



---

ლალი კალანდაძე, ნუგზარ ღომიძე,  
მანანა ჩიხლაძე, ომარ კეთილაძე

---

# მემქანნი გვ



ბათუმი  
2015

UDC(უაკ) 53  
ღ-796

დამტკიცებულია ბსუ-ს განათლებისა და მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოზე (ოქმი №10, 21.07.2014)

სახელმძღვანელოდ აღიარებულია ბსუ-ს აკადემიური საბჭოს მიერ (დადგენილება №102, 23.07.2014)

რედაქტორი:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ბსუ-ს პროფესორი ჟუჟუნა დიასამიძე

რეცენზენტები:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ-ს ასოცირებული პროფესორი იზოლდა ჯაბნიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ-ს ასოცირებული პროფესორი ომარ ნაკაშიძე

ISBN 978-9941-462-08-5

© „ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი“ – 2015

ყველა უფლება დაცულია. ამ წიგნის არც ერთი ნაწილი (იქნება ეს ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) არანაირი ფორმით და საშუალებით (იქნება ეს ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება გამოყენებულ იქნას ავტორთა წერილობითი ნებართვის გარეშე. საავტორო უფლებების დარღვევა ისჯება კანონით.

## სარჩევი

<b>თავი I. მატერიალური წერტილის კინემატიკა</b>	<b>6</b>
§1. მქანის ამოცანა. ათვლის სისტემა. ნივთიერი წერტილი	6
§2. ტრამპტორია. გავლილი მანძილი და გადაადგილება	7
§3. ვექტორული და სკალარული სიჩქარე	10
§4. ვექტორული და სკალარული აჩქარება	14
§5. აჩქარების მხები და ნორმალური მდებენელები	16
§6. მოძრაობის უარღობითობა	18
§7. თანაბარწრფივი მოძრაობა	21
§8. თანაბარაჩქარებულ მოძრაობა	23
§9. თანაბარი ბრუნვა წრეწირზე	27
§10. არათანაბარი ბრუნვა წრეწირზე	30
<b>ამოცანები:</b>	<b>32</b>
<b>თავი II. მატერიალური წერტილის დინამიკა</b>	<b>35</b>
§11. ნიუტონის პირველი კანონი	35
§12. სხეულის მასა და იმპულსი	35
§13. ძალა. ნიუტონის მეორე კანონი	38
§14. ნიუტონის მესამე კანონი	41
§15. ინერციის ძალები თანაბრაჩქარებულად მოძრავ ათვლის სისტემებში	42
§16. ინერციის ძალები თანაბრადგზნავ ათვლის სისტემებში	44
§17. ბრავიტაციული ველი. მსოფლიო მიზიდულობის კანონი	47
§18. სიმძიმის ძალა. თავისუფალი ვარდნის აჩქარება	51
§19. მზის სისტემა. კეპლერის კანონები	54
§20. ბალისტიკური მოძრაობა	56
§21. წონა, უწონობა, გადატვირთვა	59
§22. თანამგზავრები და კოსმოსური სიჩქარეები	63
§23. დეფორმაციები და დრეკადობის ძალები მყარ სხეულში	65
§24. გარე ხახუნი. მშრალი ხახუნის ძალები	71
§25. სველი ხახუნის ძალები. ვარდნა ჰაერში	76
<b>ამოცანები:</b>	<b>79</b>
<b>თავი III. მუშაობა. ენერჯია. იმპულსი. მუდმივობის კანონები მქანებში</b>	<b>84</b>
§26. მქანიკური მუშაობა	84
§27. კინეტიკური ენერჯია და მისი კავშირი მუშაობასთან	87
§28. სიმძლავრე	89
§29. სტაციონალური პოტენციალური ველი. პოტენციური ენერჯია და კონსერვატული ძალები	92
§30. ბრავიტაციული პოტენციური ენერჯია	94
§31. დრეკად დეფორმირებულ სხეულის პოტენციური ენერჯია	98

§32. მემანდიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი და მისი გამოყენება -----	99
§33. არაკონსერვატულ ძალთა მუშაობა. დისიპატიური სისტემები -----	102
§34. პოტენციური ენერგიის მრული, მდგრადი და არამდგრადი წონასწორობა -----	104
§35. იმპულსის მუდმივობის კანონი, მასათა ცენტრი, თავისუფლების ხარისხი -----	107
§36. იმპულსური ძალა, აბსოლუტურად დრეკადი და აბსოლუტურად არადრეკადი შეჯახება -----	111
<b>ამოცანები: -----</b>	<b>117</b>
<b>თავი IV. მყარი სხეულის დინამიკა -----</b>	<b>120</b>
§37. იმპულსის და ძალის მომენტი -----	120
§38. იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი -----	123
§39. მყარი სხეულის მასათა ცენტრის მოძრაობა -----	125
§40. სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის კინემატიკური სიდიდეები -----	127
§41. ინერციის მომენტი. თეორემები ინერციის მომენტის შესახებ -----	129
§42. სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკის განტოლება -----	131
§43. მბრუნავი სხეულის კინეტიკური ენერგია -----	135
§44. იღერის განტოლებები -----	138
§45. მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები -----	141
<b>ამოცანები: -----</b>	<b>144</b>
<b>თავი V. მემანდიკური რხევები და ტალღები -----</b>	<b>147</b>
§46. რხევითი მოძრაობის ტიპები -----	147
§47. ჰარმონიული რხევა -----	148
§48. ჰარმონიულ რხევათა განტოლების ანალიზი -----	151
§49. თავისუფალი (მიღევადი) რხევები -----	156
§50. იძულებითი რხევები. რეზონანსი. პარამეტრული რეზონანსი -----	159
§51. ერთი წრვის გასწვრივ მიმართული ერთნაირი სიხშირის ორი ჰარმონიული რხევის შეკრება -----	163
§52. კბერა -----	166
§53. ერთნაირი სიხშირის ორი ურთიერთმართობული ჰარმონიული რხევის შეკრება --- -----	168
§54. მემანდიკური ტალღები -----	170
§55. ტალღის განტოლება -----	173
§56. მდგარი ტალღები -----	175
§57. მემანდიკური ტალღის ენერგია და სიმკვრივე -----	178
§58. ბბერა -----	179
§59. ინვრა და ულტრაბბერა -----	184
§60. დოკლერის ეფექტი -----	186
<b>ამოცანები: -----</b>	<b>188</b>
<b>თავი VI. ჰიდრო და აერო დინამიკა -----</b>	<b>193</b>

§61. მყარ, თხევად და აირად მდგომარეობათა ბანსხვავებული და სპერტო თვისებები -	193
§62. ჰიდროაეროსტატიკური წნევა. პასკალის კანონი -----	194
§63. ტორიჩელის ცდა. წნევის ერთეულები -----	197
§64. ამომგდები კალა. არქიმედეს კანონი -----	199
§65. ზედსავიწული დაჭიმულობა და კაპილარობა -----	202
§66. ღინების ტიპები და მათი ხასიათი -----	204
§67. ღინის წირები და მილი. ნაკადის უწყვეტობის განტოლება -----	206
§68. ბერნულის განტოლება -----	208
§69. ბერნულის კანონის კერძო შემთხვევები და მათი გამოყენება -----	209
§70. სიბლანტი -----	214
§71. ღინება მილში. პუაზეილის ფორმულა -----	217
§72. რეინოლდსის რიცხვი. ღინამიკური მსბავსება -----	220
§73. სხეულთა მოძრაობა სითხეებსა და აირებში -----	222
<b>ამოცანები: -----</b>	<b>227</b>
<b>ლიტერატურა -----</b>	<b>230</b>

# თავი I.

## მატიერიალური წერტილის კინემატიკა

### §1. მექანიკის ამოცანა. ათვლის სისტემა.

#### წივითიერი წერტილი

- მექანიკური მოძრაობა ეწოდება მაკროსხეულის<sup>1</sup> ან მისი ნაწილების მდებარეობის შეცვლის პროცესს სხვა სხეულის მიმართ.

თუ სხეულის სიჩქარე გაცილებით ნაკლებია ვაკუუმში ელექტრომაგნიტური ტალღის გავრცელების სიჩქარეზე ( $c = 3 \cdot 10^8$  მ/წმ), მაშინ მის მექანიკურ მოძრაობას შეისწავლის კლასიკური (ნიუტონის) მექანიკა<sup>2</sup>. იგი ორი ნაწილისგან შედგება – *კინემატიკისგან*, რომელიც აღწერს მოძრაობას და *დინამიკისგან*, რომელიც ხსნის მოძრაობის მიზეზებს.

განსახილველ სხეულს ან სხეულთა ჯგუფს *მექანიკურ სისტემასაც* უწოდებენ. მისი მდებარეობის ან მოძრაობის განხილვა შესაძლებელია მხოლოდ რაიმე სხეულთან – *ათვლის სხეულთან* მიმართებაში. რადგან მოძრაობა ხდება სივრცესა და დროში, ათვლის სხეულს უკავშირებენ *კოორდინატთა სისტემას* და დროის ამოვლელ ხელსაწყოს – *საათს*. ამ სამი კომპონენტის: ათვლის სხეულის, მასთან დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემის და დროის მთაველის ერთობლიობას *ათვლის სისტემა* ეწოდება. წრფივი მოძრაობის შესასწავლად საკმარისია ტრაექტორიის გასწვრივ მიმართული ერთი საკოორდინატო ღერძი (ნაწილაკის მდებარეობა ცალსახად განისაზღვრება ერთი კოორდინატით). სიბრტყეზე მოძრაობისას საჭიროა ორი საკოორდინატო ღერძი, სივრცეში მოძრაობისას კი სამი.

სხეულის მდგომარეობა სხვადასხვა ათვლის სისტემის მიმართ შეიძლება განსხვავებული აღმოჩნდეს, ამიტომ აუცილებელია გამოყენებული ათვლის სისტემის მითითება. მაგ. მოძრაე ავტომობილში მყოფი მგზავრის მდგომარეობა განსხვავებულია მძღოლთან და ქუჩაში მდგომ ადამიანთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემებში. ზოგადად ათვლის სისტემის შერჩევა შეზღუდული არ არის და დამკვირვებელი მას ირჩევს დასმული ამოცანის მარტივად გადაწყვეტის მიზნით.

მექანიკაში ითვლება, რომ სხეულის მდგომარეობა განსაზღვრულია თუ ცნობილია დროის მოცემული მომენტისთვის მისი კოორდინატები და სიჩქარე. კლასიკური მექანიკის ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: თუ ცნობილია სხეულის (სხეულთა ჯგუფის) მდგომარეობა დროის რაღაც საწყის  $t_0$  მომენტისთვის, უნდა განისაზღვროს მისი მდგომარეობა დროის მომდევნო ნებისმიერი  $t > t_0$  მომენტისთვის.

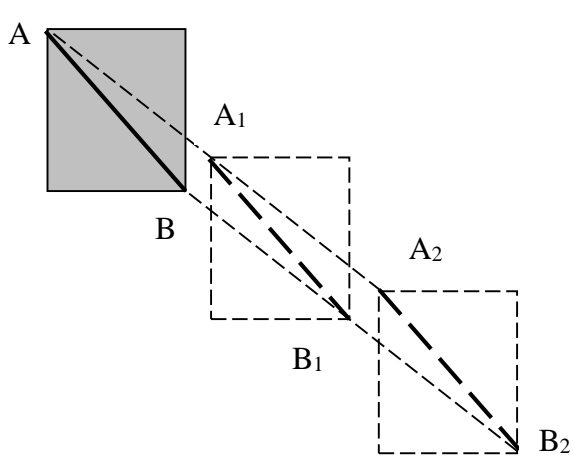
მექანიკის ამოცანის გამარტივების მიზნით ხშირად უგულებელყოფენ ისეთ ფაქტორებს, რომლებიც არსებით როლს არ ასრულებს მოცემულ შემთხვევაში და სარგებლობენ გარკვეული აბსტრაქციებით. მაგ. თუ ამოცანის პირობებით შესაძლებელია სხეულის წირითი ზომების უგულებელყოფა, მაშინ მას განიხილავენ, როგორც *ნივთიერ წერტილს* (შემოკლებით – ნაწილაკი, წერტილი), ანუ აბსტრაქციას, რომელსაც გააჩნია მოცემული სხეულის მასა და ნულოვანი მოცულობა. მაგ. დედამიწისა და მზის ურთიერთქმედების (მიზიდულობის) განხილვისას დასაშვებია ორივე სხეულის გეომეტრიული ფორმის

<sup>1</sup>სხეული, რომლის წირითი ზომები გაცილებით მეტია ატომის ( $\sim 10^{-10}$  მ) ზომებზე.

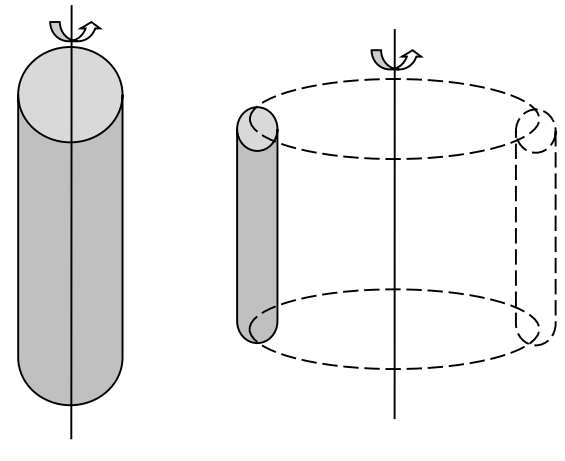
<sup>2</sup>მექანიკა ბერძნული სიტყვაა, ნიშნავს მანქანას, რთულ მოწყობილობას.

უგულებელყოფა, რადგან მიუხედავად მათი გიგანტური ზომებისა ( $R_{\text{დედ}} = 6380\text{კმ}$ ,  $R_{\text{მზე}} = 695420\text{კმ}$ ), ისინი გაცილებით ნაკლებია მათ შორის მანძილზე ( $r = 150\text{მილ.კმ}$ ). მეორე აბსტრაქციაა **აბსოლუტურად მყარი (ხისტი) სხეული**. ცხადია, ბუნებაში არსებული ყველა სხეული მასზე მექანიკური ზემოქმედებისას დეფორმირდება, ანუ იცვლის ფორმასა და მოცულობას. მაგრამ, თუ ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე დეფორმაცია არსებით როლს არ თამაშობს, მაშინ შესაძლებელია დეფორმირების უგულებელყოფა და ჩათვლა, რომ სხეულზე ზემოქმედებისას მანძილი მის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის არ იცვლება.

არსებობს მექანიკური მოძრაობის ორი ძირითადი ტიპი – **გადატანითი** და **ბრუნვითი**. გადატანითი მოძრაობისას სხეულის ნებისმიერი წერტილი სივრცეში ერთნაირ წირს



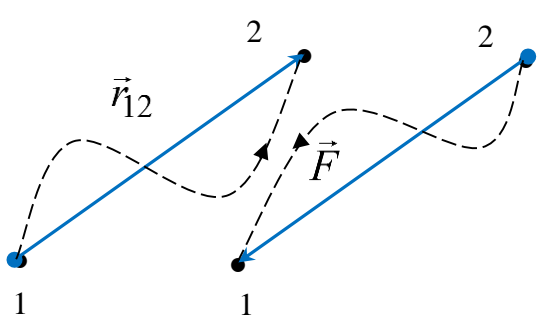
ნახაზი 1.1



ნახაზი 1.2

შემოწერს და სხეულთან დაკავშირებული ნებისმიერი წრფე თავისთავის პარალელური რჩება (ნახ. 1.1(AB წრფე)). ბრუნვითი მოძრაობისას სხეულის თითოეული წერტილი წრეწირს შემოწერს, რომელთა ცენტრები ერთ წრფეზე – ბრუნვის ღერძზე მდებარეობს. ბრუნვის ღერძი შეიძლება იმყოფებოდეს როგორც სხეულში, ასევე მის გარეთ (ნახ. 1.2). ზოგადად ნებისმიერი რთული მექანიკური მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობათა ჯამი. მაგ. ავტომობილის მოძრაობისას საბურავი ერთდროულად ასრულებს გადატანით და ბრუნვით მოძრაობას.

**§2. ტრაექტორია.  
გველი მანძილი და გადაადგილება**



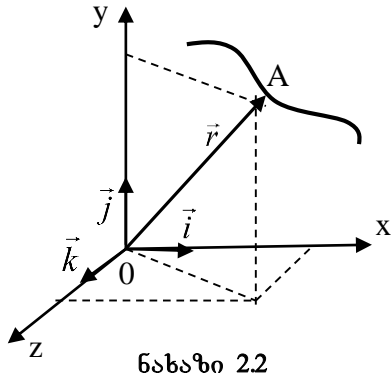
ნახაზი 2.1

ნაწილაკი მოძრაობისას სივრცეში შემოწერს გარკვეულ წირს, რომელსაც **ტრაექტორია** ეწოდება. მისი ფორმის მიხედვით მოძრაობა შეიძლება იყოს **წრფივი** ან **მრუდწირული**. ტრაექტორიას, გაზომილს სივრცით ერთეულებში, **გველი მანძილი** –  $s$  ეწოდება. იგი სკალარული სიდიდეა. ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში (SI) მისი ერთეულია **მეტრი** (მ). მოძრაობის აღწერისთვის აგრეთვე სარგებლობენ ვექტორული სიდიდით – **გადაადგილებით**.

იგი წრფის მიმართული მონაკვეთია, რომელიც აერთებს ნაწილაკის ორ მომდევნო მდებარეობას. ნახ.2.1-ზე მოცემულია ნაწილაკის 1 წერტილიდან 2 წერტილში გადანაცვლების ტრაექტორია (წყვეტილი წირი) და გადაადგილება  $\vec{r}_{12}$ . ცხადია, 2-დან 1-ში დაბრუნებისას გადაადგილება იქნება  $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ . შეკრული ტრაექტორიის შემთხვევაში გადაადგილება ნულის ტოლია.

➤ **წრფეზე ერთი მიმართულებით მოძრაობისას გადაადგილების მოდული გაგვილი მანძილის ტოლია, ხოლო ყველა სხვა შემთხვევაში მასზე ნაკლებია.**

განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა რაიმე ათვლის სისტემაში



ნახაზი 2.2

(ნახ. 2.2). ვთქვათ, დროის მოცემული მომენტისთვის იგი იმყოფება A წერტილში. მისი მდებარეობა 0 ათვლის წერტილის მიმართ შეიძლება განვსაზღვროთ რადიუს-ვექტორით  $\vec{r} = \overline{OA}$ , რომელიც აერთებს ათვლის წერტილს ნაწილაკთან, ან მისი შესაბამისი გეგმილებით  $(x, y, z)$ <sup>3</sup>. თუ გამოვიყენებთ საკოორდინატო დერძების მგეზავ ერთეულოვან ვექტორებს (ორტებს)  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , ( $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ ), მაშინ  $\vec{r}$  გადაადგილება კოორდინატებში (გეგმილებში) ასე ჩაიწერება:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (2.1)$$

ხოლო მისი სიდიდე (მოდული) იქნება

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.2)$$

ცხადია ათვლის სისტემის მიმართ მოძრავი ნაწილაკის შესაბამისი რადიუს-ვექტორი და მისი გეგმილები დროის ფუნქციაა:

$$\vec{r} = \vec{F}(t), \quad (2.3)$$

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (2.4)$$

(2.3)-სა და (2.4)-ს **მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები** ეწოდება. თუ (2.4)-დან გამოვრიცხავთ დროს, მივიღებთ **ტრაექტორიის განტოლებას**  $\varphi(x, y, z) = 0$ , რომელიც ასახავს ნაწილაკის კოორდინატებს შორის დამოკიდებულებას.

<sup>3</sup>ახლაც და შემდეგშიც ჩვენ ძირითადად ვისარგებლებთ დეკარტის მართკუთხა სისტემით.

**ამოცანა 2.1.** ნაწილაკი მოძრაობს  $R = 0,5$  მ რადიუსის წრეწირზე. გამოთვალეთ მისი გავლილი მანძილი და გადაადგილების მოდული  $A$  საწყისი მდებარეობის მიმართ შემობრუნებისას  $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ ;  $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$  ცენტრალურიკუთხით.

**ამოხსნა:**

გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ რადიანებში<sup>4</sup>, გაზომილი ცენტრალური კუთხე ტოლია მის მიერ მოჭიმული რკალის ფარდობისა რადიუსთან. ე.ი.:

$$\alpha = \frac{S}{R} \rightarrow S = \alpha R,$$

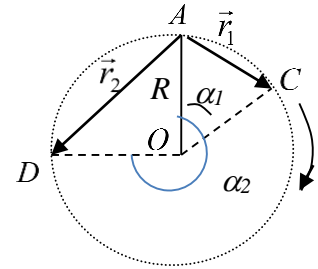
რადგან ნაწილაკის მიერ გავლილი მანძილი ცენტრალური კუთხის

მიერ მოჭიმული რკალის ტოლია, ამიტომ  $S_1 = \alpha_1 R = \frac{\pi}{3} \cdot 0,5 \approx 0,52$

$$(2) S_2 = \alpha_2 R = \frac{3\pi}{2} \cdot 0,5 \approx 2,36 \text{ (მ)}.$$

რადგან  $AOC$  სამკუთხედი ტოლგვერდაა გადაადგილება  $|\vec{r}_1| = R = 0,5$  მ.  $AOD$  ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, ამიტომ:

$$|\vec{r}_2| = \frac{R}{\cos(\pi/4)} = 0,5 \cdot \sqrt{2} = 0,71 \text{ მ}.$$



**ამოცანა 2.2.** ნახაზზე მოცემულია მოსწავლის მოძრაობის მარშრუტი (1,2,3,4) სახლიდან სკოლამდე (მასშტაბი 1:200). გამოთვალეთ გავლილი მანძილი და გადაადგილების მოდული. (თითველ უბანზე გადაადგილება თანხვედრილია გავლილი მანძილის)

**ამოხსნა:**

გავლილი მანძილი:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \quad (1)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა  $a = 200$  მ-ს. მაშინ

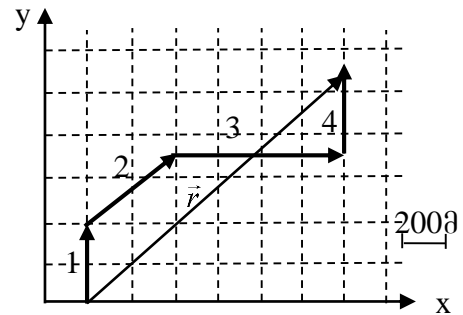
$$S = 2a + \sqrt{(2a)^2 + (1,5a)^2} + 4a + 2a = 10,5a \quad S = 2100 \text{ (მ)}.$$

ნახაზიდან გადაადგილების გეგმილება:

$$r_x = 6a, \quad r_y = 5,5a,$$

ამიტომ:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{36 + 30,25} a \approx 8,14 \cdot 200 \approx 1628 \text{ (მ)}.$$



**ამოცანა 2.3.** დროის მოცემული მომენტისთვის ნაწილაკის რადიუს-ვექტორია  $\vec{r}(4;6;2\sqrt{3})$ , განსაზღვრეთ მისი ორიენტაცია ათვლის 0 წერტილის მიმართ (ნახ.2.2).

**ამოხსნა:**

რადიუს-ვექტორის მიერ შედგენილი კუთხეები  $OX, OY, OZ$  ღერძებთან შესაბამისად აღნიშნოთ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

<sup>4</sup>1 რადიანი (რად) არის ის ცენტრალური კუთხე, რომლის მიერ მოჭიმული რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია  $1 \text{ რად} = 180^\circ/\pi = 57,8^\circ$ .

$$\cos \alpha_1 = \frac{x}{r}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{z}{r},$$

სადაც (2.2)-ის თანახმად:

$$r = \sqrt{16+36+12} = 8$$

$$\cos \alpha_1 = 1/2, \quad \cos \alpha_2 = 3/4, \quad \cos \alpha_3 = \sqrt{3}/4.$$

**ამოცანა 2.4.** ნაწილაკის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებებია  $x = 4t$ ,  $y = 2t - 5$ ,  $z = 3$ .  
ჩაწერეთ ტრაექტორიის განტოლება.

**ამოხსნა:**

განვსაზღვროს დრო:

$$x = 4t \rightarrow t = \frac{x}{4}.$$

შევიტანოთ  $t$ -ს მნიშვნელობა  $y = 2t - 5$ -ში მივიღებთ:

$$y = 2 \cdot \frac{x}{4} - 5 = \frac{x}{2} - 5.$$

ეს უკანასკნელი ტრაექტორიის განტოლებაა, რომლის თანახმადაც ნაწილაკის მოძრაობა ხდება  $y = x/2 - 5$  წრფეზე, რომელიც  $z = 3$  სიბრტყეში მდებარეობს.

### §3. ვექტორული და სკალარული სიჩქარე

განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა სივრცეში (ნახ. 3.1ა). დავუშვათ, დროის  $t_1$  მომენტისთვის იგი იმყოფებოდა  $A_1(x_1, y_1, z_1)$  წერტილში, ხოლო  $t_2 > t_1$  მომენტისთვის  $A_2(x_2, y_2, z_2)$  წერტილში, ე.ი.  $\Delta t = t_2 - t_1$  დროის შუალედში მან შეასრულა  $\vec{A_1A_2} = \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  გადაადგილება. (2.1)-ის თანახმად:

$$\vec{r}_1 = \vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1, \quad \vec{r}_2 = \vec{i}x_2 + \vec{j}y_2 + \vec{k}z_2,$$

შესაბამისად:

$$\Delta \vec{r} = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1) = \vec{i}\Delta x + \vec{j}\Delta y + \vec{k}\Delta z. \quad (3.1)$$

ხოლო გადაადგილების სიდიდე (მოდული) იქნება:

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad (3.2)$$

ნაწილაკის გადაადგილების სისწრაფის დასახასიათებლად შემოღებულია **საშუალო ვექტორული სიჩქარის** ცნება.

➤ **საშუალო ვექტორული სიჩქარე ტოლია ნაწილაკის გადაადგილების ფარდობის შესაბამის დროსთან**

$$\vec{v}_{\text{საშ}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

$\vec{v}_{\text{საშ}}$  დროის ერთეულში შესრულებული გადაადგილებაა. რადგან  $\Delta t > 0$ ,  $\vec{v}_{\text{საშ}}$  გადაადგილების  $\Delta \vec{r}$  თანხვედრია. თუ (3.1)-ს გავითვალისწინებთ (3.3)-ში, მივიღებთ:

$$\vec{v}_{\text{საშ}} = \vec{i} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \vec{j} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \vec{k} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad (3.4)$$

სადაც:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$\bar{v}_{\text{საშ}}$ -ს გვემიღებია დეკარტის სისტემაში. ცხადია საშუალო ვექტორული სიჩქარის მოდული იქნება:

$$|\bar{v}_{\text{საშ}}| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}.$$

საშუალო ვექტორული სიჩქარე მოძრაობას ახასიათებს დროის სასრულ ინტერვალში. მოცემული მომენტისთვის ვექტორული სიჩქარის (მეისი ვექტორული სიჩქარის) განსაზღვრისთვის საჭიროა დაკვირვების ხანგრძლივობის სულ უფრო შემცირება ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), რის შედეგადაც (3.3)-დან გვექნება:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_{\text{საშ}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3.5)$$

➤ ვექტორული სიჩქარე საშუალო ვექტორული სიჩქარის იმ ზღვრული მნიშვნელობის ტოლია, როდესაც დაკვირვების ხანგრძლივობა მიისწრაფის ნულისკენ.

იგი ასეც შეიძლება განვმარტოთ:

➤ ვექტორული სიჩქარე რადიუს-ვექტორის პირველი რიგის წარმოებულია დროით.

$\bar{v}$  სიჩქარე თანხვედრია  $d\vec{r}$ -ის, ანუ გააჩნია მოცემულ წერტილში ტრაექტორიის მხების მიმართულება (როდესაც  $\Delta t \rightarrow 0, A_2 \rightarrow A_1$ ) (ნახაზი 3.1ბ).

(3.4)-ის თანახმად (3.5) გვემიღებში ასე ჩაიწერება:

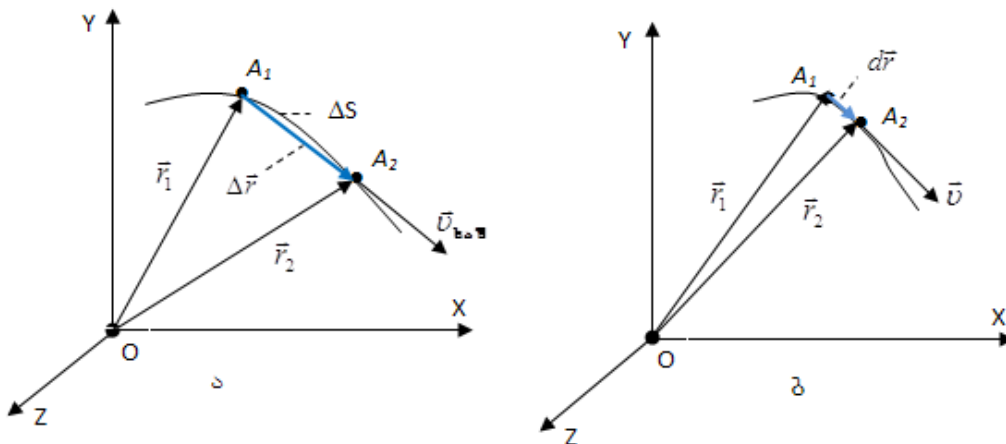
$$\bar{v} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z, \quad (3.6)$$

პითაგორას თეორემის მიხედვით

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (3.7)$$

პრაქტიკაში უმეტესად სარგებლობენ საშუალო სკალარული სიჩქარით.

➤ ნაწილაკის საშუალო სკალარული სიჩქარე ეწოდება მის მიერ გავლილი მანძილის ფარდობას შესაბამის დროსთან.



**ნახაზი 3.1**

თუ  $\Delta t$  დროში ნაწილაკმა გაიარა  $\Delta S$  მანძილი (ნახ. 3.1ა) ( $\Delta S$  არის  $A_1 A_2$  რკალის სიგრძის ტოლი), საშუალო სკალარული სიჩქარე იქნება:

$$v_{საშ} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (3.8)$$

ერთეულთა საერთაშორისო  $SI^5$  სისტემაში სიჩქარის ერთეულია მ/წმ. შევნიშნოთ, რომ რადგან  $|\Delta \vec{r}| \leq \Delta S$ , ამიტომ საშუალო ვექტორული სიჩქარის სიდიდე  $|\vec{v}_{საშ}|$  განსხვავებულია საშუალო სკალარული სიჩქარისგან, კერძოდ  $|\vec{v}_{საშ}| \leq v_{საშ}$ .

ასევე შეიძლება განვსაზღვროთ სკალარული (მყისი სკალარული) სიჩქარე

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (3.9)$$

➤ **სკალარული სიჩქარე გავლილი მანძილის პირველი რიგის დროით წარმოებულის ტოლია.**

თუ  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $|\Delta \vec{r}| \approx \Delta S$  რის გამოც ვექტორული სიჩქარის სიდიდე სკალარული სიჩქარის ტოლია  $|\vec{v}| = v$ .

გამოვთვალოთ ნაწილაკის მიერ დროის  $[t_1, t_2]$  ინტერვალში გავლილი მანძილი, თუ ცნობილია სკალარული სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების ფუნქცია  $v(t)$ . ამისთვის  $[t_1, t_2]$  ინტერვალში დავეყოთ იმდენად მცირე დროით ნაწილებად  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ <sup>6</sup>, რომ თითოეულ არეში სიჩქარე რჩებოდეს თითქმის უცვლელი, ე.ი. შესაბამისად იყოს  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , მაშინ გავლილი მანძილი წარმოვიდგება ჯამის სახით

$$S_{12} = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i. \quad (3.10)$$

შედეგი მით უფრო ზუსტი იქნება, რაც უფრო მცირეა დროითი ინტერვალები (რადგან სიჩქარე სხეულის ინერტულობის გამო ვერ მოასწრებს შესამჩნევ ცვლილებას), ე.ი.

$$S_{12} = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i.$$

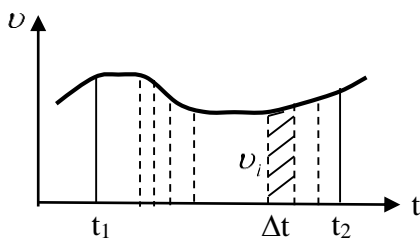
ეს გამოსახულება კი წარმოადგენს განსაზღვრულ ინტეგრალს  $v(t)$ -დან  $[t_1, t_2]$  ინტერვალში

$$S_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (3.11)$$

ანალოგიურად გამოითვლება შესაბამისი გადაადგილება

$$\vec{r}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt \quad (3.12)$$

თუ განვიხილავთ  $v(t)$ -ს გრაფიკს (ნახ. 3.2), შევამჩნევთ, რომ დროის რაიმე  $\Delta t_i$  შუალედში გავლილ მანძილს  $\Delta S_i = v_i \Delta t_i$  გრაფიკზე შეესაბამება  $v_i$  და  $\Delta t_i$  მონაკვეთებით



ნახაზი 3.2

შემოსაზღვრული ზოლის ფართობი, ხოლო  $[t_1, t_2]$  ინტერვალში გავლილი  $S_{12}$  მანძილს

<sup>5</sup> International System unit – ერთეულთა საერთაშორისო სისტემა. მიღებული იქნა 1960 წელს ზომისა და წონის 11-ე საერთაშორისო კონფერენციაზე პარიზში.

<sup>6</sup> ასეთი დროითი ნაწილები შეიძლება არც იყოს ერთნაირი.

$t = t_1$ ,  $t = t_2$  წრფეებითა და  $v(t)$  მრუდით შემოსაზღვრული ფართობი. საშუალო სიჩქარის განმარტების თანახმად მისი მნიშვნელობა  $S_{12}$  გზაზე იქნება:

$$v_{საშ} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_{12}}{t_2 - t_1}.$$

(3.11)-ის გათვალისწინებით კი

$$v_{საშ} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (3.13)$$

**ამოცანა 3.1.** ნაწილაკი დაკვირვების საწყის მომენტში იმყოფებოდა  $A_1(3; -2; 0)$  წერტილში, 8წმ-ის შემდეგ კი  $A_2(11; -2; -6)$  წერტილში. გამოთვალეთ გადაადგილების და საშუალო ვექტორული სიჩქარის სიდიდეები (კოორდინატები გაზომილია მეტრებში).

**ამოხსნა:**

$$(3.1)-ის თანახმად  $\Delta \vec{r} = \vec{i}(11-3) + \vec{j}(-2 - (-2)) + \vec{k}(-6-0) = \vec{i}8 + \vec{j}0 + \vec{k}(-6).$$$

შესაბამისად:

$$\Delta r = |\Delta \vec{r}| = \sqrt{8^2 + 0^2 + (-6)^2} = 10 \text{ მ.}$$

საშუალო ვექტორული სიჩქარის სიდიდისათვის მივიღებთ:

$$|\vec{v}_{საშ}| = \frac{10}{8} = 1,25 \text{ მ/წმ}$$

**ამოცანა 3.2.** მოძრავი ნაწილაკის კინემატიკური განტოლებებია:  $x=2+3t$ ,  $y=0,5t^2$ ,  $z=-4$ . ვიპოვოთ ნაწილაკის მდებარეობა და მყისი სიჩქარის მნიშვნელობა  $t=0$  და 2წმ-სთვის.

**ამოხსნა:**

$t=0$  მომენტისთვის  $x_0 = 2$ ,  $y=0$ ,  $z=-4$ . ე.ი. ნაწილაკი იმყოფებოდა  $A_0(2;0;-4)$  წერტილში, ხოლო  $t=2$ წმ-სთვის კი  $x=8$ ,  $y=2$ ,  $z=-4$ , ანუ გადაადგილდა წერტილში  $A(8;2;-4)$ . სიჩქარის მდგენელები იქნება:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3, v_y = \frac{dy}{dt} = t, v_z = \frac{dz}{dt} = 0$$

ე.ი.

$$v = \sqrt{3^2 + t^2 + 0^2} = \sqrt{3^2 + t^2}.$$

შესაბამისად:

$$v(t=0) = 3 \text{ მ/წმ. } v(t=2) = \sqrt{13} \text{ მ/წმ.}$$

მოძრაობა ხდება  $z=-4$  სიბრტყეზე.

**ამოცანა 3.3.** ნაწილაკის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებებია  $x = 2t$ ,  $y = 3-t$ ,  $z = -2 + 2\sqrt{5}t$ . გამოთვალეთ ნაწილაკის სიჩქარე და გადაადგილების მოდული 2წმ-ში.

**ამოხსნა:**

(3.6)-ის თანახმად:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2, v_y = \frac{dy}{dt} = -1, v_z = \frac{dz}{dt} = 2\sqrt{5}.$$

ვისარგებლოთ (3.7)-ით, მაშინ:

$$v = \sqrt{4+1+20} = 5 \text{ მ/წმ.}$$

დაკვირვების დასაწყისში  $t_0=0$  ნაწილაკი იმყოფებოდა  $A(0,3,-2)$  წერტილში,  $t=2$ წმ-სთვის აღმოჩნდა  $B(4,1,4\sqrt{5})$  -ში, (3.2)-ის თანახმად:

$$\Delta r = \sqrt{(4-0)^2 + (1-3)^2 + (4\sqrt{5}+2)^2} \approx 5.56 \text{ გ}$$

**ამოცანა 3.4.** ავტომობილის მძღოლმა გასაგლედი 12კმ-ს მესამედი გაიარა 20 მ/წმ სიჩქარით, შემდეგ შეისვენა 10 წთ და დანარჩენი გზა გაიარა 40 მ/წმ სიჩქარით. გამოვთვალოთ საშუალო სიჩქარე.

**ამოხსნა:**

$$v_{\text{საშ}} = \frac{S}{t_1+t_2+t_3} = \frac{S}{\frac{S}{3v_1} + t_2 + \frac{2S}{3v_3}} = \frac{12000}{\frac{4000}{20} + 600 + \frac{8000}{40}} = \frac{12000}{1000} = 12 \text{ მ/წმ}$$

#### §4. ვექტორული და სკალარული აჩქარება

ნაწილაკის მოძრაობისას მისი სიჩქარე ჩვეულებრივად განიცდის ცვლილებას. ამ ცვლილების სისწრაფის დასახასიათებლად კინემატიკაში შემოტანილია **აჩქარების** ცნება.

➤ **საშუალო ვექტორული აჩქარება ეწოდება ნაწილაკის ვექტორული სიჩქარის ცვლილების ფარდობას შესაბამის დროსთან.**

თუ  $\Delta t = t_2 - t_1$  დროში ვექტორული სიჩქარე  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  -ით შეიცვალა, მაშინ საშუალო ვექტორული აჩქარება იქნება

$$\vec{a}_{\text{საშ}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

იგი დროის ერთეულში ვექტორული სიჩქარის ცვლილების ტოლია. რადგან  $\Delta t > 0$ , აჩქარების მიმართულება სიჩქარის ცვლილების მიმართულების თანხვედრია (ნახ. 4.1) ( $\Delta \vec{v}$  - ს ასაგებად გამოყენებულია ვექტორული შეკრების წესი  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$ ). დროის მოცემული მომენტისთვის ვექტორული (მყისი ვექტორული) აჩქარება იქნება

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{\text{საშ}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4.2)$$

(4.2) გეგმილებში ასე ჩაიწერება:

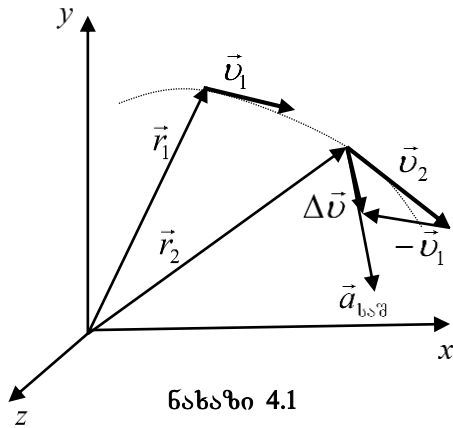
$$\vec{a} = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z,$$

(3.5)-ის (4.2)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (4.3)$$

ან გეგმილებით:

$$\vec{a} = \vec{i} \frac{d^2 x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2 y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2 z}{dt^2} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z. \quad (4.4)$$



➤ ვექტორული აჩქარება წარმოადგენს ვექტორული სიჩქარის პირველი რიგის, ხოლო რადიუს-ვექტორის მეორე რიგის წარმოებულს დროით.

ე.ი., (4.2) და (4.3)-დან გამომდინარე:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

ცხადია, საშუალო სკალარული აჩქარება სკალარული სიჩქარის ცვლილების ფარდობაა შესაბამის დროსთან

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (4.5)$$

მისი ერთეულია მ/წმ<sup>2</sup>.

სკალარული (მყისი სკალარული) აჩქარება კი გამოითვლება ფორმულით

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (4.6)$$

ან, (3.8)-ის გათვალისწინებით

$$a = \frac{d}{dt} \left( \frac{dS}{dt} \right) = \frac{d^2 S}{dt^2}. \quad (4.7)$$

➤ სკალარული აჩქარება დროს მიმართ სკალარული სიჩქარის პირველი რიგის, ხოლო გავლელი მანძილის მეორე რიგის წარმოებულის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ შემდგომში ტერმინებს სიჩქარე, აჩქარება გამოვიყენებთ მათი მყისი მნიშვნელობების აღსანიშნავად, ხოლო საშუალო მნიშვნელობებს მოვიხსენიებთ როგორც საშუალოს.

**ამოცანა 4.1.** ნაწილაკის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებაა  $x = 20 + 10t - t^2$ . განსაზღვრეთ მისი საწყისი მდებარეობა, სიჩქარე, აჩქარება. როდის და სად გაჩერდება იგი?

**ამოხსნა:**

რადგან მოძრაობა წრფივია:

$$v = v_x = \frac{dx}{dt} = 10 - 2t, \quad a = a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2 \quad (\text{მ/წმ}^2),$$

მაშასადამე მოძრაობა შენელებულია. დაკვირვების დასაწყისში, ე.ი. როცა  $t = 0$ , ვღებულობთ:

$$x_0 = 20 \text{ მ}, \quad v_0 = 10 \text{ მ/წმ},$$

ნაწილაკი გაჩერდება, როცა  $10 - 2t = 0$  ( $v = 0$ ), ანუ  $t = 5$  წმ. ამ მომენტისთვის იგი დაკვირვების წერტილიდან აღმოჩნდება  $x = 20 + 10 \cdot 5 - 5^2 = 45$  მ მანძილზე.

**ამოცანა 4.2.** ნაწილაკის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებაა  $x = 2 + 3t + t^3$ . განსაზღვრეთ სიჩქარისა და აჩქარების მნიშვნელობები  $t = 0, 2$  წმ მომენტისთვის.

**ამოხსნა:**

$$v = v_x = \frac{dx}{dt} = 3 + 3t^2, \quad v_0 = 3 \text{ მ/წმ}, \quad v(t=2) = 15 \text{ მ/წმ},$$

$$a = a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6t, \quad a_0 = 0, \quad a(t=2) = 12 \text{ მ/წმ}^2.$$

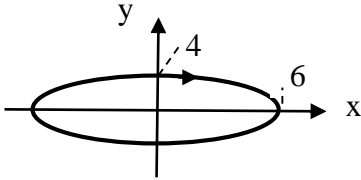
**ამოცანა 4.3.** ნაწილაკის რადიუს-ვექტორის განტოლებაა:  $\vec{r} = \vec{i}6\cos 3t + \vec{j}4\sin 3t$ . ჩაწერეთ ნაწილაკის ტრაექტორიის, ვექტორული სიჩქარისა და ვექტორული აჩქარების განტოლებები.  
**ამოხსნა:**

$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$  განტოლების თანახმად  $x = 6\cos 3t, y = 4\sin 3t$ ; გამოვიციხოთ დრო:

$$\frac{x}{6} = \cos 3t, \quad \frac{y}{4} = \sin 3t, \quad \frac{x^2}{6^2} = \cos^2 3t, \quad \frac{y^2}{4^2} = \sin^2 3t;$$

ვისარგებლოთ ფორმულით:  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ . მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$



მიღებული განტოლება ტრაექტორიის განტოლებაა, ამასთან, ტრაექტორიას ელიფსის ფორმა გააჩნია, მოძრაობა ბრტყელია და ხდება  $z=0$  სიბრტყეში. სიჩქარე და აჩქარება დროის ფუნქციაა, კერძოდ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}18\sin 3t + \vec{j}12\cos 3t,$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{i}54\cos 3t - \vec{j}36\sin 3t = -9(\vec{i}6\cos 3t + \vec{j}4\sin 3t) = -9\vec{r}.$$

### §5. აჩქარების მხები და ნორმალური მდგენელები

ზანვიხილეთ ნაწილაკის მრუდწირული მოძრაობა სიბრტყეზე (ბრტყელი მოძრაობა). მისი ვექტორული სიჩქარე ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\vec{v} = \vec{\tau}v,$$

სადაც  $\vec{\tau}$  – ს მგეზავი ვექტორია ( $|\vec{\tau}|=1$ ), ე.ი. გააჩნია ტრაექტორიის მხების მიმართულება, ხოლო  $v=|\vec{v}|$ . ვექტორული აჩქარების განმარტების თანახმად

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}v}{dt} = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (5.1)$$

მაშასადამე, ვექტორული აჩქარება დაგშალეთ ორ მდგენელად. პირველი მდგენელი

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \frac{dv}{dt}. \quad (5.2)$$

ახასიათებს სიჩქარის სიდიდის ცვლილებას და მიმართულია ტრაექტორიის მხების გასწვრივ (ნახ. 5.1), რის გამოც მას **მხები (ტანგენციალური) აჩქარება** ეწოდება. თუ სიჩქარე ზრდადია ( $dv > 0$ ),  $\vec{a}_\tau$   $\vec{\tau}$  – ის თანხვედრია და, მაშასადამე, ვექტორული სიჩქარის ( $\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow \vec{v}$ ). კლებადი სიჩქარის შემთხვევაში ( $dv < 0$ ) კი, საპირისპირო მიმართულება აქვს ( $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{v}$ ). თუ სიჩქარის სიდიდე არ იცვლება  $v = const$ ,  $\vec{a}_\tau = 0$  (თანაბარი მოძრაობა).

ვექტორული აჩქარების მეორე მდგენელი

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (5.3)$$

ახასიათებს  $\vec{\tau}$  – ს, ანუ სიჩქარის ვექტორის მიმართულების ცვლილებას. მისი ფიზიკური აზრის უკეთ გარკვევისთვის შემოვიღოთ ბრტყელი მრუდწირული ტრაექტორიის მოცემული უბნის სიმრუდის რადიუსის ცნება.

მისი ფიზიკური აზრის უკეთ გარკვევისთვის შემოვიღოთ ბრტყელი მრუდწირული ტრაექტორიის *სიმრუდის* ცნება. ნახაზ 5.1-ზე  $dS$  უბნის სიმრუდე ტოლია ამ უბნის საწყის და საბოლოო წერტილთა მხებს შორის არსებული  $d\varphi$  კუთხის ფარდობისა  $dS$  სიგრძესთან  $C = d\varphi/dS$ . მის შებრუნებულ სიდიდეს ტრაექტორიის ამ უბნის *სიმრუდის რადიუსი* ეწოდება

$$R = \frac{1}{C} = \frac{dS}{d\varphi}. \quad (5.4)$$

იგი წარმოადგენს იმ წრეწირის რადიუსს, რომლის რკალიც შეერწყმის მოცემულ უბანს.  $dt$  დროში ნაწილაკის გადაადგილებისას  $dS$  რკალზე 1-დან 1' წერტილში, სიჩქარის მგეზი ვექტორი შეიცვალა  $d\vec{\tau} = \vec{\tau}' - \vec{\tau} = \vec{\tau}' + (-\vec{\tau})$  სიდიდით. რომლის მოდულიც ნახ.5.1-ის "τ – სამკუთხედიდან" ტოლი იქნება:

$$|d\vec{\tau}| = |\vec{\tau}'| \sin d\varphi = \sin d\varphi = d\varphi,^7$$

მაშინ (5.3)-ის თანახმად ნორმალური აჩქარების სიდიდე იქნება

$$a_n = |\vec{a}_n| = v \frac{|d\vec{\tau}|}{dt} = v \frac{d\varphi}{dt}.$$

ამ გამოსახულების გამრავლებით და გაყოფთ  $dS$  – ზე, მივიღებთ:

$$a_n = v \frac{dS}{dt} \frac{d\varphi}{dS},$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (5.5)$$

დავადგინოთ  $a_n$  – ის მიმართულება. (5.3)-ის თანახმად იგი ემთხვევა  $d\vec{\tau}$  – ს, ეს უკანასკნელი კი მიმართულია  $\vec{\tau}$  – ს ნორმალის გასწვრივ (რადგან  $d\varphi \rightarrow 0$ ) სიმრუდის 0 ცენტრისკენ. თუ შემოვიღებთ ნორმალის მგეზავ ვექტორს  $\vec{n}$ , რომელიც მიმართული იქნება  $R$  – ის გასწვრივ 0 ცენტრისკენ, მაშინ (5.5)-ის ვექტორული ფორმა ასე ჩაიწერება:

$$\vec{a}_n = \vec{n} \frac{v^2}{R}. \quad (5.6)$$

ცხადია  $\vec{a}_n \uparrow \vec{n}$ , იგი მიმართულია ტრაექტორიის მოცემული უბნის სიმრუდის ცენტრისკენ (ნახ.5.2). იგი ნულის ტოლია მრუდწირული ტრაექტორიის გადაღუნვის წერტილებში და წრფივი ტრაექტორიის შემთხვევაში ( $R \rightarrow \infty$ ). მას *ნორმალური აჩქარება* ეწოდება. მაშასადამე, სიბრტყეზე მოძრაობის შემთხვევაში ვექტორული აჩქარება შეიძლება

განვიხილოთ მხები და ნორმალური მდგენელების სახით

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

<sup>7</sup>მცირე კუთხეების შემთხვევაში ( $\alpha \rightarrow 0$ )  $\sin \alpha = \alpha$ .

სწორად  $\vec{a}$  – ს გამოთვლა ამ ფორმით უფრო მოსახერხებელია, ვიდრე  $a_x$  და  $a_y$  გვემძივებით.

**ამოცანა 5.1.** 4მ სიმაღლის რადიუსის ტრაექტორიაზე მოძრავი ნაწილაკის აჩქარება საწყის მომენტში  $2\text{მ/წმ}^2$ -ის ტოლია და  $\alpha = 30^\circ$  კუთხეს ადგენს მოძრაობის მიმართულებასთან. გამოთვალეთ ნაწილაკის სიჩქარე საწყის მომენტში და  $2\text{წმ}$ -ის შემდეგ. ჩათვალეთ, რომ მსხები აჩქარება მუდმივია.

**ამოხსნა:**

ნახაზ 5.2-დან  $t=0$  მომენტისთვის  $a_\tau = a \cos \alpha = 1,7 \text{ მ/წმ}^2$ ,  $a_n = a \sin \alpha = 1 \text{ მ/წმ}^2$ . (5.5) -დან საწყისი

სიჩქარე  $v = \sqrt{a_n R} = 2 \text{ მ/წმ}$  რადგან  $a_\tau = \text{const}$ , (5.2) გადაიწერება შემდეგი სახით:  $a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ,

საიდანაც  $\Delta v = a_\tau \Delta t$ ,  $v - v_0 = a_\tau \Delta t$  და  $v = v_0 + a_\tau \Delta t = 5,4 \text{ მ/წმ}$ .

### **§6. მოძრაობის ფარდობითობა**

სხეულის მოძრაობას სხვადასხვა ათვლის სისტემის მიმართ სხვადასხვაგვარად წარმოგვიდგება. მაგალითად მგზავრი, რომელიც ზის მოძრავ მატარებელში მატარებლის გამცილებლის მიერ ფიქსირდება როგორც უძრავი. იგივე მგზავრი მეისრის მიერ რომელსაც მატარებელმა ჩაუარა აღიქმება როგორც მოძრავი. ცხადია ორივე დამკვირვებელი სწორია. ასეთი განსხვავებული დასკვნები გამოწვეულია იმით, რომ მეისრე წარმოადგენს უძრავი ათვლის სისტემის ათვლის სხეულს, ხოლო გამცილებელი მეისრის მიმართ მოძრავი ათვლის სისტემის ათვლის სხეულს.

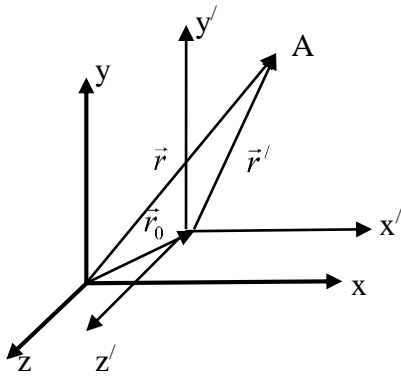
უამრავი მაგალითებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ აბსოლუტური მოძრაობა, ან უძრავობა არ არსებობს, ეს ცნებები ფარდობითია, რადგან დამოკიდებულია ათვლის სისტემის შერჩევაზე. ამიტომ საჭიროა გავარკვიოთ, როგორ იცვლება სხეულის მოძრაობის მახასიათებელი პარამეტრები სხვადასხვა ათვლის სისტემაში. კერძოდ, განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა ორი ათვლის სისტემის მიმართ, რომელთაგან პირველი უძრავია, მეორე კი მის მიმართ მოძრაობს  $\vec{v}_0 = \text{const}$  სიჩქარით, ე.ი. ორივე სისტემა ინერციულია (სისტემათა ინერციულობის საკითხს განვიხილავთ §11-ში). პირველს პირობითად დავარქვათ  $k$  სისტემა, მეორეს  $k'$ . რადგან ამოცანა კლასიკური მექანიკის ფარგლებშია, ამიტომ ვისარგებლოთ მისი ორი დაშვებით:

1. მონაკვეთის სიგრძე არ არის დამოკიდებული ათვლის სისტემის

შერჩევაზე;

2. დრო ერთნაირად მიმდინარეობს ყველა ათვლის სისტემაში.

ამოცანის გამარტივებისთვის დავუშვათ, რომ დაკვირვების დასაწყისში ( $t_0 = 0$ ) ორივე სისტემის საკოორდინატო ღერძები შეთავსებულია – თანხვედრია ერთმანეთთან და ნაწილაკიც იმყოფება ათვლის წერტილთან. მაშინ დროის  $t = t'$  მომენტისთვის გვექნება ნახ. 6.1-ზე მოცემული სურათი. ვექტორთა შეკრების წესის თანახმად



ნახაზი 6.1

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0, \quad (6.1)$$

სადაც  $\vec{r}$  და  $\vec{r}'$  ნაწილაკის რადიუს-ვექტორებია  $k$  და  $k'$  სისტემებში, ხოლო  $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$  არის  $O'$  ათვის წერტილის რადიუს-ვექტორი  $k$ -ს მიმართ. (6.1) გეგმილებში ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} x = x' + v_{0x}t \\ y = y' + v_{0y}t \\ z = z' + v_{0z}t \end{cases} \quad (6.2')$$

ამ ფორმულებს იტალიელი ფიზიკოსის **გალილეო გალილეის გარდაქმნის ფორმულები** ეწოდება. კლასიკურ მექანიკაში მათი საშუალებით ხორციელდება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა. (6.1)-ისა და (6.1')-ის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0, \quad (6.2)$$

$$\begin{cases} v_x = v_x' + v_{0x} \\ v_y = v_y' + v_{0y} \\ v_z = v_z' + v_{0z} \end{cases} \quad (6.2')$$

(6.2) სიჩქარეთა შეკრების ფორმულაა კლასიკურ მექანიკაში. (6.1) და (6.2)-ის თანახმად სხეულის კოორდინატები (მდებარეობა) და სიჩქარე დამოკიდებულია ათვის ინერციული სისტემის შერჩევაზე ( $\vec{r} \neq \vec{r}', \vec{v} \neq \vec{v}'$ ), ანუ ფარდობითი-ინვარიანტული სიდიდეებია.

რადგან  $\vec{v}_0 = const$ , (6.2)-ის გაწარმოებით გვექნება  $\vec{a} = \vec{a}'$ . ე.ი. სხეულის აჩქარება ათვის ინერციულ სისტემებში არ არის დამოკიდებული ათვის ინერციული სისტემის შერჩევაზე- აბსოლუტურია.

**ამოცანა 6.1.** ნავით უნდა გადაცურონ 100 მ სიგანის მდინარე. რა მანძილზე წაიღებს დინება ნავს ნაპირზე მიღწევამდე, თუ ნავის საკუთარი სიჩქარე 10 მ/წთ-ია, ხოლო წყლის სიჩქარე 0,5 მ/წთ. რა ორიენტაცია უნდა აიღოს მენავემ ნაპირის მიმართ, რომ მდინარე დინების მართობულად გადაკვეთოს?

**ამოხსნა:**

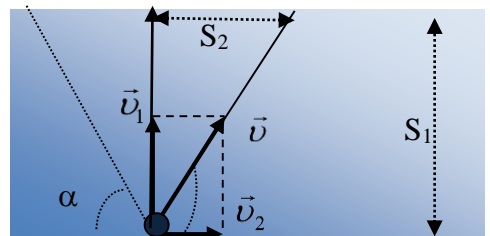
ნავი გადაცურავდა უძრავ წყალს:

$$t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{100}{10} = 10 \text{ (წთ)}$$

დროში. ამავე დროში  $t_2 = t_1$  ნაპირზე მიღწევამდე მდინარე წაიღებდა უძრავ ნავს:

$$S_2 = v_2 \cdot t_2 = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ (მ)}$$

მანძილზე. ნავმა მდინარე მართობულად რომ გადაკვეთოს მენავემ ნაპირისადმი დინების საპირისპიროდ უნდა აიღოს კურსი:



<sup>8</sup>  $t_0 = 0$  მომენტისთვის  $k'$  სისტემას ნებისმიერი მდებარეობა რომ ჰქონოდა  $k$  სისტემის მიმართ (14.1)–ში დაემატებოდა შესაკრები, ხოლო (14.2) დარჩებოდა უცვლელი.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v_2} = 20,$$

ქედან:

$$\alpha = \operatorname{arctg} 20 \approx 87^\circ.$$

**ამოცანა 6.2.** მოძრავ ექსკალატორს უძრავი მგზავრი 1 წთ-ში აჰყავს. უძრავ ექსკალატორზე მგზავრი ადის 3 წთ-ში. რა დროში ავა მგზავრი მოძრავ ექსკალატორით.

**ამოხსნა:**

ცხადია  $S$  გზის სიგრძე (გადაადგილების მოდული) სამივე შემთხვევაში ერთნაირია. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე:

$$t_{\text{მძ.}} = \frac{S}{v_{\text{მძ.}}} \quad t_{\text{მგ.}} = \frac{S}{v_{\text{მგ.}}}$$

სინქარეთა შეკრების კანონის თანახმად:

$$t_{\text{მძ.}+\text{მგ.}} = \frac{S}{v_{\text{მძ.}}+v_{\text{მგ.}}} = \frac{S}{\frac{S}{t_{\text{მძ.}}} + \frac{S}{t_{\text{მგ.}}}} = \frac{t_{\text{მგ.}} \cdot t_{\text{მძ.}}}{t_{\text{მგ.}} + t_{\text{მძ.}}} = \frac{1 \cdot 3}{1+3} = 3/4 (\text{წთ}).$$

**ამოცანა 6.3.** 320 მ სიგრძის თბომავალი უძრავ წყალში მოძრაობს 4 მ/წმ სინქარით. მუდმივი სინქარით მოძრავი კატარდა მანძილს თბომავლის ბოლოდან წვერომდე და უკან ბოლომდე გადის 1 წთ-ში. გამოთვალეთ კატარდას სინქარე.

**ამოხსნა:**

კატარდის მოძრაობის ხანგრძლივობა:

$$t = \frac{L}{v_{\text{კატ.}} - v_{\text{ობ.}}} + \frac{L}{v_{\text{კატ.}} + v_{\text{ობ.}}} = \frac{2v_{\text{კატ.}} L}{v_{\text{კატ.}}^2 - v_{\text{ობ.}}^2}.$$

$$60 = \frac{2 \cdot 320 v_{\text{კატ.}}}{v_{\text{კატ.}}^2 - 16},$$

აქედან:

$$3v_{\text{კატ.}}^2 - 32v_{\text{კატ.}} - 48 = 0,$$

$$v_{\text{კატ.}} = 12 \text{ მ/წმ.}$$

### §7. თანაბარწრფივი მოძრაობა

ნაწილაკის ტრაექტორიის ფორმისა და სიჩქარის ცვლილების ხასიათისგან დამოკიდებულებით განასხვავებენ ოთხი ტიპის მოძრაობას: თანაბარწრფივი, არათანაბარწრფივი, თანაბარმრუდწრფივი, არათანაბარმრუდწრფივი.

➤ **თანაბარწრფივი ეწოდება ისეთ მოძრაობას, რომლის დროსაც ნაწილაკი დროის ნებისმიერ ტოლ შუალედებში ტოლ გადაადგილებას ასრულებს.**

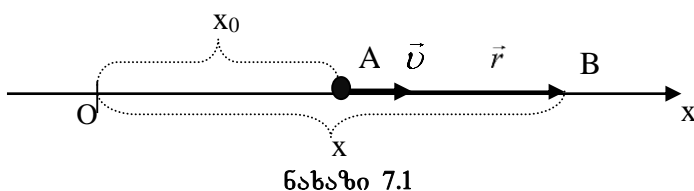
განმარტების გამომდინარე ასეთი მოძრაობისას მუდმივია ვექტორული სიჩქარე

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = const. \quad (7.1)$$

გადაადგილების ვექტორი (3.12)-ის თანახმად იქნება

$$\vec{r} = \int_0^t \vec{v} dt = \vec{v}t \quad (7.2)$$

რადგან მოძრაობა წრფივია, ამოცანის გამარტივების მიზნით კოორდინატთა  $Ox$  ღერძი შევუთავსოთ ტრაექტორიას (ნახ.7.1). ცხადია  $v_y = v_z = 0$ ,  $v_x = v$ . თუ დაკვირვების დასაწყისში



ანუ  $t_0 = 0$  მომენტისათვის  $v$  სიჩქარით მოძრავი ნაწილაკი იმყოფებოდა A წერტილში და შემდგომ  $t$  მომენტისათვის აღმოჩნდა B-ში, მაშინ გადაადგილების სიდიდე იქნება

$r = r_x = x - x_0$ , სადაც  $x_0$  - ნაწილაკის საწყისი კოორდინატია, ხოლო  $x$   $t$  მომენტისათვის, მაშინ (7.2)-დან:

$$v = \frac{r}{t} = \frac{x - x_0}{t},$$

რადგან მოძრაობა ხდება წრფეზე ერთი მიმართულებით, ამიტომ გადაადგილების ვექტორის მოდული გავლილი მანძილის ტოლია, ე.ი.

$$S = x - x_0 = vt$$

აქედან:

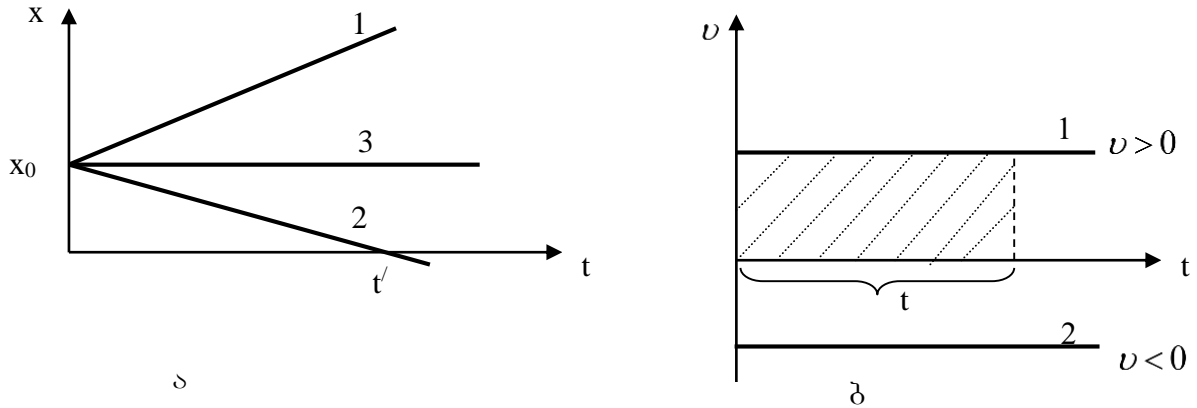
$$x = x_0 + vt \quad (7.3)$$

იგი თანაბარწრფივი მოძრაობის განტოლებაა. მართლაც, თუ ცნობილია ნაწილაკის სიჩქარე და დაკვირვების დასაწყისისთვის მისი მდებარეობა (საწყისი კოორდინატი) (7.3)-ის გამოყენებით შესაძლებელია განვსაზღვროთ მისი მდებარეობა დროის მომდევნო ნებისმიერ მომენტისათვის. თუ,  $t_0 = 0$  მომენტისთვის ნაწილაკი იმყოფებოდა ათვლის 0 წერტილში, ე.ი.  $x_0 = 0$ , მაშინ (7.3)-დან:

$$x = vt. \quad (7.4)$$

თუ მოძრაობა  $Ox$  ღერძის საპირისპიროა, სიჩქარის გეგმილი უარყოფითია და  $v$ -ს წინ იწერება მინუსი.

ნახ. 7.2ა,ბ-ზე მოცემულია თანაბარწრფივი მოძრაობისას კოორდინატისა და სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების  $x(t)$  და  $v(t)$  გრაფიკები 1, 2, 3 ნაწილაკებისთვის. ნახ. 7.2ა-ს თანახმად სამივე ნაწილაკი დაკვირვების დასაწყისში იმყოფებოდა ერთსადაიმთხვე  $x_0$  წერტილში. ამასთანავე 1 ნაწილაკი მოძრაობს  $OX$  ღერძის გასწვრივ  $v_1 > 0$ , მე-2-ე საპირისპიროდ  $v_2 < 0$ , ( $t'$  მომენტისათვის იგი იმყოფება ათვლის წერტილთან), მე-3-ე ნაწილაკი უძრავია  $v_3 = 0$ .



ნახაზი 7.2

ნახ. 7.2ბ-ზე მოცემულია 1 და 2 ნაწილაკის სიჩქარეთა დროზე დამოკიდებულება. (7.2)-ის თანახმად ნაწილაკის მიერ  $t$ -დროშიგავლილი მანძილი  $S = x - x_0 = vt$ . მასრიცხობრივად შეესაბამება ნახ. 7.2ბ-ზე დაშტრიხული ფართობი (იხ. §3).

თუ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე საკოორდინატო ღერძს ვერ ვუკავშირებთ ტრაექტორიას, მაშინ საჭიროა ორი ან სამღერძიანი სისტემის გამოყენება. ცხადია პრაქტიკულად თანაბარწრფივი მოძრაობა შეიძლება განხორციელდეს ტრაექტორიის მცირე უბანზე და დროის მცირე შუალედში.

**ამოცანა 7.1.** ორი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებებია  $x_1 = 4t$  და  $x_2 = 28 - 3t$ . განსაზღვრეთ ნაწილაკთა საწყისი მდგომარეობა, შეხვედრის წერტილის კოორდინატი და დრო.

**ამოხსნა:**

§1-ის თანახმად  $t=0$  მომენტისთვის ნაწილაკთა მდგომარეობაა, შესაბამისად ( $x_{01}=0, v_1=4$  მ/წმ) და ( $x_{02}=28$  მ,  $v_2=-3$  მ/წმ). შეხვედრის  $t'$  მომენტისთვის  $x_1 = x_2 = x'$ , ე.ი.  $4t' = 28 - 3t'$ ,  $t' = 4$  წმ. შეხვედრის წერტილის კოორდინატია  $x' = 4 \cdot 4 = 16$  მ.

**ამოცანა 7.2.** ავტოსადგურიდან გასული ავტობუსი მოძრაობს წრფივად და თანაბრად 20 მ/წმ სიჩქარით, იგივე მიმართულებით 400 წმ-ის შემდეგ მას 40 მ/წმ სიჩქარით დაედევნა მსუბუქი ავტომობილი. ჩავწერთ თითოეულის მოძრაობის განტოლებას, ვიპოვოთ ავტობუსის გასვლიდან რა დროში დაეწევა ავტომობილი და რა მანძილზე.

**ამოხსნა:**

(7.3)-ის თანახმად  $x_0 = 0$ , შესაბამისად ავტობუსის მოძრაობის განტოლებაა  $x_1 = 20t$ , ხოლო მსუბუქი ავტომობილის კი  $x_2 = 40(t - 400)$ . დაწვევის მომენტში  $x_1 = x_2$ , ე.ი.  $20t = 40(t - 400)$ , საიდანაც  $t = 800$  წმ, ხოლო გავლილი მანძილი იქნება:  $S = 20 \cdot 800 = 16000$ მ.

**ამოცანა 7.3.** გემი, რომელიც ნაპირიდან დაშორებულია  $S = 9$ კმ-ით, თავისი მოძრაობის მიმართულებით ნაპირისკენ უშვებს კატარდას, რომლის სიჩქარეც 5-ჯერ აღემატება გემის სიჩქარეს. კატარდა მივიდა ნაპირთან და იქვე დაბრუნდა უკან. რისი ტოლია გემის სიჩქარე თუ კატარდა გემთან დაბრუნდა 0,5 სთ-ში?

**ამოხსნა:**

გემის მიერ  $t = 0,5$  სთ-ში გავლილი მანძილი იქნება  $S_1 = v_0 t$ , ხოლო იმავე დროში კატარდა გადის  $S_2 = v_0 t = 5v_0 t$ . მეორე მხრივ  $S_2 = S + (S - S_1) = 2S - v_0 t$ . ე.ი.  $5v_0 t = 2S - v_0 t$ . აქედან:

$$v_0 = \frac{2S}{6t} = \frac{2 \cdot 9}{6 \cdot 0,5} = 6 \text{ (კმ/სთ)}$$

**ამოცანა 7.4.** თანაბარწრფივად მოძრავი ნაწილაკი დაკვირვების დასაწყისში იმყოფებოდა  $z = 0$  საკორდინატო სიბრტყის  $A(6; -5)$  წერტილში, ხოლო 10 წმ-ის შემდეგ  $B(14; 1)$  წერტილშიგამოთვალეთ ნაწილაკის სიჩქარე. სად იქნება იგი მომდევნო 4წმ-ის ბოლოს?

**ამოხსნა:**

გადაადგილების ვექტორის  $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$  გეგმილები  $Ox$  და  $Oy$  ღერძებზე სათანადოდ იქნება:  $\vec{r}(14 - 6; 1 - (-5))$  ანუ  $\vec{r}(8; 6)$  შესაბამისად:

$$v_x = \frac{8}{10} = 0,8 \text{ მ/წმ}, \quad v_y = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ მ/წმ}, \quad v = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} = 1 \text{ მ/წმ}$$

დაკვირვების დაწყებიდან 14 წმ-ს შემდეგ იგი აღმოჩნდება  $C(x; y)$  წერტილში რომლის კოორდინატებიც (7.3)-ის თანახმად იქნება  $x = x_0 + v_x t = 6 + 0,8 \cdot 14 = 17,2$  მ  $y = y_0 + v_y t = -5 + 0,6 \cdot 14 = 3,4$  (მ) ანუ  $C(17,2; 3,4)$ .

### §8. თანაბარჩქარეობული მოძრაობა

ზანვიხილეთ წრფივი არათანაბარი მოძრაობის კერძო შემთხვევა – თანაბარჩქარეობული მოძრაობა.

➤ **თანაბარჩქარეობული მოძრაობა ეწოდება ისეთ მოძრაობას როდესაც ნაწილაკის ვექტორული სიჩქარე დროის ნებისმიერ ტოლ შუალედში ერთნაირად იცვლება.**

განმარტებიდან გამომდინარე ასეთი მოძრაობისას ვექტორული აჩქარება მუდმივი სიდიდეა

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{const}. \quad (8.1)$$

დავუშვათ დაკვირვების დასაწყისში ( $t_0 = 0$ ) თანაბარჩქარეობულად მოძრავი ნაწილაკის სიჩქარე იყო  $\vec{v}_0$ , ხოლო  $t$  მომენტისთვის  $\vec{v}$ . სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების დადგენისთვის ვისარგებლოთ (8.1) ფორმულით:

$$\int_{v_0}^v d\vec{v} = \int_0^t \vec{a} dt, \quad \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}t \quad \text{ანუ}$$

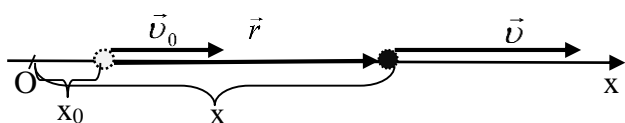
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (8.2)$$

გადაადგილების ვექტორი (3.12)-ის თანახმად იქნება:

$$\vec{r} = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t) dt$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \quad (8.3)$$

რადგან მოძრაობა წრფივია, შევუთავსოთ მას კოორდინატა  $OX$  ღერძი (ნახ.8.1). მაშინ



ნახაზი 8.1

$$v_0 = v_{0x} \text{ და } v = v_x, \text{ ხოლო } a = a_x. (8.2)\text{-დან}$$

$$v = v_0 + at. \quad (8.2)'$$

თუ საწყისი  $t_0 = 0$  მომენტისთვის ნაწილაკი უძრავი იყო  $v_0 = 0$  მაშინ  $v = at$ . წრფივი

ტრექტორიის გამო სიჩქარეც და აჩქარებაც ტრექტორიის გასწვრივ არის მიმართული. ამავე დროს თუ სიჩქარე იზრდება ( $\Delta v > 0$ ),  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{v}$  და პირიქით, თუ სიჩქარე კლებულობს ( $\Delta v < 0$ ),  $\vec{a} \downarrow \downarrow \vec{v}$ . ასეთ მოძრაობას *თანაბარშენელებულსაც* უწოდებენ. ამ შემთხვევაში  $a$ -ს წინ იწერება მინუსი. მოცემულ შემთხვევაში გადაადგილების ვექტორის მოდული გაველილი მანძილის ტოლია, ასე რომ

$$S = x - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (8.3)'$$

შესაბამისად თანაბარაჩქარებული მოძრაობის განტოლებაა

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

განმარტების თანახმად საშუალო სიჩქარე იქნება

$$v_{\text{საშ}} = \frac{S}{t} = \frac{v_0 t + \frac{at^2}{2}}{t} = \frac{2v_0 t + at^2}{2t} = \frac{2v_0 + at}{2} = \frac{v + v_0}{2}, \quad (8.4)$$

ანუ თანაბარაჩქარებული მოძრაობისას საშუალო სიჩქარე საბოლოო და საწყის სიჩქარეთა საშუალო არითმეტიკულის ტოლია.

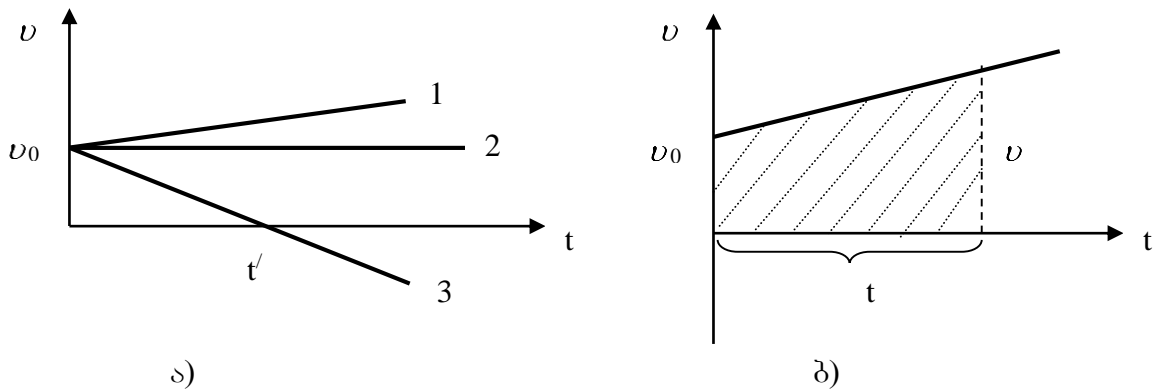
(8.4)-დან:

$$S = \frac{v + v_0}{2} t. \quad (8.5)$$

გაველილი მანძილი შეიძლება სხვა სახითაც ჩავწეროთ. მაგალითად, თუ (8.2')-დან განვსაზღვრავთ  $t$ -ს და შევიტანთ (8.5)-ში მივიღებთ:

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (8.6)$$

თუ დაკვირვების დასაწყისში ნაწილაკი გაჩერებული იყო, ფორმულებში უნდა გავითვალისწინოთ, რომ  $v_0 = 0$ . ნახ.8.2ა,ბ-ზე მოცემულია თანაბარჩქარეული მოძრაობისას სიჩქარის დროზედამოკიდებულება, რომელსაც, (8.2)-ის თანახმად, წრფივი ხასიათი აქვს. ნახ. 8.2ა-ზე სამივე ნაწილაკს დაკვირვების დასაწყისში გააჩნია ერთიდაიგივე  $U_0$  სიჩქარე. მე-2-ე ნაწილაკი მოძრაობს თანაბრად  $a_2 = 0$ , 1 ნაწილაკი მოძრაობს მზრდადი სიჩქარით  $a_1 > 0$ , მე-3-ე შენელებულად  $a_3 < 0$ , ამასთანავე  $t'$  მომენტისათვის იგი ჩერდება და შემდეგ აგრძელებს მოძრაობას საპირისპირო მიმართულებით. ნახ. 8.2ბ-ზე მოცემული დაშტრისული ფართის სიდიდე შეესაბამება ნაწილაკის მიერ  $t$ -დროში გავლილ მანძილს (იხ. §3).



ნახაზი 8.2

(მართლაც ეს ფართი ტრაპეციაა და მისი ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა იგივეა რაც (8.3)').

თუ მოძრაობა მოცემული ათვლის სისტემის მიმართ ორ ან სამგანზომილებიანია, მაშინ ვექტორთა გეგმილების რიცხვის ზრდასთან ერთად გაიზრდება მათი დამაკავშირებელი განტოლებების რიცხვი. მაგალითად, ბრტყელი მოძრაობისას, კერძოდ  $z=0$  სიბრტყეში გვექნება

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \quad (8.2a)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t, \quad (8.2b)$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad (8.3a)'$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}, \quad (8.3b)'$$

ამ განტოლებებს ჩვენ დავუბრუნდებით ბალისტიკური მოძრაობის შესწავლისას (§20).

**ამოცანა 8.1.** სადგურიდან გასული მატარებლის პირველმა ორმა ვაგონმა მისრეს წინ ჩაიარა 60 წმ-ს განმავლობაში. რა დრო დაჭირდება მეცხრე ვაგონის ჩავლას, თუ მოძრაობა თანაბარჩქარეულია.

**ამოხსნა:**

მატარებლის ვაგონის სიგრძე ავლნიშნოთ  $L$ -ით. მაშინ ამოცანის პირობის თანახმად  $t_2=60$  წმ-ში მატარებელი გადადგილდა  $2L$  -ით. რადგან მოძრაობა თანაბარჩქარეულია უსაწყისო სიჩქარით, ამიტომ:

$$2L = \frac{at_2^2}{2}, \quad 8L = \frac{at_8^2}{2}, \quad 9L = \frac{at_9^2}{2}.$$

აქედან:

$$\frac{t_8^2}{t_2^2} = 4, \quad t_8 = 120 \text{ (წმ)},$$

ხოლო:

$$\frac{t_9^2}{t_2^2} = 4,5, \quad t_9 = 127 \text{ (წმ)}.$$

$$t = t_9 - t_8 = 7 \text{ (წმ)}$$

**ამოცანა 8.2.** თანაბარჩქარებულად მოძრაობა სხეულმა 5 წმ-ში გაიარა 25 მ და მისი სიჩქარე გაიზარდა 3-ჯერ. განსაზღვრეთ აჩქარება და ბოლო 2 წმ-ში გავლილი მანძილი.

**ამოხსნა:**

(8.3)-ის თანახმად:

$$v_{\text{საშ}} = \frac{3v_0 + v_0}{2} = 2v_0,$$

მაშინ:

$$S = v_{\text{საშ}} t = 2v_0 t,$$

აქედან:

$$v_0 = \frac{S}{2t} = \frac{25}{10} = 2,5 \text{ (მ/წმ)}.$$

მაშინ:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{2v_0}{t} = \frac{2 \cdot 2,5}{5} = 1 \text{ მ/წმ}^2.$$

ბოლო 2წმ-ში გავლილი მანძილი  $S_2 = S - S_1$ , სადაც  $S_1$  პირველ 3 წმ-ში გავლილი მანძილია.  
ე.ი.:

$$S_1 = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} = 2,5 \cdot 3 + \frac{1 \cdot 3^2}{2} = 12 \text{ (მ)}.$$

შესაბამისად:

$$S_2 = 25 - 12 = 13 \text{ (მ)}.$$

**ამოცანა 8.3.** ერთი წერტილიდან ურთიერთსაპირისპირო მიმართულებით მოძრაობას იწყებს ორი სხეული. ერთი მუდმივი 8 მ/წმ სიჩქარით, მეორე თანაბარჩქარებულად 2 მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით. რა დროის შემდეგ დაშორდებიან ისინი ერთმანეთს  $L=48$  მ-ით.

**ამოხსნა:**

დავუშვათ  $L$  მანძილით ისინი დაშორდნენ  $t$  წმ-ის შემდეგ. თითოეული ამ დროში შესაბამისად გაივლიდა მანძილს:

$$S_1 = vt; \quad S_2 = \frac{at^2}{2}.$$

ამოცანის პირობიდან:

$$L = S_1 + S_2 = vt + \frac{at^2}{2}.$$

რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს:

$$48 = 8t + \frac{2t^2}{2}, \quad t^2 + 8t - 48 = 0.$$

ვადრატული განტოლების ამოხსნის შედეგად ვღებულობთ:

$$t = 4 \text{ წმ.}$$

### **§9. თანაბარი ბრუნვა წრეწირზე**

ნაწილაკის ბრუნვა წრეწირზე წარმოადგენს მრუდწირული მოძრაობის კერძო შემთხვევას. ამ მოძრაობისას ზოგადად იცვლება წირითი სიჩქარის სიდიდეც და მიმართულებაც.

წრეწირებრუნვის დასახასიათებლად მოსახერხებელია პოლარულ კოორდინატთა სისტემით სარგებლობა- ნაწილაკის მოძრაობის აღწერა რადიუს-ვექტორითა და კუთხით, რომელსაც იგი ადგენს  $OX$  ღერძთან ( $R; \varphi$ ) (კუთხე აითვლება საათის ისრის მოძრაობის საპირისპიროდ, ნახ. 9.1).

წრეწირზე ბრუნვისას სარგებლობენ **კუთხური სიჩქარის** და **კუთხური აჩქარების** ცნებით.

- **საშუალო კუთხური სიჩქარის სიდიდე ტოლია რადიუს-ვექტორის შემობრუნების კუთხის ფარდობისა შესაბამის დროსთან**

$$\omega_{\text{საშ}} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$

მისი ერთეულია რადიანი/წამი (რად/წმ), ხოლო კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{საშ}} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9.1)$$

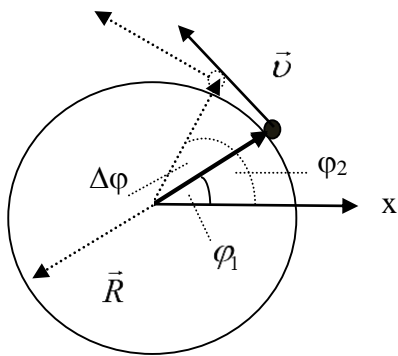
განვიხილოთ თანაბარი ბრუნვა წრეწირზე. ამ მოძრაობისას ნაწილაკი დროის ნებისმიერ ტოლ შუალედებში ტოლი სიგრძის რკალებს შემოწერს, ანუ რადიუს-ვექტორი ერთნაირი კუთხით შემობრუნდება. ე.ი. თუ თანაბარი ბრუნვისას  $t$  დროში ნაწილაკმა შემოწერა  $\nu$  კუთხე, კუთხური სიჩქარე იქნება:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (9.2)$$

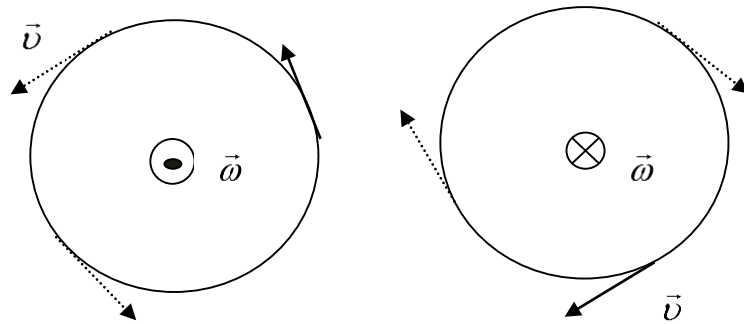
კუთხური სიჩქარე ვექტორული სიდიდეა, იგი მოდებულია წრეწირის ცენტრზე და მართობულია ბრუნვის სიბრტყის. მისი მიმართულება განისაზღვრება **მარჯვენა ხელის წესით**:

- **თუ მარჯვენა ხელის თითები მოხრილ მდგომარეობაში გვიჩვენებს ბრუნვის მიმართულებას, მაშინ გაშლილი ( $90^\circ$ ) ცერა თითი გვიჩვენებს კუთხური სიჩქარის მიმართულებას.**

თუ ვექტორი მიმართულია ნახაზიდან მკითხველისკენ აღინიშნება მცირე წრეში ჩახაზული წერტილით, საპირისპირო შემთხვევაში ჯვრით (ნახ. 92.ა,ბ)



ნახაზი 9.1



ნახაზი 9.2

რადგან  $t$  დროში ნაწილაკი შემოწერს  $S = \varphi R$  რკალს, მოძრაობის წირითი სიჩქარე იქნება

$$v = \frac{S}{t} = \frac{\varphi}{t} R = \omega R. \quad (9.3)$$

ცხადია, რომ ნაწილაკის წირითი სიჩქარის მოდული უცვლელი დარჩება, შეიცვლება მხოლოდ მისი მიმართულება, რის გამოც აჩქარების მხები მდგენელი ნულია, ხოლო ნორმალური მდგენელი – მუდმივია და ნულისგან განსხვავებული  $\vec{a} = \vec{a}_n$  (§5). ამიტომ წრეწირზე თანაბარი ბრუნვისას აჩქარება მიმართულია წრეწირის ცენტრისკენ და მას ცენტრისკენულ აჩქარებას უწოდებენ. სიდიდით იგი მუდმივია და გამოითვლება ფორმულით:

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (9.4)$$

თუ (9.4)-ში შევიტანთ (9.3)-ს მივიღებთ:

$$a = \omega^2 R. \quad (9.5)$$

$\vec{a} = \vec{a}_n$  მიმართულია  $\vec{R}$  – ის საპირისპიროდ, რის გამოც (9.5) ვექტორულად ასე ჩაიწერება

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}.$$

წრეწირზე თანაბარ მოძრაობასახასიათებენ ბრუნვის პერიოდით და სიხშირით.

- დროს, რომლის განმავლობაშიც თანაბრად მბრუნავი ნაწილაკი ერთ სრულ ბრუნს შემოწერს, ბრუნვის  $T$  პერიოდი ეწოდება.

(9.2)-ის თანახმად, თუ  $t = T$ ,  $\varphi = 2\pi$ , ე.ი.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (9.6)$$

- თანაბრი ბრუნვისას დროის ერთეულში შესრულებულ ბრუნვთა რიცხვს  $\nu$  სიხშირე ეწოდება.

იგი პერიოდის შებრუნებული სიდიდეა  $\nu = 1/T$ . მისი ერთეულია ჰერცი (ჰც) = წმ<sup>-1</sup>. მაშინ (9.6)-დან ვღებულობთ:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (9.7)$$

ე.ი. კუთხური სიჩქარე  $2\pi$  წამში შესრულებულ ბრუნვითა რიცხვის ტოლია, რის გამოც მას **ციკლურ სიხშირესაც** უწოდებენ.

ცხადია, პერიოდსა და სიხშირეზე საუბარი შეიძლება მხოლოდ ნაწილაკის თანაბარი ან **კვანთათანაბარი** (თითქმის თანაბარი) ბრუნვის შემთხვევაში.

**ამოცანა 9.1.** იპოვეთ დედამიწის ზედაპირის წერტილების ბრუნვის წირითი სიჩქარე და აჩქარება  $60^\circ$  განედზე ( დედამიწის რადიუსი  $R=3800$  კმ)

**ამოხსნა:**

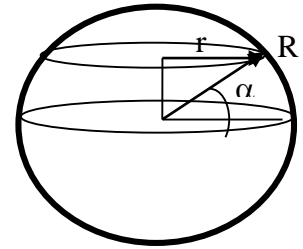
(9.5)-ის თანახმად:

$$v = \omega r = \omega R \cos \alpha = \frac{2\pi}{T} R \cos \alpha ,$$

სადაც  $T=24$  სთ= $86400$  წმ,  
მაშინ:

$$v = \frac{2 \cdot 3,14}{86400} 3800000 \cdot 0,5 = 138 (\text{მ/წმ})$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(138)^2}{19 \cdot 10^5} \approx 1 \cdot 10^{-2} (\text{მ/წმ}^2).$$



**ამოცანა 9.2.** წრეწირზე მბრუნავი ორი ნაწილაკის ბრუნვის პერიოდებია  $7$  წმ და  $1$  წმ. დაკვირვების დასაწყისში ისინი ერთ წერტილში იმყოფებოდა. რა უმცირესი დროის შემდეგ აღმოჩნდებიან ისინი ერთ წერტილში თუ მოძრაობენ ა) ერთი მიმართულებით, ბ) საპირისპირო მიმართულებით.

**ამოხსნა:**

ა) რადგან  $T_2 < T_1$ , ამიტომ შეხვედრის მომენტში ( $t_2 = t_1$ )  $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$ . (9.4)-ის თანახმად:

$$\frac{\varphi_2}{\omega_2} = \frac{\varphi_1}{\omega_1} \quad \frac{\varphi_1 + 2\pi}{\omega_2} = \frac{\varphi_1}{\omega_1} .$$

(8.6)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ:  $(\varphi_1 + 2\pi)T_2 = \varphi_1 T_1$ , საიდანაც  $\varphi_1 = \pi / 3$ .

ბ) შეხვედრის მომენტში  $\varphi_2 + \varphi_1 = 2\pi$ , მეორე მხრივ:

$$\frac{\varphi_2}{\omega_2} = \frac{\varphi_1}{\omega_1} ,$$

ანუ  $(2\pi - \varphi_1)T_2 = \varphi_1 T_1$ , საიდანაც  $\varphi_1 = \pi / 4$ .

**ამოცანა 9.3.** ჭის ჯალამბრის სახელურის რადიუსი  $4$ -ჯერ მეტია ლილვის რადიუსზე, რომელსაც თოკი ეხვევა. სახელურის წირითი სიჩქარე  $1,6$  მ/წმ-ის ტოლი. რა დრო დაჭირდება  $8$  მ სიღრმიდან ვედროს ამოტანას?

**ამოხსნა:**

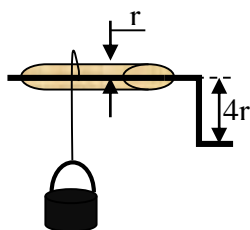
რადგან ჯალამბრის და ლილვის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ერთმანეთის ტოლია, (9.5)-ის თანახმად შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$v_{\text{ჯ}} = \omega \cdot 4r \tag{1}$$

$$v_{\text{ლ}} = \omega \cdot r \tag{2}$$

(2)-ის (1)-თან შეფარდებით ვღებულობთ:

$$v_{\text{ლ}} = v_{\text{ჯ}} / 4 \quad v_{\text{ლ}} = 0,4 (\text{მ/წმ}).$$



ვედროს ამოტანისთვის საჭიროა:

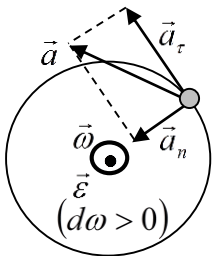
$$t = \frac{h}{v_{\text{ლ}}} = 20 \text{ (წმ)}.$$

### §10. არათანაბარი ბრუნვა წრეწირზე

არათანაბარი ბრუნვა წრეწირზე წარმოადგენს არათანაბარი მრუდწირული მოძრაობის კერძო შემთხვევას. ამ მოძრაობისას ნაწილაკი დროის ტოლ შუალედებში არატოლ სიგრძის რკალებს შემოწერს. ცხადია, ამ დროს იცვლება კუთხური სიჩქარე. რის გამოც შემოაქვთ **საშუალო კუთხური აჩქარების** ცნება. იგი ეწოდება **კუთხური სიჩქარის ცვლილების ფარდობას შესაბამის დროსთან**. თუ  $\Delta t$  დროში კუთხური სიჩქარის სიდიდე შეიცვალა  $\Delta \omega$  სიდიდით, მაშინ საშუალო კუთხური აჩქარება იქნება:

$$\varepsilon_{\text{საშ}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t},$$

ხოლო კუთხური აჩქარება:



ნახაზი 10.1.

მისი ერთეულია რად/წმ<sup>2</sup>.

კუთხური აჩქარება ვექტორული სიდიდეა, მოდებულია წრეწირის ცენტრზე და ემთხვევა  $\vec{\omega}$ -ს მიმართულებას თუ ბრუნვა აჩქარებულია ( $d\omega > 0$ )  $\vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$ . შენელებული ბრუნვის შემთხვევაში ( $d\omega < 0$ ) კუთხური სიჩქარე და აჩქარება მიმართულია საპირისპიროდ ( $\vec{\varepsilon} \downarrow \downarrow \vec{\omega}$ ).

წრეწირზე არათანაბარი ბრუნვისას იცვლება წირითი სიჩქარის სიდიდეც და მიმართულებაც, რის გამოც აჩქარების მხები მდგენელი  $\vec{a}_\tau$  ნულისგან განსხვავებულია, კერძოდ (5.2)-ის თანახმად:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \frac{d\omega R}{dt} = \vec{\tau} \varepsilon R, \quad (10.2)$$

ასევე ცვლადი იქნება აჩქარების ნორმალური მდგენელიც  $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$ . და ნაწილაკის აჩქარება  $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$  წრეწირის ცენტრისკენ აღარ იქნება მიმართული (იხ. ნახ. 10.1).

**ამოცანა 10.1.** ნაწილაკის 0,8მ რადიუსის წრეწირზე ბრუნვის განტოლებაა  $\varphi = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{4} t$ .

დაადგინეთ მოძრაობის ტიპი. გამოთვალეთ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და აჩქარება.

**ამოხსნა:**

(9.3)-ის თანახმად  $\omega = \frac{\pi}{4}$  რად/წმ. რადგან კუთხური სიჩქარე მუდმივია, მოძრაობა თანაბარია. ამიტომ აჩქარებას გააჩნია მხოლოდ ნორმალური მდგენელი-ცენტრისკენული აჩქარება (9.8) -ის გამოყენებით  $a = \frac{\pi}{20}$  მ/წმ<sup>2</sup>.

შესაძლებელია გამოვთვალოთ ბრუნვის პერიოდი და სიხშირე. (9.6)-დან  $T=8\text{წმ}$ , შესაბამისად  $\nu=1/8$  ჰც .

**ამოცანა 10.2.** 2მ რადიუსის წრეწირზე ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებაა  $\varphi = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t^2$ .

გამოთვალეთ პირველი ბრუნვისთვის საჭირო დრო და ჩაწერეთ აჩქარების განტოლება.

**ამოხსნა:**

$$\text{ამოცანის პირობის თანახმად, } \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = 2\pi, \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{3},$$

$$\text{ე.ი. } \frac{\pi}{2}t^2 = 2\pi, \quad t = 2\text{ წმ. } \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \pi t, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \pi,$$

წირითი აჩქარების მდგენელები იქნება:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau}\pi R, \quad \vec{a}_n = -\pi^2 t^2 \vec{R},$$

$$\text{სოლო წირითი აჩქარება: } a = \sqrt{\pi^2 R^2 + \pi^4 t^4 R^2} = \pi R \sqrt{1 + \pi^2 t^4}.$$

**ამოცანა 10.3.** 1,6მ რადიუსიან წრეწირზე მბრუნავი ნაწილაკის აჩქარება დაკვირვების დასაწყისში  $4\sqrt{3}$  მ/წმ-ის ტოლია და  $60^\circ$ -იან კუთხეს ადგენს მოძრაობის მიმართულებასთან. ჩათვალეთ, რომ მხები აჩქარება უცვლელია და გამოთვალეთ ნაწილაკის კუთხურისჩქარე 3წმ-თვის.

**ამოხსნა:**

ნახაზიდან გამოძინარე  $t=0$  მომენტისთვის მხები აჩქარება  $a_\tau = a \cos 60^\circ = 2\sqrt{3}$  მ/წმ<sup>2</sup>.

ამოცანის პირობის გამო იგი მუდმივია, ამიტომ (10.3)-ის თანახმად, კუთხური აჩქარებაც მუდმივია:

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{2\sqrt{3}}{1,6} = 2,2 \text{ (რად/წმ}^2\text{)}. \quad (1)$$

მსგავსად (8.2)-სა შეგვიძლია ჩავწეროთ კუთხური სიჩქარის დროზე დამოკიდებულება:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (2)$$

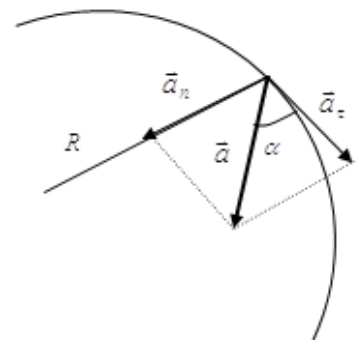
$$t=0 \text{ საწყისი მომენტისთვის } a_n = a \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}$$

$$\text{მეორე მხრივ } a_{n(t=0)} = \frac{v_0^2}{R}, \quad \text{ე.ი. } v_0 = \sqrt{a_n R} = 3,1 \text{ (მ/წმ)}. \quad (9.5)\text{-ის გამო:}$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R} = 1,9 \text{ (რად/წმ)}. \quad (3)$$

(1) და (3)-ის (2)-ში გათვალისწინებით ვღებულობთ:

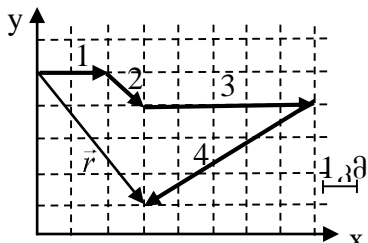
$$\omega = 1,9 + 2,2 \cdot 3 = 8,5 \text{ (რად/წმ)}.$$



**ამოცანები კინემატიკაში:**

1. ნაწილაკი მოძრაობს  $R=0,5$ მ რადიუსის წრეწირზე. გამოთვალეთ მისი გავლილი მანძილი და გადაადგილების მოდული  $A$  საწყისი მდებარეობის მიმართ შემობრუნებისას  $\alpha_1=B/6$ ;  $\alpha_2=B$  ცენტრალურიკუთხით.(პასუხი: 1,05მ, 0,07მ; 1,57მ, 1მ)

2. ნახაზზე მოცემულია ტურისტული ჯგუფის მოძრაობის მარშუტი (1,2,3,4). (თითველ უბანზე გადაადგილება თანხვედრილია გავლილი მანძილის) გამოთვალეთ მის მიერ გავლილი მანძილი და გადაადგილების მოდული.



(პასუხი:  $\approx 14,2$ კმ, 5კმ).

3. დროის მოცემული მომენტისთვის ნაწილაკის რადიუს-ვექტორია  $\vec{r}(6;0;8)$ , განსაზღვრეთ მისი ორიენტაცია ათვლის

0 წერტილის მიმართ.(პასუხი:  $\cos \alpha_1 = 3/5$ ,  $\alpha_2 = 90^\circ$ ,  $\cos \alpha_3 = 4/5$  )

4. ავტომობილის საშუალო სიჩქარემთელ გზაზე 10მ/წმ-ია. მან გზის პირველი მესამედი გაიარა 6მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ სიჩქარე გზის დანარჩენ ნაწილზე.(პასუხი: 15მ/წმ )

5. ნაწილაკის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებებია  $x = 5 \cos \frac{\pi}{3}t$ ,  $y = 5 \sin \frac{\pi}{3}t$ ,  $z = 0$ . ჩაწერეთ ტრაექტორიის განტოლება.

(პასუხი:  $x^2 + y^2 = 25$ )

6. ავტომობილი დადმართხემოძრაობდა 10მ/წმ სიჩქარით, ხოლო აღმართზე 6მ/წმ სიჩქარით. რამდენჯერ აღემატება დადმართის სიგრძე აღმართს, თუ საშუალო სიჩქარე 22,5მ/წმ-ია. (პასუხი: 5-ჯერ )

7. ავტომობილის მძღოლი, 10კმ-ით დაშორებულ პუნქტში დროულად მისასვლელად, მოძრაობდა 10მ/წმ სიჩქარით. ნახევარი გზის გავლის შემდეგ ის 5 წუთით შეეკვნდა. რა სიჩქარით უნდა გააგრძელოს მოძრაობა რომ პუნქტში დროულად მივიდეს? (პასუხი: 25მ/წმ )

8. 2მ სიძრუდის რადიუსის ტრაექტორიაზე მოძრავი ნაწილაკის აჩქარება საწყის მომენტში 1მ/წმ<sup>2</sup>-ის ტოლია და  $\alpha = 45^\circ$  კუთხეს ადგენს მოძრაობის მიმართულებასთან. გამოთვალეთ ნაწილაკის სიჩქარე საწყის მომენტში და 2,5წმ-ის შემდეგ. ჩათვალეთ, რომ მხები აჩქარება მუდმივია.(პასუხი: 2,97მ/წმ).

9. 2მ რადიუსიან წრეწირზე მბრუნავი ნაწილაკის აჩქარება დაკვირვების დასაწყისში 2მ/წმ-ის ტოლია და  $30^\circ$ -იან კუთხეს ადგენს მოძრაობის მიმართულებასთან. ჩათვალეთ, რომ მხები აჩქარება უცვლელია და გამოთვალეთ ნაწილაკის სიჩქარე 2წმ-თვის. (პასუხი: 4,96მ/წმ)

10. ორი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებებია  $x_1 = 3t$  და  $x_2 = -28 + 7t$ . განსაზღვრეთ ნაწილაკთა შეხვედრის წერტილის კოორდინატი და დრო.(პასუხი: 21მ, 7წმ. )

11. თანაბარწრფივად მოძრავი ნაწილაკი დაკვირვების დასაწყისში იმყოფებოდა  $z=0$  საკოორდინატო სიბრტყის  $A(0;-4)$  წერტილში, ხოლო 5წმ-ის შემდეგ  $B(3;0)$  წერტილში. გამოთვალეთ ნაწილაკის სიჩქარე. სად იქნება იგი მომდევნო 4წმ-ის ბოლოს? (პასუხი: 1მ/წმ,  $C(5,4;3,2)$ ).

12. ნაწილაკის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებაა  $x = -10 + 8t + t^3$ . განსაზღვრეთ ნაწილაკის მდებარეობა, სიჩქარისა და აჩქარების მნიშვნელობები  $t = 0; 1$  წმ მომენტისთვის. (პასუხი: -10მ, 8მ/წმ, 0მ/წმ<sup>2</sup>; -1მ, 11მ/წმ, 6მ/წმ<sup>2</sup>)

13. ნაწილაკის კინემატიკური განტოლებაა  $x=10+4t-0,5t^2$ . რა დროის შემდეგ გაჩერდება და რა მანძილს გაივლის გაჩერებამდე? (პასუხი: 4წმ, 8მ).
14. ნაწილაკის მოძრაობა მრუდწირულ ბრტყელ ტრაექტორიაზე მოიცემა განტოლებებით:  $x=t/2$  და  $y=t^3/6$ . ჩაწერეთ ნაწილაკის ტრაექტორიის განტოლება. გამოთვალეთ ნაწილაკის სიჩქარე და აჩქარება 2წმ-ისათვის. (პასუხი:  $y=\frac{4}{3}x^3$ , 2,1მ/წმ, 2მ/წმ<sup>2</sup>)
15. ორი ნაწილაკის კინემატიკური განტოლებებია:  $x_1=10+14t-2t^2$ ,  $x_2=30+2t+t^2$ . დროის რა მომენტში ექნებათ ერთნაირი სიჩქარე. რისი ტოლია ამ მომენტისათვის სიჩქარე და აჩქარებები? (პასუხი: 2წმ, 6მ/წმ, -4მ/წმ<sup>2</sup>, 2მ/წმ<sup>2</sup>).
16. ერთი წერტილიდან ერთიდაიგივე მიმართულებით მოძრაობას იწყებს ორი სხეული ერთი მუდმივი 20მ/წმ სიჩქარით მეორე თანაბარაჩქარებულად 2 მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით. რა მანძილზე და დროის შემდეგ დაეწევა მეორე სხეული პირველს დაშორდებიან ისინი ერთმანეთს L=48მ-ით. (პასუხი: 400მ, 20წმ. ).
17. 390მ სიგრძის თბომავალი უძრავ წყალში მოძრაობს 5მ/წმ სიჩქარით. მუდმივი სიჩქარით მოძრავი კატარღა მანძილს თბომავლის ბოლოდან წვერომდე და უკან ბოლომდე გადის 160წმ-ში. გამოთვალეთ კატარღას სიჩქარე.(პასუხი: 8მ/წმ. )
18.  $v_1 = 200$  კმ/სთ სიჩქარით თვითმფრინავი მიფრინავდა ჩრდილოეთის მიმართულებით. მოულოდნელად ამოვარდა ჩრდილო-აღმოსავლეთის ქარი. განსაზღვრეთ თვითმფრინავის სიჩქარე დედამიწის მიმართ, თუ ქარის სიჩქარეა  $v_2 = 50$  კმ/სთ. რა კუთხით უნდა შეიცვალოს თვითმფრინავმა გეზი ჩრდილოეთის მიმართ, რომ კურსი დარჩეს უცვლელი? (პასუხი: 168,4 კმ/სთ,  $\arctg \theta = 0,21$ ,  $\theta = 11^{\circ}25'$ ).
19. მოძრავ ექსკალატორს უძრავი მგზავრი 2წმ-ში აჰყავს. მოძრავ ექსკალატორზე მგზავრი ადის 1,5წმ-ში. რა დროში ავა მგზავრი უძრავ ექსკალატორზე?(პასუხი: 6წმ. )
20. ნავის სიჩქარე, წყლის მიმართ 3-ჯერ მეტია მდინარის დინების სიჩქარეზე. რამდენჯერ მეტი დრო დაჭირდება ნავს ორ პუნქტს შორის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით გასავლელად, ვიდრე დინების მიმართულებით. (პასუხი: 2-ჯერ. )
21. ორი წრფივი გზა ერთმანეთს კვეთს  $30^{\circ}$  კუთხით. გზაჯვარედინიდან სხვადასხვა მიმართულებით ერთდროულად გადის ორი ავტომობილი 15მ/წმ და 8მ/წმ სიჩქარით. რა სიჩქარით შორდება ავტომობილები ერთმანეთს? (პასუხი: 9მ/წმ, 22,3მ/წმ).
22. 54კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილის მძღოლმა 8მ-ით წინ დაინახა დაბრკოლება და დაამუხრუჭა 12მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით. აიცილებს თუ არა იგი ავარიას? პასუხი დაასაბუთეთ. (პასუხი: არა).
23. თვითმფრინავს აფრენის მომენტში უნდა გააჩნდეს 180კმ/სთ სიჩქარე. შეუძლია თუ არა ისარგებლოს 120მ სიგრძის ასაფრენი ზოლით, თუ მისი აჩქარება 12მ/წმ<sup>2</sup>.(პასუხი: შესაძლებელია)
24. სხეულმა უსაწყისო სიჩქარით თანაბარაჩქარებულ მოძრაობისას გზის პირველი ნახევარი გაიარა 10წმ-ში. რა დრო დაჭირდება გზის მეორე ნახევარს? (პასუხი: 4წმ).
25. სხეულმა დაიწყო თანაბარაჩქარებულ მოძრაობა და 8წმ-ში გაიარა 128მ. განსაზღვრეთ ბოლო წმ-ში გავლილი მანძილი. (პასუხი: 30მ).

