

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ნოდარ მახვილაძე, დავით გორგიძე, ლევან ჯიქიძე

თეორიული მექანიკის კურსი

თბილისი

2010



რეგისტრირებულია სტუ-ს
სარელაქციო-საბამომცემლო
საბჭოს მიერ

რელაქტორი: ჯ. შარიქაძე

რეცენზენტი: გ. ბალათურია

პ ი რ ვ ე ლ ი ნ ა წ ი ლ ი

ს ტ ა ტ ი კ ა

§1.1. შმსავალი. ძირითადი ცნებები

ჩვენს გარშემო სამყაროში არსებული ყველა მოვლენა არის მატერიის მოძრაობის და ურთიერთქმედების სხვადასხვა ფორმა. მატერიის მოძრაობის ფორმები მრავალსახაა და ურთიერთდაკავშირებული. მათ შორის ერთ-ერთი უმარტივესი ფორმა არის *მექანიკური მოძრაობა*.

მექანიკური მოძრაობა ეწოდება ნივთიერი სხეულების გადაადგილებას სხვა სხეულების მიმართ სივრცესა და დროში.

მექანიკური მოძრაობის განხილვისას სივრცესა და დროში საჭიროა ვიცოდეთ რა მოძრაობს, ე.ი. განვსაზღვროთ მოძრაობის ობიექტი, ნივთიერი სხეული. მექანიკაში ძირითადად განიხილავენ მოძრაობის სხეულის ორ მნიშვნელოვან ნიშანს: მის განფენილობას (ნივთიერი სხეულის გეომეტრიულ ფორმას) და ნივთიერებას (მასას და მის განაწილებას მოცემულ გეომეტრიულ სივრცეში).

მეცნიერების იმ დარგს, რომელიც შეისწავლის ნივთიერი სხეულების მექანიკურ მოძრაობას და ადგენს ამ მოძრაობის ზოგად კანონებს, ეწოდება თ ე ო რ ი უ ლ ი მ ე ქ ა ნ ი კ ა.

თეორიული მექანიკა თავისი საფუძვლებიდანვე მჭიდროდ არის დაკავშირებული ტექნიკასთან. იგი იქმნებოდა და ვითარდებოდა ტექნიკის განვითარებასთან ერთად. ტექნიკის განვითარება სულ ახალ-ახალ ამოცანებს აყენებდა მექანიკის წინაშე, რაც ხელს უწყობდა მექანიკის განვითარებას. თავის მხრივ მექანიკაც დიდ ზეგავლენას ახდენდა და ხელს უწყობდა ტექნიკურ პროგრესს.

მექანიკური მოძრაობის შესწავლა წარმოადგენს ტექნიკური მეცნიერების ყველაზე მთავარ და ლოგიკურად ბუნებრივ ამოცანას.

როგორც ყოველ მეცნიერებას, თეორიულ მექანიკასაც კვლევის საფუძვლად უდევს დაკვირვება, ცდა, პრაქტიკა. თეორიულ მექანიკაში ფართოდ გამოიყენება მათემატიკური მეთოდები, აბსტრაქტული (განყენებული) ცნებები, მოვლენათა მოდელები, ლოგიკის კანონები.

თეორიულ მექანიკაში შემოღებული თითქმის ყველა საწყისი ცნება არსებითად წარმოადგენს გარკვეულ აბსტრაქციას ან მოდელს. მათი შემოღებისას გათვალისწინებულია ის ძირითადი,

განმსაზღვრელი, რაც არსებითია განსახილველ მექანიკურ მოძრაობაში. ასე მაგალითად, რეალური ნივთიერი სხეულის მაგივრად მექანიკაში განიხილავენ მის ისეთ აბსტრაქციულ მოდელს, როგორცაა ნივთიერი წერტილი, აბსოლუტურად მყარი სხეული და სხვ. მხოლოდ ასეთ მოდელებზე აგებული მექანიკისათვის შეიძლება შემუშავდეს ის მეთოდები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ შევისწავლოთ რეალური ობიექტების მოძრაობა. შემდეგ მიღებული შედეგები მოწმდება ცდით, პრაქტიკით.

თეორიული მექანიკის კურსი იყოფა სამ ნაწილად: სტატიკა, კინემატიკა, დინამიკა.

ს ტ ა ტ ი კ ა შეისწავლის ძალთა ერთი სისტემის გარდაქმნას მის ეკვივალენტურ სხვა უფრო მარტივ სისტემად და ნივთიერი სხეულების წონასწორობის პირობებს მასზე მოდებული ძალების მოქმედებისას.

სტატიკა – ბერძნული სიტყვაა statike - მოძღვრება წონის, წონასწორობის შესახებ.

კ ი ნ ე მ ა ტ ი კ ა შეისწავლის სხეულთა მოძრაობის კანონებს; ამასთანავე არ ღებულობს მხედველობაში ამ მოძრაობის გამოძწვევ მიზეზებს (ძალებს), ე.ი. შეისწავლის მოძრაობის გეომეტრიულ თვისებებს.

კინემატიკა — ბერძნული სიტყვაა. kinema (kinematos) – მოძრაობა.

დ ი ნ ა მ ი კ ა შეისწავლის ნივთიერ სხეულთა მოძრაობის კანონებს, ამ მოძრაობის გამოძწვევ ძალებთან კავშირში.

დინამიკა – ბერძნული სიტყვაა dynamis – ძალა.

დინამიკაში გამოყავთ მექანიკური მოძრაობის ძირითადი კანონები.

თეორიული მექანიკის ყოველ ნაწილს აქვს თავისი ცნებები და აქსიომები (პრინციპები).

გავეცნოთ მექანიკის ზოგიერთ ძირითად ცნებას და განმარტებას.

ნ ი ვ თ ი ე რ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ეწოდება სხეულს, რომლის განზომილებები მოცემულ შემთხვევაში შეიძლება უგულებელვყოთ.

ნივთიერი წერტილის ცნება ეილერმა შემოიღო, რომელშიც იგულისხმებოდა იმდენად მცირე ზომების სხეული, რომ მოძრაობის პროცესში შეიძლება უგულებელვყოთ მისი ნაწილების განსხვავება (კინემატიკური განსაზღვრა), ან ისეთი სხეული, რომ მისი მცირე ზომების შედეგად შეიძლება ჩავთვალოთ თითქოს ყველა ძალა მოდებულია ერთ გეომეტრიულ წერტილში (სტატიკური განსაზღვრა). ეილერმა შემოიღო მეორე ცნებაც - აბსოლუტურად მყარი სხეულის ცნება.

ნ ი ვ თ ი ე რ წ ე რ ტ ი ლ თ ა ს ი ს ტ ე მ ა (ანუ **მ ე ქ ა ნ ი კ უ რ ი ს ი ს ტ ე მ ა**) ეწოდება წერტილთა ისეთ ერთობლიობას, რომელშიც ყოველი წერტილის მდებარეობა ან მოძრაობა

დამოკიდებულია ამ სისტემის სხვა წერტილების მდებარეობაზე ან მოძრაობაზე.

ყოველ ფიზიკურ სხეულს მექანიკაში განიხილავენ, როგორც ნივთიერ წერტილთა გარკვეულ სისტემას.

ნივთიერ წერტილთა ისეთ სისტემას, რომლის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში ეწოდება უცვლადი მექანიკური სისტემა ანუ **ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ა დ მ ყ ა რ ი ს ხ ე უ ლ ი**.

ეს არის მყარი სხეულის თეორიული მოდელი, რომლის ყოველ ორ წერტილს შორის მანძილი უცვლელი რჩება, რაგინდ დიდი ძალაც უნდა მოქმედებდეს მასზე; ე.ი. ეს არის სხეული, რომლის გეომეტრიული ფორმა და ზომები არ იცვლება სხვა სხეულების მექანიკური ზემოქმედების შედეგად. მას ზოგჯერ უცვლად ნივთიერ სხეულს უწოდებენ.

აბსოლუტურად მყარი სხეულის ცნება დაადგინა *ეილერმა*. ეს ცნება აუცილებელი პირობა იყო, რათა შემოეღოთ პირდაპირთანაწინააღმდეგი ძალების აქსიომა.

წერტილს, რომელზეც არ მოქმედებენ სხვა ნივთიერი წერტილები (სხეულები), ეწოდება **ი ზ ო ლ ი რ ე ბ უ ლ ი**.

მოცემული სხეულის უძრაობა ან მოძრაობა დამოკიდებულია სხვა სხეულებთან მისი მექანიკური ურთიერთქმედების ხასიათზე, ე.ი. მისი კინემატიკური მდგომარეობის ცვლილების ხასიათზე.

სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს ნივთიერი სხეულების მექანიკური ურთიერთქმედების რაოდენობრივ საზომს, ძ ა ლ ა ეწოდება.

ეს ურთიერთქმედება იწვევს სხეულის წერტილების სიჩქარეთა ცვლილებას ან სხეულის დეფორმაციას და შეიძლება წარმოიქმნას როგორც სხეულთა უშუალო კონტაქტისას (შემხები სხეულების წნევა, ხახუნი), ისე სხეულთა მიერ შექმნილი ველების მეშვეობით (გრავიტაციული ველი, ელექტრომაგნიტური ველი).

ძალა ვექტორული სიდიდეა და დროის ყოველ მომენტში ხასიათდება მისი რიცხვითი მნიშვნელობით (სიდიდით), მიმართულებით სივრცეში და მოდების წერტილით.

ძალის ცნება მექანიკაში მნიშვნელოვანია იმით, რომ ეს ცნება გამოხატავს არა მარტო სხეულთა ურთიერთქმედებას, არამედ იძლევა ამ ურთიერთქმედების საზომსაც.

ფიზიკურ სიდიდეთა გაზომვის ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში (სი) ძალის ერთეულად მიღებულია ერთი ნიუტონი (N), ხოლო ტექნიკურ ერთეულთა სისტემაში - ერთი კილოგრამ ძალა (1კგძ). ეს ერთეულები დაკავშირებულია დამოკიდებულებით:

$$1 \text{ გ} = 1 \text{ კგმ} / \text{წმ}^2; \quad 1 \text{ კგმ} \approx 9, 81 \text{ გ}; \quad 1 \text{ გ} \approx 0, 102$$

კგმ.

ძალის საზომად გამოიყენება კიდევე უფრო დიდი ერთეულებიც:
 $1 \text{ კნ} = 10^3 \text{ ნ}$ (კილონიუტონი); $1 \text{ მნ} = 10^6 \text{ ნ}$ (მეგანიუტონი).

ძალის მცირე საზომი ერთეულია დინი: $1 \text{ დინი} = 10^{-5} \text{ ნ} = 1 \text{ გსმ} / \text{წმ}^2$.

ძალას, ისევე, როგორც ყოველ ვექტორულ სიდიდეს, აღვნიშნავთ ერთი ასოთი ზევიდან ხაზით: $\vec{F}, \vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ და ა. შ. \vec{F}

ძალის სიდიდეს ასე აღვნიშნავთ $|\vec{F}|$ ან F .

ძალის აღნიშვნა თავზე ისრით შემოიღო ჰოლანდიელმა მათემატიკოსმა და მექანიკოსმა *სიმონ სტევენმა* (1548 – 1620).

სტატიკაში ძირითადად ვიზილავთ მუდმივ ძალებს. დინამიკაში განვიზილავთ სხეულზე მოქმედ ძალებს, რომლებიც არა მარტო მუდმივია, არამედ ცვალებადიც.

ძალის ცნება მექანიკაში მნიშვნელოვანია სახელობრ იმით, რომ ეს ცნება გამოხატავს არა მარტო სხეულთა მექანიკურ ურთიერთქმედებას, არამედ იძლევა ამ ურთიერთქმედების საზომსაც.

თეორიულ მექანიკაში ძალის ფიზიკური ბუნება არ თამაშობს რაიმე როლს, რადგანაც გვანტერესებს მხოლოდ ის ეფექტი, რომელსაც მოცემულ მყარ სხეულზე ან ნივთიერ წერტილზე ახდენენ მოქმედი ძალები ამ ძალების ფიზიკური ბუნებისაგან დამოუკიდებლად.



ნახ. 1.1

წრფეს, რომლის გასწვრივაც \vec{F} ძალა მოქმედებს ძ ა ლ ი ს ფ უ ძ ე ეწოდება.

სხეულზე მოქმედ ძალთა რაიმე ერთობლიობას ეწოდება ძ ა ლ თ ა ს ი ს ტ ე მ ა. სხეულზე მოქმედ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალთა

სისტემას შემდგომში ასე აღვნიშნავთ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$.

თუ სხეულზე მოქმედი ძალთა რაიმე $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ სისტემა შეგვიძლია შევცვალოთ სხვა $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$



ნახ. 1.2

სისტემით ისე, რომ სხეულის მექანიკური მდგომარეობა არ შეიცვალოს, მაშინ ამბობენ, რომ ძალთა ეს ორი სისტემა ტ ო ლ ფ ა ს ი ა (ეკვივალენტურია). ამ პირობას ასე ჩავწერთ:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$$

ისეთ ერთ \vec{R} ძალას, რომელიც ძალთა რაიმი ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) სისტემის ტოლფასია, ეწოდება ამ სისტემის **ტოლქმედი ძალა**:

$$\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n).$$

უგეინშნოთ, რომ ძალთა ყველა სისტემას არა აქვს ტოლქმედი.

თუ ძალთა რაიმი სისტემის მოქმედებით მყარი სხეული (ან წერტილი) რჩება უძრავი ან ასრულებს წრფივ, გადატანით, თანაბარ მოძრაობას (ინერციულ მოძრაობას), მაშინ ამბობენ, რომ მყარი სხეული (წერტილი) იმყოფება **წონასწორობის მდგომარეობაში**.

ძალთა სისტემას, რომლის მოქმედებითაც სხეული იმყოფება წონასწორობაში, ეწოდება **გაწონასწორებული სისტემა**, ანუ ნულის ტოლფასი სისტემა. ძალთა ასეთი სისტემა არ ცვლის სხეულის კინემატიკურ მდგომარეობას. იგი ასე აღინიშნება:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

უმდგომში, სხეულის წონასწორობის ქვეშ ვიგულისხმებთ სხეულის უძრავ მდგომარეობას.

ძალას, რომელიც სიდიდით ტოლქმედის ტოლია, მისი პირდაპირ საწინააღმდეგო მიმართულებისა და მოქმედებს იმავე ფუძეზე, ეწოდება **ძაწონასწორებელი ძალა**.

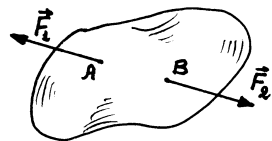
მაწონასწორებელი ძალა მხოლოდ ძალთა ისეთ სისტემას შეიძლება აქონდეს, რომელსაც გააჩნია ტოლქმედი.

§1.2. სტატიკის აქსიომები

მყარი სხეულის სტატიკა დაფუძნებულია ზოგიერთ ძირითად წინადადებაზე (აქსიომებზე), რომლებიც მიიღებან მათემატიკური დამტკიცების გარეშე. სტატიკის აქსიომებში ფორმულირებულია ის მარტივი და ძირითადი კანონები, რომლებსაც ემორჩილებიან ერთ და იმავე სხეულზე, ან ურთიერთმოქმედ სხეულებზე მოდებული ძალები. სტატიკის აქსიომებში ლაპარაკია ძალთა ისეთ თვისებებზე, რომლებიც დადგენილია უშუალოდ დაკვირვებისა და მრავალი ცდის შედეგად.

I აქსიომა. მყარ სხეულზე მოქმედი ორი ძალა მხოლოდ მაშინ არის გაწონასწორებული, თუ ისინი სიდიდით ტოლინი არიან, მდებარეობენ ერთ ფუძეზე და ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ არიან მიმართულნი.

ასეთ ორ \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალას პირდაპირთანაწინააღმდეგო ძალები ეწოდებათ.



ნახ. 2.1

ცხადია $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$.

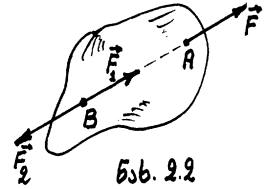
შედეგი: თუ მყარი სხეული წონასწორობაშია ორი ძალის მოქმედებით, მაშინ ეს ძალები პირდაპირთანაწინააღმდეგი ძალებია.

II აქსიომა. მყარ სხეულზე მოდებული ძალთა სისტემის მოქმედება არ შეიცვლება, თუ მას დაუმატებთ ან გამოვაკლებთ პირდაპირთანაწინააღმდეგ ძალებს.

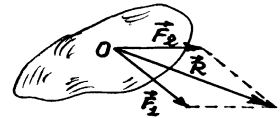
შედეგი: მყარ სხეულზე მოდებული ძალა შეიძლება მის ფუძეზე გავასრივლოთ და მოვლოთ სხეულის სხვა წერტილში.

ზემოთ ჩამოყალიბებული თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ მყარ სხეულზე მოდებული ძალა განიხილება როგორც სრიალა ვექტორი.

III აქსიომა. მყარი სხეულის ერთ წერტილზე მოდებული ორი ძალა შეგვიძლია შევკრიბოთ, მივიღებთ ერთ ტოლქმედ ძალას, რომელიც იმავე წერტილზეა მოდებული და მოცემულ ძალებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალს წარმოადგენს.



ნახ. 2.2



ნახ. 2.3

$$\vec{R} \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_2\},$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\angle F_1 F_2)}$$

შედეგი 1: ყოველი მოცემული \vec{R} ძალა შეიძლება შეიცვალოს ორი სხვა ძალით, ე.ი. შეიძლება დაიშალოს ორ შემადგენელ ძალად, თუ ეს შემადგენელი ძალები წარმოადგენენ იმ პარალელოგრამის გვერდებს, რომლის დიაგონალსაც მოცემული \vec{R} ძალა წარმოადგენს.

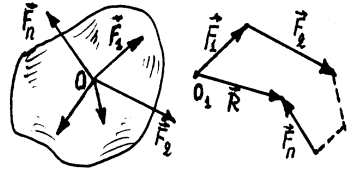
ძალის დაშლა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ოპერაცია, რომელიც ძალთა შეკრების შებრუნებულია. ძალის დაშლის ამოცანა ცალსახად განსაზღვრული რომ იყოს საჭიროა დამატებითი პირობები. მაგალითად, სიბრტყეში მდებარე ძალა რომ დავშალოთ იმავე სიბრტყეში მდებარე ორ მდგენელად, საჭიროა ვიცოდეთ მდგენელი ძალების მიმართულება, ან მათი რიცხვითი სიდიდეები, ან ერთ-ერთის მიმართულება და რიცხვითი სიდიდე.

ისტორიულად ძალთა პარალელოგრამის წესით შეკრების კანონი პირველად ჩამოაყალიბა ლეონარდო და ვინჩიო, ხოლო შემდგომში უფრო ცხადად - ს. სტევენსმა.

შედეგი 2: III აქსიომა შეიძლება განვაზოგადოთ: მყარი სხეულის ერთ წერტილზე მოქმედი ძალები ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) სისტემა ერთი ისეთი \vec{R} ძალის ტოლფასია, რომელიც ამ წერტილზეა მოდებული და მდგენელი ძალების გეომეტრიული ჯამის ტოლია:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad \text{ანუ} \quad \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

ასეთი \vec{R} ძალა წარმოადგენს ძალები მოცემული სისტემის ტოლქმედს წერტილზე მოდებული ძალების გეომეტრიული ჯამი მიიღება ძალთა მრავალკუთხედის (მრავალკუთხედის) აგებით, რომელიც ცნობილია ვექტორული ალგებრიდან. ძალთა მრავალკუთხედის ჩამკეტია \vec{R} ძალა.



ნახ. 2.4

თუ ძალთა მრავალკუთხედი შეკრული ტეხილი წირია, მაშინ მას უწოდებენ ჩაკეტილს. ამ შემთხვევაში ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია.

ძალთა მრავალკუთხედის აგებით სარგებლობენ ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის სტატიკური ამოცანების გრაფიკული ამოხსნისას.

ძალთა სისტემას ეწოდება ბრტყელი თუ მათი, ფუძეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ.

შემდგომში საჭიროა განვსაზოგადოთ ერთმანეთისაგან ძალთა სისტემის გეომეტრიული ჯამის (ნაკრები ვექტორის) და ძალთა სისტემის ტოლქმედის ცნება.

IV აქსიომა. ყოველი ორი სხეული ერთმანეთზე მოქმედებენ ძალებით, რომლებიც სიდიდით ერთმანეთის ტოლია, მდებარეობენ ერთ ფუძეზე და ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ არიან მიმართულნი.

ეს კანონი პირველად ი. ნიუტონმა ჩამოაყალიბა და ეწოდება ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობის კანონი. იგი გვიჩვენებს, რომ ბუნებაში არა აქვს ადგილი ძალის ცალმხრივ მოქმედებას. ამასთანავე, შევნიშნოთ, რომ ქმედება და უკუქმედება წარმოადგენს ორ ძალას, რომლებიც ყოველთვის ორ სხვადასხვა სხეულზეა მოდებული. ამიტომ, ამ ძალების ტოლობა არ ნიშნავს, რომ ეს ძალები ერთმანეთს აწონასწორებს.

V აქსიომა. დეფორმირებად სხეულზე მოდებული ძალების წონასწორობა არ ირღვევა ამ სხეულის გამყარებისას.

შემდგომში, თუ არ იქნა დამატებითი შენიშვნა, ყოველთვის ჩავთვლით, რომ მოცემული სხეული აბსოლუტურად მყარია.

1.3 არათავისუფალი. მყარი სხეული (ბმების სახეები)

მყარ სხეულს (ნივთიერ წერტილს) თავისუფალი ეწოდება, თუ მოცემული მდებარეობიდან მისი ნებისმიერი გადაადგილება სივრცეში არ არის შეზღუდული რაიმე გეომეტრიული პირობით.

თუ სხეულის (ნივთიერი წერტილის) გადაადგილება თუნდაც ერთი მიმართულებით შეზღუდულია რაიმე პირობით, მაშინ ასეთ სხეულს (წერტილს) ეწოდება არათავისუფალი.

სხეულის ან მექანიკური სისტემის თავისუფალი გადაადგილების შემზღუდავ პირობებს ბმები ეწოდებათ. მაგალითად, თუ წერტილი მოძრაობს წირზე ან ზედაპირზე, მაშინ მისი მოძრაობა არათავისუფალია, ხოლო ბმას წარმოადგენს თვით წირი ან ზედაპირი.

ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, ბმების მოქმედება არათავისუფალ სხეულზე გამოისახება ძალებით, რომლებსაც ბმის რეაქციები ეწოდებათ. ბმის რეაქცია მიმართულია მოცემული სხეულის იმ მოძრაობის საწინააღმდეგოდ, რომელსაც ეს ბმა ეწინააღმდეგება.

ბმის ცნება შემოიღო ფრანგმა მათემატიკოსმა ჟან ჟურიემ (1798). უფრო ადრე სიმონ სტევინი იხილავდა ბმების მიერ დასაშვებ გადაადგილებას ბლოკების კერძო შემთხვევაში (1608).

სხეულის არათავისუფალი მოძრაობის შესწავლისას სარგებლობენ შემდეგი პრინციპით:

VI აქსიომა. ყოველი არათავისუფალი სხეული შეიძლება განვიხილოთ როგორც თავისუფალი, თუ ბმების მოქმედებას შევცვლით ძალებით (რეაქციის ძალებით), რომლებიც სხეულზე ისეთივე მექანიკურ მოქმედებას ახდენენ რასაც აღნიშნული ბმები.

ეს ნიშნავს, რომ თუ არათავისუფალ სხეულზე ბმების მაგივრად მოვდებთ ყველა რეაქციის ძალას, მაშინ სხეულის მექანიკური მდგომარეობა არ შეიცვლება.

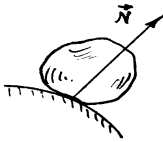
ბმების რეაქციის ძალების განსაზღვრა წარმოადგენს სტატიკის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ამოცანას..

რეაქციის ძალის მიმართულება დამოკიდებულია ბმის სახეზე.

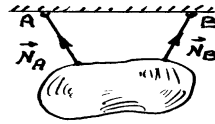
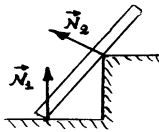
ქვემოთ მოყვანილია ბმის ყველაზე გავრცელებული სახეები, რომლებიც მექანიკაში გვხვდება.

ბმა უნდა განვიხილოთ, როგორც გარკვეულ პირობას, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს წერტილი თავისი წონასწორობის ან მოძრაობის დროს. ეს პირობა საზოგადოდ განისაზღვრება განტოლებით ან უტოლობით.

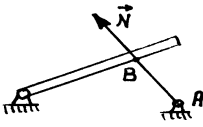
ქვემოთ მოცემულია ბმების ზოგიერთი სახე შესაბამისი რეაქციის ძალით:



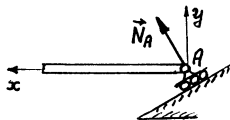
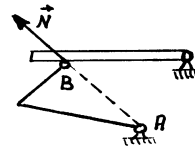
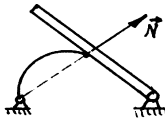
ნახ. 3.1



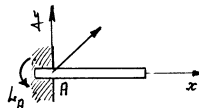
ნახ. 3.2



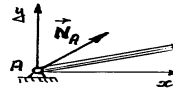
ნახ. 3.6



ნახ. 3.5



ნახ. 3.7



ნახ. 3.3

ტოლობით

გამოსახულ ბმას ორმხრივი ანუ დამჭერი ბმა ეწოდება.

უტოლობით გამოსახულ ბმას ცალმხრივი ანუ არადამჭერი ბმა ეწოდება.

მაგალითად, თუ $Oxyz$ სივრცეში $M(x,y,z)$ წერტილი მოძრაობს ზედაპირზე, რომლის განტოლებაა

$$f(x, y, z) = 0,$$

მაშინ ამ წერტილისათვის ეს არის ბმის განტოლება (ორმხრივი ბმა).

თუ წერტილი მოძრაობს R რადიუსის სფეროს შიგნით, მაშინ ბმის განტოლება იქნება (ცალმხრივი ბმა)

$$x^2 + y^2 + z^2 < R^2.$$

მაშასადამე, თუ რაიმე ზედაპირი, რომლის განტოლებაა $f(x,y,z)=0$, ზღუდავს წერტილის მოძრაობის არეს, მაშინ ბმის განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$f(x, y, z) \leq 0, \text{ ან}$$

$$f(x, y, z) \geq 0.$$

ბმას, რომელიც ცხადად არ არის დამოკიდებული მექანიკური სისტემის წერტილების სიჩქარეზე, ე.ი. არ ზღუდავს სიჩქარეს, ეწოდება გეომეტრიული (სოლონომური) ბმა. იგი გამოისახება ტოლობით: $f(x,y,z) = 0$.

ბმას, რომელიც დამოკიდებულია არა მარტო მექანიკური სისტემის წერტილების მდებარეობის კოორდინატებზე, არამედ, ამ წერტილების სიჩქარის კოორდინატებზეც ე.ი. ზღუდავს მათ სიჩქარეს, ეწოდება *კინემატიკური* (არასოლონომური) ბმა. მაგალითად: $f(x, y, z, x', y', z') = 0$.

თუ ბმა დროის განმავლობაში არ იცვლება, ე.ი. თუ ბმის განტოლებაში დრო ცხადად არ შედის, მაშინ ბმას ეწოდება *სტაციონარული* (სკლერონომური).

თუ ბმა დროის განმავლობაში იცვლება მოცემული სახით, ე.ი. თუ ბმის განტოლებაში დრო ცხადად შედის, მაშინ ბმას ეწოდება *არასტაციონარული* (რეონომური). ასეთია ბმა

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

VII აქსიომა. თავისუფალი ნივთიერი წერტილის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მასზე მოდებული ძალების ტოლქმედი იყოს ნულის ტოლი.

თუ ნივთიერი წერტილი წონასწორობაშია $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალების მოქმედებით, მაშინ

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0, \quad \text{ანუ} \quad \sum \vec{F}_k = 0$$

თავისუფალი ნივთიერი წერტილის წონასწორობის შემთხვევაში მასზე მოდებული ძალების მრავალკვერდი შეკრულია (ჩაკეტილია).

ვთქვათ მოცემულია *არათავისუფალი ნივთიერი წერტილი*, რომელიც წონასწორობაშია მასზე მოდებული აქტიური $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალების მოქმედებით. თუ წერტილზე დადებულ ბმას შევცვლით რეაქციის \vec{N} ძალით, მაშინ წერტილი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც თავისუფალი, რომელზეც მოქმედებენ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{N}$ ძალები.

მე-7 აქსიომის თანახმად ამ წერტილის წონასწორობისათვის უნდა შესრულდეს პირობა:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n + \vec{N} = 0, \quad \text{ანუ} \quad \sum \vec{F}_k + \vec{N} = 0.$$

მაშასადამე, არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ წერტილზე მოქმედი აქტიური ძალების და რეაქციის ძალის ჯამი იყოს ნულის ტოლი.

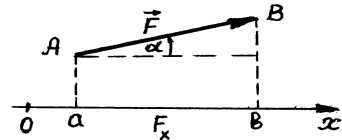
ნივთიერ წერტილთა (სხეულთა) სისტემის წონასწორობისათვის საჭიროა სისტემაში შემავალი თითოეული წერტილი (სხეული) იყოს წონასწორობაში.

§ 1. 4. ძალის გეგმილი ღერძზე და სიბრტყეზე. ძალის ანალიზური გამოსახვა

ჩვენ შემოვიღეთ ძალის ცნება. ძალა წარმოადგენს ვექტორს, რომელსაც გააჩნია მოდების წერტილი, სიდიდე და მიმართულება. ძალა შეიძლება მოცემული იყოს იმავე მეთოდით, როგორც განისაზღვრება ვექტორი. სახელობრ, საკოორდინატო ღერძებზე მისი გეგმილებით და ძალის მოდების წერტილის მდებარეობით.

სტატიკის ამოცანების ამოხსნის ანალიზური მეთოდი დამყარებულია ღერძზე ან სიბრტყეზე ძალის გეგმილის ცნებაზე.

ძალის გეგმილი ღერძზე სკალარული სიდიდეა, რომელიც უდრის ძალის სიდიდისა და ამ ძალის მიერ ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხის კოსინუსის ნამრავლს:



გეგმ_x $\vec{F} = F_x = X = ab = |\vec{F}| \cos \alpha$.

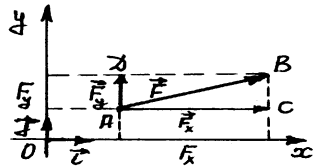
ნახ. 4.1

0xy სიბრტყეზე მოთავსებული

\vec{F} ძალა შეიძლება დავაგეგმილოთ საკოორდინატო 0x და 0y ღერძებზე (ნახ.4.2). მივიღებთ

გეგმ_x $\vec{F} = F_x = X = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, \hat{x})$);

გეგმ_y $\vec{F} = F_y = Y = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, \hat{y})$



ნახ. 4.2

ყოველი \vec{F} ძალა შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი მდგენელი ძალის ჯამი: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$,

(სადაც $\vec{F}_x = \vec{AC}$, $\vec{F}_y = \vec{AD}$).

\vec{F}_x და \vec{F}_y ძალები სიდიდით ტოლია საკოორდინატო ღერძებზე \vec{F} ძალის შესაბამისი გეგმილების აბსოლუტური მნიშვნელობებისა. ამასთანავე, თუ x და y ღერძების მგზავებია \vec{i} და \vec{j} ვექტორები, მაშინ

$\vec{F}_x = \vec{i} F_x = \vec{i} X$, $\vec{F}_y = \vec{j} F_y = \vec{j} Y$; ე.ი. $\vec{F} = \vec{i} X + \vec{j} Y$.

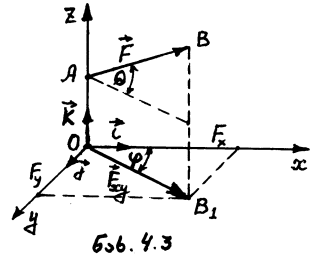
\vec{F} ძალის სიდიდე $|\vec{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

შემდგომში ერთმანეთისგან უნდა გავარჩიოთ ძალის გეგმილი ღერძზე და ძალის მდგენელი. ძალის გეგმილი ღერძზე - სკალარული სიდიდეა, ძალის მდგენელი - ვექტორული სიდიდე.

Oxyz სივრცეში A წერტილზე მოდებული \vec{F} ძალის დაგვემილება კოორდინატა Oxyz სისტემის ღერძებზე შეიძლება განვახორციელოთ

შემდგენიარად: \vec{F} ძალას ჯერ ვაგვემილებთ ერთ-ერთ საკოორდინატო ღერძზე (მაგალითად Oz ღერძზე).

შემდეგ, \vec{F} ძალას ვაგვემილებთ დანარჩენ ორ ღერძზე ორმაგი დაგვემილების წესით (ნახ. 4.3) : ჯერ ამ



ნახ. 4.3

ორი ღერძის შემცველ საკოორდინატო სიბრტყეზე (Oxy სიბრტყეზე), რომელიც ვექტორული სიდიდეა (რადგანაც ეს გვემილი ხასიათდება არა მართო სიდიდით, არამედ ამ სიბრტყეში მიმართულებითაც), ხოლო შემდეგ ამ ვექტორს ვაგვემილებთ სიბრტყეზე მდებარე საკოორდინატო Oxy სისტემის Ox და Oy ღერძებზე. ძალის გვემილი Oxy სიბრტყეზე აღნიშნოთ ორმაგი ინდექსით. გვექნება:

$$\text{გვემ}_{Oz} \vec{F} = |\vec{F}| \sin \theta,$$

$$\text{გვემ}_{Oxy} \vec{F} = \vec{F}_{xy}.$$

$$\text{სიდიდით } |\vec{F}_{xy}| = |\vec{F}| \cos \theta;$$

θ - კუთხეა \vec{F} ძალასა და Oxy სიბრტყეს შორის. φ -კუთხე \vec{F}_{xy} ვექტორსა და Ox ღერძს შორის

შემდეგ \vec{F}_{xy} ვექტორს ვაგვემილებთ Oxy სიბრტყეში მოთავსებულ კოორდინატა Ox და Oy ღერძებზე; ამ წესით დაგვემილების შედეგად საკოორდინატო ღერძებზე \vec{F} ძალის გვემილები იქნებიან:

$$X = F_x = \text{გვემ}_x \vec{F} = \text{გვემ}_x \vec{F}_{xy} = |\vec{F}_{xy}| \cdot \cos \varphi = |\vec{F}| \cos \theta \cdot \cos \varphi;$$

$$Y = F_y = \text{გვემ}_y \vec{F} = \text{გვემ}_y \vec{F}_{xy} = |\vec{F}_{xy}| \cdot \sin \varphi = |\vec{F}| \cos \theta \cdot \sin \varphi;$$

$$Z = F_z = \text{გვემ}_z \vec{F} = |\vec{F}| \sin \theta.$$

თუ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატა სისტემის ღერძების მგეზავებია ერთეულოვანი \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ვექტორები. მაშინ

$$\vec{F} = \vec{i} X + \vec{j} Y + \vec{k} Z.$$

\vec{F} ძალის სიდიდე გამოითვლება ფორმულით:

$$|\vec{F}| = F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

ხოლო \vec{F} -ის მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\text{Cos}(\vec{F}, \hat{x}) = \frac{X}{F}, \quad \text{Cos}(\vec{F}, \hat{y}) = \frac{Y}{F}, \quad \text{Cos}(\vec{F}, \hat{z}) = \frac{Z}{F}.$$

ძალის მიერ კოორდინატთა ღერძებთან შედგენილი კუთხეების კოსინუსები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\text{Cos}^2(\vec{F}, \hat{x}) + \text{Cos}^2(\vec{F}, \hat{y}) + \text{Cos}^2(\vec{F}, \hat{z}) = 1.$$

სამი კუთხიდან დამოუკიდებელია მხოლოდ ორი. ამიტომ სივრცეში მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე ძალის დაგეგმილების დროს მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ მხოლოდ ორი კუთხე (ჩვენს მიერ განხილულ შემთხვევაში ასეთი კუთხეებია θ და φ).

§ 1.5 თავმოყრილ ძალთა სისტემა. ტოლქმადის ანალიზური გამოსახვა

თ ა ვ მ ო ყ რ ი ლ ი ძ ა ლ ე ბ ი ე წ ო დებათ ისეთ ძალებს, რომელთა ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთებიან. ამ წერტილს ეწოდება თ ა ვ მ ო ყ რ ი ს ც ე ნ ტ რ ი .

თეორემა. *სხეულზე მოდებული თავმოყრილ ძალთა სისტემა ერთი ისეთი ძალის ტოლფასია, რომელიც ტოლია ყველა შემადგენელი ძალების გეომეტრიული ჯამისა და მოდებულია ამ ძალების თავმოყრის ცენტრში.*

დამტკიცება: ვთქვათ $Oxyz$ სივრცეში სხეულზე მოქმედებს ძალთა თავმოყრილი სისტემა $\vec{F}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{F}_2(X_2, Y_2, Z_2)$, ..., $\vec{F}_n(X_n, Y_n, Z_n)$. გავასრიალოთ ეს ძალები თავიანთი ფუძეების გასწვრივ და მოვდოთ მათი თავმოყრის A ცენტრში. მივიღებთ სივრცეში ერთ წერტილზე მოდებულ ძალთა სისტემას. მათი შეკრებით მივიღებთ ერთ $\vec{R}(X, Y, Z)$ ძალას



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \text{ანუ} \quad \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (5.1)$$

ამ \vec{R} ძალას ეწოდება *თავმოყრილი ძალების ტოლქმედი*. თავმოყრილი ძალების ტოლქმედი შემადგენელ ძალებზე აგებული ძალთა მრავალგვერდის ჩამკეტი ვექტორია.

ტოლქმედი გამოვსახოთ ანალიზურად.

ვექტორული ალგებრიდან ცნობილია, რომ *ვექტორთა ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე ტოლია იმავე ღერძზე შესაკრები ვექტორების გეგმილების ალგებრული ჯამისა*. ამიტომ, თუ (5.1) ტოლობას დავაგეგმილებთ საკოორდინატო ღერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, & \text{ანუ} & & X &= \sum_{k=1}^n X_k, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, & & & Y &= \sum_{k=1}^n Y_k, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, & & & Z &= \sum_{k=1}^n Z_k, \end{aligned} \quad (5.2)$$

აქ X , Y , Z წარმოადგენენ \vec{R} ტოლქმედის გეგმილებს. ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2 + (\sum Z_k)^2} \quad (5.3)$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{x}) = \frac{X}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \hat{y}) = \frac{Y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \hat{z}) = \frac{Z}{R}.$$

თუ მოცემულია სხეულზე Oxy სიბრტყეში მოქმედი თავმოყრილი ძალთა სისტემა $\vec{F}_1(X_1, Y_1), \vec{F}_2(X_2, Y_2), \dots, \vec{F}_n(X_n, Y_n)$, მაშინ (5.2) ტოლობები ასეთ სახეს მიიღებენ:

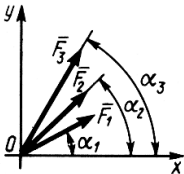
$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, & \text{ანუ} & & X &= \sum_{k=1}^n X_k, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, & & & Y &= \sum_{k=1}^n Y_k, \end{aligned} \quad (5.4)$$

აქ X , Y , წარმოადგენენ ტოლქმედის გეგმილებს. ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2} \quad (5.5)$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{x}) = \frac{X}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \hat{y}) = \frac{Y}{R}.$$

სამოცანა 1. განვსაზღვროთ $F_1 = 10$ ნ, $F_2 = 15$ ნ და $F_3 = 20$ ნ თავმოყრილი ძალების ტოლქმედის მოდულის სიდიდე, თუ ცნობილია ამ ძალების ვექტორების მიერ შედგენილი კუთხეები OX ღერძთან: $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 60^\circ$.



ამოხსნა. თავმოყრილი ძალების ტოლ-ქმედი ძალის განმარტების თანახმად:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

ეს ვექტორული ტოლობა დავაგვემართოთ საკოორდინატო ღერძებზე. ძალის ღერძზე გვემოდის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$X_1 = \text{გეპ}_{OX} \vec{F}_1 = F_1 \cos \alpha_1 = 10 \cos 30^\circ \approx 8,5;$$

$$X_2 = \text{გეპ}_{OX} \vec{F}_2 = F_2 \cos \alpha_2 = 15 \cos 45^\circ \approx 10,6;$$

$$X_3 = \text{გეპ}_{OX} \vec{F}_3 = F_3 \cos \alpha_3 = 20 \cos 60^\circ \approx 10;$$

$$Y_1 = \text{გეპ}_{OY} \vec{F}_1 = F_1 \cos(90 - \alpha_1) = 10 \cos 60^\circ = 5;$$

$$Y_2 = \text{გეპ}_{OY} \vec{F}_2 = F_2 \cos(90 - \alpha_2) = 15 \cos 45^\circ \approx 10,6;$$

$$Y_3 = \text{გეპ}_{OY} \vec{F}_3 = F_3 \cos(90 - \alpha_3) = 20 \cos 30^\circ \approx 17,3,$$

სადაც (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) და (X_3, Y_3) შესაბამისად $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ძალების გეგმილებია საკოორდინატო ღერძებზე.

თუ ტოლქმედი \vec{F} ძალის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე აღვნიშნავთ X და Y -ით, მაშინ

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = 8,5 + 10,6 + 10 \square 29,1$$

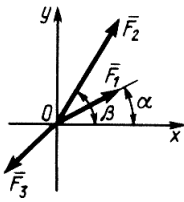
$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 5 + 10,6 + 17,3 \square 32,9$$

საბოლოოდ, ტოლქმედი ძალის სიდიდე ტოლია

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(29,1)^2 + (32,9)^2} \square 44.$$

პასუხი: 44 ნ.

პრობლემა 2.



მოდულით როგორც \vec{F}_3 ძალა უნდა მოვლეთ, თანამოყრდინელი $F_1 = 2$ ნ და $F_2 = 4$ ნ ძალებს, რომლებიც ox ღერძთან ადგენენ შესაბამისად $\alpha = 30^\circ$ და $\beta = 60^\circ$ კუთხეებს, ისე, რომ ამ სამი ძალის ტოლქმედი იყოს O -ის ტოლი.

ამოხსნა. პირობის თანახმად

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0.$$

თუ საკოორდინატო ღერძებზე \vec{F}_1 , \vec{F}_2 და \vec{F}_3 ძალების გეგმილებს აღვნიშნავთ (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) და (X_3, Y_3) - ით, მაშინ გვექნება

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0;$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0.$$

$$X_1 = \text{გეგმა}_{ox} \vec{F}_1 = F_1 \cos \alpha = 2 \cos 30^\circ \approx 1,7;$$

$$X_2 = \text{გეგმა}_{ox} \vec{F}_2 = F_2 \cos \beta = 4 \cos 60^\circ = 2;$$

$$Y_1 = \text{გეგმა}_{oy} \vec{F}_1 = F_1 \cos (90 - \alpha) = 2 \cos 60^\circ = 1;$$

$$Y_2 = \text{გეგმა}_{oy} \vec{F}_2 = F_2 \cos (90 - \beta) = 4 \cos 30^\circ \approx 3,4;$$

$$X_3 = -X_1 - X_2 = -1,7 - 2 = -3,7;$$

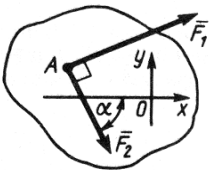
$$Y_3 = -Y_1 - Y_2 = -1 - 3,4 = -4,4.$$

საბოლოოდ, F_3 ძალის სიდიდის განსაზღვრავად გვექნება

$$F_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = \sqrt{(-3,7)^2 + (-4,4)^2} \approx 6.$$

პასუხი: 6 ნ.

პრობლემა 3. . მყარ სხეულზე A წერტილში მოქმედებს ორი $F_1 = 6$ ნ და $F_2 = 3$ ნ ძალა. მათი ფუძეები მდებარეობენ oxy სიბრტყეში. განვსაზღვროთ ამ ძალების გეგმილების ჯამი ox ღერძზე, თუ კუთხე $\alpha = 60^\circ$.



ამოხსნა. ვთქვათ \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების გეგმილები ox ღერძზე შესაბამისად ტოლია X_1 და X_2 -ის, მაშინ

$$X = X_1 + X_2$$

$$X_1 = \text{გეპოax} \vec{F}_1 = F_1 \cos(90^\circ - \alpha) = 6 \cos 30^\circ = 5,2;$$

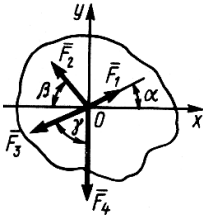
$$X_2 = \text{გეპოax} \vec{F}_2 = F_2 \cos \alpha = 3 \cos 60^\circ = 1,5.$$

საბოლოოდ, გვექნება

$$X = X_1 + X_2 = 5,2 + 1,5 = 6,7 \quad .$$

პასუხი: 6,7 ნ.

ამოცანა 4. მყარ სხეულზე O წერტილში მოქმედებს ბრტყელი თავმოყრილი ძალთა სისტემა $F_1 = 1$ ნ, $F_2 = 2$ ნ, $F_3 = 3$ ნ,



$F_4 = 4$ ნ. განესაზღვროთ ამ ძალების გეგმილების ჯამი oy ღერძზე, თუ მოცემულია $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

ამოხსნა. ვთქვათ მოცემული ძალების გეგმილები oy ღერძზე შესაბამისად ტოლია: Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 -ის, მაშინ

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$$

$$Y_1 = \text{გეპოoy} \vec{F}_1 = F_1 \cos(90^\circ - \alpha) = 1 \cos 60^\circ = 0,5;$$

$$Y_2 = \text{გეპოoy} \vec{F}_2 = F_2 \cos(90^\circ - \beta) = 2 \cos 45^\circ = 1,4;$$

$$Y_3 = \text{გეპოoy} \vec{F}_3 = F_3 \cos(180^\circ - \gamma) = 3 \cos 120^\circ = -1,5;$$

$$Y_4 = \text{გეპოoy} \vec{F}_4 = F_4 \cos 180^\circ = 4 \cos 180^\circ = -4.$$

საბოლოოდ, გვექნება

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0,5 + 1,4 - 1,5 - 4 = -3,6 \quad .$$

პასუხი: -3,6 ნ.

ამოცანა 5. მოცემული ბრტყელი თავმოყრილი ძალთა სისტემისათვის(6): $\vec{F}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{F}_2 = -6\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{F}_3 = \vec{i} - 8\vec{j}$.

განესაზღვროთ ტოლქმედი ძალის სიდიდე.

ამოხსნა. ვთქვათ, მოცემულ ძალთა სისტემის ტოლქმედია $\vec{F}(X, Y)$, მაშინ $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$. თანახმად ტოლქმედის განმარტების

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (3 - 6 + 1)\vec{i} + (4 + 2 - 8)\vec{j} = -2\vec{i} - 2\vec{j}.$$

აქედან გამომდინარე შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$X = -2; \quad Y = -2.$$

ტოლქმედი ძალის სიდიდე გამოითვლება ფორმულით:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \approx 2,8.$$

პასუხი: 2,8 ნ.

აშოცანა 6. მართკუთხა xyz კოორდინატთა სისტემის სა-თავეზე მოღებულია ორი $\vec{F}_1 = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k}$ და $\vec{F}_2 = -3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ძალა.

განვსაზღვროთ ტოლქმედი ძალის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შექმნილი კუთხეების კოსინუსები სდი-დე.

ამოხსნა. ვთქვათ, მოცემულ ძალთა სისტემის ტოლქმე-დია $\vec{F}(X, Y, Z)$, მაშინ $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$. თავმოყრილი ძალების ტოლქმედის განმარტების თანახმად

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (5-3)\vec{i} + (7-2)\vec{j} + (9-3)\vec{k} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k} \text{ აქედან}$$

გამომდინარე შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$X = 2; \quad Y = 5; \quad Z = 6.$$

ტოლქმედი ძალის სიდიდე გამოითვლება ფორმულით:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{4 + 25 + 36} = \sqrt{65} \approx 8,1.$$

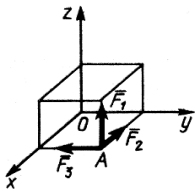
მიმართულების კოსინუსებისათვის გვექნება

$$\cos(\vec{F}, \vec{i}) = \frac{X}{F} \approx 0,2467,$$

$$\cos(\vec{F}, \vec{j}) = \frac{Y}{F} \approx 0,6173,$$

$$\cos(\vec{F}, \vec{k}) = \frac{Z}{F} \approx 0,7407.$$

აშოცანა 7. განვსაზღვროთ $F_1 = 12$ ნ, $F_2 = 10$ ნ და $F_3 = 9$ ნ ძალების ტოლქმედის სიდიდე. რომლებიც მოღებულია A წერტილში ისე, როგორც ეს ნახვენებია ნახაზზე



ამოხსნა. თუ ტოლქმედი ძალისა და მოცემული ძალების საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილები შესა-ბამისად ტოლია

$$\vec{F}(X, Y, Z), \vec{F}_1(X_1, Y_1, Z_1), \vec{F}_2(X_2, Y_2, Z_2), \vec{F}_3(X_3, Y_3, Z_3)$$

მაშინ

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

და

$$X = X_1 + X_2 + X_3;$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3;$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3.$$

$$X_1 = \text{გპპ}_{\text{ox}} \vec{F}_1 = 0, \quad Y_1 = \text{გპპ}_{\text{oy}} \vec{F}_1 = 0, \quad Z_1 = \text{გპპ}_{\text{oz}} \vec{F}_1 = F_1 \cos 90^\circ = 12 \quad ;$$

$$X_2 = \text{გპპ}_{\text{ox}} \vec{F}_2 = F_2 \cos 180^\circ = -10, \quad Y_2 = \text{გპპ}_{\text{oy}} \vec{F}_2 = 0, \quad Z_2 = \text{გპპ}_{\text{oz}} \vec{F}_2 = 0;$$

$$X_3 = \text{გპპ}_{\text{ox}} \vec{F}_3 = 0, \quad Y_3 = \text{გპპ}_{\text{oy}} \vec{F}_3 = F_3 \cos 180^\circ = -9, \quad Z_3 = \text{გპპ}_{\text{oz}} \vec{F}_3 = 0.$$

$$X = 0 - 10 + 0 = -10,$$

$$Y = 0 + 0 - 9 = -9,$$

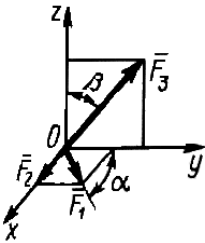
$$Z = 12 + 0 + 0 = 12.$$

ტოლქმედი ძალის სიდიდე იქნება:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{100 + 81 + 144} \approx 18$$

პასუხი. 18 ნ.

სამოცანა 8. განესაზღვროთ სივრცეში თავმოყრილი $F_1 = 15$ ნ, $F_2 = 20$ ნ და $F_3 = 25$ ნ ძალების ტოლქმედის მოღუდი, თუ \vec{F}_1 და \vec{F}_3 ძალების ფუძეების მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები, შესაბამისად ტოლია $\alpha = 60^\circ$ და $\beta = 45^\circ$.



ამოხსნა. ტოლქმედი ძალისა და სის-ტემაში შემავალი ძალების გვემიღები შესაბამისად აღვნიშნოთ

$$\vec{F}(X, Y, Z), \vec{F}_1(X_1, Y_1, Z_1), \vec{F}_2(X_2, Y_2, Z_2), \vec{F}_3(X_3, Y_3, Z_3) \text{ --ით.}$$

ტოლქმედი ძალის განმარტების თანახმად

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

შესაბამისად გვექნება

$$X = X_1 + X_2 + X_3; Y = Y_1 + Y_2 + Y_3; Z = Z_1 + Z_2 + Z_3.$$

$$X_1 = \text{გეგ } {}_{ox} \vec{F}_1 = F_1 \cos(90^\circ - \alpha) = 15 \cos 30^\circ \approx 12,8;$$

$$Y_1 = \text{გეგ } {}_{oy} \vec{F}_1 = F_1 \cos \alpha = 15 \cos 60^\circ = 7,5;$$

$$Z_1 = \text{გეგ } {}_{oz} \vec{F}_1 = 0;$$

$$X_2 = \text{გეგ } {}_{ox} \vec{F}_2 = F_2 \cos 90^\circ = 20;$$

$$Y_2 = \text{გეგ } {}_{oy} \vec{F}_2 = 0; \quad Z_2 = \text{გეგ } {}_{oz} \vec{F}_2 = 0;$$

$$X_3 = \text{გეგ } {}_{ox} \vec{F}_3 = 0;$$

$$Y_3 = \text{გეგ } {}_{oy} \vec{F}_3 = F_3 \cos(90^\circ - \beta) = 25 \cos 45^\circ \approx 17,5;$$

$$Z_3 = \text{გეგ } {}_{oz} \vec{F}_3 = F_3 \cos \beta = 25 \cos 45^\circ = 17,5;$$

$$X = 12,8 + 20 + 0 = 32,8;$$

$$Y = 7,5 + 0 + 17,5 = 25;$$

$$Z = 0 + 0 + 17,5 = 17,5.$$

ტოლქმედი ძალის სიდიდე იქნება:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(32,8)^2 + 25^2 + (17,5)^2} \approx 44,8$$

პასუხი. 44,8 ნ.

§1.6. თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობა

თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათი ტოლქმედი ნულის ტოლი იყოს: $\vec{R} = 0$. ეს პირობა შეიძლება გამოვხატოთ ორი ფორმით:

1. გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ თავმოყრილ ძალებზე აგებული ძალთა მრავალგვერდი ჩაკეტილი უნდა იყოს;

2. $Oxyz$ სივრცეში თავმოყრილი ძალთა სისტემის წონასწორობის ანალიზური პირობა გვაძლევს:

$$|\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2 + (\sum Z_k)^2} = 0,$$

საიდანაც $X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$

ანუ $\sum_{k=1}^n X_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n Y_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n Z_k = 0.$

(6.1)

ეს განტოლებები წარმოადგენენ თავმოყრილი ძალების წონასწორობის განტოლებებს სივრცეში.

Oxy სიბრტყეში თავმოყრილი ძალთა სისტემის წონასწორობის ანალიზური პირობა ასეთია:

$$|\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2} = 0,$$

საიდანაც $X = 0, \quad Y = 0,$

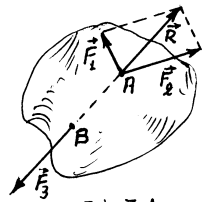
ანუ $\sum_{k=1}^n X_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n Y_k = 0,$

(6.2)

ეს განტოლებები წარმოადგენენ თავმოყრილი ძალების წონასწორობის განტოლებებს სიბრტყეზე.

მაშასადამე, თავმოყრილი ძალების წონასწორობის ათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყველა ძალის გეგმილების ალგებრული ჯამი თითოეულ საკოორდინატო ღერძზე იყოს ნულის ტოლი.

სამი ძალის თეორემა : *თუ სხეული წონასწორობაშია სამი ძალის მოქმედებით და ორი მათგანის ფუძე იკვეთება ერთ წერტილში, მაშინ მესამე ძალის ფუძეც ვაივლის იმავე წერტილში.*



ნახ. 7.1

დამტკიცება: ვთქვათ წონასწორობაში მყოფ

მყარ სხეულზე მოქმედებს სამი ძალა $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3.$

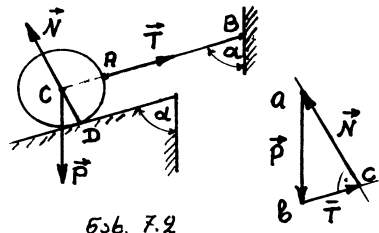
მაშინ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim 0$; ამასთანავე \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების ფუძეები იკვეთებიან ერთ A წერტილში. შევკრიბოთ ეს \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$ (\vec{R} ძალა მოდებულია A წერტილში). გვექნება: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{R}, \vec{F}_3) \sim 0.$

მივიღეთ, რომ სხეული წონასწორობაში აღმოჩნდა ორი ძალის მოქმედებით. I აქსიომის შედეგიდან გამოდინარე ასეთი ძალები

პირდაპირთანაწინააღმდეგი ძალებია. ამიტომ, \vec{R} და \vec{F}_3 ძალები მდებარეობენ ერთ ფუძეზე; ე.ი. \vec{F}_3 ძალის ფუძეც გადის A წერტილში რადგანაც ეს სამი ძალა წონასწორობაშია, მათი გეომეტრიული შეკრებისას ვიღებთ ძალთა ჩაკეტილ სამკუთხედს. მაშასადამე, სამივე ძალა ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული.

შენიშვნა. ეს თეორემა წარმოადგენს წონასწორობის მხოლოდ აუცილებელ პირობას, მაგრამ არა საკმარისს, ვინაიდან ცხადია, რომ ერთ სიბრტყეში მდებარე და ერთ წერტილში გადაკვეთი არა ყოველი სამი ძალა იქნება წონასწორობაში.

ამოცანა 1. $P = 12$ ნ წონის ერთგვაროვანი სფერო შეკავებულია წონასწორობაში ვერტიკალისადმი $\alpha = 60^\circ$ კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე AB თოკის საშუალებით. განსაზღვრეთ სფეროს წნევა სიბრტყეზე და თოკის დაჭიმულობა, თუ AB თოკი სიბრტყის პარალელურია.



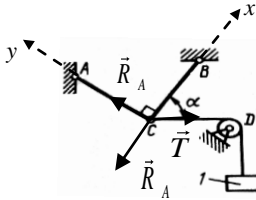
ნახ. 7.2

ამოსნა. ვიხილავთ სფეროს წონასწორობას. მასზე

მოქმედებს სიმძიმის \vec{P} ძალა, მოდებული სფეროს C ცენტრში და მიმართული ვერტიკალურად ქვევით; გლუვი სიბრტყის რეაქციის \vec{N} ძალა, რომელიც სიბრტყეზე სფეროს წნევის ტოლია, მოდებულია შეხების D წერტილში და მიმართულია სიბრტყის მართობულად (გადის სფეროს ცენტრში); აგრეთვე მოქმედებს თოკის დაჭიმულობის \vec{T} ძალა, მიმართული თოკის გასწვრივ. გვაქვს თავმოყრილ ძალთა სისტემა, რომლებიც მოთავსებული არიან ერთ სიბრტყეში და თავს იყრიან C წერტილში. ე.ი. სფერო წონასწორობაშია C წერტილში თავმოყრილი სამი ძალის მოქმედებით. ავაგოთ ძალთა abc სამკუთხედი. აგება იწყება ცნობილი P ძალით. რაიმე a წერტილიდან გარკვეული მასშტაბით ავაგოთ \vec{P} ძალის ტოლი ab ვექტორი. შემდეგ მის საწყის და ბოლო წერტილებზე გაავალოთ \vec{N} და \vec{T} ძალების პარალელური წრფეები. მათი გადაკვეთით მივიღებთ ძალთა ჩაკეტილ abc სამკუთხედს, რომელშიც $b\bar{c}$ ვექტორის სიგრძე \vec{T} ძალის სიდიდის ტოლია, ხოლო $c\bar{a}$ ვექტორის სიგრძე \vec{N} ძალის სიდიდის ტოლი. ეს სამკუთხედი მართკუთხაა $\angle acb = 90^\circ$, ($\vec{T} \perp \vec{N}$). ამასთანავე, $\angle abc = (\vec{P}, \vec{N}) = \alpha$. ამ სამკუთხედიდან $N = P \sin \alpha = 10,38$ ნ.

$$T = P \cos \alpha = 6 \text{ ნ} .$$

ამოცანა 2: AC და BC ღეროები C წერტილში შეერთებულია სახსრულად. C სახსარ-თან მიერთებული და D ბლოკზე გადაკიდებული თოკის ბოლოზე ჩამოკიდებულია 125 წონის 1 ტვირთი. განვსაზღვროთ AB და BC ღეროს რეაქცია, თუ კუთხე $\alpha = 60^\circ$.

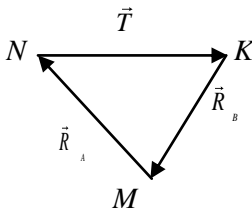


ამოხსნა. განვიხილოთ C წერტილზე მოდებული თავ-მოყრილ ძალთა სისტემა, რომელთაგან \vec{R}_A და \vec{R}_B -

ღეროებში აღძრული რეაქციის ძალებია, ხოლო \vec{T} - თოკის დაჭიმულობის ძალა, რომელიც სიდიდით ტვირთის P წონის ტოლია.

ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ამოხსნის გეომეტრიული და ანალიზური ხერხი.

1) ამოხსნის გეომეტრიული ხერხი: ამოცანაში წონასწორობის ობიექტია c კვანძი. ყველა ამ ძალის ფუძე იკვეთება c წერტილში და იმყოფება წონასწორობაში.



მაშასადამე, ვაკვავს წონასწორობაში მყოფი თავმოყრილი ძალთა სისტემა, ამიტომ ძალთა სამკუთხედი უნდა იყოს ჩაკეტილი. ავაგოთ ეს სამკუთხედი. ეს სამკუთხედი - მართკუთხა, სადაც ცნობილია α მახვილი კუთხე და პიპოტენუზა: $NK = |\vec{T}| = P = 12$.

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$R_A = T \sin \alpha = 12 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \approx 10,2$$

$$R_B = T \cos \alpha = 12 \cos 60^\circ = 6.$$

2) ამოხსნის ანალიზური ხერხი: დავწეროთ C წერტილზე მოდებულ თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობის ვექტორული განტოლება:

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} = 0.$$

ვინაიდან $CA \perp CB$, ამიტომ კოორდინატთა სისტემის სათავე შევარჩიოთ c წერტილში და cx ღერძი მივმართოთ cB -ს გასწვრივ, ხოლო cy ღერძი $-cA$ - ს გასწვრივ. წონასწორობის ვექტორული ტოლობა დავაგეგმილოთ ამ ღერძებზე. ვექნება:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 X_k = 0; & T \cos \alpha + R_A \cos 90^\circ + R_B \cos 180^\circ = 0, & (1) \\ \sum_{n=1}^3 Y_k = 0; & T \cos(90^\circ + \alpha) + R_A \cos 90^\circ + R_B \cos 90^\circ = 0. & (2) \end{cases}$$

(1) განტოლებიდან მივიღებთ

$$T \cos 60^\circ + 0 - R_B = 0, \Rightarrow R_B = 12 \cos 60^\circ = 6 \text{ (6)}.$$

(2) განტოლებიდან მივიღებთ

$$-T \sin \alpha + R_A + 0 = 0, \Rightarrow R_A = T \sin \alpha = 12 \sin 60^\circ \approx 10,2 \text{ (6)}.$$

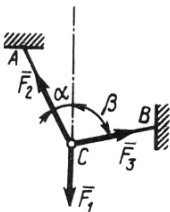
პასუხი:

$$R_A = 10,2 \text{ ნ},$$

$$R_B = 6 \text{ ნ}.$$

ამოცანა 3. განვსაზღვროთ BC ბაგირის დაჭიმულობის \vec{F}_3

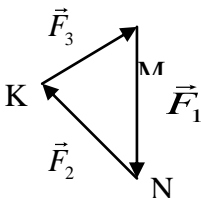
ძალისა და \vec{F}_1 ძალის სიდიდე, თუ ცნობილია, რომ AC ბაგირის დაჭიმულობის ძალა $F_2 = 15 \text{ ნ}$. წონასწორობის მდგომარეობაში კუთხეები $\alpha = 30^\circ$ და $\beta = 75^\circ$.



ამოხსნა. განვიხილოთ c კვანძი, როგორც წონასწორობის ობიექტი.

C წერტილი ემორჩილება ბმებს, რომლებიც განხორციელებულია AC და BC ბაგირების საშუალებით, ხოლო მათში აღძრული ძალებია \vec{F}_2 და \vec{F}_3 . ვიხილავთ C წერტილში მოდებულ თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობას.

ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ამოხსნის გეომეტრიული ხერხი. ამისათვის ავაგოთ ძალთა სამკუთხედი და დავაკავშიროთ მასთან α და β



კუთხეები. ამოვიყენოთ სინუსების თეორემა. თუ
გავითვალისწინოთ, რომ

$$\angle K = 180^\circ - (\alpha + \beta), \quad \text{მაშინ} \quad \text{გვე-}$$

$$\text{ქნება: } \frac{F_1}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \alpha};$$

ამ თანაფარდობიდან ვღებულობთ:

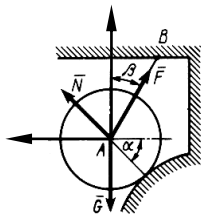
$$\frac{F_1}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{F_2}{\sin \beta};$$

$$F_1 = \frac{F_2 \sin(180^\circ - (\alpha + \beta))}{\sin \beta} = \frac{15 \sin 75^\circ}{\sin 75^\circ} = 15;$$

$$\frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \alpha}; \quad F_3 = \frac{F_2 \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{15 \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 7,8;$$

პასუხი: $F_1 = 15 \text{ ნ.}, \quad F_3 \approx 7,8 \text{ ნ.}$

ამოცანა 4. \vec{G} წონის ცილინდრი წონასწორობაში შეკავებულია AB თოკის საშუალებით. საყრდენი ზედაპირის ნორმალური რეაქცია $N = 40 \text{ ნ.}$ განვსაზღვროთ თოკის \vec{F} დაჭიმულობა და ცილინდრის \vec{G} წონა, თუ ცნობილია კუთხეები $\alpha = 45^\circ$ და $\beta = 30^\circ$.



ამოსხნა. ვიხილავთ ცილინდრის წონასწორობას. ზედაპირის ნორმალური რეაქციის ძალის და თოკის დაჭიმულობის ძალის ფუძეები გადიან ცილინდრის A ცენტრში. A წერტილში მოდებულია ერთ სიბრტყეში მდებარე თავმოყრილი \vec{F} , \vec{N} და \vec{G} ძალების სისტემა. გამოვიყენოთ ამოცანის ამოსხნის ანალიზური ხერხი.

დავწეროთ A წერტილზე მოქმედი თავმოყრილ \vec{F} , \vec{N} და \vec{G} ძალთა სისტემის წონასწორობის ვექტორული განტოლება:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} = \vec{0}. \quad (1)$$

კოორდინატთა სისტემის სათავე ავირჩიოთ A წერტილში და დერძები მივმართოთ ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე.

წონასწორობის ვექტორული განტოლება დავაგეგმილოთ საკოორდინატო Ax და Ay ღერძებზე, გვექნება:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 X_k = 0; & N \cos \alpha + F \cos(90^\circ + \alpha) + G \cos 90^\circ = 0, & (2) \\ \sum_{k=1}^3 Y_k = 0; & N \cos(90^\circ - \alpha) + F \cos \beta + G \cos 180^\circ = 0. & (3) \end{cases}$$

სისტემის მეორე განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$N \cos 45^\circ - F \sin 30^\circ + 0 = 0.$$

აქედან

$$F = \frac{N \cos 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{40 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 56,6 \text{ (6)}.$$

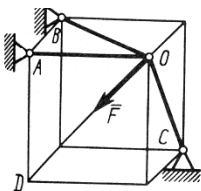
ანალოგიურად მეორე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$N \sin 45^\circ + F \cos 30^\circ - G = 0,$$

$$G = N \sin 45^\circ + F \cos 30^\circ = 40 \frac{\sqrt{2}}{2} + 40 \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 77,3 \text{ (6)}$$

პასუხი: $F = 56,6 \text{ (6)}$; $G = 77,3 \text{ (6)}$.

ამოცანა 5. AO , BO და CO ღეროები სახსრულადაა შეერთებული O წერტილში. განესაზღვროთ CO ღეროს რეაქცია. თუ O სახსარზე მოქმედებს $F = 125$ ძალა $AB = AO = AD$.



ამოხსნა:

გამოთვლების გასამარტივებლად ვიგულისხმობთ, რომ სამივე ღერო გაჭიმულია და ძალები მიემართოთ O წერტილიდან ღეროების გასწვრივ A , B და C წერტილები-საკენ. მივიღებთ O წერტილზე მოდებულ თავმოყრილ ძა-ლთა სისტემას. დავწეროთ წონასწორობის განტოლება

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{F} = 0$$

და დავაგეგმილოთ იგი ჩვენს მიერ წინასწარ არჩეულ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე. ვითვალისწინებთ იმასაც, რომ

მოცემულობის თანახმად O წერტილი წარმოადგენს კუბის წვეროს:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 X_k = 0; & S_1 \cos 90^\circ + S_2 \cos 45^\circ + S_3 \sin 45^\circ + F \cos 90^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^3 Y_k = 0; & S_1 \cos 90^\circ + S_2 \sin 45^\circ + S_3 \cos 90^\circ + F \cos 45^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^3 Z_k = 0; & S_1 \cos 90^\circ + S_2 \cos 90^\circ + S_3 \cos 45^\circ + F \sin 45^\circ = 0, \end{cases}$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{cases} S_2 + S_3 = 0; & (1) \\ S_1 + S_2 \sin 45^\circ + F \cos 45^\circ = 0; & (2) \\ S_3 + F = 0. & (3) \end{cases}$$

მესამე განტოლებიდან: $S_3 = -F = -12$ ნ;

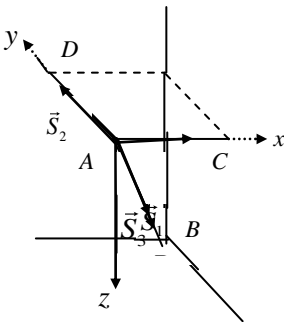
პირველი განტოლებიდან: $S_2 = -S_3 = 12$ ნ.

მეორე განტოლებიდან:

$$S_1 = -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F \frac{\sqrt{2}}{2} = -24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -12\sqrt{2} \text{ ნ.}$$

მიღებული შედეგებიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ AO და CO ღეროები შეკუმშულია.

აშოცანა 6. იპოვეთ ძალვა AB ღეროში და AC და AD ჯაჭვებში, რომლებითაც შეკავებულია 42 ნ წონის Q ტვირთი, თუ $AB = 145$ სმ, $AC = 80$ სმ, $AD = 60$ სმ.



ძალვები მიმართულია A წერტილიდან

$CADE$ მართკუთხედის სიბრტყე პერიზონტალურია, ხოლო V და W სიბრტყეები ვერტიკალური. B წერტილში ჩამაგრება სახსრულია.

