ნუგზარ ღომიძე, იზოლდა ჯაბნიძე

ფიზიკური პროცესების მოდელირება

2015 წელი

სახელმძღვანელოდ აღიარებულია ბსუ-ს აკადემიური საბჭოს №102 დადგენილებით, 23.07.2014

შესავალი

სალექციო კურსი „ფიზიკური პროცესების მოდელირება“ განკუთვნილია ფიზიკის II კურსის სტუდენტებისათვის. სასწავლო გეგმით ამ სასწავლო კურსს ეთმობა 15 ლექცია და 30 ლაბორატორიული საათი. ლაბორატორიული სამუშაოს შესრულებამდე აუცილებელია სტუდენტი იცნობდეს შესაბამისი განსახილველი ამოცანის თეორიასა და ანალიტიკურ ფორმულებს (ე.წ. გამოსათვლელ ფორმულებს). ასევე უნდა შეეძლოს ფიზიკური პროცესის აღმწერი მოცემული ცვლადი და მუდმივი პარამეტრების გამოყოფა.

ლაბორატორიული სამუშაოების უმრავლესობა სრულდება Microsoft Excel-ში დამზადებული მზა შაბლონებით, რომლებშიც უკვე მოცემულია გამოთვლებისათვის აუცილებელი ძირითადი ფორმულები. სტუდენტის ამოცანაა განსაზღვროს მუდმივები და ცვლადები ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, შეასრულოს შესაბამისი გამოთვლები და გაანალიზოს შედეგები, იქ სადაც შესაძლებელია შედეგები ასახოს გრაფიკულად. ამისათვის კი აუცილებელია სტუდენტი გაეცნოს ცხრილების შემადგენლობას და განსაზღვროს გრაფიკის ასაგებად საჭირო წერტილების რაოდენობა. ეს უკანასკნელი დამოკიდებულია გრაფიკის ფორმასა და ამოცანის სირთულეზე. ასე მაგალითად, ანალიტიკური (წერტილოვანი) ფორმულებით წრფივი დამოკიდებულების მოდელირებისათვის საჭიროა მინიმალური რაოდენობა (20-30), უფრო რთული ამოცანებისათვის, მაგალითად: როცა გრაფიკის აგება მიმდინარეობს დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი მეთოდით ამოხსნისას მიღებული მიახლოებული ფორმულების საფუძველზე და ხასიათდება გადაღუნვის წერტილით ან მინიმუმისა და მაქსიმუმის წერტილებით, შეიძლება საჭირო გახდეს რამდენიმე ასეული ან ათასეული მონაცემიც კი.

თითოეული ფიზიკური პროცესისათვის საჭიროა შედგეს ალგორითმი, რაც მოიცავს შუალედური გამოთვლებისათვის საჭირო დამატებითი სიდიდეების (დროითი ინტერვალების, კოორდინატის ნაზრდის ე.წ. ბიჯის, და ა.შ) განსაზღვრას.

ცალკეული ფიზიკური პროცესის მოდელის აგება ხორციელდება Microsoft Excel-ის პროგრამულ გარსაცმში. ამ პროგრამული პაკეტის შერჩევა განპირობებულია ძირითადად ორი მიზეზით, ჯერ ერთი, ის თითქმის ყველა სტუდენტისათვის ხელმისაწვდომია, რადგან წარმოადგენს Microsoft Office-ის შემადგენელ პაკეტს და ფართოდ არის გავრცელებული და მეორეც, სტუდენტები შეძლებენ Microsoft Excel-ის პაკეტის პროფესიული კუთხით გამოყენებას და ჩაწვდებიან მის უნიკალური შესაძლებლობებს მათ შორის მოდელირების კუთხით. თითოეული ალგორითმი, რომელიც გამოყენებული იქნება ცალკეული ფიზიკური პროცესისი მოდელირებისათვის სავსებით შესაძლებელია რეალიზებული იქნას MathCad-ის ან MathLab-ის პროგრამულ გარსაცმებში.

Microsoft Excel-ის პროგრამულ გარსაცმში ფორმულის შეტანა იწყება „=“ კლავიშის აღებით. ფორმულაში არგუმენტების სახით შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მიმართებები (ფარდობითი და აბსოლუტური) უჯრებზე, რომლებიც შეიცავენ საჭირო რიცხვით მონაცემებს, ასევე საჭირო რიცხვითი მონაცემები და ციფრები (მაგალითად, ხარისხის მაჩვენებელი, არგუმენტის კოეფიციენტები და ა.შ). მათემატიკური ოპერაციების ნიშნები („+“ – დამატება, „– “ – გამოკლება, „* “ – გამრავლება, „/“– გაყოფა, „^“- ხარისხში აყვანა) აიღება კლავიატურიდან. გარდა ამისა, გამოიყენება MS Excel -ის ჩაშენებული ფუნქციები (built functions), მათი გამოყენების წესი მითითებული იქნება საჭიროების შემთხვევაში. ფორმულის შეყვანა შეიძლება ხელით (კლავიატურის გამოყენებით) ან მაუსით (ამისათვის საკმარისია გავააქტიუროთ შესაბამისი უჯრა ან მოვნიშნოთ უჯრათა დიაპაზონი).

აბსოლუტური მიმართების შესაქმნელად გამოიყენება სიმბოლო „$". ის შეიძლება აღებული იქნას ემპირიულად უშვალოდ კლავიატურით Shift + F4 კლავიშების კომბინაციით ან გამოვიყენოთ ფუნქციონალური კლავიში F4. ფორმულაში უჯრის მიმართების გამოყენების რამდენიმე შესაძლო ვარიანტი არსებობს, კერძოდ:

1. C4 – ფარდობითი მიმართება. C სვეტიცა და 4 სტრიქონიც ფორმულაში წარმოადგენილია ფარდობითი მიმართების სახით, რაც გულისხმობს უჯრის შიგთავსის შევსების მარკერით მეზობელ დიაპაზონებში კოპირებისას ადგილი ექნება სვეტის და სტრიქონის ნომერის ცვლილებას ზრდადობის ან კლებადობის პრინციპით. უჯრის შიგთავსი შეინარჩუნებს დამოკიდებულ უჯრებს შორის სტრუქტურულ კავშირს, ამიტომ კოპირებისას მომდევნო უჯრებში ასახული შედეგი განსხვავებული იქნება.
2. $C$4 – აბსოლუტური მიმართება. ჩანაწერი მიგვითითებს, რომ ფორმულით სხვადასხვა მოქმედებების შესრულებისას (როგორიცაა კოპირება, გადაადგილება) ფიქსირდება ორივე პარამეტრი – სვეტისა და სტრიქონის ნომერი, შესაბამისად კოპირებისას მომდევნო უჯრებში ასახული შედეგი უცვლელი იქნება იქნება.
3. $C44 – შერეული მიმართება. ჩანაწერი ნიშნავს, რომ ფორმულით სხვადასხვა მოქმედებების შესრულებისას ფიქსირდება ერთი პარამეტრი – სვეტის ნომერი, ჩვენს შემთხვევაში C სვეტი, ხოლო სტრიქონის ნომერი 4, კოპირებისას იცვლება ზრდადობის (5,6,7...) ან კლებადობის (3,2,1..) პრინციპით (ეს უკანასკნელი დამოკიდებულია კოპირების მიმართულებაზე);
4. C$4 – შერეული მიმართება. ჩანაწერი მიგვითითებს, რომ ფორმულით სხვადასხვა მოქმედებების შესრულებისას ფიქსირდება ერთი პარამეტრი – სტრიქონის ნომერი, ჩვენს შემთხვევაში 4, ხოლო სვეტის ნომერი C კოპირებისას ივლება ასევე ზრდადობის (D, E, F …) ან კლებადობის (B, A…) პრინციპით.

MS Excel -ის თითოეული უჯრა ასახავს შედეგს, ხოლო ის თუ რა ფორმულით იქნა მიღებული ესა თუ ის შედეგი აისახება ფორმულის სტრიქონში, რომელიც MS Excel -ის ფანჯარაში არის ინტეგრირებული და f(x) -სიმბოლოთი არის გამოსახული. ფორმულის სტრიქონში აისახება მონიშნული უჯრის შიგთავსი, ან ფორმულა, რომლითაც ეს შიგთავსი იქნა მიღებული.

რადგან ფორმულები აღწერენ ფიზიკურ პროცესებს, ადგენენ ფიზიკურ სიდიდეებს (ცვლადებს) შორის კავშირს, ამიტომ მოდელირების შედეგების გრაფიკული წარმოდგენისათვის გამოიყენება მხოლოდ ერთი ტიპის – წერტილოვანი – დიაგრამა. ხოლო დიაგრამის სახე დამოკიდებულია ამოცანის პირობაზე. დიაგრამის ასაგებად აუცილებელია გვქონდეს მონაცემთა მინიმუმ ერთი ნაკრები – ორი ერთმანეთთან ურთიერთკავშირში მყოფი სიდიდეების მონაცემთა ერთობლიობა, მათემატიკურად ეს გამონათქვამი შეიძლება ჩავწეროთ $f(x)$-ით. ამასთან, ერთ–ერთი სიდიდის ცვლილება (როგორც წესი, არგუმენტის x) განისაზღვრება შემსრულებლის მიერ წინასწარ შერჩეული ინტერვალის ან, ე.წ. **სიდიდის**

ცვლილების ბიჯის საშუალებით, ხოლო მეორე (ფუნქციის f) სიდიდის მნიშვნელობები განისაზღვრება გამოთვლებით შესაბამისი არგუმენტების მნიშვნელობებისათვის.

ყოველი ამოცანის ბოლოს მოყვანილია დავალებები, რომლებიც უნდა შესრულოს ლაბორატორიული დავალების შესრულების შემდეგ. დავალებები სხვადასხვა ხასიათისაა, კერძოდ, ის შეიძლება ეხებოდეს მოცემული მოდელის გამოყენების საზღვრების დადგენას (განსაკუთრებით ეს ეხება მოდელებს, რომელთათვისაც ფორმულები მიღებულია რიცხვითი მეთოდებით), საწყისი პარამეტრების გავლენას სხვა სიდიდეებსა თუ დიაგრამის ფორმაზე და სხვა.

§1. წრფივი თანაბარი მოძრაობის მოდელირება

განვიხილოთ მოდელირება ისეთი ფიზიკური პროცესისა, როგორიცაა სხეულის მოძრაობა მუდმივი სიჩქარით $\vec{v}=const$. როგორც ცნობილია, ასეთ შემთხვევაში სხეული ასრულებს წრფივ თანაბარ მოძრაობას. დავუშვათ მოძრაობა სწარმოებს OX ღერძის გასწვრივ. ვთქვათ, $(t_0 = 0)$ მომენტში სხეული იმყოფებოდა x_0 წერტილში, მაშინ დროის ნებისმიერი მომენტისათვის სხეულის კოორდინატი შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t \tag{1.1}$$

სადაც v_x არის სიჩქარის ვექტორის გეგმილი Ox ღერძზე. იგი სკალარული სიდიდეა, რაც ნიშნავს იმას, რომ შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი. სიჩქარის ვექტორის გეგმილის ნიშანი განისაზღვრება იმის მიხედვით, თუ რა კუთხეს ადგენს იგი Ox ღერძის მიმართულებასთან. თუ $\alpha = 0^0$, $v_x > 0$ (ე.ი. $v_x = v$, სადაც $v = |\vec{v}|$ სიჩქარის ვექტორის მოდულია). თუ $\alpha = 180^0$, $v_x < 0$ (შესაბამისად, $v_x =- v$).

წრფივი თანაბარი მოძრაობის გრაფიკული მოდელირება გულისხმობს $x = f(t)$ დამოკიდებულების გრაფიკულ აგებას სიჩქარის სხვადასხვა მიმართულებისა და მნიშვნელობისათვის.

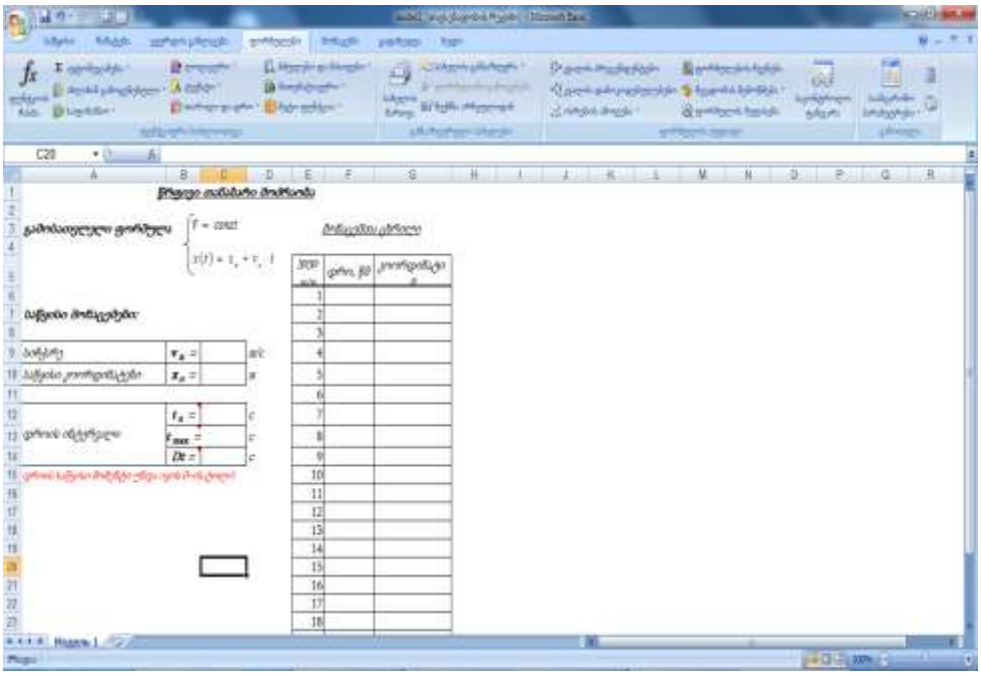
ლაბორატორიული ამოცანა №1

ლაბორატორიული ამოცანის მიზანი:

წრივი თანაბარი მოძრაობის მოდელირება და (1.1) ფორმულით მოცემული დამოკიდებულების გრაფიკულად წარმოდგენა.

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab1 - წრფივი თანაბარი მოძრაობა“.



ნახ.1. წრფივი თანაბარი მოძრაობა - შაბლონი lab1.

მოძრაობის განტოლებიდან გამომდინარე საწყის მონაცემებად გვევლინება:

ა) სხეულის საწყისი მდებარეობა (კოორდინატი) – x_0,

ბ) სიჩქარის ვექტორის პროექცია არჩეულ მიმართულებაზე – v_x,

გ) დროის ინტერვალი (განისაზღვრება t_0 დროის საწყისი და t საბოლოო მომენტებით), რომლის განმავლობაშიც ვაკვირდებით მოძრაობას (პროცესის მიმდინარეობის ხანგრძლივობა)

ცვლადი სიდიდეებია: დრო და სხეულის კოორდინატები, ხოლო მუდმივი – სიჩქარის პროექცია Ox ღერძზე. $X = f(t)$ გრაფიკის ასაგებად აუცილებელია განვსაზღვროთ $(t; x)$ წერტილთა რაოდენობა. ამისათვის კი საჭიროა ვიცოდეთ t **ცვლადის ცვლილების ბიჯი** – Δt, იგი გამოითვლება დროის ინტერვალის შეფარდებით ქვეინტეგრალების რაოდენობასთან:

$$\Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{n} \tag{1.2}$$

თუ მოცემულ ფორმულაში n–ით აღვნიშნავთ ქვეინტერვალების რაოდენობას, მაშინ ცხრილი განისაზღვრება n+1 სტრიქონით.

<u>შაბლონის შევსება</u>

1. უჯრებში C9, C10 და C14 შეიტანეთ საწყისი რიცხვითი მონაცემები. დროის ათვლა დაიწყეთ ნულოვანი მომენტიდან. მაგალითისათვის განიხილეთ შემთხვევა შემდეგი მონაცემებისათვის:

$$\mathrm{v_x} = 2 \text{ მ/წმ}; \quad \mathrm{x_0} = 0 \text{ მ}; \quad \mathrm{t_0} = \mathrm{t_{min}} = 0 \text{ წმ}; \qquad \mathrm{t_{max}} = 5 \text{ წმ}.$$

2. C15 უჯრაში დროის ცვლილების ბიჯი განსაზღვრეთ n ქვეინტეგრალით.
3. შეავსეთ მონაცემთა ცხრილი:
   F6 უჯრაში შევიტანოთ დროის საწყისი მნიშვნელობა უჯრიდან C12 კოპირების მეთოდით (=C12).
   F სვეტში ყოველი მომდევნო მნიშვნელობა განსხვავდება Δt -ით ($\mathrm{t_1} = \mathrm{t_0} + \Delta t$; $\mathrm{t_2} = \mathrm{t_1} + \Delta t$; ....). ამიტომ F7 უჯრაში შეიტანეთ ფორმულა =F6+$C$15 (C15 უჯრა შეიცავს დროის ცვლილების ბიჯის მნიშვნელობას, F სვეტის უჯრებისათვის ფორმულის კოპირებისას მისი მნიშვნელობა არ უნდა შეიცვალოს, ამიტომ გამოიყენეთ აბსოლუტური მიმართება ამ უჯრისათვის), ამის შემდეგ გადააკოპირეთ იგი მთელი სვეტის „დრო, წმ“ სიგრძეზე.
4. G6 უჯრა მიამაგრეთ C10-ს, რომლითაც განისაზღვრება საწყისი კოორდინატი. C10 უჯრაში ნებისმიერი ცვლილება ავტომატურად გამოიწვევს ცვლილებას G6 უჯრაში.
5. G7 უჯრაში შეიტანეთ კოორდინატის დროის ნებისმიერი მომენტისათვის გამოსათვლელი ფორმულა.
6. დააკოპირეთ G7 უჯრაში ჩაწერილი ფორმულა G8: G28 დიაპაზონისათვის.

შენიშვნა: ფორმულების შეტანისას გამოიყენეთ აბსოლუტური მისამართები მუდმივი სიდიდეებისათვის.

$x(t)$ გრაფიკის აგება

წრფივი თანაბარი მოძრაობისას კოორდინატის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკის ასაგე-ბად საჭირო მონაცემები მოცემულია ცხრილის F6: F26 დიაპაზონში. ეს მონაცემები გადაიზო-მება ჰორიზონტულ ღერძზე, ხოლო G6: G26 დიაპაზონი – ვერტიკალურზე.

1. გამოყავით მონაცემთა დიაპაზონი.
2. აირჩიეთ ბრძანება *<u>ჩამატება - დიაგრამა</u>* <u>... (Insert – Chart)</u>
3. აირჩიეთ გრაფიკის
   ტიპი – *<u>წერტილოვანი,</u>* (Tipe -)

   სახე - *<u>წერტილოვანი გლუვ ხაზებთან და სანიშნეებთან ერთად</u>*;

დიაგრამისა და საკოორდინატო ღერძების დასახელებები ერთეულების მითითებებით შემ-დეგი სახით:

"*<u>დიაგრამის დასახელება</u>*" – წრფივი თანაბარი მოძრაობა;

<u>„X ღერძი</u>" – დრო t, წმ;

" *<u>Y ღერძი</u>*" " – კოორდინატი x, მ;

- თითოეულ ღერძზე ჩართეთ ბადის ძირითადი ხაზები;
- განალაგეთ დიაგრამა ცალკე ფურცელზე;
- შეინახეთ მონაცემები.

ამოცანები:

1. ვთქვათ მატერიალური წერტილის მოძრაობა აღიწერება კანონით: $x(t) = -3 + 2t.$ იპოვეთ $x(t)$ დამოკიდებულების გრაფიკული სახე, როცა $t \in (0 \div 20)$ შუალედს.
2. განსაზღვრეთ ახდენს თუ არა გავლენას პროგრამის ბიჯი Δt გრაფიკის ფორმაზე.
3. შეცვალეთ საწყისი მონაცემები C9, C10, C13 და C14 უჯრებში და განსაზღვრეთ ახდენს თუ არა ეს ცვლილება გავლენას გრაფიკის ფორმაზე.
4. ორი მატერიალური წერტილი მოძრაობა აღიწერება კანონით: $x_1(t) = t,\ x_2(t) = 5,$ $x_3(t) = 2t + 2.$ ააგეთ $x(t)$ დამოკიდებულების გრაფიკები თითოეული შემთხვევისათვის და იპოვეთ მათი შექვედრის ადგილი და დრო გრაფიკულად.
5. სამი მატერიალური წერტილი მოძრაობს კანონით: $x_1(t) = 5 - 2t,\ x_2(t) = 2 + t,$ $x_3(t) = -t + 2.$ იპოვეთ თითოეული მათგანისათვის $x(t)$ გრაფიკის ჰორიზონტისადმი დახრის კუთხე და გამოსახეთ გრადუსებში.

§2. თანაბარაჩქარებული მოძრაობის მოდელირება

განვიხილოთ წრფივი თანაბარაჩქარებული მოძრაობა ($\vec{a} = const$). რადგან მოძრაობა წრფივია, ამიტომ მოძრაობის აღსაწერად საკმარისია მხოლოდ ერთი კოორდინატი. დავუშვათ, სხეული მოძრაობს Oy ღერძის გასწვრივ. აჩქარების განმარტების თანახმად,

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} \qquad (2.1)$$

სადაც მრიცხველში დგას სიჩქარის ცვლილება, ხოლო მნიშვნელში – დროის შუალედი, რომლის განმავლობაშიც ეს ცვლილება მოხდა. აქედან, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$. რადგან მოძრაობა თანაბარაჩქარებულია, ამიტომ ყოველი წამის განმავლობაში სიჩქარე მიიღებს ერთსა და იმავე ნაზრდს. გადავწეროთ ეს გამოსახულება გეგმილებით:

$$\vec{v}_y = \vec{v}_{0y} + \vec{a}_y t \qquad (2.2)$$

იმის მიხედვით, თუ როგორაა $\vec{v}$, $\vec{v}_0$, $\vec{a}$ ვექტორები მიმართული Oy ღერძის მიმართ, სიჩქარისა და აჩქარების მდგენელები შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითიც. კერძოდ, როცა $a_y > 0$, სიჩქარის ნაზრდი დადებითია, რაც ნიშნავს, რომ დროის მიხედვით იზრდება (მოძრაობა აჩქარებულია; ხოლო როცა $a_y < 0$, სიჩქარე დროის მიხედვით მცირდება (მოძრაობა შენელებულია).

წრფივი თანაბარაჩქარებული მოძრაობისას სხეულის კოორდინატი იცვლება შემდეგი კანონით:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2} \qquad (2.3)$$

სადაც y_0 - სხეულის კოორდინატია $t_0 = 0$ მომენტისათვის.

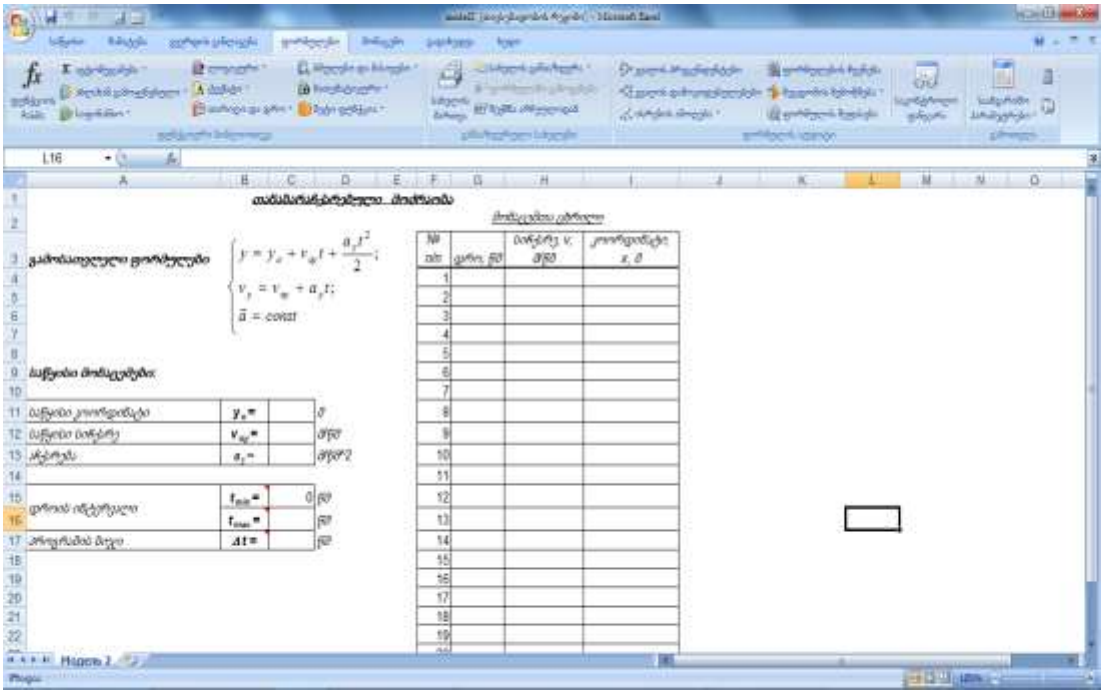
ამრიგად, ჩვენ განვიხილეთ თანაბარაჩქარებული მოძრაობის მათემატიკური მოდელირება, ხოლო გრაფიკული მოდელირება მდგომარეობს $v_y = f(t)$ და $y = f(t)$ დამოკიდებულების შესაბამისი გრაფიკის აგებაში a_y –ისა და v_{oy}–ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

ლაბორატორიული ამოცანა №2

<u>შაბლონის ჩატვირთვა</u>

1. გახსენით შაბლონი „lab2" –" წრფივი თანაბარაჩქარებული მოძრაობა“.
2. მოძრაობის განტოლების ანალიზიდან გამომდინარე საწყის მონაცემებად გვევლინება:
   ა) სხეულის მდებარეობა დროის ნულოვანი მომენტისათვის (კოორდინატი) – y_0,
   ბ) საწყისი სიჩქარის ვექტორის პროექცია არჩეულ მიმართულებაზე – v_{oy},
   გ) აჩქარების ვექტორის პროექცია არჩეულ მიმართულებაზე – a_y,
   გ) დროის ინტერვალი $t_{min} \div t_{max}$, რომლის განმავლობაშიც ხდება დაკვირვება მოძრაობაზე.

ცვლადი სიდიდეები – დრო, სიჩქარე და სხეულის კოორდინატი, ხოლო *მუდმივი* – აჩქარებისა და საწყისი სიჩქარის პროექცია არჩეულ მიმართულებაზე.



შაბლონის შევსება

1. ცხრილში შეიტანეთ საწყისი რიცხვითი. მაგალითისათვის განიხილეთ შემთხვევა შემდეგი მონაცემებისათვის:
   $a_y = 2$ მ/წმ^2; $v_{0y} = 5$ მ/წმ; $y_0 = 0$ მ; $t_0 = t_{min} = 0$ წმ; $t_{max} = 10$ წმ.
2. C16 უჯრაში დროის ცვლილების ბიჯი განსაზღვრეთ $n = 40$ ქვეინტეგრალით.
3. შეავსეთ მონაცემთა ცხრილი „დრო–სიჩქარე–კოორდინატი“:
4. G სვეტი შეავსე დროის მნიშვნელობებით, H და I სვეტებში განსაზღვრეთ სიჩქარისა და კოორდინატის მნიშვნელობები დროის შესაბამისი მნიშვნელობზისათვის, ამასთან G4 (საწყისი დროის მომენტი), H4 (საწყისი სიჩქარის პროექცია) და I4 (საწყისი კოორდინატი) უჯრები დაამაგრეთ საწყის მონაცემთა ცხრილის C14, C12 და C11უჯრებზე. ცხრილის G5÷ I5 უჯრებში შეიტანეთ გამოსათვლელი ფორმულები და გადააკოპირეთ ისინი ცხრილის მთელ სიგრძეზე.

შენიშვნა: ფორმულების შეტანისას გამოიყენეთ აბსოლუტური მისამართები მუდმივი სიდიდეებისათვის.

$x(t)$ და $v(t)$ გრაფიკების აგება

ააგეთ სიჩქარისა (მონაცემთა დიაპაზონი G4÷ H24) და კოორდინატის (მონაცემთა დიაპაზონი G4÷ G24; I4÷ I 24) დროზე დამოკიდებულების გრაფიკები ცალკეულ დიაგრამებზე.