26. თანაბარჩქარებულად მოძრაობა სხეულმა 10წმ-ში გაიარა 140მ და მისი სიჩქარე გაიზარდა 6-ჯერ. განსაზღვრეთ საწყისი სიჩქარე და პირველ 5წმ-ში გავლილი მანძილი. (პასუხი: 4მ/წმ, 45მ).
27. ერთსადაიმავე პირობებში ავტომობილის სიჩქარის სამჯერ გაზრდის შემთხვევაში რამდენჯერ გაიზრდება სამუხრუჭე დრო და მანძილი? (პასუხი: 3-ჯერ, 9-ჯერ).
28. ჭის ჯალამბრის სახელურის რადიუსი 3-ჯერ მეტია ლილვის რადიუსზე, რომელსაც თოკი ეხვევა. რას უდრისსახელურის წირითი სიჩქარე, თუ 10მ სიღრმიდან ვედროს ამოტანას ჭირდება 20წმ.(პასუხი: 1,5მ/წმ).
29. მთვარე დედამიწის ირგვლივ ბრუნავს თითქმის წრიულ ორბიტაზე, რომლის რადიუსია 385000კმ. განსაზღვრეთ მთვარის სიჩქარე და აჩქარება დედამიწის მიმართ, თუ ბრუნვის პერიოდია 27,3დღე-ღამე.(პასუხი:  $1,03 \cdot 10^3$  მ/წმ,  $2,7 \cdot 10^{-3}$  მ/წმ<sup>2</sup> ).
30. წრეწირზე თანაბრად მბრუნავი ორი ნაწილაკის კინემატიკური განტოლებებია:  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}t$  და  $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}t$  რა უმცირესი დროის შემდეგ აღმოჩნდებიან ისინი ერთ წერტილში?(პასუხი: 6წმ).
31. წრეწირზე თანაბრად მბრუნავი ორი ნაწილაკის კინემატიკური განტოლებებია:  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}t$  და  $\varphi_2 = -\frac{\pi}{6}t$  რა უმცირესი დროის შემდეგ აღმოჩნდებიან ისინი ერთ წერტილში? (პასუხი: 3წმ).
32. ორი ნაწილაკი თანაბრად ბრუნავს წრეწირზე, მათი ბრუნვის პერიოდებია 2წმ და 6წმ. დაკვირვების დასაწყისში ისინი იმყოფებოდნამეტრის ბოლოებშირა უმცირესი დროის შემდეგ აღმოჩნდებიან ისინი ერთ წერტილში თუ მოძრაობენ ა) თანხვედრილად, ბ) საპირისპიროდ. (პასუხი: 1,5წმ, 0,75წმ).
33. 0,25მ რადიუსის წრეწირზე ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებაა:  $S = \frac{t^3}{6}$ . იპოვეთ დროის რა მომენტისთვის გაუტოლდება ნორმალური და მხები აჩქარება ერთმანეთს? (პასუხი: 1წმ).
34. რა სიჩქარით მოძრაობს ავტომობილი, თუ მისი 1მ დიამეტრის მქონე ბორბალი 360 ბრუნს აკეთებს 1წმ-ში?(პასუხი: 18,84მ/წმ).
35. ნაწილაკის 0,4მ რადიუსის წრეწირზე ბრუნვის განტოლებაა:  $\varphi = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}t$ . გამოთვალეთ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, აჩქარება, პერიოდი. (პასუხი: 1,57რად/წმ, 0,99 მ/წმ<sup>2</sup> 4წმ).
36. 2მ რადიუსის წრეწირზე ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებაა  $\varphi = \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}t^2$ . გამოთვალეთ რა დროში გაჩერდება ნაწილაკი და რა კუთხეს შემოწერს გაჩერებამდე?(პასუხი: 2წმ,  $\pi/3$  რად).

## თავი II.

### მატირიალური ვერტილის დინამიკა

#### §11. ნიუტონის პირველი კანონი

შიდესმაინგლისელმა ფიზიკოსმა *ისაკ ნიუტონმა* უამრავი ცდისეული ფაქტის გაანალიზების საფუძველზე აღმოაჩინა დინამიკის სამი კანონი. ნიუტონის ამ დამსახურებისთვის კლასიკურ მექანიკას ხშირად ნიუტონის მექანიკასაც უწოდებენ.

პირველი კანონის ნიუტონისეული ფორმულირება ასეთია:

- *ნებისმიერი სხეული ინარჩუნებს უძრაობას ან თანაბარწრფივი მოძრაობის მდგომარეობას, სანამ სხვა სხეულთა ზემოქმედება არ გამოიყვანს მას ამ მდგომარეობიდან.*

ნიუტონის კანონში არ არის მითითებული ათვლის სისტემა. როგორც აღვნიშნეთ, მოძრაობის ხასიათი დამოკიდებულია ათვლის სისტემის შერჩევაზე. აღნიშნული კანონი სამართლიანია მხოლოდ გარკვეული ათვლის სისტემების მიმართ, რომლებსაც *ინერციული სისტემები* ეწოდა. ნიუტონის კანონზე დაყრდნობით და ამ ფაქტის გათვალისწინებით ჩამოყალიბებული იქნა მექანიკის ერთერთი ფუნდამენტალური პრინციპი:

- *ათვლის სისტემებს შორის ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ათვლის სისტემა, რომლის მიმართ იზოლირებული სხეული (სხეულთა ჯგუფი) იქნება უძრავი ან იმოძრავეს მუდმივი სიჩქარით ( $\vec{v} = const$ ) (ინერციის პრინციპი).*

მოცემული ინერციული სისტემის მიმართ უძრავი ან თანაბარწრფივად მოძრავი ათვლის სისტემა ასევე ინერციულია. ასე რომ თუ სხეული მოცემულ ინერციული სისტემაში იზოლირებულია იგი ასევე იზოლირებული იქნება ნებისმიერი ინერციული სისტემის მიმართ (ყველა ასეთ სისტემაში იგი იქნება უძრავი ან იმოძრავეს თანაბარწრფივად). ინერციულ სისტემათა რაოდენობა უსასრულოა, ერთ-ერთად შეიძლება განვიხილოთ *ჰელიოცენტრული* (ჰელიოს – ძველ ბერძნულად – მზე) სისტემა, რომელშიც ათვლის სხეულად მიჩნეულია მზე, ხოლო საკოორდინატო ღერძები მიმართულია შერჩევით “უძრავი” ვარსკვლავებისკენ.

ხშირად ათვლის სისტემად ირჩევენ *გეოცენტრულ* (გეო – ძველბერძნულად – მიწა) სისტემას, რომელშიც ათვლის წერტილად აღებულია დედამიწის ზედაპირზე მდებარე წერტილი. ამ სისტემას, დედამიწის დღე-ღამური და წლიური ბრუნვის გამო, *ჰელიოცენტრული* სისტემის მიმართ გარკვეული აჩქარება გააჩნია, მაგრამ იგი იმდენად მცირეა, რომ მთელ რიგ ამოცანებში მისი უგულვებლყოფა დასაშვებია. ამიტომ, თუ დიდი სიზუსტე არ მოითხოვება, გეოცენტრული სისტემაც შეიძლება ჩაითვალოს ინერციულად.

ინერციული სისტემის მიმართ აჩქარებით მოძრავ სისტემებში იზოლირებულ სხეულს აღმოაჩნდება აჩქარება, რის გამოც ნიუტონის ინერციის კანონი ირღვევა. ამ მოსაზრებით ასეთ სისტემებს *არაინერციულს* უწოდებენ. შემდგომში, თუ წინასწარ არ მივუთითეთ, ათვლის სისტემად ინერციული სისტემა გვექნება შერჩეული.

#### §12. სხეულის მასა და იმპულსი

ნებისმიერ სხეულს გააჩნია *ინერციის* თვისება, კერძოდ, თუ იგი არ განიცდის ზემოქმედებას, ან ეს ზემოქმედება კომპენსირებულია, იგი ინარჩუნებს თავის მდგომარეობას (მუდმივ სიჩქარეს  $\vec{v} = const.$ ). ზემოქმედებისას ნებისმიერი სხეული ეწინააღმდეგება

საწყისი მდგომარეობის შეცვლას ამ თვისებას **ინერტულობა** ეწოდება. რაც უფრო ძნელია სხეულის გამოყვანა არსებული მდგომარეობიდან, მით უფრო ინერტულია ის. ორი სხეულიდან ის უფრო ინერტულია, რომელიც ერთნაირი ზემოქმედებისას ნაკლებად იცვლის თავის მდგომარეობას. სხეულთა ინერტულობის ზომად შემოღებულია **ინერტიალობის მასის** ცნება. ასევე შემოღებულია **გრავიტაციული მასის** ცნებაც. იგი ახასიათებს სხეულთა გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას. როგორც მრავალი ექსპერიმენტით დადასტურდა მოცემული სხეულის ინერტიულობის და გრავიტაციის მასა ერთიდაიგივეა, ამიტომ მათ ზოგადად მასის ტერმინით მოვიხსენიებთ. მასა კლასიკურ მექანიკაში ნივთიერების რაოდენობრივი ზომაცაა.

მასა სკალარული სიდიდეა, იზომება **კილოგრამებში** (კგ). 1კგმასის ეტალონად საერთაშორისო შეთანხმებით მიღებულია პლატინა (90%) ირიდიუმის (10%) შენადნობისგან დამზადებული ცილინდრის მასა, რომლის დიამეტრი და სიმაღლე 39მმ-ია. ატომურ ფიზიკაში ელემენტარულ ნაწილაკთა მასის შესაფასებლად გამოიყენება **მასის ატომური ერთეული** (მაე). იგი წარმოადგენს ნახშირბადის ატომის

( ${}^{12}\text{C}$ -ის)<sup>9</sup> მასის 1/12 ნაწილს,

$$1 \text{ მაე} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ კგ.}$$

კლასიკურ მექანიკაში მასას ახასიათებს შემდეგი თვისებები:

1. *სხეულის მასა არ არის დამოკიდებული მის სიჩქარეზე;*
2. *სხეულის მასა შემადგენელ ნაწილაკთა მასების ჯამის ტოლია – სუპერპოზიციის (შეკრებადობის) კანონი;*
3. *იზოლირებული სხეულის (სხეულთა ჯგუფის) მასა ინახება – მასის შენახვის კანონი.* ფიზიკაში სარგებლობენ ნივთიერების **სიმკვრივის** ცნებით.

➤ **სხეულის სიმკვრივე ტოლია მისი ერთეულოვანი მოცულობის მასის.**

თუ  $\Delta m$  მასის ნივთიერებას უკავია  $\Delta V$  მოცულობა, მაშინ მისი საშუალო სიმკვრივე იქნება

$$\rho_{\text{საშ}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{12.1}$$

ხოლო სიმკვრივე:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \rho_{\text{საშ}} = \frac{dm}{dV}.$$

თუ სხეული ერთგვაროვანია, მაშინ:

$$\rho_{\text{საშ}} = \rho = \frac{m}{V}, \tag{12.2}$$

სიმკვრივის ერთეულია კგ/მ<sup>3</sup>.

აერომექანიკაში ხშირად სარგებლობენ **კუთრი მოცულობის** ცნებით. იგი წარმოადგენს სიმკვრივის შებრუნებულ სიდიდეს, ანუ ერთეულოვანი მასის მიერ დაკავებულ მოცულობას:

$$v_{\text{საშ}} = \frac{1}{\rho} = \frac{\Delta V}{\Delta m}, \quad v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm} \text{ (მ}^3/\text{კგ)}.$$

ნიუტონმა მასის ცნება შემოიტანა ნაწილაკის იმპულსის (მოძრაობის რაოდენობის) განსაზღვრისას.

<sup>9</sup>მიღებულია, რომ ელემენტის სიმბოლოს ქვემოთ მარცხნივ მიუწერონ ელემენტთა სისტემაში შესაბამისი რიგითი ნომერი, ხოლო ზემოთ ელემენტის ატომური მასა.

➤ ნაწილაკის იმპულსი ეწოდება მისი მასისა და სიჩქარის ნამრავლს.

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (12.3)$$

იმპულსი ვექტორული სიდიდეა, მიმართულია სიჩქარის გასწვრივ და ემორჩილება სუპერპოზიციის პრინციპს, იზომება კგმ/წმ. თუ  $m$  მასის მაკროსხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას, მაშინ დროის მოცემული მომენტისათვის მის თითოეულ ნაწილს ერთნაირი სიჩქარე ექნება (§1). ამიტომ (12.3)-ით შეიძლება გამოვთვალოთ მისი იმპულსი. თუ იგივე სხეული ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას, მაშინ მისი იმპულსის გამოსათვლელად იგი თეორიულადუნდა დავეოთ ისეთ  $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$  ნაწილებად, რომ თითოეულის სიჩქარე იყოს  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ , მაშინ სხეულის იმპულსი, მისი შეკრებადობიდან გამომდინარე, იქნება.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{v}_i \quad (12.4)$$

მოცემულ ათვლის სისტემაში სხეულის მექანიკურ მდგომარეობას შეესაბამება იმპულსის ერთადერთი განსაზღვრული მნიშვნელობა, რომელიც არ არის დამოკიდებული იმ პროცესებზე, რომლებითაც სისტემა აღმოჩნდა ამ მდგომარეობაში. თუ სხეული გადავიდა 1 მდგომარეობიდან 2 მდგომარეობაში, მისი იმპულსის ცვლილება, დამოუკიდებლად გადასვლის გზებისა, ტოლი იქნება ამ მდგომარეობათა შესაბამისი იმპულსების სხვაობის.

$$\Delta \vec{p}_{12} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1. \quad (12.5)$$

ამ თვისების გამოიყენება სხეულის (სისტემის) *მდგომარეობის ფუნქცია*<sup>10</sup>.

**ამოცანა 12.1.** გამოთვალეთ  $r=5$  სმ რადიუსის ალუმინის ბურთულის სიღრმის მოცულობა, თუ მისი მასაა 1კგ, ალუმინის სიმკვრივეა 2700კგ/მ<sup>3</sup>.

**ამოხსნა:**

გამოვთვალოთ ალუმინის მოცულობა (12.2)-დან

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{2700} = 3,7 \cdot 10^{-4} (\text{მ}^3)$$

ბურთულას მოცულობა იქნება:

$$V^* = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1,25 \cdot 10^{-4} = 5,2 \cdot 10^{-4} (\text{მ}^3).$$

სიღრმის მოცულობა:

$$V_0 = V^* - V = (5,2 - 3,7) \cdot 10^{-4} = 1,5 \cdot 10^{-4} (\text{მ}^3).$$

**ამოცანა 12.2.** შენადნობის 1/3 ნაწილი სპილენძია, დანარჩენი რკინა. გამოვთვალოთ შენადნობის სიმკვრივე, თუ  $\rho_{Cu} = 8,9 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>,  $\rho_{Fe} = 7,8 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>.

**ამოხსნა:**

(12.2)-ის თანახმად:

<sup>10</sup>სისტემის მდგომარეობის ფუნქცია ზოგადი ცნებაა, იმპულსის გარდა, ასეთი სიდიდეებია: შინაგანი ენერგია, ენტროპია და სხვა.

$$\rho = \frac{m}{V_{Cu} + V_{Fe}} = \frac{m}{\frac{m}{3\rho_{Cu}} + \frac{2m}{3\rho_{Fe}}} = \frac{3\rho_{Cu} \cdot \rho_{Fe}}{\rho_{Fe} + 2\rho_{Cu}}$$

$$\rho = \frac{3,8,9 \cdot 10^3 \cdot 7,8 \cdot 10^3}{7,8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 8,9 \cdot 10^3} = 8,1 \cdot 10^3 \text{ (კგ/მ}^3\text{)}.$$

**ამოცანა 12.3.** გამოთვალეთ სკამის ეტალონის (ცილინდრი რომლის d-დიამეტრი და H-სიმაღლე 39მმ-ია, შედგება 90% პლატინისა და 10% ირიდიუმისაგან) სიმკვრივე, პლატინის სიმკვრივე 21,5·10<sup>3</sup>კგ/მ<sup>3</sup> -ია, ხოლო ირიდიუმის 22,4·10<sup>3</sup>კგ/მ<sup>3</sup> .

**ამოხსნა:**

(12.2)-ის თანახმად:

$$\rho = \frac{m}{V_{Pt} + V_{Ir}} = \frac{m}{\frac{0,9m}{\rho_{Pt}} + \frac{0,1m}{\rho_{Ir}}} = \frac{\rho_{Ir} \cdot \rho_{Pt}}{0,9\rho_{Ir} + 0,1\rho_{Pt}}$$

$$\rho = \frac{22,4 \cdot 10^3 \cdot 21,5 \cdot 10^3}{0,9 \cdot 22,4 \cdot 10^3 + 0,1 \cdot 21,5 \cdot 10^3} \approx 21,6 \cdot 10^3 \text{ (კგ/მ}^3\text{)}.$$

რაც იგივეა:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi d^2 / 4 \cdot H} = \frac{4m}{\pi d^3} = \frac{4}{3,14 \cdot 39^3} 10^9 \approx 21,6 \cdot 10^3 \text{ (კგ/მ}^3\text{)}.$$

### §13. ძალა. ნიუტონის მეორე კანონი

ძალის ცნება გამოიყენება სხეულზე სხვა სხეულის ან სხეულთა ჯგუფის ზემოქმედების დასახასიათებლად. იგი ვექტორული სიდიდეა, მას გააჩნია რიცხვითი მნიშვნელობა, მოდების წერტილი და მოქმედების წრე. ნიუტონის პირველი კანონიდან გამომდინარე, სხეულის წონასწორული მდგომარეობა ( $\vec{v} = const$ ) დაირღვევა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მასზე იმოქმედებს სხვა სხეული ანუ ძალა, ე.ი. ძალა არის სხეულის სიჩქარის (იმპულსის) შეცვლის - აჩქარების გამომწვევი მიზეზი. ძალებს ახასიათებს **დამოუკიდებლობის პრინციპი**, რომლის თანახმადაც, თუ სხეულზე რამოდენიმე ძალა მოქმედებს, მაშინ თითოეული მათგანი მას იგივე აჩქარებას ანიჭებს, რასაც მიანიჭებდა სხვა ძალების არარსებობის შემთხვევაში. დამოუკიდებლობის პრინციპიდან გამომდინარე, თუ ნაწილაკზე ან აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოქმედებს რამოდენიმე ძალა  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ , რის გამოც იგი უძრავია ან ასრულებს გადატანით მოძრაობას, მაშინ შესაძლებელია ამ ძალთა ვექტორული შეკრება:

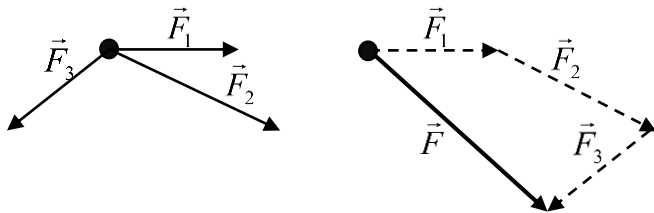
$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i . \quad (13.1)$$

(სუპერპოზიციის პრინციპი). ანუ ამ ძალათა შეცვლა ერთი ისეთი ძალით-**ტოლქმედით**, რომელიც ისეთივე აჩქარებას მიანიჭებს სხეულს, როგორსაც ეს ძალები ერთად (შევნიშნოთ, რომ აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოქმედების შეკრებისას დასაშვებია ძალათა

გადასრიალება მოქმედების წრფის გასწვრივ, ამასთანავე თუ სხეული უძრავია, ან ასრულებს გადატანით მოძრაობას ეს წრფეები აუცილებლად გადაიკვეთება ერთ წერტილში). ცხადია ტოლქმედის გეგმილი რაიმე ღერძზე იმავე ღერძზე მდებარე ძალათა გეგმილების ალგებრული ჯამის ტოლი იქნება:

$$\begin{cases} F_x = \sum F_{ix} \\ F_y = \sum F_{iy} \\ F_z = \sum F_{iz} \end{cases} \quad (13.2)$$

ნახაზ13.1-ზე მოცემულია ნაწილაკზე მოქმედი სამი ძალის ტოლქმედის განსაზღვრა ვექტორთა შეკრების წესით (ვექტორები უნდა გადავასრიალოთ თავის თავის პარალელურად



ნახაზი 13.1

ისე, რომ ერთი ვექტორის ბოლო ემთხვეოდეს მომდევნოს საწყისს (მიმდევრობას აზრი არა აქვს), მაშინ მიღებული ტეხილის საწყისი წერტილის ბოლოსთან შემაერთებული ვექტორი იქნება ტოლქმედი). ძალები შეიძლება დავყოთ ორ ჯგუფად, **ახლოქმედების**,

რომლებიც აღიძვრება მხოლოდ სხეულთა უშუალო კონტაქტისას (სახუნის, დრეკადობის, წინააღმდეგობის, რეაქციის...) და **შორიქმედების**, რომელთა აღძვრა არ საჭიროებს სხეულთა ურთიერთშეხებას (სიმძიმის, გრავიტაციის, ელექტრომაგნიტური).

დინამიკის მეორე კანონი განსაზღვრავს ძალთა ტოლქმედს. მისი ნიუტონისეული ფორმულირება ასეთია:

➤ **სხეულის იმპულსის ცვლილების სიჩქარე სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედის ტოლია:**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (13.3)$$

(13.3) ზოგადია, იგი შეიძლება გამოვიყენოთ მაშინაც კი, როდესაც მასა ცვლადია (ყუმბარის აფეთქება, რეაქტიული მოძრაობა),

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

ასევე რელატივისტურ მექანიკაში ( $v \rightarrow c$ ), სადაც მასა სიჩქარის ფუნქციაა. (13.3)-დან

$$\vec{F} dt = d\vec{p} \text{ ანუ } \vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p} \quad (13.4)$$

ძალისა და მისი მოქმედების დროის ნამრავლს ( $\vec{F} \Delta t$ ) **ძალის იმპულსი** ეწოდება. სხეულის იმპულსის ცვლილება მასზე მოქმედი ძალის იმპულსის ტოლია.

თუ ძალის მოქმედების პროცესში მასა არ იცვლება, მაშინ (13.3) ასე ჩაიწერება:

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (13.5)$$

საიდანაც:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (13.6)$$

(13.6)-ის თანახმად ნიუტონის მეორე კანონი ასე შეიძლება ჩამოვყალიბოთ:

➤ გადატანითი მოძრაობისას სხეულის აჩქარება პირდაპირპროპორციულია მასზე მოქმედი ძალთა ტოლქმედისა და უკუპროპორციულია მისი მასისა.

რადგან ძალა იწვევს აჩქარებას, ამიტომ აჩქარებას ტოლქმედის მიმართულება გააჩნია  $\vec{a} \uparrow \vec{F}$ . შევნიშნოთ, რომ (13.6)-ში შემავალი მასა სწორედ სხეულის ინერტულობის ზომაა, რაც მეტია მისი მნიშვნელობა, მით ნაკლებ აჩქარებას დებულობს სხეული მოცემული ძალის შემთხვევაში. (13.6)-დან

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (13.7)$$

SI სისტემაში ძალის ერთეულია **ნიუტონი (ნ)** = 1კგმ/წმ<sup>2</sup>. ნიუტონის ძალაა, რომელიც 1კგ მასის სხეულს ანიჭებს 1მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებას.

დავუშვათ სხეულზე მოქმედი ძალთა ტოლქმედი ნულია (რაც ტოლფასია იმისა, რომ სხეული იზოლირებულია), მაშინ (13.5)-ის თანახმად  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ , ანუ  $\vec{v} = const$  – მიიღება ნიუტონის პირველი კანონი.

ნიუტონის პირველი და მეორე კანონებიდან გამომდინარე ძალასთან მიმართებაში სრულდება შემდეგი დებულებები:

1. სხეულის აჩქარების მიზეზი – ძალაა;
2. ძალა სხეულზე რაიმე სხვა სხეულის მოქმედებაა.

(13.3) და (13.5)-ის გამოყენებით შესაძლებელია მექანიკის მთელი რიგი ამოცანების გადაწყვეტა, ამიტომ მათ **დინამიკის ძირითად განტოლებასაც** უწოდებენ.

**ამოცანა 13.1.** სატვირთო მანქანის აჩქარება 2მ/წმ<sup>2</sup> იყო, მისი დატვირთვის მერე უცვლელი წევის ძალის პირობებში აჩქარება 0,5მ/წმ<sup>2</sup>-ით შემცირდა. გამოვთვალოთ ტვირთის მასა, თუ ავტომობილის მასაა 3 ტონა.

**ამოხსნა:**

(13.5)-ის თანახმად:

$$ma_1 = (m + \Delta m)a_2, \quad \Delta m = \frac{m(a_1 - a_2)}{a_2} = \frac{3 \cdot 0,5}{1,5} = 1 \text{ (ტ)}.$$

**ამოცანა 13.2.** გამოთვალეთ ნახაზზე მოცემულ სხეულზე მოქმედ ძალთა ( $F_1=0,8$ კნ,  $F_2=4$ კნ,  $F_3=6$ კნ,  $F_4=0,4$ კნ, ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება.

**ამოხსნა:**

(13.2)-ის თანახმად  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ . დაგვემიღებოთ ვეღბულობით:

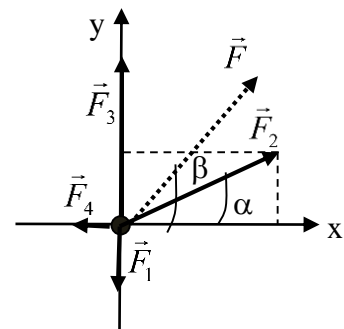
$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = F_2 \cos \alpha - F_4 \\ F_y = F_2 \sin \alpha + F_3 - F_1 \end{array} \right\} \text{ ანუ } \left\{ \begin{array}{l} F_x = 4 \cos 30^\circ - 0,4 \approx 3,1 \\ F_y = 4 \sin 30^\circ + 6 - 0,8 = 7,2 \end{array} \right\}$$

ტოლქმედის სიდიდე იქნება:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{3,1^2 + 7,2^2} \approx 7,8 \text{ (კნ)}.$$

OX ღერძის მიმართ ტოლქმედი მიმართული იქნება:

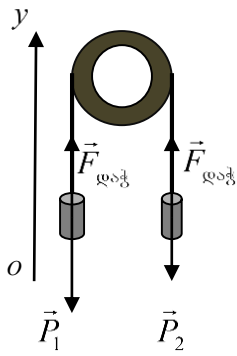
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_y}{F_x} \approx 2,3.$$



$$\beta = 66^{\circ}30'.$$

**ამოცანა 13.3.** უწონადი უჭიმვადი თოკით ბლოკზე გადადებული 4,2 კგ და 4 კგ მასის ტვირთი დასაწყისში ერთ ღონეზე იმყოფება. რა მანძილით დაშორდება ისინი ერთმანეთს განთავისუფლებიდან 2 წმ-ში, თუ ყოველგვარი წინააღმდეგობის ძალები უგულებელყოფილია.

**ამოხსნა:**



ვისარგებლოთ ნახაზით ( $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$  და  $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$  სიმძიმის ძალებია,  $g \approx 10 \text{ მ/წმ}^2$  თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა (იხ. §18)). ნიუტონის II კანონის თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a} = \vec{P}_1 + \vec{F}_{\text{ლაჭ}} \\ m_2 \vec{a} = \vec{P}_2 + \vec{F}_{\text{ლაჭ}} \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{F}_{\text{ლაჭ}} \\ m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{F}_{\text{ლაჭ}} \end{cases} \quad \text{დავაგვიგმილოთ } 0y \text{ ღერძზე}$$

მივიღებთ:

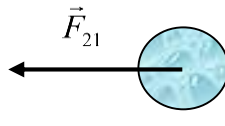
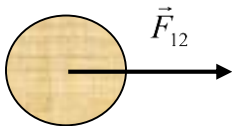
$$\begin{cases} -m_1 a = -m_1 g + F_{\text{ლაჭ}} \\ m_2 a = -m_2 g + F_{\text{ლაჭ}} \end{cases} \quad \text{საიდანაც } (m_2 + m_1) a = (m_1 - m_2) g,$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} g = 0,24 \text{ მ/წმ}^2. \quad 2 \text{ წმ-ში თითოეულის მიერ გავლილი მანძილი იქნება}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{at^2}{2} = \frac{0,24 \cdot 2^2}{2} = 0,48 \text{ მ} \quad \text{სხეულებს შორის დაშორება იქნება } L = 2 \cdot S_1 = 0,96 \text{ მ.}$$

### §14. ნიუტონის მესამე კანონი

სხეულზე მოქმედება ცალმხრივი არ არის, მას ურთიერთქმედების ხასიათი აქვს ანუ, თუ 1-სხეულზე მოქმედებს 2-სხეული  $\vec{F}_{12}$  ძალით, მაშინ 1-იც იმოქმედებს 2-ზე  $\vec{F}_{21}$  ძალით (ნახ. 14.1). ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად



ნახაზი 14.1

➤ **ორი სხეული ყოველთვის ურთიერთქმედებს სიდიდით ტოლი და საპირისპიროდ მიმართული ძალებით**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (14.1)$$

ხშირად ამ კანონს შემოკლებით ასეც აყალიბებენ:

➤ **ქმედება უდრის ტოლ და საპირისპირო უკუქმედებას.**

ძალთა დაყოფა ქმედებად და უკუქმედებად პირობითია.

ეს ძალები ერთმანეთს არ აკომპენსირებს, რადგან სხვადასხვა სხეულებზეა მოდებული. ისინი ერთნაირი ბუნებისაა. მაგ. თუ ქმედება გრავიტაციის ძალაა, უკუქმედებაც გრავიტაციის ძალა იქნება.

(14.1)-დან

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|}. \quad (14.2)$$

რომლის თანახმად ორი ურთიერთქმედი სხეულიდან ერთი სხეული ღებულობს იმდენჯერ ნაკლებ აჩქარებას, რამდენჯერაც მისი მასა მეტია მეორე სხეულის მასაზე. მაგალითად, ვაშლისა და დედამიწის ურთიერთმიზიდვის ძალები რიცხობრივად ერთმანეთის ტოლია,

მაგრამ ვაშლი ვარდება დედამიწაზე და არა პირიქით, რადგან დედამიწის მასა გაცილებით მეტია ვაშლის მასაზე, ამიტომ დედამიწის აჩქარება ვაშლის მიმართ პრაქტიკულად ნულია.

ურთიერთქმედება ვრცელდება სასრულო სიჩქარით, ამიტომ ნიუტონის მესამე კანონის გამოყენების არიალი შეზღუდულია. იგი მკაცრად სრულდება ახლოქმედების ძალების შემთხვევაში, ასევე ისეთ შემთხვევებში, როდესაც ურთიერთქმედ სხეულებს შორის მანძილი ძალიან დიდი არ არის.

ნიუტონის კანონები სამართლიანია ინერციული ათვლის სისტემების მიმართ. ჩვენ ამ საკითხს §15, §16-ში დავუბრუნდებით.

### **§15. ინერციის ძალები თანაბრაჩქარებულად მოძრაობ ათვლის სისტემებში**

როდესაც განვიხილავდით ნაწილაკის მოძრაობას სხვადასხვა ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ (§6) აღმოჩნდა, რომ ნაწილაკის კოორდინატები (გავლილი მანძილი) და სიჩქარე ფარდობითია ანუ დამოკიდებულია ათვლის სისტემის შერჩევაზე, ხოლო აჩქარება აბსოლუტურია:

$$\vec{a} = \vec{a}', \tag{15.1}$$

აჩქარება არაა დამოკიდებული ათვლის ინერციული სისტემის შერჩევაზე. (15.1)-ის ორივე მხარე გავამრავლოთ ნაწილაკის მასაზე  $m\vec{a} = m\vec{a}'$  ანუ (13.5)-ის თანახმად

$$\vec{F} = \vec{F}', \tag{15.2}$$

სადაც  $\vec{F}$  ნაწილაკზე მოქმედი ძალთა ტოლქმედია  $k$  სისტემაში, ხოლო  $\vec{F}'$  -  $k'$  სისტემაში. ე.ი.

- ერთი ათვლის ინერციული სისტემიდან მეორეში გადასვლისას არ იცვლება დინამიკის ძირითადი განტოლება.

ეს დასკვნა ასეც შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

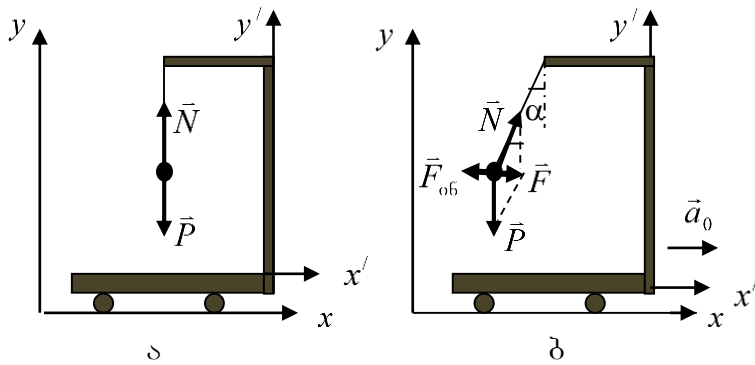
- თუ სხვადასხვა ათვლის ინერციულ სისტემაში ჩავატარებთ ერთსადაიგივე მექანიკურ ცდას, მივიღებთ ერთნაირ შედეგს – გალილეის ფარდობითობის პრინციპი.

ამ პრინციპიდან გამომდინარე კლასიკური მექანიკის ფარგლებში ყველა ინერციული სისტემა “თანასწორუფლებიანია” – ექვივალენტურია, ანუ შეუძლებელია განვასხვაოთ “მოძრავი” და “უძრავი” ინერციული სისტემები ერთმანეთისგან.

პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ათვლის არაინერციული სისტემები ანუ სისტემები, რომლებსაც გააჩნია აჩქარება ინერციული ათვლის სისტემის მიმართ.

განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა  $k$  და  $k'$  ათვლის სისტემების მიმართ, რომელთაგან  $k$  ინერციულია, ხოლო  $k'$  არაინერციული, ანუ  $k$ -ს მიმართ გააჩნია აჩქარება. სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ ეს მოძრაობა თანაბარაჩქარებულია ( $\vec{a}_0 = const$ ). ვისარგებლოთ ნახაზ 6.1-ით და გამოვიყენოთ იგივე გამარტივებები რაც §6, მაშინ, ცხადია, (6.1) და (6.2) დარჩება ძალაში, ხოლო (15.1)-ის ნაცვლად გვექნება:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0, \tag{15.3}$$



ნახაზი 15.1

შესაბამისად, აჩქარება. ე.ი. დინამიკის კანონების პირდაპირი გამოყენება ათვლის არაინერციულ სისტემებში მცდარ დასკვნას იძლევა. იმისთვის, რომ შევძლოთ ამ განტოლებათა გამოყენება არაინერციულ სისტემებშიც, §13-ში აღნიშნული ორი დებულებიდან შევინარჩუნოთ პირველი, ხოლო მეორე უკუვაგდოთ, კერძოდ, ჩავთვალოთ, რომ სხეულის აჩქარების შეცვლა  $k'$  სისტემაში გამოიწვია “ახალი” ძალამ, მაგრამ ეს ძალა არა ახალი სხეულის ზემოქმედებაა ნაწილაკზე, არამედ განპირობებულია  $k'$  სისტემის არაინერციულობით.

(15.1) გაგამრავლოთ ნაწილაკის მასაზე და გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_0, \quad \vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{06}, \quad (15.4)$$

სადაც

$$\vec{F}_{06} = -m\vec{a}_0. \quad (15.5)$$

სწორედ ეს ის “ახალი” ძალაა, რომელსაც *ინერციის ძალას* უწოდებენ. (15.5)-ის თანახმად

➤ *არაინერციული სისტემა თავისი არაინერციულობის გამო სხეულს ანიჭებს თავისი აჩქარების საპირისპირო აჩქარებას.*

ინერციის ძალები მხოლოდ წარმოშობით განსხვავდება ჩვეულებრივი ძალებისგან, ამ მიზეზით მათი მოქმედება არ იწვევს უკუქმედებას (არ სრულდება ნიუტონის მესამე კანონი). ცხადია, სხეულზე ან სხეულთა ჯგუფზე (მექანიკურ სისტემაზე) მოქმედი ინერციის ძალები გარე ძალებია, ამიტომ არაინერციული ათვლის სისტემის მიმართ ჩაკეტილი (იზოლირებული) მექანიკური სისტემა არ არსებებს. განვიხილოთ ურიკაზე მოთავსებულ შტატივზე თოკით დაკიდებული ბურთულა, რომელის მდგომარეობაც განიხილება ორ ათვლის სისტემაში, რომელთაგან  $k$  სისტემა უძრავია, ხოლო მეორე  $k'$  უშუალოდ ურიკასთანაა დაკავშირებული. თუ ურიკა უძრავია  $\vec{P} = m\vec{g}$  სიმძიმის ძალა და თოკის დაჭიმულობის (რეაქციის)  $\vec{N}$  ძალა ერთმანეთს აწონასწორებს  $\vec{P} + \vec{N} = 0$  თოკი იქნება ვერტიკალურ მდგომარეობაში და ბურთულა იქნება უძრავი ორივე სისტემის მიმართ (ნახ. 15.1ა). თუ ურიკა დაიწეებს მოძრაობას  $\vec{a}_0$  აჩქარებით, ბურთულა გადაიხრება წონასწორობის მდებარეობიდან (ნახ. 15.1ბ). ამასთანავე ბურთულა  $\vec{a}_0$  აჩქარებით იმოძრაავებს  $k$  -ს მიმართ, რასაც განაპირობებს  $\vec{P}$  და  $\vec{N}$  ძალთა ტოლქმედი:

$$m\vec{a}_0 = \vec{P} + \vec{N}.$$

ე.ი.  $\vec{a} \neq \vec{a}'$ , აჩქარება ფარდობითია, შესაბამისად,  $\vec{F} \neq \vec{F}'$ . რადგან ნაწილაკზე  $k$  და  $k'$  ათვლის სისტემებში ერთიდაიგივე სხეულები მოქმედებს, ამიტომ ზემოთქმულისთანახმად ერთი სისტემიდან მეორეში გადასვლისას არ უნდა იცვლებოდეს განსახილველ ნაწილაკზე მოქმედი ძალთა ტოლქმედი ( $\vec{F} = \vec{F}'$ ) და,

ათვლის ინერციული  $k$  სისტემის მიმართ  $k'$ -ის აჩქარებით მოძრაობის გამო ეს უკანასკნელი ათვლის არაინერციული სისტემაა, ამიტომ ამ სისტემაში ბურთულაზე იმოქმედებს ინერციის  $\vec{F}_{06} = -m\vec{a}_0$  ძალა, რომელიც გააწონასწორებს  $\vec{P}$  და  $\vec{N}$  ძალთა ტოლქმედს:

$$\vec{F}_{06} + \vec{P} + \vec{N} = \vec{F}_{06} + \vec{F} = -m\vec{a}_0 + m\vec{a}_0 = 0$$

და  $k'$ -ის მიმართ ბურთულა დარჩება უძრავი.

**ამოცანა 15.1.** ურიკაზე თოკით დაკიდებულია ბურთულა. რა კუთხით გადაიხრება იგი ვერტიკალიდან, თუ ურიკა მოძრაობს  $a_0 = 2$  მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით.

**ამოხსნა:**

ნახ. 15.1-ის თანახმად:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{06}}{P} = \frac{ma_0}{mg} = \frac{a_0}{g} = 0,2, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,2 = 11^\circ.$$

ცხადია, გადახრის კუთხე მით უფრო მეტია რაც მეტია ურიკას აჩქარება.

**ამოცანა 15.2.** ავტომობილი მოძრაობდა 20 მ/წმ სიჩქარით. საავარიო დამუხრუჭებისას 1,5 წმ-ში სიჩქარე 5 მ/წმ-დე შემცირდა გამოთვალეთ 60 კგ მასის ფეხზე მდგომ მგზავრზე მოქმედი ინერციის ძალა, რა კუთხით გადაიხრება იგი ვერტიკალური მდგომარეობიდან?

**ამოხსნა:**

ავტომობილის დამუხრუჭების აჩქარება, (8.2)-ის თანახმად, იქნება:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{5 - 20}{1,5} = -10 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}$$

ე.ი. მგზავრზე მოქმედი ინერციის ძალა:

$$F_{06} = -(-60 \cdot 10) = 600 \text{ (ნ)}$$

ამრიგად, მგზავრის წინ გადახრის კუთხე იქნება:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{06}}{P} = \frac{a_0}{g} \approx 1 \quad \alpha = 45^\circ.$$

## **§16. ინერციის ძალები თანაბრაღმბრუნავ**

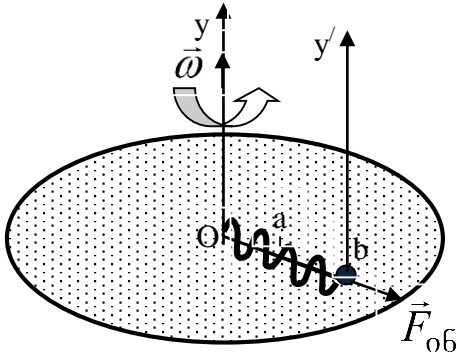
### **ათვლის სისტემაში**

ნებისმიერი მრუდწირული ტრაექტორიის მქონე ათვლის სისტემა არაინერციულია წირითი აჩქარების არსებობის გამო. სიმარტივისთვის განვიხილოთ თანაბრად მბრუნავი ათვლის სისტემა. ნახ.16.1-ზე მოცემულია  $OY$  დერძის ირგვლივ მართობულ სიბრტყეში  $\vec{\omega} = \text{const}$  კუთხური სიჩქარით მბრუნავი დისკო. მისი რადიუსის გასწვრივ გაჭიმულ სიმზე ჩამოცმულია ზამბარა, რომლის ერთი ბოლო დამაგრებულია  $O$  წერტილში, ხოლო მეორე ბოლოზე მოთავსებულია ბურთულა, რომელსაც თავისუფლად შეუძლია მოძრაობა სიმის გასწვრივ. თუ დისკო უძრავია, ზამბარა არადეფორმირებულია და ბურთულას უკავია წონასწორული  $a$ -მდებარეობა. დისკოს ბრუნვის შემთხვევაში ზამბარა გაიჭიმება, ბურთულა წაინაცვლებს და დაიკავებს  $b$ -მდებარეობას. ათვლის ინერციული  $k$  სისტემის მიმართ ბურთულაზე მოქმედ ძალთა ტოლქმედი იქნება:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{dr},$$

სადაც  $\vec{F}_{ღრ}$  ზამბარის დრეკადობის ძალაა. დადგან  $\vec{P} = m\vec{g}$  სიმძიმის ძალა და  $\vec{N}$  საყრდენის რეაქციის ძალა ერთმანეთს აწონასწორებს, ამიტომ  $\vec{F}_{dr} = m\vec{a}$  ასრულებს ცენტრისკენული ძალის როლს და ბურთულას ანიჭებს ცენტრისკენულ აჩქარებას  $\vec{a} = -\omega^2 \vec{R}$  ანუ,

$$\vec{F}_{dr} = -m\omega^2 \vec{R} \quad (O\vec{b} = \vec{R}) \quad (\text{ნახ.16.1-ის გადატვირთვის გამო } \vec{R} \text{ არაა ნაჩვენები}).$$



ნახაზი 16.1

$k'$  სისტემა, რომელიც უშუალოდ ბურთულასთანაა დაკავშირებული არაინერციულია (გაანხია  $\vec{a}_0 = \vec{a} = -\omega^2 \vec{R}$  აჩქარება). ამიტომ  $k'$  სისტემაში ბურთულაზე მოქმედებს ინერციის ძალა, რომელიც მისი განმარტებიდან გამომდინარე იქნება:

$$\vec{F}_{06} = -m\vec{a}_0 = m\omega^2 \vec{R} \quad (16.1)$$

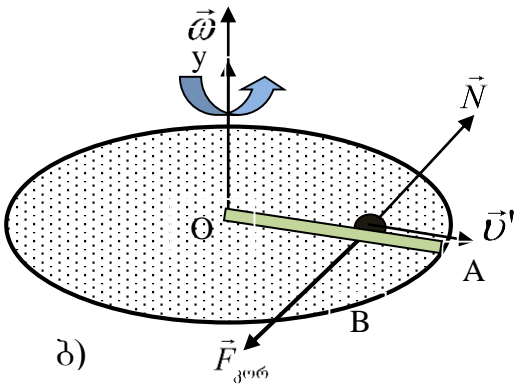
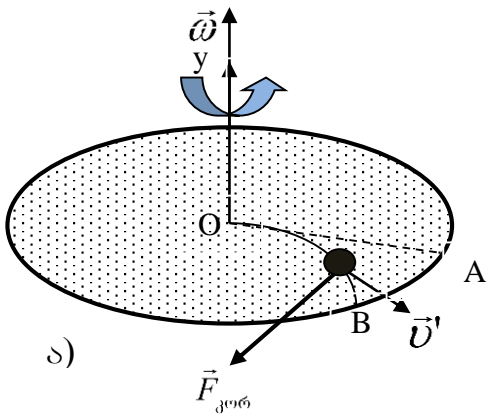
იგი სიდიდით ცენტრისკენული ძალის -დრეკადობის ძალის ტოლია და მიმართულია მის საპირისპიროდ, რის

გამოც მას ცენტრიდანულ ძალასაც უწოდებენ. ამიტომ  $k'$  სისტემის მიმართბურთულა დარჩება უძრავი  $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{ღრ} + \vec{F}_{06} = 0$ .

(16.1) ძალა მოქმედებს ნებისმიერ მბრუნავ სისტემაში დამოუკიდებლად იმისა, მოძრაობა თუ არა სხეული. იგი მდებარეობს ბრუნვის ღერძის მართობულ სიბრტყეში და მიმართულია რადიუს-ვექტორის გასწვრივ. შევნიშნოთ, რომ ამ ძალის მოქმედებას განიცდის დედამიწის ნებისმიერ წერტილში (გარდა პოლუსებისა) მდებარე სხეული, რაც გამოწვეულია დედამიწის დღედამური ბრუნვით (§19).

ზოგადად, მრუდწირულად მოძრაობის ათვლის სისტემის შემთხვევაში, ინერციის ძალა შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი მდგენელის სახით - მხები (ტანგენციალური)  $\vec{F}_\tau = -m\vec{a}_\tau$  და ნორმალური  $\vec{F}_n = -m\vec{a}_n = m\omega^2 \vec{R}$  მდგენელების სახით.

როდესაც სხეული მოძრაობს მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში, მაშინ გამოვლინდება კიდევ ერთი ინერციის ძალა - კორიოლისის ძალა. განვიხილოთ იგივე დისკო (ნახ.16.2ა) და მისი OA რადიალურიწრფის გასწვრივ გაგაგოროთ ბურთულა  $\vec{p}'$  სიჩქარით. თუ დისკო უძრავია, ბურთულა იმოძრაებს წრფივად და აღმოჩნდება A წერტილში. დისკოს ბრუნვის შემთხვევაში ბურთულას სიჩქარე რიცხობრივად მუდმივი დარჩება, შეიცვლის მხოლოდ მიმართულებას, ანუ ბურთულას ტრაექტორია მრუდწირული გახდება (OB წირი). რაც ნიშნავს იმას, რომ მბრუნავ ათვლის სისტემაში ბურთულაზე მისი სიჩქარის მართობულად მოქმედებს ძალა - კორიოლისის ძალა. იმისათვის, რომ ბურთულამ იმოძრაოს OA წრფეზე საჭიროა ამ მიმართულებით მოვათავსოთ რაიმე ზღუდე, მაშინ ბურთულაზე გორვის პროცესში ზღუდის მხრიდან იმოქმედებს  $\vec{N}$  რეაქციის ძალა (ნახ.16.2ბ). (ნახ.16.2-ზე ინერციის ცენტრიდანული ძალა არაა ნაჩვენები). რადგან ამ შემთხვევაში ბურთულა



ნახაზი 16.2

აგრძელებს წრფივად მოძრაობას ნიშნავს რომ  $\vec{N}$  ის მოქმედება გაწონასწორებულია კორიოლისის ძალით. იგი გამოითვლება ფორმულით:

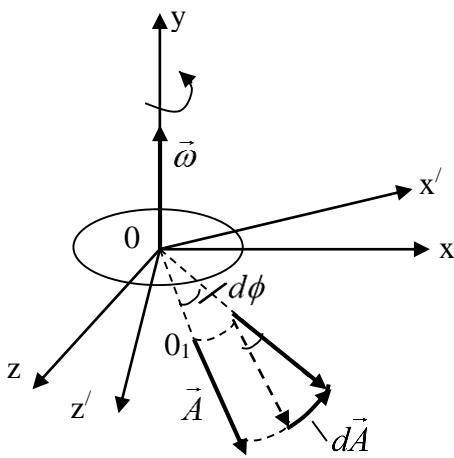
$$\vec{F}_{კორ} = 2m[\vec{v}' \times \vec{\omega}]. \quad (16.2)$$

(გავიხსენოთ, რომ ვექტორული ნამრავლის  $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$  განმარტების თანახმად  $\vec{c}$  ვექტორი  $\vec{a}$  და  $\vec{b}$  ვექტორებზე აგებული სიბრტყის მართობულია და მისი მიმართულება განისაზღვრება მარჯვენა ხელის წესით: თუ გაშლილი ოთხი თითი გვიჩვენებს  $\vec{a}$ -ს მიმართულებას, ხოლო მოხრისას  $\vec{b}$ -ს მიმართულებას, მაშინ მართი კუთხით გაშლილი ცერა თითი გვიჩვენებს  $\vec{c}$ -ს მიმართულებას). როგორც შემდგომში ვაჩვენებთ, რომ რადგან  $\vec{F}_{კორ}$   $\vec{v}'$ -ს მართობია იგი არ ასრულებს მუშაობას, ე.ი ცვლის სიჩქარის მხოლოდ მიმართულებას და არა სიდიდეს.

(16.2)-ის თანახმად კორიოლისის ძალა არ გამოვლინდება მბრუნავ სისტემაში, თუ სხეული უძრავია ან მოძრაობს ათვლის სისტემის კუთხური სიჩქარის გასწვრივ [ $\vec{F}_{კორ} = 0$ , თუ  $\vec{v}' = 0$  ან  $\vec{v}' \uparrow \downarrow \vec{\omega}$ ].

[ $\vec{v}' \uparrow \downarrow \vec{\omega}$ ].

კორიოლისის ძალის მოქმედებით აიხსნება ჩრდილო ნახევარსფეროში მერიდიანის გასწვრივ ჩრდილო პოლუსისკენ მიმართული მდინარეების მიერ მარჯვენა ნაპირის, ხოლო სამხრეთ ნახევარსფეროში მარცხენა ნაპირის ჩამორეცხვა, მატარებლის მიერ რელსების არათანაბარი ცვეთა. ეს ძალა ვლინდება ქანქარის რხევისას, თვითმფრინავთა მოძრაობისას და ა.შ.



ნახაზი 16.3

ვაჩვენოთ როგორ იცვლება რაიმე  $\vec{A}$  ვექტორი არაინერციული სისტემის მიმართ თუ ის განიცდის ცვლილებას ინერციულ სისტემაში. დაუშვათ  $k$  ინერციული სისტემის მიმართ  $k'$  არაინერციული სისტემა  $OY$  ღერძის მიმართ ბრუნავს  $\vec{\omega} = const$  მუდმივი კუთხური სიჩქარით, ამასთან დაკვირვების დასაწყისში  $OX$  ღერძი ემთხვევა  $OX'$ -ს, ხოლო  $OZ$  -  $OZ'$ -ს. დაუშვათ  $\vec{A}$  ვექტორის მოდების  $O_1$  წერტილი უცვლელია არაინერციული სისტემის მიმართ, ანუ ბრუნავს მასთან ერთად. ცხადია მისი ცვლილება  $k'$ -ის მიმართ ნულია, მაგრამ იგი იცვლება  $k$ -ს მიმართ (ნახ. 16.3). დაკვირვების

დაწვეებიდან  $dt$  დროში  $k'$  და  $\vec{A}$  შემობრუნდება  $d\phi = \omega dt$  კუთხით და მისი ცვლილების სიდიდე ინერციული სისტემის მიმართ იქნება  $A d\phi = A \omega dt$ . რადგან ამ ცვლილების შესაბამისი ვექტორი იმყოფება  $\vec{\omega}$ -ს და  $\vec{A}$ -ს მართობულ სიბრტყეში, ამიტომ ეს ცვლილება ჩაიწერება ვექტორული ნამრავლის სახით:

$$d\vec{A} = [\vec{\omega} \vec{A}] dt. \quad (16.3)$$

იგი წარმოადგენს არაინერციული სისტემის მიმართ უცვლელი ვექტორის ცვლილებას ინერციული სისტემის მიმართ, რაც გამოწვეულია არაინერციული სისტემის ბრუნვით.

დავუშვათ,  $\vec{A}$  ვექტორი განიცდის ცვლილებას არაინერციული სისტემის მიმართაც, მაშინ ცხადია  $d\vec{A} = d\vec{A}' + [\vec{\omega} \vec{A}'] dt$ , სადაც  $d\vec{A}'$  -  $\vec{A}$  ვექტორის ცვლილებაა  $k'$ -ის მიმართ. ხოლო ცვლილების სიჩქარე იქნება:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}'}{dt} + [\vec{\omega} \vec{A}'] \quad (16.4)$$

მიღებული ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ სიჩქარის, ძალის, იმპულსის მომენტის და სხვა ვექტორული სიდიდეების მიმართ.

**ამოცანა 16.1.** 200 ტ მასის გემი მიცურავს 5 მ/წმ სიჩქარით მერიდიანის გასწვრივ ჩრდილო პოლუსისკენ. გამოთვალეთ მასზე მოქმედი ინერციის ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები, როდესაც იგი იმყოფება  $60^\circ$ -იან პარალელზე.

**ამოხსნა:**

(16.1)-ის თანახმად:

$$F_{\text{ც}} = m\omega^2 r = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 R \cos 60^\circ,$$

სადაც  $T$  დედამიწის დღედიური ბრუნვის პერიოდია:

$$T = 24 \text{ სთ} = 24 \cdot 3600 \text{ წმ} = 86400 \text{ წმ}.$$

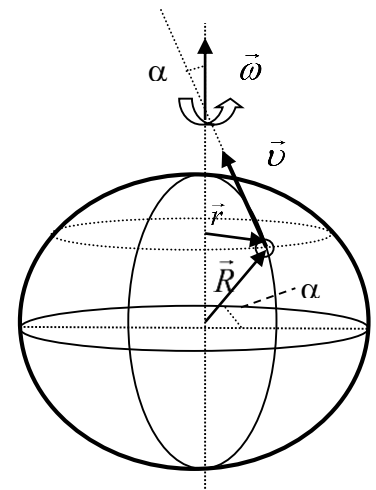
ე.ი.:

$$F_{\text{ც}} = 2 \cdot 10^5 \left( \frac{2 \cdot 3,14}{86400} \right)^2 63 \cdot 10^5 \cdot 0,5 \approx 3,3 \text{ კნ}$$

(16.2)-ის თანახმად:

$$F_{\text{კორ}} = 2m\omega v \sin \alpha = 2m\omega \frac{2\pi}{T} \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{86400} \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 126(6).$$

იგი მიმართულია პარალელის გასწვრივ აღმოსავლეთისკენ.



## **§17. ბრავიტაციული ველი. მსოფლიო მიზიდულობის კანონი**

ბუნებაში არსებული ურთიერთქმედების მრავალფეროვნების მიუხედავად, თანამედროვე ფიზიკაში განასხვავებენ ოთხი ტიპის ფუნდამენტალურ ძალებს, რომლებიც ინტენსივობის ზრდის მიხედვით ასე განლაგდება:

1. გრავიტაციული,
2. სუსტი ბირთვული,

3. ელექტრომაგნიტური,

4. ძლიერი ბირთვული.

გრავიტაციული და ელექტრომაგნიტური ძალები შორიქმედების ძალებია, მათი მოქმედების შედეგია ყველა მსხვილმასშტაბიანი მოვლენები ყოველდღიური ცხოვრებასათუ შორეულ ვარსკვლავებსა და გალაქტიკებში. სუსტი და ძლიერი ბირთვული ძალები ახლოქმედების ძალებია, მათი მოქმედების არიალი ბირთვული ზომებით შემოიფარგლება. ისინი ნაკლებად შეიმჩნევა ყოველდღიურ ცხოვრებაში, თუმცა არცერთი ეს ძალა არ არის “ზედმეტი” და განაპირობებს სამყაროს ამჟამინდელ არსებობას( ამჟამად მიმდინარეობს კვლევა 2 და 4 ტიპის ურთიერთქმედებათა საერთო ბუნების დასადგენად). რაც შეეხება ისეთ ცნობილ ძალებს, როგორცაა დრეკადობის, ხახუნის და სხვა, განიხილება, როგორც ამ ოთხი დამოუკიდებელი ძალის ერთობლივ მოქმედებათა შედეგი.

ანტიკური ხანიდან მეცნიერთა მიერ ციურ სხეულთა მოძრაობის შესწავლისას დაგროვილი ცდისეული და თეორიული შედეგები გახდა იმის საფუძველი, რომ ისააკ ნიუტონმა 1685 წელს გამოქვეყნებულ ნაშრომში “ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები” საბოლოოდ ჩამოაყალიბა მსოფლიო მიზიდულობის კანონი:

➤ *სამყაროს ნებისმიერი ორი ნაწილაკი ურთიერთქმედებს ძალით, რომელიც პირდაპირპროპორციულია მათი მასების ნამრავლისა და უკუპროპორციულია მათ შორის მანძილის კვადრატისა.*

ამ ძალის მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული გარემოს ფიზიკურ თვისებებზე.

მიზიდულობის კანონი, იმ შემთხვევებში თუ ურთიერთქმედი ორი სხეული ნივთიერი წერტილებია, სფერული ფორმის ერთგვაროვანი სხეულებია ან ნივთიერი წერტილი და ერთგვაროვანი სფერული ფორმის სხეულია, მათემატიკური ფორმით ასე ჩაიწერება:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{17.1}$$

$G$  – პროპორციულობის კოეფიციენტს გრავიტაციულ მუდმივას უწოდებენ. (17.1)-დან

$$G = \frac{F r^2}{m_1 m_2}$$

იგი რიცხობრივად იმ გრავიტაციული ძალის ტოლია, რომლითაც ურთიერთქმედებს ორი თითო კილოგრამი მასის ნაწილაკი ერთ მეტრ მანძილზე. მისი მნიშვნელობა ექსპერიმენტულად განსაზღვრულ იქნა ინგლისელი მეცნიერის ჰენრიკევენდიშის მიერ

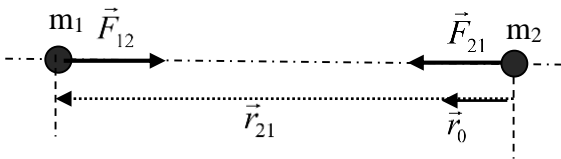
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ ნმ}^2/\text{კგ}^2.$$

$G$  – ს ასეთი სიმცირით აიხსნება ის ფაქტი, რომ მიზიდულობის ძალები შესამჩნევია მხოლოდ ძალიან დიდი, მასიური სხეულების შემთხვევაში.

(17.1) ვექტორულად ასე ჩაიწერება:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \vec{r}_0, \quad |\vec{r}_0| = 1. \tag{17.2}$$

$\vec{F}_{12}$  -  $m_1$  მასის სხეულზე  $m_2$ -ის მხრიდან მოქმედი ძალაა,  $\vec{r}_0$  -  $\vec{r}_{21}$  ვექტორის მგეზავი ვექტორია (ნახ. 17.1). ცხადია ნიუტონის III კანონის თანახმად  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .



ნახაზი 17.1

გრავიტაციული ძალა მიმართულია ნაწილაკთა შემაერთებელი წრფის გასწვრივ, იგი **ცენტრალური** ძალაა (იხ. §30).

ნებისმიერი ფორმის სხეულების გრავიტაციული ურთიერთქმედების გამოსათვლელად საჭიროა სხეულთა აზრობრივი დაყოფა ნივთიერ წერტილებად, ამ წერტილებს შორის ურთი-

ერთქმედების ძალთა გამოთვლა და სუპერპოზიციის პრინციპის გამოყენებით ტოლქმედის პოვნა.

ნიუტონის თეორიის თანახმად გრავიტაციული ურთიერთქმედება მყისიერად ვრცელდება. სინამდვილეში კი, როგორც **ანშტაინმა** აჩვენა, ნებისმიერი სხეულის ირგვლივ არსებობს მატერიის განსაკუთრებული ფორმა - **გრავიტაციული ველი**, რომელშიდაც მოქმედებს გრავიტაციული მიზიდვითი  $F$  ძალები<sup>11</sup> და ამ ველში გრავიტაციული ურთიერთქმედება ხორციელდება  $c = 3 \cdot 10^8$  მ/წმ სასრული სიჩქარით (სინათლის გავრცელების სიჩქარე ვაკუუმში).

(17.1)-ის თანახმად, გრავიტაციული ძალა ნულს უტოლდება მხოლოდ მაშინ, როცა სხეულებს შორის მანძილი უსასრულოდ დიდი ხდება ანუ გრავიტაციული ველი განფენილია მთელ სამყაროში.

ნიუტონის გრავიტაციის თეორიის თანახმად ნებისმიერი სხეული ქმნის გრავიტაციულ ველს, რომელიც პროპორციულია სხეულის მასისა, ე.ი. მასა გრავიტაციული ველის წყაროა. ამ თვალსაზრისით (17.2)-ში მასას გრავიტაციულს უწოდებენ. წინა თავში ჩვენ განვიხილეთ მასა, როგორც ინერტულობის ზომა. ჯერ კიდევ ნიუტონის ეპოქაში დამტკიცდა ამ მასათა იდენტურობა  $10^{-3}$  სიზუსტით, ხოლო მეოცე საუკუნეში მათი იდენტურობის სიზუსტე  $10^{-12}$ -დე დაადგინდა, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ სხეულის გრავიტაციული და ინერციული მასა ზუსტად თანხვედრია – ეს ფაქტი ცნობილია **ექვივალენტურობის პრინციპის** სახელწოდებით.

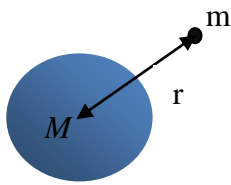
ნიუტონის გრავიტაციის კანონი განაპირობებს და ხსნის ციური სხეულების (ვარსკვლავების, პლანეტების, კომეტების...) მოძრაობას და ურთიერთგადაანაცვლებებს. ამ კანონის საფუძველზე გამოთვლილი იქნა მარსის, დედამიწისა და მთელი რიგი პლანეტების მასები.

ციური სხეული კარგი მიახლოებით შეიძლება განვიხილოთ როგორც სფერული ფორმის ერთგვაროვანი სხეული, ხოლო მასთან შედარებით ნებისმიერი სხეული ჩავთვალოთ ნივთიერ წერტილად (ნახ.17.2). ჩავწერთ  $M$  მასის ციური სხეულისა და მის გრავიტაციულ ველში  $r$  მანძილით დაშორებული  $m$  მასის ნივთიერი წერტილის ურთიერთქმედების ძალა. (17.1)-ის თანახმად:

$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (17.3)$$

<sup>11</sup>არსებობს მოსაზრება, რომ უნდა არსებობდეს განზიდვითი გრავიტაციული ძალები, მაგრამ ჯერჯერობით ცდისეული მონაცემები არ იძლევა ამის სერიოზული მტკიცების შესაძლებლობას.

რადგან გრავიტაციული ძალა ორივე სხეულის მასაზე დამოკიდებული, ამიტომ მოცემულ წერტილში უშუალოდ ციური სხეულის გრავიტაციული ველის დასახასიათებლად ეს სიდიდე არ გამოდგება. ამ თვალსაზრისით შემოტანილია **გრავიტაციული ველის დაძაბულობის** ცნება. ველის რაიმე წერტილში გრავიტაციული დაძაბულობატოლია ამ წერტილში მოთავსებულ ნივთიერ წერტილზე მოქმედი გრავიტაციული ძალის ფარდობისა ამნივთიერი წერტილის მასასთან:



ნახაზი 17.2

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (17.4)$$

(12.1)-ის თანახმად მას აჩქარების განზომილება გააჩნია, იგი არ არის დამოკიდებული “სასინჯი” სხეულის მასაზე, ფორმაზე, ნივთიერების გვარობაზე და უშუალოდ განსაზღვრავს ველს მოცემულ წერტილში. ცხადია გრავიტაციული ველის დაძაბულობა მოცემულ წერტილში დამოკიდებულია ციური სხეულის მასაზე და ამ წერტილის დაშორებაზე მასათა ცენტრიდან.

**ამოცანა 17.1.** რა ძალით მიიზიდავს მთვარეს დედამიწა და რა სიჩქარით ბრუნავს იგი დედამიწის ირგვლივ.

**ამოხსნა:**

ასტრონომიული მონაცემებით  $M_{დედ} = 5,98 \cdot 10^{24}$  კგ,  $m_{მო} = 7,35 \cdot 10^{22}$  კგ,  $r = 3,84 \cdot 10^8$  მ. (17.3)-ის თანახმად:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = 2 \cdot 10^{20} \text{ (ბ)}.$$

რადგან მთვარის ორბიტა დედამიწის ირგვლივ წრიულია და დედამიწის გრავიტაციული ძალა მას ანიჭებს ცენტრისკენულ აჩქარებას:

$$F = m_{მო} a = m_{მო} \frac{v^2}{r}.$$

აქედან:

$$v = \sqrt{\frac{rF}{m_{მო}}} \approx 10^3 \text{ (მ/წმ)}.$$

**ამოცანა 17.2.** იპოვეთ მზის მასა, თუ ცნობილია რომ დედამიწის საშუალო სიჩქარე მზის ირგვლივ ორბიტაზე 30 კმ/წმ-ია, ხოლო ორბიტის რადიუსი  $1,5 \cdot 10^8$  კმ.

**ამოხსნა:**

ვინაიდან მზის გრავიტაცია დედამიწას ანიჭებს ცენტრისკენულ აჩქარებას, ამიტომ (18.3)-ის და (8.1)-ის გატოლებით შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$G \frac{M_{მზე} \cdot m_{დედ}}{r^2} = \frac{m_{დედ} v^2}{r}$$

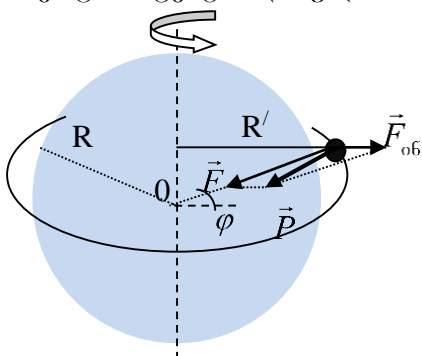
საიდანაც:

$$M_{მზე} = \frac{v^2 r}{G} = \frac{9 \cdot 10^8 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}{6,67 \cdot 10^{-11}} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ (კგ)}.$$

### §18. სიმძიმის ძალა.

#### თავისუფალი ვარდნის აჩქარება

დედამიწის ზედაპირთან დაკავშირებული ათვლის სისტემა დღე-ღამური ბრუნვის გამო არაინერციულია, ამიტომ ამ სისტემაშიგარდა დედამიწის გრავიტაციის ძალისამოქმედებს ინერციის ცენტრიდანული ძალა. შესაბამისად დედამიწის მოქმედება სხეულზე წარმოადგენს ამ ორი ძალის ტოლქმედს. **ძალას, რომლითაც დედამიწა მოქმედებს სხეულზე, სიმძიმის ძალა ეწოდება.** (მოძრავ სხეულზე ზოგადად იმოქმედებს კორიოლისის ძალაც, რომელიც ამ ორ ძალასთან მიმართებაში სიმცირის გამო ვუგულებელგვყოფთ). მაშასადამე სიმძიმის ძალა:



ნახაზი 18.1

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_{06}. \quad (18.1)$$

(17.3)-ის თანახმად, თუ  $m$  მასის სხეული იმყოფება დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში (ნახ. 18.1)

$$F = G \frac{Mm}{R^2} \quad (r \approx R),$$

აქ  $R = 6,38 \cdot 10^6$  მ დედამიწის რადიუსია,  $M \approx 5,98 \cdot 10^{24}$  კგ - კი მასა.

(16.1)-ის თანახმად:

$$F_{06} = m\omega^2 R' = m\omega^2 R \cos \varphi,$$

ხოლო:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,26 \cdot 10^{-5} \text{წმ}^{-1}.$$

დედამიწის დღე-ღამური ბრუნვის ციკლური სიხშირეა,  $\varphi \in [0, \pi/2]$  განედის კუთხეა. პოლუსებზე ( $\varphi = \pi/2$ )  $F_{06} = 0$ , ხოლო ეკვატორზე ( $\varphi = 0$ ) მაქსიმალურია -  $F_{06} = m\omega^2 R$ , თუმცა აქაც გაცილებით ნაკლები რჩება გრავიტაციულ ძალაზე. ამიტომ, საკმაოდ მაღალი სიზუსტით შეიძლება მივიღოთ, რომ  $\vec{P} = \vec{F}$ , ანუ დედამიწის გრავიტაციის ველი განვიხილოთ როგორც სიმძიმის ძალის ველი. ამ ველის დაძაბულობა - აჩქარება დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში (17.4)-ის შესაბამისად იქნება

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m} = -G \frac{M}{R^2} \vec{r}_0, \quad |\vec{r}_0| = 1 \quad (\vec{R} = -\vec{r}_0 R), \quad g = |\vec{g}| = G \frac{M}{R^2}. \quad (18.2)$$

რომელიც დედამიწის ზედაპირის მართობულად ცენტრისკენაა მიმართული. (18.2)-ის გამო ეს აჩქარება არაა დამოკიდებული სხეულის მასაზე. ე.ი. დედამიწის ზედაპირიდან მცირე მანძილით აწეულ ნებისმიერ სხეულზე გარდა გრავიტაციული ძალისა სხვა ძალები არ მოქმედებს იგი შეასრულებს ვარდნას მუდმივი აჩქარებით, კერძოდ:

$$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,38 \cdot 10^{24}}{(6,38 \cdot 10^6)^2} \approx 9,81 \text{ მ/წმ}^2$$

**სხეულის მოძრაობას მხოლოდ დედამიწის გრავიტაციის-სიმძიმის ძალის გავლენით თავისუფალი ვარდნა ეწოდება.** მაშასადამე თავისუფალი ვარდნა წარმოადგენს უსაწყისო სიჩქარის მქონე თანაბარაჩქარებული მოძრაობის კერძო შემთხვევას და მის აღსაწერად შესაძლებელია გამოვიყენოთ (8.2ბ),....(8.5ბ) ფორმულები:

$$v = gt, h = \frac{gt^2}{2}, h = \frac{v^2}{2g}, \quad (18.3)$$

სადაც  $h = y - y_0$  სხეულის ვარდნის სიმაღლეა.

იდეალური თავისუფალი ვარდნა შესაძლებელია მხოლოდ ვაკუუმში, სადაც ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა არ არსებობს. ამიტომ ვაკუუმში სხეულები მათი სიმკვრივის, მასის და ფორმის მიუხედავად ერთნაირი აჩქარებით ვარდნა. რის გამოც გ-ს თავისუფალი ვარდნის აჩქარებას უწოდებენ.

(18.2)-ის თანახმად, სიმძიმის ძალა რიცხობრივად ტოლია სხეულის მასისა და თავისუფალი ვარდნის აჩქარების ნამრავლის:

$$\vec{P} = m\vec{g}. \quad (18.4)$$

იგი მიმართულია დედამიწის ზედაპირის მართობულად. თუ სხეული უძრავია დედამიწის ზედაპირის მიმართ, მაშინ ეს ძალა გაწონასწორებულია საყრდენის ან საკიდლის რეაქციის ძალით.

ჯერ კიდევ 1564 წელს გალილეო გალილეიმ ექსპერიმენტით დაამტკიცა, რომ სიმძიმის ძალის გავლენით ვარდნილი ნებისმიერი სხეული ერთიდაიმავე  $\vec{g} = const$ <sup>12</sup> აჩქარებას ღებულობდა, ანუ დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში სიმძიმის ძალის ველი ერთგვაროვანია  $\vec{P} = const$ .

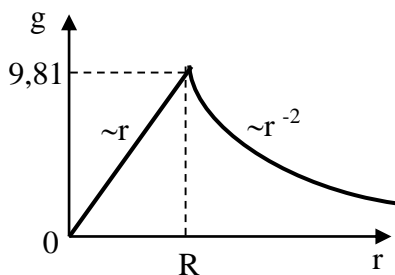
განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც თავისუფალ ვარდნას ასრულებს დედამიწის ზედაპირიდან ისეთ  $h$  სიმაღლეზე აწეული სხეული, რომლის უგულებელყოფაც დედამიწის რადიუსის სიდიდესთან შედარებით არასწორია, მაშინ:

$$P(h) = F = G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{Mm}{(R+h)^2}, \quad (r = R+h) \quad (18.5)$$

შესაბამისად:

$$g(h) = G \frac{M}{(R+h)^2}. \quad (18.6)$$

ე.ი. სიმაღლის ზრდისას თავისუფალი ვარდნის აჩქარება მცირდება და სიმძიმის ძალთა ველის ერთგვაროვნება ირღვევა.



ნახაზი 18.2

ნახ. 18.2-ზე მოცემულია თავისუფალი ვარდნის აჩქარების დამოკიდებულება დედამიწის ცენტრიდან მანძილზე<sup>13</sup> (დედამიწის სიღრმეში წრფივი დამოკიდებულება ნაჩვენებია ამოცანა (18.3)-ში).

სიმძიმის ძალის მოქმედება უმთავრეს როლს ასრულებს იმ პროცესებში, რომლებიც მიმდინარეობს დედამიწაზე არსებულ ცოცხალ თუ არაცოცხალ ბუნებაში.

<sup>12</sup> გ მცირედ იზრდება ეკვატორიდან პოლესისკენ დედამიწის არასფერულობის გამო ( $R_{\text{eq}} - R_{\text{p}} \approx 21\text{კმ}$ ), მაგრამ ეს ზრდა უმნიშვნელოა  $\approx 0,5\%$ .

<sup>13</sup> დედამიწის სიმკვრივე ჩათვლილია მუდმივად  $\rho = const$ .

**ამოცანა 18.1.** რამდენჯერ შემცირდება თავისუფალი ვარდნის აჩქარება სხეულის დედამიწის ზედაპირიდან დედამიწის რადიუსის ტოლ მანძილზე ატანისას.

**ამოხსნა:**

(18.5)-ის (18.2)-თან შეფარებით მივიღებთ

$$\frac{g(h)}{g(0)} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{R^2}{(R+R)^2} = \frac{1}{4}.$$

**ამოცანა 18.2.** გამოთვალეთ რამდენჯერ მეტია მზის ზედაპირზე თავისუფალი ვარდნის აჩქარება დედამიწის ზედაპირთან შედარებით.

**ამოხსნა:**

(18.2)-ის თანახმად:

$$\frac{g_{\text{მზე}}}{g_{\text{დედ}}} = \frac{M_{\text{მზე}}}{M_{\text{დედ}}} \cdot \frac{R_{\text{დედ}}^2}{R_{\text{მზე}}^2} = \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{5,98 \cdot 10^{24}} \cdot \left( \frac{6,38 \cdot 10^6}{6,96 \cdot 10^8} \right)^2 = 28,$$

$$g_{\text{მზე}} = 28g_{\text{დედ}} = 274 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}.$$

**ამოცანა 18.3.** ვაჩვენოთ, რომ თავისუფალი ვარდნის აჩქარება დედამიწის ცენტრიდან მის ზედაპირამდე  $r$ -მანძილის პროპორციულად იზრდება.

**ამოხსნა:**

(18.2)-ის თანახმად:

$$g = G \frac{M}{r^2} \quad r[0; R],$$

სადაც:

$$M = \rho V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho,$$

ამიტომ:

$$g = G \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{r^2} = \frac{4}{3} G \pi r \rho.$$

**ამოცანა 18.4.** გამოთვალეთ რა სიმაღლიდან ვარდებოდა თავისუფლად სხეული თუ ვარდნის ბოლო 4 წმ-ში გაიარა 320 მ მანძილი.

**ამოხსნა:**

დაუშვათ ვარდნის დრო  $t$ -ს ტოლია, მაშინ ბოლო 4 წმ-ში გავლილი მანძილი (18.3)-ის თანახმად იქნება:

$$320 = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-4)^2}{2},$$

საიდანაც ვარდნის ხანგრძლივობა  $t = 10$  წმ. შესაბამისად ვარდნის სიმაღლე

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \cdot 10^2}{2} = 500 \text{ (მ)}.$$

**§19. მზის სისტემა.  
კეპლერის კანონები**

მზის სისტემა იმყოფება სპირალური ფორმის ბრტყელ გალაქტიკაში, რომელიც ირმის ნახტომის სახელწოდებითაა ცნობილი. გალაქტიკის ცენტრის ირგვლივ მზის სისტემის ბრუნვის წირითი სიჩქარე დაახლოებით  $3 \cdot 10^5$  მ/წმ-ია, ხოლო ბრუნვის პერიოდი 220 მილიონი დედამიწის წელიწადის ტოლია. მზე ერთ-ერთი ტიპური ვარსკვლავია იმ  $\approx 200$  მილიარდიდან, რომელსაც მოიცავს ჩვენი გალაქტიკა. მზის სისტემას უწოდებენ მზის ჩათვლით ყველა იმ ზეციერ სხეულს, რომელიც “ჩაჭერილი” ჰყავს მზეს თავისი ძლიერი მიზიდულობის გამო. ამ ძლიერ მიზიდულობას განაპირობებს ის, რომ მზის მასა შეადგენს მთელი სისტემის მასის  $\approx 99,9\%$ -ს.

ციურ სხეულებში იგულისხმება *პლანეტები* – მასიური სხეულები, რომელთაც გააჩნია მკაცრად განსაზღვრული ორბიტები; *ასტეროიდები* – მცირე პლანეტები; *კომეტები*, რომელთა დიამეტრი (0,5 ÷ 50) კმ-მდეა. კომეტა შედგება გაყინული აირებისა და კოსმოსური მტვრისგან. მათ “კუდიან ვარსკვლავებსაც” უწოდებენ, რადგან მზესთან მიახლოებისას მზის სხივების მოქმედებით კომეტას ტოვებს მტვრის მაწილაკები, რომლებიც ქმნიან ზოგჯერ 10 მილიონ კმ-მდე სიგრძის კუდს; *მეტეორიტები* – ქვის ან რკინის მცირე ზომის სხეულები. ამ ფაქტის გამო, მზის სისტემის მასათა ცენტრი იმყოფება მზის ცენტრთან ძალიან ახლოს. ეს განაპირობებს ამ პლანეტათა ორბიტების წრიულ, ან თითქმის წრიულ (ელიფსურ) ფორმას.

მსოფლიო მიზიდულობის კანონის აღმოჩენამდე ნახევარი საუკუნით ადრე გერმანელმა მეცნიერმა *იოჰან კეპლერმა* ასტრონომიული კვლევების საფუძველზე დაასკვნა, რომ პლანეტების მოძრაობის აღწერა შეიძლება სამი უმარტივესი კანონით, თუ *გეოცენტრული*<sup>14</sup> სისტემის ნაცვლად ვისარგებლებთ *ჰელიოცენტრული*<sup>15</sup> სისტემით:

- *პირველი კანონი* – *პლანეტების ტრაექტორია მზის ირგვლივ წარმოადგენს ელიფსს, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსშიც იმყოფება მზე.*
- *მეორე კანონი* – *მზისა და პლანეტების შემაერთებელი წრფე დროის ტოლ შუალედებში ტოლ ფართობებს შემოწერს (ნახაზი 19.1)  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ ,  $\Delta S_1 = \Delta S_2$ .*  
(დამტკიცება იხილეთ ამოცანა 37.1-ში)
- *მესამე კანონი* – *ნებისმიერი პლანეტის ორბიტის მთავარი ნახევარღერძის<sup>16</sup> კუბის ფარდობა ბრუნვის პერიოდის კვადრატთან მუდმივი სიდიდეა:*

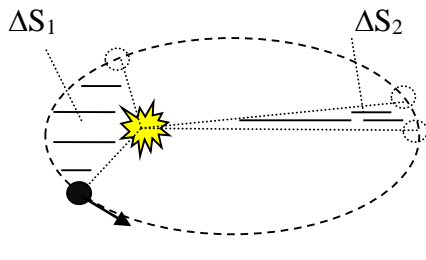
$$\frac{r^3}{T^2} = const \quad \text{ან} \quad \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2}. \quad (19.1)$$

(დამტკიცება იხილეთ ამოცანა 19.1-ში) ასტრონომიული თვალსაზრისით *დედამიწის მახასიათებელი პარამეტრებია*: მასა –  $5,98 \cdot 10^{24}$  კგ; რადიუსი – 6380კმ; მზიდან დაშორება –  $150 \cdot 10^6$  კმ=ასტრონომიული ერთეული (ა.ე.); ბრუნვის პერიოდი – 1 წელიწადი = 365 დღე-ღამე და 6 სთ-ს; წირითი სიჩქარე – 30 კმ/წმ; დღე-ღამის ხანგრძლივობა – 24 სთ; დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში თავისუფალი ვარდნის აჩქარება – 9,81 მ/წმ<sup>2</sup>.

<sup>14</sup>მე-17 საუკუნამდე აღიარებდნენ არისტოტელეს და პტოლემეს ჰიპოთეზას მზის და პლანეტების დედამიწის ირგვლივ ბრუნვის შესახებ (*გეოცენტრული* სისტემა)

<sup>15</sup>კოპერნიკის და სხვათა მიერ მე-17 საუკუნეში პლანეტებისა და მათ შორის დედამიწის ბრუნვის ცენტრად მზე იქნა მიჩნეული (*გელიოცენტრული* სისტემა).

<sup>16</sup>მთავარი ნახევარღერძი ელიფსის ორ უშორეს წერტილს შორის მანძილის ნახევარია.



ნახაზი 19.1

მთვარის-დედამიწის ერთადერთი ბუნებრივი თანამგზავრის პარამეტრებია: მასა –  $7,35 \cdot 10^{22}$  კგ; რადიუსი – 1738 კმ; დედამიწიდან საშუალო დაშორება – 384467 კმ (0,00257 ა.ე.), ბრუნვის პერიოდი – 27,3 დღე. წირითი სიჩქარე – 1,022 კმ/წმ; ზედაპირის მახლობლობაში თავისუფალი ვარდნის აჩქარება – 1,62 მ/წმ<sup>2</sup>.

ცხრილ 19.1-ში მოცემულია მზის სისტემაში შემავალ პლანეტათა მახასიათებელი პარამეტრები, ამასთანავე ამ სიდიდეთა მნიშვნელობები ფარდობითია – გამოთვლილია დედამიწის შესაბამის ფიზიკურ სიდიდეთა მიმართებაში, ანუ მოცემულია ამა თუ იმ პარამეტრის ფარდობა დედამიწის იმავე პარამეტრთან.

ცხრილი 19.1

მზის სისტემა	მზე	მერკური	ვენერა	დედამიწა	მარსი	იუპიტერი	სატურნი	ურანი	ნეპტუნი	პლუტონი <sup>17</sup>
ფარდობითი მასა	332946	0,05	0,82	1	0,11	318	95,2	14,5	17,14	0,002
ფარდობითი რადიუსი	109	0,38	0,95	1	0,53	11,2	9,4	4	3,3	0,18
ფარდობითი მანძილი მზიდან r (ა.ე.)	–	0,39	0,72	1	1,52	5,19	9,5	19,1	30	39,3
ფარდობითი წელიწადი T	–	0,24	0,62	1	1,88	11,86	29,5	84	165	248
$r^3/T^2 \times 10^{24}$ კმ <sup>3</sup> /წელ <sup>2</sup>	–	3,34	3,35	3,35	3,35	3,35	3,34	3,35	3,34	3,33
მზის გარშემო ბრუნვის ფარდობითი სიჩქარე	–	1,61	1,18	1	0,81	0,44	0,32	0,23	0,18	0,16
დღე-ღამის ფარდობითი ხანგრძლივობა	36	58,7	243	1	1,04	0,42	0,42	0,75	0,79	6,38
რგოლები რაოდენობა	0	0	0	0	0	3	7	10	6	0
ბუნებრივი თანამგზავრების რაოდენობა	–	0	0	1	2	17	18	17	8	1
თავისუფალი ვარდნის ფარდობითი აჩქარება	28,02	0,35	0,91	1	0,39	2,54	1,12	0,91	1,13	0,06
ზედაპირის საშუალო ტემპერატურა °C	5500	179	482	15	–63	–121	–180	–193	–200	–230

<sup>17</sup>უახლესი შეხედულებით პლუტონი მიკუთვნებულია ასტეროიდთა ოჯახს.

**ამოცანა 19.1.** ვახვევთ კეპლერის მესამე კანონის სამართლიანობა იმ დაშვებით, რომ პლანეტათა ორბიტები წრიულია (ეს მოთხოვნა კარგად სრულდება მერკურიდან იუპიტერის ჩათვლით).

**ამოხსნა:**

ვინაიდან მზის გრავიტაცია პლანეტებს ანიჭებს ცენტრისკენულ აჩქარებას, ამიტომ, ორი  $m_1$  და  $m_2$  მასის და  $r_1$ ,  $r_2$  ორბიტის რადიუსების პლანეტისთვის, გვექნება:

$$G \frac{m_1 M}{r_1^2} = m_1 \left( \frac{2\pi}{T_1} \right)^2 r_1 \quad \text{და} \quad G \frac{m_2 M}{r_2^2} = m_2 \left( \frac{2\pi}{T_2} \right)^2 r_2,$$

სადაც  $M$  მზის მასაა, ხოლო  $T_1$  და  $T_2$  შესაბამის პლანეტათა ბრუნვის პერიოდებია. განტოლებათა შეფარდებით ვღებულობთ კეპლერის მესამე კანონს:

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}.$$

**ამოცანა 19.2.** მანევრირებით თანამგზავრის ორბიტის რადიუსი 1,2-ჯერ გაიზარდა. რამდენჯერ შეიცვალა ბრუნვის სიხშირე და სიჩქარე?

**ამოხსნა:**

(19.1)-ის თანახმად:

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{v_2^2}{v_1^2}$$

აქედან:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3} = \sqrt{1,2^3} \approx 1,3$$

(8,5)-ის გამოყენებით შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2\pi v_2 r_2}{2\pi v_1 r_1} = \frac{v_2 r_2}{v_1 r_1} = 1,3 \cdot 1,2 = 1,56.$$

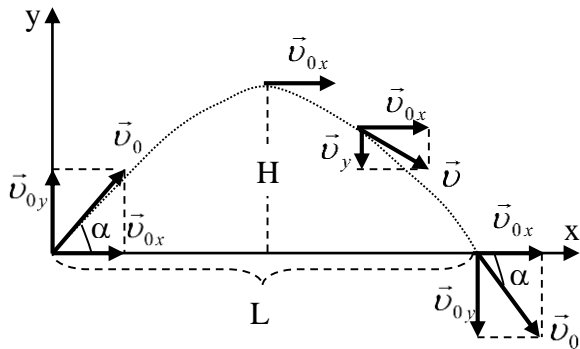
## §20. ბალისტიკური მოძრაობა

- **ბალისტიკური (ბერძ. – გადავისვრი) ეწოდება ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი მძიმე სხეულის მოძრაობას.**

ბალისტიკური მოძრაობის შესწავლის გამარტივების მიზნით ვუგულებელვყოთ კორიოლისის და ჰაერის წინააღმდეგობის ძალთა მოქმედება. ე.ი. განვიხილავთ ეს მოძრაობა მხოლოდ გრავიტაციის (სიმძიმის) ძალის (§18) ზემოქმედებით. რადგან ეს ძალა ნებისმიერ სხეულს ანიჭებს ერთიდაიგივე, ვერტიკალურად ქვემოთ მიმართულ აჩქარებას  $a = g = 9,81$  მ/წმ<sup>2</sup> (დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში). ამიტომ მოცემულ პირობებში ბალისტიკურ მოძრაობათანაბარაჩქარებული მოძრაობაა (§8) ორგანოზომილებიან სივრცეში (ნახ. 20.1).

ეს მოძრაობა შესწავლილი იქნა **გალილეო გალილეის** მიერ, რისთვისაც მან პირველმა გამოიყენა ახალი მეთოდი – მოძრაობის დაშლა ორ დამოუკიდებელ მოძრაობად, **ჰორიზონტალურად და ვერტიკალურად.**

დაეუშვათ სხეული  $t_0=0$  მომენტისთვის გაისროლეს  $O(0;0)$  წერტილიდან ჰორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით მიმართული  $\vec{v}_0$  სიჩქარით. დავშალოთ სიჩქარე ორ ურთიერთმართობულ მდგენელად  $\vec{v}_{0x} = \vec{i}v_{0x}$  და  $\vec{v}_{0y} = \vec{j}v_{0y}$ . ცხადია,  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ .



ნახაზი 20.1

რადგან სიმძიმის ძალა  $\vec{P} = m\vec{g}$  მიმართულია ჰორიზონტალური ზედაპირისადმი მართობულად, ამიტომ  $Ox$  ღერძის გასწვრივ სხეულის გადაადგილებაში ის მონაწილეობას არ ღებულობს. ანუ ამ მიმართულებით სხეული მოძრაობს ინერციით:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad (20.1)$$

მუდმივი სიჩქარით, შესაბამისად მოძრაობის განტოლებაა

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (20.2)$$

$Oy$  მიმართულებით კი მოძრაობა თანაბარშენელებულია  $a = a_y = -g$ , და სიჩქარის დროზე დამოკიდებულება მოიცემა ფორმულით:

$$v_y = v_{0y} - gt, \quad (20.3)$$

ზემოთ მოძრაობისას სხეულის სიჩქარის ვერტიკალური  $v_y$  მდგენელი კლებულობს და

$$t' = \frac{v_{0y}}{g}, \quad (20.4)$$

დროისათვის ნულს უტოლდება. ამ მომენტში მისი სიჩქარე  $\vec{v} = \vec{v}_x$  და მიმართულია  $Ox$  ღერძის პარალელურად. ამიტომ სხეულის ეს მდებარეობა წარმოადგენს ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილს. მისი დაშორება  $Ox$  ღერძიდან, ანუ ასეულის მაქსიმალური სიმაღლე ტოლია

$$H = Y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{-2g} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (20.5)$$

ამის შემდეგ ( $t > t'$ ) სხეული ეშვება ქვემოთ. და რადგან სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალა, ამიტომ ქვემოთ იგივე დონეზე დაშვების ხანგრძლივობა ზემოთ მოძრაობის ხანგრძლივობის ტოლი იქნება<sup>18</sup>. შესაბამისად ფრენის ხანგრძლივობა იქნება:

$$t_{\text{ფრ}} = 2t' = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (20.6)$$

ხოლო ფრენის სიშორე შეიძლება გამოვთვალოთ (20.2)-ის გამოყენებით

$$L = v_{0x}t_{\text{ფრ}} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (20.7)$$

(20.7)-დან სხეულის ფრენის სიშორე უდიდესია  $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$  კუთხით გასროლის დროს  $L_{\text{მკ}} = v_0^2/g$  და იგი ოთხჯერ აღემატება შესაბამის მაქსიმალურ სიმაღლეს ((20.5)-ის თანახმად  $v_0^2/(4g)$  ს).

<sup>18</sup>გამომდინარეობს სიმძიმის ძალისკონსერვატული ბუნებიდან (იხ §29).

ბალისტიკური მოძრაობის ტრაექტორიას აქვს პარაბოლის ფორმა, (იხ. ამოცანა 20.1) თუ სხეულის გასროლის წერტილი უფრო მაღლა იმყოფება, ვიდრე დავარდნის წერტილი (იხ. ამოცანა 20.2) მაშინ, ცხადია,  $y_0 \neq 0$  და ზევით და ქვევით მოძრაობათა ხანგრძლივობაც განსხვავებულია.

**ამოცანა 20.1.** ვაჩვენოთ, რომ ბალისტიკური მოძრაობის ტრაექტორიას, ჰაერის წინააღმდეგობის არ არსებობის პირობებში, აქვს პარაბოლის ფორმა.

**ამოხსნა:**

ჩავწეროთ ტრაექტორიის განტოლება, ანუ მივიღოთ  $y$ -ის  $x$ -ზე დამოკიდებულება. რადგან  $y$  - ღერძის გასწვრივ მოძრაობა თანაბარაჩქარებულია ( $a = a_y = -g$ ),  $y$ -კოორდინატის დროზე დამოკიდებულებას ექნება სახე:

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

(20.2)-დან განვსაზღვროთ დრო  $t = \frac{x}{v_{0x}}$  და შევიტანოთ (1)-ში მივიღებთ:

$$y = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right)x^2.$$

გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y = (tg\alpha)x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$a = -\left(\frac{g}{2v_{0x}^2 \cos^2 \alpha}\right) \text{ და } b = (tg\alpha),$$

მივიღებთ:

$$y = a^2x + bx,$$

რაც პარაბოლას ტიპური განტოლებაა.

**ამოცანა 20.2.** ქვემეხიდან ტრიალ მინდორზე 1280 მ-ს დაშორებით იმყოფება სამიზნე. რა კუთხით უნდა მოხდეს გასროლა მიზანში მოსახვედრად, თუ ჭურვის სიჩქარე 120 მ/წმ-ია.

**ამოხსნა:**

(20.7)-ის თანახმად:

$$\sin 2\alpha = \frac{gL}{v_0^2} = \frac{9,8 \cdot 1280}{120^2} = 0,87,$$

აქედან:

$$2\alpha = \arcsin(0,87) \approx 60,6^\circ ; 119,4^\circ,$$

შესაბამისად:

$$\alpha = 30,3^\circ \text{ და } \alpha = 59,7^\circ.$$

ერთერთი ასეთი კუთხით გასროლისას ჭურვი აუცილებლად მოხვდება სამიზნეს.

**ამოცანა 20.3.** 200 მ სიმაღლის მთიდან ჰორიზონტისადმი  $30^\circ$  კუთხით ისვრიან ქვემეხით. რა მანძილზე იმყოფება სამიზნე, თუ ჭურვის გასროლის სიჩქარეა 60მ/წმ.

**ამოხსნა:**

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 30\sqrt{3} \text{ მ/წმ},$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 30 \text{ მ/წმ}.$$

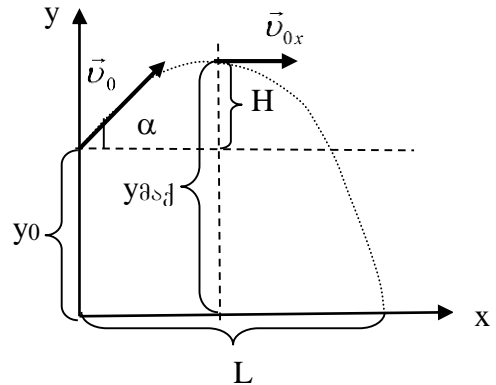
(20.4)-ის თანახმად, ასეღის დრო  $t' = 3$  წმ, ხოლო (20.5)-დან  $H = 45$ მ. შესაბამისად,  $y_{\text{მძკ}} = y_0 + H = 245$  მ. თუ გავითვალისწინებთ, რომ A წერტილში  $v_y = 0$ , მაშინ ქვევით მოძრაობის ხანგრძლივობა იქნება

$$t'' = \sqrt{\frac{2y_{\text{მძკ}}}{g}} = 7 \text{ (წმ)} \quad \left( y_{\text{მძკ}} = \frac{gt''^2}{2} \right).$$

მოძრაობის სრული დრო  $t_{\text{ფრ}} = t' + t'' = 10$  წმ, ხოლო

სამიზნის მდებარეობა (20.2)-ის თანახმად, განისაზღვრება კოორდინატით

$$x = L = 30\sqrt{3} \cdot 10 = 300\sqrt{3}.$$



## §21. წონა, უწონობა, გადატვირთვა

➤ **სხეულის წონა  $\vec{P}^*$  ეწოდება ძალას, რომლითაც სხეული მოქმედებს საყრდენზე ან საკიდელზე.**

ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად საყრდენზე (საკიდელზე) მოთავსებულ სხეულზე მათი მხრიდან იმოქმედებს  $\vec{P}^*$ -ს ტოლი და საპირისპიროდ მიმართული ძალა – **რეაქციის ძალა  $\vec{N}$**

$$\vec{N} = -\vec{P}^*. \quad (21.1)$$

განვიხილოთ ვერტიკალურად მოძრავ ლიფტში ზამბარაზე ჩამოკიდებული  $m$  მასის ტვირთი (ნახ. 21.1). ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$ . (21.1)-ის გათვალისწინებით:

$$m\vec{a} = \vec{P} - \vec{P}^* \quad \text{და} \quad \vec{P}^* = \vec{P} - m\vec{a}. \quad (21.2)$$

თუ ლიფტის აჩქარება ნულის ტოლია- ლიფტი უძრავია, ან მოძრაობს თანაბრად ( $\vec{v} = \text{const}$ ), მაშინ (21.2)-დან  $\vec{P}^* = \vec{P}$  – წონა სიმძიმის ძალის ტოლია. მაგრამ მათი გაიგივება არ შეიძლება, რადგან სიმძიმის ძალა სხეულზეა მოდებული, ხოლო წონა საკიდელზე. თუ ლიფტის აჩქარება მიმართულია ვერტიკალურად ზევით, (21.2)-ის დაგვემძიმებით მივიღებთ

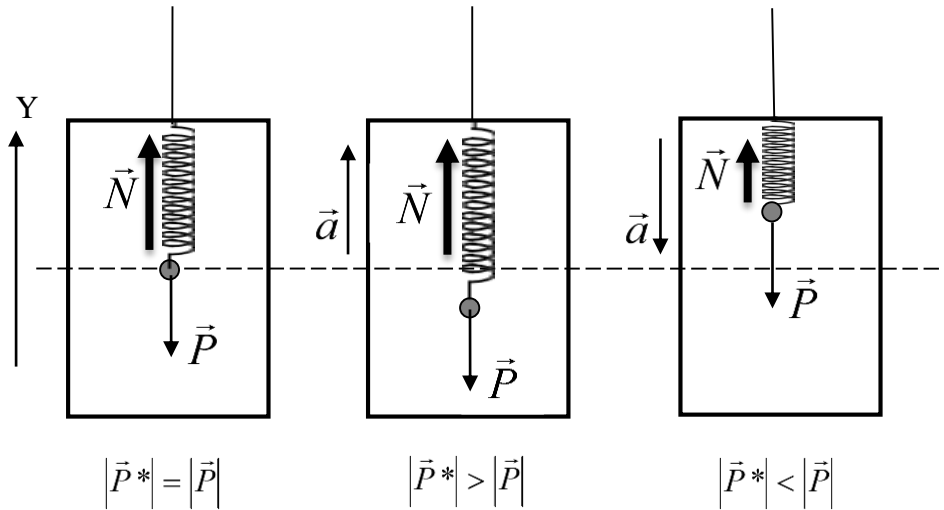
$$\vec{P}^* = \vec{P} + m\vec{a} > \vec{P}, \quad (21.3)$$

სხეულის წონა მეტია სიმძიმის ძალაზე. ამ მოვლენას **გადატვირთვა** ეწოდება.

თუ აჩქარება მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით და ამავედროულად სიდიდით ნაკლებია თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაზე ( $a < g$ ), (21.2)-დან მივიღებთ

$$\vec{P}^* = \vec{P} - m\vec{a} < \vec{P}. \quad (21.4)$$

სხეულის წონა ნაკლებია სიმძიმის ძალაზე. მიაქციეთ ყურადღება, რომ არსებითია არა სხეულის მოძრაობის მიმართულება, არამედ აჩქარების მიმართულება. (21.4) შედეგს



**ნახაზი 21.1**

მივიღებდით მაშინაც, თუ ლიფტი იმოძრაებდა ზემოთ შენელებულად (ანუ აჩქარება მიმართული იქნებოდა ქვემოთ). როცა  $a = g$  (ე.ი. ლიფტის ბაგირი გაწყდა)

$$P^* = P - ma = 0. \tag{21.5}$$

სხეულის წონა ნულს უტოლდება – ამ მოვლენას *უწონობა* ეწოდება.

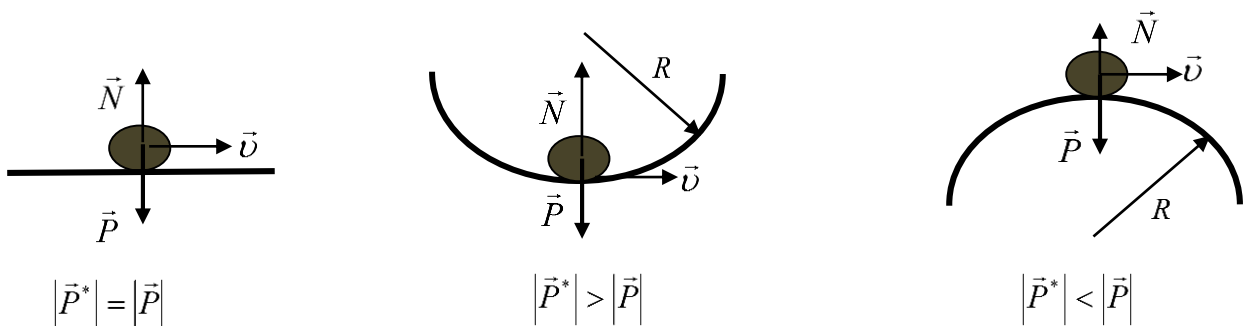
განვიხილოთ  $R$  სიმრუდის რადიუსის ხიდზე  $v$  სიჩქარით მოძრავი  $m$  მასის სხეულის წონა, როდესაც ის იმყოფება ხიდის უმაღლეს (უდაბლეს) წერტილში (ნახ. 21.2). შედეგი ანალოგიურია ნახ. 21.1-ზე მოცემული შედეგებისა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ცენტრისკენული აჩქარება  $a = v^2/R$ . ჩაზნექილი ხიდის შემთხვევაში, მსგავსად (21.3)-სა, იქნება:

$$P^* = m \left( g + \frac{v^2}{R} \right) > P. \tag{21.3}'$$

ხოლო ამოზნექილი ხიდის შემთხვევაში

$$P^* = m \left( g - \frac{v^2}{R} \right) < P. \tag{21.4}'$$

ტექნიკაში გამოიყენება ტერმინი **გადატვირთვა**, იგი უგანზომილებო სიდიდეა და



**ნახაზი 21.2**

წარმოადგენს სხეულზე არაგრავიტაციული ძალებისმოქმედებით გამოწვეული აჩქარების ფარდობას დედამიწის ზედაპირზე გ თავისუფალი ვარდნის აჩქარების სიდიდესთან. ხშირად

გადატვირთვას გამოსახვენგ -ს ერთეულებით. მაგ. გადატვირთვა 1g ნიშნავს რომ სხეულის წონა მისი სიმძიმის ძალის ტოლია- სხეული ან უძრავია ან მოძრაობს პორიზონტალურად თანაბრად და წრფივად, 0g -კი მიუთითებს სხეულის უწონად მდგომარეობას. როგორც გადატვირთვის, ასევე უწონობის მდგომარეობა ცოცხალ ორგანიზმებში იწვევს მთელ რიგ უარყოფით მოვლენებს. როგორც წესი, ასეთ მდგომარეობებში ხშირად იმყოფებიან მფრინავები და კოსმონავტები.

**ამოცანა 21.1.** გამოთვალეთ მანქანის სიჩქარე 40 მ სიმაღლის ამოხვეტილ ხიდზე მოძრაობისას, თუ იგი ხიდის უმაღლეს წერტილში უწონად მდგომარეობაში აღმოჩნდა.

**ამოხსნა:**

(21.4)-ის თანახმად:

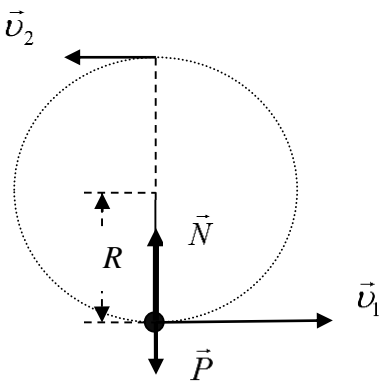
$$P^* = m \left( g - \frac{v^2}{R} \right) = 0, \text{ ანუ } v = \sqrt{gR} = \sqrt{10 \cdot 40} = 20 \text{ (მ/წმ)}.$$

(მიაქციეთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ შედეგი სხეულის მასაზე არაა დამოკიდებული)

**ამოცანა 21.2.** გამოთვალეთ გადატვირთვა, რომელსაც დებულობს სპორტული თვითმფრინავის პილოტი ვერტიკალურ სიბრტყეში წრეწირის შემოსახვისას, თუ იგი ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში უწონად მდგომარეობაში აღმოჩნდა (ჰიუნგენსის ამოცანათა ტიპი).

**ამოხსნა:**

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში წონა ნულის ტოლია ე.ი. (21.5)-ის თანახმად სიმძიმის ძალა ცენტრისკენული ძალის ტოლია:



$$mg = \frac{mv_2^2}{R} \left( \frac{v_2^2}{R} = a_{2\text{ცენტ}} \right). \quad (1)$$

რადგან ჰაერის მოქმედება გამორიცხებულია, ამიტომ ტრაექტორიის უმაღლეს და უდაბლეს წერტილს შორის მანძილი (7.6.ბ)-ს თანახმად იქნება:

$$2R = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \rightarrow v_1^2 = v_2^2 + 4gR.$$

პილოტის წონა ტრაექტორიის უდაბლეს წერტილში (21.3)-დან გამომდინარე გამოითვლება ფორმულით:

$$P^* = P + ma_{1\text{ცენტ}}. \quad (2)$$

სადაც:

$$a_{1\text{ცენტ}} = \frac{v_1^2}{R},$$

რომლის გათვალისწინებითაც ვღებულობთ:

$$P^* = P + ma_{1\text{ცენტ}} = mg + \frac{mv_2^2}{R} + 4mg$$

შევიტანოთ (1), მივიღებთ:

$$P^* = 6mg$$

ე.ი. პილოტის წონა 6-ჯერ აღემატება სიმძიმის ძალას, ანუ გადატვირთვა 6g-ს ტოლია.

**ამოცანა 213.** თვითმფრინავი ვერტიკალურ სიბრტყეში აღწერს 500 მ რადიუსის მარჯვენა 180 კმ/სთ სიჩქარით. გამოთვალეთ 80 კგ მასის მფრინავის წონა ტრაექტორიის უდაბლეს წერტილში. რამდენით შეიკუმშება სავარძლის თითოეული ზამბარა, თუ მათი რაოდენობაა 12, ხოლო სიხისტის კოეფიციენტი 500 ნ/მ?

**ამოხსნა:**

ტრაექტორიის უდაბლეს წერტილში, (213)-ის თანახმად, მფრინავის წონა იქნება:

$$P^* = P + ma_{\text{ცენტ}} = mg + \frac{mv^2}{R} = 80 \cdot 10 + \frac{80 \cdot 50^2}{500} = 1200 \text{ (6)}$$

ამ დეფორმაციის შედეგად თითოეულ ზამბარაში აღძრული დრეკადობის ძალა იქნება:

$$|F_{\text{დრ}}| = \frac{P^*}{n} = \frac{1200}{12} = 100 \text{ ნ} \quad |F_{\text{დრ}}| = kx, \text{ საიდანაც } x = \frac{|F_{\text{დრ}}|}{k} = \frac{100}{500} = 0,2 \text{ მ}$$

**ამოცანა 214.** ავტომობილის სავარძლის ზამბარათა რაოდენობა 8-ის ტოლია. როგორ შეიცვლება მათი შეკუმშვა პორიზონტალური გზიდან 20 მ სიმაღლის რადიუსის ამოხვეკილ ხიდზე გადასვლის შემთხვევაში, თუ ავტომობილის სიჩქარე 10 მ/წმ-ის ტოლია, ხოლო მძღოლის მასაა 80 კგ. ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი 2000 ნ/მ.

**ამოხსნა:**

გზის პორიზონტალურ უბანზე მძღოლის წონა რიცხობრივად სიმძიმის ძალის ტოლია  $P^* = mg$ . თითოეულ ზამბარაში აღძრული დრეკადობის ძალა იქნება:

$$|F_{1\text{დრ}}| = \frac{P^*}{8} = \frac{mg}{8} = \frac{80 \cdot 10}{8} = 100 \text{ (6)}. \text{ შესაბამისად ზამბარის შეკუმშვის სიდიდე იქნება:}$$

$$x_1 = \frac{|F_{1\text{დრ}}|}{k} = \frac{100}{2000} = 0,05 \text{ (6)}.$$

ხიდზე ავტომობილის გადასვლისას მძღოლის წონა, (214)-ის თანახმად, შემცირდება:

$$P^* = mg - \frac{mv^2}{R},$$

და თითოეულ ზამბარაში აღძრული დრეკადობის ძალის სიდიდე:

$$|F_{2\text{დრ}}| = \frac{mg - \frac{mv^2}{R}}{8} = \frac{80 \cdot 10 - \frac{80 \cdot 100}{20}}{8} = 50 \text{ (6)},$$

ხოლო ზამბარას შეკუმშვის სიდიდე  $x_2 = \frac{|F_{2\text{დრ}}|}{k} = \frac{50}{2000} = 0,025 \text{ (მ)}$ . პორიზონტალურ გზაზე

მოძრაობასთან შედარებით ამოხვეკილ ხიდზე მოძრაობისას სავარძლის ზამბარის შეკუმშვის ცვლილება იქნება:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0,025 - 0,05 = -0,025 \text{ (მ)}.$$

ანუ ზამბარის დეფორმირება მცირდება.

**§22. თანამგზავრები და კოსმოსური სიჩქარეები**

➤ თანამგზავრი ეწოდება ნებისმიერ სხეულს, რომელსაც შეუძლია შეასრულოს წრიული ორბიტალური მოძრაობა დედამიწის გარშემო ისე, რომ ორბიტალური სიბრტყე გადიოდეს დედამიწის ცენტრზე.

