სახელმძღვანელო

ქართულ ენაში მომზადების პროგრამის სტუდენტებისათვის

ენისა და საგნის ინტეგრირებული სწავლების კურსი

მათემატიკა

გამომცემლობა „მერიდიანი“
თბილისი 2015

ენობრივი კვლევისა და ანალიზის ინსტიტუტი

პროექტი

„არაქართულენოვან სტუდენტთა აკადემიური მხარდაჭერა ქართულ ენაში მომზადების პროგრამის ფარგლებში“

OPEN SOCIETY GEORGIA FOUNDATION
ფონდი ღია საზოგადოება საქართველო

გამოცემულია ფონდი „ღია საზოგადოება - საქართველოს“ ფინანსური მხარდაჭერით. ავტორის/ავტორების მიერ საინფორმაციო მასალაში გამოთქმული მოსაზრება შესაძლოა არ გამოხატავდეს ფონდ ”ღია საზოგადოება-საქართველოს” პოზიციას. შესაბამისად, ფონდი არ არის პასუხისმგებელი მასალის შინაარსზე.

Published with the financial support of the Open Society Georgia Foundation. The views, opinions and statements expressed by the authors and those providing comments are theirs only and do not necessarily reflect the position of Open Society Georgia Foundation. Therefore, the Open Society Georgia Foundation is not responsible for the content of the information material

ავტორი: **გიორგი გაბუნია**

კონცეფციის ავტორები: **კახა გაბუნია, ჭაბუკი ქირია**

რედაქტორი: **ქეთევან გოჩიტაშვილი**

ISBN

თემა 1
ცნებების განსაზღვრება

მათემატიკის სიზუსტეს რამდენიმე მხარე აქვს. ერთი მხარეა ის, რომ მათემატიკაში რასაც ვიტყვით ან დავწერთ, ზუსტი და ცალსახა უნდა იყოს _ გამორიცხული უნდა იყოს ორაზროვნება ან ორი სხვადასხვა აზრით გაგება. მეორე მხარეა ის, რომ ყველაფერი მკაფიოდ უნდა იყოს ჩამოყალიბებული, რათა გამოირიცხოს ბუნდოვანება. განვიხილოთ, მაგალითად, გამოთქმა: „ვიწრო და მაღალი მართკუთხედი". საყოფაცხოვრებო მეტყველებაში ეს გამოთქმა მისაღებია. მაგრამ მათემატიკისათვის ეს გამოთქმა ბუნდოვანია, რადგანაც ზუსტად ვერ გავარკვევთ, რომელი მართკუთხედია „ვიწრო და მაღალი" და რომელი _ არა.

თუმცა, შეგვიძლია ცნება „ვიწრო და მაღალი მართკუთხედი" ზუსტად, მკაფიოდ, მათემატიკურად განვსაზღვროთ. ამ ცნების განსაზღვრება შეიძლებოდა, მაგალითად, ასე: მართკუთხედს ეწოდება ვიწრო და მაღალი, თუკი მისი ერთ ერთი გვერდის სიგრძე 4-ჯერ ან უფრო მეტჯერაა მეტი, ვიდრე მეორე გვერდის სიგრძე.

ეს განსაზღვრება მათემატიკისათვის სავსებით მისაღებია, რადგანაც საშუალებას გვაძლევს, მკაფიოდ გავარკვიოთ, მოცემული მართკუთხედი „ვიწრო და მაღალია" თუ - არა.

მაშასადამე, მათემატიკაში ყველა ცნება ბოლომდე დაზუსტებული უნდა იყოს. ამისათვის საჭიროა ცნების არსებით ნიშან-თვისებათა მკაფიოდ ჩამოყალიბება. ამას ცნების განსაზღვრება ჰქვია. ცნების განსაზღვრება ისეთი უნდა იყოს, რომ საშუალებას გვაძლევდეს მკაფიოდ გავარკვიოთ ესა თუ ის საგანი ეკუთვნის ამ ცნებას თუ _ არა.

მაგალითად, ტეხილი ხაზის განსაზღვრებაა: ტეხილი ეწოდება ისეთ ხაზს, რომელიც ორი ან მეტი რაოდენობის მონაკვეთისაგან შედგება.

ეს წინადადება საშუალებას გვაძლევს მკაფიოდ გავარკვიოთ, ესა თუ ის ნაკვეთი არის ტეხილი თუ _ არა.

ახლა განვიხილოთ, მაგალითად, წინადადება:

კვადრატი ეწოდება ისეთ ოთხკუთხედს, რომლის ოთხივე გვერდი ტოლია.

კვადრატს ნამდვილად ტოლი აქვს ოთხივე გვერდი. ესე იგი, ოთხივე გვერდის ტოლობა ნამდვილად არის კვადრატის ნიშან-თვისება. მაგრამ ჩამოყალიბებული წინადადება მაინც ვერ გამოდგება კვადრატის განსაზღვრებად, რადგან კვადრატის გარდა, სხვაგვარ ოთხკუთხედებსაც აქვს ოთხივე გვერდი ტოლი. მაშასადამე, ჩამოყალიბებული წინადადება არაა კვადრატის სრული განსაზღვრება. კვადრატის სრული განსაზღვრებაა:

კვადრატი ეწოდება ისეთ ოთხკუთხედს, რომლის ოთხივე გვერდი ტოლია და ყველა მეზობელი გვერდი ერთმანეთის მართობულია.

ამ განსაზღვრებაში კვადრატის ორი არსებითი ნიშან-თვისებაა ჩამოყალიბებული: ოთხივე გვერდის ტოლობა და ყველა მეზობელ გვერდთა ურთიერთმართობულობა.

უცხოურად (ლათინურად) განსაზღვრებას ეწოდება დეფინიცია.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

_______________ _______________________________
_______________ _______________________________
_______________ _______________________________
_______________ _______________________________
_______________ _______________________________
_______________ _______________________________
_______________ _______________________________

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

____
____
____
____
____
____
____
____

3. **რა დადებითი მხარეები აქვს მათემატიკის სიზუსტეს (მოიყვანეთ მაგალითები)?**
   ა. ____
   ____
   ბ. ____
   ____

4. **ჩამოთვლილთაგან „დედის“ რომელი განმარტებაა მათემატიკურად მისაღები? (შემოხაზეთ სწორი პასუხი):**
   ა. ერთ-ერთი მშობელი
   ბ. სისხლით ნათესავი ქალი
   გ. მშობელი ქალი
   დ. წინაპარი ქალი

5. **როგორი უნდა იყოს ცნების განსაზღვრება (შემოხაზეთ სწორი პასუხი):**
   ა) კონკრეტულად უნდა აღწერდეს საგანს
   ბ) არ უნდა აღწერდეს მკაფიოდ ცნების ნიშან-თვისებებს.
   გ) მკაფიოდ უნდა გამოხატავდეს ცნების ნიშან-თვისებებს.
   დ) არც ერთი პასუხი არ არის სწორი.

6. **განსაზღვრეთ ტეხილის ხაზი:**

   ___

   ___

   ___

7. **კვადრატის განსაზღვრება: „კვადრატი ეწოდება ისეთ ოთხკუთხედს, რომლის ოთხივე გვერდი ტოლი“ - არის თუ არა ზუსტი კვადრატის განსაზღვრება მისი ცნების გამოსახატავად? რატომ ფიქრობ ასე?**

   ___

   ___

   ___

   ___

8. **დაწერეთ კვადრატის ზუსტი განსაზღვრება (მკაფიო ცნების მისაღებად):**

   ___

   ___

   ___

   ___

9. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**
   ა. არსებით ჩამოყალიბება ცნების მკაფიოდ ნიშან-თვისებათა საჭიროა

   ___

   ბ. რათა იყოს ბუნდოვანება ჩამოყალიბებული, გამოირიცხოს ყველაფერი უნდა მკაფიოდ

   ___

   ___

   გ. კვადრატის ნამდვილად გვერდის ნიშან-თვისება ოთხივე არის ტოლობა

   ___

10. **დაასრულეთ წინადადებები შემდეგი სიტყვების გამოყენებით:**

ცალსახა, მართობული, დეფინიცია

ა. ლათინურად განსაზღვრებას ეწოდება ....

ბ. კვადრატის ოთხივე გვერდი უნდა იყოს ერთმანეთის მიმართ .....

გ. მათემატიკაში რასაც ვიტყვი, უნდა იყოს ზუსტი და ....

11. შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:

ა. ბუნდოვანი

....

ბ. ნიშან-თვისება

....

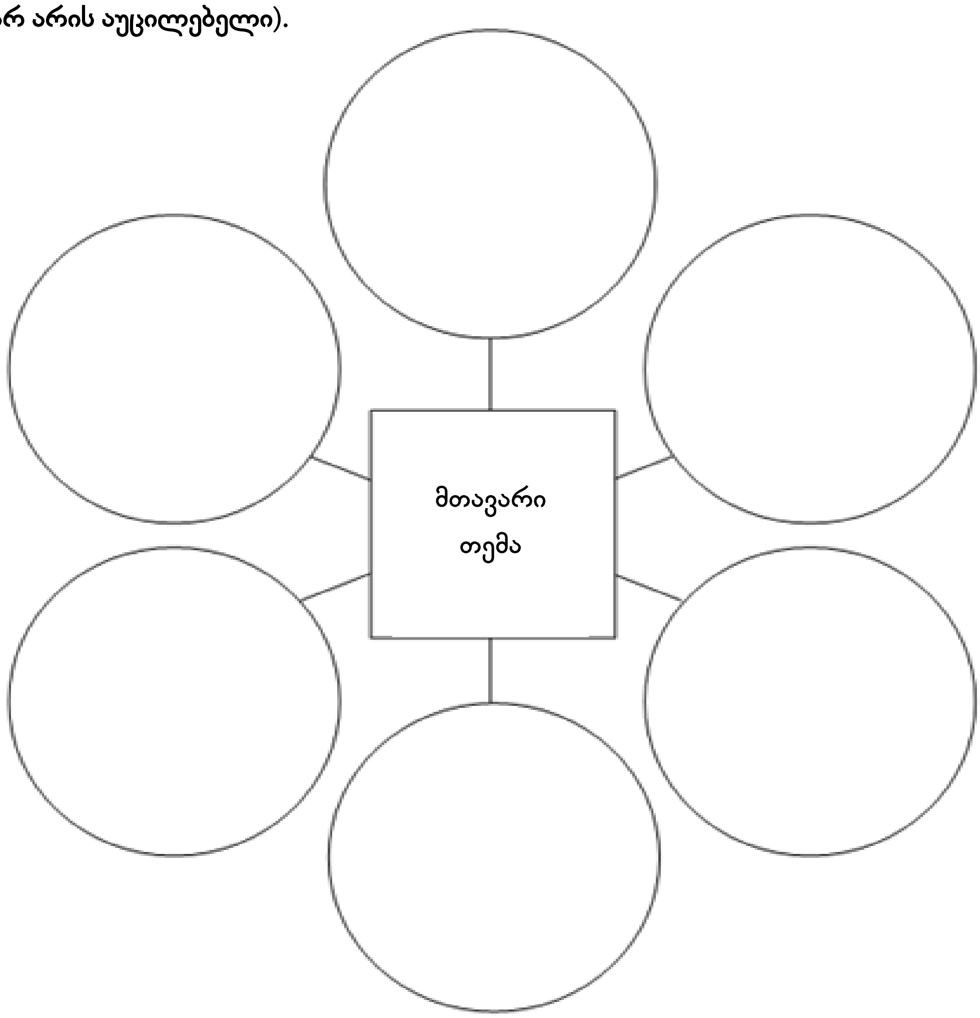
გ. განსაზღვრება

....

დ. მართკუთხედი

....

12. **დაწერეთ ოთხკუთხედში ტექსტის მთავარი აზრი და გარშემო რგოლებში ის მთავარი დეტალები მოკლედ, რაც, თქვენი აზრით, მნიშვნელოვანია (ყველა რგოლის შევსება არ არის აუცილებელი).**



13. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი და გადმოეცით თხრობით:

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

14. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 2
აქსიომები და თეორემები

იმ მათემატიკურ წინადადებას, რომელიც მტკიცდება, ეწოდება თეორემა. ეს სიტყვა ევკლიდეს შემდეგ შემოიღეს, თავად ევკლიდე წერდა უბრალოდ: „წინადადება".

თეორემაა, მაგალითად, წინადადება: „ერთი წრფის მართობული და იმავე სიბრტყეში მდებარე ორი სხვადასხვა წრფე ერთმანეთის პარალელურია".

ევკლიდე ცდილობდა ყველა „წინადადების" ანუ თეორემის მკაცრად და ზუსტად დამტკიცებას. მაგრამ საქმე ისაა, რომ ამ დამტკიცებისას რაიმე სხვა თეორემებს უნდა დავეყრდნოთ (მართლაც, თუკი არაფერს არ დავემყარეთ, ვერც ვერაფერს დავამტკიცებთ!). ეს სხვა თეორემებიც, თავის მხრივ, კიდევ სხვა თეორემებს ეყრდნობა, და ასე შემდეგ. მაგრამ ბოლოს მივადგებით ისეთ წინადადებებს, რომლებსაც სხვა ვეღარაფერზე ვეღარ დავაყრდნობთ, იმიტომ, რომ მათ გარდა მეტი აღარაფერი დაგვრჩება.

მაგალითად, მსჯელობებისა და დამტკიცებისას ჩვენ ხშირად ვიყენებთ იმას, რომ ერთი და იმავე რამის ტოლები ერთმანეთის ტოლიცაა. ესე იგი, თუკი რაიმე X რიცხვი ან ნაკვთი ტოლია რიცხვისა ან ნაკვთისა, და სხვა რიცხვი ან ნაკვთი ტოლია იმავე რიცხვისა ან ნაკვთის, მაშინ X და Y-ც ერთმანეთის ტოლია. მაგრამ რა ვუყოთ თვითონ ამ წინადადებას? რა ვიცით, რომ ეს ნამდვილად ასეა? მისი მართებულობა ცხადი კი გვეჩვენება, მაგრამ მაინც რომ მოვითხოვოთ დამტკიცება? როგორ მოვიქცეთ? ევკლიდემაც ბევრი იფიქრა ამაზე.

ასეთივეა, მაგალითად მეორე წინადადებაც: მთელი მის ნაწილზე მეტია. რა ვიცით, რომ ეს ნამდვილად ასეა?

ამგვარ წინადადებებს ვერ დავამტკიცებთ, ვინაიდან აღარ გვაქვს მათზე უფრო პირველადი სხვა წინადადებები. პირიქით, ისინი თვითონ გვჭირდება სხვა რამეების დასამტკიცებლად! ევკლიდემ „საწყისების" დასაწყისში ჩამოწერა ის წინადადებები, რომლებსაც ვერ დავამტკიცებთ. ამ წინადადებებს ევკლიდემ უწოდა „მოთხოვნები" და „საერთო ცნებები". ევკლიდეს შემდეგ კი მათ უწოდეს აქსიომები ანუ პოსტულატები. აქსიომა ანუ პოსტულატი – ესაა ისეთი მათემატიკური წინადადება, რომელსაც დაუმტკიცებლად ვიღებთ, რადგანაც მისი მართებულობა მეტისმეტად ცხადია.

მაგალითად, ევკლიდესეული აქსიომაა: „მოითხოვება, რომ ყოველი წერტილიდან ყოველ წერტილამდე სწორი ხაზი გაივლოს". ცხადია, ეს აქსიომა მხოლოდ გეომეტრიას ეხება, სხვა აქსიომებია: „ერთი და იმავეს ტოლები ერთმანეთის ტოლებიცაა", „მთელი მეტია, ვიდრე მისი ნაწილი". ცხადია, ეს ზოგადი აქსიომები არა მხოლოდ გეომეტრიას ეხება, არამედ, საზოგადოდ, მეცნიერებასა და აზროვნებას.

აქსიომა _ ძველი ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს: „დამაჯერებელი, სარწმუნო, უეჭველი წინადადება''. თეორემა _ ძველი ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს: „განხილული, დანახული, გააზრებული (წინადადება)''. ესაა ისეთი წინადადება, რომელიც არაა თავისთავად ცხადი. ამიტომ იგი უნდა დამტკიცდეს: ან აქსიომებზე დაყრდნობით, ან უკვე დამტკიცებულ თეორემებზე დაყრდნობით.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

________________________	____
________________________	____
________________________	____
________________________	____
________________________	____
________________________	____
________________________	____

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

____
____
____
____
____
____
____
____

3. **შემოხაზეთ სწორი პასუხი:**

   რას ეწოდება თეორემა?

   - მათემატიკურ წინადადებებს, რომელიც მტკიცდება.
   - მათემატიკურ წინადადებებს, რომელიც ვერ მტკიცდება.
   - სიტყვას, რომელიც მტკიცდება.
   - არც ერთი პასუხი არ არსი სწორი.

   აქსიომა მომდინარეობს:

   - ბერძნული სიტყვისგან.

- ლათინური სიტყვისგან.
- ქართული სიტყვისგან.
- ინგლისური სიტყვისგან.

ვინ ცდილობდა თეორემის ზუსტ დამტკიცებას?

- ქიმიკოსები.
- ფიზიკოსები.
- ევკლიდე.
- ნიუტონი.

4. უპასუხეთ კითხვებს:

ვინ და რა უწოდა საწყის წინადადებებს?

რას ნიშნავს საწყისი წინადადება?

რა არის აქსიომა?

ვისი და რა აქსიომაა ტექსტში მოყვანილი?

5. დაასრულეთ წინადადებები მოცემული სიტყვებით:

თეორემა, პოსტულატი, წინადადება

ა. ევკლიდეს შემდეგ კი მას უწოდეს აქსიომა ანუ ......

ბ. იმ მათემატიკურ წინადადებას, რომელიც მტკიცდება, ეწოდება....

გ. ევკლიდე წერდა უბრალოდ: ....

6. წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები

ა. რომ გაივლოს სწორი წერტილამდე მოითხოვება, ყოველი ყოველ ხაზი

წერტილიდან

ბ. „საწყისების''წინადადებები, ის რომლებსაც ევკლიდემ ვერ ჩამოწერა დასაწყისში დავამტკიცებთ

გ. თავისთავად წინადადება, რომელიც ისეთი რომელიც ესაა ცხადი არაა

7. **შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:**

ა. წრფე

____

____

ბ. პოსტულატი

____

____

გ. სარწმუნო

____

____

8. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.**

____

____

____

____

____

9. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 3
უარყოფითი რიცხვების ისტორია

მათემატიკაში უარყოფითი რიცხვები პირველად ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნისას გახდა საჭირო.

ყველაზე ადრე ადამიანებმა ნატურალური რიცხვები ისწავლეს: „ნატურალური“ _ ლათინური სიტყვაა და ნიშნავს „ბუნებრივს“. მართლაც, ნატურალური რიცხვები ყველაზე ბუნებრივი, პირველადი რიცხვებია. ბავშვმაც ხომ კარგა ხნის განმავლობაში მხოლოდ ნატურალური რიცხვები იცის. 6-7 წლის ბავშვს რომც ავუხსნათ, მაინც ვერ გავაგებინებთ, თუ რა არის წილადი ან უარყოფითი რიცხვი! მისთვის მხოლოდ ნატურალური რიცხვებია ბუნებრივი.

როგორც ვიცით, ნატურალურ რიცხვთა ერთმანეთზე გამრავლება და მათი შეკრება ყოველთვის შეიძლება. შედეგი კვლავ ნატურალური რიცხვია. მათი გაყოფისას კი უკვე სირთულეები ჩნდება: შეიძლება ან ნაშთი მოგვრჩეს, ან შედეგი არ იყოს ნატურალური. სანამ ადამიანებმა წილადები არ ისწავლეს, მათ არ შეეძლოთ, მაგალითად, 5-ის უნაშთოდ გაყოფა 2-ზე. მხოლოდ წილადების შემოღების შემდეგ გახდა შესაძლებელი ნებისმიერი ორი ნატურალური რიცხვის ერთმანეთზე უნაშთოდ გაყოფა.

ყველაზე რთულად გამოკლების საქმე იყო. მრავალი საუკუნის განმავლობაში ადამიანებმა უკვე იცოდნენ წილადები; ნატურალურ რიცხვებს ერთმანეთზე თავისუფლად ყოფდნენ უნაშთოდ, მაგრამ მათი გამოკლება კი არ შეეძლოთ _ როცა საკლები მაკლებზე ნაკლები იყო (მაგალითად, 2 _ 5). ხსნიდნენ სამი არითმეტიკული მოქმედების შესაბამის ნებისმიერ განტოლებას (რომლის ამოსახსნელად საჭიროა შეკრება, გამრავლება ან გაყოფა), მაგრამ ვერ ხსნიდნენ უმარტივეს განტოლებას გამოკლებაზე . . .

რიცხვთა გამოკლება, როდესაც მაკლები მეტია საკლებზე, დიდი ხნის განმავლობაში შეუძლებლად მიაჩნდათ. შუამდინარელებმა, ეგვიპტელებმა და საბერძნეთ-რომის მათემატიკოსებმა არ იცოდნენ უარყოფითი რიცხვები.

დიდი ხნის განმავლობაში უარყოფითი რიცხვების ნაცვლად ხმარობდნენ გამოთქმას „ვალი“. VII საუკუნეში ინდოეთში დადებითი რიცხვი გამოსახული იყო „ქონებით“, ხოლო უარყოფითი რიცხვი _ „ვალით“. ძველ ინდოეთსა და ჩინეთში იცოდნენ „ქონებისა“ და „ვალის“ შეკრებისა და გამოკლების წესები, მაგრამ მათი გამრავლება და გაყოფა კი არ შეეძლოთ.

ამრიგად, უარყოფითი რიცხვები თავდაპირველად ჩინეთ-ინდოეთში შემოიღეს.

ტექსტზე მუშაობა

1. ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. შემოხაზეთ სწორი პასუხი:

ა. ყველაზე ადრე ადამიანებმა ისწავლეს:

- კენტი რიცხვები.
- გამრავლება.
- მიმატება.
- ნატურალური რიცხვები.

ბ. სირთულეები ჩნდება ნატურალური რიცხვების:

- გაყოფისას.
- გამოკლებისას.
- გამრავლებისას.
- მიმატებისას.

4. რისთვის გამოიყენეს პირველად უარყოფითი რიცხვები, რატომ გაჩნდა მისი გამოყენების აუცილებლობა?

____
____
____
____
____
____

5. როგორ გახდა შესაძლებელი 5-ის უნაშთოდ გაყოფა 2-ზე?

____
____
____
____

6. რა შემთხვევაში მიაჩნდათ რიცხვების გამოკლება შეუძლებლად?

____
____
____
____

7. რას ხმარობდნენ უარყოფითი რიცხვების აღსანიშნავად?

____
____
____

8. რა არ იცოდნენ ძველ ინდოეთსა და ჩინეთში?

____
____
____

9. ვინ შემოიღო უარყოფითი რიცხვები?

____
____
____

10. **წაიკითხეთ და მონიშნეთ: სწორია ან არასწორია.**

10.1. ტექსტის მიხედვით, ბავშვებმა თავიდანვე კარგად იციან ნატურალური რიცხვების გამრავლება და გაყოფა ___________________

10.2. ნატურალური რიცხვების გაყოფისას გაჩნდა სირთულეები, ვინაიდან რჩებოდა ნაშთი ___________________

10.3. უარყოფითი რიცხვები იტალიელებმა გამოიგონეს ___________________

10.4. ნატურალური რიცხვების ერთმანეთზე გამრავლება და მიმატება ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ___________________

11. ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები:

ა. რიცხვთა გამოკლება, როდესაც …………მეტია …………. დიდი ხნის განმავლობაში შეუძლებლად მიაჩნდათ.

ბ. „ნატურალური'' _ ლათინური სიტყვაა და ნიშნავს "..……''.

გ. ინდოეთში დადებითი რიცხვი გამოსახული იყო "………….'', ხოლო უარყოფითი რიცხვი _ "……………..''.

12. შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:

უნაშთოდ

____

____

წილადი

____

____

მაკლები

____

____

13. წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები.

ნაცვლად განმავლობაში დიდი „ვალი" უარყოფითი ხნის ხმარობდნენ გამოთქმას რიცხვების

____

____

მათი რიცხვთა ერთმანეთზე ყოველთვის და შეკრება შეიძლება ნატურალურ გამრავლება

____

____

რიცხვებია ბუნებრივი, რიცხვები პირველადი ნატურალური ყველაზე

____

____

14. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.

15. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა ვიცოდი	რა ვიცი	რა მინდა ვიცოდე

თემა 4
საგნების განაწილება სივრცეში

ვთქვათ, რაიმე საგნები სივრცეშია განაწილებული. პირველ ყოვლისა, დავაზუსტოთ, რას ნიშნავს "საგანი" და "სივრცეში განაწილებული". საგანი ძალიან ზოგადი სიტყვაა. ეს შეიძლება იყოს: რაიმე ნივთი (ადამიანის მიერ გაკეთებული); ან ცოცხალი საგანი (ადამიანი, ცხოველი, მცენარე); ან არაცოცხალი ბუნების რაიმე საგანი (ქვა, გირჩა, ნიჟარა, წყარო, ღრუბელი, მტვრის ნაწილაკი, მოლეკულა და სხვა); ან ადამიანის მიერ დაწერილ-დახაზულ-დახატული რამ (ციფრი, ასო, სიტყვა, ნაკვთი, ნახატი, რაიმე ნიშანი და სხვა). როცა ვიტყვით "საგნები სივრცეშია განაწილებული", ვგულისხმობთ, რომ საგნები შეიძლება განაწილებული იყოს ან ერთ ხაზზე, ან ერთ სიბრტყეზე, ან რაიმე ზედაპირზე, ან მთელ სივრცეში. ამასთან, ხაზი შეიძლება იყოს ყველანაირი: სწორი, ტეხილი თუ მრუდი, სასრული და უსასრულო. ზედაპირიც იყოს სასრული ან უსასრულო, შეიძლება უსწორმასწორო ან გამრუდებულიც იყოს, მაგალითად: სფეროს მაგვარი, აგურედის ან ცილინდრის ზედაპირის მაგვარი, ჩაზნექილი სიბრტყის მაგვარი და სხვა. საგნები სივრცეში შეიძლება განაწილებული იყოს მეჩხერად, ან უფრო მჭიდროდ, ან კიდევ უფრო მჭიდროდ. როგორ გავზომოთ რიცხვით ეს სიმჭიდროვე? ამას შემდეგ გაკვეთილში ვისწავლით, მაგრამ ამისათვის წინასწარ უნდა შევვეძლოს სივრცის დანაწევრება საზომ ერთეულებად. როცა საგნები განაწილებულია ერთ ხაზზე (სწორ, ტეხილ ან მრუდე ხაზზე) – მაშინ ხაზს დავანაწევრებთ მანძილის რომელიმე ერთეულებად. როცა საგნები განაწილებულია სიბრტყეზე ან რაიმე არასწორ ზედაპირზე – მაშინ ზედაპირს დავანაწევრებთ ფართობის რომელიმე ერთეულებად. როცა საგნები განაწილებულია სივრცეში – მაშინ სივრცეს დავანაწევრებთ მოცულობის რომელიმე ერთეულებად. თვით ამ ერთეულთა შერჩევა კი საგნებზეა დამოკიდებული. შეირჩევა ის ერთეული, რომელიც უფრო ბუნებრივია და მოსახერხებელი. სიმოკლისათვის სიგრძის, ფართობის, მოცულობისა და ტევადობის ყველა ერთეულს ვუწოდოთ სივრცის ერთეული.

