პ. ზერაგია

უმაღლესი მათემატიკა

I

პოლიკარპე (კუკუშა) ზერაგია
1912 (ფოთი)-1986(თბილისი)
თსუ პროფესორი

პ. ზერაგიას ეს სახელმძღვანელო
ელექტრონულად გააწყო
ნიკო გუნიამ —
ეძღვნება ძვირფასი მასწვლებლის
ნათელ ხსოვნას

22.11
510(022)
ზ 543

I ტომი შეიცავს უმაღლესი მათემატიკის შემდეგ ნაწილებს: წრფივი ალგებრა, ანალიზური გეომეტრია სიბრტყეზე და სივრცეში, ერთი და მრავალი ცვლადის ფუნქციათა დიფერენციალური აღრიცხვა და მათი გამოყენება და უმცირეს კვადრატთა ხერხი.

რედაქტორი პროფ. ი. ქარცივაძე
რეცენზენტები: პროფ. ბ. ხვედელიძე
პროფ. პლ. კოლონია

$3 \frac{1702050000}{M608(06)84}$

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

პ. ზერაგია

უმაღლესი მათემატიკა

ტ. I

მესამე შევსებული გამოცემა

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო
სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ
დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ
უნივერსიტეტის სტუდენტებისათვის

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1984

ავტორისაგან

სახელმძღვანელო შედგება ორი ტომისაგან და შეიცავს უმაღლესი მათემატიკის შემდეგ ნაწილებს: ანალიზური გეომეტრია სიბრტყეზე და სივრცეში, წრფივი ალგებრის ელემენტები, ერთი ცვლადის ფუნქციის მათემატიკური ანალიზი—დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, მათი გამოყენება გეომეტრიისა და მექანიკის ამოცანებში, ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა, მწკრივთა თეორია, დიფერენციალურ განტოლებათა თეორია და მისი გამოყენება ფიზიკის და ბუნებისმეტყველების ამოცანებში, ჯერადი ინტეგრალები; ზედაპირული ინტეგრალები, წირითი ინტეგრალები, ვექტორული ალგებრისა და ანალიზის ელემენტები, ველის თეორიის ელემენტები და სხვ.

ორივე ტომში მოყვანილი სავარჯიშო ამოცანების და მაგალითების გადაწყვეტა სტუდენტებს დაეხმარება თეორიული ცოდნის განმტკიცებაში.

სახელმძღვანელო შედგენილია სსრკ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებული პროგრამების შესაბამისად: საბუნებისმეტყველო, ქიმიური, გეოგრაფია-გეოლოგიის და ყველა ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. ნაშრომი გამოადგებათ, აგრეთვე, საღამოს და დაუსწრებელ განყოფილებათა სტუდენტებსაც. წინამდებარე სახელმძღვანელოს პირველი და მეორე გამოცემა განხილულ იყო თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საინჟინრო-ეკონომიკური ფაკულტეტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრაზე, სადაც კათედრის წევრებმა წარმოადგინეს თავიანთი შენიშვნები, რომლებიც გათვალისწინებულია წიგნის მესამე გამოცემაში. სამწუხაროდ, მცირე ტირაჟით (5000) გამოცემის გამო სტუდენტებს დიდი ხანია არა აქვთ საშუალება სახელმძღვანელოთი სარგებლობისა.

მესამე გამოცემა გადამუშავებული და მნიშვნელოვნად გადიდებულია, როგორც ვთქვით, დამატებულია ახალი საკითხები, ასე მაგალითად: ჯერადი ინტეგრალები, წირითი ინტეგრალები. ზედაპირის ფართობის გამოთვლა, ვექტორული ანალიზისა და ველის თეორიის ელემენტები და სხვ.

ახალ გამოცემაში შეტანილია აგრეთვე მატრიცათა ალგებრის ელემენტები, რისთვისაც ვისარგებლე ეკონომიკური ფაკულტეტის კათედრის გამგის პროფ. პ. კოლონიასა და უ/მ ლიანა სკამკოჩაიშვილის ლექციების ჩანაწერებით. მთლიანად წიგნი წაიკითხა და მის სრულყოფაში დამეხმარა მათემატიკური ანალიზის კათედრის გამგე პროფ. ი. ქარცივაძე; სამივე მეგობარს გულწრფელ მადლობას მოვახსენებ.

შესავალი

დღეს ძნელია დავასახელოთ მეცნიერების ისეთი დარგი, რომლის განვითარებისათვის მათემატიკა გადამწყვეტ როლს არ ასრულებდეს.

ეკონომიკურ მეცნიერებაში მათემატიკური მეთოდების გამოყენებასა და დანერგვას სახალხო მეურნეობის განვითარებისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს. თანამედროვე ტექნიკის განვითარება შეუძლებელია მათემატიკის ღრმა ცოდნისა და მისი გამოყენების გარეშე.

უკანასკნელი ათეული წლების განმავლობაში მათემატიკამ უდიდესი ცვლილება განიცადა, შეიქმნა მათემატიკის მრავალი ახალი დარგი, რომელთა გამოყენებამ ტექნიკისა და ბუნებისმეტყველების უმნიშვნელოვანესი ამოცანების გადასაჭრელად გადამწყვეტი როლი შეასრულა.

მათემატიკური მეთოდების გამოყენებისათვის, პირველ რიგში, მათი შესწავლაა საჭირო. არასპეციალური ფაკულტეტებისა და, მათ შორის, ეკონომიკური ფაკულტეტებისათვის მათემატიკის სახელმძღვანელოს ძირითადი ამოცანა სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ დაეხმაროს სტუდენტებს მათემატიკის საჭირო საკითხების შესწავლაში და საფუძველი შეუქმნას მათ თავიანთ სპეციალობაში რიგი პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკური მეთოდით ამოხსნისათვის.

უმაღლესი მათემატიკის შესწავლა გულისხმობს სტუდენტებისათვის ისეთი მათემატიკური აპარატის მომზადებას, რომლის გამოყენებას ისინი მომავალში სპეციალურ დარგში აწარმოებენ.

სამწუხაროდ, ხშირ შემთხვევაში, მათემატიკის კურსის დამთავრების შემდეგ, მაღალ კურსებზე, სადაც სპეციალური დისციპლინები იკითხება, ნაკლებად ხდება მათემატიკაში მიღებული ცოდნის გამოყენება. ზოგიერთი ლექტორი გაურბის კიდეც ამ საქმეს, რითაც რწმენას უკარგავს სტუდენტს მათემატიკის შესწავლის აუცილებლობაში. ეს, რა თქმა უნდა, უარყოფით გავლენას ახდენს სრულფასოვანი სპეციალისტის მომზადებაზე.

სახალხო მეურნეობის სხვადასხვა უბანი ტექნიკისა და ეკონომიკური ამოცანების ეფექტურად გადაწყვეტას საჭიროებს. ამის გაკეთება შეუძლიათ ინჟინრებს, ეკონომისტებს, მათემატიკოსებს და სხვა დარგის სპე-

ციალისტებს საერთო ძალით, არა ერთმანეთისაგან მოწყვეტით, არამედ ურთიერთთანამშრომლობით. თუ გსურს იყო კარგი ინჟინერი, ეკონომისტი ან სხვა დარგის სპეციალისტი და მიიღო აქტიური მონაწილეობა მნიშვნელოვანი თეორიული და პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტაში, აუცილებელია კარგად იცოდე მათემატიკა და მოახერხო მისი გამოყენება.

თუ ეკონომისტები, ინჟინრები და მათემატიკოსები ერთიანი ძალით შეუდგებიან სახალხო მეურნეობის წინაშე დასმული ამოცანების ამოხსნას, ისინი ყოველგვარ სიძნელეს შედარებით ადვილად გადალახავენ, ოღონდ საჭიროა ისინი არა მარტო თავიანთ სპეციალობებს დაეუფლონ, არამედ ერთმანეთის სპეციალობებშიც საკმაოდ გაერკვნენ.

წინამდებარე სახელმძღვანელო, რომელიც ორ ტომად გამოდის, მიზნად ისახავს არასპეციალური ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის ისეთი ცოდნის მიწოდებას, რომელიც მათ გააცნობს ძირითად საჭირო საკითხებს მათემატიკიდან და დაეხმარება მომავალში სპეციალური საკითხების დამუშავებაში.

ლათინური ანბანი

A a ა
B b ბე
C c ცე
D d დე
E e ე
F f ეფ
G g გე (ჟე)
H h ჰაშ
I i ი
J j ჟი
K k კა
L l ელ
M m ემ
N n ენ
O o ო
P p პე
Q q ქუ
R r ერ
S s ეს
T t ტე
U u უ
V v ვე
W w დუბლვე
X x იქს
Y y იგრეკ
Z z ზეტ

ბერძნული ანბანი

Α	α	ალფა	Ν	ν	ნიუ
Β	β	ბეტა	Ξ	ξ	ქსი
Γ	γ	გამა	Ο	ο	ომიკრონ
Δ	δ	დელტა	Π	π	პი
Ε	ε	ეფსილონ	Ρ	ρ	რო
Ζ	ζ	ძეტა	Σ	σ	სიგმა
Η	η	ეტა	Τ	τ	ტაუ
Θ	ϑ	თეტა	Υ	υ	იფსილონ
Ι	ι	იოტა	Φ	φ	ფი
Κ	κ	კაპა	Χ	χ	ხი
Λ	λ	ლამბდა	Ψ	ψ	ფსი
Μ	μ	მიუ	Ω	ω	ომეგა

I თავი

სასკოლო მათემატიკის ძირითადი საკითხები

§ 1. ზოგიერთი ფორმულა სასკოლო მათემატიკის კურსიდან

შეხსენებისა და შემდეგში გამოყენების მიზნით მოვიყვანოთ სასკოლო მათემატიკის კურსიდან ზოგიერთი ძირითადი ფორმულა.

ოთხი მოქმედება წილადებზე

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

პროცენტები

a რიცხვის $n\%$ იქნება $\dfrac{an}{100}$;

თუ x რიცხვის $n\%$ ტოლია b-სი, მაშინ $x = \dfrac{b \cdot 100}{n}$.

ჯამისა და ნამრავლის შემოკლებული აღნიშვნა

შემდეგში ვისარგებლებთ ჯამისა და ნამრავლისათვის მიღებული აღნიშვნებით: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ რიცხვების $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ჯამს აღნიშნავენ ასე $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, რომელიც იკითხება შემდეგნაირად „სიგმა a_i-ს როცა i იცვლება 1-დან n-მდე", ამრიგად, გვექნება

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

იმავე რიცხვების $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$ ნამრავლისათვის მიღებულია აღნიშვნა $\prod_{i=1}^{n} a_i$, ამრიგად,

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

1-დან n-მდე ნატურალური[1] რიცხვების ნამრავლი აღინიშნება ასე $n!$ (n ფაქტორიალი) ე. ი. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

საშუალო არითმეტიკული და საშუალო გეომეტრიული

ვთქვათ, მოცემულია $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვები. ამ რიცხვების საშუალო არითმეტიკულია

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \text{ ანუ } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

ხოლო საშუალო გეომეტრიული

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \text{ ანუ } \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}, \text{ (სადაც } a_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, n).$$

პროპორციები

ვთქვათ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

მაშინ

$$ad = bc, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}, \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}.$$

ნამდვილი რიცხვების ხარისხი

ვთქვათ n და m ნატურალური (ე. ი. მთელი დადებითი) რიცხვებია, მაშინ

---

[1] ნატურალური რიცხვები ეწოდება მთელ დადებით რიცხვებს.

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n\text{-ჯერ}}, \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

თუ $a \neq 0$, მაშინ $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

მოქმედებანი ხარისხებზე

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad a^n a^m = a^{n+m};$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

მოქმედებანი რადიკალებზე

$$(\sqrt[n]{a})^n = a; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}; \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \neq 0); \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}.$$

გამრავლებისა და გაყოფის შემოკლებული ფორმულები

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n;$$

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} a^{n-k} b^k + \ldots + (-1)^n b^n;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

ერთუცნობიანი პირველი და მეორე ხარისხის განტოლებები

თუ $ax=b$ და $a\neq 0$, მაშინ $x=\frac{b}{a}$. $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ფესვები (ამონახსნები) გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

ამასთან, თუ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი $\Delta=b^2-4ac$ დადებითია, მაშინ განტოლებას აქვს ორი სხვადასხვა ნამდვილი ფესვი; თუ $\Delta=0$, ფესვები კვლავ ნამდვილია, მაგრამ ერთმანეთის ტოლი (ე. ი. განტოლებას აქვს ერთი ორჯერადი ფესვი); თუ $\Delta<0$, ფესვები წარმოსახვითია.

არითმეტიკული პროგრესია

თუ $a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვები შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის სხვაობაა d, ხოლო წევრთა ჯამი S, მაშინ

$$a_n=a_1+d(n-1); \quad S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

გეომეტრიული პროგრესია

თუ $a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვები შეადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელია q, ხოლო წევრთა ჯამი S, მაშინ

$$a_n=a_1q^{n-1}; \quad S=\frac{a_nq-a_1}{q-1}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}.$$

ლოგარითმები

თუ $\log_m N=x$, მაშინ $N=m^x$.

$$\log_a a=1,\ \log 1=0,\ a^{\log_a b}=b,\ \log ab=\log a+\log b;$$

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b,\ \log a^n=n\log a,\ \log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a,$$

$(a>0,\ b>0,\ n>0)$.

უტოლობები

გამოთქმა „a მეტია b-ზე“ $(a>b)$ ნიშნავს, რომ $a-b$ დადებითი რიცხვია, ხოლო გამოთქმა „a ნაკლებია b-ზე“ $(a<b)$ ნიშნავს, რომ სხვაობა უარყოფითი რიცხვია.

უტოლობათა თვისებები

1. თუ $a>b$, მაშინ $b<a$;
2. თუ $a>b$ და $b>c$, მაშინ $a>c$;
3. თუ $a>b$ და $c=d$, მაშინ $a+c>b+d$ და $a-c>b-d$;
4. თუ $a>b$ და c დადებითი რიცხვია, მაშინ $ac>bc$ და $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$;
5. თუ $a>b$ და c უარყოფითი რიცხვია, მაშინ $ac<bc$ და

$$\frac{a}{c}<\frac{b}{c};$$

6. თუ $a>b+c$, მაშინ $a-c>b$;
7. თუ $ax+b>a_1x+b_1$ და $a-a_1>0$, მაშინ $x>\dfrac{b_1-b}{a-a_1}$, ხოლო როცა $a-a_1<0$, მაშინ $x<\dfrac{b_1-b}{a-a_1}$.

ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა

თუ a რაიმე ნამდვილი რიცხვია, მაშინ მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა (მოდული) აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოთი: $|a|$. განმარტების ძალით

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{როცა } a\geqslant 0, \\ -a, & \text{როცა } a<0. \end{cases}$$

რიცხვის აბსოლუტურ მნიშვნელობას აქვს შემდეგი თვისებები:

$$|a|=|-a|;\quad |a\pm b|\leqslant|a|+|b|;\quad |a-b|\geqslant|a|-|b|;$$

$$|ab|=|a||b|;\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},\quad (b\neq 0),$$

კუთხის გრადუსული და რადიანული ზომა

1 გრადუსი ისეთი ცენტრალური კუთხეა, რომლის შესაბამისი რკალი მთელი წრეწირის $\dfrac{1}{360}$ ნაწილს შეადგენს, ხოლო 1 რადიანი ისეთი ცენტრალური კუთხეა, რომლის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია.

180 გრადუსი $=\pi$ რადიანს;

1 გრადუსი $=\dfrac{\pi}{180}$ რადიანს $\approx 0{,}017$ რადიანს[1];

1 რადიანი $=\dfrac{180}{\pi}$ გრადუსს $\approx 57{,}29$ გრადუსს.

---

[1] ნიშანი $\approx$ იკითხება ასე: დაახლოებით უდრის.

წრე, წრიული სექტორი

წრის ფართობი $s=\pi r^2$, წრეწირის სიგრძე $c=2\pi r$ $(\pi=3{,}1415\ldots)$; წრიული სექტორის ფართობია $\frac{1}{2}r^2\alpha$, სადაც α სექტორის ცენტრალური კუთხეა რადიანებით გაზომილი, ხოლო r წრის რადიუსი.

ზოგიერთი გეომეტრიული სხეულის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი

პრიზმის მოცულობა $=sh$;

პირამიდის მოცულობა $=\frac{1}{3}sh$;

მართი წრიული ცილინდრის მოცულობა $=\pi r^2 h$, მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი $=2\pi rl$, ხოლო სრული ზედაპირის ფართობი კი $=2\pi r(r+h)$; მართი წრიული კონუსის მოცულობა $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი $=\pi rl$, ხოლო სრული ზედაპირის ფართობი კი $=\pi r(r+l)$; სფეროს მოცულობა $=\frac{4}{3}\pi r^3$, მისი ზედაპირის ფართობი $=4\pi r^2$; წაკვეთილი მართი წრიული კონუსის მოცულობა $=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$, ხოლო მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი $\pi l(R+r)$. ზემოთ მოყვანილ ფორმულებში r და R სათანადო წრის რადიუსებია, s = ფუძის ფართობი, h სიმაღლე, l — მსახველი.

ტრიგონომეტრიის ძირითადი ფორმულები

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha};\quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;\quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha;$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

თუ ABC სამკუთხედში a, b, c არის A, B და C კუთხეების მოპირდაპირე გვერდები, ხოლო მისი ფართობია s, მაშინ:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

$$s = \frac{1}{2}bc\sin A;$$

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

სადაც $a+b+c=2p$.

თუ ABC მართკუთხა სამკუთხედია, სადაც C მართი კუთხეა, მაშინ

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad a = c\sin A;$$

$$a = c\cos B; \quad a = b\operatorname{tg} A; \quad a = b\operatorname{ctg} B.$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

§ 2. ნამდვილი რიცხვები

რიცხვის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა. ყველა მთელ დადებით რიცხვებს 1, 2, 3, 4, 5... ნატურალური რიცხვები ეწოდება. ნატურალურ რიცხვებს, მათს მოპირდაპირე —1, —2, —3,

-4, -5,... რიცხვებთან და ნულთან ერთად, მთელ რიცხვებს უწოდებენ.

ყოველ $\frac{p}{q}$ სახის წილად რიცხვებს, სადაც p და q მთელებია და $q \neq 0$, რაციონალური რიცხვი ეწოდება. კერძოდ ყოველი მთელი p რიცხვი—რაციონალური რიცხვია, რადგან ის შესაძლებელია წარმოვადგინოთ $p=\frac{p}{1}$ წილადის სახით.

შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და (არანულოვან რაციონალურ რიცხვზე) გაყოფის ოპერაციების შედეგად, რაციონალური რიცხვებიდან კვლავ რაციონალური რიცხვები მიიღება; **ნულზე გაყოფა დაუშვებელი ოპერაციაა.**

ყოველი რაციონალური რიცხვი შესაძლებელია გამოისახოს უსასრულო, პერიოდული ათწილადით. ამისათვის საკმარისია ავიღოთ $\frac{p}{q}$ წილადი (სადაც p და q მთელებია, რომელთაგან q შეგვიძლია ჩავთვალოთ დადებითად) და შევასრულოთ p-ს q-ზე გაყოფის მოქმედება ცნობილი, გაყოფის ალგორითმის გამოყენებით.

ასე მაგალითად,

$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$ (ეს პერიოდული ათწილადია, პერიოდით 3),

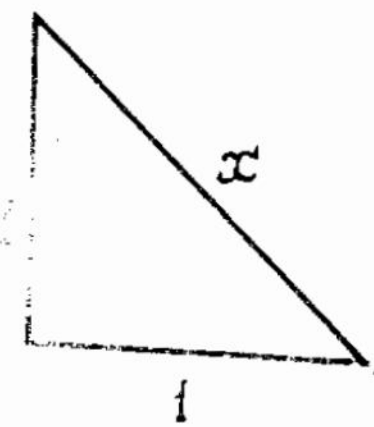
$\frac{2}{5}=0{,}4000\ldots$ (ეს პერიოდული ათწილადია, პერიოდით 0),

და ა. შ. ამგვარად, რაციონალური რიცხვები ჩვენ შეგვიძლია გავაიგივოთ პერიოდულ (უსასრულო) ათწილადებთან, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არასაკმარისია მათემატიკისა და ბუნებისმეტყველების მრავალი საჭიროებისათვის, ასე მაგალითად, მხოლოდ რაციონალური რიცხვების სიმრავლეში უმარტივესი სახის ალგებრულ განტოლებებს, ზოგჯერ ამონახსნები არ გააჩნიათ. კონკრეტულად, ამონახსნი არ გააჩნია რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში $x^2=2$ განტოლებას.

მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი, და ვთქვათ, რომ $\frac{p}{q}$ ისეთი რაციონალური რიცხვია, რომლის კვადრატი ტოლია 2-ის. ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\frac{p}{q}$ ასეთი უკვეცი წილადია. მაშინ რადგან $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, გვექნება $p^2=2q^2$. საიდანაც, ცხადია, p^2 ლუწი მთელი რიცხვი იქნება, ამიტომ ლუწი იქნება p-ც (რადგან კენტი რიცხვის კვადრატი კენტია). ამგვარად, p-ს ექნება სახე: $p=2m$, სადაც m აგრეთვე

მთელია. მაშინ ჩვენი გამოსავალი ტოლობა გვაძლევს: $4m^2=2q^2$ ანუ $q^2=2m^2$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ q^2 და, მაშასადამე მასთან ერთად q-ც ლუწია, ე. ი. q-ს ექნება სახე $q=2n$. მივიღეთ, რომ p და q ორივე იყოფა 2-ზე, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს წინასწარ დაშვებას, რომ $\frac{p}{q}$ უკვეცი წილადია. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $x^2=2$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ამონახსნი რაციონალურ რიცხვებს შორის.

ასევე, ადვილად შესამოწმებელია, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია აგრეთვე $x^2=5$, $x^2=6,\ldots$ უმარტივესი სახის განტოლებებს. იგივე გარემოება გვიჩვენებს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არასაკმარისია ელემენტარულ გეომეტრიული საჭიროებისთვისაც. ასე მაგალითად, მხოლოდ რაციონალურ რიცხვებს თუ გამოვიყენებთ, ბევრ უბრალო მონაკვეთს არ ექნება სიგრძე, ბევრ უმარტივეს გეომეტრიულ ფიგურას არ აღმოაჩნდება ფართობი და ა. შ.



ნახ. 1.

ავიღოთ, კონკრეტულად, ერთეული სიგრძის კათეტებიანი მართკუთხა სამკუთხედი (იხ. ნახ. 1).

მის ჰიპოტენუზას მაშინ სიგრძე არ გააჩნია (რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში). მართლაც, პითაგორას თეორემის თანახმად, თუ მას აქვს სიგრძე და იგი x-ის ტოლია, მაშინ უნდა გვქონდეს: $x^2=1^2+1^2=2$ ე. ი. x ისეთი რიცხვი უნდა იყოს, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. მაგრამ, როგორც ვიცით, ასეთი რაციონალური რიცხვი არ არსებობს!

ასევე თურმე, არ გააჩნია სიგრძე (რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში), ერთეული სიგრძის დიამეტრის წრეხაზს და სხვ.

ყოველივე ზემონათქვამი გვარწმუნებს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არასაკმარისია პრაქტიკული საჭიროების თვალსაზრისით. ამით აიხსნება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოების აუცილებლობა, ახალი ე. წ. ირაციონალური რიცხვების შემოტანით.

ირაციონალური რიცხვი შესაძლებელია განხილულ იქნეს როგორც ნებისმიერი უსასრულო, არაპერიოდული, ათწილადი. მაგალითად, ათწილადი 0,101001000100001... (რომელშიაც ნულების სერიის სიგრძე ყოველ ორ ერთიანს შორის თანდათანობით მატულობს), ცხადია ერთ-ერთი არაპერიოდული უსასრულო ათწილადი და მაშასადამე, ერთ-ერთი ირაციონალური რიცხვი იქნება.

კვადრატული ფესვის ამოღების ცნობილი ალგორითმის გამოყენებას 2-სათვის (ე. ი. $\sqrt{2}$-ს გამოთვლას) მივყავართ არაპერიოდულ უსასრულო ათწილადამდე, რომლის პირველი დაწყებითი ციფრებია

$$\sqrt{2}=1.41\ldots$$

ასე მიიღება არაპერიოდული უსასრულო ათწილადი, რომელიც ამიტომ, გარკვეული ირაციონალური რიცხვია. ამ რიცხვის კვადრატი 2-ის ტოლია! ამგვარად, ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში $x^2=2$ განტოლებას უკვე გააჩნია ამონახსნი (აი ჩვენ მიერ ახალი ტიპის რიცხვების შემოტანით მიღებული მოგება).

ყველა რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების სიმრავლეს *ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე* ეწოდება. ამ სიმრავლის ყოველ ელემენტს ნამდვილ რიცხვს ვუწოდებთ. ამგვარად, როგორც რაციონალური ისე ირაციონალური რიცხვები, ნამდვილი რიცხვებია.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ბუნებრივად შემოიტანება არითმეტიკის ძირითადი (შეკრების, გამოკლების გამრავლების და არანულოვან რიცხვზე გაყოფის) ოპერაციები. მათი შედეგები ისევ ნამდვილ რიცხვებს გვაძლევს. რაიმე ნამდვილი x რიცხვის n-ური ხარისხი x^n განმარტებულია როგორც $x\,x\,x\ldots x$—(x-ის ნამრავლი თავის თავზე n-ჯერ). ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი გააჩნია ყველა ელემენტარული სახის $x^2=a$ განტოლებას (როცა $a\geqslant 0$), კერძოდ ყველა ზემოთ ხსენებული $x^2=5$, $x^2=6,\ldots$ განტოლებანი ახალ რიცხვთა სიმრავლეში ამოხსნადი არიან.

უფრო მეტიც, ყოველი n-სათვის და ყოველი დადებითი ნამდვილი a რიცხვისათვის არსებობს, ერთადერთი ისეთი დადებითი ნამდვილი x რიცხვი, რომლის n-ური ხარისხი a-ს ტოლია. ამ რიცხვს, ჩვეულებრივ, $\sqrt[n]{a}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ და მას a-ს n-ური ხარისხის არითმეტიკულ ფესვს უწოდებენ.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ზემოაღნიშნული მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზას გააჩნია გარკვეული სიგრძე, და ესაა ჩვენ მიერ ზემოაღნიშნული $\sqrt{2}$ რიცხვი. კიდევ მეტიც, სიგრძე გააჩნია ერთეული დიამეტრის მქონე წრეწირს, ეს სიგრძე π ასოთი აღინიშნება, π ცხადია, ირაციონალური რიცხვია და მისი ათწილადად დაშლის პირველი რამდენიმე ციფრი ასეთია: $\pi=3,14159\ldots$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე დალაგებული სიმრავლეა მეტნაკლებობის ნიშნით.

თუ $x=a_0, a_1 a_2 a_3\cdots$ და $y=b_0, b, b, b_3\cdots$ ორი უსასრულო ათწილადია, ჩვენ ვამბობთ, რომ $x<y$, მაშინ, როცა იმ უმცირესი ნომრის b_i ციფრი, რომელიც განსხვავდება a_i-საგან, მეტია ვიდრე a_i (ე. ი. თუ $a_0=b_0$, $a_1=b_1,\ldots,a_{i-1}=b_{i-1}$ და $a_i<b_i$) მიმართება $x\leqslant y$ ნიშნავს, რომ $x<y$ ან $x=y$. ცხადია, რომ:

1) ყოველი x-სათვის გვაქვს $x \leqslant x$,

2) თუ $x \leqslant y$ და $y \leqslant x$, მაშინ $x = y$,

3) თუ $x \leqslant y$ და $y \leqslant z$, მაშინ $x \leqslant z$.

თუ x და y ორი ნამდვილი რიცხვია, $x \leqslant y$ და $x \neq y$, რა თქმა უნდა $x < y$ და ვამბობთ: x ნაკლებია y-ზე. ცხადია, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ნაწილს. ამ ნაწილს გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება: ყოველ ორ სხვადასხვა ნამდვილ რიცხვს შორის (ე. ი. თუ $x < y$) მოიძებნება უამრავი რაციონალური r რიცხვი, ე. ი. ისეთი, რომ $x < r < y$. თუ კერძოდ x და y თვითონ რაციონალური რიცხვებია, ასეთი იქნება მაგალითად $\frac{x+y}{2}$ $\left(\text{საზოგადოდ ასეთები იქნებიან ყველა } \frac{mx+ny}{m+n} \text{ რიცხვები, სადაც } m \text{ და } n \text{ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია}\right)$. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ამ თვისებას გამოხატავენ სიტყვებით:

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში.

მიღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

N—ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე

$$N = \{1,\ 2,\ 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Z—მთელ რიცხვთა სიმრავლე

$$Z = \{\ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\}$$

Q—რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in Z,\ q \in N \right\}$$

R—ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე

C—კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე

$$C = \{a + bi \mid a,\ b \in R,\ i^2 = -1\}$$

ცხადია, რომ

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C.$$

II თავი

სიმრავლე. რიცხვთა ღერძი

§ 1. ძირითადი ცნებები სიმრავლეთა შესახებ

ზემოთ ვახსენეთ სიტყვა სიმრავლე. სიმრავლის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა. იგი არ განისაზღვრება და მხოლოდ მაგალითებით შეიძლება წარმოვიდგინოთ. სიმრავლის სინონიმებია: ერთობლიობა, კრებული, კლასი და სხვა. მაგალითად, შეიძლება დავასახელოთ აუდიტორიაში სტუდენტთა სიმრავლე, ან იმავე აუდიტორიაში მერხების სიმრავლე, ზღვაში თევზების სიმრავლე, კოლმეურნეების სიმრავლე, რომელიც გაერთიანებულია კოლმეურნეობაში, წრფეზე წერტილების სიმრავლე, ვარსკვლავების სიმრავლე და სხვა, სიმრავლეს აღნიშნავენ ლათინური ალფაბეტის დიდი ასოებით: A, B, C, E, N, M,... საგნებს რომლისგანაც სიმრავლე შედგება ეწოდება სიმრავლის **ე ლ ე მ ე ნ ტ ე ბ ი**. მაგალითად, ზემოდასახელებულ სიმრავლეებში სათანადო ელემენტებია: სტუდენტი, მერხი, თევზი, კოლმეურნე, წერტილი, ვარსკვლავი და სხვა. სიმრავლის ელემენტების აღსანიშნავად იხმარება იმავე ალფაბეტების პატარა ასოები: a, b, c, e, n, m,...იმ ფაქტს, რომ a არის A სიმრავლის ელემენტი, ასე აღნიშნავენ $a \in A$ და იკითხება: „a ეკუთვნის A სიმრავლეს" ან „a არის A სიმრავლის ელემენტი". თუ a საგანი არ არის A სიმრავლის ელემენტი, მაშინ წერენ ასე $a \overline{\in} A$ და იკითხება — „a არ ეკუთვნის A სიმრავლეს" ან „a არ არის A სიმრავლის ელემენტი". მაგალითად, თუ A ვარსკვლავების სიმრავლეა და a არის სირიუსი, მაშინ $a \in A$, მაგრამ თუ A არის ცხვრების სიმრავლე და a არის თევზი, მაშინ $a \overline{\in} A$, ასევე თუ Q არის ყველა რაციონალური რიცხვების სიმრავლე, მაშინ $\frac{2}{3} \in Q$, ხოლო $\sqrt{2} \overline{\in} Q$. სიმრავლეს ეწოდება ცარიელი, თუ ის არც ერთ ელემენტს არ შეიცავს. მაგალითად, $x^2+9=0$ განტოლების ნამდვილი ფესვების სიმრავლე ცარიელია. ცარიელ სიმრავლეს აღნიშნავენ $\varnothing$ სიმბოლოთი, სიმრავლეს ეწოდება **ა რ ა ც ა რ ი ე ლ ი**, თუ იგი ერთ ელემენტს მაინც შეიცავს. არსებობს **ე რ თ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ა ნ ი** სიმრავლეებიც. ე. ი.

ისეთი სიმრავლეები, რომლებიც მხოლოდ ერთი ელემენტისაგან შედგება. მაგალითად. $3x-6=0$ განტოლების ფესვების სიმრავლე შედგება ერთი ელემენტისაგან: ეს არის რიცხვი 2

თუ შეიძლება დავასახელოთ სიმრავლის ყველა ელემენტი, მაშინ მათ დაწერენ მიმდევრობით და მოათავსებენ ფიგურულ ფრჩხილებში, მაგალითად:

$$A=\{a, b, c, k, e, m\}, \quad B=\{2, 3, 5, 6, 9\}.$$

თუ სიმრავლეში შემავალი ელემენტების რაოდენობა გარკვეული ნატურალური n რიცხვია, მაშინ მას ეწოდება *სასრული* სიმრავლე, წინააღმდეგ შემთხვევაში სიმრავლე *უსასრულოა*. მაგალითად, აუდიტორიაში სტუდენტების სიმრავლე სასრულია, ხოლო წრფეზე წერტილების სიმრავლე—უსასრულო და ა. შ. შემდეგში საქმე გვექნება უმეტესად რიცხვების, წერტილების, წრფეების, ზედაპირებისა და განტოლებების სიმრავლეებთან.

ორ A და B სიმრავლეთა შორის, თუ ისეთი დამოკიდებულება არსებობს, რომ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი არის B სიმრავლის ელემენტი, მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლე *ნაწილია* B-სი, ანუ A არის B სიმრავლის *ქვესიმრავლე* და ამ ფაქტს აღნიშნავენ ასე: $A\subset B$. ამრიგად, თუ $A\subset B$ და a არის A სიმრავლის რომელიმე ელემენტი, ე. ი. $a\in A$, მაშინ უეჭველად $a\in B$, მაგალითად: თუ

$A=\{2, 3, 5, 8, 9\}$, ხოლო $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, მაშინ ცხადია, რომ $A\subset B$.

თუ M ყველა ლუწ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო N—ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, მაშინ $M\subset N$.

თუ $A\subset B$ და, ამასთან, B სიმრავლე შეიცავს ისეთ ელემენტს, რომელიც A სიმრავლეს არ ეკუთვნის, მაშინ A-ს ეწოდება B სიმრავლის *საკუთრივი ნაწილი*. ცარიელი $\varnothing$ სიმრავლე ყოველი სიმრავლის საკუთრივი ნაწილია. განმარტებიდან ცხადია, რომ $A\subset A$; თუ $A\subset B$ და $B\subset C$, მაშინ $A\subset C$.

ახლა, ვთქვათ, A რაიმე სიმრავლეა. აღვნიშნოთ $H(A)$ თი სიმრავლე A-ს ყველა ქვესიმრავლისა, მაშასადამე, $H(A)$ სიმრავლის ელემენტები A სიმრავლის ქვესიმრავლეებია. მაგალითად: თუ $A=\{2, 3\}$, მაშინ $H(A)=\{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$; თუ $A=\{5, 0, 8\}$. მაშინ $H(A)=\{\varnothing, \{5\}, \{0\}, \{8\}, \{5, 0\}, \{5, 8\}, \{0, 8\}, \{5, 0, 8\}\}$.

ახლა განვმარტოთ სიმრავლეთა ტოლობა. A და B სიმრავლეებს *ტოლი სიმრავლეები* ეწოდება, თუ $A\subset B$ და $B\subset A$; ე. ი, A სიმრავლის ყოველი ელემენტი იმავე დროს B სიმრავლის ელემენტია და, პირიქით, B სიმრავლის ყოველი ელემენტი A სიმრავლის ელემენტია. მაგალითად, თუ $A=\{3, 4\}$, ხოლო B კვადრატული $x^2-7x+12=0$ განტოლების ფესვების სიმრავლეა, მაშინ $A=B$.

§ 2. სიმრავლეთა ეკვივალენტობა

იმისათვის, რომ ორი სიმრავლე შევადაროთ ერთმანეთს მათში შემავალი ელემენტების რაოდენობის მიხედვით, საჭიროა შემოვიღოთ ერთ-ერთი ძირითადი ცნება—სიმრავლეთა „ეკვივალენტობა“. ამბობენ, რომ A და B ეკვივალენტური სიმრავლეებია, თუ არსებობს წესი, რომლის მიხედვით მათ შორის შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა; ე. ი. თუ A სიმრავლის ყოველ ელემენტს, გარკვეული წესით, შეესაბამება B სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი და პირიქით, B სიმრავლის ყოველი ელემენტი A სიმრავლის რომელიმე ერთადერთი ელემენტის შესაბამისია. იმ ფაქტს, რომ A ეკვივალენტურია B-სი, წერენ ასე $A \sim B$. სასრული სიმრავლის შემთხვევაში ეკვივალენტობის ცნება ემთხვევა რიცხვითი ტოლობის ჩვეულებრივ ცნებას, რადგანაც ორ სასრულ სიმრავლეს შორის მხოლოდ იმ შემთხვევაში შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, თუ ეს სიმრავლეები ელემენტების ერთსა და იმავე რიცხვს (რაოდენობას) შეიცავს. შევნიშნავთ, რომ ამაზეა დამყარებული თვლის იდეა: როდესაც ჩვენ „ვთვლით“ სიმრავლის ელემენტებს, მაშინ თვლის პროცესი სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ მყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა სიმრავლის ელემენტებსა და $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ რიცხვებს შორის.

თავისთავად ცხადია, რომ თუ მოცემული სიმრავლე სასრულია, ე. ი. ელემენტების რაიმე n რიცხვს შეიცავს, მაშინ ის არ შეიძლება ეკვივალენტური იყოს მისი არც ერთი საკუთრივი ქვესიმრავლისა, რადგანაც მისი ყოველი ქვესიმრავლე შეიცავს არა უმეტეს $n-1$ ელემენტს. მაგრამ, თუ მოცემული სიმრავლე შეიცავს ელემენტთა უსასრულო რაოდენობას, მაშინ არ უნდა გაგვიკვირდეს, რომ ის შესაძლებელია ეკვივალენტური იყოს თავისი რომელიმე ქვესიმრავლისა, მაგალითად, სქემა:

$$\begin{array}{rcccccccc} N = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots, & n, & \ldots\}. \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ M = \{ & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, \ldots & 2n, & \ldots\} \end{array}$$

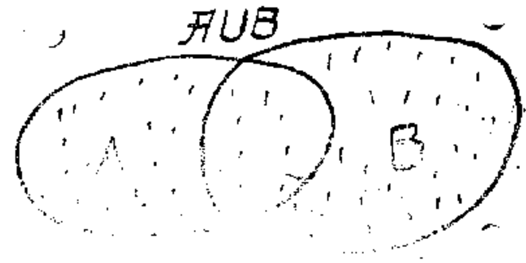
ამყარებს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლესა და ყველა ლუწ რიცხვთა M სიმრავლეს შორის. ამრიგად, ეს ორი სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია $N \sim M$, მიუხედავად იმისა, რომ მეორე არის პირველი სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი.

ორ უსასრულო სიმრავლეთა ეკვივალენტობა არ უნდა გავაიგივოთ მათ ტოლობასთან. მაგალითად, როგორც ზემოთ დავინახეთ, ყველა ლუწ რიცხვთა M სიმრავლე ეკვივალენტურია ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლისა, მაგრამ ისინი ტოლი სიმრავლეები არ არიან.

§ 3. მოქმედებანი სიმრავლეებზე

განმარტება 1. ვთქვათ, A და B ორი სიმრავლეა. ყველა იმ ელემენტის S სიმრავლეს, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნიან, ამ სიმრავლეების გ a ე რ თ ი ა ნ ე ბ ა ანუ მათი ჯამი ეწოდება და აღინიშნება ასე: (ნახ. 2)

$$S = A \cup B, \text{ ან } S = A + B.$$



ნახ. 2.

ასევე, თუ აღებულია სიმრავლეთა $\{A_k\}$ სისტემა, სადაც k ნიშნაკი ღებულობს $k=1, 2, 3, \ldots, n$ მნიშვნელობებს, მაშინ ამ სისტემის სიმრავლეთა გაერთიანება ეწოდება ყველა იმ ელემენტის S სიმრავლეს, რომელიც ეკუთვნის აღებული სისტემის ერთ-ერთ სიმრავლეს მაინც და წერენ:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

ან

$$S = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k,$$

ხოლო, თუ k ღებულობს ყველა ნატურალური რიცხვის მნიშვნელობას, მაშინ

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

ან

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} A_k.$$

მაგალითად, ვთქვათ, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$, მაშინ, განმარტების თანახმად, გვექნება $S = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$. განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $A \subset B$, მაშინ

$$A + B = B,$$

კერძოდ

$$A + A = A.$$

განმარტება 2. ორი A და B სიმრავლის თანაკვეთა ეწოდება ყველა იმ ელემენტის P სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნის როგორც A, ისე B

სიმრავლეს. ანუ სხვანაირად რომ ვთქვათ, A და B სიმრავლის თანაკვეთა შედგება ამ სიმრავლეთა მხოლოდ და მხოლოდ საერთო ელემენტებისაგან და აღინიშნება ასე (ნახ. 3):

$$P=AB, \text{ ან } P=A\cap B.$$

ნახ. 3

მაგალითად, თუ $A=\{3, 4, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, მაშინ

$$P=AB=\{3, 6\},$$

ანალოგიურად განისაზღვრება თანაკვეთა $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ სიმრავლეებისა:

$$P=A_1\cdot A_2\cdots A_n=\prod_{k=1}^{n} A_k \quad \text{ან} \quad P=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

და

$$P=A_1\cdot A_2\cdots A_n\cdots=\prod_{k=1}^{\infty} A_k, \text{ ან } P=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

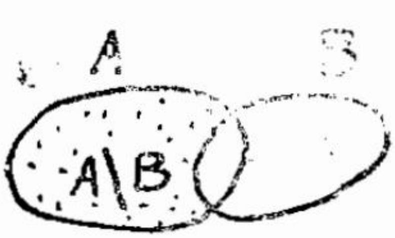
განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $A\subset B$, მაშინ $AB=A$ და კერძოდ, $AA=A$

თუ A და B სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო ელემენტები, მაშინ წერენ

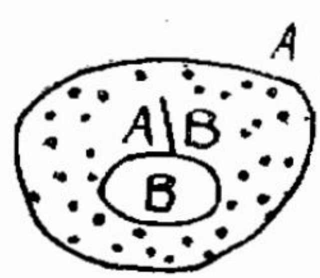
$$AB=\varnothing,$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ აგრეთვე, რომ A და B ურთიერთარაგადამკვეთი სიმრავლეებია.

განმარტება 8. A და B სიმრავლეთა სხვაობას უწოდებენ A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის R სიმრავლეს, რომლებიც B-ს არ ეკუთვნიან, და აღინიშნება ასე (ნახ. 4, 5):



ნახ. 4.



ნახ. 5.

$$R=A-B, \text{ ან } R=A\setminus B,$$

მაგალითად, თუ $A=\{3, 4, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 5, 6, 8\}$, მაშინ

$$R=A-B=\{3, 7\}.$$

თუ ვისარგებლებთ ზემოთ მოყვანილი განმარტებებით, მაშინ ადვილი-დასამტკიცებელია, რომ ყოველი A, B, C სამი სიმრავლისათვის ადგილი ექნება ტოლობას:

$$A(B-C)=AB-AC,$$

ხოლო $(A-B)+B=A$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $B\subset A$.

§ 4. სიმძლავრის ცნება. კარდინალური რიცხვები

დავუბრუნდეთ ეკვივალენტურ სიმრავლეებს. როგორც აღვნიშნეთ, იმ ფაქტს, რომ A სიმრავლე ეკვივალენტურია B სიმრავლისა, წერენ ასე $A\sim B$. თუ ვისარგებლებთ სიმრავლეთა ეკვივალენტობის განმარტებით, მაშინ ადვილად მიიღება შემდეგი თვისებები:

1. $A\sim A$ (რეფლექსურობა),
2. თუ $A\sim B$, მაშინ $B\sim A$ (სიმეტრიულობა),
3. თუ $A\sim B$, ხოლო $B\sim C$, მაშინ $A\sim C$ (ტრანზიტიულობა).

ახლა, ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი A სიმრავლე და განვიხილოთ ერთობლიობა იმ სიმრავლეებისა, რომლებიც ეკვივალენტურია A სიმრავლის, თანახმად ტრანზიტიულობის თვისებისა, ყველა ეს სიმრავლე იქნება ერთმანეთის ეკვივალენტური.

ასეთი სიმრავლეების ერთობლიობას ეწოდება ურთიერთეკვივალენტურ სიმრავლეთა კ ლ ა ს ი. ცნობილია, რომ არსებობს ურთიერთეკვივალენტური კლასების სიმრავლეთა უსასრულო რაოდენობა.

ტრანზიტიულობის თვისების თანახმად, ადვილი საჩვენებელია, რომ სხვადასხვა კლასში შემავალი არც ერთი ორი სიმრავლე არ შეიძლება იყოს ერთმანეთის ეკვივალენტური.

ამბობენ, რომ ერთი და იმავე კლასის ურთიერთეკვივალენტურ სიმრავლეებს აქვთ ერთი და იგივე ს ი მ ძ ლ ა ვ რ ე, ანუ მათ შეესაბამება ერთი და იგივე კ ა რ დ ი ნ ა ლ უ რ ი რ ი ც ხ ვ ი. მაშასადამე, სიმძლავრე ურთიერთეკვივალენტურ სიმრავლეთა საერთო თვისებაა. სასრული სიმრავლის შემთხვევაში სიმძლავრის ცნება იგივეა, რაც რაოდენობითი რიცხვის ცნება.

§ 5. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები

განვიხილოთ ყველა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე:

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ n,\ \ldots\}.$$

ყოველ A სიმრავლეს, რომელიც N სიმრავლის ეკვივალენტურია ($A\sim N$) ეწოდება თ ვ ლ ა დ ი სიმრავლე.

თვლადი სიმრავლის მაგალითებია:

$$A_1=\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ldots,\ n^2,\ \ldots\},$$

$$A_2=\{1,\ 8,\ 27,\ 64,\ \ldots,\ n^3,\cdots\},$$

$$A_3=\{2,\ 4.\ 6,\ 8,\ldots,\ 2n,\ \ldots\}$$

$$A_4=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots,\right\}$$ და ა. შ.

თუ A სიმრავლე თვლადია, მაშინ შესაძლებელია მისი ელემენტების დანომვრა, რაც იმას ნიშნავს, რომ სიმრავლის ყოველი ელემენტისათვის შეიძლება დავასახელოთ რაიმე ნატურალური რიცხვი, როგორც მისი ნომერი, ისეთნაირად, რომ ყოველ ელემენტს ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ნომერი და, პირიქით, ყოველი ნატურალური რიცხვი იყოს ნომერი სიმრავლის მხოლოდ ერთი ელემენტისა. ამრიგად, თუ A თვლადი სიმრავლეა, მაშინ იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ მიმდევრობის სახით:

$$A=\{a_1,\ a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

შეიძლება დამტკიცდეს თვლად სიმრავლეთა შესახებ შემდეგი:

1. ყველა თვლადი სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია;

2. თვლადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ნაწილი - თვლადი სიმრავლეა;

3. ყოველი უსასრულო **A** სიმრავლიდან შეიძლება გამოვყოთ თვლადი ქვესიმრავლე;

4. ყველა რაციონალური რიცხვის Q სიმრავლე თვლადი სიმრავლეა.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph_0$ (ალეფ-ნული) სიმბოლოთი. 1 თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი თვლადი სიმრავლის სიმძლავრე არის $\aleph_0$.