ბუნებრივია, ისმის კითხვა, რა აკავებს თანამგზავრს ორბიტაზე, მიზიდულობის ძალის გამო რატომ არ ვარდება დედამიწის ზედაპირზე? თანამგზავრს მინიჭებული აქვს ისეთი მხები სიჩქარე, რომ მისი ტრანსვერსული და დედამიწის ზედაპირის სიმრუდე ერთნაირია, რის გამოც თანამგზავრი “ვარდება” ზუსტად იმ მანძილით, რა მანძილითაც დედამიწის ზედაპირი “შორდება” მას. ასე რომ მანძილი თანამგზავრსა და დედამიწის ცენტრს შორის რჩება უცვლელი, ანუ ორბიტა წრიულია. ორბიტაზე მოძრაობას განაპირობებს გრავიტაციის ძალა, რომელიც ასრულებს ცენტრისკენული ძალის როლს (ნახ. 22.1):

$$G \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (r = R + h),$$

სადაც

$$v = \sqrt{G \frac{M}{R+h}}. \quad (22.1)$$

თუ თანამგზავრი იმყოფება დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში ( $h \ll R$ ), (22.1)-დან მივიღებთ:

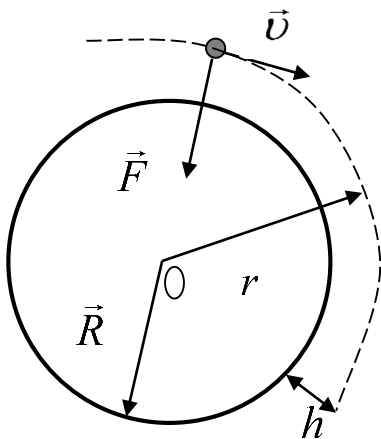
$$v_I = \sqrt{G \frac{M}{R}}, \quad (22.2)$$

რომელშიც (20.2)-ის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$v_I = \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \cdot 6,38 \cdot 10^6} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ (მ/წმ)},$$

ამ სიჩქარეს **პირველი კოსმოსური სიჩქარე** ეწოდება. 7,9კმ/წმ-ში მხები სიჩქარის მინიჭებისას ნებისმიერი სხეული გადაიქცევა დედამიწის ხელოვნურ თანამგზავრად და შეასრულებს ორბიტალურ მოძრაობას მისი ზედაპირის მახლობლობაში. პირველი კოსმოსური სიჩქარის შესაბამისი ბრუნვის პერიოდია:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v_I} R = 84 \text{ წთ.}$$



ნახაზი 22.1

დედამიწის ბრუნვის პერიოდი რომ იყოს 84 წთ, მაშინ ეკვატორზე ინერციის ძალა გაუტოლდებოდა მიზიდულობის ძალას და იქ მყოფი სხეულები გადაიქცეოდა ხელოვნურ თანამგზავრებად<sup>19</sup>. ხელოვნური თანამგზავრები 100 – 200 კმ სიმაღლეზე მოძრაობს, ისინი გადამწყვეტ როლს ასრულებს სატელეფონო კავშირებსა და სატელევიზიო გადაცემებში, ასევე დედამიწის რელიეფის შესწავლაში.

თუ თანამგზავრი მოძრაობს დედამიწის ზედაპირიდან მნიშვნელოვან სიმაღლეზე, მაშინ მისი სიჩქარის დასადგენად ვისარგებლებთ (22.1) ფორმულით, რომელიც ასე შეიძლება გარდავქმნათ:

$$v = \sqrt{G \frac{M}{R} \cdot \frac{R}{R+h}} = v_I \sqrt{\frac{R}{R+h}}. \quad (22.3)$$

<sup>19</sup>მსგავსი გათვლები თითქმის 350 წლის უკან იქნა შესრულებული ნიუტონის მიერ.

(22.3)-ის თანახმად, რაც უფრო მაღალ ორბიტაზეა თანამგზავრი, მით ნაკლებია მისი სიჩქარე. ცხადია, თანამგზავრში მყოფი ადამიანები იქნებიან უწონად მდგომარეობაში, რადგან მათ გააჩნიათ  $a = g$  აჩქარება, მიმართული დედამიწის ცენტრისკენ (§21).

მთვარე დედამიწის ბუნებრივი თანამგზავრია, რომელიც დედამიწის ცენტრიდან დაშორებულია დაახლოებით 384467 კმ მანძილით. მაშინ მისი როგორც თანამგზავრის ორბიტალური სიჩქარე (22.3)-ის თანახმად იქნება:

$$v = 7,9 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{6380}{384467}} \approx 1,02 \cdot 10^3 \text{ (მ/წმ)} = 1,02 \text{ (კმ/წმ)}.$$

თუ რაიმე სხეულს მივანიჭებთ ისეთ კინეტიკურ ენერგიას, რომ მან შეძლოს შეასრულოს მუშაობა დედამიწის გრავიტაციის ძალის წინააღმდეგ და გავიდეს დედამიწის გრავიტაციის ველიდან<sup>20</sup>, მაშინ იგი თანდათან დაშორდება დედამიწას და აღარასდროს დაუბრუნდება მას. ამ ენერგიის შესაბამის მინიმალურ საწყის სიჩქარეს *მეორე კოსმოსური სიჩქარე* ეწოდება:

$$v_{II} = \sqrt{2}v_I = 11,2 \cdot 10^3 \text{ (მ/წმ)} = 11,2 \text{ (კმ/წმ)}.$$

მას “გასხლტომის” სიჩქარესაც უწოდებენ. მაგალითად, როდესაც ატმოსფეროს მოლეკულის ქაოსური მოძრაობის სიჩქარე უტოლდება  $v_{II}$  - ს, იგი ტოვებს დედამიწას (ატმოსფეროს დისიპაცია).  $v_{II}$  სიჩქარით მოძრაობისას ტრაექტორიას პარაბოლის ფორმა აქვს (მეორე კოსმოსური სიჩქარის გამოყვანა იხილეთ ამოცანა 32.2-ში).

თუ სხეულის სიჩქარე აკმაყოფილებს პირობას  $v_I < v < v_{II}$ , მაშინ მისი ორბიტა ელიფსურია, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში ყოველთვის იქნება დედამიწა.

➤ *მესამე კოსმოსური სიჩქარე ეწოდება იმ მინიმალურ სიჩქარეს, რომლის მქონე სხეულიც ტოვებს მზის სისტემას.*

მისი მნიშვნელობა  $v_I, v_{II}$  სიჩქარეებისგან განსხვავებით დამოკიდებულია კოსმოსური ხომალდის გატყორცნის (გაშვების) მიმართულებაზე. თუ გაშვება ხდება დედამიწის ორბიტალური მოძრაობის მიმართულებით ( $v_{ორბ} = 30 \cdot 10^3$  მ/წმ), მაშინ მესამე კოსმოსური სიჩქარე მინიმალურია  $v_{III} = 17 \cdot 10^3$  მ/წმ. ამ დროს ხომალდის სიჩქარე მზის მიმართ იქნება  $v_{ორბ} + v_{III} = 47 \cdot 10^3$  მ/წმ. თუ გაშვება ხდება დედამიწის ორბიტალური მოძრაობის საპირისპიროდ, მაშინ:

$$v'_{III} = 47 \cdot 10^3 + 30 \cdot 10^3 = 77 \cdot 10^3 \text{ (მ/წმ)}.$$

მესამე კოსმოსური სიჩქარის შემთხვევაში მოძრაობის ტრაექტორიას მზის მიმართ ექნება პარაბოლის ფორმა.

ცხადია სამივე კოსმოსური სიჩქარის მნიშვნელობა დამოკიდებულია დედამიწის მასასა და რადიუსზე, ამიტომ სხვადასხვა პლანეტების კოსმოსური სიჩქარეები განსხვავებული იქნება.

**ამოცანა 22.1.** კოსმოსური ხომალდი “ვიკინგი” ბრუნავს წრიულ ორბიტაზე მარსის ირგვლივ ზედაპირიდან 100 კმ სიმაღლეზე. გამოთვალეთ ბრუნვის პერიოდი, თუ მარსის რადიუსია  $R = 3,43 \cdot 10^6$  მ, ხოლო სიმკვრივე  $\rho = 3,95 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>.

<sup>20</sup>იგულისხმება ისეთი დაშორება, როდესაც დედამიწის გრავიტაცია აღარ თამაშობს არსებით როლს.

**ამოხსნა:**

გამოთვალეთ მარსის მასა:

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = 1,7 \cdot 10^{24} \text{ (კგ)} .$$

(22.1)-ის თანახმად

$$v = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1,7 \cdot 10^{24}}{3,43 \cdot 10^6 + 10^5}} = 5,67 \cdot 10^3 \text{ (მ/წმ)} ,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v} (R+r) = 65,7 \text{ (წთ)} .$$

**ამოცანა 22.2.** პლანეტის მასა შეადგენს დედამიწის მასის 20%, ხოლო რადიუსი 80%. გამოთვალეთ პლანეტისთვის პირველი კოსმოსური სიჩქარე.

**ამოხსნა:**

(22.2)-ის თანახმად:

$$(22.2)\text{-ის თანახმად } v_{I_{დედ}} = \sqrt{G \frac{M_{დედ}}{R_{დედ}}} , \text{ და } v_{I_{პლ}} = \sqrt{G \frac{M_{პლ}}{R_{პლ}}} = \sqrt{G \frac{0,4M_{დედ}}{0,8R_{დედ}}}$$

საიდანაც  $\frac{v_{პლ}}{v_{დედ}} = \frac{1}{2} , v_{I_{პლ}} = \frac{v_{დედ}}{2} = \frac{7,9 \cdot 10^3}{2} \approx 4 \cdot 10^3 \text{ მ/წმ} .$

### §23. დეფორმაციები და დრეკადობის ძალები

#### მყარ სხეულში

➤ **ბარეზე ძალების ან ტემპერატურული ზემოქმედებით მყარი სხეულის ფორმისა და მოცულობის ცვლილებას დეფორმაცია ეწოდება.**

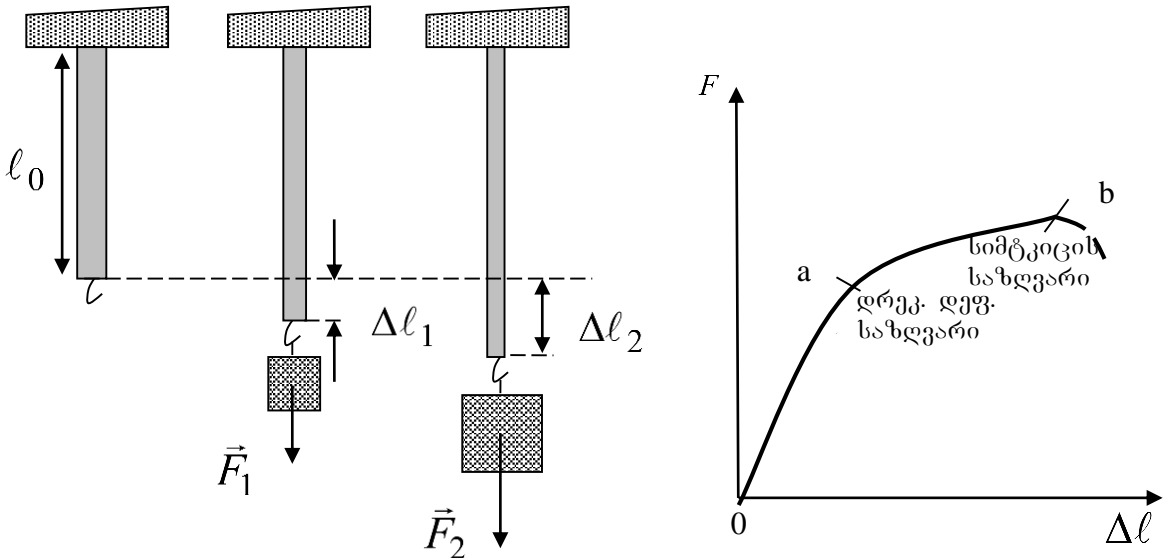
მყარისხეულის დეფორმაციისას მისი ნაწილაკები წანაცვლდება წონასწორული მდებარეობის მიმართ. ამ პროცესს წინააღმდეგობას უწევს ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედების ძალები, რომლებიც ელექტრომაგნიტური ბუნებისაა და მიზიდვა-განზიდვის თვისებები გააჩნია. ამის შედეგად სხეულში აღიძვრება ძალა, რომელიც დეფორმაციის საპირისპიროდაა მიმართული და ზემოქმედების შეწყვეტის შემდეგ მთლიანად (**დრეკადიდეფორმაცია**) ან ნაწილობრივ (**პლასტიკურიდეფორმაცია**) დააბრუნებს სხეულს პირვანდელ მდგომარეობაში. ამ ძალას **დრეკადობის** ძალა ეწოდება, ხოლო სხეულის ამ თვისებას – **დრეკადობა**. დრეკადი დეფორმაციისას სხეულში შექცევადი პროცესები მიმდინარეობს, პლასტიკური დეფორმაციისას პროცესები შეუქცევადია, რის გამოც დეფორმაციის შემდგომმა გაზრდამ შეიძლება სხეულის დაშლაც გამოიწვიოს.

განვიხილოთ გაჭიმვითი (კუმშვითი) დეფორმაციები. ნახ. 23.1-ზე მოცემულია ვერტიკალურად დაკიდებული  $l_0$  სიგრძის ღერო, რომელზეც მოქმედებს მზარდი  $F$  ძალა (ამ შემთხვევაში მეორე სხეულის წონა). ცდა გვიჩვენებს, რომ სანამ სიგრძის ნაზრდი - აბსოლუტური წაგრძელება  $\Delta l = l - l_0$  გაცილებით ნაკლებია ღეროს საწყის სიგრძეზე, გარე  $F$  ძალასა და  $\Delta l$  -ს შორის დამოკიდებულებას წრფივი ხასიათი აქვს (ნახ. 23.2 0a უბანი). ამასთანავე  $F$  ძალის მოხსნისას ღერო მთლიანად უბრუნდება საწყის მდგომარეობას. ეი დრეკადი დეფორმაციის საზღვრებში სხეულში აღძვრული დრეკადობის ძალა დეფორმაციის

გამომწვევი ძალის ტოლია. ამიტომ კავშირი დრეკადობის ძალასა და სხეულის აბსოლუტურ წაგრძელებას შორის ასე ჩაიწერება

$$\vec{F}_{dr} = -k\vec{\Delta l}, \quad (23.1)$$

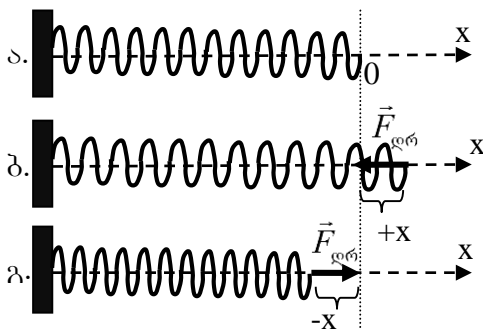
(23.1) ჰუკის კანონის სახელწოდებითაა ცნობილი



ნახაზი 23.1

ნახაზი 23.2

➤ დრეკადი დეფორმაციის საზღვრებში მყარ სხეულში აღძრული დრეკადობის ძალა სხეულის სიგრძის ცვლილებების პირდაპირ პროპორციულია და მის საპირისპიროდაა მიმართული.



ნახაზი 23.3

სადაც  $k$  პროპორციულობის კოეფიციენტს მასალის სიხისტესაც უწოდებენ. იგი დამოკიდებულია როგორც სხეულის თვისებებზე, ასევე მის გეომეტრიულ ზომებზე (იხ. ამოცანა 23.1).

დეფორმაციის შემდგომი ზრდისას  $F$  და  $\Delta l$  - ს შორის წრფივი დამოკიდებულება ირღვევა (ab უბანი - პლასტიკური დეფორმაციის არე). დეფორმაციის შემდგომი გაგრძელებით სხეული იშლება.

დრეკადობის ძალის გამოვლენის თვალსაჩინო მაგალითია ზამბარის დეფორმირება (ნახ. 23.3). ერთი ბოლოთი დამაგრებულ ზამბარის თავისუფალ ბოლოს შეთავსებული აქვს  $Ox$  ღერძის სათავე. ზამბარის დეფორმაციისას (ბ, გ) აღიძვრება მისი წანაცვლების საპირისპიროდ დრეკადობის ძალა. რომელიც ჰუკის კანონის თანახმად ასე ჩაიწერება:

$$F_{dr} = -kx. \quad (23.2)$$

$F_{dr}$  -შიიგულისხმება  $\vec{F}_{dr}$  -ს პროექცია  $Ox$  ღერძზე. ნიშანი „-“ აჩვენებს, რომ  $\vec{F}_{dr}$  -ის პროექციას და  $x$  წანაცვლებას ყოველთვის საპირისპირონიშანი აქვთ.

გაჭიმვითი (კუმშვითი) დეფორმაციის შესაფასებლად გამოიყენება **ნორმალური მექანიკური ძაბვის** ცნება – იგი ტოლია ზედაპირის მართობულად მოქმედი ძალის ფარდობისა სხეულის განივკვეთის ფართობთან (ამ სიდიდეს, ხშირად, წნევას უწოდებენ)

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S}. \quad (23.3)$$

მისი ერთეულია **პასკალი (პა)** = ნ/მ<sup>2</sup>. გაჭიმვითი დეფორმაციის ხარისხს ახასიათებენ ფარდობითი წაგრძელების სიდიდით

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}. \quad (23.4)$$

ცდებით დადგენილია, რომ **დრეკადი დეფორმაციის საზღვრებში სხეულის ფარდობითი წაგრძელება ნორმალური ძაბვის პროპორციულია**

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma_n. \quad (23.5)$$

$E$  კოეფიციენტს **გრძივი დრეკადობის მოდულს**, ან **იუნგის მოდულსაც** უწოდებენ. იგი  $k$ -სგან განსხვავებით მხოლოდ ნივთიერების თვისებებზეა დამოკიდებული, რაც გამოთვლების თვალსაზრისით მას მეტ უპირატესობას ანიჭებს. (23.5)-ის თანახმად, თუ

$$\sigma_n = E, \quad \varepsilon = 1, \quad \Delta\ell = \ell_0.$$

ე.ი.,

➤ **იუნგის მოდული იმ ნორმალური ძაბვის ტოლია, რომლის დროსაც დეფორმირებული სხეულის სიგრძე მის საწყის სიგრძეზე ორჯერ მეტი ხდება.**

ასეთ დატვირთვას სხეულები ვერ უძლებს და გაცილებით ადრე იშლება.

გაჭიმვითი დეფორმაციისას იცვლება სხეულის განივი კვეთაც, რაც შეიძლება დავახასიათოთ **კვეთის დიამეტრის ფარდობითი ცვლილებით**

$$\frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}, \Delta d < 0.$$

ტექნიკაში მასალის დეფორმაციისადმი მდგრადობას ახასიათებენ **პუასონის კოეფიციენტით**

$$m = -\frac{\Delta\ell}{\ell_0} : \frac{\Delta d}{d_0} > 0.$$

ამ სიდიდეს განზომილება არ ააქვს, იგი მხოლოდ ნივთიერების თვისებებზეა დამოკიდებული.

ზემოთ მოყვანილი ფორმულები შეიძლება გამოვიყენოთ კუმშვითი დეფორმაციების შემთხვევაშიც ( $\Delta\ell < 0, \Delta d > 0$ ).  $E$  - ს მნიშვნელობა მოცემული მასალისთვის ორივე ტიპის დეფორმაციისას ერთიდაიგივეა.

ვანვინოთ, რომ დრეკადობის ძალის პროპორციულობის კოეფიციენტი  $k$  დამოკიდებულია მასალის თვისებებსა და გეომეტრიულ ზომებზე. რისთვისაც (23.4) გავუტოლოთ (23.5)-ს:

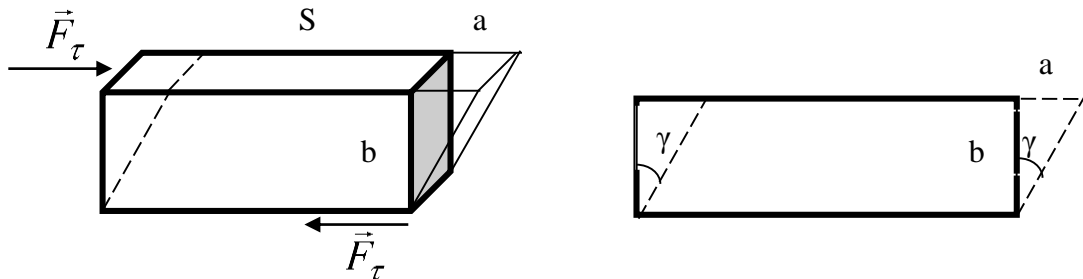
$$\frac{\Delta\ell}{\ell_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \left( \sigma_n = \frac{F}{S} \right), \quad F = \frac{ES}{\ell_0} \Delta\ell.$$

(23.1)-თან შედარებით გვაქვს

$$k = \frac{ES}{\ell_0}. \quad (23.6)$$

დეფორმაციის ერთ-ერთი გავრცელებული სახეა *ძვრის დეფორმაცია*. მას ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როდესაც სხეული მოპირდაპირე ზედაპირებზე განიცდის სიდიდით ტოლი და საპირისპიროდ მიმართული ორი მხები ძალის მოქმედებას (ნახ. 23.3), (მაგალითად, როდესაც ვცდილობთ იატაკზე ყუთის გასრიალებას, მაშინ იატაკის მხრიდან ყუთის შემხებ ზედაპირზე მოქმედებს ჩვენი მოქმედების ტოლი და საპირისპიროდ მიმართული ძალა).

ძვრის დეფორმაციის შესაფასებლად გამოიყენება *მხები მექანიკური ძაბვის* ცნება



ნახაზი 23.3

– იგი ტოლია ზედაპირზე მოქმედი მხები ძალის ფარდობისა ამ ზედაპირის ფართობთან

$$\sigma_{\tau} = \frac{F_{\tau}}{S}. \quad (23.7)$$

ძვრის დეფორმაციის ხარისხს ახასიათებენ ფარდობითი *ძვრით* – *ძვრის* კუთხის ტანგენსით

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{b}. \quad (23.8)$$

დრეკადი დეფორმაციის საზღვრებში ძვრის კუთხე მცირეა, ამიტომ დასაშვებია  $\operatorname{tg} \gamma \sim \gamma$ . ცდების საფუძველზე დადგინდა, რომ *ფარდობითი ძვრა დრეკადი დეფორმაციის საზღვრებში მხები ძაბვის პროპორციულია:*

$$\gamma = \frac{1}{G} \sigma_{\tau}, \quad (23.9)$$

$G$  კოეფიციენტს *ძვრის მოდული* ეწოდება, იზომება პასკალებში და მოცემული ნივთიერების იუნგის მოდულის დაახლოებით 1/2, 1/3 ნაწილს შეადგენს. მივაქციოთ ყურადღება, რომ

*გაჭიმვითი (კუმშვითი) დეფორმაციების შემთხვევაში სხეულებში იცვლება ზედაპირის პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილი, ძვრის დეფორმაციების შემთხვევაში მანძილები უცვლელი რჩება, სიბრტყეები მხოლოდ წაინაცვლებს ერთმანეთის მიმართ.*

სხეული შეიძლება განიცდიდეს ყველა მიმართულებით ზემოქმედებას. მაგალითად, სითხეში ან აირში მოთავსებული სხეული ყველა მხრიდან განიცდის გარკვეული ძალის მოქმედებას, რაც იწვევს მისი მოცულობის შემცირებას – შეკუმშვას. ასეთ შემთხვევაში ნორმალური მექანიკური ძაბვის ცნების ნაცვლად იყენებენ მის ექვივალენტურ სიდიდეს – წნევას.

*წნევა ტოლია სხეულის ფართით ერთეულზე მართობულად მოქმედი ძალის სიდიდის:*

$$p = \frac{F_n}{S}. \quad (23.10)$$

ცდებით დადგინდა, რომ *სხეულის საწყისი მოცულობის ფარდობითი ცვლილება მასზე მოქმედი წნევის ცვლილების პროპორციულია*. მათემატიკურად იგი (23.5)-ის ანალოგიურია:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{1}{B} \Delta p. \quad (23.11)$$

*B* კოეფიციენტს მოცულობითი დრეკადობის (ყოველმხრივი შეკუმშვის) მოდული ეწოდება. მისი ერთეულია პასკალი. ნიშანი „-“ მიუთითებს, რომ სხეულზე მოქმედი წნევის გაზრდით სხეულის მოცულობა მცირდება. ვინაიდან სითხეებსა და აირებს საკუთარი ფორმა არ გააჩნია, მათთვის აზრს კარგავს გრძივი დრეკადობისა და ძვრის მოდულის ცნებები. მათ დრეკად თვისებებს ახასიათებენ მხოლოდ მოცულობითი დრეკადობის მოდულით. დრეკადი დეფორმაციის სახეობებში მექანიკური დაბვა ემორჩილება სუპერპოზიციის პრინციპს:

➤ **სხეულზე მოქმედი მექანიკური დაბვა შემადგენელ ნაწილებზე მოქმედი მექანიკური დაბვათა ჯამის ტოლია.**

ცხრილ 23.1-ში მოცემულია ზოგიერთი ნივთიერების *E, G* და *B*-ს მნიშვნელობები.

**ცხრილი 23.1.**

ნივთიერება	$E \times 10^9$ პა	$G \times 10^9$ პა	$B \times 10^9$ პა
ფოლადი	200	80	140
ალუმინი	70	25	70
ბეტონი	20	–	–
გრანიტი	45	–	45
ნეილონი	5	–	–
სახსრის ძვალი	15	80	–
წყალი	–	–	2
ვერცხლისწყალი	–	–	2,5

მექანიკური დაბვის ზრდისას სხეულის დრეკადი დეფორმაცია გადადის პლასტიკურში და დაბვის შემდგომი ზრდისას სხეული ან ტყდება, ან იშლება. სხვადასხვა ნივთიერებისთვის, ერთი და იგივე ტიპის დეფორმაციის შემთხვევაშიც კი, რღვევის პროცესი დაბვის განსხვავებულ მნიშვნელობაზე იწყება.

➤ **იმ მაქსიმალურ მექანიკურ დაბვას, რომელსაც სხეული უძლებს, სიმტკიცის ზღვარი ეწოდება.**

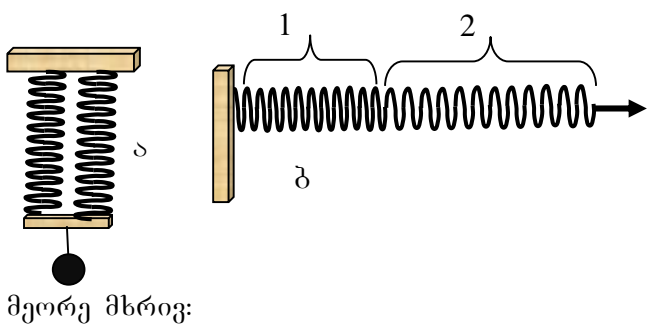
სიმტკიცის ზღვრის დაბვათა მოცემული მნიშვნელობები საორიენტაციოა, იგი შეიძლება გაცილებით ნაკლები აღმოჩნდეს, მაგ. ისეთი კონსტრუქციების შემთხვევებში, რომლებსაც უხდება დიდი დატვირთვის პირობებში ხანგრძლივი ყოფნა და მუშაობა. ამიტომ ასეთი კონსტრუქციების დამზადებისას საჭიროა სამჯერადი, ზოგჯერ მეტი სიმტკიცის მარაგის გამოყენება.

ცხრილ 23.2-ში მოცემულია ზოგიერთი ნივთიერების სიმტკიცის ზღვრის მნიშვნელობები სხვადასხვა ტიპის დეფორმაციის შემთხვევაში.

ნივთიერება	$\sigma_n \times 10^6$ პა		$\sigma_\tau \times 10^6$ პა
	გაჭიმვა	კუმშვა	ძერა
ფოლადი	500	500	250
ალუმინი	200	200	200
ბეტონი	2	20	2
გრანიტი	–	170	–
ნეილონი	500	–	–
სახსრის ძვალი	130	170	–

**ამოცანა 23.1.** ორი ერთნაირი სიგრძის ზამბარა, რომელთა სიხისტის კოეფიციენტებია  $k_1$  და  $k_2$  შეაერთეს ა) პარალელურად, ბ) მიმდევრობით. გამოთვალეთ მიღებული სისტემის სიხისტის კოეფიციენტი.

**ამოხსნა:**



ა) სისტემაზე მოდებული ძალა:

$$F = F_1 + F_2,$$

სადაც  $F_1 = -k_1x$ ,  $F_2 = -k_2x$ . ე.ი.

$$kx = k_1x + k_2x, \text{ ანუ } k = k_1 + k_2.$$

ბ) ამ შემთხვევაში:

$$F = F_1 = F_2. \tag{1}$$

$$F = -k(x_1 + x_2). \tag{2}$$

$$F_1 = k_1x_1, \tag{3}$$

$$F_2 = k_2x_2, \tag{4}$$

(3) და (4)-ის გატოლებით ვღებულობთ:

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1} x_2. \tag{5}$$

(1)-ში (2)-ის, (4)-ის და (5)-ის შეტანით მივიღებთ:

$$k \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) x_2 = k_2 x_2 \rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

**ამოცანა 23.2.** 200მ რადიუსის ვერტიკალური მარყუჟის ქვედა წერტილში თვითმფრინავის სიჩქარეა 40 მ/წმ. რა სიდიდით შეიკუმშება 80 კგ მასის მფრინავის სავარძლის ზამბარები, თუ მათი რაოდენობა 10-ია და თითოეული ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტია  $3,6 \cdot 10^3$  ნ/მ?

**ამოხსნა:**

(21.3)-ის თანახმად მარყუჟის ქვედა წერტილში მფრინავის წონა იქნება:

$$P^* = P + ma = m(g + a) = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right). \quad (1)$$

ეს წონა გამოიწვევს ზამბარების დეფორმაციას და ზამბარების შეკუმშვა გაგრძელდება მანამ აღძრული დრეკადობის ძალა მას არ დააკომპენსირებს. ჰუკის კანონიდან გამომდინარე:

$$|F_{დრ}| = 10 \cdot k \Delta l. \quad (2)$$

(1) და (2)-ის გატოლებით ვღებულობთ:

$$\Delta l = \frac{m}{10k} \left(g + \frac{v^2}{R}\right) = \frac{80}{10 \cdot 3,6 \cdot 10^3} \left(10 + \frac{40^2}{200}\right) = 0,04 \text{ (მ)}.$$

**ამოცანა 23.3.** რა განიკვეთი უნდა ქონდეს პარაშუტის ნეილონის ბაგირს, რომ მისი საშუალებით თანაბრად დაეუშვათ 2,6 ტ ტვირთი, თუ სიმტკიცის მარაგია 10.

**ამოხსნა:**

(23.3)-ის თანახმად ბაგირის განიკვეთი იქნება:

$$S = \frac{F_n}{\sigma_n}, \quad (1)$$

სადაც ამოცანის პირობის თანახმად თოკის დაჭიმულობის ძალა

$$F_n = mg = 2,6 \cdot 10^4 \text{ (ნ)}. \quad (2)$$

უსაფრთხოებიდან გამომდინარე ნორმალური (დასაშვები) ძაბვა, 10-ჯერ ნაკლები უნდა ავიღოთ ზღვრულ ძაბვასთან შედარებით:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{ზღ}}{10} = \frac{500 \cdot 10^6}{10} = 5 \cdot 10^7 \text{ პა},$$

(3), (2)-სა და (3)-ის (1)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$S = \frac{F_n}{\sigma_n} = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ (მ}^2\text{)} = 5,2 \text{ (სმ}^2\text{)}.$$

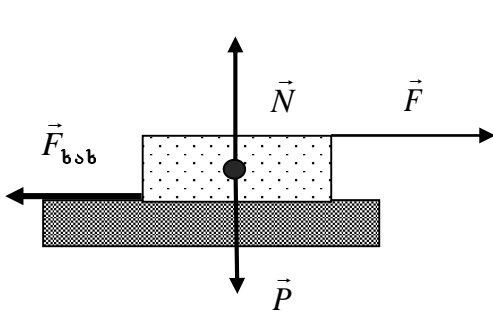
## §24. ბარე ხახუნი.

### მშრალი ხახუნის ძალები

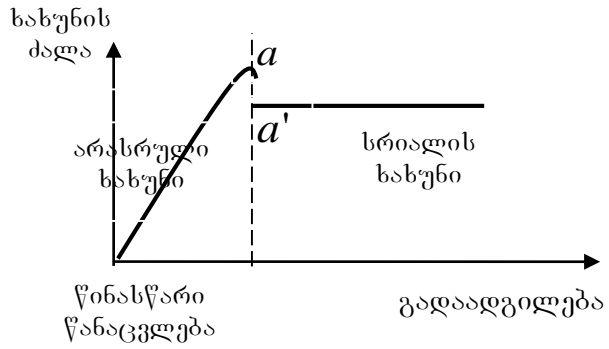
➤ **ბარე ხახუნი ეწოდება იმ ურთიერთქმედებას, რომელიც წარმოიშობა ორი სხეულის შემხებ ზედაპირებს შორის და ხელს უშლის მათ გადაადგილებას.**

განასხვავებენ ორი ტიპის გარე ხახუნს – **მშრალს**, როდესაც შემხებ ზედაპირებს შორის არ არსებობს თხევადი ან აირადი ფენა და **სველს**, როდესაც სხეული მოძრაობს სითხესა ან აირში.

მოვათავსოთ სხეული მეორე სხეულის მშრალ ზედაპირზე და მოვდოთ მას ზრდადი წვევის ძალა  $\vec{F}$  (ნახ. 24.1). მისი ზრდისას ნულიდან გარკვეულ სიდიდემდე, სხეული ფაქტიურად ინარჩუნებს უძრავ მდგომარეობას, რაც აიხსნება იმით, რომ წვევის ძალის მოქმედების დაწყებისას სხეულთა შემხებ ზედაპირებს შორის აღიძვრება წვევის ძალის ტოლი და საპირისპიროდ მიმართული ხახუნის ძალა. იგი დასაწყისში წვევის ძალის ზრდასთან ერთად იზრდება.



ნახაზი 24.1



ნახაზი 24.2

ამ პერიოდში ხდება უმნიშვნელო შექცევადი გადაადგილებები ( $\sim 10^{-6}$ მ), რომლებსაც **წინასწარ წანაცვლებას** უწოდებენ, ხოლო ადრულ ხახუნის ძალას – **არასრულ ხახუნის ძალას** (ნახ. 24.2<sup>21</sup>). იგი აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას ( $a$  წერტილი), რომელსაც **უძრაობის ხახუნის ძალას** უწოდებენ. როგორც კი წვევის ძალა ოდნავ გადააჭარბებს მის მნიშვნელობას, წინასწარი წანაცვლება გადაიზრდება სრიალში. ხახუნის ძალა ოდნავ მცირდება ( $a'$  წერტილი) და შემდგომ სხეულის მოძრაობისას ინარჩუნებს თავის მნიშვნელობას. მას **სრიალის ხახუნის ძალას** უწოდებენ. ის მიმართულია სხეულის ფარდობითი სიჩქარის (გადაადგილების) საპირისპიროდ. ხახუნის ძალები კონტაქტური ძალებია – გამოწვეულია შემხებ ზედაპირთა მოლეკულების ურთიერთმიზიდვით, იგი მით უფრო შესამჩნევია, რაც მჭიდროა ზედაპირთა შეხება. ხახუნის ძალის შემცირება მოძრაობის დაწყებისას გამარტივებულად ასე შეიძლება აიხსნას: ნებისმიერი მაქსიმალურად დამუშავებული ზედაპირიც კი შეიცავს დეფექტებს – უსწორმასწოროებისა და მიკრობზარების სახით. ისინი დამატებით წინაღობას უქმნის სხეულის დაძვრას. წინასწარი წანაცვლების პროცესში ხდება მათი “მსხვრევა” და “გასწორება”, რაც აადვილებს სრიალს.

ხახუნის ძალის მნიშვნელობა დამოკიდებულია იმ წნევის ძალაზე  $\vec{F}_n$ , რომლითაც განსახილველი სხეული მოქმედებს ზედაპირზე. იგი შეიძლება გამოწვეული იყოს სხეულის წონით ან სხვა მიზეზით. ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად  $\vec{F}_n = -\vec{N}_n$ , სადაც  $\vec{N}_n$  საყრდენის მხრიდან სხეულზე მოქმედი რეაქციის ძალის ნორმალური მდგენელია. პორიზონტალური ზედაპირის შემთხვევაში (ნახაზი 24.1)  $|\vec{F}_n| = |\vec{N}_n| = |\vec{N}|$ . ზემოთქმულის თანახმად, უძრაობის და სრიალის ხახუნის ძალებისთვის შეიძლება დავწეროთ **ამონტონის კანონი**:

$$F_{\text{bsb}}^{\text{უძ}} = \mu_0 F_n, \quad F_{\text{bsb}}^{\text{სრ}} = \mu F_n,$$

სადაც  $\mu_0, \mu$  უძრაობის და სრიალის ხახუნის კოეფიციენტებია, ამასთანავე ყოველთვის  $\mu < \mu_0$ . მათი მნიშვნელობა დამოკიდებულია საკონტაქტო ზედაპირების ნივთიერებებზე, დამუშავების ხარისხზე. მათ განზომილება არ აქვს. ცხრილში 24.1 მოცემულია ზოგიერთი მასალისთვის ხახუნის კოეფიციენტების მიახლოებითი მნიშვნელობები. ისინი ბევრ ფაქტორზეა დამოკიდებული, ამიტომ უმჯობესია მათი დადგენა ცდის საშუალებით (იხ. ამოცანა 24.1).

<sup>21</sup> თვალსაჩინოების მიხნით ნახაზზე მასშტაბი დაცული არ არის.

ზედაპირები	$\mu_0$	$\mu$
ხე და ხე	0,4	0,2
ყინული და ყინული	0,1	0,03
ლითონი და ლითონი	0,15	0,07
რეზინა – მყარი სხეული	1 – 4	1

(24.1) წარმოადგენს მშრალი ხახუნის კანონს. ამ ფორმით მისი ვექტორული ჩაწერა არასწორია, რადგან  $\vec{F}_n$  ზედაპირის მართობული ძალაა, ხოლო  $\vec{F}_{ბარე}$  მიმართულია ზედაპირის გასწვრივ.

განვიხილოთ  $\vec{F}_{ბარე}$  ძალის მოქმედებით ცილინდრის მუდმივი სიჩქარით გორვა ჰორიზონტალურ ზედაპირზე. რაც იმას ნიშნავს, რომ ცილინდრის სიმეტრიის ღერძი გადაადგილდება თანაბარწრფივად. რადგან არც ცილინდრი და არც ზედაპირი არ არის აბსოლუტურად მყარი ამიტომ რეალურად ადგილი აქვს ორივეს დეფორმირებას და შეხება ხდება არა წერტილში, არამედ სასრულ ფართზე (ნახ.24.3). საყრდენის  $\vec{N}$  რეაქციის ძალის მოდების წერტილი ინაცვლებს მოძრაობის მიმართულებით. მოძრაობის ხასიათიდან გამომდინარე ცილინდრზე მოქმედ ძალთა ტოლქმედი და ამ ძალთა მომენტების<sup>22</sup> ალგებრული ჯამი ნებისმიერი ღერძის მიმართ უნდა იყოს ნულის ტოლი:

$$\vec{F}_{ბარე} + \vec{P} + \vec{N} = 0.$$

დავშალოთ  $\vec{N}$  ორ მდგენელად  $\vec{N} = \vec{N}_n + \vec{N}_\tau$ , შესაბამისად მივიღებთ:

$$\vec{F}_{ბარე} + \vec{P} + \vec{N}_n + \vec{N}_\tau = 0. \tag{24.2}$$

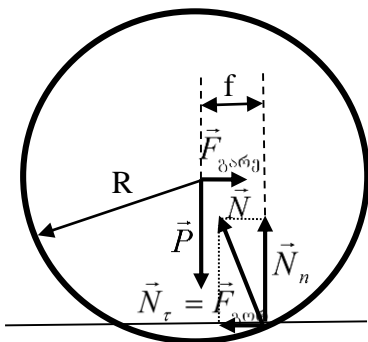
ვერტიკალური მდგენელი  $\vec{N}_n$  აწონასწორებს  $\vec{P}$  „დამწოლ ძალას“, (რომელიც ამ შემთხვევაში ცილინდრის სიმძიმის ძალაა), ხოლო ჰორიზონტალური მდგენელი  $\vec{N}_\tau$  კი  $\vec{F}_{ბარე}$  -ს. სწორედ ეს მდგენელი წარმოადგენს გორვის ხახუნის ძალას  $\vec{N}_\tau = \vec{F}_{გორ}$ .

ძალათა მომენტების ალგებრული ჯამი ბრუნვის ღერძის მიმართ იქნება:

$$N_\tau R + N_n f = 0, \quad \text{ანუ} \quad F_{გორ} R + P f = 0,$$

საიდანაც

$$F_{გორ} = f \frac{P}{R} \text{ (კულონის კანონი)} \tag{24.3}$$



ნახაზი 24.3

$f$  -ს უწოდებენ გორვის ხახუნის კოეფიციენტს, იზომება მეტრებში. იგი დამოკიდებულია ზედაპირების თვისებებზე, დამუშავების ხარისხზე და გორვის სიჩქარეზე. მაგალითად, 80 კმ/სთ სიჩქარით მანქანის ასფალტზე მოძრაობისას  $f \approx 2 \cdot 10^{-4}$ მ და მკვეთრად მატულობს სიჩქარის ზრდისას. ცხრილ 24.2-ში მოცემულია ზოგიერთი ზედაპირისთვის გორვის ხახუნის კოეფიციენტების მიახლოებითი მნიშვნელობები.

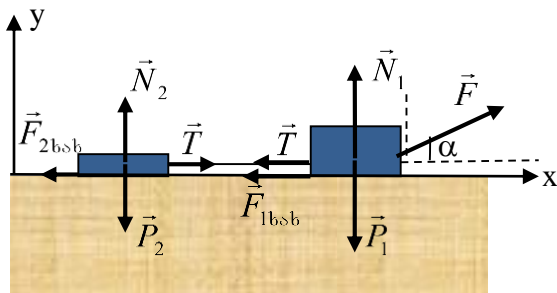
<sup>22</sup>მაბრუნებელ მომენტთან დაკავშირებით იხილეთ §37.

ძედაპირები	$f$ მეტრებში
რბილი მერქანი რბილი მერქანი	0,0015
რბილი მერქანი ფოლადი	0,0008
მკვრივი მერქანი მკვრივი მერქანი	0,0008
რეზინი ბეტონი	0,01-----0,02
ფოლადი ასფალტი	0,006
რკინა რკინა	0,0005
რკინა გრანიტი	0,0021

**ამოცანა 24.1.** 3კგ და 1კგ მასის სხეულები გადაბმულია უწონადი ძაფით. პირველ სხეულზე მოდებულია 20ნ ძალა, რომელიც გადაადგილებასთან ადგენს 30<sup>0</sup>-იან კუთხეს. გამოთვალეთ სისტემის აჩქარება და თოკის დაჭიმულობის ძალა. ხახუნის კოეფიციენტი 0,08.

**ამოხსნა:**

ნიუტონის II კანონის თანახმად:



$$m_1 \vec{a} = \vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_{1bsb} + \vec{P}_1 + \vec{N}_1$$

$$m_2 \vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_{2bsb} + \vec{P}_2 + \vec{N}_2$$

დავაგებმილოთ 0x და 0y დერძებზე

$$\begin{cases} m_1 a = F \cos \alpha - T - \mu N_1 \\ 0 = F \sin \alpha - m_1 g + N_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m_2 a = T - \mu N_2 \\ 0 = N_2 - m_2 g \end{cases} \quad (2)$$

$$F_{1bsb} = \mu N_1, \quad F_{2bsb} = \mu N_2, \quad P_1 = m_1 g, \quad P_2 = m_2 g,$$

(1) და (2)-დან გამოვრიცხოთ რეაქციის ძალები

$$\begin{cases} m_1 a = F \cos \alpha - T - \mu(m_1 g - F \sin \alpha) \\ m_2 a = T - \mu m_2 g \end{cases},$$

$T$  -ს გამორიცხვით გვექნება:

$$(m_1 + m_2) a = F \cos \alpha - \mu((m_1 + m_2)g - F \sin \alpha),$$

საიდანაც

$$a = \frac{F \cos \alpha - \mu((m_1 + m_2)g - F \sin \alpha)}{m_1 + m_2} = \frac{20 \cdot 0,87 - 0,08(4 \cdot 10 - 20 \cdot 0,5)}{4} = 3,75 \left( \frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2} \right).$$

$$T = m_2 a + \mu m_2 g = m_2 (a + \mu g) = 1 \cdot (3,75 + 0,08 \cdot 10) = 4,55 \quad (6).$$

**ამოცანა 24.2.** სხეულის რაიმე ზედაპირის მიმართ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტის დასადგენად გამოიყენება დახრილი სიბრტყის ზღვრული კუთხის მეთოდი. ზედაპირზე ათავსებენ სხეულს და ზედაპირს თანდათან ხრიან გარკვეულ კუთხემდე (ზღვრულ

კუთხემდე- $\alpha_{\text{ხლ}}$ ), ვიდრე სხეული არ დასრიალდება მუდმივი სიჩქარით. ვაჩვენოთ რომ  $\text{tg}\alpha_{\text{ხლ}} = \mu$ .

**ამოხსნა:**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{ხლ}} = 0.$$

ღერძებზე დაგვემძილებით ვღებულობთ:

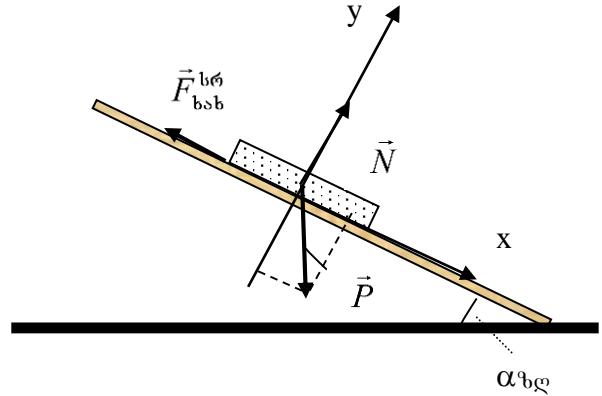
$$\begin{cases} P \sin \alpha_{\text{ხლ}} - F_{\text{ხლ}} = 0 \\ -P \cos \alpha_{\text{ხლ}} + N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P \sin \alpha_{\text{ხლ}} = \mu F_n \\ P \cos \alpha_{\text{ხლ}} = N \end{cases}$$

აქედან:

$$\text{tg}\alpha_{\text{ხლ}} = \mu.$$

ე.ი. სრიალისკოეფიციენტი ზღვრული კუთხის ტანგენსის ტოლია.



**ამოცანა 24.3.**  $m_1 = 5$  კგ და  $m_2 = 4$  კგ მასის ერთნაირი მასალის სხეულები გადაბმულია უწონადი ძაფით. სისტემა თანაბრად მოძრაობს  $m = 6$  კგ ტვირთის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). გამოთვალეთ სხეულების საყრდენ ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტი და თოკის დაჭიმულობის ძალები (ბლოკის და თოკის ხახუნი უგულვებელყოფილია).

**ამოხსნა:**

ნიუტონის II კანონის თანახმად:

$$\vec{T}_1 + \vec{P} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{1\text{ხლ}} + \vec{P}_1 + \vec{N}_1 = 0, \tag{2}$$

$$\vec{T}_2 + \vec{F}_{2\text{ხლ}} + \vec{P}_2 + \vec{N}_2 = 0. \tag{3}$$

დავაგვემძილოთ  $OX$  და  $OY$  ღერძებზე

$$(1)\text{-ის } 0y \text{ ღერძზე დაგვემძილებით ვღებულობთ: } T_1 = P. \tag{1}'$$

(2) დავაგვემძილოთ  $OX$  და  $OY$  ღერძებზე და გავითვალისწინოთ (1)'. მივიღებთ:

$$\begin{cases} P - T_2 - \mu N_1 = 0 \\ N_1 - P_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P - T_2 - \mu P_1 = 0. \tag{2}'$$

ასევე დავაგვემძილოთ (3)-იც,

$$\begin{cases} T_2 - \mu N_2 = 0 \\ N_2 - P_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow T_2 - \mu P_2 = 0. \tag{3}'$$

(2)' და (3)'-ის გაერთიანებით ვღებულობთ:

$$\mu = \frac{P}{P_1 + P_2} = \frac{m}{m_1 + m_2} = \frac{6}{9} \approx 0,67.$$

(1)'-ის თანახმად:

$$T_1 = mg = 60 \text{ (6)},$$

ხოლო (3)-ის თანახმად:

$$T_2 = \mu m_2 g = 26,8 \text{ (6)}$$

### §25. სველი ხახუნის ძალები.

#### გარდნა ჰაერში

სითხეში ან აირში არ აღიძვრება უძრავობის ხახუნის ძალები, ამიტომ მათში მოთავსებულ სხეულზე უმცირესი ზემოქმედებაც კი საკმარისია მისი მოძრაობის გამოსაწვევად. ხახუნის ძალა აღიძვრება უძრავ სითხესა და აირში სხეულის მოძრაობისას, ან თუ უძრავი სხეული იმყოფება სითხისა ან აირის ნაკადში. ამ ძალას **სველი ხახუნის ძალა** ეწოდება. ამ ძალათა აღიძვრა ასე შეიძლება აიხსნას სხეული მოძრაობისას წარიტაცებს მის მომვლელ სითხის თუ სითხის ფენას, ეს ფენა ცდილობს წარიტაცოს მომდევნო ფენა და ა.შ. რაც უფრო შორსაა ფენა სხეულიდან მით უფრო ნელა მოძრაობს ის. ამიტომ ორ ფენებს შორის აღიძვრება ხახუნის ძალები, რომლებიც აბრკოლებს უფრო სწრაფი ფენის და მათ შორის სხეულის მოძრაობას. იგივე პროცესი ხდება ნაკადში უძრავი სხეულის მოთავსებისას. ორივე შემთხვევაში გამოვლინდება გარემოს წინააღმდეგობის ძალაც, რომელიც შეიძლება გაცილებით მეტი აღმოჩნდეს სველი ხახუნის ძალაზე. ჩვენ გავაერთიანებთ ორივე ძალას. პირობითად ისევ ვუწოდებთ სველი ხახუნის ძალას და შევეხებით მხოლოდ იმ თვისებებს, რომლებიც ორივესთვის საერთოა.

განვიხილოთ სხეულის მოძრაობა უძრავ სითხეში ან აირში. აღძრული სველი ხახუნის ძალა დამოკიდებულია გარემოს მიმართ სხეულის ფარდობით სიჩქარეზე და მის საპირისპიროდ არის მიმართული. მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში იგი ფარდობითი სიჩქარის პირდაპირპროპორციული სიდიდეა (სიჩქარის ზრდასთან ერთად წრფივად იზრდება)

$$\vec{F}_{\text{ხახ}} = -\mu \vec{v}. \quad (25.1)$$

დიდი სიჩქარეების შემთხვევაში წრფივი დამოკიდებულება გადადის კვადრატულში (ნახ. 25.1)

$$\vec{F}_{\text{ხახ}} = -\vec{e}_v \mu_2 v^2 \quad (\vec{v} = \vec{e}_v v, |\vec{e}_v| = 1). \quad (25.2)$$

$\mu_1, \mu_2$  ხახუნის კოეფიციენტებია. ისინი დამოკიდებულია სხეულის ზომაზე, ფორმაზე, ზედაპირის მდგომარეობაზე და გარემოს თვისებებზე,  $\mu_1$  იზომება კგ/წმ,  $\mu_2$  - კგ/მ.

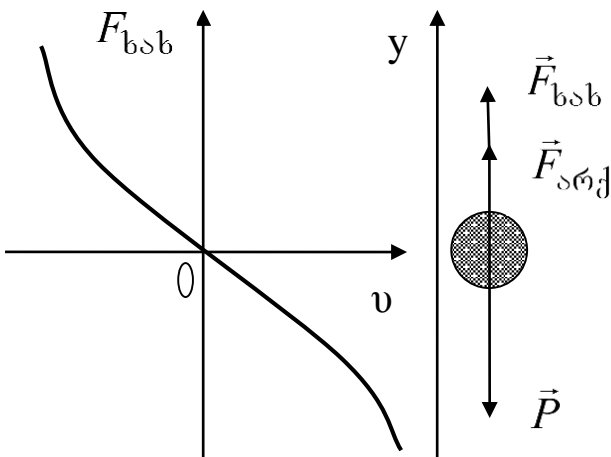
სიჩქარის ის მნიშვნელობა, რომელზეც (25.1) უნდა შეიცვალოს (25.2)-ით მრავალ ფაქტორზე დამოკიდებული, ამიტომ მას ყოველთვის ცდის საშუალებით ადგენენ.

განვიხილოთ სხეულის ვარდნა ჰაერში ან რაიმე გარემოში (ნახ. 25.2). მოძრაობის განტოლება

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{სრქ}} + \vec{F}_{\text{ხახ}}. \quad (25.3)$$

დავაგვიკვიროთ  $0y$  ღერძზე

$$-ma = -P + F_{\text{სრქ}} + F_{\text{ხახ}}, \quad (25.4)$$



ნახაზი 25.1

ნახაზი 25.2

სადაც  $F_{არქ} = \rho_0 g V$  – არქიმედეს ამომგდები ძალაა ( $\rho_0$  – გარემოს სიმკვრივეა,  $V$  – სხეულის მოცულობა). თუ გარემოს სიმკვრივე მცირეა და სხეულის მოცულობაც პატარაა, შესაძლებელია არქიმედეს ძალის უგულებელყოფა, რის გამოც (25.4)-დან გვექნება

$$ma = P - F_{ბახ} . \quad (25.5)$$

თუ ვარდნა უსაწყისო სიჩქარით ხდება, მაშინ საწყის მომენტში  $F_{ბახ} = 0$  და სხეულის აჩქარება ვარდნის დასაწყისში ფაქტიურად  $g$  – ს ტოლი აღმოჩნდება. შემდგომ სხეულის სიჩქარის ზრდასთან ერთად ხახუნის ძალაც იზრდება, მცირდება სხეულის აჩქარება, სიჩქარის გარკვეული მნიშვნელობისთვის ხახუნის ძალა გააწონასწორებს სიმძიმის ძალას, ანუ  $a = 0$

$$F_{ბახ} = P , \quad (25.6)$$

და სხეული აგრძელებს მოძრაობას მუდმივი – **დამყარებული სიჩქარით**.

ჰაერში სხეულის ვარდნისას დამყარებული სიჩქარე უმეტეს შემთხვევაში იმდენად დიდია, რომ ხახუნის ძალის გამოსათვლელად საჭიროა (25.2)-ის გამოყენება, რომლის (25.6)-ში გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$v_{დამ} = \sqrt{\frac{mg}{\mu_2}} . \quad (25.7)$$

მოცემულ გარემოში ერთდაიგივე ზომისა და ფორმის სხვადასხვა სხეულის ჩამოგდებისას ( $\mu_2$  – ერთნაირია), დამყარებული სიჩქარე იმ სხეულს ექნება მეტი, რომლის მასაც დიდია. მაგალითად, 5 – 6კმ სიმაღლიდან ჩამოგდებული საავიაციო ბომბები მიწას აღწევენ დამყარებული სიჩქარით, რომელიც მცირე ბომბისთვის 150 – 200მ/წმ-ია, ხოლო მძიმესთვის – 300მ/წმ<sup>23</sup>.

ადამიანის სხეულის ფრენისთვის მოუხერხებელი ფორმის გამო მისი ხახუნის კოეფიციენტი საკმაოდ მაღალია  $\mu_2 \approx 0,2$ კმ/მ. მაგალითად, თუ ადამიანის მასაა 70კგ, მაშინ ჰაერში ვარდნისას (25.7)-ის თანახმად:

$$v_{დამ} = \sqrt{\frac{70 \cdot 9,8}{0,2}} \approx 60\text{მ/წმ} .$$

ასეთი სიჩქარის განვითარებისთვის საჭიროა  $\approx 700$ მ სიმაღლიდან ვარდნა. ცხადია, თუ ვარდნის სიმაღლე 700მ-ზე მეტია, ის მაინც 60მ/წმ სიჩქარით დაეცემა მიწაზე.

პარაშუტს, დანიშნულებიდან გამომდინარე, აძლევენ ისეთ ზომისა და ფორმას, რომ  $\mu_2$  იყოს რაც შეიძლება დიდი. იგი დაახლოებით 100-ჯერ აღემატება ადამიანის  $\mu_2$ -ს, რის გამოც პარაშუტით გადმოსტომისას დამყარებული სიჩქარე თითქმის 10-ჯერ მცირეა (5 – 6)მ/წმ, რაც უპარაშუტოდ  $\sim 2$ მ სიმაღლიდან გადმოსტომის ტოლფასია. სასწავლო გადმოსტომისას პარაშუტი თავიდანვე იხსნება, ამიტომ სიჩქარე მონოტონურად მატულობს  $\approx 6$ მ/წმ-დე. ჩვეულებრივად კი პარაშუტს გვიან ხსნიან, 700მ ან მეტი ვარდნის შემდეგ, რის გამოც პარაშუტის გახსნის მომენტში დამყარებული სიჩქარე  $\sim 60$ მ/წმ-ს აღწევს, შემდეგ კი სწრაფად მცირდება  $\sim 6$ მ/წმ-მდე. ჰაერის მხრიდან მოქმედი დიდი წინააღმდეგობის გამო გადმოსტომის მომენტში ორგანიზმის არასასიამოვნო შეგრძნებები გამოწვეულია იმიტომ, რომ

<sup>23</sup>ჰაერში ვარდნისას, როდესაც სხეულის მასა ძალიან დიდია, დამყარებული სიჩქარე აჭარბებს ბგერის სიჩქარეს ( $v_{ბგ} = 330\text{მ/წმ} = 1200\text{კმ/სთ}$ ), (25.2) ძალას კარგავს. მაგალითად, დიდი სიმაღლეებიდან ზემოთ სავიაციო ბომბის ჩამოგდებისას.

ჩვეულებრივ პირობებში ადამიანის ორგანოები (§21), თითოეულზე მოქმედი სიმძიმის ძალის გამო, ერთმანეთს აწვება და დეფორმირდება, რასაც ადამიანი ბიოლოგიურად შეგუებულია. გადმოსტომის მომენტში უწონობის გამო ( $a = g$ ) ეს დეფორმაციები ქრება, ხოლო დამყარებული სიხქარით ვარდნისას, რაგინდ დიდი არ უნდა იყოს მისი სიხქარე, თანაბარი მოძრაობის გამო, ადამიანი იმყოფება ნორმალურ მდგომარეობაში.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითებში სიმარტივისთვის ვარდნა განვიხილეთ უსაწყისო სიხქარით, სინამდვილეში კი საავიაციო ბომბსაც და პარაშუტისტსაც ვარდნის საწყის მომენტში თვითმფრინავის სიხქარე გააჩნია.

**ამოცანა 25.1.** სხეულის წონის რა ნაწილს შეადგენს ჰაერის წინააღობის ძალა, თუ დედამიწის ზედაპირიდან ვერტიკალურად ასროლილი სხეული ზევით მოძრაობას 1,4-ჯერ უფრო ნაკლებ დროს ანდომებს, ვიდრე ქვემოთ მოძრაობას (არქიმედეს ძალა უგულებელყოფილია)?

**ამოხსნა:**

ნიუტონის II კანონის თანახმად,

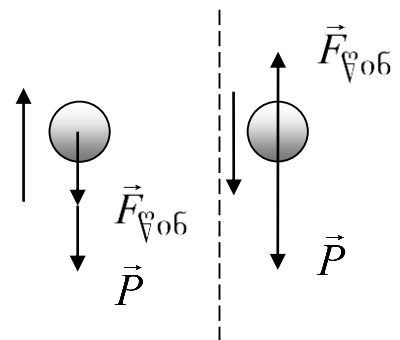
$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{წინ}}.$$

ზემოთ მოძრაობის შემთხვევაში, ნიუტონის II კანონის დაგეგმილებით, გვექნება:

$$ma_1 = P + F_{\text{წინ}}, \quad (1)$$

ქვევით მოძრაობისას კი

$$ma_2 = P - F_{\text{წინ}}. \quad (2)$$



მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\frac{F_{\text{წინ}}}{P} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}. \quad (3)$$

თუ სხეული  $t_1$  დროს განმავლობაში მოძრაობს ზევით, მაშინ

$$v = v_0 - a_1 t_1,$$

საიდანაც  $v_0 = a_1 t_1$ . ამიტომ ასვლის სიმაღლე

$$H = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = a_1 t_1^2 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{a_1 t_1^2}{2}. \quad (4)$$

რადგან ვარდნა ხდება უსაწყისო სიხქარით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$H = \frac{a_2 t_2^2}{2}, \quad (5)$$

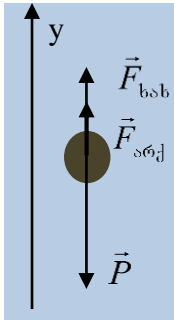
სადაც  $t_2$  ვარდნის ხანგრძლივობაა.

(4) და (5)-ის გატოლებით და ამოცანის პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:  $a_1 = 1,96a_2$ . ამ თანაფარდობის (3)-ში გათვალისწინება მოგვცემს:

$$\frac{F_{\text{წინ}}}{P} = \frac{1,96a_2 - a_2}{1,96a_2 + a_2} = \frac{0,96}{2,96} = 0,32$$

**ამოცანა 25.2.** 10 სმ რადიუსის 6 კგ მასის სფეროს გლიცერინში ვარდნისას დამყარებული სიხქარეა 2,5 მ/წმ. გამოთვალეთ ხახუნის კოეფიციენტი. ჩათვალეთ, რომ ხახუნის ძალა სიხქარის პირდაპირ პროპორციულია ( გლიცერინის სიმკვრივეა  $1,26 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>).

**ამოხსნა:**



(25.3)-ის თანახმად:

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{არქ}} + \vec{F}_{\text{ბსბ}} = 0$$

OY ღერძზე დაგეგმილებით გვექნება:

$$-P + F_{\text{არქ}} + F_{\text{ბსბ}} = 0, \tag{1}$$

სადაც:

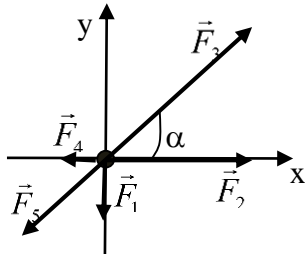
$$P = mg, F_{\text{არქ}} = \rho_0 g V = \frac{4}{3} \pi R^3 g \rho_0 \text{ და } F_{\text{ბსბ}} = \mu_1 \nu.$$

(1)-ში მათი შეტანით მივიღებთ:

$$\mu_1 = \frac{mg - \frac{4}{3} \pi R^3 g \rho_0}{\nu} = \frac{\left(6 - \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 10^{-3} \cdot 1,26 \cdot 10^3\right) 10}{2,5} \approx 2,9 \text{ (კგ/წმ)}$$

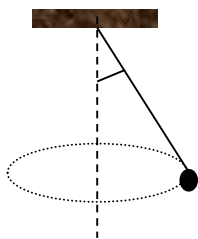
**ამოცანები:**

1. გამოთვალეთ რა რაოდენობის ფოლადი ( $\rho = 7,8 \text{ კგ/მ}^3$ ) დაიხარჯება 10მ სიგრძის 100 მილის ჩამოსასხმელად, თუ მისი შიგა და გარე დიამეტრებია 18სმ და 20სმ. **(პასუხი: 46,8ტ.)**
2. გამოთვალეთ ბრინჯაოს სიმკვრივე, რომელიც წარმოადგენს 75% სპილენძის და 25% კალას შენადნობს, თუ  $\rho_{Cu} = 8,9 \cdot 10^3 \text{ კგ/მ}^3$   $\rho_{Sn} = 7,3 \cdot 10^3 \text{ კგ/მ}^3$ . **(პასუხი: 8,4კგ/მ<sup>3</sup>)**
3. 1000კგ მასის ავტომობილი მოძრაობს 108კმ/სთ (30მ/წმ) სიჩქარით. საწვავის მიწოდების შეწყვეტიდან 5წმ-ში მისი სიჩქარე 90კმ/სთ-მდე (25მ/წმ) შემცირდა. განსაზღვრეთ წინააღმდეგობის ძალთა (ჰაერი, ასფალტი) ტოლქმედი. **(პასუხი: - 1კნ.)**



4. გამოთვალეთ ნახაზზე მოცემულ 100კგ მასის სხეულზე მოქმედ ძალებს (F1=1კნ, F2=3,4კნ, F3=6კნ, F4=0,4კნ, F5=2კნ) ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება. რა მანძილს გაივლის იგი 2წმ-ში, თუ საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია? **(პასუხი: 1,3კნ~17<sup>0</sup>, 26მ.)**

5. 500კგ ნავს ტბიდან ნაპირისკენ ეწევიან ორი ერთნაირი ბაგირით, რომელთა შორის კუთხე 120<sup>0</sup>-ია. რა მაქსიმალური აჩქარებით შეიძლება გამოიტანონ ნავი, თუ წინააღმდეგობის ძალაა 100ნ, ხოლო ბაგირები უძლებს 300ნ ძალით გაჭიმვას. **(პასუხი: 0,4მ/წმ<sup>2</sup>)**
6. უწონად უჭიმვად თოკით ბლოკზე გადადებულ 4,8კგ მასის ორ სხეულს შორის მანძილი 0,4მ-ია. რა მასის ტვირთი დაუმატეს ერთერთს, თუ ამ მომენტიდან 1წმ-ში ისინი ერთ დონეზე აღმოჩნდა. წინააღმდეგობის ძალები უგულებელყოფილია. **(პასუხი: 0,4კგ)**



7. 1მ სიგრძის თოკზე ჩამოკიდებული სხეული ბრუნვისას შემოწერს კონუსურ ზედაპირს, გამოთვალეთ სხეულის ბრუნვის წირითი სიჩქარე, თუ თოკის გადახრის კუთხე ვერტიკალთან 30<sup>0</sup>-ია (იხ. ნახაზი). **(პასუხი: 1,7მ/წმ)**
8. 1მ სიგრძის თოკზე ჩამოკიდებული სხეულის ბრუნვის სიჩქარეა 2მ/წმ გამოთვალეთ თოკის მიერ ვერტიკალთან შედგენილი კუთხე (იხ. ამოცანა 8-ის ნახაზი). **(პასუხი: 32<sup>0</sup>)**

9. რამდენჯერ აღემატება ეკვატორზე მყოფ სხეულზე მოქმედი გრავიტაციის ძალა ცენტრიდანულ ძალას? (პასუხი:~290-ჯერ)
- 10.გამოთვალეთ ვენერას ზედაპირზე თავისუფალი ვარდნის აჩქარება, თუ მისი რადიუსი 6100კმ-ია, ხოლო საშუალო სიმკვრივე 5200კგ/მ<sup>3</sup>. (პასუხი:~8,8მ/წმ<sup>2</sup>)
- 11.გამოთვალეთ 125მ სიმაღლიდან თავისუფლად ვარდნილი სხეულის მიერ ბოლო 2წმ-ში გავლილი მანძილი. (პასუხი: 80მ)
12. რა სიმაღლიდან ვარდებოდა სხეული თუ ვარდნის ბოლო 2წმ-ში გაიარა მთელი გზის 9/25 ნაწილი? (პასუხი: 500მ)
13. სხეული თავისუფლად ვარდება 45მ სიმაღლიდან. იმავედროულად 60მ სიმაღლიდან აგდებენ მეორე სხეულს. იპოვეთ მისი საწყისი სიჩქარე, თუ ორივე ერთდროულად აღმოჩნდა მიწაზე. (პასუხი: 5მ/წმ)
14. სიმაღლიდან 20მ/წმ სიჩქარით ისვრიან ორ სხეულს ვერტიკალურად ურთიერთსაპირისპირო მიმართულებით. რამდენით დააგვიანებს ერთერთი სხეული მიწაზე დაშვებას? (პასუხი: 4წმ)
15. ჰორიზონტალურად მოძრავი თვითმფრინავიდან ბომბი მიწაზე 20წმ-ის შემდეგ დაეცა. ბომბის ფრენის სიშორეა 1კმ. იპოვეთ თვითმფრინავის სიჩქარე და ფრენის სიმაღლე. (პასუხი: 50მ/წმ, 2კმ )
16. ავაზა, ჰორიზონტალური განარბენით, 7მ/წმ სიჩქარით, ხტება 16მ სიმაღლის კლდიდან. რა დროში დაეშვება ის მიწაზე და რა მანძილით იქნება დაშორებული კლდის ფუძეს? (პასუხი:0,8√5 წმ,13მ)
17. სპორტსმენი 30<sup>0</sup> კუთხით მოწყდა მიწას და გადახტა 9მ-ზე. გამოთვალეთ მისი საწყისი სიჩქარე. (პასუხი: 10,2მ/წმ)
- 18.რამდენჯერ გრძელ ნახტომს გააკეთებს ადამიანი მთვარეზე დედამიწასთან შედარებით, თუ სასტარტო პირობები (სიჩქარე, კუთხე) ერთნაირია. ჩათვალეთ, რომ თავისუფალი ვარდნის აჩქარება მთვარეზე 6-ჯერ ნაკლებია ვიდრე დედამიწაზე. (პასუხი: 6-ჯერ)
- 19.რა კუთხით უნდა გავისროლოთ სხეული, რომ ფრენის სიშორე გაუტოლდეს ასვლის მაქსიმალური სიმაღლეს ? (პასუხი: ~14<sup>0</sup>)
- 20.თვითმფრინავიდან, რომელიც მიფრინავს ჰორიზონტალურად 144კმ/სთ სიჩქარით, სურსათი უნდა ჩამოუგდონ ალპინისტთა ბანაკს, რომელიც იმყოფება 245მ-ით ქვემოთ. თავზე გადაფრენამდე რამდენი მეტრით ადრე უნდა ჩამოაგდონ ტვირთი? (პასუხი: 280მ)
- 21.ბაგირი უძღებს 80კნ დატვირთვას, რა მაქსიმალური აჩქარებით შეიძლება ავწიოთ 5ტ ტვირთი? რამდენით შემცირდება ეს აჩქარება თუ სიმტკიცის მარაგს 1,6-ს ავიღებთ? (პასუხი: 6მ/წმ<sup>2</sup>, 6მ/წმ<sup>2</sup>-ით)
22. თვითმფრინავი პიკირებიდან გამოსვლის მომენტში 1200მ რადიუსის რკალზე 720კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობს. რა ძალით აწევა ამდროს 80კგ მასის მფრინავი სკამს? (პასუხი 34406)
23. თვითმფრინავი 20მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით მიფრინავს ჰორიზონტალური მიმართულებით. გამოთვალეთ მფრინავის გადატვირთვა (მისი წონის ფარდობა სიმძიმის ძალასთან) (პასუხი 2,24)
- 24.თვითმფრინავი ვერტიკალურ სიბრტყეში 360კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობისას შემოწერს რკალს. რისი ტოლია რკალის რადიუსი, თუ მფრინავი ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში უწონობაში აღმოჩნდება. (პასუხი 10<sup>3</sup>მ)

25. გამოთვალეთ მანქანის სიჩქარე 450მ სიღრმის ამოზნექილ ხიდზე მოძრაობისას, თუ მისი წონა ხიდის ხიდის უმაღლეს წერტილში 2-ჯერ ნაკლები აღმოჩნდა მის სიმძიმის ძალაზე. (პასუხი 15მ/წმ)
26. 5ტ მასის ლიფტის დასაშვები მაქსიმალური აჩქარებაა 0,7მ/წმ<sup>2</sup>. განსაზღვრეთ ძრავის მიერ ლიფტის ბაგირზე მოქმედი ძალის დასაშვები ზღვრული სიდიდეები. (პასუხი 53,5კნ, 46,5კნ)
27. გამოთვალეთ პირველი კოსმოსური სიჩქარე ვენერასათვის, მისი რადიუსი 6100კმ-ია, ხოლო საშუალო სიმკვრივე 5200კგ/მ<sup>3</sup>. (პასუხი:~7,3მკმ/წმ)
28. რისი ტოლი უნდა იყოს დედამიწის დღე-ღამის ხანგრძლივობა, რომ ეკვატორზე მყოფი სხეულები უწონად მდგომარეობაში აღმოჩნდეს? (პასუხი: ≈ 1,4სთ)
29. დედამიწის ხელოვნური თანამგზავრი ბრუნავს წრიულ ორბიტაზე, რომლის რადიუსი დედამიწის რადიუსზე 9-ჯერ მეტია. რისიტოლია თანამგზავრის ბრუნვის პერიოდი?(პასუხი: 37,5სთ)
30. დედამიწისა და მთვარის ცენტრებს შორის მანძილი დედამიწის 60 რადიუსის ტოლია. მთვარის მასა კი 81-ჯერ ნაკლებია დედამიწის მასაზე. მთვარიდან რა მანძილზე აღმოჩნდება სხეული უწონად მდგომარეობაში? (პასუხი: 6R<sub>დედ</sub>)
31. ხელოვნური თანამგზავრი ბრუნავს წრიულ ორბიტაზე დედამიწის ზედაპირიდან h სიმაღლეზე. ჩაწერეთ მისი ბრუნვის პერიოდის დამოკიდებულება დედამიწის R რადიუსზე, მისი დღე-ღამური ბრუნვის T<sub>0</sub> პერიოდსა და h სიმაღლეზე. (პასუხი:  $T = T_0 \left( \frac{R+h}{R} \right)^{3/2}$ )
32. დატვირთული ლიფტის მასა არ უნდა აღემატებოდეს 3 ტონას, ხოლო მაქსიმალური აჩქარება 1მ/წმ<sup>2</sup>-ს. იპოვეთ ლიფტის ფოლადის ბაგირის დიამეტრი, თუ სიმტკიცის მარაგია 5. ფოლადის გაჭიმვისას დასაშვები ზღვრული ძაბვაა 5·10<sup>8</sup> ნ/მ<sup>2</sup>. (პასუხი: 0,02მ)
33. 3მ სიგრძის და 2სმ დიამეტრის ფოლადის ბაგირით თანაბრად ააქეთ 5ტ მასის ტვირთი. იპოვეთ ბაგირის წაგრძელება, თუ იუნგის მოდულია 2·10<sup>11</sup> პა. (პასუხი: 2,4მმ)
34. ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ ტვირთი ააქეთ 1მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით. (პასუხი: 2,6მმ)
35. ნეილონის ბაგირით თანაბრად უნდა აიტანონ 1ტ მასის ტვირთი. ნეილონის სიმტკიცის ზღვრული ძაბვაა 5·10<sup>8</sup> პა, ხოლო სიმტკიცის მარაგია 50. რამდენი ნეილონის თოკისგან უნდა შედგებოდეს ბაგირი, თუ თითოეულის რადიუსია 5,6მმ? იპოვეთ ბაგირის ფარდობითი წაგრძელება. ნეილონისთვის იუნგის მოდულია 5·10<sup>9</sup> პა. (პასუხი: 10; 0,2%)
36. 12მ/წმ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილი სიჩქარის შეუცვლელად გადადის 20მ რადიუსის ამოზნექილ ხიდზე, რის გამოც მძღოლის სავარძლის ზამბარების დეფორმაცია 3სმ-ით შემცირდა. იპოვეთ ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი, თუ მათი რაოდენობაა 8, ხოლო მძღოლის მასაა 80კგ (პასუხი: 2,5·10<sup>3</sup> ნ/მ)
37. რეაქტიული თვითმფრინავი ჰორიზონტალურ ასაფრენ ზოლზე მოძრაობს  $a=2g$  აჩქარებით. განსაზღვრეთ 80 კგ მფრინავის წონა – ძალა, რომლითაც ის მოქმედებს სავარძელზე (პასუხი: 1,8კნ)
38. 25 კგ მასის ტვირთი დაკიდებულია 2,5 მ სიგრძის ზონარზე, რომელიც უძლებს 550 ნ დატვირთვას. ტვირთი გადახარეს 1,7მ სიმაღლეზე და გაუშვეს ხელი. გაუძლებს თუ არა ზონარი ტვირთის რხევას. პასუხი დაასაბუთეთ. (პასუხი: არა)

39. 20 კგ მასის ტვირთი დაკიდებულია 2მ სიგრძის ზონარზე, ტვირთის მაქსიმალური გადახრის სიმაღლე, როდესაც ზონარი ტვირთის შემდგომ რხევის უძლებს 0,6მ-ს ტოლია. გამოთვალეთ ზონარის სიმტკიცის ზღვარი. **(პასუხი: 3206)**
40. ძაფზე გამობმული მასის სხეულს აბრუნენ ვერტიკალურ სიბრტყეში. რამდენით მეტი იქნება ძაფის დაჭიმულობა ქვედა წერტილში ზედა წერტილთან შედარებით. **(პასუხი: 6mg)**
41. 90 კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილის მძღოლმა 40 მ მანძილზე შეამჩნია დაბრკოლება და დაამუხრუჭა. აიცილებს თუ არა ავარიას მძღოლი, თუ საბურავების ასფალტთან ხახუნის კოეფიციენტია 0,95. პასუხი დაასაბუთეთ. **(პასუხი: აიცილებს)**
432. 10 კგ და 8 კგ მასის სხეულები გადაბმულია უწონადი ძაფით. გამოთვალეთ პირველ სხეულზე მოდებული ძალა (იხ. ამოცანა 24.1-ის ნახაზი), რომელიც გადაადგილებასთან ადგენს 45<sup>0</sup>-იან კუთხეს და სისტემას ანიჭებს 1 მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებას. ხახუნის კოეფიციენტი 0,06. **(პასუხი: ~ 38,46)**
43.  $m_1=5$  კგ და  $m_2=4$  კგ მასის ერთნაირი მასალის სხეულები გადაბმულია უწონადი ძაფით (იხ. ამოცანა 24.3-ის ნახაზი). სისტემა მოძრაობს  $m=6$ კგ ტვირთის მოქმედებით. გამოთვალეთ სისტემის აჩქარება და თოკის დაჭიმულობის ძალები (ბლოკის და თოკის ხახუნის უგულებელყოფილია). თუ სხეულების საყრდენ ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტი 0,6. **(პასუხი: 0,4მ/წმ<sup>2</sup>, 57,66, 25,66)**
44. უძრავ ბლოკზე გადადებული თოკის ერთ ბოლოზე მიმაგრებული 2კგ მასის სხეული. რა ძალა უნდა მოდით თოკის მეორე ბოლოს, რომ სხეულმა იმოძრაოს ზევით 1,2მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით? **(პასუხი: 226)**
45. შეიძლება თუ არა 80კმ/სთ სიჩქარით მოძრაოს მანქანამ 100მ-იანი რადიუსის ჰორიზონტალურ მოსახვევში, თუ საბურავსა და გზატკეცილს შორის ხახუნის კოეფიციენტი 0,4? რა მაქსიმალური სიჩქარითაა შესაძლებელი მოძრაობა? **(პასუხი: არ შეიძლება, 20მ/წმ)**
46. სხეულის წონის რა ნაწილს შეადგენს ჰაერის წინაღობის ძალა, თუ დედამიწის ზედაპირიდან ვერტიკალურად ასროლილი სხეული ზევით მოძრაობას ორჯერ უფრო ნაკლებ დროს ანდომებს ვიდრე ქვევით მოძრაობისას? **(პასუხი: 0,6)**
47. სხეულის წონის რა ნაწილს შეადგენს ჰაერის წინაღობის საშუალო ძალა, თუ ვერტიკალურად ასროლის შემდეგ იგი საწყის მდებარეობას უბრუნდება 1,5-ჯერ ნაკლები სიჩქარით? **(პასუხი: 0,38)**
48. 60<sup>0</sup>-იანი კუთხით დახრილ სიბრტყეზე 10 კგ მასის ურიკას შესაჩერებლად საჭიროა მას მოვდოთ დახრილი ზედაპირის პარალელურად ზემოთ მიმართული 75 ნ ძალა, ხოლო ზემოთ ასატანად – 95 ნ. იპოვეთ ხახუნის კოეფიციენტი. **(პასუხი: 0,2)**
49. რა უმცირესი კუთხით უნდა დაიხაროს თვითმცლელი ავტომობილის ძარა, რომ სილა ჩამოიყაროს. ხახუნის კოეფიციენტი 0,4-ის ტოლია. **(პასუხი: 22<sup>0</sup>)**
50. 30<sup>0</sup>-ით დახრილ სიბრტყეზე მოთავსებულ 6კგ სხეულზე მოქმედებს სიბრტყის ფუძის პარალელური 100 ნ ძალა. იპოვეთ სხეულის აჩქარება ხახუნი უგულებელყოფილია. **(პასუხი: 19,3 მ/წმ<sup>2</sup>)**
51. 10 სმ რადიუსის 21,9 კგ მასის ცილინდრი, რომლის რადიუსია 10 სმ, მსახველი 50 სმ, ვარდება წყალში. ხახუნის კოეფიციენტი 0,004 კგ/წმ-ს ტოლია. გამოთვალეთ ვარდნის დამყარებული სიჩქარე ჩათვალეთ, რომ ხახუნის ძალა სიჩქარის პირდაპირ პროპორციულია. **(პასუხი: 25მ/წმ)**

**52.** 100 მ სიმაღლიდან უსაწყისო სიჩქარით ვარდნილი 20კგ მასის სხეული მიწაზე 5წმ-ში დაეშვა. გამოთვალეთ დაცემის სიჩქარე და ჰაერის წინააღმდეგობის საშუალო ძალა (პასუხი: 40მ/წმ, 406)

**53.** ვერტიკალურად ქვემოთ 2 მ/წმ სიჩქარით მოძრავი აეროსტატიდან, როცა იგი იმყოფება 320 მ სიმაღლეზე აგდებენ 50 კგ მასის ბალასტს. რა დროში დაეშვება ბალასტი მიწაზე, თუ ჰაერის წინააღმდეგობის საშუალო ძალა მისი წონის 40%-ია? (პასუხი: 10წმ)

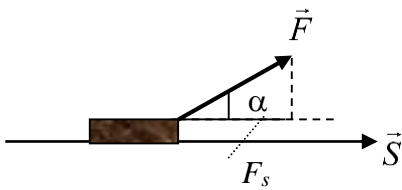
### თაზო III.

## მუშაობა. ენერგია. იმპულსი. მუდმივობის კანონები მექანიკაში

### §26. მექანიკური მუშაობა

შიზიკაში მექანიკური მუშაობის ცნება შემოტანილია იმ ქმედების დასახასიათებლად, რომელსაც ძალა ასრულებს სხეულის გადაადგილებისას. თუ მუდმივი ძალის  $\vec{F} = const$  მოქმედებით სხეულმა შეასრულა  $\vec{S}$  გადაადგილება, შესრულებული მუშაობა გამოითვლება როგორც ძალისა და გადაადგილების სკალარული ნამრავლი<sup>24</sup>

$$A = \vec{F}\vec{S} = FS \cos \alpha = F_s S, \quad (26.1)$$



ნახაზი 26.1.

სადაც  $\alpha$  კუთხეა  $\vec{F}$  და  $\vec{S}$  შორის (ნახაზი 26.1),  $F_s = F \cos \alpha$  ძალის გეგმილია  $\vec{S}$ -ზე. მუშაობა დადებითია, თუ  $0 \leq \alpha < 90^\circ$ . ძალებს, რომლებიც მოცემულ შემთხვევაში დადებით მუშაობას ასრულებს, *მამოძრავებელი ძალები* ეწოდება. თუ  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ , მუშაობა უარყოფითია და შესა-

ბამის ძალებს *წინააღმდეგობისძალებს* უწოდებენ. ეს დაყოფა პირობითია, რადგან ერთიდაიგივე ძალამ სხვადასხვა შემთხვევაში შეიძლება სხვადასხვა ფუნქცია შეასრულოს. მაგალითად, სხეულის ვარდნისას სიმძიმის ძალა მამოძრავებელი ძალაა, ზევით ატანისას კი წინააღმდეგობის. (26.1)-ის თანახმად, თუ ძალა გადაადგილებასთან მართ კუთხეს ქმნის ( $\alpha = 90^\circ$ ), იგი მუშაობას არ ასრულებს, მაგალითად, სიმძიმის ძალა სხეულის პორიზონტალურ ზედაპირზე მოძრაობის შემთხვევაში. როდესაც ძალა გადაადგილების თანხვედრილია ( $\alpha = 0^\circ$ ) მუშაობა დადებითია და მაქსიმალური. თუ ძალა გადაადგილების საპირისპიროა ( $\alpha = 180^\circ$ ) მუშაობა უარყოფითია და მაქსიმალური.

მუშაობის ერთეულია *ჯოული* (ჯ). იგი განისაზღვრება (26.1)-დან. ჯოული ის მუშაობაა, რომელსაც ასრულებს 1 ნიუტონი მუდმივი ძალა 1 მეტრ გზაზე სხეულის გადაადგილებისას, როდესაც ძალა და გადაადგილება თანხვედრილია ( $\alpha = 0^\circ$ )

$$A = FS. \quad (26.2)$$

მაშასადამე  $1 \text{ჯ} = 16.1 \text{მ}$ .

თუ სხეულზე ერთდროულად რამოდენიმე მუდმივი ძალა მოქმედებს, ძალთა სუპერპოზიციიდან გამომდინარე, ჯამური მუშაობა იქნება:

$$A = \sum_i \vec{F}_i \vec{S} = \vec{F} \vec{S},$$

სადაც  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  ძალთა ტოლქმედია.

ცვლადი ძალის შემთხვევაში მუშაობის გამოსათვლელად საჭიროა გადააგილება დავეოთ ისეთ ელემენტარულ სიდიდეებად  $\Delta \vec{S}_1, \Delta \vec{S}_2, \dots$ , რომ თითოეულ უბანზე მოქმედი

<sup>24</sup>ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი  $\vec{M} \cdot \vec{N} = |\vec{M}| |\vec{N}| \cos \alpha$ , ან  $\vec{M} \cdot \vec{N} = M_x N_x + M_y N_y + M_z N_z$

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$  ძალა ჩაითვალოს მუდმივად. (26.1)-ის გამოყენებით გამოვთვალოთ ამ უბნებზე ელემენტარული მუშაობა  $\vec{F}_i \Delta \vec{S}_i$  და მიღებული შედეგები ალგებრულად შევეკრიბოთ

$$A = \sum_i \vec{F}_i \Delta \vec{S}_i = \sum_i F_i \Delta S_i \cos \alpha_i = \sum_i (F_i)_S \Delta S_i. \quad (26.3)$$

ცხადია, რაც უფრო მცირეა  $\Delta \vec{S}_i$ , მით უფრო სწორი იქნება დაშვება თითოეულ უბანზე ძალის მუდმივობის შესახებ და მით უფრო ზუსტად იქნება გამოთვლილი მუშაობა

$$A = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \Delta \vec{S}_i = \int \vec{F} d\vec{S} = \int F_S dS.$$

სადაც:

$$dA = \vec{F} d\vec{S} \quad (26.4)$$

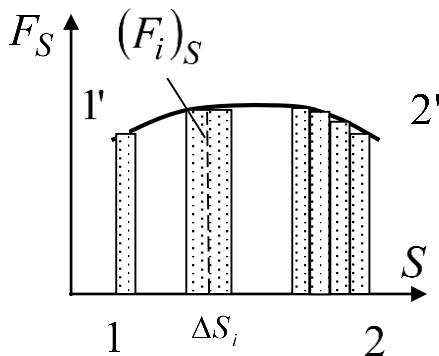
$\vec{F}$  ძალის ელემენტარული მუშაობაა სხეულის  $d\vec{S}$  გადაადგილებისას. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განმარტების თანახმად მუშაობა ასეც შეიძლება ჩავეწეროთ:

$$A = \int \vec{F} d\vec{S} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

ეს უკანასკნელი კი წირითი ინტეგრალია, ამიტომ შესრულებული მუშაობა ზოგადად ტრაექტორიის ფორმის ფუნქციაა (კონსერვატული ძალის შემთხვევაში მუშაობა არაა დამოკიდებული ტრაექტორიის ფორმაზე (იხ. §29)).

თუ მოცემულია სხეულის საწყისი და საბოლოო მდგომარეობები, მაშინ საჭიროა ინტეგრალს მივუთითოთ საზღვრები. მაგალითად, 1-წერტილიდან 2-ში წანაცვლებისას გვექნება

$$A_{12} = \int_1^2 F_S dS. \quad (26.5)$$



ნახაზი 26.2

შესაძლებელია მუშაობის გრაფიკული გამოთვლა. ამისათვის უნდა ავაგოთ  $F_S$  - ის  $S$  -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი (ნახ. 26.2), სადაც თითოეული ოთხკუთხედის ფართობი  $(F_i)_S \Delta S_i$  შეესაბამება სათანადო  $\Delta S_i$  უბანზე შესრულებულ მუშაობას, ხოლო ფართობთა ჯამი - სრულ მუშაობას. (26.3)-ში ზღვარზე გადასვლისას, როდესაც  $\Delta S_i \rightarrow 0$ , მართკუთხედთა ფართობების ჯამი

გაუტოლდება  $1'2'211'$  წირით შემოსაზღვრულ ფართობს, რომელიც იძლევა შესრულებული მუშაობის ზუსტ მნიშვნელობას (26.5).

დასმული ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე საჭიროა მივუთითოთ, მოცემულ სხეულზე სრულდება მუშაობა, თუ სხეული ასრულებს მას.

**ამოცანა 26.1.** გამოთვალეთ მუშაობა, რომელსაც ასრულებს 100 ნ წვევის ძალა 80 კგ მასის სხეულის გადაადგილებისას მოძრაობის დაწყებიდან 10 წმ-ის განმავლობაში, თუ  $\alpha=30^\circ$ ,  $\mu=0,08$ .

<sup>25</sup> dA-ში იგულისხმება არა მუშაობის დიფერენციალი არამედ მისი ელემენტარული სიდიდე.

**ამოხსნა:**

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{\text{ბსბ}},$$

დავაგეგმილოთ 0x- და 0y ღერძებზე  $ma = F \cos \alpha - \mu N$

( $F_{\text{ბსბ}} = \mu N$ )  $0 = F \sin \alpha + N - mg$  ( $P = mg$ ), გამოვირიცხოთ რეაქციის ძალა და განვსაზღვროთ აჩქარება

$$a = \frac{F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)}{m} = \frac{100\sqrt{3}/2 - 0,08(800 - 100\sqrt{3}/2)}{80} \approx 0,3 \text{ (მ/წმ}^2\text{)},$$

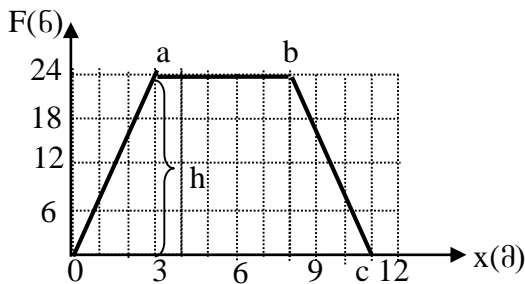
$$S = at^2/2 = 15 \text{ (მ)}.$$

(26.1)-ის თანახმად:

$$A = 100 \cdot 15 \cdot \sqrt{3}/2 \approx 1,3 \text{ (კჯ)}.$$

**ამოცანა 26.2.** ნაწილაკზე მოქმედი ძალა წრფივად იზრდება ნულოვანი მნიშვნელობიდან 246-მდე ნაწილაკის გადაადგილებისას  $x_1=0$   $x_2=3$  მ-მდე, რჩება მუდმივი  $x_3=8$  მ-მდე, შემდეგ წრფივად კლებულობს და ნულს უტოლდება  $x_4=11$  მ-თვის. გამოთვალეთ გრაფიკის საშუალებით შესრულებული მუშაობა.

**ამოხსნა:**



ზემოთქმულის თანახმად შესრულებული მუშაობა 0abc ტრაპეციის ფართობის ტოლია:

$$A = \frac{ab + oc}{2} h = \frac{5 + 11}{2} 24 = 192 \text{ (ჯ)}.$$

**ამოცანა 26.3.** OX ღერძის გასწვრივსხეულზე მოქმედებს ცვლადი ძალა  $F = F_x = 800/x^2$ . გამოთვალეთ ამ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა სხეულის გადაადგილებისას  $x=2$  მ-დან  $x=2,5$  მ წერტილში.

**ამოხსნა:**

(26.6)-ის თანახმად:

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_2^{2,5} \frac{800}{x^2} dx = 800 \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_2^{2,5} = 80 \text{ (ჯ)}.$$

ინტეგრალის ამოხსნისას გამოყენებულია ფორმულა:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n dx = \frac{x_2^{n+1}}{n+1} - \frac{x_1^{n+1}}{n+1}.$$

**§27. კინეტიკური ენერგია  
და მისი კავშირი მუშაობასთან**

ენერგია (ბერძ. მოქმედება, მოღვაწეობა) მატერიის ყველა ფორმის ურთიერთქმედებისა და მოძრაობის რაოდენობრივი ზომაა. ურთიერთქმედებისა და მოძრაობის მრავალფეროვნების გამო განასხვავებენ მექანიკურ, შინაგან, სითბურ, ელექტრომაგნიტურ, ბირთვულ და ა.შ. ენერგიებს. ენერგია კრებადი სიდიდეა. ბუნებაში მიმდინარე ნებისმიერი პროცესი ხორციელდება ენერგიის ერთი ტიპიდან მეორეში გარდაქმნისა და ერთი სხეულიდან მეორეზე გადაცემის გზით.

ბუნების ერთ-ერთი ფუნდამენტალური კანონი - **ენერგიის მუდმივობის კანონი** განსაზღვრავს სამყაროში არსებულ კანონზომიერებებსა და მიმდინარე პროცესებს:

➤ **იზოლირებული სისტემის სრული ენერგია ყოველთვის უცვლელი რჩება.**

ამუამად განვიხილავთ მექანიკურ ენერგიას, რომელიც შეიძლება განისაზღვროს, როგორც

➤ **სხეულის მიერ მექანიკური მუშაობის შესრულების უნარი.**

მექანიკური ენერგია შედგება ორი წევრისგან – კინეტიკური და პოტენციური ენერგიისგან.

კინეტიკური (ბერძ. მოძრაობა) ენერგია წარმოადგენს მოცემულ ინერციულ ათვლის სისტემაში სხეულის მექანიკური მოძრაობის ზომას. იგი დამოკიდებულია ამ სისტემის მიმართ სხეულის მოძრაობის სიჩქარეზე, ანუ ათვლის სისტემის შერჩევაზე.

შ სიჩქარით მოძრავი  $m$  მასის ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია გამოითვლება ფორმულით:

$$W_{კინ} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \quad (\vec{p} = m\vec{v}). \quad (27.1)$$

(27.1)-ის თანახმად იგი სკალარული სიდიდეა, ამასთანავე  $W_j \geq 0$ .

მაკროსხეულის გადატანითი მოძრაობისას მისი კინეტიკური ენერგია გამოითვლება (27.1)-ით, რადგან ამ მოძრაობის განმარტებიდან გამომდინარე, სხეულის ნებისმიერ ნაწილაკს დროის მოცემული მომენტისთვის ერთნაირი სიჩქარე გააჩნია. ნიუტონის პირველი კანონის თანახმად იზოლირებული სხეული მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით, ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგია არ იცვლება.

გამოვთვალოთ მუშაობა, რომელსაც ასრულებს  $m$  მასის სხეულზე მოქმედ ძალთა ტოლქმედი მისი გადატანითი მოძრაობისას 1-წერტილიდან 2-ში:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} = \int_1^2 \frac{dm\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} \quad ^{26}.$$

აქედან:

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (27.2)$$

(27.1)-დან გამომდინარე (27.2) ასე ჩაიწერება:

$$A_{12} = W_{j2} - W_{j1} = \Delta W_j. \quad (27.3)$$

წარმოადგენს მუშაობისა და კინეტიკური ენერგიის კავშირის თეორემას:

<sup>26</sup>  $\vec{v} d\vec{v} = v dv$  ტოლობის დამტკიცება მოცემულია ამოცანა 27.1-ში.

➤ **სხეულის გადაადგილებაზე ტოლქმედის მიერ შესრულებული მუშაობა სხეულის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების ტოლია**

ე.ი. თუ ტოლქმედი ძალა დადებით მუშაობას ასრულებს, სხეულის კინეტიკური ენერჯია იზრდება და პირიქით. რადგან (27.3) მიღებულია ნიუტონის მეორე კანონიდან, ამიტომ ეს თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი ტიპის ძალისთვის. (27.2)-დან გამომდინარე კინეტიკური ენერჯიაც ჯოულებში იზომება.

კინეტიკური ენერჯია, (27.1)-ის თანახმად, არაა დამოკიდებული სიჩქარის მიმართულებაზე, რის გამოც სხეულზე მოქმედი ნორმალური ძალები მუშაობას არ ასრულებს, რადგან მათი მოქმედებით მხოლოდ სიჩქარის მიმართულება იცვლება, მაგალითად, ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები.

ენერჯიის კრებადობიდან გამომდინარე, თუ გვაქვს  $n$  რაოდენობის ნაწილაკებისგან შემდგარი სისტემა, მაშინ მისი კინეტიკური ენერჯია იქნება:

$$W_{\text{კინ}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{p_i^2}{2m_i} . \quad (27.4)$$

გამოვთვალოთ, რა მაქსიმალური მუშაობის შესრულება შეუძლია  $\nu$  სიჩქარით მოძრავ სხეულს. ნიუტონის მესამე კანონიდან გამომდინარე, სხეულის მიერ შესრულებული მუშაობისთვის (27.2) ასე ჩაიწერება:

$$A' = -(W_{\text{კინ}62} - W_{\text{კინ}61}) = \frac{m\nu_1^2}{2} - \frac{m\nu_2^2}{2} , \quad (27.5)$$

სადაც  $\nu_1 = \nu$ . თუ  $\nu_2 = 0$ , ცხადია:

$$A' = \frac{m\nu^2}{2} = A_{\text{მკ}},$$

ე.ი.

➤ **მოძრავი სხეულის კინეტიკური ენერჯია იმ მაქსიმალური მუშაობის ტოლია, რომელიც მას შეუძლია შეასრულოს სრულ გაჩერებამდე.**

**ამოცანა 27.1.** დავამტკიცოთ, რომ  $\vec{v}d\vec{v} = \nu d\nu$ .

**ამოხსნა:**

რადგან  $\nu^2 = \nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2$ , ამიტომ  $d\nu^2 = d\nu_x^2 + d\nu_y^2 + d\nu_z^2$ . ვისარგებლოთ ფორმულით

$dX^n = nX^{n-1}dX$ , მაშინ

$$2\nu d\nu = 2\nu_x d\nu_x + 2\nu_y d\nu_y + 2\nu_z d\nu_z$$

სკალარული ნამრავლის განმარტების თანახმად

$$\nu_x d\nu_x + \nu_y d\nu_y + \nu_z d\nu_z = \vec{v}d\vec{v}, \quad \text{ე.ი. } \nu d\nu = \vec{v}d\vec{v}.$$

**ამოცანა 27.2.** 10 გ მასის 600 მ/წმ სიჩქარით მოძრავი ტყვია ხვდება 0,1 მ სისქის კედელს და მის გავლისას კარგავს ენერჯიის 2/3 ნაწილს. გამოთვალოთ კედლის წინაღობის საშუალო ძალა. რა მინიმალური სისქის კედელში დარჩებოდა ტყვია.

**ამოხსნა:**

(27.2)-ის თანახმად:

$$A_{12} = \frac{m\nu_2^2}{2} - \frac{m\nu_1^2}{2} = -\frac{2}{3} \frac{m\nu_1^2}{2}, \quad (1)$$

მეორე მხრივ წინაღობის ძალის მუშაობა:

$$A_{12} = FS \cos 180^\circ = -FS. \quad (2)$$

(1) და (2)-ის გატოლებით ვღებულობთ:

$$-\frac{2}{3} \frac{m v_1^2}{2} = -FS \rightarrow F = \frac{m v_1^2}{3S} = \frac{10^{-2} \cdot 36 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^{-1}} = 12 \quad (6),$$

კედელის მინიმალური სისქე, რომელშიდაც დარჩებოდა ტყვია აღვნიშნოთ  $d$ -თი, მაშინ (1) და (2) ასე ჩაიწერება:

$$A_{12} = 0 - \frac{m v_1^2}{2} = -\frac{m v_1^2}{2}, \quad A_{12} = -Fd.$$

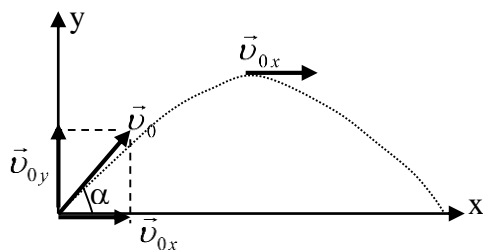
მათი გატოლებით ვღებულობთ:

$$d = \frac{m v_1^2}{2F} = \frac{10^{-2} \cdot 36 \cdot 10^4}{2 \cdot 12 \cdot 10^3} = 0,15 \quad (მ)$$

**ამოცანა 27.3.** ქვემეხიდან გასროლისას 80 კგ მასის ჭურვი იღებს 40 მგჯ ენერგიას. გამოთვალეთ რა კუთხით მოხდა გასროლა, თუ ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში ჭურვის კინეტიკური ენერგია 30 მგჯ-ის ტოლია (ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია).

**ამოხსნა:**

(27.1)-ის თანახმად გასროლის მომენტში ჭურვის სიჩქარე:



$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{0,კინ}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^7}{80}} = 10^3 \text{ მ/წმ.}$$

რადგან ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში სიჩქარეს გააჩნია მხოლოდ ჰორიზონტალური მდგენელი, ამიტომ

$$v_{0x} = \sqrt{\frac{2W_{კინ}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^7}{80}} = \frac{\sqrt{3}}{2} 10^3 \text{ მ/წმ.}$$

რადგან მოძრაობა ბალისტიკურია (§20) ამიტომ ცხადია

$$\cos \alpha = \frac{v_{0x}}{v_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{ე.ი } \alpha = 30^\circ.$$

## §28. სიმძლავრე

➤ **სიმძლავრე ფიზიკური სიდიდეა, რომელიც განსაზღვრავს მუშაობის შესრულების სიჩქარეს.**

თუ  $\Delta t$  დროში შესრულდა  $A$  მუშაობა, საშუალო სიმძლავრე იქნება:

$$N_{\text{საშ}} = \frac{A}{\Delta t}. \quad (28.1)$$

სოლო მყისი სიმძლავრე მიიღება ფორმულით:

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} N_{\text{საშ}} = \frac{dA}{dt}. \quad (28.2)$$

აქ  $dA$  ნიშნავს უსასრულოდ მცირე მუშაობას<sup>27</sup>. მუშაობის შესრულება დაკავშირებულია ენერგიის ერთი ფორმიდან მეორეში გადასვლასთან, რის გამოც სიმძლავრე შეიძლება განიხილოს, როგორც ენერგიის გარდაქმნის სიჩქარე

<sup>27</sup>ამ საკითხს დაეუბრუნდებით §76.

$$N = \frac{dW}{dt} . \quad (28.3)$$

მაგალითად, ძრავის სიმძლავრეში ვგულისხმობთ იმ სითბურს, თუ ელექტრული ენერჯის რაოდენობას, რომელიც ძრავამ დროის ერთეულში გარდაქმნა მექანიკურ ენერჯიად.

სიმძლავრის ერთეულია **ვატი (ვტ)**.  $1 \text{ ვტ} = 1 \text{ ჯ/წმ}$ . პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება უფრო მსხვილი ერთეულები, როგორცაა **კილოვატი (კვტ)**, **მეგავატი (მგვტ)**, ასევე **ცხენის ძალა<sup>28</sup> (ცხ.ძ)**.

1 ცხ.ძ. (მეტრული) = 735,5 ვტ  $\approx$  736 ვტ და 1 ცხ.ძ. (ინგლისური) = 745,7 ვტ.

სატრანსპორტო საშუალებების ძრავათა სიმძლავრის დასახასიათებლად უფრო ხელსაყრელია (28.2)-ის შემდეგი სახით გარდაქმნა

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} , \quad (28.4)$$

ე.ი.,

➤ **ძრავის სიმძლავრე შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც წვეის ძალისა და სიჩქარის სკალარული ნამრავლი.**

თუ ძალა სიჩქარის თანხვედრილია, მაშინ

$$N = Fv , \quad (28.5)$$

რადგან ტრანსპორტის ძრავის სიმძლავრე განსაზღვრული სიდიდეა, ამიტომ მოცემული ძრავისთვის დაცული უნდა იყოს ტოლობა:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2 \rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{v_1}{v_2} . \quad (28.6)$$

(28.6)-ფორმულიდან ჩანს, რომ **მოცემული ძრავის ტრანსპორტის სიჩქარე წვეის ძალის უკუპროპორციულია**. ამ პრინციპზეა დამყარებული სხვადასხვა სატრანსპორტო საშუალებებში სიჩქარეთა კოლოფის მოქმედების პრინციპი. მართლაც, აღმართზე ასვლისას წვეის ძალის გასაზრდელად საჭიროა სიჩქარის შემცირება, რასაც პრაქტიკულად მძღოლი ახორციელებს დაბალ სიჩქარეზე გადართვით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ძრავა “ჩაქრება”.

**ამოცანა 28.1.** რა მინიმალური სიმძლავრეა საჭირო 200 კგ მასის ტვირთის დასაძვრელად იატაკზე 0,5 მ/წმ სიჩქარით, თუ ხახუნის კოეფიციენტია 0,45.

**ამოხსნა:**

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{\text{ხახ}} . \quad (1)$$

მინიმალური ძალისათვის რომელიც დაძრავს ტვირთს (1) ასე ჩაიწერება:

$$0 = \vec{F} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{\text{ხახ}} .$$

დაგვემიღებთ ვღებულობთ:

$$\begin{cases} 0 = F - F_{\text{ხახ}} \\ 0 = N - P \end{cases} \rightarrow F = F_{\text{ხახ}} = \mu N, \quad N = P \rightarrow F = \mu mg .$$

ანუ ეს ძალა სიდიდით უძრავობის ხახუნის ძალის ტოლია.

<sup>28</sup>ცხენის ძალა შემოტანილი იქნა ინგლისელი ინჟინრის ჯეიმს ვატის მიერ, ახლად შექმნილი ორთქლის ძრავის სიმძლავრის შესაფასებლად.

$$F = \mu mg = 0,45 \cdot 200 \cdot 10 = 1,8 \text{ (კნ)}.$$

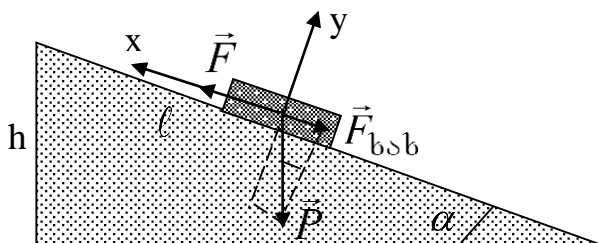
(28.5)-ის თანახმად მინიმალური სიმძლავრე იქნება:

$$N = 1,8 \cdot 0,5 = 0,9 \text{ (კვტ)}.$$

**ამოცანა 28.2.** რა მაქსიმალური დახრილობის აღმართის დაძლევა შეუძლია 20 მ/წმ სიჩქარით მოძრავ 1 ტ მასის მქონე ავტომობილს, თუ მისი სიმძლავრე 90 ცხ.ძ-აა, ხოლო ხახუნის ძალა სიმძიმის ძალის 5%-ს შეადგენს.

**ამოხსნა:** თანაბარი მოძრაობის გამო

ნიუტონის II კანონის თანახმად:



$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{\text{bsb}} = 0. \text{ } 0x \text{ ღერძზე}$$

დაგეგმილებით გვაქვს:

$$F - P \sin \alpha - F_{\text{bsb}} = 0$$

$$F - P \sin \alpha - F_{\text{bsb}} = 0 \quad \text{საიდანაც } \begin{cases} \text{წვევის} \\ \text{ძალა} \end{cases} \quad F = P \sin \alpha + 0,05P, \quad \begin{cases} \text{ხოლო} \\ \text{სიმძლავრე} \end{cases} \quad (1)$$

$$N = Fv = P \sin \alpha - F_{\text{bsb}} v$$

სიბრტყის დახრილობა

$$\frac{h}{l} = \sin \alpha = \frac{N - 0,05mgv}{mgv}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{90 \cdot 736 - 0,05 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 20}{10^3 \cdot 10 \cdot 20} = 0,28, \quad \alpha = 17^\circ.$$

**ამოცანა 28.3.** 10 კგ მასის სხეულის მოძრაობის განტოლებაა  $x = 0,1t^3 + t^2 - 3$ . გამოთვალეთ ნაწილაკზე მოქმედი ძალთა ტოლქმედის მიერ შესრულებული მუშაობა [1;3] წმ ინტერვალში, სიმძლავრის საშუალო სიდიდე და მისი მნიშვნელობა 3 წმ-სთვის.

**ამოხსნა:**

მუშაობის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (27.2)-ით. წინასწარ გამოვიანგარიშოთ სხეულის სიჩქარე  $t_1 = 1$  წმ და  $t_2 = 3$  წმ-სთვის. სიჩქარის განმარტების თანახმად ვღებულობთ:

$$v = v_x = \frac{dx}{dt} = 0,3t^2 + 2t,$$

აქედან:

$$v_1 = 2,3 \text{ მ/წმ}, \quad v_2 = 8,7 \text{ მ/წმ},$$

მაშინ (27.2)-ის თანახმად:

$$A_{12} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) = 5(8,7^2 - 2,3^2) = 404,9 \text{ (ჯ)}.$$

საშუალო სიმძლავრე დროის მოცემულ ინტერვალში იქნება:

$$N_{\text{სშ}} = \frac{A}{\Delta t} = \frac{404,9}{3-1} = 202,5 \text{ (ვტ)}.$$

$t = 3$  წმ-ისათვის მყისი სიმძლავრის დასადგენად ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$N = Fv_2 = ma_2v_2,$$

სადაც აჩქარება:

$$a = a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0,6t + 2,$$

$$a_2 = 0,6 \cdot 3 + 2 = 3,8 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}.$$

შესაბამისად:

$$N_{(t=3)} = 10 \cdot 3,8 \cdot 8,7 = 330,6 \text{ (ვტ).}$$

**§29. სტაციონალური პოტენციალური ველი.  
პოტენციური ენერგია და კონსერვატული ძალები**

ძალთა ველი ეწოდება სივრცის იმ ნაწილს, რომლის ნებისმიერ წერტილში მოთავსებულ ნაწილაკზე მოქმედებს ძალა, რომელიც წერტილიდან წერტილამდე გარკვეული კანონზომიერებით იცვლება. მაგალითად დედამიწის სიმძიმის ძალთა ველი, სითხის ან აირის ნაკადში წინააღმდეგობის ძალთა ველი. თუ ძალთა ველის ნებისმიერ წერტილში მოქმედი ძალა არაა დამოკიდებული დროზე, მაშინ ასეთ ველს **სტაციონალურს** (დროში მუდმივს) უწოდებენ. თუ ამ ველში მოთავსებულ სხეულს, მისი სივრცეში მდებარეობისა და ასევე მის შემადგენელ ნაწილთა ურთიერთგანლაგების (კონფიგურაციის) გამო, შესწევს უნარი შეასრულოს მუშაობა. მაშინ ასეთ ველს **პოტენციურ ველს** უწოდებენ, ხოლო სხეულსა და ველის ურთიერთქმედების ენერგიას - **პოტენციურ ენერგიას**.

