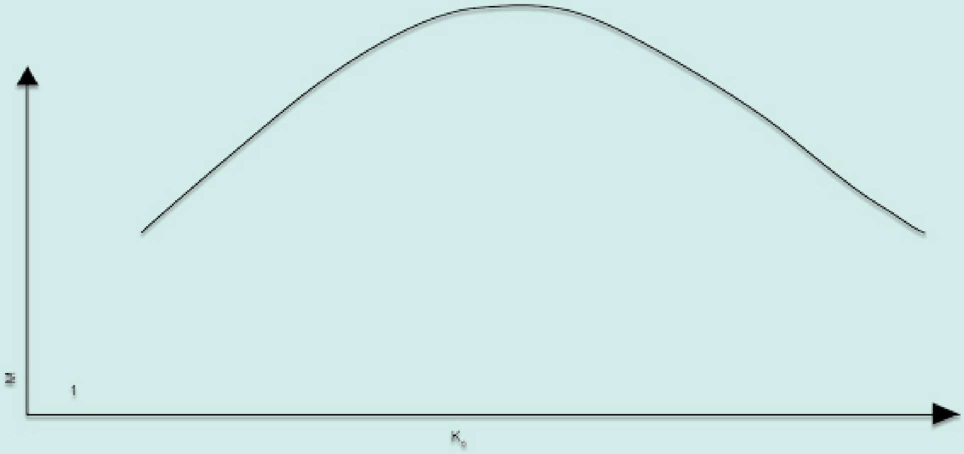
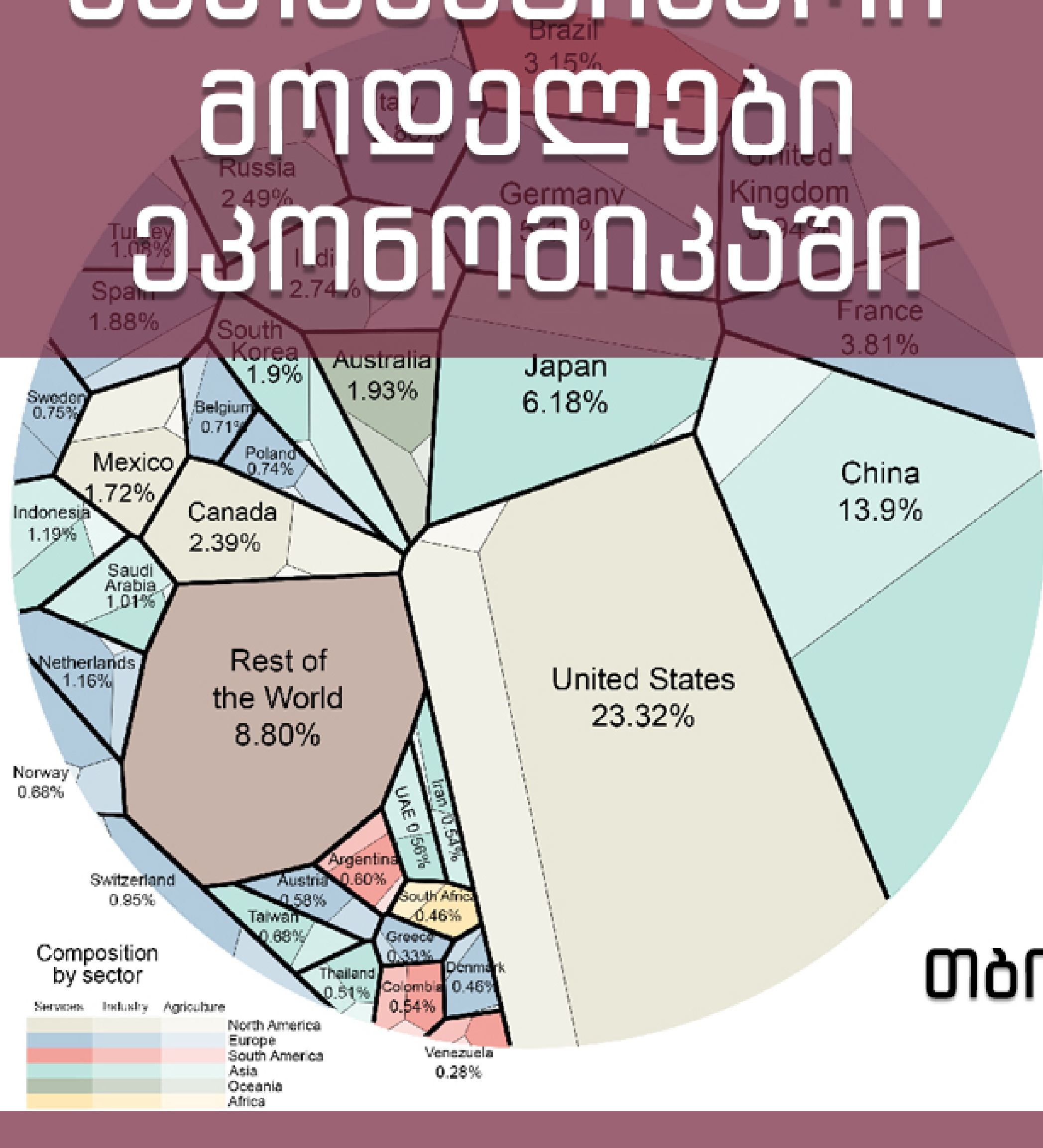
სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თემურ ჩილაჩავა



მათემატიკური მოდელები ეკონომიკაში



თბილისი
2018

სსიპ სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თემურ ჩილაჩავა

მათემატიკური მოდელები ეკონომიკაში

თბილისი

2018

ნაშრომში განხილულია საფინანსო-ეკონომიკური პროცესებთან დაკავშირებული უწყვეტი და დისკრეტული მათემატიკური მოდელები. კერძოდ: წრფივი დაპროგრამების ამოცანები; მაქსიმალური მოგების მიღების მოდელი; ოპტიმალური რაციონის მოდელი; დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მოდელი; საერთაშორისო ვაჭრობის რიკარდოს მოდელი; სტოუნის მომხმარებლის არჩევანის მოდელი; ქვეყნის მოსახლეობის შემოსავლის განსაზღვრის მოდელი; ქობ-დაგლასის და ლეონტიევის საწარმოო ფუნქციები; ეკონომიკური დინამიკის წონასწორობის მოდელი; ბაზრის მუშაობის ობობას ქსელისებრი მოდელი; სამომხმარებლო საქონლების ბაზრის ვალრასის დინამიური მოდელები; ერთი საქონლის ბაზრის ვალრასი - ევანსი - სამუელსონის დინამიური მოდელები; ალენისა და მარშალის ერთი საქონლის ბაზრის დინამიური უწყვეტი მოდელები; ფასების რხევების მოდელი; მაკროეკონომიკური დინამიკის ჰაროდი - დომარის მოდელი;
კეინსის დინამიური მოდელი; სამუელსონ - ჰიქსის დისკრეტული მოდელი; მაკროეკონომიკური დინამიკის სოლოუს არაწრფივი მოდელი; საწარმოს მუშაობის არაწრფივი მოდელი.

განკუთვნილია მათემატიკის, გამოყენებითი მათემატიკის, კომპიუტერული ტექნოლოგიების, ეკონომიკური სპეციალობების საბაკალავრო, სამაგისტრო, სადოქტორო პროგრამების სტუდენტებისათვის. დაეხმარება ასევე პროფესორებს მოცემულ დისციპლინაში სალექციო, პრაქტიკული და სასემინარო მეცადინეობების ჩასატარებლად.

რეცენზენტი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი ჰამლეტ მელაძე

სარჩევი

შესავალი

თანამედროვე ეკონომიკური თეორია, როგორც მიკრო ასევე მაკრო დონეზე, შეიცავს მათემატიკურ მოდელებს და მეთოდებს როგორც ბუნებრივად აუცილებელ ელემენტებს [1, 6, 8, 18 19].

მათემატიკური მოდელების გამოყენება ეკონომიკაში იძლევა საშუალებას:

1^0. გამოვყოთ და ფორმალურად აღვწეროთ ეკონომიკური ცვლადებისა და ობიექტების ყველაზე მნიშვნელოვანი, არსებითი კავშირები; ამასთან, რთული ობიექტის შესწავლა ითვალისწინებს აბსტრაქციის უმაღლეს ხარისხს;

2^0. მკაფიოდ ფორმულირებულ საწყისი მონაცემებიდან და თანაფარდობებიდან დედუქციის მეთოდებით მიიღება დასკვნები, რომლებიც ადეკვატურია განხილული ობიექტისა;

3^0. მათემატიკური მეთოდები იძლევა საშუალებას ინდუქტიური გზით მივიღოთ ობიექტზე ახალი ცოდნა: შევაფასოთ ფორმა და მისი ცვლადების დამოკიდებულების პარამეტრები, რომლებიც უმაღლეს ხარისხში შეესაბამება არსებულ დაკვირვებებს.

4^0. მათემატიკური ენის (აპარატი) გამოყენება ზუსტად და კომპაქტურად იძლევა საშუალებას ავხსნათ ეკონომიკური თეორიის დებულებები, მისი ცნებები და დასკვნები.

მათემატიკურ მოდელებს ილუსტრაციული და კვლევითი მიზნებით იხილავდნენ ადრე: ფ.კენე (1758, "ეკონომიკური ცხრილი"), ა.სმიტი (კლასიკური მაკროეკონომიკური მოდელი), დ.რიკარდო (საერთაშორისო ვაჭრობის მოდელი).

XIX საუკუნეში საბაზრო ეკონომიკის მოდელირებაში დიდი წვლილი შეიტანა მათემატიკურმა სკოლამ (ლ. ვალრასი, ო.კურნო, ვ.პარეტო , ფ. ეჯუორტი და სხვა).

XX საუკუნეში მოდელირების მათემატიკური მეთოდები ფართოდ გამოიყენება ეკონომიკაში, მათ გამოყენებასთან დაკავშირებულია ყველა ნაშრომი, რომელიც აღინიშნა ნობელის პრემიით ეკონომიკის დარგში.

1968 წელს შვედეთის სამეფო ბანკმა, დაარსების 300 წლისთავის აღსანიშნავად, დააფუძნა **ნობელის სახელობის პრემია ეკონომიკაში** (ოფიციალური დასახელება: ალფრედ ნობელის სახელობის შვედეთის სამეფო ბანკის პრემია ეკონომიკურ მეცნიერებებში).

პირველი პრემია **1969 წელს** მიენიჭა ჰოლანდიელს **იან ტინბერგენს (1903 – 1994)** და ნორვეგიელ **რაგნარ ფრიშს (1895 – 1973)**, **„ეკონომიკური პროცესების ანალიზისთვის დინამიკური მოდელების შემუშავებისა და გამოყენებისთვის“.**

ნორვეგიელი ეკონომისტი და ეკონომეტრისტი **რაგნარ ფრიში** ეკონომეტრიკის – მეცნიერების, რომელიც შეისწავლის მათემატიკური მოდელებისა და სტატისტიკური მეთოდების გამოყენებას ეკონომიკურ მონაცემებთან მიმართებაში – პიონერს წარმოადგენდა. მასვე ეკუთვნის ტერმინები **„ეკონომეტრიკა“** და **„მაკროეკონომიკა“.** ის თანამედროვე ეკონომიკური მეცნიერების ერთ-ერთი დამაარსებელია. მას სახელი გაუთქვა დიდმასშტაბიანი ეკონომეტრიკული მოდელების შემუშავებამ, რომლებიც ეკონომიკურ დაგეგმვასა და ეროვნული შემოსავლის აღრიცხვასთან იყო კავშირში. მის ინტერესების სფეროში შედიოდა სავაჭრო ციკლები, საწარმოო თეორია, სამომხმარებლო ქცევა და სტატისტიკა.

ჰოლანდიელი ეკონომისტი **იან ტინბერგენსი** ცნობილია თავისი ეკონომეტრიკული მოდელებით. მას ეკუთვნის პირველი ეროვნული ყოვლისმომცველი მაკროეკონომიკული მოდელი, რომელიც მან თავდაპირველად 1936 წელს შექმნა ნიდერლანდებისთვის, ხოლო

მოგვიანებით გამოიყენა აშშ-სა და დიდი ბრიტანეთისთვის. მან პირველმა შემოიტანა განსხვავება სამიზნე მაჩვენებლებსა და ინსტრუმენტებს შორის და ხაზი გაუსვა იმ გარემოებას, რომ სამიზნე მაჩვენებლებისა და მათი სასურველი მნიშვნელობის მიღწევისთვის გამოყენებულ ინსტრუმენტთა რაოდენობა ტოლი უნდა იყოს. ეს ცნებები და პრინციპები დღესაც გამოიყენება მსოფლიოს ცენტრალური ბანკების მიერ საკუთარი მოდელების შემუშავებისას.

1972 წელს **კენეტ ეროუმ** (1921 – 2017) და **ჯონ ჰიქსმა** (1904 – 1989), მიიღეს **ნობელის პრემია** შრომათა ციკლისათვის *„წონასწორობისა და კეთილდღეობის ზოგადი თეორიის შექმნისათვის“.*

1973 წელს **ვასილი ლეონტიევმა** (1905 -1999) მიიღო ნობელის პრემია *„დარგთაშორისი ბალანსის მათემატიკური მოდელი“ -ის შექმნისათვის.*

1974 წელს **ჯონ ფორბს ნეშმა** (1928 – 2015) მიიღო ნობელის პრემია ნაშრომთა ციკლისათვის *„თამაშებში ოპტიმალური სტრატეგიების კვლევის მათემატიკური მეთოდი*“.

1975 წელს **ლეონიდე კანტოროვიჩმა (1912 – 1986) და ტიალინგ ჩარლ კუპმანსმა (1910 – 1985)** მიიღეს ნობელის პრემია ნაშრომთა ციკლისათვის *„წრფივი დაპროგრამება, სურსათის ოპტიმალური განაწილების თეორია“.*

1987 წელს **რობერტ სოლოუმ** (1924 -) მიიღო ნობელის პრემია ნაშრომთა ციკლისათვის *„ფუნდამენტური კვლევებისათვის ეკონომიკური ზრდის თეორიაში“.*

2005 წელს **რობერტ აუმანმა** (1930 -) და **ტომას შელინგმა** (1921 – 2016) მიიღეს ნობელის პრემია ნაშრომთა ციკლისათვის *„კონფლიქტისა და კოოპერაციის პრობლემების გაგება ანალიზის მეშვეობით თამაშთა თეორიის ფარგლებში“.*

2007 წელს **როჯერ მაერსონმა** (1951 -) მიიღო ნობელის პრემია ნაშრომთა ციკლისათვის *„ოპტიმალური მექანიზმების საფუძვლების თეორიის შექმნისთვის“.*

ეკონომიკური თეორიიდან ცნობილია, რომ ბაზარი ეფექტურია, თუმცა რესურსების არანაირი განაწილება არ იძლევა იმის შესაძლებლობას, რომ ბაზრის მონაწილეებმა გაიუმჯობესონ თავიანთი მდგომარეობა არსებული ფასების გათვალისწინებით. ეს საკითხი განიხილეს სწორედ **ლოიდ შეპლიმ (1923 – 2016) და ელვინ როტმა,** რისთვისაც **2012 წელს** ნობელის პრემია მიიღეს ნაშრომთა ციკლისთვის ***„მდგრადი განაწილებისა და ბაზრის მოდელირების პრაქტიკაში წვლილისათვის“.*** მათ განიხილეს ორმხრივი ბაზრები, სადაც ურთიერთქმედებენ ქალები და კაცები, მომუშავეები და ფირმები, სტუდენტები და უნივერსიტეტები და ა.შ. ამ შემთხვევაში ბაზარი მოიაზრება არამხოლოდ ეკონომიკური კუთხით. ეკონომიკისათვის დაწერილმა ამ თეორიამ შემდგომ სხვა სფეროებშიც ჰპოვა გამოყენება.

2013 წლის ნობელის სახელობის პრემია ეკონომიკაში მიენიჭა სამ მეცნიერს – იუჯინ ფამას (1939 -), ლარს პეტერ ჰანსენსა და რობერტ შილერს ნაშრომთა ციკლისათვის **„აქტივების ფასების ემპირიული ანალიზისთვის“.**

ამერიკელი ეკონომისტი **იუჯინ ფამა** ცნობილია თავისი მოღვაწეობით პორტფელის თეორიასა და აქტივების ფასწარმოქმნაში. ითვლება ე.წ. **„ეფექტიანი ბაზრების ჰიპოთეზის“** შემქმნელად. ამ ჰიპოთეზის მიხედვით არსებული ინფორმაცია დაუყოვნებლივ და სრულად აისახება აქტივის (ფასიანი ქაღალდის) საბაზრო ღირებულებაში. **ი. ფამამ** შემოიტანა ბაზრის ეფექტიანობის სამი ტიპი – სუსტი, როდესაც აქტივის ფასი ასახავს აქტივთან დაკავშირებულ მთელ ისტორიულ ინფორმაციას; ნახევრად-ძლიერი – როდესაც აქტივის ფასი ასახავს ისტორიულ და მიმდინარე საჯარო ინფორმაციას აქტივის შესახებ; ძლიერი – როდესაც აქტივის ფასი ასახავს მთლიან ინფორმაციას აქტივის შესახებ – ისტორიულ, მიმდინარე საჯაროსა და ინსაიდერულს.

შედეგად, ეფექტიანი ბაზრების შემთხვევაში შეუძლებელია შემოსავლები მუდმივად აღემატებოდეს საშუალო საბაზრო ამონაგებს.

ამერიკელი ეკონომისტი **ლარს ჰანსენი** (1952 -), ცნობილია მომენტების განზოგადოებული მეთოდის (GMM – Generalized Method of Moments) შექმნით. ეს მეთოდი ფართოდ გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როდესაც მაქსიმალური მსგავსობის მეთოდი (Maximum Likelihood Estimation) გამოუყენებადია რთული და კომპლექსური ეკონომიკური მონაცემების შემთხვევაში. მან აჩვენა, თუ როგორ შეიძლება მომენტების პირობების გამოყენება (როდესაც პირობითი მოსალოდნელი მნიშვნელობები ნულის ტოლი უნდა იყოს პარამეტრების ჭეშმარიტი მნიშვნელობებისთვის) გონივრული და ვალიდური ესტიმატორების გამოთვლისთვის.

ამერიკელი ეკონომისტი **რობერტ შილერი** (1946 -), ცნობილი თავისი მოღვაწეობით აქტივების ფასების თეორიაში. თავისი წიგნის **„ირაციონალური სწრაფი ზრდა“** (Irrational Exuberance) ორ სხვადასხვა გამოცემაში მან სწორად იწინასწარმეტყველა და აღწერა თავდაპირველად ე.წ. **დოტკომ ბუშტი,** ხოლო შემდგომ – უძრავი ქონების ბუშტი. 2000 წლის გამოცემაში მან ხაზი გაუსვა გარემოებას, რომ სააქციო ბაზრები გადაფასებული იყო და ბუშტის გასკდომა უახლოეს მომავალში გარდაუვალი იყო – რაც მოხდა კიდეც წიგნის გამოქვეყნებიდან რამდენიმე დღეში. 2005 წლის გამოცემაში მან მიაქცია ყურადღება იმ ფაქტს, რომ აშშ-ში ბევრგან მედიანური შემოსავალი 6 - 9-ჯერ ნაკლები იყო, ვიდრე უძრავი ქონების მედიანური ფასები, ხოლო უძრავი ქონების ინფლაციაზე კორექტირებული ფასების ამონაგები წელიწადში 1%-ზე ნაკლები იყო. ამ ინფორმაციაზე დაყრდნობით მან იწინასწარმეტყველა უძრავი ქონების ბუშტის სწრაფი გასკდომა. 2007-2008 წლებში ასეც მოხდა, რამაც მნიშვნელოვანი ტრიგერის როლი ითამაშა 2008- 2009 წლების გლობალურ ფინანსურ კრიზისში. შილერის ნაშრომები მოიცავს მრავალ თემას ბიჰევიერისტული ფინანსებიდან რისკ-მენჯმენტამდე. ის

დღევანდელობის 100 ყველაზე გავლენიანი ეკონომისტის რიცხვში შედის.

მათემატიკური მოდელები, რომლებიც გამოიყენება ეკონომიკაში მოდელირებადი ობიექტის თავისებურებების, მოდელირების მიზნებისა და გამოყენებული ინსტრუმენტების ნიშნების მიხედვით, იყოფა შემდეგ კლასებად: მაკრო და მიკროეკონომიკური; თეორიული და გამოყენებითი; ოპტიმიზაციური და წონასწორული; სტატისტიკური და დინამიკური მოდელები.

მაკროეკონომიკური მოდელი აღწერს ეკონომიკას როგორც ერთიან ერთეულს, აკავშირებს ერთმანეთთან გამსხვილებულ მატერიალურ და ფინანსურ მაჩვენებლებს: მოხმარება, ინვესტიციები, საპროცენტო განრიგი, ფულის მასა და სხვა.

მიკროეკონომიკური მოდელი აღწერს ეკონომიკის სტრუქტურული და ფუნქციონალური მდგენელების ურთიერთმოქმედებას ან ცალკეული ასეთი მდგენელის ქცევას საბაზრო გარემოში. თეორიული მოდელები იძლევა საშუალებას შევისწავლით დასკვნებისა და ფორმალური წანამძღვრების დედუქციის მეშვეობით ეკონომიკისა და მისი მახასიათებელი ელემენტების თვისებები. გამოყენებითი მოდელები იძლევა საშუალებას შევაფასოთ კონკრეტული ეკონომიკური ობიექტის ფუნქციონირების პარამეტრები და გავაკეთოთ რეკომენდაციები პრაქტიკული გადაწყვეტილებების მისაღებად. გამოყენებით მოდელებს უპირველეს ყოვლისა მიეკუთვნება ეკონომეტრიკული მოდელები, რომლებიც იყენებენ ეკონომიკური ცვლადების რიცხვით მნიშვნელობებს და სტატისტიკურად აფასებენ მათ არსებული დაკვირვებების საფუძველზე.

საბაზრო ეკონომიკის მოდელირებაში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია წონასწორობის მოდელებს. ისინი აღწერენ ეკონომიკის ისეთ მდგომარეობას, როცა ყველა ძალის ტოლქმედი, რომლებიც ცდილობენ მის გამოყვანას წონასწორობიდან, მიისწრაფვის ნულისაკენ. არასაბაზრო ეკონომიკაში უწონასწორობა ზოგიერთი პარამეტრით (მაგალითად, დეფიციტი) კომპენსირდება სხვა ფაქტორებით (შავი ბაზარი, რიგები,...). წონასწორული მოდელი დესკრიპტულია, აღმწერილობითია. ოპტიმიზაცია საბაზრო ეკონომიკის თეორიაში გამოიყენება მიკროდონეზე (მომხმარებლის სარგებლიანობის მაქსიმიზაცია ან ფირმის მოგება); მიკროდონეზე ეკონომიკური სუბიექტების ქცევის რაციონალური არჩევის შედეგია ზოგიერთი წონასწორული მდგომარეობა.

სტატისტიკურ მოდელებში აღიწერება ეკონომიკური ობიექტის მდგომარეობა კონკრეტულ მომენტში ან დროის გარკვეულ პერიოდში.

დინამიკური მოდელი შეიცავს ეკონომიკური ცვლადების ურთიერთკავშირს დროში.

სტატისტიკურ მოდელებში, როგორც წესი, ფიქსირდება რიგი სიდიდეების მნიშვნელობები, რომლებიც დინამიკაში ცვლადია - მაგალითად, კაპიტალური რესურსები, ფასები და ა.შ. დინამიკური მოდელი არ დაიყვანება რიგი სტატისტიკური მარტივი ჯამისკენ, არამედ აღწერს ძალებს და ურთიერთქმედებას ეკონომიკაში, რომლებიც განსაზღვრავენ მასში პროცესების მსვლელობას. როგორც წესი, დინამიკური მოდელი იყენებს დიფერენციალური და სხვაობიანი განტოლებების აპარატს, აგრეთვე ვარიაციულ აღრიცხვას.

დეტერმინირებული მოდელი ვარაუდობს მოდელის ცვლადთა შორის ხისტ ფუნქციონალურ კავშირებს [1,6]. სტოქასტური მოდელი უშვებს

შემთხვევითი მოქმედებების არსებობას გამოკვლევად მაჩვენებლებზე და იყენებს მათი აღწერისათვის ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის აპარატს [8].

მათემატიკური ეკონომიკა მეცნიერების განყოფილებაა, რომელიც დაკავებულია ეკონომიკური პროცესების მათემატიკური მოდელების თვისებების და ამოხსნების ანალიზით. მათემატიკური ეკონომიკა განცალკევებულია ეკონომეტრიკისაგან, რომელიც დაკავებულია ეკონომიკური დამოკიდებულებებისა და მოდელების სტატისტიკური შეფასებით და ანალიზით ემპირიული მონაცემების შესწავლის საფუძველზე.

მათემატიკური ეკონომიკის მოდელებს შორის შეიძლება გამოვყოთ ორი მსხვილი კლასი - ეკონომიკურ სისტემებში წონასწორობის მოდელი და ეკონომიკური ზრდის მოდელი. წონასწორობის მოდელი (მაგალითად, ეროუ-დებრეს მოდელი; "ხარჯვა-გამოშვების" ლეონტიევის მოდელი) გვეხმარება ისეთი ეკონომიკური სისტემების შესწავლაში, რომელშიც ყველა გარე ძალის ტოლქმედი ნულის ტოლია. ეს, რომ ვთქვათ, სტატიკური მოდელებია, ხოლო ეკონომიკური დინამიკა აღიწერება ზრდის მოდელების მეშვეობით (ჰაროდი-დომარის მოდელი; სოლოუს მოდელი; მაგისტრალური ტიპის მოდელი,...). ზრდის მოდელების კვლევის არსებითი მომენტია სტაციონარული ზრდის ტრაექტორიების ანალიზი და პოვნა (ზრდა მუდმივი სტრუქტურული მახასიათებლებით), რომლისკენ მიისწრაფება მოდელით აღწერილი ეკონომიკური სისტემა. სტაციონარული ზრდის ტრაექტორიების გამოკვლევა ერთდროულად წარმოადგენს ბაზას ზრდის უფრო რთული ტიპების ანალიზისათვის და დამაკავშირებელი რგოლია ეკონომიკური წონასწორობის მოდელებთან, რადგანაც ასეთი ტრაექტორიების მოძებნა ტოლფასია გარკვეული სახით ცვალებადი

წონასწორული მდგომარეობის განსაზღვრისა. მნიშვნელოვანი წვლილი ზრდის თეორიაში შეიტანეს ფონ ნეიმანმა, სოლოუმ, გეილმა, მორიშიმამ და სხვებმა.

პირველი შრომები ეკონომეტრიკაში გამოჩნდნენ XIX საუკუნის ბოლოს, XX საუკუნის დასაწყისში. 1897 წელს გამოჩნდა ეკონომიკურ თეორიაში მათემატიკური სკოლის ფუძემდებლის ვილფრედო პარეტოს (1848 – 1923) ნაშრომი, რომელიც ეძღვნება სხვადასხვა ქვეყანაში მოსახლეობის შემოსავლების სტატისტიკურ შესწავლას. შემოთავაზებული იყო პარეტოს წირი $y=A(x-a)^{-\alpha}$, სადაც **x** - შემოსავლის სიდიდეა, **y** - იმ პირთა რაოდენობაა, რომელთა შემოსავალი აღემატება **x**-ს, a - მინიმალური შემოსავალია, $A>0$ და $\alpha>0$ - დამოკიდებულების პარამეტრებია, რომლებიც მიიღება სტატისტიკური მეთოდით.

დღევანდელ დღეს ეკონომეტრიკული მოდელები და მეთოდები არა მარტო მძლავრი ინსტრუმენტია ეკონომიკაში ახალი ცოდნის მისაღებად, არამედ ფართოდ გამოყენებადი აპარატია პროგნოზირებაში, საბანკო საქმეში, ბიზნესში პრაქტიკული გადაწყვეტილებების მისაღებად.

§1. წრფივი დაპროგრამების ამოცანები

ოპტიმიზაციური ამოცანა არის ეკონომიკო-მათემატიკური ამოცანა, რომელიც მდგომარეობს მიზნობრივი ფუნქციის ოპტიმალური (მაქსიმალური ან მინიმალური) მნიშვნელობის პოვნაში, ამასთან ცვლადთა მნიშვნელობები უნდა ეკუთვნოდეს დასაშვებ მნიშვნელობათა ზოგიერთ არეს [1].

ზოგადი სახით ამოცანის მათემატიკური დასმა შემდეგია:

$$\mathbf{U = f(X) \rightarrow \ max} \text{ ან } \mathbf{min} \qquad (1.1)$$

$$\mathbf{X \in W, X = (x_1, x_2, \ldots x_n),}$$

$\mathbf{W - (x_1, x_2,\ldots x_n)}$ ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობათა არეა,

$\mathbf{f(X)}$ - მიზნობრივი ფუნქციაა.

იმისათვის, რომ ამოვხსნათ ოპტიმიზაციის ამოცანა (1.1) საკმარისია ვიპოვოთ მისი ოპტიმალური ამოხსნა, ე.ი. ისეთი $\mathbf{X_0 \in W}$, რომ მაქსიმიზაციის ამოცანის შემთხვევაში

$$\mathbf{f(X_0) \geq f(X), \forall \ X \in W,}$$

ხოლო მინიმიზაციის ამოცანის შემთხვევაში

$$\mathbf{f(X_0) \leq f(X), \forall \ X \in W.}$$

ოპტიმიზაციის ამოცანა ამოუხსნადია, თუ მას არ გააჩნია ოპტიმალური ამოხსნა. კერძოდ, მაქსიმიზაციის ამოცანა ამოუხსნადია, თუ მიზნობრივი **f(X)** ფუნქცია დასაშვებ **W** სიმრავლეზე არ არის შემოსაზღვრული ზემოდან.

ოპტიმიზაციური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები დამოკიდებულია როგორც მიზნობრივი **f(X)** ფუნქციის სახეზე, ასევე დასაშვებ **W** სიმრავლის აგებულებაზე. თუ ამოცანაში მიზნობრივი ფუნქცია **n** ცვლადისაა, მაშინ ამოხსნის მეთოდებს მათემატიკური დაპროგრამების მეთოდები ეწოდება.

მათემატიკურ დაპროგრამებაში მიზნობრივი **f(X)** ფუნქციის და **W** არის სახიდან გამომდინარე გამოყოფენ შემდეგ ძირითად ამოცანებს:

1. წრფივი დაპროგრამების ამოცანები, **f(X)** და **W** წრფივობის შემთხვევაში.

2. მთელრიცხვიანი დაპროგრამების ამოცანები, თუ დასმულია **(x_1,x_2,...x_n)** ცვლადთა მთელრიცხოვნობის პირობა.

3. არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანები, თუ **f(X)**-ის ფორმა ატარებს არაწრფივ ხასიათს.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანა ეწოდება ოპერაციათა კვლევის ამოცანას, რომლის მათემატიკური მოდელი მდგომარეობს შემდეგში:

$$\mathbf{f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min)}, \qquad (1.2)$$

$$\mathbf{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i \in I,\ \ I \subseteq M = \{1,2,..m\}}, \qquad (1.3)$$

$$\mathbf{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ \ i \in M}, \qquad (1.4)$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J,\ J \subseteq N = \{1,2,\ldots n\}. \tag{1.5}$$

ამასთან, წრფივ განტოლებათა (1.3) და უტოლობათა (1.4), (1.5) სისტემას, რომელიც განსაზღვრავს ამოცანის ამოხსნის დასაშვებ **W** სიმრავლეს, წრფივი დაპროგრამების ამოცანის შეზღუდვის სისტემა ეწოდება, ხოლო წრფივ **f(X)** ფუნქციას - მიზნობრივი ფუნქცია ან ოპტიმალურობის კრიტერიუმი.

კერძო შემთხვევაში, თუ $I = \varnothing$, მაშინ (1.3), (1.4) სისტემა შედგება მხოლოდ წრფივ (1.4) უტოლობებისაგან, ხოლო თუ $I = M$, მაშინ - წრფივ განტოლებებისაგან (1.3).

თუ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = \overline{1,m}, \tag{1.7}$$

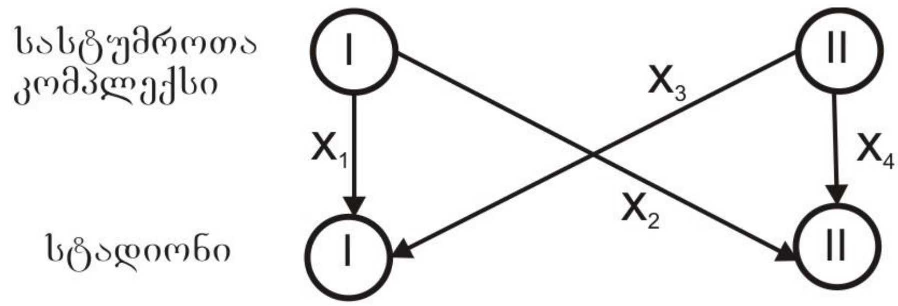
$$b_i \geq 0,\ \ x_j \geq 0,\ \ \ j = \overline{1,n}, \tag{1.8}$$

მაშინ ამოცანა წარმოდგენილია კანონიკური ფორმით.

§ 2. ამოცანა მინიმალური დანახარჯების შესახებ

ვთქვათ, ქალაქში ტარდება მსოფლიო პირველობა ფეხბურთში. ქალაქში არის ორი სასტუმროთა დიდი კომპლექსი და ორი სტადიონი. პირველ კომპლექსში შეუძლია იცხოვროს ***a*** რაოდენობის, ხოლო მეორეში **b** რაოდენობის ფეხბურთის გულშემატკივარს (მოდელი გულისხმობს, რომ სასტუმროთა კომპლექსებში განთავსებული არიან მხოლოდ ფეხბურთის მსოფლიო პირველობაზე ჩამოსული გულშემატკივრები).

ქალაქის პირველი საფეხბურთო სტადიონის ტევადობაა **c**, ხოლო მეორესი **d** (მოდელში გათვალისწინებულია, რომ საფეხბურთო სტადიონებზე დასწრების ბილეთები გააჩნიათ მხოლოდ სასტუმროთა მობინადრეებს). ერთი გულშემატკივრის გადაყვანა პირველი კომპლექსიდან პირველ სტადიონზე α_{11} დოლარი ჯდება, მეორე სტადიონზე α_{12} დოლარი, ხოლო მეორე კომპლექსიდან პირველ სტადიონზე α_{21} დოლარი ღირს, მეორე სტადიონზე α_{22}. როგორ უნდა გადავიყვანოთ სასტუმროთა კომპლექსებიდან სტადიონებზე გულშემატკივრები, რომ სატრანსპორტო დანახარჯები იყოს მინიმალური.



შემოვიღოთ აღნიშვნები:

x_1 - გულშემატკივართა რაოდენობაა გადაყვანილი პირველი კომპლექსიდან პირველ სტადიონზე;

x_2 - პირველი კომპლექსიდან მეორე სტადიონზე;

x_3 - მეორე კომპლექსიდან პირველ სტადიონზე;

x_4 - მეორე კომპლექსიდან მეორე სტადიონზე.

