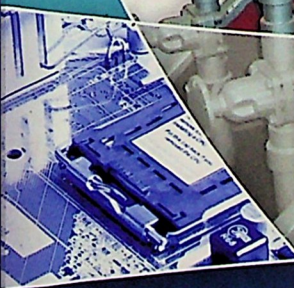


# Fundamentos de mecánica de fluidos

Alberto García Prats  
Ricardo Cobacho Jordán



EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA



Alberto García Prats  
Ricardo Cobacho Jordán

# Fundamentos de Mecánica de Fluidos

EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: GARCÍA-PRATS, A. y COBACHO-JORDÁN, R. (2012). *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica

Primera edición 2012

© Alberto García Prats  
Ricardo Cobacho Jordán

© de la presente edición:  
Editorial Universitat Politècnica de València  
[www.editorial.upv.es](http://www.editorial.upv.es)

*Distribución:* pedidos@editorial.upv.es  
Tel. 96 387 70 12 / Ref. 318

Imprime: By print percom sl.

Impreso en papel Coral Book



ISBN: 978-84-8363-949-8  
Impreso bajo demanda

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación, y en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de todo o parte de los contenidos de esta obra sin autorización expresa y por escrito de sus autores.

Impreso en España

# Índice

## Tema 1. Propiedades de los Fluidos

1. Estados de agregación de la materia .....	7
1.1. El medio material continuo .....	7
1.2. Estados de agregación de la materia .....	7
2. Concepto de fluido .....	8
3. Ley de viscosidad de Newton .....	9
4. Propiedades de los fluidos .....	11
4.1. Viscosidad .....	12
4.2. Viscosidad cinemática .....	13
4.3. Peso y masa .....	13
4.4. Peso específico .....	14
4.5. Densidad .....	15
4.6. Presión .....	15
4.7. Compresibilidad .....	16
4.8. Tensión de vapor y cavitación .....	18

## Tema 2. Estática de Fluidos

1. Introducción .....	19
2. Propiedades de la presión hidrostática .....	19
3. Ecuación general de la Hidrostática o Ecuación de Euler de la Hidrostática .....	20
4. Presión en un punto .....	22
5. Presión sobre una superficie plana inclinada .....	24
6. Punto de aplicación de empuje: el centro de presiones .....	25
7. Cálculo de empujes en diques y presas de gravedad .....	27
8. Empuje sobre superficies curvas .....	30
9. Principio de Arquímedes .....	34
10. Flotación y Estabilidad .....	35
11. Medida de la presión. Manómetros .....	38
11.1. Barómetro de mercurio .....	38
11.2. Piezómetros .....	38
11.3. Manómetro abierto o manómetro simple .....	39
11.4. Manómetro metálico o Bourdon .....	40
12. Algunos centros de gravedad y momentos de inercia .....	41

### Tema 3. Dinámica integral

1. Introducción .....	43
2. Análisis del movimiento de los fluidos. Introducción a la cinemática de los fluidos .....	43
2.1. Descripción cinemática del flujo. Enfoques de Euler y Lagrange .....	44
2.2. Derivación material .....	47
2.3. Aceleración .....	48
2.4. Clasificación del movimiento .....	48
2.5. Flujo rotacional e irrotacional .....	49
2.6. Caudal o gasto .....	50
3. Dinámica Integral.....	51
3.1. Ecuación de conservación de la masa: La ecuación de continuidad ...	52
3.1.1. Caso particular 1: Cuando el VC no permite la acumulación de fluido en su interior (conducciones) .....	53
3.1.2. Caso particular 2: Cuando el VC permite la acumulación de fluido en su interior (depósitos).....	55
3.2. Ecuación de conservación de la energía. Ecuación de Bernouilli .....	56
3.2.1. Ecuación de Euler y ecuación de Bernouilli .....	56
3.2.2. Teorema del trabajo y la energía y Ecuación de Bernouilli ....	59
3.2.3. Representación gráfica de las líneas de energía.....	63
3.2.4. Generalización de la ecuación de Bernouilli. Aplicación a fluidos reales .....	64
3.3. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento.....	68

### Tema 4. Flujo a presión

1. Introducción .....	71
2. Régimen hidráulico en tuberías .....	71
2.1. El número de Reynolds .....	72
3. Movimiento en régimen laminar .....	73
4. Movimiento en régimen turbulento.....	77
4.1. Teoría de la capa límite de Prandtl .....	77
4.2. Pérdidas de carga continuas en régimen turbulento.....	79
5. La rugosidad en las tuberías .....	83
6. Cálculo del valor de $f$ .....	84
7. Fórmulas empíricas de pérdida de carga .....	88

---

8. Pérdidas de carga localizadas .....	88
8.1. Coeficientes de resistencia en algunas singularidades habituales .....	90
8.2. Cálculo de las pérdidas de carga singulares como porcentaje de las continuas. El coeficiente mayorante .....	92
8.3 Longitud equivalente de una tubería .....	93
9. Problemas simples en tuberías .....	93
10. Desdoblamiento de diámetros .....	95
11. Asociación de tuberías .....	97
11.1. Tuberías en serie .....	97
11.2. Tuberías en paralelo .....	98
12. Cavitación en tuberías .....	98

### **Tema 5. Máquinas Hidráulicas y Bombas Centrífugas**

1. Máquinas Hidráulicas.....	101
2. Clasificación de las bombas.....	101
3. La bomba centrífuga .....	109
4. Potencia en una corriente líquida .....	111
5. Potencia en bombas.....	111
6. Curvas características reales en bombas centrífugas.....	113
7. Leyes de semejanza en bombas.....	117
8. Velocidad específica o $n^{\circ}$ específico de revoluciones .....	119
9. Curvas características a velocidades distintas de la velocidad nominal ..	120
10. Punto de funcionamiento de una instalación .....	120
11. Asociación de bombas.....	122
12. Cavitación en bombas.....	125
13. Campos de trabajo y selección de bombas .....	128

### **Tema 6. Transitorios**

1. Introducción .....	131
2. Modelos de cálculo .....	132
3. Descripción física del fenómeno .....	133
4. El pulso de Joukowsky .....	138

**Tema 7. Flujo en lámina libre**

1. Introducción.....	141
2. Definiciones .....	141
3. Análisis unidimensional.....	142
4. Clasificación del flujo .....	142
5. Movimiento uniforme permanente .....	144
6. Distribución de velocidades en una sección transversal .....	147
7. Coeficiente de Coriolis .....	147
8. Pendiente motriz y tensión tangencial.....	148
9. Ecuaciones de pérdida en flujo uniforme .....	150
9.1. La Fórmula de Chézy .....	150
9.2. La Fórmula de Bazin .....	151
9.3. La Fórmula de Manning.....	152
10. Relaciones geométricas en las secciones más comúnmente utilizadas .....	155
10.1. Sección rectangular .....	155
10.2. Sección trapecial.....	156
10.3. Sección circular .....	158
11. Sección hidráulicamente óptima .....	158
11.1. Sección rectangular .....	159
11.2. Sección trapecial.....	159
11.3. Sección circular .....	161
12. Curva de capacidad de un canal en régimen uniforme.....	162
13. Velocidades máximas y mínimas .....	163
14. Diseño de canales .....	164
15. Flujo permanente no uniforme.....	164
16. Energía específica .....	165
17. Curva de energía específica .....	167
18. Calado crítico .....	169
19. El número de Froude .....	172
20. La curva de remanso.....	173
21. Resalto hidráulico .....	175
<b>Bibliografía .....</b>	<b>179</b>

# Tema 1. Propiedades de los Fluidos

## 1. Estados de agregación de la materia

### 1.1. El medio material continuo

La materia está constituida por moléculas. En un gas estas moléculas están separadas por una distancia que, en ocasiones, es mayor que las propias moléculas. Incluso en los líquidos, las moléculas dejan espacios libres entre sí, por lo que la materia, estrictamente hablando, es un medio discontinuo.

Sin embargo, si analizamos el número de moléculas existente en un volumen muy pequeño de materia, veremos que se trata de un número muy grande. Dado que los problemas estudiados en ingeniería son siempre de tipo macroscópico o macromolecular, se establece la hipótesis del *modelo material continuo*, esto implica suponer que no existen los anteriormente mencionados huecos vacíos de materia, por lo que la densidad de un determinado volumen de materia puede ser obtenida por el cociente entre la masa y el volumen que ocupa, siendo constante en todo el volumen.

La hipótesis de medio material continuo como modelo matemático, lo que nos va a permitir es suponer que las propiedades de la materia se conservan aun cuando el volumen estudiado tiende a cero, pudiendo por tanto emplear el cálculo infinitesimal.

### 1.2. Estados de agregación de la materia

La materia puede presentarse en diferentes estados, los cuales quedan reducidos básicamente a tres: sólido, líquido y gas. Líquidos y gases se engloban dentro de los denominados fluidos, contrapuestos en sus propiedades a los sólidos, debido al grado de rigidez de sus enlaces moleculares.

Lógicamente no existen magnitudes absolutas por lo que no existe una rigidez nula ni una rigidez absoluta que definirían el líquido perfecto o el sólido perfecto. Así hablamos de plasticidad en sólidos o de viscosidad en fluidos para designar la participación respectiva de las propiedades del grupo opuesto.

La materia puede cambiar de estado. Para ello debe modificarse la libertad de los enlaces moleculares, lo cual lleva asociado cambios en la presión y en la temperatura. Así, los cambios que suponen aumento en la libertad de los enlaces moleculares llevan asociadas la elevación de la temperatura (endotérmicos) y la disminución de presión, y viceversa. En el siguiente esquema se puede ver los distintos cambios de estado:

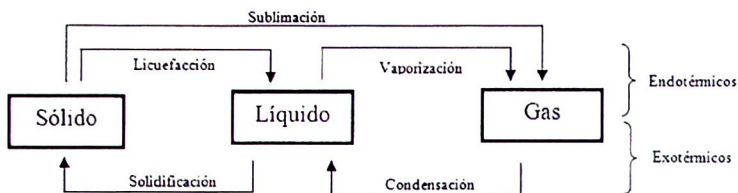


Figura 1-1. Cambios de estado.

## 2. Concepto de fluido

Un fluido es un medio material continuo (sustancia) que se deforma continuamente al ser sometido a un esfuerzo cortante o tangencial, cualquiera que sea su magnitud.

Sobre el fluido representado en la figura 1-2 actúa una fuerza de forma tangencial a la superficie  $S$ . El cociente entre fuerza y superficie determina el esfuerzo cortante o tangencial.

Para estudiar un fluido se toman dos placas paralelas poco separadas un espesor  $y$ , lo suficientemente grandes como para despreciar la influencia de los extremos, introduciendo entre ambas placas una sustancia. La placa inferior permanece fija, mientras que a la placa superior se le aplica una fuerza  $F$ . Esto es equivalente a aplicar un esfuerzo tangencial o cortante sobre la sustancia igual a  $F/S$ .

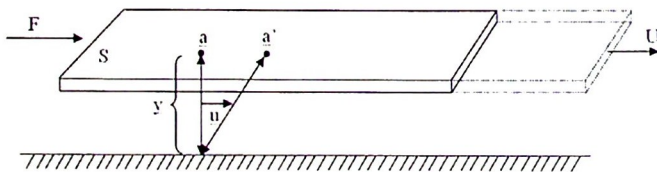


Figura 1-2. Definición de fluido.

Si la fuerza  $F$  ocasiona que la placa superior se mueva a velocidad constante  $U$ , cualquiera que sea  $F$ , la sustancia contenida entre las placas es un fluido.

Este movimiento provoca que la sustancia se deforme continuamente bajo el esfuerzo cortante pues está desprovista de rigidez. Se dice que es capaz de *fluir*, es decir, sufrir grandes variaciones de forma bajo el esfuerzo aplicado.

### 3. Ley de viscosidad de Newton

El fluido en contacto con la placa fija se mueve lo mismo que ésta, es decir tiene velocidad nula  $u=0$ . El fluido en contacto con la placa superior se mueve a velocidad igual a ésta, es decir a  $u=U$ . El fluido intermedio variará proporcionalmente su velocidad con la profundidad según una ley, la cual experimentalmente se demuestra que tiene la forma:

$$F = \mu \frac{S \cdot U}{y} \quad (1.1)$$

En la que vemos que  $F$  es directamente proporcional a la superficie  $S$  y a la velocidad  $U$  e inversamente proporcional al espesor de sustancia  $y$ .

Como  $\tau = F/S$ , entonces  $F = \tau \cdot S$ , se puede plantear la igualdad:

$$\tau \cdot S = \mu \frac{S \cdot U}{y} \quad (1.2)$$

$$\tau = \mu \frac{U}{y} \quad (1.3)$$

donde:

- $U/y$  recibe el nombre de velocidad angular de deformación del fluido
- $\mu$  es el factor de proporcionalidad entre el esfuerzo aplicado y la deformación angular producida, llamado viscosidad dinámica o absoluta, que se estudiará con más detalle en este mismo tema.

En su forma diferencial, esta ley se puede escribir de esta otra forma:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.4)$$

En la que  $du/dy$  es el gradiente de velocidad interpretado como la rapidez con la que una capa de fluido se mueve con respecto a otra capa adyacente, constituyendo la denominada **Ley de Viscosidad de Newton**.

La relación vista entre esfuerzo tangencial y velocidad de deformación  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$  es una relación lineal. Para ello la constante de proporcionalidad, denominada viscosidad, se mantiene constante. Los fluidos que la cumplen reciben el nombre de **fluidos newtonianos**. Cuando dicha relación es no lineal, reciben el nombre de **no newtonianos**.

Denominamos **fluido ideal** aquel que no presenta viscosidad y por lo tanto no ofrece resistencia a deformarse. En el gráfico de la figura 1-3 supondrá el eje de ordenadas.

Los fluidos no newtonianos, es decir, aquellos que presentan una relación compleja entre tensión cortante aplicada y velocidad de deformación obtenida, se estudian en una disciplina que llamamos **Reología**.

Los fluidos no newtonianos o reológicos se pueden agrupar en dos grandes grupos: **independientes del tiempo**, son aquellos en los que la velocidad de deformación no está influida por el tiempo de aplicación del esfuerzo; y los **dependientes del tiempo**, en los que la velocidad de deformación sí está influida por el tiempo que dura el esfuerzo aplicado. Finalmente hay un tipo de fluido no newtoniano que no puede ser incluido en la clasificación anterior que son los fluidos visco-elásticos.

#### Fluidos no newtonianos independientes del tiempo

**Fluidos pseudoplásticos:** Son aquellos en los que la viscosidad disminuye a medida que aumenta el esfuerzo aplicado.

**Fluidos dilatantes:** Son aquellos en los que la viscosidad aumenta a medida que aumenta el esfuerzo aplicado.

**Plásticos de Bingham o ideal:** Se comportan como un sólido a bajos esfuerzos, pero una vez superado el esfuerzo inicial llamado **esfuerzo de cedencia**, se comportan como newtonianos.

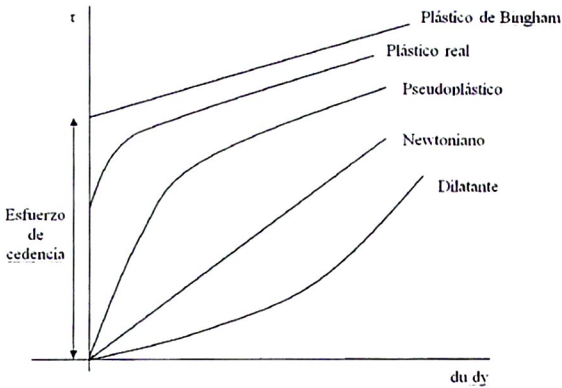


Figura 1-3. Ley Viscosidad Newton.

Fluidos no newtonianos dependientes del tiempo

**Fluidos reopécticos.** Son aquellos en los que la viscosidad aumenta a medida que aumenta la exposición al esfuerzo cortante.

**Fluidos tixotrópicos:** Son aquellos en los que la viscosidad disminuye a medida que aumenta la exposición al esfuerzo cortante.

Fluidos visco-elásticos.

Como su nombre indica, son aquellos que presentan propiedades elásticas y viscosas. El más simple sería aquel que desde el punto de vista de la viscosidad es newtoniano y desde el punto de vista de la elasticidad sigue la Ley de Hook. Tras aplicar un esfuerzo, la parte elástica recupera la forma, mientras que la parte viscosa quedará deformada.

**4. Propiedades de los fluidos**

Son aquellas magnitudes físicas cuyos valores nos definen el estado en el que se encuentra el fluido. En primer lugar deberemos diferenciar entre los dos principales tipos de fluidos: líquidos y gases. Los líquidos son poco compresibles (se consideran incompresibles siempre excepto en algunas aplicaciones relacionadas con el flujo transitorio), pueden presentar una superficie libre en

contacto con la atmósfera y ocupan un volumen determinado. Los gases presentan las propiedades opuestas a éstas.

Otra diferencia fundamental es que la viscosidad de los líquidos se debe a la cohesión entre las partículas, mientras que en los gases depende del intercambio de cantidad de movimiento entre partículas.

No menos importante es la diferencia que encontramos al estudiar la dependencia de la viscosidad con la temperatura. En los líquidos la viscosidad disminuye al aumentar la temperatura, mientras que en los gases, con la temperatura, aumenta la actividad molecular, aumenta también el intercambio de cantidad de movimiento y con éste la viscosidad.

En nuestro caso estudiaremos principalmente los líquidos, asimilados éstos a medios materiales continuos, homogéneos, deformables, constituidos por partículas líquidas infinitamente pequeñas.

Veamos algunas de las propiedades de los líquidos.

#### 4.1. Viscosidad

Propiedad de los fluidos que representa la resistencia a deformarse ante un esfuerzo tangencial o cortante. Como se ha mencionado anteriormente, la libertad de los enlaces moleculares está asociada con la temperatura y la presión, por lo que la viscosidad depende en gran medida de la primera y en menor medida de la segunda.

La viscosidad sólo se manifiesta si hay movimiento. En reposo no existe esfuerzo cortante, por lo tanto no hay efecto de resistencia al mismo.

Su ecuación de dimensiones es  $\mu = [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}]$

En el Sistema Internacional de Unidades (SI), la viscosidad dinámica o absoluta, o simplemente viscosidad se mide en  $N \cdot s / m^2$  o lo que es lo mismo en  $Pa \cdot s$  ( $1 Pa = 1N/m^2$ ). El  $Pa \cdot s$  en Francia se ha intentado denominar al  $Pa \cdot s = Poiseuille = Pl$ , aunque sin demasiada aceptación fuera de allí. También en SI, es habitual encontrarnos la viscosidad en  $kg/m \cdot s$ , unidad a la que se llega sin más que aplicar la equivalencia  $1N=1kg \cdot m/s^2$ .

En Sistema Cegesimal (SCGs), ya en desuso, la unidad de la viscosidad es el Poise (en honor al mismo J.M. Marie Poiseuille). El Poise tiene la siguiente equivalencia:

$$1 \text{ Poise} = 1 \text{ g} / \text{cm} \cdot \text{s}$$

Por lo que:

$$1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 1 \text{ kg/ m}\cdot\text{s} = 1000 \text{ g / 100 cm} \cdot \text{s} = 10 \text{ poise}$$

$$1 \text{ Poise} = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

El agua a 20° tiene una viscosidad de 1,005 centi poise = 1,005 mili Pa·s

El aceite de oliva a 25°C tiene una viscosidad de 81 mili Pa·s.

El mercurio a 20°C tiene una viscosidad de 1,554 mili Pa·s.

#### 4.2. Viscosidad cinemática

Se define viscosidad cinemática a la relación entre viscosidad dinámica o absoluta y la densidad de masa.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.5)$$

Su ecuación de dimensiones es  $\mu = [L^2 \cdot T^{-1}]$ .

En SI sus unidades son m<sup>2</sup>/s mientras que en CGs la unidad es el Stokes (en honor a G.G. Stokes), siendo la equivalencia 1 stoke = 1 cm<sup>2</sup>/s, por lo que 1 m<sup>2</sup>/s = 10.000 stokes.

La viscosidad cinemática del agua a 20°C vale 1,01·10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>/s. Dada la importancia que presenta en Hidráulica, de cara a la resolución de problemas, el disponer de los valores correctos de la viscosidad cinemática en función de la temperatura, ésta la podremos calcular a partir de la relación siguiente:

$$\nu = \frac{1,8 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,03620862 \cdot T + 0,00015909 \cdot T^2} \text{ (m}^2 \text{ / s)} \quad (1.6)$$

Donde:

- T, temperatura en °C a la cual queremos obtener la viscosidad cinemática

#### 4.3. Peso y masa

La masa *m* nos indica la cantidad de materia que un cuerpo posee, generando una reacción inercial a cualquier fuerza aceleradora. El peso *P* representa la

fuerza de atracción que la gravedad ejerce sobre el líquido, siendo la relación entre ambos:

$$P = m \cdot g \quad (1.7)$$

Donde:

- m, masa
- g, aceleración de la gravedad = 9,80665 m/s<sup>2</sup>

#### 4.4. Peso específico

Representa el peso por unidad de volumen, o lo que es lo mismo, la fuerza con la que la gravedad atrae cada unidad de volumen de fluido.

$$\gamma = \frac{P}{V} = \frac{m \cdot g}{V} \quad (1.8)$$

Donde:

- $\gamma$ , peso específico
- V, volumen

Su ecuación de dimensiones es  $\gamma = [M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}]$  y sus unidades son en:

- SI<sup>1</sup>: N/m<sup>3</sup> ó kg·m<sup>-2</sup>·s<sup>-2</sup>
- ST: Kgf/m<sup>3</sup>

<sup>1</sup> El SI de Unidades utiliza la masa como magnitud básica y la fuerza como magnitud derivada, mientras que el Sistema Técnico (ST) de Unidades utiliza la fuerza como magnitud básica y la masa como magnitud derivada.

En SI la unidad básica de masa es el kg y la derivada de fuerza es el N, el cual nos indica la fuerza que actuando sobre la masa de 1 kg, le comunica una aceleración de 1 m/s<sup>2</sup>.

En ST la unidad básica de fuerza es el kilogramo-fuerza (Kgf), también llamada kilopondio (Kp) y se define como la fuerza de gravedad que actúa sobre 1 kg de masa. En este caso la aceleración de la gravedad g depende de la latitud y de la altitud de la localización según la relación  $g = 9,7803 \cdot (1 + 0,0053 \cdot \text{sen}^2(\text{latitud}) \cdot (1 - 0,0000003 \cdot \text{altitud}))$ , siendo el valor más empleado el que corresponde a latitud 45° y altitud del mar 0 metros de 9,80665 m/s<sup>2</sup>.

La equivalencia entre ambas resulta:

- SI: 1 N = 1 Kg · 1 m/s<sup>2</sup> = 1 m·Kg/s<sup>2</sup>
- ST: 1 Kgf = 1 Kg·g m/s<sup>2</sup> = g·N ≈ 9,81 N

Por lo tanto se puede establecer la aproximación 1 Kgf = 10 N.

La relación entre peso específico y densidad es  $\gamma = \rho \cdot g$ . El peso específico del agua a 4°C y presión atmosférica normal es  $\gamma = 1000 \text{ kgf/m}^3$ .

#### 4.5. Densidad

También llamada densidad de masa, masa específica o densidad absoluta. Es la masa contenida por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.9)$$

Sustituyendo la ecuación 7 en 9:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P}{V \cdot g} = \frac{\gamma}{g} \quad (1.10)$$

Llegando de nuevo a la relación entre densidad y peso específico  $\rho = \frac{\gamma}{g}$ .

Su ecuación de dimensiones es  $\rho = [M \cdot L^{-3}]$  y sus unidades son en SI podemos obtenerlas del cociente anterior, utilizando las unidades de peso específico y gravedad:

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}}{1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{Kg} / \text{m}^3 \quad (1.11)$$

#### 4.6. Presión

Toda fuerza superficial que actúa mediante contacto directo en el interior de una masa líquida tiene, en general, una componente normal y otra tangencial a la superficie de contacto.

Llamaremos presión a la relación entre la fuerza  $F$  que actúa normal a una superficie, y dicha superficie  $S$ .

$$P = \frac{F}{S} \quad (1.12)$$

Su ecuación de dimensiones es  $P = [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}]$  y sus unidades son en:

- SI:  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = \text{Pascal (Pa)} = \text{N/m}^2$
- ST:  $\text{Kgf/m}^2$

Como el Pa es una unidad tan pequeña se emplea habitualmente el múltiplo MegaPascal MPa.

La presión medida sin tener en cuenta la columna de aire que hay por encima debido a la atmósfera (presión atmosférica), la llamaremos *presión relativa*. La presión atmosférica  $P_o$  en condiciones normales y a nivel del mar (depende de la altitud, la latitud y las condiciones atmosféricas) adopta los siguientes valores:

$$P_o = 760 \text{ mmHg} = 1,033 \text{ Kg/cm}^2 = 10.336 \text{ Kg/m}^2 = 10,33 \text{ m.c.a.} = 1 \text{ atmósfera} = 1.013,2 \text{ mb}$$

El resultado de sumar a la presión relativa la presión atmosférica lo llamaremos presión absoluta:

$$P_a = P + P_o \quad (1.13)$$

La presión es habitual expresarla en forma de altura (magnitud lineal). Para ello dividimos la presión por su peso específico:

$$\frac{P}{\gamma} = h = \text{altura de presión} = \frac{\text{Kg/m}^2}{\text{Kg/m}^3} = \text{m.c.a.} \quad (1.14)$$

En hidráulica práctica se establece la equivalencia de presiones siguiente:

$$1 \text{ atmósfera técnica} = 1 \text{ Kg/cm}^2 = 10 \text{ m.c.a.}$$

#### 4.7. Compresibilidad

Un campo específico dentro de la mecánica de fluidos que no será tratado en este curso es el estudio de los fluidos como compresibles, indispensable en áreas como la aeronáutica.

En general en Mecánica de Fluidos se considera que los líquidos son fluidos incompresibles (principalmente el agua) excepto en el análisis de transitorios hidráulicos (golpe de ariete) en el cual se hace necesario tratarlo como compresible.

El coeficiente de compresibilidad  $K$  indica la facilidad de un fluido para disminuir de volumen por efecto del incremento de presión.

$$K = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (1.15)$$

Por tanto  $K$  nos indica la variación de volumen por unidad de volumen en relación a la variación de presión que lo originó.

### Tensión superficial

En la superficie libre de los líquidos se presentan fenómenos de **adhesión** y **cohesión molecular**. La cohesión se verifica entre moléculas del líquido y la adhesión entre moléculas de líquido y el sólido que lo contiene. Estos fenómenos se manifiestan como si la superficie libre del líquido fuese una membrana tensa que sustituye a la película de líquido donde tiene lugar.

La tensión superficial es la responsable de que pequeños volúmenes de líquido adopten formas definidas sin recipiente que las contenga (gotas de agua p.e.) o que el líquido junto a la pared de un recipiente se eleve más que el centro del mismo.

Las fuerzas de **cohesión** entre las moléculas del líquido es muy superior a la atracción que existe entre las mismas moléculas y el aire, lo que produce una fuerza resultante llamada **fuerza de tensión superficial**, dirigida hacia el interior del líquido. Esta fuerza es directamente proporcional a la longitud de la superficie libre:

$$\sigma = \frac{F}{L} \quad (1.16)$$

Donde:

- $\sigma$ , tensión superficial ó coeficiente de tensión superficial

Su ecuación de dimensiones es  $\sigma = [M \cdot T^{-2}]$  y sus unidades en SI es el  $\text{kg/s}^2$ , o también  $\text{N/m}$  o  $\text{J/m}^2$ .

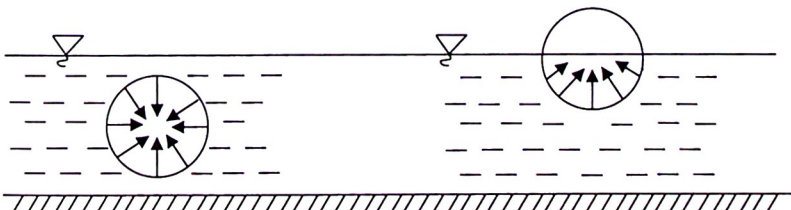


Figura 1-4. Efecto de la tensión superficial.

En la superficie de contacto del líquido con el sólido que lo contiene se pueden dar dos casos. El primero cuando la fuerza de adhesión (líquido-pared) es mayor que la de cohesión (líquido-líquido), entonces la superficie libre del agua se curvará hacia abajo. Además en ese caso se dice que el líquido moja.

Cuando ocurre lo contrario, la adhesión es menor que la cohesión, la superficie libre se curva hacia arriba, y en ese caso se dice que el líquido no moja.

La tensión superficial de los líquidos depende de la temperatura.

#### 4.8. Tensión de vapor y cavitación

Todos los líquidos, cuando aumentamos su temperatura o disminuimos la presión a la que están sometidos, tienden a cambiar de estado vaporizándose. Lo que ocurre es que proyectan moléculas por encima de la lámina libre al espacio que está por encima. Si ese espacio es abierto las moléculas son arrastradas, pero si está cerrado se acumulan generando una presión sobre el líquido que conocemos con el nombre de *presión de vapor o tensión de vapor del líquido*.

Si el fenómeno no cesa, y el vapor acumulado no es removido se llega a una situación de equilibrio en la que en un cierto intervalo de tiempo, el número de moléculas que se vaporizan es el mismo que el número de moléculas que colisionan con la superficie líquida y condensan. En esta situación se dice que el espacio encerrado sobre el líquido está saturado de vapor y ya no admite más moléculas vaporizándose a esa temperatura. La presión de vapor en ese momento recibe el nombre de *presión de saturación o presión de vapor saturado ( $P_v$ )*.

Así pues para cada temperatura, le corresponde una presión de vapor de saturación. A 100°C, la  $P_v$  alcanza un valor de 1,033 Kgf/cm<sup>2</sup> (condiciones normales de presión atmosférica), mientras que a 0°C tan solo es de 0'00622 Kgf/cm<sup>2</sup>. En esta situación, si en un punto de algún elemento hidráulico (tubería, bomba, turbina, hélice, etc.), la presión descendiese por debajo de la presión de vapor correspondiente a la temperatura a la que se encuentre el líquido, parte del líquido se vaporiza, formando burbujas de vapor que alteran el funcionamiento hidráulico de la máquina. Cuando el líquido vuelve a zonas de presión superior a la presión de vapor, se produce el colapso de las burbujas, produciendo pequeños transitorios puntuales que producen daños materiales por desgaste a los elementos que los soportan.

## Tema 2. Estática de Fluidos

### 1. Introducción

La *Estática de Fluidos* es la parte de la *Mecánica de Fluidos* que estudia los fluidos en reposo, es decir en ausencia de cualquier movimiento. No existe pues gradiente de velocidad entre capas de fluido, lo que impide que aparezcan esfuerzos tangenciales o cortantes (esfuerzos viscosos) por tanto que se comporten como fluidos perfectos.

### 2. Propiedades de la presión hidrostática

Primera propiedad. *En un fluido estático, la presión es normal a la superficie sobre la que actúa.*

En el tema anterior se definió la viscosidad como la resistencia que se opone al fluido a deformarse bajo el efecto de un esfuerzo tangencial o cortante provocado por el desplazamiento relativo de dos superficies de fluido en contacto, la cual era además proporcional a la velocidad de deformación (Ley de Viscosidad de Newton). Se puede concluir pues que los esfuerzos tangenciales deforman el fluido y producen movimiento. Por otro lado vimos que el esfuerzo normal debido al propio peso del fluido genera lo que denominamos presión del fluido, que por convención será siempre positivo cuando es de compresión.

En el caso que nos ocupa, como el fluido está en reposo, no pueden aparecer esfuerzos tangenciales, al no existir movimiento, de forma que cualquier elemento de superficie sumergido en un fluido estará sometido exclusivamente a esfuerzos normales.

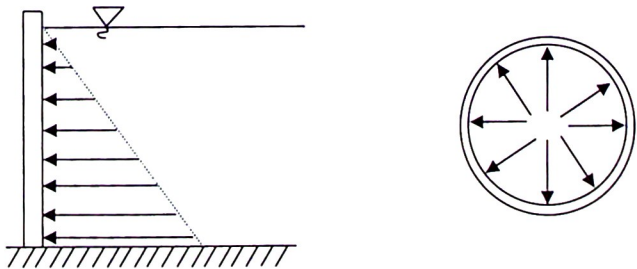


Figura 2-1. Dirección en la que actúa la presión hidrostática.

Segunda propiedad o Principio de Pascal. *En un punto cualquiera de una masa líquida en reposo, existe la misma presión en todas las direcciones.* Es

decir, la intensidad de la presión no depende ni del ángulo de inclinación ni de la superficie. Es por tanto una magnitud *isotrópica*.

Sea un elemento diferencial de superficie como el de la figura 1-2 sobre el que actúa una presión  $P$ .

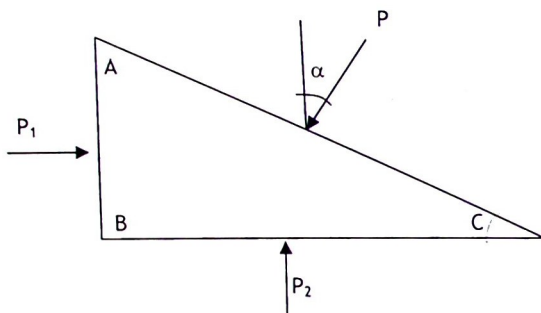


Figura 2-2. Principio de Pascal.

Para que el elemento esté en equilibrio se debe verificar:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot \overline{AB} &= P \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen} \alpha \\ P_2 \cdot \overline{BC} &= P \cdot \overline{AC} \cdot \text{cos} \alpha \end{aligned} \quad (2.1)$$

Pero como sabemos que:

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \text{sen} \alpha &= \overline{AB} \\ \overline{AC} \cdot \text{cos} \alpha &= \overline{BC} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Entonces:

$$P = P_1 = P_2 \quad (2.3)$$

### 3. Ecuación general de la Hidrostática ó Ecuación de Euler de la Hidrostática

Sea el siguiente paralelepípedo rectangular de la figura 2-3, el cual representa un volumen elemental en el interior de un líquido en reposo. Este volumen está sometido a la presión que ejerce el resto del fluido sobre una cara, y a la resultante de las fuerzas exteriores  $F$  por unidad de masa (debida al campo

gravitatorio generalmente) aplicada en su centro de gravedad, cuyas componentes son  $X=X(x,y,z)$ ,  $Y=Y(x,y,z)$ ,  $Z=Z(x,y,z)$ .

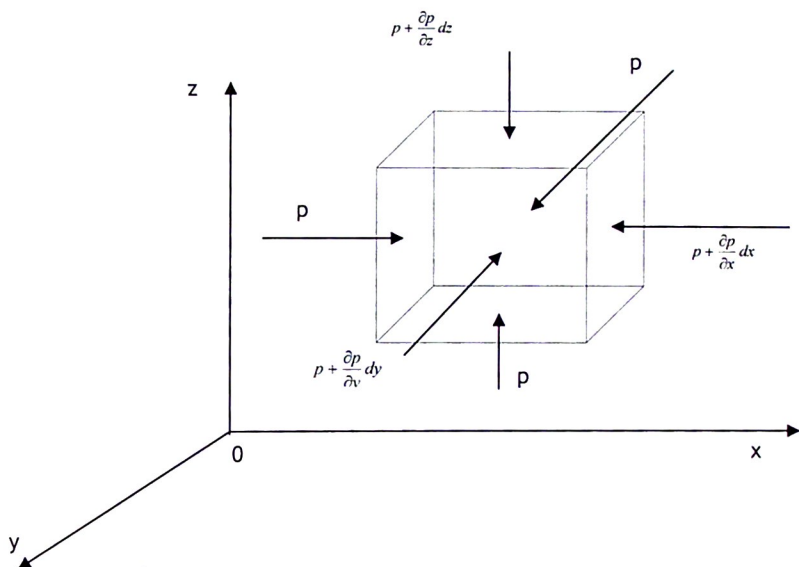


Figura 2-3. Elemento diferencial de volumen de líquido en reposo.

Sobre cada una de las caras del triedro actúa una presión unitaria  $p$ , mientras que sobre la cara opuesta actúa una presión que vale:

$$\text{Eje } x: p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$\text{Eje } y: p + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

$$\text{Eje } z: p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (2.4)$$

El líquido presenta una densidad  $\rho$ , por lo que su masa es  $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ . La condición de equilibrio estático para cada uno de los ejes será:

$$\begin{aligned} \text{Eje } OX : p \cdot dy \cdot dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot X &= 0 \\ \text{Eje } OY : p \cdot dx \cdot dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \cdot dx \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot Y &= 0 \\ \text{Eje } OZ : p \cdot dx \cdot dy - \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \cdot dx \cdot dy + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Lo que resulta:

$$\begin{aligned} \text{Eje } OX : \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \cdot X \\ \text{Eje } OY : \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \cdot Y \\ \text{Eje } OZ : \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \cdot Z \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ecuaciones conocidas como las ecuaciones de Euler de la hidrostática, que pueden escribirse de forma vectorial como:

$$\rho \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot p \quad (2.7)$$

Si multiplicamos las ecuaciones de Euler por  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  respectivamente, y sumamos, obtenemos la variación de presión entre dos puntos:

$$dp = \rho ( X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz ) \quad (2.8)$$

#### 4. Presión en un punto

En el caso más general el paralelepípedo anterior estará sometido como fuerza exterior solamente al campo gravitatorio. En esta situación  $X=0$ ;  $Y=0$ ;  $Z=-g$ . La ecuación fundamental de Euler nos daba la variación de presión entre dos puntos. Para esta situación resultará:

$$dp = -g \cdot \rho \cdot dz = -\gamma \cdot dz \quad (2.9)$$

Between

into

Integrando entre los puntos  $A_o$  (a presión  $P_o$ ) y  $A$  (a presión  $P$ ) dentro de la masa líquida en reposo de la figura 2-4:

FEST

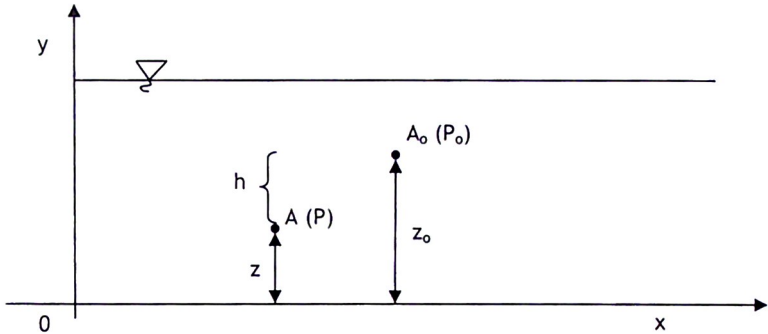


Figura 2-4. Presión en un punto.

$$\int_{P_o}^P dp = -\gamma \int_{Z_o}^Z dz \quad (2.10)$$

$$(P - P_o) = \gamma \cdot (Z - Z_o) \quad (2.11)$$

$$P = P_o + \gamma \cdot (Z_o - Z) \quad (2.12)$$

Ecuación que nos proporciona la presión hidrostática en un punto en función de la presión en otro punto la cual debe ser conocida.

