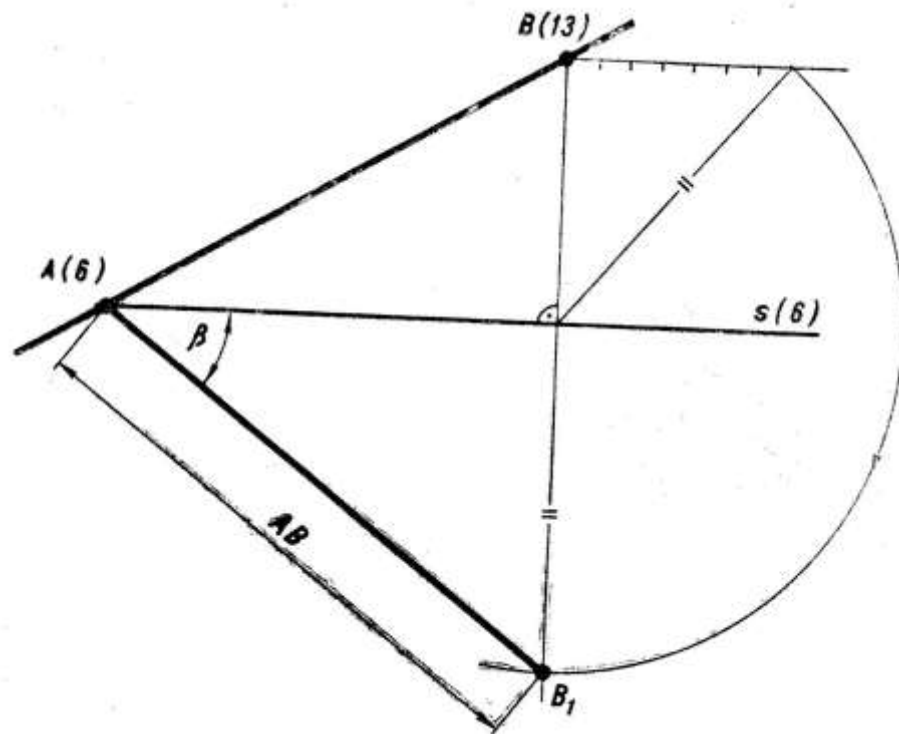
გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხი. ვთქვათ, გეგმაზე მოცემულია ზოგადი მდებარეობის მონაკვეთის A(5)B(12) გეგმილი (ნახ. 62).

შევცვალოთ ძირითადი გეგმილთა სიბრტყე ისე, რომ მოცემულ წრფეს დონის წრფის მდებარეობს მივანიჭოთ. AB მონაკვეთი x_1 სისტემაში თავისი ნამდვილი სიდიდით გამოისახება. A_1 წერტილში შექმნილი უმცირესი კუთხე AB წრფის ძირითად გეგმილთა სიბრტყისადმი დახრის კუთხე (β) იქნება.



ნახ. 62.

ბრუნვის ხერხი. ვთქვათ, გეგმაზე მოცემულია ზოგადი მდებარეობის მონაკვეთის (A(6)B(13)) გეგმილი (ნახ. 63). A(6) გეგმილზე გავატაროთ $s(6)$



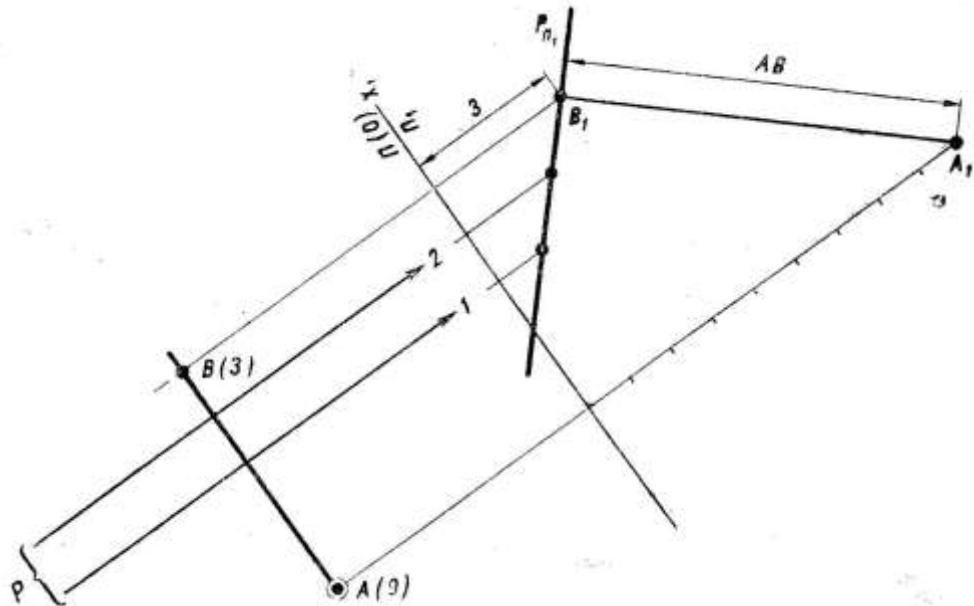
ნახ. 63.

ჰორიზონტალი და მის გარშემო AB მონაკვეთის შემობრუნებით უკანასკნელი $s(6)$ ჰორიზონტალის დონის სიბრტყესთან შევათავსოთ. მიღებული ახალი გეგმილი მოცემული მონაკვეთის ნატურალური სიდიდე იქნება, ხოლო A(6)B₁ წრფის მიერ $s(6)$ ჰორიზონტალთან შექმნილი კუთხე – AB წრფის დახრის კუთხე (β).

2. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილის გაზომვა

დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა მოცემული წერტილიდან დაუშვათ მართობი მოცემულ სიბრტყეზე და განესაზღვროთ ამ მართობის ფუძე. მიღებული მონაკვეთი ამოცანის პასუხი იქნება.

ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე და $A(9)$ წერტილი (ნახ. 64). მათ შორის უმოკლესი მანძილის გასაზომად A წერტილზე გავატაროთ P სიბრტყის პერიპონტალების მართობი წრფე, ანუ მოცემული წერტილიდან დაუშვათ მართობი მოცემულ სიბრტყეზე. ამ მართობის P სიბრტყესთან შეხვედრის წერტილის მოსაძებნად შევცვალოთ გვეგმილთა სიბრტყე ისე, რომ ახალ სისტემაში P სიბრტყეს მაგვეგმილებელი სიბრტყის მდგომარეობა მიეცეს.



ნახ. 64.

A წერტილის ახალი A_1 გვეგმილიდან x_1 სისტემაში P სიბრტყის P_{Π_1} კვალზე უშუალოდ მართობის დაშვებით მივიღებთ გადაკვეთის წერტილის B_1 გვეგმილს. მისი დაბრუნებით ძველ სისტემაში განესაზღვრაოთ მართობის ფუძეს.

B წერტილის ნიშნული შეიძლება განისაზღვროს ორი გზით: 1) B_1 -დან x_1 ღერძამდე მანძილის უშუალო გაზომვით და 2) AB წრფის გრადუირებით. ამისათვის საჭირო ინტერვალი გამოითვლება სიბრტყის ინტერვალის მიხედვით (იხ. წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმართობულობა).

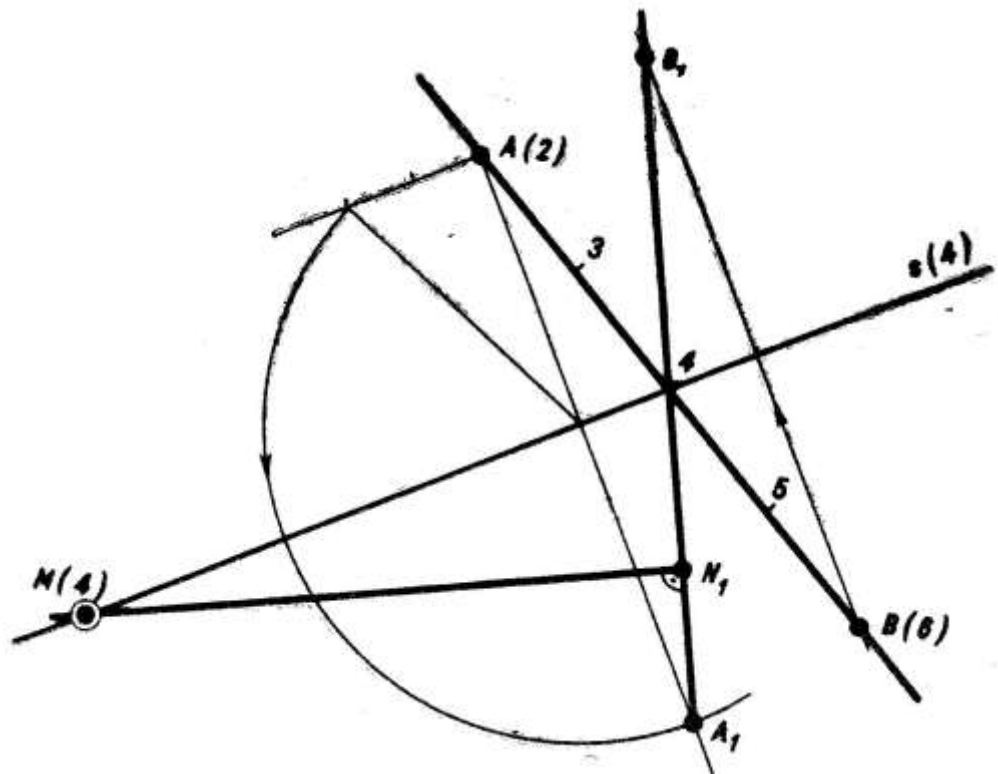
შევნიშნოთ, რომ მიღებული AB მონაკვეთი, ანუ საძიებელი მანძილი, თავისი ნამდვილი სიდიდით x_1 სისტემაში დაგვეგმილდება.

3. წერტილიდან წრფემდე მანძილის გაზომვა.

ეს ამოცანა მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფემდე მართობის დაშვებას ითვალისწინებს.

ამოცანის პასუხი იოლად მოიძებნება, როცა მოცემული წერტილითა და წრფით განსაზღვრული სიბრტყე ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის პარალელურია.

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა (ნახ. 65). ბრუნვის ხერხის გამოყენებით შევცვალოთ მოცემული ფიგურებისა და გეგმილთა სიბრტყის ურთიერთდამოკიდებულება. ამისათვის, M წერტილზე გავატაროთ MAB სიბრტყის $s(4)$ პორიზონტალი, უკანასკნელი მივიღოთ ბრუნვის ღერძად და AB წრფე მისი დონის სიბრტყესთან შევათავსოთ. ამის შემდეგ, $M(4)$ წერტილიდან A_1B_1 წრფეზე დაშვებული მართობი საძიებელ მანძილს გამოსახავს.

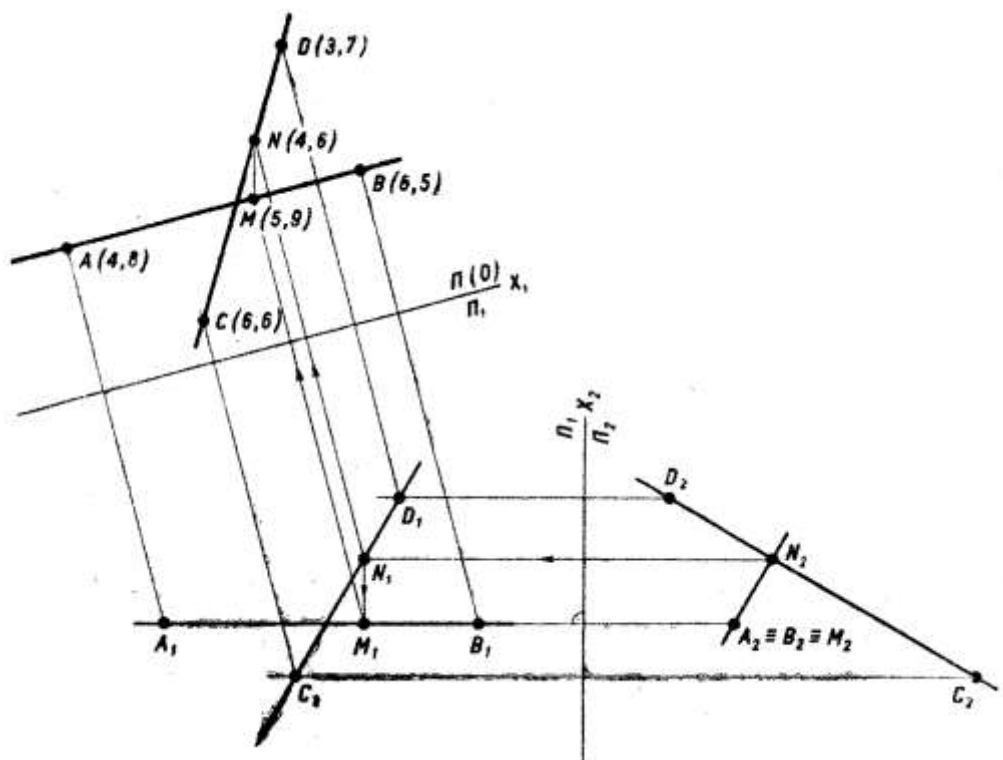


ნახ. 65.

4. ორ აცდენილ წრფეს შორის მანძილის გაზომვა

ამოცანის ამოხსნის სიმარტივე დიდად არის დამოკიდებული მოცემული აცდენილი წრფეების განლაგებაზე გეგმილთა სიბრტყეების მიმართ. ყველაზე ხელსაყრელ შემთხვევად შეიძლება ჩაითვალოს ის, როცა ერთ-ერთი წრფე მაგეგმილებელია. ასეთ შემთხვევაში მაგეგმილებელი წრფის გეგმილიდან მეორე წრფის გეგმილზე დაშვებული მართობი საძიებელი მანძილი იქნება.

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა (ნახ. 66). მოცემულია $A(4,8)B(6,5)$ და $C(6,6)D(3,7)$ ზოგადი მდებარეობის აცდენილი წრფეები, მათ შორის მანძილის გასაზომად ვისარგებლოთ გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხით. ერთ-ერთი წრფე (მაგ., AB) გარდავქმნათ მაგეგმილებელ წრფედ. x_2 სისტემაში მივიღებთ ამოცანის ამოხსნისათვის ხელსაყრელ პირობებს. A_2B_2 გეგმილიდან C_2D_2 გეგმილზე დაშებული მართობი საძიებელი M_2N_2 მანძილი იქნება. M და N წერტილების ძველ სისტემაში (ნახაზზე ნაჩვენებია ისრებით) დაბრუნებით მივიღებთ მოცემული აცდენილი წრფეების ორი უახლოესი წერტილების გეგმილებს. M და N წერტილების ნიშნულების ორი გზით გამოთვლა შესრულებული გრაფიკული სამუშაოს კონტროლის საშუალებაა.



ნახ. 66.

5. ორ პარალელურ წრფეს შორის მანძილის გაზომვა.

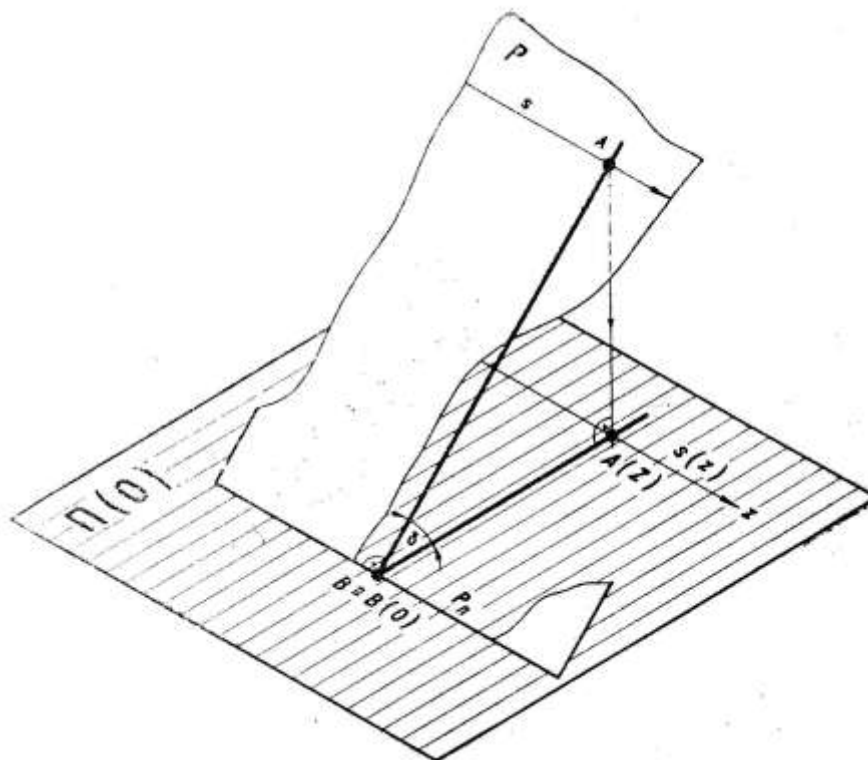
ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ ბრუნვის ხერხით (ნახ. 67). გავაგლოთ AB და CD პარალელური წრფეებით განსაზღვრული სიბრტყის $s(5)$ პორიზონტალი. უკანასკნელის გარშემო ბრუნვით CD წრფე შევათავსოთ $s(5)$ პორიზონტალის დონის სიბრტყესთან. AB წრფის კუთვნილი $M(5)$ წერტილიდან შეთავსებულ CD წრფეზე დაშებული მართობი (t) საძიებელ მანძილს გამოსახავს.

და უკანასკნელის გარშემო ბრუნვით ABC სიბრტყე დონის სიბრტყედ გარდაქმნათ. ამისათვის საკმარისია მხოლოდ B წერტილის შეთავსება. მიღებული საძიებელი $\angle \lambda$ კუთხის ნატურალური სიდიდე იქნება.

7. ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის ძირითად გეგმილთა სიბრტყისადმი დახრის კუთხის გაზომვა.

ზოგადი მდებარეობის სიბრტყეზე მდებარე წრფეებს შორის არსებობენ ისეთი წრფეები, რომლებიც ამ სიბრტყის ჰორიზონტალების მართობულები არიან და ძირითად გეგმილთა სიბრტყესთან უდიდეს კუთხეს ქმნიან. ასეთ წრფეებს, როგორც ამის შესახებ უკვე აღვნიშნეთ, უდიდესი ვარდნილობის წრფეები ეწოდება. მათი მეშვეობით ხშირად იზომება მოცემული სიბრტყის ძირითად გეგმილთა სიბრტყისადმი დახრის კუთხე.

განვიხილოთ 69-ე ნახაზი. ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე, რომელიც ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე P_{Π} კვალს იძლევა. უკანასკნელი შეიძლება გასაზომი ორწახნაგა კუთხის წიბოდ ჩაითვალოს. P სიბრტყის ნებისმიერი A წერტილიდან დაუშვათ მართობი P_{Π} კვალზე ($AB \perp P_{\Pi}$).

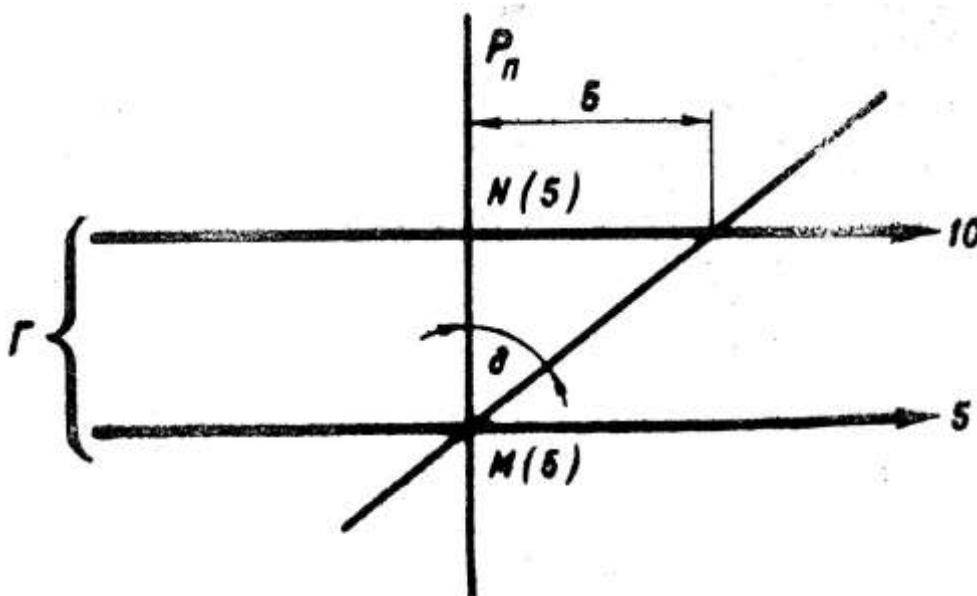


ნახ. 69.

წრფეების ურთიერთმართობულობის თეორემის ძალით $A(Z)B(O) \perp P_{\Pi}$. აქედან გამომდინარე $AA(Z)B(O)$ სამკუთხედის სიბრტყე P_{Π} წიბოს მართობულია.

ამავე სამკუთხედის $B(O)$ წვეროსთან მდებარე კუთხე (δ) საძიებელ ორწახნაგა კუთხეს გამოსახავს.

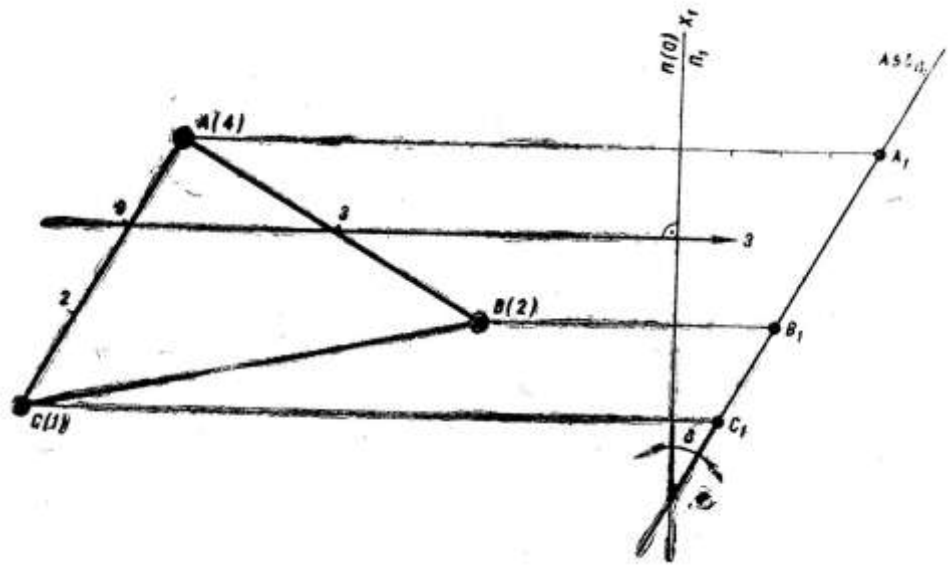
70-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სიბრტყის დახრის კუთხის გაზომვა, როდესაც სიბრტყე პორიზონტალებითაა მოცემული. MN მონაკვეთი Γ სიბრტყის უდიდესი ვარდნილების წრფეა. მისი ძირითად გეგმილთა სიბრტყესთან შეთავსებით ნაპოვნია საძიებელი დახრის კუთხე (δ). შემობრუნება მოხდა Γ სიბრტყის პორიზონტალების მართობული P მაგეგმილებელი სიბრტყის კვალის (P_{Π}) გარშემო.



ნახ. 70.

იგივე ამოცანა შესაძლებელია გადაწყდეს გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხის გამოყენებით. 71-ე ნახაზზე ნაჩვენებია შემთხვევა, როცა სიბრტყე სამი წერტილითაა მოცემული.

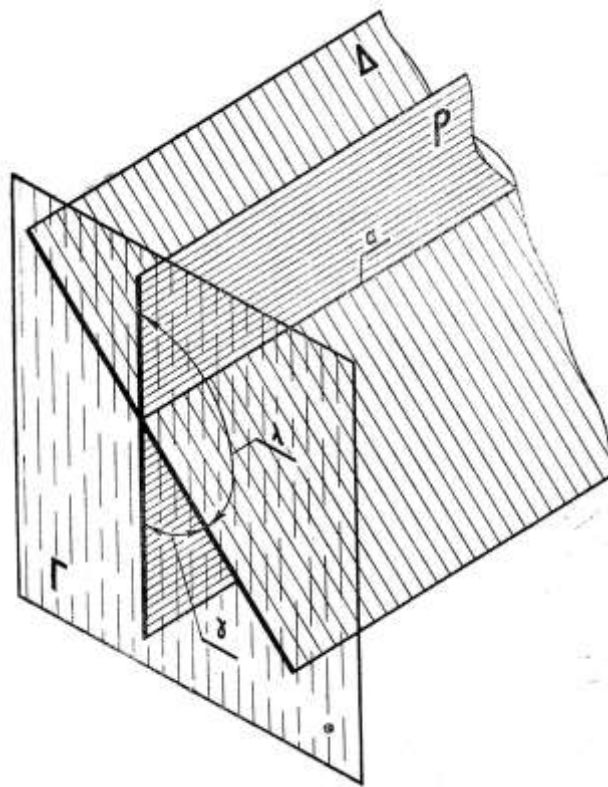
პირველთან შედარებით ამ გზით უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ კუთხის გაზომვისათვის საჭირო გრაფიკული აგებანი შეიძლება ჩავატაროთ ნახაზის თავისუფალ ადგილზე.



ნახ. 71.