მაშინ ამოცანის მათემატიკური დასმა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\mathbf{f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{21}x_3 + \alpha_{22}x_4 \rightarrow min,}$$

სადაც $$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} > 0. \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + x_2 = \mathit{a},} \\ \mathbf{x_3 + x_4 = b,} \\ \mathbf{x_1 + x_3 = c,} \\ \mathbf{x_2 + x_4 = d,} \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$\mathbf{x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}}.$$

ბუნებრივია, რომ

$$\mathbf{\sum_{i=1}^{4} x_i = \mathit{a} + b = c + d}.$$

(2.2)-დან მარტივად მიიღება

$$\begin{cases} \mathbf{x_2 = \mathit{a} - x_1,} \\ \mathbf{x_3 = c - x_1,} \\ \mathbf{x_4 = b - c + x_1,} \end{cases} \qquad (2.3)$$

საიდანაც მივიღებთ, როცა

$$\mathbf{b \geq c,\ x_1 \in [0, \min(\mathit{a},c)];\ b < c,\ x_1 \in [c\text{-}b, \min(\mathit{a},c)].}$$

ამრიგად, მიზნობრივი **f** ფუნქცია (მინიმალური სატრანსპორტო დანახარჯი) მიიღებს სახეს:

$$f(x_1) = \alpha_{11}x_1 + (a - x_1)\alpha_{12} + (c - x_1)\alpha_{21} + (b - c + x_1)\alpha_{22} =$$

$$= a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\alpha_{22} + (\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22})x_1. \qquad (2.4)$$

განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

ა) $\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22} = 0,$

ანუ

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = \alpha_{12} + \alpha_{21}. \qquad (2.5)$$

მაშინ (2.4)-დან მივიღებთ

$$f = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\ \alpha_{22}, \qquad (2.6)$$

ანუ **f** მუდმივია. მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $\mathbf{f > 0}$, თუ $\mathbf{b \geq c}$, მაშინ

$$f = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\ \alpha_{22} > 0,$$

რადგანაც $a, c, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} > 0$.

თუ $\mathbf{b < c}$, მაშინ (2.5)-ის ძალით

$$f = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\,\alpha_{22} = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)(\alpha_{12} + \alpha_{21} - \alpha_{11}) =$$

$$= a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\,\alpha_{12} + (b - c)\alpha_{21} + (c - b)\alpha_{11} =$$

$$= (a + b - c)\alpha_{12} + b\alpha_{21} + (c - b)\,\alpha_{11} = d\alpha_{12} + b\alpha_{21} + (c - b)\,\alpha_{11} > 0, \qquad (2.7)$$

რადგანაც **$a + b = c + d$, d, $b(c - b) > 0$.**

ამრიგად, (2.5) შემთხვევაში მიზნობრივი ფუნქცია **f** ნებისმიერი **x_1**-თვის დასაშვები არედან მუდმივია და დადებითი.

ბ) თუ

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} > \alpha_{12} + \alpha_{21}, \qquad (2.8)$$

მაშინ **f** ფუნქცია ზრდადია,

როცა **$b \geq c$ $[0, \min(a, c)]$** შუალედში,

ხოლო როცა **$b < c$, $[c - b, \min(a, c)]$** შუალედში.

ამრიგად, როცა **$b \geq c$** მიზნობრივი **f** ფუნქცია აღწევს თავის მინიმალურ (2.6) მნიშვნელობას **$x_1=0$** წერტილში, ხოლო ოპტიმალური ამოხსნა იქნება:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = a, \\ x_3 = c, \\ x_4 = b - c. \end{cases} \qquad (2.9)$$

როცა **b < c** მიზნობრივი **f** ფუნქცია აღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას $x_1 = c - b$ წერტილში.

$$f(c - b)= a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\,\alpha_{22} + (c - b)(\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}).$$

ცხადია, რომ (2.7)-ის ძალით $f(c - b) > 0$.

ოპტიმალური ამოხსნა, როცა $b < c$ ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x_1 = c - b, \\ x_2 = a + b - c = d, \\ x_3 = b, \\ x_4 = 0. \end{cases} \qquad (2.10)$$

გ) თუ

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} < \alpha_{12} + \alpha_{21}, \qquad (2.11)$$

მაშინ (2.4)-ის თანახმად $f(x_1)$ ფუნქცია კლებადია, ე.ი. აღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას

$$x_1 = \min(a,c)$$

წერტილში. მაშინ ოპტიმალური ამოხსნა იქნება

$$x_1 = \min(a, c), \qquad x_2 = a - \min(a, c),$$

$$x_3 = c - \min(a,c), \qquad x_4 = d - a + \min(a,c). \qquad (2.12)$$

ვაჩვენოთ, რომ $f(\min(a,c))$ დადებითია (2.11) შემთხვევაში.

$$\mathbf{f(min(\mathit{a},c)) = \mathit{a}}\alpha_{12} + \mathbf{c}\alpha_{21} + \mathbf{(b - c)}\ \alpha_{22} +$$

$$+ (\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21})\mathbf{min(\mathit{a},c)}. \qquad (2.13)$$

ვთქვათ, $\mathbf{c} \le \boldsymbol{a}$, მაშინ

$$\mathbf{f(c) = \mathit{a}}\alpha_{12} + \mathbf{c}\alpha_{21} + \mathbf{b}\ \alpha_{22} - \mathbf{c}\ \alpha_{22} + \mathbf{c}\alpha_{11} + \mathbf{c}\ \alpha_{22} - \mathbf{c}\ \alpha_{12} - \mathbf{c}\ \alpha_{21} =$$

$$= (\boldsymbol{a} - \mathbf{c})\ \alpha_{12} + \mathbf{b}\alpha_{22} + \mathbf{c}\alpha_{11} > 0.$$

თუ $\boldsymbol{a} < \mathbf{c}$, მაშინ

$$\mathbf{f(\mathit{a}) = \mathit{a}}\alpha_{12} + \mathbf{c}\alpha_{21} + \mathbf{(b - c)}\ \alpha_{22} + \boldsymbol{a}(\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}) >$$

$$> \boldsymbol{a}\alpha_{12} + \boldsymbol{a}\alpha_{21} + \mathbf{(b - c)}\ \alpha_{22} + \boldsymbol{a}(\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}) =$$

$$= \mathbf{(b - c)}\ \alpha_{22} + \boldsymbol{a}\alpha_{11} + \boldsymbol{a}\ \alpha_{22} = (\boldsymbol{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})\ \alpha_{22} + \boldsymbol{a}\alpha_{11} = \mathbf{d}\alpha_{22} + \boldsymbol{a}\alpha_{11} > 0.$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები:

1^0. $\boldsymbol{a} = 30000$, $\mathbf{b} = 40000$, $\mathbf{c} = 20000$, $\mathbf{d} = 50000$.

$$\alpha_{11} = 7{,}5\$, \ \alpha_{12} = 7\$, \ \alpha_{21} = 6\$, \ \alpha_{22} = 6{,}5\$,$$

ანუ გვაქვს შემთხვევა (ბ) $(\mathbf{c} < \boldsymbol{a} < \mathbf{b})$,

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 14 > \alpha_{12} + \alpha_{21} = 13.$$

მიზნობრივი ფუნქცია აღწევს მინიმუმს, როცა $\mathbf{x_1 = 0}$.

$$\mathbf{f(0) = \mathit{a}}\alpha_{12} + \mathbf{c}\alpha_{21} + \mathbf{(b - c)}\ \alpha_{22} = \mathbf{460000\$},$$

ხოლო ოპტიმალური ამონახსნი იქნება (2.9)

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 30000, \\ x_3 = 20000, \\ x_4 = 20000. \end{cases}$$

2^0. ***a* = 20000, b = 30000, c = 25000, d = 25000.**

$\alpha_{11} = 6$**$,** $\alpha_{12} = 8$**$,** $\alpha_{21} = 5$**$,** $\alpha_{22} = 6$**$.**

ადგილი აქვს (გ) შემთხვევას (***a* < c < b**), რადგანაც

$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 12 < \alpha_{12} + \alpha_{21} = 13.$

კლებადი მიზნობრივი ფუნქცია (2.4) აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას **min(*a*,c) = 20000 = *a*** წერტილში, **f(*a*) = 295000$**, ხოლო ოპტიმალური ამონახსნი ჩაიწერება:

$$\begin{cases} x_1 = 20000, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 5000, \\ x_4 = 25000. \end{cases}$$

3^0. ***a* = 25000, b = 20000, c = 15000, d = 30000.**

$\alpha_{11} = 7$**$,** $\alpha_{12} = 6$**$,** $\alpha_{21} = 6$**$,** $\alpha_{22} = 5$**$.**

ადგილი აქვს (ა) შემთხვევას, **(c < b < *a*),** რადგანაც

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 7 + 5 = 12 = \alpha_{12} + \alpha_{21} = 6 + 6.$$

ამრიგად, მიზნობრივი ფუნქცია ნებისმიერი $\mathbf{x_1} \in$ **[0, 15000],**

$f = a\alpha_{12} + c\alpha_{21} + (b - c)\,\alpha_{22} = 25000 \cdot 6 + 15000 \cdot 6 + 5000 \cdot 5 = 265000\$.$

4^0. $a = 22000$, $b = 15000$, $c = 25000$, $d = 12000$.

$\alpha_{11} = 9\$$, $\alpha_{12} = 7\$$, $\alpha_{21} = 8\$$, $\alpha_{22} = 7\$$.

ადგილი აქვს (ბ) შემთხვევას, **($b < a < c$),** რადგანაც

$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 9 + 7 = 16 > \alpha_{12} + \alpha_{21} = 7 + 8 = 15.$

მიზნობრივი ფუნქცია აღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას $x_1 = c - b = 10000$ წერტილში. **$f(10000) = 294000\$$,** ხოლო ოპტიმალურ ამოხსნას აქვს სახე (2.10):

$$\begin{cases} x_1 = 10000, \\ x_2 = 12000, \\ x_3 = 15000, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

5^0. $a = 20000$, $b = 17000$, $c = 18000$, $d = 19000$.

$\alpha_{11} = 5{,}5\$$, $\alpha_{12} = 5\$$, $\alpha_{21} = 6\$$, $\alpha_{22} = 5\$$.

ადგილი აქვს (გ) შემთხვევას, **($b < c < a$),** რადგანაც

$\alpha_{11} + \alpha_{22} = 5{,}5 + 5 = 10{,}5 < \alpha_{12} + \alpha_{21} = 5 + 6 = 11.$

კლებადი მიზნობრივი **f** ფუნქცია (2.4) აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას **$\min(a, c) = c = 18000$** წერტილში.

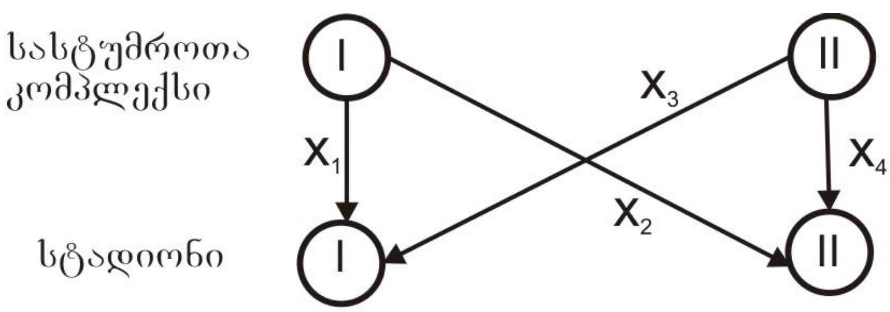
$$f(c) = f(18000) = 194000\$,$$

ხოლო ოპტიმალურ ამოხსნას აქვს სახე (2.12)

$$\begin{cases} x_1 = 18000, \\ x_2 = 2000, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 17000. \end{cases}$$

სავარჯიშოები

იპოვეთ ოპტიმალური განაწილება მინიმალური სატრანსპორტო დანახარჯების ამოცანაში



2.1 $a = 20500$, **b = 17500, c = 18500, d = 19500**

$\alpha_{11} = 5{,}5\$$, $\alpha_{12} = 5\$$, $\alpha_{21} = 6\$$, $\alpha_{22} = 5{,}5\ \$$

2.2 $a = 22500$, **b = 15500, c = 25500, d = 12500**

$\alpha_{11} = 9\$$, $\alpha_{12} = 7\$$, $\alpha_{21} = 8{,}\ 5\ \$$, $\alpha_{22} = 7\$$

2.3. $a = 25500$, $b = 20500$, $c = 15500$, $d = 30500$

$\alpha_{11} = 6{,}5$ \$, $\alpha_{12} = 6$\$, $\alpha_{21} = 6$\$, $\alpha_{22} = 5{,}\ 5$\$

2.4 $a = 27000$, $b = 28000$, $c = 31000$, $d = 24000$

$\alpha_{11} = 6$ \$, $\alpha_{12} = 7$ \$, $\alpha_{21} = 6$ \$, $\alpha_{22} = 8$ \$

2.5 $a = 33000$, $b = 27000$, $c = 35000$, $d = 25000$

$\alpha_{11} = 6$ \$, $\alpha_{12} = 7{,}5$ \$, $\alpha_{21} = 6$ \$, $\alpha_{22} = 7$ \$

2.6 $a = 53000$, $b = 24000$, $c = 35000$, $d = 42000$

$\alpha_{11} = 8$ \$, $\alpha_{12} = 7$ \$, $\alpha_{21} = 8{,}5$ \$, $\alpha_{22} = 7$ \$

2.7 $a = 30000$, $b = 21000$, $c = 25000$, $d = 26000$

$\alpha_{11} = 6{,}5$ \$, $\alpha_{12} = 5$ \$, $\alpha_{21} = 6$ \$, $\alpha_{22} = 5{,}5$ \$

2.8 $a = 28000$, $b = 23000$, $c = 20000$, $d = 31000$

$\alpha_{11} = 6{,}5$ \$, $\alpha_{12} = 6$ \$, $\alpha_{21} = 6$ \$, $\alpha_{22} = 5{,}\ 5$ \$

2.9 $a = 35000$, $b = 25000$, $c = 40000$, $d = 20000$

$\alpha_{11} = 9$ \$, $\alpha_{12} = 7$ \$, $\alpha_{21} = 8{,}\ 5$ \$, $\alpha_{22} = 7$ \$

2.10 $a = 55000$, $b = 15000$, $c = 40000$, $d = 30000$

$\alpha_{11} = 9{,}5$ \$, $\alpha_{12} = 7{,}5$ \$, $\alpha_{21} = 8{,}\ 5$ \$, $\alpha_{22} = 7$ \$

§ 3. წრფივი დაპროგრამების ამოცანების გრაფიკული ამოხსნა.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის გრაფიკული ხერხი მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ [1]:

ა) ორუცნობიანი ამოცანების ამოხსნისათვის, როცა შეზღუდვები გამოსახულია უტოლობებით;

ბ) მრავალუცნობიანი ამოცანების ამოხსნისათვის, იმ პირობით, რომ მათი კანონიკური სახე არ შეიცავს ორზე მეტ თავისუფალ ცვლადს.

ჩავწეროთ ორუცნობიანი წრფივი დაპროგრამების ამოცანა.

დავუშვათ, რომ მიზნობრივ ფუნქციას აქვს სახე

$$\mathbf{f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow max,} \qquad (3.1)$$

ხოლო შეზღუდვებს

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$\mathbf{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.} \qquad (3.3)$$

ამოცანის შეზღუდვის (3.2), (3.3) სისტემის ყოველი უტოლობა გეომეტრიულად განსაზღვრავს ნახევარსიბრტყეს შესაბამისად სასაზღვრო წრფეებით

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i;\ (i = \overline{1, m})\ \ x_1=0;\ x_2=0.$$

უტოლობათა სისტემის (3.2), (3.3) თავსებადობის შემთხვევაში, მისი ამონახსნთა არე არის წერტილთა სიმრავლე, რომელიც ეკუთვნის ყველა აღნიშნულ ნახევარსიბრტყეს. რადგანაც მოცემული ნახევარსიბრტეების გადაკვეთის წერტილთა სიმრავლე ამოზნექილია, ამიტომ დასაშვებ ამონახსნთა არე იქნება ამოზნექილი სიმრავლე და მას ამონახსნთა მრავალკუთხედი ეწოდება. ამ მრავალკუთხედის გვერდები მდებარეობენ წრფეებზე, რომელთა განტოლებები მიიღება საწყისი შეზღუდვების სისტემიდან (3.2), (3.3), თუ უტოლობათა ნიშნებს შევცვლით ტოლობის ნიშნებით.

უტოლობათა სისტემა (3.2), (3.3)-ის დასაშვები ამონახსნთა არე შეიძლება იყოს:

ა) ამოზნექილი მრავალკუთხედი;

ბ) ამოზნექილი მრავალკუთხა შემოუსაზღვრელი არე;

გ) ცარიელი სიმრავლე;

დ) სხივი;

ე) მონაკვეთი;

ვ) წერტილი.

მიზნობრივი (3.1) ფუნქცია სიბრტყეზე განსაზღვრავს პარალელურ წრფეთა ოჯახს, რომელთაგან ყოველს შეესაბამება **f**-ის გარკვეული მნიშვნელობა.

$\vec{C} = (c_1; c_2)$ ვექტორი, რომელიც ამ პარალელური წრფეების პერპენდიკულარულია, უთითებს **f**-ის უსწრაფესი ზრდადობის

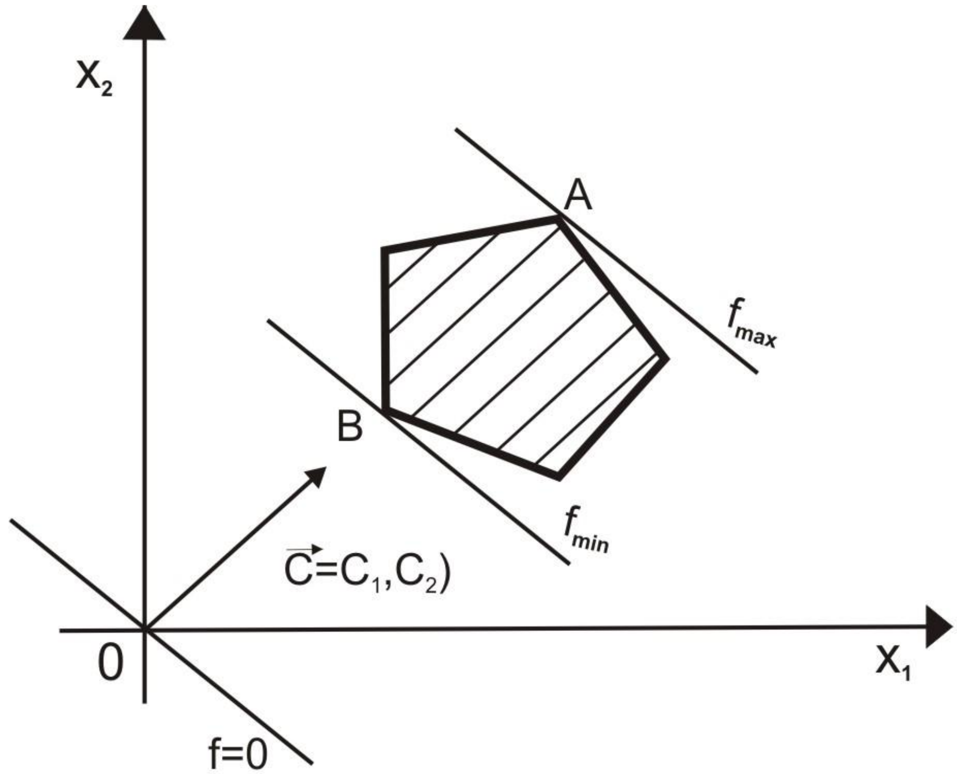
მიმართულებას, ხოლო მოპირდაპირე ვექტორი ($-\vec{C}$) - **f**-ის კლება-დობის მიმართულებას.

თუ ერთიდაიგივე კოორდინატთა სისტემაში გამოვსახავთ უტოლობათა სისტემას (3.2), (3.3) დასაშვებ ამონახსნთა არეს და პარალელურ წრფეთა ოჯახს (3.1) მაშინ, **f** ფუნქციის მაქსიმუმის განსაზღვრის ამოცანა დადის დასაშვებ არეში იმ წერტილის პოვნაში, რომელზედაც გადის წრფე **f = const** ოჯახიდან და რომელიც შეესაბამება **f** პარამეტრის უდიდეს მნიშვნელობას.

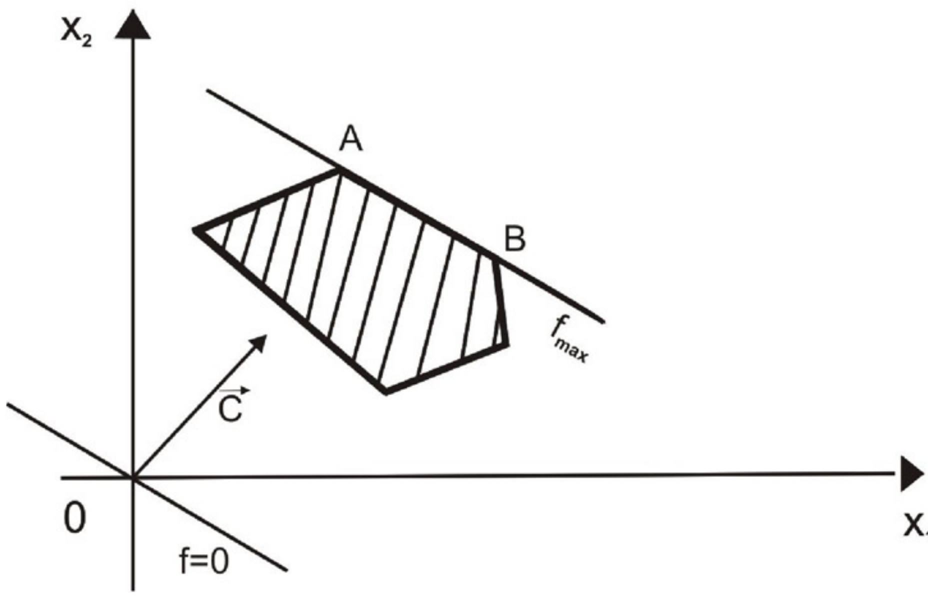
ასეთი წერტილი არსბეობს მაშინ, როცა ამონახსნთა მრავალკუთხედი არა ცარიელია და მასზე მიზნობრივი ფუნქცია შემოსაზღვრულია ზემოდან. აღნიშნულ პირობებში ამონახსნთა მრავალკუთხედის ერთ-ერთ წვეროში მიზნობრივი ფუნქცია ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ამ წვეროს განსაზრვრისათვის ავაგოთ დონის წრფე $f = 0 = c_1x_1 + c_2x_2$, რომელიც კოორდინატთა სათავეზე გადის და $\vec{C}=(c_1;c_2)$ ვექტორის პერპენდიკულარულია.შემდეგ ეს წრფე (**f = 0**) გადავწიოთ $\vec{C}=(c_1;c_2)$ ვექტორის მიმართულებით მანამ, სანამ ის არ შეეხება ამონახსნთა მრავალკუთხედის უკანასკნელ კიდურა (კუთხურ) წერტილს. ამ წერტილის კოორდინატები განსაზღვრავენ მოცემული ამოცანის ოპტიმალურ გეგმას.

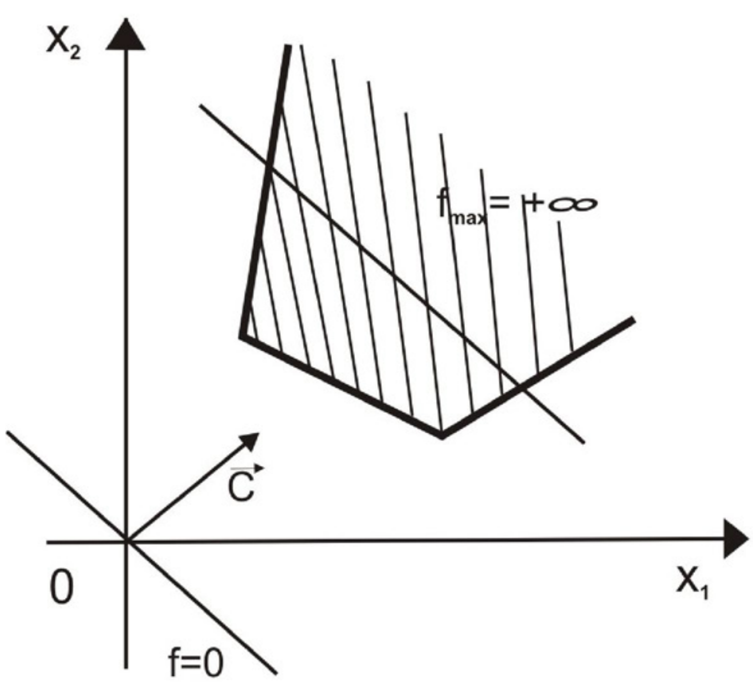
(3.1) - (3.3) ამოცანის გრაფიკული ამოხსნისას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს სხვადასხვა შემთხვევას (ნახ. 3.1 – 3.4).



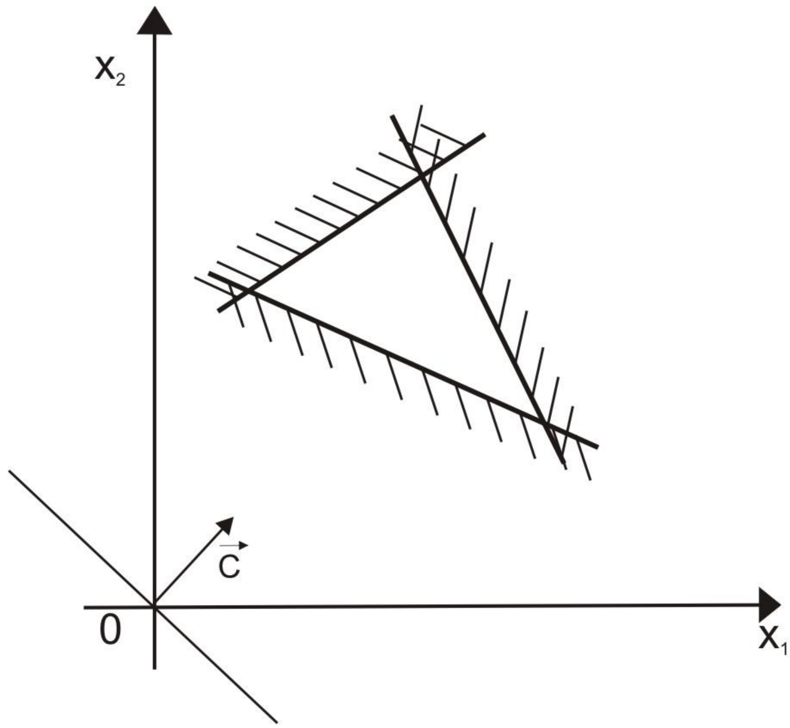
ნახ.3.1. **f** ფუნქციის ოპტიმუმი (მაქსიმუმი) მიიღწევა **A** წერტილში



ნახ.3.2. **f** ფუნქციის მაქსიმუმი მიიღწევა **AB** მონაკვეთის ნებისმიერ წერტილში



ნახ. 3.3. **f** ფუნქციის მაქსიმუმი მიუღწევადია



ნახ.3.4. დასაშვებ ამონახსთა არე - ცარიელი არეა

სავარჯიშოები

იპოვეთ მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები მოცემულ არეში

3.1 $f(x,y) = 7x + 11y \to \max, \min$

$$\begin{cases} x + y \le 12 \\ 4x + y \ge 12 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.2 $f(x,y) = 13x + 13y \to \max, \min$

$$\begin{cases} x + y \le 20 \\ 5x + y \ge 20 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.3 $f(x, y) = 5(x + y) \to \max, \min$

$$\begin{cases} x + y \le 15 \\ 5x + y \ge 15 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.4 $f(x, y) = 12x + 13y \to \max, \min$

$$\begin{cases} 3x + y \ge 1 \\ 6x + 2y \le 2 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.5 $f(x, y) = 20x + 16y \to \max, \min$

$$\begin{cases} x + y \le 25 \\ 4x + y \ge 25 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.6 $f(x, y) = 4x + 5y \to \max, \min$

$$\begin{cases} 4x + 3y \le 24 \\ x + 2y \ge 16 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.7 $f(x, y) = 21x + 13y \to \max, \min$

$$\begin{cases} x + y \le 8 \\ 2x + y \ge 8 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.8 $f(x, y) = 6x + 10y \to \max, \min$

$$\begin{cases} x + y \le 10 \\ 2x + y \ge 10 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.9 $f(x, y) = x + 13y \to \max, \min$

$$\begin{cases} x + y \le 9 \\ 2x + y \ge 18 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.10 $f(x, y) = 4x + 7y \to \max, \min$

$$\begin{cases} x + y \ge 7 \\ 3x + y \le 21 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.11 $f(x, y) = 4x + 9y \to \max, \min$

$$\begin{cases} x + y \ge 4 \\ 2x + y \le 8 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.12 $f(x, y) = 3x + 4y \to \max, \min$

$$\begin{cases} 3x + y \le 15 \\ 5x + y \ge 15 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.13 $f(x, y) = 5x + 6y \to \max, \min$

$$\begin{cases} x + y \ge 5 \\ 2x + y \le 10 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.14 $f(x,y) = 2x + 11y \to$ max, min

$$\begin{cases} 4x + y \le 20 \\ 2x + y \ge 20 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.15 $f(x,y) = 5x + 13y \to$ max, min

$$\begin{cases} x + y \le 15 \\ 5x + y \ge 15 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.16 $f(x,y) = 21x + 14y \to$ max, min

$$\begin{cases} 4x + y \le 30 \\ 2x + y \ge 30 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.17 $f(x,y) = 12x + 33y \to$ max, min

$$\begin{cases} x + y \le 50 \\ 5x + y \ge 50 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.18 $f(x,y) = 6x + 11y \to$ max, min

$$\begin{cases} x + y \le 12 \\ 4x + y \ge 12 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.19 $f(x,y) = 5x + 6y \to$ max, min

$$\begin{cases} x + y \ge 5 \\ 2x + y \le 10 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

3.20 $f(x,y) = 5x + 6y \to$ max, min

$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

3.21. W = $2x_1 - 7x_2 \rightarrow$ max,min;

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.22. W =2 $x_1 - 4x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 8, \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. 23 F = $3x_1 + x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.24 W = $6x_1 + 2x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.25 F = $5x_1 + 3x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} x_1 \geq 4, \\ x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.26 W = $4x_1 - 3x_2 \rightarrow$ max,min;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.27 W =5 $x_1 - 3x_2 \rightarrow$ max,min;

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \end{cases}$$

3.28W = $4x_1 + 5x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 500, \\ x_1 \le 400, \\ x_2 \le 300, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.29W = $7x_1 + 4x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.30W = $2x_1 + 9x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 11, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.31 W = $2x_1 + 11x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.32W = $3x_1 + 13x_2 \rightarrow$ min;

$$\begin{cases} x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 0{,}6, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}4x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.33W =20 x_1 + 16x_2 → max, min;

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.34W = 41x_1 + x_2 → max, min;

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 11, \\ x_1 \leq 2{,}75, \\ 3x_2 \leq 1{,}1, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.35 W = 21x_1 + 7x_2 → max, min**;**

$$\begin{cases} x_1 \geq 3, \\ x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.36 W = 7x_1 – 2x_2 → max, min;

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \leq 1, \\ -2x_1 + 24x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.37 W =3 x_1 + 7x_2 → max, min;

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \leq 17, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.38 W = 7x_1 + 4x_2 → max, min;

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + 6x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.39 W = 5x_1 + 3x_2 → max, min;

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.40 W = $6x_1 + 9x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 \leq 32, \\ x_1 \leq 31, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.41 W = $5x_1 - 11\,x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 9, \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.42 W = $4x_1 + 7x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 7, \\ -2x_1 + 9x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.43 W = $4x_1 + 5x_2 \rightarrow$ max, min ;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.44W = $22x_1 + x_2 \rightarrow$max, min**;**

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 7, \\ -2x_1 + 9x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.45 W =$7\,x_1 + 4x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 5, \\ 3x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.46 $W = 5x_1 - 2x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 8, \\ -3x_1 + 8x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.47 $W = 9x_1 + 3x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.48 $W = 8x_1 + 4x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.49 $W = 7x_1 + x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 5, \\ -3x_1 + 10x_2 \le 50, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.50 $W = 3{,}5x_1 + 0{,}5x_2 \rightarrow$ max, min;

$$\begin{cases} x_1 \le 2, \\ x_2 \ge 1{,}8, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.51 $W(x_1, x_2) = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \text{max, min}$

$$\begin{cases} x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.52 $W(x_1, x_2) = 4x_1 + 7x_2 + 2016 \rightarrow \max, \min$

$$\begin{cases} x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.53 $W(x_1, x_2) = 10x_1 + 7x_2 + 55 \rightarrow \max, \min$

$$\begin{cases} x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.54 $W(x_1, x_2) = 9x_1 + 7x_2 - 19 \rightarrow \max, \min,$

$$\begin{cases} x_1 \geq 9 \\ x_2 \geq 7 \\ x_1 + x_2 \leq 25 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.55 $W(x_1, x_2) = 3x_1 + 12x_2 - 23 \rightarrow \max, \min,$

$$\begin{cases} x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.56 $W(x_1, x_2) = 13x_1 + 15x_2 + \pi \rightarrow \max, \min$

$$\begin{cases} x_1 \geq 20 \\ x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.57 $W(x_1, x_2) = 7x_1 + 6x_2 + 33 \to \max, \min$

$$\begin{cases} x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.58 $w = x_1 - 5x_2 \to \max, \min$

$$\begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -6 \\ x_i \geq 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3.59 $w = 7x_1 - 8x_2 \to \max, \min,$

$$\begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -6 \\ x_i \geq 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3.60 $w = 11x_1 - 9x_2 \to \max, \min$

$$\begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -6 \\ x_i \geq 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3. 61 $w = 8x_1 - 5x_2 \to \max, \min$

$$\begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -6 \\ x_i \geq 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3.62 $w = 7x_1 - 5x_2 + 21 \to \max, \min$

$$\begin{cases} x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ -2x_1 + 3x_2 \ge -6 \\ x_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3.63*. $w = (-a+4)x_1 - 4x_2 \to \max, \min, a \in R$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 \le 10 \\ x_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3. 64 $w = (-a^2 + 4)x_1 - 4x_2 \to \max, \min \; a \in R$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 5x_2 \le 53 \\ 2x_1 - x_2 \le 18 \\ x_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3.65 $w = (a - 9)x_1 - 5x_2 \to \max, \min, \; a \in R$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 5x_1 - x_2 \le 20 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3. 66*. $w = (a + 1)x_1 - 4x_2 \to \max, \min, \; a \in R$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \\ x_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3.67*. $w=(a^2+1)x_1-5x_2 \to \max,\min \; a \in R$

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2 \le 8 \\ x_1+3x_2 \le 15 \\ 3x_1-x_2 \le 15 \\ x_i \ge 0, i=1,2 \end{cases}$$

3.68*. $w=(a^2+1)x_1-5\pi x_2 \to \max,\min \; a \in R$

$$\begin{cases} x_2 \le 4 \\ x_1+3x_2 \ge 6 \\ -2x_1+3x_2 \ge -6 \\ x_i \ge 0, i=1,2 \end{cases}$$

3.69*. $w=(a^2-1)x_1-9x_2 \to \max,\min \; a \in R$

$$\begin{cases} x_2 \le 3 \\ x_1+3x_2 \ge 3 \\ -2x_1+3x_2 \ge -6 \\ x_i \ge 0, i=1,2 \end{cases}$$

3.70*. $w=(a^3-1)x_1-5x_2 \to \max,\min \; a \in R$

$$\begin{cases} x_1 \ge 20 \\ x_2 \ge 15 \\ x_1+x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3.71*. $w=(a^5-1)x_1-11x_2 \to \max,\min \; a \in R$

$$\begin{cases} x_1 \ge 20 \\ x_2 \ge 15 \\ x_1+x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3.72*. $w=(a^2+a+1)x_1-13x_2 \to \max,\min \; a \in R$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 5, \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.73*. $w = (a^2 + a + 2)x_1 - 13x_2 \to \max, \min$ $a \in R$

$$\begin{cases} x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.74*. $w = (\sin \alpha + 2)x_1 - 16x_2 \to \max, \ \min, \ \ \alpha \in R$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.75*. $w = (\cos \alpha + 1)x_1 - 10x_2 \to \max, \ \min, \ \ \alpha \in R$

$$\begin{cases} x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.76*. $w = (\cos 2\alpha + 1)x_1 - 9x_2 \to \max, \ \min, \ \ \alpha \in R$

$$\begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq -6 \\ x_i \geq 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3.77*. $w = (\sin 2\alpha + 1)x_1 - 6x_2 \to \max, \ \min, \ \ \alpha \in R$

$$\begin{cases} x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.78**. $w = (\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)x_1 - 5x_2 \to \max, \ \min, \ \ \alpha \in R$

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2\le 8 \\ x_1+3x_2\le 15 \\ 3x_1-x_2\le 15 \\ x_i\ge 0, i=1,2 \end{cases}$$

3.79**. $w=(\sin\alpha-\cos\alpha)x_1-\pi x_2\to \max,\ \min,\ \alpha\in R$

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2\le 8 \\ x_1+3x_2\le 15 \\ 3x_1-x_2\le 15 \\ x_i\ge 0, i=1,2 \end{cases}$$

3.80**. $w=(\sin\alpha+\cos\alpha)x_1-ex_2\to \max,\ \min,\ \alpha\in R$

$$\begin{cases} x_2\le 3 \\ x_1+3x_2\ge 3 \\ -2x_1+3x_2\ge -6 \\ x_i\ge 0, i=1,2 \end{cases}$$

3.81**. $w=(\sin\alpha+\cos\alpha-\sqrt{2})x_1-2ex_2\to \max, \min, \alpha\in R$

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2\le 8 \\ x_1+3x_2\le 15 \\ 3x_1-x_2\le 15 \\ x_i\ge 0, i=1,2 \end{cases}$$

3.82**. $w=(\sin 2016\alpha+\cos 2016\alpha-\sqrt{2})x_1-4x_2\to \max, \min, \alpha\in R$

$$\begin{cases} x_2\le 4 \\ x_1+3x_2\ge 6 \\ -2x_1+3x_2\ge -6 \\ x_i\ge 0, i=1,2 \end{cases}$$

3.83**. $w=(3\sin\alpha+4\cos\alpha-5)x_1-6x_2\to \max,\ \min,\ \alpha\in R$

$$\begin{cases} x_2 \le 3 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ -2x_1 + 3x_2 \ge -6 \\ x_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3.84**. $w = (5\sin\alpha + 12\cos\alpha - 13)x_1 - 7x_2 \to \max,\ \min,\ \ \alpha \in R$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 5x_1 - x_2 \le 20 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases}$$

3.85***. მოცემულია წრფივი მიზნის ფუნქცია და შეზღუდვების არაწრფივი სისტემა. გრაფიკული მეთოდით იპოვეთ გლობალური ექსტრემუმები (მაქსიმუმი და მინიმუმი)

$w = 2x_1 + x_2 \to (\max,\ \min)$

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \ge 4 \\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 9 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases}$$

§ 4. *მაქსიმალური მოგების მიღების მოდელი*

დავუშვათ, რომ საწარმო უშვებს ორი სახის პროდუქციას (ნაწარმი **A**, ნაწარმი **B**), რისთვისაც იყენებს სამი სახის ნედლეულს. ნორმები მოყვანილია ცხრილ 1-ში.