ამოხსნა: განვიხილოთ A წერტილის წონასწორობა. მასზე მოქმედებს ტვირთით გამოწვეული Q ძალა. აგრეთვე, AB ღეროსა და AC და AD ჯაჭვებში აღძრული ძალები. ვუღლისხმობთ, რომ ჯაჭვები და ღერო იმყოფება გაჭიმულ მდგომარეობაში და

B , D და C წერტილებისაკენ. დავწეროთ წონასწორობის ვექტორული განტოლება:

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{Q} = 0.$$

ეს ვექტორული ტოლობა დავაგეგმილოთ ჩვენს მიერ წინ-ასწარ არჩეულ კოორდინატთა სისტემის დერძებზე. გვექნება:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 X_k = 0; & S_1 \cos 0^\circ + S_2 \cos 90^\circ + S_3 \sin \alpha \sin \beta + Q \cos 90^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^3 Y_k = 0; & S_1 \cos 90^\circ + S_2 \cos 0^\circ + S_3 \cos \alpha \sin \beta + Q \cos 90^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^3 Z_k = 0; & S_1 \cos 90^\circ + S_2 \cos 90^\circ + S_3 \cos \beta + Q \cos 90^\circ = 0. \end{cases}$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{cases} S_1 + S_3 \sin \alpha \sin \beta = 0; & (1) \\ S_2 + S_3 \cos \alpha \sin \beta = 0; & (2) \\ S_3 \cos \beta + Q = 0. & (3) \end{cases}$$

გამოვთვალოთ: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \beta$ და $\cos \beta$. ! AED – ში

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100.$$

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AE} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}; \quad \sin \alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5};$$

! AEB – ში

$$\sin \beta = \frac{AE}{AB} = \frac{100}{145} = \frac{20}{29}.$$

ამის გათვალისწინებით გვექნება:

$$S_3 = -\frac{Q}{\cos \beta} = -42 \cdot \frac{29}{41} = 6;$$

$$S_1 = -S_3 \sin \alpha \sin \beta = - \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{4}{5} = 6;$$

$$S_2 = -S_3 \cos \alpha \sin \beta = - \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{3}{5} = 6;$$

მიღებული შედეგებიდან გამომდინარე შეიძლება ვთქვათ, რომ **AC** ჯაჭვი შეკუმშულია.

ძალის მომენტი

§ 1. 7.. ძალის მომენტი წერტილის მიმართ

ძალთა ნებისმიერი სისტემის შესწავლისას მნიშვნელოვან ცნებას წარმოადგენს ძალის მომენტის ცნება.

მყარ სხეულზე მოქმედმა ძალამ შეიძლება გამოიწვიოს ამ სხეულის ბრუნვითი მოძრაობა რომელიმე წერტილის გარშემო. სხეულზე მოქმედი ძალის მახრუნებელი ეფექტის დასახასიათებლად შემოაქვთ *ძალის მომენტის ცნება*.

მექანიკაში წერტილის მიმართ ძალის მომენტის ცნება შემოიღო იტალიელმა მეცნიერმა და მხატვარმა *ლეონარდო და ვინჩი* (1452 - 1519).

ვთქვათ სხეულის A წერტილზე მოქმედებს \vec{F} ძალა, რომელიც ამ სხეულს შემოაბრუნებს O წერტილის გარშემო. O წერტილს უწოდოთ *მომენტის ცენტრი*. O ცენტრიდან \vec{F} ძალის ფუძეზე დაშვებულ OD მართობს უწოდოთ O ცენტრის მიმართ \vec{F} *ძალის მხარი*. მისი სიგრძე იყოს $h = OD$

ბანსაზღვრა. \vec{F} ძალის სკალარული მომენტი O ცენტრის მიმართ ეწოდება \vec{F} ძალის სიდიდისა და h მხარის ნამრავლს აღებული " + " ან " - " ნიშნით.

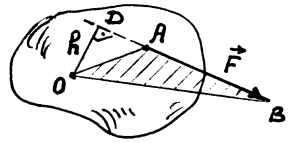
\vec{F} ძალის სკალარული მომენტს M_0 ცენტრის მიმართ ასე აღვნიშნავთ

$$M_0 = \text{მომ}_0 \vec{F} = \pm |\vec{F}| \cdot h. \quad (7.1)$$

შევთანხმდეთ, რომ "+" ნიშანი აიღება იმ შემთხვევაში თუ \vec{F} ძალა O წერტილს გარშემოვლის საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით; ვუწოდოთ მას დადებითი მიმართულება. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიღებთ "-" ნიშანს.

როგორც განმარტებიდან და ნახაზიდან ჩანს (ნახ. 8.1) :

ა) ძალის სკალარული მომენტი O ცენტრის მიმართ არ შეიცვლება, თუ ამ ძალის მოდების წერტილს გადავიტანთ მისი ფუძის გასწვრივ სხეულის სხვა რომელიმე წერტილში;



ნახ. 8.1

ბ) \vec{F} ძალის სკალარული მომენტი 0 ცენტრის მიმართ სიდიდით უდრის ამ ძალაზე და 0 ცენტრზე აგებული სამკუთხედის გაორკეცებულ ფართობს:

$$|\vec{L}_0| = |\text{მომ}_0 \vec{F}| = 2 \text{ ფ}(\Delta AOB); \quad (7.2)$$

გ) ძალის მომენტი რაიმე ცენტრის მიმართ ნული ტოლია, თუ ამ ძალის ფუძე გადის მომენტის ცენტრზე ($h=0$).

განსაზღვრიდან ჩანს, რომ ძალის მომენტი 0 ცენტრის მიმართ ხასიათდება სიდიდით, ბრუნვის მიმართულებით და იმ სიბრტყით, რომელშიც ეს ძალა და 0 ცენტრი მდებარეობს. ყოველივე ამის დასახასიათებლად შემოვიღოთ ძალის ვექტორული მომენტის ცნება:

განსაზღვრა. \vec{F} ძალის ვექტორული მომენტი 0 ცენტრის მიმართ ეწოდება ისეთ

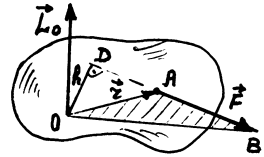
\vec{L}_0 ვექტორს, რომელიც 1) სიდიდით

\vec{F} ძალის სიდიდისა და h მხარის ნამრავლის ტოლია

$|\vec{L}_0| = |\vec{F}| h$, 2) მოდებულია 0

ცენტრზე და 3) მიმართულია \vec{F} ძალაზე და 0 ცენტრზე

გამავალი სიბრტყის მართობულად ისე, რომ \vec{F} ძალა \vec{L}_0 ვექტორს უვლის დადებითი მიმართულებით.



ნახ. 8.2

თუ \vec{F} ძალის მოდების A წერტილი 0 ცენტრის მიმართ განისაზღვრება \vec{r} რადიუს-ვექტორით, მაშინ სამართლიანია დამოკიდებულება (ნახ. 8.2)

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \quad (7.3)$$

მართლაც, ამ ვექტორული ნამრავლის სიდიდეა

$$|\vec{L}_0| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin(\vec{r}, \hat{\vec{F}})$$

მაშასადამე, ძალის ვექტორული მომენტი რაიმე ცენტრის მიმართ განიხილება, როგორც ამ ცენტრის მიმართ ძალის მოდების წერტილის რადიუს-ვექტორის და ძალის ვექტორის ვექტორული ნამრავლი.

განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ $|\vec{L}_0| = |L_0| = 2 \text{ ფ}(\Delta AOB)$.

1.8. აკლის მომენტი ღერძის მიმართ

ძალის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ ახასიათებს მახრუნებელ ეფექტს, რომელსაც ქმნის ძალა, რათა შემოაბრუნოს სხეული ამ ღერძის გარშემო.

განვიხილოთ სხეული, რომელიც A წერტილზე მოდებული \vec{F} ძალის მოქმედებით ბრუნავს Oz ღერძის გარშემო. ვგულისხმობთ, რომ \vec{F} ძალა და Oz ღერძი ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ.

დავშალოთ \vec{F} ძალა ორ მდგენელად:

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, რომელთაგან \vec{F}_1 არის Oz ღერძის მართობული, ხოლო \vec{F}_2 არის Oz ღერძის პარალელური

$$(\vec{F}_1 \perp Oz, \vec{F}_2 \parallel Oz; \text{ნახ. 10}).$$

ცხადია \vec{F}_2 ძალას არ შეუძლია სხეულის მობრუნება Oz ღერძის გარშემო.

ამიტომ Oz ღერძის გარშემო \vec{F} ძალის მახრუნებელი ეფექტი მთლიანად ემთხვევა მისი \vec{F}_1 მდგენელის მახრუნებელ ეფექტს, ე. ი.

$$\text{მომ}_Z \vec{F} = \text{მომ}_Z \vec{F}_1.$$

\vec{F}_1 წარმოადგენს \vec{F} ძალის გეგმილს Oz ღერძის მართობულად გავლებულ (S) სიბრტყეზე. ამის გამო შეგვიძლია შემოვიღოთ

ბანსაზღვრა. \vec{F} ძალის მომენტი Oz ღერძის მიმართ ეწოდება ამ ღერძის მართობულ S სიბრტყეზე მოცემული ძალის გეგმილის სკალარულ მომენტს ღერძისა და სიბრტყის გადაკვეთის O წერტილის მიმართ.

თუ მოცემული \vec{F} ძალის მომენტს Oz ღერძის მიმართ აღვნიშნავთ L_Z -ით, გვექნება

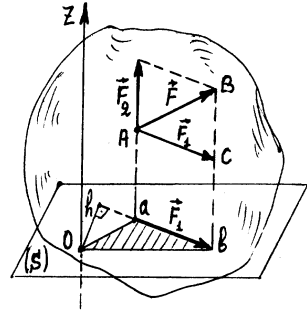
$$L_Z = \text{მომ}_Z \vec{F} = \text{მომ}_O \vec{F}_1, \text{ სადაც } \vec{F}_1 = \text{გეგმ}_S \vec{F}.$$

ანუ

$$L_Z = \pm |\vec{F}| \cdot h = \pm 2 \text{ ფ} (\Delta Oab) \quad (8.1)$$

მომენტის ნიშანი აიღება იმის მიხედვით თუ როგორ შემოუკვლის \vec{F}_1 მდგენელი O წერტილს.

განსაზღვრიდან ჩანს, რომ ძალის მომენტი ღერძის მიმართ არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ ღერძის რომელ წერტილში გავაკვებთ მისდამი მართობულ S სიბრტყეს, ე.ი. არ არის დამოკიდებული Z ღერძზე O წერტილის არჩევაზე.



ნახ. 10

ღერძის მიმართ ძალის მომენტის განსაზღვრიდან და (8.1) ტოლობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ღერძის მიმართ ძალის მომენტი ნულის ტოლია, ანუ ძალა სხეულს ღერძის გარშემო ვერ შემობრუნებს, თუ ძალის ფუძე და ღერძი ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ, ე.ი. როცა: ა) ძალის ფუძე ღერძის პარალელურია; ბ) ძალის ფუძე ღერძს კვეთს; გ) თვით ძალა არის ნულის ტოლი.

\vec{F} ძალის მომენტი OZ ღერძის მიმართ არ უდრის ნულს, თუ \vec{F} ძალის ფუძე და OZ ღერძი აკადენილი წრფეებია.

§1.9. დამოკიდებულება ძალის ვექტორულ მომენტსა და ღერძის მიმართ მომენტს შორის

ვთქვათ სივრცეში მოცემული გვაქვს სხეულის A წერტილზე მოდებული \vec{F} ძალა და Oz ღერძი. გავავლოთ ღერძის რომელიმე O_1 წერტილზე მისდამი მართობული (S) სიბრტყე (ნახ. 11). ვთქვათ \vec{F}_1 გვემს \vec{F} . როგორც ცნობილია

$$L_z = \text{მომ}_z \vec{F} = \text{მომ}_{O_1} \vec{F}_1 = 2 \text{ფ}(\Delta O_1 a b). \quad (9.1)$$

ავილოთ ღერძზე ნებისმიერი O წერტილი. \vec{F} ძალის ვექტორული მომენტი O ცენტრის მიმართ იქნება

$$\vec{L}_0 = \text{მომ}_0 \vec{F} = O\vec{A} \times$$

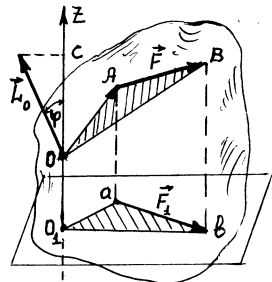
\vec{F} .

\vec{L}_0 მოდებულია O ცენტრზე და მართობულია OAB სამკუთხედის სიბრტყისა, მიმართული დადებითად. \vec{L}_0 -ის სიდიდეა

$$|\vec{L}_0| = 2 \text{ფ}(\Delta OAB)$$

(9.2)

რადგანაც $\vec{L}_0 \perp \Delta OAB$ და $z \perp \Delta O_1 a b$, ამიტომ თუ \vec{L}_0 და z ღერძი ერთმანეთთან ადგენენ φ კუთხეს, მაშინ ΔOAB -სა და $\Delta O_1 a b$ -ს სიბრტყეებს შორის კუთხეც იქნება φ . თავის მხრივ $O_1 a b$ სამკუთხედი



ნახ. 11

წარმოადგენს OAB სამკუთხედის ორთოგონალურ გეგმილს S სიბრტყეზე და როგორც გეომეტრიიდან ცნობილია ბრტყელი ფიგურის გეგმილის ფართობი რაიმე სიბრტყეზე უდრის დასაკვევმილებელი ფიგურის ფართობისა და ამ ფიგურების სიბრტყეებს შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლს. ე.ი. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\varphi(\Delta O_1 ab) = \varphi(\Delta OAB) \cos \varphi ,$$

ანუ

$$2 \varphi(\Delta O_1 ab) = 2 \varphi(\Delta OAB) \cos \varphi . \quad (9.3)$$

თუ გამოვიყენებთ (9.1) და (9.2) ტოლობებს, მაშინ (9.3) ტოლობა ასე ჩაიწერება

$$L_z = |\bar{L}_0| \cos \varphi .$$

ეს გვიჩვენებს, რომ $L_z = \text{გეგმ}_z \bar{L}_0 = 0C$.

მაშასადამე, \bar{F} ძალის მომენტი z ღერძის მიმართ უდრის ამ ღერძის ნებისმიერი წერტილის მიმართ \bar{F} ძალის ვექტორული მომენტის გეგმილს ამ ღერძზე.

§ 1.10. ძალის მომენტი საკოორდინატო ღერძების მიმართ

თუ გამოვიყენებთ ძალის ვექტორულ მომენტსა და ღერძის მიმართ მომენტს შორის დამოკიდებულებას, შეგვიძლია მივიღოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატა ღერძების მიმართ ძალის მომენტის გამოსათვლელი ფორმულები.

განვიხილოთ $Oxyz$ სივრცის A

(x, y, z) წერტილზე მოდებული \bar{F} (X, Y, Z) ძალა. ამ ძალის ვექტორული მომენტი კოორდინატა სისტემის O სათავის მიმართ იყოს $\bar{L}_0 (L_x, L_y, L_z)$. შეგვიძლია დავწეროთ:

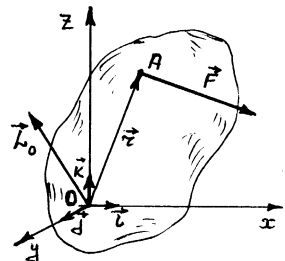
$$L_x = \text{მომ}_x \bar{F} = \text{გეგმ}_x \bar{L}_0 = yZ - zY ,$$

$$L_y = \text{მომ}_y \bar{F} = \text{გეგმ}_y \bar{L}_0 = zX - xZ , ,$$

$$L_z = \text{მომ}_z \bar{F} = \text{გეგმ}_z \bar{L}_0 = xY - yX . .$$

L_x , L_y, L_z - კოორდინატა ღერძების მიმართ \bar{F} ძალის მომენტებია.

შენიშვნა: ძალის სკალარული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მოცემული ძალის



ნახ. 9

მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც გადის მოცემულ წერტილში ძალაზე და ამ წერტილზე გამავალი სიბრტყის მართობულად.

თუ დაუშვებთ, რომ \vec{F} ძალა მოთავსებულია Oxy სიბრტყეში ($z = 0, Z = 0$), მაშინ \vec{F} ძალის სკალარული მომენტი 0 სათავის მიმართ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მისი მომენტი 0 წერტილში გამავალი Oz ღერძის მიმართ. ამიტომ ძალის სკალარული მომენტი 0 წერტილის მიმართ ანალიზურად ასე გამოისახება

$$L_0 = L_z = xY - yX .$$

§ 1. 11. პარინიონის თეორემა

თეორემა. თავმოყრილ ძალთა სისტემის ტოლქმედის ვექტორული მომენტი რაიმე ცენტრის მიმართ ტოლია იმავე ცენტრის მიმართ შემადგენელი ძალების ვექტორული მომენტების გეომეტრიული ჯამისა.

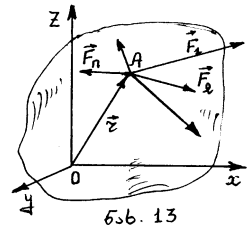
დამტკიცება. მივიღოთ მომენტების ცენტრად რაიმე 0 წერტილი და ავირჩიოთ კოორდინატა მართკუთხა XYZ სისტემა სათავით 0 წერტილში. ვთქვათ $OXYZ$ სივრცეში სხეულზე

მოდებულია თავმოყრილ ძალთა $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$

სისტემა, თავმოყრის ცენტრით A წერტილში.

ამ ძალების ტოლქმედი \vec{R} ძალა მოდებულია იმავე A წერტილზე და განმარტების თანახმად

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n . \text{ ანუ } \vec{R} = \sum \vec{F}_k$$



ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ

ვექტორულად მარცხენა მხრიდან A წერტილის $0\vec{A} = \vec{r}$ რადიუს - ვექტორზე. მივიღებთ:

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n , \text{ ანუ } \vec{r} \times \vec{R} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}_k) .$$

ძალის ვექტორული მომენტის განმარტების თანახმად ეს უკანასკნელი ტოლობა ასე ჩაიწერება

$$\bar{L} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \dots + \bar{L}_n, \text{ ანუ} \quad \bar{L} = \sum \bar{L}_k \quad (11.1)$$

სადაც \bar{L} და $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_n$ წარმოადგენენ შესაბამისად \bar{R} და $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ ძალების ვექტორულ მომენტებს 0 ცენტრის მიმართ; (თეორემა დამტკიცებულია).

ეს თეორემა სამართლიანია კოორდინატთა ღერძების მიმართ მომენტებისთვისაც. მართლაც, თუ (11.1) ტოლობას დავაგვიღებთ კოორდინატთა 0x, 0y, 0z ღერძებზე, მივიღებთ:

$$L_x = \sum L_{KX}, \quad L_y = \sum L_{KY}, \quad L_z = \sum L_{KZ}.$$

ვარინიონის თეორემა არის სრიალა ვექტორთა თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი თეორემა. ეს თეორემა თავმოყრილი ძალების შემთხვევისათვის 1687 წელს დაადგინა პ. ვარინიონმა (1654 - 1722)..

რადგანაც მყარ სხეულზე მოქმედი ძალა განიხილება როგორც სრიალა ვექტორი, ამიტომ ამ თეორემას ფართოდ იყენებენ მექანიკაში, სახელდობრ, გეომეტრიულ სტატიკაში, მყარი სხეულის კინემატიკაში, მასალათა გამძლეობაში.

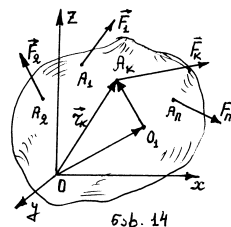
მტკიცდება, რომ ძალთა ნებისმიერი სისტემისათვის, რომელსაც აქვს ტოლქმედი, სამართლიანია

ვარინიონის განზოგადებული თეორემა
ნებისმიერ ძალთა სისტემის ტოლქმედის ვექტორული მომენტი რაიმე ცენტრის მიმართ ტოლია იმავე ცენტრის მიმართ შემადგენელი ძალების ვექტორული მომენტების გეომეტრიული ჯამისა.

§ 1.12. კალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის და ნაკრები მომენტის ცნება

ვთქვათ 0xyz სივრცეში მოცემული ნებისმიერად განლაგებული ძალთა სისტემა $\bar{F}_1(X_1, Y_1, Z_1), \bar{F}_2(X_2, Y_2, Z_2), \dots, \bar{F}_n(X_n, Y_n, Z_n)$ რომლებიც სხეულის $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ წერტილებზეა მოდებული.

სხეულზე მოდებული ძალთა სისტემა სივრცეში, ისევე, როგორც ძალთა ბრტყელი სისტემა, შეიძლება დაყვანილი იქნეს ნებისმიერ წერტილზე. დაყვანის წესის თანამიმდევრობაც ისეთივეა როგორც ძალთა ბრტყელი სისტემისათვის; ამასთანავე, ყოველი \bar{F}_K



ნახ. 14

ძალისათვის მივიღებთ დაყვანის ცენტრზე მოდებულ ერთ ძალას და წვევილდალას.

განსაზღვრა. ძალთა მოცემული სისტემის შემადგენელი ძალების გეომეტრიულ ჯამს ნაკრები ვექტორული ეწოდება.

აღნიშნოთ ნაკრები ვექტორი $\vec{F} (X, Y, Z)$ - ით. მაშინ

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \text{ანუ} \quad \vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

კოორდინატა ღერძებზე დაგვემიღებთ მივიღებთ:

$$X = \sum_{k=1}^n X_k, \quad Y = \sum_{k=1}^n Y_k, \quad Z = \sum_{k=1}^n Z_k.$$

(12,1)

ნაკრები ვექტორის სიდიდე განისაზღვრება ფორმულებით:

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2 + (\sum Z_k)^2} \quad (12,2)$$

ბრტყელ ძალთა სისტემისაგან განსხვავებით, სივრცით სისტემის ძალების მომენტები დაყვანის ცენტრის მიმართ სხვადასხვა სიბრტყეში მოქმედებენ, ამიტომ სივრცეში

განსაზღვრა. ძალთა მოცემული სივრცითი სისტემის ნაკრები ვექტორული ეწოდება იმავე ცენტრის მიმართ შემადგენელი ძალების ვექტორული მომენტების გეომეტრიულ ჯამს.

ვთქვათ ძალების მოდების A_1, A_2, \dots, A_n წერტილების რადიუს-ვექტორები დაყვანის 0 ცენტრის მიმართ არიან $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, ხოლო ნაკრები ვექტორული მომენტია $\vec{L}_0 (L_X, L_Y, L_Z)$, მაშინ განსაზღვრის თანახმად გვექნება:

$$\vec{L}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k).$$

ნაკრები ვექტორული მომენტის გვემიღებთ კოორდინატთა ღერძებზე იქნება:

$$L_X = \sum_{k=1}^n (y_k Z_k - z_k Y_k);$$

$$L_Y = \sum_{k=1}^n (z_k X_k - x_k Z_k);$$

(12,3)

$$L_z = \sum_{k=1}^n (x_k Y_k - y_k X_k).$$

ნაკრები ვექტორული მომენტის სიდიდე განისაზღვრება ფორმულით:

$$L_0 = |\vec{L}_0| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$$

(12,4)

შენიშვნა: ვარინიონის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ძალთა ბრტყელი სისტემის ნაკრები მომენტი მისი ტოლქმედის ფუძეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილის მიმართ, ნულის ტოლია.

§ 1.13 ნაკრები ვექტორული მომენტის ცვლილება მომენტის ცენტრის ცვლისას

ვთქვათ მოცემულია სივრცით ძალთა $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ სისტემა, რომლის ნაკრები ვექტორია \vec{F} , ხოლო O ცენტრის მიმართ ნაკრები ვექტორული მომენტი \vec{L}_O (ნახ. 14)

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad \vec{L}_O = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k).$$

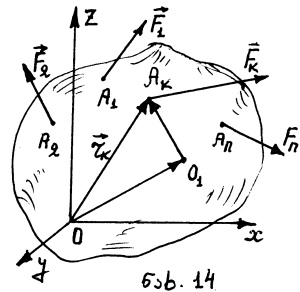
ავირჩიოთ მომენტების ცენტრად ახალი O_1 წერტილი. ამ ცენტრის მიმართ ნაკრები ვექტორი იგივეა, ხოლო ნაკრები ვექტორული მომენტი იქნება

$$\vec{L}_{O_1} = \sum_{k=1}^n (O_1 \vec{A}_k \times \vec{F}_k).$$

აქ $O_1 \vec{A}_k$ არის სისტემის \vec{F}_k ძალის რადიუს-ვექტორი ახალი O_1 ცენტრის მიმართ. როგორც ნახაზიდან ჩანს $O_1 \vec{A}_k = \vec{r}_k - O\vec{O}_1$, ამიტომ გვექნება:

$$\vec{L}_{O_1} = \sum (O_1 \vec{A}_k \times \vec{F}_k) = \sum [(\vec{r}_k - O\vec{O}_1) \times \vec{F}_k] = \sum (\vec{r}_k \times \vec{F}_k) - \sum (O\vec{O}_1 \times \vec{F}_k) = \vec{L}_O - (O\vec{O}_1 \times \sum \vec{F}_k) = \vec{L}_O + (O_1 \vec{O} \times \vec{F}).$$

მივიღეთ



$$\vec{L}_{O_1} = \vec{L}_O + (O_1\vec{O} \times \vec{F}) \quad O_1\vec{O}$$

(13.1)

მაშასადამე, ახალი O_1 ცენტრის მიმართ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტი ტოლია ძველი O ცენტრის მიმართ სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტის (\vec{L}_O) და ძველ O ცენტრზე მოდებული სისტემის ნაკრები ვექტორის ახალი O_1 ცენტრის მიმართ ვექტორული მომენტის გეომეტრიული ჯამისა.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ცნობილია ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ, მაშინ ნაკრები მომენტი განისაზღვრება ყოველი სხვა წერტილის მიმართაც.

შედეგი. ვთქვათ, ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია რაიმე ცენტრის მიმართ, მაშინ იგი ნულის ტოლი იქნება ნებისმიერი სხვა ცენტრის მიმართაც და (13.1) -დან გამომდინარე გვექნება: $\vec{L}_{O_1} = \vec{L}_O$, ე.ი. თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, $\vec{F} = 0$, მაშინ ნაკრები მომენტის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული მომენტთა ცენტრის არჩევაზე.

წ ე ვ ი ლ ძ ა ლ თ ა თ ე ო რ ი ა

§ 1.14. ორი პარალელური ძალის შეკრება

განვიხილოთ მყარ სხეულზე მოდებული ორი პარალელური ძალა. ასეთი ძალების შეკრების ან ტოლქმედზე დაყვანის წესი საშუალებას მოგვცემს პარალელურ ძალთა ნებისმიერი სისტემა დავიყვანოთ უმარტივეს სახემდე.

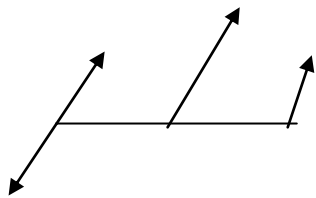
ორი პარალელური ძალის შეკრების წესი ანალოგიურია ორი ვექტორის შეკრების წესისა:

ორი ერთმხრივ მიმართული პარალელური ძალის შეკრების წესი

ძალის ტოლქმედი სიდიდით შემაღვენილი ძალების სიდიდეების ჯამის ტოლია, მიმართულია იმავე მხარეს და მისი ფუძე გადის მოცემული ძალების ფუძეებს შორის ისეთ წერტილში, რომელიც

შემაღვენილი ძალების მოდების წერტილების შემავრთებელ AB მონაკვეთის ყოფს ამ ძალების სიდიდეების უკუპროპორციულ ნაწილებად:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R} \quad \text{და} \quad \frac{|F_1|}{|F_2|} = \frac{BC}{AC}$$



ორი სხვადასხვა მხარეს მიმართული

$$F_1' \quad \vec{F}_2,$$

\vec{R}

პარალელური ძალის ტოლქმედი სიდიდით შემადგენელი ძალების სიდიდეების სხვაობის ტოლია, მიმართულია უდიდესი ძალის მხარეს

A

B

და მისი ფუძე გადის შემადგენელი ძალების მოდების წერტილების შემაერთებელ AB

\vec{F}_1

მონაკვეთის ისეთ C წერტილში, რომელიც შემადგენელი ძალების მოდების წერტილებიდან დაშორებულია ამ ძალების სიდიდეების უკუპროპორციული მანძილებით:

$$\vec{R} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1, \quad \text{და} \quad \frac{|F_1|}{|F_2|} = \frac{BC}{AC},$$

ან კიდევ

$$\frac{AB}{BC} = \frac{F_2 - F_1}{F_2}$$

§1.15. წყვილძალის ცნება. წყვილძალის მომენტი

სხვადასხვა მხარეს მიმართული ორი პარალელური ძალისათვის განსაკუთრებულ შემთხვევას აქვს ადგილი, როცა ეს ძალები ტოლია,

ბანსაზღვრა. ორი ძალის ერთობლიობას, რომლებიც სიდიდით ტოლნი არიან, მდებარეობენ პარალელურ ფუძეებზე და ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ არიან მიმართულნი წყვილძალა ეწოდება.

თუ წყვილძალას ადგენენ \vec{P} და \vec{Q} ძალები, მაშინ წყვილძალა ასე აღინიშნება (\vec{P}, \vec{Q}). განსაზღვრის თანახმად $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$ და $\vec{P} = -\vec{Q}$.

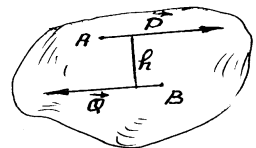
წყვილძალის შემადგენელი ძალების ფუძეებს შორის უმოკლეს მანძილს ეწოდება წყვილძალის მხარი (h).

წყვილძალის შემადგენელი ძალები არ არიან წონასწორობაში, ვინაიდან ისინი არ მდებარეობენ ერთ ფუძეზე;

წყვილძალას არა აქვს ტოლქმედი;

წყვილძალის ნაკრები ვექტორი ნულის

ტოლია: $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} = 0$.



ნახ. 16.1

სხეულზე მოქმედი წვეილძალა ცდილობს ამ სხეულს მიანიჭოს ბრუნვითი მოძრაობა. წვეილძალის ბრუნვითი ეფექტის დასახასიათებლად შემოაქვთ წვეილძალის მომენტის ცნება.

ბანსაზღვრა: წვეილძალის სკალარული მომენტი ეწოდება წვეილძალის შემადგენელი ერთ-ერთი ძალის სიდიდისა და მხარის ნამრავლს, აღებულია "+" ან "-" ნიშნით იმის მიხედვით, თუ როგორ ბრუნავს წვეილძალა თავის სიბრტყეში.

წვეილძალის სკალარული მომენტი აღვნიშნოთ L -ით, გვექნება:

$$L = \text{მომ} (\vec{P}, \vec{Q}) = \pm |\vec{P}| h = \pm |\vec{Q}$$

$| h .$

სხეულზე მოქმედი წვეილძალის ბრუნვითი ეფექტი დამოკიდებულია :

ა) წვეილძალის შემადგენელი \vec{P} და \vec{Q} ძალების და h მხარის სიდიდეზე;

ბ) წვეილძალის მოქმედების სიბრტყის მდებარეობაზე;

გ) ამ სიბრტყეში წვეილძალის ბრუნვის მიმართულებაზე.

სხეულზე წვეილძალის მოქმედების დამახასიათებელი ყველა ეს ელემენტი სივრცეში შეიძლება გამოვსახოთ ერთი ვექტორული სიდიდის საშუალებით - წვეილძალის ვექტორული მომენტით (ნახ. 16.2).

ბანსაზღვრა წვეილძალის ვექტორული მომენტი ეწოდება ისეთ თავისუფალ \vec{L} ვექტორს, რომელიც სიდიდით წვეილძალის ერთ-ერთი ძალის სიდიდისა და მისი მხარის ნამრავლის ტოლია, მოდებულია წვეილძალის სიბრტყის ნებისმიერ წერტილში და მიმართულია წვეილძალის სიბრტყის მართობულად ისე, რომ წვეილძალა მას უკვილდეს დადებითი მიმართულებით.

ასე აღვნიშნება $\vec{L} \Rightarrow \text{მომ} (\vec{P}, \vec{Q})$. ამასთანავე $|\vec{L}| = |L| =$

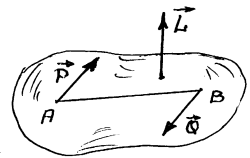
$P h$.

წვეილძალის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია. ამიტომ, წვეილძალის მომენტი დამოკიდებულია მომენტთა ცენტრის არჩევაზე.

წვეილძალის მომენტი ტოლია ნებისმიერი ცენტრის მიმართ წვეილძალის შემადგენელი ძალების მომენტების ჯამისა.

მაშასადამე, წვეილძალის მომენტი უდრის მისი ერთ - ერთი ძალის მომენტს მთორე ძალის მოდების წერტილის მიმართ

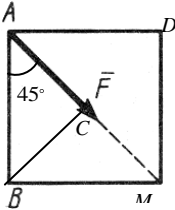
$$\vec{L} = \vec{მომ}_B \vec{P} = \vec{მომ}_A \vec{Q} .$$



ნახ. 16.2

შედეგი: სხეულის მექანიკური მდგომარეობა არ შეიცვლება, თუ მასზე მოღებულ წვეილძალას გადავიტანთ თავისივე სიბრტყეში მომენტის შეუცვლელად.

აშოცანა 1. კვადრატული ფირფიტის A წვეროში, რომლის კვერდის სიგრძე $0,2$ მ, მოღებულია $F = 150$ ნ ძალა. განვსაზღვროთ ამ ძალის მომენტი B წერტილის მიმართ.



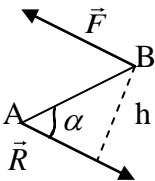
ამოხსნა. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ ძალის მომენტი B წერტილის მიმართ, განვსაზღვროთ მისი მხარი ამ წერტილის მიმართ. იგი ტოლია ძალის ფუძეზე დაშვებული მართობის სგრძისა. $BC \perp AC$.

$$\Delta ABC\text{-ში } BC = AC = AB \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,2 = 0,14$$

მომ $_B \vec{F} = |\vec{F}| \cdot BC = 150 \cdot 0,14 = 21$ (ნმ).

აქ მომენტის ნიშანი აღებულია დადებითია, რადგან ძალა წერტილის მიმართ ბრუნავს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, თუმცა ეს მიმართულება შეგვეძლო აგველო უარყოფით მიმართულებად, მაშინ საწინააღმდეგო მიმართულება იქნებოდა დადებითი.

აშოცანა 2. განსაზღვრეთ ნახაზზე მოცემული წვეილძალის მომენტი, თუ



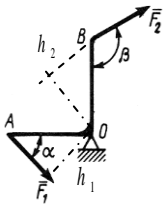
$AB = 0,25$ მ, $\alpha = 60^\circ$ და $F = 8$ ნ.

ამოხსნა. წვეილძალის სკალარული მომენტის განსაზღვრავად გავიხსენოთ მისი განმარტება. განვსაზღვროთ მისი მხარი. იგი წარმოადგენს წვეილძალის ფუძეებს შორის მანძილს:

$$h = AB \sin \alpha = 0,25 \sin 60^\circ = 0,2(მ).$$

$$\begin{aligned} \text{მომ}(\vec{F}, \vec{R}) &= \text{მომ}_A \vec{F} = \text{მომ}_B \vec{R} = F \cdot h = R \cdot h = \\ &= 8 \cdot 0,2 = 1,6 \text{ (ნმ)}. \end{aligned}$$

ამოცანა 3. O წერტილზე უძრავად ჩამაგრებულ ბერკეტზე მოქმედებს $F_1 = 46$ და \vec{F}_2 ძალები. განვსაზღვროთ ისეთი F_2 ძალის მოდული, როცა ბერკეტი იქნება წონასწორობაში, თუ კუთხე $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 120^\circ$, მანძილი



$$AO = 0,5 \text{ მ}, BO = 0,6 \text{ მ}.$$

ამოსხნა. იმისათვის, რომ \vec{F}_2 ძალის მოქმედებით ბერკეტი შეკავებული იყოს წონასწორობაში, საჭიროა შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$\text{მომ}_O \vec{F}_2 + \text{მომ}_O \vec{F}_1 = 0.$$

$$\text{მომ}_O \vec{F}_1 = -F_1 \cdot h_1 = -F_1 \cdot AO \sin \alpha = -4 \cdot 0,5 \cdot \sin 45^\circ \quad \square$$

$$\square -1,4 \text{ (6მ)}.$$

$$\text{მომ}_O \vec{F}_2 = F_2 \cdot h_2 = F_2 \cdot OB \sin(180^\circ - \beta) = F_2 \cdot 0,6 \cdot \sin 60^\circ \quad \square$$

$$\square 0,51F_2 \text{ (6მ)}.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$0,51F_2 - 1,4 = 0.$$

$$F_2 = \frac{1,4}{0,51} \square 2,8 \text{ (6)}.$$

§ 1. 16. წყვილძალების ტოლფასობა სიბრტყეზე

თეორემა. ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი წყვილძალა ტოლფასია, თუ მათი სკალარული მომენტები ტოლია.

დამტკიცება: ამ თეორემის დასამტკიცებლად ვაჩვენოთ წყვილძალის შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება: მყარ სხეულზე მოდებული წყვილძალა შეგვიძლია ნებისმიერად გადავიტანოთ თავისივე სიბრტყეში ისე, რომ არ დაირღვეს სხეულის მექანიკური მდგომარეობა.

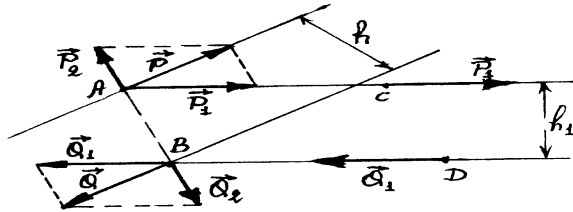
კუთხათ მყარი სხეულზე მოქმედებს (\vec{P}, \vec{Q}) . წყვილძალა, რომლებიც მოდებულნი არიან A და B წერტილებზე. წყვილძალის მხარი იყოს h, ხოლო მომენტი L. გავავლოთ (\vec{P}, \vec{Q}) . წყვილძალის სიბრტყეში A და B წერტილებზე ორი ნებისმიერი მიმართულების პარალელური AC და BD წრფე, რომელთა შორის მანძილია h_1 . დავშალოთ \vec{P} და \vec{Q} ძალები AB წრფისა და შესაბამისად AC და BD წრფეების მიმართულების მდგენელებად.

აღვნიშნოთ ეს მდგენელები შესაბამისად \vec{P}_1 , \vec{P}_2 და \vec{Q}_1 , \vec{Q}_2 ვექტორებით. გვექნება $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$, $\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$.

ამასთანავე \vec{P} და \vec{Q} ძალების სიდიდეების ტოლობის გამო

$$\vec{P}_1 = -\vec{Q}_1, \quad \vec{P}_2 = -\vec{Q}_2.$$

ავების თანახმად $(\vec{P}, \vec{Q}) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$. (16.1)



ნახ. 18

\vec{P}_2 და \vec{Q}_2 ძალები მდებარეობენ ერთ AB წრფეზე, ამასთანავე $\vec{P}_2 = -\vec{Q}_2$, ამიტომ ისინი პირდაპირთანაწინააღმდეგი ძალებია: $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2) \sim 0$; ისინი შეგვიძლია ჩამოვაცილოთ სხეულს (II აქსიომა). გვრჩება \vec{P}_1 და \vec{Q}_1 ძალები, რომლებიც შეადგენენ წყვილძალას. (16.1)-დან გვექნება:

$$(\vec{P}, \vec{Q}) \sim (\vec{P}_1, \vec{Q}_1).$$

ამრიგად მივიღეთ, რომ h მხარის მქონე (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილძალა შევცვალოთ იმავე სიბრტყეში მდებარე მისი ტოლფასი (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) წყვილძალით, რომლის მხარია h_1 . ამასთანავე \vec{P}_1 და \vec{Q}_1 ძალები შეგვიძლია მოვდოთ მათი მოქმედების ფუძეების ნებისმიერ C და D წერტილებში. რადგანაც A და B წერტილების, აგრეთვე AC და BD წრფეების მიმართულება არჩეულია ნებისმიერად, ამიტომ (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) წყვილძალა უნდა მდებარეობდეს ნებისმიერ ადგილას მისი მოქმედების სიბრტყეში

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ამ წყვილძალების სკალარული მომენტები ტოლია.

მოცემულია $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$; ვარინიონის თეორემის თანახმად

მომ_B $\vec{P} =$ მომ_B $\vec{P}_1 +$ მომ_B \vec{P}_2 .

ვინაიდან მომ_B $\vec{P}_2 = 0$, ამიტომ

$$\text{მომ}_B \bar{P} = \text{მომ}_B \bar{P}_1, \text{ ანუ } |\bar{P}|h = |\bar{P}_1|h_1$$

ე. ი. (\bar{P}, \bar{Q}) და (\bar{P}_1, \bar{Q}_1) წვეილძალების სკალარული მომენტები ტოლია. $L = L_1$. (თეორემა დამტკიცებულია).

თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ:

ა) მოცემული წვეილძალა შეიძლება თავის სიბრტყეში ვადავიტანოთ ნებისმიერ ადვილას მომენტის შეუცვლელად;

ბ) მოცემულ წვეილძალას შეიძლება ნებისმიერად შეუცვალოთ შემადგენელი ძალების სიდიდე და მხარის სიგრძე ისე, რომ მისი სკალარული მომენტი და მოქმედების სიბრტყე უცვლელი დარჩეს.

მაშასადამე, სხეულზე წვეილძალის მოქმედება ხასიათდება მისი მომენტით. ამიტომ, საკმარისია მოცემული იყოს წვეილძალის მომენტი და არა აქვს მნიშვნელობა თუ რას უდრის შემადგენელი ძალების სიდიდე ან მხარის სიგრძე.

§1.17. ერთ სიბრტყეზე მდებარე წვეილძალების შებრუნება

წვეილძალები შეიძლება შევკრიბოთ: მოცემული წვეილძალები ტოლფას (ეკვივალენტურ) წვეილძალას ეწოდება ტოლქმედი წვეილძალა.

თეორემა ერთ სიბრტყეზე ან პარალელურ სიბრტყეებზე მდებარე წვეილძალების შეკრება ვკადლევს ერთ წვეილძალას, რომლის მომენტი შესაკრები წვეილძალების სკალარული მომენტების ალგებრული ჯამის ტოლია.

დამტკიცება: სიმარტივისათვის განვიხილოთ ერთ სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებული ორი წვეილძალა (\bar{P}_1, \bar{Q}_1) და (\bar{P}_2, \bar{Q}_2) , რომელთა მხარია შესაბამისად h_1 და h_2 , ხოლო სკალარული მომენტებია L_1 და L_2 . ე. ი.

$$L_1 = |\bar{P}_1| h_1 \text{ და } L_2 = |\bar{P}_2| h_2$$

საჭიროა ეს წვეილძალები შევცვალოთ ერთი ტოლქმედი წვეილძალით. ამისათვის მოცემული წვეილძალების სიბრტყეზე ავირჩიოთ h სიგრძის AB მონაკვეთი და მოცემული წვეილძალები დავიყვანოთ საერთო $AB = h$ მხარზე. ამიტომ, მოცემული (\bar{P}_1, \bar{Q}_1) და (\bar{P}_2, \bar{Q}_2) წვეილძალების შემადგენელი ძალები ისე უნდა შევცვალოთ, რომ მათი მომენტები არ შეიცვალოს. ეს ნიშნავს, რომ თუ $AB = h$ მხარზე დაყვანილი წვეილძალებია (\bar{P}'_1, \bar{Q}'_1) და (\bar{P}'_2, \bar{Q}'_2) , მაშინ უნდა შესრულდეს პირობები:

$$L_1 = \text{მომ} (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) = \text{მომ} (\vec{P}'_1, \vec{Q}'_1) = \text{მომ}_B \vec{P}'_1$$

$$L_2 = \text{მომ} (\vec{P}_2, \vec{Q}_2) = \text{მომ} (\vec{P}'_2, \vec{Q}'_2) = \text{მომ}_B \vec{P}'_2$$

ანუ

$$L_1 = |\vec{P}_1| h_1 = |\vec{P}'_1| h,$$

$$L_2 = |\vec{P}_2| h_2 = |\vec{P}'_2| h$$

h_2

ამასთანავე A წერტილზე

მოდებულია \vec{P}'_1 და \vec{P}'_2 ძალები, ხოლო B

წერტილზე მოდებულია \vec{Q}'_1 და \vec{Q}'_2

ძალები. შევკრიბოთ A და B წერტილებზე

მოდებული ძალები; გვექნება

$$\vec{P} = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2,$$

\vec{Q}'_1

სადაც

$$\vec{P}'_1 = -\vec{Q}'_1,$$

$$\vec{P}'_2 = -\vec{Q}'_2$$

\vec{Q}

მივიღეთ ორი \vec{P} და \vec{Q} ძალა, რომლებიც სიდიდით ტოლნი არიან და

ქმნიან (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილძალას, რომლის მხარია $AB = h$, ხოლო მომენტი

$$L = \text{მომ}_B (\vec{P}, \vec{Q}) = \text{მომ}_B \vec{P} = |\vec{P}| h.$$

(\vec{P}, \vec{Q}) წყვილძალა წარმოადგენს ტოლქმედ წყვილძალას,

უკანასკნელ ტოლობაში შევიტანოთ \vec{P} -ს მნიშვნელობა. გვექნება:

$$L = \text{მომ}_B \vec{P} = \text{მომ}_B (\vec{P}'_1 + \vec{P}'_2) = \text{მომ}_B \vec{P}'_1 + \text{მომ}_B \vec{P}'_2 = L_1 + L_2.$$

მაშასადამე

$$L = L_1 + L_2.$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ ტოლქმედი წყვილძალის მომენტი შესაკრები წყვილძალების მომენტების ალგებრული ჯამის ტოლია.

ანალოგიური მსჯელობა შეიძლება გამოვიყენოთ ერთ სიბრტყეში განლაგებული ნებისმიერი n რაოდენობის წყვილძალების შეკრებისათვის.

$$L = \sum_{k=1}^n L_k.$$

შედეგი. 1) წვეილძალა შეიძლება გაწონასწორდეს მხოლოდ წვეილძალით და არავითარ შემთხვევაში ერთი ძალით ან ძალთა სისტემით, რომელიც არ დაიყვანება წვეილძალაზე.

2) ერთ სიბრტყეზე (ან პარალელურ სიბრტყეებზე) მდებარე წვეილძალების სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი შესაკრები წვეილძალების სკალარული მომენტების

ალგებრული ჯამი იყოს ნულის ტოლი:
$$L = \sum_{k=1}^n L_k = 0.$$

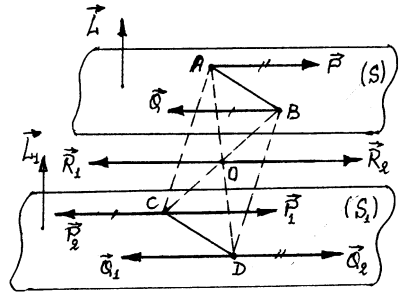
§1.18. წვეილძალის გადატანა პარალელურ სიბრტყეში

თეორემა *მოცემულ სიბრტყეში მდებარე* (\vec{P}, \vec{Q})

წვეილძალა შეგვიძლია გადავიტანოთ მის პარალელურ სიბრტყეში.

დამტკიცება.: ვთქვათ S

სიბრტყეში მოცემულია (\vec{P}, \vec{Q}) წვეილძალა, რომლის მხარია AB მონაკვეთი. S სიბრტყის პარალელურ S_1 სიბრტყეზე ავიღოთ CD მონაკვეთი, რომელიც AB მონაკვეთის ტოლი და პარალელურია (ნახ.17). C და D წერტილებში მოვლოთ S_1 სიბრტყეში მდებარე



ნახ. 17

ურთიერთმასწონასწორებელი $\vec{P}_1,$

\vec{P}_2 და \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 ძალები, რომლებიც სიდიდით მოცემული (\vec{P}, \vec{Q})

წვეილძალის შემადგენელი \vec{P} და \vec{Q} ძალების ტოლნი და პარალელურნი არიან: $P = Q = P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2$

ცხადია

$$(\vec{P}, \vec{Q}) \sim (\vec{P}, \vec{Q}, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2). \quad (18.1)$$

შეგვიჩვენოთ ვევილ-ვევილად პარალელური და ერთ მხარეს მიმართული ტოლი სიდიდის \vec{P} და \vec{Q}_2 , აგრეთვე \vec{Q} და \vec{P}_2 ძალები. მივიღებთ მათ ტოლქმედ ძალებს :

$$\vec{R}_1 = \vec{P} + \vec{Q}_2 = 2 \vec{P}, \quad \vec{R}_2 = \vec{Q} + \vec{P}_2 = 2 \vec{Q}.$$

\vec{R}_1 და \vec{R}_2 ძალები მოდებულნი არიან AD და BC მონაკვეთების შუა 0 წერტილზე.

(18.1) დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება :

$$(\vec{P}, \vec{Q}) \sim (\vec{P}_1, \vec{Q}_1, \vec{R}_1, \vec{R}_2).$$

(18.2)

\vec{R}_1 და \vec{R}_2 ძალები ერთმანეთს აწონასწორებენ, ვინაიდან ისინი სიდიდით ტოლნი არიან ($P = Q$), მოდებულნი არიან ABDC პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის 0 წერტილში და მიმართულნი არიან ურთიერთსაწინააღმდეგოდ. მაშასადამე

$$(\vec{R}_1, \vec{R}_2) \sim 0.$$

ამიტომ (18.2)-დან გვექნება $(\vec{P}, \vec{Q}) \sim (\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$,

ამასთანავე, (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) წარმოადგენს S_1 სიბრტყეში მდებარე ვევილძალას.

მაშასადამე, მოცემულ S სიბრტყეში მდებარე (\vec{P}, \vec{Q})

ვევილძალა შევცვალოთ მისი ტოლფასი (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) ვევილძალით, რომელიც S სიბრტყის პარალელურ S_1 სიბრტყეში მდებარეობს.

(თეორემა დამტკიცებულია).

თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ სხეულზე მოქმედების შეუცვლელად ვევილძალა შეიძლება გადავიტანოთ მის პარალელურად სხეულში გავლებულ ნებისმიერ სიბრტყეში.

ვევილძალა სივრცეში სავსებით ხასიათდება მისი ვექტორული მომენტით.

კალთა სისტემის დაყვანა უმარტივეს სახეში

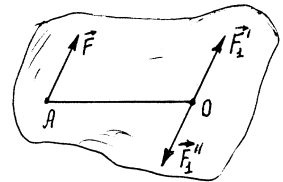
§ 1. 19. დავუშვათ კალის პარალელური გადატანის შესახებ

როგორც ცნობილია სხეულზე მოქმედი ყოველი ძალა შეიძლება გადავიტანოთ თავისი ფუძის გასწვრივ ნებისმიერ წერტილში სხეულის მექანიკური მდგომარეობის შეუცვლელად.

განვიხილოთ საკითხი ძალის პარალელური გადატანის შესახებ ნებისმიერ წერტილში, რომელიც მის ფუძეზე არ მდებარეობს. დავამტკიცოთ

ლ ე მ ა . სხეულის მოცემულ A წერტილზე მოდებული \vec{F} ძალა შეიძლება დაყვანილი იქნეს ამ სხეული ნებისმიერ O წერტილზე მოდებულ იმავე \vec{F} ძალაზე და ერთ წყვილძალაზე, რომლის მომენტი უდრის A წერტილში მოდებული \vec{F} ძალის მომენტს O წერტილის მიმართ.

დამტკიცება: ვთქვათ სხეულის A წერტილში მოდებულია რაიმე \vec{F} ძალა. ავიღოთ სხეულის ნებისმიერი O წერტილი, რომელიც \vec{F} ძალის ფუძეზე არ მდებარეობს. მას დაყვანის ცენტრი ეწოდება. O ცენტრში მოვლოთ ორი პირდაპირთანაწინააღმდეგი (გაწონასწორებული) ძალა \vec{F}'_1 და \vec{F}''_1 , რომლებიც სიდიდით \vec{F} ძალის ტოლი და ამ ძალის პარალელური არიან:



ნახ. 21

$$|\vec{F}'_1| = |\vec{F}''_1| = |\vec{F}|.$$

ვინაიდან $(\vec{F}'_1, \vec{F}''_1) \sim 0$, ამიტომ გვექნება: $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}'_1, \vec{F}''_1)$.

აგების თანახმად \vec{F} და \vec{F}''_1 ძალები ადგენენ წყვილძალას. მას მიკავშირებული წყვილძალა ეწოდება. გვექნება:

$$\vec{F} \sim (\vec{F}'_1, (\vec{F}, \vec{F}''_1)).$$

სამი ძალის ეს სისტემა წარმოადგენს დაყვანის O ცენტრში მოდებულ \vec{F}'_1 ძალას (რომელიც \vec{F} ძალის ტოლი და პარალელურია) და მიკავშირებულ (\vec{F}, \vec{F}''_1) წყვილძალას, რომლის L_0 მომენტი ტოლია \vec{F} ძალის მომენტისა დაყვანის O ცენტრის მიმართ:

$$L_0 = \text{მომ}(\vec{F}, \vec{F}''_1) = \text{მომ}_0 \vec{F}.$$

მაშასადამე გვექნება $\vec{F} \sim (\vec{F}'_1, L_0)$.

თეორემა დამტკიცებულია..

§ 1.20. აკლთა ნებისმიერი სისტემის დაყვანა მოცემულ ცენტრზე

ზემოთ დამტკიცებული ლემა შეიძლება განვაზოგადოთ სხეულზე მოქმედი და ნებისმიერად განლაგებული ძალთა სისტემისათვის.

ვთქვათ სივრცეში სხეულის A_1, A_2, \dots, A_n

წერტილებზე მოქმედებენ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალები, რომლებიც ნებისმიერად არიან განლაგებული სივრცეში (ნახ.22).

სხეულზე ავიღოთ რაიმე O ცენტრი და დავიყვანოთ ძალთა მოცემული სისტემა O ცენტრის მიმართ.

ამისათვის საჭიროა ყველა ძალა გადავიტანოთ O ცენტრში. ზემოთ დამტკიცებული ლემის თანახმად სისტემის ყოველი \vec{F}_k ძალის გადატანით O

ცენტრში მივიღებთ ერთ \vec{F}'_k ძალას $(\vec{F}_k = \vec{F}'_k)$ და ერთ მიკავშირებულ (\vec{F}_k, \vec{F}''_k)

წყვილძალას, რომლის \vec{L}_k მომენტი არის \vec{F}_k ძალის ვექტორული მომენტი O ცენტრის მიმართ. ე.ი. მივიღებთ დაყვანის O

ცენტრზე მოდებულ $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ ძალებს და მიკავშირებულ წყვილძალებს

$$(\vec{F}_1, \vec{F}''_1), (\vec{F}_2, \vec{F}''_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}''_n),$$

რომელთა მომენტებია შესაბამისად $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots, \vec{L}_n$, ამასთანავე

$$\vec{L}_k = \text{მო}_O \vec{F}_k \quad (k=1,2,\dots,n).$$

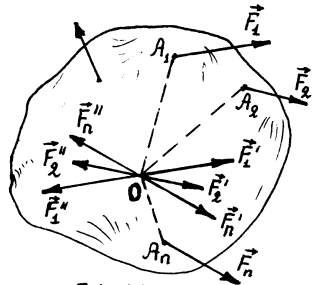
ცხადია გვექნება:

$$\begin{aligned} & (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \\ & \sim [(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n) \text{ და } (\vec{F}_1, \vec{F}''_1), (\vec{F}_2, \vec{F}''_2), \dots, \\ & , (\vec{F}_n, \vec{F}''_n)]. \end{aligned}$$

O ცენტრზე მოდებული ძალები შეიძლება შევკრიბოთ. მივიღებთ ერთ \vec{F} ძალას, რომელიც O ცენტრზეა მოდებული :

$$\vec{F} \sim (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n).$$

ამასთანავე



ნახ. 22

$$\vec{F} = \sum \vec{F}'_K = \sum \vec{F}_K.$$

\vec{F} არის მოცემულ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი.

ახლა შევკრიბოთ მიკავშირებული წყვილძალები. მივიღებთ ერთ ტოლქმედ (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილძალას, რომლის \vec{L}_0 ვექტორული მომენტი შემადგენელი წყვილძალების ვექტორული მომენტების გეომეტრიული ჯამის ტოლია (იხ. პ. 19):

$$\vec{L}_0 = \text{მომ}(\vec{P}, \vec{Q}) = \sum \vec{L}_K.$$

ე.ი. ტოლქმედი (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილძალის მომენტი ტოლია მოცემული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული \vec{L}_0 მომენტისა დაყვანის 0 ცენტრის მიმართ. დამტკიცდა შემდეგი

თეორემა *სივრცეში მდებარე ძალთა ნებისმიერი სისტემა შეიძლება დაიყვანოს ნებისმიერი 0 ცენტრის მიმართ ერთ ძალაზე და ერთ წყვილძალაზე. ძალა ტოლია ძალთა მოცემული სისტემის ნაკრები ვექტორისა და მოდებული დაყვანის 0 ცენტრში, ხოლო წყვილძალის ვექტორული მომენტი ტოლია ამ ცენტრის მიმართ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტისა. ე.ი.*

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \{ \vec{F}, (\vec{P}, \vec{Q}) \} \sim (\vec{F}, \vec{L}_0).$$

შედეგი 1. მოცემული სივრცით ძალთა სისტემის რაიმე 0 ცენტრის მიმართ დაყვანისას ერთ \vec{F} ძალამდე და ერთ (\vec{P}, \vec{Q}) წყვილძალამდე, მომენტით \vec{L}_0 , შეიძლება ადგილი ქონდეს შემდეგ შემთხვევებს:

1). $\vec{F} = 0, \vec{L}_0 = 0$, მაშინ ძალთა სისტემა იმყოფება წონასწორობაში.

2). $\vec{F} = 0, \vec{L}_0 \neq 0$, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება წყვილძალაზე, მომენტით \vec{L}_0 .

3) $\vec{F} \neq 0, \vec{L}_0 = 0$, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთ ტოლქმედ \vec{F} ძალაზე.

4) $\vec{F} \neq 0, \vec{L}_0 \neq 0$, ა) თუ $\vec{F} \perp \vec{L}_0$, ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე.

ბ) თუ $\vec{F} \perp \vec{L}_0$, ძალთა სისტემა დაიყვანება ძალთხრახნზე

შედეგი 2. ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა ნებისმიერი სისტემისათვის სამართლიანია

თეორემა ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემა შეიძლება დაიყვანოს ამ სიბრტყის ნებისმიერ 0 წერტილზე მოდებულ ერთ ძალაზე და ერთ წვეილძალაზე. ძალა ტოლია ძალთა მოცემული სისტემის ნაკრები ვექტორისა, ხოლო წვეილძალის სკალარული მომენტი ტოლია ამ წერტილის მიმართ სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტისა. ე.ი.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{F}, L_0).$$

შედეგი 3 მოცემული ბრტყელ ძალთა სისტემის რაიმე 0 ცენტრის მიმართ დაყვანისას ერთ \vec{F} ძალამდე და ერთ წვეილძალამდე, მომენტით L_0 , შეიძლება ადგილი ჰქონდეს შემდეგ შემთხვევებს:

1). $\vec{F} = 0$, $L_0 \neq 0$, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება წვეილძალაზე, მომენტით L_0 .

2) $\vec{F} \neq 0$, $L_0 = 0$, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთ ტოლქმედ \vec{R} ძალაზე.

3). $\vec{F} \neq 0$, $L_0 \neq 0$, ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ ამ შემთხვაშიც ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთ ტოლქმედ ძალაზე.

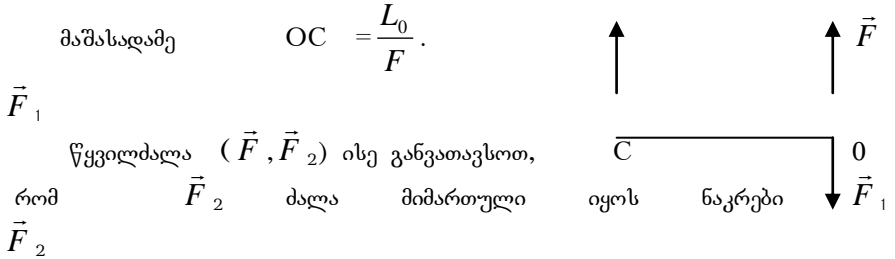
4) $\vec{F} = 0$, $L_0 = 0$, მაშინ ძალთა სისტემა იმყოფება წონასწორობაში.

§ 1.21. ბრტყელ ძალთა სისტემის ტოლქმედი

დავამტკიცოთ, რომ ზოგად შემთხვევაში, როცა $\vec{F} \neq 0$, $L_0 \neq 0$, არსებობს წერტილი C, რომლის მიმართაც ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთ ძალაზე – ტოლქმედზე.

განვიხილოთ ძალთა ნებისმიერი ბრტყელი სისტემა, რომელიც დაყვანილია 0 ცენტრის მიმართ. ზოგად შემთხვევაში მივიღებთ 0 ცენტრზე მოდებულ ნაკრებ \vec{F}_1 ვექტორს და ნაკრებ (ტოლქმედ) წვეილძალას (\vec{F}, \vec{F}_2) , რომლის მომენტია L_0 . დაუშვათ $L_0 > 0$. წვეილძალა ისე შევარჩიოთ, რომ მისი შემადგენელი ძალების მოდული ნაკრები \vec{F}_1 ვექტორის მოდულის ტოლი იყოს. წვეილძალის შემადგენელი ერთი ძალა \vec{F}_2 მოვლოთ დაყვანის 0 ცენტრში. მეორე \vec{F} ძალა მოვლოთ რომელიმე C წერტილში;

ამასთანავე, წვეილძალის მხარი 0C ისე შვეარჩიოთ, რომ შესრულდეს პირობა:
 $L_0 = OC \cdot F$.



ვექტორის საპირისპიროდ. მივიღებთ 0 წერტილში მოდებულ ერთი წრფის გასწვრივ ურთიერთსაწინააღმდეგოდ მიმართულ \vec{F}_1 და \vec{F}_2 . ძალებს, რომლებიც II აქსიომის თანახმად შეგვიძლია უკუვაგდოთ.

მაშასადამე, ძალთა განსახილველი სისტემის C წერტილის მიმართ დაყვანისას მივიღებთ სამი ძალა $(\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2)$, რომელთაგან ორი \vec{F}_1 და \vec{F}_2 პირდაპირთანაწინააღმდეგია $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$. მაშასადამე $(\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{F}$; ე. ი. ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთ ძალაზე – \vec{F} ტოლქმედზე.

§ 1.22. ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობები და განტოლებები

განვიხილოთ სხეულზე მოქმედი და ერთ სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებული ძალთა $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ სისტემა. როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ ასეთი ძალთა სისტემა შეიძლება დაყვანილი იქნეს ერთ ნაკრებ \vec{R} ვექტორზე და ნაკრებ წვეილძალაზე L_0 მომენტით. ამიტომ, სიბრტყეზე მდებარე ძალთა ნებისმიერი სისტემის წონასწორობის აუცილებელ პირობებს ასეთი სახე აქვს:

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}'_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0, \quad L_0 = \sum_{k=1}^n m_0 \vec{F}_k = 0 \quad (22.1)$$

ეს (22.1) პირობები **საკმარისი** არის სხეულის წონასწორობისათვის. მართლაც, ტოლობა $\vec{R} = 0$ გვიჩვენებს, რომ დაყვანის 0 ცენტრზე მოდებული ყველა ($\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$) ძალა, რომლებიც მოცემული ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) ძალების ტოლნი არიან- წონასწორდებიან. ანალოგიურად, $L_0 = 0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ მიკავშირებული (\vec{F}''_1, \vec{F}''_1), (\vec{F}''_2, \vec{F}''_2), ..., (\vec{F}''_n, \vec{F}''_n) წყვილძალების მომენტების ჯამი ნულის ტოლია, ე. ი. ეს წყვილძალები ასევე წონასწორდებიან.

მაშასადამე. ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა ნებისმიერი სისტემისათვის სამართლიანია

თეორემა: ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა ნებისმიერი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები სკალარული მომენტები ამ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის მიმართ იყოს ნულის ტოლი

$$\vec{F} = 0, \quad L_0 = 0.$$

(22.2)

ვთქვათ, ძალთა მოცემული სისტემა მოთავსებულია Oxy სიბრტყეზე. სისტემის შემადგენელი ძალების გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე ასე აღვნიშნოთ: $\vec{F}_1(X_1, Y_1), \vec{F}_2(X_2, Y_2), \dots, \vec{F}_n(X_n, Y_n)$; მათი ნაკრები ვექტორი იყოს $\vec{R}(X, Y)$.

ყველა ძალების გეგმილების ჯამი საკოორდინატო x და y ღერძებზე შესაბამისად არიან $X = \sum_{k=1}^n X_k$ და $Y = \sum_{k=1}^n Y_k$, ამიტომ ნაკრები ვექტორის სიდიდე განისაზღვრება ფორმულით:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2}.$$

ნაკრები ვექტორის ნულთან ტოლობის შემთხვევაში ($\vec{F} = 0$) გვექნება:

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n Y_k = 0.$$

მაშასადამე. ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა ნებისმიერი სისტემისათვის წონასწორობის (16. 2) განტოლებები კოორდინატებში ასე ჩაიწერება:

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n Y_k = 0, \quad L_0 = 0, \quad (22.3)$$

ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის არსებობს სხვა პირობებიც, რომლებსაც ქვემოთ ჩამოვყალიბებთ დამტკიცების გარეშე.

ა) **თეორემა** (სამი მომენტის თეორემა). *ბრტყელ ძალთა ნებისმიერი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ნებისმიერი, ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილის მიმართ ყველა ძალის სკალარული მომენტების ჯამი ცალ-ცალკე იყოს ნულის ტოლი.*

იმ სიბრტყეზე, სადაც ძალები არიან მოთავსებული, ავიღოთ ერთ წრფეზე არამდებარე A, B, C წერტილები, მაშინ წონასწორობის განტოლებები იქნება

$$\begin{aligned} L_A &= \sum \text{მომ}_A \vec{F}_K = 0, \\ L_B &= \sum \text{მომ}_B \vec{F}_K = 0, \end{aligned} \quad (22.4)$$

$$L_C = \sum \text{მომ}_C \vec{F}_K = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ A, B, C წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე, მაშინ (22.3) პირობები არ იქნებიან წონასწორობის საკმარისი პირობები. ამ შემთხვევაში ძალთა მოცემული სისტემა შეიძლება დავიდეს ერთ ტოლქმედ \vec{R} ძალაზე, რომლის ფუძეც ამ წერტილებზე გაივლის.

ბ) **თეორემა** *ბრტყელ ძალთა ნებისმიერი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ორი A და B წერტილის მიმართ ყველა ძალის სკალარული მომენტის ჯამი ცალ-ცალკე იყოს ნულის ტოლი და სისტემის ყველა ძალის გვემძობის ჯამი იმ ღერძზე, რომელიც არ არის მართობი ორ არჩეულ წერტილზე გამავალი წრფისა აგრეთვე იყოს ნულის ტოლი.*

$$L_A = \sum \text{მომ}_A \vec{F}_K = 0, \quad L_B = \sum \text{მომ}_B \vec{F}_K = 0, \quad \sum F_{KX} = 0. \quad (22.5)$$

აქ X ღერძი არ არის A და B წერტილებზე გამავალი წრფის მართობი.

წონასწორობის ამ პირობების გამოყენებისას მოსახერხებელია მომენტების ცენტრად არჩეულ იქნას ისეთი A და B წერტილები, რომლებზეც გადიან უცნობი ძალები, მაგალითად რეაქციის ძალები.

შევნიშნოთ, რომ თუ X ღერძი AB წრფის მართობულია, მაშინ (22.5) განტოლებები არ იქნებიან წონასწორობის საკმარისი პირობები,

რადგანაც ამ შემთხვევაში ძალთა სისტემა შეიძლება დაიყვანოს ტოლქმედ ძალაზე, რომლის ფუძე გადის A და B წერტილებზე.

გ) Oxy სიბრტყეზე Oy ღერძის პარალელურ ძალთა სისტემისათვის წონასწორობის (22.3) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\sum F_K = 0, \quad \sum x_K F_K = 0.$$

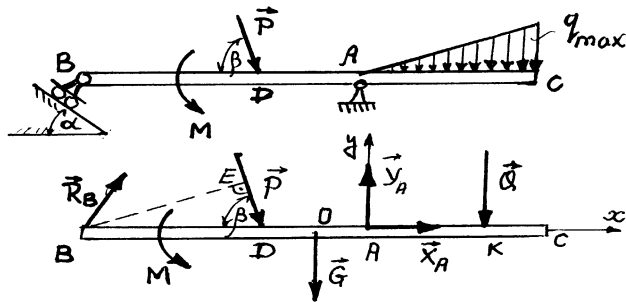
შედეგი. სიბრტყეზე პარალელური ძალებისათვის წონასწორობის განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახითაც:

$$L_A = \sum m_{0A} \vec{F}_K = 0, \quad L_B = \sum m_{0B} \vec{F}_K = 0,$$

ამავე დროს A და B წერტილები არ უნდა მდებარეობდნენ ძალების პარალელურ წრფეზე.

ამოცანა 1. $BC = 8$ მ სიგრძის და $G = 8$ კნ წონის ერთგვაროვანი ძელი A წერტილში ჩამაგრებულია სახსრით, ხოლო B ბოლოთი ეყრდნობა საგორავს, რომლის სიბრტყე დახრილია სორიზონტისადმი $\alpha = 30^\circ$ კუთხით. ძელზე მოქმედებენ $P = 10$ კნ ძალა, $M = 6$ კნმ მომენტის მქონე წყვილძალა და წრფივი კანონით განაწილებული დატვირთვა მაქსიმალური ინტენსივობით $\theta_{\max} = 2$ კნ/მ; $\beta = 60^\circ$; $BD = AC = 3$ მ. განსაზღვრეთ A და B საყრდენთა რეაქციები.

ამოხსნა. განვიხილოთ BC ძელის წონასწორობა; მასზე მოქმედებს უშუალოდ მოდებული \vec{P} ძალა, წყვილძალა - M მომენტით, ღეროს წონა G, მოდებული ღეროს შუა O წერტილში. აგრეთვე წრფივი



ნახ. 25

კანონით განაწილებული დატვირთვა, რომლის ტოლქმედია $Q = 0,5 \cdot AC \cdot \theta_{\max} = 3$ კნ,

იგი მოდებულია K წერტილში, სადაც $KC = \frac{1}{2} \cdot AC = 1$ მ.

ძელი გავანათავისუფლოთ ბმებისაგან. ძელზე იმოქმედებს საგორავის რეაქციის \vec{R}_B ძალა, რომელიც საგორავის საყრდენი სიბრტყის

მართობულია. მოქმედებს აგრეთვე უძრავი A სახსარის რეაქციის \vec{R}_A ძალა, რომლის სიდიდე და მიმართულება წინასწარ უცნობია. კოორდინატთა Oxy სისტემის x ღერძი მივმართოთ ძელის გასწვრივ სორიზონტალურად, ხოლო y ღერძი ვერტიკალურად ზევით. მაშინ \vec{R}_A ძალა შეგვიძლია დავშალოთ ამ კოორდინატთა ღერძების პარალელურ \vec{X}_A და \vec{Y}_A მდგენელებად. ახლა ძელი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც წონასწორობაში მყოფი თავისუფალი მყარი სხეული, რომელზეც მოქმედებენ ერთ სიბრტყეში განლაგებული ცნობილი \vec{P} , \vec{G} , \vec{Q} ძალები, M მომენტის წყვილძალა და უცნობი ძალები \vec{R}_B , \vec{X}_A , \vec{Y}_A . ე.ი. ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრულია (რკვევადია).