ძირითადი მოთხოვნები:

1. გამოყავით მონაცემთა დიაპაზონი.
2. აირჩიეთ ბრძანება *ჩამატება - დიაგრამა* **…(Insert – Chart)**
3. აირჩიეთ გრაფიკის
   ტიპი – *წერტილოვანი,*

სახე - *წერტილოვანი გლუვ ხაზებთან და სანიშნეებთან ერთად*;

დიაგრამისა და საკოორდინატო ღერძების დასახელებები ერთეულების მითითებებით შემდეგი სახით:

დიაგრამები განათავსეთ ცალკეულ გვერდებზე და მიუთითეთ შესაბამისი სახელწოდებები;

ამოცანები:

1. შეამოწმეთ, ახდენს თუ არა დროის ბიჯის (ან ქვეინტეგრალების რაოდენობის) ცვლილება გრაფიკის ფორმაზე.
2. შეამოწმეთ, რა გავლენას ახდენს C11, C12, C13 და C15 –ში მოცემული საწყისი მონაცემების ცვლილება (მათ შორის უარყოფითი ნიშანი) გრაფიკის ფორმაზე. რა ფიზიკური შინაარსი აქვს $y_0, v_{0y}\ a_y$ სიდიდეებისათვის უარყოფით ნიშანს.
3. შეადარეთ ერთმანეთს სხეულის მოძრაობები სხვადასხვა აჩქარებებით. ამისათვის:
   1) C13 უჯრაში შეიტანეთ აჩქარების კიდევ ერთი მნიშვნელობა და ამ მნიშვნელობის შესაბამისად შეავსეთ B13-D14 დიაპაზონი.
   2) ცხრილს დაამატეთ ორი სვეტი (J და K სვეტი) და გამოთვალეთ სიჩქარე და კოორდინატი აჩქარების მეორე მნიშვნელობისათვის.
   3) თითოეული დიაგრამისათვის დაამატეთ მონაცემთა ახალი რიგები და მონაცემთა რიგების ყოველ წყვილს მიანიჭეთ სახელი.
   4) გამოიტანეთ ლეგენდა.
   5) გააფორმეთ ცხრილის მონაცემები (H3:H24, I3:I24, J3:J24 და K3:K24 დიაპაზონები), ცხრილში მონაცემთა შრიფტის ფერი შეარჩიეთ გრაფიკის ფერის შესაბამისად.
4. დროის მოცემული მომენტისათვის და აჩქარების ყოველი მნიშვნელობისათვის გამოთვალეთ საკონტროლო წერტილები ($v_{საკონ}$ და $y_{საკონტ}$). დაამატეთ ეს წერტილები დიაგრამაზე მონაცემთა ცალკეული რიგის სახით. წინასწარ გრაფიკის სახე შეცვალეთ წერტილოვანი დიაგრამით მხოლოდ გლუვი ხაზებით.
5. სამი სხვადასხვა მატერიალური წერტილის მოძრაობა აღიწერება განტოლებებით: $x_1(t) = 2 + 3 \cdot t + t^2$; $x_2(t) = -t^2$; $x_3(t) = 1 + 2 \cdot t$. ააგეთ თითოეული მატერიალური წერტილისათვის $x(t)$ და $v(t)$ გრაფიკები და იპოვეთ მათი შეხვედრის კოორდინატი და დრო (ასეთი კოორდინატის არსებობის შემთხვევაში).
6. ცალკე გვერდზე გრაფიკულად ამოხსენით ამოცანა: A პუნქტიდან გამოვიდა სატვირთო მანქანა მუდმივი 72 კმ/სთ სიჩქარით. იმავდროულად B პუნქტიდან, რომელიც A პუნქტიდან დაშორებულია 1,5 კმ–ით, იმავე მიმართულებით მოძრაობას იწყებს მოტოციკლისტი მუდმივი 2 მ/წმ^2 აჩქარებით. გრაფიკულად განსაზღვრეთ როდის შეხვდებიან ისინი ერთმანეთს და რა მანძილებს გაივლიან შეხვედრამდე.

§3. რხევითი მოძრაობის მოდელირება მათემატიკური საქანის მაგალითზე

ცნობილია, რომ თუ სხეული ასრულებს მიულევად თავისუფალ რხევას, მაშინ სხეულის კოორდინატი დროის მიხედვით იცვლება სინუსის ან კოსინუსის კანონით:

$$x = x_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{3.1}$$

სადაც x_{max} – რხევის ამპლიტუდაა, $(\omega_0 t + \varphi)$ – რხევის ფაზა, φ – საწყისი ფაზა, ω_0 –რხევის საკუთარი ციკლური (წრიული) სიხშირეა. ამასთან, სიჩქარეც (კოორდინატის დროით პირველი რიგის წარმოებული) და აჩქარებაც (კოორდინატის დროით მეორე რიგის წარმოებული) შეიცვლება ჰარმონიული კანონით:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x' = x_{max}\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) = x_{max}\omega_0\sin\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \tag{3.2}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = x'' = -x_{max}{\omega_0}^2\sin(\omega_0 t + \varphi) = x_{max}{\omega_0}^2\sin(\omega_0 t + \varphi + \pi); \tag{3.3}$$

როგორც ვხედავთ, სიჩქარე კოორდინატს უსწრებს $\pi/2$ ფაზით, ხოლო აჩქარება – π ფაზით.

მერხევ სისტემათა შორის ყველაზე მარტივი და გავრცელებული მოდელია მათემატიკური ქანქარა: ეს არის m მასის მატერიალური წერტილი, რომელიც დაკიდებულია L სიგრძის უწონად და უჭიმად ძაფზე და ასრულებს რხევას ვერტიკალურ სიბრტყეში. ციკლური სიხშირე ასეთი სისტემისათვის მიიღებს სახეს

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{3.4}$$

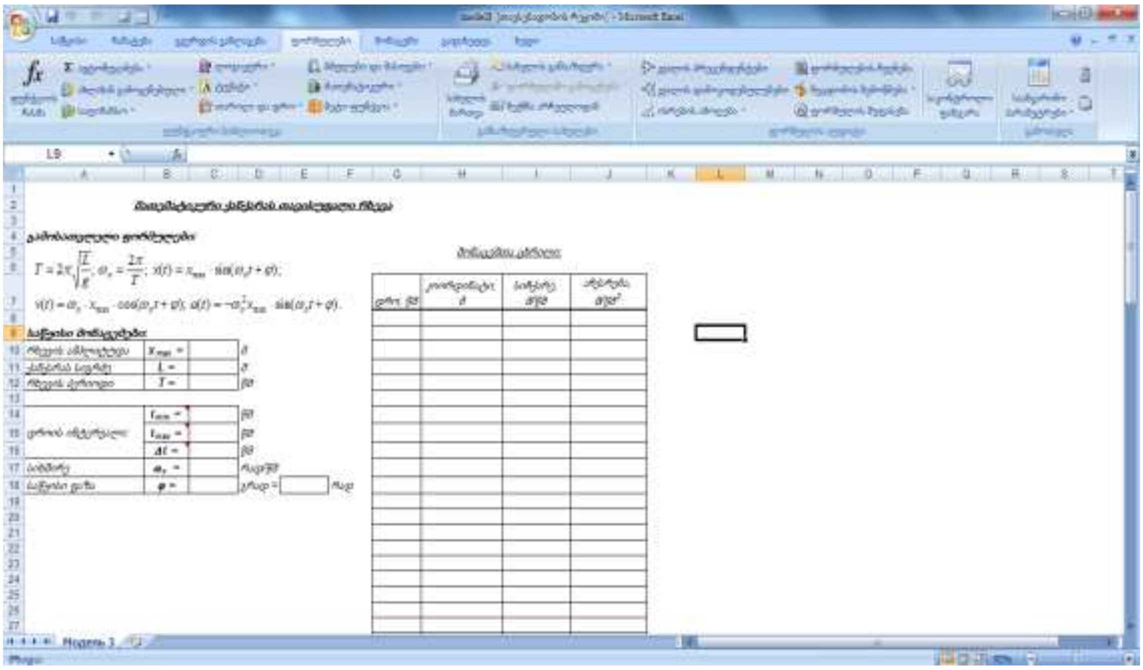
ხოლო რხევის პერიოდი:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{3.5}$$

ლაბორატორიული სამუშაო №3

<u>შაბლონის ჩატვირთვა</u>

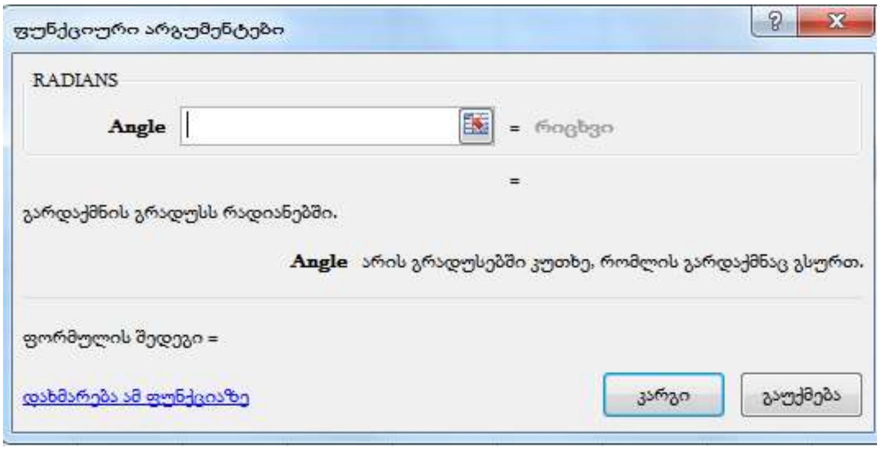
1. გახსენით შაბლონი „lab3" –" მათემატიკური საქანის რხევა“
2. **საწყისი მონაცემებია:**
   ამპლიტუდა (მაქსიმალური წანაცვლება) – x_{max},
   საწყისი ფაზა - φ,
   ძაფის სიგრძე - L,
   დროის ინტერვალი
   მუდმივი სიდიდეებია: ამპლიტუდა (მაქსიმალური წანაცვლება), საწყისი ფაზა, ძაფის სიგრძე, რხევის პერიოდი (სიხშირე)
   ცვლადი სიდიდეებია: სხეულის წანაცვლება წონასწორობის მდგომარეობიდან დროის ყოველ მომენტში (კოორდინატი), სიჩქარე, აჩქარება და დრო;



<u>შაბლონის შევსება</u>

1. ქვეინტეგრალების რაოდენობა განსაზღვრეთ $n = 100$–ის ტოლი.
   C10, C11, C14, C15 და C18 გრაფებში შეიტანეთ შემდეგი რიცხვითი მონაცემები:
   $X_{max} = 0.3$ მ; L =1 მ; $t_{max} = 10$ წმ; $\varphi = 30^0$.
   დროის საწყისი მომენტი (უჯრა C14) მიიღეთ ნულის ტოლად.
2. C12, C17 და C16 უჯრებში შეიტანეთ პერიოდის, რხევის სიხშირის და Δt დროის ინტერვალის გამოსათვლელი ფორმულები. ცნობილი მუდმივი რიცხვების მნიშვნელობები (თავისუფალი ვარდნის აჩქარება $g = 9{,}80665$ და $\pi \approx 3{,}14159265358979$ რიცხვი).

3. საწყისი ფაზის გრადუსული მნიშვნელობები გამოვსახოთ რადიანებით ფუნქცია „RADIANS“–ის გამოყენებით, რადგანაც კოორდინატის, სიჩქარისა და აჩქარების გამოთვლისას ტრიგონომეტრიული ფუნქციები კუთხეების მნიშვნელობებს თვლიან რადიანებით. ამისათვის:მონიშნეთ უჯრა E18. ჩანართში “ფორმულა“ – „ფუნქციური ბიბლიოთეკა“ აირჩიეთ «მათემატიკური». მოძებნეთ ფუნქცია „RADIANS“. გამოჩნდება ფორმულათა პანელი, ველში „angle” შეიყვანეთ იმ უჯრის მისამართი, რომელიც შეიცავს კუთხის მნიშვნელობებს გრადუსებში.



4. შეავსეთ მონაცემთა ცხრილი (დრო–კოორდინატი–სიჩქარე–აჩქარება)

x(t), v(t) და a(t) გრაფიკების აგება

მიღებული შედეგებით ააგეთ $x(t), v(t)$ და $a(t)$ დამოკიდებულებათა გრაფიკები. რადგან სამივე შემთხვევაში Ox ღერძის გასწვრივ იზომება ერთი და იგივე სიდიდე (დრო), ამიტომ შესაძლებელია სამივე დამოკიდებულების აგება ერთ კოორდინატთა სისტემაზე. ასეთი მეთოდი გამოიყენება, როცა საჭიროა შევადაროთ რამდენიმე სიდიდე ან გამოვიკვლიოთ ზოგიერთი სიდიდის საწყის ან ექსპერიმენტის განხორციელების პირობებზე დამოკიდებუ–ლება. თუმცა ამ მეთოდს აქვს უარყოფითი მხარეც: მისი გამოყენება მოსახერხებელია მხოლოდ მაშინ, როცა სიდიდეები ერთი და იმავე რიგისაა.

დიაგრამის ასაგებად გამოვიყენოთ მონაცემთა დიაპაზონი G8:J108. პროგრამა Excel ამ დიაპაზონს ავტომატურად დაყოფს მონაცემთა სამ რიგად: პირველი – (G8:H108) (კოორდინატის დროზე დამოკიდებულება), მეორე – (G8:G108; I8:I108) (სიჩქარის დროზე დამოკიდებულება) და მესამე (G8:G108; J8:J108) (აჩქარების დროზე დამოკიდებულება), ამასთან პირველი სვეტი სამივე დამოკიდებულებისათვის იქნება საერთო.

გრაფიკის აგების შემდეგი პროცესი სტანდარტულია. ძირითადი მოთხოვნები:

1. აირჩიეთ ბრძანება *ჩამატება - დიაგრამა* **…(Insert – Chart)**
2. აირჩიეთ გრაფიკის
   ტიპი – *წერტილოვანი,*

   სახე - *წერტილოვანი გლუვ ხაზებთან და სანიშნეებთან ერთად*;

   მონაცემთა მწკრივების სახელწოდებები – *წანაცვლება, სიჩქარე და აჩქარება.*

დიაგრამის დასახელება – რხევითი პროცესის გრაფიკი

„X ღერძზე გადაზომილი სიდიდის“ დასახელება – დრო t, წმ;

„Y ღერძზე გადაზომილი სიდიდის“ დასახელება – კოორდინატი (მ); სიჩქარე (მ/წმ); აჩქარება (მ/წმ^2);

ამოცანები:

1. შეისწავლეთ საწყისი მონაცემების (საწყისი წანაცვლება და ფაზა, საქანის სიგრძე) ცვლილების გავლენა გრაფიკის ფორმაზე. შეისწავლეთ x_{max} –სა და L სიდიდეებს შორის კავშირი. განსაზღვრეთ ფაზათა სხვაობები მონაცემთა თითოეული წყვილისათვის. t_{max} –ის ცვლილებით შეისწავლეთ მოცემული მოდელის გამოყენების საზღვრები.
2. მათემატიკური ქანქარა ასრულებს ჰაქრმონიულ რხევას. განსაზღვრეთ:
    1) ქანქარას რხევის პერიოდი და კუთხური სიხშირე, როცა: $L = 2$ მ და $x_{max} = 0{,}5$ მ.
    2) ააგეთ $x(t)$, $v(t)$ და $a(t)$ გრაფიკები, თუ წონასწორობიდან გამოყვანის მომენტში ქანქარას საწყისი ფაზა 45^0-ია, როცა: $L = 2$ მ და $x_{max} = 0{,}5$ მ.
    3) ააგეთ სიჩქარისა და აჩქარების კოორდინატზე დამოკიდებულების გრაფიკები $v(x)$ და $a(x)$ (ერთად), როცა: $L = 2$ მ და $x_{max} = 0{,}5$ მ.
    4) ააგეთ აჩქარების სიჩქარეზე დამოკიდებულების გრაფიკი $a(v)$, როცა: $L = 2$ მ და $x_{max} = 0{,}5$ მ.
    5) როგორაა დამოკიდებული ქანქარის მაქსიმალური სიჩქარე სიგრძე? (ააგეთ $v_{max}(L)$ გრაფიკი, ჩათვალეთ, რომ ქანქარას სიგრძე იცვლება შუალედში $L = 1 - 20$ მ).
    6) როგორაა დამოკიდებული ქანქარას მაქსიმალური აჩქარება პერიოდზე? (ააგეთ $a_{max}(T)$ გრაფიკი, ჩათვალეთ, რომ ქანქარას სიგრძე იცვლება შუალედში $L = 1 - 20$ მ).
    7) რას უდრის $L = 15$ მ სიგრძის ქანქარას მაქსიმალური სიჩქარე, როცა რხევის ამპლიტუდა არის 3 მ?
    8) რას უდრის $L = 20$ მ სიგრძის ქანქარას მაქსიმალური აჩქარება, როცა რხევის ამპლიტუდა არის 5 მ?
    9) ააგეთ მაქსიმალური აჩქარების მაქსიმალურ სიჩქარეზე დამოკიდებულების გრაფიკი $a_{max}(v_{max})$, როცა ქანქარის სიგრძე იცვლება იცვლება შუალედში $L = 1 - 20$ მ.

§4. ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მოდელირება

ვთქვათ, ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილ სხეულზე გასროლის შემდეგ მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალა (ჰაერის წინაღობის ძალა უგულებელყოფილია). თუ დავაკვირდებით ასეთი სხეულის მოძრაობას, შევნიშნავთ, რომ სხეულის მოძრაობისას იცვლება ორი კოორდინატი. შემოვიღოთ XOY კოორდინატთა სისტემა. ამრიგად, სხეულის ნებისმიერი მდებარეობა განვსაზღვროთ ორი (x,y) კოორდინატებით, წერტილიდან წერტილში გადაადგილებისას იცვლება ორივე კოორდინატი ერთდროულად.

კოორდინატების ცვლილების კანონი შეიძლება დავადგინოთ შემდეგი მოსაზრებები–დან გამომდინარე: ჩვენი დაშვების თანახმად სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალა, რომელიც მიმართულია ვერტიკალურად ქვემოთ, ამიტომ აბსცისთა ღერძის გასწვრივ სიმძიმის ძალის გეგმილი ნულის ტოლია, ხოლო მოძრაობა – თანაბარი. შესაბამისად, კოორდინატი შეიცვლება კანონით: $x = v_x t$, ხოლო სიჩქარე $v_x = v_{0x} = const$, სადაც v_x არის სიჩქარის გეგმილი აბსცისთა ღერძზე.

სიმძიმის ძალა სხეულს ანიჭებს ვერტიკალურად ქვემოთ მიმართულ g აჩქარებას. ამიტომ y ღერძის გასწვრივ მოძრაობა თანაბარაჩქარებულია, შესაბამისად, სიჩქარის გეგმილი ორდინატთა ღერძზე შეიცვლება შემდეგი კანონით:

$$v_y = v_{0y} + g_y t \tag{4.1}$$

ხოლო ორდინატი –

$$y = y_0 + v_{oy} t + \frac{g_y t^2}{2} \tag{4.2}$$

ტრაექტორიის განტოლება რომ მივიღოთ, უკანასკნელი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ დრო. აბსცისადან გამოვთვალოთ დრო:

$$t = {}^{x}/_{v_{0x}} \tag{4.3}$$

და ჩავსვათ y–ის გამოსახულებაში, მაშინ ტრაექტორიის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x + \frac{g_y}{2} \frac{x^2}{v_{0x}^2} \tag{4.4}$$

ტრაექტორიის ყოველ წერტილში სხეულის სიჩქარე მიმართულია მოცემულ წერტილში ტრაექტორიისადმი გავლებული მხების გასწვრივ და შეიძლება დავშალოთ ორ მდგენელად:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \tag{4.5}$$

სადაც $\vec{v}_x = \vec{v}_{0x}$. ამასთან სიჩქარის მოდული:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2} \tag{4.6}$$

ამოცანაში შეიძლება გამოვიკვლიოთ კოორდინატების ერთმანეთზე და დროზე დამოკიდებულებები. გარდა ამისა, გამოვიკვლიოთ ფრენის სიშორის დამოკიდებულება გასროლის კუთხესა და საწყისი სიჩქარის სიდიდეზე.

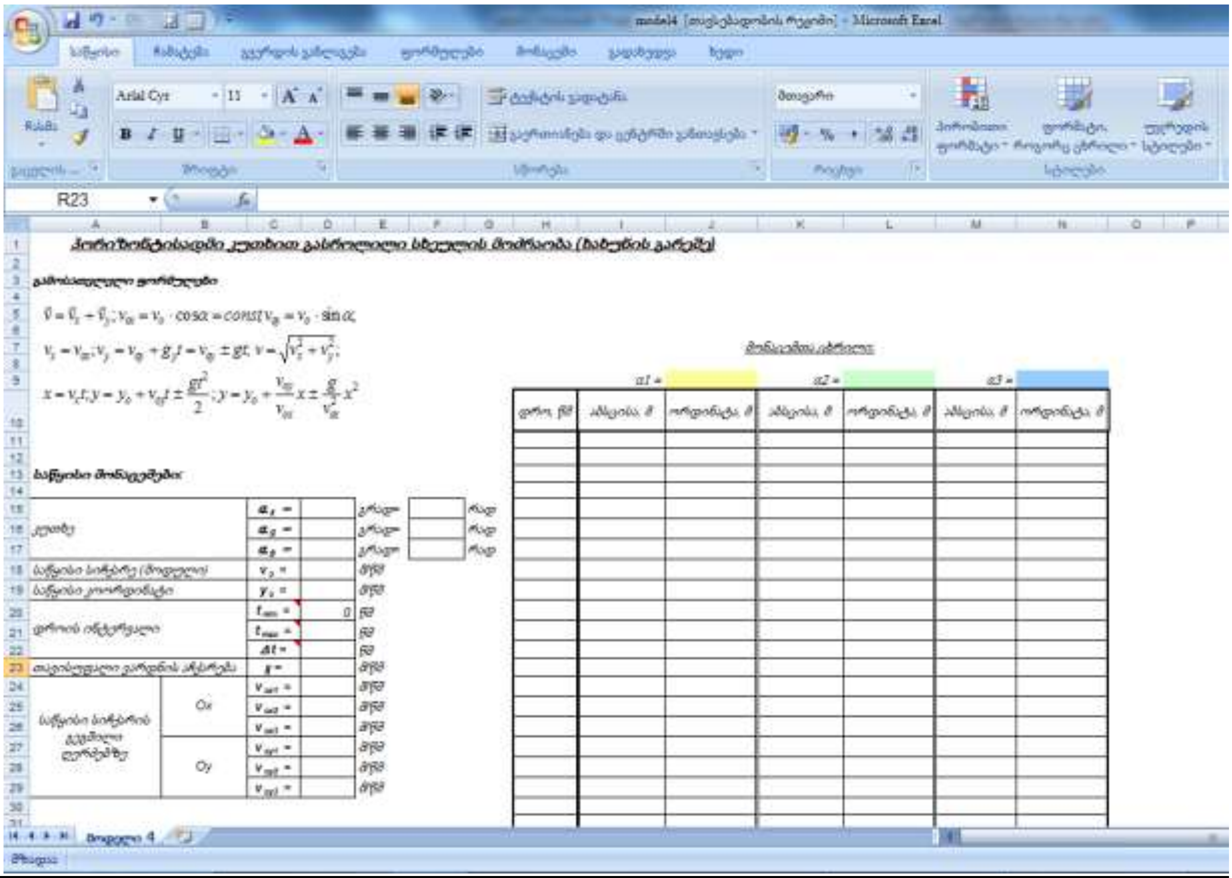
ლაბორატორიული ამოცანა №4

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab4" – "კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა“ მოძრაობის ტრაექტორიის ასაგებად გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{cases} x = v_x t = x = v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{oy} t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

გაანალიზეთ გამოსათვლელი ფორმულები და გამოყავით საწყისი, ცვლადი და მუდმივი სიდიდეები.



შაბლონის შევსება

შეავსეთ მონაცემთა ცხრილი შემდეგი მონაცემებისათვის:

1. $\alpha_1 = 36^0, \alpha_2 = 45^0, \ \alpha_3 = 60^0, \ v_0 = 100; \ \ y_0 = 0, \ t_0 = t_{min} = 0; \ t_{max} = 12$წმ; შემდეგ უჯრებში:
   1) D15, D16, D17 უჯრებში საწყის სიჩქარესა და Ox ღერძს შორის კუთხეები (გრადუსობით). ეს მოგვცემს საშუალებას შევისწავლოთ ტრაექტორიის ფორმის

დამოკიდებულება ჰორიზონტისადმი გასროლის α კუთხეზე. თუ კუთხთა მნიშვნელობები მოცემულია რადიანებში, მაშინ ისინი უნდა ჩაიწეროს F15, F16, F17 უჯრებში.

2) საწყისი სიჩქარის მოდული – D18–ში;
3) საწყისი ორდინატა (სიმაღლე, რომლიდანაც გაისროლეს სხეული) – D19–ში;
4) დროის საბოლოო მნიშვნელობა – D21–ში;
5) თავისუფალი ვარდნის აჩქარება g – D23;
6) დროის საწყისი მომენტი უნდა იყოს ნულის ტოლი;

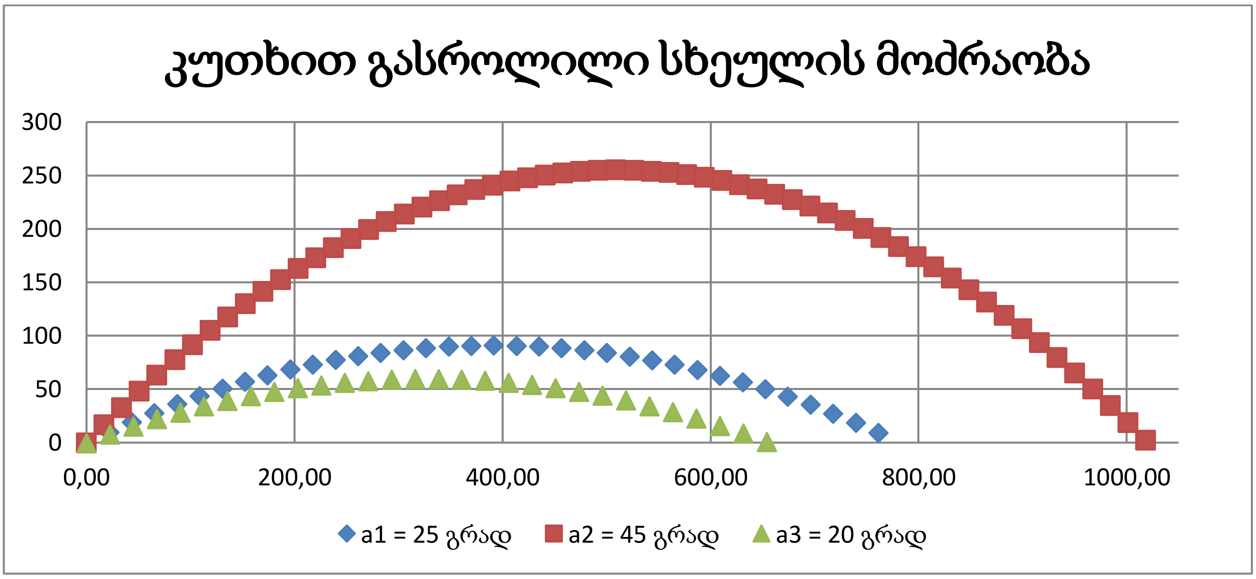
2. თუ კუთხეები მოცემულია გრადუსებით, საჭიროა მათი გადაყვანა რადიანებში. ფორმულა შეიძლება ჩაწეროთ მხოლოდ F15 უჯრაში, შემდეგ გადააკოპირეთ F16: F17 უჯრებში.
3. D22 უჯრაში გამოთვალეთ Δt, როცა დროის ინტერვალი დაყოფილია n=50 ქვეინტერვალად.
4. გამოსათვლელი ფორმულების საშუალებით გამოთვალეთ საწყისი სიჩქარის პროექციები Ox და Oy ღერძებზე (D24: D26; D27: D29).
5. მონაცემთა ცხრილი დროის სვეტის გარდა შეიცავს სამ წყვილ სვეტს „აბსცისა–ორდინატა“ α კუთხის სამი მნიშვნელობისათვის.

შენიშვნა: ფორმულების შედგენისას მუდმივებისათვის გამოიყენეთ აბსოლუტური მიმართებები.

$y(x)$ *დამოკიდებულების გრაფიკის აგება*

ცხრილი შედგება სამი წყვილი მონაცემთა რიგისაგან (I11: J61; K11:L61; M11:N61). რადგან კოორდინატთა ღერძებზე ხდება მსგავსი წევრების გადაზომვა, ამიტომ შესაძლებელია სამივე გრაფიკის ერთ დიაგრამაზე აგება. ამით შესაძლებელი იქნება ერთმანეთს შევადაროთ ტრაექტორიები (ასვლის სიმაღლე, ფრენის სიშორე) კუთხის სამივე მნიშვნელობისათვის. გრაფიკების აგება დაიწყეთ მხოლოდ ერთი წყვილით (მაგალითად, I11: J61 – თვის), ხოლო შემდეგ კონტექსტურ მენიუში ბრძანების „მონაცემთა არჩევა“ საშიალებით რიგ–რიგობით დაამატეთ შემდეგი ორი წყვილი. თითოეულ რიგს მიანიჭეთ სახელწოდებები.

დიაგრამა გააფორმეთ დაახლოებით ისე, როგორც ეს გამოსახულია სურათზე.



__ამოცანები:__

1. შეისწავლეთ რა გავლენას ახდენს საწყისი მონაცემების ცვლილება ტრაექტორიის ფორმაზე. განსაზღვრეთ კუთხის რა მნიშვნელობისათვის აღწევს ფრენის სიშორე მაქსიმალურ მნიშვნელობას.
2. ერთსა და იმავე დიაგრამაზე ააგეთ y(t) დამოკიდებულების გრაფიკები კუთხის სამივე მნიშვნელობისათვის და შეადარეთ ისინი ერთმანეთს.
3. საწყისი მონაცემების ცხრილში გამოთვალეთ საკონტროლო წერტილები და აღნიშნეთ ისინი დიაგრამაზე.
4. დაამატეთ ახალი გვერდი. შეადგინეთ ცხრილი $y(x)$ დამოკიდებულების გრაფიკის ასაგებად ტრაექტორიის განტოლების გამოყენებით: $y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x + \frac{g_y}{2}\frac{x^2}{v_{0x}^2}$. ამ განტო-ლების მიხედვით საწყისი მონაცემები იქნება:
   1) საწყისი ორდინატა (სიმაღლე)y_0;
   2) საწყისი სიჩქარე (მოდული) v_0;
   3) კუთხე **α**;
   4) თავისუფალი ვარდნის აჩქარება;

   ამ შემთხვევაში ფუნქციის არგუმენტი იქნება აბსცისა. ამიტომ საჭირო იქნება x კოორ-დინატის დიაპაზონის განსაზღვრა (x_0, $(x_{min} \div x_{max})$, რომლის გასწვრივაც განიხილება სხეულის მოძრაობა და Δx ცვლილების ბიჯი n რაოდენობის ქვეინტეგრალისათვის.

5. განსაზღვრეთ მოცემული კუთხისას მაქსიმალური ფრენის სიშორე და სიმაღლე. კუთხის შერჩევით დაადგინეთ კუთხის ორი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც მაქსიმალური ფრენის სიშორე არის 510 მეტრი.

   P.S.