ცხრილი 1

ნედლეულის სახე	ნედლეულის ნორმები (კგ) ერთ ნაწარმზე		ნედლეულის საერთო რაოდენობა (კგ)
	A	**B**	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
მოგება ერთი ნაწარმის რეალიზაციიდან (ფულად ერთეულებში)	30	40	

მოდელში ნავარაუდევია, რომ ორივე სახის ნაწარმის გასაღება უზრუნველყოფილია. ამოცანა მდგომარეობს ნაწარმის გამოშვების გეგმის პოვნაში, რომლისთვისაც საწარმოს მოგება ყველა ნაწარმის ბაზარზე რეალიზაციისაგან მაქსიმალურია.

შევადგინოთ ამოცანის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი.

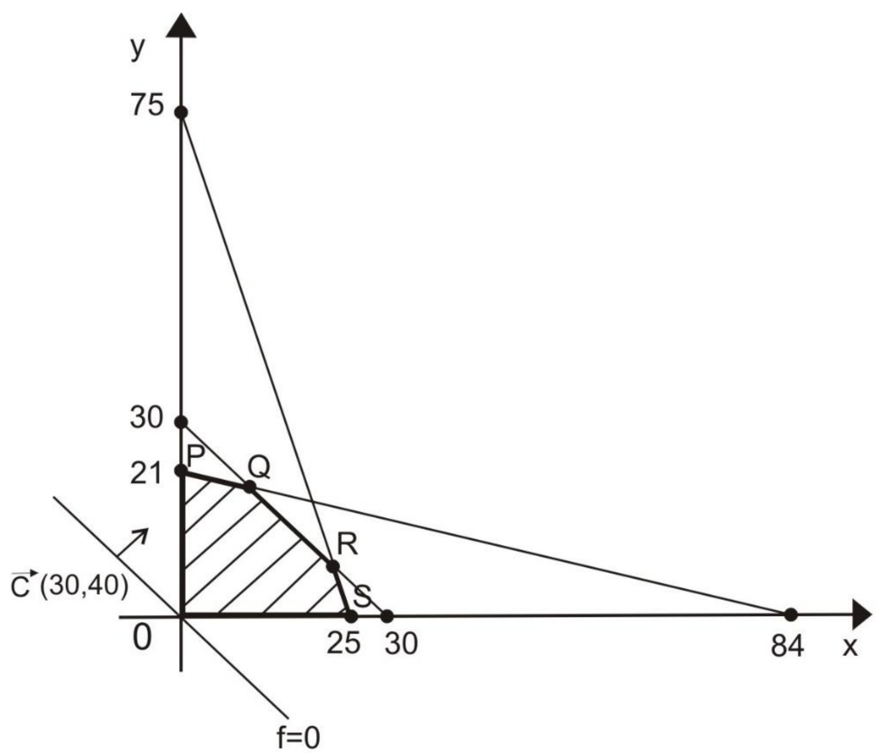
დავუშვათ, რომ საწარმო აწარმოებს **A** სახის **x** რაოდენობის და **B** სახის **y** რაოდენობის ნაწარმს, რადგანაც ყოველი სახის ნედლეულის რაოდენობა შემოსაზღვრულია და ნაწარმთა რაოდენობა

არაუარყოფითია, ცხრილი 1-ის თანახმად მივიღებთ შემდეგ უტოლობათა სისტემას:

$$\begin{cases} 12x + 4y \le 300, \\ 4x + 4y \le 120, \\ 3x + 12y \le 252, \\ x \ge 0, \;\; y \ge 0. \end{cases} \qquad (4.1)$$

ამ შემთხვევაში **A** სახის **x** რაოდენობის და **B** სახის **y** რაოდენობის ნაწარმის რეალიზაციისგან მიღებული მოგება (მიზნობრივი ფუნქცია) ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\mathbf{f = 30x + 40y \rightarrow max.} \qquad (4.2)$$



ნახ.4.1

უტოლობათა სისტემა (4.1)-დან მარტივად მიიღება, რომ დასაშვებ ამონახსნთა არე არის ხუთკუთხედი **OPQRS**, ამასთან **P, Q, R, S** წერტილთა კოორდინატები მიიღება შესაბამისი წრფეების (იხ. ნახ.4.1) გადაკვეთით. მივიღებთ, რომ

P(0; 21), Q(12; 18), R(22,5; 7,5), S(25; 0).

თუ **f = 0 = 30x + 40y** წრფეს ვამოძრავებთ პერპენდიკულარული $\vec{C} = (30;\ 40)$ მიმართულებით, მაშინ **f**-ის მნიშვნელობა იზრდება. ბუნებრივია, რომ დასაშვებ ამონახსნთა არედან **Q** იქნება უკანასკნელი კიდურა (კუთხური) წერტილი, რომელსაც ეხება **f = 0** წრფე, რის შემდეგ უკვე ეს წრფე არ კვეთს ხუთკუთხედს.

ამრიგად,

$$f_{max} = f(Q) = f(x_{max}; y_{max}) = f(12; 18) = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080\$.$$

სავარჯიშოები

4.1 იპოვეთ მაქსიმალური მოგება

ნედლეულის სახე	ნედლეულის ნორმები (kg) ერთ ნაწარმზე		ნედლეულის საერთო რაოდენობა (კგ)
	A	B	
I	10	4	200
II	6	8	180
III	3	12	240
მოგებაერთინაწარმისრეალიზაციიდან (ფულადერთეულებში)	50	45	

4.2 იპოვეთ მაქსიმალური მოგება

ნედლეულის სახე	ნედლეულის ნორმები (kg) ერთ ნაწარმზე		ნედლეულის საერთო რაოდენობა (კგ)
	A	B	
I	15	3	200
II	6	8	190
III	3	12	280
მოგება ერთი ნაწარმის რეალიზაციიდან (ფულად ერთეულებში)	75	45	

4.3 იპოვეთ მაქსიმალური მოგება

ნედლეულის სახე	ნედლეულის ნორმები (kg) ერთ ნაწარმზე		ნედლეულის საერთო რაოდენობა (კგ)
	A	B	
I	10	6	300
II	6	8	200

III	4	12	240
მოგება ერთი ნაწარმის რეალიზაციიდან (ფულად ერთეულებში)	120	80	

4.4 იპოვეთ მაქსიმალური მოგება

ნედლეულის სახე	ნედლეულის ნორმები (kg) ერთ ნაწარმზე		ნედლეულის საერთო რაოდენობა (კგ)
	A	**B**	
I	14	8	250
II	6	8	170
III	4	12	240
მოგება ერთი ნაწარმის რეალიზაციიდან (ფულად ერთეულებში)	150	200	

4.5 იპოვეთ მაქსიმალური მოგება

ნედლეულის სახე	ნედლეულის ნორმები (kg) ერთ ნაწარმზე		ნედლეულის საერთო რაოდენობა (კგ)
	A	**B**	
I	12	6	250
II	6	8	190
III	4	12	290
მოგება ერთი ნაწარმის რეალიზაციიდან (ფულად ერთეულებში)	180	250	

4.6 იპოვეთ მაქსიმალური მოგება

ნედლეულის სახე	ნედლეულის ნორმები (kg) ერთ ნაწარმზე		ნედლეულის საერთო რაოდენობა (კგ)
	A	B	
I	12	6	400
II	6	8	240
III	4	12	300
მოგება ერთი ნაწარმის რეალიზაციიდან (ფულად ერთეულებში)	220	180	

4. 7 იპოვეთ მაქსიმალური მოგება

ნედლეულის სახე	ნედლეულის ნორმები (kg) ერთ ნაწარმზე		ნედლეულის საერთო რაოდენობა (კგ)
	A	B	
I	14	8	420
II	5	9	260
III	4	12	320
მოგება ერთი ნაწარმის რეალიზაციიდან (ფულად ერთეულებში)	250	190	

§ 5. *ოპტიმალური რაციონის მოდელი*

როგორც ცნობილია, მეფრინველეობის ფერმების მთავარი დანიშნულებაა წიწილების გასუქება. დავუშვათ, რომ გვაქვს ორი სახის საკვები - ხორბალი და სიმინდის ფქვილი. ამოცანა მდგომარეობს წიწილებისათვის მაქსიმალურად იაფი (მინიმალური დანახარჯი), მაგრამ სრულფასოვანი რაციონის შედგენაში.

შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შედგენისათვის, ჩვენ უნდა ვიცოდეთ ცხიმების და ნახშირწყლების კალორიების რაოდენობა 1 გრამ ხორბალში და 1 გრამ სიმინდის ფქვილში, ასევე საკვების შესაბამისი ფასი.

დავუშვათ, რომ 1 გრამ ხორბალში a_1 კალორიაა, a_2 გრამი ცხიმია და a_3 გრამი ნახშირწყალია, ხოლო 1 გრამ სიმინდის ფქვილში $\mathbf{b_1}$ კალორიაა, $\mathbf{b_2}$ გრამი ცხიმია და $\mathbf{b_3}$ გრამი ნახშირწყალია.

წიწილას დღიური რაციონი უნდა შეიცავდეს კალორიების არანაკლებ $\mathbf{c_1}$, ცხიმების არანაკლებ $\mathbf{c_2}$ გრამის და ნახშირწყლების არანაკლებ $\mathbf{c_3}$ გრამის რაოდენობას.

ვივარაუდოთ, რომ წიწილას დღიურ მენიუში $\mathbf{x}$ გრამი ხორბალია და $\mathbf{y}$ გრამი სიმინდის ფქვილი.

ამრიგად, მივიღებთ უტოლობათა სისტემას

$$\begin{cases} a_1\mathbf{x}+\mathbf{b_1y}\ge \mathbf{c_1}, \\ a_2\mathbf{x}+\mathbf{b_2y}\ge \mathbf{c_2}, \\ a_3\mathbf{x}+\mathbf{b_3y}\ge \mathbf{c_3}, \\ \mathbf{x}\ge \mathbf{0},\ \ \mathbf{y}\ge \mathbf{0}. \end{cases} \tag{5.1}$$

დავუშვათ, რომ 1 გრამი ხორბალი ღირს ფულის **p** ერთეული (თეთრებში), ხოლო 1 გრამი სიმინდის ფქვილი **q** ერთეული. მაშინ, წიწილას დღიური რაციონის ღირებულებაა (მიზნობრივი ფუნქცია)

$$\mathbf{f = px + qy \rightarrow min.} \qquad (5.2)$$

გარკვეულობისათვის, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$\frac{p}{q} \neq \frac{a_i}{b_i}, \ i = \overline{1,3}, \ \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}, \ \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}, \ \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_3}{b_3},$$

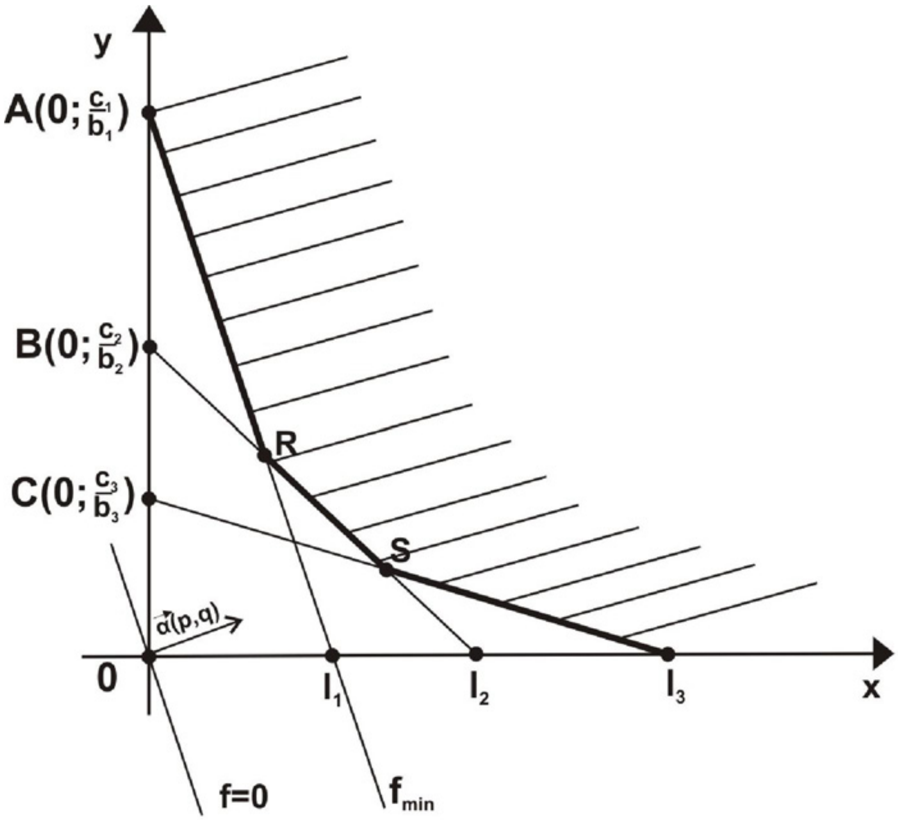
რაც ნიშნავს, რომ წრფეები $\left(l_i, \ i = \overline{1,3}\right)$

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \quad (l_1),$$

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \quad (l_2),$$

$$y = -\frac{a_3}{b_3}x + \frac{c_3}{b_3} \quad (l_3),$$

იკვეთებიან (ნახ.5.1)



ნახ.5.1

ვთქვათ,

$$\frac{c_1}{b_1} > \frac{c_2}{b_2} > \frac{c_3}{b_3}; \quad \frac{c_1}{a_1} < \frac{c_2}{a_2} < \frac{c_3}{a_3}; \quad \frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \frac{a_3}{b_3}. \tag{5.3}$$

მიზნობრივი ფუნქცია დასაშვებ ამონახსნთა არეში, (ამოზნექილი მრავალკუთხა შემოუსაზღვრელი არე) **R** წერტილში, აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას

$$\mathbf{f_{min} = f(R) = f(x_{min}; y_{min}) = px_{min} + qy_{min},}$$

სადაც

$$x_{\min} = \frac{\dfrac{c_1}{b_1} - \dfrac{c_2}{b_2}}{\dfrac{a_1}{b_1} - \dfrac{a_2}{b_2}} > 0,$$

$$y_{\min} = \frac{\dfrac{a_1}{b_1}\dfrac{c_2}{b_2} - \dfrac{c_1}{b_1}\dfrac{a_2}{b_2}}{\dfrac{a_1}{b_1} - \dfrac{a_2}{b_2}} = \frac{\dfrac{a_2}{b_2}\dfrac{a_1}{b_1}\left(\dfrac{c_2}{a_2} - \dfrac{c_1}{a_1}\right)}{\dfrac{a_1}{b_1} - \dfrac{a_2}{b_2}} > 0.$$

უტოლობები სრულდება (5.3)-ის ძალით.

სავარჯიშოები

იპოვეთ მიზნობრივი ფუნქციის მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობა მოცემულ არეში

1. **$W = 2x_1 - 5x_2 \to \min$;**

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $W = x_1 - 4x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 8, \\ -3x_1 + 10x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. $F = x_1 + x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. $W = 2x_1 + 2x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. **$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$;**

6. $W = x_1 - 3x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7. $W = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \end{cases}$$

8. $W = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 500, \\ x_1 \le 400, \\ x_2 \le 300, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9. $W = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10. $W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 11, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11. $W = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12. $W = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 0{,}6, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}4x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

13. $W = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

14. $W = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \le 11, \\ x_1 \le 2{,}75, \\ 3x_2 \le 1{,}1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

15. $W = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 \ge 3, \\ x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

16. $W = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \le 1, \\ -2x_1 + 24x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

17. $W = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \le 17, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

18. $W = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + 6x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

19. $W = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ -4x_1 + 6x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

20. $W = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 \le 32, \\ x_2 \le 31, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

21. $W = 4x_1 - x_2 \rightarrow \min;$

22. $W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 9, \\ -5x_1 + 8x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \ge 7, \\ -2x_1 + 9x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

23. W = $x_1 + 5x_2 \rightarrow$ max ;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

24. W = $2x_1 + x_2 \rightarrow$ min;

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \ge 7, \\ -2x_1 + 9x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

25. W = $x_1 + 4x_2 \rightarrow$ max;

$$\begin{cases} x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 5, \\ 3x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

26. W = $3x_1 - 2x_2 \rightarrow$ min;

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 8, \\ -3x_1 + 8x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

27. W = $x_1 + 3x_2 \rightarrow$ max;

$$\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 \le 9, \\ 3x_1 \le 1, \\ 3x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

28. W = $5x_1 + 4x_2 \rightarrow$ max;

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

29. W = $3x_1 + x_2 \rightarrow$ min;

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 5, \\ -3x_1 + 10x_2 \le 50, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

30. W = $3x_1 + 0{,}5x_2 \rightarrow$ max;

$$\begin{cases} x_1 \le 2, \\ x_2 \ge 1{,}8, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

§ 6. დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მოდელი

განვიხილოთ დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი [1,4].

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი ქვეყნის ეკონომიკა შედგება მრავალი დარგისაგან. ამ დარგების მუშაობა მჭიდროდაა დაკავშირებული ერთმანეთთან. ცხადია, რომ თითოეული მათგანი ამზადებს განსხვავებულ პროდუქციას და ხდება მათ შორის გაცვლა-გამოცვლა.

დარგთაშორისი კავშირების ანალიზი მაკროეკონომიკის უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა. ლეონტიევის მოდელი საშუალებას გვაძლევს ზუსტად გამოვთვალოთ თითოეული დარგის მიერ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა დარგთაშორისი და არსებული საბაზრო მოთხოვნების დასაკმაყოფილებლად, რომ ქვეყანაში არ იყოს დეფიციტი რაიმე პროდუქტზე ან არ ჰქონდეს ადგილი რაიმე პროდუქტის ჭარბწარმოებას.

დარგთაშორისი კავშირების ასახსნელად შექმნილია სპეციალური ცხრილი, რომლის მათემატიკური მოდელიც პირველად დამუშავდა ჰარვარდის უნივერსიტეტში პროფესორ ვასილ ლეონტიევის მიერ. მან ამერიკის შეერთებული შტატების ეკონომიკა დაყო 500 დარგად და შეისწავლა მათი ურთიერთთანამშრომლობის მექანიზმები. 1973 წელს აღნიშნული მოდელის შექმნისათვის ვ.ლეონტიევს ნობელის პრემია მიენიჭა ეკონომიკის დარგში.

აღნიშნულ მოდელში იგულისხმება, რომ თითოეული დარგი აწარმოებს მხოლოდ ერთი სახის პროდუქციას, წარმოების დონე უცვლელია იმ ხნის განმავლობაში, რომლისთვისაც ხდება დაგეგმვა.

ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი სამართლიანია მხოლოდ დროის რაღაც **T** განსაზღვრული შუალედისათვის.

განვიხილოთ ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი **n** - რაოდენობის დარგებისათვის. შესაბამისი მათემატიკური მოდელის ასაგებად შემოვიტანოთ აღნიშვნები: ვთქვათ, x_i - i-ური დარგის საერთო გამოშვებაა ფულად გამოსახულებაში, x_{ij} - i-ური დარგის პროდუქციის მოცულობაა, რომელიც გამოიყენება j-ური დარგის წარმოების უზრუნველსაყოფად, y_i - i-ური დარგის საბოლოო პროდუქციის მოცულობაა არასაწარმოო დანიშნულებისათვის ფულად გამოსახულებაში. ყოველივე ამის გათვალისწინებით შევადგინოთ დარგთაშორისი კავშირების ცხრილი 1:

ცხრილი 1

დარგების რიგითობა	პროდუქციის საერთო მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები					საბოლოო პროდუქტი
		1	2	3	. . .	n	
1	x_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	. . .	x_{1n}	y_1
2	x_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	. . .	x_{2n}	y_2
3	x_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	. . .	x_{3n}	y_3
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	x_n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	. . .	x_{nn}	y_n

სხვადასხვა დარგის პროდუქციის სიდიდე იზომება სხვადასხვა ერთეულით, ამიტომ მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად საჭიროა ყველასათვის ერთნაირი საზომი ერთეულის პოვნა. ასეთ ერთეულად შეიძლება ავიღოთ პროდუქციის ღირებულება. ცხრილში მოცემული დარგთაშორისი ნაკადების და საბოლოო პროდუქციის ჯამი ტოლია შესაბამისი დარგის პროდუქციის ღირებულებისა.

ამრიგად, ვღებულობთ დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის განტოლებას შემდეგი სახით

$$\mathbf{x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i \in \overline{1,n}.} \tag{6.1}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები

$$\boldsymbol{a}_{\mathbf{ij}} = \frac{\mathbf{x_{ij}}}{\mathbf{x_j}}, \quad \mathbf{i, j \in \overline{1,n}} \quad . \tag{6.2}$$

a**ij** - **i**-ური დარგის პროდუქციის მოცულობაა, რომელიც იხარჯება **j**-ური დარგის პროდუქციის ერთეულოვანი მოცულობის წარმოებაზე. **A = (*a*ij)** მატრიცას ტ ე ქ ნ ო ლ ო გ ი უ რ ი მ ა ტ რ ი ც ა ეწოდება, ხოლო ***a*****ij** - რიცხვებს წ ა რ მ ო ე ბ ი ს ტ ე ქ ნ ო ლ ო გ ი უ რ ი კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი. მოდელში იგულისხმება, რომ ეს კოეფიციენტები მუდმივია დროის გარკვეულ შუალედში.

(6.1) და (6.2)-დან მივიღებთ ლეონტიევის განტოლებას შემდეგი სახით

$$\mathbf{x_i = \sum_{j=1}^{n}} \boldsymbol{a}_{\mathbf{ij}} \mathbf{x_j + y_i, \quad i \in \overline{1,n}} \quad . \tag{6.3}$$

დარგთაშორისი ბალანსის (6.3) განტოლება უნდა ამოიხსნას x_i $(i \in \overline{1,n})$ მიმართ. ამისათვის შემოვიტანოთ მატრიცული აღნიშვნები

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}. \qquad (6.4)$$

მაშინ, ლეონტიევის (6.3) განტოლება მატრიცული ფორმით ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$X = A \cdot X + Y. \qquad (6.5)$$

(6.5) განტოლების ამოსახსნელად X-ის შემცველი შესაკრებები გადავიტანოთ ტოლობის მარცხენა მხარეს და გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ

$$X - AX = Y \Rightarrow EX - AX = Y \Rightarrow (E - A)X =$$

$$= Y \Rightarrow (E - A)^{-1}(E - A)X = (E - A)^{-1}Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1}Y. \qquad (6.6)$$

აქ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $(E - A)^{-1}$ არსებობს, ანუ

$$| E - A | \neq 0.$$

განვიხილოთ დარგთაშორისი ბალანსის ამოცანა, რომლის არსიც მდგომარეობს იმაში, რომ მიმდინარე წლის ბალანსის მონაცემებისა და გარკვეული დარგების უპირატესი განვითარების პირობებში სწორად დავგეგმოთ მომავალი წლის საერთი გამოშვება რეგიონსა თუ სახელმწიფოს ფარგლებში. იმისათვის, რომ ამოცანის დასმა იყოს უფრო გასაგები, განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი:

ვთქვათ, 2018 წელს 4 დარგმა (სოფლის მეურნეობა, მრეწველობა, ენერგეტიკა, მანქანათმშენებლობა) მოგვცა დარგთაშორისი ბალანსის შემდეგი ცხრილი 2

ცხრილი 2

დარგების ჩამონათვალი	პროდუქციის მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები				საბოლოო პროდუქტი
		1	2	3	4	
სოფლის მეურნეობა (1)	$x_1=125$	$x_{11}=15$	$x_{12}=10$	$x_{13}=30$	$x_{14}=20$	$y_1=50$
მრეწველობა (2)	$x_2=115$	$x_{21}=20$	$x_{22}=15$	$x_{23}=20$	$x_{24}=30$	$y_2=30$
ენერგეტიკა (3)	$x_3=120$	$x_{31}=10$	$x_{32}=20$	$x_{33}=15$	$x_{34}=15$	$y_3=60$
მანქანათმშენებლობა (4)	$x_4=120$	$x_{41}=30$	$x_{42}=30$	$x_{43}=10$	$x_{44}=10$	$y_4=40$

შევადგინოთ მიმდინარე 2018 წლის საერთო გამოშვების გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის (სოფლის მეურნეობა) საბოლოო პროდუქტი უნდა გაიზარდოს 10%-ით, მეორე დარგის (მრეწველობა) - 10%-ით, მესამე დარგის (ენერგეტიკა) - 5%-ით, ხოლო მეოთხე დარგის (მანქანათმშენებლობა) - 5%-ით.

ᲐᲛᲝᲮᲡᲜᲐ

ოთხივე დარგის საბოლოო პროდუქტის მოცულობის რეკომენდებული მნიშვნელობებია

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}50\cdot 1{,}1\\ 30\cdot 1{,}1\\ 60\cdot 1{,}05\\ 40\cdot 1{,}05\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}55\\ 33\\ 63\\ 42\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{15}{125} & \frac{10}{115} & \frac{30}{120} & \frac{20}{120}\\ \frac{20}{125} & \frac{15}{115} & \frac{20}{120} & \frac{30}{120}\\ \frac{10}{125} & \frac{20}{115} & \frac{15}{120} & \frac{15}{120}\\ \frac{30}{125} & \frac{30}{115} & \frac{10}{120} & \frac{10}{120}\end{pmatrix},\quad \mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{3}{25} & \frac{2}{23} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6}\\ \frac{4}{25} & \frac{3}{23} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4}\\ \frac{2}{25} & \frac{4}{23} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{6}{25} & \frac{6}{23} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{22}{25} & -\frac{2}{23} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{4}{25} & \frac{20}{23} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{2}{25} & -\frac{4}{23} & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{6}{25} & -\frac{6}{23} & -\frac{1}{12} & \frac{11}{12}\end{pmatrix}.$$

$$|\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\frac{252}{575}=\frac{252}{25\cdot 23}.$$

$$
(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{575}{252}\begin{pmatrix}
\frac{1973}{23\cdot 144} & \frac{521}{23\cdot 144} & \frac{5}{23} & \frac{599}{23\cdot 144}\\
\frac{713}{25\cdot 144} & \frac{2285}{25\cdot 144} & \frac{1}{5} & \frac{851}{25\cdot 144}\\
\frac{217}{25\cdot 23\cdot 3} & \frac{301}{25\cdot 23\cdot 3} & \frac{336}{25\cdot 23} & \frac{259}{25\cdot 23\cdot 3}\\
\frac{386}{25\cdot 23\cdot 3} & \frac{410}{25\cdot 23\cdot 3} & \frac{96}{25\cdot 23} & \frac{2\cdot 523}{25\cdot 23\cdot 3}
\end{pmatrix}.
$$

ხოლო მოცემული ოთხი დარგის საერთო გამოშვების გეგმა (6.6)-ის თანახმად იქნება

$$
\mathbf{X}=\begin{pmatrix}
\frac{3779525}{252\cdot 144}\\
\frac{2250803}{252\cdot 72}\\
\frac{48125}{378}\\
\frac{28418}{139}
\end{pmatrix}, \text{ ან } \qquad \mathbf{X}\approx\begin{pmatrix}
135{,}18\\
124{,}05\\
127{,}31\\
128{,}09
\end{pmatrix}.
$$

სავარჯიშოები

6.1 იპოვეთ ყოველი დარგის წარმოების აუცილებელი ღირებულებითი მოცულობა, რომელიც საჭირო იქნება მოთხოვნის პროდუქციის გასაზრდელად შესაბამისად 80% და 60%, თუ წარმოების სისტემა მოცემულია შემდეგი მახასიათებლებით

პროდუქციის მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები		მოთხოვნის მოცულობა
$x_1 = 100$	$x_{11} = 50$	$x_{12} = 20$	$y_1 = 30$
$x_2 = 150$	$x_{21} = 60$	$x_{22} = 60$	$y_2 = 30$

6.2 იპოვეთ ყოველი დარგის წარმოების აუცილებელი ღირებულებითი მოცულობა, რომელიც საჭირო იქნება მოთხოვნის პროდუქციის გასაზრდელად შესაბამისად 50% და 70%, თუ წარმოების სისტემა მოცემულია შემდეგი მახასიათებლებით

პროდუქციის მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები		მოთხოვნის მოცულობა
$x_1 = 100$	$x_{11} = 40$	$x_{12} = 20$	$y_1 = 40$
$x_2 = 150$	$x_{21} = 60$	$x_{22} = 50$	$y_2 = 40$

6.3 იპოვეთ ყოველი დარგის წარმოების აუცილებელი ღირებულებითი მოცულობა, რომელიც საჭირო იქნება მოთხოვნის პროდუქციის გასაზრდელად შესაბამისად 50% და 50%, თუ წარმოების სისტემა მოცემულია შემდეგი მახასიათებლებით

პროდუქციის მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები		მოთხოვნის მოცულობა
$x_1 = 150$	$x_{11} = 50$	$x_{12} = 60$	$y_1 = 40$
$x_2 = 120$	$x_{21} = 30$	$x_{22} = 40$	$y_2 = 50$

6.4 იპოვეთ ყოველი დარგის წარმოების აუცილებელი ღირებულებითი მოცულობა, რომელიც საჭირო იქნება მოთხოვნის პროდუქციის გასაზრდელად შესაბამისად 40% და 50%, თუ წარმოების სისტემა მოცემულია შემდეგი მახასიათებლებით

პროდუქციის მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები		მოთხოვნის მოცულობა
$x_1 = 140$	$x_{11} = 60$	$x_{12} = 70$	$y_1 = 10$
$x_2 = 160$	$x_{21} = 60$	$x_{22} = 70$	$y_2 = 30$

6.5 იპოვეთ ყოველი დარგის წარმოების აუცილებელი ღირებულებითი მოცულობა, რომელიც საჭირო იქნება მოთხოვნის პროდუქციის გასაზრდელად შესაბამისად 80% და 60%, თუ წარმოების სისტემა მოცემულია შემდეგი მახასიათებლებით

პროდუქციის მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები		მოთხოვნის მოცულობა
$x_1 = 100$	$x_{11} = 50$	$x_{12} = 20$	$y_1 = 30$
$x_2 = 150$	$x_{21} = 60$	$x_{22} = 60$	$y_2 = 30$

6.6 წინა წელს ეკონომიკის ორმა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილი:

#	1	2			საბოლოო პროდუქტი (y_i)	პროდუქციის საერთო გამოშვება (x_i)
1	50	50			100	200
2	40	30			180	250

იპოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების (x_i) გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი (y_i) გაიზრდება 10%-ით, მეორე დარგისა – 20 %-ით.

6.7 წინა წელს ეკონომიკის ორმა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილი:

#	1	2			საბოლოო პროდუქტი (y_i)	პროდუქციის საერთო გამოშვება (x_i)
1	30	50			120	200
2	40	60			150	250

იპოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების (x_i) გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი (y_i) გაიზრდება 15%-ით, მეორე დარგისა – 10%-ით.

6.8 წინა წელს ეკონომიკის ორმა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილი:

#	1	2		საბოლოო პროდუქტი (y_i)	პროდუქციის საერთო გამოშვება (x_i)

1	60	40		120	220
2	40	30		180	250

იპოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების (x_i) გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი (y_i) გაიზრდება 25 %-ით, მეორე დარგისა – 20 %-ით.

6.9 წინა წელს ეკონომიკის ორმა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილი:

#	1	2		საბოლოო პროდუქტი (y_i)	პროდუქციის საერთო გამოშვება (x_i)
1	30	40		130	200
2	40	30		150	220

იპოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების (x_i) გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი (y_i) გაიზრდება 20%-ით, მეორე დარგისა – 25%-ით.

6.10 წინა წელს ეკონომიკის ორმა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილი:

#	1	2		საბოლოო პროდუქტი (y_i)	პროდუქციის საერთო გამოშვება (x_i)
1	30	40		180	250
2	40	60		200	300

იპოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების (x_i) გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი (y_i) გაიზრდება 30 %-ით, მეორე დარგისა – 15 %-ით.

6.11 წინა წელს ეკონომიკის ორმა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილი:

#	1	2		საბოლოო პროდუქტი (y_i)	პროდუქციის საერთო გამოშვება (x_i)
1	60	40		100	200
2	40	60		150	250

იპოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების (x_i) გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი (y_i) გაიზრდება 30 % - ით, მეორე დარგისა – 40 % - ით.