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები. მომენტების ცენტრად მიზანშეწონილია ავირჩიოთ წერტილი, სადაც თავს იყრის მეტი რაოდენობის უცნობი ძალა. ერთ-ერთი ასეთია B წერტილი. წყვილძალის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, ამიტომ მისი გვემილი ნებისმიერ ღერძზე ნულის ტოლია, ხოლო წყვილძალაში შემავალი ძალების მომენტების ჯამი ნებისმიერი წერტილის მიმართ ტოლია წყვილძალის მომენტისა.

წონასწორობის განტოლებებია:

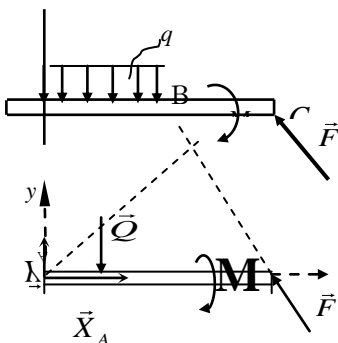
- (ა) $\sum X_k = 0 ; \quad X_A + P \cdot \cos\beta + R_B \cdot \sin\alpha = 0;$
- (ბ) $\sum Y_k = 0 ; \quad Y_A - Q - G - P \cdot \sin\beta + R_B \cdot \cos\alpha = 0;$
- (გ) $\sum L_{kB} = 0 ; \quad P \cdot BE + G \cdot B0 - Y_A \cdot BA + Q \cdot BK - M = 0 .$

როგორც ნახაზიდან ჩანს $BE = BD \cdot \sin\beta = 2,58; \quad B0 = 4 ; \quad BA = 5;$
 $BK = 7 .$

- (გ) განტოლებიდან : $Y_A = 14,58$ კნ ;
 (ბ) განტოლებიდან : $R_B = 5,86$ კნ ;
 (ა) განტოლებიდან : $X_A = -7,93$ კნ .

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-7,93)^2 + (14,58)^2} = 16,82$$

ამოცანა 2. განსაზღვრეთ ნახაზზე გამოსახული კონსო-ღური ძელის ჩამაგრების რეაქციები, თუ მასზე მოქმედებს $q = 1,5$ კნ/მ ინტენსივობის თანაბრადგანაწილებული დატვირთვა, $F = 4$ კნ-ის ტოლი



შეეწიერებული ძალა და $M = 2$ კნმ მომენტის მქონე წყვილძალა.

ამოსხნა. ამოცანის ამოსახსნელად შევადგინოთ საანგა-რიშო სქემა. ძელი პირობითად გავანთავისუფლოთ ბმები-საგან და მოვდოთ შესაბამისი რეაქციის ძალები. კოორ-დინატოა სათავე ავირჩიოთ A წერტილში და ღერძები ისე მივმართოთ, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. A წერტილში გვაქვს ხისტი (კონსოლური) ჩამაგრება, რომელიც გამო-რიცხავს სხეულის ყოველგვარ მოძრაობას – გადაადგი-ლებას და შემობრუნებას, ამიტომ ჩამაგრებულ ნაწილზე მოქმედი რეაქციის ძალები შეიცვლებიან ერთი \vec{R}_A რეა-ქციის ძალით და M_A მომენტის მქონე ერთი წყვილძა-ლით. მათი მიმართულებები უცნობია. დავშალოთ ძალა ორ X_A და Y_A მდგენელებად. ასე, რომ A საყრდენში გვა-ქვს სამი უცნობი სიდიდე X_A , Y_A და M_A .

AB უბანზე q ინტენსივობის თანარად განაწილებული დატ-ვირთვა შევცვალოთ ტოლქმედი ძალით:

$$Q = q \cdot AB = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ კნ.}$$

\vec{Q} ძალა მოდებუელია AB უბანის შუა წერტილში. ძელზე მოქმედი ბრტყელ ძალთა სისტემისათვის დავწეროთ წო-ნასწორობის სამი განტოლება. შევნიშნოთ, რომ მომენ-ტთა ცენტრად ვირჩევთ იმ წერტილს, რომელშიც მეტი უცნობი ძალის ფუჟე გაივილის, რადგან სკალარული მომენტის თვისების გამო ამ წერტილის მიმართ უცნობ ძალთა მომენტები ნულის ტოლია. ასეთ ცენტრად ავი-რჩევთ A წერტილს. წონასწორობის განტოლებებს ასეთი სახე ექნებათ:

$$\sum X_k = 0; \quad X_A - F \cos 45^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_k = 0; \quad Y_A - Q + F \sin 45^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{kA} = 0; \quad M_A + Q \cdot 1,5 + M - F \cdot 5 \sin 45^\circ = 0. \quad (3)$$

პირველი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$X_A = F \cos 45^\circ = 4 \frac{\sqrt{2}}{2} \square 2,8 \text{ კნ.}$$

მეორე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$Y_A = Q - F \sin 45^\circ = 4,5 - 4 \frac{\sqrt{2}}{2} \square 1,7 \text{ კნ.}$$

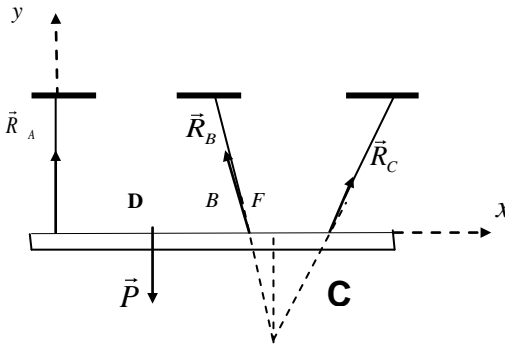
მესამე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$M_A = F \cdot 5 \sin 45^\circ - Q \cdot 1,5 - M = 4,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4,5 \cdot 1,5 - 2 = 5,25 \text{ კნ.}$$

X_A , Y_A და M_A მიღებული მნიშვნელობები დადებითია. ეს კი იმაზე მიუთითებს, რომ ჩვენს მიერ ამ ძალებისა-თვის არჩეული მიმართულებები ემთხვევა მათ ნამდვილ მიმართულებებს.

აშოცანა 3. ხიდის აწეობისას საჭირო გახდა ხიდის ფერმის ABC ნაწილის აწევა სამი ბაგირის საშუალებით ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე. ფერმის ამ ნაწილის წონაა 4,2 ნ, ხოლო სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს D წერტილში. ცნობილია, რომ $AD = 4$ მ, $DB = 2$ მ, $BF = 1$ მ. განსაზღვრეთ ბაგირების დაჭიმულობები, თუ AC პორიზონტალურია.

ამოსხნა: განვიხილოთ ხიდის ABC ნაწილის წონასწორობა და გავათავისუფლოთ იგი ბმებისაგან. ფერმაზე მოქმედებს სიმძიმის \vec{P} ძალა და ბაგირებში აღძრული \vec{R}_A , \vec{R}_B და \vec{R}_C რეაქციის ძალები. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები. მომენტების ცენტრად ავირჩიოთ \vec{R}_B და \vec{R}_C რეაქციის ძალების ფუძეების გადა-



კვეთის E წერტილი, რადგან ამ წერტილის მიმართ მათი მომენტები ნულის ტოლია.

წონასწორობის განტოლებებია:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^3 X_k = 0; & R_A \cos 90^\circ + P \cos 90^\circ - R_B \cos 60^\circ + R_C \cos 45^\circ = 0, \\ \sum_{n=1}^3 Y_k = 0; & R_A \cos 0^\circ + P \cos 180^\circ + R_B \cos 30^\circ + R_C \cos 45^\circ = 0, \\ \sum_{n=1}^3 M_{Ek} = 0; & R_A \cdot AF - P \cdot DF = 0. \end{cases}$$

სისტემის გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{cases} -R_B \cos 60^\circ + R_C \cos 45^\circ = 0, \\ R_A - P + R_B \cos 30^\circ + R_C \cos 45^\circ = 0, \\ R_A \cdot AF - P \cdot DF = 0. \end{cases}$$

$$AF = AD + DB + BF = 7\text{მ}, \quad DF = DB + BF = 3\text{მ}.$$

$$R_A = \frac{P \cdot DF}{AF} = \frac{4,2 \cdot 3}{7} = 1,8 \text{ კნ.}$$

სისტემის პირველი განტოლებიდან ვვაქვს, რომ

$$R_B = \sqrt{2} \cdot R_C.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა მეორე განტოლებაში. ვექნება:

$$1,8 - 4,2 + \frac{\sqrt{6}}{2} R_C + \frac{\sqrt{2}}{2} R_C = 0,$$

$$R_C = \frac{2 \cdot 2,4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \approx 1,2 \text{ კნ}, \quad R_B \approx 1,7 \text{ კნ}.$$

$$AF = AD + DB + BF = 7\text{მ}, \quad DF = DB + BF = 3\text{მ}.$$

$$R_A = \frac{P \cdot DF}{AF} = \frac{4,2 \cdot 3}{7} = 1,8 \text{ კნ.}$$

პასუხი: $R_A = 1,8 \text{ კნ}$, $R_C \approx 1,2 \text{ კნ}$, $R_B \approx 1,7 \text{ კნ}$.

§ 1.23. ნებისმიერ სივრცით კალთა სისტემის წონასწორობა

ვთქვათ, სივრცეში მდებარე მყარ სხეულზე მოქმედებს ძალთა რაიმე სისტემა:

$$\vec{F}_1 (X_1, Y_1, Z_1) , \vec{F}_2 (X_2, Y_2, Z_2) , \dots , \vec{F}_n (X_n, Y_n, Z_n)$$

ძალთა მოცემული სისტემის ნაკრები ვექტორი იყოს $\vec{F} (X, Y, Z)$, ხოლო ნაკრები ვექტორული მომენტი $\vec{0}$ სათავის მიმართ იყოს $\vec{L}_0 (L_X, L_Y, L_Z)$.

თეორემა. ძალთა ნებისმიერი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი რომელიმე ცენტრის მიმართ იყოს ნული ტოლი

$$\vec{F} = 0 , \quad \vec{L}_0 = 0 .$$

(23.1)

ეს პირობები გვემძლევა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \\ L_X = 0, \quad L_Y = 0, \quad L_Z = 0. \end{aligned}$$

(23.2)

თუ გამოვიყენებთ ძალთა ნებისმიერი სისტემის ნაკრები ვექტორის (12.1) და ნაკრები ვექტორული მომენტის (12.3) ანალიზურ გამოსახვას, მაშინ (23.2) ტოლობები ასეთ სახეს მიიღებენ:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n X_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n (y_k Z_k - z_k Y_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n Y_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n (y_k Z_k - z_k Y_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n Z_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n (x_k Y_k - y_k X_k) = 0. \end{aligned}$$

(23.3)

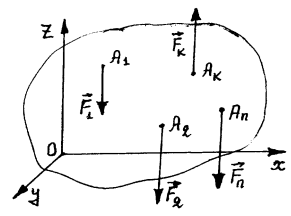
ეს განტოლებები წარმოადგენენ ნებისმიერ სივრცით ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებებს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. აქ X_k ,

Y_K, Z_K არიან \vec{F}_K ძალის მოდების A_K წერტილის კოორდინატები, ხოლო X_K, Y_K, Z_K არიან \vec{F}_K ძალის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე.

ამგვარად, სივრცეში მყარ სხეულზე მოქმედი ძალთა ნებისმიერი სისტემის წონასწორობის ამოცანის განხილვის დროს შეგვიძლია შევადგინოთ წონასწორობის ექვსი განტოლება. ეს ნიშნავს, რომ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ექვსი უცნობი სიდიდე. თუ აღმოჩნდა, რომ მოცემულ ამოცანაში გვაქვს ექვსზე მეტი უცნობი სიდიდე, მაშინ ასეთ ამოცანას უწოდებენ სტატისტიკურად ურეკვეკ ანუ სტატიკურად განუსაზღვრელ ამოცანას.

კერძო შემთხვევა: პარალელური ძალთა სისტემა.

ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია პარალელური ძალთა სისტემა. კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ ერთ-ერთი კოორდინატთა ღერძი, ვთქვათ Oz ღერძი მიემართოს ამ ძალების პარალელურად. მაშინ, (2.3.3) განტოლებებიდან მიიღება სივრცეში პარალელური ძალების წონასწორობის განტოლებები:



ნახ. 24

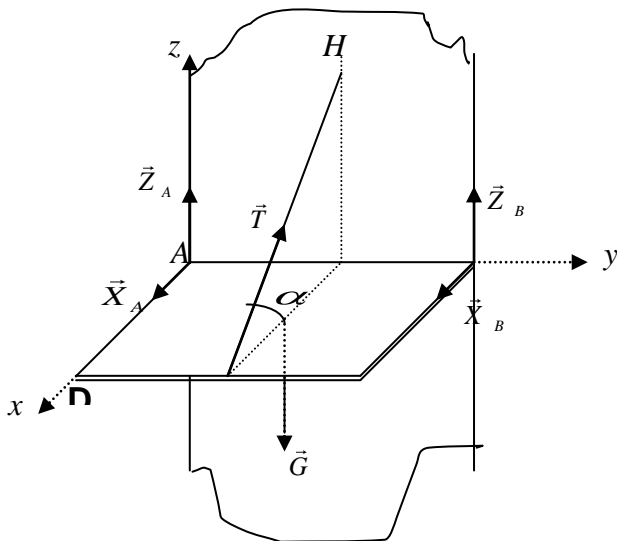
$$\sum_{k=1}^n F_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n Y_k F_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n Z_k F_k = 0$$

მაშასადამე, სივრცითი პარალელური ძალების წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, ამ ძალების ჯამი იყოს ნულის ტოლი და ძალების მართობული ორი საკოორდინატო ღერძის მიმართ ძალების მომენტების ჯამი ცალ-ცალკე იყვნენ ნულის ტოლი.

შენიშვნა. ზემოთ მიღებული წონასწორობის განტოლებები წარმოადგენენ თავისუფალი მყარი სხეულის წონასწორობის განტოლებებს სივრცეში.

თუ ვიხილავთ არათავისუფალი სხეულის წონასწორობას, საჭიროა ეს სხეული გავათავისუფლოთ ბმებისგან, ე.ი. ბმები შევცვალოთ ბმის რეაქციის ძალებით. მაშინ სხეულზე მოდებულ აქტიურ ძალებს დაემატებათ რეაქციის ძალებიც და ძალთა ეს სისტემა უნდა იყოს წონასწორობაში.

პროცესი 1. G წონის ერთგვაროვანი $ABCD$ თარო პორი-



ზონტალურ მდებარეობაში შეკავებულია EH ბაგირის საშუალებით, რომელიც თაროს ზედაპირთან ადგენს α კუთხეს. ანსაზღვრეთ ბაგირის T დაჭიმულობა და A და B ანჯამების რეაქციები, თუ $AK=KB=DE=EC$, $HK \perp AB$ და ბაგირის წონა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა: განვიხილოთ თაროს წონასწორობა. მასზე მოქმედებს ძალები: \vec{G} ძალა, რომელიც თაროს წონის ტოლია, ბაგირის \vec{T} დაჭიმულობის ძალა, A და B ანჯამებში აღძრული რეაქციის ძალები, რომლებიც დაშლილია \vec{X}_A, \vec{Z}_A და \vec{X}_B, \vec{Z}_B შემადგენელ ძალებად. შევა-დგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X_k = 0; X_A + T \cos(180^\circ - \alpha) + X_B = 0, \\ \sum Z_k = 0; Z_A + T \cos(90^\circ - \alpha) - G + Z_B = 0, \\ \sum M_{kx} = 0; -T \cdot AK \sin \alpha + G \cdot AK - Z_B \cdot 2AK = 0, \\ \sum M_{ky} = 0; T \cdot AD \sin \alpha - G \cdot \frac{AD}{2} = 0, \\ \sum M_{kz} = 0; -T \cdot AK \cos \alpha + X_B \cdot 2AK = 0. \end{array} \right.$$

ტოლობა სრულდება ავტომატურად იმ მოთხე განტოლებიდან ვლებულობთ:

$$T = \frac{G}{\sin \alpha};$$

მეხუთე განტოლებიდან:

$$X_B = \frac{T \cos \alpha}{2} = \frac{D}{4} \operatorname{ctg} \alpha,$$

მესამე განტოლებიდან:

$$Z_B = \frac{1}{2}(G - T \sin \alpha) = \frac{G}{4},$$

მეორე განტოლებიდან:

$$Z_A = G - T \sin \alpha - Z_B = \frac{G}{4},$$

პირველი განტოლებიდან:

$$X_A = T \cos \alpha - X_B = \frac{D}{4} \operatorname{ctg} \alpha.$$

ამოცანა 2. მუხლა ღიღვს შეუძლია ბრუნვა A და B საკისარებში. ღიღვის ბოლოზე ჩამოცმულია $R = 20$ სმ რადიუსის მქონე კბილანა. ჰორიზონტალურად მდებარე ღიღვის შუა D წერტილში მიდებუღია ღიღვის ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში მდებარე \vec{F} ძალა, რომელიც ვერტიკალთან ქმნის $\alpha = 30^\circ$ კუთხეს. განსაზღვრეთ ღიღვის წონასწორობისას Ay ღერძის პარალელურად კბილანაზე მოდებუღი \vec{Q} ძალის სიდიდე, აგრეთვე A და B საკისარების რეაქციები, თუ $F = 20$ კნ, $ED = 15$ სმ $a = 15$ სმ, $b = 20$ სმ, $c = 25$ სმ.

ამოხსნა. ღიღვის თანაბრად ბრუნვისას მასზე მოქმედი ძალები იმყოფება წონასწორობაში. ღიღვი პირობითად გავათავისუფლოთ ბმებისაგან და მოვდლოთ შესაბამისი რეაქციის ძალები. საკისარების შესაბამისი რეაქციები დავშალოთ მდგენელ ძალებად და მივმართოთ კოორდი-ნატთა ღერძების გასწვრივ ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\begin{cases} \sum Y_k = 0; & Q + Y_A + F \sin \alpha + Y_B = 0, \\ \sum Z_k = 0; & Z_A - F \cos \alpha + Z_B = 0, \\ \sum M_{kx} = 0; & -Q \cdot R + F \cos \alpha \cdot DE = 0, \\ \sum M_{ky} = 0; & F \cos \alpha \cdot b - Z_B (b+c) = 0, \\ \sum M_{kz} = 0; & -Q \cdot a + F \sin \alpha \cdot b + Z_B \cdot (b+c) = 0. \end{cases}$$

განტოლება $\sum X_k = 0$ სრულდება იგივეურად, რადგანაც ყველა ძალა მდებარეობს ხ ღერძის მართობულ სიბრტყე-ში.

მესამე განტოლებიდან

$$Q = \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot DE}{R} = \frac{20 \cdot 0,15}{0,2} = 15 \text{ კნ.}$$

მეოთხე განტოლებიდან

$$Z_B = \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot b}{b+c} = \frac{20 \cdot 0,2 \cdot 1,7}{0,45} \approx 7,7 \text{ კნ.}$$

მეხუთე განტოლებიდან

$$Y_B = \frac{Q \cdot a - F \cdot \sin \alpha \cdot b}{b+c} = \frac{15 \cdot 0,15 - 20 \cdot 0,2 \cdot 0,5}{0,45} \approx 0,6 \text{ კნ.}$$

მეორე განტოლებიდან

$$Z_A = F \cdot \cos \alpha - Z_B = 20 \cos \alpha - 7,7 \approx 9,6 \text{ კნ.}$$

პირველი განტოლებიდან

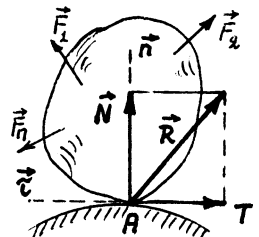
$$Z_A = F \cdot \cos \alpha - Z_B = 20 \cos \alpha - 7,7 \approx 9,6 \text{ კნ.}$$

ს ა ს უ ნ ი

§ 1.24 . სასუნის კანონი

ბუნებაში არ არსებობს აბსოლუტურად გლუვი და აბსოლუტურად მყარი სხეულები, ამიტომ ერთი სხეულის მეორე სხეულის ზედაპირზე გადაადგილებისას მათი შეხების სიბრტყეში წარმოიქმნება ამ სხეულების ფარდობითი გადაადგილების წინააღობის ძალა, რომელსაც ეწოდება *სასუნის ძალა*.

სასუნი ბუნებაში საკმაოდ გავრცელებული მოვლენა და მას დიდი მნიშვნელობა გააჩნია. სასუნზე დაფუძნებული მანქანათა მუშაობა, ღვედური და ფრიქციული გადაცემების მუშაობა, სამუხრუჭე



ნახ. 29

მოწყობილობები, საგლინავი დაზგები, დახრილი გადამზიდები და ა.შ. ხახუნი უზრუნველყოფს დედამიწასთან შეჭვიდებას და ამით ადამიანისა და სატრანსპორტო საშუალებათა გადაადგილებას. ამასთან ერთად, ხახუნი ზშირ შემთხვევაში საზიანო (მაგნე) წინააღმდეგობაა, რომლის გადალახვაზეც დიდი ენერგია იხარჯება. და ცდილობენ ენერგიის ეს დანაკარგი შეამცრონ

რადგანაც არ არსებობენ აბსოლუტურად მყარი სხეულები და აბსოლუტურად გლუვი ზედაპირები, ამიტომ ყველა სხეული რამდენადმე დეგორმირებადია და ყველა ზედაპირი რამდენადმე მქისეა (ზორკლიანია). ამის გამო, მქისე ზედაპირის რეაქციის ძალა სხეულის წონასწორობისას დამოკიდებულია აქტიურ ძალებზე არა მარტო სიდიდით, არამედ მიმართულებითაც.

ვთქვათ, მძიმე სხეული ეყრდნობა რაიმე უძრავ ზედაპირს. ზედაპირების შეხების წერტილში საყრდენ ზედაპირზე წარმოშობილი რეაქციის \vec{R} ძალა დავშალოთ ორ მდგენელად: ერთი მდგენელი მიმართული იყოს შემხები ზედაპირების საერთო ნორმალის გასწვრივ (\vec{N}), ხოლო მეორე (\vec{T}) მოთავსებული იყოს ამ ზედაპირების საერთო მხებ სიბრტყეში. ბმის რეაქციის ნორმალურ \vec{N} მდგენელს ეწოდება *ნორმალური რეაქციის ძალა*, ხოლო მხებ \vec{T} მდგენელს – *სრიალის ხახუნის ძალა*. რაც უფრო გლუვია ზედაპირი, მით უფრო ნაკლებია ხახუნის (მხები) ძალა.

ხახუნის ძალის წარმოშობა უპირველეს ყოვლისა განპირობებულია შემხები სხეულების ზედაპირების სიმქისის, აგრეთვე სხეულების მოლეკულარული შეჭვიდულობის გამო. ამიტომ ცხადია, ხახუნის ძალა ეწინააღმდეგება სხეულების ერთმანეთზე გადაადგილებას.

ხახუნის მოვლენის ყველა თავისებურების შესწავლა საკმაოდ რთულ პრობლემებს შეიცავს. საინჟინრო პრაქტიკაში კი ზშირად ეყრდნობიან ცდებით მიღებულ შედეგებს, რომლებიც საკმაოდ კარგი მიახლოებით ასახავს ხახუნის მოვლენის თავისებურებებს.

ანსხვაგვებენ ა) *მშრალ ხახუნს* (შემხეთავი ნივთიერება არ არსებობს); ბ) *ზღვრულ ხახუნს* (შემხები ზედაპირები დაფარულია შემხეთავი ნივთიერების თხელი ფენით) და გ) *თხევად ხახუნს* (შემხები ზედაპირები განცალკევებულია შემხეთავი ნივთიერების ფენით)

თეორიულ მექანიკაში იხილავენ მხოლოდ *მშრალ ხახუნს*. ამასთანავე იხილავენ სამი სახის ხახუნს: *სრიალის ხახუნს* (პირველი გვარის ხახუნი), *გორვის ხახუნს* (მეორე გვარის ხახუნი) და *ტრიალის ხახუნს*.

შევისწავლოთ *სრიალისა და გორვის ხახუნი*.

§1. 25. სრიალის ხახუნი

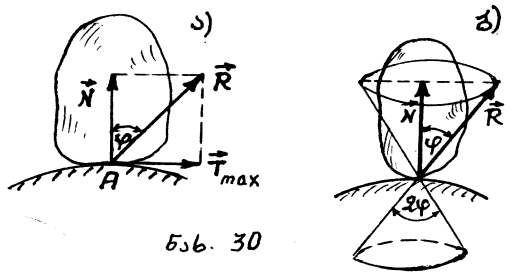
ანსხვავებენ სრიალის ხაზუნს სხეულის წონასწორობისას (უძრაობისას) და მოძრაობისას, როდესაც ერთი სხეული მოძრაობს მეორე სხეულის ზედაპირზე რაიმე სიჩქარით.

უძრაობის დროს ხაზუნის ძალა დამოკიდებულია მხოლოდ აქტიურ ძალებზე.

ცდებით დადგენილია, რომ ხაზუნის ძალა (სრიალისადმი წინააღმდეგობა) იზრდება განსაზღვრულ სხეულზე მოდებული აქტიური ძალების ტოლქმედის მხები მდგენელის ზრდასთან ერთად. მაგრამ ხაზუნის ძალის ეს ზრდა გრძელდება მხოლოდ გარკვეულ ზღვრულ მაქსიმუმამდე, რომლის სიდიდე განისაზღვრება შემხები სხეულების ფიზიკური თვისებებით, რის შემდეგაც იწყება სრიალი. სრიალისადმი წინააღმდეგობის ძალის უდიდეს მნიშვნელობას ($T_{\text{მაქს}}$), რომელსაც იგი აღწევს სრიალის დაწყების წინ, ეწოდება ზღვრული, ანუ *ს ტ ა ტ ი კ უ რ ი ხ ა ხ უ ნ ი ს ძ ა ლ ა*.

თუ ხაზუნის ძალა ეწინააღმდეგება ერთი სხეულის მეორე სხეულის ზედაპირზე მოძრაობას, მაშინ მას ეწოდება *სტატიკური ხაზუნის ძალა*, ანუ *უძრაობის ხაზუნის ძალა*.

თუ ხაზუნის ძალა ანელებს ერთი სხეულის მოძრაობას მეორე სხეულის ზედაპირზე, მაშინ მას ეწოდება *დინამიკური ხაზუნის ძალა*, ანუ *მოძრაობის ხაზუნის ძალა*.



ნახ. 30

ამგვარად, სრიალის სტატიკური ხაზუნის ძალას ($T_{\text{ხაზ}}$) შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა ნულიდან მაქსიმალურ მნიშვნელობამდე:

$$0 \leq T_{\text{ხაზ}} \leq T_{\text{მაქს}}$$

იმ შემთხვევაში, თუ მოთხოვნილი არ არის დიდი სიზუსტე, სრიალის ხაზუნის ძალის განსაზღვრისათვის ტექნიკაში სარგებლობენ მშრლი სრიალის ხაზუნის მიახლოებითი კანონებით, რომლებიც 1781 წელს ცდების გზით დაადგინა ფრანგმა მეცნიერმა კულონმა.

ჯერ განვიხილოთ კანონები, რომლებსაც ემორჩილება *სრიალის სტატიკური ხაზუნის ძალა*.

1. *სტატიკური ხაზუნის ძალის უდიდესი (მაქსიმალური) სიდიდე პროპორციულია ერთი სხეულის მეორე სხეულზე ნორმალური წნევისა*

$$T_{\text{მაქს}} = f_{\text{სტ}} \cdot N \tag{28.1}$$

N - ერთი სხეულის მეორე სხეულზე ნორმალური წნევაა;

$f_{\text{სტ}}$ - პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომელსაც ეწოდება *სრიალის ხაზუნის სტატიკური კოეფიციენტი*. იგი უგანზომილებო სიდიდეა. მისი

მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული სხეულისა და საყრდენი ზედაპირის ურთიერთ შეხების ფართობზე, მაგრამ დამოკიდებულია სხეულისა და საყრდენი ზედაპირის შემადგენელ ნივთიერებებზე, მათი ზედაპირების მდგომარეობაზე (დამუშავების ხასიათზე, სველია თუ მშრალი, როგორი ტემპერატურაა და სხვ.). ხახუნის $f_{სტ}$ კოეფიციენტი სხვადასხვა სხეულისათვის განისაზღვრება ცდის საშუალებით.

(32.1) ფორმულა მიახლოებითია, მაგრამ მისი სიმარტივე და საკმარისი სიზუსტე საშუალებას იძლევა ფართოდ იქნეს გამოყენებული ტექნიკაში.

სტატიკაში განვიხილავთ სრიალის სტატიკურ ხახუნს.

თუ ხახუნის ძალა $\vec{T} = 0$, მაშინ $f = 0$ და იტყვიან, რომ შემხები ზედაპირები აბსოლუტურად გლუვია.

თუ $f \neq 0$, მაშინ ზედაპირს ეწოდება მქისე.

2. ვთქვათ არაგლუვ ზედაპირზე მოთავსებული სხეული აქტიური ძალების მოქმედებით იმყოფება ზღვრული წონასწორობის მდგომარეობაში (ე. ი., როცა სხეულის წონასწორობის დასარღვევად საკმარისია სულ ციტა მიზეზი). ხახუნის ძალა $\vec{T} = \vec{T}_{აქს.}$ ვთქვათ ამ მდგომარეობაში რეაქციის \vec{R} ძალის მიერ მის ნორმალურ \vec{N} მდგენელთან შედგენილი კუთხე არის φ . ამ კუთხეს უწოდებენ *ხახუნის კუთხეს*

ცხადია $T = N \operatorname{tg} \varphi$, ანუ $\operatorname{tg} \varphi = f$.

აქედან ჩანს, რომ ხახუნის სტატიკური f კოეფიციენტის მაგვირად შეიძლება მოცემული იყოს ხახუნის კუთხე φ .

კონუსს, რომლის წვერო მოთავსებულია ზედაპირთან სხეულის შეხების წერტილში, ხოლო მსახველი ნორმალურ რეაქციასთან ადგენს ხახუნის φ კუთხის ტოლ კუთხეს, ეწოდება *ხ ა ხ უ ნ ი ს კ ო ნ უ ს ი*.

ამ განსაზღვრის თანახმად, სხეულზე მოქმედი აქტიური ძალების \vec{R} ტოლქმედი მიმართულია ხახუნის კონუსის მსახველის გასწვრივ.

ამრიგად, თუ სხეულზე მოქმედი აქტიური ძალების ტოლქმედი ადგენს ნორმალთან ხახუნის φ კუთხეზე ნაკლებ კუთხეს, ე.ი. მისი მოქმედების ფუძე მოთავსებულია ხახუნის კუთხის შიგნით, მაშინ, რაც უნდა დიდი იყოს ტოლქმედის სიდიდე, მისი მოქმედებით სხეულს არ შეუძლია მოძრაობა (სრიალი) – ე.ი. წონასწორობაშია.

თუ ტოლქმედი ძალა მდებარეობს კონუსის მსახველზე, მაშინ გვაქვს წონასწორობის კრიტიკული შემთხვევა.

თუ ტოლქმედის ფუძე არ გადის ხახუნის კუთხის შიგნით და არც ემთხვევა კონუსის მსახველის, მაშინ სხეული მქისე ზედაპირზე არ შეიძლება იყოს წონასწორობაში.

თუ სრიალის ხაზუნის კოეფიციენტი ერთი და იგივეა ყველა მიმართულებით მოძრაობისას, მაშინ ხაზუნის კუთხეც ერთი და იგივეა და ხაზუნის კონუსი წრიულია.

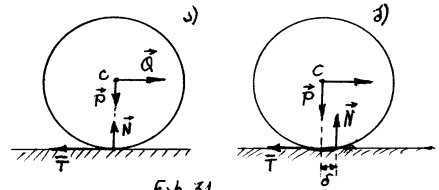
§1. 26 გორვის ხაზუნის

გორვის ხაზუნი ეწოდება მოძრაობის ხაზუნს, რომლის დროსაც შემხები სხეულების სიჩქარე მათი შეხების წერტილში ერთნაირია სიდიდითა და მიმართულებით

გორვის ხაზუნი არის წინააღმდეგობა, რომელიც წარმოიქმნება ერთი მრუდე ზედაპირის მქონე სხეულის მთლიან სხეულზე გორვისას,

განვიხილოთ r რადიუსის და P წონის წრიული ცილინდრი, რომელიც მოთავსებულია არაგლუვ პორიზონტალურ სიბრტყეზე.

ცილინდრის ღერძს C წერტილში მოვლოთ აქტიური პორიზონტალური \vec{Q} ძალა. ამ ძალის მოქმედება იწვევს ცილინდრისა და სიბრტყის შეხების არეში ხაზუნის \vec{T} ძალის წარმოშობას, რომელიც სიდიდით \vec{Q} ძალის ტოლია და



ნახ. 31

ეწინააღმდეგება სიბრტყეზე ცილინდრის სრიალს. \vec{Q} . \vec{Q} და \vec{T} ძალები ადგენენ წყვილძალას მომენტით $L_g = Q r$, რომელიც იწვევს ცილინდრის გორვას სიბრტყეზე.

P წონის ცილინდრის პორიზონტალურ სიბრტყეზე გორვისას წარმოქმნილი წინააღმდეგობა განპირობებულია სხეულთა დეფორმაციით, რის შედეგადაც ცილინდრისა და სიბრტყის შეხება ხდება გარკვეულ წირზე. ამ წირის გასწვრივ ცილინდრზე მოქმედებენ განაწილებული რეაქციის ძალები, რომელთა ტოლქმედი რეაქციის \vec{N} ძალა სიდიდით სიმძიმის \vec{P} ძალის ტოლია და მოდებულია სიბრტყის მართობულად არა იმ წერტილში, სადაც გადის სიმძიმის \vec{P} ძალის ფუძე, არამედ გადაწეულია გვერდზე \vec{Q} ძალის მოქმედების მხარეს ისე, რომ \vec{P} და \vec{N} ძალები ქმნიან წყვილძალას, რომელიც ეწინააღმდეგება ცილინდრის გორვას სიბრტყეზე.

(\vec{P}, \vec{N}) წყვილძალის მომენტი $L_{ს.ხ} = P \cdot \delta$.

ამ წყვილძალას ეწოდება გორვის ხაზუნის წყვილძალა, ხოლო მისი მხარი δ იზომება სიგრძის ერთეულებში. δ მხარს ეწოდება გორვის ხაზუნის

კოეფიციენტი. δ -ს სიდიდე დამოკიდებულია შემადგენელი სხეულების მასალაზე და მით უფრო მცირეა, რაც უფრო მყარია სხეულების შემადგენელი მასალები, ე.ი. რამდენადაც მცირეა ცილინდრისა და სიბრტყის დეფორმაცია. მაგალითად, ფოლადის ბორბალის გორვისას ფოლადის რელსზე $\delta=0,005$ სმ, ხოლო რეზინის საბურავის გორვისას გრუნტიან გზაზე $\delta=2$ სმ და მეტს.

\bar{Q} ძალის ზრდისას გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობამდე ცილინდრი რჩება წონასწორობაში. \bar{Q} -ს გადიდებასთან ერთად δ მანძილიც იზრდება გარკვეულ სიდიდემდე. ამრიგად, L_g მომენტის მქონე (\bar{Q}, \bar{T}) წყვილძალასთან ერთად ცილინდრზე მოქმედებს $L_{ხახ}$ მომენტის მქონე (\bar{P}, \bar{N}) წყვილძალა.

შესაძლოა ადგილი ჰქონდეს ცილინდრის მოძრაობის შემდეგ კერძო შემთხვევებს:

- ა) $L_g \geq L_{ხახ}$, მაგრამ $\bar{Q} < \bar{T}$ - ადგილი აქვს მხოლოდ გორვას;
- ბ) $L_g < L_{ხახ}$, მაგრამ $\bar{Q} > \bar{T}$ - ადგილი აქვს მხოლოდ სრიალს;
- გ) $L_g > L_{ხახ}$, მაგრამ $\bar{Q} > \bar{T}$ - ადგილი აქვს გორვას სრიალით;
- დ) $L_g < L_{ხახ}$, მაგრამ $\bar{Q} < \bar{T}$ - ადგილი აქვს წონასწორობას (უძრაობა).

ცილინდრის ზღვრული წონასწორობის მომენტისათვის

$$L_{ხახ} = L_g, \text{ ანუ } P \cdot \delta = Q \cdot r,$$

აქედან, გორვის ხახუნის კოეფიციენტი $\delta = \frac{Q \cdot r}{P}$.

კვლევის შედეგებმა აჩვენა, რომ გორვის ხახუნის კოეფიციენტი დამოკიდებულია საგორავის რადიუსზე და ნორმალურ წნევაზე, ამასთანავე, გორვის ხახუნის წყვილძალის უდიდესი მომენტი პროპორციულია ნორმალური წნევისა და არ არის დამოკიდებული გორვის სიჩქარეზე, არამედ დამოკიდებულია მგორავი სხეულის სიმკვრივეზე და ზედაპირია მდგომარეობაზე.

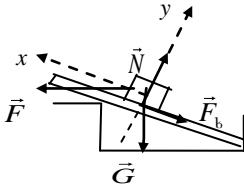
გორვის ხახუნი უმეტეს შემთხვევაში ნაკლებია სრიალის ხახუნზე, ამიტომ, სრიალა საკისარის ნაცვლად ფართოდ იყენებენ ბურთულასაკისარიან და გორგოლაჭსაკისარიან გორვას.

პრაქტიკაში არც თუ იშვიათად იყენებენ სრიალის ხახუნის შეუღლებას გორვის ხახუნთან, მაგალითად კბილა გადაცემაში ან ნემსოვან საკისარებში.

გორვის ხახუნის კანონი, ისევე როგორც სრიალის ხახუნის კანონი სამართლიანია მცირე ნორმალური წნევისათვის და არც თუ ადვილად დეფორმირებადი მასალის საგორავისა და სიბრტყისათვის. ეს კანონები საშუალებას გვაძლევენ არ განვიხილოთ საგორავისა და სიბრტყის დეფორმაცია; ჩავთვალოთ ისინი აბსოლუტურად მყარ სხეულებად, როლებიც

ერთმანეთს ეხებიან ერთ წერტილში, შეხების ამ წერტილში საგორავის კვეთას ნორმალური რეაქციისა და ხახუნის ძალის გარდა უნდა მოვლით აგრეთვე წვეილძალა, რომელიც ეწინააღმდეგება გორვას.

აშოცანა 1. პორიზონტთან $\alpha = 30^\circ$ კუთხით დახრილ სიბრტყეზე ძეგს $G = 1,5$ კნ წონის ტვირთი. განსაზღვრეთ პორიზონტალური \vec{F} ძალის სიდიდე, თუ ტვირთი იმყოფება წონასწორობაში და სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0,4$.



აშოხსნა. განესაზღვროთ \vec{F} ძალის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომელიც საჭიროა იმისათვის, რომ სხეულმა არ ისრიალოს ზევით სიბრტყის გასწვრივ. მიტომ ხახუნის ძალა მიემართოთ შესაძლო მოძრაობის საწინააღმდეგო მხარეს. ე.ი. მოცემულ შემთხვევაში ქვევით, სიბრტყის

გასწვრივ. ამრიგად, ტვირთი იმყოფება წონასწორობაში \vec{F} , $\vec{F}_{\text{ბ.ბ.}}$, \vec{G} და \vec{N} ძალების მოქმედებით. ავაგვემდილოთ ყველა ძალა საკოორდინატო სისტემის Ox და Oy ღერძებზე. გვექნება:

$$\sum X_k = 0; \quad F_{\text{max}} \cos \alpha - F - G \sin \alpha = 0;$$

$$\sum Y_k = 0; \quad N - G \cos \alpha - F_{\text{max}} \sin \alpha = 0;$$

მეორე განტოლებიდა მივიღებთ:

$$N = G \cos \alpha + F_{\text{max}} \sin \alpha;$$

რადგან ხახუნის ძალა

$$F_{\text{ბ.ბ.}} = fN = f(G \cos \alpha + F_{\text{max}} \sin \alpha),$$

ამიტომ პირველი განტოლებიდან სეიძლება დავწეროთ:

$$F_{\text{max}} \cos \alpha - f(G \cos \alpha + F_{\text{max}} \sin \alpha) - G \sin \alpha = 0.$$

ქედან მივიღებთ

$$F_{\text{max}} = \frac{G(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1500(0,5 + 0,4 \cdot 0,866)}{0,866 - 0,4 \cdot 0,5} \approx 1900 \text{ გ}$$

თუ \vec{F} ძალის სიდიდე მეტია F_{\max} -ზე, მაშინ ტვირთი დაიწეებს სრიალს ზევით.

ახლა გამოვთვალოთ \vec{F} ძალის მინიმალური მნიშვნელობა, რომელიც საჭიროა იმისათვის, რომ შენარჩუნდეს წონასწორობის მდგომარეობა, ე.ი. მან არ ისრიალოს ქვევით, მივიღებთ:

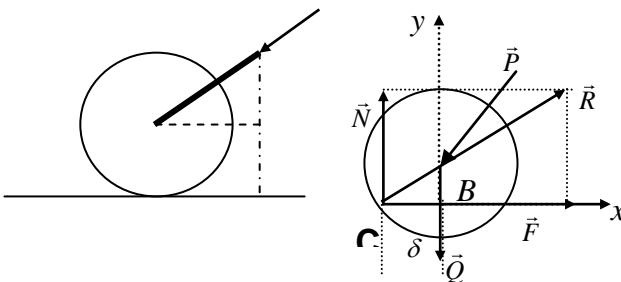
$$F_{\min} = \frac{G(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1500(0,5 - 0,4 \cdot 0,866)}{0,866 + 0,4 \cdot 0,5} \approx 216,6.$$

აქ გავითვალისწინეთ, რომ ხახუნის ძალა ყოველთვის მიმართულია მოძრაობის საწინააღმდეგოდ, ე.ი. ამ შემთხვევაში სიბრტყის გასწვრივ, ზევით.

ამგვარად, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ $216 < F < 1900$, მაშინ შენარჩუნებული იქნება წონასწორობა სიბრტყეზე. სხვა შემთხვევაში იგი ისრიალებს ქვევით ან ზევით.

აზოცანა 2. $Q = 3,92$ კნ წონის და 60 სმ დიამეტრის ცილინდრული სატკეპნი თანაბარ მოზრაობაში მოჰყავს ადამიანს, რომელიც აწეობს $AO = 1,5$ მ სიგრძის სახელ-ურს მუდმივი \vec{P} ძალით AO -ს მიმართულებით. ანძილი ჰორიზონტალური გზის ზედაპირიდან სახელურის A წერტილამდე ტოლია 1,2 მ-ის. სატკეპნის გორვის ხახუნის კოეფიციენტი $\delta = 0,5$ სმ.

განსაზღვრეთ \vec{P} ძალის სიდიდე, ხახუნის ძალა სატკეპნის გორვისას და ჰორიზონტალური სიბრტყის რეაქციის ნორმალური მდგენელი, თუ სატკეპნის გზაზე სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0,2$



ამოხსნა: სატკეპნის თანაბრად გორვისას მასზე მოქმედი ყველა ძალა გაწონასწორებულია. სატკეპნზე მოდებულია ორი აქტიური ძალა: მისი წონა – \vec{Q} და ადამიანის წნევის ძალა \vec{P} . სატკეპნი გავანთავისუფლოთ ბმისაგან (ჰორი-ზონტალური სიბრტყე) და მისი მოქმედება შევცვალოთ \vec{R} რეაქციის ძალით. ეს ძალა მოდებულია რომელიღაცა C წერტილში, რომელიც სატკეპნის ცენტრზე გამავალი ვერტიკალიდან დაშორებულია δ მანძილით. სიბრტყის \vec{R} რეაქციის ძალა დაეშალოთ ორ მდგენელად: \vec{N} ნორმალური და \vec{F} მხებ მდგენელად. \vec{F} ძალა წარმოადგენს ხახუნის ძალას თანაბარი გორვისას.

განვიხილოთ სატკეპნის წონასწორობა $\vec{Q}, \vec{P}, \vec{F}$ და \vec{N} ძალების მოქმედებით. ორ ინათთა სისტემა ავირჩიოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე და სვედადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\begin{aligned} \sum X_k &= 0; & F - P \cos \alpha &= 0; \\ \sum Y_k &= 0; & N - Q - P \sin \alpha &= 0; \\ \sum M_k &= 0; & N \cdot \delta - P \cos \alpha \cdot r &= 0. \end{aligned}$$

აქ r – სატკეპნის რადიუსი. გამოვითვალოთ $\sin \alpha$ და

$$\cos \alpha \cdot r = 0,3\text{მ}. \quad AD = 1,2 - r = 0,9\text{მ}. \quad OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{1,5^2 - 0,9^2} = 1,2\text{მ}.$$

$$\sin \alpha = \frac{AD}{OA} = \frac{0,9}{1,5} = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{OD}{OA} = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5}.$$

სისტემის მეორე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$N = Q + P \sin \alpha;$$

\vec{N} –ის ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ მესამე განტოლებაში $(Q + P) \cdot Q - P \cdot = 0;$

$$P = \frac{Q\delta}{r \cos \alpha - \delta \sin \alpha} = \frac{3,92 \cdot 0,005}{0,3 \cdot 0,8 - 0,6 \cdot 0,005 \sin \alpha} = 0,08\text{კნ}.$$

რეაქციის ძალის ნორმალური მდგენელი ტოლია:

$$N = Q + P \sin \alpha = 3,92 + 0,08 \cdot 0,6 = 3,97\text{კნ};$$

სისტემის პირველი განტოლებიდან განისაზღვრება ხახუნის ძალის მნიშვნელობა:

$$F = P \cos \alpha = 0,08 \cdot 0,8 \approx 0,064 \text{ კნ.}$$

გამოვითვალთ სრიალის ხახუნის ძალის მნიშვნელობა:

$$F_{\text{ხხ}} = fN = 0,2 \cdot 3,97 \approx 0,794 \text{ კნ.}$$

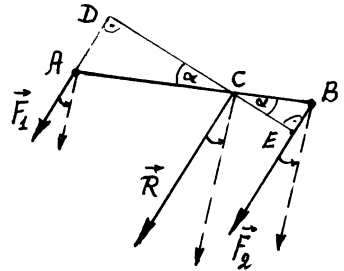
ამგვარად, სრიალის ხახუნის ძალა მეტია ვიდრე გორვის ხახუნის ძალა: $F_{\text{ხხ}} > F$, ამიტომ სატკეპნი იგორებს სრიალის გარეშე.

პარალელურ ძალთა ცენტრი. სიმძიმის ცენტრი

§ 1. 27. პარალელურ ძალთა ცენტრი

§1.14 –ში განვიხილეთ ერთმხრივ ან სხვადასხვა მხარეს მიმართული ორი პარალელური ძალის შეკრების წესი:

ორი ერთმხრივ (ან სხვადასხვა მხარეს) მიმართული პარალელური ძალის ტოლქმედი სიდიდით შემადგენელი ძალების სიდიდეების ჯამის (სხვაობის) ტოლია, მიმართულია უდიდესი ძალის მხარეს და მისი ფუძე გადის შემადგენელი ძალების მოდების წერტილების შემაერთებელ AB მონაკვეთის ისეთ C წერტილში, რომელიც შემადგენელი ძალების მოდების წერტილებიდან დაშორებულია ამ ძალების სიდიდეების უკუპროპორციული მანძილებით:



ნახ. 32

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალებს შემოვებრუნებთ მათი მოდების A და B წერტილების გარშემო ერთსა და იმავე მხარეს ერთი და იმავე კუთხით, მაშინ C წერტილის მდებარეობა არ შეიცვლება და \vec{R} ტოლქმედი იმავე მხარეს და იმავე კუთხით შემობრუნდება.

ვთქვათ სივრცეში მოცემულია სხეულის A_1, A_2, \dots, A_n წერტილებზე მოდებული ერთმხრივ მიმართული პარალელურ ძალთა სისტემა $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, რომლის ტოლქმედია \vec{R} ძალა. ვინაიდან ყველა ძალა მიმართულია ერთ მხარეს, ამიტომ ტოლქმედი \vec{R} ძალაც მათი პარალელურია და იმავე მხარესაა მიმართული.

ცხადია, თუ ყველა ძალას შემოვებრუნებთ მათი მოდების წერტილების გარშემო ერთი და იგივე კუთხით ერთსა და იმავე მხარეს, მაშინ მძივლებზე პარალელური ძალების ახალ სისტემას იმავე სიდიდის ძალებით და

იმავე მოდების წერტილებით. მოცემული სისტემის ტოლქმედ ცენტრის მხოლოდ მიმართულებას, მისი სიდიდე უცვლელი რჩება.

მტკიცდება, რომ ყოველგვარი ასეთი მობრუნებისას ტოლქმედის ფუძე ყოველთვის გადის ერთი და იმავე C წერტილში., რომლის მდებარეობა არ იცვლება თუ უცვლელნი არიან A_1, A_2, \dots, A_n წერტილები და $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალების სიდიდეები. ასეთ C წერტილს ეწოდება პარალელურ ძალთა ცენტრი.

განსაზღვრა. პარალელურ ძალთა ცენტრი ეწოდება ისეთ C წერტილს, რომელზეც გადის ტოლქმედის ფუძე; მისი მდებარეობა დამოკიდებულია ძალების სიდიდეებზე, მათი მოდების წერტილების მდებარეობაზე და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ ვაბრუნებთ ძალებს მათი მოდების წერტილების გარშემო.

ვთქვათ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემაში C წერტილის კოორდინატებია $C(x_C, y_C, z_C)$, ხოლო ყოველი \vec{F}_k ძალის მოდების წერტილის კოორდინატებია $A_k(x_k, y_k, z_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$). C წერტილის მდებარეობა არ იცვლება ძალების ერთი და იმავე კუთხით შემობრუნებისას.

პარალელურ ძალთა C ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება კოორდინატებით

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k x_k}{R}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k y_k}{R}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k z_k}{R}; \quad (27.1)$$

$$აქ \quad R = \sum_{k=1}^n F_k.$$

ვექტორი
$$\vec{r}_c = \vec{i} x_c + \vec{j} y_c + \vec{k} z_c = \frac{\sum F_k \vec{r}_k}{R}, \quad (27.2)$$

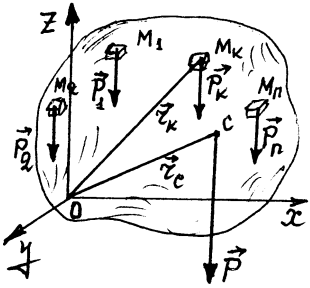
სადაც $\vec{r}_k = \vec{i} x_k + \vec{j} y_k + \vec{k} z_k$ არის \vec{F}_k ძალის მოდების A_k წერტილის რადიუს-ვექტორი, წარმოადგენს პარალელურ ძალთა ცენტრის რადიუს ვექტორს.

შენიშვნა: 1. სიდიდეებს $\sum F_k x_k$, $\sum F_k y_k$, $\sum F_k z_k$ ეწოდებათ ძალთა მოცემული სისტემის სტატისტიკური მომენტები ბი შესაბამისად Oyz , Oxz და Oxy სიბრტყეების მიმართ.

2. ამ პარაგრაფში მიღებული ფორმულები სამართლიანია სხვადასხვა მხარეს მიმართული პარალელური ძალების შემთხვევაშიც.

§1.28. სხეულის სიმძიმის ცენტრი

ვთქვათ მყარი სხეული იმყოფება დედამიწის მიზიდულობის არეში და მოძრაობს კოორდინატთა მართკუთხა $Oxyz$ სისტემის მიმართ. რაიმე წესით, ვთქვათ კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეებით, დავყოთ ეს სხეული საკმაოდ მცირე მოცულობის Π რაოდენობის ელემენტარულ ნაწილად. მაშინ თითოეულ ნაწილაკზე მოქმედებს დედამიწის მიზიდულობის ძალა. მათ ეწოდებათ ს ი მ ძ ი მ ის ძ ა ლ ე ბ ი . ეს ძალები მიმართულია დედამიწის ცენტრისკენ. თუ უგულებელვყოფთ სხეულის ზომებს დედამიწის რადიუსთან შედარებით, მაშინ სხეულის ნაწილებზე მოქმედი სიმძიმის ძალები შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივ და პარალელურ ძალებად. ვთქვათ ეს ძალები მოდებულნი არიან შესაბამისად მოცემული ნაწილაკების $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, . . . , $M_n(x_n, y_n, z_n)$ წერტილებში აღვნიშნოთ ეს ძალები $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ - ით. ისინი შეადგენენ პარალელურ ძალთა სისტემას. შევკრიბოთ ეს პარალელური ძალები. მივიღებთ ერთ \vec{P} ძალას



ნახ. 34.1

ჩავთვალოთ მუდმივ და პარალელურ ძალებად. ვთქვათ ეს ძალები მოდებულნი არიან შესაბამისად მოცემული ნაწილაკების $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, . . . , $M_n(x_n, y_n, z_n)$ წერტილებში აღვნიშნოთ ეს ძალები $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ - ით. ისინი შეადგენენ პარალელურ ძალთა სისტემას. შევკრიბოთ ეს პარალელური ძალები. მივიღებთ ერთ \vec{P} ძალას

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k .$$

\vec{P} ძალას ეწოდება სხეულის ს ი მ ძ ი მ ის ძ ა ლ ა , ხოლო \vec{P} -ს სიდიდეს ეწოდება ს ხ ე უ ლ ი ს წ ო ნ ა . როგორც მოცემულ პარალელურ \vec{P}_k ($k=1,2,.. . , n$) ძალების ტოლქმედი, მისი ფუძე გადის პარალელურ ძალთა C ცენტრში, რომელსაც ეწოდება სხეულის ს ი მ ძ ი მ ის ც ე ნ ტ რ ი . სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება $\vec{OC} = \vec{r}_c$ რადიუს - ვექტორით (ანალოგიურად 27.2 ფორმულისა):

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \vec{r}_k}{P} \tag{28.1}$$

ანუ კოორდინატებში:

$$x_c = \frac{\sum P_k x_k}{P}; \quad y_c = \frac{\sum P_k y_k}{P}; \quad z_c = \frac{\sum P_k z_k}{P}.$$

(28.2)

ამ ფორმულებს შეიძლება სხვა სახეც მივცეთ.

ვთქვათ, მოცემულია ერთგვაროვანი სხეული, რომლის კუთრი წონაა μ . სხეულის დანაწილების შედეგად რომელიმე k -ური ნაწილაკის მოცულობაა V_K , ხოლო ამ ნაწილაკის წონაა $P_K = \mu V_K$. სხეულის წონა იქნება

$$P = \sum_{k=1}^n P_K = \sum_{k=1}^n \mu V_K = \mu \sum_{k=1}^n V_K = \mu V$$

აქ $V = \sum V_K$ არის მოცემული სხეულის მოცულობა. შევიტანოთ P -ს და P_K -ს მნიშვნელობები (28.2) ტოლობებში, რომლებიც μ -ზე შეკვეცის შემდეგ მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$x_c = \frac{\sum V_k x_k}{V}; \quad y_c = \frac{\sum V_k y_k}{V}; \quad z_c = \frac{\sum V_k z_k}{V}.$$

(28.3)

ეს ტოლობები წარმოადგენენ ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების განსაზღვრავ ფორმულებს.

ანალოგიურად მიიღება ერთგვაროვანი ზედაპირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების საანგარიშო ფორმულები:

$$x_c = \frac{\sum S_k x_k}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_k y_k}{S}; \quad z_c = \frac{\sum S_k z_k}{S}.$$

(28.4)

მრუდწირული ღეროსათვის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება ანალოგიური ფორმულებით:

$$x_c = \frac{\sum L_k x_k}{L}; \quad y_c = \frac{\sum L_k y_k}{L}; \quad z_c = \frac{\sum L_k z_k}{L}.$$

(28.5)

(28.2) ფორმულები მით უფრო ზუსტად განსაზღვრავენ სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობას, რაც უფრო მცირე ნაწილებად არის დაყოფილი სხეული, ე. ი. როცა დაყოფათა რიცხვი უსასრულოდ დიდია ($n \rightarrow \infty$). მაშინ უსასრულო ჯამების მაგივრად ზღვარში გვექნება განსაზღვრული ინტეგრალები. მაგალითად, ერთგვაროვანი

სხეულების სიმძიმის ცენტრის საანგარიშო (28.3) - (28.5) ფორმულები მიიღებენ ასეთ სახეს :

ერთგვაროვანი სხეულისათვის:

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint x dx dy dz; \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint y dx dy dz;$$

$$z_c = \frac{1}{V} \iiint z dx dy dz ;$$

ერთგვაროვანი ზედაპირისათვის:

$$x_c = \frac{1}{S} \iint x ds ; \quad y_c = \frac{1}{S} \iint y ds ; \quad z_c = \frac{1}{S} \iint z ds$$

;

ერთგვაროვანი წირისათვის:

$$x_c = \frac{1}{l} \int x dl ; \quad y_c = \frac{1}{l} \int y dl ; \quad z_c = \frac{1}{l} \int z dl$$

.

ზოგიერთი სხეულისათვის სიმძიმის ცენტრს აქვს შემდეგი თვისებები:

ა) თუ სხეული წარმოადგენს წრფეს ან სიბრტყეს, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს შესაბამისად ამ წრფეზე ან სიბრტყეზე,

ბ) თუ სხეული წარმოადგენს რაიმე შეკრულ ამოზნექილ ფართეულს, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრი ამ ფართეულის შიგნით არის მოთავსებული,

გ) თუ სხეული წარმოადგენს რაიმე შეკრულ ამოზნექილ ბრტყელ წირს, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია ამ წირის შიგნით,

დ) თუ სხეული სიმეტრიულია რაიმე სიბრტყის (ან წრფის, ან წერტილის) მიმართ, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ სიბრტყეზე (ან წრფეზე, ან წერტილში).

სიმძიმის ცენტრის ცნება პირველად შემოიღო არქიმედემ, რომელმაც განსაზღვრა პარალელოგრამის, სამკუთხედის, პარაბოლის სეგმენტის სიმძიმის ცენტრები ფიგურათა სიმძიმის ცენტრის შესახებ საკითხებს შეისწავლიდნენ აგრეთვე *ჟერონი ალექსანდრიელი*, *პაპი*, *ლეონარდო და ვინჩი*, *ფ. მაკროლიკო*, *ფ. კომანდონი* და სხვ.

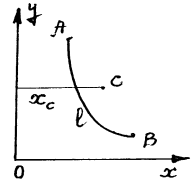
ბრტყელი წირის ან ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრასთან არის დაკავშირებული ორი მარტივი, მაგრამ

მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელთაც უწოდებენ პ ა პ ი - გ უ ლ დ ე ნ ი ს თეორემებს. (მოვიყვანო დაუმტკიცებლად).

თეორემა 1. *ბრტყელი წირის მიერ მისსავე სიბრტყეში მდებარე და მის არაგადამკვეთ ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი ტოლია ამ წირის სიგრძის ნამრავლისა იმ წრეწირის სიგრძეზე, რომელსაც შემოწერს წირის სიმძიმის ცენტრი*

$$S = 2 \pi \ell x_c .$$

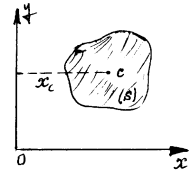
სადაც ℓ არის AB წირის სიგრძე.



ნახ. 34.2

თეორემა 2. *ბრტყელი ფიგურის მიერ მისსავე სიბრტყეში მდებარე და მის არაგადამკვეთი ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა ტოლია ამ ფიგურის ფართობის ნამრავლისა იმ წრეწირის სიგრძეზე, რომელსაც შემოწერს ამ ფიგურის სიმძიმის ცენტრი*

$$V = 2 \pi S x_c .$$

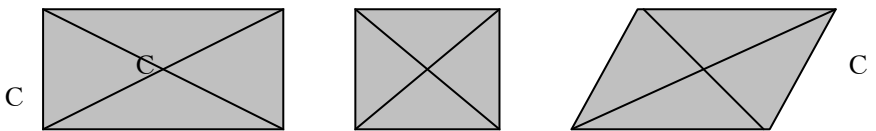


ნახ. 34.3

ეს თეორემები პაპი ალექსანდრიელმა (III ს) დამტკიცების გარეშე ჩამოაყალიბა თავის "მათემატიკური კრებულის" მე-7 წიგნში.

§1.29. ძველით მოგვყავს ზოგიერთი გეომეტრიული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრის მახალითი (დამტკიცების გარეშე)

1, ერთგვაროვანი მართკუთხედის, კვადრატის და პარალელოგრამის სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა მათი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილს.



2. ერთგვაროვანი სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა მათი მედიანების გადაკვეთის წერტილს და სამკუთხედის ფუძიდან დაშორებულია სიმაღლის ერთი მესამედის ტოლი მანძილით.

3. ერთგვაროვანი R რადიუსის წრიული სექტორის სიმძიმის C ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება ფორმულით

$$y_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

სადაც 2α - სექტორის ცენტრალური კუთხეა რადიანებში, ხოლო y_c - ამ კუთხის ბისექტრისაზე კუთხის წვეროდან გადაზომილი მანძილი ($y_c = 0C$).

კერძოდ, ნახევარწრისათვის, თუ დაუშვებთ $\alpha = \pi$, მივიღებთ

$$y_c = \frac{4}{3\pi} R \approx 0,424 R.$$

4. ერთგვაროვანი R რადიუსის წრიული სეგმენტის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება ფორმულით

$$y_c = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{(\alpha - \sin \alpha)} = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha}$$

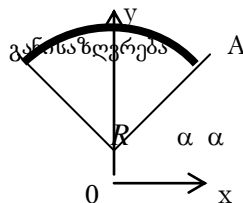
აქ 2α -სეგმენტის ცენტრალური კუთხეა რადიანებში, ხოლო y_c - ამ კუთხის ბისექტრისაზე ქორდიდან სეგმენტში გადაზომილი მანძილი.

5. ერთგვაროვანი R რადიუსის წრიული რკალის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა

B

ფორმულით

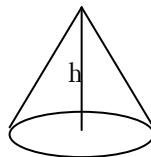
$$y_c = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$



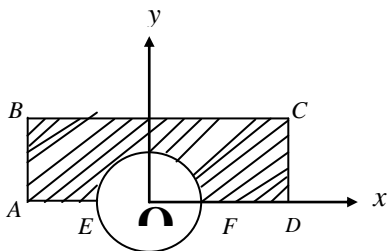
სადაც 2α - რკალის შესაბამისი ცენტრალური კუთხეა რადიანებში. ხოლო y_c - ამ კუთხის ბისექტრისაზე კუთხის წვეროდან გადაზომილი მანძილი ($y_c = 0C$).

6. ერთგვაროვანი h სიმაღლის წრიული კონუსის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა სიმაღლეზე ფუძიდან განისაზღვრება ფორმულით:

$$y_c = \frac{1}{4} h$$



ამოცანა 1. იგანსაზღვრეთ ნახაზზე მოცემული ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა, თუ ნახევარ-წრის რადიუსი $R = 0.3a$, $AB = a$, $BC = 3a$.



ამოხსნა: ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა. სისტემის სათავე მოვათავსოთ

ნახევარწრის ცენტრში, Oy ღერძი მივმართოთ ბრტყელი ფიგურის სიმეტრიის ღერძის გასწვრივ, ხოლო Ox ღერძი AD -ს გასწვრივ. დადგან ფიგურის სიმძიმის C ცენტრი ძვეს სიმეტრიის ღერძზე, ამიტომ $x_C = 0$. ანსაზღვროთ y_C . თუ გამოვიყენებთ უარყოფით ფართობთა მეთოდს, გვექნება

$$y_C = \frac{y_1 S_1 - y_2 S_2}{S_1 - S_2},$$

სადაც y_1 და y_2 შესაბამისად მართკუთხედისა და ნახევარწრის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია, ხოლო

S_1 და S_2 მათი ფართობები.

$$y_1 = OC_1 = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2};$$

ნახევარწრე შეიძლება განვიხილოთ როგორც წრიული სექტორი, რომლის ცენტრული კუთხე ნახევარი $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ამიტომ

$$y_2 = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{2 \cdot 0,3a \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{3 \frac{\pi}{2}} \approx 0,13a,$$

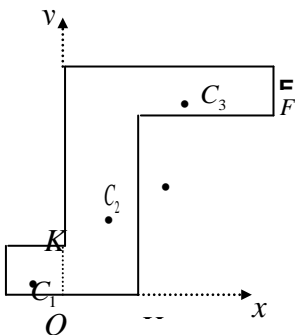
$$S_1 = AB \cdot BC = 3a^2, \quad S_2 = \frac{\pi R^2}{2} \approx 0,14a^2.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$y_C = \frac{0,5a \cdot 3a^2 - 0,13a \cdot 0,14a^2}{3a^2 - 0,14a^2} \approx 0,52a.$$

პასუხი: $x_C = 0$, $y_C = 0,52a$.

აშოცანა 2. განსაზღვრეთ ნახაზზე მოცემული ერთგვაროვანი ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ



$$AB = 2\text{სმ}, BK = 3\text{სმ}, AH = 6\text{სმ}, \\ KD = 5\text{სმ}, EF = 3\text{სმ}, GF = 4\text{სმ}.$$

ამოხსნა: მოცემული ერთგვაროვანი ფირფიტა დავეოთ სამ მართკუთხედად. კოორდინატთა სისტემა ავირჩიოთ ისე, როგორც ნახვენებია ნახაზზე. სიმძიმის C ცენტრის კოორდინატების განსასაზღვრავად გვაქვს:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3},$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

სადაც

$$x_1 = -\frac{AO}{2} = -1,5, \quad x_2 = \frac{OH}{2} = 1,5, \quad x_3 = \frac{DE}{2} = 3,5;$$

$$y_1 = \frac{AB}{2} = 1, \quad y_2 = \frac{GH}{2} = 2, \quad y_3 = GH + \frac{EF}{2} = 5,5;$$

$$S = AB \cdot BK = 6, \quad S = OH \cdot HG = 12, \quad S = DE \cdot EF = 21.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$x_C = \frac{-1,5 \cdot 6 + 1,5 \cdot 12 + 3,5 \cdot 21}{6 + 12 + 21} = 2,1,$$

$$y_C = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 12 + 5,5 \cdot 21}{6 + 12 + 21} = 3,7.$$

პასუხი: $x_C = 2,1, \quad y_C = 3,7.$

§1.30. წონასწორობის მდგრადობა

როგორც დადგინდა, მყარი სხეული იმყოფება წონასწორობაში, თუ ამ სხეულზე მოქმედი ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია.

მყარი სხეულის წონასწორობის პირობების განსაზღვრისას ისმება მნიშვნელოვანი კითხვა იმის შესახებ, იქნება თუ არა ეს წონასწორობა პრაქტიკულად განხორციელებადი. რეალურ პირობებში ყოველი სხეული მის მომცველ გარემოს ზემოქმედებით შეიძლება გადაიხაროს წონასწორობის მდგომარეობიდან. ამის გამო, სხეულთა წონასწორობის კვლევისას წამოიჭრება ახალი ტიპის ამოცანა – წონასწორობის მდგრადობის შესახებ.

დგრადობა არის მექანიკური სისტემის თვისება - შეინარჩუნოს წონასწორობის ან მოძრაობის გარკვეული ფორმა გარე დატვირთვების ზემოქმედების დროს.

მყარი სხეულის წონასწორობის მდგომარეობები შეიძლება არსებითად განსხვავდებოდნენ ერთმანეთისაგან. ანსხვავებენ წონასწორობის სამ სახეს: მდგრადი წონასწორობა, არამდგრადი წონასწორობა და განუჩრჩველი წონასწორობა.

თუ სხეული, რომელმაც რაიმე ძალის მოქმედებით მიიღო მცირე გადახრა წონასწორობის მდგომარეობიდან, ხოლო ამ ძალის მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ ცდილობს დაუბრუნდეს საწყის მდგომარეობას, მაშინ წონასწორობის ასეთ მდგომარეობას მ დ გ რ ა დ ი ეწოდება.

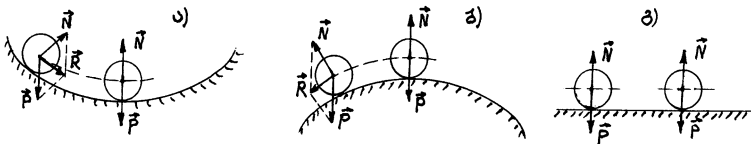
სხეული იმყოფება ა რ ა მ დ გ რ ა დ წონასწორობაში თუ რაიმე ძალის მოქმედებით წონასწორობის მდგომარეობიდან მცირე გადახრის შემდეგ სხეული განაგრძობს კიდევ უფრო დაშორებას წონასწორობის საწყისი მდგომარეობიდან

თუ სხეულმა რაიმე ძალის მოქმედებით მიიღო მცირე გადახრა წონასწორობის მდგომარეობიდან და ამ ძალის მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ ინარჩუნებს საწყის მდგომარეობას, მაშინ სხეულის წონასწორობის ასეთ მდგომარეობას *გ ა ნ უ რ ჩ ე ვ ე ლ ი ეწოდება.*

პრაქტიკულად, სხეული წონასწორობაში შეიძლება იყოს მხოლოდ მაშინ, როცა იგი მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობაშია.

სხეულის მდგრადი წონასწორობის მაგალითს წარმოადგენს ჩაზნექილი ზედაპირის უმდაბლეს ნაწილზე მოთავსებული მოადგენს ამოზნექილი ზედაპირის უმაღლეს წერტილზე მოთავსებული ბურთულის წონასწორობა (ნახ.36ბ). ბურთულის წონასწორობა (ნახ.36ა). არამდგრადი წონასწორობის მაგალითს წარ

ვვულისხმობთ, რომ ზედაპირები, რომლებზეც ბურთულაა მოთავსებული, გლუვია. მაშინ, ზედაპირის რეაქციის ძალა მოდებულია მათი შეხების წერტილში და მიმართულია ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ. ორივე შემთხვევაში ბურთულა წონასწორობაშია, რადგანაც მასზე მოდებული სიმძიმის \vec{P} და რეაქციის \vec{N} ძალები სიდიდით ტოლნი არიან და მიმართულებით ურთიერთსაწინააღმდეგო.



ნახ. 35

ა) ნახაზზე გამოსახულ მდებარეობაში წონასწორობა მდგრადია, რადგანაც საწყისი მდებარეობიდან ბურთულის მცირე გადახრისას \vec{P} და \vec{N} ძალები აღარ არიან ერთი წრფის გასწვრივ მიმართულნი, მაგრამ მათი \vec{R} ტოლქმედი დააბრუნებს ბურთულას საწყის უმდაბლეს მდგრადი წონასწორობის მდებარეობაში

ბ) ნახაზზე გამოსახულ მდებარეობაში წონასწორობა არამდგრადია, რადგანაც საწყისი მდებარეობიდან ბურთულის მცირე გადახრისას \vec{P} და \vec{N} ძალების \vec{R} ტოლქმედი ნულისაგან განსხვავდება და კიდევ უფრო ამორებს ბურთულას საწყისი წონასწორობის მდებარეობიდან.

გ) განურჩეველი წონასწორობის მაგალითის წარმოადგენს იგივე ბურთულა მოთავსებული ჰორიზონტალურ ზედაპირზე. ბურთულას ნებისმიერი გადაადგილების შედეგად მისი სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა არ იცვლება და \vec{P} და \vec{N} ძალები იმყოფებიან წონასწორობაში.