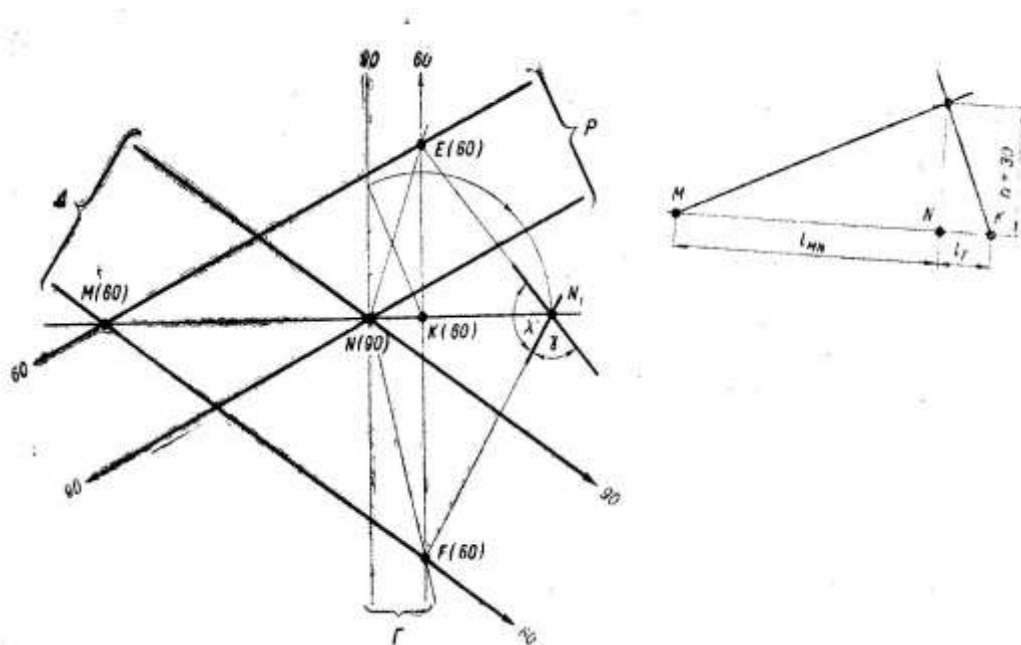
8. ორ ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეს შორის კუთხის გაზომვა

ორ ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეს (P და Δ) შორის მოთავსებული ორწახნა კუთხეების გამზომი λ და γ წრფოვანი კუთხეები მოთავსებულია ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფის (a), ანუ გასაზომი კუთხის წიბოს, მართობულ სიბრტყეში (Γ) (ნახ. 72).



ნახ. 72.

ამ დებულების მიხედვით ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ამოცანის ამოხსნის შემდეგი გზა (ნახ. 73).



ნახ. 73.

ვთქვათ, მოცემულია P და Δ სიბრტყეები ჰორიზონტალებით. საძიებელი ორწახნაგა კუთხის გასაზომად ვიპოვოთ მათი გადაკვეთის MN წრფე, გავატაროთ MN წრფის მართობი Γ სიბრტყე, ავაგოთ Γ სიბრტყის მოცემულ სიბრტყეებთან განკვეთის NE და NF წრფეები. მიღებული $E(60)N(90)F(60)$ კუთხე საძიებელი კუთხის გეგმილი იქნება. უკანასკნელი ვაბრუნოთ EF ჰორიზონტალის დონის სიბრტყესთან შეთავსებამდე. მივიღებთ საძიებელ λ და γ კუთხეებს.

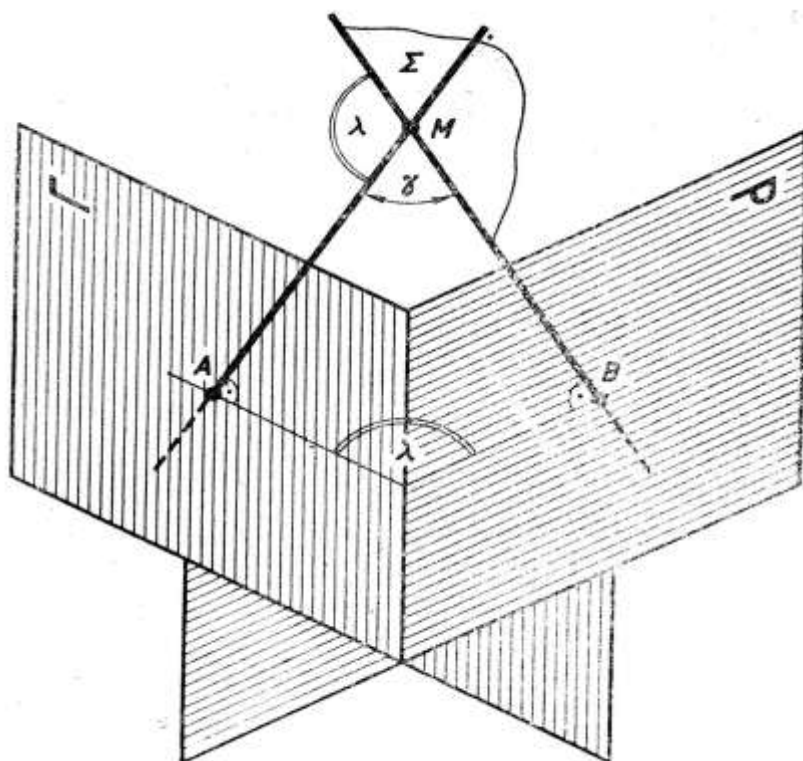
განხილული გზა საკმაოდ შრომატევადია განსაკუთრებით იმ შემთხვევაში, როცა ნახაზზე გადაკვეთის წრფეების ასაგებად საჭირო პირობები არახელსაყრელია.

ხშირ შემთხვევაში ორწახნაგა კუთხის გასაზომად მისი წიბოს აგება საჭირო არ არის, მაგალითად (ნახ. 74). თუ მოცემულ P და Γ სიბრტყეებზე ნებისმიერი M წერტილიდან დაუშვებთ მართობებს ($MA \perp \Gamma$ და $MB \perp P$) M

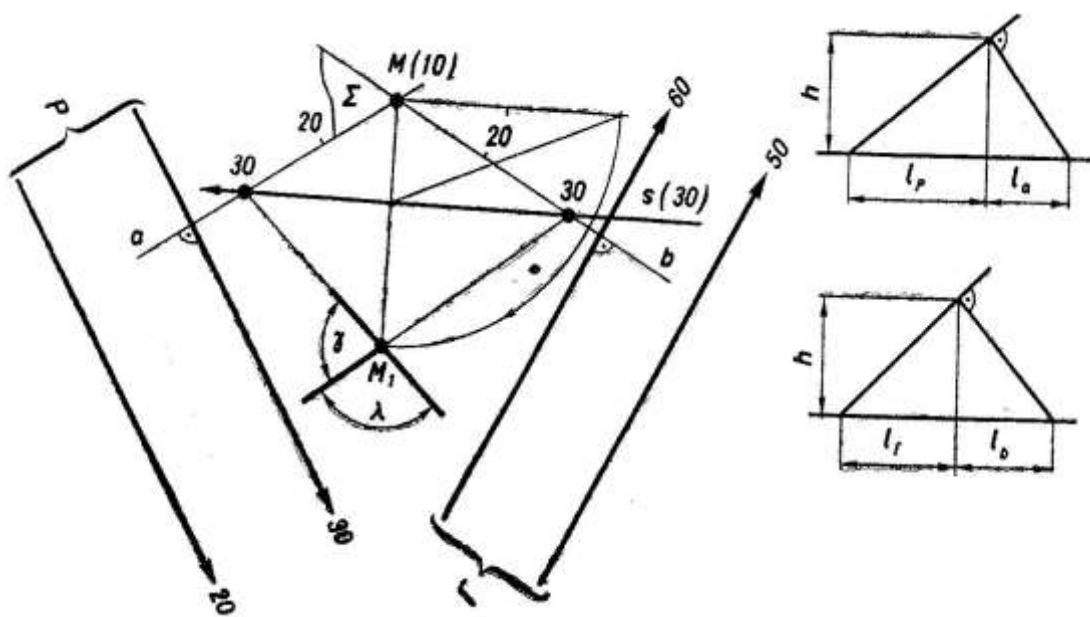
წერტილთან, ამ მართობების სიბრტყეში $\left(\Sigma \perp \frac{P}{\Gamma} \right)$ მივიღებთ ორ ბრტყელ კუთხეს

(λ, γ) , რომლებიც P და Γ სიბრტყეებით შექმნილი ორწახნაგა კუთხეების საზომ წრფოვან კუთხეებს წარმოადგენენ. ვთქვათ, მოცემულია P და Γ სიბრტყეები. მათ მიერ შექმნილი კუთხეების $(\lambda$ და $\gamma)$ გასაზომად ნებისმიერი M წერტილიდან თითოეულზე დაუშვათ მართობი. M წერტილიდან მოცემულ სიბრტყეებზე

დაშვებული მართობების (a და b) მიერ შექმნილი Σ სიბრტყე ამავე სიბრტყის ნებისმიერი ჰორიზონტალის გარშემო ბრუნვით გადავაქციოთ დონის სიბრტყედ (ნახ. 75). Σ სიბრტყის ჰორიზონტალის აგებისათვის საჭიროა a და b მართობების გრადუირება.



ნახ. 74.

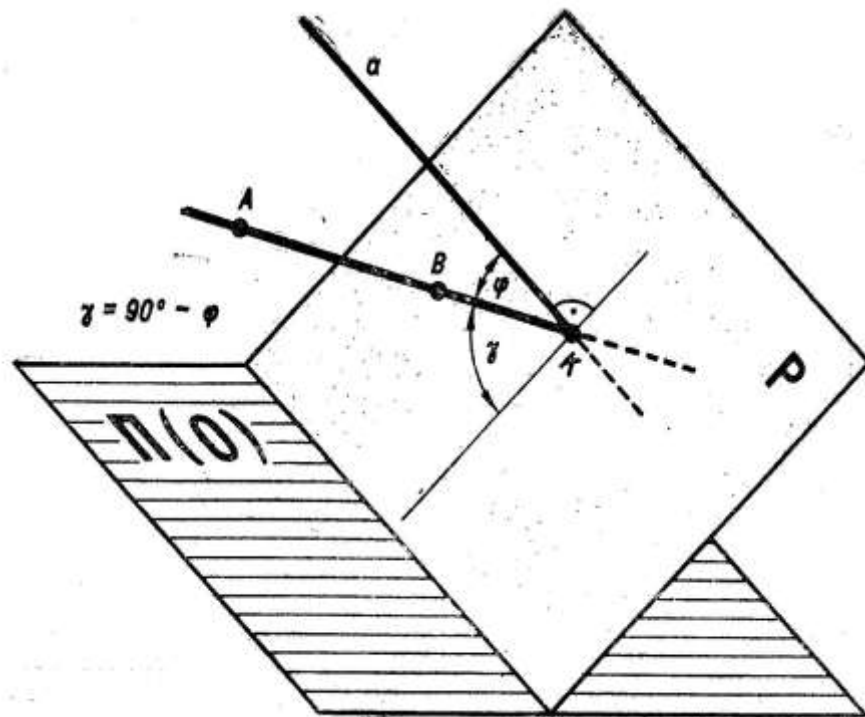


ნახ. 75.

9. წრფისა და სიბრტყის შორის მოთავსებული კუთხის გაზომვა

წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება იმ მახვილ კუთხეს, რომელიც მოთავსებულია ამ წრფესა და მოცემულ სიბრტყეზე მის გეგმილს შორის. განვიხილოთ ასეთი კუთხის გაზომვის ორი გზა.

1) ვთქვათ, მოცემულია P სიბრტყე და AB წრფე (ნახ. 76). $K = AB \times P$ წერტილიდან აღვმართოთ P სიბრტყის a მართობი.



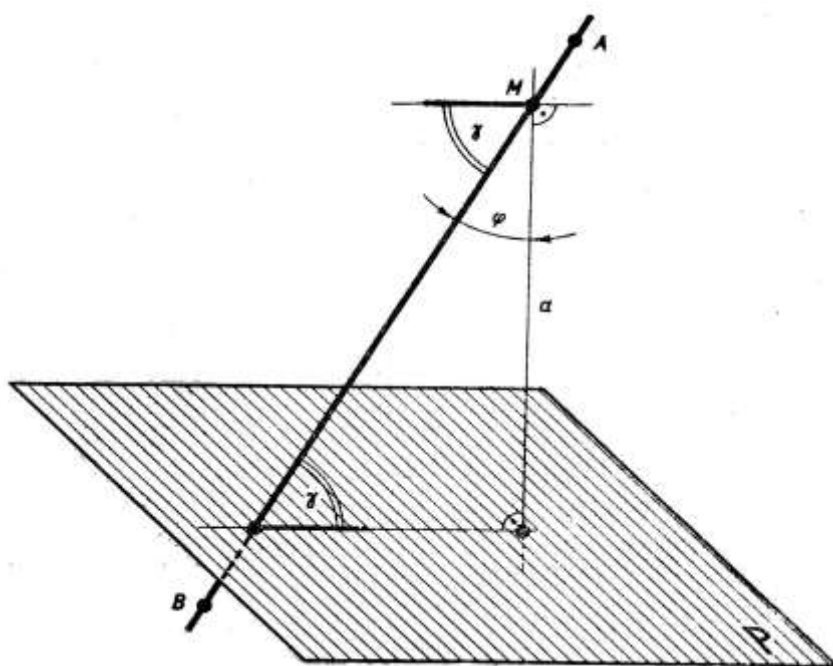
ნახ. 76.

მოცემულ AB წრფესა და a მართობს შორის მოთავსებული φ კუთხე γ საძიებელი კუთხის 90° -მდე შემავსებელი იქნება. ამ მსჯელობის საფუძველზე ჩვენი ამოცანა გეგმაზე შეგვიძლია შემდეგი თანამიმდევრობით გადავწყვიტოთ (ნახ. 77). შევცვალოთ გეგმილთა სიბრტყე ისე, რომ მოცემულ P სიბრტყეს ახალ სისტემაში მაგეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მიეცეს.

x_1 სისტემაში $K_1 = P_{H_1} \times A_1B_1$ წერტილიდან აღვმართოთ P სიბრტყის მიმართ მართობი (a_1). A_1B_1 -სა და a_1 მართობს შორის მოთავსებული φ_1 მახვილი კუთხე საძიებელი კუთხის 90° -მდე შემავსებელი იქნება; მაგრამ ეს კუთხე გეგმაზე თავისი ნამდვილი სიდიდით არ არის გამოსახული. მისი ნატურალური სიდიდის

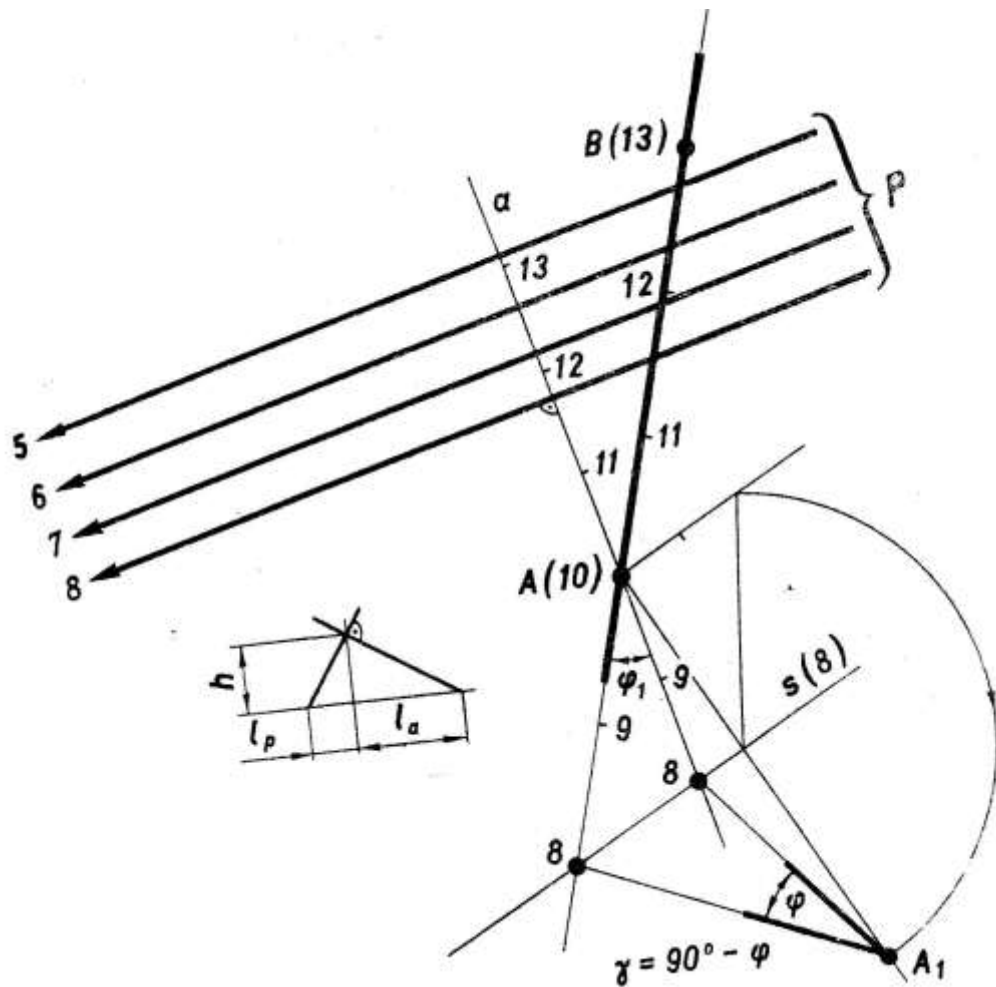
[illegible]

2) თუ AB წრფის ნებისმიერი M წერტილიდან P სიბრტყეზე (ნახ. 78) დაეშვა პერპენდიკულარი a მართობს, მახვილი კუთხე (φ), რომელიც შეიქმნება M წერტილთან, AB წრფესა და a მართობს შორის, საძიებელი γ კუთხის 90° -მდე შემავსებელი იქნება.



ნახ. 78.

მივიღოთ მხედველობაში აღნიშნული მსჯელობა და განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი (ნახ. 79): მოცემულია P სიბრტყე და $A(10)B(13)$ წრფე. მათ შორის მოთავსებული კუთხის გასაზომად A წერტილიდან P სიბრტყეზე a მართობი დაუშვათ. A წერტილთან მივიღებთ მახვილი φ კუთხის გეგმილს (φ_1), რომელიც γ კუთხის 90° -მდე შემავსებელი იქნება. φ კუთხის ნამდვილი სიდიდის გასაზომად ვისარგებლოთ ბრუნვის ხერხით. ბრუნვის ღერძის განსაზღვრისათვის დაგეგმირდება, როგორც AB წრფის, ისე a მართობის დაგრადუირება.

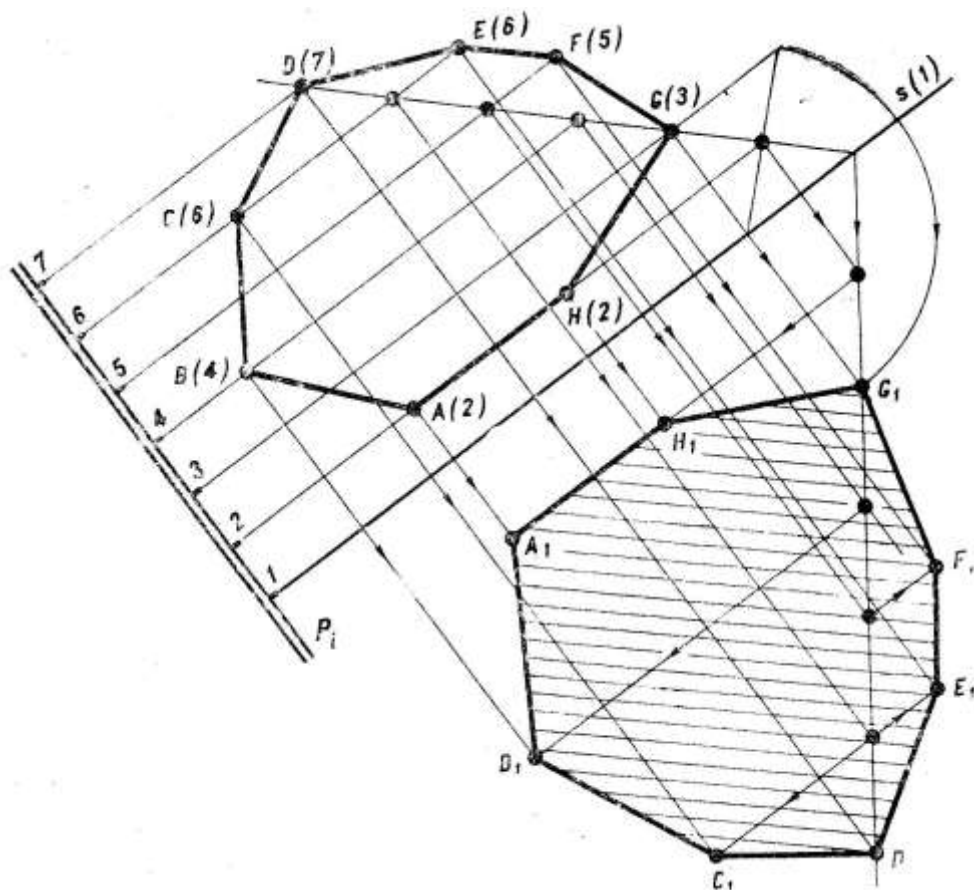


ნახ. 79.

10. ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურების ნამდვილი სიდიდით აგება.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურები ძირითადად გეგმილთა სიბრტყეზე ნატურალური ფორმითა და ზომით იმ შემთხვევაში გამოისახება, თუ ნაკეთის სიბრტყე გეგმილთა სიბრტყის პარალელურია, სხვა შემთხვევაში გეგმაზე ხშირად საჭიროა ნატურალური ზომების აღდგენა. ამას უმთავრესად ბრუნვის ხერხის გამოყენებით აღწევენ. ამ ამოცანის გადაწყვეტა გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხითაც შეიძლება. შევნიშნოთ, რომ ასეთი ამოცანები შეიძლება განივიხილოთ, როგორც ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის დონის სიბრტყედ გარდაქმნა.

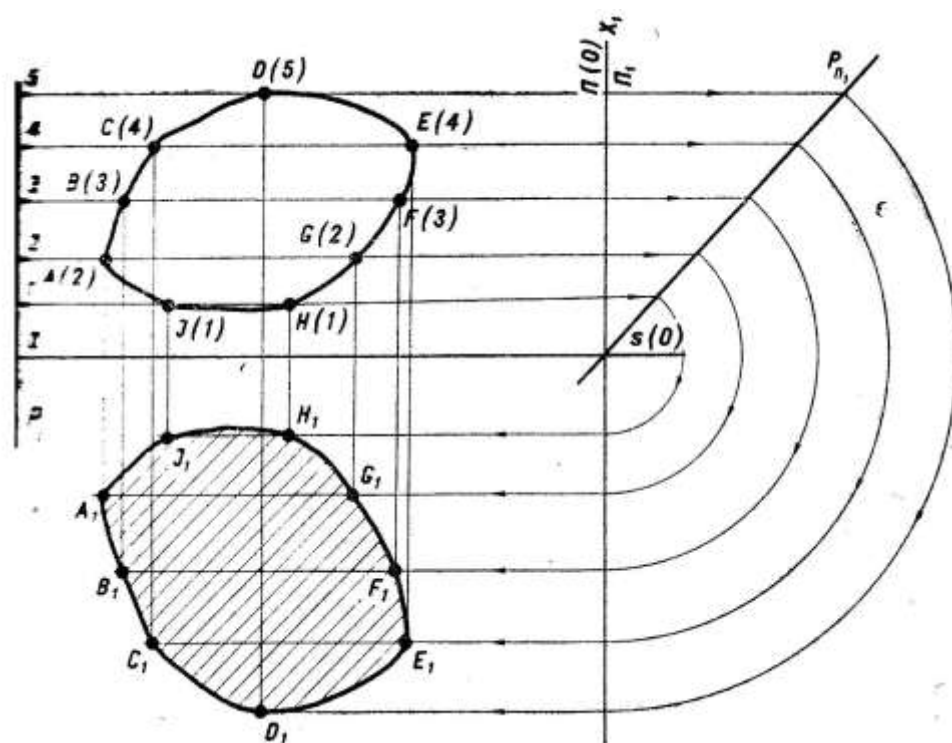
მე-80 ნახაზზე ნაჩვენებია P სიბრტყეში მოთავსებული ABC... მრავალკუთხედის ნამდვილი სიდიდით აგება. ამისათვის გამოყენებულია ბრუნვის ხერხი.



ნახ. 80.

აქ სამკუთხედის აგებით $s(1)$ კორიზონტალის დონის სიბრტყესთან შეთავსებულია მხოლოდ წვერო. დანარჩენი წერტილების ასაგებად გამოყენებულია პერსპექტულ-აფინური შესაბამისობის თვისებები (იხ. ბრუნვის ხერხი).

ბრტყელი მრუდე ფიგურის ნამდვილი სიდიდის განსაზღვრა მრავალკუთხედისათვის განხილული შემთხვევის ანალოგიურია. 81-ე ნახაზზე გამოყენებულია ნამდვილი სიდიდის აგების სხვა ვარიანტი, კერძოდ, ნაჩვენებია ბრუნვისა და გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხების ერთობლივი გამოყენების შემთხვევა.



686. 81.