წინა წელს მეურნეობის ხუთმა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილი:

№	1	2	3	4	5	საბოლოო პროდუქტი (**y_i**)	პროდუქციის საერთო გამოშვება (**x_i**)
1	10	20	30	20	20	100	200
2	20	10	25	35	10	150	250
3	20	20	30	30	20	180	300

4	40	30	20	20	40	200	350
5	30	40	20	40	20	250	400

იპოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების (**x_i**) გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი (**y_i**) გაიზრდება **n_1%**-ით, მეორე დარგისა – **n_2%**-ით, მესამისა – **n_3%**, მეოთხისა – **n_4%**-ით, მეხუთესი – **n_5%**-ით.

6.12. **n_1 = 10%, n_2 = 5%, n_3 = 12%, n_4 = 15%, n_5 = 20%.**

6.13. **n_1 = 5%, n_2 = 10%, n_3 = 15%, n_4 = 10%, n_5 = 15%.**

6.14. **n_1 = 15%, n_2 = 12%, n_3 = 10%, n_4 = 5%, n_5 = 10%.**

6.15. **n_1 = 20%, n_2 = 15%, n_3 = 5%, n_4 = 20%, n_5 = 5%.**

6.16. **n_1 =8%, n_2 = 6%, n_3 = 20%, n_4 = 12%, n_5 = 8%.**

6.17. **n_1 =12%, n_2 = 8%, n_3 = 16%, n_4 = 8%, n_5 = 12%.**

6.18. **n_1 =6%, n_2 = 10%, n_3 = 15%, n_4 = 10%, n_5 = 10%.**

6.19. **n_1 =18%, n_2 = 5%, n_3 = 12%, n_4 = 5%, n_5 = 15%.**

6.20. **n_1 =16%, n_2 = 8%, n_3 = 10%, n_4 = 8%, n_5 = 10%.**

6.21. **n_1 =4%, n_2 = 6%, n_3 = 8%, n_4 = 10%, n_5 = 12%.**

§ 7. საერთაშორისო ვაჭრობის მოდელი

მოდელში განიხილება **n** რაოდენობის ქვეყანა. ამ ქვეყნების ეროვნული შემოსავალი, რომელიც მიმართულია მოხმარებაზე, ანუ საქონლის (პროდუქტის) შეძენაზე და მომსახურებაზე შესაბამისად $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის ტოლია [1].

ვივარაუდოთ, რომ სისტემა კონსერვატიულია, ე.ი. x_j შემოსავალი მთლიანად იხარჯება განხილული ქვეყნების სისტემის შიგნით, ω_{kj} - ეროვნული x_j შემოსავლის ნაწილია, რომელიც იხარჯება **k**-ური ქვეყნის საქონლის შეძენაზე და მომსახურეობაზე

$$\mathbf{p}_{kj} = \frac{\omega_{kj}}{x_j}, \quad \mathbf{k}, \mathbf{j} = \overline{1, n} \tag{7.1}$$

p_{kj} - ეროვნული შემოსავლის შესაბამისი წილია (p_{jj} - $(j = \overline{1, n})$ ეროვნული შემოსავლების წილებია, რომლებიც იხარჯება ყოველი ქვეყნის შიგნით საქონლის შეძენაზე და მომსახურეობაზე).

შემოვიტანოთ **P** მატრიცა

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

ამ კვადრატულ მატრიცას ვ ა ჭ რ ო ბ ი ს ს ტ რ უ ქ ტ უ რ უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ა ეწოდება.

რადგანაც, ყოველი **j**-თვის $(j = \overline{1, n})$

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \omega_{kj} \qquad (7.3)$$

(7.1), (7.2)-დან მივიღებთ, რომ **P** მატრიცის ყოველი სვეტის ელემენტთა ჯამი ერთის ტოლია (სვეტების მიხედვით სტოქასტური მატრიცაა).

ყოველი $k = \overline{1,n}$ -თვის პირველი ქვეყანა **k**-ური ქვეყნის საქონლის შეძენაზე და მომსახურეობაზე ხარჯავს ω_{k1} თანხას, მეორე - ω_{k2} თანხას, ..., **n**-ური - ω_{kn} თანხას, ამიტომ **k**-ური ქვეყნის ამონაგები გარე და შიგა ვაჭრობიდან შეადგენს

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} \omega_{kj} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj} x_j, \qquad (7.4)$$

ანუ $y_k = \vec{P}_k \cdot \vec{x}$, $\vec{P}_k = (p_{k1},...p_{kn})$ – **P** მატრიცის **k**-ური სტრიქონია, $\vec{x} = (x_1,...x_n)$.

ამ ქვეყნებს შორის ვაჭრობა ითვლება დაბალანსებურად, თუ ყოველი ქვეყნის სავაჭრო ბალანსი არადეფიციტურია, ანუ

$$y_j \geq x_j, \; j = \overline{1,n} \qquad (7.5)$$

ე.ი. მოხმარება არ აღემატება ამონაგებს.

ამრიგად, დაბალანსებული ვაჭრობისათვის, მივიღებთ უტოლობათა სისტემას

$$\begin{cases} p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + ... + p_{1n}x_n \geq x_1, \\ \vdots \\ p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + ... + p_{nn}x_n \geq x_n. \end{cases} \qquad (7.6)$$

თუ (7.6) სისტემაში თუნდაც ერთი სტრიქონისათვის ადგილი აქვს მკაცრ უტოლობას, მაშინ სტრიქონების შეკრებით მივიღებთ

$$(\mathbf{p_{11}+\ldots+p_{n1}})\mathbf{x_1}+(\mathbf{p_{12}+\ldots+p_{n2}})\mathbf{x_2}+\ldots+(\mathbf{p_{1n}+\ldots+p_{nn}})\mathbf{x_n}=$$

$$=\mathbf{x_1+x_2+\ldots+x_n>x_1+x_2+\ldots+x_n},$$

რადგანაც

$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{p_{kj}=1,\quad j=\overline{1,n}}.$$

ჩვენ მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც ნიშნავს იმას, რომ (7.6) უტოლობათა სისტემა სინამდვილეში არის წრფივი განტოლებათა სისტემა

$$\mathbf{P\vec{x}\ =\ \vec{x}} \tag{7.7}$$

და წარმოადგენს ქვეყნების კონსერვატიული სისტემის დაბალანსებულ სავაჭრო ბალანს.

წრფივი სისტემა (7.7)-თვის საკუთარი მნიშვნელობების და საკუთარი ვექტორის არსებობა ეკვივალენტურია ეროვნული შემოსავლების არსებობისა, რომლებიც განახორციელებენ არადეფიციტურ სავაჭრო სისტემას სტრუქტურული **P** მატრიცით (7.2), ე.ი. ქვეყნების ჯგუფისათვის ვაჭრობის დაბალანსებული მოდელის არსებობისა სტრუქტურული **P** მატრიცით.

რადგანაც (7.7) სისტემა ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემის

$$\mathbf{(P-I)\vec{x}=0} \tag{7.8}$$

სადაც I - ერთეულოვანი მატრიცია, მაშინ არანულოვანი მოხმარების $\vec{x}$ ვექტორის არსებობა ეკვივალენტურია (P – I) მატრიცის გადაგვარებულობისა, ანუ

$$\det(P - I) = 0.$$

ბუნებრივია, რომ ამ მოდელს აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა, რადგანაც სავაჭრო გაცვლის ხანგრძლივი დაუბალანსებლობა (ეკონომიკის მდგომარეობის ძირითადი მახასიათებლების ოთხ-ხუთ რიცხვში) სერიოზული სიგნალია სავალუტო კურსის მოახლოებული ცვლილებისა.

განვიხილოთ სამი ქვეყნის კონსერვატიული სისტემის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცა

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

და ვიპოვოთ დაბალანსებული (არადეფიციტური) ვაჭრობის მოდელისათვის ამ ქვეყნების მოხმარების $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ ვექტორი.

ბუნებრივია, რომ

$$\det(P - I) = 0,$$

ამიტომ ასეთი არანულოვანი $\vec{x}$ ვექტორი არსებობს.

ამ შემთხვევაში (7.7) სისტემის ამონახსნი ჩაიწერება

$$\vec{x} = \left(x_1, \frac{4}{3}x_1, \frac{2}{3}x_1 \right) = \lambda\left(1; \frac{4}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

თუ შევარჩევთ, მაგალითად, $\lambda = 3\lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$), მაშინ მივიღებთ ამ ქვეყნებს შორის დაბალანსებულ ვაჭრობას მოხმარების ნებისმიერი $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ ვექტორისათვის, რომლის კომპონენტები ($3\lambda_0$; $4\lambda_0$, $2\lambda_0$) შეეფარდება როგორც 3:4:2, ე.ი. მეორე ქვეყნის ეროვნული შემოსავალი ყველაზე მაღალია, ხოლო მესამე ქვეყნის - ყველაზე დაბალი.

სავარჯიშოები

7.1 სამი ქვეყნის საერთაშორისო ვაჭრობის მატრიცას აქვს სახე

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{7} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{7} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

იპოვეთ თანაფარდობა ამ ქვეყნების ბიუჯეტებს შორის.

7.2.სამი ქვეყნის საერთაშორისო ვაჭრობის მატრიცას აქვს სახე

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{7} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{7} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

იპოვეთ თანაფარდობა ამ ქვეყნების ბიუჯეტებს შორის.

7.3 სამი ქვეყნის საერთაშორისო ვაჭრობის მატრიცას აქვს სახე

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ .\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

იპოვეთ თანაფარდობა ამ ქვეყნების ბიუჯეტებს შორის.

7.4 სამი ქვეყნის საერთაშორისო ვაჭრობის მატრიცას აქვს სახე

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{7} & \frac{1}{4} \\ .\frac{1}{4} & \frac{4}{7} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

იპოვეთ თანაფარდობა ამ ქვეყნების ბიუჯეტებს შორის.

7.5. სამი ქვეყნის კონსერვატიული სისტემის ვაჭრობის სტრუქტურულ მატრიცას აქვს სახე

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ამ ქვეყნების დაბალანსებული ვაჭრობისთვის მოხმარების $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ ვექტორი.

7.6. ოთხი ქვეყნის კონსერვატიული სისტემის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცაა

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ამ ქვეყნების დაბალანსებული ვაჭრობისათვის მოხმარების $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)$ ვექტორი.

7.7 ოთხი ქვეყნის კონსერვატიული სისტემის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცაა

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ამ ქვეყნების დაბალანსებული ვაჭრობისათვის მოხმარების $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)$ ვექტორი.

7.8 ოთხი ქვეყნის კონსერვატიული სისტემის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცაა

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ამ ქვეყნების დაბალანსებული ვაჭრობისათვის მოხმარების $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)$ ვექტორი.

7.9 ოთხი ქვეყნის კონსერვატიული სისტემის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცაა

$$P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ამ ქვეყნების დაბალანსებული ვაჭრობისათვის მოხმარების $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)$ ვექტორი.

7.10 ოთხი ქვეყნის კონსერვატიული სისტემის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცაა

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{3}{5} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ამ ქვეყნების დაბალანსებული ვაჭრობისათვის მოხმარების $\vec{x}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ვექტორი.

7.11 მოცემულია საერთაშორისო ვაჭრობის მატრიცა

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

იპოვეთ თანაფარდობა მათი ბიუჯეტების შორის.

7.12 .მოცემულია საერთაშორისო ვაჭრობის მატრიცა

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

იპოვეთ თანაფარდობა მათი ბიუჯეტების შორის.

7.13 შეადგინეთ საერთაშორისო ვაჭრობის „პოლიტიკური“ მატრიცა რუსეთი : უკრაინა : საქართველო, თუ მათი ბიუჯეტების თანაფარდობაა 30:15:1.

7.14 შეადგინეთ საერთაშორისო ვაჭრობის „პოლიტიკური“ მატრიცა თურქეთი : სომხეთი : საქართველო, თუ მათი ბიუჯეტების თანაფარდობაა 20:2:1,5.

7.15 შეადგინეთ საერთაშორისო ვაჭრობის „პოლიტიკური“ მატრიცა თურქეთი : აზერბაიჯანი : სომხეთი, თუ მათი ბიუჯეტების თანაფარდობაა 20:9:2.

7.16 შეადგინეთ საერთაშორისო ვაჭრობის „პოლიტიკური“ მატრიცა აზერბაიჯანი:სომხეთი:საქართველო, თუ მათი ბიუჯეტების თანაფარდობაა 7:2:1,5.

§ 8. სტოუნის მომხმარებლის არჩევანის მოდელი

გამოვიყვანოთ მოთხოვნის ფუნქცია სტოუნის მომხმარებლის არჩევანის (სარგებლიანობის) კონკრეტული ფუნქციისათვის. ამ ფუნქციას აქვს სახე [1, 5]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i - a_i)^{\alpha_i} \to \max , \ \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) . \qquad (8.1)$$

აქ a_i, $i = \overline{1,n}$ -ური დოვლათის აუცილებელი მინიმალური რაოდენობაა, რომელიც შეისყიდება ნებისმიერ შემთხვევაში და არ წარმოადგენს არჩევანის საგანს. იმისათვის, რომ a_i, $i = \overline{1,n}$ დოვლათთა ერთობლიობა, სრულად იქნეს შეძენილი, აუცილებელია, რომ I შემოსავალი იყოს ამ დოვლათთა ერთობლიობის შესაძენად საჭირო ფულის რაოდენობაზე

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i a_i$$

მეტი. $\alpha_i > 0$ ხარისხის მაჩვენებლები (8.1)-ში, ახასიათებენ მომხმარებლისათვის დოვლათთა ფარდობით ღირებულებას ანუ ახასიათებენ იმას, თუ რამდენად მეტად სასურველია ესა თუ ის სახის დოვლათი მომხმარებლისათვის.

თუ მიზნობრივ (8.1) ფუნქციას დავუმატებთ საბიუჯეტო შეზღუდვებს

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i a_i \le \mathbf{I} , \ \ \mathbf{x}_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,n} , \qquad (8.2)$$

მაშინ მივიღებთ ამოცანას, რომელსაც სტოუნის მოდელი ეწოდება.

ლაგრანჟის ფუნქციას ამ შემთხვევაში აქვს სახე

$$\mathbf{L(x_1,...,x_n,\lambda) = L(x,\lambda) = u(x) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I)\right).} \qquad (8.3)$$

ვიპოვოთ ლანგრაჟის ფუნქციის კერძო წარმოებულები $\mathbf{x_i}$, $(\mathbf{i = \overline{1,n}})$ ცვლადებით და გავუტოლოთ ნულს, მაშინ

$$\mathbf{\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda p_i = \alpha_i \frac{u(x)}{x_i - \mathit{a}_i} + \lambda p_i = 0, \quad i = \overline{1,n},}$$

საიდანაც

$$\mathbf{x_i = \mathit{a}_i - \frac{\alpha_i u(x)}{\lambda p_i}, \quad i = \overline{1,n}\ .} \qquad (8.4)$$

ამ პირობებს დაემატება ტოლობა

$$\mathbf{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I = 0,} \qquad (8.5)$$

რომლის შესრულება ეკვივალენტურია ტოლობისა, რომელიც მიიღება თუ ლანგრაჟის ფუნქციის წარმოებულს λ-თი გავუტოლებთ ნულს.

გავამრავლოთ (8.4)-ში ყოველი **i**-ური პირობა $\lambda \mathbf{p_i}$–ზე და ავჯამოთ **i**-ის მიმართ, მაშინ მივიღებთ

$$\mathbf{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \mathit{a}_i = 0.} \qquad (8.6)$$

რადგანაც ოპტიმუმის წერტილში საბიუჯეტო შეზღუდვები სრულდება, როგორც ტოლობა, (8.6)-ში $\mathbf{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$ შევცვალოთ **I**-თი, მაშინ მივიღებთ

$$\frac{u(x)}{\lambda} = -\frac{I - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad . \tag{8.7}$$

(8.4), (8.7)-დან მივიღებთ მოთხოვნის ფუნქციას

$$x_i = a_i + \frac{\alpha_i}{p_i} \cdot \quad \frac{I - \sum_{j=1}^{n} p_j a_j}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}, \quad i = \overline{1,n} \quad . \tag{8.8}$$

ამ ფუნქციის ინტერპრეტირება საკმაოდ იოლია. თავდაპირველად გამოიყენება ყოველი a_i ($i = \overline{1,n}$) დოვლათის მინიმალურად აუცილებელი რაოდენობა, შემდეგ გამოითვლება ფულის დარჩენილი რაოდენობა, რომელიც პროპორციულად გადანაწილდება მოცემული სახის დოვლათის სასურველობის α_i ($i = \overline{1,n}$) მნიშვნელობის (წონადობის) მიხედვით. ფულის რაოდენობის p_i ფასზე გაყოფით მივიღებთ მინიმუმის გარდა დამატებით შესაძენ i-ური დოვლათის რაოდენობას და დავუმატებთ მას a_i-ის.

სტოუნის მოდელს გააჩნია კერძო შემთხვევები:

მაგალითად, როცა ყველა a_i=0, $i = \overline{1,n}$, ხოლო α_i($i = \overline{1,n}$) ერთმანეთის ტოლია, მაშინ (8.8)-დან მივიღებთ

$$x_i = \frac{I}{np_i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{8.9}$$

ე.ი. შემოსავალი იყოფა n ტოლ ნაწილად და მოთხოვნა i-ურ საქონელზე მიიღება როგორც განაყოფი მიღებული ფულის რაოდენობის გაყოფისაგან მის ფასზე.

ამ შემთხვევაში ჩვენ ვხედავთ, რომ მოთხოვნა იზრდება შემოსავლის ზრდადობისას ერთის ტოლი ელასტიურობით და კლებულობს ფასის ზრდადობით მინუს ერთის ტოლი ელასტიურობით. ამრიგად, ამ მოდელში ყოველი საქონელი ნორმალურია და ფასიანი. ამის გარდა, მოთხოვნა უსასრულობამდე იზრდება, შემოსავლის უსასრულო გაზრდისას. ამ აზრით, ყოველი საქონელი არის "ფუფუნების საგანი".

იმისათვის, რომ აღვწეროთ მოთხოვნის ქცევის უფრო მრავალსახოვანი ფორმები სხვადასხვა საქონელზე მოდელი უნდა შეიცავდეს, მიზნობრივი უპირატესობის (სარგებლიანობის) ფუნქციის უფრო რთულ სახეებს. მაგალითად, უპირატესობის ფუნქციისათვის

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1^{a} \mathbf{x}_2^{\mathbf{b}-a} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{b} - a)^{-\mathbf{b}}, \qquad (8.10)$$

სადაც ***a*, b** - პარამეტრებია, მოთხოვნის ფუნქციას აქვს სახე

$$\mathbf{x}_1 = \frac{a\mathbf{I}}{\mathbf{I} + \mathbf{b}\mathbf{p}_1}. \qquad (8.11)$$

რაც, პირველი მოთხოვნის საგნებისათვის მოთხოვნის ტიპიური ფუნქციაა, ხოლო

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\mathbf{I}(\mathbf{I} + \mathbf{p}_1(\mathbf{b} - a))}{\mathbf{p}_2(\mathbf{I} + \mathbf{b}\mathbf{p}_1)} \qquad (8.12)$$

ფუფუნების საგნებისათვის ტიპიური მოთხოვნის ფუნქციაა.

(8.5), (8.11), (8.12) მარტივად მიიღება შემდეგი სისტემიდან

$$L(x_1, x_2) \equiv u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{a u}{x_1} - \dfrac{bu}{x_1 + b - a} + \lambda p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{(b - a)u}{x_2} + \lambda p_2 = 0, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases}$$

სავარჯიშოები

8.1 სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \prod_{i=1}^{5} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \to \max.$$

იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია x_i $(i = \overline{1,5})$ იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი (პროფესორი) აუცილებლად მოიხმარს თვეში a_1 = **20** ცალ პურს p_1 = **0,55** ლარის ღირებულებით, a_2 = **4** კგ კარტოფილს p_2 = **1,2** ლარის ღირებულებით, a_3 = 4 კგ ხორცს p_3 = **9,5** ლარის ღირებულებით, a_4 = 3 კგ თევზს p_4 = 9 ლარის ღირებულებით და a_5 = 15 ცალ კვერცხს p_5 = 0,28 ლარის ღირებულებით, თუ α_1=**6**, α_2=**5**, α_3=**4**, α_4=**3**, α_5=**2**.

მომხმარებლის თვიური ბიუჯეტია 500 ლარი (ოჯახის ერთ კაცზე გათვლილი).

8.2. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \prod_{i=1}^{8} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \rightarrow \max .$$

იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია **x**$_i$ $(i = \overline{1,8})$ იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი (სახელმწიფო მოხელე, საშუალო დონის ჩინოვნიკი) მოიხმარს თვეში a_1 = 25 ცალ პურს **p**$_1$ = 0,7 ლარის ღირებულებით, a_2 = 5 კგ კარტოფილს **p**$_2$ = 1,2 ლარის ღირებულებით, a_3 = 9 კგ ხორცს (ქათმის, საქონლის, ღორის,...) **p**$_3$ = 10 ლარის ღირებულებით, a_4 = 5 კგ თევზს (კალმახი, ორაგული, სათალე თევზი,...) **p**$_4$ = 12 ლარის ღირებულებით, a_5 = 20 ცალ ოჯახის კვერცხს **p**$_5$ = 0,35 ლარის ღირებულებით, a_6 = 3 კგ ყველს (იმერული, სულგუნი, გუდა-ყველი,...) **p**$_6$ = 10 ლარის ღირებულებით, a_7 = 2 კგ სოკოს (ქამა სოკო, შამპინიონები,...) **p**$_7$ = 11 ლარის ღირებულებით, სხვა დელიკატესს a_8 = 5 კგ **p**$_8$ = 25 ლარის ღირებულებით, თუ $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 7$, $\alpha_4 = 6$, $\alpha_5 = 5$, $\alpha_6 = 8$, $\alpha_7 = 4$, $\alpha_8 = 9$.

საშუალო დონის **მოხელეს** თვიური ბიუჯეტია 1500 ლარი.

8.3. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე:

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{i=1}^{4} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \rightarrow \max .$$

იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია **x**$_i$ $(i = \overline{1,4})$ იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი (პენსიონერი) მოიხმარს თვეში a_1 = 30 ცალ პურს **p**$_1$ = 0,35 ლარის ღირებულებით, a_2 = 6 კგ კარტოფილს **p**$_2$ = 0,6 ლარის ღირებულებით, a_3 = 3 კგ ხორცს **p**$_3$ = 6 ლარის ღირებულებით, a_4 = 3 კგ შაქარს (ჩაისათვის) **p**$_4$ = 1 ლარის ღირებულებით, თუ $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 3$.

პენსიონერის თვიური ბიუჯეტი შეადგენს 180 ლარს.

§ 9. ქვეყნის მოსახლეობის შემოსავლის განსაზღვრის მოდელი

ლ ო რ ე ნ ც ი ს წ ი რ ი ეწოდება მოსახლეობის შემოსავლის ნორმის დამოკიდებულების გრაფიკს მოსახლეობის იმ წილისაგან, რომელსაც გააჩნია მოცემული (ცვლადი) ნორმირებული შემოსავალი [1,5]. ეს წირი იძლევა საშუალებას შევაფასოთ უსამართლობის ხარისხი მოცემული ქვეყნის მოსახლეობის შემოსავლების განაწილებაში, რაც ძალიან აქტუალურია დღევანდელ საქართველოში.

თუ ყოველი მოქალაქის შემოსავალი **m**-ის ტოლია, მაშინ **n** ადამიანის ერთობლივი შემოსავალი $I_n = mn$, ხოლო **N** ადამიანისაგან შემდგარი ჯგუფის საერთო შემოსავალია $I_N = mN$.

შემოვიტანოთ ნორმირებული ცვლადები $x = \dfrac{n}{N}$ და $y = \dfrac{I_n}{I_N}$, მაშინ

$$y = \frac{I_n}{I_N} = \frac{mn}{mN} = \frac{mNx}{mN} = x\,.$$

ე.ი. შემოსავლების თანაბარი განაწილებისას ლორენცის წირი არის საკოორდინატო სიბრტყის მთავარი დიაგონალი (ბისექტრისა), თუ **x** და **y**-ს ჩავთვლით უწყვეტად.

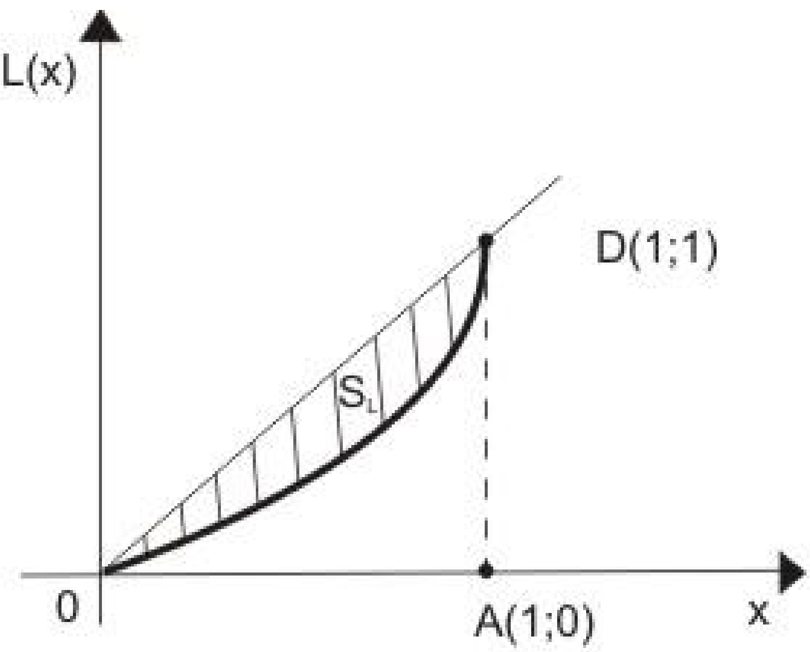
თუ ლორენცის წირის აგებისას შევთანხმდებით, რომ ერთობლივი შემოსავლის გაანგარიშება იწყება ღარიბებისაგან და მერე იზრდება სულზე შემოსავლის მიხედვით, მაშინ ლორენცის **L(x)** წირი განლაგებულია მთავარი დიაგონალის ქვემოთ.

ბუნებრივია, რომ რეალობაში **x** და **y = L(x)** ცვლადები ღებულობენ მხოლოდ სასრულო რაოდენობის მნიშვნელობებს, მაგრამ მოდელში ჩათვლილია, რომ **L(x)** უწყვეტი წირია. რაც უფრო შორდება

ლორენცის წირი დიაგონალს, მით უფრო მეტად არათანაბრად განაწილებულია მოსახლეობის შემოსავლები.

დავუშვათ **x (x∈[0, 1])** - მოსახლეობის წილია, **y = L(x) (L(0) = 0, L(1) = 1)** - ლორენცის წირია, **A = (1;0), D = (1,1)** (იხ. ნახ.5.6.1).

ლორენცის წირის და დიაგონალს შორის მოთავსებული მრუდწირული ფიგურის **S_L** ფართობის შეფარდებას **OAD** სამკუთხედის **S** ფართობთან ჯ ი ნ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი ეწოდება (შემოსავლების არათანაბრად განაწილების რიცხვითი მახასიათებელია).



ნახ.9.1.

ცხადია, რომ $S_{OAD} = S = 1/2$, ხოლო l - იყოს მრუდწირული სამკუთხედის **OAD** (მოთავსებულია **L(x)** წირის ქვემოთ) ფართობი, მაშინ ჯინის კოეფიციენტი **k** გამოითვლება ფორმულით

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{S} - l}{\mathbf{S}} = \mathbf{1} - \frac{l}{\mathrm{S}} = \mathbf{1} - \mathbf{2}l. \qquad (9.1)$$

დავუშვათ, რომ შედარებით ნაკლებად განვითარებული ქვეყნის შემოსავლების განაწილების სტატისტიკურმა მონაცემებმა გამოავლინეს ლორენცის წირი შემდეგი სახით

$$\mathbf{L(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}}, \ \mathbf{x \in [0,1]}. \qquad (9.2)$$

გამოვთვალოთ ჯინის **k** კოეფიციენტი.

ცხადია, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\mathbf{L(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2} < x, \quad 0 \le x \le 1}.$$

ამიტომ (9.2)-დან მივიღებთ

$$l = \int_0^1 \mathbf{L(x)dx} = \int_0^1 \left(\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{1 - x^2}}\right) \mathbf{dx} = \mathbf{1} - \frac{\pi}{\mathbf{4}}.$$

ამრიგად, (9.1)-ს თანახმად, მივიღებთ,

$$\mathbf{S_L = S} - l = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \left(\mathbf{1} - \frac{\pi}{\mathbf{4}}\right) = \frac{\pi}{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},$$

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{S_L}}{\mathbf{S}} = \frac{\pi}{\mathbf{2}} - \mathbf{1} \approx \mathbf{0{,}5708}.$$

შეიძლება გავაკეთოთ დასკვნა იმის შესახებ, რომ (9.2)-ის სახის ლორენცის ფუნქციის შემთხვევაში, გადახრა შემოსავლების თანაბრად განაწილების სამკუთხედიდან შეადგენს მისი ფართობის თითქმის 60%-ს.

რა თქმა უნდა, ჯინის კოეფიციენტის მნიშვნელობის განსაზღვრა, რომელიც შეესაბამება მოსახლეობის შემოსავლების განაწილებაში დასაშვებ არათანაბრობას, შეთანხმების საგანია, მაგრამ **k**-ს მიღებული მნიშვნელობა ძალიან მაღალია, რაც მეტყველებს ამ ქვეყნებში არსებულ უსამართლობაზე. ამ ქვეყნების ხელისუფლებას, რომელიც ასე ცუდად ზრუნავს თავის მოქალაქეთა ძირითადი მასის ინტერესებზე, არ უნდა გაუკვირდეს მოსალოდნელი აღელვებები სოციალური საკითხების გამო.

სავარჯიშოები

მოცემულია რამოდენიმე ქვეყნის ლორენცის წირი. გამოთვალეთ ჯინის შესაბამისი **k** კოეფიციენტი ($x\in[0,1]$). რომელია უფრო განვითარებული ქვეყანა?

9.1. $\mathbf{L(x)=1-\sqrt{\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+1}}$.

9.2. $\mathbf{L(x)=1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-5x+4}}$.

9.3. $\mathbf{L(x)=1-\frac{1}{3}\sqrt{x^2-10x+9}}$.

9.4. ლორენცის ფუნქციას აქვს სახე: $L(x)=1-\frac{1}{14}\sqrt{x^2-197x+196}$.

გამოთვალეთ ჯინის კოეფიციენტი. ქვეყნის მოსახლეობის რამდენი პროცენტია უკმაყოფილო არსებული მდგომარეობით?

9.5 ლორენცის ფუნქციას აქვს სახე: $L(x)=1-\frac{1}{12}\sqrt{x^2-145x+144}$.

გამოთვალეთ ჯინის კოეფიციენტი. ქვეყნის მოსახლეობის რამდენი პროცენტია უკმაყოფილო არსებული მდგომარეობით?

9.6 ლორენცის ფუნქციას აქვს სახე: $L(x)=1-\frac{1}{13}\sqrt{x^2-170x+169}$

გამოთვალეთ ჯინის კოეფიციენტი. ქვეყნის მოსახლეობის რამდენი პროცენტია უკმაყოფილო არსებული მდგომარეობით?

9.7 ლორენცის ფუნქციას აქვს სახე: $L(x)=1-\frac{1}{15}\sqrt{x^2-226x+225}$

გამოთვალეთ ჯინის კოეფიციენტი. ქვეყნის მოსახლეობის რამდენი პროცენტია უკმაყოფილო არსებული მდგომარეობით?

9.8 ლორენცის ფუნქციას აქვს სახე: $L(x)=x^{23}$.

გამოთვალეთ ჯინის კოეფიციენტი. ქვეყნის მოსახლეობის რამდენი პროცენტია უკმაყოფილო არსებული მდგომარეობით?

9.10 ლორენცის ფუნქციას აქვს სახე: $L(x)=x^3$.

გამოთვალეთ ჯინის კოეფიციენტი. ქვეყნის მოსახლეობის რამდენი პროცენტია უკმაყოფილო არსებული მდგომარეობით?

9.11ლორენცის ფუნქციას აქვს სახე: $L(x)=x^{99}$.

გამოთვალეთ ჯინის კოეფიციენტი. ქვეყნის მოსახლეობის რამდენი პროცენტია უკმაყოფილო არსებული მდგომარეობით?

§ 10. ქობ-დაგლასის და ლეონტიევის საწარმოო ფუნქციები

ცალკეული რეგიონის ან ქვეყნის მთლიანობაში ეკონომიკური პროცესების მოდელირებისას (მაკროეკონომიკურ, აგრეთვე მიკროეკონომიკურ დონეზე) გამოიყენება საწარმოო ფუნქციები [1,5].

განსაზღვრა 1. $Y = f(x_1, x_2, .., x_n)$ სახის ფუნქციას, სადაც x_i $(i=\overline{1,n})$ **i**-ური გამოყენებული რესურსების მოცულობებია, **Y** გამოშვებული პროდუქციის მოცულობა, *საწარმოო ფუნქცია* ეწოდება.

გარკვეული პროდუქციის გამომშვები ცალკეული საწარმოსათვის (ფირმა) საწარმოო ფუნქცია გამოშვებული პროდუქციის მოცულობას აკავშირებს (ნატურალურ ან ღირებულებით გამოსახულებაში) სხვადასხვა სახის შრომით დანახარჯებთან, ასევე დროის, ნედლეულის სხვადასხვა სახეობის, მაკომპლექტებელი ნაწილების, ენერგიის, ძირითადი კაპიტალის დანახარჯებთან. ასეთი ტიპის საწარმოო ფუნქცია წარმოების მოქმედი ტექნოლოგიის მოდელირებას ახდენს.

როგორც წესი, საწარმოო ფუნქციის აგებისას, ცალკეული რეგიონის ან მთლიანად ქვეყნისათვის, პროდუქტის წლიური გამოშვების **Y** მაჩვენებლად ხშირად იღებენ რეგიონის ან შესაბამისად ქვეყნის ერთობლივ პროდუქტს (შემოსავალი) აღრიცხულს უცვლელ ფასებში, რესურსებად განიხილავენ ძირითად კაპიტალს ($x_1=K$- წლის განმავლობაში გამოყენებული მოცულობა) და ცოცხალ შრომას ($x_2=L$ – ერთეულთა რაოდენობა). ამრიგად, მაკროეკონომიკაში განიხილავენ ორფაქტორიან $(\overline{i=1,2})$ საწარმოო ფუნქციას

$$Y = f(K,L) \tag{10.1}$$

ბუნებრივია, რომ რაც უფრო მეტია ფაქტორთა რიცხვი, მით უფრო რეალურია (ზუსტია) მოდელი, მაგრამ გაცილებით უფრო რთულიც. ზოგჯერ, ეკონომიკურ მოდელებში გამოყენებული ბუნებრივი რესურსების მოცულობის დამატებით გათვალისწინებით განიხილავენ მაკროეკონომიკის სამფაქტორიან საწარმოო ფუნქციას.

საწარმოო ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

ა) წარმოებაში გამოყენებული **i**-ური ($i=\overline{1,n}$) რესურსის ხარჯის გაზრდით გამოშვება გაიზრდება

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{10.2}$$

განსაზღვრა 2. Ω სიმრავლეს $Y = f(x_1,x_2,..,x_n)$ საწარმოო ფუნქციის ეკონომიკური არეალი ეწოდება, თუ ყოველი $M_0(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ წერტილისათვის Ω სიმრავლიდან ადგილი აქვს (10.2) უტოლობას.

ეკონომიკური არეალის გარეთ, რესურსის ეფექტურობა იწყებს დაცემას. მაგალითად, თუ რესურსად განიხილება მიწა, მაშინ სამუშაო ძალის უცვლელობისას, იჯარით აღებული მიწის ფართობის გაზრდამ შეიძლება კი არ გაზარდოს შემოსავალი, არამედ, პირიქით, შეამციროს კიდეც. ის მაქსიმალური ფართობი, რომელზედაც დაქირავებული მიწის ფართობის გაზრდა მომგებიანია, წარმოადგენს ამ შემთხვევაში, ეკონომიკური არეალის ზღვრულ მნიშვნელობას.

