ბიბლიოთეკა

ს. თოფურია, გ. აგენაძე, გ. ოზგენაშვილი
ვ. ხრომოლავა, ზ. მეგრელიშვილი

მათემატიკა

II ნაწილი

გეომეტრია (თეორია და ამოცანები)

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტრომ დაამტკიცა სახელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებლების მოსამზადებელი განყოფილებებისა და ტექნიკუმებისათვის.

პროფესორ ს. თოფურიას რედაქციით
მეორე გადამუშავებული და შევსებული გამოცემა

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1967

22.15.я 729
Б18 1987(035.1)
Б 153

წიგნი გამოიშვება, 11 ნაწილი, გეოგრაფიის განყოფილებით ზოგადსაგანმანათლებლო გაერთიანებათა მწვრთნელებისა და უმაღლეს სასწავლებელში შემსვლელთათვის.

სახელმძღვანელოში მოცემული მასალის სისტემატიური შესწავლა ეხმარება ავტორს აბიტურიენტის ცოდნის ობიექტურ შეფასებაში, რომელიც მიეთითება ტესტის სასწორზე შემსვლელს, როგორც წერით, ისე ზეპირ საგამოცდო ვარიანტებზე.

წიგნი გამოადგება ყველას, ვისაც ათვისებული აქვს საშუალო სკოლის სასკოლო კურსი და ინტერესდება.

რეცენზენტები: 1. სსრ კავშირის დამსახურებული მასწავლებელი ბ-რი ი. ბოლშაკოვი,
2. სსრ კავშირის მაღალი კატეგორიის მასწავლებელი ბ-რი ნ. ბაბაბაევი

74050

1702010000 — 259
T———— 320—87
M—902(06) — 82

© გამომცემლობა „განათლება", 1987 წ.

პირველი ნაწილის წინასიტყვაობა

წინამდებარე ანბანმძღოლი დაწერილია უმაღლესი სასწავლებლების მომავალი აბიტურიენტების ძალისმიერად მოქმედი პროგრამის მიხედვით, რომელიც მასალათა შორისაც უმნიშვნელოვანესი მასალების გამოკვეთვის პროგრამაა.

წიგნი შედგება ორი განყოფილებისაგან. პირველ განყოფილებაში განხილულია თეორიული მასალა, რომელიც აგების ლირსი შეფილოსოფიაა ვეარად გათვალისწინებული საკითხების გადმოცემის ლოგიკური თანმიმდევრობა. ამასთან საშუალო სკოლის სახელმძღვანელოებისაგან განსხვავებით, ყოველი კონკრეტული საკითხის შესაბამისი მასალა თავმოყრილია ერთად. შესწავლილი თეორიული მასალის განმტკიცების მიზნით მოყვანილია კითხვები თვითშემოწმებისათვის.

თეორიული ნაწილის სიფრცელად აღებულია სკოლაში ამჟამად მოქმედ ა. პიოტრიკოვის სახელმძღვანელოში მოყვანილი აქსიომათა სისტემა. აქსიომებია ამ სისტემაზე დაყრდნობით რიგი თეორემების დამტკიცებულია მთელი სიზუსტით. მაგალითად, თეორემა სამკუთხედის კუთხეების ჯამის შესახებ. იქ სადაც მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ, თეორემებია დამტკიცება არ არის მოყვანილი ცალკეულ შემთხვევებისათვის, ზოგიერთი თეორემა კი მოყვანილია დაუმტკიცებლად. ზოგიერთი საკითხია გადმოცემის ლირს გათვალისწინებულია ავტორეული ის გარემოება, რომ დღეისათვის საშუალო სკოლის VIII—X კლასებში გეომეტრია ისწავლება ა. კოლმოგოროვის სახელმძღვანელოს მიხედვით.

მეორე განყოფილება ამოცანათა კრებულია, რომელიც შეიცავს თეორიული მასალის შესაბამის ამოცანებს. ამოცანები დალაგებულია თემების მიხედვით, ასევე ტიპებისა და სირთულის გათვალისწინებით შემდეგი პრინციპით: 1. ამოცანები გამოთვლაზე, 2. ამოცანები დამტკიცებაზე. ამოცანების ასეთი დალაგება უადვილებს მკითხველს სკოლაში შესწავლილი საკითხების გამეორებას და წაკვნილი ცოდნის გალრმავებას.

სახელმძღვანელო გათვალისწინებულია ჩვენი ქვეყნის ყველა უმაღლეს სასწავლებლებში შესასვლელთათვის. ამიტომ მასში ზოგიერთი ამოცანა სირთულიანია ზოგიერთ მაღალი სიძნელისაა.

წიგნის ხელნაწერი გულდასმით წაიკითხეს და სასარგებლო შენიშვნები მოგვცეს რეცენზენტებმა — მადლობელი ვარ სსრ მეცნიერებათა აკა-

დებიის წევრ-კორესპონდენტმა პროფესორმა ი. კალურაძემ, ა. რიხსიევის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსმა მეცნიერ-თანამშრომელმა ე. ჭაბაშვილმა, რისთვისაც წინა გულწრფელ მადლობას მოვახსენებთ. მადლობას მოვახსენებთ აგრეთვე კათედრის თანამშრომლებს: ეფრის მასწავლებლებს დ. ციორგაძეს, ა. ჯელიაშვილს და ასისტენტებს ხ. მაჭარაშვილს, ე. ჯანელიძეს, თ. ტუღუშს, რომლებმაც დახმარება გაგვიწიეს წიგნის გამოსაცემად მოძზადებაში.

ავტორები

მეორე გამოცემის წინასიტყვაობა

წინამდებარე სახელმძღვანელოს მეორე გამოცემაში გასწორებულია შემჩნეული ბეჭდური შეცდომები, დამატებულია მითითებები ამოცანებისადმი დამტკიცებაზე.

ავტორები მადლობას უხდიან ყველას, ვინც მოგვაწოდა შენიშვნები შეჩნეულ ხარვეზებზე.

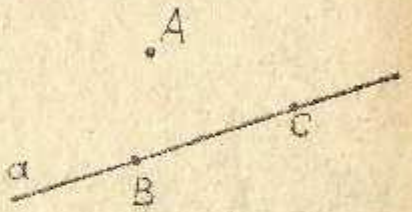
ავტორები

პლანიმეტრია

§ 1. პლანიმეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები

ძირითად გეომეტრიულ ფიგურებს სიბრტყეზე წარმოადგენს წერტილი და წრფე. წერტილები აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით: $A, B, C, D\ldots$, ხოლო წრფეები ჩვეულებრივ ლათინური ასოებით: $a, b, c, d, \ldots$

წერტილისა და წრფის ცნება გეომეტრიის პირველადი ცნებებია. მათზე წარმოდგენას გვაძლევს 1-ელ ნახაზზე გამოსახული ფიგურები: წერტილი A და წრფე a (იგულისხმება, რომ წრფე თავისი მსგავს უსასრულოდ გრძელდება).



ნახ. 1

ჩამოვაყალიბოთ პლანიმეტრიის აქსიომები, რომლებსაც დავეყრდნობით ჩვენ ყველა მტკიცებულებაში.

1. წერტილებისა და წრფეების მიკუთვნების აქსიომები

აქსიომა I_1. *როგორიც არ უნდა იყოს წრფე, არსებობს წერტილები, რომლებიც ეკუთვნის ამ წრფეს და წერტილები, რომლებიც მას არ ეკუთვნის.*

აქსიომა I_2. *ყოველ ორ წერტილზე შეიძლება გაიყვლოს წრფე და მხოლოდ ერთი.*

წრფე შეიძლება აღვნიშნოთ მასზე მდებარე ნებისმიერი ორი წერტილის მიხედვით. მაგალითად, 1-ელ ნახაზზე გამოსახული a წრფე შეიძლება ასეც აღვნიშნოთ — BC.

ვიტყვით, რომ ორი წრფე იკვეთება, თუ არსებობს წერტილი, რომელიც ორივე წრფეს ეკუთვნის. ამ წერტილს გადაკვეთის წერტილი ეწოდება.

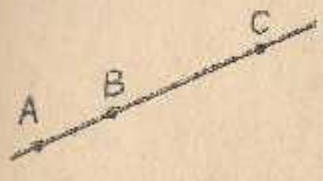
თეორემა 1.1. *თუ ორი წრფე იკვეთება, მაშინ მათ გააჩნიათ გადაკვეთის ერთადერთი წერტილი.*

დამტკიცება. თუ დაუშვებთ, რომ მოცემული წრფეები იკვეთ-

თუმცა ორ წერტილში, მაშინაც მივიღებთ ორ განსხვავებულ წერტილზე გავლის ორი სხვადასხვა წრეს. რაც ჩვენ აქსიომად ვუნიშნავდეგით. თეორემა დამტკიცებულია.

II. წრეწირა და სივრცეში ნებისმიერთა თანმიმდევრობის აქსიომები

განვიხილოთ a წრეწირზე მდებარე A, B და C წერტილები (ნახ. 2.). B წერტილი მდებარეობს A და C წერტილებს შორის, ანუ A და C წერტილები მდებარეობენ B წერტილიდან სხვადასხვა მხარეს. B და C წერტილები მდებარეობენ A წერტილიდან ერთ მხარეს, ასევე, A და B წერტილები მდებარეობენ ერთ მხარეს C წერტილიდან.



ნახ. 2

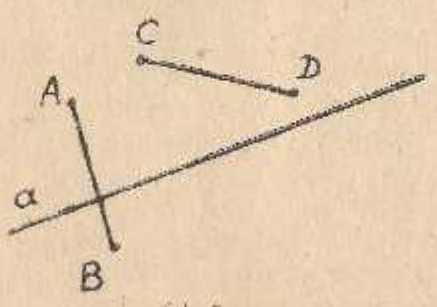
აქსიომა II$_1$. წრეწირზე მდებარე სამი წერტილიდან ერთი და მხოლოდ ერთი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის.

განსაზღვრება. მონაკვეთი ეწოდება წრეწირის ნაწილს, რომელიც შედგება ამ წრეწირის ორ მოცემულ წერტილს შორის მდებარე ყველა წერტილისაგან. მოცემულ წერტილებს მონაკვეთის ბოლოები ეწოდება.

მონაკვეთი აღინიშნება მისი ბოლოების მითითებით. მაგალითად, მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია A და B, ასე აღინიშნება AB.

განსაზღვრება. სხივი ანუ **ნახევარწრეწირი** ეწოდება წრეწირის ნაწილს, რომელიც შედგება ამ წრეწირის მოცემული წერტილის ერთ მხარეს მდებარე ყველა წერტილისაგან. მოცემულ წერტილს სხივის საწყისი წერტილი ანუ **სათავე** ეწოდება.

სხივი აღინიშნება მისი სათავისა და ამ სხივზე მდებარე რომელიმე წერტილის მითითებით, ამასთან სათავის აღმნიშვნელი ასო ყოველთვის პირველ ადგილზე. მაგალითად, სხივი, რომლის სათავეა A და რომელზედაც მდებარე რაიმე წერტილია B ასე აღინიშნება AB. სხივი შეიძლება აღინიშნოს მცირე ლათინური ასოებითაც.



ნახ. 3

ერთ წრეწირზე მდებარე სათანო სათავის მქონე სხვადასხვა სხივებს **დამატებითი სხივები** ეწოდება.

განვიხილოთ სიბრტყეზე მდებარე რაიმე a წრეწირი (ნახ 3). იგი

სიბრტყეს ორად ორ სახევარსიბრტყედ. თუ A და B წერტილები ეკუთვნიან სხვადასხვა სახევარსიბრტყეს, მაშინ AB მონაკვეთი კვეთს a წრეწირს. თუ C და D წერტილები ეკუთვნიან ერთ სახევარსიბრტყეს, მაშინ CD მონაკვეთი და a წრეწირი არ კვეთენ ერთმანეთს.

აქსიომა II$_2$. წრეწირი სიბრტყეს ყოფს ორ სახევარსიბრტყედ.

III. მონაკვეთების და კუთხეების გაზომვის აქსიომები

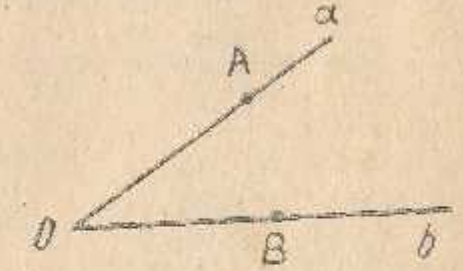
აქსიომა III$_1$. ყოველ მონაკვეთს აქვს დადებითი სიგრძე. მონაკვეთის სიგრძე უდრის იმ მონაკვეთების სიგრძეების ჯამს, რომლებადაც იგი იყოფა მისი ნებისმიერი წერტილით.

ე. ი. თუ AB მონაკვეთზე აღებულია ნებისმიერი C წერტილი, მაშინ AB მონაკვეთის სიგრძე ტოლია AC და CB მონაკვეთების სიგრძეების ჯამისა. AB მონაკვეთის სიგრძეს ეწოდება აგრეთვე მანძილი A და B წერტილებს შორის. თუ A და B წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, ვიტყვით, მაშინ მათ შორის მანძილი ნულის ტოლად არის მიღებული.

ორ მონაკვეთს ეწოდება ტოლი თუ მათ ტოლი სიგრძეები აქვთ.

განსაზღვრება. სიბრტყის ნაწილს, რომელიც შედგება ამ სხივით და მისი სათავის მქონე სხვადასხვა სხივებით შედგენილი ფიგურის კუთხე ეწოდება. ამ სხივებს კუთხის გვერდები ეწოდება, ხოლო მათ საერთო სათავეს — წვერო.

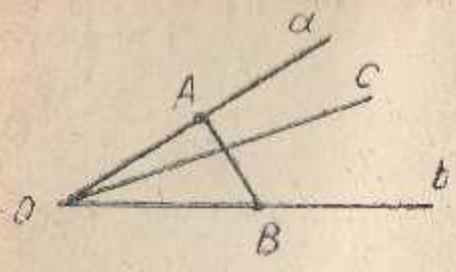
ხშირად ნაცვლად სიტყვისა „კუთხე“ გამოიყენება ნიშანი „$\angle$“. კუთხე, რომლის წვეროა O, ხოლო გვერდები a და b (ნახ. 4) ასე აღინიშნება: $\angle O$ ან $\angle(ab)$ ან $\angle AOB$. ამ უკანასკნელში A და B კუთხის სხვადასხვა გვერდებზე მდებარე წერტილებია, ამასთან კუთხის წვეროს აღმნიშვნელი ასო შუაში იწერება.



ნახ. 4

განსაზღვრება. კუთხეს, რომლის გვერდები წარმოადგენენ დამატებით სხივებს, გაშლილი კუთხე ეწოდება.

ვიტყვით, რომ სხივი გადის კუთხის გვერდებს შორის, თუ მისი სათავე კუთხის წვეროა და დანარჩენი მონაკვეთის ბოლოებით კუთხის გვერდებზეა. მაგალითად, c სხივი გადის $\angle AOB$-ს გვერდებს შორის (ნახ. 5.) ვამჩნიეთ კუთხის შემთხვევაში ვიცით, რომ კუთხის გვერდებისაგან განსხვავებული ნებისმიერი სხივი — სათავით კუთხის წვეროში, გადის კუთხის გვერდებს შორის.



ნახ. 5

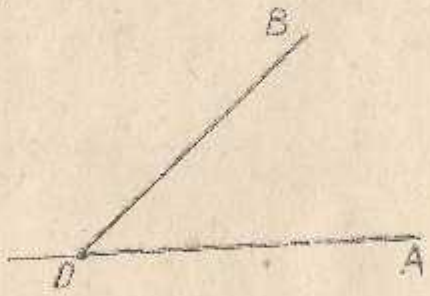
აქსიომა III_5. უოველ კუთხეს დადებითი გრადუსული ზომა აქვს. გაშლილი კუთხე $180°$-ის ტოლია. კუთხის გრადუსული ზომა ტოლია იმ კუთხეებიის გრადუსული ზომების ჯამისა, რომლებადაც იგი იყოფა მის გვერდებს შორის გამავალი სხივით.

მაგალითად, $\angle(ab)=\angle(ac)+\angle(bc)$, (ნახ. 5). ორ კუთხეს ეწოდება ტოლი, თუ მათი გრადუსული ზომები ტოლია.

IV. მოდაკვეთებისა და კუთხეების გადადების და მოცემული სათუთხედის ტოლი სამკუთხედის არსებობის აქსიომები

აქსიომა IV_1. ყოველ ნახევარწრფეზე, მისი საწყისი წერტილიდან შეიძლება გადაუდოთ მოცემული სიგრძის მონაკვეთი და მასთან მხოლოდ ერთი.

ვანუხილოთ რაიმე OA სხივის შემცველი წრფით განსაზღვრული ერთ-ერთი ნახევარსიბრტყე. ავაგოთ მოცემული გრადუსული ზომის კუთხე ისე, რომ მისი ერთი გვერდი დაემთხვეს OA სხივს, ხოლო მეორე აღმოჩნდეს არჩეულ ნახევარსიბრტყეში (ნახ. 6).



ნახ. 6

აქსიომა IV_2. ყოველი ნახევარწრფიდან მოცემულ ნახევარსიბრტყეში შეიძლება გადავიდეთ მოცემული, $180°$-ზე ნაკლები, გრადუსული ზომის კუთხე, და მასთან მხოლოდ ერთი.

განსაზღვრება. სამკუთხედი ეწოდება ფიგურას, რომელიც შედგება ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილისა და ამ წერტილების წყვილ-წყვილად შემაერთებელი სამი მონაკვეთისაგან. მოცემულ სამ წერტილს სამკუთხედის წვეროები ეწოდება, სხივებს მათ შემაერთებელ მონაკვეთებს — სამკუთხედის გვერდები.

სამკუთხედი აღინიშნება მისი წვეროების მითითებით, ხშირად ნაცვლად სიტყვისა „სამკუთხედი“ ვიხმართ ნიშანს „$\triangle$“. მაგალითად, სამკუთხედი, რომლის წვეროებია A, B და C, ასე აღინიშნება: $\triangle ABC$.

ABC სამკუთხედის A წვეროსთან შედგენილ კუთხეს ეწოდება AB და AC სხივებით შედგენილი კუთხე, ანალოგიურად განისაზღვრება B და C წვეროებთან შედგენილი კუთხეები.

ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებს ეწოდებათ ტოლი, თუ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$. შესაბამისი სამკუთხედების ტოლია, თუ მათი შესაბამისი კუთხეები და შესაბამისი გვერდები ტოლია.

სამკუთხედების ტოლობის აღნიშვნისათვის ვიყენებთ ტოლობის ჩვეულებრივი ნიშანს „=“. ამრიგად, ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობა ასე ჩაიწერება: $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. აქასთან აუცილებელი შეინიშნოთ, რომ ტოლობა სამკუთხედების წყვილებს შორის ერთმანეთის შესაბამისად. ტოლობით, $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ ნიშნავს, რომ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, ხოლო $\triangle ABC=\triangle B_1C_1A_1$ ნიშნავს $\angle A=\angle B_1$, $\angle B=\angle C_1$, $\angle C=\angle A_1$, $AB=B_1C_1$, $BC=C_1A_1$, $AC=B_1A_1$.

ვთქვათ მოცემულია $\triangle ABC$, a სხივი და ამ სხივის შემცველი წრფით განსაზღვრული ერთ-ერთი ნახევარსიბრტყე. გადავადგილოთ $\triangle ABC$ ისე, რომ A წვერო დაემთხვეს a სხივის სათავეს, B წვერო მოხვდეს a სხივზე, ხოლო C წვერო — მოცემულ ნახევარსიბრტყეში. ახლა შევადაროთ ერთმანეთს სამკუთხედის წვეროები აღვნიშნოთ შესაბამისად $A_1B_1C_1$-ით. $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

აქსიომა IV_3. როგორიც არ უნდა იყოს სამკუთხედი, არსებობს მისი ტოლი სამკუთხედი, რომელსაც მოცემული მდებარეობა აქვს მოცემული ნახევარწრფის მიმართ.

V. პარალელური წრფეების აქსიომა

განსაზღვრება. სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი არ იკვეთებიან.

წრფეთა პარალელურობის აღსანიშნავად გამოიყენება ნიშანი „||“. ჩანაწერი $a\|b$ ნიშნავს, რომ a წრფე პარალელურია b წრფის.

აქსიომა V. წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება ამ წრფის პარალელური არაუმეტეს ერთი წრფის გავლება.

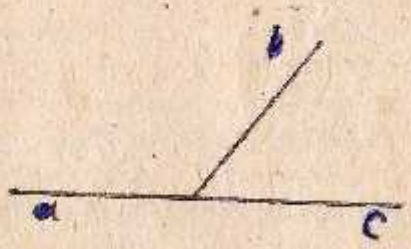
მონაკვეთებს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ.

1. დახასიათეთ ძირითადი გეომეტრიული ფიგურები სიბრტყეზე.
2. რისგან შედგებიან წერტილები და წრფეები?
3. ჩამოთვალეთ წერტილების და წრფეების მდებარეობის თვისებები.
4. დამტკიცეთ, რომ თუ სამი წრფე იკვეთება, მაშინ მათი გადაკვეთის ერთადერთი წერტილია.
5. ფურცლის ზედაპირზე მოცემული სამი წერტილიდან, რომელიც მთავარი ხელსაწყოს დანიშნულების მიხედვით, *A* წერტილის მიმართ რისგან განსხვავდება *B* და *C* წერტილები?
6. ჩამოყალიბეთ წრფეების და სიბრტყეზე წერტილთა ურთიერთდამოკიდებულების თვისებები.
7. რას ეწოდება მონაკვეთის ბისექტრისის ხელსაწყოთი?
8. როგორ აღინიშნება მონაკვეთი?
9. რა ეწოდება ახალი (მახვილი) ერთეულის ხელის ერთეულად დანიშნულია სიდიდე?
10. როგორ აღინიშნება სხივი?
11. ჩამოთვალეთ მონაკვეთებისა და კუთხეების ტარომეტრის ტიპები.
12. რას ეწოდება მიკუთვნილ ორი წერტილის შორის მანძილი?
13. როგორ მონაკვეთის ერთეულად ტოლი მონაკვეთები?
14. რას ეწოდება კუთხე, კუთხის ელემენტები?
15. რისგან კუთხეს ეწოდება ბისექტრისა კუთხის?
16. რისგან დანიშნულია კუთხე?
17. ახსენით, რას ნიშნავს გამოიყენოთ ასიკი გადაკუთხის განსაზღვრაში.
18. მაძიებლებით მონაკვეთებისა და კუთხეების გადადება ხელსაწყოთი.
19. რას ეწოდება სამკუთხედი, სამი წვეროები, გვერდები?
20. როგორ აღინიშნება სამკუთხედი?
21. როგორ სამკუთხედებს ეწოდება ტოლი, ტოლფერდა?
22. რას ნიშნავს ჩანაწერი „$\triangle ABC$ სამკუთხედი $\triangle A_1B_1C_1$ სამკუთხედის ტოლია"?
23. სამკუთხედის რომელი სამკუთხედია ტოლი სამკუთხედის არსებობის აუცილებელი პირობა.
24. როგორ წრფეებს ეწოდებათ პარალელური წრფეები?
25. სამკუთხედის პარალელური წრფეების ხელსაწყოთი.

§ 9. კუთხეები

განსაზღვრება. **ორ კუთხეს მოსაზღვრე ეწოდება, თუ მათ ერთი გვერდი საერთო აქვთ, ხოლო დანარჩენი ორი დამატებით სხივებს წარმოადგენენ.**

ნახ. 7-ზე ნახაზზე გამოსახული (ab) და (bc) კუთხეები მოსაზღვრეა, რადგან მათ b გვერდი საერთო აქვთ, ხოლო a და c გვერდები დამატებით სხივებს წარმოადგენენ.



ნახ. 7

თეორემა 2. 1. მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.

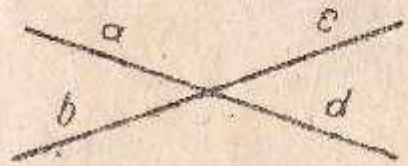
დამტკიცება. ვთქვათ $\angle(ab)$ და $\angle(bc)$ — მოსაზღვრე კუთხეებია (ნახ. 7). რადგან b სხივი გაშლილი კუთხის a და c გვერდებს შორისაა, ამიტომ III აქსიომის თანახმად $\angle(ab) + \angle(bc) = 180°$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ტოლი კუთხეების მოსაზღვრე კუთხეები ტოლია.

განსაზღვრება. **90°-ის ტოლ კუთხეს მართი კუთხე ეწოდება. 90°-ზე ნაკლებ კუთხეს მახვილი კუთხე ეწოდება. 90°-ზე მეტ და 180°-ზე ნაკლებ კუთხეს ბლაგვი კუთხე ეწოდება.**

2. 1. თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მართი კუთხის მოსაზღვრე კუთხე მართია, მახვილი კუთხის მოსაზღვრე კუთხე — ბლაგვია, ხოლო ბლაგვი კუთხის მოსაზღვრე კუთხე — მახვილია.

განსაზღვრება. **ორ კუთხეს ვერტიკალური ეწოდება, თუ ერთი კუთხის გვერდები წარმოადგენენ მეორე კუთხის გვერდების დამატებით სხივებს.**



ნახ. 8

ნახ. 8-ზე ნახაზზე გამოსახული (ab) და (cd) კუთხეები ვერტიკალურია, რადგან c და d სხივები წარმოადგენენ შესაბამისად b და a სხივების დამატებით სხივებს.

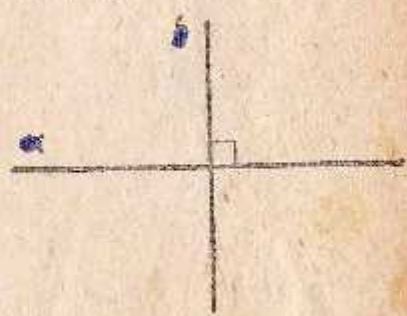
თეორემა 2. 2. ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ (ab) და (cd) კუთხეები ვერტიკალურია (ნახ. 8). $\angle(ac)$ მოსაზღვრეა როგორც (ab), ასევე (cd) კუთხისათვის. ამიტომ 2. 1 თეორემის ძალით

$$\angle(ab) + \angle(ac) = 180°,$$
$$\angle(cd) + \angle(ac) = 180°.$$

საიდანაც $\angle(ab) = \angle(cd)$. თეორემა დამტკიცებულია.

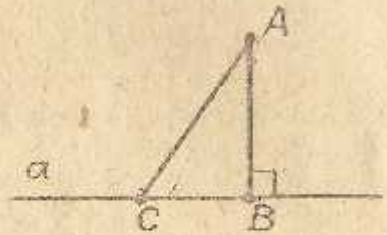
ვთქვათ a და b ორი გადამკვეთი წრფეა. გადაკვეთისას ის წრფეები ქმნიან ოთხ კუთხეს. ჟოგელი მათგანისათვის დანამატები სამი კუთხეა თითოეული ან მოსაზღვრეა ან ვერტიკალური ამიტომ, თუ ერთ-ერთი კუთხე მართია, მაშინ დანარჩენი კუთხეებიც მართი იქნება. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ წრფეები მართი კუთხით იკვეთებიან (ნახ. 9).


ნახ. 9

განსაზღვრება. ორ წრფეს ეწოდება პერპენდიკულარული (მართობული), თუ ისინი მართი კუთხით იკვეთებიან.

წრფეთა პერპენდიკულარობის აღსანიშნავად გამოიყენება ნიშანი „⊥". ჩანაწერი $a \perp b$ ნიშნავს, რომ a წრფე პერპენდიკულარულია b წრფის.

განსაზღვრება. მოცემული წრფის პერპენდიკულარი (მართობი) ეწოდება მისი პერპენდიკულარული წრფის მონაკვეთს, რომლის ერთი ბოლო ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილია. ამ წერტილს პერპენდიკულარის ფუძე ეწოდება.



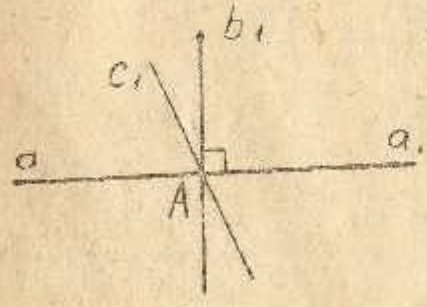
ნახ. 10

განსაზღვრება. წრფის ნაწილს დახრილი ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც წრფეზე არამდებარე წერტილს წრფის რაიმე წერტილთან აერთებს და პერპენდიკულარისაგან განსხვავდება. წრფეზე მდებარე დახრილის ბოლოს დახრილის ფუძე ეწოდება.

მე-10 ნახაზზე გამოსახულია AB მონაკვეთი წარმოადგენს a წრფის პერპენდიკულარს, ხოლო AC მონაკვეთი — დახრილს. B წერტილი პერპენდიკულარის ფუძეა, C წერტილი კი დახრილის ფუძეა. CB მონაკვეთია AC დახრილის გეგმილი ეწოდება.

თეორემა 2. 3. წრფის ნებისმიერ წერტილზე შეიძლება გაეყვანოთ მისი პერპენდიკულარული წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.

დამტკიცება. განვიხილოთ a წრფე და მასზე მდებარე რაიმე A წერტილი. აღვნიშნოთ a_1-ით a წრფის ერთ-ერთი ნახევარწრფე საწყისით A წერტილში (ნახ. 11). a_1 სხივიდან გადავდოთ $90°$-ის ტოლი $(a_1\ b_1)$ კუთხე (აქსიომა 4.2). მაშინ b_1 სხივის შემცველი წრფე იქნება a წრფის პერპენდიკულარული.



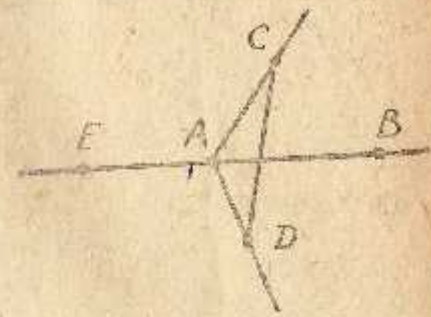
ნახ. 11

ვთქვათ აგებული წრფის გარდა კიდევ არსებობს A წერტილში გამავალი a წრფის პერპენდიკულარული წრფე. აღვნიშნოთ c_1-ით ამ წრფის A საწყისის მქონე ის ნახევარწრფე, რომელიც b_1-ის შექმნილ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს. (ნახ. 11). მაშინ, მიღებულია, რომ a_1 სხივიდან ერთი ნახევარსიბრტყეში განთავსებულია ორი $(a_1\ b_1)$ და $(a_1\ c_1)$ შესაბამისი კუთხე, რაც IV$_2$ აქსიომას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

დაშვებულებად მიღებულთა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. 4. თუ მოცემული სხივიდან ერთ ნახევარსიბრტყეში გადავდებთ ორ კუთხეს, მაშინ მცირე კუთხის ან გვერდი, რომელიც მოცემული სხივისაგან განსხვავდება, გადის დიდი კუთხის გვერდებს შორის.

ამ მტკიცებულების ილუსტრირებისათვის შეიძლება ავიღოთ AB მაგალითად სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში გადებული $\angle BAC = 65°$ და $\angle BAD = 15°$ (ნახ. 12). ვიპოვოთ $\angle CAD$.



ნახ. 12

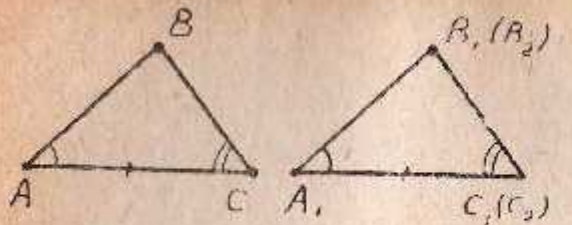
ამოხსნა. რადგან C და D წერტილები AB წრფით განსახღვრულ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ, ამიტომ CD მონაკვეთი და AB წრფე აუცილებლად იკვეთებიან (ნახ. 12). ამჟამად გამოვიყენოთ, CAD კუთხის გვერდების შორის ვიპოვოთ ან AB სხივი ან მისი დამატებითი. CAD კუთხის გვერდების შორის ვიპოვოთ ან AB სხივი ან მისი დამატებითი სხივი AE. ე. ი. $\angle CAD$ ტოლია ან BAC და BAD კუთხეების ან ჯამის ან სხვაობის, EAC და EAD კუთხეების ჯამის. ერთ შემთხვევაში გვაქვს $\angle CAD = 65° - 15° = 140°$. მეორე შემთხვევაში კი $\angle CAD = (180° - 65°) + (180° - 75°) = 220°$. მეორე შემთხვევა შეუძლებელია, რადგან კუთხის გრადუსული ზომა არ აღემატება $180°$-ს, ე. ი. განხილული ამოცანის პირობებში $\angle CAD = 140°$.

აღვნიშნოთ, რომ თუ ამოცანის პირობებში BAC და BAD კუთხეებს გრადუსული ზომითი ვიდა ვიდაცნობილებდა $130°$-ს, მაშინ ადვილი შეიძლებოდა მეორე შემთხვევის მაგალითად, რომ $\angle BAC = 95°$ ხოლო $\angle BAD = 85°$, მაშინ $\angle CAD = (180° - 95°) + (180° - 85°) = 170°$.

§ 3. სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. ტოლფერდა სამკუთხედი

თეორემა 3. 1. (სამკუთხედების ტოლობის ნიშანი ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის მიხედვით) — I ნიშანი). თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის და მათ შორის მდებარე კუთხის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებისათვის $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (ნახ. 13). დავამტკიცოთ, რომ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. პირველად $\triangle ABC$-ს ტოლი $\triangle A_1B_1C_2$, რომლის C_2 წვერო ვეძებთ A_1C_1 სხივზე, B_2 კი — A_1C_1 წრფის ნებისმიერად ერთ მხარეს.

