ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

უმაღლესი
მათემატიკა

სავარჯიშოები
არასპეციალური ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 2004

ISBN 99940-12-68-1

სახელმძღვანელოს
ავტორები:

მერი **გელაშვილი,**
ქეთევან **კიკვაძე,**
ქეთევან **ლოსაბერიძე,**
ლოლიტა **მაღრაძე,**
რუსუდან **მესხია** (დოქტ.)
ნანა **სვანიძე**

რედაქტორი
პროფესორი ლერი გოგოლაძე

რეცენზენტები:

დოქტ. ნიკო გუნია
დოქტ. ნოდარ ჯორბენაძე

ნაშრომის მიზანია სტუდენტის ყურადღება გაამახვილოს პროგრამის ძირითად საკითხებზე და დაეხმაროს მას პრაქტიკული მასალის ათვისებაში. ამ მიზნით ყოველ პარაგრაფში მოცემულია შესაბამისი თეორიული მასალის მიმოხილვა და ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა. ყოველ თავს ბოლოში დართული აქვს სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

წიგნის ელექტრონული ფაილი
მოამზადა ნიკო გუნიამ

ელექტრონულ წიგნს დართული აქვს სანიშნეები (Bookmark)
სარჩევი ლინკებით მიბმულია სათანადო პარაგრაფებს (ფერადი ჩარჩოები);
გვედის ზომა არის A5 ; ე.ი. ჩვეულებრივ თაბახზე თავსდება ორი გვერდი....

თავი I

სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

§ 1.1. სიმრავლე. მოქმედებები სიმრავლეებზე

სიმრავლის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა; სიმრავლე გვესმის, როგორც გარკვეულ ობიექტთა (ელემენტთა) ერთობლიობა.

ჩანაწერი $a \in A$ აღნიშნავს, რომ a ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს; ხოლო, თუ a ელემენტი არ ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ წერენ $a \notin A$ ან $a \overline{\in} A$. სიმრავლეს, რომელიც არც ერთ ელემენტს არ შეიცავს, ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. ჩანაწერი $A \subset B$ (A შედის B-ში) აღნიშნავს, რომ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B-ს. ასეთ შემთხვევაში A სიმრავლეს B სიმრავლის ქვესიმრავლე ეწოდება. A და B სიმრავლეებს ტოლი ეწოდებათ ($A=B$), თუ ერთდროულად $A \subset B$ და $B \subset A$. არსებობს სიმრავლის მოცემის (აღწერის) ორი ხერხი:

1) A სიმრავლე განისაზღვრება უშუალოდ მისი $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ელემენტების დასახელებით და წერენ $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

2) A სიმრავლე განისაზღვრება, როგორც ერთობლიობა რაღაც U სიმრავლის იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებისა, რომელთაც აქვთ საერთო α თვისება. ამ შემთხვევაში გამოიყენება აღნიშვნა

$$A = \{x \in U \mid \alpha(x)\},$$

სადაც $\alpha(x)$ აღნიშნავს, რომ x ელემენტს აქვს α თვისება.

სიმრავლეს სასრული ეწოდება, თუ ის სასრული რაოდენობა ელემენტისაგან შედგება, წინააღმდეგ შემთხვევაში სიმრავლეს უსასრულო ეწოდება.

A და B სიმრავლეების გაერთიანება $A \cup B$ ეწოდება სიმრავლეს იმ და მხოლოდ იმ ელემენტთა, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის. ამრიგად,

$$A \cup B = \{x \mid \quad x \in A \quad \text{ან} \quad x \in B\}.$$

A და B სიმრავლეების თანკვეთა $A \cap B$ არის სიმრავლე იმ და მხოლოდ იმ ელემენტთა, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნიან ორივე სიმრავლეს.

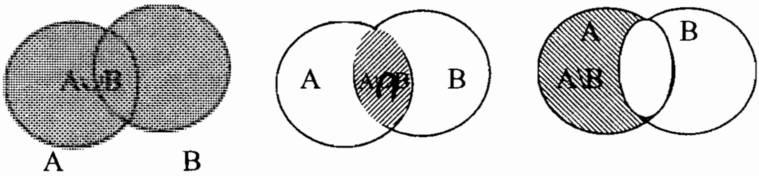
მაშასადამე,

$$A \cap B = \{x \mid \quad x \in A \quad \text{და} \quad x \in B\}.$$

A და B სიმრავლის სხვაობა $A \setminus B$ არის სიმრავლე A-დან ყველა იმ ელემენტისა, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან. ამრიგად,

$$A \setminus B = \{x \mid \quad x \in A \quad \text{და} \quad x \overline{\in} B\}.$$

თუ სიმრავლეს გამოვსახავთ სიბრტყის რაიმე ფიგურის წერტილთა ერთობლიობის სახით, მაშინ ზემოთ განსაზღვრული სიმრავლეები ასე წარმოგვიდგება:



ნახ. 1.

რიცხვით სიმრავლეებს აღვნიშნავთ შემდეგი სახით:

$N = \{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

$Z = \{0,\pm1,\pm2,\dots,\pm n,\dots\}$ მთელ რიცხვთა სიმრავლე;

$Q = \left\{\frac{m}{n}, m \in Z; n \in N\right\}$ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე.

ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, ანუ უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადთა სიმრავლე აღინიშნება I-სიმბოლოთი. რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა ერთობლიობა არის R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. ამრიგად, $R=Q\cup I$.

ვთქვათ, a და b (a<b) ნამდვილი რიცხვებია. რიცხვით შუალედებს აღვნიშნავთ შემდეგი სახით:

$[a,b]=\{x \in R \mid a \le x \le b\}$; $(a,b)=\{x \in R \mid a < x < b\}$;

$(a,+\infty)=\{x \in R \mid x > a\}$; $(-\infty, b)=\{x \in R \mid x < b\}$; $(-\infty, +\infty)=R$.

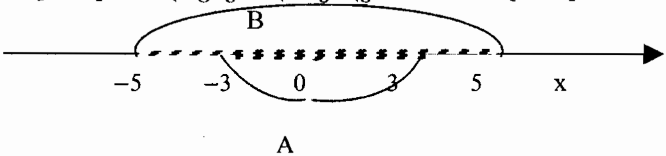
ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. $A=\{x\in N \mid (x-1)(x^2-4)=0\}$ სიმრავლე ჩაწერეთ მისი ელემენტების საშუალებით.

ამოხსნა. A არის $(x-1)(x^2-4)=0$ განტოლების ნატურალურ ამონახსნთა სიმრაელე. ამიტომ $A=\{1,2\}$.

მაგალითი 2. მოცემულია $A=\{x\in R \mid |x^2-4|\le5\}$ და $B=\{x\in R \mid x^2\le25\}$ სიმრავლეები. იპოვეთ $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ და $B\setminus A$ სიმრავლეები.

ამოხსნა. A არის ყველა იმ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა $-5\le x^2-4\le5$. აქედან $-1\le x^2\le9$, $x^2\le9$, $-3\le x\le3$. ამრიგად, $A=[-3,3]$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $B=[-5,5]$.



ცხადია, რომ $A\subset B$. ამიტომ $A\cup B=B$, $A\cap B=A$, $A\setminus B=\varnothing$, $B\setminus A=[-5,-3)\cup(3, 5]$.

მაგალითი 3. დაამტკიცეთ, რომ $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ (1.1)

დამტკიცება. (1.1) ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია ეაჩვენოთ, რომ

$$(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

და პირიქით.

ავიღოთ, ნებისმიერი $x\in(A\cap B)\cup C \Rightarrow x\in A\cap B$ ან $x\in C$; თუ ა) $x\in A\cap B$, მაშინ ($x\in A\cup C$ და $x\in B\cup C$) $\Rightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$, ხოლო თუ ბ) $x\in C$, მაშინ ($x\in A\cup C$ და $x\in B\cup C$)$\Rightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C$, ამრიგად,

$$(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

ვაჩვენოთ პირიქით, რომ

$$(A\cup C)\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup C.$$

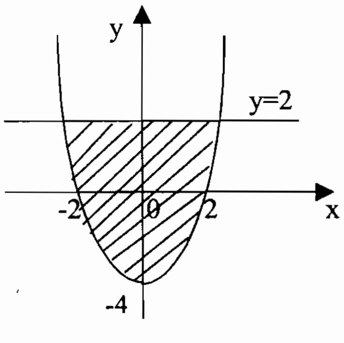
მართლაც, $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)\Rightarrow(x\in(A\cup C)$ და $x\in B\cup C)\Rightarrow(x\in A$ ან $x\in C)$ და ($x\in B$ ან $x\in C)\Rightarrow(x\in A\cap B$ ან $x\in C)\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C$.

(1.1) ტოლობა დამტკიცებულია.

მაგალითი 4. R^2 საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახეთ სიმრავლე

$$A=\{(x,y)\in R^2 |\ x^2-4<y<2\}.$$

ამოხსნა. საკოორდინატო სიბრტყის ყველა იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლე, რომლისთვისაც $y<2$, მდებარეობს $y=2$ წრფის ქვედა ნახევარსიბრტყეში, ხოლო იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლე, რომლისთვისაც $y>x^2-4$ არის $y=x^2-4$ პარაბოლის ზევით, მოთავსებულ წერტილთა სიმრავლე. მაშასადამე, A სიმრავლე სიბრტყეზე ასე გამოისახება (იხ. ნახ.2).



ნახ.2.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1.1. დაადგინეთ შემდეგი ორი ჩანაწერიდან, რომელია სწორი:

ა) $\{4,5\}\in\{4,5, \{4,5,7\}\}$, თუ $\{4,5\}\subset\{4,5,\{4,5,7\}\}$.

ბ) $\{3,4\}\in\{3,4, \{3,4\}\}$, თუ $\{3,4\}\subset\{3,4,\{3,4\}\}$.

1.2. მოცემულია $A\{-3, -1, 0, 2, 5, 6\}$, $B= \{-3, 2, 3, 4, 5\}$, $C=\{0, -3, 11\}$. იპოვეთ $(A\cup B)\cap C$, $(A\cap B)\cup C$, $(A\setminus B)\cap C$.

1.3. $A=(-2,3)$ და $B=[1, +\infty)$. იპოვეთ $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$ სიმრაელეები და გამოსახეთ ისინი რიცხვით წრფეზე.

ქვემოთ მოცემული სიმრავლეები წარმოადგინეთ მათი ელემენტების დასახელებით

$$1.4.\ A=\left\{x\in R \mid \ (x-2)\sqrt{x^2-4x+3}=0\right\}.$$

1.5. $A=\left\{x\in Z \mid \; x+\frac{3}{x}\le 5, \quad x>0\right\}$. 1.6. $A=\left\{x\in Z \mid \; \frac{1}{9}\le 3^{x}\le 12\right\}$.

1.7. $B=\{x\in N \mid \; \log_2(x+10)<4\}$. 1.8. $B=\{x\in R \mid \; \sin x+\cos x=2\}$.

1.9. მოცემულია სიმრაველეები $A=\{x\in R \mid x^2+9x\ge -8\}$ და $B=\{x\in R \mid x^2-7x+12\le 0\}$. იპოვეთ $A\cup B$, $A\cap B$ სიმრაველეები.

1.10. $A=\{x\in R \mid |x+3|\ge 1\}$, $B=\{x\in R \mid x^2-3x+4<0\}$. იპოვეთ $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახეთ შემდეგი სიმრაველეები:

1.11. $A=\{(x,y)\in R^2 \mid -4\le x\le 2\}$, $B=\{(x,y)\in R^2 \mid -3\le y\le 2\}$, იპოვეთ $A\cap B$.

1.12. $B=\{(x,y)\in R^2 \mid (x^2-4)(y+3)=0\}$.

1.13. $B=\{(x,y)\in R^2 \mid 3x-5y+1=0,\ 2x+3y+3=0\}$.

1.14. $A=\{(x,y)\in R^2 \mid xy>0\}$. 1.15. $A=\{(x,y)\in R^2 \mid -4\le y\le -x^2\}$.

დაამტკიცეთ, რომ

1.16. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

1.17. $A\subset U$, $B\subset U$, მაშინ $U\setminus(A\cup B)=(U\setminus A)\cap(U\setminus B)$.

$U\setminus(A\cap B)=(U\setminus A)\cup(U\setminus B)$.

§1.2. კომბინატორიკის ელემენტები

სასრული სიმრავლის ელემენტთა ნებისმიერ დალაგებას **გადანაცვლება** ეწოდება. n-ელემენტიანი სიმრაელის ყველა შესაძლო გადანაცელებათა რაოდენობა აღინიშნება P_n სიმბოლოთი. მტკიცდება, რომ

$$P_n=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n=n! \tag{1.2}$$

n! (n-ის ფაქტორიალი) აღნიშნავს 1-დან n-ის ჩათვლით ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრაველს. მიღებულია, რომ $P_0=1$.

სასრული სიმრავლის ნებისმიერ დალაგებულ ქვესიმრაველს **წყობა** ეწოდება. n-ვლემენტიანი სიმრაელის ყველა k ($1\le k\le n$) ელემენტიან წყობათა რაოდენობა აღინიშნება A_n^k სიმბოლოთი და მტკიცდება, რომ

$$A_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.3}$$

მიღებულია, რომ $A_n^0=1$.

სასრული სიმრავლის ნებისმიერ ქვესიმრაველს **ჯუფთება** ეწოდება. n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა k ($1\le k\le n$) ელემენტიან ჯუფთებათა რაოდენობა აღინიშნება C_n^k სიმბოლოთი და ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{1.4}$$

მიღებულია, რომ $C_n^0 = 1$.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ სიმრავლიდან შეადგინეთ ყველა ორელემენტიანი ჯუფთებები და წყობები და გამოთვალეთ მათი რაოდენობა.

ამოხსნა. A სიმრავლის ორელემენტიანი ჯუფთებები იქნება $\{a_1,a_2\}$, $\{a_1,a_3\}$,$\{a_1,a_4\}$, $\{a_2,a_3\}$, $\{a_2,a_4\}$, $\{a_3,a_4\}$. მათი რაოდენობა 6-ის ტოლია. (1.4) ფორმულის გამოყენებითაც $C_4{}^2 = \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$, A სიმრავლის ორელემენტიანი წყობები არის:

(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4),

(a_2, a_1), (a_3, a_1), (a_4, a_1), (a_3, a_2), (a_4, a_2), (a_4, a_3).

წყობათა რაოდენობა (1.3) ფორმულის გამოყენებითაც

$$A_4{}^2 = 4\cdot 3 = 12.$$

მაგალითი 2. რამდენი განსხვავებული 20000-ზე მეტი ხუთნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ 1, 2, 3, 4 ციფრებისაგან, თუ 2, 3, 4 ციფრები თითოეულ რიცხვში გვხვდება ერთხელ, ხოლო ციფრი 1 – ორჯერ.

ამოხსნა. რადგანაც უნდა განვიხილოთ 20000-ზე მეტი ხუთნიშნა რიცხვები, ერთმანეთისაგან განსხვავებული და შედგენილი 1, 1, 2, 3, 4 ელემენტებისაგან, ამიტომ ასეთი რიცხვები უნდა იწყებოდეს 2, 3 ან 4-ით . დანარჩენი ოთხი ელემენტიდან მიღებული ყველა შესაძლო რიცხვის რაოდენობა იქნება P_4, მაგრამ ამ რიცხვებში შეგვხვდება ერთნაირი რიცხვებიც, რადგანაც ციფრი 1 გვხვდება ორჯერ. ამიტომ ჩვენთვის სასურველი რიცხვების რაოდენობა იქნება $3\cdot\dfrac{P_4}{2} = 3\cdot\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2} = 36$.

მაგალითი 3. ოცი კონკურენტიდან უნდა შეირჩეს ფირმის დირექტორი, მენეჯერი და ორი თანამშრომელი. არჩევანის რამდენი საშუალება არსებობს?

ამოხსნა. ოცი კონკურენტიდან დირექტორისა და მენეჯერის შერჩევის შესაძლებლობათა რაოდენობა იქნება $A_{20}^2 = 20\cdot 19$, ხოლო დანარჩენი 18 კონკურენტიდან ორი თანამშრომლის შერჩევა შესაძლებელია C_{18}^2 რაოდენობით. ამიტომ, დირექტორის, მენეჯერისა და ორი თანამშრომლის შერჩევის ყველა შესაძლო რაოდენობა იქნება:

$$A_{20}^2\cdot C_{18}^2 = 20\cdot 19\cdot\frac{18\cdot 17}{2!} = 58140.$$

მაგალითი 4. ამოხსენით განტოლება:

$$\frac{A_n^4 \cdot P_{n-4}}{P_{n-2}} = 42.$$

ამოხსნა. რადგანაც $n-4 \in N$, ამიტომ n უნდა იყოს 4-ზე მეტი ნატურალური რიცხვი. თუ გავითვალისწინებთ (1.2) და (1.3) ფორმულებს, გვექნება: $A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$.

$P_{n-4} = (n-4)! = 1 \cdot 2 \cdots (n-5)(n-4)$.

$P_{n-2} = (n-2)! = 1 \cdot 2 \cdots (n-4)(n-3)(n-2) = (n-4)!(n-3)(n-2)$.

ამიტომ მოცემული განტოლება გადაიწერება ასე:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot (n-4)!}{(n-4)!(n-3)(n-2)} = 42.$$

$$n((n-1)=42, \quad n \cdot (n-1) = 6 \cdot 7$$

რადგანაც $n \in N$, ამ განტოლების ნატურალური ამონახსნია n=7.

მაგალითი 5. რამდენნაირად შეიძლება გაეანაწილოთ 12 სხვადასხვა საგანი 4 პიროვნებას შორის ისე, რომ თითოეულმა სამი საგანი მიიღოს.

ამოხსნა. პირველ პიროვნებას შეუძლია სამი საგნის შერჩევა C_{12}^3 რაოდენობით, მეორეს – C_9^3, მესამეს $-C_6^3$, ხოლო მეოთხეს $-C_3^3 = 1$. ამიტომ 12 საგნის განაწილება ოთხ პიროვნებას შორის ისე, რომ თითოეულს სამი საგანი შეხვდეს, შეიძლება

$$C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 399600 \text{ გზით.}$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1.18. მოცემულია A={a,b,c,d,e} სიმრავლე, შეადგინეთ ყველა ორელემენტიანი ჯუფთებები. გამოთვალეთ მათი რაოდენობა. იპოვეთ ორელემენტიან წყობათა რაოდენობა.

1.19. ჯუფში 30 სტუდენტია, მათ შორის ოთხი გოგონა. ირჩევენ 6 სტუდენტს. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს იმისა, რომ არჩეულ სტუდენტებში შეეა ოთხიეე გოგონა?

1.20. გამოვთეალეთ რამდენი სხეადასხვა წესით შეიძლება განლაგდეს ა) სასტუმროს ხუთ ოთახში ხუთი სტუმარი? ბ) სასტუმროს რვა ოთახში ხუთი სტუმარი? (იგულისხმება ერთოთახიანი ნომრები).

1.21. ოთხ პედაგოგს შორის უნდა განაწილდეს რვა ჯგუფი. რამდენი გზით შეიძლება მოხდეს ეს განაწილება, თუ თითოეულ პედაგოგს ორი ჯგუფი უნდა ჰყავდეს?

1.22. a, b, c, d, e ასოებისაგან შედგენილ გადანაცვლებათა შორის რამდენია ისეთი, რომელიც არ იწყება ა) d ასოთი; ბ) ac ასოებით; გ) abd ასოებით.

1.23. a, b, c, …, 10 ასოსაგან შედგენილ 5 ასოიან ჯუფთებათა შორის რამდენია ისეთი, რომელიც არ შეიცავს ა) a ასოს; ბ) a და b ასოებს.

1.24. სამშენებლო ბრიგადაში 25 წევრია. მათგან 5 ხარატია, 2 კალატოზი, 4 მღებავი. რამდენი სხვადასხვა გზით შეიძლება შევარჩიოთ 5 კაცი, ისე რომ მასში მოხვდეს ერთი ხარატი, ერთი კალატოზი და ერთი მღებავი?

1.25. ლატარეაში ხუთი საგანი თამაშდება. ურნასთან პირველად მისული იღებს ხუთ ბილეთს. რამდენი შესაძლებლობა არსებობს იმისა, რომ ამოღებული ხუთი ბილეთიდან 3 აღმოჩნდება მომგებიანი, თუ ურნაში 80 ბილეთია და მათგან ხუთი მომგებიანი.

1.26. სიბრტყეზე მდებარე 10 წერტილიდან 3 წერტილი ერთ წრფეზე მდებარეობს, ხოლო დანარჩენი წერტილებიდან არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. რამდენი სხვადასხვა წრფის გავლება შეიძლება წყვილ-წყვილად ამ წერტილებზე.

K

გაამარტივეთ გამოსახულებანი:

1.27. $\dfrac{A_{n-k} \cdot P_{n-k}}{P_{n-2}}$ 1.28. $\dfrac{C_{m-1}^{n-1} \cdot P_{n-k}}{10P_{m-1}} \cdot P_{n-3}$, 1.29. $\dfrac{A_n^3 \cdot P_{n-2}}{P_{n+1}}$ 1.30. $\dfrac{A_{12}^n \cdot P_{12-n}}{P_{10}}$

ამოხსენით განტოლებანი:

1.31. $5C_x^3 = C_{x+2}^4$ 1.32. $5C_{x+1}^2 - 5C_x^1 + 10 = 0$ 1.33. $C_{x+4}^2 - C_x^2 = 22$

1.34. $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 12$ 1.35. $30C_{x-3}^{x-9} = 19A_{x-4}^4$ 1.36. $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$

1.37. $P_{x+1} - 12P_{x-1} = 0$ 1.38. $C_{x+2}^2 - 2x - 58 = 0$

§ 1.3. ნიუტონის ბინომი

ნიუტონის ბინომის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots$$
$$\cdots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad n \in N, \tag{1.5}$$

სადაც $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$, $\quad C_n^0 = 1$.

C_n^k რიცხვებს ~~ბინომიალური კოეფიციენტები ეწოდებათ.~~
შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad k = 0,1,\cdots,n. \tag{1.6}$$

T_{k+1} ბინომის ზოგადი წევრი ეწოდება.
ადვილი საჩვენებელია, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \; C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \tag{1.7}$$

თუ (1.5) ფორმულაში ავიღებთ a=b=1, მაშინ მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^n = 2^n \tag{1.8}$$

ან რაც იგივეა $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

ადვილი მისახვედრია, რომ $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$ წარმოადგენს n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლეთა რაოდენობას, თუ ჩავთვლით, რომ ცარიელი სიმრავლე და მოცემული სიმრავლე აგრეთვე ქვესიმრავლეებია. (1.8) ფორმულის თანახმად, n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლეთა რაოდენობა, ან რაც იგივეა, ბინომიალური კოეფიციენტების ჯამი 2^n-ის ტოლია.

დაეუშვათ, $C_0^0 = 1$ და C_n^k რიცხვებისაგან შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

$$
\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_n^0 \quad C_n^1 \quad C_n^2 \cdots\cdots C_n^{n-1} \quad C_n^n
\end{array}
$$

თუ შევიტანთ C_n^k რიცხვების მნიშვნელობებს, მივიღებთ რიცხვით ცხრილს, რომელსაც „პასკალის სამკუთხედი“ ეწოდება.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

ამ ცხრილიდან კარგად ჩანს C_n^k რიცხვების (1.7) თვისებები. ცხრილის (n+1)-ე სტრიქონში დგას $(a+b)^n$ ნიუტონის ბინომის ბინომიალური კოეფიციენტები:

$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad C_n^2 \cdots\cdots C_n^k \cdots C_n^{n-1} \quad C_n^n$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. გამოვიყენოთ „პასკალის სამკუთხედი“ და დავწეროთ $(a+b)^7$ ბინომის განამწკრივი.

ამოხსნა. ცხრილის მე-8 სტრიქონში მოთავსებული რიცხვები ავიღოთ ბინომიალურ კოეფიციენტებად, გვექნება:

$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$.

მაგალითი 2. იპოვეთ $\left(x^3-\sqrt[3]{x}\right)^{11}$ ბინომის განამწკრივის ა) მე-8 წევრი, ბ) წევრი, რომელსაც უდიდესი ბინომიალური კოეფიციენტი აქვს.

ამოხსნა. ბინომის ფორმულაში $n=11$, $a=x^3$, $b=-\sqrt[3]{x}$. ზოგადი წევრის (1.6) ფორმულიდან მე-8 წევრს მივიღებთ, როცა $k=7$, ამრიგად,

ა) $T_8=C_{11}^7(x^3)^4\left(-\sqrt[3]{x}\right)^7=-C_{11}^7x^{12}x^{\frac{7}{3}}=-330\sqrt[3]{x^{53}}$.

ბ) შენიშვნა. უდიდესი ბინომიალური კოეფიციენტი აქვს ბინომის შუა წევრს, თუ n ლუწია და ამ წევრის ნომერია $\frac{n}{2}+1$, ხოლო თუ n კენტია, მაშინ უდიდესი ტოლი კოეფიციენტები აქვთ ბინომში ორ შუა წევრს და მათი ნომრებია, შესაბამისად $\frac{n+1}{2}$ და $\frac{n+1}{2}+1$. ამიტომ, ჩვენს შემთხვევაში, უდიდესი ბინომიალური კოეფიციენტები ექნებათ მე-6 და მე-7 წევრებს.

ვიპოვოთ ეს წევრები

$$T_6=C_{11}^5(x^3)^6\left(-\sqrt[3]{x}\right)^5=-C_{11}^5x^{18}\cdot x^{\frac{5}{3}}=-C_{11}^5\sqrt[3]{x^{59}}.$$

$$T_7=C_{11}^6(x^3)^5\left(-\sqrt[3]{x}\right)^6=C_{11}^6x^{15}\cdot x^2=C_{11}^6x^{17}.$$

მაგალითი 3. იპოვეთ $\left(\sqrt[3]{a^2}-\frac{1}{\sqrt[6]{a}}\right)^n$ ბინომის ხარისხის მაჩვენებელი, თუ მე-9 წევრში a-ს ხარისხის მაჩვენებელი 2-ის ტოლია.

ამოხსნა. $T_9=C_n^8a^{\frac{2}{3}(n-8)}\cdot\left(-a^{-\frac{1}{6}}\right)^8=C_n^8a^{\frac{2(n-8)}{3}-\frac{4}{3}}$ პირობის თანახმად,

$$\frac{2(n-8)}{3}-\frac{4}{3}=2,\quad 2n-16-4=6,\ 2n=26,\quad n=13.$$

მაგალითი 4. იპოვეთ $\left(x^2+y^2\right)^n$ ბინომის მე-7 წევრი, თუ ბინომიალური კოეფიციენტების ჯამი 1024-ის ტოლია.

ამოხსნა. (1.8) ფორმულის თანახმად,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

$$2^n=1024,\ 2^n=2^{10},\ n=10.$$

$$T_7 = C_{10}^6 (x^2)^4 (y^2)^6 = C_{10}^6 x^8 y^{12} = 210x^8y^{12}$$

$$T_7 = 210x^8y^{12}$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოიყენეთ „პასკალის სამკუთხედი“ და იპოვეთ შემდეგი ბინომების გაშლის განამწკრივი:

1.39. $(x+b)^6$ 1.40. $(\sqrt{m}-n)^5$ 1.41. $(z^2+1)^7$ 1.42. $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^8$.

1.43. იპოვეთ $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ ბინომის მე-9 წევრი.

1.44. იპოვეთ $\left(a^2+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{13}$ ბინომის ის წევრები, რომლეთაც აქვთ უდიდესი კოეფიციენტები.

1.45. იპოვეთ $\left(z+\sqrt[3]{z^2}\right)^{10}$ ბინომის შუა წევრი.

1.46. იპოვეთ $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}-\sqrt{x^3}\right)^n$ ბინომის მაჩვენებელი, თუ განამწკრივის მე-6 წევრი არ არის დამოკიდებული x-ზე.

1.47. იპოვეთ $\left(x-\sqrt{y}\right)^n$ ბინომის განამწკრივის მე-5 წევრი, თუ ბინომიალური კოეფიციენტების ჯამი არის 512.

1.48. რამდენ ელემენტს შეიცავს სიმრავლე, თუ მისი ყველა შესაძლო ქვესიმრავლის რაოდენობა 256-ის ტოლია.

1.49. რამდენი სხვადასხვა გზით შეიძლება ორ ჯიბეში გავანაწილოთ ექვსი სხვადასხვა კუპიურა?

თავი II

უმაღლესი ალგებრის ელემენტები

§2.1. კომპლექსური რიცხვები. მოქმედებები კომპლექსურ რიცხვებზე

ნამდვილი რიცხვთა დალაგებულ $z=(x, y)$ წყვილს კომპლექსური რიცხვი ეწოდება. კომპლექსური რიცხვებისათვის შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები განსაზღვრულია შემდეგი სახით:

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2), \tag{2.1}$$

$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2; x_1 y_2+x_2y_1). \tag{2.2}$$

ყველა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება C სიმბოლოთი.

x და y ნამდვილ რიცხვებს შესაბამისად $z(x, y)$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ეწოდებათ და აღინიშნებიან სიმბოლოებით $x=\mathrm{Re}z$ (Reele ნამდვილი) და $y=\mathrm{Im}z$ (Imaginiare – წარმოსახვითი).

$z_1=(x_1, y_1)$ და $z_2=(x_2, y_2)$ კომპლექსურ რიცხვებს ტოლი ეწოდებათ, თუ $x_1=x_2$ და $y_1=y_2$.

(2.1) და (2.2) განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $z=(x,y)$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$z=(x,y)=(x, 0)+(0, y)=(x, 0)+(0, 1)(y, 0). \tag{2.3}$$

თუ $(x, 0)$ სახის კომპლექსურ რიცხვს გავაიგივებთ x ნამდვილ რიცხვთან ($(x, 0)\leftrightarrow x$) შესაბამისობა არის ურთიერთცალსახა), ხოლო $(0, 1)$ კომპლექსურ რიცხვს აღვნიშნავთ i სიმბოლოთი, მაშინ (2·3) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$z=(x, y)=x+iy$$

და მას $z=(x, y)$ რიცხვის ალგებრული ფორმა ეწოდება. ცხადია, რომ $(0,0)=0+i\cdot 0=0$.

თუ $z_1=x_1+iy_1$ $z_2=x_2+iy_2$ კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ალგებრული ფორმით, მაშინ განმარტების საფუძველზე მივიღებთ, რომ

$$\begin{gathered} z_1+z_2=x_1+iy_1+x_2+iy_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \\ z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2) \\ z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1 x_2-y_1 y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \end{gathered} \tag{2.4}$$

ცხადია, რომ $i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$. i-ს წარმოსახვითი ერთეული ეწოდება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, სადაც k მთელია. $z_1=x_1+iy_1$ და $z_2=x_2+iy_2\neq 0$ კომპლექსური რიცხვების შეფარდება $\dfrac{z_1}{z_2}$ არის კომპლექსური რიცხვი, რომელიც გამოითვლება შემდეგი

სახით:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i \tag{2.5}$$

$z=x+iy$ რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი ეწოდება $-z=-x-iy$ რიცხვს. ცხადია, რომ $z+(-z)=0$. ხოლო $\bar{z}=x-iy$ რიცხვს – z რიცხვის შეუღლებული რიცხვი ეწოდება, $z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\bar{\bar{z}}=z,\quad \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \left(\overline{z_1\cdot z_2}\right)=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\quad \left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. მოცემულია $z_1=4+5i$ და $z_2=1+i$ კომპლექსური რიცხვები. გამოთვალეთ z_1+z_2, $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ რიცხვები.

ამოხსნა. $z_1+z_2=4+5i+1+i=5+6i$.

$z_1\cdot z_2=(4+5i)(1+i)=4+4i+5i+5i^2=-1+9i$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4+5i}{1+i}=\frac{(4+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4-4i+5i-5i^2}{2}=\frac{9+i}{2}=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}i.$$

მაგალითი 2. იპოვეთ $i\cdot i^2\ldots i^{200}$.

ამოხსნა. $i\cdot i^2\ldots i^{200}=i^{1+2+\ldots+200}=i^{\frac{1+200}{2}\cdot 200}=i^{20100}=1$.

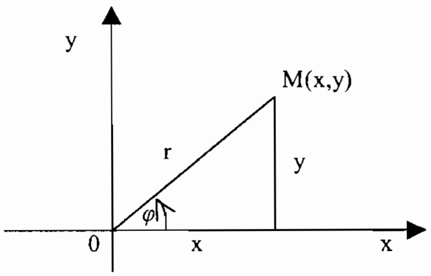
მაგალითი 3. იპოვეთ $\frac{(1+i)^m}{(1-i)^{m-2}}$.

ამოხსნა.

$$\frac{(1+i)^m}{(1-i)^{m-2}}=\frac{(1+i)^{m-2}(1+i)^2}{(1-i)^{m-2}}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{m-2}(1+2i+i^2)=2i\left(\frac{2i}{2}\right)^{m-2}=2i^{m-1}.$$

§2.2. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე. ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან

თუ სიბრტყეზე მოცემულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 3), მაშინ ნებისმიერ z=x+iy კომპლექსურ რიცხვს შეიძლება შევუსაბამოთ ერთადერთი M(x,y) წერტილი, რომელსაც z რიცხვის გეომეტრიული სახე ეწოდება. სიბრტყეს, რომელზედაც კომპლექსურ რიცხვებს გამოსახავენ, კომპლექსური სიბრტყე ეწოდება, ხოლო OX და OY ღერძებს შესაბამისად – ნამდვილი და წარმოსახვითი ღერძები.



ნახ. 3.

z=x+iy კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება არაუარყოფით, ნამდვილ r=|z| რიცხვს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{2.6}$$

კომპლექსური რიცხვის მოდული გამოხატავს მანძილს კოორდინატთა სისტემის სათავიდან ამ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე. ამიტომ, ცხადია, კომპლექსური რიცხვები, რომელთაც ერთი და იგივე r მოდული აქვთ, მდებარეობენ წრეწირზე, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სისტემის სათავეშია, ხოლო რადიუსია r. განვიხილოთ სისტემა:

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex]\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases} \tag{2.7}$$

მოცემული სისტემის ნებისმიერ ამონახსნს z=x+iy≠0 კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ეწოდება და აღინიშნება Argz სიმბოლოთი. ცხადია, z კომპლექსური რიცხვის ორი ნებისმიერი არგუმენტი ერთმანეთისაგან განსხვავდება 2π რიცხვის მთელი ჯერადით. არგუმენტის იმ მნიშვნელობას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას 0≤Argz<2π, ეწოდება არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა და აღინიშნება argz სიმბოლოთი. არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა არის ის უმცირესი φ კუთხე, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ OX ღერძი საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით, რომ დაემთხვეს $\overrightarrow{OM}$ რადიუსვექტორს.

(2.7) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ x=rcosφ, y=rsinφ. ამიტომ,

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{2.8}$$

(2.8) არის z კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე. თუ კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ტრიგონომეტრიული სახით $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ და $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, მაშინ (2.4) და (2.5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$z_1z_2=r_1r_2\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (2.9)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (2.10)$$

ამრიგად, $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $\arg(z_1.z_2)=\arg z_1+\arg z_2$,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2.$$

(2.9) ფორმულიდან შეიძლება მივიღოთ, რომ

$$z^n=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (2.11)$$

(2.11) ფორმულას მუავრის ფორმულა ეწოდება.

n-ური ხარისხის ფესვი ($n\in N$) $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან აღინიშნება $\sqrt[n]{z}$ სიმბოლოთი და არის კომპლექსური რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n=z$.

მტკიცდება, რომ $\sqrt[n]{z}$ კომპლექსურ რიცხვს აქვს n განსხვავებული კომპლექსური მნიშვნელობა, რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (2.12)$$

$$k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1.$$

(2.12) ფორმულაში $\sqrt[n]{r}$ აღნიშნავს არაუარყოფითი r ნამდვილი რიცხვიდან არითმეტიკულ ფესვს. $\sqrt[n]{z}$ კომპლექსური რიცხვის შესაბამის მნიშვნელობებს ერთი და იგივე მოდული აქვთ, ხოლო ფესვის ორი მომდევნო მნიშვნელობის არგუმენტები ერთმანეთისაგან განსხვავდება $\frac{2\pi}{n}$ სიდიდით, ამიტომ ეს მნიშვნელობები განლაგდებიან $\sqrt[n]{r}$ რადიუსიან წრეწირში ჩახაზული წესიერი n-კუთხედის წვეროებში, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სისტემის სათავეშია.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. მიეცით ტრიგონომეტრიული სახე $z=-45-15\sqrt{3}i$ კომპლექსურ რიცხვს.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ მოდული და არგუმენტი:

$$r=\sqrt{(-45)^2+(-15\sqrt{3})^2}=30\sqrt{3}\,,$$

$$\cos\varphi=\frac{-45}{30\sqrt{3}}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\varphi=\frac{-15\sqrt{3}}{30\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}.$$

რადგან z რიცხვის შესაბამისი წერტილი III მეოთხედშია, ამიტომ არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა $\arg z=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ და $z=30\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ x და y ნამდვილი რიცხვები, თუ ისინი აკმაყოფილებენ ტოლობას $(2+i)x+(3+4i)y=7+6i$.

ამოხსნა. ორი კომპლექსური რიცხვის ტოლობის განმარტებიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\begin{cases}2x+3y=7\\ x+4y=6\end{cases},$$

საიდანაც $x=2$, $y=1$.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $z_1=1+i$ და $z_2=\sqrt{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ კომპლექსურ რიცხვთა შეფარდება.

ამოხსნა. $z_1=1+i$ კომპლექსური რიცხვი ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული სახით, გვექნება:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

(2.10) ფორმულის თანახმად

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

მაგალითი 4. გამოვსახოთ cos7x და sin7x ფუნქციები sinx-ისა და cosx-ის საშუალებით.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ მუავრის (2.11) ფორმულითა და ნიუტონის ბინომით, გვექნება:

$$\cos7x+i\sin7x=(\cos x+i\sin x)^7=\cos^7x+7i\cos^6x\sin x-21\cos^5x\sin^2x-$$
$$-35i\cos^4x\sin^3x+35\cos^3x\sin^4x+21i\cos^2x\sin^5x-7\cos x\sin^6x-i\sin^7x.$$

ამიტომ

$$\cos7x=\cos^7x-21\cos^5x\sin^2x+35\cos^3\cdot\sin^4x-7\cos x\sin^6x$$
$$\sin7x=7\cos^6x\sin x-35\cos^4x\sin^3x+21\cos^2x\sin^5x-\sin^7x.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{52}$.

ამოხსნა. ჩავწეროთ მოცემული რიცხვი ტრიგონომეტრიული სახით და გამოვიყენოთ მუავრის ფორმულა, გვექნება:

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^{52}=\left(2(\cos300^0+i\sin300^0)\right)^{52}=2^{52}(\cos15600^0+i\sin15600^0)=$$
$$=2^{52}\left(\cos120^0+i\sin120^0\right)=2^{51}\left((-1+i\sqrt{3}\right).$$

მაგალითი 6. მოვძებნოთ $z=\dfrac{5-12i}{2\sqrt{2}-i}$ კომპლექსური რიცხვის მოდული.

ამოხსნა. $|z|=\dfrac{|5-12i|}{\left|2\sqrt{2}-i\right|}=\dfrac{\sqrt{25+144}}{\sqrt{8+1}}=\dfrac{13}{3}$.

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ $z^{12}+3z^{10}+5z^4+3$, თუ $z=\sqrt{3}+i$.

ამოხსნა. $z^{12}=2^{12}\left(\cos 12\cdot 30^0+i\sin 12\cdot 30^0\right)=2^{12}$.

$z^{10}=2^{10}\left(\cos 10\cdot 30^0+i\sin 10\cdot 30^0\right)=2^9(1-i\sqrt{3})$.

$z^4=2^4\left(\cos 4\cdot 30^0+i\sin 4\cdot 30^0\right)=8(-1+i\sqrt{3})$.

მაშასადამე, $z^{12}+3z^{10}+5z^4+3=5595-1496i$.

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ $z=\sqrt[3]{-1}$ ფესვის ყველა მნიშვნელობა.

ამოხსნა. მივცეთ ტრიგონომეტრიული სახე ფესვქვეშა რიცხვს.

გვექნება $-1=\cos\pi+i\sin\pi$. (2.12) ფორმულის თანახმად

$$z=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},\quad k=0,\ 1,\ 2.$$

ფესვის საძიებელი მნიშვნელობები იქნება:

$$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-1,\quad z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

მაგალითი 9. ვიპოვოთ $z=\sqrt[4]{1+i}$

ამოხსნა.

$$z=\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[4]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

$$z_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right);\quad z_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right);$$

$$z_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right);\quad z_4=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

მაგალითი 10. ვიპოვოთ $z=\sqrt{8-15i}$.

ამოხსნა. ვთქვათ, $z=\sqrt{8-15i}=x+iy$, მაშინ

$$(x+iy)^2=8-15i,\ x^2+2xyi-y^2=8-15i$$

$$\begin{cases}x^2-y^2=8\\2xy=-15\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\\y=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\end{cases}\ \text{ან}\ \begin{cases}x=-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\\y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

ე.ი. $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(5-3i),\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-5+3i)$.

მაგალითი 11. ვიპოვოთ $ax^n-b=0$ განტოლების ფესვები.

ამოხსნა.

$$x=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\text{. თუ } \frac{b}{a}>0,\text{ მაშინ } x=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\quad k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1.$$

$$\text{თუ } \frac{b}{a}<0,\text{ მაშინ }\quad x=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\quad k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1.$$

მაგალითი 12. ამოვხსნათ განტოლება: $z^3-2i=0$.

ამოხსნა. $z=\sqrt[3]{2i}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{n}\right)$ k=0,1,2. მაშასადამე,

$$z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3}+i),$$

$$z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3}-i),\; z_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-i\sqrt[3]{2}.$$

§2.3. მრავალწევრები

n-ური ხარისხის მრავალწევრი, ანუ პოლინომი ეწოდება შემდეგ გამოსახულებას

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0\,,$$

სადაც $a_0, a_1, .., a_n$ მოცემული ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან, $a_n\neq0$, ხოლო z ცვლადია. z_0 რიცხვს ეწოდება $P_n(z)$ მრავალწევრის ფესვი, თუ $P_n(z_0)=0$.

გაუსის თეორემა (ალგებრის ძირითადი თეორემა). ნებისმიერ n-ური ხარისხის მრავალწევრს, რომლის ხარისხი მეტია ან ტოლია 1-ზე, აქვს ერთი ფესვი მაინც, საზოგადოდ, კომპლექსური.

ბეზუს თეორემა. იმისათვის, რომ z_0 რიცხვი წარმოადგენდეს $P_n(z)$ მრავალწევრის ფესვს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $P_n(z)$ მრავალწევრი უნაშთოდ იყოფოდეს $(z-z_0)$-ზე, ან რაც იგივეა

$$P_n(z)=(z-z_0)Q_{n-1}(z),$$

სადაც $Q_{n-1}(z)$ არის (n–1) ხარისხის მრავალწევრი. z_0 რიცხვს ეწოდება $P_n(z)$ მრავალწევრის k ჯერადი ფესვი ($k\geq1$), თუ $P_n(z)$ მრავალწევრი უნაშთოდ იყოფა $(z-z_0)^k$-ზე და არ იყოფა $(z-z_0)^{k+1}$-ზე, ან რაც იგივეა

$$P_n(z)=(z-z_0)^k\,Q_{n-k}(z),$$

სადაც $Q_{n-k}(z_0)\neq 0$. $P_n(z)$ მრავალწევრის $(z-z_0)$-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი ტოლია $P_n(z_0)$ -ის.

გაუსის თეორემა შეიძლება დავაზუსტოთ შემდეგი სახით: n-ური ხარისხის მრავალწევრს აქვს n ფესვი, თუ ფესვს ჩავთვლით იმდენჯერ, რაც არის მისი ჯერადობა.

თუ $z_0=x_0+iy_0$ რიცხვი არის $P_n(z)$ მრაეალწევრის ფესვი, მაშინ $\bar{z}_0=x_0-iy_0$ არის აგრეთვე $P_n(z)$ მრავალწევრის ფესვი, ამასთან, z_0 და $\bar{z}_0$ ფესვებს ერთი და იგივე ჯერადობა აქვთ.

ვთქვათ, $P_n(z)$ მრავალწევრის ფესვებია $z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(m\leq n)$ რიცხვები და მათი ჯერადობებია შესაბამისად $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(k_1+k_2+\ldots+k_m=n)$, მაშინ სამართლიანია ტოლობა

$$P_n(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_m)^{k_m}.$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. a-ს რა მნიშვნელობისათვის გაიყოფა $P(x)=2x^3+5x^2-x+a$ მრავალწევრი უნაშთოდ $(x+2)$-ზე.

ამოხსნა. ბეზუს თეორემის თანახმად უნდა შესრულდეს პირობა $P(-2)=0$

$$P(-2)=2(-2)^3+5\cdot 4+2+a=-16+20+2+a=6+a=0,$$

ე.ი. $a=-6$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $P(z)=z^6+16z^3+64$ მრავალწევრის ფესვები და დაეშალოთ მამრავლებად.

ამოხსნა. $P(z)=z^6+16z^3+64=(z^3+8)^2$, ამიტომ მრავალწევრის ფესვები იქნება $\sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$, $k=0, 1, 2$.

ე.ი. $z_1=1+i\sqrt{3}$; $z_2=-2$; $z_3=1-i\sqrt{3}$.

ამასთან, თითოეული ფესვის ჯერადობა არის $k=2$. მოცემული მრავალწევრი დაიშლება წრფივ მამრავლებად შემდეგი სახით:

$$P(z)=(z+2)^2(z-1-i\sqrt{3})^2(z-1+i\sqrt{3})^2$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia}$, $a\in R'$

ამოხსნა.

$$\frac{1+ix}{1-ix}=\frac{(1+ix)(1+ix)}{1+x^2}=\frac{1-x^2+i2x}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}+i\frac{2x}{1+x^2}.$$

ანალოგიურად, $\frac{1+ia}{1-ia}=\frac{1-a^2}{1+a^2}+i\frac{2a}{1+a^2}$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=tgy$ და $a=tg\alpha$, მივიღებთ:

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\left(\frac{1-tg^2y}{1+tg^2y}+\frac{2tgy}{1+tg^2y}\right)^n=(\cos 2y+i\sin 2y)^n=\cos n2y+i\sin n2y,$$

ხოლო

$$\frac{1+ia}{1-ia}=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha.$$

ამიტომ მოცემული განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\cos n2y+i\sin n2y=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha.$$

ამ განტოლების ამონახსნია

$$n2y=2\alpha+2\pi k,\qquad k\in z,\quad y=\frac{\alpha+\pi k}{n}$$

აქედან, მივიღებთ $tgy=tg\frac{\alpha+\pi k}{n}$, მაგრამ x=tgy, ამიტომ $x=tg\frac{\alpha+\pi k}{n}$.

აქედან მიიღება x-ის n განსხვავებული ნამდვილი მნიშვნელობა, როცა k=0, 1,..., n–1. ამრიგად, მოცემული განტოლების ამონახსნებია:

$$x=tg\frac{\alpha+\pi k}{n},\ k=0,1,\dots,n-1,$$

სადაც α=arctga.

მაგალითი 4. $P(z)=z^4-2z^3+7z^2-30z+50$ მრავალწევრი დავშალოთ მამრავლებად და ვიპოვოთ მისი ფესვები, თუ ცნობილია, რომ მისი ერთ-ერთი ფესვია 2+i.

ამოხსნა. რადგან 2+i არის მოცემული მრავალწევრის ფესვი, ამიტომ მისი ფესვი იქნება აგრეთვე 2–i რიცხვი. ამიტომ მოცემული მრავალწევრი უნაშთოდ გაიყოფა შემდეგ ნამრავლზე:

$$(z-2-i)(z-2+i)=(z-2)^2+1=z^2-4z+5$$

გავყოთ მოცემული მრავალწევრი (z^2-4z+5)-ზე, გვექნება:

$$\begin{array}{l|l}
z^4-2z^3+7z^2-30z+50 & z^2-4z+5 \\
\underline{z^4-4z^3+5z^2} & \overline{z^2+2z+10} \\
\quad 2z^3+2z^2-30z+50 & \\
\quad \underline{2z^3-8z^2+10z} & \\
\qquad 10z^2-40z+50 & \\
\qquad \underline{10z^2-40z+50} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

ამრიგად, $z^4-2z^3+7z^2-30z+50=(z^2-4z+5)(z^2+2z+10)$.

$z^2+2z+10=0$ განტოლების ფესვები იქნება: $z=-1\pm\sqrt{-9}=-1\pm 3i$

ე.ი. მოცემული მრავალწევრის ფესვებია $2\pm i$ და $-1\pm 3i$ რიცხვები.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

2.1. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ავაგოთ წერტილები, რომლებიც შეესაბამებიან შემდეგ კომპლექსურ რიცხვებს: $z_1=2+i$, $z_2=3-2i$, $z_3=-1+4i$, $z_4=-2-3i$, $z_5=4$, $z_6=-4i$, $z_7=0$, $z_8=-3+2i$, $z_9=5i$.

2.2.-2.20 მაგალითებში შეასრულეთ მოქმედებები:

2.2. $(2-i)+(3-2i)-(-1-i)$, 2.3. $(1-i)-(1+i)+(3+2i)-3$,

2.4. $(3x+2yi)+4x-(-x-yi)+3yi$, 2.5. $(3+2i)(1-3i)$

2.6. $(3-2i)(2+i)$, 2.7. $(1-4i)(2+3i)-(1-i)(2+i)$,

2.8. $(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$, 2.9. $(3+2i)^2-(3-2i)^2$,

2.10. $(1+3i)^3$ 2.11. $(1-i\sqrt{3})^3+(1+i\sqrt{3})^3+(1-2i)^3+(1+2i)^3$,

2.12. $(2i-11)^5\cdot(1-2i)^{15}$, 2.13. $\dfrac{2+i}{1-i}$

2.14. $\dfrac{1-i}{1+3i}-\dfrac{i}{1-3i}+\dfrac{1-2i}{10}+2i$, 2.15. $\dfrac{1}{(1-i)^2}+\dfrac{1}{2}i$,

2.16. $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$ $(n\in N)$. 2.17. $i^{23}+i^{27}+(-i)^{32}+i^{32}-i^7$,

2.18. $i^2+i^5+(i^8+i^{11})+\ldots+i^{95}$, 2.19. $(1+i)^6-(1-i)^6$,

2.20. $(x+2+i)(x-2+i)(x+2-i)(x-2-i)$,

2.21. მიეცით ტრიგონომეტრიული სახე შემდეგ რიცხვებს:

$z_1=1$, $z_2=-1$, $z_3=i$, $z_4=-i$, $z_5=-1-i$, $z_6=1-i$, $z_7=-1+i\sqrt{3}$, $z_8=-1-i\sqrt{3}$, $z_9=1-i\sqrt{3}$, $z_{10}=2i$, $z_{11}=\sqrt{3}-i$, $z_{12}=2+\sqrt{3}+i$.

2.22. ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვები ჩავწეროთ ალგებრული სახით:

$$z_1=5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$z_3=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),\ z_4=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2.23. შესრულეთ გამრავლება:

$$z_1=5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$z_3=5\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right)\cdot\left(\cos 30^0+i\sin 30^0\right),$$

$$z_4 = 2\left(\cos 25^0 + i\sin 25^0\right)\cdot 3\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right),$$

$$z_5 = \sqrt{2}\left(\cos 120^0 + i\sin 120^0\right)\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right),$$

$$z_6 = 2\left(\cos 5^0 + i\sin 5^0\right)\cdot 3\left(\cos 10^0 + i\sin 10^0\right)\cdot \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_7 = (1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot 2\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)$$

2.24. შეასრულეთ გაყოფა ტრიგონომეტრიული სახით ჩაწერილ კომპლექსურ რიცხვებზე:

$$z_1 = \frac{-2+2i}{5i},\ z_2 = \frac{-2-2i}{-1+i\sqrt{3}},\ z_3 = \frac{8(\cos 32^0 + i\sin 32^0)}{3(\cos 57^0 + i\sin 57^0)},$$

$$z_4 = \frac{4(\cos 75^0 + i\sin 75^0)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)},\ z_5 = \frac{6(\cos 120^0 + i\sin 32^0)}{\cos 30^0 + i\sin 30^0},$$

$$z_6 = \frac{1+i}{2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)},\ z_7 = \frac{i\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\cos 75^0 + i\sin 75^0},\ z_8 = \frac{\cos 15^0 + i\sin 15^0}{1+i},$$

$$z_9 = \frac{36}{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}.$$

2.25. გამოთვალეთ: $z_1=(1+i)^{22}$, $z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

$$z_3 = \frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}},\ z_4 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12},$$

$$z_5 = (\sqrt{3}+i)^{24},\ z_6 = \left(-3\sqrt{3}+9i\right)^{18}.$$

2.26. გამოთვალეთ $(1+\cos x+i\sin x)^n$.

მითითება. $1+\cos x+i\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)$, ტოლობის ორივე მხარე აიყვანეთ n ხარისხში და გამოიყენეთ მუავრის ფორმულა.

2.27. უჩვენეთ შემდეგი ტოლობების მართებულობა:

ა) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$,

ბ) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$, როცა n მთელი რიცხვია.

შეასრულეთ მოქმედებანი:

2.28. $(2+i)(3-2i)$, 2.29. $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\frac{i(1-i)(3-i)}{3+i}$,

2.30. $(1+5i)^2-(3-i)^2$, 2.31. $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$, 2.32. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$.

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების ნამდვილი ამონახსნები:

2.33. $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i$, 2.34. $12(2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i)=17+6i$,

2.35. $(3+2i)x+(5+i)y=-2+3i$, 2.36. $(x+iy)(a-ib)=i$

ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი წრფივი სისტემები:

2.37. $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i,\\(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7.\end{cases}$ 2.38. $\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\(3+2i)z_1-(3-2i)z_2=8.\end{cases}$

2.39. ვიპოვოთ: ა) $\sqrt{5-12i}$; ბ) $\sqrt[4]{1-i}$; გ) $\sqrt[6]{-1}$; დ) $\sqrt[4]{16}$. მითითება. $\sqrt{5-12i}=x+iy$. აიყვანეთ ტოლობის ორივე მხარე კვადრატში.

2.40. დაამტკიცეთ, რომ $\sqrt[3]{1}$-ის სამი მნიშვნელობა ადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას.

2.41. კოორდინატთა სისტემაში აღებულია z_1 და z_2 კომპლექსური რიცხვები. ავაგოთ z_1+z_2 და z_1-z_2 კომპლექსური რიცხვები.

2.42-2.57 მაგალითებში განვსაზღვროთ, სად მდებარეობენ წერტილები, რომელთათვისაც:

2.42. $|z|<2$, 2.43. $2<|z|\le 3$, 2.44. $0<|z|\le 2$, 2.45. $|z-2|=1$, 2.46. $|z|\ge 1$,

2.47. $|z|=\left|1-i\sqrt{3}\right|$ 2.48. $\left||z|-2\right|=1$, 2.49. $\left||z|-5\right|\le 4$,

2.50. $|12+5i|\le|z|\le|-15+8i|$,

2.51. $\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1$, მითითება: $|z-1|=|z-i|$, $|(x-1)+iy|=|x+(y-1)i|$.

2.52. $\left|\frac{z-1}{z-i}\right|\le 1$, 2.53. $\arg z=\frac{\pi}{6}$, 2.54. $\frac{\pi}{6}\le\arg z\le\frac{\pi}{4}$,

2.55. $|z-3|=1$, $\frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{\pi}{2}$, 2.56. $|z-2|\le 2$, $\frac{\pi}{4}\le\arg z\le\frac{\pi}{4}$

2.57. $2\le|z|\le 4$, $\frac{\pi}{6}\le\arg z\le\frac{\pi}{3}$,

2.58. მოცემულია $|z|=3$. სად მდებარეობენ $3z$ წერტილები?

2.59. მოცემულია $|z|=2$. სად მდებარეობენ $2+z$ წერტილები?

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2.60. $x^3-1=0$, 2.61. $x^3+1=0$, 2.62. $x^2-i=0$, 2.63. $x^2-i-1=0$,

2.64. $x^3-8=0$, 2.65. $x^3+8=0$, 2.66. $x^4+1=0$, 2.67. $x^5+32=0$, 2.68. $x^5-32=0$, 2.69. $x^6-1=0$, 2.70. $x^5-243=0$.

2.71. დავამტკიცოთ, რომ $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

2.72. დავამტკიცოთ, რომ თუ $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$,

მაშინ $(1+z)^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$.

მითითება. რადგანაც $z=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

ამიტომ $1+z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

2.73. $x^3+27=0$, 2.74. $x^3-27=0$, 2.75. $8x^3+1=0$, 2.76. $8x^3-1=0$,

2.77. $x^4-16=0$, 278. $x^4-81=0$, 2.79. $81x^4-25=0$, 2.80. $x^6-64=0$.

2.81. a რიცხვის რა მნიშვნელობისათვის გაიყოფა უნაშთოდ

ა) $P(x)=ax^3+2x^2+3x-15$ მრავალწევრი $(x+4)$-ზე.

ბ) $P(x)=4x^4-3x^3+2x^2+a$ მრავალწევრი $(x+1)$-ზე.

2.82. p და q რიცხვების რა მნიშვნელობისათვის გაიყოფა

ა) $P(x)=x^3+5x^2+px+q$ მრავალწევრი (x^2+3x-4)-ზე.

ბ) $P(x)=px^3+qx^2+5x+2$ მრავალწევრი (x^2-1)-ზე.

2.83. რას უდრის ნაშთი, რომელიც მიიღება

ა) $P(x)=4x^4+x^3-3x^2+5x+1$ მრავალწევრის $(x-2)$-ზე გაყოფის შედეგად.

ბ) $P(x)=x^3-4x^2+3x+5$ მრავალწევრის $(x+3)$-ზე გაყოფის შედეგად.

ამოხსენით განტოლებები:

2.84. $z^4+4z+5=0$ 2.85. $z^2+8z+20=0$ 2.86. $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$

2.87. $z^2+2(3+i)z+6i+9=0$ 2.88. $z^6+4z^3+3=0$ 2.89. $z^8+15z^4-16=0$

დაშალეთ მამრავლებად შემდეგი მრავალწევრები და იპოვეთ ფესვები:

2.90. $P(z)=z^4-1$ 2.91. $P(z)=z^6+1$

2.92. $P(z)=z^4+z^2+1$ 2.93. $P(z)=z^4+8z^3+27z^2+38z+26$,

თუ ვიცით, რომ მისი ერთ-ერთი ფესვია $-3+2i$.

2.94. $P(z)=z^5+z^4+z^3-z^2-z-1$, თუ ცნობილია მისი ორჯერადი ფესვი $z_1=z_2=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§2.4. მატრიცები

რიცხვთა მართკუთხა ცხრილს, რომელიც m სტრიქონსა და n სვეტს შეიცავს, mxn -განზომილებიანი მატრიცი ეწოდება. მატრიცი ასე აღინიშნება

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1k} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2k} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{ik} \cdots a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mk} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ik})_{mxn}$$

a_{ik} ($i=1, 2, \ldots, m$; $k=1, 2, \ldots, n$) რიცხვებს მატრიცის ელემენტები ეწოდებათ. a_{ik} ელემენტი მოთავსებულია მატრიცის i-ური სტრიქონისა და k-ური სვეტის გადაკვეთაზე. თუ $m=n$, მაშინ მატრიცს n-ური რიგის კვადრატული მატრიცი ეწოდება.

$A=(a_{ik})_{mxn}$ და $B=(b_{ik})_{mxn}$ მატრიცებს ტოლი ეწოდებათ, თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ტოლია, ანუ $a_{ik}=b_{ik}$ ($i=1, 2, \ldots, m$; $k=1, 2, \ldots, n$).

თუ $A=(a_{ik})_{mxn}$ მატრიცში სტრიქონის ელემენტებს შევცვლით, შესაბამისად სვეტების ელემენტებით მივიღებთ nxm – განზომილებიან მატრიცს, რომელსაც მოცემულის ტრანსპონირებული მატრიცი ეწოდება. იგი აღინიშნება A^{T} სიმბოლოთი, ამრიგად:

$$A^{T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

მოქმედებები მატრიცებზე. $A=(a_{ik})_{mxn}$ და $B=(b_{ik})_{mxn}$ **მატრიცების ჯამი** A+B არის მატრიცი, რომელიც მიიღება მოცემული მატრიცების შესაბამისი ელემენტების შეკრებით. ე.ი.

$$A+B=(a_{ik}+b_{ik})_{mxn}. \tag{2.13}$$

$A=(a_{ik})_{mxn}$ მატრიცისა და $\alpha\in R$ **ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი** αA არის მატრიცი

$$\alpha A=(\alpha a_{ik})_{mxn} \tag{2.14}$$

$A=(a_{ik})_{mxp}$ და $B=(b_{ik})_{pxn}$ **მატრიცების ნამრავლი** $A\cdot B$ არის mxn -განზომილებიანი მატრიცი

$$A\cdot B=(c_{ik})_{mxn},$$

რომლის ყოველი ელემენტი გამოითვლება ასე:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk} \qquad (2.15)$$

$i=1, 2, \ldots, m; k=1, 2, \ldots, n$

ამრიგად, A და B მატრიცების გადამრავლება შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცში სვეტების რაოდენობა ემთხვევა B მატრიცში სტრიქონების რაოდენობას. AB ნამრავლის c_{ik} ელემენტი არის A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და B მატრიცის k-ური სვეტის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამი. მატრიცთა ნამრავლი, საზოგადოდ, არაკომუტატურია ანუ $AB \neq BA$, უფრო მეტიც, შეიძლება AB არსებობდეს და BA არ არსებობდეს.

ნულოვანი მატრიცი ეწოდება მატრიცს, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია.

კვადრატულ მატრიცს ეწოდება ერთეულოვანი, თუ მასში $a_{ii}=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ და $a_{ik}=0$, თუ $i \neq k$, $(i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,\ n)$. ერთეულოვანი მატრიცი აღინიშნება E სიმბოლოთი. ე.ი.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ნებისმიერი $A = (a_{ik})_{nxn}$ მატრიცისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$AE=EA=A.$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. მოცემულია მატრიცები

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ და $B = \begin{pmatrix} -6 & -5 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ვიპოვოთ $2A-3B$ მატრიცი.

ამოხსნა.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & -6 & -10 & -2 \end{pmatrix}$, $3B = \begin{pmatrix} -18 & -15 & -12 & -9 \\ -6 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, მაშინ

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 20 & 19 & 18 & 17 \\ 6 & -3 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

მაგალითი 2. მოცემულია $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ და $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ მატრიცები.

დავამტკიცოთ, რომ $AB \neq BA$.

ამოხსნა.

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&5\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+3\cdot2 & 1(-1)+0\cdot5+3\cdot3\\2\cdot1+1\cdot0+1\cdot2 & 2(-1)+1\cdot5+1\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8\\4&6\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&-1\\0&5\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-1)\cdot2 & 1\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot3+(-1)\cdot1\\0\cdot1+5\cdot2 & 0\cdot0+5\cdot1 & 0\cdot3+5\cdot1\\2\cdot1+3\cdot2 & 2\cdot0+3\cdot1 & 2\cdot3+3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\10&5&5\\8&3&9\end{pmatrix}.$$

ამრიგად, $AB\neq BA$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

2.95. შეკრიბეთ მატრიცები

ა) $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\2&1&0\\-1&3&1\end{pmatrix}$ და $B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&2\\1&3&-2\end{pmatrix}$ ბ) $A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\-2&-1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$ და $B=\begin{pmatrix}-4&-1&2\\2&2&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$

2.96. მოცემულია მატრიცები

$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ და $B=\begin{pmatrix}1&4&-1\\-1&3&2\end{pmatrix}$, იპოვეთ: ა) $3A-2B$; ბ) $A-3B$; გ) $-4B$.

2.97. იპოვეთ B მატრიცი, თუ $2A+3B=C$, სადაც

$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-4&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&3&-1\end{pmatrix}$.

გადაამრავლეთ მატრიცები

2.98. $\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$; 2. 99. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$;

2.100. $\begin{pmatrix}-3&1&2\\2&-1&1\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$;

2.101. $\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}$.

2.102. $\begin{pmatrix}3&1\\1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&3\end{pmatrix}$. 2.103. $\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$.

2.104. $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$. 2.105. $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$

2.106. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\3 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ მატრიცი გაამრავლეთ მის ტრანსპონირებულზე.

2.107. მოცემულია მატრიცები

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\2 & -1 & 3\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & 1 & 3\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$ გამოთვალეთ $AB-BA$.

შეასრულეთ მოქმედებები (2.108-2.111):

2.108. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & 3 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}^2$ 2.109. $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}^3$

2.110. $\left[\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{pmatrix}\right]^n$ 2.111. $\left[\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4 & -1\\-7 & 17 & 4\\2 & -5 & -1\end{pmatrix}\right]^5$

§2.5. დეტერმინანტები

ყოველ n-ური რიგის კვადრატულ $A=(a_{ik})_{n\times n}$ მატრიცს შეესაბამება ერთადერთი რიცხვი, რომელსაც n-ური რიგის დეტერმინანტი ეწოდება. იგი აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელი ფორმულის განხილვამდე შემოვიღოთ შემდეგი ცნებები:

n-ური რიგის $|A|$ დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის შესაბამისი მინორი აღინიშნება M_{ik} სიმბოლოთი და არის $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება $|A|$ დეტერმინანტისაგან i-ური სტრიქონისა და k-ური სვეტის ამოშლის შედეგად. a_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება A_{ik} კი განიმარტება შემდეგი სახით:

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}=\begin{cases}M_{ik}, & \text{თუ} \quad i+k \text{ ლუწია},\\ -M_{ik}, & \text{თუ} \quad i+k \quad \text{კენტია}.\end{cases} \tag{2.16}$$

შეეთანხმდეთ, რომ პირველი რიგის $A=(a_{11})$ მატრიცს შევუსაბამოთ I რიგის $|A|=|a_{11}|$ დეტერმინანტი, რომელიც a_{11} რიცხვის ტოლია, ანუ $|a_{11}|=a_{11}$. n–ური რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელად, როცა $n\geq 2$, ესარგებლობთ შემდეგი ფორმულით:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k} \tag{2.17}$$

სადაც A_{11}, A_{12}, . . ., A_{1n} პირველი სტრიქონის ელემენტების ალგებრული დამატებებია.

(2.17) ფორმულის თანახმად მეორე რიგის დეტერმინანტი გამოითვლება შემდეგი სახით:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

ხოლო მესამე რიგის დეტერმინანტი გამოითელება შემდეგნაირად:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-$$

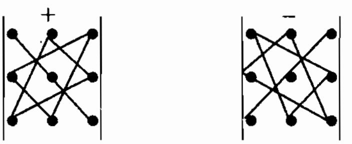
$$-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელი ფორმულა შეიძლება დავიმახსოვროთ ეგრეთ წოდებული „სამკუთხედის წესით“.



(2.17) ფორმულით სარგებლობისას მეოთხე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა დაიყვანება მესამე რიგის დეტერმინანტების გამოთვლაზე, მეხუთე რიგის – მეოთხე რიგის დეტერმინანტების გამოთვლაზე და ა.შ.

მტკიცდება, რომ დეტერმინანტს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ტრანსპონირებული მატრიცების დეტერმინანტები ტოლია.

ამ თვისებიდან გამომდინარე, ყველა თვისება რაც დეტერმინანტს აქვს სტრქონის ელემენტების მიმართ, ისევე ექნება სვეტის ელემენტების მიმართაც.

2. დეტერმინანტი ტოლია მისი ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების სათანადო ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამისა.

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+ a_{i2}A_{i2}+...+ a_{in}A_{in}.$$

ამ ფორმულას უწოდებენ დეტერმინანტის დაშლას i-ური სტრიქონის ელემენტების მიხედვით. შესაბამისად დეტერმინანტის დაშლა k-ური სვეტის ელემენტების მიხედვით იქნება

$$|A|=a_{1k}A_{1k}+ a_{2k}A_{2k}+...+ a_{nk}A_{nk}.$$

3. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს გავამრავლებთ სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე და შევკრებთ, მივიღებთ ნულს.

მეორე და მესამე თვისება შეიძლება ჩაიწეროს ერთი ფორმულის სახით

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}|A|, & \text{თუ } i=k,\\ 0, & \text{თუ } i\neq k.\end{cases}$$

4. დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ყველა ელემენტი ნულია.

5. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტები შეიცავენ ერთსა და იმავე მამრავლს, მაშინ ეს მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ.

6. თუ დეტერმინანტის რომელიმე ორ სტრიქონს (სვეტს) ადგილებს შევუცვლით, მაშინ დეტერმინანტი ნიშანს შეიცვლის.

7. თუ დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტები ერთნაირია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

8. დეტერმინანტი, რომლის ორი სტრიქონი (სვეტი) პროპორციულია (ანუ შესაბამისი ელემენტების შეფარდება მუდმივია), ნულის ტოლია.

9. თუ დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ელემენტები წარმოდგენილია ორი შესაკრების სახით

$$a_{ik}=b_{ik}+c_{ik}\ (k=1, 2, \ldots, n),$$

მაშინ დეტერმინანტი ორი ისეთი დეტერმინანტის ჯამის ტოლია, რომელთა ყველა სტრიქონი, გარდა i-ური სტრიქონისა, ემთხვევა მოცემული დეტერმინანტის სტრიქონებს, ხოლო i-ური სტრიქონის ელემენტებს პირველ დეტერმინანტში b_{ik} რიცხეები წარმოადგენენ, ხოლო მეორე დეტერმინანტში c_{ik} რიცხვები.

განმარტება. ვიტყვით, რომ დეტერმინანტის სტრიქონები წრფივადდამოკიდებულია, თუ არსებობს რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და სტრიქონების ამ რიცხვებზე გამრავლების შემდეგ, შესაბამის ელემენტთა ჯამი ნულის ტოლია. მაგალითად, დეტერმინანტში

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 13 & 12 & 5 & 10 \\ 1 & -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

პირველი, მეორე და მესამე სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია, რადგანაც მათი გამრავლებით შესაბამისად $k_1=2$, $k_2=3$ და $k_3=-1$ რიცხვებზე და შეკრებით ნული მიიღება.

თუ დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ელემენტები მიიღება ამ დეტერმინანტის სხვა სტრიქონების შესაბამისი ელემენტების რაიმე რიცხვებზე გამრავლებითა და შეკრებით, მაშინ ამბობენ, რომ i-ური სტრიქონი არის აღნიშნული სტრიქონების წრფივი კომბინაცია. მოცემულ მაგალითში მესამე სტრიქონი არის პირველი და მეორე სტრიქონების წრფივი კომბინაცია. ცხადია, რომ თუ დეტერმინანტის სტრქიონები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ერთ-ერთი მათგანი წარმოადგენს სხვა დანარჩენი სტრიქონების წრფივ კომბინაციას.

10. დეტერმინანტის სიდიდე არ შეიცვლება, თუ რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს დავუმატებთ სხვა სტრიქონების (სვეტების) ელემენტების წრფივ კომბინაციას.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

ამოხსნა. „სამკუთხედის წესის“ თანახმად

$$|A|=2\cdot3\cdot5+2(-4)\cdot3+1\cdot1\cdot2-2\cdot3\cdot2-2\cdot1\cdot3-1(-4)\cdot5=30-24+2-12-6+20=10.$$

$$|B|=1\cdot3\cdot0+(-2)(-2)(-5)+0\cdot2\cdot1-1\cdot3\cdot(-5)-1\cdot2(-2)-(-2)\cdot0\cdot0=-1.$$

მაგალითი 2. დეტერმინანტის მეორე თვისების გამოყენებით გამოვთვალოთ შემდეგი დეტერმინანტი:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$|A|=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}+2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=-5-2(16-15)=-7.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი:

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\2&0&2&5\\0&1&0&1\\3&2&1&2\end{vmatrix}$$

ამოხსნა. ვინაიდან მესამე სტრიქონი (ასევე პირველი სვეტიც) შეიცავს ორ ნულოვან ელემენტს, ამიტომ უმჯობესია, გამოთვლა ვაწარმოოთ მესამე სტრქიონის (ან პირველი სვეტის) ელემენტების მიხედვით.

$$|A|=1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0&2&3\\2&2&5\\3&1&2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}0&1&2\\2&0&2\\3&2&1\end{vmatrix}.$$

შემდეგ გამოთვლები იწარმოებს მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის უკვე ცნობილი წესით.

მაგალითი 4. გამოვიყენოთ დეტერმინანტის მეთერთმეტე თვისება და ნულების დასმით გამოვთვალოთ შემდეგი დეტერმინანტი:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&0&1&-2\\3&5&8&1\\-4&2&3&0\\1&2&-1&1\end{vmatrix}$$

ამოხსნა. რადგანაც პირველ სტრიქონში ერთ-ერთი ელემენტი ნულია, ამიტომ ავირჩიოთ პირველი სტრიქონი. მესამე სვეტი დავტოვოთ უცელელი და პირეელ სვეტს დავუმატოთ მესამე სვეტის –2-ზე ნამრავლი, ხოლო მეოთხე სვეტს – მესამე სვეტის 2-ზე ნამრავლი. მეორე სვეტი უცელელი დარჩება, რადგანაც აქ პირველი ელემენტი ისედაც ნულია. მივიღებთ:

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\-13&5&8&17\\-10&2&3&6\\3&2&-1&-1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-13&5&17\\-10&2&6\\3&2&-1\end{vmatrix}.$$

აქაც ავირჩიოთ მესამე სტრიქონი. მესამე სვეტი დავტოვოთ უცვლელი, პირველ სვეტს დავუმატოთ მესამე სვეტის სამზე ნამრავლი, ხოლო მეორე სვეტს მესამე სვეტის 2-ზე ნამრავლი.

$$|A|=\begin{vmatrix}38&39&17\\8&14&6\\0&0&-1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}38&39\\8&14\end{vmatrix}=-(532-312)=-220.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ მეოთხე რიგის დეტერმინანტი:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 7 & 6\\ 3 & -1 & 9 & -3\\ 0 & 3 & 4 & 9\\ 5 & 5 & 8 & 18\end{vmatrix}.$$

ამოხსნა. ამ დეტერმინანტის გამოსათვლელად მეოთხე სვეტის ელემენტებს შესაბამისად გამოვაკლოთ მეორე სვეტის ელემენტების 3-ზე ნამრავლი და დავშალოთ მინორებად მეოთხე სვეტის ელემენტების მიხედვით. მივიღებთ:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 7 & 0\\ 3 & -1 & 9 & 0\\ 0 & 3 & 4 & 0\\ 5 & 5 & 8 & 3\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 3 & -1 & 9\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}$$

თუ ახლა მეორე სტრიქონის ელემენტებს შესაბამისად გამოვაკლებთ პირველი სტრიქონის ელემენტების 3-ზე ნამრავლს, მივიღებთ

$$|A|=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 0 & -7 & -12\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-7 & -12\\ 3 & 4\end{vmatrix}=3\cdot(-28+36)=24.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

2.112. $\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix}$, 2.113. $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{vmatrix}$, 2.114. $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$,

2.115. $\begin{vmatrix}a+bi & a+b\\ a-b & a-bi\end{vmatrix}$, 2.116. $\begin{vmatrix}a+b & a^2\\ ab & a^2-ab+b^2\end{vmatrix}$, 2.117. $\begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\ 7 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}$,

2.118. $\begin{vmatrix}4 & -2 & 4\\ 10 & 2 & 12\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}$, 2.119. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}$, 2.120. $\begin{vmatrix}-x & 1 & x\\ 0 & -x & -1\\ x & 1 & -x\end{vmatrix}$,

2.121. $\begin{vmatrix}\sin\alpha & -\sin\beta & \cos\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta & \sin\beta\\ \cos^2(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 1\end{vmatrix}$, 2.122. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\end{vmatrix}$

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

2.123. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2.124. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2.125. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2.126. $$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2.127. $\begin{vmatrix} 3 & -x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$ 2.128. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 5 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & x \end{vmatrix},$

2.129. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ x & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix},$ 2.130. $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2,$

2.131. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ 2.132. $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

2.133. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1;$ 2.134. $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

2.135. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix},$ 2.136. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$ 2.137. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$2.138.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad 2.139.\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 17 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 9 & 1 & -1 & 8 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

§ 2.6. შებრუნებული მატრიცი

$A=(a_{ik})_{nxn}$ კვადრატული მატრიცის შებრუნებული მატრიცი ეწოდება ისეთ A^{-1} მატრიცს, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, სადაც E არის n–ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცი.

მტკიცდება, რომ თუ A მატრიცი გადაუგვარებელია, ანუ $\det A\neq 0$, მაშინ A მატრიცს გააჩნია ერთადერთი შებრუნებული მატრიცი, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

სადაც A_{ik} $(i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,n)$ არის $|A|$ დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცი

ამოხსნა. ამ მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

ე.ი. მოცემული მატრიცი გადაუგვარებელია. ვიპოვოთ ალგებრული დამატებები:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1,\quad A_{13}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6,\ A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2,\ \ A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0,\ A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1.$$

ე. ი. $A^{*}=\begin{pmatrix}-3 & 6 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

A მატრიცის შებრუნებული მატრიცი (2.18) ფორმულის თანახმად იქნება

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-3 & 6 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

შევამოწმოთ. უნდა მივიღოთ $AA^{-1}=E$. მართლაც,

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -6 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E,$$

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}3 & -6 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 5 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცი
ამოხსნა.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 5 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & 3\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-18\neq 0.$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=2,\ \ A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}=11,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-6,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0,\ \ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=8,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-1.$$

ე.ი. $A^*=\begin{pmatrix}2 & -6 & 8\\ -3 & 0 & -3\\ 11 & -6 & -1\end{pmatrix}$; $A^{-1}=-\frac{1}{18}\begin{pmatrix}2 & -6 & 8\\ -3 & 0 & -3\\ 11 & -6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{9}\\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6}\\ -\frac{11}{18} & \frac{1}{3} & \frac{1}{18}\end{pmatrix}$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

იპოვეთ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცი (2.140-2.144).

2.140. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, 2.141. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, 2.142. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$,

2.143. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, 2.144. $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ -8 & 2 & -10\end{pmatrix}$.

განსაზღვრეთ X მატრიცი შემდეგი განტოლებიდან (2.145-2.152)

2.145. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 4 & 4\end{pmatrix}$, 2.146. $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -1 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$,

2.147. $\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & -7\\ -1 & 2\\ -3 & -3\end{pmatrix}$, 2.148. $\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$,

2.149. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=(6-3)$, 2.150. $\begin{pmatrix}3 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$,

2.151. $\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 16\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2.152. მოცემულია მატრიცი $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. იპოვეთ f(A), თუ $f(x)=x^2-2x-1$.

§ 2.7. მატრიცის რანგი

$A=(a_{ik})_{m\times n}$ მატრიცის რომელიმე r სტრიქონისა და r სვეტის ($1\le r\le\min(m,n)$) გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს მოცემული მატრიცის r რიგის მინორი ეწოდება. $m\times n$-განზომილებიან მატრიცში ყველა შესაძლო r რიგის მინორთა რაოდენობა ტოლია $C_m^r \cdot C_n^r$ სიდიდისა.

r რიცხვს ეწოდება A მატრიცის რანგი, თუ ამ მატრიცის r-ზე მაღალი რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია, ხოლო r რიგის მინორებს შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ნულოვანი მატრიცის რანგი მიღებულია ნულის ტოლად. ცხადია, არანულოვანი მატრიცის რანგი r აკმაყოფილებს უტოლობას $1\le r\le\min(m,n)$.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. გამოთვალეთ მატრიცის რანგი, თუ

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5&3\\0&1&7&4\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

ამოხსნა. ერთადერთი მე-4 რიგის მინორი

$$M_4=\begin{pmatrix}1&2&5&3\\0&1&7&4\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=0,$$

ხოლო მესამე რიგის მინორებს შორის ერთ-ერთი

$$M_3=\begin{vmatrix}1&2&5\\0&1&7\\0&-1&0\end{vmatrix}=7\neq 0.$$

ამიტომ rang A=3.

მაგალითი 2. $A=\begin{pmatrix}2&-1&3&4\\5&-2&1&-1\\3&-1&-2&-5\end{pmatrix}$

ამოხსნა. ყველა მესამე რიგის მინორი ნულის ტოლია, ე.ი. $r(A)\le 2$. მეორე რიგის მინორებიდან $M_2=\begin{vmatrix}2&-1\\5&-2\end{vmatrix}=1\neq 0.$ ე.ი. $r(A)=2$.

მაგალითი 3. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

ამოხსნა.

განხილულ მატრიცში ერთ-ერთი მეორე რიგის მინორი $M_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & +2 \end{vmatrix}=1\neq 0$, ხოლო მისი შემცველი ყველა მესამე რიგის მინორი ნულის ტოლია:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}=0$$

ე.ი. r(A)=2.

მაგალითი 4.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -17 & 14 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -17 & 14 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -20 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

rangA=2

მაგალითი 5.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

rangA =4.

მაგალითი 6.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1&3&2\\1&2&-3&0&1\\4&-7&9&9&4\\1&-8&11&6&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&3&2\\-3&1&2&0&1\\9&4&-7&9&4\\11&1&-8&6&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&3&2\\0&7&-1&9&7\\0&-14&2&-18&-14\\0&-21&3&-27&-21\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&2\\0&1&-7&-9&-7\\0&2&-14&-18&-14\\0&3&-21&-27&-21\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&2\\0&1&-7&-9&-7\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&2\\0&1&-7&-9&-7\end{pmatrix}$$

rangA=2.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოთვალეთ შემდეგი მატრიცების რანგი ;

2.153. $\begin{pmatrix}1&1&-8\\3&2&-6\\0&1&3\end{pmatrix}$, 2.154. $\begin{pmatrix}1&2&-4\\-1&1&-5\\-2&-1&-1\end{pmatrix}$, 2.155. $\begin{pmatrix}1&4&1\\3&1&3\\2&8&-1\end{pmatrix}$,

2.156. $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&4&2\\3&7&3\end{pmatrix}$, 2.157. $\begin{pmatrix}1&2&5&6\\2&3&-2&-4\\5&8&1&-2\end{pmatrix}$, 2.158 $\begin{pmatrix}2&-3&8&2\\2&12&-2&12\\1&3&1&4\end{pmatrix}$,

2.159. $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-2\\2&-1&3&1&-3\\4&5&-5&-6&1\end{pmatrix}$ 2.160. $\begin{pmatrix}1&2&3&-1&+2\\3&-1&5&-3&-1\\2&1&2&-2&-3\end{pmatrix}$,

2.161. $\begin{pmatrix}-1&3&3&2&5\\-3&5&2&3&4\\-3&1&-5&0&-7\\-5&7&1&4&1\end{pmatrix}$, 2.162. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}$,

2.163. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 2.164. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

§2.8. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა. კრამერის თეორემა

კრამერის თეორემა. თუ n ცვლადიან n წრფივ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

მთავარი დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, (k=1,2,\ldots, n), \tag{2.19}$$

სადაც Δ_k (k=1,2,…,n) დეტერმინანტი მიიღება Δ დეტერმინანტისაგან, თუ მასში k-ურ სვეტს შევცვლით $b_1, b_2, \ldots, b_n$ რიცხვებისაგან შედგენილი სვეტით.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 14, \\ 2x_1 - 3x_2 = 13. \end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემის დვტერმინანტია

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11 \neq 0.$$

ე.ი. სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. სისტემის დამატებითი დეტერმინანტებია:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} = -55, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 11.$$

კრამერის ფორმულების თანახმად,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

ამოხსნა. გამოვთვალოთ სისტემის მთავარი დეტერმინანტი.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

რადგანაც სისტემის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$, ამიტომ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამ ამონახსნის მოსაძებნად გამოვთვალოთ დამატებითი დერმინანტები:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

კრამერის ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ სისტემის ამონახსნს: $x_1=1$, $x_2=-1$ და $x_3=2$.

§ 2.9. ᲬᲠᲤᲘᲕᲘ ᲡᲘᲡᲢᲔᲛᲘᲡ ᲐᲛᲝᲮᲡᲜᲘᲡ ᲛᲐᲢᲠᲘᲪᲣᲚᲘ ᲮᲔᲠᲮᲘ

მოცემულია სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

თუ გავიხსენებთ მატრიცთა ნამრავლის განმარტებას, ადვილი საჩვენებელია, რომ მოცემული სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი მატრიცული ტოლობის სახით:

$$A\cdot X=B.$$

თუ A მატრიცი გადაუგვარებელია, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$X=A^{-1}B,$$

სადაც A^{-1} არის A მატრიცის შებრუნებული მატრიცი.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. ამოეხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=7 \\ x_1-x_2=1 \end{cases}$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

მაშინ სისტემა ასე ჩაიწერება: AX=B.

თუ $|A|\neq 0$, ამ სისტემის ამონახსნია $X=A^{-1}B$.

ვიპოვოთ A^{-1}. გვაქვს

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0.$$ ცხადია, $A_{11}=-1$, $A_{12}=-1$, $A_{21}=-3$, $A_{22}=2$.

ე.ი. $A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

სისტემის ამონახსნია $x_1=2$, $x_2=1$.

მაგალითი 2. მატრიცული ხერხით ამოეხსნათ სისტემა

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3=9,\\ x_1+2x_2-3x_3=14,\\ 3x_1+4x_2+x_3=16.\end{cases}$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&-3\\3&4&1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\ \text{და}\quad B=\begin{pmatrix}9\\14\\16\end{pmatrix}$$

მაშინ სისტემა ასე ჩაიწერება: AX=B. $|A|=\begin{vmatrix}2&3&2\\1&2&-3\\3&4&1\end{vmatrix}=-6\neq 0.$

ე.ი. A მატრიცი გადაუგვარებელია.

მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეს ამონახსნია

$X=A^{-1}B$

მოვძებნოთ A^{-1}. $|A|$ დეტერმინანტის ელემენტების ალგებრული დამატებებია:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&-3\\4&1\end{vmatrix}=14,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}1&-3\\3&1\end{vmatrix}=-10,\ A_{13}=+\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3&2\\4&1\end{vmatrix}=5,\ A_{22}=\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}=-4,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3&2\\2&-3\end{vmatrix}=-13,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2&2\\1&-3\end{vmatrix}=8,\ A_{33}=\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1.$$

ე.ი.

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14&5&-13\\-10&-4&8\\-2&1&1\end{pmatrix};$$

მაშასადამე,

$$X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14&5&-13\\-10&-4&8\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\14\\16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-12\\-28\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix},$$ ანუ $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-2$.

§. 2.10. კრონეკერ-კაპელის თეორემა

ვთქვათ, მოცემულია n-ცვლადიანი m წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

სისტემას თავსებადი ეწოდება, თუ მას ერთი ამონახსნი მაინც აქვს, წინააღმდეგ შემთხვევაში – არათავსებადი.

$A = (a_{ik})_{mxn}$ მატრიცს სისტემის მატრიცი ეწოდება, ხოლო

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

მატრიცს – სისტემის გაფართოებული მატრიცი.

კრონეკერ-კაპელის თეორემა. სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სისტემის მატრიცის რანგი ტოლია გაფართოებული მატრიცის რანგის, ანუ

$$\text{rang}A = \text{rang}B.$$

თუ სისტემა თავსებადია და rangA=rangB=n, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ხოლო თუ

$$\text{rang}A = \text{rang}B = r < n,$$

მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე. ამ შემთხვევაში n–r რაოდენობის ცვლადი იქნება თავისუფალი ცვლადები, ხოლო დანარჩენი r ცვლადი – მათი წრფივი კომბინაცია.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -7 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

ამოხსნა. კრონეკერ-კაპელის თეორემის თანახმად დავადგინოთ თავსებადია თუ არა სისტემა.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -3\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}_{4\times 3}$$

rang A=3, რადგანაც $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -3\end{vmatrix}=-35\neq 0$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4 & -7\\ 3 & -2 & 1 & 7\\ 2 & 3 & -3 & -7\\ 5 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4 & -7\\ 3 & -2 & 1 & 7\\ 2 & 3 & -3 & -7\\ 5 & 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4 & -7\\ 3 & -2 & 1 & 7\\ 2 & 3 & -3 & -7\\ 5 & 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=0,$$

ამიტომ rangB=3. მოცემული სისტემა თავსებადია, რადგანაც rangA=rangB=3. სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

მოცემული სისტემის ამონახსნის საპოვნელად სისტემის ოთხი განტოლებიდან უნდა შევინარჩუნოთ პირველი სამი განტოლება, რადგანაც ეს განტოლებები შეიცავენ უდიდესი რიგის (ჩვენ შემთხვევაში მესამე რიგის), ნულისაგან განსხვავებული მინორის ელემენტებს.

$$\begin{cases}2x_1+x_2-4x_3=-7\\ 3x_1-2x_2+x_3=7\\ 2x_1+3x_2-3x_3=-7.\end{cases}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი $\Delta\neq 0$. ამიტომ კრამერის თეორემის თანახმად აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ადვილი მოსაძებნია, რომ $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$. ეს ამონახსნი არის მოცემული სისტემის ამონახსნიც.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+x_4=1\\ -x_1+x_2+2x_3+3x_4=2\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=3\\ x_1+x_2-x_3+x_4=2\\ 3x_1+4x_2-2x_3+2x_4=5\end{cases}$$

ამოხსნა. დავადგინოთ, არის თუ არა სისტემა თავსებადი, ანუ სისტემის მატრიცსა და გაფართოებულ მატრიცს აქვთ თუ არა ტოლი რანგები.

$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -2 & 2\end{pmatrix}$ rang A=4, რადგანაც

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & 15 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 15 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 42 \neq 0.$$

ამიტომ rang B=5 .

rangA≠rangB ამიტომ მოცემული სისტემა არათავსებადია.

მაგალითი 3. ამოხსენით სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

ამოხსნა.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

რადგანაც $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, ამიტომ rang A=rangB=3.

ცვლადების რაოდენობა კი არის 4, ამიტომ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე, აქ ერთი ცვლადი თავისუფალია. სისტემის ამონახსნის მოსაძებნად აღებული ნულისაგან განსხვავებული მინორის შესაბამისი ცვლადები დავტოვოთ თავის ადგილზე, ხოლო x_4 გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეს.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_4 + 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -x_4 + 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2x_4 + 2. \end{cases}$$

მივცეთ x_4-ს ნებისმიერი t მნიშვნელობა, მივიღებთ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2t + 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -t + 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2t + 2. \end{cases}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი $\Delta = -12 \neq 0$, ამიტომ კრამერის თეორემის თანახმად მას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. ვიპოვოთ ამონახსნი. დამხმარე დეტერმინანტები არიან:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2t+1 & 2 & 1 \\ -t+3 & -1 & -1 \\ -2t+2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t+1 & 2 & 1 \\ t+4 & 1 & 0 \\ -8t-1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+4 & 1 \\ -8t-1 & -4 \end{vmatrix} = 4t - 15$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2t+1 & 1 \\ 2 & -t+3 & -1 \\ 3 & -2t+2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2t+1 & 1 \\ 3 & t+4 & 0 \\ 0 & -8t-1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & t+4 \\ 0 & -8t-1 \end{vmatrix} = -24t - 3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2t+1 \\ 2 & -1 & -t+3 \\ 3 & 2 & -2t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2t+1 \\ 0 & -5 & -5t+1 \\ 0 & -4 & 8t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5t+1 \\ -4 & -8t-1 \end{vmatrix} = 20t + 9$$

მაშასადამე, სისტემის ამონახსნია

$x_1 = \dfrac{4t-15}{-12}$, $x_2 = \dfrac{8t+1}{4}$, $x_3 = \dfrac{20t+9}{-12}$, $x_4=t$,სადაც t ნებისმიერია.

§ 2. 11. წრფივი სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით

მაგალითი 1. მოცემულია სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 10 \\ -3x_1 + 8x_2 - 10x_3 = -25 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

ამოხსნა. მოცემული სისტემა გარდავქმნათ ტოლფას სისტემად ისე, რომ პირველ განტოლებაში x_1-ის კოეფიციენტი იყოს 1, ხოლო მეორე და მესამე განტოლებაში ეს ცვლადი სულ არ შედიოდეს. ამისათვის პირველი გან-

ტოლება წევრ-წევრად გავყოთ x_1-ის კოეფიციენტზე, ე.ი. 2-ზე, მივიღებთ ახალი სისტემის პირველ განტოლებას

$$x_1-2x_2+2x_3=5.$$

თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ 3-ზე და წევრ-წევრად მივუმატებთ ამოსავალი სისტემის მეორე განტოლებას, ხოლო შემდეგ იმავე განტოლებას გავამრავლებთ – 4-ზე და წევრ-წევრად მივუმატებთ სისტემის მესამე განტოლებას, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას, რომელშიც x_1– ცვლადი გამორიცხული იქნება მეორე და მესამე განტოლებიდან.

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2+2x_3=5 \\ \qquad 2x_2-4x_3=-10 \\ \qquad 5x_2-7x_3=-19. \end{cases}$$

ახლა მეორე განტოლება წევრ-წევრად გავყოთ 2-ზე, მივიღებთ:

$$x_2-2x_3=-5.$$

განტოლებას, სადაც x_2-ის კოეფიციენტი 1-ის ტოლია. გავამრავლოთ ამ განტოლების ორივე მხარე (-5)-ზე და წევრ-წევრად მივუმატოთ წინა სისტემის მესამე განტოლებას. მივიღებთ

$$3x_3=6.$$

ე.ი. მოცემული სისტემის ტოლფასი სისტემაა

$$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=5 \\ \qquad x_2-2x_3=-5 \\ \qquad\qquad 3x_3=6. \end{cases}$$

ასეთი სისტემა კი ადვილად ამოიხსნება. $x_3=2$, $x_2=-1$, $x_1=-1$.ე.ი. სისტემის ამონახსნია $(-1; -1; 2)$.

მაგალითი 2. ამოეხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+2x_2-x_3-2x_4=4, \\ -x_1-x_2+2x_3+3x_4=3, \\ 3x_1+3x_2+x_3=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_3-2x_4=1, \\ \qquad x_3+2x_4=2, \\ \qquad x_3+x_4=4, \\ \qquad 4x_3+6x_4=12. \end{cases}$$

მეორე ადგილზე დავწეროთ x_3, გავაგრძელოთ გამოთვლები:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_3-2x_4+x_2=1, \\ \quad x_3+2x_4 \qquad =2, \\ \quad x_3+x_4 \qquad =4, \\ \quad 4x_3+6x_4 \quad =12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_3-2x_4+x_2=1, \\ \quad x_3+2x_4 \qquad =2, \\ \qquad -x_4 \qquad =2, \\ \qquad -2x_4 \quad =4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_3-2x_4+x_2=1, \\ \quad x_3+2x_4 \qquad =2, \\ \qquad x_4 \qquad =-2. \end{cases}$$

(მეოთხე 0=0 განტოლება აღარ ჩავწერეთ). ჩავთვლით რა x_2-ს ნებისმიერად, მივიღებთ სისტემის ზოგად ამონახსნს: $x_4=-2$, $x_3=6$, $x_2=t$, $x_1=3-t$, სადაც t ნებისმიერი მუდმივი რიცხვია. პას.: $(3-t;\ t;\ 6;\ -2)$ t ნებისმიერია.