ზემონათქვამიდან არ გამომდინარეობს, რომ ყველა უსასრულო სიმრავლე თვლადია. მაგალითად, შეიძლება დამტკიცება იმისა, რომ ისეთი x ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $0\leqslant x\leqslant 1$ უტოლობებს, არ არის თვლადი; ე, ი. ამ სიმრავლის ელემენტები არ შეიძლება დაინომროს ნატურალური რიცხვებით.

სიმრავლეს, რომელიც თვლადი არ არის, არათვლადი ეწოდება. ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $0\leqslant x\leqslant 1$ უტოლობას, შეადგენს ნულ-ერთ სეგმენტს და აღინიშნება ასე $U=[0,\ 1]$. ცნობილია, რომ $[0,\ 1]$ სეგმენტი არათვლადი სიმრავლეა, რომელსაც კონტინუმი ეწოდება. სიმრავლეს, რომელიც ეკვივალენტურია $[0,\ 1]$ სეგმენტისა, ეწოდება კონტინუმის სიმძლავრის სიმრავლე. კონტინუმის სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph$ (ალეფ) სიმბოლოთი.

დასასრულ შეიძლება დამტკიცება იმისა, რომ:

1. ყველა ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს აქვს კონტინუმის სიმძლავრე.

2. ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეს აქვს კონტინუმის სიმძლავრე და სხვ.

§ 6. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია (რიცხვთა ღერძი) წერტილის კოორდინატი ღერძზე

განვიხილოთ რაიმე წრფე და ავიღოთ მასზე ფიქსირებული O წერტილი. ეს წერტილი წრფეს ყოფს ორ ნაწილად. ერთ-ერთი მიმართულება წრფეზე მივიღოთ დადებით მიმართულებად, რომელიც მასზე აღვნიშნოთ ისრით, ხოლო მოპირდაპირე მიმართულება კი მივიღოთ უარყოფითად (ნახ. 6).

თუ წრფეს ჰორიზონტალური მდებარეობა აქვს, მაშინ ამ წრფეზე მოძრაობის დადებითი მიმართულება ავირჩიოთ O წერტილიდან მარჯვენა მხარეს, ხოლო უარყოფითი — მარცხენა მხარეს.

წრფეს, რომელზედაც არჩეულია ისრით ნაჩვენები დადებითი მიმართულება, ეწოდება *ღერძი*, ხოლო O წერტილს — *სათავე*. ჩვენ ყველგან სიტყვა „მიმართულება“-ს ვხმარობთ პირობით. სინამდვილეში კი მიმართულებას უწოდებენ ორი პარალელური წრფის საერთო თვისებას.

ავიღოთ ღერძი და სიგრძის საზომ ერთეულად ავირჩიოთ AB მონაკვეთის სიგრძე (ნახ. 7). ვაწარმოოთ ამ მონაკვეთით გადაზომვა აღებულ

ნახ. 6.

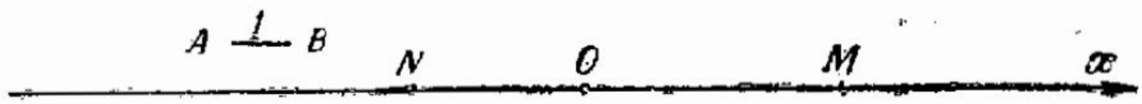
ღერძზე O სათავიდან. მაშინ შეგვიძლია ყოველ ნამდვილ რიცხვს შევუსაბამოთ ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი ღერძზე და, პირიქით. მართლაც, ვთქვათ x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. თუ $x = 0$, მაშინ მას შევუსაბამოთ O სათავე. თუ $x > 0$, მაშინ მას შევუსაბამოთ ღერძის ერთი M წერტილი, რომელიც მოთავსებულია O წერტილის მარჯვნივ (ე. ი. ღერძის დადებით მხარეზე) და დაშორებულია O წერტილიდან x მანძილით. თუ $x < 0$, მას შევუსაბამოთ ერთი N წერტილი, რომელიც მოთავსებულია O წერტილის მარცხნივ (ე. ი. ღერძის უარყოფით მხარეზე) და დაშორებულია O წერტილიდან $|x|$ მანძილით. ზემოაღნიშნული წესით, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი ღერძზე. ადვილი გასაგებია, რომ, პირიქითაც, ყოველ წერტილს ღერძზე შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი ნამდვილი რიცხვი, სახელდობრ, ღერძის ყოველ M წერტილს შეესაბამება ის ნამდვილი რიცხვი x, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობაც უდრის OM მონაკვეთის სიგრძეს. მას ექნება დადებითი ნიშანი, თუ M წერტილი ძევს ღერძის დადებით მხარეს, ხოლო უარყოფითი — თუ იგი ძევს ღერძის უარყოფით მხარეს.

ამრიგად, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შევუსაბამეთ ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი ღერძზე, ამასთან ისე, რომ ღერძის ყოველი წერტილი ერთადერთ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება. ამგვარად, დავამყარეთ ურთიერთ-

ცალსახა შესაბამისობა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა (ერთობლიობასა) და ღერძის ყველა წერტილის სიმრავლეს (ერთობლიობას) შორის.

ღერძს, რომლის ყოველ წერტილს ზემოაღნიშნული წესით შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი, რიცხვთა ღერძი ეწოდება. აღვნიშნოთ ეს ღერძი Ox-ით.

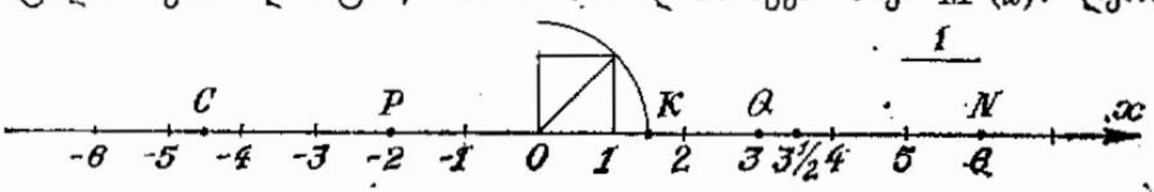
რიცხვთა ღერძი საშუალებას გვაძლევს ნამდვილი რიცხვი გავაიგივოთ ღერძის იმ წერტილთან, რომელიც მას შეესაბამება, ამიტომ ზოგჯერ ვიტყვით „წერტილი", მაგრამ მხედველობაში გვექნება ის რიცხვი, რომელიც მას შეესაბამება. პირიქითაც, ზოგჯერ ვიტყვით „რიცხვი", მაგრამ მხედველობაში გვექნება რიცხვთა ღერძის ის წერტილი, რომელიც მას



ნახ. 7.

შეესაბამება. ქვემოთ (ნახ. 8) ღერძზე აღნიშნულია სხვადასხვა წერტილი სათანადო რიცხვებით. K წერტილს, რომელიც O წერტილიდან დაშორებულია OK მონაკვეთით და რომელიც უდრის ერთეულზე აგებულ კვადრატის დიაგონალს, შეესაბამება $\sqrt{2}$, და ა. შ.

Ox ღერძზე რომელიმე M წერტილის მდებარეობა სავსებით დახასიათებულია იმ x ნამდვილი რიცხვით, რომელიც მას შეესაბამება. ამ რიცხვს ეწოდება M წერტილის კოორდინატი. თუ x რიცხვი M წერტილის კოორდინატია, მაშინ მას აღნიშნავენ ასე: $M(x)$. ღერძზე



ნახ. 8.

აღებულ ფიქსირებულ O წერტილს ამ შემთხვევაში ეწოდება კოორდინატთა სათავე, ხოლო Ox ღერძს—კოორდინატთა ღერძი. ცხადია, რომ, კოორდინატთა სათავის კოორდინატი ნულის ტოლია. Ox ღერძზე (ნახ. 8) აგებულია წერტილები $P(-2)$, $C\left(-4\frac{1}{2}\right)$, $K(+\sqrt{2})$, $Q(+3)$, $N(+6)$ და ა. შ.

§ 7. ზოგიერთი დამხმარე ცნება და აღნიშვნა

ახლა შემოვიღოთ ზოგიერთი ცნება, რომლითაც შემდეგში ვისარგებლებთ. ვთქვათ, რომ a და b ორი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია და $a<b$.

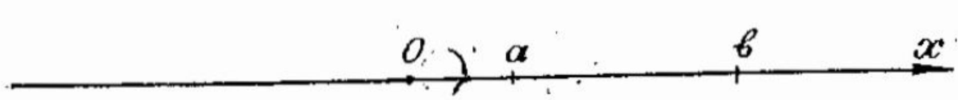
განმარტება 1. a და b რიცხვებს შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, ღ ი ა შ უ ა ლ ე დ ი ანუ ი ნ ტ ე რ ვ ა ლ ი ეწოდება და აღინიშნება ასე (a, b). ამრიგად, შუალედი არის ყველა იმ x რიცხვის სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს:

$$a<x<b.$$

რიცხვთა ღერძზე (a, b)-ს შეესაბამება მონაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილებია a და b და რომლებიც არ ეკუთვნიან ამ მონაკვეთს (ნახ. 9).

ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $a\leqslant x<b$, ან $a<x\leqslant b$ უტოლობებს, აღინიშნება შესაბამისად შემდეგნაირად: $[a, b)$ და $(a, b]$ და ეწოდება ნ ა ხ ე ვ ა რ ს ე გ მ ე ნ ტ ი.

განმარტება 2. მოცემულ a და b რიცხვებს შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს a და b რიცხვების ჩათვლით ეწოდება



ნახ. 9.

ს ე გ მ ე ნ ტ ი და აღინიშნება ასე: $[a, b]$. ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე სეგმენტი არის მონაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილებია a და b, და რომლებიც ეკუთვნიან ამ მონაკვეთს. ამრიგად $[a, b]$ სეგმენტი ყველა იმ x რიცხვთა სიმრავლეა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $a\leqslant x\leqslant b$.

შუალედი შეიძლება იყოს უსასრულო. მაგალითად, ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (ანუ რიცხვთა მთელი ღერძი) უსასრულო შუალედია, რომელიც აღინიშნება ასე: $(-\infty, +\infty)$. ყველა დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე იქნება ნახევარი უსასრულო წრფე: $(0, +\infty)$, ხოლო ყველა ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $x\geqslant a$ უტოლობას, აღინიშნება ასე: $[a, +\infty)$. ანალოგიურად განისაზღვრება $(-\infty, a)$ შუალედი.

ყ ვ ე ლ ა ნ ა მ დ ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ თ ა ს ი მ რ ა ვ ლ ე, რ ო მ ე ლ ი ც ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ს $|x|<k$ უ ტ ო ლ ო ბ ა ს, ს ა დ ა ც $k>0$, წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს შ ე მ დ ე გ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს:

$$-k<x<k. \tag{1}$$

მართლაც, ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური სიდიდის განსაზღვრის თანახმად გვექნება:

$$\left.\begin{array}{l}|x|\geqslant 0,\ \ |x|=|-x|,\\ x\leqslant|x|,\ -x\leqslant|x|\end{array}\right\} \tag{2}$$

ამიტომ, თუ $|x|<k$, მაშინ ამ უტოლობიდან და (2) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$x<k, \quad -x<k \tag{3}$$

უკანასკნელ უტოლობას, თუ გავამრავლებთ -1-ზე, გვექნება

$$x>-k,$$

ანუ

$$-k<x. \tag{4}$$

(3) და (4) უტოლობებიდან გამომდინარეობს (1) უტოლობები.

პირიქით, ვთქვათ, ადგილი აქვს $-k<x<k$ უტოლობას, აქედან ადვილად მივიღებთ $|x|<k$ უტოლობას.

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი სიმრავლე X. იგი შეიძლება შედგებოდეს სასრული რაოდენობის ნამდვილი რიცხვებისაგან, უკანასკნელ შემთხვევაში შეგვიძლია დავასახელოთ ამ სიმრავლის უმცირესი და უდიდესი რიცხვი. მაგალითად, $X=\{3, 8, 1, 2, 9, 4\}$ სიმრავლეში უმცირესი რიცხვია 1, ხოლო უდიდესი—9.

თუ X სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლეა, მაშინ შეიძლება, რომ ამ სიმრავლეში არ იყოს ან უმცირესი ან უდიდესი რიცხვი ან არც ერთი მათგანი. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლეში უმცირესი რიცხვია 1, ხოლო უდიდესი რიცხვი არ არსებობს. თუ $a<b$ და $X=(a, b]$, მაშინ ამ სიმრავლეში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი, ხოლო უდიდესი რიცხვია b. თუ $X=(a, b)$. მაშინ ამ სიმრავლეში არ არსებობს არც უმცირესი და არც უდიდესი რიცხვი.

განმარტება 3. ამბობენ, რომ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე X სიმრავლე *ზემოდან შემოსაზღვრულია*, თუ არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვი A, რომ X სიმრავლის არც ერთი რიცხვი არ აღემატება A-ს. A რიცხვს ეწოდება X სიმრავლის *ზედა საზღვარი*, ცხადია, რომ ყოველი A-ზე მეტი B რიცხვი იქნება აგრეთვე X სიმრავლის ზედა საზღვარი.

გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ რიცხვთა ღერძზე X სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არაა მოთავსებული A წერტილის მარჯვნივ.

განმარტება 4. ნამდვილ რიცხვთა X სიმრავლეს ეწოდება *ქვემოდან შემოსაზღვრული*, თუ არსებობს ისეთი ნამდვილი a რიცხვი, რომ X სიმრავლის არც ერთი რიცხვი ნაკლები არ არის a-ზე. a-ს ეწოდება X სიმრავლის *ქვედა საზღვარი*. ცხადია, რომ ქვემოდან შემოსაზღვრული X სიმრავლის ქვედა საზღვრების სიმრავლე უსასრულოა.

გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ რიცხვთა ღერძზე X სიმრავლის არც ერთი წერტილი არაა მოთავსებული a წერტილის მარცხნივ.

განმარტება 5. ნამდვილ რიცხვთა X სიმრავლეს ეწოდება *შემოსაზღვრული სიმრავლე*, თუ იგი შემოსაზღვრულია როგორც ქვემოდან

ისე ზემოდან. ამ შემთხვევაში არსებობს ისეთი ორი ნამდვილი a და A რიცხვი, რომ X სიმრავლის ყველა ელემენტი მოთავსებულია $[a, A]$ სეგმენტში.

თუ სიმრავლე შემოსაზღვრული არ არის, მაშინ მას შ ე მ ო უ ს ა ზ ღ ვ-რ ე ლ ი ს ი მ რ ა ვ ლ ე ეწოდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი 1. ყველა წესიერი წილადის სიმრავლე შემოსაზღვრულია $(-1, +1)$ შუალედით.

2. ყველა უარყოფით რიცხვთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან (მისი ზედა საზღვარია ნული ან ნებისმიერი დადებითი რიცხვი). მაგრამ ეს სიმრავლე არ არის ქვემოდან შემოსაზღვრული.

3. ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვემოდან (მის ქვედა საზღვრად შეიძლება ავიღოთ ნული ან ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვი), მაგრამ ეს სიმრავლე არ არის შემოსაზღვრული ზემოდან.

განმარტება 6. M რიცხვს ეწოდება X სიმრავლის ზ უ ს ტ ი ზ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ ა რ ი, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას: 1) X სიმრავლის არც ერთი რიცხვი არ აღემატება M-ს და 2) ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვისათვის X სიმრავლეში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი x რიცხვი, რომელიც აღემატება $(M-\varepsilon)$-ს.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, X სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი წარმოადგენს ამ სიმრავლის ზედა საზღვრებს შორის უმცირესს და აღინიშნება ასე: $M = \sup X$*.

განმარტება 7. m რიცხვს უწოდებენ X სიმრავლის ზ უ ს ტ ქ ვ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ ა რ ს, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას: 1) X სიმრავლეში არ არსებობს არც ერთი რიცხვი, რომელიც ნაკლებია m-ზე და 2) ყოველ ნებისმიერად მცირე დადებით ε რიცხვისათვის X სიმრავლეში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი რიცხვი, რომელიც ნაკლები იქნება $(m+\varepsilon)$-ზე.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, X სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი m ამ სიმრავლის ქვედა საზღვრებს შორის უდიდესია და აღინიშნება ასე; $m = \inf X$**.

მტკიცდება, რომ ყოველ არაცარიელ, შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს როგორც ზუსტი ზედა, ისე ზუსტი ქვედა საზღვრები.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი

განმარტება 8. ვთქვათ, გვაქვს n ნამდვილი რიცხვი. ვიტყვით, რომ ეს რიცხვები წარმოადგენს რიცხვთა დ ა ლ ა გ ე ბ უ ლ ს ი ს ტ ე მ ა ს, თუ

---

* sup აღნიშნავს შემოკლებას ლათინური სიტყვისა **supremum**—უმაღლესი.

** inf აღნიშნავს შემოკლებას სიტყვისა **infimum**—უმდაბლესი.

ეს რიცხვები დანომრილია, ანუ რაიმე წესის მიხედვით ნაჩვენებია, თუ რომელი რიცხვია პირველი, მეორე და ა. შ., კერძოდ, თუ x და y ორი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ ამ რიცხვებს ეწოდება *დალაგებული წყვილი*, თუ ნაჩვენებია რომელია ამ რიცხვებიდან პირველი და რომელი—მეორე. x და y ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილს აღნიშნავენ სიმბოლურად ასე: (x, y), სადაც პირველი ადგილი უჭირავს წყვილის პირველ წევრს x-ს.

დაბოლოს, X სიმრავლის ყველა იმ x ელემენტის სიმრავლე, რომელსაც მოცემული p თვისება გააჩნია, აღინიშნება ასე:

$$\{x \in X \mid p(x)\},$$

მაგალითები: თუ $a<b$, მაშინ $\{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ არის ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ $a \leqslant x \leqslant b$ პირობას, ანუ არის $[a, b]$ სეგმენტი.

$$[a, b]=\{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

თუ $a<b$, მაშინ (a, b) ინტერვალისა და $[a, b)$, $(a, b]$ ნახევარინტერვალებისათვის გვექნება:

$$(a, b)=\{x \in R \mid a<x<b\},$$
$$[a, b)=\{x \in R \mid a \leqslant x<b\},$$
$$(a, b]=\{x \in R \mid a<x \leqslant b\}.$$

$\{x \in N \mid 3 \leqslant x<8\}$ არის ნატურალურ x რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ $3 \leqslant x<8$, პირობას, ანუ ეს არის სიმრავლე $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, ხოლო $\{x \in N \mid 1<x \leqslant 5\}$ არის იმ ნატურალურ x რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ $1<x \leqslant 5$ პირობას, ანუ ეს არის სიმრავლე $\{2, 3, 4, 5\}$ და ა. შ.

ადგილი აქვს შემდეგ ჭეშმარიტებებს:

1 ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ყოველ ზემოდან შემოსაზღვრულ არაცარიელ ქვესიმრავლეს აქვს უდიდესი ელემენტი.

2. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ზემოდან შემოუსაზღვრელია.

3. მთელ რიცხვთა სიმრავლის ყოველ ზემოდან შემოსაზღვრულ არაცარიელ ქვესიმრავლეს აქვს უდიდესი ელემენტი.

4. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ყოველ არაცარიელ ქვესიმრავლეს აქვს უმცირესი ელემენტი.

5. მთელ რიცხვთა სიმრავლე არაა შემოსაზღვრული არც ზემოდან და არც ქვემოდან.

6. **არქიმედის პრინციპი.** თუ h რაიმე გარკვეული დადებითი რიცხვია, მაშინ ნებისმიერ ნამდვილ x რიცხვისათვის მოიძებნება ერთადერთი ისეთი მთელი რიცხვი k, რომ:

$$(k-1)\,h<x\leqslant kh$$

7. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$.

8. ყოველ ნამდვილ a და b რიცხვებისათვის, სადაც $a<b$, მოიძებნება ისეთი რაციონალური რიცხვი, r რომ $a<r<b$.

III თავი

წრფივი ალგებრის ელემენტები

§ 1. მატრიცები

მატრიცის ცნება. სტრიქონებსა და სვეტებში განლაგებულ რიცხვთა მართკუთხა ცხრილს მატრიცი ეწოდება. ამ რიცხვებს მატრიცის ელემენტები ჰქვია. თუ მატრიცში m სტრიქონია და n სვეტი, მაშინ მატრიცს m, n განზომილების ეწოდება. ცხადია, რომ m, n განზომილებიანი მატრიცის ელემენტთა რიცხვი mn ნამრავლის ტოლია.

მატრიცები აღინიშნება ლათინური ანბანის დიდი ასოებით, ხოლო მისი ელემენტები—პატარა ასოებით. უფრო მოხერხებულია მატრიცის ყოველი ელემენტი ჩაიწეროს ორი ინდექსის საშუალებით, რომელთაგან პირველი აღნიშნავს იმ სტრიქონის ნომერს, რომელსაც ელემენტი ეკუთვნის, ხოლო მეორე ინდექსი—სათანადოდ სვეტის ნომერს. ამგვარად, a_{ij} აღნიშნავს იმ ელემენტს, რომელიც i-ურ სტრიქონს და j-ურ სვეტს ეკუთვნის.

მატრიცის ჩასაწერად იხმარება სხვადასხვა სიმბოლო. ჩვენ ვისარგებლებთ მატრიცის შემდეგი ჩანაწერით*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m,n}$$

თუ მატრიცში $m=n$, მაშინ მატრიცს ეწოდება n რიგის კვადრატული მატრიცი, რომელსაც აქვს სახე

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{n,n}$$

* ზოგჯერ მატრიცის ჩასაწერად გამოყენებულია სიმბოლოები (·) ან { · }.

$1,n$ განზომილების მატრიცს ეწოდება მატრიცი—სტრიქონი და აქვს სახე

$$A=(a_1,\ a_2\ \cdots\ a_j\ \cdots\ a_n),$$

ხოლო $m,1$ განზომილების მატრიცს ეწოდება მატრიცი—სვეტი, რომელიც ასე ჩაიწერება

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

მატრიცს, რომლის ყველა ელემენტი ნულია, ეწოდება ნულოვანი მატრიცი და აღინიშნება 0 სიმბოლოთი, ე. ი.

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}=(0)_{m,n}$$

ორ $A=(a_{ij})_{m,n}$ და $B=(b_{ij})_{m,n}$ მატრიცს ეწოდება ტოლი, თუ მათი სათანადო ელემენტები ტოლია, ე. ი.

$A=B$ ნიშნავს, $a_{ij}=b_{ij},\ i=1,\ 2\ ,\ \cdots,\ m\ \ j=1,\ 2,\ldots,n.$

მატრიცთა შეკრება, მატრიცის რიცხვზე გამრავლება. ვთქვათ, მოცემულია ორი მატრიცი $A=(a_{ij})_{m,n}$. და $B=(b_{ij})_{m,n}$, A და B მატრიცების ჯამი ეწოდება ისეთ $C=(c_{ij})_{m,n}$ მატრიცს, რომლის ყოველი ელემენტი მოცემული მატრიცების სათანადო ელემენტების ჯამის ტოლია. ე. ი.

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=1,\ 2,\ldots,m,\ j=1,\ 2,\ldots,n,$$

მაშასადამე,

$$C=(c_{ij})_{m,n}=A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij}+b_{ij})_{m,n}. \qquad (1)$$

ვთქვათ, მოცემულია $A=(a_{ij})_{m,n}$ მატრიცი და რაიმე c რიცხვი. A მატრიცის c რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება cA მატრიცს, რომლის ყოველი

ელემენტი არის მოცემული მატრიცის სათანადო ელემენტის მოცემულ რიცხვზე ნამრავლი. ე. ი.

$$cA=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \cdots ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} \cdots ca_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ ca_{m1} & ca_{m2} \cdots ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

ცხადია, რომ $(-1)\cdot A=(-a_{ij})_{m,n}$. ასეთ მატრიცს A მატრიცის მოპირდაპირე ეწოდება და აღინიშნება „$-A$“ სიმბოლოთი. ე. ი.

$$-A=-(a_{ij})_{m,n}=(-a_{ij})_{m,n}.$$

მატრიცების შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების მოქმედებებს გააჩნია შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1. $A+B=B+A$ (კომუტაციის კანონი),
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ასოციაციის კანონი),
3. $A+0=A$,
4. $A+(-A)=0$,
5. $0\cdot A=0$,
6. $c\cdot 0=0$,
7. $c(A+B)=cA+cB$,
8. $(a+b)A=aA+bA$ (დისტრიბუციის კანონი),
9. $a(bA)=(ab)A$,

სადაც A, B, C ნებისმიერი მატრიცებია, ხოლო a, b და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვები.

მატრიცთა გამრავლება. განვიხილოთ ორი მატრიცი

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1k} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2k} \cdots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{ik} \cdots a_{in} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mk} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ik})_{m,n}$$

და

$$A=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1j} \cdots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2j} \cdots b_{2p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} \cdots b_{kj} \cdots b_{kp} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nj} \cdots b_{np} \end{pmatrix}=(b_{kj})_{np}$$

A მატრიცის B მატრიცზე ნამრავლი ეწოდება m, p განზომილების $c=(c_{ij})_{m,n}=A\cdot B$ მატრიცს, რომლის ნებისმიერი c_{ij} ელემენტი არის

A მატრიცის i-ური სტრიქონის ელემენტების B მატრიცის j-ური სვეტის სათანადო ელემენტებზე ნამრავლთა ჯამი, ე. ი.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, \qquad (2)$$

$$i=1,\ 2,\ldots,m, \quad j=1,\ 2,\ldots,p.$$

მატრიცების გამრავლების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ორი მატრიცის ნამრავლი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა პირველი მატრიცის სვეტების რიცხვი მეორე მატრიცის სტრიქონების რიცხვის ტოლია. მაშასადამე, გვაქვს

$$C=A\cdot B=(a_{ik})_{m,n}\ \ (b_{kj})_{n,p}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}=(c_{ij})_{m\cdot p},$$

სადაც $(c_{ij})_{m\cdot p}$ მატრიცის ელემენტები (2) ფორმულით გინისაზღვრება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ A და B მატრიცების ნამრავლი, თუ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{2,3} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3,4}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა: აღვნიშნოთ $C=A\cdot B$ ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში

$$C=(c_{ij})_{2,4}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix},$$

სადაც (2) ფორმულის თანახმად, გვაქვს

$$c_{11}=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot(-3)=-4,$$

$$c_{12}=1\cdot(-1)+2\cdot1+3\cdot1=4,$$

$$c_{13}=1\cdot2+2\cdot(-1)+3\cdot0=0,$$

$$c_{14}=1\cdot1+2\cdot0+3\cdot1=4$$

$$c_{21}=2\cdot1+(-1)\cdot2+(-2)\cdot(-3)=6,$$

$$c_{22}=2\cdot(-1)+(-1)\cdot1+(-2)\cdot1=-5,$$

$$c_{23}=2\cdot2+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot0=5,$$

$$c_{24}=2\cdot1+(-1)\cdot0+(-2)\cdot1=0.$$

მაშასადამე, გვაქვს

$$C=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 4 \\ 6 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

მატრიცთა გამრავლების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მატრიცების გამრავლების ოპერაცია არაკომუტაციურია, ე. ი. საზოგადოდ

$$AB \neq BA,$$

მიუხედავად იმისა, რომ შეიძლება არსებობდეს AB და BA ნამრავლები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $AB \neq BA$

ა მ ო ხ ს ნ ა:

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

საიდანაც ჩანს, რომ $AB \neq BA$.

ხოლო, თუ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

მაშინ არსებობს AB ნამრავლი და

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ხოლო BA ნამრავლი არ არსებობს, ვინაიდან B მატრიცის სვეტების რიცხვი არ უდრის A მატრიცის სტრიქონების რიცხვს.

მატრიცების გამრავლების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1. $(AB)C=A(BC)$ (ასოციაციის კანონი),

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ (A+B)C=AC+BC \\ 3.\ c(A+B)=cA+cB \end{array}\right\} \quad \text{(დისტრიბუციის კანონი)}$$

4. $c(AB)=(cA)B=A(cB), \quad c \in R$.

დავამტკიცოთ პირველი მათგანის მართებულობა, ე. ი. თუ მოცემულია ნებისმიერი სამი A, B და C მატრიცი, რომელთათვისაც არსებობს AB და BC ნამრავლები, მაშინ არსებობს $(AB)C$ და $A(BC)$ და ადგილი აქვს ასოციაციის კანონს

$$(AB)C=A(BC).$$

მართლაც ვთქვათ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ik})_{m,n},$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} & \cdots & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} & \cdots & b_{kp} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}=(b_{kl})_{n,p},$$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lj} & \cdots & c_{lq} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pj} & \cdots & c_{pq} \end{pmatrix}=(c_{lj})_{p,q}$$

გამოვთვალოთ $(AB)C$. განვიხილოთ AB ნამრავლი. ვთქვათ $AB=(u_{il})_{mp}$.

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1l} & \cdots & u_{1p} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2l} & \cdots & u_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{i1} & u_{i2} & \cdots & u_{il} & \cdots & u_{ip} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{ml} & \cdots & u_{mp} \end{pmatrix}=(u_{il})_{m,p},$$

სადაც

$$u_{il}=a_{i1}b_{1l}+a_{i2}b_{2l}+\cdots+a_{in}b_{nl}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}, \quad \begin{matrix} i=1,\ 2,\ldots,m \\ l=1,\ 2,\ldots,p \end{matrix}$$

მაშინ

$$(AB)C=(u_{il})_{m,p}\cdot(c_{lj})_{p,q}=(x_{ij})_{m,q},$$

სადაც

$$x_{ij}=u_{i1}c_{1j}+u_{i2}c_{2j}+\cdots+u_{ip}c_{pj}=\sum_{l=1}^{p}u_{il}\,c_{lj}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,b_{kl}\,c_{lj},$$

$$i=1,\ 2,\ldots,m \quad j=1,\ 2,\ldots,q.$$

ე. ი.

$$x_{ij}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,b_{kl}\,c_{lj},\qquad \begin{array}{l} i=1,\ 2,\ldots,m, \\ j=1,\ 2,\ \ldots\ q, \end{array} \tag{3}$$

ახლა გამოვთვალოთ $A(BC)$. ამისათვის ჯერ ვიპოვოთ BC ნამრავლი. ვთქვათ,

$$BC=(b_{kl})_{n,p}\cdot(c_{lj})_{p,q}=(v_{kj})_{n,q}=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1j} & \cdots & v_{1q} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2j} & \cdots & v_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kj} & \cdots & v_{kq} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nj} & \cdots & v_{nq} \end{pmatrix},$$

სადაც

$$v_{kj}=b_{k1}c_{1j}+b_{k2}c_{2j}+\cdots+b_{kp}\cdot c_{pq}=\sum_{l=1}^{p}b_{kl}\,c_{lj},$$

$$k=1,\ 2,\ldots,n.\quad j=1,\ 2,\ldots,q.$$

მაშინ

$$A\,(BC)=(a_{ik})_{m,n}\ (v_{kj})_{n,q}=(y_{ij})_{m,q},$$

სადაც

$$y_{ij}=a_{i1}v_{1j}+a_{i2}v_{2j}+\cdots+a_{in}v_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}v_{kj}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\sum_{l=1}^{p}b_{kl}c_{lj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}a_{ik}\,b_{kl}\,c_{lj}.$$

მაშასადამე,

$$y_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}a_{ik}\,b_{kl}\,c_{lj}.\qquad \begin{array}{l} i=1,\ 2,\ldots,m, \\ j=1,\ 2,\ \ldots\ ,q, \end{array} \tag{4}$$

რადგან (3) და (4) გამოსახულებების მარჯვენა მხარეში მდგომი ჯამები ტოლია (ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ შესაკრებთა რიგით), ამიტომ $x_{ij}=y_{ij}$ ე. ი. $(AB)C=A(BC)$.

ანალოგიურად დამტკიცდება მატრიცების გამრავლების დანარჩენი სამი თვისება.

4. ტრანსპონირებული, დიაგონალური, სკალარული, ერთეულოვანი მატრიცები. შებრუნებული მატრიცის ცნება. განვიხილოთ $A=(a_{ij})_{m,n}$ მატრიცი. თუ A მატრიცის სტრიქონებს შევცვლით სვეტებით და პირიქით, მივიღებთ ახალ B მატრიცს, რომელსაც მოცემული მატრიცის ტრანსპო-

ნირებული მატრიცი ეწოდება. აღვნიშნოთ იგი „A^T“ სიმბოლოთი. მაშასადამე, გვაქვს

$$B=A^T=(a_{ij})_{n,m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ, მოცემულია კვადრატული მატრიცი

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

კვადრატული მატრიცის ერთნაირინდექსიანი ელემენტების მიმდევრობას, დალაგებულს ინდექსების ზრდის მიხედვით, ე. ი. $a_{11}\ a_{22},\dots,a_{nn}$ მიმდევრობას ეწოდება მატრიცის მთავარი დიაგონალი. მაშასადამე, მთავარი დიაგონალი იმ ელემენტების მიმდევრობაა, რომელიც იწყება მატრიცის ზემო მარცხენა კუთხიდან და მთავრდება ქვემო მარჯვენა კუთხეში. მატრიცის ელემენტების მიმდევრობას $a_{1n},\ a_{2n-1},\dots,a_{n1}$ ეწოდება მატრიცის გვერდითი დიაგონალი.

კვადრატულ მატრიცს ეწოდება დიაგონალური, თუ მთავარი დიაგონალის გარეთ მდგომი ყოველი ელემენტი ნულის ტოლია.

ამგვარად, $D=(d_{ij})$ მატრიცი დიაგონალურია ნიშნავს, რომ $d_{ij}=0$, თუ $i\neq j$ ე. ი.

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \dots 0 \\ 0 & d_{22} \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots d_{nn} \end{pmatrix}.$$

დიაგონალურ მატრიცს ეწოდება სკალარული, თუ დიაგონალზე მდგომი ყველა ელემენტი ტოლია.

$$D=\begin{pmatrix} d & 0 \dots 0 \\ 0 & d \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots d \end{pmatrix}.$$

სკალარულ მატრიცს ეწოდება ერთეულოვანი, თუ $d=1$. თუ ერთეულოვან მატრიცს აღვნიშნავთ E სიმბოლოთი, გვექნება

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

მატრიცის რიცხვზე გამრავლების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ სკალარული D მატრიცისათვის

$$D=dE.$$

კვადრატულ B მატრიცს ეწოდება კვადრატული A მატრიცის შებრუნებული, თუ $AB=E$. შებრუნებული B მატრიცი აღვნიშნოთ A^{-1} სიმბოლოთი, მაშინ გვექნება

$$AA^{-1}=E$$

$AB=E$ ნიშნავს, $BA=E$. ე. ი. $B=A^{-1}$ ნიშნავს $A=B^{-1}$; $(A^{-1})^{-1}=A$.

n-განზომილებიანი ვექტორი. $n(n\geqslant 1)$ ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ სისტემას $(a_1, a_2,\dots,a_n)$ n-განზომილებიანი ვექტორი ეწოდება, ხოლო $a_i\,(i=1, 2,\dots,n)$ რიცხვებს — ვექტორის კომპონენტები ან კოორდინატები.

ვექტორს ეწოდება ნულოვანი, თუ მისი ყველა a_i $(i=1, 2,\dots,n)$ კოორდინატი ნულია და აღინიშნება ასე $0=(0, 0, \dots, 0)$.

ორ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ მათი სათანადო კოორდინატები ტოლია, ე. ი. $(a_1, a_2,\dots,a_n)=(b_1, b_2,\dots,b_n)$, როცა $a_i=b_i$ $(i=1, 2, \dots ,n)$.

$(a_1, a_2,\dots,a_n)$ და $(b_1, b_2,\dots,b_n)$ ვექტორების ჯამი არის $(c_1, c_2,\dots,c_n)$ ვექტორი, რომლის კოორდინატები მოცემული ვექტორების სათანადო კოორდინატების ჯამია, ე. ი.

$$(c_1, c_2,\dots,c_n)=(a_1, a_2,\dots,a_n)+(b_1, b_2,\dots,b_n)=$$
$$=(a_1+b_1, a_2+b_2,\dots,a_n+b_n).$$

$A(a_1, a_2,\dots,a_n)$ ვექტორის რაიმე c რიცხვზე ნამრავლი არის cA ვექტორი, რომლის კოორდინატები მოცემული ვექტორის კოორდინატების ამ რიცხვზე ნამრავლის ტოლია, ე. ი.

$$cA=c(a_1, a_2,\dots,a_n)=(ca_1, ca_2,\dots,ca_n).$$

ვთქვათ, მოცემულია ვექტორთა სასრული რიცხვი. სიმარტივისათვის ავიღოთ მაგალითად, სამი A, B და C ვექტორის შემთხვევა. ამ ვექტორთა წრფივი კომბინაცია ეწოდება ამ ვექტორების რაიმე რიცხვებზე ნამრავლთა ჯამს. თუ k_1, k_2, k_3 ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ A, B, C ვექტორთა წრფივი კომბინაცია იქნება $k_1A+k_2B+k_3C$. თუ ვექტორთა წრფივ კომბინაციას აღვნიშნავთ U სიმბოლოთი, მაშინ

$$U=k_1A+k_2B+k_3C.$$

k_1, k_2, k_3 რიცხვებს წრფივი კომბინაციის კოეფიციენტები ეწოდება. ცხადია, რომ თუ $k_1=k_2=k_3=0$, მაშინ ვექტორთა სათანადო წრფივი კომბინაცია იქნება ნული. ე. ი.

$$U=0\cdot A+0\cdot B+0\cdot C=0.$$

ცხადია, რომ ვექტორთა ზემოთ მოყვანილი წრფივი კომბინაციის კოორდინატები იქნება

$$U_1 = k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1,$$
$$U_2 = k_1 a_2 + k_2 b_2 + k_3 c_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_n = k_1 a_n + k_2 b_n + k_3 c_n.$$

§ 2. დეტერმინანტები

ინვერსია. განვიხილოთ პირველ n ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე

$$M = \{1,\ 2, \ldots,\ k, \ldots, n\}. \tag{5}$$

როგორც ვიცით n-ელემენტიან სიმრავლეში ყველა გადანაცვლებათა რიცხვი $p_n = n!$. ვთქვათ ერთ-ერთი ასეთი გადანაცვლებაა

$$i_1,\ i_2, \ldots, i_k \ldots i_l \ldots i_n; \tag{6}$$

აღვნიშნოთ ეს გადანაცვლება α-თი და განვმარტოთ ინვერსია. ამისთვის აუცილებელია ერთ-ერთ გადანაცვლებას ვუწოდოთ მთავარი, ან ბუნებრივი გადანაცვლება. ასეთ გადანაცვლებად მივიღოთ ის, რომელშიც რიცხვები დალაგებულია ზრდის მიხედვით $1\ 2 \ldots k \ldots l \ldots n$.

განვიხილოთ (6) გადანაცვლება და მასში ნებისმიერი ორი ელემენტი i_k და i_l. ამბობენ, i_k და i_l ელემენტები ქმნიან ინვერსიას, თუ $i_k > i_l$. ცხადია, რომ ყოველ გადანაცვლებას გააჩნია ინვერსიათა სრულიად გარკვეული რიცხვი. აღვნიშნოთ (6) გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვი $J(\alpha)$ სიმბოლოთი:

$$J(i_1\ i_2 \ldots i_k \ldots i_l \ldots i_n) = J(\alpha)$$

გადანაცვლებას ეწოდება ლუწი, თუ მასში ინვერსიათა რიცხვი ლუწია. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადანაცვლებას ეწოდება კენტი.

ვთქვათ, $n=6$. მაშინ $p_6 = 6! = 720$ (ე. ი. 6-ელემენტიანი სიმრავლიდან შეიძლება 720 სხვადასხვა გადანაცვლების შედგენა) ავიღოთ ერთ-ერთი მათგანი: ვთქვათ, α არის 314652 გადანაცვლება. ვიპოვოთ $J(\alpha)$. გამოვიყენოთ ინვერსიის დათვლის შემდეგი ხერხი (იგი ნებისმიერი შემთხვევისათვის გამოდგება): α გადანაცვლებაში ციფრი 3 ქმნის ორ ინვერსიას (ციფრებთან 1 და 2), ციფრი 1 ინვერსიას არ ქმნის, ციფრი 4 ქმნის ერთ ინვერსიას (ციფრთან 2), ციფრი 6 ქმნის ორ ინვერსიას (ციფრებთან 5 და 2), ციფრი 5 ქმნის ერთ ინვერსიას (ციფრთან 2), ხოლო ციფრი 2 ინვერსიას არ ქმნის. ე. ი.

$$J(\alpha) = 2+0+1+2+1+0 = 6,$$

თუ (β) არის 512643 გადანაცვლება, მაშინ იგივე ხერხით ვღებულობთ

$$J(\beta) = 4+0+0+2+1+0 = 7$$

ამგვარად, α გადანაცვლება ლუწია, ხოლო β—კენტი.

მტკიცდება, რომ ნებისმიერი n-სათვის ($n \geqslant 1$) ლუწ გადანაცვლებათა რიცხვი უდრის კენტ გადანაცვლებათა რიცხვს და თითოეული $\frac{n!}{2}$ - ის ტოლია.

ტრანსპოზიცია. გადანაცვლებაში ორი ნებისმიერი i_k და i_l ელემენტის ურთიერთადგილების შეცვლას სხვა ელემენტების ადგილების შეუცვლელად ტრანსპოზიცია ეწოდება. თუ გადანაცვლება (6) სახისაა, მაშინ ტრანსპოზიციის შედეგად მიიღება ახალი β გადანაცვლება

$$i_1\ i_2 \cdots i_l \cdots i_k \cdots i_n, \tag{7}$$

ე. ი. β გადანაცვლება მიღებულია α გადანაცვლებიდან ერთი ტრანსპოზიციით. ცხადია, რომ პირიქითაც—α გადანაცვლება მიიღება β გადანაცვლებიდან ერთი ტრანსპოზიციით.

ლემა: ერთი ტრანსპოზიციის შედეგად გადანაცვლების ლუწობა იცვლება.

დამტკიცება. ა) ვთქვათ, α გადანაცვლებას აქვს სახე $i_1\ i_2 \cdots i_k i_l \cdots i_n$, ხოლო β გადანაცვლებაა $i_1 i_2 \cdots i_l i_k \cdots i_n$: თუ α გადანაცვლებაში i_k და i_l ელემენტები ინვერსიას არ ქმნიან, მაშინ β გადანაცვლებაში ისინი ინვერსიას შექმნიან და პირიქით. ე. ი. $J(\beta) = J(\alpha) \pm 1$. მაშასადამე, $J(\alpha)$ და $J(\beta)$ საწინააღმდეგო ლუწობის არიან.

ბ) ვთქვათ, ახლა i_k და i_l ელემენტებს შორის დგას m ($m \geqslant 1$) ელემენტი. მაშინ β გადანაცვლება მიიღება α-საგან მეზობელ ელემენტთა $m+(m+1)=2m+1$-ჯერ მიმდევრობით ურთიერთშენაცვლებით. რაც იმას ნიშნავს, რომ α გადანაცვლებიდან β-ზე გადასვლისას ლუწობა $(2m+1)$-ჯერ შეიცვალა, რის გამოც β გადანაცვლებას ექნება α გადანაცვლების საწინააღმდეგო ლუწობა, ე. ი.

$$J(\beta) = \underbrace{J(\alpha) \pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1}_{(2m+1)\text{-ჯერ}} = J(\alpha) - k + [(2m+1) - k] =$$

$$= J(\alpha) - 2k + (2m+1),$$

მაშასადამე, $J(\beta) = J(\alpha) - 2k + (2m+1)$, სადაც k აღნიშნავს უარყოფით ერთეულთა რიცხვს. უკანასკნელი ტოლობიდან ცხადია, რომ α და β საწინააღმდეგო ლუწობის არიან.

ჩასმა. სასრული სიმრავლის თავისთავზე ურთიერთცალსახა ასახვას ჩასმა ეწოდება. თუ სიმრავლე n-ელემენტიანია, მაშინ ჩასმას n ხარისხის ჩასმა ჰქვია. ამ განმარტებიდან ცხადია, რომ ჩასმათა რიცხვი უდრის გა-

დანაცვლებათა რიცხვს, ე. ი. n ხარისხის ჩასმათა რიცხვი $n!$-ის ტოლია.

ამგვარად, ჩასმა ნიშნავს, რომ გვაქვს α წესი, რომელიც M სიმრავლის ნებისმიერ k ელემენტს ურთიერთცალსახად უთანადებს ამავე სიმრავლის j_k ელემენტს. ეს ჩასმა ასე ჩაიწერება

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 \dots k \dots n \\ j_1 & j_2 \cdots j_k \cdots j_n\end{pmatrix}. \tag{8}$$

ცხადია, რომ $j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_n$ M სიმრავლის რომელიღაც გადანაცვლებაა. ამგვარად, ჩასმა მიიღება, თუ n-ელემენტიანი სიმრავლის ბუნებრივ გადანაცვლებას ქვემოთ, მეორე სტრიქონად, მივუწერთ ამავე სიმრავლის ნებისმიერ გადანაცვლებას. ცხადია აგრეთვე, რომ ჩასმაში არსებითია არა პირველ სტრიქონში ელემენტების განლაგება, არამედ ის, თუ M სიმრავლის რომელი ელემენტი რომელ ელემენტში გადადის. მაშასადამე, (8) ჩასმა შეიძლება ისე ჩაიწეროს, რომ პირველი სტრიქონი წარმოადგენდეს (5) სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერ გადანაცვლებას, თუ ეს გადანაცვლებაა $i_1 i_2 \cdots i_k \cdots i_n$, მაშინ, (8) ჩასმა შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\alpha=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 \cdots i_k \cdots i_n \\ j_{i1} & j_{i2} \cdots j_{ik} \cdots j_{in}\end{pmatrix}.$$

ჩაწერის სიმარტივისათვის აღვნიშნოთ $i_{ik}=s_k$, მაშინ

$$\alpha=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 \cdots i_k \cdots i_n \\ s_1 & s_2 \cdots s_k \cdots s_n\end{pmatrix}. \tag{9}$$

არსებობს ნებისმიერი α ჩასმის ისეთი ჩანაწერიც, რომლის მეორე სტრიქონი ბუნებრივ გადანაცვლებას წარმოადგენს. სახელდობრ

$$\alpha=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 \cdots i_k \cdots i_n \\ 1 & 2 \dots k \dots n\end{pmatrix}. \tag{10}$$

თუ M სამელემენტიანი სიმრავლეა, ე. ი. $M=\{1, 2, 3\}$, მაშინ ამ სიმრავლეში ჩასმათა რიცხვი იქნება $p=3!=6$. ეს შემდეგი ჩასმებია:

$$\begin{gathered}\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}, \quad \alpha_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad \alpha_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{11}$$

ზემონათქვამის შესაბამისად, ყოველი მათგანი შეიძლება 6 სხვადასხვა სახით ჩაიწეროს, თუ პირველ სტრიქონში სხვადასხვა გადანაცვლებას ავიღებთ, მაგალითად α_4 ჩასმისათვის გვაქვს შემდეგი 6 ჩაწერა:

$$\alpha_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}3&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ (8) და (10) ტოლობები. ადვილი საჩვენებელია, რომ (8) ჩანაწერის მეორე სტრიქონის ინვერსიათა რიცხვი ამავე ჩასმის (8) ჩანაწერის პირველი სტრიქონის ინვერსიათა რიცხვის ტოლია, ე. ი.

$$J(j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_n)=J(i_1 i_2 \cdots i_k \cdots i_n).$$

ამ რიცხვს ეწოდება α ჩასმის ინვერსიათა რიცხვი და აღინიშნება ასე:

$$J(\alpha)=J\begin{pmatrix}1 & 2 \dots k \cdots n\\ j_1 & j_2 \cdots j_k \cdots j_n\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}i_1 & i_2 \cdots i_k \cdots i_n\\ 1 & 2 \dots k \dots n\end{pmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ α ჩასმის ზოგადი (9) ჩანაწერის ორივე სტრიქონში ინვერსიათა რიცხვების ჯამი შეიძლება არ უდრიდეს $J(\alpha)$-ს, მაგრამ იგი ყოველთვის იმავე ლუწობისაა, რაც $J(\alpha)$ ე. ი.

$$J(i_1\ i_2 \cdots i_k \cdots i_n)+J(s_1\ s_2 \cdots s_k \cdots s_n)=J(\alpha)\pm 2m \qquad (12)$$

მაგალითად, თუ $n=6$ და

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&6&5&1&3&2\end{pmatrix},$$

მაშინ

$$J(\alpha)=J(465132)=11.$$

თუ ახლა ავიღებთ α ჩასმის ერთ-ერთ ჩანაწერს $\begin{pmatrix}2&5&4&6&1&3\\6&3&1&2&4&5\end{pmatrix}$

მაშინ $$J(254613)+J(631245)=15.$$

მართლაც, ზემოაღნიშნული შენიშვნის შესაბამისად 11 და 15 ერთნაირი ლუწობის რიცხვია.