➤ **პოტენციური ენერგია სხეულის და ველის ( სხეულთა სისტემის) ურთიერთქმედების მახასიათებელი სიდიდეა.**

მაგალითად დედამიწის ზედაპირიდან აწეულ სხეულს, ან შეკუმშულ (გაჭიმულ) ზამბარას განთავისუფლების შემდეგ შეუძლიათ მუშაობის შესრულება, ანუ საწყის მდგომარეობაში მათ გააჩნდათ გარკვეული პოტენციური ენერგიის მარაგი. პოტენციურ ველში მოქმედ ძალებს **კონსერვატული ძალები** ეწოდება. მათ მექანიკიდან მიეკუთვნება გრავიტაციის (სიმძიმის), დრეკადობის ძალა. ეს ძალები განისაზღვრება ორი კრიტერიუმით:

ა) ამ ძალთა მნიშვნელობა დამოკიდებულია მხოლოდ სხეულის მდებარეობაზე (კოორდინატებზე) სივრცეში.

ბ) ამ ძალთა მუშაობა სხეულის გადაადგილებისას განისაზღვრება მხოლოდ სხეულის საწყისი და საბოლოო მდებარეობით, ანუ არ არის დამოკიდებული სხეულის მოძრაობის ტიპზე და ტრაექტორიის ფორმაზე. განმარტებიდან გამომდინარე ამ ძალთა მუშაობა შეკრულ ტრაექტორიაზე ნულის ტოლია:  $\int \vec{F} d\vec{S} = 0$ .

უნდა გვახსოვდეს, რომ როდესაც ვხმარობთ ტერმინს სხეულის პოტენციური ენერგია იგულისხმება, რომ იგი იმყოფება სტაციონალურ პოტენციურ ველში და ეს ენერგია არის პოტენციური ველისა და სხეულის ურთიერთქმედების ენერგია. პოტენციური ენერგიის განმარტებიდან გამომდინარე, კონსერვატულ ძალთა მიერ შესრულებული მუშაობა დაკავშირებულია პოტენციური ენერგიის ცვლილებასთან. ნებისმიერი ფიზიკური სისტემა მიისწრაფის დაიკავოს ისეთი მდგომარეობა, რომელსაც შეესაბამება პოტენციური ენერგიის მინიმუმი. ამიტომ თუ კონსერვატული ძალები ასრულებს დადებით მუშაობას, მაშინ სხეულის მდგომარეობა ველში შეიცვლება მანამ, სანამ არ ამოიწურება ამ ძალთა მიერ დადებითი მუშაობის შესრულების შესაძლებლობა. ამ მდგომარეობისთვის პირობითად თვლიან, რომ სხეულის პოტენციური ენერგია ნულია. ე.ი. კონსერვატული ძალების მიერ დადებითი მუშაობის შესრულებისას სხეულის სისტემის პოტენციური ენერგია მცირდება და პირიქით. ანუ:

➤ **კონსერვატულ ძალის მუშაობა ტოლია სხეულთა სისტემის პოტენციური ენერგიის ცვლილებისა შებრუნებული ნიშნით**

$$A_{12} = -(W_{პოტ2} - W_{პოტ1}) = -\Delta W_{პოტ} \quad (29.1)$$

შეგნიშნოთ, რომ (27.4) უფრო ზოგადია, ვიდრე (29.1), რადგან იგი სამართლიანია ნებისმიერი ტიპის ძალისთვის, ხოლო ეს უკანასკნელი მხოლოდ კონსერვატიული სისტემისთვის. კონსერვატიული ძალები ასრულებს დადებით მუშაობას პოტენციური ენერჯის მარაგის ხარჯზე და ეს პროცესი შეიძლება გაგრძელდეს მანამ, სანამ არ ამოიწურება ეს მარაგი. ამ მდგომარეობისთვის პირობითად თვლიან, რომ სხეულის პოტენციური ენერჯია ნულია. თუ დავუშვებთ, რომ  $W_{პოტ2} = 0$ , მაშინ  $A_{12} = W_{პოტ1}$  ანუ:

➤ **სხეულის პოტენციური ენერჯია იმ დადებითი მუშაობის ტოლია, რომელსაც შეასრულებს მასზე მოქმედი კონსერვატიული ძალა მოცემული მდგომარეობიდან სხეულის პოტენციურ ენერჯის ნულოვან დონეზე გადაყვანისას.**

პრაქტიკულად კი, ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე, პოტენციურ ენერჯის ნულოვან დონეს-მნიშვნელობას შეუსაბამებენ სივრცეში სისტემის ისეთი მდებარეობას, რომელიც უფრო მოსახერხებელია შემდგომი გამოთვლებისთვის. თუ სხეული აღმოჩნდება ნულოვანი დონის „ქვემოთ“ პოტენციური ენერჯია უარყოფითი იქნება განსხვავებით კინეტიკური ენერჯისგან, რომელიც ყოველთვის დადებითია. ამიტომ სხეულის პოტენციური ენერჯის მნიშვნელობის მოცემისას აუცილებელია მივუთითოთ ნულოვანი დონის მდებარეობა.

(29.1)-ის თანახმად, კონსერვატიულ ძალის ელემენტარული მუშაობა ასე ჩაიწერება:

$$dA = -dW_{პოტ} \quad (29.2)$$

(26.4)-ის გათვალისწინებით კონსერვატიული ძალა ვექტორული სახით ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\vec{F} = -\left( \vec{i} \frac{\partial W_{პოტ}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial W_{პოტ}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial W_{პოტ}}{\partial z} \right) = -grad W_{პოტ} \quad (29.3)$$

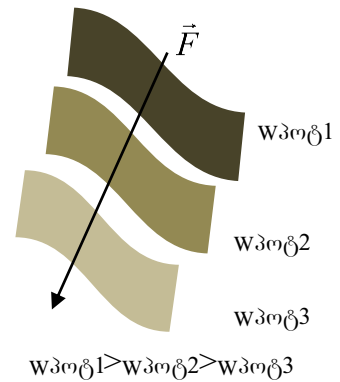
შესაბამისად კონსერვატიული ძალის გეგმილები დეკარტის სისტემაში იქნება:

$$F_x = -\frac{\partial W_{პოტ}}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W_{პოტ}}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial W_{პოტ}}{\partial z} \quad (29.4)$$

“-” მიუთითებს, რომ კონსერვატიული ძალა მიმართულია პოტენციური ენერჯის უსწრაფესი შემცირების მიმართულებით.

შემოვიღოთ ექვიპოტენციური ზედაპირის ცნება. იგი ვუწოდოთ ველის იმ წერტილთა ერთობლიობას, რომელთაც ერთნაირი პოტენციური ენერჯია გააჩნიათ  $W_{პოტ}(x, y, z) = const$

(ნახ.29.1). ამ ზედაპირზე ნაწილაკის გადაადგილებისას კონსერვატიული ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, (29.1)-ის თანახმად, ნულის ტოლია, რაც იმას ნიშნავს, რომ კონსერვატიული ძალა მიმართულია ექვიპოტენციური ზედაპირის მართობულად ( $A = \int \vec{F} d\vec{S} = 0$  ანუ  $\vec{F}$  მართობია  $\vec{S}$ -ის) პოტენციური ენერჯიაც ჯოულებში იზომება და ისევე როგორც კინეტიკური ენერჯია კრებადი სიდიდეა.



ნახაზი 29.1

<sup>29</sup>რაიმე სკალარული სიდიდის (ტემპერატურა, კონცენტრაცია) გრადიენტი (grad, ∇) წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც მიმართულია ამ ამ სიდიდის უსწრაფესი ზრდის მიმართულებით და რიცხობრივად ტოლია ამ მიმართულებით სიგრძით ერთეულზე მისი ცვლილებისა.

**ამოცანა 29.1.** ნაწილაკის პოტენციური ენერგია მოცემულია ფორმულით  $W = x^2 + 4xy + 3y^2z$ . ჩავწეროთ მასზე მოქმედი კონსერვატიული ძალა.

**ამოხსნა:**

$$\frac{\partial W_{\text{პოტ}}}{\partial x} = 2x + 4y, \quad \frac{\partial W_{\text{პოტ}}}{\partial y} = 4x + 6yz, \quad \frac{\partial W_{\text{პოტ}}}{\partial z} = 3y^2.$$

მაშინ (29.7)-ის თანახმად:

$$\vec{F} = -(\vec{i}(2x + 4y) + \vec{j}(4x + 6yz) + \vec{k}3y^2).$$

**ამოცანა 29.2.** ძალა, რომელიც საჭიროა ზამბარის შესაკავებლად ნორმალურ სიგრძესთან შედარებით  $x$ -სიდიდით შეკუმშულ მდგომარეობაში, მოიცემა ფორმულით  $F = kx + ax^3 + bx^4$ . გამოთვალეთ ზამბარის შეკუმშვაზე შესრულებული მუშაობა.

**ამოხსნა:**

დრეკადი დეფორმაციის ფარგლებში  $F_{\text{დრ}} = -F$ , ხოლო  $A_{\text{დრ}} = -A$ , (29.2)-ის თანახმად:

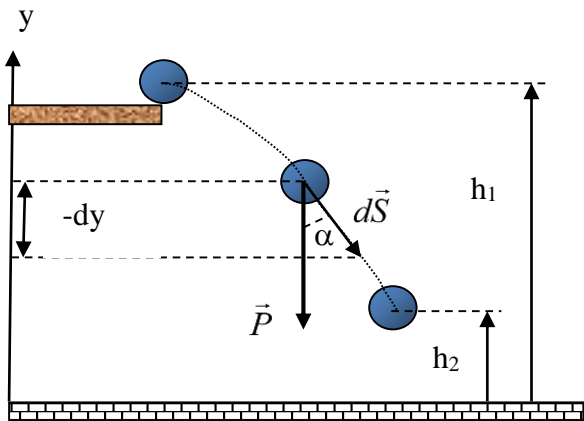
$$W_{\text{პოტ}} = -\int F_{\text{დრ}} dx = \int (kx + ax^3 + bx^4) dx = \left( \frac{kx^2}{2} + \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^5}{5} \right) + const. \quad (1)$$

არადეფორმირებულ მდგომარეობაში, ანუ როცა  $x = 0$ , ზამბარის პოტენციური ენერგია ჩავთვალოთ ნულის ტოლად. მაშინ (1)-ში  $const = 0$  და შესრულებული მუშაობა იქნება:

$$A_{12} = -(W_{\text{პოტ}2} - W_{\text{პოტ}1}) = -W_{\text{პოტ}2} = -W_{\text{პოტ}} = -\left( \frac{kx^2}{2} + \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^5}{5} \right).$$

### §30. გრავიტაციული პოტენციური ენერგია

ბანვიხილთ დედამიწის გრავიტაციულ ველისა და  $m$  მასის ნაწილაკი ურთიერთქმედება. დედამიწის გრავიტაციული ველის სრული ანალიზისთვის საჭიროა გავითვალისწინოთ, რომ გრავიტაციული ველი ზოგადად არაერთგვაროვანია - გრავიტაციული დაძაბულობა დედამიწის ზედაპირიდან მანძილის ცვლილებით იცვლება (§18), შესაბამისად იცვლება გრავიტაციული ძალაც. დასაწყისში დაეუშვათ, რომ ნაწილაკი იმყოფება დედამიწის ზედაპირიდან



ნახაზი 30.1

$h_1 \ll R$  ( $R$  - დედამიწის რადიუსი) სიმაღლეზე. ასეთ შემთხვევაში დიდი სიზუსტით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ველი ერთგვაროვანია ( $\vec{g} = const$ ). გამოვთვალოთ მუშაობა, რომელსაც ასრულებს  $\vec{P} = m\vec{g}$  სიმძიმის ძალა ნაწილაკის ვარდნისას (ნახ. 30.1). (29.1)-ის თანახმად:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{P} d\vec{S} = \int_1^2 P dS \cos \alpha = -P \int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1),$$

სადაც  $y_2 - y_1 = h_2 - h_1$  ე.ი.

$$A_{12} = -mg(h_2 - h_1) = -(mgh_2 - mgh_1).$$

სიმძიმის ძალის მუშაობა არ არის დამოკიდებული ტრაექტორიის ფორმაზე და განისაზღვრება ნაწილაკის საწყისი და საბოლოო მდებარეობებით, ე.ი. სიმძიმის ძალა კონსერვატიული ძალაა და შესაძლებელია მიღებული შედეგის გავუტოლოთ (29.1)-ს

$$mgh_2 - mgh_1 = W_{პოტ2} - W_{პოტ1}.$$

მიღებული განტლება წარმოადგენს ნაწილაკის და დედამიწის ურთიერთქმედების გრავიტაციული პოტენციური ენერჯიის ცვლილებას 1-წერტილიდან 2-ში გადასვლის დროს. როგორც ავნიშნეთ სხეულის პოტენციური ენერჯიის მნიშვნელობა დამოკიდებულია ნულოვანი დონის შერჩევაზე. ამიტომ პოტენციურ ენერჯიას წერენ მუდმივი შესაკრების სიზუსტით:

$$W_{პოტ} = mgh + C. \quad (30.1)$$

სადაც  $C$  მუდმივას მნიშვნელობის დადგენა ხდება დასმული ამოცანიდან გამომდინარე. დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში უმრავლეს შემთხვევაში პოტენციური ენერჯიის ათვლის დონედ (ნულად) მოსახერხებელია ავიღოთ დედამიწის ზედაპირი, ე.ი როცა  $h=0$ , მაშინ  $W_{პოტ} = 0$  და (30.1)-ში  $C = 0$ . მაშასადამე დედამიწისა და სხეულის ურთიერთქმედების პოტენციური ენერჯია განისაზღვრება იმ  $h$  სიმაღლით, რომლითაც ნაწილაკი დაშორებულია დედამიწის ზედაპირს

$$W_{პოტ} = mgh. \quad (30.2)$$

თუმცა სიმარტივისთვის (30.2)-ს  $m$  მასის სხეულის პოტენციურ ენერჯიას უწოდებენ სიმძიმის ძალთა ველში.

განვიხილოთ დედამიწისა და სხეულის ურთიერთქმედება, როდესაც სხეული საკმაოდ დაშორებულია დედამიწას (ველის ერთგვაროვნება დარღვეულია). მაგალითად  $m$  მასის მეტეორიტის მოძრაობა დედამიწის გრავიტაციულ ველში მრუდწირულ ტრაექტორიაზე (ნახ.

30.2). გამოვთვალოთ გრავიტაციული ძალის  $F = G \frac{Mm}{r^2}$  მუშაობა მეტეორიტის

გადაადგილებისას 1-წერტილიდან 2-ში:

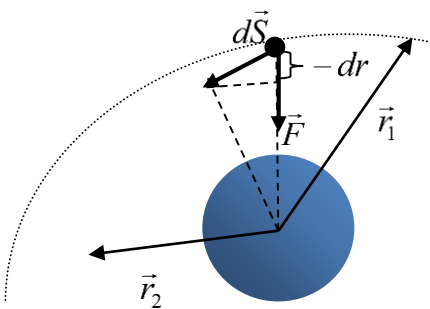
$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} = - \int_{r_1}^{r_2} F dr = -GmM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = G \frac{mM}{r_2} - G \frac{mM}{r_1}. \quad (30.3)$$

ცხადია, გრავიტაციული ძალა კონსერვატიულია, მისი მუშაობა დამოკიდებულია მხოლოდ ტრაექტორიის საწყის და საბოლოო წერტილების მდებარეობაზე ( $r_1, r_2$ ). გავუტოლოთ (30.3) (29.1)-ს

$$G \frac{mM}{r_2} - G \frac{mM}{r_1} = -(W_{პოტ2} - W_{პოტ1}),$$

ე.ი., დედამიწის ზედაპირიდან ნებისმიერ მანძილზე ( $r > R$ ) არსებული სხეულის პოტენციური ენერჯია გამოითვლება ფორმულით

$$W_{პოტ} = -G \frac{mM}{r} + C. \quad (30.4)$$



ნახაზი 30.1

დედამიწის ცენტრიდან უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში ( $r \rightarrow \infty$ ) გრავიტაციული ურთიერთქმედება  $W_{\text{პოტ}} \rightarrow 0$ . მაშინ (30.4)-ში  $C = 0$  და:

$$W_{\text{პოტ}} = -G \frac{mM}{r}. \quad (30.5)$$

თუ სხეული უახლოვდება დედამიწის ზედაპირს, მისი გრავიტაციული პოტენციური ენერგია მცირდება. როდესაც სხეული იმყოფება დედამიწის ზედაპირის მახლობლად, მაშინ (30.4) შეიძლება დავიყვანოთ (30.2)-ზე (იხ. ამოცანა 30.3.).

შეგნიშნოთ რომ, (30.5)-ის თანახმად, ეს ენერგია ყოველთვის უარყოფითია (გარდა უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა, სადაც იგი ნულს უტოლდება). ეს ფორმულები შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი ციური სხეულის გრავიტაციული ველისათვის.

შემოვიღოთ ცენტრალური ძალის ცნება:

- *ცენტრალური ძალა ისეთი ძალაა, რომლის მნიშვნელობაც დამოკიდებულია მხოლოდ მოცემული სხეულის მდებარეობაზე ერთი გარკვეული წერტილის (ძალთა ცენტრის) მიმართ (ამ წერტილში ჩვეულებრივად იმყოფება მეორე სხეულის ცენტრი) და მიმართულია მათი შემაერთებელი წრფის გასწვრივ.*

ზოგადად ეს ძალები ასე ჩაიწერება:

$$\vec{F}(r) = F(r)\vec{r}_0.$$

განმარტებიდან გამომდინარე ცენტრალური ძალები კონსერვატულია და მათი მუშაობა, (30.3)-ის ანალოგიურად, მოიცემა ფორმულით:

$$A_{12} = -(W_{\text{პოტ}2} - W_{\text{პოტ}1}) = -\int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \quad (30.6)$$

ცხადია გრავიტაციის ძალები ცენტრალურია. დედამიწის შემთხვევაში ამ ძალთა ცენტრი ემთხვევა დედამიწის ცენტრს. სიმძიმის ძალებიც ცენტრალურია, მხოლოდ მათი ცენტრი უსასრულობაში მდებარეობს. დრეკადობის ძალებიც (იხ. (23.1)) მიეკუთვნება ცენტრალურ ძალთა ჯგუფს.

**ამოცანა 30.1.** 8 მ სიმაღლის აიენიდან ვერტიკალურად ზევით 10 მ/წმ სიჩქარით აისროლეს 1 კგ მასის ბურთი. გამოთვალეთ სიმძიმის ძალის მუშაობა ბურთის ზემოთ და ქვემოთ მოძრაობისას, ასევე სრული მუშაობა, თუ ბურთი ვარდება მიწაზე.

**ამოხსნა:**

გამოვთვალოთ, რა მანძილზე ავა ბურთი ზევით:

$$h_2 - h_1 = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{100}{20} = 5 \text{ (მ)}.$$

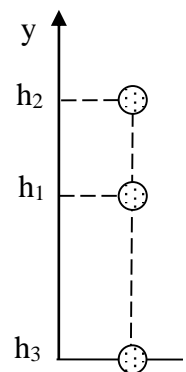
$$A_{12} = -mg(h_2 - h_1) = -50 \text{ (ჯ)}.$$

$$A_{23} = -mg(h_3 - h_2) = 1 \cdot 10 \cdot (5 + 8) = 130 \text{ (ჯ)}.$$

$$A_{13} = -mg(h_3 - h_1) = 1 \cdot 10 \cdot 8 = 80 \text{ (ჯ)}.$$

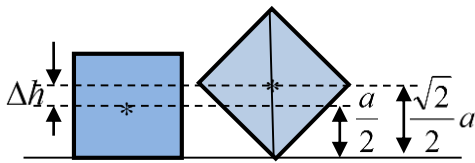
ცხადია, იგივე შედეგს მივიღებთ სრული მუშაობის შემდეგი სახით გამოთვლისას:

$$A_{13} = A_{12} + A_{23}.$$



**ამოცანა 30.2.** რა მინიმალური მუშაობაა საჭირო  $a$  წიბოს მქონე  $m$  მასის კუბის გადასაბრუნებლად მეორე წახნაგზე.

**ამოხსნა:**



მინიმალური მუშაობა, რომელიც საჭიროა, კუბის სიმძიმის ძალის დასაძლევად წახნაგის თანახმად იქნება:

$$A_{12} = -mg(h_2 - h_1) = -mg\Delta h = -mg\frac{\sqrt{2}-1}{2}a.$$

**ამოცანა 30.3.** ვაჩვენოთ, რომ თუ  $m$  მასის სხეული იმყოფება დედამიწის ზედაპირიდან  $h \ll R$  სიმაღლეზე მისი პოტენციური ენერგიის ფორმულა (30.4) დაიყვანება (30.2)-ზე.

**ამოხსნა:**

(30.4) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$W_{\text{პოტ}} = -G\frac{mM}{R+h} + C. \quad (1)$$

პოტენციური ენერგიის ათვლის დონედ (ნულად) შევარჩიოთ დედამიწის ზედაპირი ე.ი. როცა  $h = 0$ ,  $W_{\text{პოტ}} = 0$ . მაშინ (1)-ის თანახმად:

$$0 = -G\frac{mM}{R} + C,$$

აქედან:

$$C = G\frac{mM}{R}.$$

(1)-ში გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$W_{\text{პოტ}} = -G\frac{mM}{R+h} + G\frac{mM}{R} = GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = GmM\frac{h}{R^2 + Rh}. \quad (2)$$

რადგან  $h \ll R$ , ამიტომ  $Rh \ll R^2$  და (2)-დან მიიღება:

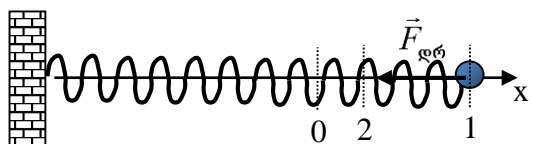
$$W_{\text{პოტ}} = G\frac{mMh}{R^2} = G\frac{M}{R^2}mh. \quad (3)$$

(18.2)-ის  $\left(G\frac{M}{R^2} = g\right)$  (3)-ში ჩასმით მიიღება:

$$W_{\text{პოტ}} = mgh$$

### §31. დრეკად დეფორმირებული სხეულის პოტენციური ენერჯია

ზჩვენოთ, რომ დრეკადობის ძალებიც კონსერვატულია. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: ერთი ბოლოთი დამაგრებული ზამბარა ჩამოცმულია სიმზე, მის თავისუფალ ბოლოზე მოთავსებულია დიამეტრზე გახვრეტილი მცირე ზომის ბურთულა, რომელსაც ზამბარასთან ერთად თავისუფლად -ხახუნის გარეშე შეუძლია მოძრაობა ჰორიზონტალური სიმის გასწვრივ (ნახ. 31.1).  $0x$  ღერძი შევუთავსოთ სიმს, ხოლო ათვლის  $0$  წერტილი - ბურთულის მდებარეობას არადეფორმირებული ზამბარის შემთხვევაში.



ნახაზი 31.1

თუ ზამბარას გავჭიმავთ (შეკუმშავთ), მაშინ დრეკადობის ძალა  $\vec{F}_{გრ} = -k\Delta\vec{l}$   $0x$  ღერძზე დაგვემიღებისას მიიღებს სახეს  $(F_{გრ})_x = -kx$ . სადაც  $x\Delta\vec{l}$  -ის გვემილია და შეესაბამება ბურთულას წანაცვლებას  $0$  წერტილის მიმართ. გამოვთვალოთ ამ ძალის მუშაობა ბურთულის

გადაადგილებისას  $1$ -წერტილიდან  $2$ -ში:

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} (F_{გრ})_x dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = - \left( \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right), \quad (31.1)$$

სადაც  $x_1, x_2$  ზამბარის ბოლოს (ბურთულას) კოორდინატებია  $1$  და  $2$  წერტილებში. როგორც (31.1)-დან ჩანს, დრეკადობის ძალის მუშაობა არ არის დამოკიდებული ტრაექტორიის ფორმაზე და განისაზღვრება სხეულის საწყისი და საბოლოო კოორდინატებით<sup>30</sup>, ე.ი. იგი კონსერვატული ძალაა და (31.1) შეგვიძლია (29.1)-ის თანახმად ჩავწეროთ:

$$\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = W_{პოტ2} - W_{პოტ1}.$$

მაშასადამე, დრეკად დეფორმირებული ზამბარის პოტენციური ენერჯია (30.4)-ის მსგავსად გამოითვლება ფორმულით

$$W_{პოტ}(x) = \frac{kx^2}{2} + C. \quad (31.2)$$

რადგან არადეფორმირებულ ზამბარას ( $x=0$ ) მუშაობის შესრულება არ შეუძლია, ამ მდგომარეობას შევუსაბამოთ პოტენციური ენერჯიის ნული  $W_{პოტ}(0)=0$ , მაშინ (31.2)-დან  $C=0$  და:

$$W_{პოტ} = \frac{kx^2}{2}. \quad (31.3)$$

(31.3) წარმოადგენს არადეფორმირებული მდგომარეობიდან ( $x=0$ )  $x$  სიდიდით გაჭიმული (ან შეკუმშული) დრეკადი ზამბარის პოტენციურ ენერჯიას. იგი ყოველთვის დადებითი სიდიდეა.

გამოვთვალოთ  $\Delta l$  სიდიდით გაჭიმული (შეკუმშული) დრეკადი ღეროს პოტენციური ენერჯია და ენერჯიის სიმკვრივე. (31.3)-ში შევიტანოთ (23.6) და გავითვალისწინოთ, რომ  $x=\Delta l$  და მივიღებთ:

<sup>30</sup> შეიძლება უფრო რთული შემთხვევების განხილვა, როდესაც ზამბარის ბოლო მრუდწირულად მოძრაობს, ეს გამოიწვევდა გათვლების გართულებას, შედეგი კი უცვლელი იქნებოდა.

$$W_{\text{პოტ}} = \frac{ES}{2l_0} \Delta l^2 = \frac{ESl_0}{2} \cdot \left( \frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 = \frac{E\varepsilon^2}{2} \cdot V . \quad (31.4)$$

$V = Sl_0$  – დეროს მოცულობაა.

ენერჯის სიმკვრივე, ანუ მოცულობის ერთეულში აკუმულირებული ენერჯია ( $w = W/V$ ) იქნება:

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2} . \quad (31.5)$$

(31.4) და (31.5)-ის მსგავსად შეიძლება ჩავწეროთ ძვრის დეფორმაციის დროს პოტენციური ენერჯისა და მისი სიმკვრივის ფორმულები:

$$W_{\text{პოტ}} = \frac{G\gamma^2}{2} \cdot V , \quad w = \frac{G\gamma^2}{2} .$$

ენერჯის სიმკვრივის ერთეულია ჯ/მ<sup>3</sup>.

პოტენციურ ენერჯიასთან დაკავშირებით ჩვენ მიერ განხილული მაგალითებიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ კონსერვატული ძალების უარყოფითი მუშაობის ხარჯზე შეიძლება სხეულთა სისტემის მიერ პოტენციური ენერჯის დაგროვება მისი შემდგომი გამოყენებისთვის მუშაობის შესრულების თვალსაზრისით.

შევნიშნოთ, რომ კინეტიკური ენერჯისგან განსხვავებით პოტენციურ ენერჯიას ერთადერთი გამოსახულება არ გააჩნია. მისი მათემატიკური ფორმა (30.2), (30.5), (31.3) დამოკიდებულია სხეულთა ურთიერთქმედების ტიპზე (გრავიტაცია, დრეკადობა).

### **§32. მექანიკური ენერჯიის მუდმივობის კანონი და მისი გამოყენება**

ბანჯისილოთ ჩაკეტილი კონსერვატული სისტემა<sup>31</sup> – გარე ძალებისგან იზოლირებული სხეულთა ჯგუფი, რომელთა შორის ურთიერთქმედება ხორციელდება მხოლოდ კონსერვატული ძალებით. მაშინ შესაძლებელია თითოეულ სხეულზე მოქმედ ძალთა ტოლქმედის მუშაობა დავუკავშიროთ ამ სხეულის პოტენციური ენერჯიის ცვლილებას (§29). პოტენციური ენერჯის შეკრებადობის გამო სისტემაში მოქმედი ძალთა მუშაობა ასევე დაკავშირებული იქნება სისტემის პოტენციური ენერჯიის ცვლილებასთან, ე.ი.:

$$A = -\Delta W_{\text{პოტ}} . \quad (32.1)$$

მეორეს მხრივ, §27-ის თანახმად, სხეულზე მოქმედ ძალთა ტოლქმედის მუშაობა ტოლია მისი კინეტიკური ენერჯიის ცვლილებისა. კინეტიკური ენერჯის ადიტიურობიდან გამომდინარე, ეს შედეგი შეიძლება განვაზრცოთ მთელ სისტემაზე, ე.ი.

$$A = \Delta W_{\text{კინ}} . \quad (32.2)$$

(32.1) და (32.2)-ის გატოლებით მივიღებთ:

$$\Delta W_{\text{კინ}} + \Delta W_{\text{პოტ}} = \Delta(W_{\text{კინ}} + W_{\text{პოტ}}) = \Delta W = 0 \quad \text{ანუ} \quad W = \text{const} , \quad (32.3)$$

სადაც  $W = W_{\text{კინ}} + W_{\text{პოტ}}$  წარმოადგენს სისტემის მექანიკურ ენერჯიას. (32.3) მექანიკური ენერჯის მუდმივობის კანონია:

<sup>31</sup>რადგან ინერციის ძალები გარე ძალებია, ამიტომ ჩაკეტილი სისტემები შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ ათვლის ინერციულ სისტემებში.

➤ **ჩაკეტილი კონსერვატული სისტემის სრული მექანიკური ენერგია არ იცვლება, რჩება მუდმივი.**

აქედან ჩანს სახელწოდება **კონსერვატულის** აზრიც. იგი ინგლისურ ენაზე **შენახვას** ნიშნავს.

ცხადია, ჩაკეტილ კონსერვატულ სისტემაში სხეულთა ურთიერთქმედების გამო განუწყვეტლივ მიმდინარეობს პოტენციური და კინეტიკური ენერგიის ურთიერთგარდაქმნა, რის გამოც იცვლება თითოეული სხეულის მექანიკური ენერგია, მაგრამ სისტემის, როგორც ერთი მთლიანის, სრული მექანიკური ენერგია რჩება უცვლელი. ე.ი. თუ რაღაც მომენტში სისტემის პოტენციური და კინეტიკური ენერგიები იყო  $W_{პოტ1}$  და  $W_{კინ1}$ , ხოლო რაღაც სხვა მომენტისთვის –  $W_{პოტ2}$  და  $W_{კინ2}$ , (32.3)-ის თანახმად ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას:

$$W_{პოტ1} + W_{კინ1} = W_{პოტ2} + W_{კინ2}. \quad (32.4)$$

ჩავწერთ ორი სხეულისგან შემდგარი ჩაკეტილი კონსერვატული სისტემისთვის მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი სხვადასხვა ტიპის კონსერვატული ძალების შემთხვევაში.

ვთქვათ,  $m$  მასის სხეული იმყოფება დედამიწის ზედაპირიდან  $h_1 \ll R$  სიმაღლეზე და სიმძიმის ძალის გაელენით ვარდება რაღაც  $h_2$  სიმაღლემდე. ჩავთვალოთ, რომ სხეული – დედამიწა – კონსერვატული ჩაკეტილი სისტემაა, ე.ი. ვუგულებელვყოთ ჰაერის ხახუნის ძალა. რადგან სხეულის ვარდნისას დედამიწის მდგომარეობა ფაქტიურად არ იცვლება, ამიტომ სისტემის მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი დაიყვანება სხეულის მექანიკური ენერგიის შენახვამდე, რის გამოც (32.4) ასე ჩაიწერება:

$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2}. \quad (32.5)$$

სადაც  $v_1$  და  $v_2$  ბურთულას სიჩქარეებია  $h_1$  და  $h_2$  სიმაღლეზე.

თუ სხეული დედამიწის ზედაპირიდან საკმაოდ არის დაშორებული  $r \gg R$ , მაშინ (32.4)-ში  $W_3$  უნდა შევცვალოთ არაერთგვაროვანი გრავიტაციული ველის პოტენციური ენერგიით, ე.ი.

$$\frac{mv_1^2}{2} - G \frac{mM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM}{r_2}. \quad (32.6)$$

დავუშვათ, რომ  $m$  მასის ბურთულა დამაგრებულია  $k$  სიხისტის დრეკად ზამბარაზე, რომლის მასასაც სიმარტივისთვის ვუგულებელვყოფთ (ნახაზი 31.1). ბურთულა – ზამბარა განვიხილოთ როგორც ჩაკეტილი კონსერვატული სისტემა (დედამიწის მოქმედება მასზე უცვლელია). ბურთულას გადაადგილებისას  $x_1$ -დან  $x_2$ -ში განაპირობებს დრეკადობის ძალა, მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი (32.4) ამ პროცესისთვის მიიღებს სახეს:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2}, \quad (32.7)$$

სადაც  $v_1, v_2$  ბურთულას სიჩქარეებია  $x_1, x_2$  მდებარეობებში.

<sup>32</sup>თუ ზამბარის მასას გავითვალისწინებთ, (32.7)-ში საჭირო გახდება მისი კინეტიკური ენერგიის შეტანაც.

შეგნიშნოთ, რომ მექანიკის ამოცანათა გადაწყვეტა ხშირ შემთხვევებში გაცილებით მარტივია ენერჯის მუდმივობის კანონის გამოყენებით, ვიდრე დინამიკის ძირითადი განტოლების საშუალებით.

**ამოცანა 32.1.** 40 მ სიმაღლიდან 15 მ/წმ სიჩქარით ვარდება სხეული. რა სიმაღლეზე იქნება კინეტიკური ენერჯია პოტენციურზე 2-ჯერ მეტი (ჰაერის წინააღმდეგობა გამორიცხულია)?

**ამოხსნა:**

ენერჯის მუდმივობის კანონის თანახმად:

$$W_{პოტ1} + W_{კინ1} = W_{პოტ2} + W_{კინ2}.$$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე:

$$W_{პოტ1} + W_{კინ1} = 3W_{პოტ2},$$

ანუ

$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = 3mgh_2,$$

აქედან:

$$h_2 = \frac{2gh_1 + v_1^2}{6g} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 40 + 225}{6 \cdot 10} = 17,1 \text{ (მ)},$$

**ამოცანა 32.2.** გამოთვალეთ ზამბარიანი პისტოლეტიდან ვერტიკალურად ზემოთ გასროლილას 10გ მასის ბურთულას სიჩქარე გამოვარდნის მომენტში, თუ ზამბარა შეკუმშული იყო 10სმ-ით, სიხისტის კოეფიციენტი 500ნ/მ-ია. (ჰაერის წინააღმდეგობა გამორიცხულია)

**ამოხსნა:**

მექანიკური ენერჯის მუდმივობის კანონის თანახმად

$$W_{პოტ1} + W_{კინ1} = W_{პოტ2} + W_{კინ2}.$$

გრავიტაციული პოტენციური ენერჯის ნულად მივიღოთ 1- დონე, მაშინ  $W_{პოტ1}$  დრეკად დეფორმირებული ზამბარის პოტენციური ენერჯიაა:

$$W_{პოტ1} = \frac{kx^2}{2},$$

ხოლო  $W_{კინ1} = 0$ . 2-მდგომარეობაში:

$$W_{პოტ2} = mgh = mgx \text{ და } W_{კინ2} = \frac{mv^2}{2} \text{ ე.ი. } \frac{kx^2}{2} = mgx + \frac{mv^2}{2}$$

აქედან:

$$v = \sqrt{\frac{kx^2 - 2mgx}{m}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 0,01 - 2 \cdot 0,01 \cdot 10 \cdot 0,1}{0,1}} = 0,55 \text{ (მ/წმ)}.$$

**ამოცანა 32.3.** გამოვთვალოთ მეორე კოსმოსური სიჩქარე (§22), ანუ ის მინიმალური საწყისი სიჩქარე, რომელიც უნდა მივანიჭოთ სხეულს, რომ მან დატოვოს დედამიწის გრავიტაციული ველი.

**ამოხსნა:**

რადგან ვეებთ მინიმალურ საწყის სიჩქარეს, როდესაც სხეული დატოვებს დედამიწის გრავიტაციის ველს ( $r_2 \rightarrow \infty, v_2 \rightarrow 0$ ), (32.6) მიიღებს სახეს:

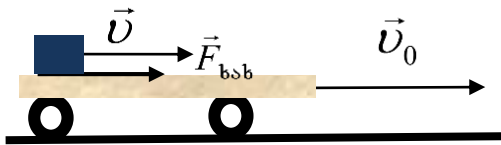
$$\frac{mv_1^2}{2} - G \frac{mM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM}{r_2},$$

სადაც  $v_1 = v_2$ ,  $r_1 = R = 6,38 \cdot 10^6$  მ – დედამიწის რადიუსია, ე.ი.:

$$\frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM}{R} = 0 \rightarrow v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = \sqrt{2} \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{2} v_I = 11,2 \cdot 10^3 \text{ (მ/წმ)}.$$

### **§33. არაკონსერვატულ ძალთა მუშაობა. დისიპატიური სისტემები**

არაკონსერვატულ ძალთა მუშაობა დამოკიდებულია ტრაექტორიის ფორმაზე და, ზოგადად, შეკრული ტრაექტორიის შემთხვევაში ნულისგან განსხვავდება. მათი მუშაობა არ არის დაკავშირებული პოტენციური ენერჯიის ცვლილებასთან. მექანიკაში ასეთ ძალებს მიეკუთვნება ხახუნის ძალა (§24,25). იგი ყოველთვის მიმართულია სხეულის ფარდობითი სიჩქარის საპირისპიროდ, რის გამოც უძრავ საყრდენზე სხეულის წინ თუ უკან მოძრაობისას ხახუნის ძალა ასრულებს უარყოფით მუშაობას და შეკრული ტრაექტორიის შემთხვევაში ნულისგან განსხვავებულია. შევნიშნოთ, რომ ხახუნის ძალა ყოველთვის არ ასრულებს უარყოფით მუშაობას. მაგალითად,  $\vec{p}_0$  სიჩქარით მოძრავ ბაქანზე მყოფი სხეული თვითონაც მოძრაობს ბაქნის მოძრაობის მიმართულებით  $\vec{v} < \vec{p}_0$  სიჩქარით. ბაქნის მხრიდან სხეულზე მოქმედი ხახუნის ძალა მიმართული იქნება სხეულის ფარდობითი სიჩქარის  $\vec{v} - \vec{p}_0$  საპირისპიროდ (§24), ანუ სხეულის მოძრაობის მიმართულებით, რის გამოც ის დადებით მუშაობას შეასრულებს (ნახ. 33.1). იმავე ტრაექტორიით სხეულის უკან მოძრაობისას, თუ



ნახაზი 33.1

$\vec{v} < \vec{p}_0$  პირობა ძალაში რჩება, ხახუნის ძალა არ იცვლის მიმართულებას და შეასრულებს უარყოფით მუშაობას. ასე, რომ შეკრულ ტრაექტორიაზე მისი მუშაობა ნულს გაუტოლდება (იხევე, როგორც კონსერვატული ძალის შემთხვევაში), მაგრამ არსებითია ის გარემოება, რომ ეს მუშაობა ყოველთვის

ტრაექტორიის ფორმაზე რჩება დამოკიდებული, ამიტომ ხახუნის ძალა არაკონსერვატულია.

განვიხილოთ ჩაკეტილი სისტემა, რომელშიც მოქმედებს ორივე ტიპის ძალები. რადგან ნებისმიერი ძალის მუშაობა, §27-ის თანახმად, დაკავშირებულია სხეულის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილებასთან, შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\Delta W_3 = A_{\text{კონ}} + A_{\text{არაკონ}}. \tag{33.1}$$

მეორეს მხრივ, კონსერვატულ ძალთა მუშაობა სხეულის პოტენციური ენერჯიის ცვლილების ტოლია შებრუნებული ნიშნით

$$A_{\text{კონ}} = -\Delta W_3,$$

რის გამოც (33.1)-დან ვღებულობთ:

$$\Delta(W_3 + W_3) = A_{\text{არაკონ}}, \quad \Delta W = A_{\text{არაკონ}}. \tag{33.2}$$

(33.2) წარმოადგენს მუშაობის და მექანიკური ენერჯიის კავშირის თეორემას:

- ჩაკეტილ სისტემაში არაკონსერვატული ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლია სისტემის მექანიკური ენერჯიის ცვლილებისა.

არაკონსერვატული ძალები, ჩვეულებრივად, უარყოფით მუშაობას ასრულებს, რის გამოც ჩაკეტილი სისტემის მექანიკური ენერგია აღარ ინახება – მცირდება. ასეთ ძალებს **დისიპატური ძალები** (ინგ. დაკარგვა, შემცირება) ეწოდება. სისტემებს სადაც ეს ძალები მოქმედებს **დისიპატურ სისტემებს** უწოდებენ. დისიპატურ სისტემებში მექანიკური ენერგიის “კარგვა” გამოწვეულია მისი გადასვლით სხვა ტიპის ენერგიებში (უფრო ხშირად სითბურში). თუ სისტემა ჩაკეტილი არ არის, ე.ი. განიცდის გარეშე ძალთა ზემოქმედებას, ცხადია, ამ ძალთა მუშაობა განსაზღვრავს სისტემის ენერგიის ზრდას თუ შემცირებას.

**ამოცანა 33.1.**  $h_1 = 4$  მ სიმაღლიდან 8 მ/წმ სიჩქარით ძირს აგდებენ 0,3 კგ მასის ბირთვს, რომელიც გრუნტში ჩადის  $h_2 = 1$  მ-ზე. იპოვეთ გრუნტის საშუალო წინააღმდეგობის ძალა.

**ამოხსნა:**

მექანიკური ენერგიის ცვლილება:

$$\Delta W = 0 - \left[ mg(h_1 + h_2) + \frac{mv^2}{2} \right] = -24,6 \text{ (ჯ)},$$

წინააღმდეგობის ძალის მუშაობა:

$$A_{\text{არაკონ}} = -Fh_2,$$

მაშინ (33.2)-ის თანახმად:

$$F = \Delta W / h_2 = 24,6 \text{ (ნ)}.$$

**ამოცანა 33.2.** დედამიწის ზედაპირისაღმე 100 კგ მასის მეტეორიტს 620 კმ სიმაღლეზე გააჩნდა 200 მ/წმ სიჩქარე. ატმოსფეროს წინააღმდეგობის საშუალო ძალა მეტეორიტის წონის 10%-ის ტოლია. გამოთვალეთ: 1) რა სიჩქარით დაეცემა მეტეორიტი დედამიწის ზედაპირს, 2) რა სიღრმეზე ჩააღწევს გრუნტში, თუ გრუნტის წინააღმდეგობის საშუალო ძალა  $10^5$ -ჯერ აღემატება მეტეორიტის წონას, 3) რა ენერგია გამოიყოფა გრუნტში მოძრაობისას?

**ამოხსნა:**

1) ატმოსფეროს წინააღმდეგობის საშუალო ძალა  $F_1 = 0,1mg$  არაკონსერვატულია, ამიტომ მეტეორიტის მექანიკური ენერგიის ნაწილი იხარჯება ამ ძალის დასაძლევად მუშაობის შესრულებაზე. (პოტენციური ენერგიის ნულად ავიღოთ დედამიწის ზედაპირი) (33.2)-ის თანახმად:

$$\left( \frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM}{R} \right) - \left( \frac{mv_1^2}{2} - G \frac{mM}{R+h_1} \right) = -F_1 \cdot h_1. \quad (1)$$

ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$g = G \frac{M}{R^2},$$

და გავითვალისწინოთ (1)-ში:

$$\left( \frac{v_2^2}{2} - gR \right) - \left( \frac{v_1^2}{2} - \frac{gR}{R+h_1} \right) = -0,1g \cdot h_1$$

$$v_2 = \sqrt{2 \left( R - \frac{R^2}{R+h_1} - 0,1h_1 \right) g + v_1^2} = \sqrt{2 \left( 6,38 \cdot 10^6 - \frac{40,7 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^6} - 6,2 \cdot 10^4 \right) 10 + 4 \cdot 10^4} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ (მ/წმ)}.$$

2) გრუნტის წინააღმდეგობის ძალა  $F_1 = 10^5 mg$  არაკონსერვატიულია და მეტეორიტი მასში იმოძრაებს დედამიწის ზედაპირთან შეხებისას არსებული მექანიკური ენერჯიის მარაგის სრულ ამოწურვამდე. (პოტენციური ენერჯიის ნულად ავიღოთ მეტეორიტის გრუნტში ჩაღწევის  $h_2$  სიღრმის შესაბამისი დონე) (33.2)-ის თანახმად:

$$0 - \left( \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \right) = -F_2 \cdot h_2,$$

თუ  $mgh_2$  -ს ვუგულებელვყოფთ სიმცირის გამო მივიღებთ:

$$h_2 = \frac{mv_2^2}{2F_2} = \frac{mv_2^2}{2 \cdot 10^5 mg} = \frac{(3,2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 10^6} = 5,1 \text{ (მ)}.$$

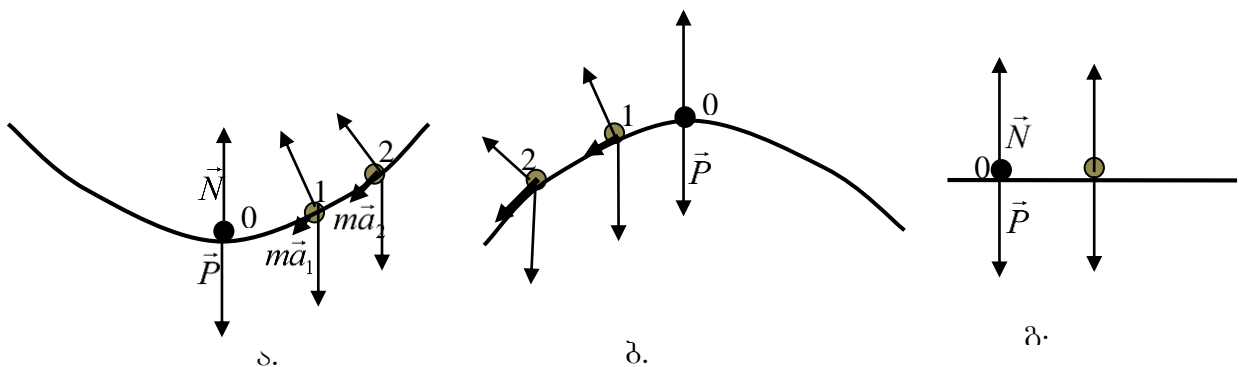
3) მეტეორიტი გრუნტში იმოძრაებს მანამ მისი მექანიკური ენერჯია მთლიანად არ გარდაიქმნება სითბურ ენერჯიად. ე.ი.

$$Q = \left| 0 - \frac{mv_2^2}{2} \right| = \frac{100(3,2 \cdot 10^3)^2}{2} = 510 \text{ (მგჯ)}.$$

### §34. პოტენციური ენერჯიის მრუდი. მდგრადი და არამდგრადი წონასწორობა

ნაწილაკს, რომელსაც შეუძლია შეასრულოს გადატანითი მოძრაობა წონასწორობაშია, თუ მასზე მოქმედ ძალთა ტოლქმედი ნულის ტოლია, ანუ თუ ნაწილაკი უძრავია დარჩება უძრავი ან თუ მოძრაობს იმოძრაებს წრფივად და თანაბრად.

განვიხილოთ ნაწილაკის წონასწორობის პირობები მასზე ძალების მოქმედების თვალსაზრისით. ნახ. 34.1ა-ზე მოცემულია ბურთულა გლუვ ჯამში. 0-მდგომარეობაში ბურთულაზე მოქმედი სიმძიმის ძალა გაწონასწორებულია საყრდენის რეაქციის ძალით  $\vec{P} + \vec{N} = 0$ . 1-მდგომარეობაში გადაყვანისას აღძრული ტოლქმედი  $m\vec{a}_1 = \vec{P} + \vec{N}_1$  ბურთულას აბრუნებს 0-ში. 2-მდგომარეობაში გადაყვანისას გადახრის ზრდის პროპორციულად იზრდება საწყისი მდგომარეობისკენ მიმართული ტოლქმედიც  $m\vec{a}_2 = \vec{P} + \vec{N}_2$ . ნაწილაკის ისეთ მდგომარეობას, რომლიდანაც გადახრისას აღძრული ტოლქმედი მიმართულია საწყისი მდგომარეობისკენ და იზრდება გადახრის პროპორციულად მდგრადი წონასწორობა ეწოდება. ე.ი. ნახ. 34.1ა-ზე 0-მდგომარეობას შეესაბამება მდგრადი წონასწორობა.



ნახაზი 34.1

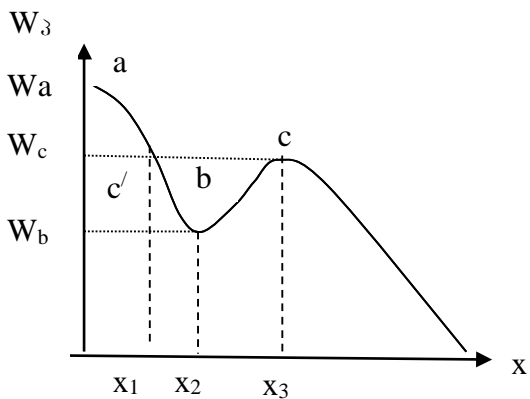
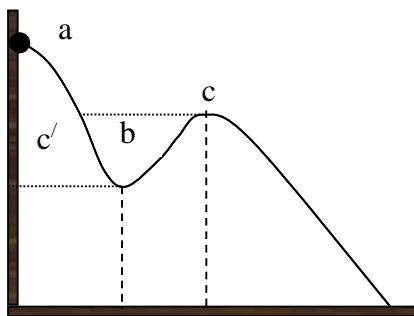
ნახ. 34.1ბ-ზე 0-წონასწორობის მდგომარეობიდან ბურთულის გადახრისას აღძრული ტოლქმედი ზრდის გადახრას, რის გამოც გადახრა სულ უფრო გაიზრდება და ბურთულა ტოვებს წონასწორულ მდგომარეობას. ასეთ მდგომარეობას **არამდგრადი წონასწორობა** ეწოდება, ანუ ნახ. 34.1ბ-ზე 0-მდგომარეობა არამდგრადი წონასწორული მდგომარეობაა. პორიზონტალურ ზედაპირზე ბურთულას გადაადგილებისას ტრაექტორიის ნებისმიერ წერტილში ძალთა ტოლქმედი ნულის ტოლია, ამიტომ ბურთულა ნებისმიერ მდებარეობაში წონასწორობაში რჩება. ასეთ წონასწორობას **განურჩეველი წონასწორობა** ეწოდება ნახ.34.1გ. მას ხშირად მდგრად წონასწორულ მდგომარეობას მიაკუთვნებენ.

განვიხილოთ ნაწილაკის წონასწორობა ენერგეტიკული თვალსაზრისით. დავუშვათ, რომ ნაწილაკის მოძრაობისას მისი მდებარეობა შეიძლება განისაზღვროს ერთი პარამეტრის (კოორდინატის) საშუალებით. მაგალითად ვერტიკალურ სიბრტყეში მოთავსებულ მოსრილ მავთულზე ჩამოცმული ბურთულას მდებარეობა მოძრაობისას განისაზღვრება  $x$  კოორდინატით (ნახ. 34.2). დავუშვათ ამ ბურთულას შეუძლია ხახუნის და ჰაერის წინააღმდეგობის გარეშე მოძრაობა. რადგან ბურთულაზე მოქმედი სიმძიმის ძალა კონსერვატულია, ამიტომ მოძრაობის პროცესში მექანიკური ენერგია ინახება:

$$W_{\text{პოტ}} + W_{\text{კინ}} = \text{const}. \quad (34.1)$$

ე.ი. ბურთულას კინეტიკური ენერგია შეიძლება გაიზარდოს მხოლოდ პოტენციური ენერგიის შემცირების ხარჯზე.

დავუშვათ  $a$  წერტილში ბურთულას სიჩქარე და ე.ი. კინეტიკური ენერგიაც ნულის



ნახაზი 34.2

ტოლია. მაშასადამე იგი იმყოფება წონასწორულ მდგომარეობაში. ეს მდგომარეობა არამდგრადია, რადგან მარჯვნივ მცირეოდენი ბიძგისას ბურთულა განავითარებს გარკვეულ სიჩქარეს და დატოვებს აღნიშნულ მდგომარეობას. მისი კინეტიკური ენერგია იზრდება პოტენციური ენერგიის შემცირების ხარჯზე.  $b$  წერტილში პოტენციური ენერგია მინიმალურია, ბურთულა აგრძელებს მოძრაობას, მცირდება კინეტიკური ენერგია, რის ხარჯზეც  $c$  წერტილში პოტენციური ენერგია აღწევს ლოკალურ მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ხოლო შემდეგ ისევ მცირდება. (ცხადია  $c$  -ში ბურთულას კინეტიკური ენერგია ნულისაგან განსხვავებულია და ტოლია  $a$  და  $c$  წერტილებში პოტენციური ენერგიის სხვაობის).

განვიხილოთ ასეთი ვარიანტი: დავუშვათ დასაწყისში ბურთულა იმყოფება  $c$  წერტილში წონასწორობაში - მისი სიჩქარე ნულის ტოლია. მარცხნივ მცირე ბიძგით წონასწორობა ირღვევა - ბურთულა იწყებს მოძრაობას, მაგრამ ამ

შემთხვევაში ეს მოძრაობა შეზღუდულია-**ფინიტიური**, იგი ვერ გაშორდება  $c$  წერტილს. (თუ მოძრაობა არ იზღუდება, ანუ ნაწილაკს შეუძლია აღმოჩნდეს ათვლის წერტილიდან რაგინდ შორს, მოძრაობას **ინფინიტიური** ეწოდება). რადგან ამ შემთხვევაში დაირღვეოდა ენერგიის მუდმივობის კანონი-პოტენციური ენერგია სრულ ენერგიაზე მეტი აღმოჩნდებოდა. ამ

თვალსაზრისით  $x_1 \leq x \leq x_2$  არეს *პოტენციალური ორმო* ეწოდება, ხოლო  $x < x_1$  და  $x > x_2$  არეებს *პოტენციალური ბარიერი*.

დავუშვათ დასაწყისში უძრავი ბურთულა იმყოფება  $b$  წერტილში. მცირე ბიძგით ბურთულა დაიწყებს მოძრაობას, მაგრამ ამ შემთხვევაში იგი ყოველთვის დაუბრუნდება საწყის  $b$  მდებარეობას. ამიტომ წინა შემთხვევებისგან განსხვავებით ასეთი წონასწორობა მდგრადია.

განხილულ მაგალითებში ნაწილაკის წონასწორული მდგომარეობიდან გამოყვანის შემთხვევაში აღძრული ძალა კონსერვატულია (იგი ტოლია სიმძიმის ძალის მხები მდგენელის). იგი ყოველთვის მიმართულია სისტემის პოტენციური ენერჯიის უსწრაფესი შემცირების მიმართულებით  $F_x = -dW_3/dx$  (§29). ამიტომ, თუ ეს ძალა სისტემას აბრუნებს საწყის მდგომარეობაში, მაშინ სისტემას ამ მდგომარეობაში გააჩნია პოტენციური ენერჯიის მინიმუმი. ამის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ

➤ *კონსერვატული სისტემის წონასწორული მდგომარეობა მდგრადია, თუ მას შეესაბამება პოტენციური ენერჯიის მინიმუმი.*

ამრიგად, ნახ.34.1-ის 0-მდგომარეობას და ნახ.34.2-ის  $b$ -მდგომარეობას შეესაბამება სისტემის პოტენციური ენერჯიის მინიმუმი.

**ამოცანა 34.1.** 31.1-ზე  $m$  მასის ბურთულა გადახარეს წონასწორობის მდებარეობიდან  $x=x_0$  მანძილზე და გაუშვეს ხელი. ავხსნათ სისტემაში პოტენციურ და კინეტიკურ ენერჯიათა ურთიერთგარდაქმნის პროცესი და ავაგოთ მათი მრუდები, თუ ზამბარის სიხისტეა  $k$  და ხახუნის ძალები უგულებელყოფილია.

**ამოხსნა:**

მექანიკური ენერჯიის მუდმივობის კანონის თანახმად, ტრაექტორიის ნებისმიერ წერტილში:

$$W = W_3 + W_3 = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = const.$$

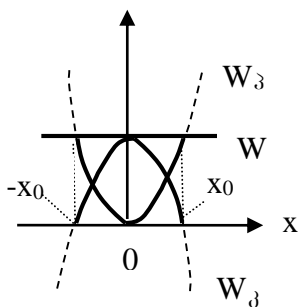
მაქსიმალური გადახრისას ( $x=x_0$ ) მაქსიმალურია პოტენციური ენერჯია:

$$W_3 = \frac{kx_0^2}{2},$$

შესაბამისად სისტემის სრული ენერჯია იქნება:

$$W = \frac{kx_0^2}{2} + 0,$$

რომელიც მთელი რხევის განმავლობაში ინახება.



ბურთულას მოძრაობისას წონასწორობის მდებარეობისკენ მისი პოტენციური ენერჯიის ხარჯზე იზრდება კინეტიკური ენერჯია და  $x=0$  წერტილში აღწევს მაქსიმუმს  $W_3 = (mv_0^2)/2$ . ამ ენერჯიის საშუალებით ბურთულა აგრძელებს მოძრაობას წონასწორობის წერტილიდან მეორე მხარეს ამ მის პოტენციურ ენერჯიაში სრულ გარდაქმნამდე. რის შემდეგაც ბურთულას მოძრაობა გრძელდება საპირისპირო მიმართულებით. ცხადია  $x=0$  სისტემის მდგრადი წონასწორობის წერტილია, რადგან სისტემაში მოქმედი

დრეკადობის ძალა  $F = -kx$  გადახრის პროპორციულია და ყოველთვის მიმართულია ამ წერტილისკენ. ნახაზზე მოცემულია ენერგიათა  $x$  კოორდინატზე დამოკიდებულების მრუდები. ცხადია მოძრაობა შეზღუდულია-ფინიტიურია, ნაწილაკი იმყოფება  $-x_0 \leq x \leq x_0$  პოტენციურ ორმოში, რომლის ენერგეტიკული სიღრმეც  $W = (kx_0^2)/2$  -ის ტოლია.

**§35. იმპულსის მუდმივობის კანონი.  
მასათა ცენტრი. თავისუფლების ხარისხი**

ბანვიხილთ  $m_1, m_2, \dots, m_N$  მასის ნაწილაკებისგან შემდგარი სისტემა, ეს ნაწილაკები განიცდის ორი ტიპის ძალთა მოქმედებას:

**1. შიგა ძალების**, რომლებითაც ნაწილაკები ერთმანეთთან ურთიერთქმედებს, რის გამოც მათ ავლნიშნავთ ორი ინდექსით  $-\vec{F}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j$  ( $i$ -ნაწილაკზე  $j$ -ნაწილაკის მოქმედება);

**2. გარე ძალების** – გამოწვეულია ნაწილაკებზე იმ სხეულთა მოქმედებით, რომლებიც არ მიეკუთვნება მოცემულ სისტემას. მათ ერთი ინდექსით ავლნიშნავთ  $\vec{F}_i$  ( $i$ -ნაწილაკზე მოქმედი გარე ძალების ტოლქმედი).

მოცემული სისტემისათვის დინამიკის ძირითადი განტოლება (12.3) მიიღებს სახეს:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_1 \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2N} + \vec{F}_2 \\ \dots \\ \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \dots + \vec{F}_{NN-1} + \vec{F}_N \end{array} \right.$$

განტოლებათა სისტემის წევრ-წევრად შეკრებისას შიგა ძალები, ნიუტონის III კანონიდან გამომდინარე  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ , წყვილ-წყვილად ერთმანეთს გააბათილებს, რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N,$$

$$\frac{d}{dt} \sum_i^N \vec{p}_i = \sum_i^N \vec{F}_i. \tag{35.1}$$

სადაც  $\sum_i^N \vec{p}_i = \vec{p}$  სისტემის ჯამური იმპულსია, ხოლო  $\vec{F}_{\text{გარე}} = \sum_i^N \vec{F}_i$  სისტემაზემოქმედი გარე ძალების ტოლქმედი. მაშინ (35.1) ასე ჩაიწერება:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{გარე}}, \tag{35.2}$$

(35.2)-ის თანახმად,

➤ **სისტემის იმპულსის შეცვლა შეუძლია მხოლოდ მასზე მოქმედ გარე ძალებს,** ანუ არაჩაკეტილი სისტემის იმპულსი ცვლადია.

თუ სისტემა ჩაკეტილია, ე.ი.  $\vec{F}_{\text{გარე}} = 0$ , მაშინ:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \text{ ანუ } \vec{p} = const. \quad (35.3)$$

(35.3) წარმოადგენს იმპულსის მუდმივობის (შენახვის) კანონს:

➤ **ჩაკეტილი სისტემის იმპულსი არ იცვლება (ინახება).**

ცხადია, ჩაკეტილ სისტემის ნაწილაკთა ურთიერთქმედებისას შეიძლება შეიცვალოს თითოეულის იმპულსი, მაგრამ მათი ჯამი - სისტემის იმპულსი უცვლელი დარჩება.

თუ ჩაკეტილ სისტემაში მექანიკური ენერგია ინახებოდა მხოლოდ კონსერვატული ძალების შემთხვევაში, იმპულსის შენახვისას შიგა ძალთა ბუნება, მათი კონსერვატულობა თუ დისიპატიურობა არავითარ როლს არ თამაშობს. ამ თვალსაზრისით იმპულსის მუდმივობის კანონი უფრო ზოგადია, ვიდრე მექანიკური ენერჯის მუდმივობის კანონი.

შემოვიღოთ ნაწილაკთა სისტემის **მასათა ცენტრის** (ინერციის ცენტრის) ცნება. იგი გუწოდოთ ისეთ  $C$  წერტილს, რომლის მდებარეობაც მოცემულ ათვლის სისტემაში განისაზღვრება შემდეგი რადიუს-ვექტორით

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m}. \quad (35.4)$$

$\vec{r}_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ )  $i$ -ნაწილაკის რადიუს-ვექტორია მოცემულ ათვლის სისტემაში, ხოლო  $m = \sum_i m_i$  - სისტემის მასაა. (35.4) მართკუთხა კორდინატთა (დეკარტის) სისტემაში ასე ჩაიწერება:

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}. \quad (35.5)$$

გამოვთვალოთ მასათა ცენტრის სიჩქარე

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \frac{d\sum_i m_i\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{1}{m} \sum_i \vec{p} = \frac{\vec{p}}{m},$$

საიდანაც

$$\vec{p} = m\vec{v}_C. \quad (35.6)$$

იგი ნაწილაკთა სისტემის იმპულსია და ტოლია სისტემის მასის ნამრავლისა მასათა ცენტრის სიჩქარეზე. თუ სისტემა ჩაკეტილია, მაშინ (35.3)-ის თანახმად  $\vec{v}_C = const$ , ე.ი.

➤ **ჩაკეტილი სისტემის მასათა ცენტრი ან უძრავია, ან მოძრაობს თანაბარწრფივად;** თუმცა სისტემაში შემავალი ნაწილაკების სიჩქარეები შეიძლება განუწყვეტლივ იცვლებოდეს ერთმანეთთან ურთიერთქმედების გამო.

თუ სისტემა ჩაკეტილი არ არის, მაშინ (35.2)-ის თანახმად

$$\vec{F}_{გარე} = \frac{dm\vec{v}_C}{dt}, \quad \vec{F}_{გარე} = m\vec{a}_C. \quad (35.7)$$

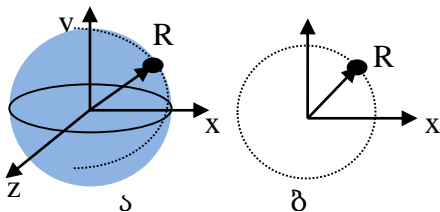
(35.7)-ის თანახმად, არჩაკეტილი სისტემის მოძრაობის შესწავლისას საკმარისია ვიპოვოთ მასათა ცენტრი, მივანიჭოთ მას მთელი სისტემის მასა, მოვლოთ მასზე  $\vec{F}_{გარე}$  და შევისწავლოთ მისი მოძრაობა. რადგან,

➤ *m* მასის ნაწილაკთა სისტემის (ან *m* მასის სხეულის) მასათა ცენტრი მოძრაობს, როგორც იმოძრაებდა *m* მასის ნაწილაკი, რომელზედაც იმოქმედებდა ამ სისტემაზე (სხეულზე) ყველა გარე ძალთა ტოლქმედი.

ამასთანავე, უნდა გვახსოვდეს, რომ ნაწილაკთა სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის ცოდნა არ იძლევა ინფორმაციას მისი ცალკეული ნაწილაკების მოძრაობის შესახებ. იგი ახასიათებს მხოლოდ სისტემის, როგორც ერთი მთლიანის მოძრაობას, ამასთანავე იგი განუწყვეტლივ იცვლება ნაწილაკთა ურთიერთქმედების გამო და შეიძლება სისტემის გარეთაც აღმოჩნდეს. თუ სისტემა შედგება სამი ან მეტი ნაწილაკისგან, მისი მასათა ცენტრის განსაზღვრა ხშირ შემთხვევაში საკმაოდ რთულ მათემატიკურ გარდაქმნებს თხოულობს.

პრაქტიკაში ხშირად იყენებენ ათვლის ისეთ სისტემებს, რომლის მიმართ ჩაკეტილი სისტემის მასათა ცენტრი უძრავია. ასეთ სისტემებს *C*-სისტემებს უწოდებენ.

შემოვიღოთ ცნება **ნივთიერი წერტილის (ნაწილაკის) თავისუფლების ხარისხის** შესახებ. იგი ვუწოდოთ იმ დამოუკიდებელ კოორდინატთა რიცხვს, რომელიც განსაზღვრავს



ნახაზი 35.1

მის მდებარეობას სივრცეში. როგორც ვიცით სივრცეში ნაწილაკის მოძრაობის დახასიათებისთვის საჭიროა სამი კოორდინატის, როგორც დროის ფუნქციის ცოდნა. ამიტომ მას გააჩნია სამი თავისუფლების ხარისხი. თუ ნაწილაკი მოძრაობს რაიმე ზედაპირზე (არაა აუცივლებელი სიბრტყეზე), მაშინ მისი მდებარეობის განსაზღვრისთვის საკმარისია ორი კოორდინატის

ცოდნა. მაგ. *R* რადიუსის სფერულ ზედაპირზე (ნახ. 35.1ა) მოძრავი ნაწილაკის კოორდინატები ერთმანეთთან დაკავშირებულია განტოლებით:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , რომლის თანახმადაც

საკმარისია ორი კოორდინატის ცოდნა რომ ვიპოვოთ მესამე. ანუ სამი კოორდინატიდან დამოუკიდებელია ორი, ანუ ზედაპირზე მოძრავი ნაწილაკის თავისუფლების ხარისხი ორის ტოლია. ნებისმიერ წერტილზე მოძრაობისას თავისუფლების ხარისხი ტოლია ერთის. მართლაც,

*R* რადიუსის წრეწირზე მოძრაობის შემთხვევაში (ნახ. 35.1ბ)  $x^2 + y^2 = R^2$ . საკმარისია ერთერთი კოორდინატის ცოდნა რომ ვიპოვოთ მეორე. როცა ნაწილაკის მოძრაობა შეზღუდულია რაიმე

პირობით, რაც ამცირებს დამოუკიდებელ კოორდინატთა რაოდენობას, ამბობენ, რომ ნაწილაკი ემორჩილება ბმას. შესაბამისად ზემოთ მოყვანილ განტოლებებს **ბმის განტოლებები** ეწოდება.

ნებისმიერი ბმის განტოლება ერთით ამცირებს თავისუფლების ხარისხს. განვიხილოთ ორი ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი *A* და *B* ნაწილაკისგან შემდგარი სისტემა. რადგან ნაწილაკები თავისუფლად მოძრაობენ სივრცეში სისტემის თავისუფლების ხარისხი იქნება  $i=3+3=6$ . თუ ნაწილაკები ერთმანეთთან ხისტადაა დაკავშირებული, ანუ მათ შორის მანძილი არ იცვლება, მაშინ სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი მცირდება.

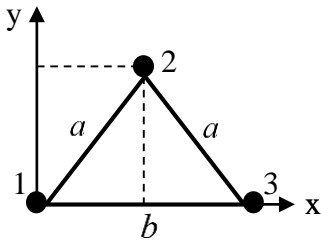
მართლაც ერთერთს, ვთქვათ *A*-ს, შეუძლია თავისუფალი მოძრაობა სივრცეში, ანუ  $i_A=3$ . რადგან *B* ნაწილაკს შეუძლია მხოლოდ ისეთი მოძრაობა, რომლის დროსაც მანძილი მათ შორის რჩება უცვლელი იგი იმოძრაებს *A*-ს ირგვლივ სფერულ ზედაპირზე, ანუ  $i_B=2$  და  $i=3+2=5$ .

ზოგადად, თუ სისტემა შედგება *n* რაოდენობის დამოუკიდელი ნაწილაკისგან თავისუფლების ხარისხი იქნება  $i=3n$ . თუ ნაწილაკებს შორის არსებობს *r* რაოდენობის ბმა, ზემოთქმულის თანახმად,  $i=3n-r$ .

**ამოცანა 35.1.** ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებში მოთავსებულია 0,2 კგ მასის ნაწილაკები. დავადგინოთ მასათა ცენტრის მდებარეობა, თუ სამკუთხედის ფერდის სიგრძეა 5 მ, ხოლო ფუძის – 6 მ.

**ამოხსნა:**

კოორდინატა სათავე შევუთავსოთ სამკუთხედის ფუძის ერთერთ წვეროს და  $ox$  ღერძი მივმართოთ ფუძის გასწვრივ. (35.5)-ის თანახმად გვექნება:



$$x_C = \frac{mx_1 + mx_2 + mx_3}{m + m + m} = \frac{0 + m\frac{b}{2} + mb}{3m} = \frac{0,2 \cdot 3 + 0,2 \cdot 6}{0,6} = 3 \text{ (მ)},$$

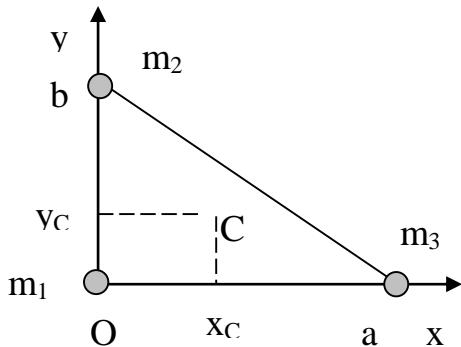
$$y_C = \frac{my_1 + my_2 + my_3}{m + m + m} = \frac{0 + m\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} + 0}{3m} = \frac{0,2 \cdot 4}{0,6} = 1,3 \text{ (მ)}.$$

მასათა ცენტრის რადიუს-ვექტორის სიდიდე იქნება:

$$r_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \sqrt{9 + 1,69} = 3,3 \text{ (მ)}$$

**ამოცანა 35.2.** სამი ნაწილაკი  $m_1 = 0,5$ კგ,  $m_2 = 1$ კგ,  $m_3 = 1,5$ კგ განლაგებულია მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებში. ვიპოვოთ მასათა ცენტრის მდებარეობა, თუ კათეტების სიგრძეებია 3 მ და 4,2 მ.

**ამოხსნა:**



$OX$  და  $OY$  ღერძები შევარჩიოთ ნახაზის მიხედვით, (35.5)-ის თანახმად:

$$x_C = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 + m_3(0a)}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1,5 \cdot 3}{3} = 1,5 \text{ (მ)},$$

$$y_C = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2(0b) + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1 \cdot 4,2}{3} = 1,4 \text{ (მ)},$$

$$z_C = 0. \quad \vec{r}_C = \vec{i}x_C + \vec{j}y_C,$$

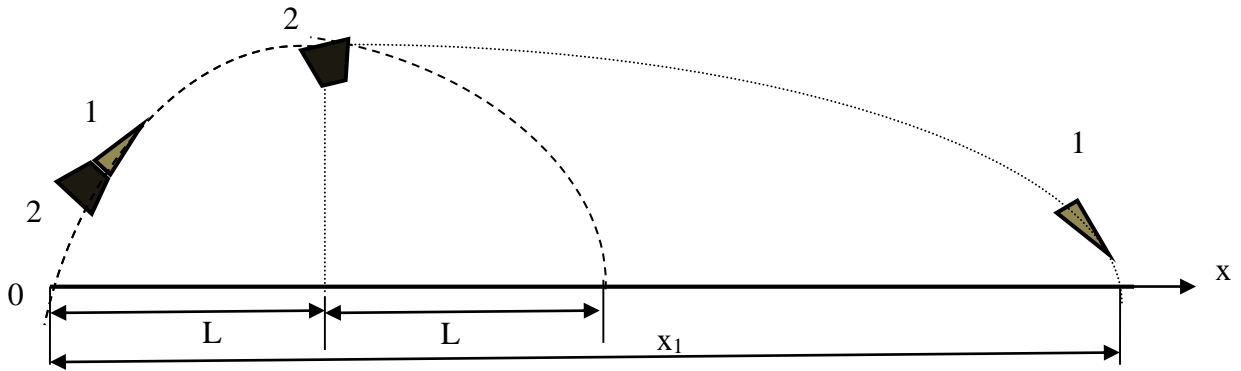
$$r_C = \sqrt{1,5^2 + 1,4^2} \approx 2,1 \text{ (მ)}.$$

**ამოცანა 35.3.** ჰორიზონტისადმი კუთხით გაშვებული რაკეტა ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში, რომელიც გაშვების წერტილიდან დაშორებულია  $L$  მანძილით, აფეთქების შედეგად იყოფა ორ  $m$  და  $2m$  მასის ნაწილად. აქედან მე-2-ე ვარდება ვერტიკალურად ქვემოთ. რა მანძილზე დაგარდება პირველი?

**ამოხსნა:**

მასათა ცენტრი, განმარტებიდან გამომდინარე, შემოხაზავს იმ ტრაექტორიას, რომელზეც, სიმძიმის ძალის გავლენით, აფეთქების გარეშე იმოძრაებდა რაკეტა, მაშასადამე თუ რაკეტის საწყის მდებარეობას შევუსაბამებთ  $x=0$  წერტილს, მაშინ:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \tag{1}$$



ანუ:

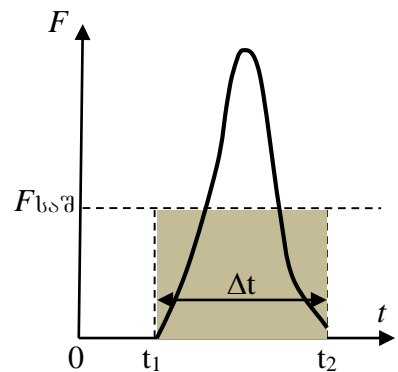
$$2L = \frac{mx_1 + 2mL}{3m} = \frac{x_1 + 2L}{3},$$

აქედან:

$$x_1 = 4L.$$

### §36. იმპულსური ძალა. აბსოლუტურად დრეკადი და აბსოლუტურად არადრეკადი შეჯახება

ორი სხეულის შეჯახება ეწოდება მათ ისეთ ურთიერთქმედებას, რომელიც მიმდინარეობს ძალიან მცირე დროში ( $< 10^{-2}$  წმ), რომლის განმავლობაშიც ურთიერთქმედების ძალა სწრაფად მატულობს ნულიდან ძალიან დიდ მნიშვნელობამდე და ისევ სწრაფად მცირდება ნულამდე (ნახ. 36.1). ეს ძალა უმრავლეს შემთხვევაში იმდენად აღემატება ამ დროში სხეულებზე მოქმედ სხვა ძალებს, რომ შესაძლებელია მათი უგულებელყოფა, რის გამოც დარტყმის მომენტში ურთიერთქმედი სხეულები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ჩაკეტილი სისტემა და შესაბამისად ძალაშია იმპულსის მუდმივობის კანონი.



ნახაზი 36.1

დარტყმის ძალა, ნიუტონის II კანონის თანახმად იქნება:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

აქედან:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt.$$

დარტყმის ძალას **იმპულსურ ძალასაც** ეწოდებენ. ხშირად უფრო მოსახერხებელია იმპულსური ძალის საშუალო მნიშვნელობით სარგებლობა: იგი ისეთი მუდმივი ძალის ტოლია, რომელიც რეალური ძალის მოქმედების დროში ( $\Delta t = t_2 - t_1$ ) სხეულის იმპულსის იგივე ცვლილებას იწვევს. საშუალო ძალის იმპულსი იქნება:

$$\vec{F}_{საშ} \Delta t = \Delta m \vec{v}, \quad (36.1)$$

რომელიც (3.11)-ის გამოყენებით ასე ჩაიწერება:

$$\bar{F}_{\text{საშ}} \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt . \quad (36.2)$$

ნახ. 36.1-ზე ნაჩვენებია ამ ძალის სიდიდე, ხოლო მართკუთხედის ფართობი შეესაბამება მისი იმპულსის სიდიდეს.

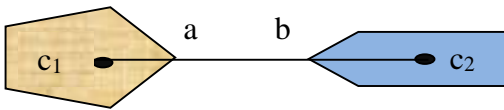
უმეტეს წილად შეჯახების მომენტში სხეულთა შეხების ფართი საკმაოდ მცირეა, რის გამოც ნორმალური ძაბვა (ფართის ერთეულზე მოსული იმპულსური ძალა)  $\sigma_n = F/\Delta S$  ძალიან დიდია ( $> 10^8$  ნ/მ<sup>2</sup>), რის შედეგადაც სხეულები განიცდის დეფორმაციას და მათი კინეტიკური ენერგია მთლიანად ან ნაწილობრივ გადადის დრეკადი დეფორმაციის პოტენციურ ენერგიასა და შინაგან ენერგიაში, რაც გამოიხატება სხეულთა ტემპერატურის გაზრდით.

განვიხილოთ ორი იდეალური ტიპის შეჯახება: **აბსოლუტურად დრეკადი** და **აბსოლუტურად არადრეკადი** შეჯახებები.

- **აბსოლუტურად დრეკადი ეწოდება ისეთ შეჯახებას, როდესაც სხეულებში შეჯახების შედეგად არ რჩება არავითარი დეფორმაცია, ანუ სხეულთა კინეტიკური ენერგია მთლიანად ან ნაწილობრივ გადადის დრეკადი დეფორმაციის პოტენციურ ენერგიაში, რომელიც შემდეგ მთლიანად აღდგება კინეტიკურში.**

ასეთი შეჯახებისას იმპულსთან ერთად ინახება სისტემის მექანიკური ენერგიაც.

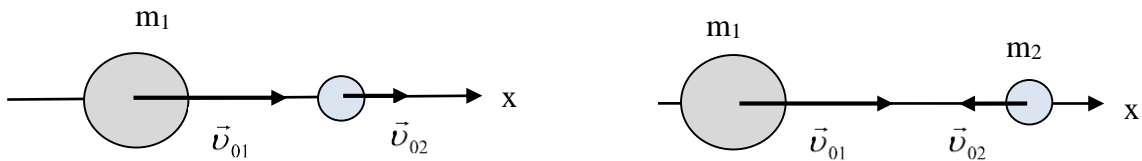
ჩვენ გავარჩევთ მხოლოდ **ცენტრალურ შეჯახებას**, ანუ ისეთ შეჯახებას, როდესაც სხეულთა მასათა ცენტრის შემაერთებელი წრფე თანხვედრილია **დარტემის წრფის**. დარტემის წრფე ეწოდება იმ წრფეს, რომელიც გადის დარტემის მომენტში სხეულთა ორ უახლოეს წერტილზე (ნახ. 36.2 – ab წრფე).



ნახაზი 36.2

ცენტრალური შეჯახებისას მოძრაობა დარტემამდე და დარტემის შემდეგ ერთ წრფეზე ხდება – ერთგანზომილებიანია.

განვიხილოთ  $m_1$  და  $m_2$  მასების ერთგვაროვან ბურთულათა ცენტრალური შეჯახება (სიმარტივისთვის დაეუშვათ, რომ ბურთულები ბრუნვით მოძრაობას არ ასრულებს). ცხადია, შეჯახებას ადგილი ექნება, თუ ერთ-ერთი ეწევა მეორეს, ან მოძრაობს შემხვედრი მიმართულებით (ნახ. 36.3ა,ბ).



ნახაზი 36.3 ა,ბ

აბსოლუტურად დრეკადი შეჯახებისას გარდა იმპულსის მუდმივობის კანონისა ძალაშია მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი:

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 , \quad (36.3)$$

$$\frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_{02}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} , \quad (36.4)$$

სადაც  $\vec{p}_{01}, \vec{p}_{02}$  ბურთულათა სიჩქარეებია შეჯახებამდე, ხოლო  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  – შეჯახების შემდეგ. დასმული ამოცანის გადაწყვეტისთვის (36.3) უნდა დავაგვიგმილოთ  $Ox$  ღერძზე და ამოვხსნათ (36.4)-თან ერთად  $v_1$  და  $v_2$ -ის მიმართ. თუ რომელიმე სიჩქარეს მივიღებთ “–” ნიშნით, ნიშნავს, რომ ეს სიჩქარე  $Ox$ -ის საპირისპიროდ არის მიმართული.

(36.3)-ისა და (36.4)-ს მათემატიკური გარდაქმნებით შესაძლებელია ვაჩვენოთ, რომ თუ აბსოლუტურად დრეკად შეჯახებაში მონაწილეობს ერთნაირი მასის სხეულები  $m_1 = m_2$ , მაშინ შეჯახებისას ისინი ერთმანეთს სიჩქარეებს “უცვლის”  $\vec{p}_{01} = \vec{p}_2, \vec{p}_{02} = \vec{p}_1$ , ასე რომ, თუ ერთ-ერთი უძრავი იყო, შეჯახების შემდეგ მიიღებს მეორის სიჩქარეს, ხოლო მეორე გაჩერდება. ეს ეფექტი კარგადაა ცნობილი ბილიარდის მოყვარულთათვის.

➤ *აბსოლუტურად არადრეკადი ეწოდება ისეთ შეჯახებას, როდესაც სხეულთა კინეტიკური ენერჯია მთლიანად ან ნაწილობრივ გადადის მხოლოდ მათ შინაგან ენერჯიაში, ე.ი. საერთოდ არ წარმოიქმნება დრეკადი დეფორმაციის პოტენციური ენერჯია.*

ამ შეჯახებისას არ ინახება მექანიკური ენერჯია, მაგრამ ცხადია ინახება სხეულთა მექანიკურ და შინაგან ენერჯიათა ჯამი.

აბსოლუტურად არადრეკადი შეჯახებისას სხეულები ან ერთნაირი სიჩქარით აგრძელებს მოძრაობას (ერთიანდება)  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$  ან ორივე ჩერდება: ამ შემთხვევაში უფლება გვაქვს გამოვიყენოთ მხოლოდ იმპულსის მუდმივობის კანონი (36.3), რომელიც შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$m_1 \vec{p}_{01} + m_2 \vec{p}_{02} = (m_1 + m_2) \vec{p},$$

აქედან:

$$\vec{p} = \frac{m_1 \vec{p}_{01} + m_2 \vec{p}_{02}}{m_1 + m_2}. \quad (36.5)$$

(36.5)-ის თანახმად, თუ ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$\frac{|\vec{p}_{01}|}{|\vec{p}_{02}|} = \frac{m_2}{m_1},$$

მაშინ ურთიერთშემხვედრი მიმართულებით მოძრავი სხეულები აბსოლუტურად არადრეკადი შეჯახების შედეგად გაჩერდება ( $\vec{p} = 0$ ).

შეჯახების შესწავლისას პრაქტიკაში იყენებენ ადღგენის კოეფიციენტს, იგი სხეულთა თვისებებზეა დამოკიდებული

$$k = \frac{v_1 - v_2}{v_{01} - v_{02}}, \quad (36.6)$$

სადაც  $v_{01}, v_{02}, v_1, v_2$  სიჩქარეთა გეგმილებია დარტყმის წრფეზე. აბსოლუტურად დრეკადი შეჯახების შემთხვევაში  $k = 1$ , აბსოლუტურად არადრეკადი შეჯახების შემთხვევაში კი  $k = 0$ .

სხეულის შეჯახებისას მასიურ უძრავ სხეულთან, რომელიც დაჯახების შემდეგაც უძრავი რჩება ( $v_{02} = v_2 = 0$ ), მაგალითად, სხეულის კედელთან შეჯახების შემთხვევაში, ადღგენის კოეფიციენტი იქნება:

$$k = \frac{v_1}{v_{01}}. \quad (36.7)$$

აღდგენის კოეფიციენტს ცდისეულად აღდგენენ, მაგ. საკვლევი მასალისგან დამზადებულ ბურთულას  $H$  სიმაღლიდან თავისუფლად აგდებენ იმავე მასალისგან დამზადებულ ფილაზე და ზომავენ ასხლეტილი ბურთულას ასვლის  $h$  სიმაღლეს. მაშინ §7-ის თანახმად (36.7) ასე ჩაიწერება:

$$k = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

მაგალითად,  $k(\text{ხე}) \approx 0,50$ ,  $k(\text{ფოლადი}) \approx 0,55$ ,  $k(\text{სპილოს ძვალი}) \approx 0,85$ .

**ამოცანა 36.1.** გამოთვალეთ იმპულსური ძალა, რომელიც წარმოიშევა პარაშუტისტის მიწასთან 8მ/წმ სიჩქარით შეხების დროს

1. ვერტიკალურად;
2. მუხლებში მოხრილად დახტომის მომენტში.

პირველ შემთხვევაში მასათა ცენტრი წაინაცვლებს 1სმ-ით, მეორეში – 50სმ-ით. შესაძლებელია თუ არა ფეხის ტრავმა, თუ ფეხსაცმლის ლანჩის ზომაა  $30 \times 12$ სმ, ხოლო პარაშუტისტის საერთო მასა 150კგ-ია.

**ამოხსნა:**

(36.1)-ის თანახმად იმპულსური ძალის საშუალო მნიშვნელობა 1 და 2 შემთხვევებში იქნება:

$$F_{1\text{საშ}} = \frac{|\Delta m v|}{\Delta t_1}, \quad F_{2\text{საშ}} = \frac{|\Delta m v|}{\Delta t_2}.$$

დამუხრუჭების ხანგრძლივობა გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\Delta t = \frac{S}{v_{\text{საშ}}},$$

სადაც მასათა ცენტრის და, შესაბამისად, სხეულის საშუალო სიჩქარე დამუხრუჭების დროს იქნება:

$$v_{\text{საშ}} = \frac{8+0}{2} = 4 \text{ (მ/წმ)},$$

მაშინ:

$$\Delta t_1 = \frac{0,01}{4} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ (წმ)}, \quad \Delta t_2 = \frac{0,50}{4} = 1,25 \cdot 10^{-1} \text{ (წმ)}.$$

მათი გათვალისწინებით ვღებულობთ იმპულსური ძალის შესაბამის მნიშვნელობებს:

$$F_{1\text{საშ}} = \frac{150 \cdot 8}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 4,8 \cdot 10^5 \text{ (ნ)}, \quad F_{2\text{საშ}} = \frac{150 \cdot 8}{1,25 \cdot 10^{-1}} = 9,6 \cdot 10^3 \text{ (ნ)}.$$

იმპულსური ძალა მიმართულია ვერტიკალურად ზევით და წარმოადგენს სიმძიმის ძალისა და დედამიწის მხრიდან რეაქციის ძალის საშუალო მნიშვნელობის ტოლქმედს  $\vec{F}_{\text{საშ}} = \vec{P} + \vec{N}_{\text{საშ}}$ , §21-ის თანახმად რეაქციის ძალა და წონა ქმედება-უკუქმედების ძალებია, ამიტომ  $\vec{F}_{\text{საშ}} = \vec{P} - \vec{P}^*_{\text{საშ}}$ , საიდანაც დაგვემიღებთ ვღებულობთ:

$$P^*_{\text{საშ}} = F_{\text{საშ}} + P, \quad (P = mg = 1,5 \cdot 10^3 \text{ ნ}),$$

$$P^*_{1\text{საშ}} = 4,8 \cdot 10^5 + 1,5 \cdot 10^3 \approx 4,82 \cdot 10^5 \text{ (ნ)}, \quad P^*_{2\text{საშ}} = 9,6 \cdot 10^3 + 1,5 \cdot 10^3 = 1,11 \cdot 10^4 \text{ (ნ)}.$$

ნორმალური ძაბვა:

$$\sigma = \frac{P_{\text{საშ}}^*}{2S}, \quad S = 0,3 \cdot 0,12 = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ (მ}^2\text{)},$$

$$\sigma_1 = \frac{4,82 \cdot 10^5}{2 \cdot 3,6 \cdot 10^{-2}} = 6,69 \cdot 10^6 \text{ (პა)}, \quad \sigma_2 = \frac{1,11 \cdot 10^4}{2 \cdot 3,6 \cdot 10^{-2}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ (პა)}.$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 44,6,$$

ანუ პირველ შემთხვევაში ტრაგის საშიშროება გაცილებით დიდია.

**ამოცანა 36.2.** 2 ტ მასის თვითმფრინავი მიფრინავს ჰორიზონტალურად 25 მ/წმ სიჩქარით. იგი 10 წთ-ის განმავლობაში მოძრაობს ინტენსიურ თოვის ზონაში რის გამოც მისი ზედაპირი 0,002 მ/წმ სიჩქარით იფარება თოვლით. უცვლელი რეჟიმის პირობებში როგორ შეიცვლება თვითმფრინავის ფრენის სიჩქარე და კინეტიკური ენერჯია, თუ თვითმფრინავის ზედაპირის ფართობია 30 მ<sup>2</sup>, ხოლო თოვლის სიმკვრივე 900 კგ/მ<sup>3</sup>-ია.

**ამოხსნა:**

იმპულსის მუდმივობის კანონი (36.3) მოცემულ შემთხვევაში ასე ჩაიწერება:

$$m\vec{v}_0 = (m + m_1)\vec{v}, \quad m v_0 = (m + m_1)v. \quad (1)$$

სადაც  $m_1 = \rho V = \rho S m_1 = \rho V = \rho S v' t = 9 \cdot 10^2 \cdot 30 \cdot 0,002 \cdot 10 = 540$  (კგ),  $m$  მასის თვითმფრინავზე დადებული თოვლის მასაა. (1)-დან:

$$v = \frac{m v_0}{(m + m_1)} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 25}{2 \cdot 10^3 + 540} = 19,7 \text{ (მ/წმ)}.$$

ფრენის სიჩქარის ცვლილება იქნება:

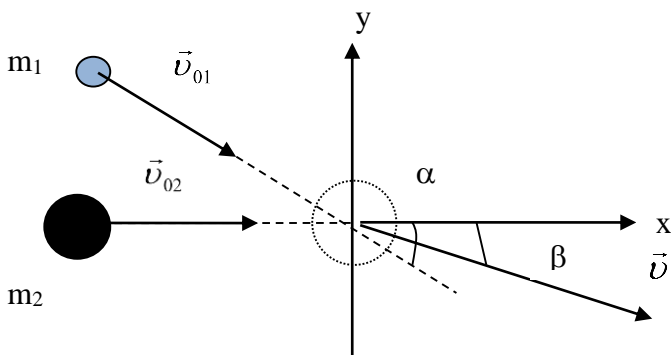
$$\Delta v = v - v_0 = 19,7 - 25 = -5,3 \text{ (მ/წმ)}.$$

კინეტიკური ენერჯიის ცვლილება

$$\Delta W_{\text{კინ}} = \frac{(m + m_1)v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \frac{2540 \cdot 19,7^2}{2} - \frac{2000 \cdot 25^2}{2} = -1,3 \cdot 10^5 \text{ (ჯგ)}$$

**ამოცანა 36.3.** 0,6 კგ მასის ბირთვი, რომელიც მოძრაობს 0,3 მ/წმ სიჩქარით ეჯახება 0,4 კგ მასის 0,2 მ/წმ სიჩქარით მოძრავ ბირთვს და აგრძელებენ ერთობლივ მოძრაობას. დაჯახების მომენტში სიჩქარეებს შორის კუთხე 60°-ია. იპოვეთ ერთობლივი მოძრაობის სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება.

**ამოხსნა:**



დაჯახება აბსოლუტურად არადრეკადია. ვისარგებლოთ (36.5)-ით და დავაგვეგმილოთ  $x$  და  $y$  ღერძებზე:

$$v_x = \frac{m_1 v_{01} \cos \alpha + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,3}{0,4 + 0,6} \approx 0,22 \text{ (მ/წმ)}$$

$$v_y = \frac{m_1 v_{01} \sin \alpha}{m_1 + m_2} = \frac{0,4 \cdot 0,2 \cdot (-0,85)}{0,4 + 0,6} \approx -0,07 \text{ (მ/წმ)}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0,23 \text{ (მ/წმ)},$$

შესაბამისად:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} \approx -0,32. \quad \beta \approx 18^\circ.$$

**ამოცანა 36.4.** ჰორიზონტალურ ზედაპირზე დევს 490 გ მასის სხეული მიმაგრებულია  $4 \cdot 10^2$  ნ/მ სიხისტის ზამბარაზე. სხეულს ხვედება ზამბარას ღერძის გასწვრივ 200 მ/წმ სიჩქარით მოძრავი 10 გ მასის ტყვია და რჩება მასში. გამოთვალეთ ზამბარას შეკუმშვის სიდიდე თუ 1) ზედაპირი გლუვია; 2) ზედაპირის ხახუნის კოეფიციენტი 0,8.

**ამოხსნა:**

იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად:

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (\vec{v}_{01} = 0), \quad (1)$$

ვინაიდან ტყვია რჩება სხეულში, ამიტომ:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}.$$

(1)-ის დაგეგმილებით ვღებულობთ:

$$m_2 v_{02} = (m_1 + m_2) v,$$

აქედან:

$$v = \frac{m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} = \frac{0,01 \cdot 200}{0,5} = 4 \text{ (მ/წმ)}.$$

1) რადგან ხახუნის ძალა უგულებელყოფილია, ამიტომ მექანიკური ენერგია ინახება  $W_1 = W_2$ , სადაც:

$$W_1 = \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 \quad \text{და} \quad W_2 = \frac{kx_1^2}{2},$$

$$\frac{m_1 + m_2}{2} v^2 = \frac{kx_1^2}{2} \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \cdot v = \sqrt{\frac{0,5}{4 \cdot 10^2}} \cdot 4 = 0,14 \text{ (მ)}.$$

2) რადგან სისტემაში მოქმედებს არაკონსერვატული-ხახუნის ძალა, ამიტომ სისტემის მექანიკური ენერგიის ცვლილება ტოლია ხახუნის ძალის მუშაობის:

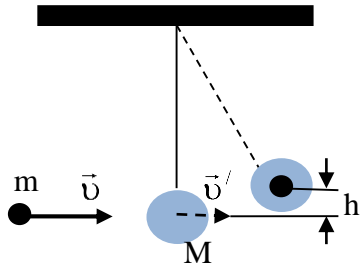
$$\Delta W = A_{\text{ხახ.}}, \quad \frac{kx_2^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 = \mu_2 (m_1 + m_2) g x_2 \cos 180^\circ \quad (F_{\text{ხახ.}} = \mu_2 (m_1 + m_2) g),$$

მონაცემთა შეტანით ვღებულობთ:

$$200x_2^2 + 8x_2 - 4 = 0, \quad x_2 = 0,09 \text{ (მ)}.$$

**ამოცანა 36.5.** ბალისტიკურ საქანს (მოწყობილობა, რომელიც გამოიყენება ტყვიის სიჩქარის დასადგენად) ეჯახება 10 გ მასის ტყვია და რჩება მასში, რის გამოც საქანმა აიწია 0,05 მ-ზე. გამოთვალეთ ტყვიის სიჩქარე, თუ საქანის მასა 10 კგ-ია (ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია).

**ამოხსნა:**



ტყვიის დაჯახებისას სისტემამ მიიღო კინეტიკური ენერგია, რომელიც გარდაიქმნა პოტენციურ ენერგიაში:

$$\frac{(M + m)}{2} v'^2 = (M + m)gh,$$

$$v' = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,05} = 1 \text{ (მ/წმ)}.$$

იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად:

$$m\vec{v} = (M + m)\vec{v}',$$

საიდანაც ტყვიის სიჩქარე იქნება:

$$v = \frac{M + m}{m} v' = \frac{10 + 0,01}{0,01} \cdot 1 = 1000 \text{ (მ/წმ)}.$$

**ამოცანები:**

- 20კგ მასის სხეულზე მოქმედებს 46 ძალა, რომელიც მას გადაადგილებს თავისი მიმართულების გასწვრივ. გამოთვალეთ შესაბამისი მუშაობა 5წმ-ის განმავლობაში. (პასუხი: 10ჯ)
- გამოთვალეთ მუშაობა, რომელსაც ასრულებს  $M = 2$ ტ მასის ვერტიკალურად  $m = 0,5$ ტ მასის ტვირთის ვერტიკალურად ზევით 400მ სიმაღლეზე აწევისას 0,2გ აჩქარებით. (პასუხი: 12მგჯ)
- 0x დერძის გასწვრივსხეულზე მოქმედი ცვლადი ძალის განტოლებაა  $F = F_x = 0,3x^2 + 2x$ . გამოთვალეთ ამ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა სხეულის გადაადგილებისას  $x=2$ მ-დან  $x=4$ მ წერტილში. (პასუხი: 19,2ჯ)
- 4ტ მასის თვითმფრინავი ბილიკს შეეხო 108კმ/სთ (30მ/წმ) სიჩქარით. გამოთვალეთ, რა მუშაობაა საჭირო სიჩქარის 36კმ/სთ-მდე (10მ/წმ) შემცირებისთვის და გაჩერებისთვის. (პასუხი: -1,6მგჯ)
- 0,01კგ მასის სხეული 10წმ-ის განმავლობაში მოძრაობს ვერტიკალურად ზემოთ. რა მუშაობა შეასრულა სხეულის მტყორცნელმა? თუ ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია. (პასუხი: -50ჯ)
- ჰორიზონტალურად მოთავსებული ზამბარა შეკუმშულია  $x=1,6$ მ-ით და მის წინ მოთავსებულია 2კგ მასის ბურთულა. ზამბარამ განთავისუფლებისას ბურთულა გაისროლა 16მ/წმ სიჩქარით თუ დრეკადობის ძალის დამოკიდებულება  $x$ -ზე მოიცემა ფორმულით:  $F = 100x + 1,6x^3$ . (პასუხი: 2,1მ/წმ)
- ჰორიზონტალურად მოთავსებული ზამბარა შეკუმშულია  $x=2$ მ-ით და მის წინ მოთავსებულია 3კგ მასის ბურთულა. რა სიჩქარით გაისვრის ბურთულას ზამბარა განთავისუფლების შემდეგ, თუ დრეკადობის ძალის დამოკიდებულება  $x$ -ზე მოიცემა ფორმულით:  $F = 230x + 2,7x^3$ . (პასუხი: .18 მ/წმ)
- ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ნაწილაკის გადაადგილებისას  $x_1=0$   $x_2=4$ მ-მდე რჩება მუდმივია და ტოლია 40ნ. შემდეგ წრფივად იზრდება და უტოლდება 60ნ-ს  $x_3=10$ მ-თვის. გამოთვალეთ გრაფიკის საშუალებით შესრულებული მუშაობა. (პასუხი: 460 ჯ.)
- რა სიჩქარით გამოვარდება 4გ მასის ბურთულა ჰორიზონტალურად მიმართული ზამბარიანი პისტოლეტიდან, თუ ზამბარა შეკუმშული იყო 3სმ-ით. სიხისტის კოეფიციენტი 40ნ/მ. (პასუხი: 3მ/წმ)

10. ზამბარის დრეკადობის ზალის დამოკიდებულება მის დეფორმაციის სიდიდესთან მოიცემა ფორმულით:  $F=250x+4x^3$ . ზამბარა შეეკუმშეს 2მ და მის წინ მოათავსეს 4კგ მასის ბურთი. რა სიჩქარეს შეიძენს ბურთი ზამბარის განთავისუფლების შემდეგ, თუ ზამბარას უკავია ა) ჰორიზონტალური, ბ) ვერტიკალური მდებარეობა. (პასუხი: 16,1მ/წმ, 14,8მ/წმ)

11. გამოთვალეთ ქვემეხის გასროლის სიძლიავე, თუ იგი 900კგ მასის ჭურვს 0,01წმ-ში ანიჭებს 500მ/წმ სიჩქარეს. რა სიმაღლეზე შეიძლებოდა ამ მუშაობით 75ტ ტვირთის ატანა? (პასუხი: 1,1. 10<sup>11</sup>გტ., 150მ)

12. 10<sup>5</sup>გტ სიძლიავერის ტვირთში იგი 15<sup>0</sup> დახრილობის აღმართზე ეწევა 50ტ მასის ტვირთს, რა მაქსიმალური სიჩქარე შეუძლია განავითაროს ტვირთში იგი, თუ ხახუნის კოეფიციენტი 0,05-ის ტოლია. (პასუხი: 0,65მ/წმ)

13. სხეული უსაწყისო სიჩქარით ვარდება 80მ სიმაღლიდან. დედამიწის ზედაპირიდან რა სიმაღლეზე აღმოჩნდება მისი კინეტიკური ენერგია 3-ჯერ მეტი პოტენციურზე. (პასუხი: 20მ)

14. 200მ სიმაღლეზე 80კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი თვითმფრინავიდან, ხტება პარაშუტისტი. გამოთვალეთ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა, თუ პარაშუტისტის საერთო მასა 150კგ-ია და მიწაზე დაეშვა 8მ/წმ სიჩქარით და ჰაერში გაიარა 350მ მანძილი. (პასუხი: 2,2კნ)

15. რა სიჩქარით ვარდებოდა 60მ სიმაღლიდან სხეული, თუ 40მ-ზე კინეტიკური და პოტენციური ენერგიები ერთმანეთს გაუტოლდა (ჰაერის წინააღმდეგობა გამორიცხულია). (პასუხი: 40მ/წმ)

16. გამოთვალეთ იმ ზამბარის სიხისტე, რომელთან შეჯახებისას უნდა შეჩერდეს 1600კგ მასის 90კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილი, ისე რომ დამამუხრუჭებელი აჩქარება არ აღემატებოდეს 2გ-ს. (პასუხი: 1,02.10<sup>3</sup> ნ/მ)

17. 80კგ მასის ალპინისტმა უნდა დაიპყროს 4200მ სიმაღლის მწვერვალი იგი იმყოფება 1800მ სიმაღლეზე. მწვერვალზე ასვლას მან მოანდომა 4სთ. იპოვეთ 1) სიმძიმის ძალის დასაძლევად შესრულებული მუშაობა; 2) მის მიერ განვითარებული საშუალო სიძლიავე; 3) ერთეულოვან დროში დახარჯული ენერგია, თუ ადამიანის ორგანიზმის მქკ-ია 15%. (პასუხი: -1,9.10<sup>6</sup>ჯ, 1,3.10<sup>2</sup>გტ; 8,7.10<sup>2</sup>გტ.)

18. 12მ/წმ სიჩქარით მოძრავი მოთხილამრე იწყებს ასვლას 18<sup>0</sup>-იან დახრილობის ფერდობზე და ჩერდება 16მ-ის გავლის შემდეგ. იპოვეთ იპვეთ ხახუნის კოეფიციენტის მნიშვნელობა. (პასუხი: 0,15)

19. ჰორიზონტისადმი კუთხით გაშვებული რაკეტა ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში, რომელიც გაშვების წერტილიდან დაშორებულია L მანძილით, აფეთქების შედეგად იყოფა ორ ტოლი მასის ნაწილად. აქედან ერთერთი ვარდება ვერტიკალურად ქვემოთ. რა მანძილზე დავარდება მეორე? (პასუხი: 3L)

20. 90კგ მასის პარაშუტისტი მოწედა უძრავ ვეტიფრენს და პარასუტის გახსნამდე დაეშვა 240მ-ით. ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა სიმძიმის ძალის 40%-ია. გამოთვალეთ წინააღმდეგობის ძალის მუშაობა და პარაშუტისტის საბოლოო სიჩქარე. (პასუხი: -8,64.10<sup>4</sup>ჯ, 53,7მ/წმ).

21. განსაზღვროთ  $m_1$  და  $m_2$  მასების მქონე ორი ნაწილაკისგან შემდგარი სისტემის მასათა ცენტრის მდებარეობა, თუ მათ შორის მანძილია  $l$ . (პასუხი:  $x_c = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$ )

22.  $m$  და  $3m$  მასის ნაწილაკებს შორის მანძილი 2მ-ია. მათი შემაერთებელი წრფის შუა წერტილში მოათავსებულია  $2m$  მასის ნაწილაკი. იპოვეთ სისტემის მასათა ცენტრის მდებარეობა (კოორდინატა სათავე დაამთხვიეთ  $m$  მასის ნაწილაკის მდებარეობას). (პასუხი: 4/3მ)

23.  $m$  და  $3m$  მასის ნაწილაკებს შორის მანძილი  $6m$ -ია თითოეულიდან  $5m$ -ზე მოთავსებულია  $2m$  მასის ნაწილაკი. იპოვეთ სისტემის მასათა ცენტრის მდებარეობა. (კოორდინატა სათავე შეუთავსეთ  $m$  მასის ნაწილაკს, ხოლო  $Ox$  ღერძი მიმართეთ  $3m$  მასის ნაწილაკთან შემაერთებელი წრფის გასწვრივ). (პასუხი:  $\vec{r}_C = (4\vec{i} + 4/3\vec{j})m$ )

24.  $35კგ$  მასის ორი სხეულის სიჩქარეებია  $\vec{v}_1 = 12\vec{i} - 16\vec{j}$ ,  $\vec{v}_2 = -20\vec{i} + 14\vec{j}$ .