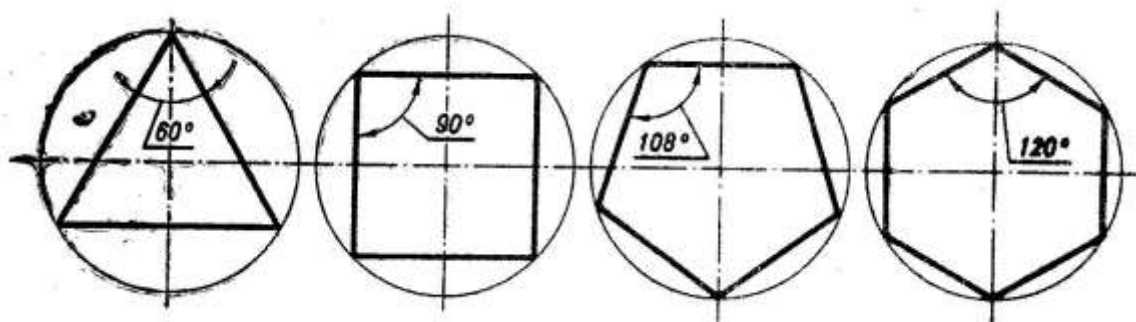
მეოთხე თავი
მრავალწახნაგები
§9. მრავალწახნაგათა სახეები და მათი გეგმილების აგება

1. მრავალწახნაგათა სახეები

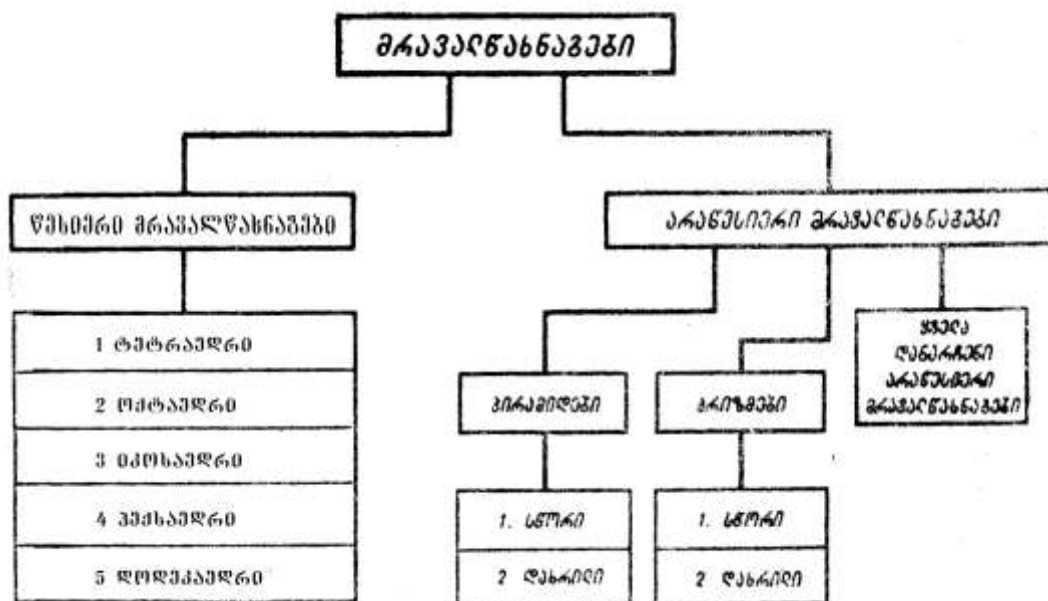
ბრტყელი მრავალკუთხედებით შემოსაზღვრულ ფიგურას მრავალწახნაგა ეწოდება. მისი ელემენტებია წვეროები, წიბოები და წახნაგები. ამ ელემენტების ერთობლიობის მრავალწახნაგას ბადე ეწოდება. თუ მრავალწახნაგას წახნაგები მოთავსებულია მისი ყოველი წახნაგის მიმართ ერთ მხარეს, მას ამოზნექილი მრავალწახნაგა ეწოდება. თუ ეს პირობა დარღვეულია, ე.ი. მრავალწახნაგას წახნაგები განლაგებულია მისი რომელიმე წახნაგის ორივე მხარეს, ასეთ მრავალწახნაგას ჩაზნექილი ეწოდება. ამოზნექილი მრავალწახნაგას წახნაგები ამოზნექილ მრავალკუთხედებს წარმოადგენს.

მრავალწახნაგები სივრცითი სხეულების ერთ ჯგუფს ქმნიან. ეს ჯგუფი, თავის მხრივ, ორ ქვეჯგუფად იყოფა: წესიერი და არაწესიერი მრავალწახნაგები.

წესიერი ეწოდება ისეთ მრავალწახნაგებს, რომელთა წახნაგები წესიერ მრავალკუთხედს წარმოადგენენ. შევნიშნოთ, რომ წესიერი მრავალკუთხედების რიცხვი უსასრულოდ დიდია, წესიერი მრავალწახნაგებისა კი ხუთს არ აღემატება. ეს გარემოება გამოწვეულია იმით, რომ მრავალწახნაგას წვერო შედგება არანაკლებ სამი წახნაგისაგან, გარდა ამისა, წვეროსთან შექმნილი კუთხეების ჯამი 360° -ზე ნაკლები უნდა იყოს. თუ ამ კუთხეების ჯამი 360° -ს გაუტოლდა, მაშინ წვეროში თავმოყრილი წიბოები ერთ სიბრტყეში აღმოჩნდება და ვეღარ მივიღებთ წახნაგოვან კუთხეს (ნახ. 82). ამ მსჯელობის საფუძველზე გამოდის, რომ წესიერი მრავალწახნაგას წახნაგებად შეიძლება გამოდგეს მხოლოდ ტოლგვერდა სამკუთხედები (ტეტრაედრები, ოქტაედრები, იკოსაედრი), კუადრატები (ჰექსაედრი) ან ხუთკუთხედები (დოდეკაედრი).



ნახ. 82.

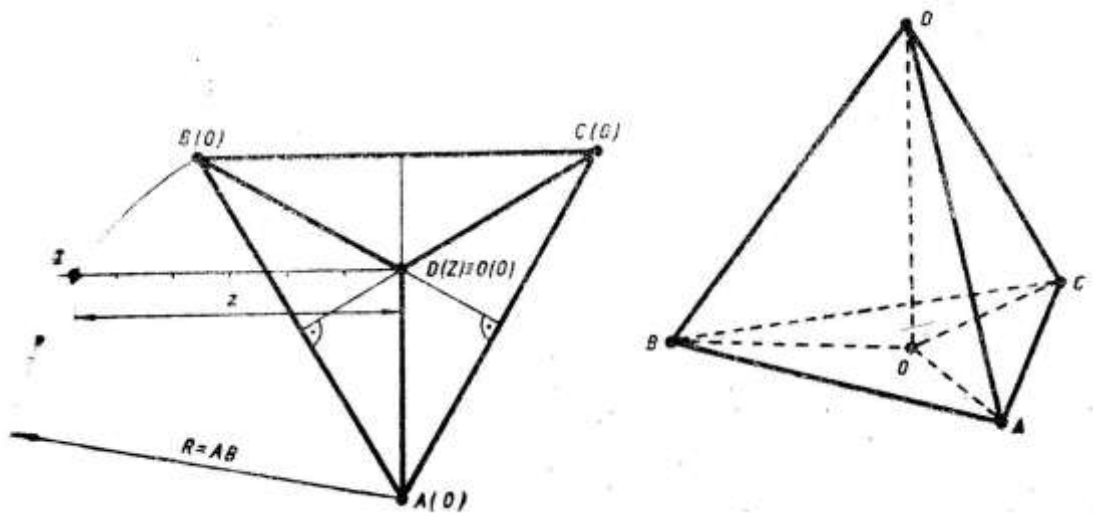


ნახ. 83.

87-ე ნახაზზე ნახვენებია მრავალწახნაგების კლასიფიკაცია. განვიხილოთ ზოგიერთი მრავალწახნაგას გეგმილის აგება.

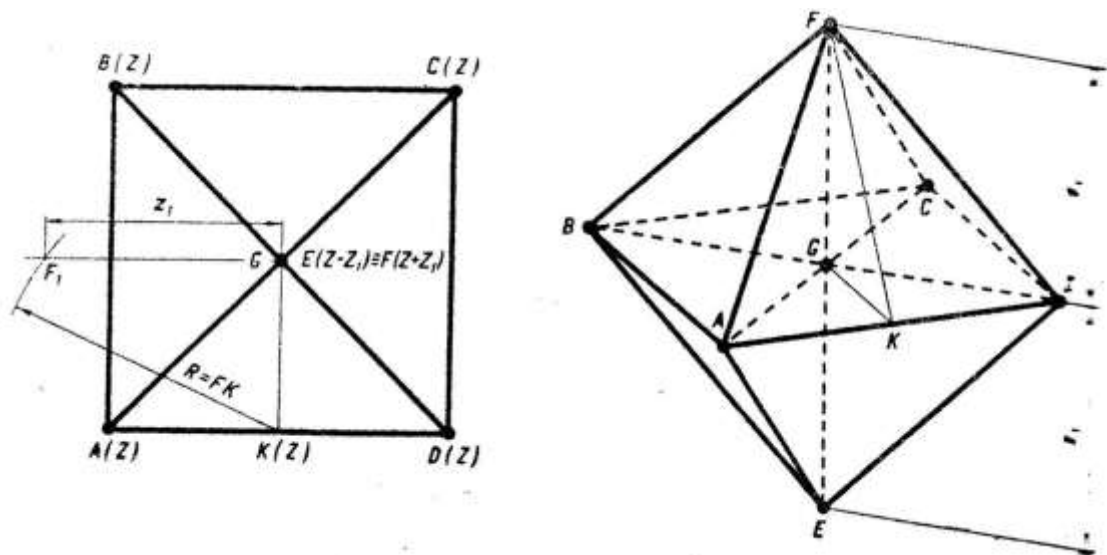
2. ტეტრაედრის გეგმილის აგება.

ისეთ მრავალწახნაგას, რომელიც შედგება ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმის ოთხი წახნაგისაგან, აქვს ოთხი წვერო და ექვსი წიბო, წესიერი ოთხწახნაგა, ანუ ტეტრაედრი ეწოდება (ნახ. 84).



ტეტრაედრის გეგმილის ასაგებად საკმარისია მოცემული იყოს მისი ერთი წახნაგი (მაგალითად, ABC), რომელიც მოთავსებული იქნება უშუალოდ ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე ან მის პარალელურზე, მეოთხე წვეროს (D) მდებარეობა მოცემული წვეროებიდან მოპირდაპირე გვერდებზე დაშვებული მართობების გადაკვეთით განისაზღვრება, ხოლო მისი ნიშნული (Z), მაგალითად, ΔAOD-ს გეგმილთა სიბრტყესთან შეთავსებით.

ისეთ მრავალწახნაგას, რომელიც შედგება ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმის რვა წახნაგისაგან, აქვს ექვსი წვერო და თორმეტი წიბო, წესიერი რვაწახნაგა, ანუ ოქტაედრი ეწოდება (ნახ. 85). როგორც ნახაზიდან ჩანს, იგი ორი მართი და წესიერი ოთხწახნაგა პირამიდისაგან შედგება. ოქტაედრის A, B, C და D წვეროები ქმნიან კვადრატს, რომლის თითოეული გვერდი მოცემული მრავალწახნაგას შემქმნელი ტოლგვერდა სამკუთხედების გვერდის ტოლია. ოქტაედრის სიმეტრიულობის გამო E და F წვეროების შემაერთებელი წრფე ABCD კვადრატის სიბრტყის მართობულია და მისი AB და CD დიაგონალების გადაკვეთის G წერტილში გადის. გარდა ამისა,

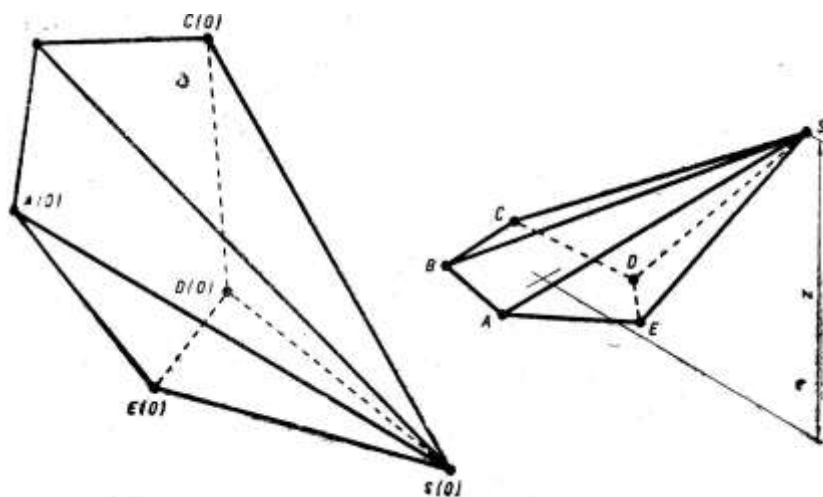


ნახ. 85.

ოქტაედრის გეგმილის აგების გასამარტივებლად მისი EF ღერძი ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის მართობულად ავიდოთ. თუ გეგმაზე მოცემული იქნება კვადრატის ერთი გვერდი, ჩვენ იოლად ავაგებთ დანარჩენ გვერდებსაც, სახელდობრ, დიაგონალების გადაკვეთით ავაგებთ E და F წვეროების გეგმილს, მათ ნიშნულებს კი განვსაზღვრავთ, მაგალითად, EGK სამკუთხედის ABCD კვადრატის სიბრტყესთან შეთავსებით.

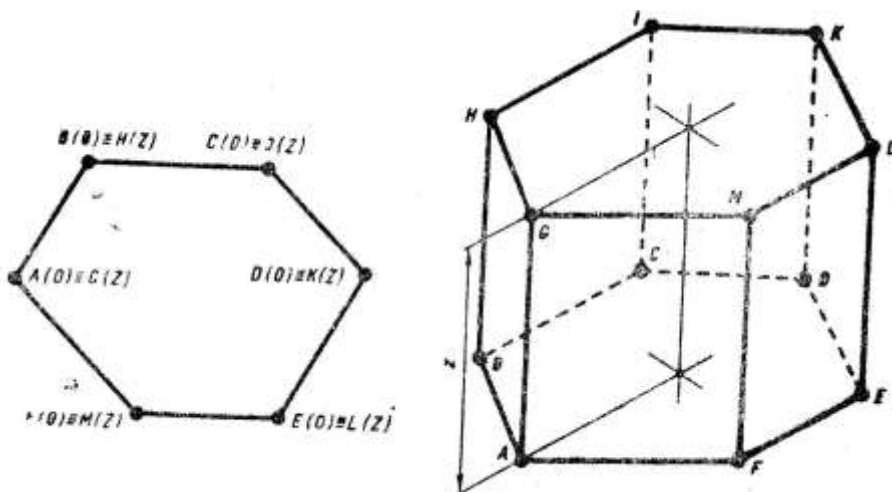
4. ჰექსაედრის გეგმილის აგება.

ისეთ მრავალწახნაგას, რომელიც შედგება კვადრატის ფორმის ექვსი წახნაგისაგან, აქვს 12 წიბო და რვა წვერო, წესიერი ექვსწახნაგა, ანუ ჰექსაედრი ეწოდება. ხშირად ასეთ ფიგურას კუბს უწოდებენ. 86-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ჰექსაედრის თვალსაჩინო გამოსახულება და მისი გეგმილი, აღებულ შემთხვევაში იგი ერთ-ერთი წახნაგით დევს ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე.

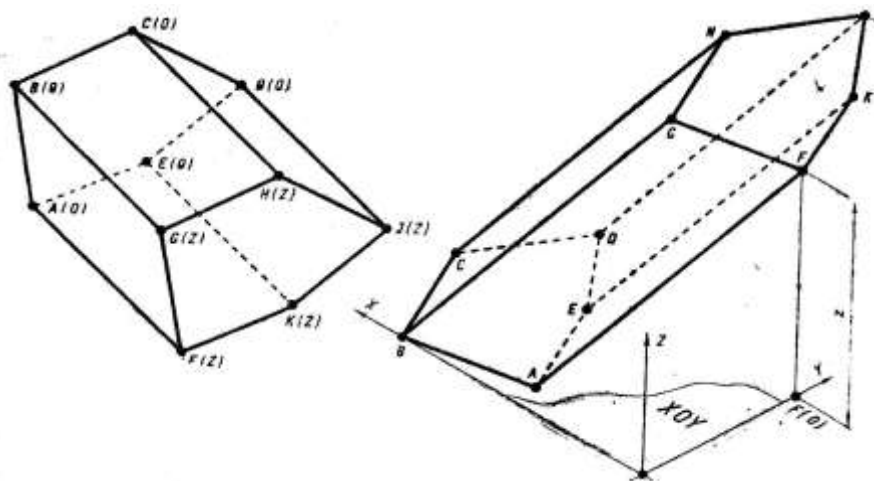


ნახ. 88.

თუ პრიზმის წიბოები მისი ფუძის სიბრტყისადმი მართობულნი არიან, ასეთ პრიზმას მართი პრიზმა ეწოდება (ნახ. 89), წინააღმდეგ შემთხვევაში – დახრილი (ნახ. 94). როგორც ერთი, ისე მეორე პრიზმის გეგმაზე მოცემისათვის საჭიროა ცნობილი იყოს მისი ყველა წიბოსა და წვეროს გეგმილი.



ნახ. 89.

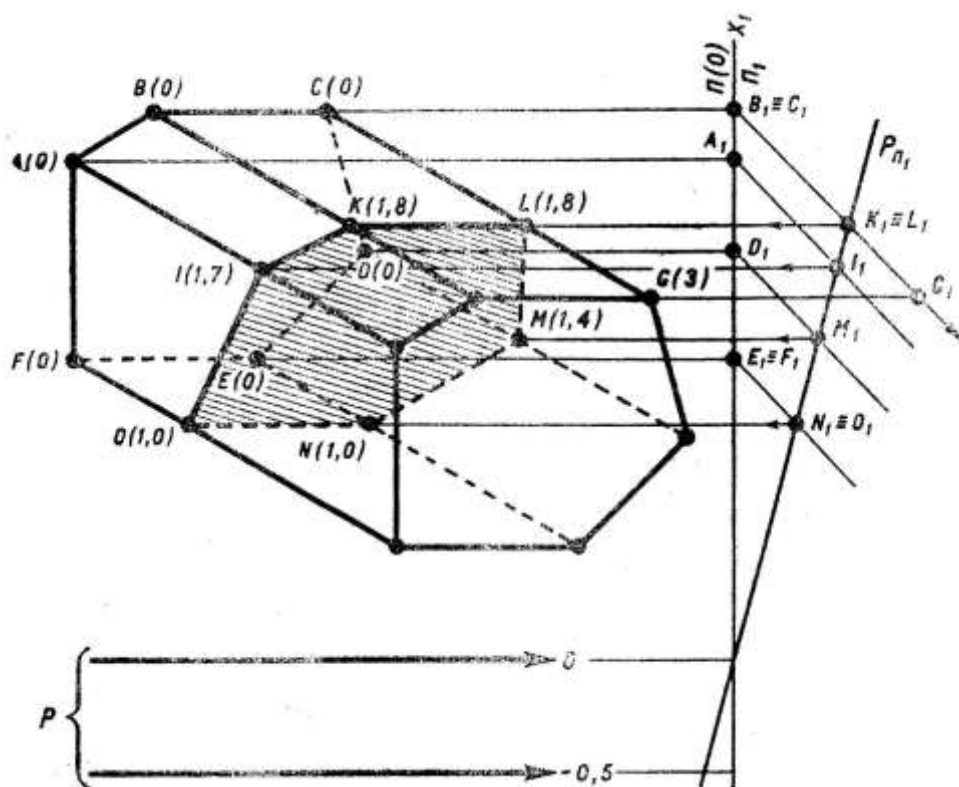


ნახ. 90.

§10. ამოცანები მრავალწახნაგებზე

1. მრავალწახნაგათა გადაკვეთა სიბრტყით.

განვიხილოთ დახრილი პრიზმის გადაკვეთა ზოგადი მდებარეობის სიბრტყით (ნახ. 91).



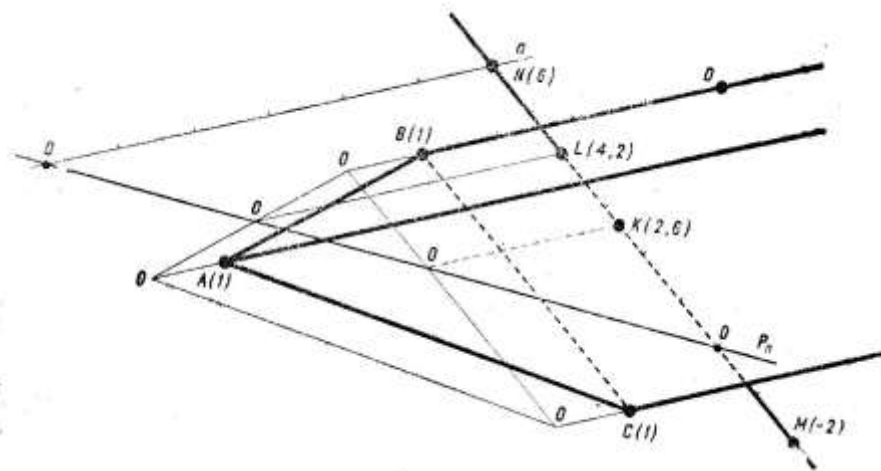
ნახ. 91.

შევცვალოთ გვეგმილთა სიბრტყე ისე, რომ მოცემულმა სიბრტყემ (P) ახალ მდგომარეობაში მაგვეგმილებელი სიბრტყის მდებარეობა მიიღოს. x_1 სისტემაში პრიზმის ახალი გვეგმილის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ მისი ფუძის გვეგმილი (რომელიც ღეროს დაემთხვევა) და განვსაზღვროთ ერთ-ერთი (მაგალითად, CD) წიბოს მიმართულება. დანარჩენი წიბოების გვეგმილების ასაგებად ვისარგებლოთ პრიზმის წიბოების ურთიერთპარალელობით. JKLMN მრავალკუთხედის გვერდებიდან OJ, JK და KL იქნება ხილვადი, რადგან ისინი ხილვად წახნაგებზე არიან მოთავსებული; LM, MN და NO გვერდები კი, როგორც უხილავ წახნაგებზე მოთავსებულები, უხილავი იქნება (იხ. ხილვადობის პირობითობა §5-3).

კვეთის წვეროების ნიშნულების საპოვნელად ვისარგებლოთ P_{n_1} კვადრით (N წერტილის შემთხვევა) ან შესაბამისი წიბოების გრადუირებით.

2. მრავალწახნაგათა გადაკვეთა წრფით.

განვიხილოთ დახრილი პრიზმის წრფით გადაკვეთის მაგალითი (ნახ. 96) . გადაკვეთის წერტილების ასაგებად გამოვიყენოთ ისეთი დამხმარე სიბრტყე, რომელიც მოცემულ წრფეზე მოცემული პრიზმის წიბოების პარალელურად გაივლის. ასეთი სიბრტყე პრიზმის წახნაგებს წიბოების პარალელურ წრფეზე გადაკვეთს. ამ წრფეების ასაგებად კი საკმარისია დავნიშნოთ დამხმარე სიბრტყის კვალისა და პრიზმის ფუძის (რომელიც გეგმილთა სიბრტყეზე უნდა იყოს მოთავსებული) გვერდების გადაკვეთის წერტილები. ამ წერტილებიდან პრიზმის წიბოების პარალელურად გავლებული წრფეების მოცემულ წრფესთან გადაკვეთით მივიღებთ საძიებელ წერტილებს.



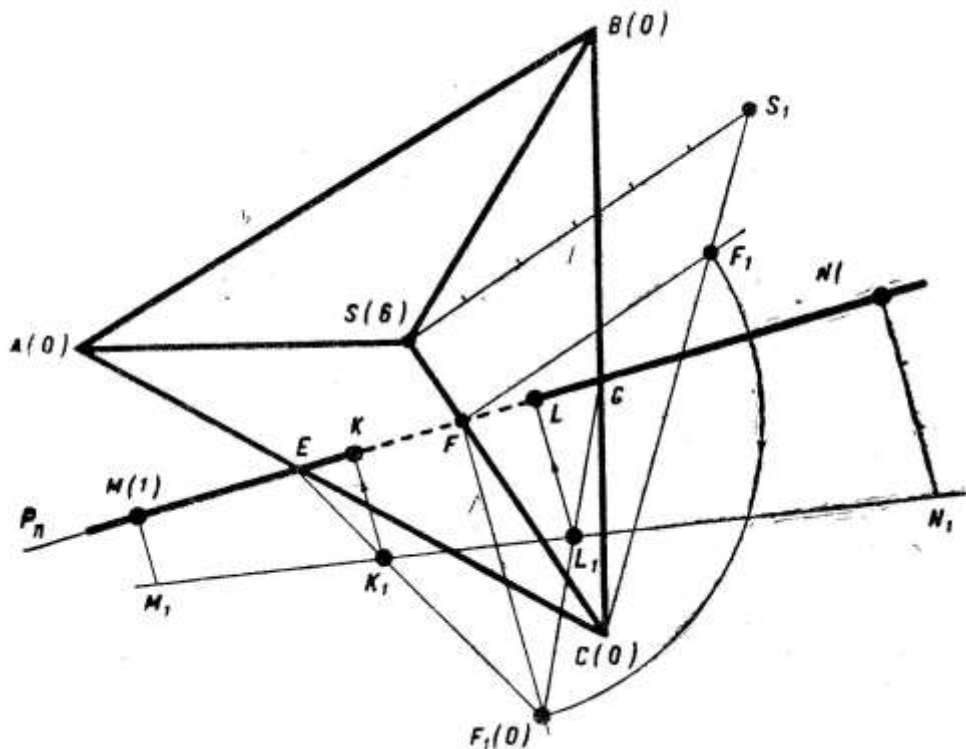
ნახ. 92.

92-ე ნახაზზე ნაჩვენებ შემთხვევაში მოცემული პრიზმის ფუძე არ დევს გეგმილთა სიბრტყეზე. ამიტომ, ნაპოვნია მისი ე.წ. ცრუ ფუძე. დამხმარე P სიბრტყის კვალის (P_{Π}) ასაგებად მოცემული წრფის N წერტილზე პრიზმის წიბოების პარალელურად გავლებულია a წრფე და მოძებნილია ამ ორი ურთიერთგადაკვეთილი წრფის კვალები.

93-ე ნახაზზე ნაჩვენებია დახრილი პირამიდის გადაკვეთა წრფით. გადაკვეთის წერტილების მოსაძებნად გამოყენებულია მოცემულ წრფეზე და პირამიდის წვეროზე გამავალი P სიბრტყე.

94-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მართი პირამიდის გადაკვეთა MN წრფით. გადაკვეთის წერტილების საპოვნელად აქ გამოყენებულია მოცემულ წრფეზე გამავალი მაგეგმილებელი სიბრტყე. $SABC$ პირამიდის P სიბრტყე EFG სამკუთხედზე გადაკვეთს. F წერტილის ნიშნული შეგვიძლია განვსაზღვროთ SC წიბოს გრადუირებით ან SC წიბოს შეთავსებით გეგმილთა სიბრტყესთან

K_1 და L_1 წერტილების დაბრუნებით $M(1)N(3)$ გეგმილზე მიღებულია საძიებელი K და L წერტილები, მათი ნიშნულები კი განისაზღვრება ორი გზით: 1) MN წრფის გრადუირებით და 2) შესაბამისად, KK_1 და LL_1 მონაკვეთების სიგრძეებით. ერთი და იმავე წერტილისათვის სხვადასხვა გზით ნაპოვნი ორი ნიშნულის ერთმანეთთან შედარებით შესრულებული გრაფიკული სამუშაოს სიზუსტეს დაგადგენთ.