   1. მაქსიმალურ ფრენის სიშორედ ითვლება მანძილი საკოორდინატო სათავიდან $y = 0$ სიბრტყეზე დაცემის წერტილამდე. შესაბამისად გრაფიკების სრულად აგებისათვის

სხვადასხვა კუთხის შემთხვევაში x მონაცემთა სხვადასხვა რაოდენობა იქნება საჭირო. კერძოდ, საინტერესოა მხოლოდ ის x მონაცემები, რომლის შესაბამისი $y \geq 0$. ამიტომ x ცვლადების განსაზღვრის გამოიყენეთ ლოგიკური ფუნქცია IF. მაგალითად რომელიმე I11 უჯრაში, სადაც წესით ანგარიშობთ ფრენის სიშორეს ფორმულით $x = v_{0x}t$ ($D$24*H11 - აქ $D$24 - შეესაბამება v_{0x}-ს, ხოლო H11 - კი t დროს), ჩაწერეთ ფორმულა =IF(J11<0;0;$D$24*H11). ამ ფორმულის მიხედვით ყველა x გახდება ნულის ტოლი, რომლის შესაბამისი $y < 0$ (J11<0).

2. სრულყოფილი გრაფიკული სახის მისაღებად საჭიროებისამებრ დაამატეთ მონაცემები ცხრილში და პირიქით, გრაფიკზე ზედმეტი მონაცემები (მონაცემები, რომლებისთვისაც $x = 0$) გააქრეთ. ამისათვის მონიშნეთ კონკრეტული გრაფიკი, შესაბამისად გააქტიურდება გრაფიკის შესატყვისი მონაცემები. ავტომატური შევსების მარკერით დაარეგულირეთ მონაცემთა სასურველი რაოდენობა.

3. ფრენის სიშორის და სიმაღლის მაქსიმალური მნიშვნელობების დასადგენად გამოიყენეთ Excel-ის ფუნქცია max (I11:I125), რომელსაც არგუმენტად მიეთითება მონაცემთა ის დიაპაზონი, რომლიდანაც მაქსიმალური მონაცემის განსაზღვრა გვსურს.

§5. მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა რიცხვითი მეთოდებით. ზამბარიანი ქანქარას რხევა.

ჩვენ უკვე განვიხილეთ რხევითი მოძრაობის მოდელირება მათემატიკური საქანის რხევის მაგალითზე, რომელიც განპირობებული იყო მხოლოდ სიმძიმის ძალის მოქმედებით. ახლა კი განვიხილოთ რხევითი მოძრაობა, რომელიც განპირობებულია დრეკადობის ძალის მოქმედებით.

ვთქვათ, m მასის ტვირთი დამაგრებულია k სიხისტის ზამბარაზე და ჰორიზონტა–ლურ სიბრტყეში ასრულებს რხევით მოძრაობას მხოლოდ დრეკადობის ძალის მოქმედებით. რხევების მილევა უგულებელყოფილია.

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად, სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი სხეულს ანიჭებს აჩქარებას:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{5.1}$$

სადაც m – სხეულის მასაა, $\vec{F}$ – სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი, $\vec{a}$ – ამ ძალების მიერ სხეულზე მინიჭებული აჩქარება. ჩავწეროთ ეს განტოლება ზამბარაზე მიმაგრებული სხეულისათვის, რომელიც ირხევა ჰორიზონტალური ღერძის გასწვრივ. Ox ღერძი მივმარ–თოთ მარჯვნივ, სხეულის წონასწორობის მდგომარეობას კი შევუსაბამოთ კოორდინატთა ღერძის სათავე. აღებულ Ox მიმართულებაზე მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე:

$$F_x = ma_x \tag{5.2}$$

რადგან სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ დრეკადობის ძალა, ამიტომ ძალების ტოლქმედი დრეკადობის ძალის ტოლია.

$$F_x = -kx$$

შესაბამისად გვექნება:

$$ma_x = -kx \tag{5.3}$$

ამ განტოლებას ზამბარაზე მიმაგრებული ტვირთის მოძრაობის განტოლება ეწოდება. გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

რადგან

$$a_x = x''$$

ამიტომ

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{5.4}$$

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \tag{5.5}$$

სადაც:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

უწოდებენ მერხევი სისტემის საკუთარ ციკლურ სიხშირეს ან წრიულ სიხშირეს. ამრიგად,

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \tag{5.6}$$

განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას. მათემატიკუ–რი ანალიზიდან ცნობილია, რომ ამ განტოლების ამონახსნია:

$$\begin{cases} x = x_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ v_0 = -\omega_0 x_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 x_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \\ a_x = -\omega_0^2 x_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 x_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) \end{cases} \tag{5.7}$$

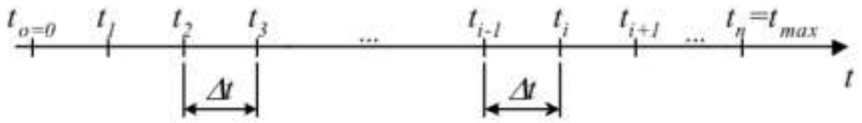
ეს ფორმულები გვაძლევს საშუალებას გამოვთვალოთ x, v და a დროის ნებისმიერ მომენტში, რადგან ტვირთის მოძრაობა ხდება ცვლადი ძალის მოქმედებით, ამიტომ ამოცანა საკმაოდ რთულ ამოცანას წარმოადგენს. ასეთი ამოცანების გადაწყვეტისათვის სარგებლობენ ე.წ. რიცხვითი მეთოდებით. ეს მეთოდი მიახლოებითია, მაგრამ გარკვეულ პირობებში იძლევა საკმაოდ კარგ შედეგებს.

განვიხილოთ ე.წ. ნახევარინტერვალთა მეთოდი:

ვირჩევთ დროის $t_{min} \div t_{max}$ შუალედს (როგორც წესი $t_{min} = 0$), რომელიც იყოფა n თანაბარ ქვეინტერვალად:

$$\Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{n}$$

ქვეინტერვალთა რაოდენობა აიღება ნებისმიერად. მიახლოება გამოიხატება იმაში, რომ თითოეულ ასეთ უბანზე მოძრაობა ითვლება თანაბარაჩქარებულად. სწორედ Δt ინტერვალის სიდიდეზეა დამოკიდებული გამოთვლის სიზუსტე: რაც უფრო მცირეა ეს ინტერვალი, მით უფრო ნაკლები განსხვავება იქნება გამოთვლებით მიღებული შედეგები ზუსტ მნიშვნელობასთან.



(5.7) ტოლობის ზუსტი ტოლობებიდან გადავიდეთ მიახლოებითზე, ამისათვის კი გამოვყენოთ წარმოებულის ცნება:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (5.8)$$

სადაც $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_n - t_{n-1}$, ან ზოგადად $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, სადაც i იცვლება 0-დან n-მდე. $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$, ანალოგიურად $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. გავითვალისწინოთ რომ $x' = v_x$ და $x'' = v_x{}'$. ამავე პრინციპით დავწეროთ მეორე რიგის წარმოებული:

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \approx \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad (5.9)$$

(5.8)–დან და (5.9)-დან ჩანს, რომ რაც მცირეა ქვეინტერვალების სიდიდე, მით უფრო ზუსტია ამონახსნი.

3. ნახევარინტერვალთა მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში:

1) სიჩქარის მნიშვნელობებს ვიხილავთ Δt ინტერვალის შუაში, ანუ

$$t_{1/2} = \frac{t_1 - t_0}{2} = \frac{\Delta t}{2}$$

$$t_{3/2} = \frac{t_2 - t_1}{2} = 3\frac{\Delta t}{2}$$

$$t_{i+1/2} = \frac{t_{i+1} - t_i}{2} = (2i + 1)\frac{\Delta t}{2}$$

...

$$t_{n-1/2} = \frac{t_n - t_{n-1}}{2} = (2n - 1)\frac{\Delta t}{2}$$

მომენტებში. (5.9) გავითვალისწინოთ (5.7)-ში:

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \approx -\frac{k}{m}x.$$

2) კოორდინატების მნიშვნელობები განისაზღვრება დროის ყოველი ინტერვალის ბოლოს, ანუ წერტილებში $t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n$. წერტილები, სადაც გამოითვლება სიჩქარისა და კოორდინატების მნიშვნელობები, წანაცვლებულია ერთმანეთისაგან ნახევარი ინტერვალით. თუმცა თვით მნიშვნელობები გამოითვლება Δt ინტერვალის სხვაობით. სიჩქარის პროექციის მნიშვნელობები პირველი ინტერვალის შუაში გამოითვლება შემდეგი პირობიდან:

$$\frac{(v_x)_{1/2} - (v_x)_0}{(\Delta t/2)} \approx -\frac{k}{m}x_0$$

სადაც სიჩქარისა და კოორდინატის ინდექსები აღნიშნავს დროის იმ მომენტებს, რომლისთვისაც ისინი არის აღებული. შესაბამისად,

$$(v_x)_{1/2} \approx (v_x)_0 - \frac{k}{m}x_0 \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

დროის შემდეგი მომენტისათვის

$$(v_x)_{3/2} \approx (v_x)_{1/2} - \frac{k}{m}x_1 \cdot \Delta t;$$
$$(v_x)_{5/2} \approx (v_x)_{3/2} - \frac{k}{m}x_2 \cdot \Delta t;$$
$$\dots$$
$$(v_x)_{i+1/2} \approx (v_x)_{i-1/2} - \frac{k}{m}x_i \cdot \Delta t;\ \dots$$

ამრიგად, დროის ნებისმიერი მომენტისათვის სიჩქარის მნიშვნელობა განისაზღვრება კოორდინატისა და სიჩქარის უკვე ცნობილი მნიშვნელობებით.

დროის t_1 მომენტისათვის სხეული კოორდინატი ვიპოვოთ შემდეგი პირობიდან:

$$x' = v_x \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

შესაბამისად, გვექნება:

$$(v_x)_{1/2} \approx \frac{x_1 - x_0}{\Delta t},$$
$$x_1 \approx x_0 + (v_x)_{1/2} \cdot \Delta t.$$

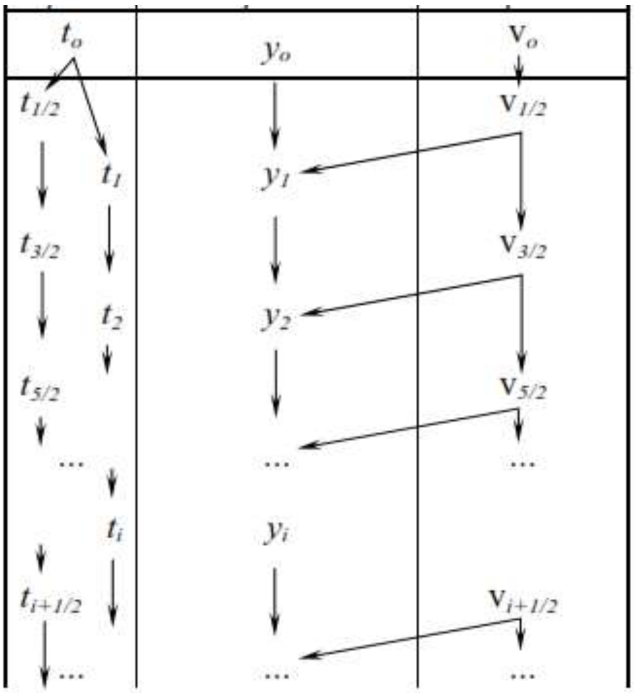
დროის შემდეგი მომენტებისთვის:

$$x_2 \approx x_1 + (v_x)_{3/2} \cdot \Delta t;$$
$$x_3 \approx x_2 + (v_x)_{5/2} \cdot \Delta t;$$
$$\dots$$
$$x_{i+1} \approx x_i + (v_x)_{i+1/2} \cdot \Delta t.$$

ზემოთ განხილულის განზოგადებით რხევის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება ასე:

$$\begin{cases} (v_x)_{1/2} \approx (v_x)_0 - \frac{k}{m}x_0 \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ (v_x)_{i+\frac{1}{2}} \approx (v_x)_{i-\frac{1}{2}} - \frac{k}{m}x_i \cdot \Delta t; \\ x_{i+1} \approx x_i + (v_x)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \qquad (5.10)$$

სწორედ ამ გრაფიკების საფუძველზე შეგვიძლია ავაგოთ $x(t)$ და $v(t)$ დამოკიდებულებების გრაფიკები. ნახევარინტერვალთა მეთოდით გამოთვლების თანმიმდევრობა შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი ცხრილის სახით:



მიაქციეთ ყურადღება, რომ კოორდინატი დროის ნებისმიერი t_i მომენტისათვის განისაზღვრება ზოგადი ფორმულით, ხოლო სიჩქარე პირველი ინტერვალის შუაში განისაზღვრება ცალკე (შუალედური) ფორმულით. შემდგომ გამოთვლებში ეს ფორმულა აღარ გამოითვლება.

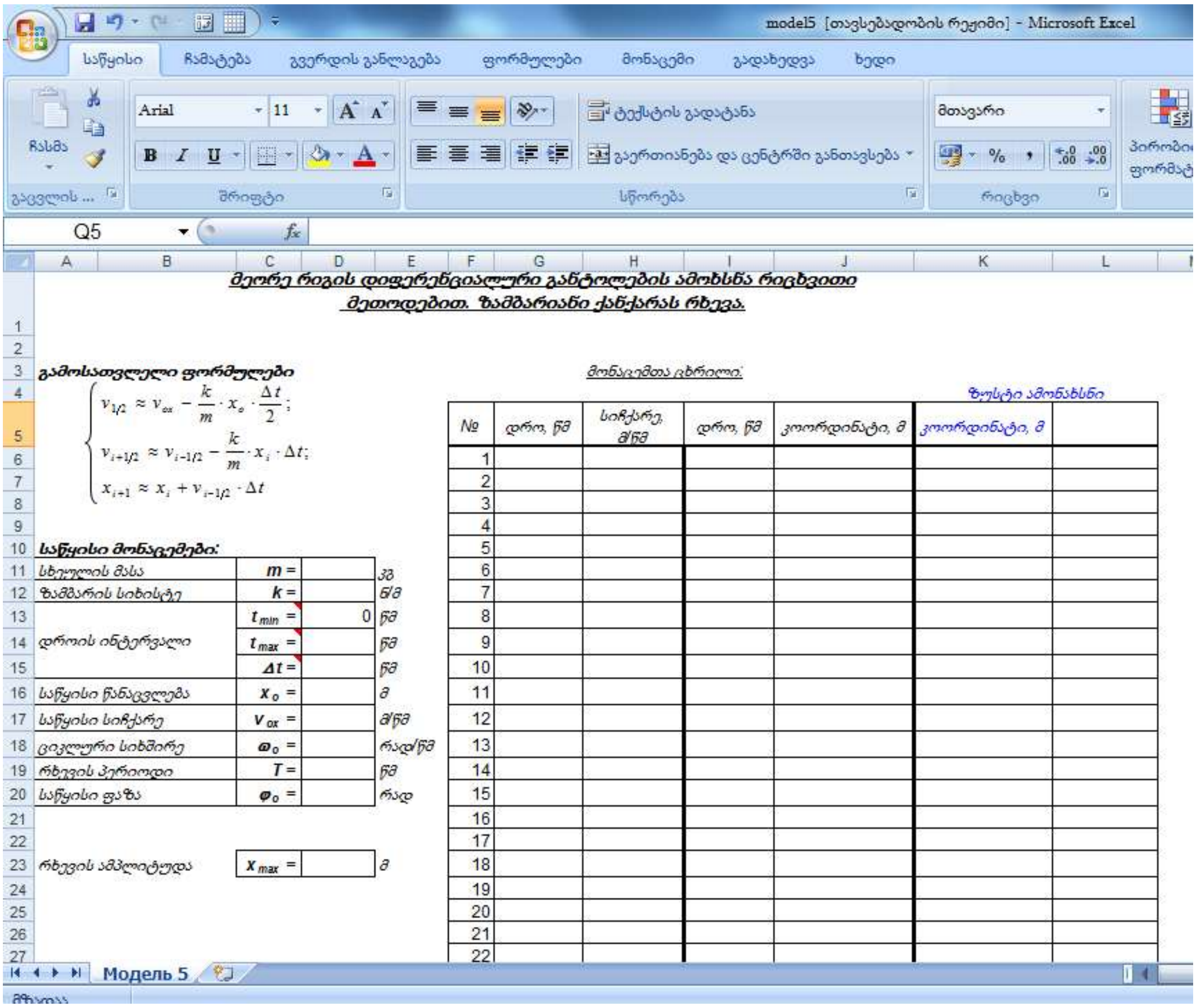
როგორც ცნობილია, ფიზიკაში მრავალი პროცესი აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით, რომელთათვისაც შეუძლებელია ზუსტი ამონახსნის პოვნა. ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ზემოთ აღწერილი ალგორითმი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მსგავსი განტოლებების ამოხსნის ზოგად სქემად.

ლაბორატორიული ამოცანა №5

შაბლონის ჩატვირთვა

1. გახსენით შაბლონი „lab5" – "ზამბარიანი ქანქარას რხევა“

გაანალიზეთ გამოსათვლელი ფორმულები და გამოყავით საწყისი, ცვლადი და მუდმივი სიდიდეები.



ცხრილში შეიტანეთ საწყისი მონაცემები:

m=1კგ; k=5ნ/მ; $t_{max} = 10$წმ; v_0=3მ/წმ; $x_0 = 0$მ; $t_0 = 0$.

შემდეგ უჯრებში:

1) სხეულის მასა – D11 უჯრაში;

2) ზამბარის სიხისტე – D12 უჯრაში;

3) დროის მომენტი – D14 უჯრაში;

4) საწყისი წანაცვლება – D16 უჯრაში;

5) საწყისი სიჩქარე – D17 უჯრაში;

დროის საწყისი მომენტი განტოლების ნახევარინტერვალთა მეთოდით ამოხსნისას მიიღეთ ნულის ტოლად: $t_0 = 0$წმ (D13 უჯრაში).

2. შეიტანეთ Δt დროის ინტერვალის (ბიჯი), ციკლური სიხშირისა და პერიოდის გამოსათვლელი ფორმულა (ქვეინტერვალების რაოდენობა განსაზღვრეთ მონაცემთა ცხრილებით).

3. შეავსეთ მონაცემთა ცხრილები (დრო–სიჩქარე; დრო –კოორდინატი).

1) G და I სვეტების შეიცავს დროის მნიშვნელობებს. დროის ორ სვეტად შევსება აუცილებელია, რადგან სიჩქარეები და კოორდინატები გამოითვლება დროის სხვადასხვა მომენტებისათვის. G6 და I6 უჯრებში შეიტანეთ დროის საწყისი მომენტები (D13 უჯრიდან). I7–უჯრაში შეიტანეთ t_1 მომენტის გამოსათვლელი ფორმულა და გადააკოპირეთ მთელ დიაპაზონზე. G7 უჯრაში შეიტანეთ $t_{1/2}$ მომენტის გამოსათვლელი ფორმულა. დროის შემდეგი ცვლილება კი G სვეტში ისევე ხდება Δt ინტერვალით.

2) სვეტები H და J შეიცავს სიჩქარისა და კოორდინატის მნიშვნელობებს. ამ სვეტების შევსება ხდება ანალოგიურად. ეს იმას ნიშნავს, რომ სიჩქარის სვეტის შევსებისას თავდაპირველად უნდა შევიტანოთ შუალედური ფორმულა დროის პირველი ინტერვალის შუაში, ე.ი. დროის საწყისი მომენტიდან Δt/2 ინტერვალში. სიჩქარის შემდეგი მნიშვნელობების გამოთვლა კი ხდება ზოგადი ფორმულით Δt ბიჯით. J7 უჯრაში შეიტანეთ კოორდინატის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულა და გადააკოპირეთ მთელ დიაპაზონზე.

მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ სიჩქარისა და კოორდინატების გამოსათვლელად არ გამოიყენება დროის მნიშვნელობები დროის სვეტიდან. ისინი საჭიროა მხოლოდ გრაფიკების ასაგებად.

შენიშვნა: ფორმულების შეტანისას არ დაივიწყოთ აბსოლუტური მისამართების გამოყენება მუდმივი სიდიდეებისათვის.!!!

<u>გრაფიკის აგება</u>

მიღებული გამოთვლების საშუალებით ააგეთ ორი გრაფიკი: $x(t)$ და $v(t)$. რადგან ორივე დამოკიდებულებისას აბსცისთა ღერძზე იზომება ერთი და იგივე სიდიდე (დრო), ამიტომ ორივე გრაფიკი შეიძლება ავაგოთ ერთ კოორდინატთა სისტემაში.

<u>ძირითადი მოთხოვნები:</u>

აირჩიეთ ბრძანება *<u>ჩამატება - დიაგრამა …</u>*

აირჩიეთ გრაფიკის

ტიპი – *<u>წერტილოვანი,</u>*

სახე - *<u>წერტილოვანი გლუვ ხაზებთან და სანიშნეებთან ერთად</u>*;

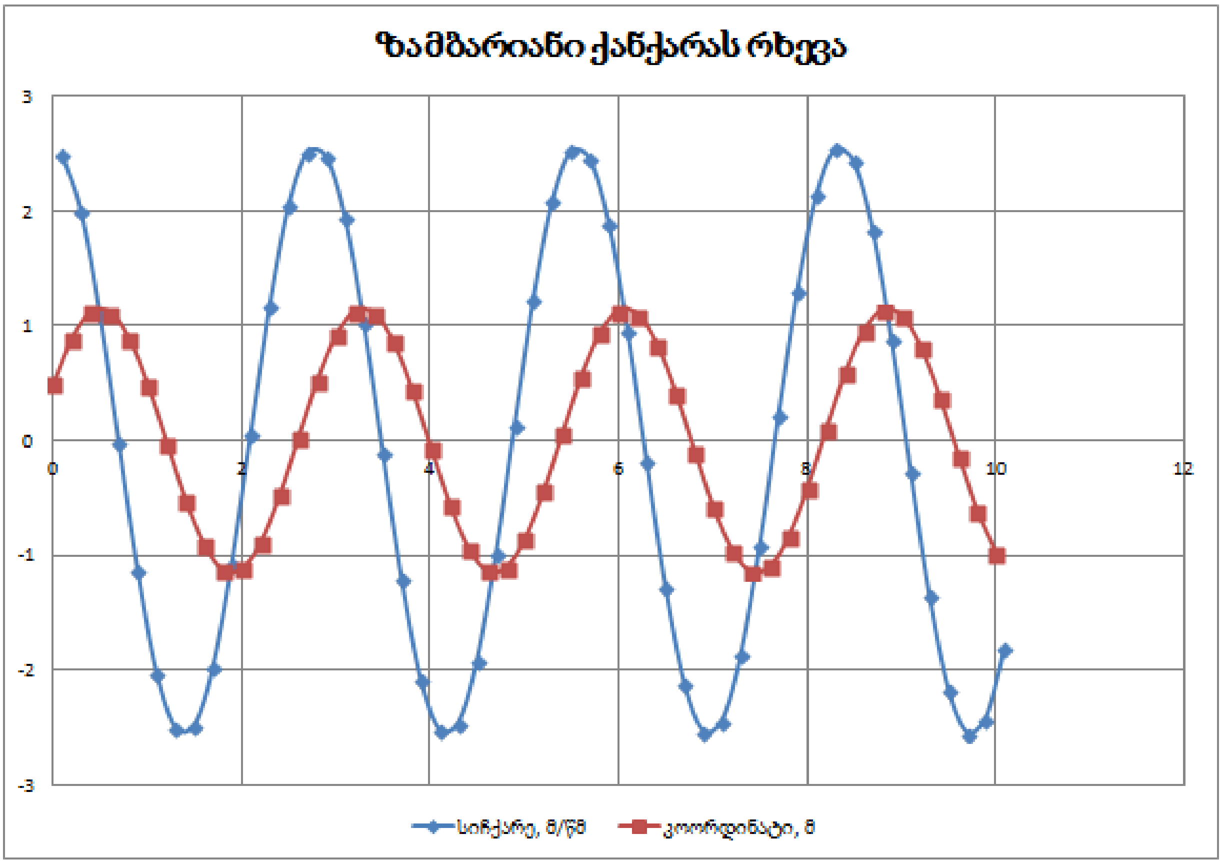
მონაცემთა რიგებს მიანიჭეთ სახელწოდებები: *სიჩქარე, მ/წმ* და *კოორდინატი, მ* (შეიყვანეთ ეს მონაცემები შესაბამის ველში კლავიატურიდან ან შესაბამისი უჯრის *„მონაცემთა ცხრილი“* მისამართზე მიმართებით);

დიაგრამის სახელწოდება – სხეულის რხევა დრეკადი ძალების ზემოქმედებით

X ღერძის სახელწოდება – დრო, წმ

Y ღერძის სახელწოდება – კოორდინატი (მ); სიჩქარე (მ/წმ);

ჩართეთ ბადის ძირითადი ხაზები ორივე ღერძის გასწვრივ;



<u>ამოცანები:</u>

1. დამოუკიდებლად განსაზღვრეთ აჩქარების გამოსათვლელი ფორმულა. ჩაატარეთ გამოთვლები დამატებით M და N სვეტებში და ააგეთ აჩქარების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი იმავე დიაგრამაზე.
2. ცვალეთ სხეულის მასა და ზამბარის სიხისტე და შეისწავლეთ რა გავლენას ახდენს ეს ცვლილებები რხევის პროცესის მახასიათებელ პარამეტრებზე: ციკლურ სიშირეზე, პერიოდზე, ამპლიტუდასა და სიჩქარეზე.

3. მიახლოებითი გამოთვლებით მიღებული რხევის გრაფიკები შეადარეთ ზუსტი ფორმულით აგებულ გრაფიკს, ამისათვის K სვეტში ჩაატარეთ გამოთვლები შემდეგი ფორმულით:

$$x = x_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

P.S. I სვეტით განსაზღვრული დროის მომენტებისათვის. D18 უჯრაში გამოთვალეთ რხევის ციკლური სიხშირე, ხოლო D23 უჯრაში – ამპლიტუდა, რომელიც წარმოადგენს J სვეტით განსაზღვრული x ცვლადის (კოორდინატის) მაქსიმალურ მნიშვნელობას. რადგანაც ეს სიდიდეები შედის K სვეტის ყველა ფორმულაში, ამიტომ სასურველია მათი მნიშვნელობები სისტემის პარამეტრების ცვლილებისას იცვლებოდეს ავტომატურად. ამისათვის კი საჭიროა, რომ ფორმულები შეიცავდეს არა რიცხვით მნიშვნელობებს, არამედ მისამართებს იმ უჯრებისა, რომლებიც ამ მნიშვნელობებს შეიცავს. მაქსიმალური მნიშვნელობის განსაზღვრა შესაძლებელია ჩაშენებული ფუნქციის MAX( ) (კატეგორია სტატისტიკური) გამოყენებით, სადაც არგუმენტად უნდა შეარჩიოთ J6:J56 დიაპაზონი, რომელიც შედგება კოორდინატების მნიშვნელობებისაგან.

4. φ_0 საწყისი ფაზის განსაზღვრა. საწყის მონაცემთა ცხრილში მოცემულია x_0 საწყისი წანაცვლება –კოორდინატი დროის საწყისი მომენტისათვის. რხევის ფაზა ამ მომენტში $\varphi = \varphi_0$, ხოლო წანაცვლება: $x = x_{max}\cos\varphi_0$, საიდანაც $\varphi_0 = \arccos\frac{x_0}{x_{max}}$. შეიტანეთ ეს ფორმულა D25 უჯრაში და გამოთვალეთ საწყისი ფაზა.

5. ანალოგიური გამოთვლები ჩაატარეთ სიჩქარისათვის. L სტრიქონში გამოთვალეთ სიჩქარე (*) ფორმულით (ზუსტი ამოხსნა) და ააგეთ $v_{თეორ\ x} = (t)$ დამოკიდებულების გრაფიკი.

6. გააფორმეთ ცხრილის სვეტები დიაგრამაზე გამოსახული გრაფიკის ფერების მიხედვით.

7. იპოვეთ და გრაფიკზე გამოიტანეთ საკონტროლო წერტილები.

8. შექმენით ცალკე მუშა ფურცელი და შეასრულეთ ანალოგიური მოდელირება მათემატიკური ქანქარისათვის.

§6. ექსპერიმენტით მიღებული შედეგების დამუშავება უმცირესი კვადრატების მეთოდით

დავუშვათ, ექსპერიმენტის შედეგად მიღებულ იქნა ორი – x და y – ურთიერთდამოკიდებული სიდიდის N წყვილი: $(x_i, y_i)(i = 1,2, \ldots, N)$. ვთქვათ, ამ სიდიდეებს შორის თეორიულად არსებობს $y^{თეორ} = ax + b$ სახის დამოკიდებულება. მაგრამ ხელსაწყოების ცდომილებებისა თუ სხვადასხვა შემთხვევითი ფაქტორების გავლენით ექსპერიმენტით მიღებული შედეგები განსხვავებული იქნება ნამდვილი მნიშვნელობებისაგან. თუ მიღებულ მნიშვნელობებს გადავზომავთ გრაფიკზე, მიღებული წერტილები გრაფიკზე იქნება ერთგვარად გაბნეული, ამიტომ შეუძლებელი იქნება ისეთი წრფის გავლება, რომელიც მოიცავს ყველა ექსპერიმენტალურ მონაცემს. ანალიტიკური თვალსაზრისით, გაზომვის შედეგების დამუშავება გულისხმობს ისეთი a და b პარამეტრების პოვნას, რომელიც რაც შეიძლება ზუსტად აღწერს $y^{თეორ} = ax + b$ დამოკიდებულებას. ამ პარამეტრების განსაზღვრის ერთ–ერთი მეთოდია **უმცირესი კვადრატების მეთოდი.**

შემოვიღოთ სხვაობა y_i –სა (ექსპერიმენტით მიღებული) და $y_i^{თეორ}$–ს შორის. ყოველი i–ური მნიშვნელობისათვის ამ სხვაობას აქვს სახე:

$$r_i = y_i^{თეორ} \text{-} y_i \tag{6.1}$$

თუ a და b კოეფიციენტი კარგად შერჩეულია, მაშინ წერტილთა ნახევარი განლაგებული იქნება წრფის ზემოთ ($r_i < 0$), მეორე ნახევარი კი ქვემოთ ($r_i > 0$). რადგან r_i–ის მნიშვნელობები შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი, ამიტომ შემოაქვთ სხვაობის კვადრატის r_i^2 მნიშვნელობა:

$$(r_i)^2 = (y_i^{თეორ} - y_i)^2.$$

ექსპერიმენტული მონაცემების საუკეთესოდ აღწერის კრიტერიუმი (ლაგრანჟის კრიტერიუმი) მდგომარეობს იმაში, რომ კვადრატების ჯამი

$$\sum_{i=1}^{N} (r_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i^{თეორ} - y_i \right)^2 \tag{6.2}$$

იყოს მინიმალური (N - მონაცემთა რაოდენობაა). $y_i^{თეორ}$ გამოვთვალოთ (1) განტოლებიდან და ჩავსვათ (6.1)-ში. მაშინ

$$\sum_{i=1}^{N} (r_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - y_i)^2 \tag{6.3}$$

შესაბამისად, ჩვენი ამოცანაა ვიპოვოთ ისეთი a და b კოეფიციენტები, რომელთათვისაც ამ გამოსახულებას ექნება მინიმალური მნიშვნელობა. ვისარგებლოთ ექსტრემუმის პირობებით. ვიპოვოთ (6.3) გამოსახულების წარმოებულები a და b და გავუტოლოთ ნულს.