იპოვეთ მათი მასათა ცენტრის იმპულსი. (პასუხი:  $288,6კგ.მ/წმ$ )

25.  $4კგ$  და  $2კგ$  მასის სხეულთა სიჩქარეებია  $\vec{v}_1 = 10\vec{i} - 16\vec{j}$ ,  $\vec{v}_2 = -12\vec{i} + 14\vec{j}$ . იპოვეთ მათი მასათა ცენტრის იმპულსი. (პასუხი:  $236,4კგ.მ/წმ$ )

26.  $m$  და  $3m$  მასის ნაწილაკებს შორის მანძილი  $6m$ -ია თითოეულიდან  $5m$ -ზე მოთავსებულია  $2m$  მასის ნაწილაკი. იპოვეთ სისტემის მასათა ცენტრის მდებარეობა. (კოორდინატა სათავე შეუთავსეთ  $m$  მასის ნაწილაკს, ხოლო  $Ox$  ღერძი მიმართეთ  $3m$  მასის ნაწილაკთან შემაერთებელი წრფის გასწვრივ). (პასუხი:  $\vec{r}_C = (4\vec{i} + 4/3\vec{j})m$ )

27.  $m$  მასის ბურთულა ეჯახება უძრავ ბურთულას და უკუივდება საწყისი სიჩქარის  $1/3$ -ის ტოლი სიჩქარით. გამოთვალეთ მეორე ბურთულას მასა, თუ დაჯახება ცენტრალურია და აბსოლუტურად დრეკადი. (პასუხი:  $m_2 = 2m$ )

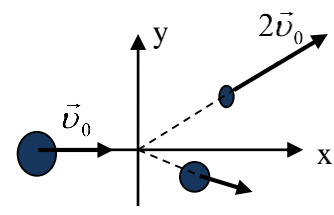
28.  $2კგ$  მასის სხეული ეჯახება  $3კგ$  მასის უძრავ სხეულს. ამ სხეულის ენერჯის რა ნაწილი იხარჯება პლასტიკურ დეფორმაციაზე, თუ დაჯახება აბსოლუტურად არადრეკადია? (პასუხი:  $0,71$ )

29.  $5მ/წმ$  სიჩქარით მოძრავი ბირთვი ეჯახება  $3კგ$  მასის უძრავ ბირთვს. გამოთვალეთ მათი საბოლოო კინეტიკური ენერჯიები, თუ დაჯახება ცენტრალურია და აბსოლუტურად დრეკადი. (პასუხი:  $0,98ჯ, 48,74ჯ$ )

30.  $5კგ$  მასის ბალისტიკურ საქანს ეჯახება  $5კგ$  მასის ტყვია და რჩება მასში, რის გამოც საქანმა აიწია  $0,05მ$ -ზე. გამოთვალეთ ტყვიის სიჩქარის ცვლილება (ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია). (პასუხი: შემცირდა  $300მ/წმ$ -ით)

31.  $15კგ$  მასის ბალისტიკურ საქანს ეჯახება  $5კგ$  მასის ტყვია და გადის მასში. დაჯახების გამო საქანმა აიწია  $0,04მ$ -ზე. გამოთვალეთ ტყვიის სიჩქარე, თუ საქანის მიერ მიღებული ენერჯის  $20\%$  იხარჯება ჰაერის წინააღმდეგობის დაძლევაზე. (პასუხი:  $1000მ/წმ$ )

32.  $m$  მასის ნაწილაკი მოძრაობდა  $Ox$  ღერძის გასწვრივ მუდმივი  $v_0$  სიჩქარით. მყისიერად მას მოწყდა მისი მასის მესხუთედი ნაწილი და დაიწყო მოძრაობა  $2v_0$  სიჩქარით  $Ox$  ღერძის მიმართ  $30^\circ$  კუთხით (იხ. ნახაზი). გამოთვალეთ დარჩენილი ნაწილის სიჩქარე და მიმართულება. (პასუხი:  $0,87v_0, -16^\circ$ )



## თაზო IV.

### მხარი სხეულის დინამიკა

#### §37. იმპულსის და ძალის მომენტი

ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკის შესწავლისთვის ჩვენ დაგვიჭირდება ორი ახალი ცნების შემოტანა: იმპულსის მომენტის  $\vec{L}$  და ძალის მომენტის  $\vec{M}$ . ვთქვათ, მ მასის ნაწილაკს ათვლის ინერციულ სისტემაში გააჩნია  $\vec{p} = m\vec{v}$  იმპულსი და მისი მდებარეობა 0 ათვლის წერტილის მიმართ განისაზღვრება  $\vec{r}$  რადიუს-ვექტორით, მაშინ მისი იმპულსის მომენტი 0 წერტილის მიმართ გამოითვლება რადიუს-ვექტორისა და იმპულსის ვექტორული ნამრავლის სახით:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] \text{.}^{33} \quad (37.1)$$

$\vec{L}$  ვექტორული სიდიდეა და მისი მიმართულება განისაზღვრება მარჯვენა ხელის წესით (§15). მაგალითად, თუ ნაწილაკი მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 37.1),  $\vec{L}$  მოდებული იქნება 0 წერტილში და მიმართული იქნება ამ სიბრტყისადმი მართობულად მკითხველისკენ. (37.1)-ის თანახმად,

$$L = rp \sin \alpha = \ell p \text{,} \quad (37.2)$$

სადაც  $\ell = r \sin \alpha$  წარმოადგენს 0 წერტილიდან ნაწილაკის იმპულსის (სიჩქარის) მიმართულებაზე დაშვებული მართობის სიგრძეს – მას იმპულსის მომენტის მხარი ეწოდება. იმპულსის მომენტის ერთეულია კგმ<sup>2</sup>/წმ.

თუ ნაწილაკი 0 წერტილის მიმართ წრფივად მოძრაობს (ნახ. 37.2ა), მაშინ ცხადია  $\ell = \text{const}$  და თუ მოძრაობა თანაბარწრფივია იმპულსის მომენტიც მუდმივია.

წრეწირზე მბრუნავი ნაწილაკისთვის თუ ათვლის წერტილად ავიღებთ წრეწირის 0 ცენტრს (ნახ. 37.2ბ), მაშინ  $\ell = r = \text{const}$  ( $\alpha = 90^\circ$ ). თანაბარი ბრუნვისას  $\vec{L} = \text{const}$ .

როდესაც მ მასის ნაწილაკზე მოქმედებს  $\vec{F} = m\vec{a}$  ძალა, მაშინ ამ ძალის მომენტი რაიმე 0 წერტილის მიმართ რადიუს-ვექტორისა და ძალის ვექტორული ნამრავლის ტოლია

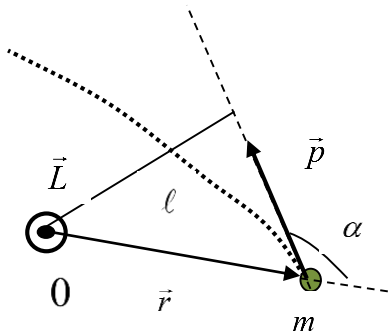
$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] \text{.} \quad (37.3)$$

ცხადია, მისი მიმართულებაც მარჯვენა ხელის წესით განისაზღვრება. თუ  $\vec{F}$  იმყოფება ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 37.3), მაშინ  $\vec{M}$  მოდებულია 0 წერტილში და მიმართულია სიბრტყის მართობულად ქვევით. (37.3)-ის თანახმად  $M = rF \sin \beta = \ell F$ , სადაც  $\ell = r \sin \beta$  ძალის მხარია. იგი ათვლის 0 წერტილიდან ძალის მოქმედების წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძის ტოლია. ძალის მომენტი ახასიათებს ძალის შესაძლებლობას გამოიწვიოს ნაწილაკის ბრუნვითი მოძრაობა მოცემული წერტილის მიმართ, რის გამოც მას მბრუნებელ მომენტსაც უწოდებენ. მისი ერთეულია 1 ნმ – იგი ის მბრუნებელი მომენტი, რომელსაც ქმნის 1 ნ ძალა, თუ მისი მხარი 1 მ-ია. აქედან გამომდინარე მას არა აქვს საერთო ჯოულთან (§26). იმპულსის მომენტი კრებადი სიდიდეა - ნაწილაკთა სისტემის იმპულსი რაიმე წერტილის მიმართ ტოლია ამავე წერტილის მიმართ თითოეული ნაწილაკის

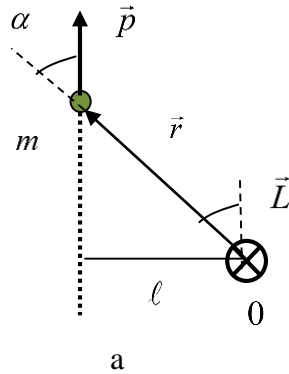
<sup>33</sup>დეკარტეს სისტემაში ვექტორული ნამრავლი გამოითვლება ფორმულით:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

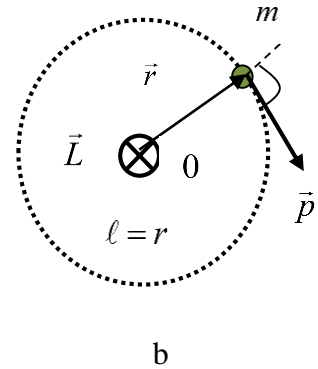
იმპულსთა მომენტების ვექტორული ჯამის  $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$ . ასევე კრებალია ძალის მომენტიც  $\vec{M} = \sum \vec{M}_i$ .



ნახაზი 37.1



ნახაზი 37.2

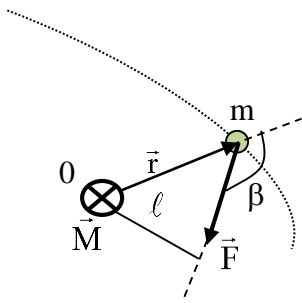


როგორც ვიცით გადატანითი მოძრაობის ძირითადი განტოლება ამყარებს კავშირს ნაწილაკის იმპულსსა და მასზე მოქმედ ძალთა ტოლქმედს შორის  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ . შევეცადოთ მივიღოთ ანალოგიური განტოლება ბრუნვითი მოძრაობისთვის. ამ მიზნით გავაწარმოოთ (37.1):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d[\vec{r} \times \vec{p}]}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[ \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{v} \times \vec{p}] + [\vec{r} \times \vec{F}],$$

სადაც  $[\vec{v} \times \vec{p}] = 0$  (რადგან  $\vec{v} \uparrow \vec{p}$ ), (37.3)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (37.4)$$



ნახაზი 37.3

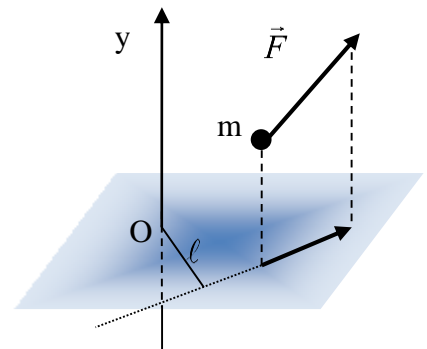
(37.4) ბრუნვითი მოძრაობის ძირითადი განტოლებაა, რომლის თანახმადაც ათვლის ინერციულ სისტემაში ნაწილაკზე მოქმედი ძალის მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ ტოლია ამავე წერტილის მიმართ იმპულსის მომენტის ცვლილების სიჩქარის.

ძალის მომენტი რაიმე y ღერძის მიმართ ეწოდება ამ ღერძის მართობულ სიბრტყეში მოცემული ძალის გეგმილის მომენტს ამ ღერძისა და სიბრტყის გადაკვეთის O წერტილის მიმართ (ნახ. 37.4).

$$M_y = [\vec{r} \times \vec{F}]_y = \frac{dL_y}{dt}.$$

ძალის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ ახასიათებს ძალის უნარს შემოაბრუნოს ნაწილაკი (სხეული) მოცემული ღერძის მიმართ.

დავუშვათ, ნაწილაკი მოძრაობს ნებისმიერი ტიპის ცენტრალურ ძალთა ველში. რადგან ცენტრალური ძალა მიმართულია რადიუს-ვექტორის გასწვრივ (§30),  $\sin\beta$  და  $\vec{M} = 0$ , მაშინ (37.4)-ის თანახმად  $\vec{L} = const$ , ე.ი. ცენტრალურ ძალთა ველში ნაწილაკის იმპულსის მომენტი ინახება.



ნახაზი 37.4

**ამოცანა 37.1.** დავამტკიცოთ კეპლერის მეორე კანონის სამართლიანობა. ვაჩვენოთ, რომ მზისა და პლანეტის შემაერთებელი წრფე დროის ტოლ შუალედებში ტოლ ფართობებს შემოწერს.  
**ამოხსნა:**

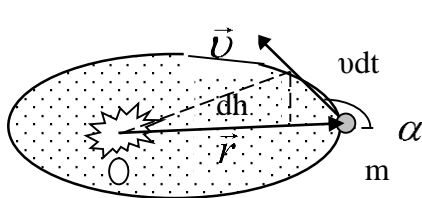
$dt$  დროში  $v$  სიჩქარით მოძრავი პლანეტა შემოწერს  $vdt$  რკალს, ხოლო რადიუს-ვექტორის-  $\vec{r}$  -ის მიერ ამავე დროში შემოწერილი სეგმენტის (სამკუთხედის) ფართობი იქნება

$$dS = \frac{1}{2} r dh = \frac{1}{2} r v dt \sin \alpha . \quad (1)$$

რადგან პლანეტა იმყოფება ცენტრალურ ძალთა ველში (მზის გრავიტაციული ველი), ამიტომ:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, L = const .$$

ე.ი. პლანეტის იმპულსის მომენტი მზის მიმართ  $L = rp \sin \alpha = rmv \sin \alpha$  მუდმივი სიდიდეა. ამ უკანასკნელიდან:



$$\frac{L}{m} = rv \sin \alpha$$

გავითვალისწინოთ (1)-ში:

$$dS = \frac{1}{2m} L dt ,$$

ხოლო დროის ერთეულში შემოწერილი ფართი იქნება:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = const .$$

**ამოცანა 37.2.** ნაწილაკზე, რომელიც იმყოფება  $XOY$  სიბრტყის  $(0,2;1,5)$  წერტილში, მოდებულია 80 ნ ძალა. გამოთვალეთ ამ ძალის მომენტი  $OZ$  ღერძის მიმართ, თუ ძალა  $OX$  ღერძთან ადგენს  $60^\circ$ -იან კუთხეს.

**ამოხსნა:**

ამოცანის პირობის თანახმად:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y = 0,2\vec{i} + 1,5\vec{j} ,$$

ხოლო:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y = 80\cos 60^\circ \vec{i} + 80\sin 30^\circ \vec{j} = 69,3\vec{i} + 40\vec{j} .$$

ვექტორული ნამრავლის განმარტების თანახმად:

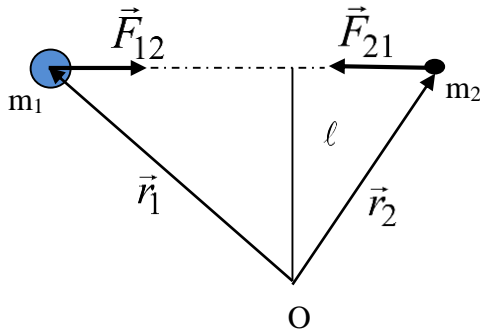
$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = (r_y F_z - r_z F_y) \vec{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \vec{k} = (r_x F_y - r_y F_x) \vec{k} .$$

$$M = M_z = (0,2 \cdot 69,3 - 1,5 \cdot 40) = -46,1 \quad (6\text{მ})$$

ძალის მომენტი მიმართულია  $Oz$  ღერძის საპირისპიროდ.

### §38. იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი

განვიხილოთ ორი ნაწილაკისგან შედგენილი სისტემა. ნიუტონის III კანონის თანახმად ორი ნაწილაკის ურთიერთქმედების ძალები სიდიდით ტოლია, მდებარეობს ერთ წრფეზე და ურთიერთსაპირისპიროდ არის მიმართული (ნახ. 38.1). შესაბამისად მათი მამრუნებელი



ნახაზი 38.1

მომენტები ნებისმიერად შერჩეულ  $O$  წერტილის მიმართ სიდიდით ტოლი და საპირისპიროა,  $[\vec{r}_1 \vec{F}_{12}] = -[\vec{r}_2 \vec{F}_{21}]$  ამიტომ მათი ჯამი ნულის ტოლია.

განვიხილოთ  $m_1, m_2, \dots, m_N$  ნაწილაკებისგან შემდგარი სისტემა სადაც ნაწილაკები განიცდის როგორც შიგა, ასევე გარე ძალების მოქმედებას. დინამიკის ძირითად განტოლებას მოცემული სისტემისთვის ექნება (35.1)-ის სახე, რომელიც ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \sum_{j \neq 1}^N \vec{F}_{1j} + \vec{F}_1 \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \sum_{j \neq 2}^N \vec{F}_{2j} + \vec{F}_2 \\ \dots \\ \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \sum_{j \neq N}^{N-1} \vec{F}_{Nj} + \vec{F}_N \end{cases} \quad (38.1)$$

თითოეული განტოლება ვექტორულად გავამრავლოთ მარცხნიდან შესაბამისი ნაწილაკის რადიუს-ვექტორზე. მაშინ თითოეული განტოლების მარჯვენა მხარეს გვექნება ნაწილაკის იმპულსის მომენტის ცვლილება (წარმოებული), მარჯვნივ კი ამავე ნაწილაკზე მოქმედი შიგა და გარე ძალების მომენტთა ჯამი

$$\begin{cases} \frac{d[\vec{r}_1 \times \vec{p}_1]}{dt} = \sum_{j \neq 1}^N [\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1j}] + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] \\ \frac{d[\vec{r}_2 \times \vec{p}_2]}{dt} = \sum_{j \neq 2}^N [\vec{r}_2 \times \vec{F}_{2j}] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2] \\ \dots \\ \frac{d[\vec{r}_N \times \vec{p}_N]}{dt} = \sum_{j \neq N}^{N-1} [\vec{r}_N \times \vec{F}_{Nj}] + [\vec{r}_N \times \vec{F}_N] \end{cases} \quad (38.2)$$

თუ განტოლებათა სისტემას წევრობრივ შევკრებთ, შიგა ძალების მომენტები ზემოთქმულის თანახმად წყვილ-წყვილად ერთმანეთს გააბათილებს, რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]. \quad (38.3)$$

იმპულსისა და ძალის მომენტების შეკრებადობის გამო (38.3) ასე ჩაიწერება

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{გარე}}, \quad (38.4)$$

რომლის თანახმადაც სისტემის იმპულსის მომენტის ცვლილება რაიმე წერტილის მიმართ შეიძლება გამოიწვიოს მხოლოდ გარე ძალთა ჯამურმა მომენტმა. თუ  $\vec{M}_{\text{გარე}} = 0$ , მაშინ  $\vec{L} = \text{const}$ - წარმოადგენს იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონს, რომელიც §37-ის საფუძველზე ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

➤ **თუ ნაწილაკთა სისტემა ჩაკეტილია ან იმყოფება ცენტრალურ ძალთა ველში მისი იმპულსის მომენტი ინახება.**

თუ (38.4)-ს დავაგვემიღებთ რაიმე  $Oy$  ღერძის მიმართ, გვექნება:  $dL_y/dt = M_y$ , სისტემის იმპულსის მომენტის წარმოებულის გეგმილი რაიმე ღერძის მიმართ ტოლია სისტემაზე მოქმედ გარე ძალთა მომენტების ამავე ღერძზე გეგმილთა ალგებრული ჯამის. თუ სისტემა ჩაკეტილია, იმპულსის მომენტის გეგმილი ნებისმიერი ღერძის მიმართ უცვლელი დარჩება.

ჩვენ შევისწავლეთ სამი ფიზიკური სიდიდე: ენერგია, იმპულსი, იმპულსის მომენტი. გავეცანით მათ შენახვის კანონებს, რომლებიც დამყარებულია სივრცისა და დროის თვისებებზე. ხშირად მექანიკურ სისტემაში მიმდინარე პროცესის აღსაწერად საკმაოდ რთული და ზოგჯერ შეუძლებელიც არის შესაბამისი მოძრაობის განტოლებათა ჩაწერა და ამოხსნა მაშინ, როდესაც აღნიშნულ კანონთა გამოყენებით შესაძლებელია დასმული ამოცანის მარტივად გადაწყვეტა. ეს კანონები არ თხოულობს მოქმედი ძალების ცოდნას და მინიჭებულ აჩქარებათა გამოთვლას, რაც ზოგჯერ უაღრესად რთულია.

შენახვის კანონები ჩვენ მივიღეთ ნიუტონის განტოლებებიდან, მაგრამ უნდა ავღნიშნოთ, რომ ისინი გაცილებით ზოგადია, რადგან ძალაში რჩება მაშინაც კი, როდესაც ნიუტონის კანონები ირღვევა (რელატივისტური ფიზიკა).

**ამოცანა 38.1.** 2კგ მასის სხეულის რადიუს-ვექტორი მოიცემა ფორმულით:  $\vec{r} = 3t^2\vec{i} - 4\vec{j}$ . გამოთვალეთ სხეულის იმპულსისა და ძალის მომენტები  $t=2$ წმ-თვის.

**ამოხსნა:**

ამოცანის პირობიდან:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\vec{i}.$$

(37.1)-ის თანახმად:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = m[\vec{r} \times \vec{v}] = m(xv_y - yv_x)\vec{k} = 2 \cdot 4 \cdot 6t\vec{k} = 48t\vec{k},$$

ე.ი.

$$L = L_z = 48t, \quad L_z(t=2) = 48 \cdot 2 = 96 \text{ (კგმ}^2\text{/წმ)}.$$

(38.4)-დან:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = 48 \text{ (ნმ)}.$$

**§39. მყარი სხეულის მასათა ცენტრის მოძრაობა**

§1-ის თანახმად, თუ მოცემული ამოცანის პირობებში სხეულის ფორმა და ზომები არსებით როლს არ ასრულებს, შესაძლებელია სხეულის წარმოდგენა ნივთიერი წერტილის (ნაწილაკის) სახით და მის მიმართ დასმული საკითხების გადაწყვეტა. მაგრამ ხშირ შემთხვევაში სწორედ სხეულის ფორმისა და ზომების გათვალისწინებაა არსებითი. ასეთ შემთხვევაში ამოცანის გადაწყვეტა საგრძნობლად გამარტივდება თუ საძიებელ სიდიდეების მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული სხეულის დრეკად თვისებებზე. მაშინ შესაძლებელია სხეულის, როგორც აბსოლუტურად მყარი ობიექტის განხილვა, რაც იმას ნიშნავს, რომ სხეულის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი მოცემული ამოცანის პირობებში არ იცვლება - უგულებელყოფილია ყოველგვარი დეფორმაციის შესაძლებლობა. ამ თავში განვიხილავთ სწორედ აბსოლუტურად მყარი სხეულის მოძრაობასთან დაკავშირებულ საკითხებს.

დავადგინოთ აბსოლუტურად მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხი. თუ ამ სხეულს შეუძლია თავისუფალი გადაადგილება სივრცეში (არაა დამაგრებული), მაშინ გადატანით მოძრაობასთან დაკავშირებით მას ექნება 3 თავისუფლების ხარისხი, ასევე, რადგან სხეულს შეუძლია ბრუნვა სივრცეში სამი დამოუკიდებელი მიმართულებით, მას ექნება დამატებით ბრუნვით მოძრაობასთან დაკავშირებული 3 თავისუფლების ხარისხი. ე.ი.  $3+3=6$ . თუ სხეული დამაგრებულია ერთი წერტილით მას დარჩება მხოლოდ ბრუნვით მოძრაობის 3 თავისუფლების ხარისხი. უძრავი ღერძის მიმართ ბრუნვის შემთხვევაში მყარ სხეულს დარჩება ბრუნვით მოძრაობის მხოლოდ ერთი თავისუფლების ხარისხი.

სხეულის ნებისმიერი ტიპის მოძრაობა შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ, როგორც მოძრაობის ორი ტიპის – გადატანითის და ბრუნვითის ზედდება-ჯამი.

განვიხილოთ სხეულის გადატანითი მოძრაობა, ანუ როცა სხეულის ყველა წერტილი ერთნაირ გადაადგილებას ასრულებს, რის გამოც მის თითოეულ ნაწილს დროის მოცემულ მომენტში ერთნაირი სიჩქარე და აჩქარება გააჩნია. სხეული აზრობრივად დავეოთ ნივთიერ წერტილებად, ანუ იმდენად მცირე ნაწილებად, რომ მათი წირითი ზომები გაცილებით ნაკლები იყოს ამოცანაში განსახილველ მანძილებთან შედარებით. ამით ჩვენ სხეულს წარმოვიდგენთ ნაწილაკთა სისტემის სახით, იმ განსხვავებით, რომ ამ უკანასკნელში ნაწილაკებს შორის მანძილი მთელი მოძრაობის პროცესში უცვლელი დარჩება. ეს ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ, მაგრამ არ ცვლიან სხეულის მოძრაობის ხასიათს. თუ ჩავწერთ ამ სისტემისთვის დინამიკის ძირითად განტოლებას ისევე, როგორც ნაწილაკთა სისტემის შემთხვევაში (§35) ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ძალების (შიგა ძალების) ჯამი ნულის ტოლი იქნება, რის გამოც ნიუტონის II კანონი მიიღებს სახეს:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum \vec{F}_{\text{გარე}}, \quad \frac{d m \vec{v}_C}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{გარე}},$$

ხოლო, თუ სხეულის მასა უცვლელია

$$m \vec{a}_C = \sum \vec{F}_{\text{გარე}}, \tag{39.1}$$

სადაც  $\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$  – სხეულის მასათა ცენტრის აჩქარებაა, რომლის მდებარეობა განისაზღვრება

(35.4) და (35.5) ფორმულებით. რადგან მყარ სხეულში მასა უწყვეტად განფენილია მთელ მოცულობაში, ამიტომ ამოცანის ამონახსნის სიზუსტის გასაზრდელად საჭიროა აღნიშნულ ფორმულებში ჯამის ინტეგრალით შეცვლა:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{m} \int \bar{r} dm, \quad x_C = \frac{1}{m} \int x dm, \quad y_C = \frac{1}{m} \int y dm, \quad z_C = \frac{1}{m} \int z dm. \quad (39.2)$$

სხეულის გადატანითი მოძრაობის შესწავლისთვის, ამ მოძრაობის განმარტებიდან გამომდინარე, საკმარისია მისი ერთი წერტილის კერძოდ მასათა ცენტრის მოძრაობის განხილვა.

(39.1) სხეულის მასათა ცენტრის მოძრაობის განტოლებაა, მაგრამ თუ სხეულის მოძრაობა გადატანითია, მაშინ იგი იმავდროულად ასახავს სხეულის ნებისმიერი წერტილის მოძრაობას. ამ განტოლების თანახმად გადატანითი მოძრაობისას სხეულის მასათა ცენტრი მოძრაობს ისე, როგორც იმოძრაებდა მოცემული სხეულის მასის მქონე ნივთიერი წერტილი, თუ მასზე მოვდებდით იგივე გარე ძალებს.

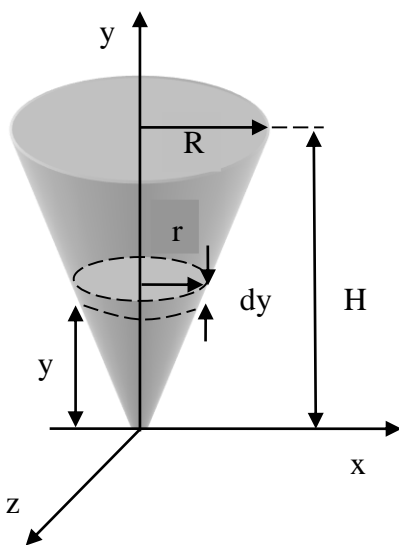
შევნიშნოთ, რომ სხეულის და ნაწილაკთა სისტემის მასათა ცენტრებს შორის არსებითი განსხვავებაა. კერძოდ, მყარ სხეულში იგი ფიქსირებული, უცვლელი წერტილია, ხოლო ნაწილაკთა სისტემაში არაფიქსირებულია-ნაწილაკთა ურთიერთქმედებისას ის იცვლის თავის მდებარეობას. ამის გამო ნაწილაკთა სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის ცოდნა იძლევა ინფორმაციას მთლიანად მთელი სისტემის მოძრაობის ხასიათზე და არა მისი რომელიმე ნაწილაკის მოძრაობის შესახებ.

სხეულის მასათა ცენტრის მდებარეობა ემთხვევა სიმძიმის ძალის ცენტრს, ანუ იმ წერტილს, სადაც მოდებულია სხეულის თითოეული ნაწილაკის სიმძიმის ძალთა ტოლქმედი. ერთგვაროვან, სიმეტრიული ფორმის სხეულებში მასათა ცენტრი სიმეტრიის ცენტრის თანხვედრილია.

**ამოცანა 39.1.** გამოვთვალოთ სიმაღლის ერთგვაროვანი კონუსის მასათა ცენტრის მდებარეობა, თუ მისი ფუძის რადიუსია  $R$ , ხოლო სიმკვრივეა  $\rho$ .

**ამოხსნა:**

კოორდინატთა სისტემა შევარჩიოთ ისე, რომ  $0$  სათავე ემთხვეოდეს კონუსის წვეროს, ხოლო  $Oy$  მიმართული იყოს სიმეტრიის ღერძის გასწვრივ. მაშინ, ცხადია  $x_C = 0, z_C = 0$ , ხოლო  $y_C$ -ს გამოვთვალოთ ფორმულით



$$y_C = \frac{1}{m} \int y dm, \quad (1)$$

რისთვისაც კონუსი აზრობრივად დავყოთ  $dy$  სიმაღლის მქონე კოაქსიალურ ცილინდრებად, რომელთა მასა იქნება

$$dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dy. \quad (2)$$

ნახაზიდან:

$$\frac{r}{R} = \frac{y}{H},$$

აქედან:

$$r = \frac{R}{H} y. \quad (3)$$

(2) და (3) შევიტანოთ (1)-ში:

$$y_C = \frac{1}{m} \frac{\pi R^2}{H^2} \rho \int_0^H y^3 dy = \frac{1}{m} \pi R^2 \rho \frac{H^4}{4H^2} = \frac{1}{4m} \pi R^2 \rho H^2,$$

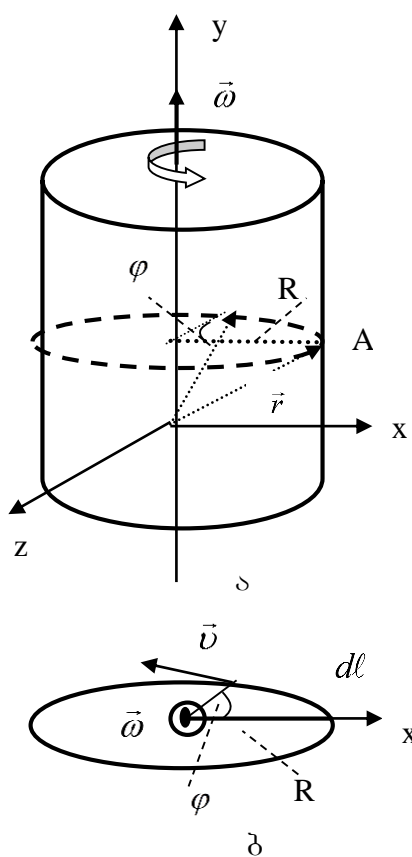
სადაც კონუსის მასა:

$$m = \frac{1}{3} \rho \pi R^2 H, \text{ ე.ი. } y_c = \frac{3}{4} H.$$

კონუსის მასათა ცენტრი მდებარეობს წვეროდან  $(3/4)H$  სიმაღლეზე ანუ ფუძიდან  $H/4$  ზე.

### §40. სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის კინემატიკური სიდიდეები

მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობისას მისი წერტილები შემოწერს წრეწირს, რომელთა ცენტრები მდებარეობს ერთ წრფეზე, რომელსაც ბრუნვის ღერძს უწოდებენ. ცხადია აბსოლუტურად მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობისას მის თითოეულ წერტილს დროის მოცემულ მომენტში ერთნაირი კუთხური სიჩქარე გააჩნია. შესაბამისად ამ მოძრაობის აღწერისთვის საჭიროა დროის თითოეული მომენტისთვის ღერძის მდებარეობისა და სხეულის კუთხური სიჩქარის განსაზღვრა.



ნახაზი 40.1

კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_{\text{საშ}} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (40.2)$$

კუთხური აჩქარება:

$$\varepsilon_{\text{საშ}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (40.3)$$

ჩვენ განვიხილავთ სხეულის მხოლოდ ისეთ ბრუნვით მოძრაობას, როდესაც ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ ბრუნვის ღერძი უძრავია (დამაგრებულია), ამასთანავე, არ არის სავალდებულო იგი გადიოდეს სხეულის მასათა ცენტრზე. ძირითადად გამოვიყენებთ იმ სიდიდეებს და აღნიშვნებს, რომლებიც შემოვიტანეთ §9-ში. ამასთანავე დამატებით შემოვიღებთ ღ სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს უმოკლეს მანძილს სხეულის მოცემული წერტილიდან ბრუნვის ღერძამდე, ხოლო  $\vec{r}$ -ით ისევ ავღნიშნავთ რადიუს-ვექტორს ათვლის  $O$  წერტილიდან მოცემულ წერტილამდე (ნახ. 40.1ა), თუ სხეული ბრტყელია (მაგალითად, დისკო), ცხადია  $R = r$ . რადგან სხეულის თითოეული წერტილი დროის მოცემულ ინტერვალში ერთნაირი კუთხით შემობრუნდება, ამიტომ ბრუნვითი მოძრაობის დასახასიათებლად საჭიროა ამ კუთხის ცოდნა, რომელსაც ჩვეულებრივად  $OX$  ღერძიდან ავითვლით. ნახ. 40.1ა-ზე მოცემულია  $OY$  ღერძის ირგვლივ მბრუნავი სხეული, ხოლო ნახაზ 40.1ბ-ზე – მისი პროექცია  $XOZ$  სიბრტყეში. §8,9-დან ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგ კინემატიკურ სიდიდეებს:

შემობრუნების კუთხე:

$$\varphi = \frac{\ell}{R}, \quad (40.1)$$

ბრუნვითი მოძრაობისას სხეულის ნებისმიერი ნაწილაკის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება დროის მოცემული მომენტისთვის ერთნაირია, ხოლო წირითი სიჩქარისა და წირითი აჩქარების მნიშვნელობები ბრუნვის ღერძის მიმართ წერტილის მდებარეობაზეა დამოკიდებული. მართლაც, (§5)-დან:

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{d\varphi R}{dt} = \omega R, \quad a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R,$$

სხეულის ნაწილაკის წირითი სიჩქარე და აჩქარება მით მეტია, რაც უფრო დაშორებულია იგი ბრუნვის ღერძს.

თუ სხეულის ბრუნვა თანაბარია, ვისარგებლებთ პერიოდის  $T$  და სიხშირის  $\nu$  ცნებებით, რომლებიც კუთხურ სიჩქარესთან დაკავშირებულია ფორმულით:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad \left( \nu = \frac{1}{T} \right).$$

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ ბრუნვითი მოძრაობის ფორმულები ანალოგიურია გადატანითი მოძრაობის ფორმულების, თუ მოვახდენთ შემდეგ ცვლილებებს –  $x \sim \varphi, v \sim \omega, a \sim \varepsilon$ . აქედან გამომდინარე, გადატანითი მოძრაობის განტოლებებში (§7) სათანადო შეცვლებით შეგვიძლია მივიღოთ მბრუნავი სხეულის კინემატიკური განტოლებები:

**ცხრილი 40.1**

გადატანითი მოძრაობა	ბრუნვითი მოძრაობა
თანაბარწრფივი $\vec{v} = const$	თანაბარი $\vec{\omega} = const$
$x = x_0 + vt$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$
თანაბარცვლადი $\vec{a} = const$	თანაბარცვლადი $\vec{\varepsilon} = const$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$v_{საშ} = \frac{v + v_0}{2}$	$\omega_{საშ} = \frac{\omega + \omega_0}{2}$
$x = x_0 + v_0 t + at^2 / 2$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2$
$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$	$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$

**ამოცანა 40.1.** დასაფრენ ზოლზე შეხებიდან გარკვეულ დროში თვითმფრინავის სიჩქარე თანაბრად შემცირდა 80 კმ/სთ-დან 55 კმ/სთ-მდე შემცირდა. ამ დროში ბორბლებმა 200 ბრუნნი შეასრულა. ვიპოვოთ დამუხრუჭების დრო და ბორბლის კუთხური აჩქარება, თუ ბორბლის დიამეტრია  $d = 1\text{მ}$ .

**ამოხსნა:**

თვითმფრინავის საშუალო სიჩქარე:

$$v_{საშ} = \frac{v + v_0}{2},$$

ხოლო გავლილი მანძილი  $S = \pi d \cdot N$ , შესაბამისი დრო:

$$\Delta t = \frac{S}{v_{საშ}} = \frac{2\pi d N}{v + v_0}. \quad (1)$$

დროის ამ ინტეგრალში კუთხური სიხარის ცვლილება იქნება:

$$\Delta\omega = \frac{v - v_0}{R} = \frac{2(v - v_0)}{d},$$

კუთხური აჩქარება:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{v^2 - v_0^2}{\pi d N} = -0,41 \text{ (რად/წმ)}, \quad (2)$$

განვსაზღვროთ დამუხრუჭების დრო  $t_{\text{ღამ}}$ , რადგან  $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$  ამიტომ  $\omega_0 + \varepsilon t_{\text{ღამ}} = 0$ , შესაბამისად:

$$t_{\text{ღამ}} = -\frac{\omega_0}{\varepsilon} = -\frac{2v_0}{d\varepsilon} \approx 108(\text{წმ}) = 1,8(\text{წთ}).$$

### §41. ინერციის მომენტი. თეორემა 1 ინერციის მომენტის შესახებ

განვიხილოთ  $m$  მასის ნაწილაკი უძრავი ღერძის ირგვლივ. მისი დაშორება ღერძიდან ავლნიშნოთ  $R$ -ით. ამ ნაწილაკის ინერციის მომენტი უძრავი ღერძის მიმართ ეწოდება სიდიდეს:

$$I = mR^2. \quad (41.1)$$

მისი ერთეულია კგ/მ<sup>2</sup>. ინერციის მომენტი კრებადი სიდიდეა, ამიტომ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტი უძრავი ღერძის მიმართ იქნება:

$$I = \sum_i m_i R_i^2. \quad (41.2)$$

სადაც  $m_i$ — $i$ -ური ნაწილაკის მასაა, ხოლო  $R_i$  მისი დაშორებაა ღერძიდან.

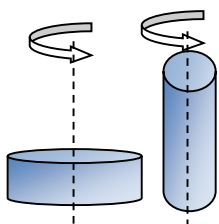
(41.1)-ის თანახმად, ინერციის მომენტი დამოკიდებულია როგორც ნაწილაკის მასაზე, ასევე მის მდებარეობაზე განსახილველი ღერძის მიმართ. რაც უფრო შორსაა ნაწილაკი ღერძიდან მით მეტია მისი ინერციის მომენტი. ინერციის მომენტი წარმოადგენს ნაწილაკის ინერტიულობის ზომას მისი ბრუნვითი მოძრაობისას უძრავი ღერძის ირგვლივ, ანუ ასრულებს იგივე როლს, რასაც მასა გადატანითი მოძრაობისას.

გადატანითი მოძრაობისგან განსხვავებით სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის შესწავლისას არ შეიძლება მისი მასის კონცენტრირება მასათა ცენტრში. ამიტომ მყარ სხეულის ინერციის მომენტის გამოთვლისას სხეული აზრობრივად უნდა დავყოთ  $\Delta m$  მასის ნივთიერ წერტილებად და ვისარგებლოთ (41.2) ფორმულით, ან უფრო ზუსტად მისი ინტეგრალური ფორმით:

$$I = \int R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV, \quad (41.3)$$

სადაც  $R$  მანძილია სხეულის  $dm$  მასის ელემენტიდან ბრუნვის ღერძამდე. თუ სხეული ერთგვაროვანია  $\rho = \text{const}$ , მაშინ (41.3) გამარტივდება:

$$I = \rho \int_V R^2 dV. \quad (41.4)$$

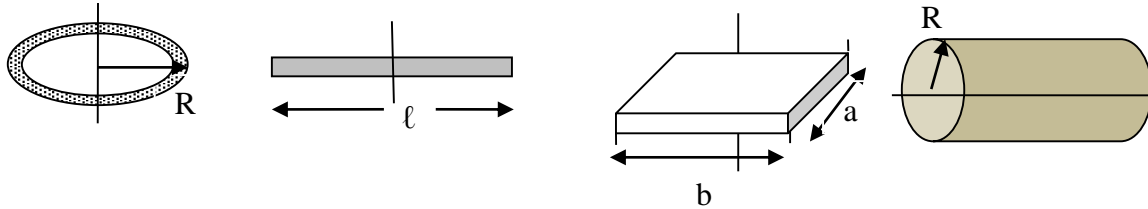


ნახაზი 41.1

სხეულის ინერციის მომენტი, ისევე როგორც ნაწილაკის ინერციის მომენტი, ბრუნვითი მოძრაობის შემთხვევაში სხეულის ინერტიულობის

ზომას. მისი მნიშვნელობა, მსგავსად ნაწილაკისა, დამოკიდებულია სხეულის მასაზე და მდებარეობაზე განსახილველი ღერძის მიმართ, ასევე მასის განფენილობაზე (სხეულის ფორმაზე).

მაგალითად, დიდი რადიუსის ცილინდრის ინერციის მომენტი სიმეტრიის ღერძის მიმართ მეტია ვიდრე იგივე მასის მცირე რადიუსის ცილინდრისა (ნახ. 41.1). ანუ პირველი ცილინდრი ძნელია მოიყვანო ბრუნვით მოძრაობაში და გააჩერო, ვიდრე მეორე.

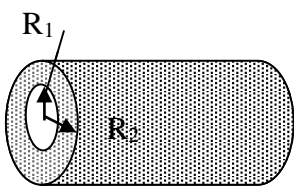


თხელი რგოლი  
 $I_C = mR^2$

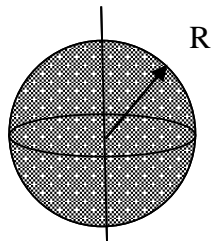
წვრილი ღერო  
 $I_C = \frac{1}{12} m\ell^2$

თხელი მართკუთხა ფირფიტა  
 $I_C = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$

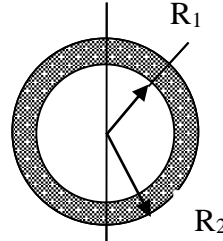
ცილინდრი  
 $I_C = \frac{1}{2} mR^2$



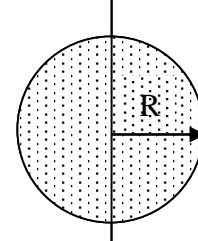
ღრუ ცილინდრი  
 $I_C = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$



ბირთვი  
 $I_C = \frac{2}{5} mR^2$



ღრუ სფერო  
 $I_C = \frac{2}{5} m \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}$



სფერული გარსი  
 $I_C = \frac{2}{3} mR^2$

**ნახაზი 41.2**

ნახაზ 41.2-ზე მოცემულია ზოგიერთი ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტის გამოსათვლელი ფორმულა საკუთარი სიმეტრიის ღერძის მიმართ.

სხვადასხვა ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტის გამოსათვლელად მოსახერხებელია შტეინერის (შევიცარიელი მათემატიკოსი) თეორემების გამოყენება:

**1. თეორემა პარალელური ღერძების შესახებ** – სხეულის ინერციის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ ტოლია ამ ღერძის პარალელურად მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტს დამატებული სხეულის მასისა და ღერძებს შორის მანძილის კვადრატის ნამრავლი:

$$I = I_C + md^2. \tag{41.5}$$

(41.5)-ის თანახმად პარალელური ღერძებიდან სხეულს ყველაზე მცირე ინერციის მომენტი გააჩნია იმ ღერძის მიმართ, რომელიც გადის მასათა ცენტრზე. ეს თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი ფორმის სხეულისთვის.

**2. თეორემამართობული ღერძების შესახებ** – სიბრტყეში განფენილი სხეულის ინერციის მომენტია ჯამი ამავე სიბრტყეში არსებული ორი ნებისმიერი ურთიერთმართობი

ღერძის მიმართ ტოლია ღერძთა გადაკვეთის წერტილში ამ სიბრტყის მართობულად გავლენ-  
ბული ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის, ე.ი. თუ სხეული განფენილია  $XOZ$  სიბრტყეში,  
მაშინ:

$$I_x + I_z = I_y. \quad (41.6)$$

ეს თეორემა სამართლიანია მხოლოდ ბრტყელი სხეულებისთვის. ქვემოთ მოყვანილია  
ზოგიერთი ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტების მნიშვნელობა სიმეტრიის ღერძის  
მიმართ (ნახაზებზე სიმეტრიის ღერძები უწყვეტი წრფითაა ნაჩვენები).

სხვადასხვა ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტის გამოსათვლელად  
მოსახერხებელია შტეინერის (შევიცარიელი მათემატიკოსი) თეორემების გამოყენება:

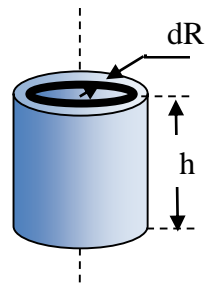
**ამოცანა 41.1.** გამოვთვალოთ ერთგვაროვანი  $m$  მასის და  $R_0$  რადიუსის ცილინდრის ინერციის  
მომენტი სიმეტრიის ღერძის მიმართ.

**ამოხსნა:**

ვისარგებლოთ (41.3)-ით.  $dV$  მოცულობად განვიხილოთ ნახაზზე  
მითითებული გამუქებული დღ სისქისა და  $h$  სიმაღლის ფენის მოცულობა:

$$dV = 2\pi R \cdot h \cdot dR,$$

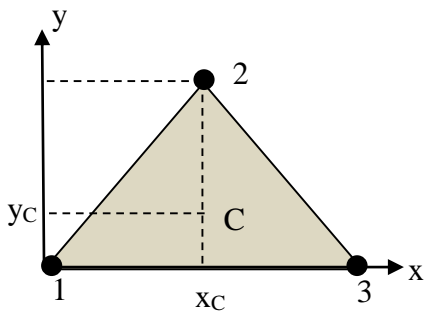
$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = 2\pi \rho h \int_0^{R_0} R^3 dR = 2\pi \rho h \frac{R_0^4}{4} = \frac{1}{2} (\rho \pi R_0^2 h) R_0^2 = \frac{1}{2} m R_0^2.$$



**ამოცანა 41.2.** ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებში (ფერდი 5 მ, ფუძე 6  
მ) იმყოფება 0,2 კგ მასის ნაწილაკები. დავადგინოთ მასათა ცენტრის მდებარეობა და  
გამოვთვალოთ მასზე გამავალი სამკუთხედის სიბრტყისადმი მართობული ღერძის მიმართ  
სისტემის ინერციის მომენტი.

**ამოხსნა:**

ნაწილაკთა სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატების დასადგენათ ვისარგებლოთ  
(35.5)-ით:



$$x_C = \frac{mx_1 + mx_2 + mx_3}{3m} = \frac{0 + m \cdot 3 + m \cdot 6}{3m} = 3,$$

$$y_C = \frac{my_1 + my_2 + my_3}{3m} = \frac{0 + m \cdot 4 + 0}{3m} = \frac{4}{3} \approx 1,3.$$

ე.ი.  $C(3; 1,3)$ . ინერციის მომენტის შეკრებადობიდან  
გამომდინარე:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 2mr_C^2 + m(4 - y_C)^2,$$

$$I = 2 \cdot 0,2 \cdot 10,9 + 0,2 \cdot 7,3 = 5,8 (\text{კგ} \cdot \text{მ}^2).$$

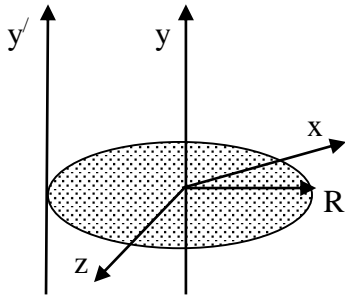
**ამოცანა 41.3.** გამოთვალოთ თხელი წრიული ფირფიტის ინერციის მომენტი  $OX'$ ,  $OY'$  და  $OX$   
ღერძების მიმართ.

**ამოხსნა:**

ცილინდრის ანალოგიურად:

$$I_C = I_y = \frac{1}{2} m R^2,$$

(41.5)-ის თანახმად:



(41.6)-დან:

$$I_{y'} = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2,$$

$$2I_x = I_y \quad (I_x = I_z),$$

$$I_x = \frac{I_y}{2} = \frac{1}{4}mR^2.$$

## §42. სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკის განტოლება

განვიხილოთ აბსოლუტურად მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. ნახ. 42.1-ზე მოცემულია ერთგვაროვანი  $\rho = const$  სხეულის (ცილინდრის) ბრუნვა სიმეტრიის ( $OY$ ) ღერძის ირგვლივ. სხეული აზრობრივად დავეთ ნივთიერ წერტილებად, ერთ-ერთი ასეთი  $m_i$  მასის ნაწილაკის იმპულსის მომენტი იქნება  $\vec{L}_i = m_i[\vec{r}_i \times \vec{v}_i]$ , ხოლო  $OY$  ღერძზე გეგმილი

$$L_{iy} = L_i \cos \beta_i, \quad (42.1)$$

სადაც  $L_i = m_i r_i v_i \sin 90^\circ = m_i r_i \omega R_i$  ( $v_i = \omega R_i$ ). (42.1)-ში შეტანილ მივიღებთ:

$$L_{iy} = m_i r_i \omega R_i \cos \beta_i = m_i \omega R_i^2.$$

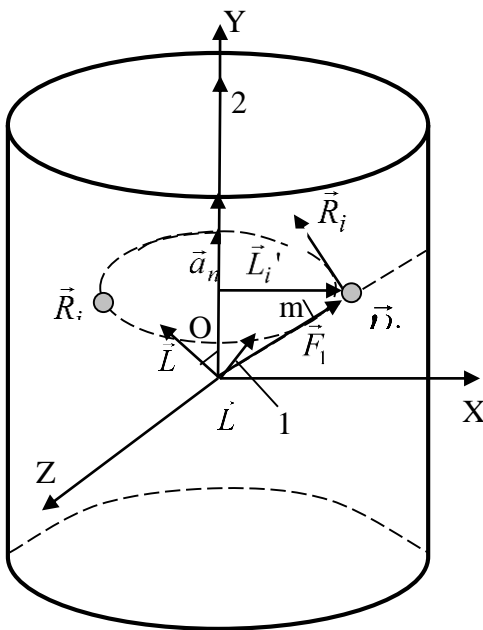
რადგან იმპულსის მომენტი კრებადი (ადიტიური) სიდიდეა, ამიტომ მოცემული სხეულის იმპულსის მომენტის გეგმილი  $Oy$  ღერძზე იქნება

$$L_y = \sum L_{iy} = \sum m_i \omega R_i^2 = I \omega. \quad (42.2)$$

სკალარული სიდიდე  $I = \sum m_i R_i^2$  წარმოადგენს  $OY$  ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტს. რადგან  $\vec{\omega}$ -ს მიმართულება ემთხვევა  $OY$  ღერძის მიმართულებას, (42.2) უმჯობესია ასე ჩავწეროთ:

$$L_\omega = I \omega. \quad (42.3)$$

ვინაიდან სხეული ერთგვაროვანია და ბრუნავს სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ, ნებისმიერ  $m$  მასის ნაწილაკს ყოველთვის მოეძებნება იგივე მასის  $m'_i = m_i$  ნაწილაკი, რომლის იმპულსის მომენტი  $\vec{L}'_i$  აღმოჩნდება  $\vec{L}_i$ -ის სიმეტრიული ბრუნვის ღერძის მიმართ, რის გამოც მათი მდგენელები  $OX$  და  $OZ$  ღერძებზე ერთმანეთს გააბათილებს, ხოლო  $OY$  ღერძის მიმართ შეიკრიბება, ე.ი. სხეულის იმპულსის მომენტი აღმოჩნდება ბრუნვის ღერძის გასწვრივ მიმართული  $\vec{L} \uparrow \vec{\omega}$ . ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია (41.3) ფორმულის ვექტორული ჩაწერაც



ნახაზი 42.1

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (42.4)$$

ცხადია, თუ სხეული არაერთგვაროვანია, ან ბრუნვის ღერძის მიმართ ასიმეტრიულია, ყველა წერტილს არ აღმოაჩნდება სიმეტრიული ანალოგი, და იმპულსის მომენტის მიმართულება არ დაემთხვევა კუთხური სიჩქარის მიმართულებას. რის გამოც (42.4) ძალას კარგავს, თუმცა (42.3) სამართლიანი რჩება. ასეთ შემთხვევაში სხეულის ბრუნვისას მისი იმპულსის მომენტი ბრუნვის ღერძის ირგვლივ კონუსურ ზედაპირს შემოწერს.

მყარი სხეული ჩვენ წარმოვიდგინეთ ნაწილაკთა სისტემის სახით, რის გამოც დასაშვებია (38.4) გამოყენება:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (42.5)$$

სადაც  $\vec{M}$  სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა მომენტების ჯამია. (42.5) ანალოგიურია გადატანითი მოძრაობისთვის დინამიკის ძირითადი განტოლების  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ , კერძოდ  $\vec{F} \sim \vec{M}$ ,  $\vec{p} \sim \vec{L}$  და წარმოადგენს ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკის განტოლებას.

(42.5)-ში (42.4)-ის შეტანით ვღებულობთ:

$$\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\epsilon}^{34}, \quad (42.6)$$

$\vec{F} = m\vec{a}$ -სთან ანალოგიით ვღებულობთ,  $m \sim I, \vec{a} \sim \vec{\epsilon}$ . ცხადია, (42.5) უფრო ზოგადია, ვიდრე (42.6).

შევნიშნოთ, რომ სხეულის ინერციის მომენტის გამოთვლა ზოგადად რთულია, ამიტომ მის მნიშვნელობას ცდით ადგენენ, კერძოდ, ზომავენ სხეულზე რაიმე კუთხური აჩქარების მისანიჭებლად საჭირო გარე ძალის მომენტს და  $M_{\omega} = I\epsilon_{\omega}$ -ს გამოყენებით გამოთვლიან  $I$ -ს ( $\epsilon_{\omega}$  და  $M_{\omega}$  მოცემული ბრუნვის ღერძის მიმართ  $\vec{\epsilon}$  და  $\vec{M}$  –ს გეგმილებია).

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (42.6) ძალაშია მაშინაც, თუ მოცემული სხეული ბრუნვასთან ერთად ასრულებს გადატანით მოძრაობას ისე, რომ ბრუნვის ღერძი, რომელიც გადის მასათა ცენტრზე, არ იცვლის ორიენტაციას. ცხადია მყარი სხეულის შემთხვევაშიც ძალაშია მახრუნებელი მომენტის განსაზღვრის ფორმულა  $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$ .

როდესაც სხეულზე მოქმედ გარე ძალთა ტოლქმედის მომენტი ნულის ტოლია  $\vec{M} = 0$ , მაშინ (42.5)-დან:

$$\vec{L} = const. \quad (41.7)$$

➤ თუ სხეული (სხეულთა სისტემა) ჩაკეტილია ან იმყოფება ცენტრალურ ძალთა ველში მისი იმპულსის მომენტი ინახება. (იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი).

თუ იზოლირებული სხეული ერთგვაროვანია და ბრუნვის ღერძი სიმეტრიის ღერძს ემთხვევა, მაშინ (42.6)-ის თანახმად:

$$I\vec{\omega} = const. \quad (42.8)$$

აბსოლუტურად მყარი სხეულის შემთხვევაში  $I = const$ , მაშინ  $\vec{\omega} = const$  – ეს შედეგი ნიუტონის I კანონის ანალოგიურია.

შესაძლებელია ბრუნვისას სხეულის ნაწილები იცვლიდეს ურთიერთმდებარეობას, მაშინ  $I \neq const$ , ასეთ შემთხვევაში (42.8) უფრო მოსახერხებელია ასე ჩავწეროთ:

<sup>34</sup> თუ სხეული აბსოლუტურად მყარია  $I = \sum m_i R_i^2 = const$ .

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 . \quad (42.9)$$

ნებისმიერი ფორმის არაერთგვაროვან სხეულში შეიძლება მასათა ცენტრზე გამავალი ისეთი სამი ურთიერთმართობული ღერძის პოვნა, რომელთა ირგვლივ ბრუნვისას, თუ სხეულზე გარე ძალები არ მოქმედებს, ბრუნვის ღერძი ინარჩუნებს თავის ორიენტაციას დამაგრების გარეშე. მათ თავისუფალ ღერძებს ან ინერციის მთავარ ღერძებს უწოდებენ. ღერძული სიმეტრიის ერთგვაროვანი სხეულის, მაგალითად ცილინდრის შემთხვევაში, ერთი ასეთი ღერძი სიმეტრიის ღერძია, დანარჩენი ორი შეიძლება ნებისმიერად შევარჩიოთ მასათა ცენტრზე გამავალ სიმეტრიის ღერძის მართობულ სიბრტყეში (მაგალითად, ნახ. 42.1 OX და OZ). სფერული სიმეტრიის ერთგვაროვან სხეულში, მაგალითად ბირთვში, ასეთ ღერძებად შეიძლება შეირჩეს მასათა ცენტრში გამავალი ნებისმიერი სამი ურთიერთმართობული ღერძი.

ძალთა წყვილი ეწოდება სხეულზე მოქმედ სიდიდით ტოლ და საპირისპიროდ მიმართულ ორ ძალას, თუ მათი მოქმედების წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობს და ერთმანეთის პარალელურია.

ძალთა წყვილს არ გააჩნია ტოლქმედი, ანუ არ შეიძლება მათი შეცვლა ერთი ძალით. მათი გეგმილების ჯამი ნებისმიერი ღერძის მიმართ ნულის ტოლია. თუ თავისუფალ სხეულზე მოქმედებს ძალთა წყვილი, ის გამოიწვევს სხეულის ბრუნვას წარმოსახვითი ღერძის ირგვლივ, რომელიც გადის მასათა ცენტრზე და ძალთა სიბრტყის მართობულია. როცა სხეული რაიმე ღერძითაა დამაგრებული ძალთა წყვილი სხეულს აბრუნებს ამ ღერძის ირგვლივ, ამ დროს სხეულზე ღერძის მხრიდან მოქმედებს გარკვეული ძალა, რომელიც ნულს უტოლდება, თუ ბრუნვის ღერძი გადის მასათა ცენტრზე და ძალთა სიბრტყის მართობულია.

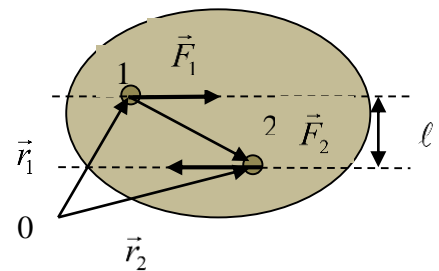
შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ძალთა წყვილის მომენტი, ნებისმიერი წერტილის მიმართ უცვლელია. მართლაც, ნახ. 42.2-ის მიხედვით, ძალთა წყვილის მახრუნებელი მომენტი ნებისმიერი 0 წერტილის მიმართ იქნება:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2] . \quad (42.10)$$

ძალთა წყვილის განმარტების თანახმად  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  (ცხადია, ეს არის ნიუტონის III კანონი), (42.10)-ში გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\vec{M} = -[\vec{r}_1 \times \vec{F}_2] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2] = [\vec{r}_{12} \times \vec{F}_2] , \quad (42.11)$$

$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  -  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  ძალების მოდების წერტილთა შემაერთებელი ვექტორია, მისი მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული 0 წერტილის შერჩევაზე და მოცემული ძალთა წყვილისთვის მუდმივი სიდიდეა. შესაბამისად მუდმივია მახრუნებელი მომენტიც.



ნახაზი 42.2

(42.11)-ის თანახმად,  $M = r_{12} F_2 \sin \alpha = \ell F_2$ , რადგან  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}|$ , მაშინ  $M = \ell F$ , სადაც  $\ell$  ძალის მოქმედების წრფეებს შორის უმოკლესი მანძილია და მას ძალთა წყვილის მხარი ეწოდება.

**ამოცანა 42.1.** 2,3 კგ მასის და 12 სმ რადიუსის ერთგვაროვანი ცილინდრი ბრუნავს სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ 1500 ბრ/წთ სიხშირით. გამოთვალეთ ძალის მომენტი, რომელიც საჭიროა მის გასაჩერებლად 7 წმ-ში.

**ამოხსნა:**

(42.2)-დან:

$$L = I\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega, \quad \omega = 2\pi\nu = 2 \cdot 3,14 \cdot \frac{1500}{60} = 157(\text{წმ}^{-1}),$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot 2,3 \cdot 0,12^2 \cdot 157 = 2,6(\text{კგმ}^2 / \text{წმ}),$$

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0 - 2,6}{7} = -0,37(\text{ნმ}).$$

**ამოცანა 42.2.** 2მ რადიუსისა და 100 კგმ<sup>2</sup> ინერციის მომენტის დისკო ინერციით ბრუნავს 5 ბრ/წმ სიხშირით. როგორ შეიცვლება ბრუნვის სიხშირე, თუ დისკოს ნაპირზე მყოფი 40 კგ მასის ბავშვი დისკოს ცენტრში გადაინაცვლებს?

**ამოხსნა:**

დისკოს და დისკოს ნაპირზე მყოფი ბავშვის სრული ინერციის მომენტი:

$$I_1 = I_0 + mR^2,$$

სადაც  $I_0 = I_2$  დისკოს ინერციის მომენტი. (42.9)-ის თანახმად:

$$I_1 2\pi\nu_1 = I_2 2\pi\nu_2 \quad \text{ანუ} \quad \nu_2 = \frac{I_1 \nu_1}{I_2} = \frac{(I_0 + mR^2)\nu_1}{I_2} = \frac{(100 + 40 \cdot 4)5}{100} = 13(\text{ბრ/წმ}).$$

გაიზრდება  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = 13 - 5 = 8$  (ბრ/წმ)-ით.

### §43. მბრუნავი სხეულის კინეტიკური ენერჯია

კინეტიკური ენერჯია ნაწილაკის მექანიკური მოძრაობის ზომაა, კერძოდ, თუ  $m$  მასის ნაწილაკს მოცემულ სისტემაში გააჩნია  $v$  სიჩქარე, მისი კინეტიკური ენერჯია იქნება:

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (43.1)$$

გადატანითი მოძრაობისას სხეულის თითოეულ ნაწილაკს დროის მოცემულ მომენტში ერთნაირი სიჩქარე გააჩნია, რის გამოც მისი კინეტიკური ენერჯია ასევე (43.1)-ით გამოისახება, ოღონდ  $m$ -ში იგულისხმება სხეულის მასა.

ბუნებრივია, მბრუნავ სხეულსაც გააჩნია კინეტიკური ენერჯია, რომელსაც ჩვენ გამოვთვლით ისევ დამაგრებული ღერძის მქონე აბსოლუტურად მყარი სხეულისთვის. ასეთი სხეული განიხილება, როგორც ნაწილაკთა სისტემა ხისტი კავშირებით, რის გამოც თითოეულ ნაწილაკს დროის მოცემული მომენტისთვის ექნება ერთნაირი კუთხური სიჩქარე, ხოლო  $m_i$  მასის ნაწილაკის წირითი სიჩქარის მნიშვნელობა  $v_i = \omega R_i$  დამოკიდებული იქნება ბრუნვის ღერძიდან მის დაშორებაზე –  $R_i$ . ენერჯიის ადიტიურობიდან გამომდინარე, ასეთი სხეულის კინეტიკური ენერჯია ღერძის მიმართ გამოითვლება ფორმულით

$$W_3 = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\sum_i m_i (\omega R_i)^2}{2} = \sum_i (m_i R_i^2) \frac{\omega^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (43.2)$$

თუ ღერძი დამაგრებული არ არის, მაშინ სხეულის კინეტიკური ენერჯის გამოთვლა საკმაოდ რთულია. ამოცანა მარტივდება, თუ მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის ირგვლივ მბრუნავი სხეული ასრულებს ბრტყელ გადატანით მოძრაობას ანუ, როდესაც სხეულის ნაწილაკები პარალელურ სიბრტყეებში მოძრაობს, მაგალითად, ცილინდრის, ან ბორბლის გორვა სიბრტყეზე. ასეთ შემთხვევაში სხეულის კინეტიკური ენერჯია ტოლია მასათა ცენტრის გადატანითი მოძრაობისა და ამ ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ ბრუნვის კინეტიკურ ენერჯიათა ჯამის:

$$W_{\text{სრ}} = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}. \quad (43.3)$$

გამოვთვალოთ მუშაობა, რომელსაც ასრულებს სხეულზე მოდებული ძალა მისი ბრუნვისას უძრავი ღერძის ირგვლივ (ნახ. 43.1, მოცემულია მბრუნავი სხეულის ზედხედი).  $\vec{F}$  ძალის მიერ შესრულებული ელემენტარული მუშაობა სხეულის  $d$  კუთხით შემობრუნებისას იქნება:

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos \alpha = F_l dl = F_l R d\varphi = M d\varphi. \quad (43.4)$$

შესაბამისად,  $[\varphi_1, \varphi_2]$  ინტერვალში შემობრუნებისას შესრულებული მუშაობა იქნება<sup>35</sup>:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I \varepsilon d\varphi = I \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\omega}{dt} d\varphi = I \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega = \frac{I \omega_2^2}{2} - \frac{I \omega_1^2}{2} = \Delta W_3. \quad (43.5)$$

უძრავი ღერძის ირგვლივ სხეულის შემობრუნებაზე ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლია ამ სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის კინეტიკური ენერჯის ცვლილების. მუშაობის შესრულების სიჩქარე ანუ სიმძლავრე (43.4)-ის თანახმად იქნება

$$P = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M \omega. \quad (43.6)$$

ცხრილ 43.1-ში მოცემულია სხეულის გადატანითი მოძრაობის მახასიათებელი ფორმულები და მათი ანალოგები უძრავი ღერძის ირგვლივ ბრუნვისას.

<sup>35</sup> (43.5) შეიძლება მიგვეღო (27.3)-ში  $m$  “  $I$ ,  $v_1$  “  $\omega_1$ ,  $v_2$  “  $\omega_2$  ანალოგიების გათვალისწინებით.

გადატანითი მოძრაობა	ბრუნვითი მოძრაობა
$S$ – გავლილი მანძილი	$\varphi$ – მობრუნების კუთხე
$v = \frac{dS}{dt}$ – წირითი სიჩქარე	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ – კუთხური სიჩქარე
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$ – წირითი აჩქარება	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – კუთხური აჩქარება
$m$ – მასა	$I = mR^2$ – ინერციის მომენტი
$\vec{p} = m\vec{v}$ – იმპულსი	$\vec{L} = I\vec{\omega}$ – იმპულსის მომენტი
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{F} = m\vec{a}$ – ძალა	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ – ძალის მომენტი <sup>4</sup>
$W_{\text{კინ}} = \frac{mv^2}{2}$	$W_{\text{კინ}} = \frac{I\omega^2}{2}$
$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$	$A_{12} = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}$
$P = \vec{F}\vec{v}$	$P = \vec{M}\vec{\omega}$

**ამოცანა 43.1.** 19,2 მ სიმაღლის ფერდობიდან მოგორავს ცილინდრი. განსაზღვრეთ მისი სიჩქარე ფერდობის ბოლოს, თუ საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია, წინააღმდეგობის ძალა უგულებელყოფილია.

**ამოხსნა:**

ცილინდრის მექანიკური ენერჯია ფერდობის თავში იქნება:

$$W_1 = W_{\text{კინ1}} + W_{\text{პოტ1}} = 0 + W_{\text{პოტ1}} = mgh,$$

ხოლო ბოლოში:

$$W_2 = W_{\text{კინ2}} + W_{\text{პოტ2}} = W_{\text{კინ2}} + 0 = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}.$$

ენერჯიის მუდმივობის კანონის თანახმად  $W_1 = W_2$ , ე.ი. გავითვალისწინოთ, რომ

$$I_C = \frac{mR^2}{2}, v_C = \omega R, \omega = \frac{v_C}{R}, \text{ მაშინ გვექნება:}$$

$$mgh = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mR^2}{4} \left( \frac{v_C}{R} \right)^2 \rightarrow gh = \frac{v_C^2}{2} + \frac{v_C^2}{4} = \frac{3}{4}v_C^2,$$

აქედან:

$$v_C = v_2 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} = 16 \text{ (მ/წმ)}.$$

**ამოცანა 43.2.** 12 კგ მასის რგოლი, რომლის რადიუსია 0,4 მ, ბრუნავს მისი სიბრტყის მართობულად სიმეტრიის ცენტრზე გამავალი ღერძის ირგვლივ 10 ბრ/წმ სიხშირით. რა

<sup>36</sup> ვექტორული ფორმით ეს ფორმულები სამართლიანია, თუ ერთგვაროვანი სხეულები სიმეტრიულია ბრუნვის ღერძის მიმართ. სხვა შემთხვევაში ვექტორული ფორმის ნაცვლად აიღება მათი პროექციები ღერძის მიმართ.

დროში გაჩერდება იგი მასზე დამამუხრუჭებელი ძალის 306.მ მბრუნებელი მომენტის მოქმედებით?

ამოხსნა:

(43.4)-ის თანახმად:

$$A = -M\dot{\varphi} = -M2BN, \quad (1)$$

სადაც  $\dot{\varphi} = 2BN$  რგოლის დამამუხრუჭების მომენტიდან გაჩერებამდე შემოწერილი კუთხეა,  $N$  - ამ დროში ბრუნვათა რიცხვი. მეორე მხრივ (43.5)-ის გამოყენებით:

$$A = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = -\frac{I\omega_1^2}{2} = -\frac{m \cdot R^2 \cdot 4\pi^2\nu^2}{2}, \quad (2)$$

(1) და (2)-ის გატოლებით ვღებულობთ:

$$N = \frac{mR^2\nu^2\pi}{M} = \frac{12 \cdot 0,16 \cdot 100 \cdot 3,14}{30} = 20.$$

მეორე მხრივ  $N = \nu t$ , საიდანაც რგოლის დამამუხრუჭების დრო  $t = N/\nu = 20/10 = 2$  (წმ).

#### §44. ეილერის განტოლებები

უძრავი ღერძის მქონე სხეულის ბრუნვის ამოცანა გაცილებით მარტივია ვიდრე მისი ბრუნვა უძრავი წერტილის ირგვლივ. ასეთ შემთხვევაში საკმაოდ მცირე დროით ინტერვალში სხეულის ბრუნვა შეიძლება წარმოვიდგინოთ ღერძის ირგვლივ, მაგრამ მომდევნო ინტერვალში უკვე ბრუნვის ღერძი სხვა იქნება. ანუ ბრუნვის ღერძი მყისიერია, იგი განუწყვეტლივ იცვლის ორიენტაციას. ამასთანავე ეს ღერძები გადის ერთსადაიმდე უძრავ წერტილზე. შევარჩიოთ ათვლის ინერციული  $k$  სისტემა. ხოლო მბრუნავი  $k'$  არაინერციული სისტემად განვიხილოთ სხეულის მასათა ცენტრი და მასზე გამავალი ინერციის მთავარი ღერძები, რომლებიც ქმნიან მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას (§42). ჩვენი მიზანია სხეულის კუთხური სიჩქარის ცვლილების განსაზღვრა  $k'$  სისტემის (მყარი სხეულის) მიმართ. ინერციული სისტემის მიმართ სხეულის ბრუნვის განტოლება იქნება (42.5), რომლის ამოხსნა საკმაოდ რთულია, რადგან მოცემულ ამოცანაში  $k'$  სისტემის მიმართ ცვლილებას განიცდის, როგორც კუთხური სიჩქარე ასევე ინერციის მომენტი, მაშინ როცა  $k'$  -ის მიმართ ეს უკანასკნელი უცვლელია. თუ ვისარგებლებთ (16.4), იმპულსის მომენტისთვის შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + [\vec{\omega} \times \vec{L}'], \quad \text{ანუ} \quad \frac{d\vec{L}'}{dt} + [\vec{\omega} \times \vec{L}'] = \vec{M} \quad (44.1)$$

სადაც  $\vec{L}'$  სხეულის იმპულსის მომენტი  $k'$  სისტემის მიმართ, შესაბამისად მისი გეგმილები იქნება:  $L_x = I_x \omega_x$ ,  $L_y = I_y \omega_y$ ,  $L_z = I_z \omega_z$ . როგორც ავღნიშნეთ  $I_x, I_y, I_z$   $k'$  -ის მიმართ მუდმივია ამიტომ (44.1) გეგმილებში ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z = M_x \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x = M_y \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y = M_z \end{cases} \quad (44.1)$$

ამ განტოლებებს ეილერის განტოლებები ეწოდება. ის გვიჩვენებს ბრუნვის კუთხური სიჩქარის ცვლილებას სხეულის მიმართ. თუ მყარი სხეულზე გარე ძალები არ მოქმედებს, გარდა უძრავი წერტილის მიმართ დამამაგრებელი ძალებისა (მათი მომენტი ნულის ტოლია), მაშინ (44.1) მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z = 0 \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = 0 \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = 0 \end{cases} \quad (44.2)$$

შევნიშნოთ, რომ ეილერის განტოლებათა ამოხსნა საზოგადოდ საკმაოდ რთულია. ამიტომ ჩვენ განვიხილოთ ერთერთი მარტივი შემთხვევა, კერძოდ **სიმეტრიული ბზრიალა**, იგი წარმოადგენს მყარ სხეულს, რომლის ორი მთავარი ინერციის მომენტი ტოლია, ხოლო მესამე განსხვავებული. მაგ.

$$I_x = I_z \neq I_y, \quad (44.3)$$

ასეთ სხეულებს წარმოადგენს ბორბლები, ტურბინები, ელექტრული მანქანების ღუზები და ა.შ.

დავუშვათ სიმეტრიულ ბზრიალაზე გარე ძალთა (მათ შორის სიმძიმის ძალის) მაბრუნებელი მომენტი არ მოქმედებს, მაშინ (44.3)-ის თანახმად (44.2)-ის მეორე განტოლება მოგვცემს:

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} = 0 \rightarrow \omega_y = \text{const} = b. \quad (44.4)$$

(44.2)-ის პირველი განტოლება გაგამრავლოთ  $\omega_x$ -ზე, მესამე  $\omega_z$ -ზე, გავითვალისწინოთ (44.3) და შევკრიბოთ

$$\omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_z \frac{d\omega_z}{dt} = 0,$$

რომლის ინტეგრირებით მივიღებთ

$$\omega_x^2 + \omega_z^2 = \text{const} = a^2, \quad (44.5)$$

მისი (44.4)-თან გაერთიანებით ვღებულობთ

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega^2 = \text{const}.$$

ე.ი. თუ ბზრიალაზე გარე ძალთა მაბრუნებელი მომენტი არ მოქმედებს მისი სიმეტრიის ღერძის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და შესაბამისად იმპულსის მომენტი  $\vec{L}$  იქნება მუდმივი და მიმართული სიმეტრიის  $OY'$  ღერძის გასწვრივ. გავარკვიოთ მისი მიმართულება ვერტიკალური  $OY$  ღერძის მიმართ. თუ  $OY'$  ღერძი საწყის მომენტში დახრილი იყო  $OY$  ღერძის მიმართ  $2\alpha$  კუთხით (ნახ. 44.1) რადგან:

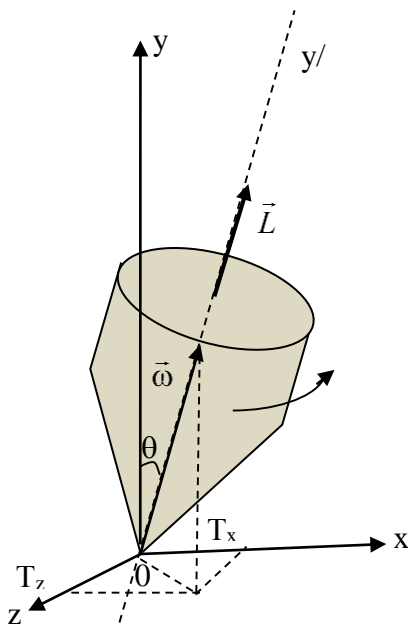
$$\text{tg } \theta = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2}}{\omega_y} = \text{const}.$$

მისი დახრა არ შეიცვლება. მართალია (44.2)-ის თანახმად  $T_x$  და  $T_z$  მდგენელები დროში ცვლილია, მაგრამ ეს ცვლილება ისე ხდება, რომ  $OY'$  ღერძის დახრაზე გავლენას არ ახდენს.

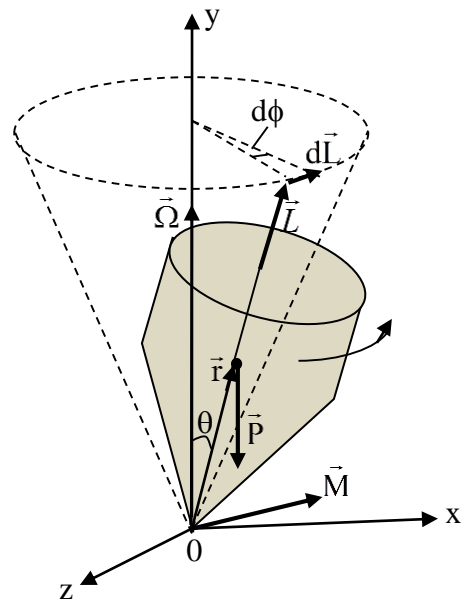
განვიხილოთ ბზრიალაზე სიმძიმის ძალის მოქმედება (ნახ. 44.2) ცხადია იგი მოდებულა მასათა ცენტრზე და ქმნის მახრუნებელ მომენტს:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{P}] = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

რომელიც იმყოფება  $XOZ$  სიბრტყეში და იწვევს ბზრიალას ბრუნვას  $OY$  ღერძის მიმართ. მოძრაობას, რომლის დროსაც ძალის მომენტის მოქმედებით სხეულის ბრუნვის ღერძი იცვლის მიმართულებას და ვერტიკალური ღერძის მიმართ ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას პრეცესია ეწოდება. პრეცესიის გამო საწყის იმპულსის მომენტს ემატება, პრეცესიასთან დაკავშირებული იმპულსის მომენტი, მაგრამ მისი მნიშვნელობა ძალიან მცირეა, რადგან უმრავლეს შემთხვევაში პრეცესიის სიხშირე (კუთხური სიჩქარე)  $\Sigma$  გაცილებით მცირეა ბზრიალას სიმეტრიის ღერძის მიმართ ბრუნვის სიხშირესთან შედარებით  $\Sigma \ll T$ . ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ იმპულსის მიმართულება თანხვედრილი რჩება სიმეტრიის ღერძის.



ნახაზი 44.1



ნახაზი 44.2

ამასთანავე ცხადია ზოგადად იმპულსის მომენტი აღარ იქნება მუდმივი, კერძოდ  $dt$  დროში ეს ცვლილება იქნება  $d\vec{L} = \vec{M}dt$  იგი მართობულია  $\vec{L}$ -ის, ამიტომ იცვლება  $\vec{L}$ -ის მხოლოდ მიმართულება, რის გამოც ხდება ბრუნვის ღერძის წანაცვლება (ჩვენს შემთხვევაში მარჯვნივ) ანუ უფრო ზუსტად ღერძი  $O$  წერტილში დამაგრებულია და ბრუნავს მისი ზედა ნაწილი  $\vec{L}$ -ის მართობულად კორიზონტალურ სიბრტყეში. ე.ი ბზრიალა ასრულებს პრეცესიას და არ ვარდება (ბზრიალაზე რომ არ მოქმედებდეს ძალის მომენტი,  $\vec{L}$  დარჩებოდა მუდმივი სიდიდით და მიმართულებით, ბზრიალა არ დავარდებოდა და არც პრეცესიას შეასრულებდა).

ვაჩვენოთ რაზეა დამოკიდებული პრეცესიის კუთხური სიჩქარე. განმარტების თანახმად

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt}, \quad (44.6)$$

ნახ. 44.2-იდან გამომდინარე  $dL = L \sin \theta \cdot d\phi$  საიდანაც განვსაზღვროთ  $d\phi$  და შევიტანოთ (44.6)-ში

$$\Omega = \frac{1}{L \sin \theta} \frac{dL}{dt} = \frac{M}{L \sin \theta} = \frac{mgr \sin \theta}{L \sin \theta},$$

(რადგან  $M = Pr \sin(\pi - \theta) = mgr \sin \theta$ ), ანუ

$$\Omega = \frac{mgr}{L}. \quad (44.7)$$

ბზრიალას პრეცესიის სიჩქარე არაა დამოკიდებული მისი ღერძის დახრის კუთხეზე. იგი უკუპროპორციულია ბზრიალას იმპულსის მომენტის, ანუ რაც უფრო სწრაფად ბრუნავს (დიდია  $T$ ) ბზრიალა მით ნელა პრეცესირებს.

რეალურად ხახუნის არსებობის გამო, ბზრიალას საკუთარი კუთხური სიჩქარე კლებულობს, გარკვეული მომენტიდან ბზრიალას ღერძი სპირალისებური მოძრაობით თანდათან იხრება ვერტიკალის მიმართ და საბოლოოდ ვარდება.

ბზრიალა უმარტივესი მაგალითია ნავიგაციის მთელი რიგი ხელსაწყოების უმნიშვნელოვანესი ნაწილი-გიროსკოპი. **გიროსკოპი** (ბერ. წრეს ვხედავ) წარმოადგენს მოწყობილობას, რომელიც მყისიერად რეაგირებს ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ იმ სხეულის ორიენტაციის კუთხის ცვლილებაზე, რომელზედაც იგია მიმაგრებული.

**ამოცანა 44.1.** 120 გ მასის ბზრიალა წამში აკეთებს 26 ბრუნს მისი სიმეტრიის ღერძი ვერტიკალთან ქმნის  $30^\circ$  კუთხეს და პრეცესირებს 8 წმ-ში 1 ბრუნის სიხშირით. გამოთვალეთ ბზრიალას ინერციის მომენტი, თუ მისი მასათა ცენტრი იმყოფება სიმეტრიის ღერძზე საყრდენთან შეხების წერტილიდან 3,5 სმ-ზე.

**ამოხსნა:**

ვისარგებლოთ (44.7)-ით:

$$\Omega = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{I\omega} \rightarrow I = \frac{mgr}{\omega\Omega}. \quad (1)$$

ამოცანის პირობის თანახმად  $\omega = 2\pi \cdot 26 = 52\pi$ , ხოლო  $\Omega = 2\pi \cdot 1/8 = 1/4 \cdot \pi$ . (1)-ში გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$I = \frac{mgr}{13\pi^2} = \frac{0,12 \cdot 10 \cdot 0,035}{13 \cdot 3,14^2} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ (კგ} \cdot \text{მ}^2 \text{)}.$$

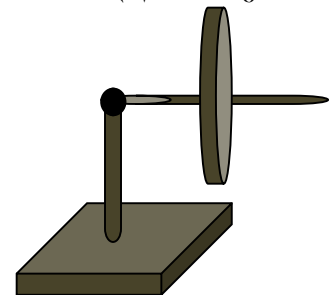
**ამოცანა 44.2.** დისკო, რომლის რადიუსია 6სმ ჩამოცმულია 20 სმ-ს სიგრძის წვრილი პორიზონტალური ღერძის შუაში და ბრუნავს მის ირგვლივ 25 რად/წმ სიჩქარით. გამოთვალეთ ღერძის პრეცესიის სიჩქარე.

**ამოხსნა:**

ვისარგებლოთ (44.7)-ით (44.7)-ით, სადაც დისკოს იმპულსის მომენტი ღერძის მიმართ იქნება:

$$L = I\omega = \frac{1}{2} mR^2 \omega,$$

ხოლო  $r = \ell/2$  მაშინ:



$$\Omega = \frac{mg\ell/2}{1/2 \cdot mR^2\omega} = \frac{g\ell}{R^2\omega}.$$

მნიშვნელობათა შეტანით ვღებულობთ:

$$\Omega = \frac{10 \cdot 0,2}{36 \cdot 10^{-4} \cdot 25} = 22 \text{ (რად/წმ)}.$$

#### §45. მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები

მყარი სხეულის მოძრაობა ზოგადად აღიწერება ორი ვექტორული განტოლებით (39.1), (41.5)

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}, \quad (45.1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}, \quad (45.2)$$

რომელთაგან პირველი გადატანით, ხოლო მეორე ბრუნვით მოძრაობას ასახავს. თუ მათ დავაგეგმილებთ საკოორდინატო ღერძებზე, მივიღებთ ექვს დამოუკიდებელ განტოლებას.

იმისთვის, რომ სხეული იმყოფებოდეს წონასწორობის მდგომარეობაში, საჭიროა ორი პირობა:

1) სხეულზე მოქმედ გარე ძალები ჯამით-ტოლქმედი უნდა უდრიდეს ნულს  $\sum \vec{F} = 0$ , ე.ი.

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0, \quad (45.3)$$

რაც, (45.1)-ის თანახმად ნიშნავს, რომ:

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0$$

ანუ, თუ სხეული უძრავია  $\vec{v}_c = 0$ , უნდა დარჩეს უძრავ მდგომარეობაში.

2) სხეულზე მოქმედ გარე ძალები მომენტების ჯამი უნდა უდრიდეს ნულს  $\sum \vec{M} = 0$ , ე.ი.

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0, \quad (45.4)$$

რაც (45.2)-ის თანახმად ნიშნავს, რომ:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0,$$

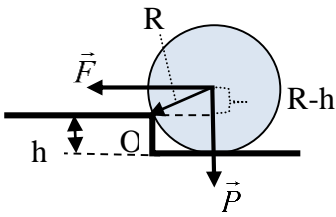
ანუ, თუ სხეული არ ბრუნავს  $\vec{\omega} = 0$ , იგი არ დაიწყებს ბრუნვას.

მაშასადამე, მყარი სხეულის წონასწორობის (სტატიკის) ამოცანის გადაწყვეტისთვის ზოგადად საჭიროა ექვსი განტოლების (45.3), (45.4) ამოხსნა<sup>37</sup>, რაც ხშირ შემთხვევებში საკმაოდ რთულია, საერთო მეთოდის არარსებობის გამო. შეგთავაზებთ მხოლოდ ორ სასარგებლო რჩევას ასეთი ამოცანის გადაწყვეტისთვის. შესაბამის ნახაზზე გამოვსახოთ სხეულზე მოქმედი ყველა ძალა და მათი მოდების წერტილი, ავირჩიოთ მოსახერხებელი კოორდინატთა სისტემა, დავაგეგმილოთ ძალები, შევიტანოთ შესაბამისი სიდიდეები (45.3), (45.4) განტოლებებში და ამოვხსნათ ისინი.

<sup>37</sup> მყარ სხეულს გააჩნია 6 თავისუფლების ხარისხი, რის გამოც მისი მოძრაობა თუ წონასწორობა განისაზღვრება 6 განტოლებით. თავისუფლების ხარისხის არსს §69-ში გავეცნობით.

**ამოცანა 45.1.** მასისა და  $R$  რადიუსის დისკოს ეხება  $h < R$  სიმაღლის საფეხურს. რა მინიმალური სიდიდის ძალა უნდა მოვლით დისკოს ღერძს ჰორიზონტალური მიმართულებით, რომ ის ავიტანოთ შემდეგ საფეხურზე?

**ამოხსნა:**



დისკოს ასატანად კიბეზე, კიბის საფეხურის  $O$  წერტილის მიმართ ძალის მახრუნებელი მომენტი ტოლი, ან მეტი უნდა იყოს სიმძიმის ძალის მახრუნებელი მომენტისა წერტილის მიმართ. რადგან ამოცანის პირობის თანახმად საჭიროა ძალის მინიმალური მნიშვნელობის განსაზღვრა, ამიტომ გავუტოლოთ აღნიშნული მომენტები:

$$F \cdot (R-h) = P \cdot \sqrt{R^2 - (R-h)^2},$$

სადაც  $(R-h)$ ,  $\sqrt{R^2 - (R-h)^2}$  შესაბამის ძალთა მხრებია  $O$  წერტილის მიმართ. ამ ტოლობიდან:

$$F = Mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}.$$

**ამოცანა 45.2.** ნახაზზე მოცემულია 20კგ მასის 4მ სიგრძის ერთგვაროვანი ღერო. რა ძალა უნდა მოვლით თავისუფალ ბოლოს, რომ დავძრათ მეორე ბოლოზე მდებარე 170კგ მასის ტვირთი.

**ამოხსნა:**

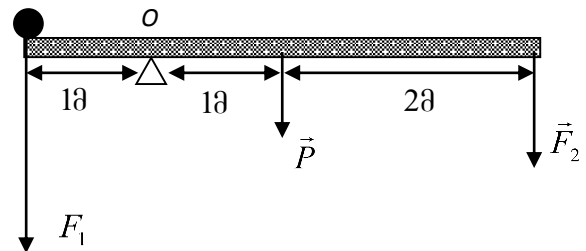
$O$  წერტილის მიმართ წონასწორობის

პირობა  $\sum \vec{M} = 0$  მიიღებს სახეს:

$$F_1 l_1 - P l - F_2 l_2 = 0,$$

$$m_1 g \cdot 1 - m g \cdot 1 - F_2 \cdot 3 = 0,$$

$$F_2 = \frac{(m_1 - m)g}{3} = 500(6).$$



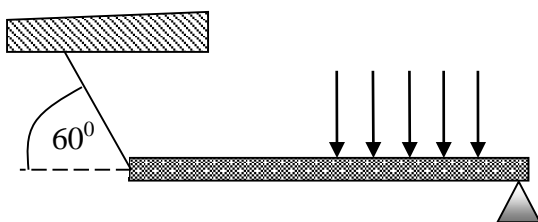
$\vec{F}_2$  ძალა ტოლფასია:

$$m_2 = \frac{F_2}{g} = 50 \text{ (კგ)}.$$

ტვირთის აწევის.

**ამოცანა 45.3.** ნახაზზე მოცემულია 50 კგ მასის და  $d = 5$  მ სიგრძის ერთგვაროვანი რელსი, რომლის ნახევარი ნაწილი განიცდის  $q = 60$  კგ/მ თანაბარ დატვირთვას. ვიპოვოთ საყრდენის და თოკის მხრიდან რელსზე მოქმედი რეაქციის ძალები.

**ამოხსნა:**



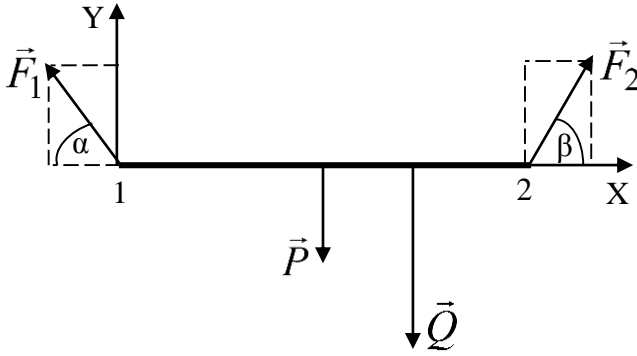
ვაჩვენოთ მოცემულ რელსზე მოქმედ ძალები რელსის წონასწორობის გამო ნიუტონის მეორე კანონი- (44.1) ასე ჩაიწერება:

$$\vec{F}_1 + \vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_2 = 0 \quad \left( Q = q \frac{d}{2} g \right).$$

მოვახდინოთ მისი დაგეგმილება საკორდინატო ღერძებზე:

$$\begin{cases} -F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta = 0 \\ F_1 \sin \alpha - P - Q + F_2 \sin \beta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

თუ ბრუნვის ცენტრად ავირჩევთ 2 წერტილს, მაშინ (44.4)-ის თანახმად:



$$F_1 d \sin \alpha - \frac{Pd}{2} - \frac{Qd}{4} = 0,$$

$$F_1 = \frac{2Pd + Qd}{4d \sin \alpha} = \frac{2P + Q}{4 \sin \alpha} = 722,5 \text{ ნ.}$$

(1)-ში მნიშვნელობების

შეტანით მივიღებთ:

$$\begin{cases} F_2 \cos \beta = 718,4 \cdot 0,5 = 359,2 \\ F_2 \sin \beta = 500 + 1500 - 718,4 \cdot 0,87 = 1375' \end{cases}$$

აქედან:

$$F_2 = \sqrt{359,2^2 + 1375^2} = 1421(6). \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1375}{359,2} = 3,83, \quad \beta = 75^\circ.$$

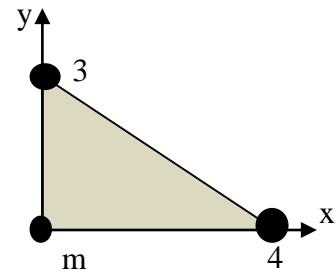
### ამოცანები:

- ბორბალი  $t$  დროის განმავლობაში  $\vartheta$  კუთხით შემობრუნდა, რომელიც დროის მიხედვით შემდეგი კანონით იცვლება:  $\vartheta = 5,0t + 3,0t^2 - 4,5t^4$ .  $\vartheta$  იზომება რადიანებში,  $t$ -წამებში. რისი ტოლია 1) ბორბლის საშუალო სიჩქარე; 2) 2 წმ-დან 3 წმ-მდე დროის შუალედში საშუალო კუთხური აჩქარება? (პასუხი: -280 რად/წმ, -340 რად/წმ<sup>2</sup>)
- ამოცანა 1-ში გამოთვალეთ მყისი კუთხური სიჩქარისა და აჩქარების მნიშვნელობები  $t=3$  წმ-თვის. (პასუხი: -463 რად/წმ, -480 რად/წმ<sup>2</sup>)
- 20 სმ რადიუსის ბორბლის თანაბარაჩქარებულ ბრუნვისას 3,6 წმ-ში სიხშირე იზრდება 80 ბრ/წმ-დან 300 ბრ/წმ-მდე. გამოთვალეთ ბორბლის კუთხური აჩქარება. იპოვეთ ბორბლის განაპირა წერტილის წირითი აჩქარების მხები და ნორმალური მდგენელები  $t=2$  წმ-თვის. (პასუხი: 6,4 რად/წმ<sup>2</sup>, 1,3 მ/წმ<sup>2</sup>, 90 მ/წმ<sup>2</sup>)
- ნაწილაკის რადიუს-ვექტორია  $\vec{r} = 2,5\vec{j} + 3\vec{k}$  მოდებულია  $\vec{F} = 30\vec{k}$  ნ ძალა. გამოთვალეთ ამ ძალის მომენტი  $Ox$  ღერძის მიმართ. (პასუხი: 75 ნ.მ)
- ორი ნაწილაკი იმყოფება მაგიდის კიდე სთან ერთმანეთისგან  $\ell$  მანძილზე. მ მასის ნაწილაკი იწყებს თავისუფალ ვარდნას. კოორდინატთა სათავე შეუთავსეთ მაგიდაზე დარჩენილ ნაწილაკს, ჩაწერეთ ვარდნილ ნაწილაკის იმპულსის მომენტის და მასზე მოქმედი ძალის მომენტის დროზე დამოკიდებულება (პასუხი:  $mg\ell t$ ,  $mg\ell$ )
- გამოთვალეთ ამოცანა 44.2-ში პრეცესიის სიჩქარე, თუ ღერძის თავისუფალ ბოლოზე მოათავსეს სხეული, რომლის მასა დისკოს მასის ნახევრის ტოლია. (პასუხი: 44 რად/წმ)
- ავტომობილის ძრავის მქნევარა წუთში 4000 ბრუნვისას ავითარებს 280 ნმ ძალის მომენტს. გამოთვალეთ ძრავის სიმძლავრე ცხენის ძალებში (1 ცხ.ძ = 736 ვტ). (პასუხი: 159,2 ცხ.ძ)
- 1 მ რადიუსისა და 200 კგ მასის დისკო ბრუნავს ნბრ/წმ სიხშირით. როგორ შეიცვლება ბრუნვის სიხშირე, თუ დისკოს ცენტრში მდგომი 20 კგ მასის ბავშვი დისკოს კიდე სთან გადაინაცვლებს? (პასუხი: შემცირდება 1 ბრ/წმ-ით)
- 2 კგ მასის და 20 სმ დიამეტრის ერთგვაროვანი ცილინდრი ბრუნავს სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ 1200 ბრ/წმ სიხშირით. რა დროში შეაჩერებს მას 0,14 ნ.მ ძალის მომენტი? (პასუხი: 9 წმ)
- რამდენჯერ ნაკლებია ღეროს ინერციის მომენტი მასათა ცენტრზე გამავალი ღეროს მართობული ღერძის მიმართ მის ერთერთ ბოლოზე გამავალი ამ ღერძის პარალელური ღერძის მიმართ ინერციის მომენტზე. (პასუხი: 4-ჯერ)
- მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 4 მ და 3 მ. მის წვეროებში იმყოფება  $m$ ,  $3m$ ,  $4m$ , ( $m=2$  კგ) მასის ნაწილაკები. დავადგინოთ მასათა ცენტრის მდებარეობა და გამოვთვალოთ მასზე გამავალი

სამკუთხედის სიბრტყისადმი მართობული ღერძის მიმართ სისტემის ინერციის მომენტი. (პასუხი:  $C(2;1,1)$ ,  $81\text{კგ}\cdot\text{მ}^2$ )

12. ამოცანა 11-ში გამოთვალეთ სისტემის ინერციის მომენტი  $Oy$  ღერძის მიმართ. (პასუხი:  $96\text{კგ}\cdot\text{მ}^2$ )

13.  $100\text{კგ}$  მასის ცილინდრული მილის შიგა და გარე რადიუსებია  $60\text{სმ}$  და  $80\text{სმ}$ . სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ მისი ბრუნვის განტოლებაა:  $\varphi=4-2t+1,5t^2$ . გამოთვალეთ მახრუნებელი მომენტის და სიმძლავრის მნიშვნელობები  $t=0$ ;  $3\text{წმ}$ -სთვის. (პასუხი:  $155\text{მ}; -30\text{ვტ}; 60\text{ვტ}$ )



14.  $150\text{კგ}$  მასის ცილინდრული ფორმის ლილვი რომლის რადიუსია  $10\text{სმ}$  ბრუნავს სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ  $1800\text{ბრ}/\text{წთ}$  სიხარით. რა ძალით უნდა იმოქმედოს მის ზედაპირზე სამუხრუჭე ხუნდმა, რომ იგი გაჩერდეს  $30\text{წმ}$ -ში. ხახუნის კოეფიციენტი  $0,6$ . გამოთვალეთ შესრულებული მუშაობა. (პასუხი:  $78,5\text{ჯ}; -13,3\text{კჯ}$ )

15. ორი ერთნაირი მასაღობით დამზადებული ერთნაირი სისქის დისკო, რომელთა რადიუსებია  $20\text{სმ}$  და  $30\text{სმ}$ , ბრტყელი ზედაპირებით დევს ერთმანეთზე, ისე რომ გააჩნიათ საერთო სიმეტრიის ღერძი. გამოთვალეთ სისტემის ინერციის მომენტი ამ ღერძის მიმართ, თუ მათი საერთო მასაა  $200\text{კგ}$ . (პასუხი:  $7,5\text{კგ}\cdot\text{მ}^2$ )

16. თხელი რგოლი, რომლის რადიუსია  $0,3\text{მ}$ , მდებარეობს  $XOY$  სიბრტყეში. ბრუნვის  $OZ$  ღერძი რგოლის ცენტრზე გადის. რგოლის კიდეზე მოდებულია  $\vec{F} = 24\vec{j} - 20\vec{k}$  ძალა, გამოთვალეთ ამ ძალის მახრუნებელი მომენტი რგოლის ცენტრის მიმართ. (პასუხი:  $10\vec{j} + 12\vec{k}$ )

17.  $100\text{კგ}\cdot\text{მ}^2$  ინერციის მომენტის მქონე მქნევარას ბრუნვის განტოლებაა  $\varphi=2+10t-2,5t^2$ . ჩაწერეთ მახრუნებელი მომენტისა და სიმძლავრის დროზე დამოკიდებულება და გამოთვალეთ მისი მნიშვნელობა  $1,5\text{წმ}$ -სთვის. (პასუხი:  $M=\text{const}; P=-500(10-5t); -5005,5; -1250\text{ვტ}$ )

18. ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო ბრუნავს  $5\text{კგ}$  მასის და  $30\text{სმ}$  რადიუსის სფერო, მისი ბრუნვის განტოლებაა:  $\varphi=4+6t^2-t^3$ . რა კანონით იცვლება სფეროზე მოქმედ ძალთა მომენტი? იპოვეთ  $1,5\text{წმ}$ -სთვის ძალთა მომენტი. (პასუხი:  $0,18(12-6t); 0,546,5$ )

19.  $1\text{მ}$  რადიუსისა და  $100\text{კგ}\cdot\text{მ}^2$  ინერციის მომენტის დისკო ინერციით ბრუნავს  $17\text{ბრ}/\text{წთ}$  სიხშირით. როგორ შეიცვლება ბრუნვის სიხშირე, თუ დისკოს ცენტრში მყოფი  $70\text{კგ}$  მასის ადამიანი (ჩათვალეთ ნივთიერ წერტილად) გადაინაცვლებს დისკოს კიდეზე. (პასუხი:  $7\text{ბრ}/\text{წთ}$ -ით შემცირდება)

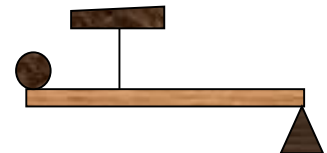
20.  $120\text{კგ}\cdot\text{მ}^2$  ინერციის მომენტის მქნევარას ბრუნვითი მოძრაობის განტოლებაა  $\varphi=2+36t-3t^2$ . იპოვეთ მქნევარაზე მოქმედი ძალების საშუალო სიმძლავრე მის გაჩერებამდე. (პასუხი:  $12,66\text{კვტ}$ )

21.  $100\text{კგ}$  მასის და  $20\text{სმ}$  დიამეტრის ერთგვაროვანი ცილინდრი ბრუნავს სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ  $12\text{ბრ}/\text{წმ}$  სიხშირით. რა დროში შეაჩერებს მას სამუხრუჭე ხუნდი, თუ იგი მის ზედაპირზე მოქმედებს  $30\text{ნ}$  ძალით. ხახუნის კოეფიციენტი  $0,4$ -ის ტოლია. (პასუხი:  $18,8\text{წმ}$ )

22. უძრავი საქანი, რომლის ინერციის მომენტი  $50\text{კგ}\cdot\text{მ}^2$ ,  $30\text{ნ}\cdot\text{მ}$  ძალის მომენტის მოქმედებით იწევს თანაბარჩქარებულ მოძრაობას. განსაზღვრეთ  $8\text{წმ}$ -სათვის მისი კინეტიკური ენერჯია. (პასუხი:  $345,6\text{ჯ}$ ).

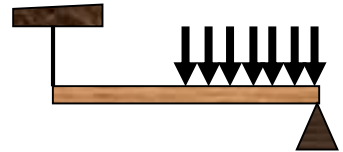
23. დისკოს ფორმის  $0,5\text{კგ}$  მასის ბლოკზე გადადებულია ზონარი, რომლის ბოლოებზე დაკიდებულია  $0,2\text{კგ}$  და  $0,22\text{კგ}$  მასის ტვირთები. გაიგეთ ტვირთების აჩქარება. (პასუხი:  $1,64\text{მ}/\text{წმ}^2$ ).

24.  $60\text{კგ}$  მასის ერთგვაროვანი ღეროს სიგრძეა  $6\text{მ}$  (იხ. ნახაზი). მისი ერთი ბოლო ეყრდნობა უძრავ საყრდენს, ხოლო მეორე თავისუფალ ბოლოზე მოთავსებულია  $20\text{კგ}$  მასის ტვირთი. ტვირთიდან  $2\text{მ}$ -ზე ღერო დამაგრებულია ბაგირით და იმყოფება წონასწორობის მდგომარეობაში. იპოვეთ საყრდენის და ბაგირის რეაქციის ძალები. (პასუხი:  $506; 7506$ ).

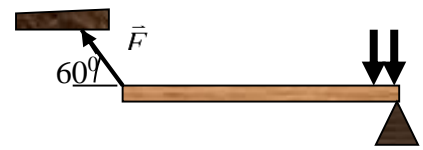


25.  $0,1\text{მ}$  რადიუსის წრიული ფორმის ბლოკზე გადადებულია ზანარის ბოლოებზე მიმაგრებულია  $0,3\text{კგ}$  და  $0,32\text{კგ}$  მასის ტვირთები. მსუბუქი ტვირთი იმყოფება  $1\text{მ}$ -ით ქვევით. ტვირთების გათავისუფლებიდან  $2\text{წმ}$ -ში ისინი ერთ დონეზე აღმოჩნდა, იპოვეთ ბლოკის ინერციის მომენტი და მასა. (პასუხი:  $1,8\cdot 10^{-3}\text{კგ}\cdot\text{მ}^2; 0,36\text{კგ}$ )

26. 60 კგ მასის 8 მ სიგრძის ერთგვაროვანი ღერო ერთი ბოლოთი ეყრდნობა უძრავ საყრდენს, ხოლო მეორე ბოლო დამაგრებულია ბაგირით. საყრდენიდან შუა წერტილამდე ღერო განიცდის 50 კგ/მ თანაბარ დატვირთვას. იპოვეთ მის ბოლოებზე მოქმედი რეაქციის ძალები. (პასუხი: 800 ნ; 1800 ნ).



27. 60 კგ მასის ერთგვაროვანი ღეროს სიგრძეა 8 მ (იხ. ნახაზი). მისი ერთი ბოლო ეყრდნობა უძრავ საყრდენს, ხოლო მეორე ბოლო დამაგრებულია ბაგირით. საყრდენიდან 2 მ მანძილზე ღერო განიცდის 200 კგ/მ თანაბარ დატვირთვას. იპოვეთ  $F$  ძალა და ღეროს ბოლოზე საყრდენის მხრიდან მოქმედი რეაქციის ძალა. (პასუხი: 924 ნ; 3828 ნ).



28. 4,6 კგ მასის და 6 სმ რადიუსის ერთგვაროვანი ცილინდრი ბრუნავს სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ 1500 ბრ/წთ სიხშირით. იპოვეთ მისი იმპულსის მომენტი და ძალის მომენტი რომელიც საჭიროა მის გასაჩერებლად 7 წმ-ში. (პასუხი: 1,3 კგ.მ<sup>2</sup>/წმ; -02 ნ.მ).

29. 4 მ სიგრძის და 30° დახრილობის სიბრტყიდან სრიალის გარეშე მოგორავს ბირთვი. იპოვეთ მისი ცენტრის საშუალო წირითი სიჩქარე და ჩამოვარების დრო. (პასუხი: 2,7 მ/წმ; 1,5 წმ).

30. 10<sup>3</sup> მ/წმ სიჩქარით ჰორიზონტალურად გასროლილი 10 გ მასის ცილინდრული ფორმის ტყვია ბრუნავს გრძივი ღერძის ირგვლივ 2500 ბრ/წმ სიხშირით. ტყვიის დიამეტრია 10 მმ გამოთვალეთ მისი სრული კინეტიკური ენერჯია. (პასუხი: 5,15 კჯ)

31. მილი, რომლის შიგა და გარე რადიუსებია 2 სმ და 3 სმ, მსახველი 50 სმ, სიმკვრივე 2,7·10<sup>3</sup> კგ/მ<sup>3</sup>. სრიალის გარეშე მოგორავს ჰორიზონტალურ ზედაპირზე. მისი ღერძის წირითი სიჩქარეა 1 მ/წმ. გამოთვალეთ მილის კინეტიკური ენერჯია. (პასუხი: 1,7 ჯ)

32. ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მოგორავს ბირთვი. მისი სრული კინეტიკური ენერჯია 28 ჯ. განსაზღვრეთ ბირთვის ბრუნვითი და გადატანითი მოძრაობის კინეტიკური ენერჯიები. (პასუხი: 20 ჯ; 8ჯ)

33. რგოლმა, რომელიც მიგორავდა ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე 4 მ/წმ სიჩქარით, მიაღწია 30° დახრილობის სიბრტყეს. რა მანძილზე აგორდება იგი დახრილ სიბრტყეზე. (პასუხი: 13,2 მ)

34.  $R=20$  სმ რადიუსის და  $10R$  სიგრძის ერთგვაროვანი ცილინდრის ფუძეებზე მიმაგრებულია ორი ერთნაირი  $3R$  რადიუსის ბირთვი. ისე, რომ მათი ცენტრები და ცილინდრის სიმეტრიის წრფე ერთ ღერძს ქმნის. რომლის ირგვლივ სისტემა ბრუნავს 10 ბრ/წმ სიჩქარით. გამოთვალეთ სისტემის კინეტიკური ენერჯია, თუ მისი მასაა 190 კგ და მთლიანად ერთნაირი მასალითაა დამზადებული. (პასუხი: 1225 ჯ)

## თავი V.

### მექანიკური რევეზი და ტალღები

#### §46. რევეზიტი მოძრაობის ტიპები

- რევეზიტი მოძრაობა ეწოდება ისეთ პროცესს, რომელიც დროის განსაზღვრული ინტერვალების შემდეგ ზუსტად ან მიახლოებით მეორდება.

განმეორებადი პროცესების ფიზიკური ბუნებიდან გამომდინარე განასხვავებენ მექანიკურ, ელექტრომაგნიტურ, ელექტრომექანიკურ და სხვა რევეზებს.

- მექანიკურ რევეზში იგულისხმება სხეულის განმეორებადი მოძრაობა ერთსა და იმავე ტრაექტორიაზე ხან ერთი ხან მეორე მიმართულებით.

მექანიკური რევეზის მაგალითებია ფრინველის ფრთების, სითბური მანქანის დგუმის, გიტარის სიმის, მიწისძვრის დროს დედამიწის ქერქის მოძრაობა, ასევე თვითმფრინავის ფრთებისა და გემის კორპუსის ვიბრაციები. რევეზიტი პროცესები ტექნიკის სხვადასხვა დარგის საფუძველთა საფუძველია. თუმცა ზოგიერთ შემთხვევაში რევეზიტი მოძრაობები უარყოფით როლს ასრულებს. თვითმფრინავის ფრთების ვიბრაციამ შესაძლოა დასაშვებ ზღვარს გადააჭარბოს და კატასტროფული შედეგები გამოიწვიოს. ასეთ შემთხვევებში აუცილებელია შესაბამისი უსაფრთხოების ზომების მიღება.

იმისთვის, რომ სხულმა, ან სხეულთა სისტემამ შეასრულოს რევეზიტი მოძრაობა, საჭიროა დაკმაყოფილებული იყოს ორი პირობა:

1. სისტემას უნდა გააჩნდეს მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობა, ანუ სისტემის წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოყვანისას უნდა აღიძრას სისტემის წონასწორობის მდგომარეობისკენ დამაბრუნებელი ძალა, რომელიც გადახრის პროპორციულია და წონასწორობის ცენტრისკენაა მიმართული. ასეთ ძალებს კვაზიდრეკად (დრეკადობის მსგავს) ძალებს უწოდებენ.

2. წინააღმდეგობის ძალები მცირე უნდა იყოს, რათა რევეა აღიძრას და სწრაფად არ მიიღიოს.

მერხევ სისტემაზე განხორციელებული ზემოქმედების ხასიათის მიხედვით არჩევენ თავისუფალ (საკუთარ) და იძულებით რევეებს.

- თავისუფალი ეწოდება რევეას, რომელიც მიმდინარეობს სისტემის წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოყვანის შედეგად, ანუ, რომელიც ხორციელდება ერთხელ მინიჭებული ენერჯის ხარჯზე.

ამ რევეის მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ ძაფზე დაკიდებული ბურთულის მოძრაობა ერთჯერადი მსუბუქი ბიძგის (კინეტიკური ენერჯის მიწოდება), ან წონასწორობის მდგომარეობიდან მცირე გადახრის (პოტენციური ენერჯის მიწოდება) შემდეგ.

რადგან გარემოში, სადაც წარმოებს რევეა, ყოველთვის არსებობს წინააღმდეგობის ძალები, ამიტომ თავისუფალი რევეები ბუნებით მიღევალია. მერხევ სისტემაზე მიწოდებული ენერჯია რევეის პროცესში ხმარდება გარემოს წინააღმდეგობის დაძლევის, რის გამოც რევეა სუსტდება და საბოლოოდ წყდება.