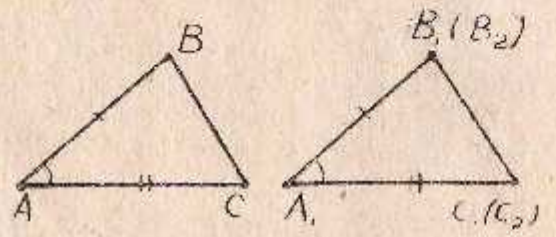


ნახ. 13

სამკუთხედი, რომლისთვისაც B_1 მდებარეობს ნაკვეთზე IV_3). რადგან $A_1C_1 = A_1C_2$, ამიტომ C_2 წერტილი დაემთხვევა C_1 წერტილს (ნაკვეთი IV_3). რადგან $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$, ამიტომ A_1B_2 სხივი დაემთხვევა A_1B_1 სხივს. (ნაკვეთი IV_2) რადგან $A_1B_1 = A_1B_2$, ამიტომ B_2 წერტილი დაემთხვევა B_1 წერტილს. ამრიგად, $\triangle A_1B_2C_2$ დაემთხვა $\triangle A_1B_1C_1$-ს, და ეს კი ნიშნავს, რომ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. 2. (სამკუთხედების ტოლობის სამი ნიშანი გვერდითა და მასთან მდებარე კუთხეების მიხედვით — II ნიშანი). **თუ ერთი სამკუთხედის ერთი გვერდი და მასთან მდებარე ორი კუთხე ტოლია მეორე სამკუთხედის ერთი გვერდის და მასთან მდებარე ორი კუთხის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებისათვის $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (ნახ. 14.) დავამტკიცოთ, რომ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. არსებობს $\triangle ABC$-ს ტოლი $\triangle A_1B_2C_2$, რომლის C_2 წვეროც ეკუთვნის A_1C_1 სხივს, B_2 კი — A_1C_1 წრფის ისეთ განსახლვრულ ნახევარსიბრტყეში, რომელშიც B_1 მდებარეობს (ნაკვეთი IV_2). რადგან $A_1C_1 = A_1C_2$, ამიტომ C_2 წერტილი დაემთხვევა C_1 წერტილს (ნაკვეთი IV_1). რადგან $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$ და $\angle B_1C_1A_1 = \angle B_2C_2A_1$, ამიტომ A_1B_2 და C_2B_2 სხივები დაემთხვევიან შესაბამისად A_1B_1 და C_1B_1 სხივებს (ნაკვეთი IV_2). ამედან გამომდინარეობს, რომ B_2 წერტილი დაემთხვევა B_1 წერტილს. ამრიგად, $\triangle A_1B_2C_2$ დაემთხვა $\triangle A_1B_1C_1$-ს და ეს კი ნიშნავს, რომ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

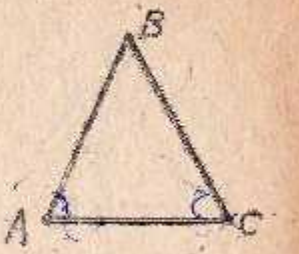


ნახ. 14

განსაზღვრება. სამკუთხედს, რომლის ორი გვერდი ტოლია, ტოლფერდა სამკუთხედი ეწოდება. ტოლ გვერდებს ფერდები ეწოდება, ხოლო მესამე გვერდს — ფუძე.

თეორემა 3. 3. **ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ ABC — ტოლფერდა სამკუთხედია AC ფუძით (ნახ. 15). დავამტკიცოთ, რომ $\angle A = \angle C$. რადგან $AB = CB$, $BC = BA$, $\angle ABC = \angle CBA$, ამიტომ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, $\triangle ABC = \triangle CBA$. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle A = \angle C$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 15

თეორემა 3.4. **თუ სამკუთხედში ორი კუთხე ტოლია, მაშინ იგი ტოლფერდაა.**

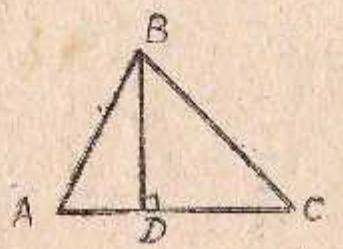
დამტკიცება. ვთქვათ ABC სამკუთხედში $\angle A = \angle C$ (ნახ. 15). რადგან $AC = CA$, $\angle A = \angle C$, $\angle C = \angle A$ ამიტომ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად, $\triangle ABC = \triangle CBA$. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AB = CB$. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. **სამკუთხედს, რომლის სამივე გვერდი ტოლია, ტოლგვერდა სამკუთხედი ეწოდება.**

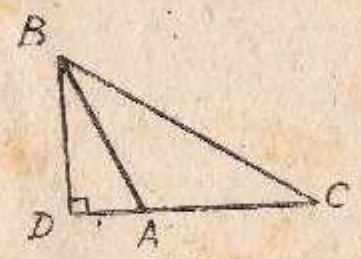
3.3. და 3.4. თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედში სამივე კუთხე ტოლია და პირიქით, თუ სამკუთხედის სამივე კუთხე ტოლია, მაშინ ასეთი სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

განსაზღვრება. **სამკუთხედის სიმაღლე ეწოდება მისი რომელიმე წვეროდან ამ წვეროს მოპირდაპირე გვერდის შემცველი წრფისადმი გავლებულ პერპენდიკულარს.**

ნახ. 16-ის ნახაზზე გამოსახული სამკუთხედის B წვეროდან დაშვებული BD სიმაღლის ფუძე ძევს AC გვერდზე, ხოლო ნახ. 17 ნახაზზე გამოსახული სამკუთხედის BD სიმაღლის ფუძე კი — AC გვერდის გაგრძელებაზე.

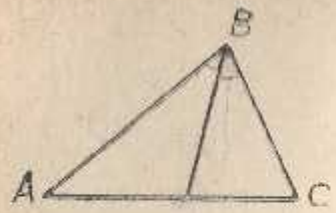


ნახ. 16

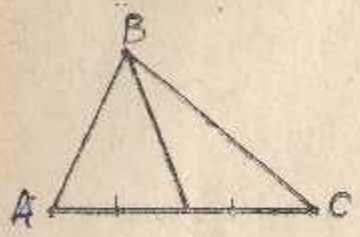


ნახ. 17

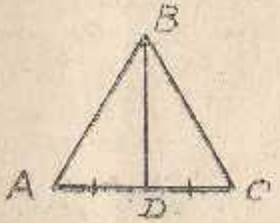
განსაზღვრება. **კუთხის ბისექტრისა ეწოდება სხივს, რომელიც გადის კუთხის გვერდებს შორის და ამ კუთხეს შუაზე ყოფს.**



ნახ. 18



ნახ. 19



ნახ. 20

განსაზღვრება. სამკუთხედის ბისექტრისა ეწოდება მისი რომელიმე კუთხის ბისექტრისის მონაკვეთს, რომელიც ერთებს ამ კუთხის წვეროს. მისი მოპირდაპირე გვერდის წერტილთან (ნახ. 18).

განსაზღვრება. სამკუთხედის medianა ეწოდება მისი რომელიმე წვეროს და ამ წვეროს მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს (ნახ. 19).

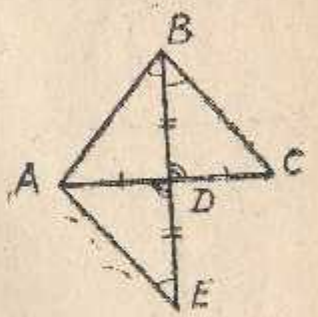
თეორემა 3.4. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძისადმი გავლებული medianა წარმოადგენს ამ სამკუთხედის ბისექტრისას და სიმაღლეს.

დამტკიცება. ვთქვათ BD წარმოადგენს ABC ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძისადმი გავლებულ medianას (ნახ. 20). რადგან $AB=CB$, $AD=CD$, $\angle A=\angle C$. ამიტომ სამკუთხედებია ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად $\triangle ABD=\triangle CBD$. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle ABD=\angle CBD$ და $\angle ADB$ $\angle CDB$. ABD და CBD კუთხეების ტოლობის გამო BD ბისექტრისაა, რადგან ABD და CDB მოსაზღვრე კუთხეები ტოლია. ამიტომ BD perpendicularული მონაკვეთი მართია, ე. ი. BD სიმაღლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.5. **თუ სამკუთხედის რომელიმე წვეროდან გავლებული შედიანა და ბისექტრისა, ან შედიანა და სიმაღლე, ან ბისექტრისა და სიმაღლე ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ასეთი სამკუთხედი ტოლფერდაა.**

დამტკიცება. დავიმტკიცოთ თეორემა იმ შემთხვევაში, როდესაც medianა ემთხვევა ბისექტრისას (დანარჩენი ორი შემთხვევის დამტკიცება მარტივია).

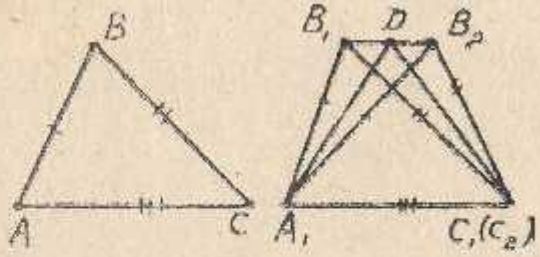
ვთქვათ ABC სამკუთხედში BD ერთდროულად წარმოადგენს medianას და ბისექტრისას (ნახ. 21). BD-ს გაგრძელებაზე გადავდოთ მისი ტოლი DE მონაკვეთი, E წერტილი შევაერთოთ A წერტილთან. $\triangle ADE=\triangle CDB$ (სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად), რადგან $AD=DC$ პირობის ძალით, $BD=DE$ აგების თანახმად და $\angle ADE=\angle CDB$ როგორც ვერტიკალური კუთხეები. ამ სამკუთხედებიდან გამომდინარეობს, რომ $AE=BC$ და $\angle AED=\angle DBC$. მეორე მხრივ $\angle ABD=\angle DBC$ რადგან BD ბისექტრისაა, ე. ი. $\angle AED=\angle ABD$. ამიტომ სამკუთხედი ABE ტოლფერდაა (თეორემა 3.4) და $AE=AB$. აქედან გამომდინარე, რადგან $AE=BC$, ამიტომ $AB=BC$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 21

თეორემა 3.7. (სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშანი საბოლოოდ გვერდით – III ნიშანი) **თუ ერთი სამკუთხედის სამი გვერდი შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის სამი გვერდის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებისათვის $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$ (ნახ. 22). დავამტკიცოთ, რომ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. არსებობს $\triangle ABC$-ს ტოლი $\triangle A_1B_2C_2$, რომლის C_2 წვერო ძევს A_1C_1 სხივზე. B_2 კი — A_1C_1 წრფით განსაზღვრულ იმ ნახევარსიბრტყეში, რომელშიც B_1 მდებარეობს (აქსიომა IV$_2$), რადგან $A_1C_1=A_1C_2$. ამიტომ C_2 წერტილი დაემთხვევა C_1 წერტილს (აქსიომა IV$_1$).



ნახ. 22

დავუშვათ, რომ B_2 წერტილი არ ძევს A_1B_1 და C_1B_1 სხივებზე. ვთქვათ, D არის B_1B_2 მონაკვეთის შუაწერტილი. $A_1B_1B_2$ და $C_1B_1B_2$ წარმოადგენენ სწორთა B_1B_2 ფუძის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედებს. ამ სამკუთხედების A_1D და C_1D medianები ამავე დროს წარმოადგენენ სიმაღლეებს (თეორემა 3. 5.). რადგან აგების თანახმად D წერტილი არ ძევს A_1C_1 წრფეზე, ამიტომ A_1D და C_1D წრფეები ერთმანეთს არ ემთხვევიან. ამრიგად მივიღეთ, რომ B_1B_2 წრფის D წერტილზე გავლებულია ამ წრფის ორი პერპენდიკულარული A_1D და C_1D წრფე, რაც შეუძლებელია (თეორემა 2. 3). ე. ი. B_2 წერტილი ძევს ან A_1B_1 ან C_1B_1 სხივზე. რადგან $A_1B_1=A_1B_2$ და $C_1B_1=C_1B_2$, ამიტომ ორივე შემთხვევაში B_2 წერტილი დაემთხვევა

B_1 წერტილს. (ნახაზი IV.) ამრიგად, $\triangle A_1B_2C_2$ დაემთხვა $\triangle A_1B_1C_1$-ს, და ეს ნიშნავს, რომ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანები თავისთავადი მუშაობისთვის

1. რამდენ ტოლებს ეწოდება ნახატი?
2. დამტკიცება, რომ მახვილი კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.
3. რომელ კუთხეს ეწოდება მართი, მახვილი, ბლაგვი?
4. რომელ კუთხეებს ეწოდება ვერტიკალურები?
5. დამტკიცება, რომ ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.
6. რამდენ წრფეს შეიძლება გავავლოთ ორ წერტილზე?
7. რას ეწოდება მონაკვეთი წრფის ნებისმიერ წერტილებს შორის?
8. რას ეწოდება წრფივი კუთხე, დიხედრალის წახნაგი?
9. დამტკიცება, რომ წრფის ნებისმიერ წერტილზე შეიძლება გავავლოთ მასზე მართობული წრფე და ერთი ასეთი წრფე ერთადერთია.
10. რას ეწოდება კუთხის ბისექტრისა?
11. დამტკიცება სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშანი.
12. დამტკიცება სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშანი.
13. როდის სამკუთხედს ეწოდება ტოლფერდა?
14. ტოლფერდა სამკუთხედის რაიმე მედიანის ეწოდება წრფეს, რომელიც ფუძეზე ტოლ ნაწილებად ყოფს?
15. დამტკიცება, რომ ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.
16. დამტკიცება, რომ თუ სამკუთხედში ორი კუთხე ტოლია, მაშინ ის ტოლფერდაა.
17. როდის სამკუთხედს ეწოდება ტოლგვერდა?
18. რას ეწოდება სამკუთხედის მედიანა, ბისექტრისა, სიმაღლე?
19. დამტკიცება, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედში ფუძისადმი ვლებული ბედონა ბისექტრისაც და სიმაღლეც.
20. დამტკიცება, რომ თუ სამკუთხედის რომელიმე წვეროდან გავლებული ძღვანა და ბისექტრისა ან ძღვანა და სიმაღლე, ან სიმაღლე და ბისექტრისა ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ასეთი სამკუთხედი ტოლფერდაა.
21. დამტკიცება სამკუთხედების ტოლობის ბოლო ნიშანი.

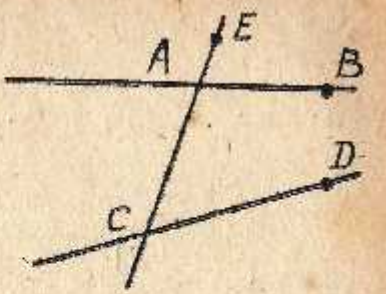
§ 4. წრფეთა პარალელობის ნიშნები

თეორემა 4. 1. (წრფეთა პარალელურობის პირველი ნიშანი). ერთსიბრტყეში მდებარე წრფეს პარალელური ორი წრფე პარალელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ a და b წრფეები c წრფის პარალელურია. დავუშვათ, რომ a და b წრფეები არ არიან პარალელური, ე. ი. იკვეთებიან რაიმე K წერტილში. ეს ნიშნავს, რომ K წერტილიდან გადის c წრფის პარალელური ორი წრფე, რაც პარალელური წრფეების აქსიომას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

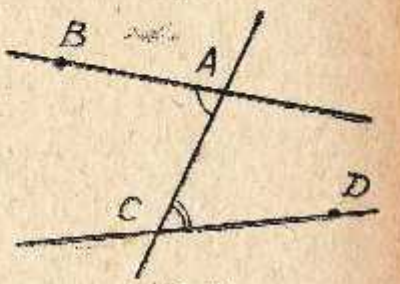
ვთქვათ AB და CD წრფეები გადაკვეთილია AC წრფით, რომელსაც მკვეთი ეწოდება, ხოლო E არის AC წრფის A და C წერტილებისგან გან-

სხვავებული წერტილი, რომელიც AC მონაკვეთს არ ეკუთვნის (ნახ. 23). თუ B და D წერტილები მდებარეობენ AC წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში, მაშინ BAC და DCA კუთხეებს შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეები ეწოდება, ხოლო EAB და ECD კუთხეებს — შესაბამისი კუთხეები (ნახ. 23).



ნახ. 23

თუ B და D წერტილები მდებარეობენ AC წრფის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში, მაშინ BAC და DCA კუთხეებს შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ეწოდება (ნახ. 24).



ნახ. 24

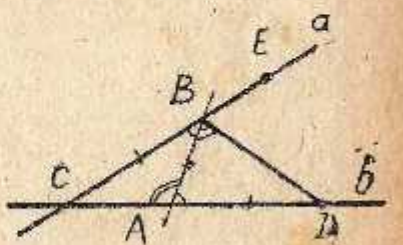
მისახვრე და კონტრაპოზიციის კუთხეების თვისებებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. 2. თუ რომელიმე შიგა ჯვარედინად მდებარე ან შესაბამისი კუთხეები ტოლია ან შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180°-ს. მაშინ ყოველი შიგა ჯვარედინად მდებარე და შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ხოლო შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180°-ს.

თეორემა 4. 3. (წრფეთა პარალელურობის მეორე ნიშანი). თუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას შიგა ჯვარედინად მდებარე ან შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ან შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180°-ს, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

დამტკიცება. საკმარისია დამტკიცება ჩვენტარით ძალიან შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებისათვის (თეორემა 4. 2).

დავუშვათ, რომ a და b წრფეები არ არიან პარალელური, ე. ი. იკვეთებიან რაიმე C წერტილში (ნახ. 25). CA მონაკვეთის ფარგლებზე გადავდოთ CB-ს ტოლი AD მონაკვეთი, ხოლო CB მონაკვეთის გაგრძელებაზე ავიღოთ რაიმე E წერტილი. სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად $\triangle BAC =$

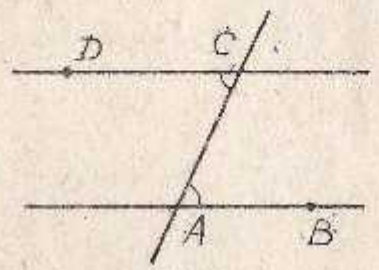


ნახ. 25

$= \triangle ABD$, რადგან მათ AB ერთი საერთო აქვთ, $AD = BC$ აგების თანახმად, ხოლო $\angle CBA = \angle DAB$ თეორემის პირობის თანახმად. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle ABD = \angle BAC$. BAC და ABE შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებია თეორემის პირობის ძალით. მაშასადამე, $\angle ABD = \angle ABE$. საიდანაც კუთხეების გადადების აქსიომის თანახმად გამომდინარეობს, რომ BD და BE წრფეები ემთხვევიან. ეს კი შეუძლებელია, რადგან D წერტილი არ ძევს BE წრფეზე. ე. ი. $\neq$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.4. წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება გაივლოს ამ წრფის მხოლოდ ერთი მხოლოდ ერთი პარალელური წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.

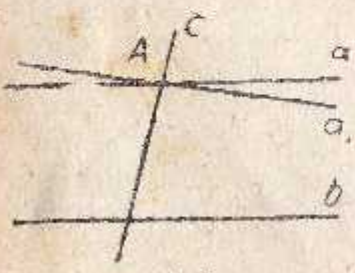
დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია AB წრფე და მასზე არამდებარე C წერტილი (ნახ. 26). CA სხივიდან AC წრფით გაისაზღვრება იმ ნახევარსიბრტყეში, რომელშიც B წერტილი არ მდებარეობს. გადავიტანოთ $\angle CAB$-ს ტოლი $\angle ACD$, წრფეთა პარალელურობის ნიშნის თანახმად $CD \parallel AB$. თუ გავითვალისწინებთ პარალელური წრფეების აქსიომას, მივიღებთ, რომ C წერტილზე შეიძლება AB წრფის პარალელური ერთადერთი წრფის გავლება. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 26

თეორემა 4.5. (თეორემა 4. 3-ის შებრუნებული) **თუ ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით, მაშინ ყოველი შიგა ჯვარედინად მდებარე და შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ხოლო შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180°-ს.**

დამტკიცება. ვთქვათ c წრფე კვეთს a და b პარალელურ წრფეებს (ნახ. 27). A წერტილზე გავავლოთ a_1 წრფე ისე, რომ a_1 და b წრფეებს c წრფით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი იყოს 180°. 1. 3 თეორემის თანახმად $a_1 \parallel b$. რადგან A წერტილზე b წრფის პარალელური ერთადერთი წრფის გავლება, ამიტომ a_1 წრფე ემთხვევა a წრფეს. მაშასადამე, a და b წრფეების c წრფით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180°-ს და მაშასადამე ყოველი შიგა ჯვარედინად მდებარე და შესაბამისი კუთხეები ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 27

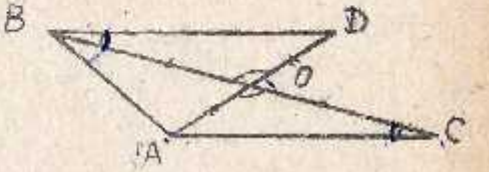
1. 3 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ ორი წრფე პერპენდიკულარულია მესამე წრფეზე, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია, ხოლო 4. 5 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ წრფე პერპენდიკულარულია ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთისა, მაშინ ის მეორის პერპენდიკულარულიც იქნება.

§ 5. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი

სამკუთხედის გარე კუთხე. დამოკიდებულება სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის

თეორემა 5.1. **სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია $\triangle ABC$, AO შუალინის გაგრძელებაზე გადავდოთ ამ შუალინის ტოლი OD მონაკვეთი (ნახ. 28). სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად $\triangle BOD = \triangle COA$, რადგან $AO = OD$ და $BO = OC$ აგების თანახმად; ხოლო $\angle BOD = \angle COA$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle DBO = \angle ACO$. A და D წერტილები მდებარეობენ BC წრფის მოპირდაპირე ნახევარსიბრტყეში, რადგან AD მონაკვეთი კვეთს BC წრფეს. ე. ი. DBO და ACO კუთხეები ჯვარედინად მდებარე კუთხეებია AC და BD წრფეებისა და BC მკვეთისათვის, DBO და ACO შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AC \parallel BD$ (თეორემა 4. 3).



ნახ. 28

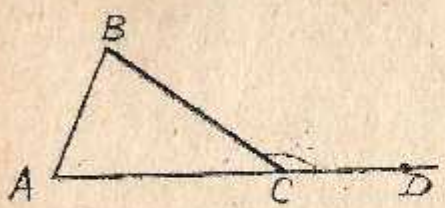
DBA და CAB შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეებია, რადგან D და C წერტილები მდებარეობენ AB წრფის ერთ ნახევარ სიბრტყეში. ამიტომ $\angle CAB + \angle DBA = 180°$, ვინაიდან $AC \parallel BD$ (თეორემა 4. 5).

BC სხივი კვეთს AD მონაკვეთს, რომლის ბოლოებში DBA კუთხის გვერდებზეა, ამიტომ BC გადის DBA კუთხის გვერდებს შორის და ამიტომ $\angle DBA = \angle DBC + \angle ABC$ (აქსიომა III_3). DBC და ACB კუთხეების ტოლობის გამო $\angle DBA = \angle ACB = \angle ABC$. ამრიგად $\angle ACB + \angle ABC + \angle CAB = \angle DBA + \angle CAB = 180°$.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში ორი კუთხე ბასუც ნაკლებია. ხოლო ტოლგვერდა სამკუთხედის თითოეული კუთხე უდრის 60°-ს; თუ ტოლფერდა სამკუთხედში რომელიმე კუთხე 90°-ია ტოლია, მაშინ ასეთი სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

განსაზღვრება. სამკუთხედის კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს სამკუთხედის გარე კუთხე ეწოდება (ნახ. 29).



ნახ. 29

იმასაც ვიტყვით, რომ სამკუთხედის გარე კუთხე ამავე წვეროსთან მდებარე გვერდის გარე კუთხეა. ამ ორიდან ნებისმიერ შემთხვევაში ერთი და იგივე სიდიდე აქვს.

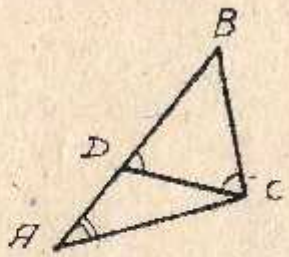
თეორემა 5. 2. **სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე ორი შიგა კუთხის ჯამის ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ ABC მოცემული სამკუთხედია (ნახ. 29). $\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$ (თეორემა 5. 1). აქედანაც $\angle A+\angle B=180^\circ-\angle ACB$. ვიცით, რომ $180^\circ-\angle ACB=\angle BCD$. მაშასადამე, $\angle A+\angle B=\angle BCD$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. 2-დან გამომდინარეობს, რომ სამკუთხედის გარე კუთხე მეტია მის არამოსაზღვრე თითოეულ შიგა კუთხეზე.

თეორემა 5. 3. **სამკუთხედში ყოველი ორი გვერდიდან უდიდესის პირდაპირ უდიდესი კუთხე ძევს.**

დამტკიცება. ვთქვათ ABC სამკუთხედში $AB>BC$ (ნახ. 30). BA გვერდზე C წერტილიდან გადავდოთ BC-ს ტოლი BD მონაკვეთი და D წერტილი შევაერთოთ C წერტილთან. $\triangle BDC$ ტოლფერდაა, ამიტომ $\angle BDC=\angle BCD$. სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების თანახმად $\angle BDC>\angle A$. ე. ი. $\angle BCD>\angle A$. მეორეს მხრივ, რადგან CD სხივი გადის ACB კუთხის გვერდებს შორის, ამიტომ $\angle ACB>\angle BCD$. ამრიგად, $\angle ACB>\angle A$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 30

თეორემა 5. 4. (თეორემა 5. 3-ის შებრუნებული) **სამკუთხედში ყოველს ორი კუთხიდან უდიდესის პირდაპირ უდიდესი გვერდი ძევს.**

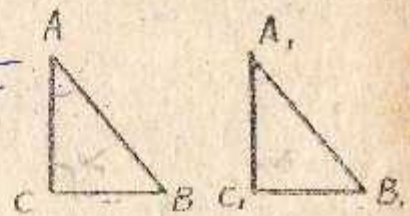
დამტკიცება. ვთქვათ ABC სამკუთხედში $\angle ACB>\angle A$ (ნახ. 30). დავუშვათ საწინააღმდეგო $AB\leqslant BC$ თუ $AB=BC$, მაშინ $\triangle ABC$ ტოლფერდაა, რის გამოც $\angle A=\angle ACB$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. თუ $AB<BC$, მაშინ $\angle ACB<\angle A$ (თეორემა 5. 3), რაც ისევ ეწინააღმდეგება პირობას. ამრიგად, $AB>BC$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. დანაძილი წერტილიდან წრფემდე

სამკუთხედს, რომელსაც აქვს მართი კუთხე მართკუთხა სამკუთხედი ეწოდება. რადგან ნებისმიერ სამკუთხედში ორი კუთხე მაინც მახვილია, ამიტომ მართკუთხა სამკუთხედს აქვს მხოლოდ ერთი მართი კუთხე. ცხადია, რომ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხეების ჯამი 90°-ის ტოლია. მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდს ჰიპოტენუზა ეწოდება, ხოლო დანარჩენ ორ გვერდს—კათეტები. ცხადია, რომ მართკუთხა სამკუთხედია თითოეული კათეტი მახვილკუთხაზე ნაკლები (თეორემა 5.4). სამკუთხედების ტოლობის შესწავლის ცნობილი ნიშნების გარდა მართკუთხა სამკუთხედებისათვის ადვილი აქვს ადგილი შემდეგ სამ ნიშანს:

თეორემა 6. 1. (ტოლობის ნიშანი ჰიპოტენუზისა და მახვილი კუთხის მიხედვით) თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და მახვილი კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და მახვილი კუთხის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ABC და $A_1B_1C_1$ მართკუთხა სამკუთხედები C და C_1 მართი კუთხეებით (ნახ. 31), რომელთათვისაც $AB=A_1B_1$ და $\angle A=\angle A_1$. რადგან მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეების ჯამი უდრის 90°-ს, ამიტომ $\angle B=\angle B_1$ და $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 31

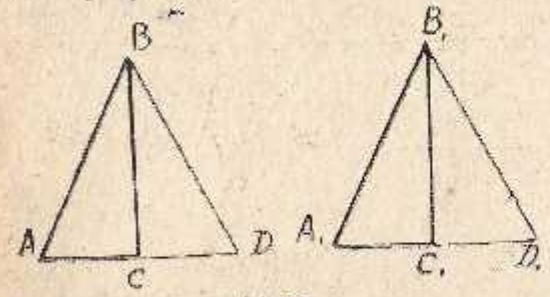
თეორემა 6. 2. (ტოლობის ნიშანი კათეტისა და მოპირდაპირე კუთხის მიხედვით) თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი და მოპირდაპირე კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტისა და მისი მოპირდაპირე კუთხის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ABC და $A_1B_1C_1$ მართკუთხა სამკუთხედები C და C_1 მართი კუთხეებით (ნახ. 31), რომელთათვისაც $AC=A_1C_1$ და $\angle B=\angle B_1$. რადგან მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეების ჯამი უდრის 90°-ს, ამიტომ $\angle A=\angle A_1$ და $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. 3. (ტოლობის ნიშანი ჰიპოტენუზისა და კათეტის მიხედვით) თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და კათეტი

შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და კათეტის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ABC და $A_1B_1C_1$ მართკუთხა სამკუთხედები C და C_1 მართი კუთხეებით (ნახ. 32), რომელთათვისაც $AB=A_1B_1$ და $AC=A_1C_1$



ნახ. 32

AC გვერდის გაგრძელებაზე გადავიტანოთ AC-ს ტოლი CD მონაკვეთი. D და B წერტილები შევაერთოთ. ABD სამკუთხედში BC წარმოადგენს როგორც მედიანას ასევე სიმაღლეს, ამიტომ $\triangle ABD$ ტოლფერდაა (თეორემა 3.6). ე. ი. $AB=DB$.

თუ A_1C_1 გვერდის გაგრძელებაზე გადავდებთ A_1C_1-ის ტოლ C_1D_1 მონაკვეთს, ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $A_1B_1=D_1B_1$.

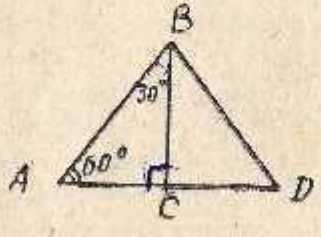
სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად $\triangle ABD=\triangle A_1B_1D_1$, მართლაც $AB=A_1B_1$ პირობის თანახმად. $BD=B_1D_1$, რადგან $BD=AB$, ხოლო $B_1D_1=A_1B_1$. $AD=A_1D_1$, რადგან $AC=A_1C_1$ ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle A=\angle A_1$.

სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$, რადგან $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.4. **მართკუთხა სამკუთხედში 30°-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ ABC მართკუთხა სამკუთხედში $\angle ABC=30°$ (ნახ. 33). AC გვერდის გაგრძელებაზე გადავდოთ AC-ს ტოლი CD მონაკვეთი. D და B წერტილები შევაერთოთ. ABD სამკუთხედში BC წარმოადგენს როგორც მედიანას ასევე სიმაღლეს, ამიტომ $\triangle ABD$ ტოლფერდაა (თეორემა 3.6). რადგან ABC მართკუთხა სამკუთხედში $\angle ABC=30°$, ამიტომ $\angle A=60°$. მაგრამ, რომ ABD ტოლფერდა სამკუთხედში $\angle A=60°$, ე. ი. $\triangle ABD$ ტოლგვერდაა. ამრიგად,

$$AC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}AB.$$

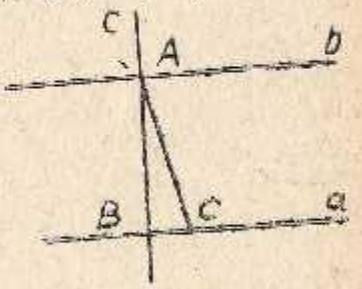


ნახ. 33

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.5. **წრეწირზე არამდებარე ნებისმიერი წერტილიდან ამ წრეწირზე შეიძლება ერთადერთი პერპენდიკულარის დაშვება.**

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია a წრეწირი და მასზე არამდებარე A წერტილი (ნახ. 34). A წერტილზე გავავლოთ a წრეწირის პარალელური b წრფე (თეორემა 4.4). გავავლოთ ასევე A წერტილზე b წრფეს პერპენდიკულარული c წრფე. რადგან $a\perp b$, ამიტომ c წრფე პერპენდიკულარულია a წრფის და კვეთს მას რაიმე B წერტილში. ცხადია, AB წარმოადგენს A წერტილიდან a წრფეზე დაშვებულ პერპენდიკულარს.



ნახ. 34

ვთქვათ, A წერტილიდან a წრეწირზე შეიძლება ორი AB და AC პერპენდიკულარის დაშვება (ნახ. 34). მაშინ ABC სამკუთხედს ექნება ორი მართი კუთხე, რაც შეუძლებელია. თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, რომ თუ მოცემული წერტილიდან წრეწირისაში გავლებულია პერპენდიკულარი და ნებისმიერი დიამეტრი, მაშინ პერპენდიკულარის სიგრძე ნაკლებია დიამეტრის სიგრძეზე.

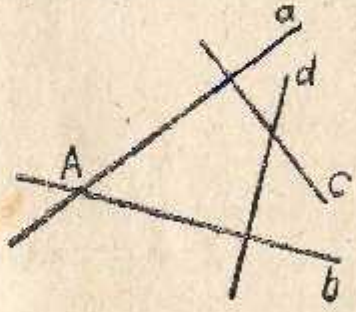
მოცემული წერტილიდან წრეწირზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიგრძეს ეწოდება მანძილი ამ წერტილიდან წრფემდე.

დაუშტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი ფაქტი.

თეორემა 6.6. **წრფის ნებისმიერი ორი წერტილიდან ამ წრფის პარალელურ წრფემდე მანძილები ტოლია.**

ამრიგად, წრფის ყველა წერტილი ამ წრფის პარალელური წრფიდან ერთსაირადაა დაშორებული. მანძილი პარალელურ წრფეებს შორის ეწოდება მანძილს ერთ-ერთი წრფის ნებისმიერი წერტილიდან მეორე წრფემდე.

თეორემა 6.7. **თუ ორი წრფე იკვეთება და თითოეული მათგანისადმი გავლებულია პერპენდიკულარული წრფე, მაშინ ეს ორი წრფეც იკვეთება.**



ნახ. 35

დამტკიცება. ვთქვათ a და b წრფეები იკვეთებიან A წერტილში და $c\perp a$, $d\perp b$ (ნახ. 35).

თუ დავუშვებთ, რომ c და d წრფეები ერთმანეთს ემთხვევიან, მაშინ ცხადია $a\perp d$. ასევე, თუ $c\parallel d$, მაშინ, რადგან $a\perp c$ ამიტომ $a\perp d$. ამრიგად $a\perp d$, ხოლო პირობის ძალით $b\perp d$. მივიღეთ, რომ A წერტილიდან d წრფეზე

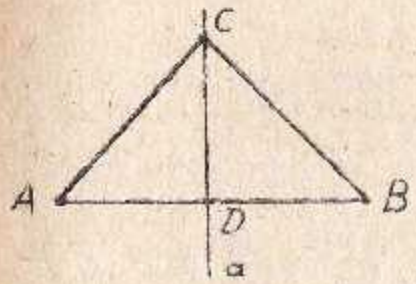
სადმი გავლებულია ორი პერპენდიკულარული a და b წრფე, რაც ამ თეორემის უწინასწარმეტყველებს, g, a, c და d წრფეები იკვეთებიან. თეორემა დამტკიცებულია.