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} (r_i)^2}{\partial a} = 0; \qquad \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} (r_i)^2}{\partial b} = 0 \tag{6.4}$$

(6.3) გავითვალისწინოთ (6.4)-ში,

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{N}(ax_i + b - y_i)^2 = 0 \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{N}(ax_i + b - y_i)^2 = 0\,; \tag{6.6}$$

მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{N} ax_i^2 + \sum_{i=1}^{N} bx_i = \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i \tag{6.7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} ax_i + \sum_{i=1}^{N} b = \sum_{i=1}^{N} y_i \tag{6.8}$$

ამრიგად, კოეფიციენტების გამოსათვლელად მივიღეთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{N} x_i + Nb = \sum_{i=1}^{N} y_i \\ a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i \end{cases} \tag{6.9}$$

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა კრამერის მეთოდით, a და b კოეფიციენტებისათვის გვექნება:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & N \\ \sum x_i y_i & \sum x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}; \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}} \tag{6.10}$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$a = \frac{\sum x_i \sum y_i - N\sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - N\sum x_i^2} \tag{6.12}$$

$$b = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum x_i^2 \sum y_i}{(\sum x_i)^2 - N\sum x_i^2} \tag{6.13}$$

თუ წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე, მაშინ წრფის განტოლება შეიძლრბა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y = kx$$

ზემოთ აღწერილი მსჯელობის ანალოგიურად შეიძლება ვიპოვოთ k პარამეტრი:

$$\sum_{i=1}^{N}(r_i)^2 = \sum_{i=1}^{N}(kx_i - y_i)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\sum_{i=1}^{N}(kx_i - y_i)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\sum_{i=1}^{N}(k^2x_i^2 - 2kx_iy_i + y_i^2) = 0$$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \; y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \tag{6.14}$$

როგორც ვხედავთ, წრფის პარამეტრების ფორმულით გამოთვლა საკმაოდ რთული პროცესია, თუმცა Excel-ის დამხმარე ფუნქცია გვაძლევს საშუალებას არ ვაწარმოოთ ასეთი საფუძვლიანი გამოთვლები.

გრაფიკული თვალსაზრისით, წრფე გავლებულია საუკეთესოდ, თუ ექსპერიმენტული წერტილები განლაგდებიან ამ წრფის ორივე მხარეს თანაბარი მანძილებით. ეს მეთოდი გამოიყენება, როცა ორ სიდიდეს შორის წრფივი დამოკიდებულებაა.

ლაბორატორიული ამოცანა №6–7

ექსპერიმენტით მიღებული შედეგების დამუშავება და ორი სიდიდის წრფივი დამოკიდებულების მოდელირება

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab 6–7" – "ექსპერიმენტით მიღებული შედეგების დამუშავება“. შაბლონი შედგება ორი გვერდისაგან: ***lab 6*** და ***lab 7***. პირველ გვერდზე მოცემულია გაზომილ მონაცემთა ცხრილი და ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც გამოითვლება სიდიდეთა საშუალო მნიშვნელობები, აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებები.

შესავალი *(lab 6* –თვის)

ვთქვათ, ექსპერიმენტის შედეგად მიღებულ იქნა რაიმე x სიდიდის N მნიშვნელობა. აღვნიშნოთ x_i –ით x–ის i–ური მნიშვნელობა. გამოვთვალოთ მისი საშუალო მნიშვნელობა:

$$X_{საშ} =< x >= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

ყოველი ცალკე აღებული მონაცემი განსხვავდება საშუალო მნიშვნელობისაგან. ამ მნიშვნელობისა და საშუალო მნიშვნელობას შორის სხვაობის მოდულს $\Delta_i = |\langle x \rangle - x_i|$ **ცალკეული მონაცემის აბსოლუტური ცდომილება** ეწოდება. გამოვთვალოთ აბსოლუტური ცდომილების საშუალო

$$\Delta_{საშ} =< \Delta >= \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots + \Delta_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |\langle x \rangle - x_i|}{N}$$

გამოვთვალოთ აბსოლუტური ცდომილების საშუალო იზომება იმავე ერთეულებით, რითაც იზომება თვით სიდიდეები. ექსპერიმენტის ფარდობითი ცდომილება ეწოდება სიდიდეს

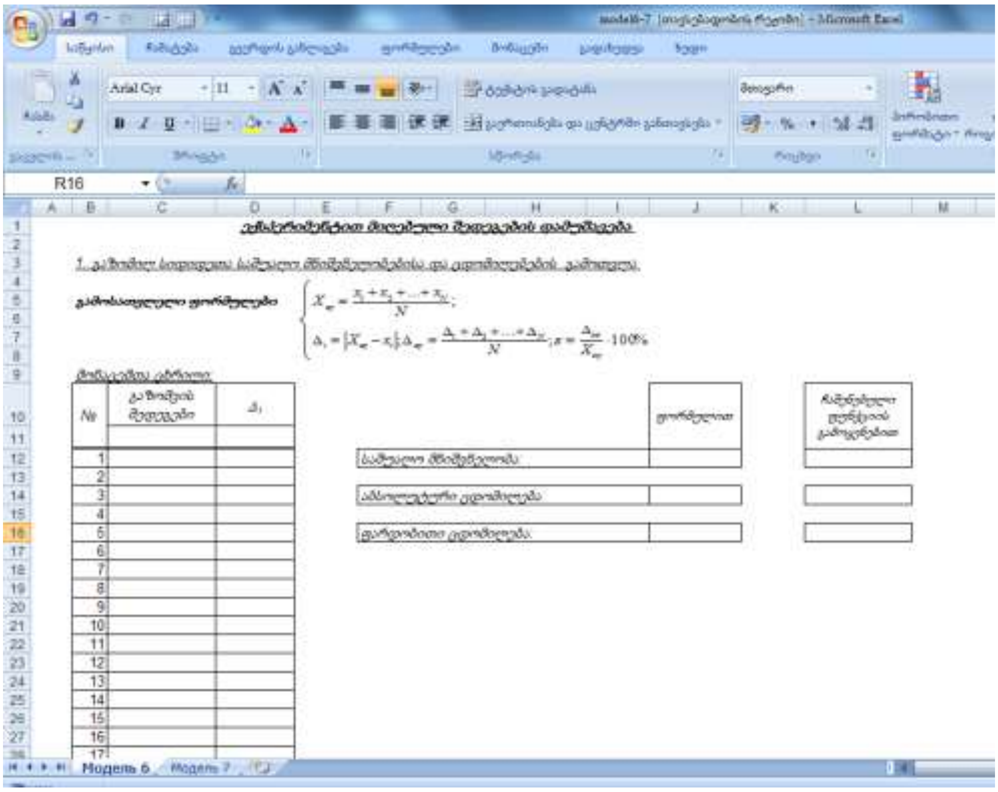
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta_{საშ}}{X_{საშ}} \cdot 100\%$$

იგი ახასიათებს გაზომვის ხარისხს და განზომილება არ აქვს.

გაზომვის შედეგების ჩაწერის წესის თანახმად ექსპერიმენტის საბოლოო შედეგი უნდა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta_x \rangle; \quad \varepsilon_x$$

მოდელი 6–ში x სიდიდისათვის მონაცემთა ცხრილში გამოყენებულია 20 მნიშვნელობა, მუდმივი სიდიდეებია გაზომვათა რიცხვი N და გაზომილი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა.



შაბლონის შევსება

1. საწყისი მონაცემები შეიტანეთ შემდეგ უჯრებში:
   1) C11: x ფიზიკური სიდიდის დასახელება და ერთეული;
   2) D11: აბსოლუტური ცდომილების ერთეული
   3) C12:C31 დიაპაზონი: x ფიზიკური სიდიდის ექსპერიმენტულ გაზომვათა შედეგები. (თუ თქვენი მონაცემები არ გაქვთ, მაგალითისთვის შეიტანეთ მნიშვნელობები ქვემოთ მოცემული ცხრილიდან).
2. გამოთვლები ჩაატარეთ ორი მეთოდით: ფორმულების გამოყენებით და ფუნქციებით.

I მეთოდი

მნიშვნელობათა საშუალოს გამოთვლა. J12 უჯრაში შეიტანეთ საშუალო არითმეტიკულის გამოსათვლელი ფორმულა. ამისათვის გამოიყენეთ ფუნქცია SUM( ), სადაც არგუმენტად შევიტანოთ უჯრათა დიაპაზონი, რომელიც შეიცავს გაზომვათა რიცხვით მონაცემებს. გაზომვათა რაოდენობა ყველა შემთხვევაში სხვადასხვაა.

ექსპერიმენტული გაზომვის მაგალითები

N	R, ომი	V, მ^3	L, მ	v, მ/წმ	I, მა	E, ვ
1	283	3283	0,86	1909	0,63	5,56
2	312	3312	0,72	1875	0,58	5,58
3	322	3322	0,79	1899	0,74	5,55
4	285	3285	0,77	1845	0,78	5,56
5	292	3292	0,60	1949	0,7	5,56
6	286	3286	0,70	1913	0,74	5,59
7	278	3278	0,65	1936	0,75	5,55
8	285	3285	0,69	1884	0,82	5,54
9	306	3306	0,73	1842	0,68	5,56
10	296	3296	0,77	1874	0,69	5,57
11	264	3264	0,72	1949	0,76	5,56
12	282	3282	0,79	1931	0,62	5,57
13	300	3300	0,65	1948	0,72	5,59
14	305	3305	0,66	1909	0,88	5,60
15	279	3279	0,70	1911	0,65	5,56
16	277		0,74	1895	0,79	5,55
17	283		0,84	1942	0,79	5,56
18	292		0,76		0,77	5,56
19	278		0,80		0,66	
20	266				0,76	

<u>**აბსოლუტური ცდომილების გამოთვლა.**</u> აბსოლუტური ცდომილების საშუალოს გამოსათვლელად შეასრულეთ შუალედური გამოთვლები, კერძოდ: წინასწარ განსაზღვრეთ აბსოლუტური ცდომილებები ცალკეული გაზომვებისათვის ფუნქცია ABS()–ის გამოყენებით, რომელიც ფუნქციის არგუმენტში მოთავსებული გამოსახულების მოდულს გამოთვლის. შემდეგ კი უჯრაში J14 გამოთვალეთ აბსოლუტური ცდომილების საშუალო.

ფორმულის დასრულების შემდეგ უჯრა J14–ს მიანიჭეთ ექსპონენციალური ფორმატი (კონტექსტური მენიუში აირჩიეთ *უჯრების დაფორმატება – რიცხვი)* სასურველ სიდიდემდე სიზუსტის განსაზღვრისათვის.

ფარდობითი ცდომილების განსაზღვრა. J16 უჯრაში შეიტანეთ ფარდობითი ცდომილების გამოსათვლელი ფორმულა. უჯრას მიანიჭეთ პროცენტის ფორმატი.

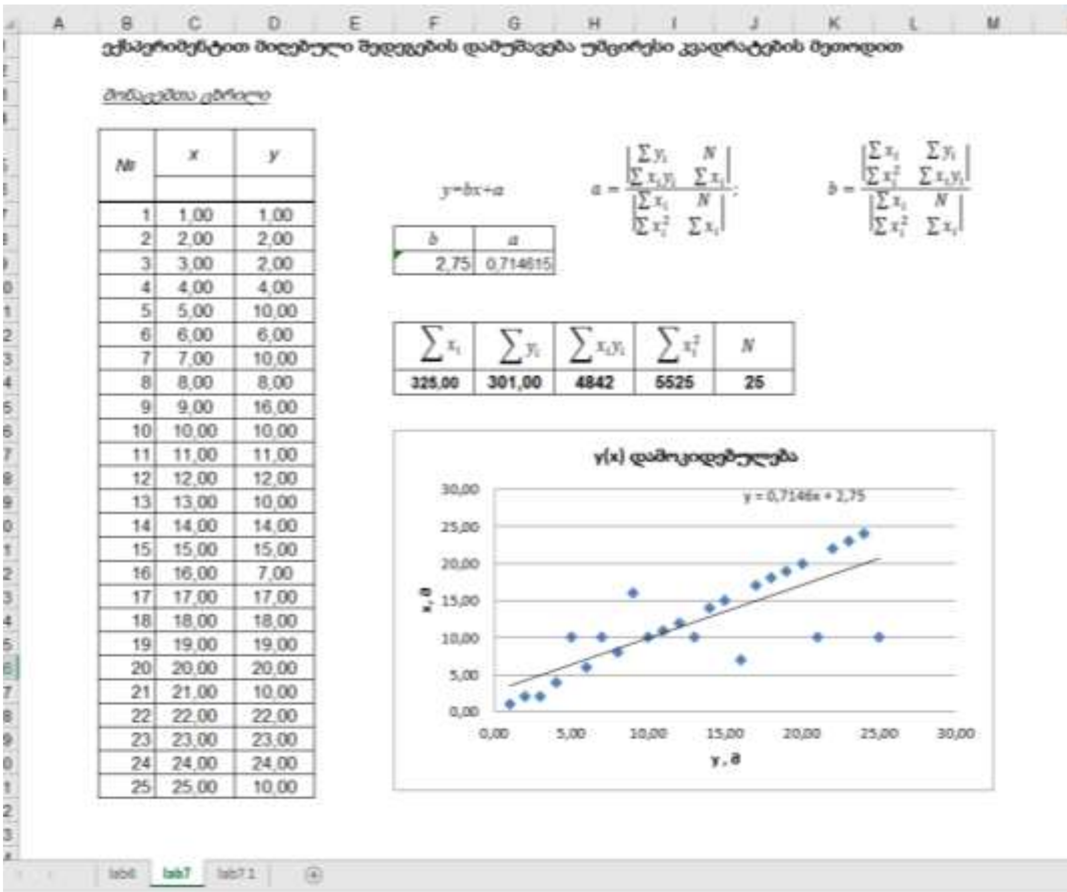
II მეთოდი

მნიშვნელობათა საშუალოს გამოთვლა ფუნქციის AVERAGE ( ) გამოყენებით. უჯრა J12–ში გამოთვალეთ ფუნქციის AVERAGE ( ) (კატეგორია *სტატისტიკური)* გამოყენებით. არგუმენ-ტად აირჩიეთ C სვეტის მონაცემთა დიაპაზონი.

საშუალო აბსოლუტური ცდომილების გამოთვლა ფუნქციის AVEDEV( ) გამოყენებით. L14 უჯრაში გამოთვალეთ ფუნქციის *AVEDEV* ( ) (კატეგორია *სტატისტიკური)* გამოყენებით. არგუმენტად, საშუალოს გამოსათვლელი ფუნქციის ანალოგიურად, აირჩიეთ C სვეტის მონა-ცემთა დიაპაზონი.

შაბლონის ჩატვირთვა

1. გახსენით შაბლონი „lab7“.



№	x	y
1	1,00	1,00
2	2,00	2,00
3	3,00	2,00
4	4,00	4,00
5	5,00	10,00
6	6,00	6,00
7	7,00	10,00
8	8,00	8,00
9	9,00	16,00
10	10,00	10,00
11	11,00	11,00
12	12,00	12,00
13	13,00	10,00
14	14,00	14,00
15	15,00	15,00
16	16,00	7,00
17	17,00	17,00
18	18,00	18,00
19	19,00	19,00
20	20,00	20,00
21	21,00	10,00
22	22,00	22,00
23	23,00	23,00
24	24,00	24,00
25	25,00	10,00

b	a
2,75	0,714615

$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i y_i$	$\sum x_i^2$	N
325,00	301,00	4842	5525	25

2. შეიტანეთ საწყისი მონაცემები შემდეგ უჯრებში:

1) C6 უჯრაში x ფიზიკური სიდი–დის აღნიშვნა (ან დასახელება) და განზომილება;
2) D6 უჯრაში y ფიზიკური სიდიდის აღნიშვნა (ან დასახელება) და განზომილება;

3) (C7: C??) დიაპაზონი: ექსპერი–მენტით მიღებული x ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობები. თუ თქვენი მონაცემები არ გაქვთ, შეგიძლიათ გამოიყენოთ ქვემოთ მოყვანილი ცხრილიდან.

4) (D 7: D??) დიაპაზონი: ექსპერი–მენტით მიღებული y ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობები.

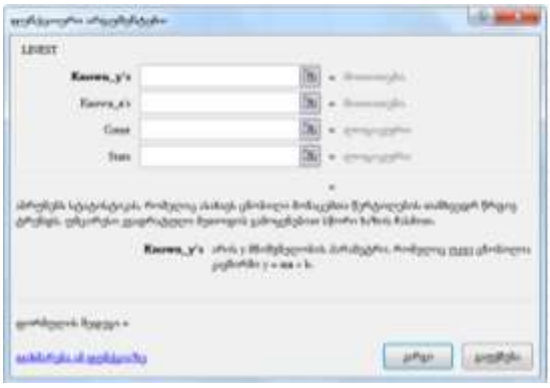
ექსპერიმენტული გაზომვის მაგალითები

x, მ	y, მ	x,მ	y,მ	ΔT, კელ	E, B	t, წმ	v, მ/წმ	B, ტეს	Δφ, ვ
-1	15,81	-2	-3,44	-5	2,10	0	-0,61	3	-0,99
1	15,14	-1	0,86	-4	1,11	1	0,17	4	0,16
3	11,47	0	5,23	-3	4,94	2	4,56	5	2,30
5	22,93	1	-,46	-2	7,46	3	7,77	6	4,96
7	13,26	2	6,90	-1	7,82	4	9,16	7	3,55
9	19,52	3	7,57	0	9,65	5	8,12	8	5,30
11	17,67	4	4,79	1	12,79	6	13,79	9	4,34
13	28,60	5	7,45	2	15,03	7	13,63	10	8,19
15	32,63	6	4,39	3	18,29	8	17,65	11	6,43
17	27,83	7	7,32	4	16,07	9	19,80	12	8,91
19	34,64	8	10,26	5	21,79	10	20,02	13	8,22
21	36,11	9	10,71	6	23,60	11	21,16	14	10,01
23	35,25	10	9,12	7	22,09	12	21,75	15	10,21
25	39,42	11	14,48	8	28,12	13	25,40	16	13,93
27	34,53	12	11,86	9	25,62	14	29,14	17	11,92
29	45,56	13	15,89	10	31,44	15	28,45	18	16,09
31	36,53	14	19,17	11	29,85	16	32,69	19	15,93
33	45,38	15	18,40	12	32,25	17	36,05	20	15,53
35	49,30	16	21,82	13	33,54	18	37,77	21	16,67
37	52,83	17	16,73	14	40,27	19	36,52	22	16,78
39	56,57	18	22,84	15	37,92	20	37,56	23	18,17
41	46,49	19	21,63	16	40,42	21	44,29	24	1934
43	47,72	20	22,41	17	45,79	22	45		
45	58,08	21	24,19			23	46,80		
47	59,84								

3. წრფის პარამეტრები გამოთვალეთ ფუნქციის „Linest“ დახმარებით. ფუნქციის სინტაქსისია

LINEST (known_y's; known_x's; const; stats)

პარამეტრებს ფუნქცია ითვლის უმცირესი კვადრატების მეთოდით. ფუნქცია გამოიყენეთ შემდეგი წესით:



– გამოყავით დიაპაზონი F9:G9 და შეასრულეთ ბრძანება f(x), კატეგორია *სტატისტიკურში* აირჩიეთ ფუნქცია „LINEST“.

- ველში „known_y's” შეიტანეთ y-ის ექსპერიმენტით განსაზღვრული მნიშვნელობების დიაპაზონი.

- ველში „known_x's” შეიტანეთ x-ის ექსპერიმენტით განსაზღვრული მნიშვნელობების დიაპაზონი.

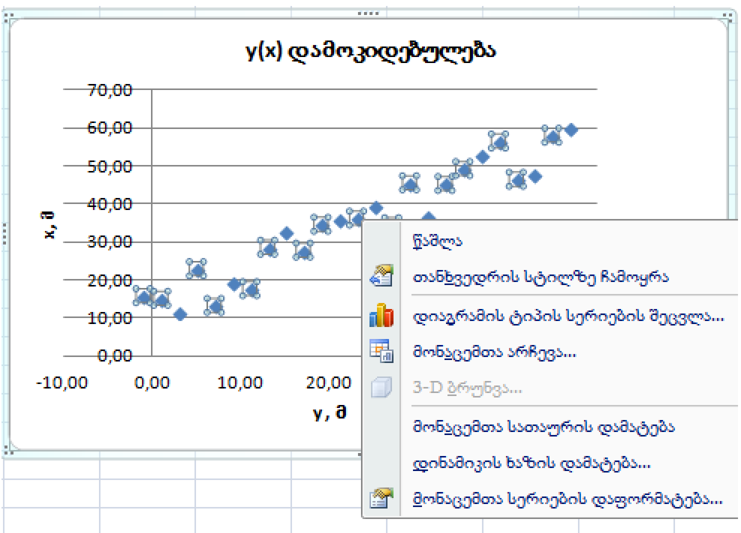
- ველში „const“ შეიტანეთ ლოგიკური მნიშვნელობები, რომელიც განისაზღვრავს b მუდმივის გამოთვლის აუცილებლობას: თუ ველს „const“ მინიჭებული აქვს მნიშვნელობა True ან ველი ცარიელია, მაშინ იგი გამოითვლება ჩვეულებრივად; თუ ველს „const“ მინიჭებული აქვს მნიშვნელობა False, მაშინ b ითვლება 0-ის ტოლად. (ე.ი. წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე.

- ბოლო ველი დატოვეთ ცარიელი.

- იმისათვის რომ ფუნქციამ გამოთვალოს ორივე (a და b) პარამეტრი, ფორმულის ჩაწერა დაასრულეთ კლავიშთა კომბინაციით - Ctrl+Shift+Enter.

$y(x)$ დამოკიდებულების გრაფიკის აგება

1. მონიშნეთ რიცხვითი მონაცემების შემცველი უჯრების დიაპაზონი და ააგეთ $y(x)$ დამოკიდებულების გრაფიკი.



2.ძირითადი მოთხოვნები:

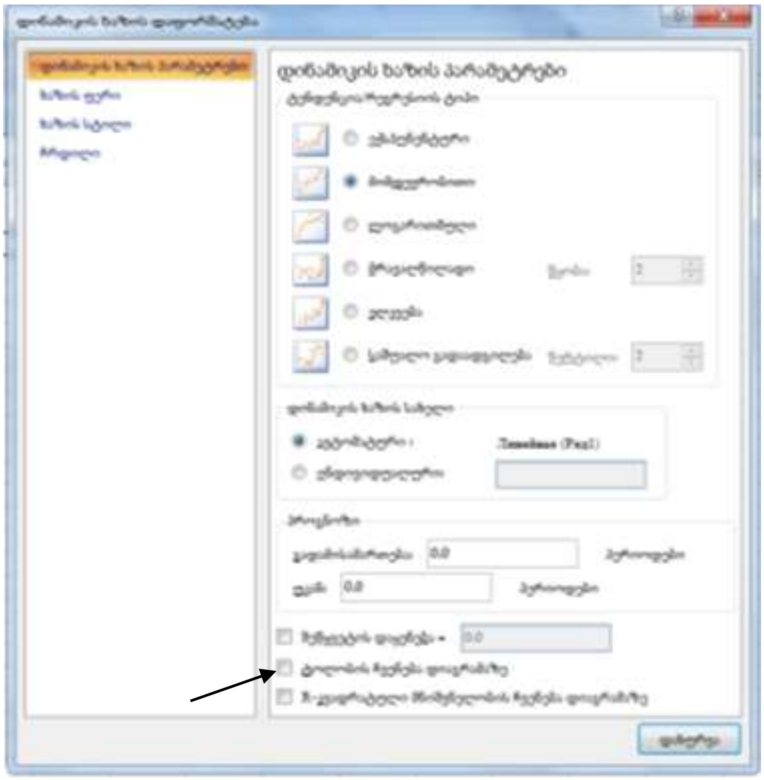
1) დიაგრამის ტიპი – წერტილოვანი;

2) დიაგრამის დასახელება – ექსპერიმენტით მიღებული შედეგების დამუშავება უმცირესი კვადრატების მეთოდით (ან ფიზიკურ სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება, მაგალითად, ვოლტ–ამპერული მახასიათებელი, ან სიჩქარის დროზე დამოკიდებულება და ა.შ.);

3. მიუთითეთ დასახელებები ღერძების გასწვრივ გადაზომილი სიდიდეებისა და მათი განზომილებები;

დაამატეთ წრფე, რომელიც აიგება უმცირესი კვადრატების მეთოდით (ე.წ. დინამიკის ხაზი (trendline)), ამისათვის გრაფიკის ერთ-ერთი წერტილზე გამოიძახეთ კონტექსტური

მენიუ და აირჩიეთ პუნქტი *დინამიკის ხაზის დამატება* (add trenline), დიალოგურ ფანჯარაში *დინამიკის ხაზის პარამეტრები* (format trendline) აირჩიეთ ტიპი *მიმდევრობითი* (linear). იმისათვის, რომ გავიგოთ მოცემული წრფის განტოლება, აირჩიეთ პუნქტი *ტოლობის ჩვენება დიაგრამაზე* (display equation on chart).



შეადარეთ თეორიულად ფუნქ–ციის საშუალებით გამოთვლილი წრფის პარამეტრები გრაფიკზე გამოყვანილი განტოლებიდან მი-ღებულ მნიშვნელობებს.

a და b კოეფიციენტების გამოთვლა.

a და b კოეფიციენტების გამოთვლა ხდება (6.10) ან (6.11) და (6.12) ფორმულების საშუალებით, რისთვისაც საშიროა გამოვიანგარიშოთ $\sum x_i, \sum y_i, \sum x_i y_i, \sum x_i^2$ და N. ამ პარამეტრების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ Excel –ის ჩაშენებული ფუნქციებით. კერძოდ:

SUMM() – რომლითაც გამოვითვლით $\sum x_i$ და $\sum y_i$ მონაცემთა ჯამს.

SUMPRODUCT( ) - ფუნქციით გამოვითვლით მწრვივთა ნამრავლის ჯამს, ანუ $\sum x_i y_i$.

SUMSQ() - ფუნქციით გამოვითვლით არგუმენტის კვადრატების ჯამს. არგუმენტებს შეიძლება წარმოადგენდეს მასივები, ჩვენს შემთხვევაში ამ ფუქციას გამოვიყენებთ $\sum x_i^2$ გამოსათვლელად.

COUNT() – ფუნქცია ითვლის დიაპაზონში რიცხვთა რაოდენობას. ამ ფუნქციას გამოვიყენებთ N -ის გამოსათვლელად.

ამოცანები:

1. ზემოთ აღწერილი მსჯელობით შეასრულეთ გრავიტაციული ურთიერთქმედების ძალის მანძილზე დამოკიდებულების მოდელირება. დავუშვათ ორი ცნობილი მასის (ვთქვათ თითოეულის მასა 50 კგ-ის ტოლია) სხეულებს შორის ურთიერთქმედების ძალის გაზომვას ვახორციელებთ სხვადასხვა მანზილზე. მოცემული გვაქვს გაზომვის შედეგები ქვემოთ მოცემული ცხრილის სახით:

r (მ)	1	2	3	4	5	6
F (ნ)	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-9}$

მსოფლიო მიზიდულობის კანონის თანახმად ორ სხეულს შორის ურთიერთქმედების ძალა პირდაპირპროპორცულია ამ სხეულების მასაების ნამრავლის და უკუპროპორციულია მათ შორის მანძილის კვადრატის.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

სადაც $G = 6{,}67 \cdot 10^{-7}$ ნმ^2/კგ^2 - გრავიტაციული მუდმივაა. თეორიული კანონის მიხედვით ძალა მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია, მაშასადამე $F(r)$ დამოკიდებულება არ არის წრფივი.

შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები:

ა) გახსენით ახალი მუშა ფურცელი და დაიტანეთ მასზე ექსპერიმენტული გაზომვის მონაცემები.

ბ) ააგეთ $F(r)$ - დამოკიდებულების გრაფიკი წერტილებით.

გ) დაამატეთ ტრენდის მრუდი. შეარჩიეთ კვადრატული პოლინომი რადგან ვიცით, რომ ძალა მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულად იცვლება. განსაზღვრეთ პოლინომის კოეფიციენტები a და b გრაფიკზე გამოტანილი განტოლების საფუძველზე.

დ) შეასრულეთ ანალიზური გამოთვლები უმცირესი კვადრატის მეთოდის საფუძველზე a და b მუდმივების გამოანგარიშების მიზნით. ჩათვალეთ, რომ თეორიული შედეგი მოიცემა ხარისხობრივი სახით:

$$F_{თ} = ar^b \tag{*}$$

ანალიზური გამოთვლებისას ისარგებლეთ (6.2) და (6.4) ფორმულებით.

ე) გამოანგარიშეთ a და b კოეფიციენტები Excel-ში თქვენს მიერ ანალიზურად მიღებული ფორმულების საფუძველზე და შეადარეთ ტრენდის მრუდის განტოლებას.