განსაზღვრა 3. $Y = f(x_1,x_2,..,x_n)$ საწარმოო ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს, x_i რესურსის ცვლილების მიხედვით, **i**-ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა ეწოდება. ზღვრული ეფექტურობა აღინიშნება M_i-თი

$$M_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

ბ) სხვა რესურსების რაოდენობის უცვლელობის პირობებში, ერთი რომელიმე აღებული რესურსის რაოდენობის ზრდასთან ერთად, ამ რესურსის გამოყენების ეფექტურობა მცირდება. საწარმოო ფუნქციის ამ თვისებას კ ლ ე ბ ა დ ზ ღ ვ რ უ ლ ე ფ ე ქ ტ უ რ ო ბ ა ს უწოდებენ. ეს პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{10.3}$$

გ) ერთი **i**-ური რესურსის გაზრდით სხვა **j**-ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა იზრდება, ანუ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} > 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}, \ i \neq j \ . \tag{10.4}$$

დ) საწარმოო ფუნქცია წარმოადგენს **p>0** ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას. ამასთან, როცა **p > 1**, წარმოების მასშტაბის **t**-ჯერ გაზრდით (**t > 1**) წარმოების მოცულობა იზრდება t^p-ჯერ, ე.ი. ადგილი აქვს წარმოების მასშტაბის ზრდით გამოწვეულ წარმოების ეფექტურობის ზრდას. როცა **p < 1**, მაშინ ადგილი აქვს წარმოების ეფექტურობის ვარდნას გამოწვეულს წარმოების მასშტაბის ზრდით, ხოლო, როცა **p = 1**, გვაქვს წარმოების მუდმივი ეფექტურობა წარმოების მზარდი მასშტაბების პირობებში, ან გვაქვს ხვედრითი გამოშვების დამოუკიდებლობა წარმოების მასშტაბისაგან.

აღნიშნული თვისება ჩაიწერება შემდეგი ტოლობით

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^p f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{10.5}$$

ეკონომიკური პროცესების მოდელირებისას განიხილავენ მულტიპლიკატიურ (ნამრავლის ფორმის გამო)

$$Y = \alpha_0 \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \qquad (10.6)$$

და ადიტიურ (ჯამის ფორმის გამო)

$$Y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad (10.7)$$

საწარმოო ფუნქციებს.

მიკრო, ასევე მაკროეკონომიკურ დონეზე საწარმოო საქმიანობის მოდელირებისათვის ხშირად გამოიყენება ორფაქტორიანი მულტიპლიკატიური კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქცია (კობ და დუგლასი ორი ამერიკელი ეკონომისტია, რომლებმაც 1929 წელს პირველად შემოიღეს ეს ფუნქცია)

$$Y = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}, \qquad (10.8)$$

სადაც **K** – გამოყენებული ძირითადი კაპიტალის მოცულობაა (ძირითადი ფონდები), ხოლო **L** – ცოცხალ სამუშაო ძალაზე დანახარჯები), $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ – საწარმოო ფუნქციის პარამეტრებია.

ხშირად, იხილავენ შემთხვევას, როცა ეს დადებითი მუდმივები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 \in (0,1),\ \alpha_2 \in (0,1),$$

მაშინ კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქცია (10.8) მიიღებს სახეს

$$\frac{Y}{L} = \alpha_0 \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha_1} . \qquad (10.9)$$

განსაზღვრა 4. $\frac{Y}{L}$ და $\frac{K}{L}$ წილადებს შესაბამისად შრომის მწარმოებლურობა და შრომის კაპიტალაღჭურვილობა ეწოდება, ხოლო $\frac{Y}{K}$ წილადს – კაპიტალის მწარმოებლურობა ან კაპიტალუკუგება, $\frac{K}{Y}$ წილადს – პროდუქციის გამოშვების კაპიტალტევადობა, $\frac{L}{Y}$ – პროდუქციის გამოშვების შრომატევადობა.

საწარმოო **Y = f(x_1, x_2)** ფუნქციას სტატიკური ეწოდება, თუ მისი პარამეტრები და **f** მახასიათებელი დამოუკიდებელია დროზე, თუმცა რესურსების და გამოშვების მოცულობები შეიძლება იყოს დამოკიდებული **t** დროზე, ე.ი. შეიძლება ჰქონდეთ წარმოდგენა დროითი მწკრივების სახით: **x_1 (0), x_1 (1), ..., x_1 (T); x_2 (0), x_2 (1), ..., x_2 (T); Y (0), Y (1),...,Y (T), Y(t) = f(x_1(t), x_2(t))**, სადაც **t** – წლის ნომერია $t = \overline{0,T}$, **t = 0** – დროითი შუალედის საბაზისო წელია, რომელიც მოიცავს 1,2...**T** წლებს.

საწარმოო ფუნქციას დინამიკური ეწოდება, თუ:

1^0. **t** დრო ფიგურირებს საწარმოო ფუნქციის არგუმენტებში, როგორც საწარმოს დამოუკიდებელი ფაქტორი, რომელიც გავლენას ახდენს გამოშვებული პროდუქციის მოცულობაზე, ანუ

Y = f (K, L, t).

2^0. საწარმოო ფუნქციის პარამეტრები $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)$ და **f** მახასიათებელი დამოკიდებულია დროზე.

საწარმოო ფუნქციის აგებისას სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესი შეიძლება გათვალისწინებულ იქნეს e^{pt} **(p > 0** – გამოშვების ზრდის ტემპია, სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესის გავლენით) მამრავლის შეყვანით, ანუ

$$\mathbf{Y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2(t)) \ \ (t = 0,1,2,.., T)}.$$

აქვე უნდა გავითვალისწინოთ, რომ თუ საწარმოო ფუნქციის პარამეტრებს განვსაზღვრავთ $\mathbf{T_0}$ დროის პერიოდში მოცემული დროითი მწკრივების საფუძველზე, მაშინ მიღებულმა საწარმოო ფუნქციამ შეიძლება მოგვცეს სარწმუნო შედეგები მომავალი დროის შუალედისათვის, რომელიც ხანგრძლივობით არ აღემატება $\mathbf{\frac{1}{3}T_0}$-ს.

განსაზღვრა 5. წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც წარმოადგენს $\mathbf{Y = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ საწარმოო ფუნქციის დონის წირებს (**Y = const**, ჰიპერზედაპირი) ი ზ ო კ ვ ა ნ ტ ა ეწოდება.

იზოკვანტის ცნება საწარმოო ფუნქციისათვის, ანალოგიურია განურჩევლობის მრუდის ცნებისა სარგებლიანობის ფუნქციისათვის.

განსაზღვრა 6. $\mathbf{Y = f(x_1,x_2,\ldots x_n)}$ საწარმოო ფუნქციის $\mathbf{E_{x_i}(Y)}$ ელასტიურობა **i**-ური რესურსის მიხედვით უწოდებენ **i**-ური რესურსის $\mathbf{M_i}$ ზღვრული მწარმოებლურობის შეფარდებას მის $\mathbf{A_i}$ საშუალო მწარმოებლურობასთან $\left(\mathbf{A_i = \frac{f}{x_i}, \ i = \overline{1,n}}\right)$, **i**-ური რესურსის მიხედვით

$$E_{x_i}(Y) = \frac{\partial f / \partial x_i}{f / x_i} = \frac{M_i}{A_i}. \qquad (10.10)$$

განსაზღვრა 7. წ ა რ მ ო ე ბ ი ს ე ლ ა ს ტ ი უ რ ო ბ ა ეწოდება ყველა რესურსის მიხედვით ელასტიურობათა ჯამს

$$E_x(Y) = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}(Y).$$

განსაზღვრა 8. **i**-ური რესურსის **j**-ურით ჩ ა ნ ა ც ვ ლ ე ბ ი ს ზ ღ ვ რ უ ლ ნ ო რ მ ა ს უწოდებენ გამოსახულებას

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}, \quad i, j = \overline{1,2}, \quad i \neq j \qquad (10.11)$$

Y გამოშვების მოცულობის მუდმივობის პირობებში.

კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციის განზოგადებას წარმოადგენს **CES (Constant Elasticity of Substitution;** ჩანაცვლების მუდმივი ელასტიურობა) ფუნქცია, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$Y = A\left[uK^{-\rho} + (1-u)L^{-\rho}\right]^{-n/\rho}, \qquad (10.12)$$

სადაც $\rho \geq -1$, $n > 0$ – ერთგვაროვნობის ხარისხია, $A > 0$, $0 < u < 1$.

განიხილავენ, აგრეთვე წრფივ

$$Y = aK + bL + c \qquad (10.13)$$

და ლეონტიევის

$$Y = \min(aK, bL) \qquad (10.14)$$

საწარმოო ფუნქციებს.

CES ფუნქციის ჩანაცვლების ელასტიურობა (კაპიტალით შრომის ჩანაცვლების ელასტიურობა)

$$\sigma_{LK} = \frac{d\ln\frac{K}{L}}{d\ln\frac{Y_L'}{Y_K'}}, \; Y_L' \equiv \frac{\partial Y}{\partial L}, \; Y_K' \equiv \frac{\partial Y}{\partial K},$$

გამოითვლება (10.12)-დან, და ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობას.

$$\sigma_{LK} = \frac{1}{1+\rho}. \tag{10.15}$$

ასევე უნდა აღინიშნოს, რომ **1/σ_{LK}** – იზოკვანტების (დონის წირები) სიმრუდის ზომაა.

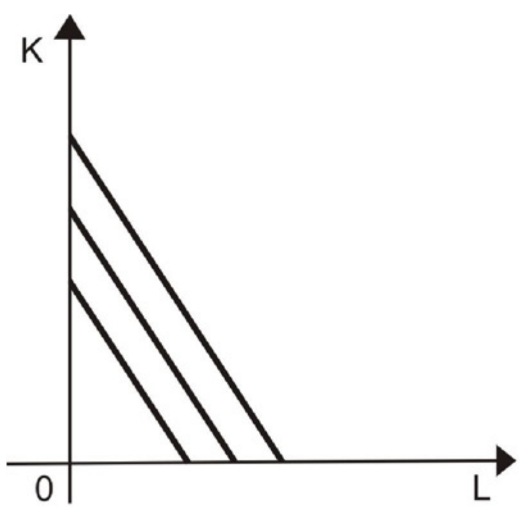
თუ **ρ = –1** , მაშინ მივიღებთ საწარმოო ფუნქციას წრფივი იზოკვანტებით (კერძოდ, წრფივ საწარმოო ფუნქციასაც).

როცა $\rho \rightarrow$ **0,** მაშინ ზღვრული გადასვლით (10.12)-ში მივიღებთ კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციას **σ = 1** – ელასტიურობით, ხოლო, როცა $\rho \rightarrow \infty$ – მივიღებთ ლეონტიევის საწარმოო ფუნქციას.

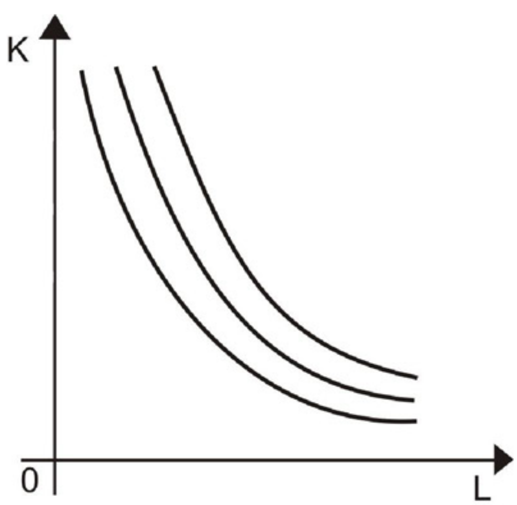
ამრიგად, წრფივ საწარმოო ფუნქციას აქვს ჩანაცვლების უსასრულო ელასტიურობა (იზოკვანტები წრფეებია, ნულოვანი სიმრუდით), კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციის ჩანაცვლების ელასტიურობა ერთის ტოლია, ხოლო ლეონტიევის ფუნქციას აქვს ჩანაცვლების ნულოვანი ელასტიურობა (მასში რესურსები გამოყენებულ უნდა იქნეს მხოლოდ მოცემულ პროპორციებში და ერთმანეთს ვერ ჩაანაცვლებენ).

10.1 - 10.4 ნახაზებზე მოცემულია ამ საწარმოო ფუნქციების დონის წირები (იზოკვანტები).

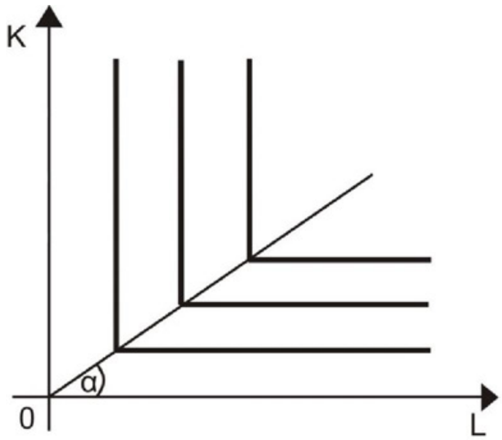
ზოგიერთი მეცნიერის მიერ (ა.გრანბერგი, ე.ერშოვი, ი.იარემენკო, ა.სმიშლიაევი, მ.ვეიტცმანი, ნ.ბარკალოვი) **CES** ფუნქცია გამოყენებულ იქნა საბჭოთა კავშირის ეკონომიკის მოდელისათვის.



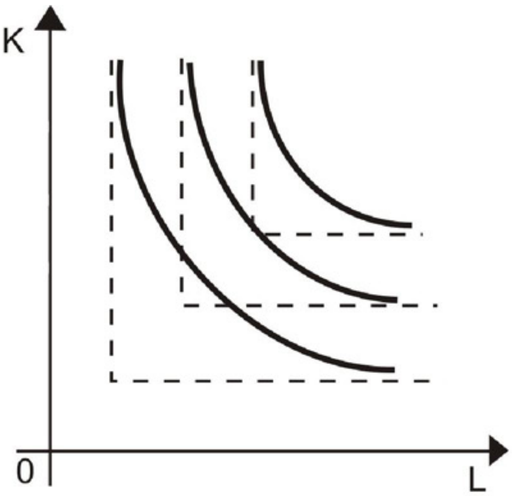
ნახ.10.1.
წრფივი საწარმოო ფუნქცია
$\mathbf{Y}=\boldsymbol{a}\mathbf{K}+\mathbf{bL}+\mathbf{c}$



ნახ.10.2.
კობ-დუგლასის ფუნქცია
$\mathbf{Y=AK^{\alpha}L^{\beta}}, \alpha\in\mathbf{(0,1)}, \beta\in\mathbf{(0,1)}$



ნახ.10.3.
ლეონტიევის ფუნქცია
Y=min(aK,bL), $\mathrm{tg}\alpha = \frac{b}{a}$



ნახ.10.4.
CES ფუნქცია

მაგალითად, 1960 - 1985 პერიოდის შეფასებისათვის მიღებულ იქნა (**n = 1**)

$$\mathbf{Y = 1{,}002\,(0{,}6412\;K^{-0{,}81} + 0{,}3588\;L^{-0{,}81})^{-1/0{,}81}}, \quad (10.16)$$

ანუ წრფივი-ერთგვაროვანი **CES** ფუნქცია მატერიალურ-ტექნიკური პროგრესის გაუთვალისწინებლობით და

$$\mathbf{Y = 0{,}966\,(0{,}4074\;K^{-3{,}03} + 0{,}5926\;L^{-3{,}03})^{-1/3{,}03}\,e^{0{,}0252\,t}}, \quad (10.17)$$

ანუ წრფივი-ერთგვაროვანი **CES** ფუნქცია მატერიალურ-ტექნიკური პროგრესის გათვალისწინებით.

(10.15)-ის თანახმად, (10.16)-ს შემთხვევაში ჩანაცვლების ელასტიურობა σ_{LK} **= 0,55** ტოლია, ხოლო (10.17)-ის შემთხვევაში σ_{LK} **= 0,25**.

სხვა ავტორების მიერ მიღებული შეფასებები ჩანაცვლების ელასტიურობისათვის შეადგენდა დაახლოებით 0,4, ანუ საბჭოთა

კავშირის ეკონომიკისათვის ის ერთზე ნაკლები იყო, რაც მიუთითებს შრომის და კაპიტალის ურთიერთჩანაცვლების დაბალ ხარისხზე.

სავარჯიშოები

10.1 ვთქვათ მოცემულია წრფივი საწარმოო ფუნქცია შემდეგი სახის

$$\mathbf{Y} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} a_{\mathbf{i}} \mathbf{x}_{\mathbf{i}}, \quad a_{\mathbf{i}} = \mathbf{const}, \quad \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,n}}.$$

აჩვენეთ, რომ ამ შემთხვევაში წარმოების ელასტიურობა ერთის ტოლია.

10.2. მოცემულია კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქცია

$$\mathbf{Y} = a_0 \mathbf{K}^{a_1} \mathbf{L}^{a_2}, \ a_0 > 0, a_1 \in (0,1), a_2 \in (0,1), a_1 + a_2 = 1.$$

ა) გამოთვალეთ წარმოების ელასტიურობა;

ბ) გამოთვალეთ **K** კაპიტალის **L** შრომის რესურსით ჩანაცვლების $\mathbf{R_{12}}$ ზღვრული ნორმა გამოშვების **Y** მოცულობის მუდმივობის პირობებში;

გ) გამოთვალეთ **L** შრომის **K** კაპიტალით ჩანაცვლების $\mathbf{R_{21}}$ ზღვრული ნორმა გამოშვების **Y** მოცულობის უცვლელობის პირობებში.

10.3. მოცემულია წრფივი ორფაქტორიანი საწარმოო ფუნქცია

$$\mathbf{Y} = a_0 + a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2.$$

იპოვეთ, ფაქტორების ურთიერთჩანაცვლების R_{12}, R_{21} ზღვრული ნორმები.

10.4. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ორფაქტორიანი საწარმოო ფუნქციისათვის ჩანაცვლების ზღვრული ნორმები აკმაყოფილებენ ტოლობას

$$R_{12}R_{21} = 1.$$

§ 11. ეკონომიკური დინამიკის წონასწორობის მოდელი

ეკონომიკურ მეცნიერებაში და პრაქტიკაში ამოსახსნელი ამოცანები დროის ფაქტორის გათვალისწინებით იყოფა სტატიკურ და დინამიკურ ამოცანებად.

სტატიკა სწავლობს ეკონომიკური ობიექტების მდგომარეობას, რომელიც შეესაბამება დროის განსაზღვრულ მომენტს, ან პერიოდს, მათი პარამეტრების დროში ცვლილებების გათვალისწინების გარეშე. დინამიკურ ამოცანებში აისახება ცვლადთა არა მარტო დამოკიდებულება დროზე, არამედ მათი ურთიერთკავშირი დროში. მაგალითად, ინვესტიციების დინამიკა განსაზღვრავს ძირითადი კაპიტალის სიდიდეების დინამიკას, რაც თავის მხრივ გამოშვების მოცულობის ცვლილების უმნიშვნელოვანესი ფაქტორია.

დრო ეკონომიკურ დინამიკაში განიხილება როგორც უწყვეტი ან დისკრეტული. უწყვეტი დრო მოხერხებულია მოდელირებისათვის, რადგანაც იძლევა დიფერენციალური აღრიცხვისა და დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის აპარატის გამოყენების საშუალებას. დისკრეტული დრო მოხერხებულია გამოყენებებისათვის, რადგანაც სტატისტიკური მონაცემები ყოველთვის დისკრეტულია და

შეესაბამება დროის კონკრეტულ ერთეულებს. დისკრეტული დროისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ სხვაობიანი განტოლებათა აპარატი.

აღვნიშნოთ, რომ ეკონომიკური დინამიკის ცნობილი მოდელების უმრავლესობა არსებობს როგორც უწყვეტ, ასევე დისკრეტულ ვარიანტებში. ორივე ვარიანტში მათთვის მიიღება ანალოგიური შედეგები, ხოლო თვით მოდელების სირთულის დონე დაახლოებით ერთნაირია.

ეკონომიკურ თეორიაში მნიშვნელოვანია წონასწორობის ცნება. წონასწორობა არის ობიექტის ისეთი მდგომარეობა, რომელსაც ის ინარჩუნებს გარე მოქმედებების არ არსებობის პირობებში [1].

ეკონომიკური დინამიკის ამოცანები შეიცავენ როგორც იმ პროცესების აღწერას, რომლებიც გადიან წონასწორობის მდგომარეობაზე, ასევე გარე ძალების მოქმედებით გამოწვეული ამ მდგომარეობის ტრანსფორმაციის პროცესებს.

დავუშვათ, რომ ეკონომიკური სისტემა აღიწერება ერთი **x(t)** მაჩვენებლით.

ვივარაუდოთ, რომ **x(t)** მაჩვენებლის ცვლილების სიჩქარე წონასწორობის x_e მდგომარეობიდან გადახრის პროპორციულია

$$\frac{dx(t)}{dt} = k(x(t) - x_e), \qquad (11.1)$$

სადაც **k** - მუდმივი კოეფიციენტია.

საწყისი პირობის სახით ავიღოთ შემდეგი ტოლობა

$$x(t)\big|_{t=0} = x(0) = x_0. \qquad (11.2)$$

კოშის ამოცანის (**11.1**), (**11.2**) ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\mathbf{x(t) = x_e+(x_0 - x_e)\, e^{kt}} \quad . \qquad (\mathbf{11.3})$$

თუ **k<0,** მაშინ **(11.3)**-დან მივიღებთ

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e + (x_0 - x_e)\lim_{t\to\infty} e^{kt} = x_e . \qquad (\mathbf{11.4})$$

(**11.4**) ნიშნავს, რომ წონასწორობა მდგრადია, ე.ი. **x(t)** სიდიდის გადახრისა $\mathbf{x_e}$ სიდიდისაგან ის კვლავ მიისწრაფვის მიიღოს ეს მნიშვნელობა.

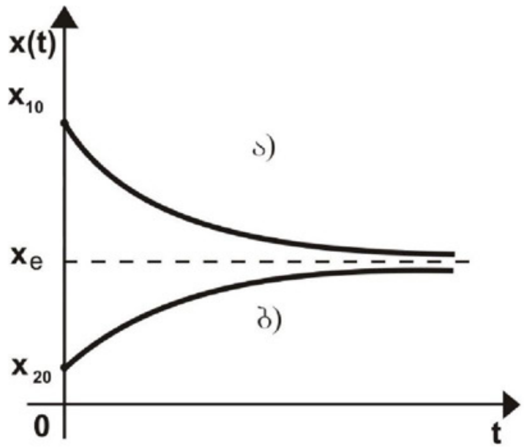
თუ **k > 0,** მაშინ (**11.3**) მოგვცემს ($\mathbf{x_0 \neq x_e}$)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e + (x_0 - x_e)\lim_{t\to\infty} e^{kt} = \mathrm{sign}(x_0 - x_e)\cdot\infty . \qquad (\mathbf{11.5})$$

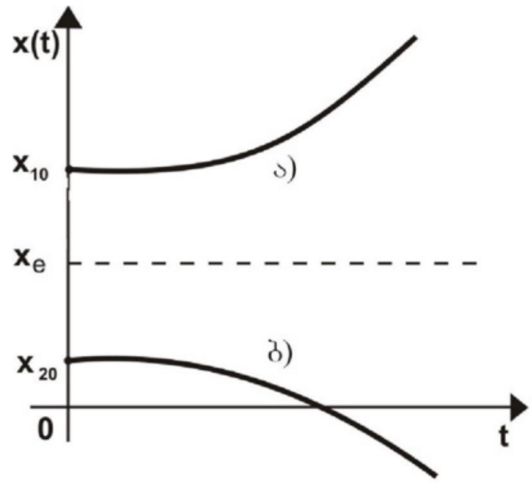
(**11.5**) ნიშნავს იმას, რომ თუ **k > 0** მაშინ **x(t)** მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ (თუ საწყისი მდგომარეობა არ ემთხვევა წონასწორობის მდომარეობას).

ნახაზებზე 11.1 (**k < 0**), 11.2 (**k > 0**) ნაჩვენებია **x(t)** ფუნქციის ყოფაქცევა.

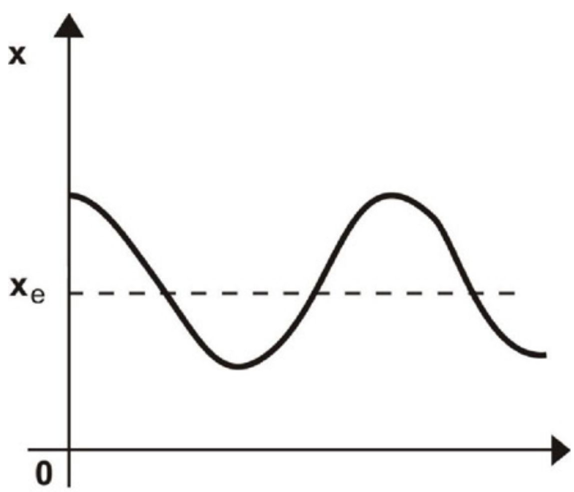
დინამიკური წონასწორობის ამოცანებში დინამიური სისტემები შეიძლება აღიწეროს აგრეთვე ისეთი გრაფიკებით, როგორც ნაჩვენებია ნახ.11.3, 11.4.



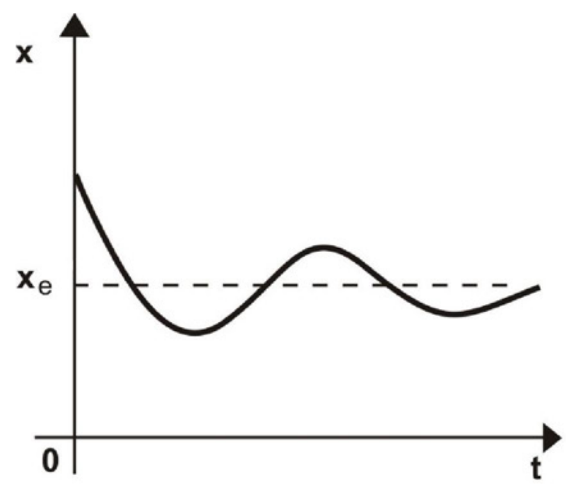
ნახ. 11.1 (k < 0)
ა) - $x_{10} > x_e$
ბ) - $x_{20} < x_e$



ნახ. 11.2. (k > 0)
ა) - $x_{10} > x_e$
ბ) - $x_{20} < x_e$



ნახ. 11.3



ნახ. 11.4

დისკრეტული მოდელი

ეკონომიკური სისტემის ქცევა დისკრეტულ დროში შეიძლება აღიწეროს სხვაობიანი განტოლების მეშვეობით, რომელიც აკავშირებს **x(t)** სიდიდის მნიშვნელობებს x_t, x_{t-1} დროის მეზობელ მომენტებში.

დისკრეტული მოდელის შემთხვევაში სხვაობიან განტოლებას აქვს სახე

$$x_t = x_{t-1} + k(x_{t-1} - x_e), \qquad (11.6)$$

რომლის ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$x_t = x_e + (x_0 - x_e)(1 + k)^t \ . \qquad (11.7)$$

მართლაც, (**11.6**)-დან მივიღებთ

$$x_1 = x_0 + k(x_0 - x_e) = x_0 + x_e - x_e + k(x_0 - x_e) = x_e + (x_0 - x_e)(k + 1),$$

$$x_2 = x_1 + k(x_1 - x_e) = x_1(1 + k) - kx_e = x_e(1 + k) +$$

$$+ (x_0 - x_e)(k + 1)^2 - kx_e = x_e + (x_0 - x_e)(k + 1)^2,$$

ანუ ნებისმიერი t-თვის ადგილი აქვს (**11.7**).

(**11.7**)-დან გამომდინარეობს, რომ როცა $k < 0$ სისტემა, რომელიც გადახრილია x_e-დან დიდი t-თვის უბრუნდება x_e, ხოლო, როცა $k > 0$ - უფრო შორდება.

(**11.7**)–დან გამომდინარეობს, რომ წონასწორობა მდგრადია, როცა

$|1 + k| < 1$, ანუ $-2 < k < 0$ და არამდგრადია $|1 + k| > 1$, ანუ $k \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ შემთხვევისათვის.

სავარჯიშოები

a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ეკონომიკური სისტემისათვის $x(t)$ მაჩვენებლით წონასწორობის x_e მდგომარეობა მდგრადია?

11.1 $\frac{dx(t)}{dt} = (a-2)(x - x_e), \quad x(0) = 20, \quad x_e = 25.$

11.2 $\frac{dx(t)}{dt} = (4 - a^2)(x - x_e), \quad x(0) = 15, \quad x_e = 10.$

11.3 $\frac{dx(t)}{dt} = (-7 + 6a + a^2)(x - x_e), \quad x(0) = 30, \quad x_e = 25.$

11.4 $\frac{dx(t)}{dt} = (9a - a^2 - 8)(x - x_e), \quad x(0) = 50, \quad x_e = 55.$

11.5 $\frac{dx(t)}{dt} = (-a^2 - 1)(x - x_e), \quad x(0) = 60, \quad x_e = 58.$

11.6 $\frac{dx(t)}{dt} = (a^2 - a + 1)(x - x_e), \quad x(0) = 32, \quad x_e = 35.$

11.7 $\frac{dx(t)}{dt} = (\sin a - 1)(x - x_e), \quad x(0) = 40, \quad x_e = 36.$

$$11.8\quad \frac{dx(t)}{dt}=(\cos a-\sqrt{2})(x-x_e),\quad x(0)=30,\quad x_e=25.$$

$$11.9\quad \frac{dx(t)}{dt}=(\sin a+\cos a-\sqrt{2})(x-x_e),\quad x(0)=45,\quad x_e=50.$$

$$11.10\quad \frac{dx(t)}{dt}=(\sin^{2018} a+\cos^{2018} a-1)(x-x_e),\quad x(0)=60,\quad x_e=70.$$

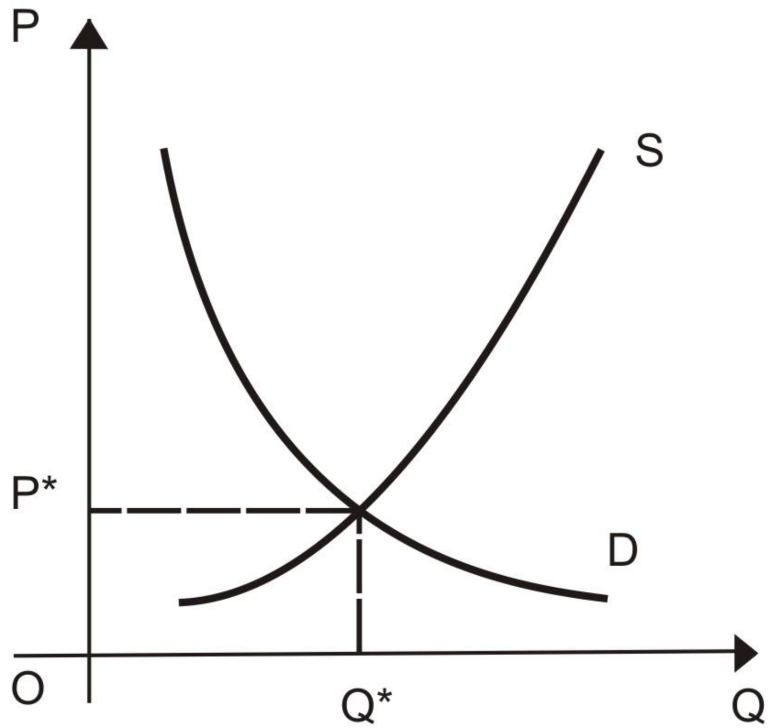
§ 12. ეკონომიკური დინამიკის მოდელები. ბაზრის მუშაობის ობობას ქსელისებრი მოდელი

განვიხილოთ მაკროეკონომიკური დინამიკის მოდელების ორი მაგალითი, რომლებიც წარმოადგენენ დისკრეტულ და უწყვეტ მიდგომებს (დისკრეტული და უწყვეტი მოდელები). ორივე შემთხვევაში მოდელებს გააჩნიათ აბსტრაქტული ხასიათი [1].

ამ მოდელებზე შეიძლება მოვახდინოთ დემონსტრირება დისკრეტული და უწყვეტი დინამიური მოდელების უმარტივესი აპარატისა, აგრეთვე ნათლად ვაჩვენოთ მაკროეკონომიკური დინამიკის უმნიშვნელოვანესი კატეგორიები და პრობლემები.

ბაზრის მუშაობის ობობას ქსელისებრი მოდელი.

ეს დისკრეტული მოდელი იძლევა საშუალებას გამოვიკვლიოთ ბაზარზე საქონლის ფასების და მოცულობის მდგრადობა, რომელიც აღიწერება მოთხოვნა-მიწოდების ტრადიციული წირებით, როცა არის დაგვიანება დროში (ლაგა) (იხ. ნახ.12.1)



ნახ.12.1. მოთხოვნა-მიწოდების წირი (**D–S**)

დავუშვათ, რომ მწარმოებლები (მაგალითად, ხორბლის ფერმა) განსაზღვრავენ საქონლის მიწოდების ფასს მოცემულ პერიოდში წინა პერიოდში დადგენილი ფასების მიხედვით

$$Q^S(t) = S_t(P_{t-1}). \qquad (12.1)$$

ამრიგად, მიწოდების ფუნქციაში (S) შედის დაგვიანება დროში, დროის ერთი ერთეულის ხანგრძლივობით. მართლაც, გადაწყვეტილება წარმოების მოცულობის შესახებ მიიღება მიმდინარე ფასების გათვალისწინებით, მაგრამ წარმოების ციკლს გააჩნია გარკვეული ხანგრძლივობა და ამის შესაბამისი გადაწყვეტილების მიწოდება გამოჩნდება ბაზარზე მოცემული ციკლის დამთავრებისას.

მოცემულ პერიოდში მოთხოვნის (D) წირი ახასიათებს დამოკიდებულებას საქონლის მოთხოვნის მოცულობასა და მის საბაზრო ფასს შორის.

$$Q^D(t) = D_t(P_t)\,. \qquad (12.2)$$

ამრიგად, ფასების დინამიკა აღიწერება შემდეგი განტოლებათა სისტემით

$$\begin{cases} Q_t^S = S_t(P_{t-1}), \\ Q_t^D = D_t(P_t), \\ Q_t^D = Q_t^S. \end{cases} \qquad (12.3)$$

ან ერთი მოთხოვნა-მიწოდების ფასების დამაკავშირებელი განტოლებით

$$D_t(P_t) = S_t(P_{t-1}). \qquad (12.4)$$

(**12.4**) განტოლებიდან შეიძლება ვიპოვოთ $\mathbf{P_t}$ ფასის მნიშვნელობა მოცემულ მომენტში, თუ ცნობილია მისი $\mathbf{P_{t-1}}$ მნიშვნელობა წინა მომენტში.

ამოხსნის სქემა შემდეგში მდგომარეობს:

$$\mathbf{Q_0 \to P_0 = D^{-1}(Q_0) \to Q_1 = S(P_0) \to P_1 = D^{-1}(Q_1) \to Q_2 = S(P_1) \to ...}$$

სადაც $\mathbf{D^{-1}}$ - მოთხოვნის ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა.

$$\mathbf{Q_0 = D(P_0)}.$$

კერძო შემთხვევისათვის, განვიხილოთ ობობას ქსელისებრი მოდელი, რომელშიც მოთხოვნის და მიწოდების ფუნქციები წრფივია

$$\mathbf{D(P) = C - EP_t,\ S(P) = A + BP_{t-1},\ S(P) = D(P).} \qquad (\mathbf{12.5})$$

აქ $\mathbf{B > 0}$, რადგანაც მიწოდების $\mathbf{S(P)}$ ფუნქცია ზრდადია; $\mathbf{E > 0}$, რადგანაც მოითხოვს $\mathbf{D(P)}$ ფუნქცია კლებადია

$$\mathbf{S'(P) = B > 0,\ D'(P) = -E < 0.}$$

ამასთან

$$\mathbf{C > A > 0,\ \text{ანუ}\ D(0) > S(0) > 0,}$$

რადგანაც ვთვლით, რომ ნულოვანი ფასისათვის მოთხოვნა აღემატება მიწოდებას.