Si llamamos  $h$  a la diferencia de altura entre  $Z_o$  y  $Z$ , la ecuación (2.12) podemos escribirla de la siguiente forma:

$$P = P_o + \gamma \cdot h \quad (2.13)$$

Si además hacemos coincidir  $Z_o$  con la superficie libre del líquido en reposo, el cual sabemos que se encuentra a la presión atmosférica, resulta que la presión hidrostática absoluta será igual a la presión atmosférica más el peso de la columna de fluido que hay por encima del punto considerado.

$$P_{\text{absoluta}} = P_{\text{atmosférica}} + \gamma \cdot h \quad (2.14)$$

correspondiendo la presión relativa al término  $\gamma h$ .

La ecuación anterior explica parcialmente el principio de Pascal y la llamada paradoja de Stevin: “La presión en un punto cualquiera en el interior de una masa líquida en reposo, no depende ni de la cantidad de líquido contenido (volumen del recipiente) ni de la forma del mismo, depende exclusivamente del peso específico  $\gamma$ , y de la columna de fluido que hay por encima”.

### 5. Presión sobre una superficie plana inclinada

Sobre las paredes de un recipiente que contiene un líquido en reposo actuará una determinada presión. En cada punto la presión tomará un valor según la ecuación (2.13) vista en el epígrafe anterior, y cuya dirección será, según la primera propiedad de la presión hidrostática, normal a dicha superficie. Por tanto el campo de fuerzas elementales de presión (paralelas entre si) genera una resultante que constituirá el empuje total del líquido sobre la superficie  $S$ .

Para calcular el valor de dicho empuje, supongamos una superficie plana  $S$ , la cual se sumerge en el líquido formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal de la superficie libre.

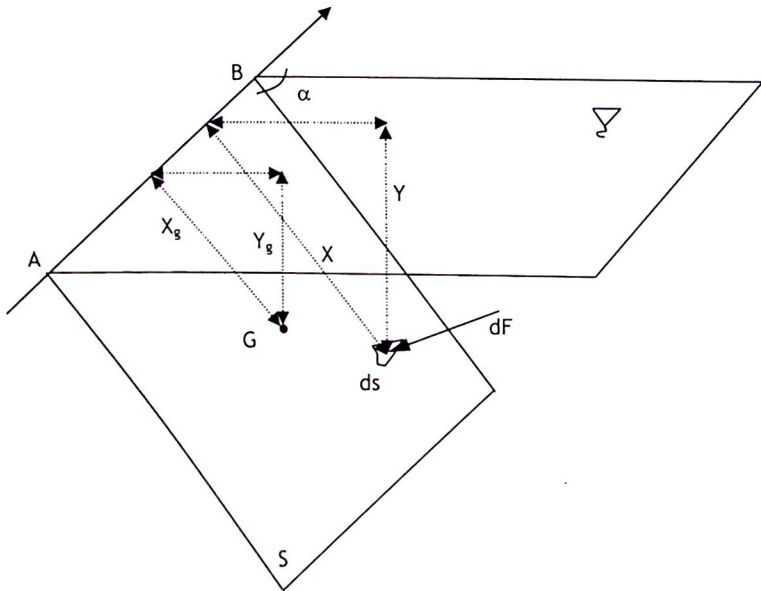


Figura 2-5. Presión en una pared plana inclinada.

La fuerza de presión elemental  $dF$  que actúa sobre un elemento diferencial de superficie  $dS$  vendrá dado por el producto entre la presión en el punto y la superficie:

$$dF = p \cdot ds = \gamma \cdot y \cdot dS \quad (2.15)$$

proyectando sobre la superficie inclinada:

$$dF = p \cdot ds = \gamma \cdot y \cdot dS = \gamma \cdot X \cdot \text{sen} \alpha \cdot dS \quad (2.16)$$

$$F = \int_S p \cdot ds = \int_S \gamma \cdot X \cdot \text{sen} \alpha \cdot dS = \gamma \cdot \text{sen} \alpha \int_S X \cdot dS \quad (2.17)$$

El segundo miembro de la ecuación (2.17) representa el momento estático de la superficie  $S$  respecto del eje  $AB$ , por lo que:

$$\int_S X \cdot dS = X_g \cdot S \quad (2.18)$$

Sustituyendo (2.18) en la ecuación (2.17):

$$\int_S X \cdot dS = X_g \cdot S \quad (2.19)$$

referido al plano inclinado pues  $X_g \cdot \text{sen} \alpha = Y_g$ . Referido de nuevo a la vertical:

$$F = \gamma \cdot Y_g \cdot S = P_g \cdot S \quad (2.20)$$

donde:

-  $P_g$ , es la presión en el centro de gravedad.

Por lo tanto el empuje total al cual está sometida una superficie plana sumergida en un líquido es igual a la presión hidrostática en el centro de gravedad de la superficie por su área.

## 6. Punto de aplicación del empuje: El centro de presiones

Ya sabemos calcular la magnitud de la fuerza resultante de presiones, pero debemos averiguar su punto de aplicación. Sobre la figura 2-6 planteamos el equilibrio de momentos generado por la resultante  $F$  y por las fuerzas elementales de presión en cada punto, con respecto al eje  $AB$ .

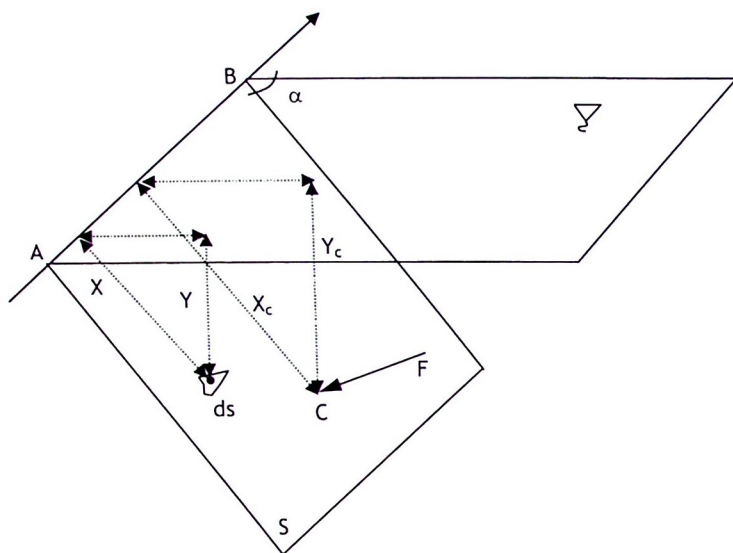


Figura 2-6. Centro de Presiones.

$$F \cdot X_c = \int_S p \cdot dS \quad (2.21)$$

Sustituyendo el valor de  $F$  en la ecuación (2.19) y el valor de  $p$  en (2.17):

$$(\gamma \cdot \text{sen} \alpha \cdot S \cdot X_g) \cdot X_c = \int_S (X \cdot \text{sen} \alpha \cdot \gamma) X \cdot dS \quad (2.22)$$

$$X_g \cdot X_c \cdot S = \int_S X^2 \cdot dS \quad (2.23)$$

El segundo miembro de la ecuación (2.23) representa el producto de cada elemento de superficie elemental por el cuadrado de la distancia al eje  $AB$ , extendido a toda el área, lo cual representa el momento de inercia de la superficie  $S$  respecto de  $AB$ . De esta forma podemos escribir:

$$X_c = \frac{I}{X_g \cdot S} \quad (2.24)$$

donde:

- $I$ , momento de inercia de la superficie  $S$  respecto  $AB$ .

Dado que en la mayoría de las aplicaciones las superficies tendrán un eje de simetría definido, podemos expresar el momento de inercia  $I$  respecto del eje de simetría que pasa por el centro de gravedad de la superficie aplicando el *Teorema de Stainer*<sup>2</sup>.

Sustituyendo Stainer en la ecuación (2.24):

$$X_c = X_g + \frac{I_g}{X_g \cdot S} \quad (2.25)$$

Lo cual representa la coordenada  $X$  del punto de aplicación de la resultante de la fuerza de presión o empuje total, medida sobre el plano inclinado de la superficie sumergida. Al punto de aplicación del empuje lo llamaremos *centro de presiones*.

De la ecuación (2.25) se extraen dos conclusiones acerca del centro de presiones:

1. Está siempre por debajo del centro de gravedad
2. Su ubicación no depende del ángulo de inclinación, por tanto es independiente de éste.

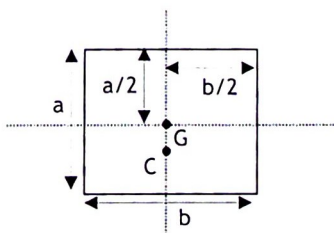


Figura 2-7. Ubicación del Centro de Presiones.

## 7. Cálculo de empujes en diques y presas de gravedad

En la industria, varios son los problemas que se deben afrontar relacionados con la contención de líquidos, principalmente para su almacenamiento. Así nos encontramos en ocasiones con que determinadas materias primas o

<sup>2</sup> Teorema de Stainer.

$$I = I_g + X_g^2 \cdot S$$

subproductos, por el gran volumen que suponen, deben ser almacenados en depósitos, balsas, etc. Por ejemplo, en la actividad minera, una solución práctica son los diques de gravedad construidos en distintos materiales, por ejemplo diques de materiales sueltos impermeabilizados. Cuando se trata de agua, se recurren a otras soluciones como los depósitos metálicos o de hormigón. Cuando se trabaja con hidrocarburos o productos alimentarios es habitual recurrir a los depósitos metálicos en forma de silo.

El número de ejemplos es innumerable. Es por tanto importante conocer el funcionamiento hidrostático de estas instalaciones.

Sea la figura siguiente:

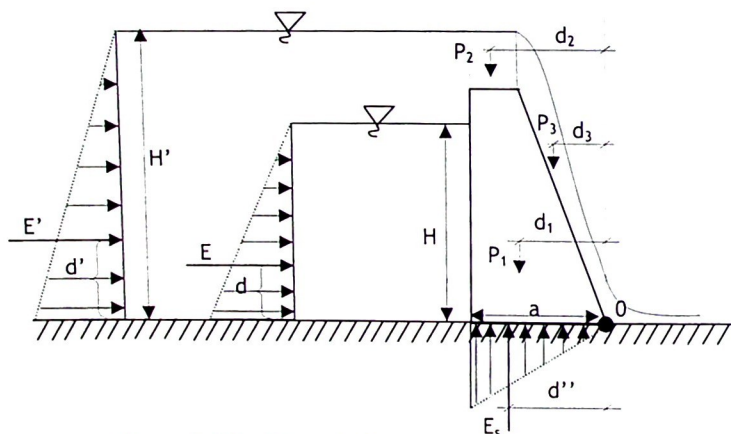


Figura 2-8 Equilibrio de Fuerzas en un dique.

En la figura 2-8 se identifican distintas fuerzas, las cuales multiplicadas por su brazo respecto al punto de giro O generan los correspondientes momentos. Estos momentos tienden por un lado a volcar el dique (momento de vuelco) y por otro lado a mantenerlo estable (momento de estabilidad). La condición que se debe cumplir para la estructura sea segura será:

$$M_e > M_v \cdot C_{sv} \quad (2.26)$$

donde:

- $C_{sv}$ , coeficiente de seguridad al vuelco, mayor que 1.

Las fuerzas que tienden a volcar la estructura son  $E$  y  $E'$ , las cuales representan el empuje generado por la resultante de la presión hidrostática<sup>3</sup> aplicada en el centro de presiones del paramento que la contiene, en el caso de que no rebese o de que rebese respectivamente. Por tanto:

$$M_v = E \cdot d \quad \text{ó} \quad M_v = E' \cdot d' \quad (2.27)$$

La estabilidad se garantiza con el peso de la estructura  $P_1$ , al cual colaboran el peso de la lámina de agua sobre el vertedero del dique  $P_2$ , y la lámina sobre el paramento aguas abajo  $P_3$  en el caso de que rebese.

En el caso de que existan filtraciones de agua bajo el dique, los pesos se ven reducidos por el empuje hidrostático que se genera bajo la cimentación también llamado *subpresión*  $E_s$ . Así el momento de estabilidad vendrá dado:

$$M_e = P_1 \cdot d_1 + P_2 \cdot d_2 + P_3 \cdot d_3 - E_s \cdot d'' \quad (2.28)$$

La *subpresión* se calcula como una fuerza hidrostática en los dos extremos de la cimentación según las columnas de agua a cada lado, procediendo después a un reparto trapecial de las mismas bajo el dique. En general, (aplicando la Ley de Darcy) la presión no se transmite íntegramente por existir ciertas pérdidas de energía en el movimiento por lo que  $E_s$  se suele multiplicar por un coeficiente corrector. La subpresión la calcularemos pues a partir de la expresión:

$$E_s = \alpha \cdot \gamma \cdot \frac{H+h}{2} \cdot k \quad (2.29)$$

donde:

- $E_s$ , empuje hidrostático producido por la subpresión.
- $\gamma$ , peso específico del agua.
- $H, h$ , columna de agua en los paramentos aguas arriba y aguas abajo del dique respectivamente.
- $K$ , coeficiente reductor por tipo de suelo:
  - $K=0$ , roca compacta
  - $K=0'5$ , roca alterada
  - $K=1$ , suelos incoherentes.

<sup>3</sup> Al calcular el empuje de la presión hidrostática, el peso específico será el del líquido estudiado.

Por tanto el empuje vertical generado por  $F_v$  es igual al peso de fluido encerrado en el volumen (AA'BB') $\cdot b$ . Si trabajamos con un espesor unitario, será igual a la superficie encerrada en AA'BB'.

Como el peso de dicho volumen está aplicado en su centro de gravedad, la componente  $F_v$  estará aplicada en la vertical que pase por dicho centro de masas.

Según la orientación de la figura, el volumen puede ser un *volumen real o ficticio* y a su vez generar un *empuje hacia arriba o hacia abajo*. La figura anterior 2-10 muestra una superficie que soporta el empuje de un volumen real de fluido. Al estar orientada hacia arriba, el empuje es hacia abajo. Sin embargo, en la siguiente figura 2-11 podemos ver una superficie orientada hacia abajo, por lo que el empuje será hacia arriba. Además en este caso el volumen de cálculo es un volumen ficticio.

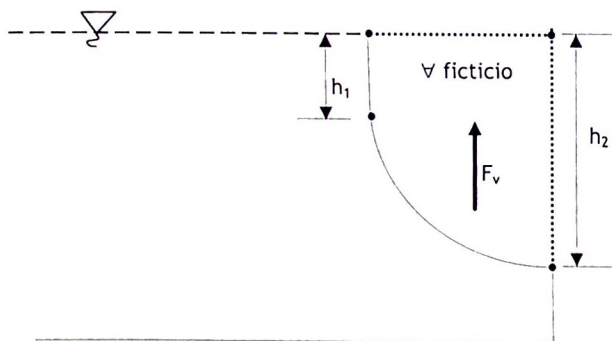


Figura 2-11. Orientación de la figura en la determinación de la componente vertical.

### Componente horizontal

En la obtención de la componente horizontal, es de aplicación todo lo visto para superficies planas, sin más que proyectar la curva sobre un plano vertical.

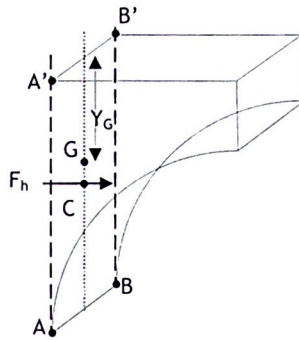


Figura 2-12. Componente horizontal del empuje.

El empuje vendrá dado por:

$$F_h = \gamma \cdot Y_G \cdot \text{superficie AA'BB'} \quad (2.35)$$

Expresión idéntica a la vista para superficies planas. El punto de aplicación en el centro de presiones C, se obtendrá como ya vimos en apartados anteriores.

Conocidas las componentes horizontal y vertical, la resultante se obtendrá con la suma vectorial de ambas componentes:

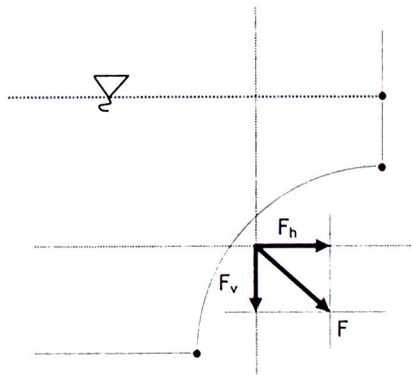


Figura 2-13. Resultante del empuje.

## 9. Principio de Arquímedes

El conocido principio de Arquímedes se enuncia de la siguiente forma: “*Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso de fluido que desaloja*”.

Sea un sólido con un volumen  $\mathcal{V}$ , sumergido en un fluido de densidad  $\rho$  y peso específico  $\gamma$ . Las componentes horizontales del empuje en ambos lados del sólido serán idénticas por lo que se anulan entre sí. Para hallar la componente vertical debemos aplicar lo visto en el epígrafe anterior sobre empujes sobre superficies curvas. Para ello dividimos en el sólido en sus dos hemisferios.

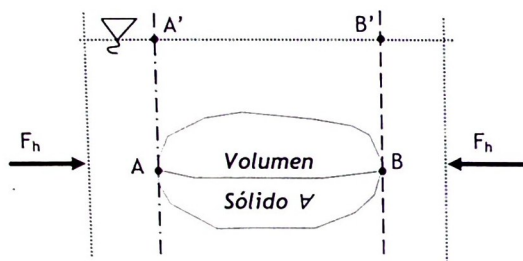


Figura 2-14. Sólido sumergido.

La fuerza que actúa sobre el hemisferio superior, será la generada por el peso del volumen de fluido que hay por encima del cuerpo sumergido. Este volumen es  $\mathcal{V}_1$  y es un volumen real. Como la superficie está orientada hacia arriba, el empuje soportado será hacia abajo. Por el contrario, el hemisferio inferior está orientado hacia abajo, por lo que soporta un empuje vertical hacia arriba. La forma de obtenerlo es a partir del volumen ficticio que desplaza  $\mathcal{V}_2$ , o lo que es lo mismo, el volumen que contendría si fuese una superficie abierta.

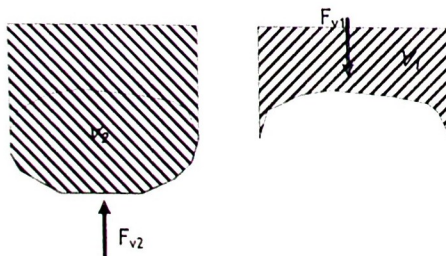


Figura 2-14. Empuje en cuerpos sumergidos.

En cualquier caso,  $\forall_2 > \forall_1$ , por lo que el empuje resultante es siempre vertical y hacia arriba. El empuje vendrá dado por la expresión:

$$E = F_{v_2} - F_{v_1} = \gamma \cdot (\forall_2 - \forall_1) = \gamma \cdot \forall \quad (2.36)$$

Por lo que el empuje resultante es igual al peso del volumen desplazado, tal y como enuncia el principio de Arquímedes.

## 10. Flotación y Estabilidad

La condición para que un cuerpo sumergido se encuentre en equilibrio estático es que tanto la resultante de fuerzas como el momento resultante sean nulos. El cumplimiento de la primera condición nos conduce a que el cuerpo flote, mientras que la segunda nos habla de la estabilidad.

### Flotación

La primera condición se verifica siempre que el peso del cuerpo sumergido sea menor que el empuje que recibe del fluido. Sea un cuerpo totalmente sumergido con un volumen  $\forall_c$  y un peso  $P$ . El peso específico medio del cuerpo será:

$$\gamma_c = \frac{P}{\forall_c} \quad (2.37)$$

Tal y como vimos en la ecuación (2.36) el empuje que recibe el cuerpo es igual al producto de peso específico del líquido por el volumen del cuerpo (volumen desalojado). Por tanto podemos escribir:

$$E = \gamma \cdot \forall = \gamma_c \cdot \forall_c = P \quad (2.38)$$

Es decir, que el cuerpo flotará siempre que tenga un peso específico menor que el peso específico del fluido en el que se sumerge, hundiéndose en caso contrario. La condición de estabilidad es por tanto que los pesos específicos del fluido y del cuerpo sean iguales, en cuyo caso el cuerpo permanecerá inmóvil en aquella posición en la que lo pongamos.

Puede ocurrir que el peso específico del cuerpo sumergido sea menor que el del fluido. En tal caso el cuerpo permanecerá parcialmente sumergido, de forma que el volumen sumergido tenga un peso igual al empuje recibido.

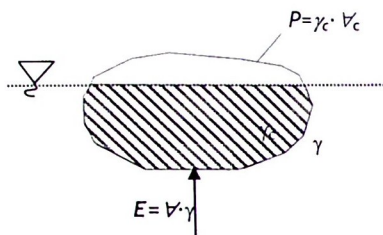


Figura 2-15. Cuerpos parcialmente sumergidos.

El empuje viene dado por  $E = \gamma V$ . El peso del cuerpo es  $P = \gamma_c \cdot V_c$ . Como se trata de un cuerpo con un peso específico menor que el del fluido que lo contiene ( $\gamma_c < \gamma$ ), solo una parte del mismo debe estar sumergida de forma que se cumpla  $E = P$ .

### Estabilidad

Cuando se cumple la segunda condición (momento resultante nulo), el cuerpo es estable sobre el fluido. Esta condición se verifica cuando las líneas de acción del peso (centro de gravedad del cuerpo  $G$ ) y del empuje (centro de presiones  $C$ ) coinciden, por tanto no existe ningún par de rotación.

Así podemos encontrar distintas situaciones posibles:

1.- Posición de equilibrio *indiferente*. Se produce cuando  $G$  y  $C$  coinciden no solo sobre la misma línea de acción sino en el mismo punto. Este cuerpo quedará exactamente en la posición en la que lo pongamos, aunque se produzca una traslación o un giro.

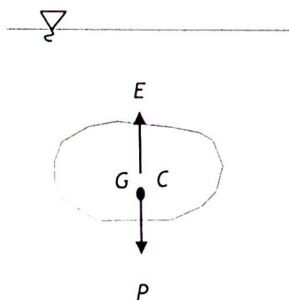


Figura 2-16. Equilibrio indiferente.

2.- Posición de equilibrio *estable*. Se produce cuando  $C$  está por encima de  $G$ . Mientras que empuje y peso del cuerpo están sobre la misma línea de acción, el cuerpo está en equilibrio. Si se aplica un pequeño giro, aparece un par restaurador que tiende a llevarlo a la situación de equilibrio.

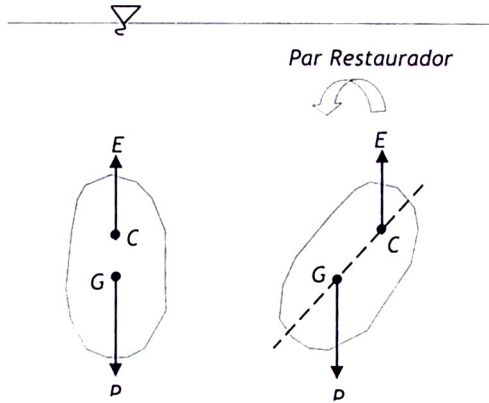


Figura 2-17. Equilibrio estable.

3.- Posición de equilibrio *inestable*. Se produce cuando  $C$  está por debajo de  $G$ . Al girar ligeramente el cuerpo aparece un par de vuelco, lo que genera que el cuerpo busque una nueva posición de equilibrio.

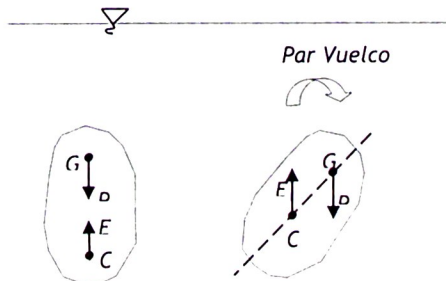


Figura 2-18. Equilibrio inestable.

## 11. Medida de la presión. Manómetros

Los manómetros son instrumentos que nos permiten medir la presión relativa o también llamada presión manométrica. Existen distintos tipos que a continuación se indican.

### 11.1. Barómetro de mercurio

También llamado Barómetro de Torricelli en honor a su inventor, el cual lo descubrió cuando buscaba la forma de crear el vacío perfecto.

Consiste en un tubo de vidrio aproximadamente de 80 cm de altura y cerrado por uno de los extremos y abierto por el otro, el cual se llena completamente de mercurio. A continuación se da la vuelta y la parte abierta se sumerge en una cubeta también llena de mercurio. La columna de mercurio en el interior del tubo desciende hasta una altura en donde se equilibra con la presión atmosférica que está actuando sobre la superficie libre del Hg en la cubeta. El motivo por el cual se utiliza mercurio es porque dada su elevada densidad, la altura de tubo necesaria es muy pequeña en comparación por ejemplo con agua que debería tener 10,33 m de longitud, y porque la presión de vapor que se genera  $h_v$ , al hacer el vacío es despreciable a temperaturas normales.

El volumen que se genera en el interior del tubo es un vacío casi perfecto a no ser por el vapor de mercurio que se desprende de la superficie del líquido metálico, la cual resulta ser despreciable. Así podemos escribir:

$$Z_o + \frac{P_o}{\gamma} = h + h_v \quad (2.39)$$

Si  $Z=0$  poniendo el plano de comparación o referencia en la superficie libre y  $h_v$  lo despreciamos por estar muy próximo a cero:

$$\frac{P_o}{\gamma} = h \quad (2.40)$$

Esta altura medida en mmHg recibe el nombre de Torr.

### 11.2. Piezómetros

Los piezómetros consisten en un tubo transparente de pequeño diámetro, abierto por arriba a la atmósfera y conectado por debajo al punto donde queremos medir la presión, bien sea un depósito con el líquido en reposo o una conducción con este en movimiento. El líquido se elevará por el tubo una altura tal que se equilibra el peso del mismo en la columna del piezómetro

con la presión existente en el punto de medida. Así pues la altura de columna de agua medida en una escala graduada fijada al propio tubo nos proporciona directamente la presión manométrica.

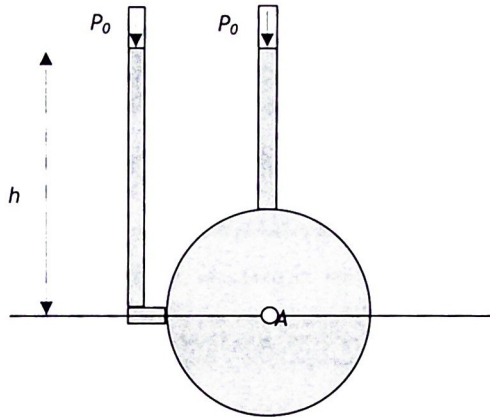


Figura 2-19. Piezómetro.

$$P_A = \gamma \cdot h \quad (2.41)$$

$$\frac{P_A}{\gamma} = h \quad (2.42)$$

Las presiones que podemos medir son muy discretas puesto que altura del piezómetro es importante en cualquier caso.

### 11.3. Manómetro abierto o manómetro simple

Supone una mejora con respecto al anterior, para medir presiones más elevadas con menor longitud de tubo. Consiste en doblar el tubo en forma de U y poner dentro un líquido más denso (líquido manométrico) como por ejemplo el mercurio, el cual tiene una densidad 13,6 veces mayor que la densidad del agua.

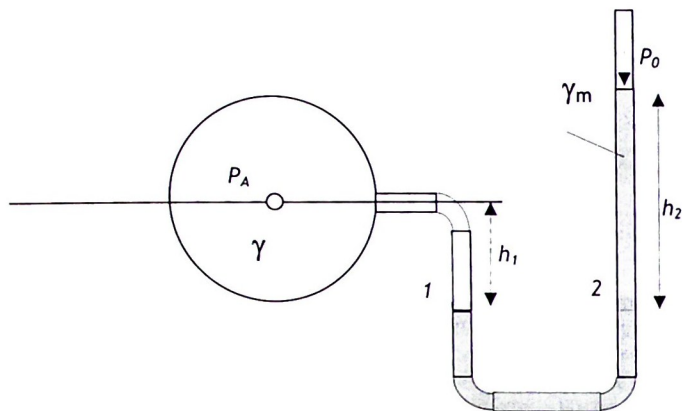


Figura 2-20. Manómetro simple.

La presión en 1 vendrá dada por la suma  $P_A + \gamma \cdot h_1$ . La presión en 2 vendrá dada por  $\gamma_m \cdot h_2$ . Como la presión en 1 y en 2 debe ser la misma por encontrarse en un mismo plano, igualamos las expresiones:

$$P_A + \gamma \cdot h_1 = \gamma_m \cdot h_2 \quad (2.43)$$

Por lo que:

$$P_A = \gamma_m \cdot h_2 - \gamma \cdot h_1 \quad (2.44)$$

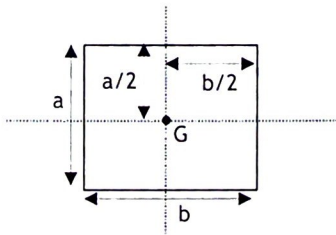
#### 11.4. Manómetro metálico o Bourdon

Consiste en un tubo llamado tubo Bourdon, por un lado abierto y conectado a la corriente en la que se desea medir la presión y cerrado por el otro extremo, el cual posee cierta curvatura. Cuando aumenta la presión en el interior del tubo, éste tiende a estirarlo. Este movimiento es proporcional a la presión y se transmite mediante un mecanismo a la aguja. Deben calibrarse previamente, siendo los más extendidos y utilizados.



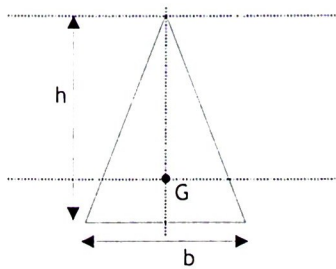
Figura 2-21. Manómetro metálico

## 12. Algunos centros de gravedad y momentos de inercia



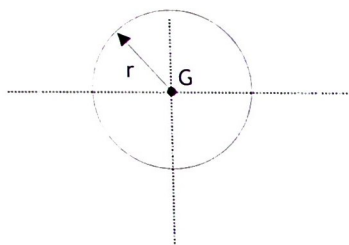
$$X_g = \frac{h}{2} \cdot \frac{b}{2}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$



$$X_g = \frac{2}{3} h$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}$$



$$X_g = r = \frac{D}{2}$$

$$I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

## Tema 3. Dinámica Integral

### 1. Introducción

En este tema trataremos los fluidos en movimiento. A grandes rasgos, dicho estudio se puede abordar desde dos planteamientos. Por un lado podemos realizar una descripción del movimiento sin tener en cuenta las causas que lo producen y estaremos en el campo de la *Cinemática de fluidos*, o por el contrario podemos describirlo teniendo en cuenta las fuerzas implicadas y estaremos entonces en el campo de *Dinámica de fluidos*.

Por otro lado, es posible trabajar en un punto concreto del espacio, o bien trabajar en una región finita del mismo, balanceando la cantidad de fluido que entra y sale de ella y deduciendo allí los cambios en fuerzas, momentos o energía que se producen. A la región del espacio donde se aplica la llamamos *volumen de control* y la superficie que lo encierra, *superficie de control*.

El primer planteamiento recibe el nombre de *análisis diferencial* del movimiento o análisis a pequeña escala. El volumen de control es infinitesimal. El segundo planteamiento recibe el nombre de *análisis integral*, del volumen de control o de gran escala, y será el que desarrollaremos en este curso.

El análisis diferencial plantea ecuaciones diferenciales que apenas tienen solución para unos pocos casos particulares, de ahí que sea más utilizado el planteamiento integral a la hora de resolver problemas prácticos. Sin embargo, con el desarrollo de la informática y la posibilidad de aplicar métodos numéricos a la resolución de dichas ecuaciones diferenciales, un campo que se está desarrollando con fuerza es la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD).

### 2. Análisis del movimiento de los fluidos. Introducción a la cinemática de fluidos

La *Cinemática* de fluidos estudia el movimiento de éstos sin considerar las causas que lo producen. Por lo tanto se limita a describir en cada momento las relaciones entre las partículas fluidas y el tiempo.

El problema puede ser tratado desde dos perspectivas completamente distintas, lo que nos conducirá a los enfoques de *Euler y Lagrange* que más tarde estudiaremos. Podemos emular lo que solemos hacer en mecánica del sólido rígido, y de la misma forma que allí se ligan todas las magnitudes del sólido a su centro de gravedad, nosotros nos quedamos con una partícula material, en este caso fluida y estudiamos su comportamiento a lo largo del tiempo. Este enfoque que analiza cada una de las partículas fluidas recibe el nombre de *enfoque Lagrangiano*. Sin embargo, aprovechando la definición de medio continuo que dimos en el tema anterior, es posible estudiar una porción de espacio, que

denominaremos volumen de control, analizando todas las partículas que lo atraviesan a lo largo del tiempo. Este segundo enfoque recibe el nombre de *Euleriano*, y es el empleado habitualmente en Mecánica de Fluidos.

### 2.1. Descripción cinemática del flujo. Enfoques de Euler y Lagrange

El campo de velocidades es un campo vectorial en el que en cada punto del espacio  $(x, y, z)$  y en cada instante  $(t)$  hay asociado un valor para la velocidad de la partícula que ocupa esa posición en ese momento. El vector velocidad quedará definido a partir de sus componentes:

$$\begin{aligned}V_x &= V_x(x, y, z, t) \\V_y &= V_y(x, y, z, t) \\V_z &= V_z(x, y, z, t)\end{aligned}\quad (3.1)$$

Para describir el movimiento de una partícula de fluido en un medio considerado continuo (es decir, para describir el campo de velocidades) como ya hemos dicho se pueden emplear dos criterios distintos: El método de Euler ó *punto de vista local* y el método de Lagrange ó *punto de vista molecular*.

#### Método de Euler

Se selecciona un punto  $M$  en el espacio que tiene unas coordenadas  $(x, y, z)$ . En el instante  $t_0$  una partícula que se encuentra en  $M$  tiene una velocidad  $V_0=(u_0, v_0, w_0)$ . En un instante posterior  $t_1$ , otra partícula distinta se encuentra en  $M$ , y podemos describir de nuevo su velocidad con  $V_1=(u_1, v_1, w_1)$ . Las variables que describen el movimiento (*Coordenadas de Euler*) son las componentes del vector velocidad en cada instante  $t$ .

Si expresamos la velocidad en todos los puntos del espacio a través de las coordenadas de Euler estamos definiendo lo que denominamos *campo de velocidades*. Así el campo de velocidades se escribirá  $V=V(x, y, z, t)$ , lo cual es una función vectorial que indica cual es el valor de la velocidad en un punto fijo en el espacio  $(x, y, z)$  a medida que las partículas pasan por allí  $(t)$ . De esta forma la velocidad resulta una función del tiempo y las coordenadas de la partícula  $(x,y,z)$  son una variable independiente.

$$\begin{aligned}u &= u(x, y, z, t) \\v &= v(x, y, z, t) \\w &= w(x, y, z, t)\end{aligned}\quad (3.2)$$

Una vez hemos descrito cual será el campo de velocidades, es posible dibujar líneas continuas imaginarias que presentan la propiedad de que en cada instante, en cada punto son tangentes al vector velocidad. Dichas líneas se denominan *líneas de corriente*.

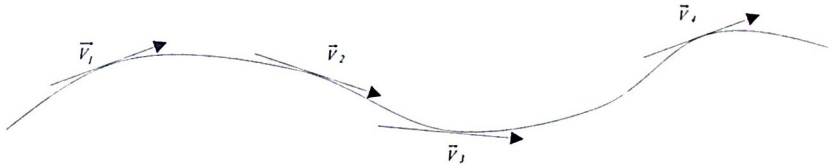


Figura 3-1. Línea de corriente.

Por tanto las líneas de corriente son la envolvente del campo de velocidades de todas las partículas de fluido en un instante determinado. Son equivalentes a las *líneas de campo* en un campo vectorial cualquiera.

Por un punto solo puede pasar una línea de corriente, pues de lo contrario indicaría que existen dos velocidades distintas en un punto, excepción hecha en puntos singulares como fuentes o sumideros.

Consideremos dentro de un flujo, una curva  $C$  que no sea línea de corriente, y el haz de líneas de corriente que cortan dicha curva. Si esta curva es abierta, al haz de líneas de corriente lo denominamos *superficie de flujo*, mientras que si  $C$  es cerrada, al haz de líneas de corriente lo denominamos *tubo de flujo* o *tubo de corriente*.

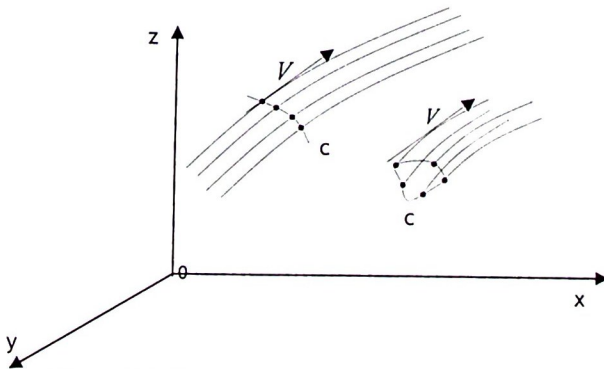


Figura 3-2. Superficies y Tubos de corriente.

### Método de Lagrange

En este caso se describe el comportamiento de una partícula fluida en particular. Como la partícula está en movimiento su posición en cada instante es una función del tiempo, y por consiguiente cada una de sus coordenadas (**Coordenadas de Lagrange**) varían de un instante a otro. Por tanto las coordenadas son una función que depende de  $(t)$ . En  $t_0$  la partícula ocupa la posición  $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ . En el instante  $t_1$  la partícula ocupa la posición  $M_1=(x_1, y_1, z_1)$ . Las ecuaciones que describen el movimiento de la partícula se expresan a partir de las funciones:

$$\begin{aligned}x &= x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z &= z(x_0, y_0, z_0, t)\end{aligned}\quad (3.3)$$

Asociado a las coordenadas de Lagrange tenemos la definición de **trayectoria de una partícula**, la cual es el lugar geométrico de los puntos recorridos por dicha partícula al moverse.