ჩასმას ეწოდება ლუწი, თუ მასში ინვერსიათა რიცხვი $J(\alpha)$ ლუწია (ე. ი. თუ ჩასმის ნებისმიერ ჩანაწერში ორივე სტრიქონის ინვერსიათა რიცხვების ჯამი ლუწია). ანალოგიურად განიმარტება კენტი ჩასმა. მტკიცდება, რომ ნებისმიერი n-სათვის $(n\geqslant 2)$ ლუწ ჩასმათა რიცხვი უდრის კენტ ჩასმათა რიცხვს და უდრის $\dfrac{n!}{2}$.

მატრიცის დეტერმინანტი. ვთქვათ, მოცემულია n რიგის მატრიცი

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn}\end{pmatrix}=(a_{ij})_{n,n}.$$

ავიღოთ A მატრიცის ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან გარკვეული მიმდევრობით თითო ელემენტი $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{kj_k}, \dots, a_{nj_n}$. ელემენტთა ეს მიმდევრობა დაკავშირებულია

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots k \dots n \\ j_1 & j_2 \cdots j_k \cdots j_n \end{pmatrix}$$

ჩასმასთან, რომლის პირველი სტრიქონი ამ ელემენტთა პირველი ინდექსებისაგან შედგენილი ბუნებრივი გადანაცვლებაა, ხოლო მეორე სტრიქონი — მეორე ინდექსებისაგან შედგენილი $j_1\ j_2 \cdots j_k \cdots j_n$ გადანაცვლება. ვთქვათ, α ჩასმის ინვერსიათა რიცხვი არის $J(\alpha)$ შევადგინოთ ნამრავლი

$$(-1)^{J(\alpha)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}. \tag{13}$$

ცხადია, რომ ყველა ასეთ ნამრავლთა რიცხვი $n!$-ის ტოლია. (13) სახის ყველა ნამრავლთა ჯამს ეწოდება n რიგის კვადრატული A მატრიცის დეტერმინანტი და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ამგვარად, გვაქვს

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots k \dots n \\ j_1 & j_2 \cdots j_k \cdots j_n \end{pmatrix}} (-1)^{J(\alpha)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}=$$

$$=\sum_{(\alpha)} (-1)^{J(\alpha)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}. \tag{14}$$

(სიმბოლო $\sum\limits_{(\alpha)}$ ნიშნავს, რომ ჯამი გავრცელებულია n ხარისხის ყველა α ჩასმაზე). (12) ტოლობიდან ცხადია, რომ დეტერმინანტის ეს განმარტება ზოგადად ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$= \sum_{\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}} (-1)^{J\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}} a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} \cdots a_{i_kj_k} \cdots a_{i_nj_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha)} (-1)^{J(\alpha)} a_{i_1j_1} \, a_{i_2j_2} \cdots a_{i_kj_k} \cdots a_{i_nj_n}, \qquad (15)$$

ამრიგად, n რიგის მატრიცის დეტერმინანტი წარმოადგენს მისი სხვადასხვა სტრიქონიდან და სხვადასხვა სვეტიდან შერჩეულ n ელემენტთა სათანადო ნიშნით აღებულ ყველა ნამრავლთა ჯამს.

დეტერმინანტის ცნების უფრო თვალსაჩინოდ წარმოდგენისათვის დაწვრილებით განვიხილოთ მესამე რიგის დეტერმინანტი. (14) ტოლობიდან. (11) ტოლობების ძალით, გვაქვს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}} (-1)^{J\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} =$$

$$= (-1)^{J(\alpha_1)} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{J(\alpha_2)} a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^{J(\alpha_3)} a_{12} a_{23} a_{31} +$$
$$+ (-1)^{J(\alpha_4)} a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^{J(d_5)} a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^{J(\alpha_6)} a_{13} a_{22} a_{31}.$$

მაგრამ

$$J(\alpha_1) = 0, \quad J(\alpha_2) = 1, \quad J(\alpha_3) = 2,$$
$$J(\alpha_4) = 1, \quad J(\alpha_5) = 2, \quad J(\alpha_3) = 3,$$

ამ ტოლობათა გათვალისწინებით წინა ტოლობა გვაძლევს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} +$$

$$+ (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31}.$$

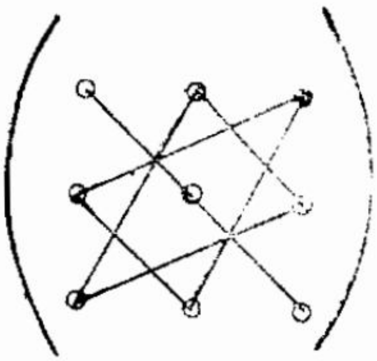
მაშასადამე გვქვას

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} -$$

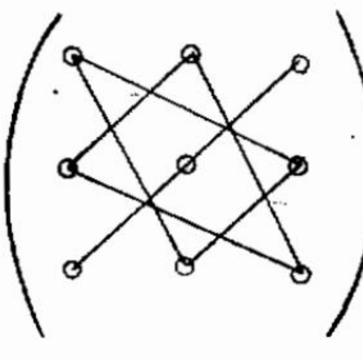
$$- a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}. \qquad (16)$$

შევნიშნოთ, რომ მაღალი რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა უშუალოდ მისი (15) განმარტებიდან ტექნიკურად რთულია. ასეთი დეტერმინანტების გამოთვლა ხდება დეტერმინანტის ძირითადი თვისებების გამოყენებით,

რომელსაც ქვემოთ მოვიყვანთ. რაც შეეხება მესამე რიგის დეტერმინანტს, არსებობს მისი გამოთვლის რამდენიმე მარტივი, კერძო ხერხი, რომელთაგან პირველი შემდეგში მდგომარეობს: ვიღებთ III რიგის დეტერმინანტის მთავარი დიაგონალის ელემენტთა ნამრავლს $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$. შემდეგ იმ ორი სამკუთხედის წვეროების ელემენტთა ნამრავლებს, რომელთა ფუძეები მთავარი დიაგონალის პარალელურია ე. ი. $a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ და $a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$. ეს სამი შესაკრები აიღება თავისივე ნიშნით (ნახ. 9ა). ანალოგიურად აიღება გვერდითი (არამთავარი) დიაგონალის მიმართ შემდეგი სამი ნამრავლი



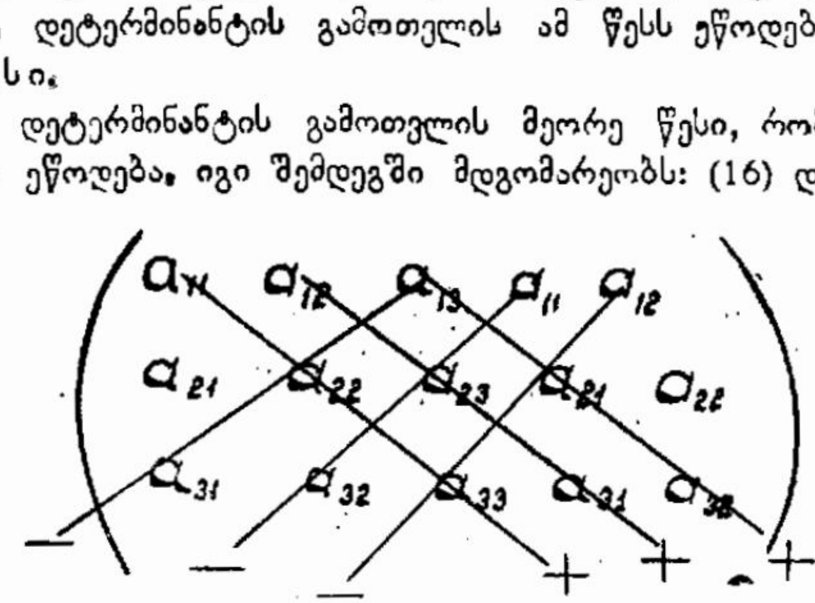
ნახ. 9ა.



ნახ. 9ბ.

$a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$, $a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$ და $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$ მოპირდაპირე ნიშნით (ნახ. 9ბ). მიღებული ექვსი გამოსახულების ჯამი წარმოადგენს (16) ტოლობის მარჯვენა მხარეს. დეტერმინანტის გამოთვლის ამ წესს ეწოდება **სამკუთხედის წესი**.

არსებობს დეტერმინანტის გამოთვლის მეორე წესი, რომელსაც სარუსის[1] წესი ეწოდება. იგი შემდეგში მდგომარეობს: (16) დეტერმინან-



ნახ. 9გ.

ტის სამივე სვეტს მარჯვნიდან მივუწეროთ მისივე პირველი და მეორე სვეტი (ნახ. 9 გ).

მიღებული ცხრილის პირველი სამი სვეტის მთავარი დიაგონალისა და მის პარალელურად განლაგებული სამ-სამი ელემენტის ნამრავლებს ე. ი.

[1] **F. Sarrus** (1798—1854)—ფრანგი მათემატიკოსი

$a_{11} a_{22} a_{33}$, $a_{12} a_{23} a_{31}$ და $a_{13} a_{21} a_{32}$ ვიღებთ უცვლელად, ხოლო პირველი სამი სვეტის არამთავარი დიაგონალის და მის პარალელურად განლაგებული სამ-სამი ელემენტის ნამრავლებს $a_{13} a_{22} a_{31}$, $a_{11} a_{23} a_{32}$ და $a_{12} a_{21} a_{33}$ ვუცვლით ნიშანს. ამ გზით მიღებული ექვსი ერთწევრის ჯამი (16) ტოლობის მარჯვენა მხარეს ემთხვევა.

მაშასადამე, საბოლოოდ გვაქვს შემდეგი ტოლობა

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11} a_{22} a_{33}+a_{12} a_{23} a_{31}+a_{13} a_{21} a_{32}-$$

$$-a_{13} a_{22} a_{31}-a_{11} a_{23} a_{32}-a_{12} a_{21} a_{33}. \qquad (17)$$

დეტერმინანტის განმარტებიდან მეორე რიგის დეტერმინანტისათვის ვღებულობთ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 0{,}25 & 10 \\ -0{,}8 & 4 \end{vmatrix}.$$

ამოხსნა: მეორე რიგის დეტერმინანტის განსაზღვრა გვაძლევს

$$\begin{vmatrix} 0{,}25 & 10 \\ -0{,}8 & 4 \end{vmatrix}=0{,}25 \cdot 4-(-0{,}8) \cdot 10=9.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

ამოხსნა: (17) ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=18+3+4-2-12-9=2.$$

მინორი და ალგებრული დამატება. განვიხილოთ n რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} \cdots a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} \cdots a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{ij-1} & \boxed{a_{ij}} & a_{ij+1} \cdots a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} \cdots a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} \cdots a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

n რიგის დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის მინორი ეწოდება $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება მოცემული დეტერმინანტიდან i სტრიქონისა და j სვეტის ამოშლით; a_{ij} ელემენტის მინორი აღინიშნება M_{ij} სიმბოლოთი. მაშასადამე, გვაქვს

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1j-1} & a_{1j+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2j-1} & a_{2j+1} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} \cdots a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} \cdots a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} \cdots a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} \cdots a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nj-1} & a_{nj+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება A_{ij} განიმარტება ასე:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}=\begin{cases} M_{ij}, & \text{თუ } i+j \text{ ლუწია,} \\ -M_{ij}, & \text{თუ } i+j \text{ კენტია.} \end{cases} \tag{18}$$

ვთქვათ, მოცემულია მესამე რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

მისი პირველი სტრიქონის ელემენტების სათანადო მინორები და ალგებრული დამატებები იქნება

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{11}=(-1)^{1+1} M_{11}=(a_{22}\,a_{33}-a_{23}\,a_{32}),$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12}=(-1)^{1+2} M_{12}=-(a_{21}\,a_{33}-a_{23}\,a_{31}), \tag{19}$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{13}=(-1)^{1+3} M_{13}=(a_{21} a_{32}-a_{22} a_{31}).$$

ანალოგიურად ამოიწერება მინორები და ალგებრული დამატებები პირველი სვეტის ელემენტებისათვის

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{11}=(-1)^{1+1} M_{11}=(a_{22} a_{33}-a_{23} a_{32}),$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{21}=(-1)^{2+1} M_{21}=-(a_{12} a_{33}-a_{13}a_{32}),$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{31}=(-1)^{3+1} M_{31}=(a_{12} a_{23}-a_{13} a_{22}).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. მოცემულია დეტერმინანტი $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, ვიპოვოთ A_{32}.

ა მ ო ხ ს ნ ა:

$$A_{32}=(-1)^{3+2} M_{32}=-\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2.$$

§ 3. დეტერმინანტის ძირითადი თვისებები

1. თვისება: მატრიცის ტრანსპონირებით მისი დეტერმინანტი არ იცვლება.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ვთქვათ მოცემულია A მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{n,n}.$$

განვიხილოთ A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა და აღვნიშნოთ იგი B-თი. მაშინ

$$A^T=B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}=(b_{ij})_{n,n}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}=(a_{ji})_{n,n},$$

ე. ი. $b_{ij}=a_{ji}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ldots,n)$.

დეტერმინანტის განმარტების თანახმად, გვაქვს

$$\det A^T=\det B=\sum_{\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \cdots i_n \\ j_1\, j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}} (-1)^{J\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \cdots i_n \\ j_1\, j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}} b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2}\cdots b_{i_n j_n}=$$

$$=\sum_{\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \cdots i_n \\ j_1\, j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}} (-1)^{J\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \cdots i_n \\ j_1\, j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}} a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2}\cdots a_{j_n i_n}.$$

მაგრამ,

$$J\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_n \\ j_1, & j_2\cdots j_n \end{pmatrix}=J\begin{pmatrix} j_1 & j_2\cdots j_n \\ i_1 & i_2\cdots i_n \end{pmatrix},$$

მაშინ, უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს

$$\det A^T=\det B=\sum_{\begin{pmatrix} j_1\, j_2 \cdots j_n \\ i_1\, i_2 \cdots i_n \end{pmatrix}} (-1)^{J\begin{pmatrix} j_1\, j_2 \cdots j_n \\ i_1\, i_2 \cdots i_n \end{pmatrix}} a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2}\cdots a_{j_n i_n}.$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარე, დეტერმინანტის განმარტების თანახმად, არის $\det A$ ე. ი.

$$\det A^T=\det B=\det A.$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

შევნიშნოთ, რომ ამ თვისების ძალით დეტერმინანტის სტრიქონების ყველა თვისება სამართლიანია სვეტებისათვის და პირიქით.

II **თვისება:** დეტერმინანტის ნებისმიერი ორი სტრიქონის (სვეტის) ურთიერთი ადგილების შეცვლით, დეტერმინანტი მხოლოდ ნიშანს შეიცვლის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ვთქვათ,

$$\Delta=\det A=\sum_{(\alpha)} (-1)^{J(\alpha)} (a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_k j_k}\cdots a_{i_s j_s}\cdots a_{i_n j_n},$$

სადაც

$$\alpha=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_k \cdots i_s \cdots i_n \\ j_1 & j_2 \cdots j_k \cdots j_s \cdots j_n \end{pmatrix}.$$

თუ A მატრიცში გადავსვამთ i_k და i_s სტრიქონებს, მივიღებთ ახალ B მატრიცს, რომლის დეტერმინანტი იქნება

$$\Delta_1=\det B=\sum_{(\alpha)}(-1)^{J(\alpha)}b_{i_1j_1}b_{i_2j_2}\cdots b_{i_kj_k}\cdots b_{i_sj_s}\cdots b_{i_nj_n}.$$

თანახმად პირობისა, გვაქვს

$b_{i_kj_k}=a_{i_sj_k}$, $b_{i_sj_s}=a_{i_kj_s}$, ხოლო $b_{i_tj_t}=a_{i_tj_t}$, თუ $t\neq k, s$,
ამიტომ

$$\Delta_1=\det B=\sum_{(\alpha)}(-1)^{J(\alpha)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_sj_k}\cdots a_{i_kj_s}\cdots a_{i_nj_n}.$$

როგორც ამ უკანასკნელი ტოლობიდან ჩანს, დეტერმინანტის ელემენტების ინდექსები ადგენენ ჩასმას

$$\beta=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_s \cdots i_k \cdots i_n \\ j_1 & j_2 \cdots j_k \cdots j_s \cdots j_n \end{pmatrix},$$

რომელიც α ჩასმისაგან მიიღება ერთი ტრანსპოზიციით. მაგრამ, როგორც ვიცით, ასეთი ჩასმები საწინააღმდეგო ლუწობის არიან, ამიტომ

$$(-1)^{J(\alpha)}=-(-1)^{J(\beta)}.$$

მაშინ

$$\Delta_1=\sum_{(\beta)}[-(-1)^{J(\beta)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_sj_k}\cdots a_{i_kj_s}\cdots a_{i_nj_n}]=$$

$$=-\sum_{(\beta)}(-1)^{J(\beta)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_sj_k}\cdots a_{i_kj_s}\cdots a_{i_nj_n}=-\det A=-\Delta.$$

ე. ი.

$$\Delta_1=-\Delta.$$

III თვისება: თუ მატრიცის რომელიმე ორი სტრიქონი (სვეტი) ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

დამტკიცება: ვთქვათ, A მატრიცში k და s სტრიქონები ერთი და იგივეა. ვაჩვენოთ, რომ $\Delta=\det A=0$.

წარმოვიდგინოთ, რომ A მატრიცის k და s სტრიქონებს ადგილები შევუცვალეთ. მაშინ, მეორე თვისების გამო, გვექნება

$$\Delta_1=\det B=-\det A=-\Delta.$$

მაგრამ, იმის გამო, რომ k და s სტრიქონები ერთმანეთს ემთხვევიან, ამ გადასმით A მატრიცი არ შეიცვალა, ე. ი. $B=A$, საიდანაც

$$\Delta_1=\det B=\det A=\Delta.$$

მაშასადამე, გვაქვს $\Delta_1=-\Delta$, $\Delta_1=\Delta$ ე. ი.

$$\Delta=-\Delta=>2\Delta=0, \text{ ე. ი. } \Delta=0.$$

IV **თვისება:** თუ A მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი საერთო თანამამრავლს შეიცავს, **იგი** შეიძლება გავიტანოთ მატრიცის დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ.

ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} \cdots ca_{in} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = c\Delta.$$

დამტკიცება. რადგან დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტი შეიცავს c თანამამრავლს, დეტერმინანტის განმარტების თანახმად, გვაქვს

$$\Delta_1=\sum_{(\alpha)}(-1)^{J(\alpha)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots ca_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=$$

$$=c\sum_{(\alpha)}(-1)^{J(\alpha)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=c\det A=c\Delta.$$

ე. ი.

$$\det(cA)=c\det A.$$

დეტერმინანტის III და IV თვისებებიდან გამომდინარეობს

შედეგი 1. თუ მატრიცის რომელიმე ორი სტრიქონი (სვეტი) ურთიერთპროპორციულია, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

შედეგი 2. თუ მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყოველი ელემენტი ნულია, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

V **თვისება:** თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ყოველი ელემენტი ორი შესაკრების ჯამია; $a_{ij}=a'_{ij}+a''_{ij}$, მაშინ ეს დეტერმინანტი ორი დეტერმინანტის ჯამის ტოლია, რომელთა სტრიქონები, გარდა i-ური სტრიქონისა, იგივეა, რაც მოცემული დეტერმინანტისა, ხოლო პირველი დეტერმინანტის i-ური სტრიქონია a'_{ij} შესაკრებები, ხოლო მეორე დეტერმინანტის i-ური სტრიქონია a''_{ij} შესაკრებები.

დეტერმინანტის სიმბოლოებში ეს თვისება ასე ჩაიწერება

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\Delta_1+\Delta_2.$$

მართლაც, (14) ტოლობის ძალით

$$\Delta=\sum_{(\alpha)}(-1)^{J(\alpha)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a'_{ij}+a''_{ij})\cdots a_{nj_n}=$$

$$=\sum_{(\alpha)}(-1)^{J(\alpha)}(a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a'_{ij}\cdots a_{nj_n}+a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a''_{ij}\cdots a_{nj_n})=$$

$$=\sum_{(\alpha)}(-1)^{J(\alpha)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a'_{ij}\cdots a_{nj_n}+$$

$$+\sum_{(\alpha)}(-1)^{J(\alpha)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a''_{ij}\cdots a_{nj_n}=\Delta_1+\Delta_2$$

ე. ი.

VI **თვისება:** თუ მატრიცის რომელიმე სტრიქონი (სვეტი) წარმოადგენს სხვა სტრიქონების (სვეტების) წრფივ კომბინაციას, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

მართლაც, ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს დეტერმინანტის V თვისებიდან და IV თვისების I შედეგიდან. შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს შებრუნებულ დებულებას: თუ დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ მისი რომელიმე სტრიქონი (სვეტი) წარმოადგენს ზოგიერთი დანარჩენი სტრიქონის (სვეტის) წრფივ კომბინაციას.

VII **თვისება:** თუ მატრიცის რომელიმე სტრიქონს (სვეტს) დავუმატებთ სხვა სტრიქონების (სვეტების) წრფივ კომბინაციას, ამით მატრიცის დეტერმინანტი არ შეიცვლება.

ეს თვისება გამომდინარეობს დეტერმინანტის V—VI თვისებებიდან.

VIII **თვისება:** მატრიცის დეტერმინანტი უდრის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების მათსავე ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამს.

ჩავწეროთ ეს თვისება სათანადო სიმბოლოებში: ავიღოთ $A=(a_{ij})_{n,n}$

მატრიცის i-ური სტრიქონის ელემენტები: $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$, რომელთა ალგებრული დამატებებია სათანადოდ $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$, მაშინ, მატრიცის VIII თვისება i-ური სტრიქონისა და j სვეტისათვის ასე ჩაიწერება:

$$\Delta = \det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (20)$$

$$\Delta = \det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

ვაჩვენოთ ამ თვისების მართებულობა როცა $n = 3$, ე. ი. მესამე რიგის დეტერმინანტისათვის.

ვისარგებლოთ მესამე რიგის დეტერმინანტის (16) გამოსახულებით და კონკრეტულობისათვის მსჯელობა ჩავატაროთ პირველი სტრიქონისათვის. (16) ტოლობის მარჯვენა მხარეში პირველი ორი შესაკრებიდან ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ a_{11}, მომდევნო ორი შესაკრებიდან a_{12} და უკანასკნელი შესაკრებებიდან a_{13}. მაშინ (18) ფორმულების გათვალისწინება მოგვცემს

$$\Delta = a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + a_{12}(a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) + a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) =$$
$$= a_{11} M_{11} + a_{12}(-M_{12}) + a_{13} M_{13} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}.$$

ე. ი.

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13},$$

ანალოგიური მსჯელობა დანარჩენი ორი სტრიქონისა და სამივე სვეტისათვის გვაძლევს:

$$\Delta = a_{21}(-M_{21}) + a_{22} M_{22} + a_{23}(-M_{23}) = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23},$$

$$\Delta = a_{31} M_{31} + a_{32}(-M_{32}) + a_{33} M_{33} = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33},$$

$$\Delta = a_{11} M_{11} + a_{21}(-M_{21}) + a_{31} M_{31} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31},$$

$$\Delta = a_{12}(-M_{12}) + a_{22} M_{22} + a_{32}(-M_{32}) = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32},$$

$$\Delta = a_{13} M_{13} + a_{23}(-M_{23}) + a_{33} M_{33} = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}:$$

უკანასკნელი ექვსი იგივეობა ადასტურებს დეტერმინანტის მერვე თვისების მართებულობას მესამე რიგის დეტერმინანტისათვის.

IX **თვისება:** მატრიცის დეტერმინანტის ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების სხვა რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) სათანადო ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია, ე. ი. თუ $i \neq k$, $j \neq k$,

მაშინ

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0,$$
$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0. \qquad (21)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: განვიხილოთ მატრიცი, რომელშიც გამოვყოთ რომელიმე ორი i და k სტრიქონი

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

თუ A მატრიცის დეტერმინანტს დავშლით k სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ

$$\Delta=\det A=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}$$

ახლა განვიხილოთ B მატრიცი, რომელიც A-დან მიიღება მისი k-ური სტრიქონის ნებისმიერი b_1, $b_2,\ldots,b_n$ ელემენტებით შეცვლით, ე. ი.

$$B=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix} \quad (k\text{-ური სტრიქონი})$$

დავშალოთ B მატრიცის დეტერმინანტი k-ური სტრიქონის ელემენტების მიხედვით. ვინაიდან ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების ალგებრული დამატებები დამოკიდებულია ამ სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებზე, B მატრიცის დეტერმინანტის დაშლა იქნება

$$\det B=b_1A_{k1}+b_2A_{k2}+\cdots+b_nA_{kn}. \qquad (22)$$

თუ b_1, $b_2,\ldots,b_n$ ელემენტების ადგილას ავიღებთ შესაბამისად მატრიცის i-ური სტრიქონის ელემენტებს, გვექნება

$$B=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix} \quad (k\text{-ური სტრიქონი})$$

თანახმად (22) ტოლობისა

$$\det B=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}.$$

მეორე მხრივ, ვინაიდან B მატრიცში ორი სტრიქონი ტოლია, დეტერმინანტის მესამე თვისების გამო $\det B=0$.

ორი უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0 \qquad (i\neq k)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_m+b_n & a_p \\ c_m+d_n & c_p \end{vmatrix}.$$

ამოხსნა: თუ ვისარგებლებთ დეტერმინანტის მეხუთე, ხოლო შემდეგ მეოთხე და მესამე თვისებებით, გვექნება

$$\begin{vmatrix} am+bn & ap \\ cm+dn & cp \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} am & ap \\ cm & cp \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} bn & ap \\ dn & cn \end{vmatrix}=$$

$$=mp\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}+np\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=np(bc-ad).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა: ვისარგებლოთ დეტერმინანტის მერვე თვისებით და მოცემული დეტერმინანტი დავშალოთ მესამე სტრიქონის ელემენტების მიხედვით. მაშინ

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}=c\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}=c-a+b.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა: ვისარგებლოთ დეტერმინინტის მეშვიდე თვისებით: პირველი სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ (—1)-ზე და დავუმატოთ სათანადოდ მეორე და მესამე სტრიქონის ელემენტებს. მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2.$$

მაგალითი 9. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

ამოხსნა: ვისარგებლოთ დეტერმინანტის მეშვიდე თვისებით. პირველი სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ 2-ზე, 3-ზე, 4-ზე და მიმდევრობით გამოვაკლოთ მეორე, მესამე და მეოთხე სტრიქონის სათანადო ელემენტებს, მაშინ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{vmatrix}.$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ დეტერმინანტის მერვე თვისებას და დავშლით დეტერმინანტს პირველი სვეტის, ხოლო შემდეგ პირველი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, გვექნება

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = -56.$$

§ 4. გადაუგვარებელი და გადაგვარებული მატრიცი

კვადრატულ მატრიცს ეწოდება გადაუგვარებელი, თუ მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან და ეწოდება გადაგვარებული, თუ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

განვიხილოთ რაიმე გადაუგვარებელი მატრიცი

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{n,n}.$$

ავიღოთ A მატრიცის ტრანსპონირებული A^T მატრიცი და მისი ყოველი ელემენტი შევცვალოთ სათანადო ალგებრული დამატებით. მივიღებთ ახალ მატრიცს, რომელსაც A მატრიცის მიკავშირებული ეწოდება. აღვნიშნოთ მიკავშირებული მატრიცი A^* სიმბოლოთ. მივიღებთ

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{n_1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots & A_{n2} \\ \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=(A_{ji})_{n,n}.$$

განვიხილოთ $\frac{1}{\Delta}A^*$ მატრიცი, აღვნიშნოთ იგი B-თი, ე. ი.

$$B=(b_{ij})_{n,n}=\frac{1}{\Delta}A^*=\left\{\begin{matrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{matrix}\right\}=\left(\frac{A_{ji}}{\Delta}\right)_{m,n}.$$

თეორემა. ყოველ გადაუგვარებელ A მატრიცს გააჩნია ერთადერთი შებრუნებული A^{-1} მატრიცი, რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}A^*. \tag{23}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ა) ვინაიდან A მატრიცი გაჯაუგვარებელია. ე, ი. $\Delta\neq 0$, არსებობს $\frac{1}{\Delta}A^*$ მატრიცი, მატრიცთა გამრავლების ოპერაციის განმარტებისა და დეტერმინანტის მერვე, მეცხრე თვისებების გამო, გვაქვს

$$A \cdot \frac{1}{\Delta} A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{a_{11} A_{11} + \cdots + a_{1n} A_{1n}}{\Delta}, \ldots, \frac{a_{11} A_{n1} + \cdots + a_{1n} A_{nn}}{\Delta} \\ \frac{a_{21} A_{11} + \cdots + a_{2n} A_{1n}}{\Delta}, \ldots, \frac{a_{21} A_{n1} + \cdots + a_{2n} A_{nn}}{\Delta} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{a_{n1} A_{11} + \cdots + a_{nn} A_{1n}}{\Delta}, \ldots, \frac{a_{n1} A_{n1} + \cdots + a_{nn} A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix}$$

უკანასკნელ დეტერმინანტში, რა თქმა უნდა i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მოთავსებულია

$$\frac{a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \cdots + a_{in} A_{jn}}{\Delta}$$

წილადი. მაგრამ ეს, დეტერმინანტის VIII და IX თვისებების ძალით, ცხადია მოგვცემს $\frac{\Delta}{\Delta} = 1$, როცა $i = j$, და $\frac{O}{\Delta} = 0$, როცა $i \neq j$. ამის გამო, გამოსათვლელი მატრიცის მხოლოდ მთავარი დიაგონალური ელემენტები იქნება 1-ის ტოლი (ყველა სხვა კი 0-ებია), მაშასადამე მივიღებთ:

$$A \cdot \frac{1}{\Delta} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix},$$

ანუ

$$A \cdot \frac{1}{\Delta} A^* = E.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ A მატრიცის შებრუნებულია $\frac{1}{\Delta}A^*$ მატრიცი,

ე. ი.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}A^*$$

ამგვარად, ვაჩვენეთ, რომ $B=\frac{1}{\Delta}A^*$ მატრიცი არის A მატრიცის შებრუნებული.

ბ) ვაჩვენოთ, რომ A მატრიცს არ გააჩნია შებრუნებული სხვა მატრიცი. მართლაც, ვთქვათ, $c=(c_{ij})_{n,n}$ არის A მატრიცის შებრუნებული. ე. ი.

$$AC=E \tag{*}$$

უნდა ვაჩვენოთ, რომ $C=B$.

(*) ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან გავამრავლოთ B-ზე. მივიღებთ

$$B(AC)=BE \quad \text{ე. ი.} \quad B(AC)=B.$$

მაგრამ $B(AC)=(BA)C=EC=C$. ე. ი. $C=B$.

ე. ი. A მატრიცის ერთადერთი შებრუნებული მატრიცი არის

$$B=\frac{1}{\Delta}A^*.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ორი ნებისმიერი ერთი და იმავე რიგის მატრიცებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B,$$

ამ ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ გადაგვარებულ მატრიცს არა აქვს შებრუნებული. მართლაც, ვთქვათ, A გადაგვარებული მატრიცია, ე. ი. $\det A=0$ და დავუშვათ წინააღმდეგი: ვთქვათ, A მატრიცს გააჩნია შებრუნებული B მატრიცი, ე. ი.

$$AB=E.$$

მაშინ,

$$\det(AB)=\det E=1.$$

$$\det A\cdot\det B=1.$$

$$0\cdot\det B=1, \text{ ე. ი. } 0=1.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ გადაგვარებულ მატრიცს არ გააჩნია შებრუნებული.

მატრიცის რანგი. ვთქვათ მოცემულია $A=(a_{ij})_{m,n}$ მატრიცი

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m,n}.$$

შევარჩიოთ მატრიცის m სტრიქონიდან და n სვეტიდან ნებისმიერი k სტრიქონი და k სვეტი. მათი გადაკვეთის ადგილებში მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილ k რიგის დეტერმინანტს მოცემული A მატრიცის k-ური რიგის მინორი ეწოდება. სახელდობრ, თუ შევარჩევთ სტრიქონებს, რომელთა ნომრებია $i_1, i_2, \dots, i_k$ და სვეტებს ნომრებით $j_1, j_2, \dots, j_k$, მაშინ სათანადო k-ური რიგის მინორი იქნება

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_k j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_2 j_k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} \cdots a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

ცხადია, რომ ყველა ასეთ k რიგის მინორთა რიცხვი იქნება

$$c_m^k \, c_n^k \, (1 \leqslant k \leqslant l, \; l = \min(m, \; n)),$$

რომელთაგან ზოგი შეიძლება ნულის ტოლი იყოს.

განმარტება: მატრიცის რანგი ეწოდება ამ მატრიცის ყველა ნულისაგან განსხვავებულ მინორთა უმაღლეს რიგს.

ე. ი. მატრიცის რანგი არის r ნიშნავს, რომ მისი r რიგის მინორთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყველა r-ზე მაღალი რიგის მინორი ნულის ტოლია. ცხადია, რომ მატრიცის რანგი არის ერთი, თუ მატრიცის პირველი რიგის მინორთა (ელემენტთა) შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო მეორე და უფრო მაღალი რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია. ასევე მატრიცის რანგი არის ორი, თუ მეორე რიგის მინორთა შორის არსებობს ერთი მაინც ნულისგან განსხვავებული მინორი, ხოლო ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორი ნულის ტოლია. ავღნიშნოთ A მატრიცის რანგი $r(A)$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ

$$r(A) \leqslant \min(m, \; n).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 10. გამოვთვალოთ A მატრიცის რანგი თუ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 5 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

ამოხსნა: A მატრიცის პირველი რიგის ყველა მინორი ნულისაგან განსხვავდება, ასევე მისი ერთ-ერთი მეორე რიგის მინორი

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0,$$

რომლის შემცველი მესამე რიგის მინორები

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \\ 12 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

და სხვა, ნულის ტოლია; ამიტომ $r(A)=2$.

§ 5. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

ზოგიერთი წინასწარი ცნება. ვთქვათ, m და n ორი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. განვიხილოთ n-უცნობიანი და m წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{24}$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებია (უცნობებია), ხოლო a_{ij} და b_i ($i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$) მოცემული რიცხვები, რომელთაც სისტემის კოეფიციენტები ეწოდება; კერძოდ a_{ij} რიცხვებს ეწოდება უცნობებთან მდგომი კოეფიციენტები, ხოლო b_i-ს თავისუფალი წევრები. თუ ყველა $b_i=0$ ($i=1, 2, \ldots, m$), მაშინ სისტემას ერთგვაროვანი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი—არაერთგვაროვანი.

n-განზომილებიან $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ვექტორს ეწოდება მოცემული სისტემის ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს ამ სისტემის ნებისმიერ განტოლებას—აქცევს მას ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად. ე. ი. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ვექტორი არის (24) სისტემის ამონახსნი ნიშნავს, რომ

$$a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{in}\alpha_n\equiv b_i \quad (i=1, 2, \ldots, m).$$

სისტემას ეწოდება თავსებადი, თუ მას ერთი ამონახსნი მაინც აქვს; წინააღმდეგ შემთხვევაში სისტემას არათავსებადი ეწოდება. თავსებადი სისტემა ორგვარია: განსაზღვრული და განუსაზღვრელი. სისტემას ეწოდება განსაზღვრული, თუ მას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, წინააღმდეგ შემთხვევაში სისტემას განუსაზღვრელი ეწოდება. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, განუსაზღვრელ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. ამგვარად, ნებისმიერი სისტემის ამონახსნთა რიცხვი შეიძლება იყოს ერთი (თავსებადი, განსაზღვრული სისტემა), უსასრულობა (თავსებადი, განუსაზღვრელი სისტემა), ან ნული (არათავსებადი სისტემა).

სისტემის ამოხსნასთან დაკავშირებით ისმის ორი ძირითადი საკითხი: სისტემის თავსებადობა და თავსებადი სისტემის ყველა ამონახსნის პოვნა.

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც

უცნობთა რიცხვი განტოლებათა რიცხვის ტოლია, ე. ი. $m=n$. ასეთ სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{25}$$

ამ სისტემის უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილ მატრიცს ეწოდება სისტემის მატრიცი, ხოლო მის დეტერმინანტს—სისტემის დეტერმინანტი. აღვნიშნოთ სისტემის დეტერმინანტი Δ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}. \tag{26}$$

Δ დეტერმინანტთან ერთად განვიხილოთ n-რიგის დამხმარე დეტერმინანტები: $\Delta_1,\ \Delta_2,\ldots,\Delta_n$, სადაც $\Delta_j\,(j=1,\ 2,\ldots,n)$ მიიღება სისტემის დეტერმინანტიდან მისი j სვეტის შეცვლით თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტით. ე. ი.

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots b_1\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots b_2\cdots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots b_n\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj} \tag{27}$$

კრამერის თეორემა (კრამერის ფორმულები). თუ სისტემის Δ დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ ეს სისტემა თავსებადია და აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$, ე. ი.

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}\quad (j=1,\ 2,\ldots,\ n), \tag{28}$$

ამგვარად, თუ $\Delta\neq 0$, მაშინ (25) სისტემის ერთადერთი ამონახსნია $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$ ვექტორი. (28) ფორმულებს კრამერის ფორმულები ეწოდება.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: ა) ვაჩვენოთ, რომ თუ (25) სისტემა თავსებადია, მაშინ მისი ერთადერთი ამონახსნია $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\ldots$, $x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$.

მართლაც, ვთქვათ, (25) სისტემა, რომლის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, თავსებადია და $x_1,\ x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n$ მისი ამონახსნია. (25)

სისტემის პირველი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ A_{1j}-ზე, მეორე განტოლება A_{2j}-ზე და ა. შ. უკანასკნელი განტოლება A_{nj}-ზე. მიღებული ტოლობების წევრობრივ შეკრება გამარტივების შემდეგ გვაძლევს

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n_1}A_{nj})x_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\cdots+a_{n_2}A_{nj})x_2+$$
$$+\cdots+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})x_j+$$
$$+\cdots+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})x_n=$$
$$=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj} \tag{29}$$

(29) ტოლობაში x_1 უცნობის კოეფიციენტი წარმოადგენს (26) დეტერმინანტის პირველი სვეტის ელემენტების j-ური სვეტის სათანადო ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამს, რაც, დეტერმინანტის მეცხრე თვისების თანახმად, ნულის ტოლია. იმავე თვისების ძალით $x_2, x_3, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ ცვლადების კოეფიციენტებიც (29) ტოლობაში ნულის ტოლია, ხოლო x_j ცვლადის კოეფიციენტი, დეტერმინანტის მერვე თვისების გამო, სისტემის დეტერმინანტის ტოლია. ამავე ტოლობის მარჯვენა მხარე (27) ტოლობის თანახმად, არის Δ_j. ამგვარად, (29) ტოლობიდან გვაქვს

$$\Delta \cdot x_j=\Delta_j$$

აქედან, რადგან $\Delta\neq 0$, გვაქვს

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1,\ 2,\ldots,n)$$

ე. ი. თუ სისტემა თავსებადია, მისი ერთადერთი ამონახსნია

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$$

ვექტორი.

ბ) ვაჩვენოთ, რომ $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots\ \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$ ვექტორი არის (29) სისტემის ამონახსნი. ამისათვის საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ ეს ვექტორი აკმაყოფილებს (25) სისტემის ნებისმიერ i-ურ განტოლებას, ე. ი. ადგილი აქვს იგივეობებს

$$a_{i1}\frac{\Delta_1}{\Delta}+a_{i2}\frac{\Delta_2}{\Delta}+\cdots+a_{ij}\frac{\Delta_j}{\Delta}+\cdots+a_{in}\frac{\Delta_n}{\Delta}\equiv b_i \tag{30}$$

$$(i=1,\ 2,\ldots,n)$$

ამ ტოლობების მართებულობა გამომდინარეობს დეტერმინანტის მერვე და მეცხრე თვისებებიდან. მართლაც, თუ დასამტკიცებელ ტოლობაში

Δ_j რიცხვებს შევცვლით სათანადო (27) მნიშვნელობებით და მიღებული ტოლობის მარცხენა მხარეში ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ b_i რიცხვებს, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\left(\frac{a_{i1} A_{11} + a_{i2} A_{12} + \dots + a_{in} A_{1n}}{\Delta}\right) b_1 +$$

$$+ \left(\frac{a_{i1} A_{21} + a_{i2} A_{22} + \dots + a_{in} A_{2n}}{\Delta}\right) b_2 + \dots +$$

$$+ \left(\frac{a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}}{\Delta}\right) b_i + \dots +$$

$$+ \left(\frac{a_{i1} A_{n1} + a_{i2} A_{n2} + \dots + a_{in} A_{nn}}{\Delta}\right) b_n \equiv b_i,$$

დეტერმინანტის მეცხრე, თვისების გამო ამ ტოლობაში $b_1, b_2 \dots b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n$ რიცხვების კოეფიციენტები ნულის ტოლია, ხოლო b_i-ს კოეფიციენტი არის 1, რაც იმას ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს (30) იგივეობას, ე. ი. $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$ ვექტორი არის (25) სისტემის ამონახსნი.

შედეგი: თუ ერთგვაროვანი სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი (ტრივიალური) ამონახსნი.

მართლაც, ამ შემთხვევაში ყოველი Δ_i ნულის ტოლია, ვინაიდან მისი ერთი სვეტი ნულებისაგან შედგება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 11. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \end{cases}$$

ამოხსნა: რადგან სისტემის მთავარი დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

ამიტომ, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. გამოვთვალოთ დამხმარე დეტერმინანტები. გვაქვს

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -14,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -21.$$

თუ ახლა ვისარგებლებთ (28) ფორმულებით, მივიღებთ:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 12. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა: გვაქვს

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

რადგან $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 13. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

რადგან

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

და

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \quad \Delta_3 \neq 0,$$

მოცემული სისტემა არათავსებადია—მას ამონახსნი არა აქვს.

კრონეკერ-კაპელის თეორემა. როგორც ვიცით, თუ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაში უცნობთა რიცხვი უდრის განტოლებათა რიცხვს და სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ ამ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც კრამერის ფორმულებით მოიცემა: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

ახლა განვიხილოთ (24) სახის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ზოგადი სისტემა. ასეთი სისტემის თავსებადობა და ამონახსნთა სიმრავლე მთლიანად განისაზღვრება ორი მატრიცით—სისტემის A მატრიცითა და სისტემის გაფართოებული B მატრიცით, სადაც

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

ამგვარად, B მატრიცი მიიღება A მატრიციდან მისთვის მარჯვნიდან ერთი სვეტის დამატებით, ამიტომ ცხადია (მატრიცის რანგის ცნების განსაზღვრის ძალით), რომ A მატრიცის რანგი არ აღემატება B მატრიცის რანგს, ე. ი. ნებისმიერი (24) სახის სისტემისათვის $r(A) \leqslant r(B)$, სადაც $r(A)$ და $r(B)$ შესაბამისად, აღნიშნავენ A და B მატრიცების რანგებს.

თეორემა (კრონეკერ-კაპელი): წრფივ ალგებრულ განტოლებათა (24) სისტემა თავსებადია (ამოხსნადია) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სისტემის მატრიცის რანგი უდრის გაფართოებული მატრიცის რანგს.

ამგვარად, თუ $r(A)<r(B)$ სისტემა ამოუხსნადია, თუ $r(A)=r(B)$ სისტემა ამოხსნადია.

თავსებადი სისტემის ამოხსნა. თუ $r(A)<r(B)$ სისტემას ამონახსნი არა აქვს (ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია—ამოხსნათა რიცხვი ნულია) და ის, საზოგადოდ არ ხდება განხილვის საგანი.

დავუშვათ, რომ $r(A)=r(B)$; მაშინ, კრონეკერ-კაპელის თეორემის თანახმად, სისტემა თავსებადია—მას აქვს ერთი ამონახსნი მაინც. მოხერხებულობის მიზნით რიცხვი $r(A)=r(B)$ აღვნიშნოთ r-ით, ე. ი. $r(A)=r(B)=r$. მატრიცის რანგის განსაზღვრის ძალით გვაქვს. რომ r არ აღემატება m-სა და n-ს ე. ი.

$$1 \leqslant r \leqslant \min(m, n).$$

თავსებადი სისტემა ორგვარია: განსაზღვრული და განუზღვრელი. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, როგორც ვიცით, ეწოდება განსაზღვრული, თუ მას ერთადერთი ამონახსნი აქვს და განუზღვრელი—თუ მას ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვს; ეს დამოკიდებულია $n-r$ სხვაობაზე.

თავსებადი (24) სისტემისათვის r რანგი უდრის ამ სისტემის დამოუკიდებელ განტოლებათა მაქსიმალურ რიცხვს, ე. ი. (24) სისტემის m განტოლებათა შორის არსებობს r ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი განტოლება, ხოლო დანარჩენი $m-r$ განტოლება (თუ $m>r$) ამ r განტოლებათა შედეგია.

ამგვარად n-უცნობიან m განტოლებათა მოცემული (24) სისტემა ეკვივალენტურია n-უცნობიან r დამოუკიდებელ განტოლებათა სისტემისა.

დამოუკიდებელ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა საშუალებას იძლევა განისაზღვროს r უცნობი, მაგრამ სულ უცნობთა რიცხვი არის n; ამიტომ ცხადია, რომ $n-r$ უცნობი (თუ $n>r$) დარჩება დამოუკიდებელი—

„თავისუფალი", ე. ი. მათ შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობანი.

$r(A)=r(B)=r$ ნიშნავს, რომ (24) თავსებადი სისტემის რომელიღაც r განტოლებაში სათანადო r უცნობთან მდგომი კოეფიციენტებით შედგენილი r რიგის მინორი A მატრიცისა არ უდრის ნულს.

შეიძლება ვიგულისხმოთ, ზოგადობის შეუზღუდავად, რომ ეს მინორი დგას მარცხენა ზედა კუთხეში. ე. ი. პირველ r განტოლებაში, პირველ r უცნობთან.