7 მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარი. კუთხის ბისექტრისის თვისება

განსაზღვრება. მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარი (შუამართობი) ეწოდება ამ მონაკვეთის შუაწერტილზე გავლებულ მის პერპენდიკულარულ წრფეს.

თეორემა 7. 1. მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ამ მონაკვეთის ბოლოებიდან.

დამტკიცება. ვთქვათ a წრფე AB მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარია, ხოლო C მასზე მდებარე რაიმე წერტილი (ნახ. 36). თუ C წერტილი ემთხვევა AB მონაკვეთის D შუაწერტილს, მაშინ თეორემის სამართლიანობა ცხადია. ვთქვათ C და D წერტილები არ ემთხვევიან. $\triangle ACD = \triangle BCD$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, რადგან CD გვერდი საერთოა, $AD = DB$ და $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$ პირობის ძალით. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AC = BC$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 36

დავამტკიცოთ ახლა ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა.

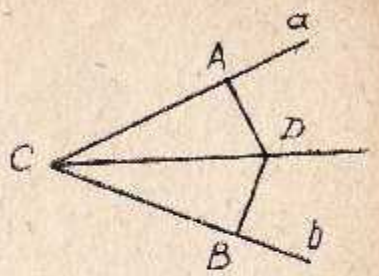
თეორემა 7. 2. მონაკვეთის ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული ნებისმიერი წერტილი ამ მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარზე მდებარეობს.

დამტკიცება. ვთქვათ C წერტილი თანაბრადაა დაშორებული AB მონაკვეთის ბოლოებიდან. თუ C წერტილი მდებარეობს AB მონაკვეთზე, მაშინ თეორემის სამართლიანობა ცხადია.

ვთქვათ C წერტილი არ მდებარეობს AB მონაკვეთზე (ნახ. 36). C წერტილს და AB მონაკვეთის D შუაწერტილზე გავავლოთ a წრფე. რადგან ACB ტოლფერდა სამკუთხედის CD მედიანა ამავე დროს სიმაღლეცაა, ამიტომ a წრფე წარმოადგენს AB მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარს. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7. 3. გაშლილი კუთხეზე ნაკლები კუთხის ბისექტრისის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ამ კუთხის გვერდების შემცველი წრფეებიდან.

დამტკიცება. ვთქვათ D არის (ab) კუთხის ბისექტრისის რაიმე წერტილი (ნახ. 37). D წერტილიდან a და b წრფეებისადმი გავავლოთ DA და DB მართობები. $\triangle CAD = \triangle CBD$ მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის თანახმად (ჰიპოტენუზით და მახვილი კუთხით), რადგან CD ჰიპოტენუზაა და მახვილი კუთხით), რადგან CD ჰიპოტენუზა საერთოა, ხოლო $\angle ACD = \angle BCD$ პირობის თანახმად. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AD = BD$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 37

შევნიშნოთ, რომ გაშლილი კუთხის შემთხვევაში სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ამ კუთხის გვერდების შემცველი წრფეებიდან.

დავამტკიცოთ ახლა ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა

თეორემა 7. 4. თუ წერტილი თანაბრადაა დაშორებული გაშლილ კუთხეზე ნაკლები კუთხის გვერდების შემცველი წრფეებიდან და მდებარეობს ამ კუთხის გვერდებს შორის გამავალ სხივზე, მაშინ ეს სხივი კუთხის ბისექტრისას წარმოადგენს.

დამტკიცება. ვთქვათ D წერტილი მდებარეობს (ab) კუთხის გვერდებს შორის გამავალ სხივზე და თანაბრადაა დაშორებული a და b წრფეებიდან, ე. ი. $DA \perp a$, $DA \perp b$ და $AD = BD$ (ნახ. 37) $\triangle CAD = \triangle CBD$ მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის თანახმად (ჰიპოტენუზით და კათეტით), რადგან CD ჰიპოტენუზა საერთოა და $AD = BD$. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle ACD = \angle BCD$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, როგორც პირველ თავში, ასევე კუთხის ბისექტრისა წარმოადგენს იმეთ ფიგურებს, რომელთა ყველა წერტილს გარკვეული საერთო თვისება გააჩნია. სახოგადოდ ფიგურა, რომელიც სიბრტყის ყველა იმ წერტილისაგან შედგება, რომლებსაც გარკვეული საერთო თვისება აქვთ, წერტილთა გეომეტრიული ადგილი ეწოდება. ამ განსაზღვრების თანახმად ზემოთ დამტკიცებული თეორემები შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

ორი მოცემული წერტილიდან ტოლად დაშორებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი არის ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის შუამართობი.

კუთხის გვერდებიდან ტოლად დაშორებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი არის ამ კუთხის ბისექტრისა.

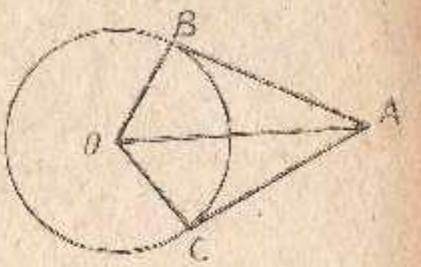
1. დამტკიცება, რომ ცრუთედიანაში წრფივი პარალელურია თანი წრფეც პარალელურია ბ.
2. რისთვის კუთხეები ეწოდება შიგა ჯვარედინად წევრებად, შესაბამისი, შიგა ცალმხრივ ბედებად?
3. დამტკიცება წრფეთა პარალელურობის მეორე ნიშანი.
4. დამტკიცება, რომ წრფეზე ორიმდებარე წერტილის წვეთლები გადაკვეთს ამ წრფის პარალელური წრფე და ამასთან მხოლოდ ერთი.
5. დამტკიცება, რომ თუ ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით, მაშინ ყოველი წიგა ჯვარედინად დებული და წესიერი კუთხეები ტოლია, ხოლო შიგა ცალმხრივ წევრები კუთხეების ჯამი ტოლია 180°-ის.
6. დამტკიცება, რომ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.
7. რას ეწოდება სამკუთხედის გარე კუთხე?
8. დამტკიცება, რომ სამკუთხედის გარე კუთხე მასთან არამიჯნებული ორი შიგა კუთხის ჯამის ტოლია.
9. დამტკიცება, რომ სამკუთხედში ყოველი ორი გვერდების უდიდესის პირდაპირ უდიდესი კუთხე დევს.
10. რისგან სამკუთხედს ეწოდება მახვილკუთხა?
11. რას უდრის მართკუთხა სამკუთხედის წახვილი კუთხეების ჯამი?
12. მართკუთხა სამკუთხედის რამელ გვერდს ეწოდება ჰიპოტენუზა, რომელ გვერდებს ეწოდება კათეტები?
13. დამტკიცება მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები.
14. დამტკიცება, რომ წრფეზე არამდებარე წერტილიდან ამ წრფეზე წვეთლები ერთიდერთი მართობის დაშვება.
15. რას ეწოდება მანძილი წერტილიდან წრფემდე?
16. რას ეწოდება მანძილი პარალელურ წრფეებს შორის?
17. რას ეწოდება მონაკვეთის შუამართობი?
18. დამტკიცება თეორემა მონაკვეთის შუამართობის შესახებ. (პირდაპირი და შებრუნებული.)
19. დამტკიცება თეორემა კუთხის ბისექტრისის შესახებ.
20. რას ეწოდება წერტილთა გეომეტრიული ადგილი?
21. ორიგანი წერტილიდან გადმოტრიალებული ადგილის მოგეხსენება.

§ 8. წრეწირი. სამკუთხედზე შემოხაზული და სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი

განსაზღვრება. წრეწირი ეწოდება ფიგურას შედგენილს სიბრტყის უველა იმ წერტილისაგან, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული მოცემული წერტილიდან. ამ წერტილს წრეწირის ცენტრი ეწოდება. წრეწირის ნებისმიერი წერტილის ცენტრთან მაერთებელ მონაკვეთს

თეორემა 8.4. მოცემული წერტილიდან ერთადათმიზნე წრეწირისადმი გაყვანებული მხებების სიგრძეები ამ წერტილიდან შეხების წერტილამდე ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ AB და AC მხებების მონაკვეთებია (ნახ. 41). O ცენტრი შეუერთოთ A, B და C წერტილებთან. რადგან $AB \perp OB$ და $AC \perp OC$, ამიტომ ABO და ACO სამკუთხედები მართკუთხაა. $\triangle ABO = \triangle ACO$ მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის თანახმად (ჰიპოტენუზებია და კათეტი). რადგან OA ჰიპოტენუზა საერთოა, ხოლო $OB = OC$, როგორც რადიუსები, ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AB = AC$. თეორემა დამტკიცებულია.

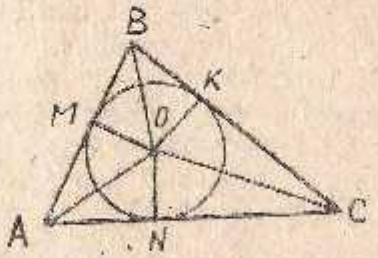


ნახ. 41

+ წრეწირს სამკუთხედში ჩახაზული ეწოდება, თუ იგი ამ სამკუთხედის საბიგე გვერდს ეხება.

+ თეორემა 8.5. ნებისმიერი სამკუთხედისათვის არსებობს მასში ჩახაზული წრეწირი. იგი ერთადერთია და მისი ცენტრი ამ სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ O არის ABC სამკუთხედის A და B კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 42). O წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებზე დაგუშვათ OM, ON და OK მართობები. რადგან AO და BO ბისექტრისებია, ამიტომ $OM = ON$ და $OM = OK$ (თეორემა 7.3). საიდანაც $OM = ON = OK$.



ნახ. 42

ამრიგად, ABC სამკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა, რომლის ცენტრსაც O წერტილი წარმოადგენს.

რადგან $ON = OK$, ამიტომ C კუთხის ბისექტრისაც O წერტილზე გადის.

ცხადია, რომ ABC სამკუთხედში შეიძლება ერთადერთი წრეწირის ჩახაზვა, რადგან AB, BC და AC გვერდებიდან თანაბრად დაშორებული წერტილი მდებარეობს A და B კუთხის ბისექტრისებზე ერთადერთულად, ე. ი. მათი გადაკვეთის O წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

ამბობენ, რომ სამკუთხედის შეხების თანი წრეწირი ერთმა-

მაგალითს გახედავთ, თუ მათ ამ წერტილში საერთო მხები აქვთ (ნახ. 43). წრეწირების შეხების შემდეგ შეიძლება ეწოდებოდეს, თუ წრეწირების ცენტრები მათი საერთო მხების მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს (ნახ. 43, ა) წრეწირების შესვლას მაშინ შეხება ეწოდება, თუ წრეწირების ცენტრები მათი საერთო მხების მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს (ნახ. 43, ბ).

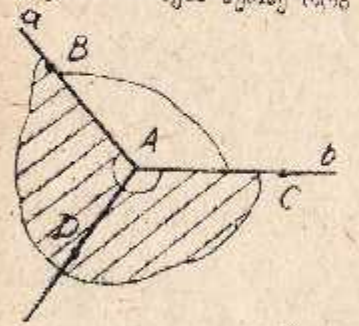


ნახ. 43

§ 9. ცენტრალური და ჩახაზული კუთხეები

განსაზღვრება. საერთო სათავის მქონე ორი განსხვავებული სხივით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს ბრტყელი კუთხე ეწოდება, ამ სხივებს კუთხის გვერდები ეწოდებათ, ხოლო მათ საერთო — წვერო.

საერთო სათავის მქონე ორი განსხვავებული სხივი განსაზღვრავს ორ ბრტყელ კუთხეს, რომელთაგან დამატებითი კუთხეები ეწოდებათ. 44-ე ნახაზზე დაშტრიხულია a და b სხივებით შედგენილი ერთ-ერთი ბრტყელი კუთხე.



ნახ. 44

თუ ბრტყელი კუთხე წარმოადგენს სიბრტყის ნაწილს, მაშინ მისი გრადუსული ზომა ეწოდება იმავე გვერდების მქონე ჩვეულებრივი კუთხის გრადუსულ ზომას, თუ ბრტყელი კუთხე შეიცავს ნახევარსიბრტყეს, მაშინ მისი გრადუსული ზომა ტოლია $360°-\alpha$, სადაც α შეკუმშული ბრტყელი კუთხის დამატებითი კუთხის გრადუსული ზომაა.

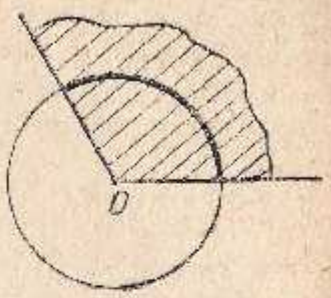
შევნიშნოთ, რომ, თუ D წერტილი ეკუთვნის BAC ბრტყელ კუთხეს, მაშინ AD სხივით იგი იყოფა ორ ბრტყელ კუთხედ, რომელთა გრადუსული ზომების ჯამი მოცემული კუთხის გრადუსული ზომის ტოლია (ნახ. 44).

განსაზღვრება. ცენტრალური კუთხე წრეწირში ეწოდება ბრტყელ კუთხეს წვეროთი წრეწირის ცენტრში.

განსაზღვრება. ცენტრალური კუთხის შიგნით მოთავსებულ წრეწირის რკალს ამ ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალი ეწოდება (ნახ. 45).

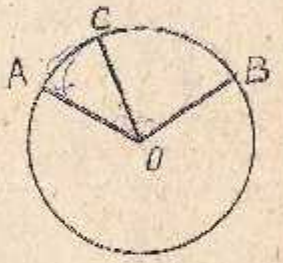
(წრეწირის რკალის გრადუსული ზომა ეწოდება შესაბამისი ცენტრალური კუთხის გრადუსულ ზომას.)

AOB ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალის გრადუსული ზომა $\breve{AB}$ სიმბოლოთი აღინიშნება (ნახ. 46). ზოგჯერ რკალის გრადუსულ ზომას სამი ასოთიც აღნიშნავენ. მაგალითად, იგივე რკალი ასეც შეიძლება აღვნიშნოთ $A\breve{C}B$, სადაც C რკალის რაიმე წერტილია.



ნახ. 45

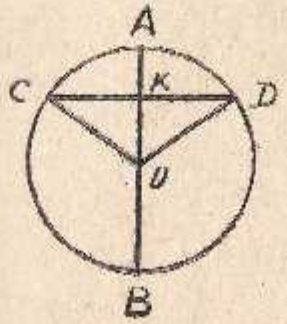
(რკალს, რომელიც 180°-იან ცენტრალურ კუთხეს შეესაბამება, ნახევარწრეწირი ეწოდება.)



ნახ. 46

ვთქვათ AB რკალი C წერტილით გაყოფილია AC და CB რკალებად (ნახ. 46). რადგან AC და CB რკალების შესაბამისი AOC და COB ცენტრალური კუთხეების გრადუსულ ზომათა ჯამი უდრის AB რკალის შესაბამისი AOB ცენტრალური კუთხის გრადუსულ ზომას, ამიტომ ცხადია, რომ $\breve{AB}=\breve{AC}+\breve{CB}$.

შევნიშნოთ, რომ (დამატებითი რკალების გრადუსულ ზომათა ჯამი 360°-ის ტოლია.)



ნახ. 47

თეორემა 5.1. ქორდის შუამართობული დიამეტრი ქორდასა და მის მიერ მოჭრილ რკალებს შუაზე ყოფს.

დამტკიცება. ვთქვათ AB დიამეტრი CD ქორდის შუამართობულია (ნახ. 47) O ცენტრი შეეერთოთ C და D წერტილებთან. $\triangle COD$ ტოლფერდაა ($OC=OD$, რადგან რადიუსებია), ამიტომ OK სიმაღლე ბისექტრისაც და მედიანაც.

რადგან OK წვდომილია, $CK=KD$, ე. ი. AB დიამეტრი CD ქორდას შუაზე ყოფს.

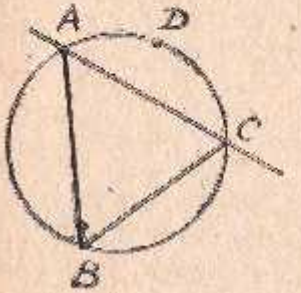
რადგან OK ბისექტრისაა, ამიტომ

$\angle COA = \angle DOA$. ე. ი. $\breve{CA} = \breve{AD}$, რაც გვთხოვდა დამტკიცება.

ცხადია, რომ $\breve{CB} = \breve{DB}$ როგორც CA და AD ტოლი რკალების ერთხვეთრწრეწირებამდე შემცველი რკალები. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირზე მდებარეობს, ხოლო გვერდები კვეთს მას, ამ წრეწირში ჩახაზული კუთხე ეწოდება.

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ ABC ჩახაზული კუთხე ეყრდნობა ADC რკალს, თუ B და D წერტილები მდებარეობენ AC წრფის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში (ნახ. 48).



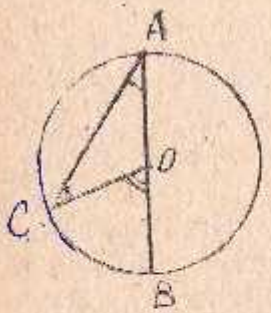
ნახ. 48

თეორემა 9.2. ჩახაზული კუთხის გრადუსული ზომა უდრის ამ რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს, რომელსაც ეს კუთხე ეყრდნობა.

დამტკიცება. განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1) ვთქვათ დიამეტრის შემცველი სხივი ემთხვევა ჩახაზული კუთხის A გვერდს (ნახ. 49). $\triangle AOC$ ტოლფერდაა, რადგან $OA = OC$. სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების თანახმად $\angle COB = \angle A + \angle C = 2\angle A$, საიდანაც

$$\angle A = \frac{1}{2}\angle COB. \qquad (1)$$

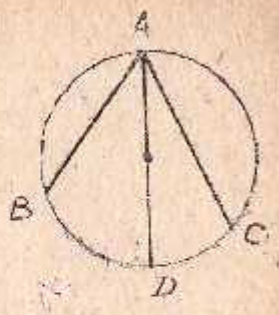


ნახ. 49

რადგან COB კუთხის გრადუსული ზომა უდრის AB წრფით განაპირობებულ ნახევარსიბრტყეში მდებარე COB ცენტრალური კუთხის გრადუსულ ზომას, ხოლო ეს უკანასკნელი იმ CB რკალის გრადუსული ზომის ტოლია, რომელსაც A კუთხე ეყრდნობა, ამიტომ (1)-ის თანახმად A კუთხის გრადუსული ზომა უდრის CB რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს.

2) ვთქვათ დიამეტრის შემცველი სხივი გადის ჩახაზული კუთხის გვერდებს შორის (ნახ. 50). III_2 აქსიომის თანახმად

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD. \qquad (2)$$

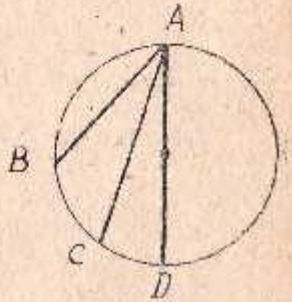


ნახ. 50

ბირველი შემთხვევის თანახმად BAD და CAD კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად BD და CD რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია. რადგან $\breve{BC} = \breve{BD} + \breve{CD}$ ამიტომ (2)-ის ძალით BAC კუთხის გრადუსული ზომა უდრის იმ BC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს, რომელსაც ეს კუთხე ეყრდნობა.

3) ვთქვათ დიამეტრის შემცველი სხივი არ გადის ჩახაზული კუთხის გვერდებს შორის. მაშინ 2.1 თეორემის თანახმად ჩახაზული კუთხის ერთ-ერთი გვერდი გადის დიამეტრის შემცველი სხივით და მეორე გვერდით შეადგენილი კუთხის გვერდებს შორის, ვთქვათ ეს გვერდია AC (ნახ. 51). III_2 აქსიომის თანახმად $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC$, საიდანაც

$$\angle BAC = \angle BAD - \angle DAC. \qquad (3)$$

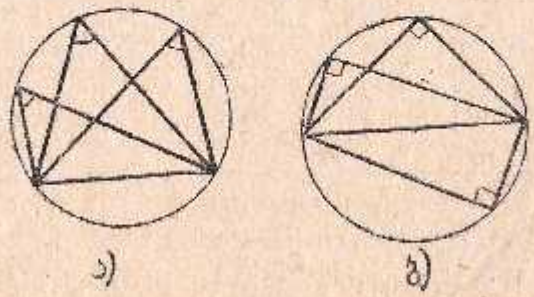


ნახ. 51

ბირველი შემთხვევის თანახმად BAD და DAC კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად BD და CD რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია. რადგან $\breve{BC} = \breve{BD} - \breve{CD}$, ამიტომ (3)-ის ძალით BAC კუთხის გრადუსული ზომა უდრის იმ BC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს, რომელსაც ეს კუთხე ეყრდნობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

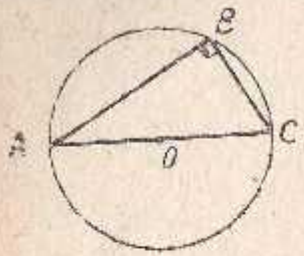
შედეგი 1. ერთიდაიმავე რკალზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეები ტოლია (ნახ. 52 ა)).



ნახ. 52

შედეგი 2. თუ ჩახაზული კუთხე ეყრდნობა დიამეტრით შემოხაზულ რკალს, მაშინ ასეთი ჩახაზული კუთხე მართია (ნახ. 52 ბ)).

თეორემა 9. 3. მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი ჰიპოტენუზის შუაწერტილია.



ნახ. 53

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ ABC მართკუთხა სამკუთხედზე ($\angle B = 90°$) შემოხაზულია წრეწირი (ნახ. 53). რადგან B ჩახაზული კუთხე მართია, ამიტომ რკალი, რომელსაც იგი ეყრდნობა, ნახევარწრეწირია, ე. ი. AC დიამეტრია და $AO = OC$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია.

§ 10. მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე

კუთხე წვეროთი წრეწირის შიგნით და წრეწირის გარეთ*

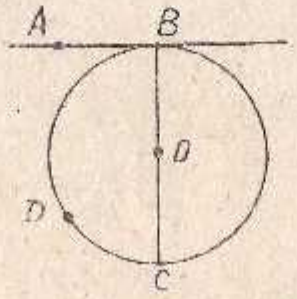
მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომლის წვერო შეხების წერტილშია, ერთი გვერდი წარმოადგენს მხებს, ხოლო მეორე შეიცავს ქორდას.

მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხის გვერდებს შორის მოთავსებული რკალი ეწოდება ქორდის შიგნით მოქცეულ იმ რკალს, რომლის ბოლოებიც ეკუთვნის წერტილი ბღუბარეებს კუთხის გვერდებს შორის გამავალ ორიმე სხივზე.

თეორემა 10. 1. მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხის გრადუსული ზომა ნახევარია იმ რკალის გრადუსული ზომის, რომელიც ამ კუთხის გვერდებს შორის არის მოთავსებული.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1) ვთქვათ მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე მახვილია (ნახ. 54), ე. ი. $\angle ABC < 90°$. მხების განსაზღვრების ძალით BC წარმოადგენს დიამეტრს, ამიტომ $\breve{BDC} =$



ნახ. 54

* აქმობენ, რომ წერტილი მდებარეობს წრეწირის შიგნით, თუ იგი ძანძილ ამ წერტილიდან წრეწირის ცენტრამდე რადიუსზე ნაკლებია, ხოლო წერტილი ძებებარეობს წრეწირის გარეთ, თუ ძანძილი ამ წერტილიდან წრეწირის ცენტრამდე რადიუსზე მეტია.

180°, ე. ი. ABC კუთხის გრადუსული ზომა ტოლია BDC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს.

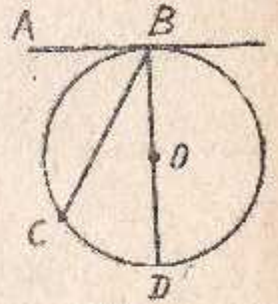
2) ვთქვათ მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე მახვილია (ნახ. 55). კუთხის წვეროზე გავავლოთ BD დიამეტრი. BC სხივი გაყოფს ABD კუთხის ორად (ნაწილებს შორის თეორემა 2. 4), ამიტომ

$$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD,$$

საიდანაც

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD. \quad (1)$$

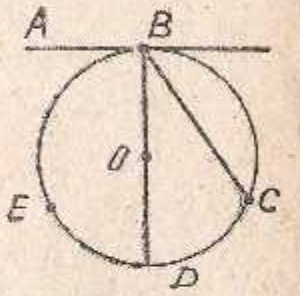
ABD და CBD კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად BCD და CD რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია. რადგან $\breve{BC} = \breve{BCD} - \breve{CD}$, ამიტომ (1)-ის ძალით ABC კუთხის გრადუსული ზომა ტოლია BC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს.



ნახ. 55

3) ვთქვათ მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე ბლაგვია (ნახ. 56). კუთხის წვეროზე გავავლოთ BD დიამეტრი. BD სხივი გაყოფს ABC კუთხის ორად (ნაწილებს შორის თეორემა 2.4), ამიტომ

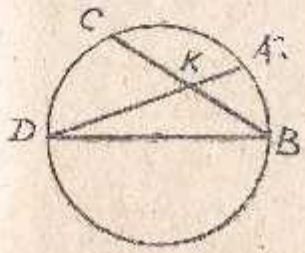
$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD. \quad (2)$$



ნახ. 56

ABD და CBD კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად BED და CD რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია. რადგან $\breve{BDC} = \breve{BED} + \breve{CD}$, ამიტომ (2)-ის ძალით ABC კუთხის გრადუსული ზომა BDC რკალის გრადუსული ზომის ნახევრის. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. 2. იმ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლის წვერო წრეწირის შიგნითაა, უდრის მოცემული კუთხისა და მისი ვერტიკალური კუთხის გვერდებს შორის მოთავსებული რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარჯამს.



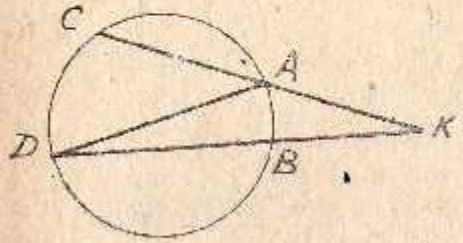
ნახ. 57

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ AKB კუთხის წვეროს წრეწირის შიგნითაა, ხოლო CKD მისი ვერტიკალური კუთხეა (ნახ. 57). გავავლოთ BD ქორდა. სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების ძალით

$$\angle AKB = \angle D + \angle B. \qquad (3)$$

D და B ჩახაზული კუთხეების გრადუსული ზომები წესაბამისად AB და CD რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია. ამიტომ (3)-ის ძალით AKB კუთხის გრადუსული ზომა ედრის AB და CD რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარჯამს. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 10. 3. **იმ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლის წვერო წრეწირის გარეთაა, ხოლო გვერდები კვეთენ წრეწირს, უდრის კუთხის გვერდებს შორის მოთავსებული რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარსხვაობას.**



ნახ. 58

დამტკიცება. ვთქვათ K კუთხის წვერო წრეწირის გარეთაა, ხოლო კუთხის გვერდები წრეწირს კვეთენ A, C, B და D წერტილებში (ნახ. 58). გავავლოთ AD ქორდა. სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების ძალით

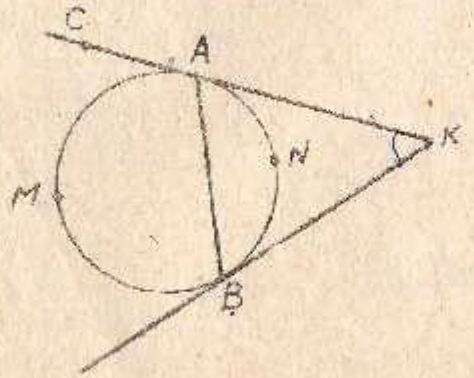
$$\angle CAD = \angle K + \angle D,$$

საიდანაც

$$\angle K = \angle CAD - \angle D. \qquad (4)$$

CAD და D ჩახაზული კუთხეების გრადუსული ზომები წესაბამისად CD და AB რკალების გრადუსული ზომებია ჩახედრილ ტოლია. ამიტომ (4) ის ძალით K კუთხის გრადუსული ზომა ედრის CD და AB რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარსხვაობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 10. 4. **იმ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლის გვერდები წრეწირს ეხებიან, უდრის იმ რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარსხვაობას, რომლებზედაც წრეწირი იჭრება შენების წერტილებით.**



ხან. 59

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ K კუთხის გვერდები წრეწირს ეხებიან A და B წერტილებში (ნახ. 59). გავავლოთ AB ქორდა. სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების ძალით

$$\angle CAB = \angle K + \angle ABK,$$

საიდანაც

$$\angle K = \angle CAB - \angle ABK. \qquad (5)$$

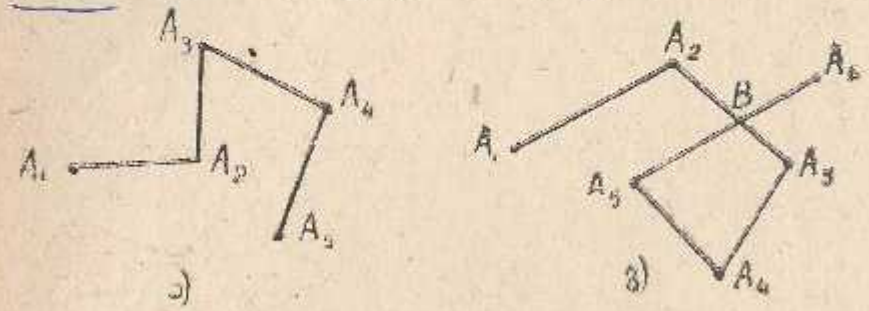
CAB და ABK მჭდებია და ჭორდით შეკვეთილი კუთხეების გრადუსული ზომებია. წესაბამისად AMB და ANB რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია. ამიტომ (5)-ის ძალით K კუთხის გრადუსული ზომა ედრის AMB და ANB რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარსხვაობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ᲙᲘᲗᲮᲕᲔᲑᲘ ᲗᲕᲘᲗᲛᲔᲪᲝᲓᲜᲔᲝᲑᲘᲡᲗᲕᲘᲡ

1. რას ეწოდება წრეწირი, წრეწირის ცენტრი, რადიუსი?
2. რას ეწოდება წრეწირის ქორდა, დიამეტრი?
3. რას ეწოდება წრეწირის რკალი?
4. როგორ წრეწირს ეწოდება სამკუთხედში ჩახაზული?
5. დამტკიცება, რომ ნებისმიერი სამკუთხედისათვის არსებობს ძასზე შემოხაზული წრეწირი, იგი ერთადერთია და მისი ცენტრი ამ სამკუთხედის კუთხეების შუამართობლების გადაკვეთის წერტილია.
6. რას ეწოდება წრეწირის ჩახაზული, შემოხაზული წერტილები?
7. დამტკიცება, რომ ძასზე წრეწირის აქსი ერთადერთი სწორი წერტილია.
8. რამდენ წრეწირს ეწოდება სამკუთხედში ჩახაზული?
9. დამტკიცება, რომ ნებისმიერი სამკუთხედისათვის არსებობს ძასზე ჩახაზული წრეწირი, ერთ ერთადერთია და მისი ცენტრი ამ სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია.
10. წრეწირებს რამდენ წერტილში ეწოდება ერთ შესება, შიდა შეხება?
11. დამტკიცება შორეული წერტილიდან ერთი და იმავე წრეწირისადმი გავლებული შესების ნაწილაკების თანასწორობა.
12. რას ეწოდება ჩაზნექილი კუთხე?
13. რას ეწოდება ცენტრალური კუთხე?
14. რას ეწოდება ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალი?
15. რას ეწოდება ჩახედრილი კუთხე?
16. დამტკიცება ჩახედრილი დიამეტრის თვისება.
17. რას ეწოდება წრეწირში ჩახაზული კუთხე?
18. დამტკიცება თეორემა წრეწირში ჩახაზული კუთხის შესახებ.
19. დამტკიცება თეორემა მიმდებარეობა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრის შესახებ.
20. დამტკიცება თეორემა ჩახედრილ და ჭორდით შედგენილ კუთხეზე შესახებ.
21. რას უდრის იმ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლის წვერო წრეწირის შიგნითაა, წრეწირის გარეთაა?
22. რას უდრის იმ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლის გვერდები წრეწირს ეხებიან?

განსაზღვრება. $A_1A_2A_3\ldots A_n$ ტეხილი ეწოდება ფიგურას, რომელიც A_1, A_2, A_3, ..., A_n წერტილებისა და მათი შემაერთებელი A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ მონაკვეთებისაგან შედგება. A_1, A_2, A_3, ..., A_n წერტილებს ტეხილის წვეროები ეწოდება, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ მონაკვეთებს კი ტეხილის მხარეები ეწოდება.

თუ ტეხილი თავის თავს არ გადაკვეთს, მაშინ მას მარტივი ტეხილი ეწოდება. 60. ა) ნახაზზე მოცემულია მარტივი ტეხილი, 60. ბ) ნახაზზე



ნახ. 60

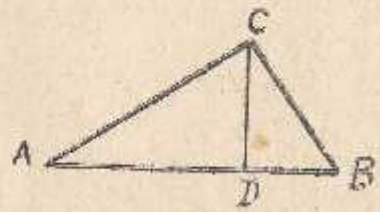
კი — ტეხილი, რომელიც თავის თავს გადაკვეთს (B წერტილში). ტეხილის სიგრძე ეწოდება მისი მხარეების სიგრძეთა ჯამს.

თეორემა 11. 1. (სამკუთხედის უტოლობა) ნებისმიერი სამი წერტილისათვის ორი მათგანის შორის მანძილი ამ წერტილებიდან მესამე წერტილამდე მანძილების ჯამს არ აღემატება.

დამტკიცება. ვთქვათ, A, B, C მოცემული სამი წერტილია. თუ ამ წერტილებიდან ორი ან სამივე წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ თეორემის მტკიცება ცხადია. ვთქვათ სამივე წერტილი სხვადასხვაა და ვთქვათ წრფეზე მდებარეობს, მაგრამ ერთ-ერთი მათგანი (მაგალითად B) დანარჩენ ორს შორის მდებარეობს. ამ შემთხვევაში $AB+BC=AC$. აქედან ჩანს, რომ სამი მანძილიდან თითოეული დანარჩენი ორის ჯამს არ აღემატება.

დავუშვათ ახლა, რომ სამივე წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს და დავამტკიცოთ, რომ $AB<AC+BC$, სადაც AB უდიდესი კვეთილია (ნახ. 61). AB წრფეზე დავუშვათ CD პერპენდიკულარი. რადგან მართკუთხა სამკუთხედში კათეტი ჰიპოტენუზაზე ნაკლებია, ამიტომ $AD<AC$, $BD<BC$.