También se define **Línea de Traza** como conjunto de puntos ocupados en un instante dado por todas las partículas materiales que han pasado por un punto fijo. Experimentalmente se pueden dibujar mediante la inyección de un colorante en el flujo de forma continua en el punto antes descrito.

### Algunas diferencias entre ambos planteamientos

La diferencia entre ambos métodos radica en que en el enfoque de **Lagrange** las coordenadas son una función del tiempo mientras que en el de **Euler** la velocidad es una función del tiempo. En Euler la posición  $x, y, z$  es una variable independiente mientras que en Lagrange es una variable dependiente.

Tras la definición de línea de corriente subyace un planteamiento puramente matemático, siendo por el contrario fácilmente observables experimentalmente las líneas de traza y las trayectorias.

Las líneas de corriente se definen en un instante concreto, mientras que las líneas de traza y trayectorias se forman con el transcurso del tiempo.

En la práctica ambos enfoques se pueden ver claramente con el empleo de fotografía e introduciendo partículas de polvo visibles a la luz para que sean arrastradas. Con un tiempo de exposición largo, aparecerán unos segmentos que en el método de Lagrange dibujarán líneas que representan las trayectorias del espacio recorrido por la una partícula durante el tiempo que dura la exposición de la película fotográfica. Con un tiempo de exposición muy corto, en el método de Euler se dibujan pequeños segmentos que coinciden con la

dirección del vector velocidad de las diferentes partículas en el instante de realizar la foto, por tanto son líneas de corriente.

En la mecánica de fluidos tradicionalmente se emplea el criterio Euleriano.

**En movimientos permanentes o estacionarios** (se definen en este mismo tema en un epígrafe posterior), las componentes del vector velocidad no varían con el tiempo y en este caso, **las líneas de corriente coinciden con las trayectorias y las líneas de traza.**

## 2.2. Derivación material

Las propiedades del flujo cambian con el tiempo y el espacio, como hemos visto en el apartado anterior. Sin embargo, dicha variación será distinta si centramos el análisis en un punto del espacio (coordenadas de Euler) o si lo centramos sobre una partícula en movimiento (coordenadas de Lagrange).

### Euler

Cuando estudiamos la variación de una propiedad  $\eta = \eta(x, y, z, t)$  cualquiera del flujo respecto del tiempo, debemos tener en cuenta que a su vez varía respecto del espacio, puesto que en otro lugar del espacio dicha propiedad será distinta. Así pues la **derivada total o material** de la propiedad tendrá dos componentes o sumandos: La derivada que llamaremos **derivada local** debida a la variación de la propiedad en un punto respecto del tiempo, y otra derivada que llamaremos **convectiva**, independiente del tiempo y que varía con el espacio.

De esta forma el diferencial total de la propiedad con respecto al tiempo vendrá dado por:

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u \frac{\partial\eta}{\partial x} + v \frac{\partial\eta}{\partial y} + w \frac{\partial\eta}{\partial z} \quad (3.4)$$

Donde:

- $\frac{D\eta(x, y, z, t)}{Dt}$ , es la derivada total o derivada material de la propiedad  $\eta$  que ocupa la posición del espacio  $(x, y, z)$  en el instante  $t$ .
- $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ , es la derivada local de la propiedad  $\eta$  que expresa como varía la propiedad con respecto al tiempo en la posición del espacio  $(x, y, z)$ .

- $u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \frac{\partial \eta}{\partial z}$ , es la derivada convectiva de la propiedad  $\eta$  que expresa como varía la propiedad con respecto de la posición  $(x, y, z)$  en un instante  $t$  determinado.

### Lagrange

Cuando se emplean coordenadas de Lagrange, debido a que el sistema se mueve con la partícula, la derivada total o material coincide con la derivada local, pudiendo escribir directamente:

$$\frac{D\eta(t)}{Dt} = \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} \quad (3.5)$$

### 2.3. Aceleración

Cuando aplicamos la derivación material en coordenadas de Euler a un campo de velocidades, lo que obtenemos es un campo de aceleraciones. Así pues deberemos hablar con total naturalidad de **aceleración total o material**, **aceleración local** y **aceleración convectiva**.

### 2.4. Clasificación del movimiento

Atendiendo exclusivamente a las condiciones cinemáticas espacio-tiempo podemos clasificar el movimiento de la siguiente forma:

#### Movimiento permanente o estacionario

El movimiento es permanente cuando en cada punto de la corriente permanecen constantes (aunque pueden variar de un punto a otro) respecto del tiempo. Así presión y velocidad serán constantes en un punto a lo largo del tiempo. En esta situación, las líneas de corriente, de traza y trayectorias coinciden.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (\text{referido a valores medios de } v \text{ y } p) \quad (3.6)$$

Movimiento variable, no permanente o transitorio

En este caso las características del flujo varían respecto del tiempo. Por tanto los valores de presión y velocidad en un punto es cambiante con el tiempo. En este caso:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0 ; \quad \frac{\partial p}{\partial t} \neq 0 \quad (\text{referido a valores medios de } \bar{v} \text{ y } p) \quad (3.7)$$

Movimiento uniforme

El movimiento diremos que es uniforme si en un instante dado, en cualquier sección transversal encontramos que el vector velocidad tiene igual módulo, dirección y sentido, es decir no hay variaciones del vector velocidad a lo largo del espacio.

Movimiento no uniforme o variado

Se producirá en aquellos casos en los que el vector velocidad a largo de distintas secciones transversales de una corriente no se mantiene constante.

**2.5. Flujo rotacional e irrotacional**

Una partícula de fluido en el interior de una masa fluida en movimiento, está sometida a esfuerzos normales (presión) y a esfuerzos tangenciales (esfuerzo cortante ó fricción debida a la viscosidad). Como consecuencia de la acción combinada de los esfuerzos cortantes que se producen entre distintas capas de fluido, puede ocurrir que la partícula de fluido rote sobre uno o varios de sus ejes. Esto produce una **velocidad angular de rotación** además de la **velocidad de traslación** a la que se mueve, dependiendo de la distribución de velocidades en cada una de las direcciones y de la viscosidad del fluido.

Si alguna partícula de fluido rota se dice que el flujo es **rotacional**, mientras que si ninguna partícula lo hace el flujo es **irrotacional**.

Analíticamente esto se calcula mediante el término de vorticidad, el cual no es más que el rotacional del campo de velocidades:

$$\Omega = \text{Vorticidad} = \frac{1}{2} \omega = \frac{1}{2} \text{rot}V = \frac{1}{2} \nabla \times V \quad (3.8)$$

El flujo será irrotacional si la vorticidad es nula, siendo rotacional si la vorticidad es distinta de cero.

## 2.6. Caudal o gasto

Sea una superficie  $S$ , de la cual tomamos un elemento diferencial  $ds$ . La velocidad de la corriente en  $ds$  es  $\vec{v}$ , aunque solamente la componente normal a ésta, es decir  $\vec{v}_n$  la atraviesa. El volumen de fluido que atraviesa  $ds$  en un instante de tiempo  $dt$  será igual a un prisma oblicuo de base  $ds$  y de alto el espacio recorrido por el fluido, es decir  $\vec{v}_n \cdot dt$ , o lo que es lo mismo  $v \cdot \cos\phi \cdot dt$ . Por tan podremos escribir:

$$\text{Volumen} = \vec{v}_n \cdot dt \cdot ds \quad (3.9)$$

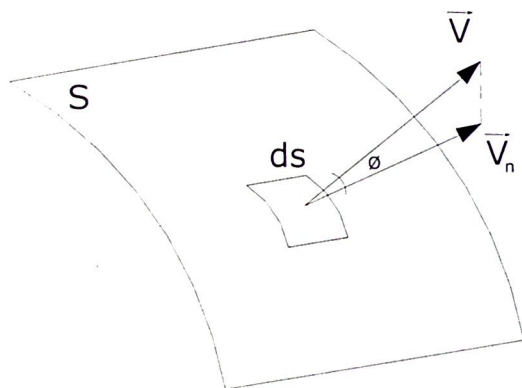


Figura 3-3. Definición de caudal.

Llamaremos *caudal* o también *gasto* a la cantidad de fluido que atraviesa  $ds$  por unidad de tiempo. Si bien dicha cantidad puede medirse en masa, peso o volumen, lo normal es referirse a volumen por unidad de tiempo.

$$Q = \frac{\text{Volumen}}{\text{Tiempo}} \quad (3.10)$$

Por tanto, el volumen que atraviesa una sección en un instante de tiempo  $dt$  será  $\text{Volumen} = Q \cdot dt$ .

Es por ello que podemos plantear la siguiente igualdad de volúmenes, a partir de las ecuaciones (3.7) y (3.8):

$$Q \cdot dt = \overline{v_n} \cdot dt \cdot ds \quad (3.11)$$

Por lo que:

$$Q = \overline{v_n} \cdot ds \quad (3.12)$$

Podemos extender el cálculo realizado para  $ds$  a toda la superficie  $S$ , integrando (3.10):

$$Q = \int_S \overline{v_n} \cdot ds \quad (3.13)$$

En el caso particular de flujo uniforme y permanente,  $\overline{v_n}$  será constante por lo que el caudal que atraviesa la superficie  $S$ , plana y normal a  $v$  será:

$$Q = V \cdot S \quad (3.14)$$

Si el flujo fuese no uniforme, debería calcularse la velocidad media como:

$$V_m = \frac{\int_S \overline{v_n} \cdot ds}{\int_S ds} = \frac{Q}{S} \quad (3.15)$$

Por lo que el caudal se expresaría de nuevo como:

$$Q = V_m \cdot S \quad (3.16)$$

Entendemos por *velocidad media*  $V_m$  aquella que multiplicada por la sección  $S$  da un gasto igual al real, es decir, al que obtenemos considerando las distintas velocidades puntuales existentes en el conjunto de la citada sección.

### 3. Dinámica Integral

Las leyes de la mecánica están escritas para ser utilizadas en sistemas. Un *sistema* es una cantidad de arbitraria de masa de identidad fija, es decir un conjunto de partículas cuya masa permanece constante. Lo que está fuera del sistema se llama *entorno*. Lo que separa el sistema del entorno es la *frontera*. Las leyes de la mecánica describen lo que ocurre cuando interacciona el sistema con su entorno. En mecánica de fluidos 4 leyes fundamentales se requieren para explicar el flujo:

La primera ley fundamental describe que la cantidad de masa debe ser constante. Es la ley de conservación de la masa. En sólidos es tan evidente que ni se requiere su estudio, pero en fluidos es fundamental. En fluidos recibe el nombre de *ecuación de continuidad*.

La segunda ley fundamental aparece cuando el entorno ejerce una fuerza  $F$  sobre el sistema. Al aplicar una fuerza  $F$ , la masa se acelera. En mecánica de fluidos la 2ª ley de Newton recibe el nombre de *ecuación de conservación de la cantidad de movimiento*.

La tercera ley fundamental aparece cuando el entorno ejerce un momento  $H$  sobre el centro de masas del sistema. Esta ley recibe el nombre de *ecuación de conservación del momento cinético*.

Finalmente, la cuarta ley fundamental aparece al aplicar la primera ley de la termodinámica o ley de la conservación de la energía. En mecánica de fluidos la ley de conservación de la energía recibe el nombre de *Ecuación de Bernouilli*.

### 3.1. Ecuación de conservación de la masa: La ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es una relación matemática que representa el balance de masa de un flujo de fluido a través de una región determinada del espacio.

En términos más concretos, dado un fluido en movimiento (líquido o gas) que entra en un espacio definido (depósito, conducción) por una parte del mismo, y también sale de dicho espacio, por otra parte, la ecuación de continuidad muestra qué relación se cumple entre la cantidad de masa entrante, la cantidad de masa saliente y la cantidad de masa remanente en el interior. Como bien puede adelantarse, dicha relación es muy sencilla, y se puede resumir, de forma un tanto coloquial como: “el flujo de masa entrante menos el flujo de masa saliente es igual al ritmo de acumulación de la masa en el interior”.

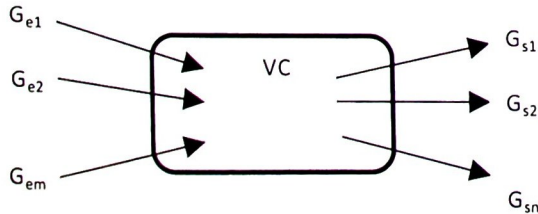


Figura 3-4. Flujos entrantes y salientes de un VC.

La Figura 3-4 representa una región del espacio, a la que se denomina Volumen de Control, VC, y que puede visualizarse, por ejemplo, como un depósito. Por la zona izquierda del VC entran, al interior del mismo, una serie de flujos másicos ( $G_{e1}$ ,  $G_{e2}$ , ...,  $G_{em}$ ), mientras que por la zona de la derecha salen del VC hacia el exterior, otra serie de flujos másicos ( $G_{s1}$ ,  $G_{s2}$ , ...,  $G_{sn}$ ). La ecuación de continuidad aplicada a este caso general, adopta la forma mostrada por la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{i=m} G_{ei} - \sum_{j=1}^{j=n} G_{sj} = \frac{dM_{VC}}{dt} \quad (3.17)$$

donde  $G_{ei}$  representa el caudal másico de cada uno de los  $m$  flujos de fluido entrantes en el VC,  $G_{sj}$  representa el caudal másico de cada uno de los  $n$  flujos de fluido salientes del VC, y  $M_{VC}$  representa la masa de fluido que hay acumulado dentro del VC.

Considerando, ahora, la relación entre densidad, masa y volumen, (3.17) puede reescribirse como muestra la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \rho_{ei} Q_{ei} - \sum_{j=1}^{j=n} \rho_{sj} Q_{sj} = \frac{d(\rho_{VC} V_{VC})}{dt} \quad (3.18)$$

donde  $\rho_{ei}$  y  $Q_{ei}$  representan la densidad y el caudal volumétrico, respectivamente, de cada uno de los  $m$  flujos de fluido entrantes en el VC,  $\rho_{sj}$  y  $Q_{sj}$  representan la densidad y caudal volumétrico, respectivamente, de cada uno de los  $n$  flujos de fluido salientes del VC,  $\rho_{VC}$  representa la densidad del fluido que hay acumulado dentro del VC, y  $V_{VC}$  representa el volumen que ocupa asimismo el fluido que hay acumulado dentro del VC.

### 3.1.1. Caso particular 1: Cuando el VC no permite la acumulación de fluido en su interior (conducciones)

La aplicación directa más sencilla que se puede hacer de la ecuación de continuidad viene dada por el caso de los VC que no permiten la acumulación o vaciado de fluido en su interior, en otras palabras, en conducciones o tuberías de paredes rígidas. En una tubería (y en régimen permanente), la masa de fluido que entra por uno de sus extremos debe, necesariamente, ser igual a la masa de fluido que sale por el otro.

Si las conducciones impiden, por tanto, la acumulación o vaciado de fluido, la aplicación de (3.17) a las mismas se reduce a:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \rho_{ei} Q_{ei} - \sum_{j=1}^{j=n} \rho_{sj} Q_{sj} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{i=m} \rho_{ei} Q_{ei} = \sum_{j=1}^{j=n} \rho_{sj} Q_{sj} \quad (3.19)$$

Los sumatorios presentes en (3.19) indican todavía la posibilidad de varios flujos de entrada y salida. Dentro de las conducciones, este es, en realidad, el caso de las conexiones entre tuberías (Figura 3-5).

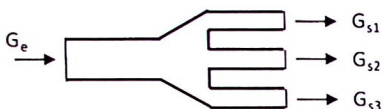


Figura 3-5



Figura 3-6

Para el caso de las conducciones o tuberías simples, con una única entrada y una única salida (Figura 3-6), (3.19) se reduce a:

$$\rho_e Q_e = \rho_s Q_s \quad (3.20)$$

Por último, cabe apuntar una última simplificación. Ésta es la que corresponde al caso en el que el fluido circulante es incompresible (típicamente, un líquido). La condición de incompresibilidad se traduce en que el hecho de que la densidad del fluido se mantiene constante en todo punto y momento, y por lo tanto, los términos de densidad se anulan entre sí, tanto en (3.19) como en (3.20). Si, además, se tiene en cuenta la definición de caudal, las nuevas versiones de ambas ecuaciones vienen dadas por (3.21) y (3.22), respectivamente.

$$\sum_{i=1}^{i=m} Q_{ei} = \sum_{j=1}^{j=n} Q_{sj} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{i=m} v_{ei} A_{ei} = \sum_{j=1}^{j=n} v_{sj} A_{sj} \quad (3.21)$$

$$Q_e = Q_s \quad \Rightarrow \quad v_e A_e = v_s A_s \quad (3.22)$$

En el caso de que por la tubería circule un gas en flujo compresible, es seguro que sigue dándose la igualdad de caudales máscicos entrantes y salientes, es decir, del producto de  $\rho$  y  $Q$  a la entrada y a la salida; pero no así de los multiplicandos individuales. Por ello, la densidad a la entrada será distinta a la densidad a la salida, y lo mismo ocurre con los caudales volumétricos. Estos casos no admiten simplificaciones adicionales, y deben ser resueltos con la forma general de la ecuación.

3.1.2. Caso particular 2: Cuando el VC permite la acumulación de fluido en su interior (depósitos)

Una segunda aplicación de la ecuación de continuidad viene dada por el caso de los VC que sí permiten la acumulación de fluido en su interior, en otras palabras, los depósitos. Evidentemente, en estos casos el caudal total de masa entrante (suma de todos los flujos individuales) puede ser mayor (el depósito se llena), menor (el depósito se vacía) o igual (la masa acumulada en el depósito se mantiene constante) que el caudal total de masa saliente. Y la ecuación de continuidad (3.18) debe considerarse con todos sus términos.

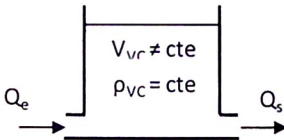


Figura 3-7

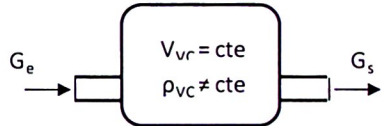


Figura 3-8

El caso de los fluidos incompresibles (líquidos, Figura 3-7) sigue admitiendo la simplificación resultante de mantenerse constante la densidad. Así, los términos de ésta se anulan y la ecuación adopta la forma mostrada por (3.23), si hay varios flujos de entrada y salida, o (3.24) si hay sólo uno de cada.

$$\sum_{i=1}^{i=m} Q_{ei} - \sum_{j=1}^{j=n} Q_{sj} = \frac{dV_{VC}}{dt} \quad (3.23)$$

$$Q_e - Q_s = \frac{dV_{VC}}{dt} \quad (3.24)$$

En el caso de un fluido incompresible, ocurre además que al variar la cantidad del mismo acumulada en un depósito, varía el volumen que ocupa dentro del mismo (sin tener por qué llenarlo por completo). Así por ejemplo, en un depósito de agua el nivel de ésta determina cuán lleno está. Una cosa, por tanto, es la capacidad total del depósito y otra distinta, el volumen que ocupa el fluido dentro de aquél. Pues bien, este volumen ocupado, que cambia según cambie la cantidad de fluido en el depósito, es el representado por la variable  $V_{VC}$ .

Además, es muy común que los depósitos de almacenamiento de líquidos tengan una sección transversal de área constante. Cuando esto es así, el volumen de

Los sumatorios presentes en (3.19) indican todavía la posibilidad de varios flujos de entrada y salida. Dentro de las conducciones, este es, en realidad, el caso de las conexiones entre tuberías (Figura 3-5).

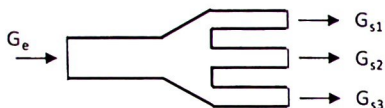


Figura 3-5



Figura 3-6

Para el caso de las conducciones o tuberías simples, con una única entrada y una única salida (Figura 3-6), (3.19) se reduce a:

$$\rho_e Q_e = \rho_s Q_s \quad (3.20)$$

Por último, cabe apuntar una última simplificación. Ésta es la que corresponde al caso en el que el fluido circulante es incompresible (típicamente, un líquido). La condición de incompresibilidad se traduce en que el hecho de que la densidad del fluido se mantiene constante en todo punto y momento, y por lo tanto, los términos de densidad se anulan entre sí, tanto en (3.19) como en (3.20). Si, además, se tiene en cuenta la definición de caudal, las nuevas versiones de ambas ecuaciones vienen dadas por (3.21) y (3.22), respectivamente.

$$\sum_{i=1}^{i=m} Q_{ei} = \sum_{j=1}^{j=n} Q_{sj} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{i=m} v_{ei} A_{ei} = \sum_{j=1}^{j=n} v_{sj} A_{sj} \quad (3.21)$$

$$Q_e = Q_s \quad \Rightarrow \quad v_e A_e = v_s A_s \quad (3.22)$$

En el caso de que por la tubería circule un gas en flujo compresible, es seguro que sigue dándose la igualdad de caudales másicos entrantes y salientes, es decir, del producto de  $p$  y  $Q$  a la entrada y a la salida; pero no así de los multiplicandos individuales. Por ello, la densidad a la entrada será distinta a la densidad a la salida, y lo mismo ocurre con los caudales volumétricos. Estos casos no admiten simplificaciones adicionales, y deben ser resueltos con la forma general de la ecuación.

3.1.2. Caso particular 2: Cuando el VC permite la acumulación de fluido en su interior (depósitos)

Una segunda aplicación de la ecuación de continuidad viene dada por el caso de los VC que sí permiten la acumulación de fluido en su interior, en otras palabras, los depósitos. Evidentemente, en estos casos el caudal total de masa entrante (suma de todos los flujos individuales) puede ser mayor (el depósito se llena), menor (el depósito se vacía) o igual (la masa acumulada en el depósito se mantiene constante) que el caudal total de masa saliente. Y la ecuación de continuidad (3.18) debe considerarse con todos sus términos.

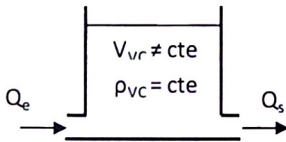


Figura 3-7

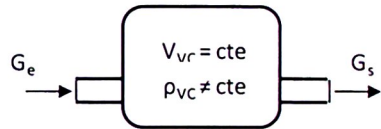


Figura 3-8

El caso de los fluidos incompresibles (líquidos, Figura 3-7) sigue admitiendo la simplificación resultante de mantenerse constante la densidad. Así, los términos de ésta se anulan y la ecuación adopta la forma mostrada por (3.23), si hay varios flujos de entrada y salida, o (3.24) si hay sólo uno de cada.

$$\sum_{i=1}^{i=m} Q_{ei} - \sum_{j=1}^{j=n} Q_{sj} = \frac{dV_{VC}}{dt} \quad (3.23)$$

$$Q_e - Q_s = \frac{dV_{VC}}{dt} \quad (3.24)$$

En el caso de un fluido incompresible, ocurre además que al variar la cantidad del mismo acumulada en un depósito, varía el volumen que ocupa dentro del mismo (sin tener por qué llenarlo por completo). Así por ejemplo, en un depósito de agua el nivel de ésta determina cuán lleno está. Una cosa, por tanto, es la capacidad total del depósito y otra distinta, el volumen que ocupa el fluido dentro de aquél. Pues bien, este volumen ocupado, que cambia según cambie la cantidad de fluido en el depósito, es el representado por la variable  $V_{VC}$ .

Además, es muy común que los depósitos de almacenamiento de líquidos tengan una sección transversal de área constante. Cuando esto es así, el volumen de

líquido acumulado en el mismo,  $V_{VC}$ , puede expresarse como indica la ecuación siguiente:

$$V_{VC} = A_D \cdot z \quad (3.25)$$

donde  $A_D$  es el área de la sección del depósito, y  $z$  es la altura a la que llega el líquido, dentro del depósito, medida desde el fondo del mismo.

En estos casos, la variación de la cantidad de líquido se traduce, simplemente, en una variación de la altura  $z$ , ya que  $A_D$ , como se ha indicado, es constante, y puede salir de la derivada con respecto al tiempo. Si además, consideramos la definición de caudal, (3.24) puede escribirse como:

$$v_e A_e - v_s A_s = A_D \frac{dz}{dt} \quad (3.26)$$

Para el caso de un fluido compresible (Figura 3-8), no se cancelan las densidades entre sí, ya que bien pueden ser distintas, y por lo tanto, hay que comenzar el trabajo con (18). Sin embargo, en trabajo con depósito de gas sí admite una cierta simplificación adicional. Efectivamente, un gas siempre va a ocupar todo el volumen del depósito que lo contiene, y por lo tanto el volumen del gas acumulado,  $V_{VC}$ , siempre va a ser constante e igual que el volumen del depósito,  $V_D$ . Así, la variación de la masa de gas acumulada en el depósito en lo que se traduce es en un cambio en densidad del gas,  $\rho_{VC}$ . A más gas acumulado, mayor densidad, y viceversa. De este modo, del producto ( $\rho_{VC} V_{VC}$ ), el segundo factor,  $V_{VC}$ , es constante y puede salir de la derivada con respecto al tiempo, mientras que el primer factor,  $\rho_{VC} = \rho_D$ , sí es variable y debe mantenerse dentro de la derivada:

$$\rho_e v_e A_e - \rho_s v_s A_s = V_D \frac{d\rho_D}{dt} \quad (3.27)$$

### 3.2. Ecuación de conservación de la energía. Ecuación de Bernouilli

La ecuación de Bernouilli no es otra cosa que un caso particular del principio de conservación de la energía mecánica, aplicado al caso de una corriente fluida. Esta ecuación puede obtenerse por varios métodos. Veamos dos formas de hacerlo.

#### 3.2.1. Ecuación de Euler y ecuación de Bernouilli

La ecuación de *Euler* se obtiene por simple aplicación de la *segunda ley de Newton* a un volumen diferencial de fluido ideal (sin viscosidad) que se mueve

ligado a una línea de corriente. De ésta se puede deducir la **ecuación de Bernoulli** bajo la hipótesis de comportamiento ideal, esto es, sin la aparición de esfuerzos tangenciales o cortantes debido a la viscosidad.

Sea el elemento diferencial de volumen de la figura 3-9. La segunda ley de Newton enuncia que la aplicación de una fuerza a dicho volumen le provocará una aceleración proporcional a su masa:  $F=m \cdot a$ . Las fuerzas que actúan sobre el elemento diferencial de volumen son la resultante de las presiones y el campo gravitatorio.

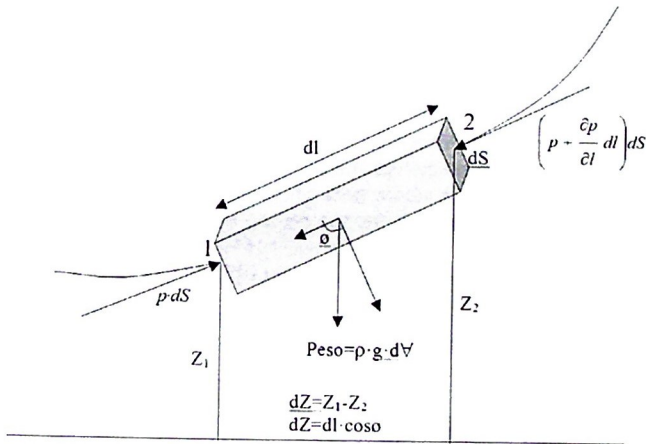


Figura 3-9. Elemento diferencial de Volumen moviéndose en una línea de corriente.

El balance de fuerzas en la dirección de la línea de corriente se corresponderá con:

$$\sum dF = p \cdot dS - \left( p + \frac{\partial p}{\partial l} dl \right) dS - \rho g \cdot dS \cdot dl \cdot \cos \phi \quad (3.28)$$

Como hemos dicho, el anterior balance debe ser igual a la masa de fluido multiplicada por su aceleración  $a$  (2ª Ley Newton):

$$a \cdot dm = \sum dF = p \cdot dS - p \cdot dS - \frac{\partial p}{\partial l} dl \cdot dS - \rho g \cdot dS \cdot dl \cdot \cos \phi = - \frac{\partial p}{\partial l} dl \cdot dS - \rho g \cdot dS \cdot dz \quad (3.29)$$

Si aplicamos la derivación material en coordenadas de Euler visto anteriormente:

$$\alpha dm = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} \right) dm = \rho dS dl \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} \right) \quad (3.30)$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\rho dS dl \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} \right) = - \frac{\partial p}{\partial l} dl dS - \rho g dS dz \quad (3.31)$$

Operando,  $dS$  desaparece en todos los términos:

$$\rho dl \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} \right) = - \frac{\partial p}{\partial l} dl - \rho g dz \quad (3.32)$$

Dividiendo por  $dl$  en todos los términos y reagrupando llegamos a la denominada **ecuación de Euler** válida para un volumen de fluido ideal en una línea de corriente:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + g \frac{dz}{dl} = 0 \quad (3.33)$$

Para el caso particular de movimiento permanente, la velocidad no varía a lo largo del tiempo,  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ , y la ecuación de Euler resulta:

$$v \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + g \frac{dz}{dl} = 0 \quad (3.34)$$

Si además el fluido fuera incompresible (la mayoría de los líquidos en movimiento no transitorio) la densidad permanecerá constante. Podemos integrar la ecuación entre dos puntos de una misma línea de corriente:

$$\int_1^2 v \frac{\partial v}{\partial l} dl + \int_1^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl + \int_1^2 g \frac{dz}{dl} dl = 0 \quad (3.35)$$

Como sabemos que  $v \frac{\partial v}{\partial l} = \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l}$ , la integral anterior resulta:

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\partial v^2}{\partial l} dl + \int_1^2 \frac{\partial p}{\rho \partial l} dl + g \int_1^2 \frac{dz}{dl} dl = 0 \quad (3.36)$$

Que integrada resulta:

$$\left(\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2\right) + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) \quad (3.37)$$

Si la reordenamos:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (3.38)$$

Por último dividimos todos los términos por la aceleración de la gravedad  $g$ :

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (3.39)$$

Expresión conocida como **ecuación de Bernouilli**, la cual no es más que la expresión particular del principio de conservación de la energía en fluidos a lo largo de una línea de corriente. La energía se expresa en unidades de energía específica, esto es, energía por unidad de peso de fluido.

### 3.2.2. Teorema del trabajo y la energía y Ecuación de Bernouilli

El teorema del trabajo y la energía enuncia: *El trabajo que desarrolla una fuerza que actúa sobre una partícula y la desplaza de una localización 1 a otra localización 2 es igual a la variación de energía cinética experimentada.*

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de la curva  $C$ , bajo la acción de una fuerza  $F$ . La fuerza tangencial en  $P$  vale  $F_T = m \cdot (dv/dt)$ . (2ª Ley de Newton).

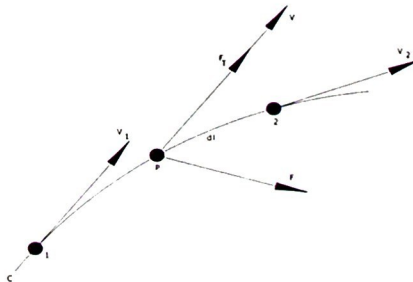


Figura 3-10. Trabajo en el movimiento curvilíneo.

El trabajo realizado por  $F_T$  en un desplazamiento  $dl$  será:

$$dW = F_T \cdot dl \quad (3.40)$$

$$dW = F_T \cdot dl = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dl = m \cdot \frac{dl}{dt} \cdot dv = m \cdot v \cdot dv \quad (3.41)$$

El trabajo total lo obtendremos integrando la ecuación anterior entre 1 y 2:

$$W = \int_1^2 F_T \cdot dl = \int_1^2 m \cdot v \cdot dv = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 \quad (3.42)$$

$$W = m \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \quad (3.43)$$

### Ecuación de Bernoulli.

Consideremos ahora una partícula de fluido que se mueve en régimen permanente de nuevo de 1 a 2, con su eje paralelo a la dirección del movimiento y bajo la cual actúa además de su propio peso, el gradiente de presiones. La partícula de fluido presenta una sección  $dS$  y una longitud  $dl$ .

presiones. La partícula de fluido presenta una sección  $dS$  y una longitud  $dl$ .

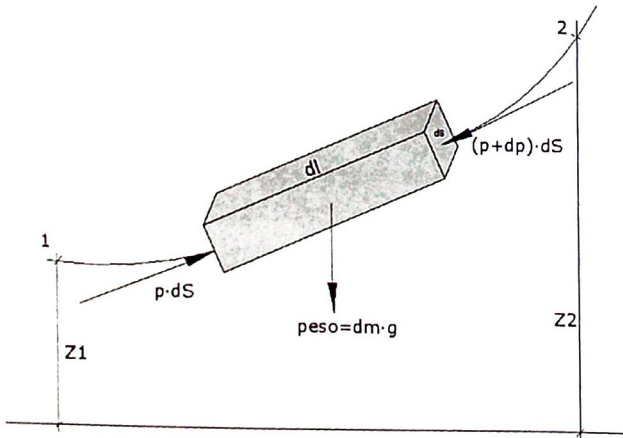


Figura 3-11. Equilibrio de fuerzas

Aplicando el teorema del trabajo y la energía cinética, la variación de energía cinética entre 1 y 2 debe ser igual a la suma de los trabajos que se producen debidos a cada una de las fuerzas actuantes. Así podemos escribir:

$$[W]_1^2 = dm \cdot \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \quad (3.44)$$

Las fuerzas que actúan son el peso del fluido  $p=g \cdot dm$ , y la presión resultante en ambas caras de la partícula:  $p \cdot dS - (p+dp) \cdot dS = dp \cdot dS$ . De esta forma, los trabajos desarrollados debidos al peso y a la presión serán:

$$[W_{\text{peso}}]_1^2 + [W_{\text{presión}}]_1^2 = -g \cdot dm \cdot (Z_2 - Z_1) - \int_1^2 dp \cdot dS \cdot dl \quad (3.45)$$

A partir de la igualdad masa=volumen por densidad podemos escribir:

$$dm = \rho \cdot dS \cdot dl \quad (46)$$

Por lo que (3.44) puede quedar como:

$$[W_{\text{peso}}]_1^2 + [W_{\text{presión}}]_1^2 = -g \cdot dm \cdot (Z_2 - Z_1) - dm \int_1^2 \frac{dp}{\rho} \quad (3.47)$$

Si sustituimos (3.47) en (3.44):

$$dm \cdot \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = -g \cdot dm \cdot (Z_2 - Z_1) - dm \int_1^2 \frac{dp}{\rho} \quad (3.48)$$

Dividiendo ahora la expresión anterior por el producto  $g \cdot dm$ , la ecuación resultante será:

$$\frac{1}{g} \cdot \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = Z_1 - Z_2 - \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{dp}{\rho} \quad (3.49)$$

Que ordenada resulta:

$$Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{dp}{\rho} \quad (3.50)$$

Considerando un fluido perfecto (despreciando por tanto el efecto de la viscosidad), e incompresible ( $\rho$ =constante), una vez establecido el régimen permanente y actuando únicamente sobre el sistema las fuerzas del campo gravitatorio, la ecuación de Bernouilli, como una expresión particular del

principio de la conservación de la energía mecánica que es, puede expresarse como sigue:

$$Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad (3.51)$$

Ó

$$H = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = cte \quad (3.52)$$

Tanto la energía total en un punto como los distintos sumandos, tienen dimensiones de **energía específica (kgm/kg)**, es decir, **energía por unidad de peso de fluido**, y por tanto dimensión lineal, de ahí que los denominemos también alturas.

- H: altura total en un punto de la línea de corriente o trayectoria.
- Z: altura geométrica o altura de posición.
- $V^2/2g$ : altura cinética.
- $P/\gamma$ : altura de presión.

Se demuestra con facilidad que los sumandos de la ecuación de Bernoulli son las distintas formas de energía específica que pueden darse en una corriente:

- Z es la energía potencial de posición. Si una partícula está situada a una cota Z respecto de un plano de referencia, el trabajo que hay que desarrollar para elevarlo desde el plano de referencia hasta Z será  $W = m \cdot g \cdot Z$ . Si la expresamos como energía específica, es decir por unidad de peso:  $m \cdot g \cdot Z / m \cdot g = Z$ .
- $P/\gamma$  es la energía potencial de presión. Una partícula de fluido bajo una presión p, posee la capacidad de elevarse hasta una altura h igual al producto de su **peso específico** por h. Expresado como energía por unidad de peso, resultará finalmente  $P/\gamma$ .
- $V^2/2g$  es la energía cinética por unidad de peso. Una partícula de fluido con una masa m, tiene una energía cinética igual a  $m \cdot v^2/2$ . El peso de la partícula es igual a su masa por la aceleración de la gravedad por lo que su masa es igual al cociente  $m = \text{peso}/g$ . Si sustituimos, la energía cinética tenemos es igual a  $\text{peso}/g \cdot v^2/2$ . Para expresarlo como energía específica lo dividimos por el peso de fluido, quedando finalmente  $V^2/2g$ .

Durante el movimiento permanente de un líquido perfecto, cada una de las formas de energía puede transformarse en otra, siendo la energía específica total invariante.

### 3.2.3. Representación gráfica de las líneas de energía

La ecuación de Bernouilli podemos representarla a lo largo de la trayectoria de una partícula de la siguiente forma:

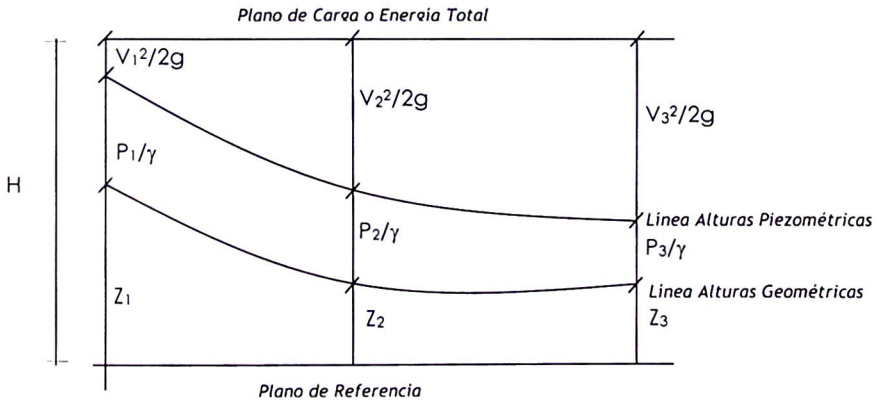


Figura 3-12. Líneas de energía.

En donde:

- Línea de alturas geométricas representa la elevación de la partícula de fluido en cada punto, con respecto a un plano de referencia,  $Z$ .
- Línea de alturas piezométricas. Se consigue al sumar a la elevación  $Z$ , la altura correspondiente a la energía potencial de presión  $P/\gamma$ . Recibe este nombre pues es la altura hasta la que se elevará el fluido en ese punto si colocamos un piezómetro.
- Plano de Carga o energía total. Se consigue sumándole a la altura piezométrica, la altura correspondiente al término cinético  $V^2/2g$ .