ტექსტზე მუშაობა

1. ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. რა შეიძლება იგულისხმებოდეს „საგანში“? მოიყვანეთ რამდენიმე განსხვავებული ტიპის საგნის მაგალითები.

4. რა იგულისხმება ფრაზაში „საგნები სივრცეშია განაწილებული“?

5. რას ვუწოდებთ სივრცის ერთეულს?

6. **შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვების გამოყენებით:**

ერთეული

სივრცე

მეჩხერი

მოცულობა

7. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

და "საგანი" დავაზუსტოთ, ნიშნავს "სივრცეში განაწილებული" რას

უნდა საზომ სივრცის შეგვეძლოს დანაწევრება ერთეულებად წინასწარ

8. **ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები ან ფრაზები:**

ა. სიმოკლისათვის სიგრძის, ფართობის, მოცულობისა და ტევადობის ყველა ერთეულს ვუწოდოთ ....

ბ. შეირჩევა ის ერთეული, რომელიც უფრო ბუნებრივია და ....

9. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.**

10. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა ვიცოდი	რა ვიცი	რა მინდა ვიცოდე

თემა 5

„და“, „ან” კავშირები მათემატიკურ ენაში

მათემატიკაში ორაზროვნება დაუშვებელია, ამიტომ “და” კავშირსაც მხოლოდ ერთი დაზუსტებული მნიშვნელობა აქვს. განვიხილოთ, მაგალითად, წინადადება: “K რიცხვი იყოფა 2-ზე, 5-ზე და 9-ზე”. ეს ნიშნავს იმას, რომ, K რიცხვი იყოფა სამივეზე: 2-ზეც, 5-ზეც და 9-ზეც.

ასევე, განვიხილოთ წინადადება: “ამ არითმეტიკული გამოსახულების გასამარტივებლად საჭიროა ფრჩხილების გახსნა და წილადების შეკრება”. ეს ნიშნავს, რომ საჭიროა ორივე: ფრჩხილების გახსნაც და წილადების შეკრებაც. თუკი სულერთი არაა ამ მოქმედებათა თანამიმდევრობა, მაშინ უნდა დაზუსტდეს: “საჭიროა ჯერ ფრჩხილების გახსნა და შემდეგ წილადების შეკრება” (ან პირიქით). საზოგადოდ, როცა მათემატიკაში ითქმის “X, Y და Z”, ეს იგივეა, რაც “X და Y და Z” და იგულისხმება X-ც, Y-ც და Z-ც - სამივე ერთდროულად.

მათემატიკურ ენაში “ან” კავშირს ერთადერთი მნიშვნელობა აქვს: არაგამომრიცხავი დაკავშირებისა. ზოგადად, როცა მათემატიკაში ითქმის X ან Y ან Z, იგულისხმება სამივე ცალ-ცალკეც და ერთადაც. ესე იგი: შეიძლება იყოს მხოლოდ X, შეიძლება იყოს მხოლოდ Y, შეიძლება იყოს მხოლოდ Z; შეიძლება იყოს X და თან Y; შეიძლება იყოს Y და თან Z; შეიძლება იყოს X და თან Z; და შეიძლება იყოს X და თან Y და თან Z - სამივე ერთადაც.

ყველა ეს შესაძლებლობა დაშვებულია, არც ერთი არაა გამორიცხული. ამიტომ ვამბობთ, რომ მათემატიკაში “ან” არაგამომრიცხავი კავშირია.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

3. **შეადგინეთ პირობა `და~ კავშირის გამოყენებით.**

4. **რას ნიშნავს „არაგამომრიცხავი"? განმარტეთ თქვენი სიტყვებით.**

5. **როგორია „ან" კავშირი მათემატიკაში?**

6. **დაასრულეთ ფრაზები:**

   „როცა მათემატიკაში ითქმის X ან Y ან Z, იგულისხმება სამივე ცალ-ცალკეც და ერთადაც. ესე იგი...
   მათემატიკაში ორაზროვნება დაუშვებელია, ამიტომ "და" კავშირსაც ....

7. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**
   არითმეტიკული წილადების შეკრება გამოსახულების საჭიროა ამ ფრჩხილების და გახსნა გასამარტივებლად

ყველა გამორიცხული შესაძლებლობა ეს არცერთი დაშვებულია, არაა

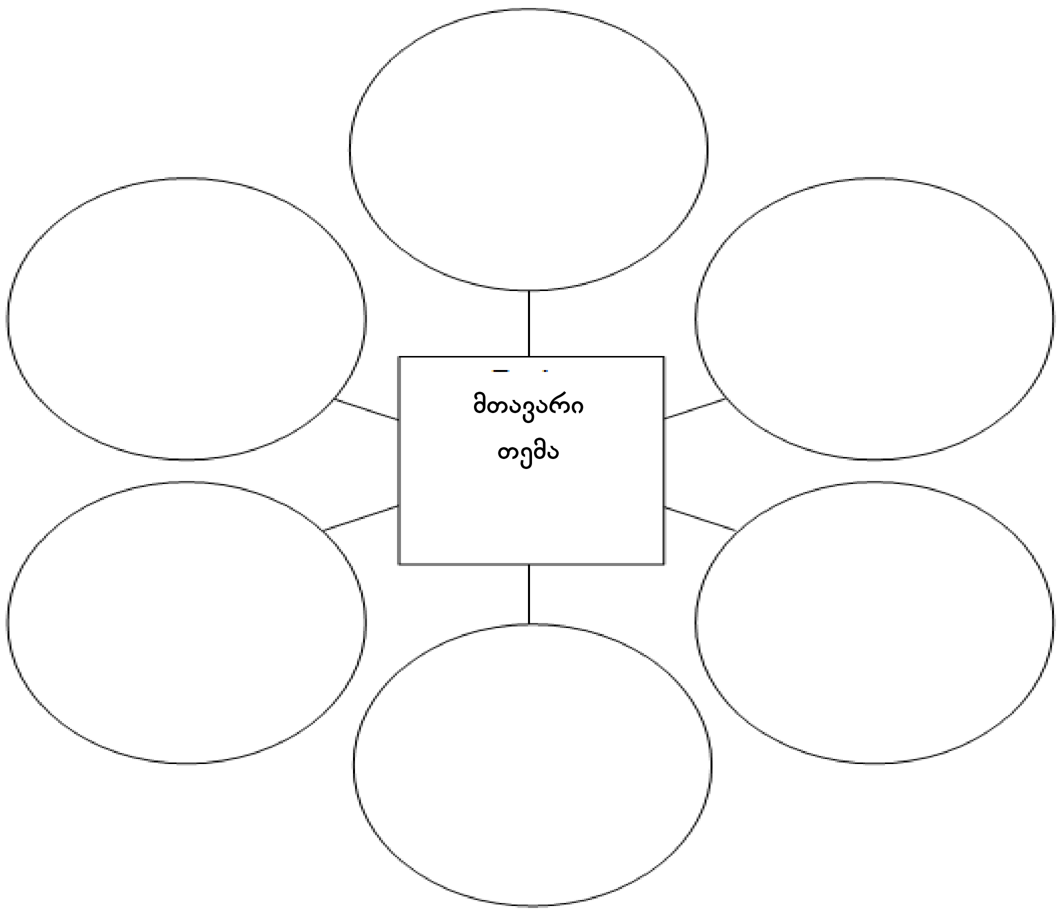
8. **შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვების გამოყენებით:**

ორაზროვნება

არაგამომრიცხავი

თანმიმდევრობა

9. **დაწერეთ ოთხკუთხედში ტექსტის მთავარი აზრი და გარშემო რგოლებში ის მთავარი დეტალები მოკლედ, რაც, თქვენი აზრით, მნიშვნელოვანია (ყველა რგოლის შევსება არ არის აუცილებელი).**



10. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.

11. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა ვიცოდი	რა ვიცი	რა მინდა ვიცოდე

თემა 6
ზუსტ გამოთქმათა გამარტივება სიმოკლისათვის

მათემატიკაში ორაზროვნება დაუშვებელია. მაგრამ, იშვიათად, მათემატიკაში ზოგიერთ სიტყვას ორი სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვს. წესით ეს არ შეიძლება, მაგრამ სიმოკლისა და გამარტივებისათვის მაინც მიღებულია. განვიხილოთ მაგალითები.

1. ცნებას „ელიფსი“ აქვს ორი მნიშვნელობა. ერთი გულისხმობს მთლიან ნაკვთს, მეორე კი _ მის საზღვარს, მხოლოდ ხაზს.

2. ხშირად ამბობენ ხოლმე: „ჯამი“ და სინამდვილეში გულისხმობენ არა ჯამს, არამედ მის მნიშვნელობას, ანუ რიცხვს. წესით ჯამია გამოსახულება, მაგალითად, 3+5,4. მაგრამ ხშირად ამბობენ „3-ისა და 5,4-ის ჯამი“ და გულისხმობენ ამ ჯამის მნიშვნელობას, ანუ რიცხვს - 8,4.

მაგალითად, წინადადება „3-ისა და 5,4-ს ჯამი ტოლია 8,4-ისა“. წესით ასე უნდა ჩამოგვეყალიბებინა: „3-ისა და 5,4-ის ჯამის მნიშვნელობა ტოლია 8,4-ისა“.

ასევე ხდება ხოლმე სხვაობის, ნამრავლის, გაყოფის, ხარისხისა და სხვა მოქმედებათა შემთხვევაშიც. ცხადია, ეს სიმოკლისათვის კეთდება - ყოველთვის რომ აღარ თქვან ხოლმე დამატებითი სიტყვა „მნიშვნელობა“.

3. ასევეა წილადიც. წილადი - ესაა რაციონალური რიცხვის ჩანაწერი, რიცხვითი გამოსახულება. მაგალითად, 2/4 და 1/2 სხვადასხვა წილადებია, თუმცა მათი რიცხვითი მნიშვნელობები ტოლია. ანუ 2/4 და 1/2 ერთი და იმავე რაციონალური რიცხვის სხვადასხვა ჩანაწერები. ამიტომ, წესით, უაზრობაა იმის თქმა, რომ „ერთი წილადი მეტია, ვიდრე მეორე“. წესით ასე უნდა გვეთქვა: „ერთი წილადის შესაბამისი რიცხვი მეტია, ვიდრე მეორისა“, ანდა: „ერთი წილადის რიცხვითი მნიშვნელობა მეტია, ვიდრე მეორისა“.

4. ციფრი - ეს არის რიცხვის აღნიშვნა, ჩანაწერი. განვიხილოთ, მაგალითად 4 და 4. როგორც ციფრები, პირველი 4-იანი უფრო დიდია, ვიდრე მეორე. მაგრამ მათი შესაბამისი რიცხვები, ცხადია, ტოლია. ამიტომ არ შეიძლება ციფრების შეკრება-გამოკლება და სხვა, რადგანაც უაზრობაა ჩანაწერთა შეკრება-გამოკლება. მაგრამ სიმოკლისათვის ჩვენ ვამბობთ: „რიცხვის ციფრთა ჯამი“. მაგალითად, „567-ის ციფრთა ჯამია 18“ წესით ასე უნდა ჩამოგვეყალიბებინა: „567-ის ციფრულ ჩანაწერში ციფრების შესაბამის რიცხვთა ჯამის მნიშვნელობაა 18“. აი, რა გრძელი და რთული წინადადება მივიღეთ! თუმცა, მათემატიკაში ამგვარი შემთხვევები იშვიათია. როგორც წესი, უნდა ვეცადოთ, რომ ყველაფერი ზუსტად და სრულად ჩამოვაყალიბოთ.

ტექსტზე მუშაობა

1. ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. თქვენი სიტყვებით განმარტეთ, რა არის ელიფსი

4. რა არის ციფრი? განმარტეთ.

5. **რა არის დაუშვებელი მათემატიკაში?**

6. **რას ნიშნავს წილადი?**

7. **დაასრულეთ წინადადებები შემდეგი სიტყვების გამოყენებით:**

რიცხვს, ხაზს, მეორის

ა. ხშირად ამბობენ ხოლმე: „ჯამი“ და სინამდვილეში გულისხმობენ არა „ჯამს“, არამედ მის მნიშვნელობას, ანუ ....

ბ. ერთი გულისხმობს მთლიან ნაკვთს, მეორე კი - მის საზღვარს, მხოლოდ ....

გ. „ერთი წილადის რიცხვითი მნიშვნელობა მეტია, ვიდრე ....

8. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

ა. რიცხვები, მათი ტოლია ცხადია, შესაბამისი

ბ. როგორც სრულად და ჩამოვაყალიბოთ წესი, ყველაფერი ზუსტად უნდა ვეცადოთ, რომ

გ. „მნიშვნელობა“ დამატებითი სიმოკლისათვის თქვან ეს სიტყვა ყოველთვის კეთდება - რომ ხოლმე აღარ

9. **შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:**

ელიფსი

ჯამი

წილადი

ციფრი

10. **ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები:**

ა. წილადი - ესაა .... რიცხვის ჩანაწერი, რიცხვითი გამოსახულება.

ბ. მათემატიკაში ზოგიერთ სიტყვას ორი .... მნიშვნელობა აქვს.

გ. „567-ის ციფრულ ჩანაწერში ციფრების .... რიცხვთა ჯამის მნიშვნელობაა 18“.

11. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.**

____

____

____

____

____

12. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 7
ზოგიერთი წილადის ჩაწერა ათწილადის სახით

ყველა ის წილადი, რომელთა მნიშვნელი 10-ის ხარისხია, ჩაიწერება ათწილადის სახით. თუკი წილადის მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლა შეიცავს მხოლოდ 2-ებსა და 5-ებს ან ორივეს ერთად, მაშინ ასეთი წილადი ჩაიწერება ათწილადის სახით. ცხადია, რომ იმავე ათწილადის სახით ჩაიწერება ამ წილადის ტოლი ყველა წილადიც. მაგალითად, 6/15 ჩაიწერება ათწილადის სახით, რადგან შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ მის ტოლ წილადს 2/5=6/15, ხოლო 2/5 კი ჩაიწერება ათწილადის სახით: 2/5=4/10=0,4 _ ესე იგი, 6/15=0,4. ისეთი უკვეცი წილადები, რომელთა მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლაში მხოლოდ 2-ები და 5-ებია, შეგვიძლია ათწილადის სახით ჩავწეროთ. ამისათვის მრიცხველი უნდა გავყოთ მნიშვნელზე გაყოფის წესით. ათწილადს, რომლის ათწილადურ ნაწილში ციფრების უსასრულო რაოდენობაა, უსასრულო ათწილადი ეწოდება. მაშასადამე, წილადი რიცხვის 2/3-ის შესაბამისი ათწილადი _ უსასრულო ათწილადია. გავიხსენოთ, რომ ათწილადი _ ესაა ჩანაწერი, და არა თვით რიცხვი. ამიტომ უსასრულოა სწორედ ათწილადი, ანუ ჩანაწერი! ხოლო შესაბამისი რიცხვი (მაგალითად, ორი მესამედი), ცხადია, სასრული რიცხვია! უსასრულო ათწილადს, რომლის წილადურ ნაწილში უსასრულოდ მეორდება ერთი ან რამდენიმე ციფრი ერთი და იმავე თანამიმდევრობით, უსასრულო პერიოდული ათწილადი ეწოდება. ხოლო ერთ ან რამდენიმე ციფრს, რომელიც უსასრულოდ მეორდება უცვლელი თანამიმდევრობით, ეწოდება უსასრულო პერიოდული ათწილადის პერი- ოდი. ადრე ნასწავლი ათწილადები არ იყო უსასრულო. მათ ეწოდებათ სასრულო ათწილადები. მაგრამ სასრული ათწილადიც შეიძლება ჩაიწეროს უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით. ამგვარი მსჯელობა მართებული იქნება ყველა სასრული ათწილადისათვის. ესე იგი, ყოველი სასრული ათწილადი შეიძლება ჩაიწეროს უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით; კერძოდ კი, ისეთი ათწილადის სახით, რომლის პერიოდია 0. პერიოდი _ ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს „წრიული, წრეზე ირგვლივ მავალი“. მართლაც, პერიოდის რიცხვები ისე მეორდება, თითქოს წრეხაზზეა ჩამოწერილი: 505265052650...

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. რას ეწოდება უსასრულო ათწილადი?

4. რას ეწოდება უსასრულო ათწილადის პერიოდი?

5. რას ნიშნავს სიტყვა „პერიოდი“?

6. შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვების გამოყენებით:

პერიოდი

ათწილადი

უსასრულო

უკვეცი

7. ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები:

ყველა ის წილადი, რომელთა მნიშვნელი .... ხარისხია, ჩაიწერება ათწილადის სახით.

უსასრულო ათწილადს, რომლის წილადურ ნაწილში უსასრულოდ მეორდება ერთი ან რამდენიმე ციფრი ერთი და იმავე თანამიმდევრობით, ... ეწოდება.

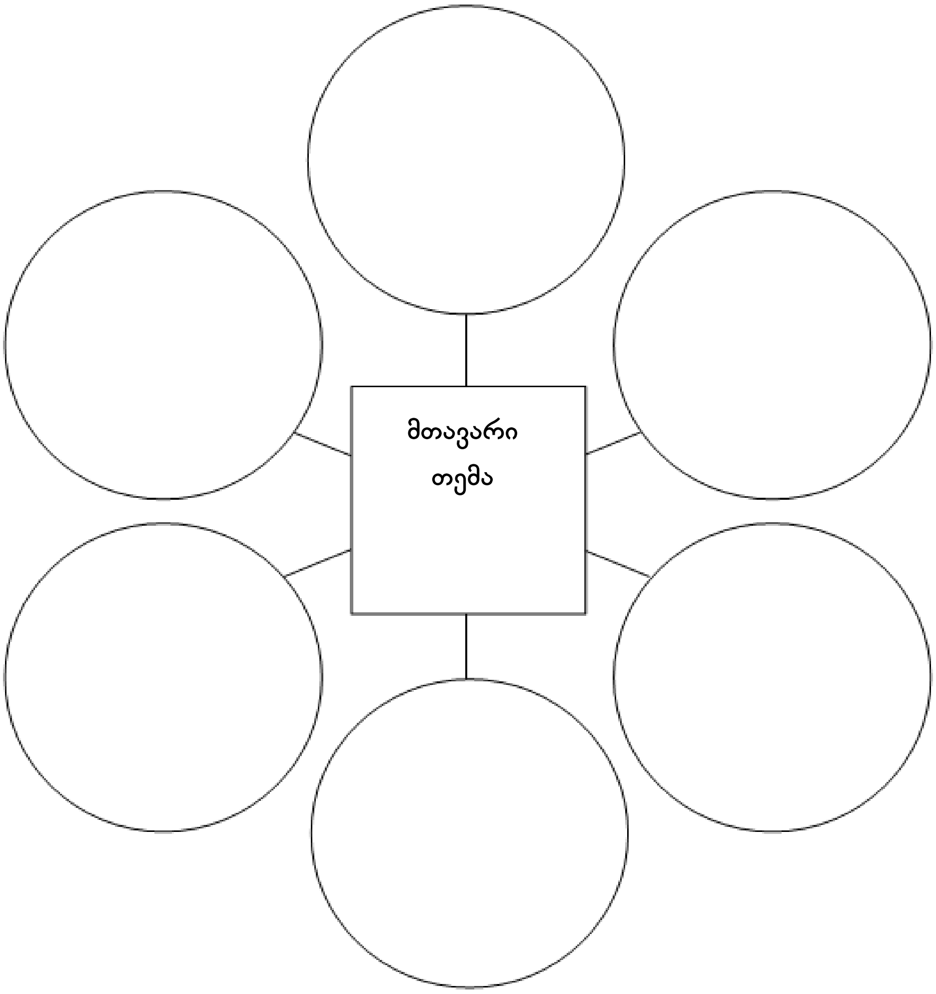
ყოველი .... ათწილადი შეიძლება ჩაიწეროს უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით.

8. წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები

ესაა არა გავიხსენოთ, ათწილადი – და თვით ჩანაწერი, რიცხვი რომ

რიცხვები თითქოს ჩამოწერილი მეორდება, წრეხაზზეა პერიოდის ისე

9. დაწერეთ ოთხკუთხედში ტექსტის მთავარი აზრი და გარშემო რგოლებში ის მთავარი დეტალები მოკლედ, რაც, თქვენი აზრით, მნიშვნელოვანია (ყველა რგოლის შევსება არ არის აუცილებელი).



10. დაწერეთ ტექსტის შინაარსი რამდენიმე წინადადებით:

11. **გადმოეცით ტექსტი თხრობით.**

12. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 8
ერთწევრი და მრავალწევრი

ასოითი გამოსახულებათაგან ყველაზე მარტივებია: ცალკე აღებული რიცხვი, ცალკე აღებული ასო, ან რიცხვებისა და ასოების ნამრავლი. მაგალითად: 7/9; b; abba; -0,2abc; m(5)n. რაკი ახარისხება გამრავლების კერძო შემთხვევაა, ამიტომ ამდაგვარია ისეთი ასოთი გამოსახულებანიც, რომლებიც გამრავლების გარდა შეიცავს ახარისხებასაც. მაგალითად, 2a2; 3b2(-4c2) და სხვა. როგორც ვიცით, თანამამრავლთა გადანაცვლებით ან მათი დაჯგუფებით ნამრავლის მნიშვნელობა არ იცვლება. ამიტომ რიცხვებისა და ასოების ამგვარ ნამრავლებში შეიძლება გადავამრავლოთ რიცხვითი მამრავლები და შედეგი დავსვათ წინ, ხოლო ერთი და იმავე ასოების ნამრავლი შევცვალოთ მათი შესაბამისი ხარისხებით. მაგალითად: abba=ab2; m(-5)n=-5mn; 3 (-4c2)=-12b2c2; ამგვარ გამოსახულებებს ეწოდება ერთწევრი. ერთწევრებია ცალკეული რიცხვებისა თუ ასოების ჩანაწერები, აგრეთვე მათი ნამრავლის ჩანაწერები, რომლებიც შედგება წინ დასმული რიცხვითი მამრავლისა და ერთი ან რამდენიმე ასოსაგან, რომელთაგან თითოეული აღებულია რაიმე ხარისხში. რამდენიმე ერთწევრის ჯამის შემოკლებულ ჩანაწერს მრავალწევრი ჰქვია. იმ ერთწევრებიდან თითოეულს, რომელთა ჯამიცაა მრავალწევრი, ეწოდება მრავალწევრის წევრი. ხშირად მოსახერხებელია, რომ ერთწევრი განვიხილოთ, როგორც მრავალწევრის კერძო შემთხვევა და ჩავთვალოთ, რომ ერთწევრი არის ერთი წევრისგან შედგენილი მრავალწევრი. ერთწევრი ისეთნაირად ჩაწერილი ნამრავლია, რომელიც შედგება წინდასმული რიცხვითი მამრავლისა და ასოების რაიმე ხარისხებისაგან. ერთწევრის რიცხვით მამრავლს ეწოდება ამ ერთწევრის კოეფიციენტი. მრავალწევრის ერთნაირ ან მხოლოდ კოეფიციენტებით განსხვავებულ წევრებს მსგავსი წევრები ეწოდება. მსგავსი წევრებია აგრეთვე მრავალწევრის ისეთი წევრებიც, რომელებიც ასოებს სულ არ შეიცავს. მსგავსი წევრები იმით არის მნიშვნელოვანი, რომ მათი ჯამი შეიძლება შევცვალოთ ერთი წევრით. მსგავსი წევრების ჯამის შეცვლას ერთი წევრით მსგავსი წევრების შეერთება ეწოდება. თუკი მრავალწევრი მსგავს წევრებს შეიცავს, მაშინ უმჯობესია ისინი შევაერთოთ და ამით გავამარტივოთ მრავალწევრი. ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ შესაკრებთა გადანაცვლების კანონი, დავაჯგუფოთ მრავალწევრის წევრები ისე, რომ მსგავსი წევრები მოხვდება ერთმანეთის მეზობლად და შემდეგ შევაერთოთ ისინი.

ტექსტზე მუშაობა

1. ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. რომელია ასოითი გამოსახულებებიდან ყველაზე მარტივი?

4. რას ეწოდება ერთწევრი?

5. როგორ ხდება მრავალწევრის გამარტივება?

6. **რა განსხვავებაა ერთწევრსა და მრავალწევრს შორის?**

7. **რას ეწოდება ერთწევრის კოეფიციენტი?**

8. **შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვების გამოყენებით:**

   თანამამრავლი

   გადანაცვლება

   ახარისხება

   მრავალწევრი

9. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

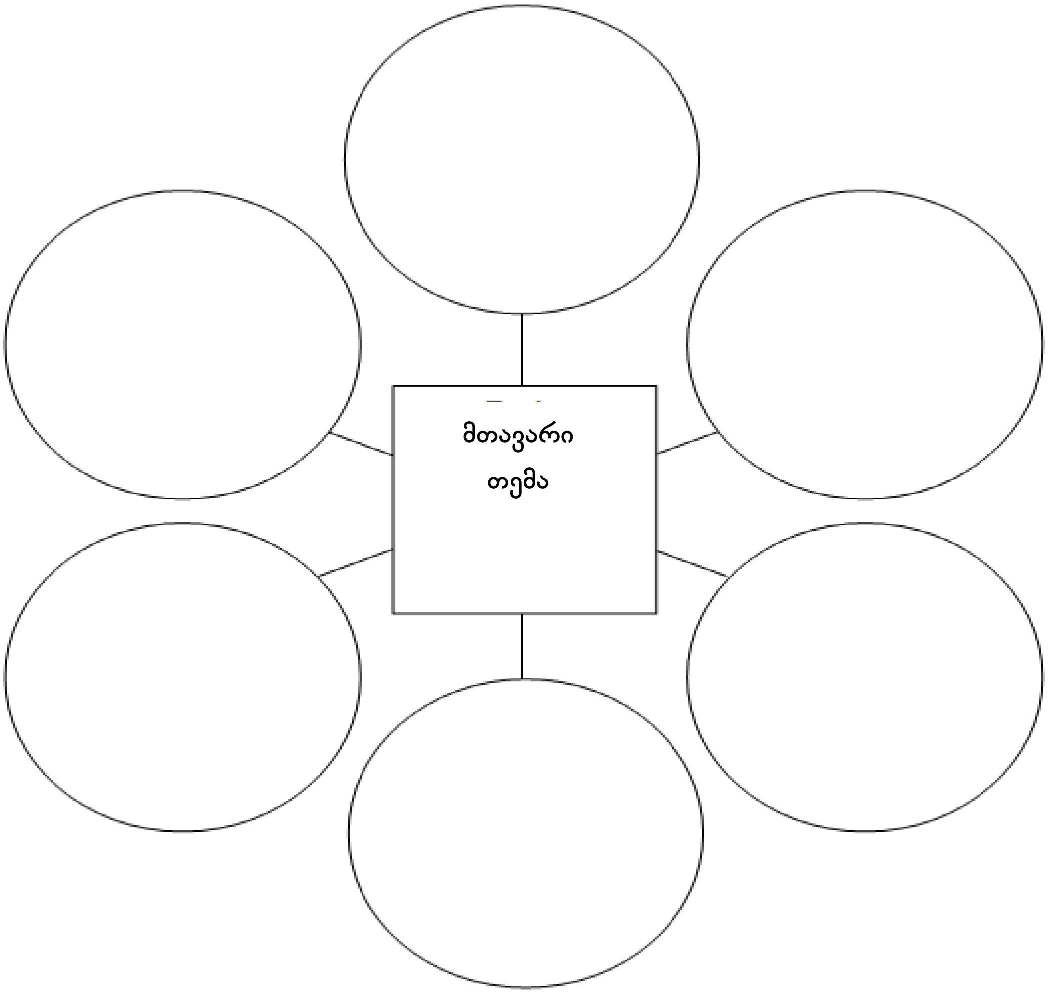
   და ჩაწერილი ისეთნაირად ასოების წინდასმული შედგება ხარისხებისაგან რიცხვითი რომელიც მამრავლისა რაიმე ერთწევრი ნამრავლია,

   ერთწევრი ერთი ერთწევრი განვიხილოთ, როგორც მრავალწევრის და ჩავთვალოთ, მოსახერხებელია, რომ რომ არის შედგენილი კერძო

მრავალწევრი ხშირად წევრისგან შემთხვევა

როგორც არ ან ვიცით, იცვლება ნამრავლის თანამამრავლთა დაჯგუფებით მათი გადანაცვლებით მნიშვნელობა

10. დაწერეთ ოთხკუთხედში ტექსტის მთავარი აზრი და გარშემო რგოლებში ის მთავარი დეტალები მოკლედ, რაც, თქვენი აზრით, მნიშვნელოვანია (ყველა რგოლის შევსება არ არის აუცილებელი).



11. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.

12. გადმოეცით ტექსტი თხრობით.

13. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 9
კუთხე

სიბრტყის ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია საერთო სათავის მქონე ორი სხივით, კუთხე ეწოდება. კუთხის შემომსაზღვრელ სხივებს კუთხის გვერდები ეწოდება, ხოლო მათ საერთო სათავეს კი - კუთხის წვერო. კუთხეს საერთო სათავის მქონე ორი სხივი ქმნის. მაგრამ შეგვიძლია განვიხილოთ აგრეთვე კუთხეები ორ გადამკვეთ მონაკვეთს შორის ან ზოგადად, ორ გადამკვეთ სწორ ხაზს შორის.

ორ კუთხეს ეწოდება ტოლი, თუკი წარმოდგენაში შესაძლებელია მათი ერთმანეთზე ისე დადება, რომ ისინი ერთმანეთს დაემთხვეს. მართ კუთხეზე ნაკლებ და ნულოვან კუთხეზე მეტ კუთხეს მახვილი კუთხე ეწოდება, ხოლო მართ კუთხეზე მეტს, მაგრამ გაშლილ კუთხეზე ნაკლებ კუთხეს ბლაგვი კუთხე ეწოდება.

ცენტრალური კუთხეები

კუთხეს, რომლის წვერო წრის ცენტრშია, ცენტრალური კუთხე ეწოდება. ცენტრალური კუთხეების შესაბამის რკალებს შემდეგი ორი თვისება ახასიათებს:

თეორემა 1: თუკი ცენტრალური კუთხეები ტოლია, მაშინ მათი შესაბამისი რკალებიც ტოლია.

თეორემა 2: (თეორემა 1-ის შებრუნებული). თუკი რკალები ტოლია, მაშინ მათი შესაბამისი ცენტრალური კუთხეებიც ტოლია.

თეორემა 3: ცენტრალური კუთხეები ტოლია მაშინ და მხოლოდ, როცა ტოლია მათი შესაბამისი რკალები.

სამკუთხედის ბისექტრისა

სამკუთხედის ბისექტრისა არის მონაკვეთი, რომელიც სამკუთხედის რომელიმე კუთხის ნაწილია და კუთხის წვეროს მოპირდაპირე გვერდთან აერთებს. სამკუთხედს სამი წვერო აქვს. ამიტომ, ცხადია, ყოველ სამკუთხედში სამი ბისექტრისა გაივლება და სამივე მათგანი ერთ წერტილში იკვეთება.

კუთხის აღნიშვნა ციფრებით, კუთხის ბისექტრისა

კუთხე აღინიშნება ერთი ან სამი ასოთი. ზოგჯერ კუთხეს ციფრებითაც აღნიშნავენ, რომელიც დაიწერება კუთხის წვეროსთან კუთხის შიგნით. ასეთი აღნიშვნა უფრო მოსახერხებელია საერთო წვეროს მქონე კუთხეების აღსანიშნავად. სხივს, რომლის სათავე

კუთხის წვეროს ემთხვევა და ამ კუთხეს შუაზე ყოფს, ამ კუთხის ბისექტრისა ეწოდება. თეორემა: კუთხის ბისექტრისა ამ კუთხის სიმეტრიის ღერძია.

მოსაზღვრე კუთხეები

ორ კუთხეს ეწოდება ერთმანეთის მოსაზღვრე, თუკი მათ ერთი გვერდი საერთო აქვს, ხოლო დანარჩენი ორი გვერდი ერთ წრფეზე მდებარეობს. ეს განსაზღვრება მეორეგვარადაც შეიძლება ჩამოყალიბდეს: ორ კუთხეს ეწოდება ერთმანეთის მოსაზღვრე, თუკი მათი ჯამი გაშლილი კუთხეა. რაკი გაშლილი კუთხის სიდიდეა 180^0, ამიტომ მოსაზღვრე კუთხეების ჯამის სიდიდე ყოველთვის 1800 -ის ტოლია. მართ კუთხეს გაშლილ კუთხემდე აკლია მართი კუთხე. ამიტომ მართი კუთხის მოსაზღვრე კუთხე ყოველთვის მართია.

ვერტიკალური კუთხეები

ორ კუთხეს ეწოდება ვერტიკალური, თუკი ერთი მათგანის გვერდები მეორე კუთხის გვერდების გაგრძელებით მიიღება.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

3. **რას ეწოდება კუთხე?**

4. **როგორ შეიძლება აღინიშნოს კუთხე?**

5. **როგორ კუთხეებს ეწოდებათ მოსაზღვრე?**

6. **რა თვისება აქვთ სამკუთხედის ბისექტრისებს?**

7. **რას ეწოდება კუთხის ბისექტრისა?**

8. **შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:**

   ა. ბისექტრისა

   ბ. ცენტრალური

   გ. ვერტიკალური

9. **მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები მოცემულთაგან:**

ვერტიკალური, ცენტრალური, მოსაზღვრე

ორ კუთხეს ეწოდება ერთმანეთის .... თუკი მათ ერთი გვერდი საერთო აქვს, ხოლო დანარჩენი ორი გვერდი ერთ წრფეზე მდებარეობს.
კუთხეს, რომლის წვერო წრის ცენტრშია, ... კუთხე ეწოდება.
ორ კუთხეს ეწოდება .... თუკი ერთი მათგანის გვერდები მეორე კუთხის გვერდების გაგრძელებით მიიღება.

10. **დაუკავშირეთ ერთმანეთს სიტყვა და მისი განმარტება.**

გაშლილი კუთხე — კუთხე, რომელიც მართ კუთხეზე ნაკლებია

მართი კუთხე	კუთხე, რომელიც 90 გრადუსია
ბლაგვი კუთხე	კუთხე, რომელიც 90 გრადუსზე მეტია და 180-ზე ნაკლები
მახვილი კუთხე	კუთხე, რომელიც 180 გრადუსია

11. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

თუკი მათი კუთხეებიც ტოლია, მაშინ ცენტრალური ტოლია შესაბამისი რკალები

___

___

ყოველ წერტილში ბისექტრისა გაივლება და სამივე სამკუთხედში იკვეთება მათგანი ერთ სამი

___

___

გვერდების ვერტიკალური, კუთხის მიიღება თუკი კუთხეს ერთი ორ გვერდები გაგრძელებით ეწოდება მეორე მათგანის

___

___

12. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.**

___

___

___

___

___

13. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

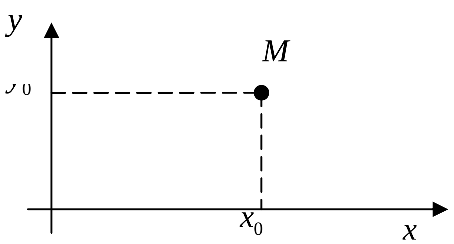
თემა 10
კოორდინატთა სისტემა

წრფეს, რომელზედაც არჩეულია სათავე, დადებითი მიმართულება და ერთეული (მასშტაბი) რიცხვითი ღერძი ანუ რიცხვითი წრფე ეწოდება.

რიცხვითი ღერძის ყოველ M წერტილს შეიძლება შევუსაბამოთ ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი x შემდეგნაირად, $x=|OM|$,სადაც $|OM|$ აღნიშნავს OM მონაკვეთის სიგრძეს, როცა O დან M სკენ მიმართულება ემთხვევა ღერძის მიმართულებას, თუ არ ემთხვევა, მაშინ $x=-|OM|$. ამ x რიცხვს M წერტილის კოორდინატი ეწოდება და აღინიშნება $M(x)$. სათავის კოორდინატია 0 ე.ი. $O(0)$.

თუ $M_1(x_1)$ და $M_2(x_2)$ ღერძის რაიმე წერტილებია, მაშინ x_2-x_1 სხვაობას M_1M_2 მონაკვეთის სიდიდეს უწოდებენ.

საერთო სათავისა და ერთნაირი მასშტაბის მქონე ორი ურთიერთპერპენდიკულარული ღერძი ქმნის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სიბრტყეზე. ღერძებს საკოორდინატო ღერძები ეწოდება. Ox ღერძს აბსცისათა ღერძი, Oy -ს ორდინატთა ღერძი. სიბრტყის ნებისმიერ M წერტილს შევუსაბამოთ მისი გეგმილები Ox და Oy ღერძებზე.



x_0 -ს M წერტილის აბსცისა ეწოდება

y_0 -ს M წერტილის ორდინატა

ხოლო M წერტილის კოორდინატებია (x_0, y_0) წყვილი. ჩაიწერება ასე: $M(x_0, y_0)$ და პირიქით ნამდვილ რიცხვთა ყოველ წყვილს შეესაბამება ერთადერთი წერტილი სიბრტყეზე, ე.ი. სიბრტყის წერტილთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილებს შორის არის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

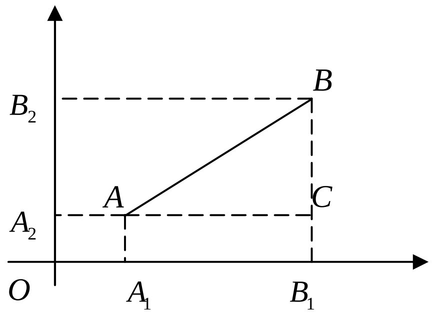
ანალოგიურად საერთო სათავისა და ერთნაირი მასშტაბის მქონე სამი წყვილ-წყვილად პერპენდიკულარული ღერძი ქმნის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სივრცეში. Ox, Oy, Oz ღერძებს - აბსცისათა, ორდინატთა და აპლიკატთა ღერძები ეწოდებათ. სივრცის ნებისმიერ M წერტილს შეესაბამება მისი გეგმილები ამ წრფეებზე ანუ შეესაბამება დალაგებული სამეული და პირიქით - ნამდვილ რიცხვთა ყოველ სამეულს შეესაბამება ერთადერთი წერტილი სივრცეში, ე.ი. სივრცის წერტილთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ სამეულებს შორის არის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

ტექსტზე მუშაობა

წყვილ-წყვილად აღებული საკოორდინატო ღერძები განსაზღვრავენ საკოორდინატო სიბრტყეებს xoy, xoz, yoz-ს, ისინი სივრცეს ყოფენ 8 ნაწილად და მათ ოქტანტები ეწოდებათ.

მანძილი ორ წერტილს შორის

განვიხილოთ xoy სიბრტყეში ორი A და B წერტილი კოორდინატებით $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$, ვიპოვოთ მანძილი მათ შორის.



განვიხილოთ მართკუთხა ABC სამკუთხედი.

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$|AC| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|$ და

$|BC| = |A_2B_2| = |y_2 - y_1|$,

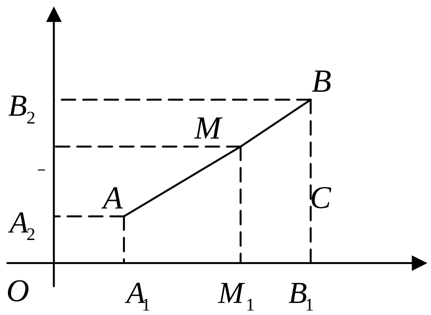
მივიღებთ:

$$d = |AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{|A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით

განვიხილოთ xoy სიბრტყეში ორი A და B წერტილი კოორდინატებით $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$, ვიპოვოთ AB მონაკვეთზე ისეთი M(x,y) წერტილი, რომ

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda$$



ვიპოვოთ M წერტილის კოორდინატები. ცხადია

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|A_1M_1|}{|M_1B_1|} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$$

აქედან $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$,

$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2$,

$x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ, რომ $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ ე.ი. $M\left(\dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)$

1. ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. რას ეწოდება რიცხვითი ღერძი?

4. რა გამოითვლება ფორმულით $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

რას ეწოდება M_1M_2 მონაკვეთის სიგრძე?

5. რა ქმნის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სივრცეში?

6. რას ეწოდება წერტილის გეგმილები?

7. შეადგინეთ წინადადებები შემდეგი სიტყვების გამოყენებით:

აბსცისა

ფარდობა

ღერძი

სივრცე

8. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები:**

9.1. საერთო სიბრტყეზე ერთნაირი სათავისა სისტემას მქონე მასშტაბის ორი დეკარტის კოორდინატთა ღერძი ქმნის მართკუთხა და ურთიერთპერპენდიკულარული

9.2. ღერძი სათავე, ანუ ეწოდება წრფეს, რომელზედაც დადებითი წრფე არჩეულია ერთეული რიცხვითი და რიცხვითი მიმართულება

9.3. წერტილს ერთადერთი ნამდვილი შეიძლება ღერძის ყოველ რიცხვითი რიცხვი შევუსაბამოთ

10. **რამდენ ნაწილად ყოფენ საკოორდინანტო სიბრტყეს საკოორდინანტო ღერძები?**

ა. 16

ბ. 8

გ. 4

დ. 2

11. **მრავალწერტილის ნაცვლად ჩაწერეთ ჭეშმარიტია/მცდარია:**

ნამდვილ რიცხვთა ყოველ წყვილს შეესაბამება რამდენიმე წერტილი სიბრტყეზე. ....

სიბრტყის წერტილთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილებს შორის არის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. ....

კოორდინანტთა სისტემა სივრცეში ანალოგიური სიბრტყის კოორდინანტთა სისტემისა. ....

12. ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები:

12.3. საერთო სათავისა და ერთნაირი .... მქონე ორი ურთიერთპერპენდიკულარული ღერძი ქმნის დეკარტის .... კოორდინატთა სისტემას ....

12.4. .... ნებისმიერ M წერტილს შეესაბამება მისი .... ამ წრფეებზე ანუ შეესაბამება დალაგებული სამეული.

12.5. წყვილ-წყვილად აღებული საკოორდინატო ღერძები განსაზღვრავენ საკოორდინატო .... xoy, xoz, yoz-ს, ისინი სივრცეს ყოფენ 8 ნაწილად და მათ .... ეწოდებათ.

13. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

14. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 11
წრფე სივრცეში; წრფის ზოგადი განტოლება

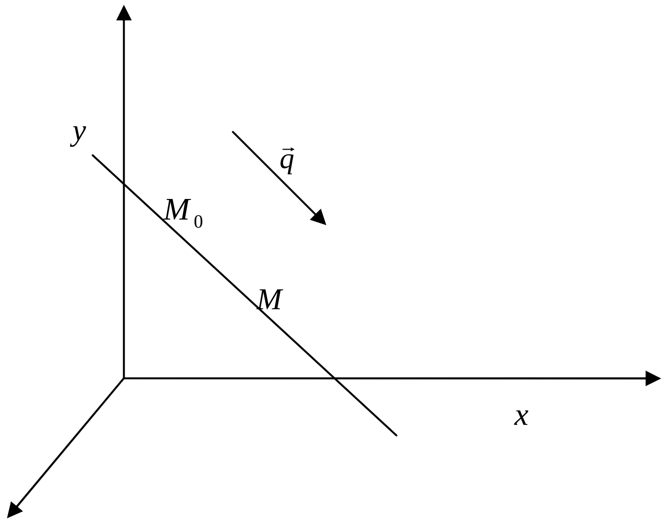
წრფე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ორი სიბრტყის თანაკვეთა, მაშინ მისი განტოლება იქნება

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

ამ განტოლებას ეწოდება წრფის ზოგადი სახის განტოლება.

წრფის კანონიკური და პარამეტრული სახის განტოლებები

შევადგინოთ ისეთი წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ წერტილზე $\vec{q}\,(l,\ m,\ n)$ ვექტორის პარალელურად.



ავიღოთ წრფის ნებისმიერი (მიმდინარე) წერტილი $M(x,\ y,\ z)$. ცხადია, რომ $\overrightarrow{MM_0}\ (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ და $\vec{q}\,(l,\ m,\ n)$ ვექტორები კოლინეარულია, ანუ $\overrightarrow{MM_0} = t\vec{q}$ ეს არის წრფის განტოლება ვექტორული სახით.

და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

ამ განტოლებას წრფის კანონიკური განტოლება ეწოდება. ხოლო $\vec{q}(l, m, n)$ ვექტორს – ამ წრფის მიმმართველი ვექტორი.

წრფის კანონიკური განტოლებიდან, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$ მივიღებთ,

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases},$$

ამ განტოლებას წრფის პარამეტრული განტოლება ეწოდება.

ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება

შევადგინოთ ორ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. წრფის კანონიკურ განტოლებაში წრფის მიმმართველ ვექტორად ავიღოთ ვექტორი $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. დავწეროთ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე გამავალი წრფის კანონიკური განტოლება მიმმართველი ვექტორით $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. გვექნება

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

მოცემულ წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლება

უნდა შევადგინოთ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.

საძიებელ განტოლებას უნდა ჰქონდეს სახე

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

ამ განტოლებას $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლებას უწოდებენ.

კუთხე ორ წრფეს შორის, ორი წრფის მართობულობისა და პარალელობის პირობები

ვთქვათ სიბრტყეზე მოცემულია ორი წრფე, რომელთა კანონიკური სახის განტოლებებია

$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, მიმმართველი ვექტორით $\vec{q}_1(l_1, m_1, n_1)$,

$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$, მიმმართველი ვექტორით $\vec{q}_2(l_2, m_2, n_2)$,

ცხადია, ვექტორები $\bar{q}_1\,(l_1, m_1,\ n_1)$, და $\bar{q}_2\ (l_2, m_2,\ n_2)$ არიან შესაბამისად ამ წრფეების პარალელური ვექტორები და კუთხე ამ წრფეებს შორის იგივეა, რაც კუთხე მათ პარალელურ $\bar{q}_1\,(l_1, m_1,\ n_1)$, და $\bar{q}_2\ (l_2, m_2,\ n_2)$ ვექტორს შორის, ამიტომ წრფეებს შორის კუთხე გამოითვლება ფორმულით

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

ადვილად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამ წრფეების პარალელობის პირობაა მათი მიმმართველი ვექტორების $\bar{q}_1\,(l_1, m_1,\ n_1)$, და $\bar{q}_2\ (l_2, m_2,\ n_2)$ –ის კოლინეარობა (პარალელობა), ანუ მათი კოორდინატების პროპორციულობა

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$ –წრფეთა პარალელობის პირობაა.

ამ წრფეთა მართობულობის პირობაა მათი მიმმართველი ვექტორების $\bar{q}_1\,(l_1, m_1,\ n_1)$, და $\bar{q}_2\ (l_2, m_2,\ n_2)$ –ის მართობულობა, ანუ

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$ –წრფეთა მართობულობის პირობაა.

ტექსტზე მუშაობა

1. ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:

_________________________ ____
_________________________ ____
_________________________ ____
_________________________ ____
_________________________ ____
_________________________ ____
_________________________ ____

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

____
____
____
____
____
____

3. რა ეწოდება ტოლობას $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$?

4. ჩამოაყალიბეთ ორი წრფის პარალელურობის პირობა

5. რა არის წრფეთა მართობულობის პირობა?

6. რას აღნიშნავს ფორმულა $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$?

7. რა წერტილებზე გადის წრფე $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$?

8. შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვებით:
   a. წრფე
   b. მართობული
   c. პროპორციულობა
   d. ვექტორი

9. **ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები:**

ადვილად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამ წრფეების პარალელობის პირობაა მათი მიმმართველი ვექტორების .... (პარალელობა), ანუ მათი კოორდინატების ....

უნდა შევადგინოთ $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ წერტილზე გამავალი .... განტოლება.

$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ განტოლებას წრფის .... განტოლება ეწოდება

10. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.**

____

____

____

____

____

____

____

____

11. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 12
მატრიცები

$m \times n$ მატრიცის მიმართ ეწოდება m სტრიქონიან და n სვეტიან მართკუთხოვან ცხრილს, რომელშიაც გარკვეული რიგით ჩაწერილია mn რაოდენობის ნებისმიერი ელემენტები, რომლებსაც მატრიცის ელემენტები ეწოდება. მატრიცის ელემენტი a_{ij} იმყოფება i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე. ამრიგად, mxn რიგის მატრიცის ზოგადი სახე იქნება:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

(ადგილის შემცირების მიზნით ზოგჯერ დავწერთ $A_{m\times n}$, ან $A=(a_{ij})$, სადაც $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$).

თუ $m=n$ (ე. ი. სტრიქონთა რიცხვი სვეტების რიცხვის ტოლია), მაშინ A მატრიცს n-ური რიგის კვადრატული მატრიცი ეწოდება.

mxn რიგის ორ $A=(a_{ik})$ და $B=(b_{ik})$ მატრიცს ტოლი ვუწოდოთ და დავწეროთ $A=B$, თუ მათი ყველა შესაბამისი ელემენტი ტოლია, ე. ი. $a_{ik}=b_{ik}$.

განვსაზღვროთ ძირითადი ოპერაციები მატრიცებზე: მატრიცთა შეკრება, მატრიცის რიცხვზე გამრავლება და მატრიცის მატრიცზე გამრავლება.

ორი $A_{m\times n}=(a_{ik})$ და $B_{m\times n}=(b_{ik})$ მატრიცების ჯამი ეწოდება ისეთ $C_{m\times n}=(c_{ik})$ მატრიცს, რომლის ყოველი ელემენტი უდრის A და B მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამს, $c_{ik} = a_{ik}+b_{ik}$. და წერენ $C=A+B$.

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{21} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ ორი მატრიცის შეკრება შეიძლება მხოლოდ მაშინ, თუ მათ ერთი და იგივე რიგი აქვთ.

$A_{m\times n}=(a_{ik})$ მატრიცის ნამრავლი λ რიცხვზე ეწოდება ისეთ $C_{m\times n}=(c_{ik})$ მატრიცს, რომლის ელემენტები მიიღება A მატრიცის ელემენტების λ რიცხვზე გამრავლებით, $c_{ik} = \lambda a_{ik}$. და წერენ $C=\lambda A$.

$$\lambda A=\lambda\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

$A_{l\times m}$ მატრიცის <u>ნამრავლი</u> $B_{m\times n}$ მატრიცზე ეწოდება ისეთ $C_{l\times n}$ მატრიცს, რომლის ყოველი ელემენტი გამოითვლება ფორმულით:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{im}b_{mj}\quad i=1,2,\ldots,l;\qquad j=1,2,\ldots,n.$$

ე.ი. C მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტი ტოლია A მატრიცის i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტის B მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამის ელემენტებზე ნამრავლთა ჯამის და აღინიშნება ასე $C=A\cdot B$, ამ ფორმულას კოში-ბინეს ფორმულას უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ A მატრიცის B მატრიცზე გამრავლება ყოველთვის არ არის შესაძლებელი, ეს შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის სვეტების რაოდენობა ტოლია B მატრიცის სტრიქონების რაოდენობისა. AB მატრიცს აქვს იმდენი სტრიქონი, რამდენიც A-ს და იმდენი სვეტი, რამდენიც B–ს. ორივე ნამრავლი AB და BA განისაზღვრება მხოლოდ მაშინ, თუ A და B ერთი და იგივე რიგის კვადრატული მატრიცებია.

მატრიცს, რომლის ყველა ელემენტი ნულია ნულოვანი მატრიცი ეწოდება და აღინიშნება O-ით. კვადრატულ მატრიცს ეწოდება ერთეულოვანი მატრიცი, თუ მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ერთის ტოლია, სხვა ელემენტები კი ნულია, აღინიშნება E-ით.

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

მოქმედებებს მატრიცებზე გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1. A+B=B+A,
2. A+(B+C)=(A+B)+C,
3. A+O=O+A=A,
4. A-A=O,
5. AE=EA=A,
6. (AB)C=A(BC),
7. (A+B)C=AC+BC, A(B+C)=AB+AC,
8. λ(A+B)= λA+ λB.

შევნიშნოთ, რომ მატრიცთა გამრავლება არ არის კომუტაციური, საზოგადოდ AB$\neq$ BA.

ტექსტზე მუშაობა

1. ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. **როგორ ორ მატრიცს ეწოდება ტოლი?**

4. **რას ეწოდება ნულოვანი მატრიცი?**

5. **რა გამოითვლება ფორმულით** $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{im} b_{mj}$ $i=1,2,..,l$; $j=1,2,\ldots,n$.

6. როდის არის შესაძლებელი ორი მატრიცის ერთმანეთზე გამრავლება?

____

____

7. როდისაა შესაძლებელი ორი მატრიცის შეკრება?

____

____

____

8. ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები:

მატრიცს ეწოდება ………………. მატრიცი, თუ მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ერთის ტოლია, სხვა ელემენტები კი ……………..

ორი მატრიცის .... შეიძლება მხოლოდ მაშინ, თუ მათ ერთი და იგივე რიგი აქვთ.

9. დაასრულეთ წინადადება:

A მატრიცის B მატრიცზე გამრავლება შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა................

A მატრიცის B მატრიცზე გამრავლება შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა……………

10. წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები

ა. a_{ij} გადაკვეთაზე j-ური იმყოფება სტრიქონისა ელემენტი და სვეტის i-ური მატრიცის

____

____

ბ. კომუტაციური, $AB \neq BA$ რომ მატრიცთა შევნიშნოთ, საზოგადოდ არ გამრავლება არის

____

____

11. შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:

კოლინეარული

____

ნულოვანი

____

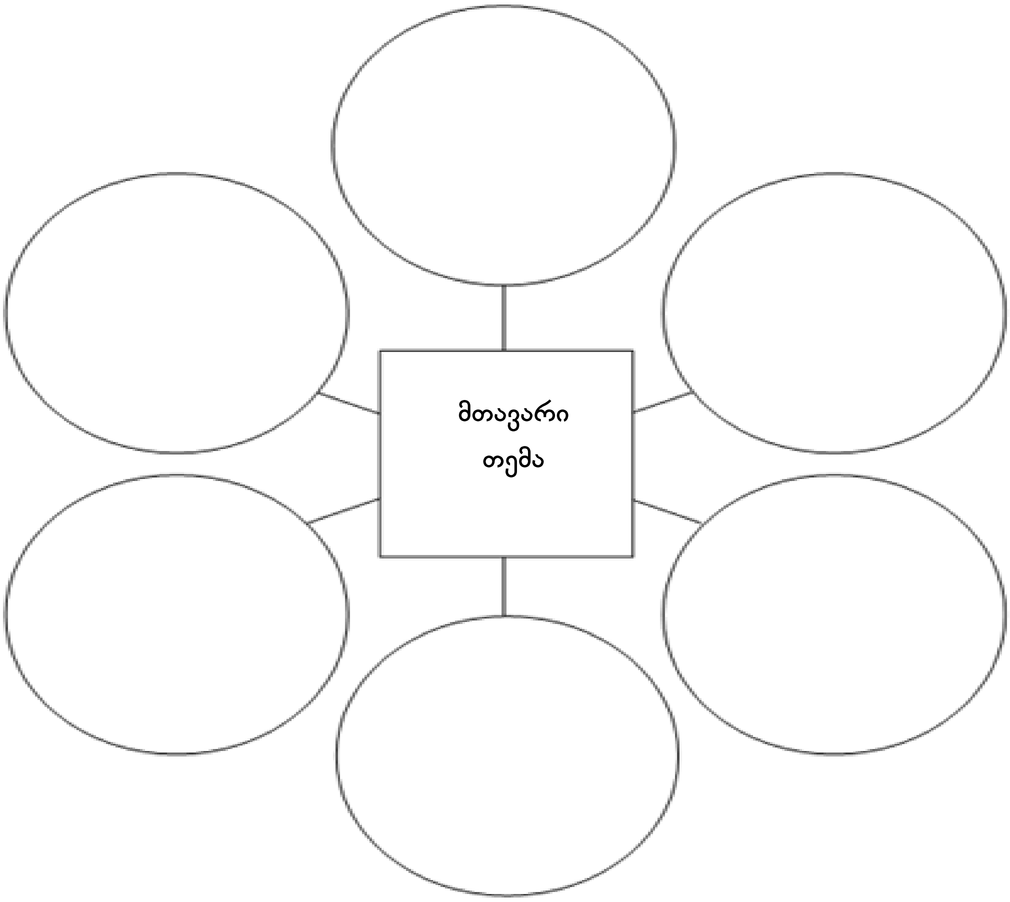
გადაკვეთა

____

ოპერაციები

____

12. დაწერეთ ოთხკუთხედში ტექსტის მთავარი აზრი და გარშემო რგოლებში ის მთავარი დეტალები მოკლედ, რაც, თქვენი აზრით, მნიშვნელოვანია (ყველა რგოლის შევსება არ არის აუცილებელი).



13. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.

14. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 13
ვექტორული სივრცე

განსაზღვრება. L სიმრავლეს ეწოდება წრფივი სივრცე (ვექტორული სივრცე) K ველის მიმართ (L–ის ელემენტებს ვექტორებს უწოდებენ, K ველის ელემენტებს კი სკალარებს), თუ

ა) L-ის u და v ვექტორთა ყოველ დალაგებულ წყვილს L-შივე ეთანადება ერთადერთი ვექტორი, რომელსაც u და v ვექტორების ჯამი ეწოდება და u+v სიმბოლოთი აღინიშნება;

ბ) K-ს ყოველ α სკალარს და L-ის ყოველ u ვექტორს L-ში ეთანადება ერთადერთი ვექტორი, რომელსაც α სკალარისა და u ვექტორის ნამრავლი ეწოდება და αu სიმბოლოთი აღინიშნება.

ეს ორი ოპერაცია უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ 8 აქსიომას:

1) კომუტაციურობის აქსიომა: u+v=v+u ნებისმიერი u და v-სთვის L-დან;

2) ასოციაციურობის აქსიომა: (u+v)+w=u+(v+w) ნებისმიერი u,v,w-სთვის L-დან;

3) L-ში არსებობს ვექტორი 0 ისეთი, რომ u+0=u ნებისმიერი u-სთვის L-დან. 0-ს ეწოდება ნულოვანი ვექტორი;

4) ყოველი u-სთვის L-დან, L-ში არსებობს u ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი -u ისეთი, რომ u+(-u)= 0;

5) ნებისმიერი u-სთვის L-დან: 1·u=u;

6) $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$ ნებისმიერი α,β-სთვის K-დან და ნებისმიერი u-სთვის L-დან;

7) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$ ნებისმიერი α,β-სთვის K-დან და ნებისმიერი u-სთვის L-დან;

8) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$ ნებისმიერი α-სთვის K-დან და ნებისმიერი u,v-სთვის L-დან.

წრფივ სივრცეს ნამდვილ რიცხვთა ველის R-ის მიმართ ეწოდება ნამდვილი წრფივი სივრცე; წრფივ სივრცეს კომპლექსურ რიცხვთა ველის C-ს მიმართ ეწოდება კომპლექსური წრფივი სივრცე.

ადვილია იმის შემოწმება, რომ სიმრავლე ყველა ჩვეულებრივი თავისუფალი ვექტორებისა სიბრტყეზე არის ნამდვილი წრფივი სივრცე (აღინიშნება V^2 სიმბოლოთი); ასევე სიმრავლე ყველა ჩვეულებრივი თავისუფალი ვექტორებისა სივრცეში არის ნამდვილი წრფივი სივრცე (აღინიშნება V^3 სიმბოლოთი).

თუ მოვიგონებთ სკალარისა და მატრიცის ნამრავლის ცნებას, დავრწმუნდებით, რომ n-ური რიგის მატრიცთა სიმრავლე ელემენტებით K ველიდან - $M_n(K)$ არის წრფივი სივრცე K ველის მიმართ.

L-ის L^1-ქვესიმრავლეს ეწოდება L წრფივი სივრცის ქვესივრცე, თუ L^1 თვითონ არის სივრცე K მიმართ L-ში განსაზღვრული ოპერაციებით.

ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება

განსაზღვრება. $u_1,u_2,\ldots u_s$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სკალარები, რომელთა შორის ერთი მაინც არ არის ნულოვანი, და სრულდება ტოლობა

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_su_s=0.$$

განსაზღვრება. $u_1,u_2,\ldots u_s$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ კი

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_su_s=0$$

ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_s=0$.

ერთი ნულოვანი ვექტორისგან შედგენილი სისტემა, რა თქმა უნდა, წრფივად დამოკიდებულია. მაგრამ ერთი $u\neq0$ ვექტორისაგან შედგენილი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც $\alpha u=0$ ტოლობა შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha=0$.

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ ვექტორთა სისტემის რანგი არის $r\geq1$ (და აღვნიშნავთ rank $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}=r$), თუ ეს სისტემა შეიცავს r წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორისგან შედგენილ ერთ ქვესისტემას მაინც, მაგრამ სისტემის ყოველი r+1 ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია. ვიტყვით, რომ რანგი არის 0, თუ სისტემის ყველა ვექტორი ნულოვანია.

თეორემა. იმისათვის, რომ ვექტორთა სისტემის რანგი იყოს $r\geq1$, აუცილებელი და საკმარისია, იგი შეიცავდეს ისეთ r წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორს, რომლის საშუალებით წრფივად გამოისახება მოცემული სისტემის ყოველი ვექტორი.

განსაზღვრება. L წრფივ სივრცეს (K ველის მიმართ) ეწოდება n-განზომილებიანი, თუ მასში არსებობს n წრფივად დამოკიდებული ვექტორი, ხოლო მისი ნებისმიერი n+1 ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია. აღინიშნება L^n სიმბოლოთი.

განსაზღვრება. L^n წრფივი სივრცის ნებისმიერ n წრფივად დამოუკიდებელ $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება L-ის ბაზისი.

L^n სივრცის ყოველი u ვექტორი ერთადერთი გზით გამოისახება ბაზისის ვექტორების წრფივ კომბინაციად.

თუ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის L^n-ის ბაზისი და

$$u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$

მაშინ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ სკალარებს ეწოდება u ვექტორის კოორდინატები $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში და ეს არის u ვექტორის გამოისახვა ბაზისის ვექტორებით.

თუ მოცემულია სივრცის u და v ვექტორი კოორდინატებით

$$u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$

$$v = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n,$$

მაშინ $$u + v = (\xi_1 + \eta_1) e_1 + (\xi_2 + \eta_2) e_2 + \ldots + (\xi_n + \eta_n) e_n,$$

$$\alpha u = \alpha \xi_1 e_1 + \alpha \xi_2 e_2 + \ldots + \alpha \xi_n e_n.$$

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

3. **როდის ეწოდება სიმრავლეს სივრცე K სივრცის მიმართ?**

4. **რამდენ აქსიომას უნდა აკმაყოფილებდნენ L სივრცის ოპერაციები?**

a. ორი
b. რვა
c. ერთი
d. ხუთი

5. **ვექტორთა როგორ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული?**

6. **რას ეწოდება L სივრცის ქვესივრცე?**

7. **რას ეწოდება ვექტორთა სისტემის რანგი?**

8. **რას ეწოდება წრფივის სივრცის ბაზისი?**

9. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

   გამოისახება ვექტორების L^n ვექტორი კომბინაციად. ყოველი ბაზისის u გზით წრფივ სივრცის ერთადერთი

   იყოს r≥1 იგი იმისათვის, მოცემული ვექტორი ვექტორთა რანგი, შეიცავდეს აუცილებელი და ისეთ r დამოუკიდებელ ვექტორს, რომლის წრფივად სისტემის ყოველი რომ წრფივად სისტემის საშუალებით საკმარისია, გამოისახება

10. **შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვებით**

   ბაზისი

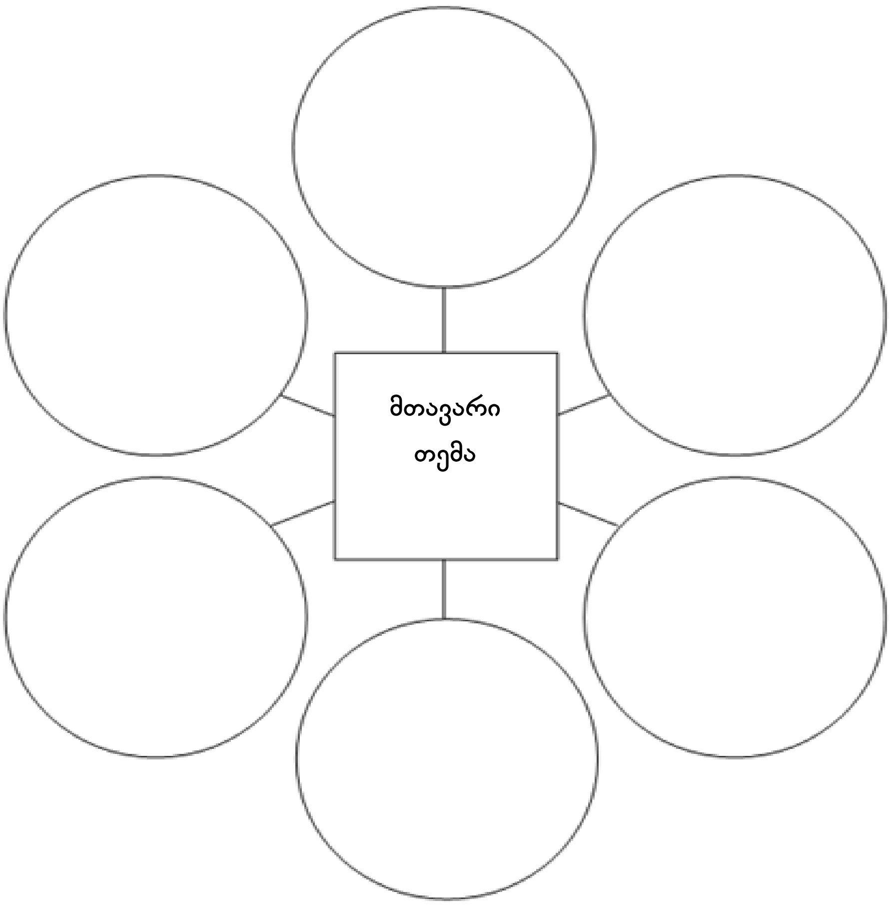
   რანგი

სისტემა

კოორდინანტები

11. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.

12. დაწერეთ ოთხკუთხედში ტექსტის მთავარი აზრი და გარშემო რგოლებში ის მთავარი დეტალები მოკლედ, რაც, თქვენი აზრით, მნიშვნელოვანია (ყველა რგოლის შევსება არ არის აუცილებელი).



13. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 14
სატრანსპორტო მოდელები

სატრანსპორტო მოდელები (ამოცანები) წრფივი პროგრამირების ამოცანების სპეციალურ კლასს წარმოადგენენ. ასეთი მოდელები გამოიყენება ერთგვაროვანი პროდუქციის წარმოების რამდენიმე პუნქტიდან მომხმარებელთან (ანუ დანიშნულების პუნქტებში) გადაზიდვის ეკონომიური გეგმების შესადგენად. უფრო კონკრეტულად, სატრანსპორტო ამოცანა გამოიყენება წარმოების პუნქტებიდან დანიშნულების პუნქტებში გადასაზიდი ტვირთის მოცულობის დასადგენად, ამასთან ჯამური დანახარჯები გადაზიდვებზე უნდა იყოს მინიმალური და გათვალისწინებული უნდა იქნეს ტვირთის მოცულობები წარმოების პუნქტებში და მოთხოვნები დანიშნულების პუნქტებში. სატრანსპორტო მოდელებში იგულისხმება, რომ გადაზიდვის ხარჯი პირდაპირპროპორციულია გადასაზიდი ტვირთის მოცულობისა.

ვთქვათ, გვაქვს წარმოების m პუნქტი და მოხმარების n პუნქტი. i-ურ პუნქტში წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა აღვნიშნოთ a_i-ით, ხოლო j-ურ პუნქტში მოთხოვნილი პროდუქციის რაოდენობა b_j-ით, c_{ij} იყოს i-ური მწარმოებლიდან j-ურ მომხმარებელთან ერთეული პროდუქციის გადაზიდვის ხარჯი. x_{ij} იყოს i-ური მწარმოებლიდან j-ურ მომხმარებელთან გადასაზიდი პროდუქციის რაოდენობა. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: საავტომობილო კომპანიას აქვს სამი ქარხანა ლოს-ანჟელესში, დეტროიტსა და ახალ ორლეანში და ორი გამანაწილებელი ცენტრი დენვერსა და მაიამიში. ავტომობილების წარმოების მოცულობა კვარტალში შეადგენს შესაბამისად 1000, 1500 და 1200 ერთეულს. გამანაწილებელი ცენტრების მოთხოვნა კი კვარტალში შესაბამისად 2300 და 1400 ერთეულია. მანძილები (მილებში) ქარხნებსა და გამანაწილებელ პუნქტებს შორის მოცემულია ცხრილში:

	დენვერი	მაიამი
ლოს-ანჟელესი	1000	2690
დეტროიტი	1250	1350
ახალი ორლეანი	1275	850

სატრანსპორტო კომპანია ერთი ავტომანქანის ერთ მილზე გადაზიდვისათვის ითხოვს 8 ცენტს, შედეგად ვღებულობთ გადაზიდვების ხარჯების შემდეგ ცხრილს (1 დოლარამდე დამრგვალებულს)

	დენვერი	მაიამი
ლოს-ანჟელესი	80	215
ეტროიტი	100	108
ახალი ორლეანი	102	68

მაშინ წრფივი პროგრამირების ამოცანას, რომელიც მოგვცემს გადაზიდვის ყველაზე ეკონომიურ გეგმას, ექნება სახე:

ვიპოვოთ

$$z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

ფუნქციის მინიმუმი, შემდეგი შეზღუდვებით:

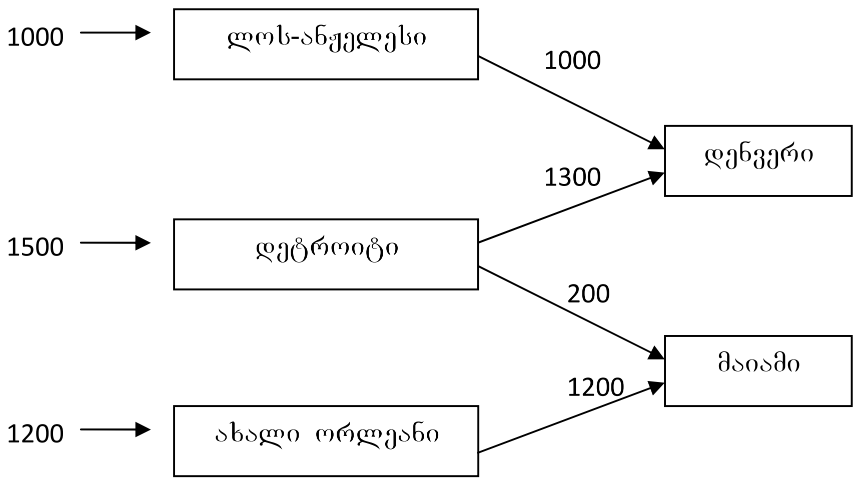
$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} = 1000 \\ &x_{21} + x_{22} = 1500 \\ &x_{31} + x_{32} = 1200 \\ &x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300 \\ &x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400 \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

ეს შეზღუდვები მოცემულია ტოლობების სახით, რადგან ავტომობილების ჯამური მოცულობა (1000+1500+1200=3700) გამანაწილებელი ცენტრების ჯამური მოთხოვნების (2300+1400=3700) ტოლია. მიღებული ამოცანა შესაძლებელია ამოიხსნას სიმპლექს-მეთოდის გამოყენებით, მაგრამ სატრანსპორტო ამოცანის შეზღუდვების სპეციფიური სტრუქტურა საშუალებას იძლევა მისთვის დამუშავდეს უფრო ეფექტური მეთოდები. მცირე განზომილებიანი ამოცანებისათვის ამ დროს იყენებენ ე.წ. სატრანსპორტო ცხრილებს, რომელსაც ჩვენი მაგალითისათვის აქვს სახე:

	დენვერი	მაიამი	
ლოს-ანჟელესი	80	215	1000

	x_{11}	x_{12}	
დეტროიტი	100 x_{21}	108 x_{22}	1500
ახალი ორლეანი	102 x_{31}	68 x_{32}	1200
	2300	1400	

ოპტიმალური ამონახსნი (რომლის აგების მეთოდსაც შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ) შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სქემით:



ის გულისხმობს, რომ 1000 ავტომობილი უნდა გადაიზიდოს ლოს-ანჟელესიდან დენვერში, 1300 ავტომობილი -- დეტროიტიდან დენვერში, 200 ავტომობილი -- დეტროიტიდან მაიამიში და 1200 -- ახალი ორლეაიდან მაიამიში, გადაზიდვების მინიმალური დანახარჯი კი იქნება 313200 დოლარი.

როცა წარმოების ჯამური მოცულობა ემთხვევა მოთხოვნის ჯამურ მოცულობას, სატრანსპორტო ამოცანას ***ბალანსირებულს*** უწოდებენ, წინააღმდეგ შემთხვევაში – ***არაბალანსირებულს***. ფიქტიური მომხმარებლის ან ფიქტიური მწარმოებლის შემოტანის გზით შესაძლებელია არაბალანსირებული მოდელის ბალანსირებულზე დაყვანა. ბალანსის არსებობა აუცილებელია იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი.

ზოგად შემთხვევაში სატრანსპორტო ამოცანის მათემატიკური მოდელი ასე ჩაიწერება:

ვიპოვოთ $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

შეზღუდვების პირველი m ტოლობა უზრუნველყოფს მთელი მარაგის საწყობიდან გამოზიდვას, ხოლო ბოლო n ტოლობა – თითოეული მოთხოვნის დაკმაყოფილებას.

სამართლიანია შემდეგი ფაქტი: თუ სატრანსპორტო მოდელი ბალანსირებულია, მაშინ მას აქვს ამონახსნი. ამ ფაქტის სამართლიანობის საჩვენებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს მიღებული ამოცანის ერთი მაინც დასაშვები ამონახსნი (გადაზიდვის ერთი გეგმა მაინც) და მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრულია დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეზე.

ვთქვათ, $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M$, მაშინ $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$ სიდიდეები დასაშვებ ამონახსნს წარმოადგენენ. მართლაც ვაჩვენოთ, რომ ისინი ამოცანის შეზღუდვებს აკმაყოფილებენ.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{M} M = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{b_j}{M} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{M} M = b_j,$$

აღვნიშნოთ $c' = \min c_{ij}, \;\; c'' = \max c_{ij}$, მაშინ გვაქვს:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \leq c'' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = c'' \sum_{i=1}^{m} a_i = c'' M,$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq c' M$, ე.ი. მიზნის ფუნქცია შემოსაზღვრულია.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. როდის ეწოდება სატრანსპორტო ამოცანას ბალანსირებული?

4. რატომ არ ვიყენებთ სატრანსპორტო ამოცანის ამოსახსნელად სიმპლექს მეთოდს?

5. რას წარმოადგენენ სატრანსპორტო ამოცანები?

6. ტექსტის თანახმად, რას გავიგებთ $z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$ ამოცანის ამოხსნით?

7. რა არის საჭირო არაბალანსირებული სატრანსპორტო ამოცანის ამოსახსნელად?

8. **რის საშუალებას იძლევა სატრანსპორტო ამოცანის შეზღუდვების სპეციფიური სტრუქტურა?**

9. **ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები:**

   შეზღუდვების პირველი m ტოლობა უზრუნველყოფს ...., ხოლო ბოლო n ტოლობა - ....

   როცა წარმოების ჯამური მოცულობა ემთხვევა მოთხოვნის ჯამურ მოცულობას, სატრანსპორტო ამოცანას .... უწოდებენ, წინააღმდეგ შემთხვევაში - ....

   სატრანსპორტო მოდელებში იგულისხმება, რომ გადაზიდვის ხარჯი .... გადასაზიდი ტვირთის მოცულობისა.

10. **შემოხაზეთ სწორი ვარიანტი**

   ა. ბალანსის არსებობა აუცილებელია იმისთვის, რომ შესაძლებელი იყოს პროდუქციის გადაზიდვა

   ბ. ბალანსის არსებობა აუცილებელია იმისთვის, რომ ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ სიმპლექს მეთოდი

   გ. ბალანსის არსებობა აუცილებელია იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი.

   დ. ბალანსის არსებობა აუცილებელია იმისათვის, რომ შესაძლოა იყოს სატრანსპორტო ამოცანის შედგენა

11. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

ფაქტი: თუ მას სამართლიანია ამონახსნი შემდეგი მოდელი მაშინ ბალანსირებულია, აქვს სატრანსპორტო

სქემით შემდეგ ამონახსნი, პარაგრაფში ოპტიმალური აგების განვიხილავთ, წარმოვადგინოთ შეიძლება შემდეგი რომლის მეთოდსაც

სატრანსპორტო უფრო იძლევა მეთოდები სტრუქტურა სპეციფიური დამუშავდეს საშუალებას მისთვის ეფექტური ამოცანის შეზღუდვების

12. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.**

13. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 15
სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი

როგორც ვნახეთ, წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოხსნის პირველი ეტაპია საწყისი საბაზისო ამონახსნის აგება, ხოლო შემდეგი ეტაპი – ამ ამონახსნის გაუმჯობესების გზით, ოპტიმალური ამონახსნის პოვნა.

სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი განვიხილოთ შემდეგ მაგალითზე: სატრანსპორტო კომპანია აწარმოებს ხორბლის გადაზიდვას 3 ელევატორიდან 4 წისქვილში. ცხრილში მოცემულია ელევატორების სიმძლავრეები (მარაგები), წისქვილების მოთხოვნები და გადაზიდვის ხარჯები.

წისქვილები

ელევატორები	1	2	3	4	მარაგები
1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	25
3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	10
მოთხოვნები	5	15	15	15	

ამ ამოცანაში მოითხოვება დავადგინოთ ელევატორებიდან წისქვილებში გადაზიდვების სტრუქტურა, რომელიც მინიმალურ დანახარჯებს შეესაბამება.

სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნის ალგორითმის ბიჯების მიმდევრობა იმეორებს სიმპლექს-მეთოდის ეტაპების მიმდევრობას:

ბიჯი 1. ვპოულობთ საწყის საბაზისო დასაშვებ ამონახსნს და გადავდივართ მეორე ბიჯზე.

ბიჯი 2. სიმპლექს-მეთოდის ოპტიმალურობის პირობების გამოყენებით არასაბაზისო ცვლადებს შორის ვპოულობთ ბაზისში შესატან ცვლადს. თუ ასეთი ცვლადი არ არსებობს, მაშინ გამოთვლები მთავრდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავდივართ მესამე ბიჯზე.

ბიჯი 3. სიმპლექს-მეთოდის დასაშვებადობის პირობის გამოყენებით საბაზისო ცვლადებიდან ვარჩევთ ბაზისიდან ამოსაგდებ ცვლადს და ვპოულობთ ახალ საბაზისო ამონახსნს. გადავდივართ მეორე ბიჯზე.

საწყისი საბაზისო ამონახსნის აგება. ზოგადი სატრანსპორტო მოდელი m საწყობისა და n დანიშნულების პუნქტით, შეიცავს $m+n$ ტოლობის ტიპის შეზღუდვას და mn ცვლადს. რადგან ბალანსირებულ მოდელს ვიხილავთ და შესრულებულია ტოლობა $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, ადვილი დასანახია, რომ შეზღუდვების ერთი განტოლება ზედმეტია, ის წარმოადგენს დანარჩენი $m+n-1$ ტოლობის შედეგს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, სატრანსპორტო ამოცანის შეზღუდვების სისტემა $m+n-1$ დამოუკიდებელ განტოლებას შეიცავს, ანუ ამ სისტემის რანგი $m+n-1$ -ის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ დასაშვებ საბაზისო ამონახსნში $m+n-1$ საბაზისო ცვლადია. ჩვენს მაგალითში 3+4–1=6 ცვლადი იქნება საბაზისო.

სატრანსპორტო ამოცანის სპეციალური სტრუქტურა საშუალებას იძლევა საწყისი საბაზისო ამონახსნის ასაგებად გამოვიყენოთ სხვადასხვა მეთოდი (განსხვავებით ხელოვნურ ცვლადთა მეთოდისაგან სიმპლექს-მეთოდში). ჩვენ განვიხილავთ ერთ მათგანს:

ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდი.

ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდი სარეალიზაციოდ მარტივია (სჭირდება გამოთვლების მცირე მოცულობა), სამაგიეროდ, მიღებული ამონახსნის "ხარისხი" არც თუ კარგია, ის შეიძლება საკმაოდ შორს იყოს ოპტიმალურისაგან. უმცირეს ღირებულებათა მეთოდი გამოთვლების თვალსაზრისით უფრო რთულია და საზოგადოდ უკეთეს ამონახსნსაც გვაძლევს.

ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდი. ამონახსნის აგება იწყება ცხრილის ზედა უჯრის (ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის) შევსებით, ანუ x_{11} ცვლადისთვის მნიშვნელობის მინიჭებით.

ბიჯი 1. მივანიჭოთ ზედა მარცხენა უჯრაში (ჩრდილო-დასავლეთის კუთხეში) მდგომ ცვლადს მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობა მარაგსა და მოთხოვნას შორის. (საწყის ბიჯზე x_{11} ცვლადს მივანიჭოთ $\min(a_1, b_1)$)

ბიჯი 2. შემდგომი განხილვიდან გამოვრიცხოთ სტრიქონი ან სვეტი, იმის და მიხედვით ბიჯი1-ზე მარაგის ამოწურვა მოხდა თუ მოთხოვნის დაკმაყოფილება. თუ ერთდროულად მარაგიც ამოიწურა და მოთხოვნაც დაკმაყოფილდა, მაშინ გამოირიცხება ან სტრიქონი ან სვეტი.

ბიჯი 3. თუ განსახილველი დარჩა მხოლოდ ერთი სტრიქონი ან ერთი სვეტი პროცესი მთავრდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავდივართ ბიჯ 1-ზე.

თუ გამოვიყენებთ აღწერილ პროცედურას, ჩვენი მაგალითისათვის მივიღებთ საწყის საბაზისო ამონახსნს, რომელიც ნახაზზეა მოცემული. ისრებით მოცემულია საბაზისო ცვლადების განსაზღვრის თანმიმდევრობა.