თავისუფალი რევეის იდეალიზირებულ შემთხვევას წარმოადგენს ჰარმონიული რევეა.

- ჰარმონიული რევეა არის სისტემის თავისუფალი რევეა გარემოში, რომლის წინააღმდეგობის ძალები პრაქტიკულად უგულვებელყოფილია.

ასეთ შემთხვევაში რხევითი მოძრაობის მახასიათებელი სიდიდეები – კოორდინატები, სიჩქარე, აჩქარება – დროში კოსინუსის (ან სინუსის) ჰარმონიული კანონის მიხედვით იცვლება. ასეთი რხევების შესწავლა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია, ვინაიდან ბუნებასა და ტექნიკაში გავრცელებული რხევითი მოძრაობები, დროის შეზღუდულ შუალედში, ძალიან ახლოსაა ჰარმონიულთან.

➤ **იძულებითი ეწოდება ისეთ რხევას, რომელიც წარმოებს გარედან პერიოდულად მინიჭებული ენერჯის ხარჯზე.**

სხვადასხვა ბუნების რხევას გააჩნია საერთო თვისებები, რის გამოც, რხევათა შესწავლის მათემატიკური მეთოდები ერთნაირია. ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ მექანიკურ რხევებს, თუმცა მიღებული შედეგები გავრცელდება სხვა სახის რხევებზეც.

რხევითი მოძრაობის შესწავლა მარტივდება იმით, რომ თითქმის ყოველი სახის რთული რხევითი მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც მარტივ რხევით მოძრაობათა (ჰარმონიულ რხევათა) ჯამი. ამასთან ჯამში შემავალი წევრები ქმნიან სწრაფად კრებად მიმდევრობას, რაც საშუალებას იძლევა შემოვიფარგლოთ მხოლოდ რამოდენიმე წევრით და ამით გავამარტივოთ დასმული ამოცანის მათემატიკური გადაწყვეტა.

მექანიკური რხევის შესწავლა ნიშნავს განისაზღვროს, თუ როგორი კანონზომიერებით იცვლება სისტემის მოძრაობის მახასიათებელი სიდიდეები – კოორდინატები, სიჩქარე, აჩქარება.

ჩვენ განვიხილავთ **ერთგანზომილებიან მექანიკურ რხევებს.**

### §47. ჰარმონიული რხევა

ზანვიხილთ ერთგანზომილებიანი მექანიკური რხევები, ანუ როდესაც მერხევი სისტემის მდებარეობა დროის მოცემულ მომენტში განისაზღვრება ერთი კოორდინატით –  $x$ -ით. ასეთი სისტემის პოტენციური ენერჯია იქნება  $W_3(x)$ . რადგან სისტემას გააჩნია მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობა, მაშინ, §34-ის თანახმად, ამ მდგომარეობას შეესაბამება პოტენციური ენერჯის მინიმუმი. წონასწორობის მდებარეობას შევესაბამოთ ათვლის წერტილი  $x=0$ , მაშინ  $W_3(0)=0$ .

მოვახდინოთ  $W_3(x)$  ფუნქციის გაშლა  $x=0$  წერტილის მახლობლობაში:

$$W_3(x) = W_3(0) + \left( \frac{dW_3(x)}{dx} \right)_{x=0} \cdot x + \left( \frac{d^2W_3(x)}{dx^2} \right)_{x=0} \cdot \frac{x^2}{2} + \dots \quad (47.1)$$

განვიხილოთ მცირე გადახრები, ე.ი. როცა შესაძლებელია შემოვიფარგლოთ  $x$ -ის მცირე ხარისხით (კვადრატულით). ფუნქციის ექსტრემუმის (მინიმუმის) განმარტების თანახმად:

$$\left( \frac{dW_3}{dx} \right)_{x=0} = 0, \text{ ხოლო } \left( \frac{d^2W_3}{dx^2} \right)_{x=0} > 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$k = \left( \frac{d^2W_3}{dx^2} \right)_{x=0},$$

მაშინ (47.1) მიიღებს სახეს:

$$W_3(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

სისტემაში მოქმედი ძალა, (29.4)-ის გამო, იქნება:

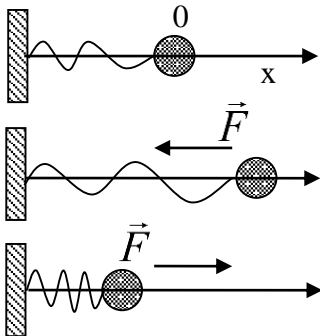
$$F = F_x = -\frac{dW_3}{dx} = -kx. \quad (47.2)$$

(47.2)-ის თანახმად ეს ძალა გადახრის პროპორციულია და წონასწორობის მდებარეობისკენ არის მიმართული. იგი მათემატიკური თვალსაზრისით დრეკადობის ძალის ანალოგიურია და მას **კვაზიდრეკადობას** უწოდებენ. ეს ძალა განაპირობებს რხევით პროცესს.

განვიხილოთ ჰარმონიული რხევის რამოდენიმე მაგალითი.

### 1. ზამბარიანი ტვირთის რხევა

განვიხილოთ მცირე ზომის მასიური ბირთვი, რომელიც გახვრეტილია დიამეტრზე და ჩამოცმულია ღეროზე, რათა მას შეეძლოს მოძრაობა მხოლოდ ერთი წრფის გასწვრივ. ბირთვი დავამაგროთ ზამბარის ერთ ბოლოზე, რომლის მეორე ბოლო უძრავია (ნახ. 47.1). ბირთვის წონასწორულ მდებარეობას (არადეფორმირებული ზამბარის შემთხვევა) შევუთავსოთ ათვლის 0 წერტილი, ხოლო  $x$  ღერძი მივმართოთ ღეროს გასწვრივ. გამოვიცხოთ გარემოს წინააღმდეგობის ძალები. წონასწორობის მდებარეობიდან ბირთვის გამოყვანისას ზამბარის გაჭიმვის (ან შეკუმშვის) შედეგად აღძრული დრეკადობის ძალა  $F = -kx$  ბირთვს მიანიჭებს  $a_x = d^2x/dt^2$  აჩქარებას. ნიუტონის II კანონის თანახმად,  $ma_x = -kx$ , სადაც  $m$  ბირთვის მასაა, ხოლო  $k$  – ზამბარის სიხისტე. ე.ი.:



ნახაზი 47.1

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

ბირთვის მასაზე გაყოფით ვღებულობთ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (47.3)$$

სადაც:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (47.4)$$

(47.3) წარმოადგენს წრფივ, ერთგვაროვან, მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ამონახსნიც, ანუ  $x$  წანაცვლების დროზე დამოკიდებულება, რხევის პერიოდულობის გამო, ჩაიწერება უწყვეტი პერიოდული ფუნქციის კოსინუსის (ან სინუსის) სახით:

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (47.5)$$

ამ განტოლებას განვიხილავთ მომდევნო პარაგრაფში

### 2. მათემატიკური საქანი

➤ **ფიზიკაში საქანს უწოდებენ ნებისმიერ მყარ სხეულს, რომელსაც სიმძიმის ძალის მოქმედებით შეუძლია შეასრულოს რხევითი მოძრაობა უძრავი წერტილის ან ღერძის მიმართ.**

განასხვავებენ **მათემატიკურ** და **ფიზიკურ** საქანს.

განვიხილოთ მათემატიკური საქანი, რომელიც წარმოადგენს გრძელ, უწონად, უჭიმვად ძაფსა და მასზე ჩამოკიდებული ნივთიერი წერტილის ერთობლიობას (წონასწორობის მდებარეობის მახლობლობაში მერხევ ნივთიერ წერტილს **ოსცილატორს** უწოდებენ). მის წონასწორულ მდებარეობას შევუთავსოთ ათვლის 0 წერტილი. ამ

მდებარეობიდან მცირე გადახრა -  $x$  წარმოადგენს იმ რკალს, რომელზეც იმოძრავენ ნივთიერი წერტილი (ნახ. 47.2). მასზე მოქმედი სიმძიმის  $\vec{P}$  ძალის ნორმალური მდგენელი  $\vec{P}_n$  კომპენსირებულია ძაფის დრეკადობის  $\vec{N}$  ძალით. წინააღმდეგობის ძალთა უგულებელყოფის შემთხვევაში სისტემაში იმოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალის მხები მდგენელი  $\vec{P}_\tau$ . ნიუტონის II კანონიდან გამომდინარე:

$$P_\tau = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

ნახ. 47.2-ის თანახმად კი:

$$P_\tau = P \sin \varphi = -mg \frac{x}{\ell} \text{ }^{38}.$$

მინუს ნიშნით მიუთითებს იმ ფაქტს, რომ  $\vec{P}_\tau$  ყოველთვის გადახრის საპირისპიროდია მიმართული. ფორმულიდან:

$$P_\tau = -\left(\frac{mg}{\ell}\right)x,$$

ჩანს, რომ  $P_\tau$  მათემატიკურად  $F = -kx$ -ის ანალოგიურია ( $k = mg/\ell$ ), ანუ წარმოადგენს კვაზიდრეკად ძალას.  $P_\tau$ -ს მნიშვნელობის გათვალისწინებით ნიუტონის II კანონი მიიღებს სახეს:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mg}{\ell} x = 0.$$

მასაზე შეკვეცის შედეგად ვღებულობთ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{47.6}$$

სადაც

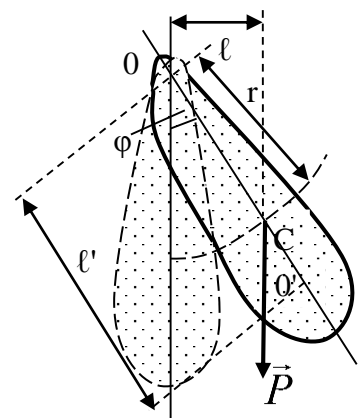
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \tag{47.7}$$

(47.6) იდენტურია (47.3)-ის, რის გამოც მისი ამონახსნი ასევე მოიცემა (47.5) ფორმულით.

### 3. ფიზიკური საქანი

➤ **ფიზიკური საქანი ისეთი მერხევი სხეულია, რომლის ნივთიერ წერტილად წარმოადგენს მასის განფენილობის გამო შეუძლებელია.**

ნახაზ 47.3-ზე გამოსახულია ფიზიკური საქანი, რომელსაც შეუძლია რხევის შესრულება  $O$  წერტილში გამავალი, ნახაზის სიბრტყის მართობული ღერძის მიმართ. მოცემული საქანის რხევის შესწავლა მოსახერხებელია ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკის განტოლების გამოყენებით (§41)  $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ , სადაც  $I$  - სხეულის ინერციის მომენტი  $O$  წერტილზე გამავალი ღერძის მიმართ,  $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$  - კუთხური აჩქარებაა, ხოლო



ნახაზი 47.3

<sup>38</sup>მცირე გადახრებისას  $\sin \varphi \approx \varphi \approx x/\ell$ .

$M = -Pl = -mgr \sin \varphi$  ( $l$  – ძალის მხარია) სიმძიმის ძალის მომენტი იმავე ღერძის მიმართ. ნიშანი მინუსი მიუთითებს იმ ფაქტს, რომ  $M$  ცდილობს დააბრუნოს სხეული წონასწორობის მდგომარეობაში (ამ თვალსაზრისით იგი ანალოგიურია კვაზიდრეკადი ძალის). მაშასადამე,

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mgr \sin \varphi = 0.$$

მცირე გადახრების გამო  $\sin \varphi \approx \varphi$  და ვღებულობთ:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (47.8)$$

სადაც:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I}}. \quad (47.9)$$

(47.8) ანალოგიურია (47.3)-ის, რის გამოც მისი ამონახსნი (47.5)-ის მსგავსად მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (47.10)$$

მაშასადამე, ზამბარიანი ტვირთის, მათემატიკური და ფიზიკური საქანის რხევის განტოლებები იდენტურია და ერთსა და იმავე ტიპს მიეკუთვნება.

#### **§48. ჰარმონიულ რხევათა განტოლების ანალიზი**

ზღაგვწეროთ ჰარმონიული რხევების (47.5) განტოლება შემდეგი სახით:

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) = X_0 \cos \varphi(t). \quad (48.1)$$

რადგან  $|\cos \varphi(t)| \leq 1$ , ამიტომ წონასწორობის მდებარეობიდან მაქსიმალური გადახრა იქნება:

$$x_{\max} = X_0$$

➤ **მერხევი სისტემის წონასწორობის მდებარეობიდან უდიდეს გადახრას რხევის ამპლიტუდა –  $X_0$  ეწოდება.**

ამპლიტუდის მნიშვნელობა დამოკიდებულია წონასწორობის მდებარეობიდან საწყის გადახრაზე და საწყის მომენტში მინიჭებულ სიჩქარეზე. ამპლიტუდა ჰარმონიული რხევის შემთხვევაში მუდმივი სიდიდეა.  $\varphi(t) = (\omega_0 t + \alpha)$  ახასიათებს მერხევი სისტემის მყისიერ მდგომარეობას და განსაზღვრავს წანაცვლების დროში ცვლილებას. მას რხევის **ფაზა** ეწოდება. დაკვირვების დასაწყისში, ანუ  $t=0$  მომენტისთვის რხევის ფაზა  $\alpha$ -ს ტოლია, ამიტომ მას **საწყისი ფაზა** ეწოდება. კოსინუსის პერიოდულობის ( $2\pi$ ) გამო, დროის გარკვეული შუალედების შემდეგ, სისტემა უბრუნდება პირვანდელ მდგომარეობას.

➤ **დროის იმ უმცირეს შუალედს –  $T$ , რომლის შემდეგაც სისტემა უბრუნდება პირვანდელ მდგომარეობას, პერიოდი ეწოდება:**

მაშასადამე,  $x(t) = x(t+T)$ . (48.1)-ის თანახმად,

$$X_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) = X_0 \cos(\omega_0 (t+T) + \alpha).$$

ამ ტოლობის დაკმაყოფილებისთვის საჭიროა  $\omega_0 T = 2\pi$ , აქედან:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (48.2)$$

$\omega_0$  წარმოადგენს რხევის ციკლურ სიხშირეს-ანუ  $2\pi$  წმ-ში შესრულებულ რხევათა რიცხვს (იხ. §9). (47.4)-ის და (47.7)-ის თანახმად:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

წარმოადგენს ზამბარიანი ტვირთისა და მათემატიკური საქანის ციკლურ სიხშირეებს, მათი მნიშვნელობა დამოკიდებულია მხოლოდ მერხევი სისტემის პარამეტრებზე ( $m, k$ ) და ( $g, \ell$ ), რის გამოც მათ მერხევი სისტემის **საკუთარ სიხშირეებს** უწოდებენ. (48.2)-ის თანახმად, ზამბარიანი ტვირთისთვის:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (\text{პიუგენსის ფორმულა})$$

მათემატიკური საქანის რხევის პერიოდის ფორმულაა. მისი საშუალებით ლაბორატორიულ პირობებში შესაძლებელია  $g$ -ს გამოთვლა.

➤ **დროის ერთეულში შესრულებულ რხევათა რიცხვს რხევის სიხშირე –  $\nu$  ეწოდება.** იგი პერიოდის შებრუნებული სიდიდეა:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

მისი ერთეულია **ჰერცი**.

(48.1) ფორმულის დროით გაწარმოების შედეგად მიიღება ჰარმონიული რხევის სიხქარის განტოლება:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -X_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = X_0\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (48.3)$$

(48.3)-ის თანახმად,  $v_{\max} = v_0 = X_0\omega_0$  სიხქარის ამპლიტუდაა. (48.3)-ის (48.1)-თან შედარებიდან ჩანს, რომ სიხქარე  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ) ფაზით უსწრებს წანაცვლებას.

(48.3)-ის გაწარმოებით მიიღება აჩქარების განტოლება:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -X_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = X_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (48.4)$$

(48.4)-ში (48.1)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ:

$$a_x = -\omega_0^2 x, \quad (48.4)'$$

ე.ი. ჰარმონიული რხევის დროს სისტემის აჩქარება (შესაბამისად, კვაზიდრეკადი ძალა) ყოველთვის  $x$  გადახრის პროპორციულია და მის საპირისპიროდაა მიმართული.

ნახ. 48.1-ზე ნაჩვენებია ერთგანზომილებიანი ჰარმონიული რხევის წანაცვლების დროზე დამოკიდებულება. ფიზიკური საქანის რხევის (47.10) განტოლება ანალოგიურია (48.1)-ის, კერძოდ  $\nu \sim X_0$ . (47.9) წარმოადგენს ფიზიკური საქანის ციკლურ სიხშირეს, შესაბამისად რხევის პერიოდი იქნება:

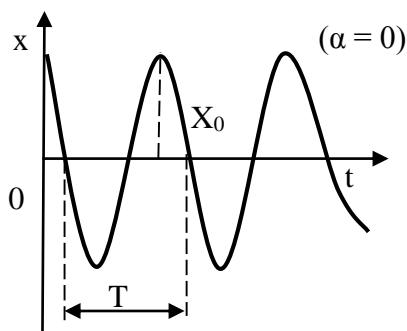
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}.$$

მისი გატოლებით მათემატიკური საქანის რხევის პერიოდთან:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

ვღებულობთ:

$$\ell' = \frac{I}{mr}. \quad (48.5)$$



ნახაზი 48.1

$\ell'$ -ს ფიზიკური საქანის დაყვანილი სიგრძე ეწოდება. ე.ი. ფიზიკური საქანის რხევის პერიოდი ისეთი მათემატიკური საქანის რხევის პერიოდის ტოლია, რომლის სიგრძეც ფიზიკური საქანის დაყვანილი სიგრძეს უდრის. დაყვანილი სიგრძე ყოველთვის მეტია საკიდი  $O$  წერტილისა და მასათა  $C$  ცენტრს შორის  $r$  მანძილზე (ნახაზი 47.3).

$O'$  წერტილს, რომელიც ფიზიკური საქანის საკიდი წერტილიდან დაყვანილი  $\ell'$  სიგრძის ტოლ მანძილზე მდებარეობს, საქანის რხევის ცენტრი ეწოდება. თუ

ფიზიკურ საქანს დავკიდებთ რხევის  $O'$  ცენტრში, მაშინ მისი რხევის პერიოდი არ შეიცვლება.

გავარჩიოთ ჰარმონიული რხევა ენერგეტიკული თვალსაზრისით. რადგან ჰარმონიულად მერხევი ნებისმიერი სისტემის შემთხვევაში რხევის მახასიათებელი სიდიდეები ერთნაირი კანონზომიერებით იცვლება, განვიხილოთ ზამბარიანი ტვირთის ჰარმონიული რხევის შემთხვევა. პოტენციური და კინეტიკური ენერგიების განმარტების თანახმად, დროის ნებისმიერი  $t$  მომენტისთვის გვექნება:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kX_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha), \quad (48.6)$$

$$W_k = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mX_0^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (48.7)$$

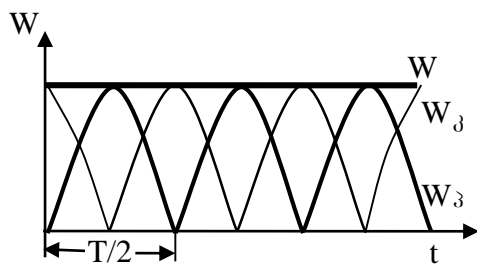
$\cos^2 \alpha$ -ს ( $\sin^2 \alpha$ ) პერიოდი  $\pi$ , ამიტომ  $W_p, W_k$ -ის პერიოდი იქნება  $T/2$ , ანუ ერთი სრული რხევის დროს თითოეული მათგანი ორჯერ მოასწრებს სრულ ცვლილებას. ჰარმონიულად მერხევი სისტემაში არ მოქმედებს წინააღმდეგობის ძალები, რის გამოც სრული მექანიკური ენერგია ინახება. მართლაც,

$$W = W_p + W_k = \frac{kX_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{mX_0^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha).$$

(47.4)-ის თანახმად,  $k = m\omega_0^2$ , რის გამოც ვღებულობთ:

$$W = \frac{mX_0^2 \omega_0^2}{2} = const. \quad (48.8)$$

ე.ი., ჰარმონიული რხევის პროცესში მიმდინარეობს პოტენციური და კინეტიკური ენერგიების ურთიერთგარდაქმნა. კერძოდ, მობრუნების წერტილებში ( $x = X_0$ -ამპლიტუდური გადახრა)



ნახაზი 48.2

$W_p = 0$ , ხოლო  $W_k$  აღწევს მაქსიმუმს და პირიქით, წონასწორობის მდგომარეობაში გავლისას  $W_p = 0$ ,  $W_k$  - მაქსიმალურია (ნახაზი 48.2). ამასთანავე, სისტემის სრული ენერგია რჩება უცვლელი. მისი მნიშვნელობა(48.8)-ის თანახმად დამოკიდებულია რხევის საწყის პირობებზე და სისტემის პარამეტრებზე. არსებითია, რომ

➤ მერხვეი სისტემის ენერგია ამპლიტუდის კვადრატის პროპორციულია.

**მოცანა 48.1.** ჰარმონიული ოსცილატორის გადახრის დროზე დამოკიდებულება მოცემულია განტოლებით:

$$x = 2,4 \cos\left(\frac{5\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}\right),$$

სადაც  $x$  იზომება მეტრებით, ხოლო  $t$  წამებში. იპოვეთ: რხევის პერიოდი და სიხშირე;  $t = 0$  მომენტისთვის გადახრა, სიჩქარე და აჩქარება.

**ამოხსნა:**

(48.1) ფორმულის თანახმად:

$$1. \omega_0 = \frac{5\pi}{4},$$

(48.2)-ის თანახმად კი:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4 \cdot 2\pi}{5\pi} = \frac{8}{5} = 1,6 \text{ (წმ)},$$

ღაღგან:

$$\nu = \frac{1}{T}, \text{ ამიტომ } \nu = \frac{5}{8} \approx 0,6 \text{ (ჰც)}.$$

$$2. x_{t=0} = 2,4 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 2,4 \cdot 0,87 = 2,1 \text{ მ.}$$

(48.1)-ის თანახმად:

$$v_{t=0} = -2,4 \cdot \frac{5\pi}{4} \sin\frac{\pi}{6} = -3\pi \cdot 0,5 = -4,7 \text{ (მ/წმ)}.$$

(48.4)-ის გამო:

$$a_{t=0} = -2,4 \cdot \left(\frac{5\pi}{4}\right)^2 \cos\frac{\pi}{6} = -32 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}.$$

**ამოცანა 48.2.** მათემატიკური საქანის სიგრძეა 3,6 მ. იგი გადახარეს ვერტიკალური მდგომარეობიდან  $1,4^\circ$ -ით. აღვწეროთ გადახრის კუთხის დროზე დამოკიდებულების განტოლება. ვიპოვოთ რხევის ამპლიტუდა და მაქსიმალური სიჩქარე. გარემოს წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია.

**ამოხსნა:**

რადგან გარემოს წინააღმდეგობა უგულებელყოფილია და საქანის გადახრის კუთხე მცირეა, ამიტომ რხევა ჰარმონიულია:

$$x = X_0 \cos \omega_0 t \quad (1)$$

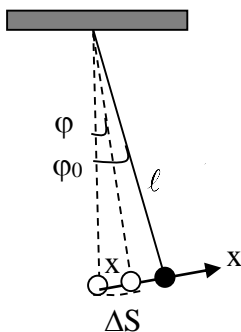
ტრიგონომეტრიიდან ცნობილია, რომ წრეწირის რკალის სიგრძე რადიუსისა და შესაბამისი ცენტრალური კუთხის ნამრავლის ტოლია:

$$\Delta S = \ell \varphi. \text{ მცირე გადახრებისას } \Delta S \approx x. \text{ ანუ}$$

$$x = \ell \varphi. \quad (2)$$

(2)-ის გათვალისწინებით (1) ასე ჩაიწერება:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t$$



სადაც  $\varphi_0 = 1,4^0 \frac{\pi}{180^0} = 0,024$  რად - გადახრის მაქსიმალური კუთხეა. ხოლო, (2)-ის თანახმად რხევის ამპლიტუდა იქნება:

$$X_0 = \ell \varphi_0 = 3,6 \cdot 0,024 = 0,09(\text{მ}).$$

სიხქარის ამპლიტუდა რხევის ამპლიტუდასთან დაკავშირებულია ფორმულით:

$$v_0 = X_0 \omega_0 = X_0 \sqrt{\frac{g}{\ell}} = 0,09 \sqrt{\frac{10}{3,6}} = 0,15(\text{მ/წმ}).$$

**ამოცანა 48.3.** დაამტკიცეთ, რომ დაყვანილი  $\ell'$  სიგრძე (ნახაზი 47.3) მეტია საკიდ წერტილსა და მასათა  $C$  ცენტრს შორის მანძილზე.

**ამოხსნა:**

შტეინერის თეორემის თანახმად (42.4), ინერციის მომენტი ნებისმიერ  $O$  წერტილში გამავალი ღერძის მიმართ დაკავშირებულია მასათა  $C$  ცენტრში გამავალი და პირველი ღერძის პარალელური ღერძის მიმართ ინერციის  $I_C$  მომენტთან თანაფარდობით:

$$I = I_C + mr^2.$$

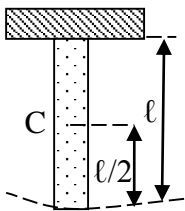
ამის გამო (47.8) ფორმულით განსაზღვრული დაყვანილი სიგრძე:

$$\ell' = \frac{I}{mr} = \frac{I_C + mr^2}{mr} = \frac{I_C}{mr} + r.$$

რადგან პირველი შესაკრები დადებითია, ამიტომ  $\ell' > r$ .

**ამოცანა 48.4.** ერთი ბოლოთი დამაგრებული თხელი ერთგვაროვანი ღერო ასრულებს ჰარმონიულ რხევას ვერტიკალურ სიბრტყეში. ვიპოვოთ რხევის პერიოდი და დაყვანილი სიგრძე, თუ ღეროს სიგრძეა 0,64მ.

**ამოხსნა:**



ფიზიკური საქანის რხევის პერიოდი:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}}, \quad (1)$$

სადაც  $r = \ell/2$ , ხოლო ინერციის მომენტი, (42.4)-ის თანახმად:

$$I = I_C + m \frac{\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}.$$

მაშინ (1) მიიღებს სახეს:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{3mg \frac{\ell}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}} = 1,31(\text{წმ}).$$

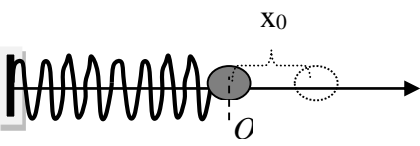
დაყვანილი სიგრძე, იქნება:

$$\ell' = \frac{I}{mr} = \frac{\frac{m\ell^2}{3}}{\frac{m\ell}{2}} = \frac{2}{3}\ell = 0,43(\text{მ}).$$

**ამოცანა 48.5.** ზამბარაზე მიმაგრებული 1 კგ მასის ბირთვი წაანაცვლეს წონასწორობის მდებარეობიდან 5სმ-ით და გაუშვეს ხელი, რის შედეგადაც სისტემამ დაიწყო ჰარმონიული რხევა. გამოთვალეთ ზამბარის სიხისტე და რხევის პერიოდი, თუ წონასწორობის  $O$  წერტილში გავლისას ბირთვის სიხქარეა 0,1 მ/წმ.

**ამოხსნა:**

ბირთვის  $x_0=0,05$  მ-ით წანაცვლებით სისტემამ მიიღო:



$$W_3 = \frac{kx_0^2}{2}.$$

პოტენციური ენერგია, რომელიც რხევის ჰარმონიული ხასიათის გამო (მექანიკური ენერგია ინახება) ბირთვის წონასწორობის მდებარეობაში ( $O$  წერტილი) გავლისას მთლიანად გადადის სისტემის კინეტიკურ ენერგიაში:

$$W_3 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

ენერგიათა გატოლებით ვღებულობთ:

$$k = \frac{mv_0^2}{x_0^2} = \frac{1 \cdot 10^{-2}}{25 \cdot 10^{-4}} = 4 \quad (66).$$

პერიოდის ფორმულის თანახმად:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{4}} = \pi \text{ (წმ)}.$$

**ამოცანა 48.6.** მას შემდეგ რაც ლიფტმა დაიწყო ვერტიკალური მოძრაობა მასშიჩამოკიდებული მათემატიკური საქანის რხევის პერიოდი 2-ჯერ გაიზარდა. გამოთვალეთ ლიფტის აჩქარების სიდიდე და მიმართულება.

**ამოხსნა:**

(იხილეთ §21). უძრავი ლიფტის შემთხვევაში:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g-a}}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{g-a}} = 2.$$

საიდანაც:

$$a = \frac{3}{4} \cdot g.$$

აჩქარება მიმართულია ქვემოთ.

### §49. თავისუფალი (მილევალი) რხევები

რეალურ სისტემებში, წინააღმდეგობის ძალთა არსებობის გამო, ერთჯერადად მინიჭებული ენერგია თანდათან იხარჯება ამ ძალთა დასაძლევად შესრულებულ მუშაობაზე (გადადის სითბურ ენერგიაში), რის გამოც თავისუფალი რხევა **მილევალია**. ჰარმონიული რხევებისგან განსხვავებით, ამ შემთხვევაში მერხევი სისტემის წონასწორობიდან გადახრის (კოორდინატის), სიჩქარის და აჩქარების მაქსიმალური მნიშვნელობები დროზე დამოკიდებული კლებადი ფუნქციებია. გადახრის სიდიდე მონოტონურად მცირდება და ამპლიტუდის, როგორც დროში უცვლელი მაქსიმალური გადახრის, განსაზღვრა აზრს კარგავს. თუმცა თავისუფალი რხევისას ამპლიტუდის ცნებით მაინც სარგებლობენ და მას უწოდებენ იმ მაქსიმალურ გადახრას, რომელსაც სისტემა ასრულებს ერთი რხევის განმავლობაში. რადგან მილევალი რხევისას სისტემა ზუსტად ვერ იმეორებს წინანდელ მოძრაობას, რხევის პერიოდის განმარტებაც იცვლება:

➤ მიღვევადი რხევის პერიოდი ეწოდება დროის იმ შუალედს, რომლის განმავლობაშიც სისტემა ასრულებს ორ მომდევნო მაქსიმალურ გადახრას ერთსადიგივე მხარეს.

უმეტეს შემთხვევაში სისტემაში მოქმედი წინააღმდეგობის ძალები სველი ხახუნის (ჰაერის, წყლის და ა.შ.) ძალებია<sup>39</sup>. ეს ძალები მცირე გადახრების (დაბალი სინქარების) შემთხვევაში (§25) მოიცემა ფორმულით:

$$F = -\mu_1 v_x = -\mu_1 \frac{dx}{dt}.$$

ცხადია, სისტემაში მოქმედებს კვაზიდრეკადი  $F = -kx$  ძალაც, რის გამოც ნიუტონის II კანონი სისტემის ერთგანზომილებიანი მიღვევადი რხევისთვის ასე ჩაიწერება:

$$ma_x = -kx - \mu_1 \frac{dx}{dt}.$$

( $\mu_1$  – გარემოს წინააღმდეგობის კოეფიციენტი). განტოლების ორივე მხარის მასაზე გაყოფის შედეგად ვღებულობთ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (49.1)$$

სადაც:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{\mu_1}{2m}. \quad (49.2)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც  $\beta < \omega_0$ , შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (49.3)$$

ასეთ შემთხვევაში (49.1)-ს - წრფივ, მეორე რიგის, ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$x = X_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (49.4)$$

$\omega$  მიღვევადი რხევის სიხშირეა, მისი მნიშვნელობა, ჰარმონიული რხევის სიხშირისაგან განსხვავებით, დამოკიდებულია არა მარტო მერხევი სისტემის პარამეტრებზე, არამედ იმ გარემოს თვისებებზე რომელშიდაც რხევა წარმოებს.  $X_0, \alpha$  მუდმივი სიდიდეებია, რომელთა მნიშვნელობები საწყისი პირობებით განისაზღვრება. (49.4)-ში

$$X(t) = X_0 e^{-\beta t}.$$

**მიღვევადი რხევის ამპლიტუდაა**, იგი დროზეა დამოკიდებული და ექსპონენციალური კანონით მცირდება (ნახ. 49.1).

გამოვთვალოთ  $\tau$  დრო, რომლის განმავლობაშიც ამპლიტუდა  $e$ -ჯერ ( $e \approx 2,71$  – ნეპერის რიცხვია) მცირდება:

$$\frac{X(t)}{X(t+\tau)} = \frac{X_0 e^{-\beta t}}{X_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e, \quad \frac{1}{e^{-\beta\tau}} = e, \quad \text{ანუ } \beta = \frac{1}{\tau} (\text{წმ}^{-1}).$$

ე.ი.,  $\beta$  იმ დროითი ინტერვალის შებრუნებული სიდიდის ტოლია რომლის განმავლობაშიც რხევის ამპლიტუდა  $e$ -ჯერ მცირდება.  $\beta$  ახასიათებს რხევის მიღვევის სიჩქარეს, რის გამოც მას **მიღვევის კოეფიციენტს** უწოდებენ. მიღვევის ინტენსივობას ახასიათებენ **მიღვევის**

<sup>39</sup> უშრადი ხახუნის ძალები (მაგალითად, საქანის ძაფის – კაუჭთან) სხვა ტიპის ზემოქმედებას ახდენს მერხევი სისტემაზე. ჩვენ მათ არ ვიხილავთ.

**ლოგარითმული დეკრემენტი.** იგი პერიოდით განსხვავებულ დროს ორ მომენტში რხევის ამპლიტუდათა ფარდობის ნატურალური ლოგარითმის ტოლია:

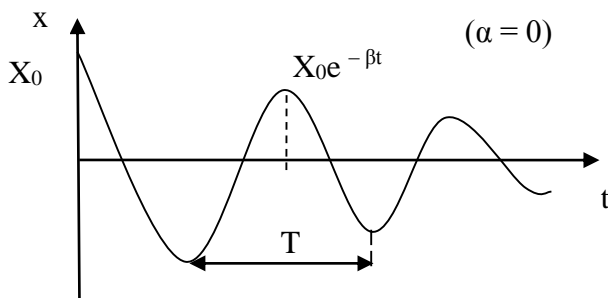
$$d = \ln \frac{X_0 e^{-\beta t}}{X_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (49.5)$$

(49.3)-ის თანახმად, მოცემული სისტემის მიღვეადი რხევის პერიოდი იქნება:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (49.6)$$

იგი ყოველთვის აღემატება იმავე სისტემის ჰარმონიული რხევის პერიოდს, ეს განსხვავება მით დიდია, რაც მეტია გარემოს წინააღმდეგობის ძალა.

(49.6)-ის თანახმად, თუ  $\beta = 0$ , რხევა ჰარმონიულია;  $\beta$ -ს ზრდისას მანამ, სანამ  $\beta < \omega_0$ ,



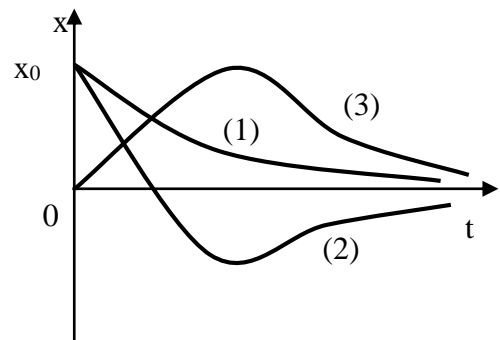
ნახაზი 49.1

მოძრაობას პერიოდული ხასიათი გააჩნია. როდესაც  $\beta \rightarrow \omega_0$ ,  $T \rightarrow \infty$ . როდესაც  $\beta \geq \omega_0$ , მოძრაობა აღარ არის პერიოდული და მას **აპერიოდული მიღვეადი მოძრაობა** ეწოდება. მისი შესაბამისი გრაფიკები სხვადასხვა საწყისი პირობების  $(x_0, v_0)$  შემთხვევებში მოცემულია ნახ. 49.2-ზე.

(1) მრუდი შეესაბამება შემთხვევას, როდესაც დაკვირვების დასაწყისში სისტემა გადახარეს წონასწორობის მდებარეობიდან და გაანთავისუფლეს საწყისი სიჩქარის მინიჭების გარეშე ( $x_0 = X_0$ ,  $v_0 = 0$ ). ასეთ შემთხვევაში სისტემა თანდათან უბრუნდება წონასწორობის მდებარეობას ( $x=0$ ) და საპირისპირო მიმართულებით გადახრა აღარ ხდება.

(2) მრუდი შეესაბამება შემთხვევას, როდესაც სისტემა გადახარეს წონასწორობის მდებარეობიდან, მიანიჭეს წონასწორობის მდებარეობისკენ მიმართული საწყისი სიჩქარე ( $x_0 = X_0$  და  $v_0 \neq 0$ ). ამ დროს სისტემა გაივლის წონასწორობის მდებარეობას, მიაღწევს გარკვეულ გადახრას და იწყებს მიახლოებას წონასწორული მდებარეობასთან.

(3) მრუდით აღიწერება ისეთი პროცესი, როდესაც სისტემა ბიძგიით არის გამოყვანილი წონასწორული მდებარეობიდან ( $X_0 = 0$  და  $v_0 \neq 0$ ). ამ დროს სისტემა შორდება წონასწორულ მდებარეობას, აღწევს გარკვეულ გადახრას და შემდეგ უახლოვდება საწყის მდებარეობას.



ნახაზი 49.2

**ამოცანა 49.1.** რამდენი სრული რხევის შემდეგ შემცირდება საქანის ამპლიტუდა 4-ჯერ, თუ მიღვევის ლოგარითმული დეკრემენტი 0,1386-ის ტოლია.

**ამოხსნა:**

ამოცანის პირობის თანახმად:

$$\frac{X(0)}{X(t)} = \frac{X(0)}{X_0 e^{-\beta t}} = 4, \quad e^{\beta t} = 4, \quad \beta t = \ln 4, \quad \beta = \frac{\ln 4}{t}.$$

(49.5)-დან:

$$T = \frac{d}{\beta} = \frac{td}{\ln 4};$$

$t$  დროში რხევათა რიცხვი იქნება

$$n = \frac{t}{T} = t \cdot \frac{\ln 4}{td} = \frac{\ln 4}{d} = \frac{1,386}{0,1386} = 10.$$

**ამოცანა 49.2.** ჩავწეროთ მიღებული რხევისას სისტემის სრული მექანიკური ენერჯის დროზე დამოკიდებულების კანონი. გამოვთვალოთ პერიოდის განმავლობაში სრული ენერჯის ფარდობითი დანაკარგი.

**ამოხსნა:**

$$W = W_3 + W_3 = \frac{kX(t)^2}{2} + 0 = \frac{k \left( X_0 e^{-\beta t} \right)^2}{2} = \frac{kX_0^2}{2} e^{-2\beta t} = W_0 e^{-2\beta t} = W_0 e^{-\frac{\mu_1 t}{m}},$$

სადაც  $W_0$  - სისტემის სრული მექანიკური ენერჯიაა  $t=0$  მომენტისათვის:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W_0 e^{-\frac{\mu_1 t}{m}} - W_0 e^{-\frac{\mu_1 (t+T)}{m}}}{W_0 e^{-\frac{\mu_1 t}{m}}} = 1 - e^{-\frac{\mu_1 T}{m}} = 1 - e^{-2\beta T} = \frac{e^{2\beta T} - 1}{e^{2\beta T}}$$

ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

რადგან  $x \ll 1$ ,

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\frac{\Delta W}{W} \approx 2\beta T = 2d.$$

## §50. იძულებითი რხევები. რეზონანსი.

### პარამეტრული რეზონანსი

რხევა, რომელსაც ასრულებს იზოლირებული სისტემა ერთხელ მინიჭებული ენერჯით მიღევადია, რადგან სისტემაში არსებულ დისიპატიურ ძალთა არსებობის გამო მიმდინარეობს მექანიკური ენერჯის სითბურ ენერჯიაში გარდაქმნის პროცესი. თუ სისტემაზე იმოქმედებს გარე ძალა, რომლის მუშაობის ხარჯზე მოხდება მექანიკური ენერჯის “დანაკარგის” შევსება, რხევა **მიუღვევადი** იქნება. განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როდესაც გარე ძალა ჰარმონიული კანონით იცვლება  $F = F_0 \cos \omega t$ . სისტემაში მოქმედი კვაზიდრეკადი და წინააღმდეგობის ძალთა გათვალისწინებით მოცემულ შემთხვევაში რხევის განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$m a_x = -kx - \mu_1 \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t.$$

განტოლების ორივე მხარე გავყოთ  $m$  მასაზე და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \beta = \frac{\mu_1}{2m}, f_0 = \frac{F_0}{m} \quad (\text{დაყვანილი ძალა})$$

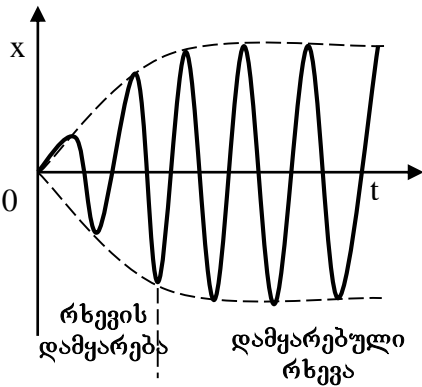
მივიღებთ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (50.1)$$

იგი წრფივი, მეორე რიგის, არაერთგვაროვანი, დიფერენციალური განტოლებაა, რომლის ამონახსნი ტოლია შესაბამისი (49.1) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და ამ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის ჯამის. პირველი შესაკრები შესამჩნევ როლს თამაშობს მხოლოდ რხევის დასაწყისში, ვინაიდან იგი შეიცავს  $e^{-\beta t}$  თანამამრავლს და დროის გარკვეული მომენტისთვის უტოლდება ნულს, რის შემდეგაც რხევა დამყარებული ხდება (ნახ. 50.1) და სრულად აღიწერება მეორე შესაკრებით, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს

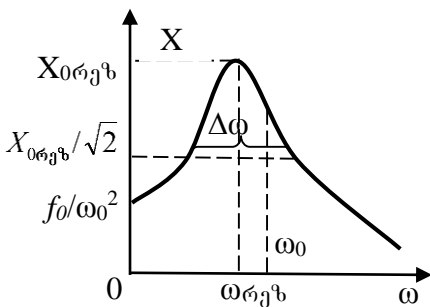
$$x = X_0 \cos(\omega t + \alpha). \quad (50.2)$$

ე.ი., რხევა წარმოებს სისტემის არა საკუთარი ( $\omega_0$ ) სიხშირით, არამედ გარე ძალის ( $\omega$ ) სიხშირით, რის გამოც რხევას **იძულებითი** ეწოდება. რხევის  $X_0$  ამპლიტუდის და  $\alpha$  საწყისი ფაზის დასადგენად შევიტანოთ (50.2) (50.1)-ში. რადგან მიღებული განტოლება სამართლიანი იქნება  $t$ -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის, ამიტომ გამარტივების მიზნით შევარჩიოთ ფაზის



ნახაზი 50.1

განვიხილოთ  $X_0$ -ის დამოკიდებულება გარე ძალის სიხშირეზე. როდესაც გარე ძალა მუდმივია ( $\omega = 0$ ), მაშინ:



ნახაზი 50.2

ორი მნიშვნელობა  $\omega t + \alpha = 0$ ,  $\omega t + \alpha = \frac{\pi}{2}$ , რის შემდეგ მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$X_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (50.3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (50.4)$$

(50.3)-ის თანახმად, სისტემის დამყარებული იძულებითი რხევის ამპლიტუდა დამოკიდებულია გარე ძალის ამპლიტუდურ მნიშვნელობაზე, მის სიხშირეზე და მიღების კოეფიციენტზე.

$$X_{0(\omega=0)} = \frac{f_0}{\omega_0^2} \text{ (სტატიკური გადახრა),} \quad (50.5)$$

გარე ძალის სიხშირის ზრდით რხევის ამპლიტუდაც იზრდება და აღწევს მაქსიმუმს – ამ მოვლენას **რეზონანსი ეწოდება**, შესაბამის სიხშირეს კი **რეზონანსული სიხშირე**. სიხშირის შემდგომი ზრდისას ამპლიტუდა იწყებს შეცირებას და, როცა  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $X_0 \rightarrow 0$ - რხევა წყდება (ნახ. 50.2).

რეზონანსის დროს ამპლიტუდის მნიშვნელობის საპოვნელად ვისარგებლოთ ფუნქციის მაქსიმუმის პოვ-

ნის ზოგადი წესით:

$$\left. \frac{dX_0}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{\text{რეზ}}} = 0,$$

მივიღებთ (იხ. ამოცანა 50.1):

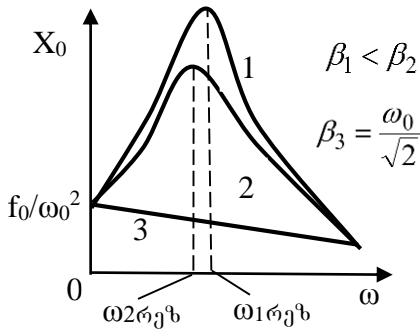
$$\omega_{რეზ} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (50.6)$$

(50.6)-ის (50.3)-ში შეტანით ვღებულობთ რეზონანსის დროს ამპლიტუდის მნიშვნელობას:

$$X_{0რეზ} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (50.7)$$

(50.7)-ის თანახმად, იდეალურ შემთხვევაში, როდესაც გარემოს წინააღმდეგობა ნულია ( $\beta = 0$ ),  $X_{0რეზ} \rightarrow \infty$ . რეალურ შემთხვევებში  $\beta > 0$  ამიტომ რეზონანსულ პიკს სასრულო

სიმაღლე გააჩნია და რეზონანსული სიხშირე ნაკლებია მერხევი სისტემის საკუთარ სი-



ნახაზი 50.3

შირეზე. თუ გარემოს წინააღმდეგობა უმნიშვნელოა, მაშინ  $\omega_{რეზ} \approx \omega_0$ .  $\beta$ -ს ზრდით  $\omega_{რეზ}$  მცირდება, მრუდი მარცხნივ წაინაცვლებს. იმავედროულად მცირდება რეზონანსული პიკის სიმაღლეც (ნახ. 50.3). როდესაც  $\beta \geq \omega_0/\sqrt{2}$ , რეზონანსული მოვლენა ქრება. ამ დროს გარე ძალის ნებისმიერი სიხშირისას სისტემის მაქსიმალური გადახრა სტატიკურ გადახრაზე ნაკლებია.

მცირე წინააღმდეგობის შემთხვევაში ( $\beta^2 \approx 0$ ), (50.7)-დან ვღებულობთ:

$$X_{0რეზ} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \quad (50.8)$$

ბოლო ტოლობა შევაფარდოთ (50.5)-თან, მივიღებთ:

$$\frac{X_{0რეზ}}{X_{0(\omega=0)}} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} \cdot \frac{\omega_0^2}{f_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{d} = Q. \quad (50.9)$$

$Q$  მერხევი სისტემის **ვარგისიანობა**. იგი გვიჩვენებს რეზონანსის დროს რხევის ამპლიტუდა რამდენჯერ აღემატება სისტემის სტატიკურ გადახრას მასზე იძულებითი ძალის ამპლიტუდის ტოლი მუდმივი ძალის მოქმედების შემთხვევაში. რაც უფრო ნაკლებია მიღევის კოეფიციენტი, მით მეტია სისტემის ვარგისიანობა, შესაბამისად უფრო მკვეთრია (ციცაბოა) და მაღალი რეზონანსული პიკი. ვარგისიანობა ასევე ახასიათებს პიკის სიგანესაც. მცირე წინააღმდეგობის შემთხვევაში ადგილი აქვს პროპორციას

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (50.10)$$

$\Delta\omega$  რეზონანსული პიკის სიგანეა იქ, სადაც ამპლიტუდის კვადრატი შეადგენს რეზონანსული ამპლიტუდის კვადრატის ნახევარს (ნახაზი 50.2). (50.4)-ის ანალიზიდან გამომდინარე, როდესაც  $\omega$  იცვლება 0-დან უსასრულობამდე,  $\alpha$  იცვლება 0-დან  $\pi$ -მდე; როდესაც  $\omega = \omega_0$ , მაშინ  $\alpha = \pi/2$ . იმის გამო, რომ  $\omega_{რეზ} < \omega_0$ , ამიტომ  $\alpha_{რეზ} < \pi/2$ .

გარე ძალის მიერ მერხევ სისტემაზე დროის ერთეულში გადაცემული ენერგია, ანუ სიმძლავრე, გამოითვლება ფორმულით:

$$P = Fv = F \frac{dx}{dt} = F_0 \cos\omega t [-X_0\omega \sin(\omega t + \alpha)] =$$

$$= -\frac{F_0 X_0 \omega}{2} [\sin(2\omega t + \alpha) + \sin \alpha]^{40}.$$

ამ ფორმულის პერიოდის განმავლობაში გასაშუალოებით მივიღებთ:

$$P_{\text{საშ}} = \frac{F_0 \nu_0}{2} \sin \alpha.$$

რეზონანსის დროს, როდესაც  $\alpha \rightarrow \pi/2$ ,

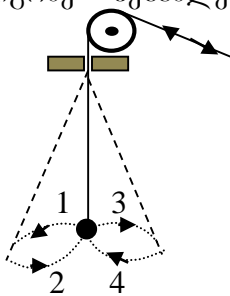
$$P_{\text{საშ}} = \frac{F_0 \nu_0}{2} \quad (\text{მაქსიმალურია}). \quad (50.9)$$

➤ რეზონანსის დროს გარე ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა მთელი პერიოდის განმავლობაში ხმარდება წინააღმდეგობის ძალების დაძლევის და იგი მამოძრავებელი ძალის როლს ასრულებს.

თუ  $\alpha \rightarrow 0$ , ან  $\pi$ -კენ, მაშინ  $P_{\text{საშ}} \rightarrow 0$ . ამ შემთხვევაში გარე ძალა დამამუხრუჭებელია, რაც განაპირობებს რხევის სწრაფ მიღევას.  $\alpha$ -ს საშუალო მნიშვნელობებისთვის ( $0 < \alpha < \pi$ ) გარე ძალა პერიოდის გარკვეულ ნაწილში ასრულებს მამოძრავებელ, ხოლო დანარჩენ ნაწილში წინააღმდეგობის ძალის ფუნქციას.

**პარამეტრული რეზონანსი** წარმოადგენს რეზონანსის ერთერთ საინტერესო შემთხვევას. იგი წარმოიშობა არაუშუალოდ გარეშე ძალის გავლენით, არამედ მერხვეო სისტემის რაიმე პარამეტრის პერიოდულად ცვლილების შედეგად. მაგ. საქანელას რხევის ამპლიტუდის გაზრდა შესაძლებელია მასზე მყოფი ადამიანის რხევის ტაქტის შესაბამისად აწევა- დაწევით. ამ დროს რხევის გაძლიერება მოხდა გარედან ჩარევის გარეშე. ცხადია საქანელა წარმოადგენს ფიზიკურ საქანს და მისი მასათა ცენტრის მდებარეობა და დაყვანილი სიგრძე დამოკიდებულია ადამიანის მდებარეობაზე. მისი აწევა- დაწევა იწვევს დაყვანილი სიგრძის შემცირება- გადიდებას, რაც გავლენას ახდენს საქანელის რხევის ამპლიტუდაზე.

განვიხილოთ მათემატიკური საქანის რხევის ისეთი პროცესი, რომლის დროსაც მისი სიგრძე შესაძლებელია პერიოდულად ვცვალოთ (ნახ. 50.4). კერძოდ მაქსიმალური



ნახაზი 50.4

გადახრისას დავაგრძელოთ, ხოლო წონასწორობაში გავლისას დავამოკლოთ. შევნიშოთ, რომ ძაღის დაჭიმულობის ძალა უმცირესია მაქსიმალური გადახრისას (როცა საქანის სიჩქარე ნულს უტოლდება) და უდიდესია წონასწორობაში გავლისას (ამ დროს საქანის სიჩქარე მაქსიმალურია). ამიტომ ის უარყოფითი მუშაობა, რომელსაც ასრულებს გარე ძალა საქანის დაგრძელებისას (რხევის სიხშირის შემცირებისას) ნაკლებია საქანის დამოკლებისას (რხევის სიხშირის მომატებისას) შესრულებულ დადებით მუშაობაზე. ე.ი საქანის ენერგია მატულობს საქანის ძაღზე მოქმედი გარე ძალის მუშაობის შედეგად, რაც იწვევს რხევის ამპლიტუდის ზრდას.

**ამოცანა 50.1.** ვაჩვენოთ, რომ რეზონანსული სიხშირე გამოითვლება (50.6) ფორმულით.  
**ამოხსნა:**

გადავწეროთ იძულებითი რხევის (50.3) ამპლიტუდის ფორმულა შემდეგი სახით:

<sup>40</sup>  $\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha)].$

$$X_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = f_0 \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

ვისარგებლოთ ფუნქციის მაქსიმუმის პოვნის ზოგადი წესით:

$$\left. \frac{dX_0}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{\text{რეზ}}} = 0,$$

მივიღებთ:

$$-\frac{1}{2} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]^{-\frac{3}{2}} [2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\beta^2 \omega] = 0,$$

რადგან:

$$-\frac{1}{2} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \neq 0,$$

ამიტომ:

$$[2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\beta^2 \omega] = 0 \rightarrow [\omega^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2] \omega = 0,$$

$$\omega \neq 0 \text{ ე.ი. } [\omega^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2] = 0,$$

$$\omega = \omega_{\text{რეზ}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

**ამოცანა 50.2.** 200 ნ/მ სიხისტის ზამბარაზე მიმაგრებული 0,5 კგ მასის სხეულის რხევის ამპლიტუდა 4 წმ-ს განმავლობაში 20% კლებულობს. სხეულზე მოქმედებას იწვევს  $F = 0,44 \cos \omega t$ . რა სიხშირე უნდა გააჩნდეს მას რეზონანსის დასამყარებლად? გამოთვალეთ სისტემის ვარგისიანობა და რეზონანსის დროს რხევის ამპლიტუდა.

**ამოხსნა:**

მიღვეადი რხევის ამპლიტუდის განმარტების თანახმად:

$$X_0 e^{-\beta(t+\Delta t)} = 0,8 X_0 e^{-\beta t}, \quad e^{-\beta \Delta t} = 0,8 \rightarrow \beta = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{1}{0,8} = 5,5 \cdot 10^{-2} (\text{წმ}^{-1}).$$

სისტემის საკუთარი ციკლური სიხშირე იქნება:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0,5}} = 20 (\text{წმ}^{-1})$$

სოლო რეზონანსული სიხშირე (50.6)-ის თანახმად:

$$\omega_{\text{რეზ}} = \sqrt{20^2 - 2(5,5 \cdot 10^{-2})^2} \approx 20 (\text{წმ}^{-1})$$

მცირე წინააღმდეგობის გამო ( $\beta^2 \approx 0$ ), ვისარგებლოთ (50.8)-ით მივიღებთ:

$$X_{0\text{რეზ}} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} = \frac{F}{2m\beta\omega_0} = \frac{0,44}{2 \cdot 0,5 \cdot 5,5 \cdot 10^{-2} \cdot 20} = 0,4 (\text{მ}).$$

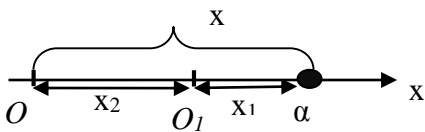
სისტემის ვარგისიანობა (50.9)-დან იქნება:  $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{20}{2 \cdot 5,5 \cdot 10^{-2}} = 1,8 \cdot 10^2.$

**§51. ერთი წრფის გასწვრივ მიმართული ერთნაირი სიხშირის ორი ჰარმონიული რხევის შეკრება**

სისტემა შეიძლება ერთდროულად მონაწილეობდეს რამოდენიმე რხევაში, რის შედეგადაც მიიღება ჯამური რხევა, რომელიც ემორჩილება სუპერპოზიციის (შეკრებადობის) პრინციპს. ამიტომ ჯამური რხევის შესასწავლად შეგვიძლია ვისარგებლოთ როგორც გრაფიკული (ვექტორული დიაგრამის), ასევე ალგებრული მეთოდით.

ჩვენ შევისწავლით ჯამურ რხევას, რომელიც აღიძვრება ორი ერთნაირი სიხშირის ჰარმონიული რხევის შეკრებით, როცა ისინი მიმართულნი არიან 1) ერთი წრფის გასწვრივ და 2) ერთიერთმართობულად.

დავუშვათ,  $a$  ნაწილაკი ასრულებს  $\omega_0$  სიხშირის ჰარმონიულ რხევას  $O_1$  წერტილის მიმართ (ნახ. 51.1)



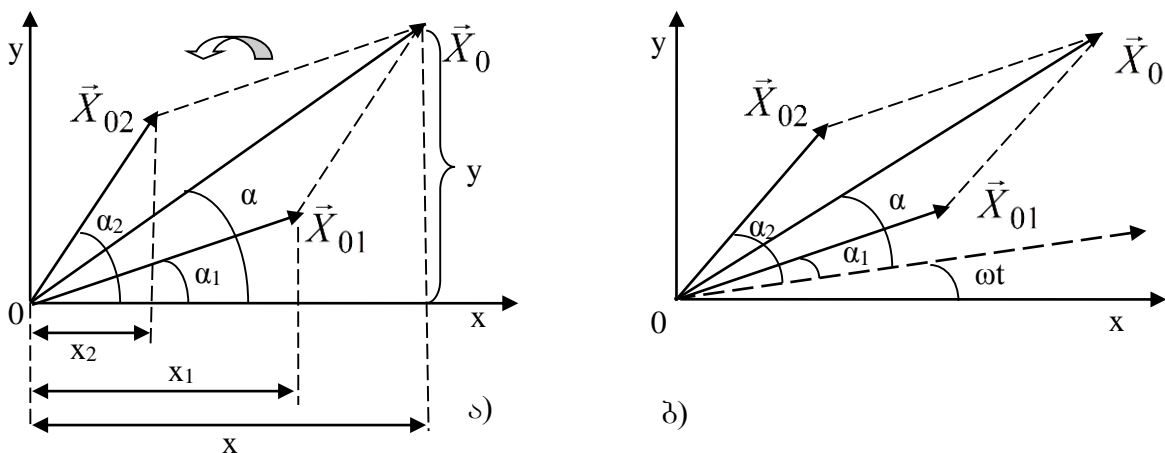
ნახაზი 51.1

რაიმე წრფის გასწვრივ. თავად  $O_1$  წერტილი იმავე წრფის გასწვრივ ასევე ჰარმონიულად ირხევა  $\omega_0$  სიხშირით ამ წრფეზე მდებარე  $O$  წერტილის მიმართ.

შევისწავლოთ ნაწილაკის რხევა  $O$  წერტილის მიმართ. წრფეს, რომლის გასწვრივ რხევა მიმდინარეობს, შევუთავსოთ  $Ox$  საკორდინატო ღერძი. თუ დროის რაიმე მომენტში  $a$  ნაწილაკის გადახრა  $O_1$ -ის მიმართ  $x_1$ -ის ტოლია, ხოლო  $O_1$ -ისა  $O$ -ს მიმართ  $x_2$ -ის, მაშინ ნაწილაკის გადახრა  $O$ -ს მიმართ, მოძრაობის ფარდობითობიდან გამომდინარე, იქნება  $x = x_1 + x_2$ , სადაც, (48.1)-ის თანახმად:

$$x_1 = X_{01} \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad x_2 = X_{02} \cos(\omega_0 t + \alpha_2) \quad \text{და} \quad x = X_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

ჩვენი მიზანია ჯამური რხევის  $X_0$  ამპლიტუდის,  $\omega$  ციკლური სიხშირის და  $\alpha$  საწყისი ფაზის განსაზღვრა. ვისარგებლოთ გრაფიკული მეთოდით, რომლის თანახმადაც ჰარმონიული რხევა გამოისახება იმ ვექტორით, რომლის სიგრძე ამპლიტუდის ტოლია,  $t=0$  მომენტისთვის  $Ox$  ღერძთან ადგენს საწყისი ფაზის ტოლ კუთხეს და ბრუნავს  $O$ -ს ირგვლივ საათის ისრის საპირისპიროდ რხევის ციკლური სიხშირის ტოლი კუთხური სიჩქარით (ნახ. 51.2ა,ბ).



ნახაზი 51.2

თითოეული  $X_{01}, X_{02}$  ვექტორის გეგმილი  $Ox$  ღერძზე გვაძლევს თითოეულის შესაბამის  $x_1, x_2$  გადახრას დროის მოცემული მომენტისთვის.

ჩვენ შემთხვევაში  $\vec{X}_{01}$  და  $\vec{X}_{02}$  ბრუნავს ერთნაირი  $\omega_0$  ციკლური სიხშირით, ამიტომ მათ შორის კუთხე – ფაზათა სხვაობა დროის ნებისმიერ მომენტში უცვლელი რჩება  $\alpha_2 - \alpha_1 = const$ , რის გამოც ჯამური რხევის ამპლიტუდა  $\vec{X}_0 = \vec{X}_{01} + \vec{X}_{02}$  იბრუნებს იგივე კუთხური სიხშირით  $\omega = \omega_0$ , და მისი გეგმილი  $Ox$  ღერძზე იქნება ჯამური რხევის განტოლება:

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (51.1)$$

ჯამური რხევის  $X_0$  ამპლიტუდა შეიძლება გამოვთვალოთ კოსინუსების თეორემით:

$$\begin{aligned} X_0^2 &= X_{01}^2 + X_{02}^2 - 2X_{01}X_{02} \cos(180^\circ - (\alpha_2 - \alpha_1)), \\ X_0 &= \sqrt{X_{01}^2 + X_{02}^2 + 2X_{01}X_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}, \end{aligned} \quad (51.2)$$

ხოლო საწყისი ფაზა, ნახ. 51.2-ს მიხედვით, იქნება:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{X_{01} \sin \alpha_1 + X_{02} \sin \alpha_2}{X_{01} \cos \alpha_1 + X_{02} \cos \alpha_2}. \quad (51.3)$$

➤ ერთი წრფის გასწვრივ მიმართული ერთნაირი სიხშირის ორი ჰარმონიული რხევის შეკრებისას მიიღება იგივე სიხშირის ჰარმონიული რხევა, რომლის ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა დამოკიდებულია მდგენელი რხევების ამპლიტუდებსა და საწყის ფაზებზე. მოვახდინოთ (51.2) ფორმულის ანალიზი. თუ საწყისი ფაზათა სხვაობა  $\pi$ -ს ლუწუჯერადია:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2k\pi, \quad k(0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (51.4)$$

მაშინ:

$$X_0 = X_{01} + X_{02}. \quad (51.5)$$

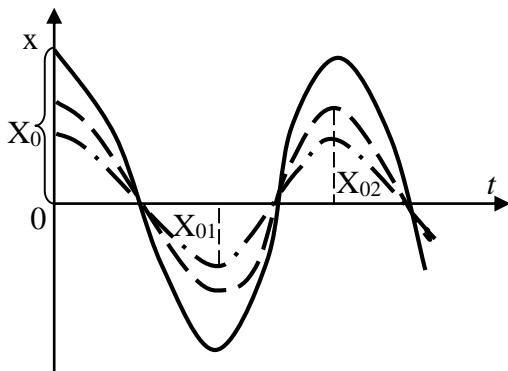
ამპლიტუდა არითმეტიკულად იკრიბება და რხევა ძლიერდება (ნახ. 51.3). ამ დროს რხევები **სინქრონულია** (თანხვედრილია). თუ საწყისი ფაზათა სხვაობა  $\pi$ -ს კენტჯერადია:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (2k + 1)\pi, \quad (51.4')$$

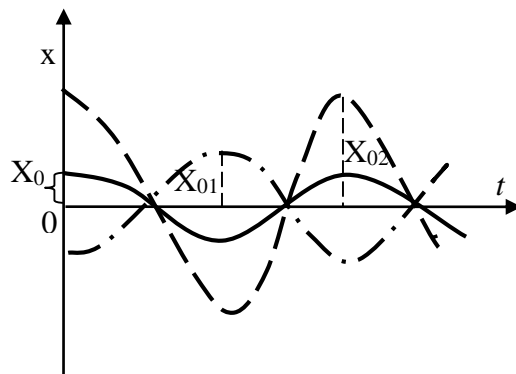
მაშინ:

$$X_0 = |X_{01} - X_{02}|. \quad (51.5')$$

რხევები ერთმანეთს ახშობს, რაც გამოწვეულია მდგენელთა საპირისპირო ფაზაში რხევით (ნახ. 51.4). ზოგადად, ჯამური რხევის ამპლიტუდა, ფაზათა სხვაობისაგან დამოკიდებულებით, ყოველთვის აღმოჩნდება  $|X_{01} - X_{02}| \leq X_0 \leq X_{01} + X_{02}$  არეში.



ნახაზი 51.3



ნახაზი 51.4

თუ  $X_{01} = X_{02}$ , მაშინ სინქრონული რხევისას, (51.5)-ის თანახმად, ამპლიტუდა ორკეცდება  $X_0 = 2X_{01}$ , ხოლო საპირისპირო ფაზაში რხევისას, (51.5')-დან გამომდინარე, ადგილი აქვს სრულ ჩახშობას  $X_0 = 0$ .

(48.8)-ის თანახმად, რხევის ენერგია ამპლიტუდის კვადრატის პროპორციულია, ამიტომ სინქრონული რხევისას მიმდინარეობს ენერგიის სრული აკუმულირება. ამ საკითხს უფრო დაწვრილებით ტალღათა ინტერფერენციის შესწავლის დროს შევხვებით.

**ამოცანა 51.1.** მერხევი ნაწილაკი (ოსცილატორი) ერთდროულად მონაწილეობს ერთი წრფის გასწვრივ მიმართულ ორ ჰარმონიულ რხევაში:  $x_1 = 5 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$  და  $x_2 = 3 \cos 3\pi t$ . შევადგინოთ ჯამური რხევის განტოლება.

**ამოხსნა:**

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = 3\pi, \quad X_{01} = 5, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{6}, \quad X_{02} = 3, \quad \alpha_2 = 0.$$

(51.2)-ის თანახმად:

$$X_0 = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} \approx 7,7.$$

(51.3)-ის თანახმად:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5 \cdot 0,5 + 0}{5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3} = 0,34, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,34 \approx \frac{\pi}{10}, \quad x = 7,7 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{10}\right).$$

## §52. ძბერა

თუ ნივთიერი წერტილი მონაწილეობს ერთი წრფის გასწვრივ მიმართულ განსხვავებული სიხშირის მქონე ორ ჰარმონიულ რხევაში:

$$x_1 = X_{01} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \quad \text{და} \quad x_2 = X_{02} \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

მაშინ ჯამური რხევა ჰარმონიული აღარ იქნება. მართლაც, თუ განვიხილავთ ვექტორულ დიაგრამას (§51),  $\vec{X}_{01}$  და  $\vec{X}_{02}$  ვექტორების განსხვავებული  $\omega_1 \neq \omega_2$  კუთხური სიჩქარით ბრუნვის გამო, ფაზათა სხვაობის განუწყვეტელი ცვლილების შედეგად, ჯამური ამპლიტუდის სიდიდე დროზე დამოკიდებული აღმოჩნდება. ჯამური რხევა მით რთული იქნება, რაც მეტია განსხვავება  $\omega_1$ -სა და  $\omega_2$ -ს შორის.

საინტერესოა ისეთი შემთხვევა, როდესაც სიხშირეებს შორის განსხვავება მცირეა. ვთქვათ,  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$  და  $\Delta\omega \ll \omega$ . მათემატიკური გარდაქმნების გამარტივებისთვის დაუშვათ, რომ  $X_{01} = X_{02} = X_0$  და  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  (ეს დაშვება არ მოქმედებს საბოლოო შედეგზე). მაშასადამე:

$$x_1 = X_0 \cos \omega t \quad \text{და} \quad x_2 = X_0 \cos(\omega + \Delta\omega)t,$$

ჯამური რხევის საპონენლად ვისარგებლოთ ალგებრული მეთოდით:

$$x = x_1 + x_2 = X_0 (\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t)^{41}$$

---

<sup>41</sup>  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

ანუ

$$x = 2X_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos \frac{2\omega + \Delta\omega}{2} t = 2X_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos \omega t . \quad (52.1)$$

(მეორე თანამამრაველში  $\Delta\omega$  უგულებელყოფილია  $\Delta\omega \ll \omega$  პირობის გამო). ნახ. 52.1ა-ზე მოცემულია (52.1)-ის გრაფიკი, როდესაც  $\Delta\omega/\omega = 1/8$ , რომლის თანახმადაც (52.1) შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც კვაზიჰარმონიული რხევა დროში საკმაოდ ნელა ცვლადი პულსირებული ამპლიტუდით:

$$X(t) = 2X_0 \left| \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (52.2)$$

➤ მცირედ განსხვავებული სიხშირის ჰარმონიული რხევების შეკრებით მიღებული რხევა პულსირებადი ამპლიტუდის ჰარმონიული რხევაა და მას ძვერა ეწოდება.

(52.2)-ის თანახმად, ამპლიტუდის ცვალებადობის პერიოდი –  $T_{\text{ძვ}}$  არის დროის ის შუალედი, რომელიც შეესაბამება  $\left| \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$ -ს პერიოდს:

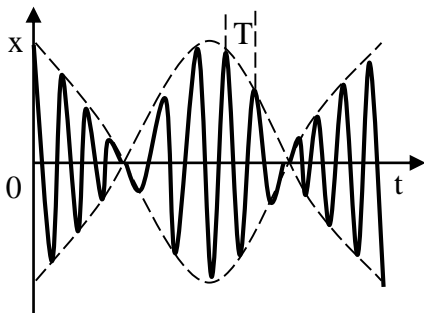
$$- \pi \text{-ს: } \frac{\Delta\omega}{2} T_{\text{ძვ}} = \pi ,$$

აქედან:

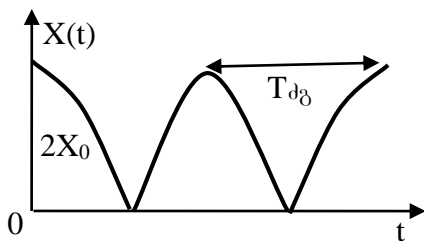
$$T_{\text{ძვ}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} . \quad (52.3)$$

(52.3)-დან ჩანს, რომ ძვერის ციკლური სიხშირე  $\omega_{\text{ძვ}} = \Delta\omega$ , ე.ი., ძვერის ციკლური სიხშირე ტოლია შესაკრებ რხევათა ციკლურ სიხშირეთა სხვაობის.

ნახაზ 52.1ბ-ზე მოცემულია  $X(t)$ -ს გრაფიკი. ძვერა წარმოიშვება იმის გამო, რომ მდგენელი რხევების ფაზათა სხვაობის განუწყვეტელი ცვლილების შედეგად დროის გარკვეულ მომენტებში რხევები აღმოჩნდება ერთნაირ ფაზაში და ჯამური ამპლიტუდა მიაღწევს მაქსიმუმს  $X(t) = 2X_0$ , ხოლო დროის გარკვეულ სხვა მომენტებში რხევები აღმოჩნდება საპირისპირო ფაზაში, რის გამოც ჯამური ამპლიტუდა მინიმალური გახდება  $X(t) = 0$ .



ა)



ბ)

ნახაზი 52.1

**§53. ერთნაირი სიხშირის ორი ურთიერთმართობული  
ჰარმონიული რხევის შეკრება**

ბანვიხილთ შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკს შეუძლია რხევა როგორც  $Ox$  ღერძის, ისე მისი მართობული  $Oy$  ღერძის მიმართ. ორივე რხევის ერთდროული აღძვრისას ნაწილაკის ტრაექტორია იქნება მრუდწირული. დავუშვათ, რხევათა სიხშირეები ტოლია  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , მაშინ რხევათა განტოლებები იქნება:

$$x = X_0 \cos \omega t, \quad y = Y_0 \cos(\omega t + \alpha). \quad (53.1)$$

სადაც  $\alpha$  ფაზათა სხვაობაა ამ ორ რხევას შორის. მერხევი ნაწილაკის ტრაექტორიის განტოლების (§2) მისაღებად საჭიროა ამ განტოლებებიდან  $t$ -ს გამორიცხვა, რაც განვახორციელოთ  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  ფორმულის გამოყენებით და შემდგომი მარტივი გარდაქმნებით, რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{X_0^2} + \frac{y^2}{Y_0^2} - \frac{2xy}{X_0 Y_0} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (53.2)$$

(53.2) ელიფსის განტოლებაა. მაშასადამე თუ ნაწილაკი ერთდროულად მონაწილეობს ორ ერთნაირი სიხშირის მქონე ურთიერთმართობულ ჰარმონიულ რხევაში მის ტრაექტორიას ელიფსის ფორმა აქვს. ელიფსის მთავარი ღერძების სიდიდე და ორიენტაცია  $Ox$ ,  $Oy$  ღერძების მიმართ დამოკიდებულია  $X_0, Y_0$  ამპლიტუდებზე და ფაზათა სხვაობაზე. განვიხილოთ რამოდენიმე კერძო შემთხვევა:

1. ფაზათა სხვაობა  $\alpha = 0$ . ამ შემთხვევაში (53.2) ღებულობს სახეს:

$$\left( \frac{x}{X_0} - \frac{y}{Y_0} \right)^2 = 0,$$

საიდანაც მიიღება წრფის განტოლება:

$$y = \frac{Y_0}{X_0} x.$$

ე.ი., ნაწილაკი იმოძრაებს წრფეზე. ნაწილაკის მდებარეობა საწყის  $O$  წერტილის მიმართ მოიცემა ფორმულით  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . მასში (53.1)-ის შეტანით ვღებულობთ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \cos \omega t.$$

რომლის თანახმადაც  $\omega$  სიხშირის ჰარმონიული რხევა ხდება წრფის გასწვრივ და მისი ამპლიტუდაა  $\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$  (ნახაზი 53.1).

2. ფაზათა სხვაობა  $\alpha = \pm \pi$ . მაშინ (53.2) მიიღებს სახეს:

$$\left( \frac{x}{X_0} + \frac{y}{Y_0} \right)^2 = 0.$$

ე.ი. ჯამური მოძრაობა იმავე სიხშირისა ჰარმონიული რხევაა:

$$y = -\frac{Y_0}{X_0} x.$$

წრფის გასწვრივ (ნახ. 53.2).

3. თუ შესაკრები რხევების ფაზათა სხვაობა  $\alpha = \pm \pi/2$ , მაშინ (53.2)-ის თანახმად ვღებულობთ:

$$\frac{x^2}{X_0^2} + \frac{y^2}{Y_0^2} = 1.$$

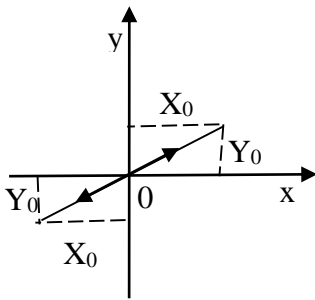
ეს არის  $Ox, Oy$  ღერძების მიმართ ორიენტირებული ელიფსის განტოლება (ნახ. 53.3). ელიფსის ნახევარღერძები  $X_0, Y_0$  ამპლიტუდების ტოლია. თუ  $X_0 = Y_0$ , ელიფსი გადაგვარდება წრეწირში. თუ ფაზათა სხვაობა  $\alpha = \pi/2$ , წვეტილი იმოდრავებს ელიფსის (წრეწირის) გასწვრივ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. ამის დასამტკიცებლად მდგენელი რხევების განტოლებები (53.1) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$x = X_0 \cos \omega t \quad \text{და} \quad y = Y_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -Y_0 \sin \omega t.$$

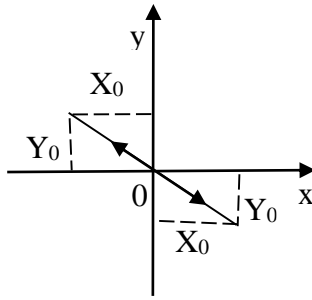
დროის  $t=0$  მომენტში, ნაწილაკი იმყოფება  $A$ -ში. დროის შემდგომ მომენტში  $\omega t$  არგუმენტი იზრდება. შესაბამისად,  $x > 0$ , ხოლო  $y < 0$ . ეი მოძრაობა საათის ისრის თანხვედრილი მიმართულებით ხდება. თუ  $\alpha = -\pi/2$ , ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ნაწილაკი იმოდრავებს საათის ისრის მოძრაობის საპირისპიროდ.

შევნიშნოთ, რომ ერთნაირი  $\omega$  სიხშირით მერხვეი ურთიერთმართობული რხევების შეკრების შედეგად ნებისმიერ შემთხვევაში მიიღება იმავე სიხშირის ჯამური რხევა.

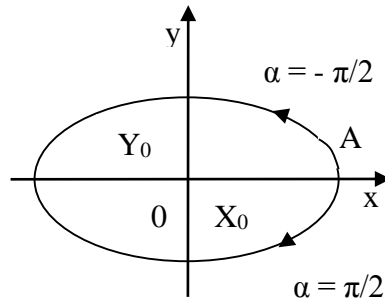
თუ  $\omega_1 \neq \omega_2$ , მაშინ ასეთი რხევების შეკრების შედეგად მიღებული ჯამური რხევის ტრაექტორია საკმაოდ რთულ ფორმებს ღებულობს, რომელთაც **ლისაჟუს ფიგურებს** უწოდებენ.



ნახაზი 53.1



ნახაზი 53.2



ნახაზი 53.3

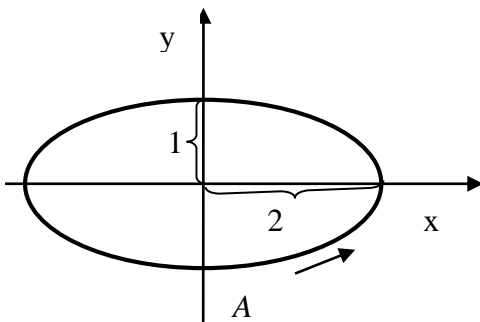
ბუნებაში ხშირად გვხვდება საკმაოდ რთული ფორმის პერიოდული მოძრაობები – რხევები. მათი შესწავლა საგრძნობლად მარტივდება **ფურიეს თეორემის** გამოყენებით, რომელიც დამყარებულია სუპერპოზიციის პრინციპზე, რომლის თანახმად,  $\omega$  სიხშირის რთული რხევა შეიძლება წარმოდგენილ იქნას  $\omega$ -ს მთელჯერადი ( $1\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ ) სიხშირის ჰარმონიულ რხევათა ჯამის სახით. უმეტესწილად ეს ჯამი იმდენად კარგად კრებადია, რომ მაღალი სიხუსტის ფარგლებშიც კი შესაძლებელია რამოდენიმე შესაკრებით შემოფარგვლა. თითოეულ შესაკრებს – მდგენელ რხევას – გააჩნია განსაზღვრული ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა, რომლებიც დამოკიდებულია რხევის ბუნებაზე. იმ მდგენელ რხევას, რომლის სიხშირე ემთხვევა რთული რხევის სიხშირეს, **ძირითადი ტონი** ეწოდება, ყველა სხვა მდგენელს კი **ობერტონები**. შესაძლებელია შემთხვევები, როდესაც ზოგიერთი ჰარმონიული ობერტონის ამპლიტუდა ნულის ტოლი იყოს, რაც იმის მახვენებელია, რომ ამ სიხშირის ჰარმონიული რხევა არ შედის მოცემულ რხევაში.

**ამოცანა 53.1.** ნაწილაკი მონაწილეობს ორ ურთიერთმართობულ რხევით მოძრაობაში, რომელთა განტოლებები  $x=2\sin \pi$  სმ და  $y=-\cos \pi$  სმ. გამოთვალეთ რხევის პერიოდი. ჩაწერეთ რხევის ტრაექტორიის განტოლება, ააგეთ მისი გრაფიკი.

**ამოხსნა:**

რადგან ერთნაირი  $\omega$  სიხშირით მერხევი ურთიერთმართობული რხევების შეკრების შედეგად ნებისმიერ შემთხვევაში მიიღება იმავე სიხშირის ჯამური რხევა, ამიტომ  $\omega=\pi$ , ხოლო  $T=\frac{2\pi}{\omega}=2$  წმ.

$$\begin{cases} x=2\sin \pi \\ y=-\cos \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2^2}=\sin^2 \pi \\ \frac{y^2}{1^2}=\cos^2 \pi \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=\sin^2 \pi+\cos^2 \pi,$$



$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1.$$

ტრაექტორია წარმოადგენს ელიფსს, რომლის ნახევარ-ღერძებია 2 და 1.  $t=0$  მომენტისთვის ნივთიერი წერტილი იმყოფება  $A(0,-1)$ -ში.  $t$ -ს ზრდისას  $x>0$ ,  $y<0$ , ე.ი., ბრუნვა ხდება საათის ისრის საპირისპიროდ.

### §54. მემქანიკური ტალღები

➤ **ტალღა ეწოდება გარემოში რხევის გავრცელების პროცესს.**

ტალღის ძირითადი ტიპებია: მექანიკური და ელექტრომაგნიტური. მექანიკურ ტალღებს ეკუთვნის ბგერითი, სეისმოლოგიური; ელექტრომაგნიტურს – რადიოტალღები, ინფრაწითელი, ხილული, ულტრაიისფერი, რენტგენის და გამა გამოსხივება.

ამ ნაწილში ჩვენ შევისწავლით **მექანიკურ ტალღებს** - ანუ მექანიკური რხევის გავრცელების პროცესს. ამ ტიპის ტალღის გავრცელების აუცილებელი პირობაა დრეკადი ნივთიერი გარემოს არსებობა. (ვაკუუმში, ნაწილაკების არარსებობის გამო, დრეკადობის ძალები არ აღიძვრება, ამიტომ არც მექანიკური ტალღა ვრცელდება). თუ დრეკადი გარემოს რომელიმე უბანში აღიძვრება მექანიკური რხევა, მაშინ გარემოს დრეკადობის გამო, ამ უბნის მოსაზღვრე უბნებს გადაეცემა იმავე სიხშირის რხევები, რომლებიც შემდგომ გადაეცემა მათ მეზობელ უბნებს და ა.შ., გარემოში გავრცელდება მექანიკური ტალღა. პროცესის ბუნებისგან გამომდინარე მექანიკურ ტალღებს ხშირად **დრეკადი ტალღებსაც** უწოდებენ. ტალღის გავრცელებას გარემოში არ ახლავს ნაწილაკების გადატანა, ისინი მხოლოდ ირხევა წონასწორობის მდებარეობის მახლობლობაში. ზოგადად

➤ **ყველა ტალღის ძირითადი თვისება, მისი ბუნებისგან დამოუკიდებლად, მდგომარეობს იმაში, რომ გარემოში ხდება ენერჯიის გადატანა ნივთიერების გადატანის გარეშე.**

განასხვავებენ განივ და გრძივ მექანიკურ ტალღებს. **განივი მექანიკური ტალღის** წარმოქმნა დაკავშირებულია გარემოს ფორმის ცვლილებისას დრეკადობის ძალების აღძვრასთან. რადგან ფორმა გააჩნია მხოლოდ მყარ სხეულებს, ამიტომ განივი ტალღა მხოლოდ მყარ ნივთიერებაში ვრცელდება. განივი ტალღის გავრცელებისას ნაწილაკთა რხევა წარმოებს ტალღის გავრცელების მიმართულების მართობულად.

**გრძივი მექანიკური ტალღის** წარმოქმნა დაკავშირებულია გარემოს შეკუმშვისას დრეკადობის ძალების აღძვრასთან. კუმშითი დეფორმაციისას დრეკადობის ძალები აღიძვრება როგორც მყარ, ასევე თხევად და აირად გარემოში. ამის გამო გრძივი ტალღა ვრცელდება სამივე ტიპის გარემოში. გრძივი ტალღის გავრცელებისას ნაწილაკთა რხევის მიმართულება ტალღის გავრცელების მიმართულებას ემთხვევა.

ცალკე შეისწავლება ე.წ. **ზედაპირული ტალღა**, იგი წარმოადგენს განივი და გრძივი ტალღური მოძრაობის კომბინაციას და ვრცელდება ორი გარემოს გამყოფი საზღვრის გასწვრივ (მაგალითად, ზღვის ტალღა).

ჩვენ, ძირითადად, შევისწავლით უმარტივეს მექანიკურ – მონოქრომატულ ტალღას, რომელიც წარმოადგენს *არამშთანქმელ, ერთგვაროვან<sup>42</sup>, იზოტროპულ<sup>43</sup>* გარემოში ჰარმონიული რხევის გავრცელების პროცესს. ასეთ ტალღას გააჩნია უცვლელი სიხშირე, საწყისი ფაზა და ამპლიტუდა.

ჰარმონიული ტალღის ძირითადი მახასიათებელი სიდიდეებია:

**სიხშირე**( $\nu$ )– ერთეულოვან დროში შესრულებული რხევათა რიცხვი;

**ციკლური სიხშირე**( $\omega = 2\pi\nu$ )–  $2\pi$  წამში შესრულებული რხევათა რიცხვი;

**პერიოდი**  $T = \frac{1}{\nu}$ – ერთი სრული რხევისთვის საჭირო დრო.

**ტალღის გავრცელების სიჩქარედ** მიღებულია ენერგიის გადატანის სიჩქარე (*ჯგუფური* სიჩქარე) და ფაზის გადატანის სიჩქარე (*ფაზური* სიჩქარე). მონოქრომატული ტალღის შემთხვევაში ისინი ერთმანეთს ემთხვევა. შემდეგში მათ “სიჩქარედ” მოვისხენიებთ. ტალღის სიჩქარე, ზოგადად, დამოკიდებულია გარემოს დრეკად თვისებებზე და სიმკვრივეზე. ქვემოთ მოცემულია შესაბამისად, განივი ტალღის სიჩქარის, მყარ სხეულებში გრძივი ტალღის სიჩქარისა და სითხეებსა და აირებში გრძივი ტალღის სიჩქარის გამოსახულებები:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v = \sqrt{\frac{B}{\rho}},$$

სადაც  $G$ – გარემოს ძვრის მოდულია,  $E$ – იუნგის მოდულია,  $B$ – გარემოს მოცულობითი დრეკადობის მოდულია.

**ტალღის სიგრძე** ( $\lambda$ )– ერთნაირ ფაზაში მერხვევ ორ უახლოეს ნაწილაკს შორის მანძილი, ანუ მანძილი, რომელსაც ტალღა გადის პერიოდის განმავლობაში ( $\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}$ ); შევნიშნოთ, რომ ერთი გარემოდან მეორეში ტალღის გადასვლისას იცვლება ტალღის გავრცელების სიჩქარე, არ იცვლება მისი პერიოდი (სიხშირე) ე.ი.:

$$\frac{\lambda_1}{v_1} = \frac{\lambda_2}{v_2}.$$

**ტალღური ვექტორი** ( $\vec{k}$ ) – გვიჩვენებს ენერგიის გადატანის მიმართულებას. მის მოდულს ( $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ ) **ტალღური რიცხვი** ეწოდება.

**ამპლიტუდა**( $A$ )– მერხვევი ნაწილაკის წონასწორობის მდგომარეობიდან უდიდესი გადახრა;

<sup>42</sup>ერთგვაროვანი გარემოს ყველა წერტილს ერთნაირი ფიზიკური თვისებები გააჩნია  $\rho(x,y,z) = \text{const}$ .

<sup>43</sup>გარემო იზოტროპულია, თუ ყველა მიმართულებით ფიზიკური თვისებები ერთნაირია.

**ინტენსივობა (I)**– წარმოადგენს ტალღის გავრცელების მართობულად ერთეულოვან ფართში დროის ერთეულში გადატანილ ენერჯიას.

**ტალღური ზედაპირი**, ანუ იმ წერტილთა ერთობლიობა, რომელიც დროის მოცემულ მომენტში ერთნაირ ფაზაში ირხევა.

**ტალღის ფრონტი** არის დროის მოცემული მომენტისთვის ყველაზე წინა ტალღური ზედაპირი. ტალღური ფრონტის ფორმა დამოკიდებულია ტალღის წარმოშობისა და გავრცელების პირობებზე. თუ ტალღის წყარო წარმოადგენს იზოტროპულ გარემოში მოთავსებულ სფერულ ოსცილატორს (მერხვე ნივთიერ წერტილს), მაშინ ტალღის ფრონტი სფერული ზედაპირია და ასეთ ტალღებს **სფერული** ეწოდება. თუ წყაროს დაშორება დაკვირვების არეან გაცილებით აღემატება წყაროს  $d$  წირით ზომას ( $r \geq 10d$ ), მაშინ ტალღის ფრონტი წარმოგვიდგება სიბრტყის სახით, რომელიც დიდი რადიუსის მქონე სფერული ზედაპირის ნაწილია. ასეთ ტალღას **ბრტყელი** ტალღა ეწოდება. გარდა ამისა, არსებობს **ცილინდრული**, **ელიფსოიდური** და სხვა ტალღები.

წრფეს, რომელიც გვიჩვენებს ტალღის გავრცელების ანუ ენერჯიის გადატანის მიმართულებას, **სხივი** ეწოდება. იზოტროპულ გარემოში სხივი ყოველთვის ფრონტის მართობულია. ბრტყელი ტალღის შემთხვევაში სხივები **პარალელური**, სფერული ტალღის შემთხვევაში კი – **რადიალური** წრფეებია.

**ამოცანა 54.1.** ტბაზე უქარო ამინდშინავიდან ჩააგდეს ღუზა. რის შედეგადაც აღძრული პირველი ტალღა ნაპირზე გამოვიდა 50 წმ-ს შემდეგ, ხოლო დანარჩენები 2 წმ-ს ინტერვალით. ნაპირიდან რა მანძილზე ჩაეშვა ღუზა, თუ ტალღის მეზობელ ბურცობებს შორის მანძილი 1 მ-ია.

**ამოხსნა:**

ამოცანის პირობის თანახმად ტალღის სიგრძე 1 მ-ია, ხოლო პერიოდი 2წმ. მაშასადამე ტალღის გავრცელების სიჩქარე იქნება:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ (მ/წმ)}.$$

შესაბამისად 50 წმ-ის განმავლობაში ტალღის მიერ გავლილი მანძილი იქნება  $S = v \cdot t = 2 \cdot 50 = 100$  მ. ე.ი. ღუზა ჩაუშვეს ნაპირიდან 50 მ-ზე.

**ამოცანა 54.2.** რა დროში მოაღწევს ადამიანის ყურამდე, ფოლადის რელსის საშუალებით მოახლოებული მატარებლის ხმა, თუ იგი დაშორებულია 1,2 კმ მანძილით?

**ამოხსნა:**

ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,0 \cdot 10^{11}}{7,8 \cdot 10^3}} \left( \frac{6/\text{მ}^2}{\text{კგ}/\text{მ}^3} \right) = 5,1 \cdot 10^3 \text{ (მ/წმ)}.$$

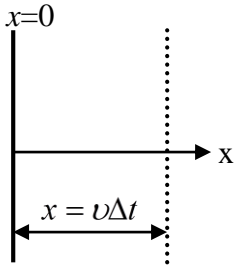
$$t = \frac{S}{v} = \frac{1,2 \cdot 10^3}{5,1 \cdot 10^3} = 0,2 \text{ (წმ)}.$$

### §55. ტალღის განტოლება

ტალღის განტოლება წარმოადგენს განტოლებას, რომელიც იძლევა მერხევი ნაწილაკის წანაცვლების დამოკიდებულებას  $x, y, z$  კოორდინატებსა და  $t$  დროზე:  $a = a(x, y, z, t)$ . ეს ფუნქცია პერიოდულია კოორდინატებისა და დროის მიმართ. განვსახვროთ ამ ფუნქციის სახე ბრტყელი ტალღებისთვის. სიმარტივისთვის  $x$  ღერძი დავამთხვიოთ ტალღის გავრცელების მიმართულებას. მაშინ ტალღური ზედაპირი იქნება  $x$  ღერძის მართობული და, რადგან ამ ზედაპირის ყველა წერტილი ერთნაირად ირხევა,  $a$  წანაცვლება დამოკიდებული აღმოჩნდება მხოლოდ  $x$  კოორდინატსა და  $t$  დროზე:  $a = a(x, t)$ .

დავუშვათ  $x=0$  სიბრტყის წერტილების რხევის განტოლებაა:

$$a(0, t) = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (55.1)$$



ნახაზი 55.1

იმ სიბრტყის წერტილთა რხევის განტოლების ჩაწერისას რომლისთვისაც  $x \neq 0$  (ნახაზი 55.1), საჭიროა გავითვალისწინოთ ის დრო რომელიც ჭირდება ტალღას  $x=0$  სიბრტყიდან ამ სიბრტყემდე მოსაღწევად  $\Delta t = x/v$  (სადაც  $v$  ტალღის გავრცელების სიჩქარეა). რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$a(x, t) = A \cos(\omega(t - \Delta t) + \alpha),$$

მაშასადამე, არამშთანთქმელ გარემოში  $x$  ღერძის გასწვრივ მიმართული ბრტყელი ტალღის (როგორც განივის, ისე გრძივის)

განტოლება არის:

$$a(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right). \quad (55.2)$$

თუ ტალღა ვრცელდება  $x$  ღერძის საპირისპიროდ, მაშინ სიჩქარის გეგმილი უარყოფითია და განტოლება მიიღებს სახეს:

$$a(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \alpha\right). \quad (55.3)$$

ტალღური რიცხვის განმარტების თანახმად,  $k = \omega/v$ , ამიტომ (55.2) და (55.3) მიიღებს სახეს:

$$a(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (55.2')$$

$$a(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \alpha). \quad (55.3')$$

თუ ბრტყელი ტალღის ფრონტს სივრცეში ნებისმიერი ორიენტაცია გააჩნია, მაშინ შესაბამის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$a(x, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \quad (\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z),$$

რომელიც წარმოადგენს **ზოგადი ტალღური განტოლების**:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \right). \quad (55.4)$$

ამონახსნს.

თუ ტალღის წერტილოვანი წყარო მოთავსებულია ერთგვაროვან, იზოტროპულ გარემოში, მაშინ, იმის გამო, რომ ტალღის გავრცელების სიჩქარე ყველა მიმართულებით ერთნაირია, წარმოშობილი ტალღა იქნება სფერული. არამშთანთქმელი გარემოს შემთხვევაში ამ ტალღის განტოლებას ექნება სახე:

$$a(r,t) = \frac{A_0}{r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \alpha\right) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - k\vec{r} + \alpha), \quad (55.5)$$

სადაც  $A = A_0/r$  – სფერული ტალღის ამპლიტუდაა, რომელიც არამშთანქმელ გარემოშიც კი, განსხვავებით ბრტყელი ტალღის ამპლიტუდისგან, წყაროდან მანძილის ზრდით მცირდება. ეს იმით აიხსნება, რომ მანძილის გაზრდით იზრდება ტალღური ზედაპირის ფართობი, რის გამოც მცირდება ერთეულოვან ზედაპირზე მოსული ენერგია და შესაბამისად, ამპლიტუდაც (§57).

შეენიშნოთ, რომ საწყისი ფაზის მნიშვნელობა დამოკიდებულია  $x$ -ისა და  $t$ -ს საწყის მნიშვნელობათა შერჩევაზე, რომლებიც ერთი ტალღის შემთხვევაში ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ  $\alpha = 0$ -ს.

თუ გარემო მშთანქმელია, ტალღის გავრცელებისას მიმდინარეობს მისი მექანიკური ენერგიის გარდაქმნა სითბურ ენერგიად და ტალღათა განტოლებებში საჭიროა  $e^{-\gamma}$  ( $e^{-\gamma}$ ) თანამამრავლის შემოტანა ( $\gamma$  გარემოს მიერ მოცემული სიხშირის ტალღის შთანქმის კოეფიციენტი).

**ამოცანა 55.1.** თუ ბრტყელი ტალღა ვრცელდება  $x$  ღერძის გასწვრივ  $a(x,y,z,t) = a(x,t)$ , მაშინ (54.4)-ის თანახმად, ტალღური განტოლება იქნება  $\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$ . ვაჩვენოთ, რომ მისი ამონახსნია (55.2').

**ამოხსნა:**

$$a(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha),$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx + \alpha), \quad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx + \alpha) = -\omega^2 a(x,t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -k A \sin(\omega t - kx + \alpha), \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx + \alpha) = -k^2 a(x,t), \quad (2)$$

(1) და (2) შევიტანოთ ტალღურ განტოლებაში:

$$\omega^2 a(x,t) = v^2 k^2 a(x,t).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $k = \omega/v$ , მივიღებთ იგივეობას.

## §56. მდგარი ტალღები

ტალღა გარემოში რხევების გავრცელების პროცესია. რადგან რხევები ემორჩილება სუპერპოზიციის პრინციპს, ამიტომ ტალღათა ზედღებისას წარმოქმნილი ჯამური ტალღა იქნება მდგენელ (შესაკრებ) ტალღათა შეკრების შედეგი. განსაკუთრებით საინტერესოა ისეთი შემთხვევა, როდესაც ერთნაირი სიხშირის ტალღებს ზედღების არეში გააჩნია მუდმივი ფაზათა სხვაობა, ანუ ისინი *კოჰერენტულია*. ასეთ შემთხვევაში, სუპერპოზიციის შედეგად, ხდება ენერჯიის (ინტენსივობის) სტაბილური გადანაწილება, რის გამოც ზოგიერთ წერტილში რხევები ძლიერდება, ზოგში კი სუსტდება. ამ მოვლენას *ინტერფერენცია* ეწოდება.

განვიხილოთ ერთნაირი ამპლიტუდის და სიხშირის მქონე ორი შემხვედრი ბრტყელი ტალღის ინტერფერენცია არამშთანთქმელ გარემოში. შედეგად მიღებულ რხევით პროცესს *მდგარი* ტალღა ეწოდება. მდგარი ტალღა მიიღება, თუ ორი გარემოს გამყოფი საზღვრიდან არეკვლილი და დაცემული ტალღა, ურთიერთშემხვედრი მიმართულებით გავრცელების გამო, განიცდის ზედღებას. ზედღების ნებისმიერ  $x$  წერტილში ადგილი აქვს ფაზათა სხვაობის წარმოქმნას, რაც გამოწვეულია დაცემული და არეკვლილი ტალღების მიერ შეხვედრამდე განსხვავებული მანძილების გავლით. ასევე, თუ ტალღა აირეკლა უფრო მკვრივი გარემოდან, ის განიცდის ფაზის შეცვლას საპირისპიროთი –  $\pi$ -ით, რაც ტალღის სიგრძის ნახევრის –  $\lambda/2$  “კარგვის” ტოლფასია (თუ ამრეკლი გარემო ნაკლებად მკვრივია, ფაზის “კარგვას” ადგილი არ აქვს).

ჩავწეროთ  $x$  ღერძის გასწვრივ და შემხვედრი მიმართულებით გავრცელებული ორი ერთნაირი ამპლიტუდის მქონე ბრტყელი ტალღის განტოლება

$$a_1 = A \cos(\omega t - kx + \alpha_1) \quad \text{და} \quad a_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

სუპერპოზიციის პრინციპიდან გამომდინარე, მიღებული მდგარი ტალღის განტოლება იქნება:

$$a = a_1 + a_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right).$$

გამოთვლების გამარტივების მიზნით  $x$  კოორდინატის დასაწყისი ისე შევარჩიოთ, რომ  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ , ხოლო  $t$  დროის ათვლის მომენტი ისე, რომ  $\alpha_2 + \alpha_1 = 0$ , მაშინ მდგარი ტალღის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$a = 2A \cos\frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right). \quad (56.1)$$

(56.1)-დან ჩანს, რომ მიღებული მდგარი ტალღის სიხშირე შემხვედრი ტალღების სიხშირის ტოლია, ხოლო ამპლიტუდა  $\left|2A \cos\frac{2\pi}{\lambda} x\right|$  დამოკიდებულია ზედღების წერტილთა

კოორდინატებზე. იმ წერტილებში, სადაც ადგილი აქვს ტოლობას  $\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda} x\right| = 1$ , ანუ  $x$  კოორდინატი აკმაყოფილებს პირობას  $(2\pi/\lambda)x = \pm n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), ამპლიტუდა აღწევს მაქსიმუმს. ამ წერტილებს *მდგარი ტალღის ბურცობებს* უწოდებენ:

$$x_n = \pm 2n \frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (56.2)$$

ხოლო იქ, სადაც  $\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda} x\right| = 0$ , ანუ  $\frac{2\pi}{\lambda} x = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), ამპლიტუდა მინიმალურია – უტოლდება ნულს. ამ წერტილებს *მდგარი ტალღის კვანძებს* უწოდებენ:

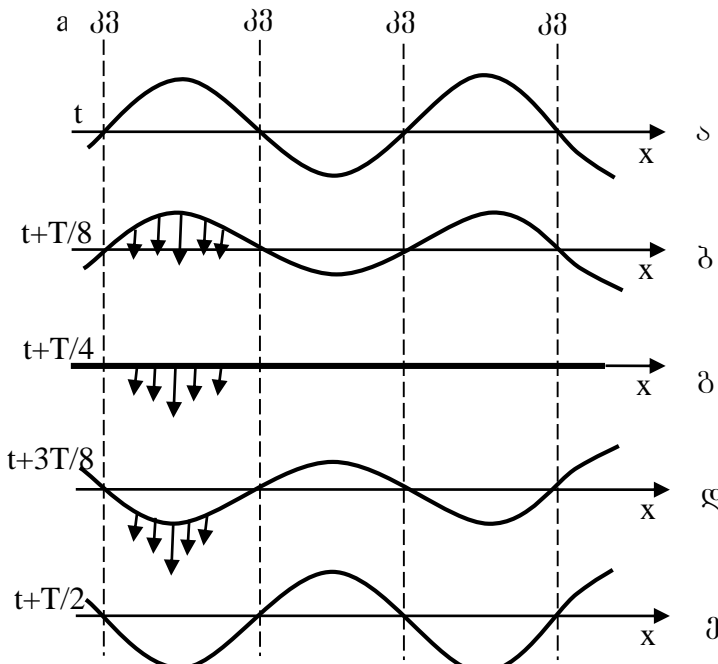
$$x_{\text{კვ}} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad (n=0,1,2,\dots), \quad (56.3)$$

(56.2) და (56.3)-დან ვასკვნით, რომ ზედდების იმ წერტილებში, რომელთა კოორდინატი  $\lambda/4$ -ის ლუწჯერადია, ტალღები ერთმანეთს აძლიერებს (ბურცობი), ხოლო იქ, სადაც კოორდინატი  $\lambda/4$ -ის კენტჯერადია, ტალღები ერთმანეთს ასშობს (კვანძი).

მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (ამოცანა 56.1) ორ მეზობელ ბურცობს, ან ორ მეზობელ კვანძს შორის მანძილი ერთმანეთის ტოლია და  $\lambda/2$ -ს უდრის.

შევნიშნოთ, რომ მოცემული  $n$ -სთვის ბურცობი (კვანძი) წარმოადგენს არა ცალკეულ წერტილს, არამედ სიბრტყეს, რომლის განტოლება მოცემულია შესაბამისი ფორმულით ((56.2), (56.3)).

(56.1)-ის თანახმად,  $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$  თანამამრავლი ნულოვანი მნიშვნელობის გავლისას იცვლის ნიშანს. ეს იმას ნიშნავს, რომ კვანძის სხვადასხვა მხარეს ნაწილაკთა რხევა საპირისპირო ფაზაში მიმდინარეობს, ხოლო ორ მეზობელ კვანძს შორის მოთავსებული ნებისმიერი ნაწილაკი ერთნაირ ფაზაში (სინქრონულად) ირხევა. ეს ფაქტი იმაზე მიუთითებს, რომ ამ ნაწილაკთა შორის ფაზათა სხვაობა ნულის ტოლია, ანუ ფაზის გადატანა არ ხდება, რაც კინემატიკური თვალსაზრისით ხსნის “მდგარი” ტალღის სახელწოდებას. რაც შეეხება კვანძებს შორის მოთავსებულ ნაწილაკთა ამპლიტუდებს, ისინი ერთმანეთისგან



ნახაზი 56.1

განსხვავებულია – იცვლება ნულიდან მაქსიმალურ მნიშვნელობამდე და ეცემა ისევ ნულამდე. ნახ. 56.1-ზე მოცემულია ნაწილაკთა გადახრის “მომენტალური ფოტოები”  $T/8$  ინტერვალით. 56.1-ის ა) და ე) შეესაბამება მაქსიმალურ გადახრას. ისრებით ნაჩვენებია ნაწილაკთა სინქარეები. რადგან მდგარი ტალღა მიიღება ორი ურთიერთშემხვედრი ტალღის ზედდების შედეგად, რომელთაც გადააქვთ სიდიდით ტოლი ენერგიები საპირისპირო მიმართულებით, ამიტომ **მდგარ ტალღაში ენერჯიის გადატანა არ ხდება**. თუმცა გარემოს თითოეულ უბანში მიმდინარეობს ნაწილაკთა

კინეტიკური ენერჯიის გარდაქმნა დრეკადი დეფორმაციის პოტენციურ ენერჯიად და პირიქით ისე, რომ თითოეული უბნის ჯამური ენერჯია დროში უცვლელი რჩება.

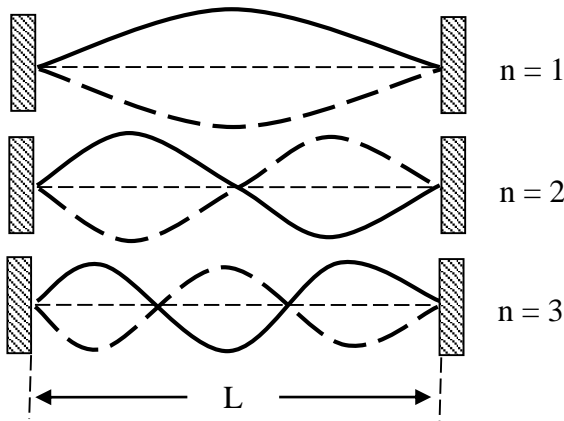
მდგარი ტალღა აღიძვრება გიტარის ან ვიოლინოს ორივე ბოლოთი დამაგრებული სიმის რხევისას. სიმში აღძრული განივი ტალღები იმოძრავენ ორივე მიმართულებით, აირეკლება ბოლოებიდან, შეიცვლის მიმართულებას და ზედდებისას ინტერფერირებს. სიმის ბოლოები, რხევაში არმონაწილეობის გამო, ქმნის კვანძებს. ზემოთქმულის თანახმად,

აღბრულ ტალღათა სპექტრიდან ინტერფერენციისას ის ტალღები არ ჩაიხშობა, რომელთა ტალღის სიგრძეები დააკმაყოფილებს ტოლობას:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad (n=1,2,\dots), \quad (56.4)$$

სადაც  $L$  სიძის სიგრძეა. (56.4)-დან:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}. \quad (56.5)$$



ნახაზი 56.2

$\lambda = v/\nu$ -ს თანახმად,  $\nu_n = v/\lambda_n$ , ე.ი. უგრძეს ტალღას  $\lambda_1 = 2L/1$  უმცირესი სიხშირე შეესაბამება. სიხშირის ამ მნიშვნელობას ძირითადი ტონიანი **პირველი ჰარმონიკა** ეწოდება. ყველა დანარჩენ სიხშირეებს  $\nu_2, \nu_3, \dots$  ობერტონებიან **მეორე, მესამე, ... ჰარმონიკები** ეწოდება. ნატურალური რიცხვი  $n$  გვიჩვენებს ჰარმონიკის ნომერს და, იმავედროულად, შესაბამისი ბურცობების რაოდენობას. ნახ. 56.2-ზე ნახვენებია  $n=1,2,3$ -ის ჰარმონიკები.

**ამოცანა 56.1.** აჩვენეთ, რომ მანძილი მეზობელ ბურცობებს (კვანძებს) შორის ტალღის სიგრძის ნახევრის, ხოლო მანძილი ბურცობსა და მომდევნო კვანძს შორის ტალღის სიგრძის მეოთხედის ტოლია.

**ამოხსნა:**

(56.2)-ის თანახმად:

$$\Delta x_{\delta} = (x_{n+1} - x_n)_{\delta} = 2(n+1) \frac{\lambda}{4} - 2n \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2},$$

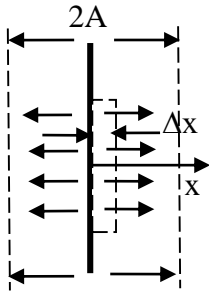
სევე (56.3)-დან:

$$\Delta x_{\text{კვ}} = (x_{n+1} - x_n)_{\text{კვ}} = (2(n+1)+1) \frac{\lambda}{4} - (2n+1) \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4},$$

$$x_{\text{კვ}} - x_{\delta} = (2n+1) \frac{\lambda}{4} - 2n \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}.$$

**§57. მექანიკური ტალღის ენერგია და სიმკვრივე**

მოქვათ,  $\rho$  სიმკვრივის დრეკად გარემოში  $YOZ$  სიბრტყეში მოთავსებული  $S$  ფართის თხელი ფირფიტა (ნახაზი 57.1) ასრულებს ჰარმონიულ რხევას  $x = A \cos \omega t$  კანონით, რის შედეგადაც გარემოში გავრცელებული იგივე სიხშირისა და ამპლიტუდის ბრტყელი გრძივი ტალღა. ფირფიტის მიმდებარე გარემოს  $\Delta m$  მასის ფენა ფირფიტის რხევის შედეგად დებულობს მექანიკურ ენერგიას  $\Delta W = \Delta W_p + \Delta W_k$ , რომელიც, §48-ის თანახმად, ასე ჩაიწერება:



ნახაზი 57.1

$$\Delta W = (\Delta W_p)_{\text{ავ}} = \frac{\Delta m v_{\text{ავ}}^2}{2} = \frac{\Delta m \omega^2 A^2}{2} = \frac{\rho \Delta V \omega^2 A^2}{2} \quad (57.1)$$

ხოლო ერთეულოვან მოცულობაში აკუმულირებული ენერგია – ენერგიის სიმკვრივე – იქნება:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\rho \omega^2 A^2}{2}. \quad (57.2)$$

იგი დამოკიდებულია გარემოს სიმკვრივეზე, ტალღის სიხშირისა და ამპლიტუდის კვადრატებზე. ეს შედეგი სამართლიანია ნებისმიერი მექანიკური ტალღისთვის (ბრტყელი, ცილინდრული, სფერული...) დამოუკიდებლად იმისა, მშთანთქმელია თუ არა გარემო.