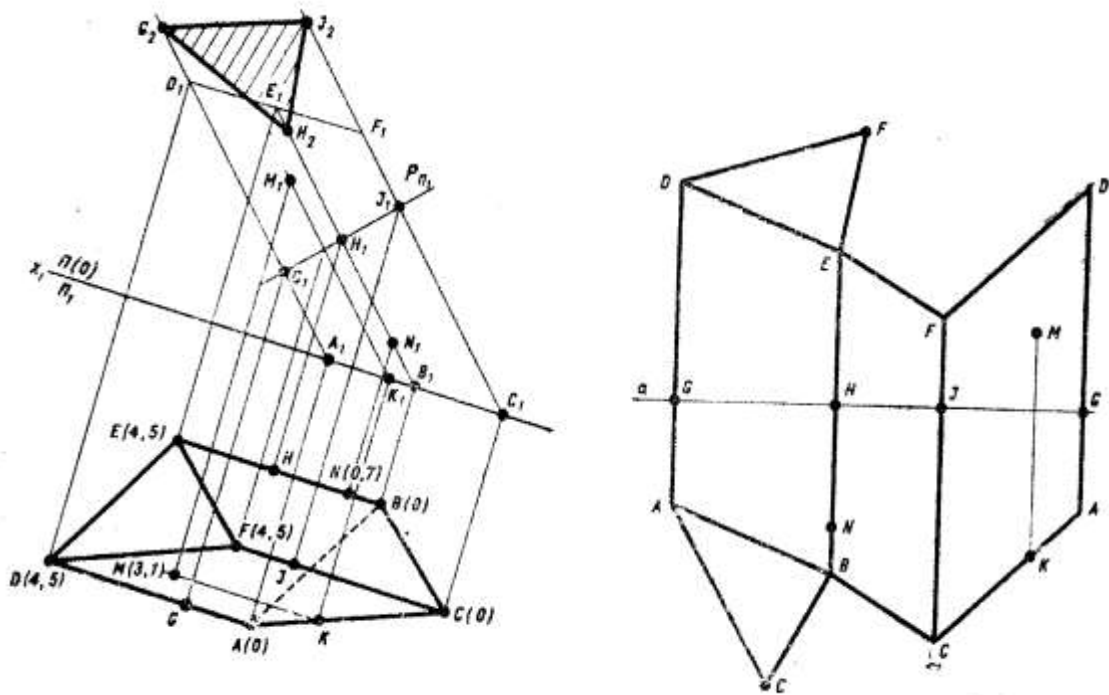
92

3. მრავალწახნაგათა ზედაპირის განფენა სიბრტყეზე

მრავალწახნაგას ზედაპირის განფენა ნიშნავს მისი ყველა წახნაგის შეთავსების ნახაზის სიბრტყესთან. ყოველ ორ მეზობელ წახნაგს ერთი წიბო საერთო აქვთ. ამას გამო, ნახაზზეც ერთი წახნაგი მეორე წახნაგს საერთო სიბოთი უნდა უერთდებოდეს. წახნაგოვანი ფიგურის წახნაგების ასეთი განფენის თარგს თუ გამოვჭერთ, სათანადო წიბოებზე მისი მოკეცვით და შეწებებით თვით წახმაგოვანი ფიგურის მოდელს მივიღებთ. ვინაიდან განფენაზე წახნაგები თავისი ნატურალური სიდიდით გამოიხაზებიან, ამიტომ ვიდრე განფენას შეუდგებოდეთ, საჭიროა წინასწარ განისაზღვროს აღებული მრავალწახნაგას წახნაგის შესაბამისი ბრტყელი მრავალკუთხედის აგებისათვის საჭირო ყველა ელემენტი.

განვიხილოთ დახრილი სამწახნაგა პრიზმის ზედაპირის განფენა (ნახ. 95). როგორც ნახაზიდან ჩანს, ცნობილია მხოლოდ ფუძის გვერდები, რაც შეეხება გვერდითს წიბოებს და წახნაგების სიგანეს, მათი განსაზღვრისათვის მოგვიხდება გეგმილთა სიბრტყის შეცვლა, თუ ახალ სიბრტყეს პრიზმის გვერდითი წიბოების პარალელურად დავაყენებთ, მაშინ x_1 სისტემაში ისინი თავისი ნატურალური სიდიდით დაგეგმილდებიან. ასეც მოვიქცეთ და ავაგოთ პრიზმის ახალი გეგმილი x_1 სისტემაში. წახნაგების სიგანის გასაზომად ავაგოთ პრიზმის მართობული კვეთი. ამისთვის, გავატაროთ წიბოების მართობული და x_1 სისტემაში მაგეგმილებელი P სიბრტყე. ავაგოთ კვეთი ნამდვილი სიდიდით. მიღებული $G_2H_2J_2$ სამკუთხედის გვერდები შესაბამისი წახნაგების სიგანეებს გამოსახავენ. მას შემდეგ, რაც ცნობილი გახდება ყველა საჭირო ელემენტი, შევუდგეთ თვით განფენას. ამისათვის ნახაზის ნებისმიერ თავისუფალ ადგილას გავავლოთ რაიმე a წრფე და მასზე გავშალოთ პრიზმის მართობული კვეთი, ანუ $G_2H_2J_2$ სამკუთხედი. მიღებულ G, H, J და G წერტილებზე გავატაროთ a წრფის მართობი წრფეები და მათზე გადავზომოთ შესაბამისი წიბოების ნატურალური სიდიდეები. მაგალითად, G წერტილზე გამავალ მართობზე გადავზომოთ G_1D_1 (ზევით) და G_1A_1 (ქვევით) მონაკვეთები. .

მივიღებთ A და D წვეროებს. ანალოგიურად მოიძებნება დანარჩენი წვეროებიც, რომლებსაც შემდეგ ტეხილით შევაერთებთ. გრაფიკული აგების სიზუსტის შესამოწმებლად შეგვიძლია გავზომოთ ამ ტეხილის თითოეული გვერდი და შევადაროთ მოცემული პრიზმის ფუძეების შესაბამის გვერდებს.



ნახ. 95.

. მაგალითად, განფენაზე მიღებული AB მონაკვეთი მოცემული $A(O)B(O)$ გეგმილის ტოლი უნდა იყოს და ა.შ.

განფენის დამთავრებისათვის განფენილ წახნაგებს უნდა მივუხაზოთ ფუძეები. ამგვარად, მთელი პრიზმის ზედაპირის განფენას მივიღებთ. ამ განფენის მიხედვით კი შესაძლებელია მოცემული პრიზმის მოდელის აგება.

როგორც ვხედავთ, განფენისათვის გამოვიყენეთ მოცემული მრავალწახნაგას ბადის ძირითადი წერტილები. მათივე მეშვეობით ჩვენ შეგვიძლია განფენაზე გადავიტანოთ ისეთი წერტილებიც, რომლებიც მოთავსებულია წიბოებზე ან წახნაგებზე. მაგალითად, ჩვენს შემთხვევაში პრიზმის ზედაპირზე მოცემულია ორი წერტილი – M (წახნაგზე) და N (წიბოზე).

N წერტილის განფენაზე გადასატანად საჭიროა მასზე გაავლოთ ე.წ. ცრუ წიბო, ვიპოვოთ ამ წიბოს ახალი გეგმილი და ძირითადი წიბოებისა და წერტილების ანალოგიურად გადავიტანოთ განფენაზე.

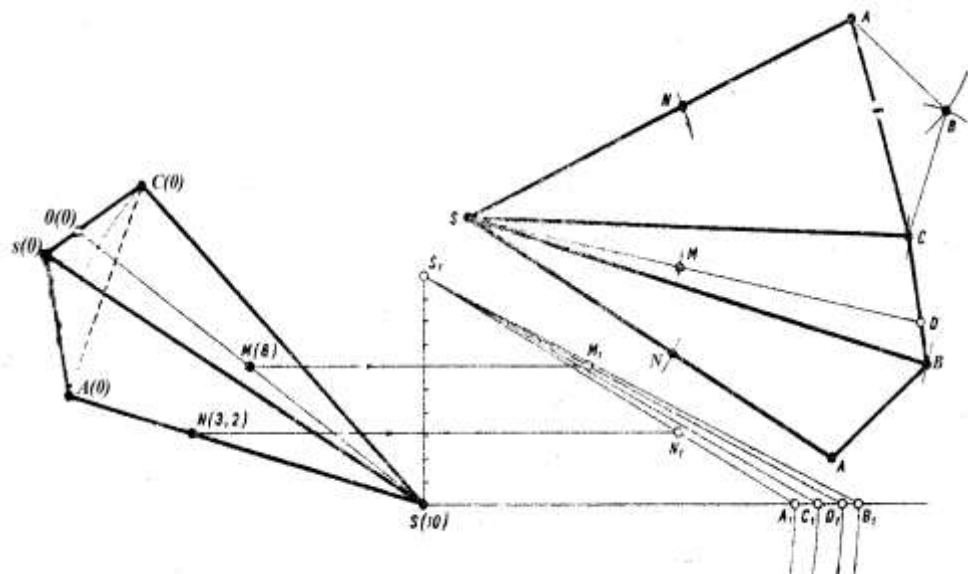
N წერტილის გადატანისათვის კი საკმარისია მოვძებნოთ მისი გეგმილი X_1 სისტემაში და მიღებული M_1N_1 მონაკვეთი გადავზომოთ B წერტილიდან BE წიბოზე.

შევნიშნოთ, რომ შებრუნებული ამოცანის გადაწყვეტა, ე.ი. როდესაც წერტილი მოცემულია განფენაზე და საჭიროა მისი გეგმილების აგება, ძნელი არ არის.

საყურადღებოა განფენის დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, შესაძლებელია მისი მეშვეობით აღებული მრავალწახნაგას მოდელის დამზადება, გარდა ამისა, განფენის საშუალებით შესაძლებელია წახნაგოვანი ზედაპირის საერთო ფართობის გამოთვლა ან მის წახნაგებზე მოთავსებულ ორ წერტილს შორის უმოკლესი მონაკვეთის აგება, ასეთი მონაკვეთის გაზომვა და სხვა.

განვიხილოთ პირამიდის ზედაპირის განფენა. ამ შემთხვევაში საკმარისია ფუძისა და წიბოების ნატურალური ზომების ცოდნა.

96-ე ნახაზზე ნაჩვენებ მაგალითში პირამიდის ფუძე ცნობილია. წიბოების ნატურალური სიდიდის გასაგებად ავაგოთ ისეთი მართკუთხა სამკუთხედები, რომელთაგან თითოეულის ერთი კათეტი იქნება აღებული წიბოს გეგმილი (მაგალითად, $A(O)S(O)$, ხოლო მეორე – ამ წიბოს ბოლოების სიმაღლეთა სხვაობა (მაგ., h_{AS}). ასეთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა საძიებელი წიბოს ნატურალური სიდიდის ტოლი იქნება (მაგალითად, S_1A_1).



ნახ. 96.

გრაფიკული სამუშაოების გამარტივებისათვის, აღნიშნული ჰიპოტენუზების აგება რეკომენდებულია 100-ე ნახაზზე ნაჩვენები გზით – შეთავსებით. ამის შემდეგ შეგვიძლია შევედგეთ თვით განფენას. ნახაზის თავისუფალ ადგილზე თანმიმდევრობით ავაგოთ ASB, BSC და CSA ერთმანეთზე საერთო გვერდებით მიერთებული სამკუთხედები. ფუძის ნებისმიერ გვერდს (მაგალითად, AB-ს) მიეუსაზოთ მთელი ფუძე.

წინა მაგალითის ანალოგიურად, აქაც ნაჩვენებია პირამიდის ზედაპირზე განლაგებული წერტილების გადატანა განფენაზე.

M წერტილის გადასატანად საჭიროა ცრუ წიბოს აგება. რაც შეეხება N წერტილს, იგი მოიძებნება SA წიბოზე S წერტილიდან S_1N_1 მონაკვეთის გადაზომვით.

მეხუთე თავი

მრუდე წირები და მრუდე ზედაპირები

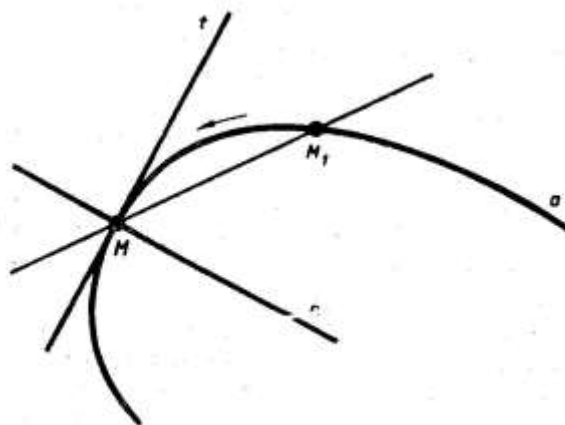
§11. მრუდე წირების ზოგიერთი სახეები და მათი გეგმილის აგება

1. ძირითადი ცნებები და განსაზღვრებები.

მხაზველობით გეომეტრიაში მრუდე წირები განიხილება კინემატიკურად, ე.ი. როგორც მოძრავი წერტილის ტრაექტორია. წერტილის მოძრაობისას ორ მნიშვნელოვან შემთხვევას აქვს ადგილი: 1) წერტილი ისე მოძრაობს, რომ ყოველთვის ერთ სიბრტყეში რჩება და 2) წერტილი თავისი მოძრაობისას ერთ სიბრტყეში არ რჩება. ამის მიხედვით, მრუდე წირები ორ ძირითად ჯგუფად იყოფა. პირველ ჯგუფში გაერთიანებულია ე.წ. ბრტყელი, ხოლო მეორეში – სივრცითი მრუდები.

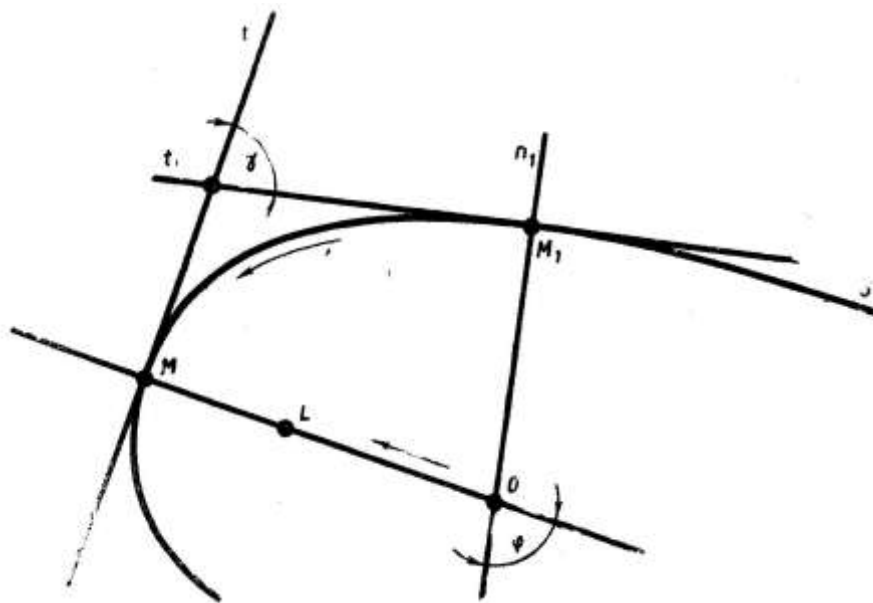
ბრტყელი მრუდებიდან პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ე.წ. მეორე რიგი მრუდები – წრეწირი, ელიფსი, პარაბოლა და ჰიპერბოლა. მრუდებს, რომლებიც ალგებრული განტოლებით განისაზღვრება, ალგებრული ეწოდება. ამასთან, განტოლების ხარისხი მრუდის რიგს გამოსახავს. მრუდის რიგი განისაზღვრება აგრეთვე ამ მრუდის წრფით გადაკვეთის წერტილთა მაქსიმალური რაოდენობით. მაგალითად, ნებისმიერ მდებარეობის წრფე მეორე რიგი მრუდს არა უმეტეს ორ წერტილში ჰკვეთს.

ისეთ წრფეს, რომელსაც მეორე რიგის მრუდთან საერთო აქვს მხოლოდ ერთი წერტილი, ამ მრუდის მხები ეწოდება. მაგალითად, a მრუდის მხები (t) M წერტილში განიმარტება, როგორც ზღვრული წრფე M წერტილზე გამავალი მკვეთი წრფისა, როცა ამავე წრფის მრუდთან გადაკვეთის მეორე M_1 წერტილი M წერტილისაკენ მიისწრაფვის (ნახ. 97).



ნახ. 97.

ნებისმიერი ბრტყელი მრუდის a M და M_1 წერტილებში გაავლოთ t და t_1 მხეებები. ამავე წერტილებში ავაგოთ n და n_1 ნორმალები და დავნიშნოთ მათი გადაკვეთის O წერტილი (ნახ. 98).



ნახ. 98.

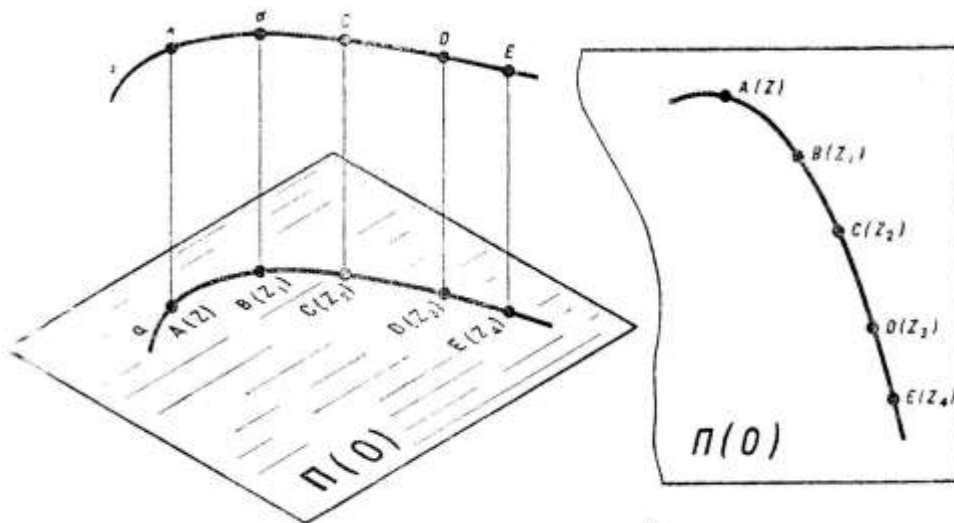
რადგან $t \perp n$ და $t_1 \perp n_1$, n და n_1 ნორმალებს შორის მოთავსებული ϕ კუთხე t და t_1 მხეების გადაკვეთით შექმნილი γ კუთხის ტოლი იქნება. თუ M_1 წერტილს გადავაადგილებთ M წერტილთან შეთავსებამდე, n_1 ნორმალიც იმოძრაებს და ამ მოძრაობისას n უძრავ ნორმალს სხვადასხვა წერტილში გადაკვეთს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ასეთი გადაადგილების დროს ნორმალების გადაკვეთის O წერტილი n უძრავ ნორმალიზე მოძრაობს და მიისწრაფვის ამავე ნორმალიზე მდებარე L ზღვრული წერტილისაკენ. L წერტილი წარმოადგენს a მრუდის სიმრუდის ცენტრს M წერტილში, ხოლო LM მონაკვეთი, ამავე M

წერტილში a მრუდის სიმრუდის რადიუსია. მრუდის ფორმის მიხედვით მის თითოეულ წერტილს გარკვეული სიმრუდის ცენტრი და რადიუსი შეესაბამება.

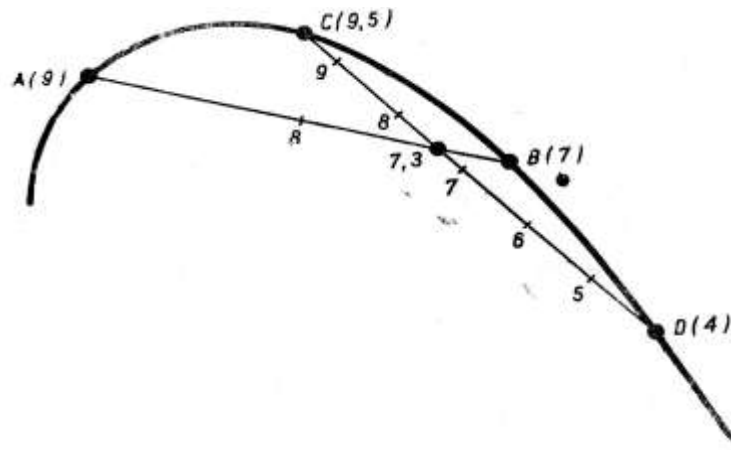
2. ბრტყელი მრუდების გეგმილის აგება.

რაიმე a მრუდის ნებისმიერი A წერტილის მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება მისი ნიშნულიანი გეგმილით – $A(Z)$. ამის შედეგად, ნახაზზე მრუდის გრაფიკულად მოცემისათვის, ზოგად შემთხვევაში, სავსებით საკმარისია მოცემული იყოს ამ მრუდის რამდენიმე მახასიათებელი წერტილის ნიშნულიანი გეგმილი (ნახ. 100).

ამასთან, შევნიშნოთ, რომ ზოგად შემთხვევაში მრუდის ნიშნულებიანი გეგმილი მრუდის სახის (ბრტყელი თუ სივრცითი) დადგენის უშუალო შესაძლებლობას არ იძლევა. მოცემული მრუდის მიახლოებითი შემოწმებისათვის საკმარისია ქორდებით შევაერთოთ მისი რამდენიმე წერტილი (ნახ. 101) და გამოვარკვიოთ ამ ქორდების ურთიერთგანლაგება: თუ ისინი იკვეთებიან, მრუდი ბრტყელია, წინააღმდეგ შემთხვევაში – სივრცითი. 101-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მრუდი ბრტყელია (მიახლოებით), რადგამ აღებული ქორდები ურთიერთგადაკვეთილ AB და CD წრფეებს წარმოადგენს. რასაკვირველია, რაც მეტს ავიღებთ ასეთი ქორდების წყვილებს, მით უფრო ზუსტად დავადგენთ მოცემული მრუდის სახეს.



ნახ. 100.

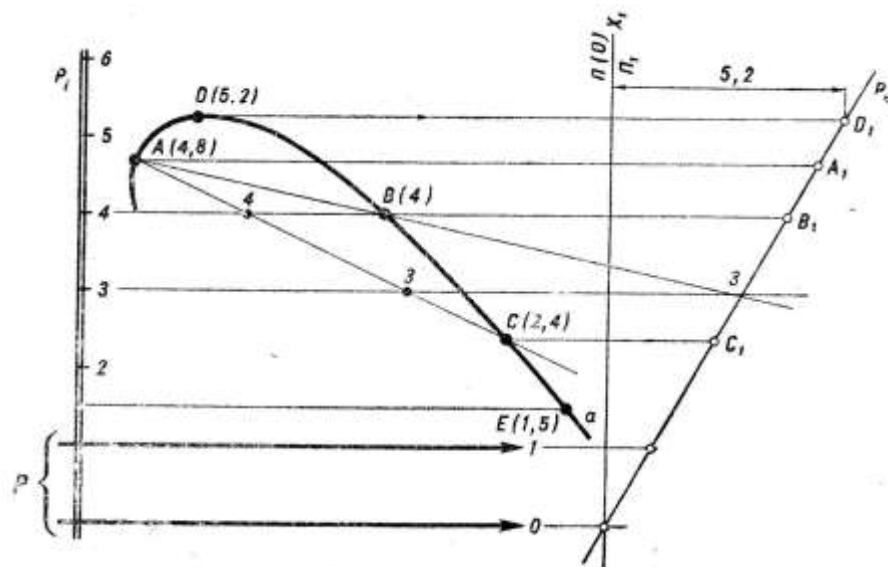


ნახ. 101.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ბრტყელი a მრუდი (ნახ. 106). ცნობილია მისი სამი წერტილი (A , B , C). ამ მრუდის ნებისმიერი წერტილის ნიშნულის განსაზღვრისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი ორი გზით:

ა) შევცვალოთ გეგმილთა სიბრტყე ისე, რომ A , B და C წერტილებით მოცემულ P სიბრტყეს მდებარეობა მიეცეს. a მრუდის ნებისმიერი D წერტილის ახალი გეგმილი x_1 სისტემაში P_{Π_1} კვალთან იქნება შეთავსებული, ხოლო D_1 გეგმილის დაშორება x_1 ღერძიდან (5,2) a მრუდის D წერტილის ნიშნული იქნება ძველ სისტემაში.

ბ) ავაგოთ ABC სიბრტყის ქანობის მასშტაბი (ნახ. 102). ამისათვის საკმარისია AB და BC წრფეების დაგრადუირება. a მრუდის ნებისმიერი E წერტილის ნიშნულის განსაზღვრისათვის ამ წერტილზე გავავლოთ დამხმარე პერიზონტალი და ქანობის მასშტაბის საშუალებით ვიპოვოთ მისი ღონის ნიშნული.