10 5	2 10	20	11
12	7 5	9 15	20 5
4	14	16	18 10

მიღებულ საწყის ამონახსნს აქვს სახე:

$x_{11}=5, \quad x_{12}=10, \quad x_{22}=5, \quad x_{23}=15, \quad x_{24}=5, \quad x_{34}=10.$

ამ გეგმით განხორციელებული გადაზიდვების ჯამური დანახარჯი ტოლია.

$$z=5\cdot 10+10\cdot 2+5\cdot 7+15\cdot 9+5\cdot 20+10\cdot 18=520\$$$

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

3. რა მაგალითზე განიხილება სატრანსპორტო ალგორითმი?

4. როგორ იწყება ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდით ამონახსნის აგება?

5. რითი ჰგავს სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი სიმპლექს-მეთოდის ალგორითმს?

6. რა არის ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდის უპირატესობა და ნაკლი?

7. რისთვის არის საჭირო ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდის გამოყენება?

8. შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:
   საბაზისო

ბიჯი

რეალიზაცია

პროცესი

9. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

ასაგებად იძლევა სატრანსპორტო სპეციალური საწყისი საბაზისო ამონახსნის გამოვიყენოთ სტრუქტურა სხვადასხვა მეთოდი ამოცანის საშუალებას

თუ რომელიც აღწერილ მოცემული ჩვენი საწყის ამონახსნს, საბაზისო ნახაზზეა მაგალითისათვის პროცედურას, მივიღებთ გამოვიყენებთ

აგება ეტაპია ამოცანის პირველი საბაზისო ამონახსნის წრფივი ამოხსნის პროგრამირების საწყისი|

10. **ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები ან ფრაზები:**

ამონახსნის აგება იწყება ცხრილის .... უჯრის შევსებით, ანუ .... ცვლადისთვის მნიშვნელობის მინიჭებით.

სიმპლექს-მეთოდის .... პირობის გამოყენებით საბაზისო ცვლადებიდან ვარჩევთ .... ცვლადს და ვპოულობთ ახალ ....

ვპოულობთ საწყის საბაზისო .... ამონახსნს და გადავდივართ .... ბიჯზე.

11. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.**

12. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 16
თამაშთა თეორია

ადამიანის მოღვაწეობის მრავალ სფეროში (ეკონომიკა, სამხედრო საქმე და ა.შ.) ხშირად საჭიროა გადაწყვეტილების მიღება არასრული ან არაზუსტი ინფორმაციის პირობებში. ამოცანები, რომლებიც აქამდე გვხვდებოდა, ხასიათდება იმით, რომ ინფორმაცია იყო სრული. მაგალითად, წარმოების დაგეგმვის ამოცანაში, j-ური ნაკეთობისგან მიღებული c_j მოგება ითვლება ფიქსირებულ სიდიდედ. მაშინ, თუ x_j არის j-ური ნაკეთობის გამოსაშვები რაოდენობა, $c_j x_j$ იქნება ამ ნაკეთობის წვლილი საერთო შემოსავალში, რომელიც ასევე წარმოადგენს ფიქსირებულ სიდიდეს მოცემული x_j-თვის. გადაწყვეტილების მიღების ასეთი ტიპის ამოცანებს (რომლებსაც მიეკუთვნება წრფივი პროგრამირების უკვე განხილული ამოცანები, შესაბამისი კონკრეტული მოდელებით) ეწოდება ამოცანები განსაზღვრულობის პირობებში.

ინფორმაციის არასრულობას მივყავართ ორი ახალი ტიპის სიტუაციამდე:

1. გადაწყვეტილების მიღება რისკის პირობებში, როცა მონაცემები აღიწერება ალბათური განაწილებით;
2. გადაწყვეტილების მიღება განუზღვრელობის პირობებში.

პირველ შემთხვევაში, მონაცემთა სისრულის ხარისხი გამოხატულია ალბათური განაწილების ფუნქციებით. მეორე შემთხვევაში ასეთი რამ არ გვაქვს, მაგრამ ეს არ ნიშნავს, რომ განუზღვრელობის პირობებში ამოცანის შესახებ საერთოდ არ გვაქვს ინფორმაცია. ამ დროს არსებული მონაცემები ძნელად ან საერთოდ არ ექვემდებარება კლასიფიკაციას და ამ მონაცემებისათვის, როგორც შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ან პროცესებისათვის შეუძლებელია განისაზღვროს მათი განაწილების ფუნქცია ან სხვა სტატისტიკური მახასიათებლები.

შეიძლება ითქვას, რომ გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა, რისკის პირობებში, წარმოადგენს, გარკვეულად, “შუალედურს” განსაზღვრულობის და განუზღვრელობის ამოცანებს შორის.

თამაშთა თეორიის საგანი და ძირითადი ცნებები

თამაში წარმოადგენს ისეთი პრაქტიკული სიტუაციის მათემატიკურ მოდელს, როდესაც ერთი და იგივე პრობლემის გადაჭრას ცდილობს რამდენიმე დაინტერესებული მხარე, რომელთა ინტერესები და მიზნის მიღწევის გზები, საზოგადოდ, განსხვავებულია, მაგრამ

მოსალოდნელი შედეგი დამოკიდებულია თითოეული მხარის მიერ მიღებულ გადაწყვეტილებაზე.

თამაშთა თეორია წარმოადგენს მათემატიკის იმ ნაწილს, რომელიც ჩამოყალიბდა ეკონომიკისა და სოციალურ მეცნიერებათა მოთხოვნილებების დასაკმაყოფილებლად.

პრაქტიკული სიტუაცია თამაშად რომ დამოდელდეს, მას უნდა გააჩნდეს შემდეგი სამი სახის მონაცემი:

1. მონაწილეები ანუ მოთამაშეები, რომელთა რაოდენობა ერთზე მეტია.
2. თითოეულ მოთამაშეს უნდა ჰქონდეს სტრატეგიათა სასრული ან უსასრულო სიმრავლე. სტრატეგია ნიშნავს გეგმას, რომლის განხორციელება მხოლოდ ამ გეგმის მფლობელი მოთამაშის ნება-სურვილზეა დამოკიდებული. სტრატეგიათა სიმრავლის ელემენტებს ზოგჯერ წმინდა სტრატეგიებსაც უწოდებენ.
3. “გადახდის” ფუნქციები, რომლებიც აღწერენ თამაშის შედეგებს. ეს ფუნქციები მიიღებენ განსაზღვრულ მნიშვნელობებს, როგორც კი მოთამაშეები აირჩევენ სტრატეგიებს.

მატრიცული თამაშები ნულოვანი ჯამით

განვიხილოთ ორი პირის თამაში. თუ ერთი პირის მოგება ტოლია მეორე პირის წაგებისა, ასეთ თამაშს უწოდებენ თამაშს ნულოვანი ჯამით. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ყოველ მოთამაშეს აქვს სტრატეგიათა გარკვეული სიმრავლე. სტრატეგიათა ყოველ წყვილს (ამ წყვილის ელემენტებს ირჩევს თითოეული მოთამაშე) შეესაბამება გადახდის სიდიდე, რომელიც ერთ-ერთმა მოთამაშემ უნდა გადაუხადოს მეორეს. გადახდის შესახებ ინფორმაცია, საკმარისია მოცემული იყოს ერთ-ერთი მოთამაშისათვის და მას აქვს მატრიცის სახე. თუ განვიხილავთ ორი $\boldsymbol{A}$ და $\boldsymbol{B}$ მოთამაშის მატრიცულ თამაშს, მაშინ საგადამხდელო მატრიცას $\boldsymbol{A}$ მოთამაშისათვის ექნება სახე:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \dots & \boldsymbol{B}_n \\
\hline
\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\
\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\boldsymbol{A}_n & \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \\
\hline
\end{array}$$

მატრიცული თამაშის ასეთი წარმოდგენა ნიშნავს, რომ თუ A მოთამაშე აირჩევს i –ურ სტრატეგიას, ხოლო B მოთამაშე j –ურ სტრატეგიას, მაშინ A მოთამაშემ უნდა გადაიხადოს a_{ij} , ხოლო B მოთამაშემ – $\left(-a_{ij}\right)$. (მატრიცის სტრიქონები შეესაბამება A მოთამაშის სტრატეგიებს, სვეტები კი B მოთამაშის სტრატეგიებს.)

თამაშები ინტერესთა კონფლიქტის შედეგად წარმოიშვა და თამაშის ოპტიმალური ამონახსნის პოვნა გულისხმობს თითოეული მოთამაშისათვის ერთი ან რამდენიმე სტრატეგიის შერჩევას, რომელთაგან გადახვევა არ გააუმჯობესებს მოთამაშის მოგებას. ეს ამონახსნები წარმოიდგინება ან ერთი(წმინდა) ან რამდენიმე(შერეული) სტრატეგიის სახით. ამ უკანასკნელთათვის ცნობილი უნდა იყოს შესაბამისი ალბათობები.

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

3. **რას ეწოდება თამაში?**

4. **რას ეწოდება ამოცანები განსაზღვრულობის პირობებში?**

5. რას ეწოდება თამაში ნულოვანი ჯამით?

6. რისთვის ჩამოყალიბდა თამაშთა თეორია?

7. რა სიტუაციებამდე მივყავრთ ინფორმაციის არასრულობას?

8. რა მონაცემები უნდა გააჩნდეს პრაქტიკულ სიტუაციას, რომ იგი თამაშად განვიხილოთ?

9. ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები ან ფრაზები:

   თამაშები ………………………………… შედეგად წარმოიშვა და თამაშის ოპტიმალური ამონახსნის პოვნა გულისხმობს თითოეული მოთამაშისათვის ერთი ან რამდენიმე სტრატეგიის შერჩევას, რომელთაგან გადახვევა …………………………… მოთამაშის მოგებას.

   როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ყოველ მოთამაშეს გააჩნია ……………………………………… სიმრავლე.

   სტრატეგიათა ყოველ .... შეესაბამება გადახდის სიდიდე, რომელიც ერთ-ერთმა მოთამაშემ უნდა გადაუხადოს მეორეს

   სტრატეგია ნიშნავს გეგმას, რომლის განხორციელება მხოლოდ .... დამოკიდებული.

10. შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:

სტრატეგია

თამაში

განუზღვრელობა

ინტერესტთა კონფლიქტი

11. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

გამოხატულია მონაცემთა პირველ ფუნქციებით განაწილების ხარისხი ალბათური სისრულის შემთხვევაში,

წმინდა ელემენტებს სტრატეგიებსაც ზოგჯერ სიმრავლის სტრატეგიათა უწოდებენ

ამ შესაბამისი ალბათობები ცნობილი იყოს უკანასკნელთათვის უნდა

12. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი.**

13. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 17
ალგორითმების მარტივი მაგალითები

მგელი, კურდღელი და სტაფილო

განვიხილოთ ბევრისათვის კარგად ცნობილი ამოცანა მგლის, კურდღლისა და სტაფილოს შესახებ (ეს ამოცანა უფრო კარგადაა ცნობილი, როგორც მგლის, თხისა და კომბოსტოს ამოცანა):

მდინარის ერთ ნაპირზე იმყოფებიან ბეჰემოტი, მგელი, კურდღელი და სტაფილო (ნახ. 1). ბეჰემოტს აქვს ნავი, რომელშიც ეტევა მხოლოდ იგი და ერთი რომელიმე სხვა მგზავრი: მგელი, კურდღელი ან სტაფილო. სანამ ბეჰემოტი სხვა ცხოველებთან ერთადაა ნაპირზე, ისინი კარგად იქცევიან და ერთმანეთს არ დაერევიან. მაგრამ საკმარისია მან მარტო დატოვოს ერთ ნაპირზე კურდღელი და მგელი, რომ ეს უკანასკნელი კურდღელს ეტაკება. თვით კურდღელი კი მარტო დარჩენილ სტაფილოს შეჭამს. თუ მგელი სტაფილოთი დარჩება ერთ ნაპირზე მარტო, არაფერი არ მოხდება.

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: დაწერეთ ალგორითმი, რომლის მეშვეობითაც ბეჰემოტი თავისი ნავით სამივეს გადაიყვანს მეორე ნაპირზე.

პირველ რიგში უნდა ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა: მოცემულობა, საბოლოო შედეგი და ალგორითმის მსვლელობისას დადებული შეზღუდვები.

მოცემულია: მდინარე და მის ერთ ნაპირზე მყოფი ნავი, ბეჰემოტი, მგელი, კურდღელი და სტაფილო.

შედეგი: ეს ყველა მეორე ნაპირზე ერთად მყოფი.

შეზღუდვა: ცხოველები გადაჰყავს ბეჰემოტს ორ ადგილიანი ნავით (პირველი შეზღუდვა - ნავში უნდა იჯდეს ბეჰემოტი, რომელსაც მხოლოდ ერთი ადგილი რჩება თავისუფალი და, აქედან გამომდინარე, მეორე ნაპირზე ერთ ჯერზე შეუძლია გადაიყვანოს ან მხოლოდ მგელი, ან მხოლოდ კურდღელი, ან მხოლოდ სტაფილო). მგლისა და კუდღლის მარტო დატოვება არ შეიძლება, ასევე არ შეიძლება კურდღლისა და სტაფილოს მარტო დატოვება

(მეორე და მესამე შეზღუდვა).

ამ ამოცანის ამოსახსნელად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ალგორითმი, (დავუშვათ, რომ დასაწყისში ყველა მდინარის მარცხენა ნაპირზეა და ბოლოს მარჯვენა ნაპირზე უნდა იყოს):

ალგორითმი „მგელი, კურდღელი და სტაფილო“

მონაცემები: მდინარე და მის მარცხენა ნაპირზე განთავსებული ბეჰემოტი, მგელი, კურდღელი და სტაფილო;

1. მარჯვენა ნაპირზე გადაიყვანე კურდღელი ;

2. დაბრუნდი მარცხენა ნაპირზე ;

3. მარჯვენა ნაპირზე გადაიყვანე მგელი ;

4. მარცხენა ნაპირზე გადაიყვანე კურდღელი ;

5. მარჯვენა ნაპირზე გადაიტანე სტაფილო ;

6. დაბრუნდი მარცხენა ნაპირზე ;

7. მარჯვენა ნაპირზე გადაიყვანე კურდღელი.

მათემატიკურ ენაზე კი დასმული ამოცანის პირობა ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

მოცემულია: ორი სიმრავლე A = {ბ, მ, კ, ს} და B = ∅

შედეგი: A =∅ ; და B = {ბ, მ, კ, ს}.

შეზღუდვა: ყოველ ჯერზე იმ სიმრავლიდან, რომელიც შეიცავს ასოს "ბ", მეორე სიმრავლეში უნდა გადავიტანოთ ეს ასო და კიდევ ერთი ან ნული ასო. ის სიმრავლე, რომელიც არ შეიცავს ასოს "ბ", არ უნდა შეიცავდეს ერთად ასოებს {მ, კ} და {კ, ს}.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

____

____

____

____

____

____

____

3. რა არის ამოცანის მიზანი?

4. რა შეზღუდვები აქვს ამოცანას?

5. რომელი კომბინაციის დატოვება შეუძლია ერთ ნაპირზე ბეჭემოტს და რატომ?

6. რა უნდა გამოვიყენოთ ამოცანის მათემატიკურად ჩაწერისას?

7. რას აღნიშნავს A სიმრავლე ამოცანის მათემატიკურ ჩანაწერში?

8. რამდენ ბიჯში ხსნის ამოცანას მოცემული ალგორითმი?

ა. ხუთი

ბ. შვიდი

გ. ოთხი

დ. ორი

9. შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვებით:

ალგორითმი

სიმრავლე

შეზღუდვა

10. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

ნაპირზეა მარცხენა იყოს რომ დასაწყისში ყველა დავუშვათ, მდინარის და ბოლოს მარჯვენა უნდა ნაპირზე

ადგილი რჩება უნდა რომელსაც ნავში მხოლოდ იჯდეს თავისუფალი ერთი ბეჰემოტი,

სტაფილოს შესახებ კარგად განვიხილოთ ბევრისათვის ამოცანა მგლის, ცნობილი კურდღლისა და

11. **ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები ან ფრაზები:**

ცხოველები გადაჰყავს ბეჰემოტს .... ადგილიანი ნავით.
მგლისა და .... მარტო დატოვება არ შეიძლება, ასევე არ შეიძლება კურდღლისა და .... მარტო დატოვება.
თუ მგელი სტაფილოთი დარჩება ერთ ნაპირზე მარტო,
....

12. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.**

13. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 18
ფიბონაჩის მიმდევრობა

ცნობილმა იტალიელმა მეცნიერმა ლეონარდო და პიზამ (Leonardo da Pisa), რომელიც მეთორმეტე საუკუნის ბოლოსა და მეცამეტე საუკუნის დასაწყისში ცხოვრობდა და უფრო ფიბონაჩის სახელითაა ცნობილი (Fibonacci), შემდეგი ამოცანის გადაჭრა გადაწყვიტა:

გლეხი ზრდის კურდღლებს. ყოველი კურდღელი ბადებს ერთ კურდღელს, როდესაც ორი თვის გახდება და შემდეგ თითო კურდღელს ყოველთვიურად. რამდენი დედალი კურდღელი ეყოლება გლეხს n თვეში, თუ ჩავთვლით, რომ კურდღლები არ კვდებიან?

თუ n მცირეა, რაოდენობის გამოთვლა არაა რთული: პირველ და მეორე თვეში მას 1 კურდღელი ჰყავს, რადგან კურდღელი მხოლოდ ორი თვის შემდეგ იძლევა შთამომავლობას. მესამე თვეს მას 2 კურდღელი ეყოლება, ხოლო მეოთხეში კი 3, რადგან პირველმა კურდღელმა მისცა კიდევ 1 და მეორე ჯერ ორი თვის არაა. ამის შემდეგ მისი პირველი და მეორე კურდღელი ორივე შთამომავლობას იძლევა, ასე რომ, მეხუთე თვეში მას 5 კურდღელი ეყოლება. ზოგადად, მე-n-ე თვეში ახლად შემომატებულ კურდღელთა რიცხვი ტოლია იმ კურდღელთა რიცხვისა, რომლებიც სულ ცოტა 2 თვის არიან. ასე რომ, თუ მე- n -ე თვეში კურდღელთა რაოდენობას აღვნიშნავთ როგორც Fn, მივიღებთ:

Fn = Fn-1 + Fn-2

(ამ ტოლობას ფიბონაჩის პირობასაც უწოდებენ).

ჩვენ ვიცით ასევე, რომ **F1 = 1; F2 = 1; F3 = 3; F4 = 5.** ტექნიკური მიზეზებით განსაზღვრავენ აგრეთვე F0 = 0, რაც შემდეგნაირად განსაზღვრავს ე.წ. ფიბონაჩის მიმდევრობას:

F0 = 0; F1 = 1; Fn = Fn-1 + Fn-2;სადაც n > **1.**

ამ რეკურსიული ფორმულით გამოთვლილი რამდენიმე რიცხვია:

0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610; 987; 1597; 2584; 4181; 6765; 10946; 17711; 28657; 46368; : : :

ასეთი სახით მიღებულ რიცხვებს ფიბონაჩის რიცხვებს უწოდებენ, ხოლო ამ მიმდევრობას - ფიბონაჩის მიმდევრობას. ამას გარდა, Fn და Fn+1 მეზობელი რიცხვებია.

აღსანიშნავია, რომ ეს მიმდევრობა ანტიკური ხანის საბერძნეთსა და შუა საუკუნეების ინდოეთშიც იყო ცნობილი. ზოგჯერ მის ნულოვან წევრს F0 = 0 არ განიხილავენ ხოლმე და მის პირველ ორ წევრად F1 და F2 იღებენ.

როგორც ამოჩნდა, ზემოთ მოყვანილი ფორმულა კურდღელთა რაოდენობას არასწორად ითვლის, მაგრამ სამაგიეროდ ფიბონაჩის რიცხვები ძალიან ხშირად გვხვდება

ბუნებაში და მეცნიერებაშიც დიდ როლს თამაშობენ. თვით ეს მიმდევრობაც ბევრ საინტერესო თვისებას ავლენს.

დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი ცალსახად ჩაიწერება ისეთი ფიბონაჩის რიცხვების ჯამის სახით, რომ ამ რიცხვებს შორის არ შეგვხვდება მეზობელი ფიბონაჩის რიცხვები. მაგალითად, n= 67 შემდეგნაირად წარმოდგება: 67 = 1+3+8+55 და ეს წარმოდგენა ერთადერთია (მართალია, 67 = 1 + 3 + 8 + 21 + 34, მაგრამ აქ 21 და 34 მეზობელი რიცხვებია ფიბონაჩის მიმდევრობაში, რაც პირობას ეწინააღმდეგება). ასეთი ცალსახა ჯამი წარმოშობს ფიბონაჩის რიცხვების მიმდევრობას, ანუ კოდს, რომელიც ცალსახად განსაზღვრავს ამ რიცხვს და კოდირების თეორიასა და პრაქტიკაში გამოიყენება.

ფიბონაჩის მიმდევრობის გამოყენებით გადაჭრილი იქნა მეოცე საუკუნის დასაწყისში უდიდესი გერმანელი მათემატიკოსის დავით ჰილბერტის მიერ დასმული ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანა.

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

3. **რას ეწოდება ფიბონაჩის მიმდევრობა?**

4. **რისთვის შექმნა ფიბონაჩიმ თავდაპირველად თავისი ფორმულა?**

5. **რა გადაიჭრა ფიბონაჩის მიმდევრობით?**

6. **რაში გამოიყენება ფიბონაჩის მიმდევრობა?**

7. **სად იყო ცნობილი ფიბონაჩის მიმდევრობა?**

8. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

   ხშირად რიცხვები თამაშობენ ბუნებაში და გვხვდება მეცნიერებაშიც როლს ფიბონაჩის ძალიან დიდ

   ეს თვით საინტერესო ავლენს თვისებას ბევრ მიმდევრობაც

   არ რომ რიცხვების რომ რიცხვები ცალსახად ჩაიწერება ისეთი ნატურალური დამტკიცებულია, ფიბონაჩის რიცხვი ჯამის ამ რიცხვებს შორის მეზობელი ფიბონაჩის ნებისმიერი სახით, შეგვხვდება

9. **ტექსტში მოიძიეთ და მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები ან ფრაზები:**

ზოგჯერ მის .... წევრს არ განიხილავენ ხოლმე და მის პირველ ორ წევრად F1 და F2 იღებენ.

ცნობილმა იტალიელმა მეცნიერმა ლეონარდო და პიზამ, რომელიც .... საუკუნის ბოლოსა და .... საუკუნის დასაწყისში ცხოვრობდა და უფრო .... სახელითაა ცნობილი, შემდეგი ამოცანის გადაჭრა გადაწყვიტა: დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი .... რიცხვი ცალსახად ჩაიწერება ისეთი ფიბონაჩის რიცხვების ჯამის სახით, რომ ამ რიცხვებს შორის არ შეგვხვდება .... ფიბონაჩის რიცხვები.

10. **შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვებით:**

მიმდევრობა

ფორმულა

კოდირება

ცალსახა

11. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი.**

12. **გადმოეცით ტექსტი თხრობით.**

13. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 19
ძირითადი ცნებები და განსაზღვრებები გრაფებზე

ორიენტირებული გრაფი (directed) G განისაზღვრება როგორც (V,E) წყვილი, სადაც V სასრული სიმრავლეა, ხოლო E წარმოადგენს V -ს ელემენტთა ბინარულ დამოკიდებულებას, ანუ $V \times V$ სიმრავლის ქვესიმრავლეა. ორიენტირებულ გრაფს ზოგჯერ ორგრაფს (digraph) უწოდებენ. V სიმრავლეს უწოდებენ გრაფის წვეროთა სიმრავლეს (vertex set), ხოლო E -ს - წიბოთა სიმრავლეს (edge set). მათ ელემენტებს შესაბამისად ეწოდებათ წვერო (vertex) და წიბო (edge). წიბოს, რომელიც წვეროს საკუთარ თავთან აერთებს, უწოდებენ მარყუჟს (ციკლურ წიბოს). არაორიენტირებულ გრაფში (undirected graph) $G = (V, E)$ წიბოთა E სიმრავლე შედგება წვეროთა დაულაგებელი (unordered) წყვილებისაგან. წიბოს აღსანიშნავად გამოიყენება ჩანაწერი (u,v). არაორიენტირებულ გრაფში (u,v) და (v,u) ერთი და იმავე წიბოს აღნიშნავს, ხოლო მარყუჟი არ შეიძლება არსებობდეს, რადგან წიბო ორი განსხვავებული წვეროსაგან უნდა შედგებოდეს. (u,v) წიბოს შესახებ ორიენტირებულ გრაფში იტყვიან, რომ იგი გამოდის წვეროდან და შედის წვეროში. არაორიენტირებულ გრაფში $(u,v$) წიბოს შესახებ იტყვიან, რომ იგი u და v წვეროების ინციდენტურია (incident). თუ G გრაფში არსებობს (u,v) წიბო, იტყვიან, რომ v წვერო u წვეროს მოსაზღვრეა (is adjacent to u) არაორიენტირებულ გრაფებში მოსაზღვრეობა სიმეტრიული მიმართებაა, ხოლო ორიენტირებულ გრაფებისთვის ეს დებულება არ არის სამართლიანი. თუკი ორიენტირებულ გრაფში v წვერო u წვეროს მოსაზღვრეა, წერენ $u \rightarrow v$.

არაორიენტირებულ გრაფში წვეროს ხარისხს (degree) უწოდებენ ამ წვეროსადმი ინციდენტური წიბოების რაოდენობას. მაგალითად ნახ.1 ბ)-ზე 2 წვეროს ხარისხია 2. წვეროს, რომლის ხარისხიც არის 0, ეწოდება იზოლირებული(isolated) წვერო. წვეროს, რომლის ხარისხი არის 1 ეწოდება დაკიდული წვერო. ორიენტირებულ გრაფში განასხვავებენ შემავალ (in-degree) და გამომავალ (out-degree) ხარისხებს (შესაბამისად წვეროში შემავალი და გამომავალი წიბოების რაოდენობის მიხედვით) და მათ ჯამს უწოდებენ წვეროს ხარისხს. წვეროს, რომლის გამომავალი ხარისხი ნულია, ეწოდება ჩასადენი (sink); წვეროს, რომლის შემავალი ხარისხი ნულია, ეწოდება წყარო(source).

***k* სიგრძის გზა(მარშრუტი)** (path of length k) u წვეროდან v წვეროში განისაზღვრება როგორც წვეროთა $< v0,v1,v2, \ , \ k \ v >$ მიმდევრობა, სადაც $v_0 = u$, $v_k = v$ და (v_{i-1}, v_i) $\in E$ – ნებისმიერი $i=1,2,\ldots,k$ -სათვის. გზის სიგრძე განისაზღვრება მასში შემავალი წიბოების რაოდენობით. გზა შეიცავს (contains) $v_0, v_1, v_2.. v_k$ წვეროებს და (v_0 , v_1), (v_1 , v_2) , …, (v_{k-1}, v_k) წიბოებს. ყოველთვის არსებობს ნული სიგძის გზა წვეროდან თავის თავში. 0 v წვეროს

უწოდებენ გზის დასაწყისს, ხოლო v_k წვეროს – გზის ბოლოს და ამბობენ, რომ გზა მიდის v_0 -დან v_k -საკენ. თუ მოცემული u და u' წვეროებისთვის არსებობს p გზა u -დან u' -ში, მაშინ ამბობენ, რომ u' მიღწევადია u -დან p გზით (u' is reachable from u via p). გზას ეწოდება მარტივი (simple), თუკი ყველა წვერო მასში განსხვავებულია.