განტოლება, რომელიც აღწერს ასეთი სისტემის დინამიკას, ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$D(P_t) = S(P_{t-1}),$$

$$C - EP_t = A + BP_{t-1} \quad . \qquad (12.6)$$

ვიპოვოთ წონასწორული **P*** ფასი და წარმოების წონასწორული **Q*** მოცულობა. ისინი უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებებს (იხ.ნახ. 12.1) (მოთხოვნის და მიწოდების ფასები და აგრეთვე, წარმოების მოცულობები ტოლია)

$$\begin{cases} C - EP^* = A + BP^*, \\ Q^* = C - EP^*, \end{cases}$$

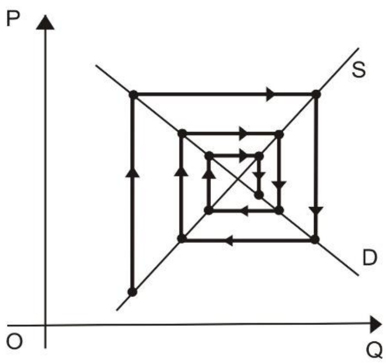
საიდანაც

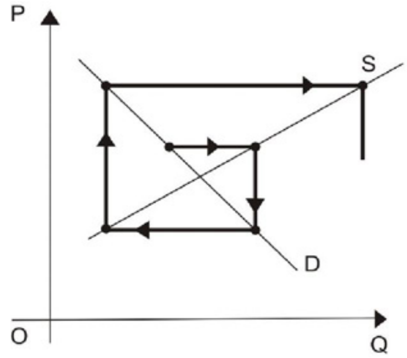
$$\begin{cases} P^* = \dfrac{C - A}{B + E}, \\ Q^* = \dfrac{BC + AE}{B + E}. \end{cases} \qquad (12.7)$$

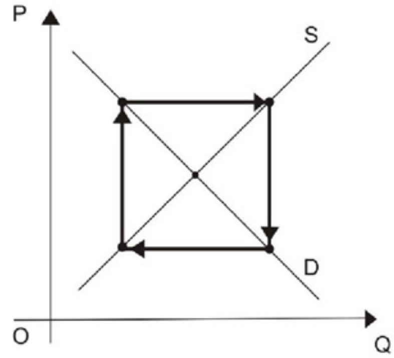
შემდეგში, აუცილებელია გამოვიკვლიოთ ფასების და წარმოების მოცულობის ყოფაქცევა იმ შემთხვევაში, როცა საწყისი წერტილი არ ემთხვევა წონასწორულს.

თავდაპირველად ეს ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას გრაფიკულად, რის შედეგად მივიღებთ "ობობას" ტიპის მსგავს სურათს.

ავიღებთ რა საქონლის მოცულობას და ფასის საწყის რაოდენობას, რომელიც განსხვავდება წონასწორული წერტილისაგან, თანმიმდევრულად აღვნიშნავთ წერტილებს მოთხოვნა-მიწოდების წირებზე მოდელში განსაზღვრული გამოანგარიშების პროცედურის თანახმად, შევაერთებთ მათ ჰორიზონტალური და ვერტიკალური სწორი ხაზებით.







ნახ.12.2 ნახ.12.3 ნახ.12.4

გრაფიკული ანალიზიდან მივიღებთ შემდეგ დასკვნებს:

ა) თუ მიწოდების **S** წირი უფრო დახრილია ვიდრე მოთხოვნის **D** წირი (ნახ.12.2), მაშინ წონასწორობა ასეთი საქონლის ბაზარზე მდგრადია (პროცესი მიიწსრაფვის წონასწორული მდგომარეობისაკენ).

ბ) თუ მოთხოვნის **D** წირი უფრო დახრილია ვიდრე მიწოდების **S** წირი, მაშინ წონასწორობა ასეთ ბაზარზე არამდგრადია (ნახ.12.3).

გ) მიწოდებისა და მოთხოვნის წირების თანაბარ დახრილობის შემთხვევაში ფასები ბაზარზე განიცდის რეგულარულ რხევებს მუდმივი ამპლიტუდით (ნახ. 12.4).

ახლა, გადავიდეთ მოდელის ფორმალურ ანალიზზე. თუ (12.**6**)-დან გამოვსახავთ P_t-ს P_{t-1}-ით მეშვეობით, მივიღებთ რეკურენტულ თანაფარდობას

$$\mathbf{P_t = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} P_{t-1}}. \qquad (12.\mathbf{8})$$

ამ თანაფარდობის თანმიმდევრულად გამოყენებისას, მივიღებთ

$$\mathbf{P_1 = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} P_0},$$

$$\mathbf{P_2 = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} P_1 = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E}\left(\frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} P_0\right)},$$

ან ზოგად შემთხვევაში

$$\mathbf{P_t = \frac{C-A}{E}\left[1 - \frac{B}{E} + \left(\frac{B}{E}\right)^2 - \left(\frac{B}{E}\right)^3 + \ldots + (-1)^{t-1}\left(\frac{B}{E}\right)^{t-1}\right] + (-1)^t\left(\frac{B}{E}\right)^t P_0} \qquad \mathbf{(12.9)}$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულება არის გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი

$$\mathbf{S = 1 - \frac{B}{E} + \left(\frac{B}{E}\right)^2 - \left(\frac{B}{E}\right)^3 + \ldots + (-1)^{t-1}\left(\frac{B}{E}\right)^{t-1}},$$

$$\mathbf{S_n = \mathit{a}_1\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) = \mathit{a}_1 \frac{1-q^n}{1-q}},$$

სადაც $\boldsymbol{a_1}$**=1,** $\mathbf{q = -\frac{B}{E}}$.

თუ **|q| < 1,** მაშინ $\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{\mathit{a}_1}{1-q} = \frac{1}{1-q}}$.

ამრიგად, (**12.9**)–დან დროის ნებისმიერ **t** მომენტისთვის მივიღებთ $\mathbf{P_t}$ ფასისათვის გამოსახულებას

$$P_t = \frac{C-A}{E} \cdot \frac{1-(-1)^t\left(\frac{B}{E}\right)^t}{1+\frac{B}{E}} + (-1)^t\left(\frac{B}{E}\right)^t P_0. \qquad \textbf{(12.10)}$$

ა) ცხადია, როცა $\frac{B}{E} < 1$, მაშინ

$$\left(\frac{B}{E}\right)^t \to 0 \text{ (დიდი } \mathbf{t}\text{-თვის)},$$

$$P_t \to \frac{C-A}{E+B} = P^*,$$

ანუ თუ მიწოდების წირი უფრო დახრილია ვიდრე მოთხოვნის წირი (იხ. **12.6**), მაშინ წონასწორობა მდგრადია (ნახ.12.2)

ბ) თუ $\frac{B}{E} > 1$, ესე იგი მოთხოვნის წირი უფრო დახრილია, ვიდრე მიწოდების (იხ. **12.6**), მაშინ

$$\left(\frac{B}{E}\right)^t \to \infty, \ (t \to \infty)$$

და პროცესი განშლადია (არამდგრადი წონასწორობა).

გ) როცა $\frac{B}{E} = 1$, ესე იგი **B = E**, ანუ თუ მოთხოვნის და მიწოდების წირები ერთნაირად არიან დახრილი (იხ. ნახ. 12.5), მაშინ

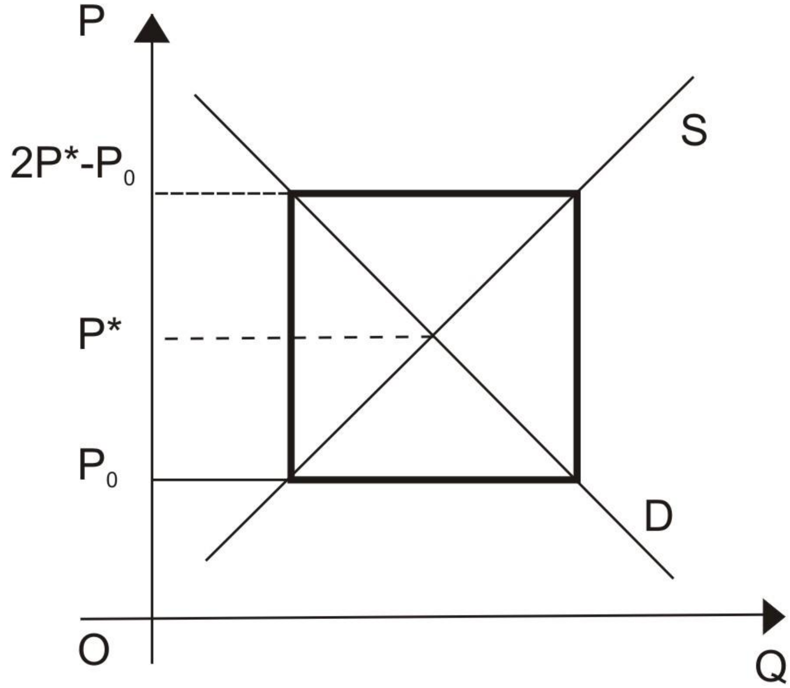
$$P_t = P^*[1 - (-1)^t] + (-1)^t P_0,$$

ანუ, თუ **t** - ლუწია, მაშინ

$$P_t = P_0,$$

ხოლო თუ **t** - კენტია, მაშინ

$$P_t = 2P^* - P_0, \quad P^* = \frac{P_1 + P_0}{2}.$$



ნახ.12.5. **($P_0 < P^*$)**

ამრიგად, სისტემის მდგრადობისათვის განმსაზღვრელი მომენტია უფრო ნაკლები რეაქციაა ფასების ცვლილებებზე იმ ფუნქციისა, რომელსაც გააჩნია დაგვიანება დროში (მიწოდების ფუნქცია $\mathbf{S(P) = A + BP_{t-1}}$).

რეალურად, როცა **B>E** უსასრულო ზრდად რხევებს ადგილი არ ექნება, რადგანაც დიდი გადახრის შემთხვევაში წონასწორობის მდგომარეობიდან, წრფივი მიახლოება (წრფივი მოდელი) არა - რეალისტურია.

უფრო რეალისტურ არაწრფივ მოდელებში დამყარდება არაწრფივი დიდი რხევები, მაგრამ სასრულო ამპლიტუდისა, რომლებიც არიან წინაპირობები წარმოების აღმავლობისა და ვარდნის ეკონომიკური ციკლებისა.

სავარჯიშოები

12.1 დავუშვათ, რომ მიწოდების და მოთხოვნის ფუნქციებს აქვთ სახე

$$S_t = A + BP_t, \quad D_t = C - EP_{t-1}, \quad S_t = D_t. \;\; A, B, C, E > 0, C > A.$$

როგორი იქნება წონასწორული წერტილისაკენ კრებადობის პირობა? გამოსახეთ ეს პროცესი გრაფიკულად.

12.2 მოცემულია ობობას ქსელისებრი მოდელი

$$S_t = 20 + 30P_{t-1}, \;\; D_t = 100 - 50P_t, \;\; S_t = D_t$$

დავუშვათ $P_0 = 0{,}5$. გამოვთვალოთ P_1—? P_2—?

12.3 დავუშვათ, რომ ობობას ქსელისებრი მოდელში მოთხოვნის ფუნქცია $D_t = \dfrac{3}{P_t}$, ხოლო მიწოდების ფუნქცია

$$S_t = 5P_{t-1}, P_0 = 1.$$

გრაფიკულად გამოსახეთ გამოშვების მოცულობის და ფასის დინამიკა. როგორია წონასწორული ფასი და გამოშვება? არის თუ არა წონასწორობა მდგრადი?

მოცემულია ობობას ქსელისებრი მოდელი. ააგეთ გრაფიკი და შეისწავლეთ მდგრადობაზე.

12.4 $S_t = 3 + 8P_{t-1}$, $D_t = 15 - 8P_t$, $S_t = D_t$, $P_0 = 1$.

12.5 $S_t = 12 + 9P_{t-1}$, $D_t = 18 - 10P_t$, $S_t = D_t$, $P_0 = 0{,}5$.

12.6 $S_t = 14 + 6P_{t-1}$, $D_t = 20 - 4P_t$, $S_t = D_t$, $P_0 = 0{,}7$.

12.7 $S_t = 10 + 4P_{t-1}$, $D_t = 40 - 11P_t$, $S_t = D_t$, $P_0 = 3$.

12.8 $S_t = 100 + 20P_{t-1}$, $D_t = 140 - 20P_t$, $S_t = D_t$, $P_0 = 2$.

12.9 $S_t = 80 + 6P_{t-1}$, $D_t = 110 - 4P_t$, $S_t = D_t$, $P_0 = 1$.

12.10 $S_t = 40 + 12P_t$, $D_t = 60 - 8P_{t-1}$, $S_t = D_t$, $P_0 = 2$.

12.11 $S_t = 30 + 6P_t$, $D_t = 70 - 2P_{t-1}$, $S_t = D_t$, $P_0 = 4$.

12.12 $S_t = 25 + 5P_t$, $D_t = 75 - 5P_{t-1}$, $S_t = D_t$, $P_0 = 3$.

12.13 $S_t = 35 + 4P_t$, $D_t = 115 - 4P_{t-1}$, $S_t = D_t$, $P_0 = 9$.

12.14 $\mathbf{S_t = 10 + 3P_t, \quad D_t = 90 - 5P_{t-1}, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 8.}$

12.15 $\mathbf{S_t = 40 + 9P_t, \quad D_t = 120 - 11P_{t-1}, \quad S_t = D_t, \quad P_0 = 5.}$

§ 13. სამომხმარებლო საქონლების ბაზრის ვალრასის დინამიური მოდელები

20-ე საუკუნის დასაწყისში შვეიცარიელმა ეკონომისტმა **ლ. ვალრასმა** გამოიკვლია ზოგიერთი დინამიური მოდელი უწყვეტი დროის ფაქტორის გათვალისწინებით. შემდეგ პირველად უწყვეტი დინამიური მოდელი 1930 წელს შემოგვთავაზა **ჯ. ევანსმა.** შემდგომ 20-ე საუკუნის 40-იან წლებში ანალოგიური იდეები შემოგვთავაზა **პ. სამუელსონმა.**

განვიხილოთ მოდელი ლ. ვალრასის კონცეფციის მიხედვით და მოვიყვანოთ მისი კვლევის შედეგები.

ვალრასის მოდელების თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ ბაზარი განიხილება ავტონომიურად, ეკზოგენური პროცესების გავლენის გარეშე. ეს იძლევა საშუალებას გავაანალიზოთ ბაზრის მოდელი უშუალო ინტეგრებით, სპეციალური მათემატიკური აპარატის გამოყენების გარესე.

მოდელირებისას ნავარაუდევია, რომ $P(t), D(t), S(t)$ $-$ t დროის უწყვეტი ფუნქციებია.

მოთხოვნის და მიწოდების წირები მოცემულია შემდეგი ფორმულებით:

$$D(P) = \alpha - aP \qquad (13.1)$$

სადაც α, a – მუდმივი კოეფიციენტებია,

$$S(P) = -\beta + bP \qquad (13.2)$$

სადაც β, b – მუდმივი კოეფიციენტებია.

ფასის ზრდის სიჩქარე პროპორციული λ მუდმივი კოეფიციენტით ბაზარზე საქონლის დეფიციტისა. ეს კოეფიციენტი განსაზღვრავს რეაქციის ხარისხს, მყიდველთა მგრძნობიარობას ჭარბ მოთხოვნაზე, დეფიციტზე. დეფიციტის გაზრდით იზრდება ფასის ზრდის სიჩქარე.

მათემატიკურ მოდელს აქვს ჩვეულებრივი წრფივი განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლების სახე:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda(D - S) \qquad (13.3)$$

სადაც $\frac{dP}{dt}$ - ფასის ცვლილების სიჩქარეა, $D - S$ - საქონლის დეფიციტს შეადგენს, $\lambda > 0$ – საქონლის დეფიციტზე მყიდველთა რეაქციის კოეფიციენტია.

განტოლება (13.3)-ს ამოხსნისათვის, მასში ჩავსვათ (13.1), (13.2) და მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda(\alpha + \beta) - \lambda(a + b)P(t) \qquad (13.4)$$

წონასწორობის წერტილში ფასის ცვლილების სიჩქარე ნულის ტოლია ($\frac{dP}{dt} = 0$), ამიტომ (13.4)- დან მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებას წონასწორულ ფასზე

$$\lambda(\alpha+\beta)-\lambda(a+b)P_* = 0 \qquad (13.5)$$

სადაც P_* – წონასწორული ფასია.

თუ (13.4) გამოვაკლებთ (13.5), მივიღებთ შემდეგ დივერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda(a+b)(P(t)-P_*) \qquad (13.6)$$

(13.6) განტოლების ამოხსნისათვის შემოვიღოთ გარდაქმნა

$$R(t) \equiv P(t) - P_* \qquad (13.7)$$

(13.7)-ში შემოტანილი უცნობი ფუნქცია $R(t)$ არის ფასის გადახრა წონასწორული ფასისგან, $P(t)$ ფასის ზრდაა წონასწორულ ფასზე P_* საქონლის დეფიციტის და ფასის შემცირება საქონლის სიჭარბის შემთხვევაში.

(13.6), (13.7) - დან მარტივად მიიღება დიფერენციალური განტოლება $R(t)$ ფუნქციაზე

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda(a+b)R(t) \qquad (13.8)$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$R(t) = R_0 \exp(-\lambda(a+b)t) \qquad (13.9)$$

სადაც R_0 არის საწყის მომენტში ფასის გადახრა წონასწორული ფასისგან.

$$R_0 = P_0 - P_* \qquad P(t)_{t=0} = P(0) = P_0 \qquad (13.10)$$

ამრიგად, (13.7), (13.9), (13.10)-დან მივიღებთ (13.6)-ის ერთადერთ ამონახსნს, რომელიც განსაზღვრავს საქონლის ფასის დინამიკას დროში

$$P(t) = P_* + (P_0 - P_*)\exp(-\lambda(a+b)t) \qquad (13.11)$$

$\operatorname{sgn}[-\lambda(a+b)]$-ის მნიშვნელობაზეა ანუ მის ნიშანზეა დამოკიდებულია ფასის მონოტონური მიახლოება თუ დაშორება წონასწორულ ფასისგან.

თუ $\operatorname{sgn}[-\lambda(a+b)] = -1$ ანუ $\lambda(a+b) > 0$, მაშინ დროის ცვლილებით საქონლის ფასი მიისწრაფვის წონასწორულ ფასისკენ, მიუხედავად იმისა საწყის მომენტში ფასი მეტია $(P_0 > P_*)$, ნაკლებია $(P_0 < P_*)$ თუ ტოლია $(P_0 = P_*)$ წონასწორობის ფასისა.

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_*$$

თუ $\operatorname{sgn}[-\lambda(a+b)] = 1$ ანუ $\lambda(a+b) < 0$, მაშინ დროის ცვლილებით საქონლის ფასი შორდება წონასწორულ ფასს, თუ საწყისს მომენტში ფასი მეტია წონასწორულზე $(P_0 > P_*)$ და დროის t_* მომენტში ფასი გახდება ნულის ტოლი, როცა საწყისს მომენტში ფასი ნაკლებია წონასწორულზე $(P_0 < P_*)$

$$t_* = -\frac{1}{\lambda(a+b)} \ln \frac{P_*}{P_* - P_0}$$

ამრიგად თუ $\lambda(a+b) > 0,$ მაშინ გვაქვს ასიმპტოტურად მდგრადი ბაზრის შემთხვევა, ხოლო თუ $\lambda(a+b) < 0,$ მაშინ არამდგრადი ბაზრის შემთხვევა.

როგორც დავინახეთ (13.11) ამონახსნიდან, ვალრასის ამ მოდელში ადგილი არა აქვს ფასის რხევებს ანუ ამონახსნს არა აქვს პერიოდული ფუნქციის სახე.

განვიხილოთ ფასის დინამიკის ყველანაირი შესაძლო შემთხვევა.

1. მოდელის პარამეტრები $a > 0, b > 0$ ანუ მოთხოვნა ფასის კლებადი ფუნქციაა, ხოლო მიწოდება ფასის ზრდადი ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში, როგორც სჩანს (13.11)-დან მიმდინარე ფასის გადახრა წონასწორული

ფასისგან მცირდება და ექსპონენციალური ფუნქციით მიისწრაფვის ნულისკენ. აქედან შეიძლება გაკეთდეს დასკვნა, ამ შემთხვევაში, საბაზრო ფასი ასიმპტოტურად მდგრადია. აქვე შევნიშნავთ, რომ როცა $a < b$ მოთხოვნის დაგვიანების ობობასქსელური მოდელის ანალიზს მივყავართ საწინააღმდეგო დასკვნისკენ - საბაზრო სისტემა არამდგრადია.

2. მოდელის პარამეტრები $a > 0, \beta < 0, b < 0$ ანუ მოთხოვნა და მიწოდება ფასის კლებადი ფუნქციებია.

მიწოდების ფუნქციის კლებადობა ნიშნავს, რომ საქონლის მწარმოებელი ფასის გაზრდით ამცირებს და არა ზრდის მიწოდებას. ასეთი სიტუაცია შესაძლებელია, თუ გამყიდველი არის ერთი მონოპოლისტი. ამ შემთხვევაში უნდა განვიხილოთ ორი ვარიანტი, რომლებსაც მივყავართ ორ პრინციპულად განსხვავებულ დასკვებისკენ.

პირველ ვარიანტში $a < -b$, შესაბამისად (13.11)-ის თანახმად მიმდინარე ფასის გადახრა წონასწორული ფასისგან იზრდება და საბაზრო სისტემა არამდგრადია.

მეორე ვარიანტში $a > -b, b < 0$, შესაბამისად (13.11)-ის თანახმად მიმდინარე ფასის გადახრა წონასწორული ფასისგან კლებულობს, ექსპონენციალური ფუნქციით მიისწრაფვის ნულისკენ და საბაზრო სისტემა ასიმპტოტურად მდგრადია.

ფასის დინანიკის შედარება ობობასქსელური და ვალრასის დინამიური მოდელის მიხედვით. აქ ნაგულისხმევია, რომ $a > 0$ ყოველთვის ანუ მოთხოვნის ფუნქცია ყოველთვის კლებადია (იხ. ცხრილი 13.1).

ბაზრის მოდელი	მიწოდება იზრდება ($b > 0$)	მიწოდება კლებულობს ($b < 0$)

	$b < a$	$b > a$	$a > -b$	$a < -b$
ვალრასის მოდელი	წონასწორობა ასიმპტოტურად მდგრადია	წონასწორობა ასიმპტოტურად მდგრადია	წონასწორობა ასიმპტოტურად მდგრადია	წონასწორობა არამდგრადია
ობობაქსელებური მოდელი	წონასწორობა ასიმპტოტურად მდგრადია	წონასწორობა არამდგრადია	წონასწორობა ასიმპტოტურად მდგრადია	წონასწორობა არამდგრადია

ცხრილი 13.1

სამომხმარებლო საქონლების ბაზრის დინამიური მოდელები

სასაქონლო ბაზრის დინამიური მოდელების თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ მათში ასახულია მისი ორი ძირითადი ნაწილი - მყიდველები და გამყიდველები.

ერთ ნაწილს (გამყიდველები) განზრახული აქვს საქონლის გაყიდვა, ხოლო მეორე ნაწილი (მყიდველები) მიისწრაფვის მიიღოს საქონლის ეს თუ სხვა რაოდენობა ფასზე დამოკიდებულებით. ეს დამოკიდებულებები მოდელირდება მიწოდებისა და მოთხოვნის ფუნქციებით. გამყიდველები და მყიდველები აგებენ თავის საბაზრო ქცევას შემდეგნაირად. საკონკურენტო ბაზარზე ფასის ზრდის შემთხვევაში გამყიდველები ცდილობენ გაზარდონ საქონლის წარმოება და მიწოდება, ხოლო მყიდველები ამცირებენ მოთხოვნას.

ხდება ბაზრის «საქონლით გადატვირთვა» და გარიგებების მოცულობის შემცირება.

საქონლის გაჩენილი სიჭარბე აიძულებს გამყიდველებს დაწიონ მისი ფასი. ეს ტენდენცია იწვევს მყიდველთა მოთხოვნის ზრდას და შეიძლება გაჩნდეს საქონლის დეფიციტი. შემდეგ შემოსავლის გაზრდის შესაძლებლობების იმედით გამყიდველები კვლავ აწევენ ფასს. ამრიგად, ბაზარი მოქმედებს უარყოფითი უკუკავშირის პრინციპით, როგორც შეკრული სისტემა, რომელიც შედგება ორი სამეურნეო სუბიექტთა ჯგუფებისაგან – გამყიდველებისაგან და მყიდველებისაგან. უმარტივეს შემთხვევაში, ბაზრის დინამიკა მთლიანობაში შეიძლება ავსახოთ ერთი დიფერენციალური განტოლებით. ასე აიგება **ლ. ვალრასის** მოდელები.

არსებობს უფრო რთული მოდელები.

პირველ მოდელში საბაზრო მოთხოვნა და მიწოდება საქონელზე დამოკიდებულია არა მარტო მის ფასზე, არამედ მისი ცვლილების სიჩქარეზე.

მეორე მოდელში გამყიდველები არამყისიერად რეაგირებენ წონასწორული ფასის ცვლილებაზე, არამედ გარკვეული ყოვნით.

ამასთან, ორივე მოდელი შეკრული სისტემაა და არ განიცდის გარე ზემოქმედებას. ამ შემთხვევაში იძულებით მოძრაობას ადგილი არა აქვს. ამიტომ გამოკვლევას ექვემდებარება თავისუფალი მოძრაობა. ბაზრის მოდელების გამოკვლევის მთავარი საკითხი მდგომარეობს საბაზრო სისტემის მდგრადობის გარკვევაში. თუ ფასი მიისწრაფვის ზოგიერთ მუდმივი მნიშვნელობისკენ, მაშინ საბაზრო სისტემა ასიმპტოტურად მდგრადია, მხარს უჭერს ასიმპტოტურად მდგრად მოძრაობას. თუ მეორდება ფასის უსასრულოდ ზრდადი რხევები ან ფასი მონოტონურად მიისწრაფვის უსასრულოსკენ, მაშინ სისტემა არამდგრადია.

საბაზრო სისტემის მდგრადობის ანალიზი კეთდება მახასიათებელი განტოლების ფესვების მიხედვით. თუ ყველა ფესვი ნამდვილია, მაშინ ფასი მონოტონურად იცვლება. თუ ერთი ფესვი მაინც დადებითია, მაშინ ფასის ცვლილების პროცესის შესაბამისი შესაკრები გამოისახება ექსპონენციალური ფუნქციით, რომელიც მიისწრაფვის უსასრულობისკენ.

თუ მახასიათებელი განტოლების ფესვები წმინდა წარმოსახვითია, ფასის ცვლილების პროცესს აქვს სინუსოიდალური სახე არაქრობადი რხევებით.

თუ ფესვები ნებისმიერი კომპლექსურია, მაშინ ფასი იცვლება რხევითად კლებადი ან ზრდადი ამპლიტუდით. ფასის ცვლილების კლებადი ამპლიტუდის დროს, ბაზარი ასიმპტოტურად მდგრადია, ზრდადი ამპლიტუდის დროს – არამდგრადია.

ასიმპტოტურად მდგრად სისტემაში ფასის სიდიდე მიისწრაფვის მუდმივ მნიშვნელობისკენ და წონასწორობის წერტილში ხდება მუდმივი. წონასწორობის მდგომარეობაში მოთხოვნა შთანთქავს საქონლის ყველა მიწოდებულ რაოდენობას. არამდგრად სისტემაში არასაფასო ფაქტორების ზემოქმედების ძალით, ფასი გადაიხრება წონასწორული მნიშვნელობისაგან, რის შემდეგ ადგილი აქვს ფასის უწყვეტ ცვლილებებს და შეიძლება გაჩნდეს დროის პერიოდები, რომლებშიც ბაზარზე შეიგრძნობა საქონლის დეფიციტი ან მისი სიჭარბე.

§ 14. ერთი საქონლის ბაზარის ვალრასის - ევანსი - სამუელსონის დინამიური მოდელები

განვიხილოთ კონკურენტული ბაზრის მოდელი, რომელშიც გამყიდველები არა მყისიერად რეაგირებენ წონასწორული ფასის ცვლილებაზე, არამედ გარკვეული ყოვნით.

მოთხოვნის $P(t)$ და მიწოდების $y(t)$ ფასები ერთმანეთს არ ემთხვევა.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $y(t)$ ფასი იგვიანებს $P(t)$ ფასთან შეფარდებით.

დაგვიანების (ყოვნი) მოდელირება გავაკეთოთ სისტემაში პირველი რიგის ინერციული რგოლის შემოღებით

$P(t)$ − რგოლის შემავალი პროცესია, $y(t)$ − რგოლის რეაქციაა.

რგოლის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=P(t) \tag{14.1}$$

სადაც T − დროითი ლაგია (საშუალო დაგვიანება, ყოვნი).

S მიწოდებას საფასო დინამიკის გათვალისწინებით აქვს შემდეგი სახე:

$$S(y(t))=-\beta+by(t) \tag{14.2}$$

სადაც β, b − მუდმივი კოეფიციენტებია.

მოთხოვნის დინამიკა D აღიწერება ტოლობით

$$D(P(t))=\alpha-aP(t) \tag{14.3}$$

სადაც α, a – მუდმივი კოეფიციენტებია.

ბაზარზე ფასის ცვლილების სიჩქარე პროპორციულია მოთხოვნისა და მიწოდების შეუთანხმებლობისა $\lambda > 0$ პროპორციულობის კოეფიციენტით.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda[D(P(t)) - S(y(t))] \qquad (14.4)$$

ამრიგად სამოდელო ობიექტი აღიწერება დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით

$$\begin{cases} T\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = P(t) \\ \\ \dfrac{dP(t)}{dt} = \lambda[D(P(t)) - S(y(t))] \end{cases} \qquad (14.5)$$

სადაც $S(y(t)), D(P(t))$ შესაბამისად განსაზღვრულია (14.2), (14.3)-ში.

სისტემა (14.5)-დან, (14.2), (14.3)-ს გათვალისწინებით, $P(t)$ -ს გამორიცხვით $y(t)$ ფუნქციისათვის მიიღება მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

$$T\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1 + \lambda aT)\frac{dy(t)}{dt} + \lambda(a+b)y(t) = \lambda(a+b) \qquad (14.6)$$

$y(t)$ ფასის დინამიკის მიხედვით, განვსაზღვროთ არის თუ არა ბაზარი მდგრადი სისტემა.

(14.6)-ის შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს შემდეგი სახე ((14.6) -ის ზოგადი ამონახსნი მიიღება ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და (14.6) კერძო ამონახსნის ($y(t) = 1$) ჯამის სახით)

$$T\frac{d^2y(t)}{dt^2}+(1+\lambda aT)\frac{dy(t)}{dt}+\lambda(a+b)y(t)=0 \qquad (14.7)$$

რომლის არატრივიალურ ამონახსნს $y(t)\neq 0$ ვეძებთ

$$y(t)=\exp(qt) \qquad (14.8)$$

(14.7)-ში (14.8) ჩასმით, მარტივად მიიღება მახასიათებელი განტოლება

$$Tq^2+(1+\lambda aT)q+\lambda(a+b)=0 \qquad (14.9)$$

მიწოდების ფასის მოძრაობის ანალიზს მოვახდენთ მახასიათებელი განტოლების (14.9)-ს ფესვების საფუძველზე

$$q_1=\frac{-(1+\lambda aT)+\sqrt{(1+\lambda aT)^2-4\lambda T(a+b)}}{2T} \qquad (14.10)$$

$$q_2=-\frac{1+\lambda aT+\sqrt{(1+\lambda aT)^2-4\lambda T(a+b)}}{2T}$$

რომლებიც იძლევიან შესაძლებლობას გავაკეთოთ რიგი დასკვნა შეფარდებით განხილული საბაზრო სისტემის დინამიური თვისებებისა.

თუ (14.10) ფესვები ნადვილია, მაშინ ფასების ცვლილების პროცესი მონოტონურია; თუ ფესვები კომპლექსურად შეუღლებულია, მაშინ პროცესი ციკლურია ცვალებადი ამპლიტუდით; თუ ფესვები წმინდა წარმოსახვითია, მაშინ პროცესი ციკლურია მუდმივი ამპლიტუდით.

ჩვენს შემთხვევაში ფასების ცვლილების პროცესი დამოკიდებულია $a,b,\lambda>0,T>0$ კოეფიციენტების მნიშვნელობებზე.

განვიხილოთ ფესქვეშა გამოსახულება (14.10)-ში.

$$Q = (1+\lambda aT)^2 - 4\lambda T(a+b) \tag{14.11}$$

1. თუ $Q < 0$, მაშინ მაშინ მიწოდების ფასის ცვლილების პროცესი ციკლურია ცვალებადი ამპლიტუდით. ცხადია, რომ ამას აქვს ადგილი, თუ სრულდება უტოლობა

$$a + b > \frac{(1+\lambda aT)^2}{4\lambda T}$$

ამის გარდა ჩვენ შემთხვევაში

$$1 + \lambda aT > 0 \tag{14.12}$$

რომელიც სრულდება, როცა

$$a > -\frac{1}{\lambda T}$$

ამიტომ, როცა $a > -\frac{1}{\lambda T}$ ნამდვილი ნაწილები კომპლექსური ფესვებისა (14.10)-ში უარყოფითია.

შესაბამისად მიწოდების ფასის ცვლილების პროცესს აქვს ქრობადი რხევების სახე. საბაზრო სისტემა ასიმპტოტურად მდგრადია.

2. თუ $Q \geq 0$, მაშინ მიწოდების ფასის ცვლილების პროცესს აქვს მონოტონური ხასიათი.

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში

$$a + b \leq \frac{(1+\lambda aT)^2}{4\lambda T} \tag{14.13}$$

(14.10)-ში, (14.13) გათვალისწინებით q_1-თვის მარტივად მიიღება

$$q_1 = \frac{-4\lambda(a+b)T}{2T((1+\lambda aT)+\sqrt{(1+\lambda aT)^2-4\lambda T(a+b)})} \qquad (14.14)$$

ცხადია, რომ $q_1 < 0$ თუ

$$a+b>0$$

ამის გარდა, (14.10)-დან ცხადია, რომ ყოველთვის $q_2 < 0$

იმასთან დაკავშირებით, რომ მახასიათებელი განტოლების (14.10)-ს ამ შემთხვევაში ორივე ფესვი უარყოფითია მიწოდების ფასი მონოტონურად მიისწრაფვის მუდმივი მნიშვნელობისკენ. საბაზრო სისტემა ასიმპტოტურად მდგრადია.

უნდა აღინიშნოს, რომ არასრულყოფილი კონკურენციის შემთხვევაში, შესაძლებელია მოდელის მუდმივი პარამეტრების სხვა მნიშვნელობები. ეს მოითხოვს ბაზრების მდგრადობის შესაბამის კვლევას.

მაგალითად, ორივე ფესვი (141.10)-ში წმინდა წარმოსახვითია, ანუ

$$1+\lambda aT=0, \quad b>\frac{1}{\lambda T}, \quad a+b>0$$

მაშინ მიწოდების ფასის ცვლილების პროცესი რხევითია, ფასის წონასწორული ფასისგან გადახრის ამპლიტუდა მუდმივია.