ყოველივე ეს ნაშნავს, რომ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა მოცემული (24) სისტემა r დამოუკიდებელ განტოლებათა შემდეგი სისტემის ტოლფასია:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1r}x_r+a_{1r+1}x_{r+1}+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2r}x_r+a_{2r+1}x_{r+1}+\dots+x_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rr}x_r+a_{rr+1}x_{r+1}+\dots+a_{rn}x_n=b_r. \end{cases} \qquad (24_1)$$

შესაძლებელია 2 შემთხვევა 1) $r=n$, 2) $r<n$.

1) თუ $r=n$, მაშინ (24) იქნება n-უცნობიან n წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომლის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, მას, კრამერის თეორემის თანახმად, ექნება ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც კრამერის ფორმულებით მოიცემა.

2) თუ $r<n$, ე. ი. $n-r\geq 1$, მაშინ (24_1) სისტემაში $n-r$ უცნობს $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობანი (ისინი თავისუფალი ცვლადები იქნებიან). თუ ამ უცნობებს განტოლებათა მარჯვენა მხარეში გადავიტანთ, მაშინ (24_1) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\dots-a_{1n}x_n=b_1^1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2r+1}x_{r+1}-\dots-a_{2n}x_n=b_2^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\dots-a_{rn}x_n=b_r^1. \end{cases} \qquad (24_2)$$

(24_2) სისტემის პირველ r უცნობებთან მდგომი კოეფიციენტებით შედგენილი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, ე. ი.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0,$$

ამიტომ $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_r$ უცნობთა ნებისმიერი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის (24_2) სისტემის მიმართ ვიყენებთ კრამერის ფორმულებს და ვპოულობთ $x_1, x_2, \dots, x_r$ უცნობთა სათანადო მნიშვნელობებს, ვინაიდან

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ დამოუკიდებელ უცნობთა შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე უსასრულოა (24_2) და, მაშასადამე, (24) სისტემას, აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე, რომელიც კრამერის ფორმულებით მოიცემა.

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ზოგადი (24) სისტემის შესახებ ყველაფერი ზემოთქმული მოკლედ შეიძლება ასე შეჯამდეს:

1) თუ $r(A) < r(B)$, სისტემა არათავსებადია (სისტემას ამონახსნი არა აქვს),

2) თუ $r(A) = r(B)$, მაშინ სისტემა თავსებადია, ამასთან:

ა) თუ $r = n$ (საერთო რანგი უდრის უცნობთა რიცხვს), მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი (სისტემა განსაზღვრულია),

ბ) თუ $r < n$, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე (სისტემა განუზღვრელია).

ამოხსნადობის შემთხვევაში ($r(A) = r(B) = r$) წრფივ განტოლებათა მოცემული სისტემა ეკვივალენტურია მისგან აღებულ r დამოუკიდებელ განტოლებათა სისტემისა, რომლის (ერთადერთი ან უსასრულო) ამონახსნი მოიცემა კრამერის ფორმულებით.

√ **წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის და მისი ამოხსნის მატრიცული ჩაწერა.** ვთქვათ მოცემულია n უცნობიან m წრფივ ალგებრულ განტოლებათა (17) სისტემა. აღვნიშნოთ B-თი $b_1, b_2, \ldots, b_m$ თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტი, რომელიც წარმოადგენს (m, 1) განზომილების მატრიცს, ხოლო X-ით $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობებისაგან შედგენილი სვეტი, რომელიც წარმოადგენს (n, 1) განზომილების მატრიცს, მაშინ, მატრიცთა გამრავლებისა და მატრიცთა ტოლობის განსაზღვრის ძალით, წრფივ განტოლებათა (24) სისტემა მატრიცულად ასე ჩაიწერება

$$AX = B, \tag{24_3}$$

სადაც A—(24) სისტემის მატრიცია. დავუშვათ, რომ $m = n$ (A მატრიცი კვადრატულია) და A მატრიცის დეტერმინანტი $\Delta = |A| \neq 0$. მაშინ, როგორც ვიცით, A მატრიცს აქვს (ერთადერთი) შებრუნებული A^{-1} მატრიცი. თუ (24_3) მატრიცული განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ მარცხნიდან A^{-1} მატრიცზე, გვექნება

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

საიდანაც, მატრიცათა სათანადო თვისებების ძალით

$$(A^{-1}A)X = EX = X = A^{-1}B.$$

ე. ი. საბოლოოდ

$$X = A^{-1}B.$$

უკანასკნელი ტოლობა იძლევა X სვეტის და მაშასადამე, თვითონ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა მნიშვნელობებს, ე. ი. (25) სისტემის ერთადერთ ამონახსნს.

გაუსის მეთოდი. არსებობს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ზოგადი (24) სისტემის გამოკვლევისა და ამოხსნის მეთოდი, რომელიც არ მოითხოვს მატრიცების და დეტერმინანტების გამოყენებას. ეს არის ე. წ. გაუსის მეთოდი (უცნობთა მიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდი). ის იძლევა როგორც სისტემის ამოხსნადობის საკითხის გამოკვლევის, ასევე ამოხსნადი სისტემის ყველა ამონახსნის პოვნის საშუალებას.

ეს მეთოდი ემყარება იმ ფაქტს, რომ თუ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა მოცემული სისტემის ნებისმიერ განტოლებას დავუმატებთ ამავე სისტემის რომელიღაც სხვა განტოლებებს, გამრავლებულს რაღაც რიცხვებზე, მივიღებთ მოცემული სისტემის ეკვივალენტურ სისტემას.

ამ მეთოდის ძირითადი იდეა ასეთია: ვთქვათ, მოცემულია წრფივ განტოლებათა (24) სისტემა, ამ სისტემის პირველი განტოლებიდან განვსაზღვროთ x_1 უცნობი (ვგულისხმობთ, რომ ამ განტოლებაში x_1 უცნობი შედის, რაც არ ზღუდავს ზოგადობას) და მისი მიღებული მნიშვნელობა შევიტანოთ ყველა დანარჩენ განტოლებაში მეორე განტოლებიდან დაწყებული.

ამით უკანასკნელი $m-1$ განტოლებიდან x_1 უცნობი გამოირიცხა, ე. ი. ეს განტოლებები შეიცავს $n-1$ უცნობს: $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

ამგვარად, განტოლებათა (24) სისტემა შეიცვალა ისეთი ეკვივალენტური სისტემით, რომლის პირველი განტოლება (საზოგადოდ) n-უცნობიანია, ხოლო მომდევნო $m-1$ განტოლება $n-1$ უცნობიანი.

მიღებული სისტემის პირველ განტოლებას უცვლელად ვტოვებთ, ხოლო დანარჩენი $m-1$ განტოლების მიმართ ვიყენებთ ანალოგიურ გარდაქმნებს: მეორე განტოლებიდან ვსაზღვრავთ x_2 უცნობს და მისი მნიშვნელობა შეგვაქვს მომდევნო განტოლებებში. მივიღებთ ახალ ეკვივალენტურ სისტემას, რომლის პირველი განტოლება n უცნობიანია, მეორე $n-1$ უცნობიანი, ყველა დანარჩენი კი $n-2$ უცნობიანია, განვაგრძობთ ამ ოპერაციას.

თუ მოცემული სისტემა არათავსებადია (და მხოლოდ მაშინ), დადგება ისეთი საფეხური, რომ ერთ-ერთ განტოლებას ექნება სახე $0 \cdot x = a$, სადაც $a \neq 0$. თუ სისტემა თავსებადია, სასრული მოქმედების შედეგად ის გადავა ეკვივალენტურ სისტემაში, რომელსაც ექნება ან სამკუთხედის ფორმა (უკანასკნელი განტოლებაც ერთუცნობიანია) ან ტრაპეციის ფორმა (უკანასკნელ განტოლებაში უცნობთა რიცხვი მეტია ან ტოლია 2-ის). პირველ შემთხვევაში სისტემას ექნება ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოინახება უცნობების მიმდევრობით განსაზღვრით უკანასკნელი განტოლებიდან დაწყებული. მეორე შემთხვევაში სისტემას ექნება ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე, რომელიც ანალოგიურად მოინახება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 14. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=3, \\ 2x_1-2x_2-x_3=1, \\ 3x_1-x_2-4x_3=3. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა: გაუსის მეთოდის გამოყენება გვაძლევს

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=3, \\ 2x_1-2x_2-x_3=1, \\ 3x_1-x_2-4x_3=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2-\ 2x_3=3, \\ \quad -4x_2+3x_3=-5, \\ \quad -4x_2+2x_3=-6. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2-2x_3=3, \\ \qquad x_2-{}^3/_4x_3={}^5/_4, \\ \qquad\qquad x_3=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad =3, \\ \quad x_2 \quad =2, \\ \qquad x_3=1, \end{cases}$$

ე. ი. მოცემული სისტემის ამონახსნია (3, 2, 1).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

იპოვეთ A და B მატრიცების ნამრავლი, თუ

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A=(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \quad B=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. იპოვეთ ინვერსიათა რიცხვი გადანაცვლებებში

ა) 1623547 ბ) 7326514 გ) 129876543 დ) 321456987

ქვემოთ ჩამოთვლილი დეტერმინანტები გამოთვალეთ მინორებად დაშლის წესით.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 10. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3+b_3 & a_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix}$,

იპოვეთ მატრიცის რანგი, თუ

12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. 15. $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$. 16. $D=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

იპოვეთ შებრუნებული მატრიცი, თუ

14. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 17. $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

ამოხსენით სისტემები:

18. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6, \\ x_1+2x_2-3x_3-x_4=-4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1, \\ x_1-2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+5x_3=3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=4, \\ 3x_1-x_2-3x_3=7, \\ x_1+x_2-2x_3=5. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=5, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1-2x_2+3x_3=7. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ -4x_2-7x_3-11x_4=-7, \\ x_2-5x_3-7x_4=-8, \\ x_2+x_3-4x_4=-5. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1. \end{cases}$

ანალიზური გეომეტრია

IV თავი

ორიენტირებული მონაკვეთი. კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე

§ 1. ორიენტირებული მონაკვეთი

განვიხილოთ Ox ღერძი და ავიღოთ მასზე ორი წერტილი A და B (ნახ. 10). ეს წერტილები განსაზღვრავენ ღერძზე გარკვეულ მონაკვეთს. როცა განიხილავენ მონაკვეთის სიგრძეს, მაშინ მნიშვნელობა არა აქვს მონაკვეთის კიდური წერტილებიდან თუ რომელს ჩავთვლით საწყის წერტილად ანუ სათავედ და რომელს ბოლო წერტილად და მაშასადამე AB და BA მონაკვეთს ერთმანეთისაგან არ გავარჩევთ. მაგრამ მექანიკის და ტექნიკის მრავალი საკითხის განხილვის დროს საჭიროა ვიცოდეთ მონაკვეთის არა მარტო სიგრძე, არამედ, თუ რომელია ამ მონაკვეთის სათავე და ბოლო წერტილი. მაგალითად, Ox ღერძზე მოძრავი წერტილის მიერ გავლილ გზას A-დან B-საკენ თუ აღნიშნავთ AB-თი, მაშინ საწინააღმდეგოდ (B დან A-სკენ) გავლილი გზა იქნება BA და ეს ორი გზა წერტილის მოძრაობის თვალსაზრისით იქნება არსებითად სხვადასხვა, თუმცა სიგრძე ორივეს ერთნაირი აქვთ.

ისეთ მონაკვეთს, რომლისთვისაც დასახელებულია სათავე და ბოლო წერტილი, ორიენტირებული მონაკვეთი ეწოდება. თუ მონაკვეთის სათავე არის A, ხოლო ბოლო წერტილი B, მაშინ იგი აღინიშნება ასე $\overline{AB}$ (ზემოდან ხაზით) იმის აღსანიშნავად, რომ საქმე გვაქვს არა უბრალო AB მონაკვეთთან, არამედ ორიენტირებულ მონაკვეთთან, რომლის სათავე პირველი ასოა, ხოლო ბოლო წერტილი — მეორე.

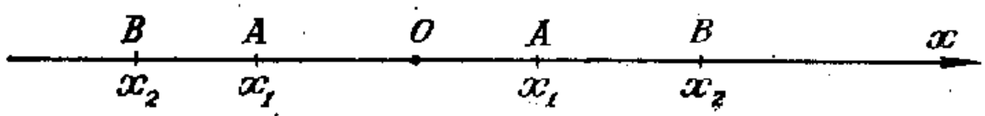
ორიენტირებული $\overline{AB}$ მონაკვეთის სიგრძე აღვნიშნოთ $|\overline{AB}|$ სიმბოლოთი.

აღვნიშნოთ Ox ღერძზე (ნახ. 10) A და B წერტილის კოორდინატები x_1 და x_2-ით, ე. ი. $A(x_1)$, $B(x_2)$. მაშინ სხვაობა $x_2 - x_1$ ნამდვილი რიცხვია. იგი დადებითია ან უარყოფითი იმისდა მიხედვით, Ox ღერძზე B წერტილი მდებარეობს A წერტილის მარჯვნივ თუ მარცხნივ, ანუ სხვა-

ნაირად, $\overline{AB}$ მონაკვეთი ორიენტირებულია Ox ღერძის მიმართულებით, თუ მის საწინააღმდეგოდ. $x_2 - x_1$ სხვაობას უწოდებენ ორიენტირებული $\overline{AB}$ მონაკვეთის სიდიდეს Ox ღერძზე და აღნიშნავენ AB-თი. ამრიგად,

$$AB = x_2 - x_1. \tag{1}$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ორიენტირებული მონაკვეთის სიდიდეს აქვს შემდეგი თვისება $AB = -BA$, ხოლო $AA = 0$.



ნახ. 10.

§ 2. შალის თეორემა

ღერძზე აღებული სამი, ნებისმიერი A, B და C წერტილისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$AB + BC = AC \tag{2}$$

დამტკიცება. ავიღოთ Ox ღერძზე სამი წერტილი: $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$, მაშინ § 1-ის (1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$AB = x_2 - x_1, \quad BC = x_3 - x_2.$$

ამ ორი ტოლობის შეკრებით მივიღებთ

$$AB + BC = x_3 - x_1.$$

მეორე მხრივ, იმავე § 1-ის (1) ფორმულის ძალით

$$AC = x_3 - x_1.$$

უკანასკნელი ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$AB + BC = AC$$

და ამით შალის[1] თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. მონაკვეთის სიგრძე

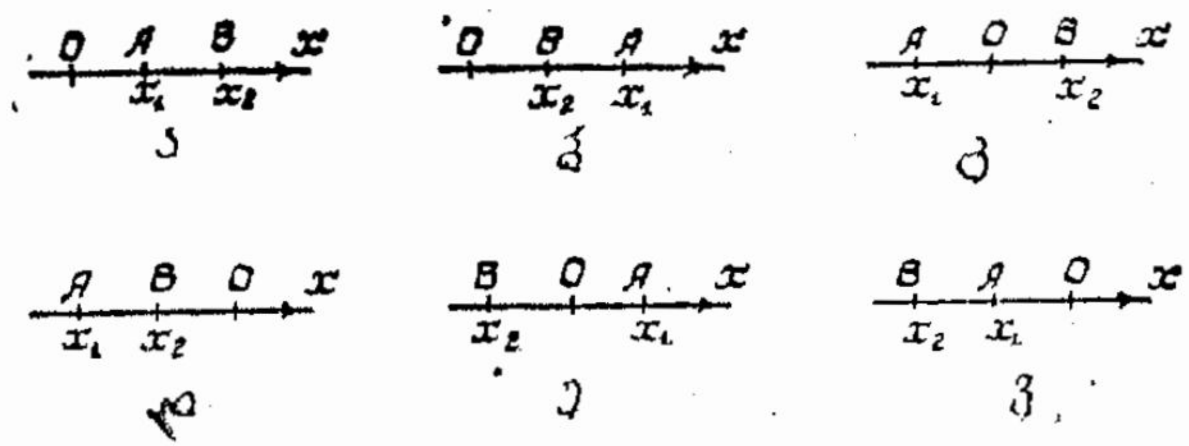
ავიღოთ Ox ღერძზე ორი წერტილი A და B, რომელთა კოორდინატები შესაბამისად იყოს x_1 და x_2, ე. ი. $A(x_1)$ და $B(x_2)$. AB მონაკვეთის სიგრძე აღვნიშნოთ d-თი. ამ სიგრძის გასაგებად გავარჩიოთ A, B

[1] შალი (1793 — 1880) — ფრანგი მათემატიკოსი.

და O წერტილების ურთიერთგანლაგების ყველა შემთხვევა, ასე, მაგალითად, როცა $\overline{AB}$ მონაკვეთი ორიენტირებულია Ox ღერძის მიმართულებით, მაშინ ცხადია, რომ $d=|\overline{AB}|=x_2-x_1$ ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. როცა $\overline{AB}$ მონაკვეთი ორიენტირებულია Ox ღერძის საწინააღმდეგოდ, მაშინ $d=|\overline{AB}|=x_1-x_2=-(x_2-x_1)$, მეორე მხრივ, როგორც ვიცით $|x_2-x_1|=\pm(x_2-x_1)$, ამიტომ გვექნება

$$d=|\overline{AB}|=|x_2-x_1|. \tag{1}$$

(1) ფორმულა მართებულია Ox ღერძზე A და B წერტილების ურთიერთგანლაგების ყველა შესაძლო შემთხვევაში (ნახ. 11, ა, ბ, გ, დ, ე, ვ).



ნახ. 11.

ამრიგად, ღერძის ორ წერტილს შორის მანძილი უდრის ამ წერტილთა შესაბამისი კოორდინატების სხვაობის აბსოლუტურ მნიშვნელობას.

ცხადია, რომ $|\overline{AB}|\geq 0$, $|\overline{AB}|=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1=x_2$ ე. ი. როცა ღერძზე აღებული A და B წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, გარდა ამისა ცხადია, რომ $|\overline{AB}|=|\overline{BA}|$.

§ 4. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით

ვთქვათ, Ox ღერძზე მოცემულია მონაკვეთი, რომლის სათავე და ბოლო წერტილებია $A(x_1)$ და $B(x_2)$.

ავიღოთ რაიმე დადებითი რიცხვი λ. ვიტყვით, რომ M წერტილი AB მონაკვეთს ყოფს λ ფარდობით, თუ

$$\frac{AM}{MB}=\lambda. \tag{1}$$

საჭიროა განვსაზღვროთ M წერტილის კოორდინატი x, თუ ცნობილია A და B წერტილების კოორდინატები შესაბამისად x_1 და x_2. ამისათვის ვისარგებლოთ § 1-ის (1) ფორმულით, რომლის თანახმად გვექნება

$$AM=x-x_1, \quad MB=x_2-x.$$

ამიტომ (1)-ის ძალით მივიღებთ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

აქედან

$$x-x_1=\lambda x_2-\lambda x, \qquad (1+\lambda)\,x=x_1+\lambda x_2,$$

საიდანაც

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \tag{2}$$

კერძოდ, თუ M წერტილი AB მონაკვეთს შუაზე ყოფს, მაშინ $\lambda=1$ და (2) ფორმულიდან გვექნება

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}. \tag{3}$$

მაშასადამე, *მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატი უდრის კიდური წერტილების კოორდინატების ნახევარჯამს.*

მაგალითი. მოცემულია AB მონაკვეთი, რომლის კიდური წერტილებია $A(4)$ და $B(-9)$. ვიპოვოთ ისეთი $M(x)$ წერტილი, რომელიც AB მონაკვეთს ყოფს $\lambda=\frac{1}{3}$ ფარდობით.

ამოხსნა: (2) ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$x=\frac{4+\frac{1}{3}(-9)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{4-3}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4},$$

შუაწერტილის კოორდინატი იქნება

$$x=\frac{4-9}{2}=-2\,\frac{1}{2}.$$

სავარჯიშო მაგალითები:

1. მოცემულია $A\left(-\frac{5}{2}\right)$ და $B\left(\frac{2}{3}\right)$ წერტილები. იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომელიც ყოფს AB მონაკვეთს ფარდობებით: $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$.

2. იპოვეთ AB მონაკვეთის A წერტილის კოორდინატი, თუ $M\left(\frac{3}{4}\right)$ მონაკვეთის შუაწერტილია, ხოლო B წერტილის კოორდინატია $\frac{5}{2}$.

3. იპოვეთ AB მონაკვეთის B წერტილის კოორდინატი, თუ $A\left(\frac{2}{3}\right)$, ხოლო $M(4)$ წერტილი მონაკვეთს ყოფს $\lambda=\frac{1}{3}$ ფარდობით.

4. AB მონაკვეთი დავყოთ სამ ტოლ ნაწილად და ვიპოვოთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები, თუ $A\left(\frac{6}{5}\right)$ და $B\left(\frac{15}{4}\right)$.

§ 5. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები სიბრტყეზე

სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობის განსაზღვრის მიზნით შემოვიღოთ **დეკარტის** მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა.

სიბრტყეზე დეკარტის მართკუთხა სისტემა განსაზღვრულია, თუ მოცემულია სიგრძის საზომი ერთეული და ორი ურთიერთმართობული ღერძი, რომელთაგან პირობით არჩეულია პირველი (Ox) და მეორე (Oy) (ნახ. 12).

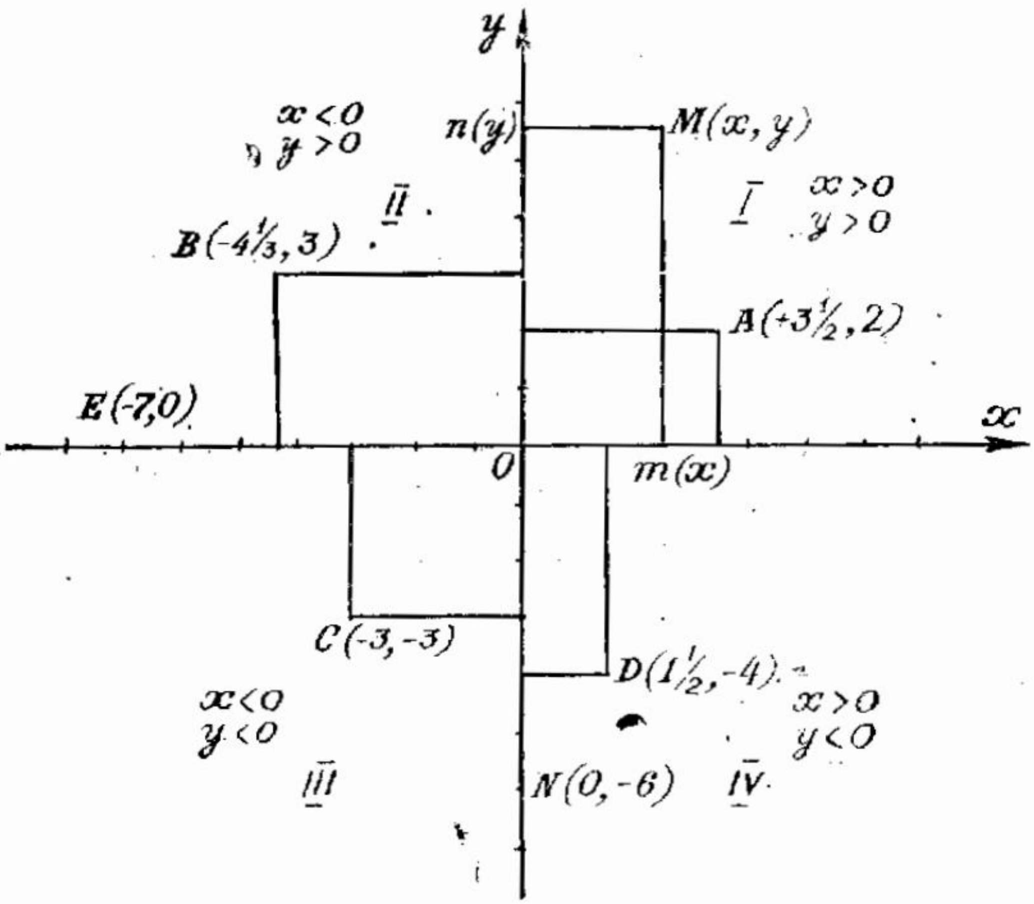
ამ ღერძებს, რომლის მიმართ განვსაზღვრავთ სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობას, ეწოდება კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ღ ე რ ძ ე ბ ი, მათი გადაკვეთის O წერტილს — კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ს ა თ ა ვ ე. კოორდინატთა ასეთ სისტემას მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ეწოდება. ეს კოორდინატთა სისტემა შემოიღო ცნობილმა ფრანგმა გეომეტრმა და ფილოსოფოსმა **რენე დეკარტმა** (1596 — 1650), რის გამოც ზემოაღნიშნული კოორდინატთა სისტემა დეკარტის სახელს ატარებს.

შესაძლებელია, მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ნაცვლად გვქონდეს ისეთი კოორდინატთა სისტემა, რომლისთვისაც კოორდინატთა ღერძები ერთმანეთთან მოცემულ, ნებისმიერ კუთხეს შეადგენს. ფორმულებისა და სხვადასხვა გამოთვლების გამარტივების მიზნით შემდეგში ყველგან საქმე გვექნება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემასთან.

Ox და Oy კოორდინატთა ღერძები სიბრტყეს ყოფს ოთხ ნაწილად. თითოეულ ნაწილს „მეოთხედი" ვუწოდოთ, სახელდობრ, I, II, III და IV მეოთხედი (ნახ. 12).

ახლა ავიღოთ ამ სიბრტყეზე რომელიმე M წერტილი. იმისათვის რომ განვსაზღვროთ ამ წერტილის მდებარეობა განხილულ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ, მოვიქცეთ შემდეგნაირად: დავუშვათ M წერტილიდან Mm და Mn მართობები შესაბამისად კოორდინატთა Ox და

Oy ღერძებზე. m და n წერტილები აღნიშნავს ამ მართობების გადაკვეთის წერტილებს შესაბამის ღერძებთან, რომლებსაც M წერტილის გეგმილები ეწოდება ამავე ღერძებზე. m წერტილის კოორდინატი Ox ღერძზე აღვნიშნოთ x-ით, ხოლო n წერტილის კოორდინატი Oy ღერძზე y-ით. ცხადია, რომ x ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა არის M წერტილის დაშორება Oy ღერძიდან, ხოლო y-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა გამოსახავს მანძილს M წერტილიდან Ox ღერძამდე. ამრიგად, სიბრტყეზე ყოველ M წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა გარკვეული



ნახ. 12.

x, y წყვილი, რომლებსაც M წერტილის კოორდინატები ეწოდება და აღინიშნება ასე: $M(x, y)$. ამ რიცხვებიდან x-ს, რომელიც Ox ღერძზე m გეგმილის კოორდინატია, ეწოდება M წერტილის აბსცისა, ხოლო y-ს, რომელიც Oy ღერძზე n წერტილის კოორდინატია, ეწოდება M წერტილის ორდინატი. ამის მიხედვით Ox ღერძს ეწოდება აბსცისათა ღერძი, ხოლო Oy-ს — ორდინატთა ღერძი.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ როცა კოორდინატთა ღერძებზე დადებითი მიმართულება ისეა შერჩეული, როგორც ეს მე-12 ნახაზზეა ნაჩვენები, მაშინ I მეოთხედში წერტილის ორივე კოორდინატს — როგორც აბსცისას, ისე ორდინატს — ექნება დადებითი ნიშანი; II მეოთხედში წერტილის აბსცისა იქნება უარყოფითი, ხოლო ორდინატი — და-

დებითი; III მეოთხედში წერტილის აბსცისა და ორდინატი ორივე უარყოფითია, ხოლო IV მეოთხედში აბსცისა იქნება დადებითი, ორდინატი კი — უარყოფითი.

კოორდინატთა სათავის ორივე კოორდინატი ნულია.

ახლა განვიხილოთ შებრუნებული საკითხი. სახელდობრ, ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული (x, y) წყვილი. ამ წყვილს სიბრტყეზე შეგვიძლია შევუსაბამოთ გარკვეული M წერტილი.

M წერტილის ასაგებად ავიღოთ კოორდინატთა Ox და Oy ღერძებზე m და n წერტილები, რომელთა კოორდინატები შესაბამისად არის x და y. აღნიშნული m წერტილიდან აღვმართოთ Ox ღერძის მართობი, ხოლო n წერტილიდან Oy ღერძის მართობი წრფეები, ამ მართობთა გადაკვეთის წერტილი იქნება სწორედ საძიებელი M წერტილი.

ვინაიდან m და n წერტილებიდან სათანადო ღერძებზე მხოლოდ თითო მართობი წრფის გატარება შეიძლება, ამიტომ გადაკვეთის M წერტილი ერთადერთი წერტილია სიბრტყეზე, რომელსაც სათანადო კოორდინატებად აქვს x და y რიცხვები.

ზემოხსენებულ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას აღნიშნავენ Oxy-ით.

ამრიგად, **დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ ყველა შესაძლებელ წყვილებს შორის.** მე-12 ნახაზზე აგებულია წერტილები:

$$A\left(+3\frac{1}{2},\ +2\right),\quad B\left(-4\frac{1}{3},\ +3\right),\quad C(-3,\ -3),$$

$$D\left(+1\frac{1}{2},\ -4\right),\quad E(-7,\ 0)\quad \text{და}\quad N(0,\ -6).$$

§ 6. ორ წერტილს შორის მანძილი

ვთქვათ, მოცემულია Oxy კოორდინატთა სიბრტყეზე ორი წერტილი: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. საჭიროა განვსაზღვროთ მათ შორის მანძილი d. ჩვენი მიზანია შევადგინოთ ისეთი ფორმულა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს გამოვთვალოთ d, როცა ცნობილია A და B წერტილების კოორდინატები. ამისათვის გავატაროთ A წერტილიდან Ox ღერძის პარალელური AC მონაკვეთი B წერტილის ორდინატის (ან მისი გაგრძელების) გადაკვეთამდე. მაშინ ABC მართკუთხა სამკუთხედიდან (ნახ. 13) გვექნება

$$d = |AB| = \sqrt{AC^2 + BC^2}. \tag{1}$$

მეორე მხრივ

$$Oa=x_1,\ Aa=y_1,\ Ob=x_2,\ bB=y_2,$$

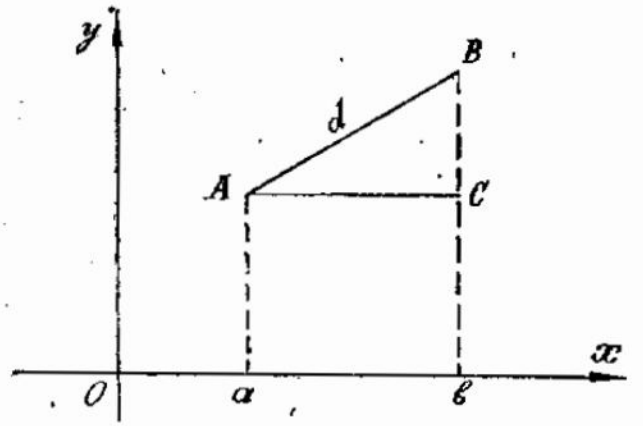
$$AC=ab=Ob-Oa=x_2-x_1,$$

$$CB=bB-bC=bB-OA=y_2-y_1.$$

ამიტომ (1)-დან მივიღებთ:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{2}$$

მაშასადამე, ორ წერტილს შორის მანძილი ტოლია კვადრატული ფესვისა ამ წერტილთა ერთსახელა კოორდინატების სხვაობათა კვადრატების ჯამიდან.



ნახ. 13.

აღსანიშნავია, რომ (2) ფორმულა მართებულია A და B წერტილების ნებისმიერი მდებარეობისათვის სიბრტყეზე.

ცხადია, რომ $d\geqslant 0$. $d=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, ე. ი. როცა A და B წერტილი სიბრტყეზე ერთმანეთზე დამთხვეული წერტილებია. კერძოდ (2) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ, როცა $y_1=y_2$, მაშინ $d=|x_2-x_1|$, ხოლო, როცა $x_1=x_2$, მაშინ $d=|y_2-y_1|$. დაბოლოს კოორდინატთა $O(0, 0)$ სათავიდან სიბრტყეზე აღებულ ნებისმიერ $M(x, y)$ წერტილამდე მანძილი გამოითვლება ფორმულით

$$d=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2'}$$

ამოცანა. განვსაზღვროთ ABC სამკუთხედის გვერდები, თუ მისი წვეროებია: $A(9, 2)$, $B(5, -1)$, $C(-3, -4)$.

ამოხსნა. თანახმად (2) ფორმულისა გვექნება:

$$AB=\sqrt{(5-9)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5,$$

$$BC=\sqrt{(-3-5)^2+(-4+1)^2}=\sqrt{(-8)^2+(-3)^2}=\sqrt{73},$$

$$AC=\sqrt{(-3-9)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{(-12)^2+(-6)^2}=\sqrt{180}.$$

§ 7. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით

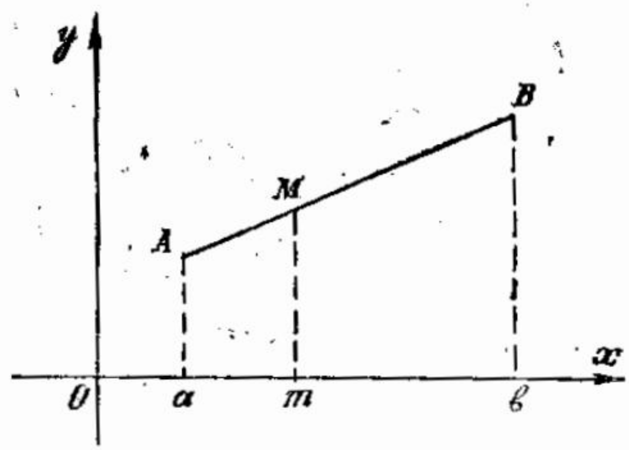
განვიხილოთ AB მონაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილებია: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. ვთქვათ, λ რომელიმე დადებითი რიცხვია, ვიტყვით, რომ M

წერტილი AB მონაკვეთს ყოფს λ ფარდობით, თუ M ეკუთვნის AB წრფეს და

$$\frac{AM}{MB}=\lambda. \tag{1}$$

საჭიროა განვსაზღვროთ M წერტილის კოორდინატები x, y, როცა ცნობილია A და B წერტილების კოორდინატები. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ M წერტილის აბსცისა x, საჭიროა Oy ღერძის პარალელურად გავატაროთ Aa, Mm და Bb მონაკვეთები (ნახ. 14). მაშინ გეომეტრიის ცნობილი თეორემის თანახმად ცხადია, რომ

$$\frac{AM}{MB}=\frac{am}{mb}.$$



ნახ. 14.

მაშასადამე,

$$\frac{am}{mb}=\lambda \tag{2}$$

მეორე მხრივ

$$Oa=x_1, \quad Om=x, \quad Ob=x_2, \quad Aa=y_1,$$

$$Mm=y, \quad Bb=y_2;$$

$$am=Om-Oa=x-x_1, \quad mb=Ob-Om=x_2-x.$$

ამიტომ (2)-დან მივიღებთ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

აქედან

$$x-x_1=\lambda x_2-\lambda x; \quad \text{ე. ი.} \quad (1+\lambda)\,x=x_1+\lambda x_2,$$

საიდანაც

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

ანალოგიურად გვექნება

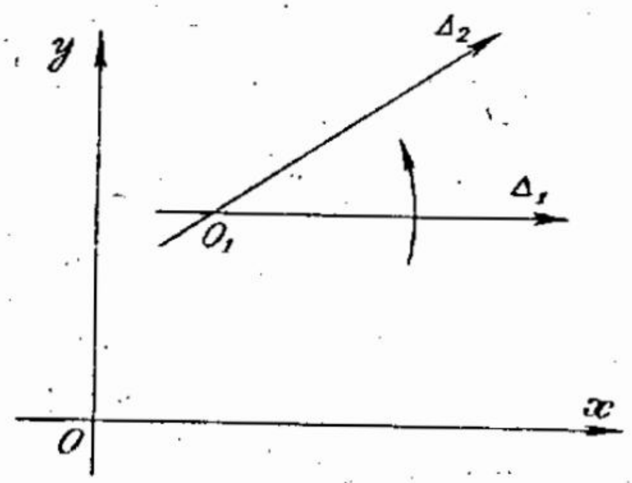
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{4}$$

კერძოდ, თუ დავუშვებთ $\lambda=1$, მაშინ (3), (4) ფორმულებიდან მივიღებთ AB მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატებისათვის შემდეგ ფორმულებს:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{5}$$

§ 8. ორ ღერძს შორის კუთხე

პირველ რიგში დავიმახსოვროთ, რომ Oxy კოორდინატთა სიბრტყეზე ბრუნვის დადებით მიმართულებად მიღებულია ის, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ O წერტილის გარშემო Ox ღერძი $\frac{\pi}{2}$ კუთხით, რომ მისი დადებითი მიმართულება დაემთხვეს Oy ღერძის დადებით მიმართულებას (ნახ. 15). სხვანაირად, სიბრტყეზე ბრუნვის დადებითი მიმართულება ემთხვევა საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებას (იხ. ღერძების მდებარეობა ნახ. 15-ის მიხედვით).



ნახ 15.

ახლა ვთქვათ სიბრტყეზე მოცემულია ორი ღერძი Δ_1 და Δ_2, რომლებიც იკვეთებიან O_1 წერტილში. კუთხე Δ_1 და Δ_2 ღერძებს შორის, პირობით ვუწოდოთ იმ კუთხეს, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ Δ_1 ღერძი, რომ მისი დადებითი მიმართულება დაემთხვეს Δ_2 ღერძის დადებით მიმართულებას. ამ კუთხეს აღვნიშნავენ ასე — $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ და იღებენ გარკვეული ნიშნით ბრუნვის მიმართულების მიხედვით სიბრტყეზე, სახელდობრ: თუ კუთხე მიღებულია Δ_1 ღერძის ბრუნვის დადებითი მიმართულებით (ე. ი. საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ), მაშინ ამ კუთხეს ავიღებთ $+$ ნიშნით, წინააღმდეგ შემთხვევაში (ე. ი. საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით) $-$ ნიშნით.

ზემოთმოყვანილი შეთანხმებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ Δ_1 და Δ_2 ღერძებს შორის კუთხეს აქვს უამრავი მნიშვნელობა, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან $2k\pi$ შესაკრებით, სადაც k ღებულობს მნიშვნელობებს: $0 \pm 1, \pm 2, \ldots$

ამრიგად, თუ აღნიშნული კუთხის ერთი რომელიმე მნიშვნელობა არის α, მაშინ ღერძებს შორის კუთხის ზოგადი მნიშვნელობა იქნება

$$(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = \alpha + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

ყველა ამ კუთხიდან ჩვენ ვისარგებლებთ იმ კუთხით, რომელიც უმცირესი იქნება თავისი აბსოლუტური სიდიდით.

იმ შემთხვევაში, როცა Δ_1 და Δ_2 ღერძები ურთიერთპარალელურია, მაშინ მათ შორის კუთხეს ავიღებთ 0-ს ან π-ს იმისდა მიხედვით, მოცე-

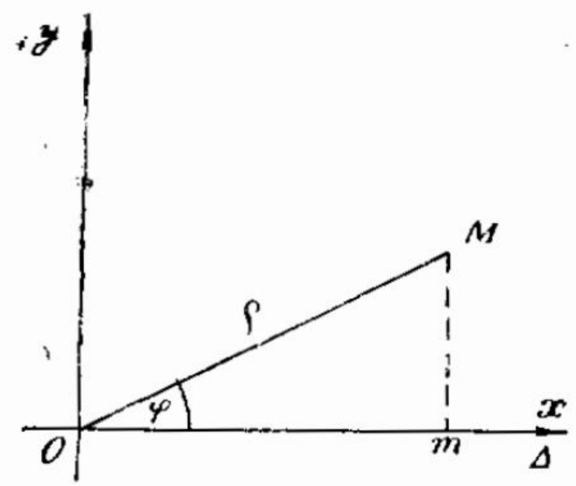
მული ღერძების დადებითი მიმართულებები ერთნაირია, თუ ერთმანეთის საწინააღმდეგო.

ზემოაღნიშნულის ანალოგიურად განისაზღვრება კუთხე ღერძებსა და ორიენტირებულ მონაკვეთს შორის და კუთხე ორ ორიენტირებულ მონაკვეთს შორის, რომლებიც გადაიკვეთებიან გარკვეულ წერტილში,

§ 9. პოლარულ კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის გარდა კიდევ არსებობს მრავალი სხვა კოორდინატთა სისტემა. მათგან გავეცნობით მხოლოდ პოლარულ კოორდინატთა სისტემას სიბრტყეზე.

სიბრტყეზე რაიმე M წერტილის მდებარეობის განსაზღვრის მიზნით ავიღოთ ამავე სიბრტყეზე Δ ღერძი და მასზე O წერტილი. Δ ღერძს ვუწოდოთ პოლარული ღერძი, ხოლო O წერტილს — პოლუსი შევაერთოთ M წერტილი O პოლუსთან OM მონაკვეთით, რომელსაც M წერტილის რადიუს-ვექტორი ეწოდება და მისი სიგრძე აღვნიშნოთ ρ-თი. φ იყოს კუთხე, რომელსაც OM რადიუს-ვექტორი შეადგენს პოლარულ ღერძთან და რომელიც ათვლილია ამ ღერძიდან დადებითი მიმართულებით, ანუ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. φ კუთხეს პოლარული კუთხე ეწოდება,



ნახ. 16.

ცხადია, რომ ρ და φ სიდიდეები სავსებით განსაზღვრავენ წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე. მათ M წერტილის პოლარულ კოორდინატებს უწოდებენ და აღნიშნავენ ასე: $M(\rho, \varphi)$ (ნახ. 16).

ცხადია, აგრეთვე, რომ რადიუს-ვექტორს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი არაუარყოფითი რიცხვითი მნიშვნელობა, ხოლო პოლარულ კუთხეს — ნებისმიერი მნიშვნელობა $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ საზღვრებში. M წერტილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც გადაკვეთა პოლუსიდან გამოსული ნახევარწრფისა, რომელიც Δ ღერძთან შეადგენს φ კუთხეს და ρ-რადიუსიანი წრეწირისა, რომლის ცენტრი პოლუსშია.

პირიქით, თუ მოცემულია სიბრტყეზე M წერტილი, მაშინ შეგვიძლია ზემომოყვანილი წესით განვსაზღვროთ ρ და φ კოორდინატები. პოლუსისათვის $\rho = 0$, ხოლო φ ნებისმიერია.

ახლა დავამყაროთ კავშირი M წერტილის პოლარულ კოორდინატებსა და დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებს შორის, ამისათვის ავაგოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ მისი სათავე დაემთხვეს პოლუსს, Ox ღერძი — Δ ღერძს, ხოლო Oy ღერძი ავიღოთ Ox ღერძის მართობულად (ნახ. 16). x და y-ით აღვნიშნოთ M წერტილის მართკუთხა კოორდინატები: $x=Om$, $y=Mm$, მაშინ OMm მართკუთხა სამკუთხედიდან გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\varphi, \\ y&=\rho\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ეს ფორმულები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ M წერტილის დეკარტის x და y კოორდინატები, თუ მოცემულია მისი პოლარული კოორდინატები ρ და φ.

პირიქით, თუ მოცემულია x და y, მაშინ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ρ და φ. მართლაც, (1)-დან მივიღებთ:

$$x^2+y^2=\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho^2,$$

საიდანაც

$$\rho=+\sqrt{x^2+y^2}, \tag{2}$$

ხოლო

$$\cos\varphi=\frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}}; \tag{3}$$

ან კიდევ

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}. \tag{4}$$

ეს ფორმულა განსაზღვრავს φ კუთხის ორ მნიშვნელობას $0\leqslant\varphi<2\pi$ შუალედში, რომელთა შორის ერთი იქნება პოლარული კუთხე. სახელდობრ, იმისათვის, რომ გავიგოთ ამ კუთხის მნიშვნელობა, საჭიროა x და y-ის ნიშნების მიხედვით განვსაზღვროთ, თუ რომელ მეოთხედში მდებარეობს M წერტილი და შემდეგ ვისარგებლოთ იმ გარემოებით, რომ ამ კუთხის ტანგენსი ტოლი უნდა იყოს $\frac{y}{x}$-ის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზემოთ ჩვენ გავეცანით სიბრტყეზე წერტილის მართკუთხა და პოლარულ კოორდინატთა სისტემებს. ამას გარდა, როგორც ზემოთ ვთქვით, არსებობს კიდევ მრავალი სხვა სისტემა. მაგალითად, ჩვენთვის კარგად ცნობილია, რომ გეოგრაფიული კოორდინატები—ს ი გ რ ძ ე დ ი და გ ა ნ ე დ ი, განსაზღვრავს წერტილის მდებარეობას დედამიწის ზედაპირზე. ავიღოთ კიდევ შემდეგი მაგალითი: ჭადრაკის დაფაზე მიღებულია თავისებურად შერჩეული კოორდინატები. დაფაზე ფიგურების მდებარეობას განსაზღვრავენ ასოსა და რიცხვის საშუალებით: უჯრედები ვერტიკალურ რიგზე აღნიშნულია ლათინური ასოებით: a, b, c, d, e, f, g,

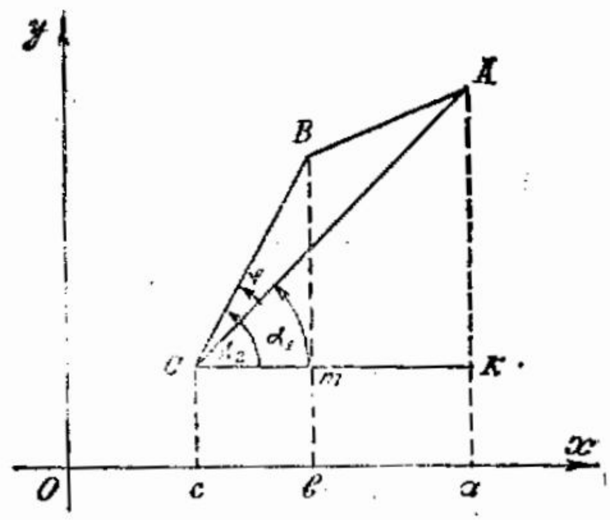
h, ხოლო ჰორიზონტალურ რიგზე მოთავსებული უჯრედები კი ციფრებით: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. დაფის ყოველ უჯრედს შეესაბამება ერთი ასო და ერთი რიცხვი, რომელთა შორის ასო მიუთითებს უჯრედის ვერტიკალურ რიგზე, ხოლო რიცხვი კი — ამ უჯრედის ჰორიზონტალურ რიგზე. მაგალითად, თუ პაიკი მოთავსებულია უჯრედზე, რომელიც მდებარეობს a ვერტიკალური და მე-4 ჰორიზონტალური რიგების გადაკვეთაზე, მაშინ იტყვიან, რომ ამ პაიკის კოორდინატებია $a4$. ჭადრაკში კოორდინატების გამოყენება ჭადრაკის თამაშის საშუალებას აძლევს ორ მოჭადრაკეს, რომლებიც სხვადასხვა ქალაქებში იმყოფებიან, მიმოწერის ან ტელეფონის საშუალებით, დაფისა და ფიგურების გამოყენების გარეშე. საკმარისია, მაგალითად, ითქვას „გროსმაისტერმა ითამაშა $C2-C4$" და უკვე ყველასათვის გასაგები გახდება, თუ როგორ დაიწყო პარტია და ა. შ.

ამრიგად, კოორდინატთა მეთოდი საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ წერტილის მდებარეობა რიცხვების ან სხვა სიმბოლოების საშუალებით.