განხილული მაგალითების საფუძველზე შეიძლება ჩამოვყალიბოთ წონასწორობის სხვადასხვა სახის განსაზღვრის ზოგადი წესი.

სხეულის წონასწორობა მდგრადია, თუ მის სიმძიმის ცენტრს უკავია ყველა შესაძლებელი მდებარეობიდან უმდაბლესი მდებარეობა.

სხეულის წონასწორობა არამდგრადია, თუ მის სიმძიმის ცენტრს უკავია ყველა შესაძლებელი მდებარეობიდან უმაღლესი მდებარეობა.

ეს დასკვნა სიმძიმის ცენტრის მდებარეობაზე დამოკიდებულებით სამართლიანია სხეულის წონასწორობის ყველა შემთხვევისათვის.

როგორც წონასწორობის, ასევე მოძრაობის მდგრადობის თეორიაში საწყისები მოცემული იყო ლავრანჟის (1736 - 1813) მიერ. საკმაოდ მნიშვნელოვანი შედეგები მიიღეს ნ. ჟუკოვსკიმ (1847 -1921), ა. პუანკარემ (1854 - 1912) და განსაკუთრებით ლიაპუნოვმა (1857 - 1918).

მ ე ო რ ე ნ ა წ ი ლ ი

კ ი ნ ე მ ა ტ ი კ ა

§ 2.1. შინაგალი. კინემატიკის საბანი

კინემატიკა არის თეორიული მექანიკის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის სხეულთა მოძრაობის კანონებს ამ მოძრაობის გამომწვევი მიზეზების (ძალების) გარეშე, ე.ი. შეისწავლის მოძრაობის გეომეტრიულ თვისებებს.

კინემატიკის ამოცანებს წარმატებით ხსნიდნენ ჯერ კიდევ *ველოქსის* დროს (IV ს. ჩვ. წ. აღ-დე). ტექნიკისა და განსაკუთრებით ასტრონომიის მოთხოვნებმა განსაზღვრეს კინემატიკისადმი განსაკუთრებული ინტერესი. ზღვაოსნობისა და ტექნიკის განვითარებამ გაზარდა მოთხოვნილება ციური სხეულების მოძრაობის შესასწავლად; მნიშვნელოვანი იყო *კოპერნიკის* თეორია, რომელიც წმინდა კინემატიკური ხასიათისაა; *კეპლერმა* აღმოაჩინა პლანეტათა მოძრაობის კანონები; ეს კანონები საშუალებას იძლევიან განისაზღვროს ორბიტაზე სხეულების ტრაექტორია და სიჩქარე. ამ პერიოდის კინემატიკური კვლევები, რომლებიც არ არიან დაკავშირებული ასტრონომიასთან, ძირითადად წარმოადგენენ დინამიკის პრობლემებს.

XVIII ს-ში დაიწყო ისეთი ამოცანების ამოხსნა, სადაც საჭირო იყო მოძრავი წერტილის ტრაექტორიის, სიჩქარის, აჩქარების განსაზღვრა, რაც მოითხოვდა განტოლების შედგენას, მის გაწარმოებას, უცნობის გამორიცხვას და ა.შ. უფრო რთული საკითხების - მყარი სხეულის კინემატიკის შესწავლისას კი ეს მათემატიკური აპარატი თითქმის ქრება - აღარ არის საჭირო გაწარმოება; სხეულის მოძრაობის სიჩქარე და აჩქარება განისაზღვრება წმინდა გეომეტრიული მეთოდით. ეს გაორებული მიდგომა იმით იყო გამოწვეული, რომ კინემატიკა, როგორც დამოუკიდებელი მეცნიერება არ არსებობდა.

შემდგომ, როდესაც *ელერმა* დაიწყო მყარი სხეულის დინამიკის შესწავლა, მდგომარეობა შეიცვალა. თავის 1775 წლის მემუარში „აბსოლუტურად მყარი სხეულის მოძრაობის თეორიის შესახებ“ იგი წერდა: თუ საჭიროა რომელიმე მყარი სხეულის მოძრაობის შესწავლა, მაშინ ყველა გამოკვლევა სასურველია გაიყოს ორ - გეომეტრიულ და მექანიკურ ნაწილად. პირველ ნაწილში საჭიროა განვიხილოთ მხოლოდ სხეულის გადაადგილება და ყურადღება არ მივაქციოთ მოძრაობის ძირითად კანონებს, ე.ი. ვაწარმოოთ მხოლოდ გეომეტრიული კვლევა. თუ ამ კვლევას განვაცალკევებთ მეორე ნაწილისაგან, რომელიც სინამდვილეში მიეკუთვნება მექანიკას, მაშინ მოძრაობის შესწავლა მისი ძირითადი კანონების დახმარებით გაცილებით გაადვილდება, ვიდრე კვლევის ორივე ნაწილის ერთდროული წარმოებისას.

ასეთივე აზრის იყო *დალამბერი*, რომელიც სასარგებლოდ სთვლიდა მოძრაობის შესწავლას მისი გამომწვევი მიზეზების გარეშე. ტექნიკის თვალსაზრისით ასევე სვამდნენ საკითხს *მონოეი*, *კარნო*.

1818 წელს იგივე იდეა გამოთქვა პოლონელმა მათემატიკოსმა *ს. კრონსკიმ*, რომელმაც ახალ მეცნიერებას "ფორონომია" უწოდა.

ტერმინი "კინემატიკა" შემოიღო *ამპერმა* თავის ნაშრომში "კაცობრიობის ცოდნის კლასიფიკაციის ცდა" (1834),

კინემატიკის, როგორც დამოუკიდებელი მეცნიერების შექმნის თარიღად სთვლიან 1841 წელს, *პონსელიემ*, რომელმაც გააფართოვა მრუდწირული მოძრაობის გეომეტრიული წარმოდგენა, მეცნიერებაში შემოიღო გეომეტრიული აჩქარების ფუნდამენტური ცნება, რითაც მან საბოლოოდ ჩაუყარა საფუძველი ამ მეცნიერებას.

კინემატიკას დიდი მნიშვნელობა აქვს სხვადასხვა გვარის მექანიზმების რგოლების მოძრაობის გეომეტრიული კვლევის დროს. მანქანათმშენებლობის ტექნიკის განვითარებამ კინემატიკა გახადა თეორიული მექანიკის მნიშვნელოვან ნაწილად. ამასთანავე, კინემატიკა გახდა მექანიზმებისა და მანქანების თეორიის საფუძველი.

ყოველი ნივთიერი (მატერიალური) სხეული შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ნივთიერ წერტილთა სისტემა. ამიტომ ბუნებრივია, სხეულის მოძრაობის შესწავლა დავიწყეთ წერტილის მოძრაობის შესწავლით - წერტილის კინემატიკით.

კინემატიკის ძირითადი ცნებებია მოძრაობა, სივრცე, დრო.

თეორიულ მექანიკაში შეისწავლება მხოლოდ მექანიკური მოძრაობა, ანუ ერთი სხეულის გადაადგილება სხვა სხეულის მიმართ სივრცესა და დროში. იმ სხეულს, რომლის მიმართაც შეისწავლება მოძრაობა, უკავშირებენ კოორდინატთა რაიძე სისტემას და მას უწოდებენ ათვლის სისტემას ანუ საფარდ სისტემას. ათვლის სისტემა შეიძლება დაკავშირებულ იქნას სხეულთან. ეს სისტემა შეიძლება იყოს როგორც პირობითად უძრავი, ასევე მოძრავიც.

დრო, როგორც უწყვეტად ცვალებადი სიდიდე არ არის დამოკიდებული არც დამკვირვებლის მოძრაობაზე, არც სხეულების მოძრაობაზე და ერთნაირია სივრცის ყველა წერტილში და ათვლის ყველა სისტემაში, ე.ი. დრო არის უნივერსალური (აბსოლუტური). ამიტომ თეორიულ მექანიკაში ათვლის სისტემის ადების დროს შემოისაზღვრებიან მხოლოდ ათვლის რაიძე სხეულის ან ამ სხეულთან დაკავშირებულ კოორდინატთა სისტემის მითითებით.

სივრცე, სადაც ხდება ნივთიერი წერტილის (ან სხეულის) მოძრაობა, იგულისხმება, რომ არის სამგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე, რომელიც არ არის დამოკიდებული დროზე და მასში მოძრავ ნივთიერ სხეულებზე.

დროის დამოუკიდებლობა მოძრაობისაგან ნიშნავს, რომ ათვლის ყველა სისტემის მიმართ, რომლებიც ნებისმიერად მოძრაობენ ერთმანეთის მიმართ, დრო არის ერთი და იგივე, თუ მათთვის ათვლის საწყისად აღებულია საერთო მოვლენა.

მოცემულია წერტილის (სხეულის) მოძრაობის კინემატიკური კანონი, ეს ნიშნავს მოცემულია ამ წერტილის (სხეულის) მდებარეობა ათვლის მოცემულ სისტემაში დროის ნებისმიერ მომენტში.

მოძრაობის შესწავლისას ყოველთვის დგინდება დროის ათვლის საწყისი $t = t_0$ მომენტი (ხშირ შემთხვევაში იღებენ $t_0 = 0$). დროის გაზომვისას იხმარება ცნება - დროის შუალედი. იგი ეწოდება დროის მნიშვნელობების სხვაობას დროის რაღაც t_2 მომენტსა და t_1 მომენტს შორის. მოძრაობის განხილვისას ყოველთვის ვგულისხმობთ სხეულის მდებარეობის შეცვლას დროის შუალედში.

კინემატიკის ძირითადი ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ წერტილის (სხეულის) მოძრაობის მოცემული კანონის მიხედვით განვსაზღვროთ წერტილის (სხეულის) მოძრაობის დამახასიათებელი ყველა კინემატიკური სიდიდე (ტრაექტორია, სიჩქარე, აჩქარება და სხვ.).

მოძრავი წერტილი სივრცეში აღწერს გარკვეულ წირს, რომელსაც ათვლის მოცემულ სისტემაში ეწოდება წერტილის მოძრაობის ტ რ ა ე ქ თ ო რ ი ა . იმის მიხედვით, როგორია ტრაექტორია – წრფე თუ მრუდი წირი, მოძრაობას ეწოდება წრფივი ან მრუდწირული მოძრაობა.

განვიხილოთ წერტილის მოძრაობის მოცემის რამდენიმე ხერხი - კოორდინატებში, ბუნებრივი და ვექტორული სახით.

წ ე რ ტ ი ლ ის კ ი ნ ე მ ა ტ ი კ ა

§ 2. 2. წერტილის მოძრაობის განტოლებები

წერტილის მოძრაობის შესწავლა შეიძლება კოორდინატთა ნებისმიერი სისტემის გამოყენებით. არჩეული კოორდინატთა სისტემის მიმართ წერტილის მოძრაობას ჩავთვლით ცნობილად თუ მოცემულია ის ხერხი, რომლის მიხედვითაც არჩეული სისტემის მიმართ შეგვიძლია განვსაზღვროთ წერტილის მდებარეობა დროის ნებისმიერ მომენტში.

1. განვიხილოთ M წერტილის მოძრაობა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა უძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ. M წერტილის კოორდინატები ამ სისტემის მიმართ იყოს x, y, z , ხოლო რადიუს-ვექტორი - \vec{r} . წერტილის მოძრაობისას მისი კოორდინატები იცვლებიან დროის მიხედვით, მაშასადამე x, y, z კოორდინატები არიან t დროის ფუნქციები:

$$(2.1) \quad x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

გველისხმობთ, რომ $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ ფუნქციები არიან უწყვეტი და მეორე რიგამდე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები.

ამ განტოლებებს ეწოდებათ M წერტილის მოძრაობის განტოლებები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში. ისინი სრულად ასახავენ წერტილის მოძრაობას.

წერტილის მოძრაობის (2.1) განტოლებები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ტრაექტორიის პარამეტრული განტოლება, პარამეტრით t . თუ ამ განტოლებებიდან გამოვიციხავთ t პარამეტრს, მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას, როგორც ორი ზედაპირის თანაკვეთას:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0, \\ F_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

2. წერტილის მოძრაობა სივრცეში შეიძლება დახასიათდეს მოცემული O ცენტრის მიმართ M წერტილის $OM = \vec{r}$ რადიუს-ვექტორით. დროის ყოველ მომენტში რადიუს-ვექტორს აქვს გარკვეული სიდიდე და მიმართულება. თუ ცნობილია \vec{r} რადიუს - ვექტორის ცვლილება დროის მიხედვით

$$\vec{r} = \vec{f}(t) \quad (2.2)$$

მაშინ (2.2) წარმოადგენს M წერტილის მოძრაობის განტოლებას ვექტორული სახით.

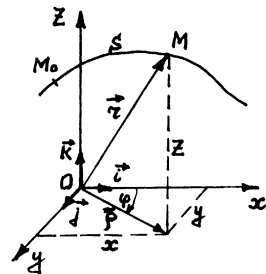
$OM = \vec{r}$ რადიუს - ვექტორის კოორდინატები იგივეა რაც M წერტილის x, y, z , კოორდინატები. ამიტომ, თუ კოორდინატთა ღერძების მგეზავებს აღვნიშნავთ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ვექტორებით, მაშინ \vec{r} ასე ჩაიწერება

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.3)$$

x, y, z არიან (2.1) ტოლობებით განსაზღვრული დროის ფუნქციები.

დროის ცვლასთან ერთად იცვლება \vec{r} რადიუს - ვექტორის მდებარეობაც. \vec{r} ვექტორის ბოლო წერტილების გეომეტრიული ადგილი, ანუ \vec{r} ვექტორის სოლოგრადი წარმოადგენს M წერტილის ტრაექტორიას.

3. იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია M წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია, მოძრაობა შეიძლება დაგახასიათოთ ტრაექტორიაზე გავლილი მანძილით (ნახ. 2.1).



ნახ. 2.1

ავირჩიოთ ტრაექტორიაზე რაიმე უძრავი M_0 წერტილი, რომელიც მივიღოთ ათვლის საწყისად და დავადგინოთ ტრაექტორიაზე მოძრაობის დადებითი და უარყოფითი მიმართულება. მაშინ მოძრავი M წერტილის ყოველი მდებარეობა სავსებით დასახიადება ტრაექტორიაზე $M_0M = S$ რკალის სიგრძით. თუ ცნობილია S რკალის ცვლილება დროის მიხედვით

$$S = f(t), \quad (2.4)$$

მაშინ (2.4) წარმოადგენს M წერტილის მოძრაობის განტოლებას ბუნებრივი სახით. შევნიშნოთ, რომ ამ განტოლებაში S სიდიდე განსაზღვრავს მოძრავი M წერტილის მდებარეობას და არა მის მიერ გავლილ მანძილს.

4. სივრცეში წერტილის მოძრაობის შესასწავლად ზოგჯერ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ცილინდრული კოორდინატები. ამ შემთხვევაში წერტილის მდებარეობა სივრცეში სავსებით განისაზღვრება შემდეგი სამი სიდიდით (ნახ. 2.1): Oxy სიბრტყეზე M წერტილის გეგმილის რადიუს - ვექტორით - $\bar{\rho}$; ამ რადიუს - ვექტორის მიერ Ox ღერძთან შედგენილი φ კუთხით (აზიმუტით) და M წერტილის z კოორდინატით (აპლიკატით).

თუ ცნობილია ეს სამი სიდიდე, როგორც დროის ფუნქცია:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \quad (2.5)$$

მაშინ (2.5) განტოლებები წარმოადგენენ M წერტილის მოძრაობის განტოლებებს ცილინდრულ კოორდინატებში.

5. განვიხილოთ წერტილის მოძრაობა Oxy სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში წერტილის მდებარეობა შეიძლება დასახიადეს ორი პარამეტრით. ამისათვის O წერტილი მივიღოთ პოლუსად, ხოლო Ox ღერძს უწოდოთ პოლარული ღერძი (ნახ. 2.2).

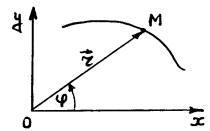
მოძრავი M წერტილის მდებარეობა სიბრტყეზე ცნობილია, თუ ცნობილია $OM = r$ მანძილი და პოლარული კუთხე φ , როგორც დროის ფუნქციები

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad (2.6)$$

ამ განტოლებებს ეწოდებათ M წერტილის მოძრაობის განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში.

პოლარული კუთხე ჩავთვალოთ დადებითად, თუ ის გადაიზომება პოლარული ღერძიდან რადიუს - ვექტორისაკენ საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi.$$



ნახ. 2.2

შენიშვნა. კვულისხმობთ, რომ ზემოთ განხილული კვლა ფუნქცია არის ცალსახა, უწყვეტი და აქვთ პირველი და მეორე რივის წარმოებულები.

§ 2.3. წერტილის სიჩქარე

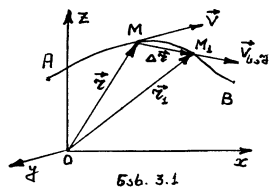
1. წერტილის ვექტორული სიჩქარე.

ვექტორულ სიდიდეს, რომელიც ახასიათებს წერტილის მოძრაობის სისწრაფესა და მიმართულებას, ამ წერტილის სიჩქარე ეწოდება.

ვთქვათ წერტილი მოძრაობს $Oxyz$ სივრცეში და აღწერს მრუდწირულ AB ტრაექტორიას. დაუშვათ დროის t მომენტში წერტილს ტრაექტორიაზე უკავია M მდებარეობა რომელიც განისაზღვრება \vec{r} რადიუს-ვექტორით, ხოლო დროის $t_1 = t + \Delta t$ მომენტში უკავია M_1 მდებარეობა, რომელიც განისაზღვრება $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$ რადიუს - ვექტორით (ნახ. 3.1). $MM_1 = \Delta \vec{r}$ ვექტორს ეწოდება წერტილის გადაადგილების ვექტორი დროის Δt შუალედში. შეფარდებას

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{საშ} \quad (3.1)$$

ეწოდება წერტილის საშუალო ვექტორული სიჩქარე დროის Δt შუალედში. ეს ვექტორი მიმართულია $\Delta \vec{r}$ - ის გასწვრივ. წერტილის საშუალო ვექტორული სიჩქარის მნიშვნელობა დამოკიდებულია დროის Δt შუალედის სიდიდეზე.



დაუშვათ დროის Δt შუალედი უსასრულოდ მცირდება. განვიხილოთ ზღვარი (როცა $\Delta t \rightarrow 0$)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{საშ} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.2)$$

ამ ზღვარს ეწოდება წერტილის ვექტორული სიჩქარე დროის ადებულ მომენტში.

წერტილის ვექტორული სიჩქარე ეწოდება ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის წარმოებულს დროთი

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.3)$$

როდესაც $\Delta t \rightarrow 0$, მაშინ M_1 წერტილი მიისწრაფის M წერტილისაკენ და $\vec{v}_{\text{სა}}$ ვექტორი შემობრუნდება M წერტილის გარშემო. იგი ზღვარში იკავებს მხების მიმართულებას.

მაშასადამე, M წერტილის ვექტორულ \vec{v} სიჩქარეს აქვს წერტილის ტრაექტორიის მხების მიმართულება მოძრაობის მხარეს.

გამოვთვალოთ M წერტილის ვექტორული სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება, როდესაც ცნობილია წერტილის მოძრაობის განტოლებები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემაში:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (3.4)$$

ვთქვათ წერტილის ვექტორული სიჩქარის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე არიან $\vec{v}(V_x, V_y, V_z)$, ხოლო ამ ღერძების მგეზავებია $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, მაშინ

$$\vec{v} = \vec{i} V_x + \vec{j} V_y + \vec{k} V_z. \quad (3.5)$$

გარდა ამისა (2.3) ტოლობის თანახმად:

$$\vec{r} = \vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z, \quad (3.6)$$

სადაც x, y, z არიან M წერტილის კოორდინატები.

ვექტორული სიჩქარის განმარტების თანახმად (3.6) -დან მივიღებთ:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}. \quad (3.7)$$

შევადართ ეს ტოლობა (3.5) გამოსახულებას და გავითვალისწინოთ, რომ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ვექტორები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელნი არიან, მივიღებთ

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt}. \quad (3.8)$$

ეს გამოსახულებები წარმოადგენენ წერტილის სიჩქარის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე.

ვექტორული სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}; \quad (3.9)$$

$$\text{Cos}(\vec{v}, \hat{x}) = \frac{v_x}{|\vec{v}|}, \quad \text{Cos}(\vec{v}, \hat{y}) = \frac{v_y}{|\vec{v}|}, \quad \text{Cos}(\vec{v}, \hat{z}) = \frac{v_z}{|\vec{v}|};$$

(3.10)

2. წერტილის სკალარული სიჩქარე.

ვთქვათ წერტილის მოძრაობის განტოლება მოცემულია ბუნებრივი სახით $s = f(t)$.

წერტილის M მდებარეობას ტრაექტორიაზე შეესაბამება AM = s რკალი; წერტილმა დროის Δt შუალედში მიიღო MM₁ = Δs გადაადგილება (ნახ. 3.2). (3.2) ზღვარი ასე გადავწეროთ

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

(3.11)

როდესაც Δt → 0, მაშინ M₁ წერტილი მიისწრაფის M წერტილისაკენ და მაშასადამე, |Δr| ქორდა და |Δs| რკალი არიან ტოლფასი უსასრულოდ მცირე სიდიდეები

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = 1.$$

ვექტორი $\frac{d\vec{r}}{ds}$ ყოველთვის მიმართულია MM₁ ქორდის

გასწვრის. ამიტომ, ერთეულოვანი სიგრძის $\frac{d\vec{r}}{ds}$

ვექტორი მიმართულია წერტილის ტრაექტორიის მხების გასწვრივ s-ის ზრდის მხარეს. თუ მხების მგეზავს აღვნიშნავთ $\vec{\tau}$ ვექტორით, მაშინ

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}.$$

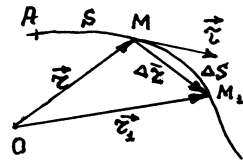
(3.12)

გამოსახულებას $\frac{ds}{dt} = v$ (3.13)

ევლიდება წერტილის სკალარული სიჩქარე.

(3.11) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\vec{v} = v \vec{\tau}. \quad (3.14)$$



ნახ. 3.2

მივიღეთ, რომ სკალარული V სიჩქარე წარმოადგენს ვექტორული \vec{v} სიჩქარის გეგმილს მხეზზე. მას ზოგჯერ ასეც აღნიშნავენ $V=V_\tau$. ცხადია, ვექტორული და სკალარული სიჩქარეების სიდიდეები ტოლია, ე.ი.

$$|\vec{v}| = |V| \quad \text{ანუ} \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

3. წერტილის თანაბარი მოძრაობა.

წერტილის მოძრაობას ეწოდება თანაბარი, თუ მისი სკალარული

სიჩქარე მუდმივია: $V = \text{const}$. გვექნება: $\frac{ds}{dt} = V = \text{const}$.

გავაინტეგრიროთ ეს ტოლობა: $s = Vt + C_1$ (3.15)

C_1 არის ინტეგრების მუდმივი, რომელიც განისაზღვრება მოძრაობის საწყისი პირობებიდან. დაუშვათ, როცა $t = t_0 = 0$, მაშინ წერტილს ქონდა საწყისი s_0 მდებარეობა. (3.15) გამოსახულებიდან $t_0 = 0$ მომენტისათვის მივიღებთ $C_1 = s_0$. მაშასადამე, წერტილის თანაბარი მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე: $s = s_0 + Vt$.

ამოცანა 5. ავტომანქანა მოძრაობს სორიზონტალურ გზაზე, ისე, რომ მისი სიმძიმის ცენტრი გადაადგილდება $x = 3t^2$, $y = 4t^2$ კანონით. იპოვეთ ავტომანქანის სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორიის განტოლება და ამ ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონი, თუ მანძილი აითვლება საწყისი მდებარეობიდან.

ამოხსნა. სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორიის განტოლების შესადგენად მოძრაობის მოცემული განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტრი. მივიღებთ წრფეს $4x - 3y = 0$. მოძრაობის განტოლებების თანახმად $x \geq 0$, $y \geq 0$. ე.ი. სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორია არის ნახევარწრფე.

გამოვთვალოთ ავტომანქანის სიჩქარე

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2};$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 6t, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = 8t; \quad V = 10t.$$

(3.13) ფორმულის თანახმად:

$$ds = V dt. \quad s = \int_0^t V dt = \int_0^t 10t dt = 5t^2.$$

ტრაექტორიაზე სიმძიმის ცენტრი მოძრაობს კანონით: $s = 5t^2$.

§ 2.4. დიფერენციალური გეომეტრიის ზოგიერთი ცნება

განვიხილოთ დიფერენციალური გეომეტრიის ზოგიერთი საკითხი.

1. წირის სიმრუდე. ვთქვათ, წერტილის ტრაექტორიის ორ მახლობელ M და M_1 წერტილებზე გამავალი T და T_1 მხეხები ანუ $\vec{\tau}$ და $\vec{\tau}_1$ მგეზავები ერთმანეთთან ადგენენ $\Delta\varphi$ კუთხეს (ნახ. 4.1), ხოლო MM_1 რკალის სიგრძე იყოს Δs .

შეფარდებას $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k_{საშ}$ ეწოდება

წირის საშუალო სიმრუდე MM_1 რკალზე. ამ შეფარდების ზღვარს, როცა $\Delta s \rightarrow 0$, ეწოდება წირის სიმრუდე აღებულ M წერტილში:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = k.$$

(4.1)

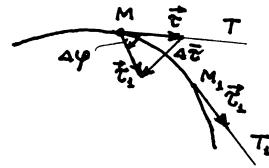
წირის სიმრუდის შებრუნებულ სიდიდეს ეწოდება წირის სიმრუდის რადიუსი

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

თუ ტრაექტორიის M წერტილიდან მთავარ ნორმალზე ჩაზნექილობის მხარეს გადავზომავეთ ρ - ს ტოლ $MC = \rho$ მონაკვეთს, მაშინ C წერტილს ეწოდება წირის სიმრუდის ცენტრი.

2. კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემა.

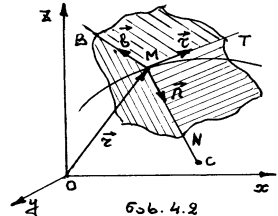
ვთქვათ M წერტილი მოძრაობს სივრცეში რაიმე (არაბრტყელ) წირზე. ავიღოთ წირზე ორი ერთმანეთთან საკმაოდ ახლოს მდებარე M და M_1 წერტილი და გავავლოთ მათზე შესაბამისად წირისადმი T და T_1 მხეხები, რომელთა მგეზავები იყვნენ $\vec{\tau}$ და $\vec{\tau}_1$ ვექტორები. MM_1 რკალი აღვნიშნოთ ΔS -ით. გავავლოთ T მხეხებზე T_1 მხეხის პარალელური სიბრტყე, ანუ რაც იგივეა, გადმოვიტანოთ $\vec{\tau}_1$ მგეზავი M წერტილში და გავავლოთ $\vec{\tau}$ და $\vec{\tau}_1$ ვექტორებზე სიბრტყე (ნახ. 4.2). როცა $M_1 \rightarrow M$, მაშინ ეს სიბრტყე იკავებს გარკვეულ მდებარეობას; ამ სიბრტყეს ეწოდება მიმხები სიბრტყე M წერტილში.



ნახ. 4.1

(თუ გვაქვს ბრტყელი წირი, მაშინ თვით ეს წირი მოთავსებულია მიმხეხ სიბრტყეში).

M წერტილში T მხების მართობულად გამავალ სიბრტყეს ეწოდება ნორმალური სიბრტყე. M წერტილზე გამავალ ყველა წრფეს, რომელიც მოთავსებულია ნორმალურ სიბრტყეში, ეწოდება ნორმალი, ხოლო ნორმალური სიბრტყისა და მიმხეხები სიბრტყის თანაკვეთის წრფეს ეწოდება მთავარი ნორმალური აღვნიშნოთ იგი N-ით.



მთავარი ნორმალის მგეზავი აღვნიშნოთ ერთეულოვანი \vec{n} ვექტორით და მიემართოდ იგი წირის ჩაზნექილობისაკენ. წრფეს, რომელიც მართობია T მხების და N მთავარი ნორმალის, ეწოდება ბინორმალური (B). მისი მგეზავი აღვნიშნოთ \vec{b} ვექტორით. იგი ისე მიემართოდ, რომ \vec{t} და \vec{n} ვექტორებთან შეადგინოს მარცხენა სისტემა. B და N წრფეებზე გამავალ სიბრტყეს ეწოდება გამწვრფევი სიბრტყე.

\vec{t} , \vec{n} და \vec{b} ვექტორები არიან ურთიერთმართობული ვექტორები. მაშასადამე, სამი ურთიერთმართობული T, N, B წრფეების მიმართულებანი შეიძლება მივიღოთ კოორდინატთა სისტემის ღერძებად, რომლებსაც სათავე აქვთ წირზე აღებულ M წერტილში. ამ სისტემას უწოდებენ კოორდინატთა ბუნებრივ სისტემას ანუ ბუნებრივ სამღერძს.

M წერტილის წირზე მოძრაობისას კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის ღერძები იცვლიან თავიანთ მიმართულებას, მაგრამ რჩებიან ურთიერთმართობულები.

3. მუდმივი სიგრძიანი ვექტორის წარმოებულად.

განვიხილოთ \vec{P} ვექტორი, რომლის სიგრძე მუდმივი სიდიდეა $|\vec{P}| = \text{const}$.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის თვისების თანახმად $(\vec{P} \cdot \vec{P}) = |\vec{P}|^2 = \text{const}$. გავაწარმოთ ეს ტოლობა:

$$\frac{d}{dt} (\vec{P} \cdot \vec{P}) = 0; \quad \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = 0; \quad 2 \vec{P} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = 0.$$

ე.ი. \vec{P} და $\frac{d\vec{P}}{dt}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია.

ეს მაშინ არის შესაძლებელი, როცა

$$\vec{P} \perp \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

(4.2)

მაშასადამე, ~~მუდმივსივრდიანი ვექტორის წარმოებული ვექტორი თვით ამ ვექტორის მართობულია.~~

4. ~~განვიხილოთ ვექტორი~~ $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$. $\vec{\tau}$ ვექტორი არის წირის

მხების მგეზავი. იგი არის ერთეულოვანი (მუდმივი) სივრდის ვექტორი, რომელიც იცვლის მხოლოდ მიმართულებას. ამიტომ ცხადია მისი წარმოებულისათვის გვაქვს

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} \perp \vec{\tau}.$$

მაშასადამე, $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორი არის მთავარი ნორმალის

პარალელური და მიმართულია სიმრუდის ცენტრისაკენ.

როგორც (4.1) ნახაზიდან ჩანს $|\Delta \vec{\tau}| = 2 \sin\left(\frac{\Delta \varphi}{2}\right)$; ამიტომ

$\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორის სიდიდე ასე გამოისახება:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| &= \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\Delta \varphi}{2}}{|\Delta s|} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

ვინაიდან $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორი მიმართულია მთავარი ნორმალის

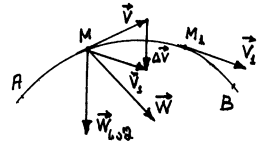
პარალელურად და მისი სიდიდეა $\frac{1}{\rho}$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ.

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n}. \quad (4.3)$$

§ 2.5. წერტილის აჩქარება

აჩქარება - ვექტორული სიდიდე, რომელიც ახსნათებს ნივთიერი წერტილის მოძრაობის სიჩქარის სიდიდისა და მიმართულების ცვლილებას.

ვთქვათ AB რკალზე მოძრავ წერტილს დროის t მომენტში უკავია M მდებარეობა და აქვს \vec{v} სიჩქარე, ხოლო დროის $t_1 = t + \Delta t$ მომენტში მან დაიკავა M_1 მდებარეობა და აქვს $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta \vec{v}$ სიჩქარე. ე.ი. დროის Δt შუალედში წერტილის სიჩქარე შეიცვალა $\Delta \vec{v}$ სიდიდით. შეფარდებას
$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{w}_{საშ}$$



ნახ. 5.1

ეწოდება M წერტილის საშუალო ვექტორული აჩქარება Δt დროში. $\vec{w}_{საშ}$ ვექტორს აქვს $\Delta \vec{v}$ - ს მიმართულება (ნახ. 5.1) .

$$\text{განვიხილოთ ზღვარი } \vec{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{w}_{საშ} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} .$$

ვინაიდან
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} ,$$

ამიტომ
$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{5.1}$$

ამ გამოსახულებას ეწოდება წერტილის ვექტორული აჩქარება დროის ადებულ t მომენტში.

წერტილის ვექტორული აჩქარება არის ვექტორული სიჩქარის პირველი წარმოებული დროთი ანუ რადიუს - ვექტორის მეორე წარმოებული დროთი.

განსახვდრის თანახმად $\Delta \vec{v}$ მდებარეობს \vec{v} და \vec{v}_1 ვექტორებზე გამავალ სიბრტყეში. იმავე სიბრტყეშია მოთავსებული $\vec{w}_{საშ}$ ვექტორიც. როცა $\Delta t \rightarrow 0$, მაშინ M_1 წერტილი მიისწრაფის M წერტილისკენ და ვექტორები \vec{v} და \vec{v}_1 კმნიან M წერტილის ტრანსპერენსადმი მიმხებ სიბრტყეს. მაშასადამე აჩქარების \vec{w} ვექტორიც ამ სიბრტყეშია მოთავსებული და მიმართულია ტრანსპერენსის ჩაზნექილობისაკენ.

გამოვთვალოთ ვექტორული აჩქარების სიდიდე და მიმართულება.

ვთქვათ, აჩქარების \vec{w} ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე არიან W_x, W_y, W_z . მაშინ

$$\vec{w} = \vec{i} W_x + \vec{j} W_y + \vec{k} W_z, \quad (5.2)$$

გავიხსენოთ (3.5) გამოსახულება:

$$\vec{v} = \vec{i} V_x + \vec{j} V_y + \vec{k} V_z,$$

მაშინ (5.1) ტოლობის თანახმად:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt}. \quad (5.3)$$

შევადართ ერთმანეთს (5.2) და (5.3) ტოლობები და გავიხსენოთ (3.8) გამოსახულებები, მივიღებთ:

$$W_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2};$$

$$W_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2};$$

(5.4)

$$W_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

ეს გამოსახულებები არიან წერტილის ვექტორული აჩქარების გეგმილები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე.

ვექტორული აჩქარების სიდიდე და მიმართულება გამოითვლება ფორმულებით:

$$|\vec{w}| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2};$$

$$\cos(\vec{w}, \hat{x}) = \frac{W_x}{|W|}; \quad \cos(\vec{w}, \hat{y}) = \frac{W_y}{|W|}; \quad \cos(\vec{w}, \hat{z}) =$$

$$\frac{W_z}{|W|}.$$

"აჩქარების" ცნება ეხება მხოლოდ წერტილს; სხეულის აჩქარების შესახებ საუბარი შეიძლება მხოლოდ გადატანითი მოძრაობისას, როცა დროის ყოველ ადგილზე მომენტში სხეულის ყველა წერტილს აქვს ერთნაირი სიჩქარე და ერთნაირი აჩქარება (სიდიდით და მიმართულებით).

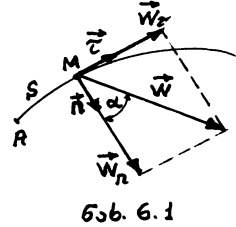
§ 2.6. ვექტორული აჩქარების დაშლა მდგენელებად

1. განვსაზღვროთ წერტილის ვექტორული აჩქარების მდგენელები კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის ღერძებზე (მხებზე, ნორმალზე, ბინორმალზე). ამისათვის ვისარგებლოთ ვექტორული სიჩქარის გამომსახველი (3.14) ფორმულით

$$\vec{v} = V \cdot \vec{\tau}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი ორივე თანამამრავლი (V და $\vec{\tau}$) საზოგადოდ იცვლებიან დროის განმავლობაში. გავაწარმოთ ეს ტოლობა დროითი:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + V \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}; \quad (6.1)$$



ნახ. 6.1

რადგანაც (იხ. 4.3 ტოლობა) $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n}$.

ამიტომ $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n} \cdot V = \frac{v}{\rho} \vec{n}$,

და (6.1) ასე ჩაიწერება

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}. \quad (6.2)$$

აქ $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w}$ არის წერტილის ვექტორული აჩქარება. მარჯვენა

მხარის პირველი შესაკრები $\frac{dv}{dt} \vec{\tau}$ მიმართულია $\vec{\tau}$ მხების გასწვრივ.

მას უწოდებთ აჩქარების მხებ მდგენელს (მხებ აჩქარებას) და ასე აღვნიშნავთ:

$$\vec{w}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \quad (6.3)$$

მეორე შესაკრებს $\frac{v^2}{\rho} \vec{n}$ აქვს \vec{n} ნორმალის მიმართულება და ეწოდება *აჩქარების ნორმალური მდგენელი (ნორმალური აჩქარება)*. მას

ასე აღვნიშნავთ:
$$\vec{w}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}. \quad (6.4)$$

წერტილის სრული აჩქარება იქნება:

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n. \quad (6.5)$$

ვექტორული აჩქარების გეგმილები კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის ღერძებზე იქნებიან:

$$W_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad W_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad W_b = 0. \quad (6.6)$$

ეს ნიშნავს, რომ სრული აჩქარების ვექტორი მოთავსებულია მიმხებ სიბრტყეში. მისი სიდიდე და მიმართულება გამოითვლება ფორმულებით

$$|\vec{w}| = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w_\tau}{w_n}. \quad (6.7)$$

აქ α კუთხეა \vec{w} და \vec{w}_n ვექტორებს შორის.

თუ წერტილი ასრულებს თანაბარ მოძრაობას, მაშინ $V = \text{const}$ და მაშასადამე $W_\tau = 0$. გვექნება: $W = W_n$.

თუ წერტილი ასრულებს წრფივ მოძრაობას, მაშინ $\rho = \infty$, ე.ი.

$$W_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \quad \text{და გვექნება:} \quad W = W_\tau.$$

~~წერტილის სრული აჩქარების გეგმილს მხებზე, ანუ წერტილის სკალარული სიჩქარის წარმოებულს დროთი ეწოდება წერტილის სკალარული აჩქარება.~~

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (6.8)$$

2 წერტილის თანაბრადცვლადი მოძრაობა.

ვთქვათ წერტილის მოძრაობის დროს მისი სკალარული აჩქარება მუდმივია $W_\tau = \text{const}$. ასეთ მოძრაობას ეწოდება *თანაბრად ცვლადი*. ამ მოძრაობის განტოლებები მიიღება (6.8) ტოლობიდან ორჯერ ინტეგრებით და ასეთი სახე აქვს:

$$V = V_0 + W_\tau \cdot t; \quad (6.9)$$

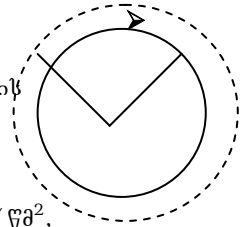
$$s = s_0 + V_0 t + 0,5 W_{\tau} \cdot t^2 .$$

აქ V_0 არის წერტილის მოძრაობის საწყისი სიჩქარე ($t_0 = 0$ მომენტისათვის) . s_0 - წერტილის საწყისი გადაადგილება.

თუ $W_{\tau} > 0$ - მოძრაობა აჩქარებულია, თუ $W_{\tau} < 0$ - მოძრაობა შენელებულია.

ამოცანა 6. ხელოვნური თანამგზავრი

გარშემოვლის დედამიწას წრიულ ორბიტაზე $h = 500$ კმ სიმაღლეზე. განსაზღვრეთ თანამგზავრის გარშემოვლის დრო და სიჩქარის სიდიდე, თუ ცნობილია, რომ მისი ცენტრისკენული აჩქარება ტოლი უნდა იყოს სხეულის თავისუფალი ვარდნის აჩქარებისა. მოცემულ სიმაღლეზე $g = 8,5$ მ/წმ², დედამიწის რადიუსი $r = 6370$ კმ.



ამოხსნა. თანამგზავრის წრიული ორბიტის რადიუსი

$R = r + h = 6870$ კმ. პირობის თანახმად $W_n = g = 8,5$ მ/წმ² = $0,0085$ კმ/წმ². თანამგზავრი მოძრაობს თანაბრად $s = vt$. მხები აჩქარება $W_{\tau} = 0$. ნორმალური აჩქარება $W_n = v^2 / R$. აქედან $v = \sqrt{R W_n} = 7,64$ კმ/წმ. თანამგზავრის წრიული გარშემოვლის მანძილი $s = 2\pi R$. გვექნება $t = s / v = 2 \pi R / v = 5647$ წმ = $1,57$ სთ.

მყარის სხეულის კინემატიკა

იკა

§ 2.7. მყარი სხეულის ნებისმიერი

მოძრაობა

ბუნებაში და ტექნიკაში მრავლად გვხვდება ისეთი ობიექტები, რომლებიც თეორიულ მექანიკაში მოდელირდება, როგორც ნივთიერი წერტილი ან მყარი სხეული. ჩვენ უკვე შეგვხვებოდა ნივთიერი წერტილის მოძრაობას. შემდგომ, ერთ - ერთ მნიშვნელოვან საკითხს წარმოადგენს მყარი სხეულის მოძრაობის შესწავლა.

სივრცეში სხეულის (მექანიკური სისტემის) ყოველგვარი მოძრაობის შესწავლისას დიდი მნიშვნელობა აქვს დავადგინოთ ის დამოუკიდებელი პარამეტრები, რომელთა საშუალებითაც სრულად აღიწერება ეს მოძრაობა.

მყარი სხეულის მოძრაობის შესწავლისას თვით სხეულთან უძრავად აკავშირებენ ათვლის რაიმე სისტემას (ვთქვათ კოორდინატთა მართკუთხა სისტემას და მას უწოდებენ *მოძრავ*

სისტემას), რომლის მოძრაობა სრულად აღწერს თვით სხეულის მოძრაობას. ამიტომ, მყარი სხეულის მოძრაობის ხასიათის შესწავლა არსებითად შესაბამისი ათვლის სისტემის მოძრაობის შესწავლის ტოლფასია.

მოცემულია სხეულის მოძრაობა, ეს ნიშნავს ვიცით პირობები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევს დროის ნებისმიერ მომენტში განვსაზღვროთ სხეულის ყოველი წერტილის მდებარეობა ათვლის არჩეული სისტემის მიმართ. ამისათვის საკმარისია რაიმე გეომეტრიული პარამეტრებით (კოორდინატებით) განისაზღვროს მთლიანი სხეულის მდებარეობა ისე, რომ შეიძლებოდეს სხეულის ყველა წერტილის მდებარეობის განსაზღვრა.

დამოუკიდებელი პარამეტრების რიცხვს, რომლებიც ათვლის არჩეული სისტემის მიმართ განსაზღვრავენ წერტილის ან სხეულის მდებარეობას, ეწოდება წერტილის ან სხეულის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი.

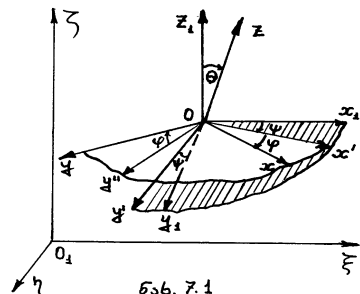
მყარი სხეულის კინემატიკაში ძირითადად ისმის ორი ამოცანა:

- ა) დავადგინოთ მთლიანი სხეულის მოძრაობის კანონი და განვსაზღვროთ მისი მოძრაობის კინემატიკური მახასიათებლები;
- ბ) განვსაზღვროთ სხეულის ცალკეული წერტილების მოძრაობის კინემატიკური მახასიათებლები.

სხეულის მოძრაობის შესწავლისას არ არის საჭირო კოორდინატთა უსასრულო რაოდენობის განხილვა (მაგალითად, ყოველი წერტილისათვის სამი კოორდინატი). თუ მხედველობაში მივიღებთ მყარი სხეულის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილის მუდმივობის პირობას, მაშინ დამოუკიდებელი პარამეტრების რაოდენობა არსებითად მცირდება.

დავადგინოთ სივრცეში თავისუფალი მყარი სხეულის მდებარეობის განმსაზღვრელი დამოუკიდებელი პარამეტრები და მათი რაოდენობა (თავისუფლების ხარისხის რიცხვი).

ვთქვათ მოცემულია ათვლის უძრავი კოორდინატთა $O_1\xi\eta\zeta$ სისტემა, რომლის მიმართაც უნდა განვსაზღვროთ მოცემული სხეულის მდებარეობა.



ნახ. 7.1

დაუშვათ, სხეულთან უძრავად არის დაკავშირებული კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა – მას ვუწოდოთ მოძრავი სისტემა. განსაზღვრული სხეულის მდებარეობა ათვლის $O_1\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ სავსებით

დახასიათდება კოორდინატა $Oxyz$ სისტემის მდებარეობით $O\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ. კოორდინატა $Oxyz$ სისტემის მდებარეობა კი სავსებით განისაზღვრება O სათავის მდებარეობით და მისი x, y, z ღერძების მიერ უძრავი სისტემის ღერძებთან შედგენილი კუთხეებით.

ვთქვათ, O სათავის კოორდინატები უძრავი $O\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ არიან ξ_0, η_0, ζ_0 .

ვაჩვენოთ, რომ სხეულის, ანუ კოორდინატა $Oxyz$ სისტემის ღერძების მდებარეობა უძრავი $O\xi\eta\zeta$ სისტემის ღერძების მიმართ სავსებით ხასიათდება O წერტილის გარშემო სამი მობრუნების საშუალებით, ანუ სამი კუთხით, ე.წ. *ელიერის კუთხეებით*.

გავავლოთ სხეულის O წერტილში უძრავი საკოორდინატო $O\xi\eta\zeta$ სისტემის ღერძების პარალელური x_1, y_1, z_1 ღერძები და ვაჩვენოთ, რომ სხეულის სამი მობრუნების შედეგად შეგვიძლია ისინი შეუთავსოთ კოორდინატა $Oxyz$ სისტემის ღერძებს, ე.ი. გავვცნოთ იმ სამ კუთხეს (ელიერის კუთხეებს), ანუ სამ მობრუნებას, რომლებიც საკმარისია O წერტილის გარშემო მობრუნავი სხეულის ერთი მდებარეობიდან მეორე მდებარეობაში გადასვლის დასახასიათებლად.

გავავლოთ Ox_1y_1 და Oxy სიბრტყეების თანაკვეთის წრფე - Ox' , მას ეწოდება კვანძთა ხაზი. Ox' -ის მიერ Ox_1 და Ox ღერძებთან შედგენილი კუთხეები შესაბამისად იყოს ψ და φ . Oz_1 და Oz ღერძებს შორის კუთხე იყოს θ .

Oz_1, Ox', Oz ღერძებს და ψ, θ, φ კუთხეებს შესაბამისად ეწოდებათ *პრეცესიის, ნუტაციის და საკუთარი ბრუნვის ღერძები და კუთხეები*.

$Ox_1y_1z_1$ სისტემის პირველი მობრუნება განვასორციელოთ Oz_1 ღერძის გარშემო პრეცესიის ψ კუთხით ისე, რომ Ox_1 ღერძი შეუთავსდეს Ox' ღერძს. მივიღებთ კოორდინატა $Ox'y'z_1$ სისტემას. მეორე მობრუნება მოვახდინოთ Ox' ღერძის გარშემო ნუტაციის θ კუთხით; ამით კოორდინატა $Ox'y'z_1$ სისტემა გადავა ახალ $Ox''y''z$ სისტემაში. მესამე მობრუნება მოვახდინოთ Oz ღერძის გარშემო საკუთარი ბრუნვის φ კუთხით. ამით კოორდინატა $Ox_1y_1z_1$ სისტემის ღერძები შეუთავსდებიან $Oxyz$ სისტემის ღერძებს.

ამგვარად, თავისუფალი მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში სავსებით განსაზღვრულია, თუ მოცემულია სხეულთან უძრავად დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემის O სათავის ξ_0, η_0, ζ_0 კოორდინატები და ელიერის ψ, θ, φ კუთხეები.

მაშასადამე, სივრცეში თავისუფალ მყარ სხეულს გააჩნია თავისუფლების ექვსი (6) ხარისხი. ეს ექვსი პარამეტრი წარმოადგენს დროის ცალსახა და უწყვეტ ფუნქციას

$$\xi_0 = f_1(t), \quad \eta_0 = f_2(t), \quad \zeta_0 = f_3(t),$$

(7.1)

$$\psi = f_4(t), \quad \theta = f_5(t), \quad \varphi = f_6(t).$$

ეს ტოლობები წარმოადგენენ თავისუფალი მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებებს.

თუ სხეულის მოძრაობა სივრცეში შეზღუდულია რაიმე პირობებით, მაშინ შესაბამისად მცირდება სხეულის თავისუფლების ხარისხის რიცხვიც და მასთან ერთად ამ მოძრაობის დასახასიათებლად საჭირო განტოლებების რაოდენობაც.

ანსხვავებენ მყარი სხეულის მოძრაობის ხუთ სახეს:

1) გადატანითი მოძრაობა; 2) უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვა; 3) ბრტყელი მოძრაობა; 4) სფერული მოძრაობა (ანუ სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო); 5) თავისუფალი მოძრაობა.

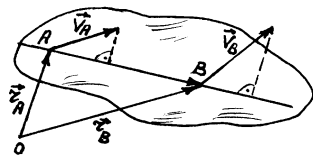
პირველი ორი მოძრაობა (გადატანითი მოძრაობა და ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო) წარმოადგენენ მყარი სხეულის ძირითად მოძრაობებს. დანარჩენი მოძრაობები დაიყვანებიან ერთ - ერთ ძირითად მოძრაობაზე ან მათ ერთობლიობაზე.

§ 2.8. მყარი სხეულის კინემატიკის ძირითადი თეორემა

დავამტკიცოთ მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც სამართლიანია მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობისათვის.

თეორემა. მყარი სხეულის მოძრაობისას ნებისმიერი ორი წერტილის სიჩქარეების ვექტორები ამ წერტილების შემაერთებელ წრფეზე ერთმანეთის ტოლია.

დაამტკიცება. ვთქვათ, მყარი სხეული მოძრაობს სივრცეში უძრავი $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. სხეულის ნებისმიერი ორი A და B წერტილის მდებარეობა



ნახ. 8.1

განისაზღვრება \vec{r}_A და \vec{r}_B რადიუს - ვექტორით (ნახ. 8.1). \vec{AB} ვექტორი არის მუდმივი იგივენი ვექტორი. სხეულის მოძრაობისას

დროის ყოველ მომენტში სამართლიანია დამოკიდებულება $\vec{r}_B = \vec{r}_A + A\vec{B}$.

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა დროითი მივიღებთ

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{dA\vec{B}}{dt},$$

ანუ

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{dA\vec{B}}{dt}.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა AB წრფეზე:

$$\text{გეგმ}_{AB} \vec{v}_B = \text{გეგმ}_{AB} \vec{v}_A + \text{გეგმ}_{AB} \left(\frac{dA\vec{B}}{dt} \right).$$

(8.1)

როგორც ვიცით (იხ. §2.4), მუდმივსივრცის ვექტორის წარმოებული ამ ვექტორის მართობულია. ამიტომ

$$\frac{dA\vec{B}}{dt} \perp A\vec{B}.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ $\text{გეგმ}_{AB} \left(\frac{dA\vec{B}}{dt} \right) = 0$.

ამის გათვალისწინებით (8.1) ტოლობიდან გვექნება

$$\text{გეგმ}_{AB} \vec{v}_B = \text{გეგმ}_{AB} \vec{v}_A. \quad (8.2)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. 9. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა

ბანსაზღვრა. მყარი სხეულის მოძრაობას ეწოდება გადატანითი, თუ ამ მოძრაობისას სხეულში ადებული ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი ყოველთვის რჩება თავისი პირვანდელი მდებარეობის პარალელური.

ბანსაზღვრიდან გამომდინარე, მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს ადგილი არა აქვს ბრუნვით მოძრაობას. ეს ნიშნავს, რომ სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა შეზღუდულია; ამიტომ მოძრაობის (7.1) განტოლებებიდან გვრჩება მხოლოდ სამი, მობრუნების განმსაზღვრელი ეილერის კუთხეების გარეშე. ე.ი. სხეულის გადატანით მოძრაობას გააჩნია სამი თავისუფლების ხარისხი.

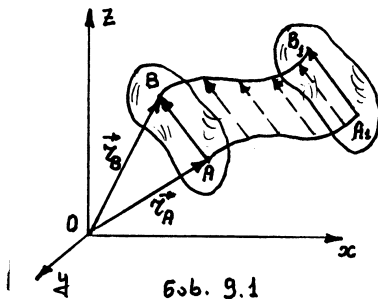
მყარი სხეულის გადატანით მოძრაობის ძირითად თვისებებს ახასიათებს შემდეგი

თეორემა: *მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს ამ სხეულის ყველა წერტილი აღწერს ერთი და იგივე ტრაექტორიას: ამასთანავე, დროის ყოველ აღებულ მომენტში სხეულის ყველა წერტილს აქვს ერთნაირი სიჩქარე და ერთნაირი აჩქარება.*

დამტკიცება. ვთქვათ მყარი სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას $OXYZ$ უძრავი სისტემის მიმართ. ავიღოთ სხეულში ნებისმიერი ორი A და B წერტილი, რომლებიც ხასიათდებიან შესაბამისად \vec{r}_A და \vec{r}_B რადიუს - ვექტორებით. დროის ყოველი მომენტისათვის სამართლიანია დამოკიდებულება

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}. \quad (9.1)$$

აქ \vec{AB} ვექტორი მუდმივია როგორც სიდიდით - სხეული მყარია, ასევე მიმართულებითაც - მოძრაობა გადატანითია. (9.1)



ტოლობიდან ჩანს, რომ დროის ყოველ მომენტში B წერტილის მდებარეობა მიიღება A წერტილის მდებარეობიდან მუდმივი \vec{AB} ვექტორით გადაადგილებისას. ეს ნიშნავს, რომ B წერტილის ტრაექტორია იგივეა, რაც A წერტილის ტრაექტორია, ოღონდაც გადაადგილებული \vec{AB} ვექტორით. თუ ამ გადაადგილებას განვახორციელებთ, მაშინ ორივე ტრაექტორია დაემთხვევა ერთმანეთს.

გავაწარმოთ (9.1) ტოლობა დროით, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt}. \quad (9.2)$$

როგორც აღვნიშნეთ, \vec{AB} ვექტორი მუდმივია სიდიდით და მიმართულებით, ამიტომ $\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$;

ე.ი. დროის ნებისმიერ მომენტში (9.2) ტოლობიდან გვექნება

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A.$$

თუ ამ ტოლობას გავაწარმოებთ დროით, მივიღებთ

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის დასახასიათებლად არ არის საჭირო სხეულის ყველა წერტილის მოძრაობის შესწავლა, არამედ საკმარისია განვიხილოთ ერთი რომელიმე წერტილის მოძრაობა.

ვთქვათ ცნობილია სხეულის ერთი რომელიმე წერტილის კოორდინატები, როგორც დროის ფუნქციები

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

მაშინ ეს განტოლებები წარმოადგენენ მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის განტოლებებს. ე.ი. გადატანითი მოძრაობის შესასწავლად საკმარისია ვისარგებლოთ წერტილის კინემატიკით.

უმნიშვნა. თუ მყარი სხეულის მოძრაობის დროს მისი წერტილების ვექტორული სიჩქარეები ერთმანეთს გაუტოლდა დროის მხოლოდ ერთ რომელიმე მომენტში და არა მთელი მოძრაობის განმავლობაში, მაშინ იტყვიან, რომ ამ მომენტისათვის გვაქვს მყარი სხეულის მყისი გადატანითი მოძრაობა.

მყისი გადატანითი მოძრაობის დროს სხეულის წერტილების აჩქარებები საზოგადოდ ტოლნი არ არიან.

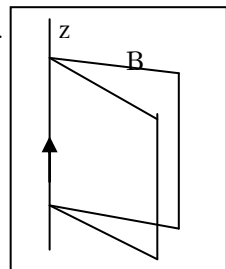
§ 2. 10. სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო

(ბრუნვის განტოლება. კუთხური სიჩქარე. კუთხური აჩქარება)

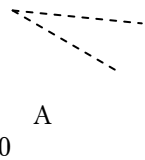
ბანსაზღვრა . მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო ეწოდება მის ისეთ მოძრაობას, როდესაც სხეულის ორი წერტილი რჩება უძრავი მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში.

ცხადია, ამასთანავე უძრავი რჩება სხეულის ყველა ის წერტილი, რომლებიც მდებარეობენ მის უძრავ ორ წერტილზე გამავალ წრფეზე. ამ წრფეს ეწოდება *სხეულის ბრუნვის ღერძი*. სხეულის ყველა ის წერტილი, რომლებიც არ მდებარეობენ ბრუნვის ღერძზე, იმოძრაევენ წრეწირებზე, რომელთა სიბრტყე მართობია ბრუნვის ღერძის, ხოლო ამ წრეწირების ცენტრები მდებარეობენ ბრუნვის ღერძზე.

ვთქვათ სხეული ჩამაგრებულია უძრავ A და B წერტილებში. სხეულის ბრუნვის ღერძი იქნება A და B წერტილებზე გამავალი ღერძი. ავიჩიოთ ამ ღერძის დადებითი მიმართულება და მის გარშემო ბრუნვის დადებით მიმართულებად ავიჩიოთ საათის ისრის ბრუნვის მიმართულება. ბრუნვის ღერძი აღვნიშნოთ OZ -ით.



ბრუნვის ღერძზე გავავლოთ უძრავი S_0 ნახევარსიბრტყე; იმავე ღერძზე გავავლოთ მეორე ნახევარსიბრტყე S , რომელიც სხეულთან უძრავად არის დაკავშირებული და სხეულთან ერთად ბრუნავს OZ ღერძის გარშემო. დაუშვათ მოძრაობის საწყის მომენტში S ნახევარსიბრტყე ემთხვევა S_0 ნახევარსიბრტყეს.



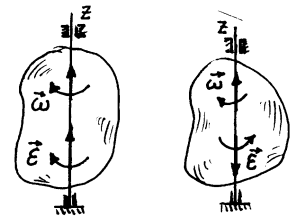
დროის ნებისმიერი t მომენტისათვის მბრუნავი სხეულის და მამასადამე მასთან უძრავად დაკავშირებული S ნახევარსიბრტყის მდებარეობა უძრავი S_0 ნახევარსიბრტყის მიმართ სავსებით შეიძლება განისაზღვროს ორწახნაგა კუთხით ამ ნახევარსიბრტყეებს შორის. დაუშვათ ამ ორწახნაგა კუთხის შესაბამისი ხაზოვანი კუთხეა φ . სხეულის ბრუნვის დროს φ კუთხე იცვლება დროის მიხედვით, ე.ი. φ არის t დროის ფუნქცია $\varphi = f(t)$.

(10.1)

ამ განტოლებას ეწოდება უძრავი ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის განტოლება ანუ სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის კანონი. იგულისხმება, რომ $f(t)$ არის დროის ნებისმიერი უწყვეტი და მეორე რიგამდე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია. φ იზომება რადიანებში, ბრუნვათა რიცხვით და ა.შ.

უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავ მყარ სხეულს გააჩნია ერთი თავისუფლების ხარისხი (φ პარამეტრი).

სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის ძირითადი კინემატიკური მახასიათებლები არიან ბრუნვის კუთხური სიჩქარე (ω) და კუთხური აჩქარება (ϵ).



ნახ. 10.2

ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ახასიათებს სხეულის ბრუნვის სისწრაფეს

ბანსაზღვრა. სხეულის ბრუნვის სკალარული კუთხური ω სიჩქარე დროის ადებულ მომენტში ეწოდება მობრუნების კუთხის პირველ წარმოებულს დროთი.

$$\text{იგი ასე აღინიშნება } \omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (10.2)$$

კუთხური სიჩქარის განზომილებაა: $[\omega] = [\text{რადიანი} / \text{წამი}] = \text{წმ}^{-1}$.

თუ სხეულის კუთხური სიჩქარე მუდმივია $\omega = \text{const}$, მაშინ ბრუნვას ეწოდება თანაბარი. (10.2) გამოსახულებიდან

ინტეგრების შედეგად მიიღება *თანაბარი ბრუნვის განტოლება*:

$$\varphi = \omega t .$$

(10.3)

აქ ბრუნვის საწყისი პირობებია: როცა $t_0 = 0$, მაშინ $\varphi_0 = 0$.
 თანაბარი ბრუნვის კუთხური სიჩქარე - ეს არის ბრუნვათა სიხშირე, რომელიც გამოისახება ერთ წუთში ($t = 1$ წთ = 60 წმ) ბრუნვათა n რიცხვით. ამ დროს სხეული შემობრუნდება $\varphi = 2\pi n$ კუთხით.

(10.3) - დან მივიღებთ:
$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ წმ}^{-1} . \quad (10.4)$$

სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარის ცვლილება დროში ხასიათდება *კუთხური აჩქარებით*.

პანსაზღვრა . სხეულის ბრუნვის სკალარული კუთხური აჩქარება ეწოდება სკალარული კუთხური სიჩქარის პირველ წარმოებულს დროთი, ანუ მობრუნების კუთხის მეორე წარმოებულს დროთი.

(10.5)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

 კუთხური აჩქარების განზომილებაა : $[\varepsilon] = \text{წმ}^{-2}$.
 თუ ბრუნვის კუთხური აჩქარება მუდმივია ($\varepsilon = \text{const}$), მაშინ ბრუნვას ეწოდება *თანაბრად ცვლადი*.

(10.5) -დან ინტეგრების შედეგად მიიღება *თანაბრად ცვლადი ბრუნვის განტოლება*:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t , \quad (10.6)$$

$$\varphi = \omega_0 t + 0,5 \varepsilon t^2 .$$

აქ ბრუნვის საწყისი პირობებია: როცა $t = t_0 = 0$, მაშინ $\varphi_0 = 0$. ω_0 არის ბრუნვის საწყისი კუთხური სიჩქარე. თუ $\varepsilon > 0$, მაშინ ბრუნვა *თანაბრად აჩქარებულია*, როცა $\varepsilon < 0$ - ბრუნვა *თანაბრად შენელებულია*.

ზემო ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ მყარისხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო ხასიათდება ბრუნვის ღერძის მდებარეობით, ბრუნვის მიმართულებით და ბრუნვის კუთხური სიჩქარის და კუთხური აჩქარების სიდიდით. ყოველივე ამის დასახასიათებლად შემოაქვთ *ვექტორული კუთხური სიჩქარის და კუთხური აჩქარების ცნება*.

პანსაზღვრა . ბრუნვის ვექტორული კუთხური სიჩქარე ეწოდება ისეთ $\vec{\omega}$ ვექტორს, რომელიც

სიდიდით სკალარული კუთხური სიჩქარის ტოლია $(|\bar{\omega}| = |\omega|)$, მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე და მიმართულია ისე, რომ მის გარშემო ბრუნვა ხდება დადებითი მიმართულებით.

ბანსაზღვრა. ბრუნვის კეპტორული კუთხური ორთა აჩქარება ეწოდება ისეთ $\bar{\epsilon}$ ვექტორს, რომელიც სიდიდით სკალარული კუთხური აჩქარების სიდიდის ტოლია $|\bar{\epsilon}| = |\epsilon|$ და მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე. ამასთანავე, $\bar{\epsilon}$ - ის მიმართულება ემთხვევა $\bar{\omega}$ - ს მიმართულებას, თუ ბრუნვა აჩქარებულია ($\epsilon > 0$) და მიმართულია $\bar{\omega}$ -ს საწინააღმდეგოდ, თუ ბრუნვა შენელებულია ($\epsilon < 0$).

$\bar{\omega}$ და $\bar{\epsilon}$ ვექტორები არიან სრიალა ვექტორები, რომელთა ფუძეები ემთხვევა ბრუნვის ღერძს და ისინი შეიძლება მოვლით ბრუნვის ღერძის ნებისმიერ წერტილში.

უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის დროს სამართლიანია მნიშვნელოვანი

თეორემა. უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვისას დროის ყოველ ადგილს მომენტში სხეულის ყველა წერტილს აქვს ერთნაირი სკალარული კუთხური სიჩქარე და ერთნაირი სკალარული კუთხური აჩქარება.

ღამტკიცება. ავიღოთ სხეულში ნებისმიერი M წერტილი, რომელიც არ მდებარეობს S ნახევარ სიბრტყეში (იხ. ნახ. 10.1). გავავლოთ ბრუნვის OZ ღერძზე და M წერტილზე S_1 ნახევარსიბრტყე, რომელიც ისევე როგორც S ნახევარსიბრტყე სხეულთან უძრავად არის დაკავშირებული. S და S_1 ნახევარსიბრტყეებს შორის კუთხე იყოს α , ხოლო S_0 და S_1 ნახევარსიბრტყეებს შორის იყოს φ_1 . ცხადია სხეულის ბრუნვის დროს α კუთხე მუდმივია, ხოლო φ_1 იცვლება. გვექნება: $\varphi_1 = \varphi + \alpha$.

გავაწარმოთ ეს ტოლობა დროთი

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \quad (10.7)$$

ვინაიდან α მუდმივი სიდიდეა, ამიტომ $\frac{d\alpha}{dt} = 0$. $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ არის S სიბრტყეში მდებარე წერტილების ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, ხოლო $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ გამოსახავს S_1 სიბრტყეში მდებარე წერტილების ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს. (10.7) -დან მივიღებთ:

$$\omega_1 = \omega$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით გვექნება:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

მივიღეთ, რომ S_1 და S ნახევარსიბრტყეებში მდებარე წერტილებს აქვთ ერთი და იგივე ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და კუჩხური აჩქარება. ეს ნახევარსიბრტყეები გავლებულნი არიან ბრუნვის OZ ღერძზე და სხეულის ნებისმიერად ადებულ წერტილებზე. (თეორემა დამტკიცებულია).

§ 2.11. წერტილის მოძრაობა წრეწირზე

უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვისას ბრუნვის ღერძიდან R მანძილით დაშორებული სხეულის M წერტილი მოძრაობს R რადიუსიან წრეწირის რკალზე. ამ წრეწირის სიბრტყე მართობულია ბრუნვის ღერძისა, ხოლო წრეწირის ცენტრი მდებარეობს თვით ბრუნვის ღერძზე.

ვთქვათ ცნობილია სხეულის ბრუნვის კანონი: $\varphi = f(t)$.

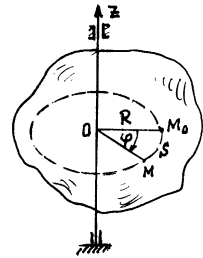
დაუშვათ M წერტილს ბრუნვის საწყის მომენტში ეკავა M_0 მდებარეობა, ხოლო დროის რაღაც შუალედში M_0 წერტილი სხეულთან ერთად შემობრუნდა φ კუთხით და დაიკავა M მდებარეობა, ამასთანავე მან შემოწერა წრიული $M_0M = S$ რკალი. როგორც ცნობილია, ადგილი აქვს ტოლობას $S = R\varphi$.

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა დროთი

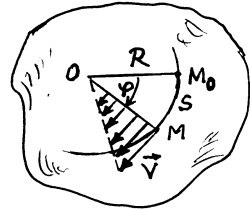
$$\frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{ან} \quad V = R\omega.$$

(11.1)

როგორც ვაჩვენეთ, ადებული მომენტისათვის სხეულის ყველა წერტილს აქვს ერთნაირი კუთხური სიჩქარე - ω , ამიტომ (11.1) -დან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვისას სხეულის წერტილების სიჩქარეები პროპორციულნი არიან ბრუნვის ღერძიდან მათი დაშორების R მანძილისა. პროპორციულობის კოეფიციენტი კუთხური სიჩქარე (ω). წერტილების სიჩქარეები



ნახ. 11.1



ნახ. 11.2

მიმართულია ტრაექტორიის მხების გასწვრივ და მაშასადამე ბრუნვის რადიუსის მართობულია. OM რადიუსზე მდებარე სხეულის წერტილების სიჩქარეები ურთიერთპარალელური არიან და განაწილებული არიან წრფივი კანონით, რომელიც შეესაბამება (1.1) ტოლობას.

სხეულის M წერტილის აჩქარების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულებით:

$$W_{\tau} = \frac{dv}{dt}, \quad W_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad W_b = 0.$$

ჩვენ შემთხვევაში $\rho = R$ და (1.1) ტოლობის თანახმად მივიღებთ:

$$W_{\tau} = \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \varepsilon, \quad \text{ანუ} \quad W_{\tau} = R \varepsilon ;$$

(1.2)

$$W_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R \omega^2, \quad W_b = R \omega^2.$$

წერტილის სრული აჩქარება გამოისახება ტოლობით:

$$W = |\vec{w}| = \sqrt{w_{\tau}^2 + w_n^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

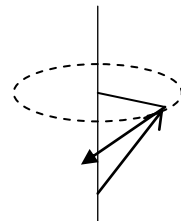
(1.3)

§ 2. 12 . უძრავი ღერძის ბარშემომ მბრუნავი სხეულის წერტილის ვექტორული სიჩქარე და აჩქარება

განვიხილოთ მყარი სხეული, რომელიც რაიმე Oz ღერძის გარშემო ბრუნავს $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. გამოვიყვანოთ სხეულის ნებისმიერი M წერტილის ვექტორული სიჩქარისა და აჩქარების გამოსათვლელი ფორმულები.

ავიღოთ სხეულის რაიმე M წერტილი, რომელიც ბრუნვის ღერძიდან დაშორებულია R მანძილით. სხეულის ბრუნვის დროს M წერტილი მოძრაობს R რადიუსის წრეწირზე. ვთქვათ, Oz ღერძის ნებისმიერი A წერტილის მიმართ M

წერტილის რადიუს - ვექტორია $\vec{AM} = \vec{r}$. განსაზღვრის თანახმად $\vec{\omega}$ მდებარეობს ბრუნვის



Oz ღერძზე, ამიტომ $R = |\vec{r}| \sin(\bar{\omega}, \hat{r})$.
M

M წერტილის სიჩქარე გამოისახება ტოლობით \vec{v}
 $|\vec{v}| = |V| = R |\bar{\omega}| = |\bar{\omega}| |\vec{r}| \sin(\bar{\omega}, \hat{r})$.
 \vec{r}

ეს ტოლობა ასეც ჩაიწერება

$$|\vec{v}| = |\bar{\omega} \times \vec{r}|.$$

მივიღეთ, რომ $(\bar{\omega} \times \vec{r})$ ვექტორული ნამრავლის სიდიდე M წერტილის \vec{v} სიჩქარის სიდიდის ტოლია. გარდა ამისა, \vec{v} და $(\bar{\omega} \times \vec{r})$ ვექტორებს აქვთ ერთი და იგივე მოგეზულობა - ორივე მართობია ΔAOM სიბრტყისა, \vec{v} მიმართულია მხების გასწვრივ ბრუნვის მხარეს, $(\bar{\omega} \times \vec{r})$ - ის მიმართულება განისაზღვრება ვექტორული ნამრავლის თვისების თანახმად.