### 3.2.4. Generalización de la ecuación de Bernoulli. Aplicación a fluidos reales

De todas las hipótesis adoptadas en los razonamientos anteriores, la que más se aleja de la realidad es la de suponer el fluido ideal, es decir carente de viscosidad y por tanto sin que oponga resistencia a la deformación y al flujo. Los fluidos reales en movimiento, disipan una cierta cantidad de energía mecánica en forma de calor, debido a la existencia de tensiones tangenciales entre las partículas fluidas generadas por la viscosidad del mismo. A esta energía disipada en forma de calor la llamaremos *pérdida de carga*.

Además es posible incluir en la ecuación elementos que aporten energía en lugar de disiparla. A los elementos que aportan energía los llamamos *activos*, mientras que aquellos que la disipan los llamaremos *resistivos*.

La ecuación de Bernoulli para fluidos reales la expresaremos como:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{1 \rightarrow 2} \quad (3.53)$$

donde:

- $\Delta H_{1 \rightarrow 2}$ , pérdidas de carga entre dos puntos considerados de una misma línea de corriente.

Si representamos de nuevo las líneas de energía a lo largo de la línea de corriente o trayectoria descrita por una partícula de fluido, en este caso teniendo en cuenta su viscosidad (fluido real), el efecto de la existencia de pérdidas de carga queda reflejado de la siguiente forma:

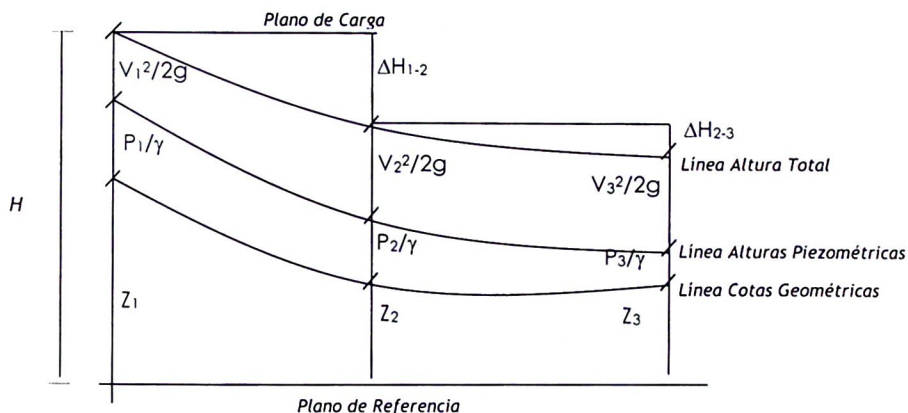


Figura 3-13. Líneas de energía para un fluido real.

Finalmente si añadimos los elementos activos que aportan energía al fluido, como bombas, la ecuación de Bernoulli se escribirá como:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H_b = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{1 \rightarrow 2} \quad (3.54)$$

donde:

$H_b$ , energía específica por unidad de peso que aporta la bomba, en mcf.

### Extensión de la ecuación de Bernoulli a una corriente

La ecuación de Bernoulli ha sido deducida por aplicación al movimiento de un volumen de fluido por una línea de corriente. Cuando extendemos el movimiento a un tubo de corriente, nos encontramos con que en una sección transversal, es posible que las distintas líneas de corriente o trayectorias no tengan la misma velocidad. En este caso el término cinético no sería exactamente el mismo si éste se calcula con la velocidad media de la sección que si se calcula con las velocidades puntuales reales extendidas a toda la sección. Es por ello que el término cinético deberá estar afectado por el denominado coeficiente de Coriolis  $\alpha$ . Para obtener el coeficiente de coriolis es necesario definir previamente la potencia que genera una corriente fluida en una sección transversal. Dicha potencia será el producto de la energía específica  $H$

por el caudal másico  $m$ . El caudal másico se definió como el producto del caudal volumétrico  $Q$  por la densidad  $\rho$ :

$$N = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H = \gamma \cdot Q \cdot H \quad (3.55)$$

Donde:

- $N$ , potencia en vatios

De la ecuación de Bernoulli sabemos que  $H = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$ , por lo que la potencia en cada elemento diferencial de superficie en la sección transversal:

$$dN = \gamma \cdot H \cdot dQ = \gamma \left( z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) dQ \quad (3.56)$$

Integrando a lo largo de toda la sección transversal:

$$N = \int_S \left( z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) \gamma dQ = \int_S \gamma \cdot z \cdot dQ + \gamma \cdot \frac{P}{\gamma} \cdot dQ + \frac{v^2}{2g} \gamma dQ \quad (3.57)$$

Las potencias relativas a los términos de posición y de presión, resultan  $\gamma \cdot z \cdot Q$  y  $P \cdot Q$  respectivamente. La potencia generada por el término cinético viene dada por:

$$\int_S \frac{v^2}{2g} \gamma dQ = \int_S \rho \frac{v^2}{2} dQ = \rho \int_S \frac{v^2}{2} dQ \quad (3.58)$$

Sin embargo, la potencia relativa al término cinético no es la misma calculada con la velocidad media que calculada a partir de la integración de todas las velocidades puntuales.

$$\rho \int_S \frac{v^2}{2} dQ \neq \rho \cdot Q \cdot \frac{V^2}{2} \quad (3.59)$$

Siendo  $V$  la velocidad media en toda la sección.

Sin embargo siempre podemos hacer que sean equivalentes afectando a uno de los miembros con un factor:

$$\rho \int_S \frac{v^2}{2} dQ = \alpha \cdot \rho \cdot Q \cdot \frac{V^2}{2} \quad (3.60)$$

Por lo que el factor de Coriolis, despejando de la ecuación anterior vendrá dado por:

$$\alpha = \frac{\int v^2 \cdot dQ}{V^2 \cdot Q} = \frac{\int v^3 \cdot dS}{V^3 \cdot S} \quad (3.61)$$

Así pues en una corriente, la ecuación de Bernoulli vendrá dada por:

$$H = z + \frac{P}{\gamma} + \alpha \frac{v^2}{2g} \quad (3.62)$$

El valor de  $\alpha$  depende del perfil de velocidades. En régimen laminar llega a valer 2, pero como las velocidades son muy pequeñas, el término cinético entero es despreciable. En régimen turbulento oscila entre 1,01 y 1,06 por lo que es habitual prescindir de él, suponiendo que vale la unidad.

### Ecuaciones de Navier-Stokes

La ecuación de Euler de la dinámica vista en epígrafes anteriores de este mismo tema puede ser modificada para tener en cuenta ahora las fuerzas internas superficiales debidas a la viscosidad del líquido (esfuerzos tangenciales). Este nuevo planteamiento nos conduce a las llamadas ecuaciones de Navier-Stokes, los cuales explican el movimiento de los fluidos reales a partir de las fuerzas que los originan, las cuales no serán vistas en este curso por superar los objetivos del mismo.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \nabla^2 u & \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \nabla^2 v \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \nabla^2 w & & (3.63) \end{aligned}$$

O en notación vectorial:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (3.64)$$

Si es importante indicar que una de las principales consecuencias que se derivan de las ecuaciones de Navier-Stokes es que la distribución de presiones en una sección transversal en la que el movimiento es uniforme y permanente es hidrostática.

### 3.3. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

Recordemos que en mecánica clásica llamábamos cantidad de movimiento, momento lineal, o momentum al producto de la masa de un cuerpo por la velocidad que lleva en un momento determinado  $\bar{p} = m \cdot \bar{V}$ .

Para variar la velocidad de una corriente de fluido en magnitud o dirección requiero aplicar una fuerza. De acuerdo con el principio de acción y reacción, el fluido devuelve una fuerza idéntica y de sentido contrario sobre el cuerpo que provoca dicho cambio de velocidad.

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en fluidos podemos deducirla de la aplicación de la segunda ley de Newton, esto es, aquella que dice que  $F = m \cdot a$ :

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a} = m \cdot \frac{d\bar{V}}{dt} \quad (3.65)$$

Si lo reordenamos:

$$\bar{F} \cdot dt = m \cdot d\bar{V} \quad (3.66)$$

Al primer miembro lo llamamos *impulso de la fuerza* y al segundo miembro lo llamamos *variación de la cantidad de movimiento*.

Aplicado a un tubo de corriente, en el cual el fluido tiene una velocidad de entrada  $V_1$  y una velocidad de salida  $V_2$ , con un caudal másico  $m_1$  entrante y un  $m_2$  saliente, resulta:

$$\sum \bar{F} \cdot dt = m \cdot d\bar{V} = d\bar{p} \quad (3.67)$$

En régimen permanente

$$\sum \bar{F} = d\bar{p} = m_2 \cdot \bar{v}_2 - m_1 \cdot \bar{v}_1 \quad (3.68)$$

Como en mecánica de fluidos es habitual trabajar con caudales volumétricos, la ecuación anterior la transformamos en:

$$\sum \bar{F} = \rho Q_2 \cdot \bar{v}_2 - \rho Q_1 \cdot \bar{v}_1 \quad (3.69)$$

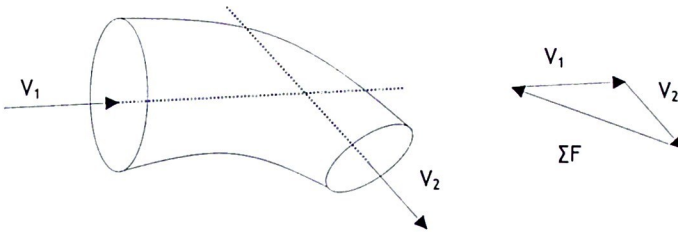


Figura 3-14. Cantidad de movimiento.

Debemos remarcar que la ecuación (3.69) presenta la totalidad de las fuerzas exteriores, tanto las estáticas (peso del propio fluido) como las dinámicas producidas por las diferentes presiones existentes en las secciones. También indicar que a la hora de la aplicación práctica de la ecuación debemos proyectar dichas fuerzas sobre los respectivos ejes, trabajando con los escalares resultantes en cada eje.

La ecuación (3.69) se ha deducido considerando una velocidad media en la entrada y en la salida. Si dicha ecuación se calcula para un diferencial de área de entrada y de salida y a continuación se integra, extendiéndose a toda la sección, el resultado debe ser corregido con un coeficiente:

$$\rho \bar{v} dQ = \rho \bar{v} \bar{v} dS = \rho \bar{v}^2 dS \quad (3.70)$$

El valor medio vendrá dado por:

$$\rho \int_s \bar{v}^2 dS = \rho \frac{\int_s v^2 dS}{V^2 dS} = \rho \beta \bar{Q} \cdot V \quad (3.71)$$

Siendo V la velocidad media en toda la sección.

La ecuación de cantidad de movimiento ahora quedará:

$$\sum \bar{F} = \rho \beta \bar{Q}_2 \bar{v}_2 - \rho \beta \bar{Q}_1 \bar{v}_1 \quad (3.72)$$

El valor de  $\beta=4/3$  cuando el flujo es laminar, aunque en ese caso las velocidades son tan pequeñas que las fuerzas resultantes son despreciables. En flujo turbulento el valor de  $\beta$  oscila entre 1,06 y 1,09 lo que hace que generalmente se utilice un valor de 1.

## Tema 4. Flujo a presión

### 1. Introducción

En este tema trataremos el movimiento de líquidos por el interior de conducciones circulares o tuberías. Las tuberías pueden ser de distintos materiales según las aplicaciones. Es recomendable la lectura de alguna referencia bibliográfica en las que se trate este tema pues el cálculo de tuberías exige, no solamente conocer el fundamento hidráulico que aquí se trata sino también la aplicación práctica a partir de diseños comerciales.

### 2. Régimen hidráulico en tuberías

Al hablar de régimen hidráulico en tuberías se hace referencia al comportamiento de las partículas fluidas al moverse. De esta forma podemos hablar de régimen *laminar* y régimen *turbulento*.

#### Régimen Laminar

Las partículas se mueven siguiendo trayectorias uniformes, organizadas por capas concéntricas adyacentes, deslizándose una sobre otra pero sin mezclarse. El líquido en una tubería se moverá pues en el sentido de la corriente pero las velocidades a la que deslizan unas capas sobre otras será creciente, mínima junto a la pared del tubo y máxima al llegar al eje del tubo. En este régimen se cumple fielmente la Ley de Viscosidad de Newton.

El régimen laminar ocurre en pocos casos como finales de tuberías donde la velocidad es mínima, en tubos de mando hidráulico o en microtubos de riegos.

#### Régimen Turbulento

Es el más habitual. Las partículas líquidas se mueven ahora siguiendo trayectorias erráticas y formando turbulencias y torbellinos. Las capas ya no son paralelas deslizando unas sobre otras sino que se mezclan por completo.

Para comprobar esto, Osborne Reynolds planteo un experimento que consiste en inyectar un líquido coloreado mediante una boquilla en el interior de una corriente. La velocidad de la corriente se va incrementando hasta que el flujo laminar antes descrito desaparece, las líneas rectas coloreadas se vuelven sinuosas hasta mezclarse por completo.

## 2.1. El número de Reynolds

El número de Reynolds es un parámetro adimensional que ya fue obtenido en el Tema 1 y que supone la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de viscosidad (esfuerzos cortantes, tangenciales o simplemente rozamiento) en el interior de una corriente.

Si bien en el Tema 1 se llegó a él aplicando el Teorema  $\pi$  de Buckingham al fenómeno hidráulico, es posible también deducirlo a partir de la relación entre ambas fuerzas.

Las fuerzas de viscosidad se expresan como:

$$F_v = \tau \cdot S \quad (4.1)$$

donde:

- $\tau$ , tensión tangencial o superficial
- $S$ , sección transversa

Aplicando la Ley de Viscosidad de Newton y descomponiendo el anterior producto en su ecuación de dimensiones:

$$\tau \cdot S = S \cdot \mu \frac{dv}{dy} \equiv \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu \cdot L \cdot V \quad (4.2)$$

Por otro lado las fuerzas de inercia vendrán dadas por:

$$F_i = \sum m a \quad (4.3)$$

donde:

- $m$ , masa
- $a$ , aceleración

Operando de la misma forma que antes:

$$F_i = \sum m a = \rho L^3 \cdot \frac{V}{T} = \rho \cdot L \cdot L^2 \cdot \frac{V}{T} = \rho \cdot L^2 \cdot V^2 \quad (4.4)$$

Como el número de Reynolds es la relación entre ambas fuerzas:

$$Re = \frac{\rho \cdot L^2 \cdot V^2}{\mu \cdot L \cdot V} = \frac{\rho \cdot L \cdot V}{\mu} \quad (4.5)$$

como  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

$$Re = \frac{L \cdot V}{\nu} \quad (4.6)$$

En el caso de tuberías, la dimensión lineal que las define es el diámetro  $D$ , resulta finalmente:

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} \quad (4.7)$$

El número de Reynolds es el parámetro que nos sirve para clasificar el régimen de una corriente líquida. Osborne Reynolds en su experimento observó que siempre el régimen se mantenía laminar si  $Re < 2000$ . A este valor se le denomina *valor crítico inferior*. Realmente es el único válido, pues otros investigadores han conseguido en condiciones de laboratorio mantenerlo hasta  $Re$  más elevados pero que en condiciones reales son difíciles de reproducir.

Para situaciones  $2000 < Re < 4000$  se produce una zona *crítica o inestable*, siendo a partir de  $Re > 4000$  cuando se establece el régimen *turbulento*.

### 3. Movimiento en régimen laminar

Sea una tubería circular de radio  $r$  colocada horizontalmente. En ella está establecido el régimen laminar por lo que el líquido se mueve en capas concéntricas que deslizan unas sobre otras variando de forma continua la velocidad. Supongamos una de esas capas concéntricas de espesor elemental y radio  $y < r$  entre dos secciones transversales separadas una distancia  $L$ .

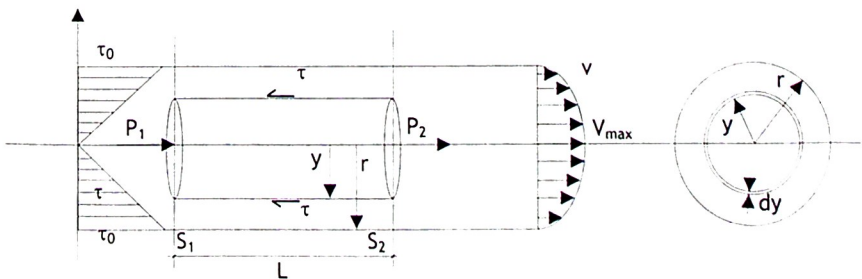


Figura 4-1. Movimiento laminar

Distribución de tensiones tangenciales

Si planteamos el equilibrio dinámico del cilindro considerado entre las secciones  $S_1$  y  $S_2$ , deberemos proyectar todas las fuerzas que actúan sobre el eje del mismo. Al ser movimiento uniforme no existen reacciones inerciales. Al estar el tubo dispuesto horizontalmente el peso en ambas secciones es el mismo y las presiones en los contornos del cilindro en ambas caras también. La condición de equilibrio por tanto será:

$$(P_1 - P_2) \cdot \pi \cdot y^2 = \tau \cdot 2\pi \cdot y \cdot L \quad (4.8)$$

Es decir, la resultante de los empujes que genera la presión (diferencia de presiones por el área) debe ser igual a la sección total del cilindro por la tensión tangencial, por lo que:

$$\tau = \frac{\Delta P}{2L} \cdot y \quad (4.9)$$

Esto nos indica que cuando el radio vale  $0$  (eje del tubo) la tensión es nula y cuando el radio vale  $r$ , es máxima y su valor viene dado por

$$\tau_0 = \frac{\Delta P}{2L} \cdot r \quad (4.10)$$

Distribución de velocidades

En régimen laminar se ha dicho que se cumple la Ley de Viscosidad de Newton. Como la velocidad aumenta (pues las tensiones tangenciales son menores) a medida que disminuye  $y$ , las expresaremos con un signo (-) delante:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy} \quad (4.11)$$

sustituyendo  $\tau$  por su valor en (9):

$$\frac{\Delta P}{2L} \cdot y = -\mu \frac{dv}{dy} \quad (4.12)$$

$$\frac{\Delta P}{2L} \cdot y \cdot dy = -\mu \cdot dv \quad (4.13)$$

integrando la ecuación diferencial anterior:

$$\frac{\Delta P}{2L} \int y \cdot dy = -\mu \int dv \quad (4.14)$$

$$\frac{\Delta P}{2L} \cdot \frac{1}{2} y^2 = -\mu V + C \quad (4.15)$$

$$\frac{\Delta P}{4L} y^2 = -\mu V + C \quad (4.16)$$

Experimentalmente se demuestra que la velocidad junto a la pared es nula, por lo que para  $y=r$ ,  $v=0$ . Esto permite conocer el valor de  $C$  sustituyendo en (4.16):

$$\frac{\Delta P}{4L} \cdot r^2 = C \quad (4.17)$$

Sustituyendo en (16) el valor de  $C$ :

$$\frac{\Delta P}{4L} y^2 = -\mu V + \frac{\Delta P}{4L} \cdot r^2 \quad (4.18)$$

$$\frac{\Delta P}{4L} y^2 - \frac{\Delta P}{4L} r^2 = -\mu V \quad (4.19)$$

$$\frac{\Delta P}{4L} (y^2 - r^2) = -\mu V \quad (4.20)$$

$$V = \frac{\Delta P}{4L \cdot \mu} (r^2 - y^2) \quad (4.21)$$

La ecuación (21) nos indica la distribución de velocidades. Cuando  $y=0$  (eje del tubo) la velocidad será máxima mientras que para  $y=r$  se anula (pared del tubo).

$$V_{max} = \frac{\Delta P}{4L \cdot \mu} \cdot r^2 \quad (4.22)$$

Para conocer la velocidad media debemos sumar todas las velocidades de la sección transversal y dividirla por dicha sección transversal:

Ecuación que comparada con la obtenida para la velocidad máxima, vemos que presenta una relación 2:1, por tanto:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} V_{max} \quad (4.24)$$

Pérdidas de carga entre dos secciones transversales

Sigamos con la conducción de la figura 4-1. Al ser horizontal,  $Z_1=Z_2$ . y  $V_1=V_2=V$  (velocidades medias) por ser el movimiento uniforme y permanente. En este caso, las pérdidas de carga aplicando Bernoulli se expresan como una diferencia de presión:

$$\Delta H_{1-2} = J \cdot L = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{\Delta P}{\gamma} \quad (4.25)$$

De (4.23), que nos proporciona la velocidad media, podemos despejar  $\Delta P$ :

$$\Delta P = \frac{8 \cdot L \cdot \mu \cdot \bar{V}}{r^2} \quad (4.26)$$

dividiendo ambos términos por  $\gamma$ :

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{8 \cdot L \cdot \mu \cdot \bar{V}}{\gamma r^2} \quad (4.27)$$

como sabemos la viscosidad cinemática es  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  y que el peso específico  $\gamma = \rho \cdot g$ .

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{8 \cdot L \cdot \rho \cdot \nu \cdot \bar{V}}{\rho \cdot g \cdot r^2} \quad (4.28)$$

introduciendo el diámetro de la tubería  $D$  en lugar del radio ( $D=2 \cdot r$ ):

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{8 \cdot L \cdot \nu}{g \cdot (D/2)^2} \cdot \bar{V} = \frac{4 \cdot 8 \cdot L \cdot \nu}{D^2 \cdot g} \cdot \bar{V} \quad (4.29)$$

multiplicando arriba y abajo por  $\bar{V}$ :

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{32 \cdot L \cdot \nu}{D \cdot D \cdot g} \cdot \bar{V}^2 \quad (4.30)$$

como  $Re = \frac{\bar{V} \cdot D}{\nu}$ :

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{32 \cdot L}{g \cdot Re \cdot D} \cdot \bar{V}^2 \quad (4.31)$$

Buscando la identidad con el término cinético de la ecuación de la energía podemos multiplicar numerador y denominador por 2:

$$h_r = \frac{\Delta P}{\gamma} = J \cdot L = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\overline{V^2}}{2g} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\overline{V^2}}{2g} \quad (4.32)$$

Ecuación conocida como *ecuación de Hagen-Poiseuille para el flujo laminar* en tuberías.

Al coeficiente  $64/Re$  se le denomina *factor de fricción* o coeficiente de fricción  $f$ . En régimen laminar  $f$  solo depende del número de  $Re$ , no interviniendo ningún otro factor en su determinación.

#### 4. Movimiento en régimen turbulento

Por el momento no existe teoría alguna que permita deducir de forma analítica la formación de turbulencias a partir del régimen laminar.

Las turbulencias se inician junto a las paredes y producen una agitación hidráulica de las partículas líquidas debido a que el vector velocidad ya no se dirige de forma constante en la dirección principal del flujo como ocurre en régimen laminar. Ahora el vector velocidad tiene una componente secundaria en la dirección transversal, variable y desordenada que produce el arrastre de partículas de un lado a otro de la sección transversal produciendo un intercambio de energía cinética y cantidad de movimiento.

Cualquier análisis de dicho movimiento exigiría conocer exactamente las fluctuaciones de velocidad respecto al tiempo en cada punto. Como esto no se ha realizado, se recurre desde el punto de vista práctico, a métodos semiempíricos que nos permitirán resolver problemas adecuadamente.

##### 4.1. Teoría de la capa límite de Prandtl

Prandtl planteó una teoría sobre el estudio del movimiento de fluidos de escasa viscosidad (agua, aire) en los que se asumía que éste se mueve como un fluido perfecto excepto en una capa próxima a las paredes del conducto (capa límite) en la cual se concentran los fenómenos de viscosidad y rozamiento. Fuera de la capa límite el fluido se comporta como no viscoso.

En el fluido ideal, al no existir viscosidad (no hay esfuerzos tangenciales) todas las capas del fluido se mueven a la misma velocidad y por tanto la distribución de velocidades resultará rectangular. En un fluido real, al acercarnos a la pared la distribución de velocidades se curva progresivamente hasta llegar a la pared en donde la velocidad se anula. Según Prandtl todos los fenómenos de viscosidad

y rozamiento quedan concentrados en esta capa, muy pegada a la pared y que hemos dicho que recibe el nombre de *capa límite*.

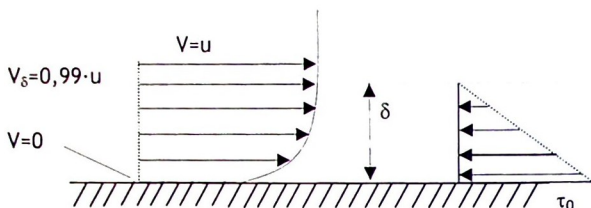


Figura 4-2. Espesor de la capa límite.

La capa límite tiene un espesor  $\delta = 0,99u$ , siendo  $u$  la velocidad uniforme del flujo ideal sin perturbaciones. A lo largo de la tubería por la acción continuada de los esfuerzos tangenciales  $\delta$  crece de forma asintótica. Para valores de  $Re$  bajos toda la capa límite se mueve con régimen laminar. Al aumentar  $Re$ , la capa límite pasa a turbulenta, excepto en una capa muy delgada pegada a la pared. Cuando la turbulencia es completa en toda la capa límite, pegada a la pared sigue quedando una delgadísima capa que se mueve en régimen laminar: *La subcapa laminar ó viscosa  $\delta'$* . El gradiente de velocidad en esta capa es muy elevado puesto que la velocidad fuera de ella es parecida a  $u$  mientras que en la pared debe de ser nulo. Allí es donde se concentrarán principalmente el efecto del rozamiento.

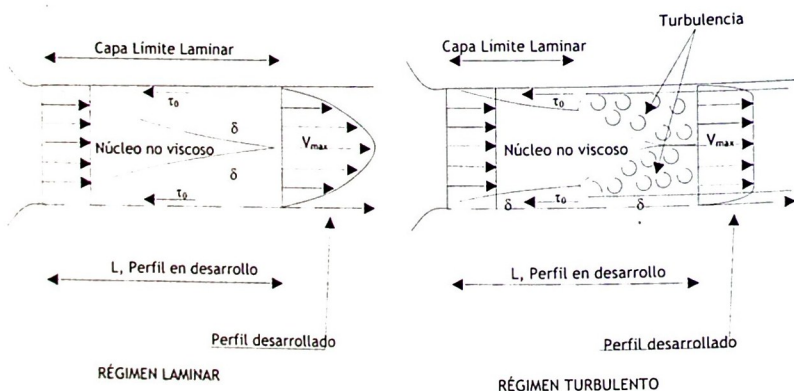


Figura 4-3. Capa límite y subcapa laminar.

### Desprendimiento de la capa límite

Cuando tenemos un flujo convergente, éste siempre resulta acelerado, compensando la pérdida de velocidad por efecto del rozamiento, el espesor de la capa límite  $\delta$  crece lentamente, por lo que el esfuerzo tangencial  $\tau_0$  decrece también lentamente teniendo como efecto que la capa límite se pegue a la pared.

Sin embargo cuando el flujo es divergente, éste resulta decelerado, el espesor de la la capa límite  $\delta$  crece rápidamente, por que el esfuerzo tangencial  $\tau_0$  disminuye también rápidamente teniendo como efecto que llegado un cierto punto del contorno en el que  $\tau_0 = 0$ , produciéndose lo que se denomina *desprendimiento de la capa límite*.

Cuando se desprende la capa límite, aguas abajo del punto de desprendimiento se produce un flujo inverso, que no forma parte del flujo principal y que se denomina *estela de remolinos* o simplemente *estela*.

### 4.2. Perdidas de carga continuas en régimen turbulento

Sea el cilindro de un tubo de longitud  $L$  comprendido entre dos secciones transversales 1 y 2 constantes e iguales, por el que circula un líquido de peso específico  $\gamma$ , moviéndose a una velocidad media  $V$ .

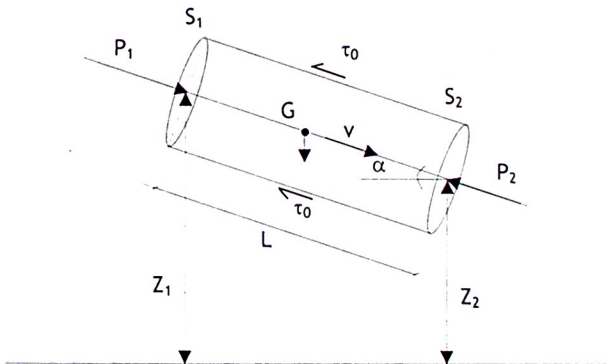


Figura 4-4. Equilibrio de fuerzas en régimen turbulento.

El movimiento es uniforme por lo que las líneas de corriente son paralelas, con distribución hidrostática de presiones en cada sección.

De la misma forma que se hizo con el régimen laminar podemos plantear el equilibrio dinámico a partir de las fuerzas que intervienen.

- Peso del fluido aplicado en su centro de gravedad

$$P = \gamma \cdot \text{volumen} = \gamma \cdot S \cdot L \quad (4.33)$$

- Empuje debido a la resultante de presiones

$$(P_1 - P_2) \cdot S = (P_1 - P_2) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \quad (4.34)$$

- Rozamiento: Fuerza opuesta al movimiento debido a los esfuerzos tangenciales en las paredes del tubo  $\tau_o$

$$F = \tau_o \cdot c \cdot L \quad (4.35)$$

Siendo:

- $c$ , perímetro de la sección transversal

Las presiones normales a las paredes del tubo dan proyecciones nulas sobre el eje del tubo. Al ser el movimiento uniforme no existen reacciones inerciales por lo que no interviene ninguna otra fuerza.

El equilibrio vendrá dado por:

$$(P_1 - P_2) \cdot S + \gamma \cdot S \cdot L \cdot \text{sen}\alpha = \tau_o \cdot c \cdot L \quad (4.36)$$

Dado que  $L \cdot \text{sen}\alpha = Z_1 - Z_2$  podemos sustituir:

$$(P_1 - P_2) \cdot S + \gamma \cdot S \cdot (Z_1 - Z_2) = \tau_o \cdot c \cdot L \quad (4.37)$$

Si dividimos por  $\gamma$  y por  $S$ :

$$\frac{(P_1 - P_2)}{\gamma} + (Z_1 - Z_2) = \frac{\tau_o \cdot c \cdot L}{\gamma \cdot S} \quad (4.38)$$

En Mecánica de Fluidos se define el concepto de *radio hidráulico* a la relación entre la sección mojada y el perímetro mojado de una sección transversal. Para los conductos circulares el radio hidráulico  $R_H$  será:

$$R_H = \frac{S}{c} = \frac{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}{\pi \cdot D} = \frac{D}{4} \quad (4.39)$$

Sustituyendo (4.39) en (4.38):

$$\frac{(P_1 - P_2)}{\gamma} + (Z_1 - Z_2) = \frac{4 \cdot \tau_o \cdot L}{\gamma \cdot D} \quad (4.40)$$

Aplicando la ecuación de Bernouilli entre las secciones 1 y 2:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + hr \quad (4.41)$$

Como las velocidades en ambas secciones son la misma, podemos despejar la pérdida de carga:

$$hr = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + (Z_1 - Z_2) \quad (4.42)$$

Por lo que podemos establecer la siguiente igualdad entre (4.40) y (4.42):

$$hr = \frac{4 \cdot \tau_o \cdot L}{\gamma \cdot D} \quad (4.43)$$

Como se definió al principio del tema, las pérdidas de carga unitarias (por unidad de longitud) son  $J = hr/L$ , por lo que éstas vendrán dadas por:

$$J = \frac{4 \cdot \tau_o}{\gamma \cdot D} \quad (4.44)$$

En régimen turbulento ya se indicó que no se cumple la Ley de Viscosidad de Newton por lo que no es posible establecer una relación matemática exacta entre la tensión tangencial y los parámetros de los que depende.

Sin embargo, mediante comprobaciones experimentales se demuestra que  $\tau_o$  depende de la densidad del líquido  $\rho$ , de su viscosidad  $\mu$ , de la velocidad media

de la corriente  $V$ , del diámetro del tubo  $D$  y de la rugosidad de éste  $k$ . Por lo tanto debe existir una ley que relacione estas magnitudes del tipo:

$$\tau_o = f(\rho, \mu, V, D, k) \quad (4.45)$$

Si aplicamos el Teorema  $\pi$  de Buckingham, escogiendo las variables  $D$ ,  $V$ ,  $\rho$ , para formar 3 monomios adimensionales:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \tau_o \cdot D^{x_1} \cdot V^{y_1} \cdot \rho^{z_1} \\ \pi_2 &= \mu \cdot D^{x_2} \cdot V^{y_2} \cdot \rho^{z_2} \\ \pi_3 &= k \cdot D^{x_3} \cdot V^{y_3} \cdot \rho^{z_3} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Tras realizar operar con el anterior sistema se obtienen las incógnitas que aparecen como exponentes, resultando:

$$\pi_1 = \frac{\tau_o}{\rho \cdot V^2} \quad \pi_2 = \frac{\mu}{V \cdot D \cdot \rho} = \frac{1}{\text{Re}} \quad \pi_3 = \frac{k}{D} \quad (4.47)$$

Por lo que finalmente el esfuerzo tangencial resulta ser función de:

$$\tau_o = \varphi\left(\text{Re}, \frac{k}{D}\right) \cdot \rho \cdot V^2 \quad (4.48)$$

Si buscamos que la velocidad quede expresada en forma de término cinético, dividiendo por  $2g$  y sustituyendo (4.48) en (4.44) nos queda:

$$J = 4 \cdot \lambda \left(\text{Re}, \frac{k}{D}\right) \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.49)$$

La relación  $\lambda(\text{Re}, \frac{k}{D})$  se llama en Ingeniería Química coeficiente de Fanning.

En Ingeniería Hidráulica se utiliza el coeficiente de fricción  $f$ , el cual resulta ser 4 veces menor, por lo que  $f=4\lambda$ , y la ecuación de pérdidas resulta finalmente:

$$J = f \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.50)$$

Y por tanto las pérdidas de carga continuas en un tramo de longitud  $L$  serán:

$$h_r = J \cdot L = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.51)$$

Ecuación que recibe el nombre de *ecuación universal de pérdidas de carga de Darcy-Weisbach*. Esta ecuación, que está en función de la velocidad puede expresarse en función del caudal sin más que aplicar la ecuación de continuidad:

$$Q = S \cdot V = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot V \Rightarrow V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} \Rightarrow V^2 = \frac{16 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot D^4} \quad (4.52)$$

sustituyendo en (4.50):

$$h_r = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\pi^2 \cdot D^4}{2g} = \frac{8 \cdot f \cdot L}{\pi^2 \cdot g \cdot D^5} \cdot Q^2 = 0,0826 \cdot f \cdot L \cdot \frac{Q^2}{D^5} \quad (4.53)$$

## 5. La rugosidad en las tuberías

Hemos visto como el factor de fricción depende de la rugosidad del tubo. La rugosidad en tubo comercial está formada por todas las imperfecciones y asperezas que presenta en sus paredes, las cuales tienen infinidad de formas y tamaños. En la práctica se acepta como rugosidad ( $k$ ), una longitud que expresa el tamaño medio de todas las asperezas y que llamaremos *rugosidad absoluta*.

También sabemos del epígrafe anterior que  $f$  no dependía de  $k$ , sino de la relación  $k/D$ . Esto se explica porque una misma aspereza puede resultar insignificante en un tubo de gran diámetro pero de gran importancia en otro de pequeño diámetro. De ahí que se utilice el concepto de *rugosidad relativa* al cociente  $k/D$ .

El tamaño de las asperezas o rugosidad tiene un efecto importante en el comportamiento hidrodinámico de las tuberías. Cuando las asperezas son más pequeñas que la subcapa laminar ( $k \leq \delta'$ ), el flujo se verifica como *turbulento liso* y el movimiento es independiente de la rugosidad, por tanto  $f=f(Re)$ . Estas tuberías reciben el nombre de tuberías *hidrodinámicamente lisas*.

Cuando las asperezas son netamente superiores al espesor de la subcapa laminar y están dentro de la zona turbulenta, acentúan la turbulencia y afectan a las pérdidas de carga. En este caso el movimiento se verifica como *turbulento rugoso* y por tanto  $f=f(k/D)$ . Estas tuberías se denominan *hidrodinámicamente rugosas*.

Entre ambas situaciones existe una situación intermedia en la que las asperezas son ligeramente superiores a la subcapa laminar, y como el espesor

de  $\delta'$  está influido por  $Re$ , ocurre que para  $Re$  bajos se comporta como turbulento liso, pero para  $Re$  altos se comporta como turbulento rugoso. Esta zona se denomina *zona de transición* o *régimen turbulento intermedio*. Estas tuberías reciben el nombre de *hidrodinámicamente semi-rugosas*.

Material	RUGOSIDAD k (mm)
P. E.	0,007
PVC	0,02
Fibroceso	0,025
PRFV	0,01-0,03
Fundición	0,025-0,1
Acero	0,05-0,1

## 6. Cálculo del valor de f

Para obtener f existen distintas expresiones obtenidas con la experimentación con distintos tipos de tuberías (hidrodinámicamente lisos, rugosos y semi-rugosos) y en distintos regímenes ( $Re$ ), llegando a las siguientes ecuaciones:

- Régimen laminar:

$$\text{- Hagen-Poiseuille}^4 \quad f = \frac{64}{Re} \quad (4.54)$$

- Régimen turbulento:

- Tuberías hidrodinámicamente lisas:

$$\text{- Blassius} \quad f = \frac{0,3164}{Re^{1/4}} \quad (4.55)$$

(válida para  $2300 < Re < 500.000$ )

<sup>4</sup> Ecuación que se corresponde con la obtenida analíticamente en el epígrafe 3, ecuación (4.32).

- Tuberías hidrodinámicamente rugosas: (válida para todo  $Re$ )

$$\text{- Kármán-Prandtl} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{f}} \quad (4.56)$$

$$\text{- Kármán-Nikuradse} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log \frac{k/D}{3,7} \quad (4.57)$$

$$\text{- Colebrook} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log \left( \frac{k/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{f}} \right) \quad (4.58)$$

De forma generalizada suele emplearse la fórmula de Colebrook como expresión única para el cálculo de  $f$  en régimen turbulento y para cualquier tipo de tubería.

Para obtener  $f$  en la fórmula de Colebrook deberemos recurrir a métodos iterativos pues  $f$  aparece de forma implícita en la ecuación y no es posible despejarlo. Para resolverlo podemos acudir a un proceso como el reflejado en el siguiente diagrama. El proceso se inicia con un valor de  $f$  supuesto que oscilará entre  $0,015$  y  $0,020$ . Con este valor inicial se obtiene un nuevo valor del factor de fricción aplicando la ecuación de Colebrook. El proceso termina cuando el error, o lo que es lo mismo, dos valores de  $f$  obtenidos consecutivamente difieren un valor absoluto inferior a  $10^{-4}$  (aproximación al cuarto decimal).