§ 10. სამკუთხედის ფართობი

ვთქვათ, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ და $C(x_3, y_3)$ სამკუთხედის წვეროებია. საჭიროა გამოვთვალოთ ამ სამკუთხედის ფართობი S. აღვნიშნოთ φ-ით ის კუთხე, რომელსაც CB მონაკვეთი შეადგენს CA მონაკვეთთან და რომელიც ათვლილია უკანასკნელიდან დადებითი მიმართულებით (ნახ. 17). როგორც ტრიგონომეტრიიდან ცნობილია, ABC სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\frac{1}{2}\left|r_1 r_2 \sin\varphi\right|, \qquad (1)$$



ნახ. 17.

სადაც r_1 და r_2 წარმოადგენს CA და CB მონაკვეთების სიგრძეებს.

CA და CB მონაკვეთების მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხეები აღვნიშნოთ α_1 და α_2-ით, მაშინ $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ და

$$r_1 r_2 \sin\varphi = r_1 r_2 \sin(\alpha_2-\alpha_1)=$$

$$=r_2\sin\alpha_2\cdot r_1\cos\alpha_1 - r_2\cos\alpha_2\cdot r_1\sin\alpha_1.$$

მეორე მხრივ

$$Oa=x_1,\ Ob=x_2,\ Oc=x_3,\ Aa=y_1,\ Bb=y_2,\ Cc=y_3,$$

$$x_1-x_3=ca=r_1\cos\alpha_1,\quad x_2-x_3=cb=r_2\cos\alpha_2,$$

$$y_1 - y_3 = AK = r_1 \sin \alpha_1, \quad y_2 - y_3 = Bm = r_2 \sin \alpha_2.$$

ამიტომ (1) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$S = \frac{1}{2} \left| (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3) \right|. \tag{2}$$

დეტერმინანტის საშუალებით ეს ფორმულა ჩაიწერება ასე

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}. \tag{2'}$$

(2′) ფორმულაში + ან — ნიშანი აიღება იმისდა მიხედვით, დეტერმინანტი დადებითი იქნება, თუ უარყოფითი. კერძოდ, თუ C წერტილი კოორდინატთა სისტემის სათავეშია, მაშინ $x_3 = y_3 = 0$ და გვექნება:

$$S = \frac{1}{2} \left| x_1 y_2 - y_1 x_2 \right| = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

თუ A, B და C სამი წერტილი ერთ წრფეზე ძევს, მაშინ ABC სამკუთხედის ფართობი უდრის ნულს, ე. ი. $S = 0$. ამ შემთხვევაში (2) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3) = 0,$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}. \tag{4}$$

ასეთი ტოლობით უნდა იყოს დაკავშირებული ერთმანეთთან A, B და C წერტილის კოორდინატები იმისათვის, რომ ეს წერტილები მდებარეობდეს ერთ წრფეზე. ამრიგად, (4) ტოლობა არის სამი წერტილის ერთ წრფეზე მდებარეობის პირობა.

მაგალითი: ვიპოვოთ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებია:

$$A(7, -2), \quad B(-3, 6) \quad \text{და} \quad C(4, -1).$$

(2) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$S = \frac{1}{2} [(7 - 4)(6 + 1) - (-3 - 4)(-2 + 1)] = \frac{1}{2}(21 - 7) = 7.$$

სავარჯიშო მაგალითები:

1. ააგეთ სიბრტყეზე წერტილები: $A(3, 5)$; $B(-2, 7)$; $C(-3, 4)$; $D(7, -8)$; $E(0, 6)$; $F(-5, 0)$; $N(1, 0)$.

2. ააგეთ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია: $A(4, -1)$, $B(-2, 3)$ და $C(4, 5)$.

3. მოცემულია წერტილი $A(-3, -5)$. იპოვეთ ამ წერტილის სიმეტრიული წერტილი Ox ღერძის მიმართ.

პასუხი: $A'(-3, 5)$.

4. მოცემულია წერტილი $B(-2, 4)$, იპოვეთ ამ წერტილის სიმეტრიული წერტილი Oy ღერძის მიმართ.

პასუხი. $B'(2, 4)$.

5. მოცემულია წერტილი $A(2, 3)$, იპოვეთ მისი სიმეტრიული წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ.

პასუხი: $A'(-2, -3)$.

6. მოცემულია კვადრატი, რომლის ერთი წვეროს კოორდინატებია $(0, 3)$, ხოლო მეორე წვერო სათავეშია, იპოვეთ დანარჩენი წვეროები.

7. მოცემულია ABC სამკუთხედის წვეროები: $A(3, -1)$, $B(7, 9)$ და $C(-5, 11)$. იპოვეთ მისი პერიმეტრი.

8. წინა მაგალითში იპოვეთ BC გვერდის მედიანის სიგრძე.

პასუხი: $5\sqrt{5}$.

9. ABC სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილის კოორდინატებია: $(-2, 1)$, $(2, 3)$ და $(4, -1)$, იპოვეთ წვეროების კოორდინატები.

პასუხი: $A(8, 1)$, $B(0, -3)$, $C(-4, 5)$.

10. იპოვეთ Ox ღერძზე ისეთი წერტილი, რომელიც $A(4, 3)$ წერტილიდან 5 ერთეულით არის დაშორებული.

პასუხი: $(0, 0)$ და $(8, 0)$.

11, მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამის სამი წვერო: $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, -1)$ იპოვეთ მეოთხე წვერო.

პასუხი: $D(2, -2)$.

12. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $A(5, 3)$, $B(2, -1)$, $C(1, 4)$.

13. შეამოწმეთ, რომ სამი წერტილი $A(-7, -3)$, $B(-1, 1)$ და $C(2, 3)$ ძევს ერთ წრფეზე.

14. ABC სამკუთხედის ფართობი უდრის 12-ს, ხოლო $A(x, -2)$, $B(-1, 3)$ და $C(3, -1)$. იპოვეთ A წერტილის აბსცისა.

15. გამოიანგარიშეთ $ABCD$ კვადრატის ფართობი თუ $A(7, -1)$ და $B(3. -4)$.

16. გამოიანგარიშეთ $ABCD$ კვადრატის ფართობი, თუ მოცემულია მისი მოპირდაპირე წვეროები: $A(3, 5)$ და $C(1, -3)$.

17. გამოიანგარიშეთ წესიერი სამკუთხედის ფართობი, თუ მოცემულია მისი ორი წვერო: $A(-3, 2)$ და $B(1, 6)$.

18. დაამტკიცეთ, რომ სამი წერტილი $A(2, -1)$. $B(-3, -4)$ და $C(12, 5)$ ძევს ერთსა და იმავე წრეზე.

19. დაამტკიცეთ, რომ $A(2, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-5, 3)$ და $D(-2, -1)$ წერტილები კვადრატის წვეროებია.

20. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია; $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ და $C(5, -1)$, მართკუთხა სამკუთხედია.

21. გამოარკვიეთ, სად მდებარეობს $M(x, y)$ წერტილი, თუ

1) $xy>0$, 2) $xy<0$, 3) $x+y=0$, 4) $x-y=0$,

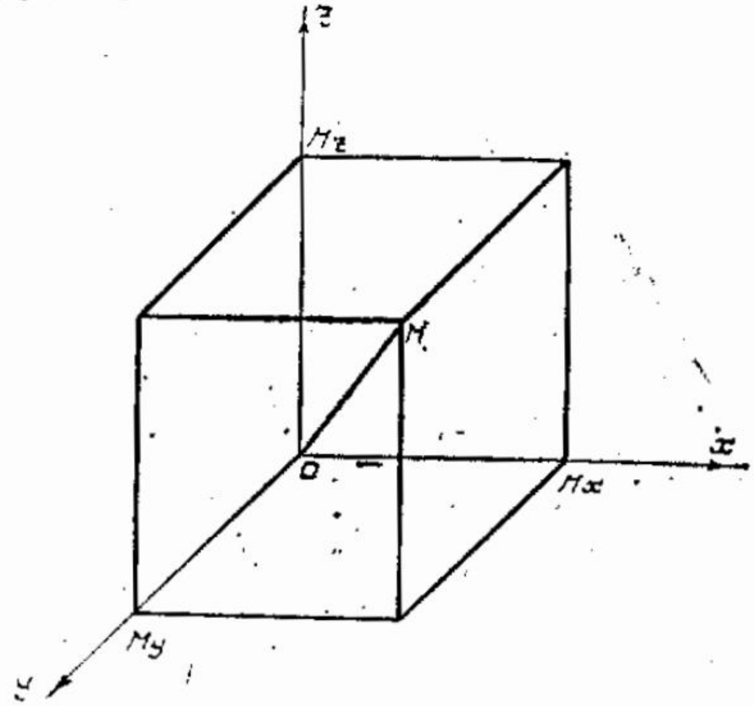
5) $x+y>0$, 6) $x+y<0$, 7) $x-y>0$, 8) $x-y<0$.

V თავი

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში, ვექტორული ალგებრა

§ 1. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში განისაზღვრება სამ ურთიერთმართობულ და ერთ წერტილში გადამკვეთ ღერძთა სისტემით, რომელთაგან არჩეულია პირველი, მეორე და მესამე ღერძები და რომელზედაც სიგრძის ერთი და იგივე ერთეული მასშტაბია აღებული. ღერძების გადაკვეთის წერტილს ეწოდება **კოორდინატთა სისტემის სათავე** და აღინიშნება O ასოთი. პირველ ღერძს აღნიშნავენ Ox-ით და მას **აბსცისათა** ღერძი ეწოდება, მეორე ღერძს აღნიშნავენ Oy-ით და მას **ორდინატთა** ღერძი ეწოდება, ხოლო მესამე ღერძს აღნიშნავენ Oz-ით და მას **აპლიკატთა** ღერძი ეწოდება ნახ. 18).

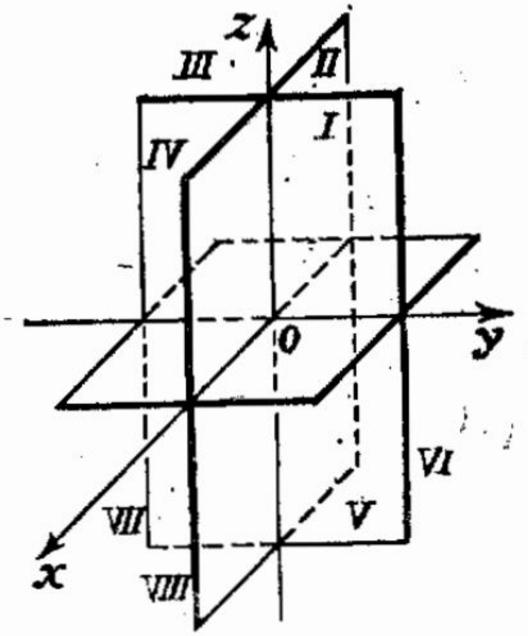


ნახ. 18.

ვთქვათ, M არის სივრცის რაიმე წერტილი. M **წერტილის მართობული გეგმილი რომელიმე ღერძზე** ეწოდება ამ წერტილში ღერძისადმი მართობულად გატარებული სიბრტყის გადაკვეთის წერტილს ღერძთან.

დავაგეგმილოთ M წერტილი საკოორდინატო ღერძებზე, მივიღებთ შესაბამისად M_x, M_y და M_z წერტილებს. ამ წერტილების სათანადო

კოორდინატები Ox, Oy და Oz ღერძებზე შესაბამისად აღვნიშნოთ x, y და z-ით. ამ რიცხვებს ეწოდება M წერტილის კოორდინატები სივრცეში. M წერტილი x, y, z კოორდინატებით $M(x, y, z)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.



ნახ. 19.

კოორდინატთა სისტემის სამი ურთიერთმართობული ღერძი განსაზღვრავს სამ ურთიერთმართობულ Oxy, Oyz და Oxz სიბრტყეს, რომელთაც კოორდინატთა სიბრტყეები ეწოდება.

ყოველ M წერტილს სივრცეში შეესაბამება გარკვეული მიმდევრობით აღებული სამი რიცხვი, ანუ რიცხვთა დალაგებული სამეული და პირიქით, რიცხვთა ყოველ დალაგებულ სამეულს სივრცეში შეესაბამება გარკვეული წერტილი.

ზემოაღნიშნულ კოორდინატთა სამი სიბრტყე მთელ სივრცეს ყოფს რვა ნაწილად (ნახ. 19). თითოეულ ნაწილში აღებული წერტილი განისაზღვრება სამი კოორდინატით, რომლებსაც შეესაბამება გარკვეული ნიშნები:

I	ნაწილში	$x>0$,	$y>0$,	$z>0$,
II	—„—	$x<0$,	$y>0$,	$z>0$,
III	—„—	$x<0$,	$y<0$,	$z>0$,
IV	—„—	$x>0$,	$y<0$,	$z>0$,
V	—„—	$x>0$,	$y>0$,	$z<0$,
VI	—„—	$x<0$,	$y>0$,	$z<0$,
VII	—„—	$x<0$,	$y<0$.	$z<0$,
VIII	—„—	$x>0$,	$y<0$,	$z<0$.

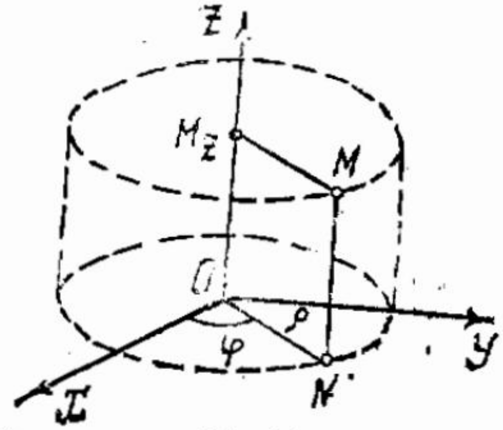
თუ რომელიმე წერტილი ძევს Oyz სიბრტყეზე, მაშინ $x=0$. ანალოგიურად გვექნება დანარჩენ სიბრტყეზე; ხოლო თუ წერტილი ძევს Ox ღერძზე, მაშინ $y=z=0$. ანალოგიურად გვექნება დანარჩენ ღერძებზე.

§ 2. ცილინდრული კოორდინატები

ახლა გავეცნოთ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემას სივრცეში. ვთქვათ ჰორიზონტალურ Q სიბრტყეზე აღებულია ფიქსირებული O წერტილი. გავატაროთ ამ წერტილში Ox ღერძი. აღვმართოთ O წერტილში

Q სიბრტყის მართობული Oz ღერძი. ვთქვათ M ნებისმიერი წერტილია სივრცეში, ხოლო N მისი გეგმილია Q სიბრტყეზე, M_z-ით აღვნიშნოთ წერტილის გეგმილი Oz ღერძზე (ნახ. 20).

M წერტილის ცილინდრული კოორდინატები ეწოდება ρ, φ და z რიცხვებს, რომელთაგან (ρ, φ) წარმოადგენენ N წერტილის პოლარულ კოორდინატებს Q სიბრტყეზე, სადაც O არის პოლუსი, ხოლო Ox — პოლარული ღერძი. რაც შეეხება z-ს იგი არის OM_z მონაკვეთის სიდიდე. M წერტილი, რომლის ცილინდრული კოორდინატებია ρ, φ და z აღინიშნება ასე: $M(\rho, \varphi, z)$. იმისათვის რომ დავამყაროთ სივრცეში M წერტილის ცილინდრულ და მართკუთხოვან კოორდინატებს შორის კავშირი, საჭიროა ავაგოთ მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემა $Oxyz$ ისე როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. მაშინ M წერტილის x, y, z და ρ, φ, z კოორდინატებს შორის კავშირი გამოისახება შემდეგი ფორმულებით.

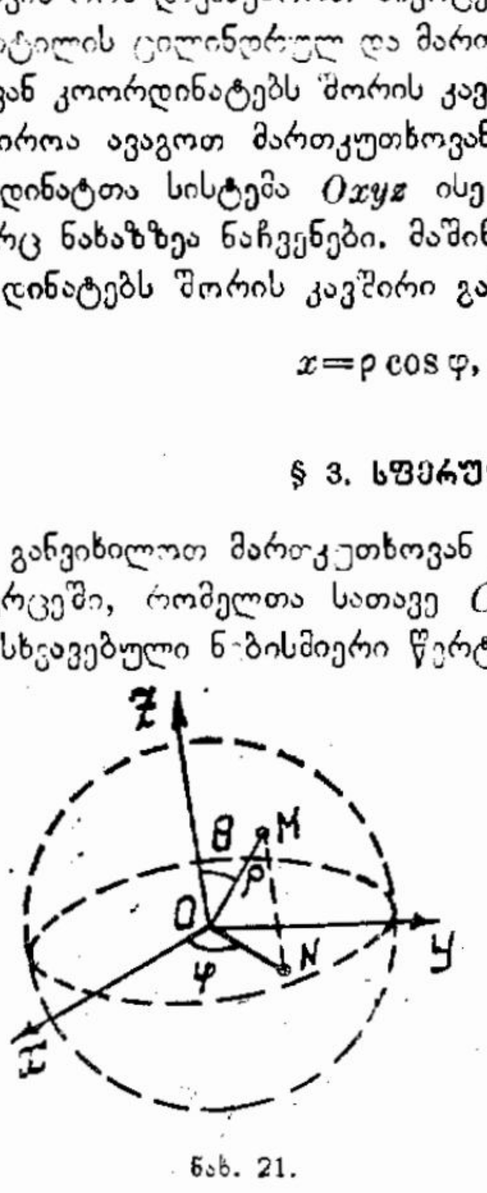


ნახ. 20.

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \quad z=z.$$

§ 3. სფერული კოორდინატები

განვიხილოთ მართკუთხოვან კოორდინატთა Ox, Oy და Oz ღერძები სივრცეში, რომელთა სათავე O წერტილია. ვთქვათ M არის O-საგან განსხვავებული ნებისმიერი წერტილი სივრცეში, რომლის გეგმილი Oxy სიბრტყეზე არის N (ნახ. 21), აღვნიშნოთ: $|OM|=\rho$, θ იყოს კუთხე, რომელსაც $\overline{OM}$ შეადგენს Oz ღერძთან, ხოლო φ — კუთხე, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ Ox ღერძი საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, რომ იგი დაემთხვეს $\overline{ON}$-ს.



ნახ. 21.

θ და φ-ს შესაბამისად ეწოდება განედი და სიგრძედი, ხოლო რიცხვთა სამეულს ρ, φ და θ-ს — M წერტილის სფერული კოორდინატები, ან კიდევ პოლარული კოორდინატები სივრცეში, (იმ შემთხვევაში, როცა M წერტილი ემთხვევა O სათავეს, მაშინ $\rho=0$,

ხოლო φ და θ განუსაზღვრელი სიდიდეებია). იმისათვის, რომ სივრცეში წერტილი ცალსახად განსაზღვრავდეს φ და θ-ს, მოვითხოვოთ, რომ

$$0\leqslant\rho<\infty,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ, რომ

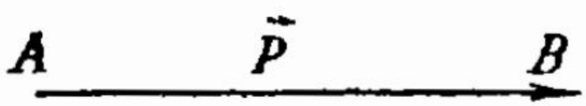
$$0\leqslant\rho<\infty,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

ახლა, თუ დეკარტის მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემას ავირჩევთ ისე როგორც (21) ნახაზზეა ნაჩვენები, მაშინ M წერტილის მართკუთხოვან x, y, z კოორდინატებსა და მის სფერულ ρ, φ, θ კოორდინატებს შორის მივიღებთ დამოკიდებულებას:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta. \tag{1}$$

§ 4. სკალარული და ვექტორული სიდიდეები

არჩევენ ორი სახის სიდიდეს: სკალარულსა და ვექტორულს. სკალარული სიდიდე, ანუ სკალარი ისეთ სიდიდეს ეწოდება, რომელიც ხასიათდება მხოლოდ ნამდვილი რიცხვითი მნიშვნელობით, ასე მაგალითად, მასა, მოცულობა, ფართობი, ტემპერატურა და სხვა, ვექტორული სიდიდეები ხასიათდება არა მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობებით, არამედ გარკვეული მიმართულებითაც, როგორიცაა, მაგალითად, სიჩქარე, აჩქარება, ძალა და სხვა. ვექტორულ სიდიდეს აღნიშნავენ *ვექტორით*, *რომელიც*, *როგორც ვიცით*, *წარმოადგენს მიმართულებიან მონაკვეთს* (ნახ. 22).



ნახ. 22.

მიმართულება ვექტორზე აღინიშნება ისრით და ჩაიწერება ასე $\vec{P}$ ან $\overrightarrow{AB}$. A — ვექტორის საწყისი წერტილია (ანუ სათავე), ხოლო B მისი ბოლო წერტილია. ვექტორის სიგრძეს ეწოდება ვექტორის *მოდული* (ანუ მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა) და აღინიშნება ასე: $|\vec{P}|$ ან $|\overrightarrow{AB}|$, ცხადია, რომ იგი $\geqslant 0$. ვექტორს, რომლის სიგრძე ნულია, ეწოდება *ნულვექტორი*. ამ შემთხვევაში მისი მიმართულება განუსაზღვრელია.

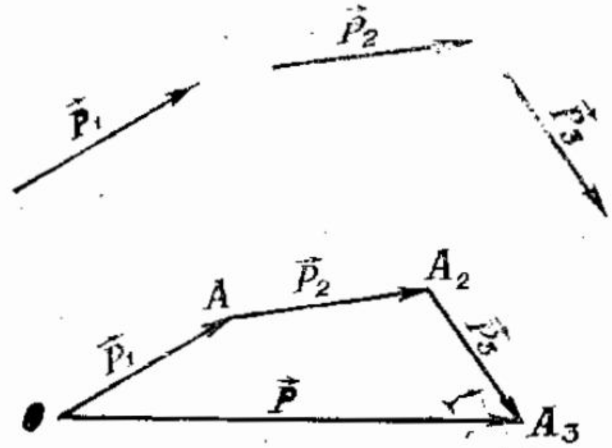
ვექტორებს ეწოდება *კოლინეარული*, თუ ისინი ძევს ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფეებზე. ორ ვექტორს ეწოდება *ტოლი* თუ ისინი კოლინეარულია და აქვთ ერთნაირი სიგრძე და მიმართულება (ყველა ნულოვანი ვექტორი ერთმანეთის ტოლია). ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ვექტორი შეიძლება უცვლელად გადავიტანოთ ნებისმიერ წერტილში თავისთავის პარალელურად, ამიტომ სივრცეში მოცე-

მულ ვექტორებს შეგვიძლია თავი მოვუყაროთ ერთ საერთო სათავეში (ე. ი. მათი სათავეები დავამთხვიოთ ერთ და იმავე O წერტილში). ამ თვისებით ჩვენ ვისარგებლებთ.

დაბოლოს: ვექტორს, რომლის სიგრძე უდრის 1-ს, ეწოდება ე რ თ ე უ ლ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი და აღინიშნება $\vec{e}$-თი ($|\vec{e}|=1$).

§ 5. ვექტორთა შეკრება

განვიხილოთ სივრცეში რამდენიმე ვექტორი. სიმარტივისათვის ავიღოთ სამი ვექტორი: $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$. ამ ვექტორების ჯ ა მ ი ეწოდება ისეთ $\vec{P}$ ვექტორს, რომელსაც ავაგებთ შემდეგნაირად: სივრცეში ვიღებთ ნებისმიერ O წერტილს და ავაგებთ $\overrightarrow{OA_1}$ ვექტორს, რომელიც $\vec{P}_1$ ვექტორის ტოლია; OA_1 ვექტორის ბოლოდან, ე, ი, A_1 წერტილიდან გავატარებთ $\overrightarrow{A_1A_2}$ ვექტორს, რომელიც $\vec{P}_2$ ვექტორის ტოლია, და ბოლოს A_2 წერტილიდან გავატარებთ $\vec{P}_3$ ვექტორის ტოლ $\overrightarrow{A_2A_3}$ ვექტორს. აღნიშნული აგების შედეგად მივიღებთ $OA_1A_2A_3$ ფიგურას[1] (ნახ. 23). ამ ფიგურის ჩამკეტ $\overrightarrow{OA_3}=\vec{P}$ ვექტორს (რომელიც იქნება ნული ვექტორი, როცა A_3 ემთხვევა O წერტილს), რომელიც მიმართულია პირველი ვექტორის სათავიდან უკანასკნელი ვექტორის ბოლოსაკენ, მოცემული ვექტორების ჯამი ეწოდება და წერენ:



ნახ. 23.

$$\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}, \quad \text{ანუ} \quad \vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3.$$

კერძოდ, ორი ვექტორის შემთხვევაში, თუ ამ ვექტორებს დავიყვანთ საერთო სათავეზე და შემდეგ მათზე ავაგებთ პარალელოგრამს, როგორც ეს პირველი ტოლობიდან გამოდის, საერთო სათავიდან გავლებული დიაგონალი წარმოადგენს აღებულ ვექტორთა ჯამს (დიაგონალის წესი) (ნახ. 24).

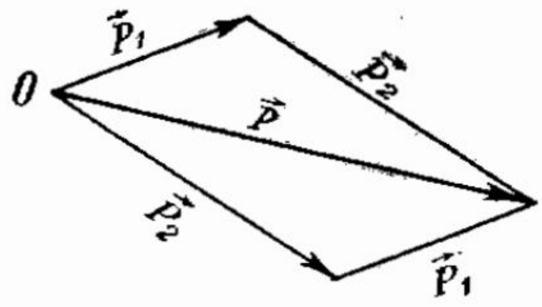
თავისთავად ცხადია, რომ

$$|\vec{P}| \leqslant |\vec{P}_1|+|\vec{P}_2|+|\vec{P}_3|.$$

---

[1] შევნიშნოთ, რომ ეს ფიგურა შეიძლება არ იყოს მოთავსებული ერთ სიბრტყეში (ანუ არ იყოს ბრტყელი მრავალკუთხედი) და შეიძლება აღმოჩნდეს შეკრული.

როგორც ვთქვით, იმ შემთხვევაში, როცა რამდენიმე ვექტორზე აგებული მრავალკუთხედი თვით შეიკვრება, მაშინ ამ ვექტორთა ჯამი ნულის ტოლია.



ნახ. 24.

რიცხვების შეკრების მსგავსად, ვექტორთა ჯამს აქვს შემდეგი ძირითადი თვისებები:

ა) ჯამი არ არის დამოკიდებული შესაკრებთა რიგისაგან, ე. ი.

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=\vec{P}_2+\vec{P}_1.$$

ბ) რამდენიმე ვექტორის ჯამი არ შეიცვლება შესაკრებთა დაჯგუფებით, ე. ი.

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3+\vec{P}_4=(\vec{P}_1+\vec{P}_2)+(\vec{P}_3+\vec{P}_4)=(\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3)+\vec{P}_4.$$

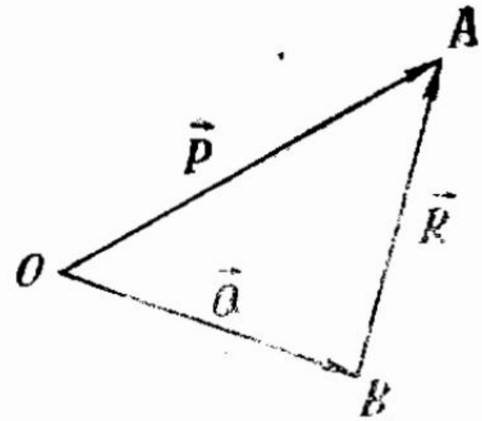
ამ თვისების დამტკიცება ძნელი არ არის.

§ 6. ორი ვექტორის სხვაობა

ორი ვექტორის $\vec{P}$ და $\vec{Q}$-ს სხვაობა ეწოდება ისეთ $\vec{R}$ ვექტორს, რომელიც $\vec{Q}$ ვექტორთან შეკრებით გვაძლევს $\vec{P}$-ს. ე. ი.

$$\vec{P}-\vec{Q}=\vec{R}, \quad \text{როცა} \quad \vec{Q}+\vec{R}=\vec{P}.$$

თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებს თავს მოვუყრით ერთსა და იმავე O სათავეში და მაკლები $\vec{Q}$ ვექტორის ბოლო B წერტილს შევაერთებთ საკლები $\vec{P}$ ვექტორის ბოლო A წერტილთან, მაშინ ცხადია, რომ $\vec{Q}+\overrightarrow{BA}=\vec{P}$, ამიტომ $\overrightarrow{BA}=\vec{R}$, ანუ $\vec{P}-\vec{Q}=\vec{R}$. (ნახ. 25).



ნახ. 25.

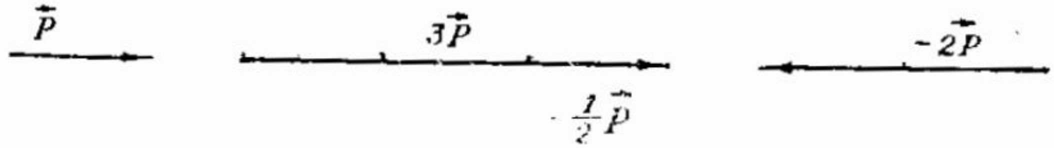
ვინაიდან ყოველ სამკუთხედში ერთი გვერდი მეტია დანარჩენი ორი გვერდის სხვაობაზე, ამიტომ

$$|\vec{P}-\vec{Q}|\geqslant|\vec{P}|-|\vec{Q}|;$$

ამრიგად, ორი ვექტორის სხვაობის მოდული მეტი ან ტოლია ამ ვექტორების მოდულთა სხვაობისა.

§ 7. ვექტორის ნამრავლი სკალარზე

ვთქვათ, გვაქვს რაიმე $\vec{P}$ ვექტორი და ნამდვილი რიცხვი k, მაშინ მათი ნამრავლი $k\vec{P}$ ეწოდება ისეთ ვექტორს, რომელიც $\vec{P}$ ვექტორის კოლინეარულია, რომლის სიგრძე უდრის $|k|\,|\vec{P}|$ და რომელსაც ექნება $\vec{P}$ ვექტორის მიმართულება, როცა $k>0$, ხოლო $\vec{P}$ ვექტორის მოპირდაპირე მიმართულება, როცა $k<0$.



ნახ. 26.

გეომეტრიულად, $k\vec{P}$ ვექტორი k-ჯერ წაგრძელებულია $\vec{P}$ ვექტორთან შედარებით, თუ $k>1$, პირიქით k-ჯერ შემოკლებულია, თუ $0<k<1$. მაგალითად, 26-ე ნახაზზე აგებულია $3\vec{P}$, $-2\vec{P}$, $\frac{1}{2}\vec{P}$ ვექტორები.

ადვილად მტკიცდება შემდეგი ტოლობაც

$$k(\vec{P}+\vec{Q})=k\vec{P}+k\vec{Q}.$$

§ 8. ვექტორთა კოლინეარობა და კომპლანარობა წრფივად დამოკიდებული და დამოუკიდებელი ვექტორები

როგორც ვთქვით, ერთსა და იმავე წრფის პარალელურ ვექტორებს კოლინეარული ვექტორები ეწოდება, ხოლო ერთსა და იმავე სიბრტყის პარალელურ ვექტორებს კი — კომპლანარული. კოლინეარული ვექტორები იმავე დროს კომპლანარულიც იქნება, მაგრამ პირიქით შეიძლება არ იყოს.

განმარტება. $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია ეწოდება ამ ვექტორების ნებისმიერ ნამდვილ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ რიცხვებზე ნამრავლთა ჯამს, ანუ გამოსახულებას:

$$\lambda_1 \vec{P}_1+\lambda_2 \vec{P}_2+\cdots+\lambda_n \vec{P}_n.$$

განმარტება. $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ ვექტორებს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი ნამდვილი $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ რიცხვები, რომელთა შორის ერთი მაინც არ უდრის ნულს და ამ ვექტორების წრფივი კომბინაცია ტოლია ნულის, ე. ი.

$$\lambda_1 \vec{P}_1+\lambda_2 \vec{P}_2+\ldots+\lambda_n \vec{P}_n=0.$$

თუ $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებული არ არის, მაშინ ამ ვექტორებს წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება. წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები შეიძლება ასედაც განვმარტოთ: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ ვექტორებს ეწოდება **წრფივად დამოუკიდებელი**, თუ მათი წრფივი კომბინაცია ნულს უდრის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყველა $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ნულებია.

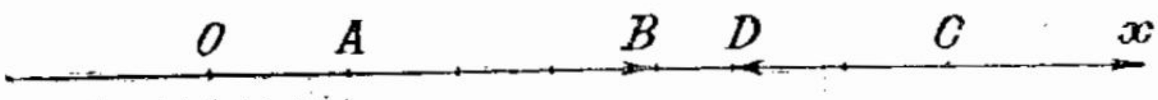
ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 1. *ორი ვექტორის წრფივად დამოკიდებულებისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს ვექტორები იყოს კოლინეარული.* აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ *ვექტორები არაკოლინეარულია, მაშინ ისინი წრფივად დამოუკიდებელია.*

თეორემა 2. *სამი ვექტორის წრფივად დამოკიდებულებისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს ვექტორები იყოს კომპლანარული.* აქედან გვექნება, რომ თუ ვექტორები $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$ არაკომპლანარულია,, მაშინ ისინი *წრფივად დამოუკიდებელია.*

§ 9. ვექტორის გეგმილი ღერძზე

განვიხილოთ Ox ღერძი და მასზე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი. ისეთ X რიცხვს, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობა უდრის $|\overrightarrow{AB}|$-ს და, ამასთანავე, $X>0$, თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორს და Ox ღერძს აქვს ერთი და იგივე მიმართულება, ხოლო $X<0$, როცა $\overrightarrow{AB}$ ვექტორს აქვს Ox ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულება, ეწოდება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიდიდე Ox ღერძზე.



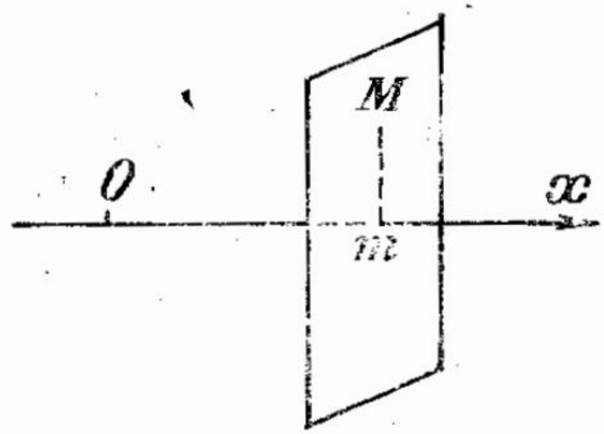
ნახ. 27.

მაგ., $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიდიდე Ox ღერძზე უდრის 3, ხოლო $\overrightarrow{CD}$ ვექტორის სიდიდე -2-ს (ნახ. 27).

ახლა ავიღოთ სივრცეში Ox ღერძი და ნებისმიერი M წერტილი. გავატაროთ M წერტილზე სიბრტყე Ox ღერძის მართობულად (ნახ. 28).

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სიბრტყისა და Ox ღერძის გადაკვეთის m წერტილს ეწოდება M წერტილის *გეგმილი* Ox ღერძზე, ხოლო m წერტილის კოორდინატს ეწოდება M წერტილის კოორდინატი ამავე ღერძზე.

ახლა ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია ნებისმიერი $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი; განვიხილოთ Ox ღერძზე $\overrightarrow{ab}$ ვექტორი, რომლის სათავეა მოცემული ვექტორის სათავის გეგმილი ამავე ღერძზე, ბოლო კი ვექტორის ბოლო წერტილის გეგმილი (ნახ. 29). მაშინ $\overrightarrow{ab}$ ვექტორის სიდიდეს Ox ღერძზე ეწოდება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი ამავე ღერძზე, რომელიც აღინიშნება X-ით და ჩაიწერება შემდეგნაირად



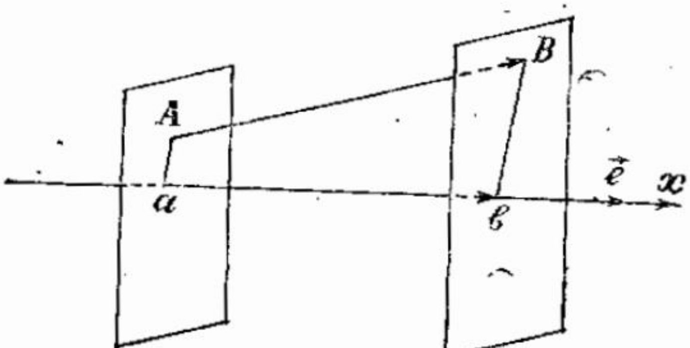
ნახ. 28.

$$X = \text{გეგ}_{ox}\,\overrightarrow{AB}.$$

ცხადია, რომ ორი თანატოლი ვექტორის გეგმილი ღერძზე ერთმანეთის ტოლია.

დავამტკიცოთ ასეთი

თეორემა 1. ვექტორის გეგმილი რომელიმე ღერძზე უდრის მისი მოდულისა და იმ კუთხის კოსინუსის ნამრავლს, რომელსაც აღებული ვექტორი შეადგენს მოცემულ ღერძთან.



ნახ. 29.

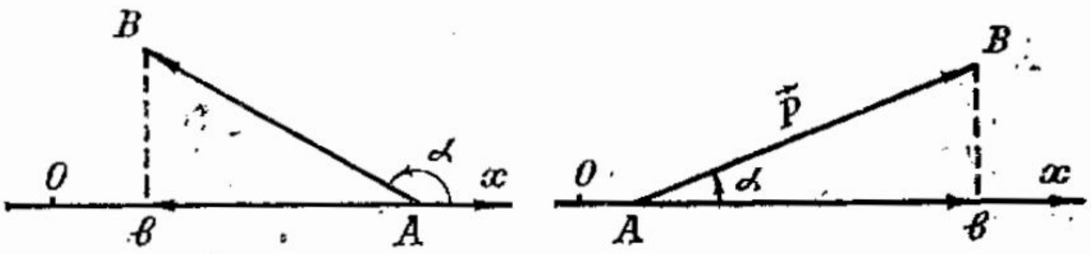
დამტკიცება. ვინაიდან ტოლი ვექტორების გეგმილები მოცემულ ღერძზე თანატოლია, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\vec{P}$ ვექტორის სათავე მდებარეობს Ox ღერძზე, რომელიმე A წერტილში. მაშინ $\vec{P}=\overrightarrow{AB}$ ვექტორი და Ox ღერძი ძევს ერთ სიბრტყეში. ვთქვათ, $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი დახრილია Ox ღერძთან α კუთხით (ნახ. 30).

განმარტების ძალით $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი Ox ღერძზე იქნება $\overrightarrow{Ab}$ ვექტორის სიდიდე ამავე ღერძზე, რომელიც დადებითი ან უარყოფითი რიცხვია იმისდა მიხედვით, $\overrightarrow{Ab}$ ვექტორს ექნება Ox ღერძისა, თუ მისი საწინააღმდეგო მიმართულება. ხოლო ვექტორის გეგმილი ღერძზე წარმოადგენს წერტილს, თუ ვექტორი მართობია ამ ღერძისა. ნახაზის თანახმად გვექნება

$$\text{გეგ}_{ox}\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\alpha. \qquad (1)$$

ამ ფორმულიდანაც თავისთავად ცხადია, როცა $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი Ox ღერძთან შეადგენს მახვილ კუთხეს $\left(\text{ე. ი. } \alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, მაშინ $\cos\alpha>0$ და ვინაიდან $|\overrightarrow{AB}|>0$, ამიტომ $\text{გეგ}_{Ox}\,\overrightarrow{AB}>0$. იმ შემთხვევაში, როცა $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი Ox ღერძთან შეადგენს ბლაგვ კუთხეს $\left(\text{ე. ი. } \alpha>\frac{\pi}{2}\right)$. მაშინ $\cos\alpha<0$ და (1) ფორმულის თანახმად გვექნება $\text{გეგ}_{Ox}\,\overrightarrow{AB}<0$ კერძოდ, როცა $\overrightarrow{AB}\perp Ox$ $\left(\text{ე. ი. } \alpha=\frac{\pi}{2}\right)$, მაშინ $\cos\alpha=0$ და ამ შემთხვევაში მივიღებთ

$$\text{გეგ}_{Ox}\,\overrightarrow{AB}=0.$$



ნახ. 30.

თეორემა 2. ვექტორთა ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ჯამის ტოლია.

თეორემის მართებულობა ვაჩვენოთ იმ შემთხვევაში, როცა მოცემული გვაქვს ორი ვექტორი, ხოლო დებულება მართებული იქნება შესაკრებ ვექტორთა ნებისმიერი რიცხვისათვის.

ვთქვათ, გვაქვს ორი ვექტორი $\vec{P}=\overrightarrow{AB}$ და $\vec{Q}=\overrightarrow{BC}$. დავუშვათ, რომ Ox რაიმე ღერძია, ვაჩვენოთ, რომ

$$\text{გეგ}_{Ox}(\vec{P}+\vec{Q})=\text{გეგ}_{Ox}\,\vec{P}+\text{გეგ}_{Ox}\,\vec{Q}.$$

ვექტორთა შეკრების წესის თანახმად:

$$\vec{P}+\vec{Q}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

დავაგეგმილოთ A, B და C წერტილები Ox ღერძზე. მივიღებთ a, b და c წერტილებს (ნახ. 31), აქედან შალის თეორემის თანახმად გვექნება (თ. IV, § 2)

$$ac=ab+bc,$$

მაგრამ

$$ac=\text{გეგ}_{Ox}\,\overrightarrow{AC},\quad ab=\text{გეგ}_{Ox}\,\overrightarrow{AB}$$

და

$$bc=\text{გეგ}_{Ox}\,\overrightarrow{BC},$$

მაშინ გვექნება

$$\text{გეგ}_{Ox}\overrightarrow{AC}=\text{გეგ}_{Ox}\overrightarrow{AB}+\text{გეგ}_{Ox}\overrightarrow{BC},$$

ანუ

$$\text{გეგ}_{Ox}(\vec{P}+\vec{Q})=\text{გეგ}_{Ox}\vec{P}+\text{გეგ}_{Ox}\vec{Q}.$$

მართებულია აგრეთვე შემდეგი:

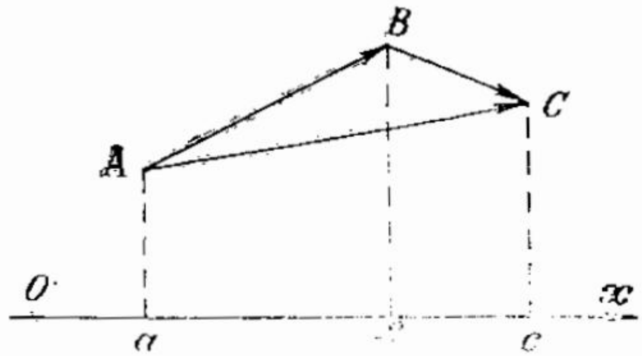
თეორემა 8. *რიცხვზე ვექტორის ნამრავლის გეგმილი უდრის ვექტორის გეგმილის ამავე რიცხვზე ნამრავლს*

$$\text{გეგ}_{Ox}k\vec{P}=k\,\text{გეგ}_{Ox}\vec{P}.$$

მართლაც, ვთქვათ $\vec{P}=\overrightarrow{AB}$ მოცემული ვექტორია და $k\neq 0$ რაიმე რიცხვია. ავიღოთ Ox ღერძზე რაიმე A წერტილი და მოვდოთ მასზე $\vec{P}$ და $\overrightarrow{AC}=k\vec{P}$ ვექტორები (ნახ. 32). Ox ღერძზე დავაგეგმილოთ A, B და C წერტილები. მაშინ

$$ab=\text{გეგ}_{Ox}\overrightarrow{AB},$$

$$ac=\text{გეგ}_{Ox}\overrightarrow{AC}.$$

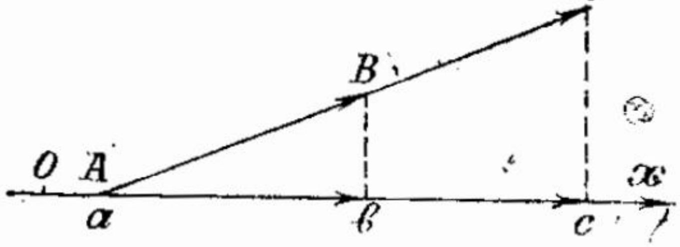


ნახ. 31.

ვინაიდან $\overrightarrow{ab}$ და $\overrightarrow{ac}$ კოლინეარული ვექტორებია, ამიტომ მოიძებნება ისეთი k_1 რიცხვი. რომ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\overrightarrow{ac}=k_1\overrightarrow{ab}.$$

შევადაროთ ერთმანეთს k და k_1. როგორც ცნობილია, წერტილთა რიგი პარალელური დაგეგმილებით არ იცვლება. ამიტომ, თუ B მოთავსებულია A და C შორის, მაშინ b წერტილიც a და c შორის იქნება, ამის გამო k და k_1 ერთი და იმავე ნიშნისაა. აგრეთვე, რადგანაც პარალელურ წრფეთა შორის მონაკვეთები პროპორციულია, ამიტომ $|k|=|k_1|$. ე. ი. გვექნება აგრეთვე $k=k_1$. ამგვარად, თუ $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$, მაშინ $\overrightarrow{ac}=k\overrightarrow{ab}$ და, მაშასადამე, $ac=kab$. ამით დებულება დამტკიცებულია.



ნახ. 32.

ისეთ ერთეულ $\vec{e}$ ვექტორს (ე. ი. $|\vec{e}|=1$), რომელიც Ox ღერძის კო-

ლინეარულია და მისი მიმართულება აქვს, ამ ღერძის მგეზავი ანუ **ორტი** ეწოდება (ნახ. 29).

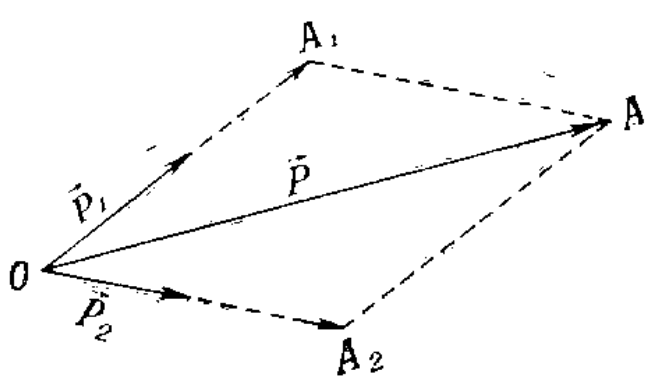
ახლა თუ ვისარგებლებთ სკალარის ვექტორზე ნამრავლის განსაზღვრით, მაშინ ადვილად მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\overrightarrow{AB}=X\vec{e},$$

სადაც $X=$ გეგმ$_x\overrightarrow{AB}$.

§ 10. ვექტორის დაშლა მოცემული მიმართულებით

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია $\vec{P}$ ვექტორი და აგრეთვე ორი წრფივად დამოუკიდებელი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორები. $\vec{P}$ ვექტორის დაშლა $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების მიმართულებით ეწოდება ისეთი ორი ვექტორის მოძებნას, რომლებიც $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების კოლინეარულია შესაბამისად და რომელთა ჯამი $\vec{P}$-ს ტოლია.



ნახ. 33.

$\vec{P}$, $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორები მოვდოთ O წერტილზე (ნახ. 33).