მაგალითი 3. ამოეხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -7, \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$$

ამოხსნა. x_1 ცვლადი გამოვრიცხოთ მეორე და მესამე განტოლებიდან

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \quad 3x_2 - 5x_3 = -7, \\ \quad 6x_2 - 10x_3 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \quad 3x_2 - 5x_3 = -7, \\ \quad\quad 0 \cdot x_3 = 16. \end{cases}$$

მესამე განტოლებას არ აქვს ამონახსნი. ე.ი. სისტემა არათავსებადია.

სისტემის მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნებით ამოვხსნათ სისტემები:

მაგალითი 4.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -9, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -9, \\ 2x_1 \quad\quad - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 & -9 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & -9 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 4 & -1 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & -7 & -7 & 14 & 28 \\ 0 & 5 & 3 & -8 & -18 \\ 0 & -6 & -5 & 12 & 24 \\ 0 & -11 & -2 & 14 & 36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

ე. ი. მოცემული სისტემა ელემენტარული გარდაქმნებით მიიყვანება შემდეგ თავსებად სისტემამდე:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -9, \\ \quad x_2 + x_3 - 2x_4 = -4, \\ \quad\quad x_3 - x_4 = -1, \\ \quad\quad\quad x_4 = 1. \end{cases}$$

საიდანაც $x_4=1$, $x_3=0$, $x_2=-2$, $x_1=2$.

მაგალითი 5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 10x_4 = 2. \end{cases}$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -7 & -10 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 11 & 13 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 13 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

ე.ი. მოცემული სისტემა ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემის

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 2, \\ 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ამ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. $x_3 = \dfrac{2-3x_4}{2}$, $x_2 = \dfrac{2-x_4}{2}$, $x_1 = \dfrac{x_4+2}{2}$.

აქ x_4 თავისუფალი უცნობია. ვთქვათ, $x_4=t$, მაშინ მოცემული სისტემის ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე ასე ჩაიწერება:

$x_1 = 1 + \dfrac{1}{2}t$, $x_2 = 1 - \dfrac{1}{2}t$, $x_3 = 1 - \dfrac{3}{2}t$, $x_4=t$, სადაც t ნებისმიერია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ამოხსენით სისტემები

2.165. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 4x_1 - x_2 = 13. \end{cases}$

2.166. $\begin{cases} 2x_1 + 12x_2 = 87, \\ 35x_1 - 18x_2 = 69. \end{cases}$

2.167. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 7 = 0. \end{cases}$

2.168. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 = 5. \end{cases}$

2.169. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

2.170. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = -4. \end{cases}$

2.171. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 = 0. \end{cases}$

2172. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$

2.173. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = -4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 10. \end{cases}$

2.174. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 8, \\ 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

2.175. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.176. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 7, \\ 3x_1 + x_3 = 13 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

2.177. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.178. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \quad\quad + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 \quad\quad + 4x_3 = 1. \end{cases}$

2.179. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

2.180. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

2.181. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

2.182. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 \quad\quad + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.183. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 3. \end{cases}$

2.184. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.185. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.186. $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.187. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 0. \end{cases}$

2.188. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

2.189. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

2.190. $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

2.191. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

2.192. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ \quad\quad 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 \quad\quad + 3x_4 = 7. \end{cases}$

2.193. $\begin{cases} x_2+3x_3-4x_4=5, \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=6, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=8. \end{cases}$

2.194. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+x_4=17, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1-3x_2-x_3+2x_4=5, \\ 5x_1+3x_3-3x_4=-5. \end{cases}$

გამოიკვლიეთ და ამოხსენით სისტემები (2.195-2.200)

2.195. $\begin{cases} ax_1-x_2=3, \\ 6x_1-3x_2=5. \end{cases}$

2.196. $\begin{cases} x_1-ax_2=5, \\ 2x_1+4x_2=10. \end{cases}$

2.197. $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=-1, \\ x_1+x_2+ax_3=2. \end{cases}$

2.198. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3=0, \\ ax_1+2x_2-4x_3=0. \end{cases}$

2.199. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0, \\ ax_1-14x_2+15x_3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$

2.200. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=b, \\ 5x_1-8x_2+9x_3=3, \\ 2x_1+x_2+ax_3=-1. \end{cases}$

ჩაწერეთ სისტემები მატრიცულად და ამოხსენით

2.201. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+6x_3=6, \\ 3x_1+x_2-9x_3=2, \\ -x_1+4x_2+2x_3=7. \end{cases}$

2.202. $\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_3=-1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=-7, \\ x_1-3x_2-x_3=-1. \end{cases}$

2.203. $\begin{cases} 5x_1+4x_2+3x_3=17, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=14, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=11. \end{cases}$

2.204. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-5x_4=-9, \\ 2x_1-x_2-3x_3+4x_4=10, \\ -x_1+2x_2+x_3-3x_4=-9, \\ 2x_1-x_3+2x_4=6. \end{cases}$

გაუსის მეთოდით ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი სისტემები:

2.205. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ 4x_1-x_2+5x_3=3. \end{cases}$

2.206. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ x_1-2x_2+2x_3=-5, \\ 7x_1+x_2-x_3=10. \end{cases}$

2.207. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4, \\ x_1-x_3+2x_4=6, \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1. \end{cases}$

2.208. $\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1+8x_2-x_3=8, \\ 9x_1+x_2+8x_3=0. \end{cases}$

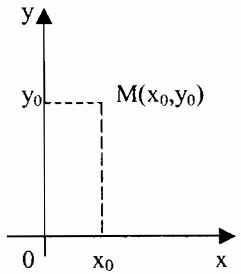
2.209. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_4=16, \\ x_2+2x_3+x_4=12, \\ x_1-3x_3+3x_4=4, \\ x_1-4x_2+x_4=-3. \end{cases}$

თავი III

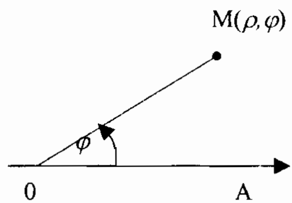
ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

§. 3.1. დეკარტის მართკუთხა და პოლარული კოორდინატები სიბრტყეზე. მანძილი ორ წერტილს შორის. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით

სიბრტყეზე, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში, ყოველ M წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა ერთადერთი წყვილი (x_0, y_0), რომელთაც მისი კოორდინატები ეწოდება. x_0-ს ეწოდება M წერტილის აბსცისი, y_0-ს – ორდინატი, რასაც ასე აღნიშნავენ: $M(x_0, y_0)$ (ნახ.4), პირიქითაც, ყოველ ნამდვილ რიცხვთა წყვილს სიბრტყეზე შეესაბამება ერთადერთი წერტილი. ასეთი ურთიერთცალსახა თანადობის დამყარებას ნამდვილ რიცხვთა წყვილებსა და სიბრტყის წერტილებს შორის, ეწოდება კოორდინაცია სიბრტყეზე.



ნახ. 4



ნახ. 5

წერტილის მდებარეობა სიბრტყეზე შეიძლება განისაზღვროს არა მარტო დეკარტის კოორდინატებით. ხშირად სარგებლობენ ე.წ. **პოლარული კოორდინატებით**, გვაქვს პოლუსი 0 და პოლარული ღერძი OA (ნახ. 5). M წერტილის პოლარული კოორდინატებია $\rho=OM$ და $\varphi=\angle AOM$. ρ პირველი კოორდინატია – **პოლარული რადიუსი**, ხოლო φ – მეორე კოორდინატია – **პოლარული კუთხე** (მას ამპლიტუდასაც უწოდებენ).

ცხადია, პოლარულ კუთხეს აქვს მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება $2\pi k$ შესაკრებით, სადაც k მთელი რიცხვია. პოლარული კუთხის იმ φ მნიშვნელობას, რომელიც აკმაყოფილებს $-\pi\leq\varphi\leq\pi$ პირობას, **მთავარი მნიშვნელობა** ეწოდება.

თუ დეკარტის კოორდინატთა სისტემის აბსცისთა ღერძს მივმართავთ პოლარული ღერძის გასწვრივ, ხოლო ორდინატთა ღერძს გავატარებთ პოლუსში აბსცისთა ღერძის მართობულად, მაშინ გადასვლა პოლარული კოორდინატებიდან დეკარტის კოორდინატებზე ხდება ფორმულებით:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{3.1}$$

დეკარტის კოორდინატებიდან პოლარულ კოორდინატებზე კი – ფორმულებით:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \quad \text{და} \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{3.2}$$

(იგულისხმება, რომ მასშტაბი და კუთხის მობრუნების დადებითი მიმართულება ორივე სისტემაში ერთი და იგიეეა).

თუ სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი $M_1(x_1,y_1)$ და $M_2(x_2,y_2)$, მაშინ მანძილი ამ წერტილებს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{3.3}$$

კერძოდ, როდესაც ერთ-ერთი წერტილი სათავეს ემთხვევა, მაშინ $d = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, სადაც $M(x,y)$ მეორე წერტილია.

თუ M_1M_2 მონაკვეთი $M(x,y)$ წერტილით გაყოფილია λ ფარდობით, ანუ $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, მაშინ M წერტილის x და y კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \tag{3.4}$$

სადაც (x_1, y_1) და (x_2, y_2) შესაბამისად წარმოადგენენ M_1 და M_2 წერტილების კოორდინატებს.

თუ $M(x,y)$ წარმოადგენს M_1M_2 მონაკვეთის შუა წერტილს, მაშინ $\lambda=1$ და შუა წერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{და} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{3.5}$$

თუ სამკუთხედის წვეროებია $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ და $C(x_3,y_3)$, მაშინ მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \pm\frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right] \tag{3.6}$$

$$\text{ან} \quad S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.7}$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. დეკარტის კოორდინატთა სისტემის მიმართ მოცემულია $M(1,-1)$ წერტილი. იპოვეთ ამ წერტილის პოლარი კოორდინატები.

ამოხსნა. (3.2) ფორმულების თანახმად $\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi=-1$, საიდანაც $\varphi=\dfrac{7\pi}{4}$ (წერტილი IV მეოთხედშია). მაშასადამე, გვაქვს $M\left(\sqrt{2};\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

მაგალითი 2. $A\left(5;\dfrac{2}{3}\pi\right)$ წერტილი მოცემულია პოლარკოორდინატებში. განსაზღვრეთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები.

ამოხსნა. (2.1) ფორმულების თანახმად

$$x=5\cos\frac{2}{3}\pi=5\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{5}{2},\quad y=5\sin\frac{2}{3}\pi=5\sin\frac{\pi}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

მივიღეთ A წერტილის მართკუთხა კოორდინატები.

$$A\left(-\frac{5}{2};\frac{5\sqrt{3}}{2}\right).$$

მაგალითი 3. მოცემულია კარდიოდის განტოლება, მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში: $x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$. გადავიყვანოთ პოლარულ კოორდინატებში.

ამოხსნა. მოცემულ განტოლებაში ჩავსვათ x-ის და y-ის მნიშვნელობები (3.1) ფორმულებიდან. გვექნება:

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+a\rho\cos\varphi=a\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi},$$

$$\rho(\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi+a\cos\varphi)=a\rho,$$ საიდანაც

$$\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+a\cos\varphi=a,$$

$$\rho+a\cos\varphi=a,\ \text{ე.ი.}\ \rho=a(1-\cos\varphi).$$

მაგალითი 4. პარაბოლის პოლარული განტოლებაა $\rho=\dfrac{8\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. ჩავწეროთ მართკუთხა ეს განტოლება კოორდინატებში.

ამოხსნა. მოცემული განტოლებიდან

$$\rho\cdot\sin^2\varphi=8\cos\varphi\ \text{ანუ}\ \rho\operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\varphi=8.$$

მივიღოთ მხედველობაში (3.2) ფორმულები და $\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

გვექნება: $\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=8$ ანუ $y^2=8x$.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ M წერტილი, თუ მისი აბსცისია 7 და მანძილი $N(-1,5)$ წერტილიდან M წერტილამდე 10-ის ტოლია.

ამოხსნა. M წერტილის უცნობი ორდინატი აღვნიშნოთ y-ით. $M(7,y)$ და $N(-1,5)$ წერტილებს შორის მანძილი 10-ის ტოლია, ამიტომ გვექნება:

$$10=\sqrt{(7+1)^2+(y-5)^2}$$

ეს განტოლება ასე გადაიწერება: $y^2-10y-11=0$.

ეს ამონახსნებია: $y_1=11$, $y_2=-1$.

ამგვარად, ვიპოვეთ ორი წერტილი $M_1(7,11)$ და $M_2(7,-1)$ რომლებიც 10 ერთეულით არიან დაშორებულნი $N(-1,5)$ წერტილიდან.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $M_1(0,0)$, $M_2(4,2)$ და $M_3(6,4)$ წერტილებზე გამავალი წრეწირის ცენტრი.

ამოხსნა. წრეწირის ცენტრი აღვნიშნოთ C-თი, მისი კოორდინატები კი x და y-ით. წრეწირის $C(x,y)$ ცენტრი მდებარეობს M_1, M_2 და M_3 წერტილებიდან თანაბარ მანძილზე, ამიტომ $CM_1=CM_2=CM_3$.

ეს მანძილები (3.3) ფორმულის თანხმად იქნებიან:

$CM_1=\sqrt{x^2+y^2}$; $CM_2=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$; $CM_3=\sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2}$.

ე.ი.

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\\ \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2}.\end{cases}$$

ავიყვანოთ ამ განტოლებების ორივე მხარე კვადრატში და მარტივი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases}x+y=8\\ 2x+y=5\end{cases}$$

სისტემის ამოხსნა მოგვცემს: $x=-3$ და $y=11$. მაშასადამე, ცენტრის კოორდინატებია $C(-3;11)$.

მაგალითი 7. მოცემულია მონაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილებია $A(3,4)$ და $B(7,8)$. ამ მონაკვეთზე ვიპოვოთ: ა) შუა წერტილი და ბ) წერტილი, რომელიც B ბოლოდან 3-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული, ვიდრე A წერტილიდან.

ამოხსნა. AB მონაკვეთის შუა წერტილის მოსაძებნად გამოვიყენოთ (3.5) ფორმულები, მივიღებთ:

$x=\frac{3+7}{2}=5$ და $y=\frac{4+8}{2}=6$. შუა წერტილია (5,6).

ბ) ამ შემთხვევაში $\lambda=\frac{1}{3}$ და (3.4) ფორმულების გამოყენება მოგვცემს:

$$x=\frac{3+\frac{1}{3}\cdot 7}{1+\frac{1}{3}}=\frac{16}{4}=4,\quad y=\frac{4+\frac{1}{3}\cdot 8}{1+\frac{1}{3}}=\frac{20}{4}=5.$$

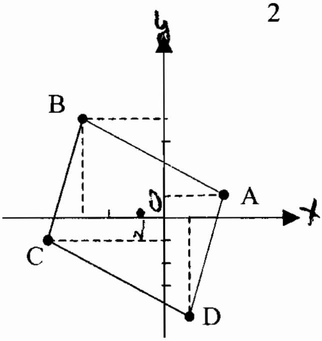
მაშასადამე, საძიებელი წერტილია M(4;5).

მაგალითი 8. პარალელოგრამის ორი მოსაზღვრე წვეროა A(2,1) და B(−3,4). დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია N(−1;0). ვიპოვოთ დანარჩენი ორი წვერო.

ამოხსნა. დანარჩენი ორი წვერო იყოს: $C(x_1,y_1)$ და $D(x_2,y_2)$. მაშინ N(−1,0) იქნება AC მონაკვეთის შუა წერტილი. ე.ი. $-1=\frac{2+x_1}{2}$, $0=\frac{1+y_1}{2}$, $x_1=-4$, $y_1=-1$. ე.ი. C(−4;−1).

N(−1,0) წერტილი ასევე არის BD მონაკვეთის შუა წერტილი, ამიტომ

$$-1=\frac{-3+x_2}{2},\quad 0=\frac{4+y_2}{2}.$$ ე.ი. $x_2=1$, $y_2=-4$; D(1;−4) .



ნახ. 6

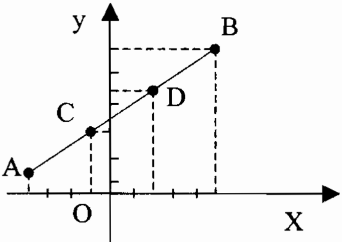
ავაგოთ ნახაზი (იხ. ნახ. 6).

მაგალითი 10. მონაკვეთი AB გაყოფილია 3 ტოლ ნაწილად. იპოვეთ გამყოფი წერტილების კოორდინატები, თუ ამ მონაკვეთის ბოლოების კოორდინატებია: A(−3,1) და B(4,5).

ამოხსნა. გამყოფი წერტილები იყოს C და D. ცხადია, $\lambda_c=\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2}$, $\lambda_D=\frac{AD}{DB}=2$. (3.4) ფორმულების გამოყენებით

$$x_c=\frac{-3+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3};\quad y_c=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}}=2\frac{1}{3}.$$

$$x_D=\frac{-3+2\cdot 4}{1+2}=1\frac{2}{3};\quad y_D=\frac{1+2\cdot 5}{1+2}=3\frac{2}{3}.$$



ნახ. 7.

ე.ი. საძიებელი წერტილებია $C\left(-\frac{2}{3},2\frac{1}{3}\right)$ და $D\left(1\frac{2}{3},3\frac{2}{3}\right)$

ავაგოთ ნახაზი (იხ. ნახ.7).

მაგალითი 11. სამკუთხედის წვეროებია: A(4,2), B(9,4) და C(7, 6) გამოთვალეთ სამკუთხედის ფართობი.

ამოხსნა. (3.6) ფორმულის თანახმად

$$S=\frac{1}{2}\left[(9-4)(6-2)-(7-4)(4-2\right]=7,$$

მაშასადამე, S=7კვ.ერთეულს.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

3.1. ააგეთ წერტილები: $M_1(5,2)$, $M_2(-3,1)$, $M_3(-4,-2)$, $M_4(4,-3)$, $M_5(6,0)$, $M_6(0,3)$, $M_7(0,-4)$.

3.2. ააგეთ სამკუთხედი, რომლის წვეროების პოლარული კოორდინატებია $A(5;\,0^0)$, $B\left(5;\dfrac{\pi}{6}\right)$ და $C\left(1;\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

3.3. მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში შემდეგი წერტილები: $M_1\left(2;\dfrac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(3;\dfrac{\pi}{6}\right)$, $M_3\left(\dfrac{1}{2};\pi\right)$. იპოვეთ ამ წერტილთა დეკარტის კოორდინატები.

3.4. დეკარტის კოორდინატთა სისტემის მიმართ მოცემულია წერტილები: $M_1(-1;1)$, $M_2(0;2)$, $M_3(5;0)$, $M_4(3;-4)$. მოძებნეთ ამ წერტილების პოლარული კოორდინატები.

3.5. რა სახეს მიიღებს $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ განტოლება პოლარულ კოორდინატებში?

3.6. რა სახეს მიიღებენ $\rho=\dfrac{a}{\varphi}$; $\rho=a\,tg\varphi$; $\rho=a\sin\varphi$ განტოლებანი დეკარტის კოორდინატთა სისტემის მიმართ?

3.7. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(-2;2)$, $B(1;1)$ და $C(-1,3)$, არის მართკუთხა.

3.8. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(-3;-1)$, $B(-1;0)$ და $C(-2,-3)$, არის ტოლფერდა.

3.9. ორდინატთა ღერძზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის დაშორება $M(4,-6)$ წერტილიდან არის 5 ერთეული.

3.10. უჩვენეთ, რომ ოთხკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(7;-2)$, $B(10;2)$, $C(1;5)$ და $D(-2,1)$ პარალელოგრამია.

3.11. მოცემულია წესიერი სამკუთხედის ორი წვერო: $A(3;-2)$, $B(8;10)$, მოძებნეთ ფართობი.

3.12. მოძებნეთ იმ წრეწირის ცენტრი, რომლის ერთ-ერთი დიამეტრი არის $A(6,-1)$ წერტილიდან დაშვებული პერპენდიკულარის მონაკვეთი ორდინატთა ღერძამდე.

3.13. მოცემულია სამკუთხედი $A(-5;-6)$, $B(-6;\,-5)$ და $C(-6;-1)$. იპოვეთ მასზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი და რადიუსი.

3.14. მოცემულია სამკუთხედი $A(0;7)$, $B(-4;3)$ და $C(2;-5)$ საძიებელია მისი მედიანების სიგრძეები.

3. 15. კოორდინატთა ღერძებზე იპოვეთ წერტილები, რომელთაგან თითოეული თანატოლად არის დაშორებული $A(1;1)$ და $B(3;7)$ წერტილებიდან.

3.16. $A(x;4)$ და $B(-6;y)$ წერტილებს შორის მონაკვეთი $C(-1;1)$ წერტილით იყოფა შუაზე. იპოვეთ A და B წერტილები.

3.17. $A(8;-2)$ და $B(2;4)$ პარალელებს შორის მონაკვეთი დაყავით ექვს ტოლ ნაწილად. გამოთვალეთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები.

3.18. $A(3;0)$ და $B(5;-4)$ წერტილებს შორის მონაკვეთი დაყავით ოთხ ტოლ ნაწილად. გამოთვალეთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები.

3.19. პარალელოგრამის სამი წვეროა $A(4;-3)$, $B(6;4)$ და $C(-5;2)$. იპოვეთ პარალელოგრამის მეოთხე წვერო.

3.20. იპოვეთ $A(1;4)$, $B(-5;0)$, $C(-2;-1)$ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი.

3.21. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(2;-1)$, $B(4;-2)$ და $C(10;3)$. იპოვეთ A კუთხის ბისექტრისისა და BC გვერდის გადაკვეთის წერტილი.

3.22. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(4;1)$, $B(7;5)$ და $C(-4;7)$. რა ნაწილებად ყოფს A კუთხის ბისექტრისა მოპირდაპირე BC გვერდს?

3.23. მოცემულია პარალელოგრამის სამი მომდევნო წვერო $A(8;-1)$, $B(2;9)$, $C(11;3)$. მოძებნეთ მისი დაიგონალების სიგრძეები.

3.24. მოძებნეთ ABC სამკუთხედის ფართობი: ა) $A(3;1)$, $B(2;-3)$, $C(1;0)$; ბ) $A(1, 1)$, $B(-3, -3)$, $C(0,5)$; გ) $A(2;1)$, $B(5,4)$, $C(7,6)$.

3.25. რომბის გვერდია 14 სმ, ხოლო ორი მოპირდაპირე წვეროა $A(3,1)$ და $B(8,6)$. გამოთვალეთ რომბის ფართობი.

3.26. აჩვენეთ, რომ $A(8;3)$, $B(5;-2)$ და $C(-1;-12)$ წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე.

3.27. მოცემულია კვარდატის ორი მოპირდაპირე წვერო $A(1;-2)$ და $C(-1;2)$. მოძებნეთ მისი ფართობი.

3.28. სამკუთხედის წვეროებია $A(1;2)$, $B(-3;5)$ და $C(-1;-2)$. გამოთვალეთ C კუთხე.

3.29. წრეწირი გადის $M(3,6)$ წერტილზე და ეხება ორივე საკოორდინატო ღერძს. მოძებნეთ მისი ცენტრი და რადიუსი.

3.30. მართკუთხა სამკუთხედის წვეროა $C(5;-1)$. ამ წვეროდან გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზას კვეთს $M(17;4)$ წერტილში. გაიგეთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

3.31. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(5;1)$, $B(3;-2)$, $C(1;1)$. მოძებნეთ მანძილები მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან წვეროებამდე.

3.32. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო: $A(1;,8)$, $B(5;-1)$ და მედიანების გადაკვეტის წერტილი $M(1;3)$. მოძებნეთ სამკუთხედის მესამე წეერო.

3.33. სამკუთხედის ორი წვეროა $A(5;1)$ და $B(-2;2)$. მესამე წვერო მდებარეობს OX ღერძზე და სამკუთხედის ფართობია 10. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე წვეროს კოორდინატები.

3.34. სამკუთხედის ორი წვეროა $A(4;2)$ და $B(9;4)$, ხოლო ფართობი – 7. განსაზღვრეთ C წვერო, თუ მისი აბსცისია 7.

3.35. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო $A(2;,3)$ და $B(4;-3)$. სამკუთხედის ფართობია 20. იპოვეთ მესამე C წვეროს აბსცისი, თუ ორდინატია 5.

§3.2. ᲬᲠᲤᲔ ᲡᲘᲑᲠᲢᲧᲔᲖᲔ

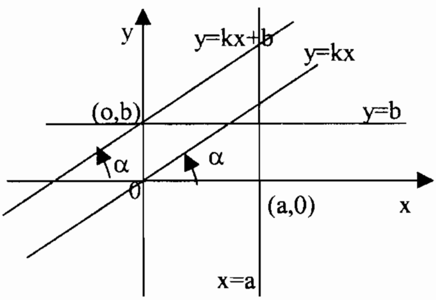
3.2.1. წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებანი

საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი წრფის განტოლება გამოისახება x და y ცვლადების, ანუ წრფის მიმდინარე წერტილის კოორდინატების მიმართ წრფივი Ax+By+C=0 განტოლებით, სადაც A, B და C ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ისეთი რომ $A^2+B^2 \neq 0$.

წრფის განტოლებას საკუთხო კოეფიციენტით აქვს შემდეგი სახე:

$$y=kx+b, \tag{3.8}$$

სადაც k არის წრფის მიერ OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხის ტანგესი, $k=\mathrm{tg}\alpha$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$, ხოლო b არის OY ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატი (იხ. ნახ. 8).



ნახ. 8.

თუ b=0, წრფე გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეში და მისი განტოლება იქნება y=kx. თუ α=0, ე.ი. k=0, მაშინ წრფე პარალელურია OX ღერძის და მისი განტოლება იქნება y=b. საკუთხო კოეფიციენტით არ შეიძლება გამოისახოს OY ღერძის პარალელური წრფის განტოლება.

თუ წრფე პარალელურია OY ღერძის და OX ღერძს გადაკვეთს (a,0) წერტილში, მაშინ მისი განტოლება იქნება x=a.

წრფის ზოგადი სახის განტოლებაა:

$$Ax+By+C=0 \tag{3.9}$$

თუ C=0, მაშინ Ax+By=0, რომელიც გამოსახავს სათავეში გამავალ წრფეს $y=-\frac{A}{B}x$, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $-\frac{A}{B}$.

თუ B=0 და A≠0, მაშინ გვაქვს Ax+C=0, $x=-\frac{C}{A}$, რომელიც განსაზღვრავს OY ღერძის პარალელურ წრფეს, რომელიც გადის $\left(-\frac{C}{A},0\right)$ წერტილში. კერძოდ, x=0 არის OY ღერძის განტოლება.

თუ A=0 და B≠0, მაშინ გვაქვს By+C=0, ანუ $x=-\frac{C}{B}$, ეს კი OX ღერძის პარალელური წრფეა, რომელიც გადის $\left(0;-\frac{C}{B}\right)$ წერტილში. კერძოდ, y=0 არის ox ღერძის განტოლება.

თუ B≠0, მაშინ (3.9) განტოლებიდან განვსაზღვროთ y, მივიღებთ

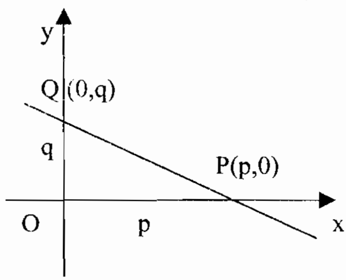
$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

ე.ი. წრფის საკუთხო კოეფიციენტია $k=-\frac{A}{B}$ და $b=-\frac{C}{B}$. თუ A≠0, B≠0 და C≠0, მაშინ წრფის ზოგადი სახის განტოლება შეიძლება მივიყვანოთ შემდეგ სახეზე:

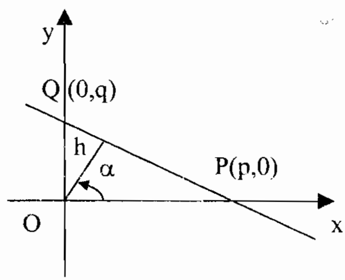
$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $-\frac{C}{A}=p,\ -\frac{C}{B}=q$ გვექნება:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1. \tag{3.10}$$



ნახ.9.



ნახ. 10

(3.10) განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში. (3.10) განტოლებიდან ჩანს, რომ წრფე OX და OY ღერძებს შესაბამისად P(p,0) და Q(0,q) წერტილებში გადაკვეთს (იხ. ნახ. 9).

წრფის ნორმალური განტოლებაა

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-h=0, \tag{3.11}$$

სადაც h≥0 მანძილია კოორდინატთა სისტემის სათავიდან წრფემდე, ხოლო α არის სათავიდან წრფისადმი გავლებული მართობის მიერ. OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე. (იხ. ნახ. 10).

წრფის ზოგადი Ax+By+C=0 განტოლება დაიყვანება ნორმალურ განტოლებაზე $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ მანორმალებელ მამრავლზე გამრავლებით. მანორმალებელი მამრავლის ნიშანი C თავისუფალი წევრის ნიშნის მოპირდაპირეა.

ე.ი. წრფის ნორმალური განტოლებაა

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0. \tag{3.12}$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. განსაზღვრეთ რა კუთხეს ადგენს OX ღერძთან და რა სიდიდის მონაკვეთს ჩამოაჭრის OY ღერძზე შემდეგი წრფე:

$$\sqrt{3}x + y - 5 = 0 .$$

ამოხსნა. მივცეთ მოცემულ განტოლებას (3.11) სახე:

$$y = -\sqrt{3}x + 5.$$

ე.ი. $k = -\sqrt{3}$, ანუ $\mathrm{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, $\alpha=120^0$ და b=5 ერთეულს.

მაგალითი 2. დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც OY ღერძზე დადებითი მიმართულებით 3 ერთეულს მოჰკვეთს, ხოლო OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს 150^0 კუთხეს.

ამოხსნა. წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით არის y=kx+b.

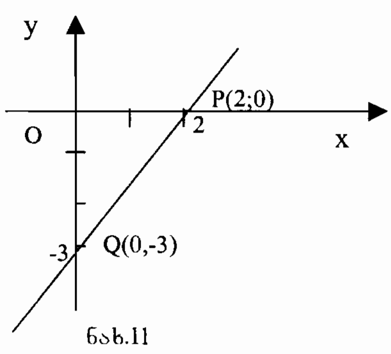
ჩვენ შემთხვევაში $k = \mathrm{tg}150^0 = -\mathrm{tg}30^0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, b=3. ე.ი. საძიებელი წრფის განტოლებაა $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 3$, ანუ $x + \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$.

მაგალითი 3. დაწერეთ ღერძთა მონაკვეთებში შემდეგი წრფის განტოლება: 3x–2y–7=0 და ააგეთ ნახაზი.

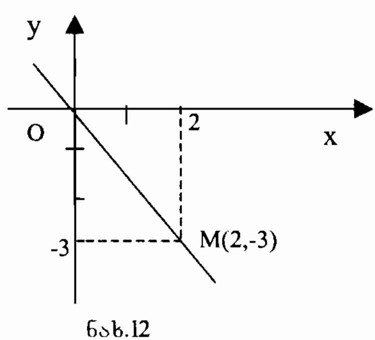
ამოხსნა. 3x–2y=6, $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} = 1$ (იხ.ნახ. 11).

მაგალითი 4. ავაგოთ წრფე 3x+2y=0.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ერთი წერტილი, რომელზედაც გადის წრფე, არის კოორდინატთა სათავე. მეორე წერტილის მოსაძებნად ავიღოთ x=2. მაშინ წრფის განტოლებიდან y=–3. ე.ი. მეორე წერტილი, რომელზედაც წრფე გაივლის, არის M(2;–3). ავაგოთ ეს წრფე (იხ. ნახ. 12).



ნახ.11



ნახ.12

მაგალითი 5. წრფის განტოლება 3x+4y-6=0 დაიყვანეთ ნორმალურ სახეზე.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში მანორმალებელი მამრავლი იქნება:

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}.$$

თუ მოცემულ განტოლებას ამ რიცხვზე გავამრავლებთ, მივიღებთ ნორმალურ განტოლებას

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{6}{5}=0.$$

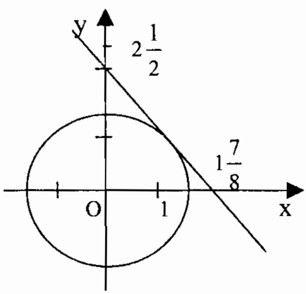
აქ $\cos\alpha=\frac{3}{5}, \sin\alpha=\frac{4}{5}$ და კოორდინატთა სათავიდან მოცემულ წრფემდე მანძილის სიდიდე h=1,2.

მაგალითი 6. დაამტკიცეთ, რომ წრფე, რომლის განტოლებაა $8x+6y-15=0$, ეხება 1,5 რადიუსიან წრეწირს ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ააგეთ ნახაზი.

ამოხსნა. მანორმალებელი მამრაელი $\lambda=\frac{1}{\sqrt{64+36}}=\frac{1}{10}$. ე.ი. წრფის ნორმალური განტოლებაა $\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{3}{2}=0.$

მაშასადამე, კოორდინატთა სათავიდან მოცემული წრფემდე მანძილი h=1,5, საიდანაც ჩანს, რომ მოცემული წრფე ეხება 1,5 რადიუსიან წრეწირს, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ავაგოთ ნახაზი. დავიყვანოთ წრფის მოცემული განტოლება განტოლებაზე ღერძთა მონაკვეთებში:

$$\frac{x}{\frac{15}{8}}+\frac{y}{\frac{5}{2}}=1.\ \text{ე.ი.}\ p=1\frac{7}{8}, q=2\frac{1}{2}.\ (\text{იხ.ნახ. 13}).$$



ნახ. 13

მაგალითი 7. იპოვეთ განტოლება წრფისა, რომელიც სათავიდან დაშორებულია 7 ერთეულით, ხოლო კუთხის სიდიდე OX ღერძსა და სათავიდან ამ წრფეზე დაშვებულ მართობს შორის არის 120^0.

ამოხსნა. (3.11) ფორმულის თანახმად საძიებელი წრფის განტოლება იქნება:

$x\cos120^0+y\sin120^0-7=0$

ანუ $x-\sqrt{3}y+14=0$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

3.36. მოცემულია წრფე $3x-2y+11=0$. წერტილებიდან $M_1(1;7)$, $M_2(-3;1)$, $M_3(1;4)$, $M_4(-5;8)$, $M_5(0,0)$, $M_6(3;10)$ რომელი მდებარეობს მასზე და რომელი არა.

3.37. A(2;a) და B(b;–4) წერტილები მდებარეობენ $3x-y+5=0$ წრფეზე. მოძებნეთ a და b.

3.38. მოძებნეთ $3x-2y-12=0$ წრფის გადაკვეთის წერტილები საკოორდინატო ღერძებთან და ააგეთ ეს წრფე.

3.39. წრფე გადის A(3;4) და B(5;–2) წერტილებზე. გამოთვალეთ ამ წრფის კუთხური კოეფიციენტი და ორდინატთა ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთი.

3.40. მოძებნეთ შემდეგი წრფეების საკუთხო კოეფიციენტები და ორდინატთა ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთები: ა) $2x-y-3=0$; ბ) $2x+3y-5=0$; გ) $2y+5=0$; დ) $3x-7=0$; ე) $x+y=0$.

3.41. რა კუთხეს ადგენენ OX ღერძთან შემდეგი წრფეები:

ა) $x+y-3=0$; ბ) $2x+3y-5=0$; გ) $x-y-2=0$; დ) $x=5y$.

3.42. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს შემდეგ კუთხეს:

ა) 45^0; ბ) 135^0; გ) 30^0 ; დ) 180^0.

3.43. ააგეთ წრფეები: ა) $2x+3y-6=0$; ბ) $3x+5y=0$; გ) $2x+5=0$; დ) $3y-7=0$; ე) $2x-4y+5=0$; ვ) $4y=0$.

4.44. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის A(0;–4) წერტილზე და OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს $\frac{\pi}{3}$ კუთხეს.

3.45. წრფეთა შემდეგი განტოლებები გადაწერეთ განტოლებებზე ღერძთა მონაკეეთებში:

ა) $2x+3y+36=0$; ბ) $7x-8y=0$; გ) $5x+3=0$;

დ) $x+y+3=0$; ე) $x+3=0$; ვ) $x-5y-11=0$.

3.46. დაწერეთ იმ წრფის ზოგადი განტოლება, რომელიც საკოორდინატო ღერძებზე კვეთს $p=-\frac{2}{3}$ და $q=\frac{3}{7}$ მონაკვეთებს.

3.47. წრფე საკოორდინატო ღერძებზე კვეთს ტოლ დადებით მონაკვეთებს. დაწერეთ მისი განტოლება, თუ საკოორდინატო ღერძებთან მის მიერ შედგენილი სამკუთხედის ფართობი 72 კვ. ერთეულია.

3.48. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც საკოორდინატო ღერძებზე კვეთს ტოლ მონაკვეთებს და ღერძებს შორის მისი მონაკვეთის სიგრძეა $7\sqrt{2}$ ერთეული.

3.49. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც აბსცისთა ღერძზე კვეთს ორჯერ მეტი სიგრძის მონაკვეთს, ვიდრე ორდინატთა ღერძზე და გადის A(4;3) წერტილზე.

3.50. მოცემულია წრფის განტოლება $\frac{x+1}{3}-\frac{y-1}{4}=0$. გადაწერეთ ეს განტოლება წრფის ა) განტოლებაზე კუთხური კოეფიციენტით ბ) განტოლებაზე ღერძთა მონაკვეთებში; გ) ზოგადი სახის განტოლებაზე; დ) ნორმალური სახის განტოლებაზე.

3.51. მიეცით ნორმალური სახე წრფეთა შემდეგ განტოლებებს:

ა) $5x-12y-26=0$; ბ) $x\sin20^0+y\cos20^0+3=0$; გ) $3x+1=0$;
დ) $2y-1=0$; ე) $2x-y-1=0$; ვ) $3x+4y-5=0$.
ზ) $6x+8y+5=0$; თ) $\sqrt{3}\,x+y-2=0$; ი) $3x+y=0$.

3.52. შეამოწმეთ, გამოდგებიან თუ არა $4x+3y+10=0$ და $3x+y-2\sqrt{10}=0$ წრფეები ერთი და იმავე წრეწირის მხებებად, თუ წრეწირის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია.

3.53. დაწერეთ კვადრატის გვერდების განტოლებები, თუ კვადრატის გვერდის სიგრძე უდრის a-ს, ხოლო კოორდინატთა ღერძები ემთხვევა კვადრატის დიაგონალებს.

3.54. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის გვერდების განტოლებები, თუ მისი ფუძეები შესაბამისად ტოლია 10-ისა და 6-ის და ფერდები ფუძესთან ადგენენ $\alpha=60^0$ კუთხეს. ამასთან, OX ღერძი ემთხვევა უდიდეს ფუძეს, OY ღერძი კი – ტრაპეციის სიმეტრიის ღერძს.

3.55.რომბის დიაგონალები, რომელთა სიგრძეებია 8 და 6, მიღებულია კოორდინატთა ღერძებად (პირველი – OX ღერძად, მეორე – OY ღერძად). მოძებნეთ რომბის გვერდების განტოლებები.

3.2.2. ძირითადი ამოცანები წრფეზე

კუთხე ორ წრფეს შორის. φ კუთხე $y=k_1x+b_1$ და $y=k_2x+b_2$ წრფეებს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\ , \tag{3.13}$$

(φ არის კუთხე, რომლითაც უნდა მობრუნდეს პირველი წრფე საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, რომ ის მეორეს დაემთხვეს). თუ წრფეების განტოლებები მოცემულია ზოგადი სახით:

$A_1x+B_1y+C_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2=0$, მაშინ

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{3.14}$$

(3.13) ფორმულიდან პირდაპირ გამომდინარეობს ორი წრფის პარალელობის პირობა

$$k_1=k_2 \text{ ან } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2} \tag{3.15}$$

და მართობულობის პირობა $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$ ან $A_1A_2+B_1B_2=0$

(3.16)

ორი წრფე ერთმანეთს ემთხვევა, თუ

$$k_1=k_2 \text{ და } b_1=b_2 \text{ ან } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{3.17}$$

წრფეთა კონის განტოლება. $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლებაა

$$y-y_0=k(x-x_0)\ . \tag{3.18}$$

ამ განტოლებაში k ცვლადია. მისთვის სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობების მიცემით წრფე ბრუნავს $M_0(x_0,y_0)$ კონის ცენტრის ირგვლივ და მისგან მიიღება ყველა წრფის განტოლება, გარდა OY ღერძის პარალელური წრფისა, რომლის განტოლებაც იქნება $x=x_0$.

მოცემული $A_1x+B_1y+C_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2=0$ წრფეების გადაკვეთაზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლებაა

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0\ . \tag{3.19}$$

$M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის ზოგადი განტოლებაა

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\ . \tag{3.20}$$

ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებაა. $M_1(x_1,y_1)$ და $M_2(x_2,y_2)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,. \tag{3.21}$$

თუ $x_1=x_2$, მაშინ მოცემულ წერტილებზე გამავალი წრფე OY ღერძის პარალელურია და მისი განტოლება იქნება $x=x_1$, ხოლო, როცა, $y_1=y_2$ მაშინ წრფე აბსცისთა ღერძის პარალელურია და მისი განტოლება იქნება $y=y_1$. (3.21) წრფის საკუთხო კოეფიციენტი $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

$M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ და $M_3(x_3,y_3)$ სამი წერტილის ერთ წრფეზე მდებარეობის პირობაა

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\,.$$

ეს პირობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0\,.$$

მანძილი წერტილიდან წრფემდე. მანძილი $M_0(x_0,y_0)$ წერტილიდან $x\cos\alpha+y\sin\alpha-h=0$ წრფემდე გამოითვლება ფორმულით:

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-h|. \tag{3.22}$$

თუ წრფის განტოლება ზოგადი სახითაა მოცემული, მაშინ ეს მანძილი გამოითვლება ფორმულით:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\,. \tag{3.23}$$

(3.23) ფორმულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $A_1x+B_1y+C_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2=0$ წრფეებს შორის კუთხეების ბისექტრისების განტოლებებია

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} = 0 . \quad (3.24)$$

მანძილი $Ax+By+C_1=0$ და $Ax+By+C_2=0$ პარალელურ წრფეებს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}} . \quad (3.25)$$

ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის პოვნა. ცხადია, თუ წრფეები პარალელური არ არიან, ე.ი. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ (ანუ $A_1B_2-A_2B_1 \neq 0$), მაშინ $A_1x+B_1y+C_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2=0$ წრფეები იკვეთებიან ერთ $M_0(x_0,y_0)$ წერტილში, რომლის კოორდინატებმაც უნდა დააკმაყოფილოს ორივე წრფის განტოლება. მაშასადამე, გადაკვეთის წერტილის კოორდინატების მოსაძებნად უნდა ამოიხსნას სისტემა:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. გამოთვალეთ კუთხე $\sqrt{3}x - y - 5 = 0$ და $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ წრფეებს შორის.

ამოხსნა. $k_1 = \sqrt{3}; \; k_2 = -\sqrt{3};$ (3. 13) ფორმულის თანახმად $tg\varphi = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1-3} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. ე.ი. $\varphi=60^0$.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ $2x-3y+5=0$ და $6x-9y+10=0$ წრფეები პარალელურია.

ამოხსნა. წრფეთა მოცემული განტოლებებიდან $\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{5}{10}$. ე.ი. სრულდება (3.15) პირობები, რაც წრფეთა პარალელობას ნიშნავს.

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ, რომ $3x+y-5=0$ და $x-3y+7=0$ წრფეები ურთიერთმართობულნი არიან.

ამოხსნა. მოცემული განტოლებებიდან $3 \cdot 1+1 \cdot (-3)=0$. ე.ი. სრულდება (3.16) პირობები, რაც მათ მართობულობას ნიშნავს.

მაგალითი 4. $A(2;-5)$ წერტილზე გაავლეთ წრფე, რომელიც ა) პარალელურია $3x-4y+5=0$ წრფის; ბ) მართობულია $2x+5y-7=0$ წრფის.

ამოხსნა. დავწეროთ $A(2;-5)$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება. (3.18) ფორმულის თანახმად

$$y+5=k((x-2).$$

ა) მოცემული წრფის განტოლება ჩავწეროთ (3.8) სახით:

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} . \quad ე.ი. \; k = \frac{3}{4} .$$

რადგანაც საძიებელი წრფე პარალელური უნდა იყოს მოცემული წრფის, ამიტომ მისი კუთხური კოეფიციენტი (3.15) ფორმულის თანახმად $k=\frac{3}{4}$ და განტოლება იქნება:

$$y+5=\frac{3}{4}(x-2) \text{ ანუ } 3x-4y-26=0.$$

ბ) მოცემული წრფის განტოლება ჩავწეროთ (3.8) სახით: $y=-\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}$.

ე.ი. $k=-\frac{2}{5}$, რადგანაც საძიებელი წრფე მართობულია მოცემული წრფის, ამიტომ მისი კუთხური კოეფიციენტი (3.16) ფორმულის თანახმად იქნება $k=\frac{5}{2}$ და განტოლება

$$y+5=\frac{5}{2}(x-2), \text{ ანუ } 5x-2y-20=0.$$

მაგალითი 5. იპოვეთ მანძილი $M(4;-2)$ წერტილიდან $8x-15y-11=0$ წრფემდე.

ამოხსნა.(3.23) ფორმულის გამოყენებით

$$d=\frac{|8\cdot 4-15(-2)-11|}{\sqrt{8^2+(-15)^2}}=\frac{51}{17}=3. \quad d=3.$$

მაგალითი 6. $M(3;5)$ წერტილზე გაატარეთ წრფე, რომელიც $3x-2y+7=0$ წრფესთან შეადგენს 45^0 კუთხეს.

ამოხსნა. $M(3;5)$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლებაა

$$y-5=k(x-3).$$

ახლა შევარჩიოთ k ისე, რომ საძიებელი წრფე მოცემულ $y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ წრფესთან ადგენდეს $\varphi=45^0$ კუთხეს. ორ წრფეს შორის კუთხე გამოითელება ფორმულით:

$$tg(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2},$$

სადაც φ_1 და φ_2 ის კუთხეებია, რომელებსაც ეს წრფეები შეადგენენ OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან, ხოლო k_1 და k_2 მათი საკუთხო კოეფიციენტებია. ჩვენ შემთხვევაში $k_1=k$ უცნობია, ხოლო $k_2=\frac{3}{2}$. პირობის ძალით $\varphi_2-\varphi_1=45^0$ ან $\varphi_1-\varphi_2=45^0$. ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$\pm \operatorname{tg}45^0 = \frac{\frac{3}{2} - k}{1 + \frac{3}{2}k},$$

ანუ $\frac{3-2k}{2+3k} = \pm 1$, საიდანაც $k = \frac{1}{5}$ ან $k=-5$.

მივიღეთ ორი საძიებელი წრფე, რომელთა განტოლებებია

$y - 5 = \frac{1}{5}(x-3)$, ანუ $x-5y+22=0$ და $y-5=-5(x-3)$, ანუ $5x+y-20=0$.

მაგალითი 7. ვიპოვოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $x+2y-5=0$ და $3x-y-1=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე და $5x-4y-2=0$ წრფის პარალელურია.

ამოხსნა. დავწეროთ მოცემულ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის (3.19) განტოლება:

$$x+2y-5+\lambda(3x-y-1)=0 \quad \text{ანუ} \quad (1+3\lambda)x+(2-\lambda)y-(5+\lambda)=0.$$

ახლა λ შევარჩიოთ ისე, რომ დაკმაყოფილდეს $5x-4y-2=0$ წრფესთან პარალელობის პირობა

$$\frac{1+3\lambda}{5} = \frac{2-\lambda}{-4},$$

საიდანაც $\lambda=-2$. λ-ს ამ მნიშვნელობის კონის განტოლებაში ჩასმა მოგვცემს $5x-4y+3=0$.

მაგალითი 8. $x+2y-5=0$ და $3x-y-1=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გაატარეთ წრფე, რომელიც $x-y+3=0$ წრფესთან ადგენს 45^0 კუთხეს.

ამოხსნა. მოცემული წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლებაა

$$x+2y-5+\lambda(3x-y-1)=0, \text{ ანუ } (1+3\lambda)x+(2-\lambda)y-(5+\lambda)=0.$$

ამ უკანასკნელ განტოლებაში λ პარამეტრი შევარჩიოთ ისე, რომ საძიებელი წრფე მოცემულ $x-y+3=0$ წრფესთან ადგენდეს 45^0 კუთხეს. (3.14) ფორმულის თანახმად

$$\operatorname{tg}45^0 = \pm\frac{-(1+3\lambda)\cdot 1-(2-\lambda)\cdot 1}{(1+3\lambda)\cdot 1-(2-\lambda)\cdot 1}.$$

ე.ი. $\frac{-2\lambda-3}{4\lambda-1} = \pm 1$.

საიდანაც $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ და $\lambda_2=2$. ამრიგად, საძიებელი წრფეებია:

$x+2y-5-\frac{1}{3}(3x-y-1)=0$, ანუ $y-2=0$; $x+2y-5+2(3x-y-1)=0$, ანუ $x-1=0$.

მაგალითი 9. ვიპოვოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $3x+2y-5=0$ და $6x+4y+1=0$ პარალელური წრფეების შუაში.

ამოხსნა. მოცემულ წრფეებზე ავიღოთ თითო წერტილი. მაგალითად, $M_1\left(0;\frac{5}{2}\right)$ და $M_2\left(0;-\frac{1}{4}\right)$ წერტილები. ცხადია, საძიებელი წრფე გაივლის M_1M_2 მონაკვეთის შუა წერტილზე, ე.ი. $M\left(0;\frac{9}{8}\right)$ წერტილზე. საძიებელი წრფის კუთხური კოეფიციენტი ტოლია მოცემული წრფეების კუთხური კოეფიციენტის. ე.ი. $k=-\frac{3}{2}$. k-ს ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ $M\left(0;\frac{9}{8}\right)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლებაში. მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას

$$y-\frac{9}{8}=-\frac{3}{2}x\text{, ანუ } 12x+8y-9=0.$$

მაგალითი 10. იპოვეთ $2x+3y+6=0$ წრფის პარალელური წრფეები, რომლებიც საკოორდინატო ღერძებთან ადგენენ 3კვ. ერთეული ფართობის მქონე სამკუთხედებს.

ამოხსნა. მოცემული წრფის პარალელური წრფეთა ოჯახია

$$2x+3y+C=0.$$

ახლა C უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ ამ წრფის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი სამკუთხედის ფართობის 3 კვ. ერთეულის ტოლი იყოს. უკანასკნელი განტოლება გადავწეროთ განტოლებაზე ღერძთა მონაკვეთებში:

$$\frac{x}{-\frac{C}{2}}+\frac{y}{-\frac{C}{3}}=1.$$

ცხადია, სამკუთხედის ფართობი

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{C}{2}\right)\left(-\frac{C}{3}\right).$$

ე.ი. $3=\frac{C^2}{12}$, საიდანაც $C=\pm6$.

საძიებელი წრფეების განტოლებებია:

$2x+3y+6=0$ და $2x+3y-6=0$, სადაც ერთ-ერთი მოცემული წრფეა.

მაგალითი 11. მოცემულია პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლება: $x+2y+1=0$ და $2x+y-3=0$. დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია $N(1;2)$. იპოვეთ პარალელოგრამის ორი დანარჩენი გვერდის განტოლება.

ამოხსნა. თუ ამოვხსნით მოცემული ორი განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას (ცხადია, ამონახსნი აქვს, რადგანაც პარალელოგრამის ეს ორი გვერდი არაა პარალელური), მივიღებთ მათი გადაკვეთის $M_1\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3}\right)$ წერ-

წერტილს. ვიპოვოთ პარალელოგრამის M_1 წერტილის მოპირდაპირე $M_3(x_3,y_3)$ წეეროს კოორდინატები. (2.5) ფორმულების გამოყენებით

$$\frac{\frac{7}{3}+x_3}{2}=1 \text{ და } \frac{-\frac{5}{3}+y_3}{2}=2.$$

აქედან $x_3=-\frac{1}{3}$, $y_3=\frac{17}{3}$. ე.ი. $M_3\left(-\frac{1}{3};\frac{17}{3}\right)$.

$M_3\left(-\frac{1}{3};\frac{17}{3}\right)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა კონაში შეეიტანოთ ჯერ მოცემული პირეელი წრფის კუთხური კოეფიციენტი, შემდეგ მეორე წრფის კუთხური კოეფიციენტი და მივიღებთ პარალელოგრამის ორი დანარჩენი გეერდის განტოლებას

$$y-\frac{17}{3}=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right) \text{ და } y-\frac{17}{3}=-2\left(x+\frac{1}{3}\right), \text{ ან რაც იგიეეა}$$

$x+2y-11=0$ და $2x+y-5=0$.

მაგალითი 12. ეიპოვოთ $2x-y+1=0$ და $x+2y-1=0$ წრფეებით შედგენილი კუთხეების ბისექტრისების განტოლებები.

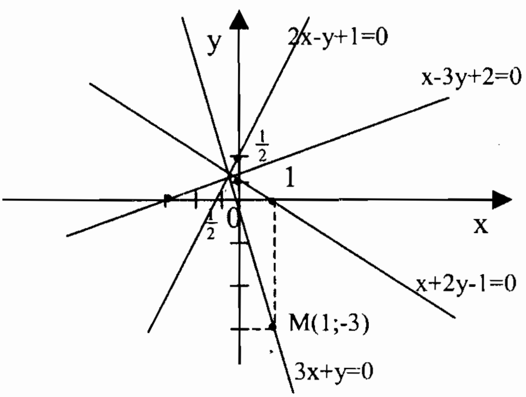
ამოხსნა. დაეიყვანოთ მოცემული წრფეების განტოლებები ნორმალურ სახემდე და ორივეში $(x;y)$ კოორდინატები ბისექტრისის წერტილის კოორდინატებად ჩავთვალოთ. გვექნება:

$$\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}}=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}}.$$

$$2x-y+1=\pm(x+2y-1),$$

საიდანაც მივიღებთ ბისექტრისის შემდეგ განტოლებებს:

I. $x-3y+2=0$ ან II. $3x+y=0$ (იხ. ნახ.14).



ნახ. 14

მაგალითი 13. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(-5;0)$, $B(1;6)$ და $C(3;-4)$. იპოვეთ:

ა) გვერდების განტოლებები;

ბ) AM მედიანის განტოლება და სიგრძე;

გ) BH სიმაღლის განტოლება და სიგრძე;

დ) H წერტილის კოორდინატები;

ე) LC;

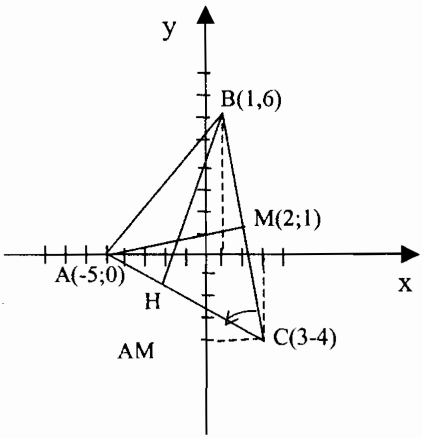
ვ) ფართობი.

ამოხსნა. ა) (3.21) ფორმულის თანახმად გვერდების განტოლებებია:

$$\frac{x+5}{1+5}=\frac{y-0}{6-0}$$ ანუ $x-y+5=0$ (AB);

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-6}{-4-6}$$ ანუ $5x+y-11=0$ (BC);

$$\frac{x+5}{1+5}=\frac{y-0}{-4-0}$$ ანუ $x+2y+5=0$ (AC).



ნახ.15

ბ) M წერტილის, როგორც BC გვერდის შუა წერტილის (იხ. ნახ.15), კოორდინატები იქნება M(2;1). (3.21) ფორმულის თანახმად AM მედიანის განტოლება იქნება:

$$\frac{x+5}{2+5}=\frac{y-0}{1-0},\quad \text{ანუ}\quad x-7y+5=0$$

(AM), ხოლო მისი სიგრძე იქნება:

$$AM=\sqrt{(2+5)^2+(1-0)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

გ) BH სიმაღლის განტოლების მისაღებად დავწეროთ B წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლება

$y-6=k(x-1)$.

რადგანაც BH მართობულია AC წრფის, ამიტომ $k_{BH}=-\frac{1}{k_{AC}}\cdot\ k_{AC}=-\frac{1}{2}$; ე.ი. $k_{BH}=2$. შევიტანოთ წრფეთა კონის განტოლებაში და მივიღებთ BH-ის განტოლებას.

$$y-6=2\ (x-1)\ \text{ანუ}\ 2x-y+6=0\ \ (BH).$$

BH სიმაღლის სიგრძის გამოსათვლელად გამოვთვალოთ მანძილი B წერტილიდან AC წრფემდე. (3.23) ფორმულის გამოყენებით

$$BH=\frac{|1+2\cdot 6+5|}{\sqrt{1+4}};\ \text{ე.ი. } BH=\frac{18}{\sqrt{5}}.$$

დ) H წერტილის კოორდინატების მოსაძებნად გავითვალისწინოთ, რომ იგი არის BH და AC წრფეთა გადაკვეთის წერტილი. ამიტომ მისი კოორდინატები მიიღება სისტემის ამონახსნით

$$\begin{cases}x+2y+5=0,\\2x-y+4=0.\end{cases}$$

მარტივი გამოთვლებით მიიღება $x=-2\frac{3}{5},\ y=-1\frac{1}{5}$. ე.ი. $H\left(-2\frac{3}{5};-1\frac{1}{5}\right)$.

ე) ∠C-ს მოსაძებნად გამოვიყენოთ (3.13) ფორმულა. ამ ფორმულაში $k_1=k_{BC}=-5$, $k_2=k_{AC}=-\frac{1}{2}$.

$$\operatorname{tg}\hat{C}=\frac{-\frac{1}{2}+5}{1+\frac{5}{2}}=\frac{9}{7}, \text{ ე.ი. } \angle C=\operatorname{arctg}\frac{9}{7}.$$

ე) $S=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BH$. $AC=\sqrt{(3+5)^2+(-4)^2}=4\sqrt{5}$.

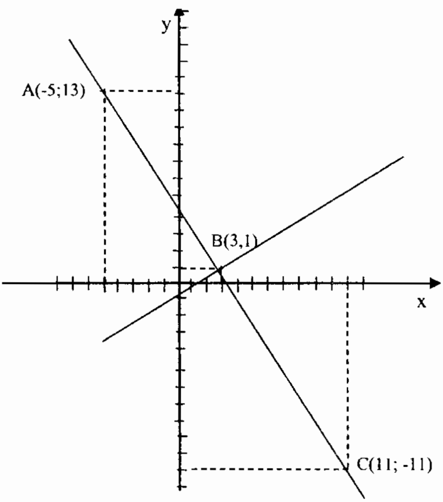
ე.ი. $S=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\frac{18}{\sqrt{5}}=36$ კვ.ერთეული.

S=36კვ. ერთეული.

მაგალითი 14. ვიპოვოთ A(–5;13) წერტილის სიმეტრიული წერტილი 2x–3y–3=0 წრფის მიმართ.

ამოხსნა. ვიპოვოთ A წერტილიდან მოცემულ წრფეზე დაშვებული მართობის განტოლება. მოცემული წრფის კუთხური კოეფიციენტი $k=\frac{2}{3}$. საძიებელი მართობის კუთხური კოეფიციენტი იქნება $-\frac{3}{2}$, ხოლო განტოლება

$$y-13=-\frac{3}{2}(x+5), \text{ ანუ } 3x+2y-11=0.$$



ნახ. 16.

ახლა ვიპოვოთ ამ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილი B, ანუ A წერტილის გეგმილი მოცემულ წრფეზე.

$$\begin{cases}3x+2y-11=0,\\2x-3y-3=0.\end{cases}$$

მარტივი გამოთვლებით მიიღება B(3;1). A წერტილის სიმეტრიული წერტილი მოცემული წრფის მიმართ იყოს C(x;y). ცხადია, AC მონაკვეთისათვის B(3;1) წერტილი შუა წერტილია. ამიტომ (2.5) ფორმულების თანახმად

$$\frac{x-5}{2}=3, \text{ ე.ი. } x=11,$$

$$\frac{y+13}{2}=1, \text{ ე.ი. } y=-11,$$

საძიებელი წერტილია C(11; –11) (ნახ. 16).

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

3.56. $M(2;-1)$ წერტილზე გაატარეთ წრფე, რომელიც $3x-2y+5=0$ წრფის პარალელურია.

3.57. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(2;-3)$ წერტილზე და $M_1(1;2)$ და $M_2(-1;-5)$ წერტილებზე გამავალი წრფის პარალელურია.

3.58. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(1;2)$ წერტილზე და $M_1(4;3)$ და $M_2(-2;1)$ წერტილებზე გამავალი წრფის მართობია.

3.59. კვადრატის ერთი გვერდის ბოლო წერტილებია $A(2;3)$ და $B(-2;0)$. ვიპოვოთ კვარდატის გვერდების განტოლებანი.

3.60. მოძებნეთ შემდეგ წრფეთა გადაკვეთის წერტილები:

ა) $2x-3y+5=0$, $x+2y-1=0$;

ბ) $x-3y+4=0$, $2x+6y-1=0$;

გ) $2x-4y+1=0$, $3x-6y-7=0$;

დ) $2x-3=0$, $3y+2=0$;

ე) $x-1{,}5y+1=0$, $2x-3y+2=0$.

3.61. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $5x-y-11=0$, $x+5y+3=0$ და $2x-3y+6=0$. მოძებნეთ მისი წვეროები.

3.62. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $x-2y+3=0$, $2x+3y-8=0$, $5x+4y-27=0$. გამოთვალეთ მისი ფართობი.

3.63. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გავლებულია $x-3=0$ და $2x+3y-12=0$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე $5x-4y-17=0$ წრფის პარალელურად.

3.64. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(-3;2)$ წერტილზე და 60^0 კუთხითაა დახრილი $\sqrt{3}\,x-y+2=0$ წრფისადმი.

3.65. შეადგინეთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების განტოლებანი, თუ მისი ჰიპოტენუზის განტოლებაა $3x-y+5=0$, ხოლო მართი კუთხის წვეროა $C(4;-1)$.

3.66. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გავლებულია $3x-y-3=0$ და $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{2}$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე პირველი წრფის მართობულად.

3.67. იპოვეთ მანძილი შემდეგ პარალელურ წრფეებს შორის:

ა) $x-2y+5=0$, $2x-4y+1=0$.

ბ) $3x-4y+7=0$, $3x-4y-18=0$.

გ) $3x+4y-6=0$, $6x+8y-7=0$.

3.68. ორი $3x-4y+7=0$ და $3x-4y-18=0$ პარალელურ წრფეებს შუა გაატარეთ მოცემული წრფეების პარალელური წრფე.

3.69. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და ისეთი სამკუთხედის მედიანათა გადაკვეთის წერტილზე, რომლის გვერდების განტოლებებია

$$x-y-4=0,\ 2x-11y+37=0,\ 2x+7y-17=0.$$

3.70. მოცემულია ოთხკუთხედის წვეროები $A(0;7)$, $B(6;\ 3)$, $C(6;\ -5)$, $D(-9;\ 5)$. აჩვენეთ, რომ ოთხკუთხედი ტრაპეციაა და გამოთვალეთ მისი სიმაღლე.

3.71. $M_1(0;\ 8)$ წერტილზე გაატარეთ წრფე, რომელიც $M_2(2;\ 5)$ და $M_3(-3;\ 1)$ წერტილზე გამავალი წრფისადმი დახრილია 45^0 კუთხით.

3.72. $x+2y+1=0$ და $x-y+1=0$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე გაატარეთ წრფე, რომელიც $2x-y+5=0$ წრფის მართობია, ისე, რომ არ იპოვოთ მოცემული წრფეების გადაკვეთის წერტილი.

3.73. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(2;1)$, $B(4;-5)$ და $C(1;-1)$. გამოთვალეთ მანძილი B წვეროდან A წვეროზე გამავალ მედიანამდე.

3.74. $M(-1;\ 2)$ წერტილზე გაატარეთ წრფე ისე, რომ $N(3;-1)$ წერტილიდან დაშორებული იყოს 2 ერთეულით.

3.75. $4x-3y-3=0$ წრფის პარალელურ წრფეებს შორის მოძებნეთ ის, რომელიც 3 ერთეულითაა დაშორებული $(1;-2)$ წერტილიდან.

3.76. $A(4;3)$ წერტილზე გაატარეთ წრფე, რომელიც კოორდინატთა სათავიდან დაშორებულია 4 ერთეულით.

3.77. $A\left(\frac{25}{7};\frac{24}{7}\right)$ წერტილზე გაატარეთ წრფე, რომელიც $B(5;2)$ წერტილიდან დაშორებული იქნება 2 ერთეულით.

3.78. მოძებნეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $(1;1)$ წერტილიდან დაშორებულია 2 ერთეულით, ხოლო $(3;2)$ წერტილიდან – 4 ერთეულით.

3.79. აბსცისთა ღერძზე მოძებნეთ წერტილი, რომელიც ტოლი მანძილითაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან და $15x-8y+34=0$ წრფიდან.

3.80. $A\left(\frac{16}{7};-\frac{2}{7}\right)$ და $B\left(-\frac{24}{7};\frac{3}{7}\right)$ წერტილებზე გავლებულია პარალელური წრფეები. დაწერეთ მათი განტოლებები, თუ მანძილი მათ შორის 5 ერთეულია.

3.81. მოცემულია წრფე $8x+15y+68=0$. დაწერეთ მისგან 3 ერთეულით დაშორებული პარალელური წრფის განტოლება.

3.82. კვადრატის ორი გვერდია $3x+y-1=0$ და $6x+2y+11=0$. გამოთვალეთ მისი ფართობი.

3,83. დაწერეთ $2x+3y-18=0$ და $x-5y+17=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გამავალი აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფის განტოლება.

3.84. დაწერეთ $2x-y+1=0$ და $x+2y=0$ წრფეებით შედგენილი იმ კუთხის ბისექტრისის განტოლება, რომელშიც მოთავსებულია $(-2;3)$ წერტილი.

3.85. იპოვეთ ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრის M ცენტრი, თუ სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $4x+3y-12=0$, $3x+4y+12=0$ და $3x-4y-12=0$.

3.86 სამკუთხედის ორი წვეროა $A(3;-1)$ და $B(4;2)$. სიმაღლეები იკვეთებიან $M(2;1)$ წერტილში. დაწერეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები.

3.87. დაწერეთ $A(-1;3)$ და $B(5;-2)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის შუა წერტილზე გამავალი, AB-ს მართობული წრფის განტოლება.

3.83. მოძებნეთ რომბის წვეროები, თუ მისი ორი გვერდის განტოლებაა $3x+y-1=0$ და $3x+y+7=0$, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალის – $x-y+5=0$.

3.89. რომბის ორი მოპირდაპირე წვეროა $A(4;\ 7)$ და $C(8;\ 3)$, ხოლო ფართობი – 32 კვ. ერთეული. დაწერეთ რომბის გვერდების განტოლებები.

3.90. კვადრატის ერთ-ერთი გვერდის განტოლებაა $x-y+1=0$, ხოლო დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია $M(4;1)$. შეადგინეთ დანარჩენი გვერდების განტოლებები.

3.91 პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლებაა $x=1$ და $x-y-1=0$. $M(3;\ 6)$ მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. დაწერეთ დიაგონალების განტოლებები.

3.92. იპოვეთ $A(2;-2)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $x+3y-6=0$ წრფის მიმართ.

3.93. დაწერეთ წრფის განტოლება, თუ $A(1;3)$ წერტილი წარმოადგენს ამ წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძეს.

3.94. წრფე პარალელურია $x+4y-11=0$ წრფის და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს სამკუთხედს, რომლის ფართობი 2 კვ. ერთეულის ტოლია. იპოვეთ ეს წრფე.

3.95. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მართობულია $5x+12y-1=0$ წრფის და $M(3;1)$ წერტილიდან დაშორებულია 2 ერთეულით.

3.96. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია $3x-2y+1=0$ წრფისა $M(5;\ 1)$ წერტილის მიმართ.

3.97. მოცემულია ΔABC-ს წვეროები:

ა) $A(-2;\ 8)$, $B(10;\ 3)$ და $C(16;\ 11)$;

ბ) $A(-1;\ 5)$, $B(11;0)$ და $C(17;\ 8)$;

გ) $A(6;7)$, $B(-6;2)$ და $C(-10;5)$;

დ) $A(5;0)$, $B(-7;\ -5)$ და $C(-11;\ -2)$;

ე) $(11;\ 1)$, $B(-1;\ -6)$ და $C(-5;\ -3)$;

ვ) $A(-1;7)$, $B(11;\ 2)$ და $C(17;\ 10)$.

იპოვეთ: 1) გვერდების განტოლებები;

2) A წვეროდან გაელებული მედიანის განტოლება;

3) მედიანების გადაკვეთის წერტილი;

4) B კუთხის ბისექტრისის განტოლება;

5) ამ ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილი AC გვერდთან;

6) A წერტილიდან BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლის განტოლება და სიგრძე;

7) სამკუთხედის ფართობი;

8) $\angle C$;

9) B წვეროზე გამავალი AC წრფის პარალელური წრფის განტოლება;

10) მანძილი B წვეროდან A წვეროზე გაელებულ მედიანამდე.

3.98. სამკუთხედის წვეროებია $A(-1;2)$, $B(3;-2)$, $C(1;4)$. გამოთვალეთ კუთხე CD მედიანასა და CK სიმაღლეს შორის.

3.99. სინათლის სხივი გადის $A(2;2)$ წერტილზე, ეცემა $x+y-2=0$ წრფეს. აირეკლება და გადის $B(3;1)$ წერტილზე. მოძებნეთ წრფესთან სხივის შეხვედრის წერტილი.

3.100. სამკუთხედის წვეროებია $A(5;7)$, $B(7;5)$, $C(9;6)$. იპოვეთ მასზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი და რადიუსი.

ბ) იპოვეთ $A(0;-1)$, $B(-5;0)$, $C(-3;-1)$ წერტილებზე გამავალი წრეწირის ცენტრი და რადიუსი.

3.101. მართკუთხა ტრაპეციის დიდი ფუძის ბოლოებია $(-8;-6)$ და $(1;-3)$. მცირე ფუძის მარცხენა ბოლო $(-5;-1)$ წერტილშია. დაწერეთ ტრაპეციის გვერდების განტოლებები.

3.102. კვადრატის გვერდის განტოლებაა $4x+3y-12=0$ და იგი მოთავსებულია საკოორდინატო ღერძებს შორის. შეადგინეთ დანარჩენი გვერდების განტოლებები.

3.103. ვიპოვოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც პარალელურია $5x-3y-15=0$ და $10x-6y+21=0$ წრფეებისა და მათ შორის მანძილს ყოფს 2:3 შეფარდებით.

3.104. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდების განტოლებებია $2x-y+8=0$ და $x-2y-12=0$. $M(4;0)$ ფუძის ერთ-ერთი წერტილია. იპოვეთ ფუძის განტოლება.

3.105. მოცემულია ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის განტოლება $x+y-1=0$ და ფერდის განტოლება $x-2y-2=0$. წერტილი $M(-2;0)$ მეორე ფერდზე იმყოფება. იპოვეთ მეორე ფერდის განტოლება.

3.106. მოცემულია ΔABC სიმაღლეების განტოლებები: $2x-y+4=0$, $3x+2y-5=0$ და წვერო $A(3;1)$. დაწერეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები.

3.107. დაწერეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ ცნობილია მათი შუა წერტილების კოორდინატები $D(1;3)$, $E(-2;1)$ $F(4;-2)$.

3.108. მოცემულია სამკუთხედის გვერდების განტოლებები $y-x=0$ (AB), $x+y=2$ (BC) და $y=0$ (AC). მოძებნეთ კუთხე A წვეროდან გავლებულ სიმაღლესა და B წვეროდან გავლებულ მედიანას შორის.

3.109. მოცემულია ΔABC-ის ორი წვერო $A(2;-3)$, $B(5;1)$ და BC გვერდის განტოლება $x+2y-7=0$. BC გვერდის შესაბამისი მედიანის განტოლებაა $5x-y-13=0$. მოძებნეთ C წვეროდან ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის განტოლება და სიგრძე.

3.110. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო $A(-3;3)$, $B(5;-1)$ და ამ წერტილებიდან დაშვებულ სიმაღლეთა გადაკვეთის წერტილი $H(4;3)$. დაწერეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები.

§ 3.3. მეორე რიგის წირები

მეორე რიგის წირთა ზოგადი განტოლებაა

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,\ (A^2+B^2+C^2\neq 0)$$

წრეწირი. სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც ერთი და იმავე მანძილით არიან დაშორებულნი ამავე სიბრტყის ფიქსირებული წერტილიდან ანუ ცენტრიდან წრეწირი ეწოდება, ხოლო მანძილს წრეწირის ნებისმიერი წერტილიდან ცენტრამდე – რადიუსი.

$C(a,b)$ ცენტრისა და R რადიუსის მქონე წრეწირის კანონიკური განტოლება არის

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

წრეწირის $M_0(x_0;y_0)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლებაა

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2.$$

თუ წრეწირის ცენტრია კოორდინატთა სათავე, მაშინ მისი კანონიკური განტოლება იქნება

$$x^2+y^2=R^2\ , \qquad (3.29)$$

ხოლო მისი $M_0(x_0;\ y_0)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება იქნება

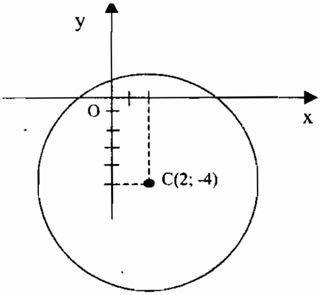
$$xx_0+yy_0=R^2. \qquad (3.30)$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. იპოვეთ

$$x^2+y^2-4x+8y-5=0$$

წრეწირის ცენტრი და რადიუსი.



ნახ. 17

ამოხსნა. მივცეთ წრეწირის განტოლებას კანონიკური სახე

$$(x-2)^2+(y+4)^2=25,$$

ე.ი. წრეწირის ცენტრია $C(2;-4)$, ხოლო $R=5$. ავაგოთ ნახაზი (ნახ.17).

მაგალითი 2. $x+y=0$ წრფის პარელელური წრფეებიდან გამოყავით ისეთები, რომლებიც ეხებიან $x^2+y^2=1$ წრეწირს.

ამოხსნა. მოცემული წრფის პარალელურ წრფეთა ოჯახის განტოლებაა $x+y+C=0$. მხებ წრფეს წრეწირთან გააჩნია მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი. ამიტომ წრფისა და წრეწირის განტოლებებისაგან შედგენილ სისტემას უნდა ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ამონახსნი.

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=-x-C. \end{cases}$$

შევიტანოთ წრეწირის განტოლებაში წრფის განტოლებიდან განსაზღვრული y-ის მნიშვნელობა.

$$x^2+(-x-c)^2=1, \qquad 2x^2+2cx+c^2-1=0.$$

ამ განტოლებას კი ერთი ამონახსნი მაშინ ექნება, როცა დისკრიმანანტი ნულის ტოლია.

$$D=c^2-2(c^2-1)=0.$$

ე.ი. $c^2-2=0$. საიდანაც $c=\pm\sqrt{2}$. მაშასადამე, საძიებელი მხებების განტოლებებია:

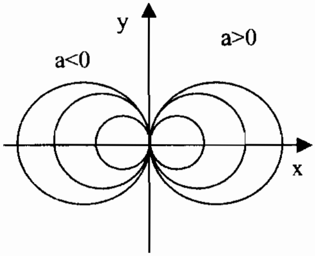
$$x+y+\sqrt{2}=0 \text{ და } x+y-\sqrt{2}=0.$$

მაგალითი 3. გამოიკვლიეთ განტოლება $x^2+y^2=2ax$.

ამოხსნა. დაეიყვანოთ მოცემული განტოლება კანონიკურ სახეზე.

$x^2-2ax+a^2-a^2+y^2=0$, ანუ $(x-a)^2+(y-0)^2=a^2$

მაშასადამე, მოცემული, განტოლება განსაზღერაეს წრეწირს, რომლის ცენტრია OX ღერძის $C(a;\ 0)$ წერტილი, ხოლო $R=|a|$, ე.ი. ეხება OY ღერძს კოორდინატთა სათავეში. სხეადასხეა a-თეის მოცემული განტოლება განსაზღერაეს იმ წრეწირთა სიმრაელეს, რომელთა ცენტრი OX ღერძზეა და ეხებიან OY ღერძს. როცა $a>0$, წრეწირები მარჯეენა ნახეეარსიბრტყეში განლაგდებიან, როცა $a<0$ – მარცხენა ნახეეარსიბრტყეში. როცა $a=0$, წრეწირი გადაგეარდება $(0;0)$ წერტილად (იხ. ნახ. 18).



ნახ. 18

მაგალითი 4. $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ წრეწირისათეის იპოეეთ ის მხებები, რომელბიც მართებულია $\sqrt{3}\,x-4=0$ წრფისა.

ამოხსნა. რადგანაც მოცემული წრეწირის საძიებელი მხებები მართობული უნდა იყოს OY ღერძის პარალელური $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ წრფის, ამიტომ ისინი ox ღერძის პარალელურნი არიან და მათი განტოლება უნდა ეეძებოთ $y=b$ სახით. შეეიტანოთ y-ის ეს მნიშენელობა წრეწირის განტოლებაში და მიეიღებთ

$$x^2+b^2+2x+4b-4=0, \text{ ანუ } x^2+2x+(b^2+4b-4)=0.$$

ამ განტოლებას უნდა ჰქონდეს ერთი ამონახსნი, ე.ი. $D=0$. $D=1-(b^2+4b-4)=0$ ანუ $b^2+4b-5=0$ ანუ $b_1=-5$, $b_2=1$.

ე.ი. მხებთა საძიებელი განტოლებებია $y+5=0$ და $y-1=0$.

მაგალითი 5. დაწერეთ $x^2+y^2+2x-10y+1=0$ წრეწირის $A(-1,0)$ წერტილზე გამაეალი მხების განტოლება.

ამოხსნა. წრეწირის მოცემულ განტოლებას მიეცეთ კანონიკური სახე $(x+1)^2+(y-5)^2=25$.

მაშინ $A(-1;0)$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლება იქნება

$(x+1)(-1+1)+(y-5)(0-5)=25$, საიდანაც $y=0$.

მაგალითი 6. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(2;7)$ წერტილზე და ეხება $(x-1)^2+(y-2)^2=2$ წრეწირს.

ამოხსნა. ვეძებოთ წრფის განტოლება $y=kx+b$ სახით. ვიპოეოთ k და b. რადგანაც წრფე გადის $M_0(2;7)$ წერტილზე, ამიტომ

$$7=2k+b, \text{ ანუ } b=7-2k.$$

საძიებელი წრფე ეხება წრეწირს ცენტრით $C(1;\ 2)$ წერტილში და რადიუსით $R=5$. მაშასადამე, მანძილი $C(1;2)$ წერტილიდან საძიებელ $kx-y+b=0$ წრფემდე 5-ის ტოლია. ე.ი.

$$5=\frac{|k-2+b|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

მაშასადამე, k და b -ს მოსაძებნად მივიღეთ სისტემა

$$\begin{cases} b=7-2k, \\ |k+b-2|=5\sqrt{k^2+1}. \end{cases}$$

$$\text{ე.ი. } |k+7-2k-2|=5\sqrt{k^2+1},\ |5-k|=5\sqrt{k^2+1},$$

$$25-10k+k^2=25k^2+25,\ 12k^2+5k=0.$$

საიდანაც $k_1=0$, $k_2=-\frac{5}{12}$. სისტემის პირველი განტოლებიდან კი მივიღებთ $b_1=7$, $b_2=\frac{47}{6}$.

ჩავსვათ k და b-ს მიღებული მნიშვნელობანი საძიებელი წრფის განტოლებაში და მიიღება ამოცანის ორი ამონახსნი:

$$1)\ y=7,\ \ 2)\ 5x+12y-94=0.$$

ელიფსი. სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრაველეს, რომელთაგან მანძილების ჯამი ამავე სიბრტყის ორ მოცემულ წერტილამდე მუდმივი სიდიდეა, ელიფსი ეწოდება. ამ ორ მოცემულ წერტილს ფოკუსები ეწოდებათ და აღინიშნებიან F_1 და F_2 ასოებით, ხოლო მანძილები აღვნიშნოთ შესაბამისად r_1 და r_2-ით.

აღნიშნული მანძილების ჯამი იყოს 2a. ე.ი. $r_1+r_2=2a$. ფოკუსებს შორის მანძილი იყოს 2c, ე.ი. $F_1F_2=2c$, ცხადია, $2a>2c$.

თუ კოორდინატთა სისტემას ასე შევარჩევთ: ox ღერძს გავატარებთ ფოკუსებზე, oy ღერძს გავატარებთ ფოკუსებს შორის შუა წერტილზე, მაშინ ელიფსის კანონიკურ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ სადაც } b^2=a^2-c^2 \tag{3.31}$$

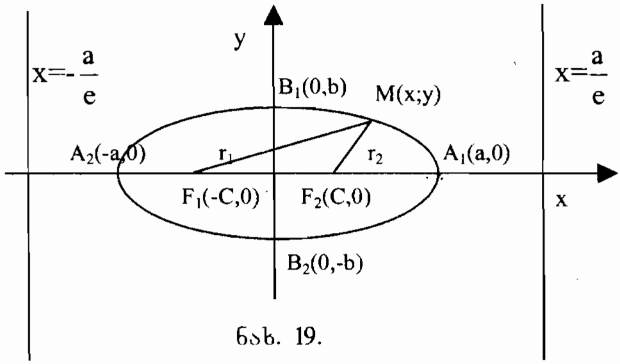
$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ (ნახ. 19).

A_1, A_2, B_1, B_2 ელიფსის წვეროებია. წვეროთა შორის მონაკვეთებს ღერძები ეწოდებათ: $A_1A_2=2a$ დიდი ღერძია, $B_1B_2=2b$ მცირე ღერძი. a და b-ს ეწოდებათ **ნახევარღერძები.**

ფოკუსებს შორის მანძილს $F_1F_2=2c$-ს ფოკალური მანძილი ეწოდება, ფოკალური მანძილის შეფარდებას დიდ ღერძთან – **ექსცენტრისიტეტი**, ე.ი. $e=\frac{c}{a}$. ($e<1$, რადგანაც $c<a$, სამკუთხედის ორი გვერდის ჯამი მეტია მესამე გვერდზე). ნებისმიერი $M(x,y)$ წერტილიდან ფოკუსამდე მანძილებია

$r_1=a-ex$ და $r_2=a+ex$. ელიფსის **დირექტრისები** ეწოდებათ წრფეებს $x=\frac{a}{e}$ და $x=-\frac{a}{e}$. ელიფსის $M_0(x_0;y_0)$ წერტილზე გატარებული მხების განტოლებაა

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{3.32}$$



ნახ. 19.

როცა a=b, ელიფსი გადაიქცევა წრეწირად, ამ შემთხვევაში ფოკალური მანძილი 2c=0 და წრეწირისათვის e=0. მაშასადამე, წრეწირი ნული ექსცენტრისიტეტის მქონე ელიფსია.

თუ b>a, მაშინ ელიფსის ფოკუსები მოთავსებული იქნება oy ღერძზე. ამ შემთხვევაში $a^2=b^2-c^2$; ე.ი. $e=\frac{c}{b}; r_1=b-ey;$ $r_2=b+ey$, ხოლო დირექტრისების განტოლებები იქნება $y=\pm\frac{b}{e}$.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. მოცემულია $25x^2+169y^2=4225$ ელიფსი. იპოვეთ ამ ელიფსის ღერძები, ფოკუსების კოორდინატები, ექსცენტრისიტეტი და დირექტრისების განტოლებანი.

ამოხსნა. გადავწეროთ ელიფსის განტოლება კანონიკური სახით:

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

ე.ი. $a^2=169$, $b^2=25$. ანუ a=13 და b=5. მაშასადამე, დიდი ღერძია 2a=26 და მცირე ღერძი –2b=10. რადგანაც $c^2=a^2-b^2$, ამიტომ ჩვენს შემთხვევაში $c^2=169-25=144$, საიდანაც c=12. ამრიგად, ფოკუსები იქნება $F_1(-12;\ 0)$ და $F_2(12;\ 0)$.

ექსცენტრისიტეტი $e=\frac{c}{a}=\frac{12}{13}$.

დირექტრისების განტოლებები კი იქნება:

$$x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{13}{\frac{12}{13}}, \text{ ე.ი. } x=\pm\frac{169}{12}.$$

მაგალითი 2. შევადგინოთ ელიფსის განტოლება, თუ ღერძების ჯამი უდრის 16, ხოლო ფოკუსთა შორის მანძილი უდრის 8 (ფოკუსები ox ღერძზეა).

ამოხსნა. მოცემულობის თანხამად შეგვიძლია დავწეროთ სისტემა:

$$\begin{cases}2a+2b=16,\\ 2c=8.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=8,\\ c=4.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=8,\\ a^2-b^2=16.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=8,\\ a-b=2.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5,\\ b=3.\end{cases}$$

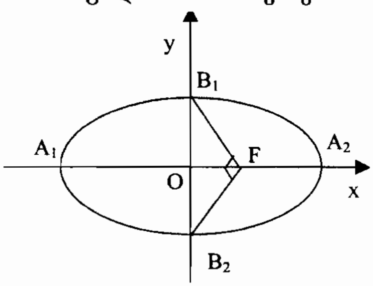
მაშასადამე, ელიფსის განტოლება იქნება:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, \text{ ანუ } 9x^2+25y^2=225.$$

მაგალითი 3. განსაზღვრეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ მისი მცირე ღერძი ფოკუსიდან ჩანს მართი კუთხით.

ამოხსნა. $e=\frac{c}{a}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$. პირობის თანახმად $\angle B_1FB_2=90^0$ და $\angle B_1FO=45^0$ (ნახ. 20). მაშასადამე, $B_1O=OF=b$, ე.ი. $b=c$. $a^2=c^2+b^2=2b^2$, საიდანაც $a=b\sqrt{2}$. $e=\frac{c}{a}=\frac{b}{a}$, ანუ $e=\frac{b}{b\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ე.ი. $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

მაგალითი 4. მოძებნეთ $9x^2+15y^2=135$ ელიფისის იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც გადიან $M(-6;\ 3)$ წერტილზე.



ნახ. 20

ამოხსნა. $M(-6;3)$ წერტილი მოთავსებულია მოცემული ელიფსის გარეთ, რადგანაც $9x^2+15y^2-135>0$ მოცემულ $M(-6;3)$ წერტილზე. აღებული წერტილიდან ელიფსისადმი ორი მხების გატარება შეიძლება. როგორც ვიცით, ელიფსის $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე გატარებული მხების განტოლებაა $9xx_0+15yy_0=135$. რადგანაც ამ მხებმა უნდა გაიაროს $M(-6;3)$ წერტილზე, ამიტომ $9(-6)x_0+15\cdot 3y_0=135$. მეორე მხრივ, რადგანაც $M_0(x_0,y_0)$ ელიფსის წერტილია, გვაქვს $9x_0^2+15y_0^2=135$

მივიღეთ განტოლებათა სისტემა

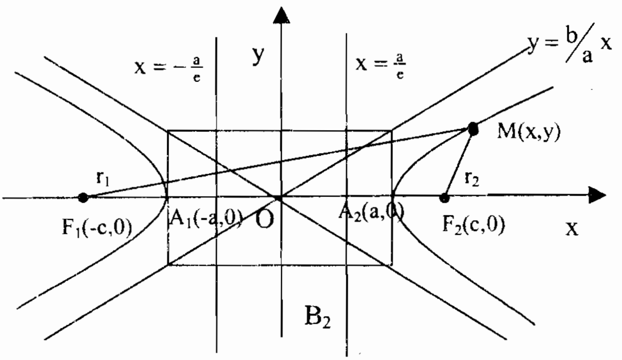
$$\begin{cases} 6x_0-15y_0+15=0 \\ 9x_0^2+15y_0^2-135=0 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ შეხების წერტილის კოორდინატებს $(0;3)$ და $\left(-\dfrac{60}{17};-\dfrac{21}{17}\right)$.

მაშასადამე, საძიებელ მხებთა განტოლებებია

$$y-3 \text{ და } 12x+7y+51=0 .$$

ჰიპერბოლი. სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრაელეს, რომელთა მანძილების სხვაობის მოდული ამავე სიბრტყის ორ მოცემულ წერტილამდე მუდმივი სიდიდეა, ჰიპერბოლი ეწოდება. სიბრტყის ამ ორ მოცემულ წერტილს ფოკუსები ეწოდებათ და აღინიშნებიან F_1 და F_2 ასოებით. ფოკუსებს შორის მანძილს ფოკალურ მანძილს უწოდებენ (იხ. ნახ.21).



ნახ. 21

აღნიშნული მანძილების სხვაობის მოდული იყოს $2a$, ე.ი. $|r_1-r_2|=2a$ და ფოკალური მანძილი $F_1F_2=2c$. ჰიპერბოლის კანონიკურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{, საიდანაც } b^2=c^2-a^2 . \tag{3.33}$$

$2a$ არის ჰიპერბოლის ნამდვილი ღერძი, $2b$ – წარმოსახვითი. აქ $b^2=c^2-a^2$, ანუ $c^2=a^2+b^2$. $2c$ ფოკალური მანძილია. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $e=\dfrac{c}{a}>1$, რადგანაც ჰიპერბოლის შემთხვევაში $c>a$. ჰიპერბოლის ასიმპტოტები ეწოდება წრფეებს, რომელთა განტოლებებია

$$y=\pm\frac{b}{a}x . \tag{3.34}$$

თუ $a=b$, მაშინ გვაქვს ტოლფერდა ჰიპერბოლი

$$x^2-y^2=a^2 \text{ ან } y^2-x^2=a^2.$$

მისი ასიმპტოტებია $y=x$ და $y=-x$ საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისები. მათ შორის კუთხეების სიდიდე 90^0 -ია.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ და $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ ჰიპერბოლებს ეწოდებათ **შეუღლებული** ჰიპერბოლები. პირველი ჰიპერბოლის ფოკუსები ox ღერძზე მდებარეობენ, ხოლო მეორის – oy ღერძზე.

ჰიპერბოლის მარჯვენა შტოს წერტილისათვის

$$r_1=ex-a \text{ და } r_2=ex+a,$$

მარცხენა შტოს წერტილებისათვის

$$r_1=-ex+a \text{ და } r_2=-ex-a,$$

დირექტრისების განტოლებებია

$$x=\pm\frac{a}{e} \quad \text{ან} \quad y=\pm\frac{b}{e}.$$

ჰიპერბოლის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლებაა

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{3.35}$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. მოცემულია ჰიპერბოლის განტოლება $36x^2-64y^2=2304$. განსაზღვრეთ მისი ღერძების სიგრძეები, ფოკალური მანძილი და ექსცენტრისიტეტი.

ამოხსნა. ჩავწეროთ ჰიპერბოლის მოცემული განტოლება კანონიკური სახით:

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$$

ე.ი. $a^2=64$, $a=8$ და ნამდვილი ღერძი $2a=16$.

$b^2=36$, $b=6$ და წარმოსახვითი ღერძი $2b=12$.

$c^2=a^2+b^2=100$, $c=10$ და ფოკალური მანძილი $2c=20$. ექსცენტრისიტეტი $e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}$, $e=\frac{5}{4}$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი, თუ კუთხე ასიმპტოტსა და ნამდვილ ღერძს შორის არის $\frac{\pi}{3}$.

ამოხსნა. მოცემულობის თანახმად, ასიმპტოტის კუთხური კოეფიციენტი $k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ე.ი. $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$.

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2.$$

მაშასადამე, $e=2$.

მაგალითი 3. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $e=\frac{3}{2}$ და გადის $M(3;1)$ წერტილზე. იპოვეთ მისი განტოლება.

ამოხსნა. როგორც ვიცით, $e=\frac{c}{a}$. ე.ი. $\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$. რადგანაც ჰიპერბოლი გადის $M(3;1)$ წერტილზე, ამიტომ

$$\frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1.$$

a და b-ს მოსაძებნად მივიღეთ სისტემა:

$$\begin{cases} c=\frac{3}{2}a, \\ \frac{9}{a^2}-\frac{1}{c^2-a^2}=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{3}{2}a, \\ \frac{9}{a^2}-\frac{1}{\frac{9}{4}a^2-a^2}=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{3}{2}a, \\ 9-\frac{4}{5}=a^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2=\frac{369}{20}, \\ a^2=\frac{41}{5}. \end{cases}$$

მაშინ $b^2=c^2-a^2=\frac{369}{20}-\frac{41}{5}=\frac{41}{4}$. მაშასადამე, ჰიპერბოლის საძიებელი განტოლებაა

$\frac{x^2}{41/5}-\frac{y^2}{41/4}=1$, ანუ $5x^2-4y^2-41=0$.

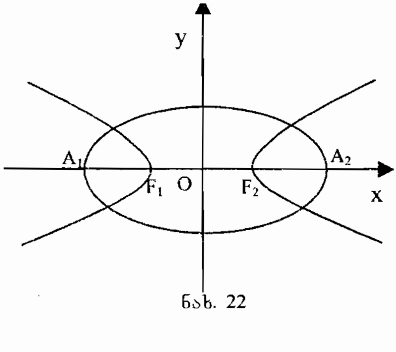
მაგალითი 4. გამოთვალეთ მანძილი $5x^2-20y^2=100$ ჰიპერბოლის მარცხენა ფოკუსიდან $3x+4y-12=0$ წრფემდე.

ამოხსნა. ჩავწეროთ ჰიპერბოლის განტოლება კანონიკური სახით:

$$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1.$$

ე.ი. $a^2=20$ და $b^2=20$. მაშინ, $c^2=a^2+b^2=25$, $c=\pm5$. მაშასადამე, ჰიპერბოლის მარცხენა ფოკუსია $F_1(-5;\ 0)$. მანძილი ამ ფოკუსიდან $3x+4y-12=0$ წრფემდე იქნება

$$d=\frac{|3\cdot(-5)-12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{27}{5}=5{,}4. \quad d=5{,}4.$$



ნახ. 22

მაგალითი 5. მოცემული $5x^2+8y^2=40$ ელიფსის განტოლება. იპოვეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის წვეროები მოცემული ელიფსის ფოკუსებშია, ხოლო ფოკუსები – წვეროებში (ნახ.22).

ჩავწეროთ ელიფსის მოცემული განტოლება კანონიკური სახით:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$$

ე.ი. $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{5}$, მაშინ $c^2=a^2-b^2=3$, $c=\sqrt{3}$.