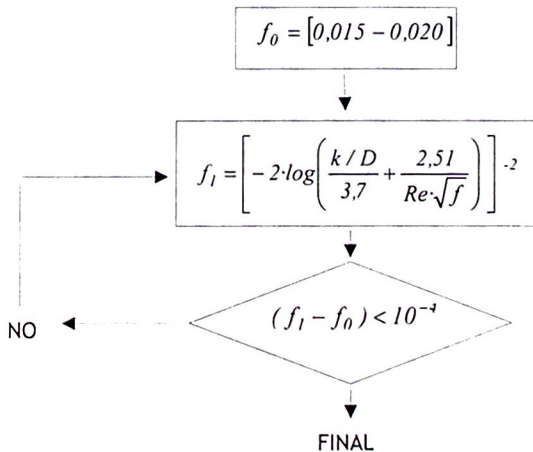
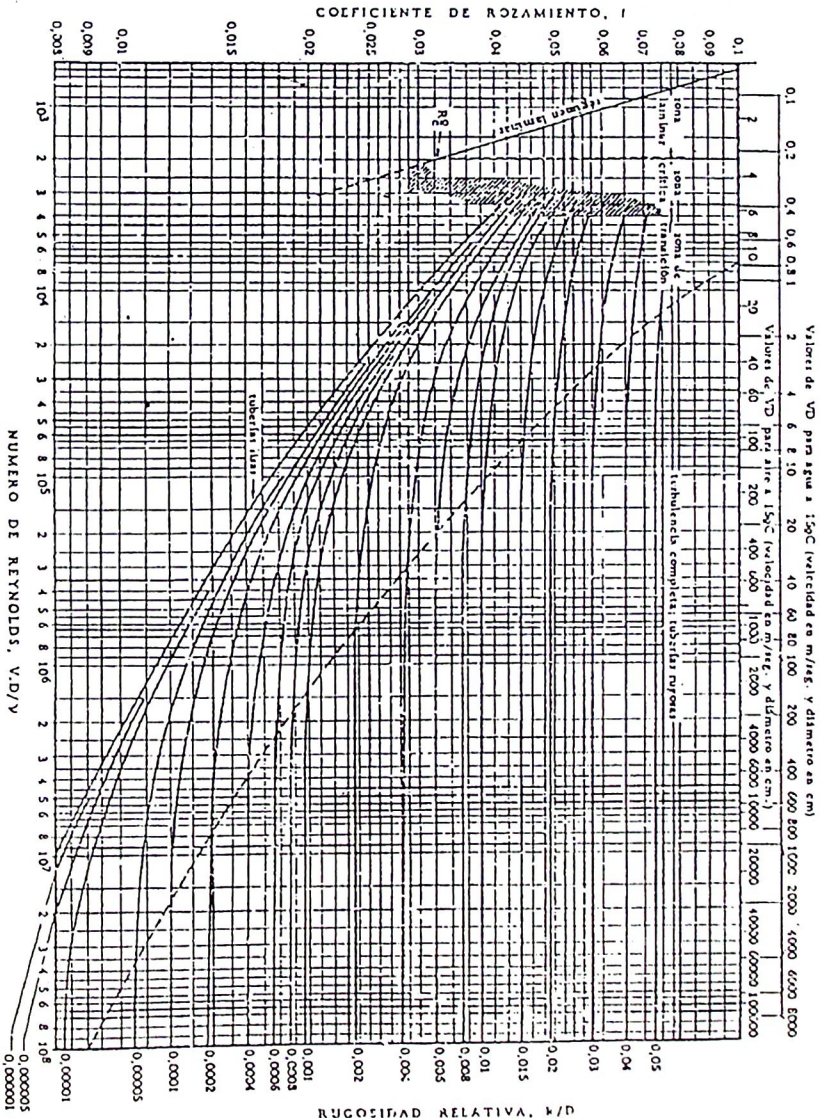


Figura 4-5. Cálculo del factor de fricción

La obtención del factor de fricción mediante la fórmula de Colebrook también puede hacerse de forma gráfica a partir del denominado ábaco de Moody. L.F. Moody en 1944 hizo una representación gráfica a partir de las ecuaciones de Hagen-Poiseuille para régimen laminar y Colebrook para el turbulento.

El ábaco se representa en escala logarítmica y tiene una entrada en ordenadas por la derecha para la rugosidad relativa  $k/D$  y otra en abscisas para  $Re$ . Presenta 20 líneas de valores de rugosidad relativa constante. En el punto de corte de las dos variables, se traza una horizontal hacia la izquierda para obtener en este segundo eje de ordenadas el valor buscado de  $f$ . En la página siguiente se muestra el abaco de Moody.



## 7. Formulas empíricas de pérdida de carga

Antes de la aparición de las formulas logarítmicas (vistas en el apartado anterior) se utilizaban las formulas empíricas de tipo exponencial. Presentan la ventaja de su sencillez a la hora de resolver problemas. Algunas de ellas han sido contrastadas con muchos años de práctica y para determinados materiales producen resultados adecuados. Suelen ser válidas en la zona turbulenta de transición.

- Formula de Veronesse Datei. Muy utilizada en tubos plásticos

$$J = 0,00092 \cdot \frac{Q^{1,8}}{D^{4,8}} \quad (4.59)$$

- Formula de Scimeni. Tubos de fibrocemento

$$J = 0,00098 \cdot \frac{Q^{1,786}}{D^{4,786}} \quad (4.60)$$

- Formula de Hazen-Williams

$$J = 10,62 \cdot C^{-1,85} \cdot \frac{Q^{1,85}}{D^{4,87}} \quad (4.61)$$

Ampliamente utilizada en Estados Unidos. El coeficiente C depende de material según la tabla:

Material	C
P.E.	150
PVC	150
Fibrocemento	140
PRFV	140
Fundición	120
Acero	110

## 8. Pérdidas de carga localizadas

Las pérdidas de carga que se producen a lo largo de una conducción de directriz recta en la cual está establecido el flujo uniforme y permanente, calculadas

mediante alguna de las expresiones vistas en epígrafes anteriores de este tema, reciben el nombre de pérdidas de carga continuas.

Un sistema de transporte y/o distribución de agua o cualquier otro líquido presenta una serie de elementos adicionales que suponen variaciones de la sección o cambios de dirección: codos, reducción de diámetro, válvulas, derivaciones, manguitos de unión, etc., lo que modifica la velocidad de la corriente formándose torbellinos. En estos puntos singulares se producen pérdidas de carga que son independientes del rozamiento continuo visto anteriormente.

Las pérdidas de carga localizadas se determinan experimentalmente para cada tipo de elemento singular. Dado que son motivadas por una disipación turbulenta de energía pueden expresarse en función de la energía cinética de la corriente mediante un coeficiente de resistencia  $K_s$  a determinar experimentalmente:

$$h_s = K_s \frac{v^2}{2g} \quad (4.62)$$

Donde:

-  $h_s$ , pérdidas de carga localizadas en la singularidad

Un segundo coeficiente que también se utiliza para expresar de las pérdidas menores, pero en este caso en función del caudal circulante, es el denominado  $K$ :

$$h_s = K \cdot Q^2 \quad (4.63)$$

Puesto que ambos coeficientes,  $K_s$  y  $K$ , son dos formas distintas de expresar la misma magnitud,  $h_s$ , llegar a la ecuación que los relaciona resulta inmediato:

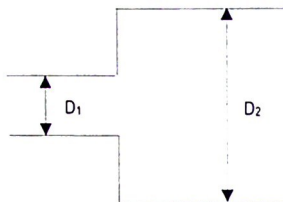
$$h_s = K \cdot Q^2 = K_s \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad K = \left[ \frac{8}{g \cdot \pi^2 \cdot D^4} \right] K_s \quad (4.64)$$

Dada una conducción en la que se producen unas pérdidas de carga continuas  $h_r$ , las pérdidas de carga totales vendrán dadas por la adición a éstas, de las pérdidas de carga localizadas en cada singularidad:

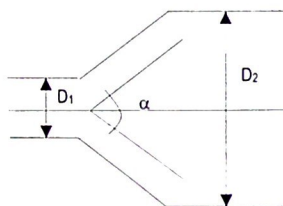
$$h_T = h_r + \sum h_{Si} = h_r + \sum K_{Si} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (4.65)$$

8.1. Coeficientes de resistencia en algunas singularidades habituales

- Expansión brusca  $K_S = \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)^2$  (4.66)



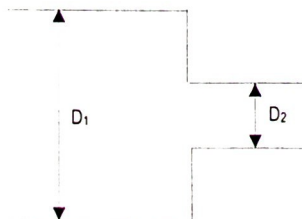
- Expansión gradual  $K_S = m \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)^2$  (4.67)



El valor de m depende del ángulo de la expansión gradual según los siguientes valores:

$\alpha$ (°)	m	$\alpha$ (°)	m
4	0,15	20	0,70
6	0,13	30	0,95
8	0,17	40	1,1
10	0,30	50	1,2
15	0,40	18	1

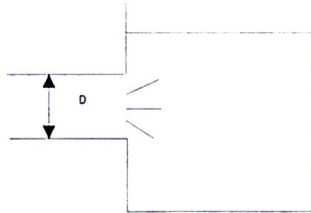
- Contracción brusca



Si  $D_2/D_1 \leq 0,76$   $K_S = 0,42 \left( 1 - \frac{D_1^2}{D_2^2} \right)^2$  (4.68)

Si  $D_2/D_1 > 0,76$  Coincide con la expresión brusca.

- Salida de tubería o entrada en depósito



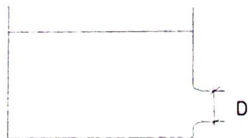
Si el diámetro  $D$  es pequeño en relación al depósito  $K_S=1$ .

Si no, sería un ensanchamiento brusco

- Entrada en tubería o salida de depósito

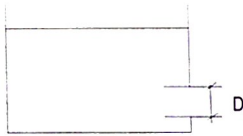


$K_S = 0,42$



Salida abocinada

$K_S = 0,01 - 0,05$



$$K_S = 1$$

Otros accesorios:

- Válvula esférica totalmente abierta  $K_S = 10$
- Válvula de ángulo totalmente abierta  $K_S = 5$
- Válvula de retención de clapeta  $K_S = 2,5$
- Válvula de pie con filtro colador  $K_S = 0,8$
- Válvula de compuerta totalmente abierta  $K_S = 0,19$
- Empalme en T  $K_S = 1,8$
- Codo de 90° normal  $K_S = 0,9$
- Codo de 90° radio medio  $K_S = 0,75$
- Codo de 90° radio grande  $K_S = 0,60$
- Codo de 45°  $K_S = 0,42$

Generalmente en la actualidad elementos como válvulas hidráulicas, de compuerta, de mariposa, de retención, etc. vienen acompañados en sus catálogos técnicos con ábacos donde se puede consultar la pérdida de carga  $h_s$  en función del caudal.

### **8.2. Cálculo de las pérdidas de carga singulares como porcentaje de las continuas. El coeficiente mayorante**

En multitud de casos prácticos no nos será posible determinar las pérdidas de carga localizadas elemento por elemento, por no disponer de datos fiables de los coeficientes de resistencia y por ser muy elevado el número de singularidades. En estos casos es habitual recurrir a expresar las pérdidas de carga localizadas como un porcentaje de las lineales. En función del número de singularidades existentes éstas pueden oscilar en un 5 y un 20% de  $h_r$ .

De esta forma:

$$K_m = \frac{h_r + \sum h_{Si}}{h_r} = \frac{h_r + \sum K_{Si} \cdot \frac{v^2}{2g}}{h_r} \quad (4.69)$$

el cual resultará ser un numero mayor que la unidad.

### 8.3. Longitud equivalente de una tubería

La longitud equivalente de una tubería consiste en obtener aquella longitud adicional de tubería que produce las mismas pérdidas de carga continuas, que las perdidas de carga localizadas de todos los elementos singulares y sumarla. De esta forma, obteniendo las perdidas de carga continuas sobre la  $L_e$ , se obtienen las pérdidas de carga totales sin necesidad de emplear  $K_m$  ni calcular  $\sum h_{Si}$ .

La longitud equivalente de un elemento singular se obtendrá despejando  $L$  de cualquier expresión de pérdidas, una vez conocida la  $h_s$  del elemento.

## 9. Problemas simples en tuberías

Los problemas simples de tuberías son aquellos que pueden ser abordados a partir de una expresión de pérdidas, bien sea la ecuación universal de Darcy-Weisbach, bien sea una formula de tipo exponencial, en las cuales solo una de las variables es la incógnita y el resto datos conocidos.

Utilizando el coeficiente mayorante o una longitud equivalente vista en el epígrafe anterior tendremos en cuenta las pérdidas de carga totales y no solamente las lineales.

En el siguiente cuadro podemos ver los 3 tipos de problemas que suelen presentarse:

TIPO	DATOS	
1	Q, L, D, v, k	$h_r$
2	L, D, v, k, $h_r$	Q
3	Q, L, v, k, $h_r$	D

### Tipo 1: Determinación de las pérdidas de carga

Podemos emplear una fórmula exponencial (Hazen-Williams, Veronesse Datei, Scimeni, etc.) y el problema no presenta más dificultad que sustituir los datos en la fórmula con las unidades adecuadas.

Si empleamos la fórmula de Darcy-Weisbach debemos determinar previamente el factor de fricción con la fórmula de Colebrook ó mediante el método gráfico del ábaco de Moody, todo ello según vimos en el epígrafe 6.

### Tipo 2: Cálculo del caudal circulante

En este caso tanto empleando la ecuación de Darcy-Weisbach como alguna fórmula exponencial, el problema es inmediato y no requiere más que sustituir datos. El caudal a partir de la ecuación de Darcy-Weisbach requiere sustituir en ella la ecuación de Colebrook en la que se ha despejado  $f$  previamente.

La deducción algebraica resulta prolija y la expresión larga pero de uso sencillo:

$$Q = -2 \log \left( \frac{0,567 \cdot \nu \cdot \sqrt{L}}{D \cdot \sqrt{D \cdot h_r}} + \frac{k/D}{3,7} \right) \cdot \frac{D^2 \sqrt{D \cdot h_r}}{\sqrt{0,0826 \cdot L}} \quad (4.70)$$

### Tipo 3: Cálculo del diámetro de la tubería

Es sin duda el caso más complejo siempre que se utilice la fórmula de Darcy-Weisbach. En caso de emplear una fórmula exponencial es como siempre inmediata.

A partir de la fórmula de Darcy-Weisbach se despeja el diámetro

$$D = \left( \frac{0,0826 \cdot f \cdot L \cdot Q^2}{h_r} \right)^{1/5} \quad (4.71)$$

A continuación seguiremos un procedimiento iterativo en el que se determinará un valor de diámetro que nos permita obtener  $f$ , el cual deberá ser contrastado. El procedimiento será el expuesto en el diagrama siguiente:

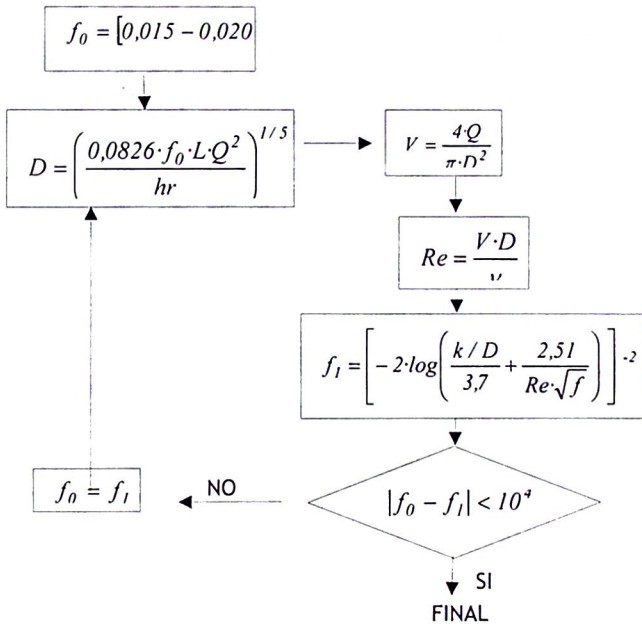


Figura 4-6. Cálculo del diámetro.

## 10. Desdoblamiento de diámetros

El resultado que, con toda probabilidad, se obtendrá al calcular el diámetro de una tubería según el procedimiento expuesto en el apartado anterior, será un valor numérico no entero, es decir, con cifras decimales. Por ello, resultará virtualmente imposible encontrar en el mercado algún fabricante que ofrezca tubos con un diámetro exactamente igual al valor obtenido. La razón sencillamente se encuentra en que cualquier fabricante de tuberías necesariamente debe limitar su producción a un número concreto de diámetros distintos, con los que intentará cubrir el mayor rango posible de valores, y que recibe la denominación de gama de diámetros comerciales disponibles. Difícilmente el resultado de un cálculo numérico en un problema de dimensionamiento coincidirá, de forma exacta, con uno de esos valores de diámetros comerciales.

Una posible solución, muy sencilla, a esta contradicción aparente entre resolución hidráulica teórica y diámetros disponibles en la práctica es la

normalmente conocida como desdoblamiento de diámetros. La presentaremos tomando como referencia la Figura 4-7 izquierda. Supongamos que, inicialmente, ya se ha resuelto el diámetro de la tubería que conecta los dos depósitos de la figura. Dicho diámetro ha resultado ser, efectivamente, un valor no disponible en el mercado, y al que llamaremos diámetro de diseño,  $D_D$ . Aunque se trate de un valor extraño, este  $D_D$  resuelve efectivamente el problema hidráulico del diseño y, así, para la longitud total de la tubería,  $L_T$ , el diámetro  $D_D$  da lugar a unas pérdidas de carga totales entre los dos depósitos de  $h_{rT}$ .

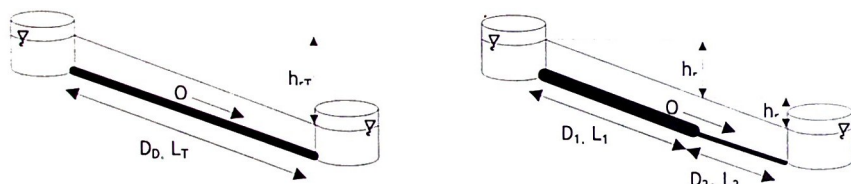


Figura 4-7. Desdoblamiento de diámetros.

La solución del problema consiste en seleccionar dos diámetros comerciales  $D_1$  y  $D_2$  (dentro de la gama ofrecida por algún fabricante), dividir la tubería total en dos tramos consecutivos e instalar cada uno de esos dos diámetros en cada uno de los dos tramos. Lógicamente,  $D_1$  será mayor que  $D_D$  y  $D_2$  será menor que  $D_D$ ; y también lógicamente, el tramo de tubería de  $D_2$  se instalará aguas abajo del tramo de  $D_1$ .

Para que las dos nuevas tuberías, con  $D_1$  y  $D_2$ , resuelvan efectivamente el problema, el conjunto formado por ambas debe comportarse físicamente igual que la tubería inicialmente resuelta con  $D_D$ . Ello se traduce en dos condiciones que deben cumplirse:

- La suma de las longitudes de las dos tuberías, con  $D_1$  y  $D_2$ , debe ser igual a la longitud total de la tubería con  $D_D$ . Es decir:

$$L_T = L_1 + L_2 \quad (4.72)$$

- La suma de las pérdidas de carga de las dos tuberías, con  $D_1$  y  $D_2$ , debe ser igual a las pérdidas de carga de la tubería con  $D_D$ . Es decir:

$$h_{rT} = h_{r1} + h_{r2} \quad (4.73)$$

$$\frac{8f_D L_T}{\pi^2 g D_D^5} Q^2 = \frac{8f_1 L_1}{\pi^2 g D_1^5} Q^2 + \frac{8f_2 L_2}{\pi^2 g D_2^5} Q^2 \quad (4.74)$$

Evidentemente el conjunto de las dos condiciones apuntadas, supone un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que son, precisamente, qué longitud,  $L_1$  y  $L_2$ , debe tener cada uno de los dos tramos de tubería desdoblada. En relación a la resolución de este sistema pueden hacerse dos apuntes muy concretos:

- Como puede comprenderse, el caudal circulante por la tubería es el mismo tanto en la resolución de diseño ( $D_D$ ) como en la solución desdoblada ( $D_1$  y  $D_2$ ), por lo que la variable  $Q$  se anula en todos los términos de (4.74).
- Haciendo los cálculos de forma estricta, el factor de fricción para la tubería con el diámetro de diseño ( $f_D$ ) es numéricamente distinto al factor de fricción del primer tramo de tubería desdoblado ( $f_1$ ), así como al del segundo tramo de tubería desdoblada ( $f_2$ ). Ello implica que para poder resolver el sistema de ecuaciones se hace necesario calcular primero estos tres factores, cada uno de ellos con los valores de  $Re$ ,  $\epsilon$  y  $D$  específicos para su tubería. Debido a que, habitualmente, los factores de fricción oscilan en un rango muy estrecho de valores, es normal adoptar la simplificación de tomar el mismo valor de  $f_D$  para  $f_1$  y  $f_2$ .

## 11. Asociación de tuberías

### 11.1. Tuberías en serie

Cuando por una sucesión de tuberías conectamos de forma que el final de la primera sea el inicio de la siguiente y presentando diámetros y/o rugosidades distintas, circula un mismo caudal, se dice que las tuberías están conectadas en serie.

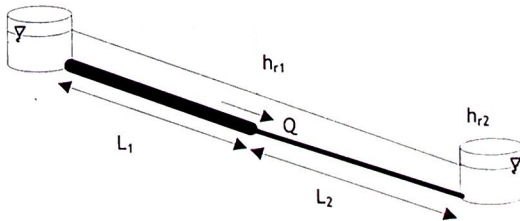


Figura 4-8. Asociación de tuberías en serie.

En una asociación de tuberías en serie se deberá cumplir:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$

$$h_t = h_{r1} + h_{r2} + \dots + h_{rn} = \sum_{i=1}^n h_{ri} \quad (4.75)$$

### 11.2. Tuberías en paralelo

Varias tuberías están conectadas en paralelo cuando parten de un mismo punto y llegan a un mismo destino. En este caso la presión en 1 debe coincidir para todas las tuberías, de la misma forma que la presión en 2 debe coincidir también y ser la misma para todas las conducciones.

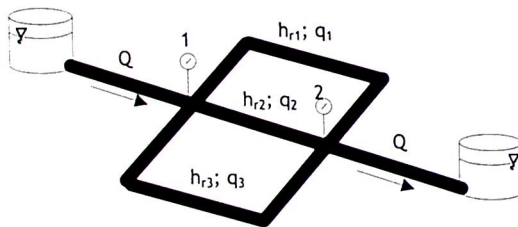


Figura 4-9. Asociación de tuberías en paralelo.

En este caso se deberá cumplir:

$$Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i$$

$$h_t = h_{r1} = h_{r2} = \dots = h_{rn} \quad (4.76)$$

El reparto de caudales entre los distintos tramos será directamente proporcional a las pérdidas de carga del mismo.

## 12. Cavitación en tuberías

La aparición del fenómeno de la cavitación del agua dentro de una tubería es, desde cualquier punto de vista, una situación que debe ser evitada. La clave

para conseguirlo radica, principalmente, en el propio diseño de la instalación, y sus fundamentos, como se expondrá a continuación, son sencillos.

Para evitar la cavitación en una tubería, basta con asegurar que la presión del agua en todo momento y punto de la misma, se mantenga siempre por encima, con un cierto margen de seguridad, de la presión de vapor de agua a la temperatura a la que se encuentre el sistema.

Si, debido a un error o accidente en la operación del sistema, la cavitación llega a producirse en un momento dado, el fenómeno comenzará siempre en el punto más desfavorable de la instalación. Tal punto es aquél que tenga sistemáticamente una presión más baja que cualquier otro, y puede identificarse con facilidad porque suele ser alguno de los puntos altos del perfil de la tubería.

A modo ilustrativo, se presenta una instalación que consta de una tubería que transporta agua entre dos depósitos, y en la que la descarga del agua al depósito inferior se realiza a través de una válvula que regula el caudal circulante. En la Figura 4-10 izquierda, se muestra una situación de normalidad en la que toda la tubería se mantiene a presiones manométricas positivas, en estas condiciones el riesgo de cavitación se mantiene alejado. Puede comprobarse, además, cómo en los dos puntos altos del sistema, A y B, la presión (distancia vertical desde el perfil de la tubería hasta la línea de piezométricas) es muy baja, pero positiva en cualquier caso. Serán estos dos puntos los que, llegado el caso, sufran la cavitación antes que el resto del sistema.

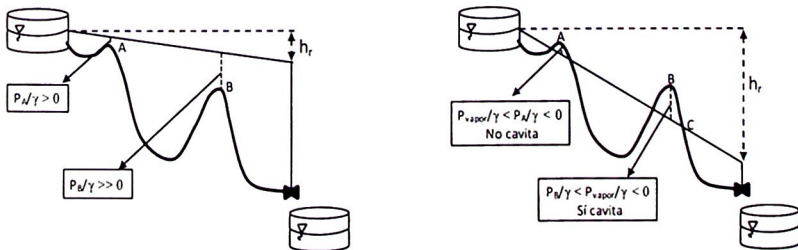


Figura 4-10. Cavitación en tuberías

La Figura 4-10 derecha, muestra precisamente la situación a evitar. Si, debido por ejemplo a una mala regulación de la válvula, el caudal circulante aumenta demasiado, de tal forma que también lo hagan las pérdidas de carga por fricción en la tubería, entonces la línea de piezométricas puede llegar a cortar al perfil de la tubería. De este modo, los puntos altos A y B ahora pasarán a estar a presiones manométricas negativas. Y si dichas presiones negativas aumentasen,

en algún punto, hasta llegar a la magnitud de la presión de saturación del vapor de agua, la cavitación aparecerá en ese punto. Esto es lo que la Figura 4-10 derecha muestra que ocurre en el punto B.

En términos meramente físicos, lo que ocurre cuando la cavitación se produce en el punto B, es que se forman pequeñas burbujas de vapor de agua en el seno del agua líquida. Puesto que el agua está en movimiento por el interior de la tubería, esas burbujas son arrastradas aguas abajo y muy rápidamente llegan a otro punto de la tubería, C, en el que aunque aún existe una presión negativa, ya es superior a la de cavitación del agua. Así, tan pronto desaparece la condición de cavitación, las burbujas de vapor colapsan tornando el agua que las formaba a su estado líquido inicial. Y aunque la cavitación se produce en un tramo muy corto de la tubería (de B a C), el colapso continuo de las burbujas concentradas en ese tramo supone un golpeteo constante sobre la pared de la tubería que termina desgastando el material y puede provocar la rotura de la tubería.

## Tema 5. Máquinas Hidráulicas y Bombas Centrífugas

### 1. Máquinas Hidráulicas

Las máquinas hidráulicas convierten energía mecánica procedente del motor de arrastre en energía hidráulica (bombas) o viceversa (turbinas). Las más importantes son aquellas que están unidas a un eje rotativo por lo cual reciben el nombre de *turbomáquinas* (*turbo*  $\approx$  *giro* o *rotación*).

### 2. Clasificación de las bombas

Existen multitud de clasificaciones según distintos criterios, aunque en general la más extendida es aquella que las divide en tres tipos fundamentales: *bombas de desplazamiento positivo*, *dinámicas* o *de intercambio de cantidad de movimiento* y *gravimétricas*.

- **Bombas gravimétricas.** Se trata de máquinas que simplemente actúan sobre el término de posición del fluido en el trinomio de Bernoulli o ecuación de la energía. Es decir únicamente cambian de posición el fluido con respecto a un plano de referencia, desde una posición más baja a otra más elevada. El ejemplo más clásico de este tipo de máquinas hoy en desuso son las *norias*, y el más empleado, sobre todo en plantas de tratamientos de aguas residuales son los *tornillos de Arquímedes*.

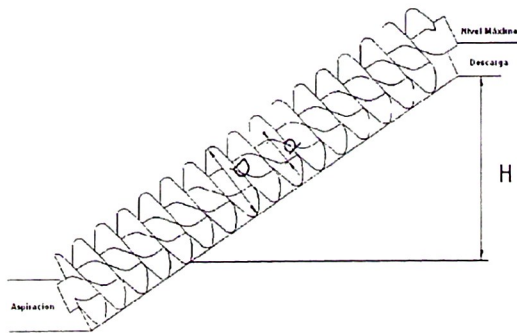


Figura 5-1. Tornillo de Arquímedes.

- **Bombas de desplazamiento positivo.** En el cuerpo de la bomba existen una serie de cavidades o cámaras que se llenan y vacían periódicamente. El fluido entra a la cámara, es impulsado por el cuerpo móvil y sale de la cámara. Actúan directamente sobre el término de presión en el trinomio de Bernouilli. A su vez se pueden clasificar según el órgano que impulsa según el siguiente esquema.
  - Alternativas
    - Pistón
    - Diafragma
  - Rotativas
    - Rotor simple
      - Paleta deslizante
      - Tubo flexible
      - Tornillo
      - Peristáltica
    - Rotor múltiple
      - Engranaje
      - Lóbulo
      - Tornillo
      - Pistón circunferencial

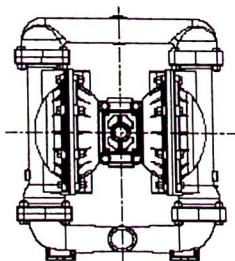


Figura 5-2. Bomba alternativa de membrana

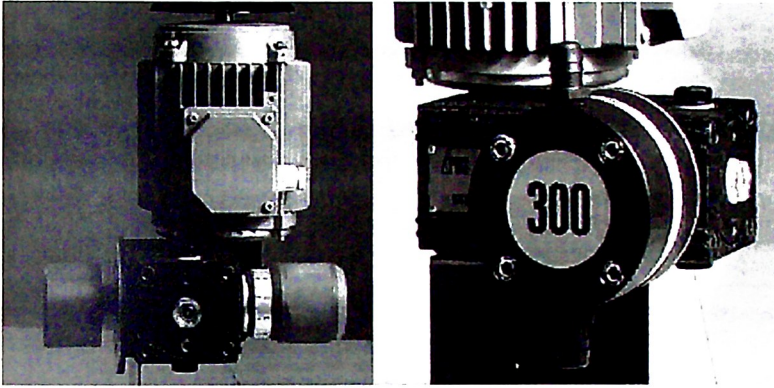


Figura 5-3. Bomba alternativa de pistón. Cortesía de ITC.

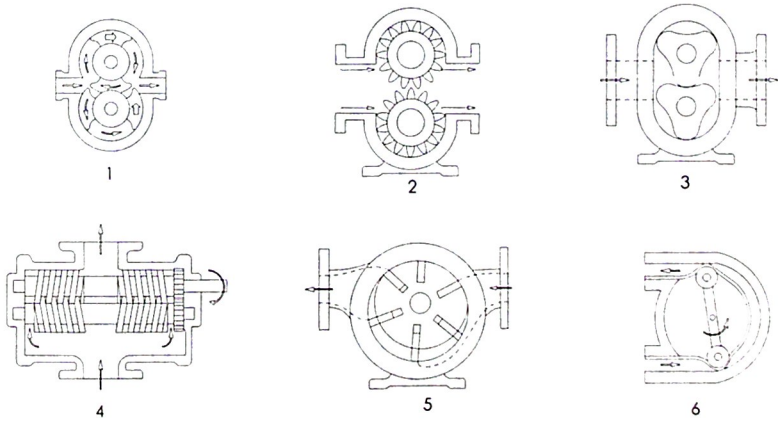


Figura 5-4. Bombas rotativas. 1) Pistón circunferencial; 2) Engranajes; 3) Lóbulos; 4) Tornillo; 5) Paleta deslizante; 6) Peristáltica.

- o **Bombas dinámicas.** Añaden cantidad de movimiento al fluido a través de unos álabes giratorios llamados rodetes. No existen cavidades que se llenan o vacían sino que el aumento de energía se produce al mismo tiempo que se atraviesa la máquina. La máquina aumenta la energía del fluido actuando sobre el término cinético del trinomio de Bernouilli, el cual se convierte en presión antes de abandonar la máquina. Las podemos clasificar en función de la trayectoria del flujo a través del rodete.
  - Centrífugas o de flujo radial.
  - De flujo axial.
  - De flujo mixto, semiaxial o helicocentrífugo.

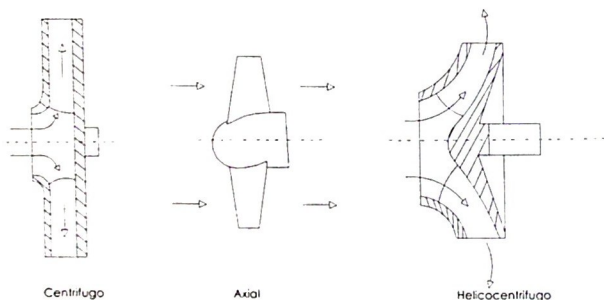


Figura 5-5. Tipos de rodetes.

La clasificación anterior suele afectar a las prestaciones, resultando que las bombas de tipo *axial* dan *caudales altos con alturas discretas* mientras que las de flujo *radial* proporcionan *pequeños caudales a gran altura*. Las de flujo mixto quedarían en una situación intermedia.

Las bombas dinámicas pueden a su vez ser clasificadas atendiendo a criterios constructivos. Así nos encontramos que el eje de giro puede posicionarse horizontal o verticalmente, que las bombas pueden estar en superficie o ser sumergibles, compuestas por un solo cuerpo o rodete o presentar múltiples de ellos. En las siguientes figuras encontramos las bombas más características dentro de los citados grupos.

### Bomba horizontal de flujo radial

Se instala horizontalmente sobre una bancada. El cuerpo de la bomba y el motor de arrastre puede encontrarse separado como en este caso, y unido mediante una transmisión, generalmente en bombas grandes, o ser solidario al mismo, recibiendo en este último caso el nombre de *monobloc*. La aspiración generalmente forma un ángulo recto con la impulsión.

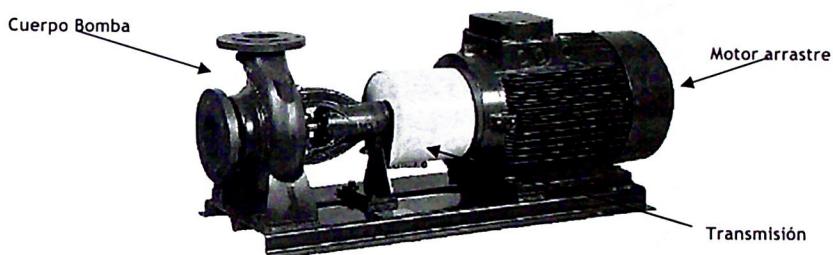


Figura 5-6. Bomba horizontal de flujo radial. Cortesía de Bombas Itur.

### Bomba horizontal de flujo axial

Igual que en el caso anterior se instalan en una bancada junto con el motor de arrastre y la transmisión. En este caso la aspiración y la impulsión están en línea. Se trata pues de una bomba de flujo axial.

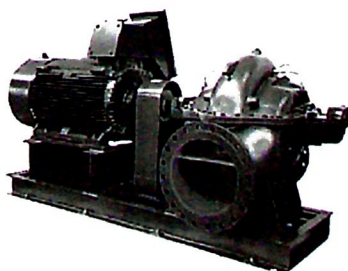


Figura 5-7. Bomba horizontal de flujo axial. Cortesía de Bombas Itur.

### Bomba horizontal de flujo radial multicelular

Bomba de idénticas características a la monocelular, a la cual se le añaden un número de rodets en serie para multiplicar la altura manométrica de trabajo.

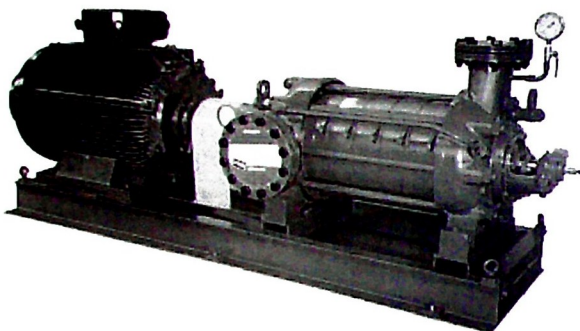


Figura 5-8. Bomba horizontal de flujo radial multicelular. Cortesía de Bombas Itur.

### Bomba vertical multicelular

Cambia con respecto a la construcción vista anteriormente la posición del eje y por tanto del motor. Se construyen generalmente con varios rodets normalmente de flujo radial.

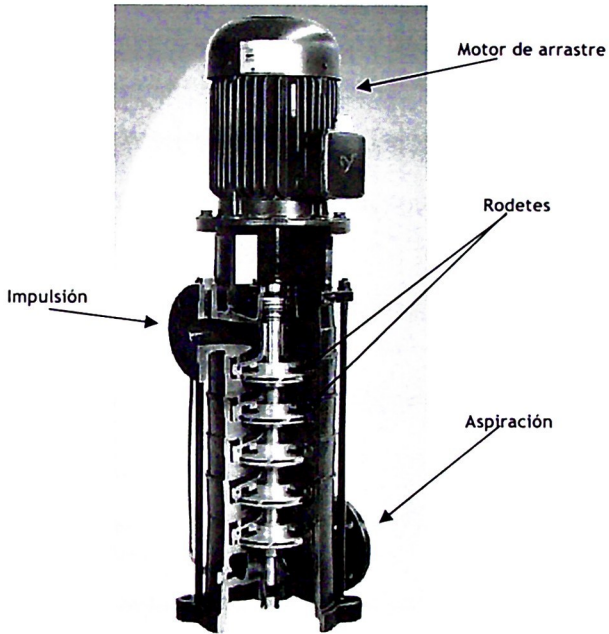


Figura 5-9. Bomba vertical multicelular. Cortesía de Bombas Itur.

### Bomba vertical sumergible

Cuando la cota de entrada del fluido a la bomba está por encima de la lámina libre de ésta, la bomba debe aspirarlo. La capacidad de una bomba para aspirar está limitada a unos pocos metros. Cuando el fluido está a una profundidad superior se emplean las bombas verticales sumergibles. Se diferencian de la anterior en que el motor queda en superficie, el cuerpo de la bomba se sumerge en el fluido y ambos quedan unidos por un eje que transmite la rotación del motor a la bomba. Se suelen construir multietapa y con flujo radial o semiaxial.