ზემო ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{v} = \bar{\omega} \times \vec{r}. \quad (12.1)$$

მაშასადამე, ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს სხეულის ნებისმიერი წერტილის ვექტორული სიჩქარე ტოლია ვექტორული $\bar{\omega}$ კუთხური სიჩქარის და \vec{r} რადიუს - ვექტორის ვექტორული ნამრავლისა.

(12.1) ტოლობას უწოდებენ ე ი ღ ე რ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ს . იგი წარმოადგენს მყარი სხეულის კინემატიკის ძირითად ფორმულას. ეს ფორმულა თავის სახეს ინარჩუნებს აგრეთვე მყარი სხეულის უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვის დროსაც.

მნიშვნელოვანი შენიშვნა. ვექტორული სიჩქარის

განმარტების თანახმად $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, სადაც \vec{r} არის მოძრავი M

წერტილის რადიუს - ვექტორი რაიმე უძრავი წერტილის მიმართ. ასეთ უძრავ წერტილად შეგვიძლია ავიღოთ იმ ღერძის ნებისმიერი წერტილი, რომლის გარშემოც ბრუნავს სხეული. ეილერის ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \vec{r} \quad (12.2)$$

აქ \vec{r} არის მუდმივი სიგრძის, როგორც სხეულის ორი წერტილის შემაერთებელი ვექტორი.

უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისას სხეულის წერტილები სიჩქარეების გამოსათვლელად გავაწარმოთ (12.1) ტოლობა დროთი:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

ანუ

$$\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

აქ პირველი შესაკრები ($\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$) არის ვექტორი, რომელიც მართობულია $\vec{\varepsilon}$ და \vec{r} ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა, ე.ი. მართობია M წერტილზე და ბრუნვის ღერძზე გამავალი სიბრტყისა. მას აქვს M წერტილის ტრანსლაციის მხების მიმართულება. მისი სიდიდეა:

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = |\vec{\varepsilon}| \cdot |\vec{r}| \cdot \text{Sin} \alpha = \varepsilon R.$$

მაშასადამე, პირველი შესაკრები წარმოადგენს მხებ აჩქარებას:

$$\vec{\omega}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}.$$

მეორე შესაკრები ($\vec{\omega} \times \vec{v}$) არის ვექტორი, რომელიც მართობია $\vec{\omega}$ და \vec{v} ვექტორებისა და მიმართულია MO_1 - ის გასწვრივ O_1 - კენ, ანუ ბრუნვის ღერძისაკენ, ე.ი. ემთხვევა რადიუსის გასწვრივ ნორმალის მიმართულებას. მისი სიდიდეა:

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{Sin}(\vec{\omega}, \vec{v}) = \omega \cdot v = R \omega^2.$$

აქ $\text{Sin}(\vec{\omega}, \vec{v}) = 1$, ვინაიდან $\vec{\omega} \perp \vec{v}$.

მაშასადამე, მეორე შესაკრები არის ნორმალური აჩქარება:

$$\vec{\omega}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

საბოლოოდ (12.3) ფორმულა ასე წარმოიდგინება:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\tau + \vec{\omega}_n.$$

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ კუთხური სიჩქარე ($\vec{\omega}$) და კუთხური აჩქარება ($\vec{\varepsilon}$) მთლიანად ახასიათებენ სხეულის ბრუნვით მოძრაობას და არ არიან დამოკიდებულნი სხეულის წერტილების მდებარეობაზე.

კინემატიკის ფორმულების შედარება (მსგავსება) გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობებისათვის

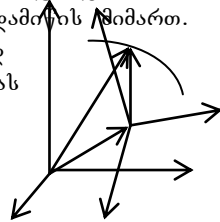
წერტილის ან გადატანითად მოძრავი სხეულის კინემატიკის ფორმულებისა და სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის კინემატიკის ფორმულების შედარებისას, ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ფორმულებიდან ძირითადები ფორმით ანალოგიურებია. გადატანითი მოძრაობის ფორმულებიდან რომ მივიღოთ ბრუნვითი მოძრაობის ფორმულები, საჭიროა წირითი s გადაადგილების ადვილას ჩავსვათ კუთხური φ გადაადგილება, წირითი v სიჩქარის ადვილას – კუთხური ω სიჩქარე, წირითი w აჩქარების ადვილას – კუთხური აჩქარება ε . ამ ფორმულის მსგავსება შემდეგი ცხრილიდანც ჩანს:

მოდრობის კინემატიკური	მოდრობის ხასიათი	მოდრობის სახე	
მასსიათებელი		გადატანითი	ბრუნვითი
გადაადგილება	არათანაბარი	$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
	თანაბარი	$s = vt$	$\varphi = \omega t$
	თანაბრადცვლადი	$s = v_0 t + w t^2 / 2$	$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2$
სიჩქარე	არათანაბარი	$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
	თანაბარი	$v = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
	თანაბრადცვლადი	$v = v_0 + w t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
მხები აჩქარება	არათანაბარი	$w_\tau = \frac{dv}{dt}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
	თანაბარი	$w_\tau = 0$	$\varepsilon = 0$
	თანაბრადცვლადი	$w_\tau = \text{const}$	$\varepsilon = \text{const}$
ნორმალური აჩქარება		$w_n = v^2 / \rho$	$\varepsilon_n = \omega^2 r$

§ 2.13. პირითადი ცნებები. მოძრაობის განტოლებები

ჩვენ შევისწავლეთ მყარი სხეულის უმარტივესი მოძრაობები - გადატანითი მოძრაობა და ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო. სხეულის უფრო რთული მოძრაობის შესასწავლად საჭიროა განვიხილოთ წერტილის რთული მოძრაობა. ეს ისეთი მოძრაობაა, როდესაც მოცემული წერტილი მოძრაობს ისეთი ათვლის სისტემის მიმართ, რომელიც თავის მხრივ მოძრაობს სხვა - უძრავი სისტემის მიმართ; ე.ი. განიხილება წერტილის ერთდროული მოძრაობა ათვლის ორი სისტემის მიმართ. შეიძლება განვიხილოთ იქნას წერტილის უფრო რთული მოძრაობაც. მაგალითად, ადამიანის გადაადგილება მოძრავი მატარებლის ვაგონში არის რთული მოძრაობა დედამიწის მიმართ.

წერტილის მოძრაობის შესწავლა ერთდროულად ათვლის რამდენიმე სისტემის მიმართ საშუალებას იძლევა წერტილის რთული მოძრაობა წარმოვადგინოთ (დავშალოთ) რამდენიმე უფრო მარტივი მოძრაობის სახით, რომელთა კვლევაც შედარებით ადვილია.



შევისწავლოთ წერტილის რთული მოძრაობა.

განვიხილოთ M წერტილის მოძრაობა ათვლის მოძრავი $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომელიც თავის მხრივ მოძრაობს ათვლის უძრავი $O_1\xi\eta\zeta$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

M წერტილის მოძრაობას ათვლის მოძრავი $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ ეწოდება ფარდობითი მოძრაობა. ამ მოძრაობის დროს M წერტილის მიერ აღწერილ ტრაექტორიას ეწოდება ფარდობითი ტრაექტორია, ხოლო წერტილის სიჩქარეს და აჩქარებას ეწოდებათ შესაბამისად ფარდობითი სიჩქარე და ფარდობითი აჩქარება. მათ ასე აღვნიშნავთ $\vec{v}_{ფ}$ და $\vec{w}_{ფ}$. განსაზღვრიდან ჩანს, რომ $\vec{v}_{ფ}$ და $\vec{w}_{ფ}$ - ის გამოთვლის დროს შეგვიძლია $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მოძრაობა მხედველობაში არ მივიღოთ (ჩავთვალოთ როგორც უძრავი).

თუ ვიგულისხმებთ, რომ M წერტილი უძრავად არის დაკავშირებული მოძრავ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემასთან, მაშინ მოძრავი სისტემის მოძრაობას უძრავი $O_1\xi\eta\zeta$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ ეწოდება წარმტანი მოძრაობა. მოძრავი სისტემის იმ წერტილის სიჩქარეს და აჩქარებას, რომელსაც

აღებულ მომენტში ემთხვევა მოცემული M წერტილი, ეწოდება M წერტილის წარმტანი სიჩქარე და წარმტანი აჩქარება. მათ ასე აღვნიშნავთ \vec{v}_τ და \vec{w}_τ .

M წერტილის მოძრაობას უძრავი O, ξ, η, ζ კოორდინატთა სისტემის მიმართ ეწოდება რთული ანუ აბსოლუტური მოძრაობა. ამ მოძრაობის ტრაექტორიას ეწოდება აბსოლუტური ტრაექტორია, სიჩქარეს - აბსოლუტური სიჩქარე (\vec{v}_a), აჩქარებას - აბსოლუტური აჩქარება (\vec{w}_a).

წერტილის რთული მოძრაობის შესწავლის მთავარი ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ დავამყაროთ დამოკიდებულება აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობის სიჩქარეებსა და აჩქარებებს შორის.

ვთქვათ M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას (ნახ. 13.1).

აღვნიშნოთ M წერტილის რადიუს-ვექტორი უძრავი O, ξ, η, ζ სისტემის მიმართ $\vec{\rho}$ ვექტორით, ხოლო მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ \vec{r} - ით. O სათავის რადიუს-ვექტორი უძრავი O_1 სათავის მიმართ იყოს $\vec{\rho}_0$ მაშინ M წერტილის რთული მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში ეს რადიუს ვექტორები დაკავშირებულნი არიან ტოლობით

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}. \quad (13.1)$$

ვთქვათ M წერტილის მოძრაობა $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ მოცემულია განტოლებებით

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (13.2)$$

თუ მოძრავი კოორდინატთა სისტემის ღერძების მგეზავებია $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ვექტორები, მაშინ

$$\vec{r} = \vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z. \quad (13.3)$$

(13.1) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z. \quad (13.4)$$

(13.2) განტოლებები წარმოადგენენ M წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლებებს.

(13.4) განტოლება წარმოადგენს M წერტილის რთული ანუ აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებას.

თუ (13.4) განტოლებაში დაუშვებთ, რომ x, y, z მუდმივი სიდიდეებია, მაშინ ეს განტოლება წარმოადგენს M წერტილის წარმტანი მოძრაობის განტოლებას.

§ 2.14. სიჩქარეთა უმკრებლის კანონი

თეორემა. წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე ტოლია ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამისა.

დამტკიცება. მოცემულია წერტილის რთული მოძრაობის განტოლება

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z .$$

გავაწარმოთ ეს ტოლობა დროთი. გვექნება:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_0}{dt} + \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot x + \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot y + \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot z + \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} .$$

(14.1) .

აქ $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}$, არის M წერტილის აბსოლუტური (რთული)

მოძრაობის სიჩქარე. როგორც აღვნიშნეთ, (13.2) განტოლებები წარმოადგენენ M წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლებებს, ე.ი.

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ წარმოადგენენ M წერტილის ფარდობითი სიჩქარის

გეგმილებს მოძრავი Oxyz კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე, ამიტომ გამოსახულება

$$\vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} = \vec{v}_{\text{ფ}} \quad (14.2)$$

არის M წერტილის ფარდობითი სიჩქარე.

წარმტანი მოძრაობის დროს M წერტილი უძრავია მოძრავი Oxyz კოორდინატთა სისტემის მიმართ, ე. ი. შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ M წერტილის x, y, z კოორდინატები მუდმივებია. მაშინ, წარმტანი მოძრაობისათვის (14.1) ტოლობის მარჯვენა მხარეში გვრჩება გამოსახულება:

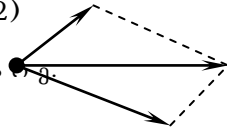
$$\frac{d\vec{\rho}_0}{dt} + \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot x + \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot y + \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot z = \vec{v}_{\text{წ}} \quad (14.3)$$

იგი M წერტილის წარმტანი სიჩქარეა .

(14.2) და (14.3) - ის თანახმად (14.1) ასე ჩაიწერება

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{ფ}} + \vec{v}_{\text{წ}} .$$

(14.4)



ეს ტოლობა გამოსახავს სიჩქარეთა შეკრების კანონს. თეორემა დამტკიცებულია.

აბსოლუტური სიჩქარის სიდიდე გამოითვლება სიჩქარეთა პარალელოგრამიდან. თუ \vec{v}_Φ და \vec{v}_Ψ სიჩქარის ვექტორებს შორის კუთხე არის φ , მაშინ

$$|\vec{v}_\Delta| = \sqrt{|\vec{v}_\Phi|^2 + |\vec{v}_\Psi|^2 + 2 |\vec{v}_\Phi| |\vec{v}_\Psi| \cdot \text{Cos}\varphi} \quad (14.5)$$

§ 2.15. აჩქარებათა შეკრების კანონი (კორიოლისის თეორემა)

განვსაზღვროთ M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება მისი რთული მოძრაობის დროს. ამისათვის გავაწარმოთ (14.1) ტოლობა და თანაც მოვახდინოთ მსგავსი წვერების დაჯგუფება. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{\rho}_0}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} \cdot x + \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} \cdot y + \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} \cdot z + \vec{i} \frac{d^2 x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2 y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2 z}{dt^2} + \\ &+ 2 \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned} \quad (15.1)$$

აქ $\frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} = \vec{w}_\Delta$ არის M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება.

ფარდობითი მოძრაობის დროს შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} მუდმივებია, ამიტომ (14.2) -ის გაწარმოებით მივიღებთ M წერტილის ფარდობით აჩქარებას:

$$\vec{w}_\Phi = d\vec{v}_\Phi / dt = \vec{i} \frac{d^2 x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2 y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (15.2)$$

წარმოებულ მოძრაობის აჩქარება მიიღება (14.3) ტოლობის გაწარმოებით (ვთვლით, რომ x, y, z მუდმივებია):

$$\vec{w}_\varphi = d\vec{v}_\varphi / dt = \frac{d^2\vec{\rho}_0}{dt^2} + \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} \cdot x + \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} \cdot y + \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \cdot z$$

(15.3)

გარდა ამ სიდიდეებისა (15.1) გამოსახულებაში გვაქვს დამატებითი სამწევრი, ანუ დამატებითი აჩქარება, მას კოროლისის აჩქარება ეწოდება და ასე აღინიშნება

$$\vec{w}_\omega = 2\left(\frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \frac{dz}{dt}\right)$$

(15.4)

(15.2) - (15.4) -ის საფუძველზე (15.1) ასე ჩაიწერება:

$$\vec{w}_\omega = \vec{w}_\varphi + \vec{w}_\omega$$

(15.5)

დამტკიცდა **თეორემა (კორიოლისის თეორემა):**
წერტილის რთული მოძრაობის დროს მისი აბსოლუტური აჩქარება ტოლია ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებების გეომეტრიული ჯამისა.

შევისწავლოთ კორიოლისის აჩქარება, მოცემული (15.4) ტოლობით.

როგორც აღვნიშნეთ (პ.13), მუდმივ სიგრძიანი \vec{r} რადიუს - ვექტორისათვის გვექნება ტოლობა (ელიერის ფორმულა)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \text{ ვინაიდან მოძრავი კოორდინატა სისტემის ღერძების}$$

მგეზავები $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ერთეულ სიგრძიანი ვექტორები არიან და თუ წარმტანი მოძრაობა არა გადატანითია, ეს ვექტორები ასრულებენ მხოლოდ ბრუნვით მოძრაობას, ამიტომ სამართლიანია ანალოგიური ტოლობებიც

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}. \quad (15.6)$$

ამ ფორმულებს ეწოდებათ პუასონის ფორმულები.

აქ $\vec{\omega}$ არის წარმტანი მოძრაობის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (15.4) გამოსახულებაში. გვექნება:

$$\vec{w}_j = 2 [(\vec{\omega} \times \vec{i}) \cdot \frac{dx}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{j}) \cdot \frac{dy}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{k}) \cdot \frac{dz}{dt}] = 2 [\vec{\omega} \times (\vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt})] = 2 (\vec{\omega} \times \vec{v}_g) .$$

მაშასადამე
$$\vec{w}_j = 2 (\vec{\omega} \times \vec{v}_g) . \quad (15.7)$$

ეს ფორმულა გამოსახავს კორიოლისის აჩქარებას. იგი წარმოიქმნება M წერტილის ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობების ურთიერთ გავლენის შედეგად. (15.7) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ კორიოლისის აჩქარების ვექტორი \vec{w}_j მართობულია $\vec{\omega}$ და \vec{v}_g ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა და მიმართულია ისე, რომ ეს სამი ვექტორი $(\vec{\omega}, \vec{v}_g, \vec{w}_j)$ ქმნიან მარცხენა სისტემას. კორიოლისის აჩქარების სიდიდე განისაზღვრება ფორმულით

$$W_j = | \vec{w}_j | = 2 | \vec{\omega} | \cdot | \vec{v}_g | \cdot \text{Sin} (\vec{\omega}, \wedge \vec{v}_g) . \quad (15.8)$$

(15.8) - დან ჩანს, რომ $W_j = 0$ იმ შემთხვევაში, როცა

- ა) $\omega = 0$, ე.ი. წარმტანი მოძრაობა გადატანითია.
- ბ) $\vec{v}_g = 0$, ე.ი. ფარდობითი მოძრაობა არა გვაქვს.
- გ) კუთხე $\alpha = (\vec{\omega}, \wedge \vec{v}_g) = 0$ (ან $\alpha = 180^\circ$), ე.ი.

ფარდობითი მოძრაობა ხდება წარმტანი ბრუნვის ღერძის პარალელურად, ანუ ღრრის ადებულ მომენტში \vec{v}_g ვექტორი ამ ღერძის პარალელურია.

ამოცანა 7. A სხეული ეშვება პრიზმის დახრილი წახნაგის გასწვრივ და აქვს ფარდობითი 18 სმ / წმ² აჩქარება. პრიზმი მოძრაობს მარჯვნივ $x = 6t^2$ (t - წმ-ში) კანონით. განსაზღვრეთ A სხეულის აბსოლუტური აჩქარება, თუ BC = 160 სმ, CD = 120 სმ

ამოხსნა. A სხეული ასრულებს წრფივ ფარდობით მოძრაობას $W_g = 18$ სმ / წმ² აჩქარებით. BCD პრიზმი ასრულებს წარმტან გადატანით წრფივ მოძრაობას, მისი აჩქარება $W_{\nabla} = d^2x / dt^2 = 12$ სმ / წმ². კორიოლისის აჩქარება $W_j = 0$. (15.5) -დან

გვაქვს $\vec{w}_j = \vec{w}_g + \vec{w}_{\nabla}$.
 კუთხე $(\vec{w}_g \wedge \vec{w}_{\nabla}) = \beta = \angle B$;

$$\operatorname{tg} \beta = CD / BC = 3/4 ; \operatorname{Cos} \beta = 4/5 ;$$

$$W_s = \sqrt{W_{\Phi}^2 + W_{\Psi}^2 + 2 W_{\Phi} W_{\Psi} \operatorname{Cos} \beta} = 28, 52 \text{ სმ} / \sqrt{\text{მ}^2}$$

§ 2.16. სხეულის ბრტყელი მოძრაობა

ბანსაზღვრა: *მყარი სხეულის მოძრაობას ეწოდება ბრტყელი ანუ ბრტყელი-პარალელური, თუ ამ მოძრაობის დროს მისი ყველა წერტილი გადაადგილდება რაიმე უძრავი სიბრტყის პარალელურად.*

სხეულის ბრტყელი მოძრაობა წარმოადგენს სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის (§7.1) კერძო შემთხვევას, სადაც მიღებულია შემდეგი შეზღუდვა:

გადაადგილდება რაიმე უძრავი სიბრტყის ვთქვით $O_1\xi\eta$ სიბრტყის პარალელურად, ე. ი. სხეულის ყოველი წერტილისათვის სრულდება პირობა $\zeta = f_1(t) = \text{const.}$ ეს ტოლფასია სხეულისათვის სამი მოძრაობის შეზღუდვისა: $O_1\xi$ ღერძის გასწვრივ გადატანითი მოძრაობისა და ორი მობრუნების შეუძლებლობა ($O_1\xi$ და $O_1\xi$ ღერძების გარშემო). მაშასადამე, სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის ექვსი განტოლებიდან (იხ. §7.1) გვრჩება სამი, რომლებიც სრულად ახასითებენ სხეულის ბრტყელ მოძრაობას; ე. ი. სხეულს ბრტყელი მოძრაობისას გააჩნია სამი თავისუფლების ხარისხი.

ვთქვათ T სხეული ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას რაიმე უძრავი Π სიბრტყის მიმართ. T სხეულის რომელიმე M წერტილზე გავავლოთ Π სიბრტყის მართობი წრფე, რომელიც Π სიბრტყეს კვეთს M_0 წერტილში. M_0 წერტილი არის M წერტილის გეგმილი Π სიბრტყეზე. სხეულის ბრტყელი მოძრაობისას M_0M წრფე რჩება Π სიბრტყის მართობული და მოძრაობს გადატანითად. ამიტომ, ამ წრფეზე მდებარე სხეულის ყველა წერტილი აღწერს იგივე ტრაექტორიას, რასაც M_0 წერტილი Π სიბრტყეზე; ამასთანავე, სხეულის ყველა ამ წერტილს დროის ალბუელ მომენტში აქვს ერთი და იგივე სიჩქარე და ერთი და იგივე აჩქარება. ე.ი. ალბუელ წრფეზე მდებარე სხეულის ყველა წერტილის მოძრაობის შესწავლის მაგივრად საკმარისია შევისწავლოთ Π სიბრტყეზე მდებარე M_0 წერტილის მოძრაობა.

თუ სხეულის ყველა წერტილზე გავავლოთ Π სიბრტყის მართობი წრფეები, მაშინ Π სიბრტყეზე მივიღებთ ბრტყელ S ფიგურას (ნაკვთს), რომელიც წარმოადგენს T სხეულის გეგმილს Π სიბრტყეზე

სივრცეში T სხეულის ბრტყელი მოძრაობის შესასწავლად საკმარისია შევისწავლოთ S ნაკვთის მოძრაობა Π სიბრტყეში. ამიტომ, შემდგომში სხეულის ბრტყელი მოძრაობის მაგივრად განვიხილავთ ბრტყელი S ფიგურის მოძრაობას თავისივე სიბრტყეში. ამასთანავე, ბრტყელი S

ფიგურის წერტილებისათვის მიღებული შედეგები სამართლიანია სხეულის ყველა იმ წერტილისათვის, რომლებიც ასრულებენ ბრტყელ მოძრაობას

განვიხილოთ ბრტყელი S ფიგურის მოძრაობა თავისივე სიბრტყეში, რომელიც ემთხვევა კოორდინატთა. $O_1\xi\eta$ სიბრტყეს. ამ სიბრტყეში ფიგურის მდებარეობა დროის ყოველ მომენტში სრულად განისაზღვრება მასში აღებული რაიმე $O(\xi_0, \eta_0)$ წერტილის (პოლუსის) მდებარეობით და პოლუსის გარშემო S ფიგურის შემობრუნების φ კუთხით. თუ ცნობილია ξ_0, η_0 , φ კოორდინატები, როგორც დროის ფუნქციები

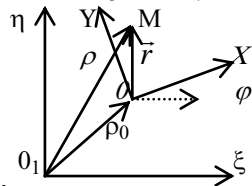
$$\xi_0 = f_1(t), \quad \eta_0 = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t), \quad (16.1)$$

მაშინ ეს განტოლებები წარმოადგენენ ბრტყელი S ფიგურის მოძრაობის განტოლებებს $O_1\xi\eta$ სიბრტყეში, რომლებიც ამავე დროს არიან **სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები**.

მაშასადამე, სხეულის ბრტყელი მოძრაობა ხასიათდება სამი (ξ_0, η_0, φ) პარამეტრით, ე.ი. გააჩნია სამი თავისუფლების ხარისხი.

ამ განტოლებებიდან ჩანს, რომ თუ $\varphi = \text{const}$, მაშინ ბრტყელი მოძრაობა გადატანითია, რომლის დროსაც ფიგურის ყველა წერტილი ისე მოძრაობს, როგორც O პოლუსი. როცა $\xi_0 = \text{const}$, $\eta_0 = \text{const}$, $\varphi = f(t)$, მაშინ პოლუსი უძრავია და ფიგურა ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას პოლუსის გარშემო. აქედან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ **ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი მოძრაობა თავისივე სიბრტყეში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი მოძრაობის ერთობლიობა:** გადატანითი მოძრაობისა და პოლუსის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის ერთობლიობა.

პოლუსის არჩევაზე დამოკიდებულია გადატანითი მოძრაობის მახასიათებლები (იცვლება ξ_0, η_0 პარამეტრები) ხოლო ბრუნვითი მოძრაობა არ არის დამოკიდებული პოლუსის არჩევაზე.



გამოვიყვანოთ **სხეულის ნებისმიერი M**

წერტილის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები.

S ფიგურასთან უძრავად დავაკავშიროთ კოორდინატთა მართკუთხა Oxy სისტემა. ცხადია, ფიგურის მოძრაობასთან ერთად მოძრაობს აგრეთვე Oxy სისტემაც.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$O_1\vec{M} = \vec{\rho} \quad O_1\vec{O} = \vec{\rho}_0; \quad O\vec{M} = \vec{r}.$$

S ფიგურის მოძრაობისას $\vec{\rho}$ და $\vec{\rho}_0$ ვექტორები იცვლიან სიდიდეს და მიმართულებას, ხოლო \vec{r} ვექტორი იცვლის მხოლოდ მიმართულებას (იგი აერთებს სხეულის ორ O და წერტილს). S ფიგურის და მასთან

ერთად წერტილის მოძრაობის ნებისმიერ მომენტში ადგილი აქვს დამოკიდებულებას $\vec{\rho} = \vec{\rho}_o + \vec{r}$. (16.2)

აღნიშნოთ M წერტილის კოორდინატები უძრავი $O_1\xi\eta$ სისტემის მიმართ - $M(\xi, \eta)$, ხოლო მოძრავი Oxy სისტემის მიმართ - $M(x, y)$, მაშინ, თუ მოძრავი კოორდინატთა Oxy სისტემის ღერძების მგებავებია \vec{i} და \vec{j} ვექტორები, შეგვიძლია დავწეროთ $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$.

(16.2) დამოკიდებულება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_o + \vec{i}x + \vec{j}y. \quad (16.3)$$

ეს არის წერტილის ბრტყელი მოძრაობის განტოლება ვექტორული სახით. მისი დაგვემილებით კოორდინატთა უძრავ $O_1\xi\eta$ სისტემის ღერძებზე, მივიღებთ M :

$$\xi = \xi_0 + x \cos\varphi - y \sin\varphi ;$$

$$\eta = \eta_0 + x \sin\varphi + y \cos\varphi .$$

ააჲ x და y - მოცემული M წერტილისათვის მუდმივი სიდიდეებია.

§ 2.17. ბრტყელი ფიგურის წერტილის სიჩქარე

როგორც ვნახეთ, ბრტყელი S ფიგურის და მასთან ერთად წერტილის მოძრაობისას თავისივე სიბრტყეში ნებისმიერ მომენტში ადგილი აქვს დამოკიდებულებას $\vec{\rho} = \vec{\rho}_o + \vec{r}$.

გავაწარმოთ ეს ტოლობა დროთი:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (17.1)$$

აქ $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_M$ არის წერტილის ბრტყელი მოძრაობის სიჩქარე

$$\frac{d\vec{\rho}_o}{dt} = \vec{v}_0 \text{ არის პოლუსის სიჩქარე.}$$

\vec{r} ვექტორი იცვლის მხოლოდ მიმართულებას (იგი აერთებს სხეულის ორ 0 და წერტილს). იგი მუდმივი სიგრძის ბექტორია და მონაწილეობს მხოლოდ პოლუსის გარშემო S ფიგურის ბრუნვით მოძრაობაში. მიტომ ვკვებება: $\vec{v}_r = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. (17.2)

$\vec{\omega}$ - პოლუსის გარშემო ფიგურის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა, რომელიც გადის 0 პოლუსზე და მიმართულია ფიგურის სიბრტყის მართობულად ($\vec{V}_r \perp \vec{r}$). $\vec{\omega}$ არ არის დამოკიდებული პოლუსის არჩევაზე.

(17.1) ტოლობა ასე Vაიწერება

$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (17.3)$$

ეს ტოლობა გამოსახავს ბრტყელი ფიგურეს ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარეს.

თეორემა: ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი M წერტილის \vec{v}_M სიჩქარე ტოლია 0 პოლუსის \vec{v}_0 სიჩქარისა და პოლუსის გარშემო M წერტილის ბრუნვითი მოძრაობის სიჩქარის გეომეტრიული ჯამისა.

თუ გავიხსენებთ მყარი სხეულის კინემატიკის ძირითად თეორემას (პ,1.8), მაშნ სამართლიანია .

თეორემა: ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი

\vec{v}_B

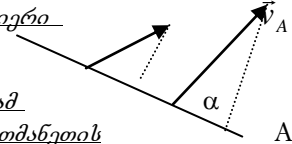
ორი წერტილის სიჩქარეების გვემილები ამ წერტილებს შემაერთებელ წრფეზე ერთმანეთის

β

ტოლია:

B

$$v_{AB} \vec{v}_A = v_{AB} \vec{v}_B, \text{ ანუ } v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta.$$



§ 2.18. სიჩქარეთა მყისი ცენტრი

ბრტყელი ფიგურეს თავისივე სიბრტყეში მოძრაობისას მისი წერტილების სიჩქარის განსაზღვრის ერთ-ერთი მეთოდი დაფუძნებულია სიჩქარეთა მყისი ცენტრის ცნებაზე.

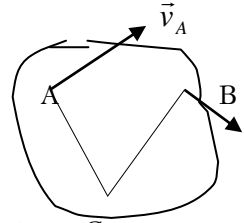
განსაზღვრა: სიჩქარეთა მყისი ცენტრი ეწოდება ბრტყელი ფიგურეს იმ წერტილს, რომლის სიჩქარე დროის ალბულ მომენტში ნულის ტოლია..

დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც გამოსახავს სიჩქარეთა მყისი ცენტრის არსებობას.

თეორემა: თუ ბრტყელი ფიგურა ასრულებს არავადატანით მოძრაობას ($\omega \neq 0$), მაშინ დროის ყოველ t მომენტში სიჩქარეთა მყისი ცენტრი არსებობს და იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ დროის ყოველ t მომენტში არსებობს ბრტყელი ფიგურის ერთი წერტილი, რომლის სიჩქარე ნულის ტოლია.

ვთქვათ დროის t მომენტში სხეულის ორ A და B წერტილს შესაბამისად აქვს \vec{v}_A და \vec{v}_B სიჩქარე.



გავავლოთ A და B წერტილებიდან \vec{v}_A და \vec{v}_B -ს მართობები. მათი გადაკვეთის C წერტილი იქნება სიჩქარეთა მყისი ცენტრი ($\vec{v}_C = 0$).

მართლაც, თუ $\vec{v}_C \neq 0$ მაშინ სიჩქარეთა ვექტორების ტოლობის თეორემის თანახმად \vec{v}_C ერთდრულად უნდა იყოს AC და BC -ს მართობი (რადგანაც $\vec{v}_A \perp AC$, $\vec{v}_B \perp BC$) - რაც შეუძლებელია.

მაშასადამე, C წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია. ეს გვიჩვენებს, რომ C წერტილი არის ფიგურის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. თეორემა დამტკიცებულია.

C წერტილს იმიტომ ეწოდება „სიჩქარეთა მყისი ცენტრი“, რომ მხოლოდ დროის აღებულ მომენტშია მისი სიჩქარე ნულის ტოლი; დროის სხვა მომენტში ფიგურის სხვა წერტილი იქნება სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.

სიჩქარეთა მყისი ცენტრის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ დროის ყოველ მომენტში ის ერთადერთია.

ასლა დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა

თეორემა: დროის ყოველ აღებულ მომენტში ბრტყელი ფიგურის არავადატანითი მოძრაობა ისე ხდება, თითქმის იგი ბრუნავს მყისი ცენტრის გარშემო.

დამტკიცება. მივიღოთ დროის აღებულ მომენტისათვის C წერტილი პოლუსად. მაშინ $\vec{v}_C = 0$ და წერტილის სიჩქარე იქნება (ფორმულა (17.3):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CA} = \vec{\omega} \times \vec{CA}.$$

ანალოგიური ტოლობით გამოისახება სხვა ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{CB}$$

აქედან დასკვნა: ბრტყელი ფიგურის არაგადატანითი მოძრაობისას მისი წერტილების სიჩქარეები ისეა განაწილებული სხეულში, თითქოს იგი ბრუნავს მყისი ცენტრის გარშემო.

შენიშვნა: თუ ბრტყელი ფიგურის ორ A და B წერტილისათვის განვიხილავთ მათ სიჩქარეთა შეფარდებას (თანაც მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\vec{\omega} \perp \vec{CA}$ და $\vec{\omega} \perp \vec{CB}$), გვექნება

$$\frac{|\vec{V}_A|}{|\vec{V}_B|} = \frac{|\vec{\omega} \times \vec{CA}|}{|\vec{\omega} \times \vec{CB}|} = \frac{\omega \cdot CA}{\omega \cdot CB} = \frac{CA}{CB}$$

ანუ

$$\frac{V_A}{CA} = \frac{V_B}{CB}$$

მივიღეთ, რომ ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეები პროპორციულნი არიან მყისი ცენტრიდან ამ წერტილების დაშორების მანძილებისა.

სხეულის ბრტყელი მოძრაობისას მისი წერტილების სიჩქარის მოსაძებნად ხშირ შემთხვევაში პირველ ყოვლისა ეძებენ სიჩქარეთა მყის ცენტრს. სიჩქარეთა მყისი ცენტრის მოსაძებნად არსებობს რამდენიმე ხერხი (იხილეთ ნახაზები):

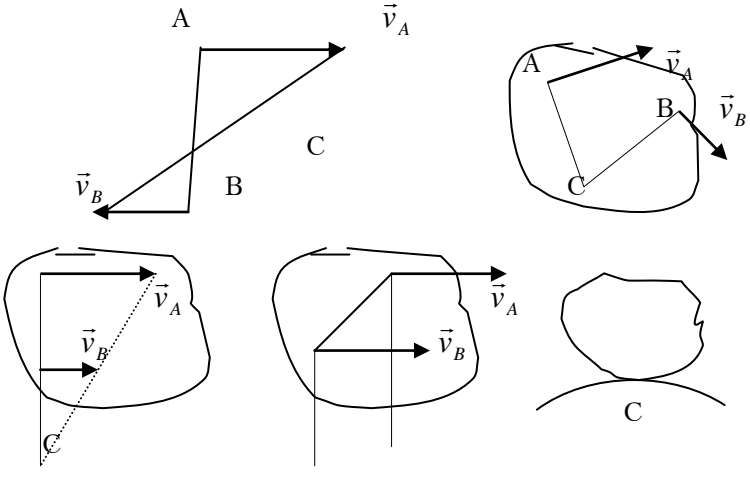
მაშასადამე, ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი არაგადატანითი გადაადგილება თავის სიბრტყეში შეიძლება განვიხილოთ, როგორც გარკვეული C წერტილის გარშემო შემობრუნება.

C წერტილს ს ი ჩ ქ ა რ ე თ ა მ ყ ი ს ც ე ნ ტ რ ს, ზოგჯერ კი ბ რ უ ნ ვ ი ს მ ყ ი ს ც ე ნ ტ რ ს უწოდებენ.

C წერტილზე ამ ფიგურისადმი მართობულად გამავალ ღერძს ბ რ უ ნ ვ ი ს მ ყ ი ს ი ღ ე რ ძ ი ეწოდება. ბრუნვის მყისი ცენტრების გეომეტრიულ ადგილს უძრავ სიბრტყეზე უ ძ რ ა ვ ი ც ე ნ ტ რ ო ი დ ი, ხოლო მოძრავ სიბრტყეზე- მ ო ძ რ ა ვ ი ც ე ნ ტ რ ო ი დ ი .

მტკიცდება, რომ მოძრავი ცენტროიდი უსრიალოდ გორავს უძრავ ცენტროიდზე.

ქვემოთ მოყვანილია სხეულის მოძრაობისას სიჩქარეთა მყისი ცენტრის მოძებნის ზოგიერთი კერძო მაგალითი:



$AB \perp \vec{v}_A$
 მყისი ცენტრია C
 გორვისას

$AB \perp \vec{v}_A$
 მყისი ცენტრი უსრიალო
 არ არსებობს ($\omega=0$)

§ 2 19. ბრტყელი ფიგურის წერტილის აჩქარება

ბრტყელი ფიგურის თავისივე სიბრტყეში მოძრაობისას მისი ნებისმიერი წერტილის აჩქარების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ სიჩქარის საანგარიშო (17.3) ფორმულით

$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad .$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა დროთი:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad (19.1)$$

აქ $\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{w}_M$ არის წერტილის აჩქარება: $\frac{d\vec{v}_0}{dt} = \vec{w}_0$ არის 0

პოლუსის აჩქარება: $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$ - ბრტყელი ფიგურის ბრუნვის კუთხური

აჩქარება. თუ გავიხსენებთ, რომ მუდმივსივრცეში \vec{r} ვექტორისათვის $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, მაშინ (19.1) ტოლობის უკანასკნელი შესაკრები

წარმოიღვინება, როგორც ორმაგი ვექტორული ნამრავლი და გვექნება:

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r} = -\omega^2 \vec{r}$$

აქ $(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = 0$, ვინაიდან $\vec{\omega} \perp \vec{r}$, შედეგად (19.1) ტოლობა ასე ჩაიწერება

$$\vec{w}_M = \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}. \quad (19.2)$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ ბრტყელი ფიგურის თავისივე სიბრტყეში მოძრაობისას მისი ნებისმიერი წერტილის აჩქარება წარმოიღვინება, როგორც ორი აჩქარების გეომეტრიული ჯამი: ერთია 0 პოლუსის გადატანითი მოძრაობის აჩქარება - \vec{w}_0 , ხოლო მეორე - ბრტყელი ფიგურეს ბრუნვითი მოძრაობის აჩქარება, რომელიც გამოსახულია $\vec{w}_r = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$ შესაკრებით. ეს უკანასკნელი მიიღება $0\vec{M} = \vec{r}$ რადიუს-ვექტორის ბრუნვითი მოძრაობით. ადვილი საჩვენებელია, რომ ვექტორული ნამრავლის თვისების თანახმად $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ ვექტორი მიმართულია \vec{r} -ის მართობულად, ე.ი. წარმოადგენს მხებ აჩქარებას $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{w}_r^t$; \vec{w}_r^r ვექტორი მიმართულია \vec{V}_M -ის მხარეს, თუ $\varepsilon > 0$, და საწინააღმდეგო მხარეს, თუ $\varepsilon < 0$. - $\omega^2 \vec{r}$ ვექტორს აქვს რ რადიუსის გასწვრივ ნორმალის მიმართულება (M-დან 0-კენ) და იგი წარმოადგენს აჩქარების ნორმალურ მდგენელს - $\omega^2 \vec{r} = \vec{w}_r^r$.

$$\text{მაშასადამე } \vec{w}_r = \vec{w}_r^t + \vec{w}_r^r.$$

აჩქარებათა სიდიდეები გამოითვლება ფორმულებით:

$$|\vec{w}_r^t| = |\vec{\varepsilon}| \cdot r; \quad |\vec{w}_r^r| = \omega^2 \cdot r.$$

შენიშვნა: ბრტყელი ფიგურის თავისივე სიბრტყეში მოძრაობისას ნებისმიერი წერტილის აჩქარების გამოსათვლელად ამოცანების ამოხსნისას საჭიროა წინასწარ გამოვთვალოთ სხეულის კუთხური სიჩქარე, კუთხური აჩქარება და ავირჩიოთ პოლუსი.

მ ე ს ა მ ე ნ ა წ ი ლ ი

დ ი ნ ა მ ი კ ა

§ 3.1. უმსავალი. ძირითადი ცნებები

დ ი ნ ა მ ი კ ა შეისწავლის ნივთიერ სხეულთა მოძრაობის კანონებს ამ მოძრაობის გამომწვევ მიზეზებთან (ძალებთან) კავშირში. ეს ძალები იწვევენ ან სცვლიან ამ მოძრაობას.

დინამიკამ განვითარება დაიწყო XVII ს-ის დასაწყისში; დინამიკის ფუძემდებლად ითვლება გ. გალილეი, რომელმაც პირველმა შემოიღო მოძრავი სხეულის სიჩქარისა და აჩქარების ცნება არათანაბარი მოძრაობისას. მანვე განიხილა სხეულთა მოძრაობა სიმძიმის ძალის მოქმედებით და დაადგინა ინერციის კანონი.

გალილეის მიერ დაწყებული დინამიკის ძირითადი კანონების დადგენა განახორციელა ი. ნიუტონმა, რომელმაც მკაფიოდ ჩამოაყალიბა დინამიკის ძირითადი პრინციპები მექანიკის სამი ძირითადი კანონის და მათგან გამომდინარე შედეგების სახით. ამ კანონების შემდგომი განვითარება და სრულყოფა მოხდა ლ. ეილერის, ჟ. ლავრანუის და სხვ. შრომებში, სადაც მოცემული იყო დინამიკის ამოცანათა ამოხსნისათვის აუცილებელი ყველა განტოლება და თეორემა, ამასთანავე ამ განტოლებების შედგენისათვის საჭირო ზოგადი მეთოდები.

გალილეისა და ნიუტონის პრინციპებზე დაფუძნებულ დინამიკას კლასიკური დინამიკა ეწოდება. მას ხშირად ნიუტონის დინამიკასაც უწოდებენ.

კლასიკური დინამიკა შედგება მათემატიკური დასკვნების ერთობლიობისაგან, რომლებიც წარმოადგენენ გალილეის და ნიუტონის ძირითადი კანონების შედეგებს. მასში აქსიომატიკის ხერხით შემოაქვთ უძრავი სივრცის ცნება (ათვლის აბსოლუტურად უძრავი სისტემა, ანუ ინერციული სისტემა) და აბსოლუტური დრო, რომელიც სივრცის ყველა წერტილისათვის ერთნაირია. აბსოლუტურ სივრცეს მიეწერება კვკლიდეს სივრცის გეომეტრიული თვისებები. ნიუტონის კანონები ჩამოყალიბებულია აბსოლუტური სივრცის და აბსოლუტური დროის

მიმართ. დინამიკის ძირითადი განტოლებები მართებულია მხოლოდ ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ მოძრაობის შესწავლისას.

დინამიკაში გამოყავთ მექანიკური მოძრაობის ძირითადი კანონები.

გავეცნოთ დინამიკის ზოგიერთ ძირითად ცნებას და განმარტებას.

სხეულს, რომლის განზომილებები მოცემულ შემთხვევაში შეიძლება უგულებელვყოთ ნ ი ვ თ ი ე რ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ე წ ო დება.

ნივთიერ წერტილთა ისეთ ერთობლიობას, რომელშიც ყოველი წერტილის მდებარეობა ან მოძრაობა დამოკიდებულია ამ სისტემის სხვა წერტილების მდებარეობაზე ან მოძრაობაზე ნ ი ვ თ ი ე რ წ ე რ ტ ი ლ თ ა ს ი ს ტ ე მ ა (ანუ მ ე ქ ა ნ ი კ უ რ ი ს ი ს ტ ე მ ა) ეწოდება

ყოველ ფიზიკურ სხეულს მექანიკაში განიხილავენ, როგორც ნივთიერ წერტილთა გარკვეულ სისტემას.

წერტილთა ისეთ სისტემას, რომლის მოძრაობისას მის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება, ეწოდება უცვლადი მექანიკური სისტემა ანუ ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ა დ მ ყ ა რ ი ს ხ ე უ ლ ი.

წერტილს, რომელზეც არ მოქმედებენ სხვა ნივთიერი წერტილები (სხეულები), ეწოდება ი ზ ო ლ ი რ ე ბ ე უ ლ ი.

გარემომცველი სხეულების ზემოქმედებისაგან იზოლირებულ ნივთიერ წერტილს არ შეუძლია თავის თავს მიანიჭოს აჩქარება. წერტილის ასეთ კინემატიკურ მდგომარეობას ეწოდება ი ნ ე რ ც ი უ ლ ი. ე.ი. ინერციულობა არის სხეულის თვისება უცვლელად შეინარჩუნოს თავისი სიჩქარე სიდიდით და მიმართულებით. ეს აგრეთვე ნიშნავს რომ ს ხ ე უ ლ ი ს ი ნ ე რ ც ი უ ლ ო ბ ა არის სხეულის თვისება გაუწიოს წინააღმდეგობა მისი მოძრაობის ან წონასწორობის მდგომარეობის ყოველგვარ ცვლილებას.

ათვლის საკოორდინატო სისტემას ეწოდება ინერციული, თუ მის მიმართ იზოლირებული ნივთიერი წერტილი იმყოფება წონასწორობაში ან მოძრაობს წრფივად და თანაბრად.

ნივთიერი წერტილის ინერციულობის რაოდენობრივ საზომს, რომელიც პროპორციულია ამ წერტილში მოთავსებული ნივთიერების რაოდენობისა, მ ა ს ა ეწოდება.

მასა წარმოადგენს მატერიის ძირითად დინამიკურ მახასიათებელს რომელიც განსაზღვრავს მის ინერციულ და გრავიტაციულ თვისებებს.

მასის ცნება შემოიტანა ი. ნიუტონმა. ნიუტონის

მასა არის სკალარული დადებითი სიდიდე. ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში მასის ერთეულად მიღებულია $1\text{კგ}\cdot\text{წმ}^2/\text{მ}$.

მოცემული სხეულის უძრაობა ან მოძრაობა დამოკიდებულია სხვა სხეულებთან მისი მექანიკური ურთიერთქმედების ხასიათზე, ე.ი. მისი კინემატიკური მდგომარეობის ცვლილების ხასიათზე.

სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს ნივთიერი სხეულების მექანიკური ურთიერთქმედების რაოდენობრივ საზომს, ძ ა ლ ა ეწოდება.

ძალა არის ვექტორული სიდიდე. მისი მოქმედება განისაზღვრება მოდების წერტილით, სიდიდით (მოდულით) და მიმართულებით.

ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში ძალის ერთეულად მიღებულია კილოგრამძალა (კგძ).

ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში ძალის ერთეულად დადგენილია ნიუტონი (ნ). ნიუტონი არის ძალა, რომელიც 1 კგ მასის სხეულს ანიჭებს 1 მ/წმ² აჩქარებას, რომელიც ემთხვევა ძალის მოქმედების მიმართულებას.

საერთაშორისო და ტექნიკურ სისტემებში ძალის ერთეულთა შორის დამოკიდებულება ასეთია: 1კგძ=9,80665 ≈9,81ნ; 1ნ=0,101917 ≈0,102კგძ. ანუ 2% ცდომილობით შეიძლება დაუშვათ 1 კგძ ≈ 10 ნ; 1 ნ ≈ 0,1 კგძ.

სტატიკაში ძირითადად ვიხილავდით მუდმივ ძალებს. დინამიკაში განვიხილავთ სხეულზე მოქმედ არა მარტო მუდმივ, არამედ ცვალებად ძალებსაც.

§ 3.2. ნიუტონის კანონები

კლასიკურ მექანიკაში მიღებულია დაშვება, რომ არსებობს ათვლის აბსოლუტურად უძრავი სისტემა, რომლის მიმართაც სამართლიანია გალილეი – ნიუტონის მექანიკის ანუ კლასიკური მექანიკის შემდეგი ძირითადი კანონები.

ნიუტონის პირველი კანონი (ინერციის კანონი): იზოლირებულ ნივთიერი წერტილი ან უძრავია, ან მოძრაობს წრფივად და თანაბრად.

მათემატიკურად ეს ასე ჩაიწერება: თუ ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალა $\vec{F} = 0$, მაშინ წერტილის სიჩქარე $\vec{v} = \text{Const}$ (კერძოდ, შესაძლებელია $\vec{v} = 0$).

ათვლის სისტემას, რომელშიც სამართლიანია ინერციის კანონი ათვლის ინერციული სისტემა ეწოდება.

მრავალი ტექნიკური ამოცანის გადაწყვეტისას ათვლის ინერციულ სისტემად შეგვიძლია მივიღოთ დედამიწასთან უძრავად დაკავშირებული ნებისმიერი ათვლის სისტემა.

ნიუტონის მეორე კანონი (ძალების მოქმედების დამოუკიდებლობა) თუ ნივთიერ წერტილზე ერთდროულად მოქმედებს რამდენიმე ძალა, მაშინ ამ წერტილის აჩქარება ტოლია იმ აჩქარებათა გეომეტრიული ჯამისა, რომელსაც ეს წერტილი იღებს თითოეული ამ ძალის მოქმედებით ცალ-ცალკე.

თეორიულ მექანიკაში თვლიან, რომ ათვლის ინერციული სისტემები ეკვივალენტურნი არიან. ეს ნიშნავს, რომ მექანიკის ყველა კანონი და განტოლებები არ არიან დამოკიდებულნი ათვლის ინერციული სისტემის არჩევაზე. ამაში მდგომარეობს მექანიკის მნიშვნელოვანი პრინციპი - **გ ა ლ ი ლ ე ი ს ფ ა რ ღ ო ბ ი თ ო ბ ი ს პ რ ი ნ ც ი პ ი.**

ეს კანონები, რომლებიც *ნიუტონმა* ჩამოაყალიბა 1687 წელს, არის *გალილეის*, *სიუვენსის*, თვით *ნიუტონის* და სხვათა მრავალი დაკვირვების, ცდების და თეორიული კვლევის შედეგი.

ნიუტონის კანონები მართებული აღარ არიან ძალიან მცირე ზომის ობიექტების (ელემენტარული ნაწილაკების) მოძრაობისათვის და სინათლის სიჩქარის მახლობელი სიჩქარეებით მოძრაობისას.

მექანიკაში სამართლიანია ნიუტონ-ლაიბნიცის დეტერმინირების პრინციპი, რომლის თანახმადაც, ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობა სავსებით დეტერმინირებულია: წერტილის საწყისი მდებარეობის (\vec{r}_0) და საწყისი სიჩქარის (\vec{v}_0) მოცემა ცალსახად განსაზღვრავს მის შემდგომ მოძრაობას, ე, ი, ფუნქციას $\vec{r}(t)$.

§ 3.3. ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

როგორც უკვე აღვნიშნეთ *დინამიკა შეისწავლის ნივთიერ სხეულთა მოძრაობის კანონებს ამ მოძრაობის გამომწვევ მიზეზებთან (ძალებთან) კავშირში.*

დინამიკის სხვადასხვა ამოცანები დაიყვანებიან ძირითადად ორი ტიპის ამოცანაზე:

1) ვიცით რა მოცემული ნივთიერი წერტილის (სხეულის) მოძრაობის კანონი, ვიპოვოთ ამ წერტილზე (სხეულზე) მოქმედი ძალები.

2) ვიცით რა მოცემული ნივთიერი წერტილზე (სხეულზე) მოქმედი ძალები, განვსაზღვროთ ამ წერტილის (სხეულის) მოძრაობის კანონი.

ამ ამოცანების ამოხსნისას დინამიკა ამყარებს ზოგად რაოდენობრივ კავშირს (დამოკიდებულებას) სხვადასხვა ფიზიკურ

სიდიდეებს შორის, რომლებიც მჭიდროდაა დაკავშირებული ნივთიერი სხეულის მოძრაობასთან (მასა, ძალა, მოძრაობის რაოდენობა, მუშაობა, ენერგია და სხვ.).

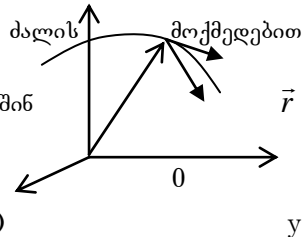
თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის

დიფერენციალური განტოლებები გამომდინარეობენ მექანიკის ძირითადი კანონიდან - ნიუტონის მეორე კანონიდან.

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა, რომლის მიმართ მოძრაობს m მასის თავისუფალი ნივთიერი

$M(x,y,z)$ წერტილი $\vec{F}(X,Y,Z)$ ძალის მოქმედებით.
 z M

თუ M წერტილი \vec{F} ძალის მოქმედებით
 \vec{v} იღებს $\vec{w}(W_x, W_y, W_z)$ აჩქარებას, მაშინ \vec{F}



ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად
 $m \vec{w} = \vec{F}$. (3.1)

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა საკოორდინატო ღერძებზე, მივიღებთ

$$mW_x = X, \quad mW_y = Y, \quad mW_z = Z,$$

ანუ

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

(3.2)

ან კიდევ:

$$mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z.$$

ამ განტოლებებს ეწოდებათ თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის განტოლებები: (3.1) -ს ეწოდება დინამიკის ძირითადი განტოლება (ვექტორული სახით), ხოლო (3.2) განტოლებებს ეწოდებათ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში.

\vec{F} ძალა შეიძლება ერთადერთი მოქმედი ძალა იყოს ან წარმოადგენდეს წერტილზე მოქმედი რამოდენიმე ძალის ტოლქმედს.

წერტილზე მოქმედი ძალა შეიძლება დამოკიდებული იყოს წერტილის მდებარეობაზე (\vec{r}), წერტილის მოძრაობის სიჩქარეზე (\vec{v}) და დროზე (t), ე.ი. ზოგადად $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$.

ამიტომ, (3.2) განტოლებების მარჯვენა მხარეში მდგომი სიდიდეები საზოგადოდ შეიძლება იყვნენ x, y, z, x', y', z', t ცვლადების ფუნქციები.

თუ ნივთიერი წერტილი მოძრაობს სიბრტყეზე, ვთქვათ Oxy სიბრტყეზე, მაშინ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები იქნება

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y.$$

თუ ნივთიერი წერტილი ასრულებს წრფივ მოძრაობას, ვთქვათ Ox ღერძის გასწვრივ, მაშინ მოძრაობის დიფერენციალური

განტოლება იქნება
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X,$$

ისევე, როგორც კინემატიკაში, შეიძლება განვიხილოთ M წერტილის მოძრაობა კოორდინატთა ბუნებრივ სისტემაში. დავაგეგმილოთ (3.1) ტოლობა ამ სისტემის ღერძებზე (მხებზე, ნორმალზე, ბინორმალზე). მივიღებთ:

$$(3.3) \quad mW_\tau = F_\tau, \quad mW_n = F_n, \quad mW_b = F_b.$$

თუ გავიხსენებთ, რომ ვექტორული აჩქარების გეგმილები კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის ღერძებზე არიან

$$W_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad W_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad W_b = 0.$$

მაშინ (3) განტოლებები მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$(3.4) \quad m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b.$$

აქ ρ - მოცემულ წერტილში ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსია, ხოლო $v = \frac{ds}{dt}$ - წერტილის სიჩქარეა.

(3.4) განტოლებებს ეწოდებათ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ბუნებრივ კოორდინატებში. ამ განტოლებებს ზოგჯერ ეილერის განტოლებებს უწოდებენ.

(3.4) -ის ბოლო ($F_b = 0$) განტოლება გვიჩვენებს, რომ ძალა მდებარეობს წერტილის ტრაექტორიის მიმხებ სიბრტყეში.

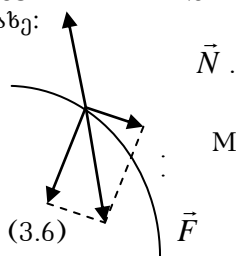
თუ ნივთიერი წერტილი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, მაშინ მოძრაობის (3.4) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n. \quad (3.5)$$

არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის

შესწავლისას მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია *კინეტიკის მეთოდს*. ეს მეთოდი განსაკუთრებით მაშინ გამოიყენება, როცა ცნობილია წერტილის მოძრაობის კანონი და აქტიური ძალები, ხოლო გასაგებია ბმის რეაქცია.

განვიხილოთ არათავისუფალი ნივთიერი M წერტილის მოძრაობა, რომელზეც მოქმედებენ აქტიური \vec{F} და რეაქციის \vec{N} ძალები. წერტილის მოძრაობის განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$m \vec{w} = \vec{F} + \vec{N} - \vec{\Phi} \quad (3.6)$$


ეს ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$\vec{F} + \vec{N} + (-m \vec{w}) = 0.$$

შემოვიღოთ ადნიშვნა:

$$(-m \vec{w}) = \vec{\Phi}. \quad (3.7)$$

$\vec{\Phi}$ ვექტორს უწოდოთ ინერციის ძალა. ცხადია, იგი სიდიდით წერტილის მასისა და აჩქარების ნამრავლის ტოლია და მიმართულია აჩქარების ვექტორის საწინააღმდეგოდ.

(3.6) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0. \quad (3.8)$$

ეს ტოლობა წარმოადგენს არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის განტოლებას, რომელიც ჩაწერილია ძალთა წონასწორობის პირობის სახით. სწორედ ამაში გამოიხატება კინეტიკის ძირითადი პრინციპი – დალაშქრის პრინციპი, რომელიც ასე ჩამოყალიბდება: არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის ყოველ მომენტში წერტილზე მოქმედი აქტიური და რეაქციის ძალები წონასწორდებიან ინერციის ძალით.

მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ნივთიერ წერტილზე მოდებული არიან მხოლოდ აქტიური \vec{F} და რეაქციის \vec{N} ძალები.

(3.7) სახით შემოდებული ინერციის $\vec{\Phi}$ ძალა უშუალოდ არ არის მოდებული მოძრავე M წერტილზე; იგი მოდებულია იმ სხეულზე, რომელიც იწვევს მოცემული წერტილის მოძრაობას. ზოგჯერ მას

ფიქტიურ ძალას უწოდებენ. ამიტომ (3.8) განტოლება არ წარმოადგენს წერტილის წონასწორობის პირობას.

დალაშქრის პრინციპს ინერციის ძალების შემოღებით დინამიკის ამოცანა ფორმალურად დაყავს სტატიკის ამოცანაზე. პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის დროს ამ ხერხს აქვს მთელი რიგი უპირატესობები (მაგალითად, რეაქციის ძალების განსაზღვრისას).

თავისუფალი ნივთიერი წერტილისათვის დალაშქრის პრინციპი გამოისახება განტოლებით: $\vec{F} + \vec{\Phi} = 0$.

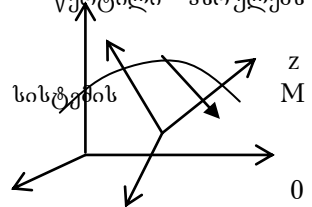
დალაშქრის პრინციპის გამოყენებით შეიძლება განვსაზღვროთ მოძრავი წერტილის ბმის რეაქცია ან აჩქარება.

ნივთიერი წერტილის ფარდობითი მოძრაობა. აქამდის

განხილული მოძრაობის განტოლებები სამართლიანია ნივთიერი წერტილის აბსოლუტური მოძრაობისათვის, ე.ი. ინერციული (უძრავი) სისტემის მიმართ მოძრაობისათვის.

ახლა განვიხილოთ წერტილის ფარდობითი მოძრაობა, ე. ი. \vec{F} ძალის მოქმედებით M წერტილის მოძრაობა ისეთი 0xyz საკოორდინატო სისტემის მიმართ, რომელიც თავის მხრივ ცნობილი კანონით მოძრაობს ინერციული (უძრავი ღერძების მქონე) 0₁x₁y₁z₁ საკოორდინატო სისტემის მიმართ. ე.ი. M წერტილი ასრულებს Z₁ რთულ მოძრაობას.

უძრავი (ინერციული) საკოორდინატო სისტემის X მიმართ თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობისას სამართლიანია დინამიკის



\vec{F} ძირითადი განტოლება x_1

$$m \vec{w} = \vec{F} \tag{3.9}$$

სფლაც, \vec{F} - წერტილზე მოქმედი ყველა

ძალის ტოლქმედია, ხოლო \vec{w} - წერტილის აბსოლუტური მოძრაობის აჩქარება უძრავი 0₁x₁y₁z₁ სისტემის მიმართ. კინემატიკიდან ცნობილია წერტილის რთული მოძრაობისას კორიოლისის თეორემა, რომლის თანახმად აბსოლუტური აჩქარება ტოლია ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებათა ჯამისა:

$$\vec{w} = \vec{w}_{ფ} + \vec{w}_{წ} + \vec{w}_{კ} \tag{3.10}$$

აჩქარების ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (3.9) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$m \vec{w}_\Psi + m \vec{w}_\Phi + m \vec{w}_\Delta = \vec{F}.$$

აქედან

$$m \vec{w}_\Psi = \vec{F} + (-m \vec{w}_\Phi) + (-m \vec{w}_\Delta). \quad (3.11)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$-m \vec{w}_\Phi = \vec{\Phi}_\Phi, \quad -m \vec{w}_\Delta = \vec{\Phi}_\Delta. \quad (3.12)$$

$\vec{\Phi}_\Phi$ და $\vec{\Phi}_\Delta$ სიდიდეებს აქვთ ძალის განზომილება. უწოდოთ მათ შესაბამისად წარმტანი ინერციის ძალა და კორიოლისის ინერციის ძალა. მაშინ (3.9) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$m \vec{w}_\Psi = \vec{F} + \vec{\Phi}_\Phi + \vec{\Phi}_\Delta. \quad (3.13)$$

ეს განტოლება გამოსახავს წერტილის ფარდობითი მოძრაობის ძირითად კანონს.

თუ ერთმანეთს შევადარებთ (3.9) და (3.13) განტოლებებს, შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: ნივთიერი წერტილის ფარდობითი მოძრაობა ისევე აღიწერება, როგორც აბსოლუტური სისტემის მიმართ მოძრაობა, თუ ამ წერტილზე აქტიური (\vec{F}) ძალის გარდა იმოქმედებდა წარმტანი ($\vec{\Phi}_\Phi$) და კორიოლისის ($\vec{\Phi}_\Delta$) ინერციის ძალები.

კოორდინატთა არაინერციულ სისტემაში ინერციის ძალები მოქმედებენ ისევე, როგორც ჩვეულებრივი ძალები, რომლებსაც ვხვდებით ათვლის ინერციულ სისტემაში. წარმტანი და კორიოლისის ინერციის ძალები იწვევენ წერტილის ფარდობით აჩქარებას; მათ შეუძლიათ სხეულის დეფორმაცია და სხეულის დამსხვრევაც კი; ეს ძალები ასრულებენ გარკვეულ მუშაობას და ა.შ. მაშასადამე ეს ძალები არიან რეალური ძალები, მოდებულნი არიან წერტილზე და ახდენენ მასზე რეალურ მოქმედებას. ეს ძალები უნდა განვასხვაოთ დალამბერის პრინციპში შემოღებული ინერციის ძალისაგან, რომელიც არ არის მოდებული ნივთიერ წერტილზე.

აღვნიშნოთ, რომ ჩვეულებრივი ძალები (მაგალითად, მიზიდულობის ძალები) არ არიან დამოკიდებულნი არაინერციული სისტემის არჩევაზე, მაშინ, როდესაც წარმტანი და კორიოლისის ინერციის ძალები განისაზღვრებიან კოორდინატთა არაინერციული სისტემის არჩევით.

განვიხილოთ წერტილის ფარდობითი მოძრაობის კერძო შემთხვევები.

1) ვთქვათ, კოორდინატთა მოძრავი სისტემა გადატანითად მოძრაობს, ე.ი. წარმტანი მოძრაობა გადატანითია. მაშინ მოძრავი $Oxyz$ სისტემის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}_\Phi = 0$. ე.ი. $\vec{w}_\Delta = 2(\vec{\omega}_\Phi \times \vec{v}_\Psi) = 0$.

ამიტომ $\vec{\Phi}_j = -m \vec{w}_j = 0$. წერტილის ფარდობითი მოძრაობის (3.13) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$m \vec{w}_j = \vec{F} + \vec{\Phi}_j$$

2) ვთქვათ, საფარდი (მოძრავი) საკოორდინატო სისტემა ასრულებს გადატანით, წრფივ და თანაბარ მოძრაობას. მაშინ $\vec{w}_j = 0$ და $\vec{\omega}_j = 0$. გვექნება $\vec{\Phi}_j = \vec{\Phi}_j = 0$. წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლება იქნება:

$$m \vec{w}_j = \vec{F}$$

მაშასადამე, თუ საფარდი სისტემა აბსოლუტური სისტემის მიმართ მოძრაობს თანაბრად და წრფივად გადატანითად, მაშინ ფარდობითი მოძრაობის კანონს აქვს ისეთივე სახე, როგორც აბსოლუტური მოძრაობის კანონს. ასეთი საფარდი სისტემა ცინერციულია. ამაში მდგომარეობს *გალილეის* მიერ აღმოჩენილი *კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი*.

3) ვთქვათ, M წერტილი უძრავია მოძრავი სისტემის მიმართ, ე.ი. წერტილი იმყოფება ფარდობით წონასწორობაში. მაშინ $\vec{v}_j = 0$, $\vec{w}_j = 0$; გვექნება $\vec{\Phi}_j = 0$ (რადგანაც $\vec{w}_j = 2\vec{\omega}_j \times \vec{v}_j = 0$). მოძრაობის (3.13) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{F} + \vec{\Phi}_j = 0.$$

ეს ტოლობა გამოსახავს *წერტილის ფარდობითი წონასწორობის პირობას*.

§ 3.4 დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა

დინამიკის ამოცანები დაიყვანებიან ორი სახის ამოცანაზე.

ა) პირველი ძირითადი ამოცანა:

მოცემულია ნივთიერი წერტილის მასა (m) და მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (4.1)$$

საჭიროა ვიპოვოთ $\vec{F}(X, Y, Z)$ ძალა, რომელიც იწვევს ამ მოძრაობას.

ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ მოძრაობის (3.2) დიფერენციალური განტოლებებით. გავაწარმოთ (4.1) ტოლობები დროით ორჯერ და ჩავსვათ (3.2) განტოლებებში; მივიღებთ:

$$X = m f_1''(t), \quad Y = m f_2''(t), \quad Z = m f_3''(t). \quad (4.2)$$

ამ ტოლობებით განისაზღვრებიან \vec{F} ძალის გეგმილები (X, Y, Z) , რომლებიც სრულად განსაზღვრავენ \vec{F} ძალის სიდიდეს და მიმართულებას:

$$|\vec{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$\cos(\vec{F}, \hat{x}) = X/|\vec{F}|, \quad \cos(\vec{F}, \hat{y}) = Y/|\vec{F}|, \quad \cos(\vec{F}, \hat{z}) = Z/|\vec{F}|$$

აშოცანა 1.1. $m=2$ კგ მასის ნივთიერი წერტილის მოძრაობის კანონი გამოისახება განტოლებებით: $x=3t^3-2t^2$ (სმ), $y=-4t^2+1$ (სმ), $z=5t+4$ (სმ),

სადაც t გამოსახულია წამებში.

განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი ძალის სიდიდე $t=1$ წმ მომენტში.

აშოცანა 1.2. წერტილზე მოქმედი \vec{F} ძალის გეგმილები განისაზღვრებიან (4.2) ფორმულებით.

აშოცანის პირობიდან გამომდინარე: $\ddot{x}=18t-4$, $\ddot{y}=-8$, $\ddot{z}=0$. ამიტომ, (4.2)-ის თანახმად ნებისმიერ t მომენტში: $X=2(18t-4)$, $Y=-16$, $Z=0$.

$t=1$ წმ მომენტში: $X=28$, $Y=-16$, $Z=0$.

\vec{F} ძალის სიდიდე იქნება: $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 2\sqrt{255} = 31,9$ ნ.

აშოცანა 1.2. ნივთიერი წერტილი მოძრაობს $R=8$ მ რადიუსის წრეწირზე, $s=2t^2$ მ კანონით (t - წამებში). განსაზღვრეთ ამ წერტილის მასა, თუ ცნობილია, რომ, როცა $s=2$ მ-ს, მასში წერტილზე მოქმედი ძალის სიდიდეა $F = \sqrt{5}$ ნ.

აშოცანა 1.3. წერტილი მოძრაობს წრეწირზე, ამიტომ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემა.

წერტილზე მოქმედი \vec{F} ძალის გეგმილები განისაზღვრებიან (3.4) ფორმულებით. წრეწირზე მოძრაობისას $v_\tau = v = \frac{ds}{dt} = 4t$;

ამიტომ გვექნება:

$$F_\tau = m \frac{dv}{dt} = 4m; \quad F_n = m \frac{v^2}{\rho} = 2mt^2; \quad F_b = 0.$$

\vec{F} ძალის სიდიდე დროის ნებისმიერ t მომენტისათვის:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}, \quad \text{ანუ} \quad F = \sqrt{16m^2 + 4m^2t^4}$$

;

(*)

პირობის თანახმად $s=2t^2$; ამიტომ, დროის ის მომენტი, როცა წერტილი გაივლის $s=2$ მ-ს, იქნება $2=2t^2$, ე.ი. $t=1$ წმ. დროის ამ მომენტისათვის $F = \sqrt{5}$.

(*) ტოლობიდან მივიღებთ ($t=1$ წმ, $F = \sqrt{5}$ ნ) :

$$\sqrt{5} = \sqrt{16m^2 + 4m^2} ; \quad \text{საიდანაც } m = 0,5 \text{ ნ.}$$

ამოცანა 1.3. უძრავი 0 ღერძის გარშემო მბრუნავ ბლოკზე დახვეული თოკის თავისუფალ ბოლოზე დაკიდებულია $P = 1,2$ კნ წონის ტვირთი, რომელიც მოძრაობს $w = g/2$ -ს ტოლი აჩქარებით. განსაზღვრეთ თოკის დაჭიმულობა, როცა ხდება ტვირთის აწევა.

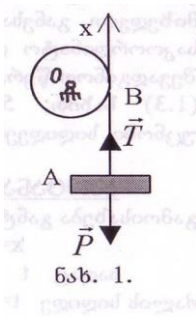
ამოხსნა. ტვირთზე მოქმედებს ორი ძალა: \vec{P} - ტვირთის სიმძიმის ძალა და \vec{T} - თოკის დაჭიმულობის ძალა. დინამიკის ძირითადი კანონის თანახმად ტვირთის მოძრაობის კანონი იქნება:

$$m \vec{w} = \vec{P} + \vec{T}.$$

(*)

მივმართოთ X ღერძი ტვირთის მოძრაობის მხარეს (ზემოთ) და დავაგვიმილოთ (*) ტოლობა ამ ღერძზე. მივიღებთ: $mw = -P+T$; აქედან $T = mw+P = P/g \cdot g/2 + P = 3P/2 = 1,8$ კნ.

დავალება: განსაზღვრეთ თოკის დაჭიმულობა, როცა ტვირთი მოძრაობს ქვევით. პასუხი: $T = 0,6$ კნ.



ბ) მეორე ძირითადი ამოცანა.