რადგანაც ჰიპერბოლის წვეროები ელიფსის ფოკუსებშია, ფოკუსები კი – წვეროებში, ამიტომ ელიფსის დიდი ღერძი ჰიპერბოლის ფოკუსური მანძილის ტოლია, ე.ი. ჰიპერბოლის $c^2=8$, $a^2=3$ და ჰიპერბოლის $b^2=8-3=5$. მაშასადამე, ჰიპებოლის საძიებელი განტოლებაა

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1.$$

მაგალითი 6. იპოვეთ $\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{36}=1$ ჰიპერბოლის $M(10;-2)$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლება.

ამოხსნა. (3.35) ფორმულის თანახმად მხების საძიებელი განტოლებაა

$$\frac{10x}{90}+\frac{2y}{36}=1,\ \text{ანუ}\ 2x+y-18=0.$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ მისი ასიმპტოტებია $y=\pm\frac{3}{4}x$, ხოლო მანძილი ფოკუსებიდან შესაბამის ასიმპტოტებამდე 3-ის ტოლია.

ამოხსნა. ჰიპერბოლის განტოლების შესადგენად უნდა ვიცოდეთ მისი ნახევარღერძები a და b. მათ მოსაძებნად ერთი განტოლებაა $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, ანუ $b=\frac{3}{4}a$. რადგანაც მანძილი $F(c,0)$ ფოკუსიდან $3x-4y=0$ ასიმპტოტამდე 3-ის ტოლია, შეგვიძლია დავწეროთ: $\frac{|3c-4\cdot 0|}{5}=3$, საიდანაც $c=5$. მაშინ $b^2=c^2-a^2$, ანუ $a^2+b^2=25$, მივიღეთ სისტემა:

$$\begin{cases} b=\frac{3}{4}a, \\ a^2+b^2=25. \end{cases}$$

მარტივი გამოთვლებით მიიღება $a^2=16$, $b^2=9$. ე.ი. ჰიპერბოლის საძიებელი განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

მაგალითი 8. დაწერეთ იმ ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები ემთხვევა

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{9}=1$$

ელიფსის ფოკუსებს.

ამოხსნა. ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1.$$

ამ ჰიპერბოლის ფოკუსები იქნება $c^2=a^2-b^2$, სადაც a და b მოცემული ელიფსის ნახევარღერძებია. ე.ი. $a=10$, $b=6$. მაშასადამე, $c^2=100-36=64$; $c=8$.

ჰიპერბოლის განტოლებაში $b^2=c^2-a^2$. ტოლფერდა ჰიპერბოლისთვის $b=a$, ე.ი. $a^2=c^2-a^2$, $2a^2=64$, $a^2=32$. მაშასადამე, საძიებელი ჰიპერბოლის განტოლება

$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{32}=1,\ \text{ანუ}\ x^2-y^2=32.$$

პარაბოლი. სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც თანაბარი მანძილით არიან დაშორებული ამავე სიბრტყის მოცემული წერტილიდან და ამავე სიბრტყეზე მდებარე მოცემული წრფიდან, **პარაბოლი** ეწოდება. მოცემულ წერტილს **ფოკუსი** ეწოდება, ხოლო წრფეს – **დირექტრისი**.

ფოკუსიდან დირექტრისამდე p მანძილს პარაბოლის **პარამეტრი** ეწოდება.

თუ კოორდინატთა სისტემას შევარჩევთ ასე: ox ღერძს გავატარებთ ფოკუსზე დირექტრისის მართობულად, ხოლო oy ღერძს ფოკუსიდან დირექტრისამდე მანძილის შუა წერტილზე, მაშინ პარაბოლის განტოლებას აქვს უმარტივესი სახე:

$$y^2=2px \tag{3.36}$$

დირექტრისის განტოლებას ექნება სახე $x=-\frac{p}{2}$. პარაბოლის ნებისმიერი $M(x,y)$ წერტილის ფოკალური რადიუსვექტორი

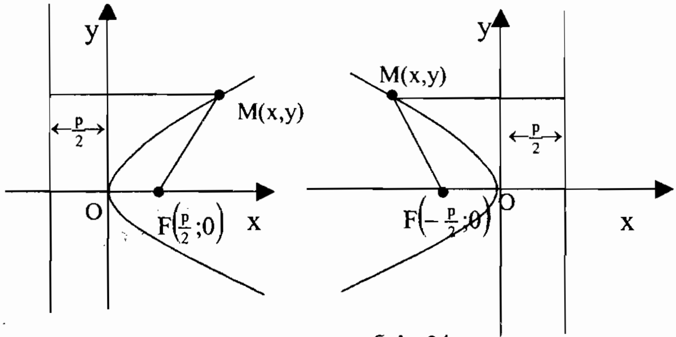
$$r=x+\frac{p}{2}.$$

პარაბოლს სიმეტრიის ერთი ღერძი აქვს. მას პარაბოლის ღერძს უწოდებენ. პარაბოლისა და ღერძის გადაკვეთის წერტილს პარაბოლის **წვერო** ეწოდება.

(3.36) განტოლებიდან ჩანს, რომ თუ $p>0$, მაშინ $x\geq 0$ და ამ შემთხვევაში პარაბოლი მთლიანად მარჯვენა ნახევარსიბრტყეშია მოთავსებული, დირექტრისი მარცხენაში. თუ $p<0$, მაშინ $x\leq 0$ და ამ შემთხვევაში პარაბოლი მთლიანად მარცხენა ნახევარსიბრტყეშია მოთავსებული, დირექტრისი – მარჯვენაში (იხ. ნახ. 23, 24).

$$x^2=2py \tag{3.37}$$

არის პარაბოლის განტოლება, რომლის სიმეტრიის ღერძია oy ღერძი. მისი ფოკუსია $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$ წერტილი. დირექტრისის განტოლებაა $y=-\frac{p}{2}$ და $M(x,y)$ წერტილის რადიუსვექტორია $r=y+\frac{p}{2}$.



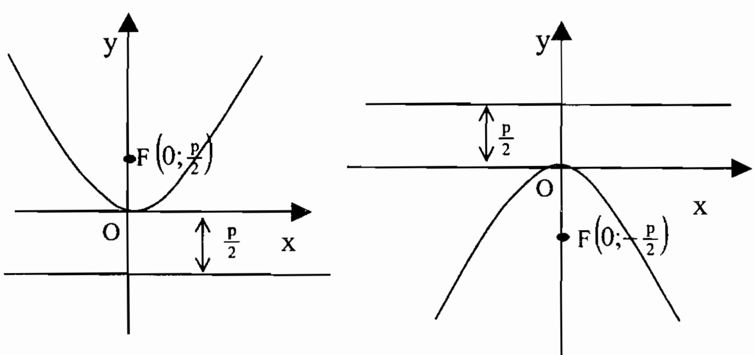
ნახ. 23 ნახ. 24

თუ p≥0, მაშინ ეს პარაბოლი მდებარეობს მთლიანად ზედა ნახევარსიბრტყეში, დირექტრისი ქვედა ნახევარსიბრტყეში. თუ p≤0, მაშინ პარაბოლი მთლიანად ქვედა ნახევარსიბრტყეშია, დირექტრისი ზედა ნახევარსიბრტყეში (იხ. ნახ. 25, 26).

პარაბოლის ექსცენტრისიტეტი $e=\frac{r}{d}=1$, სადაც r და d პარაბოლის ნებისმიერი M(x,y) წერტილის დაშორებაა შესაბამისად ფოკუსიდან და დირექტრისიდან.

პარაბოლის $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე გატარებული მხების განტოლებაა

$$yy_0=p(x+x_0). \tag{3.38}$$

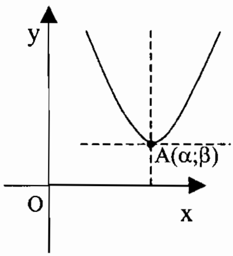


ნახ. 25 ნახ. 26

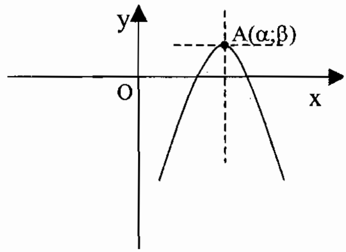
$y=ax^2+bx+c$ არის პარაბოლის განტოლება, რომლის წვეროს კოორდინატებია $\left(\frac{-b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. თუ x^2-ის კოეფიციენტი $a>0$, მაშინ პარაბოლის შტოები ზევითაა მიმართული, ხოლო თუ $a<0$, მაშინ მისი შტოები ქვემოთაა მიმართული.

განტოლება პარაბოლისა, რომლის წვეროს წარმოადგენს $A(\alpha,\beta)$ წერტილი და რომლის სიმეტრიის ღერძი ორდინატთა ღერძის პარალელურია, არის

$$(x-\alpha)^2=\pm 2p(y-\beta).$$



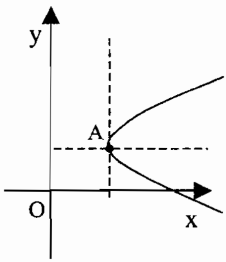
ნახ. 27



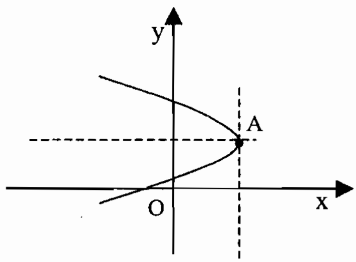
ნახ. 28

2) განტოლება პარაბოლისა, რომლის წვეროა $A(\alpha;\beta)$ წერტილი და სიმეტრიის ღერძი აბსცისთა ღერძის პარალელურია, არის

$$(y-\beta)^2=\pm 2p(x-\alpha)$$



ნახ. 29



ნახ. 30

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. დაწერეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(3;0)$ და დირექტრისის განტოლებაა $x=-3$.

ამოხსნა. ფოკუსის კოორდიინატებია $F\left(\frac{p}{2},0\right)$. ე.ი. ჩვენ მაგალითში $\frac{p}{2}=3$, საიდანაც $p=6$. მაშასადამე, პარაბოლის საძიებელი განტოლებაა

$$y^2=12x.$$

მაგალითი 2. დაწერეთ პარაბოლის განტოლება, თუ ის სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეში და $A(2;-1)$ წერტილზე.

ამოხსნა. პარაბოლის განტოლება უნდა ვეძებოთ სახით:

$$x^2=12py.$$

რადგანაც ის გადის $M(2;-1)$ წერტილზე, ამიტომ $4=-2p$, $p=-2$. მაშასადამე, პარაბოლის განტოლებაა

$$x^2=-4y.$$

მაგალითი 3. $y^2=16x$ პარაბოლზე მოძებნეთ წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუსვექტორია 8.

ამოხსნა. ჩვენ მაგალითში $p=8$ და $r=8$. ე.ი. $x+\frac{p}{2}=8$. საძიებელი წერტილი რადგანაც პარაბოლს ეკუთვნის, ამიტომ მისი კოორდინატების მოსაძებნად უნდა ამოიხსნას სისტემა

$$\begin{cases} y^2=16x, \\ x+4=8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 8, \\ x=4. \end{cases}$$

ე.ი. ასეთი ორი წერტილი არსებობს: $M_1(4,8)$ და $M_2(4,-8)$.

მაგალითი 4. იპოვეთ $y^2=8x$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც $4x-2y+5=0$ წრფის პარალელურია.

ამოხსნა. ვთქვათ, $M_0(x_0,y_0)$ არის პარაბოლის წერტილი, რომელზედაც გატარებული მხები $4x-2y+5=0$ წრფის პარალელურია. მაშინ (3.38) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$yy_0=4(x+x_0)$. პარალელობის პირობა გვაძლევს $\frac{4}{y_0}=2$, საიდანაც $y_0=2$.

ჩავსვათ $y_0=2$ პარაბოლის განტოლებაში. მივიღებთ $x_0=\frac{1}{2}$. ამრიგად, საძიებელი მხების განტოლებაა

$$4y=8(x+\frac{1}{2}), \text{ ანუ } 2x-y+1=0.$$

მაგალითი 5. $y^2=-4x$ პარაბოლის ფოკუსზე გავლებულია წრფე, რომელიც OX ღერძთან ადგენს 120^0 კუთხეს. იპოვეთ წრფის განტოლება და მიღებული ქორდის სიგრძე.

ამოხსნა. $y^2=-4x$ პარაბოლის ფოკუსია $F(-1;0)$, საძიებელი წრფის კუთხური კოეფიციენტი $k=tg120^0=-tg60^0=-\sqrt{3}$. მაშასადამე, საძიებელი წრფის განტოლებაა

$$y=-\sqrt{3}\,(x+1), \text{ ანუ } \sqrt{3}\,x+y+\sqrt{3}=0.$$

ქორდის სიგრძის მოსაძებნად ვიპოვოთ ამ წრფის პარაბოლასთან გადაკვეთის წერტილები. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} y^2=-4x, \\ y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2=-4x, \\ y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 10x+3=0, \\ y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{3}, \qquad x_2=-3. \\ y_1=-\frac{2}{3}\sqrt{3},\ y_2=2\sqrt{3} \end{cases}$$

მაშასადამე, წრფის პარაბოლთან გადაკეთის წერტილებია $M_1\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $M_2\left(-3;2\sqrt{3}\right)$. ქორდის სიგრძე იქნება:

$$M_1M_2=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}+3\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)^2}=\frac{16}{3}.$$

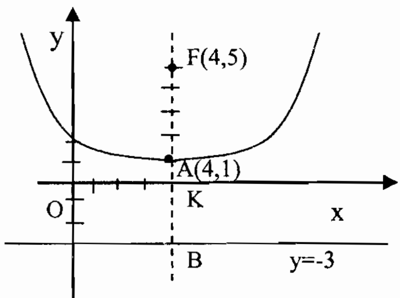
მაგალითი 6. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებულნი oy ღერძიდან და F(4,0) წერტილიდან.

ამოხსნა. რადგანაც oy ღერძი საძიებელი პარაბოლის დირექტრისია, ამიტომ P=4. ამ პარაბოლის წვეროა A(2;0). (3.40) ფორმულის თანახმად მისი განტოლება იქნება

$$y^2=8(x-2).$$

მაგალითი 7. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული y=4 წრფიდან და F(0;2) წერტილიდან.

ამოხსნა. ცხადია, აღნიშნულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი პარაბოლია, რომლის წვეროა A(0;3) წერტილი, P=2 და სიმეტრიის ღერძია oy ღერძი. (3.39) ფორმულის თანახმად ამ პარაბოლის განტოლება იქნება $x^2=-4(y-3)$.



ნახ. 31

მაგალითი 8. ვიპოვოთ $x^2-8x-16y+32=0$ პარაბოლის წვეროს და ფოკუსის კოორდინატები, ღერძისა და დირექტრისის განტოლებები.

ამოხსნა. ვინაიდან პარაბოლის განტოლება y-ს პირველ ხარისხში შეიცავს,ამიტომ მოცემული განტოლება დავიყვანოთ შემდეგ სახეზე:

$$(x-\alpha)^2=\pm 2p(y-\beta).$$

ჩვენ შემთხვევაში

$x^2-8x=16y-32$, $(x-4)^2=16(y-1)$.

მაშასადამე, წვეროს კოორდინატებია A(4;1). ამ პარაბოლის ღერძი oy ღერძის პარალელურია და მისი განტოლებაა x=4. განტოლებიდან

$2p=16$, $p=8$, ე.ი. $\frac{p}{2}=4$.

ფოკუსი იმყოფება წვეროდან $\frac{p}{2}$ მანძილზე და მდებარეობს სიმეტრიის ღერძზე (იხ. ნახ. 31), ამიტომ ფოკუსის კოორდინატები იქნება F(4;5) ($1+\frac{p}{2}=1+4=5$). დირექტრისი პარალელურია OX ღერძის და წვეროდან $\frac{p}{2}=4$ მანძილზე მდებარეობს. ე.ი. AB=4 და დირექტრისის განტოლება იქნება $y=-3$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

3.111. დაწერეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც A(2;2) წერტილზე გადის და რომლის ცენტრი C(0;3) წერტილშია.

3.112. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე წრეწირის შემდეგი განტოლებები:

$$x^2+y^2-2x+4y=0, \qquad x^2+y^2-6y+5=0,$$
$$x^2+-2x+y^2-4y-20=0 \qquad x^2+y^2-4y=0.$$

3.113. შეადგინეთ (0;1), (3;0) და (–1; 2) წერტილებზე გამავალი წრეწირის განტოლება.

3.114. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია $x+2y-4=0$; $3x-y-5=0$, $5x+3y+1=0$. შეადგინეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის განტოლება.

3.115. შეადგინეთ $(x+3)^2+(y-5)^2=25$ წრეწირის იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც მართობულია $5x+10y-12=0$ წრფის.

3.116. დაწერეთ $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ წრეწირის მხებთა განტოლებანი A(2;0), B(3;–1), C(3;–3), D(0;–4) წერტილებში.

3.117. დაწერეთ $x^2+y^2-8x+2y-8=0$ წრეწირისადმი A(7;–5) წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

3.118. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის გადის $M_1(10; 9)$, $M_2(4;-5)$ და $M_3(0;5)$ წერტილებზე.

3.119. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია A(4;5) და B(–2;1).

3.120. დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება $5x-12y-24=0$ წრფეს და ცენტრი C(6;7) წერტილშია.

3.121. მოცემულია $(x-1)^2+y^2=4$ წრეწირი. $A\left(2;-\frac{1}{2}\right)$ წერტილზე გაავლეთ ქორდა, რომელიც ამ წერტილით შუაზე იყოფა.

3.122. შეადგინეთ $(x+2)^2+(y-3)^2=30$ წრეწირის იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც მართობულია $5x+2y-13=0$ წრფის.

3.123. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება საკოორდინატო ღერძებს და გადის A(1;2) წერტილზე.

3.124. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის A(3;0), B(–1;2) წერტილებზე და რომლის ცენტრი მდებარეობს $x-y+2=0$ წრფეზე.

3.125. დაამტკიცეთ, რომ $y=2x+5$ წრფე და $x^2+y^2=1$ წრეწირი არ იკვეთებიან.

3.126. როგორ არიან განლაგებული $(x-5)^2+(y+2)^2=25$ წრეწირის მიმართ შემდეგი წრფეები: 1. $4x-3y-1=0$; 2. $3x-y-5=0$, 3. $3x-4y+12=0$.

3.127. რა მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ განტოლების კოეფიციენტებს, რომ ის განსაზღვრავდეს წრეწირს ცენტრით $C(3;2)$ წერტილში და $R=5$ რადიუსით?

3.128. როგორ არის განლაგებული $M_1(3;4)$, $M_2(-1;2)$ და $M_3(-5,4)$ წერტილები $(x-3)^2+(y+2)^2=36$ წრეწირის მიმართ?

3.129. იპოვეთ $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ წრეწირისა და შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილები: 1. $x-y-4=0$; 2. $3x-4y+36=0$; 3. $x-y-5=0$

3.130. იპოვეთ წრეწირი, რომელიც ეხება $3x+2y-10=0$ წრფეს და რომლის ცენტრია $C(5;3)$ წერტილი.

3.131. იპოვეთ დიამეტრი $(x-2)^2+(y+1)^2=16$ წრეწირის, რომელიც გაიელის $x-2y-3=0$ წრფეზე ჩამოჭრილი ქორდის შუა წერტილზე.

3.132. შეადგინეთ $x^2+y^2+3x-y=0$ და $3x^2+3y^2+2x+y=0$ წრეწირების საერთო ქორდის განტოლება.

3.133. შეადგინეთ $x^2+y^2-6x+8y=0$ და $x^2+y^2+2x-12y+1=0$ წრეწირების საერთო ქორდისა და მათ ცენტრებზე გამავალი წრფის განტოლებები.

3.134. წრეწირი ეხება $2x+y-5=0$ და $2x+y+15=0$ პარალელურ წრფეებს, მასთან ერთ-ერთ მათგანს $A(2;1)$ წერტილში. შეადგინეთ ამ წრეწირის განტოლება.

3.135. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ: 1. ფოკუსებს შორის მანძილი 6-ის ტოლია, ხოლო დიდი ნახევარღერძი – 5-ის, 2. დიდი ნახევარღერძია 10, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $-0,8$.

3.136. შეადგინეთ ელიფსისი განტოლება, თუ: 1. მცირე ნახევარღერძია 3, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 2. ნახეეარღერძების ჯამია 10, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი – $4\sqrt{5}$.

3.137. იპოვეთ ღერძთა სიგრძეები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ელიფსებისა:

1. $9x^2+25y^2=225$; 2. $16x^2+y^2=16$;

3. $25x^2+169y^2=4225$; 4. $9x^2+y^2=36$.

3.138. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ერთ-ერთი ფოკუსიდან დიდი ღერძის ბოლოებამდე მანძილია 7 და 1.

3.139. იპოვეთ შემდეგი წრფეებისა და ელიფსების გადაკვეთის წერტილები: 1. $2x-y-9=0$, $x^2+3y^2=36$; 2. $3x+10y-25=0$, $4x^2+25y^2=100$; 3. $3x-4y-40=0$, $9x^2+16y^2=144$.

3.140. განსაზღვრეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ ფოკუსებს შორის მანძილი უდრის დიდი და მცირე ღერძების ბოლოებს შორის მანძილს.

3.141 განსაზღვრეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ 1. მისი დიდი ღერძი 3-ჯერ აღემატება მცირე ღერძს; 2. ღერძების ფარდობაა 5:3.

3.142. შეადგინეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, თუ ის გადის შემდეგ ორ წერტილზე: $M(2\sqrt{3};\sqrt{6})$ და $N(6;0)$. იპოვეთ ექსცენტრისიტეტი და M წერტილის რადიუს-ვექტორები.

3.143. შეადგინეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, თუ ის გადის შემდეგ ორ წერტილზე: $M(\sqrt{3};-2)$ და $N(-2\sqrt{3};1)$.

3.144. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც გავლებულია $F(c;0)$ ფოკუსზე დიდი ღერძის მართებულად.

3.145. $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც 5 ერთეულითაა დაშორებული მცირე ღერძიდან.

3.146. $x=-5$ წრფეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $x^2+5y^2=20$ ელიფსის მარცხენა ფოკუსიდან და ზედა წვეროდან.

3.147. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც 3-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული მარჯვენა ფოკუსიდან, ვიდრე მარცხენადან.

3.148. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ იგი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, ფოკუსები მდებარეობს აბსცისთა ღერძზე, დირექტრისებს შორის მანძილია 5, ხოლო ფოკუსებს შორის – 4.

3.149. გამოთვალეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის ორი წვერო მოთავსებულია $9x^2+5y^2=1$ ელიფსის ფოკუსებში, ხოლო დანარჩენი ორი წვერო ემთხვევა მისი მცირე ღერძის ბოლოებს.

3.150. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$ ელიფსის ფოკუსზე მისი დიდი ღერძისადმი გავლებულია მართობი. იპოვეთ მანძილები ამ მართობის ელიფსთან გადაკვეთის წერტილებიდან ფოკუსებამდე.

3.151 იპოვეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ

1. მისი მცირე ღერძი ფოკუსიდან ჩანს 60^0-იანი კუთხით;

2. ფოკუსებს შორის მონაკვეთი მცირე ღერძის ბოლოებიდან ჩანს მართი კუთხით.

3.152. დაწერეთ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ ელიფსის დირექტრისების განტოლებები.

3.153. დაწერეთ იმ ელიფსის კანონიკური განტოლება, რომლის ფოკუსებს შორის მანძილია 2, დირექტრისებს შორის – 10.

3.154. დაწერეთ იმ ელიფსის კანონიკური განტოლება, რომლის მცირე ნახევარღერძია $2\sqrt{6}$, დირექტრისების განტოლებებია $x=\pm10$.

3.155. დაწერეთ იმ ელიფსის კანონიკური განტოლება, რომლის დირექტრისებს შორის მანძილია 36, ხოლო ერთ-ერთი წერტილის ფოკალური რადიუს-ვექტორებია 9 და 15.

3.156. იპოვეთ $x^2+4y^2=4$ ელიფსისა და იმ წრეწირის გადაკვეთის წერტილები, რომელიც გადის ელიფსის ფოკუსებზე, წრეწირის ცენტრი ელიფსის ზედა წვეროა.

3.157. $x^2+5y^2=20$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუს-ვექტორები ურთიერთმართობულია.

3.158. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ: 1. ფოკუსებს შორის მანძილია 10 და წარმოსახვითი ნახევარღერძი – 4; 2. ნამდვილი ნახევარღერძია $2\sqrt{5}$ და ექსცენტრისიტეტი – $\sqrt{1,2}$.

3.159. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1. ფოკუსებს შორის მანძილია 16 და ექსცენტრისიტეტი – $\frac{4}{3}$; 2. წარმოსახვითი ნახევარღერძია 5 და ექსცენტრისიტეტი – $\frac{3}{2}$.

3.160. იპოვეთ ღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ჰიპერბოლების 1. $4x^2-9y^2=25$; 2. $9y^2-16x^2=114$.

3.161. იპოვეთ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი; 2. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსი მოთავსებულია oy ღერძზე სათავის სიმეტრიულად, ხოლო ნახევარღერძებია 6 და 12.

3.162. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ ის გადის M((–5;3) წერტილზე და მისი ექსცენტრისიტეტი ტოლია $\sqrt{2}$ -ის.

3.163. მოცემულია $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლი. დაწერეთ მისი ასიმპტოტების განტოლებები და იპოვეთ შეუღლებული ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი.

3.164. $x^2-y^2=4$ ჰიპერბოლზე იპოვეთ წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუს-ვექტორები ურთიერთმართობულია.

3.165. იპოვეთ $\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{36}=1$ ჰიპერბოლისა და შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილები: 1. $x-5y=0$; 2. $2x+y-18=0$; 3. $x-y+5=0$.

3.166. დაწერეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის წვეროები ემთხვევა $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსის ფოკუსებს, ხოლო ფოკუსები ელიფსის წვეროებს.

3.167. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1. ის გადის $M(12;3\sqrt{3})$ წერტილზე, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{x}{2}$; 2. დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{8}{3}$ და ექსცენტრისიტეტი – $\frac{3}{2}$.

3.168. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ ჰიპერბოლზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც მარჯვენა ფოკუსიდან დაშორებულია 4,5 ერთეულით.

3.169. $9x^2-16y^2=144$ ჰიპერბოლზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც მარცხენა ფოკუსიდან დაშორებულია ორჯერ მეტი მანძილით, ვიდრე მარჯვენა ფოკუსიდან.

3.170. შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები ემთხვევა $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსის ფოკუსებს და ექსცენტრისიტეტი ტოლია 2-ის.

3.171. იპოვეთ $y^2=24x$ პარაბოლის ფოკუსი და დირექტრისის განტოლება.

3.172. დაწერეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსია $F(-7;0)$ წერტილი, ხოლო დირექტრისის განტოლებაა $x-7=0$.

3.173. შედგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც 1. სიმეტრიულია ox ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და $M(1;-4)$ წერტილზე; 2. სიმეტრიულია oy ღერძის მიმართ, ფოკუსი მოთავსებულია $F(0;2)$ წერტილში, ხოლო წვერო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.

3.174. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც 1. სიმეტრიულია oy ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და $M(6;-2)$ წერტილზე; 2. სიმეტრიულია ox ღერძის მიმართ, ფოკუსი $F(3;0)$ წერტილშია, ხოლო წვერო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.

3.175. $y^2=6x$ პარაბოლზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუს-ვექტორია 4,5.

3.176. იპოვეთ $y^2=20x$ პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუს-ვექტორი, რომლის აბსცისია 7.

3.177. $y^2=4{,}5x$ პარაბოლის $M(x;y)$ წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილია 9,125. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათაეემდე.

3.178. იპოვეთ $y^2=2px$ პარაბოლის იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც გავლებულია ფოკუსზე ox ღერძის მართობულად.

3.179. იპოვეთ შემდეგი წრფეების და პარაბოლების გადაკვეთის წერტილები:

1. $x+y-3=0$, $y^2=4x$. 2. $3x+4y-12=0$, $y^2=-9x$.

3. $3x-2y+6=0$, $y^2=-6x$.

3.180. $y=kx+2$ წრფე k-ს რა მნიშვნელობისათვის 1. კვეთს $y^2=4x$ პარაბოლს; 2. ეხება მას; 3. გადის მის გარეთ.

3.81. პარაბოლი სიმეტრიულია ox ღერძის და გადის $y=x$ წრფისა და $x^2+y^2+6x=0$ წრეწირის გადაკვეთის წერტილებზე. შეადგინეთ ამ პარაბოლის განტოლება.

3.182. პარაბოლის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, სიმეტრიის ღერძი ემთხვეეა ox ღერძის უარყოფით მიმართულებას, ხოლო P პარამეტრი უდრის მანძილს $4x^2-9y^2-36=0$ ჰიპერბოლის ფოკუსიდან მის ასიმპტოტამდე. შეადგინეთ ამ პარაბოლის განტოლება.

3.183. დაწერეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია F(–3; 1), ხოლო დირექტრისი $y+7=0$.

3.184. დაწერეთ $y^2=6x$ პარაბოლისადმი M(4;5) წერტილიდან გავლებული მხებების განტოლებები.

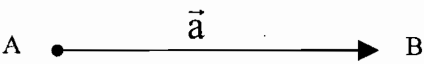
3.185. გამოიყვანეთ იმის პირობა, რომ $y=kx+b$ წრფე ეხებოდეს $y^2=2px$ პარაბოლს.

§3.4. ვექტორული ალგებრა

არჩევენ ორი სახის სიდიდეს: სკალარულსა და ვექტორულს. სკალარული სიდიდე, ანუ სკალარი ეწოდება ისეთ სიდიდეს, რომელიც ხასიათდება მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობით. მაგალითად, მასა, სიმკვრივე, მუშაობა, ფართობი და სხვ.

თუ რაიმე სიდიდის განსაზღვრისას საჭიროა ვიცოდეთ არა მხოლოდ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა, არამედ მიმართულებაც, მაშინ ასეთ სიდიდეს ვექტორული სიდიდე ანუ ვექტორი ეწოდება. მაგალითად, სიჩქარე, აჩქარება, ძალა და სხვ.

ვექტორი გრაფიკულად წარმოადგენს მიმართულ მონაკვეთს ან, რაც იგივეა, წერტილთა დალაგებულ წყვილს და აღინიშნება $\overrightarrow{AB}$ სიმბოლოთი, სადაც A საწყისი წერტილია, ანუ ვექტორის სათავე, ხოლო B ბოლო წერტილი. ვექტორი ასევე აღინიშნება ერთი ასოთი თავზე ხაზით, მაგალითად $\vec{a}$ (ნახ. 32).



ნახ. 32

ვექტორის სათავესა და ბოლო წერტილებს შორის მანძილს ვექტორის სიგრძე, ანუ მოდული ეწოდება და აღინიშნება $|\overrightarrow{AB}|$ ან $|\vec{a}|$ სიმბოლოებით.

ვექტორს, რომლის სიგრძე ნულის ტოლია, ეწოდება ნულ-ვექტორი და აღინიშნება $\vec{0}$. მისი მიმართულება განუსაზღვრელია.

ორ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ: 1) ტოლია მათი მოდულები; 2) ისინი პარალელურნი არიან; და 3) მიმართულნი არიან ერთსა და იმავე მხარეს. ვექტორს, რომლის სიგრძე ტოლია $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძის და მის საპირისპიროდ არის მიმართული, ეწოდება $\vec{a}$-ს მოპირდაპირე ვექტორი და აღინიშნება $-\vec{a}$ – სიმბოლოთი.

რაიმე $\vec{e}$ ვექტორს, რომლის სიგრძე ერთის ტოლია, ეწოდება ერთეულოვანი ვექტორი $\left(|\vec{e}|=1\right)$. ერთეულოვან $\vec{e}$ ვექტორს, რომელსაც მოცემული $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულება აქვს, ეწოდება ვექტორის მგეზავი ან ორტი.

$\vec{a}$ ვექტორის მგეზავი გამოითვლება ფორმულით $\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

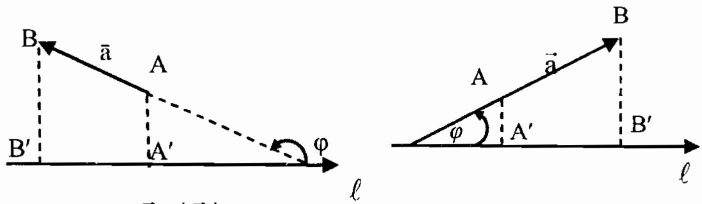
$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს ეწოდებათ კოლინეარული, თუ ისინი მდებარეობენ ერთი და იმავე ან პარალელურ წრფეებზე.

ვექტორებს, რომლებიც ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურები არიან, ეწოდებათ კომპლანარული.

რაიმე $\vec{a}$ ვექტორისა და ნამდვილი k რიცხვის ნამრავლი $k\vec{a}$ ეწოდება ისეთ $\vec{b}$ ვექტორს, რომლის მოდული $|\vec{b}|=k\cdot|\vec{a}|$, $\vec{b}$-ის მიმართულება ემთხვევა $\vec{a}$-ს მიმართულებას, თუ $k>0$, ხოლო $\vec{a}$-ის მოპირდაპირე მიმართულებას, თუ $k<0$.

ვექტორის გეგმილი რაიმე ℓ ღერძზე წარმოადგენს სკალარულ სიდიდეს, რომელიც ტოლია ვექტორის მოდულისა და იმ კუთხის კოსინუსის ნამრავლის, რომელსაც აღებული ვექტორი შეადგენს მოცემულ ღერძთან (ნახ.33).

$$გეგ._{\ell}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi \tag{3.45}$$



$$გეგ._{\ell}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$$

ნახ.34.

თუ α, β და γ – წარმოადგენენ კუთხეებს, რომელთაც მოცემული $\vec{a}$ შეადგენს შესაბამისად მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის OX, OY და OZ ღერძებთან, მაშინ $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე ანუ ვექტორის კოორდინატები იქნება:

$$\left.\begin{aligned} X&=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha\\ Y&=|\vec{a}|\cdot\cos\beta\\ Z&=|\vec{a}|\cdot\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

$\vec{a}$ ვექტორი კოორდინატებით ასე აღინიშნება: $\vec{a}(X;Y;Z)$, ხოლო მისი მოდული გამოითვლება ფორმულით:

$$|\vec{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\,. \tag{3.47}$$

თუ ორი ვექტორი ტოლია $\vec{a}_1=\vec{a}_2$, მაშინ ტოლი იქნება მათი გეგმილები:

$$X_1=X_2,\ Y_1=Y_2,\ Z_1=Z_2. \tag{3.48}$$

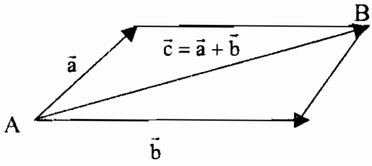
თუ ცნობილია $\vec{a}$ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილების კორდინატები $A(x_1; y_1; z_1)$ და $B(x_2; y_2; z_2)$, მაშინ $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე გამოითვლება ფორმულებით:

$$X=x_2-x_1;\ Y=y_2-y_1;\ Z=z_2-z_1;$$

ხოლო ვექტორის მოდული ამ შემთხვევაში იქნება :

$$|\vec{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ . \qquad (3.\ 49)$$

ცხადია, ამ ფორმულით გამოითვლება მანძილი A და B წერტილებს შორის.



ნახ.34

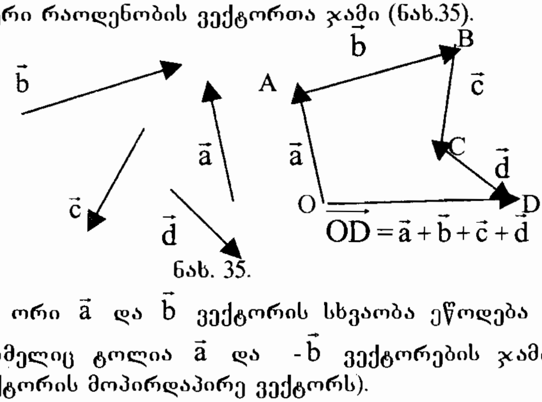
ორი ვექტორის შეკრება შეიძლება ე.წ. პარალელოგრამის წესით. თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს დავიყვანთ საერთო სათავეზე და შემდეგ მათზე ავაგებთ პარალელოგრამს, მაშინ საერთო სათავიდან გავლებული დიაგონალი წარმოადგენს აღებულ ვექტორთა ჯამს (ნახ.34).

$\vec{c}$ ვექტორი მიმართულია A-დან B წერტილისაკენ.

$\vec{c}$ ვექტორის მოდული გამოითვლება ფორმულით

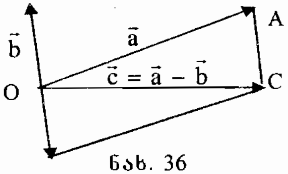
$$|\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\cdot 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})}\ . \qquad (3.\ 50)$$

რამდენიმე ვექტორის (მაგ. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ და $\vec{d}$) ჯამი აიგება შემდეგნაირად: ავიღებთ სიბრტყის ნებისმიერ O წერტილს და ავაგებთ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ვექტორს, A წერტილიდან გავავლებთ $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ვექტორს, B წერტილიდან – $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ ვექტორს, და, ბოლოს, c წერტილიდან $\overrightarrow{CD}=\vec{d}$ ვექტორს: მიღებული OABD ტეხილი წირის ჩამკეტი $\overrightarrow{OD}$ ვექტორი წარმოადგენს მოცემული $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ და $\vec{d}$ ვექტორების ჯამს. $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$. თუ D წერტილი დაემთხვა O წერტილს, მაშინ ვექტორთა ჯამი ნულის ტოლია. ამავე წესით აიგება ნებისმიერი რაოდენობის ვექტორთა ჯამი (ნახ.35).



ნახ. 35.

ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის სხვაობა ეწოდება ისეთ მესამე $\vec{c}$ ვექტორს, რომელიც ტოლია $\vec{a}$ და $-\vec{b}$ ვექტორების ჯამის. ($-\vec{b}$ წარმოადგენს $\vec{b}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორს).



ნახ. 36

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overline{OC}. \qquad \text{(ნახ.36)}$$

ვექტორთა ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე ტოლია ამ ვექტორთა გეგმილების ჯამისა იმავე ღერძზე.

ვექტორული ტოლობიდან

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\cdots+\vec{a}_n \qquad (3.51)$$

გამომდინარეობს შემდეგი სკალარული ტოლობები:

$$\left.\begin{aligned} X&=X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n\\ Y&=Y_1+Y_2+Y_3+\cdots+Y_n\\ Z&=Z_1+Z_2+Z_3+\cdots+Z_n \end{aligned}\right\}, \qquad (3.52)$$

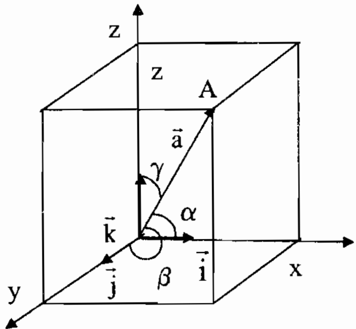
სადაც $\vec{a}=(X,Y,Z)$, ხოლო $a_i=(X_i,Y_i,Z_i)$, i=1,2,..,n.

თუ $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ერთეულოვანი ვექტორები შესაბამისად ox, oy და oz საკოორდინატო ღერძების მგეზავებია, ხოლო X, Y და Z მოცემული ვექტორის კოორდინატები, მაშინ

$$\vec{a}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}. \qquad (3.53)$$

თუ $\vec{a}$ ვექტორის საწყისი წერტილია კოორდინატთა სათავე, ხოლო ბოლო წერტილის კოორდინატებია A(x; y; z), მაშინ X=x, Y=y და Z=z.

ამ შემთხვევაში $\vec{a}$ ვექტორს ეწოდება A წერტილის რადიუს-ვექტორი და აღინიშნება $\vec{r}$-ით. (ნახ. 37)



ნახ. 37.

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \qquad (3.54)$$

A წერტილის რადიუს-ვექტორის მოდული გამოითვლება ფორმულით:

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad (3.55)$$

$\vec{a}$ ვექტორის მიერ OX, OY, და OZ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha&=\frac{X}{|\vec{a}|}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\\ \cos\beta&=\frac{Y}{|\vec{a}|}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{Z}{|\vec{a}|}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (3.56)$$

კოსინუსებს, რომლებიც ამ ფორმულებით განისაზღვრება, $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსები ეწოდებათ. ადგილი აქვს ფორმულას:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \,. \qquad (3.57)$$

თუ $|\vec{e}| = 1$ ერთეულოვანი ვექტორია, მაშინ მისი გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე ტოლია: $X = 1\cdot\cos\alpha$; $Y = 1\cdot\cos\beta$; $Z = 1\cdot\cos\gamma$.

$$\text{ე.ი. } \vec{e} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}\,. \qquad (3.58)$$

თუ მოცემულია ორი ვექტორი

$$\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k},$$

$$\vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k},$$

$$\text{მაშინ } \vec{a} \pm \vec{b} = (X_1 \pm X_2)\vec{i} + (Y_1 \pm Y_2)\vec{j} + (Z_1 + Z_2)\vec{k} \qquad (3.59)$$

$\vec{a}$ ვექტორის ნებისმიერ λ რიცხვზე ნამრავლი არის ვექტორი $\lambda\vec{a} = (\lambda X)\vec{i} + (\lambda Y)\vec{j} + (\lambda Z)\vec{k}$.

ორი $\vec{a}(X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{b}(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორების მოდულებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს. იგი აღინიშნება $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ან $\vec{a}\cdot\vec{b}$ სიმბოლოთი. განმარტების თანახმად

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \,. \qquad (3.60)$$

სადაც φ არის კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის. როგორც ცნობილია, $|\vec{b}|\cos\varphi = \text{გეგ}_{\vec{a}}\vec{b}$ და $|\vec{a}|\cos\varphi = \text{გეგ}_{\vec{b}}\vec{a}$ ამიტომ $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = |\vec{a}|\cdot\text{გეგ}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\text{გეგ}_{\vec{b}}\vec{a}$.

სკალარული ნამრავლის თვისებები:

1. $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{a})$ 2. $\left(\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})\right) = (\vec{a}\cdot\vec{b}) + (\vec{a}\cdot\vec{c})$

3. თუ $\vec{a} \parallel \vec{b}$, მაშინ $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

კერძოდ, $\vec{a}^2 = (\vec{a}\cdot\vec{a}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^0 = |\vec{a}|^2$ აქედან $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

4. თუ $\vec{a} \perp \vec{b}$, მაშინ $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^0 = 0$.

5. ორტების სკალარული ნამრავლი ტოლია:

$$(\vec{i}\cdot\vec{i}) = 1, \quad (\vec{j}\cdot\vec{j}) = 1, \quad (\vec{k}\cdot\vec{k}) = 1, \quad (\vec{i}\cdot\vec{j}) = 0, \quad (\vec{j}\cdot\vec{k}) = 0, \quad (\vec{i}\cdot\vec{k}) = 0.$$

6. თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები მოცემულია კოორდინატებით $\vec{a}(X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{b}(X_2, Y_2, Z_2)$, მაშინ

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 \,. \qquad (3.61)$$

ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი გამოითვლება ფორმულით

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \quad (3.62)$$

ორი ვექტორის მართობულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \quad (3.63)$$

ხოლო პარალელურობის პირობაა:

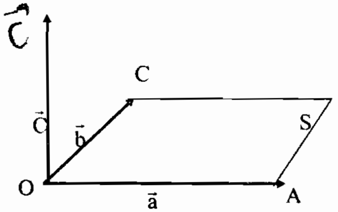
$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = m. \quad (3.64)$$

ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ $(\vec{a} \nparallel \vec{b})$ ვექტორის ვექტორული ნამრაელი ეწოდება ისეთ მესამე $\vec{c}$ ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, სადაც φ არის კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის.

2. $\vec{c}$ ვექტორი მართობულია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული სიბრტყის.

3. $\vec{c}$ ვექტორის მიმართულება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორვბის მიმართ ისეთია, როგორც კოორდინატთა OZ ღერძის მიმართულვბა OX და OY ღერძების მიმართ (ე.ი. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ეექტორები ერთმანეთთან ადგენენ მარჯვენა სისტემას).



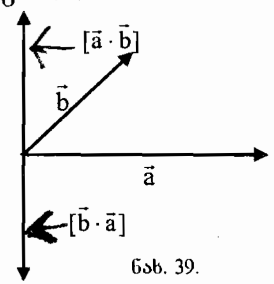
ნახ. 38

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ვექტორული ნამრაელი აღინიშნება $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$ ან $\vec{a}\,X\,\vec{b}$ სიმბოლოთი.

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები დაყვანილია საერთო სათავეზე, მაშინ მათი ვექტორული ნამრავლის მოდული ტოლია ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობის $|[\vec{a}\cdot\vec{b}]| = S_{OABC}$ (ნახ.38).

ვექტორული ნამრავლის თვისებები

1. $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$ ვექტორული ნამრავლი ნულის ტოლია, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები კოლინეარულია, ან ერთ-ერთი თანამამრავლი ვექტორი ნულოვანი ეექტორია.



ნახ. 39.

ე.ი. თუ $\vec{a} \parallel \vec{b}$, მაშინ $[\vec{a}\cdot\vec{b}]=0$, კერძოდ $[\vec{a}\cdot\vec{a}]=0$.

2. $\vec{a}$ ეექტორის $\vec{b}$ ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი წარმოადგენს $\vec{b}$ ვექტორის $\vec{a}$-ზე ეექტორული ნამრავლის მოპირდაპირე ვექტორს, ე.ი. $[\vec{a}\cdot\vec{b}] = -[\vec{b}\cdot\vec{a}]$ (ნახ. 39).

3. $[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}]=[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]$

4. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის OX, OY და OZ ღერძების მგეზავების ვექტორული ნამრავლებია:

$$[\vec{i}\cdot\vec{i}]=0,\quad [\vec{j}\cdot\vec{j}]=0,\quad [\vec{k}\cdot\vec{k}]=0,$$

$$[\vec{i}\cdot\vec{j}]=-[\vec{j}\cdot\vec{i}]=\vec{k},\quad [\vec{j}\cdot\vec{k}]=-[\vec{k}\cdot\vec{j}]=\vec{i},[\vec{k}\cdot\vec{i}]=-[\vec{i}\cdot\vec{k}]=\vec{j}$$

თუ $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$ და $\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$, მაშინ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი იქნება:

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}]=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\vec{i}+(Z_1X_2-X_1Z_2)\vec{j}+(X_1Y_2-Y_1X_2)\vec{k} \qquad (3.65)$$

ანუ დეტერმინანტის სახით

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

სამი $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორის შერეული (ვექტორულ-სკალარული) ნამრავლი ეწოდება შემდეგი სახის გამოსახულებას $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\cdot\vec{c}$.

თუ ვექტორები მოცემულია კოორდინატებით, მაშინ

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix} \qquad (3.66)$$

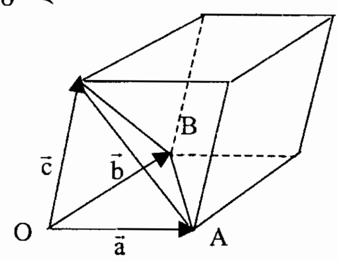
შერეული ნამრავლის თვისებები:

$$1.[\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot\vec{c}=-[\vec{a}\cdot\vec{c}]\cdot\vec{b}=-[\vec{c}\cdot\vec{b}]\cdot\vec{a}$$

2. თუ მოცემული სამი ვექტორიდან ორი მათგანი ერთმანეთის ტოლია ან პარალელური, მაშინ მათი შერეული ნამრავლი 0-ის ტოლია.

3. $[\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}]$, ამიტომ შერეულ ნამრავლს ასეც წერენ $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, ფრჩხილებისა და მოქმედების ნიშნების გარეშე.

4. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა ტოლია:



ნახ. 40

$$V=\pm\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \quad \text{(ნახ. 40).}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ეექტორებზე აგებული პირამიდის მოცულობა ტოლია:

$$V=\pm\frac{1}{6}\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$$

5. სამი $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ეექტორის კომპლანარობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

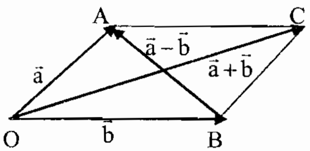
მაგალითი 1. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, რომ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

ამოხსნა. გადავიტანოთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები საერთო საწყის O წერტილში და ავაგოთ მათზე პარალელოგრამი. მაშინ როგორც ვიცით ამ პარალელოგრამის დიაგონალები შესაბამისად ტოლია:

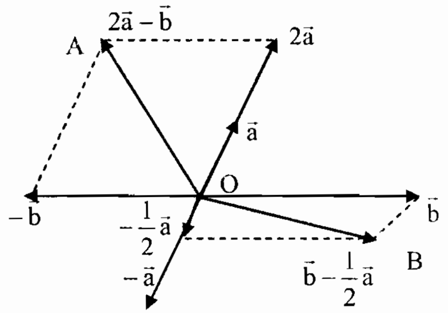
$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$, ხოლო $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ (იხ. ნახ.41).

პარალელოგრამის დიაგონალები ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს პარალელოგრამი მართკუთხედია. ე.ი. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$\vec{a}\perp\vec{b}$.



ნახ. 41



ნახ. 42

მაგალითი 2. მოცემული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით აეაგოთ ვექტორები $2\vec{a}-\vec{b}$ და $\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}$.

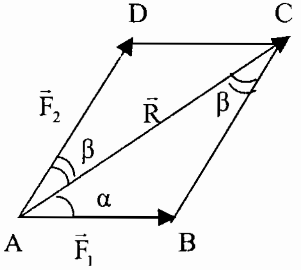
ამოხსნა. ნახაზიდან ჩანს, რომ $\overline{OA}=2\vec{a}-\vec{b}$, ხოლო $\overline{OB}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$ (ნახ.42).

მაგალითი 3. ვიპოვოთ მოცემული ორი $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალის ტოლქმედი $\vec{R}$ ვექტორი, თუ $|\vec{F}_1|=5$, $|\vec{F}_2|=7$, ხოლო მათ შორის კუთხე $\theta=60^0$. განვსაზღვროთ α და β კუთხეები, რომელთაც $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები ადგენენ ტოლქმედთან.

ამოხსნა. (3. 50) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 60^0} \text{ ანუ } \left|\vec{R}\right| = \sqrt{25 + 49 + 35} = \sqrt{109}.$$

α და β კუთხეების საპოვნელად განვიხილოთ სამკუთხედი ABC, ვისარგებლოთ სინუსების თეორემით ($\alpha + \beta = \theta$).



ნახ. 43

$$\frac{\left|\vec{F}_1\right|}{\sin\beta} = \frac{\left|\vec{F}_2\right|}{\sin\alpha} = \frac{\left|\vec{R}\right|}{\sin(180-\theta)}$$

მაგრამ $\sin(180^0 - \theta) = \sin\theta$ და, მაშასადამე,

$$\sin\alpha = \frac{\left|\vec{F}_2\right| \cdot \sin\theta}{\left|\vec{R}\right|} = \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{109}} \approx 0{,}581;\ \alpha \approx 35^0 30'$$

$$\sin\beta = \frac{\left|\vec{F}_1\right| \cdot \sin\alpha}{\left|F_2\right|} \approx 0{,}415;\ \beta \approx 24^0 30'.$$

მაგალითი 4. ვთქვათ, $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ – ერთეულოვანი ვექტორებია, რომლებიც მოცემულ ℓ ღერძთან ადგენენ შესაბამისად $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ და π ტოლ კუთხეებს. ვიპოვოთ $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ ვექტორის გეგმილი ℓ ღერძზე.

ამოხსნა. $\text{გეგ}_\ell(3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) = 3\text{გეგ}_\ell\vec{a} + 2\text{გეგ}_\ell\vec{b} + \text{გეგ}_\ell\vec{c}$. მეორე მხრივ,

$$\text{გეგ}_\ell\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cos\frac{\pi}{3} = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{გეგ}_\ell\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cos\frac{2\pi}{3} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{გეგ}_\ell\vec{c} = \left|\vec{c}\right| \cos\pi = -1.$$

ამიტომ: $\text{გეგ}_\ell(3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2}.$

მაგალითი 5. განვსაზღვროთ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ვექტორის შუა $\vec{c}$ წერტილის კოორდინატები, თუ ცნობილია მისი ბოლო A და B წერტილების რადიუს-ვექტორები.

ამოხსნა. ვთქვათ, A და B წერტილების რადიუს-ვექტორებია $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1$ და $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_2$. AB მონაკვეთის შუა წერტილი მოთავსებულია $\vec{r}_1$ და $\vec{r}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში, გვექნება:

$$\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}.$$

აღვნიშნოთ A, B წერტილების კორდინატები შესაბამისად (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), ხოლო c წერტილის – (x, y, z). მაშინ ვექტორული ტოლობა $\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$ შეიცვლება ისეთი სამი სკალარული ტოლობით, რომლებიც განსაზღვრავენ c წერტილის კოორდინატებს:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

მაგალითი 6. $\vec{a}$ ვექტორი მოცემულია მისი ბოლო წერტილების კოორდინატებით A(2;1;–4) და B(1; 3; 2). ვიპოვოთ $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე და მისი მიმართულების კოსინუსები.

ამოხსნა. როგორც ვიცით, $x=x_2-x_1$, $y=y_2-y_1$, $z=z_2-z_1$.

ჩვენს შემთხვევაში $x=1-2=-1$, $y=3-1=2$, $z=2+4=6$, $\vec{a}\,(-1;2;6)$, ხოლო $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+6^2}=\sqrt{41}$. მიმართულების კოსინუსები იქნება:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}=-\frac{1}{\sqrt{41}};\ \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}=\frac{2}{\sqrt{41}};\ \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}=\frac{6}{\sqrt{41}};$$

მაგალითი 7. $\vec{a}$ ვექტორის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი მახვილი კუთხეებია α, β და γ. მასთან $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$. ვიპოვოთ ამ ვექტორის კოორდინატები, თუ $|\vec{a}|=3$.

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ γ კუთხე (3.57) ფორმულით. $\cos^2 45^0+\cos^2 60^0+\cos^2\gamma=1$.

$$\cos^2\gamma=1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

პირობის თანახმად γ მახვილი კუთხეა, ამიტომ $\cos\gamma=\frac{1}{2}$ და $\gamma=60^0$,

მაშასადამე, (3. 58)-ის თანახმად გვექნება

$$\vec{e}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}=\frac{1}{\sqrt{2}}i+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}.$$

რადგან $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, ამიტომ $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{e}=3\vec{e}=\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{k}$, ანუ

$$\vec{a}\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right).$$

მაგალითი 8. მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ და $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$. ვიპოვოთ ამ ვექტორების ჯამი და სხვაობა.

ამოხსნა.

$\vec{a} + \vec{b} = (2-3)\vec{i} + (3+2)\vec{j} + (-4+5)\vec{k}$ ანუ $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$.

ხოლო $\vec{a} - \vec{b} = (2+3)\vec{i} + (3-2)\vec{j} + (-4-5)\vec{k}$, $\vec{a} - \vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}$.

მაგალითი 9. მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{a}(7;2;-1)$ და $\vec{b}(1;2;-3)$. ვიპოვოთ ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი და კუთხე მათ შორის:

ამოხსნა. როგორც ვიცით,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

ე.ი. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = 14$, მეორე მხრივ,

$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, აქედან

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{14}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} =$$

$$= \frac{14}{\sqrt{49+4+1} \cdot \sqrt{1+4+9}} = \sqrt{\frac{7}{27}}.$$

მაგალითი 10. α და β რიცხვების როგორი მნიშვნელობებისათვის იქნება $\vec{a} = 3\vec{i} + \alpha\vec{j} + 2\vec{k}$ და $\vec{b} = 2\vec{i} = 8\vec{j} + \beta\vec{k}$ ვექტორები კოლინეარული?

ამოხსნა. (3.64) ფორმულის თანახმად

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = m$; ჩვენს შემთხვევაში $\frac{2}{3} = \frac{-8}{\alpha} = \frac{\beta}{2}$;

$\alpha = -\frac{8 \cdot 3}{2} = -12$; $\beta = -\frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$.

მაგალითი 11. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(1;-1;2)$ და $\vec{b}(2;-2;1)$. ვიპოვოთ $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ ვექტორის გეგმილი $\vec{b}$ ვექტორზე.

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ $\vec{c}$ ვექტორის კოორდინატები

$\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b} = 3(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) - (2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} - 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

როგორც ვიცით, $(\vec{c} \cdot \vec{b}) = |\vec{c}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = |\vec{b}| \cdot \text{გეგ}_{\vec{b}}\vec{c}$, აქედან

$$\text{გეგ}_{\vec{b}}\vec{c} = \frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{c} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}}[2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 5] = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3 \cdot$$

მაგალითი 12. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე $\frac{\pi}{3}$-ის ტოლია. ვიპოვოთ $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$.

ამოხსნა. $\vec{c}$ ვექტორის სიგრძე გამოითელება ფორმულით $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}}$.

ამიტომ ჯერ ვიპოვოთ $\vec{c}^{\,2}$.

$$\vec{c}^{\,2} = (3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^{\,2} + 12(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4\vec{b}^{\,2}.$$

ხოლო $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 6$.

ამიტომ $\vec{c}^{\,2} = 9 \cdot 9 + 12 \cdot 6 + 4 \cdot 16 = 217$. $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{217} \approx 14{,}7$.

მაგალითი 13. ვიპოვოთ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომელიც აგებულია $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ და $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ვექტორებზე.

ამოხსნა. ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი გამოითვლება ფორმულით

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 17\vec{j} + 9\vec{k},$$

ხოლო მოდული

$$\left|[\vec{a} \cdot \vec{b}]\right| = \sqrt{1^2 + 17^2 + 9^2} = \sqrt{371} \approx 19{,}26.$$

ამრიგად, $S \approx 19{,}26$ კვ. ერთ.

მაგალითი 14. ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი წვეროს კოორდინატებია A(1; 2; 0), B(3; 0; –3) და C(5; 2; 6).

ამოხსნა. ΔABC-ს ფართობი წარმოადგენს იმ პარალელოგრამის ფართობის ნახევარს, რომელიც აგებულია $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებზე. ე.ი. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right]\right|$.

ჯერ ვიპოვოთ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორები. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 6\vec{k}$.

მათი ვექტორული ნამრაელი იქნება

$$\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} = 4(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}).$$

ამიტომ $\left|\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right]\right| = 4 \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = 28$.

და, მაშასადამე, $S\Delta_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 28 = 14$ კვ. ერთ.

მაგალითი 15. მოცემულია პირამიდის წვეროს კოორდინატები A(5;1;–4), B(1;2;–1), C(3;3;–4) და D(2;2;2). ვიპოვოთ მისი მოცულობა.

ამოხსნა. განვიხილოთ ვექტორები $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{AD}$. ამ ვექტორებზე აგებული პირამიდის მოცულობა

$$V_{პირ} = \frac{1}{6} V_{პარალელ.} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|.$$

$\overrightarrow{AB}(-4;\ 1;\ 3)$, $\overrightarrow{AC}(-2;\ 2;\ 0)$, ხოლო $\overrightarrow{AD}(-3;\ 1;\ 6)$.

მაშინ $V_{პირ} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\cdot(-24)\cdot$ რადგან დეტერმინანტი უარყოფითია, ამიტომ წინ აიღება ნიშანი მინუსი

$$V_{პირ} = -\frac{1}{6}\cdot(-24) = 4 \text{ კუბ. ერთ.}$$

მაგალითი 16. ვაჩვენოთ, რომ ვექტორები $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ და $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ კომპლანარულები არიან.

ამოხსნა: სამი ვექტორის კომპლანარობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათი შერეული ნამრავლი ნულის ტოლი იყოს.

გამოვთვალოთ მოცემული ვექტორების შერეული ნამრავლი

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 9 - 8 - 12 - 24 + 7 = 0\cdot$$

ე.ი. ვექტორები კომპლანარულია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

3.186. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ეექტორები, თუ 1) $|\vec{a}+\vec{b}| > |\vec{a}-\vec{b}|$, 2) $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}-\vec{b}|$.

3.187. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, რომ $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორი მიმართული იყოს $\vec{a}$ და $\vec{b}$-ს შორის კუთხის ბისექტრისაზე?

(მითითება. $\vec{a}$ და $\vec{b}$-ზე აგებული პარალელოგრამი უნდა იყოს რომბი).

3.188. მოცემული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით ააგეთ შემდეგი ვექტორები: $\vec{a} - 2\vec{b}$; $\frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{a}$; $\frac{1}{3}\vec{a} - 3\vec{b}$.

3.189. OACB პარალელოგრამში $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ და $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. ვიპოვოთ $\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ და $\overrightarrow{MC}$ ვექტორები, სადაც M პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია.

3.190. ვიპოვოთ მოცემული $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ და $\vec{d}$ ვექტორების ჯამის გეგმილი მოცემულ ℓ ღერძზე, თუ $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}|=6$, $|\vec{c}|=8$ და $|\vec{d}|=12$, ხოლო ამ ვექტორების მიერ ℓ ღერძთან შედგენილი კუთხეები შესაბამისად ტოლია 0, $\frac{2\pi}{3}$, π და $\frac{\pi}{3}$.

3.191. ვიპოვოთ მოცემული ორი $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალის ტოლქმედი $\vec{R}$ ვექტორი და α და β კუთხეები, რომელთაც $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები ადგენენ ტოლქმედთან, თუ $|\vec{F}_1|=15$; $|\vec{F}_2|=10$, ხოლო კუთხე $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ შორის $\theta=45^0$.

3.192. $\vec{a}$ ვექტორი მოცემულია მისი ბოლო წერტილების კოორდინატებით $A(2;4;-3)$ და $B(-4;4;-5)$. ვიპოვოთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის შუა წერტილის კოორდინატები.

3.193. ვიპოვოთ ჯამი და სხვაობა ვექტორებისა $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ და $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$.

3.194. ვიპოვოთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები და მიმართულების კოსინუსები, თუ $A(1;0;-1)$ და $B(3;1;-3)$.

3.195. ვიპოვოთ $\vec{a} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ვექტორის მგეზავი და მიმართულების კოსინუსები.

3.196. მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{a} = (2;1;-2)$ და $\vec{b} = (1;-4;2)$. ვიპოვოთ ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი და მათ შორის კუთხე.

3.197. განვსაზღვროთ ABC სამკუთხედის კუთხეები, თუ მისი წვეროების კოორდინატებია $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ და $C(0;0;5)$.

3.198. მოცემულია ვექტორვბი $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ და $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. განვსაზღვროთ გეგ$_{\vec{b}}\vec{a}$ და გეგ$_{\vec{a}}\vec{b}$.

3.199. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}\,(4;-1;-2)$ და $\vec{b}\,(2;1;2)$. განვსაზღვროთ: 1) ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, 2) მათ შორის კუთხე; 3) $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილი $\vec{b}$-ზე; 4) $\vec{b}$ ვექტორის გეგმილი $\vec{a}$ ვექტორზე.

3.200. ვიპოვოთ კუთხე იმ პარალელოგრამის დიაგონალებს შორის, რომელიც აგებულია ვექტორებზე $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ და $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$.

3.201. ვიპოვოთ იმ პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძე, რომელიც აგებულია ვექტორებზე $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ და $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, სადაც $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ერთეულოვანი ვექტორებია, რომელთა შორის კუთხე 60^0-ის ტოლია.

(მითითება. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a} + \vec{b}|^2}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a} - \vec{b}|^2}$).

3.202. ვიპოვოთ $\vec{a}(-3;\ -7;\ -7)$ და $\vec{b}(-6;\ 2;\ 3)$. ვექტორების ვექტორული ნამრავლი, ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი და ვექტორული ნამრავლის მიმართულების კოსინუსები.

3.203. მოცემულია სამკუთხედი წვეროებით $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ და $C(3;2;1)$. ვიპოვოთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

3.204. ვიპოვოთ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომელიც აგებულია ვექტორებზე $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ და $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, სადაც $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ერთეულოვანი ვექტორებია, რომელთა შორის კუთხე $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

3.205. დავადგინოთ კომპლანარულია თუ არა ვექტორები:

1) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

2) $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}$; $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{c}=5\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$.

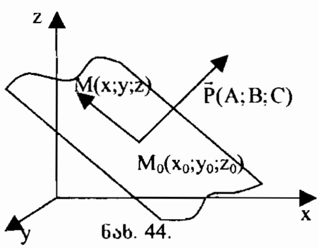
3.206. ვაჩვენოთ, რომ $A(1;0;7)$, $B(-1;-1;2)$, $C(2;-2;2)$ და $D(0;1;9)$ წერტილები ერთ სიბრტყეზე მდებარეობენ (მითითება. განვიხილოთ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{AD}$ ვექტორები).

3.207. ვიპოვოთ იმ პარალელეპიპედის მოცულობა, რომელიც აგებულია ვექტორებზე: $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ და $\vec{c}=\vec{i}-\vec{k}$.

3.208. მოცემულია პირამიდის წვეროები $O(-5;-4;8)$; $A(2;3;1)$; $B(4;1;-2)$; $C(6;3;7)$. ვიპოვოთ h სიმაღლის სიგრძე, რომელიც O წვეროდან დაშვებულია ABC წახნაგზე.

(მითითება. ვიპოვოთ პირამიდის მოცულობა და ABC წახნაგის S ფართობი, h გამოვთვალოთ ფორმულიდან $V=\dfrac{1}{3}Sh$).

§3.5 სიბრტყე. ძირითადი ამოცანები სიბრტყეზე



ნახ. 44.

სივრცეში ყოველი ზედაპირი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოიცემა განტოლებით $F(x,y,z)=0$, ხოლო ყოველი პირველი ხარისხის განტოლება

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (3.67)$$

სადაც A,B,C კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, გეომეტრიულად წარმოადგენს სიბრტყეს, (3.67) სახის განტოლებას **სიბრტყის ზოგადი სახის** განტოლება ეწოდება.

$\vec{P}(A,B,C)$ ვექტორი პერპენდიკულარულია (3.67) სიბრტყის. $\vec{P}$ ვექტორს **სიბრტყის ნორმალური ვექტორი** ეწოდება (იხ. ნახ.44).

1. თუ სიბრტყე გადის მოცემულ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილში, მაშინ სიბრტყის ნებისმიერი $M(z;y;z)$ წერტილისათვის $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი მართობია სიბრტყის ნორმალური $\vec{P}(A;B;C)$ ვექტორისა, ამიტომ სიბრტყის განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.68)$$

2. თუ სიბრტყის ზოგად განტოლებაში $D=0$, მაშინ სიბრტყე გადის კოორდინატთა სათავეზე და

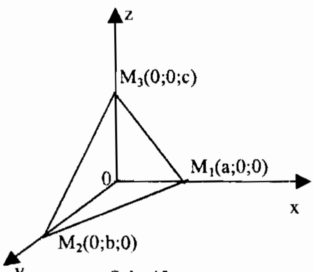
$$Ax+By+Cz=0.$$

თუ (3. 67)-ში, $C=0$, მაშინ სიბრტყე $Ax+By+D=0$ პარალელურია oz ღერძის.

თუ $B=0$, მაშინ სიბრტყე $Ax+Cz+D=0$ პარალელურია oy ღერძის, ხოლო

თუ (3. 67)-ში $A=0$, მაშინ $By+Cz+D=0$ სიბრტყე პარალელურია ox ღერძის.

თუ (3. 67) განტოლებაში $C=D=0$, მაშინ $Ax+By=0$ სიბრტყე გადის oz ღერძზე.



ნახ. 45

თუ $B=D=0$, $Ax+Cz=0$ სიბრტყე გადის Oy ღერძზე, ხოლო, თუ $A=D=0$, მაშინ $By+Cz=0$ სიბრტყე გადის Ox ღერძზე.

თუ $A=B=0$, მაშინ სიბრტყე პარალელურია xoy სიბრტყის.

თუ $B=C=O$, პარალელურია yoz სიბრტყის, ხოლო, თუ $A=C=O$, სიბრტყე პარალელურია xoz სიბრტყის.

თვით საკოორდინატო სიბრტყეები xoy, yoz, xoz შესაბამისად გამოისახებიან განტოლებებით: $z=0$, $x=0$, $y=0$.

3. თუ სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლებაში ყველა კოეფიციენტი A,B,C,D განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ეს განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ სიბრტყის განტოლებაზე ღერძთა მონაკვეთში:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (3.69)$$

სადაც $a=-\frac{D}{A}; b=-\frac{D}{B}; c=-\frac{D}{C}$, იმ მონაკვეთების სიდიდეებია, რომელთაც სიბრტყე ჩამოკვეთს საკოორდინატო ღერძებიდან (ნახ.45).

4. სიბრტყის ნორმალური სახის განტოლებაა

$$X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma-P=0, \qquad (3.70)$$

სადაც α,β,γ წარმოადგენენ კუთხეებს შესაბამისად ox, oy და oz საკოორდინატო ღერძებსა და სიბრტყისადმი კოორდინატთა სათავიდან გავლებულ პერპენდიკულარს შორის, ხოლო P ამ პერპენდიკულარის სიგრძეა.

სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლების ნორმალური სახის განტოლებაზე დაყვანისათვის, განტოლების ორივე მხარე უნდა გავამრავლოთ მანორმირებელ მამრავლზე

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

სადაც ფესვის წინ ნიშანი აირჩევა თავისუფალი წევრის (D-ს) ნიშნის საპირისპიროდ.

5. მანძილი მოცემული $N(x_1;y_1;z_1)$ წერტილიდან $Ax+By+Cz+D=0$ სიბრტყემდე გამოითვლება ფორმულით:

$$D=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \tag{3. 71}$$

6. სიბრტყის განტოლებას, რომელიც გადის მოცემულ სამ წერტილზე $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$, აქვს სახე

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \tag{3. 72}$$

7. თუ მოცემულია ორი სიბრტყე $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, მაშინ კუთხე ამ **ორ სიბრტყეს შორის ტოლია** მათ ნორმალურ $\vec{P}(A_1,B_1,C_1)$ და $\vec{Q}(A_2,B_2,C_2)$ ვექტორებს შორის კუთხისა და გამოითვლება ფორმულით (ნახ. 46):

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{P}\cdot\vec{Q})}{|\vec{P}|\cdot|\vec{Q}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\cdot\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}C_2^{\,2}}}, \tag{3.73}$$

სიბრტყეები პარალელურნი არიან,

$$\text{თუ}\quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}, \tag{3.74}$$

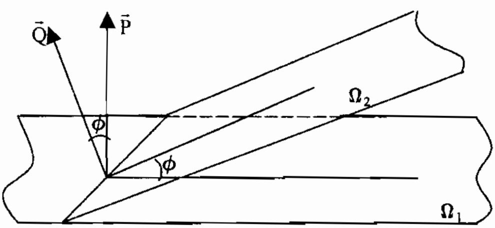
ხოლო სიბრტყეები პერპენდიკულარულები არიან, თუ

$$A_1A_1+B_1B_1+\,+C_1C_2=0. \tag{3.75}$$

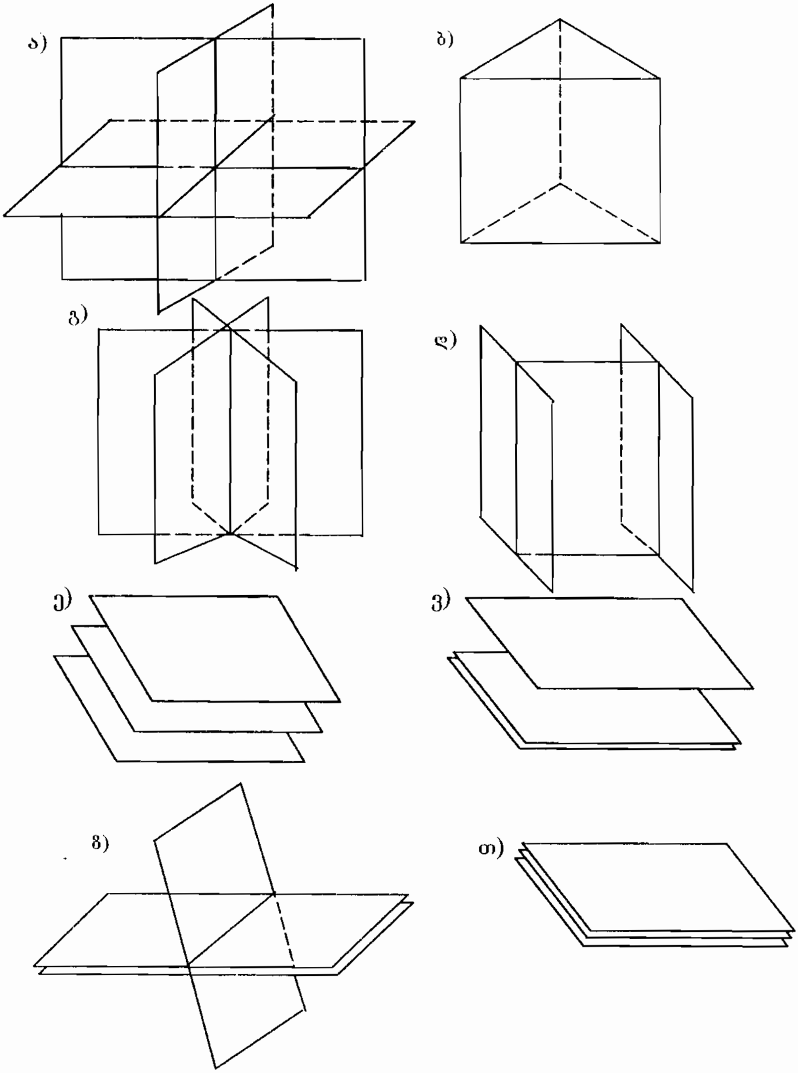
8. თუ მოცვმულია სამი სიბრტყე $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$; $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$;

$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, \tag{3.76}$$

მაშინ მათი გადაკვეთის საერთო წერტილის საპოვნელად უნდა ამოვხსნათ (3.76) განტოლებათა სისტემა.



ნახ. 46



ნახ. 47

იმ შემთხვევაში, თუ $\vec{P}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\vec{P}_2(A_2, B_2, C_2)$ და $\vec{P}_3(A_3, B_3, C_3)$, ვექტორები კომპლანარული არ არიან, მაშინ მოცემულ სამ სიბრტყეს აქვს ერთი საერთო გადაკვეთის წერტილი. მართლაც ამ შემთხვევაში

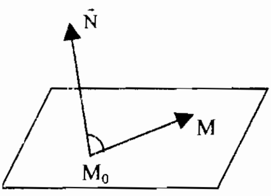
$$\vec{P}_1\vec{P}_2\vec{P}_3=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0\cdot$$

თუ $\Delta=0$, ხოლო ერთ-ერთი მინორი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ მოცემულ სამ სიბრტყეს ან არა აქვთ საერთო წერტილი ან გადაიკვეთებიან წერტილთა უსასრულო სიმრავლეზე. გეომეტრიულად შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს სულ 8 სხვადასხვა ტიპურ შემთხვევას (ნახ.47).

9. იმ სიბრტყის განტოლებას, რომელიც გადის მოცემულ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილზე და მოცემული $N(A;B;C)$ ვექტორის მართობულია, აქვს სახე:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (3.\ 77)$$

სადაც $M(x,y,z)$ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია.

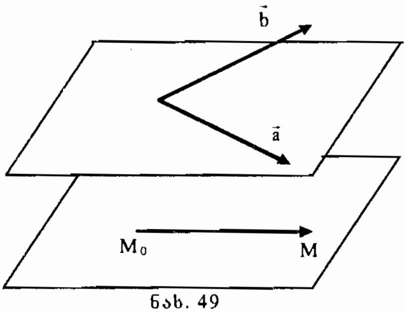


ნახ. 48.

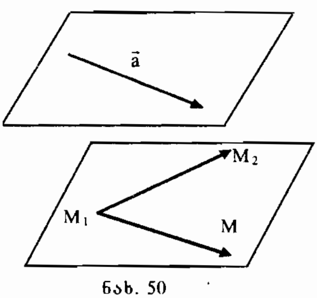
(3.77) განტოლება ამავდროულად წარმოადგენს M_0 წერტილზე გამავალ ყველა სიბრტყეთა სიმრაელეს, რომელსაც სიბრტყეთა **კონული** უწოდებენ.

10. იმ სიბრტყის განტოლებას, რომელიც გადის მოცემულ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილზე მოცემული ორი არაკოლინეარული $\vec{a}(X_1,Y_1,Z_1)$, და $\vec{b}(X_2,Y_2,Z_2)$ ვექტორის პარალელურად, აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.\ 78)$$



ნახ. 49



ნახ. 50

სადაც $M(x,y,z)$ სიბრტყის ნაბისმიერი წერტილია (ნახ.49).

11. იმ სიბრტყის განტოლებას, რომელიც გადის მოცემულ ორ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილებზე და პარალელურია მოცემული $\vec{a}(X,Y,Z)$ ვექტორისა ($\overrightarrow{M_1M_2}$ და $\vec{a}$ არაკოლინეალური ვექტორებია), აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \tag{3.79}$$

სადაც $M(x,y,z)$ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია (იხ. ნახ.50).

12. სიბრტყის განტოლებას, რომელიც გადის სამ მოცემულ წერტილზე $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ და $C(x_3;y_3;z_3)$, აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \tag{3. 80}$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

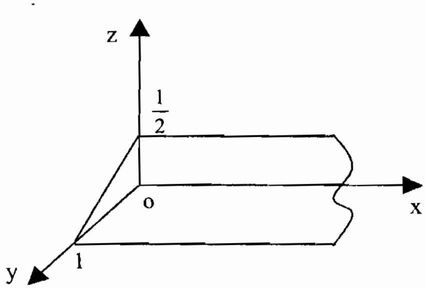
მაგალითი 1. ავაგოთ სიბრტყე

$$y+2z-1=0.$$

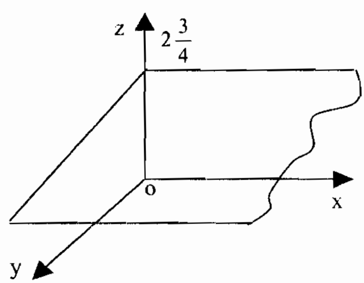
ამოხსნა. ამ განტოლებაში A=0, ამიტომ საძიებელი სიბრტყე პარალელურია ox ღერძის. სიბრტყის ამ განტოლებას აკმაყოფილებს იმ წრფის ყველა წერტილთა სიმრავლე, რომელიც წარმოადგენს მოცემული სიბრტყისა და yoz სიბრტყის თანაკვეთას. ამ წრფეს უწოდებენ მოცემული სიბრტყის კვალს yoz სიბრტყეზე (სიბრტყის განტოლება იმავდროულად თანაკვეთის წრფის, ანუ კვალის განტოლებაა yoz სიბრტყეზე). ჯერ ავაგოთ წრფე $y+2z-1=0$ yoz სიბრტყეზე და შემდეგ აიგება სიბრტყეც (ნახ. 51).

მაგალითი 2. ავაგოთ სიბრტყე

$$4z-11=0.$$



ნახ. 51



ნახ. 52

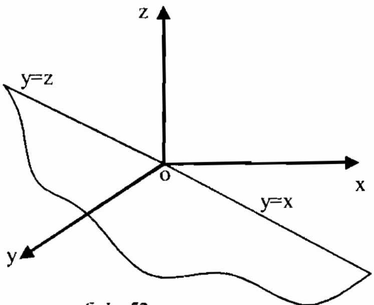
ამოხსნა. ამ განტოლებაში A=B=0, ამიტომ სიბრტყე პარალელურია როგორც ox, ასევე oy ღერძის და, მაშასადამე, xoy სიბრტყის. მოცემული

სიბრტყის განტოლება იმავდროულად წარმოადგენს სიბრტყის კვალის განტოლებას yoz სიბრტყეზე (ან xoz სიბრტყეზე), $z=2\frac{3}{4}$ (ნახ. 52).

მაგალითი 3. ავაგოთ სიბრტყე $x-y+z=0$.

ამოხსნა. ამ განტოლებაში $D=0$, სიბრტყე გადის კოორდინატთა სათავეზე. სიბრტყის ასაგებად საკმარისია ვიპოვოთ ამ სიბრტყის კვალი რომელიმე ორ საკოორდინატო სიბრტყეზე, რადგან სიბრტყე სავსებით განისაზღვრება მასზე მდებარე ორი სხვადასხვა წრფით. ჯერ დავუშვათ $z=0$, მივიღებთ $y=x$. ეს წრფე არის კვალი xoy სიბრტყეზე.

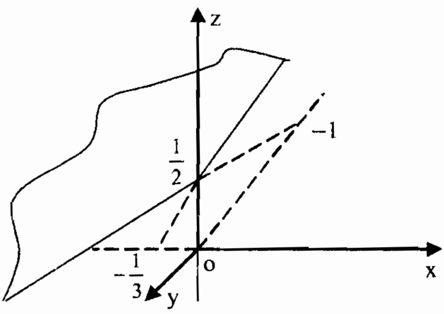
თუ დავუშვებთ $x=0$, მაშინ $y=z$, ეს წრფე კი არის მოცემული სიბრტყის კვალი yoz სიბრტყეზე. ავაგებთ რა ამ წრფეებს, აიგება სიბრტყეც (ნახ. 53).



ნახ. 53

მაგალითი 4. ავაგოთ სიბრტყე $3x+y-2z+1=0$.

ამოხსნა: სიბრტყის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით, იგი არ არის პარალელური არც ერთი საკოორდინატო ღერძის და არ გადის კოორდინატთა სათავეზე. ავაგოთ ეს სიბრტყე. ამისათვის ვიპოვოთ მისი კვალი რომელიმე ორ საკოორდინატო სიბრტყეზე. თუ დავუშვებთ $y=0$, მივიღებთ

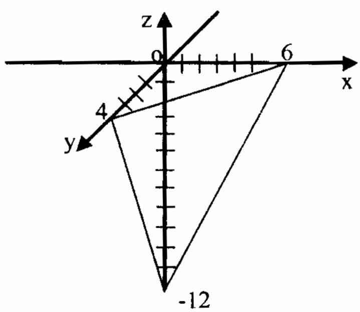


ნახ. 54

კვალს xoz სიბრტყეზე $3x-2z+1=0$, ხოლო თუ დავუშვებთ $x=0$, მივიღებთ კვალს yoz სიბრტყეზე $y-2z+1=0$. ავაგებთ რა ამ წრფეებს, აიგება სიბრტყეც (ნახ. 54).

მაგალითი 5. ავაგოთ სიბრტყე
$$2x+3y-z-12=0.$$

ამოხსნა. წინა მაგალითის მსგავსად, სიბრტყის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით, სადაც ყველა კოეფიციენტი A,B,C,D განსხვავებულია ნულისაგან. იგი არ არის პარალელური არც ერთი საკოორდინატო ღერძის (ნახ. 55).



ნახ. 55

$$2x+3y-z=12.$$

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-12}=1\cdot \quad (a=6,\ b=4,\ c=-12).$$

მაგალითი 6. დავწეროთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის oz ღერძზე და წერტილზე M(1; –2; 1).

ამოხსნა. თუ სიბრტყე გადის oz ღერძზე, მაშინ სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლებაში C=D=0. ე.ი. საძიებელი სიბრტყე მოიცემა განტოლებით

$$Ax+By=0.$$

მოცემულობის თანახმად M წერტილი მდებარეობს საძიებელ სიბრტყეზე, ამიტომ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებას, გვექნება: $A\cdot 1+B\cdot(-2)=0$, აქედან A=2B. A-ს ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ სიბრტყის განტოლებაში, მივიღებთ 2Bx+By=0, თუ შევკვეცავთ B-ზე, მიეიღებთ საძიებელ განტოლებას – 2x+y=0.

მაგალითი 7. შევადგინოთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M(2;3;–4) წერტილზე და პარალელურია yoz სიბრტყის.

ამოხსნა. yoz სიბრტყის პარალელური სიბრტყის განტოლებას აქვს სახე:

$$Ax+D=0.$$

ჩავსვათ ამ განტოლებაში M-ის კოორდინატები, მივიღებთ:

$$A\cdot 2+D=0, \qquad D=-2A,$$

შევიტანოთ განტოლებაში – Ax–2A=0, A-ზე შეკვეცით მიეიღებთ საძიებელ განტოლებას

$$x-2=0.$$

მაგალითი 8. შევადგინოთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M(2;–1;2) წერტილზე და პერპენდიკულარულია $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის.

ამოხსნა. პირობის თანახმად რადიუს-ვექტორი $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ პერპენდიკულარულია სიბრტყის, ამ ვექტორის კოორდინატები ტოლია M(2;–1;2) წერტილის კოორდინატებისა, ამასთან, M წერტილი მდებარეობს ამ სიბრტყეზე, ამიტომ (3.68) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$2(x-2)-1(y+1)+2(z-2)=0 \qquad \text{ანუ } 2x-y+2z-9=0.$$

მაგალითი 9. ვიპოვოთ იმ პერპენდიკულარის სიგრძე, რომელიც გაელებულია კოორდინატთა სათავიდან 10x+15y–6z–380=0 სიბრტყისადმი. გამოვთვალოთ კუთხეები, რომელთაც ეს პერპენდიკულარი ქმნის საკოორდინაციო ღერძებთან.

ამოხსნა. პირველ რიგში დავიყვანოთ სიბრტყის განტოლება ნორმალურ სახეზე. მანორმირებელი მამრავლი ტოლი იქნება

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\sqrt{100+225+36}}=\frac{1}{\sqrt{361}}=\frac{1}{19}.$$

გაეამრავლოთ განტოლების ორივე მხარე $\frac{1}{19}$-ზე, მივიღებთ სიბრტყის განტოლებას ნორმალური სახით $\frac{10}{19}x+\frac{15}{19}y-\frac{6}{19}z-20=0$.

საძიებელი პერპენდიკულარის სიგრძე P=20, ხოლო კუთხეები იქნება

$$\cos\alpha=\frac{10}{19},\ \cos\beta=\frac{15}{19},\ \cos\gamma=-\frac{6}{19}.$$

თუ შევამოწმებთ: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

მაგალითი 10. ვიპოვოთ მანძილი $A(2;3;-1)$ წერტილიდან $7x-6y-6z-42=0$ სიბრტყემდე.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (3. 71) ფორმულით, მივიღებთ

$$d=\left|\frac{7\cdot 2+(-6)\cdot 3+(-6)\cdot(-1)+42}{\sqrt{7^2+(-6)^2+(-6)^2}}\right|=\left|\frac{14-18+6+42}{11}\right|=4.\ d=4.$$

მაგალითი 11. ვიპოვოთ მანძილი ორ პარალელურ $5x+3y-4z+15=0$ და $15x+9y-12z-5=0$ სიბრტყეს შორის.

ამოხსნა. ავიღოთ ერთ-ერთი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი. მაგალითად, პირველ სიბრტყეზე ავიღოთ წერტილი, რომლისთვისაც $y=0$, $z=0$ და განვსაზღვროთ x აბსცისა

$$5x-3\cdot 0-4\cdot 0+15=0;\quad x=-3.$$

მაშასადამე, წერტილი $M(-3;\ 0;\ 0)$ პირველი სიბრტყის ერთ-ერთი წერტილია. ვიპოვოთ მანძილი ამ წერტილიდან მეორე სიბრტყემდე. წინა მაგალითის მსგავსად მივიღებთ $d=\frac{5}{3}\sqrt{2}$.

ეს იქნება მანძილი მოცემულ ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის.

მაგალითი 12. ox ღერძზე ვიპოვოთ წერტილი, რომელიც $2x+y-2z+4=0$ სიბრტყიდან დაშორებულია $d=\frac{1}{3}$ მანძილით.

ამოხსნა. რადგან საძიებელი წერტილი ძევს ox ღერძზე, ამიტომ მისი კოორდინატებია $(x;\ 0;\ 0)$. მოცემული სიბრტყე დავიყვანოთ ნორმალურ სახეზე $M=-\frac{1}{3}$ მანორმირებელი მამრავლით

$$-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{4}{3}=0.$$

$(x;\ 0;\ 0)$ წერტილიდან ამ სიბრტყემდე გადახრა δ ტოლია:

$$\delta=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 0-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}.$$

პირობის თანახმად $d=|\delta|=\frac{1}{3}$, ე.ი. $\delta=\pm\frac{1}{3}$, ამიტომ

$$-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=\pm\frac{1}{3},\ \text{აქედან}\ x_1=-\frac{5}{2};\ x_2=-\frac{3}{2}.$$

ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს ორი წერტილი

$$M_1(-\frac{5}{2};0;0)\ \text{და}\ M_2(-\frac{3}{2};0;0).$$

მაგალითი 13. ვიპოვოთ მახვილი კუთხე ორ მოცემულ $5x-3y+4z-4=0$ და $3x-4y-2z+5=0$ სიბრტყეს შორის.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (3.73) ფორმულით, მივიღებთ:

$$\cos\varphi = \left|\frac{15+12-8}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}}\right| = \frac{19}{5\sqrt{58}}.$$

$\cos\varphi \approx 0,4990$ აქედან $\varphi \approx 60^0 04'$.

მაგალითი 14. ვიპოვოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(2;-3;-7)$ წერტილზე და პარალელურია $2x-6y-3z+5=0$ სიბრტყის.

ამოხსნა. $\vec{P}(2;-6;-3)$ მოცემული სიბრტყის ნორმალური ვექტორია, ამიტომ იგი პერპენდიკულარული იქნება მოცემული სიბრტყის პარალელური ნებისმიერი სიბრტყისა. მაშასადამე, საძიებელი სიბრტყე გადის $M_0(2;-3;-7)$ წერტილზე და მართობულია $\vec{P}(2;-6;-3)$ ვექტორის, ამიტომ (3.77) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$2\cdot(x-2)-6(y+3)-(z-7)=0, \text{ ანუ } 2x-6y-3z-43=0.$$

მაგალითი 15. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(2;-3;5)$ წერტილზე მოცემული ორი $\vec{a}(2;1;-2)$ და $\vec{b}(1;1;1)$ ვექტორის პარალელურად.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (3.78) ფორმულით, მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

გამოვთვლით რა დეტერმინანტს, მივიღებთ საძიებელი სიბრტყის განტოლებას $3x-4y+z-23=0$.

მაგალითი 16. შევადგინოთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_1(2;3;-1)$ და $M_2(1;5;3)$ წერტილებზე და მართობულია $3x-y+3z+15=0$ სიბრტყის.

ამოხსნა. მოცემული სიბრტყის ნორმალური ვექტორი $\vec{P}(3;-1;3)$, ცხადია, პარალელური იქნება საძიებელი სიბრტყის. ამასთან, ვექტორები $\overline{M_1M_2}$ და $\vec{P}(3;-1;3)$ არაკოლინეალური ვექტორებია, რადგან მათი კოორდინატები პროპორციული არ არიან, ამიტომ ვისარგებლებთ რა (3.79) ფორმულით, მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{აქედან } 2x+3y-z-14=0.$$

მაგალითი 17. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის მოცემულ სამ წერტილზე $A(1;2;3)$, $B(4;-1;-2)$ და $C(4;0;3)$.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (3.80) ფორმულით, მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$ აქედან 10x+15y–3z–31=0.

მაგალითი 18. დავადგინოთ, რომ x–y–z–10=0, 4x+11z+43=0 და 7x–5y–31=0 სიბრტყეებს აქვთ ერთადერთი საერთო წერტილი და ვიპოვოთ იგი.

ამოხსნა. მოცემულ სიბრტყეთა ნორმალური ვექტორებია $\vec{P}_1(1;-1;-1)$, $\vec{P}_2(4;0;11)$ და $\vec{P}_3(7;-5;0)$. გამოვთვალოთ მათი შერეული ნამრავლი

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

რადგან $\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_3 \neq 0$, მაშასადამე, სამივე სიბრტყე იკვეთება მხოლოდ ერთ წერტილში. ამ წერტილის მოსაძებნად ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x - y - z = 10 \\ 4x + 11z = -43 \\ 7x - 5y = 31 \end{cases}$$

ამ სისტემის მთავარი დეტერმინანტია Δ=–2. Δ_x=–6, Δ_y=4 და Δ_z=10, ამიტომ

$$x = \frac{-6}{-2} = 3, \quad y = \frac{4}{-2} = -2, \quad z = \frac{10}{-2} = -5.$$

ე. ი. საერთო წერტილია N (3; –2; –5).

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

3.209. ააგეთ შემდეგი სიბრტყეები:

ა) 4x+3y–2z=0 ბ) 2x+3z=6 გ) 4z–9=0 დ) 8x–5y+1=0
ე) 6y–5=0 ე) x+y+z=0 ზ) y–z=0

3.210. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის წერტილზე M(4;–4;2) და ა) პარალელურია XOZ სიბრტყის, ბ) პარალელურია XOY სიბრტყის.

3.211. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც ა) გადის OX ღერძზე და A(1;–1;3) წერტილზე; ბ) გადის OY ღერძზე და B(2;1;–1) წერტილზე.

3.212. ავაგოთ სიბრტყე 2x–2y+z–6=0 და ვიპოვოთ კუთხეები, რომელთაც სიბრტყის ნორმალური ვექტორი ადგენს საკოორდინატო ღერძებთან.

3.213. შევადგინოთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M(–1;2;3) წერტილზე $\overrightarrow{OM}$-ის მართობულად.

3.214. $A(-1;-2;4)$ წერტილიდან სიბრტყეზე დაშვებულია პერპენდიკულარი, რომლის ფუძეა $B(2;1;3)$ წერტილი. ვიპოვოთ ამ სიბრტყის განტოლება.

მითითება. სიბრტყე გადის B წერტილზე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის მართობულად.

3.215. $2x+3y-4z+24=0$ სიბრტყის განტოლება დავიყვანოთ სიბრტყის განტოლებაზე ღერძთა მონაკვეთებში.

3.216. ვიპოვოთ იმ მონაკვეთების სიგრძეები, რომელთაც $x-10y+2z-12=0$ სიბრტყე ჩამოჰკვეთს საკოორდინატო ღერძებიდან.

3.217. $2x+9y-6z+33=0$ სიბრტყის განტოლება ჩავწეროთ ნორმალური სახით.

3.218. კოორდინატთა სათავიდან $5x-y+3z+12=0$ სიბრტყისადმი გავლებულია პერპენდიკულარი. ვიპოვოთ მისი სიგრძე და კუთხეები, რომელთაც ეს პერპენდიკულარი შეადგენს საკოორდინატო ღერძებთან.

3.219. ვიპოვოთ მანძილი $A(2;-4;2)$ წერტილიდან $2x+11y+10z-10=0$ სიბრტყემდე.

3.220. ვიპოვოთ მანძილი $M(5;1;-1)$ წერტილიდან $x-2y-2z+4=0$ სიბრტყემდე.

3.221. ვიპოვოთ მანძილი ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის $4x+3y-5z-8=0$ და $4x+3y-5z+12=0$.

3.222. oz ღერძზე ვიპოვოთ წერტილი, რომელიც მოცემული $2x+3y-6z+4=0$ სიბრტყიდან დაშორებულია 2 ერთეულით.

3.223. oy ღერძზე ვიპოვოთ წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $A(2;\,0;\,1)$წერტილიდან და $x+2y+2z-5=0$ სიბრტყიდან.