დამტკიცებულის თანახმად $AB=AD+BD$. მაშასადამე, $AB<AC+BC$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 61

შედეგი. ყოველ სამკუთხედში თითოეული გვერდი ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის ჯამზე და მეტია მათ სხვაობაზე.

თეორემა 11. 2. ტეხილის სიგრძე მის ბოლოებს შორის მანძილზე ნაკლები არ არის.

დამტკიცება. ვთქვათ $A_1A_2A_3\ldots A_n$ მოცემული ტეხილია. სამკუთხედის უტოლობის ძალით

$$A_1A_3 \leqslant A_1A_2 + A_2A_3$$

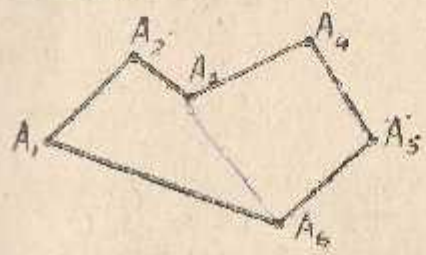
$$A_1A_4 \leqslant A_1A_3 + A_3A_4 \leqslant A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$$

. . . . . .

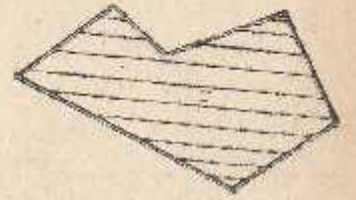
$$A_1A_n \leqslant A_1A_{n-1} + A_{n-1}A_n \leqslant A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ტეხილს ეწოდება შეკრული, თუ მისი ბოლოები ერთმანეთს ემთხვევა.



ნახ. 62



ნახ. 63

განსაზღვრება. მარტივ შეკრულ ტეხილს მრავალკუთხედი ეწოდება, თუ მისი მეზობელი მხარეები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს (ნახ. 62). ტეხილის წვეროებს მრავალკუთხედის წვეროები ეწოდება, ტეხილის მხარეებს კი — მრავალკუთხედის გვერდები.

მრავალკუთხედის გვერდის სიგრძეების ჯამს მრავალკუთხედის პერიმეტრი ეწოდება.

მრავალკუთხედის წვეროებს მეზობელი წვეროები ეწოდება, თუ ისინი ერთიდაიმავე გვერდის ბოლოებია. წვეროებს, რომლებიც მეზობელი წვეროები არაა, არამეზობელი წვეროები ეწოდება. მრავალკუთხედის გვერდებს, რომლებსაც ერთი წვეროდან გამოდიან, მეზობელი გვერდები ეწოდება.

მრავალკუთხედის არამეზობელი ორი წვეროს შემაერთებელ მონაკვეთს, დიაგონალი ეწოდება. მრავალკუთხედს, რომელსაც n წვეროა და მაშასადამე, n გვერდი აქვს, n-კუთხედი ეწოდება.

ცხადია, რომ n-კუთხედის თითოეული წვეროდან შესაძლებელია $n-3$ დიაგონალის გავლება, n წვეროდან კი $n(n-3)$.

მაგრამ ამ წყვეთ ყოველი ლიგეთნილი დაიყვლილია ორჯერ. ამიტომ n-კუთხედის ყველა შესაძლო დიაგონალების რაოდენობაა $\frac{n(n-3)}{2}$.

ბრტყელი მრავალკუთხედი, ანუ მრავალკუთხა ზედაპირი ეწოდება სიბრტყის სასრულ ნაწილს, რომელიც მრავალკუთხედებით შემოსაზღვრული (ნახ. 63). მრავალკუთხედის აღმნიშნველი ერთ-ერთ წახნაგზე გვერდზე გაყვანილი წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობას. ეხასთან ითვლება, რომ თვით წრფე ნახევარსიბრტყეს ეკუთვნის. 64-ე ნახაზზე გამოსახულია ამოზნექილი მრავალკუთხედი, 62-ე ნახაზზე კი — არაამოზნექილი მრავალკუთხედი.



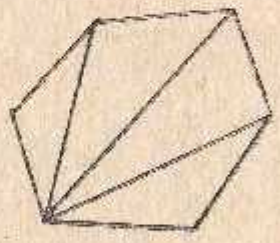
ნახ. 64

ჩვენ შემდეგში ვხილულად ამოზნექილ მრავალკუთხედებს განვიხილავთ.

ამოზნექილი მრავალკუთხედის მოცემულ წვეროსთან მდებარე კუთხეს ეწოდება კუთხე, რომელსაც ამ წვეროდან გამოსული გვერდების შემცველი სხივები ქმნის.

თეორემა. 11. 3. **ამოზნექილი n-კუთხედის კუთხეთა ჯამი არის $180^\circ \cdot (n-2)$.**

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემული არის ამოზნექილი n კუთხედი. მისი ერთ-ერთი წვეროდან გავავლოთ ყველა შესაძლო დიაგონალი (ნახ. 65). მივიღებთ $n-2$ სამკუთხედს. ცხადია, რომ მოცემული მრავალკუთხედის კუთხეების ჯამი უდრის მიღებული სამკუთხედების ყველა კუთხეების ჯამს, რადგან სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180°-ია, ამიტომ n კუთხედის კუთხეების ჯამი $180^\circ(n-2)$-ის ტოლია.



ნახ. 65

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. **ამოზნექილი მრავალკუთხედის მოცემულ წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომელიც მრავალკუთხედის ამ წვეროსთან მდებარე კუთხის მოსაზღვრეა.**

იმისათვის, რომ მრავალკუთხედის რომელიმე წვეროსთან მდებარე კუთხე ამავე წვეროსთან მდებარე გარე კუთხეში არ აგვერიოს, მას ზიგზაგს უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ მრავალკუთხედის თითოეულ წვეროსთან მდებარეობს ორი გარე კუთხე, რომლებიც ტოლია, როგორც ვერტიკალური კუთხეები.

თეორემა 11. 4. **ამოზნექილი n-კუთხედის თითოეულ წვეროსთან თითო-თითოდ აღებული გარე კუთხეების ჯამი 360°-ის ტოლია.**

დამტკიცება. ბრტყელკუთხედის შიგა კუთხის და მასი მოსაზღვრე გარე კუთხის ჯამი 180°-ია, ამიტომ ყველა შიგა და გარე კუთხეთა ჯამი უდრის $180^\circ \cdot n$-ს, მაგრამ თეორემა 11. 3-ის თანახმად ყველა შიგა კუთხის ჯამი უდრის $180^\circ \cdot (n-2)$. მაშასადამე, თითოეულ წვეროსთან თითო-თითოდ აღებულ გარე კუთხეთა ჯამი უდრის $180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. ოთხკუთხედები.

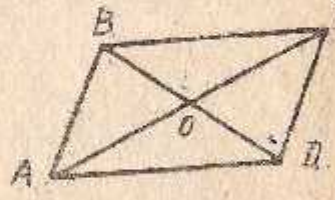
პარალელოგრამი

განსაზღვრება. **ოთხკუთხედს, რომლის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია, პარალელოგრამი ეწოდება.**

პარალელოგრამის გვერდის ნებისმიერი წერტილიდან მოპირდაპირე გვერდის მიმცველ წრფეზე დაშვებულ მართობს პარალელოგრამის სიმაღლე ეწოდება.

თეორემა 12. 1. **თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.**

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული ოთხკუთხედია და O — მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 66). $\triangle AOB = \triangle COD$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, რადგან $AO=CO$ და $BO=DO$ პირობის თანახმად, ხოლო $\angle AOB = \angle COD$ როგორც ვერტიკალური კუთხეები. მაშასადამე, $\angle OAB = \angle OCD$. ეს კუთხეები კი შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებია AB და CD წრფეებსა და AC მკვეთის მიმართ. ამიტომ $AB \parallel CD$ (თეორემა 4. 3.). ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $BC \parallel AD$. ე. ი. $ABCD$ პარალელოგრამია, თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 66

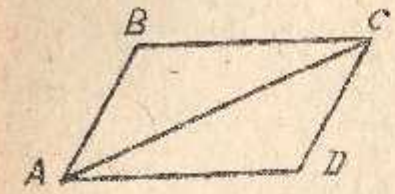
თეორემა 12. 2. **თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.**

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული ოთხკუთხედია (ნახ. 67).

---

* ოთხკუთხედის ძირითად გვერდებს მოპირდაპირე გვერდები უწოდებენ.

$\triangle ABC=\triangle CDA$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად, რადგან $AB=CD$ და $BC=DA$ პირობის თანახმად, ხოლო AC ერთი საერთოა. მაშასადამე, $\angle BAC=\angle DCA$. ეს კუთხეები კი შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებია AB და CD წრფეებს და AC მკვეთის შორის. აქედან $AB\|CD$ (თეორემა 4. 3.). ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $BC\|AD$. ე. ი. $ABCD$ პარალელოგრამია. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 67

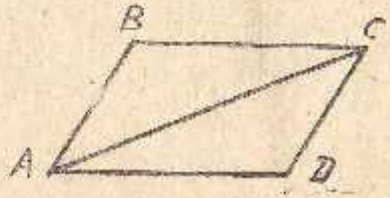
თეორემა 12. 3. თუ ოთხკუთხედის ორი მოპირდაპირე გვერდი ტოლია და პარალელური, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედში $AB=CD$ და $AB\|CD$ (ნახ. 67). $\triangle ABC=\triangle CDA$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, რადგან $AB=CD$ პირობის თანახმად, AC გვერდი საერთოა, ხოლო $\angle BAC=\angle DCA$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები AB და CD პარალელურ წრფეებსა და AC მკვეთს შორის. მაშასადამე, $\angle BCA=\angle DAC$. ეს კუთხეები კი შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებია BC და AD წრფეებსა და AC მკვეთს შორის. აქედან $BC\|AD$ ე. ი. $ABCD$ პარალელოგრამია. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემები (12. 1, 12. 2 და 12. 3) პარალელოგრამის ნიშნებს წარმოადგენენ.

თეორემა 12. 4. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ერთმანეთის ტოლია, მოპირდაპირე კუთხეები* ტოლია, ხოლო ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია (ნახ. 68). $\triangle ABC=\triangle CDA$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად, რადგან AC გვერდი საერთოა, $\angle BAC=\angle DCA$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები AB და CD პარალელურ წრფეებსა AC მკვეთს შორის, ხოლო $\angle BCA=\angle DAC$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები BC და DA პარალელურ წრფეებსა და AC მკვეთს შორის. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ



ნახ. 68

* ოთხკუთხედის არამეზობელ წვეროებში მდებარე კუთხეებს მოპირდაპირე კუთხეები ეწოდება.

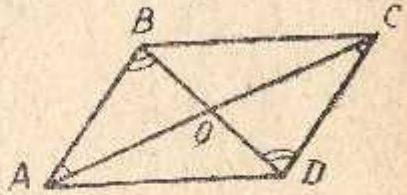
$AB=CD$, $BC=DA$, $\angle B=\angle D$ და $\angle A=\angle C$.

პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია, რადგან იგინი წარმოადგენენ ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებულ შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეებს. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ პარალელოგრამში ცნობილია დიაგონალი, მაშინ მიღებული სამკუთხედები ტოლია.

თეორემა 12. 5. (თეორემა 12. 1-ის შებრუნებული). პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია (ნახ. 69) $\triangle AOB=\triangle CDO$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად, რადგან $AB=CD$, როგორც პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები (თეორემა 12. 4), ხოლო $\angle BAO=\angle DCO$ და $\angle ABO=\angle CDO$, როგორც AB და CD პარალელური წრფეებისა AC და BD წრფეებით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AO=CO$ და $BO=DO$, თეორემა დამტკიცებულია.



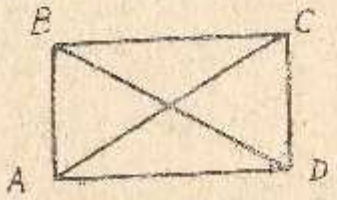
ნახ. 69

მართკუთხედი. რომბი. კვადრატი

განსაზღვრება. პარალელოგრამს, რომლის ერთი კუთხე მართია, მართკუთხედი ეწოდება.

თეორემა 12. 6. მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული მართკუთხედია (ნახ. 70). $\triangle ABD=\triangle DCA$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, რადგან $\angle BAD=\angle CDA=90°$, AD გვერდი საერთოა, ხოლო $AB=DC$, როგორც პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AC=DB$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 70

თეორემა 12. 7. (თეორემა 12. 6-ის შებრუნებული). თუ პარალელოგრამის დიაგონალები ტოლია, მაშინ ის მართკუთხედია.

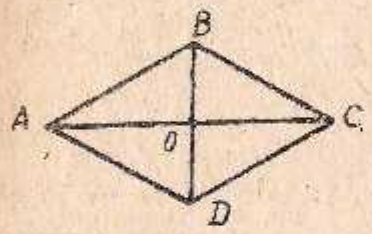
დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია (ნახ. 71). $\triangle ABD=\triangle DCA$ სამკუთხედების ტო-

ლობის მესამე ნიშნის თანახმად, რადგან AB, DC, როგორც პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები, AD გვერდის პარალელურია, ხოლო $BD = CA$ პირობის თანახმად: ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle BAD = \angle CDA$. ამავე დროს $\angle BAD + \angle CDA = 180°$, როგორც პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეები. ძალით $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. ანალოგიურად დავუნებთ, რომ $\angle ABC = \angle DCB = 90°$, ე. ი. $ABCD$ მართკუთხედია. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. პარალელოგრამს, რომლის ერთი კუთხე მართია, **მართკუთხედი** ეწოდება.

თეორემა 12. 8. რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია; რომბის დიაგონალები მისი კუთხეების ბისექტრისებია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული რომბია და O — მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 71). პარალელოგრამის თვისების თანახმად $AO = OC$. მაშასადამე, ტოლფერდა ABC სამკუთხედში BO მოხაზვული მედიანაა. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისების თანახმად მისი ფუძისადმი გავლებული ამ მედიანის სიმაღლეცაა და ბისექტრისაც. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ BD დიაგონალი B კუთხის ბისექტრისაა და AC დიაგონალის მართობულია. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 71

საწინააღმდეგო თეორემა 12. 9. (თეორემა 12. 8.-ის შებრუნებული). თუ პარალელოგრამის დიაგონალი წარმოადგენს მისი კუთხის ბისექტრისას ან დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ ის რომბია.

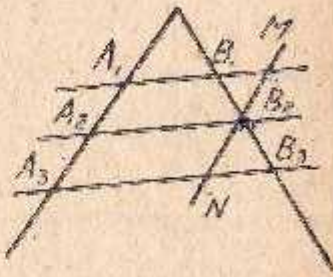
დამტკიცება. დავუბრუნდეთ თეორემა ამ შემთხვევაში, როდესაც პარალელოგრამის დიაგონალები ურთიერთმართობულია. როდესაც დიაგონალი წარმოადგენს კუთხის ბისექტრისას დამტკიცება ანალოგიურია. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია (ნახ. 71). $\triangle ABC$ ტოლფერდაა, რადგან, თუ $BD \perp AC$, მაშინ სამკალე და მედიანა ერთმანეთს ემთხვევიან. მაშასადამე, $AB = BC$. აქედან გამომდინარეობს, $ABCD$ რომბია, რადგან პარალელოგრამის გვერდები ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. მართკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი ერთმანეთის ტოლია კვადრატი ეწოდება.

კვადრატი ძალიან ცნობილი ფიგურაა, მისთვის მას მართკუთხედის და რომბის ყველა თვისება აქვს.

თეორემა 12. 10. (თალესის თეორემა). თუ კუთხის გვერდებიდან ერთ-ერთზე გადაკვეთილი პარალელურია წრფეები და ერთ გვერდზე ტოლ მონაკვეთებს მოკვეთს, მაშინ ეს წრფეები მეორე გვერდზეც ტოლ მონაკვეთებს მოკვეთს (ნახ. 72).

დამტკიცება. ვთქვათ A_1, A_2, A_3 პარალელური წრფეების კუთხის ერთ გვერდთან გადაკვეთის წერტილებია და A_2 წერტილი A_1-ს და A_3-ს შორის მდებარეობს (ნახ. 72). ვთქვათ B_1, B_2, B_3 ამ წრფეების კუთხის მეორე გვერდთან გადაკვეთის წერტილებია. დავამტკიცოთ, რომ თუ $A_1A_2 = A_2A_3$, მაშინ $B_1B_2 = B_2B_3$.



ნახ. 72

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ B_2 წერტილი B_1 და B_3 წერტილებს შორის მდებარეობს. A_1 და A_2 წერტილები A_2B_2 წრფის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს, რადგან A_1A_2 მონაკვეთი ამ წრფეს გადაკვეთს (A_2 წერტილში). A_1 და B_1 წერტილები A_2B_2 წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს, რადგან A_1B_1 მონაკვეთი A_2B_2 წრფეს პარალელურია და მაშასადამე არ გადაკვეთს მას. ზუსტად ასევე A_3 და B_3 წერტილები A_2B_2 წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს. მაშასადამე, B_1 და B_3 წერტილები ამ წრფის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს და ამიტომ B_1B_3 მონაკვეთი A_2B_2 წრფეს გადაკვეთს (B_2 წერტილში).

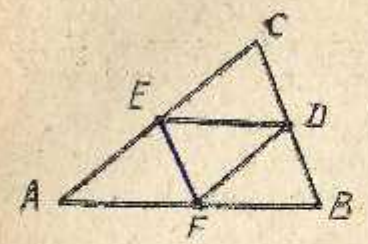
B_2 წერტილზე გავავლოთ A_1A_3 წრფის პარალელური MN წრფე. პარალელოგრამის თვისების თანახმად $A_1A_2 = MB_2$, $A_2A_3 = B_2N$. რადგან $A_1A_2 = A_2A_3$, ამიტომ $MB_2 = B_2N$.

$\triangle B_2B_1M = \triangle B_2B_3N$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის მიხედვით, რადგან $B_2M = B_2N$ დამტკიცებულის თანახმად, $\angle B_1B_2M = \angle B_3B_2N$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები, ხოლო $\angle B_2MB_1 = \angle B_2NB_3$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები A_1B_1 და A_3B_3 პარალელურ წრფეებსა და MN მკვეთს შორის. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $B_1B_2 = B_2B_3$. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. სამკუთხედის შუამონაკვეთი ეწოდება მონაკვეთს, **რომელიც მისი ორი გვერდის შუაწერტილებს აერთებს.**

თეორემა 12. 11. სამკუთხედის შუამონაკვეთი მესამე გვერდის პარალელურია და მის ნახევარს ტოლია.

დამტკიცება. გთქვათ DE არის ABC სამკუთხედის შუამონაკვეთი (ნახ. 73). D წერტილზე გავავლოთ AB-ს პარალელური წრფე. თალესის თეორემის თანახმად იგი AC მოინაკვეთს მის შუაწერტილში გადაკვეთს ახე შეიკავს შუამონაკვეთის თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

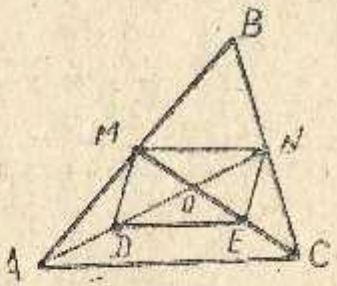


ნახ. 73

ახლა გავავლოთ DF შუამონაკვეთი. იგი AC გვერდის პარალელურია. $AEDF$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, პარალელოგრამის თვისების თანახმად $ED=AF$, სოლო რადგან $AF=FB$, ამიტომ $ED=\frac{1}{2}AB$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა. 12. 12. **სამკუთხედის ნებისმიერი ორი მედიანა იკვეთება და გადაკვეთის წერტილით წვეროს მხრიდან იყოფა შეფარდებით 2 : 1.**

დამტკიცება. ვთქვათ ABC სამკუთხედში გავლებულია AN და CM მედიანები (ნახ. 74). რადგან AN სხივი კვეთს BC მონაკვეთს, ამიტომ AN სხივი კვეთს BAC კუთხის გვერდებს შორის. რადგან M და C წერტილები მდებარეობენ BAC კუთხის სხვადასხვა გვერდებზე, ამიტომ AN სხივი კვეთს CM მედიანას. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ CM სხივი კვეთს AN მედიანას.



ნახ. 74

ამრიგად, AN და CM სხივების გადაკვეთის O წერტილი ეკუთვნის როგორც AN მედიანას ასევე CM მედიანას. ე. ი. AN და CM მედიანები იკვეთებიან O წერტილში.

AN და CO მონაკვეთები D და E წერტილებით გადაკვეთა შეამჟ. MN არის ABC სამკუთხედის შუამონაკვეთი, ამიტომ

$$MN\|AC \text{ და } MN=\frac{1}{2}AC.$$

ასევე DE არის AOC სამკუთხედის შუამონაკვეთი, ამიტომ

$$DE\|AC \text{ და } DE=\frac{1}{2}AC.$$

მაშასადამე

$$MN\|DE \quad \text{და} \quad MN=DE.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $MNED$ პარალელოგრამია (თეორემა 12.3). რადგან პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფიან, ამიტომ

$$DO=ON,$$

აგების თანახმად

$$AD=DO.$$

აქედან $AD=DO=ON$. მაშასადამე

$$AO:ON=2:1$$

ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

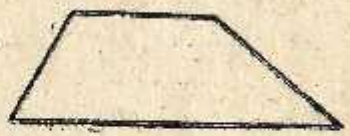
$$CO:OM=2:1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. **სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება.**

ტრაპეცია. ტრაპეციის შუამონაკვეთი

განსაზღვრება. **ოთხკუთხედს, რომლის ორი გვერდი პარალელურია, ხოლო ორი დანარჩენი გვერდი არ არის პარალელური ტრაპეცია ეწოდება.** (ნახ. 75). ტრაპეციის პარალელურ გვერდებს მისი ფუძეები ეწოდება, ხოლო არაპარალელურ გვერდებს — ფერდები.


ნახ. 75

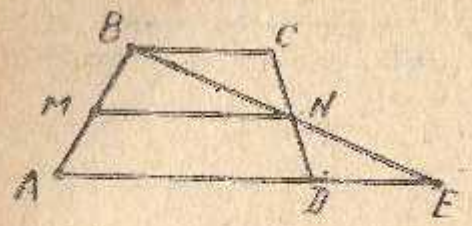
თუ ტრაპეციის ფერდები ერთნაირი სიგრძისაა, მაშინ ტრაპეციას ტოლფერდა ეწოდება. ტრაპეციას, რომლის ერთ-ერთი კუთხე მართია მართკუთხა ტრაპეცია ეწოდება.

ტრაპეციის ერთ-ერთი ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან შეიძლე ფუძის მეორე წრფეზე დაშვებულ მართობს, ტრაპეციის სიმაღლე ეწოდება.

განსაზღვრება. **ტრაპეციის ფერდების შუაწერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს ტრაპეციის შუამონაკვეთი ეწოდება.**

თეორემა 12. 13. **ტრაპეციის შუამონაკვეთი ფუძეების პარალელურია და მათ ნახევარჯამს უდრის.**

დამტკიცება. ვთქვათ, $ABCD$ მოცემული ტრაპეციაა (ნახ. 76), B წვეროზე და CD ფერდის N შუაწერტილზე გავავლოთ წრფე. იგი AD წრფეს E წერტილში გადაკვეთს. $\triangle NBC = \triangle NED$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის მიხედვით, რადგან $CN = DN$ აგების თანახმად, $\angle BNC = \angle END$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები, სალო $\angle NCB = \angle NDE$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები BC და AD პარალელურ წრფეებსა და CD მკვეთს შორის. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $NB = NE$ და $BC = ED$. მაშასადამე, ტრაპეციის MN საშუალო ხაზი ABE სამკუთხედის შუამონაკვეთია. სამკუთხედის შუამონაკვეთის თვისების თანახმად $MN \parallel AE$ და $MN = \frac{1}{2} AE$ ანუ $= \frac{1}{2}(AD + BC)$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 76

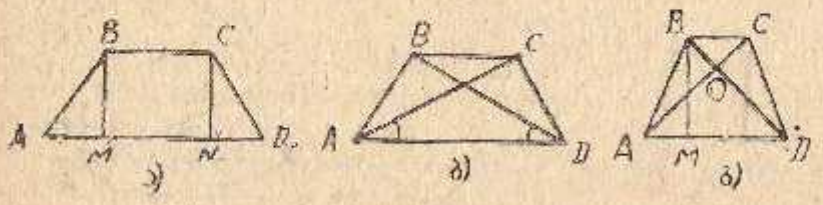
ტოლფერდა ტრაპეციის თვისებები

1) ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

ვთქვათ BM და CN წარმოადგენენ $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციის სიმაღლეებს (ნახ. 77 ა)). $\triangle ABM = \triangle DCN$ მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის თანახმად (ჰიპოტენუზაა და კათეტი). ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გვაქვს, რომ $\angle A = \angle D$ და $AM = DN$.

2) $AM = \frac{AD - BC}{2}$; $MD = \frac{AD + BC}{2}$

მართლაც $AM + MN + ND = AD$,



ნახ. 77

სადაც $2 \cdot AM = AD - MN = AD - BC$

ე. ი. $AM = \frac{AD - BC}{2}$.

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$MD = AD - AM$$

აქედან

$$MD = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{AD + BC}{2},$$

ამრიგად MD მონაკვეთი ტრაპეციის შუამონაკვეთის ტოლია.

3) ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები ტოლია. დიაგონალების მიერ ფუძესთან შედგენილი კუთხეები ტოლია (ნახ. 77 ბ)).

$\triangle ABD = \triangle DCA$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად. მაშასადამე $AC = DB$ და $\angle CAD = \angle BDA$.

4) თუ ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ შუამონაკვეთი სიმაღლის ტოლია (ნახ. 77 გ)).

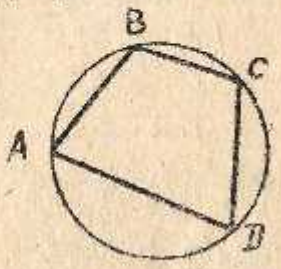
AOD მართკუთხა სამკუთხედში $\angle ODA = \angle OAD = 45^\circ$, ამიტომ BDM, მართკუთხა სამკუთხედი ტოლფერდაა, ე. ი. $BM = MD$, სალაც 2) თვისების თანახმად BM სიმაღლე შუამონაკვეთის ტოლია.

ჩახაზული და შემოხაზული ოთხკუთხედები

განსაზღვრება. **ოთხკუთხედს, რომლის ყველა წვერო წრეწირზე მდებარეობს, წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედი ეწოდება, ხოლო წრეწირს — ოთხკუთხედზე შემოხაზული.**

თეორემა 12, 14. წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180°-ია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედია (ნახ. 78). $\angle B$ და $\angle D$ ჩახაზული კუთხეებია, ამიტომ B კუთხის გრადუსული ზომა ტოლია ADC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარის, ხოლო D კუთხის გრადუსული ზომა უდრის ABC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს. მაშასადამე, B და D კუთხეების ჯამი ADC და ABC რკალების გრადუსულ ზომათა ჯამის ნახევრის ტოლია. რადგან ეს რკალები დამატებითია, ამიტომ მათი გრადუსული ზომათა ჯამი 360°-ია. ე. ი.



ნახ. 78

$$\angle B+\angle D=180^\circ,$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი 1. წრეწირში ჩახაზული ყოველი ტრაპეცია ტოლფერდაა.

შ ე დ ე გ ი 2. წრეწირში ჩახაზული ყოველი პარალელოგრამი მართკუთხედია.

შ ე დ ე გ ი 3. წრეწირში ჩახაზული ყოველი რომბი კვადრატია.

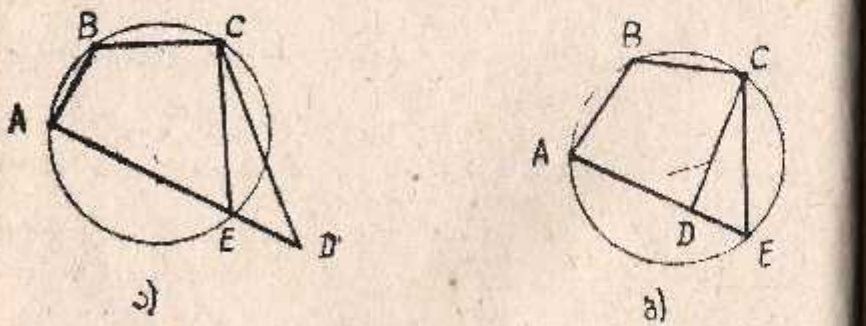
თ ე ო რ ე მ ა 12. 15. (თეორემა 12, 14-ის შებრუნებული). **თუ ოთხკუთხედის ორი მოპირდაპირე კუთხის ჯამი უდრის 180°-ს, მაშინ ასეთ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული ოთხკუთხედია, რომლისათვისაც

$$\angle B+\angle D=180^\circ$$

A, B და C წვეროებზე გავავლოთ წრეწირი და დავამტკიცოთ, რომ D წერტილიც წრეწირზე მდებარეობს. ვთქვათ D წერტილი წრეწირზე არ მდებარეობს. განვიხილოთ 79 ა) ნახაზზე გამოსახული შემთხვევა. $\angle B+\angle D=180^\circ$ პირობის თანახმად, ხოლო $\angle B+\angle AEC=180^\circ$ წინა თეორემის ძალით. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\angle D=\angle AEC$, რაც შეუძლებელია, რადგან CED სამკუთხედის AEC გარე კუთხე მეტია მისი არამმხსნელი D შიდა კუთხეზე.

79, ბ) ნახაზზე გამოსახული შემთხვევა განიხილება ანალოგიურად.



ნახ. 79

ამრიგად, D წერტილი წრეწირზე მდებარეობს. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი 1. ყოველ მართკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

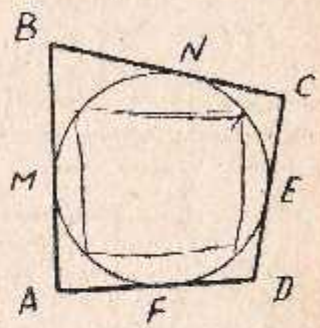
შ ე დ ე გ ი 2. ყოველ ტოლფერდა ტრაპეციაზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. ოთხკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი წრეწირს ეხება, წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედი ეწოდება, ხოლო წრეწირს — ოთხკუთხედში ჩახაზული.

თ ე ო რ ე მ ა 12. 16. **წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ერთმანეთის ტოლია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, წრეწირზე შემოხაზული $ABCD$ ოთხკუთხედის გვერდები ეხება წრეწირს M, N, E და F წერტილებში (ნახ. 80). რადგან მოცემული წერტილიდან ერთიდაიმავე წრეწირისადმი გავლებული მხების მონაკვეთები ტოლია, ამიტომ

$$AM=AF,$$
$$BM=BN,$$
$$CE=CN,$$
$$DE=DF.$$



ნახ. 80

ამ ტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ:

$$AM+BM+CE+DE=AF+BN+CN+DF,$$

საიდანაც

$$AB+CD=BC+AD.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

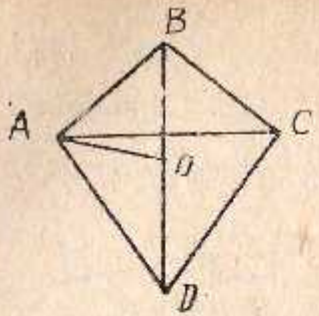
შ ე დ ე გ ი. წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი შუამონაკვეთის ტოლია.

მართლაც, ამ შემთხვევაში ფერდი უდრის ფუძეების ნახევარჯამს, ე. ი. შუამონაკვეთის ტოლია.

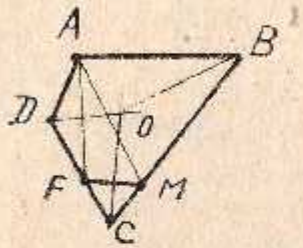
თ ე ო რ ე მ ა 12. 17. (თეორემა 12. 16-ის შებრუნებული). **თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ასეთ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედში $AB+CD=AD+BC$. შესაძლებელია ორი შემთხვევა 1) $AB=BC$ და 2) $AB\neq BC$. განვიხილოთ ეს შემთხვევები.

1) ვთქვათ $AB=BC$, მაშინ ცხადია $AD=DC$ (ნახ. 81) ამიტომ B და D წერტილები მდებარეობენ AC მონაკვეთის შუამართობაზე (თეორემა 7. 2), აქედან გამომდინარეობს, რომ BD დიაგონალი წარმოადგენს B და D კუთხეების ბისექტრისას. ცნობილია, რომ A კუთხის ბისექტრისა და BD დიაგონალთან გადაკვეთის O წერტილი თანაბრად იქნება დაშორებული $ABCD$ ოთხკუთხედის ოთხივე გვერდიდან. ე. ი. O წერტილი წარმოადგენს ოთხკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს.



ნახ. 31



ნახ. 32

2) ვთქვათ $AB \neq BC$. დავუშვათ, რომ $AB < BC$. მაშინ $DA < DC$ (დამტკიცებულია პირობის თანახმად). BC გვერდზე გადავიტანოთ AB-ს ტოლი BM მონაკვეთი, ხოლო DC გვერდზე — DA-ს ტოლი DF მონაკვეთი (ნახ. 32).

AFM სამკუთხედის გვერდების შუაპერპენდიკულარების გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ O-თი. AFM სამკუთხედის გვერდები წარმოადგენენ ტოლფერდა ADF, FCM და MBA სამკუთხედების ფუძეებს. ამიტომ AFM სამკუთხედის გვერდების შუაპერპენდიკულარები ADF, FCM და MBA კუთხეების ბისექტრისებს წარმოადგენენ. მაშასადამე, მათი გადაკვეთის O წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ოთხკუთხედის ოთხივე გვერდიდან, ე. ი. O წერტილი $ABCD$ ოთხკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს. თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანები თვითშემოწმებისათვის

1. რას ეწოდება ტანგენტი, ტანგენტის სიგრძე?
2. რას ეწოდება ჩარტიელი ტანგენტი?
3. დაამტკიცეთ თანმკვეთების ტოლობა.
4. დაამტკიცეთ, რომ ტანგენტის სიგრძე ერთ ბოლოებს შორის მანძილზე ნაკლები არ არის.
5. რას ეწოდება წრიგალკუთხედი?
6. რას ეწოდება შრიგალკუთხედის დიაგონალი?
7. რამდენი დიაგონალი გავლება შეიძლება n-კუთხედში?
8. როგორ შრიგალკუთხედს ეწოდება ამოზნექილი?
9. რას ეწოდება ამოზნექილი შრიგალკუთხედის შიგნითა წვეროდან მდებარი კუთხე, გარე კუთხე?
10. განიხილეთ ამოზნექილი შრიგალკუთხედის კუთხეების ჯამის ცვალებადობა.
11. რას უდრის ამოზნექილი n-კუთხედის ოთხიოდენ წვეროდან ერთიანად ტარებული გარე კუთხეების ჯამი?
12. რას ეწოდება წრიგალკუთხედის პერიმეტრი?
13. რას ეწოდება შრიგალკუთხედის?
14. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შეიზნა ტოლად, მაშინ ეს ოთხკუთხედი შრიგალკუთხედია.