ორიენტირებულ გრაფს ეწოდება **ძლიერად ბმული** (strongly connected), თუკი მისი ნებისმიერი წვეროდან მიღწევადია (ორიენტირებული გზებით) ნებისმიერი სხვა წვერო. ნებისმიერი ორიენტირებული გრაფი შეიძლება დაიყოს ძლიერად ბმულ კომპონენტებად (strongly connected components).

$G' = (V',E')$ გრაფს ეწოდება $G = (V, E)$ გრაფის ქვეგრაფი (subgraph), თუ $V'\subseteq V$ და $E'\subseteq E$. თუ $G = (V, E)$ გრაფში ავირჩევთ V' წვეროთა ნებისმიერ სიმრავლეს, მაშინ შეგვიძლია განვიხილოთ G -ს ქვეგრაფი, რომელიც შედგება ამ წვეროებისა და მათი შემაერთებელი წიბოებისაგან. ამ ქვეგრაფს უწოდებენ G გრაფის შეზღუდვას V' წვეროთა სიმრავლეზე.

ნებისმიერი არაორიენტირებული გრაფისათვის შეიძლება განვიხილოთ მისი ორიენტირებული ვარიანტი (directed version), თუკი ყოველ (u,v) არაორიენტირებულ წიბოს შევცვლით ორიენტირებული წიბოების (u,v) და (v,u) წყვილით, რომლებსაც ექნებათ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებები. მეორე მხრივ, ნებისმიერი ორიენტირებული გრაფისათვის შეიძლება განვიხილოთ მისი არაორიენტირებული ვარიანტი (undirected version), თუკი ამოვშლით მარყუჟებს და (u,v) და (v,u) წიბოებს შევცვლით არაორიენტირებული (u,v) წიბოთი. ორიენტირებულ გრაფში წვეროს მეზობელი (neighbor) ეწოდება ნებისმიერ წვეროს, რომელიც შეერთებულია მასთან ნებისმიერი მიმართულების წიბოთი, ე.ი. v წვერო არის u -ს მეზობელი თუ v არის u -ს მოსაზღვრე ან u არის v -ს მოსაზღვრე. არაორიენტირებულ გრაფში კი ცნებები "მეზობელი" და "მოსაზღვრე" სინონიმებია.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. რას უწოდებენ ხოლმე V სიმრავლეს?

4. გრაფის როგორ წვეროებს ეწოდებათ მეზობლები?

5. როგორ გრაფს ეწოდება ძლიერად ბმული?

6. რას ეწოდება გრაფი?

7. რას ეწოდება k სიგრძის გზა?

8. რას ეწოდება მარყუჟი?

9. წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი. გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები

ეს არის სიმეტრიული მოსაზღვრეობა გრაფებში მიმართებაა, ხოლო გრაფებისთვის დებულება არ სამართლიანი არაორიენტირებულ ორიენტირებულ

და ორიენტირებულ ხარისხებს შემავალ გრაფში გამომავალ განასხვავებენ

შევცვლით წიბოს წყვილით, ნებისმიერი ორიენტირებული შეიძლება განვიხილოთ მისი თუკი ყოველ არაორიენტირებულ ორიენტირებული რომლებსაც ექნებათ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებები არაორიენტირებული ვარიანტი, წიბოების გრაფისათვის

10. წვეროს, რომლის ხარისხი არის 1**, ეწოდება:**

a. ძლიერად ბმული
b. მეზობელი
c. დაკიდული
d. ინციდენტური

11. შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვებით:

წიბო

გრაფი

ორიენტირებული

მარშრუტი

12. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.**

13. **გადმოეცით ტექსტი თხრობით.**

14. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 20
კრიპტოგრაფია

კრიპტოგრაფია დაშიფრვა, შენიღბვა, დასაიდუმლოება, ადამიანის და შეიძლება ითქვას, საზოგადოდ, ცოცხალი ორგანიზმის ერთ-ერთი ყველაზე ბუნებრივი გამოვლინებაა. იგი დამახასიათებელია საზოგადოების ყველა სფეროს, ჯგუფისა თუ ცალკეული ინდივიდისათვის. აღნიშნულის საფუძველია როგორც შემოქმედებითი, ასევე, სრულიად აუცილებელი სასიცოცხლო მოთხოვნილებანი. ამის მაგალითებია სამხედრო, სამეცნიერო, სახელმწიფო ჯგუფებისა თუ ცალკეულ პირთა პროფესიული მოქმედება და, ერთი შეხედვით რამდენად პარადოქსულიც არ უნდა იყოს, იგი არც ხელოვნებისა და თვით პოეზიისათვის არის უცხო.

დასტურდება, რომ უძველესი შუმერის, ეგვიპტის, ისევე როგორც ჩინეთის, საბერძნეთისა და რომის ცივილიზაციისათვის ცნობილი იყო საიდუმლო დამწერლობისა და სხვა სახის დასაიდუმლოების საშუალებები. საიდუმლო შიფრს იყენებდა რომის კეისარი იულიუს ცეზარი (ძვ. წ. 13.VII.100-15.III.44). ამიტომ დღესაც სამეცნიერო ლიტერატურაში ცეზარის სახელით მოიხსენიება ერთ-ერთი კრიპტოგრაფიული ალგორითმი.

ცნობილია, რომ შუა საუკუნეებისა და რენესანსის ეპოქაში საიდუმლო ალგორითმების მისაღებად იღვწოდნენ იმ დროის გამოჩენილი ადამიანები, მათ შორის, ფილოსოფოსი ფრანსის ბეკონი, მათემატიკოსები ფრანსუა ვიეტი, ჯორდანო კარდანო, ჯონ ვალისი და სხვ. გაჩნდა დასაიდუმლოების შედარებით რთული მეთოდებიც.

საინტერესოა, რომ XV საუკუნის ბოლოს არაბების მიერ გამოქვეყნებულ ენციკლოპედიაში ცალკე თავი დაეთმო კრიპტოგრაფიის საკითხებს. ნიშანდობლივია, რომ სხვა საკითხებთან ერთად პირველად არის განხილული კრიპტოგრაფიული ალგორითმის ანალიზის, ანუ კრიპტოანალიზის, სტატისტიკური მეთოდი. სტატისტიკური მეთოდი გულისხმობს, რომ ცალკეულ სიმბოლოებს, კერძოდ, ბუნებრივი სასაუბრო ენის ცალკეულ ასო-ნიშნებს აქვს განსხვავებული ალბათობები (მაგალითად, ქართულ ტექსტში „ბ“ ან „გ“ ასო შედარებით მეტი სიხშირით ჩნდება, ვიდრე, ვთქვათ, „ც“ ასო-ნიშანი და სხვ.). ასო-ნიშნების სიხშირული მნიშვნელობების გათვალისწინება დღესაც წარმოადგენს კრიპტოანალიზის ერთ-ერთ შესაძლებლობას ალგორითმის გასატეხად.

ცეზარის ალგორითმი

ბუნებრივია ტექსტის დაშიფვრის შემდეგი იდეა: მოცემულ ტექსტურ სიტყვებში და მთლიანად წინადადებაში ასო-ნიშნებს შევუცვალოთ ადგილები. პოზიციების ცვლილება,

ცხადია, გამოიწვევს ტექსტში ასო-ნიშნების არევას და ტექსტის შინაარსის გაბუნდოვანებას, რაც, განსაზღვრების თანახმად, არის ტექსტის გარდაქმნა, ანუ დაშიფრვა. ასეთი დაშიფვრის წესია იულიუს ცეზარის ალგორითმი, რომელიც თავის მხრივ წარმოადგენს იმ დროს არსებული ალგორითმების ერთ-ერთ ვარიანტს.

წარმოვიდგინოთ, რომ ი. ცეზარი თავის გზავნილში ლათინური ანბანის პირველ A ასოს შეცვლიდა, ვთქვათ, მეოთხე D ასო-ნიშნით, მეორე B ასოს მეხუთე E ასო-ნიშნით და ა.შ. ბოლო Z ასოს - მესამით (8.2.1). ამრიგად, თუ პირველ სტრიქონში ჩავწერთ ლათინური ანბანის ასო-ნიშნებს ჩვეულებრივი რიგის მიხედვით, ხოლო მეორე სტრიქონში დავალაგებთ შიფრის შესაბამის ასო-ნიშნებს, მივიღებთ დაშიფვრის ალგორითმს:

$$\Downarrow\Uparrow \quad \begin{array}{c} ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ \\ DEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABC \end{array} \quad (8.2.1)$$

მაგალითი 8.2.1. კეისრის მიერ სენატისადმი გაგზავნილ ერთ-ერთ დაშიფრულ შეტყობინებას (8.2.1) ალგორითმის შესაბამისად აქვს შემდეგი სახე: $YHQL\ YLGL\ YLFL$; ხოლო გაშიფვრის შემდეგ: „*Veni, vidi, vici*"; რაც ქართულად ნიშნავს: „მოველ, ვნახე, დავამარცხე". ასე შეატყობინა კეისარმა რომის სენატს თავისი გამარჯვება 20 საუკუნის წინათ ბოსფორის მეფე ფარნაკესთან ბრძოლაში (ძვ.წ. 47 წ.).

რომის იმპერატორი ავგუსტუსი (გაიუს ოქტავიანე, რომელიც იყო იულიუს კეისრის შვილობილი და მემკვიდრე; ძვ.წ.23.IX.63 ახ.წ. 19.VIII.14) ტექსტის დასაშიფრად ხმარობდა შემდეგ შიფრს:

$$\Downarrow\Uparrow \quad \begin{array}{c} ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ \\ BCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZA \end{array} \quad (8.2.2)$$

მაგალითი 8.2.2. იმპერატორ ავგუსტუსის საყვარელი ფრაზა - „ ესტინა ლენტე", ქართულად: „იჩქარე ნელა" დაშიფრული სახით ასე ჩაიწერება: GFTUJOB MFOUF.

კეისრის ალგორითმში გასაღებს განსაზღვრავს გადანაცვლების წესი, კერძოდ, ის რომ ყოველი ასო-ნიშანი ანბანურ მწკრივში გადაინაცვლებს სამი პოზიციით, ანუ, საზოგადოდ, k პოზიციით, სადაც $k \in \{1, \ldots, 26\}$ (კეისრის ალგორითმში $k = 3$, ხოლო ავგუსტუსის ალგორითმში $k = 1$). ცხადია, რომ შესაძლებელია გადანაცვლების წესის გართულება, ვთქვათ სპეციალური მატრიცების შემოღება და სხვ.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. რას ნიშნავს კრიპტოგრაფია?

4. რას გულისხმობს კრიპტოანალიზის სტატისტიკური მეთოდი?

5. რა არის საინტერესო XV საუკუნეში გამოქვეყნებულ არაბულ ენციკლოპედიაში?

6. ტექსტის თანახმად, რა არის დამახასიათებელია ადამიანებისთვის?

7. რა არის ცეზარის ალგორითმის იდეა?

8. **რომელ ცივილიზაციაზე არ დასტურდება კრიპტოგრაფიის არსებობა?**
   ა. რომი
   ბ. საბერძნეთი
   ც. ეგვიპტე
   დ. აცტეკები
9. **მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები ან ფრაზები:**
   ა. გაიუს ოქტავიანე იყო იულიუს კეისრის ....
   ბ. ქართულ ტექსტში .... ასო შედარებით .... ჩნდება, ვიდრე, ვთქვათ „ც“ ასო-ნიშანი.
   გ. საიდუმლო შიფრს იყენებდა რომის კეისარი .... ამიტომ დღესაც სამეცნიერო ლიტერატურაში .... სახელით მოიხსენიება ერთ-ერთი კრიპტოგრაფიული ალგორითმი.

10. **შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:**
    კრიპტოანალიზი

    სტატისტიკური

    გადანაცვლება

    სიხშირული

11. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**
    11.1. თუ ალგორითმს შესაბამის შიფრის ლათინური მივიღებთ პირველ ჩავწერთ ხოლო რიგის ანბანის ასო-ნიშნებს მეორე სტრიქონში დავალაგებთ ასო-ნიშნებს, დაშიფვრის სტრიქონში ჩვეულებრივი მიხედვით,

11.2. საზოგადოდ, k ალგორითმში განსაზღვრავს სამი წესი, ის რომ ანბანურ ყოველი ასო-ნიშანი კერძოდ, მწკრივში გადაინაცვლებს გადანაცვლების პოზიციით, ანუ, ი.ცეზარის პოზიციით გასაღებს

11.3. იმ ალგორითმების ცეზარის ვარიანტს ალგორითმი მხრივ არსებული წარმოადგენს ერთ-ერთ იულიუს თავის დროს

12. **მასწავლებლის დახმარებით შეადგინეთ მოკლე გეგმა.**

13. **დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი.**

14. **გადმოეცით ტექსტი თხრობით.**

15. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 21
ევკლიდეს ალგორითმი და შებრუნებულის პოვნა

განვიხილოთ ევკლიდეს ალგორითმი. დავუშვათ, რომ მოცემულია მთელი რიცხვები – a გასაყოფი, d გამყოფი, q განაყოფი და r ნაშთი. ცნობილია, რომ ნებისმიერი a და m რიცხვებისათვის არსებობს ერთადერთი წყვილი q და r, რომელთათვისაც

$$a = mq + r, \qquad (8.3.2)$$

სადაც $0 \le r < m$.

ეს ფაქტი ცნობილია როგორც ევკლიდეს გაყოფის ალგორითმი. ამ ალგორითმის მეშვეობით შეიძლება მივიღოთ მთელი რიცხვების მეტად მნიშვნელოვანი ალგებრული თვისებები, კერძოდ, რომ a და m რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი d ყოველთვის შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$d = mq + as, \qquad (8.3.2')$$

სადაც q და s მთელი რიცხვებია.

ქვემოთ განხილულია მაგალითი იმის საილუსტრაციოდ, თუ როგორ ვიპოვოთ a და m რიცხვების (8.3.2$'$) უდიდესი საერთო გამყოფი (8.3.2) გამოსახულების მიხედვით.

მაგალითი 8.3.1. ვიპოვოთ $a = 90$ და $m = 16$ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი:

$$90 = 16 \cdot 5 + 10;$$
$$16 = 10 \cdot 1 + 6;$$
$$10 = 6 \cdot 1 + 4;$$
$$6 = 4 \cdot 1 + 2;$$
$$4 = 2 \cdot 2 + 0.$$

ბოლო სტრიქონში გამყოფის შესაბამისი რიცხვი 2 არის 90 და 16 რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი d. (8.3.2$'$) თანა-ფარდობის შესაბამისი გამოსახულება შემდეგნაირად მიიღება, რად-გან

$$2 = 6 - 4 = 6 - (10 - 6) = -10 + 6 \cdot 2 = -10 + (16 - 10)2 =$$
$$= 16 \cdot 2 - 10 \cdot 3 = 10 \cdot 2 - (90 - 16 \cdot 5)3 = -90 \cdot 3 + 16 \cdot 17,$$

მაშასადამე

$$2 = -90 \cdot 3 + 16 + 17. \square$$

დიოფანტეს პირველი ხარისხის განტოლება. განვიხილოთ მთელკოეფიციენტებიანი განტოლება:

$$ax - my = 1, \qquad (8.3.3)$$

სადაც a და m ურთიერთმარტივი რიცხვებია ($(a,m)=1$).

განტოლების ამოსახსნელად გამოიყენება ევკლიდეს ალგორითმი (როგორც 8.3.1 მაგალითში):

$$\begin{aligned} a &= mq_0 + a_1; \\ m &= a_1q_1 + a_2; \\ a_1 &= a_2q_2 + a_3; \\ &\dots\dots\dots \\ a_{k-2} &= a_{k-1}q_{k-1} + a_k; \\ a_{k-1} &= a_kq_k + 0. \end{aligned} \qquad (8.3.4)$$

(8.3.3) განტოლების (x,y) ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} x &= (-1)^{k-1}Q_{k-1}; \\ y &= (-1)^{k-1}P_{k-1}, \end{aligned} \qquad (8.3.5)$$

სადაც P_n და Q_n წარმოადგენს $a/m=[q_0,q_1,\dots,q_k]$ უწყვეტი წილადი რიცხვების სასრული მიმდევრობის მრიცხველსა და მნიშვნელს. ადგილი აქვს შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებას:

$$\begin{aligned} &P_{-2}=0, \quad P_{-1}=1; \\ &Q_{-2}=1, \quad Q_{-1}=0; \\ &P_n = q_nP_{n-1}+P_{n-2} \quad (n\ge 0); \\ &Q_n = q_nQ_{n-1}+Q_{n-2} \quad (n\ge 0). \end{aligned} \qquad (8.3.6)$$

საჭირო გაანგარიშებებისათვის მოსახერხებელია შემდეგი ცხრილის გამოყენება (ცხრილი 8.2)

ცხრილი 8.2. პარამეტრების რეკურენტული დამოკიდებულება

n	-2	-1	0	1	2	· · ·	$k-1$	k
q_n			q_0	q_1	q_2	· · ·	q_{k-1}	q_k
P_n	0	1	P_0	P_1	P_2	· · ·	P_{k-1}	P_k
Q_n	1	0	Q_0	Q_1	Q_2	· · ·	Q_{k-1}	Q_k

მაგალითი 8.3.2. დავუშვათ, რომ მოცემულია შედარება ($ax\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$ შედარების, როდესაც $(a,m)=1$, კერძო შემთხვევა):

$$2x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5). \qquad (8.3.7)$$

მისი ამოხსნა ნიშნავს, აგრეთვე, რიცხვი 2-ის შებრუნებული მნიშვნელობის პოვნას (გამოსახულება (4.1.6)).* შესაძლებელია ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენება:

$$2 = 5 \cdot 0 + 2;$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1;$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0.$$

შევნიშნოთ, რომ (8.3.7) შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც

$$2x - 5y = 1$$

თანაფარდობის ანალოგიური გამოსახულება და x მნიშვნელობა ვიპოვოთ (8.3.5) ფორმულების მეშვეობით, ე.ი.

$$x \equiv (-1)^{k-1} Q_{k-1} \pmod{m}. \qquad (8.3.8)$$

განსახილველ შემთხვევაში 8.2 ცხრილი მიიღებს 8.3 სახეს.

ცხრილი 8.3. პარამეტრების მნიშვნელობები 8.3.2 მაგალითისათვის

n	-2	-1	0	1	2
q_n			0	2	2
P_n	0	1	0	1	2
Q_n	1	0	1	2	5

მასასადამე, $k = 2$ და (8.3.8) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ:

$$x \equiv (-1)^1 Q_1 \equiv -2 \equiv 3 \pmod{5}. \ \square$$

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

* განსხვავება ისაა, რომ **GF(p)** ველში $(a, p) = 1$ პირობა ყოველთვის სრულდება, რადგან p მარტივია, მაგრამ, ვთქვათ, რგოლის ელემენტებისათვის $(a, m) = 1$ პირობის შესრულება აუცილებელია; აგრეთვე: შედარების ამონახსნს წარმოდგენს $\{x\}$ ნაშთთა კლასის სიმრავლე. აქ ამ საკითხს არ განვიხილავთ.

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

____

____

____

____

____

____

____

3. **რას ეწოდება ევკლიდეს გაყოფის ალგორითმი?**

____

____

4. **რა რიცხვები უნდა გვქონდეს მოცემული ევკლიდეს ალგორითმისთვის?**

____

____

5. **რისი გამომხატველია ფორმულა** $d = mq + as$?

____

____

6. $ax - my = 1$ **გამოსახულებაში როგორი რიცხებია a და m?**

____

____

____

7. **რას გვაჩვენებს მაგალითი 8.3.1?**

____

____

____

8. **მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები:**

   ბოლო სტრიქონში შესაბამისი რიცხვი 2 არის 90 და 16 რიცხვების .... საერთო გამყოფი. ადგილი აქვს შემდეგ .... დამოკიდებულებას:

9. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

   შეიძლება ამ მნიშვნელოვანი რიცხვების მეშვეობით მეტად მთელი თვისებები, ალგორითმის მივიღოთ ალგებრული

   ____

   ____

   ____

10. შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:

რეკურენტული

ალგორითმი

ურთიერთმარტივი

პარამეტრი

11. a და m რიცხვები დიოფანტეს პირველი ხარისხის განტოლებაში არიან:

ა. ურთიერთმარტივი

ბ. მარტივი

გ. რეკურენტული

დ. დისკრეტული

12. შეადგინეთ მოკლე გეგმა მასწავლებლის დასმარებით:

13. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი.

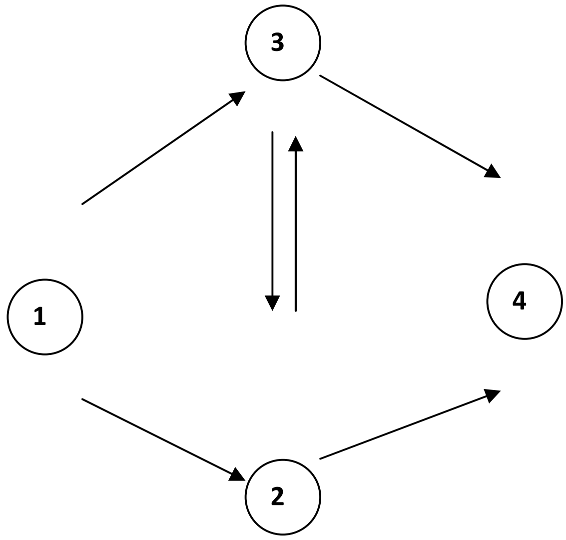
14. გადმოეცით ტექსტი თხრობით.

15. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 22
ნაკადები ქსელებში

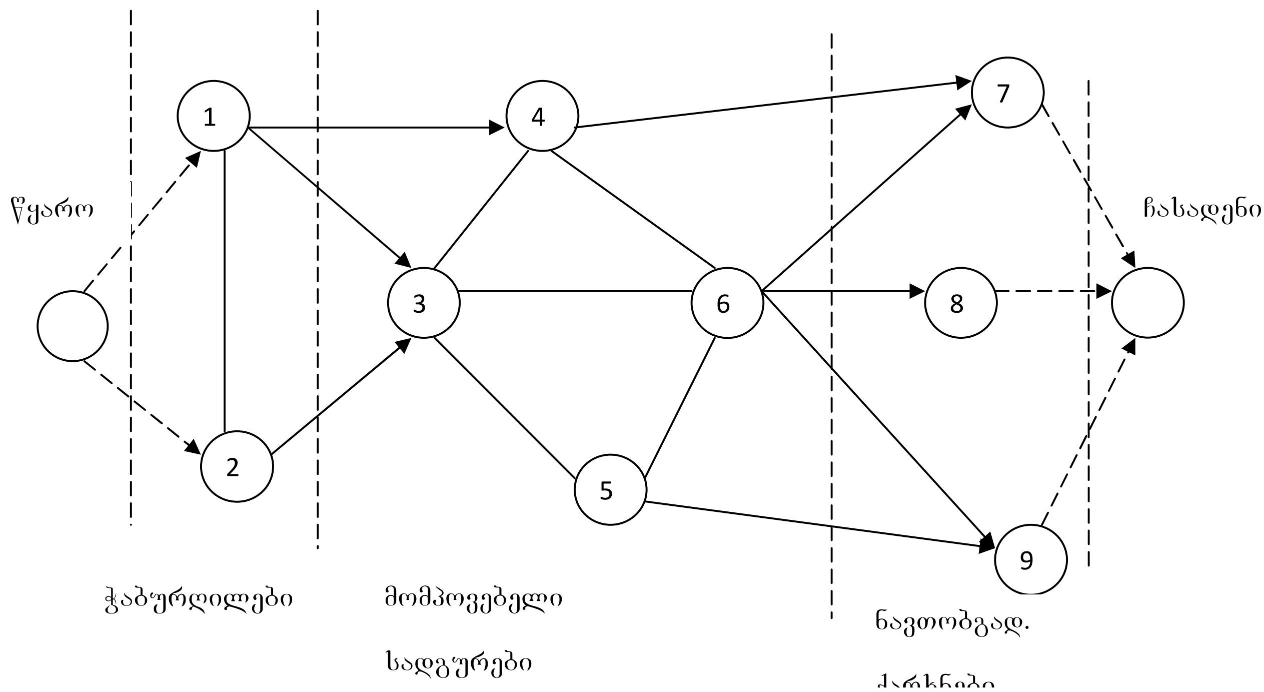
შემოვიღოთ ქსელის ცნება. ქსელი შედგება $x_1, x_2, \ldots x_n$ **წვეროების** სიმრავლისგან, (რომელიც აღინიშნება X –ით) და ამ წვეროების შემაერთებელი $a_1, a_2, \ldots a_m$ **წიბოების** სიმრავლისგან, (რომელიც აღინიშნება A–თი) თუ წიბოები ორიენტირებულია, რასაც, ჩვეულებრივ, ისრით აღნიშნავენ, მაშინ მას **რკალს** უწოდებენ. რკალებისგან შედგენილ ქსელს კი – ორიენტირებულს. რკალს ხშირად წვეროთა დალაგებული წყვილის სახითაც აღნიშნავენ. მაგალითად, ნახ. 1-ზე მოყვანილი ქსელი, რომელიც შედგება 4 წვეროსგან და 6 რკალისგან, შეიძლება შემდეგნაირად აღვწეროთ:



ნახ.1

ჯერჯერობით, ვხედავთ, რომ ქსელისა და გრაფის ცნება ერთმანეთისგან არ განსხვავდება. ვთქვათ, ყოველ (x_i, x_j) რკალს მიწერილი აქვს q_{ij} არაუარყოფითი რიცხვი, რომელსაც რკალის გამტარუნარიანობა ეწოდება. წვეროთა სიმრავლიდან გამოვყოთ ორი წვერო: s–წყარო და t–ჩასადენი. ასეთ გრაფს ვუწოდოთ ქსელი. ქსელში მაქსიმალური ნაკადის პოვნის ამოცანა გრაფთა თეორიის ერთ-ერთი ყველაზე საინტერესო და პრაქტიკულად გამოყენებადი ამოცანაა.

სანამ მათემატიკურად ჩამოვაყალიბებდეთ მაქსიმალური ნაკადის ამოცანას, განვიხილოთ ერთი პრაქტიკული მაგალითი; ვთქვათ, მოცემულია მილსადენების ქსელი, რომელიც გამოიყენება ნედლი ნავთობის ტრანსპორტირებისთვის ჭაბურღილიდან ნავთობგადამამუშავებელ ქარხნებამდე. თითოეულ მილსადენს აქვს თავისი გამტარუნარიანობა, რომელიც მისი დიამეტრის პროპორციულია. ისმის ამოცანა, მოცემულ პირობებში რა მაქსიმალური სიდიდის ნავთობის გადატანა შეგვიძლია, ანუ რისი ტოლია მაქსიმალური ნაკადი ჭაბურღილიდან ქარხნებამდე? ამ ამოცანის ამოსახსნელად პირველ რიგში საწყისი ქსელი უნდა მივიყვანოთ ქსელზე ერთი წყაროთი და ერთი ჩასადენით. ამას შევძლებთ, თუ შემოვიტანთ დამატებით რკალებს წყაროდან ჭაბურღილებამდე და ქარხნებიდან ჩასადენამდე. ეს რკალები ნახ.2-ზე აღნიშნულია წყვეტილი ხაზებით.