3.224. ვიპოვოთ კუთხე ორ სიბრტყეს შორის: ა) $x+y-1=0$ და $2x-y+\sqrt{3}z+1=0$; ბ) $x-2y+2z-8=0$ და $x+z-6=0$.

3.225. ვიპოვოთ სიბრტყე, რომელიც გადის $A(2;2;-2)$ წერტილზე და პარალელურია სიბრტყისა $x-2y-3z=0$.

3.226. ვიპოვოთ სიბრტყის განტოლება, თუ იგი გადის წერტილზე $M(1;-3;2)$ და პარალელურია სიბრტყისა $7x-4y+z-4=0$.

3.227. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $A(2;-3;1)$ წერტილზე და პარალელურია $\vec{a}(-3;2;-1)$ და $\vec{b}(1;2;3)$ ვექტორების.

3.228. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(-1;-1;2)$ წერტილზე და პერპენდიკულარულია $x-2y+z-4=0$ და $x+2y-2z+4=0$ სიბრტყეების.

მითითება. საძიებელი სიბრტყე პარალელურია მოცემული სიბრტყეების ნორმალური ვექტორებისა.

3.229. ვიპოვოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_1(2;-15;1)$ და $M_2(3;1;2)$ წერტილებზე და პერპენდიკულარულია $3x-y-4z=0$ სიბრტყისა.

3.230. დავწეროთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_1(-1;-2;0)$ და $M_2(1;1;2)$ წერტილებზე და პერპენდიკულარულია $x+2y+2z-4=0$ სიბრტყისა.

3.231. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის მოცემულ სამ წერტილზე $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$, $M_3(2;0;2)$.

3.232. ვიპოვოთ მანძილი $A(4;3;0)$ წერტილიდან სიბრტყემდე, რომელიც გადის მოცემულ სამ წერტილზე $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$ და $M_3(3;0;1)$.

3.233. ვიპოვოთ $2x-y+3z-9=0$, $x+2y+2z-3=0$ და $3x+y-4z+6=0$ სიბრტყეთა თანაკვეთის წერტილი

§3.6. წრფე სივრცეში

1. სივრცეში მდებარე ნებისმიერი ორი არაპარალელური სიბრტყის თანაკვეთა არის წრფე, ამიტომ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

განსაზღვრავს წრფეს სივრცეში. ამ სისტემას წრფის **ზოგადი სახის** განტოლება ეწოდება.

2. წრფის მდებარეობას საესებით განსაზღვრავს მასზე მდებარე რომელიმე $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილი და წრფის მიმართულება. თვით წრფის მიმართულებას კი განსაზღვრავს ამ წრფის პარალელური რაიმე $\vec{Q}(\ell,m,n)$ ვექტორი (რომელიც შეიძლება წრფეზეც მდებარეობდეს). ამ ეექტორს წრფის მიმმართველი ვექტორი ეწოდება.

თუ $M(x,y,z)$ წერტილი წრფეზე მდებარეობს, მაშინ $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორის გეგმილები $x-x_0$, $y-y_0$ და $z-z_0$ პროპორციული იქნება მიმმართველი ვექტორის ℓ, m, n გეგმილებისა

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{3. 82}$$

პირიქით, ამ პროპორციულ დამოკიდებულებას მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, თუ M წერტილი წრფეზე მდებარეობს, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\overrightarrow{M_0M}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები პარალელური არ იქნება. ე.ი. (3.82) პროპორცია წარმოადგენს წრფის განტოლებათა სისტემას. ამ განტოლებებს წრფის **კანონიკური განტოლებები** ეწოდებათ.

ℓ, m და n რიცხვებს წრფის **მიმართულების კოეფიციენტები** ეწოდებათ, ისინი წრფის მიმმართველი ვექტორის გეგმილებს წარმოადგენენ საკოორდინატო ღერძებზე.

თუ α, β და γ კუთხეებია წრფესა და საკოორდინატო OX, OY და OZ ღერძებს შორის, მაშინ

$$\cos\alpha = \pm\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}, \cos\beta = \pm\frac{m}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}, \cos\gamma = \pm\frac{n}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}},$$

რომელთაც წრფის **მიმართულების კოსინუსები** ეწოდებათ.

წრფის მიმმართველ ვექტორად შეიძლება აეიღოთ მოცემული წრფის ერთეულოვანი ვექტორი, რომლის კოორდინატებსაც წარმოადგენენ მიმართულების კოსინუსები $\vec{Q} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$. მაშასადამე, წრფის (3.82) სახის განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახითაც:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma}. \tag{3.83}$$

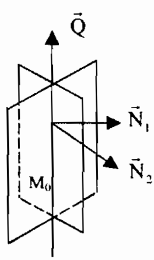
წრფის კანონიკური განტოლებებიდან შეიძლება გადავიდეთ წრფის ზოგადი სახის განტოლებაზე. ამისათვის (3.82) განტოლებებიდან საკმარისია აეიღოთ ნებისმიერი ორი (მესამე მათგან გამომდინარეობს), დაეალაგოთ და ჩავწეროთ სისტემის სახით. მივიღებთ წრფის ზოგადი სახის განტოლებას. თუ (3.82) პროპორციაში რომელიმე წილადის მნიშვნელი ნულის ტოლია, მაშინ მრიცხველსაც გავუტოლებთ ნულს.

წრფის ზოგადი სახის განტოლების კანონიკურ სახემდე მიყვანისათვის საჭიროა ზოგადი სახის განტოლებიდან

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

ვიპოვოთ რაიმე $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილი, რომელიც ამ წრფეზე მდებარეობს და ამ წრფის მიმმართველი $\vec{Q}$ ვექტორი. M_0 წერტილის მოსაძებნად რომელიმე უცნობს მივანიჭოთ ნებისმიერი მნიშვნელობა, ვთქვათ, $z=z_0$ და (3.81) სისტემიდან ვიპოვოთ $x=x_0$, $y=y_0$ (თუ $z=z_0$ მნიშვნელობისათვის სისტემა არათავსებადი აღმოჩნდა, მაშინ უნდა მივანიჭოთ მნიშვნელობა რომელიმე სხვა ცვლადს, მაგალითად $x=x_0$ და შემდეგ (3.81)-დან ვიპოვოთ $y=y_0$ და $z=z_0$). წრფის მიმმართეელი $\vec{Q}$ ვექტორი პარალელურია (3.81) სიბრტყეების გადაკვეთის წრფისა და, მაშასადამე, პერპენდიკულარულია ამ სიბრტყეების ნორმალური ვექტორებისა $\vec{N}_1(A_1,B_1,C_1)$ და $\vec{N}_2(A_2,B_2,C_2)$ (ნახ. 56), ამიტომ მიმმართველ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ ვექტორი

$$\vec{Q} = [N_1 \cdot N_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

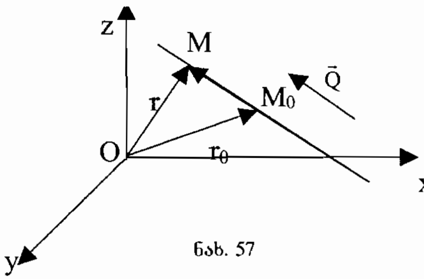


ნახ. 56

3. თუ (3.82) პროპორციაში თითოეულ განტოლებას გავუტოლებთ t პარამეტრს, მივიღებთ განტოლებებს:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \ell t \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned}\right\} , \qquad (3.84)$$

რომელთაც წრფის **პარამეტრული განტოლებები** ეწოდებათ.



ნახ. 57

4. განტოლებას $\vec{r} = \vec{r}_0 + tQ$ (3.85) ეწოდება წრფის პარამეტრული განტოლება **ვექტორული** სახით, სადაც $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ მოცემულ წრფეზე მდებარე რომელიმე M_0 წერტილის რადიუს-ვექტორია, ხოლო $\vec{Q}$ წრფის მიმმართველი ვექტორი (ნახ.57).

5. მოცემულ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ წერტილზე გამავალ **წრფეთა კონის** განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} . \qquad (3.86)$$

M_1 წერტილს – **კონის ცენტრი** ეწოდება.

6. ორ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ და $M_2(x_2,y_2,z_2)$ წერტილზე გამავალ წრფის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} , \qquad (3.87)$$

სადაც $M_1M_2 = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ წრფის მიმმართველი ვექტორია და წრფე გადის M_1 წერტილზე (იმ შემთხვევაში, როცა, მაგალითად, $x_1=x_2$, ამ პროპორციიდან სათანადო წევრი უნდა ამოვიღოთ და დარჩენილ პროპორციასთან ერთად დამატებით განვიხილოთ $x=x_1$ განტოლება).

7. ორ წრფეს შორის კუთხე, რომელთა განტოლებებია:

$$\frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{და} \quad \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

გამოითვლება ფორმულით:

$$\cos\varphi = \pm \frac{\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} . \qquad (3.88)$$

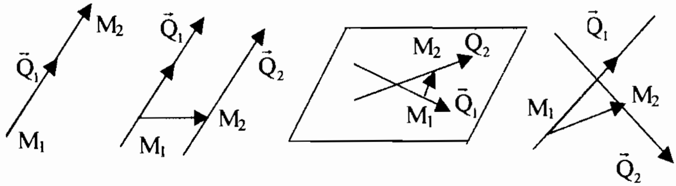
8. სივრცეში ორი წრფის პარალელურობის პირობაა:

$$\frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}. \tag{3.89}$$

9. ორი წრფის პერპენდიკულარობის პირობა სივრცეში მოიცემა ფორმულით:

$$\ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \tag{3.90}$$

10. სივრცეში მდებარე ორ წრფეს შეიძლება ჰქონდეს შემდეგი ოთხი ურთიერთმდებარეობიდან ერთ-ერთი (ნახ.66):



ნახ. 58

I. $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{Q}$, ე.ი. $\dfrac{x_2-x_1}{\ell_1}=\dfrac{y_2-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$. წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა.

II. წრფეები ერთმანეთის პარალელურია. $\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \vec{Q}$, მაგრამ $\vec{Q}_1 \parallel \vec{Q}_2$ ე.ი. $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.

III. წრფეები ერთმანეთთან იკვეთებიან. $\vec{Q}_1 \nparallel \vec{Q}_2$, მაგრამ $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{Q}_1$ და $\vec{Q}_2$ კომპლანარული არიან, ე.ი. შერეული ნამრავლი

$$D=\overrightarrow{M_1M_2}\ \vec{Q}_1\ \vec{Q}_2=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

IV. აცდენილი წრფეებია. $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{Q}_1$ და $\vec{Q}_2$ – არაკომპლანარული არიან, ე.ი. $D\neq 0$.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. დავწეროთ იმ წრფის კანონიკური და პარამეტრული სახის განტოლებები, რომელიც გადის წერტილზე $M_0(-1;0;5)$ და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს კუთხეებს $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $\gamma=\dfrac{2\pi}{3}$.

ამოხსნა. საძიებელი წრფის მიმმართველ ვექტორად შეიძლება ავიღოთ ამ წრფის ერთეულოვანი ვექტორი. ამ ვექტორის კოორდინატები წარმოადგენენ მიმართულების კოსინუსებს.

$$\vec{Q}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}=\cos\frac{\pi}{3}\vec{i}+\cos\frac{\pi}{4}\vec{j}+\cos\frac{2\pi}{3}\vec{k}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}.$$

წრფე გადის $M_0(-1;\ 0;\ 5)$ წერტილზე, ამიტომ (3.86) ფორმულით გვექნება:

$$\frac{x+1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-0}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z-5}{-\frac{1}{2}}.$$

გავამარტივოთ და მივიღებთ $\frac{x+1}{1}=\frac{y-0}{\sqrt{2}}=\frac{z-5}{-1}$. გავუტოლოთ ეს პროპორცია t პარამეტრს:

$\frac{x+1}{1}=\frac{y-0}{\sqrt{2}}=\frac{z-5}{-1}=t$, მივიღებთ წრფის პარამეტრული სახის განტოლებებს: $x=-1+t$, $y=\sqrt{2}t$, $z=5-t$.

მაგალითი 2. დავწეროთ წრფის კანონიკური და პარამეტრული სახის განტოლებები, თუ იგი გადის $M_0(1;-2;2)$ წერტილზე და პარალელურია OY ღერძის.

ამოხსნა. ვექტორი $\vec{j}(0{,}1;0)$ მდებარეობს OY ღერძზე და წარმოადგენს მის მიმმართველ ვექტორს. OY ღერძის განტოლება შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{0}.$$

საძიებელი წრფე პარალელურია OY ღერძის, ამიტომ მისი მიმმართველი ვექტორი იქნება $\vec{j}(0{,}1;0)$ ვექტორი, და რადგან იგი გადის M_0 წერტილზე, ამიტომ განტოლებას ექნება სახე $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{0}$.

წრფის პარამეტრული სახის განტოლებაზე გადასვლისათვის უნდა გავითვალისწინოთ, რომ პირველი და მესამე წილადის მნიშვნელში ნული ნიშნავს, რომ $x-1=0$ და $z-2=0$. გავუტოლოთ მეორე წილადი t პარამეტრს, მივიღებთ $y=-2+t$.

მაშასადამე, საძიებელი წრფის პარამეტრული სახის განტოლება იქნება:

$$x=1,\ y=-2+t,\ z=2.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(1;-1)$ წერტილზე $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$ წრფის პარალელურად.

ამოხსნა. დავწეროთ A წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება $\frac{x-1}{\ell}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-2}{n}$.

რადგან საძიებელი წრფე პარალელურია მოცემული წრფისა, ამიტომ ℓ, m და n პროპორციული იქნებიან მოცემული წრფის მიმართულების კოეფიციენტებისა. შევცვლით რა ℓ, m და n-ს მათი პროპორციული რიცხვებით, მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის მოცემულ ორ $A(3;0;4)$ და $B(-1;-2;3)$ წერტილზე.

ამოხსნა. (3.87) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-4}{1}.$$

მაგალითი 5.

წრფის ზოგადი სახის განტოლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე.

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

ამოხსნა. ჯერ განვსაზღვროთ წრფის რომელიმე წერტილის კოორდინატები, ამისათვის ზოგად განტოლებაში ჩავსვათ $z=0$.

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x+2y-4=0 \end{cases}$$

აქედან $x=2$ და $y=-1$. ე.ი. $M(2;-1;0)$.

წრფის მიმმართველი ვექტორი მართობია მოცემული სიბრტყეების ნორმალური ვექტორებისა $\vec{N}_1(1;-2;3)$ და $\vec{N}_2(3;2;-5)$, ამიტომ

$$\vec{Q}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k}$$

მოცემული წრფის კანონიკური განტოლება იქნება:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z-0}{8} \text{ ანუ } \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}.$$

შენიშვნა. წრფის ზოგადი სახის განტოლების კანონიკურ სახემდე დასაყვანად ზოგჯერ გამოიყენება ფორმალური ხერხი. ამისათვის მოცემული განტოლებებიდან ერთ-ერთ უცნობს გამოსახავენ რიგრიგობით ორი დანარჩენი უცნობით და შედეგებს ერთმანეთს გაუტოლებენ.

მოცემულ მაგალითში ჯერ შევკრიბოთ განტოლებები, მივიღებთ $4x-2z-8=0$, ანუ $x=\frac{z+4}{2}$.

ახლა, თუ პირველი განტოლების ყველა წევრს გავამრავლებთ 5-ზე, მეორე განტოლებისას 3-ზე და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$14x-4y-32=0 \text{ ანუ } x=\frac{2y+16}{7}=\frac{y+8}{\frac{7}{2}}.$$

გავუტოლოთ შედეგები ერთმანეთს, მივიღებთ წრფის კანონიკური სახის განტოლებას

$$x = \frac{y+8}{\frac{7}{2}} = \frac{z+4}{2} \quad \text{ანუ} \quad \frac{x}{2} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{4}.$$

ეს განტოლება განსხვავდება პირველი ხერხით ნაპოვნი განტოლებისაგან მხოლოდ იმით, რომ მის ჩასაწერად გამოყენებულია მოცემული წრფის წერტილი A(0;–8;–4) და არა M(2;–1;0) წერტილი.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ კუთხეები, რომელთაც წრფე

$$\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+3y+z+9=0 \end{cases}$$

ადგენს საკოორდინატო ღერძებთან.

ამოხსნა. პირველ რიგში წრფის განტოლება დაეიყვანოთ კანონიკურ სახეზე. ვიპოვოთ წერტილი, რომელიც ამ წრფეს ეკუთვნის, ამისათვის დავუშვათ z=0 და $\begin{cases} x-4y=1 \\ 2x+3y=-9 \end{cases}$ სისტემიდან ვიპოვოთ $x=-3$, $y=-1$.

მაშასადამე, წერტილზე (–3,–1;0) გადის მოცემული წრფე. მიმმართველი ვექტორი კი იქნება

$$\vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -19\vec{i} + 9\vec{j} + 11\vec{k}.$$

მოცემული წრფე კანონიკური სახით ასე ჩაიწერება:

$$\frac{x+3}{-19} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-0}{11}.$$

წრფის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეების მოსაძებნად ვისარგებლოთ მიმართულების კოსინუსების გამოსათველელი ფორმულებით:

$$\cos\alpha = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}} = \frac{-19}{\sqrt{563}} \approx -0{,}801, \qquad \alpha \approx 143^0 44';$$

$$\cos\beta = \frac{9}{\sqrt{563}} \approx 0{,}379, \qquad \beta \approx 67^0 44';$$

$$\cos\gamma = \frac{11}{\sqrt{563}} = 0{,}464, \quad \gamma \approx 62^0 21'.$$

(თუ შევამოწმებთ, მივიღებთ, რომ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$).

მაგალითი 7. განვსაზღვროთ $\begin{cases} 5x+3y-4z+8=0 \\ x-y+z+5=0 \end{cases}$ წრფის კვალი საკოორდინატო სიბრტყეზე.

(წრფის კვალი სიბრტყეზე ეწოდება სიბრტყისა და წრფის გადაკვეთის წერტილს).

(წრფის კვალი სიბრტყეზე ეწოდება სიბრტყისა და წრფის გადაკვეთის წერტილს).

ამოხსნა. XOY სიბრტყის განტოლებაა z=0. მოცემულ სისტემაში შევიტანოთ z=0 და დარჩენილი ორუცნობიან განტოლებათა სისტემიდან განვსაზღვროთ x და y.

$$x=-\frac{23}{8};\ y=\frac{17}{8};$$

მოცემული წრფის კვალი XOY სიბრტყეზე წარმოადგენს წერტილს $\left(-\frac{23}{8};\ \ \frac{17}{8};\ \ 0\right)$.

ანალოგიურად მოცემული წრფის კვალი yoz სიბრტყეზე იქნება წერტილი (0; 28; 23), ხოლო XOZ-ზე $\left(-\frac{28}{9};0;-\frac{17}{9}\right)$.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ მახვილი კუთხე მოცემულ ორ წრფეს შორის $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$ და $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{-2}$.

ამოხსნა. მოცემული წრფეების მიმმართველი ვექტორებია $\vec{Q}_1(3;-1;2)$ და $\vec{Q}_2(2;4;-2)$. ამიტომ კუთხის კოსინუსი მოცემულ წრფეებს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$\cos\varphi=\pm\frac{\vec{Q}_1\cdot\vec{Q}_2}{\left|\vec{Q}_1\right|\cdot\left|\vec{Q}_2\right|}=\pm\frac{3\cdot2+(-1)\cdot4+2\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}}.$$

$$\cos\varphi=\pm\frac{1}{2\sqrt{21}}=\pm0{,}1091.$$

რადგან მოითხოვება ამ ორ წრფეს შორის მახვილი კუთხის პოვნა, ავირჩევთ დადებით ნიშანს $\cos\varphi=\frac{1}{2\sqrt{21}}$, $\varphi\approx88^0 44'$.

მაგილითი 9. დავამტკიცოთ, რომ წრფეები

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}$ და $\frac{x+1}{1}=\frac{y+11}{2}=\frac{z+6}{1}$ იკვეთებიან.

ვიპოეოთ მათი გადაკვეთის წერტილი.

ამოხსნა. $M_1(1;-2;0)$ წერტილი პირველ წრფეზე მდებარეობს, ხოლო $M_2(-1;-11;-6)$ წერტილი მეორეზე. ვიპოვოთ $\overrightarrow{M_1M_2}(-2;-9;-6)$, $\vec{Q}_1(2;-1;-2)$ და $\vec{Q}_2(1;2;1)$ ვექტორების შერეული ნამრავლი.

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{Q}_1\cdot\vec{Q}_2=\begin{vmatrix}-2&-9&-6\\2&-1&-2\\1&2&1\end{vmatrix}=-2\cdot3+9\cdot4-6\cdot5=0$$

მაშასადამე, ეს ვექტორები კომპლანარულნი არიან და მოცემული ორი წრფე მდებარეობს ერთ სიბრტყეზე. რადგან $\bar{Q}_1$ და $\vec{Q}_2$ პარალელურნი არ არიან (მათი კოორდინატები არაპროპორციულია), ამიტომ მოცემული წრფეები გადაიკვეთებიან.

გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად ერთ-ერთი განტოლება (ვთქვათ, პირველი) ჩავწეროთ პარამეტრული სახით და x, y და z -ის მნიშვნელობები შევიტანოთ მეორე განტოლებაში. მივიღებთ $x=1+2t$, $y=-2-t$, $z=-2t$.

$\frac{2+2t}{1}=\frac{9-t}{2}=\frac{6-2t}{1}$, აქედან t=1. და, მაშასადამე,

$x=1+2\cdot1=3$, $y=-2-1=-3$, $z=-2\cdot1=-2$.

წრფეთა გადაკვეთის წერტილია $(3; -3; -2)$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

3.234. შეეადგინოთ იმ წრფის კანონიკური სახის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(1;-5;3)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებთან ქმნის შესაბამისად $\alpha=\frac{\pi}{4}, \beta=\frac{\pi}{3}, \gamma=\frac{2\pi}{3}$ კუთხეებს.

3.235. დავწეროთ იმ წრფის კანონიკური და პარამეტრული სახის განტოლებები, რომელიც გადის $M_0(-1;-2;2)$ წერტილზე OX ღერძის პარალელურად.

3.236. დავწეროთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(-1;2;3)$ და $B(2;6;-2)$ წერტილებზე და ვიპოვოთ მისი მიმართულების კოსინუსები.

3.237. დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე შემდეგი წრფეების განტოლებები:

ა) $\begin{cases} x-3y+2=0, \\ 2y-z+1=0. \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0. \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

3.238. ვიპოვოთ იმ წრფის კანონიკური სახის განტოლება, რომელიც გადის $M(1; -3;5)$ წერტილზე და პარალელურია წრფისა

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$$

3.239. დავწეროთ კანონიკური განტოლება პერპენდიკულარისა, რომელიც კოორდინატთა სათავიდან დაშვებულია $4x-y+2z-3=0$ სიბრტყეზე.

მითითება. სიბრტყის ნორმალური $\vec{N}(4;-1;2)$ ვექტორი იმავდროულად წარმოადგენს საძიებელი წრფის მიმმართველ ვექტორს, ამასთან, ეს წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე.

3.240. ვიპოვოთ კანონიკური განტოლება წრფისა, როემლიც გადის $M(2;1;1)$ წვრტილზე და პერპენდიკულარულია $x-y+z-1=0$ სიბრტყის.

3.241. ვიპოვოთ კუთხე ორ წრფეს შორის

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}} \text{ და } \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

3.242. ვიპოვოთ კუთხე ორ წრფეს შორის

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z+1=0 \end{cases} \text{ და } \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z-2=0 \end{cases}$$

მითითება. თითოეული წრფის მიმმართველი ვექტორი შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც ამ წრფის განტოლებაში შემავალი სიბრტყეების ნორმალური ვექტორების ვექტორული ნამრავლი $\left(\vec{Q}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2\right)$.

3.243. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი წრფეები პარალელურია

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1} \text{ და } \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$$

3.244. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი წრფეები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

ა) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ და $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$ და $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t \\ z=1-6t \end{cases}$

3.245. დავწეროთ იმ პერპენდიკულარის განტოლება, რომელიც $A(2;-3;4)$ წერტილიდან დაშვებულია OZ ღერძზე.

მითითება. საძიებელი წრფე გადის აგრეთვე წერტილზე (0; 0; 4).

3.246. ვიპოვოთ მანძილი $M(2;-1;3)$ წერტილიდან $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}$ წრფემდე.

მითითება. $A(-1;-2;1)$ წერტილი მდებარეობს მოცემულ წრფეზე, ამ წრფის მიმმართველი ვექტორია $\vec{Q}(3;4;5)$, მაშინ

$$d=\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\right|\left|\left[\vec{Q}\text{x}\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{Q}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\frac{\left|\left[\vec{Q}\text{x}\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{Q}\right|}.$$

3. 247. ვიპოვოთ მანძილი ორ პარალელურ წრფეს შორის

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2} \text{ და } \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}.$$

3.248. ვიპოვოთ მოცემული წრფის $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{4}$ კვალი საკოორდინატო სიბრტყეზე.

3.249. ვიპოვოთ მოცემული $\begin{cases} 2x+y+8z-16=0 \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}$ წრფის კვალი საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

3.250. აჩვენეთ, რომ წრფეები

$$\begin{cases} x+y-z+4=0 \\ 2x-3y-z-5=0 \end{cases} \quad \text{და} \quad \frac{x+3}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}$$

იკვეთებიან და იპოვეთ მათი გადაკვეთის წერტილი.

3.251. ვაჩვენოთ, რომ წრფეები $\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ და $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3z=0 \end{cases}$ აცდენილი წრფეებია.

§3.7. სიბრტყე და წრფე სივრცეში

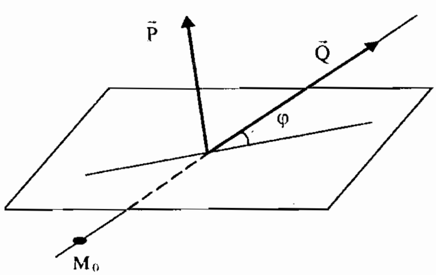
1. ავიღოთ $\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ წრფე და $Ax+By+Cz+D=0$ სიბრტყე. $\vec{Q}(\ell,m,n)$ წრფის მიმმართველი ვექტორია, ხოლო $\vec{P}(A,B,C)$ სიბრტყის ნორმალური ვექტორი (ნახ. 59).

ა) მახვილი **კუთხე წრფესა და სიბრტყეს** შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\left|\frac{A\ell+Bm+Cn}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \qquad (3.91)$$

ბ) წრფისა და სიბრტყის **პარალელობის** პირობაა

$$A\ell+Bm+Cn=0\,. \qquad (3.92)$$



ნახ. 59

გ) წრფისა და სიბრტყის **მართობულობის** პირობაა:

$$\frac{A}{\ell}=\frac{M}{m}=\frac{C}{n}\,. \qquad (3.93)$$

დ) წრფისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად, წრფის განტოლება ჩავწეროთ პარამეტრული სახით $x=x_0+\ell t$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$ ცვლადების ამ მნიშვნელობების სიბრტყის განტოლებაში შეტანით ვიპოვოთ t და შესაბამისად x, y, z, რაც მოგვცემს საძიებელ წერტილს.

თუ ამ ჩასმის დროს მივიღებთ $A\ell+Bm+Cn=0$ და $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, ეს ნიშნავს, რომ წრფე ძევს სიბრტყეზე.

თუ წრფის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით, მაშინ მოცემული წრფისა და მოცემული სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები არის

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი. (თუ, რა თქმა უნდა, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი).

ე) ორი წრფის $\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ და $\frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ ერთ სიბრტყეზე მდებარეობის პირობაა:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & x_1 - z_0 \\ \ell & m & n \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

3) მოცემულ წრფეზე $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ გამაეალი **სიბრტყეთა ძნულის** განტოლებაა

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

სადაც λ პარამეტრია – ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი.

2. მაგეგმილები სიბრტყე.

თუ წრფის განტოლება მოცემულია კანონიკური სახით, მაშინ თითოეული ტოლობა

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}, \ \frac{x-x_0}{\ell}=\frac{z-z_0}{n}, \ \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

წარმოადგენს მოცემული წრფის მაგეგმილებელ სიბრტყეს შესაბამისად xoy, xoz და yoz სიბრტყეებზე. თუ წრფის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

მაშინ ამ წრფის მაგეგმილებელი სიბრტყე xoy სიბრტყეზე მიიღება მოცემული სისტემიდან z კოორდინატის გამორიცხეით, xoz (ან yoz) სიბრტყეზე y (ან x) კოორდინატის გამორიცხვით.

3. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გაივლის მოცემულ წრფეზე $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ და მოცემ·ულ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე.

მოცვმულ წრფეზე გამავალი სიბრტყეთა ძნულის განტოლებიდან $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ ამოვირჩიოთ სიბრტყე, რომელიც გაივლის M_0 წერტილზე. ჩავსვამთ რა M_0-ის კოორდინატებს ძნულის განტოლებაში, მივიღებთ λ-ს მნიშვნელობას. საბოლოოდ λ-ს მნიშვნელობის სიბრტყეთა ძნულის განტოლებაში შეტანით მივიღებთ საძიებელი სიბრტყის განტოლებას. ასეთივე წესით ვიპოვით ორ პარალელურ წრფეზე

ან ურთიერთგადამკვეთ წრფეებზე გამავალი სიბრტყის განტოლებას. ერთ-ერთზე ავიღებთ რაიმე M_0 წერტილს (რომელიც მეორეზე არ მდებარეობს) და სიბრტყეს გავატარებთ M_0-ზე და მეორე წრფეზე.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ მახვილი კუთხე $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ წრფესა და $2x+y-z+4=0$ სიბრტყეს შორის.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (3.91) ფორმულით

$$\sin\varphi=\frac{2\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot 2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\approx 0{,}408248 \quad \varphi\approx 24^0 5'\cdot$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ მახვილი კუთხე

$$\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y+4z+5=0 \end{cases}$$

წრფესა და $x+y+3z+1=0$ სიბრტყეს შორის.

ამოხსნა. არ არის სავალდებულო წრფის განტოლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე, საკმარისია ვიპოვოთ წრფის მიმმართველი ვექტორის კოორდინატები

$$\vec{Q}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=5\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}\cdot$$

$$\sin\varphi=\frac{+6}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{38}}=\frac{6}{\sqrt{418}}\approx 0{,}2935, \qquad \varphi\approx 17^0 4'$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(1;2;-1)$ წერტილზე და პერპენდიკულარულია წრფისა $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

ამოხსნა. $M(1;2;-1)$ წერტილზე გავლებული სიბრტყის განტოლებას აქვს სახე:

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0$$

ვისარგებლოთ წრფისა და სიბრტყის მართობულობის პირობით და A, B, C სიდიდეები შევცვალოთ მათი პროპორციული ℓ, m და n სიდიდეებით, ანუ 1, -3 და 4–ით. მივიღებთ:

$$1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$x-3y+4z+9=0.$$

მაგალითი 4. წერტილზე (2;1;6) გავატაროთ წრფე, რომელიც პერპენდიკულარულია $x-4y+5z=0$ სიბრტყისა.

ამოხსნა. დაეწეროთ წრფის განტოლება, როემლიც გადის მოცემულ წერტილზე

$$\frac{x-2}{\ell}=\frac{y-1}{m}=\frac{z-6}{n}$$

წრფისა და სიბრტყის პერპენდიკულარობის პირობის თანახმად ℓ, m და n პროპორციულია A, B და C სიდიდეების, ამიტომ შევცვლით რა ℓ, m, n–ს შესაბამისად მათი პროპორციული რიცხვებით 1, -4 და 5-ით, მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-6}{5}.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}$ წრფისა და x+y–2z–4=0 სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი.

ამოხსნა. მოცემული წრფის განტოლება ჩავწეროთ პარამეტრული სახით $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}$=t, ანუ x=3t+1, y=–t–1, z=5t+2. ცვლადების ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ სიბრტყის განტოლებაში, გვექნება

3t+1+(–t–1)–2(5t+2)–4=0, აქედან t=–1. ამიტომ x=-2; y=0, z=–3. ე.ი. საძიებელი წერტილია (-2; 0; -3).

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-1}$ წრფისა და 3x-4y-z+5=0 სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი.

ამოხსნა. რადგან Aℓ+Bm+Cn=5·3+4·(-4)+(-1)·(-1)=0, ამიტომ მოცემული წრფე და სიბრტყე ერთმანეთის პარალელურია.

მაგალითი 7. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის წრფეზე $\begin{cases}3x+y-4z+5=0\\x-y+2z-1=0\end{cases}$ და წერტილზე M(1;-1;2).

ამოხსნა. მოცემულ წრფეზე გამაეალ სიბრტყეთა ძნულის განტოლებიდან 3x+y-4z+5+λ(x-y+2z-1)=0 უნდა ავირჩიოთ სიბრტყე, რომელიც გადის M(1;-1;2) წერტილზე. შევიტანოთ M-ის კოორდინატები სიბრტყეთა ძნულის განტოლებაში, მივიღებთ: $\lambda=\frac{1}{5}$; λ –ს, ამ მნიშვნელობისათვის მივიღებთ

3x+y-4z+5+$\frac{1}{5}$ (x-y+2z-1)=0, საიდანაც 8x+2y-9z+12=0.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $\begin{cases}3x+y+z+5=0\\x+2y-z+2=0\end{cases}$ წრფეზე და პარალელურია წრფისა $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}$.

ამოხსნა. მოცემულ წრფეზე გამავალი სიბრტყეთა ძნულის განტოლებაა 3x-y+z-5+λ(x+2y-z+1)=0 ანუ მეორენაირად: (3+λ)x+(2λ–1)y+(1–λ)z–5+ +2λ=0 სიბრტყეთა ამ ძნულიდან უნდა ავირჩიოთ სიბრტყე, რომელიც მოცემული მეორე წრფის პარალელურია. წრფისა და სიბრტყის პარალელობის პირობიდან, გვექნება:

$(3+\lambda)\cdot(-1)+(2\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot 2=0$, აქედან $\lambda=3$. ჩავსვათ λ-ს მნიშვნელობა ძნულის განტოლებაში, მივიღებთ საძიებელი სიბრტყის განტოლებას

$$6x+5y-2z+1=0.$$

მაგალითი 9. ვიპოვოთ A(5;2;-1) წერტილის გეგმილი $2x-y+3z+23=0$ სიბრტყეზე.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ A წერტილის გეგმილი მოცემულ სიბრტყეზე B-თი, მაშინ AB პერპენდიკულარის მიმმართველ ვექტორად შეგვიძლია განვიხილოთ სიბრტყის ნორმალური $\vec{P}(2;-1;3)$ ვექტორი, ამიტომ AB-ს განტოლება იქნება:

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

B წერტილის საპოვნელად ვეძიოთ ამ წრფისა და მოცემული სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი მაგალითი 5-ის მიხედვით:

$x=5+2t$, $y=2-t$, $z=-1+3t$.

x, y, z-ის მნიშვნელობები შევიტანოთ სიბრტყის განტოლებაში და მივიღებთ, რომ $t=-2$. ამიტომ $x=5+2\cdot(-2)=1$, $y=2-(-2)=4$, $z=-1+3\cdot(-2)=-7$. B(1;4; −7).

მაგალითი 10. ვიპოვოთ $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$ წრფის გეგმილი yoz სიბრტყეზე.

ამოხსნა. იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც მოცემულ წრფეს აგეგმილებს yoz სიბრტყეზე, იქნება

$$\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1} \text{ ანუ } y-3z+5=0.$$

ამ სიბრტყისა და yoz (ე.ი. $x=0$) სიბრტყის გადაკვეთის წრფე იქნება სწორედ საძიებელი გეგმილი $\begin{cases} y-3z+5=0 \\ x=0 \end{cases}$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

3.252. ვიპოვოთ მახვილი კუთხე $\begin{cases} y=3x-1 \\ 2z=-3x+2 \end{cases}$ წრფესა და $2x+y+z-4=0$ სიბრტყეს შორის.

3.253. ვიპოვოთ მახვილი კუთხე $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ წრფესა და $x+y-z+1=0$ სიბრტყეს შორის.

3.254. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M(2;−4; −2) წერტილზე და პერპენდიკულარულია წრფისა

$$\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+y+3=0 \end{cases}$$

3.255. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის (-1; 2; -3) წერტილზე და მართობულია წრფისა $\begin{cases} x=2 \\ y-z=1 \end{cases}$.

3.256. დავწეროთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის (1; -1; 2) წერტილზე და პერპენდიკულარულია 3x-y-5z-8=0 სიბრტყის.

3.257. შევადგინოთ წრფის განტოლება, როემლიც გადის M(3; -2; 4) წერტილზე და მართობულია სიბრტყის 5x+3y-7z+1=0.

3.258. ვაჩვენოთ, რომ წრფე $\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ 3y-4z-9=0 \end{cases}$ და 4x+8y+6z-3=0 სიბრტყე ერთმანეთის პარალელურია.

3.259. ვიპოვოთ $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ წრფისა და x+2y+3z-29=0 სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი.

3.260. ვიპოვოთ (3; 1; -1) წერტილის გეგმილი x+2y+3z-30=0 სიბრტყეზე.

3.261. დავწეროთ (2;-1;3) წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომელიც მართობულია x+3y-4z-13=0 სიბრტყისა და ვიპოვოთ ამ პერპენდიკულარის გეგმილი მოცემულ სიბრტყეზე.

3.262. ვიპოვოთ $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{9}$ წრფისა და 2x-3y+z-3=0 სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი.

3.263. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M(2; -1; 0) წერტილზე და $\begin{cases} x-y+3z-1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ წრფეზე.

3.264. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომლიც გადის (3;4;0) წერტილზე და წრფეზე $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$.

3.265. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $\begin{cases} 3x+2y+3z-5=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$ წრფეზე და პარალელურია წრფისა $\begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases}$.

3.266. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, რომლიც გადის $\begin{cases} x-2y+3z-1=0 \\ x-y+z+5=0 \end{cases}$ წრფეზე და მართობულია სიბრტყის 2x+2y-z+5=0.

3.267. ვიპოვოთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის ორ პარალელურ წრფეზე $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{4}$; $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$.

3.268. ვაჩვენოთ, რომ $\begin{cases} x=z-2 \\ y=2z+1 \end{cases}$ და $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1}$ წრფეები იკვეთებიან და დავწეროთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელზეც ეს წრფეები მდებარეობენ.

თავი IV

დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

§. 4.1 ფუნქცია

თუ X რიცხვითი სიმრავლის ყოველ x ელემენტს გარკვეული f წესით შეესაბამება ერთადერთი y ნამდვილი რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია X სიმრავლეზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქცია. X სიმრავლეს $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება და აღინიშნება $D(f)$ სიმბოლოთი, ხოლო $E(f)=\{f(x)|x\in X\}$ სიმრავლეს კი ფუნქციის ცვლილების არე, ანუ მნიშვნელობათა არე ეწოდება.

საკოორდინატო სიბრტყეზე $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება $(x;\ f(x))$ სახის ყველა წერტილთა სიმრავლეს, სადაც $x\in D(f)$. ფუნქციის გრაფიკს წირსაც უწოდებენ.

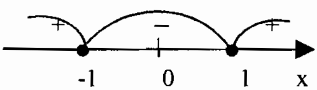
ელემენტარული მათემატიკის კურსიდან ცნობილია შემდეგი სახის ფუნქციები: $y=ax+b$ (წრფივი ფუნქცია), $y=ax^2+bx+c$ (კვადრატული სამწევრი, ანუ კვადრატული ფუნქცია), $y=x^n$ (ხარისხოვანი ფუნქცია), $y=a^x$ (მაჩვენებლიანი ფუნქცია), $y=\log_a x$ (ლოგარითმული ფუნქცია), $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$ (ტრიგონომეტრიული ფუნქციები).

თუ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ და განსაზღვრის არის ყოველი x წერტილისათვის $f(-x)=f(x)$, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციას ლუწი ეწოდება, ხოლო თუ $f(-x)=-f(x)$, მაშინ – კენტი.

კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. დაევადგინოთ $f(x)=\lg(x^2-1)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე და ვიპოვოთ $f(-\sqrt{2})$.



როგორც ცნობილია, ლოგარითმული ფუნქციის არგუმენტი უნდა იყოს მკაცრად დადებითი. ე.ი. $x^2-1>0$, $(x-1)(x+1)>0$. უტოლობის ამოხსნის ინტერვალთა მეთოდის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ განსაზღვრის არე $D(f)=(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, ხოლო

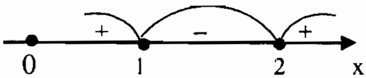
$$f(-\sqrt{2})=\lg\left((-\sqrt{2})^2-1\right)=\lg(2-1)=\lg 1=0.$$

მაგალითი 2. დავადგინოთ $y=\sqrt{x}-\sqrt{-x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

მოვითხოვოთ $\begin{cases}x\ge 0\\ -x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\le 0\end{cases}$, ე.ი. ფუნქცია განსაზღვრულია ერთადერთ $x=0$ წერტილში. ანუ $D(y)=\{0\}$.

მაგალითი 3. მოცემულია ფუნქციები $y_1=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ და $y_2=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}$ ვიპოვოთ $D(y_1)$ და $D(y_2)$.

$D(y_1)$-ს მოსაძებნად უნდა მოვითხოვოთ, რომ $(x-1)(x-2)\ge 0$. ინტერვალთა მეთოდის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $D(y_1)=(-.\infty;1]\cup[2;\infty)$.



ახლა ვიპოვოთ $D(y_2)$. მოვითხოვოთ პირობები $\begin{cases}x-1\ge 0\\ x-2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x\ge 2\end{cases}$, ცხადია, $D(y_2)=[2;\infty)$.

მაგალითი 4. ვაჩვენოთ, რომ $y=\sin x\cdot\cos 2x$ ფუნქცია კენტია.

მართლაც, $D(y)=(-\infty;\infty)$, $y(-x)=\sin(-x)\cdot\cos(-2x)=-\sin x\cdot\cos 2x=-y(x)$. რ.დ.გ.

მაგალითი 5. ვაჩვენოთ, რომ $y=\dfrac{\sin x+\mathrm{tg}x}{\sin x-\mathrm{tg}x}$ ფუნქცია ლუწია.

$$y=\frac{\sin(-x)+\mathrm{tg}(-x)}{\sin(-x)-\mathrm{tg}(-x)}=\frac{-\sin x-\mathrm{tg}x}{-\sin x+\mathrm{tg}x}=\frac{-(\sin x+\mathrm{tg}x)}{-(\sin x-\mathrm{tg}x)}=\frac{\sin x+\mathrm{tg}x}{\sin x-\mathrm{tg}x}=y(x)\cdot$$ რ.დ.გ.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

დაადგინეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და გამოთვალეთ მისი მნიშვნელობა მითითებულ წერტილში.

4.1. $f(x)=x-1$, $f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=?$

4.2 $F(x)=\dfrac{x}{x-\lg 2}$, $F(\lg 4)=?$

4.3. $R(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $R\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}\right)=?$

4.4. $Q(x)=\sqrt{x+2}$, $Q(0{,}25)=?$

4.5. $S(x)=\sqrt{9-x^2}$, $S\left(\frac{1}{2}\sqrt{35}\right)=?$

4.6. $\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}$, $\varphi\left(2\sqrt{2}\right)=?$

4.7. $\psi(x)=10^x$, $\psi(\lg 3)=?$

4.8. $g(x)=\lg(x-10)$, $g(0{,}1)=?$

დაადგინეთ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე.

4.9. $y=\dfrac{|x|}{x}$;

4. 10. $y=\dfrac{1}{\sqrt{6-3x}}$;

4.11. $y=\lg\lg x$;

4.12 $y=\sqrt{3-3^{-x}}$; 4.13. $y=\lg(x^2-1)$; 4.14. $y=\sqrt{-x^2+x+6}$;

4.15. $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}$; 4.16. $y=\lg\big(x(x-1)(x-2)\big)$.

დაადგინეთ განსაზღვრის არეები

4.17. $y_1=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-1}}$, $y_2=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-1}}$;

4.18. $y_1=\lg(5-2x)+\lg(x^2-1)$, $y_2=\lg\big((5-2x)\cdot\lg(x^2-1)\big)$;

4.19. $y_1=\lg(x-3)^2$, $y_2=2\lg(x-3)$; 4.20. $y_1=10^{\lg\frac{2}{x-2}}$, $y_2=\dfrac{2}{x-2}$.

აჩვენეთ, რომ შემდეგი ფუნქციები ლუწია

4.21. $y=2-|x|$; 4.22. $y=\dfrac{\sin x}{x}$; 4.23. $y=\sin x\cdot \mathrm{tg}x$.

აჩვენეთ, რომ შემდეგი ფუნქციები კენტია

4.24. $y=\dfrac{|x|}{x}$; 4.25. $y=x+\sin x$; 4.26. $y=2^x-2^{-x}$.

დაადგინეთ ფუნქციის ლუწ-კენტოვნების საკითხი

4.27. $y=2+\sin x$; 4.28. $y=x^2-\cos x$; 4.29. $y=\dfrac{x}{\sin x}$; 4.30. $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$;

4.31. $y=10^x+10^{-x}$; 4.32. $y=10^x-10^{-x}$; 4.33. $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

4.34. $y=\lg(\cos x)$; 4.35. $y=2^{\sin x}$; 4.36. $y=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}$.

§4.2. მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციას რიცხვითი **მიმდევრობა** ეწოდება. მოცემულია მიმდევრობა ნიშნავს, რომ გვაქვს საიანადო f წესი, რომელიც ყოველ ნატურალურ n რიცხვს უთანადებს გარკვეულ ნამდვილ a_n რიცხვს. ამრიგად, $a_n=f(n)$. a_n-ს მიმდევრობის ზოგადი წევრი ეწოდება. მიმდევრობა (a_n) სიმბოლოთი აღინიშნება.

(a_n) მიმდევრობას ეწოდება **ზრდადი**, თუ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის $a_n<a_{n+1}$. თუ $a_n>a_{n+1}$, მაშინ მიმდევრობას **კლებადი** ეწოდება. ზრდადი და კლებადი მიმდევრობები მონოტონური მიმდევრობებია.

(a_n) მიმდევრობას **ზემოდან შემოსაზღვრული** ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ ნებისმიერ n ნატურალური რიცხვისათვის სრულდება $a_n\le M$, ხოლო, თუ არსებობს ისეთი m რიცხვი, რომ $a_n\ge m$, ნებისმიერი $n\in N$, მაშინ (a_n) მიმდევრობას **ქვემოდან შემოსაზღვრული** ეწოდება. თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ერთდროულად ზემოდან და ქვემოდან, ანუ

$m \le a_n \le M$, ყოველი n ნატურალური რიცხვისათვის, მაშინ (a_n) **მიმდევრობას შემოსაზღვრული** ეწოდება.

a რიცხვს ეწოდება (a_n) **მიმდევრობის ზღვარი**, თუ ნებისმიერი მცირე $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური $n_0(\varepsilon)$ რიცხვი დამოკიდებული ε-ზე, რომ, როცა $n>n_0(\varepsilon)$, ადგილი ექნება უტოლობას $|a_n-a|<\varepsilon$ და ეს ფაქტი ჩაიწერება ასე $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

მიმდევრობას, რომელსაც სასრული ზღვარი აქვს, **კრებადი** ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიმდევრობა **განშლადია**.

მიმდევრობას, რომლის ზღვარი ნულის ტოლია, **უსასრულოდ მცირე** მიმდევრობა ეწოდება. ამრიგად, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, (a_n) უსასრულოდ მცირეა.

(a_n) მიმდევრობას **უსასრულოდ დიდი** ეწოდება და ვწერთ $\lim a_n = \infty$, თუ ნებისმიერი $A>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი n_0 ნატურალური რიცხვი, რომ სრულდება უტოლობა $|a_n|>A$, ყოეელი $n>n_0$ ნატურალური რიცხეისათვის, ხოლო თუ $|a_n|>A$ უტოლობის ნაცვლად სრულდება უტოლობა $a_n>A$, როცა $n>n_0$, მაშინ (a_n) მიმდევრობას **დადებითი უსასრულოდ დიდი** ეწოდება და ვწერთ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. თუ $a_n<-A$, ნებისმიერი $n>n_0$, მაშინ (a_n) მიმდევრობას **უარყოფითი უსასრულოდ დიდი** ეწოდება და ამ დროს ვწერთ $\lim a_n = -\infty$.

უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე მიმდევრობები ასე უკავშირდება ერთმანეთს:

1. უსასრულოდ დიდი მიმდევრობის შებრუნებული უსასრულოდ მცირეა. განვიხილოთ (a_n) და $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ მიმდევრობები. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

2. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის შებრუნებული უსასრულოდ დიდია. მოცემულია (a_n) უსასრულოდ მცირე მიმდეერობა, ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

მტკიცდება, რომ მიმდევრობის ზღვარს აქვს შემდეგი თეისებები:

1. კრებად მიმდევრობას ერთადერთი ზღვარი აქვს.
2. მუდმივი მიმდევრობის ზღვარი თეით ამ მუდმივის ტოლია.
3. თუ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ ის შემოსაზღვრულია.
4. თუ (a_n) და (b_n) კრებადი მიმდევრობებია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

ხოლო თუ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

5. თუ (a_n) მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული ან კლებადი და ქვემოდან შემოსაზღვრული, მაშინ ის კრებადია (**ვაიერშტრასის თეორემა**).

განვიხილოთ $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ მიმდევრობა. მტკიცდება, რომ ეს მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული, ამიტომ ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად კრებადია. მისი ზღვარი აღინიშნება e სიმბოლოთი და მას **ნეპერის რიცხვი** ეწოდება. ამრიგად,

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

e ირაციონალური რიცხვია და e $\approx 2{,}71832...$

მეოთხე თვისების თანახმად ორი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის ჯამი და ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა, ხოლო უსასრულოდ მცირეთა შეფარდება კი არის $\dfrac{0}{0}$ ტიპის განუზღვრელობა, რადგან უსასრულოდ მცირეთა შეფარდება შეიძლება იყოს: ა) უსასრულოდ მცირე; ბ)უსასრულოდ დიდი; გ) განშლადი და დ) კრებადი სასრული რიცხვისაკენ.

ანალოგიურად, 1) თუ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ და უნდა გამოვთვალოთ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია $\dfrac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობა, ხოლო $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ სახის ზღვარს კი $(\infty-\infty)$ ტიპის განუზღვრელობა ეწოდება. (იგულისხმება, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ და $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ ერთი და იგივე ნიშნიანი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობებია).

2) თუ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ და $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ არის $0\cdot\infty$ ტიპის განუზღვრელობა.

3) თუ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ და $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{\,b_n}$ არის 1^∞ ტიპის განუზღვრელობა.

ასეთი გამოსახულებების ზღვრის პოვნას განუზღვრელობის გახსნა ჰქვია.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. მოცემულია მიმდევრობის ზოგადი წევრი $a_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\dots\cdot2n}$. დავწეროთ ამ მიდევრობის ხუთი წევრი.

$$a_1=\frac{1}{2};\quad a_2=\frac{1\cdot3}{2\cdot4};\quad a_3=\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6};\quad a_4=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8};\quad a_5=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}.$$

მაგალითი 2. მიმდევრობის პირველი წევრების მიხედვით შევადგინოთ მისი ზოგადი წევრი $a_1=\frac{1}{1}$; $a_2=-\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)^2$; $a_3=\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right)^3$; $a_4=-\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)^4$

ცხადია, $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\right)^n$, ანუ $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^n}$.

მაგალითი 3. მიმდევრობის ზღვრის განმარტების საფუძველზე ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+5}=\frac{2}{3}.$$

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ (რაგინდ მცირე) რიცხვი. ვაჩვენოთ, რომ მოიძებნება ისეთი n_0 ნატურალური რიცხვი, რომ შესრულდება უტოლობა

$\left|\frac{2n+3}{3n+5}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$, როცა $n>n_0$.

მართლაც, $\left|\frac{2n+3}{3n+5}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{6n+9-6n-10}{3(3n+5)}\right|=\frac{1}{9n+15}$,

ამოვხსნათ უტოლობა $\frac{1}{9n+15}<\varepsilon$, $1<\varepsilon\cdot 9n+15\varepsilon$

$\varepsilon\cdot 9n>1-15\varepsilon$, $n>\frac{1-15\varepsilon}{9\varepsilon}=\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{5}{3}$.

n_0 რიცხვის როლში შეიძლება ავიღოთ უკანასკნელი უტოლობის უმცირესი ნატურალური ამონახსნი, კერძოდ; $n_0=\left[\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{5}{3}\right]+1$. თუ $\varepsilon=\frac{1}{9000}$,

მაშინ $n_0=\left[\frac{1}{9\cdot\frac{1}{9000}}-\frac{5}{3}\right]+1=\left[1000-\frac{5}{3}\right]+1=\left[998\frac{1}{3}\right]+1=999$. თუ $\varepsilon=\frac{1}{100000}$,

მაშინ $n_0=\left[\frac{100000}{9}-\frac{5}{3}\right]+1=\left[11111\frac{1}{9}-1\frac{2}{3}\right]+1=\left[11109\frac{4}{9}\right]+1=11110$.

ამრიგად, n_0 დამოკიდებულია ε რიცხვზე.

მაგალითი 4. კრებადია თუ განშლადი $a_n=\frac{2n^3+3n+1}{3n^3-7n+2}$ მიმდევრობა?

განვიხილოთ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n+1}{3n^3-7n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3}+\frac{3n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3}-\frac{7n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3-\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{2+0+0}{3-0+0}=\frac{2}{3}.$$ ამრიგად, მიმდევრობა კრებადია.

მაგალითი 5. კრებადია თუ განშლადი $a_n=\frac{n!+(n-1)!}{(n-2)!+(n-3)!}$ მიდევრობა?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(n-1)!}{(n-2)!+(n-3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n+(n-1)!}{(n-3)!\cdot(n-2)+(n-3)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!(n+1)}{(n-3)!(n-2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)!(n-2)(n-1)(n+1)}{(n-3)!(n-1)}=\lim_{n\to\infty}(n-2)(n+1)=\infty.$$

ამრიგად, მიმდევრობა განშლადია.

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$.

საქმე გვაქვს $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობასთან. მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ n-ის უმაღლეს ხარისხზე, ანუ n-ზე, გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-n^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n^{\frac{1}{2}}}{n^{3/4}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-n^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n}+\frac{n^{1/2}}{n}}{\frac{n^{3/4}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}}{n}-\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n^{1/4}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}=\infty.$$

მაგალითი 7. გამოვთვლოთ $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)$.

საქმე გვაქვს $(\infty-\infty)$ სახის განუზღვრელობასთან. გამოსახულება გავამრავლოთ და გავყოთ შესაბამისი სხვაობის არასრულ კვადრატზე. ამრიგად,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3+n^3}{\sqrt[3]{\left(1-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=0.$$

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+1}\right)^n$.

რადგან $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=1$, ამიტომ საქმე გვაქვს 1^∞ სახის განუზღვრელობასთან. გამოვიყენოთ ნეპერის რიცხვთან დაკავშირებული ზღვარი. კერძოდ,

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, როცა $\alpha_n\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+1}-1\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+n+1-n^2-3n-1}{n^2+3n+1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2n}{n^2+3n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2n}{n^2+3n+1}\right)^{\frac{n^2+3n+1}{-2n}}\right)^{\frac{-2n}{n^2+3n+1}n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2}{n^2+3n+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}=e^{-2}.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

4.37. იპოვეთ a_n მიმდევრობის პირველი ხუთი წევრი, თუ

ა) $a_n=1+(-1)^n$; ბ) $a_n=(-1)^n n$; გ) $a_n=\frac{n}{n+1}$;

დ) $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ე) $a_n=\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n$.

4. 38. შეადგინეთ ზოგადი წევრის ფორმულა, თუ ცნობილია მისი რამდენიმე პირველი წევრი ა) $\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{20},\ldots$ ბ) $\frac{1}{5},\frac{3}{1},\frac{5}{17},7\frac{1}{23},\ldots$ გ) 0, 1, 0, 1, … დ) −1, 1, −1, 1, … ე) 0, 2, 0, 4, 06, ..

დავამტკიცეთ, რომ

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{3n}=\frac{1}{3}$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1$, 5) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & |a|<1\\ \infty, & |a|>1\end{cases}$.

გამოთვალეთ

4.39. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n+7}{2n^3-4}$ 4.40. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n-5}{11-n-n^2}$ 4.41. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4+1}{4n^5-1}$.

4.42. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{16n^3-7n^2}{7n^2-8}$ 4.43. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3-(2n+1)^3}{1-3n-2n^2}$.

4.44. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(n+\ell)^2}{(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(n+m)^2}$.

4.45. ა) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{n+1}{3n+1}}$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{n+1}{3n^2+1}}$; გ) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{n^2+1}{3n+1}}$; დ) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1-n^2}{3n+1}}$;

ე) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{3n+1}}$; ვ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{3n^2+1}}$; ზ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n^2+1}{3n+1}}$; თ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1-n^2}{3n+1}}$.

4.46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-2^n}{5^{n+1}-2^{n+2}}$. 447. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{3^{n+2}+10^n}{3^n+5}}$.

4.48. ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{64n^6+7n^2+1}+\sqrt[4]{16n^8+5n^4+2}}{6n^2+\sqrt[3]{2n^4+n}}$.

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^3+n^2+2}-\sqrt[3]{n^4+2}}{2\sqrt[4]{n^6+3n^4+3}-\sqrt[5]{n^6+3n^3+1}}$.

4.49. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+\ldots+3n}{\sqrt{2n^4+5n^2+2}}$.

4.50. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+9+\ldots+3^n}{2+4+\ldots+2^n}$.

4.51. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-7}\right)$.

4.52. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{5n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

4.53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

4.54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-5}-\sqrt{n^2-5n+3}\right)$.

4.55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$. 4.56. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n-1)!}{(n+2)!}$.

4.57. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$. 4.58. ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{2n-1}$, ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n-5}\right)^{2n-1}$.

4.59. ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{3n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}}$, ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+2}{3n-1}\right)^{n+5}$.

4.60. ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$, ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{2n+1}\right)^{-n+2}$, 4.61 $\lim\left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2-1}\right)^{1-n^2}$, 4.62 $\lim\left(\dfrac{5n+2}{5n-1}\right)^{3n}$.

§ 4. 3 ფუნქციის ზღვარი. უწყვეტობა

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის შემცველ რაიმე (a,b) შუალედში, გარდა შესაძლებელია x_0 წერტილისა. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ **ფუნქციის ზღვარი** x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$-თვის არსებობს ისეთი $\delta>0$, რომ $|f(x)-A|<\varepsilon$, როცა $0<|x-x_0|<\delta$ და ეს ფაქტი ჩაიწერება ასე $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

თუ უტოლობა $|f(x)-A|<\varepsilon$ სრულდება მაშინ, როცა $x_0<x<x_0+\delta$, ამბობენ, რომ A რიცხვი არის $y=f(x)$ ფუნქციის **მარჯვენა ზღვარი** x_0 წერტილში და წერენ $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A=f(x_0+)$. ხოლო, თუ უტოლობა $|f(x)-A|<\varepsilon$ სრულდება მაშინ, როცა $x_0-\delta<x<x_0$, ამბობენ, რომ A რიცხვი $y=f(x)$ ფუნქციის **მარცხენა ზღვარია** x_0 წერტილში და წერენ $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=A=f(x_0-)$.

ყველა ის მოსაზრება, განმარტება, დებულება რაც ითქვა მიმდევრობის ზღვრების შესახებ, ძალაშია ფუნქციათა ზღვრებისთვისაც.

ვთქვათ, $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ფუნქციები ერთდროულად უსასრულოდ მცირე ფუნქციები არიან. ე. ი. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ და $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. განვიხილოთ ამ ფუნქციათა შეფარდების ზღვარი $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. შესაძლებელია შემდეგი ოთხი შემთხვევა:

ა) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$. ბ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$. გ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=a\neq 0$. დ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ არ არსებობს.

ა) შემთხვევაში $\alpha(x)$ უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე $\beta(x)$; ბ) შემთხვევაში $\beta(x)$ არის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე, ვიდრე $\alpha(x)$; გ) შემთხვევაში $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეები არიან, იმ კონკრეტულ შემთხვევაში, როდესაც $a=1$, $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ **ტოლფასი უსასრულოდ მცირეები** არიან და ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ $\alpha(x)\sim\beta(x)$. დ) შემთხვევაში უსასრულოდ მცირეები არასადარნი არიან.

ვთქვათ, $\alpha(x)\to 0$, როდესაც $x\to x_0$. მტკიცდება, რომ

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{tg}\,\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{arctg}\,\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)\ln a}=1$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[k]{1+\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\frac{1}{k}$$

ამიტომ, როცა $\alpha(x)\to 0$ გვექნება

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$

$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$, $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x).\ln a$

$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$, $\sqrt[k]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{k}\alpha(x)$

ფუნქციათა ზღვრების გამოთვლის დროს ხშირად ვიყენებთ ძირითად თეორემას ტოლფასი უსასრულოდ მცირეების შესახებ.

მოცემულია $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$ და $\beta_1(x)$ უსასრულოდ მცირე ფუნქციები, ე.ი. $\alpha(x)\to 0$, $\beta(x)\to 0$, $\alpha_1(x)\to 0$ და $\beta_1(x)\to 0$, როდესაც $x\to x_0$. ამასთან, $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, და $\beta(x)\sim\beta_1(x)$. ამ პირობებში ძირითადი თეორემა ყალიბდება ასე: უსასრულოდ მცირეთა შეფარდების ზღვარი არ შეიცვლება, თუ მათ შევცვლით მათივე ტოლფასებით. ამრიგად, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

(a,b) შუალედზე განსაზღვრულ ფუნქციას $x_0\in(a,b)$ წერტილში ეწოდება უწყვეტი, თუ ფუნქციის ზღვარი ამ წერტილში უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას ამავე წერტილში ე. ი. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

თუ ეს პირობა დაირღვა, x_0 წერტილში ფუნქცია წყვეტილია. ეახლენთ წყვეტის წერტილების კლასიფიკაციას. კერძოდ, x_0 I გვარის წყვეტის წერტილია, თუ $f(x_0-0)$ და $f(x_0+0)$ სასრული სიდიდეებია. ამასთან, თუ $f(x_0-0)= =f(x_0+0)\neq f(x_0)$, მაშინ ეს x_0 I გვარის აცილებადი წყვეტის წერტილია. თუ $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, მაშინ ეს I გვარის წყვეტის წერტილი აცილებადი არ არის და სხვაობას $f(x_0-0)-f(x_0+0)$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილში. თუ ერთ-ერთი ცალმხრივი ზღვრებიდან $f(x_0-0)$ ან $f(x_0+0)$ არ არსებობს ან არსებობს და ∞-ის ტოლია, მაშინ x_0 წერტილი $f(x)$ ფუნქციის II გვარის წყვეტის წერტილია.

მტკიცდება, რომ ყველა ძირითადი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში და ფუნქციის ზღვრის გამოთვლისას ძირითადად ამ თვისებით ვსარგებლობთ.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^5-9x-7}{3x^6-x^3-1}$.

ამოხსნა. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^5-9x-7}{3x^6-x^3-1} = \frac{4\cdot 1-9\cdot 1-7\cdot 1}{3\cdot 1-1-1} = \frac{-12}{1} = -12$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$.

ამოხსნა. მრიცხველი და მნიშვნელი უსასრულოდ მცირე ფუნქციები არიან, როდესაც $x\to 1$, ე. ი. საქმე გვაქვს $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობასთან. მოვახდინოთ მამრავლებად დაშლა, გვექნება:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^3-x)-(2x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{x(x^2-1)-2(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x^2+x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2}{3}.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to+0}(\sqrt{9x^2+1}-3x)$.

ამოხსნა. საქმე გვაქვს (∞–∞) სახის განუზღვრელობასთან.

$$\lim_{x\to+0}(\sqrt{9x^2+1}-3x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+1}-3x)(\sqrt{9x^2+1}+3x)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0\cdot$$

მაგალითი 4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(3x+2)-x^2(3x^2-4)}{(3x^2-4)(3x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^3-3x^4+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4x^2}{x^3}}{9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}}=\frac{2}{9}.$$

მაგალითი 5. ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin x=0$. მართლაც, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$, ხოლო $-1\le\sin x\le 1$; უსასრულო მცირე ფუნქციისა და შემოსაზღრული ფუნქციის ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin x=0$.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

ამოხსნა. გვაქვს $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობა. arcsin(x+2)~(x+2), x→-2.

ამიტომ $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+2}{x(x+2)}=-\frac{1}{2}$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}=\lim\frac{2\sin a\cdot\sin(-x)}{x}=-2\sin a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-2\sin a$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

ამოხსნა. $\cos ax \to 1, \cos bx \to 1$, როცა $x \to 0$. გვაქვს $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობა. $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$, როცა $\alpha(x) \to 0$. ამიტომ,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos ax-1))}{\ln(1+(\cos bx-1))}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}}=\frac{a^2}{b^2}.$$

მაგალითი 9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^{\frac{x}{2}}-1}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}\cdot\ln 7}{3x}=\frac{1}{6}\ln 7=\ln\sqrt[6]{7}; \qquad (7^{\frac{x}{2}}-1\sim\frac{x}{2}\cdot\ln 7;\ \ln(1+3x)\sim 3x)$$

მაგალითი 10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-3^{-2x}}{1+3^{-2x}}=1;$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}=-1$$

ამრიგად, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\begin{cases}1, x\to+\infty\\ -1, x\to-\infty\end{cases};$

ვიპოვოთ ცალმხრივი ზღვრები

მაგალითი 11.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2\ .$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{1-x}=-\lim_{x\to 1^-}(x+1)=-2.$$

მაგალითი 12. $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{5}{(x-2)^3}=\infty;\quad \lim\limits_{x\to 2-}\frac{5}{(x-2)^3}=-\infty\ .$

მაგალითი 13. მოცემული ფუნქციისათვის მოვახდინოთ წყვეტის წერტილების კლასიფიკაცია და I გვარის წყვეტის შემთხვევაში ვიპოვოთ ფუნქციის ნახტომი.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+3), & \text{როცა} \quad -\infty<x\le 1\\ 6-5x, & \text{როცა} \quad 1<x<3\\ x-3, & \text{როცა} \quad 3\le x<\infty\end{cases}$$

მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty;\ \infty)$ შუალედი. ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty;1)$, $(1;3)$ და $(3;\infty)$ შუალედებზე. წყვეტის წერტილები შეიძლება იყოს $x=1$ და $x=3$. განვიხილოთ ამ წერტილებში ცალმხრივი ზღვრები.

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{5}(2x^2+3)=1.$$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1+}(6-5x)=1$. განმარტების თანახმად f(1)=1. ამრიგად, ფუნქცია უწყვეტია.

ახლა განვიხილოთ ცალმხრივი ზღვრები x=3 წერტილში. $\lim_{x\to3^-} f(x)=$ $=\lim_{x\to3^-}(6-5x)=-9$, ხოლო მარჯვენა ზღვარი $\lim_{x\to3+} f(x)=\lim_{x\to3^+}(x-3)=0$. ამრიგად, x=3 წერტილში მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები სასრულია, მაგრამ ერთმანეთის ტოლი არ არის x=3 წერტილში ფუნქცია განიცდის წყვეტას. ნახტომი f(3+0)–f(3–0)=0–(–9)=9.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოთვალეთ ($\frac{0}{0}$ ტიპის განუზღვრელობა)

4.63. ა) $\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; ბ) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; გ) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

4.64. $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+3x^3}$. 4.65. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$. 4.66. $\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

4.67. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$. 4.68. $\lim_{x\to3}\frac{(x^2-5x+6)^3}{(x^2+x-12)^3}$. 4.69. $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-1}{x+1}$.

4.70. $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$. 4.71. $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

4.72. $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. 4.73. $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{(x+2)(x^2-2x+4)}$.

4.74. $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$. 4.75. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{81+x^2}-9}{\sqrt{25+x^2}-5}$.

4.76. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$. 4.77. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. 4.78. $\lim_{x\to64}\frac{4-\sqrt[3]{x}}{8-\sqrt{x}}$.

გამოთვალეთ ($\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობა)

4.79. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$. 4.80. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$.

4.81. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2-1}{2x^3-3x^2+x}$. 4.82. $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$.

4.83. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+7}}$. 4.84. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

4.85. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+5x^2+1}}{4x+2}$. 4.86. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-3^x}{2^{x+1}+3^2}$ 4.87. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{2^x+5}$

4.88. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x+3}+\sqrt[4]{x^3+2x^2+1}}{5x+2}$. 4.89. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+5x+1}}{3x-1}$.

გამოთვალეთ ($\infty-\infty$ განუზღვრელობა)

4.90. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$. 4.91. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)$.

4.92. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$. 4.93. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

4.94. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$. 4.95. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

4.96. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-b}-\sqrt{x}\right)$. 4.97. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x}\right)$.

4.98. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$. 4. 99. ა) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^x-3^x\right)$ ბ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2^x-3^x\right)$

ტოლფასი უსასრულოდ მცირე ფუნქციები და მათთან დაკავშირებული ზღვრები

4.100. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3 x}{x}$. 4.101. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$. 4.102. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$.

4.103. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$. 4.104. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{x^2}$. 4.105. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 4x}{5x}$.

4.106. $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$. 4.107. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}mx}{\sin nx}$. 4.108. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$.

4.109. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$. 4.110. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}x_0}{x-x_0}$. 4.111. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

4.112. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$. 4.113. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2-\mathrm{arctg}^2x}{3x^2+\mathrm{arctg}^2x}$. 4.114. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)^2}$.

4.115. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\mathrm{tg}2x}$. 4.116. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\cos x}$. 4.117. $\lim\limits_{z\to2}(2-z)\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}z$.

4.118. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\mathrm{tg}3x$. 4.119. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$. 4.120. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-4^x}{x^2+x}$.

4.121. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$ 4.122. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+4x)}$. 4.123. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{\mathrm{arctg}x^2}$.

4.124. $\lim\limits_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}$. 4.125. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}$. 4.126. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\mathrm{tg}2x}-e^{\mathrm{tg}x}}{x}$.

4.127. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)$. 4. 128. ა) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{2x^2-x+4}\right)^x$. ბ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+4}{x^2+3x-1}\right)^x$.

4.129. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$. 4.130. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$. 4.131. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x$.

4.132. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$. 4.133. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$. 4.134. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

4.135. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-4}\right)^{5-x^2}$. 4.136. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\mathrm{tg}^2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

4.137. $\lim\limits_{x\to\pi}(1-\sin x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}}$. 4.138. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}}$.

სხვადასხვა ზღვრები

4.139. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot\sin x$. 4.140. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{e^x}{e^x+1}$. 4.141. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3^x}\mathrm{arctg}x$.

4.142. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$. 4.143. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arcsin x}{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$. 4.144. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\mathrm{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

მითითება. $\mathrm{arctg}\frac{x+1}{x+2}=y,\ y\to\frac{\pi}{4},\ x\to\infty.$

4.145. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$. 4.146. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{3}{x}}$. 4.147. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x\mathrm{arctg}x}{3x^2-x\mathrm{arctg}x}$.

იპოვეთ ცალმხრივი ზღვრები

4.148. $\lim\limits_{x\to 1-}2^{\frac{1}{x-1}}$. 4.149. $\lim\limits_{x\to 1+}2^{\frac{1}{x-1}}$. 4.150. $\lim\limits_{x\to 3\pm}5^{\frac{1}{3-x}}$.

4.151. $\lim\limits_{x\to 3-}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3-x}}$. 4.152. $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{x-|x|}{2x}$. 4.153. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x-|x|}{2x}$.

4.154. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x$.   4.155. $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}$.

4.156. $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}$. 4.157. $\lim\limits_{x\to 0\pm}(e+x)^{\frac{1}{x}}$.

მოცემული ფუნქციებისათვის მოახდინეთ წყვეტის წერტილების კლასიფიკაცია და I გვარის წყვეტის წერტილებისათვის იპოვეთ ნახტომი

4.158. $y=\dfrac{x}{x^2+x-6}$.   4.159. $y=\dfrac{1}{x^3+3x^2-4x}$.   4.160. $y=\dfrac{2x-1}{2x^2+3x-2}$.

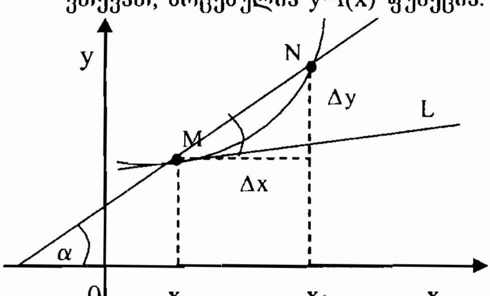
4.161. $y=\begin{cases} x^2+2, & x\le 0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$.   4.162. $y=\begin{cases} 1-x^3, & x<0 \\ (x-1)^3, & 0\le x\le 2 \\ 4-x, & x>2 \end{cases}$.

4.163. $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ 5x-x^2, & x\ge 0 \end{cases}$.   4.164. $y=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

4.165. $y=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x\ne 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$ 4.166. $y=\begin{cases} \dfrac{\arcsin x^2}{2x}, & x\ne 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$.

§ 4.4 ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

ვთქვათ, მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქცია. განვიხილოთ არგუმენტის ორ x და x_1 მნიშვნელობაზე ფუნქციის მნიშვნელობები $y=f(x)$ და $y_1=f(x_1)$



ნახ. 60

y_1-y სხვაობას y ფუნქციის ნაზრდი ეწოდება და აღინიშნება Δy სიმბოლოთი, ხოლო $\Delta x = x_1 - x$ სხვაობას კი არგუმენტის ნაზრდი.

განვიხილოთ შეფარდება $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. ნახ. 60-დან ცხადია, რომ

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ წარმოადგენს MN მკვეთის საკუთხო კოეფიციენტს $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$.

f(X) ფუნქციის წარმოებული x წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი $\Delta x \to 0$ და აღინიშნება $f'(x)$ სიმბოლოთი ან $\frac{dy}{dx}$-ით. ამრიგად,

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

თუ f'(x) სასრული რიცხვია, მაშინ y=f(x) ფუნქციას x წერტილში წარმოებადი ეწოდება.

გეომეტრიულად წარმოებულის სიდიდე არის y=f(x) ფუნქციის გრაფიკის მიმართ M(x,y) წერტილში გავლებული ML მხების საკუთხო კოეფიციენტი.

გაწარმოების ოპერაციის შესრულების დროს ვეყრდნობით გაწარმოების ძირითად წესებსა და ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილს.

გაწარმოების წესები:

1. y=Const. $y' = (C)' = 0$.

ვთქვათ y=u(x) და y=v(x) წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ

2. y=u±v; $y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$

3. $y = u \cdot v; \quad y' = (u \cdot v)' = u'v + v'u.$

ვთქვათ, v=Const, მაშინ y=Cu

$y' = (cu)' = (c)'u + c(u)' = cu'$.

ვ.ი. მუდმივი თანამამრავლი გადის წარმოებულის ნიშნით გარეთ.

4. $y = \frac{u}{v}; \quad y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}.$

5. ვთქვათ, y=f(u), სადაც u=φ(x). f ფუნქცია წარმოებადია u არგუმენტის მიმართ, ხოლო φ ფუნქცია წარმოებადია x არგუმენტის მიმართ. მაშინ y=f(φ(x)) რთული ფუნქცია წარმოებადია x-ის მიმართ და $y = \big(f(\varphi(x))\big)' = f'_u \cdot u'_x$.

ძირითად ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი (I ცხრილი).

1.	$y=x^\alpha$, $y' = \alpha x^{\alpha-1}$.	8.	$y=\operatorname{tg}x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
2.	$y=a^x$ $y' = a^x \cdot \ln a$.	9.	$y=\operatorname{ctg}x$, $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

3. $y=e^x$, $y'=e^x$.

4. $y=\log_a x$, $y'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$

5. $y=\ln x$, $y'=\dfrac{1}{x}$.

6. $y=\sin x$, $y'=\cos x$.

7. $y=\cos x$, $y'=-\sin x$.

10. $y=\arcsin x$, $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $y=\arccos x$ $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $y=\mathrm{arctg}\,x$, $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

13. $y=\mathrm{arcctg}\,x$, $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

$y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებულისა და დამოუკიდებელი ცვლადის (არგუმენტის) დიფერენციალის ნამრავლს ფუნქციის დიფერენციალი ეწოდება და აღინიშნება სიმბოლოთი dy. ამრიგად, $dy=f'(x)\cdot dx$.

$y=f(x)$ ფუნქციის წამოებული $y'=f'(x)$ x არგუმენტის ფუნქციაა. თუ $f'(x)$ ფუნქცია წარმოებადია, მაშინ შეგვიძლია განვიხილოთ მისი წარმოებული და მას $f(x)$ ფუნქციის II რიგის წარმოებული ეწოდება და აღინიშნება y'' სიმბოლოთი. ამრიგად $y''=(y')'=\left(f'(x)\right)'$. ანალოგიურად განიმარტება ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული: $y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'$.

განვიხილოთ ელემენტარული ფუნქციები u არგუმენტის მიმართ, სადაც u თავის მხრივ x არგუმენტის ფუნქციაა, ანუ $u=u(x)$. მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს და ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების I ცხრილს, გვექნება ასეთი II ცხრილი:

1. $y=u^n$, $y'=nu^{n-1}\cdot u'$.

2. $y=a^u$, $y'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$.

3. $y=e^u$, $y'=e^u\cdot u'$.

4. $y=\log_a^u$, $y'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$.

5. $y=\ln u$, $y'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$.

6. $y=\sin u$, $y'=\cos u\cdot u'$.

8. $y=\mathrm{tg}\,u$, $y'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.

9. $y=\mathrm{ctg}\,ux$, $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.

10. $y=\arcsin u$, $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

11. $y=\arccos u$, $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

12. $y=\mathrm{arctg}\,u$, $y'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

13. $y=\mathrm{arcctg}\,u$, $y'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

7. $y=\cos u$, $y' = -\sin u \cdot u'$.

$y=\varphi(x)^{\omega(x)}$, $\varphi(x)>0$, სახის ფუნქციას ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება. ვთქვათ, $\varphi(x)$ და $\omega(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია. ამ ფუნქციის წარმოებულის მოსაძებნად წინასწარ ვისარგებლოთ ძირითადი ლოგარითმული იგივეობით. მაშინ $y=\varphi(x)^{\omega(x)} = e^{\ln \varphi(x)^{\omega(x)}} = e^{\omega(x)\cdot \ln \varphi(x)}$, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად,

$$y' = \left(e^{\omega(x)\cdot \ln \varphi(x)}\right)' = e^{\omega(x)\cdot \ln \varphi(x)}\left(\omega(x)\cdot \ln \varphi(x)\right)' =$$

$$= \varphi(x)^{\omega(x)} \cdot \left(\omega'(x)\cdot \ln \varphi(x) + \left(\ln \varphi(x)\right)' \omega(x)\right)$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. მოცემულია $y=\arcsin e^x$, ეიპოვოთ y'. ეს ფუნქცია x არგუმენტის მიმართ რთულია. რთული ფუნქციის წარმოებულის მოძებნის დროს II ცხრილით რომ ეისარგებლოთ, საჭიროა, მოცემული ფუნქციის ისეთი ნაწილი ავღნიშნოთ u-თი, რომ u-ს მიმართ მიეიღოთ ელემენტარული ფუნქცია. ჩვენ თუ e^x-ს დავუშვებთ რომ არის u, მაშინ arcsinu ფუნქცია u-ს მიმართ იქნება ელემენტარული.

$$y' = (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \left(e^x\right)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

მაგალითი 2. $y=\arcsin^2 e^x$ ეიპოვოთ y'. დავუშვათ, რომ $\arcsin e^x=u$, მაშინ $y=u^2$. ეს ფუნქცია u-ის მიმართ ელემენტარულია. II ცხრილიდან მივიღებთ: $y' = \left(u^2\right)' = 2u\cdot u'$ ე.ი. $y' = 2\arcsin e^x \cdot \left(\arcsin e^x\right)' = 2\arcsin e^x \cdot \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

მაგალითი 3. $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1}$; ვიპოვოთ y'.

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

მაგალითი. 4. $y=(\sin x)^{tgx}$. ვიპოვოთ y'.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ძირითადი ლოგარითმული იგივეობით

$$y=(\sin x)^{tgx} = e^{\ln(\sin x)^{tgx}} = e^{tgx\cdot \ln(\sin x)}.$$

$$y' = e^{tgx\cdot \ln(\sin x)}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\ln \sin x + tgx \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^{tgx}\left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}+1\right).$$

მაგალითი 5. $y=\sqrt{x\cos x\sqrt{1-e^x}}$; ვიპოვოთ dy.

ამოხსნა. $dy=y'dx$. წარმოებულის გამოსათვლელად განვიხილოთ მოცემული ფუნქციის ნატურალური ლოგარითმი

$$\ln y=\ln\sqrt{x\cos x\sqrt{1-e^x}}=\frac{1}{2}\left(\ln x+\ln\cos x+\frac{1}{2}\ln(1-e^x)\right).$$

გავაწარმოოთ მიღებული ტოლობა x ცვლადის მიმართ, მივიღებთ

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\ln x+\ln\cos x+\frac{1}{2}\ln(1-e^x)\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{(-\sin x)}{\cos x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(-e^x)}{1-e^x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{tg}x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}\right),$$

ამრიგად, $y'=y\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{tg}x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}\right)$, ამიტომ

$$dy=\sqrt{x\cos x\sqrt{1-e^x}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{tg}x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}\right)dx\cdot$$

მაგალითი 6. $y=\frac{1}{x+2}$; ვიპოვოთ $y^{(n)}$.

ამოხსნა. $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$. ამიტომ ჯერ ვიპოვოთ y'.

$$y'=-\frac{1}{(x+2)^2};\quad y''=(y')'=2\cdot\frac{1}{(x+2)^3};\quad y'''=-6\cdot\frac{1}{(x+2)^4};$$

და ა.შ. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\frac{1}{(x+2)^{n+1}}.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

4.167. $y=3^5+5^3+x$.

4.168. $y=x^n+nx$.

4.169. $y=mx^n+nx^m$.

4.170. $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+0{,}1x^9$.

4.171. $y=\frac{2}{x^4}+\frac{3\sqrt[3]{x}}{x}+\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}+1$.

4.172. $y=\frac{5x^2+4\sqrt[3]{x}+3x^4}{2\sqrt{x}}$.

4.173. $y=\frac{u^2+2\sqrt[3]{u}+5}{u^3}$, $y'(1)$.

4.174. $y=\frac{2x^3+x^6+1}{3}$.

4.175. $y=\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x+1}$. 4.176. $y=2e^x+\ln x$. 4.177. $y=2^x\cdot e^x$.

4.178. $y=x\,tgx+ctgx$. 4.179. $y=\dfrac{2-3\sqrt[3]{x}}{2+3\sqrt[3]{x}}$. 4.180. $y=3x^3\ln x-x^3$.

4.181. $y=\dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}$. 4.182. $y=4\sin x+x\cos x+\cos 2$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=?$

4.183. $y=x^2 arctgx-2arcctgx$, $y'(1)=?$ 4.184. $y=\dfrac{3^x}{\arcsin x}$

4.185. $y=\dfrac{x^{10}}{10^x}+10^3\ln 10$. 4.186. $y=\dfrac{1+3^x}{1-3^x}$. 4.187. $y=\left(\sqrt[5]{x}+2x^3\right)\log_2 x$.

4.188. $y=\dfrac{\arccos x}{x^2}$. 4.189. $y=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$. 4.190. $y=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$.

იპოვეთ რთული ფუნქციის წარმოებულები

4.191. $y=\ln(2x^3+3x^2)$. 4.192. $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$.

4.193. $y=\cos^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$. 4.194. $y=(2x^2+4x+5)^9$. 4.195. $y=\sqrt[3]{1+\sin^2\sqrt{x}}$.

4.196. $y=5^{tg^2 2x}+ctg^3x$. 4.197. $y=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{4+x^2}}$ იპოვეთ $y'(0)$.

4.198. $y=\sqrt{1-(\arccos x)^2}$. 4.199. $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

4.200. $y=\ln tg\dfrac{2x+1}{4}$. 4.201. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

4.202. $y=-ctg^2\dfrac{x}{2}-2\ln\sin\dfrac{x}{2}$. 4.203. $y=arctg\sqrt{4x^2-1}$.

4.204. $y=e^{-x}-\sin e^{-x}\cdot\cos e^{-x}$ 4.205. $y=1-e^{\sin^2 3x}\cdot\cos^2 3x$.

4.206. $y=-\ln\left(\dfrac{1}{\sin x}+ctgx\right)$. 4.207. $y=\ln\dfrac{x^5}{x^5+2}$.

4.208. $y=\log_5\left(\cos^2 x+1\right)$. 4.209. $y=3^{\sqrt[3]{x^3+3}}$. 4.210. $y=\dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$.

4.211. $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{18}$. 4.212. $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^{2}$.

4.213. $y=\arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$. 4.214. $y=\arcsin e^{x}+\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$.

4.215. $y=x^2+x\cdot\sin 2x+\cos^2 x$. 4.216. $y=\frac{\sin x}{1+\ln\sin x}$. 4.217. $y=\frac{x}{\sqrt{1-mx^2}}$.

4.218. $y=10^{\left(\operatorname{arctg}10\sqrt{x}\right)^2}$. 4.219. $y=\frac{3^{\cos 2x}}{\arccos\sqrt{x}}$. 4.220. $y=x\cdot\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2$.

4.221. $y=\operatorname{tg}^3 x(\operatorname{arctg}x)^3$.

გამოიყენეთ ლოგარითმული წარმოებული და გააწარმოეთ შემდეგი ფუნქციები :

4.222. $y=x^{\sqrt{x}}$. 4.223. $y=x^{\frac{1}{x}}$. 4.224. $y=x^{\sin(x+1)}$. 4.225. $y=(\sin x)^x$.

4.226. $y=(\ln x)^x$. 4.227. $y=(\cos x)^{\arccos x}$. 4.228. $y=x^{x^3}+3^{x^x}$.

4.229. $y=(\arcsin x)^x$. 4.230. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. 4.231. $y=\left(x^2+4\right)^{\cos x}$.

4.232. $y=x^3e^{x^2}\sin 2x$. 4.233. $y=\frac{(x+3)^3\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$. 4.234. $y=\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-4)^2}{x^7}}$.

იპოვეთ მაღალი რიგის წარმოებულები

4.235. $y=-\frac{22}{x+5}$, $y''=?$ 4.236. $y=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$, $y''=?$

4.237. $y=-\frac{1}{9}x\cdot\sin 3x-\frac{2}{27}\cos 3x$, $y''=?$ 4.238. $y=\frac{x}{6(x+1)}$, $y'''=?$

4.239. $y=\frac{1}{2}\ln^2 x$, $y'''=?$ 4.240. $y=(2x+3)^{\frac{7}{2}}$, $y'''=?$

4.241. $y=e^{ax}$, $y^{(n)}=?$ 4.242. $y=\sin(kx+b)$, $y^{(n)}=?$

4.243. $y=\cos(-4x+3)$, $y^{(n)}=?$ 4.244. $y=\frac{1}{x+a}$, $y^{(n)}=?$

4.245. $y=\frac{2x}{x^2-a^2}$, $y^{(n)}=?$ მითითება. $y=\frac{2x}{x^2-a^2}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}$.

4.246. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$, $y^{(n)}=?$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების დიფერენციალი

4.247. $y=\frac{e^{3x}}{3}+\sin^2(x^3+1)$. 4.248. $y=x^n\cdot\ln^2 x$. 4.249. $y=\mathrm{tg}^4(2x+1)$.

4.250. $y=\frac{e^{\sin^2 x}}{a^3}$. 4.251. $y=\ln^3(\cos^2 x+4)$. 4.252. $y=\mathrm{arctg}(3^x)$.

4.253. $y=\sqrt[3]{2x^2+3x+4}$. 4.254. $y=2^{\mathrm{tg}^3 4x}$.

4.255. $y=x^{2x}+x^2$. 4.256. $y=\lg^2(x^2+25)$.

§4.5. განუზღვრელობის გახსნის ლოპიტალის წესი

ლოპიტალის თეორემა. ვთქვათ, $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში წარმოებადი ფუნქციებია, გარდა, შესაძლებელია, თვით x_0 წერტილისა, ამასთან, $\varphi'(x)\neq 0$ ამ მიდამოში. ვთქვათ, ეს ფუნქციები ერთდროულად უსასრულოდ მცირეები არიან ან ერთდროულად უსასრულოდ დიდები, x_0 წერტილში. ე.ი. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ და $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ ან $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ და $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, ამასთან, თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ სასრული ან უსასრულო, მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. თვით x_0 წერტილი შეიძლება იყოს როგორც სასრული, ასევე უსასრულო.

ლოპიტალის წესის გამოყენებით შეიძლება გაიხსნას $\frac{0}{0}$ და $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობები. $0\cdot\infty$ და $(\infty-\infty)$ სახის განუზღვრელობები იგივური გარდაქმნებით დაიყვანება $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობებამდე. 1^∞ ∞^0 ან 0^0 სახის განუზღვრელობების გახსნისათვის გამოიყენება ფორმულა $u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}$.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^4+4x^3-2x^2-8}{x^3+4x^2+3x-2}$.

ამოხსნა. საქმე გვაქვს $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობასთან. გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი, მივიღებთ:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^4+4x^3-2x^2-8}{x^3+4x^2+3x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(3x^4+4x^3-2x^2-8\right)'}{\left(x^3+4x^2+3x-2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{12x^3+12x^2-4x}{3x^2+8x+3}=\frac{-40}{-1}=40.$$

მაგალითი 2. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{2ax-2ac}{2bx-2bc}=$

$$=\lim_{x\to c}\frac{(2ax-2ac)'}{(2bx-2bc)'}=\lim_{x\to c}\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}.$$

მაგალითი 3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^n-x^n}{tga^n-tgx^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(a^n-x^n\right)'}{\left(tga^n-tgx^n\right)'}=$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-nx^{n-1}}{-\dfrac{1}{\cos^2 x^n}\cdot n\cdot x^{n-1}}=\lim_{x\to a}\left(\cos^2 x^n\right)=\cos^2 a^n.$$

მაგალითი 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(x^2\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}.$$

მაგალითი 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x^2+2ax}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x+a}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+2ax}\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}}{\dfrac{2x+2a}{2\sqrt{x^2+2ax}}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+a}}}{\dfrac{x+2a}{\sqrt{x^2+2ax}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+2a}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+a}\cdot(x+2a)}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{2a}}{\sqrt{a}\cdot 2a}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

მაგალითი 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{3x}-3x-1\right)'}{\left(\sin^2 5x\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{2\sin 5x\cdot\cos 5x\cdot 5}=\frac{3}{10}\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}=$$

$$=\frac{3}{10}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)'}{(\sin 5x)'}\cdot 1=\frac{3}{10}\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{\cos 5x\cdot 5}=\frac{9}{50}\cdot\frac{1}{1}=\frac{9}{50}.$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)\cdot \mathrm{ctg}x$.

ამოხსნა. საქმე გვაქვს $0\cdot\infty$ სახის განუზღვრელობასთან. ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით განუზღვრელობის სახე შევცვალოთ. შემდეგ გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი, მივიღებთ:

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)\cdot \mathrm{ctg}x=\lim_{x\to 0}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)'}{(\mathrm{tg}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\frac{1}{\cos^{2}x}}=\lim_{x\to 0}\cos^{2}x\left(e^{x}-e^{-x}\right)=1\cdot 0=0.$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{arctg}x}-\frac{1}{x}\right)$.

ამოხსნა. $(\infty\text{-}\infty)$ სახის განუზღვრელობა შევცვალოთ ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით, გვექნება:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{arctg}x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{arctg}x}{x\,\mathrm{arctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\mathrm{arctg}x\right)'}{\left(x\,\mathrm{arctg}x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^{2}}}{\mathrm{arctg}x+\frac{x}{1+x^{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+x^{2}-1}{1+x^{2}}}{\frac{(1+x^{2})\mathrm{arctg}x+x}{1+x^{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{(1+x^{2})\mathrm{arctg}x+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{(1+x^{2})\mathrm{arctg}x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x\,\mathrm{arctg}x+1+1}=0.$$

მაგალითი 9. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^{x}\right)^{1/x}$.

ამოხსნა. საქმე გვაქვს 1^{∞} სახის განუზღვრელობასთან, გვექნება:

$$\lim_{x\to 0}\left(x+e^{x}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\ln(x+e^{x})^{1/x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(x+e^{x})}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^{x})}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(x+e^{x}))'}{(x)'}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1+e^{x}}{x+e^{x}}}{1}}=e^{\frac{1+1}{0+1}}=e^{2}.$$

მაგალითი 10. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

ამოხსნა. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to1} e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = \lim\limits_{x\to1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გახსენით $\frac{0}{0}$ და $\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობები ლოპიტალის წესით

4.257. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^5-2x^3+5x^2-6}{4x^3+3x^2+x-8}$.

4.258. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{\ln(1+x)}$.

4.259. $\lim\limits_{x\to2}\frac{2-x+\ln(x-1)}{2-\sqrt{4x-x^2}}$.

4.260. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{\sin^3 x}$.

4.261. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.

4.262. $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln\sin ax}{\ln \operatorname{tg}bx}$.

4.263. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

4.264. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

4.265. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}\pi-3\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{2}{x}}-1}$.

4.266. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

4.267. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x^n}$, $n>0$.

4.268. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln(2x^2-7)}{2x^2-5x+2}$.

4.269. $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{\pi-2\arcsin x}$.

4.270. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

4.271. $\lim\limits_{x\to a+}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

4.272. $\lim\limits_{x\to1+}\frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

4.273. $\lim\limits_{x\to1-}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

4.274. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{5^x}$.

გახსენით $0\cdot\infty$ და $\infty-\infty$ ტიპის განუზღვრელობები ლოპიტალის წესით

4.275. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \mathrm{ctg}\pi x)$. 4.276. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot \mathrm{ctg}x)$.

4.277. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \mathrm{ctg}x$. 4.278. $\lim\limits_{x\to \infty} x(3^{\frac{1}{x}}-1)$.

4.279. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\mathrm{ctg}x\right)$. 4.280. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

4.281. $\lim\limits_{x\to \infty} x\cdot \mathrm{tg}\frac{a}{x}$. 4.282. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot \mathrm{ctg}\pi(x-2)$.

4.283. $\lim\limits_{x\to 2+}\ln(x-1)\cdot\ln(x-2)$. 4.284. $\lim\limits_{x\to 1+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$.

გახსენით 0^0, ∞^0, 1^∞ ტიპის განუზღვრელობები

4.285. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$. 4.286. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2)^{\sin x}$.

4.287. $\lim\limits_{x\to 0+}(\mathrm{arctg}x)^{\sin x}$. 4.288. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+3^x)^{\frac{1}{x}}$.

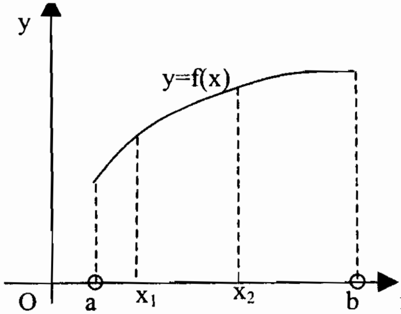
4.289. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{4}{x^2}}$. 4.290. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-}(\mathrm{tg}x)^{x-\frac{\pi}{2}}$.