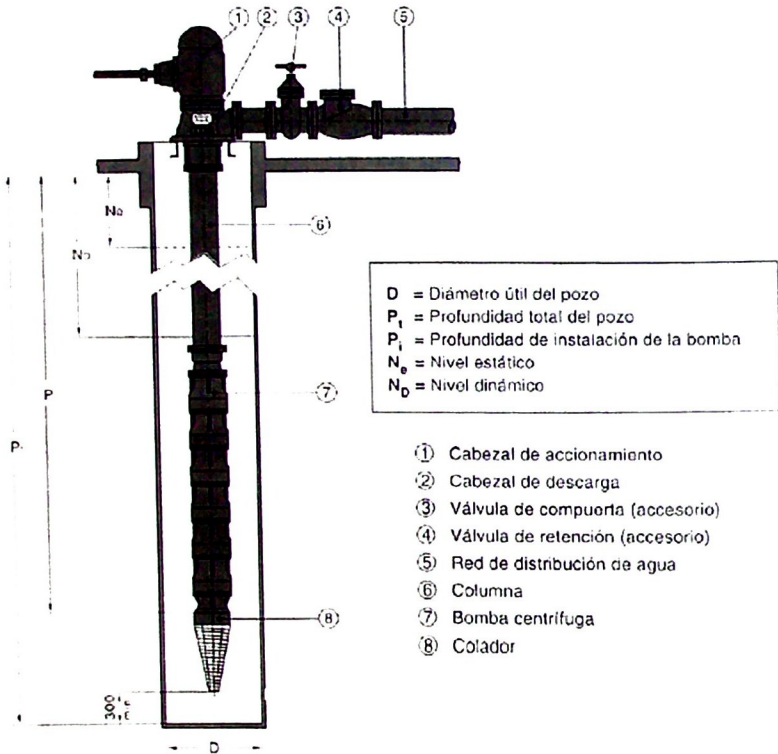


Figura 5-10. Bomba vertical sumergible. Cortesía de Bombas Itur.

### Bomba vertical sumergible (bombas de pozo profundo)

El interior de un pozo de aprovechamiento de aguas subterráneas se caracteriza por disponer de un reducido espacio para alojar la maquinaria y porque ésta debe estar sumergida bajo el agua. Para esta situación concreta se construyen las denominadas bombas sumergibles de pozo profundo o también llamadas bombas buzo. Llevan acoplado en su parte inferior el motor de arrastre. En el espacio que hay entre el motor y la bomba se dispone la rejilla de entrada de agua y a continuación los impulsores de la bomba. Se construyen siempre multietapa y con flujo radial o semiaxial (mixto).

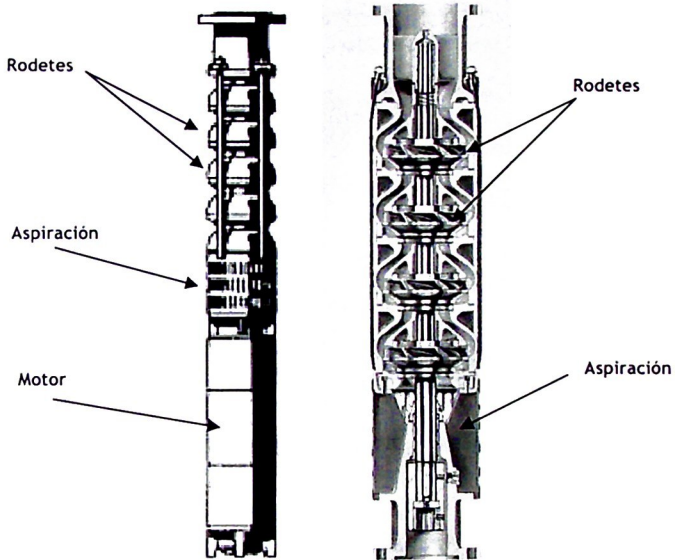


Figura 5-11. Bomba vertical sumergible. Cortesía de Bombas Itur.

### 3. La bomba centrífuga

Los elementos constructivos de la bomba son los siguientes:

- Rodete: Elemento móvil, solidario al eje del motor el cual gira en sentido antihorario y transmite velocidad al fluido. Esta formado por unos álabes curvados hacia atrás.
- Carcasa: Rodea al rodete para recoger el fluido que atraviesa los álabes del mismo. Tiene una parte con forma toroidal que recibe el nombre de voluta.
- Difusor: Parte final de la carcasa donde se reduce sustancialmente la velocidad del fluido y por tanto se transforma en presión.

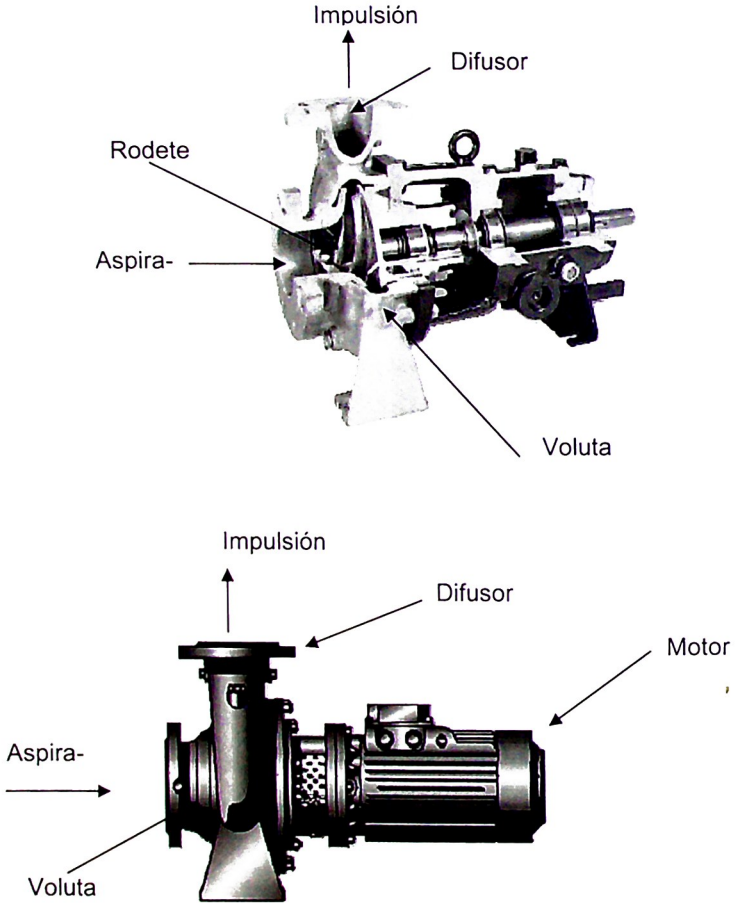


Figura 5-12. Partes de una bomba. Cortesía de Bombas Itur.

#### 4. Potencia en una corriente líquida

En movimiento permanente, la energía específica viene dada a partir de la ecuación de Bernouilli como:

$$H = \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + Z \quad (5.1)$$

Llamemos **potencia de la corriente** en la sección transversal  $S$ , a la energía por unidad de tiempo que tiene el fluido en dicha sección.

Para cada filete de corriente que atraviesa una sección  $ds$ , la potencia vendrá dada por:

$$dN = \gamma \cdot V \cdot ds \left( \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + Z \right) = \gamma \cdot dQ \left( \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + Z \right) \quad (5.2)$$

en la que  $\gamma \cdot dQ$  es el gasto elemental expresado como peso de fluido.

La potencia en la sección se obtendrá integrando:

$$N = \gamma \cdot \int_S \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + Z \cdot V \cdot ds \quad (5.3)$$

Para el caso de movimiento uniforme y supuestamente paralelo, tanto  $z + P/\gamma$  como  $v^2/2g$  es constante en toda la sección transversal por lo que:

$$N = H \cdot \gamma \int_S V \cdot ds = \gamma \cdot H \cdot Q \quad (5.4)$$

#### 5. Potencia en bombas

La potencia dada al fluido por la bomba la denominamos  $N_{util}$  y viene dada por la expresión:

$$N_{util} = H \cdot \gamma \cdot Q \quad (5.5)$$

La potencia necesaria para mover la bomba que produzca la potencia anterior se denomina potencia en el eje o potencia al freno y viene expresada como:

$$N_{eje} = w \cdot M \quad (5.6)$$

donde:

- $N_{eje}$ , potencia al freno o en el eje

- $W$ , velocidad angular de giro del eje del motor
- $M$ , par motor desarrollado por el eje del motor

Lógicamente existen unas pérdidas de energía en la transformación de energía mecánica en energía hidráulica. A la relación la denominamos rendimiento y la forma de obtenerlo será con la relación entre potencias, útil y en el eje:

$$\eta = \frac{N_{util}}{N_{eje}} = \frac{H \cdot \gamma \cdot Q}{w \cdot M} \quad (5.7)$$

Este rendimiento se debe básicamente al producto de tres factores: Rendimientos volumétricos, hidráulicos y mecánico.

- Rendimiento volumétrico  $\eta_v$ :

$$\eta_v = \frac{Q}{Q + Q_c} \quad (5.8)$$

donde:

- $\eta_v$ , rendimiento volumétrico
- $Q$ , caudal de entrada a bomba
- $Q_c$ , caudal perdido en la holgura entre rodete y carcasa

- Rendimiento hidráulico

$$\eta_H = 1 - \frac{\Delta H}{H} \quad (5.9)$$

donde:

- $\eta_v$ , rendimiento hidráulico
- $H$ , altura manométrica bomba
- $\Delta H$ , pérdidas de carga debidas al acoplamiento imperfecto entre el flujo de entrada y los alabes, rozamiento en los álabes y acoplamiento imperfecto entre álabes y la salida, provocando recirculación.

- Rendimiento mecánico

$$\eta_m = 1 - \frac{N_{\text{rozamiento}}}{N_{\text{eje}}} \quad (5.10)$$

donde:

- $\eta_m$ , rendimiento mecánico
- $N_{\text{roz}}$ , potencia perdida en cojinetes, rodamientos y otros elementos mecánicos de la bomba
- $N_{\text{eje}}$ , potencia suministrada al eje por el motor

El rendimiento global de la bomba será siempre:

$$\eta = \eta_v \cdot \eta_m \cdot \eta_h \quad (5.11)$$

## 6. Curvas características reales en bombas centrifugas

Si bien el comportamiento teórico de las bombas centrifugas puede estudiarse aplicando la denominada ecuación de Euler (que escapa de los objetivos del curso), su comportamiento real se estudia por aplicación de las denominadas *Curvas características, reales de la bomba*, obtenidas por el fabricante ensayando la bomba en un banco de pruebas.

Las curvas de mayor interés son:

- $H = H(Q)$  ó curva motriz
- $P = P(Q)$  ó curva de potencias
- $\eta = \eta(Q)$  ó curva de rendimiento

- **Curva motriz:** (a velocidad de giro constante)

Relaciona la altura manométrica que proporciona una bomba en función de caudal que trasiego. Es la curva más importante pues es la que nos permite seleccionarla. Nos indica la capacidad de la máquina para transmitir energía al fluido.

Entendemos por altura manométrica el incremento de energía que experimenta el fluido obtenido por diferencia entre la presión a la entrada y salida de la bomba.

$$H_b = \left( \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + Z \right)_s - \left( \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + Z \right)_e \quad (5.12)$$

En la práctica,  $z$  es la misma entre ambos puntos y el término cinético  $v^2/2g$  es despreciable o nulo en el caso que los diámetros en las conducciones de entrada y salida sean los mismos. Así pues:

$$H_b = \left( \frac{P}{\gamma} \right)_s - \left( \frac{P}{\gamma} \right)_e \quad (5.13)$$

Las curvas motrices adoptan la siguiente expresión analítica:

$$H_b = c + dQ + eQ^2 \quad (5.14)$$

$$H_b = c + dQ^2 \quad (5.15)$$

Los coeficientes  $c$ ,  $d$  y  $e$  pueden ajustarse fácilmente por mínimos cuadrados empleando para ello los puntos experimentales obtenidos en el banco de pruebas. Si los puntos experimentales y la curva anterior fuesen totalmente coincidentes la diferencia  $H_b - c + dQ^2$  sería nula. Por el método de los mínimos cuadrados podemos elegir aquella curva que con respecto a los puntos experimentales, la suma de los cuadrados de la diferencia anterior sea mínima:

$$g = \sum [H_b - (c + dQ^2)]^2 \quad (5.16)$$

Para que la anterior función sea mínima, debemos derivarla respecto de  $c$  y  $d$ , e igualarla a 0 para obtener un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\sum H_i - nc - d \sum Q_i^2 = 0 \quad (5.17)$$

$$\sum (H_i Q_i) - c \sum Q_i^2 - d \sum Q_i^4 = 0 \quad (5.18)$$

Despejando  $c$  en una de las ecuaciones y sustituyendo con la otra obtenemos que:

$$c = \frac{\sum H_i \sum Q_i^4 - \sum H_i Q_i^2 \cdot \sum Q_i^2}{n \cdot \sum Q_i^4 - (\sum Q_i^2)^2} \quad (5.19)$$

$$d = \frac{n \sum H_i Q_i^2 - \sum H_i \sum Q_i^2}{n \cdot \sum Q_i^4 - (\sum Q_i^2)^2} \quad (5.20)$$

Para el caso de que el ajuste resulte significativo con 3 coeficientes, la resolución resulta más compleja por lo que se recomienda el empleo de un ordenador o una calculadora programable con funciones estadísticas.

- **Curva de potencia:** (a velocidad de giro constante)

Ya hemos definido la potencia útil como aquella que la máquina transmite al fluido, y que viene dada por la expresión:

$$N_{util} = H_b \cdot \gamma \cdot Q \quad (5.21)$$

Mientras que para poder aplicar esta potencia, la bomba absorberá la potencia **al eje ó potencia al freno:**

$$N_{eje} = w \cdot M \quad (5.22)$$

El cociente entre ambas potencias lo llamamos rendimiento global:

$$\eta = \frac{N_{util}}{N_{eje}} = \frac{H \cdot \gamma \cdot Q}{w \cdot M} \quad (5.23)$$

La potencia que realmente interesa al usuario de una bomba es la potencia absorbida, por lo que la curva característica de potencia  $P=P(Q)$  a la que nos hemos referido antes relaciona la potencia absorbida en función del caudal trasegado.

Esta curva no responde a una ecuación analítica definida por lo cual se emplea siempre su representación gráfica a partir de puntos experimentales, los cuales son consignados en los catálogos técnicos correspondientes a cada máquina.

- **Curva de rendimiento:** (a velocidad de giro constante)

En epígrafes anteriores se definió el rendimiento global de la bomba como el cociente entre potencia útil y potencia absorbida por la bomba, el cual estaba formado por el producto de 3 factores llamados rendimiento volumétrico, rendimiento hidráulico y rendimiento mecánico. La curva característica de rendimiento  $\eta=\eta(Q)$  explica la evolución del rendimiento global en función del caudal trasegado.

Las curvas de rendimiento se adaptan a una expresión analítica del tipo:

$$\eta = eQ + fQ^2 \quad (5.24)$$

Al igual que ocurre con la curva motriz, los puntos experimentales obtenidos en un banco de pruebas podemos ajustarlos por mínimos cuadrados de un ecuación del tipo anterior, obteniendo los coeficientes. Para ello derivamos la suma de los cuadrados de la diferencia siguiente y la igualamos a cero:

$$g = \sum (\eta - eQ + fQ^2)^2 \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \sum (\eta_i Q_i) - e \sum Q_i^2 - f \sum Q_i^3 &= 0 \\ \sum (\eta_i Q_i^2) - e \sum Q_i^3 - f \sum Q_i^4 &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Despejando  $e$  en una ecuación y sustituyendo en la otra obtenemos:

$$e = \frac{\sum \eta_i Q_i - f \cdot \sum Q_i^3}{\sum Q_i^2} \quad (5.27)$$

$$f = \frac{\sum \eta_i Q_i^2 \sum Q_i^2 - \sum \eta_i Q_i \sum Q_i^3}{\sum Q_i^4 \sum Q_i^2 - (\sum Q_i^3)^2} \quad (5.28)$$

En la siguiente figura podemos observar las curvas características de una bomba centrífuga obtenida de un catalogo comercial:

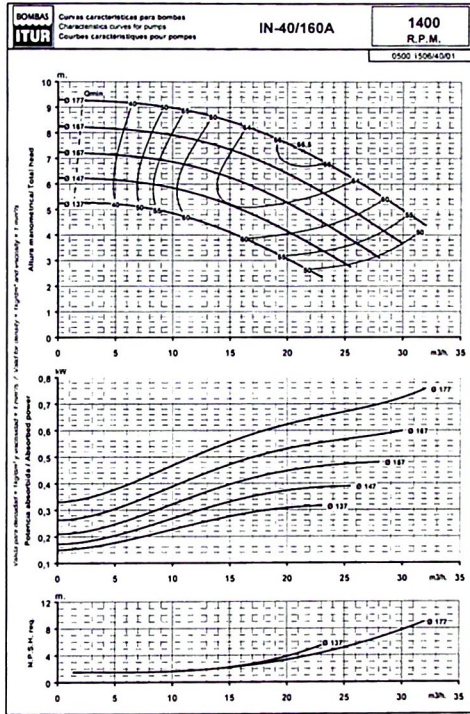


Figura 5-13. Curvas características bomba horizontal. Cortesía de Bombas Itur.

### 7. Leyes de semejanza en bombas

En el trabajo de diseñar bombas, resultaría excesivamente costoso trabajar con equipos reales. Generalmente se trabaja con modelos a escala. Estos modelos presentan semejanza hidráulica con el equipo real o prototipo. Para que esto ocurra deben existir tres tipos de semejanza:

- Semejanza geométrica: Modelo y prototipo son geoméricamente semejantes, si y solo si, todas las dimensiones espaciales en las 3 coordenadas tienen la misma relación de escala lineal. Es decir sean proporcionales en todas sus dimensiones. Esto exige que se

conserven todos los ángulos y por tanto todas las direcciones de flujo. La relación geométrica de escala entre prototipo y modelo es  $\lambda$ .

- Semejanza cinemática: En puntos homólogos de modelo y prototipo, los diagramas de velocidades obligatoriamente han de ser proporcionales.
- Semejanza dinámica: Se cumple dicha semejanza cuando en prototipo y modelo, para puntos homólogos, los diagramas de fuerzas son proporcionales. Dado que la principal fuerza es la viscosidad, esto es equivalente a decir que en modelo y prototipo el nº de Reynolds debe coincidir.

De esta forma es posible deducir las siguientes leyes de semejanza:

- Relación caudales, longitudes y velocidades:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \lambda^3 \cdot \alpha \quad ; \quad \text{siendo} \quad \alpha = \frac{n_1}{n_2} \quad (5.29)$$

- Relación de alturas, longitudes y velocidades de giro:

$$\frac{H_1}{H_2} = \lambda^2 \cdot \alpha^2 \quad ; \quad \text{siendo} \quad \alpha = \frac{n_1}{n_2} \quad (5.30)$$

- Relación de potencias, longitudes y velocidades:

$$\frac{N_1}{N_2} = \lambda^5 \cdot \alpha^3 \quad ; \quad \text{siendo} \quad \alpha = \frac{n_1}{n_2} \quad (5.31)$$

Para el caso práctico del empleo de bombas y no de su diseño, no trabajaremos con modelos y prototipos sino con bombas iguales, en las que queremos conocer su comportamiento variando las condiciones de funcionamiento. En este caso  $\lambda=1$  y por tanto nos queda relacionado la variación del caudal, la altura o la potencia absorbida cuando la bomba pasa de girar de la velocidad nominal a otra cualquiera.

### 8. Velocidad específica o nº específico de revoluciones

Definimos velocidad específica ó nº específico de revoluciones como la velocidad a la que debería girar una bomba semejante para elevar un caudal de  $1 \text{ m}^3/\text{s}$  a  $1 \text{ mca.}$  de altura. La expresión que permite obtener la velocidad específica es:

$$n_q = n \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \quad (5.32)$$

Donde:

- $n_q$ : velocidad específica, en rpm.
- $n$ : velocidad nominal, en rpm.
- $Q$ : caudal en  $\text{m}^3/\text{s}$
- $H$ : altura manométrica, mca.

De la expresión anterior se deduce que  $n_q$  es una constante para todas las bombas que resultan geoméricamente semejantes, por lo que este parámetro nos permite clasificar morfológicamente las máquinas.

A medida que disminuye el diámetro del rodete, la altura que ésta puede generar disminuye mientras que el caudal aumenta. Así podemos clasificar bombas según la siguiente figura.

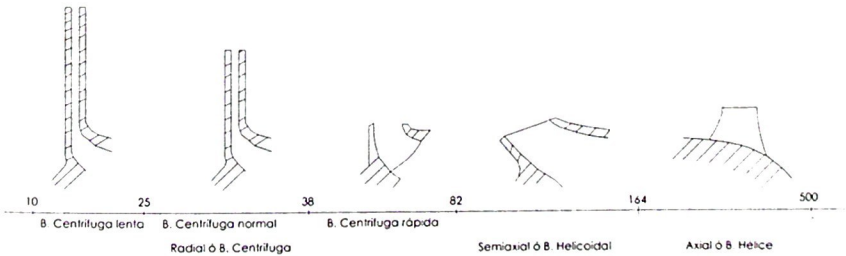


Figura 5-14. Evolución de  $n_q$  con la forma del rodete.

## 9. Curvas características a velocidades distintas de la velocidad nominal

Las curvas características, motriz y de rendimiento de una bomba vienen dadas por las expresiones:

$$H_o = c - dQ_o^2 \quad (5.33)$$

$$\eta_o = eQ_o - fQ_o^2 \quad (5.34)$$

Dadas las leyes de semejanza, sabemos que modificar la relación de velocidades de giro  $\alpha = n/n_o$  afecta al funcionamiento de la bomba de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{n}{n_o} = \frac{Q}{Q_o} = \sqrt{\frac{H}{H_o}} \quad (5.35)$$

Sustituyendo estas expresiones en las curvas motriz y de rendimiento:

$$H_o = \alpha^2 c - dQ_o^2 \quad (5.36)$$

$$\eta_o = \frac{eQ_o}{\alpha} - f\left(\frac{Q_o}{\alpha}\right)^2 \quad (5.37)$$

## 10. Punto de funcionamiento de una instalación

En la práctica, una bomba nunca trabaja descargando el líquido al vacío sino que lo hace conectada a una determinada instalación, la cual va a condicionar su comportamiento. De la bomba ya sabemos que la altura manométrica que es capaz de proporcionar es función del caudal trasegado describiendo una parábola decreciente del tipo  $H_m = c - d \cdot Q^2$ , en la cual el parámetro  $c$  representa la ordenada en el origen, es decir la máxima altura que la bomba proporciona cuando el caudal es nulo, mientras que  $d \cdot Q^2$  representa la pendiente de la curva en cada punto.

Del mismo modo, nosotros podemos modelar el comportamiento resistente de la tubería a la cual conectamos la bomba. Habrá un desnivel geométrico que tendremos que vencer y que irá desde la lámina libre en la aspiración hasta la lámina libre en el punto de descarga, llamado desnivel geométrico  $hg$ .

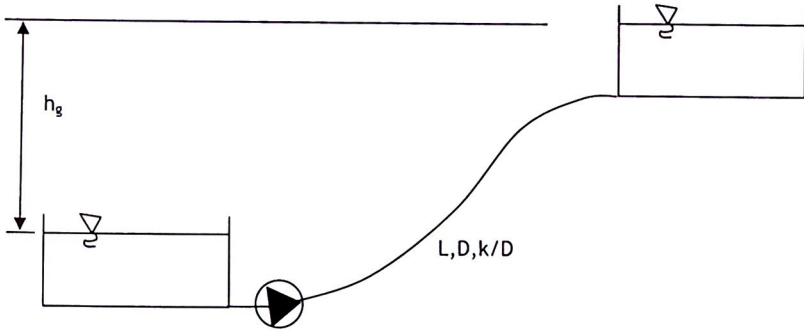


Figura 5-15. Desnivel geométrico.

Se trata pues de un valor constante que solo depende de la instalación, nunca del caudal trasegado. Por otro lado la tubería de impulsión presenta unas características en cuanto a longitud, diámetro y rugosidad (según el material) a partir de los cuales podemos calcular las pérdidas de carga. Sin embargo este valor sí depende del caudal, el cual es aún una variable por determinar.

A partir de cualquier fórmula de pérdidas de carga podremos agrupar los datos de la tubería en una constante, la cual estará en función del caudal:

$$hr = 0,0826 \cdot f \cdot L \cdot \frac{Q^2}{D^5} = K \cdot Q^2 \quad \text{Darcy - Weisbach} \quad (5.37)$$

$$hr = 10,62 \cdot C^{-1,85} \cdot L \cdot \frac{Q^{1,85}}{D^{4,87}} = K \cdot Q^{1,85} \quad \text{Hazen - Williams} \quad (5.38)$$

$$hr = 0,00092 \cdot L \cdot \frac{Q^{1,8}}{D^{4,8}} = K \cdot Q^{1,8} \quad \text{Veronesse - Datei} \quad (5.39)$$

De esta forma, la altura que deberá proporcionar la bomba vendrá dada por la suma de *altura geométrica más pérdidas de carga*, proporcionales éstas al caudal:

$$H_m = h_g + KQ^m \quad (5.40)$$

$h_g$  representa de nuevo la ordenada en el origen, es decir la mínima altura que debe aportar la bomba para transportar caudal nulo.

El punto de funcionamiento del conjunto bomba+instalación queda fijado por la intersección de las curvas motriz y resistente de la tubería.

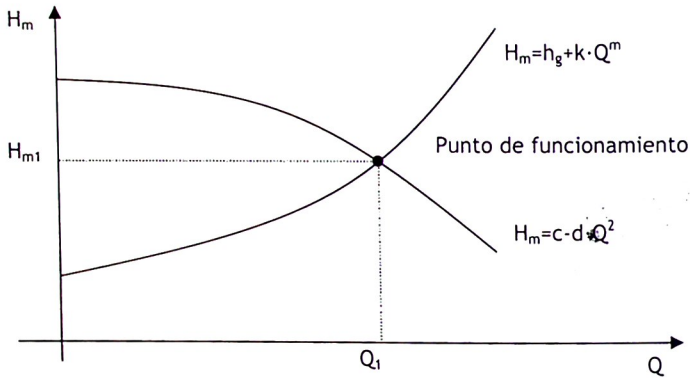


Figura 5-16. Punto de funcionamiento.

Analíticamente se obtendrá resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} H_m &= h_g + KQ^m \\ H_m &= c - dQ^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

## 11. Asociación de bombas

Las bombas pueden asociarse de dos formas principalmente: en serie o en paralelo, en función del efecto buscado.

### Bombas en serie:

La asociación en serie se verifica cuando.

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_2 = Q_S \\ H_S &= \sum H_i = H_1 + H_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

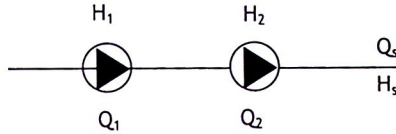


Figura 5-17. Asociación en serie de bombas.

El caudal de impulsión de una bomba se convierte en el caudal de aspiración de la siguiente. La finalidad de esta asociación es poder bombear un mismo caudal a una altura tal que un solo grupo sería incapaz de hacerlo. Un equipo comercial que aprovecha la asociación en serie son las bombas multietapas.

La curva característica de la asociación se obtiene sumando alturas para cada caudal.

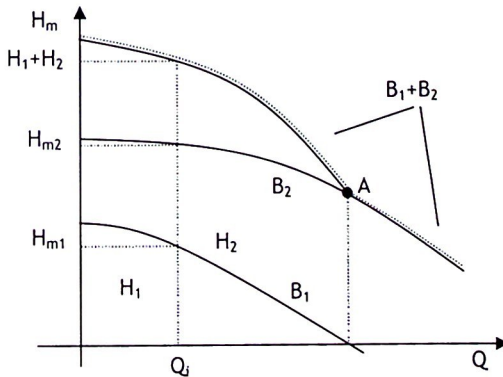


Figura 5-18. Curva motriz asociación en serie de bombas.

La asociación siempre debe funcionar a la izquierda del punto A.

Analíticamente la asociación se resuelve con una curva motriz resultante de la suma miembro a miembro de las curvas individuales si son distintas, o multiplicando la curva motriz por  $n$  siendo  $n$  el número de grupos iguales.

Distintas

$$\begin{cases} H_1 = c_1 - d_1 Q^2 \\ H_2 = c_2 - d_2 Q^2 \end{cases}$$

$$H_T = (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) Q^2 \quad (5.43)$$

Iguales

$$H = c - d Q^2$$

$$H_T = n(c - d Q^2) \quad (5.44)$$

### Bombas en paralelo.

La asociación de bombas en paralelo se verifica cuando los caudales de impulsión de cada bomba se unen a la salida de las bombas. Las aspiraciones son por tanto independientes. En esta situación se cumple:

$$Q_S = Q_1 + Q_2 = \sum Q_i$$

$$H_1 = H_2 = H_S \quad (5.45)$$

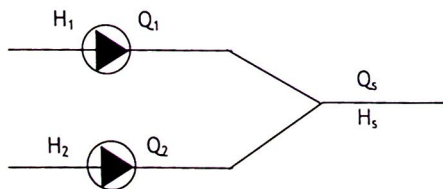


Figura 5-19. Asociación en paralelo de bombas.

Esta asociación es muy empleada, sobre todo en aquellas situaciones en las que el caudal de bombeo es variable en el tiempo. Las bombas arrancan progresivamente en función de la demanda.

La curva característica de la asociación se obtiene sumando caudales para cada altura.

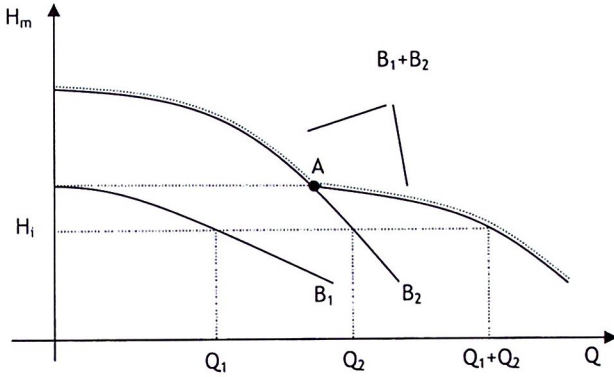


Figura 5-20. Curva motriz de asociación en paralelo de bombas.

La asociación siempre debe funcionar a la derecha del punto A.

Para obtener analíticamente la curva motriz debemos despejar el caudal de cada una de las curvas motrices individuales y sumarlo.

$$\begin{aligned}
 H = c_1 - d_1 Q^2 & \quad \rightarrow \quad d_1 Q^2 = c_1 - H & \quad \rightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{c_1 - H}{d_1}} \\
 H = c_2 - d_2 Q^2 & \quad \rightarrow \quad d_2 Q^2 = c_2 - H & \quad \rightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{c_2 - H}{d_2}}
 \end{aligned}$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = \sqrt{\frac{c_1 - H}{d_1}} + \sqrt{\frac{c_2 - H}{d_2}} \quad (5.46)$$

En el caso más habitual de que las bombas sean todas iguales en el cual simplemente debemos dividir el caudal por el número de grupos iguales  $n$ .

$$H = c - dQ^2 \quad \rightarrow \quad H_T = c - d\left(\frac{Q}{n}\right)^2 \quad (5.47)$$

## 12. Cavitación en bombas

Tal como ya se ha visto más atrás, la cavitación es el fenómeno por el cual el líquido pasa a estado gaseoso en el interior de una estructura (bomba, tubería,

válvula...) estando a una temperatura inferior a la del punto de ebullición, y que se produce por un descenso local de la presión por debajo de la tensión de vapor.

Esta bolsa de vapor al llegar de nuevo a una zona de presión elevada, condensa de forma instantánea produciendo el colapso de las burbujas. El líquido que hay alrededor de la burbuja se dirige al centro de la misma a gran velocidad produciendo pequeños golpes de ariete.

El efecto de la cavitación produce en la bomba los siguientes efectos adversos:

- Martilleo en el interior del contorno sólido como si estuviese pasando arena por el interior
- Vibraciones
- Descensos del caudal y rendimientos de la bomba por descenso de la sección útil en la aspiración
- Rotura de la bomba y rodetes por fatiga de los materiales

### Comprobación de la condición de no cavitación

Las bombas centrífugas pueden aspirar agua aprovechando que la lámina libre del agua está a una presión absoluta igual a la presión atmosférica ( $\approx 10\text{mca}$ ). La bomba en su interior puede generar presiones relativas negativas, lo que significa presiones inferiores a la atmosférica, por lo que se crea un gradiente de presión que posibilita el ascenso.

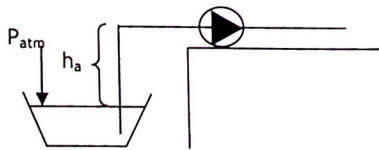


Figura 5-21. Altura de aspiración en una estación de bombeo.

Se define *altura neta de aspiración positiva disponible*  $NPSH_d$  a la altura máxima que puede aportar la instalación para que la bomba pueda aspirar el fluido, tras descontar a la presión máxima ( $P_{atm}$ ) las pérdidas que se producen y la altura geométrica de aspiración. Así tenemos:

$$NPSH_d = \frac{P_a}{\gamma} - [h_a - h_v - h_f] - KQ^2 \quad (48)$$

Donde:

- $\frac{P_a}{\gamma}$ , presión atmosférica absoluta. Generalmente 10 mca.
- $h_a$ , altura geométrica de la aspiración, m.
- $h_v$ , presión de vapor del líquido a la  $T^a$  de cálculo en mca.
- $h_t$ , pérdidas de presión por la altitud sobre el nivel del mar en, mca.
- $KQ^2$ , pérdidas de carga en la aspiración, en mca, que dependen del caudal.

El fluido generalmente será agua, mientras que el valor normal de la presión atmosférica es, 10,33 mca, aunque por simplificar se emplea 10 mca.

Cuando el fluido entra en la bomba hasta llegar al punto de mínima presión se producen una serie de pérdidas de carga no incluidas en la expresión, por choques y rozamiento contra los alabes. Es por ello que se define la **altura neta positiva de aspiración requerida  $NPSH_r$** , como la altura mínima que se requiere a la entrada de la bomba para que no se produzca cavitación. Este dato debe ser aportado por el fabricante y se encuentra normalmente en las curvas características de la bomba. La condición física de no cavitación será pues que en ningún punto del interior de la bomba, la presión baje por debajo de la presión de vapor.

$$\frac{P_{bomba}}{\gamma} > h_v \quad (5.49)$$

En la práctica, la condición de no cavitación resultará:

$$NPSH_d > NPSH_r \quad (5.50)$$

En las siguientes tablas quedan reflejados los valores de  $h_v$  y  $h_t$ .

$T^a$ °C	$h_v$ (mca)	$T^a$ °C	$h_v$ (mca)
0	0,006	55	1,61
5	0,09	60	2,03
10	0,12	65	2,56
15	0,17	70	3,20
20	0,25	75	3,96
25	0,33	80	4,86
30	0,44	85	5,93

T <sup>a</sup> °C	h <sub>v</sub> (mca)	T <sup>a</sup> °C	h <sub>v</sub> (mca)
35	0,58	90	7,18
40	0,76	95	8,62
45	0,98	100	10,33
50	1,26		

Altura	ht (mca)	Altura	ht (mca)
0	0	1400	1,66
100	0,125	1500	1,77
200	0,250	1600	1,88
300	0,375	1700	1,99
400	0,5	1800	2,09
500	0,625	1900	2,19
600	0,75	2000	2,29
700	0,87	2200	2,49
800	0,99	2400	2,68
900	1,10	2600	2,87
1000	1,22	2800	3,05
1100	1,33	3000	3,23
1200	1,44	3500	3,65
1300	1,55	4000	4,06

### 13. Campos de trabajo y selección de bombas

A la hora de seleccionar una bomba, debemos conocer los requerimientos de altura y caudal. Acudiendo a un catálogo comercial comenzamos la búsqueda con el ábaco de campos de trabajo, en el cual están todas las máquinas con el área de trabajo envuelta por las curvas de todos los modelos. De ahí se seleccionará el modelo más apropiado, consultando entonces la curva concreta del modelo y comprobando que el rendimiento es adecuado.

En caso de que existan varios modelos cercanos se comprueban todos y se comparan rendimientos.



## Tema 6. Transitorios

### 1. Introducción

Hasta este momento en el presente texto solamente se ha estudiado la operación de sistemas hidráulicos funcionando en régimen permanente, es decir, en unas condiciones en las que ninguna variable del sistema sufre cambios a lo largo del tiempo. En realidad, estas condiciones son un tanto particulares, ya que en la práctica, cualquier sistema va efectivamente a modificar su funcionamiento con el tiempo de una forma u otra.

Para ilustrar tales cambios basta con considerar el suministro de agua a un núcleo urbano de población. En la operación de tal sistema, por ejemplo, pueden identificarse cambios característicos en la velocidad de circulación del agua por las tuberías.

Algunos cambios son muy lentos. Así por ejemplo, según avanza el día a primera hora, y a medida que los habitantes, progresivamente, se levantan por la mañana y empiezan a hacer uso del agua para su aseo personal, la demanda de agua aumenta en esas horas, con ella el caudal circulante por las tuberías y con éste, lógicamente, la velocidad del flujo de agua. Estos cambios se producen a lo largo de horas.

Otros cambios son rápidos. Normalmente están relacionados con la operación controlada de los elementos de regulación de la red. La apertura de válvulas o la puesta en marcha de bombas pueden ser ejemplos de este tipo, asumiendo que la ejecución de tales maniobras se haga de forma progresiva. La duración de estos cambios puede ser del orden de segundos a pocos minutos.

Por último, están los cambios que se producen de forma muy rápida en el tiempo, y que suelen ocurrir en situaciones más o menos imprevistas, como pueden ser averías, emergencias u otras. Una parada brusca de bomba por fallo del suministro eléctrico puede ser un caso de avería, así como el cierre, por seguridad, de una válvula de retención. Estos sucesos pueden ser casi instantáneos, de fracciones de segundo, por lo que los cambios que generan en la velocidad del agua por las conducciones son igualmente rapidísimos.

Aunque, en general, se define como fenómeno transitorio cualquier proceso en el que se produzca un cambio en las variables de un flujo de fluido en el tiempo, en la práctica todos estos eventos se denominan como transitorios hidráulicos y la variable, por excelencia, cuyo cambio se estudia es la velocidad del agua. A la vista de esta definición, los ejemplos indicados en los párrafos precedentes la cumplen, y así, al margen de su duración, todos ellos se califican como transitorios, aunque no todos presentan la misma importancia ni el mismo interés. Ello es debido a que la influencia de un transitorio sobre el funcionamiento de un sistema, así como sus consecuencias, son mayores cuanto

más rápidamente se produce. Y también su análisis resulta más complejo. De este modo, son los transitorios más rápidos los que mayor atención y estudio requieren, aunque su duración temporal real resulte casi despreciable dentro del funcionamiento cotidiano de una red.