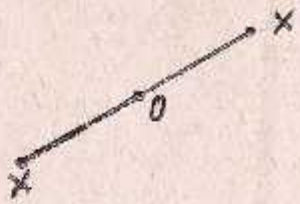
15. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.
16. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის ორი მოპირდაპირე გვერდი ტოლია და პარალელური, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.
17. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ერთმანეთის ტოლია, მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, ხოლო ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია.
18. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.
19. რას ეწოდება მართკუთხედი?
20. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია.
21. რას ეწოდება რომბი?
22. დაამტკიცეთ რომბის დიაგონალების თვისება.
23. რას ეწოდება კვადრატი?
24. დაამტკიცეთ თეორემა საშუალოს შესახებ.
25. რას ეწოდება საშუალოს შუამხაზეული?
26. დაამტკიცეთ თეორემა საშუალოს შუამხაზეულის შესახებ.
27. დამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის წვეროებიდან ორი მედიანა ტოლდება და გადაკვეთის წერტილით წვეროდან მოთვლილ ერთ : 2.
28. რას ეწოდება ტრაპეცია?
29. რას ეწოდება ტრაპეციის სიმაღლე?
30. რას ეწოდება ტრაპეციის შუამხაზეული?
31. დაამტკიცეთ თეორემა ტრაპეციის შუამხაზეულის შესახებ.
32. დამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა ტრაპეციაში ერთმანეთთან მდებარე კუთხეების ტოლია, მოპირდაპირე ტოლია დიაგონალების შორის ფიქრთან შედგენილი კუთხეები ტოლია.
33. დამტკიცეთ, რომ თუ ტრაპეციის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ შუამხაზეული ამ ტრაპეციის ტოლია.
34. რას ეწოდება წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედი?
35. დამტკიცეთ, რომ წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180°-ია.
36. დამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის ორი მოპირდაპირე კუთხის ჯამი ტოლია 180°-ის, მაშინ ამ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის შეხაზვა.
37. რას ეწოდება წრეწირზე შეხაზული ოთხკუთხედი?
38. დამტკიცეთ, რომ ტრაპეციაში შეხაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ერთმანეთის ტოლია.
39. დამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ამ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა.

§ 13. წრეწირის განტოლება

ვთქვათ რაიმე ფიგურის ყოველი წერტილი გადაადგილებულია რაიმე წესით. მივიღებთ ახალ ფიგურას, რომელსაც ეწოდება მოცემული ფიგურის გარდაქმნით მიღებული ფიგურა. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

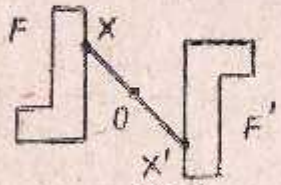
1. **წერტილის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა.** ვთქვათ O სიბრტყის ფიქსირებული წერტილია, ხოლო A — სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი

(ნახ. 83). XO მონაკვეთის გაგრძელებაზე გადავდოთ მისი ტოლი OX' მონაკვეთი. X' წერტილს ეწოდება X წერტილის სიმეტრიული O წერტილის მიმართ. ცხადია, რომ X წერტილიც სიმეტრიულია X' წერტილის მიმართ, O წერტილის სიმეტრიულად ჩავთვალოთ თვით O წერტილი.

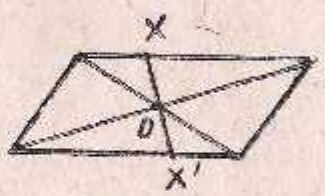


ნახ. 83

F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ყოველი X წერტილი ბოლოებით O წერტილის მიმართ სიმეტრიულ X' წერტილში გადადის, O წერტილის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა ეწოდება. ამასთან F და F' ფიგურებს O წერტილის მიმართ სიმეტრიული ეწოდება (ნახ. 84). თუ O წერტილი მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნაა F ფიგურა თავის თავში გადაყავს, მაშინ მას ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა ეწოდება, O წერტილს კი — სიმეტრიის ცენტრი. მაგალითად, პარალელოგრამი ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურაა მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის მიმართ (ნახ. 85).

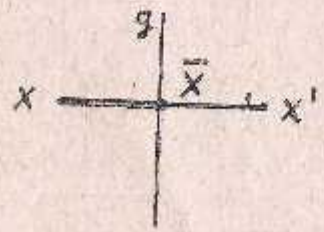


ნახ. 84



ნახ. 85

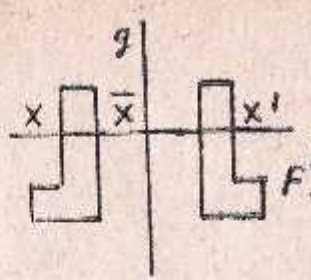
2. **წრფის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა.** ვთქვათ g უკუსირებელი წრფეა (ნახ. 86). ავიღოთ g წრფეზე არამდებარე რაიმე X წერტილი და g წრფეზე დავუშვათ XX მართობი. $X\bar{X}$ მართობის გაგრძელებაზე გადავდოთ მისი ტოლი $\bar{X}X'$ მონაკვეთი. X' წერტილს ეწოდება X წერტილის სიმეტრიული g წრფის მიმართ. ცხადია, რომ X-იც სიმეტრიულია X'-ის მიმართ. თუ X წერტილი g წრფეზე მდებარეობს, მაშინ მას სიმეტრიულად ჩავთვალოთ თვით X წერტილი.



ნახ. 86

F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ყოველი X წერტილი ბოლოებით g წრფის მიმართ სიმეტრიულ X' წერტილში გადადის, g წრფეს მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა ეწოდება. ამასთან F და F' ფიგურებს g წრფის მიმართ სიმეტრიული ეწოდება (ნახ. 87).

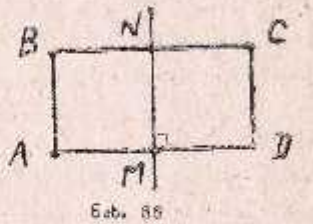
თუ g წრფის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნას F ფიგურა თავის თავში გადაყავს, მაშინ ამ ფიგურას g წრფის მიმართ სიმეტრიული ეწოდება, g წრფეს კი — სიმეტრიის ღერძი.



ნახ. 87

თ ე ო რ ე მ ა 13. 1. **მართკუთხედის გვერდის შუამართობი ამ მართკუთხედის სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს.**

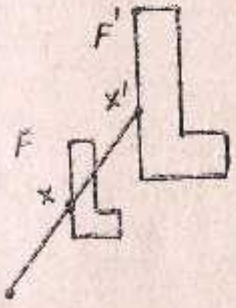
დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული მართკუთხედი, $MN \perp AD$ და $AM = MD$ (ნახ. 88). განვიხილოთ $ABCD$ მართკუთხედის სიმეტრიის გარდაქმნა MN წრფის მიმართ. პირობის ძალით A და D წერტილები სიმეტრიული არიან MN წრფის მიმართ. გაჩვენოთ, რომ B და C წერტილებიც სიმეტრიული არიან MN წრფის მიმართ. მართლაც, რადგან $MN \perp AD$ და $BC \parallel AD$, ამიტომ $MN \perp BC$, ხოლო თალესის თეორემის ძალით $BN = NC$. (ცხადია, რომ თუ მართკუთხედზე ავიღებთ ნებისმიერ წერტილს, მისი სიმეტრიული წერტილი MN წრფის მიმართ აგრეთვე მართკუთხედზე მდებარეობს. ამრიგად, $ABCD$ მართკუთხედი სიმეტრიულია MN წრფის მიმართ; თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 88

წრფის მიმართ სიმეტრიული ფიგურების მაგალითებია აგრეთვე წრეწირი, ცენტრზე გამავალი წრფის მიმართ; რომბი, მისი დიაგონალის შემცველი წრფის მიმართ და ა. შ.

3. **ჰომოთეტია.** ვთქვათ F მოცემული ფიგურაა, O კი ფიქსირებული წერტილი (ნახ. 89). F ფიგურის ნებისმიერ X წერტილზე გავავლოთ OX სხივი და მასზე O წერტილიდან გადავდოთ $k \cdot OX$-ის ტოლი OX' მონაკვეთი. სადაც k დადებითი რიცხვია.



ნახ. 89

F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ყოველი X წერტილი გადადის ისეთ X' წერტილში, რომ $OX' = k \cdot OX$, $(k > 0)$, ეწოდება ჰომოთეტია O ცენტრის მიმართ. k რიცხვს ჰომოთეტიის კოეფიციენტი ეწოდება, ხოლო F ფიგურას F' ფიგურის ჰომოთეტიური კოეფიციენტით k. შეკნიშნოთ,

რომ თუ F ფიგურა F' ფიგურის მიმსგავსებურია კოეფიციენტით k, მაშინ F' ფიგურა F ფიგურის მიმსგავსებურია კოეფიციენტით $\frac{1}{k}$.

4. **მოძრაობა.** F ფიგურის F' ტოლფიგურად ისეთი გარდაქმნას, რომელსაც F ფიგურის ნებისმიერი ორი X და Y წერტილი F' ფიგურის ისეთ X' და Y' წერტილებში გადაჰყავს, რომ $XY=X'Y'$, ეწოდება მოძრაობა. ე. ი. მოძრაობა ორი ფიგურის ტოლობის გარდაქმნაა, რომელიც წერტილებს შორის მანძილს ინარჩუნებს. ასეთ გარდაქმნას გადაადგილებასაც უწოდებენ.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ წერტილის ბიშტით სიწეწრის გარდაქმნა და წრეს ძიშტით სიმეტრიის გარდაქმნა მოძრაობების წარმოადგენს.

მოძრაობას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

ა) მოძრაობას წრფეზე მდებარე წერტილები ისევ წრფეზე მდებარე წერტილებში გადაჰყავს ისე, რომ მათი ურთიერთგანლაგება ცვლილი რჩება.

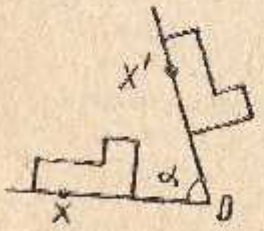
ბ) მოძრაობას წრფეები წრფეებში გადაჰყავს, სხივები — სხივებში, მონაკვეთები კი — მონაკვეთებში.

გ) მოძრაობას კუთხე ტოლ კუთხეში გადაჰყავს.

დ) მიმდევრობით შესრულებული ორი მოძრაობა მოძრაობას წარმოადგენს.

ვთქვათ F ფიგურის F' ფიგურად გარდაქმნას F ფიგურის განსხვავებული წერტილები F' ფიგურის განსხვავებულ წერტილებში გადაჰყავს. დავუშვათ რომ F ფიგურის ნებისმიერი X წერტილი ამ გარდაქმნისას F' ფიგურის X' წერტილში გადადის. F' ფიგურის F ფიგურად გარდაქმნას, რომლის X' წერტილი X წერტილში გადადის, ნოცმეული გარდაქმნა შექცეული გარდაქმნა ეწოდება. მოძრაობა წერტილებს შორის მანძილს ინარჩუნებს, ამიტომ იგი განსხვავებული წერტილებს განსხვავებულ წერტილებში გადაიყვანს. ცხადია, რომ მოძრაობის შექცეული გარდაქმნა მოძრაობაა.

5. **მობრუნება.** მოცემული წერტილის გარშემო მობრუნება ეწოდება ისეთ მოძრაობას, რომელიც ამ წერტილიდან განსხვავებული ყოველი სხივი ურთიერთმაგი მიმართულებით (საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით ან საწინააღმდეგო მიმართულებით) და ურთიერთმავე კუთხით მობრუნებას (ნახ. 90).



ნახ. 90

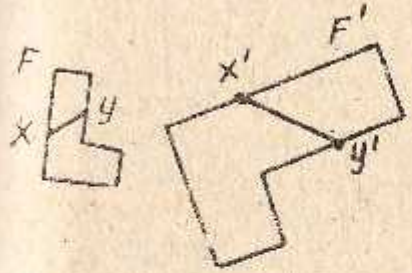
ამრიგად, ფიგურის მობრუნება მოცემულად ჩაითვლება თუ ცნობილია: 1) მობრუნების O ცენტრი 2) მობრუნების α კუთხე; 3) მობრუნების მიმართულება. O ცენტრის გარშემო α კუთხით მობრუნებას R_α^O სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ის ფაქტი, რომ R_α^O მობრუნებას X წერტილი გადაჰყავს X' წერტილში წარმოგნაირად ჩაიწერება: $R_\alpha^O(X)=X'$.

§ 14. ფიგურათა ტოლობა. მსგავსების გარდაქმნა

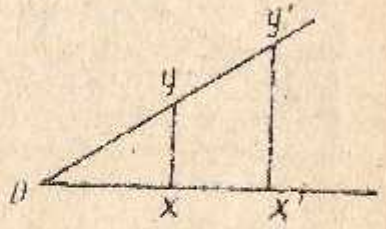
F და F' ფიგურებს ეწოდება ტოლი, თუ მოძრაობით ერთი მათგანი მეორეში გადადის. ფიგურათა ტოლობის აღნიშვნისათვის ჩვეულებრივი ტოლობის „$=$“ ნიშანი გამოიყენება. $F=F'$ ჩანაწერი ნიშნავს F და F' ფიგურების ტოლობას.

სამკუთხედების ტოლობის ნიშნებიდან: $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ — ეგულისხმება, რომ ის წყვილები, რომელებიც მოძრაობით ერთმანეთს შეეთავსებიან, შესაბამის ადგილებზეა ჩაწერილი. შეიძლება ჩვენება, რომ ამ პირობებში სამკუთხედების ტოლობა, რომელიც მოძრაობისას მათი შეთავსებით განისაზღვრება და ტოლობა, როგორც ჩვენ ის აქამდე გვესმოდა, ერთსა და იმავეს გამოხატავს. იგივე ჭეშმარიტია სხვა გეომეტრიული ფიგურების შესახებაც.

F ფიგურას ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, რომ მათი ნებისმიერი X და Y წერტილები გადადის X' და Y' წერტილებში, ისე რომ $X'Y'=k\cdot XY$, $(k>0)$, ამასთან k რიცხვი ყველა X, Y წერტილებისათვის ერთიდაიგივეა, მსგავსების გარდაქმნა ეწოდება (ხან. 91). k რიცხვი მსგავსების კოეფიციენტი ეწოდება. ე. ი. მსგავსების გარდაქმნა წერტილებს შორის მანძილს ერთიდაიმავე რიცხვზე ცვლის.



ნახ. 91



ნახ. 92

თეორემა 14. 1. **ჰომოთეტია მსგავსების გარდაქმნაა.**

დამტკიცება. ვთქვათ, ჰომოთეტიის O ცენტრია და k კოეფიციენტი. X და Y წერტილები გადაჰყავს X' და Y' წერტილებში. (ნახ. 92). ჰომოთეტიის განსაზღვრის თანახმად

$$OX'=k\cdot OX,\quad OY'=k\cdot OY,$$

საიდანაც

$$\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}, \qquad \overrightarrow{OY'} = k\overrightarrow{OY}.$$ *

ვექტორების გამოკლების წესის ძალით

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'},$$

მაშასადამე

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = k\cdot\overrightarrow{OY} - k\cdot\overrightarrow{OX} = k(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = k\overrightarrow{XY}.$$

აქედან $X'Y' = k \cdot XY$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ჰომოთეტია მსგავსების გარდაქმნაა. თეორემა დამტკიცებულია.

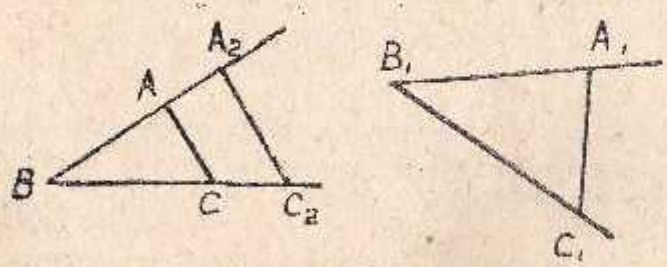
მსგავსების გარდაქმნაა ვაიხია შემდეგი თვისებები:

ა) მსგავსების გარდაქმნას წრფეზე მდებარე წერტილები ყველა წრფეზე მდებარე წერტილებში გადაჰყავს ისე, რომ მათი ურთიერთგანლაგება შეცვლილი არჩება.

ბ) მსგავსების გარდაქმნას წრფეები წრფეებში გადაჰყავს, სხივები — სხივებში, მონაკვეთები კი — მონაკვეთებში.

გ) მსგავსების გარდაქმნას კუთხე მის ტოლ კუთხეში გადაჰყავს.

დავამტკიცოთ უკანასკნელი თვისება, ვთქვათ, მსგავსების გარდაქმ-



ნახ. 92

ნით, რომლის კოეფიციენტია k, ABC კუთხე $A_1B_1C_1$ კუთხეში გადადის (ნახ. 92). განვიხილოთ ABC კუთხის B წვეროს მიმართ ჰომოთეტიის გარდაქმნა, რომლის კოეფიციენტია k. ამ გარდაქმნით A და C წერტილები A_2 და C_2 წერტილებში გადავა. $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად. ამ სამკუთხედებიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

* ვექტორები იხილეთ 30-ე პარაგრაფში.

§ 13. ფიგურათა მსგავსება. სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები

F და F' ფიგურებს მსგავსი ეწოდება, თუ მსგავსების გარდაქმნით ერთი მათგანი მეორეში გადადის. ფიგურათა მსგავსების აღსანიშნავად ∽ ნიშანი გამოიყენება. ჩანაწერი, $F \backsim F'$ ნიშნავს, რომ F ფიგურა F' ფიგურის მსგავსია კოეფიციენტით k ე. ი. თუ X და Y არის F ფიგურის ნებისმიერი წერტილები, ხოლო X', Y' — F' ფიგურის შესაბამისი წერტილები, მა-

შინ $X'Y' = k \cdot XY$. ცხადია, რომ თუ $F \overset{k}{\backsim} F'$, მაშინ $F' \overset{\frac{1}{k}}{\backsim} F$. ხშირად, როდესაც k კოეფიციენტს არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს, დავწერთ $F \backsim F'$ ან $F' \backsim F$. შევნიშნოთ, რომ, თუ $F \backsim F'$ და $F' \backsim F''$, მაშინ $F \backsim F''$.

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ ჩანაწერში იგულისხმება, რომ წვეროები რომლებიც მსგავსებია გარდაქმნით ერთმანეთს შეესაბამება, შესაბამის ალაგილებზეა ჩაწერილი, ანუ A გადადის A_1-ში, B გადადის B_1-ში, C გადადის C_1-ში.

მსგავსების გარდაქმნის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ მსგავსი ფიგურების შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ხოლო შესაბამისი მონაკვეთები — პროპორციული. კერძოდ, მსგავს ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებში

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

თ ე ო რ ე მ ა 13. 1. **ორი სამკუთხედი მსგავსია:**

1) **თუ ერთი სამკუთხედის ორი კუთხე მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის ტოლია;**

2) **თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის პროპორციულია და ამ გვერდებით შექმნილი კუთხეები ტოლია;**

3) **თუ ერთი სამკუთხედის გვერდები მეორე სამკუთხედის გვერდების პროპორციულია.**

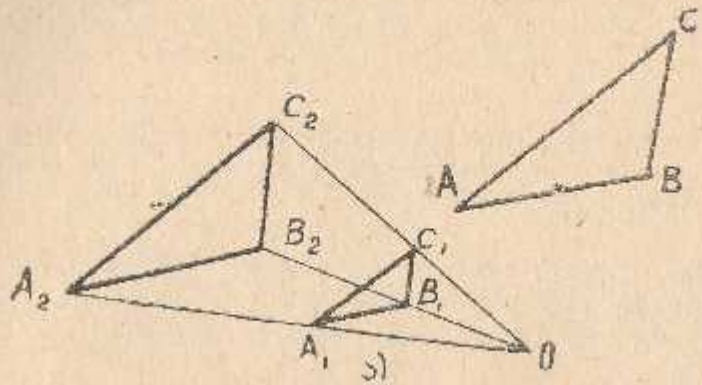
დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებისათვის სრულდება ერთ-ერთი პირობა;

1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$

2) $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;

3) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

გავუხაზოთ პომოთეტია ნებისმიერი O ცენტრით და ბსგავსების კოეფიციენტით $k=\frac{AB}{A_1B_1}$ და გარდავქმნათ $\triangle A_1B_1C_1$ გადიდ $A_2B_2C_2$ სამკუთხედში.



ნახ. 94 ა)

ABC და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედები ტოლია მართლაც, პირველ შემთხვევაში გვაქვს: $\angle A=\angle A_1=\angle A_2$, $\angle B=\angle B_1=\angle B_2$.

$$AB=k\cdot A_1B_1=A_2B_2$$

$\triangle ABC=\triangle A_2B_2C_2$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად. მეორე შემთხვევაში

$$\angle A_2=\angle A, \quad A_2B_2=AB, \quad A_2C_2=AC$$

და სამკუთხედები ტოლია სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად. ვინაიდან $\triangle ABC=\triangle A_2B_2C_2$, ხოლო $\triangle A_2B_2C_2\sim\triangle A_1B_1C_1$ ამიტომ $\triangle ABC\sim A_1B_1C_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია, თუ მათ ერთი მახვილი კუთხე ტოლი აქვთ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია, თუ ერთი მათგანის კათეტები მეორის კათეტების პროპორციულია.

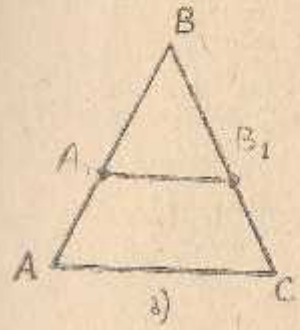
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. მსგავს სამკუთხედებში შესაბამისი სიმაღლეები, ბისექტრისები და medians შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია.

მტკიცება, რომ n-კუთხედები მსგავსია, თუ მათი შესაბამისი გვერდები პროპორციულია და შესაბამისი კუთხეები ტოლია.

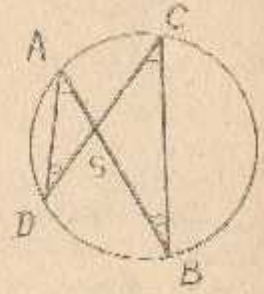
თ ე ო რ ე მ ა 15. 2. **სამკუთხედის რომელიმე გვერდის პარალელური და დანარჩენი ორი გვერდის გადაკვეთი წრფით მიღებული სამკუთხედი მოცემული სამკუთხედის მსგავსია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ A_1B_1 წარმოადგენს სამკუთხედს, რომელიც მიიღება ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდებია გადაკვეთი AC-ს პარალელური წრფით (ნახ. 94 ბ).

რადგან $A_1B_1\parallel AC$, ამიტომ $\angle A=\angle BA_1B_1$ და $\angle C=\angle BB_1A_1$, საიდანაც შესაბამისი კუთხეებია. მაშასადამე $\triangle ABC\sim\triangle A_1BB_1$ (თეორემა 15. 1) თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 94 ბ)



ნახ. 95

თ ე ო რ ე მ ა 15. 3. **ერთიდაიმავე წრეწირის ორი ურთიერთმკვეთი ქორდიდან თითოეულის გაღაკვეთის წერტილით იყოფა მონაკვეთებად, რომელთა ნამრავლი ერთმანეთის ტოლია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ AB და CD ქორდები იკვეთებიან S წერტილში (ნახ. 95). $\triangle ASD\sim\triangle CSB$ სამკუთხედების მსგავსების პირველი ნიშნის თანახმად. მართლაც, $\angle A=\angle C$, როგორც ჩახსახოვანი DB რკალზე დაყრდნობილი ჩახახული კუთხეები და ასევე $\angle D=\angle B$. სამკუთხედებია მსგავსებიდან გვაქვს:

$$\frac{AS}{CS}=\frac{DS}{BS},$$

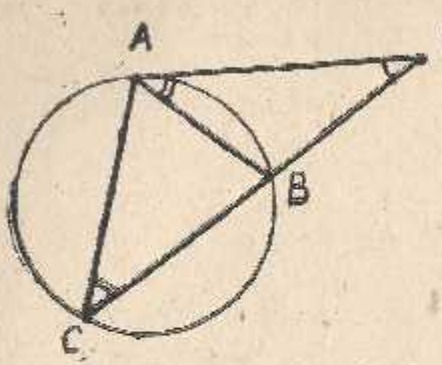
საიდანაც

$$AS\cdot BS=CS\cdot DS.$$ თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 15. 4. **თუ მოცემული წერტილიდან ერთიდაიმავე წრეწირისადმი გავლებულია მხები და მკვეთი, მაშინ მხების მონაკვეთის კვადრატი მკვეთის მონაკვეთების* ნამრავლის ტოლია.**

* მკვეთის მონაკვეთებია SC და SB (ნახ. 95)

დამტკიცება. ვთქვათ SA და SC მოცემული მხები და მკვეთია (ნახ. 96). $\triangle SAC \sim \triangle SBA$ სამკუთხედების მსგავსების პირველი ნიშნის თანახმად. მართლაც, $\angle S$ საერთოა, ხოლო $\angle C = \angle SAB$, რადგან თითოეული მათგანი AB რკალის გრადუსული ზომის ნახევრის ტოლია. სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს:



ნახ. 96

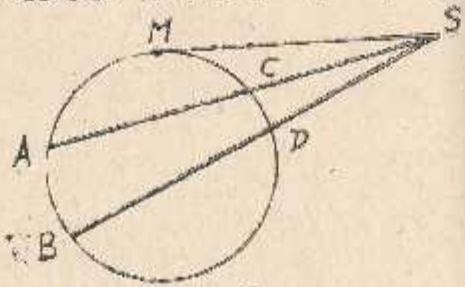
$$\frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SA},$$

საიდანაც

$SA^2 = SB \cdot SC$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 15. 5. თუ მოცემული წერტილიდან ერთიდაიმავე წრეწირისადმი გავლებულია მკვეთები, მაშინ მათი მონაკვეთების ნამრავლი ერთიმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ SA და SB მოცემული მკვეთებია (ნახ 97). თუ გავავლებთ SM მხებს, მაშინ წინა თეორემის თანახმად



ნახ. 97

$$SM^2 = SA \cdot SC,$$
$$SM^2 = SB \cdot SD,$$

საიდანაც

$$SA \cdot SC = SB \cdot SD,$$

თეორემა დამტკიცებულია.

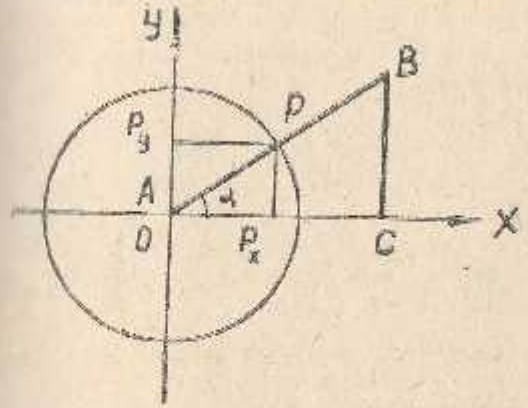
ᲙᲘᲗᲮᲕᲔᲑᲘ ᲗᲕᲘᲗᲣᲛᲝᲛᲖᲔᲓᲕᲔᲚᲝᲑᲘᲡᲗᲕᲘᲡ

1. რამდენ წერტილში ეწოდება მოცემული წერტილის მიმართ სიმეტრიული?
2. რას ეწოდება წრეწირის მიმართ სიმეტრიის ცვლილება?
3. რამდენ ფიგურას ეწოდება ცენტრულ-სიმეტრიული?
4. რას ეწოდება ფიგურის სიმეტრიის ცენტრი?
5. რამდენ წერტილში კვეთს მოცემული წრეწირის მიმართ სიმეტრიული?
6. რას ეწოდება მოცემული წრეწირის მიმართ სიმეტრიის განვლენა?
7. რამდენ ფიგურას ეწოდება წრეწირის მიმართ სიმეტრიული?
8. რა ეწოდება ფიგურის სიმეტრიის ღერძი?

9. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხედის გვერდის წეაწირთობა ამ მართკუთხედის სიმეტრიის ღერძის წარმოადგენს.
10. რას ეწოდება პიპერბოლა?
11. რა არის პიპერბოლის ცენტრი, პიპერბოლის კოეფიციენტი?
12. რას ეწოდება პიპერბოლის ასიმპტოტა?
13. ჩამოთვალეთ პიპერბოლის თვისებები.
14. რას ეწოდება პარაბოლა?
15. რისგან დამოკიდებულია პარაბოლის ფორმა?
16. რას ეწოდება პარაბოლის განდაგნა?
17. დაამტკიცეთ, რომ პარაბოლის პარაბოლის განდაგნაა.
18. ჩამოთვალეთ პარაბოლის განტოლების თვისებები.
19. რისგან დამოკიდებულია პარაბოლის ფორმა?
20. დაამტკიცეთ სამკუთხედის პარაბოლის ნაწილები.
21. ჩამოთვალეთ პარაბოლის სამკუთხედის პარაბოლის ნიშნები.
22. დაამტკიცეთ ერთი დადებული წრეწირის თანა ერთიდაიმავე მხრიდან ტოლობა.
23. დაამტკიცეთ პარაბოლის წერტილიდან ერთიდაიმავე წრეწირისადმი გავლებული მხებების და მკვეთის თვისება.
24. დაამტკიცეთ პარაბოლის წერტილიდან ერთიდაიმავე წრეწირისადმი გავლებული მკვეთების თვისება.

§ 10. ᲓᲐᲛᲝᲙᲘᲓᲔᲑᲣᲚᲔᲑᲐ ᲞᲐᲠᲐᲛᲔᲢᲠᲘᲖᲔᲑᲣᲚᲘ ᲡᲐᲮᲘᲗ ᲛᲝᲪᲔᲛᲣᲚᲘ ᲬᲔᲠᲢᲘᲚᲘᲡ ᲒᲐᲕᲔᲠᲓᲔᲑᲘᲡᲐ ᲓᲐ ᲙᲣᲗᲮᲔᲕᲔᲑᲘᲡ ᲨᲔᲡᲐᲮᲔᲑ

ვთქვათ, ABC მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის C კუთხე მართია და A წვეროსთან მდებარე ჭიხვილი კუთხე უდრის α-ს. ავირჩიოთ XOY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ მისი სათავე დაემთხვეს სამკუთხედის A წვეროს, AC კათეტი აბსცისთა ღერძზე მდებარეობდეს, ხოლო B წვერტილი — პირველ მეოთხედში (ნახ. 98).



ნახ. 98

გავიხსენოთ ანალიზური გეომეტრიიდან წრეწირის ცენტრის კოორდინატთა საშუალებით. ერთეულოვანი წრეწირის P წერტილიდან კოორდინატთა ღერძებზე დაგუწვათ PP_x და PP_y მართობები. სინუსის და კოსინუსის განსაზღვრების თანახმად

$$OP_x = \cos\alpha, \quad OP_y = \sin\alpha.$$

ამიტომ

$$\frac{BC}{AB} = \frac{PP_x}{AP} = \frac{\sin\alpha}{1} = \sin\alpha,$$

ტაც დგან

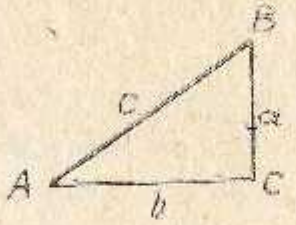
$$\triangle ABC \sim \triangle APP_x,$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AP_1}{AP}=\frac{\cos\alpha}{1}=\cos\alpha.$$

აქედან

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{BC}{AC},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{AC}{BC}.$$

ამრიგად, თუ გავიხსენებთ a და b კათეტებისა და c ჰიპოტენუზის მქონე ABC მართკუთხა სამკუთხედს (ნახ. 99), შეიძლება დავასკვნათ: მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებაა ჰიპოტენუზასთან ამ კუთხის სინუსი, მიმდებარე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან — კოსინუსი, მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება მიმდებარე კათეტთან — ტანგენსი, ხოლო მიმდებარე კათეტის შეფარდება მოპირდაპირე კათეტთან — კოტანგენსი. ე. ი.



ნახ. 99

$$\frac{a}{c}=\sin A,\quad \frac{b}{c}=\cos A,\quad \frac{a}{b}=\operatorname{tg}A,\quad \frac{b}{a}=\operatorname{ctg}A.$$

აქედან

$$a=c\cdot\sin A,\quad b=c\cdot\cos A,\quad a=b\cdot\operatorname{tg}A,\quad b=a\cdot\operatorname{ctg}A,$$

მაშასადამე:

მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი უდრის ჰიპოტენუზის, გამრავლებულს ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხის სინუსზე ან მიმდებარე კუთხის კოსინუსზე.

მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი უდრის მეორე კათეტს, გამრავლებულს პირველი კათეტის მოპირდაპირე კუთხის ტანგენსზე ან მიმდებარე კუთხის კოტანგენსზე.

§ 17. პითაგორას თეორემა

თ ე ო რ ე მ ა 17. 1. (პითაგორა), **მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის კვადრატი კათეტების კვადრატების ჯამის ტოლია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ ABC მოცემული მართკუთხა სამკუთხედია C მართი კუთხით. C მართი კუთხის წვეროდან გავავლოთ CD სიმაღლე (ნახ. 100). $\triangle ACD$-დან

$$\cos A=\frac{b_c}{b},$$

ხოლო $\triangle ABC$-დან

$$\cos A=\frac{b}{c},\ \text{ე. ი.}\ \frac{b_c}{b}=\frac{b}{c},$$

საიდანაც

$$b^2=c\cdot b_c \tag{1}$$

ანალოგიურად

$$a^2=c\cdot a_c. \tag{2}$$

(1) და (2) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ:

$$a^2+b^2=c\cdot a_c+c\cdot b_c=c(a_c+b_c)=c\cdot c=c^2,$$

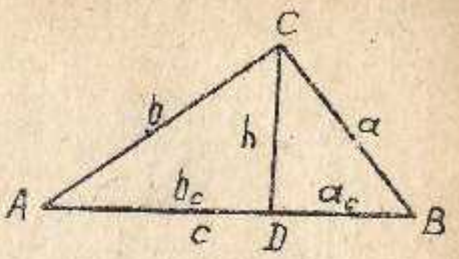
ამრიგად,

$$a^2+b^2=c^2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(1) და (2) ტოლობები ნიშნავს, რომ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის კვადრატი ჰიპოტენუზისა და მიპოტენუზაზე ამ კათეტის გეგმილის ნამრავლის ტოლია.