ნახ.2

ამოცანის მათემატიკური მოდელის ჩასაწერად ჯერ შემოვიღოთ **ნაკადის** ცნება. ნაკადი s წყაროდან t ჩასადენში (უფრო მოკლედ, $s-$დან $t-$ში) ვუწოდოთ ξ_{ij} არაუარყოფითი რიცხვების ერთობლიობას (თითოეული მათგანი შეესაბამება ქსელის გარკვეულ რკალს), თუ ეს რიცხვები აკმაყოფილებენ შემდეგ შეზღუდვებს:

$$\sum_i \xi_{ij} - \sum_k \xi_{jk} = \begin{cases} -v, & \text{თუ} \quad j = s, \\ 0, & \text{თუ} \quad j \neq s, t, \\ v, & \text{თუ} \quad j = t. \end{cases} \qquad (5)$$

$$v \ge 0, \qquad 0 \le \xi_{ij} \le q_{ij} \qquad \text{ყოველი} \quad i, j\text{–სათვის}. \qquad (6)$$

აქ პირველი ჯამი აღებულია x_j წვეროში შემავალი რკალების მიმართ, მეორე კი – x_j წვეროდან გამომავალი რკალების მიმართ. არაუარყოფით v რიცხვს ეწოდება ნაკადის სიდიდე, ხოლო ξ_{ij} –ს ეწოდება ნაკადი (x_i, x_j) რკალზე.

შევნიშნოთ, რომ (5) შეზღუდვები წარმოადგენენ ე.წ. ბალანსის განტოლებებს. ყოველ წვეროში (გარდა საწყისი და ჩასადენისა) შემოდის იმდენი ნაკადი, რამდენიც გადის ამ წვეროდან. (6) შეზღუდვა კი ნიშნავს, რომ ξ_{ij} ნაკადი რკალზე შემოსაზღვრულია რკალის q_{ij} გამტარუნარიანობით.

ცხადია, რომ მაქსიმალური ნაკადის მოძებნის ამოცანა წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ამოცანას $v = \sum_j \xi_{sj}$ მიზნის ფუნქციით და (5)-(6)შეზღუდვებით და ის შეიძლება ამოიხსნას ცნობილი მეთოდებით. მაგრამ ამ ამოცანის სპეციალური სტრუქტურა საშუალებას იძლევა მისთვის აიგოს გაცილებით ეფექტური ალგორითმი, ვიდრე, მაგალითად, სიმპლექს-მეთოდია.

შემოვიღოთ **ჭრილის** ცნება: ვთქვათ, X_0 ქსელის X წვეროთა სიმრავლის რაღაც ქვესიმრავლეა, ხოლო $\bar{X}_0$ არის X_0 სიმრავლის დამატება. (X_0, $\bar{X}_0$) ჭრილი ეწოდება ყველა ისეთი (x_i, x_j) რკალების სიმრავლეს, რომელთათვისაც $x_i \in X_0$ და $x_j \in \bar{X}_0$. ამრიგად, ჭრილი წარმოადგენს წიბოთა სიმრავლეს, რომელთა ამოყრა ქსელიდან ამ ქსელს არაბმულად აქცევს, ან, სხვანაირად, არ იარსებებს s –დან t –ში მიმავალი გზა.

(X_0, $\bar{X}_0$) ჭრილის სიდიდე ვუწოდოთ იმ რკალების გამტარუნარიანობათა ჯამს, რომელთა საწყისი წვერო X_0 –შია, ხოლო საბოლოო $\bar{X}_0$ –ში.

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

3. **რას ეწოდება რკალი?**

4. **როგორ უნდა მივიღოთ გრაფიდან ქსელი?**

5. **რას ეწოდება ნაკადი?**

6. **რას ეწოდება ჭრილი?**

7. **რას ნიშნავს ბალანსის განტოლება?**

8. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

   უნდა პირველ ჩასადენით ამ ამოსახსნელად საწყისი ქსელზე ერთი ქსელი წყაროთი და ერთი ამოცანის რიგში მივიყვანოთ

ალგორითმი, ამ სტრუქტურა მისთვის აიგოს გაცილებით ეფექტური მაგალითად, იძლევა სიმპლექს-მეთოდია ამოცანის სპეციალური ვიდრე, საშუალებას

ამოცანა ცხადია, წარმოადგენს მაქსიმალური ნაკადის პროგრამირების ამოცანას რომ მოძებნის წრფივი

9. **შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:**

შეზღუდვა

ქსელი

ბმული

გრაფი

10. **მრავალწერილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები**

ჭრილი წარმოადგენს .... სიმრავლეს, რომელთა ამოყრა ქსელიდან ამ ქსელს .... აქცევს.

თითოეულ მილსადენს აქვს თავისი ………………….. რომელიც მისი დიამეტრის ……………………….

თუ წიბოები ორიენტირებულია, რასაც, ჩვეულებრივ, …………. აღნიშნავენ, მაშინ მას ……….. უწოდებენ.

11. **შეადგინეთ მოკლე გეგმა მასწავლებლის დასმარებით:**

12. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი.

13. გადმოეცით ტექსტი თხრობით.

14. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 23
მარაგთა მართვის ამოცანები

როგორც ბიზნესში, ასევე წარმოებაში მიღებულია მატერიალური რესურსების ან მაკომპლექტებელი მასალების გარკვეული მარაგების შექმნა, საწარმოო პროცესის უწყვეტობის შესანარჩუნებლად. მარაგის ძალიან მცირე მოცულობას შეიძლება მოყვეს წარმოების გაჩერება, რაც დიდ დანახარჯებთანაა დაკავშირებული. მარაგის ძალიან დიდი მოცულობა კი შენახვის დიდ დანახარჯებს იწვევს. მარაგის მართვის ამოცანაა მარაგის ისეთი დონის განსაზღვრა, რომელიც გარკვეული აზრით საშუალედოა ხსენებულ ორ უკიდურეს შემთხვევას შორის. ასეთი ამოცანების ფორმულირების და გადაწყვეტის დროს გადამწყვეტ ფაქტორს წარმოადგენს ის, რომ მოთხოვნის მოცულობა და შესანახი მარაგი (დროის ერთეულში) შეიძლება იყოს დეტერმინირებული (ზუსტად განსაზღვრული), ან ალბათური (აღწერილი ალბათური განაწილებით). ჩვენ განვიხილავთ დეტერმინირებულ მოდელებს. დეტერმინირებული მოდელები, თავის მხრივ, შეიძლება იყოს სტატიკური და დინამიკური. სტატიკურ მოდელებში განიხილება სიტუაციები, როცა მოთხოვნის მოცულობა შესანახ პროდუქციაზე (მარაგი) მუდმივია. დინამიკურ მოდელებში კი მოთხოვნის მოცულობა დროის ფუნქციაა. მარაგთა მართვის სტრატეგია ითვალისწინებს შემდეგ ორ კითხვაზე პასუხის გაცემას:

1. შესანახი მოცულობის რა მარაგი შევუკვეთოთ?
2. როდის შევუკვეთოთ?

პასუხს პირველ კითხვაზე იძლევა მარაგის ეკონომიური მოცულობა დანახარჯების შემდეგი ფუნქციის მინიმიზაციის გზით:

$$\begin{pmatrix}\text{მარაგთა მართვის}\\ \text{სისტემის ჯამური}\\ \text{დანახარჯები}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{დანახარჯები}\\ \text{შეძენაზე}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{დანახარჯები}\\ \text{შეკვეთის}\\ \text{გაფორმებაზე}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}\text{დანახარჯები}\\ \text{მარაგის}\\ \text{შენახვაზე}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{დანაკარგები}\\ \text{დეფიციტის}\\ \text{გამო}\end{pmatrix}$$

პასუხი მეორე კითხვაზე დამოკიდებულია განსახილველი ამოცანის ტიპზე.

განვიხილოთ მარაგთა მართვის უმარტივესი ამოცანა:

1. ერთპროდუქტიანი სტატიკური მოდელი.

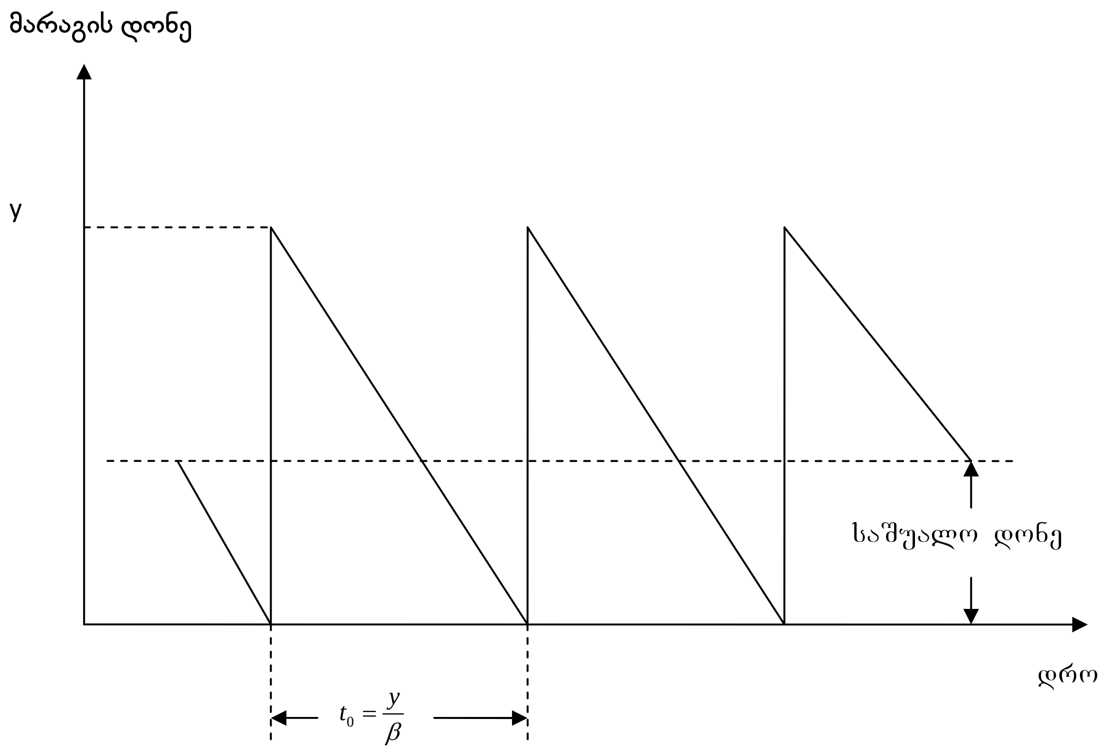
ვიგულისხმოთ, რომ მოთხოვნა დროში მუდმივია, მარაგის შევსება ხდება მყისიერად და არ გვაქვს დეფიციტის შემთხვევა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

y – შეკვეთის მოცულობა.

β – მოთხოვნის ინტენსივობა (იზომება დროის ერთეულში პროდუქციის რაოდენობით).

t_0 – შეკვეთის ციკლის ხანგრძლივობა (იზომება დროის ერთეულებში).

მარაგის დონე იცვლება ნახაზზე მოცემული ფუნქციის მიხედვით.



მარაგის შევსება ხდება ერთეულით მყისიერად, როცა მარაგი ილევა, ანუ როცა მისი დონე ნულის ტოლი ხდება. მარაგი თანაბრად იხარჯება მუდმივი β ინტენსივობით. ციკლის ხანგრძლივობაა $t_0 = \dfrac{y}{\beta}$. მარაგის საშუალო დონე t_0 დროის განმავლობაში ტოლია $\dfrac{y}{2}$ ერთეულის.

დანახარჯების ფუნქციის ასაგებად დაგვჭირდება ორი პარამეტრი:

K – დანახარჯები შეკვეთის გაფორმებაზე (რომელიც არ არის დამოკიდებული შესაკვეთი პროდუქციის რაოდენობაზე),

h – დანახარჯები შენახვაზე (ერთეული პროდუქციისა დროის ერთეულში)

ჯამური დანახარჯები დროის ერთეულში (აღინიშნება TCU Total Cost per Unit time, ანუ ჯამური დანახარჯები დროის ერთეულში) იქნება:

$$TCU\left(y\right)=\frac{K}{y/\beta}+h\cdot\frac{y}{2}.$$

ჯამური შეკვეთის მოცულობის ოპტიმალურ მნიშვნელობას მივიღებთ, თუ მოვახდენთ $TCU\left(y\right)$ ფუნქციის მინიმიზაციას y–ს მიმართ. მინიმუმის აუცილებელი პირობა მოგვცემს:

$$\frac{dTCU\left(y\right)}{dy}=-\frac{K\beta}{y^2}+\frac{h}{2}=0$$

ეს პირობა საკმარისიცაა, რადგან ფუნქცია ამოზნექილია. ვღებულობთ შეკვეთის ოპტიმალურ მნიშვნელობას:

$$y^*=\sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$$

შესაბამისად, ერთი ციკლის ხანგრძლივობაა $t^*=\frac{y^*}{\beta}$.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

______________________ ____

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

____

____

____

____

____

____

____

3. რა არის მარაგის მართვის ამოცანების მიზანი?

4. მარაგის მართვის ამოცანის რომელ მოდელში არის მოთხოვნის მოცულობა დროის ფუნქცია?
   ა. ერთპროდუქტიან
   ბ. სტატიკურ
   გ. მრავალპროდუქტიან
   დ. დინამიურ
5. რას აღნიშნავს β ერთპროდუქტიან სტატისტიკურ მოდელში?
   ა. შეკვეთის მოცულობა
   ბ. შეკვეთილი ციკლის ხანგრძლივობა
   გ. მარაგის დონე
   დ. მოთხოვნის ინტენსივობა
6. რა არის ნაგულისხმევი ერთპროდუქტიანი სტატისტიკური მოდელის ამოცანაში?

7. როგორ უნდა მივიღოთ ჯამური შეკვეთის მოცულობის ოპტიმალური მნიშვნელობა?

8. რისი ფორმულაა $t^* = \dfrac{y^*}{\beta}$. ?

9. შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:
   სტატიკური

ინტენსივობა

მარაგი

სტრატეგია

10. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

    ხდება მოთხოვნა რომ დროში გვაქვს შევსება მყისიერად არ მუდმივია, დეფიციტის შემთხვევა ვიგულისხმოთ, და

    დანახარჯებთანაა ძალიან გაჩერება, დაკავშირებული მოცულობას შეიძლება მცირე რაც დიდ მარაგის წარმოების მოყვეს

    ნულის როცა შევსება ხდება მყისიერად, ანუ მისი დონე ტოლი ილევა, ხდება მარაგი მარაგის ერთეულით როცა

11. **რას ნიშნავს სიტყვა სტრატეგია?**

12. **შეადგინეთ მოკლე გეგმა მასწავლებლის დასმარებით:**

13. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი.

14. გადმოეცით ტექსტი თხრობით.

15. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 24
ოპერაციათა გამოკვლევის საგანი

რთული, მათ შორის ეკონომიკური ობიექტების (სისტემების) მართვის აუცილებლობამ გამოიწვია სპეციალური მეთოდების შექმნა, რომლებიც აადვილებენ სწორი გადაწყვეტილებების მიღებას. ეს მეთოდები დღესდღეობით ცნობილია "ოპერაციათა გამოკვლევის" სახელწოდებით. თავიდან ამ მეთოდებს იყენებდნენ საბრძოლო ოპერაციებში გადაწყვეტილებელის მიღებისა და მათი დასაბუთებისათვის. უკანასკნელი 50 წლის განმავლობაში ეს მეთოდები ინტენსიურად ვითარდება და გამოიყენება ადამიანის მოღვაწეობის ისეთ სფეროებში, როგორიცაა მრეწველობა, სოფლის მეურნეობა, ეკონომიკური გამოკვლევები, ტრანსპორტი, ჯანმრთელობის დაცვა, საყოფაცხოვრებო მომსახურება, ფსიქოლოგია და სოციალური მეცნიერებებიც კი.

"ოპერაციათა გამოკვლევის" ცნების გააზრებისათვის მოვიყვანოთ ორი განმარტება:

1. ოპერაციათა გამოკვლევა ოპტიმალური გადაწყვეტილებების მიღების მათემატიკური მოდელების თეორია და პრაქტიკაა.
2. ოპერაციათა გამოკვლევა იმ პრაქტიკულ საკითხებზე ცუდი პასუხების გაცემის ხელოვნებაა, რომლებზეც კიდევ უფრო უარესი პასუხები გაიცემა სხვა მეთოდების გამოყენებით.

პირველი განმარტება საკითხის მათემატიკურ მხარეს ეხება და შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს: ოპერაციათა გამოკვლევის ქვეშ იგულისხმება მათემატიკური რაოდენობრივი მეთოდების გამოყენება, მიღებული გადაწყვეტილებების დასაფუძნებლად, ადამიანის მიზანმიმართული მოღვაწეობის იმ დარგებში, რომლებშიც არსებობს სხვადასხვა გზა მიზნის მისაღწევად.

მეორე ნახევრად ხუმრობით მოცემული განმარტება ეკუთვნის ოპერაციათა გამოკვლევის ერთ-ერთ ფუძემდებელ ტ. საატის. მისი არსი იმაში მდგომარეობს, რომ გადაწყვეტილებების მიღების პრაქტიკული სიტუაციები იმდენად რთულია და ამავე დროს საჭირო, რომ მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით მიღწეული უმნიშვნელო პროგრესიც კი ძალიან არსებითია. თუ შევაჯამებთ ზემოთქმულს, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ოპერაციათა გამოკვლევის საგანი ეს არის მეცნიერული მეთოდების კომპლექსი მოწოდებული ორგანიზაციული სისტემების ეფექტურად მართვისათვის.

ოპერაცია და მისი მათემატიკური მოდელი

მოვიყვანოთ ოპერაციის რამდენიმე მაგალითი: 1) სამრეწველო საწარმოს აინტერესებს საწარმოო რესურსების ეკონომიის საკითხი; 2) ახალ ავტოსტრადაზე უნდა განლაგდეს ავტოგასამართი სადგურების ქსელი, საჭიროა რაციონალურად განისაზღვროს ამ ქსელის პარამეტრები; 3) საქალაქო ტრანსპორტის სამსახურს აინტერესებს სატრანსპორტო საშუალებების ოპტიმალური მარშრუტები. ყველა მაგალითში ოპერაციის კვლევის ძირითადი ამოცანაა გარკვეული მიზნის მისაღწევად საუკეთესო გზის ამორჩევა და მისი შეფასება.

ოპერაციათა კვლევაში მთავარი როლი ენიჭება მათემატიკურ მოდელირებას. სანამ მათემატიკურ მოდელს ავაგებდეთ, საჭიროა ობიექტის (სისტემის) წინასწარი შესწავლის საფუძველზე გამოვავლინოთ ამ ობიექტის ისეთი მახასიათებლები, რომელთა მნიშვნელობების ვარირება შეიძლება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, უნდა დავადგინოთ მართვადი ცვლადების სიმრავლე. მათემატიკური მოდელის ასაგებად საჭიროა გვქონდეს სწორი წარმოდგენა ობიექტის (სისტემის) ფუნქციონირების მიზანზე და ინფორმაცია შეზღუდვებზე, რომლებიც განსაზღვრავენ მართვადი ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობებს. როგორც მიზანი, ასევე შეზღუდვები უნდა ჩაიწეროს ფუნქციების სახით, რომელთა არგუმენტებს წარმოადგენენ მართვადი ცვლადები.

მათემატიკური მოდელები შეიძლება დავყოთ დეტერმინირებულ და სტოქასტურ მოდელებად. დეტერმინირებულ მოდელებში ყველა ფაქტორი, რომელიც ახასიათებს განსახილველ ობიექტს, მკვლევრისათვის ცნობილია. სტოქასტური მოდელები კი შეიცავენ შემთხვევით ფაქტორებს, რომელთა შესახებაც ცნობილია მათი განაწილების კანონები.

პრაქტიკული ამოცანების უმრავლესობა გულისხმობს გარკვეული აზრით საუკეთესო (ოპტიმალური) გადაწყვეტილების (ალტერნატივის) ამორჩევას (მაგალითად, მოგების მაქსიმუმი, დანახარჯების მინიმუმი, გარკვეული ოპერაციის ჩატარებისათვის საჭირო დროის მინიმუმი და ა.შ.). შესაბამისი მათემატიკური მოდელებიც ძალიან ხშირად ოპტიმიზაციის ამოცანებია. ამოცანას, რომელშიც მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმს ვეძებთ და ცვლადები გარკვეულ პირობებს (შეზღუდვებს) აკმაყოფილებენ, მათემატიკური პროგრამირების ამოცანა ეწოდება. თუ $x_j,\ j=1,\dots,n$ საკვლევი სისტემის მართვადი ცვლადებია და ამ სისტემის ფუნქციონირება ხასიათდება მ შეზღუდვით, მათემატიკური მოდელი შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

იპოვეთ $z=f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციის ექსტრემუმი (მიზნის ფუნქცია) შემდეგ პირობებში $g_i(x_1,\dots,x_n)\le b_i,\ i=1,\dots,m;\ x_j\ge 0,\ j=1,\dots,n$ (შეზღუდვები).

მიზნის ფუნქციისა და შეზღუდვების სტრუქტურის მიხედვით შეიძლება მივიღოთ წრფივი, არაწრფივი, დინამიკური, დისკრეტული (მთელრიცხვა), სტოქასტური პროგრამირების ამოცანები. ოპტიმალური (თუ ეს შესაძლებელია) ან მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად გამოიყენება ცნობილი ალგორითმები (თუ ასეთი არ არსებობს, უნდა დამუშავდეს ახალი).

როგორც წესი, პრაქტიკულ ამოცანებში ცვლადებისა და შეზღუდვების რიცხვი საკმაოდ დიდია, ამიტომ არსებითია კომპიუტერის როლი პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრაში. ამისათვის ხდება ალგორითმის კომპიუტერისათვის გასაგებ ენაზე გადატანა (დაპროგრამება).

მათემატიკური პროგრამირების ზემოჩამოთვლილ მეთოდებს შორის ყველაზე განვითარებულია და თითქმის საბოლოო სახე აქვს მიღებული წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

3. **რა მეთოდებს ეწოდებათ „ოპერაციათა გამოკვლევა“?**

4. **რატომ არის მათემატიკური მოდელები ხშირად ოპტიმიზაციის ამოცანები?**

____

____

____

5. **რა აროს ოპერაციათა კვლევის ძირითადი ამოცანა?**

____

____

____

6. **რას ეწოდება მათემატიკური პროგრამირების ამოცანა?**

____

____

____

7. **რა სფეროებში გამოიყენება მათემატიკური მოდელირება?**

____

____

____

8. **მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები:**

.... მოდელებში ყველა ფაქტორი, რომელიც ახასიათებს განსახილველ ობიექტს, მკვლევრისათვის ცნობილია, ... მოდელები კი შეიცავენ შემთხვევით ფაქტორებს, რომელთა შესახებაც ცნობილია მათი განაწილების კანონები. პრაქტიკული ამოცანების უმრავლესობა გულისხმობს გარკვეული აზრით საუკეთესო (...................) გადაწყვეტილების (ალტერნატივის) ამორჩევას.
ოპერაციათა კვლევაში მთავარი როლი ენიჭება მათემატიკურ ....

9. **შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:**

მოდელი

____

____

____

ოპტიმალური

____

დეტერმინებული

10. წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები

სტოქასტურ მოდელები და დავყოთ დეტერმინირებულ მოდელებად შეიძლება მათემატიკური

ოპერაციის მაგალითში ძირითადი კვლევის გარკვეული ამოცანაა გზის მისაღწევად საუკეთესო ამორჩევა და მისი ყველა მიზნის შეფასება

პროგრამირების ყველაზე თითქმის სახე წრფივი მეთოდებს ზემოჩამოთვლილი ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს მათემატიკური და პროგრამირების საბოლოო შორის აქვს მიღებული განვითარებულია

11. მიზნის ფუნქციისა და შეზღუდვების სტრუქტურის მიხედვით როგორ ამოცანას *<u>არ</u>* ვიღებთ ?

ა. დისკრეტულ

ბ. მრუდ

გ. წრფივ

დ. სტოქატურ

12. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი რამდენიმე წინადადებით.

13. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 25
მთელრიცხვა ალგორითმების ამოცანები

მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანებში ვგულისხმობთ წრფივი პროგრამირების ამოცანებს, რომლებშიც ცვლადები (ყველა ან ნაწილი) აკმაყოფილებენ მთელობის (დისკრეტულობის) პირობას. მიუხედავად ბოლო ათწლეულებში ჩატარებული ინტენსიური გამოკვლევებისა, მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის ალგორითმები სრულყოფილებისაგან ჯერ კიდევ შორსაა. ცვლადების დიდი რაოდენობის შემთხვევისათვის არ არსებობს ასეთი ამოცანების ამოხსნის საიმედო ალგორითმები.

განვიხილოთ კაპიტალდაბანდებათა განაწილების ამოცანა, რომლის მათემატიკურ მოდელსაც წარმოადგენს მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანა.

განიხილება ხუთი პროექტის შესაძლო დაფინანსების საკითხი სამი წლის ვადით. ცხრილში მოცემულია თითოეული პროექტისათვის მისი რეალიზაციის შედეგად მიღებული სავარაუდო მოგება და აუცილებელი კაპიტალდაბანდებები წლების მიხედვით.

პროექტი	დანახარჯები			მოგება (მლნ. ლარი)
	I წელი	II წელი	III წელი	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
შესაძლო კაპიტალი (მლნ. ლარი)	25	25	25	

იგულისხმება, რომ ყოველი დამტკიცებული პროექტის რეალიზება ხდება 3 წლით. საჭიროა განისაზღვროს იმ პროექტების სიმრავლე, რომელსაც შეესაბამება მაქსიმალური მოგება. ამ ამოცანას კაპიტალდაბანდებათა განაწილების ამოცანას უწოდებენ. ავაგოთ მისი მათემატიკური მოდელი, შემოვიღოთ ცვლადები:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{თუ } j-\text{ური პროექტი დამტკიცდა,} \\ 0, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

მაშინ მოგების მაქსიმუმი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

ვიპოვოთ:

$$z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5 \to \max,$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$5x_1+4x_2+3x_3+7x_4+8x_5\le 25,$$
$$x_1+7x_2+9x_3+4x_4+6x_5\le 25,$$
$$8x_1+10x_2+2x_3+x_4-10x_5\le 25,$$
$$x_j=0\vee 1,\quad j=1,2,3,4,5.$$

ამ ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია $x_1=x_2=x_3=x_4=1,\quad x_5=0,$ ხოლო $z=95$ მლნ. ლარი. ეს ამონახსნი ნიშნავს, რომ უნდა დაფინანსდეს ყველა პროექტი, გარდა მე-5 პროექტისა. საინტერესოა შევადაროთ ამ ამონახსნს წრფივი პროგრამირების (უწყვეტი) ამოცანის ამონახსნი, რომელშიც მოხსნილია ცვლადების მთელობის პირობა, რომელიც შეცვლილია $0\le x_j\le 1$ პირობით. ამ ამოცანას აქვს ამონახსნი: $x_1=0.5789\quad x_2=x_3=x_4=1,\quad x_5=0.7368,$ ხოლო $z=108.68$ მლნ. ლარი. ასეთი ამონახსნი, დასმული ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე, აზრს მოკლებულია, რადგან ორი ცვლადი წილად მნიშვნელობებს ღებულობს. თუ ვცდით მიღებული ამონახსნის დამრგვალებას, მივიღებთ $x_1=x_5=1.$ ასეთი ამონახსნი კი არა თუ ოპტიმალური, დასაშვებიც კი არ არის მთელრიცხვა ამოცანისათვის. აქედან ვასკვნით, რომ შესუსტებულ შეზღუდვებიანი (მთელობის პირობის გარეშე) ამოცანის ამონახსნის დამრგვალება გაუმართლებელია, თუმცა უწყვეტი (შესუსტებულ შეზღუდვებიანი) ამოცანის ამოხსნა მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანების ამოხსნისას არსებით როლს თამაშობს.

მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის ალგორითმები ძირითადად ორ ტიპად იყოფა:

1. შტოების და საზღვრების ტიპის მეთოდები;
2. მოკვეთის ტიპის მეთოდები.

მაღალი ეფექტურობით ერც ერთი ტიპის მეთოდი არ გამოირჩევა. ბოლო წლებში დაგროვილი გამოცდილება უპირატესობას შტოებისა და საზღვრების ტიპის მეთოდებს ანიჭებს.

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____
______________________	____

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. დაასახელეთ ერთი მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანა

4. რას ეწოდება მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანები?

5. რამდენ და რომელ ტიპებად იყოფა მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანები?

6. რომელ მეთოდებს ანიჭებენ უპირატესობას ბოლო წლებში?

7. რას აღნიშნავს მოცემული გამოსახულება:

$$z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5 \to \max,$$

8. განმარტეთ ცვლადების მნიშვნელობები კაპიტალდაბანდებათა განაწილების ამოცანებში

9. მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები:

განვიხილოთ …………………. განაწილების ამოცანა, რომლის მათემატიკურ მოდელსაც წარმოადგენს მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანა. ასეთი ამონახსნი ………………………………………… გამომდინარე, აზრს მოკლებულია, რადგან ორი

ცვლადი ………………… მნიშვნელობებს ღებულობს. საჭიროა განისაზღვროს იმ პროექტების სიმრავლე, რომელსაც შეესაბამება ……………….. მოგება.

10. **შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:**

წრფივი

___

___

დისკრეტულობა

___

___

რეალიზება

___

___

11. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

წლის ხუთი სამი შესაძლო პროექტის საკითხი ვადით განიხილება დაფინანსების

___

___

გაუმართლებელია რომ აქედან ამოცანის ამონახსნის შეზღუდვებიანი დამრგვალება ვასკვნით, შესუსტებულ

___

___

პროგრამირების მათემატიკურ კაპიტალდაბანდებათა ამოცანა, მოდელსაც განაწილების მთელრიცხვა წარმოადგენს ამოცანა რომლის განვიხილოთ

___

___

12. **შეადგინეთ მოკლე გეგმა მასწავლებლის დასმარებით:**

___

___

___

___

___

___

___

___

13. დაწერეთ ტექსტის მოკლე შინაარსი.

14. გადმოეცით ტექსტი თხრობით.

15. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 26
მატრიცული თამაშის ამოხსნა შერეულ სტრატეგიებში

მატრიცული თამაშის ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში შეიძლება ვიპოვოთ წრფივი პროგრამირების მეთოდების ან გრაფიკული მეთოდის გამოყენებით. გრაფიკული მეთოდი მხოლოდ იმ შემთხვევაში გამოიყენება, როცა ერთ მოთამაშეს მაინც აქვს 2 სტრატეგია. ეს მეთოდი საინტერესოა იმ აზრით, რომ გრაფიკულად ხსნის უნაგირა წერტილისა და მატრიცულ თამაშებთან დაკავშირებული სხვა ცნებების არსს.

2×2 თამაში სასრულ მატრიცულ თამაშებს შორის ყველაზე მარტივია. ვთქვათ, მოცემულია 2×2 მატრიცული თამაში, რომელსაც არა აქვს უნაგირა წერტილი, ანუ $\alpha \neq \beta$.

$$\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} \end{array}$$

უნდა ვიპოვოთ ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები $x^* = (x_1; x_2)$ და $y^* = (y_1; y_2)$. თამაში გულისხმობს, რომ A მოთამაშე იყენებს A_1 და A_2 სტრატეგიების გარკვეულ შერწყმას, კერძოდ, A_1 სტრატეგიას ირჩევს x_1 ალბათობით, ხოლო A_2 სტრატეგიას – $x_2 = 1 - x_1$ ალბათობით, შესაბამისად, B მოთამაშე B_1 სტრატეგიას ირჩევს y_1 ალბათობით, ხოლო B_2 სტრატეგიას – $y_2 = 1 - y_1$ ალბათობით. მაშინ A მოთამაშის მოსალოდნელი მოგება, მეორე მოთამაშის მიერ j-ური $(j=1,2)$ სტრატეგიის არჩევის შემთხვევაში, იქნება:

$$(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, \quad j = 1,2.$$

ცხადია, A მოთამაშე ეძებს x_1-ის ისეთ მნიშვნელობას, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი მოგებების მინიმუმის მაქსიმიზაციას

$$\max_{x_1} \min_{j} \{(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}\}.$$

მაგალითი. ამოვხსნათ შემდეგი მატრიცული თამაში:

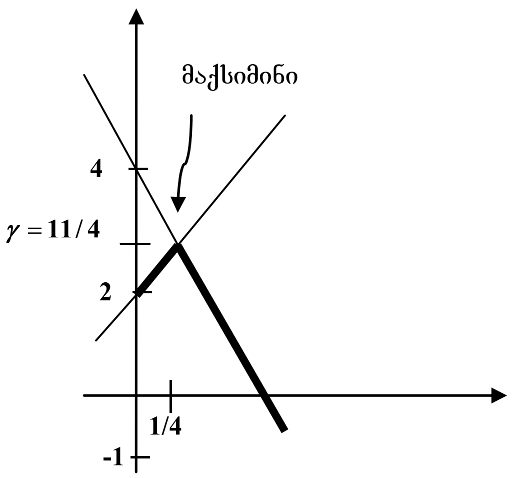
$B_1 \quad B_2$

$$A_1 \quad \begin{array}{|cc|} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{array}$$
$$A_2$$

რადგან, $\alpha=2\neq\beta=4$ მატრიცას უნაგირა წერტილი არ აქვს. A მოთამაშის მოსალოდნელი მოგებები, რომლებიც შეესაბამება B მოთამაშის წმინდა სტრატეგიებს, შემდეგია:

B მოთამაშის წმინდა სტრატეგია	A მოთამაშის მოსალოდნელი მოგება
1	$3x_1+2$
2	$-5x_1+4$

ნახ.23-ზე გამოსახულია ორი წრფე, რომლებიც B მოთამაშის წმინდა სტრატეგიებს შეესაბამება. რომ განვსაზღვროთ “უარესთაგან” საუკეთესო შედეგი, საჭიროა ავაგოთ ამ წრფეების ე.წ. ქვედა მომვლები (ნახაზზე მუქი მონაკვეთები), რომელიც შეესაბამება მინიმალურ (“უარეს”) მოგებას A მოთამაშისთვის, იმის მიუხედავად, თუ რას პასუხობს B .



ნახ.23

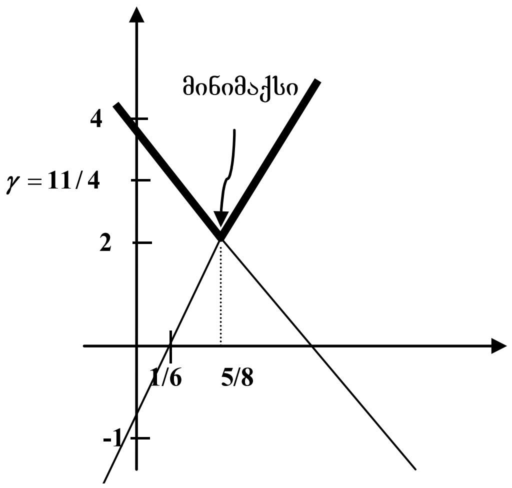
ქვედა მომვლების მაქსიმუმი შეესაბამება ოპტიმალურ $x_1^*=1/4$ ამონახსნს. ეს წერტილი 1 და 2 წრფეების გადაკვეთის წერტილია. A მოთამაშისთვის ოპტიმალური ამონახსნია A_1 და A_2 სტრატეგიების შერწყმა, შესაბამისად, 1/4 და 3/4 ალბათობებით. თამაშის შესაბამისი ფასი კი განისაზღვრება $x_1=1/4$ მნიშვნელობის ჩასმით 1 ან 2 წრფის განტოლებაში, რაც გვაძლევს $\gamma=1/4$.

B მოთამაშისთვის გვაქვს შემდეგი სურათი:

A მოთამაშის წმინდა სტრატეგია — B მოთამაშის მოსალოდნელი გადახდა

1	$6y_1 - 1$
2	$-2y_1 + 4$

ნახ.24-ზე მოცემულია ამ წრფეების ზედა მომვლები და ამ მომვლების “უარესი” წერტილი.



ნახ.24

y_1^* -ის პოვნა ეკვივალენტურია $6y_1 - 1 = -2y_1 + 4$ განტოლების ამოხსნის, რაც გვაძლევს $y_1^* = 5/8$, შესაბამისად, $y_2^* = 3/8$. ეს ნიშნავს, რომ B მოთამაშემ უნდა აირჩიოს B_1 და B_2 სტრატეგიების შერწყმა, შესაბამისად, 5/8 და 3/8 ალბათობებით.

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

____________________	____
____________________	____
____________________	____
____________________	____
____________________	____
____________________	____
____________________	____
____________________	____

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

3. **რა მეთოდებით შეიძლება ვიპოვოთ მატრიცული თამაშის ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში?**

4. **როდის გამოიყენება გრაფიკული მეთოდი?**

5. **რა არის ნახ. 23-ზე მოცემულ მაგალითში A მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია?**

6. **რა არის მოცემული 24-ე ნახატზე?**

7. **რას ეწოდება „ქვედა მომვლები“?**

8. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

მოსალოდნელი მაქსიმიზაციას მოთამაშე x1-ის ცხადია, მნიშვნელობას, ახდენს მოგებების მინიმუმის ისეთ A რომელიც ეძებს

ეს მატრიცულ უნაგირა თამაშებთან აზრით, გრაფიკულად ხსნის რომ წერტილისა და საინტერესოა დაკავშირებული სხვა არსს მეთოდი იმ ცნებების

9. შეადგინეთ წინადადებები წარმოდგენილი სიტყვების გამოყენებით:

სტრატეგია

მომვლები

გრაფიკულად

10. შეადგინეთ მოკლე გეგმა მასწავლებლის დასმარებით:

11. დაწერეთ ტექსტის შინაარსი.

12. გადმოეცით ტექსტი თხრობით.

13. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 27
გაუსის მეთოდი

ვიხილავთ n უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომელიც შეიცავს m განტოლებას.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}a_{m2} + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი ეწოდება $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ n–ეულს, რომელთა ჩასმით სისტემაში, მიიღება სწორი ტოლობები. თუ სისტემისთვის არსებობს ამონახსნი, სისტემას ჰქვია თავსებადი, თუ არა აქვს ამონახსნი არათავსებადი ჰქვია. თუ ერთზე მეტი ამონახსნი აქვს, მას ჰქვია განზღვრელი.

ორ სისტემას ჰქვია ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთი და იგივეა.

გაუსის მეთოდით სისტემის ამოხსნისას შემდეგ ოპერაციებს ვაწარმოებთ: რომელიმე განტოლებას ვამრავლებთ რაიმე რიცხვზე და ვუმატებთ სხვა განტოლებებს.

თუ $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ –მაშინ ასეთ განტოლებებს ამოვაგდებთ.

თუ რომელიმე განტოლება მიიღებს სახეს: $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \neq 0$, მაშინ ვწყვეტთ ამოხსნას, რადგან სისტემას ამ შემთხვევაში ამონასხნი არა აქვს.

ვთქვათ, $a^{11} \neq 0$, (რომელიმე კოეფიციენტი $\neq 0$) -ერთერთი პროცესი არის კოეფიციენტების ნომრების შეცვლა, შეგვიძლია აგრეთვე განტოლებების გადანაცვლება, ამიტომ ამას ყოველთვის მივაღწევთ, ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11} \neq 0$. მაშინ შეგვიძლია პირველი განტოლების გარდა ყველგან გამოვრიცხოთ x_1 ცვლადი.

ამისთვის პირველი განტოლება დავტოვოთ უცვლელი, ხოლო ყოველ შემდგომ განტოლებას დავუმატოთ $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ –ზე გამრავლებული პირველი განტოლება.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ \end{cases}$$

$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2$ =>

$a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{1n}c_n = l_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = l_2 \\ c_{kk}x_k + \cdots + c_{kn}x_n = l_k \end{cases}$$

თუ ბოლო განტოლება ორუცნობიანია, მაშინ სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. თუ ერთუცნობიანია, მაშინ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

1. როგორ განტოლებას განვიხილავთ გაუსის მეთოდში?

2. რას ეწოდება სისტემის ამონახსნი?

3. რა უნდა ვქნათ, თუ განტოლებამ მიიღო $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ სახე?

4. როდის ჰქვია ორ სისტემას ტოლფასი?

5. როდის არ აქვს სისტემას ამონახსნი?

6. როგორ სისტემას ეწოდება თავსებადი?

7. მრავალწერტილის ნაცვლად ჩასვით გამოტოვებული სიტყვები ან ფრაზები:

თუ ბოლო განტოლება ორუცნობიანია, მაშინ სისტემას აქვს ....
ამონახსნი. თუ ერთუცნობიანია, მაშინ სისტემას .... ამონახსნი აქვს.
რომელიმე განტოლებას .... რაიმე რიცხვზე და ....
სხვა განტოლებებს.

8. **შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვების გამოყენებით:**

სისტემა

____

____

განტოლება

____

____

კოეფიციენტი

____

____

9. **წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები**

გამოვრიცხოთ განტოლების x1 გარდა შეგვიძლია ცვლადი პირველი ყველგან

____

____

____

ყოველ დავტოვოთ უცვლელი, პირველი ხოლო პირველი შემდგომ
დავუმატოთ a_{i1}/a_{11} -ზე გამრავლებული განტოლება განტოლება განტოლებას

____

____

____

10. **შეადგინეთ მოკლე გეგმა მასწავლებლის დასმარებით:**

____

____

____

____

____

____

____

____

____

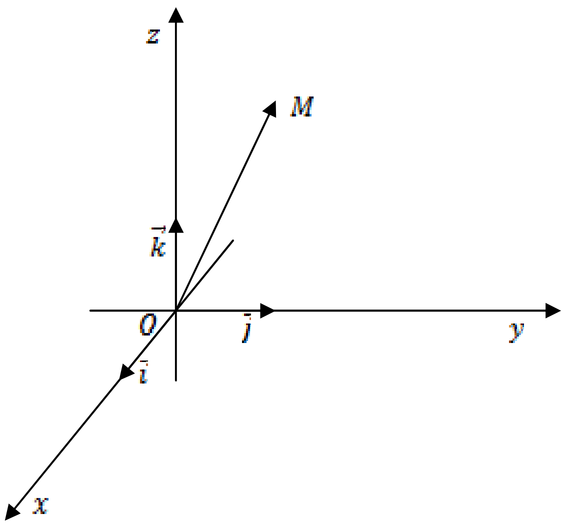
11. დაწერეთ ტექსტის შინაარსი.

12. გადმოეცით ტექსტი თხრობით.

13. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 28
ვექტორის კოორდინატები (1)



ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა; $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ერთეულოვანი ვექტორებია. ისინი განსაზღვრავენ Ox, Oy, Oz ღერძების მიმართულებებს, სურათზე ეს ვექტორები სათავეშია მოდებული, $\overrightarrow{OM}$ ვექტორს ეწოდება M წერტილის რადიუსვექტორი, თუ M წერტილის კოორდინატებია x, y და z, მაშინ $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ და (x,y,z) სამეულს ეწოდება $\overrightarrow{OM}$ **ვექტორის კოორდინატები**: $\overrightarrow{OM}(x,y,z)$.

თუ $\vec{p}$ ნებისმიერი ვექტორია და მოდებულია A წერტილში, მაშინ:

$$\vec{p} = \overrightarrow{AB};$$

მაგრამ:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} - (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k};$$

აქ $A = (x_1, y_1, z_1)$ და $B = (x_2, y_2, z_2)$.

მაშასადამე,

$$\overrightarrow{AB} = (x_x - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ამასთანავე,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_x - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 (z_2 - z_1)^2}$$

ori veqtoris skalaruli namravli

ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია. ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება რიცხვს, რომელიც ტოლია ამ ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლის:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \propto$$

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვეტორებიდან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

თვისებები:

1). ნებისმიერი ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორისთვის:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

მართლაც, თუ ერთ-ერთი ნულოვანია, მაშინ:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{b}\cdot\vec{a}=0$$

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია, მაშინ:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\alpha=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

2). $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

3). ცხადია, ორტებისთვის (სათავეზე მოდებულ ერთეულოვან ვექტორებს, რომლებიც საკოორდინატო ღერძების დადებით მიმართულებებს ემთხვევიან, ორტები ქვიათ) გვაქვს:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1\ ;\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1\ ;\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1\,.$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

4). $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot\lambda\vec{b}$

5) $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\cdot\vec{b}=\vec{a}_1\cdot\vec{b}+\vec{a}_2\cdot\vec{b}$

ვექტორთა მართობულობის პირობა, ცხადია, ასე ჩაიწერება:

$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$

თუ $\vec{p}=(x_1,y_1,z_1)$ და $\vec{q}=(x_2,y_2,z_2)$, მაშინ მართობულობის პირობისთვის გვაქვს:

$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

$\vec{p}$ და $\vec{q}$ **ვექტორების პარალელობის პირობა** იქნება ისეთი λ რიცხვის არსებობა, რომ:

$\vec{p}=\lambda\vec{q}$

ანუ:

$x_1=\lambda x_2$

$y_1=\lambda y_2$

$z_1=\lambda z_2$

ტექსტზე მუშაობა

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

______________________ ______________________________________

______________________ ______________________________________

______________________ ______________________________________

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. რას ეწოდება ვექტორის კოორდინატები?

4. რას ეწოდება ვექტორების სკალარული ნამრავლი?

5. რამდენი თვისება აქვს ნებისმიერ სკალარულ ნამრავლს?
   სამი
   ოთხი
   ხუთი
   ექვსი
6. რამდენი კოორდინატი აქვს სივრცეში ვექტორს?
   სამი
   ოთხი
   ხუთი
   ექვსი

7. სიტყვიერად ჩამოაყალიბეთ ვექტორთა პარალელურობის პირობა:

8. რას ეწოდება ორტები?

9. შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვების გამოყენებით:

კოორდინატი

ვექტორი

ნამრავლი

მართობულობა

10. შეადგინეთ გეგმა:

11. შედგენილი გეგმის მიხედვით დაწერეთ ტექსტის შინაარსი.

12. გადმოეცით ტექსტი თხრობით.

13. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 29
რიცხვთა ელემენტარული თეორიიდან

შედარებები

განსაზღვრება 8.3.1. a და b მთელ რიცხვებს ეწოდება მოდულით m შედარებადი, თუ $a-b$ იყოფა m-ზე, ე.ი. თუ $m|(a-b)$, სადაც $m \geq 1$.

მაშასადამე, შედარება არის სამი რიცხვის თანაფარდობა, რომელშიც m რიცხვი ასრულებს განსაკუთრებული ეტალონის როლს. ამ ე.წ. ეტალონს უწოდებენ "მოდულს". აღნიშნული თანაფარდობა შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$a \equiv b \,(\operatorname{mod} m).^{*} \qquad (8.3.1)$$

(8.3.1) გამოსახულებაში განასხვავებენ a მარცხენა და b მარჯვენა მხარეს.

მაგალითად, $98 \equiv 3 \ (\operatorname{mod} 5)$; $-4 \equiv 29 \ (\operatorname{mod} 11)$, რადგან $-4 \equiv 7 \ (\operatorname{mod} 11)$.

განსაზღვრება 8.3.2. a და b მთელი რიცხვები მოდულით m შედარებადია, თუ ამ რიცხვების m რიცხვზე გაყოფით მიღებული ნაშთები ტოლია.

სამართლიანია შედარებების შემდეგი თვისებები

1. *რეფლექსურობა:*

$$a \equiv a \ (\operatorname{mod} m);$$

2. *სიმეტრიულობა:*

$$a \equiv b \ (\operatorname{mod} m), \quad b \equiv a \ (\operatorname{mod} m);$$

3. *ტრანზიტულობა:*

თუ $a \equiv b \ (\operatorname{mod} m), \quad b \equiv c \ (\operatorname{mod} m),$

მაშინ $a \equiv c \ (\operatorname{mod} m)$.

კრიპტოგრაფიისთვის საჭირო თვისებებს ასახავს შემდეგი თეორემები.

თეორემა 8.3.1. თუ $a \equiv b \ (\operatorname{mod} m)$, მაშინ

$$ka \equiv kb \ (\operatorname{mod} m),$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია. □

თეორემა 8.3.2. თუ $ka \equiv kb \ (\operatorname{mod} m)$ და $(k,m)=1$, მაშინ

$$a \equiv b \ (\operatorname{mod} m). \ □$$

თეორემა 8.3.3. თუ $a \equiv b \,(\operatorname{mod} m)$ და k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, მაშინ

---

* შეიძლება შევნიშნოთ, რომ მოდულით m ნაშთთა კლასები და მოდულით m შედარებები მთელი რიცხვების თვისებების სხვადასხვა სახით წარმოდგენაა.

$$ka \equiv kb \pmod{km}. \square$$

თეორემა 8.3.4. თუ $ka \equiv kb \pmod{km}$, სადაც k და m ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია, მაშინ

$$a \equiv b \pmod{m}. \square$$

1. **ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:**

2. **ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:**

3. **როდის ეწოდება ორ ტექსტს მოდულით შედარებადი?**

4. **შედარების რა სამი თვისებაა სამართლიანი?**

5. სიტყვიერად ჩამოაყალიბეთ თეორემა 8.3.1

6. რას ეწოდება შედარება?

7. სიტყვიერად დაწერეთ ,რას ნიშნავს ტრანზიტულობა?

8. შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვებით:

სიმეტრიულობა

მოდული

თანაფარდობა

ეტალონი

9. შეადგინეთ მოკლე გეგმა მასწავლებლის დასმარებით:

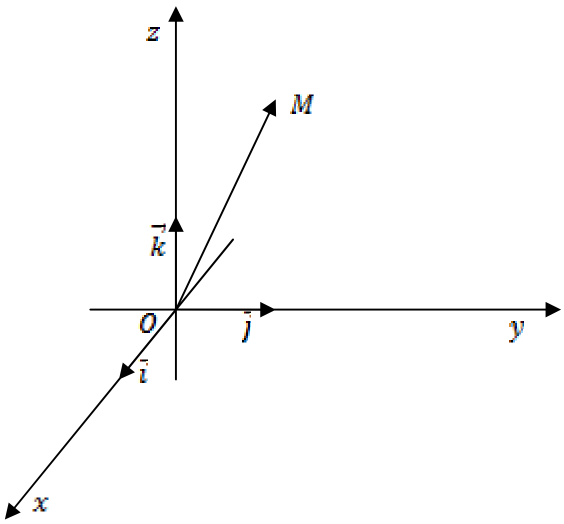
10. **შედგენილი გეგმის მიხედვით დაწერეთ ტექსტის შინაარსი.**

11. **გადმოეცით ტექსტი თხრობით.**

12. **შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:**

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო

თემა 30
ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი



ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია Oხყზ კოორდინატთა სისტემა; ი ⃗, ჯ ⃗ და კ ⃗ ერთეულოვანი ვექტორებია. ისინი განსაზღვრავენ Oხ, Oყ, Oზ ღერძების მიმართულებებს, სურათზე ეს ვექტორები სათავეშია მოდებული, (OM) ⃗ ვექტორს ეწოდება M წერტილის რადიუსვექტორი, თუ M წერტილის კოორდინატებია ხ, ყ და ზ, მაშინ (OM) ⃗=ხი ⃗+ყჯ ⃗+ზკ ⃗ და (ხ,ყ,ზ) სამეულს ეწოდება (OM) ⃗ ვექტორის კოორდინატები: $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$.

თუ $\vec p$ ნებისმიერი ვექტორია და მოდებულია A წერტილში, მაშინ:

$$\vec p = \overrightarrow{AB};$$

მაგრამ:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_1\vec i + y_1\vec j + z_1\vec k - (x_2\vec i + y_2\vec j + z_2\vec k) =$$
$$= (x_2 - x_1)\vec i + (y_2 - y_1)\vec j + (z_2 - z_1)\vec k;$$

აქ $A = (x_1, y_1, z_1)$ და $B = (x_2, y_2, z_2)$.

მაშასადამე,

$$\overrightarrow{AB} = (x_x - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ამასთანავე,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_x - x_1)^2(y_2 - y_1)^2(z_2 - z_1)^2}$$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია. ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება რიცხვს, რომელიც ტოლია ამ ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლის:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$$

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვეტორებიდან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

თვისებები:

1). ნებისმიერი ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორისთვის:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

მართლაც, თუ ერთ-ერთი ნულოვანია, მაშინ:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \vec{b}\cdot\vec{a} = 0$$

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია, მაშინ:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\alpha = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

2). $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

3). ცხადია, ორტებისთვის (სათავეზე მოდებულ ერთეულოვან ვექტორებს, რომლებიც საკოორდინატო ღერძების დადებით მიმართულებებს ემთხვევიან, ორტები ჰქვიათ) გვაქვს:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1\ ;\ \vec{j}\cdot\vec{j} = 1\ ;\ \vec{k}\cdot\vec{k} = 1\ .$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0.$$

4). $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\lambda\vec{b}$

5) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\cdot\vec{b} = \vec{a}_1\cdot\vec{b} + \vec{a}_2\cdot\vec{b}$

ვექტორთა მართობულობის პირობა, ცხადია, ასე ჩაიწერება:

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$$

თუ $\vec{p} = (x_1, y_1, z_1)$ და $\vec{q} = (x_2, y_2, z_2)$, მაშინ მართობულობის პირობისთვის გვაქვს:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

$\vec{p}$ და $\vec{q}$ **ვექტორების პარალელობის პირობა** იქნება ისეთი λ რიცხვის არსებობა, რომ:

$$\vec{p} = \lambda\vec{q}$$

ანუ:

$$x_1 = \lambda x_2$$

$$y_1 = \lambda y_2$$

$$z_1 = \lambda z_2$$

1. ამოიწერეთ ტექსტიდან უცნობი სიტყვები და ტერმინები, მოიძიეთ ლექსიკონში და განმარტეთ:

2. ამ სიტყვების გამოყენებით შეადგინეთ წინადადებები:

3. რას ეწოდება სამი არანულოვანი ვექტორის შერეული ნამრავლი?

4. თქვენი სიტყვებით ჩამოაყალიბოთ პირველი პირობა, რომელსაც აკმაყოფილებს ვექტორული ნამრავლი განსაზღვრების თანახმად

5. წარმოდგენილია სიტყვათა არეული რიგი: გამართეთ (ააწყვეთ) წინადადებები

ნულოვანი თუ ნულია ვექტორი მაშინ შერეული რომელიმე ნამრავლი ვექტორია,

6. **რას უდრის ვექტორული ნამრავლის მოდული (დაწერეთ სიტყვიერად)?**

7. **რას ნიშნავს „მარჯვენა სისტემა“?**

8. **შეადგინეთ წინადადებები მოცემული სიტყვების გამოყენებით:**

   პერპენდიკულარული

   კოლინეარული

   შერეული

9. **შეადგინეთ მოკლე გეგმა მასწავლებლის დასმარებით:**

10. შედგენილი გეგმის მიხედვით დაწერეთ ტექსტის შინაარსი.

11. გადმოეცით ტექსტი თხრობით.

12. შეაჯამეთ თქვენი ცოდნა ამ საკითხთან დაკავშირებით:

რა გავიგე	რა ვიცოდი	რა მინდა გავიგო