ამრიგად, ასიმპტოტური მდგრადობის არე განისაზღვრება უტოლობებით

$$\begin{cases} a > -\dfrac{1}{\lambda T} \\ \\ a + b > 0 \end{cases} \qquad (14.15)$$

ამრიგად, მიწოდების დაგვიანებით (ყოვნით) ბაზრის მოდელი ასიმპტოტურად მდგრადია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება (14.15).

§ 15. ალენისა და მარშალის ერთი საქონლის ბაზრის დინამიური უწყვეტი მოდელები

ალენისა და **მარშალის** მოდელი ითვალისწინებს, რომ დროის ნებისმიერ t მომენტში $P(t)$ ისე დგინდება, რომ ერთის მხრივ მოთხოვნა მთლიანად შთანთქავს მიწოდებას, მეორეს მხრივ მიწოდება მთლიანად შთანთქავს მოთხოვნას. ამ შემთხვევაში მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები დაკავშირებული არიან ფუნქციონალური ტოლობით [6, 18]:

$$D(P(t), \frac{dP(t)}{dt}) = S(P(t), \frac{dP(t)}{dt}) \qquad (15.1)$$

თუ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები თავისი არგუმენტების წრფივი ფუნქციებია,

$$D(t) = \alpha - aP(t) - k_2 \frac{dP(t)}{dt}, \; k_2 > 0 \qquad (15.2)$$

$$S(t) = -\beta + bP(t) + k_1 \frac{dP(t)}{dt}, \; k_1 > 0 \qquad (15.3)$$

მაშინ (15.1)-(15.3)-დან მივიღებთ

$$\frac{dP(t)}{dt} + \frac{a+b}{k} P(t) = \frac{\alpha + \beta}{k} \qquad (15.4)$$

$$k = k_1 + k_2 > 0$$

ბაზრის (15.4) მოდელი ასიმპტოტურად მდგრადია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a + b > 0$

მარშალის არგუმენტაცია სხვანაირია. თუ დროის რომელიღაც მომენტში მიწოდების მოცულობა განსხვავდება წონასწორულ დონეს, მაშინ მოსალოდნელი ფასები, რომლის გადახდის მზადყოფნაშია მყიდველი, განსხვავდება გამყიდველისთვის მისაღები ფასებისგან.

ა. **მარშალის** თანახმად საბაზრო კონიუქტურის ფორმირებაში ყოველთვის მწარმოებელებია დომინანტური ძალა.

საბაზრო ფასები არასაკმარისად მოქნილია და მოთხოვნისა და მიწოდებებს შორის დისპროპორციების გაჩენისას გარიგებების მოცულობები უფრო ჩქარად რეაგირებენ ვიდრე ფასები.

მარშალის მიხედვით საბაზრო წონასწორობის დადგენის პროცესის ინტერპრეტაცია შეესაბამება მოკლე პერიოდში არასრულყოფილი კონკურენციის პირობებს.

ავაგოთ დინამიური მოდელი, რომელშიც მიწოდების მოცულობა იზრდება, თუ გამყიდველების ფასები ნაკლებია ვიდრე მყიდველებისათვის მისაღები.

დავუშვათ, რომ გაზრდის სიჩქარე დეფიციტის მოცულობის პროპორციულია.

მაშინ, მიიღებთ (P_D-მყიდველის ფასია, P_S- გამყიდველის ფასია)

$$P_D = \frac{\alpha - Q}{a}, \qquad P_S = \frac{\beta + Q}{b} \tag{15.5}$$

სადაც $Q(t)$ - მიწოდების მოცულობა, რომლისთვის ადგილი აქვს დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda(P_S - P_D), \tag{15.6}$$

(15.5), (15.6) -დან მარტივად მიიღება

$$\frac{dQ}{dt} + \lambda(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})Q(t) = \lambda\frac{\alpha b - \beta a}{ab} \tag{15.7}$$

სადაც $\lambda > 0$ რეაქციის სიჩქარეა.

(15.7)-ის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$q + \lambda(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = 0$$

ასიმპტოტურ მდგრადობას ადგილი ექნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lambda(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) > 0$$

ანუ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>0$$

ესე იგი

$$\begin{cases} a+b>0 \\ ab>0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} a+b<0 \\ ab<0 \end{cases}$$

განტოლება (15.7)-ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას ($Q(0)=Q_0$) ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$Q(t)=(Q_0-\frac{\alpha b-\beta a}{a+b})\exp[-\lambda(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})t]+\frac{\alpha b-\beta a}{a+b} \qquad (15.8)$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t)=\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}>0$$

§ 16. ფასების რხევების მოდელი

ეკონომიკურ მეცნიერებაში არსებობენ სხვადასხვა თეორიები, რომლებსაც გააჩნიათ პრეტენზია ფასების რხევების სახეების, მოცულობისა და ტენდენციების ახსნაზე. ის ფაქტი, რომ ფასები განიცდიან მნიშვნელოვან ცვლილებას, არა მარტო არ იწვევს ეჭვებს, არამედ ეს არის საფონდო ბაზრის საფუძველი. მაგრამ ამ რხევების მიზეზი ეკონომისტების ყურადღების მიღმაა დარჩენილი.

ა.მარშალის კლასიკური მტკიცებულება შემდეგში მდგომარეობს: «როცა მოთხოვნა და მიწოდება წონასწორობაში იმყოფება, დროის

ერთეულში წარმოებული საქონლის რაოდენობას შეიძლება დავარქვათ წონასწორობის რაოდენობა, ხოლო ფასი, რომლითაც ის იყიდება - წონასწორობის ფასი. ასეთი წონასწორობა მდგრადია, ე.ი. ფასი ზოგიერთი გადახრის შემთხვევაში, მიისწრაფვის დაუბრუნდეს წინა მდგომარეობას, როგორც ქანქარა ირხევა ამ თუ იმ მხარეს თავისი უმდაბლესი წერტილიდან» [6,18].

ამ მუდმივი რხევების მიზეზები არ განიხილება ეკონომისტების მიერ. როგორც წესი, ეკონომისტები საკმარის ახსნად თვლიან, რომ ფასების რხევები დაკავშირებული არიან გაცვლის შემთხვევით აქტებთან.

ეკონომიკის დინამიური მოდელები მიეკუთვნება დინამიურ სისტემებს. კონკრეტული დინამიური სისტემები შეიძლება იყოს როგორც დეტერმინირებული ასევე სტოქასტური.

განვიხილოთ ეკონომიკური მოდელების აგებისათვის რამდენიმე წესი:

- მოდელი არ უნდა იყოს ძალიან რთული. თუ მოდელი შეიცავს ორ

ცვლადზე მეტს, მაშინ ის იჩენს სტოქასტურ ხასიათს.

- მოდელისთვის ასარჩევია დროის სწორი ჰორიზონტი, რადგანაც

არსებობს დროზე დამოკიდებული «ჩქარი» და «ნელი» ცვლადები.

- უნდა განისაზღვროს პარამეტრები, რომლებიც კვანძურია

შესასწავლი პროცესისათვის და ცვლიან თავისი ბიფურკაციური წერტილების გავლისას სისტემის თვისებებს.

ნებისმიერი ეკონომიკური მოვლენას ადგილი აქვს ზოგიერთ სივრცეში. შესაბამისად, ეკონომიკური მოდელის აგებისას განსაზღვრული უნდა იყოს სივრცე, სადაც მოცემულია სისტემა. სივრცესთან აკავშირებენ ეკონომიკური ცვლადების თვლის სისტემას,

რომელიც იძლევა საშუალებას განვსაზღვროთ ნებისმიერი წერტილის მდგომარეობა შეფარდებით კოორდინატთა სათავიდან.

ყველაზე მარტივია, ეკონომიკური სივრცის კოორდინატების სახით განვსაზღვროთ ჩვენი სისტემის პირობით ერთეულებში განსაზღვრული კეთილდღეობის რაოდენობები (აქტივები, საქონლები). სივრცეში წერტილის მდგომარეობა განსაზღვრავს აქტივების შესაბამის რაოდენობებს, რომლებისც არსებობენ დროის მოცემულ მომენტში.

თუ კეთილდღეობის რაოდენობები უცვლელია, მაშინ წერტილი უძრავია (სისტემა წონასწორობაშია), მაგრამ ეს მდგომარეობა ნაკლებად საინტერესოა ანალიზისთვის. თუ კეთილდღეობის რაოდენობები იწყებენ ცვლილებას, მაშინ სისტემა იწყებს მოძრაობას. ამ შემთხვევაში ჩვენ უნდა გავითვალისწინოთ სისტემის მოძრაობის სიჩქარე და მიმართულება, ამ მიზნით ჩვენი სისტემის დამატებითი კოორდინატების (კეთილდღეობის რაოდენობები, აქტივები, საქონლები) შემოღებით, რომლებიც წარმოებდება და მოხმარდება დროის გარკვეულ შუალედში (დროის ერთეულში). ამით, ჩვენ დამატებითი კოორდინატების სახით შემოგვაქვს წარმოებულები დროით კეთილდღეობის რაოდენობებისაგან, რომლებიც იძლევიან სისტემაში კეთილდღეობების ცვლილებების სიჩქარეებს.

ეკონომიკური სისტემის «მოძრაობა» განვსაზღვროთ როგორც წონასწორული q_0 კოორდინატის ცვლილება q სიდიდით.

ფასების ნამრავლი საქონლის მოცულობაზე იძლევა Φ ღირებულებას, რომელსაც ბაზრის მონაწილეები მიისწრაფვიან მაქსიმიზირებას. ეკონომიკური სისტემის გადახრას წონასწორობიდან საქონლის მცირე სიდიდით q, საქონლის საერთო ღირებულება მცირდება და ჩნდება «ბაზრის ძალა», რომელიც აბრუნებს სისტემას წონასწორობის წერტილისკენ. თუ წონასწორობის წერტილს ავიღებთ კოორდინატთა

სათავედ, მაშინ ღირებულების ფუნქციის ამ წერილის მიდამოში ტეილორის მწკრივად დაშლას ექნება სახე

$$\Phi_q = \Phi_0 + \frac{cq^2}{2} + ... \qquad (16.1)$$

რადგანაც Φ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული წონასწორობის წერტილში ნულის ტოლია, ხოლო ძალის წარმოდგენას აქვს სახე

$$f_q = cq + ... \qquad (16.2)$$

მცირე გადახრებისათვის სხვა წევრების გათვალისწინება არ არის საჭირო. «ბაზრის ძალის» დაბრუნებადი წევრი არის ზუსტად შემდეგი განტოლების მესამე წევრი

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega^2 q = 0 \qquad (16.3)$$

თუ სისტემა გადაიხარა წონასწორობიდან, მაშინ ირღვევა ბალანსი მოთხოვნა და მიწოდების შორის და «საბაზრო ძალების»

$$f_q = \omega^2 q$$

მოქმედებით სისტემის დაბრუნებისათვის წონასწორობის წერტილისკენ ჩნდება წარმოების სიჩქარისა და საქონლის მოხმარების ბალანსის ცვლილება, ე.ი. ჩნდება სიდიდე $\ddot{q}$ - **ეკონომიკური სისტემის აჩქარება.** **(16.3)** განტოლების მეორე წევრი $2\gamma\dot{q}$ ეკონომიკურ სისტემაში ასრულებს უკუკავშირის როლს.

როცა $\gamma > 0$ სისტემაში ჩნდება ძალა, რომელიც ანალოგიური ხახუნის ძალისა მექანიკურ სისტემაში. ხახუნის ქვეშ უნდა ვიგულისხმოთ, **ტრანზაქციური დანახარჯები.**

ქოუზის განსაზღვრებით **«ტრანზაქციური დანახარჯი ეს ინფორმაციის შეგროვებისა და დამუშავების დანახარჯია, მოლაპარაკებების წარმოებისა და გადაწყვეტილებების მიღების დანახარჯებია, კონტრაქტის შესრულების კონტროლისა და იურიდიული დაცვის დანახარჯებია".** ზემოთ ჩამოთვლილ დანახარჯებიდან ყოველთვის არ ექვემდებარება აღრიცხვას ინფორმაციის უტყუარობისა და მიღებული გადაწყვეტილებების დანახარჯები. რაც უფრო მეტია წარმოების $\dot{q}$ სიჩქარე, მით უფრო გარემოს მეტ წინააღმდეგობას განიცდის მწარმოებელი, ამასთან γ ნულზე მეტია.

ამრიგად, ტრანზაქციური დანახარჯების გამო ეკონომიკურ სისტემას აქვს «**თვითრეგულაციის**» თვისება.

აჟიოტაჟური მოთხოვნა ან პანიკა ახდენს ბაზრის დესტაბილიზაციას და გამოყავს ის წონასწორობის მდგომარეობიდან და ჩნდება «უარყოფითი ხახუნი» ($\gamma < 0$). სისტემაში წარმოშობილი შემთხვევითი რხევები ძლიერდება და სისტემა უფრო და უფრო შორდება წონასწორობის მდგომარეობას.

ა. მარშალი საუბრობს როგორც საქონლის ფასის რხევებზე, ასევე წარმოების მოცულობის რხევებზე. საქონლის p ფასი არის მისი მოცულობის ფუნქცია

$$p = \varphi(q) \tag{16.4}$$

მოცემული (16.4) ფუნქცია არის მოთხოვნის წირი მოცემულ საქონელზე.

ა. მარშალის თანახმად

$$qp^{n} = C \tag{16.5}$$

ცხადია, რომ რხევებს ადგილი აქვს წონასწორობის წერტილის (q_0, p_0) გარშემო, ამასთან

$$p_0 = \varepsilon q_0^{-\xi}, \xi = \frac{1}{n}, \qquad \varepsilon = C^{\xi} \tag{16.6}$$

მაგრამ, ჩვენ შგვიძლია მივიღოთ (q_0, p_0) წერტილი კოორდინატთა სათავედ და დავშალოთ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად წონასწორობის წერტილის მიდამოში

$$p + p_0 = \varepsilon(q_0 + q)^{-\xi} = \varepsilon(q_0^{-\xi} - \xi q_0^{-\xi-1} q + \ldots) \tag{16.7}$$

თუ (16.7)-ში შემოვიფარგლებით ტეილორის მწკრივის მხოლოდ პირველი ორი წევრით (დანარჩენები ზევრად ნაკლები არიან), მივიღებთ

$$p = -\varepsilon \xi q_0^{-\xi-1} q \tag{16.8}$$

საქონლის ფასისთვის მივიღებთ საქონლის მოცულობის (16.3)-ის ანალოგიურ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\ddot{p} + 2\gamma \dot{p} + \omega^2 p = 0 \tag{16.9}$$

ამრიგად (16.3) და (16.9) -ს თანახმად ფასისა და კეთილდღეობის ფარდობითი რაოდენობების რხევები ერთდაიგივე კანონით აღიწერება.

ჩვენ შეგვიძლია (16.3), (16.9) განტოლებები გადავწერთ შემდეგი სახით

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (16.10)$$

სადაც x არის ეკონომიკურ სისტემაში როგორც ფასის ასევე კეთილდღეობის რაოდენობების ცვლილება.

§ 17. მაკროეკონომიკური დინამიკის ჰაროდი-დომარის მოდელი

უწყვეტი დროის მოდელის სახით განვიხილოთ მაკროეკონომიკური დინამიკის უწყვეტი მოდელი (მისი უმარტივესი ვარიანტი - ჰაროდი-დომარის მოდელი) [1].

მოდელი აღწერს **Y(t)** შემოსავლის დინამიკას, რომელიც განიხილება, როგორც **C(t)** მოხმარებისა და **I(t)** ინვესტიციების ჯამი

$$\mathbf{Y(t) = C(t) + I(t)} \qquad \mathbf{(17.1)}$$

მოდელში ეკონომიკა ითვლება დახურულად, ამიტომ სუფთა ექსპორტი ნულის ტოლია, ხოლო სახელმწიფო ხარჯები არ გამოიყოფა. ეკონომიკური ზრდის მოდელის ძირითადი წინაპირობაა - ინვესტიციებისა და შემოსავლის ზრდის სიჩქარეს შორის ურთიერთკავშირის ფორმულა.

მოდელში ივარაუდება, რომ შემოსავლის ზრდის სიჩქარე ინვესტიციების პროპორციულია

$$\mathbf{I(t) = B\frac{dY(t)}{dt}},\qquad \mathbf{(17.2)}$$

სადაც **B** - შემოსავლის მატების კაპიტალდაბანდების კოეფიციენტია, $\mathbf{\frac{1}{B}}$ - მატების კაპიტალუკუგება.

ამრიგად, მოდელში ფაქტიურად ჩართულია შემდეგი წინაპირობები:

ა) საინვესტიციო ლაგი (დაგვიანება დროში) ნულის ტოლია: ინვესტიციები მყისიერად გადადის კაპიტალის ნამატში, ანუ

$$\mathbf{\Delta K(t) = I(t)},$$

სადაც **ΔK(t)** - კაპიტალის დროში ნამატის უწყვეტი ფუნქციაა;

ბ) არა აქვს ადგილი კაპიტალის გადინებას;

გ) ეს გამომდინარეობს შემოსავლის მატების პროპორციულობიდან კაპიტალის მატებასთან (**17.2**)

$$\mathbf{dY(t) = \frac{1}{B}d(K(t))dt}.$$

წრფივ საწარმოო ფუნქციას

$$\mathbf{Y(t) = \mathit{a}\cdot L(t) + b\cdot K(t) + c, (\mathit{a}, b, c = const)},$$

სადაც $\mathbf{b = \frac{1}{B}}$, გააჩნია ეს თვისება იმ შემთხვევაში, როდესაც ***a*** **= 0**, ან **L(t) = const;**

დ) შრომის დანახარჯები მუდმივია დროში ან გამოშვება დამოკიდებულია შრომის დანახარჯებისაგან, რადგანაც შრომა არ არის დეფიციტური რესურსი;

ე) მოდელი არ ითვალისწინებს ტექნიკურ პროგრესს.

ზემოთ ჩამოთვლილი წინაპირობები, რა თქმა უნდა, მნიშვნელოვნად აუხეშებენ რეალური მაკროეკონომიკური პროცესების დინამიკის აღწერას, ართულებენ მოცემული მოდელის გამოყენებას, მაგალითად, ერთობლივი გამოშვების ან შემოსავლის სიდიდის უშუალო გამოანგარიშებას ან პროგნოზს. მაგრამ, მოცემული მოდელი არც არის ამისთვის განსაზღვრული; ამავე დროს მოდელის შედარებითი სიმარტივე იძლევა საშუალებას უფრო სიღრმისეულად შევისწავლოთ ინვესტიციების დინამიკისა და გამოშვების მატების ურთიერთკავშირი, მივიღოთ გაკეთებული წინაპირობებისათვის განხილული პარამეტრების ტრაექტორიების ზუსტი ფორმულები.

მაკროეკონომიკური დინამიკის ყველა მოდელში საბაზო არის დამოკიდებულება, რომელიც აკავშირებს დროში ინვესტიციების მაჩვენებლებს, მათ მიერ განსაზღვრული ძირითადი კაპიტალის მოცულობას და გამოშვების (შემოსავლის) დონეს. ამის გარდა, ამ მოდელში აუცილებელია განვსაზღვროთ გამოშვების (შემოსავლის) სტრუქტურის ფორმირების პრინციპები, მისი განაწილება შემადგენელთა შორის, უპირველეს ყოვლისა - მოხმარებასა და დაგროვებას შორის. ეს პრინციპები ეფუძნება ოპტიმიზაციურ მიდგომას (მოხმარების ერთობლივი მოცულობის მაქსიმიზაცია).

განხილულ მოდელში ივარაუდება, რომ მოხმარების მოცულობის დინამიკა **C(t)** მოცემულია ეკზოგენურად, ანუ ეს მაჩვენებელი შეიძლება იყოს დროში მუდმივი (მათ შორის, ნულის ტოლი), იზრდებოდეს მოცემული მუდმივი ტემპით ან ჰქონდეს სხვა დინამიკა.

მოდელის უმარტივესი შემთხვევაა, როცა **C(t) = 0**. პრაქტიკული თვალსაზრისით, ეს შემთხვევა სრულად არარეალურია, მაგრამ მასში

ყველა რესურსი მიმართულია ინვესტიციებზე, რის შედეგად შეიძლება განისაზღვროს მატების ტემპი.

ამ შემთხვევაში (**17.1**), (**17.2**)-დან მივიღებთ

$$\mathbf{Y(t) = C(t) + I(t) = I(t) = B\frac{dY(t)}{dt}.} \qquad \textbf{(17.3)}$$

ამრიგად, **Y(t)** ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \mathbf{\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{B}Y(t)} \\ \mathbf{Y(0) = Y_0} \end{cases}, \qquad \textbf{(17.4)}$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\mathbf{Y(t) = Y_0 \cdot e^{\left(\frac{1}{B}\right)t}}, \qquad \textbf{(17.5)}$$

სადაც $\mathbf{\frac{1}{B}}$ - მატების უწყვეტი ტემპია, ეს მატების მაქსიმალურად შესაძლებელი (ტექნოლოგიური) ტემპია.

ახლა დავუშვათ, **C(t) = C = const**. მაშინ მივიღებთ არაერთგვაროვან წრფივ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\mathbf{Y(t) = B\frac{dY(t)}{dt} + C}, \qquad \textbf{(17.6)}$$

რომლის კერძო ამონახსნია $Y_კ(t) = C$, ხოლო (**17.6**) შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\mathbf{Y(t) = A \cdot e^{\left(\frac{1}{B}\right)t}}.$$

ამრიგად, (**17.6**)-ის ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\mathbf{Y(t) = A \cdot e^{\left(\frac{1}{B}\right)t} + C}$$

და საწყისი პირობის (**17.4**) გამოყენება, მოგვცემს

$$\mathbf{A = Y_0 - C,}$$

საიდანაც

$$\mathbf{Y(t) = (Y_0 - C) \cdot e^{\left(\frac{1}{B}\right)t} + C}. \qquad (17.7)$$

(**17.7**)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ შემოსავლის მატების უწყვეტ ტემპს

$$\mathbf{y(t) = \frac{dY(t)}{dt} \Big/ Y(t) = \frac{1}{B} \frac{(Y_0 - C)e^{\left(\frac{1}{B}\right)t}}{Y(t)} = \frac{1}{B} \frac{Y(t) - C}{Y(t)} = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{C}{Y(t)}\right)}. \qquad \mathbf{(17.8)}$$

როგორც ჩანს (**17.8**)-დან საწყის მომენტში მატების ტემპი ტოლია

$$y(0)=\frac{1}{B}\left(1-\frac{C}{Y_0}\right)$$

და იზრდება **t > 0**-თვის, ხოლო როცა **t**→∞ მიისწრაფის ტექნოლოგიური ტემპისკენ

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\frac{1}{B}, \qquad (17.9)$$

ბოლო თანაფარდობა (**17.9**) უჩვენებს, რომ შემოსავალი იზრდება, ხოლო მოხმარების მუდმივი მოცულობა შეადგენს მის უფრო ნაკლებ ნაწილს.

სიდიდე $\alpha(t)=1-\frac{C}{Y(t)}$ არის დაგროვების ნორმა დროის **t** მომენტში და შემოსავლის მატების ტემპი პროპორციულია როგორც ამ სიდიდისა, ასევე მატების კაპიტალუკუგების $\frac{1}{B}$ მაჩვენებლისა (იხ. **17.8**)

$$y(t)=\frac{1}{B}\alpha(t). \qquad (\mathbf{17.10})$$

ამრიგად, სხვა თანაბარ შემთხვევაში, დაგროვების ნორმის მატება პროპორციულად ზრდის შემოსავლის მატების ტემპს.

საბოლოოდ, განვიხილოთ მოდელის ვარიანტი, რომელშიც მოხმარების **C(t)** მაჩვენებელი იზრდება მუდმივი **r** ტემპით

$$C(t) = C(0)e^{rt} = C_0e^{rt}\ , \qquad (\mathbf{17.11})$$

მაშინ (**17.1**), (**17.2**)-დან მივიღებთ

$$\mathbf{Y(t) = B\frac{dY}{dt} + C_0 e^{rt}} \quad . \qquad (\mathbf{17.12})$$

ამრიგად, მივიღებთ კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \mathbf{\dfrac{dY}{dt} - \dfrac{1}{B}Y(t) = -\dfrac{C_0}{B}e^{rt}}, \\ \mathbf{Y(0) = Y_0} \end{cases} \qquad (\mathbf{17.13})$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება $(\mathbf{r \neq \frac{1}{B}})$ შემდეგი სახით

$$\mathbf{Y(t) = \left(Y_0 - \frac{C_0}{1 - Br}\right)e^{\frac{t}{B}} + \frac{C_0}{1 - Br}e^{rt}.} \qquad (\mathbf{17.14})$$

ზოგადი მოსაზრებიდან ნათელია, რომ მოხმარების მატების ტემპი **r** არ უნდა აღემატებოდეს მატების ზოგადი ტემპის მაქსიმალურ შესაძლო მნიშვნელობას, რადგან სხვა შემთხვევაში მოხმარება დაიკავებს უფრო და უფრო მეტ წილს, ხოლო ბოლოს და ბოლოს - შემოსავლის უმრავლეს ნაწილს, რაც დაიყვანს ნულზე ჯერ ინვესტიციას, ხოლო მერე შემოსავალს.

თუ $\mathbf{r > \frac{1}{B}}$, მაშინ $\mathbf{\frac{1}{1 - Br} < 0}$,ხოლო $\mathbf{e^{rt} > e^{\left(\frac{1}{B}\right)t}}$.

შესაბამისად, გარკვეული **t**$_*$ დროის შემდეგ

$$\mathbf{t_* = \frac{B}{rB - 1}\ln\left[1 + \frac{Y_0}{C_0}(Br - 1)\right]}$$

შემოსავალი გახდება უარყოფითი, რაც შეუძლებელია.

$$Y(t) < 0,\ \text{როცა}\ t > t_*,\ Y(t_*) = 0.$$

შემოსავლების მატების განხილულ მოდელში, როცა $r < \frac{1}{B}$, ბევრია დამოკიდებული r და $\rho_0 = \frac{\alpha_0}{B}$ ($\alpha_0 = 1 - \frac{C_0}{Y_0}$ - დაგროვების ნორმაა საწყის მომენტში) თანაფარდობაზე.

თუ $r = \rho_0$, მაშინ შემოსავლის მატების ტემპი უდრის მოხმარების მატების ტემპს და (17.14)-დან მივიღებთ

$$Y(t) = Y_0 e^{\rho_0 t} = Y_0 e^{\frac{1}{B}\left(1 - \frac{C_0}{Y_0}\right)t}.$$

ამ შემთხვევაში, დაგროვების ნორმა მუდმივია დროში,

$$\alpha(t) = \alpha_0 = 1 - \frac{C_0}{Y_0},$$

ხოლო შემოსავლის მატების ტემპი პროპორციულია დაგროვების ნორმისა და უკუპროპორციულია მატების კაპიტალტევადობისა.

ეკონომიკური ზრდადობის მოდელის ამ მოდიფიკაციას, სადაც დაგროვების ნორმა მუდმივია, ჰაროდი-დომარის მოდელს უწოდებენ.

კარლ მარქსის ეკონომისტებისათვის ცნობილ გაფართოებული თვითწარმოების მატების მოდელში მიიღება ანალოგიური შედეგი.

მარქსის სქემებში შემოსავლის მატების ტემპი ტოლია

$$\frac{n_1 z}{1+h_1},$$

სადაც n_1 - დაგროვების ნორმაა პირველ ქვეგანაყოფში, $z=\frac{M}{V}$ - მომატებული ღირებულების ნორმაა, $h_1=\frac{C_1}{V_1}$ - პირველ ქვეგანაყოფში კაპიტალის ორგანული აგებულებაა; (C - მუდმივი კაპიტალია, V - ცვლადი კაპიტალია, M - მომატებული ღირებულებაა).

მატების განხილული მოდელის ტერმინებში მივიღებთ

$$B=\frac{\Delta(C+V)}{\Delta(V+M)}=\frac{\Delta(h_1V+V)}{\Delta(V+zV)}=\frac{\Delta V(h_1+1)}{\Delta V(1+z)}=\frac{1+h_1}{1+z},$$

$$\alpha_0=\frac{\Delta V+\Delta C}{V+M}=\frac{\Delta V+\Delta C}{M\left(1+\frac{1}{z}\right)}=n_1\frac{z}{z+1},$$

საიდანაც

$$\frac{\alpha_0}{B}=\frac{n_1 z}{z+1}\cdot\frac{z+1}{1+h_1}=\frac{n_1 z}{1+h_1},$$

რაც უჩვენებს შედეგების დამთხვევას მუდმივი მნიშვნელობის სტრუქტურული პარამეტრების მატების ორივე მოდელში.

თუ მატების განხილულ მოდელში სრულდება ორმაგი უტოლობა

$$\frac{1}{B} > r > \rho_0,$$

მაშინ მოხმარების მატების ტემპი ძალიან მაღალია ეკონომიკისთვის. ამ შემთხვევაში კოეფიციენტი

$$Y_0 - \frac{C_0}{1 - Br} = -\frac{C_0(r - \rho_0)}{B\left(\frac{1}{B} - \rho_0\right)\left(\frac{1}{B} - r\right)} < 0$$

უარყოფითია, რადგანაც $\frac{1}{B} > r$. პირველი შესაკრები (**17.14**)-ში დროის გარკვეული მომენტის შემდეგ მოდულით აღემატება მეორეს, ანუ **Y(t)** გახდება უარყოფითი. ამიტომ შემოსავლის მატების ტემპი ვარდება და ზოგიერთი მომენტიდან ხდება უარყოფითი. ამის შემდეგ თვით შემოსავალი **Y(t)** გახდება ნულის ტოლი და მოდელი კარგავს ეკონომიკურ აზრს.

ეს შემთხვევა ანალოგიურია $r \geq \frac{1}{B}$ შემთხვევისა, მაგრამ აქ საქმე უკვე იმაში არ არის, რომ მოხმარების მატების ტემპი პრინციპში მიუღწევადია ხანგრძლივი პერიოდისათვის. მოცემულ შემთხვევაში, ძალიან მცირეა მოხმარების საწყისი α_0 ნორმა.

თუ $r < \rho_0$, მაშინ მოხმარების ნორმა და მასთან ერთად შემოსავლის მატების ტემპი იზრდება, ამასთან, უკანასკნელი ზღვარში მიისწრაფვის $\frac{1}{B}$-კენ ($t \to \infty$).

$$y(t)=\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}=\frac{\frac{1}{B}+\frac{r\left(\frac{1}{B}-\rho_0\right)}{\rho_0-r}e^{\left(r-\frac{1}{B}\right)t}}{1+\frac{\left(\frac{1}{B}-\rho_0\right)e^{\left(r-\frac{1}{B}\right)t}}{\rho_0-r}}\to\frac{1}{B},$$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\frac{1}{B}.$$

მაგრამ, ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს "დაგროვებას დაგროვებისათვის", რადგანაც მოხმარება იზრდება მოცემული **r** ტემპით, ხოლო შემოსავლის მატების ტემპის ზრდადობა განპირობებულია ინვესტიციების უფრო ჩქარი ზრდადობით.

მოხამრების α_0 ნორმა აღემატება **Br**-ს, როცა **r** < ρ_0, რადგანაც

$$r<\rho_0=\frac{\alpha_0}{B}\Rightarrow\ \ rB<\alpha_0$$

და მოხმარების მოცულობის მაქსიმიზაციიდან გამომდინარე, ეს ნორმა ძალიან მაღალია.

მისი უფრო მაღალი დონე ითხოვს საწყისი ინვესტიციების **I(0) = I**$_0$ გაზრდას საწყისი მოხმარების C_0 შემცირების ხარჯზე, რაც მოხმარების მატების ფიქსირებული **r** ტემპისათვის განაპირობებს მის უფრო დაბალ დონეს მთელ ტრაექტორიაზე.

ამავე დროს მოხმარების მატების საჭირო ტემპი $r<\frac{1}{B}$ შეიძლება შევინარჩუნოთ, როცა α_0 = **Br** (ρ_0 = **r**).

ამრიგად, თუ საჭიროა მოხმარების მატების მუდმივი **r** ტემპის შენარჩუნება, რომელიც არ აღემატება ტექნოლოგიურ ტემპს, მაშინ ნებისმიერი შუალედისათვის მოხმარების მოცულობის მაქსიმიზაციისათვის აუცილებელია დაგროვების საწყისი $\alpha_0 = Br$ ნორმის დაყენება.

უფრო რთულია საკითხი, **r** ტემპის რომელი დონე უფრო მისაღებია. მისი დიდი სიდიდე უზრუნველყოფს მოხმარების დიდ მოცულობას ხანგრძლივი პერიოდისათვის, საწყის ეტაპზე მოხმარების შემცირების ხარჯზე. ამრიგად, **r** მნიშვნელობის შერჩევისათვის (თუ ის ივარაუდება მუდმივად) საჭიროა ინფორმაცია იმ პირის განწყობაზე, რომელიც ღებულობს გადაწყვეტილებას.

სავარჯიშოები

განსაზღვრეთ **Y(t)** შემოსავალი და შემოსავლის ზრდის ტემპი

$$y(t) = \dot{Y}(t) \Big/ Y(t).$$

17.1 $$\frac{dY(t)}{dt} - 0{,}5Y(t) = -2e^{0{,}4t},$$

$Y(0) = Y_0 = 20.$

17.2 $$\frac{dY(t)}{dt} - 0{,}6Y(t) = -e^{0{,}5t},$$

$Y(0) = Y_0 = 10.$

17.3 $$\frac{dY(t)}{dt} - 0{,}7Y(t) = -7e^{0{,}6t},$$

$Y(0) = Y_0 = 70.$

17.4 $$\frac{dY(t)}{dt} - 0{,}4Y(t) = -2e^{0{,}3t},$$

$Y(0) = Y_0 = 20.$

17.5 $$\frac{dY(t)}{dt} - 0{,}8Y(t) = -8e^{0{,}7t},$$

$Y(0) = Y_0 = 80.$

17.6 $$\frac{dY(t)}{dt} - 0{,}5Y(t) = -2e^{0{,}4t},$$

$Y(0) = Y_0 = 25.$

17.7 $$\frac{dY(t)}{dt} - 0{,}5Y(t) = -2e^{0{,}4t},$$

$Y(0) = Y_0 = 70.$

17.8 $\frac{dY(t)}{dt} - \frac{2}{3}Y(t) = -8e^{0,6t}$,

Y(0) = Y_0 = 110.

17.9 $\frac{dY(t)}{dt} - \frac{2}{5}Y(t) = -6e^{0,3t}$,

Y(0) = Y_0 = 50.

17.10. $\frac{dY(t)}{dt} - \frac{3}{7}Y(t) = -6e^{0,4t}$,

Y(0) = Y_0 = 200.

17.11 $\frac{dY(t)}{dt} - 0,9Y(t) = -9e^{0,7t}$,

Y(0) = Y_0 = 50.

17.12 $\frac{dY(t)}{dt} - 0,8Y(t) = -16e^{0,6t}$,

Y(0) = Y_0 = 90.

17.13 $\frac{dY(t)}{dt} - 0,6Y(t) = -12e^{0,4t}$,

Y(0) = Y_0 = 70.

17.14 $$\frac{dY(t)}{dt}-\frac{4}{5}Y(t)=-28e^{0,65t},$$

Y(0) = Y_0 = 190.

17.15 $$\frac{dY(t)}{dt}-\frac{7}{8}Y(t)=-14e^{0,7t},$$

Y(0) = Y_0 = 85.