პითაგორას თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ერთსადაიმავე წერტილიდან წრფისადმი გავლებულია მართობი და დახრილი, მაშინ დახრილი მართობზე მეტია, ტოლ დახრილებს ტოლი გეგმილები აქვთ, ორი დახრილიდან იმას მეტი, რომლის გეგმილიც მეტია.



ნახ. 100

თ ე ო რ ე მ ა 17.2. **მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის კვადრატი ჰიპოტენუზაზე კათეტების გეგმილების ნამრავლის ტოლია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ ABC მოცემული მართკუთხა სამკუთხედია C მართი კუთხით. C მართი კუთხის წვეროდან გავავლოთ CD სიმაღლე (ნახ. 100).

$\triangle ACD$-დან $$h=b_c\cdot\operatorname{tg}A, \tag{3}$$

ხოლო $\triangle BCD$-დან

$$h=a_c\cdot\operatorname{tg}B=a_c\cdot\operatorname{tg}(90^\circ-A)=a_c\cdot\operatorname{ctg}A. \tag{4}$$

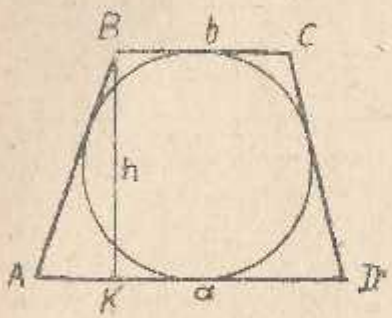
(3) და (4) ტოლობების გადამრავლებით მივიღებთ:

$$h^2=a_c\cdot b_c \tag{5}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 17. 3. წრეზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ხაზოლის კვადრატი ფუძეების ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. განვიხილოთ წრეზე შემოხაზული $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეცია (ნახ. 101). B წვეროდან დავუშვათ BK სიმაღლე. ვთქვათ, $AD=a$, $BC=b$, $BK=h$. ABK მართკუთხა სამკუთხედიდან



ნახ. 101

$$h^2=AB^2-AK^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab.$$

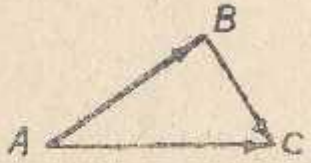
თეორემა დამტკიცებულია.

§ 18. კოსინუსების თეორემა. სინუსების თეორემა

თეორემა 18.1. (კოსინუსების თეორემა). **სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის კვადრატი უდრის დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამ გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორკეცებული ნამრავლი.**

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ABC სამკუთხედი (ნახ. 102). დავამტკიცოთ, რომ $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

განვიხილოთ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ და $\vec{BC}$ ვექტორები.* ვიცით ვექტორული ტოლობა



ნახ. 102

$$\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$$

და ამიტომ

$$BC^2=\vec{BC}^2=(\vec{AC}-\vec{AB})^2=\vec{AC}^2-\vec{AB}^2-2\vec{AC}\cdot\vec{AB}=$$
$$=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

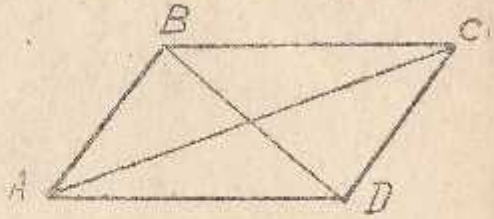
თეორემა 18. 2. **პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი მისი გვერდების კვადრატების ჯამის ტოლია.**

---

*) ვექტორები ამოცანა ანდ-ე მოთავსებულია.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი (ნახ. 103). ABC და ABD სამკუთხედებისათვის კოსინუსების თეორემა გვაძლევს:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B,$$
$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A.$$



ნახ. 103

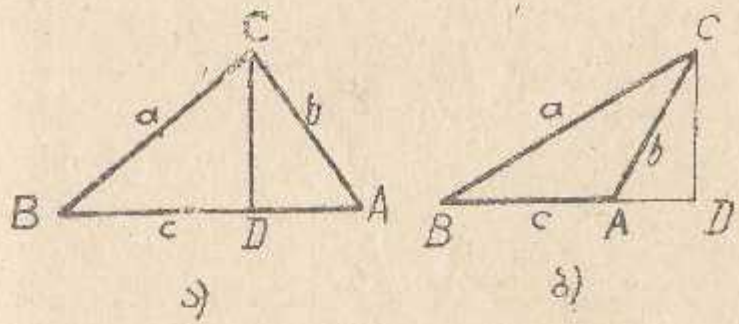
თუ მიღებულ ტოლობებს შევკრებთ და გავითვალისწინებთ, რომ $AB=CD$, $BC=AD$ და $\cos B=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$, გვექნება:

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 18. 3 (სინუსების თეორემა). **სამკუთხედის გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ABC სამკუთხედი.



ნახ. 104

რომლის გვერდებია a, b და c (ნახ. 104). დავამტკიცოთ, რომ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

C წეროდან დავუშვათ CD სიმაღლე. თუ A კუთხე მახვილია (ნახ. 104, ა), მაშინ $CD=b\sin A$. თუ A კუთხე ბლაგვია (ნახ. 104, ბ), მაშინ $CD=b\sin(180^\circ-A)=b\sin A$. ანალოგიურად, BCD სამკუთხედიდან მივიღებთ: $CD=a\sin B$. ამრიგად,

$$a\sin B=b\sin A,$$

საიდანაც

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

ანალოგიურად, თუ სამაღლეს დავუშვებთ A წვეროდან, დამტკიცდება ტოლობა

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

ამრიგად,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

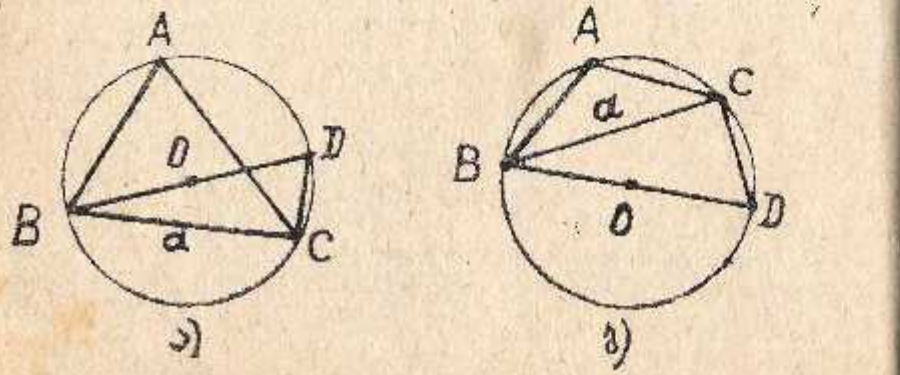
თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 15.4. **სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის შეფარდება მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან უდრის ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრს.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ a არის ABC სამკუთხედის A კუთხის მოპირდაპირე გვერდი, ხოლო R — ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი. დავამტკიცოთ, რომ

$$\frac{a}{\sin A}=2R.$$

სამკუთხედის A-გან გახსოვდეთ ცნობილ წესით წვეროზე, მაგალითად B-ზე, გავავლოთ BD დიამეტრი (ნახ. 105) და D წერტილი შევაერთოთ C-სთან. BCD სამკუთხედი მართკუთხაა, რადგან $\angle BCD=90°$, ხოლო BD დიამეტრით მოცემულ რკალზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხე. ამ სამკუთხედიდან $a=BD\sin D=2R\sin D$. მაგრამ $\sin D=\sin A$, რადგან თუ A კუთხე მახვილია (ნახ. 105, ა) $\angle D=\angle A$ როგორც ერთიდაიმავე



ნახ. 105

რკალზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეები, ხოლო თუ A კუთხე ბლაგვია (ნახ. 105, ბ), მაშინ $\angle A+\angle D=180°$ და $\sin D=\sin(180°-A)=\sin A$. მაშასადამე

$$a=2R\sin A,$$

საიდანაც

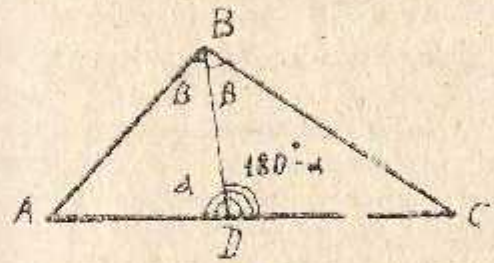
$$\frac{a}{\sin A}=2R.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 16. სამკუთხედის კუთხის ბისექტრისა ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდს მამცნებარე გვერდების ანალოგიურ მონაკვეთებად ყოფს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ BD მოცემული ABC სამკუთხედის ბისექტრისაა (ნახ. 106). დავამტკიცოთ, რომ

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}.$$



ნახ. 106

ABD და CBD სამკუთხედებისათვის გამოვიყენოთ სინუსების თეორემა:

$$\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\alpha},$$

$$\frac{CD}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin(180°-\alpha)}=\frac{BC}{\sin\alpha}.$$

თუ პირველ ტოლობას შეთრევზე გავყოფთ, მივიღებთ:

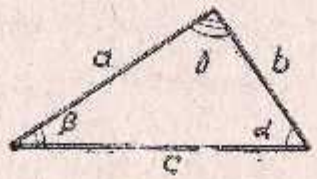
$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 19. სამკუთხედის ამოხსნა

სამკუთხედის ამოხსნა ნიშნავს მისი ცნობილი კუთხეებისა და გვერდების მიხედვით, ვიპოვოთ ეცნობილ გვერდები და კუთხეები. სამკუთხედის გვერდები აღვნიშნოთ a, b და c -თი, ხოლო გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები შესაბამისად α, β და γ-თი (ნახ. 107). სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს ამ სამკუთხედის ელემენტები ეწოდება. ვიჩვენოთ ჯერ სამ-

კუთხედის ამოხსნა შესაძლებელია, თუ ცნობილია მისი სამი ელემენტი, რომელთაგან ერთი მაინც გვერდია. განვიხილოთ ყველა შესაძლო შემთხვევა.



ნახ. 107

1. მოცემულია სამკუთხედის გვერდი და ორი კუთხე. ვიპოვოთ მესამე კუთხე და დანარჩენი ორი გვერდი.

ამოხსნის გზა. რადგან სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180°-ია, ამიტომ მესამე კუთხე, მოცემული კუთხეებით გამოისახება. როცა გვეცნობება გვერდი და სამიეე კუთხე, სინუსების თეორემის მიხედვით ვიპოვით დანარჩენ ორ გვერდს. ამოცანას ყოველთვის აქვს ამონახსენი და მასთან ერთადერთია. ცხადია, მოცემული ორი კუთხის ჯამი 180°-ზე ნაკლები უნდა იყოს. ამონახსნის ერთადერთობა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნიდან გამომდინარეობს.

2. მოცემულია ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე. ვიპოვოთ დანარჩენი ორი კუთხე და მესამე გვერდი.

ამოხსნის გზა. კოსინუსების თეორემით ვიპოვით მესამე გვერდს. ახლა, რადგან გვაქვს სამი გვერდი, კოსინუსების თეორემით შეიძლება დანარჩენი კუთხეების კოსინუსების, ე. ი. თვით კუთხეების გამოთვლა. ამოცანას ყოველთვის აქვა ამონახსენი, და მასთან ერთადერთია. ამონახსნის ერთადერთობა სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნიდან გამომდინარეობს.

3. მოცემულია ორი გვერდი, მაგალითად a და b და ერთ-ერთი მათუახის მოპირდაპირე კუთხე, მაგალითად α. ვიპოვოთ დანარჩენი ორი კუთხე და მესამე გვერდი.

ამოხსნის გზა. სინუსების თეორემით ვიპოვით $\sin\beta$-ს. $\sin\beta$-ს მიხედვით ვიპოვით მის შესაბამის β_1 და β_2 კუთხეებს. ამ კუთხეებიდან ავიღებთ ერთს ან ორივეს იმის გათვალისწინებით, რომ a და b გვერდებიდან მეტი გვერდის პირდაპირ მეტი კუთხე ძევს. როცა უკვე ცნობილია α და β კუთხეები, ვიპოვით $\gamma=180°-\alpha-\beta$ კუთხეს, შემდეგ კი სინუსების თეორემის მიხედვით — c გვერდს. წინა ორი ამოცანისაგან განსხვავებით ამ ამოცანას შეიძლება არ ჰქონდეს ამონახსენი, ჰქონდეს ერთი ან ორი ამონახსენი.

4. მოცემულია სამკუთხედის სამი გვერდი. ვიპოვოთ მისი კუთხეები.

ამოხსნის გზა. კოსინუსების თეორემით ვიპოვით ერთ-ერთ კუთხეს. ანალოგიურად ვიპოვით მეორე კუთხეს, მესამე კუთხეს კი — სამეულის კუთხეების საშუალებით. ამ ამოცანას ყამინ აქვს ამონახსენი, რადგან უდიდესი გვერდი დანარჩენი ორი გვერდის ჯამზე ნაკლებია.

შევახსენოთ, რომ თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, საკმარისია გამოვიყენოთ მე-16 პარაგრაფში მოყვანილი თანაფარდობები სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის.

ამოცანები თვითშემოწმებისათვის

1. ჩამოაყალიბეთ დამოკიდებულება მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის.
2. დაამტკიცეთ პითაგორას თეორემა.
3. დაამტკიცეთ კოსინუსების თეორემა.
4. რა დამოკიდებულებაა პარალელოგრამის გვერდებსა და დიაგონალებს შორის?
5. დაამტკიცეთ სინუსების თეორემა.
6. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის შეფარდება მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის ტოლია.
7. დაამტკიცეთ სამკუთხედის კუთხის ბისექტრისის თვისება.

§ 21. ფიგურათა ფართობები

ფიგურის ფართობის მოძებნის ამოცანა შორეულ წარსულს განეკუთვნება. იგი დაკავშირებულია აღმოსავლეთ პრაქტიკულ საქმიანობასთან.

წარმოვიდგინოთ მიწის ორი ნაკვეთი: ერთი კვადრატის ფორმის, მეორე კი ნებისმიერი ფორმის. ვთქვათ ორივე ნაკვეთზე ხორბლის დათესვის შემდეგ გამოირკვა, რომ პირველ ნაკვეთს m კგ მარცვალი დასჭირდა, მეორეს კი — n კგ. ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ მეორე ნაკვეთი $\frac{n}{m}$-ჯერ მეტია პირველზე. რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს რამდენჯერ მეტია მეორე ნაკვეთი პირველზე, მეორე ნაკვეთის ფართობს ვუწოდებთ. პირველი ნაკვეთი აქ საზომი ერთეულია. ამ აზრით ერთმანეთს შეიძლება შევადაროთ პრტყელი კვადრატი და ნებისმიერი ბრტყელი ფიგურა*, სადაც ბრტყელი კვადრატი საზომი ერთეულია. ფართობის ცნებას ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს ფართობის შემდეგი თვისებები:

1. ყოველ ბრტყელ ფიგურას გარკვეული ფართობი აქვს.
2. ტოლ ფიგურებს ტოლი ფართობები აქვთ (ტოლი ფართობების მქონე ფიგურებს ტოლდიდი ეწოდებათ).
3. თუ ფიგურა ორ ნაწილად გავყოფთ, მაშინ ამ ნაწილების ფართობთა ჯამი მოცემული ფიგურის ფართობის ტოლია.

ქვემოთ, ჩვენ გამოვიყენებთ სხვადასხვა ბრტყელი მრავალკუთხედების ფართობის გამოსათვლელ ფორმულებს. ამასთან, როცა სამკუთხედის,

---

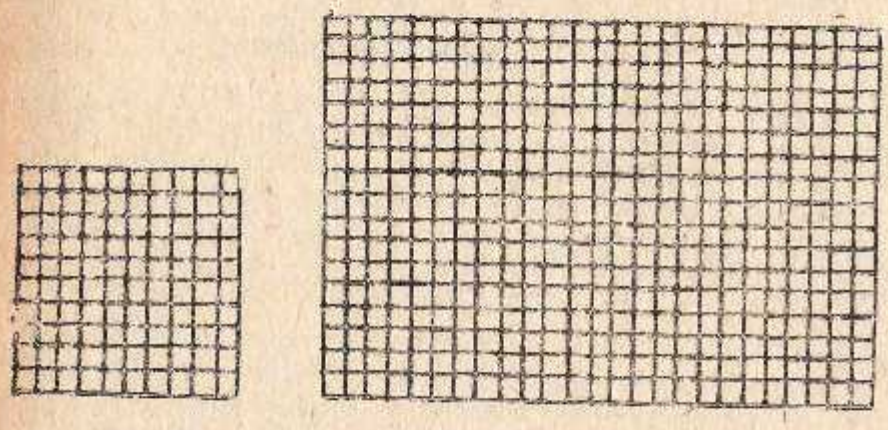
* როდესაც ბრტყელი ფიგურის ფართობზე ვსაუბრობთ, მხედველობაში გვაქვს მართივი ფიგურები, ე. ი. ისეთი ფიგურები, რომლებიც სამკუთხედებად დაიყოფიან, ან ერთი და ისივე ნაწილები.

პარალელოგრამის, ტრაპეციის და საზოგადოდ, მრავალკუთხედის ფართობზე ვილაპარაკებთ, მრავალკუთხედის გვერდებად კი ვიგულისხმებთ მრავალკუთხედების წრფივ ნაწილებს.

მართკუთხედის ფართობი

ვთქვათ მოცემულია კვადრატი, რომელიც ფართობის საზომად ერთეული და მართკუთხედი, რომლის ფართობიც უნდა ვიპოვოთ (ნახ. 108). სიგრძის ერთეულს კვადრატის გვერდი წარმოადგენს.

ვხედავთ, განსხვავებულია ეს შემთხვევა, როცა მართკუთხედის გვერდების a და b სიგრძეები ასეთი სასრული მთელი რიცხვებით გამოისახება, რომლებშიც შეიძლება შემდეგ ათწილადი ნაწილების რაოდენობა n-ის არ აღემატება.



ნახ. 108

კვადრატის გვერდები 10^n ტოლ ნაწილად დავყოთ და დაყოფის წერტილებზე კვადრატის გვერდების პარალელური წრფეები გავავლოთ. კვადრატი $10^n \cdot 10^n = 10^{2n}$ პატარა კვადრატად დაიყოფება. უპირველეს პატარა კვადრატის ფართობი, ფართობის თვისების თანახმად დიდი კვადრატის ფართობის პატარა კვადრატების ფართობთა ჯამს ტოლია. რადგან დიდი კვადრატის ფართობი ერთეულის ტოლია და პატარა კვადრატების რაოდენობა 10^{2n}-ს უდრის, ამიტომ პატარა კვადრატის ფართობია $\frac{1}{10^{2n}}$.

რადგან $a : \frac{1}{10^n} = a \cdot 10^n$ და $b : \frac{1}{10^n} = b \cdot 10^n$ მთელი რიცხვებია, ამიტომ მართკუთხედის გვერდები შეიძლება დაიყოს ტოლ ნაწილებად, რომელთაგან თითოეულის სიგრძე $\frac{1}{10^n}$-ის ტოლია. a გვერდზე $a \cdot 10^n$ ასეთი ნაწილი იქნება, b გვერდზე კი $b \cdot 10^n$. გვერდების დაყოფის წერტილებზე გავავლოთ მართკუთხედის გვერდების პარალელური წრფეები. მართკუთხედი დაიყოფება პატარა კვადრატებად. რომელთა გვერდია $\frac{1}{10^n}$, ძალი რაოდენობა კი არის $a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^n$. მართკუთხედის ფართობი უდრის მასში შემავალი პატარა კვადრატების ფართობთა ჯამს. რადგან პატარა კვადრატის ფართობია $\frac{1}{10^{2n}}$, სულ კი მათი რაოდენობაა $ab \cdot 10^{2n}$, ამიტომ მართკუთხედის ფართობია

$$ab \cdot 10^{2n} \cdot \frac{1}{10^{2n}} = ab.$$

ვთქვათ, ახლა მართკუთხედის a და b გვერდებიდან ერთი მაინც უსასრულო ათწილადით გამოისახება. a_1-ით და a_2-ით აღვნიშნოთ a რიცხვის მიახლოებითი შნიშვნელობები ნაკლებობით და ზეტობით n ათობითი ნიშნის სიზუსტით. b რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობები იმავე სიზუსტით b_1-ით და b_2-ით აღვნიშნოთ. იმ მართკუთხედის ფართობში, რომლის გვერდებია a_1, b_1, მოცემული მართკუთხედის ფართობზე ნაკლებია, რადგან იგი მოკვეთილი მართკუთხედის შიგნით შეიძლება მოთავსდეს. ხოლო იმ მართკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდებია a_2, b_2 მოცემული მართკუთხედის ფართობზე მეტია, რადგან მოკვეთილი მართკუთხედი შეიძლება მოთავსდეს მასში. დამტკიცებულის თანახმად a_1 და b_1 გვერდების მქონე მართკუთხედის ფართობი a_1b_1-ს უდრის, a_2 და b_2 გვერდების მქონე მართკუთხედის ფართობი კი a_2b_2-ს. ამრიგად მოცემული მართკუთხედის S ფართობი a_1b_1-სა და a_2b_2-ს შორის არის მოთავსებული. რადგან, როცა n საკმარისად დიდია, a_1b_1 და a_2b_2 გვაძლევს ab-ს მეათასედებით მნიშვნელობას ნებისმიერი წინასწარ მოცემული სიზუსტით, ამიტომ $S = ab$, ამრიგად, მართკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით: $S = a \cdot b$.

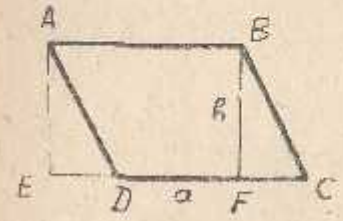
პარალელოგრამის ფართობი

თ ე ო რ ე მ ა 20. 1. პარალელოგრამის ფართობი მისი გვერდისა და **ამ გვერდზე დაშვებული** სიმაღლის ნამრავლის ტოლია, ე. ი. $S = ah$ (ნახ. 109).

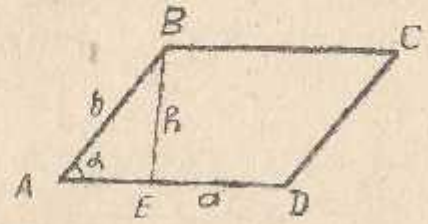
დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია (ნახ. 109). თუ იგი მართკუთხედი არაა, მაშინ მისი ერთ-ერთი კუთხე, ვთქვათ A, მახვილია. A წვეროდან DC წრფეზე დაეშვათ AE სიმაღლე. $ABCE$ ტრაპეციის ფართობი ABD პარალელოგრამისა და ADE სამ-

კუთხედის ფართობთა ჯამის ტოლია. B წვეროდან დავუშვათ BF სიმაღლე. ბიშიან $ABCE$ ტრაპეციის ფართობი $ABFE$ მართკუთხედისა და BCF სამკუთხედის ფართობთა ჯამის ტოლია. ADE და BCF მართკუთხა სამკუთხედები ტოლია პიპოტენუზათა და კათეტით, მაშასადამე, მათი ფართობებიც ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობი $ABFE$ მართკუთხედის ფართობის ტოლია, ანუ $AB \cdot BF$ ნამრავლს უდრის. თეორემა დამტკიცებულია.

ხშირად საჭიროა პარალელოგრამის ფართობის გამოთვლა, როდესაც ცნობილია პარალელოგრამის ორი გვერდი და მათ შორის შემავალი კუთხე.



ნახ. 109



ნახ. 110

ვთქვათ პარალელოგრამის a და b გვერდებს შორის მდებარე α კუთხე მახვილია (ნახ. 110). თუ a გვერდზე დავუშვებთ h სიმაღლეს, მაშინ პარალელოგრამის ფართობისათვის გვექნება

$$S=ah$$

ABE მართკუთხა სამკუთხედიდან $h=b\sin\alpha$, ამიტომ $S=ab\sin\alpha$.

ეს ფორმულა სამართლიანია მაშინაც, როდესაც α კუთხე ბლაგვია. ნამდვილად, ამ შემთხვევაში პარალელოგრამის მახვილი კუთხე $(180°-\alpha)$-ს ტოლია, ხოლო $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$.

ამრიგად, პარალელოგრამის S ფართობი მისი a და b გვერდებისა შორის მდებარე α კუთხის სინუსის ნამრავლის ტოლია, ე. ი. $S=ab\sin\alpha$.

სამკუთხედის ფართობი

თეორემა 20. 2. სამკუთხედის ფართობი მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია, ე. ი. $S=\frac{1}{2}ah$ (ნახ. 111).

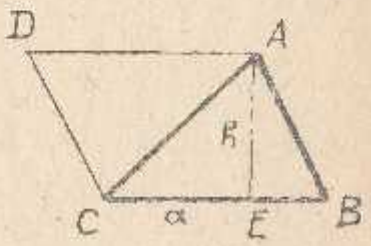
დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, ABC მოცემული სამკუთხედია. შევავსოთ ეს სამკუთხედი $ABCD$ პარალელოგრამამდე, ისე როგორც 111-ე

ნახაზზეა ნაჩვენები. პარალელოგრამის ერთი ABC და CDA სამკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია. რადგან ეს სამკუთხედები ტოლია, ამიტომ ABC სამკუთხედის ფართობი $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობის ნახევარს უდრის. პარალელოგრამის სიმაღლე, რომელიც BC გვერდზეა დაშვებული, სამკუთხედის BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ტოლია. ე. ი. $S=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}ah$. თეორემა დამტკიცებულია.

რადგან a და b გვერდებისა და მათ შორის მდებარე α კუთხის მქონე სამკუთხედის ფართობი უდრის იმავე გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის მქონე პარალელოგრამის ფართობის ნახევარს, ამიტომ სამკუთხედის S ფართობი შეიძლება გამოითვლოს ფორმულით: $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

შევნიშნოთ, რომ, თუ სამკუთხედი ტოლგვერდაა, მაშინ $a=b$ და $\alpha=60°$. ამიტომ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



ნახ. 111

გავიხსენოთ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი კიდევ ერთი ფორმულა:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

სადაც a, b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო p ნახევარპერიმეტრი. ამ ფორმულას ჰერონის ფორმულა ეწოდება.

გვაქვს

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

სადაც γ სამკუთხედის კუთხეა, რომელიც c გვერდის პირდაპირ მდებარეობს, კოსინუსების თეორემის მიხედვით

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

აქედან

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$\sin^2\gamma = 1-\cos^2\gamma = (1+\cos\gamma)(1-\cos\gamma) =$$

$$= \left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\times$$

$$\times\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{4a^2b^2}\times$$

$$\times(c+a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $(a+b+c)=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $c+a-b=2p-2a$, მივიღებთ:

$$\sin\gamma=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ამრიგად,

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

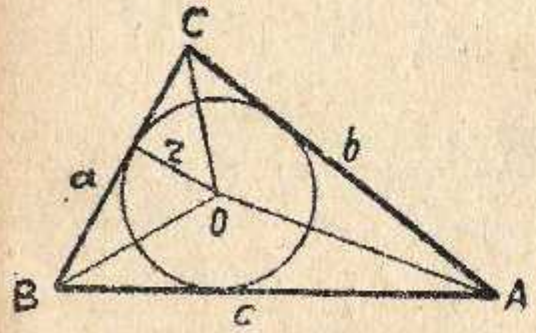
სამკუთხედის S ფართობის საშუალებით მასზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების R და r რადიუსები გამოითვლება ფორმულით:

$$R=\frac{abc}{4S},\qquad r=\frac{S}{p},$$

სადაც a, b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო p ნახევარპერიმეტრი.

გამოვიყვანოთ პირველი ფორმულა. რადგანაც ვიცით $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$, სადაც α სამკუთხედის a გვერდის მოპირისპირე კუთხეა (თეორემა 18, 1). თუ შევნიშნავთ, რომ $2bc\sin\alpha=4S$, მივიღებთ $R=\frac{abc}{4S}$.

გამოვიყვანოთ მეორე ფორმულა. ABC სამკუთხედის ფართობი OAB, OBC, და OCA სამკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია (ხატ. 112),



ხატ. 112

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=$$

$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rp.$$

ე. ი. $S=pr$ (1)

აქედან $r=\frac{S}{p}$,

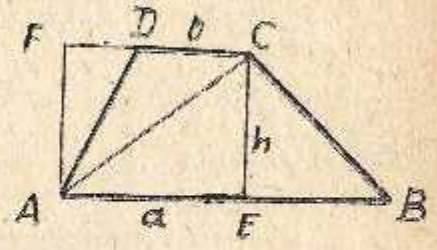
(1) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ სამკუთხედის ფართობი მისი პერიმეტრისა და ჩახაზული წრეწირის რადიუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ მრავალკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი*, მაშინ მრავალკუთხედის ფართობი მისი პერიმეტრის და ჩახაზული წრეწირის რადიუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

ტრაპეციის ფართობი

თეორემა 20, 3. **ტრაპეციის ფართობი მისი ფუძეების ნახევარჯამისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია, ე. ი.** $S=\frac{a+b}{2}h$ (ნახ. 113).

დამტკიცება. გვაქვს, $ABCD$ მოცემული ტრაპეციაა (ნახ. 113). გავავლოთ AC დიაგონალი. ტრაპეციის ფართობი ABC და CDA სამკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია. ABC სამკუთხედის ფართობია $\frac{1}{2}AE\cdot CE$, CDA სამკუთხედის ფართობი კი — $\frac{1}{2}DC\cdot AF$. ამ სამკუთხედების CE და AF სიმაღლეები ტრაპეციის h სიმაღლის ტოლია. მაშასადამე,



ხატ. 113

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot h+\frac{1}{2}DC\cdot h=\frac{AB+DC}{2}h=\frac{a+b}{2}h.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. ტრაპეციის ფართობი მისი შუამონაკვეთის და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

ჩახაზული ოთხკუთხედის ფართობი

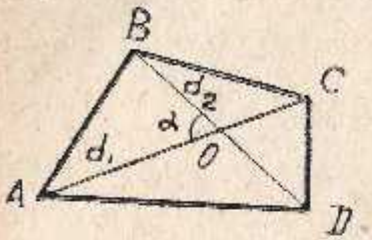
თეორემა 20, 4. **ნებისმიერი ოთხკუთხედის ფართობი მისი დიაგონალებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია, ე. ი.**

$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$ (ხატ. 114).

---

* მრავალკუთხედში ჩახაზული წრეწირის განსაზღვრება იხილეთ § 21-ში.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია $ABCD$ ოთხკუთხედი. გავლებთ AC და BD დიაგონალებს, რომელთა შორის ერთ-ერთი კუთხე აღვნიშნოთ α-თი (ნახ. 114). $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობი ტოლია ამ ოთხი სამკუთხედის ფართობთა ჯამის. ე. ი.



ნახ. 114

$$S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BOC}+S_{COD}+$$
$$+S_{AOD}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\sin\alpha+$$
$$+\frac{1}{2}BO\cdot CO\sin(180^\circ-\alpha)+$$
$$+\frac{1}{2}CO\cdot DO\sin\alpha+$$
$$+\frac{1}{2}AO\cdot DO\sin(180^\circ-\alpha)=$$
$$=\frac{1}{2}BO(AO+CO)\sin\alpha+\frac{1}{2}DO(AO+CO)\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}(AO+CO)(BO+DO)\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრების და შართობეების შეფარდება

თეორემა 20. 5. **მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრების შეფარდება შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ $A_1A_2\ldots A_n$ და $B_1B_2\ldots B_n$ მსგავსი მრავალკუთხედებია. ამ მრავალკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\ldots=\frac{A_nA_1}{B_1B_1}$$

აქედან, ტოლ ფარდობათა თვისების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{A_1A_2+A_2A_3+\ldots+A_nA_1}{B_1B_2+B_2B_3+\ldots+B_nB_1}=\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\ldots=\frac{A_nA_1}{B_nB_1}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 20. 6. **მსგავსი მრავალკუთხედების ფართობთა შეფარდება შესაბამისი გვერდების შეფარდების კვადრატის ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ F_1 მრავალკუთხედი F_2 მრავალკუთხედის მსგავსია. F_1 მრავალკუთხედი დავყოთ სამკუთხედებად: Δ_1', Δ_2', ... Δ_n'. მსგავსების გარდაქმნას, რომელსაც F_1 მრავალკუთხედი F_2-ში გადაჰყავს, ამ სამკუთხედებს F_2 მრავალკუთხედის Δ_1'', Δ_2'', ... Δ_n'' სამკუთხედებში გადიყვანს. F_1 მრავალკუთხედის ფართობი Δ_1', Δ_2', ... Δ_n' სამკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია, F_2 მრავალკუთხედის ფართობი კი — Δ_1'', Δ_2'', ... Δ_n'' სამკუთხედების ფართობთა ჯამისა.

ვთქვათ, მსგავსების კოეფიციენტია k. თუ Δ_n' სამკუთხედის გვერდია a_n', ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლე h_n', მაშინ Δ_n'' სამკუთხედს შესაბამისი გვერდი და სიმაღლე იქნება: $a_n''=k\cdot a_n'$, $h_n''=k\cdot h_n'$, აქედან გამომდინარე

$$S(\Delta_n'')\quad\frac{1}{2}a''_nh''_n=\frac{1}{2}ka'_nkh'_n=k^2\cdot\frac{1}{2}a_n'h_n'=k^2S(\Delta_n'),$$

ე. ი. $S(\Delta_n'')=k^2S(\Delta_n')$, $(n=1,2,\ldots,m)$.

თუ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$S(F_2)=k^2S(F_1)$$

ახლა

$$\frac{S(F_2)}{S(F_1)}=k^2.$$

აქედან თეორემის სამართლიანობა ცხადია, რადგან k შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

ამოხსნები თვითშემოწმებისათვის

1. რამდენიმე ფართობის თვისებები.
2. დამტკიცება, რომ a და b გვერდებიანი მკრთალკუთხედის ფართობი ტოლია ab-ს.
3. დამტკიცება, რომ პარალელოგრამის ფართობი, მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.
4. დამტკიცება, რომ პარალელოგრამის ფართობი მისი a და b გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის ტოლია.
5. დამტკიცება, რომ სამკუთხედის ფართობი მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.
6. განვიხილოთ სამკუთხედის ფართობის დასრულებული ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის სამუალებით.
7. გამოიყვანეთ სამკუთხედის ფართობის დასრულება მისი სამი გვერდის სამუალებით (ჰერონის ფორმულა).
8. განსაზღვრეთ სამკუთხედის ფართობის სამუალებით მასზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები.
9. განსაზღვრეთ სამკუთხედის (მრავალკუთხედის) ფართობი მისი პერიმეტრისა და ჩახაზული წრეწირის რადიუსის სამუალებით.
10. დამტკიცება, რომ ტრაპეციის ფართობი მისი უძუების ნახევარჯამისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.
11. დამტკიცება, რომ ჩვეულებრივი ოთხკუთხედის ფართობი მისი დიაგონალების და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

12. დაამტკიცეთ, რომ მკვეთი წრეწირების ცენტრების შეერთების შუაპერპენდიკულარი მათი საერთო ქორდის შუაპერპენდიკულარია.