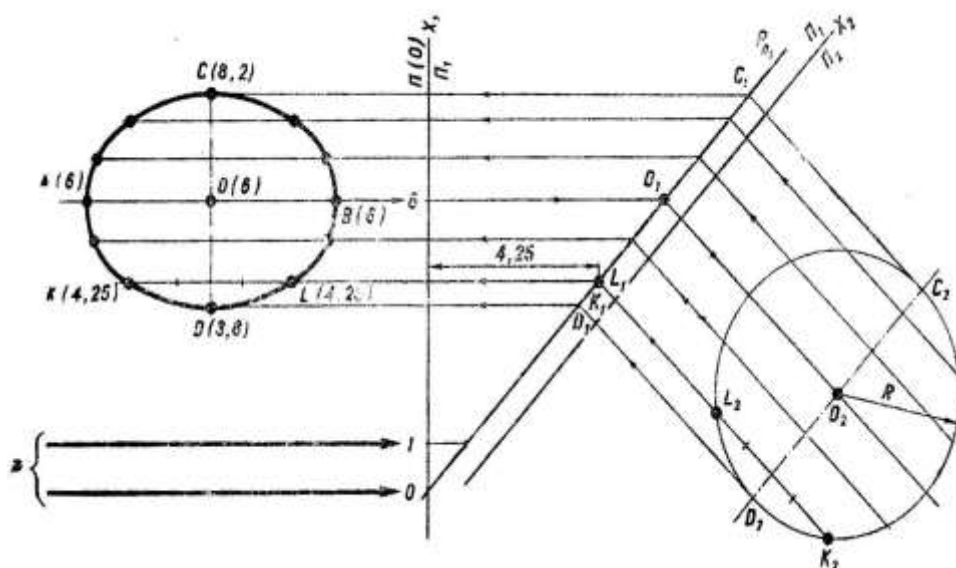


ნახ. 102.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ ბრტყელი მრუდები, როცა მათი სიბრტყე მაგვგმილებელია, წრფეების სახით გვეგმილდებიან. თუ ბრტყელი მრუდის სიბრტყე გვეგმილთა სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მრუდის გვეგმილი თვით მრუდის კონგრუენტული გამოდის.

წრეწირის ნიშნულიანი გეგმილი ზოგად შემთხვევაში ელიფსს წარმოადგენს, ხოლო კერძო შემთხვევაში იმავე რადიუსიან წრეწირს (როცა წრეწირის სიბრტყე დონის სიბრტყეა) ან მისი დიამეტრიც ტოლ წრფის მონაკვეთს (როცა წრეწირის სიბრტყე მაგეგმილებელია).

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა, ეთქვამთ, მოცემულია წრეწირის სიბრტყე (ჰორიზონტალუბით), ცენტრი და რადიუსი (ნახ. 103). ასეთი წრეწირის გეგმილის ასაგებად გამოვიყენოთ გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხი. ორჯერადი შეცვლით წრეწირის სიბრტყე დონის სიბრტყედ გადავაქციოთ. x_1 სისტემაში O_2 წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან მოცემული R რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი (მოცემული R -რადიუსიანი წრეწირი აქ ამავე რადიუსიან წრეწირად დაგეგმილება). ამ ახალ სისტემაში R -რადიუსიანი წრეწირის K_2D_2 ქორდა ჰორიზონტალს წარმოადგენს. იგივე ქორდა x_1 სისტემაში მაგეგმილებელი წრფეა, ხოლო ძველ სისტემაში – ისევ ჰორიზონტალი, K_2 და L_2 წერტილები წრეწირის C_2D_2 დიამეტრიც მიმართ, რომელიც P სიბრტყის უდიდესი ვარდნილობის წრფეს წარმოადგენს, განლაგებულია სიმეტრიულად.

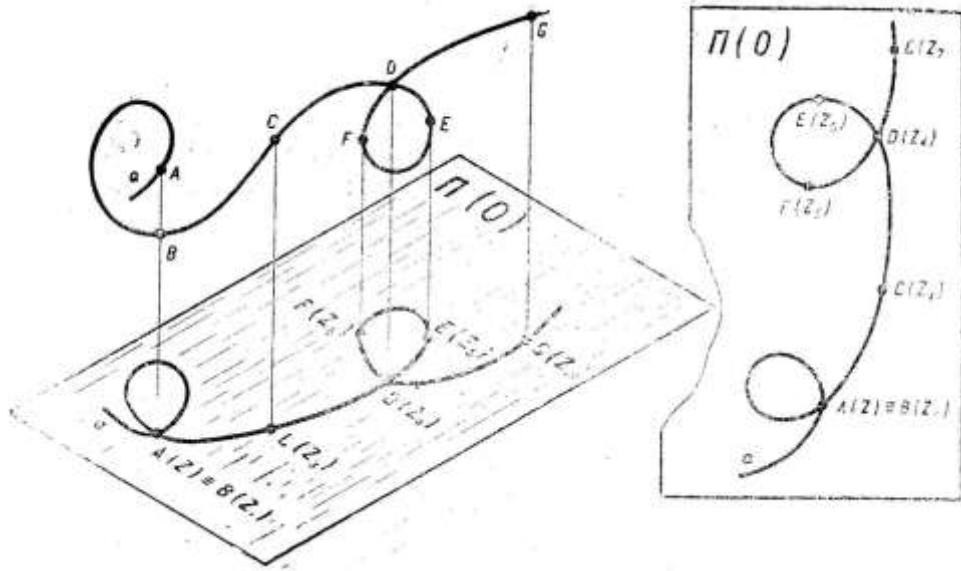


686. 103.

ეს სიმეტრია დაცული იქნება ძველ სისტემაშიც. ამიტომ ჩვენ შევძლებთ K და L წერტილების აგებას ძველ სისტემაში, ანალოგიურად აიგება ყველა დანარჩენი წერტილი. მათი შეერთებით კი მივიღებთ მოცემული წრეწირის გეგმილს.

3. სივრცითი მრუდის გეგმილის აგება

სივრცითი მრუდის დაგეგმილება, ანუ მისი მოცემა ეგმაზე ჩვეულებრივი წესით ხორციელდება. ვირჩევთ მის მახასიათებელ წერტილებს, ეპოულობთ მათ გეგმილებს ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე და მრუდე წირით ვაერთებთ (ნახ. 104).



ნახ. 104

საყურადღებოა მრუდის განსაკუთრებული წერტილების გეგმაზე გამორჩევის საკითხი. მაგალითად, a მრუდის A და B წერტილები, მიუხედავად იმისა, რომ მრუდის სხვადასხვა ადგილზე მდებარეობენ და ჩვეულებრივ წერტილებს წარმოადგენენ, გეგმაზე ერთ წერტილში არიან შეთავსებული. გეგმილზე ანალოგიურ სურათს იძლევა D განსაკუთრებული წერტილიც. ამ შემთხვევაში ერთმანეთისაგან განსხვავებისათვის ყურადღება უნდა მიექცეს გამოსარკვევი წერტილების ნიშნულებს.

§12. მრუდე ზედაპირების ზოგადი კლასიფიკაცია

1. ძირითადი ცნებები.

მსახველობით გეომეტრიაში, უმეტესად, ზედაპირების წარმოქმნის კინემატიკური ხერხით სარგებლობენ. ამ შემთხვევაში ზედაპირი განიხილება, როგორც რაიმე წირის (მსახველის) სივრცეში უწყვეტად მოძრაობის შედეგი. მსახველმა რომ კანონზომიერად იმოძრაოს, მოძრაობის ნებისმიერ მომენტში მას წინასწარ გარკვეული მდებარეობა უნდა ჰქონდეს, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოძრავი მსახველი რაიმე წირებს უნდა ეყრდნობოდეს და მოძრაობის ყოველ

მომენტში წინასწარ ცნობილ პირობებს აკმაყოფილებდეს. მსახველის ასეთნაირი კანონზომიერი მოძრაობის შემთხვევაში კანონზომიერი, ანუ წესიერი ზედაპირი მიიღება. თუ მსახველის მოძრაობა შემთხვევითია, მაშინ ზედაპირიც შემთხვევითი, ანუ არაწესიერი იქნება.

მსახველის მოძრაობის დროს ორ უმთავრეს შემთხვევას განიხილავენ: 1) როცა მსახველი თავისი მოძრაობის ყველა მომენტში ინარჩუნებს პირვანდელ ფორმას და 2) როცა მისი ფორმაც და მდებარეობაც უწყვეტად ცვალებადია. ამრიგად, კიმენატიკური ზედაპირის სახე დამოკიდებულია მსახველის ფორმაზე და მისი სივრცეში გადაადგილების კანონზე. ამასთან დაკავშირებით, კინემატიკური ზედაპირის ყოველი კლასისათვის, ჩვეულებრივ, მოცემულია ე.წ. წინასწარი განსაზღვრა. ამ განსაზღვრაში მითითებულია მსახველის ფორმა და სივრცეში მისი მოძრაობის კანონი.

ზედაპირის ელემენტების ერთობლიობას, რომელიც მოცემულ ზედაპირს გამოჰყოფს (გამოარჩევს) ყველა სხვა სახის ზედაპირებისაგან, ზედაპირის განმსაზღვრელი ეწოდება.

ვიდრე უშუალოდ ზედაპირების გეგმილების აგებაზე გადავიდოდეთ, ზედაპირების ნახაზზე მოცემის საკითხთან დაკავშირებით შეგვიძლია გამოვთქვათ შემდეგი წინასწარი მოსაზრება: ზედაპირის მოცემისათვის საკმარისია ნახაზზე განისაზღვროს ამ ზედაპირის განმსაზღვრელი ელემენტების გეგმილები. ზედაპირის ასეთნაირი გრაფიკული მოცემის დროს სრული შესაძლებლობა გვექნება ამ ზედაპირზე გადავწყვიტოთ ნებისმიერი პოზიციური და მეტრული ხასიათის ამოცანები.

ეხლა კი შევეხოთ მრუდე ზედაპირების კლასიფიკაციის საკითხს.

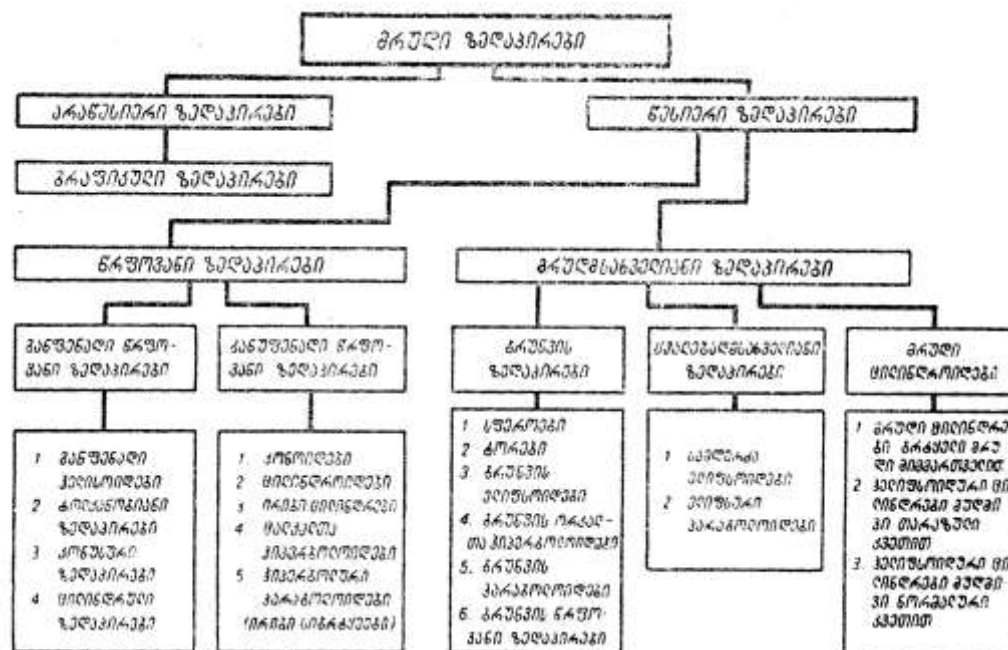
2. მრუდე ზედაპირების კლასიფიკაცია

მრუდე ზედაპირების კლასიფიკაციის სხვადასხვა სქემები არსებობს. ჩვენ ვისარგებლოთ პროფ. ე. მჭედლიშვილისა და პროფ. გ. ვაჩნაძის მიერ რეკომენდებული სქემით (ნახ. 105).

ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ მრუდე ზედაპირების ნაჩვენები კლასიფიკაცია დამყარებულია მსახველთა ფორმაზე და მათ სხვადასხვანაირ მოძრაობაზე.

კლასიფიკაციაში აღნიშნული ზედაპირებიდან ნებისმიერი ზედაპირის აგება შეიძლება ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდით. მომდევნო პარაგრაფში ჩვენ

განვიხილავთ, პრაქტიკაში შედარებით უფრო გავრცელებული, წესიერი მრუდე ზედაპირების გეგმილის აგებას.



ნახ. 105.

ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ მრუდე ზედაპირების ნაჩვენები კლასიფიკაცია დამყარებულია მსახველთა ფორმაზე და მათ სხვადასხვანაირ მოძრაობაზე.

კლასიფიკაციაში აღნიშნული ზედაპირებიდან ნებისმიერი ზედაპირის აგება შეიძლება ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდით. მომდევნო პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ, პრაქტიკაში შედარებით უფრო გავრცელებული, წესიერი მრუდე ზედაპირების გეგმილის აგებას.

§13. ზოგიერთი სახის წესიერი მრუდე ზედაპირები და მათი გეგმილის აგება

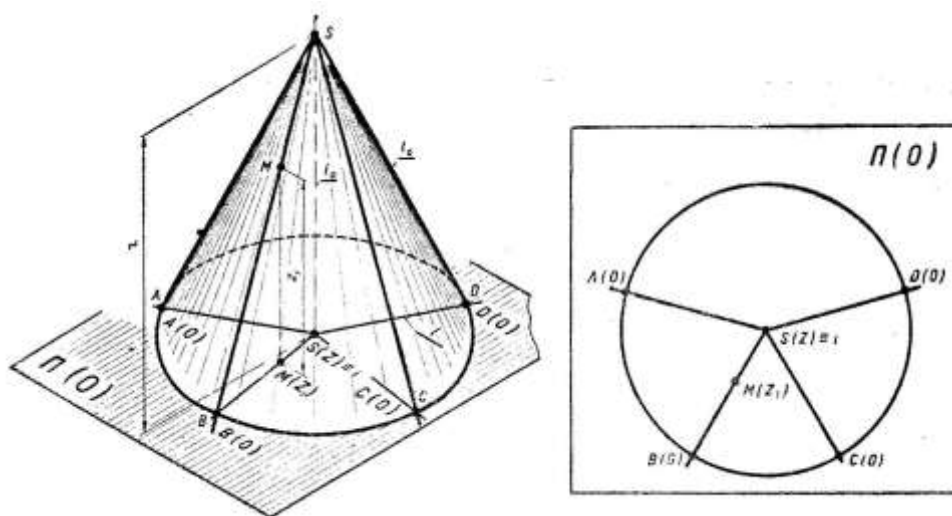
1. კონუსური ზედაპირის გეგმილის აგება.

კონუსური ზედაპირი განფენადი წრფოვანი ზედაპირების ჯგუფს ეკუთვნის.

კონუსური ზედაპირის გეგმილის ასაგებად საკმარისია ნახაზზე მოცემული იყოს წვერო და მიმართველი მრუდის გეგმილი.

განვიხილოთ 106-ე ნახაზი. აქ ნაჩვენებია მართი წრიული კონუსის ნიშნულიანი გეგმილის აგება. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ჩვენ შეგვიძლია გეგმაზე, რომელზედაც მოცემულია კონუსის მიმართველი (წრეწირი) და წვერო

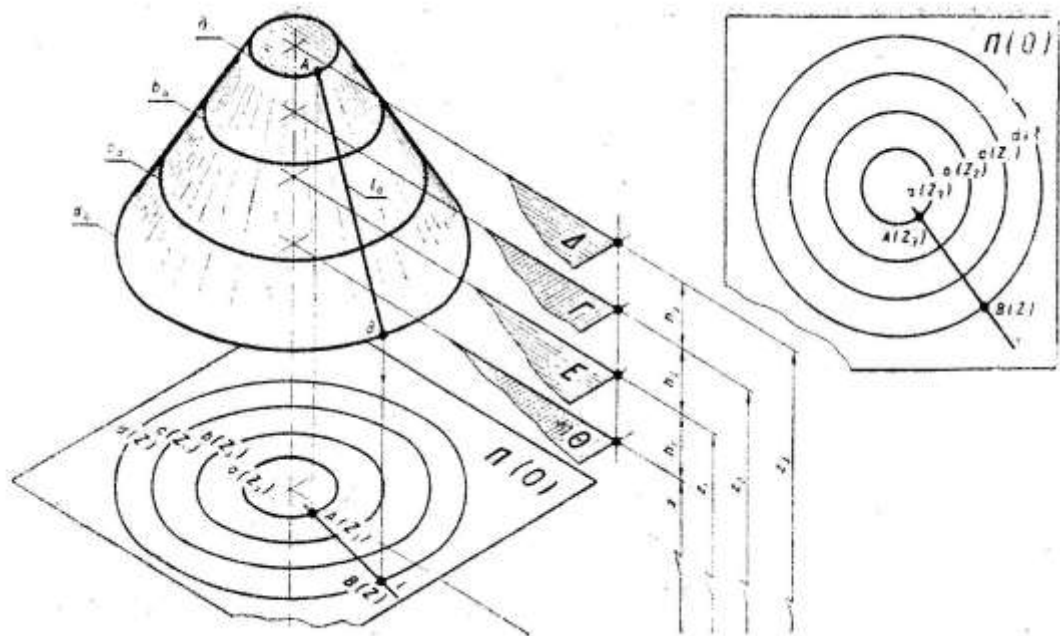
(S), განსაზღვროთ მის ზედაპირზე აღებული ნებისმიერი წერტილის (M) მდებარეობა.



ნახ. 106.

107-ე ნახაზზე ნახვენებია მართი, წრიული კონუსის დაგეგმილების კიდევ ერთი ვარიანტი, მოცემული კონუსი გადაკვეთილია ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით დაშორებული დონის სიბრტყეებით (ფუძის სიბრტყე გეგმილთა სიბრტყის პარალელურია). კვეთაში მიღებული წრეწირების ($a_0, b_0, c_0, \dots$) დაგეგმილებით კი მიღებულია კონუსის გეგმილი. წინა შემთხვევის ანალოგიურად ამ შემთხვევაშიც მოცემული კონუსის ზედაპირზე აღებული ნებისმიერი წერტილის გეგმაზე განსაზღვრის სრული შესაძლებლობა გვეძლევა.

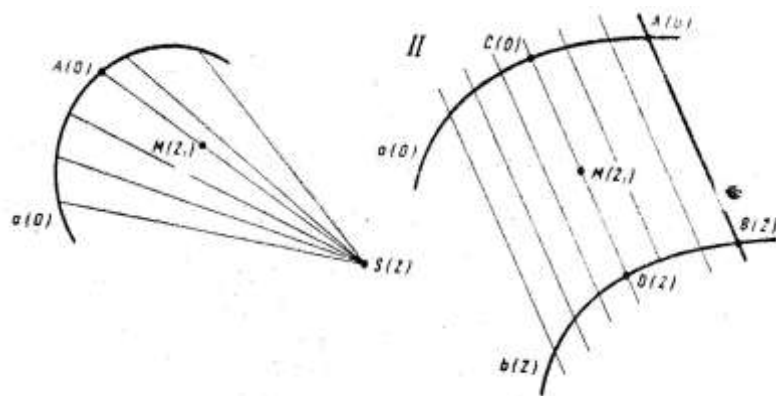
დახრილი კონუსის მოცემისათვის საკმარისია გეგმაზე მოცემული იყოს ამ კონუსის წვერო და მიმმართველი (ნახ. 108-I). მის ზედაპირზე აღებული ნებისმიერი M წერტილის განსაზღვრისათვის სავსებით საკმარისია ამ წერტილზე გავატაროთ მსახველი (SA) და დავაგრადუიროთ იგი.



ნახ. 107.

2. ცილინდრული ზედაპირის გეგმილის აგება

ცილინდრული ზედაპირიც განფენადი წრფოვანი ზედაპირების ჯგუფს ეკუთვნის. ცილინდრული ზედაპირის გეგმილის ასაგებად საკმარისია მოცემული იყოს მიმართველი და ერთ-ერთი მსახველი (ნახ. 108-II).



ნახ. 108.

ვთქვათ, მოცემულია გეგმილთა სიბრტყეზე მდებარე a მრუდი და მსახველი $A(O)B(Z)$. a მრუდის ნებისმიერ წერტილზე მოცემული მსახველის პარალელურად გატარებული ყოველი წრფე ამ ზედაპირის მსახველი იქნება. ასეთნაირად მოცემულ ცილინდრულ ზედაპირზე მდებარე ნებისმიერი M წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია ამ წერტილზე გაავლოთ დამხმარე მსახველი (CD) და დაეაგრადუიროთ იგი.

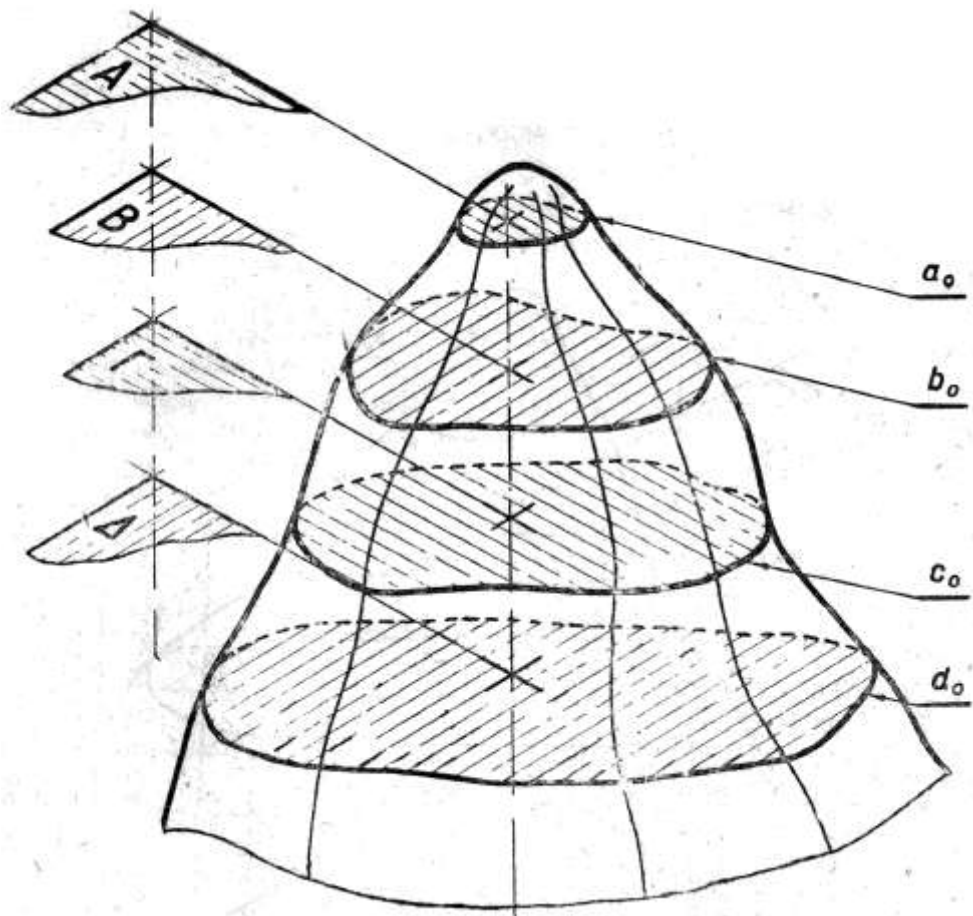
მეექვსე თავი

ტოპოგრაფიული ზედაპირი

§15. ტოპოგრაფიული ზედაპირი და მისი გეგმილის აგება

1. ტოპოგრაფიული ზედაპირი

წინა თავში, როდესაც მრუდე ზედაპირების კვალიფიკაციას ვიხილავდით, ავირჩიეთ ზედაპირების ის კლასიფიკაცია, რომელიც დამყარებულია მსახველების ფორმაზე და მათ ნაირგვაროვან მოძრაობაზე. ვნახეთ, რომ არსებობს ზედაპირების ერთი ჯგუფი, რომელთა მსახველების ფორმა და მოძრაობა შემთხვევითია. ერთი ჯგუფი, რომელთა მსახველების ფორმა და მოძრაობა შემთხვევითია. ასეთ ზედაპირებს, ვინაიდან მათი გამოსახვა ძირითადად მხოლოდ გრაფიკული ხერხების საშუალებით შეიძლება მხაზველობით გეომეტრიაში გრაფიკულ ზედაპირებს უწოდებენ. ამ ზედაპირებს უმეტეს წილად ტოპოგრაფიაში იყენებენ. ამის გამო, გრაფიკული ზედაპირები ლიტერატურაში ტოპოგრაფიული ზედაპირების სახელითაა ცნობილი.



ნახ. 109.

ტოპოგრაფიული ზედაპირის წარმოქმნა ასეთნაირად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ (ნახ. 109): ავიღოთ ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებზე (A, B, Γ, Δ,...) მდებარე $a_0, b_0, c_0, \dots$ შემთხვევითი ფორმის მრუდები. თუ ეს მრუდები ერთმანეთისაგან საკმაოდ მცირე მანძილით იქნებიან დაშორებული, მაშინ ამ მრუდების ერთობლიობა განსაზღვრავს შემთხვევითი ფორმის ზედაპირს, რომელსაც გრაფიკული ანუ ტოპოგრაფიული ზედაპირი ეწოდება.