P.S. გაითვალისწინეთ, რომ (*)-იანი დამოკიდებულება უნდა წარმოადგინოთ, ისე, რომ a და b ცვლადების მიმართ წრფივი დამოკიდებულება მივიღოთ. ამისათვის საჭიროა გავალოგარითმოთ განტოლების ორივე მხარე:

$$\ln(F_{თ}) = \ln(a) + b\ln(r) \tag{**}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$y_{თ} = \ln(F_{თ})$$
$$A = \ln(a)$$
$$x = \ln(r)$$
$$y = \ln(F)$$

(**)-იანი ტოლობა ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y_{თ} = A + bx$$

უმცირესი კვადრატების მეთოდის თანახმად მინიმალური უნდა იყოს:

$$\Delta^2 = (y_{თ} - y)^2 = (A + bx - y)^2$$

ზოგად შემთხვევაში გვაქვს:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (A + bx_i - y_i)^2 \tag{***}$$

A და b პარამეტრები მოვძებნოთ (***)-იანი ტოლობის ამ ცვლადების მიხედვით კერძო წარმოებულების ნულთან ტოლობით:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2}{\partial b} = 0$$

მიღებული განტოლებებიდან ვიპოვით A და b-ს:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}; \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}$$

ჩვენს მიერ დაშვებული აღნიშვნიდან ვიპოვით $a = \exp(A)$, ხოლო (*)-იანი ტოლების საფუძველზე ვიპოვით განტოლებას, რომელიც ყველაზე უკეთ აღწერს ექსპერიმენტს.

§8. სხეულის ვარდნის მოდელირება წინააღმდეგობის ძალების გათვალისწინებით

რეალურ ექსპერიმენტში ატმოსფეროში ვარდნილ სხეულებზე მოქმედებს წინააღმდეგობის ძალა. როგორც ექსპერიმენტი გვიჩვენებს, მცირე მასის სხეულებზე, რომლებიც მცირე სიჩქარით ვარდებიან ეს წინააღმდეგობის ძალა პირდაპირპროპორციულია სიჩქარის - $k\mathrm{v}$, ხოლო მასიური სხეულების შემთხვევაში, რომელთა ვარდნის სიჩქარე დიდია, ჰაერის მხრიდან მოქმედი წინააღმდეგობის ძალა პირდაპირპროპორციულია სიჩქარის კვადრატის $f\mathrm{v}^2$ (k და f - პროპორციულობის კოეფიციენტებია შესაბამისად მცირე და დიდი სიჩქარით ვარდნილი სხეულებისათვის). ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{სიმ} + \vec{F}_{წინ} = \vec{F} \tag{8.1}$$

დიფერენციალური ფორმით ეს განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$my'' = m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \text{ ან } y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{m} \tag{8.2}$$

სადაც, F_y - წარმოადგენს ვარდნილ სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედს შერჩეული მიმართულებაზე. ვთქვათ მოცემულ შემთხვევაში დადებით მიმართულებად ითვლება სიმძიმის ძალის მიმართულება. ე.ი. y ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც სხეულის ვარდნის სიჩქარე საკმაოდ დიდა, ე.ი. წინააღმდეგობის ძალა სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია. მოცემულ შემთხვევაში, ტოლქმედი ძალის პროექციისათვის გვექნება:

$$F_y = F_{სიმ} - F_{წინ} = mg - f\mathrm{v}^2 \tag{8.3}$$

შესაბამისად:

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{mg - f\mathrm{v}_y^2}{m} = g - \alpha\mathrm{v}_y^2 = g - \alpha\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{8.4}$$

სადაც $\alpha = f/m$. რადგან სხეულის სიჩქარე იცვლება, ამიტომ მოძრაობა მიმდინარეობს ცვლადი ძალის მოქმედებით. ამიტომ (8.4) განტოლების ამოხსნა შესაძლებელია რიცხვითი მეთოდით, კერძოდ კი ნახევარინტერვალთა მეთოდით, რომელსაც **ეილერის დაზუსტებულ მეთოდსაც უწოდებენ**.

გამოიყენეთ §5-ში გამოყენებული ალგორითმი და შევადგინოთ სიჩქარისა და კოორდინატის გამოსათვლელი განტოლებათა სისტემა:

$$
\begin{cases}
\left(\frac{dy}{dt}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + \left(g - \alpha\left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2\right)\cdot\frac{\Delta t}{2}, \\
\left(\frac{dy}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i-1/2} + \left(g - \alpha\left(\frac{dy}{dt}\right)_{i-1/2}^2\right)\cdot\Delta t \\
y_{i+1} \approx \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i+1/2}\cdot\Delta t
\end{cases}
\tag{8.5}
$$

თუ გავაანალიზებთ ამოცანას, მოცემულ შემთხვევაში სხეულის ვარდნისას იზრდება რა სიჩქარე, თანდათანობით მცირდება აჩქარების ცვლილება, ბოლოს და ბოლოს აჩქარების ცვლილება ნულის ტოლი გახდება, სხეულის აჩქარება მუდმივ სიდიდეს მიაღწევს და შესაბამისად დამყარდება საბოლოო სიჩქარეც. ამ სიჩქარეს შეიძლება ასევე ვუწოდოთ დამყარებული სიჩქარე, რომელიც შეიძლება გამოვთვალოთ თეორიულად. კერძოდ, სიჩქარე დამყარდება მაშინ (შესაბამისად აჩქარების ნაზრდიც ნულის ტოლი გახდება) როცა სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი ნულის ტოლი იქნება, ე.ი. სიმძიმის ძალა გაუტოლდება წინააღმდეგობის ძალას:

$$
fv^2 = mg \tag{8.6}
$$

აქედან:

$$
v_{დამყ} = \sqrt{\frac{mg}{f}} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \tag{8.7}
$$

ეს ტოლობა წარმოადგენს გამოთვლების კრიტერიუმს. მოდელირებისას, ალგორითმი ისე უნდა მუშაობდეს, რომ გამოთვლები განხორციელდეს მანამ, სანამ არ მივიღებთ დამყარებულ სიჩქარეს. ე.ი. (8.5) ფორმულით გამოთვლილი სიჩქარე არ დაემთხვევა (8.7) კრიტერიუმით მიღებულ შედეგს გარკვეული სიზუსტით მაინც. ამ სიზუსტეს კი თვით მომხმარებელი განსაზღვრავს ამოცანის პირობის შესაბამისად.

დაწვრილებით განვიხილოთ ზემოთ მიღებული განტოლებათა სისტემა:

1. ნებისმიერად განვსაზღვროთ პროგრამის ბიჯი Δt. როგორც ცნობილია ნახევარინტერვალთა მეთოდით ჩატარებული გამოთვლების სიზუსტე მით უფრო მაღალია, რაც უფრო მცირეა ეს ინტერვალი.
2. მივითოთ ფორმულა, რომლითაც შესაძლებელი იქნება გამოვთვალოთ სიჩქარე დროის განსაზღვრული მომენტებისათის. ამისათვის (8.2) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$
(v_y)' = g - \alpha\cdot v_y^2
$$

წარმოებულის განმარტების თანახმად მარცხენა მხარე გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$
(v_y)' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_y}{\Delta t} \approx \frac{\Delta v_y}{\Delta t}.
$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ამ მეთოდით სიჩქარე გამოითვლება ინტერვალის შუაში, მაშინ უკანასკნელი ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left(v_y\right)' \approx \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{\left(v_y\right)_{i+1/2} - \left(v_y\right)_{i-1/2}}{\Delta t}$$

აქედან:

$$\left(\mathrm{v_y}\right)_{\mathrm{i}+1/2} \approx \left(\mathrm{v_y}\right)_{\mathrm{i}-1/2} + \left(\mathrm{g} - \alpha \cdot \left(v_y\right)^2_{i-1/2}\right) \cdot \Delta t$$

სიჩქარე პირველი ინტერვალის ცენტრში იქნება:

$$\left(\mathrm{v_y}\right)_{1/2} \approx \left(\mathrm{v_y}\right)_0 + \left(\mathrm{g} - \alpha \cdot \left(v_y\right)^2_0\right) \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

3. კოორდინატებს ვითვლით დროის ღერძის დაყოფის წერტილებში, ე.ი. ყოველი ინტერვალის ბოლოს. ფორმულის მისაღებად საჭიროა გამოვიყენოთ წარმოებულის განმარტება:

$$v_y = \frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{\Delta t}$$

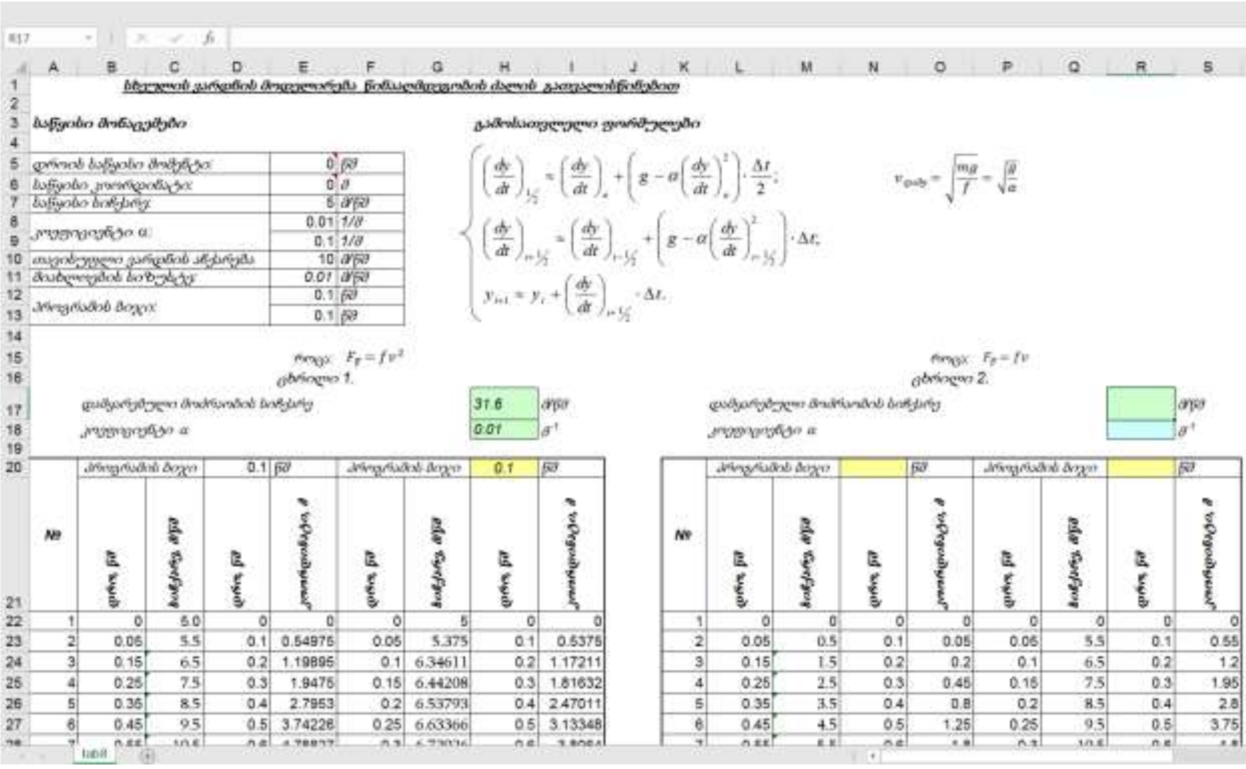
აქედან:

$$y_{i+1} \approx y_{i-1} + \left(v_y\right)_{i+1/2} \left(v_y\right)_{i+1/2}.$$

ლაბორატორიული ამოცანა №8

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab8" –"სხეულის ვარდნა ხახუნის გათვალისწინებით“.



გვერდზე მოცემულია ორი ცხრილი ∝ კუთხის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათის, რომელთაგან თითოეული ცხრილი დაყოფილია ორ ნაწილად Δt ინტერვალის ორი მნიშვნელობისათვის. ამოცანის ასეთი აგება მოგცემთ საშუალებას ერთდროულად შეისწავლოთ ∝ კოეფიციენტსა და პროგრამის ბიჯზე დამოკიდებულება.

შაბლონის შევსება

1. საწყისი მონაცემები შეიტანეთ შესაბამის უჯრებში:

$t_0 = 0$ წმ, $y_0 = 0$ მ, $(v_y)_0 = 0$ მ/წმ, $\alpha_1 = 0.03$ მ$^{-1}$, $\alpha_2 = 0.1$ მ$^{-1}$, $\Delta t_1 = 0.1$წმ, $\Delta t_2 = 1$წმ.

2. H16 და R16 უჯრებში გამოთვალეთ დამყარებული მოძრაობის სიჩქარე – იგი გამოიყენეთ გამოთვლების შეწყვეტის კრიტერიუმად (სიჩქარის მიღებულ მნიშვნე–ლობაზე გამოთვლები უნდა შეწყდეს).

3. ცხრილი N1 შეავსეთ შემდეგი თანმიმდევრობით, საწყის მონაცემთა ცხრილის შესაბამისი უჯრები დააკავშირეთ შემდეგ უჯრებთან:

1) უჯრა H17 – α_1 კოეფიციენტის მნიშვნელობა E8 უჯრასთან;
2) უჯრა R17 – α_2 კოეფიციენტის მნიშვნელობა E9 უჯრასთან;
3) უჯრა D19 – Δt_1 პროგრამის ბიჯის მნიშვნელობა E12 უჯრასთან;
4) უჯრა H19 – Δt_2 პროგრამის ბიჯის მნიშვნელობა E13 უჯრასთან;
5) B21, D21, F21, H21 უჯრებში – დროის საწყისი მომენტის მნიშვნელობა E5 უჯრასთან;
6) C21 და G21 უჯრებში – საწყისი სიჩქარის მნიშვნელობა E7 უჯრასთან;
7) E21 და I21 უჯრებში – საწყისი კოორდინატის მნიშვნელობა E6 უჯრასთან;

გამოსათვლელი ფორმულების გამოყენებით გამოთვალეთ სიჩქარე C სვეტის შესაბამის უჯრებში დროის სხვადასხვა მომენტებისათვის:

1) C22 უჯრაში გამოთვალეთ სიჩქარე დროის პირველი ინტერვალის ცენტრში;

2) მის ქვემოთ მდებარე უჯრებში გამოთვალეთ სიჩქარე დროის დანარჩენი მომენტებისათვის (ყოველი მომდევნო Δt ინტერვალის შემდეგ). რადგან გამოთვლები ტარდება მანამდე, სანამ სიჩქარე მიაღწევს მუდმივ მნიშვნელობას (იხ. გამოთვლების შეწყვეტის კრიტერიუმი), ამიტომ შევარჩიოთ მიახლოების სიზუსტე, მაგალითად 0,01. ეს იმას ნიშნავს, რომ გამოთვლები ჩატარდება ვიდრე სიჩქარის მიღებული მნიშვნელობები თეორიულად გამოთვლილ მნიშვნელობას არ მიუახლოვდება მეასედის სიზუსტით. ამისათვის კი საჭიროა გამოთვლილი სიჩქარის ყოველი მნიშვნელობა შეადაროთ თეორიულ მნიშვნელობას. ფორმულის ასეთ აგებას პირობითი ამოხსნა ეწოდება და გამოიყენება ლოგიკური ფუნქციები (IF, AND, OR, NOT).

ფუნქცია IF გამოიყენება მნიშვნელობებისა და ფორმულების პირობებთან შესადარებლად. აბრუნებს ცვლადის მნიშვნელობას მანამ, სანამ ლოგიკური პირობა - კრიტერიუმი არ გახდება ჭეშმარიტი. ფუნქციის სინტაქსისია:

IF (logical_test; value_true; value_if_fals)

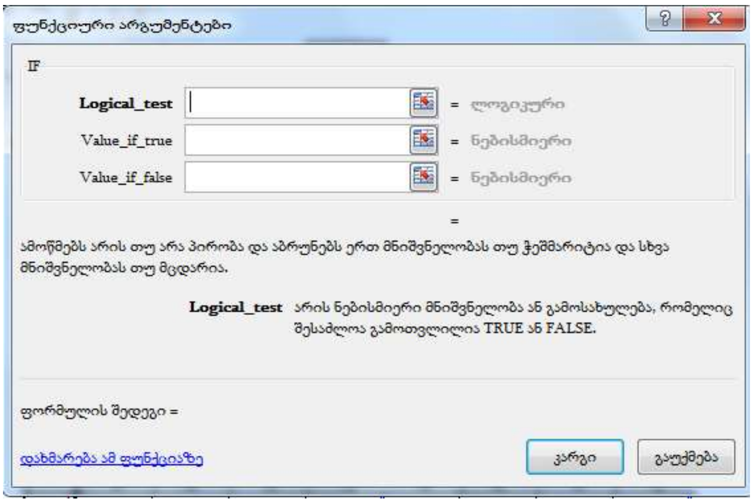
ამრიგად, IF ფუნქციის არგუმენტებია:

1. logical_test – ეს არის ნებისმიერი მნიშვნელობა ან გამოსახულება, რომელიც ღებულობს ჭეშმარიტ ან მცდარ მნიშვნელობებს. ლოგიკური გამოსახულებად შეიძლება გამოიყენოთ მათემატიკური ფორმულა, ან სხვა ლოგიკური ფუნქცია. ჩვენს შემთხვევაში უნდა შეამოწმოთ პირობა:

$$v_{\text{დამყ}} - v_{\text{გამოთ}} < 0{,}01.$$

2. value_true – ეს არის მნიშვნელობა, რომელიც ენიჭება უჯრას, თუ ეს პირობა ტოლია *ჭეშმარიტების.* ჩვენს შემთხვევაში ნიშნავს, რომ ზემოთ მოცემული სიზუსტე მიღწეულია, საჭიროა გამოთვლები შეჩერდეს და შემდეგ უჯრებს მიენიჭოს გარკვეული მნიშვნელობა, მაგალითად, 0, მცდარი, „ „ (ცარიელი უჯრა) და ა.შ.

3. value_if_fals – ეს არის მნიშვნელობა, რომელიც ენიჭება მოცემულ უჯრას, თუ ლოგიკური გამოსახულება *მცდარია.* ეს მნიშვნელობა შეიძლება იყოს ფორმულა. ჩვენს შემთხვევაში – ძირითადი გამოსათვლელი ფორმულა, რომლითაც ხორციელდება სიჩქარით



გამოთვლა (ფორმულა(3)).

IF ფუნქციის ჩაწერისას ფუნქციური არგუმენტები გამოყოფილია წერტილ–მძიმით, რაც ძალიან მნიშვნელოვანია ფუნქციის ხელით შეყვანისას. ფუნქციის ფუნქციური არგუმენტების ფანჯრის გამოყენებისას ავტომატურად ემატება ერთი ველიდან მეორეზე გადასვლისას. თუმცა მხოლოდ IF ფუნქციის გამოყენება საკმარისი არ არის. მართლაც, თუ C23 უჯრაში შეიყვანთ ფორმულას:

= IF ($H$16-C22<$E$11;0;C22+($E$10-$E$8*C22^2)*$E$12),

და გადავაკოპირებთ დანარჩენ უჯრებში, იმ შემთხვევაში, თუ არ შესრულდება პირობა (ლოგიკური გამოსახულების მნიშვნელობა მცდარია), უჯრაში გამოჩნდება სიჩქარის მნიშვნელობა მოცემული მომენტისათვის; ხოლო პირობის შესრულების მომენტში – 0. ამიტომ შემდეგ უჯრაში სიჩქარე გამოითვლა გაგრძელდება ძირითადი გამოსათვლელი ფირმულით, რომელიც შედის IF ფუნქციის ბოლო ნაწილში, მაგრამ უკვე ნულოვანი მნიშვნელობიდან. ამ შეცდომის აღმოსაჩენად, საჭიროა კიდევ ერთი პირობის შემოწმება, ამისათვის გამოიყენება ფუნქცია OR(logical1;logical2;…), რომელიც აბრუნებს true მნიშვნელობას, თუ თუნდაც ერთ არგუმენტს აქვს ჭეშმარიტი მნიშვნელობა, და აბრუნებს false, თუ ყველა არგუმენტს აქვს მცდარი მნიშვნელობა. ამოცანაში გამოიყენება ორი შესასრულებელი პირობა. საზოგადოდ კი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს 30–მდე პირობა, რომლებიც შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი ამ მცდარი.

ამრიგად, ლოგიკურ გამოსახულებას ექნება შემდეგი სახე:

OR($H$16-C22<$E$11;C22=0)

საბოლოოდ C22 უჯრაში ფორმულა მიიღებს სახეს:

=IF(OR($H$16-C22<$E$11;C22=0);0;C22+($E$10-$E$8*C22^2)*$E$8)

შედეგად, დროის რომელიღაც მომენტიდან ყველა უჯრაში ჩაიწერება 0, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ სხეულის სიჩქარე აღარ იცვლება.

ანალოგიურად შეავსეთ ცხრილი N1 –ში სიჩქარის G სვეტი პროგრამის ბიჯის სხვა მნიშვნელობისათვის;

კოორდინატი გამოთვალეთ *კოორდინატის* სვეტის გასწვრივ E და I სვეტებში. ამისათვის E22–ში შეიტანეთ კოორდინატის გამოსათვლელი ფორმულა და გადააკოპირეთ E23: E220 დიაპაზონზე. ანალოგიურად შეავსეთ I სვეტი Δt დროის ინტერვალის სხვა მნიშვნელობისათვის. თუმცა ლოგიკურია სიჩქარისა და კოორდინატის დროის ინტერვალებს შორის გავამყაროთ შესაბამისობა. ამისათვის გამოვიყენოთ ლოგიკური ფუნქცია IF, ამ შემთხვევაში გექნებათ მხოლოდ ერთი ლოგიკური პირობა, კერძოდ, სიჩქარის მნიშვნელობის შემოწმება შესაბამის უჯრაში:

=IF(C22=0;0;E21+C22*$E$12),

ფორმულიდან ჩანს, რომ როცა სრულდება პირობა C22=0, E22 უჯრას მიენიჭება მნიშნელობა 0, წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოითვლება კოორდინატა შესაბამის დროის მომენტისათვის. გადააკოპირეთ ფორმულა E23: E220 დიაპაზონზე.

ანალოგიურად შეავსეთ ცხრილ N1–ში კოორდინატის I სვეტი პროგრამის ბიჯის სხვა მნიშვნელობისათვის;

შეავსეთ *დრო, წმ* სვეტის (B და F სვეტები) სიჩქარისათვის. გაითვალისწინეთ, რომ სიჩქარის პირველი მნიშვნელობა ითვლება *დროის პირველი ინტერვალის* ცენტრში, რომელიც ათვლის დასაწყისიდან წანაცვლებულია $\Delta t/2$ ინტერვალით. ამის შემდეგ კი დრო იცვლება Δt ინტერვალით. ამის გარდა, დიაგრამაზე გამოისახება დროის ის მომენტებიც,

რომლისთვისაც სიჩქარე ნულის ტოლი გახდება. იმისათვის , რომ ეს არ მოხდეს, გამოიყენეთ *დროის გამოთვლა პირობით* სიჩქარის მნიშვნელობის გამოთვლის შეწყვეტასთან ერთად შეწყდეს დროის გამოთვლაც. გადააკოპირეთ ფორმულა B24:B220 და F24:F220 უჯრებზე;

შეავსეთ *დრო, წმ* სვეტის (D და H სვეტები) კოორდინატებისათვის. ამ შემთხვევაში დრო იცვლება Δt ინტერვალით, რადგან კოორდინატი გამოითვლება დროის ღერძის დაყოფის წერტილებში (ყოველი ინტერვალის ბოლოში). ამ შემთხვევაშიც დროის გამოთვლა უნდა შეწყდეს სიჩქარის მნიშვნელობის გამოთვლის შეწყვეტასთან ერთად.

4. ცხრილი N2 შეავსეთ დამოუკიდებლად.

<u>გრაფიკების აგება</u>

გამოთვლების შედეგების მიხედვით ააგეთ ორი $v(t)$ და $y(t)$ დამოკიდებულების გრაფიკი, დიაგრამები ააგეთ ცალკე გვერდზე. აირჩიეთ გრაფიკის ტიპი – *<u>წერტ–ლოვანი,</u>* სახე - *<u>წერტილოვანი სანიშნეებთან ერთად</u>*;

<u>ამოცანები</u>

1. ცვალეთ α კოეფიციენტი და შეისწავლეთ რა გავლენას ახდენს ეს ცვლილება თანაბარი მოძრაობის სიჩქარის მნიშვნელობაზე.
2. განსაზღვრეთ პროგრამის ბიჯის ცვლილების გავლენა გამოთვლის სიზუსტეზე. განსაზღვრეთ რა შემთხვევაში არ მუშაობს მოდელი.
3. განიხილეთ შემთხვევა, როცა:
   1) საწყისი სიჩქარე განსხვავებულია ნულისაგან. როგორ გავითვალისწინოთ სიტუაცია, როცა ეს მნიშვნელობა აღემატება თეორიულად გამოთვლილ დამყარებულ სიჩქარეს?
   2) საწყისი სიჩქარის პროექცია უარყოფითია (სხეულს აგდებენ ზევით). ამ შემთხვევაში შეიცვლება წინაღობის ძალის მიმართულება (წინაღობის ძალა ყოველთვის მიმართულია სხეულის მოძრაობის (სიჩქარის) საწინააღმდეგო მიმართულებით, ამიტომ (8.2) და (8.3) ფორმულებში შეიცვლება ოპერაციის ნიშანი. როგორ გავითვალისწინოთ ასეთი სიტუაცია?
4. დაამატეთ გვერდი, შექმენით ახალი ცხრილი, შეასრულეთ გამოთვლები და ააგეთ ანალოგიური დიაგრამები შემთხვევისათვის როცა სხეული ვარდება მხოლოდ სიმძიმის ძალის მომედებით. ახსენით, რატომ ემთხვევა ერთმანეთს Δt დროის სხვადასხვა ინტერვალისათვის აგებული გრაფიკები.
5. დაამატეთ გვერდი, შეასრულეთ გამოთვლები, როცა სხეულ ვარდება სიმძიმის ძალისა და წინააღმდეგობის ძალის ზემოქმდებით, ოღონდ ჩათვალეთ, რომ წინააღმდეგობის ძალა არა სიჩქარის კვადრატის, არამედ სიჩქარის პირდაპირპროპორციულია. ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები.

§9. ალფა ნაწილაკების გაბნევის მოდელირება რეზერფორდის ცდაში

განვიხილოთ ცვლადი ძალით სხეულის მოძრაობის კიდევ ერთი მაგალითი, როცა იცვლება ერთდროულად ორი კოორდინატი. ვთქვათ M_α მასისა და $+2e$ მუხტის მქონე ალფა–ნაწილაკი მოძრაობს $+Ze$ მუხტის მქონე უძრავი ატომის ველში. Z – წარმოადგენს ელემენტის რიგით ნომერს მენდელეევის პერიოდულ სისტემაში, $e=-1.6021892(46)\cdot 10^{-19}$ კულონს - ელექტრონის მუხტის სიდიდეა. ალფა–ნაწილაკსა და ბირთვს შორის მოქმედებს კულონური განზიდვის ძალა:

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{9.1}$$

სადაც $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\cdot 10^9\ \frac{\text{ნმ}^2}{\text{კ}^2}$. $\vec{r}$ – ალფა–ნაწილაკის რადიუს–ვექტორია. $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (x და y – ალფა–ნაწილაკების კოორდინატებია დროის განსაზღვრულ t მომენტში).

ალფა–ნაწილაკის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\begin{cases} M_\alpha\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}=F_x \\ M_\alpha\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2}=F_y \end{cases} \tag{9.2}$$

სადაც F_x და F_y – $\vec{F}$ ძალის პროექციაა შესაბამისად Ox და Oy ღერძებზე, ხოლო x'' და y'' – ალფა–ნაწილაკის პროექციაა შესაბამისად Ox და Oy ღერძებზე.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{F_x}{M_\alpha}=\dfrac{F\cdot\cos\alpha}{M_\alpha}=\dfrac{F}{M_\alpha}\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{F_y}{M_\alpha}=\dfrac{F\cdot\sin\alpha}{M_\alpha}=\dfrac{F}{M_\alpha}\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} \end{cases} \tag{9.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{2kZe^2}{M_\alpha}\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{2kZe^2}{M_\alpha}\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \end{cases} \tag{9.4}$$

ამოვხსნათ (9.4) განტოლებები ნახევარინტერვალთა მეთოდით, ამისათვის ჩავწეროთ (9.4) შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{2kZe^2}{M_\alpha}\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \\ v'_y = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) = \dfrac{2kZe^2}{M_\alpha}\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \end{cases} \tag{9.5}$$

(9.5) განტოლებების მარცხენა მხარეს „შტრიხის“ ქვეშ იგულისხმება წარმოებული დროით.

ვისარგებლოთ №5 და №8–ე ლაბორატორიული ამოცანების დროს გამოყენებული ალგორითმებით და ჩავწეროთ (9.5) განტოლებების მარცხენა მხარე წარმოებულის განმარტების შესაბამისად, მივიღებთ მიახლოებით განტოლებებს:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{i-1/2} + \dfrac{2kZe^2}{M_\alpha}\dfrac{x_i}{\sqrt{\left(x_i^2+y_i^2\right)^3}} \\ \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{i+1/2} = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{i-1/2} + \dfrac{2kZe^2}{M_\alpha}\dfrac{y_i}{\sqrt{\left(x_i^2+y_i^2\right)^3}} \end{cases} \tag{9.6}$$

სადაც $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ – დროითი ინტერვალია, რომელსაც პროგრამის ბიჯსაც უწოდებენ. ცხადია (9.6) თანაფარდობა მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა პროგრამის ბიჯი, ანუ დროითი ინტერვალი Δt .