13. დაამტკიცეთ, რომ ორი წრეწირის ცენტრების შეერთების შუაპერპენდიკულარი მათი საერთო ქორდის შუაპერპენდიკულარია.

§ 21. წესიერი მრავალკუთხედები

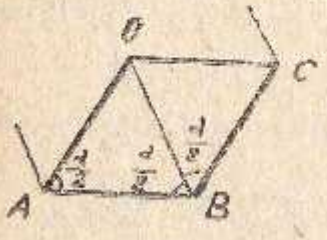
განსაზღვრება. მრავალკუთხედს წესიერი ეწოდება, თუ მისი ყველა გვერდი ტოლია და ყველა კუთხე ტოლია.

განსაზღვრება. მრავალკუთხედს რომლის ყველა წვერო წრეწირზე მდებარეობს წრეწირში ჩახაზული მრავალკუთხედი ეწოდება, ხოლო წრეწირს — მრავალკუთხედში შემოხაზული.

განსაზღვრება. მრავალკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი წრეწირს ეხება წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედი ეწოდება, ხოლო წრეწირს — მრავალკუთხედში ჩახაზული.

თეორემა 21.1. წესიერი მრავალკუთხედი წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედია.

დამტკიცება. ვთქვათ, A და B მრავალკუთხედის ორი მეზობელი წვეროა (ნახ. 115). A და B წვეროებიდან გავავლოთ მრავალკუთხედის კუთხეთა ბისექტრისები. ვთქვათ, O მათი გადაკვეთის წერტილია. AOB ტოლფერდა სამკუთხედია. რომლის ფუძე AB და ფუძესთან მდებარე კუთხეები $\frac{\alpha}{2}$-ს უდრის, სადაც α მრავალკუთხედის კუთხეა. O წერტილი B წვეროს მეზობელ C წვეროსთან შევაერთოთ. ABO და CBO სამკუთხედები ტოლია, სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის მიხედვით. OB მათი საერთო გვერდია; AB და BC გვერდები ტოლია, როგორც წესიერი მრავალკუთხედის გვერდები, B წვეროსთან მდებარე კუთხეები კი $\frac{\alpha}{2}$-ს უდრის. სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ OBC სამკუთხედი ტოლფერდაა და C წვეროსთან მდებარე კუთხე $\frac{\alpha}{2}$-ს უდრის. მაშასადამე, CO არის მრავალკუთხედის C კუთხის ბისექტრისა.



ნახ. 115

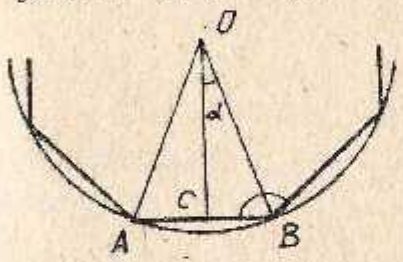
ახლა O წერტილი C წვეროს მეზობელ D წვეროსთან შევაერთოთ და ანალოგიურად დავამტკიცოთ, რომ COD სამკუთხედი ტოლფერდაა და DO მრავალკუთხედის D კუთხის ბისექტრისაა და ა. შ. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ ყოველი სამკუთხედი, რომლის ერთი გვერდია მრავალკუთხედის გვერდი, ხოლო მისი მოპირდაპირე წვეროა O წერტილი, ტოლფერდაა.

ყველა ასეთი სამკუთხედის ფერდები ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ მრავალკუთხედის ყველა წვერო მდებარეობს წრეწირზე, რომლის ცენტრია O და რადიუსი სამკუთხედის ფერდის ტოლია.

რადგან AOB, BOC, ... ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედების ფუძეებზე დაშვებული სიმაღლეები ტოლია, ამიტომ მრავალკუთხედის ყველა გვერდი ეხება წრეწირს, რომლის ცენტრია O და რადიუსი სამკუთხედების ფუძეებზე დაშვებული სიმაღლის ტოლია, თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემის მტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ წესიერი მრავალკუთხედის კუთხეების ბისექტრისები და გვერდების შუაპერპენდიკულარები ერთ წერტილში იკვეთებიან და ეს წერტილი შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს. ამ წერტილს წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრი ეწოდება. წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრიდან გვერდზე დაშვებულ მართობს ეწოდება. ცხადია, რომ ეპოთემა წესიერი მრავალკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის ტოლია.

გამოვსახოთ წესიერი n-კუთხედის a_n გვერდი შემოხაზული წრეწირის R რადიუსისა და ჩახაზული წრეწირის r რადიუსის მიხედვით (ნახ. 116).



ნახ. 116

რადგან $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$, ამიტომ

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}.$$

BOC მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$\frac{a_n}{2} = BC = OB\sin\alpha = R\sin\frac{180^\circ}{n}; \quad \frac{a_n}{2} = BC = OC\cdot\operatorname{tg}\alpha = r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

ე. ი.

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}; \qquad a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

წესიერი სამკუთხედისათვის $n=3$,

$$a_3 = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}; \qquad a_3 = 2r\operatorname{tg}60^\circ = 2r\sqrt{3}.$$

წესიერი ოთხკუთხედისათვის (კვადრატისათვის) $n=4$,

$$a_4 = 2R\sin 45^\circ = R\sqrt{2}; \qquad a_4 = 2r\operatorname{tg}45^\circ = 2r,$$

წესიერი ექვსკუთხედისათვის $n=6$,

$$a_6 = 2R\sin 30^\circ = R; \qquad a_6 = 2r\operatorname{tg}30^\circ = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

BOC მართკუთხა სამკუთხედიდან ცხადია აგრეთვე, რომ

$$r = R\cos\alpha = R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

გამოვსახოთ ახლა წესიერი n-კუთხედის S_n ფართობი შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსების მიხედვით (ნახ. 116).

$$S_n = n\cdot S_{AOB} = n\cdot\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin 2\alpha = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n};$$

$$S_n = n\cdot S_{AOB} = n\cdot\frac{1}{2}AB\cdot OC = n\cdot OC\operatorname{tg}\alpha\cdot OC = nr^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

ე. ი.

$$S_n = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n};\qquad S_n = nr^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

§ 22. წრეწირის სიგრძე. წრის ფართობი

წრეწირის სიგრძეზე თვალსაჩინო წარმოდგენა შემდეგნაირად მიიღება. წარმოვიდგინოთ წრეწირის ფორმის მავთი. გავსწორთ იგი და გავზომოთ. მიღებული მონაკვეთის სიგრძე არის წრეწირის სიგრძე. როგორ ვიპოვოთ წრეწირის სიგრძე, თუ ვიცით მისი რადიუსი? თვალსაჩინო მოსაზრებიდან ცხადია, რომ წრეწირის სიგრძე მასში ჩახაზული საკმარისად ტოლგვერდა n-კუთხედის პერიმეტრისაგან ნებისმიერად ცოტათი განსხვავდება. აქედან გამომდინარე, შეიძლება დავამტკიცოთ წრეწირის სიგრძის შემდეგი თვისება.

თეორემა 22. 1. **წრეწირის სიგრძის შეფარდება მის დიამეტრთან ნებისმიერი ორი წრეწირისთვის ერთი და იგივეა.**

დამტკიცება. ავიღოთ ორი ნებისმიერი წრეწირი. ვთქვათ R_1 და R_2 მათი რადიუსებია, l_1 და l_2 კი—წრეწირების სიგრძეები. დაუშვათ, თეორემა მცდარია და $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$. მაგალითად

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2}. \qquad (1)$$

აღებულ წრეწირებში ჩავახაზოთ წესიერი მრავალკუთხედები, რომელთა გვერდების n რიცხვი საკმარისად დიდია. თუ n ძალიან დიდია, მაშინ ამ წრეწირების სიგრძეები ჩახაზული მრავალკუთხედების P_1 და P_2 პერიმეტრებისაგან უმნიშვნელოდ განსხვავდება, ამიტომ (1) უტოლობა არ დაირღვევა, თუ მასში l_1-ს P_1-ით შევცვლით, ხოლო l_2-ს P_2-ით:

$$\frac{P_1}{2R_1} < \frac{P_2}{2R_2}. \qquad (2)$$

P_1 და P_2 პერიმეტრები წრეწირების რადიუსებით გამოვსახოთ. თუ ჩახაზული წესიერი მრავალკუთხედების გვერდებია a_n და b_n, მაშინ:

$$P_1 = n\cdot a_n = n\cdot 2R_1\sin\frac{180^\circ}{n},\quad P_2 = n\cdot b_n = n\cdot 2R_2\sin\frac{180^\circ}{n};$$

აქედან

$$\frac{P_1}{2R_1} = n\sin\frac{180^\circ}{n},\qquad \frac{P_2}{2R_2} = n\sin\frac{180^\circ}{n},$$

ე. ი.,

$$\frac{P_1}{2R_1} = \frac{P_2}{2R_2}.$$

ეს კი (2) უტოლობას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

მიღებულია, რომ წრეწირის სიგრძის დიამეტრთან შეფარდება ბერძნული π ასოთი (წარმოთქმა „პი") აღინიშნება:

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

π ირაციონალური რიცხვია, მისი მიახლოებითი ტოლობაა

$$\pi \approx 3{,}1416.$$

ამრიგად, წრეწირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$l \approx 2\pi R.$$

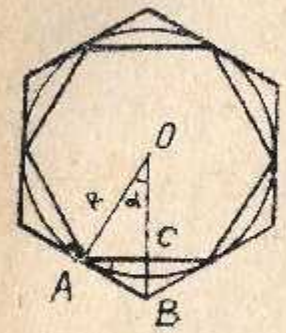
ვიპოვოთ წრეწირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც $n°$-იან ცენტრალურ კუთხეს შეესაბამება. გამოვიყენებთ იმ გარემოებას, რომ $1°$-იან კუთხეს $\frac{\pi R}{180}$ სიგრძის რკალი შეესაბამება, მაშასადამე $1°$-იან კუთხეს $\frac{\pi R}{180}$ სიგრძის რკალი შეესაბამება, $n°$-იან კუთხეს კი შეესაბამება რკალი, რომლის სიგრძეა:

$$l = \frac{\pi R}{180}n.$$

განსაზღვრება. **სიბრტყის ყველა იმ წერტილისაგან შემდგარ ფიგურას, რომელიც მოცემული წერტილიდან მოცემულ პანძილზე მეტად არ არიან დაშორებული, წრე ეწოდება.** ამ წერტილს წრის ცენტრი ეწოდება, ხოლო მანძილს კი — წრის რადიუსი.

წრის საზღვარია წრეწირი, რომელსაც იგივე ცენტრი და რადიუსი აქვს.

ვთქვათ R რადიუსიანი წრის S ფართობია. წრეზე შევთანხმოთ F_1 წესიერი n-კუთხედი და წრეში ჩავხაზოთ F_2 წესიერი n-კუთხედი (ნახ. 117). F_1 მრავალკუთხედი წრეს მოიცავს და, მაშასადამე, მისი ფართობი წრის ფართობზე მეტია. F_2 მრავალკუთხედი წრეში წვდის და ამიტომ მისი ფართობი წრის ფართობზე ნაკლებია. მრავალკუთხედების ფართობებია



ნახ. 117

$$S_1=\frac{1}{2}P_1R, \qquad S_2=\frac{1}{2}P_2r,$$

სადაც r არის F_2 მრავალკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი, P_1 და P_2 კი F_1 და F_2 მრავალკუთხედების პერიმეტრებია.

ვთქვათ, F_1 და F_2 მრავალკუთხედების გვერდებია b და a, ხოლო $\angle AOB=\alpha$. ცხადია, რომ $\angle BAC=\alpha=\frac{180^\circ}{n}$. ABC სამკუთხედიდან (ნახ. 117) ვღებულობთ:

$$AB=\frac{AC}{\cos\alpha}, \text{ anu } \frac{b}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{\cos\alpha}.$$

აქედან $nb=\frac{na}{\cos\alpha}$, ანუ $P_1=\frac{P_2}{\cos\alpha}$. ახლა OAC სამკუთხედიდან ვღებულობთ: $r=OC=R\cos\alpha$, საიდანაც მივიღებთ:

$$S_1=\frac{1}{2}P_2\frac{R}{\cos\alpha}, \qquad S_2=\frac{1}{2}P_2R\cos\alpha.$$

საკმარისად დიდი n-ისათვის P_2 პერიმეტრი რაგინდ მცირედ განსხვავდება წრეწირის სიგრძისაგან, $\cos\alpha$ რაგინდ მცირედ განსხვავდება 1-ისაგან, რადგან α კუთხე რაგინდ მცირეა. მაშასადამე, S_1 რაგინდ მცირედ განსხვავდება $\frac{lR}{2}$-ისაგან, სადაც l წრის წრეწირის სიგრძეა. ამიტომ ბოსაზრებაა ვამბობთ S_2 რაგინდ მცირედ განსხვავდება $\frac{lR}{2}$-ისაგან. წრის S ფართობი მოთავსებულია S_1-სა და S_2-ს შორის, ამიტომ ისიც რაგინდ მცირედ

განსხვავდება $\frac{lR}{2}$-ისაგან. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ S შეიძლება შეცვლილ იქნას $\frac{lR}{2}$-ით, რაც $S=\frac{lR}{2}$.

ამრიგად წრის ფართობის გამოთვლება ფორმულით:

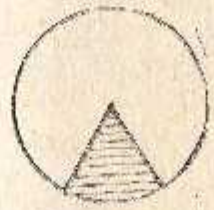
$$S=\frac{lR}{2}=\pi R^2$$

განსაზღვრება. წრის ნაწილს, რომელიც ცენტრალური კუთხის შიგნით მდებარეობს, წრიული სექტორი ეწოდება (ნახ. 118).

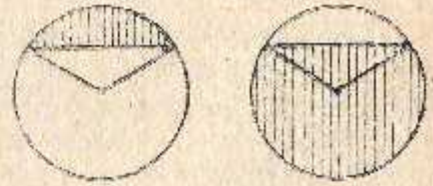
წრიული სექტორის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha,$$

სადაც R წრის რადიუსია, α კი ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა.



ნახ. 118



ნახ. 119

განსაზღვრება. წრის და ნაკვეთხაზბრტყის ხვედრით ნაწილს წრიული სეგმენტი ეწოდება (ნახ. 119).

ამ სეგმენტის ფართობი, ბოძგლილე ხახვეთრწირის ტოლი არ ახლა გამოითვლება ფორმულით

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha\pm S_\Delta$$

სადაც α ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომაა, რომელიც ამ წრიული სეგმენტის რკალს შეესაბამება, S_Δ კი იმ სამკუთხედის ფართობია, რომლის წვეროები წრის ცენტრისა და შესაბამისი სექტორის შეძთხვნელი რადიუსების ბოლოებზე მდებარეობს. „$-$“ ნიშანი უნდა ავიღოთ მაშინ, როცა $\alpha<180^\circ$, „$+$“ ნიშანი კი მაშინ, როცა $\alpha>180^\circ$.

1. რას ეწოდება წესიერი მრავალკუთხედი?
2. რას ეწოდება წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედი?
3. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი მრავალკუთხედის წრეწირის, ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედის ცენტრი ერთი და იგივეა.
4. რას ეწოდება წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრი?
5. გამოსახეთ წესიერი n-კუთხედის გვერდი შემოხაზული (ჩახაზული) წრეწირის რადიუსის საშუალებით.
6. გამოსახეთ წესიერი n-კუთხედის ფართობი შემოხაზული (ჩახაზული) წრეწირის რადიუსის საშუალებით.
7. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის სიგრძის შეფარდება მის დიამეტრთან მუდმივი სიდიდეა.
8. რა ფორმულით გამოითვლება წრეწირის სიგრძე?
9. რა ფორმულით გამოითვლება n°-იანი კუთხის შესაბამისი რკალის სიგრძე?
10. რას ეწოდება წრე, წრის რადიუსი, რადიანი?
11. რა ფორმულით გამოითვლება წრის ფართობი?
12. რას ეწოდება წრიული სექტორი?
13. რას ეწოდება წრიული სეგმენტი?
14. რა ფორმულით გამოითვლება წრიული სექტორის (სეგმენტის) ფართობი?

§ 28. ᲓᲔᲙᲐᲠᲢᲘᲡ ᲛᲐᲠᲗᲙᲣᲗᲮᲐ ᲙᲝᲝᲠᲓᲘᲜᲐᲢᲗᲐ ᲡᲘᲡᲢᲔᲛᲐ

როგორც ალგებრა და ანალიზის საწყისების კურსიდან არის ცნობილი (მათემატიკა, I ნაწილი), სიბრტყეზე მდებარე ორი ურთიერთპერპენდიკულარული საკოორდინატო ღერძი ქმნის ე. წ. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას, რომლის საშუალებითაც ძალიან ადვილად დადგინდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ნამდვილ რიცხვთა წყვილებსა (xy) და სიბრტყის წერტილებს შორის, ანუ სისტემას აგრეთვე დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას ეწოდებენ, ხოლო სიბრტყის სებისებრი (x, y) წერტილის x და y კოორდინატებს — დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებს.

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ხშირად ამარტივებს ფუნქციათა თვისებების დადგენას, საშუალებას გვაძლევს გამოვიკვლიოთ გეომეტრიულ ფიგურათა ერთგვარობანაცვლებანი. ვთქვათ მოცემულია AB მონაკვეთის შუაწერტილი. როგორ განვსაზღვროთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ ცნობილია მისი ბოლოების კოორდინატები? ამ და სხვა ამოცანების ამოხსნა ადვილდება, თუ ცნობილია ფიგურათა განტოლებები.*

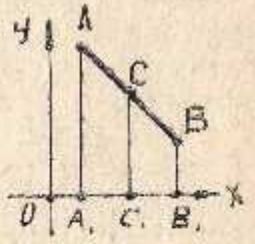
* თუ x და y ცვლადის განტოლებას, რომელსაც ფიგურის ყველა წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ, ამასთან ამ განტოლებას ნებისმიერი ამონახსნი ფიგურის რომელიმე წერტილს წარმოადგენს, ფიგურის განტოლება ეწოდება.

ვთქვათ, $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ ორი ნებისმიერი წერტილია და $C(x, y)$ არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი. კითხვაა: C წერტილის x, y კოორდინატები, დავუშვათ, AB მონაკვეთი Oy ღერძის პარალელური არ არის, ანუ $x_1 \neq x_2$. A, B, C წერტილებზე გავავლოთ OY ღერძის პარალელური წრფეები (ნახ. 120). ეს წრფეები Ox ღერძს $A_1(x_1, 0)$, $B_1(x_2, 0)$, $C_1(x, 0)$ წერტილებში გადაკვეთს. თალესის თეორემის თანახმად C_1 წერტილი A_1B_1 მონაკვეთის შუაწერტილია.

რადგან C_1 წერტილი A_1B_1 მონაკვეთის შუაწერტილია, ამიტომ $A_1C_1 = B_1C_1$ და მაშასადამე, $|x - x_1| = |x - x_2|$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ან $x - x_1 = x - x_2$, ან $x - x_1 = -(x - x_2)$. პირველი ტოლობა შეუძლებელია, რადგან $x_2 \neq x_2$, ამიტომ ჭეშმარიტია მეორე ტოლობა. ამ ტოლობიდან კი მივიღებთ:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

თუ $x_1 = x_2$, anu AB მონაკვეთი y ღერძის პარალელურია, მაშინ A_1, B_1, C_1 წერტილებს ერთი და იგივე აბსცისა აქვს. მაშასადამე, ფორმულა ამ შემთხვევაშიც სწორია. C წერტილის ორდინატი ანალოგიურად გამოითვლება. A, B, C წერტილებზე უნდა გავავლოთ OX ღერძის პარალელური წრფეები. მივიღებთ: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.



ნახ. 120

ამრიგად, $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

ᲛᲐᲜᲫᲘᲚᲘ ᲝᲠ ᲬᲔᲠᲢᲘᲚᲘᲡ ᲬᲝᲠᲘᲡ

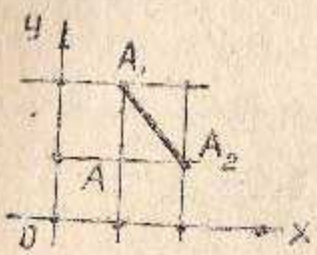
ვთქვათ, XOY სიბრტყეზე მოცემული ორი წერტილი: A_1, რომლის კოორდინატებია x_1, y_1 და A_2 რომლის კოორდინატებია x_2, y_2. A_1 და A_2 წერტილებს შორის მანძილი გამოვსახოთ ამ წერტილების კოორდინატებით.

დავუშვათ, რომ $x_1 \neq x_2$ და $y_1 \neq y_2$. A_1 და A_2 წერტილებზე გავავლოთ კოორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეები და მათი გადაკვეთის წერტილი A-თი აღვნიშნოთ (ნახ. 121). A და A_1 წერტილებს შორის მანძილია $|y_1 - y_2|$, ხოლო A და A_2 წერტილებს შორის მანძილია $|x_1 - x_2|$.

თუ AA_1A_2 სამკუთხედისათვის პითაგორას თეორემას გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2, \qquad (1)$$

სადაც d არის A_1 და A_2 წერტილებს შორის მანძილი.



ნახ. 121

წერტილის შორის მანძილის (1) ფორმულა ჩვენ გამოვიყენეთ იმ შემთხვევისათვის, როცა $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$. იგი სხვა შემთხვევებშიც სწორია. მართლაც, თუ $x_1=x_2$, $y_1\neq y_2$, მაშინ d მანძილია $|y_1-y_2|$-ის ტოლი, ანალოგიურად გახსნილებია ის შემთხვევაც, როცა $x_1\neq x_2$, $y_1=y_2$. როცა $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, მაშინ A_1 და A_2 წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა და (1) ფორმულიდან გვაქვს: $d=0$.

წრის განტოლება

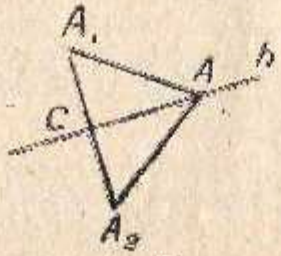
როგორც ცნობილია $y=kx+b$ უეხესის კოორდინატებში წარმოადგენს წრფეს (მათემატიკა, 1 ნაწილი, §26). ეს ფუნქცია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც x და y ცვლადიანი განტოლება. ეს განტოლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$kx-y+b=0. \qquad (1)$$

დავამტკიცოთ, რომ წრფის განტოლებაა დეკარტის xOy სისტემაში აქვს შემდეგი სახე:

$$ax+by+c=0. \qquad (2)$$

ვთქვათ, h ნებისმიერი წრფეა xOy სიბრტყეზე. გავავლოთ h წრფის მართობული რაიმე წრფე და მასზე h წრფესთან გადაკვეთის C წერტილიდან გადავდოთ ტოლი CA_1 და CA_2 მონაკვეთები (ნახ. 122).



ნახ. 122

ვთქვათ, a_1, b_1 არის A_1 წერტილის კოორდინატები, a_2, b_2 კი A_2 წერტილის კოორდინატებია. როგორც ვიცით, h წრფის ყოველი $A(x,y)$ წერტილი თანაბრადაა დაშორებული A_1 და A_2 წერტილებიდან ამიტომ, მისი კოორდინატები აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2 \qquad (3)$$

პირიქით, თუ რაიმე წერტილის x და y კოორდინატები აკმაყოფილებს (3) განტოლებას, მაშინ ეს წერტილი თანაბრადაა დაშორებული A_1 და A_2 წერტილებიდან, და მაშასადამე h წრფეს ეკუთვნის. ამრიგად (3) განტოლება h წრფის განტოლებაა. თუ ამ განტოლებაში ფრჩხილებს გავხსნით და განტოლების ყველა წევრს მის მარცხენა ნაწილში გადავიტანთ, იგი (3) სახეს მიიღებს:

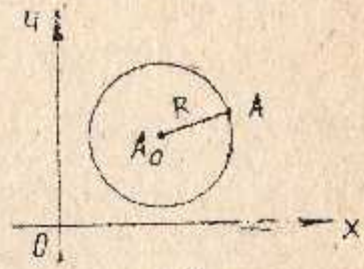
$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+(a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2)=0,$$

დებულება დამტკიცებულია.

წრეწირის განტოლება

წარმოვიდგინოთ R რადიუსიანი წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი $A_0(a, b)$ წერტილში მდებარეობს (ნახ. 123). წრეწირზე ავიღოთ ნებისმიერი $A(x, y)$ წერტილი. ამ წერტილიდან A_0 ცენტრამდე მანძილი R-ის ტოლია. A წერტილიდან A_0-მდე მანძილის კვადრატი არის $(x-a)^2+(y-b)^2$, ამიტომ წრეწირის ყოველი A წერტილის x, y კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (4)$$



ნახ. 123

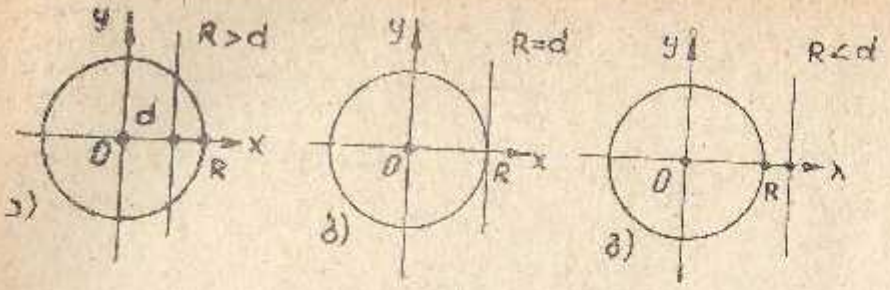
პირიქით: ყოველი A წერტილი, რომლის კოორდინატები (4) განტოლებას აკმაყოფილებს, წრეწირს ეკუთვნის, რადგან ამ წერტილიდან A_0 წერტილამდე მანძილი R-ის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ (4) განტოლება მართლაც ამ წრეწირის განტოლებაა, რომლის ცენტრია A_0 და რადიუსი — R.

შევნიშნოთ, რომ თუ წრეწირის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა, მაშინ წრეწირის განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$x^2+y^2=R^2.$$

წრფისა და წრეწირის ურთიერთმდებარეობა

განვიხილოთ წრფისა და წრეწირის ურთიერთმდებარეობის საკითხი. ვთქვათ, R წრეწირის რადიუსია და d — წრეწირის ცენტრიდან წრფემდე მანძილი, წრეწირის ცენტრი კოორდინატთა სათავედ მივიღოთ, მოცემული



ნახ. 124

წრეს მართობული წრფე გა $-Ox$ ღერძად (ნახ. 124). მაშინ წრეწირის განტოლება იქნება $x^2+y^2=R^2$, წრფის განტოლება კი $x=d$. იმისათვის, რომ წრეხმ და წრეწირმა ერთმანეთი გადაკვეთოთ, საჭიროა ორი განტოლების სისტემას

$$\begin{cases} x=d, \\ x^2+y^2=R^2, \end{cases}$$

ჰქონდეს ამონახსენი. პირიქით, ამ სისტემის ყოველი ამონახსენი გვაძლევს წრფისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილის x, y კოორდინატებს. თუ ამოვხსნით ამ სისტემას, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x=d, \\ y=\pm\sqrt{R^2-d^2}. \end{cases}$$

y-ის გამოსახულებიდან ჩანს, რომ სისტემას აქვს ორი ამონახსენი, ანუ წრფესა და წრეწირს აქვს გადაკვეთის ორი წერტილი, როცა $R>d$ (ნახ. 124, ა). სისტემას აქვს ერთი ამონახსენი (წრფე და წრეწირი ერთმანეთს ეხებიან) როცა $R=d$ (ნახ. 124, ბ). სისტემას არა აქვს ამონახსენი, ანუ წრფე და წრეწირი ერთმანეთს არ გადაკვეთს, როცა $R<d$ (ნახ. 124 გ).

ორი წრეწირის ურთიერთმდებარეობა

საერთო ცენტრის მქონე წრეწირებს **კონცენტრული** წრეწირები ეწოდება.

განვიხილოთ ორი ურთიერთკონცენტრული წრეწირის ურთიერთმდებარეობის საკითხი. ვთქვათ მოცემულია ორი წრეწირი ცენტრებით O და O_1 წერტილებში, რომელთა რადიუსებია a და b, ცენტრების შორის მანძილი კი c-ს ტოლია.

O მიმართოთ xOy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავედ, OO_1 წრფე $-Ox$ ღერძად. დადებით ნახევარღერძად ავირჩიოთ მიმართულება OO_1-ის მიმართ. O_1-ში წრეწირების განტოლებები იქნება:

$$x^2+y^2=a^2, \qquad (x-c)^2+y^2=b^2$$

(5)

თუ წრეწირები ერთმანეთს გადაკვეთს, მაშინ კვადრატების წვერტილის x და y კოორდინატები (5)-ის ორივე განტოლებას აკმაყოფილებს და პირიქით თუ (5) განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსენი, ანუ არსებობს ისეთი x და y_1 რომლებიც ორივე განტოლებას აკმაყოფილებს, მაშინ ეს x და y წრეწირების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია. თუ წრეწირები ერთმანეთს გადაკვეთის, მაშინ ამ წრეწირებს ორი და მეტი გადაკვეთის წერტილი აქვს, რამდენი ამონახსენიც აქვს სისტემას.

ამოვხსნათ (5) განტოლებათა სისტემა. ამისათვის ჯერ განტოლებები წევრ-წევრად გამოვაკლოთ, მივიღებთ $2cx-c^2=a^2-b^2$. აქედან $x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}$, თუ x-ის ამ მნიშვნელობას პირველ განტოლებაში შევიტანთ მივიღებთ:

$$\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2+y^2=a^2;$$

აქედან

$$y^2=a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2=\left(a+\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\left(a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4c^2}(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)=\frac{1}{4c^2}[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]=$$

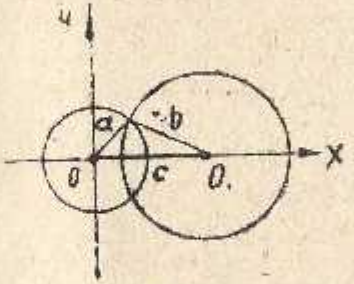
$$=\frac{1}{4c^2}(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a).$$

ამრიგად,

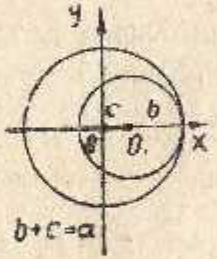
$$y^2=\frac{1}{4c^2}(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a).$$

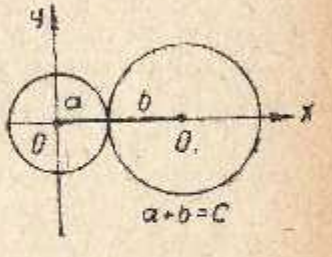
აქედან ჩანს, რომ თუ $c+c>b$, $a+b>c$ და $b+c>a$, მაშინ ტოლობის მარჯვენა მხარე დადებითია და, მაშასადამე, (5) სისტემას აქვს ამონახსნები.

მასთან მას ორი ამონახსენი აქვს. შესაბამისად, წრეწირები ორ წერტილში გადაკვეთს ერთმანეთს (ნახ. 125).



ნახ. 125





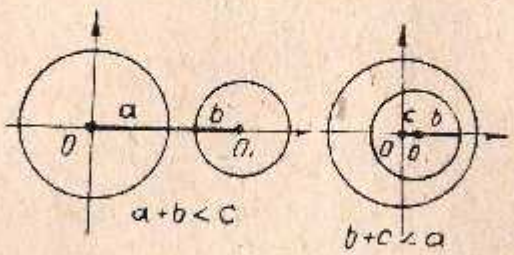
ნახ. 126

თუ $a+c=b$, $a+b=c$, $b+c=a$ თანაბარმნიშვნელებიდან ერთი ნაკლებ ტოლობის ნიშანს, მაშინ (5) სისტემას ერთი ამონახსენი აქვს, წრეწირები ეხებიან ერთმანეთს (ნახ. 126).

თუ ტოლობის მარჯვენა მხარეს ერთი თანაბარმნიშვნელი უარყოფითია, მაშინ (5) სისტემას ამონახსენი არა აქვს და წრეწირები არ გადაკვეთენ ერთმანეთს (ნახ. 127).

ორი თანაბარძაღლი ან შეიძლება იყოს ტოლფერდა, რადგან მაშინ მათი ფუძეები ტოლია. ვიგულისხმოთ, რომ $a+c>b$, $b+c>a$ და $a+b>c$. მაშინ ჭდეთა ჯამი $(a+c-b)+(a+b-c)=2a>0$, ე. ი. შეიძლებელია. ზუსტად ასევე იქნება სხვა შემთხვევაშიც.

ამრიგად თუ a, b, c რიცხვებიდან ერთი-ერთი დამოკიდებულია ორის ჯამზე ნაკლებია, მაშინ წრეწირები ერთმანეთს არ გადაკვეთს; თუ ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი დამოკიდებულია ორის ჯამზე ტოლია, მაშინ წრეწირები ერთმანეთს ეხება; თუ ეს რიცხვებიდან თითოეული დამოკიდებულია ორის ჯამზე ნაკლებია, მაშინ წრეწირები ერთმანეთს ორ წერტილში გადაკვეთს.



ნახ. 127

ვარჯიშები თვითშემოწმებისათვის

1. დამოუკიდებელი წინადადების შეუწყვეტელის კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულა.
2. ვნახოთ წრეწირის ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა.
3. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირი განტოლებას დეკარტის xOy სისტემაში აქვს შემდეგი სახე: $ax^2+by^2+c=0$.
4. ვიპოვნოთ R რადიუსიანი წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი $A(a, b)$ წერტილში იმყოფება.
5. რა ურთიერთშემდგომარეობა შეიძლება ქონდეს წრფეს და წრეწირს?
6. რა ურთიერთშემდგომარეობა შეიძლება ქონდეს ორ წრეწირს?