მოცემულია ნივთიერი წერტილის მასა (m) და წერტილზე მოქმედი ძალა $\vec{F}(X,Y,Z)$. საჭიროა ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები, ე. ი. x, y, z - როგორც დროის ფუნქციები.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად წერტილის მასისა და მოქმედი ძალის გარდა საჭიროა ვიცოდეთ აგრეთვე მოძრაობის საწყისი პირობები, ანუ მოძრაობის საწყის t_0 მომენტში წერტილის საწყისი $M_0(x_0, y_0, z_0)$ მდებარეობა და საწყისი $v_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ სიჩქარე. ეს საწყისი პირობები კოორდინატებში ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} \text{როცა } t=t_0, \quad & \text{მაშინ } x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \\ & x' = x'_0, \quad y' = y'_0, \quad z' = z'_0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, წერტილზე მოდებული ძალების ტოლქმედი საზოგადოდ დამოკიდებულია წერტილის მდებარეობაზე, მისი მოძრაობის სიჩქარეზე და დროზე

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

ამიტომ, კოორდინატა არჩეული სისტემის ღერძებზე ძალის გეგმილებიც ამავე ცვლადების ფუნქციები იქნებიან. ამის მიხედვით, თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის (3.2) დიფერენციალური განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X(t, x, y, z, x', y', z'), \\
 m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y(t, x, y, z, x', y', z'), \\
 m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z(t, x, y, z, x', y', z').
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები, საჭიროა გავანტეგროთ (4.4) განტოლებათა სისტემა, რომელიც წარმოადგენს მე-ნ რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. ამიტომ, ამ სისტემის ინტეგრებისას ზოგად ამოხსნაში შევაქვსი მუდმივი და მას ასეთი სახე ექნება:

$$\begin{aligned}
 x &= \varphi_1(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \\
 y &= \varphi_2(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \\
 z &= \varphi_3(t, c_1, c_2, \dots, c_6),
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

გავაწარმოთ ეს ტოლობები დროით. მივიღებთ წერტილის სიჩქარის გეგმილებს:

$$x' = \varphi_1', \quad y' = \varphi_2', \quad z' = \varphi_3', \tag{4.6}$$

ინტეგრების c_1, c_2, \dots, c_6 მუდმივების განსასაზღვრად (4.5) და (4.6) განტოლებათა სისტემაში გამოვიყენოთ მოძრაობის საწყისი (4.3) პირობები. როცა $t = t_0$, მივიღებთ ექვსი ალგებრული განტოლების სისტემას c_1, c_2, \dots, c_6 მუდმივების მიმართ. ამ სისტემის ამოხსნის შედეგად ნებისმიერი მუდმივები გამოისახებიან საწყისი პირობების საშუალებით; ამ მნიშვნელობების შეტანით (4.5) გამოსახულებებში საბოლოო ამოხსნა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}
 x &= \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'), \\
 y &= \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'), \\
 z &= \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0').
 \end{aligned}$$

ზოგადი სახით (4.4) განტოლებათა სისტემის ინტეგრება გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული, მაგრამ პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას უმეტეს შემთხვევაში წერტილზე მოქმედ ძალას აქვს შედარებით მარტივი სახე და აღნიშნული სისტემაც უფრო მარტივად ამოიხსნება.

ამოცანა 1.4. $m = 3\text{კგ}$ მასის ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს ძალა, რომლის ვეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე არიან: $X = 9t^2$ ნ, $Y = 12$ ნ, $Z = 0$. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ იგი გამოვიდა კოორდინატა სისტემის სათავიდან სიჩქარით, რომლის ვეგმილებია: $v_{ox} = 0$, $v_{oy} = 6$ მ/წმ, $v_{oz} = 5$ მ/წმ.

ამოხსნა: თანახმად (3.2) ფორმულებისა, წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები იქნებიან:

$$m \ddot{x} = 9t^2; \quad m \ddot{y} = 12; \quad m \ddot{z} = 0.$$

(ა)

მოძრაობის საწყისი პირობებია:

$$\text{როცა } t = t_0 = 0, \quad \text{მაშინ } x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

(ბ)

$$\dot{x}_0 = v_{ox} = 0, \quad \dot{y}_0 = v_{oy} = 6, \quad \dot{z}_0 = v_{oz} = 5.$$

ვანტეგრით (ა) ტოლობები; მივიღებთ:

$$m \dot{x} = 3t^3 + c_1; \quad m \dot{y} = 12t + c_2; \quad m \dot{z} = c_3.$$

(გ)

ეს ტოლობები კვლავ ვანტეგრით; მივიღებთ:

$$mx = 3/4 t^4 + c_1 t + c_4; \quad my = 6t^2 + c_2 t + c_5; \quad mz = c_3 t + c_6.$$

(დ)

(გ) და (დ) ტოლობებში გამოვიყენოთ მოძრაობის საწყისი (ბ) პირობები; როცა $t_0 = 0$, მივიღებთ:

$$mv_{ox} = c_1; \quad mv_{oy} = c_2; \quad mv_{oz} = c_3; \quad mx_0 = c_4; \quad my_0 = c_5; \quad mz_0 = c_6;$$

საიდანაც $c_1 = 0$, $c_2 = 18$, $c_3 = 15$, $c_4 = c_5 = c_6 = 0$.

ამ მნიშვნელობების (დ) ტოლობებში შეტანით მივიღებთ წერტილის მოძრაობის განტოლებებს ($m = 3$):

$$\underline{x = 1/4 \cdot t^4 \text{ მ};} \quad \underline{y = 2t^2 + 6t \text{ მ};} \quad \underline{z = 5t \text{ მ.}}$$

§ 3.5. ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობა

წერტილის წრფივი მოძრაობისას მამოძრავებელი ძალა, წერტილის სიჩქარე და აჩქარება მიმართულია ამ წრფის გასწვრივ.

ვთქვათ \vec{F} ძალის მოქმედებით m მასის ნივთიერი M წერტილი მოძრაობს Ox ღერძზე. წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \quad (5.1)$$

აქ $X = |\vec{F}|$. წრფივი მოძრაობის საწყისი პირობები იყოს:
 როცა $t = t_0$, მაშინ $x = x_0$, $v = v_0$.
 (5.2)

განვიხილოთ წერტილის წრფივი მოძრაობის კერძო შემთხვევები.

1. ძალა მუდმივია (სიდიდით და მიმართულებით):
 $X = \text{const} = C$.

მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = C \quad \text{ანუ} \quad m \frac{dv}{dt} = C.$$

გავაინტეგრროთ. მივიღებთ: $v = \frac{C}{m} \cdot t + C_1$. (5.3)

ინტეგრების C_1 მუდმივა განისაზღვრება მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = t_0$, მაშინ $v = v_0$ და (5.3) -დან

$$v_0 = \frac{C}{m} \cdot t_0 + C_1, \quad \text{საიდანაც} \quad C_1 = v_0 - \frac{C}{m} \cdot t_0.$$

შევიტანოთ C_1 -ის ეს მნიშვნელობა (5.3)-ში, მივიღებთ

$$v = \frac{C}{m} \cdot t + v_0 - \frac{C}{m} \cdot t_0$$

ანუ $\frac{dx}{dt} = \frac{C}{m} \cdot (t - t_0) + v_0$.

გავაინტეგრროთ ეს ტოლობა:

$$x = \frac{C}{2m} \cdot (t - t_0)^2 + v_0 t + C_2. \quad (5.4)$$

C_2 მუდმივა განისაზღვრება (5.2) საწყისი პირობებიდან: როცა

$t = t_0$, მაშინ $x = x_0$, ამიტომ (5.4) -დან $x_0 = v_0 t_0 + C_2$,
 საიდანაც $C_2 = x_0 - v_0 t_0$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (5.4)
 -ში, მივიღებთ:

$$x = \frac{C}{2m} \cdot (t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0. \quad (5.5)$$

(5.5) გვაძლევს მუდმივი ძალის მოქმედებით ნივთიერი
 წერტილის მოძრაობის განტოლებას.

2. ძალა დროის ფუნქციაა: $X = f(t)$

მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(t), \quad \text{ანუ} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} f(t)$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$v = \frac{1}{m} \int f(t) dt + C_1. \quad (5.6)$$

ვინაიდან $v = dx/dt$, ამიტომ (4.6) -ის ინტეგრებით
 მივიღებთ:

$$x = \frac{1}{m} \int \left[\int f(t) dt \right] dt + C_1 t + C_2. \quad (5.7)$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან (5.6) და
 (5.7) ტოლობებში საწყისი (5.2) პირობების გამოყენებით. (5.7)
 წარმოადგენს წერტილის მოძრაობის განტოლებას, როცა მოქმედი ძალა
 დროზეა დამოკიდებული

3. ძალა წერტილის მდებარეობის ფუნქციაა:
 $X = f(x)$

მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x), \quad \text{ანუ} \quad m \frac{dv}{dt} = f(x).$$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ dx -ზე:

$$m \frac{dv}{dt} \cdot dx = f(x) dx \quad \text{ანუ} \quad mv dv = f(x) dx.$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \int f(x) dx + C_1.$$

საიდანაც

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}[\int f(x)dx + C_1]} \quad , \quad \text{ანუ} \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[\int f(x)dx + C_1]} .$$

განვაცალთ ცვლადები და გავაინტეგრროთ. მივიღებთ:

$$\psi(x, C_1) = t + C_2 .$$

ეს ტოლობა წარმოადგენს წერტილის მოძრაობის განტოლებას, სადაც C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან (5.2) საწყისი პირობებით.

4. ძალა წერტილის სიჩქარის ფუნქციაა:
 $X=f(v)$

მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(v), \quad \text{ანუ} \quad m \frac{dv}{dt} = f(v). \quad (5.8)$$

განვაცალთ ცვლადები და გავაინტეგრროთ. მივიღებთ:

$$m \int \frac{dv}{f(v)} + C_1 = t .$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\varphi(v, C_1) = m \int \frac{dv}{f(v)} + C_1;$$

მივიღებთ:

$$(5.9) \quad \varphi(v, C_1) = t ;$$

ა) ვთქვათ ეს განტოლება ამოიხსნება v -ს მიმართ:

$$v = \psi(t, C_1), \quad \text{ანუ} \quad \frac{dx}{dt} = \psi(t, C_1) .$$

ამ ტოლობის ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$x = \int \psi(t, C_1) dt + C_2 .$$

ეს არის M წერტილის მოძრაობის განტოლება., C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან (5.2) საწყისი პირობებით.

ბ) იმ შემთხვევაში, როცა (5.9) განტოლება არ ამოიხსნება v -ს მიმართ, გავამრავლოთ (5.8) ტოლობის ორივე მხარე dx -ზე:

$$m \frac{dv}{dt} \cdot dx = f(v) dx, \quad \text{ანუ} \quad mvdv = f(v) dx .$$

განვაცალთ ცვლადები და გავაინტეგრროთ. მივიღებთ:

$$m \int \frac{v dv}{f(v)} = x + C_2, \quad \text{ანუ} \quad \Phi(v) = x + C_2.$$

(5.10)

აქ შემოღებულია აღნიშვნა:

$$\Phi(v) = m \int \frac{v dv}{f(v)}.$$

(5.9) და (5.10) განტოლებების ერთობლიობა

$$\varphi(v, C_1) = t;$$

$$\Phi(v) = x + C_2.$$

წარმოადგენს წერტილის მოძრაობის პარამეტრულ განტოლებას, პირამეტრით v . C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან (5.2) საწყისი პირობებით.

ამოცანა 1.5. $m = 0,1$ კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს სორიზონტალური წრფივი გზის გასწვრივ 5 მ/წმ სიჩქარით. დროის გარკვეული მომენტიდან დაიწყო წერტილზე წინაღობის მუდმივი \vec{F} ძალის მოქმედება. რას უდრის ეს ძალა, თუ ძალის მოქმედების დაწყების მომენტიდან წერტილი გაჩერდა 1 მ-ის გავლის შემდეგ.

ამოხსნა დროის განსახილველ შუალედში, ე.ი. \vec{F} ძალის მოდების მომენტიდან გაჩერებამდე, წერტილზე მოქმედებენ სიმძიმის \vec{P} , რეაქციის \vec{N} და წინაღობის \vec{F} ძალები. ნიუტონის მე-2

კანონის თანახმად გვექნება:

$$m \vec{w} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}.$$

x

მივმართოთ x ღერძი სორიზონტალური

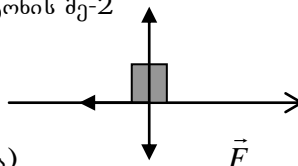
გზის გასწვრივ და დავაგვიგმილოთ (ა) ტოლობა

$$\vec{P}$$

ამ ღერძზე, მივიღებთ: $m \ddot{x} = -F$.

ნახ. 4

გავაინტეგრროთ ეს ტოლობა: $m \dot{x} = -Ft + c_1$. (ბ)



მოდრაობის საწყისი პირობებია: $t = t_0 = 0$, მაშინ $\dot{x}_0 = v_0 = 5 \text{ მ/წმ}$, $x_0 = 0$.

(გ) ამიტომ $t_0 = 0$ მომენტში (ბ)-დან გვექნება: $mv_0 = c_1$; (ბ)
ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$m \dot{x} = -Ft + mv_0.$$

(დ)

დავუშვათ წერტილი გაჩერდა τ წამის შემდეგ. ე.ი., როცა $t = \tau$,
მაშინ $\dot{x} = v = 0$. ამიტომ (დ)-დან მივიღებთ $0 = -F\tau + mv_0$, საიდანაც $\tau = mv_0 / F$ წმ.

(დ) ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ: $mx = -1/2 \cdot Ft^2 + mv_0 t + c_2$. (ე)

აქ c_2 განისაზღვრება მოძრაობის საწყისი (გ) პირობებიდან: როცა $t = t_0 = 0$, მაშინ $x = x_0 = 0$ და გვექნება $c_2 = 0$. ამ მნიშვნელობის (ე) -ში შეტანით მივიღებთ:

$$mx = -1/2 \cdot Ft^2 + mv_0 t.$$

(ვ)

τ წამში სხეულმა გაიარა $x = s = 1 \text{ მ}$ მანძილი და გაჩერდა; ამიტომ, როცა $t = \tau$, (ვ)-დან მივიღებთ: $ms = -1/2 \cdot F\tau^2 + mv_0 \tau$;

შევიტანოთ აქ τ -ს მნიშვნელობა: $ms = -1/2 \cdot F(mv_0 / F)^2 + mv_0 (mv_0 / F)$;

$$\text{აქედან } F = mv_0^2 / 2s = 1,25 \text{ ნ.} \quad \underline{F = 1,25 \text{ ნ.}}$$

ამოცანა 1.6. მოთხილამურე ეშვება სორიზონტისადმი $\alpha = 60^\circ$ კუთხით დახრილ $s = 100 \text{ მ}$ სიგრძის ფერდობზე. თხილამურების თოვლზე სრიალის სახუნის კოეფიციენტი $f = 0,1$. განსაზღვრეთ მოთხილამურის დაშვების დრო (τ) და სიჩქარე (v) ფერდობის ბოლოში, თუ დაშვების დასაწყისში სიჩქარე ნულის ტოლი იყო. საერის წინაღობა უგულებელყავით.

ამონსნა. კოორდინატთა მართკუთხა Oxy სისტემის სათავე მოვათავსოთ მოთხილამურის დაშვების საწყის O წერტილში და Ox ღერძი მივმართოთ ფერდობის გასწვრივ ქვევით.

მოდრაობის საწყისი პირობებია:

როცა $t = t_0 = 0$, მაშინ $x = x_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 = 0$. (ა)

მოთხილამურეზე მოქმედებს სიმძიმის $\vec{P} = m \vec{g}$ ძალა, ფერდობის რეაქციის ძალა \vec{N} და თოვლზე თხილამურების სრიალის ხახუნის ძალა \vec{F}_b , მიმართული მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

ნიუტონის მე-2 კანონის თანახმად:

$$m \vec{w} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_b .$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა $0x$ და $0y$ ღერძებზე:

$$m \ddot{x} = mg \sin \alpha - F_b , \quad (ბ)$$

(ვინაიდან მოთხილამურე მოძრაობს $0x$ ღერძის გასწვრივ, ამიტომ $w_y = \ddot{y} = 0$).

(ბ)-დან $N = mg \cos \alpha$; ხახუნის ძალა $F_b = fN = fmg \cos \alpha$. ვკექნება:

$$m \ddot{x} = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha ,$$

$$\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) .$$

ამ ტოლობის ორჯერ ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\dot{x} = gt(\sin \alpha - f \cos \alpha) + c_1 , \quad (გ)$$

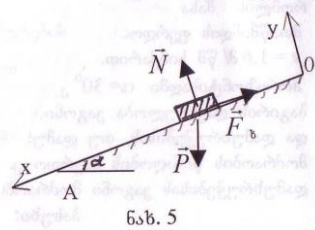
$$x = 1/2 gt^2(\sin \alpha - f \cos \alpha) + c_1 t + c_2 .$$

აქ ინტეგრების c_1 და c_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი (ა) პირობებით: როცა $t = t_0 = 0$, (გ)-დან მივიღებთ:

$$c_1 = \dot{x}_0 = 0, \quad c_2 = x_0 = 0. \quad (გ) \text{ ტოლობები ასე გადაიწერება}$$

$$\dot{x} = gt(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad (დ)$$

$$x = 1/2 gt^2(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$



ფერდობის გავლას მოთხილამურე ანდომებს τ წამს; ამიტომ, როცა $t=\tau$, მაშინ მოთხილამურე გაივლის $x = s$ მანძილს და ფერდობის ბოლოში სიჩქარე იქნება $\dot{x} = v_A$. (დ)-დან მივიღებთ:

$$v_A = g\tau (\text{Sin}\alpha - f \text{Cos}\alpha),$$

$$s = 1/2 g\tau^2(\text{Sin}\alpha - f \text{Cos}\alpha).$$

ამ განტოლებებში შევიტანოთ ამოცანის პირობით მოცემული ($s, f, \alpha, g=9,8 \text{ მ/წმ}^2$) სიდიდეების მნიშვნელობები და ამოვხსნათ მიღებული სისტემა. გვექნება:

$$\tau = 5 \text{ წმ}, \quad v_A = 40 \text{ მ/წმ}.$$

ამოცანა 1.7. $P=10$ ნ წონის სხეული მოძრაობს ცვლადი $F=10(1-t)$ ნ ძალის მოქმედებით (t - წმ-ში). რა τ დროის შემდეგ გაჩერდება სხეული, თუ საწყის მომენტში $v_0=20$ სმ/წმ და \vec{F} ძალა ემთხვევა სიჩქარის მიმართულებას. რა s მანძილს გაივლის სხეული გაჩერებამდე ?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად ძალის მიმართულება ემთხვევა სიჩქარის მიმართულებას ამ მიმართულებას. დავამთხვიოთ საკოორდინატო Ox ღერძი, სათავეთ O წერტილში. მოძრაობის საწყისი პირობებია:

$$t_0=0, \quad x_0=0, \quad \dot{x}_0 = v_0.$$

(ა)

მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$m \ddot{x} = 10 (1 - t).$$

ვინაიდან $m = P/g$, გვექნება: $\ddot{x} = g (1 - t)$. ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\dot{x} = -1/2 \cdot g (1 - t)^2 + c_1.$$

(ბ)

საწყისი (ა) პირობის თანახმად: როცა $t_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$; (ბ)-დან მივიღებთ:

$v_0 = -1/2 g + c_1$; აქედან: $c_1 = v_0 + 1/2 g$. შევიტანოთ (ბ)-ში:

$$\dot{x} = -1/2 g(1-t)^2 + v_0 + 1/2 \cdot g.$$

(ვ)

ეს ტოლობა გამოსახავს სხეულის სიჩქარეს დროის ნებისმიერ t მომენტში.

სხეული ჩერდება τ წამის შემდეგ, ე.ი. $t = \tau$ მომენტში $\dot{x} = v = 0$. (გ)-დან გვექნება:

$$0 = -1/2 g (1-\tau)^2 + v_0 + 1/2 \cdot g,$$

საიდანაც $\tau = 2,02$ წმ-ს; (აქ $g = 980$ სმ/წმ²).

განვლილი s მანძილის გამოსათვლელად ვაინტეგრირებთ (ვ) ტოლობას; მივიღებთ:

$$x = 1/6 \cdot g(1-t)^3 + (v_0 + 1/2 \cdot g)t + c_2.$$

(დ)

როცა $t = t_0 = 0$, მაშინ $x = x_0 = 0$; (დ)-დან გვექნება $c_2 = -1/6 \cdot g$; მაშასადამე:

$$x = 1/6 \cdot g(1-t)^3 + (v_0 + 1/2 \cdot g)t - 1/6 \cdot g.$$

(ე)

$t = \tau$ წამში სხეულმა გააიარა s მანძილი და გაჩერდა. ამიტომ (ე) -დან გვექნება $s = 1/6 \cdot g(1-\tau)^3 + (v_0 + 1/2 \cdot g) \tau - 1/6 \cdot g = 692$ სმ.

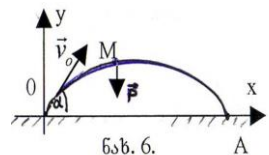
$$s = 692 \text{ სმ.}$$

ამოცანა 1. 8. 0 წერტილიდან ზორიზონტისადმი α კუთხით და v_0 საწყისი სიჩქარით გატყორცნილია m მასის ნივთიერი წერტილი.

განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია, ტრაექტორიის სიმაღლე (H), ტყორცნის სიშორე (ℓ), ფრენის დრო (τ). საერის წინალობის ძალა უგულებელყავით.

ამოხსნა. წერტილის მოძრაობისას მასზე მოქმედებს მხოლოდ ერთი ძალა – მისი სიმძიმის \vec{P} ძალა. ვინაიდან საწყისი \vec{v}_0 სიჩქარე და \vec{P} ძალა მდებარეობენ ვერტიკალურ სიბრტყეში, ამიტომ წერტილის მოძრაობაც ამ სიბრტყეში ხდება.

გამოვიყვანოთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები.



ნახ. 6.

კოორდინატა Oxy სისტემის სათავედ ავირჩიოთ გატყორცნის O წერტილი და x ღერძი მივმართოთ სორიზონტის გასწვრივ, y ღერძი მივმართოთ მის ვერტიკალურად. წერტილის მოძრაობის საწყისი პირობებია: როცა $t = t_0 = 0$, მაშინ:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = V_x = V_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}_0 = V_y = V_0 \sin \alpha \quad (\text{ა})$$

წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს გეგმილებში ასეთი სახე აქვთ:

$$m \ddot{x} = 0, \quad m \ddot{y} = -P. \quad \text{ვინაიდან } P = mg, \text{ გვექნება: } \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = -g.$$

ამ ტოლობების ინტეგრებით მივიღებთ: $\dot{x} = c_1, \quad \dot{y} = -gt + c_2.$

(ბ)

ინტეგრების c_1 და c_2 მუდმივები განისაზღვრებიან საწყისი (ა) პირობებით: როცა $t_0 = 0$, გვექნება: $V_0 \cos \alpha = c_1, \quad V_0 \sin \alpha = c_2.$

(ბ) ასე ჩაიწერება: $\dot{x} = V_0 \cos \alpha;$

$$\dot{y} = -gt + V_0 \sin \alpha.$$

(გ)

ვინტეგრით ეს ტოლობები; მივიღებთ:

$$x = V_0 t \cos \alpha + c_3;$$

(დ)

$$y = -1/2 \cdot gt^2 + V_0 t \sin \alpha + c_4.$$

(ა) საწყისი პირობებიდან, როცა $t = t_0 = 0$, (დ)-დან $x_0 = c_3 = 0, y_0 = c_4 = 0;$ მაშასადამე (დ) ასე ჩაიწერება $x = V_0 t \cos \alpha;$

(ე)

$$y = -1/2 \cdot gt^2 + V_0 t \sin \alpha.$$

ეს ტოლობები წარმოადგენენ წერტილის მოძრაობის განტოლებებს.

წერტილის ტრაექტორიის დასადგენად მოძრაობის (ე) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დროის t პარამეტრი; მივიღებთ:

$$y = - (g / 2V_0^2 \cos^2 \alpha) x^2 + x \operatorname{tg} \alpha.$$

(ვ)

ტრაექტორია არის პარაბოლა.

დავუშვათ წერტილის სორიზონტალური ტყორცნის სიშორეა $OA = \ell$ მანძილი და მოძრაობს τ წამის განმავლობაში.

A მდებარეობაში: $t = \tau$, $x = \ell$, $y = 0$; ამიტომ (ე)-დან მივიღებთ:

$$\ell = V_0 \tau \cos \alpha;$$

$$0 = -1/2 \cdot g \tau^2 + V_0 \tau \sin \alpha .$$

აქედან მოძრაობის დრო $\tau = 2V_0 / g \cdot \sin \alpha$, ხოლო წერტილის სორიზონტალური ტყორცნის სიშორე $\ell = V_0^2 / g \cdot \sin 2\alpha$,

ფრენის სიმაღლის განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიპოვოთ (ვ) ტოლობით მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმი; $v_{\max} =$

$$H = V_0^2 \sin^2 \alpha / 2g.$$

წერტილის წრფივი რხევები

რხევებს დიდი მნიშვნელობა აქვთ ტექნიკის მრავალი დარგისათვის.

მიუხედავად იმისა, რომ რხევების ბუნება ფიზიკურად მრავალსახაა, მათ მაინც ახასიათებთ გარკვეული საერთო კანონზომიერებანი, რომელთა შესწავლა და კვლევის მეთოდის შემუშავება არის რხევათა თეორიის ძირითადი საკითხი.

რხევათა თეორია იყოფა წრფივ და არაწრფივ თეორიად

რხევებს ეწოდებათ წრფივი თუ რხევითი მოძრაობა აღიწერება წრფივი დიფერენციალური განტოლებით.

3.6. წერტილის ჯარმონიული რხევა.

განვიხილოთ m მასის ნივთიერი M წერტილის წრფივი მოძრაობა Ox ღერძის გასწვრივ ისეთი \vec{F} ძალის მოქმედებით, რომელიც უძრავი O ცენტრისკენაა მიმართული და სიდიდით ამ ცენტრიდან M წერტილის დაშორების $OM = x$ მანძილის პირდაპირ პროპორციულია

$$|\vec{F}| = cx.$$

$$0 \quad \vec{F} \quad M$$

x



\vec{F} ძალა ცდილობს M წერტილი დააბრუნოს წონასწორობის 0 მდგომარეობაში და მის გეგმილს Ox ღერძზე ყოველთვის აქვს 0 ცენტრიდან M წერტილის გადახრის საწინააღმდეგო ნიშანი $F_x = X = -c x$.

ასეთ \vec{F} ძალას ეწოდება დრეკადი აღმდგენი ძალა.

0 წერტილს ეწოდება სტატიკური წონასწორობის მდებარეობა, ხოლო c -ს სიხისტის ანუ პროპორციულობის (დრეკადობის) კოეფიციენტი.

თუ \vec{F} ძალა იზომება კილოგრამებში, ხოლო OM მანძილი სანტიმეტრებში, მაშინ c გამოისახება კგ/სმ –ში.

ნივთიერი წერტილის მოძრაობას დრეკადი აღმდგენი ძალის მოქმედები ეწოდება თ ა ვ ი ს უ ფ ა ლ ი ანუ ჰარმონიული ოსილატორი. მას ხშირად უწოდებენ საკუთრივ რხევას.

M წერტილის თავისუფალი რხევის (წინააღმდეგობის გარეშე) დიფერენციალური განტოლება ასეთია:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c x,$$

ანუ
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0, \quad \text{სადაც} \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

(6.1)

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაა:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad \text{ანუ} \quad x = a \sin(kt + \alpha).$$

(6.2)

აქ $C_1 = a \sin \alpha$ და $C_2 = a \cos \alpha$. C_1 და C_2 ანუ a და α მუდმივები განისაზღვრებიან რხევის (მოძრაობის) საწყისი პირობებით:

როცა $t = t_0 = 0$, მაშინ $x = x_0$, $V = \frac{dx}{dt} = V_0$.

(6.3)

ამ პირობების მიხედვით (6.2)–დან მივიღებთ:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{V_0}{k}$$

ამ მნიშვნელობების (6.2)-ში შეტანით მივიღებთ ჰარმონიული რხევის განტოლებას:

$$\mathbf{x} = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \cdot \sin kt ;$$

(6.4)

ან ჰარმონიული რხევის განტოლებას სასრული სახით;

$$\mathbf{x} = a \sin(kt + \alpha).$$

(6.5)

ეს გვიჩვენებს, რომ დრეკადი ძალის მოქმედებით წერტილი ასრულებს ჰარმონიულ რხევით მოძრაობას.

a – რხევის ამპლიტუდაა – M წერტილის მაქსიმალური გადახრა სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}.$$

(6.6)

$(kt + \alpha)$ – რხევის ფაზაა; α – რხევის საწყისი ფაზა: $\operatorname{tg} \alpha$

$$= \frac{kx_0}{v_0};$$

k -ს ეწოდება რხევის ციკლური ან კუთხური სიხშირე; $k = \frac{2\pi}{T}$.

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad \text{-- რხევის პერიოდი - დრო, რომელიც}$$

საჭიროა ერთი სრული რხევისათვის.

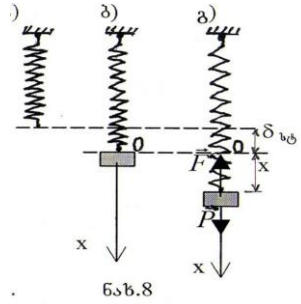
$$v = \frac{1}{T} \quad \text{ანუ } v = \frac{k}{2\pi} \quad \text{- რხევის სიხშირეა - რხევათა}$$

რიცხვი ერთ წამში.

როგორც განსაზღვრიდან ჩანს a და α მუდმივები დამოკიდებულნი არიან რხევის საწყის პირობებზე, ხოლო რხევის სიხშირე და პერიოდი არ არიან დამოკიდებულნი რხევის საწყის პირობებზე და განისაზღვრებიან მხოლოდ სისტემის ინერციული და დრეკადი თვისებებით; ისინი წარმოადგენენ მოცემული რხევის უცვლელ მახასიათებლებს.

რხევის პერიოდის დამოუკიდებლობას საწყისი პირობებისაგან ეწოდება *იზოქრონობა*, ხოლო რხევას ასეთი პერიოდით – *იზოქრონული*.

ამოცანა 2.1. ვერტიკალური ზამბარის ზედა ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული, ხოლო ქვედა ბოლოზე დაკიდებული P წონის ტვირთის მოქმედებით ზამბარის სტატიკური დეფორმაცია $\delta_{სტ} = 10$ სმ. ტვირთი გადასწიეს სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან $x_0 = 15$ სმ მანძილზე და მიანიჭეს ვერტიკალურად ქვევით მიმართული სიჩქარე $V_0 = 99$ სმ/წმ. შეადგინეთ ტვირთის რხევის განტოლება, თუ Ox ღერძი მიმართულია სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ქვევით.



ამოხსნა. გამოვხაზოთ ვერტიკალურად დაკიდებული ზამბარის სამი პოზიცია: ა) ზამბარას საწყისი არადეფორმირებული მდგომარეობა.

ბ) ზამბარის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობა-ზამბარის ბოლოზე P წონის ტვირთის დაკიდების შედეგად ზამბარამ განიცადა დეფორმაცია და დაგრძელდა $\delta_{სტ}$ მანძილით. $P = c \delta_{სტ}$ სადაც c - ზამბარის დრეკადობის კოეფიციენტი.

გ) ზამბარისა და მასზე დაკიდებული ტვირთის მდგომარეობა ტვირთის მოძრაობის მიმდინარე მდებარეობაში, როდესაც იგი გადაწეულია სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან x მანძილზე.

კოორდინატა სისტემის სათავე მოვათავსოთ ტვირთის დაკიდვის O წერტილში, როდესაც ტვირთი იმყოფება სტატიკურ წონასწორობაში. Ox ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

ტვირთზე მოქმედებს ორი ძალა: ტვირთის P წონა, მიმართული ქვევით და ზამბარის დრეკადობის \vec{F} ძალა, მიმართული ზევით. რადგანაც ზამბარა მთლიანად დაგრძელდა $(x + \delta_{სტ})$ მანძილზე, ამიტომ $F = c(x + \delta_{სტ})$.

ტვირთის მოძრაობის საწყისი პირობებია:

$$\text{როცა } t = t_0 = 0, \quad \text{მაშინ } x = x_0, \quad V = \dot{x}_0 = V_0.$$

(ა)

ტვირთი მოძრაობს გადატანითად, ამიტომ იგი შეიძლება ჩავთვალოთ ნივთიერ წერტილად. ტვირთის მოძრაობის განტოლება ვექტორული სახით ასეთია:

$$m \vec{w} = \vec{P} + \vec{F}.$$

ამ ტოლობის x ღერძზე დაგეგმილებით მივიღებთ: $m \ddot{x} = P - F$, ანუ $m \ddot{x} = c\delta_{სტ} - c(x + \delta_{სტ})$; აქედან, ტვირთის თავისუფალი რხევის დიფერენციალური განტოლება ასეთია: $m \ddot{x} = -cx$, ანუ

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad \text{სადაც} \quad k^2 = c / m.$$

(ბ)

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას (ა) საწყისი პირობებით ასეთი სახე აქვს (იხ. 6.4 ფორმულა): $x = x_0 \text{Cos}kt + V_0 / k \cdot \text{Sin}kt$;

ამოცანის პირობის თანახმად:

$$k = \sqrt{c / m} = \sqrt{g / \delta_{სტ}} = \sqrt{980 / 10} = 9,9;$$

$$V_0 / k = 10.$$

რხევის განტოლება იქნება: $x = (15 \text{Cos}9,9t + 10 \text{Sin}9,9t)$ სმ.

ამოცანა 2.2. P წონის ტვირთი დაკიდებულია ერთმანეთთან მიმდევრობით შეერთებული სხვადასხვა c_1 და c_2 სიხისტის კოეფიციენტებიანი ორმაგი ზამბარის ბოლოზე (იხ. ნახ. 9 ა).

განსაზღვრეთ ამ ორმაგი ზამბარის ეკვივალენტური ზამბარის სიხისტის c კოეფიციენტი და P ტვირთის ვერტიკალური რხევის სიხშირე. ზამბარების წონა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა. ვთქვათ P ტვირთის მოქმედებით c_1 სიხისტის ზამბარამ მიიღო δ_1 , ხოლო c_2 სიხისტის ზამბარამ δ_2 სტატიკური დაგრძელება.

ზამბარების წონა

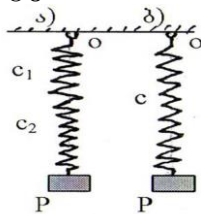
უგულებელყოფილია,

ამიტომ $\delta_1 = P / c_1$ და $\delta_2 = P / c_2$.

ამ ორმაგი ზამბარის ეკვივალენტური c სიხისტის ზამბარას სტატიკური დეფორმაცია იქნება $\delta = \delta_1 + \delta_2$, სადაც $\delta = P / c$. მივიღებთ $P / c = P / c_1 + P / c_2$. აქედან $c = c_1 c_2 / (c_1 + c_2)$.

P ტვირთის რხევის პერიოდია: $T = 2\pi \sqrt{m / c} = 2\pi \sqrt{(c_1 + c_2) P / g c_1 c_2}$;

რხევის სიხშირე: $v = 1 / T = 1 / 2\pi \sqrt{g c_1 c_2 / (c_1 + c_2) P}$.



ნახ. 9.

ამოცანა 2.3. $P = 10$ ნ წონის ტვირთი საწყისი სიჩქარის გარეშე ვარდება $h = 9$ სმ სიმაღლიდან და ეცემა ვერტიკალურ ზამბარაზე მიმაგრებულ ხორიზონტალურ ფირფიტაზე. ზამბარის ქვედა ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული და მისი სიხისტის კოეფიციენტია $c = 5$ ნ/სმ. განსაზღვრეთ ტვირთის შემდგომი მოძრაობის კანონი თუ ფირფიტისა და ზამბარის მასა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა. ტვირთი ფირფიტაზე დაცემის შემდეგ

იწყებს რხევით მოძრაობას. რხევის საწყისი სიჩქარე

იქნება ტვირთის სიჩქარე ფირფიტაზე დაცემის მომენტში.

h სიმაღლიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე

თავისუფლად ვარდნილი სხეულის სიჩქარე დაცემის

B წერტილში გამოითვლება ფორმულით:

$$V_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 980 \cdot 9} = 42\sqrt{10} \text{ სმ/წმ.}$$

რხევა წარმოებს \vec{P} ძალის მოქმედებით. ზამბარის სტატიკური გადაადგილება $\delta_{სტ} = P/c = 2$ სმ.

კოორდინატა სისტემის სათავე მოვათავსოთ ტვირთის სტატიკური წონასწორობის 0 წერტილში და მივმართოთ 0x ღერძი ქვევით. რხევის საწყისი პირობებია:

როცა $t = t_0 = 0$, მაშინ $x_0 = -\delta_{სტ} = -2$ სმ; $V_0 = V_B = 42\sqrt{10}$ სმ/წმ.

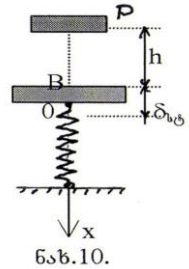
რხევის კუთხური სიხშირე

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{cg/P} = 7\sqrt{10}; \quad V_0/k = 6.$$

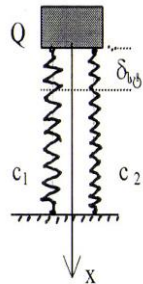
(6.4) ფორმულის თანახმად რხევის კანონი ასეთ სახეს იღებს:

$$x = (-2\sqrt{10} \cos 7\sqrt{10}t + 6 \sin 7\sqrt{10}t) \text{ სმ.}$$

ამოცანა 2.4. არადეფორმირებული დრეკადი AB ღეროს A ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული, ხოლო



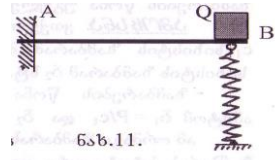
ნახ.10.



ნახ.12

B ბოლო მიმაგრებულია ზამბარაზე, რომლის კოეფიციენტი $c_1 = 6 \text{ ნ/სმ}$. ღეროს B ბოლოზე ათავსებენ $Q = 30 \text{ ნ}$ წონის ტვირთს და უშვებენ საწყისი სიჩქარის გარეშე.

სიხისტის



ცნობილია, რომ $P=12 \text{ ნ}$ ტვირთის

სტატიკური მოქმედებისას ღეროს B ბოლო ზამბარის გარეშე დაიწვეს $s = 1 \text{ სმ-ზე}$.

განსაზღვრეთ ზამბარის მაქსიმალური შეკუმშვა და ტვირთის რხევის პერიოდი. ღეროს და ზამბარის წონა უგულებელყავით.

ამოხსნა. დრეკადი AB ღერო შეკვცალოთ B წერტილში

დამაგრებული მეორე ზამბარით, რომლის სიხისტის კოეფიციენტი c_2 . ამოცანის პირობის თანახმად $P = c_2 s$, საიდანაც $c_2 = P/s = 12 \text{ ნ/სმ}$. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ტვირთი ეყრდნობა ერთი და იმავე სივრცის ორ პარალელურად ჩართულ c_1 და c_2 სიხისტის კოეფიციენტებთან ზამბარას (იხ. ნახ. 12). ეს ორმაგი ზამბარა შეკვცალოთ მათი ეკვივალენტური ერთი ზამბარით, რომლის სიხისტის კოეფიციენტი c .

$c -$ ს განსაზღვრისათვის განვიხილოთ Q ტვირთის

სტატიკური წონასწორობის პირობა. მხედველობაში

მივიღოთ, რომ Q ტვირთის მოქმედებით ორივე ზამბარა

და მაშასადამე მათი ეკვივალენტური ზამბარაც შეიკუმშება ერთი და იგივე x მანძილით ($x=x_1=x_2$). ამასთანავე, ორმაგ ზამბარებში წარმოიქმნება დრეკადი აღმდგენი Q_1 და Q_2 ძალები, რომელთა სიდიდეების ჯამი ეკვივალენტური c სიხისტის ზამბარაში Q ტვირთით გამოწვეული დრეკადი აღმდგენი ძალის ტოლია. ცხადია:

$$Q = c x; \quad Q_1 = c_1 x; \quad Q_2 = c_2 x. \quad Q = Q_1 + Q_2.$$

მაშასადამე $c x = c_1 x + c_2 x$, საიდანაც $c = c_1 + c_2 \text{ ნ/სმ}$.

Q ტვირთის სტატიკური გადაადგილება

$$\delta_{\text{სტ}} = x = Q/c = 5/3 \text{ სმ}.$$

კოორდინატა სისტემის სათავე მოვთავსოთ ზამბარის სტატიკური წონასწორობის O წერტილში და x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

c სიხისტის (ეკვივალენტური) ზამბარის რხევის საწყისი პირობებია

$$t = t_0 = 0, \quad x_0 = -\delta_{\text{სტ}} = -5/3, \quad V_0 = 0.$$

რხევის კუთხური სიხშირე

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{c \cdot g/Q} = \sqrt{18 \cdot 980/30} = 24,25.$$

ტვირთის რხევის განტოლება ასეთია .

$$x = -5/3 \cos 24,25t \quad \text{სმ.}$$

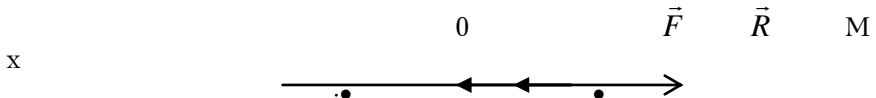
აქედან: $x_{\text{max}} = 5/3$ სმ. რხევის პერიოდი: $T = 2\pi / k = 0,259$ წმ.

3.7. წირტილის მილევალი რხევა

მილევალი რხევა ეწოდება m მასის ნივთიერი M წერტილის მოძრაობას Ox ღერძის გასწვრივ თუ მასზე მოქმედებს დრეკადი აღმდგენი ძალა $F = cx$ და განიცდის გარემოს წინაღობას \vec{R} ძალით, რომელიც წერტილის მოძრაობის სიჩქარის წრფივი ფუნქციაა და მიმართულია მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

$$R = \mu V \quad (V = \frac{dx}{dt}, \quad \mu - \text{გარემოს წინაღობის$$

კოეფიციენტი).



მილევალი რხევის დიფერენციალური განტოლება ასეთია:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt},$$

ანუ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + k^2x = 0,$$

(7.1)

სადაც

$$k^2 = \frac{c}{m}; \quad 2b = \frac{\mu}{m}.$$

(7.2).

რხევის საწყისი პირობები: როცა $t = t_0 = 0$, მაშინ $x = x_0$,

$$V = \frac{dx}{dt} = V_0. \quad (7.3)$$

შეიძლება განვიხილოთ მოძრაობის სამი შემთხვევა.

1) $b < k$ – გარემოს წინაღობა დრეკად აღმდგენ ძალასთან შედარებით მცირეა. ამ შემთხვევაში ნივთიერი წერტილი ასრულებს მიღევად რხევას და მოძრაობის (7.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს - მიღვეადი რხევის განტოლებას, (7.3) პირობების გათვალისწინებით, აქვს შემდეგი სახე:

$$x = e^{-bt} \left[x_0 \operatorname{Cos} kt + \frac{v_0 + bx_0}{k_1} \operatorname{Sin} kt \right].$$

(7.4)

ანუ ასეთი სახე: $x = a e^{-bt} \operatorname{Sin} (kt + \alpha)$,

(7.5)

a სიდიდე დადებითია, ხოლო კუთხე α მოთავსებულია $[0; 2\pi]$ შუალედში.

რხევის ამპლიტუდა $A = a e^{-bt}$ არ არის მუდმივი სიდიდე და t დროის ზრდასთან ერთად მცირდება; ამიტომ რხევას მიღვეადი ეწოდება.

აქ $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$, $(b < k)$; $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + bx_0)^2}{k_1^2}}$;

(7.6)

რხევის საწყისი ფაზა არის α , სადაც $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 x_0}{v_0 + bx_0}$;

მიღვეადი რხევა არ არის ზუსტად პერიოდული, მაგრამ $T_1 = \frac{2\pi}{k_1}$ სიდიდეს მაინც რხევის პერიოდს უწოდებენ.

თუ მიღვეადი რხევის პერიოდს შევადარებთ ჰარმონიული რხევის პერიოდს

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}} \quad \text{და} \quad T = \frac{2\pi}{k},$$

აღმოჩნდება, რომ $T_1 > T$, ე.ი. მიღებული რხევის პერიოდი მეტია ჰარმონიული რხევის პერიოდზე.

დროის მომენტები, რომლებშიც წერტილი იღებს მაქსიმალურ გადახრას კოორდინატა სათავიდან (წონასწორობის მდგომარეობიდან), შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას $\frac{1}{2} T_1$ სხვაობით. მიღებული რხევის ამპლიტუდა იცვლება კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წესით, რომლის მნიშვნელია $\lambda = e^{-\frac{1}{2} b T_1}$. λ -ს მიღებული რხევის *დეკრემენტი* ეწოდება.:

$$\text{სიდიდეს } d = \ln \lambda = -\frac{1}{2} b T_1 = -\frac{b \pi}{k_1} \text{ - რხევის ლოგარითმული}$$

დეკრემენტი ეწოდება; ეს არის ორი თანამიმდევრული ამპლიტუდის ფარდობის ლოგარითმი.

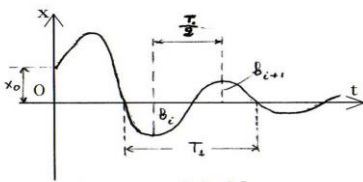
მიღებული რხევის გრაფიკი მოცემულია ნახ. 15 -ზე.

2) $b > k$ - გარემოს წინაღობა დიდია. მოძრაობის (7.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს ასეთი სახე აქვს:

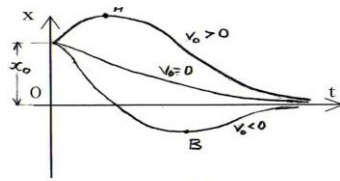
$$x = e^{-bt} (C_1 e^{\sqrt{b^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2 - k^2}t}).$$

აქ C_1 და C_2 - ინტეგრების მუდმივებია.

წერტილი ასრულებს აპერიოდულ მიღვევად რხევას: როცა $t \rightarrow \infty$, მაშინ $x \rightarrow 0$.



ნახ. 15.



ნახ. 16.

3) $b = k$ - “ზღვრული“ შემთხვევა. მოძრაობის (7.1) განტოლების ამონახსნს აქვს ასეთი სახე: $x = e^{-bt} (c_1 + c_2 t)$.

ამ შემთხვევაში წერტილი ასრულებს აპერიოდულ მიღვევად რხევას.

როგორც 2) , ასევე 3) შემთხვევაში მოძრაობის ხასიათი დამოკიდებულია საწყის პირობებზე. საწყის V_0 სიჩქარეზე დამოკიდებულებით მოძრაობის გრაფიკს აქვს ნახ. 16-ზე გამოსახული სახე; სამივე შემთხვევაში ($V_0 > 0$, $V_0 = 0$, $V_0 < 0$) მოძრაობა მალე ქრება.

აშოცანა 3.1. $P = 4,9$ კგ წონის სხეული

ჩამოკიდებულია ერთი ბოლოთი უძრავად ჩამაგრებულ ზამბარაზე, რომლის სტატიკური დაგრძელება ($\delta_{სტ}$) ამ სხეულის წონის მოქმედებით უდრის 1 სმ-ს. ტვირთის მოძრაობისას გარემოს წინაღობის ძალა მისი V სიჩქარის პროპორციულია და $V = 1$ მ/წმ სიჩქარის დროს უდრის 0,1 კგ-ს. განსაზღვრეთ ტვირთის მოძრაობის კანონი, თუ დასაწყისში ზამბარა გაჭიმული იყო $2\delta_{სტ}$ მანძილზე და ტვირთი მიშვებული იყო ნებაზე.

აშოსნა სხეული მოძრაობს გადატანითად და შეგვიძლია იგი ჩავთვალოთ ნივთიერ M წერტილად. გამოვსახოთ წერტილის მიმდინარე მდებარეობა და მასზე მოქმედი ძალები: \vec{P} -

ტვირთის წონა, \vec{F} - ზამბარის დრეკადობის ძალა, \vec{R} - საერის წინაღობის ძალა.

კოორდინატთა სისტემის სათავედ ავირჩიოთ ტვირთის (M წერტილის) სტატიკური წონასწორობის 0 მდებარეობაში და x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

AB - არადეფორმირებული ზამბარის სიგრძეა. $BO = \delta_{სტ}$ - ზამბარას სტატიკური

დაგრძელება. $OM = x$ - ტვირთის მიმდინარე მდებარეობა. M წერტილის მოძრაობის განტოლებას ნებისმიერ მდებარეობაში ასეთი სახე აქვს:

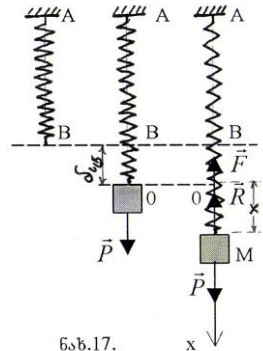
$$m \vec{w} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} .$$

დავაგეგმილოთ x ღერძზე:

$$m \ddot{x} = P_x + F_x + R_x ,$$

სადაც $P_x = P$; $F_x = - c \cdot BM = - c (x + \delta_{სტ})$;

$$R_x = - \mu V_x = - \mu \dot{x} .$$



ნახ.17.

გვექნება: $m \ddot{x} = P - c(x + \delta_{\text{სტ}}) - \mu \dot{x}$.

(ა)

ვინაიდან სტატიკური წონასწორობის (0) მდებარეობაში $P = c\delta_{\text{სტ}}$, ამიტომ (ა) ასეთ სახეს მიიღებს: $m \ddot{x} = -cx - \mu \dot{x}$.

ეს არის ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ასე ჩავეწერთ: $\ddot{x} + 2b \dot{x} + k^2x = 0$,

(ბ)

სადაც $b = \mu/2m$; $k^2 = c/m$.

(ბ) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით მივიღებთ

$$x = e^{-bt} [x_0 \text{Cos}kt + (V_0 + bx_0) / k_1 \cdot \text{Sin}kt].$$

(გ)

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$, ($b < k$).

განვსაზღვროთ (გ) ტოლობაში შემაჯავლი სიდიდეები.

ამოცანის პირობის თანახმად $\delta_{\text{სტ}} = 1$ სმ. წინაღობის ძალა $R = \mu V$ და როცა $V = 1$ მ/წმ $= 100$ სმ/წმ, მაშინ $R = 0,1$ კგ.
ამიტომ

$$\mu = R / V = 0,1 / 100 = 0,001 \text{კგ წმ} / \text{სმ};$$

$$b = \mu / 2m = \mu g / 2P = 0,001 \cdot 980 / 9,8 = 0,1;$$

$$k_1 = \sqrt{c / m - b^2} = \sqrt{4,9 \cdot 980 / 4,9 - 0,01} = 31,3.$$

საწყისი პირობების თანახმად: როცა $t_0 = 0$, მაშინ $x_0 = \delta_{\text{სტ}} = 1$, $V_0 = 0$; ამიტომ

$$(V_0 + bx_0) / k_1 = 0,1 / 31,3 = 0,32.$$

მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (გ) განტოლებაში, მივიღებთ M ტვირთის მოძრაობის კანონს:

$$x = e^{-0,1t} (\text{Cos}31,3t + 0,32 \text{Sin}31,3t) \text{ სმ.}$$

ამოცანა 3.2. $P = 4,9$ ნ წონის, $r = 6$ სმ რადიუსის და $h = 8$ სმ სიმაღლის ცილინდრი ჩამოკიდებულია A ბოლოთი უძრავად ჩამაგრებული AB ზამბარის თავისუფალ B ბოლოზე. ზამბარის დრეკადობის კოეფიციენტია $c = 46$ /სმ.

ცილინდრი ჩაშვებულია სითხეში და სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში ჩაყვინთულია თავისი სიმაღლის ნახევარზე.

ცილინდრი გამოიყვანეს სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან, ჩაძირეს თავისი სიმაღლის $2/3$ ნაწილზე და გაუშვეს საწყისი სიჩქარის გარეშე. განსაზღვრეთ ცილინდრის ვერტიკალური მოძრაობის კანონი, თუ მასზე მოქმედებს სითხის წინაღობის ძალა (R), რომელიც ცილინდრის მოძრაობის სიჩქარის პროპორციულია, ე.ი. $R = \mu V$; ($\mu = 0,02$).

განსაზღვრეთ პირობა, როდესაც ცილინდრის მოძრაობა იქნება რხევითი.

ამოხსნა. ცილინდრი ასრულებს

ვერტიკალურ გადატანით მოძრაობას; მივიღოთ იგი ნივთიერ წერტილად. სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში (ნახ. 18. ა) ცილინდრზე მოქმედებს ცილინდრის P წონა, რომელიც გაწონასწორებულია ზამბარის დრეკადი აღმდგენი ძალით $F = c\delta_{\text{სტ}}$ (აქ $\delta_{\text{სტ}} = h/2 -$ ზამბარის სტატიკური დაგრძელება) და სითხეში ჩაშვებული სხეულის ამომგდები არქიმედის ძალით $P_s = \pi r^2 \gamma / 2$ (აქ γ - სითხის კუთრი წონაა), ე.ი. $P = F + P_s$,

$$\text{ანუ} \quad P = c\delta_{\text{სტ}} + \pi r^2 \gamma / 2$$

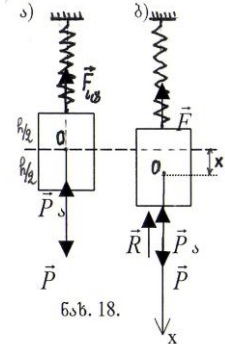
ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა სათავით ცილინდრის O ცენტრში სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში და X ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

განვიხილოთ დროის რაიმე t მომენტი, როდესაც ცილინდრი გადაადგილდება ქვევით X მანძილზე. ამ მდებარეობაში ცილინდრზე მოქმედებს: სიმძიმის \vec{P} ძალა, ზამბარის დრეკადობის ძალა $F = c(X + \delta_{\text{სტ}})$, არქიმედეს ამომგდები ძალა $P_s = \pi r^2 \gamma (h/2 + X)$ და სითხის წინაღობის ძალა $\vec{R} = \mu \vec{v}$. ცილინდრის მოძრაობის განტოლება ვექტორული სახით ასეთია:

$$m \vec{w} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{P}_s + \vec{R}.$$

დავაგვემილოთ ეს ტოლობა X ღერძზე; მივიღებთ სითხეში ჩაშვებული ცილინდრის რხევის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$m \ddot{x} = P_x - F_x - P_s - R_x,$$



$$P/g \cdot \ddot{x} = c\delta_{\text{სტ}} + \pi r^2 h \gamma / 2 - c(x + \delta_{\text{სტ}}) - \pi r^2 \gamma$$

$$(h/2 + x) - \mu \dot{x};$$

ეს განტოლება ასე გადავწერთ:

$$\ddot{x} + 2b \dot{x} + k^2 x = 0,$$

(ბ)

$$b = \mu g / 2P; \quad k^2 = g(c + \pi r^2 \gamma) / P.$$

(გ)

დავადგინოთ პირობა, როდესაც ცილინდრის მოძრაობა იქნება რხევითი; ამისათვის უნდა შესრულდეს პირობა: $b < k$, ანუ $b^2 - k^2 < 0$. გვექნება:

$$(\mu g / 2P)^2 - g(c + \pi r^2 \gamma) / P < 0.$$

ამ პირობის შესრულებისას ცილინდრი შეასრულებს მიღვევად რხევას და მისი განტოლება იქნება (იხ. (7.1) განტოლების (7.5) ამონახსნი):

$$x = a e^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

რხევის საწყისი პირობებია: როცა $t_0 = 0$, მაშინ $x_0 = h/6$;
 $V_0 = \dot{x}_0 = 0$.

ამ პირობების და (7.6) ფორმულების გამოყენებით განისაზღვრებიან a , b , k_1 და α სიდიდეები.

ამოცანა 3.3. ნივთიერი წერტილის მიღვევადაი რხევა წარმოებს $0x$ ღერძის გასწვრივ. რხევის პერიოდი $T_1 = \pi/2$, ხოლო ლოგარითმული დეკრემენტი $d = \pi/10$. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ საწყის $t_0 = 0$ მომენტში $x_0 = 3$ სმ, $V_0 = 0$.

ამონხნა. მიღვევადაი რხევის პერიოდი $T_1 = 2\pi / k_1$; ამოცანის პირობის თანახმად $2\pi / k_1 = \pi/2$; აქედან $k_1 = 4$. მიღვევადაი რხევის ლოგარითმული დეკრემენტი $d = bT_1 / 2$; მაშასადამე $bT_1 / 2 = \pi/10$ და $b = 0,4$. მიღვევადაი რხევის განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$x = e^{-bt} (x_0 \cos k_1 t + (V_0 + bx_0) / k_1 \cdot \sin k_1 t).$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები და გავითვალისწინოთ საწყისი პირობები; მივიღებთ:

$$x = 3e^{-0,4t} (\cos 4t + 0,1$$

$\sin 4t)$ სმ.

3. 8. ზერტილის იძულებითი რხევა

ნივთიერი M წერტილის წრფივ მოძრაობას, როდესაც წერტილზე დრეკადი აღმდგენი ძალისა და გარემოს წინააღობის ძალის გარდა მოქმედებს რაიმე გარეშე შემაშფოთებელი პერიოდულად ცვალებადი ძალა, ეწოდება *იძულებითი რხევა*.

შემაშფოთებელი ძალა წარმოადგენს დროის მოცემულ ფუნქციას ჩვენ განვიხილავთ მარტივ, მაგრამ პრაქტიკულად საკმაოდ მნიშვნელოვან შემთხვევას, როცა შემაშფოთებელი ძალა იცვლება ჰარმონიული კანონით.

განვიხილოთ m მასის ნივთიერი M წერტილის წრფივი მოძრაობა Ox ღერძის გასწვრივ, როდესაც წერტილზე დრეკადი აღმდგენი $F = cx$ ძალისა და გარემოს წინააღობის $R = \mu v$ ძალის გარდა მოქმედებს რაიმე გარეშე შემაშფოთებელი პერიოდულად ცვალებადი $Q = mh \sin pt$ ძალა,

თუ მოძრაობა ხდება Ox ღერძის გასწვრივ, მაშინ Q არის შემაშფოთებელი ძალის გეგმილი ამ ღერძზე; p - შემაშფოთებელი ძალის სიხშირეა, mh - შემაშფოთებელი ძალის უდიდესი მნიშვნელობა.

M წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ასეთია:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt} + mh \sin pt, \quad (8.1a)$$

ანუ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + k^2 x = h \sin pt; \quad (8.1)$$

ეს არის წერტილის იძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლება წინააღობის მქონე გარემოში

სადაც $b = \frac{\mu}{2m}$; $k^2 = \frac{c}{m}$.

(8.2)

1) გარემოს მცირე წინაღობის შემთხვევაში, როცა $k > b$,
 (8.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ანუ
 იძულებითი რხევის განტოლება იქნება:

$$x = A e^{-nt} \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} \sin(pt + \beta).$$

(8.3)

სადაც β - იძულებითი რხევის საწყისი ფაზაა,

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{2bp}{k^2 - p^2}$$

(8.4)

(3) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები

$$x_1 = a e^{-bt} \operatorname{Sin}(kt + \alpha)$$

წარმოადგენს მილეკად რხევას $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$ სიხშირით, რომელიც დროის ზრდასთან ერთად მცირდება, ხოლო მეორე შესაკრები

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} \cdot \operatorname{Sin}(pt + \beta)$$

(8.5)

განსაზღვრავს წერტილის რხევას შემაშფოთებელი ძალის გავლენით; მას იძულებითი რხევა ეწოდება.

a და α განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებით.

იძულებითი რხევის ამპლიტუდაა

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}.$$

(8.6)

2) თუ არ არსებობს გარემოს მცირე წინაღობა, $R = 0$ და, მაშასადამე

$b = 0$. ამ შემთხვევაში იძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლება

ღებულობს შემდეგ სახეს (იხ. (1)):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = h \sin pt, \quad (8.7)$$

როცა $k \neq p$, მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება (იხ. (8.3))

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt. \quad (8.8)$$

აქ $x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt$ - იძულებითი რხევის კანონია, ხოლო

იძულებითი რხევის ამპლიტუდა $A = \frac{h}{k^2 - p^2}$

(8.9)

თუ შემაშფოთებელი ძალა თანდათანობით ზრდის სიხშირეს, მაშინ კრიტიკულ მომენტში, როცა $p = k$, იძულებითი რხევის ამპლიტუდა ხდება უსასრულოდ დიდი ($A \rightarrow \infty$). ამ მოვლენას **რეზონანსი** ეწოდება. რეზონანსის შემთხვევაში (8.7) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ასე წარმოიდგინება:

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{ht}{2k} \cos kt. \quad (8.10)$$

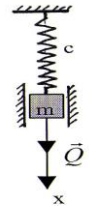
მაშასადამე, რეზონანსის შემთხვევაში იძულებითი რხევის ამპლიტუდა $A = -\frac{ht}{2k}$ დროის ფუნქციაა და t დროის ზრდასთან ერთად უსასრულოდ იზრდება.

იძულებითი რხევა, კერძოდ რეზონანსი, დიდ როლს თამაშობს ფიზიკისა და ტექნიკის მრავალ დარგში. მაგალითად, მანქანებისა და

ძრავების მუშაობისას ჩვეულებრივ წარმოიქმნებიან პერიოდული ძალები, რომლებიც იწვევენ მანქანის ნაწილების ან ფუნდამენტის რხევას. ხშირ შემთხვევაში რეზონანსის მოვლენა არასასურველია და ცდილობენ სხვადასხვა ხერხით მის თავიდან აცილებას, რადგან იგი იწვევს მანქანის დაშლას ან ნაგებობის ნგრევას. ამისათვის საკმარისია რხევის შემაშფოთებელი ძალის სისშირე ისე შეირჩეს, რომ ყოველთვის p ნაკლები იყოს k -ზე.

ზოგ შემთხვევაში რეზონანსი სასურველი მოვლენაა და ხდება მისი პრაქტიკული გამოყენება; მაგალითად რადიოტექნიკაში, სადაც მას იყენებენ ერთი რადიოსადგურის სიგნალის განსასხვავებლად ყველა დანარჩენი სიგნალისაგან.

ამოცანა 4.1. $c=16$ კნ/მ სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთი განიცდის შემაშფოთებელი $Q=32\sin 10t$ ნ ძალის მოქმედებას. წინაღობა უგულებელყავით და დაადგინეთ ტვირთის იძულებითი რეზონანსული რხევის კანონი.



ნახ.19.

ამოხსნა. გარემოს წინაღობა უგულებელყოფილია ($R=0$), ამიტომ ტვირთის რხევის დიფერენციალური განტოლება იქნება (იხ.(8.1) ფორმულა): $m\ddot{x} + cx = 32\sin 10t$.

თუ ამ განტოლებას შევადარებთ იძულებითი რხევის (8.7) დიფერენციალურ განტოლებას, მაშინ

$$k^2 = c/m, \quad h = 32/m, \quad p = 10; \quad c=16000 \text{ ნ/მ}.$$

რადგანაც რხევა რეზონანსულია, ამიტომ

$$P = k = 10. \quad \text{მაშასადამე } m = c/k^2 = 16000/100 \text{ ნ/მ} = 160\text{გ};$$

$$h = 32/m = 0,2.$$

როდესაც არ არსებობს გარემოს წინაღობა, მაშინ იძულებითი რეზონანსული რხევის განტოლებას აქვს (8.10) სახე:

$$x = -ht/2k \text{ Cos}kt .$$

$$\text{ამპლიტუდა } A = ht / 2k = 0,2 \text{ t} / 20 = 0,01 \text{ t} .$$

ტვირთის რეზონანსული რხევის კანონი იქნება:

$$\underline{x} = -0,01t \text{ Cos}10t, \quad \text{ანუ } \underline{x} = 0,01t \text{ Sin}(10t - \pi/2).$$

ამოცანა 4.2. $G = 400$ გ წონის M ტვირთი დაკიდებულია ზამბარაზე, რომლის ზედა ბოლო ასრულებს ვერტიკალურ სარმონიულ რხევას $a = 2$ სმ ამპლიტუდით და $p = 7$ წმ⁻¹ სიხშირით.

განსაზღვრეთ M ტვირთის იძულებითი რხევის განტოლება, თუ ზამბარა $F_1 = 40$ გ ძალის მოქმედებით გადაადგილდება $x_1 = 1$ სმ მანძილზე.

ამოხსნა. ზამბარას ზედა D ბოლო ასრულებს სარმონიულ რხევას კანონით: $x_D = a \sin pt = 2 \sin 7t$. (ა)

ვთქვათ არადეფორმირებული ზამბარის სიგრძეა l_0 , ხოლო მისი სიხისტეა c : $c = F_1 / x_1 = 40 \text{ გ} / 1 \text{ სმ} = 40 \text{ გ} / \text{სმ}$.

ღროის ნებისმიერ t მომენტში DB ზამბარა გაჭიმულია $(x_D + x + \delta_{სტ})$ სმ მანძილით, სადაც $\delta_{სტ}$ არის ზამბარის სტატიკური დაგრძელება G ტვირთის მოქმედებით ($G = c\delta_{სტ}$), ხოლო $x = BM$ არის M ტვირთის მიმდინარე გადაადგილება.

ზამბარის დაჭიმულობის ძალა $F_{გრ} = c(x_D + x + \delta_{სტ})$.

ღროის ნებისმიერ მომენტში ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ასეთია:

$$m\ddot{x} = G - F_{გრ}, \quad \text{ანუ} \quad m\ddot{x} = G - c(x_D + x + \delta_{სტ}). \quad (\text{ბ})$$

ვინაიდან $G = c\delta_{სტ}$, ეს ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin 7t,$$

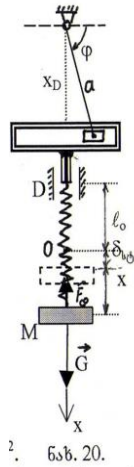
(გ)

სადაც $k^2 = c/m = cg/G = 40 \cdot 980 / 400 = 98$; $h = 2 k^2$.

(გ) არის ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, საიდანაც ჩანს, რომ ზამბარის ზედა D ბოლოს მოძრაობა გამოწვეულია შემაშფოთებელი $2 k^2 \sin 7t$ ძალის მოქმედებით. (გ) განტოლების ზოგადი ამონახსნა იქნება (იხ. (8.8) ფორმულა):

$$x = a_1 \sin (kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt.$$

აქედან, ტვირთის იძულებითი რხევის კანონი ასეთია:



$$x_M = \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \text{Sin}pt.$$

აქ $p = 7$, ხოლო რხევის ამპლიტუდა $A = \frac{h}{k^2 - p^2} = 4$.

M ტვირთის იძულებითი რხევის განტოლება იქნება: $x = 4 \text{ Sin}7t$.

აღოცანა 4.3. $c = 0,5$ ნ/სმ სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარას ზედა ბოლო მიმაგრებულია მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის B ცოციაზე, ხოლო ქვედა ბოლოზე დაკიდებულია $G=1,5$ ნ წონის M სხეული. $OA=AB=3$ სმ. OA მრუდმხარა ბრუნავს 0 ღერძის გარშემო $\omega = 4\pi$ წმ⁻¹ კუთხური სიჩქარით; ამასთანავე, M სხეული ასრულებს რხევით მოძრაობას გარემოში, რომლის წინაღობის ძალა (\bar{R}) სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია და უდრის 0,02 ნ-ს, როცა სიჩქარე $V = 1$ სმ/წმ.

განსაზღვრეთ M სხეულის იძულებითი რხევის კანონი, თუ 0,x ღერძი გავლებულია M სხეულის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ვერტიკალურად ქვევით, როცა OA მრუდმხარა სორიზონტალურია.

აღმსნა. M სხეული ასრულებს იძულებით რხევას წინაღობის მქონე გარემოში. რხევის განტოლება ზოგადი სახით მოცემულია (8.3) ფორმულით. გარემოს წინაღობის ძალა $R = \mu V$, საიდანაც წინაღობის კოეფიციენტი $\mu = R/V = 0,02$;

$$b = \mu / 2m = \mu g / 2G = 0,02 \cdot 980 / 2 \cdot 1,5 = 6,53.$$

OA მრუდმხარა ბრუნავს $\varphi = \omega t = 4\pi t$ კანონით, ხოლო B ცოცია მოძრაობს კანონით:

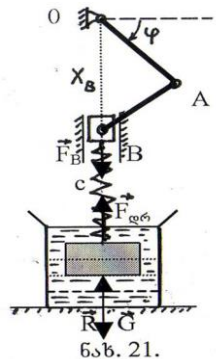
$$x_B = 0B = 2 \cdot OA \cdot \text{Sin}\varphi = 6 \cdot \text{Sin}4\pi t$$

ზამბარის B ბოლოზე მოქმედებს შემაშვოთებელი ძალა

$$F_B = cx_B = 0,5 \cdot 6 \text{Sin}4\pi t = 3 \text{Sin}4\pi t ;$$

ე.ი. $H = 3$; $p = 4\pi$; $h = H/m = 3g/G = 1960$.

ამასთანავე $k^2 = c/m = cg/G = 326,6$



β - რხევის საწყისი ფაზაა. (84)-ის თანახმად

$$\operatorname{tg}\beta = 2bp / (k^2 - b^2) = 0,9709; \quad \beta = 44^{\circ}10';$$

რადიანებში: $\beta = 0,771$.

წინალობის მქონე გარემოში M სხეულის იძულებითი რხევის განტოლება ასეთია (იხ. (8.5) ფორმულა):

$$x = h / \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2} \cdot \operatorname{Sin}(pt + \beta), \quad \text{ანუ } \underline{x = 8,32} \\ \underline{\operatorname{Sin}(4\pi t + 0,771)} \text{ სმ.}$$

სისტემის დინამიკა

§ 3.9. უმსავალი. პირითაღი ცნებები

პრაქტიკაში ხშირია შემთხვევა, როცა ერთი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა დამოკიდებულია სხვა წერტილების ან სხეულების მოძრაობაზე. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა არა ცალკეული. იზოლირებული წერტილის მოძრაობის შესწავლა, არამედ წერტილთა ერთობლიობის, წერტილთა სისტემის მოძრაობის შესწავლა.

ნივთიერ წერტილთა სისტემა ანუ მ ე ქ ა ნ ი კ უ რ ი ს ი ს ტ ე მ ე ა ეწოდება მათ ისეთ ერთობლიობას, რომელშიც თითოეული წერტილის მდებარეობა ან მოძრაობა დამოკიდებულია ამ სისტემის დანარჩენი წერტილების მდებარეობაზე ან მოძრაობაზე.

სისტემის წერტილებზე მოქმედ ძალებს ყოფენ შიგა და გარე ძალებად.

შ ი გ ა ძ ა ლ ე ბ ი ეწოდებათ იმ ძალებს, რომლებიც წარმოშობილი არიან სისტემაში შემავალი წერტილების ურთიერთმოქმედებით.

თუ სხეული წარმოდგენილი მცირე ნაწილებად დანაწევრებული სახით, მაშინ ნივთიერი სხეულის ნაწილებს შორის ურთიერთქმედების ძალებს - შიგა ძალებს - ძალვა ეწოდებათ.

გ ა რ ე ძ ა ლ ე ბ ი ეწოდებათ იმ ძალებს, რომლებიც გამოწვეულია სისტემაში შემავალი და სისტემის გარეშე მყოფი წერტილების (სხეულების) ურთიერთმოქმედებით.