$\vec{P}$ ვექტორის A ბოლოდან გავავლოთ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორთა პარალელური წრფეები, მივიღებთ OA_1AA_2 პარალელოგრამს. ცხადია

$$\vec{P}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2},$$

როგორც ვიცით, მოიძებნება ისეთი k_1 და k_2 რიცხვები, რომ ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობებს:

$$\overrightarrow{OA_1}=k_1\vec{P}_1\quad \overrightarrow{OA_2}=k_2\vec{P}_2.$$

მაშასადამე,

$$\vec{P}=k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2.$$

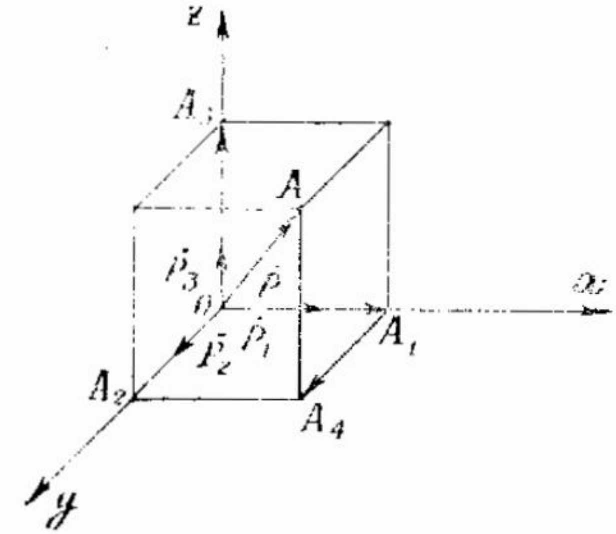
$k_1\vec{P}_1$ და $k_2\vec{P}_2$ ვექტორებს ეწოდება $\vec{P}$ ვექტორის მდგენელები $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების მიმართულებით.

ამგვარად, $\vec{P}$ ვექტორი სიბრტყეზე დაშლილია ორ მდგენელად.

ახლა დავუშვათ, რომ სივრცეში მოცემულია სამი წრფივად დამოუკიდებელი $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$ ვექტორი. რადგანაც ეს ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ ისინი არაკომპლანარულნი იქნებიან. ავიღოთ

სივრცეში რომელიმე $\vec{P}$ ვექტორი და დანარჩენ ვექტორებთან ერთად მოვდოთ რომელიმე O წერტილზე (ნახ. 34).

ცხადია, $\vec{P}_1$ $\vec{P}_2$; $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ და $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ ვექტორთა წყვილები ცალ-ცალკე სიბრტყეებს განსაზღვრავენ. $\vec{P}$ ვექტორის ბოლოზე გავავლოთ ამ სიბრტყეთა პარალელური სიბრტყეები. ისინი $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ ვექტორების ფუძეებზე მოგვცემენ A_1, A_2, A_3 წერტილებს შესაბამისად.



ნახ. 34.

ცხადია, რომ

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_4A}=\overrightarrow{OA},$$

ანუ

$$\vec{P}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}.$$

როგორც ვიცით, მოიძებნება ისეთი k_1, k_2, k_3 რიცხვები, რომელთათვისაც შესრულდება ტოლობები:

$$\overrightarrow{OA_1}=k_1\vec{P}_1,\ \ \overrightarrow{OA_2}=k_2\vec{P}_2,\ \ \overrightarrow{OA_3}=k_3\vec{P}_3,$$

მაშასადამე,

$$\vec{P}=k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2+k_3\vec{P}_3.$$

$k_1\vec{P}_1$, $k_2\vec{P}_2$, $k_3\vec{P}_3$ ვექტორებს ეწოდება $\vec{P}$ ვექტორის მდგენელები $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ ვექტორების მიხედვით.

ამგვარად, მოცემული $\vec{P}$ ვექტორი სივრცეში დავშალეთ სამ მდგენელად.

§ 11. ვექტორის დაშლა კოორდინატთა ღერძების მიმართულებით

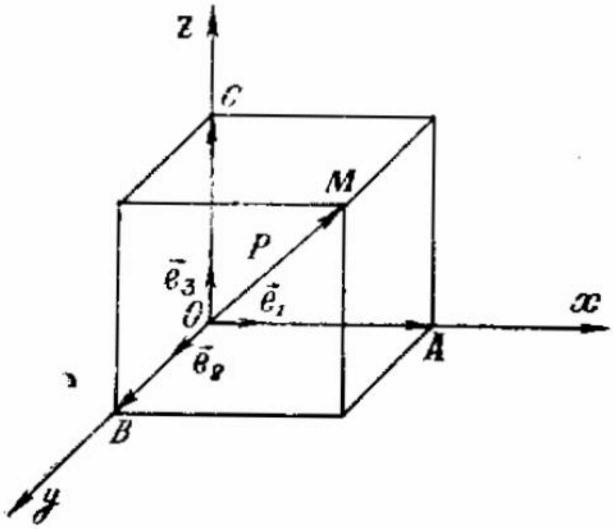
განვიხილოთ კოორდინატთა მართკუთხა სისტემა სივრცეში. Ox, Oy და Oz ღერძების ორტები შესაბამისად აღვნიშნოთ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ და $\vec{e}_3$-ით. ცხადია, რომ სამი ურთიერთმართობული ორტი განსაზღვრავს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სივრცეში. ავიღოთ სივრცეში $\vec{P}$ ვექტორი და მისი საწყისი წერტილი გადავიტანოთ კოორდინატთა O სათავეში.

ზემოაღნიშნულის მიხედვით წარმოვადგინოთ $\vec{P}$ ვექტორი სამი ვექტორის ჯამად კოორდინატთა ღერძების მიმართულებით (ნახ. 35), გვექნება

$$\vec{P}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}, \tag{1}$$

სადაც $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ვექტორები წარმოადგენენ $\vec{P}$ ვექტორის მდგენელებს კოორდინატთა ღერძებზე.

აღვნიშნოთ $\overrightarrow{OA}$ ვექტორის ალგებრული სიდიდე Ox ღერძზე X-ით, $\overrightarrow{OB}$ ვექტორის ალგებრული სიდიდე Oy ღერძზე Y-ით და $\overrightarrow{OC}$ ვექტორის ალგებრული სიდიდე Oz ღერძზე Z-ით. მაშინ ცხადია, რომ X, Y, Z წარმოადგენს P ვექტორის გეგმილებს სათანადო ღერძებზე.



ნახ. 35.

მეორე მხრივ, როგორც ვიცით, გვექნება

$$\overrightarrow{OA}=X\vec{e}_1,\ \overrightarrow{OB}=Y\vec{e}_2,$$

$$\overrightarrow{OC}=Z\vec{e}_3. \qquad (2)$$

ამიტომ მივიღებთ

$$\vec{P}=X\vec{e}_1+Y\vec{e}_2+Z\vec{e}_3. \qquad (3)$$

X, Y და Z რიცხვებს უწოდებენ $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებს Ox, Oy და Oz ღერძებზე.

$\vec{P}$ ვექტორი X, Y და Z კოორდინატებით აღინიშნება შემდეგნაირად: $\vec{P}(X, Y, Z)$. კერძოდ, თუ სივრცეში მოცემულია M წერტილი, რომლის კოორდინატებია x, y და z, მაშინ $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორის კოორდინატებიც იქნება იგივე x, y და z რიცხვები, ამიტომ უკანასკნელი ფორმულის თანახმად $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ რადიუს-ვექტორისათვის გვექნება

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3. \qquad (4)$$

პითაგორას თეორემის თანახმად 35-ე ნახაზიდან მივიღებთ

$$|\vec{P}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2. \qquad (5)$$

მეორე მხრივ (2)-დან გვექნება

$$|\overrightarrow{OA}|^2=X^2,\ |\overrightarrow{OB}|^2=Y^2,\ |\overrightarrow{OC}|^2=Z^2,$$

ამიტომაც (5)-ს ძალით

$$|\vec{P}|^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

საიდანაც

$$|\vec{P}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \qquad (6)$$

ე. ი. *ვექტორის სიგრძე უდრის კვადრატულ ფესვს მისი გეგმილების კვადრატების ჯამიდან.*

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: კუთხეები, რომლებსაც $\vec{P}$ ვექტორი შეადგენს კოორდინატთა Ox, Oy და Oz ღერძებთან, შესაბამისად აღვ-

ნიშნოთ α, β და γ-თი. მაშინ, ვინაიდან X არის $\vec{P}$ ვექტორის გეგმილი Ox ღერძზე, ამიტომ გვექნება (§ 7, ფორმულა (1)).

$$X = |\vec{P}| \cos \alpha.$$

ანალოგიურად მივიღებთ დანარჩენი გეგმილებისათვის

$$Y = |\vec{P}| \cos \beta. \quad Z = |\vec{P}| \cos \gamma.$$

ამ ფორმულებიდან (6) ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$\cos \alpha = \frac{X}{|\vec{P}|} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos \beta = \frac{Y}{|\vec{P}|} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \tag{7}$$
$$\cos \gamma = \frac{Z}{|\vec{P}|} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

ცხადია, რომ α, β და γ კუთხეები განსაზღვრავენ $\vec{P}$ ვექტორის მიმართულებას სივრცეში, ამიტომ $\cos \alpha$, $\cos \beta$ და $\cos \gamma$-ს ეწოდება ვექტორის მიმართულების კოსინუსები; (7) ფორმულებს კი ვექტორის მიმართულების კოსინუსების ფორმულები. (7) ფორმულებიდან, ორივე ნაწილს თუ კვადრატში ავიყვანთ და შევკრებთ, მივიღებთ

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1.$$

ამრიგად, ნებისმიერი ვექტორის მიმართულების კოსინუსების კვადრატების ჯამი უდრის ერთს.

§ 12. მოქმედებანი ვექტორებზე მართკუთხა კოორდინატებში

ვექტორთა ჯამის კოორდინატები ტოლია შესაკრები ვექტორების სათანადო კოორდინატების ჯამისა.

სიმართლისათვის, ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორი: $\vec{P}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{P}_2(X_2\, Y_2\, Z_2)$ ვიპოვოთ მათი ჯამ-ვექტორი $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$. ვთქვათ, $\vec{P}$-ს კოორდინატებია X, Y, Z.

ამ ვექტორებისათვის გვექნება:

$$\vec{P}_1 = X_1 \vec{e}_1 + Y_1 \vec{e}_2 + Z_1 \vec{e}_3,$$
$$\vec{P}_2 = X_2 \vec{e}_1 + Y_2 \vec{e}_2 + Z_2 \vec{e}_3,$$
$$\vec{P} = X \vec{e}_1 + Y \vec{e}_2 + Z \vec{e}_3.$$

მაშასადამე,

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=(X_1+X_2)\vec{e}_1+(Y_1+Y_2)\vec{e}_2+(Z_1+Z_2)\vec{e}_3.$$

მაგრამ

$$\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2$$

და, რადგანაც $\vec{P}$ ვექტორის დაშლა ორტების მიხედვით ერთადერთია, ამიტომ

$$X\vec{e}_1+Y\vec{e}_2+Z\vec{e}_3=(X_1+X_2)\vec{e}_1+(Y_1+Y_2)\vec{e}_2+(Z_1+Z_2)\vec{e}_3.$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$X=X_1+X_2,\quad Y=Y_1+Y_2,\quad Z=Z_1+Z_2.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ ვ ე ქ ტ ო რ თ ა ს ხ ვ ა ო ბ ი ს ყოველი კოორდინატი უდრის საკლებისა და მაკლების შესაბამის კოორდინატთა სხვაობას:

$$X=X_1-X_2,\quad Y=Y_1-Y_2,\quad Z=Z_1-Z_2.$$

ვ ე ქ ტ ო რ ი ს რ ი ც ხ ვ ზ ე ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ტ ო ლ ი ა ა მ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ს ა თ ა ნ ა დ ო კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს ი მ ა ვ ე რ ი ც ხ ვ ზ ე ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს ა.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია $\vec{P}(X, Y, Z)$ ვექტორი და რაიმე $\lambda\neq 0$ რიცხვი. ვაჩვენოთ, რომ $\lambda\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებია λX, λY, λZ. $\lambda\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები იყოს X_1, Y_1, Z_1; მაშინ $\lambda\vec{P}=X_1\vec{e}_1+ +Y_1\vec{e}_2+Z_1\vec{e}_3$, ხოლო $\vec{P}=X\vec{e}_1+Y\vec{e}_2+Z\vec{e}_3$.

თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს გადავამრავლებთ λ-ზე, მაშინ მივიღებთ

$$\lambda\vec{P}=(\lambda X)\vec{e}_1+(\lambda Y)\vec{e}_2+(\lambda Z)\vec{e}_3,$$

მაშასადამე,

$$X_1\vec{e}_1+Y_1\vec{e}_2+Z_1\vec{e}_3=(\lambda X)\vec{e}_1+(\lambda Y)\vec{e}_2+(\lambda Z)\vec{e}_3$$

და, რადგანაც ვექტორის დაშლა მგეზავების მიხედვით ერთადერთია, ამიტომ გვექნება

$$X_1=\lambda X,\quad Y_1=\lambda Y,\quad Z_1=\lambda Z.$$

§ 13. ვექტორის განსაზღვრა მისი საწყისი და ბოლო წერტილების კოორდინატების საშუალებით

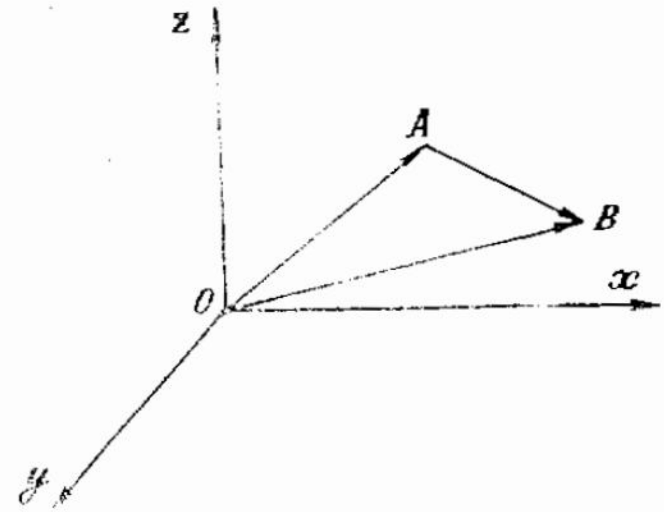
ავიღოთ სივრცეში $\vec{P}=\overrightarrow{AB}$ ვექტორი. ვთქვათ მოცემულია მისი საწყისი და ბოლო წერტილის კოორდინატები: $A(x_1, y_1, z_1)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$. მაშინ ვაჩვენოთ, თუ როგორ განისაზღვრება თვით $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კო-

ორდინატები A და B წერტილის კოორდინატების საშუალებით. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები აღვნიშნოთ X, Y და Z-ით. O სათავიდან გავატაროთ $\overrightarrow{OA}$ და $\overrightarrow{OB}$ ვექტორები (ნახ. 36). მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ტოლობა:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},$$

საიდანაც Ox ღერძზე დაგეგმილებით მივიღებთ

$$\text{გეგ}_{0x}\,\overrightarrow{OA}+\text{გეგ}_{0x}\,\overrightarrow{AB}=\text{გეგ}_{0x}\,\overrightarrow{OB},$$



ნახ. 36.

ანუ

$$x_1+X=x_2.$$

აქედან გვექნება

$$X=x_2-x_1;$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$Y=y_2-y_1, \quad Z=z_2-z_1.$$

§ 14. მანძილი ორ წერტილს შორის სივრცეში

ახლა ვთქვათ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ სივრცეში მოცემულია $A(x_1, y_1, z_1)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$ ორი წერტილი. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ მათ შორის მანძილი, რომელიც აღვნიშნოთ d-თი.

ამისათვის განვიხილოთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი და მისი გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე შესაბამისად აღვნიშნოთ X, Y და Z-ით, მაშინ § 11 (4) ფორმულის ძალით მივიღებთ:

$$d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

მეორე მხრივ წინა პარაგრაფის თანახმად

$$X=x_2-x_1, \quad Y=y_2-y_1, \quad Z=z_2-z_1,$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულას

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

კერძოდ კოორდინატთა სათავიდან სივრცის ნებისმიერ $M(x, y, z)$ წერტილამდე მანძილისათვის გვექნება

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

§ 15. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით

ვთქვათ სივრცეში მოცემულია AB მონაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილებია $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. ვთქვათ λ რომელიმე დადებითი რიცხვია. ვიტყვით, რომ M წერტილი AB მონაკვეთს ყოფს λ ფარდობით, თუ M ეკუთვნის AB წრფეს და

$$\frac{AM}{MB}=\lambda. \tag{1}$$

ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ M წერტილის x, y, z კოორდინატები A და B წერტილების კოორდინატების საშუალებით. ამისათვის განვიხილოთ $\overrightarrow{AM}$ და $\overrightarrow{MB}$ ვექტორები. ცხადია, რომ ეს ვექტორები წარმოადგენენ კოლინეარულ და ერთნაირად მიმართულ ვექტორებს. ამიტომ (1 ტოლობის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}. \tag{2}$$

ამ გეომეტრიული ტოლობის Ox ღერძზე დაგეგმილებით მივიღებთ

$$\text{გეგ}_{0x}\,\overrightarrow{AM}=\lambda\,\text{გეგ}_{0x}\,\overrightarrow{MB}. \tag{3}$$

მეორე მხრივ

$$\text{გეგ}_{0x}\,\overrightarrow{AM}=x-x_1,\quad \text{გეგ}_{0x}\,\overrightarrow{MB}=x_2-x,$$

ამიტომ (3)-დან გვექნება

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),$$

საიდანაც

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

ანალოგიურად (2) ტოლობის Oy და Oz ღერძებზე დაგეგმილებით გვექნება

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

კერძოდ, თუ M წერტილი AB მონაკვეთს შუაზე ყოფს, მაშინ $AM=$ $=MB$ და მაშასადამე $\lambda=1$, ამიტომ წინა ფორმულებიდან მივიღებთ,

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

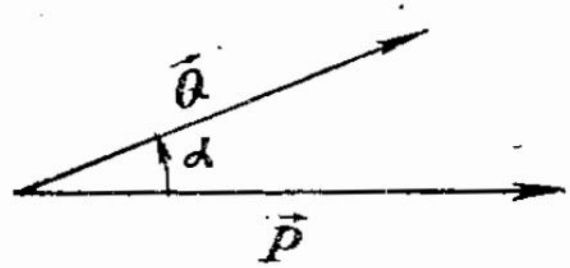
ასეთია მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატების განმსაზღვრელი ფორმულები.

§ 16. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

განმარტება. ორი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორთა სიგრძეების ნამრავლს მათ შორის მოთავსებულ α კუთხის კოსინუსზე (ნახ. 37).

სკალარული ნამრავლი აღინიშნება ასე: $(\vec{P}\cdot\vec{Q})$. მაშასადამე, განმარტების ძალით გვექნება:

$$(\vec{P}\cdot\vec{Q})=|\vec{P}|\,|\vec{Q}|\cos\alpha. \qquad (1)$$



ნახ. 37.

როგორც ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი რიცხვია. იგი დადებითია, როცა $\alpha<\frac{\pi}{2}$ და უარყოფითია, როცა $\alpha>\frac{\pi}{2}$; ხოლო, თუ $\alpha=\frac{\pi}{2}$, მაშინ $\cos\alpha=0$ და (1) ფორმულიდან მივიღებთ

$$(\vec{P}\cdot\vec{Q})=0. \qquad (2)$$

პირიქით, (2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{P}\perp\vec{Q}$.

ამრიგად, ურთიერთმართობული ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია. კერძოდ,

$$(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)=0, \quad (\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3)=0, \quad (\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3)=0, \qquad (3)$$

სადაც $\vec{e}_1$ $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ აღნიშნავენ შესაბამისად კოორდინატთა მართკუთხა Ox, Oy და Oz ღერძების მგეზავებს.

(1) ფორმულის თანახმად ადვილად დასამტკიცებელია აგრეთვე სკალარული ნამრავლის შემდეგი თვისებები:

I. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი არ იცვლება ვექტორთა გადაადგილებით:

$$(\vec{P}\cdot\vec{Q})=(\vec{Q}\cdot\vec{P}). \qquad (4)$$

II. ვექტორის თავის თავზე სკალარული ნამრავლი უდრის ამ ვექტორის სიგრძის კვადრატს

$$(\vec{P}\cdot\vec{P})=|\vec{P}|\,\,|\vec{P}|\cos 0^\circ=|\vec{P}|^2. \qquad (5)$$

კერძოდ,

$$(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)=|\vec{e}_1|^2=1, \quad (\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2)=|\vec{e}_2|^2=1, \quad (\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3)=|\vec{e}_3|^2=1. \qquad (6)$$

III. მუდმივი მამრავლი გამოდის სკალარული ნამრავლის ნიშნის გარეთ

$$(k\vec{P}\cdot\vec{Q})=k(\vec{P}\cdot\vec{Q}). \tag{7}$$

IV. შევნიშნოთ, რომ (1) ფორმულის მარჯვენა მხარეს ნამრავლი $|\vec{Q}|\cos\alpha$ წარმოადგენს $\vec{Q}$ ვექტორის გეგმილს $\vec{P}$ ვექტორზე, ამიტომ (1) ფორმულა შეიძლება კიდევ ასე წარმოვიდგინოთ

$$(\vec{P}\cdot\vec{Q})=|\vec{P}|\,\text{გეგ}_{\vec{P}}\,\vec{Q}. \tag{8}$$

ანალოგიურად

$$(\vec{P}\cdot\vec{Q})=|\vec{Q}|\,\text{გეგ}_{\vec{Q}}\,\vec{P}. \tag{9}$$

V. მართებულია ტოლობები

$$(\vec{R}\cdot(\vec{P}+\vec{Q}))=(\vec{R}\cdot\vec{P})+(\vec{R}\cdot\vec{Q}), \tag{10}$$

$$((\vec{P}_1+\vec{Q}_1)\cdot(\vec{P}_2+\vec{Q}_2))=(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)+(\vec{P}_1\cdot\vec{Q}_2)+(\vec{Q}_1\cdot\vec{P}_2)+(\vec{Q}_1\cdot\vec{Q}_2). \tag{11}$$

§ 17. სკალარული ნამრავლის გამოსახვა გეგმილების საშუალებით

განვიხილოთ სივრცეში მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა. ავიღოთ ორი ვექტორი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$, რომელთა გეგმილებია შესაბამისად X_1, Y_1, Z_1 და X_2, Y_2, Z_2. მაშინ § 9-ის (3) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$P_1=X_1\vec{e}_1+Y_1\vec{e}_2+Z_1\vec{e}_3,\quad \vec{P}_2=X_2\vec{e}_1+Y_2\vec{e}_2+Z_2\vec{e}_3, \tag{12}$$

სადაც $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ და $\vec{e}_3$ აღნიშნავენ კოორდინატთა Ox, Oy და Oz ღერძების სათანადო მგეზავებს.

თუ ვისარგებლებთ წინა პარაგრაფის (3), (6) და (10) ფორმულებით, მაშინ ადვილად მივიღებთ

$$(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2. \tag{13}$$

ე. ი. *ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის მათი ერთსახელა გეგმილების ნამრავლთა ჯამს.*

კერძოდ $\vec{P}(X, Y, Z)$ ვექტორისათვის (13) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$(\vec{P}\cdot\vec{P})=XX+YY+ZZ,$$

ანუ

$$|\vec{P}|^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

საიდანაც კვლავ მივიღებთ ცნობილ ფორმულას

$$|\vec{P}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{14}$$

ახლა განვსაზღვროთ α კუთხე $\vec{P}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{P}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორებს შორის. ამისათვის, თუ გავუტოლებთ ერთმანეთს წინა პარაგრაფების (1) და (13) ფორმულების მარჯვენა ნაწილებს, მაშინ მივიღებთ

$$|\vec{P}_1||\vec{P}_2|\cos\alpha = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2,$$

საიდანაც

$$\cos\alpha = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{|\vec{P}_1||\vec{P}_2|},$$

ხოლო (14) ფორმულის თანახმად

$$|\vec{P}_1| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \quad |\vec{P}_2| = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}.$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\cos\alpha = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \tag{15}$$

§ 19. ორი ვექტორის მართობულობის და პარალელობის პირობები

თუ ვისარგებლებთ (12) და (13) ფორმულებით, მაშინ $\vec{P}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{P}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორების ურთიერთმართობულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა მდგომარეობს შემდეგში:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \tag{16}$$

როცა მოცემული ვექტორები ურთიერთპარალელურია, მაშინ როგორც ვიცით, ყოველთვის მოიძებნება ისეთი $k \neq 0$ რიცხვი, რომ მათ შორის ადგილი ექნება გეომეტრიულ ტოლობას

$$\vec{P}_1 = k\vec{P}_2, \tag{17}$$

სადაც k რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია მოცემული ვექტორების სიგრძეთა ფარდობისა: $|k| = \frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{P}_2|}$. $k>0$, როცა ვექტორებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება და $k<0$, როცა მათი მიმართულებები ერთმანეთის საწინააღმდეგოა. (17)-დან მივიღებთ (§ 9, თეორემა 3):

$$გეგ_{ox}\vec{P}_1 = k\, გეგ_{ox}\vec{P}_2, \quad ანუ \quad X_1 = kX_2.$$

ანალოგიურად გვექნება

$$Y_1 = kY_2, \quad Z_1 = kZ_2.$$

ზემოაღნიშნული ფორმულებიდან k-ს გამორიცხვით მივიღებთ:

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}. \tag{18}$$

ამრიგად, ორი ვექტორის პარალელობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა ამ ვექტორების შესაბამისი გეგმილების პროპორციულობა.

§ 20. ბრტყელი ვექტორების შემთხვევა

იმ შემთხვევაში, როცა მოცემული ვექტორები მოთავსებულია ერთსა და იმავე სიბრტყეზე, ასეთ ვექტორებს ბრტყელი ვექტორები ეწოდება. ამ შემთხვევაში ზემოაღნიშნულ ფორმულებში მონაწილეობას არ მიიღებს მესამე კოორდინატი Oz ღერძზე.

ამრიგად, თუ სიბრტყეზე მოცემულია მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემა და ამ სიბრტყეზე აღებულია ორი ვექტორი $\vec{P}_1(X_1, Y_1)$ და $\vec{P}_2(X_2, Y_2)$, მაშინ:

1. სკალარული ნამრავლის გამოსათვლელი (13) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)=X_1X_2+Y_1Y_2.$$

2. მოცემულ ვექტორებს შორის მოთავსებული α კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$\cos\alpha=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2}}, \tag{19}$$

3. ორი ვექტორის მართობულობის პირობა იქნება

$$X_1X_2+Y_1Y_2=0,$$

4. ამ ვექტორების ურთიერთპარალელობის პირობა კი —

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}.$$

§ 21. ზოგიერთი გამოყენება

მოვიყვანოთ ზემოაღნიშნული ფორმულის ზოგიერთი მარტივი გამოყენება.

1. მუშაობა. ვთქვათ, მატერიალური M წერტილი მოძრაობს წრფეზე A წერტილიდან B წერტილისაკენ. დავუშვათ, რომ მოძრავ წერტილზე მოქმედებს მუდმივი $\vec{F}$ ძალა (ე. ი. უცვლელი სიდიდით და მიმართუ-

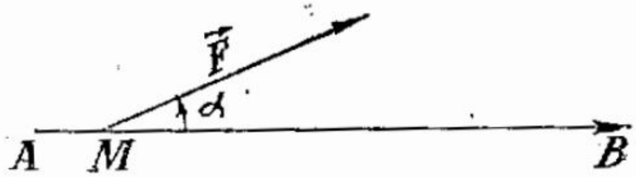
ლებით), რომელიც გადაადგილების $\overrightarrow{AB}$ ვექტორთან შეადგენს α კუთხეს (ნახ. 38).

მაშინ სკალარულ ნამრავლს,

$$T=(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{AB})=|F||AB|\cos\alpha \tag{20}$$

ეწოდება $\overrightarrow{F}$ ძალის მუშაობა შესრულებული AB გადაადგილებაზე.

2. ორ ვექტორზე აგებული სამკუთხედის ფართობი. ავიღოთ სიბრტყის საერთო წერტილზე მოდებული ორი $\overrightarrow{P}_1(X_1, Y_1)$ და $\overrightarrow{P}_2(X_2, Y_2)$ ვექტორი. ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ ამ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის ფართობი. თუ ამ ვექტორებს შორის კუთხეს აღვნიშნავთ α-თი, მაშინ ტრიგონომეტრიის ცნობილი ფორმულის თანახმად გვექნება



ნახ. 38.

$$S=\pm\frac{1}{2}|\overrightarrow{P}_1||\overrightarrow{P}_2|\sin\alpha. \tag{21}$$

სადაც ნიშანი $+$ უნდა ავიღოთ, როცა $\sin\alpha>0$, ხოლო $-$ ნიშანი კი როცა $\sin\alpha<0$.

$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ფორმულის გამოყენებით (19) ფორმულიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\sin\alpha=\pm\frac{X_1Y_2-Y_1X_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2}}, \tag{22}$$

სადაც

$$|\overrightarrow{P}_1|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2},\quad |\overrightarrow{P}_2|=\sqrt{X_2^2+Y_2^2}.$$

ამიტომ (21) ფორმულაში ჩასმისა და გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$S=\pm\frac{1}{2}(X_1Y_2-X_2Y_1)=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}. \tag{23}$$

3. სამკუთხედის ფართობის განსაზღვრა მისი წვეროს კოორდინატების საშუალებით. განვიხილოთ სიბრტყეზე სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ და $C(x_3, y_3)$. განვსაზღვროთ ამ სამკუთხედის ფართობი S. ამისათვის აღვნიშნოთ $\overrightarrow{CA}$ და $\overrightarrow{CB}$ ვექტორების გეგმილები შესაბამისად (X_1, Y_1) და (X_2, Y_2)-ით. ახლა (23) ფორმულით თუ ვისარგებლებთ და გავითვალისწინებთ, რომ

$$X_1=x_1-x_3,\ Y_1=y_1-y_3,\ X_2=x_2-x_3,\ Y_2=y_2-y_3,$$

მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ (IV თ. § 10):

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

სადაც ნიშანი $+$ უნდა ავიღოთ, როცა დეტერმინანტი დადებითია, ხოლო $-$ ნიშანი კი წინააღმდეგ შემთხვევაში.

მაგალითები: ა) ვთქვათ, მოცემულია ვექტორები:

$$\vec{P}(-3,\ 1,\ 0) \text{ და } \vec{Q}(1,\ 0,\ -5).$$

ვიპოვოთ მათი სკალარული ნამრავლი:

$$(\vec{P}\,.\,\vec{Q})=-3\cdot 1+1\cdot 0+0\ (-5)=-3.$$

ბ) ავიღოთ ორი ვექტორი $\vec{P}(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{Q}(3,\ 0,\ 5)$. მათი სკალარული ნამრავლი იქნება;

$$0\,.\,3+1\cdot 0+0\cdot 5=0.$$

მაშასადამე, მოცემული ვექტორები ურთიერთმართობულია.

გ) დაბოლოს, ვექტორები: $\vec{P}(2,\ 3,\ 4)$ და $\vec{Q}(4,\ 6,\ 8)$ ურთიერთპარალელურია, ვინაიდან

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}.$$

§ 22. ვექტორული ნამრავლი

ზემოთ გავეცანით ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს, რომელიც წარმოადგენდა რიცხვს ანუ სკალარს. ახლა გავეცნობით ორი ვექტორის ვექტორულ ნამრავლს, რომელიც წარმოადგენს გარკვეულ ვექტორს. ამისათვის ვიგულისხმოთ, რომ სივრცეში გვაქვს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა.

განმარტება. $\vec{P}$ ვექტორის *ვექტორული ნამრავლი* $\vec{Q}$ ვექტორზე ეწოდება ისეთ $\vec{R}$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი სამი პირობით (ნახ. 39).

1. *$\vec{R}$ ვექტორის მოდული უდრის მოცემული ვექტორების მოდულებისა და მათ შორის მოთავსებული კუთხის სინუსის ნამრავლს*[1].

---

[1] განმარტების ძალით, ორ ვექტორს შორის აღებულია ის კუთხე, რომელიც არ აღემატება π-ს. ამიტომ ყოველთვის $\sin\alpha\geqslant 0$ და (1) ფორმულა ყოველთვის გვაძლევს არაუარყოფით ($\geqslant 0$) სიდიდეს.

$$|\vec{K}| = |\vec{P}||Q|\sin\alpha. \qquad (1)$$

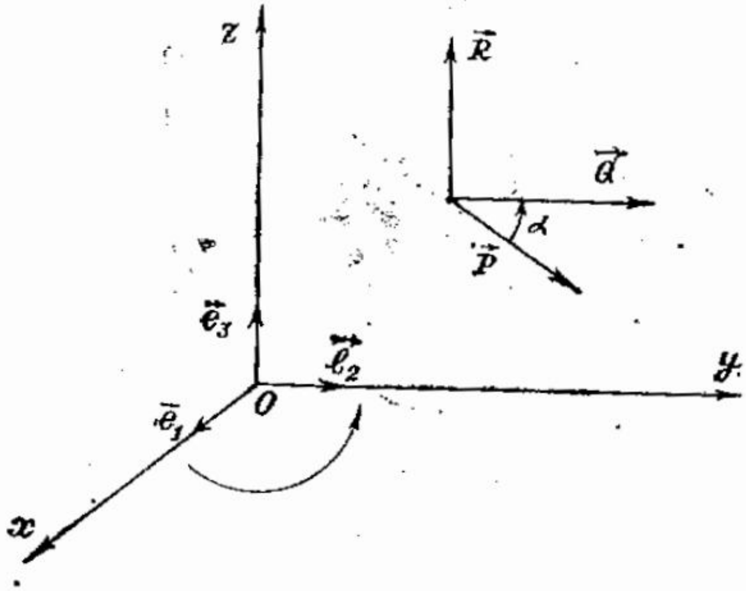
2. $\vec{R}$ ვექტორი მართობია $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების სიბრტყისა.

3. $\vec{R}$ ვექტორის მიმართულება $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების მიმართ ისეთია, როგორც კოორდინატთა Oz ღერძის მიმართულება Ox და Oy ღერძების მიმართ[1].

$\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს აღნიშნავენ ასე:

$$\vec{R} = [\vec{P} \cdot \vec{Q}].$$

ანუ სხვაგვარად, თუ სამივე $\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორებს აქვთ საერთო სათავე (ნახ. 33), მაშინ $\vec{R}$ ვექტორი ისე უნდა იყოს მიმართული, რომ დამკვირვებლისათვის, რომელიც დგას თავით $\vec{R}$ ვექტორის მიმართულებით და უყურებს $\vec{P}$ ვექტორს, ამ ვექტორის მობრუნება უნდა ხდებოდეს უმცირესი კუთხით $\vec{Q}$ ვექტორზე დასამთხვევად (იგულისხმება მათი მიმართულებების დამთხვევა), ანუ სხვაგვარად, ხსენებული მობრუნება უნდა ხდებოდეს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ისე როგორც დამკვირვებლისათვის, რომელიც დგას თავით Oz ღერძის მიმართულებით და უყურებს Ox ღერძს, ამ ღერძის მობრუნება უნდა ხდებოდეს $\frac{\pi}{2}$ კუთხით Oy ღერძზე დასამთხვევად (იგულისხმება ამ ღერძების დადებითი მიმართულებების დამთხვევა), ეს მობრუნება ხდება საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ (ნახ. 39).



ნახ. 39.

ვექტორულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ მათი ვექტორული ნამრავლი უდრის ნულს.

---

[1] ე. ი. $\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ ვექტორები ერთმანეთთან ადგენენ მარჯვენა სისტემას.

დამტკიცება: როცა $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ მათ შორის α კუთხე ან უდრის ნულს (როცა $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებს ერთნაირი მიმართულება აქვთ), ან უდრის 180° (როცა $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებს საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ). ორივე შემთხვევაში $\sin\alpha=0$, საიდანაც (1) ფორმულის თანახმად მივიღებთ $|\vec{R}|=0$ და მაშასადამე, თვით $\vec{R}=0$.

2. თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი უდრის ნულს, მაშინ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები კოლინეარულია.

დამტკიცება. დავუშვათ $[\vec{P}\cdot\vec{Q}]=0$, საიდანაც (1) ფორმულის თანახმად გამომდინარეობს, რომ $|\vec{P}||\vec{Q}|\sin\alpha=0$, თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ არ უდრის ნულს, მაშინ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\sin\alpha=0$. მაშასადამე, $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები კოლინეარულია. ვექტორული ნამრავლის ორივე თვისება შეიძლება გავაერთიანოთ შემდეგნაირად: ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის ნულს, როცა ეს ვექტორები კოლინეარულია.

3. თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები დაყვანილია საერთო სათავეზე, მაშინ მათი ვექტორული ნამრავლის მოდული უდრის $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს.

დამტკიცება. როგორც ცნობილია, პარალელოგრამის S ფართობი უდრის მისი ორი მოსაზღვრე გვერდისა და მათ შორის მოთავსებული α კუთხის სინუსის ნამრავლს. ამიტომ $S=|\vec{P}||\vec{Q}|\sin\alpha$, ანუ $|\vec{R}|=S$.

4. $\vec{P}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\vec{Q}$ ვექტორზე, წარმოადგენს $\vec{Q}$ ვექტორის $\vec{P}$ ვექტორზე ვექტორული ნამრავლის მოპირდაპირე ვექტორს, ე. ი.

$$[\vec{P}\cdot\vec{Q}]=-[\vec{Q}\cdot\vec{P}]. \tag{2}$$

დამტკიცება. თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ კოლინეარულია, მაშინ თავისთავად ცხადია $[\vec{P}\cdot\vec{Q}]=0$ და $[\vec{Q}\cdot\vec{P}]=0$, ე. ი. ამ შემთხვევაში (2) ტოლობა მართებულია. ახლა დავუშვათ, რომ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები არაკოლინეარულია. ამ შემთხვევაში, თუ ვისარგებლებთ ვექტორული ნამრავლის განმარტების პირველი და მეორე პირობით, მაშინ გვექნება, რომ

$$[\vec{P}\cdot\vec{Q}]=[\vec{Q}\cdot\vec{P}], \quad \text{ან} \quad [\vec{P}\cdot\vec{Q}]=-[\vec{Q}\cdot\vec{P}].$$

მაგრამ, თუ ვისარგებლებთ მესამე პირობით, მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ადგილი ექნება მხოლოდ უკანასკნელ ტოლობას და

$$[\vec{P}\cdot\vec{Q}]=-[\vec{Q}\cdot\vec{P}].$$

5. აღვნიშნოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის Ox, Oy და Oz ღერძების მგეზავები შესაბამისად $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ და $\vec{e}_3$-ით. მაშინ, ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს ამ მგეზავებისათვის შემდეგი ფორმულები:

$$[\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1]=0,\quad [\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2]=0,\quad [\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3]=0;$$

$$[\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2]=\vec{e}_3,\quad [\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1]=-\vec{e}_3;$$

$$[\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3]=-\vec{e}_2,\quad [\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1]=\vec{e}_2; \tag{3}$$

$$[\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3]=\vec{e}_1,\quad [\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2]=-\vec{e}_1.$$

6. ვექტორული ნამრავლის განმარტებაზე დაყრდნობით ადვილად მტკიცდება შემდეგი ფორმულები:

$$[(\lambda\vec{P})\cdot\vec{Q}]=\lambda[\vec{P}\cdot\vec{Q}],\quad [\vec{P}\cdot(\lambda\vec{Q})]=\lambda[\vec{P}\cdot\vec{Q}],$$

$$[\vec{R}\cdot(\vec{P}+\vec{Q})]=[\vec{R}\cdot\vec{P}]+[\vec{R}\cdot\vec{Q}],$$

$$[(\vec{P}+\vec{Q})\cdot\vec{R}]=[\vec{P}\cdot\vec{R}]+[\vec{Q}\cdot\vec{R}],$$

$$[(\vec{P}_1+\vec{Q}_1)\cdot(\vec{P}_2+\vec{Q}_2)]=[\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2]+[\vec{P}_1\cdot\vec{Q}_2]+$$

$$+[\vec{Q}_1\cdot\vec{P}_2]+[\vec{Q}_1\cdot\vec{Q}_2].$$

§ 23. ვექტორული ნამრავლის გამოსახვა მოცემული ვექტორების გეგმილების საშუალებით

ვთქვათ, მოცემულია სივრცეში $\vec{P}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{P}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ ორი ვექტორი. ჩვენი მიზანია ვექტორული ნამრავლი $[\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2]$ გამოვსახოთ ამ ვექტორების გეგმილების საშუალებით. ამისათვის გამოვსახოთ ეს ვექტორები კოორდინატთა ღერძების მგეზავების საშუალებით:

$$\vec{P}_1=X_1\vec{e}_1+Y_1\vec{e}_2+Z_1\vec{e}_3,\quad \vec{P}_2=X_2\vec{e}_1+Y_2\vec{e}_2+Z_2\vec{e}_3,$$

თუ ვისარგებლებთ 5 პუნქტის (3) ფორმულებით და 6 პუნქტის უკანასკნელი ფორმულით, მაშინ გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ:

$$[\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2]=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\vec{e}_1+(Z_1X_2-X_1Z_2)\vec{e}_2+$$

$$+(X_1Y_2-Y_1X_2)\vec{e}_3.$$

ანუ

$$[\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2] = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

იგივე შეიძლება ჩავწეროთ კიდევ ერთი დეტერმინანტის სახით

$$[\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

VI თავი

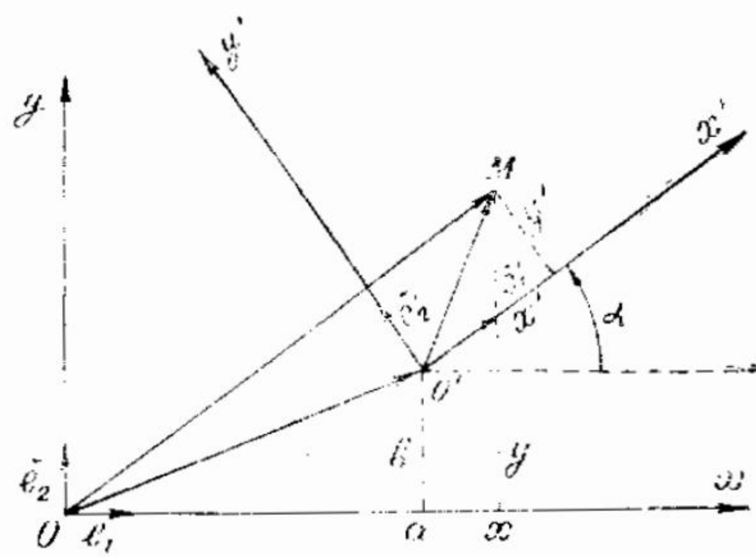
კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნა

ხშირად საჭიროა კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეზე გადასვლა. ამ შემთხვევაში საჭიროა ვიცოდეთ, როგორ განიმარტება მოცემული წერტილის ან ვექტორის კოორდინატები ახალი სისტემის მიმართ. თუ მოცემულია მათი კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ, რასაკვირველია, ამ დროს პირველ ყოვლისა უნდა ვიცოდეთ თვით ახალი კოორდინატთა სისტემის მდებარეობა ძველი სისტემის მიმართ.

§ 1. კოორდინატთა გარდაქმნა სიბრტყეზე

განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა გარდაქმნა სიბრტყეზე.

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა Oxy (რომელსაც პირობით ვუწოდოთ ძველი სისტემა) და განვიხილოთ ამავე სიბრტყეზე მეორე — ახალი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა $O'x'y'$. იმისათვის, რომ დავუკავშიროთ ერთმანეთს წერტილის ძველი და ახალი სისტემის კოორდინატები, საჭიროა პირველ რიგში განვსაზღვროთ ახალი სისტემის მდებარეობა ძველი სისტემის მიმართ. ამისათვის კი საკმარისია ვიცოდეთ ახალი სისტემის



ნახ. 40.

სათავის O'-ის კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ, რომელიც აღვნიშნოთ a და b-თი და ახალი სისტემის მობრუნების კუთხე, ე. ი. ის კუთხე, რომელსაც $O'x'$ ღერძი ადგენს Ox ღერძთან და რომელიც აღვნიშნოთ α-თი (ნახ. 40).

გასაგებია, რომ სამი სიდიდე: a, b და α სავსებით განსაზღვრავს ახალი სისტემის მდებარეობას ძველი სისტემის მიმართ. ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი M წერტილი და მისი კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ აღვნიშნოთ x და y-ით, ხოლო ახალი სისტემას მიმართ x' და y'-ით. ჩვენი მიზანია დავამყაროთ კავშირი x, y და x', y' კოორდინატებს შორის. ამისათვის აღვნიშნოთ ძველი სისტემის კოორდინატთა ღერძების შესაბამისი მგეზავები $\vec{e_1}$ და $\vec{e_2}$-ით, ხოლო ახალი სისტემის კოორდინატთა სათანადო მგეზავები $\vec{e_1'}$ და $\vec{e_2'}$-ით.

შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ვექტორული ტოლობა

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M},$$

ანუ

$$x\vec{e_1}+y\vec{e_2}=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+x'\vec{e_1'}+y'\vec{e_2'}. \tag{1}$$

დავაგეგმილოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე Ox ღერძზე, ანუ გეომეტრიული ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ $\vec{e_1}$ მგეზავზე, სადაც გავითვალისწინოთ V თავის § 16-ის (3) და (6) ფორმულები და აგრეთვე შემდეგი:

$$(\vec{e_1}\cdot\vec{e_1'})=\cos\alpha,\quad (\vec{e_1}\cdot\vec{e_2'})=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha;$$

მაშინ (1)-დან მივიღებთ

$$x=a+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha. \tag{2}$$

ახლა, (1) ტოლობის ორივე მხარეს თუ გავამრავლებთ სკალარულად $\vec{e_2}$-ზე და გავითვალისწინებთ, რომ

$$(\vec{e_2}\cdot\vec{e_1'})=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,\ (\vec{e_2}\cdot\vec{e_2'})=\cos\alpha,$$

მაშინ, ანალოგიურად მივიღებთ

$$y=b+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

ამრიგად, კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებს აქვს სახე:

$$\left.\begin{aligned} x&=a+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=b+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(3) ფორმულები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ წერტილის კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ, თუ მოცემულია მისი კოორდინატები ახალ სისტემაში.

პირიქით, თუ ამოვხსნით (3) სისტემას x' და y'-ის მიმართ, როგორც ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას, რომლის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს ($=1$), მაშინ მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} x'&=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha,\\ y'&=-(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ამ ფორმულებით გამოვითვლით M წერტილის კოორდინატებს ახალი სისტემის მიმართ, თუ ცნობილია მისი კოორდინატები ძველ სისტემაში.

ახლა განვიხილოთ კერძო შემთხვევები:

1. კოორდინატთა სათავის გადატანა. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა მართკუთხა კოორდინატთა ახალი $O'x'y'$ სისტემის სათავე გადატანილია Oxy სიბრტყის ნებისმიერ O' წერტილში, ისე, რომ კოორდინატთა ღერძების მიმართულება უცვლელი რჩება. ცხადია, რომ ახალი სისტემის მდებარეობა ძველის მიმართ სავსებით განისაზღვრება, თუ გვეცოდინება ახალი სისტემის O' სათავის კოორდინატები a და b ძველი სისტემის მიმართ. ამ შემთხვევაში $\alpha=0$, ამიტომ (1) და (2) ფორმულებიდან მივიღებთ

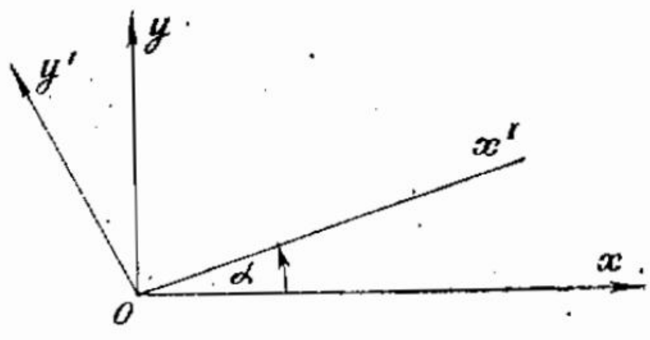
$$x=a+x', \quad y=b+y'. \tag{4'}$$

ამ ფორმულებით განისაზღვრება წერტილის კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ მისივე კოორდინატებით ახალ სისტემაში და პირიქით (4)-დან გვექნება ფორმულები:

$$x'=x-a, \quad y'=y-b, \tag{5}$$

რომლებიც განსაზღვრავს წერტილის კოორდინატებს ახალი სისტემის მიმართ მისი კოორდინატებით ძველ სისტემაში.