4.291. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{4}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)^{\frac{1}{x-1}}$. 4.292. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

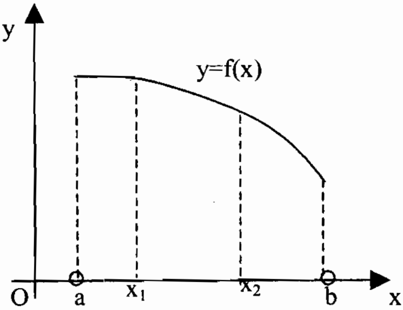
4.293. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. 4. 294. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

§4.6. ფუნქციის მონოტონურობა და ექსტრემუმი

$f(x)$ ფუნქციას (a,b) შუალედზე **ზრდადი** ეწოდება, თუ ამ შუალედის ნებისმიერი x_1 და x_2 წერტილებისათვის სრულდება პირობა $f(x_1)<f(x_2)$, როცა $x_1<x_2$ (ნახ.61), ხოლო თუ $f(x_1)>f(x_2)$, როცა $x_1<x_2$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას **კლებადი** ეწოდება (a,b)-ზე (ნახ. 62). ზრდად და კლებად ფუნქციებს **მონოტონური** ფუნქციები ეწოდებათ.



ნახ. 61

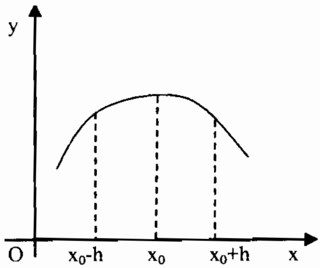


ნახ. 62

ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ნიშნები:

1. თუ $f'(x)>0$, როცა $x\in(a,b)$, მაშინ f(x) ფუნქცია ზრდადია (a,b) შუალედში.

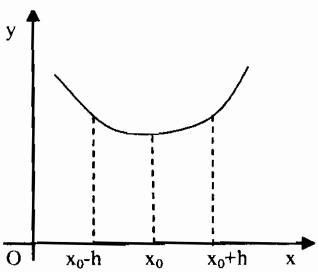
2. თუ $f'(x)<0$, როცა $x\in(a,b)$, მაშინ f(x) ფუნქცია კლებადია (a,b) შუალედში.



ნახ. 63

$f(x_0)$ სიდიდეს ეწოდება f(x) ფუნქციის **მაქსიმუმი**, თუ საკმარისად მცირე h>0-თეის სრულდება პირობები $f(x_0-h)<f(x_0)$ და $f(x_0+h)<f(x_0)$ (ნახ.63), ხოლო თუ $f(x_0-h)>f(x_0)$ და $f(x_0+h)>f(x_0)$., მაშინ $f(x_0)$ სიდიდეს f(x) ფუნქციის **მინიმუმი** ეწოდება (ნახ.64), x_0 წერტილს კი – შესაბამისად მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილი.

ფუნქციის მაქსიმუმსა და მინიმუმს ფუნქციის **ექსტრემუმი** ეწოდება, ხოლო მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს – ექსტრემუმის წერტილები.



ნახ. 64

ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა. თუ f(x) ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია ექსტრემუმი, მაშინ $f'(x_0)$ ნულის ტოლია ან არ არსებობს.

x_0 წერტილს, რომელზედაც $f'(x_0)=0$, სტაციონარული წერტილი ეწოდება. წერტილებს განსაზღვრის არედან, რომლებზედაც $f'(x)=0$ ან $f'(x)$ არ არსებობს, **კრიტიკული წერტილები** ეწოდებათ. ექსტრემუმის არსებობის თვალსაზრისით კრიტიკული წერტილები საეჭვო წერტილებია.

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი ნიშნები. I წესი, თუ x_0 წარმოადგენს f(x) ფუნქციის კრიტიკულ წერტილს და საკმარისად მცირე h>0-თვის $f'(x_0-h)>0$, $f'(x_0+h)<0$ მაშინ f(x) ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია მაქსიმუმი; ხოლო თუ $f'(x_0-h)<0$ და $f'(x_0+h)>0$, მაშინ f(x) ფუნქციას x_0

წერტილში გააჩნია მინიმუმი. თუ $f'(x_0-h)$ და $f'(x_0+h)$ ერთნაირი ნიშნები აქვთ, მაშინ x_0 წერტილი ექსტრემუმის წერტილი არ არის.

II წესი. თუ $f'(x_0)=0$ და $f''(x_0)\neq 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ექსტრემუმი გააჩნია. კერძოდ, თუ $f''(x_0)<0$, მაშინ x_0 მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო თუ $f''(x_0)>0$, მაშინ x_0 წერტილი მინიმუმის წერტილია.

[a,b] დახურულ შუალედზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის **უდიდესი** და **უმცირესი** მნიშვნელობები შეიძლება ვიპოვოთ ასე: გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები [a, b] შუალედში მოთავსებულ ყველა კრიტიკულ წერტილში. ვიპოვოთ f(a) და f(b). გამოთვლილი მნიშვნელობებიდან ამოვირჩიოთ მათ შორის უდიდესი M და უმცირესი m. მაშინ, ცხადია, რომ $m\le f(x)\le M$, ნებისმიერი $x\in[a,b]$.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

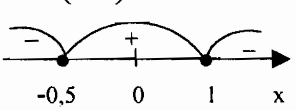
დაადგინეთ მონოტონურობის შუალედები, იპოვეთ ექსტრემუმის წერტილები და გამოთვალეთ ექსტრემუმი.

მაგალითი 1. $y=xe^{x-x^2}$. D(y)=R. ვიპოეთ ექსტრემუმის არსებობის თვალსაზრისით საეჭვო წერტილები.

$$y'=\left(xe^{x-x^2}\right)'=e^{x-x^2}+x\cdot e^{x-x^2}(1-2x)=e^{x-x^2}(1+x-2x^2)$$

$y'=0\Rightarrow -2x^2+x+1=0$ ე.ი. $x_1=1$ და $x_2=-\frac{1}{2}$ ამრიგად, ფუნქციას გააჩნია ორი სტაციონალური წერტილი. გამოვიკვლიოთ ეს წერტილები. დავადგინოთ y' ნიშანი შუალედებზე $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};1\right)$ და $(1,\infty)$. $y'(2)<0,\quad y'(0)>0,\ y'(-1)<0$ ე.ი. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ და $(1;\infty)$ შუალედებზე ფუნქცია კლებადია, ხოლო როცა $x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)$ ფუნქცია ზრდადია. I წესის თანახმად $x=-\frac{1}{2}$ მინიმუმის წერტილია, ხოლო x=1 მაქსიმუმის. ამრიგად,

$$y_{min}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}, \text{ ხოლო } y_{max}(1)=1.$$



სტაციონარული წერტილები $x=-\frac{1}{2}$ და $x=1$ შეიძლება II წესის გამოყენებით დავადგინოთ არიან თუ არა ექსტრემუმის წერტილები. ამისათვის გამოვთვალოთ y''.

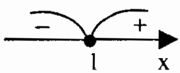
$y''=\left(e^{x-x^2}(1+x-2x^2)\right)'=e^{x-x^2}(4x^3-4x^2-5x+2)$; $y''(1)=-3<0$, ე.ი.

$y_{max}(1)=1$.

$y''\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{1}{2}-1+\frac{5}{2}+2\right)>0$, ე.ი. $y_{min}\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

მაგალითი 2. $y=(x-1)^{6/7}$ $D(y)=R$ ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები.

$y'=\frac{6}{7}(x-1)^{-\frac{1}{7}}=\frac{6}{7(x-1)^{\frac{1}{7}}}$ $x=1$ წერტილზე y' აზრს კარგავს. ე.ი. ეს წერტილი კრიტიკული წერტილია. დავადგინოთ y' ნიშანი შუალედებზე (-∞;1) და (1,∞)



$y'(2)>0, y'(0)<0$ ე.ი. შუალედზე (-∞; 1) ფუნქცია კლებადია, ხოლო შუალედზე (1, ∞) – ზრდადია. I წესის თანახმად, $x=1$ მინიმუმის წერტილია და $y_{min}(1)=0$.

მაგალითი 3.. $y=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$. D(y)=(-∞;0)∪(0, ∞)

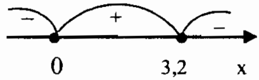
$$y'=\left(\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}\right)'=\left(\frac{-x^2+10x-16}{x^2}\right)'=$$

$$=\frac{(-2x+10)x^2-2x(-x^2+10x-16)}{x^4}=\frac{-2(5x-16)}{x^3}.$$

ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები. $y'=0\Rightarrow x=\frac{16}{5}=3,2$. დავადგინოთ y'-ის ნიშანი შუალედებზე (-∞;0), $\left(0;\frac{16}{5}\right)$ და $\left(\frac{16}{5};\infty\right)$

$y'(4)<0,\ y'(1)>0,\ y'(-1)<0$ ამრიგად, (-∞;0) და (3,2; ∞) შუალედებზე ფუნქცია კლებადია, (0; 3,2) შუალედზე კი – ზრდადი. ცხადია, $x=3,2$ სტაციონ-

არული წერტილი ექსტრემუმის წერტილიცაა. კერძოდ, მაქსიმუმის წერ-



ტილია და $y_{max}(3{,}2)=\dfrac{9}{16}$.

მაგალითი 4. შუალედზე [-1,5] დაადგინეთ $y=2x^3+3x^2-12x+1$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები. ვიპოვოთ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები. $y'=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)$ $y'=0\Rightarrow x^2+x-2=0$, ე.ი. x=-2 და x=1 კრიტიკული წერტილებია. x=-2 არ ეკუთვნის განსახილველ შუალედს. ამიტომ ვითვლით ფუნქციის მნიშვნელობებს წერტილებში x=-1, x=1 და x=5. y(-1)=-2+3+12+1=14, y(1)=2+3-12+1=-6, y(5)=2·125+3·25-12·5+1= =250+75-60+1=266 ამრიგად, უდიდესი მნიშვნელობაა 266, უმცირესი კი –(-6).

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

დაადგინეთ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები და იპოვეთ ექსტრემუმი.

4.295. $y=x^4-4x^3+6x^2-4x$. 4.296. $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. 4.297. $y=2-x-x^2$.

4.298. $y=2x^2-x^4$. 4.299. $y=\dfrac{1}{4+x^2}$. 4.300. $y=\dfrac{x}{1+4x^2}$.

4.301. $y=x^3-6x^2+9x-4$. 4.302. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

4.303. $y=x\sqrt{8-x^2}$. 4.304. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$. 4.305. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

4.306. $y=\sqrt{x^2-6x+10}$. 4.307. $y=3^{x^3-6x^2+4}$. 4.308. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4x+5}$.

4.309. $y=\ln x-\mathrm{arctg}x$ 4.310. $y=\ln\left(x^2-25\right)$. 4.311. $y=x^x$.

4.312. $y=e^{-x^2+4x+1}$.

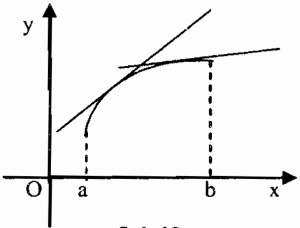
იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მითითებულ შუალედზე

4.313. $y=x^3,\quad -1\le x\le 3$. 4.314. $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x},\quad 0\le x\le 1$.

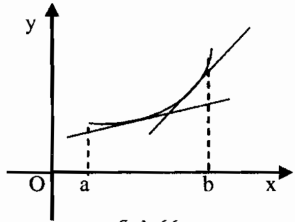
4.315. $y=x^3\ln x,\quad 1\le x\le e$. 4.316. $y=3x-x^3,\quad -2\le x\le 3$.

§ 4.7. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გაღუნვის წერტილები

y=f(x) წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკს (a, b) შუალედზე **ამოზნექილი** ეწოდება, თუ გრაფიკი მთლიანად მდებარეობს მის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების ქვემოთ (ნახ.65), ხოლო თუ გრაფიკი მხების ზემოთ მდე-



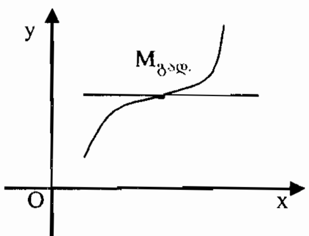
ნახ.65



ნახ.66

ბარეობს, მაშინ მას **ჩაზნექილი** ეწოდება (ნახ. 66).

y=f(x) ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისათვის (a,b) შუალედში საკმარისია შესრულდეს პირობა $f''(x)<0$, ხოლო გრაფიკის ჩაზნექილობისათვის საკმარისია $f''(x)>0$ პირობის შესრულება.



ნახ.67

წირის იმ წერტილს, რომელზედაც შეიძლება მხების გავლება და რომლის მარცხნივ და მარჯვნივ ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის ხასიათი სხვადასხვაა, **გადაღუნვის წერტილი** ეწოდება (ნახ.67). გადაღუნვის წერტილის არსებობისათვის აუცილებელია, რომ ამ წერტილში II რიგის წარმოებული ნულის ტოლი იყოს ან II რიგის წარმოებული არ არსებობდეს. გადაღუნვის წერტილის არსებობისათვის საკმარისია, რომ ამ წერტილზე გადასვლისას II რიგის წარმოებული ნიშანს იცვლიდეს.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

დავადგინოთ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები. ვიპოვოთ გადაღუნვის წერტილები.

მაგალითი 1. $y=\dfrac{e^x}{1+x}$, $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1,\infty)$.

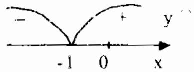
ვიპოვოთ $y'=\left(\dfrac{e^x}{1+x}\right)'=\dfrac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2}=\dfrac{e^x\cdot x}{(1+x)^2}$.

$$y''=\left(\frac{xe^x}{(1+x)^2}\right)'=\frac{(e^x+xe^x)(1+x)^2-xe^x\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}=$$

$$=\frac{(1+x)\left(e^x(1+2x+x^2)-2xe^x\right)}{(1+x)^4}=\frac{e^x(1+x)(1+x^2)}{(1+x)^4}=\frac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3};$$

$$y''=0\Rightarrow \quad x\in\varnothing.$$

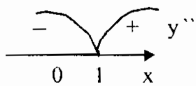
დავადგინოთ y'' ნიშანი შუალედებზე $(-\infty;-1)$ და $(-1,\infty)$, $y''(0)>0$; $y''(-2)<0$. ამრიგად, ფუნქციის გრაფიკი $(-\infty;-1)$ შუალედზე ამოზნექილია, ხოლო შუალედზე $(-1,\infty)$ გრაფიკი ჩაზნექილია. გრაფიკზე გადაღუნვის წერტილი არ არსებობს.



მაგალითი 2. $y=(x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$ $D(y)=R$.

$$y'=\left((x-1)^{\frac{13}{7}}\right)'=\frac{13}{7}\cdot(x-1)^{\frac{6}{7}}\quad y''=\left(\frac{13}{7}(x-1)^{\frac{6}{7}}\right)'=\frac{13}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{7}}$$

$x=1$ წერტილზე y'' არ არსებობს. დავადგინოთ y''-ს ნიშანი $(-\infty;1)$ და $(1;\infty)$ შუალედებზე.



$y''(2)>0$; $y''(0)<0$ ამრიგად, შუალედზე $(-\infty;1)$ გრაფიკი ამოზნექილია, ხოლო $(1;\infty)$-ზე კი - ჩაზნექილი. გრაფიკზე $M(1;0)$ წერტილი გადაღუნვის წერტილია.

მაგალითი 3. $y=x^4-8x^3+24x^2$, $D(y)=R$. $y'=4x^3-24x^2+48x$, $y''=12x^2-48x+48=12(x^2-4x+4)=12(x-2)^2$; თუ $x\neq2$ $y''>0$, ამიტომ ფუნქციის გრაფიკი ყველგან ჩაზნექილია. გრაფიკზე გადაღუნვის წერტილი არ არსებობს.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

დაადგინეთ ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები. იპოვეთ გადაღუნვის წერტილები.

4.317. $y=x^6-6x^5+\frac{15}{2}x^4+3x$. 4.318. $y=x^5-5x^4+\frac{20}{3}x^3+3x+1$.

4.319. $y=x^7+7x+1$. 4.320. $y=x^4+6x^2$. 4.321. $y=\frac{1}{x+3}$.

4.322. $y=\sqrt[3]{(x-2)^5}+3$. 4.323. $y=xe^{2x}+1$. 4.324. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$.

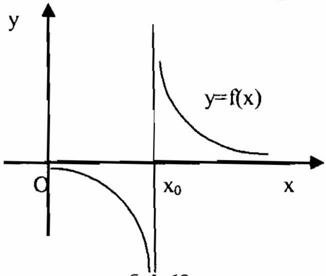
4.325. $y = xe^x$. 4.326. $y = e^{-x^2}$. 4.327. $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$.

§. 4.8. გრაფიკის ასიმპტოტები

ℓ წრფეს ეწოდება y=f(x) ფუნქციის შესაბამისი წირის ასიმპტოტი, თუ მანძილი ამ წირის M(x,y) წერტილსა და წრფეს შორის მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა ეს წერტილი გადაადგილდება წირის გასწვრივ და უსასრულოდ შორდება სათავეს.

x=a წრფე y=f(x) წირის ვერტიკალური ასიმპტოტია, თუ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ან $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

წრფე y=b წარმოადგენს y=f(x) წირის ჰორიზონტალურ ასიმპტოტს, თუ არსებობს $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ან $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.



ნახ.68

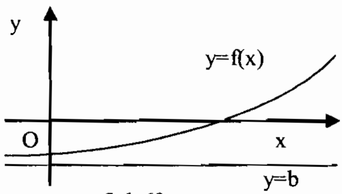
y=ax+b წრფე დახრილი ასიმპტოტია y=f(x) წირის მიმართ, თუ არსებობენ სასრული ზღვრები.

$a= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - a \cdot x)$ ან

$a= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - a \cdot x)$.

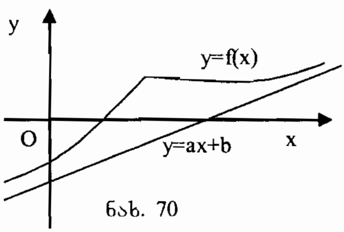
$x=x_0$ ვერტიკალური ასიმპტოტია, ხოლო

y=0 ანუ ox ღერძი ჰორიზონტალური ასიმპტოტია (იხ. ნახ. 68).



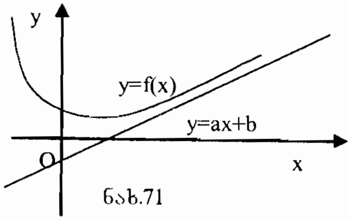
ნახ.69

y=b წრფე ჰორიზონტალური ასიმპტოტია (იხ.ნახ.69).



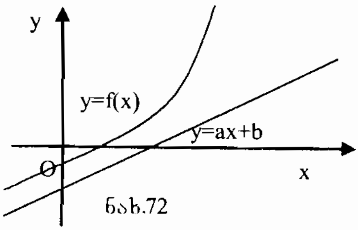
ნახ. 70

y=ax+b დახრილი ასიმპტოტია (იხ. ნახ.70).



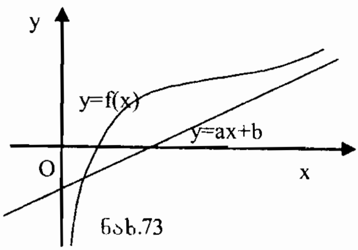
ნახ.71

$y=ax+b$ მარჯვენა დახრილი ასიმპტოტია (იხ. ნახ.71).



ნახ.72

$y=ax+b$ მოცემული წირის მარცხენა დახრილი ასიმპტოტია (იხ. ნახ.72).



ნახ.73

$y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკმა შეიძლება დახრილი ასიმპტოტი გადაკვეთოს (იხ. ნახ.73).

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

ვიპოვოთ მოცემული წირის ასიმპტოტები

მაგალითი 1. $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$, $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-1}=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}=\infty$, ამიტომ $x=-1$ ვერტიკალური ასიმპტოტია.

ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტი $y=ax+b$.

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+1}{x(x+1)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+1-x^2-x}{x+1}=2$$

ამრიგად, $y=x+2$ დახრილი ასიმპტოტია.

მაგალითი 2. $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$, $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x - \frac{\cos x}{x}\right) = \infty$, ამიტომ $x=0$ წრფე ვერტიკალური ასიმპტოტია. შევადგინოთ $y=ax+b$ დახრილი ასიმპტოტის განტოლება.

$$a= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x - \frac{\cos x}{x}}{x} = 2 - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 2 - \lim_{x\to\pm\infty} \cos x \cdot \frac{1}{x^2} = 2 - 0 = 2$$

(cosx ფუნქცია შემოსაზღვრულია, $\frac{1}{x^2} \to 0$, როცა $x\to\pm\infty$, ამიტომ $\cos x \cdot \frac{1}{x^2}$ ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა, როცა $x\to\pm\infty$).

$b= \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2x - \frac{\cos x}{x} - 2x\right) = 0.$ $y=2x$ მოცემული წირის დახრილი ასიმპტოტია.

მაგალითი 3. $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$, $D(y)=(0;\infty)$, განვიხილოთ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 3x\right) = +\infty$ ე.ი. $x=0$ წრფე წირის ვერტიკალური ასიმპტოტია. ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტის განტოლება.

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln^2 x}{x} - 3x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln^2 x}{x^2} - 3\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{2x} - 3 =$$

$$= -3 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = -3 + \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = -3 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = -3 + 0 = -3;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 3x + 3x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0$$

ამრიგად, $y=-3x$ დახრილი ასიმპტოტია.

მაგალითი 4. $y=-x\cdot \text{arctg}x$ $D(y)=R$ რადგან ფუნქცია ყველგან განსაზღვრულია, ამიტომ წირს ვერტიკალური ასიმპტოტი არ გააჩნია. $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{arctg}x \neq \lim\limits_{x\to-\infty} \text{arctg}x$. ამიტომ $y=ax+b$ ვიპოვოთ ასე.

$$\text{I. } a = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x \cdot \text{arctg}x}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \text{arctg}x = -\frac{\pi}{2}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(-x\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}x\right)=-\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)$$

საქმე გვაქვს $\infty\cdot 0$ სახის განუზღვრელობასთან. გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი. განუზღვრელობას შევუცვალოთ სახე, მივიღებთ

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x}}=\lim\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

ამრიგად, $y=-\frac{\pi}{2}x+1$ წირის მარჯვენა დახრილი ასიმპტოტია. ახლა ვიპოვოთ მარცხენა დახრილი ასიმპტოტი

$$a=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\cdot\operatorname{arctg}x}{x}\right)=-\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2};$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}x\right)=-\lim_{x\to-\infty}x\cdot\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1;$$

$y=\frac{\pi}{2}x+1$ წირის მარცხენა დახრილი ასიმპტოტია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

იპოვეთ წირის ასიმპტოტები

4.328. $y=\frac{x^3+1}{x^2-4}$. 4.329 $y=\frac{x^2}{(x+3)^2}$. 4.330. $y=2x+\frac{2}{x-1}$.

4.331. $y=\frac{x^2-2x+3}{x+2}$. 4.332. $y=\frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$. 4.333. $y=x+\frac{1}{x}$.

4.334. $y=\frac{2x}{x^2-4}$. 4.335. $y=\frac{x^3-2x^2+2}{2x^2-x}$. 4.336. $y=\frac{e^x}{1+x}$.

4.337. $y=e^{\frac{1}{x}}$. 4.338. y=arctgx . 4.339. $y=\frac{b}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}$.

4.340. $y=xe^{\frac{3}{x}}+1$. 4.341. $y=x\cdot e^x$.

§ 4. 9. ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება

y=f(x) ფუნქციის გრაფიკის აგებისას ფუნქციას ვიკვლევთ შემდეგი სქემით:

1. ვადგენთ y=f(x) ფუნქციის განსაზღვრის არეს;
2. ვიკვლევთ ფუნქციას ლუწ-კენტოვნებაზე;
3. ვპოულობთ Ox და Oy ღერძებთან თანაკვეთის წერტილებს;
4. ვიკვლევთ ფუნქციას უწყვეტობაზე. წყვეტის წერტილებში ვადგენთ ფუნქციის წყვეტის ხასიათს. ვადგენთ გრაფიკის ასიმპტოტებს;
5. ვპოულობთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედებს. ვადგენთ ექსტრემუმის წერტილებს და ექსტრემუმებს;
6. ვადგენთ ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედვბს. ვპოულობთ გადაღუნვის წერტილებს.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

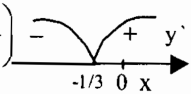
ჩავატაროთ სრული გამოკვლევა და ავაგოთ გრაფიკი:

მაგალითი 1. $y=\dfrac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$.

ამოხსნა. 1. D(y)=R; 2. $y(-x)=\dfrac{-x-3}{\sqrt{1+(-x)^2}}$, $y(-x)=-\dfrac{x+3}{\sqrt{1+x^2}}$

$y(-x)\neq y(x)$, და $y(-x)\neq -y(x)$ 3. როცა x=0, მაშინ y=−3, ხოლო როცა y=0, მაშინ x=3. ღვრძებთან თანაკეეთის წერტილებია (0;−3) და (3;0). 4. ფუნქცია განსაზღვრის არეში ყველგან უწყვეტია. წირს ვერტიკალური ასიმპტოტი არ გააჩნია. შევადგინოთ დახრილი ასიმპტოტის განტოლება y=ax+b, სადაც $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{x\sqrt{1+x^2}}=0$, ხოლო $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}=1$. ამრიგად, წირის მარჯვენა ჰორიზონტალური ასიმპტოტია, y=1, ხოლო $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{x\sqrt{1+x^2}}=0$ და $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}=-1$. ამრიგად, მარცხენა ჰორიზონტალური ასიმპტოტია y=-1.

5. $y'=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-(x-3)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\dfrac{1+3x}{(1+x^2)^{3/2}}$; $y'=0$, როცა $x=-\dfrac{1}{3}$.

$y'(0)>0,\ y'(-1)<0.$ $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$ 

შუალედზე ფუნქცია კლებადია;

$\left(-\dfrac{1}{3};\infty\right)$ შუალედზე – ზრდადია.

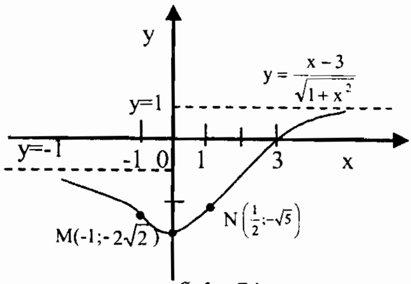
$$y_{\min}\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-\frac{1}{3}-3}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}=-\sqrt{10}\approx -3,16.$$

6. $$y''=\left(\frac{1+3x}{(1+x^2)^{3/2}}\right)'=\frac{3(1+x^2)^{3/2}-\frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2}\cdot 2x(1+3x)}{(1+x^2)^3}=$$

$$=\frac{3(1+x^2)^{1/2}(1+x^2-x-3x^2)}{(1+x^2)^3}=\frac{3(-2x^2-x+1)}{(1+x^2)^{5/2}}=-\frac{3(2x^2+x-1)}{(1+x^2)^{5/2}}$$

$y''=0\Rightarrow 2x^2+x-1=0;\ x_1=-1;\ x_2=\frac{1}{2}.$ $\quad$ – $\quad$ + $\quad$ - $\quad y''$ $\quad$ -1 $\quad$ 0.5 $\quad$ x

$y'(1)<0,\ y''(0)>0,\ y''(-2)<0.$ $(-\infty;-1)$ და $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ შუალედებზე ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია; $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ შუალედზე – ჩაზნექილია. გადაღუნვის წერტილებია: $M\left(-1;-2\sqrt{2}\right)$ და $N\left(\frac{1}{2};-\sqrt{5}\right)$. $\left(-2\sqrt{2}\approx -2.8;-\sqrt{5}\approx -2,2\right)$.



ნახ. 74

მაგალითი 2. $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$

ამოხსნა.

1. $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$

2. რადგან ფუნქცია სათავის მიმართ სიმეტრიულ შუალედში არ არის განსაზღვრული, ამიტომ მოცემული ფუნქციის ლუწ-კენტოვნების საკითხი არ ისმის.

3. როცა x=0, მაშინ y=0 და პირიქით. გრაფიკი გადის სათავეზე.

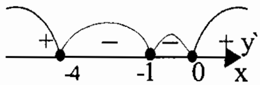
4. $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^4}{(1+x)^3}=+\infty$, ხოლო $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x^4}{(1+x)^3}=-\infty$; x=–1 გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტია. ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტი y=ax+b, სადაც

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{(1+x)^3\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^3}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{(1+x)^3}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x-3x^2-3x^3-x^4}{(1+x)^3}=-3.$$

y=x-3 დახრილი ასიმპტოტია.

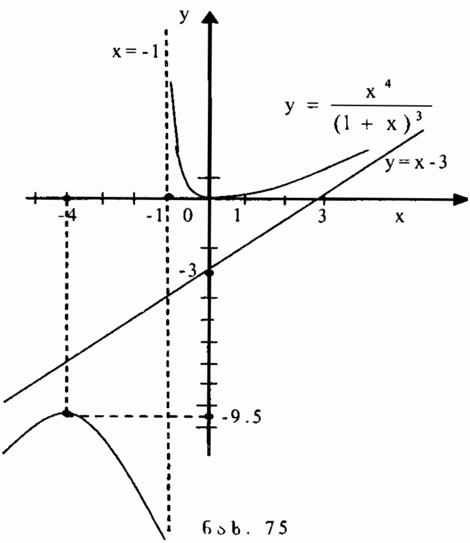
$$5.\ y'=\frac{4x^3(1+x)^3-3(1+x)^2\cdot x^4}{(1+x)^6}=\frac{(1+x)^2\cdot x^3(4+4x-3x)}{(1+x)^6}=$$

$=\dfrac{x^3(4+x)}{(1+x)^4}$ $y'=0\Rightarrow x=0$ ან x=-4  $y'(1)>0,\ y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0,$

$y'(-3)<0,\ y'(-5)>0$. ამრიგად, ფუნქცია შუალედებზე (-∞;-4) და (0;∞) ზრდადია, ხოლო (-4;-1) და (-1;0) შუალედებზე კლებადია.

$y_{max}(-4)=\dfrac{16\cdot16}{-27}\approx-9{,}5;$ $y_{min}(0)=0.$

$$6.\ y''=\left(\frac{4x^3+x^4}{(1+x)^4}\right)'=\frac{(12x^2+4x^3)(1+x)^4-4(1+x)^3(4x^3+x^4)}{(1+x)^8}=$$



ნახ. 75

$$=\frac{4(1+x)^3\left(x^2(3+x)(1+x)-x^3(4+x)\right)}{(1+x)^8}=$$

$$=\frac{4x^2(3x+3+x+x^2-4x-x^2)}{(1+x)^5}=$$

$$=\frac{12x^2}{(1+x)^5}$$

$$y''=0\Rightarrow x=0$$

$$y''(1)>0,\ y''\left(-\frac{1}{2}\right)>0,\ y''(-2)<0$$

(-∞; -1) შუალედზე გრაფიკი ამოზნექილია, ხოლო (-1; 0) და (0, ∞) შუალედებზე ჩაზნექილია. გრაფიკს გადაღუნვის წერტილი არ გააჩნია.

აეაგოთ გრაფიკი (იხ. ნახ.75).

მაგალითი 3. $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$.

ამოხსნა. 1. D(y)=R;

2. $y(-x)=\sqrt[3]{(-x)^3-3\cdot(-x)}=\sqrt[3]{-x^3+3x}=-\sqrt[3]{x^3-3x}$;

y(-x)=-y(x) ფუნქცია კენტია. გრაფიკი სიმეტრიულია საკოორდინატო სათავის მიმართ.

3. $y=0 \Rightarrow \quad x^3-3x=0,\ x_1=0,\ x_2=\sqrt{3}$ და $x=-\sqrt{3}$; გრაფიკი ღერძებს გადაკვეთს წერტილებში: (0,0); $\left(\sqrt{3};0\right)$ და $\left(-\sqrt{3};0\right)$.

4. გრაფიკს ვერტიკალური ასიმპტოტი არ გააჩნია. შევადგინოთ დახრილი ასიმპტოტის განტოლება. y=ax+b,

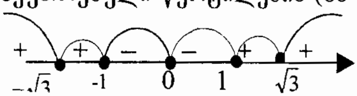
$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}+x\sqrt{x^3-3x}+x^2}=0$$

ამრიგად, y=x დახრილი ასიმპტოტია.

5. $$y'=\left(\left(x^3-3x\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^3-3x\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(3x^2-3\right)=\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x\right)^2}}$$

$y'=0 \Rightarrow$ x=±1 (სტაციონალური წერტილებია). x=0 და $x=\pm\sqrt{3}$ განსაკუთრებული წერტილებია (ამ წერტილებში y' არ არსებობს)

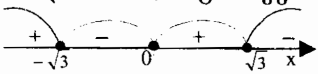


შუალედებზე $\left(-\infty;\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};-1\right)$, $\left(1;\sqrt{3}\right)$ და $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ ფუნქცია ზრდადი, ხოლო (-1;0) და (0;1) შულედებზე კლებადია. ამრიგად, $y_{max}(-1)=\sqrt[3]{2};\ y_{min}(1)=-\sqrt[3]{2}\ \left(\sqrt[3]{2}\approx 1.3\right)$.

6. $$y''=\left(\frac{x^2-1}{(x^3-3x)^{2/3}}\right)'=\frac{2x\left((x^3-3x)^{2/3}\right)-\frac{2}{3}(x^3-3x)^{-1/3}(3x^2-3)(x^2-1)}{(x^3-3x)^{4/3}}=$$

$$=\frac{2x(x^3-3x)^{2/3}-2(x^3-3x)^{-1/3}(x^2-1)^2}{(x^3-3x)^{4/3}}=\frac{2\left(x(x^3-3x)-(x^2-1)^2\right)}{(x^3-3x)^{5/3}}=\frac{-2(x^2+1)}{(x^3-3x)^{5/3}}$$

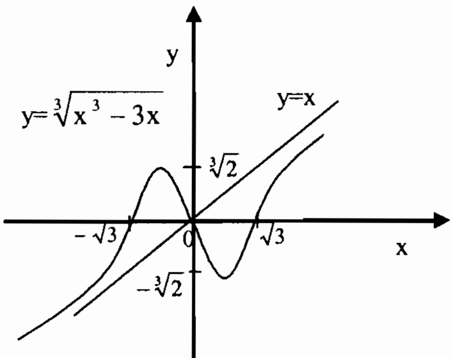
x=0 და $x=\pm\sqrt{3}$ განსაკუთრებული წერტილებია.



$y''(4)<0,\ y'(1)>0,\ y'(-1)<0,\ y'(-2)>0$.

შუალედებზე $(-\infty;-\sqrt{3}),(0;\sqrt{3})$ გრაფიკი ჩაზნექილია, შულედებზე $\left(-\sqrt{3};0\right)$ და $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ გრაფიკი ამოზნექილია. გრაფიკზე სამი გადაღუნვის წერტილია: $M_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, $M_2(0;0)$ და $M_3(\sqrt{3};0)$. ავაგოთ გრაფიკი.

შენიშენა. რადგან $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$ კენტია, შეგვეძლო ამ ფუნქციის სრული გამოკვლევა შეგვესრულებინა $(0,\infty)$ შუალედში (ან $(-\infty,0)$ შუალედში), შესაბამის შუალედში ავვეგო გრაფიკი და შემდეგ ის სიმეტრიულად აგვესახა საკოორდინატო სათავის მიმართ.



ნახ. 76

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

შეასრულეთ ფუნქციის სრული გამოკვლევა და ააგეთ გრაფიკი.

4.342. $y=2+x^2-\dfrac{x^4}{2}$. 4.343. $y=x^4-2x^3+3$. 4.344. $y=\dfrac{2x^2}{2x-1}$.

4.345. $y=\dfrac{2}{1-x^2}$. 4.346. $y=\dfrac{2x^3}{x^2-4}$. 4.347. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

4.348. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$. 4.349. $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$.

4.350. $y=\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{3}{x-2}-1$. 4.351. $y=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$. 4.352. $y=\dfrac{e^x}{1+x}$.

თავი V

ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

§5.1. ორი ცვლადის ფუნქცია

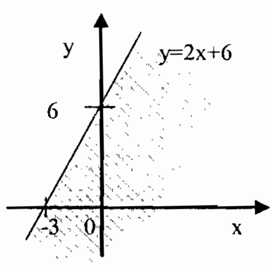
ვთქვათ, D არის ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ (x, y) წყვილთა რაიმე სიმრავლე და f აღნიშნავს იმ წესს, რომელიც D სიმრავლიდან ყოველ (x, y) წყვილს შეუსაბამებს ერთადერთ z რიცხვს, მაშინ ამბობენ, რომ z=f(x,y) არის x და y ცვლადების ფუნქცია. D სიმრაელეს უწოდებენ f ფუნქციის განსაზღვრის არეს. f ფუნქციის მნიშვნელობას (x,y) წყვილზე აღნიშნავენ f(x,y) სიმბოლოთი და ყველა ამ მნიშვნელობათა სიმრავლეს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს ან f ფუნქციის ცვლილების არეს უწოდებენ.

ნამდვილ რიცხვთა ყოველ დალაგებულ (x,y) წყვილს ფიქსირებულ მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში შეესაბამება სიბრტყის გარკვეული M წერტილი და, პირიქით, სიბრტყის ყოველ M წერტილს შეესაბამება რიცხვთა ერთადერთი დალაგებული (x,y) წყვილი. ამიტომ ორი ცვლადის z=f(x,y) ფუნქცია შეიძლება განვიხილოთ როგორც სიბრტყის M წერტილთა ფუნქცია z=f(M). ამ შემთხვევაში ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება სიბრტყის M წერტილთა რაიმე სიმრავლე. შემდგომში ორი ცვლადის ფუნქციის აღსანიშნავად ორივე ამ ჩანაწერს გამოვიყენებთ.

ერთი ცვლადის ფუნქციის მსგავსად ორი ცვლადის ფუნქციის მოცემის წესები შეიძლება სხვადასხვანაირი იყოს. როგორც წესი, ქვემოთ, მაგალითებში ჩვენ გამოვიყენებთ ორი ცელადის ფუნქციის მოცემის ანალიზურ წესს, როცა ფუნქცია ფორმულის სახით მოიცემა. ამ შემთხვევაში ფუნქციის განსაზღვრის არე არის რიცხვთა ყველა იმ დალაგებულ წყვილთა (ან რაც იგივეა სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა) სიმრავლე, რომლისთვისაც ამ ფორმულას აზრი აქვს.

Z=f(x,y) ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება Oxyz მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ყველა (x,y,f(x,y)) სახის წერტილთა სიმრავლეს, სადაც $(x,y)\in D(f)$. ეს გრაფიკი სივრცეში წარმოადგენს ისეთ ზედაპირს, რომელსაც oz ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფე არა უმეტეს ერთ წერტილში ჰკვეთს.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა



მაგალითი. 1. გამოვთვალოთ $f(x,y)=x^2+\ln|y|$ ფუნქციის მნიშვნელობა წერტილში $(x;y)=(-2;\ e^3)$

$f(-2;\ e^3)=(-2)^2+\ln|e^3|=4+3\ln|e|=4+3\cdot1=7.$

$f(-2;\ e^3)=7.$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ და დავშტრიხოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

$$z=\sqrt{2x-y+6}$$

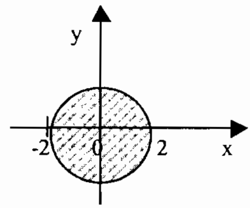
$2x-y+6\geq 0$

$y\leq 2x+6.$

მაგალითი 3. $z=\ln(4-x^2-y^2)$

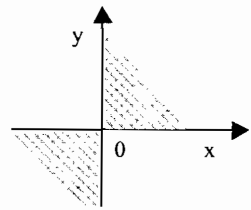
$4-x^2-y^2>0$

$x^2+y^2<4.$



მაგალითი 4. $z=\sqrt{xy}$ $xy\geq 0$

$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq \end{cases}$ ან $\begin{cases} x\leq 0 \\ y\leq 0 \end{cases}$



სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოთვალეთ ფუნქციის მნიშვნელობები მითითე-ბულ წერტილებში

5.1. $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$, იპოვეთ $f(3;-2)$ და $f(-4;-4)$.

5.2. $f(x,y)=\dfrac{(x-1)(y-1)}{x+y}$, იპოვეთ $f(1;-2)$ და $f(3;-2)$.

5.3. $f(x,t)=\dfrac{x-t+1}{x^2+t^2}$, იპოეეთ $f(2;\,1)$ და $f(3;\,0)$.

5.4. $f(u,\,v)=u+\ln|v|$, $f(6;\,1)$ და $f(0;\,e^3)$.

იპოეეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არე

5.5. $f(x,y)=2x^2-xy+y^3$. 5.6. $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2-1}$. 5.7. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$.

5.8. $f(x,y)=\sqrt{1-(x+y)^2}$. 5.9. $f(x,\,y)=\ln(x-y)$. 5.10. $f(x,y)=5^{y-x}$.

5.11. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$. 5.12. $f(x,y)=\dfrac{1}{\lg(y-x^2)}$.

5.13. $f(x,y)=\arccos\left|\dfrac{x}{y}\right|$. 5.14. $f(x,y)=\ln\left|\dfrac{4-x^2}{9-y^2}\right|$.

5.15. $f(x,y)=\ln(4-x^2)-\ln(9-y^2)$. 5.16. $f(x,y)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}}$.

§ 5.2. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

განსაზღვრება 1. წერტილთა $\{M_n(x_n,y_n)$ მიმდევრობას ეწოდება **კრებადი** $M(x,y)$ წერტილისაკენ, თუ რიცხვთა მიმდევრობა $d(M_n, M)$ კრებადია ნულისაკენ, როდესაც $n\to\infty$, სადაც $d(M_n, M)$ აღნიშნავს მანძილს M_n და M წერტილებს შორის და გამოითვლება ფორმულით

$$d=\sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2}\ .$$

განსაზღვრება 2. M_0 წერტილის r-რადიუსიანი **მიდამო** ეწოდება ყველა იმ M წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც $d(M_0, M)<r$.

$$\text{ანუ}\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\,,$$

სადაც $(x_0;\ y_0)$ და $(x;\ y)$ შესაბამისად M_0 და M წერტილთა კოორდინატებია.

ახლა შემოვიღოთ ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვრის ცნება. ვთქვათ, $z=f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M_0(x_0;y_0)$ წერტილის მიდამოში, შესაძლებელია ამ წერტილის გარდა.

განსაზღვრება 3. A რიცხვს ეწოდება $z=f(x,y)$ **ფუნქციის ზღვარი** M_0 წერტილში, თუ ამ წერტილისაკენ კრებად წერტილთა ნებისმიერი $\{M_n\}$ მიმდევრობისათვის, პირობით, $M_n\neq M_0$, სრულდება პირობა $\lim\limits_{n\to\infty} f(M_n)=A$.

შევნიშნოთ, რომ $\{f(M_n)\}$ რიცხვთა მიმდევრობაა.

ვთქვათ, $z=f(x,\ y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია, M_0 წერტილის რაიმე მიდამოში.

განსაზღვრება 4. $z=f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება **უწყვეტი** $M_0(x_0;\ y_0)$ წერტილში, თუ ფუნქციის ზღვარი ამ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლია ამავე წერტილში. ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ:

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)\ \text{ანუ}\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,\ y_0).$$

ზოგჯერ მოსახერხებელია ფუნქციის უწყვეტობა სხვა ფორმით ჩავწეროთ.

განსაზღვრება 5. $z=f(M)$ ფუნქციის სრულ ნაზრდს M_0 წერტილში უწოდებენ სხვაობას $f(M)-f(M_0)$, ანუ $f(x,y)-f(x_0,y_0)$. სრულ ნაზრდს აღნიშნავენ Δz სიმბოლოთი.

მაშასადამე, $\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$. შემოვიღოთ აღნიშვნები $x-x_0=\Delta x$, $y-y_0=\Delta y$. ამგვარად, $\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.

განსაზღვრება 6. $z=f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება $M_0(x_0,y_0)$ წერტილში უწყვეტი, თუ ამ წერტილში ფუნქციის სრული ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $M\to M_0$, ან რაც იმას ნიშნავს რომ Δx და Δy ერთდროულად მიისწრაფიან ნულისაკენ.

მაშასადამე, $z=f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია $M_0(x_0,\ y_0)$ წერტილში, თუ

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right)=0 \tag{5.1}$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ზღვარი $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

ამოხსნა. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2\cdot y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$,

$x^2+y^2\geq 2|xy|$, ამიტომ $0\leq\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq\dfrac{x^2y^2}{2|xy|}\leq\dfrac{|xy|}{2}$, ამრიგად,

$$0\leq\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq\frac{|xy|}{2} \tag{5.2}$$

გადავიდეთ ზღვარზე უტოლობაში, როცა $(x,y)\to(0,0)$, მივიღებთ $0\leq\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq 0$, ამრიგად, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$ და

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=e^0=1.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

ამოხსნა. ცხადია, რომ $|x|^3\leq(x^2+y^2)^{3/2}$, $|y|^3\leq(x^2+y^2)^{3/2}$, ამიტომ

$$|f(x,y)|\leq\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}\leq\frac{2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}=2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}=0$, ამიტომ (5.3) უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ, რომ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ზღვარი $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+y)}{x+y-1}$.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x+y=z$, როდესაც $x\to 1$ და $y\to 0$, მაშინ $z\to 1$. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვრის გამოთვლა ამ აღნიშვნით დაიყვანება ერთი ცვლადის ფუნქციის ზღვრის გამოთვლაზე და მივიღებთ, რომ

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+y)}{x+y-1}=\lim_{z\to 1}\frac{\ln z}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(\ln z)'}{(z-1)'}=\lim_{z\to 1}\frac{\frac{1}{z}}{1}=1.$$

მაგალითი 4. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & x+y\neq 0\\ 1, & x+y=0.\end{cases}$$

ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ არ არსებობს.

ამოხსნა. მართლაც, ვთქვათ, (x,y) მიისწრაფვის $(0,0)$ წერტილისაკენ ox ღერძის გასწვრივ, მაშინ გვექნება

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x+0}=1.$$

მაგრამ, თუ $(x,y)\to(0,0)$ წერტილისაკენ oy ღერძის გასწვრივ, მაშინ

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}=-1.$$

ამიტომ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ არ არსებობს, რადგან ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის აუცილებელია, რომ (x,y) წერტილის ნებისმიერი „მიახლოებისათვის" $(0,0)$ წერტილთან, ფუნქციის მნიშვნელობები ერთსა და იმავე რიცხვთან იყვნენ „ახლოს".

მაგალითი 5. ვაჩვენოთ, რომ $z=x^2+y^2$ ფუნქცია უწყვეტია სიბრტყის ნებისმიერ წერტილში.

ამოხსნა. შევამოწმოთ (5.1) პირობა.

გვაქვს,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left((x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2-(x^2+y^2)\right)=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+y^2+2y\Delta y+(\Delta y)^2-x^2-y^2\right)=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}2\left(x\Delta x+y\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)=0=z(0,0).$$

მაგალითი 6. განვიხილოთ ფუნქცია

$$z=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

ვაჩვენოთ, რომ z ფუნქცია არ არის უწყვეტი (0,0) წერტილში.

მართლაც, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$ (იხ. მაგ.1).

მაგრამ z(0,0)=1, ე.ი. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z(x,y)\neq z(0,0)$.

ამიტომ z ფუნქცია არ არის უწყვეტი (0,0) წერტილში, ან რაც იგივეა, წყვეტილია (0, 0) წერტილში.

მაგალითები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოთვალეთ:

5.17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$. 5.18. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. 5.19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

5.20. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to k}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$. 5.21. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+y}$. 5.22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

5.23. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$. 5.24. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\operatorname{tg}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

5.25. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$. 5.26. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წყვეტის წერტილები

5.27. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. 5.28. $z=\dfrac{1}{(x-y)^2}$.

5.29. $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$. 5.30. $z=\cos\dfrac{1}{xy}$. 5.31. $z=\dfrac{x+y}{y-x^2}$.

§5.3. ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობა. ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები. სრული დიფერენციალი. რთული ფუნქციის გაწარმოება

ვთქვათ, z=f(x,y) ფუნქცია განსაზღვრულია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე U მიდამოში. განვიხილოთ სიდიდეები:

$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)$ და $\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$,

სადაც Δx და Δy ნაზრდები იმდენად მცირეა, რომ წერტილები $(x_0+\Delta x, y_0)$ და $(x_0,y_0+\Delta y)$ იმავე U მიდამოშია.

პირველ მათგანს უწოდებენ M_0 წერტილში ფუნქციის ნაზრდს x ცვლადის მიმართ, ხოლო მეორეს – ნაზრდს y ცელადის მიმართ.

თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

მაშინ მას უწოდებენ f ფუნქციის კერძო წარმოებულს x ცვლადით M_0 წერტილში. მის აღსანიშნავად იყენებენ ერთ-ერთს შემდეგი სიმბოლოებიდან:

$$z'_x(x_0,y_0),\quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0),\qquad f'_x(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$

ანალოგიურად განისაზღვრება ფუნქციის კერძო წარმოებული y ცვლადის მიმართ. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

მაშინ ამ სიდიდეს უწოდებენ f ფუნქციის კერძო წარმოებულს y ცვლადით M_0 წერტილში. მის აღსანიშნავად იყენებენ ერთ-ერთს შემდეგი სიმბოლოებიდან

$$z'_y(x_0,y_0),\quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0),\qquad f'_y(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

x–ით გაწარმოებისას ვგულისხმობთ, რომ y მუდმივია მოცემულ ფუნქციაში და, პირიქით, y-ით გაწარმოებისას ვგულისხმობთ, რომ x არის მუდმივი.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. $z=x^2-2xy^2+y^3$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-2y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-4xy+3y^2.$$

მაგალითი 2. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

მაგალითი 3. $z=x^2\sin y$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y.$

მაგალითი 4. $z=xye^{x+2y}$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\left(e^{x+2y}+e^{x+2y}\cdot x\right),$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(e^{x+2y}+2ye^{x+2y}\right).$$

ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობა. სრული დიფერენციალი

ვთქვათ, $z=f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში.

ამბობენ, რომ $z=f(x,y)$ **ფუნქცია დიფერენცირებადია** M_0 წერტილში, თუ მისი სრული ნაზრდისათვის ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\varepsilon, \tag{5.4}$$

სადაც A და B რაიმე მუდმივებია და

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

თუ $z=f(x,y)$ დიფერენცირებადია M_0 წერტილში, მაშინ ამ წერტილში არსებობს კერძო წარმოებულები და ამასთან

$A=z'_x(x_0,y_0);\quad B=z'_y(x_0,y_0).$

გამოსახულებას $z'_x\Delta x+z'_y\Delta y$ -ს უწოდებენ f ფუნქციის **სრულ დიფერენციალს.**

თუ არგუმენტების ნაზრდებისათვის შემოვიღებთ აღნიშვნებს $\Delta x=dx$ და $\Delta y=dy$ და ფუნქციის სრულ დიფერენციალს აღვნიშნავთ dz-ით, მაშინ სრული დიფერენციალისათვის გვექნება შემდეგი წარმოდგენა

$$dz=z'_x dx+z'_y dy,\ \text{ანუ}\ dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{5.5}$$

შევნიშნოთ, რომ შეიძლება ფუნქციას ჰქონდეს კერძო წარმოებულები რაიმე წერტილში, მაგრამ იგი არ იყოს დიფერენცირებადი.

განვიხილოთ სათანადო მაგალითი 5. ვთქვათ, $f(x,y)=\sqrt{|x||y|}$.

ცხადია, $f(0,0)=0$ და $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$. ამგვარად, $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია (0,0) წერტილში. ამავე დროს, აღნიშნულ წერტილში f ფუნქციას აქვს კერძო წარმოებულები. მართლაც

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|\cdot 0}-0}{\Delta x}=0,\ f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{0\cdot|\Delta y|}-0}{\Delta y}=0.$$

ვაჩვენოთ, რომ f(x,y) ფუნქცია არ არის დიფერენცირებადი (0,0) წერტილში. წინააღმდეგ შემთხვევაში (5.4)-ის თანახმად ადგილი ექნება წარმოდგენას $\Delta z=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\varepsilon$, სადაც $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$.

$\Delta z=\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}$, დაშეებით $\Delta z=\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}=\varepsilon$, ამიტომ

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

მაგრამ, შეიძლება ეაჩეენოთ, რომ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\neq 0$.

მართლაც, ვთქვათ, $\Delta y=\Delta x$, მაშინ მარცხენა მხარეში ჩაწერილი გამოსახულება ტოლი იქნება

$$\frac{|\Delta x|}{\sqrt{2|\Delta x|^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{ე.ი.}\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\neq 0.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა ამიტომ, მოცემული ფუნქცია არ არის დიფერენცირებადი.

მხები სიბრტყის განტოლება

ვთქვათ, z=f(x,y) ფუნქცია დიფერენცირებადია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილში. განეიხილოთ სიბრტყის განტოლება

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{5.6}$$

~~ამ სიბრტყეს უწოდებენ~~ z=f(x,y) ზედაპირის **მხები სიბრტყე** სამგანზომილებიანი სივრცის (x_0, y_0, z_0) წერტილში, სადაც $z_0=f(x_0,y_0)$.

მაგალითი 6. ჩავწეროთ $z=x^2-3xy-y$ ზედაპირის იმ მხების სიბრტყის განტოლება, რომელიც გაელებულია (0, 1, −1) წერტილში.

ამოხსნა. ვიპოვოთ კერძო წარმოებულები

$$z'_x=2x-3y,\ z'_y=-3x-1.$$

გამოვთვალოთ აღნიშნული კერძო წარმოებულების მნიშვნელობები (0;1) წერტილში, მივიღებთ $z'_x(0,1)=-3,\ \ z'_y(0,1)=-1$.

ამრიგად, მოცემული ზედაპირისადმი (0, 1, −1) წერტილში გაელებული მხები სიბრტყის განტოლება (5.6) ფორმულის თანახმად იქნება $z+1=-3x-(y-1)$ ანუ $z=-3x-y$.

ორი ცვლადის ფუნქციის მნიშვნელობების მიახლოებითი გამოთვლა

ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი გამოიყენება მიახლოებით გამოთვლებში. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+dz, \tag{5.7}$$

სადაც $dz = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\,\Delta y$, ხოლო Δx და Δy საკმარისად მცირეა.

$1,02^{3,01}$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ $1,02^{3,01}$.

ამოხსნა. განვიხილოთ ფუნქცია $z=x^y$. ვთქვათ, $x_0=1$, $y_0=3$, $\Delta x=0.02$ და $\Delta y=0,01$.

გვაქვს $dz = y\cdot x^{y-1}\,\Delta x + x^y \ln x\cdot\Delta y$.

ამიტომ (5.7) ფორმულის თანახმად მივიღებთ

1,02 $1,2^{3,01} \approx 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 0,02 + 1^3 \ln 1\cdot 0,01 = 1+0,06 = 1,06.$

მაგალითი 8. $f(x,y)=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$ გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა (10,1; 5,8) წერტილში.

ამოხსნა. ავიღოთ $x_0=10$, $y_0=6$, $\Delta=0,1$, $\Delta y=-0.2$, გვაქვს

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(x-y)^{-\frac{1}{2}};$$

$$f'_y(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(x-y)^{-\frac{1}{2}},$$

ამიტომ $f'_x(10,6)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}, \quad f'_y(10,6)=-\frac{1}{8}.$

თუ გამოვიყენებთ (5.7) ფორმულას გვექნება

$$f(10,1;5,8)\approx f(10,6)+\frac{3}{8}\cdot 0,1-\frac{1}{8}(-0,2)=6+\frac{0,3}{8}+\frac{0,2}{8}\approx 6,0611 \ .$$

რთული ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, $z=f(x,y)$ ფუნქციაში x და y თავის მხრივ წარმოადგენენ t ცვლადის $x=\varphi(t)$ და $y=\psi(t)$ ფუნქციებს. მაშინ $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ იქნება დამოუკიდებელი t ცვლადის რთული ფუნქცია. თუ $x=\varphi(t)$ და $y=\psi(t)$ ფუნქციები წარმოებადი არიან t_0 წერტილში, ხოლო $z=f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $M(x(t_0),\ y(t_0))$ წერტილში, მაშინ $f(\varphi(t),\psi(t))$ რთული ფუნქცია წარმოებადია t_0 წერტილში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{dz}{dt}=z'_x\,\frac{d\varphi}{dt}+z'_y\,\frac{d\psi}{dt} \ . \tag{5.8}$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $z=f(x,y)$ ფუნქციაში x და y ცვლადები თავის მხრივ u და v ცვლადების ფუნქციებია $x=\varphi(u,v)$ და $y=\psi(u,v)$, მაშინ $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ წარმოადგენს u და v ცვლადების რთულ ფუნქციას.

ვთქვათ, $x=\varphi(u,v)$ და $y=\psi(u,v)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია $M(u_0,v_0)$ წერტილში და $z=f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0))$ წერტილში, მაშინ რთული ფუნქცია დიფერენცირებადია (u_0,v_0) წერტილში და მისი კერძო წარმოებულები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}. \qquad (5.9)$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $z=2^{x^2+y^2}$ ფუნქციის წარმოებული $\frac{dz}{dx}$, თუ $y=\cos^2 x$.

ამოხსნა. (5.8) ფორმულის მიხედვით

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2^{x^2+y^2}\ln 2\cdot 2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2^{x^2+y^2}\ln 2\cdot 2y$$

$$\frac{dy}{dx}=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x.$$

$$\frac{dz}{dx}=2^{x^2+y^2}\ln 2\cdot 2x+2^{x^2+y^2}\ln 2\cdot 2y(-\sin 2x)=$$

$$=2^{x^2+\cos^2 x}\ln 2\left(2x-2\cos^2 x\cdot\sin 2x\right)$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $z=x^4+y^3$ ფუნქციის წარმოებული, თუ $x=t^3$, $y=t^4$.

ამოხსნა. (5.8) ფორმულით $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2$, $\frac{dx}{dt}=3t^2$, $\frac{dy}{dt}=4t^3$. ამიტომ გვექნება

$$\frac{dz}{dt}=4x^3\cdot 3t^2+3y^2\cdot 4t^3=4\cdot(t^3)^3\cdot 3t^2+3\cdot(t^4)^2 4\cdot t^3=$$

$$=12t^{11}+12t^{11}=24t^{11}.$$

მაგალითი 3. მოცემულია $z=x^3\ln y$, $x=\frac{u}{v}$ და $y=2u-3v$. ვიპოვოთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$.

ამოხსნა. (5.9) ფორმულის მიხედვით

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

ჩვენ შემთხვევაში $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2\ln y$, $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$, $\frac{\partial y}{\partial u}=2$.

ამიტომ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=3x^2\ln y\cdot\frac{1}{v}+\frac{x^3}{y}\cdot 2=\frac{3u^2}{v^3}\ln(2u-3v)+\frac{2u^3}{v^3(2u-3v)}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{u}{v^2},\ \frac{\partial y}{\partial v}=-3.$$

ამრიგად, (5.9) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial z}{\partial v}=3x^2\ln y\left(-\frac{u}{v^2}\right)-\frac{x^3}{y}\cdot 3=-3\frac{u^3}{v^4}\ln(2u-3v)-\frac{3\cdot u^3}{v^3(2u-3v)}.$$

§. 5.4. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალები

z=f(x,y) ფუნქციის კერძო წარმოებულები თავის მხრივ ორი ცვლადის ფუნქციებია, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ მათი კერძო წარმოებულები x და y ცვლადების მიმართ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

მათ **მეორე რიგის კერძო წარმოებულები** ეწოდებათ.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ და $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ შერეული კერძო წარმოებულებია. შევნიშნოთ, რომ თუ შერეული კერძო წარმოებულები უწყვეტია რაიმე წერტილში, მაშინ ამ წერტილში ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

სხვა შემთხვევაში ეს შერეული წარმოებულები შეიძლება არ იყოს ტოლი. თუ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial x}{\partial y}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია, მაშინ გამოსახულებას

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

ეწოდება f ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. მოცემულია $z=y^{\ln x}$, იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ და $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

ამოხსნა. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^{\ln x}\cdot\ln y\cdot\frac{1}{x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^{\ln x}\ln^2 y\cdot\frac{1}{x^2}-y^{\ln x}\cdot\ln y\frac{1}{x^2}=y^{\ln x}\ln y\cdot\frac{1}{x^2}(\ln y-1).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln xy^{\ln x-1};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\ln x\cdot(\ln x-1)\cdot y^{\ln x-2}.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოთვალეთ

5.32. $f'_x(0,1)$, თუ $f(x,y)=x^2-3xy+y^4$.

5.33. $f'_y\left(\frac{1}{2};-1\right)$, თუ $f(x,y)=3^{x^2-y^2}$. 5.34. $f'_x\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$, თუ $f(x,y)=\sin^2(x-y)$.

5.35. $z'_x(2;-1)$, თუ $z=xy+\ln(x+y)$. 5.36. $z'_y\left(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$, თუ $z=\cos(3x+2y)$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების კერძო წარმოებულები

5.37. $z=x^3+y^3-3axy$. 5.38. $z=\frac{x-y}{x+y}$. 5.39. $z=\frac{y}{x}$. 5.40. $z=\sqrt{x^2-y^2}$

.5.41. $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 5.42. $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$. 5.43. $z=x^y$. 5.44. $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

5.45. $z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. 5.46. $z=\ln\cos\frac{x+a}{\sqrt{y}}$. 5.47. $z=x^2\sin^2 y$.

5.48. $z=y^{\mathrm{tg}^2 x}$. 5.49. $z=(x^2+y^2)^{y^2}$. 5.50. $z=x^{\cos^2 y}$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების სრული დიფერენციალი

5.51. $z=x^2+3y^3-4xy$. 5.52. $z=x^2+y^2+3x+\ln 2$. 5.53. $z=3xy-2x^2-3y^2+1$.

5.54. $z=\arcsin\frac{x^2}{y^2}$. 5.55. $z=\frac{xy}{1+x^2}$. 5.56. $z=e^{\frac{x^2}{y}}$.

5.57. $z=\mathrm{ctg}(x^2-y^2)$. 5.58. $z=e^{\cos\frac{x}{y}}$. 5.59. $z=\mathrm{arctg}(x^2+y^2)$.

5.60. $z=\sqrt{x^2+y^2}$. 5.61. $z=\ln\frac{x}{y}$. 5.62. $z=xy-\ln y+a^3$.

დიფერენციალის გამოყენებით გამოთვალეთ მიახლოებით შემდეგი სიდიდეები

5.63. $(0{,}95)^{2{,}01}$. 5.64. $e^{0{,}7}\cdot\sin 0{,}8$. 5.65. $\cos 0{,}1\cdot\ln 1{,}0{,}3$. 5.66. $\sin 29^0\cdot\mathrm{tg}46^0$.

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

5.67. $z=2y^5+3x^2y^3+y$. 5.68. $z=e^x(\cos y+x\sin y)$. 5.69. $z=\frac{x-y}{x+y}$.

5.70. $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 5.71. $z=\mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. 5.72. $z=\sin^2(3x+5y)$.

5.73. $z=\mathrm{tg}(xy)$. 5.74. $z=(\cos x)^y$.

დაამტკიცეთ რომ

5.75. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$, თუ $z=\mathrm{tg}^2(x-y)$. 5.76. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, თუ $z=x^3-x^2y+xy$.

5.77. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, თუ $z=xy+\cos(x-y)$.

5.78. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, თუ $z=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$.

5.79. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$, თუ $z=\sin xy+\cos xy$.

5.80. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$, თუ $z=\sin xy$.

5.81. $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{\ln y}$, თუ $z=e^{\frac{x}{y}}\ln y$.

5.82. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0{,}5z$, თუ $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$.

იპოვეთ შემდეგ რთულ ფუნქციათა წარმოებულები

5.83. $z=3\ln(xy)$, $y=x^3+2x$. $\frac{dz}{dx}=?$

5.84. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $y=x^3$. $\frac{dz}{dx}=?$

5.85. $z=\arcsin\frac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+4}$. $\frac{dz}{dx}=?$

5.86. $z=(\operatorname{arctg}(xy+1)$, $y=\ln x$. $\frac{dz}{dx}=?$

5.87. $z=x\sin\frac{x}{y}$, $x=t^4$, $y=t^3+1$. $\frac{dz}{dt}=?$

5.88. $z=\arccos(x^2-y^2)$, $x=5t^2$, $y=4t^3$. $\frac{dz}{dt}=?$

5.89. $z=3^{x^2+y^2}$, $x=\cos t$, $y=\sin 2t$. $\frac{dz}{dt}=?$

5.90. $z=\operatorname{tg}(xy^2)$, $x=2u^2-v$, $y=3u-v^2$. $\frac{\partial z}{\partial u}=?$

5.91. $z=e^{x^3+y^3}$, $x=u\cos v$, $y=u\sin v$. $\frac{\partial z}{\partial v}=?$

§ 5.5. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

ვთქვათ, $z=f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის რაიმე U მიდამოში.

განსაზღვრა. $M_0(x_0,y_0)$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის ლოკალური **მაქსიმუმის** წერტილი, თუ ნებისმიერი $M(x,y)$ წერტილისათვის აღნიშნული U მიდამოდან სრულდება პირობა $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

$M_0(x_0,y_0)$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის ლოკალური **მინიმუმის** წერტილი, თუ იმავე პირობებში სრულდება უტოლობა $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$.

ლოკალური მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს უწოდებენ ლოკალური **ექსტრემუმის** წერტილებს. ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ფუნქციის ექსტრემუმები ეწოდება.

ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა. ვთქვათ, $M_0(x_0,y_0)$ არის f ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი და მას ამ წერტილში აქვს კერძო წარმოებულები, მაშინ $f'_x(x_0, y_0)=0$ და $f'_y(x_0, y_0)=0$.

შევნიშნოთ, რომ ამ პირობების შესრულება, საზოგადოდ, არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ M_0 იყოს ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი.

მაგალითად, $z=x^2-y^2$.

$z'_x(0,0)=0$ $z'_y(0,0)=0$, მაგრამ (0,0) წერტილი არ არის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, რადგან z ფუნქცია M_0-ის ნებისმიერ მცირე მიდამოში იღებს როგორც დადებით, ისე უარყოფით მნიშვნელობებს.

საზოგადოდ, თუ $M_0(x_0,y_0)$ წერტილი $z=f(x,y)$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილია, მაშინ ამ წერტილში f-ის კერძო წარმოებულები ნულის ტოლია, ან ისინი არ არსებობს.

იმ წერტილებს, რომლებშიც კერძო წარმოებულები ნულია, უწოდებენ **სტაციონარულ** წერტილებს.

ექსტრემუმის საკმარისი პირობა. ვთქვათ, $M_0(x_0,y_0)$ წერტილი არის $z=f(x,y)$ ფუნქციის სტანციონარული წერტილი. დავუშვათ, რომ M_0 წერტილში f ფუნქციის ყველა მეორე რიგის წარმოებული უწყვეტია.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$.

მაშინ, თუ

1) $AC-B^2>0$, f ფუნქციას M_0 წერტილში აქვს ექსტრემუმი. კერძოდ, თუ $A<0$, მაშინ M_0 წერტილი მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო თუ $A>0$, მაშინ M_0 წერტილი მინიმუმის წერტილია.

ფუნქციის ექსტრემუმის საპოვნელად x_0 და y_0 უნდა ჩაისვას მოცემულ ფუნქციაში, ე.ი. ვიპოვოთ $f(x_0,y_0)$.

2) თუ $AC-B^2<0$, მაშინ M_0 წერტილი არ არის ექსტრემუმის წერტილი.

3) თუ $AC-B^2=0$, გვაქვს საეჭვო შემთხვევა. ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ან არ ჰქონდეს ექსტრემუმი, რის გარკვევაც ხდება სხვა მოსაზრებებით.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-3y$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

ამოხსნა. გვაქვს $f'_x=2x+y-2$, $f'_y=x+2y-3$. ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები.

$$\begin{cases}2x+y-2=0\\x+2y-3=0\end{cases}$$

$x=\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{4}{3}$. ე.ი. $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ სტანციონარული წერტილია. $A=f''_{xx}=2$, $B=f''_{xy}=1$, $C=f''_{yy}=2$.

$AC-B^2=2\cdot2-1=3>0$, ე.ი. $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ ექსტრემუმის წერტილია. რადგან $A=2>0$, ამიტომ ეს წერტილი მინიმუმის წერტილია. ფუნქციის მინიმუმი კი ტოლია

$$f_{\min}=f\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}-3\cdot\frac{4}{3}=-\frac{7}{3}.$$

მაგალითი 2. იპოვეთ $z=x^4+y^4$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები.

ამოხსნა. $f'_x=4x^3$, $f'_y=4y^3$. სტაციონარული წერტილია (0;0). ამასთან, $z''_{xx}=12x^2, z''_{xy}=0, z''_{yy}=12y^2$, $A=0$, $B=0$, $C=0$. $A=z''_{xx}(0,0)$, $B=z''_{xy}(0,0)$, $C=z''_{yy}(0,0)$, $AC-B^2=0$. ამგვარად, შემთხვევა საეჭვოა. რადგან z ყველგან დადებითია გარდა (0,0) წერტილისა და $z(0,0)=0$, ამიტომ $M(0,0)$ წერტილი ამ ფუნქციის მინიმუმის წერტილია.

$$z_{\min}=z(0;0)=0.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $z=x^3+3xy^2-15x-12y$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

ამოხსნა. სტაციონარული წერტილების საპოვნელად ა) გამოვთვალოთ მოცემული ფუნქციის კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=6xy-12,$$

ბ) ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases}3x^2+3y^2=15\\ 6xy-12=0\end{cases}\left|\begin{array}{l}3x^2+3y^2=15\\ x=\dfrac{2}{y}\end{array}\right|\begin{array}{l}\dfrac{4}{y^2}+y^2-5=0\\ x=\dfrac{2}{y}\end{array}$$

$$\begin{cases}4+y^4-5y^2=0\\ x=\dfrac{2}{y}\end{cases}\quad \text{აღვ.}\quad \begin{cases}t^2-5t+4=0,\quad t=y^2,\quad t_1=1,\quad t_2=4\\ x=\dfrac{2}{y}\end{cases},$$

$$\begin{cases}y^2=1,\quad y=\pm1\\ x=\pm2\end{cases}\quad \text{ან}\quad \begin{cases}y^2=4,\quad y=\pm2\\ x=\pm1\end{cases}.$$

მივიღეთ ოთხი სტაციონარული წერტილი $M_1=(2;1)$; $M_2=(-2;-1)$; $M_3=(1;2)$; $M_4=(-1;-2)$.

ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x..$$

ვიპოვოთ პირველ სტაციონარულ წერტილზე A, B და C-ს მნიშვნელობანი.

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_1}=(6x)_{(2;1)}=6\cdot2=12.\quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{M_1}=(6y)_{(2;1)}=6\cdot1=6.$$

$$C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_1}=(6x)_{(2;1)}=6\cdot 2=12\,.$$

ვიპოვოთ $\Delta=AC-B^2$. $\Delta=12\cdot12-6^2=144-36=108$

რადგან $\Delta>0$, M_1-ზე z ფუნქციას ექსტრემუმი გააჩნია. კერძოდ, მინიმუმი, რადგან $A>0$.

$z_{min}=(x^3+3xy^2-15x-12y)_{(2;1)}=8+3\cdot2\cdot1-15\cdot2-12\cdot1=-28$, ე.ი. $z=-28$.

განვიხილოთ მეორე სტაციონარული წერტილი $M_2(-2;-1)$.

$A_{(-2;-1)}=6\cdot(-2)=-12$. აქ $\Delta=(-12)\cdot(-12)-(-6)^2=144-36=108$;

$B_{(-2;-1)}=6\cdot(-1)=-6$,

$C_{(-2;-1)}=6\cdot(-2)=-12$, $\quad\Delta>0$.

ე.ი. M_2 წერტილშიც გვაქვს ექსტრემუმი, კერძოდ, max, რადგან $A<0$.

$$z_{max}=(x^3+3xy^2-15x-12y)_{(-2;-1)}=$$
$$=(-2)^3+3\cdot(-2)\cdot(-1)^2-15\cdot(-2)-12\cdot(-1)=-8-6+30+12$$
$$z_{max}=28,$$

განვიხილოთ მესამე სტაციონარული წერტილი $M_3(1;2)$.

$$A=6\cdot1=6\,,\quad B=6\cdot2=12,\quad C=6.$$
$$\Delta=AC-B^2,\ \Delta=6\cdot6-12^2=36-144=-108,\ \Delta<0.$$

ე.ი. ექსტრემუმი ამ წერტილში არ გვაქვს. განვიხილოთ მეოთხე სტაციონარული წერტილი $M_4(-1;-2)$.

$A=6\cdot(-1)=-6$; $\quad B=6\cdot(-2)=-12$; $\quad\quad C=6\cdot(-1)=6$.

$\Delta=AC-B^2$; $\quad\quad \Delta=(-6)\cdot(-6)-(-12)^2$; $\quad\quad \Delta=36-144=-108<0$.

ე.ი. ამ წერტილზე ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია. საბოლოოდ მივიღეთ $z_{min}=-28$, $z_{max}=28$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე შემდეგი ფუნქციები

5.92. $z=(x-1)^2+2y^2$. 5.93. $z=(x-1)^2-2y^2$.

5.94. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$. 5.95. $z=x^3y^2(6-x-y)\quad x>0,\ y>0$.

5.96. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$. 5.97. $z=3x^2-x^3+3y^2+6y+9x+1$.

5.98. $z=\frac{1}{2}x^2+3xy+y^3-12y+15$. 5.99. $z=\frac{1}{3}x^3-xy^2+2xy-15x+1$.

5.100. $z=x^3-yx+x^2+y^2-3y+1$. 5.101. $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$.

თავი VI

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§6.1 პირველადი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი

ვთქვათ, f(x) ფუნქცია განსაზღვრულია E რიცხვით შუალედში. f(x)-ის პირველადი ფუნქცია ეწოდება ისეთ F(x) ფუნქციას, რომლის წარმოებული შუალედის ყოველ წერტილში f(x)-ის ტოლია, ე. ი. $F'(x)=f(x),\ \forall x\in E$.

მტკიცდება, რომ, თუ f(x) ფუნქცია უწყვეტია [a, b] სეგმენტზე, მაშინ მას გააჩნია პირველადი ფუნქცია. f(x) ფუნქციის ნებისმიერი პირველადი ფუნქცია მოიცემა F(x)+C სახით, სადაც F(x) არის f(x) ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადი, ხოლო C – ნებისმიერი მუდმივი.

f(x) ფუნქციის ნებისმიერ პირველად ფუნქციას ეწოდება f(x) ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი და იგი $\int f(x)dx$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად,

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \text{ სადაც } F'(x)=f(x).$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებიდან გამომდინარეობს:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \qquad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\int f'(x)dx = f(x)+C, \qquad \int df(x) = f(x)+C.$

განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$

2. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

ძირითად ინტეგრალთა ცხრილი

1. $\int dx = x+C,$ 2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \ (\alpha\neq -1),$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C,$ 4. $\int e^x dx = e^x + C,$ 5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C,$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$ 7. $\int \cos x dx = \sin x + C,$ 8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C,$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C,$ 10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$ 11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C.$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $\int 5x\sqrt[3]{x}dx.$

ამოხსნა. $\int 5x\sqrt[3]{x}dx = 5\int x^{\frac{4}{3}}dx = 5\cdot\dfrac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = \dfrac{15}{7}x^{\frac{7}{3}} + C.$

შემოწმება. $\left(\dfrac{15}{7}x^{\frac{7}{3}} + C\right)' = \dfrac{15}{7}\cdot\dfrac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = 5x^{\frac{4}{3}} = 5\sqrt[3]{x^4}.$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $\int (x^5 + 2x)(x^2 - 4)dx.$

ამოხსნა. $\int (x^5 + 2x)(x^2 - 4)dx = \int (x^7 - 4x^5 + 2x^3 - 8x)dx =$

$$= \int x^7 dx - \int 4x^5 dx + \int 2x^3 dx - \int 8x dx = \frac{x^8}{8} - 4\cdot\frac{x^6}{6} + 2\cdot\frac{x^4}{4} - 8\cdot\frac{x^2}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{8}x^8 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + C.$$

შემოწმება. $\left(\dfrac{1}{8}x^8 - \dfrac{2}{3}x^6 + \dfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 + C\right)' = x^7 - 4x^5 + 2x^3 - 8x = (x^5 + 2x)(x^2 - 4).$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $\int \dfrac{3\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}}dx.$

ამოხსნა. $\int \dfrac{3\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}}dx = 3\int \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{5}}}dx + 2\int \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{5}}}dx =$

$$= 3\int x^{\frac{3}{10}}dx + 2\int x^{\frac{17}{15}}dx = 3\cdot\frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}} + 2\cdot\frac{x^{\frac{32}{15}}}{\frac{32}{15}} + C = \frac{30}{13}x\sqrt[10]{x^3} + \frac{15}{16}x^2\sqrt[15]{x^2} + C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

ამოხსნა. ეს ინტეგრალი ცხრილის ინტეგრალამდე დაიყვანება ხელოვნური გარდაქმნით.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \text{tg}x - \text{ctg}x + C.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ცხრილის ინტეგრალების გამოყენებით იპოვეთ:

6.1 $\int(3x+1)^2dx.$ 6.2 $\int\left(6x^2+4x+\frac{1}{x}\right)dx.$ 6.3 $\int(1+x)(1+2x)(1+3x)dx.$

6.4 $\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx.$ 6.5 $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx.$ 6.6 $\int\left(2^x-3^x\right)\cdot 4^x dx.$ 6.7 $\int e^x\left(1+\frac{1}{x^3e^x}\right)dx.$

6.8 $\int\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)dx.$ 6.9 $\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x^4}\right)dx.$

6.10 $\int\frac{\left(3^x-4^x\right)^2}{12^x}dx.$ 6.11 $\int tg^2xdx.$ 6.12 $\int ctg^2xdx.$ 6.13 $\int\cos^2\frac{x}{2}dx.$

6.14 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$ 6.15 $\int\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx.$ 6.16 $\int\frac{dx}{1-\cos 2x}.$

6.17 $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}.$ 6.18 $\int\left[1-\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\right]dx.$

§6.2 ცვლადის გარდაქმნა განუსაზღვრელ ინტეგრალში (ჩასმის ხერხი)

ვთქვათ, f(x) ფუნქცია უწყვეტია [a, b] სეგმენტზე და

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

განვიხილოთ $x=\varphi(t)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე და $a<\varphi(t)<b$, როცა $\alpha\le t\le\beta$. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის ამ ხერხს ჩასმის ხერხი, ანუ ცვლადის გარდაქმნის ხერხი ეწოდება.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ $(a\ne 0)$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა x = at, მაშინ dx = adt. ჩასმის ხერხის გამოყენებით გვექნება:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{adt}{a^2t^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\int(3x+5)^6dx$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $t=3x+5$, მაშინ $dt=3dx$, $dx=\frac{1}{3}dt$. მივიღებთ

$$\int(3x+5)^6dx=\frac{1}{3}\int t^6dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^7}{7}+C=\frac{1}{21}(3x+5)^7+C.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\int\frac{dx}{\cos^2 5x}$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $t=5x$, მაშინ $dt=5dx$, $dx=\frac{1}{5}dt$. ე.ი.

$$\int\frac{dx}{\cos^2 5x}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{5}\operatorname{tg}t+C=\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x+C.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3x+4}}$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $t=3x+4$, მაშინ $dt=3dx$, $dx=\frac{1}{3}dt$. ე.ი.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3x+4}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t}}=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+4)^2}+C.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos x}}$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $t=\cos x$. მაშინ $dt=-\sin xdx$, აქედან $\sin xdx=-dt$. ე.ი. $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos x}}=-\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t}}=-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^2 x}+C.$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $t=\ln x$, მაშინ $dt=\frac{dx}{x}$. ე.ი.

$$\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int\sqrt{t}dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+C.$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ $\int\frac{\sqrt[5]{(\operatorname{arctg}x)^2}}{1+x^2}dx.$

ამოხსნა. ვინაიდან $\frac{dx}{1+x^2}=d(\operatorname{arctg}x)$, ამიტომ

$$\int\frac{\sqrt[5]{(\operatorname{arctg}x)^2}}{1+x^2}dx=\int\sqrt[5]{(\operatorname{arctg}x)^2}\,d(\operatorname{arctg}x)=\frac{(\operatorname{arctg}x)^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}+C=\frac{5}{7}\sqrt[5]{(\operatorname{arctg}x)^7}+C.$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^3-5}}.$

ამოხსნა.

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^3-5}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3-5)}{\sqrt[3]{x^3-5}}=\frac{1}{3}\frac{(x^3-5)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3-5)^2}+C.$$

მაგალითი 9. ვიპოვოთ $\int e^{3x-5}dx.$

ამოხსნა. $\int e^{3x-5}dx=\frac{1}{3}\int e^{3x-5}d(3x-5)=\frac{1}{3}e^{3x-5}+C.$

ჩასმის ხერხის გამოყენებით და მარტივი გარდაქმნებით შეიძლება მივიღოთ ტოლობები, რომლებიც ძირითად ინტეგრალთა ცხრილის განზოგადებას წარმოადგენს.

1. $\int\frac{dx}{x+a}=\ln|x+a|+C$ (ჩასმა $t=x+a$). 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ ($a>0$,ჩასმა $x=at$).

3. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$ 4. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$ (ჩასმა $t=x+\sqrt{x^2+a}$).

6. $\int\sin kx\,dx=-\frac{1}{k}\cos kx+C.$ 7. $\int\cos kx\,dx=\frac{1}{k}\sin kx+C.$

მაგალითი 10. ვიპოვოთ $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}.$

ამოხსნა. ვინაიდან $x^2+4x+8=(x+2)^2+4$, ამიტომ

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C.$$

მაგალითი 11. ვიპოვოთ $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}.$

ამოხსნა. ვინაიდან $x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, ამიტომ

$$\int\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$$

მაგალითი 12. ვიპოვოთ $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+15}}$.

ამოხსნა. ვინაიდან $x^2+6x+15=(x+3)^2+6$, ამიტომ გვაქვს:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+15}}=\int\frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2+6}}\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+15}\right|+C.$$

მაგალითი 13. ვიპოვოთ $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

ამოხსნა. ვინაიდან $3-2x-x^2=4-(x+1)^2$, ამიტომ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ჩასმის ხერხის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

6.19 $\int\frac{dx}{(3x+2)^4}$. 6.20 $\int\frac{dx}{(ax+b)^k}$. 6.21 $\int\sqrt{3x+4}dx$. 6.22 $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{2x-3}}$.

6.23 $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$. 6.24 $\int\frac{2x^2dx}{4x^3+7}$. 6.25 $\int x\sqrt[3]{x^2+4}dx$. 6.26 $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{7+x^4}}$.

6.27 $\int\frac{(x+2)dx}{x^2+4x+9}$. 6.28 $\int e^{5x}dx$. 6.29 $\int\frac{\ln^2 xdx}{x}$. 6.30 $\int\frac{e^xdx}{e^x+3}$.

6.31 $\int\frac{2^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx$. 6.32 $\int\frac{dx}{\cos^2(3x+2)}$. 6.33 $\int x^2e^{x^3}dx$. 6.34 $\int a^{\sin x}\cos xdx$.

6.35 $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}x+1}}$. 6.36 $\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$. 6.37 $\int\frac{dx}{3x-x^2}$. 6.38 $\int x^2\sin(1+x^3)dx$.

6.39 $\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}dx}{\cos^2 x}$. 6.40 $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$. 6.41 $\int\frac{2^xdx}{\sqrt{1-4^x}}$. 6.42 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

6.43 $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$. 6.44 $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$. 6.45 $\int\frac{dx}{3-5x^2}$. 6.46 $\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

6.47 $\int\frac{xdx}{3-2x}$. 6.48 $\int\frac{dx}{3+5x^2}$. 6.49 $\int\frac{dx}{\sqrt{3+5x^2}}$. 6.50 $\int(\sin 3x-\cos 3x)^2dx$.

6.51 $\int\sin 2x\cos 5xdx$. 6.52 $\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$. 6.53 $\int\frac{x^3dx}{(3x^4-2)^{\frac{3}{4}}}$.

6.54 $\int\frac{e^xdx}{3+e^{2x}}$. 6.55 $\int\frac{x^2dx}{x^6-4}$. 6.56 $\int\frac{\ln^3xdx}{x}$. 6.57 $\int\frac{\ln xdx}{x(1+\ln^4x)}$.

6.58 $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt[5]{\sin^2x}}$. 6.59 $\int tgxdx$. 6.60 $\int ctgxdx$. 6.61 $\int\frac{\cos 2xdx}{(\cos x+\sin x)^2}$.

6.62 $\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+9}}$. 6.63 $\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{9-x^2}}$. .64 $\int\frac{x-1}{x^2-9}dx$. 6.65 $\int\frac{\sqrt[3]{x}+\ln^2x}{x}dx$.

6.66 $\int e^x\sqrt[3]{a+be^x}dx$. 6.67 $\int\frac{b^xdx}{a^2+b^{2x}}$. 6.68 $\int\sin^2(a+bx)dx$.

6.69 $\int\cos^2(a+bx)dx$. 6.70 $\int tg^2(a+bx)dx$. 6.71 $\int ctg^2(a+bx)dx$.

6.72 $\int\frac{dx}{\sin(ax+b)}$. 6.73 $\int\frac{dx}{\cos(ax+b)}$. 6.74 $\int xtg(1-x^2)dx$. 6.75 $\int\frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

6.76 $\int\sqrt{4\sin^2x+1}\sin 2xdx$. 6.77 $\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{25-tg^2x}}$. 6.78 $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$.

6.79 $\int\frac{\sqrt{1-2tgx}}{\cos^2x}dx$. 6.80 $\int\frac{coxdx}{\sqrt{9-2\sin^2x}}$. 6.81 $\int\frac{x-\arccos\frac{3}{x}}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

6.82 $\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+3}dx$. 6.83 $\int\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{1-4x^4}}dx$. 6.84 $\int x\sqrt[3]{x+1}dx$. 6.85 $\int\frac{\cos^3xdx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

6.86 $\int\frac{5x-1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$. 6.87 $\int\frac{x(1+x^2)}{x^4+4}dx$. 6.88 $\int\frac{2x-1}{x+1}dx$.

6.89 $\int\frac{x}{2x-1}dx$. 6.90 $\int\frac{xdx}{4x^2+4x+5}$. 6.91 $\int\frac{x^3dx}{x-2}$. 6.92 $\int\frac{xdx}{x^2+2x+10}$.

6.93 $\int\frac{\sqrt{4+\ln x}}{x\ln x}dx$. 6.94 $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. 6.95 $\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$. 6.96 $\int\frac{5^xdx}{5^{2x}+10}$.

§6.3 ნაწილობითი ინტეგრება

თუ $u = u(x)$ და $v = v(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

ამ ფორმულას **ნაწილობითი ინტეგრების** ფორმულა ეწოდება.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\int x 5^x dx$.

ამოხსნა. დაუშვათ, $u = x$, $dv = 5^x dx$. მაშინ du=dv და $v = \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}$. ნაწილობითი ინტეგრალის ფორმულის გამოყენება გვაძლევს:

$$\int x 5^x dx = x \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5}\int 5^x dx = x \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{\ln^2 5} + C.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\int x \cos 3x dx$.

ამოხსნა. დაუშვათ, $u = x$, $dv = \cos 3x dx$. მაშინ $du = dx$ და $v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x$. ე.ი.

$$\int x \cos 3x dx = \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\int \operatorname{arctg} x dx$.

ამოხსნა. დაუშვათ, $u = \operatorname{arctg} x$ და $dv = dx$. მაშინ $du = \frac{dx}{x^2+1}$ და $v = x$. მაშასადამე,

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\int x^5 \ln x dx$.

ამოხსნა. დაუშვათ, $u=\ln x$ და $dv = x^5 dx$. მაშინ $du = \frac{dx}{x}$ და $v = \frac{1}{6}x^6$. ე.ი.

$$\int x^5 \ln x dx = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6}\int x^6 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{36}x^6 + C.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\int \left(x^2 - 5x + 6\right)e^x dx$.

ამოხსნა. დაუშვათ, $u = x^2 - 5x + 6$, ხოლო $dv = e^x dx$. მაშინ $du = (2x - 5)dx$ და $v = e^x$. ე.ი.

$$\int (x^2 - 5x + 6)e^x dx = (x^2 - 5x + 6)e^x - \int (2x - 5)e^x dx.$$

უკანასკნელ ინტეგრალში კვლავ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა. დავუშვათ, $u = 2x - 5$ და $dv = e^x dx$. მაშინ $du = 2dx$, ხოლო $v = e^x$. მივიღებთ:

$$\int (2x - 5)e^x dx = (2x - 5)e^x - 2\int e^x dx = (2x - 5)e^x - 2e^x + C.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ გვაქვს:

$$\int (x^2 - 5x + 6)e^x dx = (x^2 - 5x + 6)e^x - (2x - 5)e^x + 2e^x + C = (x^2 - 7x + 13)e^x + C.$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $\int \sqrt{x^2 + 4}dx$.

ამოხსნა. დაუშვათ, $u = \sqrt{x^2 + 4}$ და $dv = dx$. მაშინ $du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}}$ და $v = x$. ე.ი.

$$\int \sqrt{x^2 + 4}dx = x\sqrt{x^2 + 4} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}dx = x\sqrt{x^2 + 4} - \int \frac{(x^2 + 4 - 4)dx}{\sqrt{x^2 + 4}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 + 4} - \int \sqrt{x^2 + 4}dx + 4\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 4}\right| + C.$$

საიდანაც

$$2\int \sqrt{x^2 + 4}dx = x\sqrt{x^2 + 4} + 4\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 4}\right| + C$$

და

$$\int \sqrt{x^2 + 4}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 4} + 2\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 4}\right| + C.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

შემდეგ ინტეგრალთა გამოსათვლელად ისარგებლეთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით:

6.97 $\int x\sin xdx$. 6.98 $\int x\cos xdx$. 6.99 $\int x \cdot 3^{-x}dx$. 6.100 $\int x \cdot 7^x dx$.

6.101 $\int xe^{-x}dx$. 6.102 $\int x\sin 2xdx$. 6.103 $\int x\cos 5xdx$. 6.104 $\int \ln xdx$.

6.105 $\int x^\alpha \ln xdx$ $(\alpha \neq -1)$. 6.106 $\int x\,\mathrm{arctg}xdx$. 6.107 $\int \arcsin xdx$.

6.108 $\int(x^2+x+1)e^x dx.$ 6.109 $\int(x^2+1)a^x dx.$ 6.110 $\int\frac{xdx}{e^{2x}}.$ 6.111 $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx.$

6.112 $\int\frac{\ln x}{x^3}dx.$ 6.113 $\int\sin\ln x dx.$ 6.114 $\int\cos\ln x dx.$ 6.115 $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

6.116 $\int\frac{\ln(1+tgx)}{\cos^2 x}dx.$ 6.117 $\int e^x\ln(1+e^x)dx.$ 6.118 $\int e^{2x}\cos 3x dx.$

6.119 $\int e^{ax}\sin bx dx.$ 6.120 $\int\ln^2 x dx.$ 6.121 $\int x^2 e^{-x}dx.$ 6.122 $\int x^2 a^x dx.$

6.123 $\int x\arcsin x dx.$ 6.124 $\int\ln(x^2+1)dx.$

6.125 ნაწილობითი ინტეგრებით დაამტკიცეთ, რომ

$$\int\sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x\cdot\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x dx,$$

$$\int\cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x\cdot\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x dx, \quad (n\neq 0)$$

და ამ ფორმულების საშუალებით იპოვეთ

$$\int\sin^5 x dx,\quad \int\cos^5 x dx,\quad \int\sin^4 x dx,\quad \int\cos^4 x dx.$$

6.126. ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ

$$\int\frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x},$$

$$\int\frac{dx}{\cos^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}, \quad (n\neq 1)$$

და ამ ფორმულების გამოყენებით იპოვეთ

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x},\quad \int\frac{dx}{\sin^3 x},\quad \int\frac{dx}{\cos^4 x},\quad \int\frac{dx}{\sin^4 x}.$$

§6.4 კვადრატული სამწევრის შემცველი უმარტივესი ინტეგრალები

ვთქვათ, უნდა ვიპოვოთ შემდეგი სახის ინტეგრალები:

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx,\quad \int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (a\neq 0).$$

მაშინ საჭიროა კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა, რის შემდეგაც მარტივი გარდაქმნებით მოცემული ინტეგრალები დაიყვანება ცხრილის ინტეგრალამდე.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$.

ამოხსნა. ვინაიდან $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. აღვნიშნოთ $t=x+\frac{1}{2}$, მაშინ $dt=dx$ და $x=t-\frac{1}{2}$. ამიტომ

$$\int \frac{xdx}{x^2+x+1}=\int \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\int \frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{9x^2+6x+4}}$.

ამოხსნა. ვინაიდან $9x^2+6x+4=(3x+1)^2+3$, აღვნიშნოთ $t=3x+1$, $dt=3dx$, საიდანაც $x=\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}$ და $dx=\frac{1}{3}dt$. მაშასადამე,

$$\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{9x^2+6x+4}}=\frac{1}{3}\int \frac{\left(\frac{1}{3}t-\frac{4}{3}\right)dt}{\sqrt{t^2+3}}=\frac{1}{9}\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+3}}-\frac{4}{9}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}}=$$

$$=\frac{1}{18}\int \frac{d\left(t^2+3\right)}{\sqrt{t^2+3}}-\frac{4}{9}\ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right|+C=\frac{1}{9}\sqrt{t^2+3}-\frac{4}{9}\ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right|+$$

$$+C=\frac{1}{9}\sqrt{9x^2+6x+4}-\frac{4}{9}\ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+4}\right|+C.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2-7x+12}$.

ამოხსნა. ვინაიდან $x^2-7x+12=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, აღვნიშნოთ $t=x-\frac{7}{2}$. მაშინ $dt=dx$ და $x=t+\frac{7}{2}$. ე.ი.

$$\int \frac{(2x+3)dx}{x^2-7x+12}=\int \frac{(2t+10)dt}{t^2-\frac{1}{4}}=\int \frac{d\left(t^2-\frac{1}{4}\right)}{t^2-\frac{1}{4}}+10\int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{4}}=$$

$$= \ln\left|t^2 - \frac{1}{4}\right| + 10\ln\left|\frac{t^2 - \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{1}{2}}\right| + C = \ln\left|x^2 - 7x + 12\right| + 10\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right| + C.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოთვალეთ კვადრატული სამწევრის შემცველი შემდეგი ინტეგრალები:

6.127 $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$. 6.128 $\int\frac{(x+1)dx}{x^2-2x+5}$. 6.129 $\int\frac{dx}{3x^2-2x+2}$.