ვთქვათ $Oxyz$ სივრცეში მოცემულია n ნივთიერი წერტილისაგან შემდგარი სისტემა M_1, M_2, \dots, M_n ანუ მოკლედ $\{M_k(x_k, y_k, z_k)\}$, $k=1, 2, \dots, n$. სისტემის ყოველი M_k წერტილის მდებარეობა O სათავის მიმართ განისაზღვრება $\vec{r}_k(x_k, y_k, z_k)$ რადიუს-ვექტორით. M_k წერტილზე მოქმედი შიგა და გარე ძალებისათვის შესაბამისად შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\vec{F}_k^{(a)}(X_k^{(a)}, Y_k^{(a)}, Z_k^{(a)}) \quad \text{და} \quad \vec{F}_k^{(b)}(X_k^{(b)}, Y_k^{(b)}, Z_k^{(b)}).$$

ნივთიერ წერტილთა სისტემის შიგა ძალებს აქვთ მნიშვნელოვანი თვისებები: ა) სისტემის შიგა ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(a)} = 0; \quad (9.1)$$

ბ) სისტემის შიგა ძალების ნაკრები მომენტი სივრცის ნებისმიერი წერტილის (ან ღერძის) მიმართ ნულის ტოლია

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{F}_k^{(a)} = 0, \quad \text{ანუ} \quad \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(a)}) = 0. \quad (9.2)$$

საჭიროა აღინიშნოს, რომ ნივთიერ წერტილთა სისტემის შიგა ძალების ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის ნულთან ტოლობა არ ნიშნავს, რომ ეს ძალები გაწონასწორებულია, ვინაიდან ეს ძალები მოდებულნი არიან სხვადასხვა ნივთიერ წერტილებზე, რომელთაც შეუძლიათ ერთმანეთის მიმართ გადაადგილება.

შიგა ძალები გაწონასწორებულნი არიან მხოლოდ აბსოლუტურად მყარ სხეულში.

მექანიკური სისტემის მასა ეწოდება სისტემაში შემავალი წერტილების მასების არითმეტიკულ ჯამს:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k$$

აქ m_k აღნიშნავს M_k წერტილის მასას.

სისტემის მასების ცენტრი ანუ ინერციის ცენტრი ეწოდება გეომეტრიულ $C(X_c, Y_c, Z_c)$ წერტილს, რომლის მდებარეობა განისაზღვრება რადიუს-ვექტორით

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k. \quad (9.3)$$

გვეგილებში:

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (9.4)$$

ერთგვაროვანი მყარი სხეულისათვის მასების ცენტრის და სიმძიმის ცენტრის მდებარეობები ერთმანეთს ემთხვევიან.

მ ა ს ე ბ ი ს ბ ე ო მ ე ტ რ ი ა

§ 3.10. ინერციის მომენტის ცნება

ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობა, გარდა მოქმედი ძალებისა დამოკიდებულია აგრეთვე მასში მასების განაწილებაზე; მასების განაწილების შეცვლით იცვლება სისტემის ინერციულობის მახასიათებელიც. სისტემის ბრუნვითი მოძრაობისას ინერციულობის მახასიათებლები განისაზღვრებიან ამ სისტემის ინერციის მომენტებით.

მექანიკური სისტემის ინერციის მომენტი რაიმე ცენტრის (ღერძის ან სიბრტყის) მიმართ არის სიდიდე, რომელიც ტოლია სისტემაში შემავალი წერტილების მასებისა და ადებულ ცენტრამდე (ღერძამდე ან სიბრტყემდე) მათი მანძილების კვადრატების ნამრავლთა ჯამისა. აღინიშნება ასოთი J , შესაბამისი ინდექსით.

ვთქვათ $Oxyz$ სივრცეში მოძრაობს n ნივთიერი წერტილის სისტემა $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

სისტემის ინერციის მომენტი 0 ცენტრის მიმართ ეწოდება გამოსახულებას

$$J_0 = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2. \quad (10.1)$$

r_k არის მანძილი M_k წერტილიდან 0 ცენტრამდე.

კოორდინატებში: $J_0 = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2).$ (10.2)

სისტემის ინერციის მომენტი Δ ღერძის მიმართ ეწოდება გამოსახულებას:

$$J_0 = \sum_{k=1}^n m_k \rho_k^2.$$

ρ_k არის მანძილი M_k წერტილიდან Δ ღერძამდის.

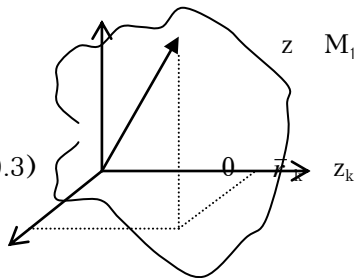
საკოორდინატო ღერძების მიმართ ინერციის მომენტები იქნებიან:

M_k

$$J_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2),$$

M_n x

$$J_y = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2), \quad (10.3)$$



$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) . \quad y \quad x_k$$

y_k

საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ ინერციის მომენტები განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$J_{xoy} = \sum_{k=1}^n m_k z_k^2, \quad J_{xoz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2, \quad J_{yoz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2,$$

(10.4)

განმარტებიდან ჩანს, რომ სისტემის ინერციის მომენტები ცენტრის, ღერძის ან სიბრტყის მიმართ დადებითი სიდიდეებია და ნულისაგან განსხვავდებიან. ნულის ტოლნი მხოლოდ იმ შემთხვევაში არიან, როცა სისტემის ყველა წერტილი განლაგებულია იმ ღერძზე, ან იმ სიბრტყეში, რომლის მიმართაც გამოითვლება ინერციის მომენტი.

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემისათვის ზემოგანხილულ ინერციის მომენტებს შორის არსებობს შემდეგი მარტივი დამოკიდებულებანი:

$$J_x + J_y + J_z = 2J_0; \quad J_{xoy} + J_{xoz} + J_{yoz} = J_0$$

$$J_{xoy} + J_{xoz} = J_x, \quad J_{xoy} + J_{yoz} = J_y, \quad J_{xoz} + J_{yoz} = J_z .$$

თუ ნივთიერ წერტილთა სისტემა მოთავსებულია ერთ სიბრტყეში, მაგალითად Oxy სიბრტყეში, მაშინ ასეთი სისტემის ინერციის მომენტი კოორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ, აგრეთვე საკოორდინატო (x და y) ღერძების მიმართ შესაბამისად გამოითვლება ფორმულებით:

$$J_0 = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) , \quad J_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2, \quad J_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2,$$

$$J_0 = J_x + J_y .$$

(10.5)

გარდა ზემოაღნიშნული ინერციის მომენტებისა, შემოვიღოთ ცენტრიდანული ინერციის მომენტების ცნება, რომლებიც განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k , \quad J_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k , \quad J_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k .$$

(10.6)

ცენტრიდანული ინერციის მომენტები სიმეტრიულნი არიან თავიანთი ინდექსების მიმართ; მათ შეიძლება აქონდეთ ნებისმიერი ნიშანი ან ნულს გაუტოლდნენ.

თუ რომელიმე ღერძის აღმნიშვნელი ინდექსის მქონე ორივე ცენტრიდანული ინერციის მომენტი ნულის ტოლია, მაშინ ამ ღერძს ეწოდება სისტემის ინერციის მთავარი ღერძი ან ალეზულ წერტილში. მაგალითად, თუ $J_{xy} = J_{xz} = 0$, მაშინ x ღერძი ინერციის მთავარი ღერძია. თუ ამასთანავე, ინერციის მთავარი ღერძი გადის სისტემის მასების ცენტრში, მაშინ ასეთ ღერძს ეწოდება ინერციის მთავარი ცენტრალური ღერძი.

თუ $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$, მაშინ კოორდინატთა სისტემის თითოეული ღერძი წარმოადგენს სხეულის ინერციის მთავარ ღერძს კოორდინატთა 0 სათავის მიმართ.. ინერციის მთავარი ღერძების მიმართ სხეულის ინერციის მომენტებს ეწოდებათ სხეულის მთავარი ინერციის მომენტები.

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ თუ სხეულს გააჩნია სიმეტრიის ღერძი, მაშინ ეს ღერძი წარმოადგენს სხეულის ინერციის მთავარ ღერძს თავისი ნებისმიერი წერტილის მიმართ..

რომელიმე ცენტრის (ან ღერძის) მიმართ ინერციის მომენტთან ერთად იხილავენ მნიშვნელოვან ცნებას – ნივთიერ წერტილთა სისტემის ინერციის რადიუსს.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის (სხეულის) ინერციის რადიუსი დადებითი სიდიდეა და გამოითვლება ფორმულით

$$r = \sqrt{\frac{J}{M}}, \quad (10.7)$$

სადაც M – მთელი სისტემის (სხეულის) მასაა, J – სისტემის ინერციის მომენტმ მოცემული ცენტრის (ან ღერძის) მიმართ. ვიცით რა ინერციის რადიუსი, შეიძლება განისაზღვროს სისტემის ინერციის მომენტი და პირიქით.

მყარი (უწყვეტი) სხეულის შემთხვევაში შეგვიძლია ეს სხეული დავეთვოთ მასის ელემენტარულ ნაწილაკებად. მაშინ, თუ (10.1) – (10.6) ფორმულებში ნივთიერ წერტილთა მასებს შევცვლით ელემენტარული ნაწილაკების მასებით და გადავალთ ზღვარზე, როცა დაყოფათა რიცხვი $n \rightarrow \infty$, მაშინ ამ ტოლობების მარჯვენა მხარეში მდგომი ჯამები ზღვარში გარდაიქმნებიან ინტეგრალებად და მივიღებთ:

$$J_0 = \int_M r^2 dm, \quad J_0 = \int_M (x^2 + y^2 + z^2) dm. \quad (10.8)$$

$$J_x = \int_M (y^2 + z^2) dm, \quad J_y = \int_M (x^2 + z^2) dm, \quad J_z = \int_M (x^2 + y^2) dm,$$

$$J_{xoy} = \int_M z^2 dm, \quad J_{xoz} = \int_M y^2 dm,$$

$$J_{yoz} = \int_M x^2 dm.$$

აქ ინტეგრალი აღებულია მთელი სხეულის მასაზე.

შე ნ ი შ ვ ნ ა: 1) თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $dm = \rho dv$, სადაც ρ - სხეულის ნაწილაკის სიმკვრივეა, ხოლო dv - მისი მოცულობა, მაშინ (10.8) ფორმულა შეიძლება ისე ჩაიწეროს, რომ ინტეგრალი აღებული იქნება მთელი სხეულის მოცულობაზე; მაგალითად:

$$J = \int_v \rho r^2 dv ; \quad J_0 = \int_v \rho (x^2 + y^2 + z^2) dv .$$

(10.9)

2) მატრიცს, რომლის ელემენტებს წარმოადგენენ საკოორდინატო ღერძების მიმართ ინერციის მომენტები (J_x, J_y, J_z) და ცენტრიდანული ინერციის მომენტები მოპირდაპირე ნიშნებით ($-J_{yz}, -J_{zx}, -J_{xy}$), ეწოდება ინერციის ტენზორი მოცემულ წერტილში:

$$J = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} .$$

(10.10)

რადგანაც ცენტრიდანული (შერეული) ინერციის მომენტები სიმეტრიული სიდიდეებია, ამიტომ ამ ტენზორს აქვს ექვსი ელემენტი. ეს ტენზორი ახასიათებს სხეულის მასების განაწილებას მოცემულ წერტილში.

ახლა, გამოყვანის გარეშე მოვიყვანოთ ფორმულა, რომლითაც გამოისახება მყარი სხეულის ინერციის მომენტი კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამავალი ნებისმიერი Δ ღერძის მიმართ.

მივიღოთ 0 წერტილი კოორდინატთა OXYZ სისტემის სათავედ და ვთქვათ მოცემული Δ ღერძი საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს შესაბამისად α, β, γ კუთხეებს. მაშინ Δ ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტი გამოისახება ფორმულით:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma .$$

(10.11)

თუ საკოორდინატო ღერძები თავისი სათავის მიმართ წარმოადგენენ ინერციის მთავარ ღერძებს, მაშინ $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$ და (6.11) ტოლობა მიიღებს მარტივ სახეს:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (10.12)$$

§ 3.11. კიუზენს - შტაინერის თეორემა

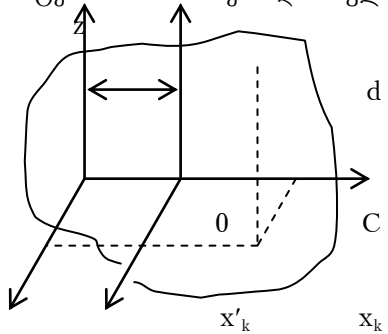
მოცემული სხეულის ინერციის მომენტები სხვადასხვა ღერძის მიმართ სხვადასხვაა. არსებობს მარტივი კავშირი სხეულის ინერციის მომენტებს შორის იმ პარალელური ღერძების მიმართ, რომელთაგან ერთ-ერთი გადის სხეულის მასების ცენტრში.

ვთქვათ, მოცემულია ნივთიერ წერტილთა სისტემა მასების ცენტრით C წერტილში და ორი ურთიერთპარალელური Z და Z' ღერძი, რომელთაგან Z გადის მასების C ცენტრში. გამოვვალთ სხეულის ინერციის მომენტი Z' ღერძის მიმართ.

ავირჩიოთ კოორდინატთა $Cxyz$ სისტემა ისე, რომ Cx ღერძმა გადაკვეთოს Z' ღერძი რომელიმე O წერტილში. ღერძებს შორის მანძილი იყოს $OC = d$. ავიღოთ კოორდინატთა ახალი $Ox'y'z'$ სისტემა ისე, რომ Ox' ღერძი დაემთხვეს Cx ღერძს. მაშინ $Oy' \parallel Cy$. M_k წერტილის კოორდინატები ზემოაღნიშნულ

საკოორდინატო Z' სისტემებში შესაბამისად იყოს $M_k(x_k, y_k, z_k)$ და $M_k(x'_k, y'_k, z'_k)$.

მოცემულ ნივთიერ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტები CZ და OZ' ღერძების მიმართ შესაბამისად $J_z(x')$



იქნება:

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

$$y_k = y'_k$$

$$J_{z'} = \sum_{k=1}^n m_k (x'_k{}^2 + y'_k{}^2).$$

ვინაიდან აგების თანახმად $x'_k = x_k + d$, $y'_k = y_k$, $z'_k = z_k$, გვექნება:

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k(x_k+d)^2 + y_k'^2 = \sum_{k=1}^n m_k(x_k^2 + y_k^2) + d^2 \sum_{k=1}^n m_k + 2d \sum_{k=1}^n m_k x_k$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარეში პირველი შესაკრები J_z -ის ტოლია, მეორე შესაკრებში ჯამი გამოსახავს სისტემის M მასას; მესამე შესაკრების გამოსათვლელად გავიხსენოთ მასების ცენტრის კოორდინატების (9.4) ფორმულა და შევნიშნოთ, რომ ჩვენ შემთხვევაში მასების C ცენტრი წარმოადგენს კოორდინატთა სისტემის სათავეს, ამიტომ $x_c = 0$ და მაშასადამე, მესამე შესაკრები ნულის ტოლია

$$2d \sum_{k=1}^n m_k x_k = 2d \cdot M x_c = 0.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$\underline{J_z = J_z + Md^2.} \quad (11.1)$$

ამ ტოლობით გამოსახულია ს ი უ გ ე ნ ს – შ ტ ა ი ნ ე რ ი ს

თეორემა: ნივთიერ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ ტოლია ამ ღერძის პარალელური და მასების C ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ ინერციის მომენტს დაბატებული სისტემის მასისა და ამ ღერძებს შორის მანძილის კვადრატის ნამრავლი.

(11.1) ტოლობიდან ჩანს, რომ სხეულის (წერტილთა სისტემის) ინერციის მომენტს მინიმალური მნიშვნელობა აქვს მასების ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ ($J_z < J_z'$).

ფორმულა (11.1) ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკაში სხეულის ინერციის მომენტის გამოსათვლელად ისეთი ღერძების მიმართ, რომლებიც არ გადიან მასების ცენტრში.

§ 3.12. ზოგიერთი ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტი

გამოთვლის გარეშე გთავაზობთ ზოგიერთი ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტის გამოსათვლელ ფორმულას.

1). l სიგრძისა და M მასის ერთგვაროვანი წვრილი $0A$ ღეროს ინერციის მომენტი:

$$J_0 = \frac{1}{3} M \ell^2 . \quad \underline{\underline{0}} \quad C$$

A

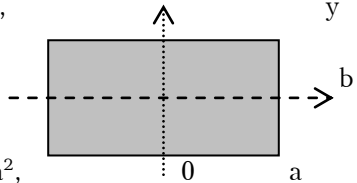
$$J_C = \frac{1}{12} M \ell^2 .$$

2). M მასის ერთგვაროვანი მართკუთხა ფირფიტის ინერციის მომენტი, როცა ფირფიტის სიგრძეა a , ხოლო სიგანე b .

$$J_a = \frac{1}{3} M b^2,$$

$$J_b = \frac{1}{3} M a^2,$$

$$J_0 = J_a + J_b = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2),$$



C

$$J_x = \frac{1}{12} M b^2,$$

$$J_y = \frac{1}{12} M a^2,$$

$$J_C = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

3). M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული ფირფიტის (დისკოს) ინერციის მომენტი:

$$\text{ცენტრის მიმართ: } J_C = \frac{1}{2} M R^2 ,$$

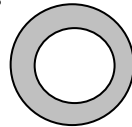
$$\text{დიამეტრის მიმართ: } J_d = \frac{1}{4} M R^2 .$$

4). M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრის ინერციის მომენტი მისი გეომეტრიული Oz ღრძის მიმართ:

$$J_z = \frac{1}{2} M R^2 ,$$

5). M მასის თხელი, ერთგვაროვანი წრიული რგოლის ინერციის მომენტი მისი ცენტრის მიმართ, თუ რგოლის გარე და შიგა რადიუსებია შესაბამისად R და r :

$$J_C = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2) .$$



შენიშვნა: არაერთგვაროვანი და რთული კონფიგურაციის სხეულებისათვის ინერციის მომენტებს ითვლიან ექსპერიმენტული ხერხით.

აზოცანა 5.3. იპოვეთ M მასის ერთგვაროვანი წვრილი $AB = \ell$ სიგრძის ღეროს ინერციის მომენტი იმ Z ღერძის მიმართ, რომელიც გადის O წერტილში ღეროს პერპენდიკულარულად, თუ $AO = \ell / 4$

ამონხნა სიუგენს – შტაინერის თეორემის თანახმად

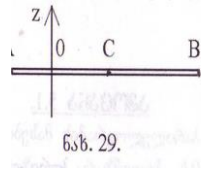
$$J_z = J_c + M \cdot OC^2 .$$

A

ვინაიდან $J_c = 1/12 \cdot M\ell^2$, ხოლო $OC = \ell/4$. ამიტომ

$$J_z = 1/12 \cdot M\ell^2 + 1/16 \cdot M\ell^2 = 7/48 \cdot M\ell^2 .$$

პასუხი: $J_z = 7/48 \cdot M\ell^2$.



ამოცანა 5.4. გამოთვალეთ M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკოს ინერციის მომენტი მისი დიამეტრის მიმართ.

ამონხნა ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა

სათავით დისკოს ცენტრში. ბრტყელი სიმეტრიული

ნაკეთისათვის საკოორდინატო ღერძების მიმართ ინერციის მომენტებს შორის ადგილი აქვს ტოლობას

$$J_x + J_y = J_c . (*) ; \text{ ვინაიდან ერთგვაროვანი}$$

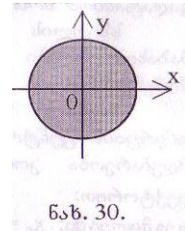
დისკოს ინერციის მომენტი მისი ყოველი დიამეტრის მიმართ ერთი და იგივეა, ამიტომ $J_x = J_y$. მეორეს მხრივ $J_c = 1/2 \cdot MR^2$. (*) ტოლობიდან: $2J_x = 1/2 \cdot MR^2$, საიდანაც $J_x = 1/4 \cdot MR^2$. ასევე $J_y = 1/4 \cdot MR^2$.

$$J_x = J_y = 1/4 \cdot MR^2 .$$

ამოცანა 5.5. 0 წერტილში დაკიდებული ქანქარა შედგება წვრილი ერთგვაროვანი ℓ სიგრძის და M_1 მასის ღეროსგან, რომლის A ბოლოზე მიმაგრებულია R რადიუსის და M_2 მასის წრიული დისკო. გამოთვალეთ ქანქარას ინერციის მომენტი მისი დაკიდების OZ ღერძის მიმართ, რომელიც ქანქარას სიბრტყის მართობია.

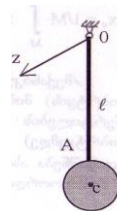
ამონხნა ქანქარა შედგება ორი სხეულისაგან: ღერო და დისკო. ამიტომ

$$J_z = J_z^{\text{ღერ}} + J_z^{\text{დისკ}} . (*)$$



ნახ. 30.

პასუხი:



ნახ. 31.

ღეროს ინერციის მომენტი $J_z^{\text{ფრ}} = 1/3 \cdot M_1 \ell^2$.

Oz ღერძის მიმართ დისკოს ინერციის მომენტის

გამოსათვლელად გამოვიყენოთ აიუგენს – შტაინერის თეორემა: $J_z^{\text{ფრ}} = J_c^{\text{ფრ}} + M_2 d^2$, სადაც $J_c^{\text{ფრ}} = 1/2 \cdot M_2 R^2$ არის დისკოს ინერციის მომენტი მისი მასების C ცენტრზე და Oz ღერძის პარალელურად გამავალი ღერძის მიმართ, ხოლო d - მანძილი დისკოს ცენტრიდან Oz ღერძამდე: $d = OC = \ell + R$. გვექნება:

$$J_z^{\text{ფრ}} = 1/2 \cdot M_2 R^2 + M_2 (\ell + R)^2.$$

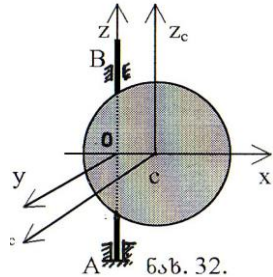
(*) -დან მივიღებთ:

$$J_z = \frac{1}{3} \cdot M_1 \ell^2 + M_2 \left(\frac{3}{2} R^2 + 2R\ell + \ell^2 \right).$$

აშოცანა 5.6. M მასის და R რადიუსის

ერთგვაროვანი წრიული დისკო
მიმაგრებულია AB

ღეროზე, რომელიც მასების C ცენტრიდან დაშორებულია $OC = R/2$ მანძილით. გამოთვალეთ დისკოს ინერციის მომენტები x , y , z ღერძების მიმართ; აგრეთვე ცენტრიდანული ინერციის მომენტები.



აშოცანა ერთგვაროვანი

დისკოსთვის

$$J_c = 1/2 \cdot MR^2.$$

Oy ღერძი გავლებულია დისკოს სიბრტყის მართობულად; ამიტომ, თუ გავავლებთ მასების C

ცენტრზე Oy -ის პარალელურ Cy_c ღერძს, მაშინ ამ ღერძის მიმართ $J_{yc} = J_c = 1/2 \cdot MR^2$.

გამოვიყენოთ აიუგენს – შტაინერის თეორემა; გვექნება:

$$J_y = J_{yc} + M \cdot OC^2 = 3/4 \cdot MR^2.$$

C წერტილში გავავლოთ Oz - ის პარალელური Cz_c ღერძი. ვინაიდან, როგორც x , ასევე z_c ღერძი დისკოს დიამეტრების თანამთხვეველია, ამიტომ

$$J_x = J_{zc} = 1/4 \cdot MR^2.$$

სიუგენს - შტაინერის თეორემის თანახმად: $J_z = J_{zc} + M \cdot OC^2 = 1/2 \cdot MR^2$.

რადგანაც დისკო სიმეტრიულია, როგორც x, ასევე y ღერძის მიმართ, ამიტომ $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$.

ასეუხი: $J_x = 1/4 \cdot MR^2$; $J_y = 3/4 \cdot MR^2$;
 $J_z = 1/2 \cdot MR^2$;

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

§ 3.13. ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

განვიხილოთ Oxyz სივრცეში n ნივთიერი წერტილისაგან შედგენილი მექანიკური სისტემის მოძრაობა. სისტემის თითოეული $M_k(x_k, y_k, z_k)$ წერტილის მასა იყოს m_k . ამ წერტილზე მოქმედი ყველა გარე (აქტიური და რეაქციის) ძალების ტოლქმედი იყოს $\vec{F}_k^{(ა)}$, ხოლო შიგა ძალების ტოლქმედი $\vec{F}_k^{(ბ)}$; თუ ამ წერტილის აჩქარებაა \vec{w}_k ($\vec{w}_k = \frac{d^2 r_k}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}_k$, სადაც \vec{r}_k - M_k წერტილის რადიუს-ვექტორია), მაშინ დინამიკის მეორე (ძირითადი) კანონის თანახმად

$$m_k \vec{w}_k = \vec{F}_k^{(ა)} + \vec{F}_k^{(ბ)}; \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (13.1)$$

აქ გვაქვს n განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა და ისინი წარმოადგენენ მექანიკური სისტემის მოძრაობის განტოლებებს ვექტორული სახით. მათი დაგეგმილებით დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე მივიღებთ 3n განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას:

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_k^{(ა)} + X_k^{(ბ)},$$

$$m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = Y_k^{(ა)} + Y_k^{(ბ)},$$

(13.2)

$$m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = Z_k^{(ა)} + Z_k^{(ბ)}, \quad (k=1,2,\dots,n)$$

ეს განტოლებები წარმოადგენენ ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებებს დეკარტის კოორდინატებში.

დინამიკის ძირითადი თეორემები

0

დინამიკის მრავალი ამოცანის ამოსახსნელად მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრების მაგივრად ხშირად იყენებენ ე.წ. ძირითად თეორემებს, რომლებიც დინამიკის ძირითადი კანონების შედეგია და წარმოადგენენ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების გარდაქმნილ სახეს.

ძირითადი თეორემების მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი თვალსაჩინო დამოკიდებულებას ამყარებენ ნივთიერი სხეულის მოძრაობის ძირითად დინამიკურ მახასიათებლებს შორის. ძირითადი თეორემები საშუალებას გვაძლევენ შევისწავლოთ მოცემული მოვლენის ცალკეული, პრაქტიკულად საინტერესო მხარეები.

§ 3.14. მასების ცენტრის მოძრაობის თეორემა

მექანიკური სისტემის (უმეტესად მყარი სხეულის) მოძრაობის დასახასიათებლად ხშირ შემთხვევაში საკმარისია ვიცოდეთ მისი მასების ცენტრის მოძრაობის ხასიათი, რომელსაც გამოსახავს შემდეგი

თეორემა: მექანიკური სისტემის მასების ცენტრი მოძრაობს ისე, როგორც ერთი ნივთიერი წერტილი, რომელშიც თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა და რომელზეც მოქმედებს გარე ძალების ნაკრები ვექტორი.

დამტკიცება: მასების ცენტრის განსაზღვრიდან გვაქვს:

$$M \vec{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \quad (14.1)$$

გავაწარმოთ ეს ტოლობა ორჯერ:

$$M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2}, \quad \text{ანუ} \quad M \vec{w}_c = \sum_{k=1}^n m_k \vec{w}_k.$$

თუ მარჯვენა მხარეში შევიტანთ (13.1) მნიშვნელობას და გავიხსენებთ (9.1) -ს, რომ $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(a)} = 0$, მივიღებთ:

$$M \vec{w}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(a)}, \quad \text{ანუ} \quad \underline{M \vec{w}_c = \vec{F}^{(a)}}.$$

(14.2)

სადაც $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(a)} = \vec{F}^{(a)}$. (თეორემა დამტკიცებულია).

მასების ცენტრის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები იქნებიან:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n X_k^{(a)}, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n Y_k^{(a)}, \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} =$$

$$\sum_{k=1}^n Z_k^{(a)}.$$

შენიშვნა: 1) მასების ცენტრი გეომეტრიული წერტილია და გარე ძალები ფაქტიურად მოდებულია არა მასების ცენტრზე, არამედ სისტემის წერტილებზე.

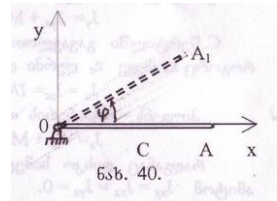
2) თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია ($\vec{F}^{(a)} = 0$), მაშინ სისტემის მასების ცენტრი ან წონასწორობაშია, ან მოძრაობს წრფივად და თანაბრად ($\vec{v} = \vec{c} \text{ onst.}$), ე. ი. ასრულებს ინერციულ მოძრაობას.

3) თუ გარე ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილი რაიმე ღერძზე ნულის ტოლია, მაშინ მასების ცენტრის სიჩქარის გეგმილი ამ ღერძზე მუდმივი სიდიდეა.

აშოცანა 6.1. $OA = 40$ სმ სიგრძის ერთგვაროვანი ღერო $\varphi = \pi t^2 / 2$ კანონით ბრუნავს O ბოლოზე ღეროს მართობულად გამავალი უძრავი ღერძის გარშემო. $t = 0$ მომენტისათვის განსაზღვრეთ მასების C ცენტრის აჩქარების სიდიდე და ღეროზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის მიმართულება.

აშოხსნა. $t = 0$ მომენტში $\varphi = 0$; ღეროს უკავია OA მდებარეობა. ღეროს მასების C ცენტრი მოძრაობს კანონით: $M \vec{w}_c = \vec{F}^{(a)}$.

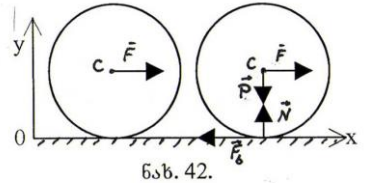
C წერტილი შემოწერს $R = OA / 2 = 20$ სმ რადიუსის წრეწირს. მისი აჩქარება $\vec{w}_c = \vec{w}_r + \vec{w}_n$; სიდიდით



$w_c = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}$; აქ $w_\tau = \varepsilon R$; $w_n = \omega^2 R$. ვინაიდან $\omega = \dot{\phi} = \pi t$, ხოლო $\varepsilon = \ddot{\phi} = \pi$; ამიტომ $t = 0$ მომენტში $\omega = 0$, $\varepsilon = \pi$. მაშასადამე $w_\tau = \pi R$; $w_n = 0$. მივიღებთ $w_c = w_\tau = 20\pi$ სმ/წმ².

საწყის $t_0=0$ მომენტში $\varphi=0$ და C წერტილი მდებარეობს x ღერძზე, ამიტომ, აჩქარება \vec{w}_c მიმართული ტრეკტორიის (წრეწირის) მხების გასწვრივ Oy ღერძის პარალელურად. იგივე მიმართულება აქვს \vec{F}^3 ვექტორსაც.

ამოცანა 6.3. ავტომანქანის ამყლი თვალი F ძალის მოქმედებით სრიალით გორავს სორიზონტალურ წრფეზე (ნახ.42). განსაზღვრეთ თვალის სიმძიმის C ცენტრის მოძრაობის კანონი, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია f , ხოლო $F = 5fP$, სადაც P - თვლის წონაა. საწყის მომენტში თვალი უძრავი იყო.



ამოხსნა. თვალზე მოქმედებს ოთხი ძალა: F - მამოძრავებელი ძალა, P - სიმძიმის ძალა, F_b - სრიალის ხახუნის ძალა, N - საყრდენის ნორმალური რეაქციის ძალა. მასების C ცენტრის მოძრაობის განტოლება ვექტორული სახით ასეთია:

$$M \vec{w}_c = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_b + \vec{N} .$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა x და y ღერძებზე: $M \ddot{x}_c = F - F_b$,

$$0 = - P + N .$$

(ა)

აქ $y_c = R = \text{const}$ და $\ddot{y}_c = 0$; $N = P$; სრიალის ხახუნის ძალა: $F_b = fN = fP$. (ა) -დან გვექნება: $P / g \ddot{x}_c = 5fP - fP$; აქედან $\ddot{x}_c = 4 f P / g$.

ვინტეგრით ეს ტოლობა: $\dot{x}_c = 4fgt + c_1$.

(ბ)

საწყის მომენტში თვალი უძრავია, ე.ი. როცა $t_0 = 0$, მაშინ $\dot{x}_c = V_{ox} = 0$;

მათი (ბ)-ში შეტანით მივიღებთ $c_1 = 0$; ამიტომ (ბ) ასეთ სახეს იღებს: $\dot{x}_c = 4fgt$;

(გ) ვაინტეგრით ეს ტოლობა: $x_c = 2fgt^2 + c_2$.

განვიღვი მანძილი ავითვალოთ მოძრაობის დაწყების მომენტიდან, ე.ი., როცა $t_0 = 0$, მაშინ $x_c = 0$ და მაშასადამე (გ) – დან $c_2 = 0$.

მასების ცენტრის მოძრაობის განტოლება იქნება: $\underline{x}_c = 2fgt^2$.

§ 3.15. მოძრაობის რაოდენობის თეორემა

მექანიკური მოძრაობის ზომა (მასშტაბი) ხასიათდება ერთი მხრივ მოძრავი ობიექტის მასით, ხოლო მეორეს მხრივ მისი მოძრაობის სიჩქარით. სხვადასხვა დროს მექანიკაში შემოთავაზებული იყო მოძრაობის სხვადასხვა ზომა. მექანიკური მოძრაობის ერთ-ერთი უძველესი ზომაა მოძრაობის რაოდენობა – ვექტორი $m\vec{v}$.

ბანსაზღვრა: ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება ვექტორულ სიდიდეს, რომელიც ტოლია წერტილის მასისა და მისი ვექტორული სიჩქარის ნამრავლისა:

z M

$$\vec{Q} = m\vec{v}. \quad (15.1)$$

\vec{Q}

\vec{Q} ვექტორი მოდებულია M წერტილზე

და მიმართულია \vec{v} -ს გასწვრივ. სიდიდით

x

$$|\vec{Q}| = m|\vec{v}|.$$

y

\vec{Q} ვექტორის გეგმილება: $Q_x = m x'$, $Q_y = m y'$, $Q_z =$

mz' .

ბანსაზღვრა: ნივთიერი წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება ვექტორულ სიდიდეს, რომელიც ტოლია სისტემაში შემავალი ყველა წერტილის მოძრაობის რაოდენობის გეომეტრიული ჯამისა:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k.$$

(15.2)

თუ გამოვიყენებთ (14.1) გამოსახულებას, მაშინ (15.2) ტოლობა ასეც ჩაიწერება:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d(\sum m_k \vec{r}_k)}{dt} = \frac{d(M\vec{r}_c)}{dt} = M \frac{d\vec{r}_c}{dt} = M \vec{v}_c.$$

მაშასადამე:

$$\vec{Q} = M \vec{v}_c. \quad (15.3)$$

სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ტოლია მასების ცენტრის მოძრაობის რაოდენობისა, თუ მასში თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა.

მოძრაობის რაოდენობა ($m \vec{v}$). არის მექანიკური მოძრაობის პირველი ვექტორული ზომა, რომელიც გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა მექანიკური მოძრაობა ერთი ფიზიკური სხეულიდან გადაეცემა სხვა ფიზიკურ სხეულებს; ანუ როცა ხდება ერთი მექანიკური მოძრაობის შედარება სხვა მექანიკურ მოძრაობასთან.

მოძრაობის რაოდენობა, როგორც ვექტორული სიდიდე, იმითაა მნიშვნელოვანი, რომ მიმართულება –ეს არის მექანიკური მოძრაობის ერთ-ერთი ძირითადი თვისება.

მოძრაობის რაოდენობის განზომილება ტექნიკურ ერთეულთა სისტემაში: $[Q] = [1 \text{ კგ} \cdot \text{წმ}^2/\text{მ} \cdot 1 \text{ მ}/\text{წმ}] = [1 \text{ კგ} \cdot \text{წმ}]$.

მოძრაობის რაოდენობის ცნებასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული *ძალის იმპულსის* ცნება.

ბანსაზღვრა: \vec{F} ძალის ელემენტარული იმპულსი ეწოდება ვექტორულ სიდიდეს, რომელიც ტოლია \vec{F} ძალისა და დროის ელემენტარული dt შუალედის ნამრავლისა:

$$d\vec{S} = \vec{F} \vec{E} dt.$$

ბანსაზღვრა: \vec{F} ძალის სრული იმპულსი დროის სასრულ $(0, \tau)$ შუალედში ტოლია შესაბამისი ელემენტარული იმპულსების ინტეგრალური ჯამისა:

$$\vec{S} = \int_0^\tau \vec{F} \vec{E} dt. \quad (15.4)$$

რაქტიკულად, ძალის იმპულსი უფრო ხშირად გამოიყენება ძალის ისეთი მოქმედების დროს, როდესაც დროის მოკლე შუალედში ძალის სიდიდე იცვლება საკმაოდ სწრაფად (მაგალითად დარტყმის დროს).

თეორემა: ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის წარმოებული დროით ტოლია წერტილზე მოქმედი ძალისა.

დამტკიცება. $\vec{Q} = m\vec{v}$. გავაწარმოთ:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}; \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = m \vec{w};$$

მაშასადამე
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}. \quad (15.5)$$

ეს თეორემა სამართლიანია საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებისთვისაც:

$$\frac{dQ_x}{dt} = X, \quad \frac{dQ_y}{dt} = Y, \quad \frac{dQ_z}{dt} = Z, \quad (15.6)$$

აქ X, Y, Z , არიან \vec{F} ძალის გეგმილები კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე.

შედეგი: 1) (15.5) ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$d\vec{Q} = \vec{F} \cdot dt$$

გავაინტეგრიროთ ეს ტოლობა დროის $(0, \tau)$ შუალედში, მივიღებთ:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_0^\tau \vec{F} \vec{E} dt. \quad (15.7)$$

ანუ
$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^\tau \vec{F} \vec{E} dt. \quad (15.7')$$

ამ ტოლობით გამოსახულია წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ნაზრდის

თეორემა: ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ნაზრდი დროის რაიმე შუალედში ტოლია წერტილზე მოქმედი ძალის სრული იმპულსისა დროის იმავე შუალედში.

2) თუ წერტილზე არავითარი ძალა არ მოქმედებს ($\vec{F} = 0$), მაშინ (15.5) –ის თანახმად $\vec{Q} = \overrightarrow{const}$, ე.ი. წერტილის მოძრაობის რაოდენობა მუდმივი სიდიდეა: ადგილი აქვს მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს.

3). თუ ძალის გეგმილი რომელიმე საკოორდინატო ღერძზე ნულის ტოლია, მაშინ მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი ამ ღერძზე მუდმივი სიდიდეა.

თეორემა: ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის წარმოებული დროით ტოლია სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორისა.

დამტკიცება. გავაწარმოთ (15.2) ტოლობა დროით:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{w}_k, \quad \text{ანუ} \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{(g)} + \vec{F}_k^{(a)});$$

ვინაიდან $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(a)} = 0$ და $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(g)} = \vec{F}^{(g)}$,

გვექნება: $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(g)}$.

ეს თეორემა სამართლიანია კოორდინატთა 0xyz სისტემის ღერძებზე გეგმილებშიც:

$$\frac{dQ_x}{dt} = X^{(g)}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = Y^{(g)}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = Z^{(g)}.$$

ანალოგიურად ნივთიერი წერტილისა, სისტემისთვისაც მტკიცდება

თეორემა: ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაზრდი დროის რაიმე შუალედში ტოლია სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის სრული იმპულსისა დროის იმავე შუალედში.

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_0^t \vec{F}^{(g)} \vec{E} dt.$$

თუ $\vec{F}^{(g)} = 0$, მაშინ ადგილი აქვს სისტემის მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს $\vec{Q} = \vec{Q}_0$.

პიტიუბა. მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა რეკომენდებულია შემდეგი თანამიმდევრობით: 1) ნახაზზე გამოვსახოთ წერტილზე მოქმედი ყველა აქტიური და რეაქციის ძალა (სისტემის შემთხვევაში - ყველა გარე ძალა); 2) ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა; 3) მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა (როგორც წერტილისათვის, ასევე - სისტემისათვის) ჩავწეროთ საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებში; 4) მიღებული განტოლებებიდან განვსაზღვროთ

უცნობი სიდიდე (მოძრაობის საწყისი ან საბოლოო სიჩქარე, მოძრაობის დრო, რომელიმე უცნობი ძალა ან მისი გეგმილი).

შენიშვნა. 1) თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ან მისი გეგმილი რომელიმე ღერძზე ნულის ტოლია, მაშინ გამოვიყენებთ მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს და განვსაზღვრავთ საძებნ სიდიდეს.

2) (15.3) ტოლობიდან ჩანს, რომ თუ სისტემა (ან სხეული) ისე მოძრაობს, რომ მისი მასების ცენტრი უძრავია ($\vec{v}_c = 0$), მაშინ სისტემის (ან სხეულის) მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია. მაგალითად, თუ სხეული ბრუნავს მასების ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო, მაშინ მისი მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია.

3) ნივთიერების (მატერიის) ყველა ფორმას გააჩნია მოძრაობის რაოდენობა, მათ შორის ველსაც; ელექტრომაგნიტური, გრავიტაციული და სხვ. ველებისათვის მოძრაობის რაოდენობის ვექტორები და მისი სიმკვრივე გამოისახებიან დაძაბულობის, პოტენციალების და ა.შ. სიდიდეების საშუალებით.

ამოცანა 7.1 განსაზღვრეთ ქანქარას მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი, თუ იგი შედგება P_1 წონის $0A=4r$ სიგრძის ერთგვაროვანი ღეროსა და P_2 წონის r რადიუსის B დისკოსაგან; აღებულ მომენტში ქანქარას კუთხური სიჩქარე ω - ს ტოლია.

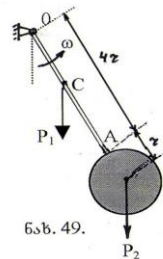
ამოსნა. ღეროს სიმძიმის ცენტრი შუა C წერტილშია მოთავსებული, ხოლო დისკოსი - B ცენტრში. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{Q} = m_{0A} \cdot \vec{v}_c + m_B \cdot \vec{v}_B ; \quad (\text{ა}) \quad \text{აქ } m_{0A} = P_1 / g ; \quad m_B = P_2 / g .$$

ქანქარას მოძრაობის დროს მისი C და B წერტილები მოძრაობენ წრეწირებზე ω კუთხური სიჩქარით, ამიტომ $v_c = \omega \cdot 0C = 2r \omega$;

$$v_B = \omega \cdot 0B = 5r \omega .$$

სიჩქარის \vec{v}_c და \vec{v}_B ვექტორები მიმართულნი არიან ნახაზის სიბრტყეში $0B$ წრფის მართობულად და მამასაღამე \vec{Q} ვექტორიც $0B$ -ს მართობულია.



თუ (ა) ტოლობას დავაგეგმილებთ ნახაზის სიბრტყეში მდებარე 0B წრფის მართობულ ღერძზე, მივიღებთ:

$$Q = m_{0A} v_c + m_B v_B = P_1 / g \cdot 2r \omega + P_2 / g \cdot 5r \omega = \\ = (2P_1 + 5P_2)r \omega / g .$$

პასუხი: $Q = (2P_1 + 5P_2)r \omega / g ;$

(Q მიმართულია 0B-ს მართობულად მოძრაობის მხარეს).

ამოცანა 7.2 P = 12 კგ წონის გრანატა, რომელიც მიფრინავდა 15 მ/წმ სიჩქარით, საერში გასკდა ორ ნაწილად. P₁=8კგ წონის ნამსხვრევების სიჩქარე გრანატის მოძრაობის მიმართულებით გაიზარდა 25 მ/წმ-დე. იპოვეთ მეორე ნაწილის სიჩქარე.

ამოხსნა. გრანატის მასა m = P/g = 12/g, ხოლო გასკდომის შედეგად მიღებული ნამსხვრევების მასებია: m₁ = P₁/g = 8/g; m₂ = P₂/g = 4/g.

გრანატის სიჩქარეა v=15 მ/წმ, ხოლო ნამსხვრევებისა: v₁=25მ/წმ და v₂. უნდა განვსაზღვროთ v₂.

გრანატის გასკდომამდე მოძრაობის რაოდენობასა და გასკდომის შემდეგ მიღებული ორი სხეულის სისტემის მოძრაობის რაოდენობას შორის არსებობს დამოკიდებულება:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2, \quad \text{ანუ} \quad m \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 . \quad (ა)$$

ამოცანის პირობის თანახმად, ერთ-ერთი ნამსხვრევების სიჩქარე გრანატის მოძრაობის მიმართულებას ემთხვევა, ე.ი. $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}$; ამის გამო, (ა) ტოლობას ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ, თუ აგრეთვე $\vec{v}_2 \parallel \vec{v}$; ეს კი გვიჩვენებს, რომ თუ (ა) ტოლობას დავაგეგმილებთ მოძრაობის ამ მიმართულებაზე, მივიღებთ:

$$mv = m_1 v_1 + m_2 v_2 .$$

შევიტანოთ აქ მიღებული მნიშვნელობები: 12 · 15 = 8 · 25 + 4 v₂;

აქედან: v₂ = - 5 მ/წმ. ნიშანი “ - “ გვიჩვენებს, რომ მეორე ნამსხვრევების სიჩქარე მიმართულია პირველის საწინააღმდეგოდ.

$$v_2 = 5 \text{ მ/წმ.}$$

ამოცანა 7.3. გამოთვალეთ ნახაზზე გამოსახული ღვედური გადაცემის მოძრაობის რაოდენობა, თუ მხედველობაში მიღებულია ორივე ბორბლისა და ღვედის მასა. ბორბლების სიმძიმის ცენტრები მათი ბრუნვის ღერძებზე მდებარეობს.

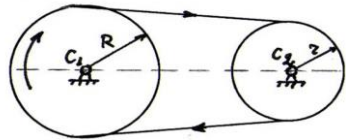
ამოხსნა. სისტემა შედგება სამი სხეულისაგან: ორი ბორბლისა და ღვედისაგან; ამიტომ, სისტემის მოძრაობის რაოდენობა იქნება:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3$$

ორივე ბორბლის სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია მათი ბრუნვის ღერძებზე, რომლებიც უძრავია, ამიტომ $v_{c1} = 0$, $v_{c2} = 0$, და მივიღებთ:

$$Q_1 = m_1 v_{c1} = 0,$$

$$Q_2 = m_2 v_{c2} = 0.$$

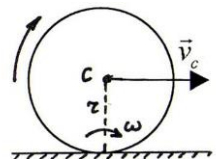


ნახ. 50.

Q_3 წარმოადგენს ღვედის მოძრაობის რაოდენობას. ღვედი განლაგებულია სორიზონტალური C_1C_2 წრფის მიმართ სიმეტრიულად. ღვედის ნაწილაკების მასებიც ამ წრფის სიმეტრიულად არიან განლაგებულნი, ხოლო ამ ნაწილაკების სიჩქარეები ყველანი ერთმანეთის ტოლია და სიმეტრიულ ნაწილებში ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ. ამიტომ, ღვედის ყოველი m მასის ნაწილაკის mv მოძრაობის რაოდენობისათვის მოიძებნება იმავე m მასის სიმეტრიული ნაწილაკის $-mv$ მოძრაობის რაოდენობა და მათი ჯამი 0-ის ტოლი იქნება. მაშასადამე, მთლიანი ღვედის მოძრაობის რაოდენობა $Q_3 = 0$.

მივიღეთ, რომ ღვედური გადაცემის მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია: $Q = 0$.

ამოცანა 7.4. $P=100$ კგ წონის და $r=50$ სმ რადიუსის ბორბალი რელსზე გორავს სრიალის გარეშე და აკეთებს 60 ბრ/წთ-ს. გამოთვალეთ ბორბლის მოძრაობის რაოდენობა.



ნახ. 51.

ამონსნა. ბორბალი ასრულებს ბრტყელ

თანაბარ ბრუნვას ($n = 60$ ბრ/წთ). ბრუნვის მყისი

ცენტრია K წერტილი. ბრუნვის კუთხური სიჩქარე იქნება $\omega = \pi n / 30$. ეს არის ბრუნვის მყისი K ცენტრის გარშემო შემობრუნების კუთხური სიჩქარე. ბორბალი ერთგვაროვანია. მისი სიმძიმის C ცენტრი მოძრაობს $v_c = \omega r$ სიჩქარით.

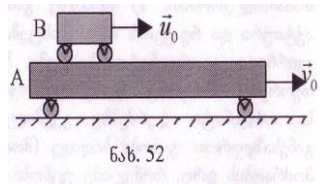
ბორბლის წერტილები ბრუნვის K ცენტრის მიმართ მოძრაობენ სხვადასხვა რადიუსიან წრეწირებზე. ამ წერტილების სიჩქარეების ვექტორები მიმართულია ამ წრეწირების მხებების გასწვრივ; ამიტომ სხვადასხვა წერტილის მოძრაობის რაოდენობას აქვს სხვადასხვა მიმართულება. მათი ნაკრები ვექტორი \vec{Q} მიმართულია მასების ცენტრის სიჩქარის მიმართულებით და სიდიდით იქნება :

$$Q = mv_c = P / g \cdot \pi r n / 30 = 100 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 50 / 980 \cdot 30 = 10,2\pi \text{ კგ} / \text{წმ}.$$

პასუხი: $Q = 10,2\pi \text{ კგ} / \text{წმ}.$

ამოცანა 7.5. სორიზონტალურ

A ბაქანზე, რომელიც მოძრაობს v_0 სიჩქარით, მოძრაობს B ურიკა ფარდობითი u_0 სიჩქარით. გარკვეულ მომენტში ურიკა დაამუხრუჭეს. განსაზღვრეთ ურიკას გაჩერების შემდეგ ბაქანის ურიკასთან ერთად მოძრაობის საერთო v სიჩქარე, თუ M - ბაქანის მასაა, ხოლო m - ურიკას მასა. ურიკას და ბაქანის ბორბლების მასები უგულებელყავით.



ნახ. 52

ამონსნა. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან (ბაქანი და ურიკა). ბაქანი და ურიკა მოძრაობენ წრფივად, მუდმივი სიჩქარით, ანუ ინერციულად;

ეს ნიშნავს, რომ სისტემაზე გარე ძალები არ მოქმედებენ. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს,

ე.ი. სისტემის მოძრაობის რაოდენობა წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს:

$$\vec{Q}_0 = \vec{Q} = \text{const} .$$

(ა)

\vec{Q}_0 არის სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ურიკას გაჩერებამდე:

$$\vec{Q}_0 = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B.$$

ვინაიდან $\vec{v}_0 \parallel \vec{u}_0$, ე.ი. $\vec{Q}_A \parallel \vec{Q}_B$, ამიტომ $Q_0 = Q_A + Q_B$.
(ბ)

ბაქანის სიჩქარის სიდიდეა v_0 , მაშასადამე $Q_A = Mv_0$;
ურიკას აბსოლუტური სიჩქარის სიდიდეა $v_0 + u_0$, ამიტომ

$$Q_B = m(v_0 + u_0).$$

ამ მნიშვნელობების შეტანით (ბ) - ში, მივიღებთ

$$Q_0 = Mv_0 + m(v_0 + u_0).$$

(გ)

(ა) ტოლობაში \vec{Q} არის სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ურიკას გაჩერების შემდეგ; ე.ი. ურიკა და ბაქანი შეგვიძლიან განვიხილოთ, როგორც ერთი მთლიანი სხეული მასით $(M+m)$, რომელიც მოძრაობს გადატანითად v სიჩქარით; მაშასადამე $Q = (M+m)v$.
(დ)

(ა) ტოლობის თანახმად $Q_0 = Q$. შევიტანოთ აქ (გ) და (დ) მნიშვნელობები, მივიღებთ: $Mv_0 + m(v_0 + u_0) = (M+m)v$;
v ;

აქედან: $v = v_0 + m / (M+m) \cdot u_0$. პასუხი: $v = v_0 + m / (M+m) \cdot u_0$.

§ 3.16. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის თეორემა (კინეტიკური მომენტის თეორემა)

მექანიკის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას, ნივთიერი წერტილის მექანიკური მოძრაობის ზომის სახით უკეთესია გამოვიყენოთ არა მოძრაობის რაოდენობა, არამედ ამ წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი რაიმე O ცენტრის მიმართ.

ნივთიერი წერტილის ან წერტილთა სისტემის (სხეულის) ბრუნვითი მოძრაობის დასახასიათებლად შემოვიღოთ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცნება.

ბანსაზღვრა: ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რადიუს-ვექტორის მომენტის რაიმე უძრავი 0 ცენტრის მიმართ ეწოდება ვექტორულ ნამრავს

$$(16.1) \quad \vec{l}_0 = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

აქ $\vec{r}(x,y,z)$ - $M(x,y,z)$ წერტილის რადიუს-ვექტორია 0 ცენტრის მიმართ, ხოლო $\vec{v}(x',y',z')$ - წერტილის სიჩქარეა. თუ $Oxyz$ საკოორდინატო სისტემის ღერძების მგეზავებია $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, მაშინ (16.1) ტოლობა ასეც ჩაიწერება:

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mx' & my' & mz' \end{vmatrix}$$

(16.2) **ბანსაზღვრა:** ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რადიუს-ვექტორის მომენტის რაიმე უძრავი ღერძის მიმართ ეწოდება სიდიდეს, რომელიც ტოლია ამ ღერძზე აღებული ნებისმიერი ცენტრის მიმართ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რადიუს-ვექტორის მომენტისა იმავე ღერძზე.

მაგალითად Oz ღერძის მიმართ

$$l_z = \text{გეგმ}_z \vec{l}_0 = \text{მომ}_z(m \vec{v}).$$

(16.2)-ის თანახმად, საკოორდინატო ღერძების მიმართ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რადიუს-ვექტორის მომენტები იქნება:

$$(16.3) \quad \begin{aligned} l_x &= m(yz' - zy'), \\ l_y &= m(zx' - xz'), \end{aligned}$$

$$l_z = m(xy' - yx').$$

ბანსაზღვრა: ნივთიერი წერტილთა სისტემის მოძრაობის რადიუს-ვექტორის მომენტის რაიმე უძრავი 0 ცენტრის მიმართ ეწოდება სისტემაში შემავალი წერტილების მოძრაობის რადიუს-ვექტორების ვექტორულ ჯამს იმავე 0 ცენტრის მიმართ.

$$\vec{l}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{l}_k = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k).$$

(16.4)

გეგმილებში:

$$l_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k z'_k - z_k y'_k),$$

$$\ell_y = \sum_{k=1}^n m_k (z_k x'_k - x_k z'_k), \quad (16.5)$$

$$\ell_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k y'_k - y_k x'_k).$$

თეორემა: რაიმე 0 ცენტრის მიმართ ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური მომენტის წარმოებული დროით ტოლია სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტისა იმავე 0 ცენტრის მიმართ.

დამტკიცება. გავაწაროთ (16.4) ტოლობა დროით:

$$\frac{d\vec{\ell}_0}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \vec{v}_k \right) + \sum_{k=1}^n \left(\vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \right).$$

ანუ

$$\frac{d\vec{\ell}_0}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\vec{v}_k \times m_k \vec{v}_k \right) + \sum_{k=1}^n \left(\vec{r}_k \times m_k \vec{w}_k \right). \quad (16.6)$$

აქ $(\vec{v}_k \times m_k \vec{v}_k) = 0$. ვინაიდან $m_k \vec{w}_k = \vec{F}_k^{(s)} + \vec{F}_k^{(a)}$, თუ შევიტანთ

(16.6) –ში და გამოვიყენებთ შიგა ძალების ნაკრები მომენტის ნულთან ტოლობის თვისებას (§3.9), მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{\ell}_0}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(s)} \right). \quad (16.7)$$

გამოსახლება

$$\sum_{k=1}^n \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(s)} \right) = \vec{L}_0^{(s)}$$

არის სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი 0 ცენტრის მიმართ. გვექნება:

$$\frac{d\vec{\ell}_0}{dt} = \vec{L}_0^{(s)}. \quad (16.8)$$

ეს ტოლობა გამოსახავს სისტემის კინეტიკური მომენტის თეორემას.

შედეგი: 1). ეს თეორემა სამართლიანია საკორდინატო ღერძების მიმართ მომენტებისთვისაც:

$$(16.9) \quad \frac{dl_x}{dt} = L_x^{(a)}, \quad \frac{dl_y}{dt} = L_y^{(a)}, \quad \frac{dl_z}{dt} = L_z^{(a)}.$$

2). თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომანტი რაიმე ცენტრის (ან ღერძის) მიმართ ნულის ტოლია, მაშინ სისტემის კინეტიკური მომენტი ამ ცენტრის (ან ღერძის) მიმართ მუდმივი სიდიდეა: $\vec{l}_0 = \vec{c} \text{ onst..}$

3). უძრავი OZ ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით მბრუნავი მყარი სხეულის კინეტიკური მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ გამოითვლება ფორმულით:

$$l_z = J_z \cdot \omega; \quad (16.10)$$

აქ J_z არის სხეულის ინერციის მომენტი OZ ღერძის მიმართ. როგორც კერძო შემთხვევა, ანალოგიური თეორემა თავისი შედეგებით მტკიცდება ერთი ნივთიერი წერტილისათვისაც.

თეორემა: რაიმე 0 ცენტრის მიმართ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის წარმოებული დროით ტოლია წერტილზე მოქმედი ძალის მომენტისა იმავე 0 ცენტრის მიმართ.

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{L}_0, \quad (16.11)$$

აქ \vec{L}_0 არის წერტილზე მოქმედი \vec{F} ძალის მომენტი 0 ცენტრის მიმართ..

შედეგი 1). ეს თეორემა სამართლიანია საკოორდინატო ღერძების მიმართ მომენტებისთვისაც:

$$(16.12) \quad \frac{dl_x}{dt} = L_x, \quad \frac{dl_y}{dt} = L_y, \quad \frac{dl_z}{dt} = L_z.$$

შედეგი 2). ვთქვათ, m მასის ნივთიერ წერტილზე მოქმედი \vec{F} ძალის ფუძე ყოველთვის გადის ერთი და იგივე 0 ცენტრში. ასეთ \vec{F} ძალას ეწოდება ცენტრალური ძალა, ხოლო 0 წერტილს – ამ ძალის ცენტრი.

ავაგოთ 0 ცენტრზე კოორდინატთა 0xyz სისტემა. ცხადია გვექნება

$$\vec{L}_0 = 0. \quad \text{მაშინ (16.11) -დან } \frac{d\vec{l}_0}{dt} = 0, \quad \text{საიდანაც } \vec{l}_0 = \vec{c} \text{ onst..}$$

ვნახოთ როგორ მოძრაობს M წერტილი ცენტრალური ძალის მოქმედებით; ამ შემთხვევაში, როგორც ვაჩვენეთ $\vec{l}_0 = \vec{c} \text{ onst.}$; იგი გეგმილებში ასე ჩაიწერება:

$$l_z = C_1, \quad l_y = C_2, \quad l_x = C_3.$$

აქ C_1, C_2, C_3 მუდმივი სიდიდეებია.

(16.3) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$m(yz' - zy') = C_1,$$

$$m(zx' - xz') = C_2,$$

$$m(xy' - yx') = C_3.$$

ამ ტოლობების ორივე მხარე გავამრავლოთ შესაბამისად x, y, z -ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0.$$

ეს არის სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე. M წერტილი იმყოფება ამ სიბრტყეზე; ე.ი. ცენტრალური ძალის მოქმედებით წერტილი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. ამ სიბრტყეს უწოდებენ *ლ ა პ ლ ა ს ი ს* სიბრტყეს.

ცენტრალური ძალის მაგალითს წარმოადგენს მზისკენ პლანეტის მიზიდულობის ძალა, ან დედამიწისკენ ხელოვნური თანამგზავრის მიზიდულობის ძალა.

შედეგი 3). საჭიროა აღინიშნოს, რომ შიგა ძალებს არ შეუძლიათ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შეცვლა, მაგრამ ამ ძალებს შეუძლიათ სისტემის ცალკეული ნაწილების მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ან ბრუნვის კუთხური სიჩქარის შეცვლა. მაგალითად, რაიმე ვერტიკალური Z ღერძის გარშემო ფიგურისტის (ან ბალერინას) ბრუნვისას მისი მოძრაობის რაოდენობის მომენტი $l_z = J_z \omega$ მუდმივია, მაგრამ ხელების ან ფეხების მოძრაობით იცვლება ინერციის მომენტის (J_z) მნიშვნელობა და მას შეუძლია ად კუთხური სიჩქარის შეცვლა.

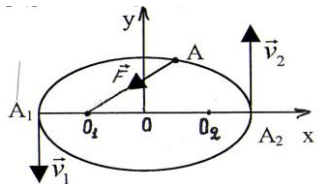
მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცნება ფართოდ გამოიყენება მყარი სხეულის დინამიკაში, განსაკუთრებით გიროსკოპების თეორიაში.

მოძრაობის რაოდენობის მომენტის განზომილებაა კგ მ²/წმ.

მოძრაობის რაოდენობის მომენტი გააჩნიათ აგრეთვე ელექტრომაგნიტურ, გრავიტაციულ და სხვ. ფიზიკურ ველებს; მას დიდი მნიშვნელობა აქვს კვანტურ მექანიკაში.

აშოცანა 8.1. ნივთიერი A წერტილი მოძრაობს ელიფსურ

ტრაექტორიაზე მიზიდულობის \vec{F} ძალის მოქმედებით, რომელიც მიმართულია



ნახ. 56.

ელიფსის ერთ-ერთ ფოკუსზე თანამთხვეველ O_1 ცენტრისაკენ.

ელიფსის ნახევარღერძებია $a = 5$ სმ და $b = 3$ სმ. განსაზღვრეთ ამ წერტილის v_2 სიჩქარე A_2 მდებარეობაში, თუ A_1 მდებარეობაში მისი სიჩქარეა $v_1 = 27$ სმ/წმ.

ამოხსნა. წერტილის მოძრაობისას მიზიდულობის \vec{F} ძალის ფუძე ყოველთვის გადის ერთ და იმავე O_1 წერტილში, ამიტომ $L_0 = m_0 \vec{r} = 0$. ეს ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენახვის კანონს: $\ell_0^{A_1} = \ell_0^{A_2}$,

$$\text{ანუ} \quad m v_1 A_1 O_1 = m v_2 \cdot A_2 O_1. \quad (*)$$

მოცემულობის თანახმად $A_1 O_1 = a = 5$, $B O_1 = b = 3$. ელიფსის თვისების თანახმად

$$O O_1 = c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4.$$

$$\text{ამიტომ} \quad A_1 O_1 = a - c = 1; \quad A_2 O_1 = a + c = 9.$$

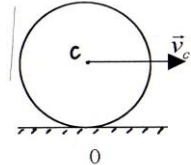
თუ გავითვალისწინებთ მიღებულ მნიშვნელობებს, $(*)$ ტოლობიდან მივიღებთ:

$$v_2 = v_1 \cdot A_1 O_1 / A_2 O_1 = 9.$$

$$\text{პასუხი: } v_2 = 9 \text{ სმ/წმ.}$$

ამოცანა 8.2. M მასის და R

რადიუსის ერთგვაროვანი დისკო უსრიალოდ მიგორავს წრფივ სორიზონტალურ რელსზე. განსაზღვრეთ დისკოს კინეტიკური მომენტი მისი ბრუნვის მყისი ცენტრის მიმართ, თუ დისკოს C ცენტრის \vec{v}_c სიჩქარე მუდმივია.



ნახ. 57.

ამოხსნა. დისკოს ბრუნვის მყისი ცენტრია რელსთან შეხების O წერტილი. გავავლოთ O წერტილზე ნახაზის სიბრტყის მართობული OZ ღერძი, რომელიც იქნება ბრუნვის მყისი ღერძი. ამ ღერძის მიმართ დისკოს კინეტიკური მომენტი იქნება: $\ell_o = J_o \omega$. $(*)$

სადაც J_o არის დისკოს ინერციის მომენტი OZ ღერძის მიმართ, ხოლო ω – ამ ღერძის გარშემო დისკოს ბრუნვის მყისი კუთხური სიჩქარე. თუ ჩავთვლით, რომ დისკოს C ცენტრზე გავლებულია OZ -ის პარალელური CZ_1 ღერძი, მაშინ სიუგენს-შტაინერის თეორემის თანახმად:

$$J_o = J_c + M R^2 = 1/2 \cdot M R^2 + M R^2 = 3/2 \cdot M R^2.$$

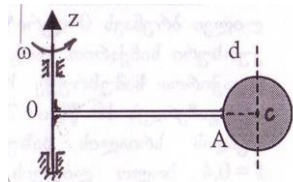
ამოცანის პირობის თანახმად $\vec{v}_c = \text{const}$; ამასთანავე $v_c = \omega_0 R$. აქედან $\omega_0 = v_c / R$. შევიტანოთ J_0 -ის და ω_0 -ის მნიშვნელობები (ა) ტოლობაში; გვექნება:

$$l_0 = J_0 \omega_0 = 3/2 \cdot MR^2 \cdot v_c / R = 3/2 \cdot MR v_c .$$

პასუხი: $l_0 =$

$$3/2 \cdot MR v_c .$$

ამოცანა 8.3. a სიგრძის და P წონის ერთგვაროვანი წვრილი ხორიზონტალური OA ღეროს ბოლოში მიმაგრებულია AC = r რადიუსის და Q წონის ერთგვაროვანი დისკო, რომლის სიბრტყე ვერტიკალურია, ხოლო AC რადიუსი წარმოადგენს OA-ს გაგრძელებას. სხეული ბრუნავს ვერტიკალური OZ ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ სხეულის კინეტიკური მომენტი ამ ღერძის მიმართ. საკისარში ხახუნნი უგულებელყავით.



ნახ. 58.

ამოსნა. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან: OA ღეროსა და C დისკოსაგან.

ამ სისტემის კინეტიკური მომენტი OZ ღერძის მიმართ მოიცემა ტოლობით:

$$l_z = l_z^{OA} + l_z^c .$$

(ა)

OA ღეროს კინეტიკური მომენტი: $l_z^{OA} = J_z^{OA} \omega = Pa^2 \omega / 3g$.

(ბ)

C დისკოს კინეტიკური მომენტი OZ ღერძის მიმართ: $l_z^c = J_z^c \omega$

(გ)

$$a) \quad J_z^c = J_d + m_c \cdot 0C^2; \quad d - \text{დისკოს დიამეტრია};$$

$$0C = a + r; \quad m_c = Q/g; \quad J_d = Qr^2/4g;$$

$$J_z^c = Q r^2/4g + Q (a+r)^2/g .$$

ამ მნიშვნელობის შეტანით (გ) ტოლობაში, გვექნება:

$$l_z^c = Q/g \cdot [r^2 + 4(a+r)^2] \omega . \quad (დ)$$

(ბ) და (დ) მნიშვნელობები შევიტანოთ (ა) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$l_z = Pa^2\omega / 3g + Q / 4g \cdot [r^2 + 4(a+r)^2] \omega .$$

საბოლოოდ
$$l_z = \omega / 12 g \cdot [4Pa^2 + 3Qr^2 + 12 Q (a+r)^2] .$$

აშოხსნა 8.4. საერთო 0 ღერძზე

ჩამოცმულია ორი ერთმანეთთან ხისტად შეერთებული r_1 და r_2 ($r_1 < r_2$) რადიუსის ბლოკები, რომლებიც წარმოადგენენ ერთგვაროვან, შესაბამისად Q_1 და Q_2 წონის დისკებს.

ბლოკებზე დახვეული თოკების ბოლოებში დაკიდებული

P_1 და P_2 წონის M_1 და M_2 ტვირთების მოქმედებით ბლოკები იწყებენ ბრუნვას.

განსაზღვრეთ ბლოკების ბრუნვის კუთხური აჩქარება. საკისარში ხახუნი უგულებელყავით.

აშოხსნა. ბლოკების ბრუნვის კუთხური ε აჩქარების გამოსათვლელად ბრუნვის 0Z ღერძი გავავლოთ 0 ცენტრში ნახაზის სიბრტყის მართობულად და გამოვიყენოთ სისტემის კინეტიკური მომენტის

თორემა 0Z ღერძის მიმართ
$$\frac{dl_0}{dt} = L_0^{(3)} . \quad (*)$$

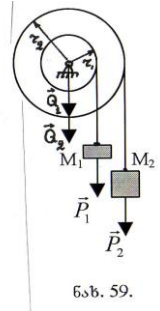
აქ $l_0 = J_0 \omega$, სადაც J_0 არის სისტემის ინერციის მომენტი 0Z ღერძის მიმართ, ხოლო $L_0^{(3)}$ - სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი 0Z ღერძის მიმართ. თუ (*) ტოლობაში შევიტანთ l_0 -ის მნიშვნელობას, მივიღებთ

(ა)
$$J_0 \varepsilon = L_0^{(3)} . \quad \text{საიდანაც} \quad \varepsilon = L_0^{(3)} / J_0 .$$

სისტემა შედგება ოთხი სხეულისაგან: ორი ბლოკისა და ორი ტვირთისაგან. ბრუნვის 0Z ღერძი გავავლოთ 0 ცენტრში ნახაზის სიბრტყის მართობულად. მაშინ სისტემის ინერციის მომენტი ამ ღერძის მიმართ იქნება:

(ბ)
$$J_0 = Q_1 r_1^2 / 2g + Q_2 r_2^2 / 2g + P_1 r_1^2 / g + P_2 r_2^2 / g =$$

$$= [(Q_1 + 2P_1) r_1^2 + (Q_2 + 2P_2) r_2^2] / 2g .$$



ნახ. 59.

სისტემაზე მოქმედებს ოთხი გარე ძალა: Q_1, Q_2, P_1, P_2 :
 აქედან, ორი ძალა - Q_1 და Q_2 მოდებული არიან ბრუნვის O
 ცენტრში; ამიტომ, ამ ორი ძალის მომენტი O ცენტრის მიმართ ნულის
 ტოლია; სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი O
 ცენტრის მიმართ იქნება:

$$(3) \quad L_0^{\delta} = P_1 r_1 + P_2 r_2 .$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (ბ) და (გ) გამოსახულებებს,
 მაშინ (ა) ტოლობიდან განისაზღვრება ბლოკების ბრუნვის კუთხური
 აჩქარება:

$$\varepsilon = L_0^{\delta} / J_0 = \frac{2g(P_1 r_1 + P_2 r_2)}{[(Q_1 + 2P_1) r_1^2 + (Q_2 + 2P_2) r_2^2]} .$$

§ 3.17. ძალის მუშაობის ცნება. სიმძლავრე

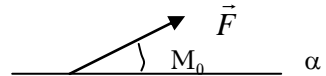
ფიზიკური სიდიდე, რომელიც რაოდენობრივად განსაზღვრავს
 ენერგიის ცვლილებას მისი ერთი ფორმიდან მეორეში გადასვლისას.

წერტილის მოძრაობისას მასზე მოდებული ძალის
 მოქმედების ეფექტი დამოკიდებულია არა მარტო ძალის მოქმედების
 დროზე, არამედ ძალის მიმართულებაზეც და იმ გზაზეც, რომლის
 განმავლობაში მოქმედებს ძალა. წერტილის გადაადგილების დროს მისი
 მოძრაობის დასახასიათებლად შემოაქვთ მუშაობის ცნება.