წანილაკის კოორდინატის გამოსათვლელად საჭიროა მივიღოთ ორი განტოლება, რომელიც ასევე წარმოებულის განმარტებიდან მიიღება, ოღონდ ამჯერად x' და y' კოორდინატების წარმოებულებს ვგულისხმობთ:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt} \approx \dfrac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t} \\ y' = \dfrac{dy}{dt} \approx \dfrac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_{i+1} + \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{i+\frac{1}{2}} \Delta t \\ y_{i+1} = y_{i+1} + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{i+\frac{1}{2}} \Delta t \end{cases} \tag{9.7}$$

(9.6) და (9.7) განტოლებათა სისტემას უნდა დავუმატოთ კიდევ ერთი განტოლებატა სისტემა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ნაწილაკის სიჩქარე $t_{1/2} = \Delta t/2$ დროისათვის (პირველი დროითი ინტერვალის შუაში) დროის საწყის $t_0 = 0$ მომენტში სიჩქარისა და კოორდინატის მნიშვნელობების საშუალებით.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{1/2} = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0 + \dfrac{2kZe^2}{M_\alpha}\dfrac{x_0}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)^3}} \\ \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{1/2} = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_0 + \dfrac{2kZe^2}{M_\alpha}\dfrac{y_0}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)^3}} \end{cases} \tag{9.8}$$

(9.8) პირობა საჭიროა გამოყენებული იქნას მხოლოდ ერთხელ პირველი დროითი ინტერვალისათვის, ხოლო მომდევნო დროითი ინტერვალებისათვის უნდა ვისარგებლოთ (9.6) ფორმულებით ნაწილაკის სიჩქარის გამოანგარიშების მიზნით და (9.7) ფორმულებით ნაწილაკის კოორდინატის გამოანგარიშების მიზნით.

დროითი ინტერვალი Δt შეირჩევა ნებისმიერი მეთოდით. რადგან ჩვენი ამოცანაა ავაგოთ ალფა–ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორია გამბნევი ბირთვის ველში ე.ი. $y(x)$ დამოკიდებულება, საჭიროა მოცემული გვქონდეს არა დროითი ინტერვალი $t_{\min}...t_{\max}$, არამედ არე საკოორდინატო სიბრტყეზე $(x_{\min}...x_{\max}, y_{\min}...y_{\max})$, რომლის ფარგლებშიდაც უნდა განხორციელდეს რიცხვითი გამოთვლები. ამ პირობის ორგანიზებაში ჩვენ ამჯერადაც დაგვეხმარება ლოგიკური ფუნქციები If, And.

ლაბორატორიული ამოცანა №9

ალფა ნაწილაკების გაბნევის მოდელირება რეზერფორდის ცდაში

<u>შაბლონის ჩატვირთვა</u>

გახსენით შაბლონი „მოდელი 9“. შაბლონი შეიცავს ორ მუშა ფურცელს. „lab 9-1“ და „lab 9-2“. პირველ მუშა ფურცელზე განხილულია სხვადასხვა სამიზნე მანძილებიდან გამოტყორცნილი ალფა–ნაწილაკების მოძრაობის ტრაექტორიის მოდელირება, ხოლო მეორე მუშა ფურცელზე კი ჩატარებულია ანალოგური მოდელირება სხვადასხვა საწყისი სიჩქარის მიხეხედვით (უფრო ზუსტად სხვადსხვა საწყისი სიჩქარის Ox ღერძზე პროექციის მიხედვით). შაბლონი აგებულია 300 მნიშვნელობისათვის, თუმცა საჭიროების შემთხვევაში შესაძლებელია დამატება.

<u>შაბლონის შევსება</u>

1. შევიტანოთ საწყისი რიცხვითი მნიშვნელობები

1) x კოოდრინატის, აბსცისის საწყისი ($x_0 = x_{\min}$) და საბოლოო ($x_{\max}$) მნიშვნელობა შევიტანოთ $C15$ და $C16$ უჯრებში (ვთქვათ: $x_{\min} = -3$, $x_{\max} = 1$).

2) სამიზნე დაშორება (საწყისი ორდინატები $y_0 = y_{\min}$) შევიტანოთ $C17$, $C18$ და $C19$ უჯრებში (ვთქვათ მოცემული გვაქვს $y_0 = y_{\min}$ სამი სხვადასხვა მნიშვნელობა 0.1, 0.3, 0.5).

3) საბოლოო ორდინატი ($y_{\max}$) შევიტანოთ $C20$ უჯრაში (ვთქვათ $y_{\max} = 0.2$).

4) პროგრამის ბიჯი (Δt) შევიტანოთ $C21$ უჯრაში (ვთქვათ $\Delta t = 0.01$).

5) საწყისი სიჩქარის პროექციები (v_{0x}, v_{0y}) შეფიტანოთ $C22$ და $C23$ უჯრებში (ვთქვათ $\mathrm{v}_{0x} = 3$, $\mathrm{v}_{0y} = 0$).

6) ალფა–ნაწილაკის მასა ($M_\alpha = 6.638 \cdot 10^{-27}$ კგ) შევიტანოთ $F17$ უჯრაში.

7) ელემენტის რიგითი ნომერი პერიოდულ სისტემაში (Z) შევიტანოთ $F18$ უჯრაში, მაგალითად ოქროს შემთხვევაში $Z = 79$.

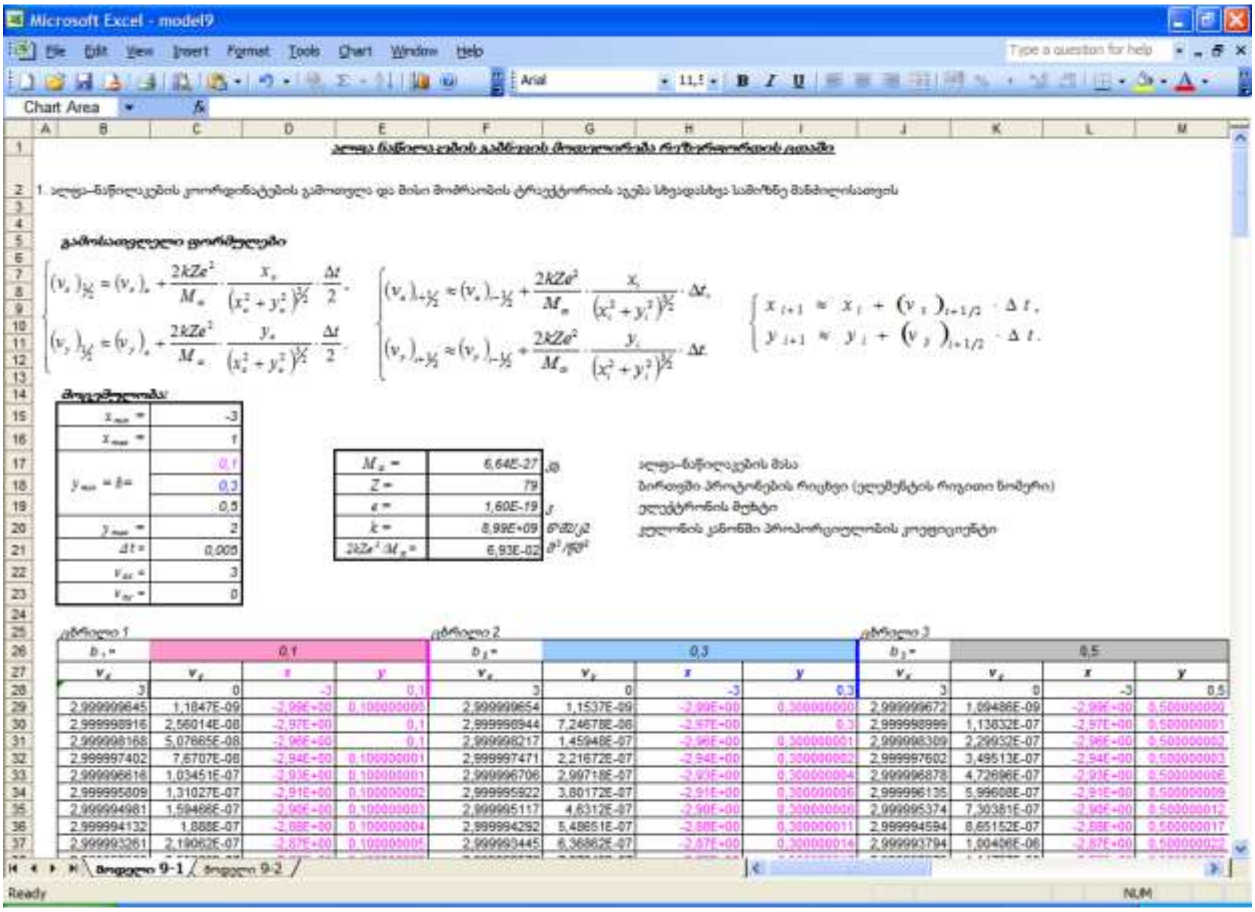
8) ელექტრონის მუხტის სიდიდე ($e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ კ) შევიტანოთ $F19$ უჯრაში.

9) პროპორციულობის კოეფიციენტი კულონის კანონში ($k \approx 8.987551777 \cdot 10^9$ ნ მ²/კ²) შევიტანოთ $F20$ უჯრაში.

10) მუდმივი მამრავლი $\dfrac{2kZe^2}{M_\alpha}$ გამოვიანგარიშოთ ფორმულით $F21$ უჯრაში.

ელემენტის რიგითი ნომრის გამოკლებით, ყველა სხვა რიცხვითი მონაცემი ან ძალიან დიდია, ან ძალიან მცირეა. ასეთი რიცხვები აუცილებლად უნდა შეტანილი იქნას ინგლი-

სურ ენოვან რეგისტრში ექსპონენციალური ფორმით, მაგალითად: $6.638E-27$; $8.987551777E+9$.



2. $C26$ უჯრაში გადმოვაკოპიროთ $C17$ უჯრის შიგთავსი და დავამყაროთ ამ უჯრებს შორის კავშირი.

3. მუშა ფურცელზე მოცემული საანგარიშო ფორმულების შესაბამისად გამოვთვალოთ სიჩქარის გეგმილები საკორდინატო ღერძებზე ($B28:C30$ უჯრები). ფორმულები უჯრებიდან $B30:C30$ გადავაკოპიროთ უჯრათა დიაპაზონში $B31:C327$. რადგან „ x “ და „ y “ (D და E სვეტები) ჯერ კიდევ არ არის შევსებული, ამიტომ „ v_x “ და „ v_y “–ის შესაბამის სვეტებში (B და C სვეტები) გამოტანილი იქნება გამოთვლის შეცდომა **(#DIV/0! – ნულზე გაყოფა).**

4. კოორდინატის გამოთვლა ვაწარმოოთ შემდეგი სქემის მიხედვით:

- $D28$ და $E28$ დავაკოპიროთ ნაწილაკის საწყისი კოორდინატები უჯრებიდან $C15$ და $C17$.
- ვისარგებლოთ მუშა ფურცელზე ან ლაბორატორიული ამოცანის თეორიულ ნაწილში მოცემული საანგარიშო ფორმულებით ნაწილაკის კოორდინატების გასათვლელად. ამასთან ყველა გრაფიკი უნდა მოთავსდეს ჩვენს მიერ შერჩეულ არეში, ამიტომ გამოთვლით მიღებული შედეგები აუცილებელია მუდმივად შევადაროთ მნიშვნელობებს ამ არის საზღვრებზე (ე.ი. $x_{\min}$, $x_{\max}$, $y_{\max}$ მნიშვნელობებთან),

რომელიც წარმოადგენს **გამოთვლის კრიტერიუმს.** თუკი ერთ–ერთი მითითებული კრიტერიუმი სრულდება (ე.ი. გამოთვლის არის ერთ–ერთი საზღვარი მიღწეულია) გამოთვლები სრულდება და უჯრას ენიჭება რიცხვი „0“. ვისარგებლოთ ფუნქციათა ოსტატით და $D29$ უჯრაში შევიტანოთ გამოსახულება:

=IF(AND(D28<$C$15;D28>$C$16;E28>$C$20);D28;D28+B29*$C$21)

ხოლო $E29$ უჯრაში შევიტანოთ გამოსახულება:

=IF(D29=D28;E28;E28+C29*$C$21)

და გადავაკოპიროთ $D29$ და $E29$ უჯრებში შეტანილი ფორმულები $D30:E327$ უჯრებში. ორდინატის გამოსათვლელ ფორმულაში შესაძლებელია ისეთივე სამი პირობის შეფასება მოხდეს, როგორსაც ადგილი ჰქონდა აბსცისის გამოთვლისას, მაგრამ ამის აუცილებლობა მოცემულ შემთხვევაში არ არის და ფორმულა გაცილებით მარტივდება თუ გამოვიყენებთ ერთ ლოგიკურ პირობას D29=D28, სწორედ ამიტომ ორდინატის გამოსათვლელ ფორმულაში არ გვაქვს ლოგიკური ოპერატორი AND.

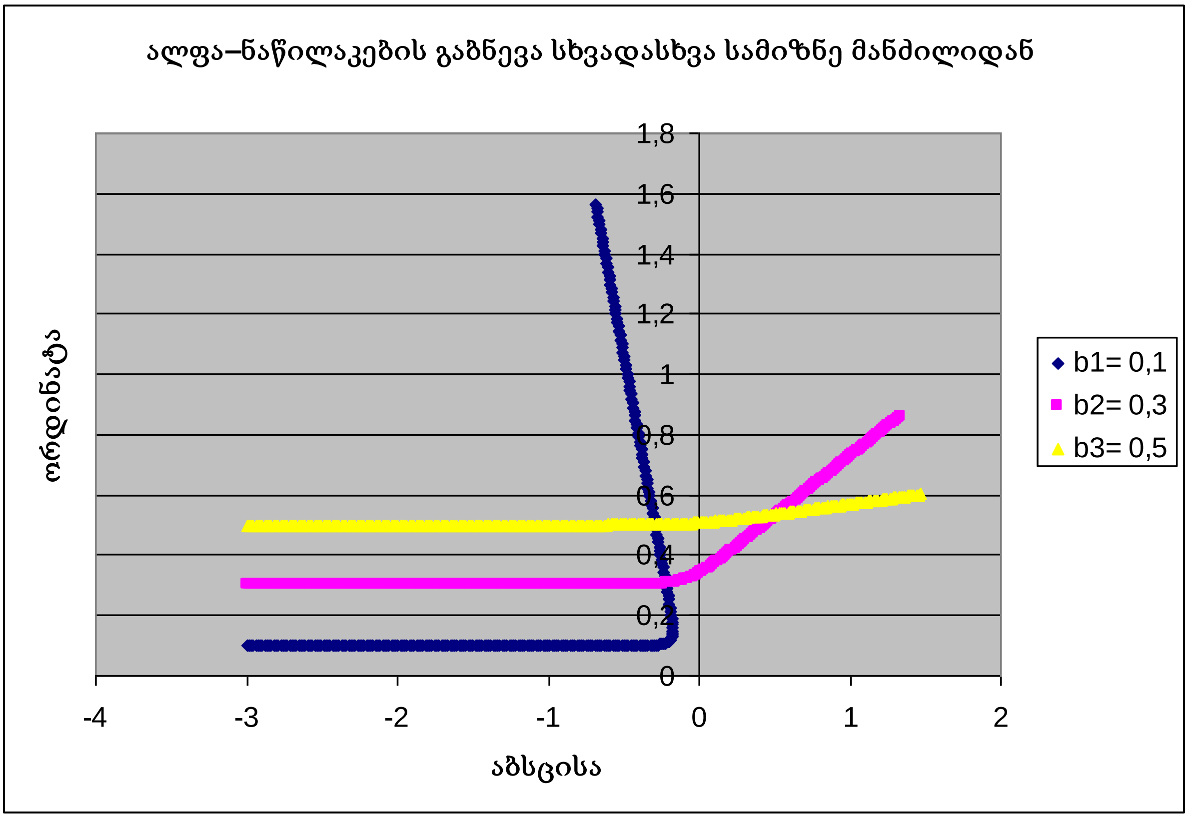
5. ანალოგურად შევავსოთ „ცხრილი 2“ და „ცხრილი 3“:

$y(x)$ *გრაფიკის აგება*

მიღებული მონაცემების საფუძველზე უნდა ვავაგოთ $y(x)$ დამოკიდებულება, რომელიც გამოსახავს ალფა–ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორიას. საშუალება გვეძლევა ავაგოთ გრაფიკები სხვადასხვა საწყისი სამიზნე მანძილების შემთხვევაში ერთ დიაგრამაზე. გრაფიკის აგება თავდაპირველად სწარმოებს ერთი ცხრილის, ვთქვათ „ცხრილი 1“–ის მონაცემების საფუძველზე, რომელიც მოიცავს უჯრათა დიაპაზონს $D28:E327$, ხოლო სხვა ცხრილების მონაცემები ემატება გრაფიკული გამოსახულების აგების შემდეგ. აგებულ გრაფიკზე მარჯვენა ღილაკით გამოვიძახოთ კონტექსტური მენიუ და შევასრულოთ ბრძანება:

Source Data $\rightarrow$ Series $\rightarrow$ Add,

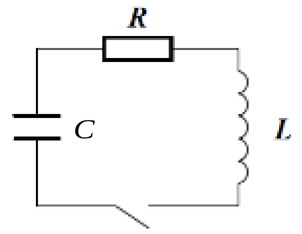
სადაც უნდა მივუთითოთ დიაგრამაზე „ცხრილი 2“ და „ცხრილი 3“ მონაცემები. დიაგრამის ტიპი უნდა შევარჩიოთ წერტილოვანი. გრაფიკები წარმოადგენს წერტილების ერთობლიობას, რომლებით დამოკიდებულნი არიან პროგრამის ბიჯზე და ალფა–ნაწილაკის აჩქარებაზე. რადგან დიაგრამა რამოდენიმე გრაფიკს შეიცავს აუცილებელია დიაგრამაზე დავიტანოთ ლეგენდა, რომელზედაც მითითებული იქნება თითოეული მწკრივის დასახელება.



ამოცანები:

1. დააკვირდით გრაფიკის ცვლილებას სამიზნე მანძილის ცვლილებისას, ელემენტის რიგითი ნომრის ცვლილებისას პერიოდულ სისტემაში, პროგრამის ბიჯის ცვლილებისას.
2. ერთ–ერთი გრაფიკის ტიპი „წერტილოვანი“ შეცვალეთ გარდამავალი მაკავშირებელი ხაზებით. ეს შეიძლება შესრულდეს კონტექსტური მენიუდან ბრძანების “Chart Type” მეშვეობით.
3. დაადგინეთ რატომ არ შეიძლება კოორდინატის გამოსათვლელ ფორმულებში უჯრებს მივანიჭოთ მნიშვნელობა „0“, მითითებული კრიტერიუმის დაკმაყოფილების შემდეგ. შეეცადეთ აგრეთვე გამოიყენოთ მნიშვნელობა “False” ამ ფორემულებში.
4. გაეცანით მუშა ფურცელს „lab 9-2“. საანგარიშო ფორმულები ისეთივეა, რაც იყო პირველ მუშა ფურცელზე. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ ამ შემთხვევაში მოდელირებას ექვემდებარება ნაწილაკის ტრაექტორიის ფორმის დამოკიდებულება ალფა–ნაწილაკის საწყისი სიჩქარის პროექციაზე Ox ღერძე უცვლელი სამიზნე მანძილის შემთხვევაში.
5. დამოუკიდებლად შეავსეთ „lab 9-2“ და ააგეთ $y(x)$ დამოკიდებულება სხვადასხვა v_{0x} სიჩქარისათვის ერთ დიაგრამაზე.

§10. მილევადი რხევების მოდელირება ელექტრულ რხევით კონტურში



განვიხილოთ ელექტრული წრედი, რომელშიც ჩართულია მიმდევრობით შეერთებული C ტევადობის კონდენსატორი, L ინდუქტივობის კოჭა და R აქტიური წინაღობა. გარკვეულ პირობებში ასეთ კონტურში აღიძვრება ელექტრული რხევა, ე.ი. ადგილი ექნება დენის ძალის, კონდენსატორის შემონაფენებზე მუხტისა და წრედის ცალკეულ უბნებზე ძაბვის მნიშვნელობების პერიოდულ ცვლილებას. ამიტომ ასეთ წრედს ***ჩაკეტილ ელექტრულ რხევით კონტურს უწოდებენ.*** წრედში აქტიური წინაღობის არსებობა განაპირობებს სითბოს გამოყოფას (ელექტრული ენერგიის სითბურ ენერგიად გარდაქმნას), ამიტომ დროთა განმავლობაში რხევა მიილევა, ამასთან რაც უფრო დიდია წინაღობა მით უფრო სწრაფად მიილევა რხევა.

დავმუხტოთ კონდენსატორი და ჩავრთოთ ჩამრთველი. კონდენსატორი დაიწყებს განმუხტვას. წრედში გაივლის ელექტრული დენი. მაგრამ ელექტრული დენი, თვითინდუქციის გამო, მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს არა მეყსეულად, არამედ თანდათანობით. ელექტრული დენი თანდათან გაიზრდება და იმ მომენტში, როცა ის მიაღწევს მაქსიმუმს, კონდენსატორზე ელექტრული მუხტი ნულს გაუტოლდება. ამ მომენტიდან კოჭას ინდუქტივობის გამო, დაიწყება ელექტრული დენის თანდათანობით შემცირება წრედში და კონდენსატორის ხელმეორედ დამუხტვა. ამიტომ როცა დენი წრედში სრულად მიილევა, კონდენსატორი აღმოჩნდება მაქსიმალურად დამუხტული, ამასთან კონდენსატორის შემონაფენები დაიმუხტებიან საპირისპირო ნიშნით, თავდაპირველ მდგომარეობასთან შედარებით. ამის შემდეგ პროცესი მეორდება, მაგრამ პირველი პროცესისაგან განსხვავებით დენი გაივლის საპირისპირო მიმართულებით და წრედი დაუბრუნდება თავდაპირველ მდგომარეობას. ***დროის შუალედს, კონდენსატორის დამუხტვიდან ხელმეორედ სრულ გადამუხტვამდე (როცა კონდენსატორი უბრუნდება თავის პირვანდელ მდგომარეობას) რხევის პერიოდი ეწოდება***.

ამრიგად, რხევის პროცესში კონდენსატორის ელექტრული ველის ენერგია სრულად ან ნაწილობრივ გარდაიქმნება კოჭას მაგნიტური ველის ენერგიად. თუ წრედში არ აქვს ადგილი ენერგიის კარგვას (არ ხდება ელექტრული და მაგნიტური ველების ენერგიის გარდაქმნა სითბურ ენერგიად), ე.ი. $R = 0$, მაშინ სრული ენერგია (ელექტრული და მაგნიტური ველების ენერგიების ჯამი) არ შეიცვლება და რხევები იქნება მიულევადი. წრედში აქტიური წინაღობის არსებობა ($R \neq 0$) იწვევს ელექტრომაგნიტური ველის თანდათანობით გარდაქმნას გამტარის შინაგან ენერგიად, რის გამოც რხევის ამპლიტუდა დროის განმავლობაში შემცირდება. ასეთ შემთხვევაში რხევა აღარ იქნება პერიოდული, რადგან სისტემის მდგომარეობა ზუსტად არ მეორდება. მაგრამ რადგან მუხტის სიდიდე კონდენსატორის შემონაფენებზე აღწევს მაქსიმუმს (ან მინიმუმს) დროის ტოლ შუალედში (პერიოდულად), ამიტომ ასეთი რხევები შეიძლება დავახასიათოთ პირობითი პერიოდით, რომელსაც მილევადი რხევის პერიოდი ეწოდება.

ნახაზზე გამოსახული რხევითი კონტურისათვის განტოლების შესადგენად ვისარგებლოთ შემდეგი მოსაზრებებით: კონდენსატორსა და აქტიურ წინაღობაზე ძაბვისვარდნის ჯამი ტოლი უნდა იყოს კოჭაში აღძრული თვითინდუქციის ემძ–ს

$$U_C + U_R = \varepsilon_C \tag{10.1}$$

სადაც $U_C = q/C$, $U_R = IR$, $\varepsilon_C = -LI'$, ხოლო q და I – შესაბამისად კონდენსატორის მუხტი და წრედში დენის ძალის მნიშვნელობაა დროის რომელიღაც მომენტში. (10.1) შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$LI' + RI + \frac{q}{C} = 0 \tag{10.2}$$

(10.2) წარმოადგენს სწორედ მილევადი რხევის განტოლებას ელექტრულ რხევით კონტურში. უმჯობესია ის გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{q}{LC} = 0 \quad \text{ან} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \tag{10.3}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$2\beta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \tag{10.4}$$

სადაც β – რხევის მილევის კოეფიციენტია (იგი მით უფრო დიდია, რაც უფრო დიდია აქტური წინაღობა R). შედეგად რხევის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0 \tag{10.5}$$

მილევადი რხევების თეორია საკმარისად რთულია, თუ,ცა ჩვენ უკვე ვიცით როგორ ამოვხსნათ მსგავსი სიფერენციალური განტოლება რიცხვითი მეთოდის გამოყენებით. შევადაროთ (10.5) განტოლება ზამბარიანი ქანქარას რხევის განტოლებას, შეიძლება გავაკეთო რამოდენიმე ანალოგია, კერძოდ: კოორდინატის როლს მოცემულ შემთხვევაში ასრულებს მუხტი, ხოლო სიჩქარის როლს კი – დენის ძალა. ამ ანალოგიის გათვალისწინებით (10.5) განტოლების ამონახსენის სახით შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} I_{1/2} \approx I_0 - \left(2\beta I_0 + \omega_0^2 q_0\right)\dfrac{\Delta t}{2} = 0 \\ I_{i+1/2} \approx I_{i-1/2} - \left(2\beta I_{i-1/2} + \omega_0^2 q_i\right)\Delta t = 0 \\ q_{i+1} \approx q_i + I_{i+1/2}\Delta t \end{cases} \tag{10.6}$$

ანალიზური გამოთვლები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ მილევადი რხევის ციკლური სიხშირე და პერიოდი:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2; \quad \omega < \omega_0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{\beta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\beta^2}{\omega_0^2}}} > T_0 . \tag{10.7}$$

ყოველი ელექტრული რხევითი კონტურისათვის არსებობს ე.წ. ***კრიტიკული წინაღობა*** რომლისთვისაც რხევები აღარ წარმოიქმნება და ადგილი აქვს კონდენსატორის აპერიოდულ (ე.ი. არაპერიოდულ) განმუხტვას. ცხადია ეს მოვლენა შეესაბამება შემთხვევას, როცა $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = 0$, ანუ $\omega_0^2 = \beta^2$. თუ გავითვალისწინებთ (10.4)–ს მივიღებთ კრიტიკული წინაღობის გამოსახულებას:

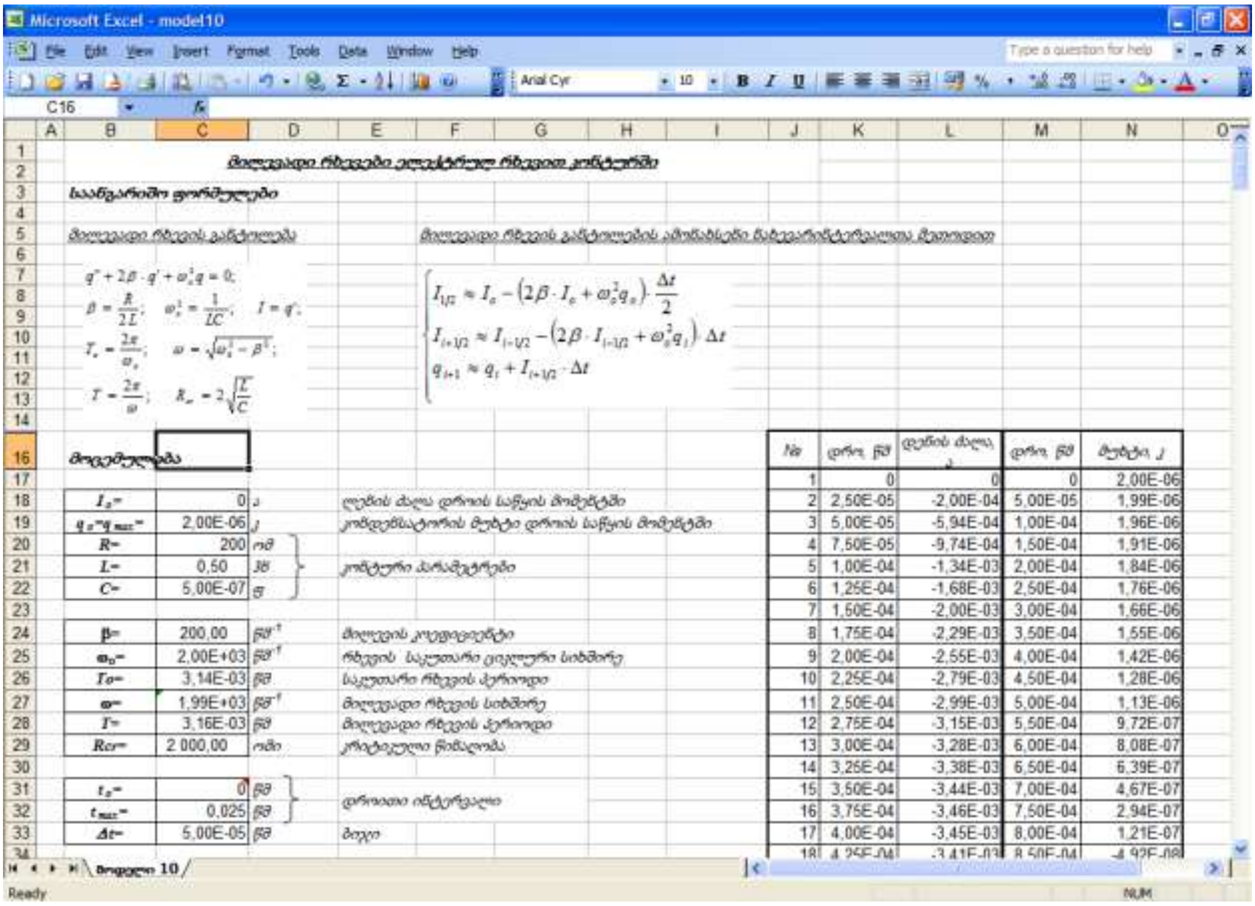
$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{10.8}$$

რხევის ამპლიტუდა, როგორც თეორია გვიჩვენებს, მცირდება ექსპონენციალური კანონით. ლაბორატორიული ამოცანა №10 სწორედ ამ თეორიის შემოწმებას ეძღვნება. საანგარიშო ფორმულებს წარმოადგენს (10.4), (10.6), (10.7) და (10.8).