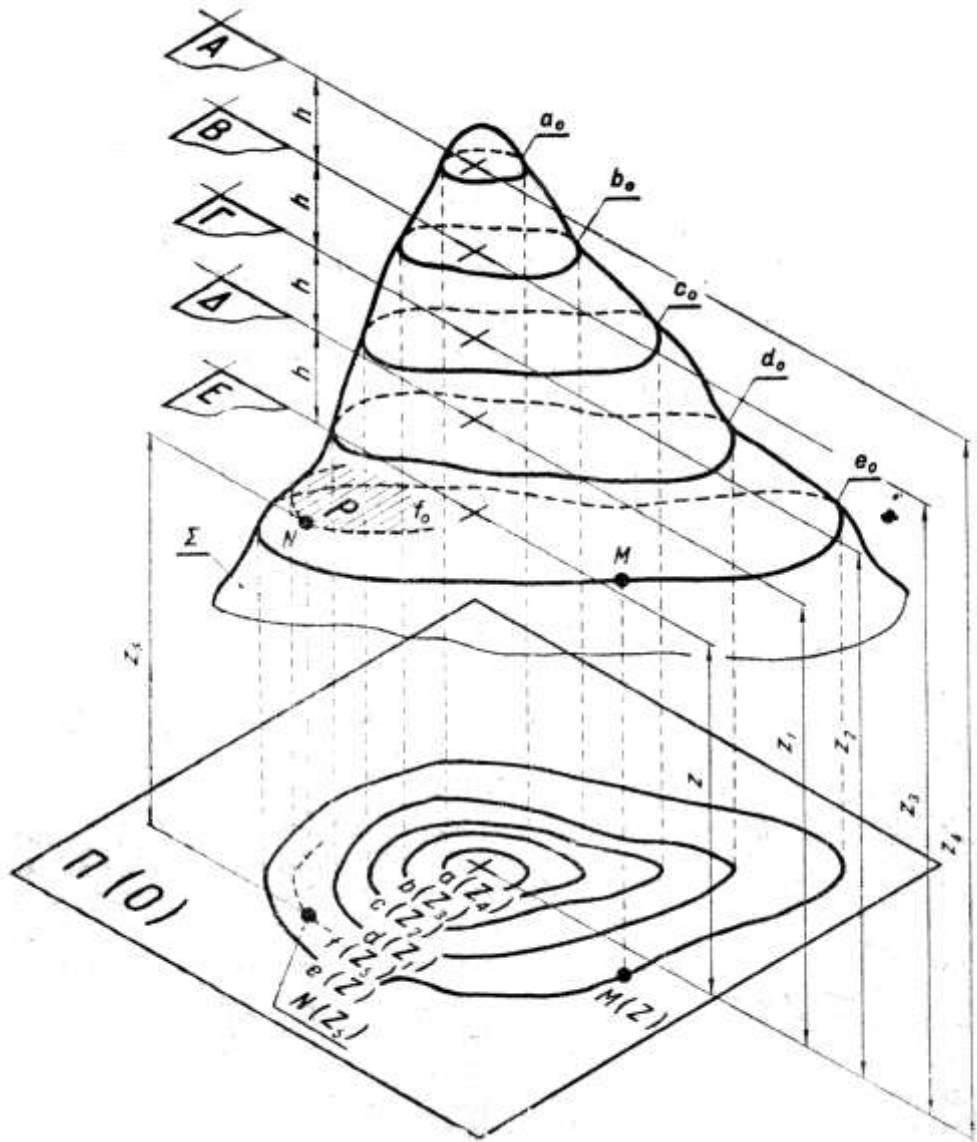
მხაზველობითი გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ზედაპირი ზოგჯერ შეიძლება მოცემული იყოს ამ ზედაპირზე მდებარე წირების გარკვეული ერთობლიობით. ასეთი წირების ერთობლიობას ზედაპირის კარკასი ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ კარკასით მოცემული ზედაპირი მთლიანად განსაზღვრულად არ ჩაითვლება, რადგანაც შესაძლებელია ერთმანეთისაგან რამდენადმე განსხვავებულ ზედაპირებს ერთნაირი კარკასი ჰქონდეს. ამიტომ, ზედაპირის მოცემის ასეთი ხერხი აღებულ ზედაპირს მხოლოდ მიახლოებით განსაზღვრავს. მიუხედავად ამისა, კარკასის ხერხი ტოპოგრაფიული ზედაპირის მოცემის ყველაზე გამართლებული და გავრცელებული ვარიანტია.

ტოპოგრაფიული ზედაპირის გამოხაზვის დროს კარკასის წირებად შემოხსენებული $a_0, b_0, c_0, \dots$ მრუდები მიიღება.

2. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გეგმილის აგება

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე Σ ტოპოგრაფიული ზედაპირი (ნახ. 110). ამ ზედაპირის გეგმილის ასაგებად წარმოვიდგინოთ, რომ იგი გადაკვეთილია ძირითადი გეგმილთა სიბრტყის პარალელური და ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით (h) დაშორებული სიბრტყეებით. ყოველი სიბრტყე ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთაში მოგვცემს მრუდს, რომლის თითოეული წერტილის დაშორება ძირითადი გეგმილთა სიბრტყიდან ერთნაირი იქნება. ამ მრუდებს იზოჰიფსები ეწოდება.

ტოპოგრაფიული ზედაპირის გეგმილის აგება ნიშნავს ამ ზედაპირის მკვეთ პარალელურ სიბრტყეებში მოთავსებული კვეთების ანუ იზოჰიფსების დაგეგმილებას. აქ გავიხსენოთ, რომ ბრტყელი მრუდის გეგმილის ასაგებად საკმარისია ნახაზზე მოცემული იყოს ამ მრუდის მახასიათებელი წერტილების რიგი.



ნახ. 110.

როგორც ვიცით, ზედაპირი განსაზღვრულია, თუ ნახაზზე შესაძლებელია განისაზღვროს ამ ზედაპირის ყოველი წერტილი. ამასთან დაკავშირებით გამოვარკვიოთ მოცემულ ზედაპირზე მდებარე ორი ნებისმიერი წერტილის (M და N) განსაზღვრის პირობები. M წერტილი მოთავსებულია E სიბრტყეში მდებარე e_0 იზოჰიფსზე. ამის გამო, მისი გეგმილი მოთავსებული იქნება ამავე იზოჰიფსის გეგმილზე, ხოლო ნიშნული განისაზღვრება იზოჰიფსის დონის მიხედვით. N წერტილი არ ემთხვევა არცერთ მკვეთ სიბრტყეს. ამიტომ ამ წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის გავატაროთ მასზე დამატებითი მკვეთი სიბრტყე (P). ავაგოთ ამის შედეგად მიღებული დამატებითი იზოჰიფსის (f_0) გეგმილი ($f(Z_5)$). ამის შემდეგ N წერტილის მდებარეობა M წერტილის ანალოგიურად იქნება განსაზღვრული.

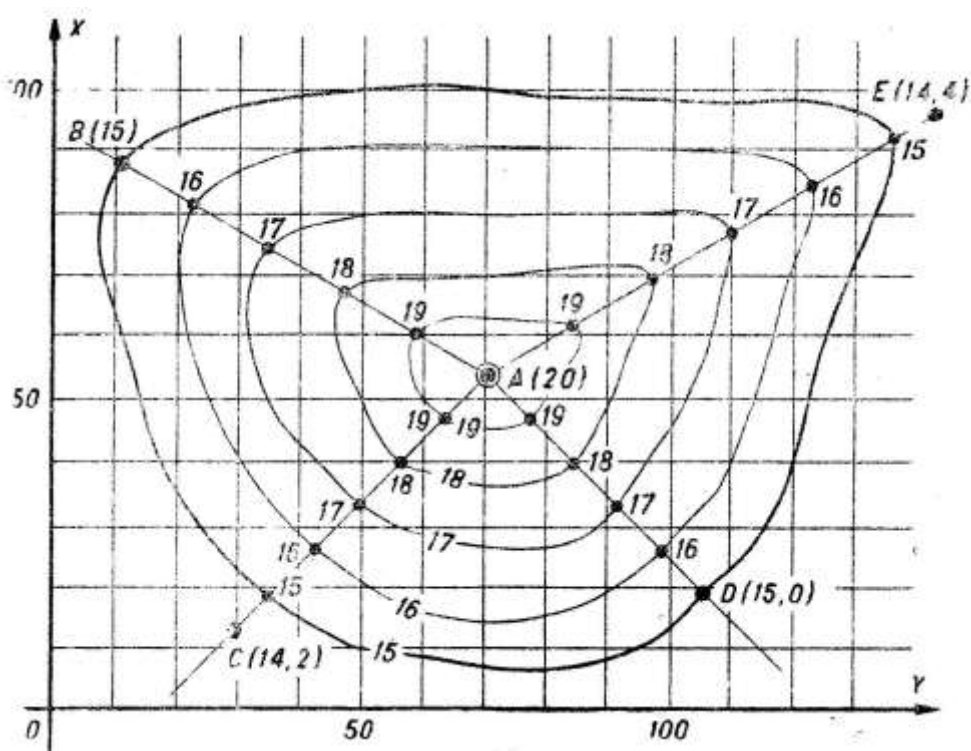
ჩვენ დაეუშვათ, რომ იზოჰიფსები ბრტყელი მრუდებია. ეს დაშვება, მაგალითად, დედამიწის რელიეფის გამოსახვის შემთხვევაში, მხოლოდ მცირე უბნებისათვის ვრცელდება. დედამიწის ზედაპირზე მდებარე წერტილების აბსოლუტური სიმაღლეები ზღვის დონიდან განისაზღვრება. ამიტომ დედამიწის რელიეფის დიდი უბნების (როცა უბნის სიგრძე-სიგანე 20 კმ-ს აღემატება) გამოსახვის დროს იზოჰიფსები სივრცით მრუდებს წარმოადგენს.

3. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გამოსახვა იზოჰიფსებით

პრაქტიკულად ტოპოგრაფიული ზედაპირის გეგმაზე გამოსახაზავად საჭიროა წინასწარ ცნობილი იყოს გამოსახაზავი ზედაპირის მახასიათებელი წერტილების რიგი. სამთო საქმეში ამ წერტილების კოორდინატები განისაზღვრება შესაბამისი საველე და კამერალური სამუშაოების შესრულების შედეგად. ასეთი სახის სამუშაოებთან დაკავშირებული საკითხები შეისწავლება გეოდეზიაში და სამარქშიდერო საქმეში.

ვთქვათ, ცნობილია რაიმე ტოპოგრაფიული ზედაპირის მახასიათებელი წერტილების (A, B, C, D და E) კოორდინატები (ნახ. 111). მათი საშუალებით მოიძებნება ამ წერტილების გეგმილები. ამით ნახაზზე გრაფიკულად განისაზღვრება ტოპოგრაფიული ზედაპირი. მეტი თვალსაჩინოებისა და რიგი ამოცანების ამოხსნისათვის აუცილებელი პირობების შექმნის მიზნით, ჩვეულებრივ, აგებენ მოცემული ზედაპირის იზოჰიფსებს. ამისათვის, მოცემულ წერტილებს აერთებენ წრფეებით, აგრადუირებენ ამ წრფეებს და ერთნაირი მნიშვნელობის წერტილებს აერთებენ მდოვრე მრუდე წირებით. ეს მრუდები მოცემული ზედაპირის იზოჰიფსებს წარმოადგენს. შევნიშნოთ, რომ გეგმაზე წინასწარ მოცემული წერტილების ნებისმიერი შეერთებანი, რასაკვირველია, ვარგისად ვერ ჩაითვლება.

ამასთან დაკავშირებით, არსებობს იზოჰიფსების აგების სხვადასხვა ხერხები. ეს ხერხები გეოდეზიისა და სამარქშიდერო საქმის შესწავლის ერთ-ერთი საკითხია და ამიტომ მათი აღწერა შესაბამის სახელმძღვანელოებშია დაწვრილებით გადმოცემული (იხ. 1) А.С. Чеботарев – Геодезия, 4, I, Москва. 1955, გვ. 90-98; 2) П.А. Рыжов – Проекции применяемые в геолого-маркшейдерском деле, Москва, 1951, გვ. 51-55).



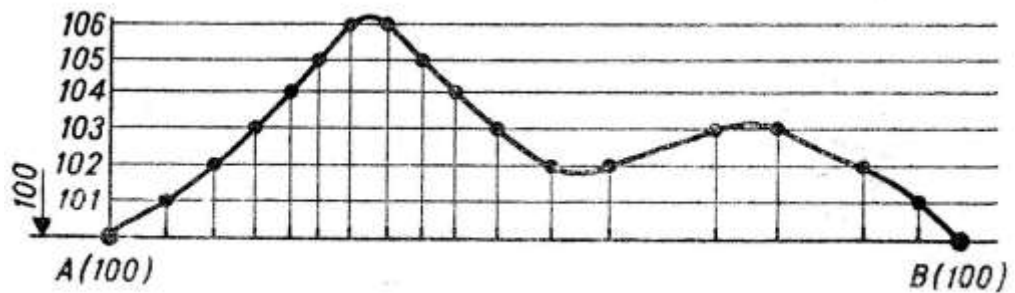
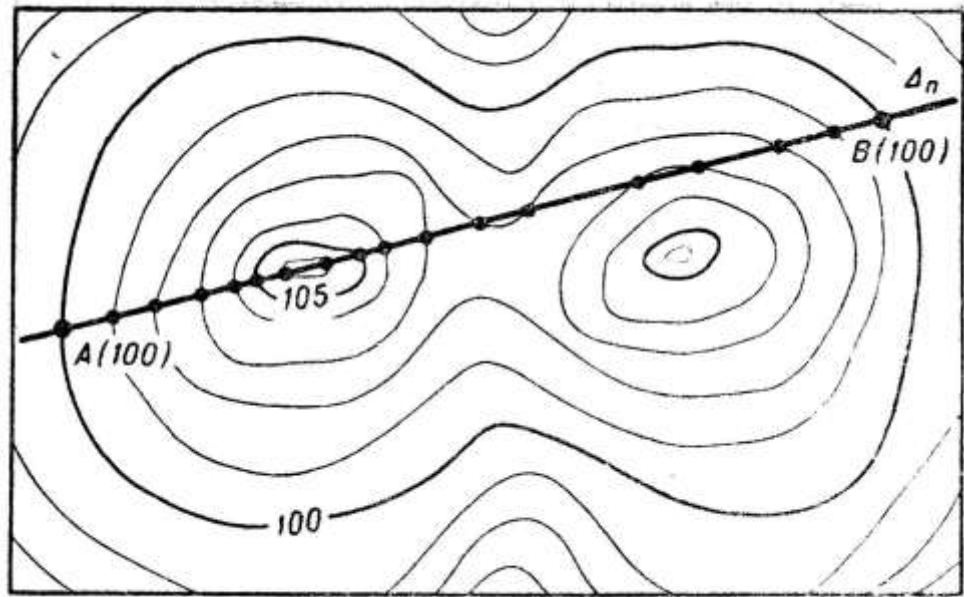
ნახ. 111.

§16. აგებანი ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე

1. ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილის აგება

რაიმე მიმართულებით ტოპოგრაფიული ზედაპირის მკაფიო დახასიათებისათვის საინჟინრო პრაქტიკაში ხშირად მიმართავენ ასეთი ზედაპირის პროფილის აგებას. ტოპოგრაფიული ზედაპირის მაგეგმილებელი სიბრტყით გადაკვეთის წირს ამ ზედაპირის პროფილი ეწოდება.

ვთქვათ, საჭიროა მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილის აგება AB მიმართულებით (ნახ. 112). წარმოვიდგინოთ, რომ AB წრფეზე გატარებულია რაიმე Δ მაგეგმილებელი სიბრტყე. დავნიშნოთ ამ სიბრტყის კეალის (Δn) ზედაპირის იზოჰიფსებთან გადაკვეთის ყველა წერტილი და მოლიანად ეს მონაკვეთი დანიშნულ წერტილებთან ერთად, გადმოვიტანოთ ნახაზის თავისუფალ ადგილზე შეუცვლელად ან რაიმე მასშტაბის გამოყენებით. დანიშნული წერტილებიდან აღვმართოთ მართობები და თითოეულ მათგანზე გადავზომოთ შესაბამისი წერტილის დონის ნიშნული. ამ გადაზომვების დროს არ არის აუცილებელი გეგმის მასშტაბის გამოყენება.

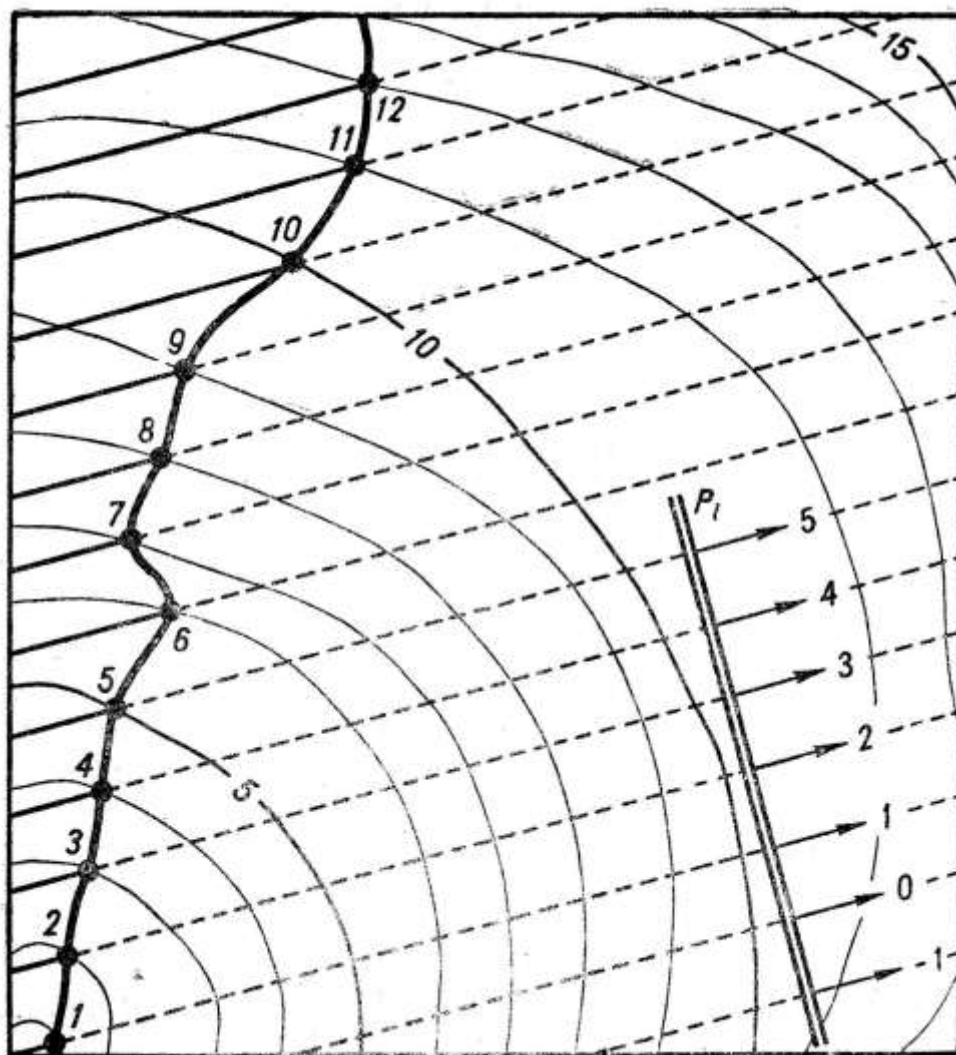


ნახ. 112.

ზოგჯერ რეკომენდებულია გადასაზომი მონაკვეთებისათვის გამაღიდებელი მასშტაბის ხმარება. მიღებული წერტილები შევაერთეთ მდოვრე მრუდე წირით. ეს მრუდე იქნება მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილი მოცემული AB მიმართულებით.

2. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთა ზოგადი მდებარეობის სიბრტყით

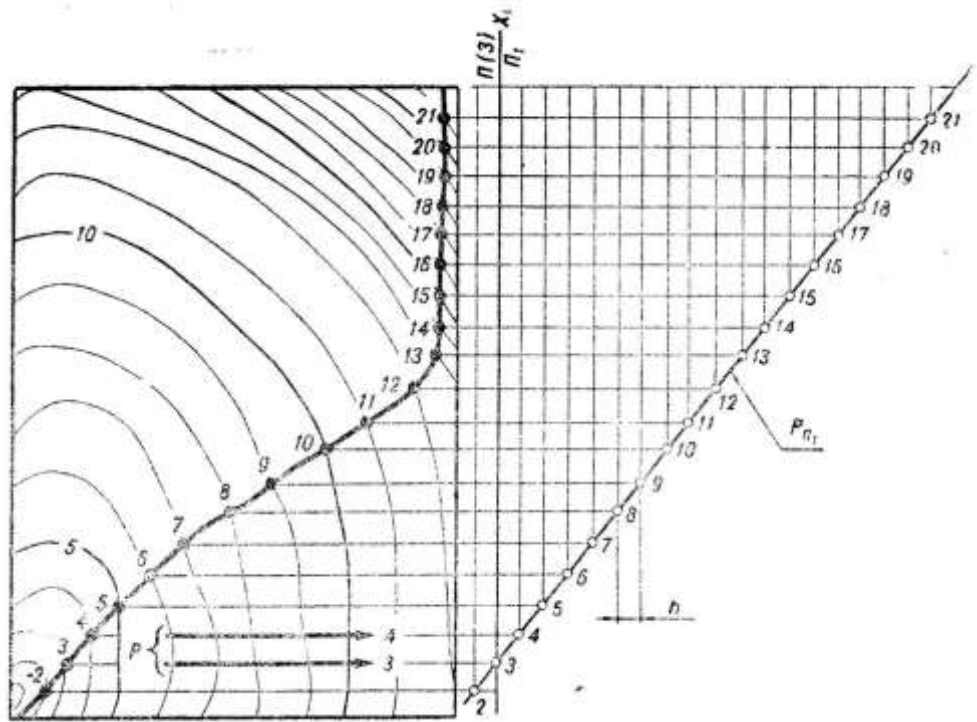
ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ტოპოგრაფიული ზედაპირი და ზოგადი მდებარეობის სიბრტყე (P). ამ სიბრტყით მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთის წირი შეიძლება განვიხილოთ როგორც სიბრტყისა და ტოპოგრაფიული ზედაპირის ერთნაირნიშნულიანი პორიზონტალებისა და იზოჰიფსების გადაკვეთის წერტილების გეომეტრიული ადგილი (ნახ. 113).



ნახ. 113.

ამ ამოცანის გადასაწყვეტად საკმარისია ავად მოცემული სიბრტყის ჰორიზონტალები (ტოპოგრაფიული ზედაპირისათვის მიღებული კვეთის სიმაღლით) და თითოეული მათგანი გადაკვეთით შესაბამისნიშნულიან იზოჰიფსთან. გადაკვეთის წერტილები შევაერთოთ მდოვრე მრუდე წირით.

როგორც განხილული მაგალითიდან ჩანს, ერთსა და იმავე ნახაზზე ერთმანეთს ემთხვევა სიბრტყისა და ტოპოგრაფიული ზედაპირის გამომსახველი ელემენტები, გარდა ამისა, თუ გვემაზე სხვა რაიმე ობიექტებიცაა გამოსახული, მაშინ დასმული ამოცანის ამოხსნა რიგ გრაფიკულ სიძნელეებს აწყდება. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ ამოცანის გადაწყვეტის სხვა ვარიანტებიც (ნახ. 114).



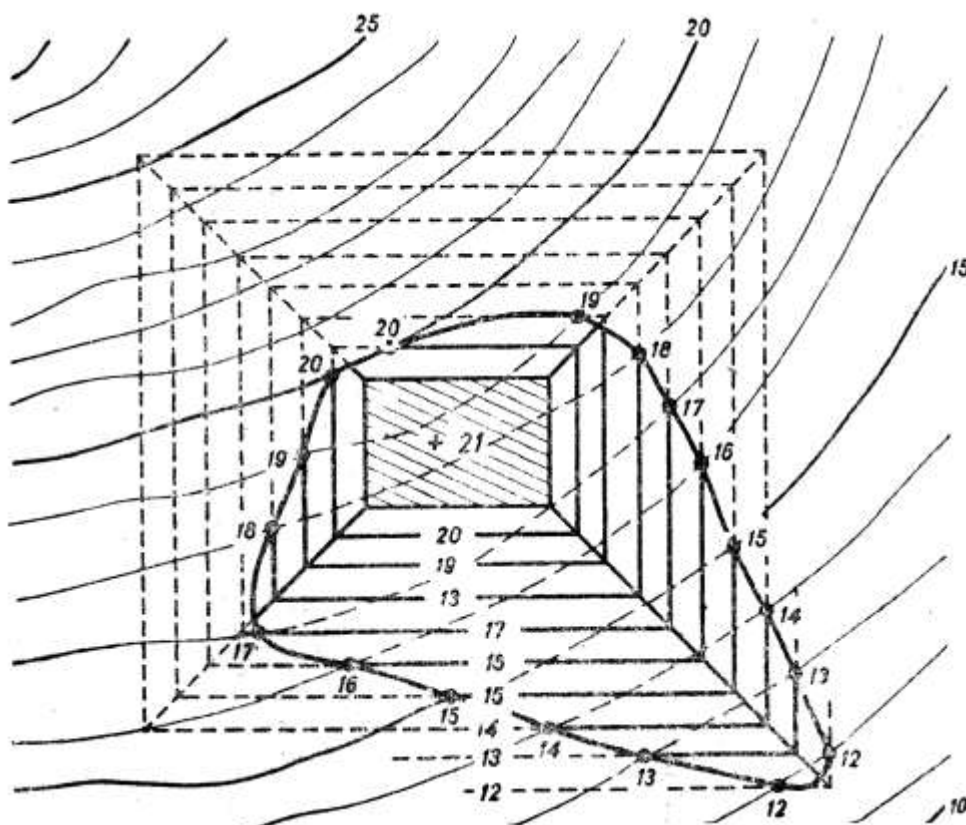
ნახ. 114.

მოცემულია ზოგადი მდებარეობის P სიბრტყე (ორი პორიზონტალი) და ტოპოგრაფიული ზედაპირი. P სიბრტყის მართობულად შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთა სიბრტყე (Π_1). ახალ სისტემაში მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის იზოჰიფსები ურთიერთპარალელური და ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით (h) დაშორებული წრფეების სახით დაგეგმილება. თითოეული ასეთი წრფის გადაკვეთა P_{Π_1} კვალთან საძიებელი წირის ერთ-ერთი წერტილის გეგმილი იქნება x_1 სისტემაში. ასეთი გზით მიღებული წერტილები დავაბრუნოთ ძველ სისტემაში. ამ წერტილების შემაერთებელი წირი მოგვცემს ამოცანის პასუხს.