მოქვათ რხევა დაიწყო  $t=0$  მომენტში, მისი გავრცელების სიჩქარეა  $v = \Delta x / \Delta t$ , სადაც  $\Delta t$  ის დროა, რომელიც საჭიროა ტალღის  $\Delta x$  მანძილზე გასავრცელებლად. თუ  $\Delta V$ -ს წარმოვადგენთ  $\Delta V = S \Delta x = S v \Delta t$  სახით, მაშინ (57.1) ასე ჩაიწერება:

$$\Delta W = \frac{\rho S v \Delta t \omega^2 A^2}{2}.$$

ამ უკანასკნელის  $\Delta t$  დროზე გაყოფით მივიღებთ **ენერგიის ნაკადს** ანუ დროის ერთეულში ტალღის გავრცელების მართობულად ფართში გადატანილი ენერგიის რაოდენობას:

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\rho S v \omega^2 A^2}{2}. \quad (57.3)$$

ენერგიის ნაკადს გააჩნია სიმძლავრის განზომილება –  $1 \text{ ვტ} = 1 \text{ ჯ/წმ}$ .

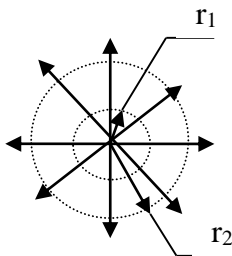
გარემოში ენერგიის გადატანის დასახასიათებლად გამოიყენება ინტენსივობა - ტალღის გავრცელების მართობულ ერთეულოვან ფართში დროის ერთეულში გადატანილი ენერგია:

$$I = \frac{\Delta W}{S \Delta t} = \frac{\Phi}{S} = \frac{\rho v \omega^2 A^2}{2} = w v. \quad (57.4)$$

ინტენსივობის ერთეულია  $1 \text{ ვტ/მ}^2$ .  $I \sim A^2$  დამოკიდებულება სამართლიანია ელექტრომაგნიტური ტალღებისთვისაც.

თუ არამშთანთქმელ გარემოში ვრცელდება ბრტყელი ტალღა, რადგან მისი ამპლიტუდა მუდმივია მისი ინტენსივობა წყაროდან მანძილზე არ იქნება დამოკიდებული.

იმავე გარემოში სფერული ტალღის გავრცელებისას, ენერგიის მუდმივობის კანონიდან გამომდინარე,  $r_1$  და  $r_2$  რადიუსიან სფერულ ზედაპირს (ნახ. 57.2) უნდა განჭოლაგდეს ერთნაირი ენერგიის ნაკადი



ნახაზი 57.2

$\Phi_1 = \Phi_2$ . (57.3)-დან გვექნება:

$$A_1^2 S_1 = A_2^2 S_2, \quad A_1^2 4\pi r_1^2 = A_2^2 4\pi r_2^2, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

ე.ი., ამპლიტუდა წყაროდან მანძილის უკუპროპორციულია. (57.4)-ის თანახმად,  $I \sim A^2$ , რის გამოც ვღებულობთ:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (57.5)$$

ე.ი., სფერული ტალღის ინტენსივობა არამშთანთქმელ გარემოში წყაროდან მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია.

**ამოცანა 57.1.** სეისმოლოგიური გრძივი ტალღის ( $P$  ტალღის) ინტენსივობა მიწისძვრის ეპიცენტრიდან 60კმ მანძილზე შეადგენს დაახლოებით  $2,5 \cdot 10^6$  ვტ/მ<sup>2</sup>-ს. რისი ტოლი იქნება მისი ინტენსივობა ეპიცენტრიდან 300 კმ-ზე.

**ამოხსნა:**

(57.6)-ის თანახმად:

$$I_2 = I_1 \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 2,5 \cdot 10^6 \left( \frac{60}{300} \right)^2 = 10^5 \text{ (ვტ/მ}^2\text{)}.$$

### §58. ბგერა

➤ **ბგერითი ტალღა (ბგერა) ეწოდება იმ მექანიკურ ტალღას, რომელიც ადამიანთა და ცხოველთა სმენით ორგანოზე ზემოქმედების შედეგად ტვინში იწვევს ხმაურთან ასოცირებულ ფსიქოლოგიურ პროცესს.**

ბგერის გავრცელებას და გარემოსთან ურთიერთქმედებას შეისწავლის ფიზიკის უძველესი ნაწილი – **აკუსტიკა** (ლათ. სმენითი). ამ სფეროში სერიოზული გამოკვლევები მოიპოვება **პითაგორასა** და **არისტოტელეს** შრომებში. იმაზე დამოკიდებულებით, გარემოს ნაწილაკთა რხევის მიმართულება როგორაა ორიენტირებული ბგერის გავრცელების მიმართულებასთან, ტალღა შეიძლება იყოს როგორც გრძივი ასევე განივი. ჩვენ ჩვეულებრივად ვთვლით, რომ ბგერა ვრცელდება ჰაერში, რადგან სწორედ ჰაერის ზემოქმედება იწვევს ყურის მემბრანის სათანადო რხევებს. რეალურად, ბგერითი ტალღები ვრცელდება როგორც აირად, ასევე თხევად და მყარ ნივთიერებებში. მაგალითად, რელსზე ყურის დადებისას შევიგრძნობთ მატარებლის მოახლოებას, ვინაიდან რელსში გავრცელებული ტალღა იწვევს მიმდებარე ჰაერის რხევას, რომელიც უშუალოდ მოქმედებს ყურის მემბრანაზე.

ბგერის, როგორც მექანიკური ტალღის, გავრცელების სიჩქარე დამოკიდებულია გარემოს დრეკად თვისებებზე და სიმკვრივეზე (§46). მყარ და თხევად ნივთიერებებს მაღალი დრეკადობის მოდული გააჩნია, რის გამოც მათში ბგერის გავრცელების სიჩქარე საკმაოდ მაღალია აირებთან შედარებით. ცხრილ 58.1-ში მოცემულია 20°C-ზე სხვადასხვა ნივთიერებაში ბგერის გავრცელების სიჩქარე.

**ცხრილი 58.1.**

ნივთიერება	ბგერის სიჩქარე (მ/წმ) (20°)
ჰაერი(1ატმ)	343
წყალი	1440
ზღვის წყალი	1560
რკინა, ფოლადი	5000
ალუმინი	5100
მინა	4500
მძიმე მერქანი	4000

რადგან ტემპერატურის ცვლილება იწვევს გარემოს დრეკადი თვისებების ცვლილებას, ამიტომ ბგერის გავრცელების სიჩქარე, ზოგადად, ტემპერატურაზე დამოკიდებულია. დადგენილია, რომ ტემპერატურის  $1^{\circ}\text{C}$ -ით გაზრდისას სიჩქარე საშუალოდ  $0,60\text{მ/წმ}$ -ით მატულობს. ამიტომ, ზოგადად,  $1$  ატმ წნევის პირობებში, ნებისმიერ ტემპერატურაზე ( $t^{\circ}\text{C}$ ) ბგერის სიჩქარე შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულით:

$$v_{\text{ბგ}} = (331 + 0,60t) \text{ მ/წმ.}$$

მაგალითად, ზაფხულში  $t = 40^{\circ}\text{C}$ -ზე  $v_{\text{ბგ}} = 355\text{მ/წმ}$ -ია. (ჰაერში ბგერის გავრცელებაზე დამატებითი ინფორმაცია იხილეთ ფიზიკის კურსის II ნაწილში).

ბგერის მსმენელზე ზემოქმედების დასახასიათებლად შემოტანილია ორი სუბიექტური მახასიათებელი, რომლებიც ფიზიკური მეთოდით შეიძლება გაიზომოს. ესენი არის ბგერის სიმაღლე და ხმამაღლობა. **ბგერის სიმაღლე** მისი სიხშირით განისაზღვრება, რაც მეტია სიხშირე, მით მაღალია ბგერა. ადამიანის სმენადობის ინტერვალი  $16$ -დან  $20000$  ჰერცამდეა. ზედა საზღვარი ასაკთან ერთად მცირდება და  $10000$ -მდე ჩამოდის.  $20000$  ჰც-ზე მაღალი სიხშირის ბგერებს **ულტრაბგერები** ეწოდება. ძაღლები  $50000$ ჰც, ხოლო დამურები  $100000$ ჰც სიხშირეს აღიქვამენ.  $16$ ჰც-ზე დაბალი სიხშირის ბგერებს **ინფრაბგერები** ეწოდება.

**ბგერის ხმამაღლობა** განისაზღვრება რხევის ამპლიტუდით. რადგან ტალღის ინტენსივობა ამპლიტუდის კვადრატის პროპორციულია და წარმოადგენს ფიზიკურად გაზომვად სიდიდეს, ამიტომ სწორედ ეს სიდიდე იქნა შერჩეული ბგერის ხმამაღლობის დასახასიათებლად. ადამიანის სმენის ორგანო ყველაზე მაღალი მგრძნობიარობით ხასიათდება  $\sim 1000$  ჰც სიხშირის ბგერის მიმართ. იგი მას აღიქვამს  $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-12}$  ვტ/მ<sup>2</sup> (სმენადობის ქვედა ზღვარი) ინტენსივობიდან დაწყებული ზემოთ. სხვა სიხშირის ბგერის აღქმა იწყება  $I > I_0$  ინტენსივობის შემთხვევაში. ზოგადად, ადამიანის სმენადობის ნორმალური დიაპაზონია  $1,0 \cdot 10^{-12}$  ვტ/მ<sup>2</sup>-დან  $1$  ვტ/მ<sup>2</sup>-მდე. უფრო მეტი ინტენსივობის შემთხვევაში მას ეწყება ნერვული სისტემის ალგუნებადობა და დაზიანება. ამიტომ  $1$  ვტ/მ<sup>2</sup>-ს **ტეივლის შეგრძნების ქვედა ზღვარსაც** უწოდებენ.  $(1,0 \cdot 10^{-12} \div 1,0)$  ვტ/მ<sup>2</sup> დიაპაზონს **ნორმალური სმენადობის დიაპაზონი** ეწოდება.

ადამიანის სმენის ორგანოს მგრძნობიარობის დასახასიათებლად მოცემული ინტენსივობის (ამპლიტუდის) ბგერის მიმართ შემოტანილი იქნა **ხმამაღლობის დონის** (ინტენსივობის დონის) ცნება:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (58.1)$$

აქ  $I$  მოცემული ბგერის ინტენსივობაა, ხოლო  $I_0$  – სმენადობის ზღვარი. იგი იზომება **დეციბელებში (დცბელ)**. ათობითი ლოგარითმის შემოტანა განაპირობა ადამიანის სმენადობის ძალიან ფართო ინტერვალმა და მასთან დაკავშირებული გათვლების მოუხერხებლობამ.

ჩავწეროთ ნორმალური სმენადობის დიაპაზონი ხმამაღლობის დონის შესაბამის საზღვრებში; *თუ*  $I = I_0$ , *მაშინ*  $L = 10 \lg 1 = 0$ ;  $I = 1$  ვტ/მ<sup>2</sup>,  $L = 10 \lg 10^{12} = 120$  დეციბელი. ე.ი., ადამიანის ნორმალური სმენადობის არეა ( $0 \div 120$ ) დცბელი. ცხრილ 58.2-ში მოცემულია ინტენსივობა და შესაბამისი ხმამაღლობის დონის მნიშვნელობა სხვადასხვა წყაროს შემთხვევაში.

ბგერითი წყაროს რხევისას, რაღაც მომენტში რაიმე უბანში ჰაერის შეკუმშვა იწვევს ამ უბანში წნევის გაზრდას. ჰაერის მოლეკულებს შორის დრეკადი კავშირების გამო ეს წნევა გადაეცემა მეზობელ უბანს, რის შედეგადაც პირველ უბანში წნევა დაეცემა, მეზობელ უბანში კი გაიზრდება. ასე რომ წარმოიქმნება ერთმანეთის მონაცვლე შეკუმშული და გაიშვიათებული უბნები, რომლებიც გავრცელდება მთელ გარემოში. ე.ი. ბგერის გავრცელება ჰაერში დაკავშირებულია ჰაერის ფენათა შეკუმშვა-გაფართოებასთან, რაც წარმოშობს წნევის დამატებით ცვლილებას მის საშუალო მნიშვნელობასთან შედარებით.



ნებისმიერი რხევა დაკავშირებულია სისტემის წონასწორობის დარღვევასთან, რაც გამოიხატება სისტემის მახასიათებელი პარამეტრების წონასწორული მნიშვნელობიდან გადახრასთან. აირად გარემოში ბგერითი რხევების დროს ასეთ პარამეტრად შეიძლება ავიღოთ გარემოს საშუალო წნევა, ხოლო ამ მნიშვნელობიდან გადახრას ვუწოდოთ ბგერითი წნევა.

*ცხრილი 58.2.*

ბგერის წყარო	ხმამაღლობის დონე (დცბელ)	ინტენსივობა (ვტ/მ <sup>2</sup> )
რეაქტიული თვითმფრინავი (მისგან 30მ მანძილზე)	140	100
ნებისმიერი ბგერის წყარო ტკივილის შეგრძნების ზღვარზე	120	1
დახურულ შენობაში როკ-მუსიკა	120	1
100კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილის სალონში ხმაური	75	$3,2 \cdot 10^{-5}$
ჩვეულებრივი საუბარი (0,5მ მანძილზე)	65	$3,2 \cdot 10^{-6}$
ჩურჩული	20	$1 \cdot 10^{-10}$
ფოთლის შრიალი	10	$1 \cdot 10^{-11}$
ნებისმიერი ბგერის წყარო სმენადობის ქვედა ზღვარზე	0	$1 \cdot 10^{-12}$

➤ *ბგერითი წნევა ეწოდება წნევის იმ ცვლილებას, რომელიც წარმოიქმნება გარემოში ბგერის გავრცელების შედეგად.*

ცხადია, ბგერითი წნევა საშუალო წნევაზე მეტია “შეკუმშულ” არეში და ნაკლებია “გაფართოებულ” არეში. ბგერითი წნევის ცვლილების სიხშირე ბგერის გავრცელების სიხშირის ტოლია. ხშირად ხმამაღლობის დონეს (58.1) ფორმულის ნაცვლად გამოსახავენ შესაბამისი ბგერითი წნევებით:

$$L = 20 \lg \frac{P}{P_0}, \quad (58.2)$$

სადაც  $p$ ,  $I$  ინტენსივობის ბგერის შესაბამისი ბგერითი წნევის მნიშვნელობაა, ხოლო  $p_0 = 3,0 \cdot 10^{-5}$  პა ის ბგერითი წნევაა, რომელიც შეესაბამება სმენადობის ქვედა ზღვარს  $I_0$ -ს.

ჰაერს ისევე, როგორც ნებისმიერ გარემოს, ნაწილაკთა ურთიერთქმედების გამო, ახასიათებს შინაგანი ხახუნის (სიბლანტე), რის გამოც ბგერის გავრცელებას თან სდევს შინაგანი ხახუნის ძალთა აღძვრა. ეს იწვევს ბგერის მექანიკური ენერჯის სითბურ ენერჯიაში გადასვლას, რაც განაპირობებს ბგერის მიღევას.

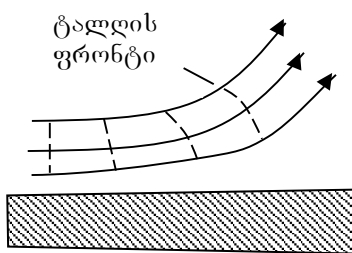
თავისუფალი ატმოსფერო ხასიათდება ჰაერის არარეგულარული მოძრაობით (ტურბულენტობით), რაც კიდევ უფრო ზრდის ბგერის მიღევას. აქედან გამომდინარე, §55-ის თანახმად, ბგერის განტოლება ჰაერში შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$a(x,t) = Ae^{-\gamma x} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right) \text{ (ბრტყელი ტალღა),}$$

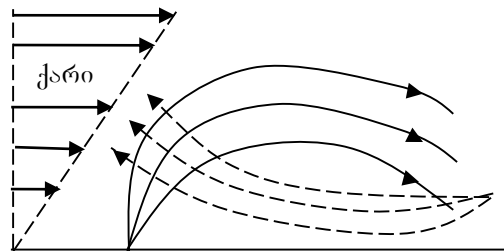
$$a(r,t) = \frac{A_0}{r} e^{-\gamma r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \alpha\right) \text{ (სფერული ტალღა).}$$

$\gamma$  – ჰაერის მიერ მოცემული სიხშირის ბგერის შთანთქმის კოეფიციენტი. მისი მნიშვნელობა ბგერის სიხშირის კვადრატის პირდაპირპროპორციულია. ამიტომ, თუ წყარო ერთდროულად გამოსცემს დაბალ და მაღალ სიხშირეებს (ტონებს), შორ მანძილზე ისმის მხოლოდ დაბალი ტონი, რადგან მაღალი მაღე შთანთქმება. მაგალითად, თუ თვითმფრინავი შორსაა, ისმის მხოლოდ დაბალი სიხშირის ხმაური (გუგუნი), მოახლოებისას კი აღიქმება მაღალი სიხშირეც (სტვენა).

თავისუფალ ატმოსფეროში ბგერის გავრცელებაზე გავლენას ახდენს ატმოსფეროს არაერთგვაროვნება – ტემპერატურული გრადიენტები, ქარის სიჩქარე და მიმართულება. ჰაერის ზედა ფენებში ტემპერატურა დაბალია, ამიტომ ბგერის სიჩქარე დედამიწის ზედაპირიდან სიმაღლის ზრდასთან ერთად მცირდება. ამის გამო თუ ბგერის წყაროდან დედამიწის ზედაპირის გასწვრივ ვრცელდება ბრტყელი ტალღა, მისი ფრონტი თანდათან იცვლის ორიენტაციას, ბგერის სხივები იღუნება და ტალღა შორდება დედამიწის ზედაპირს (ნახ. 58.1).



ნახაზი 58.1



ნახაზი 58.2

ქარის არსებობისას ბგერის სიჩქარეს ემატება ჰაერის მასათა გადაადგილების სიჩქარე. ეს სიჩქარე დედამიწის ზედაპირიდან სიმაღლის ზრდასთან ერთად იზრდება, რაც იწვევს ბგერის სიჩქარის სიდიდის და მიმართულების შეცვლას. ამ შემთხვევაში არსებითია ბგერის მიმართულება თანხვედნილია თუ საპირისპიროა ქარის მიმართულების (ნახ. 58.2).

ამ ფაქტორებს განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა ბგერის მიხედვით ბგერის წყაროს ადგილმდებარეობის განსაზღვრისას (მაგალითად, არტილერიაში).

**ამოცანა 58.1.** რეაქტიული თვითმფრინავი 1 წმ-ში ასხივებს  $2 \cdot 10^5$  ჯ ბგერით ენერგიას. განსაზღვრეთ ხმამაღლობის დონე თვითმფრინავიდან 40 მ და 200 მ მანძილზე, თუ ჰაერის მიერ ბგერის შთანთქმის კოეფიციენტი 7 დცბელ/კმ.

**ამოხსნა:**

რადგან ბგერითი ტალღა სფერულია,  $r_1 = 40$  მ მანძილზე ინტენსივობა (57.4)-დან იქნება:

$$I_1 = \frac{\Delta W}{S \Delta t} = \frac{\Delta W}{4\pi r_1^2 \Delta t} = \frac{2 \cdot 10^5}{4\pi \cdot 1600 \cdot 1} = 10 \text{ (ვტ/მ}^2\text{)}.$$

(58.1)-ის თანახმად:

$$L_{1\text{თეორ}} = 10 \lg \frac{10}{10^{-12}} = 130 \text{ (დცბელ)}.$$

$$L_1 = L_{1\text{თეორ}} - \frac{40}{1000} \cdot 7 = 130 - 0,28 = 129,72 \text{ (დცბელ)}.$$

(57.6)-დან:

$$I_2 = I_1 \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 0,4 \text{ (ვტ/მ}^2\text{)}. \quad L_{2\text{თეორ}} = 10 \lg \frac{0,4}{10^{-12}} = 116 \text{ (დცბელ)}.$$

$$L_2 = L_{2\text{თეორ}} - \frac{200}{1000} \cdot 7 = 116 - 1,4 = 114,6 \text{ (დცბელ)}.$$

ე.ი., რეაქტიული თვითმფრინავიდან 200 მ-ზეც კი ხმამაღლობის დონე მცირედ ჩამორჩება ნორმალური სმენადობის ზედა ზღვარს (120 დცბელ).

**ამოცანა 58.2.** რისი ტოლი იქნება ხმამაღლობის დონე 60 დცბელი და 70 დცბელი ხმამაღლობის დონის ბგერის წყაროების ერთდროულად ჩართვისას?

**ამოხსნა:**

(58.1)-ის თანახმად:

$$\lg I = \frac{L}{10} + \lg I_0,$$

ამიტომ:

$$\lg I_1 = \frac{60}{10} + \lg 10^{-12}, \quad \lg I_1 = 6 - 12 = -6, \quad I_1 = 10^{-6} \text{ ვტ/მ}^2$$

$$\lg I_2 = \frac{70}{10} + \lg 10^{-12}, \quad \lg I_2 = 7 - 12 = -5, \quad I_2 = 10^{-5} \text{ ვტ/მ}^2$$

ორი წყაროს ერთდროული ჩართვისას ხმამაღლობის დონე იქნება:

$$L = 10 \lg \frac{I_1 + I_2}{I_0},$$

$$L = 10 \lg \frac{10^{-6} + 10^{-5}}{10^{-12}} = 10 \lg \frac{1,1 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}} = 10 \lg 1,1 \cdot 10^7 = 10(\lg 1,1 + 7) = 70,4 \text{ (დცბელ)}.$$

|

### **§59. ინფრა და ულტრაბგერა**

ინფრაბგერები (ლათ.ქვემოთ) ის ბგერითი ტალღებია, რომელიც იმყოფება ადამიანის სმენადობის ქვედა ზღვრის დაბლა. ეი ინფრაბგერის სიხშირის ზედა საზღვარია 16ჰც, ხოლო ქვედა საზღვრად პირობითად მიღებულია 0,001ჰც. ინფრაბგერების წყაროებია ატმოსფეროს ტურბულენტობა, ჭექა-ქუხილი, მიწისძვრა, წყალქვეშა და მიწისქვეშა აფეთქებები, ძლიერი ქარიშხალი, ზღვის ზედაპირზე ძლიერი შტორმი და ა.შ. ამ ბგერებით ერთმანეთთან ურთიერთობენ ვეშაპები და სპილოები.

ინფრაბგერა ემორჩილება ბგერითი ტალღების საერთო თვისებებს, მაგრამ ახასიათებს მთელი რიგი თავისებურებები:

1. მას გააჩნია გაცილებით მაღალი ამპლიტუდა ვიდრე იგივე სიხშირის აკუსტიკურ ტალღას.
2. აკუსტიკურ ტალღასთან შედარებით იგი გაცილებით ნაკლებად შთაინთქმება ატმოსფეროს მიერ. ამიტომ დიდ მანძილზე ვრცელდება და საშუალებას იძლევა დადგინდეს ცუნამის მოახლოება, აფეთქების, მიწისძვრის კერის მდებარეობა და სხვა. ინფრაბგერა „მგრძობიარეა“ სეისმური აქტივობის ცვლილების მიმართ 2000კმ რადიუსის დიაპაზონში.
3. ტალღის სიგრძის დიდი მნიშვნელობის გამო, მას აქვს მკვეთრად გამოხატული დიფრაქციის უნარი. იგი იოლად აღწევს შენობებში და გარს უვლის ისეთ დაბრკოლებებს, რომლებიცაკავებენ აკუსტიკურ ტალღებს.
4. მას შეუძლია გამოიწვიოს დიდი ობიექტების ვიბრაცია რეზონანსის საშუალებით.

ინფრაბგერის ეს თვისებები ართულებს მასთან ბრძოლას, რადგან ჩვეულებრივი მეთოდები, რომელიც გამოიყენება ხმაურის წინააღმდეგ, ნაკლებად ეფექტურია ინფრაბგერის წინააღმდეგ.

ინფრაბგერის ფიზიოლოგიური მოქმედება ადამიანზეგანისაზღვრება მხოლოდ ინფრაბგერის სიხშირით და სპექტრით და არაა დამოკიდებული სად იმყოფება ადამიანი - შენობაში თუ ღია სივრცეში.როცა ინფრაბგერის სიხშირე ემთხვევა ადამიანის შინაგანი ორგანოების ქსოვილთა ბიორიტმს-საკუთარ სიხშირეს ეს ორგანოები იწყებენ ვიბრაციას, რაც გამოვლინდება ძლიერი ტკივილების შეგრძნებით. მაგ. 7ჰც სიხშირის ინფრაბგერა ადამიანისათვის სასიკვდილოა. იგი იწვევს ტვინის ნერვიული დაბოლოებების ბიორიტმის დარღვევას. 1-18ჰც სიხშირის და 85-110 დეცბელ ხმამაღლობის დონის ინფრაბგერა ადამიანში აღძრავს პანიკურ შიშს, თავის ტკივილს, თავბრუსხვევას, ღებინებას, მეტყველების დარღვევას, ჰალუცინაციას და სხვა. ოკეანის ზედაპირზე ძლიერი შტორმის დროს აღიძვრება ინფრაბგერები - „ზღვის ხმა“, რომელიც ზოგჯერ ხდება მიზეზიწყლის ზედაპირზე სქელი (რძის მსგავსი) ნისლის მყისიერი გაჩენისა, რომელიც ასევე სწრაფად ქრება. მეცნიერთა გარკვეული ნაწილი „ზღვის ხმით“ხსნის ბერმუდის სამკუთხედის ფენომენს. სწორედ ამ ინფრაბგერების შედეგად ადამიანები ვარდებიან ძლიერ პანიკაში, ხდებიან სრულიად გაუწონასწორებელი (შეუძლიათ ჩაიდინონ მკვლელობა), მაშინ, როცა იგივე სიხშირეების მიმართ ცხოველები სრულიად მშვიდად არიან, რადგან მათ განსხვავებული ბიორიტმები აქვთ (მაგ. გაიხსენეთ ბერმუდის სამკუთხედში ადამიანებისგან სრულიად დაცლილი გემი და გემბანზე მშვიდად მოსეირნე კატა).ცხრილ 59.1-ში მოცემულია ადამიანის შინაგან ორგანოთა რეზონანსული სიხშირეები.

**ცხრილი 59.1**

რგანოები	სიხშირე ჰც
თავი	20-30
თვალები	40-100
გული	4-6
ვესტიბულ. აპარატი	0,5-13
კუჭი	2-3
ნაწლაგები	2-4
მუცლის ღრუ	4-8
თირკმლები	6-8
ხელები	2-5
ხერხემალი	6

ატმოსფეროს და დედამიწის ლითოსფეროს ინფრაბგერებს შორის ადგილი აქვს ენერგიათა განუწყვეტლივ გაცვლას. ძლიერ მიწისძვრამდე 5-10 დღით ადრე მნიშვნელოვნად იცვლება ატმოსფეროს ინფრაბგერის სპექტრი. შევნიშნოთ, რომ ინტენსიურად მიმდინარეობს კვლევები ინფრაბგერათა გენერატორების შექმნისა და გაუმჯობესების მიმართულებით, ასევე მათი მრავალმხრივი გამოყენების თვალსაზრისით, როგორც სამშვიდობო ასევე სამხედრო მიმართულებით.

ულტრაბგერები (ლათ. უკიდურესი) ის ბგერითი ტალღებია, რომელიც იმყოფება ადამიანის სმენადობის ზედა ზღვრის მაღლა. ულტრაბგერის სიხშირის ქვედა საზღვარია 20000 ჰც. ბუნებაში იგი

თან ახლავს ისეთ ხმაურს, როგორიცააქარის, ჩანჩქერის, წვიმის, ჭექა-ქუხილის ხმაური. ამ ტალღებს ზოგიერთი ცხოველი იყენებს სივრცეში ორიენტაციისთვის, დაბრკოლების აღმოჩენისთვის, და ურთიერთკავშირისთვის (ვეშაპები, დელფინები, ღამურები, მღრნელები)

მიუხედავად იმისა, რომ ამ ბგერათა არსებობა დიდი ხნის ცნობილია, პრაქტიკულად მისი გამოყენება საკმაოდ ახალი დაწყებულია. იგი იხმარება სხვადასხვა ფიზიკურ და ტექნიკურ მეთოდებში. რაიმე გარემოში მისი გავრცელების სიჩქარით მსჯელობენ ამ გარემოს თვისებებზე. მაგ. შეიძლება განისაზღვროს აირთა კუთრი სითბოტევადობა, მყარ სხეულთა დრეკადობის მუდმივები, სწრაფად მიმდინარე პროცესების ადიაბატური მახასიათებლები.

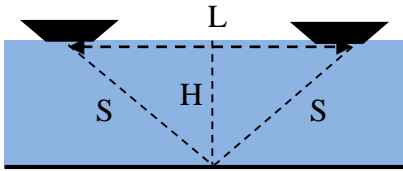
ადამიანის რბილ ქსოვილშიულტრაბგერა კარგად ვრცელდება, ამავე დროს ის გაცილებით უსაფრთხოა რენტგენის სხივებთან შედარებით. ამიტომიგი ფართოდ გამოიყენება მედიცინაში ადამიანის შინაგან ორგანოთა, განსაკუთრებით მენჯის და მუცლის ღრუს ვიზუალური დათვალიერებისთვის, ასევე გამოიყენება ქირურგიაში (ასრულებს სკალპელის ფუნქციას). იგი ასევე გამოიყენება ანთებითი პროცესების სამკურნალოდ. ულტრაბგერა განსაკუთრებით შეუცვლელია ლითონთა საჭრელ ხელსაწყოებში, მისი საშუალებით შესაძლებელია ნებისმიერი რთული ფორმის ხვრელის გაკეთება. მისი გამოყენებით ახდენენ ლალის და აღმასის კრისტალების უფაქიზეს დამუშავებას.

თევზის მრეწველობაში ფართოდ გამოიყენება ექოლოკაცია თევზის ქარავანის აღმოსაჩენად. გემიდან ზღვის ფსკერისკენ უშვებენ ულტრაბგერას. თუ ქვემოთ თევზის ქარავნია იგი აირეკლება მათი ზურგიდან და დაბრუნდება ულტრაბგერის მიმღებში უფრო ადრე ვიდრე ფსკერიდან არეკლილი ბგერა. ცნობილია რა ულტრაბგერის გავრცელების სიჩქარე წყალში შესაძლებელია ზუსტად განისაზღვროს ქარავნის მოძრაობის სიღრმე, თუ სიჩქარეს გაგამრავლებთ გაშვებულ და მიღებულ სიგნალებს შორის დროის ინტერვალის ნახევარზე.

ულტრაბგერა კარგად ვრცელდება მთელ რიგ ნივთიერებებში, რაც საშუალებას იძლევა აღმოაჩინონ და შეისწავლონ ამ ნივთიერებიდან დამზადებულ სხეულებში არსებული დეფექტები.

**ამოცანა 59.1.** ერთი კატარლიდან გაგზავნილი ექოლიტის სიგნალი 3კმ-ით დაშორებულ კატარლაზე ორჯერ მიიღეს. პირველმა უშუალოდ ჰაერით მიაღწია, ხოლო მეორემ ზღვის ფსკერიდან არეკვლის შემდეგ 2წმ-ს დაგვიანებით. იპოვეთ ზღვის სიღრმე, თუ მასში სიგნალის გავრცელების სიჩქარეა 1500მ/წმ.

**ამოხსნა:**



პირდაპირი სიგნალის გავრცელების ხანგრძლივობა იქნება:

$$t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{3000}{330} = 9,1 \text{ (წმ)}.$$

მეორე სიგნალის გავრცელების ხანგრძლივობა  $t_2 = 9,1 + 2 = 11,1$  წმ, მეორე მხრივ:

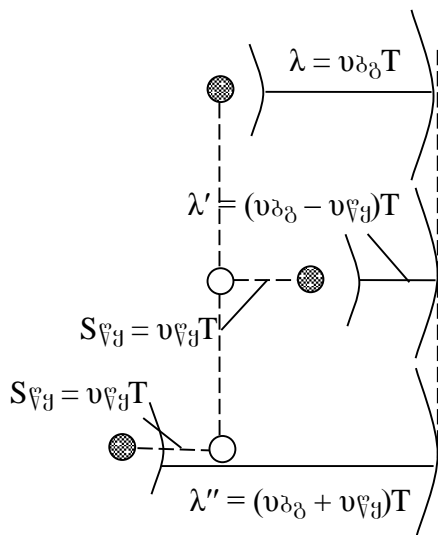
$$t_2 = \frac{2S}{v_2} \rightarrow S = \frac{v_2 t_2}{2} = \frac{1500 \cdot 11,1}{2} = 8325 \text{ (მ)},$$

შესაბამისად სიღრმე გამოითვლება ფორმულით:

$$H = \sqrt{S^2 - \frac{L^2}{4}} \approx \sqrt{8,3^2 - 3^2} / 4 \text{ (კმ)}. H \approx 6,7 \text{ კმ}.$$

### §60. დოპლერის ეფექტი

თუ ბგერის წყარო და მიმღები უძრავია, მაშინ მიმღები აფიქსირებს იმ  $v$  სიხშირის ტალღას, რომლითაც ირხევა წყარო. თუ წყარო ან მიმღები, ან ორივე ერთად მოძრაობს, მაშინ მიმღების მიერ დაფიქსირებული სიხშირე განსხვავებულია წყაროს სიხშირისაგან. ამ მოვლენას **დოპლერის ეფექტი** ეწოდება. მას ადგილი აქვს ნებისმიერი ტიპის ტალღებისთვის. ჩვენ ვამჩნევთ, რომ სასწრაფოს საყვირის ბგერის სიმაღლე (სიხშირე) მკვეთრად იცვლება იმის მიხედვით, გვიახლოვდება თუ გეშორდება მანქანა. კერძოდ, მოახლოებისას სიმაღლე მატულობს, დაშორებისას – მცირდება.



ნახაზი 60.1

- ა) განვიხილოთ დოპლერის ეფექტის წარმოშობის მიზეზი და გამოვთვალოთ ბგერითი ტალღის სიხშირის ცვლილება. ვისარგებლოთ ნახაზ 60.1-ით. სამივე შემთხვევაში ჩავთვალოთ, რომ დამკვირვებელი უძრავია. როდესაც ბგერის წყაროც (მაგალითად, საყვირი) უძრავია (ნახაზი 60.1ა), მანძილი ტალღის ორ მომდევნო ბურცობს შორის ტალღის სიგრძის ტოლია:

$$\lambda = v_{\text{ბგ}} T = \frac{v_{\text{ბგ}}}{\nu}.$$

დაუშვათ, წყარო უახლოვდება მიმღებს  $v_{\text{წყ}}$  სიჩქარით (ნახაზი 60.1ბ), მაშინ  $T$  დროში იგი გადაადგილდება  $S_{\text{წყ}} = v_{\text{წყ}} T$  მანძილით, ამდენითვე

შემცირდება დაშორება ტალღის ორ მომდევნო ბურცობს შორის და ახალი ტალღის სიგრძე იქნება:

$$\lambda' = (v_{\text{ბგ}} - v_{\text{წყ}}) T = \frac{v_{\text{ბგ}} - v_{\text{წყ}}}{\nu}. \quad (60.1)$$

მეორე მხრივ:

$$\lambda' = \frac{v_{\text{ბგ}}}{v'}, \quad (60.2)$$

სადაც  $v'$  ახალი ტალღის სიხშირეა. (60.1)-ის და (56.2)-ის გატოლებით მივიღებთ:

$$v' = \frac{v_{\text{ბგ}}}{v_{\text{ბგ}} - v_{\text{წყ}}} v. \quad (60.3)$$

მართლაც, ბგერის სიხშირე (სიმაღლე)მატულობს ბგერის წყაროს მიმდებთან მიახლოების შემთხვევაში.

თუ წყარო შორდება მიმდებს (ნახაზი 60.1გ), მაშინ დაშორება ტალღის ორ მომდევნო ბურცობს შორის გაიზრდება და ახალი ტალღის სიგრძე იქნება:

$$\lambda'' = (v_{\text{ბგ}} + v_{\text{წყ}}) T = \frac{v_{\text{ბგ}} + v_{\text{წყ}}}{v}. \quad (60.4)$$

მეორე მხრივ:

$$\lambda'' = \frac{v_{\text{ბგ}}}{v''}. \quad (60.5)$$

გავუტოლოთ (60.4) (60.5)-ს და მივიღებთ, რომ:

$$v'' = \frac{v_{\text{ბგ}}}{v_{\text{ბგ}} + v_{\text{წყ}}} v. \quad (60.6)$$

$v'' < v$  – თუ წყარო შორდება მიმდებს, ბგერის სიხშირე კლებულობს.

შევნიშნოთ, რომ ბგერის გავრცელების  $v_{\text{ბგ}}$  სიჩქარე არ არის დამოკიდებული წყაროს ან მიმდების მოძრაობის სიჩქარეზე.

დოპლერის ეფექტი მაშინაც დაიმზირება, როდესაც უძრავი წყაროს მიმართ მოძრაობს დამკვირვებელი. მისი წყაროსთან მიახლოებისას ბგერის სიმაღლე მატულობს და პირიქით. ამ შემთხვევაში იცვლება არა ტალღის სიგრძე (ბურცობებს შორის მანძილი), არამედ ბურცობების მოძრაობის სიჩქარე დამკვირვებლის მიმართ. ამ დროს სიხშირის ცვლილება მცირედ განსხვავდება (60.3) და (60.6) შედეგებისგან, თუმცა განსხვავება მაინც არსებობს (იხ. ამოცანა 60.1) და ეს ფაქტი არ ეწინააღმდეგება გალილეის ფარდობითობის პრინციპს. ამ შემთხვევაში წყაროსა და მიმდების გარდა, შესაბამის როლს თამაშობს გარემოც (ჰაერი). პირველ შემთხვევაში ჰაერის მიმართ მოძრაობს წყარო, მეორეში კი – მიმდები, რის გამოც შემთხვევები განსხვავებულია და შედეგიც განსხვავებული მიიღება. თუ წყარო (ან მიმდები) არ მოძრაობს მათი შემაერთებული წრფის გასწვრივ, მაშინ სიხშირეთა ფორმულებში საჭიროა შემაერთებული წრფის მიმართ შესაბამისი სიჩქარეთა გეგმილების შეტანა (იხ. ამოცანა 60.2).

**ამოცანა 60.1.** დამკვირვებელი უახლოვდება ბგერის წყაროს  $v$  სიჩქარით. იპოვეთ მის მიერ დაფიქსირებული ტალღის სიხშირე.

**ამოხსნა:**

დამკვირვებლის მიმართ ბგერითი ტალღის სიჩქარე იქნება  $v + v_{\text{ბგ}}$ , რის გამოც ის დრო, რომლის განმავლობაშიც ტალღის ფრონტი მის მიმართ გადაადგილდება  $\lambda$  მანძილით, იქნება:

$$T' = \frac{\lambda}{v + v_{\text{ბგ}}}$$

სადაც:

$$\lambda = v_{\text{ბგ}} T$$

ამიტომ:

$$T' = \frac{v_{\text{ბგ}}}{v + v_{\text{ბგ}}} T$$

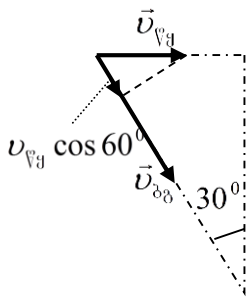
რადგან ტალღის სიხშირე პერიოდის შებრუნებულია  $\nu = 1/T$ , ამიტომ:

$$\nu' = \frac{v + v_{\text{ბგ}}}{v_{\text{ბგ}}} \nu = \left( 1 + \frac{v}{v_{\text{ბგ}}} \right) \nu$$

**ამოცანა 60.2.** თვითმფრინავი მიფრინავს ჰორიზონტის გასწვრივ 200 მ/წმ სიჩქარით. იმ მომენტში, როდესაც იგი იმყოფება დამკვირვებლის მიმართ ზენიტიდან  $30^\circ$ -ანი კუთხით (იხ. ნახაზი), გამოსცემს 5000 ჰც სიხშირის ბგერით სიგნალს. რა სიხშირის სიგნალს აღიქვამს დამკვირვებელი?  $v_{\text{ბგ}} = 330$  მ/წმ.

**ამოხსნა:**

(60.3)-ის თანახმად:



$$\nu' = \frac{v_{\text{ბგ}}}{v_{\text{ბგ}} - v_{\text{წმ}} \cos 60^\circ} \nu$$

მოცემულობის გათვალისწინებით:

$$\nu' = \frac{330}{330 - 200 \cdot 0,5} \cdot 5000 \approx 7170 \text{ (ჰც)}$$

**ამოცანები:**

1. ჰარმონიული ოსცილატორის გადახრის დროზე დამოკიდებულება მოცემულია განტოლებით  $x = 2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ , სადაც  $x$  იზომება მეტრობით, ხოლო  $t$  წამებში. იპოვეთ:

რხევის პერიოდი;  $t = 1$  წმ მომენტისთვის გადახრა, სიჩქარე და აჩქარება. **(პასუხი: 2 წმ; -1 მ; -5,44 მ/წმ; 9,86 მ/წმ<sup>2</sup>).**

2. ჰარმონიული ოსცილატორის გადახრის დროზე დამოკიდებულება მოცემულია განტოლებით  $x = X_0 \cos\left(\frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ , სადაც  $x$  იზომება მეტრობით, ხოლო  $t$  წამებში. იპოვეთ:

რხევის სიხშირე და ამპლიტუდა, თუ  $t = 1$  წმ-თვის სიჩქარე  $\sqrt{2}$  მ/წმ-ის ტოლია. **(პასუხი: 0,75 ჰც; 0,42 მ).**

3. ჰარმონიული რხევის საწყისი ფაზა ნულია. როდესაც მერხევი წერტილი გადახრილია წონასწორობის მდებარეობიდან 2,4 სმ-ზე, მაშინ მისი სიჩქარე 3 სმ/წმ-ის ტოლია, ხოლო 2,8 სმ-ით გადახრისას 2 სმ/წმ. იპოვეთ ამ რხევის ამპლიტუდა. **(პასუხი: 3,01 სმ).**

4. როგორ შეეფარდება ერთმანეთს ორი მათემატიკური საქანის სიგრძეები, თუ ერთსა და იმავე დროში ერთმა შეასრულა 5 რხევა, მეორემ – 15. (პასუხი: 9).

5. 6,4 მ სიგრძის მათემატიკური საქანი გადახარეს ვერტიკალიდან  $90^\circ$  კუთხით და გაანთავისუფლეს. იპოვეთ რხევის ამპლიტუდა და საქანის სიჩქარე წონასწორობის მდებარეობაში გავლისას. (პასუხი: 1მ; 1,25მ/წმ).

6. მათემატიკური საქანის რხევის პერიოდია  $T_0$ . გამოთვალეთ რხევის პერიოდი, თუ იგი მოძრაობს  $g/4$  აჩქარებით 1. ვერტიკალურადზემთ, 2. ვერტიკალურად ქვემოთ, 3.

პროზონტალურად, 4. თავისუფლად ვარდება. (პასუხი:  $\sqrt{2}T_0$ ;  $\frac{2}{\sqrt{3}}T_0$ ;  $\frac{1}{\sqrt{5}}T_0$ ;  $\infty$ ).

7. მას შემდეგ რაც ლიფტმა დაიწყო ვერტიკალური მოძრაობა მასშიჩამოკიდებული მათემატიკური საქანის რხევის პერიოდი 1,5-ჯერ შემცირდა. გამოთვალეთ ლიფტის აჩქარების სიდიდე და მიმართულება. (პასუხი: 12,5 მ/წმ<sup>2</sup> მიმართულია ზემოთ).

8. 10 გ მასის ჰარმონიულად მერხევი ნაწილაკის რხევის ამპლიტუდაა 8 სმ, პერიოდი 4 წმ. დაკვირვების დასაწყისში იგი გადახრილია წონასწორობის მდგომარეობიდან  $4\sqrt{3}$  სმ-ზე. ჩაწერეთ ნაწილაკის კოორდინატის და სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების განტოლებები.

(პასუხი:  $x = 8 \cdot 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $v = -4\pi \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$  )

9. გამოთვალეთ ამოცანა 5-ში 5 წმ-თვის ნაწილაკზე მოქმედი კვაზიდრეკადი ძალის მნიშვნელობა. (პასუხი: 9,86.10<sup>-4</sup>ნ)

10. ნაწილაკი ასრულებს ჰარმონიულ რხევებს. დროის  $t$  მომენტისთვის მისი გადახრაა 4 სმ. ფაზის ორჯერ გადიდების შემდეგ გადახრა 6 სმ-ია. იპოვეთ რხევის ამპლიტუდა და ფაზა ამ მომენტისთვის. (პასუხი: 6,05 სმ; 42<sup>0</sup>)

11. ნაწილაკი ასრულებს ჰარმონიულ რხევებს. დროის  $t$  მომენტში მისი გადახრაა 7სმ, სიჩქარე 17 სმ/წმ, აჩქარება 63 სმ/წმ<sup>2</sup> იპოვეთ რხევის ამპლიტუდა, ციკლური სიხშირე, პერიოდი და ფაზა ამ მომენტისთვის. (პასუხი: 9 სმ; 3 წმ<sup>-1</sup>; 2B/3 წმ; 38<sup>0</sup>)

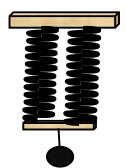
12. 2 კგ ნაწილაკი  $F = -3,2 \cos 4t$  კვაზიდრეკადი ძალის მოქმედებითასრულებს ჰარმონიულ რხევას. ჩაწერეთ რხევის განტოლება და გამოთვალეთ სისტემის სრული ენერგია. (პასუხი:  $x = 0,1 \cos 4t$ ; 0,16კჯ)

13. 0,2 კგ მასის ნაწილაკისჰარმონიულ რხევის განტოლებაა:  $x = 0,1 \sin 4t$  მ. გამოთვალეთ მასზე მოქმედი კვაზიდრეკადი ძალის სიდიდე, მაქსიმალური გადახრის დროს და როცაფაზა 30<sup>0</sup>-ის ტოლია. გამოთვალეთ სისტემის სრული ენერგია. (პასუხი:  $x = 0,1 \cos 4t$ ; 0,16კჯ).

14. ზამბარაზე დაკიდებული ბურთულა ასრულებს ვერტიკალურ რხევებს, როგორ შეიცვლება რხევის პერიოდი თუ ზამბარაზე დაკვიდებთ 2-ჯერ მეტი რადიუსის იგივე მასალის ბურთულას? (პასუხი: გაიზრდება 2,83-ჯერ)

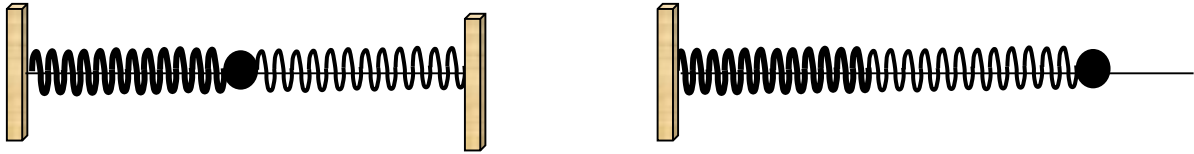
15. ზამბარაზე მიმაგრებულიტვირთი ირხევა 0,5 ჰგ სიხშირით. როდესაც მასზე კიდევ მიამაგრეს 600 გ ტვირთი რხევის სიხშირე გახდა 0,3 ჰგ. იპოვეთ საწყისი ტვირთის მასა. (პასუხი: 337,5გ)

16. 2 კგ მასის ტვირთი მიმაგრებულია ერთნაირი  $9 \cdot 10^2$  ნ/მ სიხისტის პარალელურ ზამბარაზე. სისტემა ასრულებს ჰარმონიულ რხევას. გამოთვალეთ რხევის ციკლური სიხშირე. (პასუხი: 30წმ<sup>-1</sup>)



17. ღერო რომლის სიგრძეა 0,8 მ, მასა 2 კგ. დამაგრებულია ერთი ბოლოთი. თავისუფალ ბოლოზე მიმაგრებულია 5 კგ მასის ტვირთი. სისტემა ასრულებს ჰარმონიულ რხევას ჰორიზონტალური ღერძის მახლობლობაში. გამოთვალეთ სისტემის რხევის ციკლური სიხშირე და დაყვანილი სიგრძე. (პასუხი: 3,2 წმ<sup>-1</sup>; 1,04 მ)

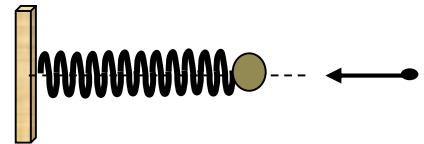
18.  $m$  მასის ტვირთი მიმაგრებულია ორ  $k_1$  და  $k_2$  სიხისტის ზამბარასთან ორი განსხვავებული სახით (იხ. ნახაზი) დაადგინეთ თითოეულ შემთხვევაში სისტემის რხევის პერიოდი.



(პასუხი:  $2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$ ;  $2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1 + k_2}\right)}$  )

19. 2 კგ მასის ნაწილაკი ირხევა  $x = 0,4 \cos 12,5t$  კანონით. გამოთვალეთ სისტემის პოტენციური ენერჯია, როდესაც გადახრა 0,3 მ-ის ტოლია. დაადგინეთ სისტემის ენერჯიის რა ნაწილს შეადგენს პოტენციური ენერჯია, როდესაც წონასწორობიდან წანაცვლება ამპლიტუდის ნახევრის ტოლია. (პასუხი: 14,3ჯ; 0,25)

20. 12 გ მასის ტყვია (იხ.ნახაზი)ეჯახება  $1,03 \cdot 10^3$  ნ/მ სიხისტის ერთი ბოლოთი დამაგრებულ ზამბარას და რჩება მასში. სისტემა იწყებს ჰარმონიულ რხევას 0,35 მ ამპლიტუდით. იპოვეთ ტყვიის სიჩქარე. (პასუხი: 600 მ/წმ)



21. ერთი ბოლოთ დამაგრებულ 64 ნ/მსიხისტის ჰორიზონტალური ზამბარის თავისუფალ ბოლოზემიმაგრებულ 640 გ ტვირთს დარტყმით ანიჭებენ 1,2 მ/წმ სიჩქარეს. იპოვეთ რხევის პერიოდი, ამპლიტუდა, გამოთვალეთ სისტემის პოტენციური ენერჯია დროის იმ მომენტისათვის როდესაც წინასწორობის მდგომარეობიდან გადახრა ამპლიტუდის ნახევარია. (პასუხი: 0,63 წმ; 0,12 მ; 0,26 ჯ)

22. დისკო, რომლის რადიუსია 15 სმ, ირხევა რადიუსის შუაში გამავალი დისკოს სიბრტყისადმი მართობული ღერძის მახლობლობაში. გამოთვალეთ მისი რხევის პერიოდი და დაყვანილი სიგრძე. (პასუხი: 0,32 მ; 0,23 მ)

23. ნაწილაკი მონაწილეობს ორ ურთიერთმართობულ რხევით მოძრაობაში, რომელთა განტოლებებია:  $x = 3 \sin 3t$  და  $y = 4 \sin(3t + \pi/2)$ . ჩაწერეთ რხევის ტრაექტორიის განტოლება, აჩვენეთ მოძრაობის მიმართულება, გამოთვალეთ ნაწილაკის სიჩქარე 0,2 წმ-სთვის. (პასუხი:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1, 10 \text{ სმ/წმ})$$

24. მიღვეადი რხევისას საქანის ამპლიტუდა 4 წმ-ში 2-ჯერ შემცირდა. რა დროში შემცირდება ამპლიტუდა 6-ჯერ? (პასუხი: 10,5 წმ.)

25. მიღვეადი რხევისას სისტემამ 40 წმ-ში დაკარგა ენერჯიის 52%. იპოვეთ წინააღმდეგობის კოეფიციენტი. (პასუხი:  $2,6 \cdot 10^{-4}$  კგ/წმ.)

26. 56 ნ/მ სიხისტის ზამბარის ბოლოზე მიმაგრებული 750 გ მასის ძელაკი ასრულებს რხევას სითხეში. სითხის წინააღმდეგობის კოეფიციენტი 0,162 კგ/წმ. იპოვეთ რხევის პერიოდი, ამპლიტუდათა თანაფარდობა ორი მომდევნო რხევისას. (პასუხი: 0,73 წმ, 0,92)

27. რამდენი რხევის შემდეგ შემცირდება საქანის ამპლიტუდა 5-ჯერ, თუ მიღვევის ლოგარითმული დეკრემენტი 0,161. (პასუხი: 10)

28. ოსცილატორის იძულებითი რხევის ამპლიტუდა რეზონანსის დროს 382 ჰც სიხშირეზე აღწევს 28,6წმ-ს ( $f_0$ -დაყვანილი ძალაა). რისი ტოლია სისტემის ვარგისიანობა. (პასუხი: 1,68.10<sup>8</sup>)
29. ოსცილატორის იძულებითი რხევის ამპლიტუდა რეზონანსის დროს აღწევს 28,6წმ-ს ( $f_0$ -დაყვანილი ძალაა). სისტემის ვარგისიანობაა 9,1.10<sup>7</sup>. გამოთვალეთ რეზონანსული სიხშირე. (პასუხი: 382 ჰც.)
30. ვაგონის რესორის სიხისტეა 576 კნ/მ, მისი მასა ტვირთთან ერთად 64 ტ-ის ტოლია. ვაგონს 4 რესორი აქვს. რა სიჩქარისას დაიწყებს ვაგონი ძლიერ რხევას რელსების შეერთებაზე ბიძგების გავლენით, თუ რელსის სიგრძე 12,6 მ-ია. (პასუხი: 12 მ/წმ.)
31. მერხევი ნაწილაკი (ოსცილატორი) ერთდროულად მონაწილეობს ერთი წრფის გასწვრივ მიმართულ ორ ჰარმონიულ რხევაში: და  $x_1 = 4 \cos \pi t$ ,  $x_2 = 2 \cos \left( \pi t - \frac{\pi}{3} \right)$  შევადგინოთ ჯამური რხევის განტოლება (პასუხი:  $x = 5,3 \cos(3\pi t - 0,11\pi)$ )
32. მერხევი ნაწილაკი ერთდროულად მონაწილეობს ერთი წრფის გასწვრივ მიმართულ ორ ჰარმონიულ რხევაში: და  $x_1 = 2 \sin \pi t$ ,  $x_2 = 2 \sin(\pi t - \pi/2)$  შევადგინოთ ჯამური რხევის განტოლება (პასუხი:  $x = 2\sqrt{2} \sin(\pi t - \pi/4)$ )
33. ნაწილაკი მონაწილეობს ორ ურთიერთმართობულ რხევით მოძრაობაში, რომელთა განტოლებებია:  $x = 2 \sin \pi t$  და  $y = 2 \cos(\pi t + \pi/2)$ . გამოთვალეთ რხევის პერიოდი. ჩაწერეთ რხევის ტრაექტორიის განტოლება, ააგეთ მისი გრაფიკი. (პასუხი: 2წმ.  $y = -x$ )
34. ნაწილაკი მონაწილეობს ორ ურთიერთმართობულ რხევით მოძრაობაში, რომელთა განტოლებები  $x = 4 \sin 0,4\pi t$  სმ და  $y = 4 \cos 0,4\pi t$  სმ. გამოთვალეთ რხევის სიხშირე. ჩაწერეთ რხევის ტრაექტორიის განტოლება, ააგეთ მისი გრაფიკი. (პასუხი: 0,2წმ<sup>-1</sup>.  $x^2 + y^2 = 16$ )
35. გამოთვალეთ მანძილი ტალღის გავრცელების მიმართულებით იმ ორ უახლოეს წერტილს შორის, რომლებიც ერთნაირ ფაზაში ირხევა, თუ ტალღის გავრცელების სიჩქარეა 300 მ/წმ, სიხშირე კი-150 ჰც. (პასუხი: 2მ)
36. ტალღის სიჩქარე ღრეკად გარემოში 80 მ/წმ-ია. ურთიერთსაწინააღმდეგო ფაზაში მერხევი ორ უახლოეს წერტილს შორის მანძილია 0,5 მ. იპოვეთ რხევის სიხშირე. (პასუხი: 80ჰც)
37. ტალღის სიჩქარე ღრეკად გარემოში 90 მ/წმ-ია. ერთნაირ ფაზაში ფაზაში მერხევი ორ უახლოეს წერტილს შორის მანძილია 1 მ. იპოვეთ რხევის სიხშირე. (პასუხი: 90 ჰც)
38. იპოვეთ რხევის წყაროსა და მისგან 1,5 მ-ით დაშორებული წერტილის რხევების ფაზათა სხვაობა, თუ რხევის სიხშირეა 8ჰც, რხევის გავრცელების სიჩქარე კი 60 მ/წმ-ია. (პასუხი: 1,26 რად)
39. გამოთვალეთ მანძილი ტალღის გავრცელების მიმართულებით იმ ორ უახლოეს წერტილს შორის, რომლებიც ერთნაირ ფაზაში ირხევა, თუ ტალღის გავრცელების სიჩქარეა 300 მ/წმ, სიხშირე კი-150ჰც. (პასუხი: 2 მ)
40. ტალღის სიჩქარე ღრეკად გარემოში 80 მ/წმ-ია. ურთიერთსაწინააღმდეგო ფაზაში მერხევი ორ უახლოეს წერტილს შორის მანძილია 0,5 მ. იპოვეთ რხევის სიხშირე. (პასუხი: 80 ჰც)
41. ბგერით ტალღაში წნევის ცვლილება მოიცემა ფორმულით:  $p = 4 \sin \left( \frac{\pi}{4} x - 1600\pi t \right)$ . განსაზღვრეთ ტალღის სიგრძე, სიხშირე და გავრცელების სიჩქარე. (პასუხი: 8 მ; 800 ჰც; 6400მ/წმ)

42. რისი ტოლი იქნება ხმამაღლობის დონე 80 დცბელი და 85 დცბელი ხმამაღლობის დონის ბგერათა წყაროს ერთდროულად ჩართვისას? (პასუხი: 86,2 დცბელი)
43. ბგერის ხმამაღლობის დონეა 85 დცბელი. ენერგიის რა ნაკადს შთანთქავს ადამიანის ყური ერთი წამის განმავლობაში, თუ ყურის ნიჟარის აფსკის ფართობია  $5 \cdot 10^{-5} \text{ მ}^2$  (პასუხი:  $1,6 \cdot 10^{-8} \text{ ვტ}$ )
44. რა სიჩქარით უახლოვდება მატარებელი დამკვირვებელს, თუ ელმავლის საყვირის 500 ჰც სიხშირეს ის აფიქსირებს 570 ჰცსიხშირით. ჰაერში ბგერა ვრცელდება 330 მ/წმ სიჩქარით. რა სიხშირეს დააფიქსირებს დამკვირვებელი მატარებლის ჩავლის მომენტში? (პასუხი: 40,5 მ/წმ; 445 ჰც)
45. დამკვირვებელი მატარებლის მოახლოებისას აფიქსირებს საყვირის 1000 ჰც სიხშირეს, ხოლო მატარებლის ჩავლის შემდეგ კი 850 ჰც-ს. იპოვეთ მატარებლის სიჩქარე და სიგნალის სიხშირე. ჰაერში ბგერა ვრცელდება 330 მ/წმ სიჩქარით. (პასუხი: 26,7 მ/წმ; 919 ჰც)
46. უძრავი ბგერის წყაროს მიერ გამოცემული სიგნალის სიხშირეა 1000 ჰც. წყაროს უახლოვდება დამკვირვებელი 30 მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ მის მიერ დაფიქსირებული ტალღის სიხშირე. ჰაერში ბგერა ვრცელდება 330 მ/წმ სიჩქარით. (პასუხი: 1090 ჰც)
47. უძრავი ბგერის წყაროს მიერ გამოცემული სიგნალის სიხშირეა 1000 ჰც. წყაროს დამკვირვებელი შორდება 30 მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ მის მიერ დაფიქსირებული ტალღის სიხშირე. ჰაერში ბგერა ვრცელდება 330 მ/წმ სიჩქარით. (პასუხი: 910 ჰც)
48. ელმავალი მოძრაობს 25 მ/წმ სიჩქარით. იგი იძლევა 5 წმ ხანგრძლივობის სიგნალს. განსაზღვრეთ სიგნალის ხანგრძლივობა უძრავი დამკვირვებლის მიმართ, როდესაც ელმავალი 1) უახლოვდება; 2) შორდება მას. (პასუხი: 4,6 წმ; 5,4 წმ)

## თაზო VI.

### ჰიდრო და აერო დინამიკა

#### **§61. მყარ, თხევად და აირად მდგომარეობათა განსხვავებული და საერთო თვისებები**

ნივთიერებებს ყოველდღიურად ვხვდებით ძირითადად სამ განსხვავებულ ფორმაში – აგრეგატულ მდგომარეობაში – *მყარი, თხევადი, აირადი*. ამ ფორმებს განაპირობებს მოლეკულური ურთიერთქმედების ძალები, რომლებიც ელექტრული ბუნებისაა და მიზიდვა-განზიდვითი ხასიათი გააჩნია. კერძოდ, თუ მოლეკულათა ცენტრებს შორის მანძილი  $\sim 10^{-8}$  მ რიგისაა, დომინირებს მიზიდულობა, ხოლო  $10^{-10}$  მ მანძილიდან – განზიდვა. ეს ძალები ცდილობს მოლეკულებს მიუჩინოს ფიქსირებული მდებარეობა, რასაც ეწინააღმდეგება მოლეკულათა ქაოსური მოძრაობა.

მყარ მდგომარეობაში ურთიერთქმედების ძალები საკმაოდ დიდია, რის გამოც მოლეკულათა განლაგება ერთმანეთის მიმართ პრაქტიკულად არ იცვლება. მათ შეუძლია მხოლოდ რხევითი მოძრაობა თავისი მდებარეობის მახლობლობაში, რის გამოც მყარ სხეულებს გააჩნია საკუთარი ფორმა და მოცულობა.

თხევად მდგომარეობაში მოლეკულათა შორის ურთიერთქმედების ძალები მყართან შედარებით საკმაოდ სუსტია, რის გამოც მოლეკულები მოძრაობენ ქაოსურად, თუმცა ურთიერთქმედება იმდენად ძლიერია, რომ მათი ქაოსური მოძრაობა ვერ ცვლის საშუალო მანძილს მოლეკულებს შორის, ამიტომ სითხეებს გააჩნია საკუთარი მოცულობა, ხოლო ფორმას ჭურჭლისას დებულობს.

აირად მდგომარეობაში მოლეკულებს შორის ურთიერთქმედება იმდენად სუსტია, რომ ქაოსური მოძრაობის გამო, ისინი თავისუფლად შორდებიან ერთმანეთს და მთლიანად ავსებენ იმ ჭურჭელს, რომელშიც მოთავსებულია, ე.ი. აირებს არ გააჩნია საკუთარი ფორმა და მოცულობა.

სითხეებისა და აირების მსგავსება მდგომარეობს იმაში, რომ ისინი დრეკად თვისებებს ავლენს მხოლოდ ყველა მიმართულებით კუმშვის შემთხვევაში. კუმშვისას მათში აღიძვრება დრეკადობის ძალები, რომელთა სიდიდეც დამოკიდებულია შეკუმშვის ხარისხზე. რადგან სითხეებს საკუთარი მოცულობა გააჩნია, ამიტომ ზემოქმედების არარსებობის შემთხვევაში მათი მდგომარეობა მიიღება, როგორც ნორმალურ-არადეფორმირებული, ხოლო გარეშე ძალთა მოქმედებას განიხილავენ, როგორც კუმშვით დეფორმაციას. აირებისთვის ასეთი ნორმალურ-არადეფორმირებული მდგომარეობა არ არსებობს, ისინი ყოველთვის იმყოფება შეკუმშულ მდგომარეობაში, რომ არა გარე ძალები, აირთა მოცულობა უსასრულოდ გაიზრდებოდა. (მაგ. ატმოსფეროს მოცემულ მდგომარეობაში ინარჩუნებს დედამიწის გრავიტაციული ძალა). შემდგომში აირის გარკვეულ შეკუმშულ მდგომარეობას მივიღებთ როგორც ნორმალურს-არადეფორმირებულს და მის ცვლილებას (გაფართოებას, შეკუმშვას) განვიხილავთ, როგორც დეფორმაციას. საერთოდ, აირთა დრეკადი თვისებები უფრო მკვეთრად დამოკიდებულია ტემპერატურაზე, ვიდრე სითხეების.

ძვრის დეფორმაციისას (განსაკუთრებით თუ ის სწრაფია) სითხეებსა და აირებში აღიძვრება გარკვეული ძალები, რომლებიც არ არის დამოკიდებული დეფორმაციის ხარისხზე, ე.ი., არა აქვს დრეკადი ხასიათი. მათი მნიშვნელობა დამოკიდებულია დეფორმაციის მიმდინარეობის სიჩქარეზე და, თუ ეს სიჩქარე ნულისკენ მიისწრაფის,

აღძრული ძალებიც ნულს უტოლდება. მაშასადამე, ეს ძალები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სველი ხახუნის ძალები (§25), მათ ხშირად **სიბლანტის ძალებსაც** უწოდებენ. შემდგომში სწორედ ამ ტერმინს მივაკუთვნებთ უპირატესობას. ცხადია, თუ სითხე ან აირი იმყოფება უძრავ მდგომარეობაში (მასათა ცენტრი არ იცვლის მდებარეობას) სიბლანტის ძალები ნულის ტოლია.

თუ სითხეს (აირს) აზრობრივად დაეყოფთ იმდენად მცირე ელემენტებად, რომ თითოეულში მოლეკულები ასრულებდეს ერთნაირ რეგულარულ გადაადგილებას (მათი ქაოსური მოძრაობა, ცხადია, განსხვავებულია), მაშინ იგი მოტიანობაში შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც არა ხისტი ურთიერთკავშირების მქონე ელემენტებისაგან შემდგარი სისტემა და მის მიმართ გამოვიყენოთ მექანიკის კანონები. ამოცანა კიდევ უფრო გამარტივდება, თუ სითხე (აირი) უძრავია ან მოძრაობს ისე, რომ ამ ელემენტთა ურთიერთგანლაგება არ იცვლება. ასეთ შემთხვევაში სისტემის მასათა ცენტრს განვიხილავთ, როგორც ფიქსირებულ წერტილს და ვისარგებლებთ აბსოლუტურად მყარი სხეულის მოდელით. ასეთმა მიდგომამ **გამყარების პრინციპის** სახელწოდება მიიღო. ეს პრინციპი ყოველთვის გამოიყენება უძრავი სისტემებისთვის, ხოლო, თუ ადგილი აქვს დენადობას, საჭიროა წინასწარ შევამოწმოთ, სრულდება თუ არა ზემოთქმული მოთხოვნა.

შემდგომ რამოდენიმე პარაგრაფში ჩვენ შევეხებით **ჰიდროაეროსტატიკის** ელემენტებს, რომელიც სწავლობს უძრავ აირებს, სითხეებს და მათ მოქმედებას მათში მოთავსებულ სხეულებზე.

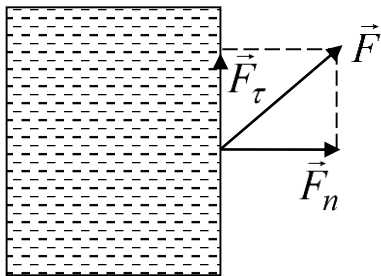
## **§62. ჰიდროაეროსტატიკური წნევა.**

### **პასკალის კანონი**

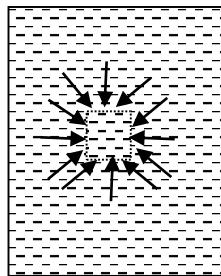
განვიხილოთ რაიმე ჭურჭელში მოთავსებული უძრავი სითხე (აირი). მისი ნაწილების ურთიერთქმედების ძალები იმ დრეკადობის ძალების მსგავსია, რომლებითაც დეფორმირებული მყარი სხეულის ნაწილები მოქმედებს ერთმანეთზე, რის გამოც შესაძლებელია აქაც შემოვიტანოთ ნორმალური ძაბვის ცნება (§23), რომელსაც სითხეებისა და აირების შემთხვევაში **წნევას** უწოდებენ. იგი შეიძლება განვმარტოთ, როგორც ფართის ერთეულზე მისადმი მართობულად მოქმედი ძალის სიდიდე:

$$p = \frac{F_n}{S}, \tag{62.1}$$

სადაც  $F_n$  ზედაპირისადმი მართობულად მოქმედ ძალთა ტოლქმედის სიდიდეა და მას **წნევის ძალას** უწოდებენ. (ამ ძალას რომ გააჩნდეს კედლისადმი მხები მდგენელი  $\vec{F}_\tau$  (ნახ. 62.1),



ნახაზი 62.1



ნახაზი 62.2

ნიუტონის III კანონის თანახმად, კედლის რეაქციის ძალასაც ექნებოდა მხები მდგენელი, რაც გამოიწვევდა სითხის (აირის) დინებას). წნევის ერთეულია **პასკალი (პა)**  $პა = ნ/მ^2$ .

სითხეები და აირები, მყარი სხეულებისაგან განსხვავებით წნევას ყველა მიმართულებით ქმნის. უძრავი სითხის (აირის) შიგნით წარმოვიდგინოთ

კუბის ფორმის სითხის იმდენად პატარა ელემენტი, რომ მისი სიმძიმის ძალა ვუგულებელვყოთ. რადგან სითხე უძრავია, კუბის თითოეულ წახნაგზე მოქმედებს ერთიდაიგივე წნევის ძალა (ნახ. 62.2) (წინააღმდეგ შემთხვევაში ამ ძალთა ტოლქმედი იქნებოდა ნულისგან განსხვავებული და კუბი დაიწყებდა მოძრაობას, რაც ეწინააღმდეგება სითხის უძრავობის პირობას), შესაბამისად ტოლია თითოეულ წახნაგზე სითხის მხრიდან წარმოებული წნევაც. ეს შედეგი **პასკალის კანონის** სახელწოდებით არის ცნობილი:

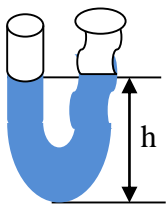
➤ **ჭურჭელში მოთავსებულ სითხეზე ან აირზე წარმოებული წნევა ყველა მიმართულებით თანაბრად გადაიცემა.**

დავუშვათ, რომ უძრავ ცილინდრულ ჭურჭელში, რომლის ფსკერის ფართობი  $S$ -ის ტოლია, მოთავსებული  $\rho$  სიმკვრივის სითხე ქმნის  $h$  სიმაღლის სვეტს, გამოვთვალოთ ამ სითხის მიერ ჭურჭლის ფსკერზე წარმოებული წნევა. ცხადია ეს წნევა გამოწვეულია სითხის წონით, რომელიც (იხ §21) ამ შემთხვევაში რიცხობრივად სითხის სიმძიმის ძალის ტოლია. ე.ი.:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho Vg}{S} = \frac{\rho gSh}{S},$$

მაშასადამე:

$$p = \rho gh. \tag{62.2}$$



ნახაზი 62.3

სითხის სიმძიმის ძალით გამოწვეულ წნევას **ჰიდროსტატიკური წნევა** ეწოდება. იგი არაა დამოკიდებული ჭურჭლის ფორმაზე. მართლაც თუ საერთო ფსკერის მქონე სხვადასხვა ფორმის ჭურჭელში (ნახ.62.3) (ზიარჭურჭელი) ჩავსხამთ ერთნაირი სიმკვრივის სითხეს, პასკალის კანონის თანახმად,  $p_1 = p_2$ ;  $\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$  და  $h_1 = h_2$ . განსხვავებული სიმკვრივის სითხეების შემთხვევაში კი ადგილი

ექნება პროპორციას: 
$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

თუ სითხე განიცდის ატმოსფერული წნევის მოქმედებასაც გვექნება:

$$p = p_{\text{ატმ}} + \rho gh. \tag{62.3}$$

თუ ჭურჭელი მოძრაობს ვერტიკალურად აჩქარებით, მაშინ აჩქარების მიმართულებისგან დამოკიდებულებით გვექნება:

$$p = p_{\text{ატმ}} + (\rho + a)gh \text{ (აჩქარება მიმართულია ზემოთ),} \tag{62.4}$$

$$p = p_{\text{ატმ}} + (\rho - a)gh \text{ (აჩქარება მიმართულია ქვემოთ).} \tag{62.5}$$

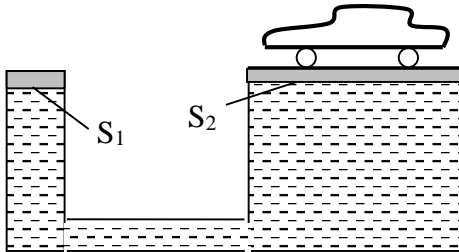
თუ გვაქვს უხსნად სითხეთა ან აირთა ნარევი, მაშინ ჭურჭლის ფსკერზე წარმოებული წნევა ნარევის შემადგენელ კომპონენტთა მიერ დამოუკიდებლად წარმოებულ წნევათა ჯამის ტოლია.

ზემოთ მიღებულ ფორმულებში სითხის სიმკვრივე სითხის სვეტის სიმაღლის მიმართ ჩავთვალოთ მუდმივად. სითხეების შემთხვევაში ეს დაშვება საკმაოდ ზუსტია, რადგან ისინი ძნელად კუმშვადია. აირები კი მაღალკუმშვადობით ხასიათდება, მათი სიმკვრივე აირის სვეტის სიმაღლის ცვლილებით მნიშვნელოვნად იცვლება. რისიც ერთერთი დადასტურებაა ატმოსფეროს სიმკვრივის და შესაბამისად წნევის შემცირება დედამიწის ზედაპირიდან სიმაღლის ზრდასთან ერთად.

**ამოცანა 62.1.** ჰიდრაულიკური დომკრატი (ამწე) წარმოადგენს ორ სხვადასხვა დიამეტრის მქონე ცილინდრულ ჭურჭელს, რომლებსაც გააჩნია საერთო ფსკერი (ზიარი ჭურჭელი). ის ჩვეულებრივად ზეთით ან რაიმე სითხით არის შევსებული. გამოვთვალოთ რა ძალით უნდა ვიმოქმედოთ პატარა დეგუმზე, რომ შევძლოთ 800 კგ მასის მანქანის აწევა, თუ პატარა დეგუმის ფართობი 20-ჯერ ნაკლებია დიდი დეგუმის ფართობზე.

**ამოხსნა:**

ორივე დეგუმში შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ერთიდაიგივე ჭურჭლის კედლები, მაშინ პასკალის კანონის თანახმად,  $p_1 = p_2$  ანუ:



$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}, \quad F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2}, \quad F_1 = \frac{1}{20} F_2.$$

ავტომობილის ასაწევად საჭიროა პატარა დეგუმზე ვიმოქმედოთ ავტომობილის წონის 5%-ის ტოლი ძალით, ე.ი.:

$$F_1 = \frac{1}{20} mg = 400(6),$$

რაც ტოლფასია მცირე დეგუმზე  $\approx 40$ კგ ტვირთის ზემოქმედების.

**ამოცანა 62.2.** ცილინდრულ ჭურჭელში ჩასხმულია წყალი და მასზე ორჯერ მეტი მასის ნავთი. გამოთვალოთ მათ მიერ წარმოებული წნევა ჭურჭლის ფსკერზე, თუ წყლის სიმკვრივეა  $\rho_1=10^3$ კგ/მ<sup>3</sup>, ნავთის  $\rho_2=0,8 \cdot 10^3$ კგ/მ<sup>3</sup>, ხოლო საერთო სიმაღლე  $H=0,5$ მ-ის ტოლია.

**ამოხსნა:**

სითხეების მიერ წარმოებული წნევა ჭურჭლის ფსკერზე იქნება:

$$p = p_1 + p_2 = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) g, \quad (1)$$

ამოცანის პირობის თანახმად:

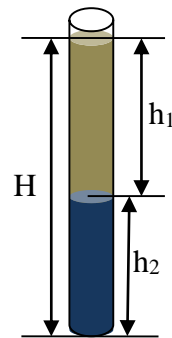
$$m_2 = m_1, \text{ ანუ } \rho_2 h_2 S = 2 \rho_1 h_1 S$$

$$\rho_1 h_1 = 2 \rho_2 h_2, \quad \rho_1 h_1 = 2 \rho_2 (H - h_1),$$

$$h_1 = \frac{2 \rho_2}{\rho_1 + 2 \rho_2} H, \quad (2)$$

ხოლო:

$$h_2 = H - h_1 = \left( 1 - \frac{2 \rho_2}{\rho_1 + 2 \rho_2} \right) H = \frac{\rho_1}{\rho_1 + 2 \rho_2} H. \quad (3)$$



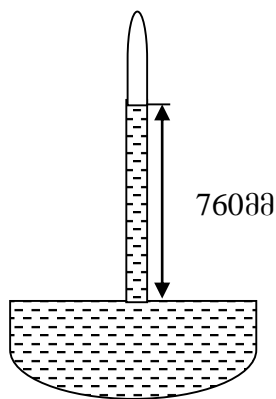
(2) და (3) შევიტანოთ (1)-ში, მივიღებთ:

$$p = \frac{3 \rho_1 \rho_2}{\rho_1 + 2 \rho_2} g H; \quad p = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3 + 1,6 \cdot 10^3} 10 \cdot 0,5 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ (პა)}.$$

თუ ჭურჭელი თავდიაა, ცხადია ამ წნევას დაემატება ატმოსფერული წნევა.

### §63. ტორიჩელის ცდა. წნევის ერთეულები

ატმოსფერო, რომელიც იმყოფება დედამიწის გრავიტაციულ ველში, მის ზედაპირზე ქმნის გარკვეულ წნევას. ამ წნევის სიდიდე 1643 წელს პირველად გაზომა იტალიელმა მეცნიერმა **ევანჯელისტა ტორიჩელმა**. მან ერთი ბოლოთი დახურული მინის გრძელი მილი გააგვსო ვერცხლისწყლით და ვერტიკალურად გადმოაპირქვა ვერცხლისწყლიან ჯამზე (ნახ. 63.1). ვერცხლისწყლის ნაწილი ჩაიღვარა ჯამში, ხოლო ნაწილმა მილში შექმნა გარკვეული სიმაღლის სვეტი, რომლის ზემოთაც წარმოიქმნა სივრცე – ვაკუუმი. ზღვის დონეზე ამ სვეტის სიმაღლე საშუალოდ 760მმ-ის ტოლია.



ნახაზი 63.1

ტორიჩელმა ეს მოვლენა ახსნა იმით, რომ რადგან უძრავი სითხის ნებისმიერ წერტილში წნევა ყველა მიმართულებით ერთნაირია, ე.ი. ატმოსფეროს წნევა ვერცხლისწყლის ზედაპირზე გაწონასწორებულია მილში ვერცხლისწყლის სვეტის წნევით. ამ ცდით ტორიჩელმა დაამტკიცა ატმოსფეროს წნევის არსებობა და აჩვენა მისი გაზომვის შესაძლებლობაც.

რადგან მილში ვერცხლისწყლის ზემოთ ვაკუუმი (ტორიჩელის სივრცე), ამიტომ (62.2) ფორმულის თანახმად

$$p_{\text{ვწყ}} = \rho gh = 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,76 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ (პა).}$$

მაშასადამე, ზღვის დონეზე ატმოსფერული წნევა  $1,013 \cdot 10^5$  პა-ის ტოლია. ამ სიდიდეს **ნორმალური ატმოსფერული წნევა (ფიზიკური**

**ატმოსფერო)** ეწოდება.

1მმ ვერ.წყ. მიერ წარმოებულ წნევას ტორიჩელის საპატივსაცემად **ტორი** უწოდეს:

$$1 \text{ ტორ} = 1\text{მმ ვერწყ} = 133\text{პა.}$$

ასევე წნევის ერთეულად იხმარება **ტექნიკური ატმოსფერო**:

$$1 \text{ ტ.ატ} = 0,981 \cdot 10^5 \text{ პა.}$$

მეტეოროლოგიაში წნევის საზომად ტრადიციულად მიღებულია **ბარი**:

$$1 \text{ ბარი} = 1,00 \cdot 10^5 \text{ პა.}$$

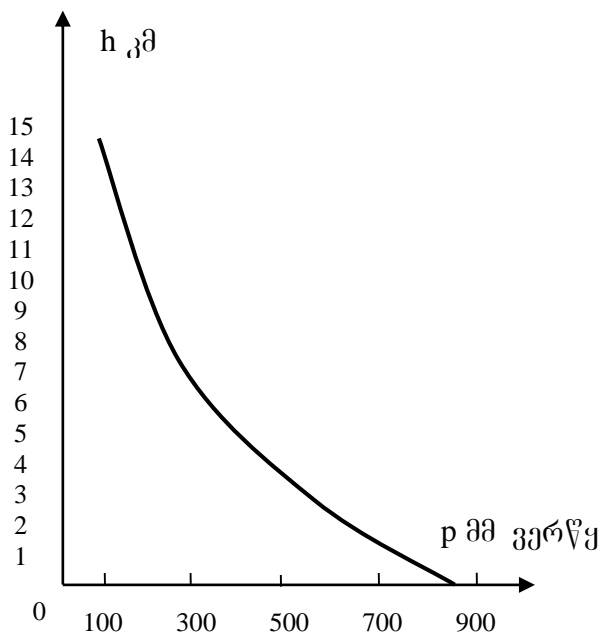
ატმოსფერული წნევა და სიმკვრივე დედამიწის ზედაპირიდან სიმაღლის ზრდასთან ერთად ექსპონენციური კანონით კლებულობს<sup>44</sup>. საშუალოდ ყოველ 5,5კმ-ზე წნევა 2-ჯერ მცირდება (ნახ. 63.2). ატმოსფერული წნევა მოცემულ სიმაღლეზეც ცვლილია, მასზე გავლენას ახდენს მეტეოროლოგიური პირობები.

ატმოსფეროს ტემპერატურის დამოკიდებულებას სიმაღლეზე გაცილებით რთული ხასიათი აქვს (ნახ. 63.3). ამ თვალსაზრისით ატმოსფერო დაყოფილია შემდეგ შრეებად: **ტროპოსფეროდ, სტრატოსფეროდ, მეზოსფეროდ, თერმოსფეროდ.**

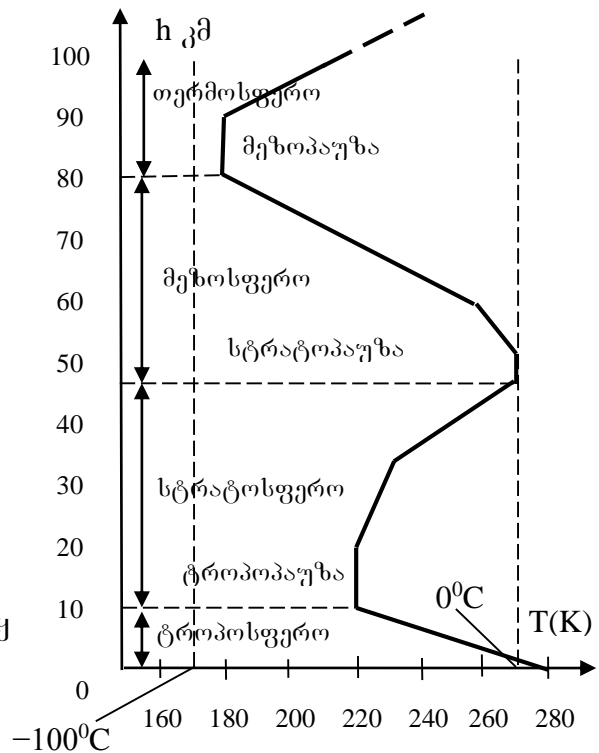
თითოეულ შრეებს შორის არსებობს 1-2კმ გადასვლის ზონა, რომელთაც, შესაბამისად, **ტროპოპაუზა, სტრატოპაუზა და მეზოპაუზა** ეწოდება. ატმოსფეროს არათანაბარი გათბობა იწვევს მის ცირკულაციას, რაც განაპირობებს პლანეტის კლიმატს.

ცხადია, დედამიწაზე არსებული ყველა საგანი და ცოცხალი ორგანიზმი განიცდის ატმოსფერული წნევის მოქმედებას. თუ როგორ ვუძლებთ ამ მნიშვნელოვან წნევას, პასუხი მარტივია – იგი კომპენსირდება ორგანიზმის უჯრედების შიგა წნევით ისევე, როგორც საპაერო ბუშტის შიგნით აირის წნევა აწონასწორებს ატმოსფერულ წნევას.

<sup>44</sup>ატმოსფეროს წნევის სიმაღლეზე დამოკიდებულება (ბარომეტრული ფორმულა) განხილული იქნება II ნაწილში.



ნახაზი 63.2



ნახაზი 63.3

გაზის ბალონების, საბურავების სიმტკიცის გამო შესაძლებელია მათში ატმოსფერულ წნევაზე მეტი წნევის შენარჩუნება. წნევის საზომი ხელსაწყოები-მანომეტრები ზომავს სხვაობას ბალონის, საბურავის შიგა წნევისა და ატმოსფერულ წნევას შორის. ამ წნევას **ჭარბ წნევას** უწოდებენ.

დედამიწის ზედაპირზე ჰაერის წნევა, ტემპერატურა, სიმკვრივე იცვლება გრძელის, წელიწადის დროის, დღე-ღამის და სხვა ფაქტორების მიხედვით. ამიტომ ავიაციაში სარგებლობენ ე.წ. საერთაშორისო სტანდარტული ატმოსფეროთი. მის საწყის მონაცემებად მიღებულია შემდეგი პარამეტრები: ზღვის დონეზე წნევა  $p = 760 \text{ მმ ვწყ. წყ} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ პა}$ , ტემპერატურა  $t = 15^\circ \text{C}$  და სიმკვრივე  $\rho = 1,225 \text{ კგ/მ}^3$ .

**ამოცანა 63.1.** რა მაქსიმალური სიღრმის მადაროდან შესაძლებელია ტუმბოს საშუალებით წყლის ამოქაჩვა, თუ ატმოსფერული წნევა სტანდარტულია.

**ამოხსნა:**

როდესაც საქაჩავი მილი ეხება წყლის ზედაპირს, ტუმბო მაშინ ქმნის ვაკუუმს, რის გამოც მილში შედის წყალი მანამ, სანამ მისი სვეტის წნევა არ გაუწონასწორდება წყლის ღია ზედაპირზე არსებულ ატმოსფერულ წნევას, ე.ი.:

$$p = p_{\text{ატმ}} = \rho g h, \quad h = \frac{p_{\text{ატმ}}}{\rho g} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{9,8 \cdot 10^3} = 10,3 \text{ (მ)},$$

ე.ი., 10,3 მ წყლის სვეტი ქმნის ისეთივე წნევას, რასაც 760 მმ ვერცხლისწყლის სვეტი.

**ამოცანა 63.2.** ავტომობილის ოთხივე საბურავში მანომეტრის ჩვენებით წნევა ტოლია 210 კპა. განვსაზღვროთ თითოეული საბურავის მიწასთან საკონტაქტო ფართობი, თუ ავტომობილის მასაა 1800 კგ, ხოლო ატმოსფერული წნევაა 100 კპა.

**ამოხსნა:**

საბურავის შიგნით ჰაერის წნევა იქნება

$$p = p_{\text{აგმ}} + p_{\text{ჰაბი}} = 100 + 210 = 310(\text{კპა}) = 3,1 \cdot 10^5 (\text{პა}).$$

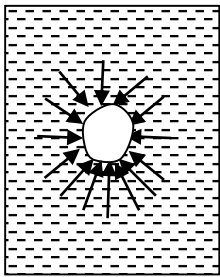
ავტომობილის წონაა  $P^* = mg = 1800 \cdot 10 = 1,8 \cdot 10^4$  (6). ეს წნევა ნაწილდება 4 საბურავის მიწასთან შეხების ფართზე. ამიტომ (62.1)-ის თანახმად:

$$p = \frac{P^*}{4S} = \frac{mg}{4S} \quad (4 - \text{საბურავების რაოდენობა}),$$

$$S = \frac{P^*}{4p} = \frac{1,8 \cdot 10^4}{4 \cdot 3,1 \cdot 10^5} = 0,015 (\text{მ}^2), \quad S = 150 (\text{სმ}^2).$$

### §64. ამომგდები ძალა. არქიმედეს კანონი

§62-ის თანახმად, სითხეებსა და აირებში წნევა სიღრმის ზრდასთან ერთად მატულობს, რის გამოც, თუ რაიმე სხეული ჩაძირულია სითხეში (აირში), მის ქვედა ზედაპირზე მოქმედი წნევა ყოველთვის მეტია, ვიდრე ზედა ზედაპირზე (ნახ. 64.1). ამასთანავე, წნევა ზედაპირის თითოეული ელემენტისადმი მართობულია, რის გამოც სხეულზე სითხეში ან აირში ჩაძირულ სხეულზე მოქმედი ჯამური წნევის ძალა მიმართულია ვერტიკალურად ზევით – მას **ამომგდებ ძალას** უწოდებენ. ამ ძალის შესაფასებლად გამოვიყენოთ გამყარების პრინციპი (§61).



ნახაზი 64.1.

წარმოვიდგინოთ, რომ სხეული მოვაშორეთ სითხეს და “გამოთავისუფლებული” მოცულობა ისევ დაიკავა “გამყარებულმა” სითხემ. ეს “გამყარებული” ნაწილი წონასწორობაშია, ე.ი., სითხის დანარჩენი ნაწილიდან მასზე მოქმედი ჯამური წნევის ძალა სიდიდით “გამყარებული” ნაწილის წონის ტოლია, გადის მის სიმძიმის ცენტრზე და მიმართულია ვერტიკალურად ზევით. ცხადია, წონასწორობა არ დაირღვევა, თუ “გამყარებულ” სითხეს ისევ “ჩავანაცვლებთ” სხეულით, ე.ი.,

➤ **სითხეში (ან აირში) ჩაძირულ სხეულზე სითხის მხრიდან მოქმედებს ამომგდები ძალა, რომელიც ამ სხეულის მიერ გამოდევნილი სითხის წონის ტოლია და მოდებულია იმ წერტილში სადაც იქნებოდა ამ სხეულის „შემცვლელი” გამყარებული სითხის სიმძიმის ცენტრი**

$$F_{\text{არქ}} = P^* .$$

ჰიდროაეროსტატიკის მოცემული კანონი ეკუთვნის ძვ. წელ. აღ. მესამე საუკუნის ძველ ბერძენ მეცნიერს **არქიმედეს**, რომლის უკვდავსაყოფად ამ კანონს **არქიმედეს კანონი** უწოდეს.

თუ სხეულის აჩქარება ნულის ტოლია, მაშინ სხეულის წონა რიცხობრივად სიმძიმის ძალის ტოლია  $P = P^*$  (§21), ამიტომ ამ შემთხვევაში არქიმედეს ძალა გამოისახება ფორმულით

$$F_{\text{არქ}} = m_{\text{სითხე}} g \quad \text{ან} \quad F_{\text{არქ}} = m_{\text{აირ}} g , \quad (64.1)$$

სადაც  $m_{\text{სითხე}}$  ( $m_{\text{აირ}}$ ) სხეულის მიერ გამოდევნილი სითხის (აირის) მასაა. (64.1) ასეც შეიძლება ჩავწეროთ:

$$F_{\text{არქ}} = \rho_{\text{სითხე}} g V \quad \text{ან} \quad F_{\text{არქ}} = \rho_{\text{აირ}} g V , \quad (64.2)$$

ცხადია, თუ სხეული უწონად მდგომარეობაშია, მასზე მოქმედი არქიმედეს ძალა ნულის ტოლია.

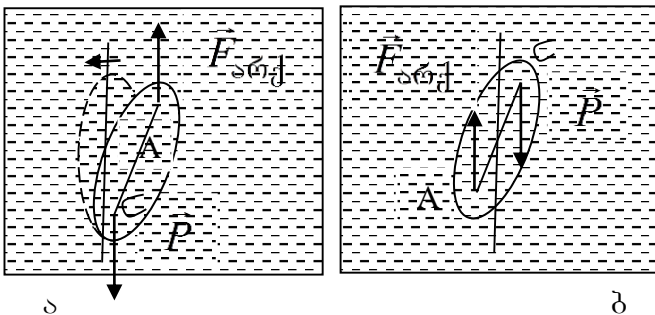
მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ:

➤ არქიმედეს ძალა დამოკიდებულია მხოლოდ სხეულის გარშემოწერილობაზე - მოცულობაზე, ანუ მოცემულ სითხეში (აირში) მოთავსებულ ერთნაირი მოცულობის მქონე ღრუ და მასიურ სხეულზე, დამოუკიდებლად მისი მასალისა, ერთნაირი სიდიდის არქიმედეს ძალა მოქმედებს.

იმისთვის, რომ სითხეში (აირში) მთლიანად ჩაძირული სხეული წონასწორობაში იმყოფებოდეს (იგულისხმება, არ ეხება ფსკერს, შეტივტივებულია - ცურავს), საჭიროა სიმძიმის და არქიმედეს ძალები სიდიდით ტოლი იყოს და მოქმედებდეს ერთ წრფეზე, ანუ სხეულის სიმძიმის ცენტრი  $C$  და გამოდევნილი მოცულობის სიმძიმის ცენტრი  $A$  ერთ ვერტიკალზე უნდა იყოს. წონასწორობა მდგრადი იქნება, თუ მცირე გადახრისას აღძრული ძალთა მომენტი სხეულს დააბრუნებს პირვანდელ მდგომარეობაში. ეს განხორციელდება იმ შემთხვევაში, თუ  $A$ -ცენტრი იმყოფება  $C$ -ცენტრზე ზევით (ნახ. 64.2ა), წინააღმდეგ შემთხვევაში წონასწორობა არამდგრადია, აღძრული ძალთა მომენტი კიდევ უფრო დააშორებს სხეულს პირვანდელ მდგომარეობას (ნახ. 64.2ბ). მაშასადამე

1. თუ  $P = F_{\text{არქ}}$ , სხეული შეტივტივებულია - ცურავს;
2. თუ  $P > F_{\text{არქ}}$ , სხეული იძირება;
3. თუ  $P < F_{\text{არქ}}$ , სხეული ტივტივებს.

შევნიშნოთ, რომ, თუ სხეული მჭიდროდ ეხება ჭურჭლის ფსკერს, მაშინ ამომგდები ძალა ნულის ტოლია, სითხის მხრიდან მოქმედი წნევის ძალა კიდევ უფრო "აკრავს" მას ფსკერზე.



ნახაზი 64.2

აეროსტატების და სტრატოსტატების ძირითადი ნაწილია მსუბუქი აირით (წყალბადი, ჰელიუმი) გავსებული დიდი ზომის ბურთი, რომელზეც ატმოსფეროს მხრიდან მოქმედი არქიმედეს ძალა განაპირობებს მის ვერტიკალურ მოძრაობას ზევით, მაგრამ სიმაღლის ზრდასთან

ერთად მცირდება ატმოსფეროს სიმკვრივე და მცირდება არქიმედეს ძალა. როდესაც არქიმედეს ძალა უტოლდება აეროსტატის წონას, მისი შემდგომი მოძრაობა ზევით წყდება. არქიმედეს ძალა მნიშვნელოვან როლს თამაშობს გემების და თვითმფრინავების მოძრაობაში.

**ამოცანა 64.1.** რა მაქსიმალური რაოდენობის მგზავრის აყვანა შეუძლია 15 მ დიამეტრის საჰაერო ბურთს, თუ მასში ცხელი აირის სიმკვრივე ჰაერის სიმკვრივის 60%-ს შეადგენს,  $\rho_{\text{ჰ}} = 1,3 \text{ კგ/მ}^3$ .

**ამოხსნა:**

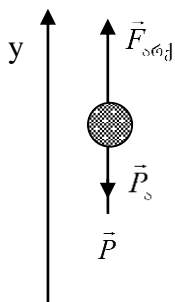
ნიუტონის II კანონის თანახმად:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{არქ}} + \vec{P} + \vec{P}_{\text{აირ}},$$

დავაგეგმილოთ:

$$ma + F_{\text{არქ}} - P - P_{\text{აირ}} = 0,$$

რადგან საჭიროა მაქსიმალური რაოდენობის მგზავრთა აყვანა, საჰაერო ბურთმა უნდა იმოძრაოს თანაბრად ( $a = 0$ ). ე.ი.  $P = F_{\text{არქ}} - P_{\text{აირ}}$ ,  $mg = \rho_{\text{ჰ}}gV - \rho_{\text{აირ}}gV$ , საიდანაც:



$$m = (\rho_3 - \rho_{\text{ორ}})V = 0,4\rho_3V,$$

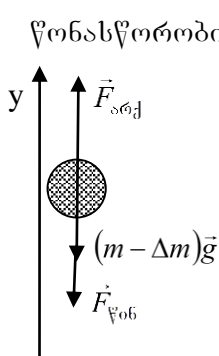
სადაც  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \left( R = \frac{15}{2} \text{ მ} \right)$ , ბურთის მოცულობაა:

$$m = 0,4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \rho_3 R^3 = 0,4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1,3 \cdot \left( \frac{15}{2} \right)^3 \approx 918 (\text{კგ}).$$

მგზავრთა საშუალო მასა ავიღოთ 75კგ, მაშინ საპაერო ბურთმა დაახლოებით შეიძლება აიყვანოს 12 მგზავრი.

**ამოცანა 64.2.** რა მასის ბალასტი უნდა გადმოვაგდოთ წონასწორობაში მყოფი აეროსტატიდან, რომ მან დაიწყოს ვერტიკალურად ზევით მოძრაობა 0,2 მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით. აეროსტატის მოცულობაა 1000 მ<sup>3</sup>, ჰაერის სიმკვრივეა  $\rho_3 = 1,3$  კგ/მ<sup>3</sup>. წინააღმდეგობის საშუალო ძალა არქიმედეს ძალის 5%-ია.

**ამოხსნა:**



წონასწორობის პირობაა  $F_{\text{არქ}} = mg$ ,  $\rho g V = mg$ ,  $m = \rho V = 1,3 \cdot 10^3$  (კგ). წონასწორობა

დაირღვევა, თუ აეროსტატიდან გადმოვაგდებთ  $\Delta m$  – მასის ბალასტს. მაშინ ნიუტონის II კანონის თანახმად,

$$(m - \Delta m)\vec{a} = (m - \Delta m)\vec{g} + \vec{F}_{\text{წინ}} + \vec{F}_{\text{არქ}},$$

$$(m - \Delta m)a = -(m - \Delta m)g - 0,05F_{\text{არქ}} + F_{\text{არქ}},$$

$$(m - \Delta m)a = -(m - \Delta m)g + 0,95mg,$$

$$\Delta m = \frac{m(a + 0,05g)}{g + a} = 89 (\text{კგ}).$$

**ამოცანა 64.3.** მუხის ღრუ ბურთულა (გარე დიამეტრია 0,04 მ, შიგა 0,01 მ) ტივტივებს წყალში. რა სიმკვრივის ნივთიერებით უნდა შევავსოთ სიდრუე, რომ ბურთულა შეტივტივებული აღმოჩნდეს ( $\rho_{\text{მუხა}} = 0,8 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{წყ}} = 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>)?

**ამოხსნა:**

ბურთულა, ნივთიერებით შევსების შემდეგ, შეტივტივებულია, ანუ მუხისა და ნივთიერების სიმძიმის ძალები გაწონასწორებულია არქიმედეს ძალით:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{F}_{\text{არქ}} \text{ ანუ } \rho_{\text{მუხა}} g V_1 + \rho_x g V_0 = \rho_{\text{წყ}} g V,$$

აქედან:

$$\rho_x = \frac{\rho_{\text{წყ}} V - \rho_{\text{მუხა}} V_1}{V_0}, \tag{1}$$

სადაც  $V_1 = 1/6 B(d^3 - d_0^3)$  მუხის,  $V_0 = 1/6 B d_0^3$  სიდრუის მოცულობაა, ხოლო  $V = 1/6 B d^3$  ბურთულას სრული მოცულობაა. მაშინ (1) მიიღებს სახეს:

$$\rho_x = \frac{\rho_{\text{წყ}} d^3 - \rho_{\text{მუხა}} (d^3 - d_0^3)}{d_0^3}, \quad \rho_x = \frac{10^3 \cdot 64 \cdot 10^{-6} - 0,8 \cdot 10^3 (64 - 1) 10^{-6}}{10^{-6}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ კგ/მ}^3.$$

უცნობი ნივთიერების სიმკვრივე ვერცხლისწყლის სიმკვრივის ტოლი აღმოჩნდა.

## **§65. ზედაპირული დაჭიმულობა და კაპილარობა**

ჩვენ განვიხილავთ სითხეთა ზედაპირულ დაჭიმულობას, რომელიც დამახასიათებელია მხოლოდ ნივთიერებათა თხევადი მდგომარეობისთვის და წარმოადგენს მათი აირადი მდგომარეობიდან განმასხვავებელ ერთ-ერთ ძირითად თვისებას. მისი არსებობა შეიძლება აიხსნას მოლეკულური თეორიით. განვიხილოთ თავისუფალი (შემოუზღუდავი) სითხის სიღრმეში და მის ზედაპირზე არსებული  $a$  და  $b$  მოლეკულა, შემოვხაზოთ მათ ირგვლივ მოლეკულის მოქმედების რადიუსის ( $\approx 10^{-8}$ მ) სფერული ზედაპირები. ნახ. 65.1-ზე ადვილად შევამჩნევთ, რომ  $a$ -ს ირგვლივ სითხის სხვა მოლეკულათა თანაბარი განაწილების გამო მასზე მოქმედ ძალთა ტოლქმედი ნულია  $\vec{F}_a = 0$ .  $b$  მოლეკულის მოქმედების სფეროში ხვდება როგორც სითხის, ასევე აირის მოლეკულები. რადგან ამ უკანასკნელთა მოქმედება უფრო სუსტია, ვიდრე სითხის მოლეკულების, ამიტომ  $b$ -ზე მოქმედ ძალთა ტოლქმედი  $\vec{F}_b \neq 0$  და მიმართულია სითხის სიღრმეში, რაც იწვევს ზედაპირის გარკვეულ მოჭიმვას მანამ, სანამ მისი მოქმედება არ კომპენსირდება შემჭიდროებული ქვედა ფენის მოლეკულათა განზიდვის ძალებით.

მოლეკულათა გადატანა სითხის სიღრმიდან ზედაპირზე ანუ ზედაპირის ფართობის გაზრდა, დაკავშირებულია ამ ძალთა დასაძლევად გარკვეული მუშაობის შესრულებასთან. კერძოდ, ზედაპირის  $dS$  სიდიდით გაზრდისას იზოთერმულ პირობებში ( $T = const$ ) შესრულებული ელემენტარული მუშაობა  $dA$   $dS$ -ის პროპორციულია, ე.ი.:

$$dA = \sigma dS, \tag{65.1}$$

სადაც  $\sigma$  – **სითხის ზედაპირული დაჭიმულობის კოეფიციენტი**, მისი ერთეულია ჯგ/მ<sup>2</sup> (ნ/მ). იგი დამოკიდებულია სითხის გვარობაზე, მკვეთრად მცირდება ტემპერატურის ზრდით. ყველაზე გავრცელებული სითხის – წყლის ზედაპირული დაჭიმულობა 0,072 ნ/მ ( $t = 20^{\circ}C$ ). რადგან უცვლელი ტემპერატურის პირობებში სითხის ზედაპირის გაზრდა თხოულობს მუშაობის შესრულებას, ამიტომ ზედაპირზე მყოფ მოლეკულათა პოტენციური ენერგია აღემატება სიღრმეში მყოფ მოლეკულათა პოტენციურ ენერგიას. ამ ენერგიათა სხვაობას **ზედაპირული ენერგია** ეწოდება.

პირიქით, სითხის ზედაპირის ფართობის შემცირებისას მცირდება სითხის პოტენციური ენერგია. რადგან მდგრად წონასწორობაში სისტემის პოტენციური ენერგია მინიმალურია (§34), სითხე ყოველთვის მიისწავის დაიკავოს მოცულობა უმცირესი ზედაპირული ფართობით, ანუ მიიღოს სფეროს – წვეთის ფორმა<sup>45</sup>, რასაც ხელს უშლის გრავიტაციის ძალები.

თუ სითხე იმყოფება ჭურჭელში, მაშინ სითხისა და მყარი სხეულის მოლეკულათა ურთიერთქმედების გამო ჭურჭლის კედლებთან შეიმჩნევა სითხის ზედაპირის გამრუდება – ამ მოვლენას **დასველება** ეწოდება. თუ ჭურჭელი იმდენად ვიწროა, რომ სითხის ზედაპირის ყველამოლეკულა ურთიერთქმედებს კედლის მოლეკულებთან (*კაპილარული მილი*) დაიმზირება მთელი ზედაპირის გამრუდება. ასეთ ზედაპირს **მენისკს** უწოდებენ, ხოლო წირს, რომელზეც გადაიკვეთება მენისკი ჭურჭლის კედლებთან, **დასველების კონტურს**. დასველებას ახასიათებენ  $\theta$  **განაპირა კუთხით**, ეს ის კუთხეა, რომელსაც მენისკის მხები სიბრტყე ქმნის ჭურჭლის კედელთან, სითხის მხრიდან (ნახ. 65.2).

<sup>45</sup>ერთნაირი მასის ნებისმიერი ფორმის სხეულთაგან უმცირესი ზედაპირული ფართობი გააჩნია სფეროს.

თუ სითხისა და მყარი სხეულის (ჭურჭლის) მოლეკულათა ურთიერთქმედების ძალები (*ადგეზია*) ჭარბობს სითხის მოლეკულებს შორის ურთიერთქმედების ძალებს (*კოგეზია*), მენისკი ჩაზნექილია,  $\theta$  მახვილია (ნახ. 65.2ა). ასეთი სითხე მოცემული მყარი სხეულისთვის *დამსველებელია* (წყალი – მინა) საპირისპირო შემთხვევაში მენისკი ამოზნექილია,  $\theta$  ბლაგვია (ნახ. 65.2ბ) და სითხე *არადამსველებელია* (ვერცხლისწყალი – მინა). ცხრილ 65.1-ში მოცემულია  $\theta$  კუთხის მნიშვნელობა ზოგიერთი სითხისა და მყარი ნივთიერების კონტაქტისას.

ცხრილი 65.1

ნივთიერება	$\theta$
წყალი - მინა	$0^\circ$
ორგ. სითხეთა (უმრავ.) - მინა	$0^\circ$
ვერცხ. წყ. - მინა	$140^\circ$
აღი - პარაფინი	$107^\circ$
ნავთი - მინა	$26^\circ$

ადგეზიის და კოგეზიის ძალთა მოქმედება ქმნის ზედაპირულ დაჭიმულობათა ძალებს, რომლებიც განაპირობებს მენისკის წარმოქმნას. ამ ძალთა მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული მენისკის ფართობზე.

➤ *ზედაპირული დაჭიმულობის ძალები მდებარეობს მენისკის მხებ სიბრტყეში, დასველების კონტურის მართობულად და მისი სიგრძის პროპორციულია.*

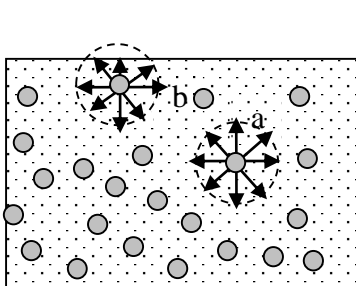
ამ ძალთა გეგმილები  $XOZ$  სიბრტყეში ერთმანეთს აბათილებს, ხოლო  $OY$  ღერძის მიმართ იკრიბება:

$$F = \sigma l \cos \theta. \quad (65.2)$$

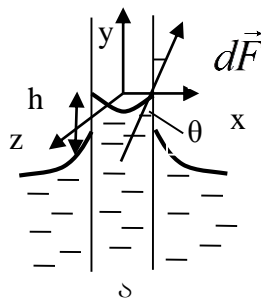
დამსველებელი სითხის შემთხვევაში იგი მიმართულია ვერტიკალურად ზევით, რაც განაპირობებს სითხის გარკვეული რაოდენობის შეწოვას მილში მანამ, სანამ კაპილარული სვეტის წონა არ გაუტოლდება ამ ძალას

$$mg = F (P^* = P), \quad \rho g V = \sigma l \cos \theta,$$

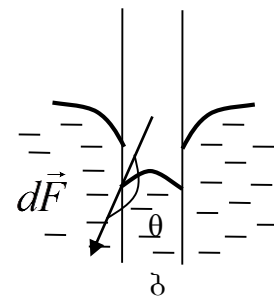
სადაც  $V = Sh = \pi^2 h$  ცილინდრული კაპილარული სვეტის მოცულობაა, ხოლო  $l$



ნახაზი 65.1



ნახაზი 65.2



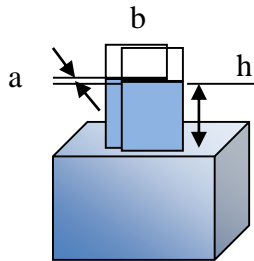
დასველების კონტურის სიგრძეა. თუ კაპილარულ მილს ცილინდრის ფორმა აქვს, მაშინ დასველების კონტურს წრეწირის ფორმა აქვს  $l = 2\pi r$  ე.ი.  $\rho g \pi r^2 h = \sigma 2\pi r \cos \theta$

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}. \quad (65.3)$$

(65.3) სამართლიანია, აგრეთვე, არადამსველებელი სითხისთვისაც ( $\theta > 90^\circ$ ). მაშინ  $h$ -ის წინ მიიღება ნიშანი “-” ( $\cos \theta < 0$ ), რაც მიუთითებს იმაზე, რომ სითხე კაპილარში ეშვება ქვევით. (65.3)-ის თანახმად, ორივე შემთხვევაში სვეტის სიმაღლე მით მეტია, რაც მცირეა კაპილარული მილის რადიუსი.