§ 18. კეინსის დინამიური მოდელი. მოთხოვნა - მიწოდების ტოლობა

განვიხილოთ შემდეგი ეკონომიკური მოდელი. დავუშვათ, რომ შიდა ჯამური პროდუქტი (შჯპ) შემდეგ წელს $y(t+1)$ უდრის წინა (მიმდინარე) წლის ჯამურ მოთხოვნას, ხოლო ჯამური მოთხოვნა, რომელიც შედგება მოთხოვნისაგან სამომხმარებლო (C) და ინვესტიციურ (I) საქონლებზე, დამოკიდებულია მხოლოდ მიმდინარე წლის შჯპ-ზე.

$$y(t+1)=C[y(t)]+I(t) \tag{18.1}$$

ვივარაუდოთ, რომ მოთხოვნა სამომხმარებლო საქონელზე წრფივადაა დამოკიდებული შჯპ-ზე, ხოლო მოთხოვნა საინვესტიციო საქონელზე მნიშვნელოვნად არ იცვლება.

მაშინ, (18.1)-დან მივიღებთ

$$y(t+1)=\underline{C}+cy(t)+I \tag{18.2}$$

სადაც (18.2)-ში:

$\underline{C}$ – მომხმარების ფონდის მინიმალური მოცულობაა,

c(0 < c < 1) – მიდრეკილებაა მომხმარებისკენ.

შევადგინოთ (18.2)-ის ანალოგიური განტოლება, ოღონდც დროის ბიჯით Δt , ანუ (18.3) და (18.2) ემთხვევა ერთმანეთს, თუ $\Delta t = 1$

$$y(t+\Delta t) - y(t) = [\underline{C} - (1-c)\,y(t) + I]\Delta t \qquad (18.3)$$

სადაც (1 – c) – მიდრეკილებაა დაგროვებისკენ.

თუ (18.3) გავყოფთ Δt -ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta t \to 0$ მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას (მუდმივი დროის როლს ასრულებს სიდიდე, რომელიც შექცეულია დაგროვების მიდრეკილებისკენ):

$$\frac{1}{1-c}\frac{dy}{dt} + y = \frac{\underline{C} + I}{1-c} \qquad (18.4)$$

განტოლება (18.4) წარმოადგენს პირველი რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის კერძო წონასწორული (სტაციონარული) ამონახსნია

$$y_E = \frac{\underline{C} + I}{1-c} \qquad (18.5)$$

თუ საწყის მომენტში მოთხოვნა საინვესტიციო საქონლებზე შეიცვალა I_0 სიდიდიდან I -ზე ($I > I_0$), მაშინ ეკონომიკაში ადგილი ექნება გარდამავალ პროცესს შჯპ-ის y_0 მნიშვნელობიდან y_E მნიშვნელობამდე (როცა $t \to \infty$).

წრფივი განტოლება (18.4), (18.5)-ის გათვალისწინებით მარტივად გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\frac{1}{1-c}\frac{d(y-y_E)}{dt} = -y + \frac{C+I}{1-c} = -(y-y_E) \tag{18.6}$$

განტოლება (18.6) წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას განცალებადი ცვლადებით და მისი ერთადერთი ამონახსნი, საწყისი პირობის $y(t)_{t=0} = y(0) = y_0$ გათვალისწინებით, მიიღებს შემდეგ სახეს

$$y(t) = y_E + (y_0 - y_E)e^{-t(1-c)} \tag{18.7}$$

ცხადია, რომ (18.7)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_E$$

ანუ შჯპ მიისწრაფვის წონასწორულ მდგომარეობისკენ.

§ 19. ეროვნული შემოსავლის დინამიკის სამუელსონ - ჰიქსის დისკრეტული მოდელი

ნებისმიერი ქვეყნის ეკონომიკისათვის დამახასიათებელია განვითარების ტალღური ბუნება, რის გამო ქვეყნის ეროვნული შემოსავალი ხან იზრდება, ხან მცირდება.

ეკონომიკის განვითარების ასეთი ტალღური ბუნების შესასწავლად **სამუელსონმა** და **ჰიქსმა** შეიმუშავეს შესაბამისი მათემატიკური მოდელი [5]. ამ მოდელში $X(t)$ ეროვნული შემოსავლის სიდიდის რხევები აიხსნება აქსელერაციის პრინციპითა და მულტიპლიკატორის კონცეფციით.

აქსელერაციის პრინციპი ამტკიცებს, რომ ინვესტიციის მასშტაბები დამოკიდებულია საბოლოო პროდუქტებზე მოთხოვნის ზრდის ტემპზე, ამასთან საინვესტიციო მოთხოვნა საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნის პროპორციულია. პროპორციულობის კოეფიციენტს **აქსელერაციის ფაქტორი** ეწოდება.

სამუელსონ-ჰიქსის მათემატიკურ მოდელში აქსელერაციის პრინციპზე დაფუძნებულ ინვესტიციის დისკრეტულ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$I(t) = \beta[X(t-1) - X(t-2)] \qquad (19.1)$$

სადაც β აქსელერაციის კოეფიციენტია (ფაქტორი).

$C(t)$ ხარჯის სიდიდე წრფივად დამოკიდებულია მოთხოვნაზე, სადაც განიხილება ერთეულოვანი ლაგი (ყოვნი)

$$C(t) = \alpha X(t-1) + A \tag{19.2}$$

სადაც $\alpha \in (0,1)$ განისაზღვრება რეგრესიული ანალიზის საფუძველზე.

$$A = M \bullet N \tag{19.3}$$

სადაც

M – საარსებო მინიმუმია, N – მოსახლეობის რაოდენობაა.

თუ გავითვალისწინებთ მოთხოვნასა და მიწოდების წონასწორობის პირობას (ეროვნული შემოსავალი არის ხარჯისა და ინვესტიციების ჯამი), მივივებთ

$$X(t) = C(t) + I(t) \tag{19.4}$$

თუ (19.4)-ში შევიტანთ (19.1), (19.2) და გავაკეთებთ შესაბამის გარდაქმნებს, მივიღებთ სამუელსონ-ჰიქსის დისკრეტულ განტოლებას

$$X(t) - (\alpha + \beta) X(t-1) + \beta X(t-2) = A \tag{19.5}$$

განტოლება (19.5) წარმოადგენს მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან არაერთგვაროვან დისკრეტულ განტოლებას, რომლის ზოგადი ამონახსნი დამოკიდებულია α, β, A-ზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$D \equiv (\alpha + \beta)^2 - 4\beta$$

თუ $D > 0,$ მაშინ (19.5)-ის ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$X(t) = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \frac{A}{1-\alpha} \qquad (19.6)$$

სადაც

$$\lambda_1 = \frac{\alpha + \beta + \sqrt{D}}{2},\ \lambda_2 = \frac{\alpha + \beta - \sqrt{D}}{2},$$

როცა $D = 0$

$$X(t) = (c_1 \frac{\alpha + \beta}{2} + c_2 t)(\frac{\alpha + \beta}{2})^{t-1} + \frac{A}{1-\alpha} \qquad (19.7)$$

როცა $D < 0$

$$X(t) = \beta^t (c_1 \cos\varphi t + c_2 \sin\varphi t) + \frac{A}{1-\alpha} \qquad (19.8)$$

$$tg\varphi = \frac{\sqrt{-D}}{\alpha + \beta}$$

როგორც სჩანს (19.6)-(19.8)-დან შეიძლება მივიღოთ ეროვნული შემოსავლის რხევები როგორც მზარდი ისევე კლებადი ამპლიტუდით.

იმისათვის, რომ განვსაძრვღოთ სამუელსონ-ჰიქსის განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, უნდა დავსვათ ორი დამატებითი პირობა (მაგალითად, ეროვნული შემოსავლის მნიშვნელობები მოდელის განხილვის საწყის მომენტში და ერთი წლის შემდეგ ანუ $X(0) = X_0, X(1) = X_1$).

სავარჯიშოები

შეისწავლეთ ეროვნული შემოსავლის დინამიკა სამუელსონ-ჰიქსის განტოლების მიხედვით, როცა α ცნობილია.

ქვეყნისთვის (ქალაქისთვის) N რაოდენობის მოსახლეობით და M საარსებო მინიმუმით, β აქსელერაციის კოეფიციენტების და საწყისი სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის შეისწავლეთ $X(t)$ ეროვნული შემოსავლის დინამიკა:

19.1 $\alpha = 0{,}1,\ N = 3\cdot 10^6, M = 200, \beta = 1{,}3,\ X_0 = 1{,}1\cdot 10^9, X_1 = 1{,}2\cdot 10^{10}$

19.2 $\alpha = 0{,}2,\ N = 9\cdot 10^6, M = 250, \beta = 1{,}4,\ X_0 = 1{,}2\cdot 10^9, X_1 = 1{,}5\cdot 10^{10}$

19.3 $\alpha = 0{,}3,\ N = 2\cdot 10^7, M = 300, \beta = 1{,}6,\ X_0 = 1{,}1\cdot 10^{10}, X_1 = 1{,}2\cdot 10^{11}$

19.4 $\alpha = 0{,}4,\ N = 5\cdot 10^6, M = 250, \beta = 1{,}2,\ X_0 = 1{,}1\cdot 10^{10}, X_1 = 2\cdot 10^{10}$

19.5 $\alpha = 0{,}1,\ N = 3\cdot 10^6, M = 200, \beta = 1{,}3,\ X_0 = 1{,}1\cdot 10^9, X_1 = 1{,}2\cdot 10^{10}$

19.6 $\alpha = 0{,}9,\ N = 6\cdot 10^6, M = 400, \beta = 2,\ X_0 = 1{,}5\cdot 10^9, X_1 = 1{,}5\cdot 10^{10}$

19.7 $\alpha = 2(\sqrt{2} - 1),\ N = 9\cdot 10^6, M = 250, \beta = 2,\ X_0 = 1{,}9\cdot 10^9, X_1 = 1{,}8\cdot 10^{10}$

19.8 $\alpha = \sqrt{6} - 1{,}5$ $N = 7 \cdot 10^6, M = 180, \beta = 1{,}5,$ $X_0 = 1{,}5 \cdot 10^9, X_1 = 1{,}7 \cdot 10^{10}$

19.9 $\alpha = 0{,}5,$ $N = 3 \cdot 10^6, M = 200, \beta = 1{,}9,$ $X_0 = 1{,}1 \cdot 10^9, X_1 = 1{,}2 \cdot 10^{10}$

19.10 $\alpha = 0{,}5,$ $N = 3 \cdot 10^6, M = 200, \beta = 1{,}8,$ $X_0 = 1{,}1 \cdot 10^9, X_1 = 1{,}2 \cdot 10^{10}$

§ 20. მაკროეკონომიკური დინამიკის სოლოუს არაწრფივი მოდელი

ეკონომიკური ზრდის სხვა მოდელი წარმოდგენილია ნობელის პრემიის ლაურეატის რ.სოლოუს მიერ.

სხვა, ადრე განხილულ ზრდის მოდელებთან შედარებით მძიმე სოლოუს მოდელი უფრო ზუსტად აღწერს მაკროეკონომიკური პროცესების ზოგიერთ თავისებურებებს [1]:

1^0 ამ მოდელში საწარმოო ფუნქცია არაწრფივია და ხასიათდება ზღვრული წარმოებადობის კლებადობის თვისებით;

2^0 მოდელი ითვალისწინებს ძირითადი კაპიტალის გადინებას;

3^0 სოლოუს მოდელი შეიცავს შრომითი რესურსებისა და ტექნიკური პროგრესის დინამიკის აღწერას და მათ გავლენას ეკონომიკურ ზრდაზე;

4^0 მოდელში ისმება და იხსნება მოხმარების დონის მაქსიმიზაციის ამოცანა მდგრადი ტრაექტორიების ზოგიერთ სიმრავლეზე.

ბუნებრივია, რომ ყველაფერი ეს ართულებს მოდელის სტრუქტურას და მისი ძირითადი მაჩვენებლების ტრაექტორიების ცვლილებებისათვის ზუსტი ფორმულების მიღება საგრძნობლად რთული ამოცანა ხდება. ამის გამო ზოგიერთი სხვა ასპექტი სოლოუს საბაზო მოდელში გამარტივებულია: მაგალითად, კაპიტალის გადინებისა და შენახვის ნორმები მუდმივია; არ არსებობს საინვესტიციო ლაგები; საწარმოო ფუნქციას გააჩნია მუდმივი უკუგება მასშტაბისაგან. ამის გარდა, მოდელის ანალიზის საწყის დონეზე ვეძებთ არა ყველა მისი მაჩვენებლის ცვლილების ტრაექტორიებს (როგორც ჰაროდი-დომარის მოდელში) არამედ მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობის მახასიათებლებს, რომლისკენ სისტემა გადის გრძელვადიან პერიოდში.

სოლოუს მოდელის წინამძღვრები და აღნიშვნები:

ა) საწარმოო ფუნქციას აქვს სახე:

$$\mathbf{Y = F(K, L),} \tag{20.1}$$

სადაც **Y** - პროდუქციის გამოშვებაა, ან შემოსავალი, **K** - კაპიტალი, ხოლო **L** - შრომაა.

უკუგება მასშტაბისაგან მუდმივია, ანუ

$$\mathbf{F(zK, zL) = zF(K,L),} \tag{20.2}$$

ე.ი. **F(K, L)** - პირველი ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციაა.

ფაქტორების ზღვრული წარმოებადობა დადებითია, მაგრამ კლებულობს, ე.ი.

$$\frac{\partial Y}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0. \qquad (20.3)$$

ბ) კაპიტალის გადინების **W** სიდიდე **K** კაპიტალის პროპორციულია

$$W = \delta K, \qquad (20.4)$$

სადაც $\delta > 0$ - გადინების ნორმაა.

გ) შენახვის (ინვესტიციების) α ნორმა მუდმივია, ინვესტიციები განისაზღვრება ფორმულით

$$I = \alpha Y, \qquad (20.5)$$

დ) **Y** შემოსავალი ნაწილდება მოხმარებაზე და ინვესტიციებზე

$$Y = C + I, \qquad (20.6)$$

ე) წარმოებაში დაკავებულთა **L** რაოდენობა იზრდება მუდმივი **n** ტემპით

$$L = L_0 e^{nt}, \qquad (20.7)$$

სადაც L_0 - საწყის მომენტში წარმოებაში დაკავებულთა რაოდენობაა.

ვ) შრომაშემნახველ ტექნიკურ პროგრესს აქვს **g** ტემპი, ე.ი. მუდმივი ეფექტურობის შრომის ერთეულების რიცხვი ერთ მომუშავეზე მიმართებაში იზრდება **g** ტემპით.

გაკეთებული წინამძღვრების გათვალისწინებით საწარმოო ფუნქცია შეიძლება განვიხილოთ როგორც შრომის წარმოებადობის $\mathbf{y = \frac{Y}{L}}$ დამოკიდებულება მის კაპიტალშეიარაღებაზე (აღჭურვილობაზე) $\mathbf{k = \frac{K}{L}}$, ანუ

$$\mathbf{y = f(k).} \qquad (20.8)$$

აქ **L** - შრომის მუდმივი ეფექტურობის ერთეულთა რიცხვია (შრომაშემნახველი ტექნიკური პროგრესის არარსებობის პირობებში, შრომაში დაკავებულთა რაოდენობაა, ან მისი არსებობის პირობებში, ერთნაირი ეფექტურობის პირობითი თანამშრომელთა რაოდენობაა).

ეს ყველაფერი გამომდინარეობს (20.1), (20.2)-დან

$$\mathbf{Y = F(K, L) = F\left(L \cdot \frac{K}{L}, L \cdot \frac{L}{L}\right) = LF\left(\frac{K}{L,}, \frac{L}{L}\right) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = Lf(k),}$$

$$\mathbf{F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k), \quad Y = Lf(k) \Rightarrow \frac{Y}{L} = f(k) \Rightarrow y = f(k).}$$

ინვესტიციებს მივყავართ კაპიტალშეიარაღების ზრდისაკენ, ხოლო კაპიტალის გადინებას და მომუშავეთა რაოდენობისა და შრომის მუდმივი ეფექტურობის ერთეულთა რიცხვთა ზრდას – მისი შემცირებისაკენ.

ინვესტიციების შედეგად **k** კაპიტალშეიარაღების ნამატს აქვს სახე:

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{L}}.$$

სხვა დანარჩენი ფაქტორების გამო კაპიტალაღჭურვილობის ტემპის შემცირება უდრის

$$\delta + \mathbf{n} + \mathbf{g}$$

(ზუსტად უდრის, თუ **Y, K, L** - დროის უწყვეტი ფუნქციებია და მიახლოებით უდრის დისკრეტულ შემთხვევაში მცირე δ**, n, g**-თვის).

ამ ფაქტორების გამო კაპიტალშეიარაღების შემცირების სიდიდე ტოლია:

$$(\delta + \mathbf{n} + \mathbf{g})\mathbf{k}.$$

k სიდიდე იმყოფება მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობაში, თუ მისი ნამატი ინვესტიციების გამო უდრის მის შემცირებას სხვა ფაქტორების გამო.

რადგანაც **Y = C + I**, თუ გავყოფთ ამ ტოლობას (**L > 0**), მივიღებთ

$$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}, \qquad (20.9)$$

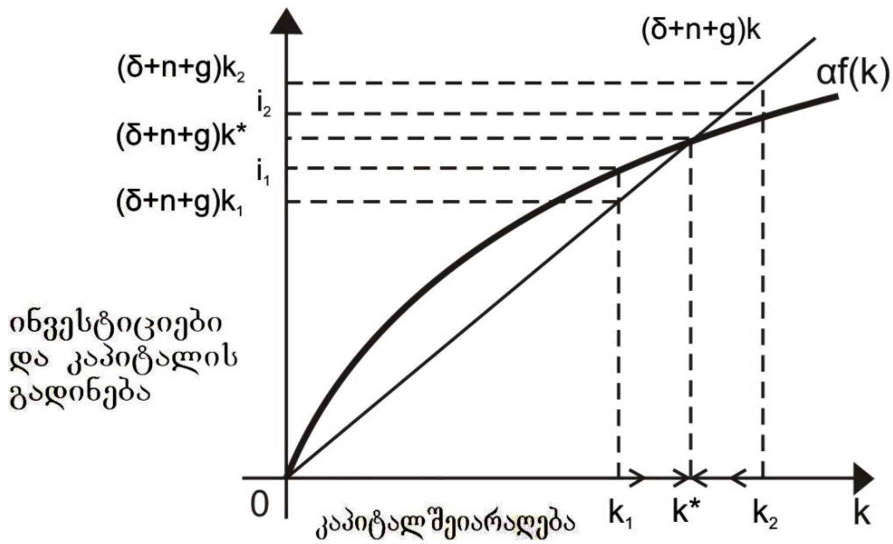
სადაც **y** - შემოსავალია, **c** - მოხმარება, **i** - ინვესტიციებია მუდმივი ეფექტურობის შრომის ერთეულზე. შესაბამისად,

$$\mathbf{i} = \alpha \mathbf{f}(\mathbf{k}). \qquad (20.10)$$

k მაჩვენებლის სტაბილურობის პირობა, ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$(\delta + \mathbf{n} + \mathbf{g})\mathbf{k}^* = \alpha \mathbf{f}(\mathbf{k}^*)\ , \qquad (20.11)$$

k* - კაპიტალშეიარაღების მდგრადი დონეა.



ნახ.20.1. კაპიტალშეიარაღება

ნახაზი 20.1-ზე ნაჩვენებია წონასწორობის მდგრადობა **k = k***-თვის. ეს წონასწორობის წერტილია **k** მაჩვენებლისათვის, რადგანაც ამ წერტილში კაპიტალშეიარაღების კუთრი ნამატის სიდიდე უდრის მისი კუთრი შემცირების სიდიდეს, და **k** მაჩვენებელი რჩება უცვლელად.

წონასწორობა მდგრადია, რადგანაც როცა **k_1 < k*** კუთრი ინვესტიციები აღემატება კაპიტალშეიარაღების შემცირებას და მისი სიდიდე იზრდება. **k_2 > k*** შემთხვევისათვის, პირიქით, კუთრი

ინვესტიციები ნაკლებია, ვიდრე კაპიტალშეიარაღების შემცირება და მისი სიდიდე კლებულობს, სანამ არ მიაღწევს **k***.

ნახ.20.1-დან შეიძლება დავასკვნათ, რომ შენახვის α ნორმის გაზრდის შემთხვევაში, ინვესტიციების ფუნქციის $(\alpha(f(k))$ გრაფიკი მაღლა წავა და გადაკვეთს $(\delta + n + g)k$ წრფეს უფრო მარჯვნივ. ამრიგად, შენახვის ნორმის ზრდა იწვევს **k*** კაპიტალშეიარაღების მდგრადი დონის მატებას, შესაბამისად შემოსავლის მდგრადი დონის ზრდას შრომის ერთეულზე

$$y^* = f(k^*).$$

თუ შრომით დაკავებულთა რიცხვი არ იზრდება (ან ნელა იზრდება), ე.ი. $n = 0$, მაშინ $(\delta + n + g)k$ წრფეს აქვს ნაკლები დახრილობა და **k*** გადაიწევს მარჯვნივ. ანალოგიურს აქვს ადგილი უფრო ნაკლები (ან ნულოვანი) შრომაშემნახველი ტექნიკური პროგრესის **g** ტემპის შემთხვევაში.

მდგრად მდგომარეობაში **k, y, c, i** მაჩვენებლების მატების ტემპი ნულის ტოლია, რადგანაც ეს კუთრი მაჩვენებლებია მუდმივი ეფექტურობის შრომის ერთეულზე გაანგარიშებული, ხოლო ერთი მშრომელის შრომის ეფექტურობა იზრდება **g** ტემპით, ხოლო კაპიტალის, შემოსავლის, მოხმარების და ინვესტიციების მაჩვენებლები ერთ შრომით დაკავებულზე გაანგარიშებული, იზრდება **g** ტემპით. თუ დაკავებულთა რაოდენობა იზრდება **n** ტემპით, მაშინ კაპიტალის შემოსავლის, მოხმარების და ინვესტიციების მოცულობა მდგრად მდგომარეობაში იზრდება $(n + g)$ ტემპით.

შესაბამისად, სოლოუს მოდელი გვიჩვენებს, რომ ერთ მომუშავეზე შემოსავლის ხანგრძლივი მდგრადი მატების ერთადერთი წყაროა ტექნიკური პროგრესი.

როგორც უკვე ვაჩვენეთ, შენახვის α ნორმის ყოველ დონეს შეესაბამება გარკვეული მდგრადი მდგომარეობა და მდგრადი მოხმარების თავისი დონე გამოთვლილი მუდმივი ეფექტურობის **c*** შრომის ერთეულზე.

შეიძლება დაისვას მდგრადი მდგომარეობის განსაზღვრის ამოცანა, სადაც **c*** მაქსიმალურია ყველა ასეთ მდგომარეობებიდან. რადგანაც ნებისმიერ მდგრად მდგომარეობაში სრულდება ტოლობა

$$i^* = (\delta + n + g)k^*$$

$$c^* = y^* - i^* = f(k^*) - (\delta + n + g)k^*.$$

მივიღებთ

$$F(k^*) = f(k^*) - (\delta + n + g)k^* \rightarrow \min.$$

F(k*) დიფერენცირებადი ფუნქციის მაქსიმუმის აუცილებელი პირობაა

$$F'(k^*) = 0.$$

$$F'(k^*) = f'(k^*) - (\delta + n + g) = 0,$$

$$f'(k^*) = \delta + n + g. \qquad (20.12)$$

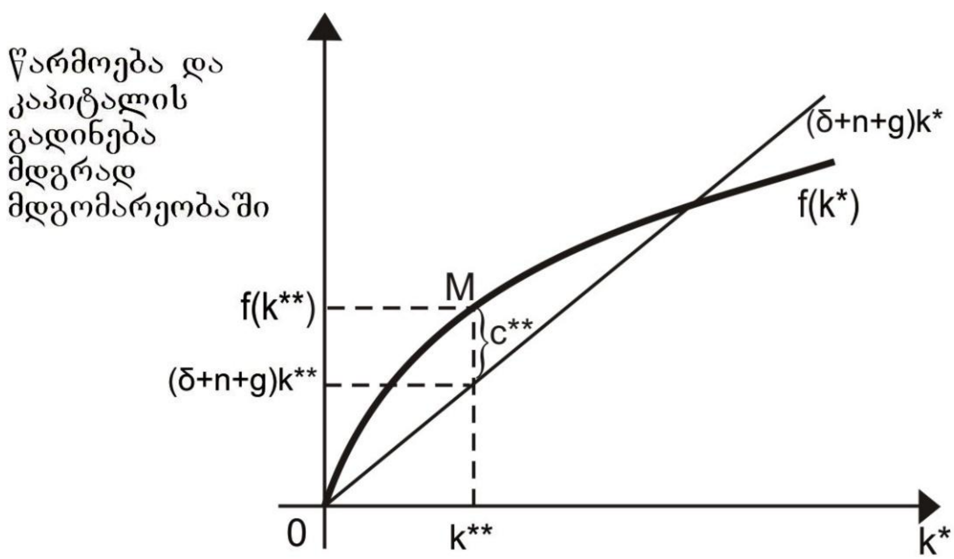
მოხმარების კუთრი მოცულობის მაქსიმიზაციისათვის კაპიტალის ოპტიმალური მოცულობის არჩევის წესს ოქროს წესს უწოდებენ. მის შესაბამის კაპიტალშეიარაღების **k**** სიდიდეს, ოქროს წესით

კაპიტალშეიარაღებას უწოდებენ, ხოლო შენახვის α^* ნორმას - შენახვის ნორმას ოქროს წესით. α^* შეიძლება ვიპოვოთ

$$(\delta + n + g)\, k^{**} = \alpha^* f(k^{**})$$

განტოლებიდან, რომელიც მდგრადი მდგომარეობის აუცილებელი პირობაა. ოქროს წესით მოხმარების კუთრი სიდიდე **c**** მიიღება როგორც შემოსავლის და ინვესტიციების სხვაობა

$$c^{**} = f(k^{**}) - (\delta + n + g)\, k^{**}.$$



ნახ.20.2. მდგრადი კაპიტალშეიარაღება

M(k, f(k**))** წერტილში საწარმოო ფუნქციის მხები **(δ + n + g) k** წრფის პარალელურია (20.12)-ის ძალით.

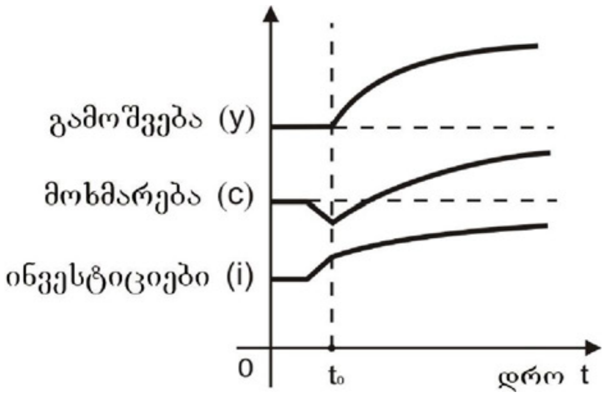
თუ შრომით დაკავებულთა მატების ტემპი უფრო დაბალია, ან შრომაშემნახველი ტექნიკური პროგრესის ტემპი დაბალია, მაშინ $(\delta + n + g)k$ წრფე უფრო დახრილია აბსცისთა ღერძისკენ და **k**** წერტილი მარჯვნივ გადაიწევს და მოხმარების კუთრი სიდიდე **c**** გაიზრდება.

თუ კაპიტალშეიარაღების საწყისი **k*** სიდიდე ნაკლებია **k****-ზე, მაშინ აზრი აქვს შენახვის ნორმის გაზრდას იმ სიდიდემდე, რომელიც შეესაბამება ოქროს წესს და თანდათანობით ეკონომიკა გადის კუთრი მოხმარების **c**** მაქსიმალურ დონეზე.

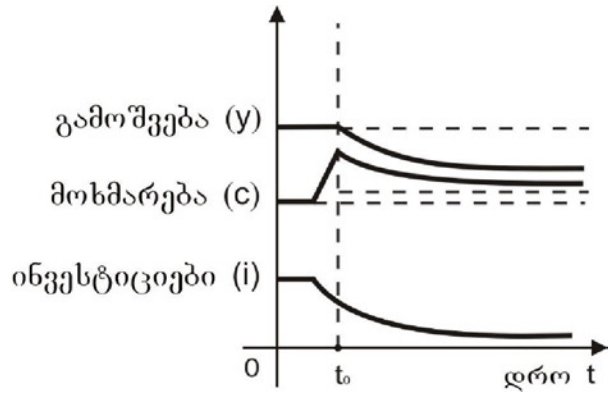
აღვნიშნოთ, რომ თავდაპირველად მოხმარების კუთრი დონე დაიკლებს, ხოლო მეორე თანდათანობით დაიწყებს ზრდას, ინვესტიციებისა და გამოშვების კუთრი მატებასთან ერთად. თუ კაპიტალშეიარაღების საწყისი **k*** სიდიდე **k****-ზე მეტია, მაშინ შენახვის ნორმა უნდა შევამციროთ ოქროს წესის შესაბამის დონემდე. მაშინ ეკონომიკა თანდათანობით გავა **c**** მოხმარების კუთრ დონეზე.

ამ შემთხვევაში, მოხმარების კუთრი დონე თავდაპირველად იზრდება, აღემატება **c****, ხოლო მერე თანდათანობით კლებულობს **c****-მდე, კუთრი ინვესტიიცებისა და გამოშვების დაკლებასთან ერთად.

y, c, i მაჩვენებლების დინამიკა ორივე შემთხვევისათვის მოცემულია ნახ.20.3, 20.4.



ნახ.20.3. შენახვის ნორმის ზრდადობა



ნახ.20.4. შენახვის ნორმის კლებადობა

§ 21. საწარმოს მუშაობის არაწრფივი მოდელი

განვიხილოთ არაწრფივი მათემატიკური მოდელი, რომელიც აკავშირებს ერთმანეთთან წარმოების მოცულობას, რეალიზებული პროდუქციის მოცულობას, წარმოებისათვის საჭირო რესურსების მოცულობასა და მათი ცვლილების სიჩქარეებს [1].

დავუშვათ, რომ **x(t)** - წარმოების მოცულობაა დროის **t** მომენტში, **y(t)** - რეალიზებული პროდუქციის მოცულობაა, ***a*** - რეალიზებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის ფასია, **b** - წარმოებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის თვითღირებულებაა.

მაშინ, წარმოების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, პროდუქციის რეალიზაციიდან ამონაგებსა და წარმოების დანახარჯებს შორის სხვაობისა, ანუ ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a y(t) - b x(t), \qquad (21.1)$$

სადაც ***a*, b** დადებითი მუდმივებია.

z(t) - აღვნიშნოთ წარმოებისათვის საჭირო რესურსების მოცულობა დროის **t** მომენტში, **c** - ბაზრის მოთხოვნის კოეფიციენტი წარმოების **x(t)** მოცულობაზე, **d** - ბაზრის გაჯერების კოეფიციენტი, **p** - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი.

ბუნებრივია, რომ რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, წარმოებული პროდუქციის ბაზრით უზრუნველყოფის მოცულობისა, გაჯერების მოცულობისა და წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის მოცულობათა სხვაობისა, რაც განტოლების სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\frac{dy(t)}{dt} = c x(t) - d y(t) - p x(t) z(t), \qquad (21.2)$$

სადაც **c, d, p** - დადებითი მუდმივებია.

თუ **q**-თი აღვნიშნავთ რესურსების ხარჯვის სიჩქარის კოეფიციენტს, ხოლო ***l***-ით - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტს, მაშინ

$$\frac{dz(t)}{dt} = -q z(t) + l x(t) y(t), \qquad (22.3)$$

სადაც **q, *l*** - დადებითი მუდმივებია, ანუ წარმოების რესურსების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, რესურსებით

უზრუნველყოფის მოცულობასა და დახარჯული რესურსების მოცულობათა შორის სხვაობისა.

ამრიგად, საწარმოოს ფუნქციონირების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი აღიწერება შემდეგი არაწრფივი განტოლებათა სისტემით

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = ay(t) - bx(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = cx(t) - dy(t) - px(t)z(t), \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = -qz(t) + lx(t)y(t). \end{cases} \qquad (21.4)$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ (21.4) განტოლებათა სისტემა ემთხვევა ლორენცის მათემატიკურ მოდელს, როცა

$$a = b = 10;\ c = 28;\ d = p = l = 1;\ q = 8/3. \qquad (21.5)$$

ბუნებრივია, რომ (21.4) სისტემას დაემატება კოშის საწყისი პირობები

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0\ . \qquad (21.6)$$

(21.5)-ს შემთხვევაში, ფაზურ სიბრტყეზე მივიღებთ ლორენცის ანტრაქტორს, რომელიც ფრაქტალურ სიმრავლეს წარმოადგენს.

ლორენცის ატრაქტორი შეესაბამება დეტერმინირებულ სისტემაში ქაოსის წარმოქმნის მოვლენას. ამ შემთხვევაში, წარმოებისა და ამონაგების მოცულობები აღარაა მართვადი და სისტემა მიდის ნგრევისკენ. ამიტომ, ცდილობენ თავი აარიდონ სისტემის ქაოსური მუშაობის რეჟიმებს, პარამეტრების შესაბამისი დინამიკის საშუალებით.

თუ განვიხილავთ, ლორენცის არაწრფივ განტოლებათა სისტემას (21.4)-ს, (21.5)-ის შემთხვევაში, ერთეულოვანი საწყისი პირობებით ($x_0 = y_0 = z_0 = 1$), მაშინ მივიღებთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორის სურათს ფაზურ სიბრტყეზე, რომელიც შეესაბამება დეტერმინირებული სისტემის ქაოსურ რეჟიმში გადასვლას, მაგრამ რომელიც იცვლის "პეპელას ფრთების" მოხაზულობას **c** - პარამეტრის ცვლილებისას, რაც შეესაბამება ბაზრის მოთხოვნის ცვლილებას წარმოებული პროდუქტის მოცულობაზე.

ლიტერატურა

1. თ. ჩილაჩავა, ც. ძიძიგური მათემატიკური მოდელირება, ინოვაცია, თბილისი, 2008, 440 გვ.
2. თ. ჩილაჩავა, ც. ძიძიგური მათემატიკური მოდელები ეკოლოგიასა და მედიცინაში, ინოვაცია, თბილისი, 2011, 336 გვ.
3. თ. ჩილაჩავა მათემატიკური მოდელირების საფუძვლები. ამოცანათა კრებული, სსუ, 2016, 82 გვ.
4. ჰ. მელაძე, ნ. სხირტლაძე გამოყენებითი მათემატიკის საწყისები. თსუ, თბილისი, 2000, 261 გვ.
5. თ. ობგაძე მათემატიკური მოდელირება. 2016.
6. Marshall A. The Principles of Economics, London. 1949, 8th Edition.
7. W.Diewert, K.Spremann, F.Stehing Mathematical modelling in economics. Springer, 1993.
8. J.Dupacova, J. Hurt, J.Stepan Stochastic modeling in economics and finance. 2006.
9. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М., Наука, 1984**.**
10. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. М. Финансы и статистика. 2005, 432 стр.
11. Ващенко Т.В. Математика финансового менеджмента. М. 1996.
12. Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманита-риев. Учебник, М.Ж Альфа –М; ИНФРа-М, 2005, 528 стр.
13. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.В. Математические методы в экономике. Учебник, 2-ое изд. М. ЖМГУ, Изд. Дело и Сервис, 1999, 368 стр.
14. Замков Ю. Математическое моделирование в экономике. Москва, 2000.
15. Косович Е. Финансовая математика:теория и практика финансово-банковских расчетов. М. 1994.
16. Красс М.С., Чупринов Б.Н. Основы математики и ее прило-жения в экономическом образовании. Учебник, М., 2000.
17. Маленво Э. Математическая экономика (пер. с франц.), 2000.
18. Маршалл А. Принципы экономической науки . т. II, Москва, Прогресс, 1993, 310 стр.
19. Коуз Р. Фирма, рынок и право. Москва, 1993, 192 стр.