3. ტოპოგრაფიული და წახნაგოვანი ზედაპირების თანაკვეთა

განვიხილოთ წაკვეთილი პირამიდისა და ტოპოგრაფიული ზედაპირის თანაკვეთის წირის აგება (ნახ. 115). ეს ამოცანა, თავის მხრივ, ტოპოგრაფიული ზედაპირის სიბრტყით გადაკვეთის ამოცანის ანალოგიურია. მოცემული პირამიდის წახნაგები წარმოვიდგინოთ როგორც ცალკეული სიბრტყეები და ავაგოთ ამ სიბრტყეების პორიზონტალები ისე, რომ კვეთის სიმაღლე მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის კვეთის სიმაღლის ტოლი იყოს. ამის შემდეგ დავნიშნოთ პირამიდის წახნაგების და ტოპოგრაფიული ზედაპირის ერთნაირნიშნულიანი პორიზონტალებისა და იზოჰიფსების გადაკვეთის

წერტილები. ეს წერტილები თანმიმდევრულად შევადგენთ მდოვრე მრუდით. მივიღებთ საძიებელი კვეთის წირს.



ნახ. 115.

4. ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე მდებარე წრფე

ვინაიდან ტოპოგრაფიული ზედაპირი არაკანონზომიერ მრუდ ზედაპირს წარმოადგენს, ამის გამო, წრფე ზოგად შემთხვევაში მას მხოლოდ მცირე უბანზე შეიძლება შეუთავსდეს.

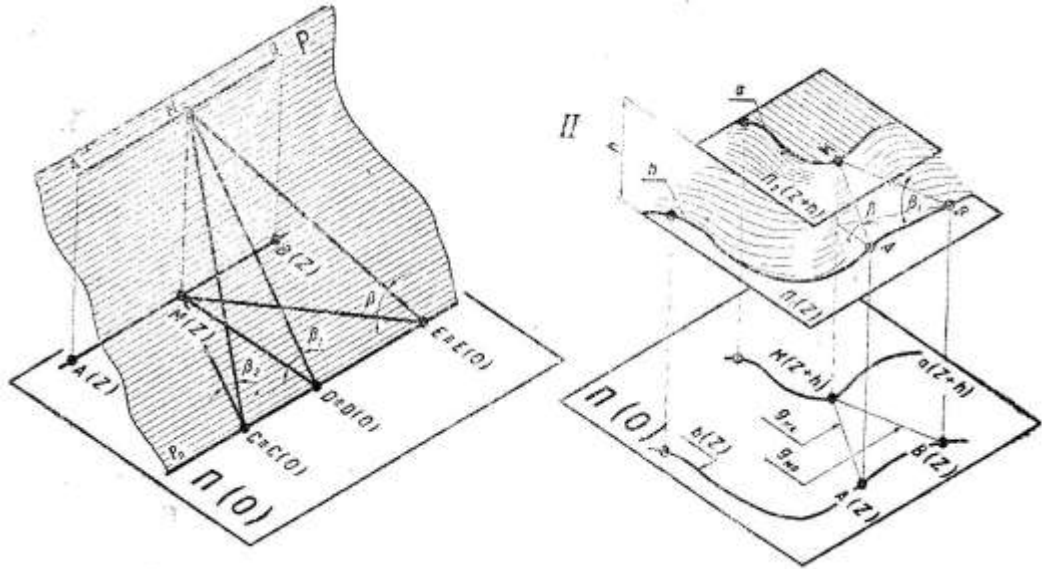
ტოპოგრაფიული ზედაპირის მცირე უბანი შეიძლება მივიღოთ სიბრტყედ. დახრილ სიბრტყეზე მდებარე რაიმე M წერტილში (ნახ. 116-I) შესაძლებელია გავლეს იქნეს ამავე სიბრტყეში მდებარე წრფეების უსასრულოდ დიდი რაოდენობა სხვადასხვანაირი დახრის კუთხეებით. მაგალითად, M წერტილზე გავლეს იქნება P სიბრტყეში მდებარე MA, MC, MD და ME წრფეები და აგებულია მათი გეგმილები. როგორც ნახაზიდან ჩანს, C, D და E წერტილები მოთავსებულია ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე და მათი სიმაღლე M წერტილისაგან Z ნიშნულითაა განსხვავებული. ეს განსხვავება აღვნიშნოთ h ასოთი ($h = Z$) და დავწეროთ ნახაზიდან გამომდინარე შემდეგი ფორმულები:

$$M(Z)E(O) = h \operatorname{ctg} \beta,$$

$$M(Z)D(O) = h \operatorname{ctg} \beta_1,$$

$$M(Z)C(O) = h \operatorname{ctg} \beta_2$$

აქედან: $M(Z)E(O) : M(Z)D(O) : M(Z)C(O) = h \operatorname{ctg} \beta : h \operatorname{ctg} \beta_1 : h \operatorname{ctg} \beta_2$. რაც უფრო დიდია ქვედებული, მით მცირეა დახრის კუთხე და პირიქით. აღებულ შემთხვევაში უმცირესი ქვედებული და უდიდესი დახრის კუთხე (β_1) გააჩნია MD წრფეს. ჩვენთვის ცნობილია, რომ ასეთ წრფეს უდიდესი ვარდნილობის წრფე ეწოდება. უდიდესი ვარდნილობის წრფე და მისი გეგმილი სიბრტყის კვალის (P_{Π}) მართობულია ($M(Z)D(O) \perp P_{\Pi}$; $MD \perp P_{\Pi}$).

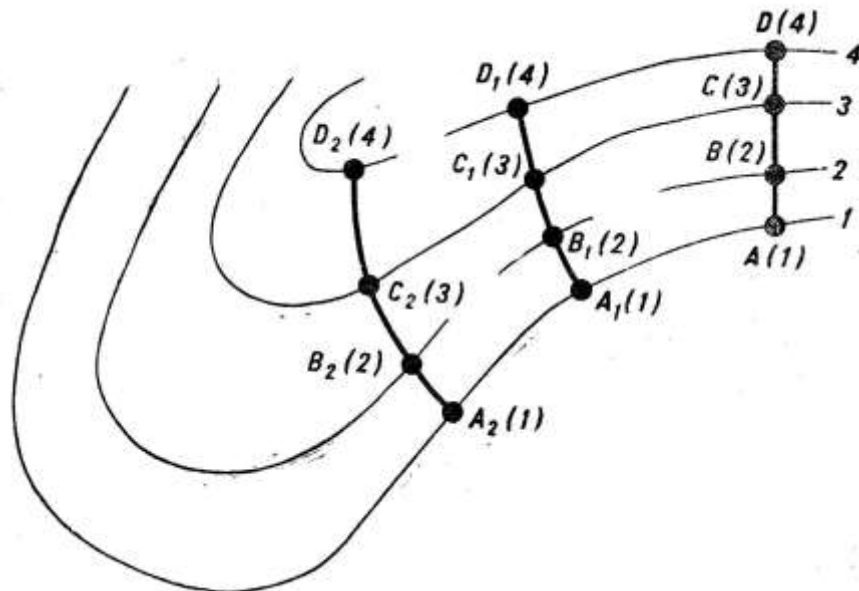


ნახ. 116.

ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე ორ იზოჰიფსს შორის მოთავსებულ მცირე უბანს ხშირად აიგივებენ სიბრტყესთან. ვთქვათ, მოცემულია ტოპოგრაფიული ზედაპირის ნაწილი (ნახ. 116-II), რომელიც ზემოდან და ქვემოდან ორი მეზობელი იზოჰიფსით არის შემოსაზღვრული. a იზოჰიფსის M წერტილი შევაერთოთ b იზოჰიფსის A და B წერტილებთან. გეგმის მიხედვით ჩვენ შეგვიძლია გრაფიკულად განვსაზღვროთ ასეთი მონაკვეთების ნამდვილი სიდიდეები და დახრის კუთხეები.

წრფეების იმ სიმრავლიდან, რომლებითაც შესაძლებელია a იზოჰიფსის M წერტილი დაუკავშირდეს b იზოჰიფსზე აღებული წერტილების რიგს, MA მონაკვეთს ექნება უდიდესი დახრის კუთხე. ეს მონაკვეთი a და b იზოჰიფსების მიმართულებათა მართობულია და წარმოადგენს უდიდესი ვარდნილობის წრფეს მოცემული ზედაპირის აღებულ ადგილზე. ამრიგად, უდიდესი ვარდნილობის წრფის მიმართულება იზოჰიფსების მიმართულების მართობულია, აქვე შევნიშნოთ, რომ ეს განმარტება ძალაშია მაშინ, როდესაც მოცემული ზედაპირის იზოჰიფსის აღებულ ადგილზე ურთიერთპარალელურნი არიან. იმ შემთხვევაში, როდესაც იზოჰიფსები ურთიერთპარალელურნი არ არიან, მაშინ

უდიდესი ვარდნილობის წრფის მიმართულება მრუდით გამოისახება. მაგალითად, (ნახ. 117) $A(1)D(4)$ წრფე იზოჰიფსების მართობული წრფეა. რაც შეეხება A_1D_1 და A_2D_2 წრფეებს, ისინი წარმოადგენენ ისეთ უდიდეს ვარდნილობის წრფეებს, რომელთა მიმართულებაც მრუდით განისაზღვრება.

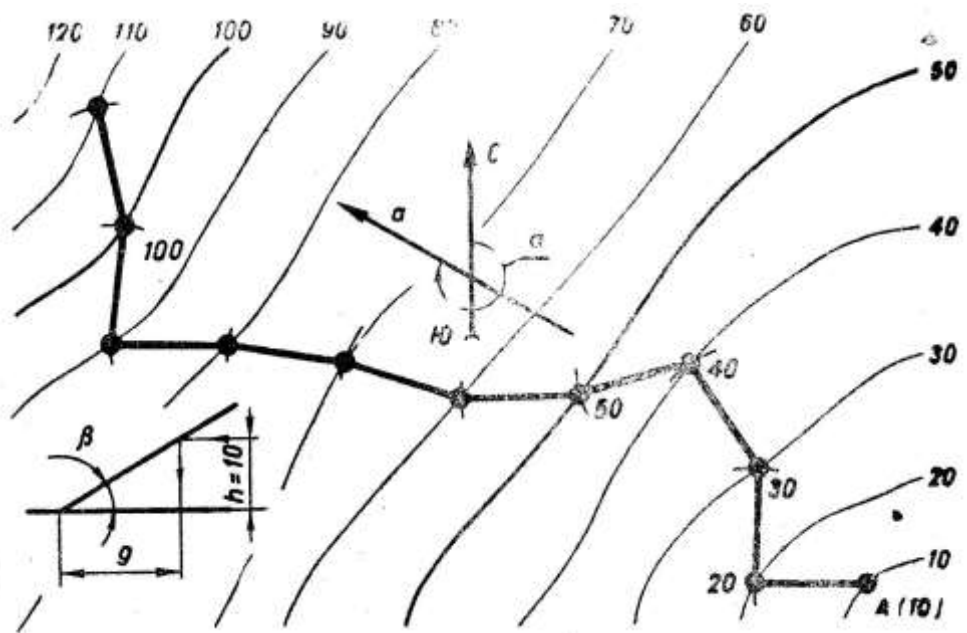


ნახ. 117.

5. მოცემული ქანობის მქონე ტეხილის აგება ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე

განვიხილოთ ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე ისეთი ტეხილის აგება, რომლის თითოეულ გვერდს წინასწარ მოცემული დახრის კუთხე ექნება (ნახ. 118).

ვთქვათ, მოცემულია ტოპოგრაფიული ზედაპირი, ასაგები ტეხილის დახრის კუთხე (β), საწყისი წერტილი (A) და მიმართულება (a). გრაფიკულად განვსაზღვროთ ასაგები ტეხილის თითოეული გვერდის ქვედებული (g). ამ ქვედებულის ტოლი რადიუსით, A წერტილიდან შემოვხაზოთ რკალი მომდევნო იზოჰიფსის გადაკვეთამდე და აღნიშნოთ მიღებული წერტილი (20). შემდეგ ამ წერტილიდან შემოვხაზოთ იგივე რადიუსიანი რკალი მომდევნო იზოჰიფსის გადაკვეთამდე (30) და ა.შ. მიღებული წერტილების თანამიმდევრობითი შეერთებით მივიღებთ ტეხილს, რომელსაც წინასწარ მოცემული დახრის კუთხის (β) შესაბამისი ქანობი ექნება.

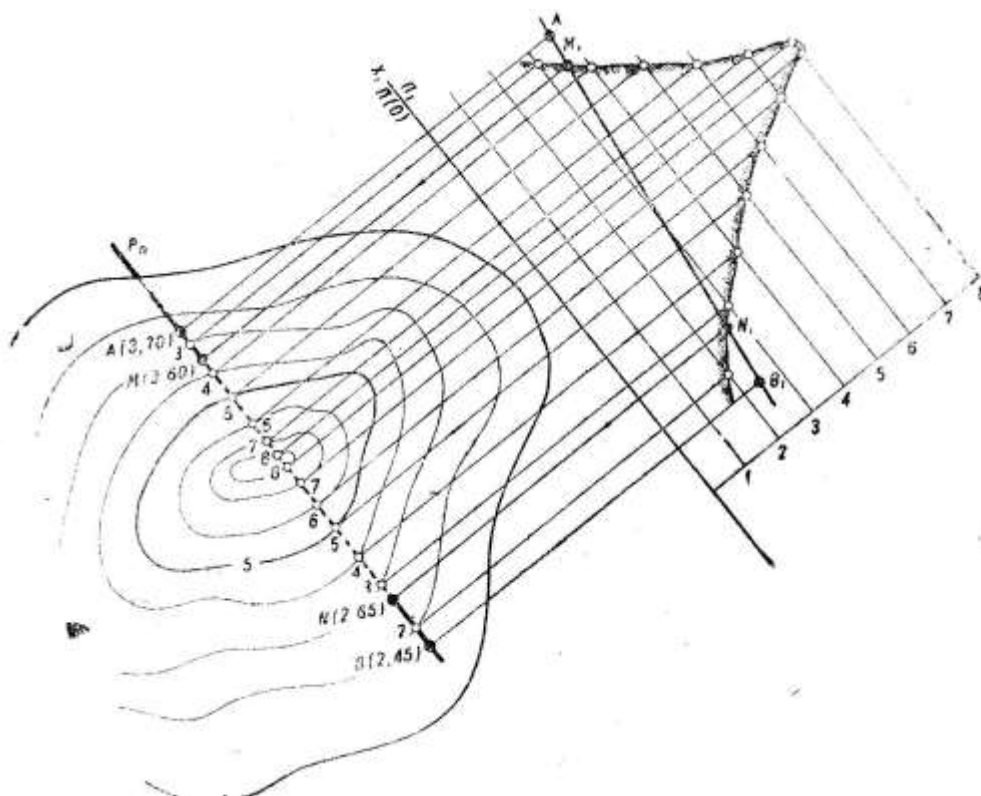


ნახ. 118.

შევნიშნოთ, რომ ამ ამოცანას მეორე პასუხიც გააჩნია. ვინაიდან როგორც A-დან, ასევე ყველა მომდევნო წერტილიდან შემოხაზული გ-რადიუსიანი რკალი მეზობელ იზოჰიფსს ორ წერტილში კვეთს. არსებობს აგრეთვე ორი კერძო შემთხვევა. პირველი, როდესაც გ-რადიუსიანი რკალი მომდევნო იზოჰიფსს მხოლოდ ეხება და მეორე, როდესაც იგი მას არც კი ეხება. პირველ შემთხვევაში ამოცანას მხოლოდ ერთი პასუხი გააჩნია. მეორე შემთხვევაში საჭიროა დამხმარე იზოჰიფსების აგება.

6. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთა წრფით

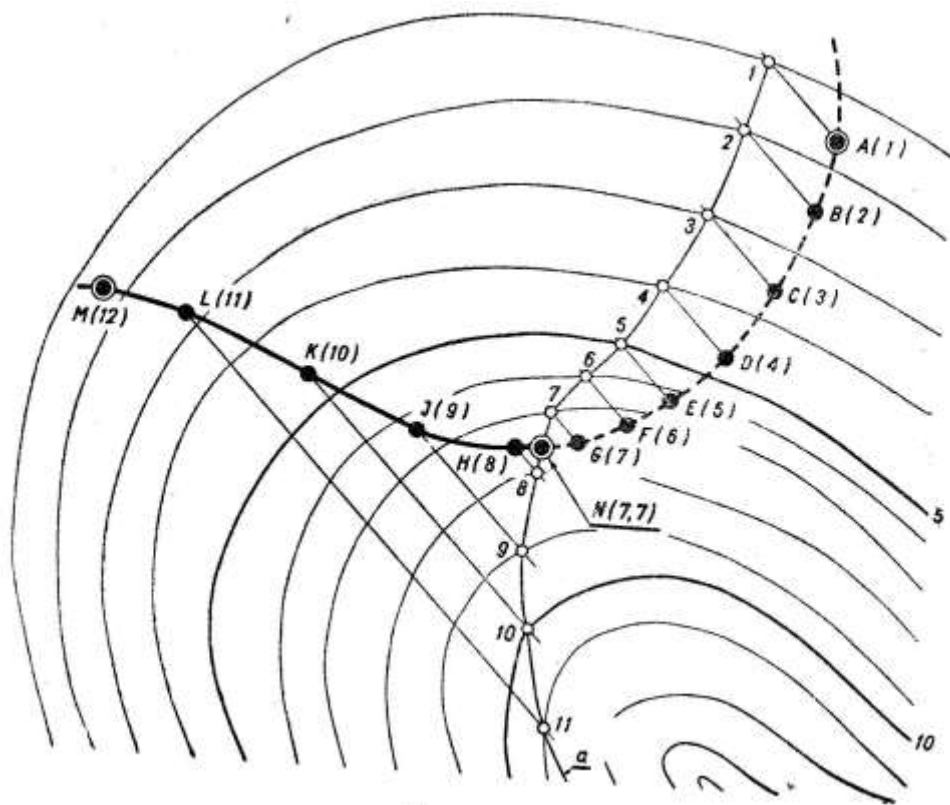
ვთქვათ, მოცემულია რაიმე AB წრფე და ტოპოგრაფიული ზედაპირი (ნახ. 120). მათი ურთიერთგადაკვეთის წერტილების ასაგებად შეიძლება ვისარგებლოთ შემდეგი ხერხით: AB წრფეზე გავატაროთ მაგებმილებელი P სიბრტყე და ახალ სისტემაში ($\Pi_1 \parallel AB$) ავაგოთ როგორც AB წრფის გეგმილი, ასევე ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილი (P სიბრტყით კვეთა) AB მიმართულებით. x_1 სისტემაში ადვილად განისაზღვრება საძიებელი წერტილების გეგმილები, ხოლო მათი დაბრუნებით ძველ სისტემაში მივიღებთ ამოცანის პასუხს.



ნახ. 120.

7. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთა მრუდე წირით

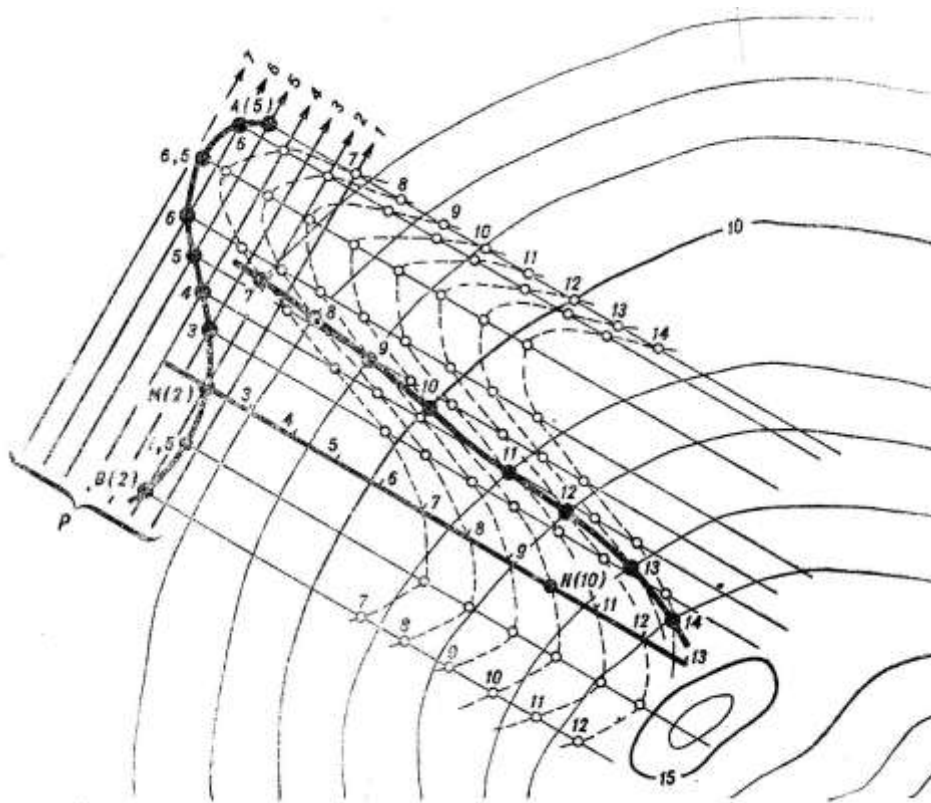
მოცემულია ტოპოგრაფიული ზედაპირი და $A(1)M(12)$ სივრცითი მრუდი (ნახ. 121). მათი გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად მრუდზე ავიღოთ $B, C, D...$ წერტილების რიგი და გავატაროთ მათზე ურთიერთპარალელური პორიზონტალები და ისინი განვიხილოთ, როგორც რაიმე ცილინდრის მსახველები. მაშინ მათი ერთობლიობა მოგვცემს ისეთ ცილინდრულ ზედაპირს, რომლის მიმართველი იქნება მოცემული AM მრუდი. ვიპოვოთ ამ ცილინდრული ზედაპირის გადაკვეთა ტოპოგრაფიულ ზედაპირთან. რადგან ცილინდრული ზედაპირის მსახველები დონის წრეებებს წარმოადგენს, ამიტომ აღებულ შემთხვევაში კვეთის წირი მიიღება ერთი და იმავე დონის მსახველებისა და იზოჰიფსების წერტილების თანამიმდევრული შეერთებით. ცილინდრული და ტოპოგრაფიული ზედაპირების კვეთის წირის (a) გადაკვეთა მოცემულ $A(1)M(12)$ მრუდთან მოგვცემს საძიებელ წერტილს – $N(7,7)$.



ნახ. 121.

8. ტოპოგრაფიული და ცილინდრული ზედაპირების თანაკვეთა

ჩვენ ამ საკითხს წინა მაგალითის განხილვისას შევეხეთ. მაშინ ცილინდრული და ტოპოგრაფიული ზედაპირების თანაკვეთის წირის აგების შედარებითი სიმარტივე ცილინდრის მსახველების კერძო მდებარეობამ განაპირობა. ამჟერად განვიხილოთ ზოგადი მდებარეობის ცილინდრული ზედაპირის თანაკვეთა ტოპოგრაფიულ ზედაპირთან. აღებულ შემთხვევაში ცილინდრული ზედაპირი მოცემულია $A(5)B(2)$ ბრტყელი მრუდე მიმმართველით და $M(2)N(10)$ წრფოვანი მსახველით (ნახ. 122). AB მიმმართველის რიგ წერტილებზე გავატაროთ დამხმარე მსახველები და დავაგრაფიროთ ისინი მოცემული MN მსახველის მიხედვით. მსახველების ერთნაიენიშნულიანი წერტილები შევაერთოთ მდოვრე მრუდე წირებით. მივიღებთ მოცემული ცილინდრული ზედაპირის პორიზონტალებს. მათი გადაკვეთა ტოპოგრაფიული ზედაპირის ერთსახელა იზოპიფსებთან მოგვცემს 7,8,9,... წერტილების რიგს. თითოეული ასეთი წერტილი ერთდროულად მოთავსებული იქნება ორივე ზედაპირზე. მათი თანმიმდევრული შეერთებით მივიღებთ საძიებელი განაკვეთის წირს.

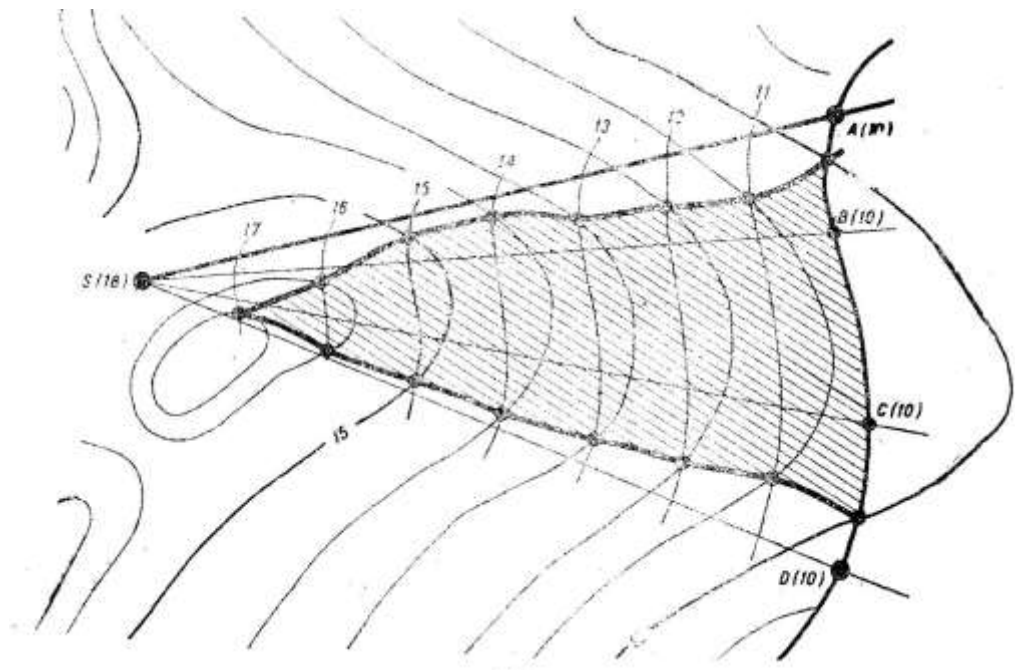


ნახ. 122.