6.130 $\int\frac{(3x-2)dx}{x^2-4x+5}$. 6.131 $\int\frac{(4x+8)dx}{3x^2+2x+5}$. 6.132 $\int\frac{(x+5)dx}{2x^2+2x+3}$.

6.133 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$. 6.134 $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$. 6.135 $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

6.136 $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$. 6.137 $\int\frac{(3x-6)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. 6.138 $\int\frac{(4x+7)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

6.139 $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+3x+5}}$. 6.140 $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-3\mathrm{tg}x-2\mathrm{tg}^2x}}$.

§6.5 რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება ნიშნავს $\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$ სახის ინტეგრალის მოძებნას, სადაც $f(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრებია.

იგულისხმება, რომ შესრულებულია შემდეგი 3 პირობა:

1. $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ წილადი არის უკვეცი;

2. მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე;

3. მნიშვნელის უდიდესი ხარისხის კოეფიციენტი არის 1.

თუ ინტეგრალქვეშა წილადი არაწესიერია, მაშინ მისგან უნდა გამოვყოთ მთელი ნაწილი.

ადგილი აქვს შემდეგ ოთხ შემთხვევას:

ა) რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს ნამდვილი და განსხვავებული ფესვები: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. ამ შემთხვევაში $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ წილადი დაიშლება შემდეგი სახის უმარტივეს წილადებად:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-\alpha_n},$$

სადაც A_1, A_2, ... ,A_n კოეფიციენტები მოიძებნება კოეფიციენტთა შედარების ხერხით.

ბ) რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს ნამდვილი ჯერადი ფესვები: $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ შესაბამისად $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ ჯერადობის. მაშინ რაციონალური წილადი დაიშლება შემდეგ უმარტივეს წილადებად:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{\beta_1}}{(x-\alpha_1)^{\beta_1}}+\frac{B_1}{x-\alpha_2}+\frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2}+$$

$$+\cdots+\frac{B_{\beta_2}}{(x-\alpha_2)^{\beta_2}}+\cdots+\frac{L_1}{x-\alpha_n}+\frac{L_2}{(x-\alpha_n)^2}+\cdots+\frac{L_{\beta_n}}{(x-\alpha_n)^{\beta_n}},$$

სადაც A_1, A_2, ... ,L_{β_n} კოეფიციენტები მოიძებნება კოეფიციენტთა შედარების ხერხით.

გ) რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს მარტივი კომპლექსური ფესვები: $\alpha_1+\beta_1 i$, $\alpha_2+\beta_2 i,\ldots,\alpha_k+\beta_k i$. მაშინ რაციონალური წილადი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\frac{M_2x+N_2}{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2},$$

სადაც M_1, $N_1,\ldots$, M_k, N_k კოეფიციენტები მოიძებნება კოეფიციენტთა შედარების ხერხით.

დ) რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს k ჯერადობის კომპლექსური $\alpha\pm\beta i$ ფესვი. მაშინ რაციონალური წილადი დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{M_2x+N_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k},$$

სადაც M_1, $N_1,\ldots$, M_k, N_k უცნობი კოეფიციენტები მოიძებნება კოეფიციენტთა შედარების ხერხით.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-1)(x+2)}$.

ამოხსნა. ინტეგრალქვეშა წილადი დაიშლება შემდეგი სახის უმარტივეს წილადებად:

$$\frac{1}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+2}.$$

მოვძებნოთ A_1, A_2, A_3 მუდმივები.

$$1 = A_1(x-1)(x+2) + A_2(x+1)(x+2) + A_3(x^2-1).$$

$$1 = (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (A_1 + 3A_2)x - 2A_1 + 2A_2 - A_3.$$

ე.ი

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ A_1 + 3A_2 \qquad = 0 \\ -2A_1 + 2A_2 - A_3 = 1 \end{cases}$$

$6A_2=1, A_2 = \frac{1}{6}$. მაშინ $A_1 = -3A_2 = -\frac{1}{2}$ და $A_3 = -A_1 - A_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

მაშასადამე,

$$\frac{1}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2}$$

და

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)(x+2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\int \frac{xdx}{(x^2-4x+4)(x+3)}$.

ამოხსნა. რადგანაც $x^2-4x+4=(x-2)^2$, ამიტომ მნიშვნელს აქვს $x=2$ ნამდვილი ორჯერადი ფესვი და $x=-3$ მარტივი ნამდვილი ფესვი. ე.ი.

$$\frac{x}{(x^2-4x+4)(x+3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x+3}.$$

$$x = A_1(x-2)(x+3) + A_2(x+3) + A_3(x-2)^2.$$

$$x = (A_1 + A_3)x^2 + (A_1 + A_2 - 4A_3)x - 6A_1 + 3A_2 + 4A_3.$$

ე.ი.

$$\begin{cases} A_1 + A_3 = 0 \\ A_1 + A_2 - 4A_3 = 1 \\ -6A_1 + 3A_2 + 4A_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_3 = -A_1 \\ A_2 = -5A_1 + 1 \\ -6A_1 - 15A_1 + 3 - 4A_1 = 0 \end{cases}$$

საიდანაც

$$A_1 = \frac{3}{25},\ A_2 = \frac{2}{5} \text{ და } A_3 = -\frac{3}{25}.$$

ინტეგრალქვეშა წილადი ასე დაიშლება:

$$\frac{x}{(x^2-4x+4)(x+3)} = \frac{3}{25}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{3}{25}\cdot\frac{1}{x+3}$$

და

$$\int \frac{xdx}{(x^2-4x+4)(x+3)} = \frac{3}{25}\int \frac{d(x-2)}{x-2} + \frac{2}{5}\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} - \frac{3}{25}\int \frac{d(x+3)}{x+3} =$$

$$=\frac{3}{25}\ln|x-2|-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{25}\ln|x+3|+C=\frac{3}{25}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|-\frac{2}{5(x-2)}+C.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\int\frac{(2x-1)dx}{x^3+1}$.

ამოხსნა. როგორც ვიცით $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. ე.ი. მნიშვნელს აქვს ერთი ნამდვილი და ორი ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური ფესვი. ამიტომ

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

$$2x-1=Ax^2+Bx^2-Ax+Bx+Cx+A+C.$$

$$2x-1=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C).$$

$$\begin{cases}A+B=0\\-A+B+C=2\\A+C=-1\end{cases}\quad\begin{cases}B=-A\\-3A=3\\C=-A-1\end{cases}\quad\begin{cases}B=1\\A=-1\\C=0\end{cases}$$

ე.ი. ინტეგრალქვეშა წილადი იშლება შემდეგნაირად:

$$\frac{2x-1}{x^3+1}=-\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2-x+1}$$

და

$$\int\frac{(2x-1)}{x^3+1}dx=-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{xdx}{x^2-x+1}=-\ln|x+1|+$$

$$+\int\frac{xdx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=-\ln|x+1|+\int\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\qquad\left|\begin{array}{l}t=x-\frac{1}{2}\\dt=dx\\x=t+\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=-\ln|x+1|+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ისარგებლეთ წესიერი რაციონალური წილადის უმარტივეს წილადად დაშლის ხერხით და გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

6.141 $\int\frac{(x-4)dx}{(x-2)(x-3)}$. 6.142 $\int\frac{(3x-2)dx}{x(x+1)(x-2)}$. 6.143 $\int\frac{(7x-5)dx}{x^3+x^2-6x}$.

6.144 $\int\frac{(x^5+x^4-8)dx}{x^3-4x}$. 6.145 $\int\frac{dx}{(x-2)(x-1)^2}$. 6.146 $\int\frac{(x^2-3x+2)dx}{x^3+2x^2+x}$.

6.147 $\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+1}dx$. 6.148 $\int\frac{dx}{x^4-x^2}$. 6.149 $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

6.150 $\int\frac{dx}{x^3+x}$. 6.151 $\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$. 6.152 $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

6.153 $\int\frac{dx}{x^3+1}$. 6.154 $\int\frac{2x^3-1}{x^4-1}dx$. 6.155 $\int\frac{x+2}{x^3-1}dx$.

6.156 $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$. 6.157 $\int\frac{(3x+5)dx}{(x^2+2x+2)^2}$. 6.158 $\int\frac{(x^3+1)dx}{(x^2-4x+5)^2}$.

6.159 $\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}$. 6.160 $\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

§6.6 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ინტეგრება

ა) $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$ ინტეგრალის მოძებნა, სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია.

როცა m კენტი რიცხვია, მაშინ გამოდგება ჩასმა t = cosx, ხოლო, როცა n არის კენტი, მაშინ ჩასმა t = sinx. როცა m და n ლუწი რიცხვებია, მაშინ ვისარგებლებთ ფორმულებით:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

ბ) $\int\frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx;\ \int\frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx$ ინტეგრალების მოძებნა, სადაც m და n არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია.

როცა n კენტია, ხოლო m ნებისმიერი რიცხვი, მაშინ პირველი ინტეგრალისათვის გამოდგება t = sinx ჩასმა, ხოლო მეორესათვის t=cosx ჩასმა. იმ შემთხვევაში, როცა n ლუწია და m ნებისმიერი რიცხვი, შეიძლება ნაწილობითი ინტეგრების ხერხის გამოყენება.

გ) $\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$ ინტეგრალის მოძებნა, სადაც m და n არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია. როცა m+n ლუწი რიცხვია, მაშინ გამოდგება ჩასმა t=tgx, ხოლო როცა კენტია, მაშინ მნიშვნელში 1 შეიცვლება ($\sin^2 x+\cos^2 x$)-ით.

დ) $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$ ინტეგრალების მოძებნა. ამ ინტეგრალების მოსაძებნად უფრო მოხერხებულია გამოვყოთ შესაბამისად $tg^2 x$, $ctg^2 x$ მამრავლები და ვისარგებლოთ $1+tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, $1+ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$ ფორმულებით.

ვ) $\int \sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx$; $\int \sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx$ და $\int \cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx$ ინტეგრალების მოძებნა.

ამ ინტეგრალებისათვის უნდა ვისარგებლოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta));$$

ვ) $\int R(\sin x,\cos x)dx$ ინტეგრალებისათვის, სადაც R არის თავისი არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია, უნივერსალური $t=tg\frac{x}{2}$ ჩასმა გვაძლევს:

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

თუ ადგილი აქვს $R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x)$ იგივეობას, მაშინ შეიძლება ვისარგებლოთ $t=tgx$ ჩასმით.

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. $\int\sin^3 x\cos^2 x dx=\int\cos^2 x(1-\cos^2 x)\sin x dx=$

$$=-\int\cos^2 x d\cos x+\int\cos^4 x d\cos x=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

მაგალითი 2. $\int\sin^4 x\cos^2 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)(1-\cos^2 2x)dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int\cos 2x dx-\frac{1}{8}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)d\sin 2x=$$

$$=\frac{1}{8}x--\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

მაგალითი 3. $\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x}\sin x dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos^4 x}+$

$$+2\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x}-\int d\cos x=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x+C.$$

მაგალითი 4. $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=$$

$$=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\cos x \\ dv=\dfrac{\cos x dx}{\sin^3 x} \\ du=-\sin x dx \\ v=\displaystyle\int\frac{d\sin x}{\sin^3 x}=-\frac{1}{2\sin^2 x}\end{array}\right.$$

მაგალითი 5. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x\cos^4 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$

$$=\int\frac{(1+tg^2x)^2}{tg^2x}dtgx=\int\frac{dtgx}{tg^2x}+2\int dtgx+\int tg^2xdtgx=-\frac{1}{tgx}+2tgx+\frac{1}{3}tg^3x+C.$$

მაგალითი 6. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^3 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^3 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^3 x}+$

$$+\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}=\int\frac{dx}{\cos^3 x}+\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos x}dx=\int\frac{dx}{\cos^3 x}+\int\frac{dx}{\cos x}+$$

$$+\int\frac{\cos x dx}{\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}+\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}+\int\frac{d\sin x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{dx}{\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{\sin x}=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{\sin x}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]^2}{\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}d\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\int\frac{d\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{\sin x}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{tg^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{4}\int tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)dtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+$$

$$+\int\frac{dtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{\sin x}=-\frac{1}{8tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}+\frac{3}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{1}{8}tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{\sin x}+C.$$

მაგალითი 7. $\int ctg^3 x dx=\int ctgx\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=$

$$=-\int ctgx\,dctgx-\int\frac{d\sin x}{\sin x}=\frac{1}{2}ctg^2x-\ln|\sin x|+C.$$

მაგალითი 8. $\int \sin 2x\cdot\sin 3x\cdot\sin 4x dx=$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos x-\cos 5x)\sin 4x dx=\frac{1}{2}\int\sin 4x\cdot\cos x dx-\frac{1}{2}\int\sin 4x\cdot\cos 5x dx=\frac{1}{4}\int(\sin 3x+\sin 5x)dx-$$

$$-\frac{1}{4}\int(-\sin x+\sin 9x)dx=\frac{1}{4}\int\sin 3x dx+\frac{1}{4}\int\sin 5x dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\sin x dx-\frac{1}{4}\int\sin 9x dx=-\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{36}\cos 9x+C.$$

მაგალითი 9. $\int\frac{dx}{4\cos x-5\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}-\frac{10t}{1+t^2}}=$

$$=-\int\frac{dt}{2t^2+5t-2}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{5}{2}t-1}=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t+\frac{5}{4}\right)}{\left(t+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{41}{16}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{41}}\ln\left|\frac{t+\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{41}}{4}}{t+\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{41}}{4}}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{41}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+\frac{5-\sqrt{41}}{4}}{tg\frac{x}{2}+\frac{5+\sqrt{41}}{4}}\right|+C.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოთვალეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიდან შემდეგი ინტეგრალები:

6.161 $\int\cos^3 x dx.$ 6.162 $\int\sin^3 x dx.$ 6.163 $\int\sin^3 x\cdot\cos^4 x dx.$

6.164 $\int\sin^2 x\cdot\cos^3 x dx.$ 6.165 $\int\cos^2 3x dx.$ 6.166 $\int\cos^4 x dx.$

6.167 $\int \sin^4 x dx.$ 6.168 $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx.$ 6.169 $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx.$

6.170 $\int \cos^4 x \sin^2 x dx.$ 6.171 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$ 6.172 $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$ 6.173 $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}.$

6.174 $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}.$ 6.175 $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}.$ 6.176 $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}.$ 6.177 $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}.$

6.178 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$ 6.179 $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$ 6.180 $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ 6.181 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}.$

6.182 $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}.$ 6.183 $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$ 6.184 $\int tg^5 x dx.$ 6.185 $\int ctg^4 x dx.$

6.186 $\int \frac{tg^4 x}{\cos^4 x} dx.$ 6.187 $\int \cos 4x \cdot \cos 7x dx.$ 6.188 $\int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3} dx.$

6.189 $\int \sin x \cdot \sin 3x dx.$ 6.190 $\int \sin(5x+8) \cdot \sin(3x-7) dx.$

6.191 $\int \sin(5x - \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(x + \frac{\pi}{4}) dx.$ 6.192 $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$

6.193 $\int \frac{dx}{\sin x}.$ 6.194 $\int \frac{dx}{\cos x}.$ 6.195 $\int \frac{dx}{5+3\cos x}.$ 6.196 $\int \frac{dx}{5+4\sin x}.$

6.197 $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}.$ 6.198 $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}.$ 6.199 $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$

6.200 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$ 6.201 $\int \frac{1+tgx}{\sin 2x} dx.$ 6.202 $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$

6.203 $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$ 6.204 $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}.$ 6.205 $\int \frac{dx}{5\cos x + 4\sin x}.$

6.206 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^2 x}.$ 6.207 $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x}.$ 6.208 $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^2 x}.$

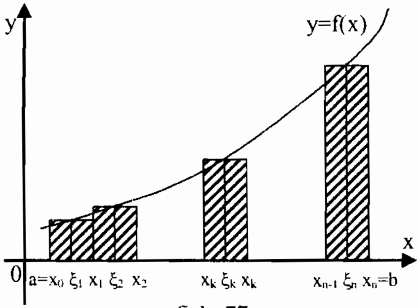
თავი VII

განსაზღვრული ინტეგრალი

§7.1 განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება; ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

ვთქვათ, f(x) ფუნქცია განსაზღვრულია [a, b] სეგმენტზე. დავყოთ ეს სეგმენტი $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ წერტილებით n ქვესეგმენტად $[x_{k-1}, x_k]$, k = 1,2, ... , n.

თითოეულ ქვესეგმენტში შევარჩიოთ ნებისმიერად ξ_k (k =1,2,...,n) წერტილები და შევადგინოთ ჯამი



ნახ. 77

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \qquad (7.1)$$

სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

(7.1) ჯამს ეწოდება f(x) ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამი [a,b] სეგმენტზე. გეომეტრიულად σ წარმოადგენს იმ მართკუთხედების ფართობთა ჯამს, რომელთა ფუძეა Δx_k და სიმაღლე $f(\xi_k)$ (იხ. ნახ. 77).

ვთქვათ, $\lambda = \max \Delta x_k, k = 1,2,...,n.$ თუ არსებობს (7.1) რიმანის ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$, მაშინ f(x) ფუნქციას ეწოდება ინტეგრებადი (რიმანის აზრით) [a, b] სეგმენტზე, ხოლო $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$ რიცხვს ეწოდება განსაზღვრული ინტეგრალი [a, b] სეგმენტზე f(x) ფუნქციიდან და აღინიშნება $\int\limits_a^b f(x)dx$ სიმბოლოთი.

ე.ი.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$ კი ნიშნავს შემდეგს:

ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\eta > 0$ რიცხვი, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს [a, b] სეგმენტის ქვესეგმენტებად დაყოფის წესი, რომლის შესაბამისი $\lambda < \eta$ და ξ_k წერტილები $[x_{k-1}, x_k]$ (k = 1, 2,..., n) ქვესეგმენტიდან, სრულდება უტოლობა $|\sigma - I| < \varepsilon$.

მტკიცდება, რომ თუ f(x) ფუნქცია უწყვეტია [a, b] სეგმენტზე, მაშინ არსებობს $\int_a^b f(x)dx$ და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{7.2}$$

სადაც F(x) არის f(x) ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადი ფუნქცია. (7.2) ფორმულას ეწოდება ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა. ეს ფორმულა ამყარებს კავშირს განსაზღვრულ და განუსაზღვრელ ინტეგრალებს შორის და წარმოადგენს განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის ძირითად ხერხს.

თუ f(x) და g(x) [a,b] სეგმენტზე ინტეგრებადი ფუნქციებია, მაშინ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობანი:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0;$ 2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$ 3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx;$ 5. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$

6. თუ $f(x) \leq g(x),\ x \in [a,b]$, მაშინ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$

7. თუ f(x) უწყვეტი ფუნქციაა [a, b] სეგმენტზე, მაშინ არსებობს ერთი მაინც $c \in [a,b]$ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$, როგორც შესაბამისი ინტეგრალური ჯამის ზღვარი.

ამოხსნა. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტი დავყოთ n ტოლ ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2n},\ x_2 = \frac{\pi}{n}, \ldots, x_k = \frac{\pi k}{2n}, \ldots, x_n = \frac{\pi}{2};$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{\pi}{2n},\quad k = 1,2,\ldots,n.$$

ξ_k წერტილების როლში ავიღოთ ქვესეგმენტების მარჯვენა ბოლოები. ასეთი დანაწილების შემთხვევაში მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ ჯამს:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{\pi k}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi k}{2n}.$$

აღვნიშნოთ $\dfrac{\pi}{2n} = \alpha$ და გამოვთვალოთ $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\alpha.$

ცხადია, რომ

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right) = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{3}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{5}{2}\alpha - \sin\frac{3}{2}\alpha + \cdots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{2\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ე.ი.

$$\sigma_n = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{4n}\cdot\cos\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}.$$

$f(x) = \cos x$ ფუნქცია უწყვეტია $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$ და $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n \quad \left(\lambda = \frac{\pi}{2n}\to 0,\ n\to\infty\right).$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}} =$$

$$= \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

ამრიგად, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1.$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ინტეგრალი შეიძლება გამოვთვალოთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებითაც:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} + \sin 0 = 1.$$

მოყვანილი მაგალითიდან ნათლად ჩანს, თუ როგორ ამარტივებს განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლას ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით ვიპოვოთ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

ამოხსნა. ალვ. $\sigma_n = \dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2} =$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right).$$

ეს ჯამი წარმოადგენს უწყვეტი $\dfrac{1}{1+x^2}$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს [0,1] სეგმენტზე, როცა [0,1] სეგმენტი დაყოფილია n ტოლი სიგრძის მქონე ქვესეგმენტებად, სადაც ξ_k წერტილებად აღებულია ამ ქვესეგმენტის მარჯვენა ბოლოები $\xi_k = \dfrac{k}{n}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}x\Big|_0^1 = \operatorname{arcgt}1 = \frac{\pi}{4}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $\int\limits_0^3 (3x^2+5)dx.$

ამოხსნა. ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველადია $x^3 - 5x$. ამიტომ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად

$$\int\limits_0^3 (3x^2-5)dx = x^3 - 5x\Big|_0^3 = 27 - 15 = 12.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი, როგორც შესაბამისი ინტეგრალური ჯამის ზღვარი:

7.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx;$ 7.2 $\int_0^{10} e^x dx;$ 7.3 $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}.$

განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ჯამის ზღვარი:

7.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-0}}+\frac{\cdot\, n}{\sqrt{n^2-1^2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right);$

7.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\sin 2\cdot\frac{\pi}{2n}+\cdots+\sin n\cdot\frac{\pi}{2n}\right);$

7.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$

ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

7.7 $\int_0^1 x^4 dx;$ 7.8 $\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx;$ 7.9 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x};$ 7.10 $\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2};$

7.11 $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx;$ 7.12 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 5x dx;$ 7.13 $\int_0^{\frac{1}{6}}\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}};$

7.14 $\int_{-9}^{-3}\frac{dx}{x^2-1};$ 7.15 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x};$ 7.16 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$

7.17 $\int_1^4\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx;$ 7.18 $\int_1^2\frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}dx;$ 7.19 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx;$

7.20 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx;$ 7.21 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\frac{x}{2}dx;$ 7.22 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx;$

§7.2 განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ჩასმის ხერხით

თუ f(x) ფუნქცია უწყვეტია [a,b] სეგმენტზე, ხოლო $x=\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, რომლის მნიშვნელობები არ გამოდიან [a, b] სეგმენტიდან, ამასთან, $a=\varphi(\alpha)$ და $b=\varphi(\beta)$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

ტიპობრივი მაგალითების ამოხსნა

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $t=\ln x$, მაშინ $dt=\frac{dx}{x}$. როდესაც x იცვლება 1-დან 2-მდე, მაშინ t იცვლება 0-დან ln2-მდე. ე.ი. ინტეგრების ახალი საზღვრებია 0 და ln2. მაშასადამე,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}=\int_0^{\ln 2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_0^{\ln 2}=\arcsin(\ln 2)-\arcsin 0=\arcsin(\ln 2).$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin 2xdx$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $t=\cos x$, მაშინ $dt=-\sin xdx$. როცა x იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, მაშინ t იცვლება 1-დან 0-მდე. ე.ი. ინტეგრების ახალი საზღვრებია 1 და 0. მაშასადამე,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin 2xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin xdx=-2\int_1^0 t^6dt=\frac{2}{7}t^7\Big|_1^0=\frac{2}{7}.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\int_0^1\sqrt[5]{1-x}dx$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $t=1-x$, მაშინ $dt=-dx$. როდესაც x იცვლება 0-დან 1-მდე, t იცვლება 1-დან 0-მდე. მაშასადამე,

$$\int_0^1 \sqrt[5]{1-x}\,dx = -\int_1^0 \sqrt[5]{t}\,dt = -\frac{5}{6}\cdot t^{\frac{6}{5}}\Big|_1^0 = \frac{5}{6}.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

ამოხსნა. ცხადია, $x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. აღვნიშნოთ $t=x+\frac{3}{2}$, მაშინ $dt=dx$ და $x=t-\frac{3}{2}$. როცა x იცვლება 0-დან 1-მდე, მაშინ t იცვლება $\frac{3}{2}$-დან $\frac{5}{2}$-მდე. ამიტომ

$$\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2} = \int_0^1 \frac{xdx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{\left(t-\frac{3}{2}\right)dt}{t^2-\frac{1}{4}} = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{tdt}{t^2-\frac{1}{4}} - \frac{3}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{t^2-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{d\left(t^2-\frac{1}{4}\right)}{t^2-\frac{1}{4}} - \frac{3}{2}\left[\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right|\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|t^2-\frac{1}{4}\right|\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 6-\ln 2) - \frac{3}{2}\ln\frac{4}{3} = \frac{1}{2}\left(\ln 3 - \ln\frac{64}{27}\right) = \ln\frac{9}{8}.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

7.23 $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x\ln x}$. 7.24 $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. 7.25 $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$. 7.26 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

7.27 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}x\,dx$. 7.28 $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$. 7.29 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$. 7.30 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

7.31 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$. 7.32 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}\,dx}{\cos^2 x}$. 7.33 $\int_0^1 x^2 5^{x^3}dx$. 7.34 $\int_1^2 \frac{x^3dx}{x^4+4}$.

7.35 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$. 7.36 $\displaystyle\int_{1,5}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$. 7.37 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

7.38 $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$. 7.39 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$. 7.40 $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$.

7.41 $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{dx}{2x^2+3x-2}$. 7.42 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{x^2+2x+5}$. 7.43 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{(x+1,5)dx}{x^2+3x+2}$.

7.44 $\displaystyle\int_{1}^{2}\sin(2x-3)dx$. 7.45 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{6}}\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$. 7.46 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

7.47 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos xdx$. 7.48 $\displaystyle\int_{0}^{1}x^2e^{x^3}dx$. 7.49 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{xdx}{x^4+1}$. .50 $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$.

7.51 $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$. 7.52 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos 2xdx$.

§7.3 განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით

თუ $u=u(x)$ და $v=v(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b u\cdot dv=\left[u\cdot v\right]_a^b-\int_a^b v\cdot du,$$

სადაც $\left[u\cdot v\right]_a^b=u(b)\cdot v(b)-u(a)\cdot v(a)$.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx$.

ამოხსნა. მივიღოთ $u=x$, $dv=\cos xdx$, მაშინ $du=dx$ და $v=\sin x$, მაშასადამე,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = [x\cdot\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0^\circ = \frac{\pi}{2} - 1.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\int_1^e \ln x dx.$

ამოხსნა. მივიღოთ u=lnx და dv=dx, მაშინ $du = \frac{dx}{x}$ და v=x. მაშასადამე,

$$\int_1^e \ln x dx = [x\cdot\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - e + 1 = 1.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx.$

ამოხსნა. მივიღოთ u=x და $dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$, მაშინ du=dx და $v = \int\frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = -\int\frac{d\cos x}{\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x}$. მაშასადამე,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x dx}{\cos^3 x} = \left[\frac{x}{2\cos^2 x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\cos^2\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}[tgx]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi-2}{4}.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ნაწილობრივი ინტეგრების ხერხით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

7.53 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$ 7.54 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx.$ 7.55 $\int_0^1 xe^x dx.$ 7.56 $\int_0^1 (x^2-2x)e^x dx.$

7.57 $\int_1^e \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{x}}.$ 7.58 $\int_1^2 x\log_2 x dx.$ 7.59 $\int_0^1 x^2\cdot 7^x dx.$ 7.60 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x dx}{\cos^2 x}.$

7.61 $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$ 7.62 $\int_1^e \ln^2 x dx.$ 7.63 $\int_0^{\pi} x^3\sin x dx.$ 7.64 $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx.$

7.65 $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x dx$. 7.66 $\int\limits_0^{\pi} e^x \cos x dx$. 7.67 $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$. 7.68 $\int\limits_1^{e} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$.

§7.4 არასაკუთრივი ინტეგრალი

1. **პირველი გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალი**. ვთქვათ, f(x) ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია $[a,+\infty)$ შუალედში და t>a ნებისმიერი რიცხვია. f(x) ფუნქციიდან არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a,+\infty)$ შუალედზე აღინიშნება $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ სიმბოლოთი და განიმარტება შემდეგი სახით:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_a^{t} f(x)dx.$$

თუ ზღვარი სასრული რიცხვია, მაშინ არასაკუთრივ ინტეგრალს კრებადი ეწოდება, ხოლო თუ ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოა, მაშინ – განშლადი.

ანალოგიურად განიმარტება არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, როცა f(x) უწყვეტია $(-\infty, a]$ შუალედში $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int\limits_t^{a} f(x)dx.$

ვთქვათ, f(x) უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი $(-\infty,+\infty)$ შუალედზე აღინიშნება $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ სიმბოლოთი და განიმარტება ასე:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{t'\to-\infty \\ t''\to+\infty}} \int\limits_{t'}^{t''} f(x)dx \qquad (t' < t'').$$

თუ არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალები $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ და $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, მაშინ, ცხადია, არსებობს $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ და $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$

ტიპობრივი საკარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. განვიხილოთ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, ვაჩვენოთ რომ თუ $\alpha \le 1$, ინტეგრალი განშლადია, ხოლო თუ $\alpha > 1$, მაშინ კრებადია.

ამოხსნა. როცა $\alpha = 1$ გვაქვს

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}\left[\ln|x|\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}(\ln t - \ln 1) = +\infty;$$ თუ $\alpha \ne 1$, მაშინ

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-\alpha}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^t = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{t\to+\infty}(t^{1-\alpha}-1) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

მაშასადამე, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha > 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \le 1$.

მაგალითი 2. შევისწავლოთ $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ ინტეგრალის კრებადობის საკითხი.

ამოხსნა. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{1}{x}, \quad x > 2.$

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x}$ განშლადია, ამიტომ $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ განშლადია.

მაგალითი 3. შევისწავლოთ $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ ინტეგრალის კრებადობის საკითხი.

ამოხსნა.

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{t\to+\infty}\left[\ln|\ln x|\right]_a^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\ln|\ln t| - \ln|\ln a|\right) = +\infty.$$

მაშასადამე, $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ განშლადია.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx.$

ამოხსნა.

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \operatorname{arctg}x\,d(\operatorname{arctg}x)=\lim_{t\to+\infty}\left.\frac{\operatorname{arctg}^2x}{2}\right|_1^t=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}^2t-\operatorname{arctg}^2 1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{3\pi^2}{32}.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

ამოხსნა.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t''\to+\infty}}\int_{t'}^{t''}\frac{dx}{(x+2)^2+5}=\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t''\to+\infty}}\left.\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt5}\right|_{t'}^{t''}=$$

$$=\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t''\to+\infty}}\left(\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{t''+2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{t'+2}{\sqrt5}\right)=\frac{1}{\sqrt5}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt5}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt5}{5}.$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ $\int_1^{+\infty}\frac{1+2x}{x^2(1+x)}dx$.

ამოხსნა.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1+2x}{x^2(1+x)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1+2x+x^2-x^2}{x^2(1+x)}dx=\lim_{t\to+\infty}\left(\int_1^t\frac{(1+x)^2dx}{x^2(1+x)}-\int_1^t\frac{x^2dx}{x^2(1+x)}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\int_1^t\frac{(1+x)dx}{x^2}-\int_1^t\frac{dx}{1+x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\int_1^t\frac{1}{x^2}dx+\int_1^t\frac{1}{x}dx-\int_1^t\frac{dx}{1+x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right)+$$

$$+\lim_{t\to+\infty}\left.\ln\frac{x}{x+1}\right|_1^t=1+\lim_{t\to+\infty}\ln\frac{t}{t+1}-\ln\frac{1}{2}=1+\ln\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t+1}\right)+\ln2=1+\ln1+\ln2=1+\ln2.$$

2. **მეორე გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალი.** ვთქვათ, f(x) ფუნქცია განსაზღვრულია [a,b] შუალედში და უწყვეტია ყოველ [a, t) სეგმენტზე, სადაც $a<t<b$, ხოლო b წერტილზე იგი განიცდის უსასრულო წყვეტას $\lim_{x\to b-}f(x)=\infty$, მაშინ განმარტების თანახმად $\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)dx.$

თუ ზღვარი არსებობს და სასრულია, მაშინ არასაკუთრივ ინტეგრალს კრებადი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში – განშლადი.

ანალოგიურად განიმარტება არასაკუთრივი ინტეგრალი, როცა $\lim_{x\to a+}f(x)=\infty$:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx.$$

თუ f(x) ფუნქცია უწყვეტია [a, b] სეგმენტის ყველა წერტილზე, გარდა [a, b] სეგმენტის შიდა c წერტილისა a<c<b, მაშინ II გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ განიმარტება ასე: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,

თუ არასაკუთრივი ინტეგრალები $\int_a^c f(x)dx$ და $\int_c^b f(x)dx$ ორივე კრებადია, მაშინ $\int_a^b f(x)dx$ არასაკუთრივ ინტეგრალს კრებადი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში განშლადი. ცხადია, რომ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c+}\int_t^b f(x)dx.$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 7. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

ამოხსნა. $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ ფუნქცია x=0 წერტილზე განიცდის უსასრულო წყვეტას, ამიტომ როცა $\alpha \neq 1$ გვექნება:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to 0+}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0+}\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{როცა } \alpha<1 \\ +\infty, & \text{როცა } \alpha>1 \end{cases}$$

თუ $\alpha=1$, მაშინ

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+} \ln x\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0+}(-\ln t) = \infty.$$

ამრიგად, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha<1$ და განშლადია, როცა $\alpha \geq 1$.

მაგალითი 8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

ამოხსნა. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ფუნქცია უწყვეტია $0\le x<1$ შუალედში და $x=1$ წერტილზე განიცდის უსასრულო წყვეტას, ამიტომ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1-}\left[\arcsin x\right]_0^t=$$

$$=\lim_{t\to 1-}(\arcsin t-\arcsin 0)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2};$$

მაშასადამე, ინტეგრალი კრებადია და

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}.$$

მაგალითი 9. $\displaystyle\int_{0,5}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$

ამოხსნა. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ უწყვეტია $0,5\le x<1$ შუალედში, ხოლო $x=1$ წერტილზე განიცდის უსასრულო წყვეტას, ამიტომ

$$\int_{0,5}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1-}\int_{0,5}^t \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 1-}\int_{0,5}^t \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 1-}\left[2\sqrt{1-x^2}\right]_{0,5}^t=-\lim_{t\to 1-}\left(\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-(0,5)^2}\right)=-\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

მაგალითი 10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{ctg}x dx.$

ამოხსნა. $f(x)=\mathrm{ctg}x$ ფუნქცია უწყვეტია $0<x\le\dfrac{\pi}{4}$ შუალედში, ხოლო $x=0$ წერტილზე განიცდის უსასრულო წყვეტას, ამიტომ

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{ctg}x dx=\lim_{t\to 0+}\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x}dx=\lim_{t\to 0+}\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x)}{\sin x}=$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left[\ln|\sin x|\right]_t^{\frac{\pi}{4}}=\lim_{t\to 0+}\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln|\sin t|\right)=\infty.$$

მაშასადამე, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x dx$ განშლადია.

მაგალითი 11. გამოვთვალოთ $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

ამოხსნა. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} =$

$$= \lim_{\substack{t''\to 4-\\ t'\to 2+}} \int_{t'}^{t''} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = \lim_{\substack{t''\to 4-\\ t'\to 2+}} \arcsin(x-3)\Big|_{t'}^{t''} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

შეისწავლეთ კრებადობის საკითხი და გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები:

7.69 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$. 7.70 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 7.71 $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+9x^2}$. 7.72 $\int_0^{+\infty} a^{-x} dx$.

7.73 $\int_0^{+\infty} e^{kx} dx$. 7.74 $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x-3}$. 7.75 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$. 7.76 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

7.77 $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+4x^2}$. 7.78 $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{8+x^3}$. 7.79 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$. 7.80 $\int_5^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

7.81 $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2}$. 7.82 $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 7.83 $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4}$. 7.84 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$. 7.85 $\int_0^e \frac{dx}{x \ln x}$.

7.86 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$. 7.87 $\int_{-\infty}^{2} e^x dx$. 7.88 $\int_0^{+\infty} x \cos x dx$. 7.89 $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx$.

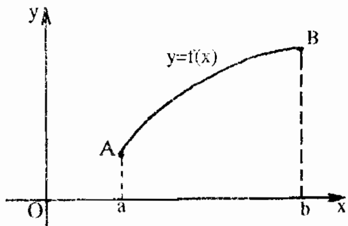
7.90 $\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$. 7.91 $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 7.92 $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 7.93 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

თავი VIII

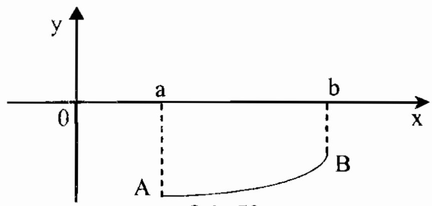
განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გამოყენება

§8.1 ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა

თუ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ შუალედზე და ამ შუალედზე $f(x) \geq 0$, მაშინ $\int_a^b f(x)dx$ გამოსახავს იმ მრუდწირული aABb ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით: $y = 0$, $x = a$, $x = b$ და $y = f(x)$ (ნახ. 78). ამრიგად, $S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$.



ნახ. 78

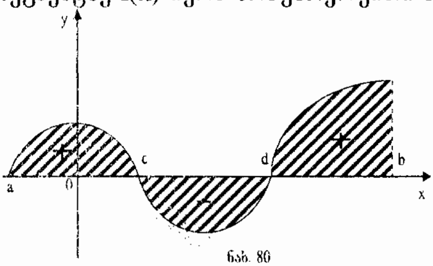


ნახ. 79

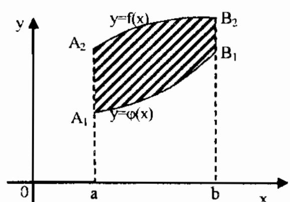
თუ $[a,b]$ შუალედზე $f(x) < 0$, მაშინ $\int_a^b f(x)dx < 0$ და ამ ინტეგრალის მოდული შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის ტოლია (ნახ. 79).

ე.ი. $S_{aABb} = -\int_a^b f(x)dx$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $y = f(x)$ ფუნქცია ნიშანს იცვლის $[a, b]$ შუალედზე, მაშინ ამ შუალედს ვყოფთ ქვესეგმენტებად ისე, რომ ყოველ ასეთ ქვესეგმენტზე $f(x)$ იყოს არაუარყოფითი ან არადადებითი (ნახ. 80).



ნახ. 80



ნახ. 81

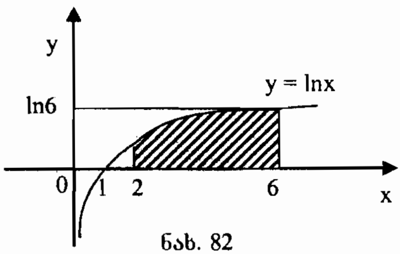
რადგან $\int\limits_a^c f(x)dx > 0,\ \int\limits_c^d f(x)dx < 0$ და $\int\limits_d^b f(x)dx > 0$, ამიტომ

$$S = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_c^d f(x)dx + \int\limits_d^b f(x)dx.$$

ვთქვათ, ფიგურა შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ და $y=\varphi(x)$ წირებით (ნახ. 81); ამასთან, $y=f(x)$ და $y=\varphi(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a, b]$ შუალედზე და $f(x)>\varphi(x)\geq 0$, როცა $x\in[a, b]$. ასეთ პირობებში $A_1A_2B_2B_1$ ფიგურის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))dx.$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

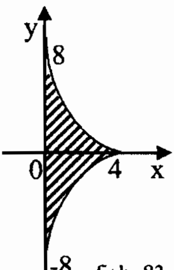


ნახ. 82

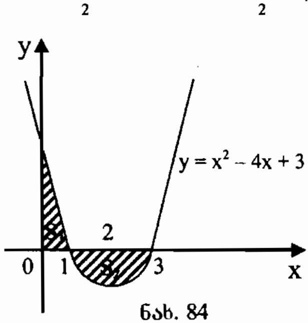
მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვითვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით: $y = \ln x$, $x=2$, $x=6$ და $y=0$.

ამოხსნა. ცხადია, საძიებელი ფიგურის ფართობი გამოითვლება შემდეგი ინტეგრალის მეშვეობით $S = \int\limits_2^6 \ln x dx.$ ამ ინტეგრალის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი. მივიღებთ:

$$\int\limits_2^6 \ln x dx = x\ln x\Big|_2^6 - \int\limits_2^6 x\cdot\frac{dx}{x} = 6\ln 6 - 2\ln 2 - x\Big|_2^6 = \ln\frac{6^6}{4} - 4.$$



ნახ. 83



ნახ. 84

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით:
$y^2=(4-x)^3$ და $x=0$. (იხ. ნახ. 83).

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძიებელი ფართობი გამოითვლება ასე:

$$s = 2\cdot\int_0^4 (4-x)^{3/2}dx = -2\cdot\frac{2}{5}(4-x)^{5/2}\Big|_0^4 = \frac{4}{5}\cdot 32 = \frac{128}{5} = 25{,}6.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით $y = x^2 - 4x + 3$, $x = 0$ და $y = 0$ (იხ. ნახ. 84).

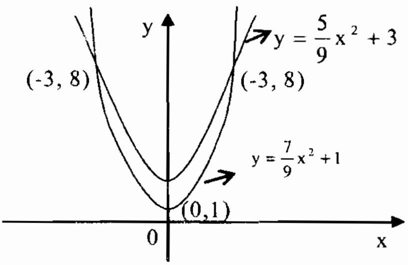
ამოხსნა. საძიებელი ფიგურის ფართობი $S = S_1 + S_2$, სადაც:

$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_0^1 == \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3},$$

ხოლო

$$S_2 = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= -\left(\frac{27}{3} - 18 + 9 - \frac{1}{3} + 2 - 3\right) = -\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$



ნახ. 85

ამრიგად, $S = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით:

$y = \frac{7}{9}x^2 + 1$ და $y = \frac{5}{9}x^2 + 3$ (იხ. ნახ. 85).

ამოხსნა. ცხადია,

$$S = \int_{-3}^{3}\left(\frac{5}{9}x^2 + 3\right)dx - \int_{-3}^{3}\left(\frac{7}{9}x^2 + 1\right)dx = \int_{-3}^{3}\left(\frac{5}{9}x^2 + 3 - \frac{7}{9}x^2 - 1\right)dx =$$

$$= \int_{-3}^{3}\left(2 - \frac{2}{9}x^2\right)dx = \left(2x - \frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = 6 - \frac{2\cdot 27}{27} - (-6 + 2) = 8.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოთვალეთ იმ ფიგურათა ფართობები, რომლებიც შემოსაზღვრულნი არიან შემდეგი წირებით:

8.1 $y^3 = x^2$, $y = 1$. 8.2 $y = x^2 + 1$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 5$. 8.3 $y^2 = 9x$, $x^2 = 9y$.

8.4 $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{20}$.

8.5 $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

8.6 $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

8.7 $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

8.8 $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$.

8.9 $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.

8.10 $y = 6x - x^2$, $y = 0$.

8.11 $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

8.12 $y^2 = 1 - x, \quad x = -3.$ 8.13 $y = x^2 + 4x + 5, \; x = 0,$

8.14 $4y = x^2, \quad y^2 = 4x. \; y = 0, \; y = 1.$ 8.15 $y = \frac{6}{x}, \; y = -x + 7.$

§8.2 ბრტყელი წირის რკალის სიგრძის გამოთვლა

1) თუ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, ანუ $y=f(x)$ წირი გლუვია, მაშინ ამ წირის რკალის ℓ სიგრძე განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით გამოითვლება ფორმულით:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

2) თუ გლუვი წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით: $x = x(t), \; y = y(t), \; \alpha \le t \le \beta$, სადაც $x(t)$ და $y(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

3) თუ გლუვი წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში: $r = r(\varphi), \; \alpha \le \varphi \le \beta$, მაშინ

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $y = \ln\sin x$ წირის რკალის სიგრძე, თუ $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

ამოხსნა. $y = f(x) = \ln\sin x, \quad y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x;$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{\sin x}; \quad \ell = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}.$$

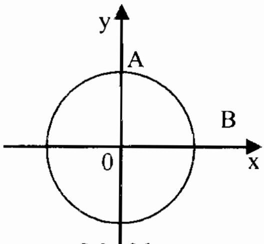
ვიპოვოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx =$$

$$= -\int \frac{d\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}}dx + \int \frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

ამრიგად,

$$\ell = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln 3.$$



ნახ. 86

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $x^2+y^2=r^2$ წირის სიგრძე.

ამოხსნა. $x^2+y^2=r^2$ არის r რადიუსიანი წრეწირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. წრეწირის სიგრძე $\ell = 4\ell_{AB}$ (ℓ_{AB} – AB რკალის სიგრძეა) (იხ. ნახ.86). AB რკალის განტოლებაა

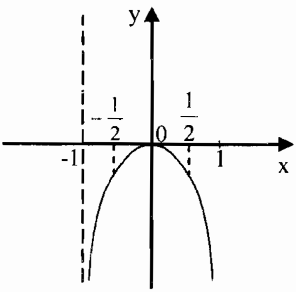
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \le x \le r.$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}; \; 1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

$$\ell_{AB} = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}dx = \int_0^r \frac{r}{r^2 - x^2}dx = r\arcsin\frac{x}{r}\Bigg|_0^r = r(\arcsin 1 - \arcsin 0) = r\cdot\frac{\pi}{2},$$

ამიტომ $\ell = 4r\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi r$, $\ell = 2\pi r$.

ამრიგად, დავადგინეთ, რომ r რადიუსიანი წრეწირის სიგრძე $2\pi r$-ის ტოლია.



ნახ. 87

მაგალითი 3. ვიპოვოთ წირის $y = \ln(1-x^2)$ რკალის სიგრძე $M_1\left(-\frac{1}{2}, \ln\frac{3}{4}\right)$ წერტილიდან $M_2\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{3}{4}\right)$ წერტილამდე (იხ. ნახ. 87).

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ

$$\ln\frac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4 \approx 1{,}1 - 1{,}4 = -0{,}3;$$

$$\ell = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + ((\ln(1-x^2))')^2}\,dx;$$

$$y'=\frac{1\cdot(-2x)}{1-x^2}; \qquad 1+y'^2=1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}.$$

ამრიგად, გამოსათვლელია ინტეგრალი

$$\ell=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+1}{1-x^2}dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+1}{x^2-1}dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2-1+1+1}{x^2-1}dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dx+2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=$$

$$=-x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right|+\ln\left|\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}\right|=$$

$$=-1-\ln\frac{1/2}{3/2}+\ln\frac{3/2}{1/2}=-1-\ln\frac{1}{3}+\ln 3=-1+\ln 9.$$

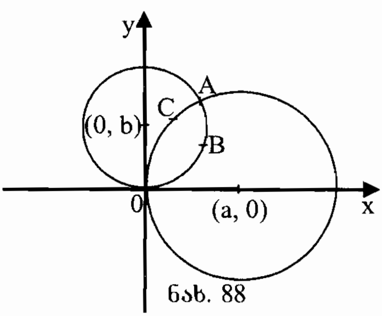
მაგალითი 4. ვიპოვოთ $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ წირის რკალის სიგრძე, $t=0$ დან $t=1$-მდე.

ამოხსნა. რკალის სიგრძე $\ell=\int_0^1\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt, x=e^t\cos t, \quad y=e^t\sin t$,

ამიტომ $\quad x'(t)=e^t\cos t-e^t\sin t, \qquad y'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t.$

$$\ell=\int_0^1\sqrt{e^{2t}\left[(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2\right]}dt=$$

$$=\int_0^1 e^t\sqrt{1-2\cos t\sin t+1+2\sin t\cos t}\,dt=\int_0^1\sqrt{2}e^t dt=\sqrt{2}e^t\Big|_0^1=\sqrt{2}e-\sqrt{2}=\sqrt{2}(e-1).$$



ნახ. 88

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $x^2+y^2=2ax$ და $x^2+y^2=2bx$ $(a>b>0)$ წრეწირებით წარმოქმნილი „მთვარის" პერიმეტრი.

ამოხსნა. $x^2+y^2=2ax$, $(x-a)^2+y^2=a^2$ არის წრეწირი, რომლის რადიუსია a და ცენტრი $(a;0)$; $x^2+y^2=2bx$, $x^2+(y-b)^2=b^2$ არის წრეწირი, რომლის რადიუსია b და ცენტრია $(0;b)$ (იხ. ნახ. 88).

საძიებელი პერიმეტრი

$$\ell=\ell_{OBA}+\ell_{OCA}.$$

გადავიდეთ პოლარ კოორდინატებზე

$$x=r\cos\varphi, \ y=r\sin\varphi.$$

$x^2+y^2=2ax$ წრეწირის განტოლება პოლარ კოორდინატებში იქნება:

$$r=2a\cos\varphi, \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right).$$

$x^2+y^2=2by$ წრეწირის განტოლება პოლარ კოორდინატებში იქნება:

$$r = 2b\sin\varphi, \quad (0 \le \varphi \le \pi).$$

ამ წრეწირების გადაკვეთის A წერტილისათვის

$$2a\cos\varphi = 2b\sin\varphi, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{b};$$

ამიტომ

$$\ell_{OBA} = \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} \sqrt{4b^2\sin^2\varphi + 4b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = 2b\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$$

$$\ell_{OCA} = \int_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4a^2\sin^2\varphi + 4a^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = 2a\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)$$

$$\ell = \ell_{OBA} + \ell_{OCA} = 2a\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right) + 2b\operatorname{arctg}\frac{a}{b} = \pi a - 2a\operatorname{arctg}\frac{a}{b} +$$

$$+ 2b\operatorname{arctg}\frac{a}{b} = \pi a - 2(a-b)\operatorname{arctg}\frac{a}{b}; \quad \ell = \pi a - 2(a-b)\operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

8.16 გამოთვალეთ $y^2=x^3$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელსაც მისგან $x = \frac{4}{3}$ წრფე მოკვეთს.

8.17 იპოვოთ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ასტროიდის რკალის სიგრძე.

8.18 იპოვოთ $y = \ln x$ წირის რკალის სიგრძე $\left(\frac{3}{4}, \ln\frac{3}{4}\right)$ წერტილიდან $\left(\frac{12}{5}, \ln\frac{12}{5}\right)$ წერტილამდე.

8.19 გამოთვალეთ $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელსაც მისგან $x = -1$ წრფე მოკვეთს.

8.20 გამოთვალეთ $y^2 = (x+1)^3$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელსაც მისგან $x = 4$ წრფე მოკვეთს.

8.21 გამოთვალეთ $y=\ln\cos x$ წირის რკალის სიგრძე $(0;0)$ წერტილიდან $\left(\frac{\pi}{4}; -\ln\sqrt{2}\right)$ წერტილამდე.

8.22 გამოთვალეთ $y = \ln(2\cos x)$ წირის რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია მისი Ox ღერძთან გადაკვეთის ორ მეზობელ წერტილს შორის.

8.23 იპოვოთ $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$, წირის რკალის სიგრძე $t = 0$ წერტილიდან $t = 1$ წერტილამდე $(a > 0)$.

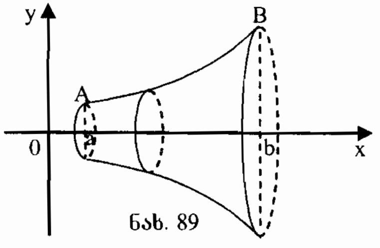
8.24 იპოვეთ $x=\dfrac{t^6}{6},\ y=2-\dfrac{t^4}{4}$ წირის რკალის სიგრძე მისი კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებს შორის.

8.25 იპოვეთ $r=2(1-\cos\varphi)$ კარდიოდის რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია $r=1$ წრეწირის შიგნით.

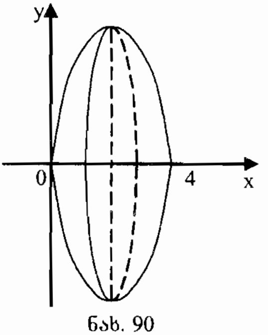
§8.3 ბრუნვითი სხეულის მოცულობის გამოთვლა

ეთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ შუალედზე. $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ და $x=b$ წირებით შემოსაზღვრული $aABb$ მრუდწირული ტრაპეცია ვაბრუნოთ Ox ღერძის გარშემო. მივიღებთ ბრუნვით სხეულს, რომლის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით (იხ. ნახ. 89).

$$V=\pi\int_a^b y^2dx.$$

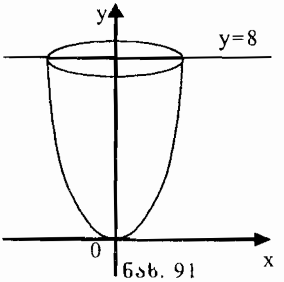


ნახ. 89



ნახ. 90

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა



ნახ. 91

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $y=4x-x^2$ პარაბოლითა და აბსცისთა ღერძით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა (იხ. ნახ. 90).

ამოხსნა.

$$V=\pi\int_0^4(4x-x^2)^2dx=\pi\int_0^4(16x^2-8x^3+x^4)dx=$$

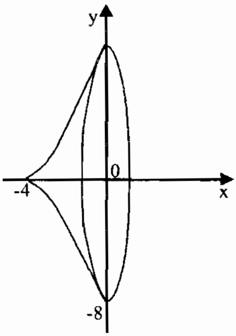
$$=\pi\left(16\cdot\frac{x^3}{3}-8\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^4=\pi\left(16\cdot\frac{64}{3}-2\cdot4^4+\frac{4^5}{5}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{4^5}{3}-2\cdot 4^4+\frac{4^5}{5}\right)==\pi\cdot 4^4\left(\frac{4}{3}-2+\frac{4}{5}\right)=\pi\cdot 16^2\,\frac{20-30+12}{15}=\frac{512}{15}\pi.$$

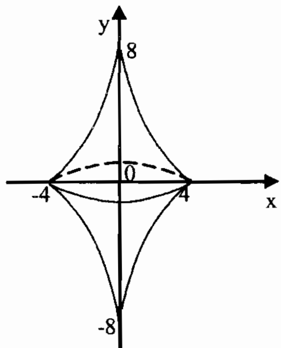
მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $y=x^3$ კუბური პარაბოლით, $x=0$ და $y=8$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ორდინატთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა (იხ. ნახ. 91).

ამოხსნა. $y = x^3$ განტოლებიდან $x = y^{1/3}$ და მიღებული სხეულის მოცულობას გამოვთვლით ასე:

$$V=\pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}dy=\pi\cdot\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8=\pi\cdot\frac{3}{5}\cdot 32=\frac{96}{5}\pi.$$



ნახ. 92



ნახ. 93

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $y^2=(x+4)^3$ წირით და $x=0$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა (იხ. ნახ. 92).

ამოხსნა. ცხადია, $x+4\ge 0$, ე.ი. $x\ge -4$.

$$V=\pi\int_{-4}^{0}(x+4)^3\,dx=\pi\int_{-4}^{0}(x+4)^3\,d(x+4)=\pi\,\frac{(x+4)^4}{4}\Big|_{-4}^{0}=$$

$$=\pi\cdot 4^3=64\pi.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $y^2=(x+4)^3$ წირით და $x=0$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის ორდინატთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა (იხ. ნახ. 93).

ამოხსნა. $y^2=(x+4)^3$ განტოლებიდან $x=y^{2/3}-4$, საიდანაც $x^2=y^{4/3}-8y^{2/3}+16$. როცა $x=0$, მაშინ $y=\pm 8$. ამრიგად,

$$V=\pi\int_{-8}^{8}(y^{4/3}-8y^{2/3}+16)dy=\pi\left(\frac{3}{7}y^{7/3}-8\cdot\frac{3}{5}y^{5/3}+16y\right)\Big|_{-8}^{8}=$$

$$=\pi y\left(\frac{3}{7}y^{4/3}-\frac{24}{5}y^{2/3}+16\right)\Big|_{-8}^{8}=2\cdot 8\pi\frac{15\cdot 16-24\cdot 28+16\cdot 35}{35}=\frac{2048}{35}\pi.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

8.26 გამოთვალეთ $y = 4x - x^2$ პარაბოლითა და $y = x$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.27 გამოთვალეთ $y^2 = 4x$ პარაბოლითა და $y = 0$, $x = 4$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.28 გამოთვალეთ $y^2 = 4x$ და $x^2 = 4y$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული ფიგურის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.29 გამოთვალეთ აბსცისთა ღერძის გარშემო $y = \sin x$ სინუსოიდის ნახევარტალღის ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.30 გამოთვალეთ $y = e^{2x}$ წირითა და $y = 0$, $x = 0$ და $x = y$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.31 გამოთვალეთ $y^2 + x^4 = x^2$ წირის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.32 გამოთვალეთ $x^2 = (y-1)^3$ წირითა და $x = 2$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის ორდინატთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.33 გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის

ა) აბსცისთა ღერძის,

ბ) ორდინატთა ღერძის, გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.34 გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ჰიპერბოლითა და $x = 2a$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.35 გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ჰიპერბოლითა და $y = -2b$, $y = 2b$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ორდინატთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

8.36 გამოთვალეთ $x = \sqrt{y}e^{y}$ წირითა და $x=0$, $y=1$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ორდინატთა ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

თავი IX

მწკრივები

§9.1 რიცხვითი მწკრივი

მწკრივის კრებადობა. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა.

რიცხვითი მწკრივი ეწოდება შემდეგ გამოსახულებას

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{9.1}$$

სადაც (u_n) – მოცემული რიცხვითი მიმდევრობაა.

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ რიცხვებს ეწოდება მწკრივის წევრები, ხოლო u_n-ს მწკრივის ზოგადი ანუ n-ური წევრი.

მწკრივის პირველი n წევრის ჯამს

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

ეწოდება (9.1) მწკრივის კერძო ჯამი.

განსაზღვრება. თუ არსებობს S_n მიმდევრობის სასრული ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, მაშინ (9.1) მწკრივს ეწოდება კრებადი, ხოლო S რიცხვს კი (9.1) მწკრივის ჯამი.

თუ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ ან არ არსებობს, მაშინ (9.1) მწკრივს განშლადი ეწოდება.

კოშის კრიტერიუმი. იმისათვის, რომ (9.1) მწკრივი იყოს კრებადი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს $N(\epsilon)$ ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $n > N(\varepsilon)$ და $p=1,2,\ldots$ რიცხვებისათვის სრულდებოდეს უტოლობა

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

კრებადობის აუცილებელი პირობა. თუ (9.1) მწკრივი კრებადია, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$; შებრუნებული დებულება არ არის სამართლიანი, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ პირობა არის მწკრივის კრებადობის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

უშუალოდ განმარტების საფუძველზე შევისწავლოთ მწკრივის კრებადობის საკითხი და ვიპოვოთ ჯამი.

მაგალითი 1.

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+..=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

ამოხსნა. ვიპოვოთ მწკრივის კერძო ჯამი S_n და გამოვთვალოთ მისი ზღვარი

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1};$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

მაშასადამე, მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი ტოლია 1-ის.

მაგალითი 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

ამოხსნა. $S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)};$$

მაშასადამე,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+1)}=\frac{1}{2}.$$

ე.ი. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი $S=\frac{1}{2}$.

მაგალითი 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

ამოხსნა. $S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)(n+2)}$.

შეგვიძლია ადვილად შევამოწმოთ მარტივ წილადებად დაშლის საფუძველზე, რომ

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-2\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

ამიტომ

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)};$$

მაშასადამე, $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}\right)=\frac{1}{4};$

ე.ი. მოცემული მწკრიეი კრებადია და მისი ჯამი $S=\frac{1}{4}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

ამოხსნა. ზოგადი წევრი

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n,$$

ამიტომ

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+$$

$$+(\ln 4-\ln 3)+\ldots+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1).$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(1+n)=+\infty.$$

ე.ი. მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ (ამ მწკრივს გეომეტრიული მწკრივი ეწოდება)

ამოხსნა. $S_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$.

თუ $q=1$, მაშინ $S_n=n$, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, ე.ი. როცა $q=1$, მაშინ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ განშლადია.

ვთქვათ, $q\neq 1$, მაშინ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}.$$

როგორც ცნობილია:

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}\infty,\text{ როცა } |q|>1\\ 0,\text{ როცა } |q|<1.\end{cases}$$

ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & |q|<1 \\ \infty, & |q|<1 \end{cases}$ თუ $q=-1$,

მაშინ $\quad S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, & n = 2k-1 \\ n, & n = 2k \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{(-1)^n}{2}\right)$ არ არსებობს, ამიტომ მწკრივი განშლადია.

ამრიგად, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ მწკრივი კრებადია, როცა $|q|<1$ და მისი ჯამი $S = \dfrac{1}{1-q}$, ხოლო, როცა $|q| \geq 1$, მაშინ მწკრივი განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვაჩვენოთ, რომ ჰარმონიული მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

განშლადია.

ამოხსნა. ამ მწკრივის ზოგადი წევრის ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

მაგრამ არ არის საკმარისი მწკრივის კრებადობისათვის

განვიხილოთ

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

ეს უტოლობა მიუთითებს, რომ, როცა $p = n$, ჰარმონიული მწკრივისათვის არ სრულდება კოშის კრიტერიუმი და მაშასადამე ჰარმონიული მწკრივი განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვაჩვენოთ, რომ მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{(n+5)(n+2)}}$ განშლადია

ამოხსნა. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{(n+5)(n+2)}} = 1,$

ე.ი. არ სრულდება მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა, ამიტომ მოცემული მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 8. ეაჩვენოთ, რომ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$ მწკრივი განშლადია.

ამოხსნა.

$$S_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} = n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

$S_n > \sqrt{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$,

ამრიგად, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; მისი ზოგადი წევრი $\frac{1}{\sqrt{n}}$ მიისწრაფის ნულისაკენ, მაგრამ ეს პირობა არ არის საკმარისი კრებადობისათვის.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

აჩვენეთ, რომ შემდეგი მწკრივები კრებადია და იპოვეთ მათი ჯამი:

9.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. 9.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. 9.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

9.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$. 9.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$. 9.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6}$.

9.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-9}$. 9.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$

გამოიყენეთ კოშის კრიტერიუმი ან კრებადობის აუცილებელი პირობა და აჩვენეთ, რომ შემდეგი მწკრივები განშლადია.

9.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. 9.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. 9.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$.

9.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$. 9.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$. 9.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n}$. 9.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$.

§9.2 დადებითწევრებიანი მწკრივის კრებადობის საკმარისი პირობები

მწკრივს, რომლის ყველა წევრი დადებითია, დადებითწევრებიანი მწკრივი, ანუ დადებითი მწკრივი ეწოდება.

შედარების I ნიშანი: თუ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ და $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ დადებითწევრებიანი მწკრივებია და ყოველი $n > N_0$ ($N_0 \geq 1$) სრულდება უტოლობა $u_n \leq v_n$ მაშინ,

ა) როცა $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ კრებადია, კრებადი იქნება $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

ბ) როცა $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ განშლადია, განშლადი იქნება $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

შედარების II ნიშანი (ზღვრული ნიშანი): თუ $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, ($u_n>0$, $v_n>0$, $n = 1,2,3,\ldots$) სადაც k ნულისაგან განსხვავებული სასრული რიცხვია, მაშინ მწკრივები $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ და $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ერთდროულად კრებადია ან განშლადია.

დალამბერის ნიშანი (მწკრივის კრებადობის საკმარისი ნიშანი). თუ დადებითწევრებიანი მწკრივისათვის არსებობს ზღვარი $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, მაშინ თუ $k<1$, მწკრივი კრებადია, ხოლო $k>1$, მწკრივი განშლადია. როცა $k=1$, ან $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ არ არსებობს, მაშინ მწკრივის კრებადობის ან განშლადობის შესახებ არ შეიძლება დასკვნის გაკეთება. გვაქვს საეჭვო შემთხვევა, რომელიც დამატებით გამოკვლევას მოითხოვს.

კოშის ნიშანი (მწკრივის კრებადობის საკმარისი ნიშანი). თუ დადებითწევრებიანი მწკრივისათვის არსებობს ზღვარი $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, მაშინ:

თუ $k<1$, მწკრივი კრებადია, თუ $k>1$, მწკრივი განშლადია,

თუ $k=1$ ან $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ არ არსებობს, გვაქვს საეჭვო შემთხვევა, რომელიც დამატებით გამოკვლევას მოითხოვს.

მწკრივის კრებადობის კოშის ინტეგრალური ნიშანი. ვთქვათ, f(x) ფუნქცია უწყვეტია, მონოტონურად კლებადია და დადებითია, როცა $x \geq a$.

თუ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ კრებადია, მაშინ მწკრივი

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots$$

კრებადია, ხოლო თუ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ განშლადია, მაშინ მწკრივიც განშლადია.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შევისწავლოთ განზოგადებული ჰარმონიული მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ კრებადობის საკითხი, ამ მწკრივს **დირიხლეს მწკრივსაც** უწოდებენ.

ამოხსნა. რადგან $f(x)=\frac{1}{x^p}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს კოშის ინტეგრალურ ნიშანში მოთხოვნილ პირობებს, ამიტომ დირიხლეს მწკრივის კრებადობის საკითხი დაიყვანება $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ ინტეგრალის კრებადობის შესწავლაზე.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}\ln t=+\infty, & \text{როცა } p=1\\ \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=+\infty, & \text{როცა } 0<p<1\\ \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{1}{(p-1)\cdot t^{p-1}}\right)=\frac{1}{p-1}, & \text{როცა } p>1\end{cases}$$

ე.ი. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ კრებადია, როცა $p>1$ და განშლადია, როცა $p\le 1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შევისწვლოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ მწკრივის კრებადობის საკითხი.

ამოხსნა. $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ კრებადია, ამიტომ შედარების I ნიშნის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. შევისწავლოთ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ მწკრივის კრებადობის საკითხი.

ამოხსნა. $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}>\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{1}{n}$.

რადგან ჰარმონიული მწკრივი განშლადია, განშლადი იქნება მოცემული მწკრივიც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. კრებადია თუ განშლადი შემდეგი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{(n+1)(n+2)}}$.

ამოხსნა. $\frac{1}{n\sqrt{(n+1)(n+2)}} < \frac{1}{n\sqrt{n \cdot n}} = \frac{1}{n^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ კრებადია, ამიტომ მოცემული მწკრივი კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. შევისწავლოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$ მწკრივის კრებადობის საკითხი.

ამოხსნა. ამ მწკრიეის წევრები დაწყებული მესამედან ნაკლებია უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \qquad \left(q=\frac{1}{2}\right)$$

შესაბამის წევრებზე, $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$ $(n>2)$, ამიტომ მოცემული მწკრივი კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. შევისწავლოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ $(a>0)$.

ამოხსნა. როცა $0<a<1$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1$$

და ირღვევა მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა. ასევე როცა a=1, მაშინ $u_n=\frac{1}{2}$ და ცხადია $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, ამიტომ, როცა $0<a\le 1$ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ განშლადია.

თუ $a>1$, მაშინ $\frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ გეომეტრიული მწკრივი კრებადია, რადგან $\frac{1}{a}<1$, როცა $a>1$, ამიტომ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ კრებადია, როცა $a>1$.

მაგალითი 8. განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ მწკრივთა შედარების მეორე პრინციპით, მოცემულ მწკრივთან ერთად ავილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ და განვიხილოთ ზღვარი:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$$

მაგრამ ჰარმონიული მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ განშლადია, მაშინ განშლადი იქნება მოცემული მწკრივიც.

მაგალითი 9. განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+2}{n^2+1}$.

ამოხსნა. შედარებისათვის გამოვიყენოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

განვიხილოთ ზღვარი:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{n^2+2}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

როგორც ცნობილია, როცა $x \to 0$, უსასრულოდ მცირე ფუნქცია $\ln(1+x) \sim x$, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 > 0.$$

რადგან $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ კრებადი მწკრივია, ამიტომ კრებადია მოცემული მწკრივიც.

მაგალითი 10. განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n^2}$.

ამოხსნა. შედარებისათვის ავილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$.

განვიხილოთ ზღვარი:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{2}{3}}\cdot n^{\frac{4}{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}n^2\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}=1>0.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ კრებადია, ამიტომ კრებადია მოცემული მწკრივიც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 11. დალამბერის ნიშნის გამოყენებით შევისწავლოთ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ მწკრივის კრებადობის საკითხი.

ამოხსნა. განვიხილოთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1,\qquad (e=2{,}71\ldots),$$

ამიტომ მოცემული მწკრივი განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 12. განვიხილოთ მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n+3}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n+1}=0<1,$$

მოცემული მწკრივი კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 13. კოშის ნიშნის გამოყენებით შევისწავლოთ მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

ამოხსნა. განვიხილოთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{3e}<1,$$

მოცემული მწკრივი კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 14. გამოვიკვლიოთ შემდეგი მწკრივის კრებადობის საკითხი

$$\left(\frac{5}{2}\cdot 4\right)+\left(\frac{7}{3}\cdot 4\right)^2+\ldots+\left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^n+\ldots$$

ამოხსნა. $u_n=\left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^n$ – მწკრივის ზოგადი წევრია.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4=4\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=4\cdot 2=8,$$

მოცემული მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 15. კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით შევისწავლოთ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ მწკრივის კრებადობის საკითხი.

ამოხსნა. განვიხილოთ ფუნქცია $\varphi(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$. $\varphi(x)$ უწყვეტი და კლებადი ფუნქციაა, როცა $x\ge 2$.

გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი ამ ფუნქციიდან

$$\int_2^{\infty}\varphi(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^t=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln t}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

არასაკუთრივი ინტეგრალი არსებობს და მაშასადამე მოცემული მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 16 შევისწავლოთ

$$\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{2n(3n-1)}+\ldots$$

მწკრივის კრებადობის საკითხი.

ამოხსნა. $u_n=\dfrac{1}{2n(3n-1)}$;

განვიხილოთ ფუნქცია $\varphi(x)=\dfrac{1}{2x(3x-1)}$, ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს კოშის ინტეგრალური ნიშნით განსაზღვრულ პირობებს: უწყვეტია, დადებითი და კლებადი, როცა $x>\dfrac{1}{3}$; გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x(3x-1)}=-\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{(3x-1)-3x}{2x(3x-1)}dx=$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{3}{2(3x-1)}\right)dx=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln(3x-1)\right)\Bigg|_1^t=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(-\ln t+\ln(3t-1)-\ln 2)=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\frac{3t-1}{2t}=\frac{1}{2}\ln\lim_{t\to\infty}\frac{3t-1}{2t}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

რადგან არასაკუთრივი ინტეგრალი არსებობს, ამიტომ მოცემული მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 17. შევისწავლოთ შემდეგი მწკრივის კრებადობის საკითხი:

$$\frac{1}{3\ln 3\ln\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4\ln\ln 4}+\frac{1}{5\ln 5\ln\ln 5}+\ldots$$

ამოხსნა. მწკრივის ზოგადი წევრია: $u_n=\dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)\ln\ln(n+2)}$;

განვიხილოთ ფუნქცია $\varphi(x)=\dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$ $(x\ge 3)$.

$\varphi(x)$ აკმაყოფილებს კოშის ინტეგრალური ნიშნის პირობებს.

გამოვთვალოთ

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\lim_{t\to\infty}\int_3^t\frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x}=\lim_{t\to\infty}(\ln\ln\ln x)\Big|_3^t=\lim_{t\to\infty}(\ln\ln\ln t-\ln\ln\ln 3)=+\infty$$

არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია, ამიტომ მოცემული მწკრივიც განშლადია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

შედარების ნიშნების გამოყენებით შეისწავლეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობის საკითხი:

9.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}$. 9.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$. 9.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$. 9.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$.

9.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$. 9.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}$. 9.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n\alpha|}{n^2}$. 9.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

9.24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3}}$. 9.25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$. 9.26 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{n}$. 9.27 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n^3}}$.

9.28 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$ 9.29 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$. 9.30 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$. 9.31 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4n}$.

9.32 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. 9.33 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\sin\dfrac{\pi}{3^n}$. 9.34 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$. 9.35 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$.

დალამბერის ნიშნის გამოყენებით შეისწავლეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობის საკითხი:

9.36 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+5}{2^n}$. 9.37 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$. 9.38 $\dfrac{3}{1}+\dfrac{3\cdot 5}{1\cdot 4}+\ldots+\dfrac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{1\cdot 4\cdots(3n-2)}+\cdots$.

9.39 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{5^n}$. 9.40 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n+1)!}{8^n n^2}$. 9.41 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{2n+1}}{n!}$. 9.42 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$.

9.43 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$. 9.44 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. 9.45 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$.

კოშის ნიშნის გამოყენებით შეისწავლეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობის საკითხი:

9.46 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)^n$. 9.47 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+3}\right)^n$. 9.48 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 9.49 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

9.50 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 9.51 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{2n}$. 9.52 $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$.

კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით შეისწავლეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობის საკითხი:

9.53 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$. 9.54 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. 9.55 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n\_3)}$. 9.56 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

9.57 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. 9.58 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. 9.59 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

შეისწავლეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობის საკითხი:

9.60 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$. 9.61 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$. 9.62 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$. 9.63 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

9.64 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$. 9.65 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$. 9.66 $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n}$. 9.67 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$.

9.68 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$. 9.69 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 9.70 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n^2}$.

9.71 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$. 9.72 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$.

§9.3 აბსოლუტური და პირობითი კრებადობა. ნიშანმონაცვლე მწკრივის კრებადობის ლაიბნიცის ნიშანი

მწკრივს

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{9.2}$$

ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ კრებადია ამ მწკრივის წევრების მოდულებისაგან შედგენილი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = |u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \tag{9.3}$$

თუ (9.2) მწკრივი კრებადია, ხოლო (9.3) მწკრივი განშლადი, მაშინ (9.2) მწკრივს ეწოდება პირობითად კრებადი.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა. თუ (9.3) მწკრივი კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება (9.2) მწკრივი.

მწკრივის აბსოლუტური კრებადობის ნიშანი. თუ (9.2) მწკრივის წევრები ყველა $n>N_0$ $(N_0 \geq 1)$ რიცხვისათვის აკმაყოფილებს უტოლობას $|u_n| \leq b_n$, და ამასთან $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ კრებადია, მაშინ (9.2) მწკრივი იქნება აბსოლუტურად კრებადი.

ნიშანმონაცვლე მწკრივი. მწკრივს ეწოდება ნიშანმონაცვლე, თუ მის ნებისმიერ ორ მეზობელ წევრს სხვადასხვა ნიშანი აქვს. ამრიგად,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n, \tag{9.4}$$

სადაც $u_n > 0$ ნიშანმონაცვლე მწკრივია.

ლაიბნიცის ნიშანი. თუ ნიშანმონაცვლე (9.4) მწკრივის u_n წევრები მონოტონურად კლებადია $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots$ და $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, მაშინ (9.4) მწკრივი კრებადია. ამასთან, ამ მწკრივის S ჯამისათვის ადგილი აქვს შეფასებას: $S < u_1$.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

შევისწავლოთ შემდეგი მწკრივების აბსოლუტური და პირობითი კრებადობა:

მაგალითი 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$.

ამოხსნა. ეს არის ნიშანმონაცვლე მწკრივი. მისი წევრები აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ ჰარმონიული მწკრივია და განშლადია. ე.ი. მოცემული მწკრივი არ არის აბსოლუტურად კრებადი. ახლა შევისწავლოთ პირობითი კრებადობის საკითხი. რადგან

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots \text{ და } \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

ამიტომ ლაიბნიცის თეორემის თანახმად $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ კრებადია, მაგრამ რადგან არ არის აბსოლუტურად კრებადი, ამიტომ იგი პირობით კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივი ნიშანმონაცვლე მწკრივია. მისი წევრების აბოსლუტური სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივი იქნება $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. ეს მწკრივი კრებადია, ამიტომ მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

ამოხსნა. ამ მწკრივის წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილი მწკრივია $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$. ამ მწკრივის ზოგადი წევრი $\frac{\ln}{n}>\frac{1}{n}$, $n\geq 3$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ განშლადია, ამიტომ შედარების ნიშნის თანახმად $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ იქნება განშლადი. ე.ი. მოცემული მწკრივი არ არის აბსოლუტურად კრებადი. მეორე მხრივ, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ არის ნიშანმონაცვლე მწკრივი, იგი კრებადია ლაიბნიცის თეორემის თანახმად, რადგან $u_n=\frac{\ln n}{n}$ მონოტონურად კლებადია და $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$. მაშასადამე $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ მწკრივი პირობით კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$.

ამოხსნა. განვიხილოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\alpha}{n^2}\right|$. $\left|\frac{\cos n\alpha}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ კრებადია, ამიტომ მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, და მაშასადამე, კრებადი იქნება $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$.

ამოხსნა. განვიხილოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$. ამ მწკრივის კრებადობის დასადგენად გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\frac{1}{2}<1.$$

ე.ი. მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ამიტომ კრებადი იქნება $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$ მწკრივი.

მაგალითი 6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$.

ამოხსნა. ამ მწკრივის აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივია $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$, მისი კრებადობის დასადგენად შევადაროთ მწკრივს $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ და განვიხილოთ ზღვარი: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1/n}=\pi>0$, ამიტომ $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ განშლადია. ლაიბნიცის თეორემის თანახმად, მოცემული მწკრივი კრებადია, რადგან

$$\sin\frac{\pi}{2}>\sin\frac{\pi}{3}>\sin\frac{\pi}{4}>\dots \text{ და } \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0.$$

მაშასადამე, მოცემული მწკრივი პირობით კრებადია.

მაგალითი 7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$.

ამოხსნა. განვიხილოთ აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივი: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$. $\quad\frac{1}{n-\ln n}\geq\frac{1}{n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ მწკრივი განშლადია, ამიტომ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ განშლადია.

ახლა შევისწავლოთ პირობით კრებადობის საკითხი. რადგან $u_n=\frac{1}{n-\ln n}$ მიმდევრობა კლებადია, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$, ამიტომ ლაიბნიცის ნიშნის თანახმად $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$ კრებადია. ეს მწკრივი არ არის აბსოლუტურად კრებადი, ამიტომ იგი პირობით კრებადია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

დაადგინეთ შემდეგი მწკრივების აბსოლუტური და პირობითი კრებადობა.

9.73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$. 9.74. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$. 9.75. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)}{2n+1}$. 9.76. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

9.77. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$. 9.78 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$. 9.79. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$.

9.80 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-n}$. 9.81 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. 9.82. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

§9.4 ფუნქციონალური მწკრივი

1. **ფუნქციონალური მწკრივის კრებადობის არე**. ვთქვათ, $f_n(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია D რიცხვით შუალედში. გამოსახულებას

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x\in D \tag{9.5}$$

ეწოდება ფუნქციონალური მწკრივი. თუ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ რიცხვითი მწკრივი $(x_0\in D)$ კრებადია, მაშინ (9.5) ფუნქციონალურ მწკრივს ეწოდება კრებადი x_0 წერტილში. თუ ყოველ $x\in D_1\subset D$ წერტილში რიცხვითი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ კრებადია, მაშინ (9.5) მწკრივს კრებადი ეწოდება D_1 არეში, ხოლო D_1-ს ეწოდება (9.5) ფუნქციონალური მწკრივის **კრებადობის არე**.

(9.5) ფუნქციონალური მწკრივის კრებადობის არის განსაზღვრისათვის გამოიყენება დალამბერის ან კოშის ნიშანი. სახელდობრ, თუ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \ell(x) \quad \text{ან} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} = \ell(x),$$

მაშინ (9.5) მწკრივის აბსოლუტური კრებადობის არის განსაზღვრისათვის უნდა ამოვხსნათ უტოლობა $\ell(x)<1$, ხოლო განშლადობის არის განსაზღვრისათვის კი $\ell(x)>1$ უტოლობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$ ფუნქციონალური მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} |x|^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}$

მაშასადამე, როცა $|x| > 1$ მწკრივი განშლადია, ხოლო როცა $|x| < 1$, მაშინ მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. შევისწავლოთ კრებადობის საკითხი $x = \pm 1$ წერტილებზე.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n^2}$$

რიცხვითი მწკრივი განშლადია, რადგან მისი ზოგადი წევრი არ მიისწრაფის ნულისაკენ. მაშასადამე მოცემული მწკრივის კრებადობის არეა $(-1, 1)$ შუალედი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ეიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \sqrt{(x+2)^n}}$, $x > -2$ ფუნქციონალური მწკრიეის კრებადობის არე.

ამოხსნა. $|f_n()x| = \frac{1}{n \cdot 3^n \sqrt{(x+2)^n}}$, $(x > -2)$

გამოვიყენოთ კოშის ნიშანი

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 3^n \sqrt{(x+2)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3(x+2)^{\frac{1}{2}} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}, \quad (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1).$$

მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი იქნება, თუ $\frac{1}{3\sqrt{x+2}} < 1$.

ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x > -2 \\ \sqrt{x+2} > \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x > -2 \\ x > \frac{1}{9} - 2 \end{cases} \quad x > \frac{17}{9},$$

როცა $x = -\frac{17}{9}$ მიიღება ნიშანმონაცვლე მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

რომელიც კრებადია ლაიბნიცის თეორემის თანახმად.

მაშასადამე, მწკრივის კრებადობის არეა $\left[-\frac{17}{9},+\infty\right)$ ინტერვალი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\left|1+x^n\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x|\sqrt[n]{\left|1+\frac{1}{x^n}\right|}}=\begin{cases}\frac{1}{|x|}, & |x|>1\\ 1, & |x|\le 1\end{cases}$$

როცა $|x|>1$, მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. როცა $x=1$ გვექნება: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$, განშლადია. $x=-1$-ზე მწკრივი განსაზღვრული არ არის. ე.ი. მწკრივის კრებადობის არეა $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n+1}}}{x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\frac{x}{2^{n+1}}}{x^n\frac{x}{2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\right|=\left|\frac{x}{2}\right|;$$

თუ $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, მაშინ მწკრივი იქნება აბსოლუტურად კრებადი.

შევისწავლოთ კრებადობის საკითხი, როცა $|x|=2$; როცა $x=2$, გვაქვს

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\operatorname{tg}\frac{1}{2^{n-1}};\qquad \lim_{n\to\infty}2^n\operatorname{tg}\frac{1}{2^{n-1}}=2,$$

ე.ი. ზოგადი წევრი არ მიისწრაფის ნულისაკენ, ამიტომ მოცემული მწკრივი განშლადია $x=2$ წერტილზე. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მწკრივი განშლადია, როცა $x=-2$. ამიტომ მწკრივის კრებადობის არეა $(-2,2)$ შუალედი.

§9.5 ფუნქციონალური მწკრივის თანაბარი კრებადობა

D_1 არეში კრებად $\sum_{n-1}^{\infty}f_n(x)$ ფუნქციონალურ მწკრივს **თანაბრად კრებადი** ეწოდება ამავე არეში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $N=N(\varepsilon)$ ნატურალური რიცხვი დამოკიდებული მხოლოდ ε-ზე, ისეთი რომ ყოველი $x\in D_1$ რიცხვისათვის, ადგილი აქვს უტოლობას:

$|R_n(x)| < \varepsilon$ როცა $n > N(\varepsilon)$, სადაც $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$.

ვაიერშტრასის ნიშანი. ვთქვათ, ფუნქციონალური მწკრივი კრებადია D_1 არეში და არსებობს ისეთი დადებითწევრებიანი კრებადი რიცხვითი მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, რომ ყოველი $x \in D_1$ სრულდება უტოლობა

$$|f_n(x)| < a_n, \qquad n > N_0,$$

მაშინ ფუნქციონალური მწკრივი კრებადია აბსოლუტურად და თანაბრად D_1 არეში.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ რიცხვით მწკრივს $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ფუნქციონალური მწკრივისათვის მაჟორანტული მწკრივი ეწოდება.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$ მწკრივის კრებადობის არე, მწკრივის ჯამი და ვაჩვენოთ, რომ კრებადობის მთელ არეზე ეს მწკრივი არ არის თანაბრად კრებადი.

ამოხსნა. ვიპოვოთ კერძო ჯამი $S_n(x)$;

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ როცა $|x| > 1$ ან $x = -1$, მწკრივი განშლადია.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}(1 - x^{n+1}) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases},$$

ამიტომ

$$R_n(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

ე.ი. მწკრივის კრებადობის არეა $-1 < x \le 1$. ვაჩვენოთ, რომ კრებადობის მთელ არეზე მწკრივი არ არის თანაბრად კრებადი. შევნიშნოთ, რომ ფუნქციონალური მწკრივი არ არის თანაბრად კრებადი D არეში ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი $\varepsilon_0 > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი N რიცხვისათვის არსებობს $n' > N$ და $x' \in D$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|R_{n'}(x')| \ge \varepsilon_0.$$

ან რაც იგივეა, არსებობს ისეთი $\varepsilon_0 > 0$ რიცხვი და $N(\varepsilon_0)$, რომ ყოველი $n > N(\varepsilon_0)$ არსებობს x_n, ისეთი, რომ

$$|R_n(x_n)| \geq \varepsilon_0.$$

ჩვენს მაგალითში ავიღოთ $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4}$ და $x_n = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{n+1}}} \in (-1;1)$.

$R_n(x_n) = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ მწკრივი არ არის თანაბრად კრებადი.

მაგალითი 2. ვაიერშტრასის ნიშნის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2[1+(nx)^2]}$$

თანაბრად კრებადია მთელ ღერძზე.

ამოხსნა. მართლაც,

$$\frac{1}{n^2[1+(nx)^2]} < \frac{1}{n^2},$$

ნებისმიერი x-თვის. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ კრებადია, ამიტომ მოცემული მწკრივი თანაბრად კრებადია მთელ ღერძზე.

მაგალითი 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{4n-2}$ თანაბრად კრებადია $-1+\omega \leq x \leq 1-\omega$ ინტერვალზე $(0 < \omega < 1)$: ამ მწკრივის ინტეგრებით $(-1;\ 1)$ ინტერვალზე იპოვეთ

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots$$

მწკრივის ჯამი.

ამოხსნა. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის გამოყენებით მიეიღებთ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2} = x^2 + x^6 + x^{10} + \ldots + x^{4n-2} + \ldots = \frac{x^2}{1-x^4} \quad (|x| < 1).$$

რადგან ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია $(-1 + \omega;\ 1 - \omega)$ ინტერეალზე, ამიტომ შეიძლება მისი წევრ-წევრად ინტეგრება:

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{4n-2}dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}dt \quad x \in (-1;1)$$

$\dfrac{x^2}{1-x^4}$ რაციონალური ფუნქცია წარმოვადგინოთ მარტივ წილადთა ჯამის სახით:

$$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{x^2}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

A, B, C, D რიცხვები ვიპოვოთ განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით. მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} A-B-C=0 \\ A+B-D=1 \\ A-B+C=0 \\ A+B+D=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2D=-1 \\ C=0 \\ A-B=0 \\ A+B=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} D=-\dfrac{1}{2} \\ C=0 \\ A=\dfrac{1}{4} \\ B=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

გამოვთვალოთ

$$\int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}dt = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{1+t}dt - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t^4}dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

მაშასადამე,

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ტოლობით

$$f(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + ne^{-nx} + \ldots$$

ვაჩვენოთ, რომ $f(x)$ უწყვეტია $(0; +\infty)$ შუალედში. გამოვთვალოთ

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx.$$

ამოხსნა. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ მწკრივი კრებადია $(0;\ +\infty)$ შუალედში. მართლაც, დალამბერის ნიშნის გამოყენებით მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{ne^x}=\frac{1}{e^x}<1,$$

როცა $x>0$; ამასთან ყოველ $(x_0;\ +\infty)$ შუალვდში, სადაც $x_0>0$ მწკრივი თანაბრად კრებადია, მართლაც,

$$\frac{n}{e^{nx}}<\frac{n}{e^{nx_0}}, \qquad (x>x_0).$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{e^{nx_0}}$ კრებადია, ამიტომ ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად თანაბრად კრებადი იქნება $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ მწკრივი $(x_0;\ +\infty)$ შუალედში, როცა $x_0>0$.

$f(x)$ არის უწყვეტი ფუნქციებისაგან შედგენილი თანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამი, ამიტომ $f(x)$ უწყვეტია $(0;+\infty)$ შუალედში (ყოველი $x\in(0;+\infty)$ არსებობს $x_0>0$ ისეთი, რომ $x>x_0$. $(x_0;+\infty)$ ინტერვალზე კი მოცემული მწკრივი თანაბრად კრებადია).

თანაბრად კრებადი მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება შეიძლება, ამიტომ

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3} d(e^{-nx}) = -\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-n\ln 3} - e^{-n\ln 2}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ე.ი. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx = \frac{1}{2}.$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

განსაზღვრეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობის არე; შეისწავლეთ მწკრივების აბსოლუტური კრებადობის საკითხი:

9.83 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{n^2}$. 9.84 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$. 9.85 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$. 9.86 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln^x x$.

9.87 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(x+3)^n}$. 9.88 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^x$. 9.89 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$. 9.90 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

9.91 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$. 9.92 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$. 9.93 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}$. 9.94 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$.

აჩვენეთ, რომ შემდეგი მწკრივები თანაბრად კრებადია მთელ ღერძზე:

9.95 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$. 9.96 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$. 9.97 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

9.98 აჩვენეთ, რომ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}\sqrt{1+kx}}$ თანაბრად კრებადია $(0; +\infty)$ ინტერვალზე.

იპოვეთ შემდეგი მწკრივების ჯამი:

9.99 $\displaystyle x + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots$ 9.100 $\displaystyle\frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \ldots$

§9.6 ხარისხოვანი მწკრივი. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი

ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ სახის მწკრივს. a_n რიცხვებს ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები ეწოდებათ.

აბელის თეორემა. თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $x=x_0$ წერტილზე, მაშინ ეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი იქნება ყოველი x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|x|<|x_0|$; თუ ხარისხოვანი მწკრივი განშლადია $x=x_0$ წერტილზე, მაშინ ის განშლადი იქნება ყოველი x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|x|>|x_0|$.

განმარტება. $R>0$ რიცხვს ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი, თუ ეს მწკრივი კრებადია $(-R,R)$ ინტერვალის ყოველ შიგა წერტილში და განშლადია ყოველ x წერტილში, რომელიც ამ ინტერვალს არ ეკუთვნის. ამასთან, $(-R,R)$ ინტერვალს ეწოდება კრებადობის ინტერვალი.

თუ ხარისხოვანი მწკრივი მხოლოდ ერთ წერტილშია კრებადი, მაშინ $R=0$, თუ კრებადია ნებისმიერი x-სათვის, მაშინ $R=\infty$.

კრებადობის რადიუსი შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულებით:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}; \quad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$ მწკრივის კრებადობის ინტერვალი.

ამოხსნა. $a_n=\frac{1}{n\cdot 10^{n-1}}$, ვიპოვოთ კრებადობის რადიუსი

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)10^n}{n\cdot 10^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10(n+1)}{n}=10$$

ე.ი. მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია $(-10,10)$ ინტერვალში. შევისწავლოთ კრებადობის საკითხი ინტერვალის ბოლოებზე, ანუ $x=\pm 10$ წერტილებზე.

როცა $x=10$, გვაქვს $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n\cdot 10^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n}$, ეს მწკრივი კი განშლადია.

როცა x=–10, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n\cdot 10^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 10}{n}$, ეს უკანასკნელი მწკრივი კრებადია.

ამიტომ მოცემული მწკრივის კრებადობის ინტერვალია $[-10,10)$ შუალედი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{2(n-1)}$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. $a_n=\begin{cases}2^{k-1}, & \text{როცა } n=2(k-1)\\ 0, & \text{როცა } n\neq 2(k-1)\end{cases}$

გამოვთვალოთ კრებადობის რადიუსი

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2(k-1)]{2^{k-1}}}=\frac{1}{2};$$

მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ინტერვალში. შევისწავლოთ კრებადობის საკითხი $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ წერტილებზე. როცა $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ გვაქვს:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}2^{-(n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}1;$$

ეს მწკრივი განშლადია.

მაშასადამე, კრებადობის ინტერვალია $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$ მწკრივის კრებადობის ინტერვალი.

ამოხსნა. $a_n=\frac{n^n}{n!}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n n!}{(n+1)!n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=e,$

ამრიგად, $R=\frac{1}{e}$. შევისწავლოთ კრებადობის საკითხი, როცა $x=\pm\frac{1}{e}$.

თუ $x=\frac{1}{e}$, გვაქვს $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^n n!}$.

ამ მწკრივის ზოგადი წევრია $u_n = \frac{n^n}{e^n n!}$, გამოვიყენოთ სტერლინგის ფორმულა:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \text{ მაშინ } u_n \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}};$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ განშლადია, ამიტომ განშლადი იქნება $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ მწკრივი.

როცა $x = -\frac{1}{e}$, მაშინ გვაქვს $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(-e)^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!}$; $u_n \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi n}}$;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi n}}$ კრებადია, ამიტომ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(-e)^n n!}$ კრებადი იქნება. ამრიგად, კრებადობის ინტერვალია $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

§9.7 ტეილორის მწკრივი

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის მიდამოში და აქვს ამ წერტილში ნებისმიერი რიგის სასრული წარმოებული. $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი ეწოდება შემდეგი სახის ხარისხოვან მწკრივს:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (9.6)$$

აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (9.7)$$

a წერტილის მიდამოს რაიმე x წერტილში, მდგომარეობს შემდეგში $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, სადაც $R_n(x)$ არის ნაშთითი წევრი, მას ლაგრანჟის ფორმით აქვს შემდეგი სახე:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n, \ 0<\theta<1.$$

იმ შემთხვევაში, როცა (9.6) მწკრივის ჯამი $f(x)$-ის ტოლია, ამბობენ, რომ (9.6) მწკრივი წარმოადგენს $f(x)$-ის გაშლას ტეილორის მწკრივად.

თუ (9.7) ფორმულაში ავიღებთ $a=0$, მაშინ მივიღებთ $f(x)$-ის გაშლას მაკლორენის მწკრივად

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots \qquad (9.8)$$

(9.8) ფორმულა სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = 0, \qquad 0 < \theta < 1.$$

(9.8) ფორმულის მარჯვენა მხარეს ეწოდება f(x) **ფუნქციის მაკლორენის მწკრივი.**

ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები **მაკლორენის** მწკრივის საშუალებით შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$1.\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

$$2.\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

$$3.\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2(k-1)}}{(2k-2)!} + \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty. \qquad (9.9)$$

$$4.\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \ldots, \qquad -1 < x \le 1.$$

$$5.\ (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. გავშალოთ $y = \ln x$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად x=1 წერტილის მიდამოში.

ამოხსნა, (9.9) ფორმულების თანახმად

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{t^k}{k} + \ldots \qquad -1 < t \le 1$$

მოვახდინოთ ამ ფუნქციაში ცვლადის გარდაქმნა:

$1+t=x,\ t=x-1,\ 0<x\le 2.$

გვექნება:

$$\ln x = (x-1) - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k} + \ldots\ 0 < x \le 2.$$

მაგალითი 2. გაეშალოთ $y=\sqrt{x^3}$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად x=1 წერტილის მიდამოში.