Como se verá en este apartado, tal interés viene dado por el hecho de que las consecuencias de un transitorio pueden llegar a ser catastróficas. Si el estudio del régimen permanente, en operación normal de una red, se toma como referencia para el dimensionamiento de la misma, el estudio de los transitorios que pueden aparecer sirve para fijar diversos parámetros de seguridad (timbraje de las tuberías, válvulas automáticas, calderines, etc.).

## 2. Modelos de cálculo

Existen tres modelos de cálculo para la resolución numérica de los transitorios hidráulicos. En orden creciente de complejidad son:

El modelo cuasi-estático (o de simulación en periodo extendido) trata el cambio temporal en las variables de la forma más sencilla posible (tanto, que ni lo resuelve explícitamente). Consiste sólo en la resolución de sucesivos regímenes permanentes. Por ello, las ecuaciones que toma en consideración son principalmente la de Bernoulli en las tuberías, considerando pérdidas y aportes energéticos, y la de continuidad en los nudos, además de las necesarias para la resolución de las distintas pérdidas de carga y de las de equilibrio de malla en el caso de que las redes sean malladas.

Este modelo sólo es adecuado al caso de que los cambios sean muy lentos. Así, su aplicación al ejemplo antes mencionado de la operación de una red en la que las condiciones cambian de hora en hora, el modelo cuasi-estático resuelve el flujo en régimen permanente para las condiciones de la primera hora. A continuación, resuelve el régimen permanente para las condiciones de la segunda hora, y así sucesivamente, sin atender precisamente a cómo se produce el cambio de una hora a la siguiente.

El modelo rígido (o de oscilación en masa) sí resuelve explícitamente el proceso de aceleración que sufre el flujo de fluido en un transitorio, así como sus consecuencias hidráulicas. Lo hace, sin embargo, asumiendo una simplificación drástica: supone que el fluido forma una masa rígida que se acelera íntegramente al mismo tiempo (la imagen sería identificar el agua circulante con una barra de acero indeformable). La ecuación fundamental para la aplicación del modelo rígido es la ecuación de Bernoulli generalizada:

$$\left[ \frac{P_I}{\gamma} + z_I + \frac{v_I^2}{2g} \right] + h_B = \left[ \frac{P_f}{\gamma} + z_f + \frac{v_f^2}{2g} \right] + \sum h_f + \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} L \quad (6.1)$$

En el miembro derecho de esta ecuación aparece el denominado término de inercia  $\frac{l}{g} \frac{dv}{dt} L$ , que contiene la variación de la velocidad del flujo con el tiempo, y que representa la energía empleada en producir dicha aceleración. Este modelo es adecuado para resolver los transitorios que más arriba se han denominado como rápidos.

El modelo elástico (o golpe de ariete) no sólo resuelve también el transitorio explícitamente, sino que lo hace con unas simplificaciones mínimas del sistema real, prestando especial atención a las propiedades elásticas tanto del fluido como del material de la tubería. Es decir, el agua que rellena la conducción ya no es una masa rígida sino elástica que puede deformarse de forma diferente en distintas zonas, y lo mismo ocurre con la tubería. Estos efectos elásticos son particularmente relevantes en el caso de los transitorios causados por un evento casi instantáneo.

Como ya se ha indicado son estos transitorios, muy rápidos, los que mayor interés presentan por las consecuencias que pueden acarrear. Sin embargo, su análisis sólo resulta posible mediante la utilización del modelo elástico que es, con diferencia, mucho más complejo que los otros dos.

En este texto se adoptará una solución de compromiso para cubrir esta materia. En primer lugar se abordará la descripción física de un fenómeno transitorio característico (cierre instantáneo de válvula), y a continuación, sin entrar en detalles pormenorizados, se calculará la peor consecuencia bajo las peores condiciones que cabría esperar mediante la sencilla ecuación de Joukowsky.

### 3. Descripción física del fenómeno

Para describir, paso a paso, las etapas características de un transitorio hidráulico se va a analizar un cierre instantáneo de válvula. La Figura 6-1 muestra la instalación tomada para ello, que consta de un depósito, a la izquierda, cuyo nivel de agua se mantiene constante, y una tubería horizontal de características uniformes que conduce el agua desde el depósito hasta el punto de descarga, en su extremo derecho. La figura muestra la situación inicial del sistema en la que la válvula se encuentra abierta y el flujo de agua por la conducción es en régimen permanente, siendo  $v_0$  la velocidad del mismo. La línea de alturas piezométricas es horizontal porque se están despreciando las pérdidas de carga en la instalación, lo cual queda justificado ante la magnitud de las sobrepresiones y depresiones que sufrirá el sistema.

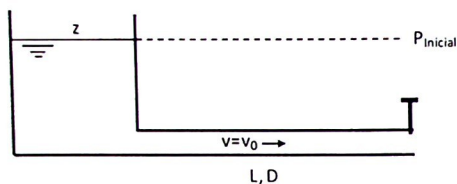


Figura 6-1. Condiciones iniciales antes del transitorio

El transitorio en sí comienza (Figura 6-2a) cuando la válvula se cierra de forma instantánea, esto es, asumiendo que el tiempo de cierre es de cero segundos. En ese momento las partículas de agua que circulan por la tubería chocan con la válvula que se ha cerrado y se detienen bruscamente. Esta colisión física unida a la transformación de energía cinética en elástica de presión da lugar a la aparición de una sobrepresión,  $\Delta H$ , en ese punto de la instalación.

Por su parte, las partículas de agua que vienen en un segundo término chocan con las que acaban de pararse y, a su vez, se detienen entrando en sobrepresión igualmente. A medida que todas las partículas de agua se van deteniendo a lo largo de la tubería al chocar con las que ya están paradas, la sobrepresión que se ha generado en la válvula al cerrarse, “viaja” aguas arriba de la tubería. Esta es la primera fase del transitorio (Figura 6-2b). Al final de la misma (Figura 6-2c), el agua en el interior de la tubería se encuentra detenida (velocidad nula) pero sometida a una sobrepresión,  $\Delta H$ , que suele ser varias veces mayor que la que soporta en condiciones normales de operación.

La velocidad a la que el pulso de presión,  $\Delta H$ , “viaja” por la tubería recibe el nombre de celeridad de la onda de presión y se denota por la letra  $a$ . De este modo, el tiempo que tardará en llegar desde la válvula hasta el depósito será de  $t = L/a$ , y esta es exactamente la duración de la primera fase del transitorio.

Cuando el pulso de presión llega al depósito es absorbido por éste debido a la mucha mayor cantidad de agua que tiene en comparación con la que hay en la tubería. En ese instante (Figura 6-2c), ocurre que, estando detenidas tanto el agua que llena el depósito como la que llena la tubería, la segunda tiene más altura piezométrica que la primera. Por ello, la consecuencia natural es que el agua de la tubería empiece a moverse y se desplace hacia el depósito. De este modo, se inicia la segunda fase del transitorio. Cuando las partículas de agua empiezan a moverse hacia el depósito transforman la energía de presión que tienen acumulada en energía cinética por lo que recuperan su línea de alturas piezométrica inicial (línea punteada). La segunda fase (Figura 6-2d) tiene lugar a medida que toda el agua que contiene la tubería empieza a moverse hacia el depósito (despreciando pérdidas de carga, a la misma velocidad que tenía antes

del cierre de la válvula pero en sentido contrario). En este caso, la tubería es recorrida de vuelta por un pulso de depresión,  $-\Delta H$ , que restaura la línea de alturas piezométricas inicial y que se mueve con la misma celeridad,  $a$ . La duración de la segunda fase también es de  $L/a$ , y el tiempo transcurrido desde el inicio del transitorio de  $2L/a$ .

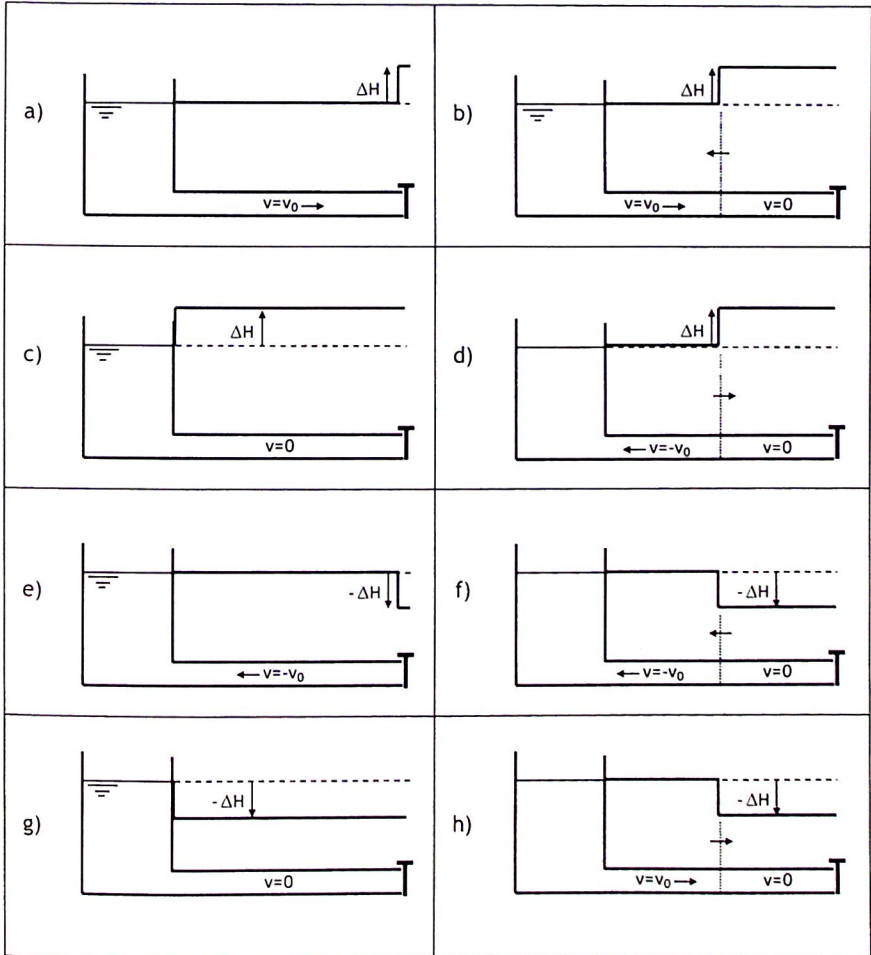


Figura 6-2. Fases de un transitorio

Al final de la segunda fase (Figura 6-2e), el agua de la tubería se está moviendo hacia el depósito. Cuando las últimas partículas de agua, las que están en contacto con la válvula cerrada, tienden a su vez a moverse hacia el depósito, ocurre que dicha válvula cerrada ejerce un efecto de succión sobre las mismas que les impide hacerlo. Estas partículas están siendo traccionadas tanto por su izquierda (por las partículas que se mueven hacia el depósito), como por su derecha (por la válvula cerrada). El resultado es que no pueden iniciar el movimiento y entran en depresión,  $-\Delta H$  con respecto a la altura piezométrica inicial. Es el principio de la tercera fase.

Al entrar en depresión, esas partículas transmiten a las siguientes el efecto de succión que a ellas mismas les ha generado la válvula cerrada, por lo que las siguientes partículas, a su vez, se detienen y entran en la misma depresión. Este proceso se transmite aguas arriba de la tubería, hacia el depósito, en lo que constituye la tercera fase del transitorio (Figura 6-2f). El pulso que recorre la tubería vuelve a ser de depresión,  $-\Delta H$ , y el resultado es que toda ella queda ahora con un nivel de piezométricas inferior al que tenía antes del inicio del transitorio. La duración de la tercera fase vuelve a ser  $L/a$  y el tiempo transcurrido desde el inicio del transitorio hasta el final de la misma es de  $3L/a$ .

Cuando el pulso alcanza el depósito, de nuevo es absorbido por el mismo, concluyendo la tercera fase del transitorio (Figura 6-2g). En ese instante, toda el agua de la tubería está en reposo y a una presión menor que la contenida en el depósito. Así el agua del depósito empezará a moverse hacia la tubería. Tan pronto como esto ocurre, las primeras partículas de agua en la tubería recuperan su presión inicial y comienzan a moverse en dirección a la válvula, empujando a las siguientes. Esta es la cuarta fase del transitorio (Figura 6-2h). A lo largo de la misma, toda el agua comienza a moverse de nuevo quedando a la presión inicial anterior al transitorio. En esta fase la onda que recorre la tubería es de sobrepresión,  $\Delta H$ . Al final de la misma, tras un tiempo de  $4L/a$  desde el inicio del transitorio, la situación es la misma que la que se produce al inicio del transitorio (Figura 6-2a). Por ello, todo el proceso volvería a repetirse de nuevo, según se ha explicado aquí, en ciclos de cuatro fases.

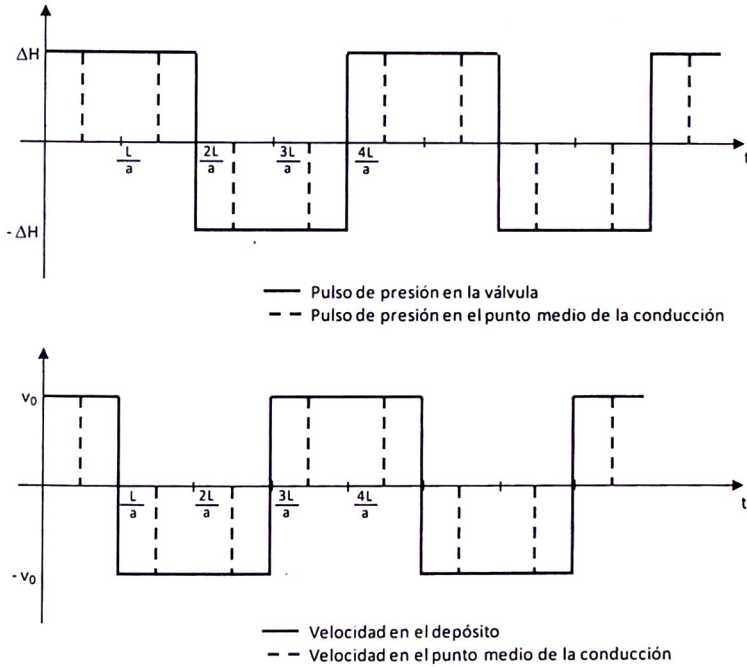


Figura 6-3. Evolución del pulso de presión y la velocidad

La Figura 6-3 (arriba) muestra la evolución del valor de la presión a lo largo del tiempo para dos puntos clave del sistema: el extremo derecho de la tubería (posición de la válvula) y su punto medio. Como puede comprobarse, en el extremo derecho el valor de la presión alterna entre los extremos máximo y mínimo, mientras que en el punto medio de la tubería también llega a los valores extremos, pero intercalando periodos de tiempo al nivel inicial. Estos periodos son debidos al tiempo que tarda en llegar la onda desde los extremos de la tubería. Por su parte, la Figura 6-3 (abajo) muestra la evolución de la velocidad. Puede comprobarse el paralelismo que hay con la anterior teniendo en cuenta la relación entre presión y velocidad en cada fase del transitorio.

#### 4. El pulso de Joukowsky

La mejor forma de estudiar un transitorio como el descrito en el apartado anterior es mediante el empleo del modelo elástico, lo cual resulta inabordable desde el enfoque del presente texto. Sin embargo, sí resulta posible plantear el cálculo del pulso de presión,  $\Delta H$ , que puede aparecer en el sistema según las condiciones iniciales en la peor situación de maniobra. Efectivamente, dicha peor maniobra posible se produce cuando el tiempo de cierre es nulo. En tal caso, puede demostrarse que el  $\Delta H$  que se alcanzará será mayor que el que aparecería ante cualquier otra maniobra de cierre en la que el tiempo de la misma fuese mayor que cero (podría ser un cierre rápido, incluso muy rápido, pero no ya instantáneo).

El pulso máximo de presión que se toma de referencia crítica en una maniobra de cierre instantáneo recibe el nombre de pulso de Joukowsky. Y su cálculo se aborda a partir de la siguiente ecuación:

$$\Delta H = \frac{a \Delta v}{g} \quad (6.2)$$

donde  $\Delta H$  es el valor del pulso en metros de columna de fluido,  $a$  es el módulo de la celeridad en m/s,  $\Delta v$  es la diferencia de velocidad, en m/s, del flujo del instante final del transitorio con respecto al instante inicial (maniobra), y  $g$  es la aceleración de la gravedad en  $m/s^2$ . La función del signo negativo puede explicarse como un ajuste del valor numérico a la realidad. Es decir, en el caso de un cierre de válvula completo como el comentado, la velocidad inicial del flujo es  $v_0$  y la velocidad final es obviamente nula ya que la válvula queda cerrada, con lo cual  $\Delta v$  termina siendo un valor negativo, y el resultado de  $\Delta H$  también sería negativo. Esto sería incoherente con la realidad, ya que ante un cierre de válvula el primer pulso de presión que aparece es positivo (sobrepresión), por lo que se hace necesario corregir el resultado cambiándole el signo.

Resta por último revisar el cálculo de la celeridad de la onda de presión,  $a$ . La ecuación para ello es la siguiente, en la que resulta clara la influencia de las características elásticas tanto del fluido como del material de la conducción:

$$a = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K D}{E e}}} \quad (6.3)$$

donde  $K$  es el módulo de elasticidad volumétrico del fluido en  $\text{N/m}^2$ ,  $\rho$  es la densidad del fluido en  $\text{kg/m}^3$ ,  $D$  es el diámetro interior de la conducción en m,  $E$  es el módulo de Young del material de la conducción en  $\text{N/m}^2$ , y  $e$  es el espesor de la conducción en m.

# Tema 7. Flujo en lámina libre

## 1. Introducción

Entendemos por canales abiertos aquellas conducciones que presentan como principal cualidad el disponer de una parte de su superficie abierta y en contacto con la atmósfera, por tanto a presión atmosférica. De ahí que también reciba la denominación de flujo en lámina libre.

El flujo en canales abiertos se debe a la acción de la gravedad actuando a través de la pendiente de la solera y de la pendiente de la lámina libre del agua, a diferencia de los conductos cerrados en los que el movimiento se produce debido también al gradiente de presión en la dirección longitudinal del tubo. La distribución de presiones en la sección transversal es hidrostática, siendo las fuerzas de viscosidad despreciables ya que suele trabajar en régimen turbulento.

## 2. Definiciones

Para empezar a trabajar con canales abiertos debemos definir las siguientes variables, identificadas algunas de ellas con las partes que corresponden al canal:

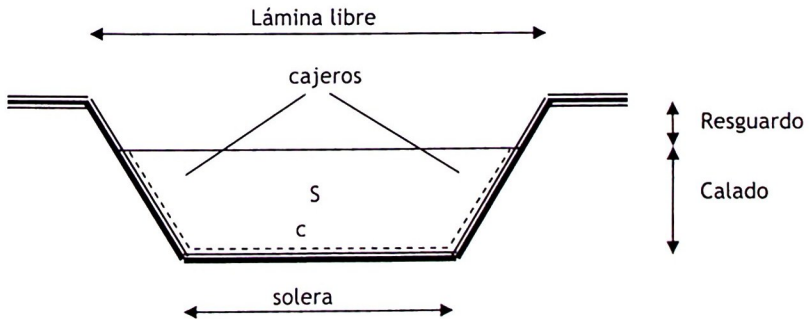


Figura 7-1. Partes de un canal.

- Calado ( $y$ ): Altura del tirante de agua en el interior del canal.
- Solera ( $b$ ): Anchura del fondo del canal. Supone una magnitud fija.
- Lámina libre de agua ( $T, L$ ): Superficie libre del fluido en contacto con la atmósfera. Está a presión atmosférica. Su ancho depende de

la geometría de la sección transversal.

- Sección mojada ( $S$ ): Sección que el líquido ocupa en el interior del canal. Presenta dimensión superficial.
- Perímetro mojado ( $c$ ): Perímetro de la sección mojada en el cual el fluido y el canal están en contacto. Tiene dimensión lineal.
- Radio hidráulico ( $R_h$ ): Relación entre sección mojada y perímetro mojado  $S/C$ . Presenta también dimensión lineal.

### 3. Análisis unidimensional

Un canal artificial presentará siempre una sección transversal constante, no así un canal natural cuya sección transversal es variable. El flujo en el interior del canal es tridimensional, es decir el movimiento presenta componentes en los 3 ejes principales. Esto supone una importante complejidad en el análisis. Sin embargo, en la mayoría de los canales artificiales y muchos naturales podemos asumir la simplificación de que las componentes secundarias son despreciables frente a la componente en la dirección longitudinal del canal. Asumimos pues un planteamiento que denominamos **unidimensional**. Solamente en casos concretos como por ejemplo, llanuras de inundación (requieren un análisis bidimensional) ó ríos de gran anchura (requiere un análisis tridimensional) el planteamiento unidireccional no será válido.

### 4. Clasificación del flujo

En canales nos encontramos con distintos tipos de flujo. Su clasificación podemos hacerla basándonos en distintos criterios, aunque lo habitual es encontrarnos la siguiente clasificación:

- Basándonos en la dimensión temporal del problema:
  - **Flujo permanente o estacionario:** Se produce cuando el calado y el caudal permanecen invariables en una sección transversal a lo largo del tiempo.
  - **Flujo no permanente o transitorio:** Se produce cuando en una sección transversal, caudal y calado varían con el tiempo. Es la situación contraria a la anterior.
- Atendiendo a la dimensión espacial:
  - **Flujo uniforme:** Se produce cuando caudal y calado permanecen invariables en todas las secciones transversales de un canal, es decir a lo largo de todo su perfil

longitudinal. Para que esto ocurra es condición indispensable que todo el canal presente la misma sección transversal y pendiente, lo cual ocurrirá en canales artificiales.

- **Flujo no uniforme o variado:** A lo largo del eje longitudinal del canal las distintas secciones transversales presentan distinto caudal o calado.

A su vez el flujo variado se divide en:

- **Rápidamente variado:** cuando el cambio de calado se produce en un tramo corto.
- **Gradualmente variado:** Cuando el cambio de calado se produce a lo largo de una longitud de conducción considerable. La separación física entre ellos no esta bien definida.

El flujo se clasifica espacial y temporalmente según lo visto hasta ahora. De esta forma encontraremos flujos *uniformes y permanentes* de forma habitual, siendo los más estudiados aunque también el *no uniforme y permanente* ó *uniforme y no permanente*. En la siguiente figura encontramos ilustrados ejemplos de la anterior clasificación:

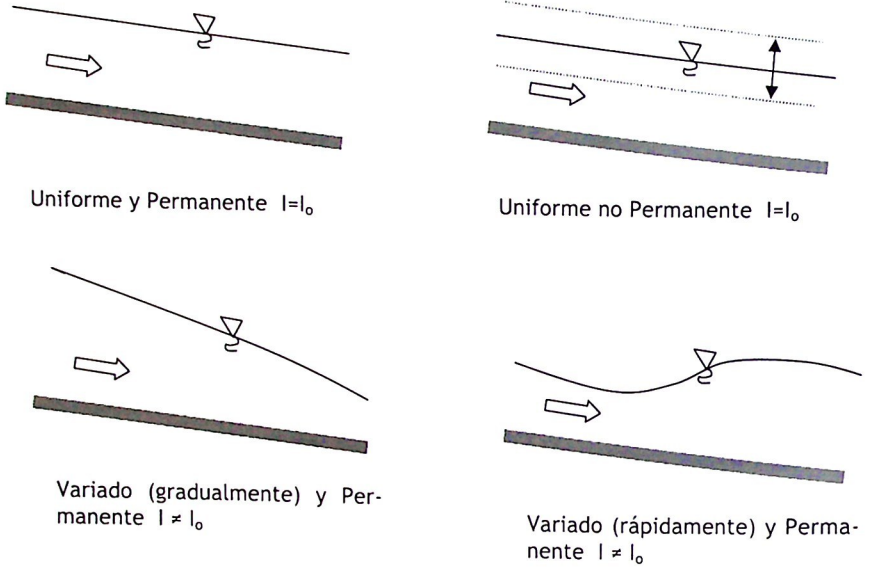


Figura 7-2. Tipos de flujo.

## 5. Movimiento uniforme permanente

Cuando el líquido circula por un canal en las paredes del mismo aparece un esfuerzo tangencial que se opone a su avance. Si el peso del líquido atraído por la gravedad supera la resistencia el líquido avanza. Cuando existe un equilibrio entre resistencia y fuerza gravitatoria se establece el régimen uniforme. Si en algún momento las fuerzas gravitatorias superan la resistencia, el flujo pasará a ser variado.

Características fundamentales del régimen uniforme:

- Todas las líneas de corriente son paralelas entre si y paralelas a la solera, a la superficie libre del agua y a la línea de energía.
- La distribución de presiones sobre la normal a la solera del canal resulta hidrostática.
- El ángulo  $\theta$  que forman la solera y el plano de comparación es tan pequeño que podemos asumir que  $\cos \theta \approx 1$ .

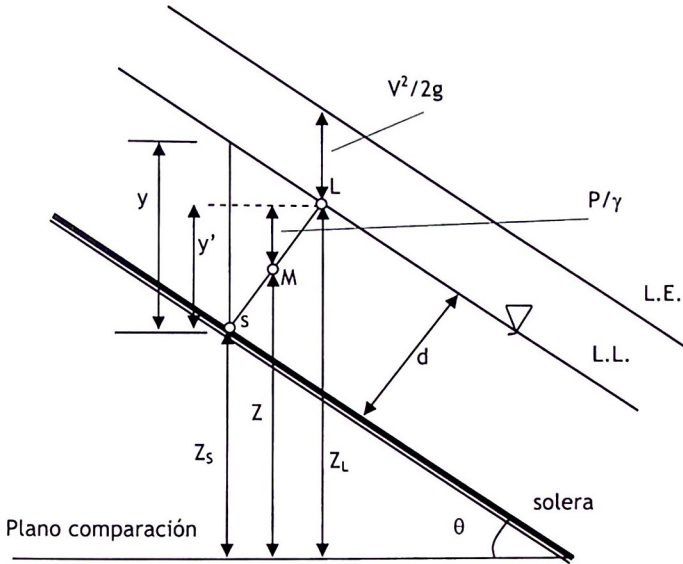


Figura 7-3. Energía en un punto y en una sección transversal.

En flujo en lámina libre se definen 3 pendientes fundamentales:

- **Pendiente de la solera del canal ( $l_0$ ):** Es la pendiente geométrica de la solera del canal y por tanto se obtendrá como  $l_0 = dz_{solera}/dx$
- **Pendiente de la lámina del agua ( $l_w$ ):** Como su nombre indica es la variación de la superficie libre del agua por unidad de longitud de la conducción. Por tanto  $l_w = dz_{lámina}/dx$
- **Pendiente motriz o pendiente hidráulica (I):** Es la variación de energía por unidad de peso del fluido a lo largo de la conducción. Se verá con detalle en epígrafes posteriores.

Observemos la figura 7-3. En esta situación, la energía disponible en un punto cualquiera  $M$  de una sección transversal, según la ecuación de Bernuilli será:

$$H = z_l + \frac{P_l}{\gamma} + \frac{V_l^2}{2g} \quad (7.1)$$

Donde:

- $H$ , energía total en un punto
- $Z_1$ , elevación del punto 1 con respecto al plano de referencia
- $V_1$ , velocidad del fluido en el punto 1
- $g$ , aceleración de la gravedad
- $P_1/\gamma$ , altura de presión en el punto 1

Sabemos que en la lamina de agua (punto L) la presión atmosférica, mientras que en la solera (punto S) la presión es igual a la columna de fluido que hay por encima.

$$z + \frac{P}{\gamma} = z_L = z_s + y' \quad (7.2)$$

como:

$$d = y \cdot \cos \theta \quad (7.3) \quad ; \quad y' = d \cdot \cos \theta \quad (7.4)$$

entonces:

$$y' = y \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta = y \cdot \cos^2 \theta \quad (7.5)$$

por lo que:

$$z + \frac{P}{\gamma} = z_L = z_s + y \cdot \cos^2 \theta \quad (7.6)$$

La energía en la sección valdrá:

$$H = z_s + y \cdot \cos^2 \theta + \frac{V^2}{2g} \quad (7.7)$$

Asumiendo que  $\cos \theta \approx 1$ , entonces  $y \cdot \cos^2 \theta = y$

$$H = z_s + y + \frac{V^2}{2g} \quad (7.8)$$

La potencia de la corriente en la sección vendrá dada por la expresión:

$$W = \gamma \cdot Q \cdot \left( z + y + \frac{V^2}{2g} \right) \quad (7.9)$$

## 6. Distribución de velocidades en una sección transversal

En el interior de un canal, la velocidad en toda la sección transversal no es homogénea, al igual que ocurría en conducciones cerradas. Se establece pues un campo de velocidades que depende de la geometría de la sección transversal, del caudal circulante y de la rugosidad de las paredes y solera. Las velocidades del fluido en contacto con paredes y solera suele ser nula o casi nula, aumentando a medida que nos separamos de éstas. La velocidad máxima suele darse en el eje vertical de simetría del canal y a una profundidad que oscila entre 0,05 y 0,25 veces el calado. La velocidad media se suele obtener promediando las velocidades obtenidas a 0,2 y 0,8 veces el calado.

En la siguiente figura podemos ver el perfil de velocidades típico y una representación de contornos de isovelocidad ó isótacas.

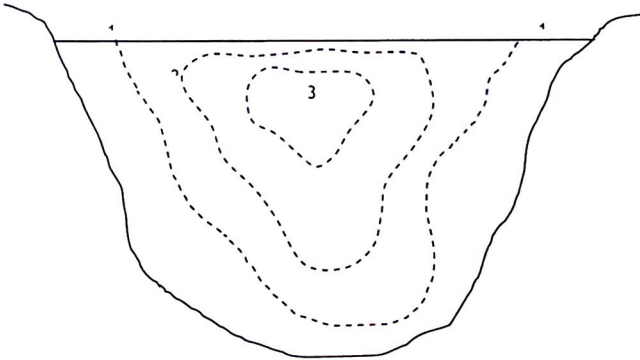


Figura 7-4. Campo de velocidades en la sección transversal.

## 7. Coeficiente de Coriolis

Una consecuencia de esta distribución irregular de velocidades en la ecuación de la energía es que la altura cinética medida en la práctica resulta mayor que el valor obtenido calculando

$$\frac{V^2}{2g}$$

en el cual  $V$  es la velocidad media. De esta forma, el verdadero valor del término cinético se obtiene multiplicándolo por un coeficiente que recibe el nombre de Coeficiente de Coriolis  $\alpha$  que oscila entre 1,03 y 1,36 para canales rectos prismáticos.

En canales de sección rectangular y alineación recta, el efecto de la distribución no uniforme de velocidades es discreto en comparación con otras incertidumbres que afectan a los cálculos, por lo que se suele tomar la unidad.

$$H = z_S + y \cdot \cos^2 \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \approx H = z_S + y + \frac{V^2}{2g} \quad (7.10)$$

### 8. Pendiente motriz y tensión tangencial

Sea un tramo de canal de longitud  $L$  con flujo uniforme. En este, la sección transversal mojada es  $S$ , siendo las presiones hidrostáticas las mismas al inicio y al final del tramo  $L$ . De esta forma el tramo supone un volumen de control en equilibrio estático.

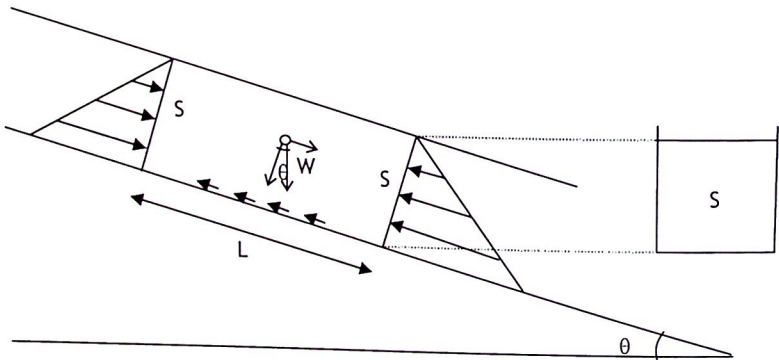


Figura 7-5. Equilibrio de fuerzas en un tramo de canal.

Como se indicó antes, la componente en el sentido de avance provocada por el peso del líquido debe ser contrarrestada con la tensión tangencial que aparece en las paredes en contacto con el mismo (perímetro mojado  $c$ ). Así pues actúan las siguientes fuerzas:

- Peso del líquido aplicado en  $G$  (centro de gravedad)

$$W = S \cdot L \cdot \gamma \quad (7.11)$$

- Tensión tangencial

$$F = \tau_0 \cdot C \cdot L \quad (7.12)$$

Si proyectamos las fuerzas sobre el eje x, es decir sobre la solera del canal:

$$S \cdot L \cdot \gamma \cdot \text{sen}\theta = \tau_0 \cdot C \cdot L \quad (7.13)$$

Por lo que:

$$\tau_0 = \gamma \cdot \frac{S}{C} \cdot \text{sen}\theta \quad (7.14)$$

La pendiente del canal es

$$\frac{\Delta z}{L} = \text{sen}\theta = I_0 \quad (7.15)$$

y  $\frac{S}{C}$  el Radio hidráulico ( $R_h$ ).

Entonces la tensión tangencial vendrá dada por la expresión

$$\tau_0 = \gamma \cdot R_h \cdot I_0 \quad (7.16)$$

Por otro lado llamaremos pendiente motriz a la pérdida de energía por unidad de longitud de canal. En régimen uniforme las tres líneas solera, lámina libre y línea de energía son paralelas. La pendiente motriz se obtendrá derivando la línea de energía respecto de la longitud L.

$$H = z_s + y \cdot \cos^2 \theta + \frac{V^2}{2g} \quad (7.17)$$

Como la energía decrece en el sentido del movimiento, usaremos el criterio de signo negativo para expresar la pérdida de energía.

$$\frac{dH}{dL} = - \frac{dz_s}{dL} - \frac{dy}{dL} - \frac{d}{dL} \left( \frac{v^2}{2g} \right) \quad (7.18)$$

Calado y velocidad permanecen constantes a lo largo del canal por definición por lo que su derivada es cero. La variación de energía es igual a la variación de cota o pendiente del canal, de ahí que reciba el nombre de pendiente motriz:

$$\frac{dH}{dL} = - \frac{dz_s}{dL} = \text{sen}\theta = I \quad (7.19)$$

donde:

- $I$ , pendiente de la línea de energía
- $I_0$ , pendiente de la solera del canal

Como el ángulo  $\theta$  es muy pequeño (menor a  $3^\circ$ ) podemos suponer que la pendiente del canal  $I_0 = \text{tg}\theta \approx \text{sen}\theta = I$

Por lo que  $I = I_0$  (7.20)

## 9. Ecuaciones de pérdidas en flujo uniforme

### 9.1. La Formula de Chézy

Es la base del resto de expresiones de pérdidas. Partamos de la fórmula universal de Darcy-Weisbach.

$$hr = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (7.21)$$

Donde:

- $f$ , factor de fricción
- $D$ , diámetro de la tubería

Para generalizar la expresión a conducciones en lámina libre se define el llamando **diámetro hidráulico** ( $D_h = 4R_h$ ). Así pues el diámetro hidráulico será:

$$D_h = 4 \cdot R_h = \frac{4 \cdot S}{c} \quad (7.22)$$

Dividiendo los dos miembros de la ecuación 7.21 por la longitud  $L$  obtendremos:

$$\frac{hr}{L} = I_0 = \frac{f}{4 \cdot R_h} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (7.23)$$

Despejamos la velocidad:

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \cdot \sqrt{R_h \cdot I_0} \quad (7.24)$$

Para un canal de geometría y rugosidad dadas

$$\sqrt{\frac{8g}{f}}$$

será prácticamente constante por lo que podemos sustituirlo por un coeficiente C. De esta forma la expresión 25 se conoce como fórmula de Chézy.

$$V = C\sqrt{R_h \cdot I_0} \quad (7.25)$$

Donde:

- V, velocidad media
- $R_h$ , radio hidráulico
- $I_0$ , pendiente geométrica de la solera del canal
- C, factor de fricción

### 9.2. La fórmula de Bazin

Bazin encontró una relación empírica para determinar C a partir de la expresión:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \quad (7.26)$$

γ está relacionado con el material de las paredes según la tabla:

<b>Naturaleza paredes</b>	<b>γ</b>
<i>Mortero cemento</i>	0,06
<i>Hormigón fino sin pulir, ladrillo o</i>	0,16
<i>Hormigón sin pulir, mampostería</i>	0,30
<i>Mampostería canto rodado</i>	0,46
<i>Tierra alisada</i>	0,85
<i>Tierra acabado ordinario</i>	1,30
<i>Tierra en malas condiciones</i>	1,75

### 9.3. La formula de Manning

Posiblemente sea la formula más empleada en canales. Al igual que la formula de Bazin, propone una ecuación para determinar C:

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n} \quad (7.27)$$

Donde n es la rugosidad de Manning

Sustituyendo (6.27) en (6.25) resulta finalmente:

$$V = \frac{1}{n} \cdot R_h^{2/3} \cdot I_o^{1/2} \quad (7.28)$$

Como en todo momento debe cumplirse la ecuación de continuidad  $Q = S \cdot V$

$$Q = \frac{1}{n} \cdot S \cdot R_h^{2/3} \cdot I_o^{1/2} \quad (7.29)$$

Su amplia difusión radica en que los valores de n Manning están bastante contrastados experimentalmente. Sus dimensiones en S.I. son  $L^{-1/3}T$  y los valores más característicos podemos encontrarlos en la siguiente tabla.