2. კოორდინატთა ღერძების მობრუნება. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ორივე სისტემას საერთო O სათავე აქვს, ოღონდ ახალი სისტემის ღერძები გარკვეული კუთხით არის მობრუნებული ძველი სისტემის ღერძების მიმართ. ვთქვათ α არის ის კუთხე, რომელსაც Ox' ღერძი შეადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან (ნახ. 41).



ნახ. 41.

ამ შემთხვევაში $a=b=0$; ამიტომ (1), (2) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

აქედან

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\\ y'&=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

ასეთია კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები ღერძთა მობრუნების შემთხვევაში.

§ 2. ვექტორის გეგმილებს შორის კავშირი ახალ და ძველ სისტემაში

დავუბრუნდეთ 39-ე ნახაზს და განვიხილოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორი, რომლის გეგმილები (ანუ კოორდინატები) ძველი სისტემის მიმართ არის X და Y, ხოლო ახალი სისტემის მიმართ კი X' და Y'. მაშინ ცხადია, რომ ადგილი ექნება შემდეგ გეომეტრიულ ტოლობას

$$\vec{P}=X\vec{e}_1+Y\vec{e}_2=X'\vec{e}_1'+Y'\vec{e}_2', \tag{8}$$

საიდანაც Ox და Oy ღერძებზე დაგეგმილებით (ანალოგიურად წერტილის შემთხვევისა) მივიღებთ

$$\begin{aligned} X&=X'\cos\alpha-Y'\sin\alpha,\\ Y&=X'\sin\alpha+Y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{9}$$

ამ სისტემის ამონახსნი იქნება.

$$\begin{aligned} X'&=X\cos\alpha+Y\sin\alpha,\\ Y'&=-X\sin\alpha+Y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{10}$$

(9) და (10) ფორმულები აკავშირებს ერთმანეთს ვექტორის გეგმილებს კოორდინატთა ძველი და ახალი სისტემის მიმართ.

VII თავი

მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები. ფუნქცია. წირის განტოლება

§ 1. მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები

ბუნების მოვლენების დახასიათების დროს საქმე გვაქვს სხვადასხვა სიდიდეებთან. ასე მაგალითად, სხეულის მასა, მატარებლის მიერ გავლილი მანძილი, სხეულის მოცულობა, სხეულის ტემპერატურა, რაიმე ფიგურის ფართობი და სხვა. ყოველი სიდიდე შეიძლება გავზომოთ მისდაგვარ ერთეულად მიღებული სიდიდით (მასშტაბით). მაგალითად: სხეულის მასა გაიზომება კილოგრამობით, მანძილი—მეტრებში, მოცულობა—კუბურ მეტრებში, ფართობი — კვადრატულ მეტრებში, ტემპერატურა — გრადუსებში და ა. შ.

სიდიდის გაზომვის შედეგი წარმოადგენს განყენებულ რიცხვს, რომელიც გამოსახავს იმ სიდიდის ფარდობას ერთეულად მიღებულ სიდიდესთან. როგორც ვიცით, იგი ყოველთვის გარკვეული ნამდვილი რიცხვია. ამ რიცხვს უწოდებენ მოცემული სიდიდის რიცხვით მნიშვნელობას.

სიდიდეები იყოფა ორ კლასად — მუდმივ და ცვლად სიდიდეებად. სიდიდეს ეწოდება მუდმივი, თუ იგი ყოველთვის (ან მოცემული ამოცანის განხილვის დროს მაინც) ინარჩუნებს ერთი და იგივე რიცხვით მნიშვნელობას. პირიქით, თუ სიდიდე ღებულობს, მოცემული ამოცანის განხილვის დროს, სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობებს, მაშინ მას ცვლადი სიდიდე ეწოდება.

მუდმივი სიდიდის მაგალითებს წარმოადგენენ: სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი, რომელიც ყველა სამკუთხედისათვის 180°-ია, წრეწირის სიგრძის შეფარდება თავის დიამეტრთან, რომელიც აღნიშნულია π ასოთი (სადაც $\pi = 3,14159\ldots$) და სხვა.

ცვლადი სიდიდის მაგალითებია: ტემპერატურა, დრო, მოძრავი სხეულის მიერ გავლილი მანძილი, მატარებლის სიჩქარე და სხვა.

აღსანიშნავია, რომ ცვლადი სიდიდე ყოველთვის ვერ მიიღებს ნებისმიერ მნიშვნელობებს. ამისათვის განვიხილოთ ფიზიკიდან მაგალითები.

მატერიალური წერტილის მოძრაობის სიჩქარემ არ შეიძლება გადააჭარბოს სინათლის სიჩქარეს, რომელიც უდრის (სიცარიელეში) $3 \cdot 10^{10} \frac{\text{სმ}}{\text{წმ}}$, სხეულის ტემპერატურა არ შეიძლება ნაკლები იყოს $-273°$ C. ჰარმონიული რხევის დროს წერტილის გადაადგილება, რომელიც გამოისახება ფორმულით $y = A\cos(\omega t + \beta)$, იცვლება საზღვრებში $[-A, +A]$, და სხვა.

მუდმივ სიდიდეს უფრო ხშირად აღნიშნავენ ლათინური ანბანის პირველი ასოებით: $a, b, c, d, l, k, \ldots$, ხოლო ცვლად სიდიდეს კი ბოლო ასოებით: $x, y, z, t, u, v, w, \ldots$,

§ 2. ფუნქცია

ბუნების მოვლენების შესწავლის დროს საქმე გვაქვს ცვლად სიდიდეებთან. ცვლადი სიდიდეების ურთიერთკავშირის შესწავლა მათემატიკური ანალიზის საგანს შეადგენს. არიან ისეთი ცვლადი სიდიდეები, რომელთა შორის კავშირი არ არსებობს. ასე მაგალითად: თვითმფრინავის სიჩქარესა და მატარებლის სიჩქარეს შორის, რომლებიც ცვლად სიდიდეებს წარმოადგენენ, არავითარი კავშირი არ არსებობს. მაგრამ ხშირად საქმე გვაქვს ისეთ ცვლად სიდიდეებთან, რომელთა შორის გარკვეული კავშირია დამყარებული. ასე მაგალითად, სხვადასხვა დროის შუალედში ბავშვის მიერ გარბენილი მანძილი სხვადასხვა იქნება; თუ შევცვლით წრეწირის რადიუსს, მაშინ შეიცვლება მისი სიგრძეც, ასევე შეიცვლება ამავე წრის ფართობიც.

აქ მოყვანილ და მრავალ სხვა მაგალითებში ხშირია შემთხვევა, როცა ორ ცვლად სიდიდეს შორის ისეთი დამოკიდებულება არსებობს, რომ ერთერთი მათგანი შეიძლება შევცვალოთ ნებისმიერად, ხოლო მეორეს მნიშვნელობა შეიცვლება იმისდა მიხედვით, თუ როგორ შევცვალეთ პირველი. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ აღნიშნულ ცვლადებს შორის ადგილი აქვს ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას.

ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციის განმარტება.

დავუშვათ, რომ მოცემულია ორი სიმრავლე X და Y. ვთქვათ, გარკვეული f წესით X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი y. მაშინ იტყვიან, რომ მოცემულია f ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია X სიმრავლეზე, y ელემენტი, რომელიც f წესით x ელემენტს ეთანადება აღინიშნება $f(x)$-ით, ე. ი. გვექნება $y = f(x)$. ზემოაღნიშნულ შემთხვევაში ამბობენ, რომ x და y-ს შორის არსებობს ფუნქციონალური დამოკიდებულება.

ზოგჯერ სიტყვა ფუნქციის ნაცვლად იხმარება სიტყვა ასახვა. x ცვლადს ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი ანუ არგუმენტი. x და

y-ს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულებას ზოგჯერ ასედაც წერენ $y=y(x)$.

X სიმრავლეს, რომელსაც გაირბენს დამოუკიდებელი x ცვლადი, ეწოდება ფუნქციის განსაზღვრის ანუ მოცემის არე და აღინიშნება $D(f)$-ით, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობების სიმრავლეს ეწოდება ფუნქციის ცვალებადობის არე და აღინიშნება $E(f)$-ით, ე. ი.

$$E(f)=\{f(x)\,|\,x\in D(f)\}.$$

ამრიგად, ზოგჯერ ფუნქციის ნაცვლად იხმარება სიტყვები: შესაბამისობა, ასახვა, თანადობა; ხოლო f-ით აღნიშნულია ის წესი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შევუსაბამოთ Y სიმრავლის ერთადერთი y ელემენტი, რომელსაც ეწოდება f ასახვის მნიშვნელობა x ელემენტზე ან x ელემენტის სახე და აღინიშნება $f(x)$-ით.

სხვადასხვა ფუნქციების აღსანიშნავად იხმარება შემდეგი სიმბოლოები:

$$f,\ F,\ \varphi,\ \Phi,\ \psi,\ \Psi,\ g,\ \chi\cdots$$

ახლა, ვთქვათ f ფუნქცია განსაზღვრულია X სიმრავლეზე და ასახავს ამ სიმრავლეს Y სიმრავლეში. ავიღოთ X სიმრავლის რაიმე A ქვესიმრავლე და განვიხილოთ მისი ელემენტების სახეთა სიმრავლე. ცხადია, ეს სიმრავლე იქნება Y სიმრავლის ქვესიმრავლე. მას აღნიშნავენ $f(A)$-თი, ე. ი.

$$f(A)=\{y\in Y\,|\,y=f(x),\ x\in A\}.$$

ასეთ $f(A)$ სიმრავლეს ეწოდება A სიმრავლის სახე. მთელი X სიმრავლის სახე იქნება $f(X)$, რომელსაც ეწოდება X სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

თუ $f(X)=Y$, მაშინ ამბობენ, რომ (1) ფუნქცია X სიმრავლეს ასახავს Y სიმრავლეზე, ხოლო, თუ $f(X)\subset Y$ და $f(X)\neq Y$, მაშინ ამბობენ, რომ f ფუნქცია X სიმრავლეს ასახავს Y სიმრავლეში. მაგალითად, $y=x^2$ ფუნქცია $X=(-\infty, +\infty)$-ს ასახავს R-ში და $[0, +\infty)$-ზე.

როცა $f(X)=Y$ და $f(x_1)\neq f(x_2)$ ნებისმიერი სხვადასხვა ელემენტებისათვის X სიმრავლიდან $(x_1, x_2\in X,\ x_1\neq x_2)$, მაშინ $y=f(x)$-ით X სიმრავლის ასახვას Y სიმრავლეზე ეწოდება ურთიერთცალსახა.

ამ შემთხვევაში $Y=f(X)$ სიმრავლეზე შეიძლება განვსაზღვროთ $x=\varphi(y)$ ფუნქცია, რომლითაც Y სიმრავლის ყოველ y ელემენტს შევუსაბამებთ X სიმრავლის ისეთ x ელემენტს, რომ $y=f(x)$. ამ $\varphi(y)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. $y=f(x)$ და $x=\varphi(y)$ ფუნქციებს ამ შემთხვევაში ეწოდება ურთიერთშექცეული ფუნქციები.

ახლა ვთქვათ B არის Y სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე. მაშინ სიმრავლეს $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ეწოდება B სიმრავლის სრული წინასახე.

თუ X და Y ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეებია, მაშინ სათანადო ფუნქციას ეწოდება **ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია**, ხოლო, როცა X და Y სიმრავლის ელემენტებს წარმოადგენენ კომპლექსური რიცხვები, მაშინ მივიღებთ **კომპლექსური არგუმენტის კომპლექსურ ფუნქციას**. ასევე შეიძლება მივიღოთ ნამდვილი არგუმენტის კომპლექსური ფუნქცია. საზოგადოდ, თუ X და Y სიმრავლეები წარმოადგენენ ნამდვილ ან კომპლექსურ რიცხვთა ქვესიმრავლეებს, მაშინ მიღებულ ფუნქციებს ეწოდება რიცხვითი ფუნქციები.

შემდეგში როცა ვიტყვით „ფუნქცია", მხედველობაში გვექნება **ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია.**

ცხადია, მუდმივი წარმოიდგინება როგორც ფუნქცია, რომლისთვისაც x არგუმენტის ნებისმიერ მნიშვნელობას შეესაბამება ერთი და იგივე ნამდვილი რიცხვი. ამ შემთხვევაში ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შედგება მხოლოდ ერთი რაიმე c რიცხვისაგან $f(x)=c$. მაგალითად, x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის ფუნქცია $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ მუდმივია და უდრის 1-ს. ის ფაქტი, რომ $f(x)$ ფუნქცია მუდმივია, აღინიშნება ასე $f(x)=\text{const}$.

თუ ერთსა და იმავე X სიმრავლეზე მოცემულია ორი ფუნქცია f და φ და ადგილი აქვს ტოლობას $f(x)=\varphi(x)$ ყოველ $x \in X$, მაშინ წერენ $f=\varphi$ და ამბობენ რომ ეს ფუნქციები იგივურად ერთმანეთის ტოლია X სიმრავლეზე.

ახლა ვთქვათ f და φ რიცხვითი ფუნქციებია განსაზღვრული ერთსა და იმავე X არეში, მაშინ $f+\varphi$ განსაზღვრულია, როგორც ისეთი ფუნქცია, რომელიც ყოველ $x \in X$ წერტილზე ღებულობს მნიშვნელობას $f(x)+\varphi(x)$; $f\varphi$ — როგორც ფუნქცია, რომელიც ყოველ x წერტილზე ღებულობს მნიშვნელობას $f(x)\cdot\varphi(x)$; ხოლო $\frac{f}{\varphi}$ — როგორც ისეთი ფუნქცია, რომელიც ყოველ $x \in X$ წერტილზე ტოლია $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (სადაც იგულისხმება, რომ $\varphi(x) \neq 0$).

შეიძლება, რომ Y სიმრავლის ელემენტი y იყოს არა ერთი, არამედ ორი ან მეტი არგუმენტის შესაბამისი, მაგალითისათვის განვიხილოთ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია სიბრტყის წერტილთა რაიმე X სიმრავლეზე და რომელიც ღებულობს გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობებს. ვინაიდან სიბრტყის ყოველ წერტილს ცალსახად შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული (x_1, x_2) წყვილი, რომლებიც წერტილის კოორდინატებს წარმოადგენენ, ამიტომ ეს ფუნქცია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ორი ნამდვილი x_1, x_2 არგუმენტის ფუნქცია და აღვნიშნოთ იგი ასე

$$y=f(x_1,\ x_2).$$

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი; თუ სამკუთხედის ფუძეს აღვნიშნავთ x_1-ით, სიმაღლეს x_2-ით, ხოლო მის ფართობს y-ით, მაშინ ცხადია y იქნება ორი ნამდვილი ცვლადის — x_1, x_2-ის ნამდვილი ფუნქცია და ადგილი აქვს დამოკიდებულებას $y=\frac{1}{2}\ x_1\cdot x_2$.

ახლა, ვთქვათ მოცემულია შემდეგი სახის განტოლება

$$F(x,\ y)=0, \tag{2}$$

სადაც $F(x,\ y)$ წარმოადგენს ორი ნამდვილი x და y ცვლადის ფუნქციას. თუ (2) განტოლებაში x-ს მივანიჭებთ რაიმე ნამდვილ რიცხვით მნიშვნელობას, მაშინ y-ის მიმართ მივიღებთ ერთუცნობიან განტოლებას, რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს ერთი ან რამდენიმე ნამდვილი ფესვი. დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი X სიმრავლე, რომ ამ სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება y-ის ერთი და მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა ისეთი, რომ $(x,\ y)$ წყვილი აკმაყოფილებს (2) განტოლებას. მაშინ (2) განტოლება X სიმრავლეზე განსაზღვრავს x-ის ფუნქციას $y=\varphi(x)$, რომელიც იგივურად აკმაყოფილებს (2) განტოლებას

$$F[x,\ \varphi(x)]=0, \quad \text{ყველა}\ \ x\in X.$$

ამ შემთხვევაში φ-ს ეწოდება x-ის **არაცხადი ფუნქცია** განსხვავებით ფუნქციისაგან, რომელიც მოცემულია y ცვლადის მიმართ ამოხსნილი ფორმულით $y=f(x)$ და რომელსაც **ცხადი ფუნქცია** ეწოდება.

მაგალითად, განვიხილოთ განტოლება $x^2+y^2-4=0$. აქ x-ის ყოველ მნიშვნელობას $[-2,\ +2]$ სეგმენტში შეესაბამება y-ის ერთადერთი მნიშვნელობა $\varphi(x)=\sqrt{4-x^2}$ $Y=[0,\ +2]$ სეგმენტში.

§ 3. ელემენტარული ფუნქციები

განვიხილოთ ფუნქციათა ზოგიერთი კონკრეტული კლასი, რომლებთანაც ხშირად გვექნება საქმე.

ა) **მრავალწევრი.** ფუნქციას

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n, \tag{1}$$

სადაც n ნატურალური რიცხვი ან ნულია, ხოლო $a_0,\ a_1,\dots,\ a_n$ ნამდვილი რიცხვებია, ეწოდება **მრავალწევრი** ანუ პოლინომი. (1) სახით დაწერილ მრავალწევრში ცვლადის უმაღლეს ხარისხს n-ს **მრავალწევრის ხარისხი** ეწოდება, როცა $a_0\neq 0$. მაგალითად, მრავალწევრი

$$y=f(x)=8x^5+7x^3+\sqrt{3}\,x^2+4x-\sqrt{2}$$

მეხუთე ხარისხისაა, ხოლო

$$y=f(x)=(x-1)(3x^2+5)=3x^3-3x^2+5x-5$$

მესამე ხარისხის.

ბ) რაციონალური ფუნქცია. ორი მრავალწევრის შეფარდებას ეწოდება რაციონალური ფუნქცია:

$$y=f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}.$$

ამგვარად, რომ მივიღოთ რაციონალური ფუნქციის რაიმე მნიშვნელობა, საჭიროა არგუმენტზე შევასრულოთ რაციონალური ოპერაციები, ანუ ოთხი არითმეტიკული მოქმედება: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა (უკანასკნელ წილადს აზრი აქვს ყველა იმ x-სათვის, როცა მნიშვნელი არ უდრის ნულს).

გ) ხარისხოვანი ფუნქცია. ფუნქციას

$$y=x^p,$$

სადაც p ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ეწოდება ხარისხოვანი ფუნქცია.

დ) მაჩვენებლიანი ფუნქცია. ფუნქციას $y=a^x$, სადაც a დადებითი რიცხვია და განსხვავდება 1-საგან, ეწოდება მაჩვენებლიანი ფუნქცია.

ე) ლოგარითმული ფუნქცია. ლოგარითმული ფუნქციაა:

$$y=\log_a x,$$

სადაც a ერთისაგან განსხვავებული დადებითი რიცხვია, ხოლო x ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს.

ვ) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ფუნქციებს: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ — ეწოდება ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

ზ) შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arcsec} x$ და $\operatorname{arccosec} x$.

ზემოჩამოთვლილ ფუნქციებს ეწოდება ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები.

ისეთ y ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს რომელიმე ალგებრულ განტოლებას:

$$p_0(x)+p_1(x)\,y+p_2(x)\,y^2+\ldots+p_n(x)\,y^n=0, \tag{1}$$

სადაც $p_0(x)$, $p_1(x),\ldots, p_n(x)$ წარმოადგენენ მრავალწევრებს x-ის მიმართ, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ეწოდება ალგებრული ფუნქცია. კერძოდ, ყოველი რაციონალური ფუნქცია $\frac{p(x)}{q(x)}$ (სა-

და $p(x)$ და $q(x)\neq 0$ მრავალწევრებია) წარმოადგენს ალგებრულ ფუნქციას, ვინაიდან იგი აკმაყოფილებს პირველი ხარისხის შემდეგ განტოლებას

$$p(x)-q(x)\,y=0.$$

ცხადია, რომ ალგებრული ფუნქციები არ ამოიწურება რაციონალური ფუნქციებით, ვინაიდან ალგებრული ფუნქცია შეიძლება იყოს ი რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი ფუნქციაც, მაგალითად $y=\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}}$ არ წარმოადგენს რაციონალურ ფუნქციას, მაგრამ ცხადია ალგებრული ფუნქციაა, ვინაიდან იგი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$9x^2+12x+4-(x^2+1)\,y^2=0.$$

ყოველ არაალგებრულ ფუნქციას ეწოდება ტ რ ა ნ ს ც ე ნ დ ე ნ ტ უ ლ ი ფუნქცია. ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებიდან: ტრიგონომეტრიული და შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქცია, ლოგარითმული, მაჩვენებლიანი და ისეთი ხარისხოვანი ფუნქცია $y=x^{\alpha}$, თუ α ხარისხის მაჩვენებელი ირაციონალური რიცხვია (მაგ., $y=x^{\sqrt{2}}$) წარმოადგენენ ტ რ ა ნ ს ც ე ნ დ ე ნ ტ უ ლ ფუნქციებს. ფუნქციის თვისებების დაწვრილებით შესწავლას შემდეგ დავუბრუნდებით.

§ 4. წირი და მისი განტოლება

ვთქვათ, გვაქვს

$$y=f(x) \tag{1}$$

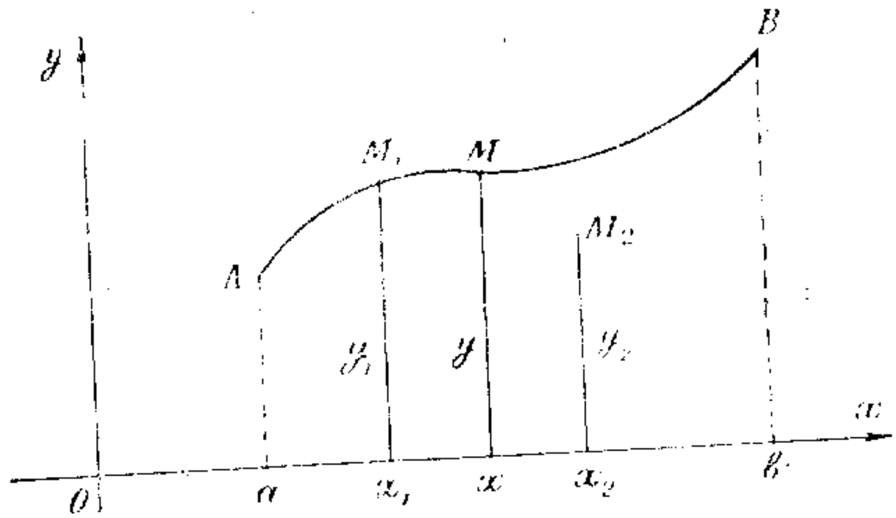
ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[a,\ b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ სიბრტყეზე დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემა. ავიღოთ აბსცისათა ღერძზე $[a,\ b]$ სეგმენტის ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი x. (1) ფუნქციონალური დამოკიდებულების საფუძველზე მას ერთადერთი y ნამდვილი რიცხვი შეესაბამება. ამ გზით მიღებულ $(x,\ y)$ წყვილს სიბრტყეზე შეესაბამება გარკვეული $M(x,\ y)$ წერტილი. როცა x ღებულობს $[a,\ b]$ სეგმენტის ყველა რიცხვით მნიშვნელობას, მაშინ სიბრტყეზე მივიღებთ $M(x,\ y)$ ანუ $M(x,\ f(x))$ წერტილთა გარკვეულ ერთობლიობას, რომელსაც $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება (ნახ. 42). ასეთ $M(x,\ y)$ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს ხშირად წირს უწოდებენ, ხოლო (1)-ს ჰქვია ამ წირის გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა, ე. ი. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი შემდეგნაირად განიმარტება:

$$L=\{\,M(x,\ y)\,|\,y=f(x),\ x\in[a,\ b]\,\}.$$

ამრიგად, თუ კოორდინატთა სიბრტყეზე განვიხილავთ ყველა $(x,\ f(x))$ წყვილთა სიმრავლეს, სადაც $x\in[a,\ b]$, მაშინ მივიღებთ $L=\{(x,\ f(x))\,|$

$x \in [a, b]\}$ სიმრავლის გეომეტრიულ წარმოდგენას, რომელსაც $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება (ნახ. 42).

ფუნქციის გრაფიკის აგება მისი ყველა წერტილის აგებით საზოგადოდ პრაქტიკულად შეუძლებელია, ვინაიდან ასეთი წერტილების სიმრავლე უსასრულოა. ამიტომ სიბრტყეზე ფუნქციის გრაფიკის აგების დროს, $y=f(x)$ დამოკიდებულებიდან გამოვთვლით გრაფიკის ზოგიერთი წერტილის კოორდინატებს და სიბრტყეზე მათი განლაგების მიხედვით ვიმსჯელებთ დანარჩენი წერტილების განლაგების ხასიათზე. ამასთან ერთად ხელსაყრელია ვიხელმძღვანელოთ მოცემული ფუნქციის თვისებებით: მაგა-



ნახ. 42.

ლითად, თუ ფუნქცია ზრდადია[1] რომელიმე შუალედში, ხოლო მეორე-
ში კი — კლებადი[1], ან შესაბამისი წირი, თუ რომელიმე ღერძის ან სათა-
ვის მიმართ სიმეტრიულად იქნება განლაგებული და სხვა. რაც უფრო
მეტი თვისებები გვეცოდინება მოცემული ფუნქციის შესახებ, მით უფრო
ზუსტი წარმოდგენა შეიძლება ვიქონიოთ ამ ფუნქციის გრაფიკზე. ზემო-
აღნიშნულის ძალით, თუ (1) არის AB წირის განტოლება, მაშინ ამ წი-
რის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ აღნიშნულ
განტოლებას და პირიქით, — ნამდვილ რიცხვთა ყოველი (x, y) წყვილი
(და მხოლოდ ის), რომელიც აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, ამ წირის
რომელიმე წერტილის კოორდინატებს იძლევა. მაგ., $M_1(x_1, y_1)$ წერტილი
ძევს AB წირზე, ამიტომ გვექნება $y_1=f(x_1)$ და ვინაიდან $M_2(x_2, y_2)$
წერტილი არ ძევს ამავე წირზე, ამიტომ $y_2 \neq f(x_2)$ (ნახ. 36).

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ორ ცვლადს შორის ყოველ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას სიბრტყეზე შეესაბამება გარკვეული წირი.

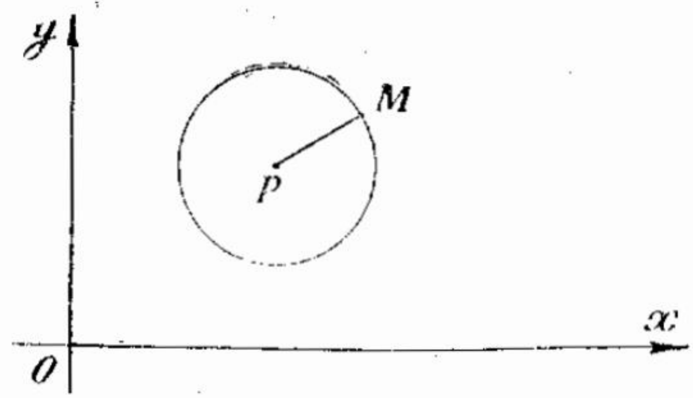
Oxy სიბრტყეზე მოთავსებულ წერტილთა სიმრავლიდან გამოვყოთ ისეთი ქვესიმრავლე, რომელიც გარკვეულ წესს ემორჩილება. მაგალითად,

---

[1] ეს ცნებები განმარტებული იქნება ქვემოთ.

როგორც ვიცით წრეწირი ეწოდება სიბრტყის ყველა წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, ანუ წერტილების სიმრავლეს, რომლებიც ერთი და იმავე $r>0$ მანძილითაა დაშორებული ამავე სიბრტყეზე მდებარე ერთი წერტილიდან, რომელსაც წრეწირის ცენტრი ეწოდება, ხოლო r-ს — მისი რადიუსი.

სიბრტყეზე, თუ ავიღებთ გარკვეულ წირს და ამ წირზე ავიღებთ ნებისმიერ M წერტილს, რომლის კოორდინატებია x, y და ვამოძრავებთ აღებულ წირზე, ვნახავთ, რომ x და y კოორდინატებიც შეიცვლება, მაგრამ ეს ცვლილება მოხდება არა ნებისმიერად, არამედ გარკვეული კანონზომიერებით, სახელდობრ ისე, რომ x-ისა და y-ის ცვლილებების დროს მიღებული M წერტილი მუდამ მდებარეობდეს აღებულ წირზე. მაგალითად, წრეწირზე x, y კოორდინატები ისე იცვლება, რომ $M(x, y)$ წერტილის დაშორება P ცენტრიდან ყოველთვის ტოლია r რადიუსისა.



ნახ. 43.

ზემოაღნიშნული თვისება შეიძლება გამოსახულ იქნეს წირის ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილის კოორდინატებს შორის დამოკიდებულების საშუალებით, რომელიც (1) სახის ან უფრო ზოგადად

$$F(x, y)=0 \qquad (1^*)$$

არაცხადი სახის განტოლებით ჩაიწერება და რომელსაც ამ წირის განტოლება ეწოდება.

მოცემულ წირზე აღებულ ნებისმიერ წერტილს **მიმდინარე წერტილი ეწოდება**, ხოლო მის კოორდინატებს კი წირის **მიმდინარე კოორდინატები**. მაშასადამე, **მოცემული წირის განტოლების შედგენა ნიშნავს ამ წირის მიმდინარე კოორდინატებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულების პოვნას.**

ავიღოთ, მაგალითად წრეწირი, რომლის ცენტრი $P(a, b)$ წერტილშია, ხოლო რადიუსი ტოლია R-ის (ნახ. 43).

ვთქვათ, წრეწირის მიმდინარე წერტილია $M(x, y)$. მის კოორდინატებს შორის დავამყაროთ ფუნქციონალური დამოკიდებულება. ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$PM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}. \qquad (2)$$

ვინაიდან $PM=R$, ამიტომ (2)-დან მივიღებთ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \qquad (3)$$

რაც წარმოადგენს აღებული წრეწირის განტოლებას.

კერძოდ, თუ წრეწირის ცენტრი P, კოორდინატთა სათავეშია, მაშინ $a=b=0$ და (3) განტოლებიდან გვექნება:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (4)$$

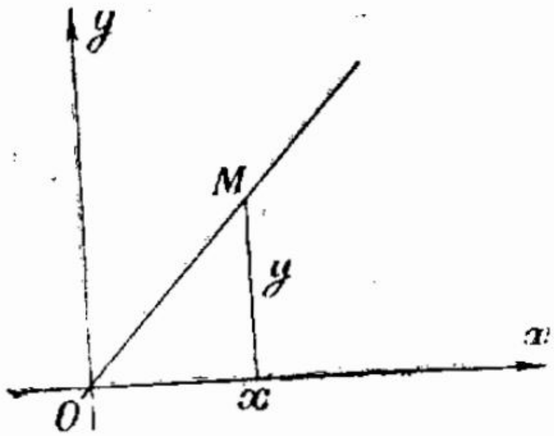
ახლა განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემის პირველი და მესამე მეოთხედების ბისექტრისა (ნახ. 38). აშკარაა, რომ ამ წრფეზე, სადაც არ უნდა ავიღოთ M წერტილი, მის x და y კოორდინატებს შორის მუდამ იარსებებს დამოკიდებულება

$$y=x.$$

ამრიგად, ეს არის აღებული წრფის განტოლება.

მაშასადამე, აღნიშნული ბისექტრისა შემდეგი სიმრავლეა (ნახ. 44):

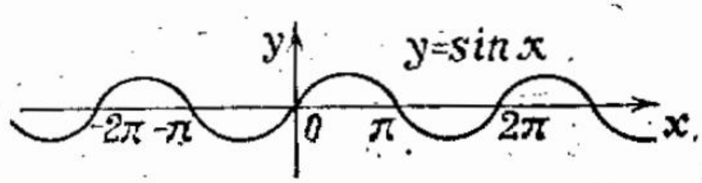
$$L=\{(x, x)\mid x\in R\}.$$



ნახ. 44.

როგორც ზემოთ დავინახეთ, წრეწირის განტოლებაში მიმდინარე კოორდინატები x და y შედის მეორე ხარისხში, ხოლო წრფის განტოლებაში — პირველ ხარისხში.

თუ მოცემული წირის განტოლებაა (1*), მაშინ ამ განტოლების ხასიათის მიხედვით ხდება შესაბამ წირთა კლასიფიკაცია. ასე მაგალითად, თუ (1*) განტოლებაში $F(x, y)$ წარმოადგენს x და y-ის მრავალწევრს, მაშინ წირს ალგებრულს უწოდებენ. ალგებრული წირის შემთხვევაში x და y კოორდინატების უმაღლეს ხარისხს (1*) განტოლებაში, ამ წირის რიგი ეწოდება. ამრიგად, წრფე პირველი რიგის, ხოლო წრეწირი მეორე რიგის ალგებრული წირია.



ნახ. 45.

თუ $f(x)$, $(F(x, y))$ წარმოადგენს ტრანსცენდენტულ ფუნქციას, მაშინ შესაბამ წირს ტრანსცენდენტული ეწოდება. მაგალითად ფუნქცია $y=\sin x$ ტრანსცენდენტულია, ამიტომ მისი გრაფიკიც ტრანსცენდენტული წირია, რომელსაც **სინუსოიდა** ეწოდება (ნახ. 45).

მაშასადამე, ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნა: ა) როდესაც მოცემულია განტოლება, შეიძლება ავაგოთ შესაბამისი წირი (გრაფიკი) და ბ) პირიქით, ყოველი მოცემული წირისათვის შეიძლება შევადგინოთ შესაბამისი განტოლება. ასეთი მჭიდრო კავშირი, რომელიც არსებობს მოცემულ წირებსა და განტოლებებს შორის, საფუძველს იძლევა შევისწავლოთ წირის გეომეტრიული თვისებები შესაბამისი განტოლებების გამოკვლევის გზით.

მათემატიკის იმ დარგს, რომელიც შეისწავლის გეომეტრიული ობიექტების: წირების, ზედაპირების და სხვათა თვისებებს ალგებრის ხერხების საშუალებით. ეწოდება **ანალიზური გეომეტრია.**

§ 5. წირის პარამეტრული განტოლება

ვთქვათ M წერტილის x, y კოორდინატები მოცემულია, როგორც ფუნქციები t პარამეტრისა, რომლებიც განსაზღვრულია ერთსა და იმავე არეში

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

მაშასადამე (1) სისტემა აკავშირებს y-ს x-თან t პარამეტრის საშუალებით. ზემონათქვამის თანახმად, იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (1) განტოლებათა სისტემას, იქნება წირი სიბრტყეზე, ხოლო (1) განტოლებები კი ამ **წ ი რ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ი ა პ ა რ ა მ ე ტ რ უ ლ ი ს ა ხ ი თ.**

პარამეტრულ განტოლებებს განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მექანიკაში. სახელდობრ, თუ მატერიალური M წერტილი მოძრაობს სიბრტყეზე, მაშინ მისი x და y კოორდინატები იცვლება t დროის მიხედვით. თუ მოცემულია (1) განტოლებათა მარჯვენა ნაწილის $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციები, მაშინ შეგვიძლია განვსაზღვროთ დროის ყოველ t მომენტში წერტილის მდებარეობა სიბრტყეზე. ამიტომ (1) განტოლებებს ეწოდება **წ ე რ ტ ი ლ ი ს მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ი.** იმ წირს, რომელსაც წერტილი აღწერს სიბრტყეზე, ეწოდება მოძრავი წერტილის **ტ რ ა ე ქ ტ ო რ ი ა.** (1) განტოლებები წარმოადგენს ამ **ტ რ ა ე ქ ტ ო რ ი ი ს პ ა რ ა მ ე ტ რ უ ლ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ს.**

თუ (1)-ის ერთ-ერთი განტოლებიდან (ვთქვათ პირველიდან) განვსაზღვრავთ t-ს (ვთქვათ $t=\omega(x)$) და ჩავსვამთ მეორეში, მაშინ მივიღებთ

$$y=\psi\,[\omega(x)]=f(x), \tag{2}$$

რომელიც წარმოადგენს იმავე წირის განტოლებას დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. წრეწირის პარამეტრულ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\left.\begin{aligned} x&=a+R\cos t,\\ y&=b+R\sin t, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

სადაც t არის პარამეტრი.

მართლაც, თუ a და b შესაკრებებს გადავიტანთ მარცხენა მხარეს და მიღებულ განტოლებათა ორივე მხარეს ავამაღლებთ კვადრატში და შევკრებთ, მაშინ t პარამეტრი გამოირიცხება და მივიღებთ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

რომელიც წარმოადგენს წრეწირის უმარტივესი სახის განტოლებას, რომლის ცენტრის კოორდინატებია a, b და რადიუსი — R.

VIII თავი

წრფე

განვიხილოთ რაიმე სიბრტყე, რომელიც აღვნიშნოთ Ω ასოთი, ხოლო მასზე აღებული ნებისმიერი წრფე აღვნიშნოთ E ასოთი.

Ω სიბრტყეზე ავირჩიოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემა. ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ Ω სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი E წრფე აღნიშნულ სისტემაში განისაზღვრება პირველი ხარისხის განტოლებით. ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ E წრფე განისაზღვრება პირველი ხარისხის განტოლებით Ω სიბრტყეზე სპეციალურად არჩეულ ერთ რომელიმე დეკარტის მართკუთხა სისტემაში, ვინაიდან, მაშინ, კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებიდან (VI თავი, § 1) გამომდინარეობს, რომ აღებული წრფე განისაზღვრება პირველი ხარისხის განტოლებით დეკარტის ნებისმიერ მართკუთხა სისტემაში.

§ 1. წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით

დავამტკიცოთ შემდეგი:

თეორემა 1. ყოველი წრფის განტოლება პირველი ხარისხისაა.

დამტკიცება. განვიხილოთ Ω სიბრტყეზე E წრფის მდებარეობის ყველა შესაძლებელი შემთხვევა და ვუჩვენოთ, რომ ეს წრფე ყოველთვის ხასიათდება პირველი ხარისხის განტოლებით.

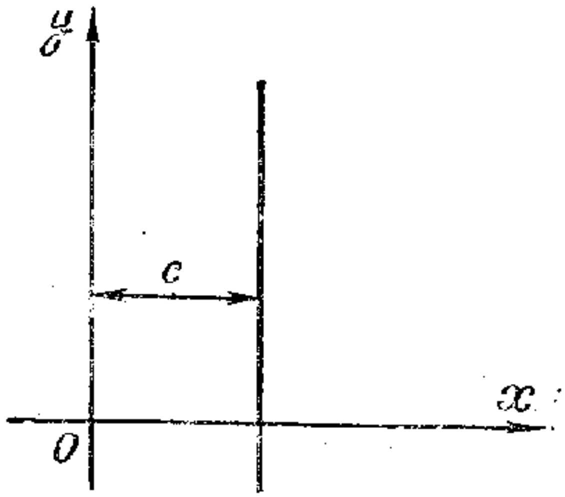
შემთხვევა 1. ვთქვათ, მოცემული E წრფე პარალელურია Oy ღერძის (ნახ. 46). მაშინ ცხადია, რომ მის ყველა წერტილს ექნება ერთი და იგივე აბსცისა. კერძოდ, თუ Ox ღერძთან E წრფის გადაკვეთის წერტილის აბსცისა არის c, მაშინ ცხადია, რომ E წრფეზე მდებარე ყოველი (x, y) წერტილისათვის (მხოლოდ მათთვის) ადგილი ექნება განტოლებას

$$x=c. \tag{1}$$

(1) წარმოადგენს მოცემული წრფის განტოლებას, როგორც ვხედავთ იგი პირველი ხარისხისაა. კერძოდ, როცა E წრფე მდებარეობს თვით Oy ღერძზე, მაშინ $c=0$, და ამრიგად მივიღებთ

$$x=0. \qquad (2)$$

შემთხვევა 2. დავუშვათ E წრფე პარალელურია Ox ღერძის (ნახ. 47). თუ Oy ღერძზე E წრფის გადაკვეთის წერტილის ორდინატა არის b, მაშინ ამ წრფის განტოლება იქნება



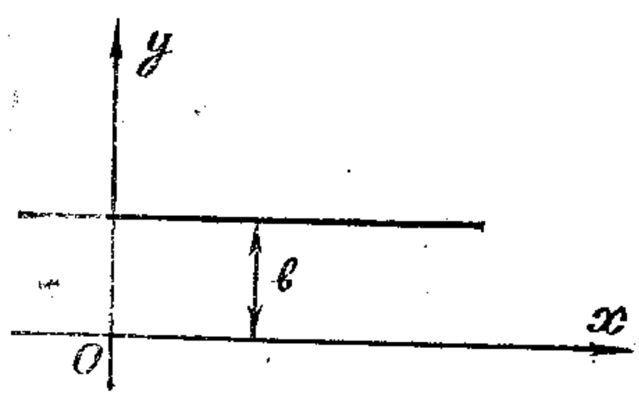
ნახ. 46.

$$y=b. \qquad (3)$$

კერძოდ, როცა მოცემული წრფე მდებარეობს თვით Ox ღერძზე. მაშინ $b=0$ და ამრიგად, მივიღებთ განტოლებას

$$y=0. \qquad (4)$$

შემთხვევა 3. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა E წრფე არ არის პარალელური არც ერთი კოორდინატთა ღერძისა. პირველ რიგში განვსაზღვროთ E წრფის მდებარეობა. კუთხე, რომელსაც შეადგენს E წრფე Ox ღერძთან აღვნიშნოთ α-თი. როგორც ვიცით ეს ის უმცირესი კუთხეა, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ (საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ) Ox ღერძის დადებითი მიმართულება, რომ იგი დავამთხვიოთ E წრფეს. აღვნიშნოთ b-თი Oy ღერძზე E წრფის გადაკვეთის B წერტილის ორდინატა, ეს ორი რიცხვი α და b სავსებით ცალსახად განსაზღვრავს E წრფის მდებარეობას კოორდინატთა Oxy სისტემის მიმართ (ნახ. 48).



ნახ. 47.

იმისათვის, რომ შევადგინოთ E წრფის განტოლება, საჭიროა ამ წრფის მიმდინარე x, y (ნებისმიერი M წერტილის) კოორდინატებს შორის დავამყაროთ კავშირი.

AKM მართკუთხა სამკუთხედიდან გვექნება (ნახ. 48)

$$y=MK=AK\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-AK\operatorname{tg}\alpha; \qquad (1)$$

მაგრამ

$$AK=AO-x, \quad b=AO\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-AO\operatorname{tg}\alpha.$$

ამიტომ (1)-დან მივიღებთ

$$y=-(AO'-x)\operatorname{tg}\alpha=-AO\operatorname{tg}\alpha+x\operatorname{tg}\alpha,$$

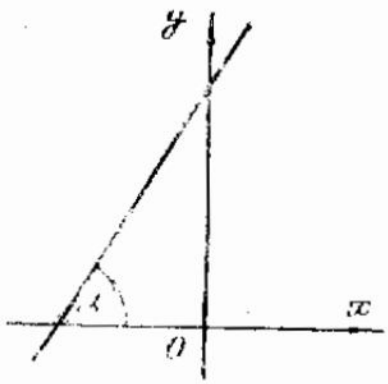
ანუ

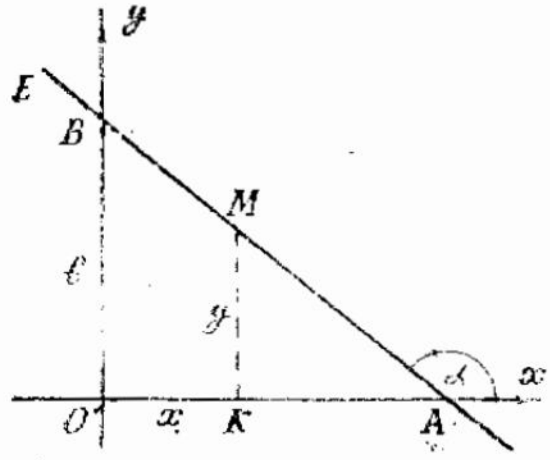
$$y=ax+b, \tag{2}$$

სადაც

$$a=\operatorname{tg}\alpha.$$

მაშასადამე, (2) წარმოადგენს E წრფის განტოლებას, რომელიც პირველი ხარისხისაა და ამრიგად თეორემა დამტკიცებულია.



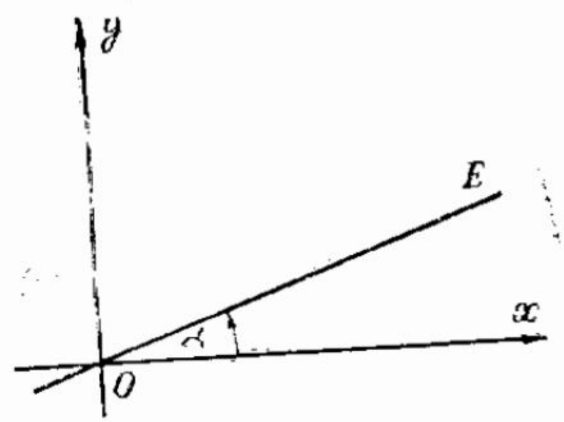


ნახ. 48.

შევნიშნოთ, რომ (2) სახით შეიძლება ჩაიწეროს ნებისმიერი წრფის განტოლება, რომელიც ორდინატთა ღერძის პარალელური არ არის.

(2) განტოლებაში x-ის კოეფიციენტი a, რომელიც უდრის წრფის მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხის ტანგენსს, განსაზღვრავს ამ წრფის დახრას Ox ღერძთან და მას წრფის კუთხურ კოეფიციენტს უწოდებენ. (2) განტოლებაში x-ის კოეფიციენტი a და თავისუფალი წევრი b, თანახმად პირობისა, ცნობილი სიდიდეებია. ამ სიდიდეებს E წრფის პარამეტრები ეწოდება.

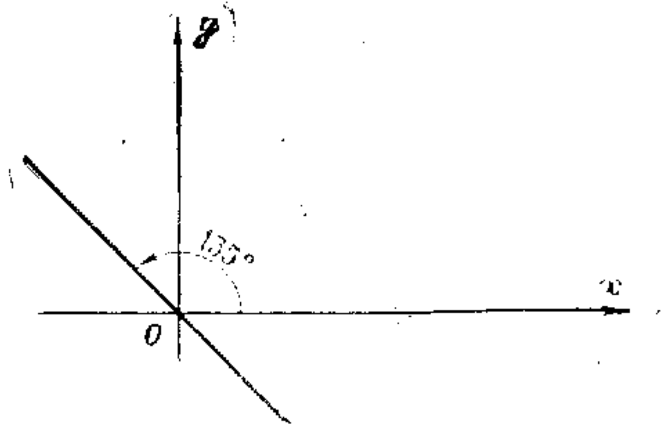
(2) განტოლებას უწოდებენ წრფის განტოლებას კუთხური კოეფიციენტით. განვიხილოთ კერძო შემთხვევები:



ნახ. 49.