ამოხსნა. (9.9) ფორმულების თანახმად

$$(1+t)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 2}t^2-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}t^3+\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{3}{2}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2^{n-1}\cdot n!}t^n+\ldots \quad -1<t<1,$$

1+t=x, O<x<2,

მაშინ მივიღებთ:

$$\sqrt[2]{x^3}=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{3}{2}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2^{n-1}\cdot n!}\frac{(x-1)^n}{n!}+\ldots=$$
$$=1+\frac{2}{3}\left[(x-1)+\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{1}{2^2}\frac{(x-1)^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2^{n-1}}\frac{(x-1)^n}{n!}+\ldots\right],0<X<2$$

მაგალითი 3. $y=\sin\frac{\pi x}{4}$ ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის მწკრივად x=2 წერტილის მიდამოში.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ

$$\sin\frac{\pi x}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}(x-2).$$

ამასთან, $\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\ldots+(-1)^{k=1}\frac{t^{2(k-1)}}{(2k-2)!}+\ldots, \quad -\infty<t<+\infty$

$$\sin\frac{\pi}{4}x=\cos\frac{\pi}{4}(x-2)=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}+\ldots+(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2(k-1)}\frac{(x-2)^{2(k-1)}}{(2k-2)!}+\ldots$$

მაგალითი 4. $y=\cos^2x$ფუნქცია დავშალოთ მაკლორენის მწკრივად.

ამოხსნა. $y=\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. (9.9) ფორმულების თანახმად

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{2^6x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{2^{2(k-1)}x^{2(k-1)}}{(2k-2)!}+\ldots$$
$$\cos^2x=1-x^2+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-3}x^{2(k-1)}}{(2k-2)!}+\ldots$$

მაგალითი 5. დედამიწის ზედაპირზე სიმძიმის ძალის აჩქარება ტოლია g_0-ის. როგორი იქნება სიმძიმის ძალის აჩქარება g, თუ მატერიალური წერტილი დედამიწის ზედაპირიდან დაშორებულია h მანძილით, ჩავთვალოთ, რომ h<R (R დედამიწის რადიუსია). გამოვიყვანოთ მიახლოებითი ფორმულა, შემოვისაზღვროთ h-ის პირველი ხარისხით.

ამოხსნა. ვთქვათ, R არის დედამიწის რადიუსი, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ სიმძიმის ძალის აჩქარება უკუპროპორციულია დედამიწის ცენტრიდან მანძილისა, მაშინ შეიძლება დავწეროთ:

$$\frac{g}{g_0}=\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$g = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2} = g_0\frac{R^2}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = g_0\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}, \quad \frac{h}{R}<1:$$

$\dfrac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$ გავშალოთ მაკლორენის მწკრივად, გამოვიყენოთ ბინომიალური მწკრივი

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} = 1-2\frac{h}{R}+3\left(\frac{h}{R}\right)^2-4\left(\frac{h}{R}\right)^3+\ldots$$

მივიღებთ: $g=g_0\left[1-2\frac{h}{R}+3\left(\frac{h}{R}\right)^2-4\left(\frac{h}{R}\right)^3+\ldots\right]$

თუ შევიზღუდებით h-ის პირველი ხარისხით, მივიღებთ მიახლოებით ფორმულას

$$g \approx g_0\left(1-2\frac{h}{R}\right).$$

§ 9.8 ფუნქციის დაშლა ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემა:

1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, …, cos nx, sin nx, …

ეს ფუნქციები $[-\pi,\pi]$ შუალედში წარმოადგენენ ორთოგონალურ ფუნქციათა სისტემას, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემულ შუალედში ინტეგრალი ამ სისტემის ნებისმიერი ორი განსხვავებული ფუნქციის ნამრავლიდან არის ნულის ტოლი.

თუ 2π პერიოდული f(x) ფუნქცია ინტეგრებადია $[-\pi,\pi]$-ზე, მაშინ

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \quad \text{და} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

რიცხვებს f(x) ფუნქციის **ფურიეს კოეფიციენტები** ეწოდებათ k=0, 1, 2,…,

ხოლო $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$

მწკრივს კი, f(x) **ფუნქციის ფურიეს** მწკრივი.

თუ f(x)ფუნქცია ლუწია $[-\pi,\pi]$-ზე, მაშინ

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

მაშასადამე, ლუწი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cdot$$

თუ f(x) კენტია, მაშინ $a_n=0$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$, f(x)-ის ფურიეს მწკრივს ექნება შემდეგი სახე:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

თუ f(x) ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია f(x) ფუნქციისაკენ, მაშინ ამბობენ, რომ f(x) ფუნქცია იშლება ფურიეს მწკრივად.

თუ ℓ პერიოდის მქონე f(x) ფუნქცია ინტეგრებადია $\left[-\frac{\ell}{2},\frac{\ell}{2}\right]$ შუალედში, მაშინ მისი ფურიეს კოეფიციენტები მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\alpha_k = \frac{2}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(x)\cos\frac{2\pi kx}{\ell}dx \quad \beta_k = \frac{2}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(x)\sin\frac{2\pi kx}{\ell}dx,\ k=0,1,2,...$$

ხოლო f(x)-ის ფურიეს მწკრივს კი აქვს სახე:

$$f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k-1}^{\infty}\left(\alpha_k \cos\frac{2\pi kx}{\ell} + \beta_k \sin\frac{2\pi kx}{\ell}\right).$$

f(x) ფუნქციას ეწოდება უბან-უბან გლუვი [a,b]-ზე, თუ f(x) და $f'(x)$ ფუნქციებს აქვთ [a,b]-ზე მხოლოდ I გვარის წყვეტის წერტილთა სასრული სიმრავლე.

თეორემა (**დირიხლეს პრინციპი**). თუ ℓ პერიოდის f(x) ფუნქცია უბან-უბან გლუვია $\left[-\frac{\ell}{2},\frac{\ell}{2}\right]$ შუალედში, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი კრებადია f(x)-კენ უწყვეტობის წერტილებში, ხოლო წყვეტის წერტილში კი $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ მნიშვნელობისაკენ, სადაც f(x+0) და f(x-0) შესაბამისად მარჯვენა და მარცხენა ზღვარებია x წერტილში.

ამრიგად,

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k \cos\frac{2\pi kx}{\ell} + \beta_k \sin\frac{2\pi kx}{\ell}\right),$$

თუ f(x) უწყვეტია მთელ ღერძზე, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია f(x)-ისაკენ.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მოვიყვანოთ ფუნქციის ფურიეს მწკრივად დაშლის მაგალითები.
მაგალითი 1. დავშალოთ ფურიეს მწკრივად ფუნქცია

$$f(x)\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ -1, & -\pi<x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

ამოხსნა. ეს ფუნქცია კენტია, ამიტომ, მისი ფურიეს მწკრივი შეიცავს მხოლოდ სინუსებს

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx=-\frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}=-\frac{2}{n\pi}\left[\cos n\pi-\cos 0\right]=-\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]$$

$$b_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{2\cdot 2}{(2k+1)\pi}, & n=2k+1, \quad k=0,1,2,...\end{cases}$$

მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს დირიხლეს თეორემის პირობებს, ამიტომ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x$$

$$f(x)==\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+...\right)$$

მაშასადამე,

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+...\right)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ -1, & -\pi<x<0.\\ 0, & x=0\end{cases}$$

თუ ავიღებთ $x=\dfrac{\pi}{2}$-ს, მივიღებთ:

$$1=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

ან რაც იგივეა

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

მაგალითი 2. დავშალოთ ფურიეს მწკრივად ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi,\\ 0, & -\pi<x<0.\end{cases}$$

ამოხსნა. ვიპოვოთ ფურიეს კოეფიციენტები:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{\sin nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi}=0$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dx=1;\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{\cos nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{\pi n}((-1)^n-1).$$

$$b_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{2}{\pi(2k+1)}, & n=2k+1\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\sin(2k+1)x}{\pi(2k+1)}=\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ 0, & -\pi<x<0\end{cases}$$

მაგალითი 3. $f(x)=|\sin x|$ ფუნქცია დავშალოთ ფურიეს მწკრივად.

ამოხსნა. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, უწყვეტია, უბან-უბან გლუვი და ლუწია.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{4}{\pi},\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)dx=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}-\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right]=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{-(-1)^n-1}{n+1}-\frac{-(-1)^n-1}{n-1}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n+1}{n-1}-\frac{(-1)^n+1}{n+1}\right]=$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{n(-1)^n+(-1)^n+n+1-n(-1)^n-n+(-1)^n+1}{(n-1)(n+1)}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2(-1)^n+2}{\pi(n-1)(n+1)}=-\frac{2((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)},\qquad n>1.$$

თუ n=1, მაშინ

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos xdx=0.$$

$$a_n=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ -\dfrac{4}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k, \qquad k\geq 1.\end{cases}$$

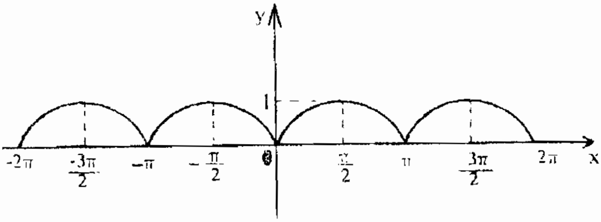
ამრიგად,

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{15}+\ldots+\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}+\ldots\right).$$

კერძოდ, თუ x=0, ამ ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\cdot$$

$f(x)=|\sin x|$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე



(ნახ.94)

მაგალითი 4. $(0,\pi)$ ინტერვალში განსაზღვრული

$f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$ ფუნქცია დავშალოთ სინუსების მწკრივად.

ამოხსნა. ამისათვის განვიხილოთ F(x) ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი სახით:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ -\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}=-f(-x), & -\pi\le x<0\end{cases}$$

ეს ფუნქცია განიცდის წყვეტას x=0 წერტილში, იგი $[-\pi,\pi]$ უბან-უბან გლუვია და კენტი, ამასთან F(x)=f(x), როცა $0\le x\le\pi$ ამიტომ,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=0,\quad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=-\frac{1}{2n}((-1)^n-1)+\frac{\cos n\pi}{n}-\frac{\sin nx}{\pi\cdot n^2}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{-1}{2n}((-1)^n-1)+\frac{(-1)^n}{n}=\frac{2(-1)^n-(-1)^n+1}{2n}=\frac{(-1)^n+1}{2n}$$

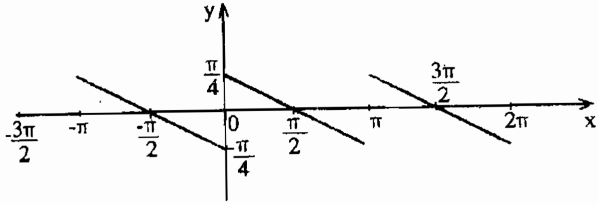
ამრიგად,

$$b_n=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ \dfrac{1}{2k}, & n=2k \qquad k=1,2,\dots\end{cases}$$

მაშასადამე, როცა $0<x<\pi$, გვაქვს

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}. \tag{9.10}$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2kx}{2k}$ მწკრივის ჯამი გრაფიკულად გამოისახება ასე (ნახ. 95):



ნახ. 95

ჩვენ მიერ განხილული მაგალითი 1-დან გამომდინარეობს

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \tag{9.11}$$

როცა $0<x<\pi$.

(9.10) და (9.11) ტოლობები გამოვაკლოთ წევრ-წევრად, მივიღებთ:

$$\frac{x}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}, \qquad 0<x<\pi .$$

მაგალითი 5. $y=x^2$ ფუნქცია დავშალოთ ფურიეს მწკრივად $(0,2\pi)$ ინტერვალში.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{8\pi^3}{3\pi}=\frac{8\pi^2}{3}.$$

როცა $n>1$, მაშინ

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-2\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n^2}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi}{n^2}-\frac{2\sin nx}{n^2}\right)=\frac{4}{n^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(-x^2\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}2xdx\right)=$$

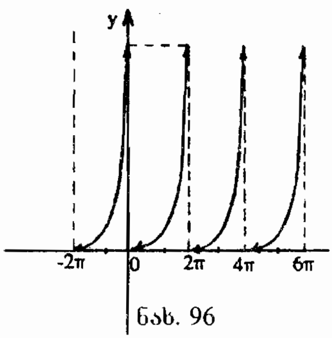
$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{2}{n}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\cos nx\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right)=-\frac{4\pi}{n}.$$

მაშასადამე, $y=x^2$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს $(0,2\pi)$ შუალედში ექნება შემდეგი სახე:

$$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2} \quad (9.12)$$

(9.12) მწკრივის ჯამი იქნება 2π პერიოდული ფუნქცია, რომელიც მიიღება $y=x^2$ ფუნქციის პერიოდული გაგრძელებით, ამიტომ (9.12) მწკრივის ჯამის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 97):



ნახ. 96

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

იპოვეთ შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივების კრებადობის ინტერვალი:

9.101. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. 4.102 $\sum_{n=2}^{\infty}n!x^n$

9.103 . $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)!}$ 9.104 . $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)3^{n-1}x^{n-1}$

9.105. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 9.106. $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$ 9.107. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$

შემდეგი ფუნქციები დაშალეთ მაკლორენის მწკრივად

9.108. $y=\ln(1+e^x)$. 9.109. $y=e^{\cos x}$. 4.110. $y=e^{-x^2}$. 9.111. $y=\sqrt{1+x^2}$.
9.112. $y=(x-\mathrm{tg}x)\cos x$. 9.113. $y=\ln(10+x)$. 9.114. $y=\cos^2 x$.
9.115. $y=x^2$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $(-\pi,\pi)$ ინტერვალში.
9.116. $y=|x|$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $[-\pi,\pi]$ ინტერვალში.

9.117 $y=\begin{cases}1, & -\pi<x<0\\ 3, & 0<x<\pi\end{cases}$, ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად აღნიშნულ შუალედში.

თავი X

დიფერენციალური განტოლებები

§ 10.1 პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა:

$$F(x,y,y')=0. \qquad (10.1)$$

თუ ეს განტოლება შეიძლება ამოიხსნას y'-ის მიმართ, მაშინ გვექნება:

$$y'=f(x,y) \qquad (10.2)$$

სადაც $f(x,y)$ მოცემული ფუნქციაა. (10.2) სახის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ჩაეწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (10.3)$$

სადაც $M(x,y)$ და $N(x,y)$ მოცემული ფუნქციებია.

(10.2) დიფერენციალური განტოლების **ზოგადი ამონახსნი** ეწოდება $y=\varphi(x,c)$ ფუნქციას, რომელიც ერთ ნებისმიერ c მუდმივს შეიცავს და c-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. როცა დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ჩაწერილია არაცხადი $\Phi(x,y,c)=0$ სახით, მაშინ მას ეწოდება დიფერენციალური განტოლების **ზოგადი ინტეგრალი**.

დიფერენციალური განტოლების **კერძო ამონახსნი** ეწოდება $y=\varphi(x,c_0)$ ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი $y=\varphi(x,c)$ ამონახსნიდან ნებისმიერი c მუდმივის კერძო $c=c_0$ მნიშვნელობისათვის: $\Phi(x,y,c_0)=0$ დამოკიდებულებას კერძო ინტეგრალი ეწოდება.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

1. ვაჩვენოთ, რომ $x^2-xy+y^2=c^2$ წარმოადგენს $(x-2y)y'=$ 2x-y განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

ამოხსნა. გავაწარმოოთ x ცვლადით $x^2-xy+y^2=c^2$ ტოლობა, მივიღებთ:

$2x-(y+xy')+2y.y'=0$; $\quad 2x-y-xy'+2y.y'=0$; $\quad (x-2y)y'=2x-y$.

მაშასადამე, $x^2-xy+y^2=c^2$ არის $(x-2y)y'=2x-y$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ვიპოვოთ ის კერძო ინტეგრალი, რომლისთვისაც $y(1)=1$, გვექნება:

$$1-1+1=c^2,\ c^2=1.$$

ამრიგად, $x^2-xy+y^2=1$ არის საძიებელი კერძო ინტეგრალი.

2. ვაჩვენოთ, რომ $y=c_1x+c_2x^2$ არის

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x^2}=0$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. $\frac{dy}{dx}=c_1+2c_2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=2c_2$, ამიტომ

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x^2}=2c_2-\frac{2}{x}(c_1+2c_2x)+\frac{2}{x^2}(c_1x+c_2x^2)=$$

$$=2c_2-\frac{2c_1}{x}-4c_2+\frac{2c_1}{x}+2c_2=0.$$

3. შეადგინოთ დიფერენციალური განტოლება $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ წირთა ოჯახისათვის.

ამოხსნა. $y'=2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}$, $y''=4c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$

ამოვხსნათ $\begin{cases} 2e^{2x}c_1-e^{-x}c_2=y' \\ 4e^{2x}c_1+e^{-x}c_2=y'' \end{cases}$

სისტემა c_1 და c_2 –ის მიმართ.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2e^{2x} & -e^{-x} \\ 4e^{2x} & e^{-x} \end{vmatrix}=2e^x+4e^x=6e^x;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} y' & -e^{-x} \\ y'' & e^{-x} \end{vmatrix}=y'e^{-x}+y''e^{-x}=e^{-x}(y'+y'');$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2e^{2x} & y' \\ 4e^{2x} & y'' \end{vmatrix}=2e^{2x}y''-4e^{2x}y'=2e^{2x}(y''-2y');\ c_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\ c_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};$$

$$c_1=\frac{e^{-x}(y'+y'')}{6e^x}=\frac{e^{-2x}(y'+y'')}{6};$$

$$c_2=\frac{2e^{2x}(y''-2y')}{6e^x}=\frac{e^x(y''-2y')}{3}.$$

c_1 და c_2 პარამეტრების მნიშვნელობები შევიტანოთ წირთა ოჯახის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}=\frac{e^{-2x}(y'+y'')}{6}.e^{2x}+\frac{e^x(y''-2y')}{3}.e^{-x}=$$

$$=\frac{y'+y''}{6}+\frac{y''-2y'}{3}=\frac{3y''-3y'}{6}=\frac{y''-y'}{2}.$$

აქედან $y''-y'-2y=0$, რომელიც წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ წირთა ოჯახისათვის.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებას:

10.1. $y=\sin x-1+ce^{-\sin x}$, $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

10.2. $y=\frac{c^2-x^2}{2x}$, $x+y+x\frac{dy}{dx}=0$. 10.3. $y=x+ce^y$, $(x-y+1)y'=1$.

10.4. $y=cx^3$, $xy'-3y=0$. 10.5. $y=c_1x+\frac{c_2}{x}+c_3$, $y'''+\frac{3}{x}y''=0$.

10.6. $y=x(c-\ln|x|)$, $(x-y)\,dx+xdy=0$.

10.7. $2x+y-1=ce^{2y-x}$, $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$.

შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლებები წირთა მოცემული ოჯახისათვის:

10.8. $y=ax$. 10.9. $y^2=2px$. 10.10. $y=ae^{\frac{x}{a}}$. 10.11. $y=c_1(x-c_2)^2$.

10.12. $x^2+y^2=a^2$, 10.13. $y=ax+a^2$. 10.14. $\ln\frac{x}{y}=1+ax$.

10.15. $x^2+y^2=2ax$. 10.16. $y=e^{cx}$. 10.17. $y=\sin(x+c)$.

10.18. $\ln y=ax+by$. 10.19. $y=ax^3+bx^2+cx$. 10.20. $(x-a)^2+by^2=1$.

10.21. $y=x^2+2ax$. 10.22. $y=\frac{a}{x}$. 10.23. $x^2-y^2=2ax$. 10.24. $y^2+cx=x^3$.

§ 10.2 განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$$

განტოლებას ეწოდება განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ინტეგრალია

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_{2(y)}}{N_1(y)}dy=0.$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

1. იპოვეთ $yy'+x=0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი და ის კერძო ინტეგრალი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(1)=\sqrt{3}$ საწყის პირობას.

ამოხსნა. $y\frac{dy}{dx}+x=0$, $ydy+xdx=0$.

$$\int ydy+\int xdx=c,\quad \frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}=c,\quad x^2+y^2=c^2.$$

(c-ს ნებისმიერობის გამო 2c შევცვალეთ c^2-ით).

$x^2+y^2=c^2$ არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. ეს არის კონცენტრულ წრეწირთა ოჯახი, რომელთა ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია. თუ გავითვალისწინებთ საწყის $y(1)=\sqrt{3}$ პირობას, მივიღებთ:

$1+3=c^2$, $c^2=4$ ე.ი. საძიებელი კერძო ინტეგრალია $x^2+y^2=4$.

2. ვიპოვოთ $y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. $\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$, აქედან

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \operatorname{arctg}y+c=\arcsin x.$$

$\operatorname{arctg}y-\arcsin x=c$ არის ზოგადი ინტეგრალი.

3. ვიპოვოთ $y\ln^3y+y'\sqrt{x+1=0}$ განტოლების კერძო ამონახსნი შემდეგი საწყისი პირობით $y\left(-\dfrac{15}{16}\right)=e$.

ამოხსნა. $y\ln^3y+\dfrac{dy}{dx}\sqrt{x+1}=0\quad y\ln^3y=-\dfrac{dy}{dx}\sqrt{x+1}$,

$$\frac{dx}{\sqrt{x+1}}=-\frac{dy}{y\ln^3y},\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=-\int\frac{dy}{y\ln^3y},$$

$$2\sqrt{x+1}=\frac{\ln^{-2}y}{2}+c,\quad 2\sqrt{x+1}=\frac{1}{2\ln^2y}+c.$$

თუ გავითვალისწინებთ საწყის პირობას $y\left(-\dfrac{15}{16}\right)=e$, მივიღებთ:

$$2\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2\ln^2e}+c,\quad 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+c,\quad c=0.$$

საძიებელი კერძო ამონახსნი იქნება:

$$\ln y=\pm\frac{1}{2\sqrt[4]{x+1}},\quad y=e^{\pm\frac{1}{2\sqrt[4]{x+1}}}.$$

4. ვიპოვოთ $y'=e^{x+y}+e^{x-y}$ განტოლების კერძო ამონახსნი $y(0)=0$ საწყისი პირობით.

ამოხსნა. $\dfrac{dy}{dx}=e^x(e^y+e^{-y})$; $\quad\dfrac{dy}{e^y+e^{-y}}=e^xdx$.

$$\int\frac{e^{ydy}}{e^{2y}+1}=\int e^xdx,\quad \operatorname{arctg}e^y=e^xc.$$

საწყისი პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{\pi}{4}=1+c, \quad c=\frac{\pi}{4}-1,$$

$$\mathrm{arctg}e^{y}=e^{x}+\frac{\pi}{4}-1, \quad e^{y}=\mathrm{tg}\left(e^{x}+\frac{\pi}{4}-1\right).$$

ამრიგად, $y=\ln\mathrm{tg}\left(e^{x}+\frac{\pi}{4}-1\right)$ საძიებელი კერძო ამონახსნია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები და სადაც მითითებულია, იპოვეთ ის კერძო ინტეგრალები, რომლებიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებენ:

10.25. $y'=3x^2-2x+1$; $x=1$, $y=2$. 10.26. $xy'-y=0$; $x=\frac{1}{2}$, $y=2$.

10.27. $y'=y$; $x=-2$, $y=2$. 10.28. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$

10.29. $(1+y^2)dx+xydy=0$. 10.30. $xyy'=1-x^2$. 10.31. $y'\mathrm{tg}x=y$.

10.32. $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$. 10.33. $y'+\frac{x\sin x}{y\cos y}=0$.

10.34. $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$. 10.35. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$.

10.36. $yy'=\frac{1-2x}{y}$. 10.37. $xy'+y=y^2$. 10.38. $y'=10^{x+y}$.

10.39. $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$. 10.40. $y'\sin x=y\ln y$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$.

10.41. $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})dy=0$. 10.42. $xy'+2y=xyy'$. 10.43. $y'=(x-y)^2+1$.

10.44. $y'=\sin(x-y)$. 10.45. $y'=(8x+2y+1)^2$. 10.46. $(1+e^x)yy'=e^x$, $x=1$, $y=1$.

10.47. $y'=(2y+1)\mathrm{ctg}x$; $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{1}{2}$. 10. 48. $\ln\cos y\,dx+x\,\mathrm{tg}y\,dy=0$.

10.49. $3e^x\mathrm{tg}y\,dx+(1+e^x)\sec^2y\,dy=0$; $y(0)=\frac{\pi}{4}$.

10.50. $e^{1+x^2}\mathrm{tg}y\,dx-\frac{e^{2x}}{x-1}dy=0$; $y(1)=\frac{\pi}{2}$.

10.51. $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dx+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{y}\right)dy=0$.

10.52. $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1+\sin y}}+y'=0$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

§10.3. ერთგვაროვანი განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი დაყვანა შეიძლება $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ან $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ სახემდე, სადაც $M(x,y)$ და $N(x,y)$ ერთი და იგივე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია, ე.ი. არსებობს ისეთი $k\in Z$, (Z მთელ რიცხვთა სიმრავლეა), რომ $M(tx,ty)=t^kM(x,y)$ და $N(tx,ty)=t^kN(x,y)$ ყოველი $t\neq0$-თვის

$\frac{y}{x} = u$ ჩასმის გამოყენებით I რიგის ერთგვაროვანი განტოლება დაიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებამდე.

თუ განტოლებას აქვს სახე:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{10.4}$$

და $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$ მაშინ იგი დაიყვანება ერთგვაროვან განტოლებამდე ცვლადთა გარდაქმნით: $x=u+m$, $y=v+n$ სადაც m და n იძებნება

$$\begin{cases} a_1m + b_1n + c_1 = 0 \\ a_2m + b_2n + c_2 = 0 \end{cases}$$

სისტემიდან.

რადგან ამ შემთხვევაში $dx=du$, $dy=dv$, ამიტომ (10.4) დაიყვანება ერთგვაროვან განტოლებაზე $v(u)$ ფუნქციის მიმართ:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1m + b_1n + c_1}{a_2u + b_2v + a_2m + b_2n + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{v}{u}}{a_2 + b_2\frac{v}{u}}\right) = \varphi\left(\frac{v}{u}\right).$$

თუ (10.4)-ში $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$ და შესაბამისად $a_2x+b_2y=\lambda(a_1x+b_1y)$, მაშინ (10.4) მიიღებს სახეს:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y + c_2)}\right) = \varphi(a_1x + b_1y) \tag{10.5}$$

$u(x)=a_1x+b_1y$ ჩასმით (10.5) დაიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებაზე.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

1. ამოხსენით განტოლება

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$$

ამოხსნა. დავუშვათ $\frac{y}{x} = u$, ანუ y=ux, მაშინ $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ და განტოლება მიიღებს სახეს:

$$u + x\frac{du}{dx} = u \cdot \ln u.$$

მოეახდინოთ ცვლადთა განცალება:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln c,\ \ \ln u - 1 = cx,\ \ \ln u = cx + 1,\ \ \ln\frac{y}{x} = cx + 1.$$

მივიღეთ მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

2. ვიპოვოთ $(xy' - y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x$ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას y(1)=0.

ამოხსნა. $\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x$, $\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 1$.

ვთქვათ, $\frac{y}{x} = u$, y=ux, y′=u+xu′, მაშინ გვექნება:

$(u + xu' - u)\operatorname{arctg}u = 1$, $xu'\operatorname{arctg}u = 1$, $\operatorname{arctg}u \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$\operatorname{arctg}u\,du = \frac{dx}{x}$, $\int \operatorname{arctg}u\,du = \int \frac{1}{x}dx$, $u.\operatorname{arctg}u - \int \frac{u\,du}{1 + u^2} = \ln|x| + \ln c$,

$u.\operatorname{arctg}u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln|x| + \ln c$, $u.\operatorname{arctg}u = \ln\sqrt{1 + u^2}\,|x|\,c$,

$$\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\,|x|\,c\right).$$

რადგან y(1)=0, მივიღებთ: 0=lnc, აქედან c=1, ამიტომ

$$\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების კერძო ინტეგრალი.

3. ამოვხსნათ განტოლება (2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0.

ამოხსნა. განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y'=-\frac{2x+y+1}{x+2y-1}.$$

$\frac{1}{-2}\neq\frac{2}{-1}$, ამიტომ ამოვხსნათ სისტემა $\begin{cases}2m+n+1=0\\ m+2n-1=0\end{cases}$

ამ სისტემიდან m=-1; n=1. მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა: x=u-1, y=v+1; dx=du, dy=dv. განტოლება გადაიწერება ასე:

$$\frac{dv}{du}=-\frac{2u+v}{u+2v}=-\frac{2+\frac{v}{u}}{1+2\frac{v}{u}}.$$

მოვახდინოთ ჩასმა: $\frac{v}{u}=t$, ანუ $v=ut$. $\frac{dv}{du}=t+u\cdot\frac{dt}{du}$, ჩავსვათ განტოლებაში:

$$t+u\cdot\frac{dt}{du}=-\frac{2+t}{1+2t}.$$

მოვახდინოთ ცვლადთა განაცალება:

$$\frac{2t+1}{-2(t^2+t+1)}dt=\frac{du}{u}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|t^2+t+1\right|=\ln|u|+\ln c,\quad u\cdot\sqrt{t^2+t+1}=c.$$

$u\cdot\sqrt{\frac{v^2}{u^2}+\frac{v}{u}+1}=c$, ანუ $u^2+uv+v^2=c^2$..

დავუბრუნდეთ x და y ცვლადებს (u=x+1; v=y−1), მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ: $x^2+y^2+xy+x-y=c_1$, სადაც $c_1=c^2-1$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი სამუშაოსათვის

10.53. $(y-x)ydx+x^2dy=0$.

10.54. $(x-y)dx+xdy=0$.

10.55. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$.

10.56. $y^2dx+(x^2-xy)dy=0$.

10.57. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$.

10.58. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$.

10.59. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$ 10.60. $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$.   10.61. $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$.

10.62. $y'=\frac{x-y}{x+y}$.   10.63. $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0 \quad y(2)=1$.

10.64. $xydy-(x^2+y^2)dx=0, \quad y(-1)=0$.

10.65. $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}; \quad y(-1)=1$. 10.66. $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0 \quad y(1)=1$.

10.67. $xy'-y=(x+y)\cdot\ln\frac{x+y}{x}$ 10.68. $3y\sin\frac{3x}{y}dx+\left[y-3x\sin\frac{3x}{y}\right]dy=0$.

10.69. $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0$.

10.70. $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0$.

10.71 $(x-y+4)dy+(x+y-2)dx=0$.

§10.4. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

დიფერენციალურ განტოლებას, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ წარმოადგენენ x-ის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს, ეწოდება **პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება**. მისი ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[c+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right]. \tag{10.6}$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

1. ამოხსენით $y'-ytgx=\cos x$ განტოლება.

ამოხსნა (10.6) ფორმულის თანახმად:

$$y=e^{\int tgxdx}\left[c+\int\cos x\cdot e^{-\int tgxdx}\right]=e^{-\ln|\cos x|}\left(c+\int\cos x\cdot e^{\ln|\cos x|}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\left(c+\int\cos^2 xdx\right)=\frac{1}{\cos x}\left(c+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right).$$

2. ამოეხსნათ $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$ დიფერენციალური განტოლება საწყისი პირობით $y(1)=1$.

ამოხსნა. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$. $\frac{dx}{dy}=2\ln y+1-\frac{x}{y}$;

$$x'+\frac{1}{y}x=2\ln y+1.$$

მიღებული განტოლება არის წრფივი x და $\frac{dx}{dy}$-ის მიმართ, ამიტომ(10.6)-დან

$$x=e^{-\int P(y)dy}\left(c+\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy\right)=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left(c+\int(2\ln y+1)e^{\int\frac{1}{y}dy}dy\right)=$$

$$=e^{-\ln y}\left(c+\int(2\ln y+1)ydy\right)=\frac{1}{y}\left(c+2\int y\ln ydy+\frac{y^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{y}\left(c+y^2\ln y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)=\frac{1}{y}c+y\ln y,$$

$x=\frac{c}{y}+y\ln y$ არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

საწყისი პირობის მიხედვით: $1=\frac{c}{1}+0$, c=1, ამიტომ $x=\frac{1}{y}+y\ln y$ აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი სამუშაოსათვის

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

10.72. $y'+2y=4x$. 10. 73. $y'+2xy=xe^{-x^2}$. 10.74. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$.

10.75. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$. 10.76. $y'+y=\cos x$. 10.77. $2ydx+(y^2-6x)dy=0$.

10.78. $y'=\frac{1}{2x-y^2}$. 10.79. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=x^3$. 10.80. $(1+y^2)dx=(\mathrm{arctg}y-x)dy$.

10.81. $xy'+y=x+1$; $y(2)=3$. 10.82. $y'+\frac{y}{x}=2\ln x+1$; $y(1)=0$.

10.83. $y'-y\,\mathrm{tg}x=\frac{1}{\cos x}$; $y(0)=0$. 10.84. $y'+y\cos x=\sin x\cos x$; $y(0)=1$.

10.85. $(1-x^2)y'+xy=1$; $y(0)=1$. 10.86. $(1+x^2)y'+y=\mathrm{arctg}x$.

10.87. $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 \ln \mathrm{tg} \frac{x}{2}$. 10.88. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$; $y(e) = \frac{e^2}{2}$.

10.89. $y' \sin x - y \cos x = 1$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

§10.5. ბერნულის განტოლება

ბერნულის განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \text{ სადაც } n \neq 0, n \neq 1.$$

$z = y^{1-n}$ ჩასმით ეს განტოლება დაიყვანება პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებამდე.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. ამოხსენით $y' - y\,\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\sin x} y^3$ განტოლება.

ამოხსნა. მოცემული განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$y^{-3} \cdot y' - y^{-2} \mathrm{ctg}x = \frac{1}{\sin x}.$$

აღვნიშნოთ $y^{-2} = z$, მაშინ $-2y^{-3} \cdot y' = z'$ და გვექნება:

$$-\frac{1}{2} z' - \mathrm{ctg}x \cdot z = \frac{1}{\sin x}; \quad z' + 2\mathrm{ctg}x \cdot z = -\frac{2}{\sin x}.$$

ეს პირველი რიგის წრფივი განტოლებაა z-ის მიმართ. (10.6)-დან

$$z = e^{-\int 2\mathrm{ctg}x dx}\left(c + \int \frac{-2}{\sin x} \cdot e^{\int 2\mathrm{ctg}x dx} dx\right) = \frac{1}{\sin^2 x}\left(c - 2\int \sin x dx\right) = \frac{c + 2\cos x}{\sin^2 x}.$$

თუ დავუბრუნდებით ისევ y ფუნქციას, მივიღებთ:

$$y = \frac{\sin x}{\sqrt{c + 2\cos x}}.$$

2. ვიპოვოთ $y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y}$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{x \cos y}{2} + \frac{1}{2} \sin 2y \cdot x^{-1}$;

$$x \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{\cos y}{2} x^2 + \frac{1}{2} \sin 2y.$$

ეს განტოლება არის ბერნულის განტოლება $x=x(y)$ ფუნქციის მიმართ. გამოვიყენოთ ჩასმა $z=x^2$,

$$\frac{dz}{dy}=2x\frac{dx}{dy},\quad x\frac{dx}{dy}=\frac{z'}{2}.$$

მივიღებთ: $\dfrac{z'}{2}=\dfrac{\cos y}{2}z+\dfrac{1}{2}\sin 2y$, $z'=\cos yz+\sin 2y$.

ეს არის I რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება z-ის მიმართ. (10.6)-დან

$$z=e^{\int\cos ydy}\left(c+\int\sin 2ye^{-\int\cos ydy}dy\right)=e^{\sin y}\left(c+\int\sin 2ye^{-\sin y}dy\right)$$

$\int\sin 2ye^{-\sin y}dy$ ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ჩასმა: $t=\sin y$. გვექნება:

$$\int\sin 2ye^{-\sin y}dy=\int 2\sin y\cos ye^{-\sin y}dy=2\int\sin ye^{-\sin y}d(\sin y)=$$

$$=2\int te^{-t}dt=-2\left(te^{-t}-\int e^{-t}dt\right)=-2(te^{-t}+e^{-t})=-2(\sin ye^{-\sin y}+e^{-\sin y}).$$

ამრიგად,

$$z=e^{\sin y}(c-2\sin ye^{-\sin y}-2e^{-\sin y})=ce^{\sin y}-2\sin y-2.$$

საბოლოოდ,

$$x^2=ce^{\sin y}-2\sin y-2$$

არის მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი სამუშაოსათვის

10.90. $y'+xy=xy^3$. 10.91. $y'-\dfrac{3}{x}y=-x^3y^2$. 10.92. $y'-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$.

10.93. $ny^{n-1}\dfrac{dy}{dx}+y^n=x$. 10.94. $y'-\dfrac{\sin x}{3}y=-y^4\sin x$.

10.95. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\ln x}{x}y^2$. 10.96. $(1-x^2)y'-xy=xy^2$; $y(0)=0,5$.

10.97. $y'-\dfrac{x}{2(x^2-1)}y=\dfrac{x}{2y}$; $y(0)=1$. 10.98. $3y'=(1-3y^3)y\sin x$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

10.99. $y'+y=e^{x/2}\sqrt{y}$; $y(0)=\dfrac{9}{4}$. 10.100. $y'+\dfrac{3x^2y}{x^3+1}=y^2(x^3+1)\sin x$; $y(0)=1$.

§10.6. განტოლება სრულ დიფერენციალებში

პირველი რიგის

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

განტოლებას ეწოდება **განტოლება სრულ დიფერენციალებში,** თუ მისი მარცხენა მხარე რაიმე u(x,y) ფუნქციის სრული დიფერენციალია:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du,$$

ე.ი.

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (10.7)$$

ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (10.8)$$

ამ შემთხვევაში u(x,y) არის მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. u(x,y) ფუნქცია შეიძლება მოიძებნოს შემდეგი გზით: $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$ ტოლობა ვაინტეგროთ x ცვლადით ფიქსირებული y-თვის. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი მუდმივი შეიძლება დამოკიდებული იყოს y-ზე. გვექნება:

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y). \qquad (10.9)$$

შემდეგ

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+\varphi'(y)=Q(x,y) \qquad (10.10)$$

ტოლობიდან ნაპოვნ φ(y) ფუნქციას შევიტანთ რა (10.9)-ში მივიღებთ u(x,y) ფუნქციას.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. ამოხსენით განტოლება:

$$(2x+y)dx+(x+2y)dy=0.$$

ამოხსნა. შევამოწმოთ (10.8) პირობა:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x+y)=1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)=1.$$

ე.ი. მოცემული განტოლება არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში. $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y$. ვაინტეგროთ ეს ტოლობა x-ით:

$$u(x,y)=\int(2x+y)dx+\varphi(y)=x^2+xy+\varphi(y)$$

აქედან $\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y)$. მაგრამ $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = x + 2y$. გვაქვს:

$$x + \varphi'(y) = x + 2y; \quad \varphi'(y) = 2y; \quad \varphi(y) = y^2 + c_1 .$$

მაშასადამე, $u(x,y)=x^2+xy+y^2$, სადაც c_1 ნულის ტოლადაა მიღებული. მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს ექნება სახე:

$$x^2+xy+y^2=c$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება: $yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy=0$.

ამოხსნა. $P(x,y)=y\cdot x^{y-1}$, $Q(x,y)=x^y\cdot\ln x$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}.$$

ამრიგად, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ამიტომ მოცემული განტოლება არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში.

$$u(x, y) = \int yx^{y-1}dx + \varphi(y) = y\frac{x^y}{y} + \varphi(y) = x^y + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x + \varphi'(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = x^y \ln x.$$

ამიტომ

$$x^y \ln x + \varphi'(y) = x^y \ln x, \quad \varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = c, \quad u(x, y) = x^y + c.$$

$x^y=c$ არის მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი სამუშაოსათვის

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

10.101. $(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0$. 10.102. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$.

10.103. $2x\cos^2 dy+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$. 10.104. $(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2y dy=0$.

10.105. $\frac{x}{(x+y)^2}dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2}dy = 0$.

10.106. $\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(1 + \frac{1}{x}\right)dy = 0$; $x=1$, $y=1$.

10.107. $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$; $x=0$, $y=2$.

10.108. $[\sin y+(1-y)\cos x]dx+[(1+x)\cos y-\sin x]dy=0$

10.109. $(y + x\ln y)dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0$.

10.110. $(e^{x+y}+3x^2)dx+(e^{x-y}+4y^3)dy=0$; $y(0)=0$.

10.111. $(\arcsin x+2xy)dx+(x^2+1+\operatorname{arctg} y)dy=0$.

10.112. $(\ln y-5y^2\sin 5x)dx+\left(\dfrac{x}{y}+2y\cos 5x\right)dy=0$; $y(0)=e$.

10.113. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-y\right)dx+\left(e^y-x-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$.

10.114. $(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0$.

§10.7. პირველი რიგის არაწრფივი განტოლებები

თუ $F(x,y,y')=0$ დიფერენციალური განტოლება არ არის პირველი ხარისხის y' წარმოებულის მიმართ, მაშინ ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია ასეთი განტოლების ინტეგრება.

1. განტოლება ცხადი სახით არ შეიცავს y ფუნქციას, ე.ი. $F(x, y')=0$.

ა) თუ ეს განტოლება ამოიხსნება y'-ის მიმართ, მივიღებთ $y'=\varphi(x)$, საიდანაც $y=\int\varphi(x)dx+c$.

ბ) თუ განტოლება ამოიხსნება x-ის მიმართ, მაშინ $x=f(y')$. ეს განტოლება შეიძლება ვაინტეგროთ პარამეტრის საშუალებით. თუ დავუშვებთ რომ $y'=P$ და P-ს მივიღებთ პარამეტრად მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს: $x=f(P)$. აქედან $dx=f'(P)dP$ და რადგანაც $dy=y'dx=Pdx$, შესაბამისად $dy=P\cdot f'(P)dP$. აქედან $y=\int P\cdot f'(P)dP+c$.

ამრიგად, $x=f(y')$ განტოლება ჩაიწერება პარამეტრული სახით:

$$x=f(P);\ y=\int P\cdot f'(P)dP+c$$

2. მოცემული განტოლება ცხადად არ შეიცავს x ცვლადს, ანუ $F(y,y')=0$.

ა) თუ ეს განტოლება ამოიხსნება y'-ის მიმართ, ე.ი. $y'=\varphi(y)$, მაშინ $x=\int\dfrac{dy}{\varphi(y)}+c$ იქნება ზოგადი ამონახსნი.

ბ) თუ განტოლება ამოიხსნება y-ის მიმართ, მაშინ $y=f(y')$. აქაც დავუშვათ $y'=P$ და განტოლება მიიღებს სახეს $y=f(P)$. აქედან

$$dy=f'(P)dP,$$

ამასთან $dy=pdx$. ამრიგად, $Pdx=f'(P)dP$, საიდანაც

$dx=\dfrac{f'(P)dP}{P}$ და x –ს ვიპოვით ინტეგრებით:

$$x=\int\frac{f'(P)dP}{P}+c.$$

ამრიგად, $y=f(y')$ განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(P)dP}{P} + c \\ y = f(P) \end{cases}$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

1. ამოხსენით განტოლება: $x^2=x^3+y'^2$.

ამოხსნა. $y'^2=x^2-x^3$,

$$y' = \pm\sqrt{x^2-x^3},\ \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{x^2-x^3};\quad dy = \pm\sqrt{x^2-x^3}dx;$$

$$y = \pm\int\sqrt{x^2-x^3}dx = \pm\int x\sqrt{1-x}dx = \pm\int(1-x-1)\sqrt{1-x}dx =$$

$$= \pm\int(1-x)^{\frac{3}{2}}dx \mp \int\sqrt{1-x}dx = \pm\frac{2(1-x)^{\frac{5}{2}}}{5} \mp \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + c,$$

$$y = \pm\frac{2}{5}\sqrt{(1-x)^5} \mp \frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3} + c.$$

აქედან $15y + c = \pm\left(6\sqrt{(1-x)^5} - 10\sqrt{(1-x)^3}\right)$ არის მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

2. ამოხსენით განტოლება: $x=y'\sin y'+\cos y'$.

ამოხსნა. დავუშვათ $y'=P$, მაშინ $x=P\sin P+\cos P$.

$dx=(\sin P+P\cos P-\sin P)dP=P\cos PdP$. $dy=y'dx=Pdx=P^2\cos PdP$;

აქედან

$$y = \int P^2\cos PdP = (P^2-2)\sin P + 2P\cos P + c$$

ამრიგად, ზოგად ამონახსნს პარამეტრული სახით, აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} x=P\sin P+\cos P \\ y=(P^2-2)\sin P+2P\cos P+c \end{cases}$$

1. ამოხსენით განტოლება $y' = \mathrm{arctg}\frac{y}{y'^2}$.

ამოხსნა. მოცემული განტოლება ასე გადავწეროთ: $y=y'^2\cdot \mathrm{tg}y'$.

დავუშვათ $y'=P$, მაშინ $y=P^2\mathrm{tg}P$.

$$dy = \left(2P\mathrm{tg}P + P^2\cdot\frac{1}{\cos^2 p}\right)dP$$

ამასთან $dy=y'dx=Pdx$.

გვექნება:

$$Pdx = \left(2P\mathrm{tg}P + P^2\cdot\frac{1}{\cos^2 P}\right)dP,\ dx = \left(2\mathrm{tg}P + \frac{P}{\cos^2 P}\right)dP.$$

$$x = \int\left(2\mathrm{tg}P + \frac{P}{\cos^2 P}\right)dP = P\mathrm{tg}P - \ln\cos P + c\,.$$

მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

tgP

$$\begin{cases} x=P\cancel{\sin}P-\ln\cos P+c \\ y=P^2\mathrm{tg}P \end{cases}$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

10.115. $xy' = \sqrt{1+y'^2}$. 10.116. $x = 2y' - \frac{1}{y'^2}$. 10.117. $x=ay'+by'^2$.

10.118. $x=\sin y'+\ln y'$. 10.119. $e^{y'}+y'=x$. 10.120. $x=y'^3+y'$.

10.121. $y'(x-\ln y')=1$. 10.122. $x(y'^2-1)=2y'$. 10123. $e^y(y'+1)=1$.

10.124. $y'^2 = \frac{1-y^2}{y^4}$. 10.125. $y=y'^2+y'^3$. 10.126. $y=y'^2+2\ln y'$.

10.127. $y=y'\ln y'$. 10.128. $y=e^{y'}\cdot y'^2$. 10.129. $\arcsin\frac{x}{y'} = y'$.

10.130. $y=e^{y'}(y'-1)$. 10.131. $x=2(\ln y'-y')$. 10.132. $y(1+y'^2)^{1/2} = y'$.

10.133. $x=2y'+3y'^2$. 10.134. $x=y'(1+e^{y'})$. 10.135. $x = e^{2y'}(2y'^2 - 2y' + 1)$.

10.136. $y=\ln(y'^2+1)$. 10.137. $y = y'\cdot\sqrt{1+y'^2}$. 10.138. $x=y'\cos y'$.

§10.8. ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებები

1. **ლაგრანჟის განტოლება.**

ლაგრანჟის განტოლებას აქვს სახე:

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'),$$

სადაც $\varphi(y')$ და $\psi(y')$ წარმოადგენენ y'-ის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს, რომელთაგან $\varphi(y')\neq y'$.

დავუშვათ, $y'=P$, მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y=x\varphi(P)+\psi(P).$$

ვიპოვოთ dy ამ ტოლობიდან და გავითვალისწინოთ, რომ $dy=Pdx$, მივიღებთ:

$$Pdx=\varphi(P)dx+x\varphi'(P)dP+\psi'(P)dP.$$

მიღებული განტოლება არის $x=x(P)$ ფუნქციის მიმართ წრფივი განტოლება, რომლის ინტეგრებაც შესაძლებელია. თუ ამ განტოლების ამონახსნია

$$x=F(P,c)$$

მაშინ ლანგრაჟის განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ასე:

$$\begin{cases} x = F(P,c) \\ y = x\varphi(P) + \psi(P) = F(P,c)\varphi(P) + \psi(P) \end{cases}$$

2. **კლეროს განტოლება.**

ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = xy' + \varphi(y').$$

ცხადია, ეს განტოლება არის ლანგრაჟის განტოლების კერძო შემთხვევა. თუ ზემო აღნიშნული მეთოდით ვაინტეგრებთ, მივიღებთ კლეროს განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$y = cx + \varphi(c),$$

რომლიც წარმოადგენს წრფეთა ოჯახს სიბრტყეზე.

გარდა ამისა, კლეროს განტოლებას აქვს აგრეთვე ამონახსნი, რომელიც მიიღება

$$\begin{cases} x + \varphi'(P) = 0 \\ y = Px + \varphi(P) \end{cases}$$

სისტემიდან P-ს გამორიცხვით.

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. ამოხსენით განტოლება $y = xy'^2 + y'^2$.

ამოხსნა. ეს ლაგრანჟის განტოლებაა. დავუშვათ, $y' = P$, მაშინ

$$y = xP^2 + P^2$$

$dy = Pdx = P^2dx + 2PxdP + 2PdP;\ (1-P)dx = 2(x+1)dP,\ \dfrac{dx}{x+1} = \dfrac{2dP}{1-P},$

ინტეგრებით მივიღებთ: $\ln|x+1| = -2\ln|1-P| + \ln c;\ x + 1 = \dfrac{c}{(P-1)^2}.$

ამრიგად, მივიღეთ:

$$\begin{cases} x + 1 = \dfrac{c}{(P-1)^2}, \\ y = P^2(x+1), \end{cases} \text{ საიდანაც } \begin{cases} x + 1 = \dfrac{c}{(P-1)^2}, \\ y = \dfrac{cP^2}{(P-1)^2}. \end{cases}$$

თუ გამოვრიცხავთ P პარამეტრს, მივიღებთ: $\left(\sqrt{y} + \sqrt{x+1}\right)^2 = c$.

მაგალითი 2. ამოხსენით განტოლება: $y = xy' - e^{y'}$.

ამოხსნა. ეს კლეროს განტოლებაა. დავუშვათ $y' = P$, მაშინ $y = xP - e^P$. $dy = Pdx = Pdx + xdP - e^P dP$;

$xdP - e^P dP = 0;\ (x - e^P)dP = 0,$

ე.ი. ან $x = e^P$, ან $dP = 0$. თუ $dP = 0$., მაშინ $P = c$.

თუ ჩავსვამთ P-ს მნიშვნელობას $y = Px - e^P$ ტოლობაში მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$y = cx - e^c.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $x=e^P$, მაშინ

$$y=Pe^P-e^P=(P-1)e^P$$

და მიეიღებთ, კერძო ამონახსნს საწყისი განტოლებისა:

$$\begin{cases} x = e^P, \\ y = (P-1)e^P. \end{cases}$$

თუ გამოერიცხვათ P პარამეტრს, მივიღებთ მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნს ცხადი სახით: $y=x(\ln x-1)$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ამოხსენით ლაგრანჟის და კლეროს განტოლებები:

10.139. $y=2xy'-y'^2$. 10.140. $y=x(1+y')+y'^2$. 10.141. $y=2xy'+\dfrac{1}{y'}$.

10.142. $y=2xy'+\sin y'$. 10.143. $2y(y'+2)=xy'^2$. 10.144. $y=xy'+y'^2$.

10.145. $y=xy'+\dfrac{1}{y'}$. 10.146. $y=xy'-a\sqrt{1+y'^2}$. 10.147. $y=xy'+\dfrac{1}{2y'^2}$.

10.148. $y=xy'+y'-y'^2$. 10.149. $y=xy'+y'+e^{y'}$. 10.150. $y=x\cdot\dfrac{1+y'^2}{2y'}$.

10.151. $y=xy'^2+y'^3$. 10.152. $y=\dfrac{1}{2}(xy'+y'\ln y')$.

10.153. $y'^3=3(xy'-y)$. 10.154. $y+xy'=4\sqrt{y'}$.

§10.9. მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

1. **ერთგვაროვანი განტოლება.** n-ური რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \quad (10.11)$$

სადაც $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ არის x-ის მოცემული უწყვეტი ფუნქციები რაიმე შუალედში, ხოლო y უცნობი ფუნქციაა.

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)=0$, განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუკი $f(x)\neq 0$, მაშინ განტოლება არაერთგვაროვანია.

$y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ ფუნქციათა სისტემის **ვრონსკის დეტერმინანტი** (ვრონსკიანი) ეწოდება დეტერმინანტს:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ ფუნქციებს ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული** რაიმე შუალედში, თუ არსებობს ისეთი $c_1, c_2, \ldots, c_n$ მუდმიეები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ყოველი x-თვის აღნიშნულ შუალედში მართებულია ტოლობა:

$$c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n=0 .$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში ფუნქციები **წრფივად დამოუკიდებელია**.

თუ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია (a,b) შუალედში, მაშინ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი ნულის ტოლია ამ შუალედის ყოველ წერტილში. თუ რომელიმე $x_0\in(a,b)$ წერტილში მაინც $W(x_0)\neq0$, მაშინ მოცემული ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია ამ შუალედში.

წრფივი ერთგვაროვანი

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0 \qquad (10.12)$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n,$$

სადაც $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (10.12) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია (ამონახსნთა ფუნდამენტალური სისტემა), ხოლო $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ნებისმიერი მუდმივები.

კერძოდ, მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი

$$y''+a_1(x)y'+a_1(x)y'=0 \qquad (10.13)$$

განტოლების ორი y_1 და y_2 ამონახსნი იქნება **წრფივად დამოკიდებული** რაიმე შუალედში, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი λ რიცხვი, რომ $\frac{y_1}{y_2}=\lambda$, ანუ $y_1=\lambda y_2$. თუკი ფარდობა $\frac{y_1}{y_2}\neq\text{const}$, მაშინ აღნიშნული ფუნქციები **წრფივად დამოუკიდებელია**.

თუ ცნობილია (10.13) განტოლების კერძო ამონახსნი y_1, მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება $y=c_1y+c_2y_2$, სადაც

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx .$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

1. გამოიკვლიეთ წრფივად დამოკიდებულია თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$y_1=1,\ y_2=x,\ y_3=x^2,\ \ldots\ y_{n+1}=x^n.$$

ამოხსნა. $c_1+c_2x+c_3x^2+\ldots+c_{n+1}x^n=0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს n-ზე მეტი ფესვი, თუ $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ე.ი. განხილულ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია ნებისმიერ შუალედში.

2. ვაჩვენოთ, რომ x, cosx, sinx ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

ამოხსნა.

$$W(x)=\begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}=x,$$

ე.ი. მოცემულ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

3. ვიპოვოთ $x^2y''+xy'-y=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ ცნობილია მისი კერძო ამონახსნი $y_1=x$.

ამოხსნა. დავუშვათ $y=zx$. $y'=z'x+z$, $y''=z''x+2z'$. განტოლება მიიღებს სახეს: $xz''+3z'=0$.

თუ დავუშვებთ $z'=P$, $z''=P'$, მივიღებთ: $xP'+3P=0$.

საიდანაც $P=\dfrac{c_2}{x^3}$, ამრიგად $z=-\dfrac{c_2}{2x^2}+c_1$;

მაშასადამე,

$$y=x\left(-\frac{c_2}{2x^2}+c_1\right)=c_1x-\frac{c_2}{2x}.$$

ამ ზოგადი ამონახსნიდან ჩანს, რომ მეორე კერძო ამონახსნი არის $y_2=-\dfrac{1}{2x}$.

2. არაერთგვაროვანი განტოლება.

(10.11) წრფივი არაეთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება ფორმულით:

$$y=y_0+\overline{y},$$

სადაც y_0 არის შესაბამისი ერთგვაროვანი (10.12) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო $\overline{y}$ – მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

თუ ცნობილია ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემა y_1, y_2, …, y_n, მაშინ შესაბამისი არაერთგვაროეანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+\ldots+c_n(x)\,y_n$$

ფორმულით, სადაც $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$ ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგ განტოლებათა სისტემიდან (ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის ანუ ლაგრანჟის მეთოდი):

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2+\cdots+c_n'(x)y_n=0 \\ c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'+\cdots+c_n'(x)y_n'=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}+c_2'(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x) \end{cases}$$

4. ვიპოეოთ $x^2y''+xy'-y=1$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსნი $y_1=x$.

ამოხსნა. წინა, №3 მაგალითში მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მეორე კერძო ამონახსნი მივიღეთ $y_2 = -\frac{1}{2x}$.

ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $y_0 = c_1 x + c_2\left(-\frac{1}{2x}\right)$.

მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$y = c_1(x)\cdot x + c_2(x)\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right).$$

$c_1(x)$ და $c_2(x)$–ის მოსაძებნად შევადგინოთ სისტემა:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot x + c_2'(x)\cdot\left(-\dfrac{1}{2x}\right) = 0 \\ c_1'(x)\cdot x' + c_2'(x)\cdot\left(-\dfrac{1}{2x}\right)' = 1 \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} c_1'(x)\cdot x + c_2'(x)\cdot\left(-\dfrac{1}{2x}\right) = 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)\cdot\dfrac{1}{2x^2} = 1 \end{cases}$$

აქედან

$$c_1'(x) = \frac{1}{2} \text{ და } c_2'(x) = x^2.$$

ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

$$c_1(x) = \frac{1}{2}x + c_1,\ c_2(x) = \frac{x^3}{3} + c_2$$

ე.ი. $y = \left(\frac{1}{2}x + c_1\right)\cdot x + \left(\frac{x^3}{3} + c_2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)$,

ანუ $y = c_1 x - \frac{c_2}{2x} + \frac{1}{3}x^2$

სავარჯიშოები დამოკიდებელი სამუშაოსათვის

გამოიკვლიეთ წრფიეად დამოკიდებელია თუ არა შემდეგ ფუნქციათა სისტემები:

10.155. $y_1=x$, $y_2=x+1$.
10.156. $y_1=e^{ax}\sin bx$, $y_2=e^{ax}\cos bx$.
10.157. $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$, $y_3=e^{3x}$.
10.158. $y_1=\sin^2 x$, $y_2=\cos^2 x$, $y^3=1$.
10.159. $y_1=\sin 2x$, $y_2=\sin x\cos x$.
10.160. $y_1=x$, $y_2=2x$, $y_3=x^2$.
10.161. $y_1=e^x$, $y_2=e^{x+1}$.
10.162. $y_1=x$, $y_2=0$, $y_3=e^x$.
10.163. $y_1=1$, $y_2=\sin x$, $y_3=\cos 2x$.

შეადგინეთ წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, თუ ცნობილია მისი ფუნდამენტური სისტემა ამონახსნებისა:

10.164. $y_1=x$, $y_2=x^2$. 10.165. $y_1=1$, $y_2=\cos 2x$. 10.166. $y_1=\sin x$, $y_2=\cos 2x$. 10.167. $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$. 10.168. $y_1=1$, $y_2=e^x$, $y_3=x$. 10.169. $y_1=2x$, $y_2=x-2$, $y_3=e^x+1$. 10.170. $y_1=1$, $y_2=\sin x$, $y_3=\cos x$. 10.171. $y_1=e^{2x}$, $y_2=\sin x$, $y_3=\cos 2x$.

ამოხსენით განტოლებები, თუ ცნობილია მათი თითო კერძო ამონახსნი

10.172. $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$; $y_1=\frac{\sin x}{x}$. 10.173. $y''+\frac{4}{x}y'-\frac{4}{x^2}y=0$; $y_1=x$.

10.174. $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0$; $y_1=x$.

10.175. $y''+(\mathrm{tg}x-2\mathrm{ctg}x)y'+2\mathrm{ctg}^2x\cdot y=0$; $y_1=\sin x$.

10.176. $y''\sin^2 x-2y=0$; $y_1=\mathrm{ctg}x$. 10.177. $x\cdot(1-x^2)y''=2y$; $y_1=\frac{x}{1-x}$

10.178. აჩვენეთ, რომ $y_1(x)=e^x$ და $y_2(x)=x$ ქმნიან ამონახსნთა ფუნდამენტალურ სისტემას $(x-1)y''-xy'+y=0$ განტოლებისა და იპოვეთ $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

10.179. აჩვენეთ, რომ $y_1(x)=\cos x$ და $y_2(x)=x\cos x$ ქმნიან ამონახსნთა ფუნდამენტალურ სისტემას $\mathrm{ctg}x\cdot y''+2y'+(2\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)y=0$ განტოლებისა და იპოვეთ $\mathrm{ctg}x\cdot y''+2y'+(2\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)y=\cos^2 x$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

10.180. $(1+x^2)y''+2xy'-2y=4x^2+2$ განტოლებისათვის ცნობილია ერთი კერძო ამონახსნი $y=x^2$. იპოვეთ ამ განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს: $y|_{x=-1}=0$, $y'|_{x=-1}=0$.

§10.10. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

1. ერთგვაროვანი განტოლება.

ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{10.14}$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივებია. თუ y_1 და y_2 ფუნქციები (10.14) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია, მაშინ

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

არის ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. კერძო ამონახსნების მოსაძებნად წინასწარ უნდა ამოვხსნათ **მახასიათებელი** განტოლება

$$k^2+a_1k+a_2=0 \tag{10.15}$$

ადგილი აქვს სამ შემთხვევას:

I მახასიათებელ განტოლებას აქვს ნამდვილი და განსხვავებული ფესვები: $k_1\neq k_2$, მაშინ (10.14) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$$

II. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები: $k_1=k_2$, მაშინ (10.14)-ის ზოგადი ამონახსნია

$$y=(c_1+c_2x)e^{k_1x}.$$

III. მახასიათებელ განტოლებას აქვს კომპლექსური ფესვები $k_1=a+bi$, $k_2=a-bi$ მაშინ (10.14) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y=(c_1\cos bx+c_2\sin bx)e^{ax}$$

ტიპობრივი სავარჯიშოების ამოხსნა

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება $y''-7y'+12y=0$

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლებაა $k^2-7k+12=0$; $k_1=3$, $k_2=4$.

ზოგადი ამონახსნი იქნება $y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება $y''+4y'+4y=0$

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლებაა $k^2+4k+4=0$; $k_1=k_2=-2$.

ზოგადი ამონახსნი იქნება $y=(c_1+c_2x)e^{-2x}$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება $y''+4y=0$.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლებაა: $k^2+4=0$; $k=\pm 2i$.

ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{0\cdot x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

2. არაერთგვაროვანი განტოლება.

ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x).$$

მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y=y_0+\overline{y}$$

ფორმულით, სადაც y_0 არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო $\overline{y}$ – მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

კერძო ამონახსნი მოიძებნება მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით. ზოგ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი მოიძებნება განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით. ადგილი აქვს შემდეგ შემთხვევებს:

I. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვება ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=P_m(X)\cdot e^{ax}, \tag{10.16}$$

სადაც $P_m(x)$ არის m-ური ხარისხის მოცემული მრავალწევრი, ხოლო a მუდმივია. განიხილება ორი შემთხვევა:

ა) a არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი; მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $\overline{y}=Q_m(X)\cdot e^{ax}$ სახით, სადაც $Q_m(x)$ არის m-ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, მისი უცნობი კოეფიციენტები მოიძებნება განუსაზღვრელ კოეფიციენთა შედარების ხერხით.

ბ) a არის მახასიათებელი განტოლების ℓ ჯერადი ფესვი ($\ell=1$ ან $\ell=2$) მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$\overline{y}=x^{\ell}\cdot Q_m(x)\cdot e^{ax}$$

სახით.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება: $y'' - 3y' = 2 - 6x$.

ამოხსნა. $y = y_0 + \overline{y}$; $y'' - 3y' = 0$, k^2-$3k$=0; k_1=0 და k_2=3

$$y_0 = c_1 + c_2 e^{3x}$$

მოცემული განტოლებისათვის $P_m(x)$=2-6x, a=0. ე.ი. კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\overline{y} = (Ax+B)\cdot x; \quad \overline{y}' = 2Ax+B; \quad \overline{y}'' = 2A$$

შევიტანოთ $\overline{y}$, $\overline{y}'$ და $\overline{y}''$ მოცემულ განტოლებაში. მივიღებთ:

$$2A-6Ax-3B=2-6x.$$

კოეფიციენტთა შედარების წესის თანახმად:

$$\begin{cases} -6A = -6 \\ 2A - 3B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{ე.ი. } \overline{y} = x^2$$

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} + x^2$$

II. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა მხარეს აქვს სახე:

$$f(x)=e^{ax}(P_m(x)\cos bx+Q_n(x)\sin bx),$$

სადაც $P_m(x)$ და $Q_n(x)$ შესაბამისად m და n ხარისხის მოცემული მრავალწევრებია, ხოლო a და b – ნამდვილი რიცხვები. აღვნიშნოთ p=max(m,n). განიხილება ორი შემთხვევა:

ა) $a\pm bi$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\overline{y} = e^{ax}[M_p(x)\cos bx+N_p(x)\sin bx],$$

სადაც $M_p(x)$ და $N_p(x)$ უცნობკოეფიციენტებიანი p ხარისხის მრავალწევრებია.

ბ) $a\pm bi$ არის მახასიათებელი განტოლების ℓ ჯერადი ფესვი (მეორე რიგის განტოლებისათვის ℓ =1). მაშინ

$$\overline{y} = x^{\ell} e^{ax}[M_p(x)\cos bx+N_p(x)\sin bx],$$

მაგალითი 5. ამოვხსნათ განტოლება: $y'' + 9y = \cos 3x$

ამოხსნა. $y=y_0+\overline{y}$.

$y'' + 9y = 0$; $k^2+9=0$, $k=\pm 3i$. $y_0=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$

მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარეში a=0, b=3, ე.ი. $a\pm bi=\pm 3i$ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი. ამიტომ $\overline{y}$ უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\overline{y} = (A\cos 3x+B\sin 3x)\cdot x.$$

$$\overline{y}' = A\cos 3x+B\sin 3x-3Ax\sin 3x+3Bx\sin 3x.$$

$$\overline{y}'' = -3A\sin 3x+3B\cos 3x-3A\sin 3x-9Ax\cos 3x+3B\cos 3x-$$

$$-9Bx\sin 3x=-6A\sin 3x+6B\cos 3x-9Ax\cos 3x-9Bx\sin 3x.$$

შევიტანოთ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x-9Ax\cos 3x-Bx\sin 3x+9Ax\cos 3x+9Bx\sin 3x=\cos 3x.$$
$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x=\cos 3x.$$
$$\begin{cases}-6A=0\\ 6B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ B=\frac{1}{6}\end{cases}\quad \text{ე.ი.}\quad \bar{y}=\frac{1}{6}x\sin 3x$$

საბოლოოდ,

$$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{1}{6}x\sin 3x$$

მაგალითი 6. ამოვხსნათ განტოლება: $y''-4y'+4y=xe^{2x}$.

ამოხსნა. ამონახსნი ვეძებოთ სახით: $y=y_0+\bar{y}$.

შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$y''-4y'+4y=0,$$

ხოლო მახასიათებელი განტოლებაა: $k^2-4k+4=0$, $k_1=k_2=2$.

$y_0=(c_1+c_2x)e^{2x}$.

(10.16)-დან მოცემული განტოლებისათვის $P_m(x)=x$. $a=2$ წარმოადგენს მახასითებელი განტოლების ორჯერად ფესვს, ამიტომ $\bar{y}$ ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$\bar{y}=x^2(A+Bx)e^{2x}$.

$\bar{y}'=e^{2x}[2Ax+(2A+3B)x^2+2Bx^3]$

$\bar{y}''=e^{2x}[2A+(8A+6B)x+(4A+12B)x^2+4Bx^3]$.

შევიტანოთ $\bar{y}$, $\bar{y}'$ და $\bar{y}''$-ის მნიშვნელობები მოცემულ განტოლებაში. შევკვეცოთ ორივე მხარე e^{2x}-ზე და განვსაზღვროთ A და B კოეფიციენტები.

$2A+(8A+6B)x+(4A+12B)x^2+4Bx^3-4[2Ax+(2A+3B)x^2+Bx^2]+ +4(Ax^2+Bx^3)\equiv x$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$2A+6Bx\equiv x.$$

აქედან

$$\begin{cases}A=0\\ 6B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ B=\frac{1}{6}\end{cases}\quad \text{ე.ი.}\quad \bar{y}=x^2\cdot\frac{1}{6}xe^{2x}=\frac{1}{6}x^3e^{2x}$$

საბოლოოდ:

$$y=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{1}{6}x^3e^{2x}=e^{2x}\left(c_1+c_2x+\frac{1}{6}x^3\right)$$

მაგალითი 7. ამოვხსნათ განტოლება: $y''+y=4\cos x+(x^2+1)e^x$.

ამოხსნა. განტოლების ზოგადი ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$y=y_0+\bar{y}_1+\bar{y}_2$.

მახასიათებელი განტოლებაა: $k^2+1=0$. $k_{1,2}=\pm i$, ამიტომ $y_0=c_1\cos x+c_2\sin x$.

განვსაზღვროთ $y''+y=4\cos x$ განტოლების კერძო ამონახსნი $\bar{y}_1$. ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში $a=0$, $b=1$, ე.ი. $a\pm bi=\pm i$ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, ამიტომ $\bar{y}_1$ უნდა ვეძებოთ სახით:

$\bar{y}_1=x\cdot(A\cos x+B\sin x)$.

$\bar{y}_1' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$,

$\bar{y}_2'' = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x)$

ჩავსვათ $\bar{y}_1$, $\bar{y}_1'$ და $\bar{y}_1''$-ის მნიშვნელობები განტოლებაში $y''+y=4\cos x$ და განვსაზღვროთ A და B კოეფიციენტები.

$-2A\sin x+2B\cos x-x(A\cos x+B\sin x)+x(A\cos x+B\sin x)\equiv 4\cos x$.

აქედან $A=0$ და $B=2$, მაშასადამე: $\bar{y}_1 = 2x\cos x$.

ახლა განვსაზღვროთ $\bar{y}_2$ კერძო ამონახსნი განტოლებისა:

$$y'' + y = (x^2+1)e^x.$$

როგორც ვიცით, მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $k_{1,2}=\pm i$. $a=1$ და არ წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების ფესვს, ამიტომ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ სახით:

$$\bar{y}_2 = (A + Bx + Cx^2)e^x,$$

$$\bar{y}_2' = e^x(A + Bx + Cx^2 + B + 2Cx) = e^x\left[(A+B)+(B+2C)x+Cx^2\right],$$

$$y_2'' = e^x\left[(2C+2B+A)+(4C+B)x+Cx^2\right]$$

შევიტანოთ $\bar{y}_2$, $\bar{y}_2'$ და $\bar{y}_2''$ მნიშვნელობები $y''+y=(x^2+1)e^x$ განტოლებაში და განვსაზღვროთ A, B და C კოეფიციენტები.

$e^x\left[(2C+2B+A)+(4C+B)x+Cx^2+A+Bx+Cx^2\right]\equiv\left(x^2+1\right)\cdot e^x$.

შევკვეცოთ e^x-ზე მივიღებთ:

$(2C+2B+2A)+(4C+2B)x+2Cx^2\equiv x^2+1$.

აქედან

$$\begin{cases} C+B+A=\frac{1}{2} \\ 2C+B=0 \\ c=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1, \\ c=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ე.ი.} \quad \bar{y}_2=\left((1-x+\frac{1}{2}x^2\right)e^x$$

მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$y = y_0 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2$

ანუ $y = c_1\cos x + c_2\sin x + 2x\cos x + e^x\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2\right)$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი სამუშაოსათვის

ამოხსენით მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებები (ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი):

10.181. $y''+y'-2y=0.$ 10.182. $y''-4y'=0.$ 10.183. $y''+6y'+13y=0.$

10.184. $y''-2y'+y=0.$ 10.185. $y''-4y'+3y=0.$ 10.186. $y''+4y'+29y=0.$

10.187. $y''+a^2y=e^x.$ 10.188. $y''-7y'+6y=\sin x.$ 10.189. $y''+2y'+5y=-\frac{17}{2}\cos 2x.$

10.190. $y''-3y'+2y=f(x).$

თუ $f(x)$ ტოლია: 1. $2x^3-30$; 2. $2e^x\cos\frac{x}{2}$; 3. $e^x(3-4x)$; 4. $3x+5\sin 2x$.

10.191. $y''-y'=2(1-x),\ y|_{x=0}=1,\quad y'|_{x=0}=1.$

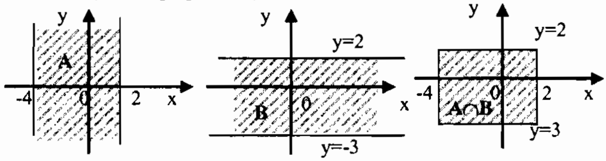
10.192. $y''-2y'=e^x(x^2+x-3),\ y|_{x=0}=2,\quad y'|_{x=0}=2.$

10.193. $y''+y'+\sin 2x=0,\ y|_{x=\pi}=y'|_{x=\pi}=1.$

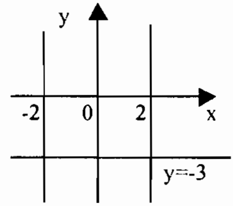
პასუხები

თავი I

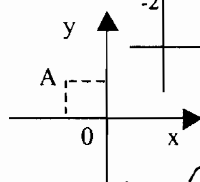
1.1. ა) სწორია $\{4,5\}\subset\{4.5, \{4.5.7\}\}$, ბ) სწორია ორივე.
1.2. $(A\cup B)\cap C=\{-3,0\}$, $(A\cap B)\cup C=\{-3,2,5,0,11\}$, $(A\setminus B)\cap C=\{0\}$.
1.3. $A\cup B=(-2, +\infty)$, $A\cap B=[1,3)$, $A\setminus B(-2,1)$, $B\setminus A=[3,+\infty)$;
1.4. $A=\{1,3\}$ 1.5. $A=\{1,2,3,4\}$; 1.6. $A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
1.7. $B=\{1,2,3,4,5\}$; 1.8. $B=\varnothing$; 1.9. $A\cup B=A=(-\infty,-8]\cup[-1,+\infty)$, $A\cap B=B=[3;4]$, $A\setminus B=(-\infty,-8]\cup[-1,3)\cup(4;+\infty)$, $B\setminus A=\varnothing$.
1.10. $A\cup B=A=(-\infty,-4]\cup[-2,+\infty)$, $A\cap B=B=\varnothing$, $A\setminus B=A$, $B\setminus A=\varnothing$;

1.11. 

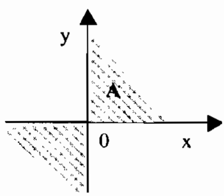
1.12. B არის $x=-2$, $x=2$ და, $y=-3$ წრფეების წერტილთა ერთობლიობა



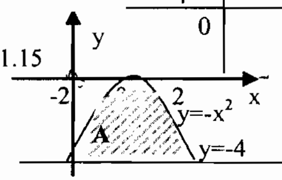
1.13. $B=\left\{A\left(-\frac{18}{19};\frac{7}{9}\right)\right\}$ არის სიმრავლე, რომელიც ერთი A წერტილისაგან შედგება.



1.14.



1.15

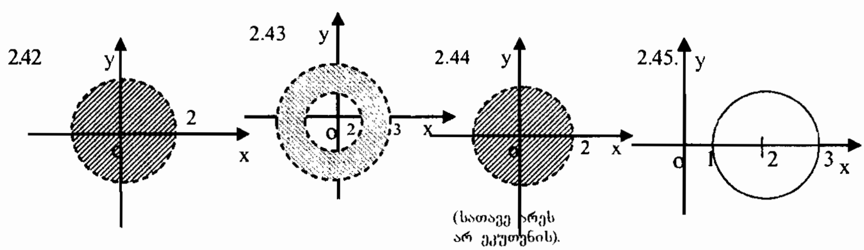


1.18. {a,b}, {a,c}, {a,d}, {a, e{, {b.c}, {b.d}, {b,e}, {c,d}, {c,e}, {d,e}; $C_5^2=10$, $A_5^2=20$;
1.19. $C_{26}^2=13\cdot25=325$; 1.20. ა) $P_5=120$; ბ) $A_8^5=6720$; 1.21. $C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2=2520$; 1.22. ა) $P_5-P_4=96$, ბ) $P_5-P_3=114$, გ) $P_5-P_2=118$; 1.23. ა) $C_9^5=126$; ბ) $C_8^5=56$;
4·2 1.24. $5\cdot4\cdot C_{14}^2=3640$; 1.25. $C_5^3\cdot C_{75}^2=27650$; 1.26. 43; 1.27. $n(n-1)$; 1.28. $\frac{1}{10(n-2)(n-1)}$;
1.29. $\frac{n-2}{n+1}$ 1.30. 132; 1.31. x=14, x=3; 1.32. x=5, x=4; 1.33. x=4; 1.34. x=2; 1.35. x=27; 1.36. x=17; 1.37. x=3; 1.38. x=7; 1.39. $(x+b)^6= =x^6+6x^5\cdot b+15x^4b^2+20x^3b^3+15x^2b^4+6xb^5+b^6$;
1.40. $\left(\sqrt{m}-n\right)^5=\sqrt{m^5}-5m^2n+10\sqrt{m^3}n^2-10mn^3+5\sqrt{m}n^4-n^5$;
1.41. $(z^2+1)^7=z^{14}+7z^{12}+21z^{10}+35z^8+35z^6+21z^4+7z^2+1$;
1.42. $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^8=x^4-9\sqrt{x^7y}+28x^3y-56\sqrt{x^5y^3}+70x^2y^2-56\sqrt{x^3y^5}+28xy^3-8\sqrt{xy^7}+y^4$;

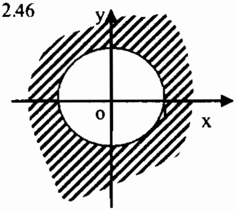
1.43. $T_9=C_{12}^8x^{-\frac{8}{3}}$; 1.44. $T_7=C_{13}^6a^{11}$; $T_5=C_9^4\sqrt{x^5}\cdot y^4$; 1.45. $T_6=C_{10}^5\cdot z^{\frac{25}{3}}$;

1.46. n=15; 1.47. $T_5=C_9^4\sqrt{x^5}\cdot y^4$; 1.48. n=8; 1.49. 64.

2.2. $6-4i$; 2.3. 0; 2.4. $8x$; 2.5. $9-7i$; 2.6. $8-i$; 2.7. $11-4i$; 2.8. 4; 2.9. $24i$; 2.10. $-26-18i$; 2.11. -38; 2.12. 125^5; 2.13. $0,5+1,5i$; 2.14. $0,2+1,3i$; 2.15. i; 2.16. 0; 2.17. $2-i$; 2.18. 0; 2.19. $-16i$; 2.20. x^4-6x^2+25; 2.21. $z_1=\cos 0^0+i\sin 0^0$; $z_2=\cos\pi+i\sin\pi$; $z_3=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; $z_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; $z_5=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; $z_6=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; $z_7=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; $z_8=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; $z_9=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ $z_{10}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $z_{11}=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; $z_{12}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ 2.22. $z_1=2,5+2,5\sqrt{3}i$; $z_2=-1+i$; $z_3=8i$; $z_4=2+2i$; 2.23. $z_1=10\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$; $z_2=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$; $z_3=5i$; $z_4=3\sqrt{2}(1+i)$; $z_5=-1$; $z_6=3\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)$; $z_7=4\sqrt{2}\left(\cos 125^0+i\sin 125^0\right)$. 2.24. $z_1=\frac{2}{5}(1+i)$; $z_2=\sqrt{2}\left(\cos 105^0+i\sin 105^0\right)$; $z_3=\frac{8}{3}\left(\cos 335^0+i\sin 335^0\right)$; $z_4=\sqrt{2}(1+i)$; $z_5=6i$; $z_6=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+i\right)$; $z_7=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $z_8=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$; $z_9=18\left(\sqrt{3}-i\right)$. 2.25. $z_1=2^{12}(1+i)$; $z_2=2^9\left(1-i\sqrt{3}\right)$, $z_3=-64$; $z_4=1$; $z_5=2^{24}$; $z_6=2^{18}\cdot 3^{27}$; 2.26. $2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right)$; 2.28. $8-i$; 2.29. $\frac{14}{5}i$; 2.30. $-32+16i$; 2.31. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$; 2.32. -1; 2.33. $x=2$, $y=3$; 2.34. $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$. 2.35. $x=\frac{17}{7}$, $y=\frac{13}{7}$; 2.36. $x=-\frac{-b}{a^2+b^2}$, $y=\frac{-a}{a^2+b^2}$; 2.37. $z_1=1$, $z_2=i$; 2.38. $z_1=2+i$, $z_2=2-i$; 2.39. ა) $z_1=3-2i$, $z_2=-3+2i$; ბ) $z_k=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{315+360k}{4}+i\sin\frac{315+360k}{4}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$. გ) $z=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,5$, დ) $z=2\left(\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}\right)$, $k=0, 1, 2, 3$.

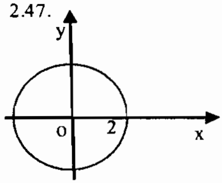


2.46



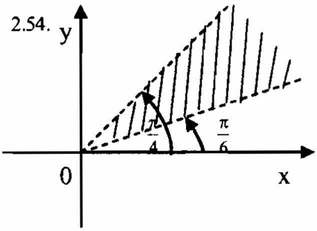
(კომპლექსური სიბრტყე ამოჭრილი წრით, რომლის რადიუსია 1)

2.47.



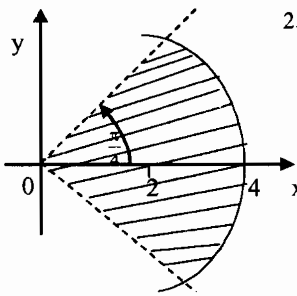
2.48. ორი კონცენტრული წრეწირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, რადიუსებით 3 და 1. 2.49. რგოლი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსებით 1 და 9; 2.50. რგოლი $13\le|z|\le17$. 2.51. წრფე $y=x$. 2.52. $y\le x$ ნახევარსიბრტყე; 2.53. $\varphi=\frac{\pi}{6}$ სხივი;

2.54.

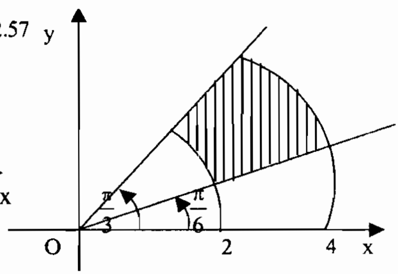


2.55. ცარიელი სიმრავლე.

2.56.



2.57



2.58. წრეწირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით 9. 2.59. წრეწირი ცენტრით (2; 0) წერტილში და რადიუსით 2. 2.60. $x_k=\cos^2\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}$, $k=0,1,2$. 2.61. $x_k=\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}$, $k=0, 1, 2$.

2.62. $x_k=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k=0, 1$.

2.63. $x_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\right)$, $k=0, 1$. 2.64. $x_k=2\left(\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}\right)$, $k=0, 1, 2$.

2.65. $x_k=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$, $k=0,1,2$. 2.66. $x_k=\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}$, $k=0,1,2, 3$. 2.67. $x_k=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$.

2.68. $x_k=2\left(\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}\right)$, k=0, 1, 2, 3, 4. 2.69. $x_k=\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi k}{3}$, k=0, 1, 2, 3, 4, 5.

2.70. $x_k=3\left(\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}\right)$, k=0, 1, 2, 3, 4. 2.71. $x_k=3\left(\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}\right)$, k=0,1,2,3,4.

2.73. $\frac{3}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$; -3; $\frac{3}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$ 2.74. 3; $\frac{3}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$; -3; $\frac{3}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$ 2.75. $\frac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}\left(1-i\sqrt{3}\right)$ 2.76. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$; $\frac{1}{4}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$ 2.77. ± 2; $\pm 2i$. 2.78. ± 3; $\pm 3i$. 2.79. $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}i$;

2.80. 2; $1+i\sqrt{3}$; $-1+i\sqrt{3}$; -2; $-1-i\sqrt{3}$; 2.81. ა) $a=\frac{5}{64}$, ბ) $a=-9$; 2.82. ა) $p=2$, $q=-8$; ბ) $p=-5$, $q=-2$; 2.83. ა) 51, ბ) -67. 2.84. $z=-2\pm i$. 2.85. $z=-4\pm 2i$. 2.86. $z_1=-2+i$, $z_2=-3+i$. 2.87. $z_1=-3^3+2i$, $z_2=-3$. 2.88. $z_1=-1$, $z_{2,3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_4=-\sqrt[3]{3}$, $z_{5,6}=\sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 2.89. $z_{1,2}=\pm 1$, $z_{3,4}=\pm i$, $z_{5,6}=\sqrt{2}(1\pm i)$, $z_{7,8}=\sqrt{2}(-1\pm i)$. 2.90. $P(z)=(z-1)(z+1)(z^2+1)$; $z_{1,2}=\pm 1$, $z_{3,4}=\pm i$.
2.91. $P(z)=(z^2+1)(z-\sqrt{3}z+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)$, $z_{1,2}=\pm i$, $z_{3,4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$, $z_{5,6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm i\frac{1}{2}$; 2.92. $P(z)=(z^2+z+1)(z^2-z+1)$, $z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_{3,4}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2.93. $P(z)=(z^2-6z-13)(z^2+2z+2)$, $z_{1,2}=-3\pm 2i$, $z_{3,4}=-1\pm i$. 2.94. $P(z)=(z-1)(z^2+z+1)^2$, $z_1=1$, $z_{2,3}=-1\pm i\sqrt{3}$, $z_{4,5}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2.95.

ა) $\begin{pmatrix}4&1&1\\2&0&2\\0&6&-1\end{pmatrix}$, ბ) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 2.96. ა) $\begin{pmatrix}7&-11&5\\8&-6&5\end{pmatrix}$, ბ) $\begin{pmatrix}0&-13&4\\5&-9&-3\end{pmatrix}$,

გ) $\begin{pmatrix}-4&-16&4\\4&-12&-8\end{pmatrix}$. 2.97. $\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-1&-\frac{5}{3}\\\frac{10}{3}&1&-1\end{pmatrix}$. 2.98 $\begin{pmatrix}4&3\\-5&5\end{pmatrix}$ 2.99. $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 2.100.

$\begin{pmatrix}0&-6&4\\5&7&1\\-1&-5&11\end{pmatrix}$. 2.101. $\begin{pmatrix}-2&-5&12\\4&8&3\\-2&-3&-1\end{pmatrix}$. 2.102. $\begin{pmatrix}1&6\\2&7\\1&5\end{pmatrix}$. 2.103. $\begin{pmatrix}1&4\\2&7\\3&10\\4&13\end{pmatrix}$. 2.104. (3)

2.105. $\begin{pmatrix}1&2&4&1\\2&4&8&2\\-1&-8&-4&-1\\1&2&4&1\end{pmatrix}$. 2.106. $\begin{pmatrix}7&3\\3&14\end{pmatrix}$. 2.107. $\begin{pmatrix}4&8&-4\\7&8&-14\\-3&3&-4\end{pmatrix}$. 2.108. $\begin{pmatrix}-1&6&0\\-4&9&5\\-2&8&3\end{pmatrix}$

2.109. $\begin{pmatrix}13&14\\14&13\end{pmatrix}$. 2.110. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. 2.111. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 2.112. 11. 2.113. $\sin(\alpha-\beta)$.

2.114. $-\cos 2\alpha$. 2.115. $2b^2$ 2.116. b^3 2.117. -48 2.118. 8 2.119. 0. 2.120. $-2x$ 2.121. $\sin(\alpha+\beta)$.
2.122. $(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$ 2.127. -5. 2.128. $\{2; 0{,}5\}$ 2.129. 0. 2.130. $\{-9; 2\}$ 0 2.131. $\{2; 3\}$
2.132. $-4\pm\sqrt{22}$ 2.133. $x>3{,}5$ 2.134. $-6<x<-4$. 2.135. -241. 2.136. 160 2.137. 0. 2.138. -21.

2.139. -33. 2.140. $\frac{1}{11}\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$. 2.141. $\frac{1}{11}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ 2.142. $-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -7\\ 2 & -4 & 6\\ -2 & -4 & 10\end{pmatrix}$. 2.143. $-\frac{1}{34}\begin{pmatrix}12 & -14 & -18 & -2\\ 7 & 6 & -19 & -4\\ 9 & -2 & -5 & -10\\ -17 & 0 & 17 & 0\end{pmatrix}$ 2.144. მატრიცი გადაგვარებულია. 2.145. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}14 & -7\\ 3 & 11\end{pmatrix}$ 2.146. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 2.147. $\begin{pmatrix}3 & 13\\ -8 & -51\\ -3 & -23\end{pmatrix}$ 2.148. $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ 2.149. $(a\ -a\ 3-a)$ სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. 2.150. x მატრიცი არ არსებობს. მარცხენა მხარის პირველი თანამამრავლი გადაგვარებული მატრიცაა. 2.151. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}18 & -12 & 3\\ -47 & 34 & -8\\ -7 & 5 & -1\end{pmatrix}$ 2.152. $\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & -4\end{pmatrix}$. 2.153. 3 . 2.154. 2. 2.155. 3. 2.156. 2. 2.157. 2. 2.158. 2. 2.159. 3. 2.160. 2. 2.161. 3. 2.162. 2. 2.163. 1. 2.164. 5. 2.165. $x_1=3$, $x_2=-1$. 2.166. $x_1=3$, $x_2=2$. 2.167. $x_1=1$, $x_2=-1$. 2.168. სისტემა არათავსებადია. 2.169. $x_1=x_2=0$. 2.170. სისტემა არათავსებადია. 2.171. $x_1=2t$, $x_2=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.172. $x_1=t$, $x_2=3-2t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.173. (2;2;–1). 2.174. (1;3;2). 2.175. (5;–1;–4). 2.176. (3;–1;4). 2.177. სისტემა არათავსებადია. 2.178. $x_1=-5t+2$, $x_2=-2t+\frac{1}{2}$, $x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.179. $x_1=\lambda$, $x_2=t$, $x_3=\lambda-2t-1$, λ და t ნებისმიერია. 2.180. $x_1=-t-\frac{1}{7}$, $x_2=t+\frac{12}{7}$, $x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.181. სისტემა არათავსებადია. 2.182. $x_1=x_2=x_3=0$. 2.183. $x_1=k-5t+1$, $x_2=k$, $x_3=t$, სადაც k და t ნებისმიერია. 2.184. $x_1=x_2=x_3=0$. 2.185. $x_1=13t$, $x_2=5t$, $x_3=7t$. სადაც t ნებისმიერია. 2.186. $x_1=-5t$, $x_2=-14t$, $x_3=-3t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.187. $x_1=k-4t$, $x_2=k$, $x_3=t$, სადაც k და t ნებისმიერია. 2.188. $x_1=\frac{1}{5}(11-t)$, $x_2=\frac{2}{5}(t-1)$, $x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია 2.189. $x_1=\frac{1}{7}(11-7t)$, $x_2=\frac{1}{7}(7t+1)$, $x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.190. სისტემა არათავსებადია. 2.191. $x_1=k$, $x_2=t$, $x_3=k+t$, სადაც k და t ნებისმიერია. 2.192. (–1, 0, 2, 3). 2.193. (2, 1, 0, –1) 2.194. (2, 3, 0, 5). 2.195. ა) თუ $a\neq2$, მაშინ $x_1=\frac{4}{3a-6}, x_2=\frac{5a-18}{6-3a}$. ბ) თუ $a=2$, მაშინ სისტემა არათავსებადია. 2.196. ა) თუ $a\neq-2$, მაშინ $x_1=\frac{10+5a}{2+a}$, $x_2=0$, ბ) თუ $a=-2$, $x_1=5-2t$, $x_2=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.197. ა) თუ $a\neq4$, მაშინ $x_1=\frac{2a-5}{4-a}, x_2=\frac{17-3a}{4-a}, x_3=\frac{1}{a-4}$, ბ) თუ $a=4$, სისტემა არათავსებადია. 2.198. ა) თუ $a\neq2$, მაშინ $x_1=x_2=x_3=0$. ბ) $a=2$, მაშინ $x_1=4t$, $x_2=-6t$, $x_3=-t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.199. ა) როცა $a\neq5$, მაშინ $x_1=x_2=x_3=0$.ბ) როცა $a=5$, სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე: $x_1=\frac{1}{2}t$, $x_2=\frac{5}{4}t$, $x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.200. თუ $a\neq-3$,

მაშინ $x_1=\frac{1}{a+3}$ (–8ab–9b+6a+13), $x_2=\frac{1}{a+3}$(9a+18b–5ab+16), $x_3=\frac{21b-7}{a+3}$. ბ) როცა a=–3, $b\neq\frac{1}{3}$, მაშინ სისტემა არათავსებადია. გ) როცა a=–3 და $b=\frac{1}{3}$, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე: $x_1=\frac{5t-1}{7}$, $x_2=\frac{11t-1}{7}$, $x_3=t$, სადაც t ნებისმიერია. 2.201. (3,2,1). 2.202. (–2,0,–1). 2.203. სისტემის მატრიცი გადაგვარებულია, შებრუნებული არ გააჩნია. 2.204. (2,–2,0, 1) 2.205. (–1,3, 2). 2.206. (1,5,2). 2.207. (1,2,3,4) 2.208. სისტემა არათავსებადია. 2.209. (1,2, 3,4).