ძალის მუშაობა წარმოადგენს მოცემულ გზაზე ნივთიერი
 წერტილის გადაადგილებისას სხვა ნივთიერი სხეულების მექანიკური
 ზემოქმედების საზომს. ძალის მუშაობა სკალარული სიდიდეა. იგი
 აღინიშნება A ასოთი.

1. M წერტილზე მოქმედი მუდმივი \vec{F} ძალის მუშაობა წრფივი
 მოძრაობის დროს ტოლია ძალის სიდიდის,

$M_0 M = S$ გადაადგილების და მათ შორის
 მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლისა:



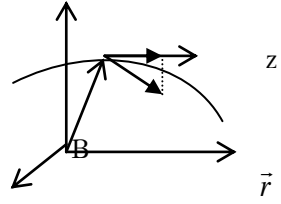
$$A = F S \cos \alpha . \quad (17.1)$$

2. განვიხილოთ ნივთიერი $M(x, y, z)$ წერტილი, რომელიც
 $Oxyz$ სივრცეში $\vec{F}(X, Y, Z)$ ძალის მოქმედებით გადაადგილდება რაიმე
 BC გზაზე. წერტილის რადიუს-ვექტორია $\vec{r}(x, y, z)$.

ვთქვათ დროის dt შუალედში \vec{F} ძალის მოქმედებით წერტილმა მიიღო ელემენტარული $d\vec{r}$ გადაადგილება. სკალარულ ნამრავლს

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (17.2)$$

M \vec{F}_τ \vec{v}
 ეწოდება \vec{F} ძალის ელემენტარული მუშაობა $d\vec{r}$ გადაადგილებაზე.



\vec{F} C
 ელემენტარული მუშაობის სიდიდეა 0
 x

$$dA = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos(\vec{F}, d\vec{r}) \quad (17.3) \quad y$$

ძალის ელემენტარული მუშაობა შეიძლება იყოს დადებითი $\cos(\vec{F}, d\vec{r}) > 0$, ან უარყოფითი $\cos(\vec{F}, d\vec{r}) < 0$, ან უდრიდეს ნულს $\cos(\vec{F}, d\vec{r}) = 0$.

თუ $d\vec{r}$ -ის კოორდინატებია $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, მაშინ

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = X dx + Y dy + Z dz \quad (17.4)$$

3. ძალის ელემენტარული მუშაობა ასეც გამოისახება:

$$dA = F_\tau \cdot dS;$$

აქ F_τ არის \vec{F} ძალის გეგმილი M წერტილის ტრანკტორიის მხებზე, რომელიც მიმართულია წერტილის მოძრაობის მხარეს; dS არის M წერტილის ელემენტარული გადაადგილება ტრანკტორიის გასწვრივ, რომელიც შეესაბამება $d\vec{r}$ გადაადგილებას.

$$\text{ვინაიდან } F_\tau = |\vec{F}| \cos\alpha, \text{ ამიტომ } dA = |\vec{F}| \cos\alpha \cdot dS.$$

4. \vec{F} ძალა შეიძლება იყოს M წერტილზე მოქმედი რამდენიმე ძალის ტოლქმედი. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$.

მტკიცდება, რომ ტოლქმედის მუშაობა გზის რაიმე მონაკვეთზე ტოლია შემადგენელი ძალების მიერ იმავე გზაზე შესრულებული მუშაობათა

აღებებული ჯამისა:
$$A = \sum_{k=1}^n A_k.$$

\vec{F} ძალის სრული მუშაობა გზის რაიმე სასრულ გადაადგილებაზე გამოითვლება, როგორც შესაბამისი ელემენტარული მუშაობების ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, რომელიც გვაძლევს პირველი გვარის მრუდწირულ ინტეგრალს BC გადაადგილებაზე:

$$A = \int_{BC} (\vec{F} \cdot d\vec{r}), \quad (17.5)$$

ანუ კოორდინატებში:

$$A = \int_{BC} (X dx + Y dy + Z dz) . \quad (17.6)$$

5. აღვნიშნოთ, რომ ძალის სრული მუშაობა საზოგადოდ დამოკიდებულია ძალის მოდების წერტილის

ტრაექტორიაზე; ზოგ შემთხვევაში კი მოდების წერტილის საწყის და საბოლოო მდებარეობაზე.

მაგალითად, სიმძიმის ძალის მუშაობა არ არის დამოკიდებული ტრაექტორიის სახეზე და ტოლია ძალის სიდიდისა და ამ ძალის მოდების წერტილის ვერტიკალური გადაადგილების ნამრავლის:

$$A = mgh \quad (G = mg).$$

ძალებს, რომელთა მუშაობა არ არის დამოკიდებული ტრაექტორიის სახეზე, ეწოდება პოტენციური.

ძალის მიერ დროის ერთეულში შესრულებულ მუშაობას ეწოდება ს ი მ ძ ლ ა ვ რ ე . თუ t დროის განმავლობაში მუშაობა თანაბრად შესრულდა, მაშინ სიმძლავრე გამოისახება ტოლობით:

$$N = \frac{A}{t} . \quad \text{ზოგადად} \quad N = \frac{dA}{dt} = \vec{F}_r \cdot \frac{ds}{dt} =$$

$$\vec{F}_r \cdot \vec{v} .$$

ტერმინი "მუშაობა" (ძალისა და განვლილი მანძილის ნამრავლის სახით) ხმარებაში შემოვიდა მხოლოდ XIX ს-ში.

§ 3.18. კოტენციურ კალთა ველი. კოტენციური ენერგია

ბანსაზღვრბა: სივრცის ნაწილს, რომლის ყოველ წერტილში მოქმედებს რაიმე $\vec{F}(X,Y,Z)$ ძალა, რომელიც ამ წერტილის მდებარეობის ფუნქციაა, ძ ა ლ თ ა ვ ე ლ ი ე წოდება.

ცხადია, ძალის კოორდინატებიც წერტილის მდებარეობის ფუნქციებია:

$$X = X(x,y,z) , \quad Y = Y(x,y,z) , \quad Z = Z(x,y,z).$$

აქ x, y, z - სივრცის M წერტილის კოორდინატებია.

ბანსაზღვრა: *ძალთა ველს ეწოდება პოტენციური (ანუ კონსერვატიული), თუ ამ ველში არსებობს ისეთი უწყვეტი და მკორე რიგამდე უწყვეტად წარმოებადი U ფუნქცია, დამოკიდებული მხოლოდ წერტილის მდებარეობაზე $U=U(x, y, z)$, რომ მისი კერძო წარმოებულები კოორდინატებით, ძალის შესაბამისი კოორდინატების ტოლია:*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z. \quad (18.1)$$

ასეთ U ფუნქციას მოცემული ძალთა ველის ძალოვანი ფუნქცია ანუ პოტენციალი ეწოდება.

ძალოვანი ფუნქციის ფიზიკური შინაარსი შემდეგია: პოტენციურ ველში ძალის ელემენტარული მუშაობისათვის გვაქვს:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = X dx + Y dy + Z dz = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz = dU.$$

მაშასადამე, პოტენციურ ველში ძალის ელემენტარული მუშაობა ტოლია ძალოვანი ფუნქციის სრული დიფერენციალისა:

$$dA = dU. \quad (18.2)$$

გავანტეგროთ ეს ტოლობა BC გზაზე, მივიღებთ

$$A = \int_{BC} dU = U_C - U_B = U - U_0. \quad (18.3)$$

ე.ი. პოტენციურ ველში ძალის სრული მუშაობა ტოლია გზის საწყის და ბოლო წერტილებში პოტენციალთა მნიშვნელობების სხვაობისა.

აქედან გამომდინარეობს, რომ პოტენციურ ველში ძალის მუშაობა არ არის დამოკიდებული იმ გზაზე, რომლის გასწვრივაც ხდება წერტილის გადაადგილება, არამედ დამოკიდებულია გზის საწყის და ბოლო წერტილებში პოტენციალთა მნიშვნელობების სხვაობაზე.

თუ M წერტილის ტრეკტორია შეკრული წირია, მაშინ $U_C = U_B$ და (18.3)-ის თანახმად $A=0$. მაშასადამე პოტენციურ ველში ძალის მუშაობა შეკრულ წირზე ნულის ტოლია.

(18.1) ტოლობებიდან ადვილად მიიღებინ ტოლობები

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}. \quad (18.4)$$

ეს ტოლობები წარმოადგენენ აუცილებელ და საკმარის პირობებს, რომ ძალთა ველი იყოს პოტენციური.

პოტენციურ ძალთა ველის მაგალითებია: ა) სიმძიმის ძალთა ველი; ბ) ზამბარის დრეკადი აღმდგენი ძალის ველი; გ) მიზიდულობის ძალის ველი.

ვექტორს რომლის კოორდინატებია $(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$ ეწოდება

U ფუნქციის გრადიენტი:

$$\text{grad } U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

მაშასადამე. (18.1) -ის თანახმად

$$\vec{F} = \text{grad } U.$$

ეს არის ძალთა ველის პოტენციურობის პირობა.

ძალთა ველში აღებულ სკალარულ Π ფუნქციას, რომელიც სიდიდით ტოლია აღებულ წერტილში პოტენციური ფუნქციისა მოპირდაპირე ნიშნით, ეწოდება პოტენციური ენერჯია.

ე. ი. $\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z)$. ცხადია $d\Pi = -dU$.

მაშასადამე, პოტენციურ ძალთა ველში ძალთა U ფუნქციის მაგივრად შეგვიძლია ვისარგებლოთ პოტენციური Π ენერჯიის ცნებით.

ნივთიერი წერტილის (ან მექანიკური სისტემის) პოტენციური ენერჯია (Π) მის მოცემულ მდებარეობაში უდრის იმ მუშაობას, რომელსაც შეასრულებენ ველში არსებული ძალები წერტილის (სისტემის) მოცემული მდებარეობიდან საწყის მდებარეობაში გადასასვლელად: $A = \Pi_0 - \Pi$.

§ 3.19 კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების თეორემა

კინეტიკური ენერჯია არის სკალარული დადებითი სიდიდე და იგი წარმოადგენს წერტილის (სხეულის) მოძრაობის დინამიკურ მახასიათებელს. კინეტიკური ენერჯია ახასიათებს მექანიკური მოძრაობის შესაძლებლობას გარდაიქმნას სხვა მოძრაობის ეკვივალენტური რაოდენობის ენერჯიაში (პოტენციურ ენერჯიაში, სითბოში და სხვ.).

ბანსაზღვრა: ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯია ეწოდება სკალარულ სიდიდეს, რომელიც ტოლია წერტილის მასისა და სიჩქარის კვადრატის ნამრავლისა

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \quad (19.1)$$

განზომილება [კგმ] ან [გმ].

ბანსაზღვრა: ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერჯია ეწოდება სისტემაში შემავალი წერტილების კინეტიკური ენერჯიების ჯამს

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2. \quad (19.2)$$

1. ნივთიერი წერტილისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა: ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდი რაიმე გადაადგილებაზე ტოლია ამ წერტილზე მოქმედი ძალის მუშაობისა იმავე გადაადგილებაზე.

დამტკიცება. განვიხილოთ m მასის ნივთიერი M წერტილის მოძრაობა, რომელიც \vec{F} ძალის მოქმედებით გადაადგილდება M_0 მდებარეობიდან M მდებარეობაში და შესაბამისად აქვს \vec{v}_0 და \vec{v} სიჩქარეები.

დინამიკის მეორე კანონის თანახმად: $m \vec{w} = \vec{F}$.

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ სკალარულად

$d\vec{r}$ -ზე, გვექნება: $m \vec{w} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(19.3)

აქ მარცხენა მხარე შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$m \vec{w} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m \vec{v} \cdot d\vec{v} = d \left(\frac{m v^2}{2} \right).$$

მაშინ (19.3) ასე ჩაიწერება

$$d \left(\frac{m v^2}{2} \right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (19.4)$$

ანუ $dT = dA$.

მაშასადამე, ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯიის დიფერენციალი ტოლია წერტილზე მოქმედი ძალის ელემენტარული მუშაობისა.

გავაინტეგრიროთ (19.4) ტოლობა გზის $M_0 M$ გადაადგილებაზე. ცვლადების შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის გვექნება:

$$\int_{v_0}^v d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_0M} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

ანუ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

(19.5)

ეს ტოლობა გამოსახავს ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდის თერემას სასრული სახით.

შენიშვნა 1. თუ წერტილზე მოქმედებს რამდენიმე ძალა, მაშინ (19.4) – (19.5) ტოლობების მარჯვენა მხარეში იგულისხმება ამ ძალების ტოლქმედის მიერ შესრულებული მუშაობა.

2. მექანიკური სისტემისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდი დროის რაიმე სასრულ შუალედში უდრის ამ სისტემაზე მოქმედი შიგა და გარე ძალების მუშაობათა ჯამს დროის იმავე შუალედში.

დამტკიცება. ცნობილია სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები: $m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k^{(a)} + \vec{F}_k^{(b)}$; ($k=1,2,\dots,n$)

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ სკალარულად $d\vec{r}_k$ ვექტორზე, გვექნება:

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k \cdot d\vec{r}_k = \vec{F}_k^{(a)} \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^{(b)} \cdot d\vec{r}_k;$$

(19.6)

გვნაიდან

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k \cdot d\vec{r}_k = m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot d\vec{r}_k = m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot d\vec{v}_k = m_k \vec{v}_k \cdot d\vec{v}_k = d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right)$$

ამიტომ (19.6) ასე ჩაიწერება:

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \vec{F}_k^{(a)} \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^{(b)} \cdot d\vec{r}_k; \quad (k=1,2,\dots,n)$$

შევკრიბოთ ეს ტოლობები k -ს ყველა მნიშვნელობისათვის, მივიღებთ:

$$dT = d\left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{(a)} \cdot d\vec{r}_k) + \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{(b)} \cdot d\vec{r}_k).$$

(19.7)

მაშასადამე, სისტემის კინეტიკური ენერჯიის დიფერენციალი ტოლია სისტემის წერტილებზე მოქმედი შიგა და გარე ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამისა.

გავანტეგროთ (19.7) ტოლობა დროის რაიმე (t_0, t) შუალედში და აღვნიშნოთ კინეტიკური ენერჯიის მნიშვნელობები სიტემის საწყის და საბოლოო მდებარეობაში შესაბამისად T_0 და T -თი. მივიღებთ:

$$T - T_0 = \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{(a)} d\vec{r}_k) + \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{(a)} d\vec{r}_k),$$

ანუ

$$T - T_0 = A^{(a)} + A^{(a)} \quad (19.8)$$

ეს ტოლობა გამოსახავს სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდის თეორემას სასრული სახით.

შენიშვნა 1). თუ სისტემა უცვლადია, ე.ი. სისტემის წერტილებს შორის მანძილები მუდმივია (მყარი სხეულებისათვის), მაშინ შიგა ძალების მუშაობათა ჯამი $A^{(a)} = 0$, და გვექნება

$$T - T_0 = A^{(a)}$$

2). კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდის თეორემა სასრული სახით საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის წერტილების სიჩქარეების ცვლილება მისი მოძრაობის დროს, რომელიც გამოწვეულია ამ გადაადგილებაზე შიგა და გარე ძალების მოქმედებით. მექანიკური სისტემის წერტილების აჩქარებების განსაზღვრავად შეგვიძლია გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდის თეორემა დიფერენციალური სახით.

3) თუ ნივთიე წერტილი მოძრაობს ძალთა პოტენციურ ველში და ამ ველში წერტილზე სხვა არავითარი ძალა არ მოქმედებს, მაშინ $dU = -d\Pi$ და

(18.2) –დან გამომდინარე (19.4) ასე ჩაიწერება:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU = -d\Pi, \text{ საიდანაც } d\left(\frac{mv^2}{2} + \Pi\right) = 0,$$

მაშასადამე

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \text{const.} \quad (19.9)$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში კინეტიკური და პოტენციური ენერჯიების ჯამი რჩება მუდმივი და კინეტიკური ენერჯიის ფორმულა საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ, კინეტიკური ენერჯიის რა ნაწილი გადავიდა პოტენციურ ენერჯიაში ან პირიქით.

(19.9) გამოსახავს მექანიკური ენერგიის შენახვის კანონს. ეს კანონი სამართლიანია პოტენციალის მქონე ძალებისათვის. ხშირად ეწოდება კონსერვატული ძალები (ლათინური სიტყვიდან conservare – შენახვა).

ზოგად შემთხვევაში კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამი ცვალებადია, რადგანაც მექანიკური ენერგია შეიძლება გადავიდეს სხვა სახის (სითბურ, ელექტრონულ და სხვ.) ენერგიაში, ან სხვა სახის ენერგია გადავიდეს მექანიკურ ენერგიაში.

ამ განტოლებიდან ჩანს, რომ მუშაობა არის მექანიკური მოძრაობის ის რაოდენობა, რომელიც გადავიდა მოძრაობის სხვა ფორმებში: ე.ი. მუშაობა – ეს არის მოძრაობის ფორმის შეცვლა, გამოსახული მისი რაოდენობრივი მხარით.

§ 3.20. კენიზის თეორემა

გამოვთვალოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია მისი რთული მოძრაობის დროს.

განვიხილოთ n ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობა კოორდინატთა უძრავი (ინერციული) $O_1x_1y_1z_1$ სისტემის მიმართ. ავირჩიოთ კოორდინატთა მეორე, მოძრავი xyz სისტემა სათავით წერტილთა სისტემის მასების C ცენტრში და დაუშვათ, კოორდინატთა $Cxyz$ სისტემა ასრულებს წარმტან- გადატანით მოძრაობას ინერციული $O_1x_1y_1z_1$ სისტემის მიმართ, ე. ი.

წერტილთა სისტემის აბსოლუტური მოძრაობა იშლება ფარდობით და წარმტან გადატანით მოძრაობებად.

M_k

უძრავი საკოორდინატო სისტემის მიმართ

$\vec{r}_{K_{ფ}}$

$$\vec{r}_k = \vec{r}_c + \vec{r}_{K_{ფ}}$$

x

ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ .

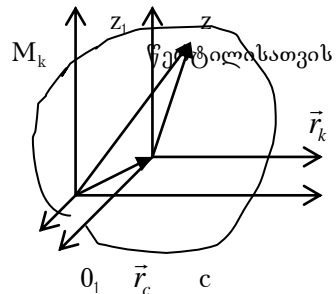
$$\vec{v}_k = \vec{v}_c + \vec{v}_{K_{ფ}} \quad \text{აქ} \quad \vec{v}_{K_{ფ}} = d\vec{r}_{K_{ფ}} / dt \quad y_1$$

x_1

სისტემის კინეტიკური ენერგია იქნება

y :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\vec{v}_c + \vec{v}_{K_{ფ}})^2 =$$



$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 + \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_c \cdot \vec{v}_{K_{\text{გ}}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_{K_{\text{გ}}}^2 .$$

20.1)

აქ, მარჯვენა მხარეში თითოეული შესაკრებისათვის გვექნება:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{k=1}^n m_k = \frac{1}{2} M v_c^2 \quad (M = \sum_{k=1}^n m_k - \text{სისტემის მასა}).$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_c \cdot \vec{v}_{K_{\text{გ}}} &= \vec{v}_c \cdot \sum_{k=1}^n m_k d\vec{r}_{K_{\text{გ}}} / dt. = \vec{v}_c \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_{K_{\text{გ}}} \right) = \\ &= \vec{v}_c \cdot \frac{d}{dt} (M \vec{r}_{c_{\text{გ}}}) = 0 \quad (\text{აქ } \vec{r}_{c_{\text{გ}}} = 0). \end{aligned}$$

აღვნიშნოთ $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_{K_{\text{გ}}}^2 = T_{\text{გ}}$; ეს არის წერტილთა სისტემის

ფარდობითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგია იმ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომელიც ასრულებს წარმტან-გადატანით მოძრაობას მის მასების ცენტრთან ერთად, ე.ი. არის წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგია მასების ცენტრის მიმართ. საბოლოოდ (20.1) ასე ჩაიწერება:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T_{\text{გ}} . \quad (20.2)$$

ეს ტოლობა გამოსახავს კ ე ნ ი გ ი ს თ ე ო რ ე მ ა ს : ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგია მისი აბსოლუტური მოძრაობისას შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს, როგორც მასების ცენტრის კინეტიკური ენერგიისა, თუ ვიგულისხმებთ, რომ მასში თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა და მასების ცენტრის მიმართ ფარდობითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგიის ჯამი.

§3. 21. სხეულის კინეტიკური ენერგია სხვადასხვა მოძრაობის დროს

გამოვიყვანოთ სხეულის კინეტიკური ენერგიის გამოსათვლელი ფორმულები უმარტივესი მოძრაობების შემთხვევაში. ამისათვის გამოვიყენოთ სისტემის კინეტიკური ენერგიის გამოსათვლელი (19.2) ფორმულა.

1. სხეულის გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში დროის აღებულ მომენტში ყველა წერტილს აქვს ერთი და იგივე სიჩქარე და იგი ტოლია მასების ცენტრის სიჩქარისა: $\vec{v}_K = \vec{v}_C$.

ამიტომ გვექნება:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{k=1}^n m_k = \frac{1}{2} M v_c^2 .$$

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 . \quad (21.1)$$

მაშასადამე, გადატანითი მოძრაობის დროს სხეულის კინეტიკური ენერგია ტოლია სხეულის მასისა და მასების ცენტრის სიჩქარის კვადრატის ნამრავლის ნახევრისა.

2. სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო.

ვთქვათ სხეული ბრუნავს უძრავი Oz ღერძის გარშემო და კუთხური სიჩქარით. სხეულის ყოველი M_k წერტილი მოძრაობს r_k რადიუსის წრეწირზე და აქვთ ერთი და იგივე ω კუთხური სიჩქარე; ამიტომ, ყოველი M_k წერტილისათვის $v_k = \omega r_k$. სხეულის კინეტიკური ენერგია იქნება:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \omega^2 r_k^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2 .$$

ე. ი.
$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 . \quad (21.2)$$

აქ $J_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$ - სხეულის ინერციის მომენტია ბრუნვის Oz ღერძის მიმართ.

3. სხეულის ბრტყელი - პარალელური მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მასების ცენტრის (პოლუსის) გადატანითი მოძრაობისა და მასების ცენტრის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობა. ამიტომ კენიგის ფორმულის თანახმად ამ მოძრაობის კინეტიკური ენერგია იქნება:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2 .$$

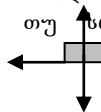
(21.3) აქ $T_{\text{ფ}} = \frac{1}{2} J_c \omega^2$. J_c არის სხეულის

ინერციის მომენტი მასების C ცენტრზე ამ სიბრტყის მართობულად გამავალი ღერძის მიმართ.

ამოცანა 9.1.

არაგლუვ სორიზონტალურ სიბრტყეზე სხეულმა მიიღო საწყისი v_0 სიჩქარე, გაიარა $s=1$ მ მანძილი და გაჩერდა.

განსაზღვრეთ სხეულის საწყისი სიჩქარე (v_0), თუ სრიალის N



სახუნის კოეფიციენტი $f = 0,1$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ წერტილის

F_b

s

კინეტიკური ენერჯის ნაზრდის ფორმულა:

P

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A. \quad (*)$$

ნახ. 69.

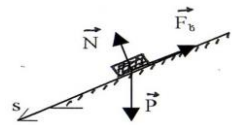
აქ v - წერტილის საბოლოო სიჩქარეა: $v = 0$. A - წერტილზე მოდებული ძალების მუშაობა s გზაზე. წერტილზე მოქმედებს სამი ძალა: სხეულის სიმძიმის ძალა - P , სრიალის სახუნის ძალა - F_b , ზედაპირის ნორმალური რეაქციის ძალა - N . ამ ძალების s გზაზე დაგეგმილების შედეგად მივიღებთ, რომ $A = -F_b s$. სახუნის ძალა $F_b = f N = fP$.

მაშასადამე $A = -f P s = -f mgs$. თუ გავითვალისწინებთ მდებულ მნიშვნელობებს, (*) ტოლობიდან გვექნება: $v_0 = \sqrt{2fgs} = 1,4 \text{ მ/წმ}$.

ამოცანა 9.2. სორიზონტისადმი $\alpha = 30^\circ$ კუთხით დახრილ არაგლუვ სიბრტყეზე საწყისი სიჩქარის გარეშე ეშვება მძიმე სხეული. სახუნის კოეფიციენტი უდრის $0,2$ -ს. როგორი სიჩქარე ექნება სხეულს მოძრაობის დაწყებიდან 2 მ-ის გავლის შემდეგ.

ამოხსნა. პირობის თანახმად: $v_0 = 0$; $f = 0,2$; $s = 2$; $v = ?$ გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერჯის ნაზრდის თეორემა:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A. \quad (*)$$



ნახ. 70.

გამოვთვალოთ სხეულზე მოქმედი ძალების

მუშაობა დახრილ სიბრტყეზე s მანძილზე

ადადგილებისას. სხეულზე მოქმედებს სამი ძალა: სხეულის სიმძიმის ძალა - P , სრიალის სახუნის ძალა - F_b , ზედაპირის ნორმალური რეაქციის ძალა - N . ამ ძალების s გზაზე დაგეგმილების შედეგად მივიღებთ, რომ $A = (P \sin \alpha - F_b) s$. სახუნის ძალა $F_b = f N = fP \cos \alpha$. მაშასადამე $A = (P \sin \alpha - fP \cos \alpha) s$. თუ გავითვალისწინებთ მდებულ მნიშვნელობებს, (*) ტოლობიდან გვექნება ($P = mg$):

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha) s .$$

აქედან $v = \sqrt{2 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) s} = 3,58 \text{ .} \quad v = 3,58 \text{ მ/წ}$

ამოცანა 9.3 ბურთულა, რომელსაც აქვს საწყისი $v_0=14$ მ/წმ სიჩქარე, ვარდება $h_1=1,8$ მ სიმაღლიდან ვერტიკალურად ქვევით სორიზონტალურ იატაკზე და აირეკლება მისგან ზევით.

განსაზღვრეთ ბურთულას სიჩქარე იატაკიდან $h_2=6,8$ მ სიმაღლეზე, თუ მხედველობაში არ მიიღებთ საერის წინაღობას და მექანიკური ენერჯიის სხვა დანაკარგებს.

ამოხსნა. ბურთულაზე მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალა

$$P = mg.$$

ბურთულის ვარდნისას ვერტიკალის OB მონაკვეთზე:

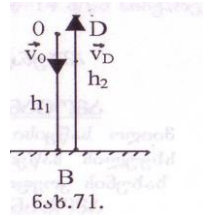
$$mv_B^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = mgh_1 ;$$

$$\text{აქედან: } v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh_1} = 15,2 \text{ მ/წმ};$$

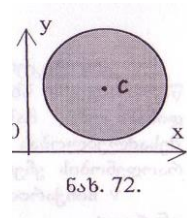
იატაკიდან არეკვლისას ვერტიკალის $BD=h_2$ მონაკვეთზე — მოძრაობისას v_B წარმოადგენს საწყის სიჩქარეს, ხოლო საბოლოო სიჩქარეა v_D . გზის $BD = h_2$ მონაკვეთზე მოძრაობისას:

$$mv_D^2 / 2 - mv_B^2 / 2 = -mgh_2 ;$$

$$\text{აქედან: } v_D = \sqrt{v_B^2 - 2gh_2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} . \quad \text{პასუხი: } \underline{v_D = 7\sqrt{2} \text{ მ/წმ}}.$$



ამოცანა 9.4. $R=0,2$ მ რადიუსის და $M=20$ კგ მასის ერთგვაროვანი დისკო სორიზონტალურ Oxy სიბრტყეში ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას კანონით: $x_c = t$, $y_c = t^2$, $\varphi = t^3$ (x_c , y_c - დისკოს C ცენტრის კოორდინატებია მეტრებში, t - წამებში, φ - რადიანებში). განსაზღვრეთ დისკოს კინეტიკური ენერჯია დროის $t=1$ წმ მომენტში.



ამოხსნა. დისკო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას;

მისი კინეტიკური ენერჯია ასე გამოისახება

$$T = Mv_c^2 / 2 + J_c \omega^2 / 2; \quad (*)$$

v_c - დისკოს მასების ცენტრის სიჩქარეა;

$$\overline{v_c} = \sqrt{v_{cx}^2 + v_{cy}^2} ;$$

$$v_{cx} = dx_c/dt = 1; \quad v_{cy} = dy_c/dt = 2t; \quad \overline{v_c} = \sqrt{1 + 4t^2} ;$$

$$t = 1 \text{ წმ მომენტში} \quad \overline{v_c} = \sqrt{5}$$

დისკოს ინერციის მომენტი მისი მასების C ცენტრის მიმართ

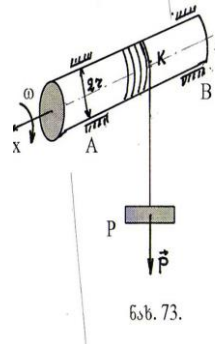
$$J_c = 1/2 \cdot MR^2 = 0,4 \text{ კგმ}^2 .$$

ω არის C ცენტრის გარშემო დისკოს ბრუნვის კუთხური სიჩქარე: ω = dφ/dt = 3t² ; t = 1 წმ მომენტში ω = 3 წმ⁻¹.

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (*) ტოლობაში, გვექნება:

$$T = 1/2 \cdot 20 \cdot 5 + 1/2 \cdot 0,4 \cdot 3^2 = 51,8 . \quad T = 51,8 \text{ ჯოული.}$$

ამოცანა 9.5. Q წონის ლილვზე დახვეული თოკის ბოლოში მიბმულია P წონის ტვირთი, რომელიც ეშვება ქვევით და თან აბრუნებს ლილვს ω კუთხური სიჩქარით. ლილვის რადიუსია r. განსაზღვრეთ ტვირთისა და ლილვისაგან შედგენილი სისტემის კინეტიკური ენერჯია.



ამოხსნა. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან; მისი კინეტიკური ენერჯია

$$T = T_1 + T_2; \quad (*)$$

აქ T₁ - ტვირთის კინეტიკური ენერჯიაა,

T₂ - ლილვის კინეტიკური ენერჯია.

ტვირთი ასრულებს გადატანით მოძრაობას სიჩქარით:

$$v_p = v_k = \omega r .$$

(k არის ლილვის ფერსოზე მდებარე წერტილი, რომელიც მოძრაობს r რადიუსიან წრეწირზე);

$$T_1 = T_{\text{ტვ}} = 1/2 \cdot m_1 v_p^2 = P/2g \cdot (\omega r)^2 = P \omega^2 r^2 / 2g .$$

ლილვი წარმოადგენს უძრავი x ღერძის გარშემო მბრუნავ წრიულ ცილინდრულ სხეულს; ამიტომ:

$$T_2 = T_{\text{ლილვ}} = 1/2 \cdot J_x \omega^2 . \quad (**)$$

აქ J_x არის ლილვის ინერციის მომენტი ბრუნვის x ღერძის მიმართ:

$$J_x = 1/2 \cdot m_2 r^2 = Q r^2 / 2g .$$

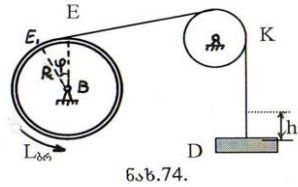
(**) – დან გვექნება: $T_2 = 1/2 \cdot Q r^2 \omega^2 / 2g = Q / 4g \cdot r^2 \omega^2 .$

(*) – დან მივიღებთ: $T = T_1 + T_2 = P \omega^2 r^2 / 2g + Q r^2 \omega^2 / 4g = \omega^2 r^2 / 4g \cdot (2P + Q) .$

პასუხი: $T = \omega^2 r^2 / 4g \cdot (2P + Q) .$

ამოცანა 9.6.

74-ე ნახაზზე გამოსახულია ჯალამბრის ამწე მექანიზმი. m_1 მასის D ტვირთი აიწევა ზევით C ბლოკზე გადაკიდებული R რადიუსის და m_2 მასის B დოლზე დახვეული გვარლის საშუალებით. დოლზე მოდებულია მაბრუნე $L_{ბრ}$ მომენტი, რომელიც ჩართვის მომენტიდან დოლის მობრუნების φ კუთხის კვადრატის პროპორციულია: $L_{ბრ} = a \varphi^2$, სადაც a მუდმივი კოეფიციენტია. განსაზღვრეთ D ტვირთის სიჩქარე (v_D) იმ მომენტში, როცა იგი ავა h სიმაღლეზე. B დოლის მასა ჩათვალეთ თანაბრად განაწილებულად მის ფერსოზე. C ბლოკი m_3 მასის მთლიანი დისკოა. ჩათვალეთ, რომ გვარლი უჭიმადი და უწონადია. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია.



ამოხსნა.

D ტვირთის სიჩქარის განსაზღვრად გამოვიყენოთ ნივთიერი სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდის თეორემა.

$$T - T_0 = A^a + A^b . \tag{1}$$

რადგანაც საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია, ამიტომ $T_0 = 0$.

სისტემაში შემავალი სხეულები აბსოლუტურად მყარი სხეულებია; გვარლი უჭიმადი და უწონადია; ამიტომ შიგა ძალების მუშაობათა ჯამი $A^a = 0$. (1) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს : $T = A^b .$ (2)

გამოვთვალთ სისტემის კინეტიკური ენერჯია (T) იმ მომენტში, როცა D ტვირთი ავა h სიმაღლეზე.

სისტემა შედგება B დოლის, C ბლოკისა და D ტვირთისაგან; ამიტომ სისტემის კინეტიკური ენერჯია $T = T_D + T_C + T_B .$ (3)

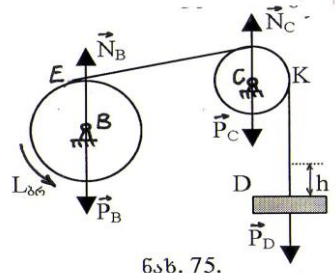
D ტვირთი მოძრაობს გადატანითად, მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_D = 1/2 \cdot m_D v_D^2 = 1/2 \cdot m_1 v_D^2 \quad (4)$$

C ბლოკი ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო, მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_C = 1/2 \cdot J_C \omega_C^2; \quad (5)$$

აქ J_C არის დისკოს (ბლოკის) ინერციის მომენტი C წერტილის მიმართ:



$J_C = 1/2 \cdot m_3 r^2$, (r – ბლოკის რადიუსია). ω_C არის C დისკოს ბრუნვის კუთხური სიჩქარე. როგორც ნახაზიდან ჩანს, D ტვირთსა და C ბლოკის ფერსოზე მდებარე K წერტილს აქვთ ერთი და იგივე სიჩქარე: $v_D = v_K = \omega_C r$. იგივე საზოგადო სიჩქარე აქვს B დოლის ფერსოზე მდებარე E წერტილსაც:

$$v_E = v_D = v_K. \quad \omega_C = v_K / r = v_D / r .$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (5) ფორმულაში, მივიღებთ

$$T_C = 1/2 \cdot 1/2 \cdot m_3 r^2 \cdot v_D^2 / r^2 = 1/4 \cdot m_3 v_D^2 . \quad (6)$$

B დოლი ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო; მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_B = 1/2 \cdot J_B \omega_B^2 . \quad (7)$$

J_B – დოლის ინერციის მომენტია მისი ბრუნვის ღერძის მიმართ.

ვინაიდან დოლის მასა თანაბრად განაწილებულია მის ფერსოზე, ამიტომ დოლის ინერციის მომენტი გამოითვლება წვრილი წრიული რგოლის ინერციის მომენტის საანგარშო ფორმულით: $J_B = m_3 R^2$.

ω_B – დოლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა: $\omega_B = v_E / R = v_D / R$ ($v_E = v_K = v_D$)..

$$(7) - \text{დან მივიღებთ: } T_B = 1/2 \cdot m_2 R^2 \cdot (v_D / R)^2 = m_2 v_D^2 / 2 . \quad (8)$$

შევიტანოთ (4), (6) და (8) მნიშვნელობები სისტემის კინეტიკური ენერგიის გამოსათვლელ (3) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$T = 1/2 \cdot m_1 v_D^2 + 1/4 \cdot m_3 v_D^2 + 1/2 \cdot m_2 v_D^2 \quad \text{ანუ}$$

$$T = 1/4 \cdot (2m_1 + 2m_2 + m_3) v_D^2 . \quad (9)$$

ახლა გამოვთვალოთ სისტემაზე მოდებული ყველა გარე ძალის მუშაობათა ჯამი ($A^{\text{გ}}$) მოცემულ გადაადგილებაზე (როცა D ტვირთი ავა h სიმაღლეზე). ცხადია

$$A^{\text{გ}} = A_D + A_C + A_B . \quad (10)$$

ნახაზზე გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალა (ნახ.75).... D ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A_D = - P_D h = - m_3gh.$$

C ბლოკის სიმძიმის ძალა და რეაქციის ძალა მოდებულნი არიან უძრავ C საკისარში; ამიტომ $A_C=0$. B დოლზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა,

საკისარის რეაქცია და მაბრუნებელი მომენტი $L_{\text{გ}}$. სიმძიმისა და რეაქციის ძალები მოდებულნი არიან უძრავ საკისარში და მათი მუშაობა ნულის ტოლია; მაბრუნებელი მომენტის მიერ შესრულებული მუშაობა იქნება:

$$A_B = A_{\text{გ}} = \int_0^{\varphi} L_{\text{გ}} d\varphi = \int_0^{\varphi} a\varphi^2 d\varphi = a/3 \cdot \varphi^3 ;$$

(11)

აქ φ არის დოლის შემობრუნების კუთხე. როცა D ტვირთი აიწევს ზევით h მანძილზე, B დოლი შემობრუნდება φ კუთხით, რომელსაც შეესაბამება h სიგრძის EE_1 რკალი ; ამიტომ $EE_1 = h = R\varphi$, საიდანაც $\varphi = h / R$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (11) -ში, მივიღებთ: $A_B = ah^3 / 3R^3$.

A_D , A_C და A_B -ს მიღებული მნიშვნელობების გათვალისწინებით სისტემაზე მოქმედი ძალების სრული მუშაობა (10) ასე გამოისახება:

$$A^{\text{გ}} = - m_3gh + ah_3/3R_3 .$$

(12)

(2) ტოლობის თანახმად, (9) და (12) მნიშვნელობათა გატოლებით მივიღებთ:

$$1/4 \cdot (2m_1 + 2m_2 + m_3) v_D^2 = - m_3gh + ah_3/3R_3;$$

საიდანაც

$$v_D = \sqrt{4h(ah^2 - 3m_1R^3g) / 3R^3 (2m_1 + 2m_2 + m_3)} .$$

მყარი სხეულის დინამიკა

თავისუფალ მყარ სხეულს სივრცეში აქვს თავისუფლების ექვსი ხარისხი, ე. ი. სხეულის მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება ექვსი ურთიერთდამოუკიდებელი პარამეტრით. ასეთ პარამეტრებად უმეტეს შემთხვევაში იღებენ სხეულის მასების ცენტრის კოორდინატებს (x_c, y_c, z_c) და ეილერის კუთხეებს (φ, ψ, θ).

მყარი სხეულის დინამიკის ამოცანების ამოსახსნელად საჭიროა ამ ექვსი პარამეტრის დამაკავშირებელი განტოლებების მოძებნა, რომელთა რიცხვიც უნდა იყოს ექვსი. ამ განტოლებების მისაღებად გამოვიყენებთ სისტემის მასების ცენტრის მოძრაობისა და სისტემის კინეტიკური მომენტის თეორემებს:

$$M \vec{w}_C = \vec{F}^{(s)} \quad \text{და} \quad \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{L}^{(s)}.$$

ამ განტოლებების დაგვემიღებთ დეკარტეს კოორდინატა სისტემის ღერძებზე ვიღებთ საძებნ ექვს განტოლებას.

შევისწავლოთ მყარი სხეულის უმარტივესი მოძრაობანი.

§ 3.22. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა

უთქვამთ მასის სხეული $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალების მოქმედებით ასრულებს გადატანით მოძრაობას. ამ ძალების ნაკრები ვექტორი იყოს $\vec{F}^{(s)} (X^{(s)}, Y^{(s)}, Z^{(s)})$.

გადატანითად მოძრაობისას სხეულის ყველა წერტილი აღწერს ერთი და იგივე ტრაექტორიას და დროის ნებისმიერ აღებულ მომენტში ყველა წერტილს აქვს ერთნაირი სიჩქარე და ერთნაირი აჩქარება. ამიტომ, მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის შესასწავლად საკმარისია მისი ერთი რომელიმე წერტილის მოძრაობის შესწავლა. ასეთ წერტილად ავიღოთ სხეულის მასების ცენტრი, რომლის კოორდინატებია $C (x_c, y_c, z_c)$.

მასების ცენტრის მოძრაობის თეორემის თანახმად გვაქვს

$$M \vec{w}_C = \vec{F}^{(s)} \quad . (22.1)$$

ამ განტოლების დაგვემიღებთ საკოორდინატო ღერძებზე მივიღებთ:

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = X^{(s)}, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = Y^{(s)}, \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = Z^{(s)}.$$

ეს განტოლებები წარმოადგენენ მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის განტოლებებს. მათი საშუალებით სავსებით ამოიხსნება მყარი

სხეულის გადატანითი მოძრაობის ორივე ამოცანა, თუ მოცემული იქნება მოძრაობის საწყისი პირობები.

§3.23. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო

განვიხილოთ მყარი სხეული, რომელიც $Oxyz$ სივრცეში $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალების მოქმედებით ბრუნავს Oz ღერძის გარშემო. ვგულისხმობთ, რომ სხეული ჩამაგრებულია Oz ღერძზე მდებარე ორ O და O_1 წერტილში.

უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავ მყარ სხეულს გააჩნია თავისუფლების ერთი ხარისხი – ღერძის გარშემო მობრუნების φ კუთხე.

შევადგინოთ უძრავი Oz ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის განტოლება; ამისათვის გამოვიყენოთ ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის (კინეტიკური ნომენტის) თეორემა. ვიგულისხმობთ, რომ სხეული რაიმე წესით დანაწილებულია მცირე ნაწილებად (ნივთიერ წერტილებად). მაშინ კინეტიკური მომენტის თეორემა Oz ღერძის მიმართ ასე ჩაიწერება:

$$\frac{dl_z}{dt} = L_z . \quad (23.1)$$

აქ l_z - სხეულის კინეტიკური მომენტია Oz ღერძის მიმართ, ხოლო L_z - სხეულზე მოქმედი აქტიური ძალების ნაკრები მომენტი Oz ღერძის მიმართ (სხეულის ჩამაგრების O და O_1 წერტილების რეაქციის ძალების მომენტები Oz ღერძის მიმართ ნულების ტოლია)

როგორც ვიცით (§3.13 – ფორმულა 13.5)

$$l_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k y'_k - y_k x'_k) . \quad (23.2)$$

აქ m_k – სხეულის M_k ნაწილის მასაა, ხოლო x_k, y_k – მისი კოორდინატები. უძრავი Oz ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვისას ყოველი M_k ნაწილი მოძრაობს შესაბამის r_k რადიუსის წრეწირზე, ამიტომ

$$x_k = r_k \cos \varphi , \quad y_k = r_k \sin \varphi .$$

ვინაიდან

$$\begin{aligned} x'_k &= - r_k \sin \varphi \cdot \varphi' = - r_k \sin \varphi \cdot \omega, \\ y'_k &= r_k \cos \varphi \cdot \varphi' = r_k \cos \varphi \cdot \omega, \end{aligned}$$

ამიტომ (23.2)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$l_z = \sum_{k=1}^n m_k(x_k^2 + y_k^2) \cdot \omega$$

ანუ

$$l_z = J_z \omega. \quad (23.3)$$

აქ J_z არის სხეულის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ, ხოლო ω - სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

შევიტანოთ (23.3) მნიშვნელობა (23.1) ტოლობაში, გვექნება:

$$\frac{d}{dt}(J_z \omega) = L_z, \quad \text{ანუ} \quad J_z \frac{d\omega}{dt} = L_z.$$

თუ ამ ტოლობაში შევიტანოთ ω -ს მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = L_z, \quad \text{ანუ} \quad J_z \varepsilon = L_z. \quad (23.4)$$

ეს განტოლება არის უძრავი Oz ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება.

ε - ბრუნვის კუთხური აჩქარებაა.

თუ ცნობილია Oz ღერძის გარშემო მახრებელი მომენტი L_z და ბრუნვის საწყისი პირობები, მაშინ (23.4) განტოლებიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ ბრუნვის კანონი, ე. ი. φ კუთხე, როგორც დროის ფუნქცია.

თუ სხეულზე მოქმედი აქტიური ძალების ნაკრები მომენტი Oz ღერძის მიმართ ნულის ტოლია $L_z = 0$, მაშინ (23.4)-დან

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \quad \text{საიდანაც} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} = \omega_0$$

აქ ინტეგრებით მივიღებთ სხეულის თანაბარი ბრუნვის განტოლებას

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t.$$

შენიშვნა: თუ (23.4) განტოლებას შევადარებთ სხეულის გადატანითი მოძრაობის (1) განტოლებას ვნახავთ, რომ სხეულის ბრუნვით მოძრაობაში ინერციის მომენტი იმავე როლს ასრულებს, რასაც სხეულის მასა გადატანითი მოძრაობის დროს.

§3. 24. მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობა

მყარი სხეული შეასრულებს ბრტყელ მოძრაობას თუ მასში არსებობს ბრტყელი კვეთა, რომლის მიმართაც სხეულის მასა სიმეტრიულადაა განაწილებული; სხეულზე მოდებული ძალები მოთავსებულია ამ კვეთის სიბრტყეში, ხოლო სხეულის ყველა წერტილის საწყისი სიჩქარე მოთავსებულია კვეთის სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებში.

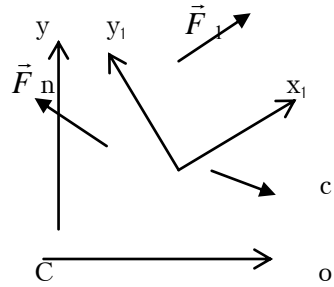
განვიხილოთ (D) სხეული, რომელიც ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას კოორდინატთა უძრავო Oxy სისტემის მიმართ. სხეულთან უძრავად დაკავშირით კოორდინატთა Cx_1y_1 სისტემა, რომელიც სხეულთან ერთად მოძრაობს. წერტილი $C(x_c, y_c)$ – სხეულის მასების ცენტრია.

როგორც კინემატიკიდან ცნობილია, ბრტყელი მოძრაობისას, სხეულის მდებარეობა საკვებით განისაზღვრება მასების C ცენტრის x_c და y_c კოორდინატებით და Cx_1 ღერძის Ox ღერძის მიმართ მობრუნების φ კუთხით.

ვთქვათ, სხეულზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორია $\vec{F}(X, Y)$. (D) სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შესადგენად გამოვიყენებთ სხეულის მასების ცენტრის მოძრაობისა და კინეტიკური მომენტის თეორემები:

$$\vec{w}_c = \vec{F}; \quad J_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = L_c. \quad (24.1)$$

აქ M – სხეულის მასაა, \vec{w}_c – მასების ცენტრის აჩქარება, J_c – სხეულის ინერციის მომენტი Oxy სიბრტყის მართობულად x



წერტილზე გამავალი ღერძის მიმართ. L_c – სხეულზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი C წერტილის მიმართ.

დავაგვიყენოთ (24.1) ტოლობები კოორდინატთა უძრავი Oxy სისტემის ღერძებზე:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = X, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = Y, \quad J_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = L_c. \quad (24.2)$$

ეს განტოლებები წარმოადგენენ მყარი სხეულის ბრტყელ მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს.

ამ განტოლებების ინტეგრებით და მიღებული მუდმივების მოძრაობის საწყისი პირობებით განსაზღვრის შედეგად მივიღებთ მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის კინემატიკურ განტოლებებს:

$$x_c = f_1(t), \quad y_c = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

თუ სხეული ასრულებს არათავისუფალ მოძრაობას, მაშინ სხეულზე მოქმედ აქტიურ ძალებს დაემატებათ ბმის რეაქციის ძალები რომელთა ტოლქმედია \vec{R} , და სხეულის ბრტყელი მოძრაობის (242) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = X + R_x, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = Y + R_y, \quad J_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = L_c + \text{მომც } \vec{R} ..$$

ამ განტოლებებს უნდა დაემატოს ბმის განტოლებები.

ანალიზური მექანიკა

§ 3.25 ძირითადი ცნებები და განსაზღვრებები

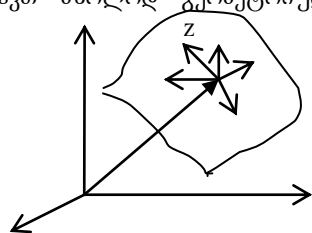
დინამიკის ძირითადი თეორემები და მათი შედეგები წარმოადგენენ სისტემის მოძრაობის კვლევის საკმაოდ ძლიერ იარაღს, მაგრამ ამ თეორემების გამოყენება დაკავშირებულია გარკვეულ სირთულეებთანაც. მაგალითად, ხშირად ძნელია დადგენა თუ მოცემულ შემთხვევაში რომელი თეორემა მიგვიყვანს მიზნამდე სწრაფად; ზოგჯერ საჭირო ხდება განტოლებათა რიცხვის გაზრდა, ან კიდევ ისეთი უცნობი სიდიდეების შემოყვანა (მაგალითად, რეაქციის ძალების), რომელთა განსაზღვრა ამოცანის პირობით არ მოითხოვება.

ანალიზური მექანიკა იძლევა ზოგად მეთოდებს, რომელთა დახმარებითაც შეიძლება შევადგინოთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები (რომლებიც მაგალითად, არ შეიცავენ ბმის რეაქციებს). ანალიზური მექანიკის მეთოდები ხელსაყრელია როგორც თეორიული კვლევისათვის, ასევე პრაქტიკულ საინჟინრო გამოთვლებში.

ანალიზური მექანიკა ადგენს მოძრაობისა და წონასწორობის შესწავლის ზოგად, საერთო მეთოდებს, რომლებიც გამოიყენებიან ყველა ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის. ანალიზურ მექანიკაში გამოყენებული განტოლებები ერთი და იგივე სტრუქტურისაა. მიუხედავად სისტემის მოძრაობისა და მათზე დადებული პირობებისა.

ანალიზური მექანიკის ყველა თეორემა და განტოლება გამომდინარეობს ზოგიერთი ძირითადი ცნებისა და წინადადებისაგან.

უკვე განხილული გვაქვს ბმების კლასიფიკაცია. შემდგომში, თუ დამატებით არ იქნა აღნიშნული, განვიხილავთ მხოლოდ გეომეტრიულ (სოლონომურ) სტაციონარულ ბმებს.



ანალიზურ მექანიკაში ფართოდ იხმარება $\delta \vec{r}$
 M მესაძლო გადაადგილებების კონსტანტა.

ეს ცნება შემოვიღოთ ჯერ ერთი წერტილისათვის.

\vec{r} განვიხილოთ ნივთიერი M წერტილი, $h_j - 0$
 x

მელიც მოძრაობს კოორდინატთა $OXYZ$ სისტემაში $f(x,y,z)=0$ ზედაპირზე. ეს ტოლობა M წერტილისათვის წარმოადგენს გეომეტრიული სტაციონარული ბმის განტოლებას. ვთქვათ, M წერტილის მდებარეობა ამ ზედაპირზე განისაზღვრება $\vec{r}(x,y,z)$ რადიუს-ვექტორით.

განვიხილოთ დროის რაღაც ფიქსირებული მომენტში წერტილის მდებარეობა ამ ზედაპირზე და წარმოვიდგინოთ რა ელემენტარული, უსასრულოდ მცირე გადაადგილებები შეუძლია მიიღოს ამ წერტილმა ისე, რომ ბმა არ დაირღვეს. თუ ამ გადაადგილებებს აღვნიშნავთ $\delta \vec{r}$ ვექტორებით, მაშინ ისინი განლაგდებიან აღებულ M წერტილში ზედაპირისადმი გავლებულ მხებ სიბრტყეში და ამავე დროს წარმოადგენენ \vec{r} რადიუს-ვექტორის ნაზრდებს (ვარიაციებს). ამ $\delta \vec{r}$ ვექტორებს ეწოდება წერტილის შესაძლო გადაადგილებები.

აღვნიშნოთ რომელიმე $\delta \vec{r}$ ვექტორის კოორდინატები $\delta x, \delta y, \delta z$ -ით, ე.ი. $\delta \vec{r} = \delta \vec{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$. ის პირობა, რომ M წერტილმა მიიღო რაღაც $\delta \vec{r}$ შესაძლო გადაადგილება, რომლის დროსაც არ ირღვევა წერტილზე დადებული ბმა, ასე ჩაიწერება:

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) = 0.$$

ბანსაზღვრა 1. ნივთიერი წერტილის მესაძლო გადაადგილებები ეწოდება მის იმ უსასრულოდ მცირე გადაადგილებებს, რომლის დროსაც არ ირღვევა წერტილზე დადებული ბმები.

შესაძლო $\delta \vec{r}$ გადაადგილება არის t დროის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის აღებული წერტილის წარმოსახვითი გადაადგილება. წერტილის ნამდვილი გადაადგილება დროში ეწოდება ისეთ უსასრულოდ მცირე $d\vec{r}$ გადაადგილებას, რომელსაც წერტილი სინამდვილეში იღებს მოცემული ბმის დროს. ცხადია $d\vec{r}$ გადაადგილება ემთხვევა ერთ-ერთ შესაძლო $\delta \vec{r}$ გადაადგილებას.

ანალოგიურად განისაზღვრება ნივთიერ წერტილთა სისტემის შესაძლო გადაადგილება სასრული რაოდენობის ბმების შემთხვევაში.

ბანსაზღვრა 2. ნივთიერ წერტილთა სისტემის შესაძლო გადაადგილება ეწოდება სისტემის წერტილების ისეთ უსასრულოდ მცირე გადაადგილებებს, რომლებიც არ არღვევენ სისტემაზე დადებულ ბმებს.

შემდგომისათვის, სისტემის k -ური წერტილის შესაძლო გადაადგილების ვექტორი აღვნიშნოთ $\delta \vec{r}_k(dx_k, dy_k, dz_k)$ -ით, ხოლო ნამდვილი გადაადგილებისა $d\vec{r}_k(dx_k, dy_k, dz_k)$ -ით.

საერთოდ ჩავთვალოთ, რომ $\delta \vec{r}_k$ და $- \delta \vec{r}_k$ ერთი და იგივეა.

ანალიზურ მექანიკაში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ცნება არის ძალის შესაძლო მუშაობის ცნება.

ბანსაზღვრა 3. M წერტილზე მოქმედი $\vec{F}(X, Y, Z)$ ძალის შესაძლო მუშაობა რაიმე $\delta \vec{r}$ გადაადგილებაზე ეწოდება სკალარულ

სიდიდეს
$$\delta A = (\vec{F} \cdot \delta \vec{r})$$
 (25.1)

ანუ კოორდინატებში
$$\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$
 (25.1')

ვთქვათ, დროის ადებული ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის მოცემულ მდებარეობაში მყოფ n ნივთიერ წერტილთა სისტემაზე მოქმედებს ძალთა სისტემა $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, ხოლო სისტემის წერტილები იღებენ შესაძლო $\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2, \dots, \delta \vec{r}_n$ გადაადგილებებს, მაშინ სისტემის შესაძლო მუშაობა ეწოდება ამ ძალების მიერ შესაძლო გადაადგილებებზე შესრულებულ ელემენტარულ მუშაობათა ჯამს

$$\delta A = \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k)$$

(25.2)

ანუ კოორდინატებში
$$\delta A = \sum_{k=1}^n (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k).$$
 (25.2')

მექანიკის მრავალი საკითხის შესწავლისას საჭიროა დამატებითი პირობები, რომლებიც შედარებით ამცირებენ ბმების მქონე ამოცანებში ბმის რეაქციების რიცხვს, ან სულ გამორიცხავენ მათ. ამ მიზნით შემოვიღოთ იდეალური ბმის ცნება.

ბანსაზღვრა 4. ნივთიერ წერტილთა სისტემაზე დადებულ ბმებს ეწოდებათ იდეალური, თუ ამ ბმების რეაქციების მიერ

შესრულებული ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე ნულის ტოლია.

თუ სისტემის M_K წერტილზე მოქმედი რეაქციის ძალა არის \vec{R}_K , მაშინ იდეალური ბმის პირობა ყოველ შესაძლო $\delta \vec{r}_K$ გადაადგილებაზე იქნება

$$\sum_{k=1}^n (\vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k) = 0, \quad (25.3)$$

ანუ კოორდინატებში
$$\sum_{k=1}^n (R_{kx} \delta x_k + R_{ky} \delta y_k + R_{kz} \delta z_k) = 0. \quad (25.3')$$

იდეალური ბმის მაგალითებია - გლუვი ზედაპირი; სისტემის ორი წერტილის შემაერთებელი მყარი ღერო; ზედაპირი იმ სხეულისათვის, რომელიც მასზე უსრიალოდ მიგორავს.

შემდგომისათვის ვიგულისხმებთ, რომ ნივთიერ წერტილთა სისტემა იმყოფება წონასწორობაში, თუ საწყის მომენტში ყველა წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია და ყოველ წერტილზე მოქმედი ძალების ჯამი ნულს უდრის.

ვთქვათ n ნივთიერ წერტილთა $M_k(x_k, y_k, z_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) სისტემა კოორდინატთა $OXYZ$ ინერციულ სივრცეში ემორჩილება v რაოდენობის იდეალურ, სოლონომურ (გეომეტრიულ) სტაციონარულ ბმას:

$$f_i(x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, v). \quad (25.4)$$

ეს ნიშნავს, რომ წერტილთა სისტემის $3n$ კოორდინატი შეკავშირებულია v რაოდენობის ბმების განტოლებებით ($v < 3n$). მაშასადამე დამოუკიდებელ კოორდინატთა რიცხვია $s=3n-v$, რომელთაც შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობა. ეს დამოუკიდებელი კოორდინატები განსაზღვრავენ განსახილველი სისტემის მდებარეობას. დანარჩენი v კოორდინატი (25.4)–დან გამოისახება, როგორც ამ s კოორდინატის ფუნქცია.

განსაზღვრა 5. მოცემული სისტემისათვის დამოუკიდებელ კოორდინატთა რიცხვს ამ სისტემის თავისუფლების ხარისხი რიცხვი ეწოდება.

შემოვიღოთ s რაოდენობის დამოუკიდებელი პარამეტრები q_1, q_2, \dots, q_s , რომელთა საშუალებითაც განისაზღვრება ნივთიერ წერტილთა სისტემის მდებარეობა. ამ პარამეტრებს ეწოდებათ სისტემის განზოგადებული კოორდინატები. მათი საშუალებით (25.4) –დან გამოისახება სისტემის ყველა $M_k(x_k, y_k, z_k)$ წერტილის დეკარტის კოორდინატები და მაშასადამე, M_k წერტილის \vec{r}_k რადიუს-ვექტორი

$$(25.4) \quad \vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad (k=1,2,\dots,n) .$$

თუ ბმა არასტაციონარულია

$$(25.6) \quad \vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t),$$

\vec{r}_k -ს სრული ვარიაცია გამოისახება ტოლობით:

$$(25.7) \quad \delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (k=1,2,\dots,n).$$

წერტილთა სისტემის მოძრაობის განტოლებებს განზოგადებულ კოორდინატებში ასეთი სახე აქვთ

$$q_i = q_i(t), \quad q_2 = q_2(t), \dots, \quad q_s = q_s(t) .$$

განზოგადებული კოორდინატების წარმოებულებს დროით განზოგადებული სიჩქარეები ეწოდებათ.

თუ (41.2) ტოლობაში შევიტანთ $\delta \vec{r}_k$ -ს (41.7) მნიშვნელობას,

$$(25.8) \quad \delta A = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^n \left(\vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j .$$

$$(25.9) \quad \text{გამოსახულებას} \quad Q_j = \sum_{k=1}^n \left(\vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right)$$

ეწოდება Q_j განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალა .

(41.8) ასე ჩაიწერება

$$(25.10) \quad \delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s .$$

1. განზოგადებული ძალა შეიძლება გამოთვალეთ უშუალოდ (25.9) ფორმულით (ჩავწეროთ კოორდინატებში):

$$(25.11) \quad Q_j = \sum_{k=1}^n \left(\vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^n (X_k \partial x_k / \partial q_j + Y_k \partial y_k / \partial q_j + Z_k \partial z_k / \partial q_j) .$$

2. Q_j ძალის განსაზღვრისათვის მივცეთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, როცა $\delta q_j \neq 0$, ხოლო $\delta q_i = 0$, როცა $i \neq j$. მაშინ (25.10) ასე ჩაიწერება $\delta A = Q_j \delta q_j$, საიდანაც

$$Q_j = \delta A / \delta q_j .$$

3. თუ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალა პოტენციურია, მაშინ

$$Q_j = \partial \Pi / \partial q_j ,$$

სადაც $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$ – სისტემის პოტენციური ენერგიაა.

§3.26 შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი წარმოადგენს ნივთიერ წერტილთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას. სტატიკაში განხილულ წონასწორობის ჩვეულებრივ განტოლებებთან შედარებით შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ იგი მარტივად გამოიყენება როგორც ერთი, ისე რამდენიმე სხეულის სისტემის წონასწორობის შესასწავლად. ეს პრინციპი თეორემის სახით ასე ჩამოყალიბდება:

თეორემა. გეომეტრიული, სტაციონარული და იდეალური ბმების მქონე სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალის მუშაობათა ჯამი ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე იყოს ნულის ტოლი, ე.ი.

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k) = 0, \quad (26.1)$$

ანუ გვემთხვევა

$$\sum_{k=1}^n (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k).$$

შენიშვნა: შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის დახმარებით შეიძლება განისაზღვროს იდეალური ბმის რეაქცია, თუ ბმას უკუვაგდებთ და ამ ბმის რეაქციას მიუერთებთ აქტიურ ძალების რიცხვს.

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი განზოგადებულ კოორდინატებში. თუ გავითვალისწინებთ (25.2) და (25.10) ტოლობებს, მაშინ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის გამომსახველი (26.1) პირობა განზოგადებულ კოორდინატებში მიიღებს შემდეგ სახეს

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = 0. \quad (26.2)$$

ვინაიდან განზოგადებული q_1, q_2, \dots, q_s კოორდინატები ურთიერთდა მოუკიდებლები არიან, ამიტომ მათი ვარიაციებიც ურთიერთდამოუკიდებლები არიან. ამიტომ (26.2) ტოლობა სამართლიანია მაშინ, როცა ყველა $Q_j = 0$, ე.ი.

$$(26.3) \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_s = 0.$$

მაშასადამე, გეომეტრიული სტაციონარული, იდეალური ბმების მქონე ნივთიერ წერტილთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის ყველა განზოგადებული ძალა ნულის ტოლი იყოს.

თუ სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციურია, მაშინ სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი (26.3) პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\partial \Pi / \partial q_1 = 0, \quad \partial \Pi / \partial q_2 = 0, \quad \dots, \quad \partial \Pi / \partial q_s = 0.$$

§3.27 მამანის ზოგადი განტოლება

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი დალაშქრის პრინციპის საშუალებით შეიძლება განვაზოგადოთ მოძრავი სისტემისათვის.

დალაშქრის პრინციპი საშუალებას გვაძლევს სისტემის წონასწორობის პირობა განვიხილოთ, როგორც ნამდვილი და მაშასადამე, გამოვიყენოთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი. ამის საფუძველზე ჩამოვყალიბოთ მ ე ქ ა ნ ი კ ი ს ზ ო გ ა დ ი კ ა ნ ო ნ ი:

გეომეტრიული ბმების მქონე სისტემის ყოველი მდებარეობისათვის ყველა მოცემული (აქტიური) ძალის, რეაქციის ძალის და ინერციის ძალის მიერ შესრულებული ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე ნულის ტოლია:

$$(27.1) \quad \sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k) \delta \bar{r}_k = 0,$$

ამ განტოლებას ეწოდება დ ი ნ ა მ ი კ ი ს ზ ო გ ა დ ი კ ა ნ ო ნ ე ბ ა.

თუ სისტემა ემორჩილება იდეალურ ბმებს, მაშინ გვექნება:

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \delta \bar{r}_k = 0,$$

$$(27.2) \quad \text{ანუ} \quad \sum_{k=1}^n (\bar{F}_k - m_k \bar{W}_k) \delta \bar{r}_k = 0,$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა გეგმილებში ასე ჩაიწერება:

$$(27.3) \quad \sum_{k=1}^n [(X_k - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}) \delta x_k + (Y_k - m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}) \delta y_k + (Z_k - m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2}) \delta z_k] = 0.$$

(27.2) ანუ (27.3) განტოლებას უწოდებენ მ ე ქ ა ნ ი კ ი ს ზ ო გ ა დ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს, რადგანაც მასში გაერთიანებულია როგორც სტატიკის, ისე დინამიკის განტოლებები. მას ხშირად უწოდებენ დალამბერ – ლაგრანჟის განტოლებას.

შენიშვნა: 1) თუ სისტემას გააჩნია არაიდეალური ბმები, მაგალითად, ხახუნით, მაშინ დინამიკის ზოგადი განტოლება იმავე სახით შეგვიძლია

გამოვიყენოთ, ოღონდაც, არაიდეალური ბმის რეაქციები (მაგალითად, ხახუნის ძალა) მივაკუთვნოთ აქტიურ ძალების რიცხვს;

2) თუ სისტემის ბმებს შორის არის არადამჭერი ბმები, მაშინ შესაძლო გადაადგილებებს მივაკუთვნებთ მხოლოდ იმ გადაადგილებებს, რომლებზეც სისტემა ბმებისაგან არ თავისუფლდება. დინამიკის ზოგადი განტოლებიდან, როგორც შედეგი, შეიძლება მივიღოთ დინამიკის ზოგადი თეორემები და მექანიკური სისტემის დიფერენციალური განტოლებები.

§3.28 ლაგრანჟის მორე ბჰარის განტოლებები

მექანიკის ზოგადი განტოლება, რომელიც გამოსახავს დალამბერ–ლაგრანჟის გაერთიანებულ პრინციპს, შესაძლებლობას იძლევა გამოვიყენოთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ისე, რომ მხედველობაში არ მივიღოთ იდეალური ბმის რეაქციები. მექანიკის ზოგადი განტოლების გამოყენება რამდენიმე თავისუფლების ხარისხის სისტემის მოძრაობის შესასწავლად ზოგჯერ მოუხერხებელია (რადგანაც გვჭირდება ინერციის ძალების შემოყვანა და ამასთანავე, მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ დეკარტის კოორდინატების ვარიაციები ერთმანეთთან დაკავშირებულია), ძნელი ხდება დამოუკიდებელი განტოლებების გამოყოფა. ამიტომ, ასეთ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია ვისარგებლოთ არა მექანიკის ზოგადი განტოლებით, არამედ მისგან გამომდინარე ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს მ ე ო რ ე გ ვ ა რ ი ს განტოლებებით, სადაც ეს წინააღობები ზოგადად დაძლეულია.

ვთქვათ მოცემულია n ნივთიერ წერტილთა $M_k(x_k, y_k, z_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) სისტემა, რომელიც ემორჩილება იდეალურ, სოლონომურ (გეომეტრიულ) არასტაციონარულ ბმებს. სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი იყოს s . ეს ნიშნავს, რომ არსებობს s განზოგადებული კოორდინატი q_1, q_2, \dots, q_s , რომლებიც განსაზღვრავენ სისტემის მდებარეობას სივრცეში.

თუ ვისარგებლებთ (25.6), (25.7), (25.9) ტოლობებით, მაშინ მექანიკის ზოგადი განტოლება

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k - m_k \vec{W}_k) \delta \vec{r}_k = 0$$

გარკვეული გარდაქმნების შემდეგ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j= 1,2,\dots,s).$$

(28.1)

სადაც $T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, q'_1, q'_2, \dots, q'_s, t)$ - სისტემის კინეტიკური ენერჯიაა, ხოლო Q_j - სისტემის განზოგადებული ძალა.

ეს განტოლებები არიან ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები განზოგადებულ კოორდინატებში, ანუ როგორც მათ უწოდებენ ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს მ ე ო რ ე გ ვ ა რ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ი. განტოლებათა (28.1) სისტემა შეიცავს იმდენ განტოლებას, რამდენი თავისუფლების ხარისხიც აქვს სისტემას. ეს განტოლებები ამასთანავე არ შეიცავენ რეაქციის ძალებს.

ამ განტოლებების უპირატესობა ადრე მიღებულ სისტემის მოძრაობის სხვა განტოლებებთან შედარებით იმაში მდგომარეობს, რომ მათი სახე და რაოდენობა არ არის დამოკიდებული არც მოცემულ სისტემაში შემავალ სხეულთა (ან წერტილთა) რაოდენობაზე, არც მათი მოძრაობის ხასიათზე. ლაგრანჟის განტოლებების რიცხვი განისაზღვრება მხოლოდ სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვით.

თუ ნივთიერ წერტილთა სისტემა მოძრაობს პოტენციურ ძალთა ველში, მაშინ არსებობს ძალთა ფუნქცია U , რომელსაც შეესაბამება პოტენციური ენერჯია $\Pi = - U$ და განზოგადებული ძალისათვის გვაქვს

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j= 1,2,\dots,s).$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (28.1) განტოლებაში და შემოვიღოთ აღნიშვნა $L = T + U = T - \Pi$.

L -ს ეწოდება ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ა (ან კინეტიკური პოტენციალი).

მხედველობაში მივიღოთ, რომ

$$- \frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad \text{ე.ი.} \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

(44.1) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j= 1,2,\dots,s) .$$

(28.2)

~~ეს განტოლებები წარმოადგენენ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებს, როდესაც არსებობს ძალთა ფუნქცია. პოტენციურ ძალთა ველში მოძრავი სისტემისათვის ამ დიფერენციალური განტოლებების შესაღებნად საკმარისია ვიცოდეთ მხოლოდ ერთი ფუნქცია – ლაგრანჟის ფუნქცია.~~

ლიტერატურა

1. დ.დოლიძე, თეორიული მექანიკის მოკლე კურსი, თბილისი, 1956.
2. ნ.ვეკუა, თეორიული მექანიკა, თბილისი, 1956.
3. ნ.მუსხელიშვილი, თეორიული მექანიკის კურსი, პირველი ნაწილი, 1930, მეორე ნაწილი, 1932.
4. ა.გორგიძე, თეორიული მექანიკის კურსი, წიგნი 1, 1990, წიგნი 2, 1993.
5. ნ .მასვილაძე. თეორიული მექანიკის კურსი, სტატიკა-კინემატიკა, (ლექციების კონსპექტი), 2002 წ.
6. ნ.მასვილაძე. თეორიული მექანიკის კურსი, დინამიკა, (ლექციების კონსპექტი), 2002წ.
7. А.А.Яблонский , В.М. Никифорова. Курс теоретической механики. Часть 1,2. Москва «Высшая школа»1984
8. Н.В.Бутенин, Я.Л.Лунц, Д.Р.Меркин. Курс теоретической механики. Часть 1,2.Москва «Наука» 1985
9. С.М.Тарг. Краткий курс теоретической механики. Москва 1970