9. ტოპოგრაფიული და კონუსური ზედაპირების თანაკვეთა

მოცემულია რაიმე ტოპოგრაფიული და კონუსური ზედაპირები. პირველი განსაზღვრულია იზოჰიფსებით, ხოლო მეორე AD მიმმართველითა და S წვეროთი (ნახ. 123). ამ ზედაპირების თანაკვეთის წირის ასაგებად ავაგოთ მოცემული კონუსური ზედაპირის რიგი მსახველები $S(10) A(10)$; $S(18)B(10)$,... დავაგრადუიროთ ეს მსახველები მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის კვეთის სიმაღლის მიხედვით და ერთნაირნიშნულებიანი წერტილები შევაერთოთ მდოვრე მრუდით. მივიღებთ მოცემული კონუსური ზედაპირის ჰორიზონტალებს. კონუსური და ტოპოგრაფიული ზედაპირების ერთსახელა ჰორიზონტალების გადაკვეთის წერტილების შეერთებით მივიღებთ საძიებელ მრუდს.

კერძო შემთხვევაში, როდესაც მოცემულია ისეთი კონუსური ზედაპირი, რომლის ჰორიზონტალური კვეთები წრეწირებს წარმოადგენს, საძიებელი თანაკვეთის მრუდის ასაგებად შეიძლება მოვიქცეთ ასე – გავატაროთ კონუსის მკვეთი დონის სიბრტყეები, მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის კვეთის სიმაღლის შესაბამისად; ერთნაირნიშნულებიანი წრეწირებისა და იზოჰიფსების გადაკვეთის წერტილები შევაერთოთ მდოვრე მრუდზე წირით.



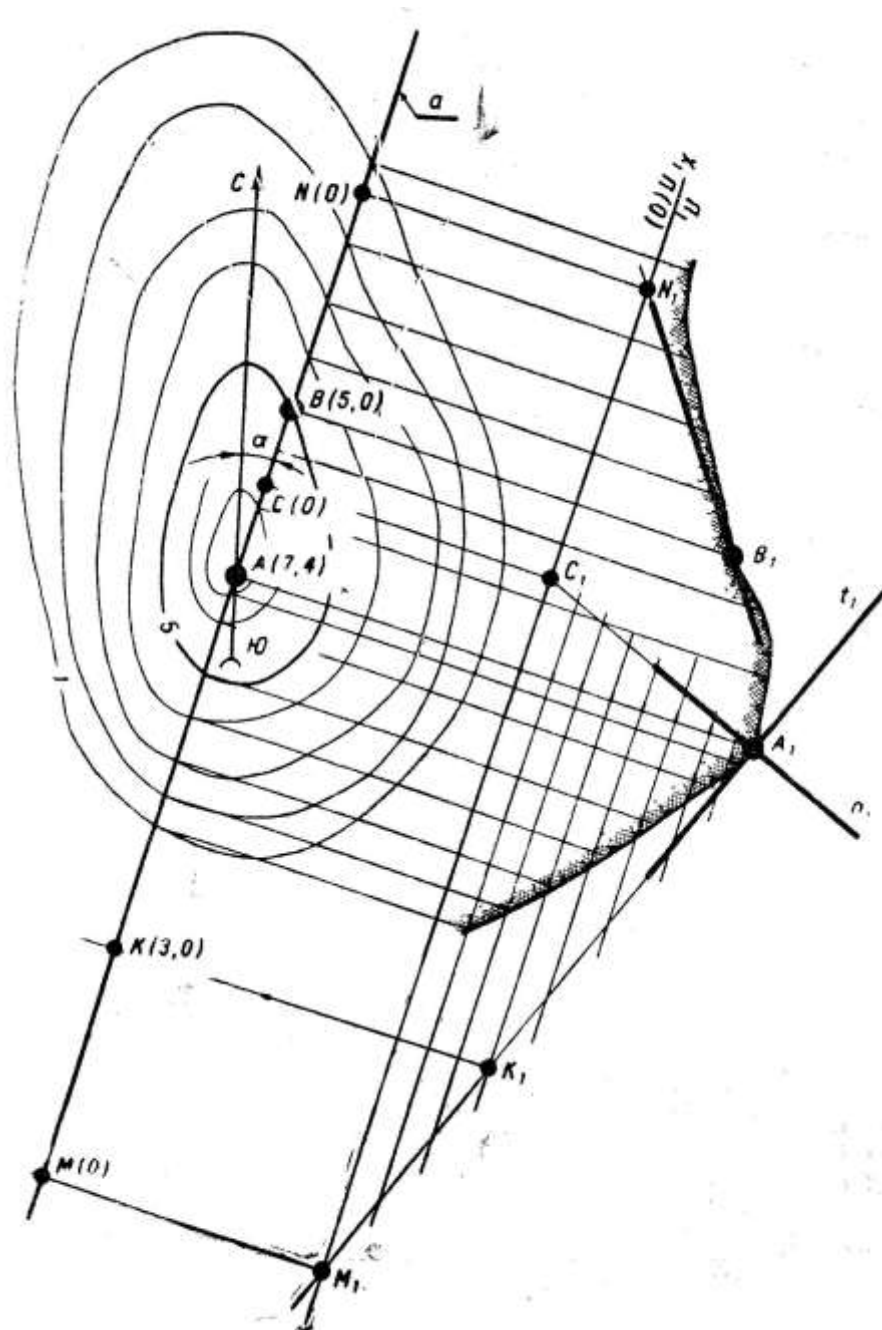
ნახ. 123.

10. ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხები და ნორმალი

იმისათვის, რომ მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის მოცემულ წერტილში მოცემული მიმართულებით ავაგოთ ამ ზედაპირის მხები, საკმარისია შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთა სიბრტყე მოცემული მიმართულების (a) პარალელურად (ნახ. 124) და ახალ სისტემაში ავაგოთ ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილი. A წერტილი გადავიტანოთ ამ პროფილზე. A₁ წერტილში მიღებული პროფილის (მრუდის) მხედბი (t₁) და დავაგრადუიროთ იგი.

ამავე A₁ წერტილში ზედაპირის ნორმალის (t ⊥ n) აგება და მისი გრადუირება ძნელი არ არის და ნახაზიდანაც ნათლად ჩანს.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ აღებული მხები ტოპოგრაფიულ ზედაპირს ეხება გარედან. ნახაზზე ნაჩვენებია მეორე შემთხვევაც, როდესაც მხები ტოპოგრაფიულ ზედაპირს შიგნიდან ეხება (B).



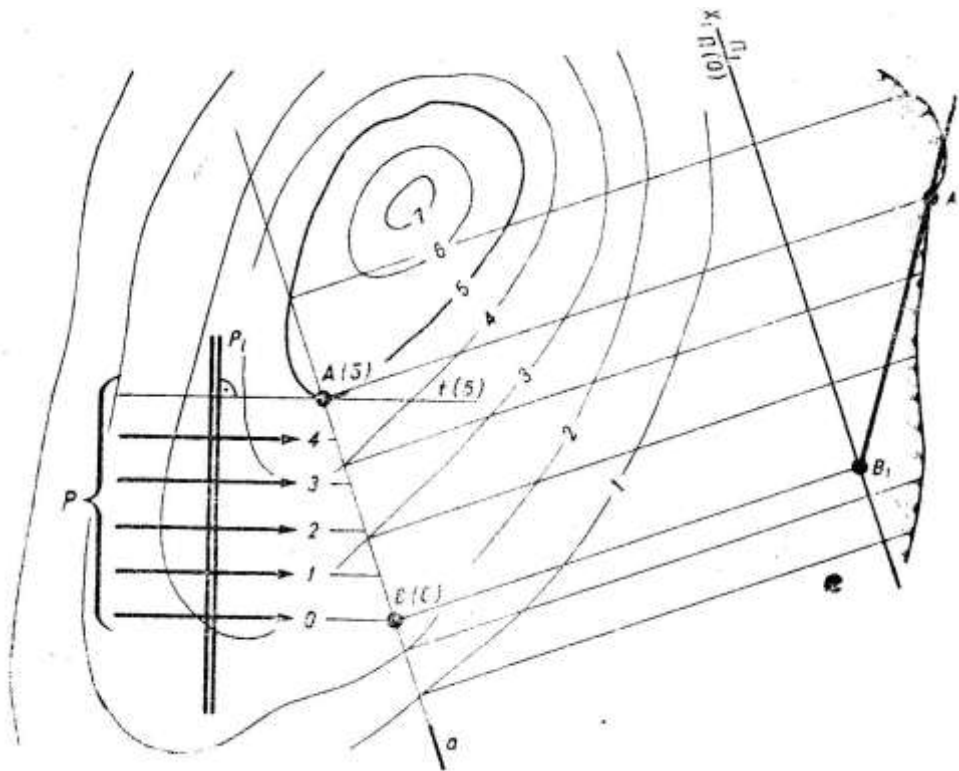
ნახ. 124.

11. ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხები სიბრტყე

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხები სიბრტყეებს ამ ზედაპირთან შეიძლება ჰქონდეს ერთი საერთო წერტილი, გადაკვეთოს იგი გაშლილ ან მარყუჟისებურ მრუდზე და სხვ.

საინჟინრო პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ზედაპირის მოცემულ წერტილში მხები სიბრტყის აგების ან მოცემულ წრფეზე ზედაპირის მხები სიბრტყის გატარებისა და შესხების წერტილის განსაზღვრის შემთხვევები. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

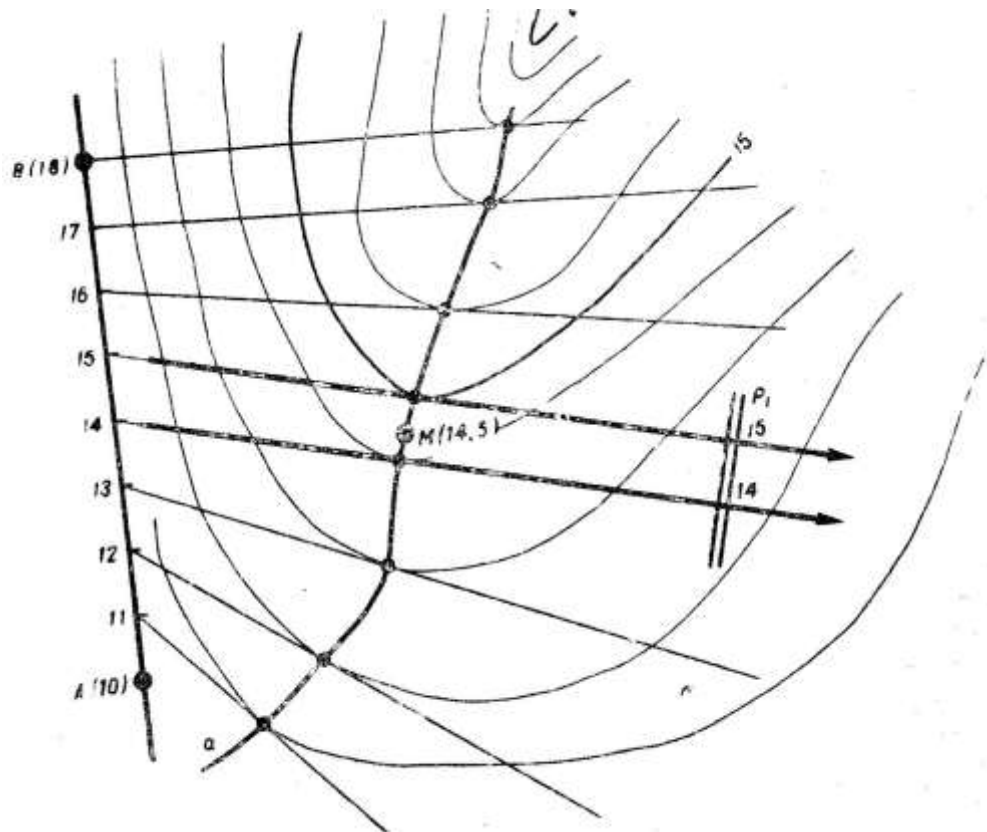
ა) ეთქვათ, მოცემულია ტოპოგრაფიული ზედაპირი და ამ ზედაპირზე მდებარე რაიმე A წერტილი (ნახ. 125). საჭიროა ავაგოთ ისეთი სიბრტყე (P), რომელიც მოცემულ ზედაპირს მოცემულ სიბრტყეში შეეხება. ავაგოთ ზედაპირის მე-5 იზოჰიფსის $t(5)$ მხები A წერტილში. ამავე წერტილში გავავლოთ ნებისმიერი a წრფე და ავაგოთ ზედაპირის პროფილი ამ მიმართულებით. პროფილზე გადავიტანოთ A წერტილი; მიღებულ A_1 გეგმილზე გავავლოთ მხები პროფილის მიმართ და დავაგრადუიროთ. ნახაზზე საბოლოოდ მივიღებთ ორ მხებს, რომლებიც ურთიერთგადაკვეთილ წრფეებს ($AB \times t$) წარმოადგენენ და შესაბამისად განსაზღვრავენ საძიებელ P სიბრტყეს.



ნახ. 125.

ბ) ეთქვათ, მოცემულია რაიმე წრფე (AB), საჭიროა მასზე გავატაროთ მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხები სიბრტყე და განვსაზღვროთ შეხების წერტილი (ნახ. 126). მოცემული წრფის რიგი წერტილებიდან გავატაროთ მხებები ზედაპირის ერთსახელა იზოჰიფსების მიმართ. შეხების წერტილები შევაერთოთ მრუდე წირით (a). ამ მხებების ერთობლიობა განსაზღვრავს ირიბ ზედაპირს, რომელსაც კონოიდი ეწოდება. კონოიდის მსახველები ზოგად შემთხვევაში ერთმანეთის პარალელურნი არ არიან, მაგრამ მათ შორის შესაძლებელია ორი მეზობელი ურთიერთპარალელური მსახველის მოძებნა. მსახველების ასეთი წყვილი AB წრფესთან ერთად, საკმარისი სიზუსტით

განსაზღვრავს საძიებელ მხეხ სიბრტყეს. შეხების წერტილი (M) კი მოთავსებული იქნება a მრუდზე ხსენებული ორი მსახველის შუაში.

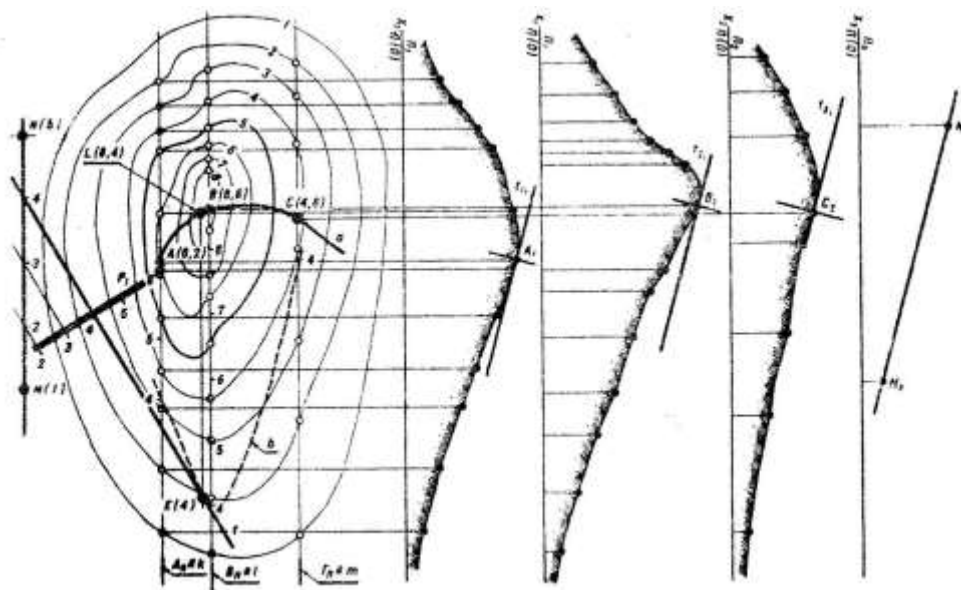


ნახ. 126.

გ) განვიხილოთ 127-ე ნახაზი. მოცემულია წრფე (MN) და საჭიროა მასზე გატარდეს მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხეხი სიბრტყე და განისაზღვროს შეხების წერტილი.

ავაგოთ ზედაპირის რამდენიმე პროფილი ისე, რომ მკვეთი სიბრტყეები გატარებული იყოს მოცემული MN წრფის პარალელურად. იმისათვის, რომ მიღებული კვეთები ახალ სისტემაში ერთმანეთს არ დაემთხვეს, ვისარგებლოთ რამდენიმე ურთიერთპარალელური გეგმილთა სიბრტყით და თითოეული პროფილი ცალკე ($x_1, x_2, x_3, \dots$) ავაგოთ ახალ სისტემაში. MN წრფის პარალელურად გავატაროთ პროფილების მხეხები ($t_1, t_2, t_3, \dots$) და შეხების წერტილები A, B და C გადმოვიტანოთ ძველ სისტემაში. მიღებული წერტილები A(6,2), B(8,6) და C(4,6) შევავროთოთ მრუდით (a). ეს მრუდი შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც MN წრფის პარალელური ცილინდრის ტოპოგრაფიულ ზედაპირთან შეხების მრუდი. ამ ცილინდრის მსახველებად შეგვიძლია მივიღოთ A, B და Γ სიბრტყეების კვალებთან შეთავსებული k, l და m წრფეები. დავაგრადუიროთ ეს მსახველები MN წრფის მიხედვით. მიღებული წერტილებიდან ერთნაირნიშნულებიანი წერტილების რომელიმე სამეული

შევეერთოთ ერთმანეთთან b მრუდით. ეს მრუდი აღნიშნული ცილინდრის პორიზონტალი იქნება. MN წრფეზე მდებარე b მრუდის ღონის წერტილიდან ამ მრუდის მიიმართ გავატაროთ მხები (t). დავნიშნოთ შეხების წერტილი – $E(4)$. E წერტილიდან გავატაროთ MN წრფის პარალელური წრფე და დავნიშნოთ მრუდთან მისი გადაკვეთის $L(8,4)$ წერტილი. $E(4)L(8,4)$ იქნება ცილინდრის ის მსახველი, რომლითაც იგი MN წრფეზე გამავალ სიბრტყეს ეხება. ვინაიდან ეს ცილინდრი მოცემული ტოპოგრაფიული ზედაპირის მომვლეს წარმოადგენს, ამიტომ იგივე სიბრტყე ამ ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხებიც იქნება, შეხების წერტილი (L) კი – EL წრფის a მრუდთან გადაკვეთით განისაზღვრება.



ნახ. 127.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი	3
პირობითი აღნიშვნების სისტემა და ტერმინოლოგია	4
პირველი თავი	
პირითადი დეპუტატები	
§1. ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის არსი და მისი გამოყენება	5
1. მეთოდის არსი	5
2. ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების სისტემაზე დაყრდნობით	6
3. ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი პოლარული კოორდინატების სისტემაზე დაყრდნობით	9
§2. წერტილის, წრფისა და სიბრტყის დაგეგმილება	11
1. წინაპირობები	11
2. მოცემული კოორდინატებით წერტილის ნიშნულებიანი გეგმილის აგება	12
3. წრფის დაგეგმილება	14
4. წრფის გრადუირება	17
5. სიბრტყის განსაზღვრა გეგმაზე	18
6. ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურების დაგეგმილება	24
§3. ორთოგონალური გეგმილის გარდაქმნის ზოგიერთი ხერხების გამოყენება ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში	25
1. ზოგადი ცნებები	25
2. გეგმილთა სიბრტყეების შეცვლის ხერხი	26
3. ბრუნვის ხერხი	30
მეორე თავი	
პოზიციური ამოცანები	
§4. დამხმარე პოზიციური ამოცანები	34
1. ზოგადი ცნობები	34
2. წერტილი წრფეზე	34
3. წრფეების ურთიერთდამოკიდებულება	35
4. ზოგადი მდებარეობის წრფის დონის წრფედ გარდაქმნა	37
5. ზოგადი მდებარეობის წრფის მაგეგმილებელ წრფედ გარდაქმნა	38
6. ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის გარდაქმნა მაგეგმილებელ სიბრტყედ	39
7. ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის გარდაქმნა დონის სიბრტყედ	39
8. სიბრტყეზე მდებარე წერტილი	40
9. სიბრტყეზე მდებარე წრფე	41
10. სიბრტყის პარალელური წრფე	41

§5. ძირითადი პოზიციური ამოცანები	42
1. წრფისა და სიბრტყის თანაკვეთის წერტილის განსაზღვრა	42
2. სიბრტყეების თანაკვეთა	44
3. ხილვადობის პირობითობა	52
§6. ამოცანები ბრტყელ გეომეტრიულ ფიგურებზე	53
1. ბრტყელი ფიგურის თანაკვეთა წრფით	53
2. ბრტყელი ფიგურების თანაკვეთა	55

მესამე თავი

მეტრული ამოცანები

§7. ურთიერთმართობულობა	57
1. ზოგადი ცნობები	57
2. ურთიერთმართობული წრფეები	57
3. წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმართობულობა	58
4. ურთიერთმართობული სიბრტყეები	61
5. ზოგადი მდებარეობის წრფეების ურთიერთმართობულობა	62
§8. მონაკვეთების, კუთხეებისა და ფართობების გაზომვა	64
1. წრფის მონაკვეთის ნამდვილი სიდიდისა და ძირითად გეგმილთსიბრტყესთან დახრის კუთხის გაზომვა	64
2. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილის გაზომვა	67
3. წერტილიდან წრფემდე მანძილის გაზომვა	68
4. ორ აცდენილ წრფეს შორის მანძილის გაზომვა	68
5. ორ პარალელურ წრფეს შორის მანძილის გაზომვა	69
6. ორ ურთიერთგადაკვეთილ წრფეს შორის კუთხის გაზომვა	70
7. ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის ძირითად გეგმილთა სიბრტყისადმი დახრის კუთხის გაზომვა	71
8. ორ ურთიერთგადაკვეთ სიბრტყეს შორის კუთხის გაზომვა	73
9. წრფისა და სიბრტყის შორის მოთავსებული კუთხის გაზომვა	76
10. ბრტყელი გეომეტრიული ფიგურების ნამდვილი სიდიდით აგება	79

მეოთხე თავი

მრავალწახნაბები

§9. მრავალწახნაბათა სახეები და მათი გეგმილების აგება	82
1. მრავალწახნაბათა სახეები	82
2. ტეტრაედრის გეგმილის აგება	83
3. ოქტაედრის გეგმილის აგება	84
4. ჰექსაედრის გეგმილის აგება	85
5. პირამიდისა და პრიზმის გეგმილის აგება	86

§10. ამოცანები მრავალწახნაგებზე	88
1. მრავალწახნაგათა გადაკვეთა სიბრტყით	88
2. მრავალწახნაგათა გადაკვეთა წრფით	89
3. მრავალწახნაგათა ზედაპირის განვენა სიბრტყეზე	91

მეხუთე თავი

მრუდე წირები და მრუდე ზედაპირები

§11. მრუდე წირების ზოგიერთი სახეები და მათი გეგმილის აგება	94
1. ძირითადი ცნებები და განსაზღვრებები	94
2. ბრტყელი მრუდების გეგმილის აგება	96
3. სივრცითი მრუდის გეგმილის აგება	99

§12. მრუდე ზედაპირების ზოგადი კლასიფიკაცია	99
1. ძირითადი ცნებები	99
2. მრუდე ზედაპირების კლასიფიკაცია	100

§13. ზოგიერთი სახის წესიერი მრუდე ზედაპირები და მათი გეგმილის აგება	101
1. კონუსური ზედაპირის გეგმილის აგება	101
2. ცილინდრული ზედაპირის გეგმილის აგება	103

მექმესე თავი

ტოპოგრაფიული ზედაპირი

§15. ტოპოგრაფიული ზედაპირი და მისი გეგმილის აგება	105
1. ტოპოგრაფიული ზედაპირი	105
2. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გეგმილის აგება	106
3. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გამოხატვა იზოჰიფსებით	108

§16. აგებანი ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე	109
1. ტოპოგრაფიული ზედაპირის პროფილის აგება	109
2. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთა ზოგადი მდებარეობის სიბრტყით	110
3. ტოპოგრაფიული და წახნაგოვანი ზედაპირების თანაკვეთა	112
4. ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე მდებარე წრფე	113
5. მოცემული ქანობის მქონე ტეხილის აგება ტოპოგრაფიულ ზედაპირზე	115
6. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთა წრფით	116
7. ტოპოგრაფიული ზედაპირის გადაკვეთა მრუდე წირით	117
8. ტოპოგრაფიული და ცილინდრული ზედაპირების თანაკვეთა	118
9. ტოპოგრაფიული და კონუსური ზედაპირების თანაკვეთა	119
10. ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხები და ნორმალის	120
11. ტოპოგრაფიული ზედაპირის მხები სიბრტყე	121
12. სარჩევი	125

საინჟინრო გრაფიკაში არც ისე იშვიათია შემთხვევები, როდესაც ნახაზის შედგენის ძირითადი მეთოდების პარალელურად, სპეციალური, მხოლოდ ერთი რომელიმე დარგისათვის საჭირო მეთოდების გამოყენებასთან გვაქვს საქმე.

ნაშრომი ძირითადად გათვალისწინებულია სამთო-სამარკშიდერო და გეოლოგიური სპეციალობის სტუდენტებისა და ინჟინერ-ტექნიკური პერსონალისთვის და მასში განხილულია დაგეგმილების ახალი ნიშნულიანი გეგმილის ცნების შემოტანის მეთოდი.

რეცენზენტები: საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო გრაფიკისა და ტექნიკური მექანიკის დეპარტამენტის ასოცირებული პროფესორი, დარგობრივი კომისიის წევრი თამარ ბერიძე,

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო გრაფიკისა

და

ტექნიკური მექანიკის დეპარტამენტის პროფესორი, დარგობრივი კომისიის წევრი ნანა ნოზაძე

© საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2017

ISBN 978-9941-20-903-1

<http://www.gtu.ge>

ყველა უფლება დაცულია. ამ წიგნის არც ერთი ნაწილის (იქნება ეს ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) გამოყენება არანაირი ფორმით და საშუალებით (იქნება ეს ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე.



საავტორო უფლებების დარღვევა ისჯება კანონით.

რედაქტორი ი. მეგრელიშვილი

გადაეცა წარმოებას 31.05.2017. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 06.06.2017. ქალაქის
ზომა 60X84 1/8. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 8.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, კოსტავას 77