**ამოცანა 65.1.** რა სიმაღლეზე აიწევს წყალი კაპილარობის გამო ორ მინის პარალელურ ფირფიტას შორის, თუ ისინი ვერტიკალურად ჩაშვებულია  $20^{\circ}\text{C}$  წყალში და მათ შორის მანძილია  $a = 0,11\text{მმ}$ .

**ამოხსნა:**



ცხადია, ფირფიტებს შორის არსებულ წყალზე მოქმედი სიმძიმის ძალა გაწონასწორებული აღმოჩნდება დაჭიმულობის ძალის მიერ.

ე.ი.:

$$mg = F, \quad \rho g V = \sigma \ell \cos \theta^0, \quad \rho g a b h = 2 \sigma b, \quad h = \frac{2 \sigma}{\rho g a}.$$

$$h = \frac{2 \sigma}{\rho g a} = \frac{2 \cdot 0,072}{10^3 \cdot 9,8 \cdot 1,1 \cdot 10^{-4}} = 0,13(\text{მ}).$$

**ამოცანა 65.2.** წვეთოვანაში მინის კაპილარის დიამეტრია  $0,24\text{ მმ}$ , მასში ჩასხმულია ორგანული სითხე რა რადიუსის სითხის წვეთი მოწყდება კაპილარს, თუ სითხის სიმკვრივეა  $1,2 \cdot 10^3\text{ კგ/მ}^3$ , ზედაპირული დაჭიმულობის კოეფიციენტი  $0,064\text{ ნ/მ}$ .

**ამოხსნა:**

წვეთის მოწყვეტის მომენტში:

$$mg = F, \quad \rho g V = \sigma \ell \cos \theta^0, \quad \rho g \frac{4}{3} \pi r^3 = \sigma \pi d \cos \theta^0, \quad r = \sqrt[3]{\frac{3 \sigma d}{4 \rho g}},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,064 \cdot 2,4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 9,8}} = 9,9 \cdot 10^{-4}(\text{მ}),$$

$$r = 1\text{ მმ}.$$



## §66. დინების ტიპები და მათი ხასიათი

**ჰიდროაეროდინამიკა** წარმოადგენს ჰიდროაერომექანიკის იმ ნაწილს, რომელიც შეისწავლის სითხეებისა და აირების მოძრაობის კანონებს და იმ ძალებს, რომლებიც მოქმედებს მასში მყოფ სხეულთა ზედაპირზე.

სითხეთა და აირთა დინების შესწავლის ორი მეთოდი არსებობს. ერთ-ერთი მათგანი შეიძლება ფრანგმა მათემატიკოსმა **ჟოზეფ ლუი ლაგრანჟმა**, იგი ნიუტონის კანონებზე დაყრდნობით განიხილავს თითოეული ნაწილაკის (ელემენტარული მოცულობის) მოძრაობას. ეს გამოთვლები საკმაოდ რთულია და შრომატევადი. მეორე მეთოდი შემოიტანა შვეიცარიელი მათემატიკოსმა **ლეონარდ ეილერმა**, იგი იკვლევს არა ნაწილაკთა ტრაექტორიას, არამედ აღწერს დინების თითოეულ წერტილში მახასიათებელ პარამეტრებს. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, თითოეულ წერტილში განსაზღვრავს, სინქარეს, აჩქარებას, სიმკვრივეს როგორც დროის ფუნქციას.

განასხვავებენ **დინების** ორ ტიპს – **ლამინარულს** და **ტურბულენტურს**.

**ლამინარული** (ლათ. ზოლოვანი, ფენოვანი) დინება მდორეა, მოსაზღვრე ფენები ისე გადაადგილდება ერთმანეთის მიმართ, რომ შერევას ადგილი არა აქვს, ანუ ნაწილაკთა ტრაექტორიები არ გადაიკვეთება. თუ ასეთ დინებაში ჩავაწვეთებთ ცოტაოდენ შეფერილ ხსნარს, იგი ვიწრო ზოლად გაყვება დინებას და არ შეღებავს მას (ნახ. 66.1ა).

**ტურბულენტური** (ლათ. უწესრიგო, ქარიშხლიანი) დინებისას ნაწილაკთა ტრაექტორია განუწყვეტლივ იცვლება, რაც იწვევს ფენათა ინტენსიურ შერევას (ნახ. 66.1).



**ნახაზი 66.1**

ზოგადად დაბალი სიჩქარის შემთხვევაში დინება ლამინარულია, მაღალი სიჩქარის შემთხვევაში – ტურბულენტური, მაგრამ გადასვლის საზღვარი მრავალ ფაქტორზე დამოკიდებული, მას ჩვენ შემდგომში შევისწავლით.

ორივე დინებას შეიძლება აღმოაჩნდეს შემდეგი თვისებები და ხასიათი:

1. სითხის (აირის) დინება შეიძლება იყოს ისეთი, რომ მის სხვადასხვა უბანში სიმკვრივე უმნიშვნელოდ იცვლებოდეს. ასეთ შემთხვევაში სითხე (აირი) განიხილება როგორც **უკუმშვადი**  $\rho(x, y, z, t) = const$ , რაც საგრძნობლად ამარტივებს გამოთვლებს;
2. როგორც სითხის, ასევე აირის დინებისას გამოვლინდება შინაგანი ხახუნის, ანუ სიბლანტის ძალები, განსაკუთრებით ტურბულენტური დინების დროს, თუმცა ხშირად შესაძლებელია სიბლანტის უგულებელყოფა და **იდეალური** დინების განხილვა;
3. დინება შეიძლება იყოს **სტაციონარული – დამყარებული**. ამ დროს ნაკადის თითოეულ წერტილში სიჩქარე დროში უცვლელია – მუდმივია, თუმცა სხვადასხვა წერტილში მათი მნიშვნელობა შეიძლება ერთმანეთისგან განსხვავებული იყოს. თუ მოცემულ წერტილში სიჩქარე იცვლება, დინება **არასტაციონარულია**;
4. დინება შეიძლება იყოს **გრივალური ანარაგრივალური – პოტენციური**. თუ სითხის ან აირის ნაწილაკები გადატანითი მოძრაობის გარდა ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას მყისიერი ღერძის მიმართ, დინება **გრივალურია**. მისი წარმოშობის მიზეზია ორი მეზობელი ფენის სიჩქარეების მკვეთრი განსხვავება. ერთი ფენის მეორეზე დამამუხრუჭებელი მოქმედება, ხოლო მეორე ფენის პირველზე ამანქარებელი მოქმედება ერთიანობაში იწვევს ნაწილაკთა ბრუნვას. გრივალური მოძრაობა წარმოიქმნება იქ, სადაც სიბლანტე მეტია, მაგალითად, სითხესა და აირში მოძრავი სხეულის მოსაზღვრე შრეში. ის გავლენას ახდენს როგორც ამწევი ძალის, ასევე შუბლა წინააღმდეგობის ძალის მნიშვნელობაზე. ამიტომ მისი გათვალისწინება არსებითია თვითმფრინავის ფრთების და საჰაერო ხრახნის კონსტრუირებისას. იდეალური დინებისას, მასში თავისით გრივალური მოძრაობა არ წარმოიქმნება, ხოლო თუ ხელოვნურად შეექმნით, არ შეწყდება.

დინების შესწავლისას შემდგომში გამოყენებთ ეილერის მეთოდს.

**§67. დენის წირები და მილი.  
ნაკადის უწყვეტობის განტოლება**

მიღების მეთოდის გამოყენებისას დინებას გრაფიკულად გამოსახვისათვის სარგებლობენ დენის წირებით დადენისმილით.

➤ **დენის წირი ისეთი წირია, რომლის თითოეულ წერტილში გაფლებული მხები გვიხვენებს ამ წერტილში სითხის (აირის) სიჩქარის ვექტორის მიმართულებას.**

ცხადია, ეს წირები ერთმანეთს არ კვეთს, წინააღმდეგ შემთხვევაში გადაკვეთის წერტილში სიჩქარის მიმართულება ცალსახა არ იქნებოდა. დენის წირი ნაკადის ნებისმიერ წერტილში შეიძლება გაივლოს, მაგრამ იფარგლებიან მხოლოდ რამოდენიმე წირით. მათ სისშირეს, ანუ დინების მართობულ ფართის ერთეულში გამავალ წირთა რაოდენობას, არჩევენ ისე, რომ იგი ამ არეში ნაკადის სიჩქარის სიდიდის პროპორციული იყოს.

➤ **დენის მილი ეწოდება დენის წირთა ერთობლიობას, რომელიც გადის დინების მართობულად აღებულ რაიმე მცირე ზომის შეკრულ კონტურში.**

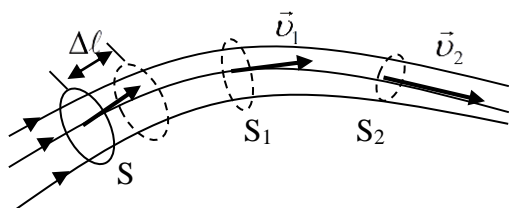
თუ დინება არასტაციონარულია, დენის წირები და, შესაბამისად, მილი განუწყვეტლივ იცვლის თავის ფორმას. სტაციონარული დინების დროს დენის წირები ემთხვევა ცალკეულ ნაწილაკთა ტრაექტორიას და გააჩნია უცვლელი ფორმა. აქედან გამომდინარე, სტაციონარული დინების დენის მილის “კედლები” შეუღწევადია – მილის შიგნით მყოფ არცერთ ნაწილაკს არ შეუძლია დატოვოს მილი და პირიქით (რადგან ნაწილაკის სიჩქარეს მილის “კედლის” მხები მიმართულება გააჩნია). ე.ი., დენის მილის ნებისმიერ კვეთაში დროის ერთეულში გასული სითხის (აირის) მასა მუდმივია. სტაციონარული დინებისას დენის მილის “კედლები” თანხვედრია იმ მილის მყარი კედლებისა, რომელშიც მიედინება ნაკადი.

განვიხილოთ სტაციონარული ლამინარული დინება და შევისწავლოთ, როგორ იცვლება დინების სიჩქარე დენის მილის განივკვეთის ცვლილებასთან ერთად. განვიხილოთ იმდენად ვიწრო დენის მილი, რომ მისი მართობულად ნებისმიერ კვეთის ყოველ წერტილში სიჩქარეს ჰქონდეს მუდმივი მნიშვნელობა (ნახ. 67.1) გამოვთვალოთ  $\Delta t$  დროში რაიმე  $S$  კვეთაში გადატანილი სითხის მოცულობა  $\Delta V = S \cdot \Delta l = S v \Delta t$ , სადაც  $\Delta l = v \Delta t$  – არის ამ კვეთიდან გასული ნაწილაკის მიერ  $\Delta t$  დროში გავლილი მანძილი. დროის ერთეულში დინების მართობულ კვეთაში გადატანილი სითხის (აირის) მოცულობა- **მოცულობის გასაგალი** იქნება:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S v. \quad (67.1)$$

შესაბამისად დინების მართობულ კვეთაში დროის ერთეულში გადატანილი სითხის (აირის) მასა-**მასის გასაგალი**, იქნება

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S v. \quad (67.2)$$



ნახაზი 67.1.

დაუშვათ, რომ დენის მილის  $S_1$  და  $S_2$  მართობულ კვეთებში სიჩქარე შესაბამისად იყოს  $v_1 = const$  და  $v_2 = const$ . რადგან დინება სტაციონალურია მასის გასაგალი მოცემული მილის ნებისმიერ კვეთაში

ერთნაირია, ე.ი.

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2, \quad \rho S v = const. \quad (67.3)$$

(67.3) წარმოადგენს ნაკადის უწყვეტობის განტოლებას. თუ სითხე (აირი) უკუმშვადია  $\rho_1 = \rho_2$  და (93.2)-დან მივიღებთ:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad Sv = \text{const.} \quad (67.4)$$

➤ სტაციონარული ლამინარული დინების დროს დენის მილის ნებისმიერ მართობულ კვეთაში მასის გასავალი მუდმივია ხოლო, თუ ნაკადი უკუმშვადია, მოცულობის გასავალიც უცვლელი რჩება. (67.4)-დან:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_2}{v_1}, \quad (67.5)$$

➤ უკუმშვადი ნაკადის დროს იქ სადაც დენის მილი (ან ნამდვილი მილი) ვიწროა, სიჩქარე დიდია და პირიქით.

ზოგადად იგივე შედეგს ვღებულობთ კუმშვადობის პირობებში, ოღონდ სიჩქარე არ უნდა აჭარბებდეს მოცემულ არეში ბგერის გავრცელების სიჩქარეს<sup>46</sup>. ასეთ შემთხვევაში დენის მილი შეკუმშვის ნაცვლად ფართოვდება და აღნიშნული განტოლებები ძალას კარგავს.

(67.1) და (67.4) შეიძლება გამოვიყენოთ მილში სიბლანტის მქონე სითხის (აირის) დინების დროსაც, მხოლოდ სიჩქარეებში უნდა ვიგულისხმოთ მოცემულ კვეთებში ნაკადის საშუალო სიჩქარე.

**ამოცანა 67.1.** რა დრო დაჭირდება  $3,1 \times 9,5 \times 21$  მ მოცულობის აუზის ავსებას 1,9სმ დიამეტრის მქონე მილის საშუალოებით, თუ მილში წყლის დინების სიჩქარეა 1,5მ/წმ? როგორ შეიცვლება აუზის ავსების ხანგრძლივობა: 1. წყლის დინების სიჩქარის 2-ჯერ გაზრდისას? 2. წყლის მილის დიამეტრის 2-ჯერ გაზრდისას?

**ამოხსნა:**

აუზის მოცულობა:

$$V = 3,1 \times 9,5 \times 21 = 618,45(\text{მ}^3).$$

(67.1)-ის თანახმად:

$$\frac{V}{t} = Sv,$$

აქედან:

$$t = \frac{V}{Sv} = \frac{4V}{\pi d^2 v}. \quad (1)$$

$$t = \frac{4 \cdot 618,45}{3,14 \cdot 3,61 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5} = 404.(\text{სთ}).$$

1. ამოცანის პირობის თანახმად,  $v_1 = 2v$ , ამიტომ, (1)-ის გამო

$$t_1 = \frac{t}{2} = 202 (\text{სთ}).$$

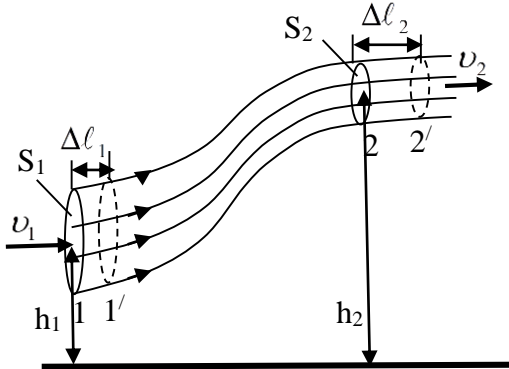
2. ვინაიდან  $d_1 = 2d$ , ამიტომ:

$$t_1 = \frac{t}{4} = 101(\text{სთ}).$$

<sup>46</sup>ამ საკითხს დაეუბრუნდებით II ნაწილში.

### §68. ბერნულის განტოლება

ჩვენ განვიხილოთ ჰიდროაეროსტატიკური წნევა, ანუ წნევა უძრავი სითხის (აირის) შემთხვევაში. ახლა შევისწავლოთ წნევა ნაკადში. განვიხილოთ უკუმშვადი სითხის (აირის) ისეთი სტაციონარული ლამინარული დინება, რომლის სიბლანტეც უგულებელყოფილია. გამოვიყუთ 1;2 კვეთებით შემოსაზღვრული დენის მილი (ნახაზი 67.1).  $S_1$  და  $S_2$ -ით აღვნიშნოთ



ნახაზი. 68.1

კვეთების ფართობები,  $h_1$  და  $h_2$ -ით – მათი დაშორება (სიმაღლე) – ათვლის დონიდან,  $v_1$  და  $v_2$ -ით ნაკადის სიჩქარეები აღნიშნულ კვეთებში, ხოლო  $p_1$  და  $p_2$ -ით – წნევა.

$\Delta t$  მცირე დროში 1;2 კვეთებით შემოსაზღვრული სითხის ელემენტი წაინაცვლებს და დაიკავებს ახალ 1';2' მდებარეობას. მარცხენა საზღვარი გადაინაცვლებს  $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$ , ხოლო მარჯვენა  $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$  მანძილით ( $\Delta t$  იმდენად მცირეა, რომ 1, 1' და 2, 2' კვეთებით შემოსაზღვრულ არეებში

შესაბამისი  $S, v, h, p$  რჩება უცვლელი). შეიცვლება სითხის მოცემული ელემენტის ენერგიაც, მაგრამ დინების სტაციონარულობისა და შინაგანი ხახუნის არარსებობის გამო, 1' და 2 კვეთებს შორის მოთავსებული სითხის ნაწილის ენერგია დარჩება უცვლელი, რის გამოც მოცემული ელემენტის ენერგიის ცვლილება იქნება იგივე, რაც გვექნებოდა 1;1' კვეთებით შემოსაზღვრულ სითხეს რომ დაეკავებინა 2;2' კვეთებით შემოსაზღვრული ნაწილი. ნაკადის უკუმშვადობიდან გამომდინარე, ტოლია ამ ნაწილთა მოცულობები  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$  ( $\Delta V_1 = S_1 \Delta l_1, \Delta V_2 = S_2 \Delta l_2$ ) და სითხის შესაბამისი მასები  $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$  ( $\Delta m = \rho \Delta V$ ). ზემოთქმულის თანახმად, სითხის მოცემული ელემენტის მექანიკური ენერგიის ცვლილება იქნება:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \left( \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 \right) - \left( \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 \right). \quad (68.1)$$

სიბლანტის ძალთა არარსებობის გამოსითხის მოცემული ელემენტის ენერგიის ცვლილების მიზეზია გარე ძალთა მუშაობა:

$$\Delta W = A. \quad (68.2)$$

გარე ძალები ის წნევის ძალებია, რომლებიც მოქმედებს სითხის მოცემულ ელემენტზე. დენის მილის გვერდით კედლებზე მოქმედი წნევის ძალები სითხის გადაადგილებისადმი მართობულია და მუშაობას არ ასრულებს. მუშაობას ასრულებს მხოლოდ  $S_1$  და  $S_2$  ფართობებზე მოქმედი წნევის ძალები. ამასთან,  $F_1 = p_1 S_1$  მიმართულია დინების გასწვრივ და ასრულებს დადებით მუშაობას, ხოლო  $F_2 = p_2 S_2$  მიმართულია დინების საპირისპიროდ და მისი მუშაობა უარყოფითია. ასე, რომ გარე ძალთა ჯამური მუშაობა იქნება:

$$\begin{aligned} A &= F_1 \Delta l_1 - F_2 \Delta l_2 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = \\ &= p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2 = (p_1 - p_2) \Delta V \\ A &= (p_1 - p_2) \Delta V. \end{aligned} \quad (68.3)$$

შევიტანოთ (68.1), (68.3) (68.2)-ში და გავითვალისწინოთ, რომ  $\Delta m = \rho \Delta V$ , შედეგად მივიღებთ

$$\left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2\right) - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1\right) = p_1 - p_2,$$

$$p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}. \quad (68.4)$$

ეს განტოლება მიღებული იქნა 1738 წელს **დანიელ ბერნულის** მიერ. ბერნულის განტოლების სიზუსტე მაქსიმალურია მაშინ, როდესაც დენის მილის კვეთა მილის ნებისმიერ უბანში მიისწრაფის ნულისკენ, ანუ როდესაც დენის მილი იკუმშება დენის წირამდე. აქედან გამომდინარე, განტოლების მარცხენა და მარჯვენა ნაწილში შემავალი  $p, v$  და  $h$  სიდიდეები განიხილება როგორც ერთი და იმავე წირის ორნებისმიერ წერტილში დინების მახასიათებელი სიდიდეები. ვინაიდან 1 და 2 წერტილები ნებისმიერად იქნა შერჩეული, (68.4) ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = C. \quad (68.5)$$

$C$  მუდმივი სიდიდეა მოცემული დენის წირისთვის და, ზოგადად, იცვლის თავის მნიშვნელობებს ერთი წირიდან მეორეზე გადასვლისას.

### **§69. ბერნულის განტოლის კერძო შემთხვევები და მათი გამოყენება**

ბერნულის განტოლება მიღებული იქნა იდეალური – შინაგანი ხახუნის არმქონე ნაკადისთვის. შესაბამისად, უგულვებელყოფილი იყო მექანიკური ენერჯის გარდაქმნა სითბურ ენერჯიაში. მისი გათვალისწინება თხოულობს საკმაოდ რთულ თეორიულ გამოთვლებს, თუმცა შეენიშნოთ, რომ ბერნულის განტოლების გამოყენება ყოველგვარი შესწორებების გარეშე საკმაოდ კარგად ხსნის მთელ რიგ მოვლენებს რეალურ ნაკადში, თუ შინაგანი ხახუნი დიდი არ არის.

დავუბრუნდეთ ბერნულის (68.4) განტოლებას:

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1) + \frac{\rho (v_2^2 - v_1^2)}{2}. \quad (69.1)$$

(69.1)-ის თანახმად, წნევის განაწილება ნაკადში დამოკიდებულია ჰორიზონტალური ზედაპირისადმი ნაკადის დახრილობაზე ( $h_2 - h_1$ ) და შესაბამის კვეთებში მის სიჩქარეზე.

განვიხილოთ რამოდენიმე შემთხვევა:

1) დავუშვათ ორ სხვადასხვა კვეთაში სიჩქარე ერთნაირია  $v_1 = v_2$ , მაშინ (69.1)-დან

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1). \quad (69.2)$$

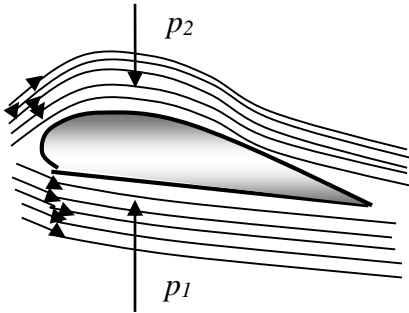
მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს შედეგი ანალოგიურია (63.3)-ის, ანუ დინების ერთნაირი სიჩქარის შემთხვევაში წნევითა სხვაობა იგივეა, რაც უძრავი სითხის (აირის) დროს.

2) დავუშვათ ნაკადი ჰორიზონტალურია ( $h_1 = h_2$ ), მაშინ (69.1)-დან მივიღებთ:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho (v_2^2 - v_1^2)}{2}. \quad (69.3)$$

ამ შემთხვევაში წნევის ცვლილება გამოწვეულია მხოლოდ ნაკადის სიჩქარის ცვლილებით. კერძოდ, **იქ, სადაც დენის წირები მჭიდროა და სიჩქარე მატულობს, წნევა მცირდება და**

პირიქით, სადაც დენის წირები შეთხლებულია და სიჩქარე ნაკლებია, წნევა მეტია. ეს ფაქტი განაპირობებს თვითმფრინავის ფრთის პროფილის შერჩევას. კერძოდ, ითვალისწინებს, რომ ნაკადმა შეინარჩუნოს შრეობრივი ფორმა და იმავდროულად ფრთის ზედა ნაწილის მოსახლვრე შრეში დენის წირთა სიმჭიდროვე აღემატებოდეს ქვედა ნაწილის სიმჭიდროვეს (ნახ. 69.1), ანუ ნაკადის სიჩქარე ფრთის ზედა ნაწილში მეტი იყოს ქვედა ნაწილთან შედარებით ( $v_2 > v_1$ ). მაშინ (69.3)-ის თანახმად  $p_1 > p_2$ , რაც განაპირობებს ვერტიკალურად ზევით მიმართული წნევის ძალის წარმოქმნას. ეს ძალა შეადგენს აეროდინამიკური ამწევი ძალის- $\bar{R}$  გარკვეულ ნაწილს<sup>47</sup>.



ნახაზი 69.1

ბერნულის კანონზეა დამყარებული ვენტურის მილის (ვენტურის გასავალმზომის) მუშაობის პრინციპი. იგი წარმოადგენს მილსადენის შევიწროებულ ნაწილს (ნახ. 69.2), სადაც ნაკადის სიჩქარე მატულობს ( $v_2 > v_1$ ). ხოლო წნევა მცირდება  $p_2 < p_1$ . თუ გავზომავთ მანომეტრთა ჩვენებებს  $p_1, p_2$  და მილების დიამეტრებს  $d_1, d_2$ , (69.3)-ში (67.3)-ის გამოყენებით მივიღებთ ნაკადის სიჩქარის ფორმულას<sup>48</sup>:

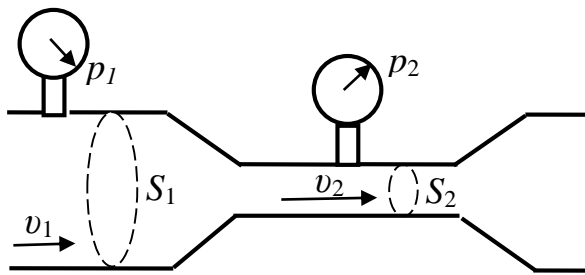
$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2) \left( \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1 \right)^{-1}} . \quad (69.4)$$

სიჩქარის ცოდნის შემთხვევაში შესაძლებელია მოცულობის და მასის გასავლისგამოთვლა.

3) გამოვთვალოთ წნევა, რომელიც წარმოიქმნება პორიზონტალურ მილში დაბრკოლების წინ დინების შეჩერებისას (ნახ. 69.3). (69.1)-ში დაუშვათ, რომ  $h_1 = h_2$ ,  $v_2 = 0$ ,

მაშინ:

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} .$$



ნახაზი 69.2

დინების დამუხრუჭების არეში ხდება სითხის (აირის) შეკუმშვა, რაც იწვევს წნევის გაზრდას.  $(\rho v^2)/2$ -ს ზოგჯერ დინამიკურ წნევას უწოდებენ,  $p_2$ -ს კი - სრულ წნევას. ეს ტერმინები არ არის

ზუსტი. შევნიშნოთ, რომ სითხეში (აირში) მოცემულ პირობებში არსებობს ერთადერთი წნევა  $p_1 = p$ , რომელიც იზრდება ნაკადის შეჩერების მომენტში  $(\rho v^2)/2$ -ით სიდიდით:

$$p_2 = p + \frac{\rho v^2}{2} . \quad (69.5)$$

(ნაკადთან ერთად მოძრავი მანომეტრი გაზომავს  $p$  წნევას, უძრავი მანომეტრი კი  $p_2$ -ს)

<sup>47</sup>ამ ძალას ჩვენ დავუბრუნდებით §73-ში.

<sup>48</sup>გამოყენებულია ფორმულები  $S_1 = \pi d_1^2/4$  და  $S_2 = \pi d_2^2/4$ .

აქვე შეიძლება მივიღოთ აირის უკუმშვადობის პირობა. (69.5)-ის თანახმად, სანამ  $(\rho v^2)/2 \ll p$ , აირის შეკუმშვა არ თამაშობს არსებით როლს, რის გამოც, თუ აირის ნაკადის სიჩქარე აკმაყოფილებს უტოლობას:



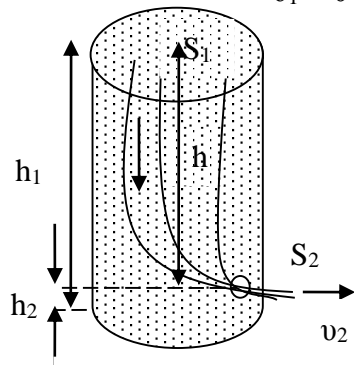
$$v \ll \sqrt{\frac{2p}{\rho}}. \quad (69.6)$$

ნახაზი 69.3

აირი უკუმშვადია. ბგერის სიჩქარე აირებში  $v_{ბგ} = \sqrt{1,4 \cdot p / \rho}$ . რის გამოც აირის უკუმშვადობის პირობა ასევე ჩაიწერება  $v \ll v_{ბგ}$ , ე.ი.

➤ აირის ნაკადი უკუმშვადია, თუ მისი სიჩქარე გაცილებით ნაკლებია იმავე ნაკადში ბგერის გავრცელების სიჩქარეზე.

4) განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც  $p_1 = p_2$ . მაგალითად, სითხის გადმოდინება ღია ჭურჭლის ნახვრეტიდან (ნახ. 69.4). ცხადია,  $p_1$  წნევა ჭურჭლის ზედაპირზე და  $p_2$  წნევა ნახვრეტის ზედაპირზე ატმოსფერული წნევის ტოლია



ნახაზი 69.4.

$v_1 \approx 0$   $p_1 = p_2 = p_{ატმ}$ . რადგან ჭურჭლის ზედაპირის ფართობი გაცილებით მეტია ნახვრეტის ფართობზე ( $S_1 \gg S_2$ ), (67.3)-ის თანახმად  $v_1 \approx 0$ , რის შედეგადაც (69.1) მიიღებს სახეს:

$$\rho g(h_1 - h_2) - \frac{\rho v_2^2}{2} = 0,$$

აქედან:

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (h = h_1 - h_2). \quad (69.7)$$

(69.7)-ს ტორიჩელის ფორმულას უწოდებენ, რადგან მან ეს ფორმულა მიიღო ბერნულამდე 100 წლით ადრე.

(69.7)-ის თანახმად, სითხე იგივე სიჩქარით ტოვებს ჭურჭელს, რა სიჩქარითაც დაეცემოდა იგივე  $h = h_2 - h_1$  სიმაღლიდან თავისუფლად ვარდნილი სხეული, რაც აიხსნება იმით, რომ ორივე შემთხვევაში უგულებელყოფილია დისიპატიურ (ხახუნის) ძალთა მოქმედება და პოტენციური ენერგია მთლიანად გარდაიქმნება კინეტიკურში (ძალაშია მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი).

$S_1 = S$  კვეთიდან  $\Delta t$  დროში გამოსული სითხის მასა იქნება:

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S v \Delta t,$$

ხოლო ჭავლის მიერ გატანილი იმპულსე:

$$\Delta p = \Delta m v = \rho S v^2 \Delta t.$$

შესაბამისად, ჭურჭლის კედლების მხრიდან სითხის ჭავლზე მოქმედი ძალა იქნება:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S v^2.$$

ნიუტონის III კანონის თანახმად სიდიდით ტოლი და საპირისპიროდ მიმართული ძალით იმოქმედებს ჭავლი ჭურჭლის უკანა კედელზე. ამ ძალას გამოსული ჭავლის რეაქციის ძალას უწოდებენ, ე.ი.

$$F_{ჭავ} = \rho S v^2, \quad (69.8)$$

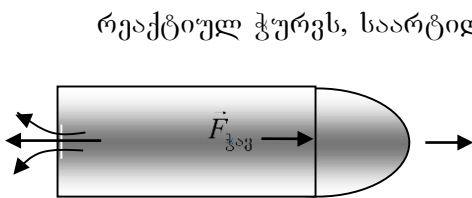
რომელშიც (69.7)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$F_{\text{ჰაგ}} = 2\rho ghS, \quad (69.9)$$

ეს ძალა ორჯერ მეტია ჰიდროსტატიკური წნევის ძალაზე, ანუ იმ ძალაზე, რომლითაც სითხე იმოქმედებდა ნახვრეტში ჩამაგრებულ საცობზე  $F = pS = \rho ghS$ , რაც აიხსნება ბერნულის კანონიდან გამომდინარე წნევის გადანაწილებით სითხეში. კერძოდ, ნახვრეტის მახლობლობაში დენის წირები შემჭიდროებულია და, შესაბამისად, წნევა შემცირებულია.

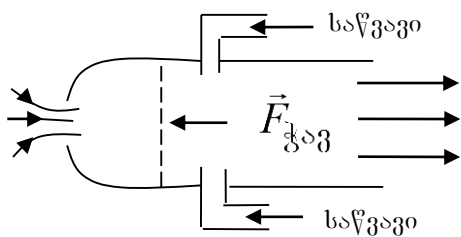
ჭურჭელი ურიკაზე რომ მოგვეთავსებინა, ჭავლის რეაქციის ძალის გავლენით იგი ამოძრავდებოდა ჭავლის გადმოდინების საპირისპირო მიმართულებით. გამოდევნილი ჭავლის რეაქციის ძალა წარმოადგენს მამოძრავებელ ძალას რეაქტიული მოძრაობის დროს, მაგალითად, რეაქტიულ ჭურვებში, საჰაერო რეაქტიულ ძრავებში და სხვა.

ნახ. 69.5-ზე მოცემულია რეაქტიული ჭურვის სქემა. მის კორპუსში ხდება სპეციალური ნარევის აფეთქება. წარმოქმნილ აირს, კორპუსის მცირე მოცულობის გამო, გააჩნია მაღალი წნევა და დიდი სიჩქარით გამოიღვენება საქმენიდან. რის შედეგადაც კორპუსის მოპირდაპირე კედელზე მოქმედებს ჭავლის რეაქციის საკმაოდ მნიშვნელოვანი სიდიდის ძალა, რომელიც ასრულებს ჭურვის მამოძრავებელი ძალის როლს.



ნახაზი 69.5.

რეაქტიულ ჭურვს, საარტილერიო ჭურვის გამოყენებასთან შედარებით გააჩნია შემდეგი უპირატესობა: საარტილერიო იარაღი გასროლისას წარმოქმნილი აირების შედეგად განიცდის ძლიერ უკუცემის ძალას, რის გამოც საჭიროა იარაღი იყოს ძალიან მტკიცე და მასიური. რეაქტიული ჭურვის გასროლისას წარმოქმნილი აირი გაიტყორცნება ატმოსფეროში და ჭურვის გამშვებ მოწყობილობაზე უკუცემას არ ახდენს. გარდა ამისა, რეაქტიული ჭურვის პრინციპული განსხვავება სხვა სატრანსპორტო საშუალებებთან მდგომარეობს იმაში, რომ მის ასაჩქარებლად არაა საჭირო მისი ურთიერთქმედება სხვა სხეულებთან (დედამიწასთან, ჰაერთან, წყალთან) ეს თავისებურება განაპირობებს მის მოძრაობას, როგორც ძალიან გაიშვიათებულ ატმოსფეროში, ისე კოსმოსშიც.



ნახაზი 69.6

ნახ. 69.6-ზე მოცემულია საჰაერო-რეაქტიული ძრავას სქემა. მის კორპუსს გააჩნია ორი ნახვრეტი. კორპუსის მოძრაობისას მცირე დიამეტრის წინა ნახვრეტიდან შემოდის ჰაერი ატმოსფეროდან. ამავდროულად მფრქვევანებიდან მასში შეიფრქვევა თხევადი საწვავი, რომლის წვის შედეგად ცხელდება შემოსული ჰაერი, იზრდება მისი წნევა და უკანა ნახვრეტიდან დიდი სიჩქარით გამოიტყორცნება. ამის გამო, კორპუსის წინა კედელი განიცდის რეაქციის

ძალის - წვეის ძალის მოქმედებას. ცხადია, ეს ძალა აღიძვრება მხოლოდ მაშინ, როდესაც კორპუსი უკვე მოძრაობს, რის გამოც ჰაერი დინამიკური დაწოლით შემოდის ნახვრეტიდან. ამასთან, წვეის ძალა მით უფრო სწრაფად იზრდება, რაც სწრაფად მოძრაობს ძრავა. ზემოთქმულიდან გამომდინარე, საჰაერო-რეაქტიული ძრავას ასამუშავებლად, ან რაიმე მოწყობილობით ძრავა წინასწარ უნდა მოვიყვანოთ მოძრაობაში, ან კომპრესორის საშუალებით მოხდეს ძრავის ჰაერის ნაკადით მომარაგება.

რეაქტიულ ძრავაში ჭავლს წარმოქმნის მხოლოდ მასში მოთავსებული წვის პროდუქტი, ამიტომ მაღალი სიჩქარის განსავითარებლად საჭიროა საწვავის დიდი მარაგი. საჰაერო-

რეაქტიული ძრავაში ჭავლს ძირითადად ატმოსფეროდან შემოსული ჰაერი განაპირობებს. ამიტომ მას სჭირდება საწვავის გაცილებით მცირე მარაგი. ამით აიხსნება თვითმფრინავებში, რეაქტიულ ძრავებთან შედარებით, საჰაერო-რეაქტიული ძრავებისათვის უპირატესობის მინიჭება. თუმცა საჰაერო-რეაქტიულ ძრავების მუშაობისათვის, მისი სპეციფიკიდან გამომდინარე აუცილებელია მკვრივი ატმოსფერო, რაც ზღუდავს მათ გამოყენებას გაიშვიათებულ ატმოსფეროში. ამ მხრივ რეაქტიულს შეზღუდვა არ გააჩნიათ.

**ამოცანა 69.1.** სახლის სარდაფში გამათბობელი სისტემის მილში რომლის დიამეტრია 8სმ, წყალი შედის 0,5 მ/წმ სიჩქარით 3 ატმ წნევის ქვეშ. რა სიჩქარე და წნევა ექნება წყალს 5,2 სმ დიამეტრის მილში მეორე სართულზე, რომელიც იმყოფება 5მ-ით მაღლა სარდაფთან შედარებით.

**ამოხსნა:**

(67.5)-ის თანახმად წყლის სიჩქარე მეორე სართულზე იქნება:

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = \left( \frac{8}{5,2} \right)^2 \cdot 0,5 = 1,2 \text{ (მ/წმ)} \quad (S = \pi r^2 / 4)$$

წნევის გამოთვლისათვის ვისარგებლოთ (69.1) საიდანაც

$$p_2 = p_1 - \left( \rho g (h_2 - h_1) + \frac{\rho (v_2^2 - v_1^2)}{2} \right).$$

$$p_2 = 3 \cdot 10^5 - \left( 10^3 \cdot 9,8 \cdot 5 + \frac{10^3 (1,2^2 - 0,5^2)}{2} \right) = 3 \cdot 10^5 - 0,5 \cdot 10^5 = 2,5 \text{ (პა)}.$$

**ამოცანა 69.2.** განვსაზღვროთ რეაქტიულ ჭურვში აფეთქების შედეგად გამოდევნილი აირის სიჩქარისა და ჭავლის რეაქციისძალის დამოკიდებულება ჭურვის შიგნით და გარეთ (ატმოსფეროში) წნევათა სხვაობაზე.

**ამოხსნა:**

ვისარგებლოთ (69.3)-ით:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho (v_2^2 - v_1^2)}{2}, \quad (1)$$

სადაც  $p_1 = p$  აირის წნევაა კორპუსის შიგნით,  $p_2 = p_{\text{ატმ}}$  ატმოსფერული წნევა საქშენის გამოსასვლელ ნახვრეტთან,  $v_2 = v$  გამოდევნილი აირის სიჩქარეა. რადგან ნახვრეტის ფართობი  $S$  გაცილებით მცირეა ჭურვის განივკვეთის ფართობზე, ნაკადის უწყვეტობის განტოლების თანახმად,  $v_1 = 0$ , რის გამოც (1) ასე ჩაიწერება:

$$p - p_{\text{ატმ}} = \frac{\rho v^2}{2}, \quad (\rho = \text{const} - \text{აირის სიმკვრივე}),$$

აქედან:

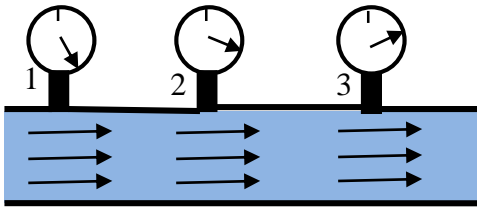
$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_{\text{ატმ}})}{\rho}}. \quad (2)$$

ხოლო (68.8)-ის თანახმად  $F_{\text{ჭავ}} = \rho S v^2 = 2(p - p_{\text{ატმ}}) S$ .

(2)-დან გამომდინარე, რეაქტიული ჭურვი მით უფრო დიდ სიჩქარეს ავითარებს, რაც უფრო გაიშვიათებულია ატმოსფერო.

## §70. სიბლანტი

რეალური სითხეების (აირების) დინებისას ყოველთვის გამოვლინდება შინაგანი ხახუნის ანუ სიბლანტის ძალთა მოქმედება. წარმოვიდგინოთ ერთნაირი კვეთის პორიზონტალური მილი, რომლის გასწვრივ ჩამაგრებულია მანომეტრები. უძრავი სითხის შემთხვევაში მანომეტრთა ჩვენება ერთნაირი იქნება. მოძრავი სითხის შემთხვევაში, მანომეტრები დააფიქსირებს წნევის შემცირებას დინების მიმართულებით, მიუხედავად იმისა, რომ ნაკადის სიჩქარე ნებისმიერ კვეთაში ერთნაირია (ნახ.70.1). სითხეზე რომ მოქმედებდეს

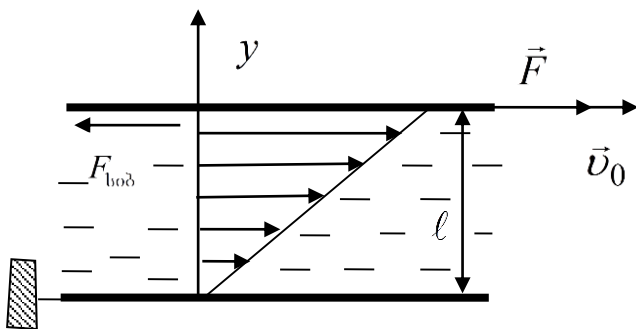


ნახაზი. 70.1

მხოლოდ წნევის ძალები, წნევის შემცირების მიმართულებით (დინების მიმართულებით) ნაკადის სიჩქარე უნდა გაზრდილიყო (69.3). სიჩქარის მუდმივობა აიხსნება იმით, რომ ნაკადზე მოქმედებს დინების საპირისპირო ძალები, რომლებიც აწონასწორებს წნევის ძალებს. ეს ძალები მხები ძალებია და არსებობს როგორც მილის კედელსა და სითხის მიმდებარე ფენას

შორის, ასევე ერთმანეთის მიმართ მოსრიალე ფენებს შორისაც. ამ ძალებს **შინაგანი ხახუნის** ანუ **სიბლანტის ძალები** ეწოდება.

სიბლანტის ძალების შეფასებისთვის წარმოვიდგინოთ ასეთი ცდა: ვთქვათ, ორ პარალელურ ფირფიტას შორის, რომელთა ზომები გაცილებით აღემატება მათ შორის მანძილს, მოთავსებულია სითხე (აირი). ქვედა ფირფიტა დავამაგროდ უძრავად, ხოლო ზედა ფირფიტა გადავაადგილოთ  $\vec{v}_0 = const$  სიჩქარით, რისთვისაც საჭიროა მასზე გარკვეული  $\vec{F}$  ძალით მოქმედება (ნახ.70.2). რადგან ფირფიტა აჩქარების გარეშე მოძრაობს, ე.ი.  $\vec{F}$  ძალის მოქმედება გაწონასწორებულია სითხის მხრიდან ფირფიტაზე მოქმედი სიბლანტის ძალით  $|\vec{F}| = |\vec{F}_{სიბ}|$ , რომელიც გამოწვეულია სითხისა და ფირფიტის მოლეკულათა ურთიერთ-



ნახაზი 70.2

ქმედებით, ამიტომ ზედა ფირფიტასთან მიმდებარე ფენა მოძრაობს ზედა ფირფიტის სიჩქარით, ხოლო ქვედა ფირფიტის მიმდებარე ფენა ქვედა ფირფიტასთან ერთად რჩება უძრავი. ეს უძრავი ფენა ამუხრუჭებს მისი მეზობელი ზედა ფენის მოძრაობას. ის, თავის მხრივ, მომდევნო ზედა ფენას და ა.შ., რის გამოც დინების სიჩქარე დინების მართობულად წრფივად იცვლება 0-დან  $v_0$ -მდე.  $OY$  ღერძის გასწვრივ ფენათა სიჩქარის უწყვეტი ცვლილება  $dv/dy$  წარმოადგენს სიჩქარის გრადიენტს<sup>49</sup>. ჩვენს შემთხვევაში ყველა ფენა ერთნაირ პირობებში იმყოფება, რის გამოც სიჩქარის გრადიენტი მუდმივი სიდიდეა:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v_0}{l}.$$

<sup>49</sup>გრადიენტის ცნება შემოტანილია §29-ში.

თუ აღწერილ ცდაში ვცვლით ფირფიტების ფართობს –  $S$ -ს, მათ შორის მანძილს –  $\ell$ -ს, სიჩქარეს –  $v_0$ -ს და გავზომავთ თითოეული შემთხვევისათვის  $F$  ძალას, მოცემული სითხისთვის (აირისთვის) მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$F_{\text{სიბ}} = \eta S \frac{v_0}{\ell}. \quad (70.1)$$

$\eta$  – პროპორციულობის კოეფიციენტს მოცემული სითხის (აირის) **სიბლანტის კოეფიციენტს** უწოდებენ. (70.1)-დან:

$$\eta = \frac{F_{\text{სიბ}} \ell}{S v_0},$$

შესაბამისად, SI სისტემაში იზომება ნ.წმ/მ<sup>2</sup> = პა.წმ (პასკალ.წამი).

სითხეთა სიბლანტე ტემპერატურის ზრდისას მკვეთრად მცირდება, აირების კი პირიქით. რაც აიხსნება სითხეებში და აირებში სიბლანტის წარმოშობის განსხვავებული მექანიზმით. კერძოდ, სითხეებში სიბლანტეს განაპირობებს მოლეკულათა ურთიერთქმედების ძალები. ტემპერატურის ზრდით იზრდება მოლეკულათა ქაოსური მოძრაობა და მოლეკულათა ურთიერთქმედება სუსტდება ხოლო აირების სიბლანტეს გამოწვეულია მოლეკულათა შეჯახებებით, რომელიც ტემპერატურის ზრდასთან ერთად ინტენსიურად იზრდება.

(70.1) ზოგადად ასე ჩაიწერება:

$$F_{\text{სიბ}} = \eta S \frac{dv}{dy}. \quad (70.2)$$

შეგნიშნოთ, რომ (70.2) უფრო ზოგადია, ვიდრე (70.1), რადგან ეს უკანასკნელი სამართლიანია მხოლოდ დინების მართობულად სიჩქარის წრფივი ცვლილების დროს (ე.ი., როდესაც სიჩქარის გრადიენტი მუდმივია), ხოლო (70.2) გამოიყენება მაშინაც, როდესაც სიჩქარის გრადიენტი ცვლადია, მაგალითად, სუსპენზიების შემთხვევაში. თუ დინება არასტაციონარულია, ე.ი.  $v(y,t)$  მაშინ (70.2)-ში სიჩქარის სრული წარმოებულის ნაცვლად უნდა ავიღოთ კერძო წარმოებული  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

რადგან რეალურ სითხეებსა და აირებს გააჩნია სიბლანტე, ამიტომ ჰორიზონტალურ მილში მათი სტაციონარული დინების შენარჩუნებისთვის საჭიროა მილის ბოლოებზე წნევათა სხვაობის შექმნა, რათა წარმოქმნილმა წნევის ძალამ დააკომპენსიროს სიბლანტის ძალათა მოქმედება.

მოლეკულური თეორიის თვალსაზრისით, შინაგანი ხახუნი, ანუ სიბლანტე წარმოადგენს იმპულსის გადატანის მოვლენას, გამოწვეულს ფენების სიჩქარეთა სხვაობით და მოლეკულათა ქაოსური მოძრაობით. მართლაც, მოლეკულათა ქაოსური მოძრაობის გამო ერთი ფენიდან მეორეში გადატანილი მოლეკულების რიცხვი ტოლია იგივე დროში მეორე ფენიდან პირველში გადმოსული მოლეკულების რიცხვის მაგრამ, რადგან ამ ფენებში მოლეკულათა გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე განსხვავებულია, ამიტომ მეტი სიჩქარის ფენიდან ნაკლები სიჩქარის ფენაში გადასული მოლეკულები გადაიტანს მეტ იმპულსს, ვიდრე პირიქით, რაც გამოიწვევს სწრაფი ფენის დამუხრუჭებას, ხოლო ნელი ფენის აჩქარებას, ე.ი. აღიძვრება სიბლანტის ძალები, რომლებიც მიმართულია მოცემული ფენის ფარდობითი სიჩქარის საპირისპიროდ.

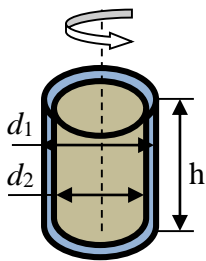
ცხრილ 70.1-ში მოცემულია ნივთიერებების სიბლანტის კოეფიციენტები.

**ცხრილი 70.1.**

ნივთიერება	სიბლანტის კოეფიციენტი $\eta$ (პა·წმ)			
	$t = 0^{\circ}\text{C}$	$t = 15^{\circ}\text{C}$	$t = 99^{\circ}\text{C}$	$t = 302^{\circ}\text{C}$
გლიცერინი	4,6	1,5	–	–
წყალი	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	–
ჰაერი	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$
წყლის ორთქლი	$9,0 \cdot 10^{-6}$	$9,7 \cdot 10^{-6}$	$13,1 \cdot 10^{-6}$	–
წყალბადი	$8,6 \cdot 10^{-6}$	$8,9 \cdot 10^{-6}$	$10,6 \cdot 10^{-6}$	$13,6 \cdot 10^{-6}$

**ამოცანა 70.1.** სიბლანტისმზომი ხელსაწყო შედგება ორი კოაქსიალური ცილინდრისგან რომელთა დიამეტრებია 10,2 სმ და 10,6 სმ. გამოსაკვლევი სითხე ჩასხმულია ცილინდრებს შორის არეში 12 სმ სიმაღლემდე. გარე ცილინდრი დამაგრებულია, ხოლო შიგა ცილინდრზე მოდებული ძალის მომენტი 0,024 ნ.მ მას აბრუნებს 62 ბრ/წთ სიხშირით. განსაზღვრეთ სითხის სიბლანტე.

**ამოხსნა:**



ძალის მომენტის განსაზღვრების თანახმად:

$$M = Fd = F \frac{d_1}{2} \rightarrow F = \frac{2M}{d_1} = \frac{2 \cdot 0,024}{0,102} = 0,47 \text{ (ნ.)}$$

რადგან ცილინდრი თანაბრად ბრუნავს  $F = F_{\text{სობ}}$ . (70.1)-დან:

$$\eta = \frac{\ell F_{\text{სობ}}}{Sv}, \quad (1)$$

სადაც ( $S = \pi d_1 h = 3,14 \cdot 0,102 \cdot 0,12 = 0,038 \text{ (მ}^2\text{)}$ ) ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია):

$$\ell = \frac{d_2 - d_1}{2} = 0,002 \text{ (მ)},$$

ხოლო

$$v = \omega d_1 / 2 = 2\pi\nu d_1 / 2 = \pi\nu d_1 = 3,14 \cdot 0,102 \cdot 62 / 60 = 0,33 \text{ (მ/წმ)}.$$

ე.ი.:

$$\eta = \frac{0,002 \cdot 0,47}{0,038 \cdot 0,33} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ (პა} \cdot \text{წმ)}.$$

### §71. დინება მილში. კუახეილის ფორმულა

რეალური სითხეები და აირები ხასიათდება სიბლანტით. ამიტომ, ჰორიზონტალურ მილშიც კი, მათი დინების სტაციონარულობის შესანარჩუნებლად აუცილებელია გარკვეული წნევის ძალის აღძვრა. ეს მიიღწევა მილის ბოლოებზე მუდმივი წნევითა სხვაობის შექმნით. განვიხილოთ უკუმშვადი სითხის (აირის) სტაციონარული ლამინარული დინება ჰორიზონტალურ ცილინდრულ მილში. განვსაზღვროთ სითხის სიბლანტის გამო მილის განივკვეთში დინების სიჩქარის ცვლილების კანონზომიერება და მოცულობის გასავალი (§68). სითხისა და მილის მოლეკულათა ურთიერთქმედების გამო შესაძლებელია ჩავთვალოთ, რომ მილის შიგა კედლის მიმდებარე სითხის ცილინდრული ფენის სიჩქარე ნულის ტოლია. თითოეული მომდევნო ფენის სიჩქარე თანდათან მატულობს და აღწევს მაქსიმუმს მილის ცენტრალურ ღერძზე. ღერძის გასწვრივ აზრობრივად გამოვიყენოთ  $L$  სიგრძის და  $r < R$  რადიუსის კოაქსიალური ცილინდრი (ნახაზი 71.1). (70.2)-ის თანახმად, სიბლანტის ძალა ცილინდრის გვერდით ზედაპირსა და მომდევნო ფენას შორის გამოითვლება ფორმულით

$$F_{\text{სიბ}} = \eta S \frac{dv}{dr} = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}.$$

“–” მიუთითებს, რომ ძალა დინების საპირისპიროდ არის მიმართული. ცხადია, სიბლანტის არსებობის გამო დინების სტაციონარულობის შესანარჩუნებლად მილის ბოლოებზე უნდა არსებობდეს მუდმივი წნევითა სხვაობა. დაგუშვათ ცილინდრის ფუძეებს შორის იგი  $p_1 - p_2$ -ის ტოლია, მაშინ აღძრული წნევის ძალა იქნება

$$F = (p_1 - p_2)S = (p_1 - p_2)\pi r^2.$$

დინების სტაციონარულობის გამო აჩქარება ნულის ტოლია, ანუ წნევისა და სიბლანტის ძალები ერთმანეთს აკომპენსირებს. მაშასადამე, ვღებულობთ:

$$-\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr} = (p_1 - p_2)\pi r^2 \rightarrow dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r dr. \quad (71.1)$$

იმისთვის, რომ ვიპოვოთ მილის მართობულ კვეთში დინების  $v$  სიჩქარის დამოკიდებულება ღერძიდან დაშორებაზე ( $r$  მანძილზე), საჭიროა მოვახდინოთ (71.1)-ის ინტეგრირება

$$\int_0^v dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} \int_R^r r dr = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_R^r,$$

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} \cdot (R^2 - r^2) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (71.2)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, მაქსიმალური სიჩქარე მიიღება მილის ცენტრში ( $r=0$ )

$$v(0) = v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} \cdot R^2. \quad (71.3)$$

იგი პროპორციულია მილის რადიუსის კვადრატის, წნევის გრადიენტის  $-(p_1 - p_2)/L$  და უკუპროპორციულია სითხის სიბლანტის. (71.3)-ის გათვალისწინებით (71.2) ასე ჩაიწერება:

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (71.4)$$

(71.4)-ის თანახმად, სტაციონარული ლამინარული დინების სიჩქარის ცვლილებას პარაბოლური ფუნქციის სახე აქვს.

გამოვთვალოთ სითხის მოცულობითი გასავალი –  $Q$ . რადგან მილის განივკვეთში სიჩქარე ერთნაირი არ არის, საჭიროა იგი დავეყოთ  $dr$  სიგანის კონცენტრირებულ რგოლებად.  $r$  რადიუსის  $dr$  სიგანის რგოლში  $dt$  დროში გასული სითხის მოცულობა იქნება

$$dV = dSdl = 2\pi r v dt \quad (dS = 2\pi dr - \text{რგოლის ფართობია}),$$

ხოლო მოცულობითი გასავალი:

$$dQ = \frac{dV}{dt} = 2\pi r v dr,$$

(71.4)-ის შეტანით გვექნება:

$$dQ = 2\pi v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr,$$

ხოლო მილის კვეთაში მოცულობის გასავალი იქნება:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R dQ = 2\pi v_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = 2\pi v_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right) \Big|_0^R = \\ &= 2\pi v_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{\pi R^2 v_0}{2} = \frac{v_0 S}{2}. \end{aligned} \quad (71.5)$$

( $S = \pi R^2$  – მილის განივკვეთის ფართობია) (67.1)-თან შედარებით ვღებულობთ, რომ:

- **სტაციონარული ლამინარული დინების საშუალო სიჩქარე მაქსიმალური სიჩქარის ნახევრის ტოლია:**

$$Q = v_{\text{საშ}} S. \quad (71.6)$$

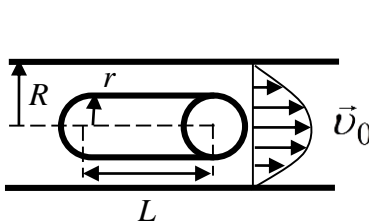
(71.5)-ში (71.3)-ის გათვალისწინებით გვაქვს

$$Q = \frac{(p_1 - p_2) \pi R^4}{8\eta L}. \quad (71.7)$$

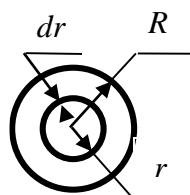
ეს შედეგი მიღებულ იქნა ფრანგი მეცნიერის **პუაზეილის** მიერ და მისი ფორმულის სახელწოდებით არის ცნობილი რომლის თანახმად:

- **სტაციონარული ლამინარული დინებისას უკუმშვადი სითხის (აირის) მოცულობითი გასავალი პირდაპირპროპორციულია წნევის სიგრძით ერთეულზე ცვლილებისა და მილის რადიუსის მეოთხე ხარისხის ნამრავლის და უკუპროპორციულია სიბლანტის კოეფიციენტის.**

პუაზეილის ფორმულაზე დაყრდნობით შემუშავებულია სიბლანტის კოეფიციენტის გასაზომი მეთოდები. პუაზელის სახელს უკავშირდება სიბლანტის ძველი ერთეული **პუაზი**,  $1 \text{ პა.წმ} = 10 \text{ პუაზი}$ ), დიდი სიჩქარეების დროს ლამინარული დინება გადადის ტურბულენტურში, რის შემდეგაც (71.7)-ის გამოყენება აღარ შეიძლება, რადგან ერთიდაიგივე



ნახაზი 71.1



ნახაზი 71.2

პირობებისთვის  $(p_1 - p_2, R, L)$  მოცულობითი გასავალი ტურბულენტური დინების დროს საგრძნობლად მცირდება, რაც გამოწვეულია შინაგანი ხახუნის მნიშვნელოვანი ზრდით. ნახ. 71.2-ზე მოცემულია სიჩქარეთა გადანაწილება მილის კვეთაში ტურბულენტური დინების დროს. ლამინარულისგან განსხვავებით, მილის კედლებთან სიჩქარე მკვეთრად იზრდება, ხოლო ცენტრისკენ გაცილებით უმნიშვნელოდ.

**ამოცანა 71.1.** გამოთვალეთ აირის საშუალო სიჩქარე და მოცულობითი გასავალი 20 მ სიგრძის და 0,5 მ რადიუსის აეროდინამიკურ მილში, თუ მის ბოლოებზე წნევათა სხვაობაა 2,77 პა, ხოლო ტემპერატურა  $15^{\circ}\text{C}$ .

**ამოხსნა:**

ცხრილი 70.1-დან  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$  პაწმ. (71.7)-ის თანახმად:

$$Q = \frac{2,77 \cdot 3,14 \cdot 0,5^4}{8 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = 188,7 \text{ (მ}^3/\text{წმ)},$$

(71.6)-დან:

$$v_{\text{საშ}} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} = 240,4 \text{ (მ/წმ)}.$$

**ამოცანა 71.2.** რა სიდიდის დიამეტრი უნდა ჰქონდეს 30 მ სიგრძის ჰაერგამტარს, რომ სავენტილაციო-გამათბობელმა სისტემამ ყოველ 10წთ-ში მოახდინოს 72 მ<sup>3</sup> მოცულობის შენობის სრული ვენტილაცია? სისტემის ტუმბო ქმნის  $4 \cdot 10^4$  ატმ ჭარბ წნევას (ჰაერის სიბლანტის კოეფიციენტი  $1,8 \cdot 10^{-5}$  პა).

**ამოხსნა:**

(67.1)-ის თანახმად:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t},$$

მეორე მხრივ:

$$Q = \frac{(p_1 - p_2) \pi R^4}{8 \eta L} = \frac{\Delta p \pi d^4}{8 \cdot 16 \eta L}.$$

მათი გატოლებით ვღებულობთ:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta p \pi d^4}{8 \cdot 16 \eta L},$$

აქედან:

$$d^4 = \frac{128 \eta L \Delta V}{\pi \Delta p \Delta t} = \frac{128 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \cdot 72}{3,14 \cdot 40 \cdot 600} = 0,66 \cdot 10^{-4},$$

$$d = 0,09 \text{ (მ)}.$$

## **§72. რეინოლდსის რიცხვი. დინამიკური მსბავსება**

ჰიდროაერომექანიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური კანონი – ბერნულის კანონი მიღებულია იმ დაშვებით, რომ სითხეებისა და აირების ნაკადში სიბლანტის ძალები ნულის ტოლია. თუმცა აღსანიშნავია, რომ ეს კანონი კარგი მიახლოებით სრულდება მაშინაც, როდესაც ნაკადის ელემენტის კინეტიკური ენერგია  $W_{კინ}$  გაცილებით მეტია ამ ელემენტის სიბლანტის ძალთა დაძლევაზე შესრულებულ მუშაობაზე  $A_{სიბლ}$ ,  $W_{კინ} \gg A_{სიბლ}$ . მაშასადამე, ბერნულის კანონის გამოყენება მიზანშეწონილია, თუ  $W_{კინ}/A_{სიბლ} \gg 1$ . ეს უგანზომილებო რიცხვი შემოტანილ იქნა ინგლისელი მეცნიერის **რეინოლდსის** მიერ და მას **რეინოლდსის რიცხვი** ეწოდება. სათანადო გათვლებით მან მიიღო, რომ:

$$Re = \frac{v_{საშ} \rho \ell}{\eta}, \quad (72.1)$$

სადაც  $v_{საშ}$  – ნაკადის საშუალო სიჩქარეა,  $\ell$  – მილის განივი წირითი ზომა (ცილინდრული მილისთვის  $\ell = 2R$ ),  $\rho$  – სითხის (აირის) სიმკვრივეა, ხოლო  $\eta$  – სიბლანტის კოეფიციენტი, რომელსაც **დინამიკურ სიბლანტესაც** უწოდებენ. (72.1) იძლევა მნიშვნელოვან ინფორმაციას სითხის (აირის) დინების ხასიათზე, მაგალითად, თუ მილი ვიწროა ( $\ell$  მცირეა), მაშინ მცირე  $\eta$ -ს დროსაც სიბლანტის ძალებმა შეიძლება შეასრულოს მნიშვნელოვანი როლი. პირიქით, როდესაც  $\ell$  დიდია, შეიძლება მაღალი სიბლანტის შემთხვევაშიც კი სიბლანტის ძალთა გავლენა დინების ხასიათზე უმნიშვნელო აღმოჩნდეს (მისი მოქმედება თავს იჩენს მხოლოდ მილის კედლისა და სითხის ფენის შეხების არეში). (72.1)-ის თანახმად, გარდა  $v_{საშ}$  და  $\ell$ -სა,  $Re$  დამოკიდებულია მოცემული ნივთიერების სიბლანტისა და სიმკვრივის თანაფარდობაზე. დადგან  $W_{კინ}$  სიმკვრივის პროპორციულია, ხოლო  $A_{სიბლ}$  – სიბლანტის კოეფიციენტის, ამიტომ სიბლანტის ძალთა როლი განისაზღვრება ამ სიდიდეთა თანაფარდობით:

$$v = \frac{\eta}{\rho}, \quad (72.2)$$

რომელსაც **კინემატიკური სიბლანტე** ეწოდება, მისი ერთეულია მ<sup>2</sup>/წმ. სწორედ კინემატიკური და არა დინამიკური კოეფიციენტი განსაზღვრავს მოცემულ პირობებში სიბლანტის ძალთა როლს. მაგალითად, 70.1 ცხრილის თანახმად, 15°C-ზე  $\eta$ -ს მნიშვნელობა წყლისთვის  $\approx 60$ -ჯერ აღემატება ჰაერისას. (72.2)-ის თანახმად, ამ ნივთიერებათა კინემატიკური სიბლანტეები იქნება:  $\nu_{წყ} = 1,1 \cdot 10^{-6}$  მ<sup>2</sup>/წმ,  $\nu_{ჰ} = 1,4 \cdot 10^{-5}$  მ<sup>2</sup>/წმ. როგორც ვხედავთ, ჰაერის კინემატიკური სიბლანტე  $\approx 13$ -ჯერ აღემატება წყლისას. ე.ი. ერთნაირ პირობებში დინების ხასიათზე მეტ გავლენას მოახდენს ჰაერი, ვიდრე წყალი. ამით აიხსნება ის გარემოება, რომ ბგერა უფრო სწრაფად მიიღევა მშვიდ ატმოსფეროშიც კი, ვიდრე წყალში. შევიტანოთ (72.2) (72.1)-ში, მივიღებთ:

$$Re = \frac{v_{საშ} \ell}{\nu}. \quad (72.3)$$

ზემოთქმულის თანახმად, ბერნულის კანონი ძალაშია, როდესაც ადგილი აქვს უტოლობას  $Re \gg 1$ . ეს კანონი სამართლიანია ლამინარული დინების დროს. ამიტომ მოცემულ პირობებში არსებითია ნაკადის სიჩქარე, რადგან მაღალ სიჩქარეზე ლამინარული დინება გადადის ტურბულენტურში. ბერნულის კანონის მიმართებაში  $Re$ -ს გააჩნია ზედა საზღვარი, რომელიც ცდებითაა დადგენილი. თუ  $Re < 2300$ , დინება ლამინარულია, თუ

$Re > 2300$  წარმოიქმნება ტურბულენტობა და, როგორც ბერნულის კანონი, ასევე პუაზეილის ფორმულა ძალას კარგავს.

სხეულის სითხეში (აირში) მოძრაობის დასახასიათებლად მოსახერხებელია რეინოლდსის კიდევ ერთი რიცხვის შემოტანა:

$$Re' = \frac{\rho l'}{\nu}, \quad (72.4)$$

სადაც  $\nu$  სხეულის ფარდობითი სიჩქარეა სითხის (აირის) მიმართ, ხოლო  $l'$  სხეულის მახასიათებელი წირითი ზომა. მიუხედავად (72.3)-ის და (72.4)-ის გარეგანი მსგავსებისა, ისინი მიეკუთვნება სრულიად განსხვავებულ მოვლენებს. (72.3) ახასიათებს დინებას მილში, ხოლო (72.4) სხეულის მოძრაობას სითხეში (აირში). როდესაც  $Re' < 1$ , სხეულის გარსშემოდენის ნაკადი ლამინარულია.  $Re'$ -ს უფრო დიდ მნიშვნელობისას – (1 – 10), სხეულის უკან ლამინარული დინება ტურბულენტურში გადადის, ხოლო როდესაც  $Re' > 10^6$  რიგის ხდება, ტურბულენტობა წარმოიქმნება სხეულის მთელ ზედაპირზე.

ავიაციის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი პრობლემაა იმ ძალთა შესწავლა, რომლებიც ფრენის პროცესში მოქმედებს თვითმფრინავსა და მის ცალკეულ ნაწილებზე. მოძრაობის ფარდობითობიდან გამომდინარე, ჰაერში მოძრავ სხეულზე მოქმედებს იგივე ძალა, რითაც ჰაერის ნაკადი იმოქმედებდა უძრავ სხეულზე, თუ სხეულის სიჩქარე პირველ შემთხვევაში და ნაკადის სიჩქარე მეორე შემთხვევაში სიდიდით ტოლია და საპირისპიროდ მიმართული იქნებოდა: ამ ფაქტის საფუძველზე აეროდინამიკურ მილში თვითმფრინავის მოდელს ამაგრებენ დინამომეტრზე (ძალის გამზომი) და მილში ქმნიან ასი და მეტი მ/წმ სიჩქარის ჰაერის სტაციონარულ ნაკადს. ცხადია, მოდელის ზომას ამცირებენ, მაგრამ ისე, რომ არ შეიცვალოს მოძრაობის დინამიკა, ანუ, უფრო ზუსტად, რეინოლდსის რიცხვი (72.4) დარჩეს უცვლელი. სწორედ  $Re'$ -ის მუდმივობა განაპირობებს დინამიკურ მსგავსებას თვითმფრინავსა და მის მოდელს შორის. მოდელის ზომის შემცირებისას  $Re'$ -ის მუდმივობის შენარჩუნებისთვის საჭიროა გაიზარდოს სიჩქარე, ან შემცირდეს  $V$  კინემატიკური სიბლანტე. სიჩქარის გაზრდა შეზღუდულია, რადგან, როდესაც  $\nu \rightarrow \nu_0$ , §69-ის თანახმად, აირი ხდება კუმშვადი.  $\nu$ -ს შემცირება შესაძლებელია გარემოს სიმკვრივის გაზრდის ხარჯზე. ვინაიდან გარემო აირადია, ხოლო აირის დინამიკური სიბლანტე პრაქტიკულად არ არის სიმკვრივეზე დამოკიდებული<sup>50</sup>, ამიტომ სიმკვრივის ზრდა, (72.2)-ის თანახმად, იწვევს  $\nu$ -ს იმდენჯერვე შემცირებას. ამ თვალსაზრისით, მიუხედავად ჰერმეტიზაციასთან დაკავშირებული ტექნიკური სიძნელეებისა, აეროდინამიკურ მილებში იყენებენ ძლიერ შეკუმშულ ჰაერს, ან მძიმე აირებს.

**ამოცანა 72.1.** გამოთვალეთ ლამინარული დინების დროს წყლის მაქსიმალური მოცულობითი გასავალი 10 სმ დიამეტრის მილში.

**ამოხსნა:**

(72.3)-ის თანახმად:

$$v_{საშ} = \frac{\nu \cdot Re}{l}, \quad v_{საშ} = \frac{1,1 \cdot 10^{-6} \cdot 2300}{0,1} = 2,53 \cdot 10^{-2} \text{ (მ/წმ)}.$$

შესაბამისად მოცულობის გასავალი იქნება:

<sup>50</sup>აირებში სიმკვრივის 10-ჯერ გაზრდაც კი ძლიერ უმნიშვნელოდ ცვლის დინამიკურ სიბლანტეს.

$$Q = S \cdot v_{\text{საშ}} = \frac{\pi \ell^2}{4} \cdot v_{\text{საშ}}, \quad Q = 3,14 \cdot \frac{10^{-2}}{4} \cdot 2,53 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ (მ}^3/\text{წმ)}.$$

**ამოცანა 72.2.** 2 სმ რადიუსის გაზსადენში აირის სიჩქარე 50 სმ/წმ-ია. დავადგინოთ დინების ხასიათი, თუ  $v = 1,2 \cdot 10^{-5}$  მ<sup>2</sup>/წმ. სიჩქარის რა მნიშვნელობაზე გახდება დინება ტურბულენტური.

**ამოხსნა:**

(72.3)-ის თანახმად:

$$\text{Re} = \frac{0,5 \cdot 0,04}{1,2 \cdot 10^{-5}} \approx 1670 \quad (\ell = 2r).$$

დინება ლამინარულია ( $1670 < 2300$ ). ტურბულენტობის წარმოშობისთვის:

$$\frac{v \ell}{\nu} > 2300,$$

აქედან:

$$v > \frac{2300 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}}{0,04}, \quad v \geq 0,7 \text{ (მ/წმ)}.$$

### §73. სხეულთა მოძრაობა სითხეებსა და აირებში

წინა პარაგრაფებში ჩვენ განვიხილეთ სითხეებისა და აირების მოძრაობა დასიბლანტის გავლენა ამ მოძრაობაზე. ეხლა განვიხილოთ სხვა სიტუაცია, კერძოდ, როდესაც სხეული მოძრაობს სითხეში ან აირში. ზოგადად როდესაც სხეული მოძრაობს რაიმე გარემოში (სითხე, აირი) გარემოს მხრიდან სხეული განიცდის ეგრეთწოდებულ **აეროდინამიკური ძალის** მოქმედებას.

შევნიშნოთ, რომ ჰაერის მიმართ თანაბრად მოძრავ სხეულზე მოქმედი ძალა, გალილეის ფარდობითობის პრინციპიდან გამომდინარე, იგივე დარჩება, რაც უძრავ სხეულზე იმავე სიჩქარის მქონე ჰაერის ნაკადის მოქმედებისას. ამ ფაქტზე დაყრდნობით, ტექნიკურ აეროდინამიკაში მიღებულია უძრავ სხეულზე ჰაერის თანაბარი ნაკადის მოქმედების შესწავლა.

თუ გამოვიყენებთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას, სადაც  $x$  ღერძი მიმართულია ნაკადის გასწვრივ, მაშინ ნებისმიერი ფორმის სხეულისთვის  $\vec{R}$  შეიძლება წარმოვიდგინოთ სამი მდგენელის სახით:

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z.$$

ჩვეულებრივად, ჰაერში მოძრავ ყველა სხეულს გააჩნია სიმეტრიის სიბრტყე. დასაწყისში განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ეს სიბრტყე ემთხვევა  $yOz$  სიბრტყეს (ნახ. 73.1). ამ დროს აეროდინამიკური ძალა მიმართულია ნაკადის გასწვრივ, ანუ გააჩნია ერთი  $\vec{R}_x$  მდგენელი ( $\vec{R} = \vec{R}_x$ ), რომელსაც **შუბლა წინაღობის ძალას<sup>51</sup>** უწოდებენ. ამ ძალის მნიშვნელობა, მოცემული ნაკადის შემთხვევაში, დამოკიდებულია სხეულის ზომებსა და ფორმაზე. ნახ. 73.2-ზე მოცემულია  $\vec{R}_x$  ძალის სიდიდე ერთნაირი განივი კვეთის მქონე სხვადასხვა ფორმის

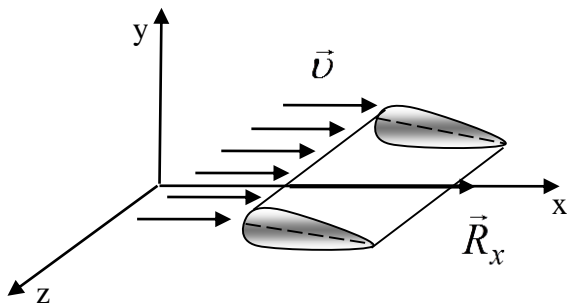
<sup>51</sup>ეს სახელწოდება გამართლებულია იმით, რომ სხეულის ჰაერში მოძრაობისას ამ ძალას გააჩნია მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება.

(დისკოს, სფეროს, სიგარას) სხეულზე. იგი მინიმალურია სიგარას (სიმძიმის ძალთა ველში მყოფი წვეთის) ფორმის სხეულებისთვის და მაქსიმალურია დისკოსთვის.

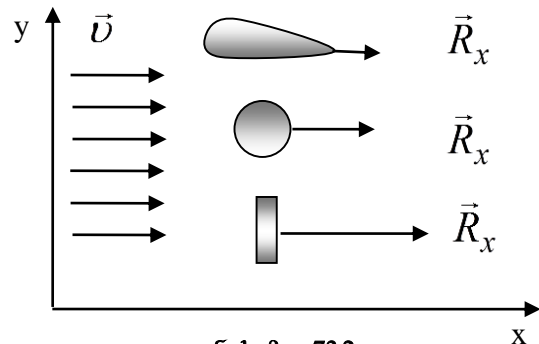
როდესაც რეინოლდსის რიცხვი (72.4) ნაკლებია ერთზე სხეულის შემომსველებელი ნაკადილამინარულია და შუბლა წინალობის ძალა სინქარის პირდაპირპროპორციულია (იხ. §25):  $R = \mu_1 v$  სადაც  $\mu_1$  კოეფიციენტი დამოკიდებულია სხეულის ზომებსა, ფორმასა და გარემოს სიბლანტეზე. კერძოდ, მცირე ზომის სფერული სხეულებისათვის  $\mu_1 = 6\pi r\eta$  (სადაც  $r$  სფეროს რადიუსია). მაშასადამე მცირე სფერულ სხეულზე ლამინარული ნაკადი მოქმედებს ძალით:

$$R = 6\pi r\eta v. \quad (73.1)$$

ეს ფორმულა **სტოქსის ფორმულის** სახელწოდებითაა ცნობილი. შევნიშნოთ, რომ ტურბულენტობისას  $R \approx v^2$ .



ნახაზი 73.1

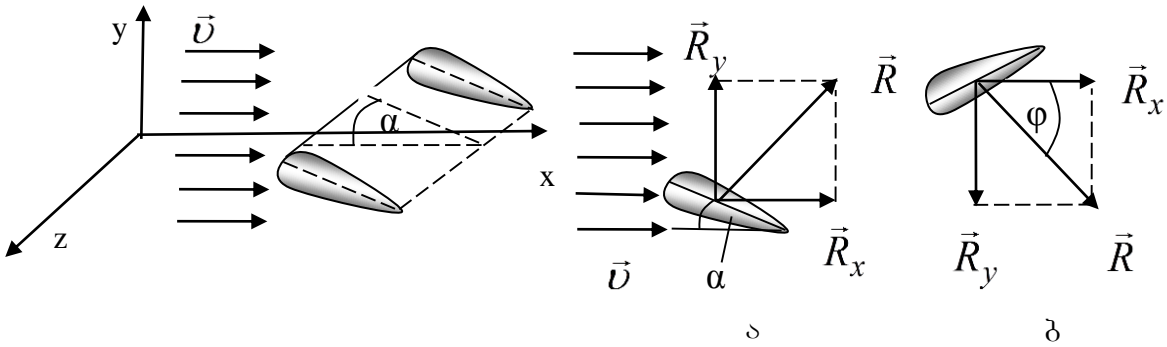


ნახაზი 73.2

თუ სხეულის სიმეტრიის სიბრტყე დახრილია ნაკადის მიმართ (ნახ. 73.3), სხეულზე მოქმედი აეროდინამიკური ძალა აღარ დაემთხვევა ნაკადის მიმართულებას. ასეთ შემთხვევაში  $\vec{R}$  დავშალოთ ორ მდგენელად  $\vec{R}_x$  და  $\vec{R}_y$ .  $\vec{R}_x$  უკვე განხილულიშუბლა წინალობის ძალაა, ხოლო  $\vec{R}_y$  – ნაკადის მართობულ ძალას – **ამწვე ძალას** უწოდებენ. ეს სახელწოდება პირობითია. სხეულის ნაკადის მიმართ ორიენტაციისგან დამოკიდებულებით ის შეიძლება მიმართული იყოს როგორც ზევით, ასევე ქვევით (ნახ. 73.4).  $\vec{R}_y$ , ისევე, როგორც  $\vec{R}_x$ , მოცემული ნაკადის შემთხვევაში, დამოკიდებულია სხეულის ზომებსა და ფორმაზე.

ზოგადად, აეროდინამიკურ ძალას გააჩნია კიდევ ერთი  $\vec{R}_z$  მდგენელი, რომელსაც **გვერდითი ძალა** ეწოდება. ეს ძალა არსებით როლს არ თამაშობს, როდესაც სხეულს  $OZ$  ღერძის მართობულად გააჩნია ერთნაირი პროფილი. ასეთ შემთხვევაში სხეულზე ნაკადის გარსშემოდენა  $OZ$ -ის გასწვრივ ყველგან ერთნაირია, გარდა ბოლოებისა. თუ ამ მიმართულებით სხეული საკმაოდ გრძელია, ბოლოების ეფექტი შეიძლება ვუგულებელყოთ და სხეულის გარსშემოდენა განვიხილოთ  $OZ$ -ის მართობულად აღებულ ნებისმიერ სიბრტყეში. ამ გამარტივებების საფუძველზე  $\vec{R}_z$  პრაქტიკულად არ წარმოიქმნება და აეროდინამიკური ძალა აღმოჩნდება  $XOY$  სიბრტყეში. ამრიგად, განიხილება ორგან-ზომილებიანი ამოცანა, ანუ სხეულის გარსშემოდენა ერთ სიბრტყეში (ბრტყელი დინება).

ნაკადის მიერ სხეულის გარსშემოდენის სურათი მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული ნაკადის სიბლანტესა და სხეულის ფორმაზე. განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა –



ნახაზი 73.3

ნახაზი 73.4

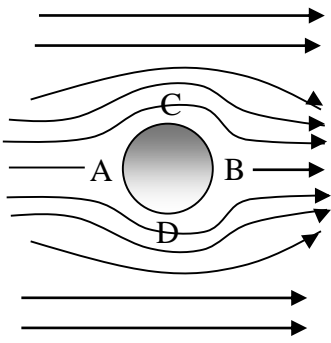
იდეალური (სიბლანტის არ მქონე) ნაკადის გარსშემოდენა უსასრულოდ გრძელ ცილინდრზე (ნახ. 73.4), რომლის სიმეტრიის ღერძი  $Z$  – ღერძის პარალელურია (ბრტყელი დინება). სიბლანტის არ არსებობის გამო ნაკადი თავისუფლად მისრიალებს ცილინდრის ზედაპირზე და სრულად შემოასველებს მას. დენის წირები აბსოლუტურად სიმეტრიულია  $A, B$  და  $C, D$  წერტილებზე გამავალი წრფეების მიმართ. ამიტომ  $A$  და  $B$  წერტილების მახლობლობაში წნევა ერთნაირია ( $p_A = p_B$ ) და მეტია შეუშფოთებელ ნაკადში არსებულ  $p$  წნევაზე (რადგან ნაკადის სიჩქარე  $A$  და  $B$  წერტილებში ნულია). ასევე ერთნაირია წნევა  $C$  და  $D$  წერტილების მახლობლობაში ( $p_C = p_D$ ) და ნაკლებია შეუშფოთებელ ნაკადში არსებულ წნევაზე (რადგან  $C$  და  $D$  არეში დენის წირთა შემჭიდროების გამო, ნაკადის სიჩქარე მეტია, ვიდრე მის შეუშფოთებულ არეში).

ზემოთქმულიდან გამომდინარე,  $AB$  და  $CD$  წრფის გასწვრივ ცილინდრის ზედაპირზე მოქმედი წნევის ძალთა ტოლქმედი ნულია ე.ი. არ აღიძვრება არც შუბლა წინაღობა და არც ამწევი ძალა. ზოგადად, **ნებისმიერი ფორმის სხეულზე იდეალური ნაკადი ახდენს სრულ გარსშემოდენას, რის გამოც შუბლა წინაღობის ძალა არ აღიძვრება.**

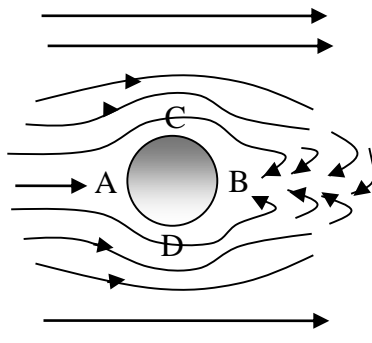
რეალური ნაკადის შემთხვევაში, სიბლანტის არსებობის გამო, სხეულთან უშუალოდ შეხებაში მყოფი თხელი ფენა კი არ მისრიალებს სხეულის ზედაპირის გასწვრივ, არამედ ეკვრის მას, მუხრუჭდება და ჩერდება. ეს ფენა აფერხებს მეზობელი ფენის მოძრაობას, ამცირებს მის სიჩქარეს, რომელიც, თავის მხრივ, აფერხებს მომდევნო ფენას. ეს ეფექტი თანდათან მცირდება სხეულის ზედაპირისაგან დაშორებით, რის გამოც სხეულის ზედაპირისადმი მართობულად აღძრული სიჩქარის გრადიენტი იარსებებს არც თუ ისე დიდ (დაახლოებით ნაკადის მართობულ სიბრტყეში სხეულის განივი კვეთის რადიუსის ტოლ) მანძილზე. ამ არეს **სასაზღვრო შრე** ეწოდება. მის მიღმა ნაკადის შეშფოთება არ ხდება და ნაკადის სიჩქარე უცვლელია.

სასაზღვრო შრეში მოქმედი სიბლანტის ძალები სხეულთან უშუალოდ შეხების არეში ქმნიან ნაკადის მიმართულების გასწვრივ **სახუნის წინაღობის ძალას**. ეს ძალა შუბლა წინაღობის ძალის ერთ-ერთი მდგენელია. შუბლა წინაღობის წარმოქმნაში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ისიც, რომ სიბლანტის არსებობის გამო, სრული გარსშემოდენა შეუძლებელი ხდება. სასაზღვრო შრეში სიბლანტის ძალთა მოქმედება იწვევს სხეულის ზედაპირის შემხები ნაკადის ფენის მოწყვეტას სხეულიდან, რის შედეგადაც მის უკან წარმოიქმნება გრივალური მოძრაობა – ნაკადის მოლეკულები ბრუნავენ მყისიერი ცენტრების

ირგვლივ (ნახ. 73.5). A წერტილის მახლობლობაში ნაკადის სიჩქარე ნულის ტოლია და, შესაბამისად, წნევა მაქსიმალური.



ნახაზი 73.4



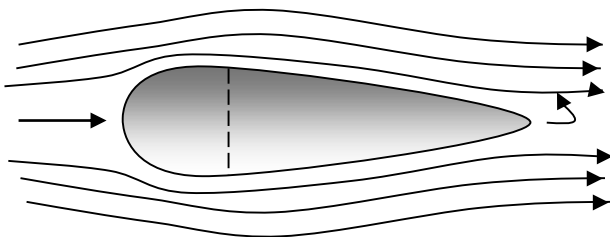
ნახაზი 73.5

B-ს მახლობლობაში ნაკადის მოწყვეტის (მოძრაობის) გამო, წნევა მცირდება შეუშფოთებელ ნაკადთან შედარებით, თუმცა მეტი რჩება, ვიდრე C და D წერტილებშია. AB წრფის გასწვრივ წარმოიშობა წნევითა სხვაობა ( $p_A - p_B > 0$ ) და, შესაბამისად, წნევის ძალა, რომელიც ასევე ნაკადის გასწვრივ არის

მიმართული (სხეულის ფარდობითი სიჩქარის საპირისპიროდ) და წარმოადგენს შუბლა წინაღობის ძალის მეორე მდგენელს. მას წნევის წინაღობის ძალას უწოდებენ. ამრიგად,

➤ რეალურ ნაკადში სხეულზე მოქმედი შუბლა წინაღობის ძალა წარმოადგენს ხახუნის და წნევის წინაღობის ძალების ჯამს.

წნევის და ხახუნის წინაღობათა მნიშვნელობა დამოკიდებულია სხეულის ფორმაზე, მის ორიენტაციაზე ნაკადის მიმართ და, შესაბამისად, გარსშემოდენის სურათზე. გარსშემოდენა განსაკუთრებით მოქმედებს წნევის წინაღობის ძალის სიდიდეზე. მაგალითად, ნაკადის გასწვრივ მოთავსებული ფირფიტის შემთხვევაში გარსშემოდენა თითქმის სრულია და წნევის წინაღობა უმნიშვნელოა. ამ დროს არსებით როლს თამაშობს მხები წინაღობის, ანუ ხახუნის წინაღობის ძალა. იგივე ფირფიტის ნაკადში მართობულად მოთავსებისას გარსშემოდენა ძალიან უარესდება. ფირფიტის წინა ნაწილში წნევა გაცილებით აღემატება უკანა ნაწილში წნევას. წნევის წინაღობა ძალიან დიდია და თითქმის მთლიანად განსაზღვრავს შუბლა წინაღობის ძალას. ამიტომ ცდილობენ სხეულს მისცენ კარგი გარსშემოდენის ფორმა, კერძოდ ისეთი, რომ სხეულის უკანა ნაწილში ნაკადის მოწყვეტის ზედა და ქვედა წერტილებს შორის მანძილი რაც შეიძლება მცირე იყოს. ნახ. 73.6-ზე მოცემულია წვეთის ფორმის სხეულზე გარსშემოდენის სურათი. ასეთ შემთხვევაში ნაკადის



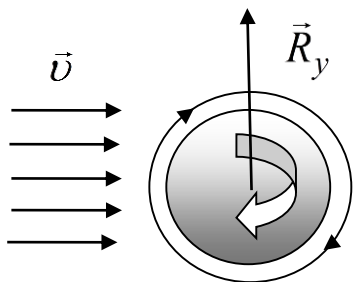
ნახაზი 73.6

მოწყვეტის ზედა და ქვედა წერტილები პრაქტიკულად ერთმანეთს ემთხვევა, ანუ მოწყვეტა ხდება თითქმის ერთ წერტილში. შედეგად, წნევის შემცირება სხეულის უკან პრაქტიკულად არ ხდება და წნევის წინაღობა თითქმის ნულის ტოლია. ანალოგიურ ფორმას აძლევენ თვითმფრინავის ფრთებსა და ფიუზელაჟს, ავტომობილს, წყალქვეშა ნაგებს, ტორპედოს

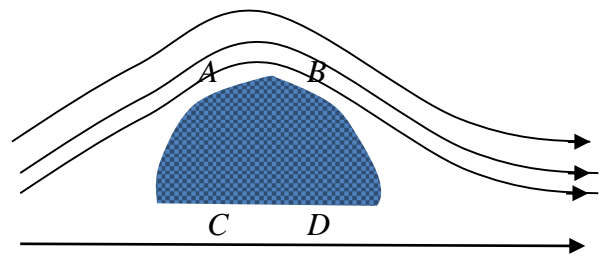
და ა.შ.

რადგან ხახუნის წინაღობის ძალა დამოკიდებულია სხეულის ზედაპირის დამუშავების ხარისხზეც, ამიტომ სხეულებს აძლევენ არა მარტო კარგ გარსშემოდენის ფორმას, არამედ ცდილობენ მისი ზედაპირი გახადონ მაქსიმალურად გლუვი, რისთვისაც ფარავენ საღებავით.

სიბლანტის ძალები გარკვეულ როლს თამაშობს ამწევი ძალის წარმოშობაზეც. ამ თვალსაზრისით განვიხილოთ ცილინდრის ბრუნვა სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ ჰაერის თანაბარ ნაკადში. თუ ცილინდრის ზედაპირის წერტილთა წირითი სიჩქარე მეტია ნაკადის სიჩქარეზე, მაშინ სიბლანტის ძალები, რომლებიც ცილინდრის მხრიდან მოქმედებს ჰაერის შემხები ფენის მოლეკულებზე, ცილინდრის ზედა და ქვედა ნაწილში მიმართული იქნება საპირისპიროდ. კერძოდ, ზედა ნაწილში მოქმედი სიბლანტის ძალები აჩქარებს ჰაერის მოლეკულების მოძრაობას, ხოლო ქვედა ნაწილში დაამუხრუჭებს. ნახაზ 73.7-ზე მოცემულია ასეთ შემთხვევაში დენის წირთა განაწილების სურათი. ნაკადის ასეთ გარსშემოდენას სხეულზე ცირკულაცია ეწოდება. იგი განაპირობებს სიჩქარეთა სხვაობას სხეულის ზედა და ქვედა ნაწილში, რაც აღძრავს ნაკადის მართობულად წნევათა სხვაობას და წარმოშობს  $\vec{R}_y$ , ამწევი ძალას. ცილინდრის ბრუნვის შედეგად ამწევი ძალის წარმოქმნის მოვლენას **მაგნუსის ეფექტი** ეწოდება.



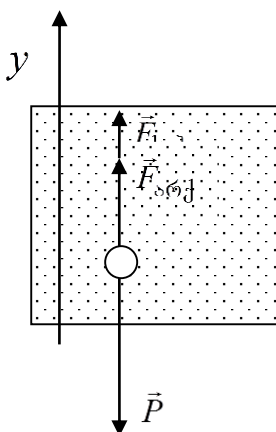
ნახაზი 73.7



ნახაზი 73.8

შეგნიშნოთ, რომ ამწევი ძალის წარმოშობისთვის სიბლანტის ძალები არ ასრულებენ არსებით როლს. ნახ. 73.8-ზე ნაჩვენებია იდეალური სითხით ნახევარცილინდრის შემოსვლელება. დენის წირების სიმჭიდროვე  $AB$  უბნის მახლობლად მეტია, ვიდრე  $CD$  უბნის მახლობლობაში, შესაბამისად წარმოიშობა წნევათა სხვაობა, რაც განაპირობებს ამწევი ძალის წარმოშობას. რადგან მოცემულ შემთხვევაში  $p_A > p_B$ , ამწევი ძალა მიმართული იქნება ვერტიკალურად ზევით. საფრენ აპარატურებში ფრთის პროფილის და ორიენტირების საშუალებით აღწევენ ამწევი ძალის სასურველ მიმართულებას.

**ამოცანა 73.1.**  $\rho$  სიმკვრივის და  $r$  რადიუსის მცირე ბურთულის  $\rho_0$  სიმკვრივის სითხეში გარდნის დამყარებული სიჩქარე  $v$ -ს ტოლია. განსაზღვრეთ სითხის სიბლანტის კოეფიციენტი. **ამოხსნა:**



ნიუტონის II კანონის თანახმად:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{სობ}} + \vec{F}_{\text{სრქ}} + \vec{P} \quad (\vec{v} = \text{const}).$$

$OY$  ღერძზე დაგეგმილებით ვღებულობთ:

$$F_{\text{სობ}} + F_{\text{სრქ}} - P = 0, \tag{1}$$

რადგან სითხეში მცირე მასის სხეული დაბალ სიჩქარეს ავითარებს, ამიტომ (73.1)-ის თანახმად:

$$R = F_{\text{სობ}} = \mu v = 6\pi\eta r v,$$

$$F_{\text{სრქ}} = \rho_0 g V,$$

ხოლო  $P = mg = \rho g V$ . (1)-ში შეტანით ვღებულობთ:

$$\eta = \frac{V(\rho - \rho_0)g}{6\pi r v}$$

სადაც  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , ე.ი.:

$$\eta = \frac{4\pi r^3(\rho - \rho_0)g}{3 \cdot 6\pi r v} = \frac{2r^2(\rho - \rho_0)g}{9v}$$

ამოცანაში აღწერილი ცდა წარმოადგენს სითხის სიბლანტის კოეფიციენტის განსაზღვრის ერთ-ერთ მეთოდს.

**ამოცანა 73.2.** თვითმფრინავის მასა ტოლია  $2,0 \cdot 10^6$  კგ. 1200 მ<sup>2</sup> ფართობის ფრთების ქვეშ ჰაერის ნაკადის სიჩქარეა 100 მ/წმ. ბერნულის ეფექტიდან გამომდინარე, რისი ტოლი უნდა იყოს ფრთების ზემოთ ნაკადის სიჩქარე, რომ იგი “დაკავდეს” ჰაერში ( $\rho_{\text{ჰაერ}} = 1,3$  კგ/მ<sup>3</sup>).

**ამოხსნა:**

$$R_y = mg. \quad (1)$$

მეორე მხრივ:

$$R_y = (p_1 - p_2) \cdot S. \quad (2)$$

(1) = (2), ე.ი.:

$$p_2 - p_1 = \frac{mg}{S}. \quad (3)$$

(3)-ე შვეიტანოთ (69.3)-ში, მივიღებთ:

$$\frac{mg}{S} = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2},$$

აქედან:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2mg}{\rho S}} = \sqrt{100^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^7}{1,3 \cdot 1200}} = 189 \text{ (მ/წმ)}.$$

**ამოცანები:**

1. გამოვთვალოთ წნევა ჭურჭლის ფსკერზე, თუ მასში წყლის სვეტის სიმაღლეა 1 მ, ა) ჭურჭელი უძრავია. ჭურჭელის აჩქარებაა 0,5გ და მიმართულია ვერტიკალურად ბ) ზევით გ). ქვევით ( $p_{\text{ატმ}} = 10^5$  პა). **(პასუხი: 1,1.10<sup>5</sup>პა; 11,5.10<sup>5</sup>პა; 1,05.10<sup>5</sup>პა.)**

2. ცილინდრულ ჭურჭელში ჩასხმულია ტოლი მასის მქონე ვერცხლისწყალი და წყალი. გამოთვალოთ მათ მიერ წარმოებული წნევა ჭურჭლის ფსკერზე, თუ ვერცხლისწყლის სიმკვრივეა  $\rho_1 = 13,6 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>, წყლის  $\rho_2 = 1 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>, ხოლო საერთო სიმაღლე  $H = 29,2$  სმ-ს ტოლია. **(პასუხი: 0,07.10<sup>5</sup> პა.)**

3. 25 სმ დიამეტრის ცილინდრულ ჭურჭელში ჩასხმულია 12 ლ მოცულობის წყალი. რას უდრის წყლის წნევა ფსკერიდან 10 სმ სიმაღლეზე? **(პასუხი: 1450 პა.)**

4. ცილინდრულ ჭურჭელში ასხია ვერცხლისწყალი და მასზე ორჯერ ნაკლები მასის წყალი. სითხის საერთო სიმაღლეა 1,56 მ. განსაზღვრეთ წნევა ჭურჭლის ფსკერზე. ( $\rho_{\text{ვ.წყ}} = 13,6 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{წყ}} = 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>). **(პასუხი: 149160პა.)**

5. რა სიმაღლეზე უნდა ჩავასხათ სითხე  $R$  რადიუსის ცილინდრული ფორმის ჭურჭელში, რომ წნევის ძალა ჭურჭლის გვერდით ზედაპირზე უდრიდეს წნევის ძალას ფსკერზე? **(პასუხი:  $h = R$ )**

6. რასიმაღლიდან უნდა ჩამოვარდეს  $0,7 \cdot 10^4$  კგ/მ<sup>3</sup> სიმკვრივის სხეული, რომ იგი წყალში ჩაიძიროს 0,14 მ სიღრმეზე? ( $\rho_{\text{წყლის}} = 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>)? (პასუხი:0,06მ)
7. ერთგვაროვანი სხეულის წონა ვაკუუმში 0,89ნ-ია ხოლო, წყალში-0,79ნ გამოთვალეთ მისი სიმკვრივე. (პასუხი:8,9.10<sup>3</sup>კგ/მ<sup>3</sup>)
8. წყლის ზედაპირზე მოთავსებულია  $4 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup> სიმკვრივის ბურთულა. მას ხელი გაუშვებს, რის შემდეგაც ბურთულამ ჩაიძირა დაიწყო. რა დროში გაივლის იგი  $h=50$ სმ-ს? (პასუხი:0,36წმ)
9. რასიმაღლიდან უნდა ჩამოვარდეს 400 კგ/მ<sup>3</sup> სიმკვრივის სხეული, რომ იგი წყალში ჩავიდეს 8 სმ-ზე? წყლისა და აირის წინაღობას მხედველობაში ნუ მივიღებთ. (პასუხი:0,12მ)
10. რა მუშაობა უნდა შევასრულოთ  $0,5$ მ<sup>3</sup> მოცულობის სხეულის 2მ სიმაღლეზე ასაწევად წყალში თანაბარი მოძრაობით? სხეულის სიმკვრივეა  $\rho_{\text{სხ}} = 2,6 \cdot 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{წყ}} = 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>. (პასუხი:16ჯგ)
11. თანაბარი სისქის ყინულის ნაჭერი ცურავს წყალში ისე, რომ წყლის ზევით ამოწეულია 1სმ-ით. მისი ფუძის ფართობი 100 სმ<sup>2</sup>-ია. განსაზღვრეთ ყინულის მასა.  $\rho_{\text{წყ}} = 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{ყ}} = 900$ კგ/მ<sup>3</sup>. (პასუხი: 0,9კგ)
12. ხის ნაჭერი ცურავს ისე, რომ მისი მოცულობის 2/3 წყალშია ჩაძირული. რას უდრის ხის სიმკვრივე? ( $\rho_{\text{წყ}} = 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>) (პასუხი:667კგ/მ<sup>3</sup>)
13. წყალში მოთავსებულია ლუმინის სფერო იწყებს ვარდნას. რა მანძილს გაივლის იგი ვარდნის დაწყებიდან 10 წმ-ის განმავლობაში, თუ წყლის წინაღობის ძალა მუდმივია და სხეულის სიმძიმის ძალის 0,2 ნაწილს შეადგენს? (პასუხი:215მ)
14. ერთგვაროვანი სხეულის წონა წყალში 1,4-ჯერ ნაკლებია, ვიდრე ვაკუუმში. განსაზღვრეთ სხეულის სიმკვრივე. ( $\rho_{\text{წყ}} = 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{სხ}} = 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>). (პასუხი:3,5.10<sup>3</sup>კგ/მ<sup>3</sup>)
15. ყინულის ნაჭერი შეტივტივებულ მდგომარეობაშია წყლისა და ბეზინის გამყოფ ზედაპირზე. ყინულის რა ნაწილი იქნება ჩაძირული წყალში? ( $\rho_{\text{ყ}} = 900$ კგ/მ<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{წყ}} = 10^3$  კგ/მ<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{ბეზ}} = 700$ კგ/მ<sup>3</sup>) . (პასუხი:2/3)
16. პიდრავლიკურ წნეხში მცირე დგუშის ფართობი 2 სმ<sup>2</sup>-ია, ხოლო დიდი დგუშის 500 სმ<sup>2</sup>. რა სიჩქარით აიწეოს დიდი დგუში, თუ მცირეს 25 სმ/წმ სიჩქარით დაწვევთ? (პასუხი:0,1 სმ/წმ)
17. პიდრავლიკური წნეხით 2 ტ მასის მქონე ტვირთის აწევისას შესრულდა 40 ჯ მუშაობა. ამ დროს მცირე დგუში გადაადგილდა 1 მ-ით. რამდენჯერ მეტია დიდი დგუშის ფართობი მცირე დგუშის ფართობზე? (პასუხი: 500-ჯერ)
18. მინის კაპილარი, რომლის რადიუსი 0,1მმ-ს ტოლია ჩაშვებულია ვერტიკალურად 20°C წყალში. რა სიმაღლეზე აიწეოს მასში წყალი? (პასუხი: 14,4 სმ.)
19. მინის მილი, რომლის შიგა დიამეტრია 0,8 მმ, ვერტიკალურად ჩაშვებულია ვერცხლისწყალიან ჯამში. რამდენით დაიწეოს მასში ვერცხლისწყალი, ჯამში არსებულ ღონესთან შედარებით, თუ ზედაპირული დაჭიმულობის კოეფიციენტი 0,44 ნ/მ. (პასუხი: 1,1სმ.)

20. რისი ტოლი უნდა იყოს 300 მ<sup>3</sup> მოცულობის ოთახის ჰაერგამწოვი მილის დიამეტრი, რომ ყოველ 15წთ-ში ჰაერი მთლიანად განახლდეს?, თუ მილში ჰაერის სიჩქარე 3 მ/წმ-ის ტოლია. (პასუხი: 38სმ.)

21. რა დრო დაჭირდება აუზის, რომლის ზომებია 3,1 x 9,5 x 21 მ, წყლით შევსებას, თუ მასში წყალი ჩაედინება 1,9 სმ დიამეტრის მილიდან 1,5 მ/წმ სიჩქარით. (პასუხი: 380 სთ.)

22. გამოთვალეთ წნევათა სხვაობა 2 კმ სიგრძისა და 40 სმ დიამეტრის ნავთობსადენის ბოლოებზე, თუ ნავთობის მოცულობითი გასავალია 400 სმ<sup>3</sup>/წმ-ია, ხოლო სიბლანტის კოეფიციენტი 2 პუაზი. (პასუხი: 2,5.10<sup>2</sup>პა)

23. გამოთვალეთ 15 მ სიგრძისა და 1 სმ დიამეტრის მილში წყლის მოცულობითი გასავალი, თუ წნევათა სხვაობა მილის ბოლოებზე 0,35 ატმ და ტემპერატურა 20<sup>0</sup>C. (პასუხი: 5,7.10<sup>-4</sup>მ<sup>3</sup>/წმ)

24. ონკანიდან წამოსული წყლის ჭავლი ქვემოთ ვიწროვდება. ჩაწერეთ ჭავლის დიამეტრის ონკანიდან y დაშორებაზე დამოკიდებულება. თუ წყლის სიჩქარე ონკანიდან გადმოდინებისას

$v_0$  – ის ტოლია, ონკანის დიამეტრია  $d_0$ . (პასუხი:  $d(y) = d_0 \sqrt{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gy}}$ )

25. 20მ სიგრძის ჰაერგამტარის რადიუსი 3 სმ-ია. რა დროში მოახდენს სავენტილაციო-გამათბობელი სისტემა 108 მ<sup>3</sup> მოცულობის შენობის სრულ ვენტილაციას, თუ სისტემის ტუმბო ქმნის 40 პა ჭარბ წნევას?(პასუხი: 20წთ)

26. წყლის დინების სიჩქარე 5,2 სმ დიამეტრის მილის ცენტრში 18 სმ/წმ-ია. გამოთვალეთ მოცულობითი გასავალი და წნევის ვარდნა 20მ მანძილზე. (პასუხი: 1,9.10<sup>-4</sup> მ<sup>3</sup>/წმ; 3,81.10<sup>-4</sup> პა.)

27. გამოთვალეთ 22 სმ დიამეტრის მილში წყლის ლამინარული დინებისას მოცულობითი გასავალი. (პასუხი: 4,7.10<sup>-4</sup> მ<sup>3</sup>/წმ)

28. ავზი იმყოფება ჰორიზონტალურ იატაკზე (იხ. ნახ. 68.4) და შევსებულია სითხით ფსკერიდან 2,2 მ სიმაღლეზე. ნახვრეტი გაკეთებული აქვს ფსკერიდან 0,2 მ-ზე. რა მანძილზე დაეცემა სითხის ჭავლი ავზის კედლიდან იატაკს? (პასუხი: 1,26მ)

29. ვენტურის მილს იყენებენ წყლის დინების სიჩქარის გასაზომად. მილის დიამეტრი 3-ჯერ აღემატება შევიწროებული არის დიამეტრს. მანომეტრებს შორის წნევათა სხვაობა 20მმ.ვერ. წყლის ტოლია. გამოთვალეთ დინების სიჩქარე. (პასუხი: 0,5 მ/წმ)

30. 2,7.10<sup>3</sup> კგ/მ<sup>3</sup> სიმკვრივის და 2მმ დიამეტრის ბურთულა ვარდება 20<sup>0</sup>C ტემპერატურის წყალში, გამოთვალეთ ვარდნის დამყარებული სიჩქარე. (პასუხი: 3,2 მ/წმ)

31. დამყარებული სიჩქარე ჰაერის ბუშტის ზეთში ზემოთ მოძრაობისას 1 სმ/წმ-ია. გამოთვალეთ ბუშტის დიამეტრი, თუ ზეთის სიმკვრივეა 900კგ/მ<sup>3</sup>, სიბლანტის კოეფიციენტი 0,2 პა.წმ. (პასუხი: 2 მმ)

32. გამოთვალეთ თვითმფრინავის ფრთაზე მოქმედი აეროდინამიკური ამწევი ძალის ვერტიკალური მდგენელი, გამოწვეული ბერნულის ეფექტით (ნახ. 68.1), თუ ფრთის ფართობია 50 მ<sup>2</sup>, ხოლო ჰაერისნაკადის სიჩქარე ფრთის ზემოთ და ქვემოთ შესაბამისად ტოლია 300 მ/წმ და 270 მ/წმ ( $\rho_{\text{ჰაერ}} = 1,3\text{კგ/მ}^3$ ). (პასუხი: 555 კნ.)

## შ ო ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. **С.Э. Хайкин.** Физические основы механики. М, "Наука", 1971.
2. **მ. მირიანაშვილი.** ზოგადი ფიზიკის კურსი. I. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, 1973.
3. **Дж. Б. Мерион.** Физика и физический мир. М, "Мир", 1975.
4. დ. ღონდაძე. ზოგადი ფიზიკის კურსი. I ნაწ. თბილისი, "განათლება", 1976.
5. **Орир Дж.** Физика, Том 1. М, "Мир", 1981.
6. Советский энциклопедический словарь, «Советская энциклопедия», М, 1981.
7. Физический энциклопедический словарь, гл. редактор Прохоров А.М. «Советская энциклопедия», М, 1984.
8. **Х. Кухлинг.** Справочник по физике. М, "Мир", 1985.
9. **Джанколи Д.** Физика, Том 1, М, "Мир", 1989.
10. **Савельев И.В.** Курс физики, Том 1. М, "Наука", 1989.
11. ს. ტეფნაძე, გ. სანაძე, დ. ლელაძე. აეროდინამიკა. ტექნიკური უნივერსიტეტი, 1997.
12. **М.Н. Чихладзе, Г.Г. Чихладзе.** Курс общей физики, часть I. Технический университет, Тбилиси, 2002.
13. ა. გიგინეიშვილი, გ. კუკულაძე. ზოგადი ფიზიკის კურსი. II ტ. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2007.
14. **ო. კეთილაძე, მ. ჩიხლაძე** ზოგადი ფიზიკის ამოცანათა კრებული. I ნაწ. საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი, 2008
15. **მ. ჩიხლაძე, ო. კეთილაძე.** ზოგადი ფიზიკის კურსი. I ნაწ. საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი, 2009
16. **Онищенко О. Г., Коробко Б. А., Вашенко К. М.** Кинематика и динамика механизмов. ПолтНТУ, 2010.
17. **ხ. ღომიძე, ნ. ღომიძე.** "ფიზიკა". ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი 2013.

გამომცემლობის დირექტორი - ნანა ხახუტაიშვილი  
გამომცემლობის რედაქტორი – ლალი კონცელიძე  
ტექნიკური რედაქტორი – ედუარდ ანანიძე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 10.08.2015

ქაღალდის ზომა 60X84 1/16

ფიზიკური თაბახი 14.9

ტირაჟი 100

დაიბეჭდა უნივერსიტეტის სტამბაში

ქ. ბათუმი, ნინოშვილის 35