თავი III

3.3. $M_1(1;\sqrt{3})$, $M_2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$, $M_3\left(-\frac{1}{2};0\right)$. 3.4. $M_1\left(\sqrt{2};\frac{3}{4}\pi\right)$, $M_2\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3(5;0)$, $M_4\left(5;\mathrm{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$. 3.5. $\rho^2=a^2\cos2\varphi$. 3.6. $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{a}{\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$; $\sqrt{x^2+y^2}=a\frac{y}{x}$; $x^2+y^2+=ay$. 3.9. (0;-3) და (0;-9). 3.11. $\frac{169\sqrt{3}}{4}$. 3.12. (3;-1). 3.13. (-3;-3), $R=\sqrt{13}$. 3.14. $2\sqrt{29}$; $\sqrt{29}$; $\sqrt{65}$. 3.15. (14;0) და $\left(0;\frac{14}{3}\right)$. 3.16.A(4;4) და B(-6;-2). 3.17. (7;-1); (6;0); (5,1); (4,2); (3;3). 3.18. (3,5; -1), (4;-2) და (4,5;-3). 3.19. D(-3;5) ან (15;3) ან (-7;-5). 3.20. M(-2;1). 3.21. M(5,2;-1). 3.22. $BM=\frac{5\sqrt{5}}{3}$; $CM=\frac{10\sqrt{5}}{3}$. 3.23. 5 და $\sqrt{481}$. 3.24. ა) 3,5; ბ) 10; გ) წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ. 3.25. $5\sqrt{367}$ სმ². 3.27.10. 3.28. $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$. 3.29. (3;3) და R=3. 3.30. 26. 3.31. $\sqrt{5}$; 2; $\sqrt{5}$. 3.32. C(-3;2). 3.33. C(32;0) ან C(-8;0). 3.34. $C_1(7;6)$ და $C_2\left(7;\frac{2}{5}\right)$. 3.35. 8 ან $-5\frac{1}{3}$. 3.36. მდებარეობენ M_1, M_2, M_6 წერტილები. 3.37. a=11; b=-3. 3.38. A(4;0); B(0;-6) 3.39. k=-3, b=13. 3.40. ა)k=2, b=-3; ბ) $k=-\frac{2}{3}$; $b=\frac{5}{3}$; გ) k=0, $b=-\frac{5}{2}$; დ) წრფე პარალელურია oy ღერძის. ე) k=-1; b=0; 3.41. ა) $\frac{3}{4}\pi$; ბ) $\frac{\pi}{4}$; გ) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$; დ) $\mathrm{arctg}\frac{1}{5}$. 3.42. y=x; ბ) y=-x; გ) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$; დ) y=0. 3.44. $y=\sqrt{3}x-4$. 3.45. ა) $\frac{x}{-18}+\frac{y}{-12}=1$; დ) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-3}=1$; ვ) $\frac{x}{11}+\frac{y}{11/5}=1$; ბ), გ) და ე) წრფის არასრული განტოლებები ღერძთა მონაკვეთებში არ გადაიწერება. 3.46. 9x-14y+6=0. 3.47.x+y-12=0. 3.48. x+y+7=0; x-y+7=0; x+y-7=0; x-y-7=0. 3.49. x+2y-10=0. 3.50. ა) $y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$; ბ) $\frac{x}{-7/4}+\frac{y}{7/3}=1$; გ) 4x-3y+7=0, დ) $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{7}{5}=0$. 3.51. ა) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-2=0$; ბ) $-x\cos70^0$-

ysin70^0-3=0; ბ) $-x-\frac{1}{3}=0$; დ) $y-\frac{1}{2}=0$; ე) $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$; ვ) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-1=0$; ზ) $-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}=0$; თ) $\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-1=0$; ი) $\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y=0$. 3.52. რადგანაც ორივე წრფე კოორდინატთა სათავიდან 2 ერთეულით არის დაშორებული, ამიტომ გამოდგება. 3.53. $y=\pm x\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ 3.54. y=0; y=2$\sqrt{3}$; y=$\sqrt{3}$ x+5$\sqrt{3}$; y=-$\sqrt{3}$ x+5$\sqrt{3}$; 3.55. 3x+4y-12=0; 3x-4y+12=0; 3x+4y+12=0; 3x-4y-12=0. 3.56. 3x-2y-8=0. 3.57.7x-2y-20=0. 3.58.3x+y-5=0. 3.59. 3x-4y+6=0; 4x+3y-17=0; 4x+3y+8=0 და 3x-4y+31=0 ან 3x-4y-19=0. 3.60. ა) (-1;1) ბ) $\left(-\frac{7}{4};\frac{3}{4}\right)$, გ) წრფეები ერთმანეთის პარალელურია, დ) $\left(\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$, ე) ეს წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა. 3.61. A(2;-1); B(3;4); C(-3;0). 3.62. 7 კვ.ერთ. 3.63. 5x-4y--7=0. 3.64. $\sqrt{3}x+y+3\sqrt{3}-2=0$. 3.65.2x+y-7=0. და x-2y-6=0. 3.66.11x+33y-156=0. 3.67. ა) $\frac{9\sqrt{5}}{10}$, ბ) 5, გ) 0,5. 3.68. 6x-8y-11=0. 3.69.3x-4y=0. 3.70. $h=\frac{24}{\sqrt{13}}$ 3.71. y=9x+8 3.72. x+2y+1=0. 3.73. $\frac{10}{\sqrt{65}}$ 3.74. y-2=$\frac{-6\pm\sqrt{21}}{6}(x+1)$. 3.75. 4x-3y+5=0; 4x-3y-25=0. 3.76. x--4=0 და 7x+24y-100=0. 3.77. 3x-4y+3=0 ან 4x-3y-4=0. 3.78. 3x+4y+3=0; x+1=0. 3.79. $\left(-\frac{2}{9};\frac{37}{9}\right)$. 3.80. 4x-3y-10=0 და 4x-3y+15=0. 12x+5y-26=0 და 12x+5y+39=0. 3.81. 8x+15y+17=0; 8x+15y+119=0. 3.82.4,225 კვ.ერთ. 3.83. y-4=0. 3.84. 3x+y+1=0. 3.85. M(3;-3). 3.86. 3x-y-10=0 (AB), x-2y=0 (BC), 2x+y-5=0 (AC). 3.87. 12x-10y-19=0. 3.88. (0; 1), (-3;2); (-4;5) და (-1;4). 3.89. 3x-y-5=0; x-3y+17=0, 3x-y-21=0; x-3y+1=0. 3.90. x-y-7=0; x+y--9=0; x+y-1=0. 3.91. x+y-9=0, 3x-y-3=0. 3.92. (4;4). 3.93. x+3y-10=0. 3.94. x+4y±4=0. 3.95. 12x-5y-31±26=0. 3.96. 3x-2y-27=0. 3.97.

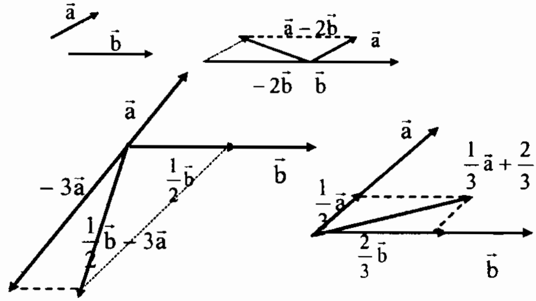
		ა)	ბ)	გ)
1.	AB გვერდის განტოლება	5x+12y-86=0	5x+12y-55=0	5x-12y+54=0
	BC გვერდის განტოლება	4x-3y-31=0	4x-3y-44=0	3x+4y+10=0
	AC გვერდის განტოლება	x-6y+50=0	x-6y+31=0	x-8y+50=0
2.	AD მედიანის განტოლება	x+15y-118=0	x+15y-74=0	x-4y+22=0
3.	მედიანების გადაკვეთის წერტილი	$(8;22/3)$	$(9;13/3)$	$(-10/3;14/3)$
4.	BE ბისექტრისის განტოლება	11x+3y-10=0	11x+3y-121=0	8x-y+50=0
5.	ბისექტრისის გადაკვეთა AC გვერდთან	$\left(\frac{188}{23};\frac{223}{23}\right)$	$\left(\frac{211}{23};\frac{154}{23}\right)$	$\left(-\frac{50}{9};\frac{50}{9}\right)$
6.	h_A სიმაღლის განტოლება	3x+4y-32=0	3x+4y-17=0	4x-3y-3=0
	h_A სიმაღლის სიგრძე	12,6	12,6	11,2
7.	სამკუთხედის ფართობი	63	63	63
8.	$\angle C$	arctg $\frac{21}{22}$	arctg $\frac{21}{22}$	arctg $\frac{28}{29}$

9.	B წვეროზე გამავალი AC-ს პარალელური BM წრფის განტოლება.	x-6y+8=0	x-6y-11=0	x-8y+22=0
10	მანძილი B წვეროდან AD მედიანამდე	$\frac{63}{\sqrt{226}}$	$\frac{63}{\sqrt{226}}$	$\frac{8}{\sqrt{17}}$
		d)	e)	v)
1.	AB გვერდის განტოლება	5x-12y-25=0	5x-12y-67=0	5x-12y+79=0
	BC გვერდის განტოლება	3x+4y+41=0	3x+4y+27=0	4x-3y-38=0
	AC გვერდის განტოლება	x-8y-5=0	x-8y-19=0	x-6y+43=0
2.	AD მედიანის განტოლება	x-4y-5=0	x-4y-15=0	x+15y-104=0
3.	მედიანების გადაკვეთის წერტილი	$\left(-13/3;-7/3\right)$	$\left(5/3;-10/3\right)$	$\left(9;19/3\right)$
4.	BE ბისექტრისის განტოლება	8x-y+51=0	8x-y+2=0	11x+3y-127=0
5.	ბისექტრისის გადაკვეთა AC გვერდთან	$\left(-59/9;-13/9\right)$	$\left(-5/9;-22/9\right)$	$\left(211/23;200/23\right)$
6.	h_A სიმაღლის განტოლება	4x-3y-20=0	4x-3y-47=0	3x+4y-25=0
	h_A სიმაღლის სიგრძე	11,2	11,2	12,6
7.	სამკუთხედის ფართობი	28	28	63
8.	$\angle C$	$\operatorname{arctg}\frac{28}{29}$	$\operatorname{arctg}\frac{28}{29}$	$\operatorname{arctg}\frac{21}{22}$
9.	B წვეროზე გამავალი AC-ს პარალელური BM წრფის განტოლება.	x-8y-29=0	x-8y-47=0	x-6y+1=0
10.	მანძილი B წვეროდან AD მედიანამდე	$\frac{8}{\sqrt{17}}$	$\frac{8}{\sqrt{17}}$	$\frac{63}{\sqrt{226}}$

3.98. 45^0. 3.99. $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ 3.100. a) $\left(43/6;43/6\right)$, $R=\frac{\sqrt{170}}{6}$; b) (-3,5;4,5); $R=\frac{\sqrt{130}}{2}$ 3.101. x-3y-10=0, 5x-3y+22=0, x-3y+2=0, 3x+y=0. 3.102. 3x-4y-9=0, 3x-4y+16=0, 4x+3y-37=0 ან 4x+3y+13=0. 3.103. 25x-15y-24=0. 3.104x-y-4=0, x+y-4=0. 3.105. 2x-y+4=0. 3.106. x+2y-5=0, 2x-3y-3=0, 16x-10y+25=0. 3.107. x+2y-7=0, 5x+3y+7=0, 2x-3y-14=0. 3.108. 45^0. 3.109. 3x+4y-15=0; 4,4. 3.110. x+2y-3=0, x-5=0, x-4y+15=0. 3.111. $x^2+y^2-6y+4=0$. 3.113. $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. 3.114. $\left(x+6/7\right)^2+\left(y-2/7\right)^2=425/49$ 3.115. 2x-y+11=0 3.116x+2y-2=0, 2x+y-5=0, 2x-y-9=0, x+2y+8=0. 3.117. 3x-4y-41=0. 3.118. $(x-7)^2+(y-2)^2=57$. 3.119. $(x-1)^2+(y-4)^2=13$. 3.120. $(x-6)^2+(y-7)^2=36$. 3.121.4x-2y-9=0. 3.122. 2x-5y+19=0. 3.123. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. 3.124. $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. 3.126. 1. ეხება წრეწირს; 2. კვეთს; 3. გადის მის გარეთ. 3.127. A=C=1, B=0, D=-6, E=-4 და F=-12. 3.128. M_1 წერტილი ძევს წრეწირზე, M_2 წერტილი მოთავსებულია წრის შიგნით, M_3 წერტილი – მის გარეთ. 3.129. 1. (3;-1), (2;-2), 2. (-4;6), 3. არ იკვეთება. 3.130. $(x-5)^2+(y-3)^2=\frac{121}{13}$. 3.131. 2x+y-3=0.3.132. 7x-4y=0. 3.133. 8x-20y+1=0, 5x-2y-7=0. 3.134. $(x+2)^2+(y+1)^2=20$. 3.135 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 3.136. 1. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$; 2. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ 3.137. 1. 2a=10; 2b=6; $F_1(-4;0)$; $F_2(4;0)$; $e=\frac{4}{5}$. 2. 2a=2, 2b=8, $F_1(0;\sqrt{15})$, $F_2(0;-\sqrt{15})$, $e=\frac{\sqrt{15}}{4}$. 3. 2a=26; 2b=10; $F_1(-12;0)$; $F_2(12;0)$; $e=\frac{12}{13}$. 4. 2a=4;

$2b=12$; $F_1(0;4\sqrt{2})$; $F_2(0;-4\sqrt{2})$; $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 3.138. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. 3.139. 1) (3;-3); $\left(\frac{69}{13};\frac{21}{13}\right)$; 2) $\left(3;\frac{8}{5}\right)$; 3) არ იკვეთება. 3.140. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. 3.141. 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) 0,8. 3.142. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $r_1=3$, $r_2=9$. 3.143. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$ 3.144. $\frac{2b^2}{a}$ 3.145. (±5;±2). 3.146. (-5;7). 3.147. $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3};\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. 3.148. $\frac{x^2}{5}+y^2=1$. 3.149. $\frac{4\sqrt{5}}{45}$ კვ. ერთეული. 3.150. 3 და 7. 3.151. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 3.152. $x=\pm 9$. 3.153. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 3.154. $\frac{x^2}{60}+\frac{y^2}{24}=1$ ან $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$ 3.155. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$. 3.156. $\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ და (0;-1). 3.157. $(\pm\sqrt{15};\pm 1)$ 3.158. 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, 2) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1$ 3.159. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$, 2) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{25}=1$ 3.160. 1) $2a=5; 2b=\frac{10}{3}$; $F_1\left(-\frac{5}{6}\sqrt{13};0\right)$; $F_2\left(\frac{5}{6}\sqrt{13};0\right)$; $\ell=\frac{\sqrt{13}}{3}$. 2) $2a=6$; $2b=8$; $F_1(0;5)$; $F_2(0;-5)$; $\ell=\frac{5}{4}$. 3.161. $a=3$; $b=4$; $F_1(-5;0)$; $F_2(5;0)$; $\ell=\frac{5}{3}$, 2) $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{36}=1$. 3.162. $x^2-y^2=16$. 3.163. $y=\pm\frac{4}{3}x$; $\ell=\frac{5}{4}$. 3.164. $(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{2})$. 3.165. 1) (10;2), (-10;-2) 2) (10;-2); 3) არ იკვეთება. 3.166. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 3.167. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. 3.168. $\left(10;\pm\frac{9}{2}\right)$. 3.169. $\left(\frac{48}{5};\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}\right)$ 3.170. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. 3.171. $F(6;0)$; $x=-6$. 3.172. $y^2=-28x$ 3.173. 1) $y^2=16x$. 2) $x^2=8y$. 3.174. 1) $x^2=-18y$. 2) $y^2=12x$. 3.175. $(3;\pm 3\sqrt{2})$. 3.176. 12. 3.177. 10. 3.178. 2p. 3.179. 1) (-6;9); (2;1). 2) (-4;6). 3) არ იკვეთება. 3.180. 1) კვეთს, როცა $k<\frac{1}{2}$; ეხება, როცა $k=\frac{1}{2}$; 3) გადის მის გარეთ, როცა $k>\frac{1}{2}$. 3.181. $y^2=-3x$ 3.182. $y^2=-4x$. 3.183. $(x+3)^2=16(y+3)$. 3.184. $3x-4y+8=0$ და $x-2y+6=0$. 3.185. $p=2bk$. 3.186. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე 1) მახვილია, 2) ბლაგვია. 3.187. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

3.188.



3.189. $-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$; $\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$; $\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a})$; $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$. 3.190. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$ 3.191. $|\vec{R}|=23{,}173$; $\alpha=17^0 46'; \beta=27^0 14'$. 3.192. x=-1, y=4, z=-4. 3.193. $\vec{a}+\vec{b}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+7\vec{j}-\ -10\vec{k}$. 3.194. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=\frac{1}{3}$; $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$ 3.195. $\vec{e}=-\frac{6}{7}\vec{i}+\frac{2}{7}\vec{j}-\frac{3}{7}\vec{k}$. 3.196. $(\vec{a}\cdot\vec{b})=-6$; $\cos\varphi=-0{,}436$; $\varphi\approx116^0 51'$ 3.197. $\angle B=\angle C=45^0$ 3.198. $გეგ_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$; $გეგ_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

3.199. $(\vec{a}\cdot\vec{b})=3$, $\varphi=77^0 24'$, $გეგ_{\vec{b}}\vec{a}=1$; $გეგ_{\vec{a}}\vec{b}=0{,}655$. 3.200. $\varphi=90^0$. 3.201. $\sqrt{7}$ და $\sqrt{13}$. 3.202. $[\vec{a}\cdot\vec{b}]=-7\vec{i}+51\vec{j}-48\vec{k}$; $|[\vec{a}\cdot\vec{b}]|=\sqrt{4954}\approx70{,}385$. $\cos\alpha=\frac{-7}{70{,}385}=-0{,}099$; $\cos\beta=0{,}724$; $\cos\gamma=-0{,}682$. 3.203. $S=2\sqrt{22}$ 3.204. S=1,5 3.205. 1) არა; 2) დიახ 3.206. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, ვექტორები კომპლანარულია, ე.ი. A, B, C, D წერტილები ერთ სიბრტყეზე მდებარეობენ. 3.207. V=12 3.208. h=11 3.210. ა) y+4=0, ბ) z-2=0. 3.211. ა) 3y+z=0, ბ) x+2z=0. 3.212. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=-\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=\frac{1}{3}$; $\alpha=48^0 11', \beta=131^0 49', \gamma=70^0 32'$

3.213. x-2y-3z+14=0. 3.214. 3x+2y-z=5. 3.215. $\frac{x}{-12}+\frac{y}{-8}+\frac{z}{6}=1$ 3.216. a=12, $b=-\frac{6}{5}$, c=6. 3.217. $-\frac{2}{11}x-\frac{9}{11}y+\frac{6}{11}z-3=0$. 3.218. $p=\frac{12}{\sqrt{35}}$, $\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{35}}$; $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{35}}$; $\cos\gamma=-\frac{3}{\sqrt{35}}$. 3.219. d=2. 3.220. d=3. 3.221. $d=2\sqrt{2}$. 3.222. $M_1\left(0;0;-\frac{5}{3}\right)$, $M_2(0;0;3)$

3.223. (0;-2;0). 3.224. ა) $\cos\varphi=\frac{1}{4}$; $\varphi=\arccos\frac{1}{4}\approx75^0 30'$; ბ) $\varphi=45^0$. 3.225. x-2y-3z=4 3.226. 7x-4y+z-21=0 . 3.227. x+y-z+2=0 3.228. 2x+3y+4z=0. 3.229. 9x-y+7z-40=3. 3.230. 2x-2y+z=2. 3.231. 3x+3y+z-8=0. 3.232. $d=\sqrt{6}$ 3.233. M(1;-1; 2) 3.234. $\frac{x-1}{\sqrt{2}}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{-1}$

3.235. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-2}{0}$; x=-1+t; y=-2; z=2. 3.236. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$; $\cos\alpha=0{,}3\sqrt{2}, \cos\beta=0{,}4\sqrt{2}$, $\cos\gamma=-0{,}5\sqrt{2}$. 3.237. $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$;

$\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$; 3.238. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{5}$. 3.239. $\frac{x}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$

3.240. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$ 3.241. $\varphi=\frac{\pi}{3}$; 3.242. $\cos\varphi=\frac{98}{195}$; $\varphi=\arccos\frac{98}{195}\approx59^0 48'$

3.245. $\begin{cases}3x+2y=0\\ z=4\end{cases}$ 3.246. $d=0{,}3\sqrt{38}$ 3.247. $d=4\frac{\sqrt{2}}{3}$ 48. (1;-5;0); $\left(\frac{7}{2};0;10\right)$ (0;-7;-4).

3.249. (6;4;0), (0;0;2) 3.250. (1;-2;3) 3.252. $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 3.253. $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{15}}$. 3.254. 5x-10y-9z-68=0 3.255. y+z+1=0 (მითითება. წრფის განტოლება ჩავწეროთ $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$

სახით) 3.256. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-5}$ 3.257. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$ 3.259. (6;4;5). 3.260. (5;5;5) 3.261. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}$; (3; 2; -1) 3.262. წრფე ძევს სიბრტყეზე. 3.263. x--7y+17z-9=0 3.264. x-2y+z+5=0 3.265. 7x-4y+7z+49=0 266. 4x-3y+2z+26=0. 3.267. 19x--14y+z+23=0. 3.268. x+2y-5z=0.

თავი IV

4.1 0; 4.2 2; 4.3. $-2\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4.4. 1,5. 4.5. 0,5. 4.6. 3. 4.7. 3. 4.8. –1. 4.9. $x\neq0$. 4.10. $(-\infty;2)$. 4.11. $(1;\infty)$. 4.12. $(-1;\infty)$. 4.13. $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$. 4.14. $(-2;3)$ 4.15. $R\setminus\{3;2\}$. 4.16. $(-2;0)\cup(1;\infty)$. 4.17. $D)y_1)=(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$. $D(y_2)=[2;\cup)$. 4.18. $D(y_1)=(-\infty;-1)\cup\left(1;\frac{5}{2}\right)$, $D(y_2)=(-\infty;-1)\cup\cup\left(1;\frac{5}{2}\right)$ 4.19. $D(y_1)=R\setminus\{3\}$; $D(y_2)=(3;\infty)$. 4.20. $D(y_1)=(2;\infty)$; $D(y_2)=(-\infty;2)\cup(2;\infty)$. 4.27. არც ლუწია, არც კენტი. 4.28. ლუწია. 4.29. ლუწია. 4.30. კენტია. 4.31. ლუწია. 4.32. კენტია. 4.33. ლუწია. 4.34. ლუწია. 4.35. არც ლუწია, არც კენტი. 4.36. ლუწია. 4.37. ა) 0,2,0,2,0; ბ) –1, 2, -3, 4, -5. გ) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$; დ) $\frac{1}{1\cdot3},\frac{1}{3\cdot5},\frac{1}{5\cdot7},\frac{1}{7.9},\frac{1}{9\cdot11}$; ე) 1, 0, $-\frac{1}{3},0,\frac{1}{5}$; 4.38. ა) $a_n=\frac{1}{5n}$; ბ) $a_n=\frac{2n-1}{6n-1}$; გ) $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$; დ) $a_n=(-1)^n$; ე) $\frac{n}{2}\left(1+(-1)^n\right)$; 4.39. $\frac{1}{2}$; 4.40. –4. 4.41. 0; 4.42. ∞. 4.43. 12. 4.44. $\frac{\ell}{m}$; 4.45. ა) $\sqrt[3]{2}$; ბ) 1; გ) ∞; დ) 0; ე) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; ვ) 1; ზ) 0; თ) ∞. 4.46. $\frac{1}{5}$. 4.47. ∞. 4.48. ა) 1; ბ) $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

4.49. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 4.50. ∞. 4.51. 0. 4.52. ∞. 4.53. ∞. 4.54. $\frac{3}{2}$ 4.55. 0. 4.56. 0. 4.57. 1. 4.58 ა) e^6, ბ) 0,4. 4.59. ა) $e^{-\frac{2}{3}}$; ბ) ∞. 4.60. ა) e^2; ბ) 0. 4.61. $\frac{1}{e^2}$. 4.62. $e^{\frac{9}{5}}$. 4.63. ა) 1; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) 0. 4.64. 3. 4.65. $\frac{1}{2}$. 4.66. $\frac{1}{6}$. 4.67. $\frac{3}{4}$. 4.68. $\frac{1}{343}$ 4.69. ∞. 4.70. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. 4.71. 3. 4.72. $-\frac{1}{16}$. 4.73. $\frac{1}{144}$. 4.74. $\frac{4}{3}$. 4.75. $\frac{5}{9}$. 4.76. $\frac{1}{3}$. 4.77. $\frac{3}{2}$. 4.78. $\frac{1}{3}$. 4.79. 0. 4.80. ∞. 4.81. $\frac{3}{2}$. 4.82. 2. 4.83. 3. 4.84. 2. 4.85. $-\frac{1}{4}$. 4.86. –1. 4.87. 0. 4.88. 0. 4.89. $-\frac{2}{3}$. 4.90. $\frac{1}{6}$. 4.91. $\frac{a-c}{2}$. 4.92. $\frac{1}{4}$. 4.93. 0. 4.94. –1. 4.95. 0. 4.96. 0. 4.97. 2. 4.98. 0. 4.99. ა) -∞ ბ) 0.

4.100. 0. 4.101. $\cos\alpha$. 4.102. $\frac{25}{2}$. 4.103. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$; 4.104. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4.105. $\frac{4}{5}$. 4.106. ∞.

4.107. $\frac{m}{n}$. 4.108. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. 4.109. $\frac{1}{2}$.. 4.110. $\frac{1}{\cos^2 x_0}$. 4.111. $\frac{1}{2}$. 4.112. $\frac{1}{2}$. 4.113. $\frac{1}{4}$.

4.114. 2. 4.115. $\frac{5}{2}$. 4.116. $\sqrt{2}$. 4.117. $\frac{4}{\pi}$. 4.118. $\frac{1}{3}$. 4.119. –3. 4.120. $\ln\frac{5}{4}$. 4.121. $\frac{1}{2}$.

4.122. $\frac{1}{2}$. 4.123. 3. 4.124. $a^b\ln a$. 4.125. e^2 4.126. 1. 4.127. ln3.' 4.128. ა) 0; ბ) ∞. 4.129. e^3.

4.130. e. 4.131. e^{10} 4.132. $e^{\frac{1}{2}}$. 4.133. e^{a-b}. 4.134. $e^{\frac{1}{2}}$. 4.135. $e^{-\frac{7}{2}}$ 4.136. $\frac{1}{e}$. 4.137. e.

4.138. 1. 4.139. 0. 4.140. 1, თუ $x\to+\infty$; 0, თუ $x\to-\infty$ 4.141. 0. 4.142. 1. 4.143. 0. 4.144. $-\frac{1}{2}$. 4.145. e^{-1}. 4.146. e^3 4.147. $\frac{1}{3}$. 4.148. 0. 4.149. ∞. 4.150. 0, თუ $x\to3+$; ∞, თუ $x\to3-$

4.151. 0. 4.152 1. 4.153. 0. 4.154. $\pm\frac{\pi}{2}$. 4.155. $\frac{3}{2}$. 4.156. $\frac{1}{4}$ 4.157. $+\infty$, თუ $x\to0+$, 0, თუ $x\to0-$. 4.158. $x=-3$ და $x=2$ II გვარის წყვეტის წერტილებია. 4.159. $x=0$, $x=-1$ და $x=4$ II გვარის წყვეტის წერტილებია. 4.160. $x=\frac{1}{2}$ I გვარის აცილებადი წყვეტის წერტილია, $x=-2$ II გვარის წყვეტის წერტილია. 4.161. $x=0$ I გვარის წყვეტის წერტილია $f(0+)-f(0-)=-3$. 4.162. $x=0$ და $x=2$ I გვარის წყვეტის წერტილებია; $f(0+)-f(0-)=-2$; $f(2+)-f(2-)=1$; 4.163. $x=0$ II გვარის წყვეტის წერტილია. 4.164. $x=0$ I გვარის წყვეტის წერტილია, $f(0+)-f(0-)=2$. 4.165. $x=0$ I გვარის აცილებადი წყვეტის წერტილია. 4.166. $x=0$ I გვარის აცილებადი წყვეტის წერტილია. 4.167. 1. 4.168. $n(x^{n-1}+1)$. 4.169. $mn(x^{n-1}+x^{m-1})$. 4.170. $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+0{,}9x^8$ 4.171. $-\frac{8}{x^5}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}-\frac{15}{4\sqrt[4]{x^7}}$. 4.172. $\frac{15}{4}\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt[6]{x^7}}+\frac{21}{4\sqrt{x^5}}$. 4.173. $y'=-\frac{1}{u^2}-\frac{16}{3}u^{-\frac{11}{3}}-15u^{-4}$, $y'(1)=-\frac{64}{3}$. 4.174. $2x^2(1+x^3)$ 4.175. $\frac{-3x^2+2x+2}{(x^2-x+1)^2}$. 4.176. $2e^x+\frac{1}{x}$. 4.177. $2^x\cdot e^x(\ln2+1)$. 4.178. $\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$. 4.179. $\frac{-4}{\sqrt[3]{x^2}(2+3\sqrt[3]{x})^2}$ 4.180. $9x^2\ln x$. 4.181. $\frac{2^{3x}}{3^{2x}}\ln\frac{8}{9}=\left(\frac{8}{9}\right)^x\ln\frac{8}{9}$. 4.182. $5\cos x-x\sin x$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

4.183. $y'=2x\operatorname{arctg}x+\frac{x^2+2}{x^2+1}$; $y'(1)=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}$. 4.184. $\frac{3^x(\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\ln3-1)}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$. 4.185. $\frac{10x^9-x^{10}\cdot\ln10}{10^x}$. 4.186. $\frac{2\ln3\cdot3^x}{(1-3^x)^2}$. 4.187. $\left(\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}+6x^2\right)\log_2 x+(\sqrt[5]{x}+2x^3)\frac{1}{x\cdot\ln2}$. 4.188. $\frac{-(x+\sqrt{1-x^2}\arccos x)}{x^3\sqrt{1-x^2}}$. 4.189. $-\cos x$. 4.190. $-\frac{1}{(2+\sqrt{x})^2}$- 4.191. $\frac{6(x+1)}{x(2x+3)}$. 4.192. arc-

$\cos\frac{x}{2}$. 4.193. $-\sin\frac{x}{3}\cdot\cos^2\frac{x}{3}$. 4.194. $36(2x^2+4x+5)^8(x+1)$. 4.195. $\frac{\sin 2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(1+\sin^2\sqrt{x})^2}}$.

4.196. $\frac{4\ln 5\cdot 5^{tg^2 2x}\cdot tg2x}{\cos^2 2x}-\frac{3ctg^2x}{\sin^2 x}$. 4.197. $-\sqrt{\frac{4+x^2}{4-x^2}}\cdot\frac{8x}{(4+x^2)^2}$; $y'(0)=0$.

4.198. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-(\arccos x)^2(1-x^2)}}$. 4.199. $\frac{1}{2}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. 4.200. $\frac{1}{\sin\frac{2x+1}{2}}$. 4.201. $\frac{1}{\cos x}$.

4.202. $ctg^3\frac{x}{2}$. 4.203. $\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$. 4.204. $-2e^{-x}\sin^2 e^{-x}$ 4.205. $3e^{\sin^2 3x}\cdot\sin 6x\cdot\sin^2 3x$ 4.206. $\frac{1}{\sin x}$. 4.207. $\frac{10}{x(x^5+2)}$. 4.208. $\frac{-\sin 2x}{\ln 5\cdot(\cos^2 x+1)}$ 4.209. $\frac{3^{\sqrt[3]{x^3+3}}\cdot x^2\cdot\ln 3}{\sqrt[3]{(x^3+3)^2}}$.

4.210. $\frac{ctgx\ln\cos x+tgx\cdot\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$. 4.211. $9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{17}\frac{(x-1)}{x\sqrt{x}}$. 4.212. $\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$.

4.213. $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$. 4.214. 0. 4.215. $4x\cos^2 x$. 4.216. $\frac{\cos x\cdot\ln\sin x}{(1+\ln\sin x)^2}$. 4.217. $\frac{1}{\sqrt{(1-mx^2)^3}}$.

4.218. $-10^{(arctg 10\sqrt{x})^2}\frac{10\ln 10\cdot arctg10\sqrt{x}}{(1+100x)\sqrt{x}}$. 4.219. $\frac{-2\ln 3\cdot 3^{\cos 2x}\sin 2x\cdot\arccos\sqrt{x}+3^{\cos 2x}\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}}{(\arccos\sqrt{x})^2}$

4.220. $(arctg\sqrt{x})^2+\frac{\sqrt{x}\cdot arctg\sqrt{x}}{1+x}$. 4.221. $3tg^2x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(arctgx)^3+tg^3x\cdot 3(arctgx)^2\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

4.222. $x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$. 4.223. $x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$. 4.224. $x^{\sin(x+1)}\left(\cos(x+1)\ln x+\frac{\sin(x+1)}{x}\right)$.

4.225. $(\sin x)^x(\ln\sin x+x\cdot ctgx)$. 4.226. $(\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right)$.

4.227. $-(\cos x)^{\arccos x}\left(\frac{\ln\cos x}{\sqrt{1-x^2}}+\arccos x\cdot tgx\right)$.

4.228. $x^{x^3}\cdot x^2(3\ln x+1)+3^{x^x}\cdot\ln 3\cdot x^x(\ln x+1)$.

4.229. $(\arcsin)^x\left(\ln(\arcsin x)+\frac{x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right)$. 4.230. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$

4.231. $(x^2+4)^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln(x^2+4)+\frac{2x\cos x}{x^2+4}\right)$ 4.232. $x^3e^{x^2}\sin 2x\left(\frac{3}{x}+2x+2ctg2x\right)$.

4.233. $\frac{(x+3)^3\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}\left(\frac{3}{x+3}+\frac{1}{3(x+1)}-\frac{3}{x+5}\right)$. 4.234. $\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-4)^2}{x^7}}\left(\frac{1}{3(x+2)}+\frac{2}{x-4}-\frac{7}{x}\right)$.

4.235. $-\frac{44}{(x+5)^3}$ 4.236. $\ln x$. 4.237. $x-\sin 3x$. 4.238. $\frac{1}{(x+\text{[illegible]})^4}$. 4.239. $\frac{2\ln x-3}{x^3}$.

4.240. $105\sqrt{2x+3}$. 4.241. $a^n e^{ax}$. 4.242. $k^n \sin\left(kx+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

4.243. $(-4)^n \cos\left(-4x+3+\frac{n\pi}{2}\right)$. 4.244. $(-1)^n n!\frac{1}{(x+a)^{n+1}}$

4.245. $(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}}+\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right)$ 4.246. $(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$

4.247. $(e^{3x}+3x^2\sin2(x^3+1))dx$. 4.248. $x^{n-1}\ln x(n\ln x+2)dx$. 4.249. $\frac{8\operatorname{tg}^3(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}dx$.

4.250. $\frac{e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x}{a^3}dx$ 4.251. $\frac{-3\ln^2(\cos^2 x+4)\sin 2x}{\cos^2 x+4}dx$. 4.252. $\frac{3^x\ln 3}{1+3^{2x}}dx$.

4.253. $\frac{4x+3}{3\sqrt[3]{(2x^2+3x+4)^2}}dx$. 4.254. $12\ln2\cdot 2^{\operatorname{tg}^3 4x}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\cos^2 4x}dx$. 4.255. $(x^x(\ln x+1)+2x)dx$. 4.256. $\frac{4}{\ln 10}\lg(x^2+25)\cdot\frac{x}{x^2+25}dx$. 4.257. 1. 4.258. $\ln\frac{a}{b}$. 4.259. -2. 4.260. $\frac{1}{3}$. 4.261. ∞. 4.262. 1.

4.263. $\frac{2}{3\sqrt[6]{2}}$. 4.264. $\frac{a^2}{b^2}$. 4.265. $\frac{3}{2}$. 4.266. 2. 4.267. 0. 4.268. $\frac{8}{3}$. 4.269. 0. 4.270. 1.

4.271. 1. 4.272. 0. 4.273 $-\infty$. 4.274. 0. 4.275. $\frac{1}{\pi}$. 4.276. 1. 4.277. 0. 4.278. ln3. 4.279. 0.

4.280. $-\frac{1}{2}$. 4.281. a. 4.282. $\frac{1}{\pi}$. 4.283. 0. 4.284. -1. 4.285. 1. 4.286. 1. 4.287. 1. 4.288. ln3.

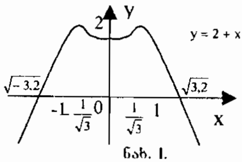
4.289. e^{-2} 4.290. 1. 4.291. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 4.292. e. 4.293. 1. 4.294. $e^{-\frac{1}{2}}$. 4.295. კლებადია $(-\infty;\ 1)$, ზრდადია $(1;\ +\infty)$, $y_{min}(1)=-1$. 4.296. კლებადია $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$, ზრდადია $(-1;\ 1)$, $y_{min}(-1)=-e^{-\frac{1}{2}}$, $y_{max}(1)=e^{-\frac{1}{2}}$. 4.297. კლებადია $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$, ზრდადია $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, $y_{max}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$. 4.298. კლებადია (1;0) $(1;\ +\infty)$, ზრდადია $(-\infty;-1)$ (0;1), $y_{max}(-1)=1$, $y_{min}(0)=0$; $y_{max}(1)=1$. 4.299. კლებადია $(0;\infty)$, ზრდადია $(-\infty;0)$, $y_{max}(0)=\frac{1}{4}$. 4.300. კლე-ბადია $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, ზრდადია $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. $y_{min}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}; y_{max}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ 4.301. კლებადია (1;3); ზრდადია $(-\infty;1)$, $(3;\infty)$, $y_{max}(1)=0$; $y_{min}(3)=-4$. 4.302. კლებადია, (0;1), (1;2), ზრდადია $(-\infty;0)$ $(2;+\infty)$; $y_{max}(0)=-2$; $y_{min}(2)=2$. 4.303. კლებადია $(-\sqrt{8};-2)$ $(2;\sqrt{8})$ ზრდადია $(-2;2)$ $y_{max}(2)=4$; $y_{min}(-2)=-4$. 4.304. ზრდადია $(3;\ +\infty)$; კლებადია $(-\infty;\ 2)$, $y_{min}(2)=0$; $y_{min}(3)=0$. 4.305. კლებადია $(0;\ 1)\cup(1;\ e)$; **ზრდადია** $(e;\ +\infty)$ $y_{min}(e)=e$. 4.306. ზრდადია $(3;\ +\infty)$, კლებადია $(-\infty;3)$, $y_{min}(3)=1$. 4.307. ზრდადია $(-\infty;0)$ $(4;+\infty)$

კლებადია (0; 4), $y_{max}(0)=81$, $y_{min}(4)=3^{-28}$. 4.308. ზრდადია $(-\infty;2)$, კლებადია $(2;+\infty)$, $y_{max}(2)=\frac{1}{2}$. 4.309. ზრდადია მთელ განსაზღვრის არეზე $(0;+\infty)$, ექსტრემუმი არ აქვს. 4.310. ზრდადია $(5,+\infty)$, კლებადია $(-\infty,-5)$; ექსტრემუმი არ აქვს. 4.311. კლებადია $(0;\frac{1}{e})$, ზრდადია $(\frac{1}{e},+\infty)$, $y_{min}\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{1}{e}}$. 4.312. ზრდადია $(-\infty;\ 2)$, კლებადია $(2;\ +\infty)$; $y_{max}(2)=e^5$. 4.313. -1 და 27. 4.314. 0 და $\frac{\pi}{4}$. 4.315. 0 და e^2. 4.316. -18 და 2. 4.317. $(-\infty;0)$, $(0;1)$ და $(3;\infty)$ ჩაზნექილია; $(1;3)$ ამოზნექილია. გადაღუნვის წერტილებია $M_1(1;5{,}5)$ და $M_2(3;-112{,}5)$. 4.318. $(-\infty;0)$, $(1;2)$ გრაფიკი ამოზნექილია; $(0,1)$ $(2;\infty)$ ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილებია $M_1(0;1)$ და $M_2\left(1;\frac{20}{3}\right)$ და $M_3\left(2;\frac{37}{3}\right)$. 4.319. $(-\infty;0)$-ზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(0;\infty)$ – ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილია $M(0;1)$. 4.320. გრაფიკი ყველგან ჩაზნექილია. გადაღუნვის წერტილი არ არსებობს. 4.321. $(-\infty;-3)$-ზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(-3;\infty)$ – ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილი არ არსებობს. 4.322. $(-\infty;2)$-ზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(2;\infty)$ – ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილია $M(2;3)$. 4.323. $(-\infty;-1)$-ზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(-1;\infty)$ – ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილია $M\left(-1;1-\frac{1}{e^2}\right)$. 4.324. $(-\infty;-1)$-ზე და $(1;\infty)$ გრაფიკი ჩაზნექილია; $(-1;1)$ – ამოზნექილია; გადაღუნვის წერტილია $M_1(-1;\sqrt[3]{2})$ და $M_2(1;\sqrt[3]{2})$ 4.325. $(-\infty;-2)$-ზე გრაფიკი ამოზნექილია; $(2;\infty)$ – ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილია $M(-2;-2e^{-2})$. 4.326. გრაფიკი ჩაზნვქილია შუალედებზე $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ და $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\infty\right)$; ამოზნვქილია $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; გადაღუნვის წერტილია $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$ და $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 4.327. $(-\infty;-1)$ და $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ შუალედებზე გრაფიკი ამოზნექილია; $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$– ჩაზნექილია; გადაღუნვის წერტილებია $M_1\left(-1;-2\sqrt{2}\right)$ და $M_2\left(\frac{1}{2};-\sqrt{5}\right)$. 4.328. $x=\pm 2$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y=x$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.329. $x=-3$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y=1$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.330. $x=1$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y=2x$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.331. $x=-2$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y=x-4$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.332. ვერტიკალური ასიმპტოტი არ გააჩნია, $y=\pm 1$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია. 4.333. $x=0$ ვერტიკალური ასიმპტოტია; $y=x$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.334. $x=-2$ და $x=2$ ვერტიკალური ასიმპტოტებია; $y=0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია. 4.335. $x=0$ და $x=\frac{1}{2}$ ვერტიკალური

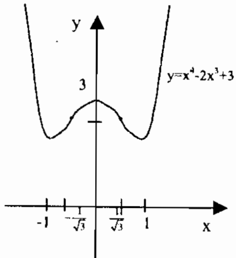
ასიმპტოტებია; $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.336. x=–1 ვერტიკალური ასიმპტოტია; y=0 ჰორიზონტალური ასიმპტოტია (მარცხენა, როცა $x\to-\infty$). 4.337. x=0 ვერტიკალური ასიმპტოტია; y=1 ჰორიზონტალური ასიმპტოტია 4.338. $y=\frac{\pi}{2}$ და $y=-\frac{\pi}{2}$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია. 4.339. $y=\frac{b}{a}x$ დახრილი ასიმპტოტია. 4.340. x=0 ვერტიკალური ასიმპტოტია; y=x+4 დახრილი ასიმპტოტია. 4.341. y=0 ჰორიზონტალური ასიმპტოტია როცა $x\to-\infty$. 4.342. (გვ. 325. ნახ.1) D(y)=R ლუწია. ღერძებთან თანაკვეთის წერტილებია (0;2) $\left(\pm\sqrt{3{,}2};0\right)$. ასიმპტოტები არ გააჩნია. ზრდადია შუალედებზე (-∞;-1) და (0;1), კლებადია (-1;0) და (1;∞). $y_{max}(\pm1)=\frac{5}{2}$; $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ და $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\infty\right)$ შუალედებზე გრაფიკი ამოზნექილია. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ შუალედზე გრაფიკი ჩაზნექილია. წერტილები $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{41}{18}\right)$ და $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{41}{18}\right)$ გადაღუნვის წერტილებია $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0{,}6;\frac{41}{18}\approx2{,}3;\sqrt{3{,}2}\approx1{,}8\right)$. 4.343. (ნახ.2) D(y)=R ლუწია. გრაფიკი oy ღერძს კვეთს წერტილში (0;3). ასიმპტოტები არ გააჩნია. ზრდადია შუალედებზე (-1;0) და (1;∞), კლებადია (-∞;-1) და (0;1) შუალედებზე. $y_{min}(\pm1)=2$; $y_{max}(0)=3$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ შუალედებზე გრაფიკი ამოზნექილია. $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ და $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\infty\right)$ შუალედებზე გრაფიკი ჩაზნექილია. წერტილები $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{22}{9}\right)$ გადაღუნვის წერტილებია. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0{,}6;\frac{22}{9}\approx2{,}4\right)$. 4.344. (ნახ.3.) $D(y)=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ ლუწ-კენტოვნების საკითხი არ ისმის. გრაფიკი სათავეზე გადის. $x=\frac{1}{2}$ გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტია. $y=x+\frac{1}{2}$ დახრილი ასიმპტოტია. ზრდადია შუალედებზე (-∞;0) და (1;∞), კლებადია $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ და $\left(\frac{1}{2};1\right)$; $y_{max}(0)=0$, $y_{min}(1)=2$, $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ შუალედზე გრაფიკი ამოზნექილია. $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ შუალედზე გრაფიკი ჩაზნექილია. გადაღუნვის წერტილები არ არსებობს. 4.345 (ნახ.4) $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$ ლუწია. oy ღერძთან თანაკვეთის წერტილია (0;2). x=±1 ვერტიკალური

ასიმპტოტებია. $y=0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია. ზრდადია შუალედებზე (0;1) და (1;∞), კლებადია (-∞;-1) და (-1;0); $y_{min}(0)=2$, (-∞;-1) და (1;∞) შუალედებზე გრაფიკი ამოზნექილია. (-1;1) შუალედზე გრაფიკი ჩაზნექილია. გადაღუნეის წერტილები არ არსებობს. 4.346. (ნახ.5) $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$ კენტია. გრაფიკი (0;0) წერტილზე გადის. $x=\pm2$ ვერტიკალური ასიმპტოტებია. $y=2x$ დახრილი ასიმპტოტია. ზრდადია შუალედებზე $\left(-\infty;-\sqrt{12}\right)$ და $(\sqrt{12};\infty)$, $(\sqrt{12}\approx3{,}5)$, კლებადია $(-\sqrt{12};-2)$, (-2;2) და $(2;\sqrt{12})$. $y_{min}(\sqrt{12})=10{,}5$, $y_{max}(-\sqrt{12})=-10{,}5$, (-∞;-2) და (0;2) შუალედებზე გრაფიკი ამოზნექილია. (-2;0) და (2;∞) შუალედზე გრაფიკი ჩაზნექილია. (0;0) გადაღუნეის წერტილია. 4.347. (ნახ.6) $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$ ლუწ-კენტოენების საკითხი არ განიხილება. გრაფიკი (0;0) წერტილზე გადის. $x=-1$ ვერტიკალური ასიმპტოტია. $y=x-1$ დახრილი ასიმპტოტია. ზრდადია შუალედებზე (-∞;-2) და (0;∞), (-2;-1), და (-1; 0) შუალედებზე ფუნქცია კლებადია. $y_{min}(0)=0$, $y_{max}(-2)$-4, (-∞;-1) შუალედებზე გრაფიკი ამოზნექილია. (-1;∞) შუალედზე გრაფიკი ჩაზნექილია, გადაღუნეის წერტილები არ არსებობს. 4.348. (ნახ.7) $D(y)=R$ ლუწია. გრაფიკი გადის სათავეზე. $y=1$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია. ზრდადია შუალედებზე (0;∞), კლებადია (-∞;0) შუალედზე. $y_{min}(0)=0$, $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ და $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\infty\right)$ შუალედებზე გრაფიკი ამოზნექილია. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ შუალედზე გრაფიკი ჩაზნექილია, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{4}\right)$ გადაღუნვის წერტილებია $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\approx0{,}6\right)$. 4.349. (ნახ.8) $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;\infty)$ ლუწ-კენტოვნების საკითხი არ განიხილება. გრაფიკი საკოორდინატო ღერძებს გადაკვეთს წერტილებში (3;0), (-2;0) და (0,3). $x=2$ ვერტიკალური ასიმპტოტია. $y=x+1$ დახრილი ასიმპტოტია. ფუნქცია განსაზღვრის არეში ყველგან ზრდადია. (-∞;2) შუალედებზე გრაფიკი ჩაზნექილია. შუალედზე (2;∞) გრაფიკი ამოზნექილია. გადაღუნეის წერტილი გრაფიკზე არ არის. 4.350. (ნახ.9) $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$ ფუნქცია კენტია. გრაფიკი oy ღერძს გადაკვეთს წერტილში (0;2), $x=\pm2$ ვერტიკალური ასიმპტოტია. $y=-1$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია. შუალედებზე (-∞;-2) და (-2;0) ფუნქცია კლებადია, ხოლო შუალედებზე (0;2) და (2;∞) ფუნქცია ზრდადია. (-∞;-2) და (2;∞) შუალედებზე გრაფიკი ამოზნექილია. (-2;2) შუალედზე გრაფიკი ჩაზნექილია. გადაღუნეის წერტილი არ გააჩნია. 4.351. (ნახ.10) $D(y)=(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$ ლუწ-კენტოვნების საკითხი არ ისმის. ღერძებთან თანაკვეთის წერტილებია (-2;0), და (0;1) $x=2$ ვერტიკალური ასიმპტოტია. $y=1$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია. შუალედებზე (-∞;-2) და (2;∞) ფუნქცია კლებადია, ხოლო შუალედზე (-2;2) ფუნქცია ზრდადია. $y_{min}(-2)=0$.(-4;2) და (2;∞) შუალედებზე გრაფიკი ჩაზნექილია, (-∞;-4)-ზე შუალედზე გრაფიკი ამოზნექილია. გადაღუნვის წერტილია $M\left(-4;\frac{1}{9}\right)$. 4.352. (ნახ.11) $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$ ლუწ-კენტოვნების საკითხი არ ისმის. oy ღერძთან თანაკვეთის წერტილია (0;1), $x=-1$ ვერტიკალური ასიმპტოტია. $y=0$ გრაფიკის მარცხენა ჰორიზონტალური ასიმპტოტია. შუალედებზე (-∞;-1) და (-1;0) ფუნქცია კლებადია, ხოლო შუალედზე (0;∞) ფუნქცია ზრდადია. $y_{min}(0)=1$.(-∞;-1)-ზე გრაფიკი

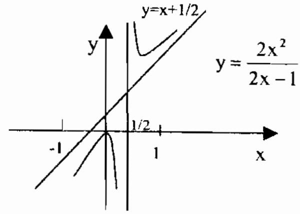
ამოზნექილია; (-1;∞) შუალედზე გრაფიკი ჩაზნექილია, გადაღუნეის წერტილი არ გააჩნია.



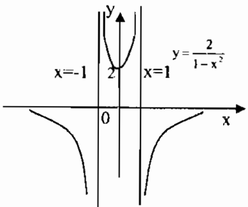
ნახ. 1.



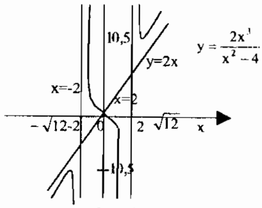
ნახ.2



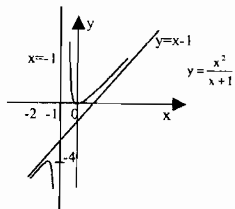
ნახ.3



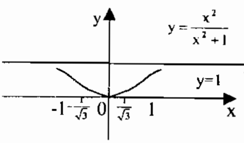
ნახ. 4



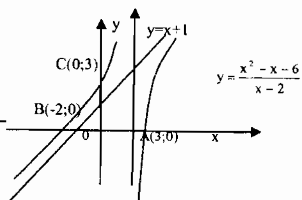
ნახ. 5



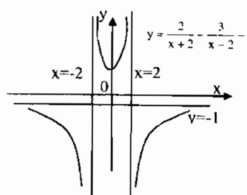
ნახ.6



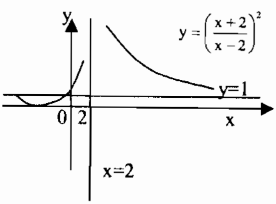
ნახ. 7.



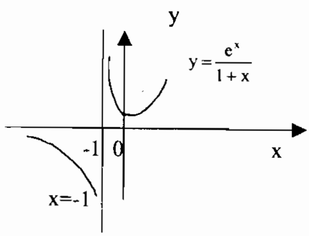
ნახ. 8



ნახ. 9



ნახ. 10.



ნახ. 11.

5.1. 25 და 0. 5.2. 0 და –6. 5.3. $\frac{2}{5}$ და $\frac{4}{9}$. 5.4. 6 და 3. 5.5. განსაზღვრულია მთელ სიბრტყეზე. 5.6. $\{(x,y)\in R^2 \; -\infty<x<+\infty,\; y\neq\pm1\}$. 5.7. $\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\geq 9\}$. 5.8. $\{(x,y)\in R^2 -\infty<x<+\infty \;\; x-1\leq y\leq -x+1\}$. 5.9. $\{(x,y)\in R^2 \; -\infty<x<+\infty,\; y<x\}$. 5.10. განსაზღვრულია მთელ სიბრტყეზე. 5.11. $\{(x,y)\in R^2 | -\infty<x<+\infty,\; x^2+y^2>1\}$. 5.12. $\{(x,y)\in R^2 |\; y>x^2,\; y\neq x^2+1\}$. 5.13. $\{(x,y)\in R^2 |\; |x|\leq|y| (x,y)\neq(0;0)\}$. 5.14. $\{(x,y)\in R^2 \mid x\neq\pm2,\; y\neq\pm3\}$. 5.15. $\{(x,y)\in R^2 \mid |x|<2,\; |y|<3\}$. 5.16. $\left\{(x,y)\in R^2 \,|\, \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}\leq 1\right\}$ 5.17. 0. 5.18. 0. 5.19. 2. 5.20. e^k. 5.21. ზღვარი არ აქვს. 5.22. ზღვარი არ აქვს. 5.23. $-\frac{1}{4}$. 5.24. 0. 5.25. $+\infty$ 5.26. 2. 5.27 უწყვეტია, როცა $(x,y)\in D(z)$ 5.28. წყვეტილია $y=x$ წრფეზე. 5.29. წყვეტილია $x^2+y^2=1$ წრეწირზე. 5.30. უწყვეტია, როცა $(x,y)\in D(z)$. 5.31. წყვეტის წერტილთა სიმრავლეა $y=x^2$ პარაბოლის წერტილები. 5.32. –3. 5.33. $2\ln 3\sqrt[4]{27}$. 5.34. –1. 5.35. 0. 5.36. –3.

5.37. $z'_x=3(x^2-ay)$, $z'_y=3(y^2-ax)$. 5.38. $z'_x=\frac{x}{(x+y)^2}$, $z'_y=-\frac{y}{(x+y)^2}$. 5.39. $z'_x=-\frac{y}{x^2}$, $z'_y=\frac{1}{x}$.

5.40. $z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 5.41. $z'_x=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $z'_y=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

5.42. $z'_x=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y=\frac{x}{x^2+y^2}$ 5.43. $z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$

5.44. $z'_x=-\frac{y}{x^2}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$, $z'_y=\frac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$. 5.45. $z'_x=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$, $z'_y=-\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$. 5.46. $z'_x=-\frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{tg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$, $z'_y=\frac{x+a}{2y\sqrt{y}}\operatorname{tg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

5.47. $z'_x=2x\sin^2 y$, $z'_y=x^2\sin 2y$. 5.48. $z'_x=2y^{\operatorname{tg}^2 x}\ln y\cdot\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$, $z'_y=\operatorname{tg}^2 x\cdot y^{\operatorname{tg}^2 x-2}$. 5.49. $z'_x=2xy^2(x^2+y^2)^{y^2-1}$,

$z'_y=(x^2+y^2)^{y^2}\cdot 2y\left(\ln(x^2+y^2)+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$. 5.50. $z'_x=\frac{\cos^2 y}{x^{\sin^2 y}}$, $z'_y=-\sin 2yx^{\cos^2 y}\ln x$

5.51. $dz=(2x-4y)dx+(9y^2-4x)dy$. 5.52. $dz=(2x+3)dx+2ydy$. 5.53. $dz=(3y-4x)dx+(3x-6y)dy$

5.54. $dz=\frac{2x}{\sqrt{y^4-x^4}}(dx-xy^5dy)$ 5.55. $dz=\frac{y(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{x}{1+x^2}dy$.

5.56. $dz = e^{\frac{x^2}{y}} \cdot \frac{x}{y}\left(2dx - \frac{x}{y}dy\right)$. 5.57. $dz = \frac{2}{\sin^2(x^2 - y^2)}(-xdx + ydy)$.

5.58. $dz = e^{\cos\frac{x}{y}} \sin\frac{x}{y}\left(-\frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy\right)$. 5.59. $dz = \frac{2}{1+(x^2+y^2)^2}(xdx + ydy)$.

5.60. $dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xdx + ydy)$. 5.61. $dz = \frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy$ 5.62. $dz = ydx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy$ 5.63. $\approx 0{,}9$ 5.64. $\approx 0{,}8$. 5.65 $\approx 0{,}03$. 5.66. $\approx 0{,}505$ 5.67. $z''_{xx} = 6y^3$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 18xy^2$, $z''_{yy} = 40y^3 + 18x^2y$ 5.68. $z''_{xx} = e^x(\cos y + (x+2)\sin y)$, $z''_{xy} = z''_{yx} = e^x(-\sin y + (x+1)\cos y)$, $z''_{yy} = -e^x(\cos y + x\sin y)$ 5.69. $z''_{xx} = -4y(x+y)^{-3}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2(x-y)(x+y)^{-3}$, $z''_{yy} = 4x(x+y)^{-3}$.

5.70. $z''_{xx} = (x^2 - y^2)(x^2+y^2)^{-2}$, $z''_{xy} = 2xy(x^2+y^2)^{-2}$, $z''_{yy} = -(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-2}$.

5.71. $z''_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$. 5.72. $z''_{xx} = 18\cos 2(3x+5y)$, $z''_{xy} = 30\cos 2(3x+5y)$, $z''_{yy} = 50\cos 2(3x+5y)$. 5.73. $z''_{xx} = \frac{2y^2\sin(xy)}{\cos^3(xy)}$.

$z''_{xy} = \frac{\cos^2(xy) + xy\sin(2xy)}{\cos^4(xy)}$, $z''_{yy} = \frac{2x^2\sin(xy)}{\cos^3(xy)}$. 5.74. $z''_{xx} = y(y-1)(\cos x)^{y-2}\cdot\sin^2 x - (\cos x)^y y$, $z''_{yy} = (\cos x)^y \ln^2\cos x$, $z''_{xy} = -(\cos x)^{y-1}\sin x(y\ln\cos x + 1)$.

5.83. $\frac{12(x^2+1)}{x(x^2+2)}$. 5.84. $-\frac{2x}{x^4+1}$. 5.85. $\frac{2}{x^2+4}$. 5.86. $\frac{1+\ln x}{x^2\ln^2 x + 2x\ln x + 2}$

5.87. $4t^3\sin\frac{t^4}{t^3+1} + t^4\cos\frac{t^4}{t^3+1}\cdot\frac{t^6+4t^3}{(t^3+1)^2}$. 5.88. $\frac{t^3(96t^2-100)}{\sqrt{1-t^8(25-16t^2)^2}}$.

5.89. $2\ln 3\cdot 3^{\cos^2 t + \sin^2 2t}\left(-\frac{\sin 2t}{2} + \sin 4t\right)$. 5.90. $\frac{2(3u-v^2)(12u^2-2uv^2-3v)}{\cos^2((2u^2-v)(3u-v^2)^2)}$.

5.91. $e^{u^3(\cos^3 v + \sin^3 v)}\frac{3}{2}u^3\sin 2v(\sin v - \cos v)$. 5.92. $z_{min}=z(1,0)=0$. 5.93. ექსტრემუმი არ აქვს. 5.94. $z_{min}=z(1,0)=-1$. 5.95. $z_{max}=z(3;2)=108$.

5.96. $z_{min} = z(\sqrt{2};-\sqrt{2}) = z(-\sqrt{2};\sqrt{2}) = -8$.

5.97. $z_{min}=z(-1,-1)=-7$. 5.98. $z_{min}=z(-12,4)=-41$. 5.99. $z_{min}=z(4,-1)=-41\frac{2}{3}$.

5.100. $z_{min}=z\left(\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right) = -\frac{305}{96}$, $z_{max} = z(-4;-1) = 43\frac{2}{3}$ 5.101. $z_{min}=z(5,2)=30$.

6.1 $3x^3+3x^2+x+C$. 6.2 $2x^3+2x^2+\ln|x|+C$. 6.3 $\frac{3}{2}x^4+\frac{11}{3}x^3+3x^2+x+C$.

6.4 $\frac{1}{2}x^2+2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+C$. 6.5 $-\frac{2}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$. 6.6 $\frac{8^x}{\ln 8}-\frac{12^x}{\ln 12}+C$.

6.7 $e^x-\frac{1}{2x^2}+C$. 6.8 $\frac{1}{2}(x-1)^2$. 6.9 $2\ln|x|-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}+C$.

6.10 $\frac{1}{\ln\frac{3}{4}}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x-\left(\frac{4}{3}\right)^x\right)-2x-C$ 6.11 tgx–x+ C. 6.12 –ctgx – x + C. 6.13 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$.

6.14 2arctgx – 3arcsinx +C. 6.15 sinx + cosx + C. 6.16 $-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}x+C$. 6.17 $\frac{1}{2}\mathrm{tg}x+C$.

6.18 cosx + C. 6.19 $-\frac{1}{9(3x+2)^3}$. 6.20 $\frac{(ax+b)^{1-k}}{a(1-k)}$. 6.21 $\frac{2}{9}\sqrt{(3x+4)^3}$.

6.22 $\frac{3}{8}\sqrt[5]{(2x-3)^4}$. 6.23 $\sqrt{x^2+4}$. 6.24 $\frac{1}{6}\ln\left|4x^3+7\right|$. 6.25 $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+4)^4}$. 6.26 $\frac{1}{2}\sqrt{7+x^4}$.

6.27 $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+9)$. 6.28 $\frac{1}{5}e^{5x}$. 6.29 $\frac{1}{3}\ln^3 x$. 6.30 $\ln(e^x+3)$. 6.31 $\frac{1}{\ln 2}2^{\mathrm{arctg}x}$.

6.32 $\frac{1}{3}\mathrm{tg}(3x+2)$. 6.33 $\frac{1}{3}e^{x^3}$. 6.34 $\frac{1}{\ln a}a^{\sin x}$. 6.35 $2\sqrt{\mathrm{tg}+1}$. 6.36 arctg(x + 1). 6.37 $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x}\right|$. 6.38 $-\frac{1}{3}\cos(1+x^3)$. 6.39 $\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{tg}^2x}$. 6.40 $-e^{\frac{1}{x}}$. 6.41 $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x$. 6.42 $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|$. 6.43 $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$. 6.44 $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$. 6.45 $-\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{3}}{\sqrt{5}x+\sqrt{3}}\right|$.

6.46 $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{3}}$. 6.47 $-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\ln|2x-3|$. 6.48 $\frac{1}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{5}{3}}x$.

6.49 $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+3}\right|$. 6.50 $x+\frac{1}{6}\cos 6x$. 6.51 $\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{14}\cos x\,7x$. 6.52 $2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-x$. 6.53 $\frac{1}{3}\sqrt[4]{3x^4-2}$. $x\neq\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$. 6.54 $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{3}}$. 6.55 $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x^3-2}{x^3+2}\right|$. 6.56 $\frac{1}{4}\ln^4 x$. 6.57 $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\ln^2 x)$. 6.58 $\frac{5}{2}\sqrt[5]{\sin^2 x}$, $x\neq\pi k$, $k\in Z$. 6.59 –ln|cosx|. 6.60 ln|sinx|

6.61 $\frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x)$. 6.62 $\sqrt{x^2+9}+3\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|$. 6.63 $-\sqrt{9-x^2}+3\arcsin\frac{x}{3}$, $x\neq 3$.

6.64 $\frac{1}{3}\ln(|x-3|(x+3)^2)$. 6.65 $3\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}\ln^3 x$. 6.66 $\frac{3}{4b}\sqrt[3]{(a+be^x)^4}$. 6.67 $\frac{1}{a\ln b}\operatorname{arctg}\frac{b^x}{a}$. 6.68 $\frac{x}{2}-\frac{1}{4b}\sin(2a+2bx)$. 6.69 $\frac{x}{2}+\frac{2}{4b}\sin(2a+2bx)$. 6.70 $\frac{1}{b}\operatorname{tg}(a+bx)-x$. 6.71 $-\frac{1}{b}\operatorname{tg}(a+bx)-x$. 6.72 $\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax+b}{2}\right|$. 6.73 $\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax+b}{2}\right)\right|$.

6.74 $\frac{1}{2}\ln|\cos(1-x^2)|$. 6.75 $\frac{1}{4}(\arcsin x)^4$, $x\neq\pm1$. 6.76 $\frac{1}{6}\sqrt{(3-2\cos 2x)^3}$. 6.77 $\arcsin\frac{\operatorname{tg}x}{5}$, $x\neq\pi k\pm\operatorname{arctg}5$. $k\in Z$. 6.78 $-2\operatorname{ctg}\sqrt{x}$. 6.79 $-\frac{1}{3}(1-2\operatorname{tg}x)^{\frac{3}{2}}$. 6.80 $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}\sin x}{3}$. 6.81 $-\sqrt{9-x^2}+\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{x}{3}\right)^2$. 6.82 $\frac{1}{3}\ln|x^3-3x+3|$. 6.83 $\frac{1}{4}\arcsin(2x^2)+\frac{1}{8}\sqrt{1-4x^4}$, $x\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6.84 $\frac{3}{7}(x+1)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}$. 6.85 $\frac{3}{8}(4-\sin^2 x)\times\sqrt[3]{\sin^2 x}$, $\sin x\neq0$. 6.86 $\sqrt{5x^2-2x+1}$. 6.87 $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln(x^4+4)$. 6.88 $2x-3\ln|x+1|$.

6.89 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln|2x-1|$. 6.90 $\frac{1}{8}\ln(4x^2+4x+5)-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}$. 6.91 $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|$.

6.92 $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+10)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}$. 6.93 $2\sqrt{4+\ln x}+2\ln\left|\frac{\sqrt{4+\ln x}-2}{\sqrt{4+\ln x}+2}\right|$

6.94 $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. 6.95 $2\sqrt{x+1}+\ln\frac{|\sqrt{x+1}-1|}{\sqrt{x+1}+1}$. 6.96 $\frac{1}{\sqrt{10}\ln 5}\operatorname{arctg}\frac{5^x}{\sqrt{10}}$.

6.97 $-x\cos x+\sin x$. 6.98 snix+cosx. 6.99 $-\frac{x3^{-x}}{\ln 3}-\frac{3^{-x}}{\ln^2 3}$. 6.100 $\frac{x\cdot 7^x}{\ln 7}-\frac{7^x}{\ln^2 7}$. 6.101 $-xe^{-x}-e^{-x}$. 6.102 $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$. 6.103 $\frac{1}{5}x\sin 5x+\frac{1}{25}\cos 5x$. 6.104 $x\ln x-x$.

6.105 $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln|x|-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}$. 6.106 $\frac{(x^2+1)}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x$. 6.107 $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. 6.108 $(x^2-x+2)e^x$. 6.109 $a^x\left(\frac{x^2+1}{\ln a}-\frac{2x}{\ln^2 a}+\frac{2}{\ln^3 a}\right)$. 6.110 $-\frac{e^{-2x}}{4}(2x+1)$. 6.111 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)$.

6.112 $-\frac{1}{4x^2}(1+2\ln x)$. 6.113 $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)$. 6.114 $\frac{x}{2}\sin inx+\cos inx)$. 6.115 $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$. 6.116 $(1+\operatorname{tg}x)\ln(1+\operatorname{tg}x)-\operatorname{tg}x$. 6.117 $(e^x+1)\ln(e^x+1)-e^x$.

6.118 $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)$. 6.119 $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$.

6.120 $x(\ln^2|x| - 2\ln|x| + 2)$. 6.121 $-e^{-x}(2 + 2x + x^2)$. 6.122 $a^x\left(\frac{x^2}{\ln a} - \frac{2x}{\ln^2 a} + \frac{2}{\ln^3 a}\right)$.

6.123 $\frac{2x^2 - 1}{4}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2}$. 6.124 $x\ln(x^2 + 1) - 2x + 2\mathrm{arctg}x$ 6.127 $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. 6.128 $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 5) + \mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}$. 6.129 $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{5}}$. 6.130 $\frac{3}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + 4\mathrm{arctg}(x - 2)$. 6.131 $\frac{2}{3}\ln(3x^2 + 2x + 5) + \frac{20}{3\sqrt{14}}\mathrm{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{14}}$. 6.132 $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2 + 2x + 3\right| + \frac{9}{2\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$. 6.133 $\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right|$. 6.134 $\arcsin\frac{x+2}{3}$.

6.135 $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{4x-3}{5}$. 6.136 $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x - 1 + \sqrt{9x^2 - 6x - 3}\right|$. 6.137 $3\sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

6.138 $-4\sqrt{3 - 2x - x^2} + 3\arcsin\frac{x+1}{2}$. 6.139 $\sqrt{x^2 + 3x + 5} - \frac{1}{2}\ln\left|x + 1{,}5 + \sqrt{x^2 + 3x + 5}\right|$. 6.140 $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4\mathrm{tg}x + 3}{\sqrt{17}}$. 6.141 $\ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|}$. 6.142 $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3(x-2)^2}{(x+1)^5}\right|$.

6.143 $\frac{5}{6}\ln|x| + \frac{9}{10}\ln|x - 2| - \frac{26}{15}\ln|x + 3|$. 6.144 $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|$. 6.145 $\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. 6.146 $\frac{6}{x+1} + \ln\frac{x^2}{|x+1|}$. 6.147 $\frac{2}{x-1} + \ln|x(x-1)|$. 6.148 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

6.149 $-\frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)}$. 6.150 $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$. 6.151 $x + \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$. 6.152 $\frac{1}{2}\ln|x + 1| - \frac{1}{4}\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2(x+1)}$. 6.153 $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 6.154 $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{4}\ln\left|(x-1)(x+1)^3\right| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x$ 6.155 $\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

6.156 $\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x$. 6.157 $\frac{2x-1}{2(x^2 2x + 2)} + \mathrm{arctg}(x + 1)$.

6.158 $\frac{3x - 17}{2(x^2 - 4x + 5)} + \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + \frac{15}{2}\mathrm{arctg}(x - 2)$.

6.159 $\frac{1}{9}\ln\frac{x^2 + x + 1}{(x-2)^2} - \frac{x}{3(x^3 - 1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 6.160 $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{4(x^2+1)}$.

6.161 $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$. 6.162 $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$. 6.163 $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$. 6.164 $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$. 6.165 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x$. 6.166 $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$. 6.167

$\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$. 6.168 $\frac{3}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x$. 6.169 $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x$.

6.170 $\frac{1}{16}x-\frac{1}{164}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x$. 6.171 $-\frac{1}{\sin x}$. 6.172 $\frac{1}{\cos x}$. 6.173 $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}$.

6.174 $\frac{1}{2\cos^2 x}+2\ln|\cos x|-\frac{1}{2}\cos^2 x$. 6.175 $\frac{\sin^3 x}{\cos x}-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\sin 2x$. 6.176 $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 6.177 $\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$. 6.178 $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+2\ln|\operatorname{tg}x|$.

6.179 $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg}x$ 6.180 $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}x$ 6.181 $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$

6.182 $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+3\operatorname{tg}x-3\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$. 6.183 $\operatorname{tg}x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$

6.184 $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|$. 6.185 $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg}x+x$. 6.186 $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x$.

6.187 $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x$. 6.188 $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}$. 6.189 $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x$.

6.190 $\frac{1}{4}\sin(2x+15)-\frac{1}{16}\sin(8x+1)$. 6.191 $-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{12}\cos 6x$.

6.192 $\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{4}x$. 6.193 $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 6.194 $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$.

6.195 $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. 6.196 $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}$. 6.197 $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|$.

6.198 $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 6.199 $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\right)$. 6.200 $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$. 6.201 $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$

6.202 $-\frac{1}{\operatorname{tg}x+1}$. 6.203 $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$. 6.204 $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}\right|$. 6.205 $-\frac{1}{\sqrt{41}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{4+\sqrt{41}}{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{4-\sqrt{41}}{5}}\right|$.

6.206 $\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. 6.207 $\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 6.208 $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}$.

თავი VII

7.1 1. 7.2 e^x-1. 7.3 $\frac{2}{3}$. 7.4 $\frac{\pi}{2}$. 7.5 1. 7.6 $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$. 7.7 $\frac{1}{5}$. 7.8 $\frac{5}{3}+6\sqrt[3]{2}$. 7.9 $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 7.10 $\frac{\pi}{2}$. 7.11 $\frac{7}{3}$. 7.12 $\frac{2}{5}$. 7.13 $\frac{\pi}{18}$. 7.14 $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. 7.15 $\sqrt{3}-1$. 7.16 $\ln(\sqrt{2}+1)$. 7.17 $\frac{7}{4}$. 7.18 $\frac{27}{10}\sqrt[3]{4}+\frac{24}{7}\sqrt[6]{2}-3\frac{57}{70}$. 7.19 $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$. 7.20 $1-\frac{\pi}{4}$. 7.21 $\frac{\pi}{2}-1$. 7.22 $\frac{\pi}{6}+\ln\sqrt{3}$. 7.23 ln3. 7.24 $\mathrm{arctg}\,e-\frac{\pi}{4}$. 7.25 $3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}-1\right)$. 7.26 $\frac{7}{72}$. 7.27 $\ln\sqrt{2}$. 7.28 $\frac{e-1}{2e}$. 7.29 $\frac{4}{3}$. 7.30 arctg3–arctg2. 7.31 $\sqrt{2}-1$. 7.32 $\frac{2}{3}\sqrt[4]{27}$. 7.33 $\frac{4}{3\ln 5}$. 7.34 $\frac{1}{4}\ln 4$. 7.35 $-\frac{\pi}{6}$. 7.36 $\frac{\pi}{6}$. 7.37 $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{3}{2}$. 7.38 $\frac{1}{3}\ln\frac{5+\sqrt{26}}{2+\sqrt{5}}$. 7.39 $\frac{2}{9}\pi$. 7.40 $\ln(1+\sqrt{2})$. 7.41 $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$. 7.42 $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{8}$. 7.43 $\frac{1}{2}\ln 3$. 7.44 0. 7.45 $\frac{1}{5}\arcsin\frac{5}{6}$. 7.46 $\frac{\pi}{18}$. 7.47 $-\frac{1}{3}$. 7.48 $\frac{1}{3}(e-1)$. 7.49 $-\frac{\pi}{8}$. 7.50 1. 7.51 $\frac{\pi}{4}$. 7.52 $-\frac{2}{5}$. 7.53 1. 7.54 $\frac{\pi-2}{8}$. 7.55 1. 7.56 e–4. 7.57 $\frac{9-3\sqrt[3]{e^2}}{4}$. 7.58 $2-\frac{3}{4\ln 2}$. 7.59 $\frac{7\ln^2 7-14\ln 7+12}{\ln^3 7}$. 7.60 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\ln\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$. 7.61 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$. 7.62 e–2. 7.63 $\pi^3-6\pi$. 7.64 1. 7.65 $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$. 7.66 $-\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$. 7.67 $\frac{\pi}{36}(9-4\sqrt{3})+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 7.68 $6\sqrt{e}-8$. 7.69 $\frac{1}{2}$. 7.70 განშლადია. 7.71 განშლადია. 7.72 $\frac{1}{\ln a}$. 7.73 განშლადია, როცა $k\geq 0$, $-\frac{1}{k}$ თუ $k<0$. 7.74 განშლადია. 7.75 $\frac{\pi}{2ab}(ab>0)$. 7.76 $\frac{1}{2\ln^2 2}$. 7.77 $\frac{\pi}{4}$. 7.78 $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 7.79 $\frac{\pi}{2}$. 7.80 განშლადია. 7.81 განშლადია. 7.82 $\frac{\pi}{3}$. 7.83 განშლადია. 7.84 განშლადია. 7.85 განშლადია. 7.86 განშლადია. 7.87 e^2. 7.88 განშლადია. 7.89 $\frac{1}{3}$. 7.90 $\frac{5}{2}(\sqrt[5]{3}+1)$. 7.91 $\frac{16}{3}$. 7.92 $2\sqrt{2}$. 7.93 π.

თავი VIII

8.1 0,8. 8.2 $\frac{4}{3}(5\sqrt{10}-8)$. 8.3 27. 8.4 $2\mathrm{arctg}2-\frac{4}{15}$. 8.5 $\frac{32}{3}$. 8.6 8ln2. 8.7 19,2. 8.8 $\frac{16}{3}$. 8.9 1. 8.10 36. 8.11 12. 8.12 $\frac{32}{3}$. 8.13 $\frac{14}{3}$. 8.14 $\frac{16}{3}$. 8.15 $17\frac{1}{2}-6\ln 6$. 8.18 1,35+ln2.

8.19 $\frac{28}{3}$. 8.20 $24\frac{22}{27}$. 8.21 $\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}}$. 8.22 $2\ln ctg15^0$. 8.23 $6a$. 8.24 $\frac{13}{3}$. 8.25 $8(2-\sqrt{3})$.

8.26 $\frac{108}{5}\pi$ 8.27 32π. 8.28 $\frac{95}{5}\pi$ 8.29 $\frac{\pi^2}{2}$. 8.30 $\frac{\pi}{4}(e^4-1)$. 8.31 $\frac{4}{5}\pi$ 8.32 $\frac{\pi}{4}$. 8.33 ა) $\frac{4}{3}ab^2\pi$, ბ) $\frac{4}{3}a^2b\pi$. 8.34 $\frac{4}{3}ab^2\pi$. 8.35 $\frac{28}{3}a^2b\pi$. 8.36 $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$.

თავი IX

9.1 $S_n=1-\frac{1}{n+1}, S=1$. 9.2 $S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right), S=\frac{1}{3}$. 9.3 $S_n=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right), S=\frac{1}{8}$.

9.4 $S_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right), S=\frac{5}{16}$. 9.5 $S_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right), S=\frac{11}{18}$.

9.6 $S_n=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n}, S=\frac{3}{2}$. 9.7 $S_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right), S=\frac{23}{45}$.

9.8 $S_n=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right), S=\frac{23}{90}$. 9.16 განშლადია. 9.17 კრებადია. 9.18 განშლადია. 9.19 კრებადია. 9.20 კრებადია. 9.21 განშლადია. 9.22 კრებადია. 9.23 კრებადია. 9.24 განშლადია. 9.25 კრებადია. 9.26 კრებადია. 9.27 განშლადია. 9.28 განშლადია. 9.29 კრებადია. 9.30 განშლადია. 9.31 განშლადია. 9.32 განშლადია. 9.33 კრებადია. 9.34 განშლადია. 9.35 კრებადია. 9.36 კრებადია. 9.37 განშლადია. 9.38 კრებადია. 9.39 კრებადია. 9.40 განშლადია. 9.41 კრებადია. 9.42 კრებადია. 9.43 კრებადია. 9.44 კრებადია. 9.45 განშლადია. 9.46 კრებადია. 9.47 განშლადია. 9.48 განშლადია. 9.49 განშლადია. 9.50 კრებადია. 9.51 კრებადია. 9.52 კრებადია. 9.53 კრებადია. 9.54 განშლადია. 9.55 კრებადია. 9.56 კრებადია. 9.57 განშლადია. 9.58 განშლადია. 9.59 კრებადია. 9.60 კრებადია. 9.61 განშლადია. 9.62 განშლადია. 9.63 კრებადია. 9.64 განშლადია. 9.65 კრებადია. 9.66 კრებადია. 9.67 განშლადია. 9.68 კრებადია. 9.69 კრებადია. 9.70 კრებადია. 9.71 განშლადია. 9.72 კრებადია. 9.73 კრებადია აბსოლუტურად. 9.74 პირობით კრებადია. 9.75 განშლადია. 9.76 კრებადია აბსოლუტურად. 9.77 კრებადია აბსოლუტურად. 9.78 განშლადია. 9.79 პირობით კრებადია. 9.80 კრებადია აბსოლუტურად. 9.81 პირობით კრებადია. 9.82 კრებადია აბსოლუტურად, როცა $\alpha>1$, პირობით კრებადია, როცა $0<\alpha\le 1$ და განშლადია, როცა $\alpha\le 0$. 9.83 კრებადია აბსოლუტურად მთელ ღერძზე, $x\in R$. 9.84 კრებადობის არეა $|x|>1$, აბსოლუტურად კრებადია ამავე არეზე. 9.85 კრებადობის არე $(0, +\infty)$, აბსოლუტურად კრებადია, როცა $x\in(1,+\infty)$. 9.86 კრებადობის არეა $\frac{1}{e}<x<e$, აბსოლუტურად კრებადია. 9.87 კრებადობის არეა $R\backslash\{3\}$, კრებადია აბსოლუტურად ამავე არეში. 9.88 კრებადობის არეა $(-\infty, -1)$, აბსოლუტურად კრებადია ამავე არეში. 9.89 აბსოლუტურად კრებადია, როცა $-1\le x\le 1$.

9.90 კრებადობის არეა $-1\le x<1$, კრებადია აბსოლუტურად $-1<x<1$. 9.91 კრებადია აბსოლუტურად, როცა $-1<x<1$. 9.92 როცა $x>0$, კრებადია აბსოლუტურად. 9.93 კრებადობის არეა $[0;+\infty)\cup\{k\pi,\ k=-1,-2,...\}$. 9.94 კრებადობის არეა $-1\le x<1$. 9.99 $S(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$. 9.100 $S(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$. 9.101 $-1<x\le 1$. 9.102 $x=0$. 9.103 $-\infty<x<\infty$. 9.104 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$. 9.105 $-1\le x\le 1$. 9.106 $x=0$. 9.107 $-1\le x<1$. 9.108 $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+\dots$. 9.109 $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\dots\right)$. 9.110 $1-x^2-\frac{x^4}{2!}-..+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\dots$

9.111. $1+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}1\cdot 3\cdots(2n-3)x^{2n}}{2\cdot 4\cdots(2n-2)2n}+\dots\right]$.

9.112. $-\frac{2x^3}{3!}+\frac{4x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$.

9.113 $\ln 10+\left[\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\dots\right]$.

9.114 $1-\left[x^2-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\dots\right]$. 9.115 $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$.

9.116 $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. 9.117 $2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

თავი X

10.8 $xy'-y=0$. 10.9 $y-2xy'=0$. 10.10 $xy'-y\ln y'=0$. 10.11 $2yy''-y'^2=0$. 10.12 $x+yy'=0$. 10.13 $y=xy'+y'^2$. 10.14 $y=xy'\ln\frac{x}{y}$. 10.15 $y^2-x^2=2xyy'$. 10.16 $y=e^{\frac{xy'}{y}}$. 10.17 $y^2+y'^2=1$. 10.18 $y''y^2(\ln y-1)=y'^2(xy'-y)$. 10.19 $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$. 10.20 $(yy''+y'^2)^2=-y^3y''$. 10.21 $x^2+y=xy'$. 10.22 $xy'+y=0$. 10.23 $2xyy'=x^2+y^2$. 10.24 $2xyy'-y^2=2x^3$. 10.25 $y=x^3-x^2+x+C$; $y=x^3-x^2+x+1$. 10.26 $y=Cx$; $y=4x$. 10.27 $y=Ce^x$; $y=4e^{x+2}$. 10.28 $(1-x)(1+y)=C$. 10.29 $x^2(1+y^2)=C$. 10.30 $x^2+y^2=\ln Cx^2$. 10.31 $y=C\sin x$. 10.32 $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. 10.33 $y\sin x+\cos y-x\cos x+\sin x=C$. 10.34 $\sqrt{1+x^2}\cdot e^{\operatorname{arctg}y}=C$. 10.35 $1+y^2=C(1-x^2)$. 10.36 $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$. 10.37 $Cx=\frac{y-1}{y}$. 10.38 $10^x+10^{-y}=C$. 10.39 $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right|=C-2\sin\frac{x}{2}$. 10.40 $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. 10.41 $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$. 10.42 $Cy=\sqrt{1+e^{2x}}$. 10.43 $y=x-\frac{1}{x-C}$.

10.44 $x+C=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)$. 10.45 $8x+2y+1=2\operatorname{tg}(4x+C)$. 10.46 $\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C$; $y^2-1=2\ln\frac{1+e^x}{1-e^x}$. 10.47 $2y=C\sin^2x-1$; $y=2\sin^2x-\frac{1}{2}$. 10.48 $y=\arccos e^{Cx}$. 10.49 $(1+e^x)^3\operatorname{tg}y=8$. 10.50. $2\ln|\sin y|=e^{(x-1)^2}-1$. 10.51. $x+y-2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\ln\left|(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}-1)\right|=C$.

10.52 $\sqrt{2}\sin x+\sin y-\cos y=0$. 10.53 $\ln x-\frac{x}{y}=C$. 10.54 $y=x\ln\frac{C}{x}$. 10.55 $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln y=C$.

10.56 $y=x\ln\frac{y}{C}$. 10.57 $y=x\sqrt[3]{3\ln Cx}$. 10.58 $\sin\frac{y}{x}=\ln\frac{C}{x}$. 10.59 $\ln Cx=-e^{-\frac{y}{x}}$. 10.60 $x=Ce^{\frac{y^2}{x^2}}$.

10.61 $x=C\operatorname{tg}\frac{y}{2x}$. 10.62 $y^2+2xy-x^2=C$. 10.63 $x^3=C(y^2-x^2)$; $3x^3=8(x^2-y^2)$.

10.64 $y=x\sqrt{C+2\ln|x|}$; $y=x\sqrt{2\ln|x|}$. 10.65 $y=\frac{2x}{1-Cx^2}$; $y=\frac{2x}{1-3x^2}$. 10.66 $y=Ce^{-2\sqrt{\frac{x}{y}}}$; $y=Ce^{2\left(1-\sqrt{\frac{x}{y}}\right)}$. 10.67 $\ln\frac{x+y}{x}=Cx$. 10.68 $\ln|y|-\cos\frac{3x}{y}=C$. 10.69 $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0$.

10.70 $x^2+xy-y^2-x+3y=C$. 10.71 $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$. 10.72 $y=Ce^{-2x}+2x-1$. 10.73 $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$. 10.74 $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$. 10.75 $y=(x+C)(1+x^2)$. 10.76 $y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$.

10.77 $y^2-2x=Cy^3$. 10.78 $x=Ce^{2y}+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$. 10.79 $y=\frac{C}{x^2}+\frac{x^4}{6}$. 10.80 $x=Ce^{-\operatorname{arctg}y}+\operatorname{arctg}y-1$. 10.81 $y=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}+1$; $y=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}+1$. 10.82 $y=\frac{C}{x}+x\ln x$; $y=x\ln x$.

10.83 $y=\frac{C+x}{\cos x}$; $y=\frac{x}{\cos x}$. 10.84 $y=Ce^{-\sin x}+\sin x-1$; $y=2e^{-\sin x}+\sin x-1$. 10.85 $y=C\sqrt{1-x^2}+x$; $y=\sqrt{1-x^2}+x$. 10.86 $y=\operatorname{arctg}x-1+Ce^{-\operatorname{arctg}x}$. 10.87 $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C\right)$.

10.88 $y=\frac{1}{2}x^2\ln x$. 10.89 $y=-\cos x$. 10.90 $y^2(Ce^{x^2}+1)=1$. 10.91 $y\left(C+\frac{x^7}{7}\right)=x^3$. 10.92 $y=x^4\left(C+\frac{1}{2}\ln x\right)^2$. 10.93 $y^n=Ce^{-x}+x-1$. 10.94 $y^3(Ce^{\cos x}+3)=1$. 10.95 $y(Cx+\ln x+1)=1$.

10.96 $y=\frac{1}{C\sqrt{1-x^2}-1}$; $y=\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}-1}$. 10.97 $y=\sqrt{C\sqrt{1-x^2}+x^2-1}$; $y=\sqrt{2\sqrt{1-x^2}+x^2-1}$.

10.98 $y^3(Ce^{\cos x}+3)=1$; $3y^3(1-e^{\cos x})=1$. 10.99 $y=e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^x+1\right]^2$. 10.100 $y=\frac{\sec x}{x^3+1}$. 10.101

$x^3y-2x^2y^2+3y^4=C$. 10.102 $x^3e^y-y=C$. 10.103 $x^2+\cos^2y+y^2=C$. 10.104 $\frac{x^2}{2}\cos 2y+x=C$.

10.105 $\ln|x+y|+\frac{y}{x+y}=C$. 10.106 $x+y+\frac{y}{x}=C$; $x+y+\frac{y}{x}=3$. 10.107 $\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=C$; $\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=2$ 10.108 $(1+x)\sin y+(1-y)\sin x=C$. 10.109 $x^2\ln y+2y(x+1)=C$. 10.110 $e^{x+y}+x^3+y^4=1$. 10.111 $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+x^2y+y\,\mathrm{arctg}\,y-\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|+y=C$ 10.112 $x\ln y+y^2\cos 5x=e^2$. 10.113 $\mathrm{arctg}\frac{x}{y}-xy+e^y=C$. 10.114 $x^3y-\cos x-\sin x=C$. 10.115 $y+C\pm\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|=0$. 10.116 $x=2P-\frac{1}{P^2}; y=P^2-\frac{2}{P}+C$. 10.117 $x=aP+bP^2$. $6y=3aP^2+4bP^3+C$. 10.118 $x=\sin P+\ln P$, $y=P\sin P+\cos P+P+C$. 10.119 $x=e^P+P$, $y=e^P(P-1)+\frac{P^2}{2}+C$ 10.120 $x=P^3+P$, $4y=3P^4+2P^2+C$. 10.121 $x=\ln P+\frac{1}{P}$. 10.122 $x=\frac{2P}{P^2-1}, y=\frac{2}{P^2-1}-\ln\left|P^2-1\right|+C$. 10.123 $x=C-\ln(e^y-1)$. 10.124 $x=\pm\frac{1}{2}(\arcsin y-y\sqrt{1-y^2}+C)$.

10.125 $x=2P+\frac{3}{2}P^2+C$, $y=P^2+P^3$. 10.126 $x=2P-\frac{2}{P}+C$, $y=P^2+2\ln P$.

10.127 $x=\frac{1}{2}\ln^2P+\ln P+C$, $y=P\ln P$. 10.128 $x=e^P(P+1)+C$, $y=P^2e^P$. 10.129 $x=P\sin P$, $y=(P^2-1)\sin P+P\cos P+C$. 10.130 $x=e^P+C$, $y=e^P(P-1)$, ან $y=(x-C)[\ln(x-C)-1]$. 10.131 $x=2(\ln P-P)$, $y=2P-P2+C$. 10.132 $x=\ln\left[\left(\sqrt{1+P^2}-1\right)/P\right]+P/\sqrt{1+P^2}+C$, $y=\frac{P}{\sqrt{1+P^2}}$. 10.133 $x=2P+3P^2$, $y=2P^3+P^2+C$. 10.134 $x=P(1+e^P)$, $y=0$, $5P^2+(P^2-P+1)e^P+C$. 10.135 $x=e^{2P}(2P^2-2P+1)$, $y=e^{2P}(2P^3-3P^2+3P-1{,}5)+C$. 10.136 $x=2\,\mathrm{arctg}\,P+C$, $y=\ln(1+P^2)$, $y=0$. 10.137 $x=2\sqrt{P^2+1}-\ln\left(1+\sqrt{P^2+1}\right)+\ln P+C$, $y=P\sqrt{1+P^2}$, $y=0$. 10.138 $x=P\cos P$, $y=P^2\cos P-P\sin P-\cos P+C$. 10.139 $x=\frac{C}{P^2}+\frac{2P}{3}, y=\frac{2C}{P}+\frac{P^2}{3}$. 10.140 $x=Ce^{-P}+2(1-P)$, $y=x(1+P)+P^2$. 10.141 $x=\frac{C+\ln P}{P^2}$, $y=\frac{2}{P}(C+\ln P)+\frac{1}{P}$. 10.142 $x=\frac{1}{P^2}(C-P\sin P-\cos P)$, $y=2xP+\sin P$. 10.143 $Cy=(x-C)^2$; $y=0$ და $y=-4x$ განსაკუთრებული ამონახსნებია. 10.144 $y=Cx+Cx^2$; $y=-\frac{x^2}{4}$. 10.145 $y=Cx+\frac{1}{C}$, $y^2=4x$. 10.146 $y=Cx-a\sqrt{1+C^2}$; $x^2+y^2=C^2$.

10.147 $y=Cx+\frac{1}{2C^2}$; $y^3=\frac{27}{8}x^2$. 10.148 $y=Cx+C-C^2$; $y=\frac{(x+1)^2}{4}$. 10.149 $y=Cx-C+e^C$.

10.150 $y=\frac{1}{2}Cx^2+\frac{1}{2C}$, $y=\pm x$. 10.151 $x=-P-\frac{1}{2}+\frac{C}{(1-P)^2}$, $y=-\frac{1}{2}P^2+\frac{CP^2}{(1-P)^2}$, $y=0$,

$y=x+1$. 10.152 $x=CP-\ln P-2$, $y=\frac{1}{2}CP^2-P$. 10.153 $C^3=3(Cx-y)$, $9y^2=4x^3$.

10.154 $x\sqrt{P}=\ln P+C$, $y=\sqrt{P}(4+\ln P-C)$, $y=0$. 10.155 წრფივად დამოუკიდებელია. 10.156 წრფივად დამოუკიდებულია. 10.157 წრფივად დამოუკიდებელია. 10.158 წრფივად დამოკიდებულია. 10.159 წრფივად დამოკიდებულია. 10.160 წრფივად დამოკიდებულია. 10.161 წრფივად დამოკიდებულია. 10.162 წრფივად დამოკიდებულია. 10.163 წრფივად დამოუკიდებელია. 10.164 $x^2y''-2xy'+2y=0$ (მითითება. საძიებელი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება: $y=C_1x+C_2x^2$, აქედან $y'=C_1+2C_2x$, $y''=2C_2$ მიღებული სისტემიდან C_1 და C_2 მუდმივების გამორიცხვა მოგვცემს საძიებელ განტოლებას). 10.165 $\sin 2x\cdot y''-2\cos 2x\cdot y'=0$. 10.166 $y''+y=0$. 10.167 $y''-2y'+y=0$. 10.168 $y'''-y''=0$. 10.169 $y'''-y''=0$. 10.170 $y'''+y'=0$. 10.171 $y'''-2y''+y'-2y=0$. 10.172 $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$. 10.173 $y=C_1x+\frac{C_2}{x^4}$. 10.174 $y=C_1x+C_2\ln x$. 10.175 $y=C_1\sin x+C_2\sin^2 x$. 10.176 $y=C_2+(C_1-C_2x)\operatorname{ctg}x$. 10.177 $y(1-x)=C_1x+C_2(1-x^2+2x\ln x)$. 10.178 $y=C_1e^x+C_2x-x^2-1$. 10.179 $y=C_1\cos x+C_2x\cos 2x-\sin x\cos x$. 10.180 $y=2+3x+x\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}x\right)+x^2$. 10.181 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. 10.182 $y=C_1e^{4x}+C_2$. 10.183 $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. 10.184 $y=e^x(C_1+C_2x)$. 10.185 $y=4e^x+2e^{3x}$. 10.186 $y=3e^{-2x}\sin 5x$.

10.187 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{a^2+1}$. 10.188 $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

10.189 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{2}\cos 2x-2\sin 2x$. 10.190 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\bar{y}$,

1. $\bar{y}=x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$. 2. $\bar{y}=-\frac{8}{5}e^x\left(\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right)$. 3. $\bar{y}=e^x(2x^2+x)$.

4. $\bar{y}=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\operatorname{sim}2x)$. 10.191 $y=e^x+x^2$. 10.192 $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$. 10.193 $y=\frac{1}{3}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin x-\cos x$.

ლიტერატურა

1. ზერაგია პ., უმაღლესი მათემატიკა, ტ. I, II, 1985.
2. დურგლიშვილი ნ., ბუაძე ა., იოსავა მ., მელაძე ო., სიგუა ლ., უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, I ნაწილი, თბ., 1989.
3. ქურჩიშვილი ა., უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ნაწ., II, თბ., 1985.
4. Берман Г. Н., Сборник задач по курсу математического анализа, М., 1977.
5. филиппов А. Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнуниям, М., «Наука», 1979.
6. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. II, М., 1986.
7. Сборник задач по математике для втузов под редакцией А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича, ч. I, II, «Наука», М., 1981.
8. Бургов Я. С., Никольский С.М., Дифференциальное и интегральное исчисление, Москва, 1980.
9. Шипачев В. С. , Высшая математика, Москва, 1990.
10. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, შემდგენლები: დ. ბაღაშვილი, მ. ბედოშვილი, ზ. ბლიაძე, ე. გობრონიძე, ლ.სკამკოჩაიშვილი, ზ. ჯიქია, 2001.
11. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ნაწ. III, ლ. მძინარაშვილი, ა. დავითაძე, გ. მჭედლიძე, გ. ჯავახიშეილი, თბილისი, 2003.

სარჩევი

თავი VI. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

თავი VII. განსაზღვრული ინტეგრალი

თავი VIII. განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გამოყენება

თავი IX. მწკრივები

თავი X. დიფერენციალური განტოლებები