როდესაც E წრფე პარალელურია Ox ღერძის, მაშინ E წრფის მიერ შედგენილი კუთხე Ox ღერძთან უდრის ნულს. ვინაიდან $\operatorname{tg}0^\circ=0$, ამიტომ $a=0$. მაშასადამე (2) განტოლებიდან კვლავ მივიღებთ ცნობილ შედეგს $y=b$.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა E წრფე გაივლის კოორდინატთა სათავეში. ამ შემთხვევაში $b=0$. **ამიტომ** (2) განტოლება მიიღებს **სახეს.**



ნახ. 50.

$$y=ax$$

სადაც a არის წრფის მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხის ტანგენსი ($a=\operatorname{tg}\alpha$) (ნახ. 49).

კერძოდ, $x+y=0$ ანუ $y=-x$ წარმოადგენს II და IV მეოთხედის ბისექტორული წრფის განტოლებას, ვინაიდან $\operatorname{tg} 135^\circ=-1$ (ნახ. 50).

§ 2. წრფის ზოგადი განტოლება

ახლა დავამტკიცოთ 1 თეორემის შებრუნებული

თეორემა 2. *პირველი ხარისხის ყოველი განტოლების გრაფიკი წრფეა.*

დამტკიცება. x და y-ის მიმართ პირველი ხარისხის ზოგადი სახის განტოლება იქნება

$$Ax+By+C=0. \tag{1}$$

სადაც A, B და C ნებისმიერი მუდმივებია, ამასთანავე იგულისხმება, რომ A და B რიცხვებს შორის ერთი მაინც $\neq 0$.

დავუშვათ, რომ $A=0$. მაშინ (1) განტოლებიდან დაგვრჩება $By+C=0$. ვინაიდან, პირობის თანახმად, $B\neq 0$, ამიტომ მივიღებთ

$$y=-\frac{C}{B}. \tag{2}$$

მაგრამ, როგორც ვიცით, ეს განტოლება Ox ღერძის პარალელური წრფის განტოლებაა.

ვთქვათ $B=0$. მაშინ (1) განტოლებიდან მივიღებთ $Ax+C=0$. ვინაიდან $A\neq 0$, ამიტომ გვექნება

$$x=-\frac{C}{A} \tag{3}$$

როგორც ვიცით (3) წარმოადგენს Oy ღერძის პარალელური წრფის განტოლებას.

თუ $C=0$. მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax+By=0, \tag{4}$$

საიდანაც (თუ $B \neq 0$)

$$y = -\frac{A}{B}x,$$

ეს განტოლება, როგორც ვიცით წარმოადგენს სათავეში გამავალი წრფის განტოლებას.

ამრიგად, როდესაც (1) განტოლებაში თავისუფალი წევრი $C=0$, მაშინ ამ განტოლებას აკმაყოფილებს სათავის კოორდინატები: (0, 0) და მაშასადამე, იგი გამოსახავს ისეთი წრფის განტოლებას, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში და პირიქით.

ბოლოს დავუშვათ, რომ $B \neq 0$, მაშინ (1) განტოლებას თუ ამოვხსნით y-ის მიმართ, მივიღებთ

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

ანუ, თუ აღვნიშნავთ $-\frac{A}{B}=a$, $-\frac{C}{B}=b$, მაშინ გვექნება

$$y = ax + b.$$

ეს კი 1 თეორემის ძალით წარმოადგენს წრფის განტოლებას. ამრიგად, 2 თეორემა დამტკიცებულია. (1) განტოლებას უწოდებენ წრფის ზოგად განტოლებას, ვინაიდან ნებისმიერი წრფის განტოლებას (1) სახე აქვს.

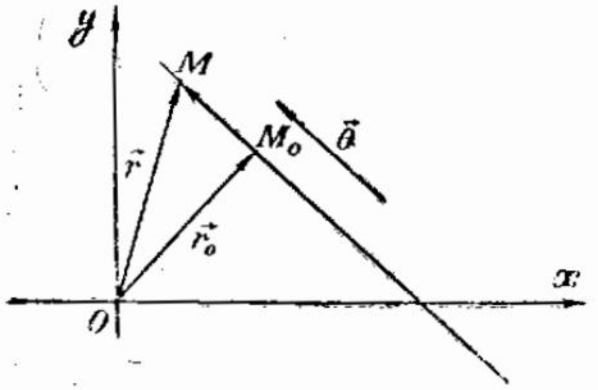
ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ თუ პირველი ხარისხის განტოლებაში x და y კოორდინატებიდან რომელიმე არ მონაწილეობს (ამ შემთხვევაში სათანადო კოეფიციენტი A ან B უდრის ნულს), მაშინ წრფე შესაბამი ღერძის პარალელურია. იმ შემთხვევაში, როცა $A \neq 0$ და $B \neq 0$, მაშინ წრფის განტოლებაში კუთხური კოეფიციენტი უდრის x-ის კოეფიციენტის შეფარდებას y-ის კოეფიციენტთან, აღებულს შებრუნებული ნიშნით.

§ 3. წრფის ვექტორული და პარამეტრული განტოლება

ავიღოთ სიბრტყეზე $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი და არანულოვანი ვექტორი $\vec{Q}$. შევადგინოთ განტოლება იმ წრფისა, რომელიც გადის M_0 წერტილზე $\vec{Q}$ ვექტორის პარალელურად. ამისათვის ავიღოთ წრფეზე ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილი და განვიხილოთ $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი, რომელიც ძევს მოცემულ წრფეზე და მაშასადამე, პარალელურია (კოლინეარულია) $\vec{Q}$ ვექტორისა. მაშინ, როგორც ვიცით, ყოველთვის მოიძებნება ისეთი t რიცხვი, რომ ამ ვექტორებს შორის ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{Q}. \tag{1}$$

პირიქით, თუ (1) განტოლებას ადგილი აქვს, მაშინ $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი პარალელურია $\vec{Q}$ ვექტორისა და M წერტილი ძევს იმ წრფეზე, რომელიც M_0 წერტილზე გაივლის $\vec{Q}$ ვექტორის პარალელურად (ნახ. 51).



ნახ. 51.

აღვნიშნოთ M_0 და M წერტილების რადიუს-ვექტორები O სათავის მიმართ, შესაბამისად $\vec{r}_0$ და $\vec{r}$-ით. მაშინ მივიღებთ

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\overrightarrow{M_0M}.$$

საიდანაც (1)-ის თანახმად გვექნება

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{Q}, \tag{2}$$

სადაც t პარამეტრია, (2) განტოლება წარმოადგენს წრფის პარამეტრულ განტოლებას ვექტორული სახით.

წრფის პარალელურ $\vec{Q}$ ვექტორს ეწოდება ამ წრფის მიმმართველი ვექტორი.

ახლა აღვნიშნოთ წრფის მიმმართველი $\vec{Q}$ ვექტორის გეგმილები სათანადო ღერძებზე a და b-თი. მაშინ, თუ (2) განტოლების ორივე მხარეს დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ წრფის პარამეტრულ განტოლებას მიმდინარე კოორდინატებში:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+at,\\ y&=y_0+bt.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

a, b რიცხვებს წრფის მიმართულების კოეფიციენტები ეწოდება.

§ 4. წრფის კანონიკური განტოლება

წრფე, რომელიც გაივლის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე მოცემული $\vec{Q}(a, b)$ ვექტორის პარალელურად, ერთადერთია, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, (3) წარმოადგენს ამ წრფის განტოლებებს პარამეტრული სახით, სადაც t პარამეტრია. ახლა გამოვრიცხოთ (3) განტოლებებიდან t პარამეტრი, ამისათვის თითოეული ამ განტოლებებიდან განვსაზღვროთ t:

$$t=\frac{x-x_0}{a},\quad t=\frac{y-y_0}{b},$$

საიდანაც მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

რომელსაც ეწოდება წრფის კანონიკური განტოლება.

მაგალითი. განტოლება იმ წრფისა, რომელიც გადის $M_0(3, -1)$ წერტილზე და რომლის მიმმართველი ვექტორია $\vec{Q}(4, -5)$, იქნება

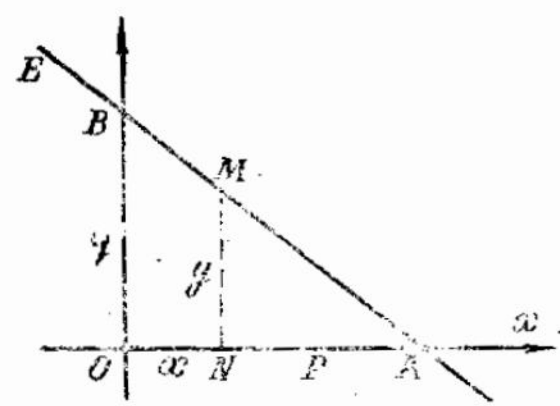
$$\frac{x - 3}{4} = \frac{y + 1}{-5},$$

ანუ

$$5x + 4y - 11 = 0.$$

§ 5. წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში

განვიხილოთ სიბრტყეზე E წრფე, რომელიც არ გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე და არაა პარალელური არც ერთი საკოორდინატო ღერძისა. ცხადია, რომ, მაშინ იგი გადაკვეთს როგორც Ox ისე Oy ღერძს. E წრფის მდებარეობა ამ შემთხვევაში იქნება ცალსახად განსაზღვრული, თუ გვეცოდინება წრფის მიერ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები, ან, რაც იგივეა, Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისა p და Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატა q (ნახ. 52). p და q სიდიდეები იქნება E წრფის მდებარეობის განმსაზღვრელი პარამეტრები.



ნახ. 52.

ამრიგად, ვიგულისხმოთ, რომ E წრფის p და q პარამეტრები ცნობილია და შევადგინოთ მისი განტოლება; ამისათვის ავიღოთ E წრფეზე მიმდინარე $M(x, y)$ წერტილი. ვინაიდან $MN \parallel BO$, ამიტომ AOB და ANM მსგავსი სამკუთხედებია და გვექნება:

$$\frac{NA}{OA} = \frac{NM}{OB}. \tag{1}$$

მეორე მხრივ

$$OA = p; \quad NA = p - x;$$

$$NM = y; \quad OB = q.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1)-ში, დავწერთ

$$\frac{p - x}{p} = \frac{y}{q},$$

ანუ

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1. \qquad (2)$$

(2)-ს ეწოდება E წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში.

§ 6. წრფის აგება მოცემული განტოლებით

ახლა ვთქვათ, მოცემულია პირველი ხარისხის განტოლება

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

და საჭიროა ავაგოთ ის წრფე, რომელიც ამ განტოლებას შეესაბამება. ამისათვის, როგორც ცნობილია, საკმარისია ვიპოვოთ ნებისმიერი ორი წერტილი რომელზედაც ეს წრფე გაივლის (ანუ სხვაგვარად, რომლებიც ამ წრფეზე ძევს). ასეთ ორ წერტილს ადვილად ვიპოვით, თუ (1) განტოლებაში ერთ-ერთ რომელიმე ცვლადს მივცემთ რაიმე რიცხვით მნიშვნელობას და მეორეს ისე განვსაზღვრავთ, რომ დაკმაყოფილდეს (1) განტოლება. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $C=0$. მაშინ გვექნება $Ax+By=0$. როგორც ვიცით წრფე გაივლის კოორდინატთა სათავეში. ამიტომ საკმარისია ვიპოვოთ მეორე ნებისმიერი წერტილი, რომელიც ამ წრფეზე ძევს. ამისათვის დავუშვათ, მაგალითად $x=1$. მაშინ გვექნება $A+By=0$, საიდანაც $y=-\frac{A}{B}$. ამრიგად, წერტილი $M\left(1,\ -\frac{A}{B}\right)$ ძევს წრფეზე, რომლის განტოლება არის $Ax+By=0$. საბოლოოდ, თუ გავატარებთ $M\left(1,\ -\frac{A}{B}\right)$ წერტილზე და სათავეზე წრფეს, მივიღებთ $Ax+By=0$ განტოლების შესაბამის წრფეს.

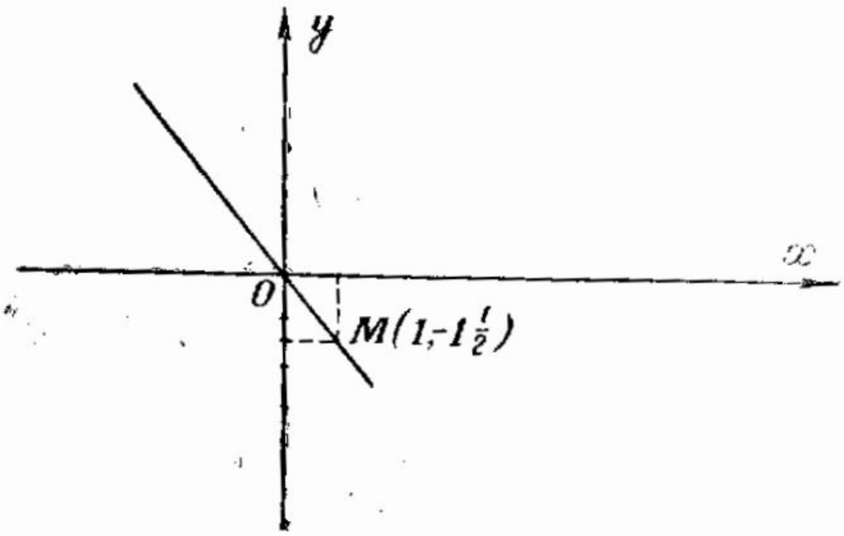
მაგალითი 1. ავაგოთ წრფე, რომლის განტოლება არის $3x+2y=0$. დავუშვათ $x=1$, მაშინ გვექნება $3+2y=0$, საიდანაც $y=-1\frac{1}{2}$. ამრიგად, $M\left(1,\ -1\frac{1}{2}\right)$ წერტილი ძევს წრფეზე. ახლა, თუ ამ წერტილზე და სათავეზე გავატარებთ წრფეს, მივიღებთ იმ წრფეს, რომლის განტოლებაც არის $3x+2y=0$. (ნახ. 53).

ახლა დავუშვათ, რომ $C\neq 0$, მაშინ, როცა $B=0$ ან $A=0$ ცალ-ცალკე, გვექნება შესაბამისად Oy და Ox ღერძების პარალელური წრფეები.

მაგალითი 2. თუ $2x+3=0$, მაშინ $x=-1\frac{1}{2}$. შესაბამისი წრფე პარალელურია Oy ღერძის და ამ ღერძიდან დაშორებულია $1\frac{1}{2}$ მანძილით (ნახ. 54).

თუ $5y-8=0$, მაშინ $y=1\frac{3}{5}$. სათანადო წრფე პარალელურია Ox ღერძის და ამ ღერძის ზემოთ დაცილებულია $1\frac{3}{5}$ მანძილით (ნახ. 55).

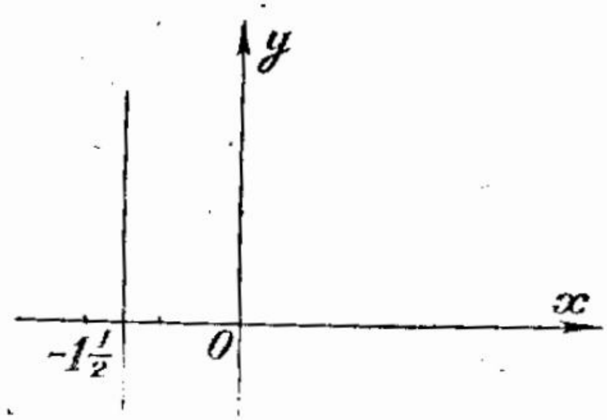
უკანასკნელად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა არც ერთი A, B, C არ უდრის ნულს, მაშინ, ვიპოვოთ ნებისმიერი ორი წერტილი, რომელიც



ნახ. 53.

ძევს წრფეზე, რომლის განტოლება არის $Ax+By+C=0$. სიმარტივისათვის, საკმარისია ვიპოვოთ ის ორი წერტილი, რომლებზედაც წრფე იკვეთება სათანადო კოორდინატთა ღერძებზე. რომ ვიპოვოთ Ox ღერძზე წრფის გადაკვეთის წერტილი, ამისათვის მოცემულ განტოლებაში დავუშვათ $y=0$. მაშინ გვექნება $Ax+C=0$, საიდანაც

$$x=-\frac{C}{A}.$$

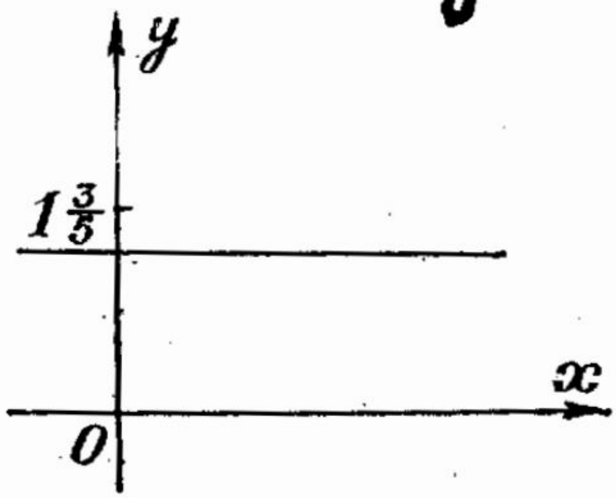


ნახ. 54.

ხოლო, რომ ვიპოვოთ Oy ღერძზე წრფის გადაკვეთის წერტილი განტოლებაში დავუშვათ $x=0$; მაშინ გვექნება $By+C=0$, საიდანაც $y=-\frac{C}{B}$. ამრიგად, წრფის მონაკვეთი Ox ღერძზე იქნება $p=-\frac{C}{A}$, ხოლო Oy ღერძზე $q=-\frac{C}{B}$. ამ წერტილებზე გატარებული წრფე შეესაბამება მოცემულ განტოლებას

$$Ax+By+C=0.$$

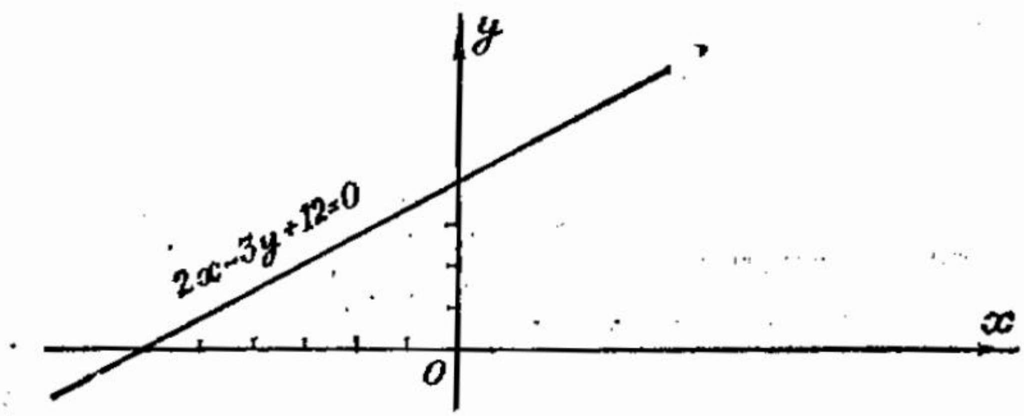
მაგალითი 3. ავაგოთ წრფე, რომლის განტოლება არის $2x-$ $-3y+12=0$. დავუშვათ $x=0$, მაშინ გვექნება $-3y+12=0$, საიდანაც $y=4$. ახლა დავუშვათ $y=0$, მაშინ მივიღებთ $2x+12=0$, საიდანაც $x=-6$.



ნახ. 55

გადავზომოთ Ox ღერძზე მონაკვეთი $p=-6$ და Oy ღერძზე $q=4$, და გავატაროთ სათანადო წერტილებზე წრფე (ნახ. 56).

დასკვნა. ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ მოცემულია წრფე, ყოველთვის შეიძლება მისი განტოლების შედგენა, რომელიც x და y მიმდინარე კოორდინატების მიმართ პირველი ხარისხის ალგებრული განტოლება იქნება და პირიქით, x და y ცვლადების მიმართ პირველი ხარისხის მოცემული განტოლებისათვის ყოველთვის შეიძლება სიბრტყეზე შესაბამისი წრფის აგება.



ნახ. 56.

ამიტომ, როდესაც ამბობენ *მოცემულია წრფე* — *ეს ნიშნავს, რომ მოცემულია ამ წრფის განტოლება და პირიქით.*

ამრიგად, წრფის განტოლების საშუალებით შეიძლება ამ წრფესთან დაკავშირებული სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნა.

§ 7. ორი წრფის გადაკვეთა

ვთქვათ მოცემულია ორი E_1 და E_2 წრფე, რომელთა განტოლებებია შესაბამისად

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, & (E_1) \\ A_2x+B_2y+C_2=0. & (E_2) \end{cases}$$

ვიპოვოთ მათი გადაკვეთის $M_1(x_1, y_1)$ წერტილი.

ვინაიდან M_1 წერტილი ერთდროულად მდებარეობს ორივე წრფეზე, ამიტომ მისმა x_1 და y_1 კოორდინატებმა უნდა დააკმაყოფილოს ერთდროულად ორივე განტოლება. ე. ი.

$$\begin{cases} A_1x_1+B_1y_1+C_1=0, \\ A_2x_1+B_2y_1+C_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

ამრიგად, საკითხი დაიყვანება ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე.

როგორც ვიცით ამ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ამ შემთხვევაში გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებისათვის, თანახმად კრამერის ფორმულისა, გვექნება:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{2}$$

ახლა დავუშვათ, რომ $\Delta=0$; ე. ი.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

ამ დროს გვექნება ორი შემთხვევა: ან

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2} \quad \text{ან} \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

პირველ შემთხვევაში (1) სისტემა თავსებადი არ არის და მაშასადამე მოცემული წრფეები არ გადაიკვეთებიან, ანუ ურთიერთპარალელური წრფეებია. განვიხილოთ მეორე შემთხვევა:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

აღვნიშნოთ ამ შეფარდებათა საერთო მნიშვნელობა λ-თი (სადაც $\lambda\neq 0$), მაშინ გვექნება $A_1=\lambda A_2$, $B_1=\lambda B_2$, $C_1=\lambda C_2$. თუ ამათ შევიტანთ E_1 წრფის (E_1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\lambda A_2x+\lambda B_2y+\lambda C_2=0,$$

საიდანაც λ-ზე შეკვეცით მივიღებთ E_2 წრფის (E_2) განტოლებას, მაშასადამე, პირველი და მეორე წრფის განტოლებები ტოლფასი განტოლე-

ბებია. ამრიგად, ორივე მოცემული განტოლება ფაქტიურად წარმოადგენს ერთსა და იმავე წრფეს.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი: 1) განვსაზღვროთ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილი.

$$2x+3y-8=0,$$
$$5x-4y+1=0.$$

ვინაიდან ამ სისტემის დეტერმინანტი $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-23\neq 0$, ამიტომ მათი გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები იქნება

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8 & 3\\ -1 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -4\end{vmatrix}}=1\frac{6}{23},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 8\\ 5 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -4\end{vmatrix}}=1\frac{19}{23}.$$

2) განვიხილოთ ორი წრფე:

$$5x-2y+1=0,$$
$$15x-6y+7=0.$$

ვინაიდან ამ სისტემაში x და y-ის კოეფიციენტები პროპორციულია და

$$\frac{5}{15}=\frac{-2}{-6}\neq\frac{1}{7},$$

ამიტომ აღებული წრფეები ერთმანეთის პარალელურია.

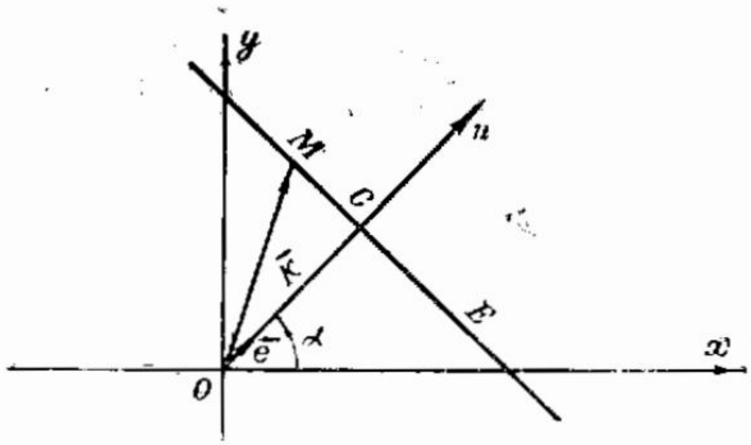
§ 8. წრფის ნორმალური განტოლება

ვთქვათ მოცემულია რაიმე E წრფე, რომელიც არ გადის კოორდინატთა სათავეში. სათავიდან გავატაროთ ამ წრფის მართობულად n წრფე, რომელსაც მოცემული წრფის ნ ო რ მ ა ლ ი ეწოდება. აღვნიშნოთ n ნორმალის გადაკვეთის წერტილი E წრფესთან C-თი. ავირჩიოთ n ნორმალზე დადებითი მიმართულება სათავიდან C წერტილისაკენ (როცა E წრფე გადის O სათავეში, მაშინ ნორმალის დადებითი მიმართულება ნებისმიერად შეიძლება ავირჩიოთ), მაშასადამე n ნორმალი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ღერძი.

აღვნიშნოთ OC მონაკვეთის სიგრძე k-თი, ხოლო n ნორმალის მიერ შედგენილი კუთხე Ox ღერძთან α-თი. ცხადია, რომ k და α სიდიდეები ცალსახად განსაზღვრავენ E წრფის მდებარეობას Oxy სისტემის მიმართ [1]

[1] სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს იმას ნიშნავს, რომ არ არსებობს სიბრტყეზე მეორე წრფე გარდა E წრფისა, რომელსაც იგივე k და α პარამეტრები ჰქონდეს.

(ნახ. 57), ამ სიდიდეებს მოცემული წრფის პარამეტრები ეწოდება. ჩავთვალოთ, რომ ისინი ცნობილი სიდიდეებია და შევადგინოთ წრფის განტოლება. ამისათვის ავიღოთ E წრფეზე ნებისმიერი M წერტილი და მის x, y კოორდინატებს შორის დავამყაროთ კავშირი. ვინაიდან OC მონაკვეთის ორიენტირება ემთხვევა n ნორმალის დადებით მიმართულებას, ამიტომ ცხადია რომ $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის გეგმილი n ნორმალზე იქნება k-ს ტოლი, ე. ი.



ნახ. 57.

$$\text{გეგ}_n\, \overrightarrow{OM}=k \qquad (1)$$

მეორე მხრივ, როგორც ვიცით

$$(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e})=\text{გეგ}_n\, \overrightarrow{OM}, \qquad (2)$$

სადაც $\vec{e}$ წარმოადგენს n ნორმალის მგეზავს, ხოლო $\overrightarrow{OM}$-ის გეგმილებია x, y. გამოვიანგარიშოთ $\vec{e}$ მგეზავის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$\text{გეგ}_{0x}\,\vec{e}=\cos\alpha, \quad \text{გეგ}_{0y}\,\vec{e}=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$$

ე. ი. $\vec{e}(\cos\alpha, \sin\alpha)$. ამიტომ სკალარული ნამრავლისათვის გვექნება V თ. § 17)

$$(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e})=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$

საიდანაც (1) და (2) ფორმულების ძალით მივიღებთ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=k$$

ანუ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-k=0. \qquad (3)$$

ამ განტოლებას უწოდებენ წრფის ნორმალურ განტოლებას.

§ 9. წრფის ზოგადი განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე

ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორ დაიყვანება წრფის ზოგადი განტოლება ნორმალურ სახეზე. ვთქვათ წრფის ზოგადი განტოლება არის

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

ხოლო იმავე წრფის ნორმალური განტოლება იყოს

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-k=0 \qquad (2)$$

ვინაიდან (1) და (2) განტოლება სიბრტყეზე განსაზღვრავს ერთსა და იმავე წრფეს, ამიტომ მათი კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები უნდა იყვნენ შესაბამისად ერთმანეთის პროპორციული (§ 7), რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ (1) განტოლების ყველა წევრს გავამრავლებთ λ-ზე, მაშინ მიღებული განტოლება

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0$$

უნდა დაემთხვეს (2) განტოლებას. ამრიგად გვექნება

$$\lambda A=\cos\alpha,\quad \lambda B=\sin\alpha,\quad \lambda C=-k. \tag{3}$$

(3) ტოლობებიდან ადვილად ვიპოვით λ, α და k უცნობებს (1) განტოლების A, B, C კოეფიციენტების საშუალებით. მართლაც (3)-ის პირველ ორ განტოლებას თუ ავიყვანთ კვადრატში და შევკრებთ, მაშინ მივიღებთ

$$\lambda^2(A^2+B^2)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

ანუ

$$\lambda^2(A^2+B^2)=1,$$

საიდანაც

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{4}$$

(4) ფორმულაში რადიკალის წინ ნიშანი უნდა შევარჩიოთ თავისუფალი წევრის, ე. ი. C-ს ნიშნის საწინააღმდეგოდ იმისათვის, რომ ადგილი ექნეს (3)-ის მესამე ტოლობასაც. როდესაც $C=0$, მაშინ ნიშანი შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერად. ამის შემდეგ (3)-დან მივიღებთ:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{5}$$

$$k=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};$$

რის შემდეგ (1) განტოლება მიიღებს (2) განტოლების სახეს:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\mp\sqrt{A^2+B^2}}=0, \tag{6}$$

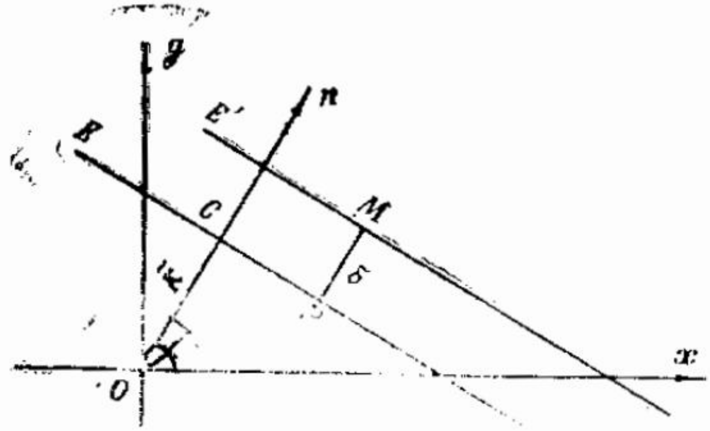
λ-ს უწოდებენ მანორმალებელ მამრავლს.

§ 10. მანძილი მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფემდე

წრფის ზოგადი განტოლება ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ ნორმალურ სახეზე. ვთქვათ მოცემულია E წრფე ნორმალური განტოლების სახით:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-k=0, \tag{1}$$

სადაც k არის სათავიდან E წრფეზე დაშვებული OC მართობის სიგრძე, ხოლო α — მის მიერ შედგენილი კუთხე Ox ღერძთან. ავიღოთ E წრფის გარეშე $M(x_1, y_1)$ წერტილი (ნახ. 58). მოცემული M წერტილის გადახრას E წრფიდან, უწოდებენ ისეთ δ რიცხვს, რომელიც აბსოლუტური მნიშვნელობით უდრის M წერტილიდან E წრფემდე დაშვებული მართობის სიგრძეს და, რომელიც დადებითია, როცა მოცემული M წერტილი და კოორდინატთა სათავე ძევს E წრფის სხვადასხვა მხარეს, და — უარყოფითია, თუ M წერტილი და სათავე ძევს მოცემული წრფის ერთ მხარეს. იმ შემთხვევაში, როცა წერტილი ძევს მოცემულ წრფეზე, მაშინ გადახრა უდრის ნულს.



ნახ. 58.

ახლა დავუბრუნდეთ (1) განტოლებას და ვიპოვოთ M წერტილის δ გადახრა ამ წრფიდან. ამისათვის M წერტილში გავატაროთ დამხმარე E' წრფე მოცემულ E წრფის პარალელურად. მაშინ E' წრფის ნორმალური განტოლება იქნება

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - (k+\delta) = 0, \qquad (2)$$

ვინაიდან E' წრფე გადის $M(x_1, y_1)$ წერტილში, ამიტომ მისი x_1, y_1 კოორდინატები დააკმაყოფილებს (2) განტოლებას. რის გამოც გვექნება

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - k - \delta = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - k \qquad (3)$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ მოცემული $M(x_1, y_1)$ წერტილის გადახრა მოცემული წრფიდან, საჭიროა ამ წრფის ნორმალური განტოლების მარცხენა მხარეს მიმდინარე x, y კოორდინატების ნაცვლად ჩავსვათ მოცემული წერტილის x_1 და y_1 კოორდინატები.

რაც შეეხება h მანძილს მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფემდე, იგი წარმოადგენს გადახრის აბსოლუტურ მნიშვნელობას და გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$h = |\delta| = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - k|.$$

თუ წრფის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით, მაშინ

$$h=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{4}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ მოცემულია წრფე

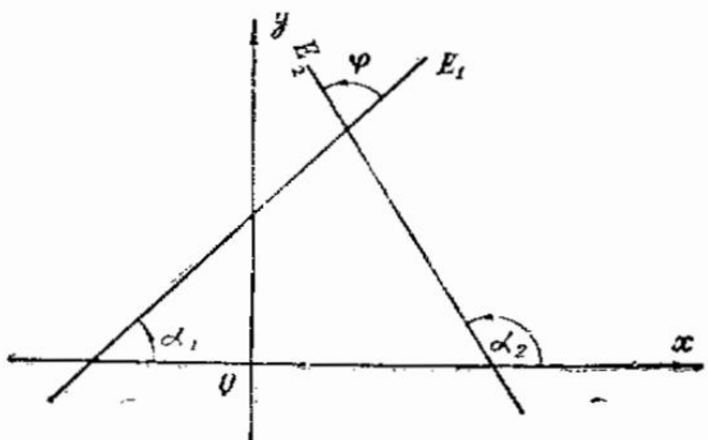
$$4x-3y+6=0, \tag{5}$$

და მის გარეშე მდებარე წერტილი $M(-1,\ 2)$. ვიპოვოთ მანძილი ამ წერტილიდან (5) წრფემდე. (4) ფორმულის ძალით გვექნება

$$h=\frac{|4(-1)-3\cdot 2+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{4}{5}.$$

§ 11. ორ წრფეს შორის კუთხე

ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფე E_1 და E_2, რომლებიც Oy ღერძის პარალელური არ არიან, მაშინ ამ წრფეთა განტოლებები შეგვიძლია ჩავწეროთ კუთხურ კოეფიციენტებში:



ნახ. 59.

$$y=a_1x+b_1, \tag{1}$$

$$y=a_2x+b_2. \tag{2}$$

E_1 და E_2 წრფეთა შორის კუთხე აღვნიშნოთ φ-თი, თანახმად შეთანხმებისა (IV თ. § 8). ეს ის კუთხეა, რომლითაც უნდა შემოვაბრუნოთ E_1 წრფე დადებითი მიმართულებით (ე. ი. საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ), რომ იგი დაემთხვეს E_2 წრფეს (ნახ. 59).

მოცემულ წრფეთა (1) და (2) განტოლებებში

$$a_1=\operatorname{tg}\alpha_1,\quad a_2=\operatorname{tg}\alpha_2, \tag{3}$$

სადაც α_1 და α_2 წარმოადგენენ იმ კუთხეებს, რომლებსაც E_1 და E_2 წრფეები ადგენენ შესაბამისად Ox ღერძთან. ვინაიდან

$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1,$$

ხოლო

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2},$$

ამიტომ (3)-ის ძალით გვექნება

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a_2-a_1}{1+a_1 a_2}. \tag{4}$$

ახლა განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა, გამოვარკვიოთ მოცემულ წრფეთა ურთიერთპარალელობისა და მართობულობის პირობები.

§ 12. ორი წრფის პარალელურობისა და მართობულობის პირობები

1) E_1 და E_2 წრფე ურთიერთპარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ადგენენ Ox ღერძთან ტოლ კუთხეებს, ე. ი. თუ $\alpha_1=\alpha_2$, მაშინ $\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2$, აქედან $a_1=a_2$.

ამრიგად, ორი წრფის პარალელობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი კუთხური კოეფიციენტები იყოს ერთმანეთის ტოლი.

2) ორი წრფე ურთიერთმართობულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ შორის კუთხე $\varphi=\frac{\pi}{2}$. ამ შემთხვევაში § 11-ის (4) ფორმულიდან გვექნება

$$\alpha_2=\frac{\pi}{2}+\alpha_1,$$

აქედან

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1\right)=-\operatorname{ctg}\alpha_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}.$$

მაშასადამე

$$a_2=-\frac{1}{a_1}, \quad \text{ანუ} \quad a_1 a_2=-1.$$

ეს ფორმულა კარგავს აზრს, როცა $a_1=0$. ამ შემთხვევაში a_2 არ არსებობს.

ამრიგად, თუ $a_1\neq 0$, მაშინ ორი წრფის ურთიერთმართობულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ერთი მათგანის კუთხური კოეფიციენტი ტოლი იყოს მეორის შებრუნებულისა როგორც ნიშნით, ისე სიდიდით.

ახლა, თუ მოცემული წრფეებიდან ერთ-ერთი, მაგალითად, E_1 პარალელურია Oy ღერძის, მაშინ (4) ფორმულა კარგავს აზრს, ამ შემთხვევაში, თუ α არის E_2 წრფესა და Ox ღერძს შორის კუთხე, მაშინ მოცემულ წრფეებს შორის კუთხე განისაზღვრება უშუალოდ

$$\varphi=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

დაბოლოს, დავუშვათ, რომ E_1 და E_2 წრფეთა განტოლებები მოცემულია ზოგადი სახით:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0.$$

მაშინ

$$a_1=-\frac{A_1}{B_1}, \quad a_2=-\frac{A_2}{B_2},$$

და (4) ფორმულა ამ შემთხვევაში მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-B_1A_2}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{1}$$

როცა E_1 და E_2 წრფე ერთმანეთის პარალელურია, მაშინ მრიცხველი ნულის ტოლია, საიდანაც კვლავ მივიღებთ (§ 7):

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}, \quad \text{ანუ} \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2};$$

ხოლო როცა E_1 და E_2 წრფე ერთმანეთის მართობია, მაშინ მნიშვნელი იქნება ნული

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი: განვსაზღვროთ კუთხე ორ წრფეს შორის

$$6x-3y+7=0,$$

$$21x+7y+9=0.$$

(1) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{6\cdot 7-(-3)\cdot 21}{6\cdot 21+(-3)\cdot 7}=1.$$

აქედან $\varphi=45°$.

§ 13. წრფეთა კონა

ვთქვათ $M_1(x_1, y_1)$ წერტილი მოცემულია სიბრტყეზე. ერთ წერტილზე გადის წრფეთა უსასრულო სიმრავლე. ყველა იმ წრფეთა ერთობლიობას, რომელიც გადის M_1 წერტილზე, ეწოდება წ რ ფ ე თ ა კ ო ნ ა ცენტრით M_1 წერტილში. შევადგინოთ ამ კონის განტოლება. ამისათვის დავწეროთ წრფეთა კონის ნებისმიერი წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით:

$$y=ax+b. \tag{1}$$

ვინაიდან იგი გადის მოცემულ M_1 წერტილზე, ამიტომ

$$y_1=ax_1+b.$$

აქედან, თუ განვსაზღვრავთ b-ს და ჩავსვამთ (1)-ში, მივიღებთ

$$y-y_1=a(x-x_1); \tag{2}$$

სწორედ ესაა წრფეთა კონის განტოლება ცენტრით $M_1(x_1, y_1)$ წერტილში. როგორც ვხედავთ, განტოლება დამოკიდებულია ერთ ნებისმიერ a პარამეტრზე, ამ პარამეტრის ცვლილებით მივიღებთ M_1 წერტილზე გამავალ სხვადასხვა წრფეს. (2) განტოლებიდან არ მიიღება კონის იმ წრფის განტოლება, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია.

§ 14. მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება

ვთქვათ, მოცემულია სიბრტყეზე ორი წერტილი: $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$. შევადგინოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც ამ ორ წერტილზე გადის. ამისათვის ჯერ დავწეროთ წრფეთა კონის განტოლება ცენტრით M_1 წერტილზე:

$$y-y_1=a(x-x_1).$$

ჩვენი მიზანია ამ წრფეთა კონიდან ავარჩიოთ ის წრფე, რომელიც იმავე დროს გაივლის M_2 წერტილზე. ამისათვის საჭიროა ამ წერტილის კოორდინატებმა დააკმაყოფილოს წრფეთა კონის განტოლება, ე. ი.

$$y_2-y_1=a(x_2-x_1).$$

აქედან განვსაზღვრავთ საძიებელი წრფის კუთხურ კოეფიციენტს:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (1) განტოლებაში, მივიღებთ M_1 და M_2 წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

ანუ

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

აქვე შევნიშნოთ, როცა, მაგალითად $y_2=y_1$, მაშინ უკანასკნელი პროპორციის ნაცვლად საძიებელი წრფის განტოლებას წერენ ასეთი სახით $y=y_1$. ე. ი. მიღებულია შეთანხმება: თუ ორწევრა პროპორციაში, რომელიმე მნიშვნელი ნულის ტოლია, პროპორცია უნდა შეიცვალოს შესაბამისი მრიცხველის ნულთან გატოლებით მიღებული ტოლობით.

§ 15. ზოგიერთი ამოცანა წრფეზე

ამოცანა 1. მოცემულია წრფე $Ax+By+C=0$ და მის გარეშე წერტილი $M_1(x_1, y_1)$. შევადგინოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც ამ წერტილზე გაივლის მოცემული წრფის პარალელურად.

ამისათვის ჯერ დავწეროთ M წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლება:

$$y-y_1=a(x-x_1). \tag{1}$$

ახლა განვსაზღვროთ მოცემული წრფის კუთხური კოეფიციენტი (§ 2):

$$a_1=-\frac{A}{B}.$$

ორი წრფის პარალელობის პირობის თანახმად

$$a=a_1=-\frac{A}{B}.$$

ამიტომ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე გაივლის მოცემული წრფის პარალელურად, იქნება:

$$y-y_1=-\frac{A}{B}(x-x_1).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ მოცემულია წრფე

$$3x-4y+5=0 \tag{2}$$

და მის გარეშე წერტილი $M(-1, 2)$. შევადგინოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც M წერტილზე გაივლის მოცემული წრფის პარალელურად.

ჯერ დავწეროთ M წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლება:

$$y-2=a(x+1). \tag{3}$$

ახლა განვსაზღვროთ (2) წრფის კუთხური კოეფიციენტი:

$$a_1=\frac{3}{4}.$$

ორი წრფის პარალელობის პირობის თანახმად

$$a=a_1=\frac{3}{4}.$$

ამიტომ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $M(-1, 2)$ წერტილზე გადის და მოცემული (2) წრფის პარალელურია, (3)-ის ძალით იქნება:

$$y-2=\frac{3}{4}(x+1),$$

ანუ

$$3x - 4y + 11 = 0.$$

ამოცანა 2. შევადგინოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე გაივლის $Ax + By + C = 0$ წრფის მართობულად.

ამისათვის $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლებაში კუთხური კოეფიციენტი განვსაზღვროთ მოცემულ წრფესთან მართობულობის პირობიდან.

$$a \cdot \left(-\frac{A}{B}\right) = -1,$$

საიდანაც $a = \frac{B}{A}$. თუ a-ს მნიშვნელობას შევიტანთ წრფეთა კონის განტოლებაში, მივიღებთ იმ წრფის განტოლებას, რომელიც $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე გაივლის $Ax + By + C = 0$ წრფის მართობულად:

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1). \tag{4}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი: მოცემულია წრფე

$$2x + 5y + 7 = 0 \tag{5}$$

და მის გარეშე წერტილი $M(-2, -3)$. ვიპოვოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც ამ წერტილზე გადის (5) წრფის მართობულად.

ამისათვის ჯერ შევადგინოთ წრფეთა კონის განტოლება ცენტრით M წერტილზე:

$$y + 3 = a(x + 2).$$

ამ კონიდან ავარჩიოთ ის წრფე, რომელიც მოცემული წრფის მართობია. როგორც ვიცით, მისი საკუთხო კოეფიციენტი უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$a = -\frac{1}{a_1},$$

სადაც $a_1 = -\frac{2}{5}$. მაშასადამე $a = \frac{5}{2}$.

ამრიგად, იმ წრფის განტოლება, რომელიც $M(-2, -3)$ წერტილზე გადის (5) წრფის მართობულად, არის

$$y + 3 = \frac{5}{2}(x + 2),$$

ანუ

$$5x - 2y + 4 = 0. \tag{6}$$

ამოცანა 3. მოცემულია წრფე

$$y = a_1 x + b_1 \tag{7}$$

და მის გარეშე წერტილი $M_1(x_1, y_1)$. შევადგინოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც ამ წერტილზე გადის და (7) წრფესთან შეადგენს მოცემულ φ კუთხეს.

ამოხსნა. დავწეროთ წრფეთა კონის განტოლება ცენტრით M_1 წერტილში:

$$y - y_1 = a(x - x_1): \tag{8}$$

საჭიროა ამ კონიდან ავირჩიოთ ის წრფე, რომელიც (7) წრფესთან მოცემულ φ კუთხეს შეადგენს. ამისათვის დავწეროთ ორ წრფეს შორის კუთხის ფორმულა: (თ. VIII, § 11, (4)):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a - a_1}{1 + a a_1} \tag{9}$$

ამ ფორმულაში ცნობილია a_1 და $\operatorname{tg} \varphi$; უცნობია a, რომელსაც განვსაზღვრავთ (9)-დან,

$$a = \frac{a_1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - a_1 \operatorname{tg} \varphi}.$$

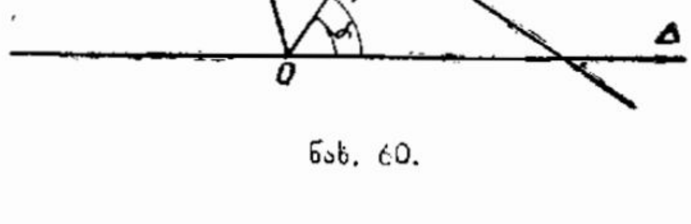
თუ ამას ჩავსვამთ (8)-ში, მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას:

$$y - y_1 = \frac{a_1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - a_1 \operatorname{tg} \varphi}(x - x_1).$$

§ 16. წრფის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში

ახლა გავეცნოთ წრფის კიდევ ერთი სახის განტოლებას.

ავიღოთ სიბრტყეზე E წრფე და პოლარულ კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 60). აღვნიშნოთ Δ-თი პოლარული ღერძი, ხოლო პოლუსი O-თი.



ნახ. 60.

გავატაროთ O პოლუსიდან n ნორმალი E წრფეზე (ნახ. 60) (რომელიც მიმართულია პოლუსიდან E წრფისაკენ) და E წრფეზე გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ C-თი. აღვნიშნოთ OC მართობის სიგრძე k-თი, ხოლო n ნორმალის მიერ შედგენილი კუთხე Δ ღერძთან α-თი. ცხადია, რომ α და k სავსებით განსაზღვრავენ E წრფის მდებარეობას. განვიხილოთ E წრფეზე ნებისმიერი M წერტილი და მისი პოლარული კოორდინატები აღვნიშნოთ r და φ-თი.