ლაბორატორიული ამოცანა №10

<u>შაბლონის ჩატვირთვა</u>

გახსენით შაბლონი „lab 10“. გაანალიზეთ საანგარიშო ფორმულები და განსაზღვრეთ მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები.



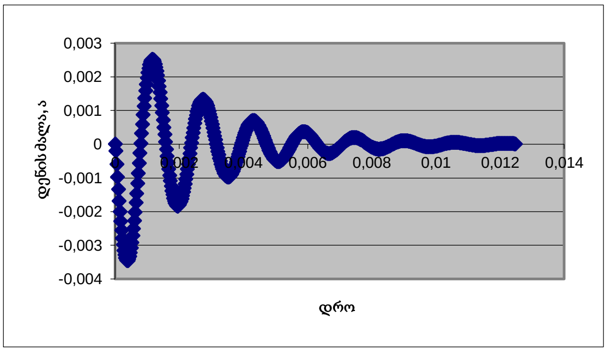
შაბლონის შევსება

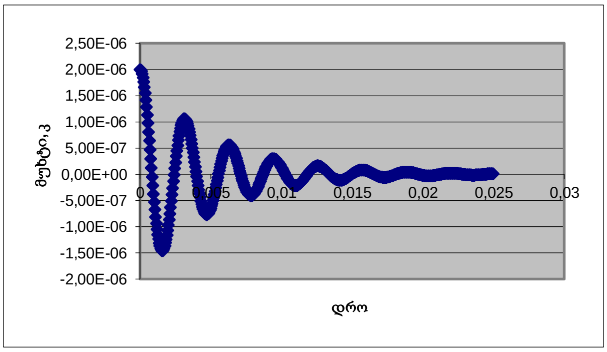
1. შევიტანოთ საწყისი რიცხვითი მნიშვნელობები შემდეგ უჯრებში:
   1) $C18$ – დენის ძალის საწყისი მნიშვნელობა ($t_0 = 0$ მომენტში), მაგალითად: $I_0 = 0$ ა;
   2) $C19$ - მუხტი დროის საწყის მომენტში, მაგალითად: $q_0 = q_{\max} = 2 \cdot 10^{-6}$ კ;
   3) $C20$ - აქტიური წინაღობა, მაგალითად: $R = 200$ ომი;
   4) $C21$ – კოჭის ინდუქტიურობა, მაგალითად: $L = 0.5$ ჰნ;
   5) $C22$ – კონდენსატორის ტევადობა, მაგალითად: $\phi = 0.5 \cdot 10^{-6}$ ფ;
   6) $C31$– დროის საწყისი მომენტი $t_0 = 0$ წმ;
   7) $C32$ – საბოლოო დრო $t_{\max} = 0.025$ წმ.
2. $C33$ – შევიტანოთ პროგრამის ბიჯი, ანუ დროითი ინტერვალი Δt :
3. გამოვთვალოთ:
   1) $C24$ – მილევის კოეფიციენტი – (10.4)–ის პირველი ფორმულა;
   2) $C25$ - რხევიას საკუთარი ციკლური სიხშირე – (10.4)–ის მეორე ფორმულა;
   3) $C26$ - საკუთარი რხევის პერიოდი – (10.7) მეორე ფორმულა;
   4) $C27$ - მილევადი რხევის სიხშირე – (10.7) პირველი ფორმულა;
   5) $C28$ - მილევადი რხევის პერიოდი;
   2) $C29$ - კრიტიკული წინაღობა – (10.8) ფორმულა.

3. შევავსოთ ცხრილი (დრო– დენის ძალა; დრო– მუხტი) (10.6) საანგარიშო ფორმულების შესაბამისად და გავითვალისწინოთ, რომ ნახევარინტერვალთა მეთოდის შინაარსიდან გამომდინარე დენის ძალა უნდა გავიანგარიშოთ ყოველი დროითი ინტერვალის შუაში, ისევე როგორც სიჩქარე №5 და №8 ლაბორატორიული ამოცანების გადაწყვეტისას, ხოლო მუხტი უნდა გავითვალოთ ყოველი დროითი ინტერვალის ბოლოში, ისევე როგორც კოორდინატი ზემოთ ნახსენებ ლაბორატორიულ ამოცანებში.

გრაფიკების აგება

საჭიროა ავაგოთ ორი გრაფიკი: $I(t)$ – რომელიც აიგება $K17 : L516$ მონაცემების საფუძველზე და $q(t)$ – რომელიც აიგება $M17 : N516$ მონაცემების საფუძველზე. გრაფიკების აგება უნდა განხორციელდეს სხვადასხვა დიაგრამაზე, რადგან მასშტაბი ორდინატთა ღერძე შესაძლოა ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდეს რამოდენიმე რიგით.





ამოცანები:

1. ისარგებლეთ №5 და №8 ლაბორატორიული ამოცანების მეთოდიკით და დამოუკიდებლად მიიღეთ (10.6) განტოლებათა სისტემა;

2. ცვალეთ რა $t_{\max}$–ის მნიშვნელობა (შესაბამისად Δt) დაადგინეთ როდის კარგავს მოცემული მოდელი არსს? შეადარეთ ეს დროითი ინტერვალი საკუთარი რხევების პერიოდს?

3. ცვალეთ რხევითი კონტურის პარამეტრები R, L, C და განსაზღვრეთ როგორ იცვლება გრაფიკების სახე. დაადგინეთ როგორ იცვლება ამ პარამეტრების ცვლილებისას მილევადი რხევის ციკლური ციხშირე ω და პერიოდი T.

4. გრაფიკებზე (თუნდაც ერთ მათგანზე) ჩართეთ ვერტიკალური ხაზები (კონტექსტური მენიუთი შეასრულეთ ბრძანება Chart Option → Gridlines → Value (x) axis → Major Gridlines) და ექსპერიმენტულად (გრაფიკულად) დაადგინეთ მილევადი რხევის პერიოდი რხევითი კონტურის მოცემული პარამეტრებისათვის. შეადარეთ თქვენს მიერ განსაზღვრული რხევის პერიოდი თეორიულ შედეგს. მეტი სიზუსტისათვის შეგიძლიათ შეცვალოთ მასშტაბი (შკალა) აბსცისთა ღერძზე, რისთვისაც მონიშნეთ აბსცისთა ღერძი, გამოიძახეთ კონტექსტური მენიუ მაუსის მარჯვენა ღილაკით და შეასრულეთ ბრძანება Format axis → Scale, რის შედეგადაც გაჩნდება დიალოგური სარკმელი, სადაც ველში Maximum მიუთითეთ სასურველი პარამეტრი მასშაბის გასაზრდელად (მაგალითად 0,006).

5. გრაფიკების საშუალებით განსაზღვრეთ დენის ძალასა და მუხტს შორის ფაზათა წანაცვლება.

6. ცხრილს დაუმატეთ ორი ახალი სვეტი „პოტენციალის ვარდნა აქტიურ წინაღობაზე“ და „პოტენციალის ვარდნა კონდენსატორის მომჭერებზე“. შეადგინეთ ფორმულები და განსაზღვრეთ პოტენციალთა ვარდნა კონტურის ამ ელემენტებზე. ააგეთ პოტენციალთა ვარდნის დროზე დამოკიდებულებები ერთ გრაფიკზე. განსაზღვრეთ გრაფიკულათ მათ შორის ფაზათა ძვრა და შეადარეთ იგი დენისა ძალასა და მუხტს შორის თქვენს მიერ დადგენილ ფაზათა ძვრას.

7. განსაზღვრეთ პოტენციალთა ვარდნა კოჭაზე (10.1) ფორმულის საფუძველზე და ააგეთ $U_L(t)$ დამოკიდებულება იმავე დიაგრამაზე. განსაზღვრეთ ფაზათა ძვრების თანაფარდობა პოტენციალთა ვარდნებს შორის წრედის თითოეული ელემენტისათვის.

8. კონტურის პარამეტრები შეარჩიეთ ისე, რომ გრაფიკულად იმზირებოდეს ათამდე პერიოდის რხევები. გაანალიზეთ ცხრილური მონაცემები (დრო – მუხტი) და ცალკე ცხრილში ამოწერეთ მუხტის მხოლოდ დადებითი ამპლიტუდები შესაბამისი

დროითი მომენტის მითითებით. ამ მონაცემებზე დაყრდნობით ააგეთ ახალი გრაფიკი $q(t)$. შეარჩიეთ გრაფიკზე მოცემული წერტილების შეერთების რეგრესიის ტიპი, ბრძანებით Add Trendlines და დაადგინეთ კანონი რომლითაც მცირდება მილევადი რხევის ამპლიტუდა.

§11. იძულებითი რხევების მოდელირება ელექტრულ რხევით კონტურში

რხევები, რომლებიც წარმოებს გარე პერიოდული ძალის მოქმედებით იწოდება იძულებით რხევებად. როგორც თეორია გვამცნობს იძულებითი რხევები წარმოებს გარე პერიოდული ძალის სიხშირით. ელექტრულ რხევით კონტურში იძულებითი რხევების მიღება შესაძლებელია, თუ რხევით კონტურში ჩავრთავთ დენის წყაროს, რომლის ელექტრო მამოძრავებლი ძალა იცვლება დროში ჰარმონიული კანონით:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max}\cos(\omega t) \tag{11.1}$$

იძულებითი რხევების განტოლებას როგორც ცნობილია აქვს შემდეგი სახე:

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_{\max}}{L}\cos(\omega t) \tag{11.2}$$

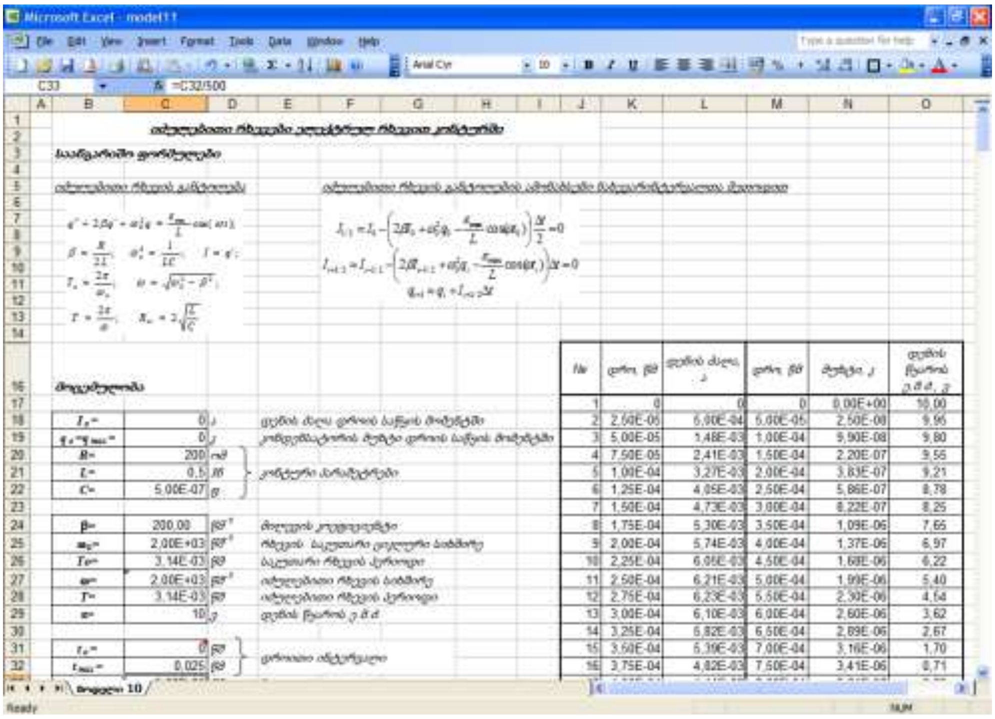
ამ განტოლების ამოხსნა ნახევარინტერვალთა მეთოდით გვაძლევს:

$$\begin{cases} I_{1/2} \approx I_0 - \left(2\beta I_0 + \omega_0^2 q_0 - \dfrac{\varepsilon_{\max}}{L}\cos(\omega t_0)\right)\dfrac{\Delta t}{2} = 0 \\ I_{i+1/2} \approx I_{i-1/2} - \left(2\beta I_{i-1/2} + \omega_0^2 q_i - \dfrac{\varepsilon_{\max}}{L}\cos(\omega t_i)\right)\Delta t = 0 \\ q_{i+1} \approx q_i + I_{i+1/2}\Delta t \end{cases} \tag{11.3}$$

ლაბორატორიული ამოცანა №11

__შაბლონის ჩატვირთვა__

გახსენით შაბლონი „lab 11“. გაანალიზეთ საანგარიშო ფორმულები და განსაზღვრეთ მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები.



შაბლონის შევსება

1. შევიტანოთ საწყისი რიცხვითი მნიშვნელობები შემდეგ უჯრებში:
   1) $C18$ – დენის ძალის საწყისი მნიშვნელობა ($t_0 = 0$ მომენტში), მაგალითად: $I_0 = 0$ ა;
   2) $C19$ - მუხტი დროის საწყის მომენტში, მაგალითად: $q_0 = 0$ კ (კონდენსატორის ბოლოებზე მუხტის სისიდე დროის საწყის მომენტში ნულია, რადგან ითვლება, რომ კონდენსატორი დასაწყისში დამუხტული არ იყო);
   3) $C20$ - აქტიური წინაღობა, მაგალითად: $R = 200$ ომი;
   4) $C21$ – კოჭის ინდუქტიურობა, მაგალითად: $L = 0.5$ ჰნ;
   5) $C22$ – კონდენსატორის ტევადობა, მაგალითად: $\phi = 0.5 \cdot 10^{-6}$ ფ;
   6) $C29$ - დენის წყაროს ე.მ.ძალის ამპლიტუდა $\varepsilon_{\max}$, ვთქვათ $\varepsilon_{\max} = 9$ ვ;
   7) $C31$– დროის საწყისი მომენტი $t_0 = 0$ წმ;
   8) $C32$ – საბოლოო დრო $t_{\max} = 0.025$ წმ.
2. $C33$ – შევიტანოთ პროგრამის ბიჯი, ანუ დროითი ინტერვალი Δt :
3. გამოვთვალოთ:
   1) $C24$ – მილევის კოეფიციენტი – (10.4)–ის პირველი ფორმულა;
   2) $C25$ - რხევის საკუთარი ციკლური სიხშირე – (10.4)–ის მეორე ფორმულა;
   3) $C26$ - საკუთარი რხევის პერიოდი – (10.7) მეორე ფორმულა;
   4) $C27$ - იძულებითი რხევის სიხშირე ω, რომელიც დასაწყისისათვის შეიძლება ჩავთვალოთ საკუთარი სიხშირის ტოლად $\omega = \omega_0$;
   5) $C28$ - იძულებითი რხევის პერიოდი $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

3. შევავსოთ ცხრილი (დრო– დენის ძალა; დრო– მუხტი–დენის წყაროს ე.მ.ძ.) (11.1) და (11.3) საანგარიშო ფორმულების შესაბამისად და გავითვალისწინოთ, რომ ნახევარინტერვალთა მეთოდის შინაარსიდან გამომდინარე დენის ძალა უნდა გავიანგარიშოთ ყოველი დროითი ინტერვალის შუაში, ისევე როგორც სიჩქარე №5 და №8 ლაბორატორიული ამოცანების

გადაწყვეტისას, ხოლო მუხტი და დენის წყაროს ე.მ.ძალა კი უნდა გავითვალოთ ყოველი დროითი ინტერვალის ბოლოში, ისევე როგორც კოორდინატი ზემოთ ნახსენებ ლაბორატორიულ ამოცანებში.

<u>გრაფიკების აგება</u>

საჭიროა ავაგოთ სამი გრაფიკი: $I(t)$ – რომელიც აიგება $K17:L516$ მონაცემების საფუძველზე და $q(t)$ – რომელიც აიგება $M17:N516$ მონაცემების საფუძველზე და $\varepsilon(t)$, რომელიც აიგება M და O სვეტის მონაცემების საფუძველზე. გრაფიკების აგება უნდა ისევე, როგორც 10–ე ლაბორატორიული ამოცანის დროს, აქაც სასურველია განხორციელდეს სხვადასხვა დიაგრამაზე, რადგან მასშტაბი ორდინატთა ღერძზე შესაძლოა ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდეს რამოდენიმე რიგით.

ამოცანები:

1. პროგრამის ბიჯის ცვლილებით დაადგინეთ "lab 11"–ის გამოყენების საზღვრები;

2. ცვალეთ გარე პერიოდული ძალის სიხშირე ω და გრაფიკების ცვლილების მიხედვით დაადგინეთ მისი ოპტიმალური მნიშვნელობა.

3. აგებული გრაფიკერბის საფუძველზე განსაზღვრეთ ფაზათა ძვრა დენის ძალასა და წყაროს ე.მ.ძ–ს შორის, აგრეთვე დენის ძალასა და მუხტს შორის.

4. ცხრილს დაუმატეთ ორი ახალი სვეტი „პოტენციალის ვარდნა აქტიურ წინაღობაზე“ და „პოტენციალის ვარდნა კონდენსატორის მომჭერებზე“. ააგეთ პოტენციალთა ვარდნის დროზე დამოკიდებულებები ერთ გრაფიკზე. განსაზღვრეთ გრაფიკულათ მათ შორის ფაზათა სხვაობა დამყარებული იძულებითი რხევების დროს.

5. განსაზღვრეთ პოტენციალთა ვარდნა კოჭის ბოლოებზე. ისარგებლეთ კავშირით U_R და U_C ძბვებსა და ε და ε_C შორის.

§12. შემთხვევითი ცდომილებების შეფასება

დავუბრუნდეთ ლაბორატორიულ სამუშაოს **№№6–7** „გაზომვების შედეგების დამუშავება ორ ურთიერთდაკავშირებული სიდიდეს შორის. წრფივი დამოკიდებულების მოდელირება“. მასში ჩვენ განვიხილეთ ექსპერიმენტით გაზომილი სიდიდის საშუალოს და აბსოლუტური ცდომილების საშუალოს განსაზღვრა MS Excel–ს თანდართული ფუნქციების გამოყენებით.

გაზომვის შედეგების დამუშავება

სამეცნიერო ექსპერიმენტებით გაზომილი სიდიდეების სიზუსტე ხასიათდება ე.წ. სტანდარტული გადახრით.

გაზომილი სიდიდეების სტანდარტული გადახრა (ან ცალკეული გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილება) ეწოდება სიდიდეს, რომელიც ახასიათებს ცალკეული გაზომილი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრის ხარისხს და განისაზღვრება ფორმულით:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\langle x\rangle - x_i)^2}{N-1}} \qquad (1)$$

როგორც ვხედავთ, ფესვქვეშა გამოსახულება წარმოადგენს გაზომვით მიღებული ცალკეული სიდიდის საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრის საშუალო კვადრატს. საშუალო კვადრატული ცდომილების უპირატესობა აიხსნება მთელი რიგი მიზეზებით. ერთ–ერთი მათგანი დაკავშირებულია გასაზომი სიდიდის საშუალო არითმეტიკულის არსთან, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ იგი იძლევა საშუალებას მინიმუმამდე დაიყვანოს სწორედ სტანდარტული გადახრა და არა აბსოლუტური ცდომილების საშუალო. მეორე მიზეზი მდგომარეობს იმაში, რომ საშუალო კვადრატული ცდომილება ფასდება ისე, რომ $\langle x\rangle \pm \sigma_x$ ინტერვალში ხვდება გაზომილ მნიშვნელობათა 68% (მნიშვნელობათა დაახლოებით 2/3), $\langle x\rangle \pm 2\sigma_x$ ინტერვალში – 95% და, ბოლოს, $\langle x\rangle \pm 3\sigma_x$ინტერვალში – 99,7%. დარჩენილი 0,3% წარმოადგენს უხეშ შეცდომას და შემდგომში მათი მნიშვნელობები შეგვიძლია გამოვრიცხოთ მინაცემთა მნიშვნელობებიდან. ეს ფაქტი შეგვიძლია გამოვიყენოთ უხეში შეცდომების აღმოჩენის კრიტერიუმად. კერძოდ, ის მონაცემები რომელთათვისაც $\Delta_i > 3\sigma_x$ შეიძლება გამოვრიცხოთ.

ფუნქცია STDEV( ) გვაძლევს საშუალებას შუალედური გამოთვლების გარეშე განვსაზღვროთ სტანდარტული გადახრა. უარყოფს ლოგიკურ მნიშვნელობებს და ტექსტს მოდელში.

ცალკეული გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილება ახასიათებს მეთოდის სიზუსტეს, რადგან იგი დამოკიდებულია ცალკეული გაზომვის სიზუსტეზე და პრაქტიკულად არ არის დამოკიდებული გაზომვების რიცხვზე. თუმცა, რადგან გაზომილ სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული უფრო ზუსტად აღწერს გაზომვის შედეგს, ვიდრე ცალკეული გაზომვები, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ საშუალო არითმეტიკულის ცდომილება უნდა იყოს ნაკლები ცალკეული გაზომვების ცდომილებასთან შედარებით. ამ ცდომილებას ახასიათებენ სიდიდით, რომელსაც **საშუალოს სტანდარტულ გადახრას** უწოდებენ:

$$\sigma_{\langle x\rangle} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

როგორც ვხედავთ, გაზომვათა რიცხვის ზრდასთან ერთად საშუალოს სტანდარტული გადახრა მცირდება. ეს ფორმულა გამოსახავს გაზომვათა რაოდენობის ზრდასთან ერთად გაზომვის სიზუსტის ზრდის ფუნდამენტალურ კანონს.

ხშირად გაზომვათა მნიშვნელობების შეფასების მიზნით აგებენ დიაგრამას, რომელიც გვიჩვენებს, რა სიხშირით მეორდება ესა თუ ის მნიშვნელობა. ასეთ დიაგრამას **ჰისტოგრამას** უწოდებენ.

დავუშვათ, მრავალჯერადი გაზომვის შედეგად, რომელიღაც x სიდიდის გაზომვისას მიღებულია N რაოდენობის მნიშვნელობა, ამასთან ზოგიერთი მათგან რამდენჯერმე განმეორდა:

x_1- მნიშვნელობა მიიღო n_1–ჯერ;

x_2- მნიშვნელობა მიიღო n_2–ჯერ;

x_3- მნიშვნელობა მიიღო n_3–ჯერ;

…

x_k- მნიშვნელობა მიიღო n_k–ჯერ;

მაშინ გაზომვათა მოცემული სერიისათვის არითმეტიკული საშუალო შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\langle x\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1.n_1 + x_2.n_2 + \cdots + x_k.n_k}{N} = \frac{\sum_k x_k.n_k}{N}$$

ასეთ ჯამს შეწონილი ეწოდება, რადგან თითოეული x_k მნიშვნელობა მრავლდება n_k რიცხვზე, რომელიც გვიჩვენებს თუ რამდენჯერ მოხდა ამ ნიშვნელობის რეალიზება. ამასთან

$$\sum_k n_k = N.$$

ხშირად n_k რიცხვის ნაცვლად შემოაქვთ ფარდობა $f_k = {}^{n_k}/_{N}$, რომელიც გვიჩვენებს გაზომვათა სრული რაოდენობიდან რა ნაწილი მოდის x_k მნიშვნელობის რეალიზებაზე და უწოდებენ **სიხშირეს.** ამ ტერმინის გამოყენებით საშუალოს ფორმულა შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგნაირად

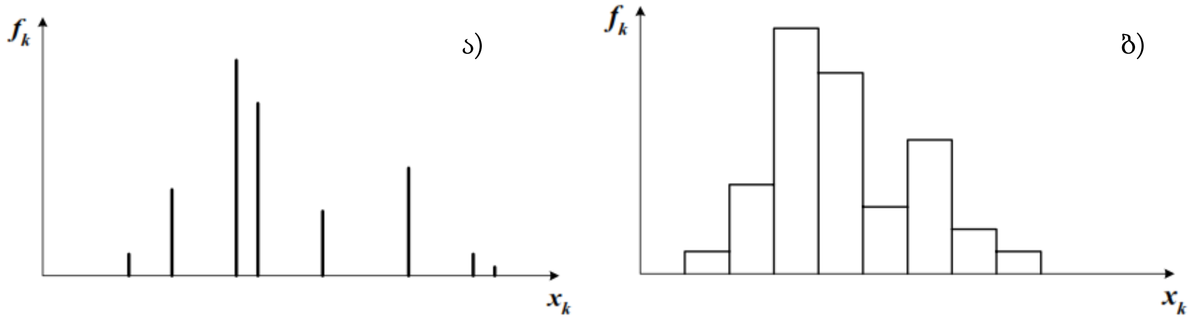
$$\langle x\rangle = \sum_k x_k.f_k$$

ამასთან, ცხადია:

$$\sum_k f_k = 1.$$

მაშინ ჰისტოგრამა არის n_k ან f_k–ს დამოკიდებულება x_k–ზე, რომელზეც ჰორიზონტალური ღერძის გასწვრივ გაზომილია x_k, ხოლო x_k წერტილებიდან გავლებული ვერტიკალური ხაზების სიმაღლე გვიჩვენებს f_k სიხშირეს. მსგავს ჰისტოგრამას უწოდებენ

წყვეტილი სიდიდის ჰისტოგრამას (ნახ. 1ა), ჰისტოგრამის ეს ტიპი მოსახერხებელია იმ შემთხვევაში, როცა x_k მნიშვნელობები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან ან აქვს მთელი მნიშვნელობები.



ნახ.1. დისკრეტული და უწყვეტი სიდიდეების ჰისტოგრამები

თუმცა ხშირ შემთხვევაში გაზომვები არ იძლევა ზუსტ მთელ მნიშვნელობებს. ასეთ შემთხვევაში გაზომილ სიდიდეთა დიაპაზონს (x_{min} –დან x_{max}–მდე) ტოლ ინტერვალებად (ბინებად) და ითვლიან რამდენჯერ მოხვდება გაზომილი სიდიდე თითოეულ ბინში. შედეგად ღებულობენ გრაფიკს, რომელსაც უწყვეტ სიდიდეთა ჰისტოგრამას უწოდებენ (ნახ. 1ბ).

ლაბორატორიული სამუშაო №12

<u>გამოთვლების ჩატარება და ჰისტოგრამის აგება</u>

1. ჩართული ფუნქციების გამოყენებით x სიდიდის N გაზომვათა სერიისათვის გამოთვალეთ საშუალო არითმეტიკული, საშუალო აბსოლუტური ცდომილება და მნიშვნელობათა სტანდარტული გადახრები, და მათი საშუალო. გამოთვლები შეასრულეთ ყოველი ათი გაზომვის შემდეგ, იმისათვის რომ შევისწავლოთ გაზომვათა რაოდენობის გავლენა ანალიზის შედეგებზე.

2. ექსპერიმენტის მონაცემებიდან საშუალო კვადრატული გადახრის დაანგარიშების საფუძველზე E20:E39, F20:F39, G20:G39 დიაპაზონში გამოიტანეთ მონაცემები, რომლებიც არ ახვდება შესაბამისად შუალედებში: $\langle x \rangle \pm \sigma_x$ (68%), $\langle x \rangle \pm 2\sigma_x$ (95%) და $\langle x \rangle \pm 3\sigma_x$ (97%). რისთვისაც შესაბამის უჯრებში შეიყვანეთ ფორმულები:

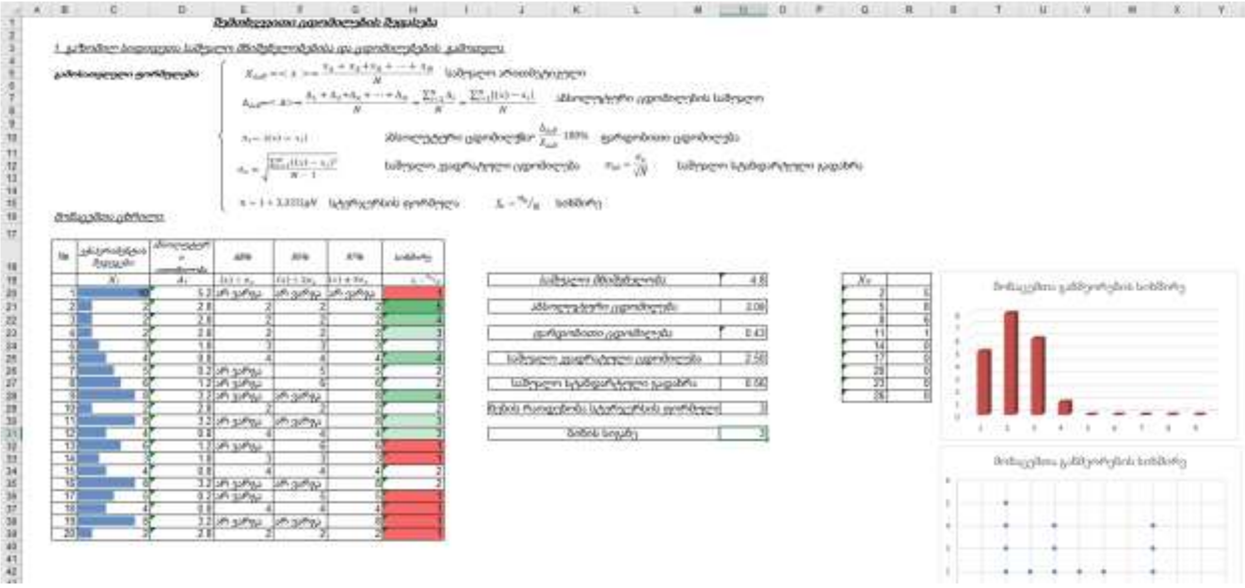
=IF(AND(C20>=$P$22-$P$26;C20<=$P$22+$P$26);C20;"არ ვარგა")

=IF(AND(C20>=$P$22-2*$P$26;C20<=$P$22+2*$P$26);C20;"არ ვარგა")

=IF(AND(C20>=$P$22-3*$P$26;C20<=$P$22+3*$P$26);C20;"არ ვარგა")

3. გამოტანეთ გრაფიკული ანალიზის შედეგი ექსპერიმენტის საწყის მონაცემებსა და მონაცემთა განმეორების სიხშირის მაჩვენებელ სვეტში. რისთვისაც მონიშნეთ ჯერ C20:C39 უჯრები, გამოიძახეთ კონტექსტური მენიუ და შეასრულეთ ბრძანება Quick analysis. გახსნილ ფანჯარაში გააქტურეთ ჩანართი Formating და აირჩიეთ Data Bars. ხოლო სიხშირის სვეტში კი აირჩიეთ Color bar.