Type of Channel and Description	Minimum	Normal	Maximum
<b>A. Natural Streams</b>			
<b>1. Main Channels</b>			
a. Clean, straight, full, no rifts or deep pools	0.025	0.030	0.033
b. Same as above, but more stones and weeds	0.030	0.035	0.040
c. Clean, winding, some pools and shoals	0.033	0.040	0.045
d. Same as above, but some weeds and stones	0.035	0.045	0.050
e. Same as above, lower stages, more ineffective slopes and sections	0.040	0.048	0.055
f. Same as "d" but more stones	0.045	0.050	0.060
g. Sluggish reaches, weedy, deep pools	0.050	0.070	0.080
h. Very weedy reaches, deep pools, or floodways with heavy stands of timber and brush	0.070	0.100	0.150

## 2. Flood Plains

a. Pasture no brush			
1. Short grass	0.025	0.030	0.035
2. High grass	0.030	0.035	0.050
b. Cultivated areas			
1. No crop	0.020	0.030	0.040
2. Mature row crops	0.025	0.035	0.045
3. Mature field crops	0.030	0.040	0.050
c. Brush			
1. Scattered brush, heavy weeds	0.035	0.050	0.070
2. Light brush and trees, in winter	0.035	0.050	0.060
3. Light brush and trees, in summer	0.040	0.060	0.080
4. Medium to dense brush, in winter	0.045	0.070	0.110
5. Medium to dense brush, in summer	0.070	0.100	0.160
d. Trees			
1. Cleared land with tree stumps, no sprouts	0.030	0.040	0.050
2. Same as above, but heavy sprouts	0.050	0.060	0.080
3. Heavy stand of timber, few down trees, little undergrowth, flow below branches	0.080	0.100	0.120
4. Same as above, but with flow into branches	0.100	0.120	0.160
5. Dense willows, summer, straight	0.110	0.150	0.200

## 3. Mountain Streams, no vegetation in channel, banks usually steep, with trees and brush on banks submerged

a. Bottom: gravels, cobbles, and few boulders	0.030	0.040	0.050
b. Bottom: cobbles with large boulders	0.040	0.050	0.070

## B. Lined or Built-Up Channels

## 1. Concrete

a. Trowel finish	0.011	0.013	0.015
b. Float Finish	0.013	0.015	0.016
c. Finished, with gravel bottom	0.015	0.017	0.020
d. Unfinished	0.014	0.017	0.020
e. Gunite, good section	0.016	0.019	0.023
f. Gunite, wavy section	0.018	0.022	0.025
g. On good excavated rock	0.017	0.020	
h. On irregular excavated rock	0.022	0.027	

**2. Concrete bottom float finished with sides of:**

a. Dressed stone in mortar	0.015	0.017	0.020
b. Random stone in mortar	0.017	0.020	0.024
c. Cement rubble masonry, plastered	0.016	0.020	0.024
d. Cement rubble masonry	0.020	0.025	0.030
e. Dry rubble on riprap	0.020	0.030	0.035

**3. Gravel bottom with sides of:**

a. Formed concrete	0.017	0.020	0.025
b. Random stone in mortar	0.020	0.023	0.026
c. Dry rubble or riprap	0.023	0.033	0.036

**4. Brick**

a. Glazed	0.011	0.013	0.015
b. In cement mortar	0.012	0.015	0.018

**5. Metal**

a. Smooth steel surfaces	0.011	0.012	0.014
b. Corrugated metal	0.021	0.025	0.030

**6. Asphalt**

a. Smooth	0.013	0.013	
b. Rough	0.016	0.016	

**7. Vegetal lining**

0.030		0.500
-------	--	-------

**C. Excavated or Dredged Channels**

**1. Earth, straight and uniform**

a. Clean, recently completed	0.016	0.018	0.020
b. Clean, after weathering	0.018	0.022	0.025
c. Gravel, uniform section, clean	0.022	0.025	0.030
d. With short grass, few weeds	0.022	0.027	0.033

**2. Earth, winding and sluggish**

a. No vegetation	0.023	0.025	0.030
b. Grass, some weeds	0.025	0.030	0.033
c. Dense weeds or aquatic plants in deep channels	0.030	0.035	0.040

d.	Earth bottom and rubble side	0.028	0.030	0.035
e.	Stony bottom and weedy banks	0.025	0.035	0.040
f.	Cobble bottom and clean sides	0.030	0.040	0.050
<b>3. Dragline-excavated or dredged</b>				
a.	No vegetation	0.025	0.028	0.033
b.	Light brush on banks	0.035	0.050	0.060
<b>4. Rock cuts</b>				
a.	Smooth and uniform	0.025	0.035	0.040
b.	Jagged and irregular	0.035	0.040	0.050
<b>5. Channels not maintained, weeds and brush</b>				
a.	Clean bottom, brush on sides	0.040	0.050	0.080
b.	Same as above, highest stage of flow	0.045	0.070	0.110
c.	Dense weeds, high as flow depth	0.050	0.080	0.120
d.	Dense brush, high stage	0.080	0.100	0.140

(Modificado de HEC-RAS User's manual).

## 10. Relaciones geométricas en las secciones más comúnmente utilizadas

En este epígrafe analizamos las secciones transversales más comúnmente empleadas en la construcción de canales artificiales y la relación entre las variables hidráulicas que intervienen en cualquiera de las ecuaciones vistas en el epígrafe anterior (Chézy, Bazin o Manning), es decir perímetro mojado ( $c$ ), radio hidráulico ( $R_h$ ), sección mojada ( $S$ ) y la geometría de la sección.

### 10.1. Sección rectangular

En la siguiente figura podemos ver una sección de tipo rectangular.

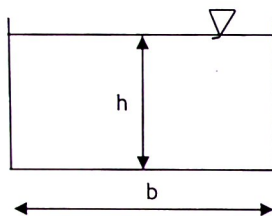


Figura 7-6. Geometría rectangular.

Variables hidráulicas

$$\text{Superficie mojada } S = b \cdot h \quad (7.30)$$

$$\text{Perímetro Mojado } c = 2h + b \quad (7.31)$$

$$\text{Radio hidráulico } R_h = \frac{S}{C} = \frac{b \cdot h}{b + 2h} \quad (7.32)$$

### 10.2. Sección trapecial

En la siguiente figura podemos ver una sección de tipo trapecial. Su rasgo fundamental es que las paredes presentan una determinada inclinación la cual puede venir indicada en función del ángulo que forma con la horizontal. Esto hace que el ancho de la lámina de agua ya no sea constante sino que dependa del calado

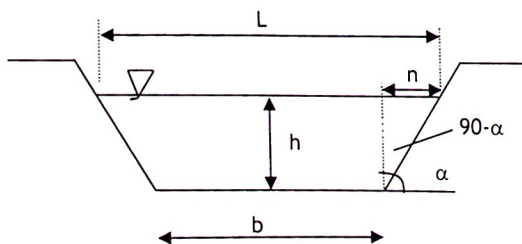


Figura 7-7. Geometría trapecial.

De la figura 7-6 podemos extraer las siguientes relaciones:

$$S = \frac{L+b}{2} \cdot h \quad (6.33) ; \quad L = b + 2n \quad (7.34)$$

Por otro lado podemos escribir:

$$n = \frac{h}{\cos(90 - \alpha)} \cdot \text{sen}(90 - \alpha) = \frac{h}{\text{sen}\alpha} \cdot \cos\alpha = h \cot\alpha \quad (7.35)$$

Sustituyendo el valor de n obtenido en (7.35) en (7.34), el ancho L valdrá:

$$L = b + 2h \cot\alpha \quad (7.36)$$

Sustituyendo (7.36) en (7.33):

$$S = \frac{b + 2h \cot\alpha + b}{2} \cdot h = h(b + h \cot\alpha) \quad (7.37)$$

Despejamos b en (7.37):

$$b = \frac{S}{h} - h \cot\alpha \quad (7.38)$$

Por otro lado definimos el perímetro mojado c a partir de la figura 7-6 como:

$$c = b + \frac{2h}{\text{sen}\alpha} \quad (7.39)$$

A la definición de perímetro mojado le sustituimos (7.38):

$$c = \frac{S}{h} - h \cot\alpha + \frac{2h}{\text{sen}\alpha} \quad (7.40)$$

$$c = \frac{S}{h} + \frac{h(2 - \cos\alpha)}{\text{sen}\alpha} \quad (7.41)$$

Por lo que finalmente el radio hidráulico quedará definido como:

$$R = \frac{h(b + h \cot\alpha)}{b + \frac{2h}{\text{sen}\alpha}} \quad (7.42)$$

### 10.3. Sección circular

En la siguiente figura podemos ver una sección de tipo circular. La sección circular queda perfectamente definida conociendo el radio del mismo y el ángulo  $\theta$  que forman los dos puntos A y B de contacto de la lámina libre con la pared del canal.

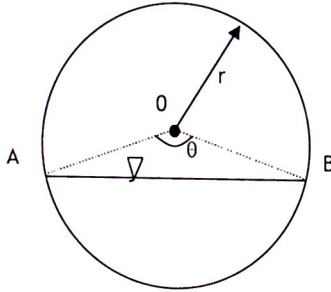


Figura 7-8. Geometría circular.

La sección ocupada por el fluido podemos obtenerla por diferencia entre el área del sector circular  $OAB$  y el triángulo  $OAB$ .

$$S = \underbrace{\pi \cdot r^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi}}_{\text{Sector } OAB} - \underbrace{\frac{1}{2} r^2 \text{sen} \theta}_{\text{Triángulo } OAB} = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \text{sen} \theta) \quad (7.43)$$

El perímetro mojado será la longitud de la cuerda  $AB$ , por lo que se obtiene fácilmente a partir de la expresión:

$$c = \theta \cdot r \quad (7.44)$$

Finalmente, el radio hidráulico vendrá dado por la relación entre (7.43) y (7.44):

$$R = \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{\text{sen} \theta}{\theta} \right) \quad (6.45)$$

## 11. Sección hidráulicamente óptima

Como se ha visto en el apartado anterior, existe una relación entre la geometría de la sección transversal y las variables hidráulicas. En cada sección, existirá una relación entre las distintas dimensiones de la sección transversal que hará que el caudal que es capaz de transportar sea máximo. Esto coincidirá con aquella

sección mojada que genera un perímetro mojado mínimo, ofreciendo por tanto *mínima resistencia*.

### 11.1. Sección rectangular

De (7.30) despejamos  $b$  y lo sustituimos en (7.31) para obtener  $c$ :

$$S = b \cdot h \Rightarrow b = \frac{S}{h} \quad (7.46)$$

$$c = 2h + \frac{S}{h} \quad (7.47)$$

Para obtener la función que hace mínimo el perímetro mojado debemos derivar (7.47) respecto de  $h$  e igualarlo a cero.

$$\frac{dc}{dh} = 2 - \frac{S}{h^2} = 0 \Rightarrow S = 2h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{S}{2}} \quad (7.48)$$

Sustituyendo el valor de  $S$  de (7.48) en (7.47):

$$c = 2h + \frac{2h^2}{h} = 4h \quad (7.49)$$

Que nos indica la relación que debe haber entre calado y perímetro mojado en la sección de mínima resistencia. Sustituyendo (7.49) en (7.31) obtendremos la relación entre calado y anchura:

$$4h = 2h + b \Rightarrow b = 2 \cdot h \quad (7.50)$$

Por lo que finalmente el radio hidráulico de la sección de mínima resistencia será, sustituyendo (7.50) en (7.32):

$$R_h = \frac{b \cdot h}{4h} = \frac{b}{4} = \frac{2h}{4} = \frac{h}{2}$$

### 11.2. Sección trapezoidal

Partimos de la expresión obtenida para el perímetro mojado en (7.41). Para obtener el perímetro mojado mínimo debemos derivar dicha expresión respecto de  $h$  e igualarla a cero:

$$c = \frac{S}{h} + h \frac{2 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow \frac{dc}{dh} = -\frac{S}{h^2} + \frac{2 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 0 \quad (7.51)$$

De donde podemos despejar la sección y el calado de mínima resistencia:

$$h = \sqrt{\frac{S \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2 - \cos \alpha}} \quad (7.52)$$

$$S = h^2 \frac{2 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (7.53)$$

Sustituimos (7.53) en (7.41) y obtendremos el perímetro mojado de mínima resistencia:

$$c = \frac{h^2 \frac{2 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}{h} + h \frac{2 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 2h \frac{2 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (7.54)$$

Finalmente para obtener el radio hidráulico de mínima resistencia, planteamos el cociente entre (7.53) y (7.54):

$$R_h = \frac{S}{c} = \frac{\frac{h^2 (2 - \cos \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha}}{2h \frac{2 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}} = \frac{h}{2} \quad (7.55)$$

Para determinar completamente el problema debemos obtener el ancho de la lámina libre  $L$ . Para ello partimos de (7.36) de donde despejo  $b$ .

$$b = L - 2h \cot \alpha \quad (7.56)$$

Sustituyendo (7.56) en (7.37):

$$S = h(L - 2h \cot \alpha + h \cot \alpha) = h(L - h \cot \alpha) \quad (7.57)$$

Igualando (7.53) y (7.57):

$$h^2 \frac{2 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = h(L - h \cot \alpha) \quad (7.58)$$

Despejamos  $L$ :

$$L = h \frac{2 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + h \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (7.59)$$

$$L = \frac{2h}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (7.60)$$

Expresión que resultará de suma utilidad a la hora de resolver problemas de diseño de canales.

### 11.3. Sección circular

Para la sección circular se pueden plantear dos problemas. La obtención del calado que proporciona la velocidad máxima o el calado que proporciona el caudal máximo.

#### Calado de velocidad máxima

Para una pendiente y rugosidad conocidas, la velocidad será máxima cuando lo sea también el radio hidráulico.

Partimos de la expresión del radio hidráulico en la sección circular (7.45) y la derivamos respecto de  $\theta$  y la igualamos a cero para que cumpla la condición de máximo:

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{r}{2} \cdot \frac{\text{sen}\theta - \cos\theta \cdot \theta}{\theta^2} = 0 \quad (7.61)$$

$$\text{sen}\theta - \theta \cdot \cos\theta = 0 \quad (7.62)$$

Ecuación que se cumple para los siguientes valores:

$$\theta = 257^{\circ}37' \quad \text{y} \quad h = 1,62r$$

$$\theta = 4,5 \text{ rad.}$$

#### Calado de caudal máximo

En el caso de un canal en el cual pendiente y rugosidad permanecen constantes, podemos despejar el caudal de la fórmula de Manning:

$$Q = K \cdot S \cdot R^{\frac{2}{3}} = K \cdot S \cdot \left( \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{c^{\frac{2}{3}}}} \right) = K \cdot \frac{S^{\frac{5}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \quad (7.63)$$

El caudal será proporcional a  $\frac{S^{\frac{5}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}$  ó lo que es lo mismo a  $\frac{S^5}{c^2}$ . Derivando esta

última expresión con respecto a  $\theta$  e igualando a 0 para obtener la condición de máximo:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{S^5}{c^2} \right) = \frac{5 \cdot S^4 \left[ \frac{1}{2} r^2 (1 - \cos\theta) \right] \cdot c^2 - S^5 \cdot 2c \cdot r}{c^4} = 0 \quad (7.64)$$

operando y simplificando la ecuación anterior:

$$\frac{5}{2}(1 - \cos \theta) \cdot c \cdot r = 2S \quad (7.65)$$

$$\frac{5}{2}(1 - \cos \theta) \cdot r \cdot \theta \cdot r = r^2(\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad (7.66)$$

$$\frac{5}{2}(1 - \cos \theta)\theta = \theta - \operatorname{sen} \theta \quad (7.67)$$

$$5(1 - \cos \theta)\theta = 2(\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad (7.68)$$

$$5\theta - 5\theta \cos \theta = 2\theta - 2\operatorname{sen} \theta \quad (7.69)$$

$$3\theta - 5\theta \cos \theta + 2\operatorname{sen} \theta = 0 \quad (7.70)$$

Ecuación que puede ser resuelta por tanteos y se verifica para:

$$\theta = 5,28 \text{ rad}$$

$$\theta = 302^\circ 20'$$

$$h = 1,88 \text{ r}$$

## 12. Curva de capacidad de un canal en régimen uniforme

En un canal en el cual está establecido el régimen uniforme, es posible empleando la fórmula de Manning, dejar el caudal en función únicamente del calado, siendo el resto de variables un parámetro conocido.

$$Q = \frac{I}{n} \cdot S \cdot R_h^{2/3} \cdot I_o^{1/2} \quad (7.71)$$

$$Q = \frac{I_o^{1/2}}{n} \cdot S \cdot R_h^{2/3} = \frac{I_o^{1/2}}{n} \cdot f(h) \quad (7.72)$$

Lógicamente la función  $f(h)$ , será distinta según las relaciones geométricas vistas en cada sección transversal. Para el caso de la sección circular su representación puede verse en la figura 7-8.

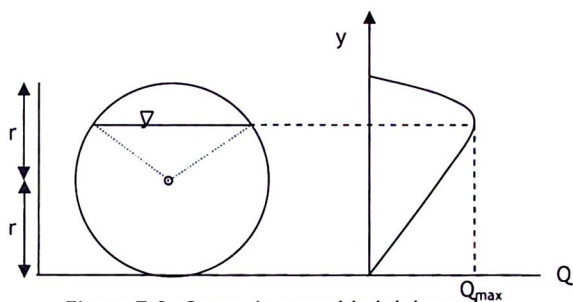


Figura 7-9. Curva de capacidad del canal.

### 13. Velocidades máximas y mínimas

En el interior de un canal no deben superarse unas determinadas velocidades máximas, por criterios de erosión, y mínimas por problemas de sedimentación. El valor mínimo dependerá del tamaño de los sólidos en suspensión, siendo un valor totalmente orientativo el de 0,5 m/s. Según el U.S. Bureau of Reclamation del gobierno de los Estados Unidos, unos posibles valores máximos son los de la siguiente tabla.

Material	Agua clara	Agua con sedimentos
Arena fina	0,45	0,75
Limo arenosos	0,50	0,75
Arcillo limoso	0,60	0,90
Arcilla aluvial	0,60	1,10
Limo firme	0,75	1,10
Arcilla compacta	1,15	1,50
Sedimentos aluviales	1,15	1,50
Pizarras	1,80	1,80
Grava fina	0,75	1,50
Limo con cantos rodados	1,10	1,50
Arcilla con cantos rodados	1,20	1,65
Grava gruesa	1,20	1,80
Cantos rodados y piedras sueltas	1,50	1,65
Hormigón	6,0	6,0
Fábrica de ladrillo rejuntado de mortero	2,5	2,5
Fábrica de ladrillo revestido de mortero	4,0	4,0
Acero	10	10

## 14. Diseño de canales

A la hora de diseñar una conducción en lámina libre, el número de variables que hay que decidir es muy superior al caso de tuberías. A continuación se expone una posible metodología para realizar el diseño.

- Fijar como datos de partida el caudal  $Q$ , la rugosidad  $n$  y la pendiente  $I_0$ .
- De la fórmula de Manning separamos los términos conocidos de las variables.

$$S \cdot R_h^{2/3} = \frac{Q \cdot n}{\sqrt{I_0}} \quad (7.73)$$

- Sustituir  $S$  y  $R_h$  por las expresiones hidráulicamente óptimas en función de  $h$ . El resultado será una ecuación en la que  $h$  es la única incógnita. Se resuelve por tanteos, y a partir de las relaciones geométricas vistas en epígrafes anteriores se deducen el resto de dimensiones del canal.

## 15. Flujo permanente no uniforme

El flujo uniforme se da exclusivamente en canales artificiales. En cauces naturales el calado es variable a lo largo del eje de las  $x$  pues es muy difícil que la pendiente, la rugosidad o la sección transversal se mantengan constantes.

La principal cualidad del flujo permanente no uniforme es que la superficie libre del agua ya no es paralela a la solera ni paralela a la línea de energía.

**Calado normal:** Para analizar la situación de movimiento no uniforme, es habitual tomar como referencia el movimiento uniforme. Un determinado caudal circula entre dos secciones transversales de un canal en el cual se mantienen constantes la sección transversal, la rugosidad y la pendiente de distinta forma según se aprecia en la figura siguiente. Solamente en la situación en la que la superficie libre es paralela a la solera el flujo será uniforme. En las otras dos situaciones el flujo es variado. Al calado  $y_0$  establecido en situación de movimiento permanente lo llamaremos calado normal.

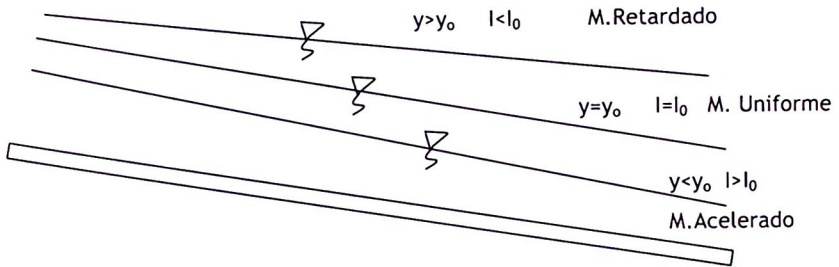


Figura 7-10. Calado normal.

En movimiento uniforme la velocidad media se mantiene constante puesto que la fuerza de gravedad que interviene sobre el peso y pone en marcha al fluido, es contrarrestada por el esfuerzo tangencial de rozamiento contra las paredes del canal.

En el movimiento variado la pérdida de energía varía de una sección a otra en función del calado observado. Un calado superior al calado normal  $y > y_0$  implica una velocidad menor a la velocidad en flujo uniforme por lo que las pérdidas de carga se reducen de forma proporcional. En esta situación la pendiente de la superficie libre es menor a la pendiente de la solera  $l < l_0$ .

Con calados inferiores al calado normal, la situación será la contraria, es decir existe una velocidad superior a la uniforme, mayores pérdidas, verificándose que  $l > l_0$ .

## 16. Energía Específica

Llamamos energía específica, a la energía por unidad de peso disponible en una sección transversal, medida desde la solera de la conducción, sin tener en cuenta la energía de posición respecto a un plano de referencia común. Así tenemos:

$$H_o = y + \frac{V^2}{2g} \quad (7.74)$$

Donde:

- $H_o$ , energía específica
- $y$ , calado o tirante de agua en el interior del canal
- $V$ , velocidad media del fluido

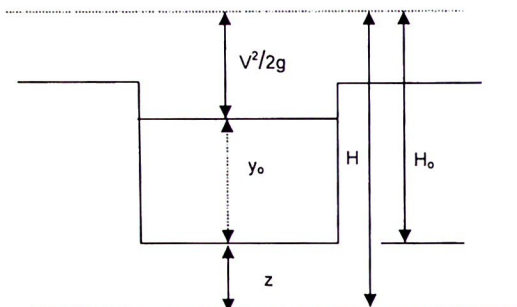


Figura 7-11. Energía específica.

Como la energía total viene dada por la expresión:

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} \quad (7.75)$$

Podemos expresarla también así:

$$H = z + H_o \quad (7.76)$$

En movimiento uniforme  $H_o$  permanece constante en todas las secciones pues lo hace el calado y la velocidad, sin embargo en flujo variado  $H_o$  puede aumentar o disminuir entre dos secciones debido a que la cantidad de trabajo de más o de menos que produce el peso del fluido atraído por la gravedad en la dirección de la pendiente del canal y que no es contrarrestado por el rozamiento, se suma o resta directamente a la energía específica.

Para ver como varía la energía específica en la dirección de la corriente derivemos la expresión anterior:

$$\frac{dH}{dX} = \frac{dz}{dX} + \frac{dH_o}{dX} \quad (7.77)$$

$$\frac{dH}{dX} = -I; \text{ pendiente motriz} \quad (7.78)$$

$$\frac{dz}{dX} = -I_o; \text{ pendiente de la solera} \quad (7.79)$$

La variación longitudinal de la energía específica viene dada por la diferencia entre la pendiente motriz y de la solera del canal:

$$\frac{dH_0}{dX} = I_0 - I \quad (7.80)$$

Como principales características del flujo no uniforme tendremos:

- Las pendientes de la solera y motriz no tienen porqué ser paralelas entre sí ni paralelas a la lámina del fluido.
- Cuando el calado es superior al calado normal  $y > y_0$ ,  $H_0$  crece en la dirección de la corriente, decreciendo cuando  $y < y_0$ , siendo esta la principal diferencia entre  $H$  y  $H_0$ , ya que  $H$  decrece siempre en la dirección del movimiento.
- Por otro lado, cuando  $y < y_0$  la pendiente de la línea de energía  $I$  es mayor que la pendiente de la solera  $I_0$  ( $I > I_0$ ) ocurriendo lo contrario cuando  $y > y_0$  ( $I < I_0$ ). La diferencia entre ambas pendientes  $I_0$  e  $I$  nos indica la variación de energía específica en la dirección del movimiento.

## 17. Curva de energía específica

Si representamos el calado  $y$ , frente a energía específica  $H_0$  para una conducción en lámina libre, obtendremos una parábola con dos ramas asintóticas como las de la figura siguiente.

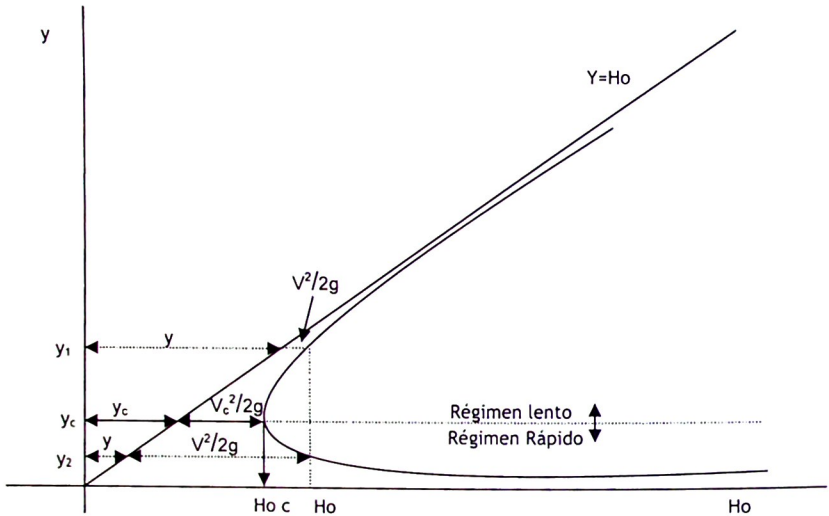


Figura 7-12. Curva de energía específica.

La recta  $y = H_o$ , es una recta con 45 grados de pendiente y muestra el límite al cual se produce que toda la energía está en forma de calado, y por tanto la velocidad es nula. En esa situación  $v=0$ , y no hay movimiento. Es por ello que la curva de energía específica tiene dos ramas asintóticas, una para  $y=x$  y otra para  $y=0$ .

La distancia horizontal hasta la recta es el calado  $y$ , mientras que la distancia hasta la curva es el término cinético  $v^2/2g$ , siendo la suma de ambas  $H_o$ .

Para cualquier nivel de energía  $H_o > H_{o_c}$ , el movimiento del agua se puede realizar con dos calados distintos,  $y_1 > y_c$ ;  $y_2 < y_c$ . Para un nivel de energía  $H_o < H_{o_c}$ , el movimiento no es posible.

La curva anterior realmente está definida para una sección rectangular de gran anchura, por facilidad de estudio, pero se cumple de forma generalizada. Para este caso concreto, el caudal circulante  $Q$ , se expresa como caudal por unidad de anchura  $q$ :

$$q = \frac{Q}{T} ; \quad v = \frac{Q}{T \cdot y} = \frac{q}{y} \quad (7.81)$$

Por tanto la función representada es:

$$H_0 = y + \frac{q^2}{2g \cdot y^2} \quad (7.82)$$

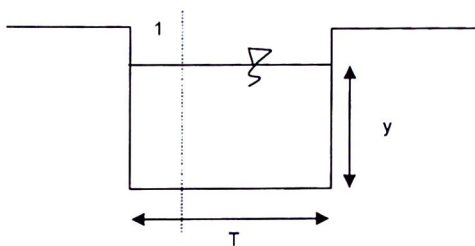


Figura 7-13. Sección trasversal representada en la curva de energía específica.

Para un cierto caudal  $q=\text{constante}$ , cualquier variación de  $l$ , de  $S$  o de  $n$ , producen cambios de calado  $y$ .

#### Propiedades del régimen crítico

- La energía específica es mínima para un caudal dado
- El caudal es máximo para una energía específica dada
- El número de Froude es 1 (ver epígrafe siguiente)
- La velocidad es igual a la celeridad de onda (ver epígrafes siguientes)

### 18. Calado crítico

Denominamos calado crítico, al calado que permite trasegar un cierto caudal con energía específica mínima. Para este calado, al ser  $H_0$  mínima, es un valor único para el cual existe solamente un calado, que llamaremos crítico, y una velocidad que también llamaremos crítica.

Ya sabemos que la energía específica vale:

$$H_o = y + \frac{V^2}{2g} \quad (7.83)$$

además, en cualquier caso, se debe cumplir la ecuación de continuidad:

$$Q = S \cdot V \Rightarrow V = \frac{Q}{S} \quad (7.84)$$

por tanto:

$$H_o = y + \frac{Q^2}{2g \cdot S^2} \quad (7.85)$$

Hemos dicho que el calado crítico se produce, cuando la energía específica es mínima. Para obtener dicha condición, derivamos  $H_o$  respecto a  $y$ , y lo igualamos a cero:

$$\frac{dH_o}{dy} = 0 \quad (7.86)$$

Como la condición que buscamos se debe cumplir para cualquier geometría de la conducción, y en ésta, la sección es función del calado:

$$S = S(y) \quad (7.87)$$

$$T = T(y) \quad (7.88)$$

$$\frac{dH_o}{dy} = 0 \quad (7.89)$$

$$1 + \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{-2S \cdot \frac{dS}{dy}}{S^4} = 0 \quad (7.90)$$

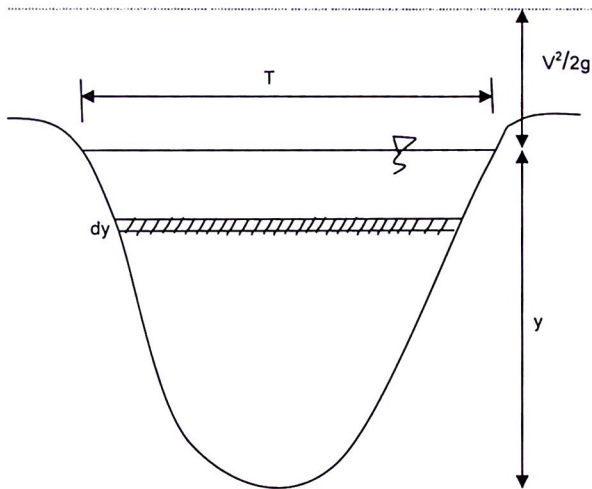


Figura 7-14. Sección transversal condición de calado crítico.

como:

$$T \cdot dy = dS \quad (7.91)$$

Entonces:

$$1 + \frac{Q^2}{g} \cdot \frac{T}{S^3} = 0 \quad (7.92)$$

Resultando finalmente:

$$\frac{T \cdot Q^2}{g \cdot S^3} = 1 \quad (7.93)$$

la condición que debe cumplir una sección transversal para poder afirmar que el calado y por tanto la velocidad son críticos, y  $H_0$  la mínima.

Dada una sección transversal cualquiera, debemos obtener las secciones mojadas ( $S$ ) y las anchuras de la lámina del agua ( $T$ ) que generan pequeños incrementos de calado ( $y$ ), para llegar por tanteos a aquella combinación que da como resultado la unidad.

En el caso particular de un canal rectangular,  $S$  se puede poner en función de  $y$ , llegando a una ecuación explícita que es la única que tiene solución directa:

$$y_{\text{crítico}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (7.94)$$

## 19. El número de Froude

Para poder caracterizar el régimen de flujo establecido en la conducción en lámina libre, al igual que ocurre en conducciones, se recurre a la relación entre la energía cinética y la potencial (fuerzas de inercia/fuerzas de gravedad), siendo éste el denominado número de Froude.

$$\frac{v^2/2g}{y} \Rightarrow F = \frac{V}{\sqrt{g \cdot y}} \quad (7.95)$$

Donde:

- $F$ , número de Froude
- $V$ , velocidad media en el canal
- $g$ , aceleración de la gravedad
- $\bar{y}$ , calado medio en la sección obtenido como  $S/T$ .

La raíz del producto  $\sqrt{g \cdot y}$  nos indica la velocidad de propagación de una onda en la superficie libre del fluido en el interior del canal. De esta forma, la relación entre la velocidad del fluido y la velocidad de propagación de la perturbación nos da un número que permite establecer la siguiente clasificación para el régimen:

<i>Flujo</i>	<i>Calado</i>	<i>Velocidad</i>	<i>F</i>
Fluvial, lento o subcrítico	$y > y_c$	$v < v_c$	$< 1$
Crítico	$y = y_c$	$v = v_c$	$= 1$
Torrencial, rápido o supercrítico	$y < y_c$	$v > v_c$	$> 1$

En el régimen torrencial la velocidad del fluido supera a la velocidad de propagación de la onda por lo que solo podrá transmitirse aguas abajo ya que es arrastrada. En el régimen fluvial la onda se propagará en ambas direcciones.

Una propiedad fundamental del flujo en cada uno de los regímenes es el aumento o la disminución del calado para una variación de la energía específica:

- Régimen lento:  $H_o$  aumenta con  $y$ :  $\Rightarrow \frac{dH_o}{dy} > 0$
- Régimen rápido:  $H_o$  disminuye con  $y$ :  $\Rightarrow \frac{dH_o}{dy} < 0$

Esto podemos observarlo en una elevación local del fondo de un canal. En régimen lento ( $y > y_c$ ) la lámina de agua se deprime mientras que en régimen rápido ( $y < y_c$ ), la lámina de agua se eleva.

En los canales artificiales, es habitual diseños donde  $F$  oscila alrededor de 0,5.

## 20. La curva de remanso

Es la máxima expresión del flujo permanente no uniforme gradualmente variado. Se produce siempre aguas arriba de un obstáculo importante en un cauce.

Recordemos que la energía total en una sección transversal viene dada por la expresión:

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} \quad (7.96)$$

La variación de energía entre dos secciones vendrá dada por su derivada:

$$\frac{dH}{dX} = \frac{dz}{dX} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2g} \frac{dV^2}{dX} \quad (7.97)$$

$$-I = -I_o + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2g} \frac{dV^2}{dX} \quad (7.98)$$

Si derivamos aparte el último término:

$$\frac{dV^2}{dX} = \frac{d}{dx} \frac{Q^2}{S^2} = Q^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{S^2} = Q^2 \frac{-1}{S^4} 2S \frac{dS}{dx} \quad (7.99)$$

si multiplicamos y dividimos por  $dy/dx$ , y sustituimos  $ds/dy = T$

$$\frac{dV^2}{dX} = \frac{-2Q^2}{S^3} \frac{ds}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{-2Q^2 T}{S^3} \frac{dy}{dx} \quad (7.100)$$

Sustituyendo en la ecuación inicial

$$-I = -I_o + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2g} \frac{-2Q^2 T}{S^3} \frac{dy}{dx} \quad (7.101)$$

$$I_o - I = \frac{dy}{dx} \left( 1 - \frac{Q^2 T}{gS^3} \right) \quad (7.102)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_o - I}{1 - \frac{Q^2 T}{gS^3}} \quad (7.103)$$

Si empleamos la expresión de Manning para estimar las pérdidas de carga:

$$Q = S \frac{I}{n} R^{2/3} I_o^{1/2} \quad (7.104)$$

$$I = \left( \frac{Qn}{S \cdot R_H^{2/3}} \right)^2 \quad (7.105)$$

Resulta finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_o - \left( \frac{Qn}{S \cdot R_H^{2/3}} \right)^2}{1 - \frac{Q^2 T}{gS^3}} \quad (7.106)$$

Ecuación diferencial de la curva de remanso, la cual permite obtener el perfil de la lámina libre del agua, siempre y cuando se disponga de un punto donde el tirante es conocido. La curva de remanso puede resolverse por el método por tramos, por el método de las iteraciones o por el método numérico de Runge-Kutta.

## 21. Resalto hidráulico

Es el caso más típico de flujo permanente no uniforme, rápidamente variado. Se produce en los pasos de régimen rápido a régimen lento, produciéndose una pérdida de energía. Se puede observar a la salida de un desagüe bajo una compuerta o en un cambio brusco de nivel de un canal.

Para un caso de geometría rectangular, con un caudal unitario  $q=Q/b$  ( $b$  ancho del canal), suponiendo como hasta ahora una distribución hidrostática de presiones, podemos observar:

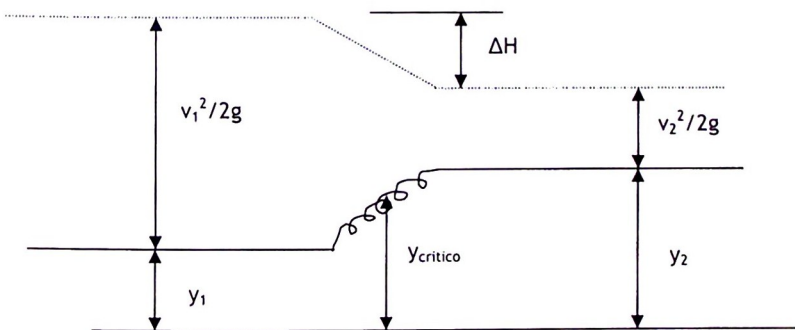


Figura 7-15. Resalto Hidráulico.

Según la ecuación de continuidad se deberá cumplir:

$$q_1 = q_2 \quad (7.107)$$

$$y_1 \cdot v_1 = y_2 \cdot v_2 \quad (7.108)$$

A su vez, según la ecuación de la energía, se deberá cumplir:

$$y_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \Delta H = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (7.109)$$

Finalmente, según la ecuación de cantidad de movimiento, deberá cumplirse:

$$\sum \bar{F} = \rho Q (v_2 - v_1) \quad (7.110)$$

## Bibliografía

Franzini, Joseph B.; Finnemore, E. "Mecánica de fluidos con aplicaciones en ingeniería". McGraw-Hill/Interamericana. 1999.

Gerhart, Philip M.; Hochstein, John I.; Gross, Richard J. "Fundamentos de mecánica de fluidos". Addison-Wesley Iberoamericana. 1995.

Munson, Bruce R.; Young, Donald F.; Okiishi, Theodore H. "Fundamentos de mecánica de fluidos". Limusa-Wiley. 2005.

Streeter, Victor L.; Wylie, Evan B.; Bedford, Keith W. "Mecánica de Fluidos". McGraw-Hill/Interamericana. 2003.

White, Frank M. "Mecánica de fluidos". McGraw-Hill/Interamericana. 2008.

ISBN 978-84-8363-949-8



9 788483 639498



0318P05

## Fundamentos de mecánica de fluidos

**Alberto García Prats**  
**Ricardo Cobacho Jordán**

El grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática se desarrolla en cuatro cursos. En su segundo año el alumno debe cursar la materia Termodinámica y Mecánica de Fluidos, la cual queda cubierta con una sola asignatura con el mismo nombre.

Esta publicación abarca la totalidad de los contenidos teóricos que se requieren para superar la parte de la asignatura relativa a Mecánica de Fluidos. Se trata de una asignatura básica en la que se tratan de forma introductoria los fundamentos de la misma distribuidos en los temas "propiedades de los fluidos", "estática de fluidos", "cinemática de fluidos", "dinámica integral", "flujo a presión", "bombas", "transitorios hidráulicos" o "flujo en lámina libre".



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

EDITORIAL