4. Ms Excel-ის შესაბამისი ფუნქციის საშუალებით განსაზღვრეთ გაზომილი ფიზიკური სიდიდის მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები. შეარჩიეთ ბინის (რეალიზაციათა) n რაოდენობა ექსპერიმენტალურად ან სტერჯესის ფორმულით: $n = 1 + 3{,}322lgN$. გამოთვალეთ ბინის სიგანე შერჩეული ინტერვალისათვის: $\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}$. რადგან, როგორც წესი, შედეგად მიიღება არამთელი რიცხვი, ამიტომ უმჯობესია დაამრგვალოთ მთელ რიცხვამდე ფუნქციის ROUND() გამოყენებით.



5. შექმენით ახალი ცხრილი, რომლის ერთ სვეტშიც გამოტალილი იქნება ($x_{min} + \Delta x$; x_{max}) მნიშვნელობები. ყოველი შემდეგი მნიშვნელობა განსხვავებულია წინა მნიშვნელობისაგან Δx ინტერვალით. ამასთან, მოცემულ შემთხვევაში საჭიროა მიღებული იყოს ბინების მხოლოდ **მარჯვენა საზღვარი!** ამიტომ პირველ მნიშვნელობას ვირჩევთ $x_{min} + \Delta x$–ის ტოლად. ხოლო ბოლო მნიშვნელობად – გაზომილ მნიშვნელობათა შორის მაქსიმალურის ტოლ მნიშვნელობას. ახალი ცხრილის ამ სვეტს მივანიჭოთ სახელწოდება x_i.

6. x_i სვეტის გვერდით მარჯვნივ, შევქმნათ სვეტი სიხშირე f_k. ამ სვეტის ყველა უჯრა, რომლებიც ($x_{min} + \Delta x$; x_{max}) მნიშვნელობებს შეესაბამება და ფორმულის სტრიქონში ავკრიფოთ ფორმულა:

=FREQUENCY(C20:C39;K43:K51)

სადაც C20:C39 - განსაზღვრავს ექსპერიმენტის შედეგების დიაპაზონს, ხოლო K43:K51 - კი ($x_{min} + \Delta x$; x_{max}) - მნიშვნელობათა დიაპაზონს. იმისათვის, რომ შედეგი ყველა უჯრაში აისახოს გამოიყენეთ ღილაკების კომბინაცია: Ctrl+Alt+Enter.

2. *შემთხვევითი ცდომილების გავლენის შესწავლა გაზომვის შედეგებზე*

განვიხილოთ ორი ურთიერთდაკავშირებული სიდიდის გაზომვის პროცესი. დავუშვათ მათ შორის $y = ax + b$ სახის წრფივი კავშირია. ამ დამოკიდებულებით შესაძლებელია განვსაზღვროთ y მნიშვნელობა x–ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის მოცემული a და b პარამეტრებისათის. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა x სიდიდე გაზომილია ზუსტად, ხოლო მეორე – გარკვეული ცდომილებით.

1. ცალკეულ უჯრებში, რომელიც ყვითელი ფონით არის გამოყოფილი ევიტანოთ საწყისი მონაცემები:

- წრფის პარამეტრები a და b;
- x სიდიდის გაზომვის ბიჯი (მაგალითად Δx=1);
- x_0 - საწყისი მონაცემი.

2. C7:C31 შევიტანოთ $(x_0, x_0+\Delta x)$ მონაცემები.
3. D7:D31 გამოვთვალოთ $y^{თეო} = ax + b$ ფორმულით.
4. ააგეთ $f(x)$ დამოკიდებულების გრაფიკი.
5. გამოვთვალოთ მაქსიმალური საშუალო კვადრატული σ_y, რისთვისაც N14 უჯრაში შევიტანოთ ფორმულა:

=STDEV(D7:D31)

6. σ_y მნიშვნელობის საფუძველზე მოვახდინოთ $y^{ექსპ}$ ექსპერიმენტული მონაცემების შემთხვევითი გენერირება, რისთვისაც გამოვიყენოთ შემთხვევითი რიცხვების გენერატორი ფუნქცია RAND(), რომელიც აგენერირებს შემთხვევით რიცხვებს 0-დან 1-მდე. იმისთვის, რომ მივიღოთ შემთხვევითი სამდვილი სიდიდე ნებისმიერ ორ მოცემულ შუალედში, მაგალითად $(n; m)$ შუალედში, სადაც n ამ დიაპაზონის ქვედა ზღვარია, ხოლო m კი ზედა, საჭიროა ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$y^{ექსპ} = \text{RAND}()(m-n)+n$$

სადაც:

$$n = y^{თეო} - \sigma_y, \quad m = y^{თეო} + \sigma_y,$$

შევიტანოთ ეს ფორმულები E, F და G სვეტებში.

7. ავაგოთ $x = f(y^{ექსპ})$ დამოკიდებულების გრაფიკი $x = f(y^{თეო})$ გრაფიკთამნ ერთად.

ექსპერიმენტით მიღებული შედეგების დამუშავება უმცირესი კვადრატების მეთოდით

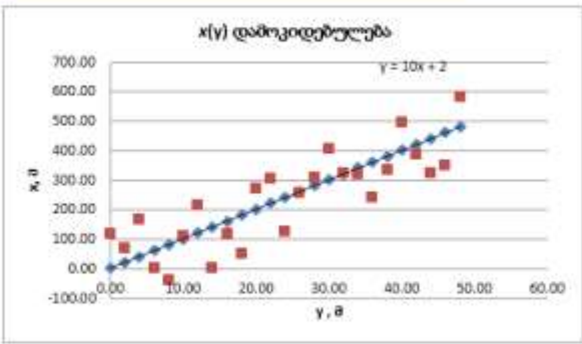
მონაცემთა ცხრილი

№	x	$y^{თეო}$	m	n	$y^{ექს}$
1	0.00	2.00	149.20	-145.20	119.13
2	2.00	22.00	169.20	-125.20	70.21
3	4.00	42.00	189.20	-105.20	168.01
4	6.00	62.00	209.20	-85.20	3.31
5	8.00	82.00	229.20	-65.20	-36.88
6	10.00	102.00	249.20	-45.20	110.54
7	12.00	122.00	269.20	-25.20	217.56
8	14.00	142.00	289.20	-5.20	4.21
9	16.00	162.00	309.20	14.80	117.89
10	18.00	182.00	329.20	34.80	51.89
11	20.00	202.00	349.20	54.80	270.58
12	22.00	222.00	369.20	74.80	307.79
13	24.00	242.00	389.20	94.80	126.83
14	26.00	262.00	409.20	114.80	259.20
15	28.00	282.00	429.20	134.80	310.76
16	30.00	302.00	449.20	154.80	405.70
17	32.00	322.00	469.20	174.80	325.94
18	34.00	342.00	489.20	194.80	319.35
19	36.00	362.00	509.20	214.80	244.22
20	38.00	382.00	529.20	234.80	335.49
21	40.00	402.00	549.20	254.80	498.15
22	42.00	422.00	569.20	274.80	389.34
23	44.00	442.00	589.20	294.80	325.54
24	46.00	462.00	609.20	314.80	350.04
25	48.00	482.00	629.20	334.80	583.73

$y=bx+a$

b	a	x_0	Δx
10	2	0	2

$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i y_i$	$\sum x_i^2$	N	σ_y
600.00	6050.00	197200	19600	25	147.196



8. ცვალეთ x_0, Δx და σ_y და დააკვირდით გრაფიკზე ცვლილებებს.
9. გამოთვალეთ წრფის პარამეტრების ცდომილებები ფორმულებით:

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{N\sum_{i=1}^{N}y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}y_i\right)^2}{N\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2} - a^2}\ ;\ \sigma_b = \frac{\sigma_a}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2}$$

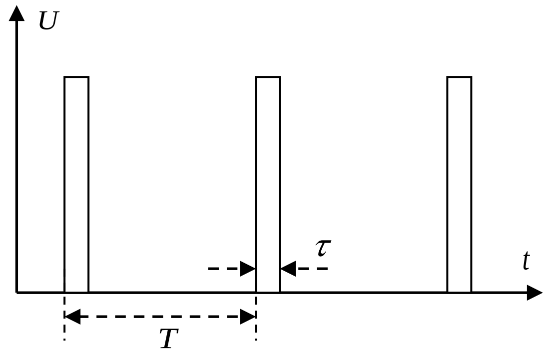
10.შეარჩიეთ y სიდიდის გაზომვის მაქსიმალური საშუალო კვადრატული ცდომილება – $y - \sigma_y^{max}$. მისი სიდიდე განისაზღვრება $y^{თეო}$ (როგორც წესი ექსპერიმენტის ფარდობითი ცდომილება შეიძლება აღწევდეს 10–30%).

განვიხილოთ y სიდიდის მნიშვნელობათა მოდელირება შემთხვევითი ცდომილების გათვალისწინებით – ეს იქნება $y^{ექსპ}$. ამასთან გაზომილი სიდიდე უნდა აღემატებოდეს მის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას არა უმეტეს $\pm\sigma_y$ სიდიდისა. ამისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ ე.წ. შემთხვევით რიცხვთა გენერატორი σ_y

§13. მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობის აგება

მართკუთხა სიგნალი წარმოადგენს განსაზღვრული სიდიდის (ამპლიტუდის) მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობას და ხასიათდება იმპულსის τ ხანგრძლივობით და სიდიდით, რომელიც გამოსახავს სიგნალის პერიოდის ფარდობას იმპულსის ხანგრძლივობასთან.

განვიხილოთ ნახ. 1–ზე ნაჩვენები მართკუთხა იმპულსების მიღების პრინციპი. ასეთი იმპულსები ხასიათდებიან იმით, რომ ძაბვის ნიშანი არ იცვლება. მართკუთხა იმპულსები შეიძლება მივიღოთ სინუსოიდალური იმპულსების საფუძველზე. მართკუთხა სიგნალის მისაღებად საჭიროა განვსაზღვროთ ***პირველადი მონაცემები:***



ნახ. 1. მართკუთხა სიგნალი

1. ცვლადი სინუსოიდალური დენის ძაბვა $U(t)$, რომლიც მეყსეული მნიშვნელობა შეიძლება ჩაწერილი იქნას სინუსის ან კოსინუსის კანონით, ვთქვათ შემდეგი ფორმით:

$$U(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \Delta U \qquad (13.1)$$

2. სიგნალის მუდმივი მახასიათებელი ΔU. მოცემული მოდელისათვის $0 \le \Delta U \le U_0$ და ვთვლით რომ დადებითია, თუმცა ზოგად შემთხვევაში ΔU შეიძლება უარყოფითიც იყოს;

3. სიგნალის პერიოდი T ;

4. პერიოდების რიცხვი n .

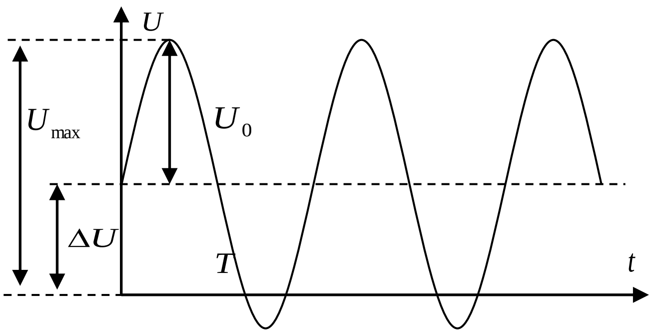
$$n = \frac{t_{\max}}{T} \qquad (13.2)$$

5. k – მამრავლი, რომელიც გვიჩვენებს სინუსოიდალური იმპულსის მაქსიმალური (ამპლიტუდური) მნიშვნელობის რა ნაწილს შეადგენს მართკუთხა იმპულსი;

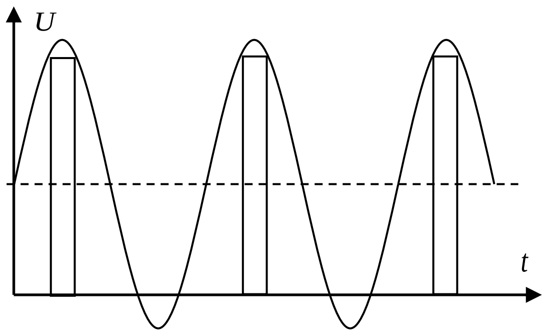
6. დროითი ინტერვალი $(t_0, t_{\max})$, სადაც t_0 როგორც წესი ნულის ტოლად მიიჩნევა, ხოლო $t_{\max}$ გამოითვლება სიგნალის პერიოდისა და პერიოდების რიცხვის საშუალებით (13.2) ფორმულიდან.

7. პროგრამის ბიჯი Δt, რომელიც განისაზღვრება დროითი ინტერვალის მოსაზღვრე მონაცემებისა საფუძველზე და დამოკიდებულია იმ წერტილების რაოდენობაზე, რომლითაც არის დაყოფილი მოცემული დროითი ინტერვალი. აღსანიშნავია, რომ მისი მნიშვნელობა გავლენას ახდენს მოცემული მოდელის გამოყენების საზღვრებზე.

სხვადასხვა დროითი შუალედისათვის საჭიროა გამოთვლილი იქნას სინუსოიდალური სიგნალის მეყსეული მნიშვნელობები მუდმივი ΔU მახასიათებლის გათვალისწინებით.



ნახ. 2. სინუსოიდალური სიგნალი მუდმივი ΔU მახასიათებელით.

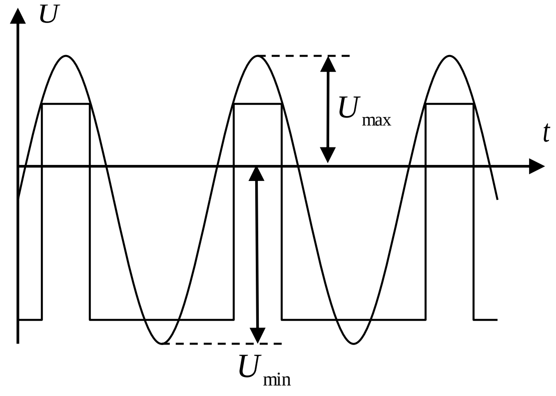


ნახ. 3. მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა, რომლებიც შექმნილია სინუსოიდალური იმპულსების საფუძველზე

იმისათვის, რომ ავაგოთ მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა, საჭიროა სინუსოიდალურ იმპულს დავადოთ პირობა, კერძოდ, თუ სინუსოიდალური იმპულსის მეყსეული მნიშვნელობა აღემატება $kU_{\max}$ ნამრავლს, მაშინ მისი სიდიდე უნდა გავუტოლოთ თვით ამ ნამრავლს, წინააღმდეგ შემთხვევაში სინუსოიდალური იმპულსის მეყსეული მნიშვნელობა ნულის ტოლად უნდა ჩავთვალოთ. ამ პირობის სშუალებით (რომლის დადებაც მარტივად შესაძლებელია ლოგიკური ოპერატორით $IF()$) მართკუთხა სიგნალი იქნება ჩახაზული სინუსაიდალურ იმპულსში ნახ.3–ზე ნაჩვენები მეთოდით. რაც შეეხება $U_{\max}$–ს, ის შეიძლება განისაზღვროს $U(t)$ მეყსეული მნიშვნელობების საშუალებით, თუ გამოვიყენებთ MS-Excel-ის ფუნქციას $MAX(L17:L1016)$, რომელიც $U(t)$ მეყსეული მნიშვნელობებიდან გამოყოფს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

იმისათვის, რომ დიაგრამაზე გამოტანილი იქნას მოცემული რაოდენობის პერიოდები, საჭიროა მივუთითოთ გამოთვლის შეწყვეტის კრიტერიუმი. მოცემულ შემთხვევაში ამ კრიტერიუმს შეიძლება წარმოადგენდეს დროითი ინტერვალის ზედა $t_{\max}$ დროითი შუალედი.

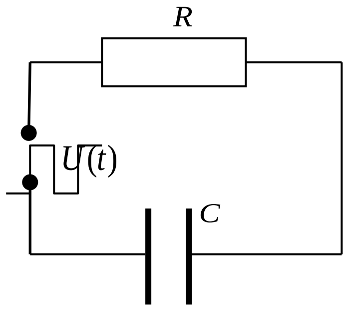
ამოცანა: მიიღეთ ნიშანცვალებადი მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა სინუსოიდალური იმპულსის საფუძველზე ნახაზის შესაბამისად.



ლაბორატორიული ამოცანა №14

მართკუთხა იმპულსების გავლა RC წრედში

RC წრედის შესასვლელში მივაწოდოთ მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა. კონდენსატორი მოცემულ შემთხვევაში პერიოდულად დაიმუხტება და განიმუხტება. წრედში გაივლის დროში ცვალებადი ელექტრული დენი, ეს არის კონდენსატორის დამუხტვისა და განმუხტვის დენი.



კონდენსატორის ბოლოებზე ძაბვის ვარდნისა და რეზისტორის ბოლოებზე ძაბვის ვარდნის ჯამი გვაძლევს მოცემული წრედის შესასვლელზე ძაბვის ვარდნას:

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) \qquad (14.1)$$

(14.1) შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$U(t) = i(t)R + \frac{q(t)}{C} = q'(t)R + \frac{q(t)}{C}$$

აქედან შეიძლება გამოვსახოთ მუხტის წარმოებული დროით:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U(t)}{R} - \frac{q(t)}{RC} \qquad (14.2)$$

(14.2) განტოლების ანალიტიკური ამოხსნა უაღრესად რთულია, რადგან წრედის შესასვლელზე მოდებული ძაბვა იცვლება დროში. მაგრამ რადგან საქმე გვაქვს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებასთან, შესაბამისად მარტივია მისი გადაწყვეტა რიცხვითი მეთოდით, ე.ი. მიახლოებით განტოლებაზე გადასვლით, როგორც ეს ახსნილი იყო ლაბ.5–ის გარჩევისას. დენის ძალა წრედის R აქტიურ წინაღობაზე შეიძლება ნაპოვნი იქნას ომის კანონის საფუძველზე. მოცემულ ამოცანაში საჭიროა შესწავლილი იქნას მუხტის ცვლილება კონდენსატორის შემონაფენებზე, აგრეთვე ძაბვის ცვლილება დროის მიხედვით კონდენსატორის და რეზისტორის ბოლოებზე. ამოცანის მოდელის აგება წარმოებს იმავე გზით, როგორც ეს შესრულდა მართკუთხა იმპულსების შემთხვევაში. (14.2) განტოლების ანალიზური ამონახნა გვაძლევს, რომ ძაბვა რეზისტორის ბოლოებზე შემავალი ძაბვის წარმოებულის ტოლია (დიფერენცირებადი RC წრედის შემთხვევა), ხოლო ძაბვა კონდენსატორის მომჭერებზე კი ინტეგრალის შემავალი სიგნალიდან (ინტეგრირებადი RC წრედის შემთხვევა). მაშასადამე, მოცემული წრედი შეიძლება ემსახურებოდეს შემავალი ძაბვის, როგორც დიფერენცირებას, ასევე ინტეგრირებას.

ამრიგად, მოდელის აგებისათვის საჭირო ძირითადი პირველადი მონაცემებია:

1) კონდენსატორის შემონაფენებზე მუხტის საწყისი მნიშვნელობა q_0 (ითვლება, რომ დროის საწყის მომენტში კონდენსატორი მუხტს არ შეიცავდა ე.ი. $q_0 = 0$ კ)

2) რეზისტორის R აქტიური წინაღობა და კონდენსატორის C ტევადობა, რომლებიც საწყის მომენტში ისე შეირჩევა, რომ RC – წრედის მუდმივა იყოს იმავე რიგის, რაც იმპულსის ხანგრძლივობა, რომლითაც უშუალოდ გრაფიკულად განისაზღვრება მართკუთხა სიგნალის შემთხვევაში. ეს მუდმივაც ასევე შეიძლება ჩათვლილი იქნას პირველად მონაცემად.

გრაფიკული გამოსახულების სიზუსტისათვის უმჯობესია გამოთვლებისას მიცემული იქნას გამოთვლების შეწყვეტის კრიტერიუმი. გამოთვლების შეწყვეტის კრიტერიუმს წარმოადგენს დროის მაქსიმუმი t_{max} .

პირველადი მონაცემების საფუძველზე აგებული უნდა იქნას გრაფიკები $q(t), u_C(t), u_R(t)$ (ამსათან, ბოლო ორი მათგანი აგებული უნდა იქნას ერთ გრაფიკზე).

გრაფიკების აგების შემდეგ საჭიროა განისაზღვროს მოდელის გამოყენების საზღვრები. საჭიროა დადგინდეს აგრეთვე წრედის პარამეტრების ცვლილება როგორ გავლენას ახდენს გრაფიკის ვიზუალურ ფორმაზე.

დავალება:

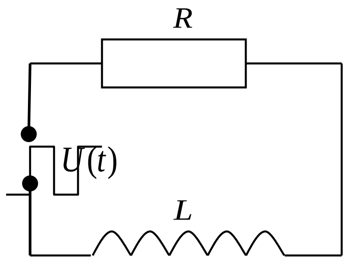
1. განიხილეთ შემთხვევა, როდესაც რამოდენიმე ინტეგრირებადი RC წრედი შეერთებულია მიმდევრობით (გამომავალი ძაბვა აიღეთ კონდენსატორის მომჭერებიდან. პირველი მათგანის შესასვლელში მოდებულია მართკუთხა ძაბვა, ხოლო ყოველი მომდევნო RC წრედის შესასვლელში კი მოდებულია წინამდებარე წრედის გამოსავალის ძაბვა).

2. განიხილეთ ანალოგიური შემთხვევა დიფერენცირებადი RC წრედებისათვის (გამომავალი ძაბვა აღებული უნდა იქნას რეზიზტორის ბოლოებიდან).

ლაბორატორიული ამოცანა №15

მართკუთხა იმპულსების გავლა RL წრედში

განვიხილოთ, თუ როგორ შეიცვლება დენი წრედში, რომელიც შეიცავს L ინდუქციურობის კოჭას და R აქტიურ წინაღობას, როდესაც მის შესასვლელში მოვდებთ მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობას. დროის ყოველ მომენტში შესასვლელში მოდებული ძაბვა იქნება დროის ფუნქცია:



$$U(t) = U_R(t) + U_L(t)$$

$$U(t) = i(t)R + L\frac{di}{dt} \tag{15.1}$$

გამოვსახოთ დენის წარმოებუილი შემდეგი სახით:

$$\frac{di}{dt} = \frac{U(t)}{L} - \frac{i(t)R}{L} = \frac{U(t)}{L} - \frac{i(t)}{\tau} \tag{15.2}$$

როგორც (15.2) დიფერენციალური განტოლების ანალიტიკური ამონახსნი გვიჩვენებს ძაბვა ინდუქციურობის ბოლოებზე პირდაპირპროპორციულია შემავალი ძაბვის წარმოებულია (დიფერენცირებადი RL წრედი), ხოლო ძაბვა რეზისტორის ბოლოებზე კი პროპორციულია ინტეგრალის შემავალი სიგნალიდან (ინტეგრირებადი RL წრედი). ამრიგად, ნახაზზე წარმოდგენილი წრედი შეიძლება ემსახურებოდეს შემავალი ძაბვის, როგორც ინტეგრირებას, ასევე დიფერენცირებას.

(15.2) განტოლება უნდა ამოიხსნას მიახლოებითი მეთოდით, დენის ძალის მიმართ, ე.ი. მკაცრი (15.2) განტოლებიდან უნდა გადავიდეთ მიახლოებით განტოლებაზე ლაბ. 5–ში განხილული მაგალითის მსგავსად. წინაღობაზე ძაბვის ვარდნა შეიძლება ნაპოვნი იქნას ომის კანონის საშუალებით, ხოლო ინდუქციურობის კოჭაზე კი, ძაბვის ვარდნა წარმოადგენს სხვაობას შემავალ ძაბვასა და წინაღობაზე ძაბვის ვარდნას შორის.

ამოცანის მიზანია აგებული იქნას მართკუთხა იმპულსების RL წრედში გავლისას აგებული იქნას გრაფიკული გამოსახულებები $i(t)$ და $u(t)$ წრედის აქტიურ წინაღობასა და ინდუქციურობის კოჭაზე. ამიტომ, პირველადი მონაცემების გარდა, მოცემულ მოდელში საჭიროა დამატებით გათვალისწინებული იქნას:

1) აქტიური წინაღობა R;

2) ინდუქციურობა L;

3) დროითი მუდმივა $\tau = L/R$, მისი საწყისი მნიშვნელობა მოსახერხებელია შერჩეული იქნას ისე, რომ ის ნაკლები იყოს მართკუთხა იმპულსის ხანგრძლივობაზე. მართკუთხა იმპულსის ხანგრძლივობის განსაზღვრა კი უშუალოდ გრაფიკულად ხორციელდება.

4) დენის ძალის საწყისი მნიშვნელობა ($t_0 = 0$ მომენტში) $i_0 = 0$.

გამოთვლის შედეგების მიხედვით აგებული უნდა იქნას გრაფიკები $i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$ (ამასთან ბოლო ორი მათგანი სასურველია აგებული იქნას ერთ გრაფიკზე).

მოდელის აგების შემდეგ საჭიროა დადგინდეს მისი გამოყენების საზღვრები; დადგინდეს გრაფიკების ფორმაზე წრედის პარამეტრების გავლენა.

ამოცანები:

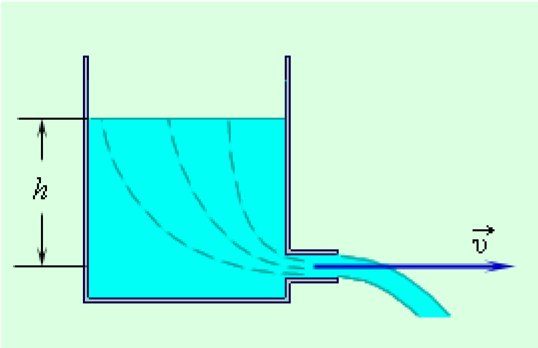
1. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც რამოდენიმე ინტეგრირებადი RL წრედი (გამომავალი ძაბვა აიღება რეზისტორიდან), შეერთებულია მიმდევრობით (პირველი მათგანის შესასვლერლე მოდებულია მართკუთხა ფორმის იმპულსური სიგნალი, ხოლო ყოველ მომდევნოზე კი პირველის გამომავალი ძაბვა). გრაფიკები წარმოდგენილი იქნას ერთდიაგრამაზე.

2. განვიხილოთ ანალოგური შემთხვევა დიფერენცირებადი RL წრედისათვის. მოცემულ შემთხვევაში გამომავალი ძაბვა აითვლება ინდუქციურობის კოჭიდან.

ლაბორატორიული ამოცანა №16

სითხის დინება ჭურჭლიდან

განვიხილოთ მართკუთხა ფორმის ჭურჭელი, რომელშიც ასხია სითხე. სითხის საწყისი სიმაღლე აღვნიშნოთ – h_0-ით. სითხის ფსკერზე აქვს S_0 ფართობის ხვრელი, რომლიდანაც სითხე გამოედინება ხახუნის გარეშე. ჭურჭლის ფსკერის ფართობია – S. სითხის გამოდინების სიჩქარე შეიძლება განვსაზღვროთ მექანიკური ენერგიის შენახვის კანონის გამოყენებით. ცხადია, იგი დამოკიდებული იქნება სითხის სიმაღლეზე და შესაბამისად შეიცვლება დროის მიხედვით.



დროის უსასრულოდ მცირე dt შუალედში ჭურჭელში სითხის სიმაღლე შეიცვლება:

$$dh = -\frac{dV}{S} = -\frac{S_0 \cdot v \cdot dt}{S}$$

სადაც dV– დროის dt შუალედში ხვრელიდან გამოდენილი სითხის მოცულობაა, ნიშანი „–„ აიხსნება იმით, რომ სითხის სიმაღლე ჭურჭელში მცირდება. დროის dt შუალედი უნდა იყოს იმდენად მცირე, რომ სითხის გამოდენის სიჩქარე შეიძლება ჩაითვალოთ თანაბრად.

თუ გადავალთ სასრულ ინტერვალებზე $(\Delta h, \Delta t)$ შესაბამისად, მიახლოებულ ტოლობას, შესაძლებელია განისაზღვროს სითხის სვეტის სიმაღლე დროის სხვადასხვა $t_1, t_2, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{n+1}$ მომენტებისათვის.

__მოდელის ასაგებად საჭირო საწყისი მონაცემებია:__

1) ჭურჭელში სითხის სვეტის საწყისი სიმაღლე h_0, *მ*;
2) ჭურჭლის ფუძის ფართობი S, მ^2;
3) ხვრელის ფართობი S_0, მ^2;
4) დროის ინტერვალი (დროის საწყისი და საბოლოო მომენტები);
5) პროგრამის ბიჯი Δt, წმ, გათვლილი 100–200 წერტილისათვის;
   ამასთან, საწყის მონაცემთა ცხრილში შეიძლება განისაზღვროს სითხის გამოდინების საწყისი სიჩქარე.

__ამოცანის მიზანია__ – სითხის სვეტის სიმაღლის დროზე დამოკიდებულების დიაგრამის აგება. $\Delta t, v$ და h სიდიდეების გამოსათვლელად გამოიყენეთ ფუნქცია if(), იმისათვის, რომ გამოთვლები შეჩერდეს მას შემდეგ რაც ჭურჭლიდან მთელი სითხე გამოედინება (გამოთვლის შეწყვეტის კრიტერიუმი $h_i \le 0$).
მოდელის შექმნის შემდეგ განსაზღვრეთ მისი გამოყენების საზღვრები.
როგორ აისახება გრაფიკზე შემთხვევა, როცა ხვრელის ფართობი აღემატება ჭურჭლის ფსკერის ფართობს?

როგორ გავითვალისწინოთ ფორმულაში ასეთი თანაფარდობის დაუშვებლობა?