§ 24. ამოცანების ამოცანები

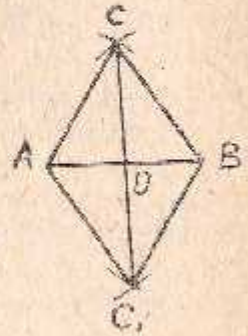
აგების ამოცანებში ხშირად მოითხოვება გეომეტრიული ფიგურის აგება ზოგიერთი სახაზავი ხელსაწყოების მეშვეობით. ელემენტად ასეთი ხელსაწყოები სახაზავი და ფარგალი. ამოცანის ამოხსნისას არსებითია არა იმდენად ფიგურის აგება, რამდენადაც იმის დადგენა, თუ რაკრი უნდა ავაგოთ და შესაძლებელია დაიტკიცება. ამოცანა ძლიერ ხელსაწყოებით ითვლება, თუ ფიგურის აგების ხერხი და დამტკიცებულია, როცა ფიგურის აგება შესრულებულია შედეგად მართლაც მოთხოვნილი თვისებები. ქვემოთ ვნახავთ ძალიან.

სახაზავით, როგორც გეომეტრიული აგებანი ხელსაწყოთა, შეიძლება ვიპოვნოთ ნებისმიერი წრფე (მოცემულ წერტილზე გავლებული ნებისმიერი წრფე) მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფე. სხვა ოპერაციის შესრულება სახაზავით არ შეიძლება. კერძოდ, სახაზავით არ შეიძლება წრეწირის ცენტრის, თუნდაც ამ სახაზავ დანაყოფები ქონდეს,

ფარგლით, როგორც გეომეტრიულ აგებანი ინსტრუმენტით, შეიძლება ნებისმიერი ცენტრისა და ნებისმიერი რადიუსის მქონე წრეწირის აგება. კერძოდ, ფარგლით შეიძლება ნებისმიერ წრფეზე ნებისმიერი წერტილიდან ნებისმიერი სიგრძის ნაკვეთის გადაზომვა.

გამოვიხილოთ აგების ზოგიერთი ამოცანა.

1. **მოცემული კუთხის გაყოფა შუაზე.** ვთქვათ, AB მოცემული მონაკვეთია (ნახ. 128). A და B წერტილებიდან AB რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირები. ვთქვათ, C და C_1 ამ წრეწირების გადაკვეთის წერტილებია. ეს წერტილები AB წრფის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ. CC_1 მონაკვეთი AB წრფეს რაიმე O წერტილში კვეთს. ეს წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია, რადგან C და C_1 წერტილები AB მონაკვეთის შუამართობზე მდებარეობენ.



ნახ. 128

2. **მოცემულ წერტილზე მოცემული წრფის მართობული წრფის გავლება.** ვთქვათ მოცემულია O წერტილი და რაიმე a წრფე. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) O წერტილი a წრფეზე მდებარეობს;

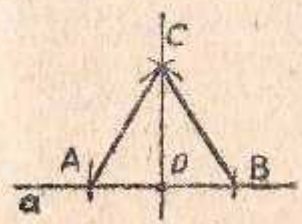
2) O წერტილი a წრფეზე არ მდებარეობს.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა.

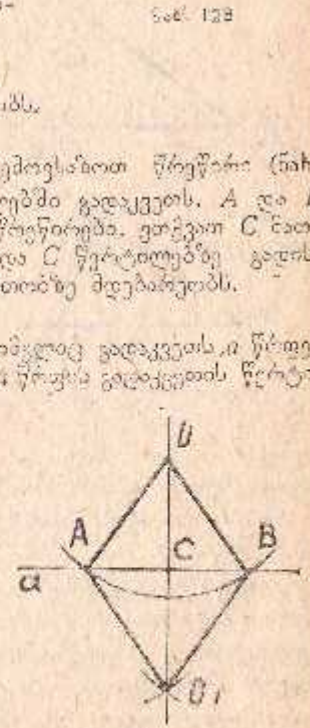
O წერტილიდან ნებისმიერი რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი (ნახ. 129). იგი a წრფეს ორ — A და B წერტილებში გადაკვეთს. A და B წერტილებიდან AB რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირები. ვთქვათ C ნახევარ გადაკვეთის წერტილია. საძიებელი წრფე O და C წერტილებზე გადის, რადგან C წერტილი AB მონაკვეთის შუამართობზე მდებარეობს.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა.

O წერტილიდან შემოვხაზოთ წრეწირი, რომელიც გადაკვეთს a წრფეს (ნახ. 130). ვთქვათ, A და B ამ წრეწირისა და a წრფის გადაკვეთის წერტილები.



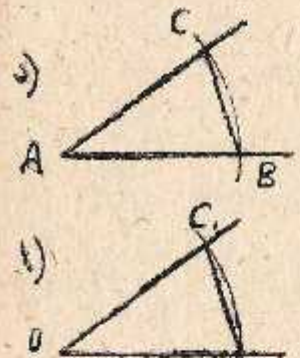
ნახ. 129



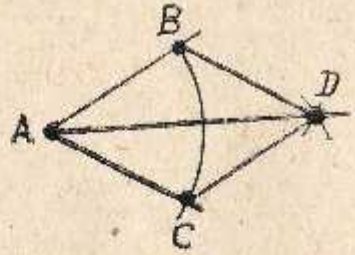
ნახ. 130

ლებია. A და B წერტილებიდან იმავე რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირები. ვთქვათ, O_1 მათი გადაკვეთის წერტილია, რომელიც იმ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს, რომელშიც არ მდებარეობს O წერტილი. საძიებელი წერტილი O და O_1 წერტილებზე გადის, რადგან ეს წერტილები AB მონაკვეთის შუამართობზე მდებარეობენ.

3. **მოცემული ნახევარწრფიდან, მოცემულ ნახევარსიბრტყეში მოცემული კუთხის ტოლი კუთხის აგება.** გავავლოთ რაიმე წრეწირი, რომლის ცენტრი მოცემული A კუთხის წვეროშია (ნახ. 131, ა). ვთქვათ B და C წრეწირის და კუთხის გვერდებია გადაკვეთის წერტილებია. AB რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი, რომლის ცენტრი მოცემული ნახევარწრფის საწყისი O წერტილშია (ნახ. 131, ბ)). ამ წრეწირისა და მოცემული ნახევარწრფის გადაკვეთის წერტილი B_1-ით აღვნიშნოთ. შემოვხაზოთ წრეწირი, რომლის ცენტრია B_1 და რადიუსი BC. აგებული წრეწირების გადაკვეთის წერტილი, რომელიც აღნიშნულ ნახევარსიბრტყეშია, საძიებელი კუთხის გვერდზე მდებარეობს. ამის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ABC და OB_1C_1 სამკუთხედები ტოლია სამკუთხედების ტო-



ნახ. 131

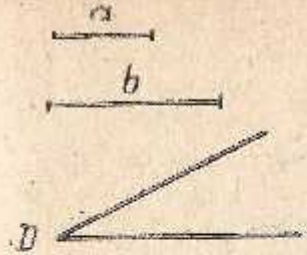


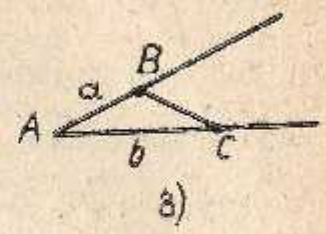
ნახ. 132

ლების მესამე ნიშნის თანახმად.

A და O კუთხეები ამ სამკუთხედების შესაბამისი კუთხეებია, ამიტომ $\angle A = \angle O$.

4. **კუთხის ბისექტრისის აგება.** მოცემული კუთხის A წვეროდან, რომელიც ცენტრიდან შემოვხაზოთ ნებისმიერი რადიუსის წრეწირი (ნახ. 132). ვთქვათ B და C წრეწირის და კუთხის გვერდების გადაკვეთის წერტილებია. B და C წერტილებიდან იმავე რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირები, ვთქვათ D წერტილი ამ წრეწირების გადაკვეთის წერტილია, რომელიც განსხვავებულია A-საგან, თუ გავავლებთ AD სხივს, იგი A კუთხეს შეაზე





ნახ. 133

გაყოფს. მართლაც ABD და ACD სამკუთხედები ტოლია სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად, ამიტომ BAD და CAD კუთხეები ტოლია.

5. **სამკუთხედის აგება ორი გვერდით და მათ შორის მდებარე კუთხით.** ვთქვათ მოცემულია სამკუთხედის a და b გვერდები და მათ შორის მდებარე კუთხე D, რომელიც გამოცილ კუთხეს არ წარმოადგენს (ნახ. 133 ა)). AC სხივის მიმართ მოცემულ ნახევარსიბრტყეში გადავიდოთ D-ს ტოლი კუთხე A (ნახ. 133, ბ)). ამ კუთხის გვერდებზე A წერტილიდან გადავდოთ a-ს ტოლი AB და b-ს ტოლი AC მონაკვეთები. B და C წერტილები შევაერთოთ. ცხადია ABC სამკუთხედს აქვს a-სა და b-ს ტოლი გვერდები და მათ შორის მდებარე კუთხე არის $\angle A = \angle D$.

სამკუთხედი მართლაც აიგება ყოველივე იმ შემთხვევაშიც, თუ მოცემულია მისი ერთი გვერდი და მასთან მდებარე ორი კუთხე, ან სამი გვერდი.

ᲙᲘᲗᲮᲕᲔᲑᲘ ᲗᲕᲘᲗᲛᲔᲪᲮᲝᲕᲠᲔᲑᲘᲡᲗᲕᲘᲡ

1. ახსენით, როგორ უნდა გაეყოთ შეკრული მონაკვეთი.
2. ახსენით, მოცემულ წერტილზე როგორ უნდა გადაგვლოთ მოცემული წრის მართობული წრფე. განიხილეთ ორი შემთხვევა.
3. ახსენით როგორ უნდა ავაგოთ მოცემული ნახევარწრფიდან, მოცემულ ნახევარსიბრტყეში, მოცემული კუთხის ტოლი კუთხე.
4. ახსენით, როგორ უნდა ავაგოთ კუთხის ბისექტრისა.
5. ახსენით, როგორ ავაგოთ სამკუთხედი ორი გვერდით და მათ შორის მდებარე კუთხით, სამი გვერდით, ერთი გვერდით და მასთან მდებარე ორი კუთხით, სამი გვერდით.

სტერეომეტრია

§ 25. სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები

სტერეომეტრია აბრის გეომეტრიის ის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის ფიგურებს სივრცეში. სტერეომეტრიაში ისევე, როგორც პლანიმეტრიაში, გეომეტრიული ფიგურათა თვისებების დადგენა შესაძლებელი აქსიომების დამტკიცების გზით ხორციელდება. ამასთან საწყისს ძირითად ცნებათა გეომეტრიული ინტუიციაა თვალსაჩინო წარმოდგენს. ეს თვისებები აქსიომებით გაძლიერებულია. სივრცეში ძირითადი ფიგურებია: წერტილი, წრფე, სიბრტყე. ახალი გეომეტრიული სახეობის — სიბრტყის — შემოყვანა გაიძულებს გავაფართოოთ აქსიომათა სისტემა, კერძოდ, შემდეგებს აქსიომების VI ჯგუფი, რომელიც სივრცეში სიბრტყეთა ურთიერთებს გამოხატავს. ეს ჯგუფი შემდეგი სამი აქსიომისაგან შედგება:

VI_1. ნებისმიერი სიბრტყისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც ამ სიბრტყეს ეკუთვნის, და წერტილები რომლებიც მას არ ეკუთვნის.

VI_2. თუ ორ სხვადასხვა სიბრტყეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ეს სიბრტყეები ერთმანეთს წრფეზე კვეთს.

VI_3. თუ ორ სხვადასხვა წრფეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ამ წრფეებზე შეიძლება სიბრტყის გავლება, და მასთან მხოლოდ ერთის.

აბრიგედ, სტერეომეტრიაში დაველაგრძნობით აქსიომათა შემდეგ ისტორიას:

I ჯგუფი

I_1. ნებისმიერი წრფისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც ეკუთვნის ამ წრფეს და წერტილები, რომლებიც მას არ ეკუთვნის.

I_2. ნებისმიერ ორ წერტილზე შეიძლება გავლება წრფე და ამასთან მხოლოდ ერთი.

II ჯგუფი

II_1. წრფეზე მდებარე სამი წერტილიდან ერთი და მხოლოდ ერთი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის.

II_2. წრფე სიბრტყეს ყოფს ორ ნახევარსიბრტყედ.

III ჯგუფი

III_1. ნებისმიერ მონაკვეთს გააჩნია გარკვეული სიგრძე, რომელიც ნულზე მეტია. მონაკვეთის სიგრძე ტოლია იმ მონაკვეთების სიგრძეების ჯამისა, რომლებადაც იგი იყოფა მისი ნებისმიერი წერტილით.

III_2. ნებისმიერ კუთხეს გააჩნია გარკვეული გრადუსული ზომა, რომელიც ნულზე მეტია. გაშლილი კუთხე 180°-ის ტოლია. კუთხის გრადუსული ზომა ტოლია იმ კუთხეების გრადუსული ზომების ჯამისა, რომლებადაც იგი იყოფა მის განვრდებს შორის გამავალი ნებისმიერი სხივით.

IV ჯგუფი

IV_1. ნებისმიერ სხივზე მისი საწყისიდან შეიძლება გადავდოთ მოცემული სიგრძის მონაკვეთი და მასთან მხოლოდ ერთი.

IV_2. ნებისმიერი სხივიდან მისი შენაცვლები წრფით განსაზღვრული თითოეულ ნახევარსიბრტყეში შეიძლება გადავდოთ 180°-ზე ნაკლები მოცემული გრადუსული ზომის კუთხე და მასთან მხოლოდ ერთი.

IV_3. ნებისმიერი სამკუთხედისათვის არსებობს მისი ტოლი სამკუთხედი, რომელსაც განსაზღვრული ქედნაირობა აქვს მოცემული სხივის მიმართ.

V ჯგუფი

V. წრფეზე არაბრუნაირ წერტილზე შეიძლება ამ წრფის პარალელური არაუმეტეს ერთი წრფის გავლება.

VI ჯგუფი

VI_1. ნებისმიერი სიბრტყისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც ამ სიბრტყეს ეკუთვნის, და წერტილები, რომლებიც მას არ ეკუთვნის.

VI_2. თუ ორ სხვადასხვა სიბრტყეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ეს სიბრტყეები ერთმანეთს წრფეზე კვეთს.

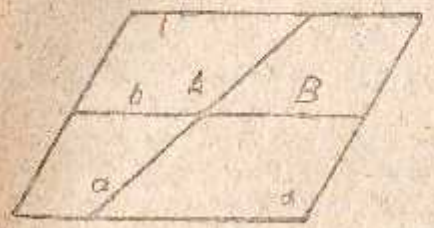
VI_3. თუ ორ სხვადასხვა წრფეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ამ წრფეებზე შეიძლება სიბრტყის გავლება, და მასთან მხოლოდ ერთის.

დავამტკიცოთ სტერეომეტრიის აქსიომათა ზოგიერთი შედეგი.

თეორემა 25. 1. წრფესა და მასზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება სიბრტყის გავლება, და მასთან მხოლოდ ერთის.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია a წრფე და მასზე არამდე-

ბარე B წერტილი (ნახ. 134). ვთქვათ A არის a წრფის რაიმე წერტილი. I_1 აქსიომის თანახმად ტყეში წერტილი არსებობს. A და B წერტილებზე გავავლოთ b წრფე (I_2 აქსიომა), a და b წრფეები სხვადასხვაა, რადგან b წრფის B წერტილი a წრფეზე არ ძევს. a და b წრფეებს აქვთ საერთოდ A წერტილი. a და b წრფეებზე გავავლოთ α სიბრტყე (VI_2 აქსიომა). ეს სიბრტყე ვლების a წრფეზე და B წერტილზე.

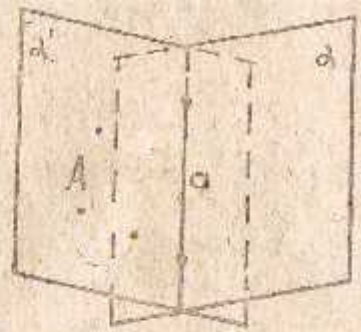


ნახ. 134

ახლა დავამტკიცოთ, რომ α სიბრტყე, რომელიც a წრფეზე და B წერტილზე გადის, ერთადერთია. დავუშვათ, რომ არსებობს α-საგან განსხვავებული სხვა α' სიბრტყე, რომელიც a წრფეზე და B წერტილზე გადის. VI_2 აქსიომის თანახმად სხვადასხვა α და α' სიბრტყეები ერთმანეთს წრფეზე კვეთს. მაშასადამე, α და α' სიბრტყეთა ნებისმიერი საერთო წერტილი ერთ წრფეზე ძევს. მაგრამ B წერტილი და a წრფის ნებისმიერი ორი წერტილი ერთ წრფეზე არ ძევს. მივიღეთ წინააღმდეგობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 25. 2. თუ წრფის ორი წერტილი სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ ეს წრფეც ამ სიბრტყეს ეკუთვნის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, მოცემულია α სიბრტყე, და a წრფე, რომლის ორი წერტილი ამ სიბრტყეს ეკუთვნის (ნახ. 135). ვთქვათ A არის a წრფეზე არაგანსხვავებული რაიმე წერტილი. I_1 აქსიომის თანახმად ასეთი წერტილი არსებობს. ამ წერტილსა და a წრფეზე გავავლოთ α' სიბრტყე (თეორემა 25.1). თუ α' სიბრტყე α სიბრტყეს ემთხვევა, მაშინ a წრფე α სიბრტყეს ეკუთვნის და ამ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია. თუ α' სიბრტყე α სიბრტყეს არ ემთხვევა, მაშინ ეს სიბრტყეები ერთმანეთს რაიმე a' წრფეზე კვეთს, რომელიც a წრფის არ წერტილს შეიცავს. I_2 აქსიომის თანახმად a' წრფე a-ს ან, მაშასადამე, a წრფე α სიბრტყეს ეკუთვნის. თეორემა დამტკიცებულია.

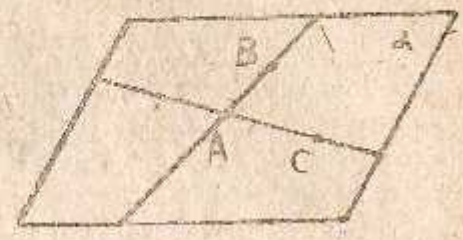


ნახ. 135

თეორემა 25.2-დან გამომდინარეობს, რომ სიბრტყე და მისგან არაგანსხვავებული წრფე ან არ იკვეთებიან, ან იკვეთებიან ერთ წერტილში.

თ ე ო რ ე მ ა 25.3. ერთ წრფეზე არაგანსხვავებულ ნებისმიერ სამ წერტილზე შეიძლება სიბრტყის გავლება, და მასთან მხოლოდ ერთის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.



ნახ. 136

ვთქვათ, მოცემულია ერთ წრფეზე არაგანსხვავებული A, B და C წერტილები (ნახ. 136). გავავლოთ AB და AC წრფეები. ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან, რადგან A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე არ დებიან. ცხადია A, B და C წერტილები მდებარეობენ AB და AC წრფეებზე გავლებულ α სიბრტყეზე. A, B და C წერტილებზე გავავლოთ α სიბრტყე ერთადერთია, რადგან 25. 2. თეორემის თანახმად ამ წერტილებზე გავავალი სიბრტყე შეიცავს AB და AC წრფეებს. VI_2 აქსიომის თანახმად კი ასეთი სიბრტყე ერთადერთია. თეორემა დამტკიცებულია.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

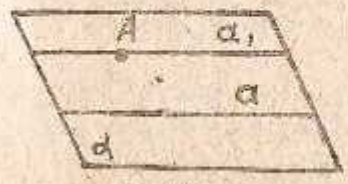
1. ჩამოაყალიბეთ VI აქსიომა.
2. დაამტკიცეთ, რომ წრფისა და მასზე არაგანსხვავებულ წერტილზე შეიძლება სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.
3. დაამტკიცეთ, რომ თუ წრფის ორი წერტილი სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ ეს წრფე ამ სიბრტყეს ეკუთვნის.
4. დაამტკიცეთ, რომ ერთ წრფეზე არაგანსხვავებულ სებისნაირ სამ წერტილზე შეიძლება სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.

§ 26. წრფეებისა და სიბრტყეების პარალელურობა

პარალელური და აცდენილი წრფეები

განსაზღვრება. სივრცეში ორ წრფეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთ სიბრტყეზე მდებარეობენ და ერთმანეთს არ კვეთენ.

თ ე ო რ ე მ ა 26. 1. წრფეზე არაგანსხვავებული წერტილზე შეიძლება გაივლოს ამ წრფის პარალელური წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.



ნახ. 137

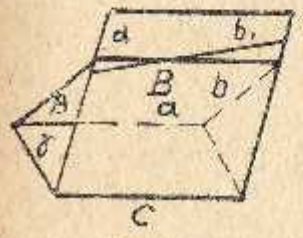
დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, მოცემულია a წრფე და მასზე არაგანსხვავებული A წერტილი (ნახ. 137). a წრფეზე და A წერტილზე გავავლოთ α სიბრტყე. α სიბრტყეში A წერტილ-

ზე გავავლოთ a წრფის პარალელური a_1 წრფე. დავამტკიცოთ, რომ a წრფის პარალელური a_1 წრფე ერთადერთია.

დავუშვათ, რომ არსებობს a წრფის პარალელური სხვა რომელიმე a_2 წრფე, რომელიც A წერტილზე გადის. a და a_2 წრფეებზე შეიძლება β სიბრტყის გავლება. β სიბრტყე გადის a წრფეზე და A წერტილზე. ამიტომ იგი α სიბრტყეს კვეთს (თეორემა 25.1). მივიღეთ, რომ a წრფის პარალელური a_1 და a_2 წრფეები α სიბრტყეს ეკვთხის, პარალელურ წრფეთა აქსიომის თანახმად a_1 და a_2 წრფეები ერთმანეთს კვეთება. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 26. 2. **თუ ორი წრფე ცალ-ცალკე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ იხინი ურთიერთპარალელურია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ b და c წრფეები a წრფის პარალელურია. დავამტკიცოთ, რომ $b \parallel c$.



ნახ. 138

იმ შემთხვევაში, როცა a, b და c წრფეები ერთ სიბრტყეზე მდებარეობენ, თეორემა უკვე დამტკიცებული (თეორემა 4.1). ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ ეს წრფეები ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობენ. ვთქვათ β არის სიბრტყე, რომელზედაც a და b წრფეები მდებარეობენ, ხოლო γ სიბრტყე, რომელზედაც a და c წრფეები მდებარეობენ. β და γ სიბრტყეები სხვადასხვაა (ნახ. 138). b წრფის რაიმე B წერტილზე და c წრფეზე გავავლოთ α სიბრტყე. იგი β სიბრტყეს b_1 წრფეზე გადაკვეთს. b_1 წრფე γ სიბრტყეს არ კვეთს. მართლაც, გადაკვეთის წერტილი a წრფეს უნდა ეკუთვნოდეს, რადგან b_1 წრფე β სიბრტყეზე მდებარეობს. ამასთან იგი c წრფესაც უნდა ეკუთვნოდეს, რადგან b_1 წრფე α სიბრტყეზე მდებარეობს. მაგრამ a და c ურთიერთპარალელური წრფეები ერთმანეთს არ კვეთენ.

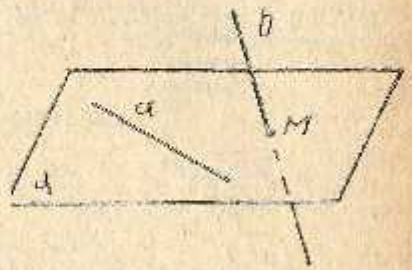
რადგან b_1 წრფე β სიბრტყეზე მდებარეობს და a წრფეს არ კვეთს, ამიტომ იგი a წრფის პარალელურია, და მაშასადამე, პარალელურ წრფეთა აქსიომის თანახმად b-ს ემთხვევა. ამრიგად b წრფე, c წრფესთან ერთად ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს და მას არ კვეთს, ე. ი. $b \parallel c$, თეორემა დამტკიცებულია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. **ორ წრფეს აცდენილი ეწოდება, თუ იხინი ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობენ.**

ცხადია, რომ აცდენილი წრფეები არც **პარალელური** არიან და არც **თანაკვეთებიან.** მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში მათზე შესაძლებელი **იქნებოდა** სიბრტყის გავლება, **რაც** აცდენილ წრფეთა განსაზღვრებას **ეწინააღმდეგება.**

თ ე ო რ ე მ ა 26. 3. **თუ ორი წრფიდან ერთ-ერთი სიბრტყეს კვეთს ნიხ, მეორე კი კვეთს ამ სიბრტყეს პირველ წრფეზე არამდებარე წერტილში, მაშინ ეს წრფეები აცდენილია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ a წრფე α სიბრტყეს კვეთს, ხოლო b წრფე კვეთს ამ სიბრტყეს a-ზე არამდებარე M წერტილში (ნახ. 139). დავამტკიცოთ, რომ a და b წრფეები აცდენილია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. a და b წრფეები არ არიან აცდენილი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი რაიმე β სიბრტყეს ეკუთვნიან. რადგან a წრფესა და M წერტილზე შეიძლება ერადგერთი სიბრტყის გავლება, ამიტომ β სიბრტყე α-ს ემთხვევა. მივიღეთ, რომ b წრფე α სიბრტყეს კვეთს, რაც შეუძლებელია, რადგან b წრფეს α სიბრტყესთან აქვს ერთადერთი საერთო M წერტილი. მაშასადამე, a და b წრფეები აცდენილია. თეორემა დამტკიცებულია.



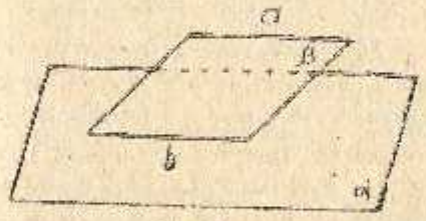
ნახ. 139

წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა. **წრფესა და სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი არ იკვეთებიან.**

თ ე ო რ ე მ ა 26.4. **თუ წრფე, რომელიც სიბრტყეს არ კვეთავნის, ამ სიბრტყეზე მდებარე რომელიმე წრფის პარალელურია, მაშინ ეს თვით სიბრტყის პარალელურია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, a არის წრფე, რომელიც α სიბრტყეს არ ეკუთვნის, ხოლო b — წრფე, რომელიც α სიბრტყეს ეკუთვნის და a წრფის პარალელურია. a და b წრფეებზე გავავლოთ β სიბრტყე (ნახ. 140). იგი განსხვავდება α სიბრტყისაგან, რადგან a წრფე α სიბრტყეს არ ეკუთვნის. α და β სიბრტყეები ეთანაკვეთება b წრფეზე კვეთს. a წრფე, რომ α სიბრტყეს კვეთდეს, მაშინ გადაკვეთის წერტილი b წრფეზე აქსიომით ხოთავსებული, მაგრამ ეს შეუძლებელია, რადგან $a \parallel b$. აქედან, a წრფე α სიბრტყეს არ კვეთს, და მაშასადამე, იგი α სიბრტყის პარალელურია. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 140

თეორემა 26. 3 (თეორემა 26.4-ის შებრუნებული). **თუ სიბრტყე შეიცავს მეორე სიბრტყის პარალელურ წრფეზე და კვეთს ამ სიბრტყეს, მაშინ გადაკვეთის წრფე მოცემული წრფის პარალელურია.**

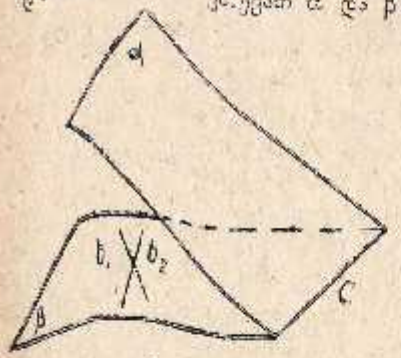
დამტკიცება. ვთქვათ, β სიბრტყე გადის α სიბრტყის პარალელურ a წრფეზე და კვეთს α სიბრტყეს b წრფეზე (ნახ. 140). a და b წრფეები ერთსიბრტყიანია, ვინაიდან β სიბრტყეს ეკუთვნიან. ამასთან a წრფე b წრფის არ გადაკვეთს, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში a წრფე გადაკვეთდა α სიბრტყეს, რაც მოცემულობას ეწინააღმდეგება, ე. ი. ძველ. თეორემა დამტკიცებულია.

სიბრტყეთა პარალელურობა

განსაზღვრება. **ორ სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთს.**

თეორემა 26. 4. **ორი სიბრტყე პარალელურია, თუ ერთი მათგანი შეიცავს მეორე სიბრტყეში შედებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფის პარალელურია.**

დამტკიცება. ვთქვათ α და β მოცემული სიბრტყეებია, ხოლო b_1 და b_2 — β სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფე, რომლებიც α სიბრტყის პარალელურია (ნახ. 141). α და β სიბრტყეები სხვადასხვაა. დავუშვათ, რომ ისინი ერთმანეთს რაიმე C წრფეზე კვეთენ. b_1 და b_2 წრფეები α სიბრტყეს არ კვეთს, ამიტომ ისინი ამ სიბრტყეებზე მდებარე c წრფესაც არ გადაკვეთენ. მიღებულ, რომ ერთიდაიმავე b_1 და b_2 წრფეები ერთდაიმავე c წრფის პარალელური, რაც პარალელურ წრფეთა აქსიომას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

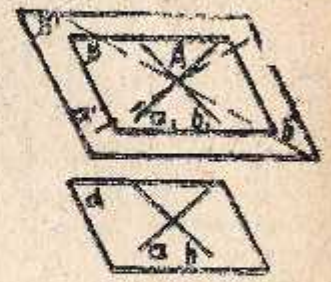


ნახ. 141

თეორემა 26. 7 სიბრტყის გარეთ მდებარე წერტილზე შეიძლება ერთადერთი სიბრტყის პარალელური სიბრტყის გავლება, და მასთან ერთად ერთი.

დამტკიცება. მოცემულ α სიბრტყეში გავავლოთ ორი რომელიმე ურთიერთგადამკვეთი a და b წრფე (ნახ. 142). მოცემულ A წერტილზე გავავლოთ a და b წრფეების პარალელური a_1 და b_1 წრფეები, a_1 და b_1 წრფეებზე გამავალი β სიბრტყე α სიბრტყის პარალელურია (თეორემა 26.6).

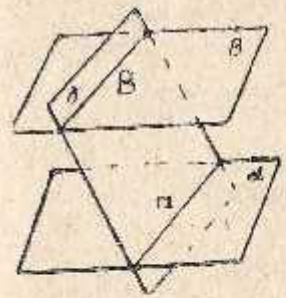
დავუშვათ, რომ A წერტილზე გადის α სიბრტყის პარალელური მეორე β სიბრტყეც. ურთიერთპარალელური a და a_1 წრფეებზე გამავალი სიბრტყე β' სიბრტყეს კვეთს a' წრფეზე. a' წრფე a წრფეს არ კვეთს, რადგან იგი არ კვეთს a წრფეა შემცველ α სიბრტყეს. ამიტომ a' წრფე a წრფის პარალელურია, და მაშასადამე, პარალელურ წრფეთა აქსიომის თანახმად იგი a_1 წრფეს ემთხვევა. პარალელურ b და b_1 წრფეებზე გამავალი სიბრტყე β' სიბრტყეს კვეთს b' წრფეზე. b' წრფე b წრფეს არ კვეთს, ამიტომ b' წრფე b წრფის პარალელურია, და მაშასადამე, იგი ემთხვევა b_1 წრფეს. რადგან VI$_8$ აქსიომის თანახმად a_1 და b_1 წრფეებზე შეიძლება მხოლოდ ერთი სიბრტყის გაველება, ამიტომ β' სიბრტყე β სიბრტყეს ემთხვევა. მივიღეთ წინააღმდეგობა. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 142

თეორემა 26. 7. **თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამე სიბრტყით, მაშინ გადაკვეთის წრფეები პარალელურია.**

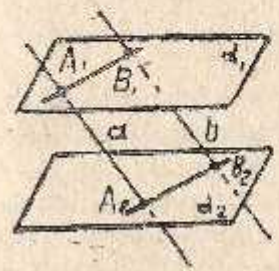
დამტკიცება. ვთქვათ, γ სიბრტყე α და β პარალელურ სიბრტყეებს კვეთს შესაბამისად a და b წრფეებზე (ნახ 143). დავამტკიცოთ, რომ a და b წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ. ამასთან ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში გადაიკვეთებოდნენ α და β სიბრტყეებიც, რაც მოცემულობას ეწინააღმდეგება. ე. ი. ძველ. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 143

თეორემა 26. 8. **ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებული პარალელური წრფეების მონაკვეთები ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ α_1 და α_2 პარალელური სიბრტყეებია, a და b — ამ სიბრტყეების გადამკვეთი პარალელური წრფეები, A_1, A_2 და B_1, B_2 — სიბრტყეებთან წრფეების გადაკვეთის წერტილები (ნახ. 144) a და b წრფეებზე გავავლოთ სიბრტყე. იგი α_1 და α_2 სიბრტყეებს კვეთს



ნახ. 144

A_1B_1 და A_2B_2 პარალელურ წრფეებზე. $A_1B_1B_2A_2$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, რადგან მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია, მაშასადამე, $A_1A_2=B_1B_2$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანები თვითშემოწმებისათვის

1. განსაზღვრეთ წრფეთა პარალელურობა სივრცეში.
2. დამტკიცება, რომ წრეწირზე არაუმეტეს წერტილზე შეიძლება გაეტაროს ამ წრეის პარალელური წრფე და მასთან ერთად ერთი.
3. დამტკიცება რომ თუ არა წრეს ელიფსზე მესამე წრფის პარალელური, მაშინ იგიც ურთიერთპარალელურია.
4. რამდენ ორ წრეს ერთიანი ეტენებიან?
5. დამტკიცება, რომ თუ ორი წრეწირიდან ერთ-ერთია სიბრტყეს ეკეთვის, მეორე კი ეკუთვნის ამ სიბრტყის პარალელურ წრფეზე არამდებარე წერტილში, მაშინ ეს წრფეები პეტენებიალია.
6. განსაზღვრეთ წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა.
7. დამტკიცება, რომ თუ წრფე, რომელიც სიბრტყეს არ ეკუთვნის, ამ სიბრტყეზე მდებარე რომელიმე წრფის პარალელურია, მაშინ ის თვით სიბრტყის პარალელურია.
8. დამტკიცება, რომ თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის პარალელურ წრფეზე და კვეთს ამ სიბრტყეს, მაშინ გადაკვეთის წრფე პარალელურია მოცემულ წრფის პარალელურია.
9. განსაზღვრეთ სიბრტყეთა პარალელურობა.
10. დამტკიცება, რომ არაა სიბრტყე პარალელურია, თუ ერთი მეორეში მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფის პარალელურია.
11. დამტკიცება, რომ სიბრტყის გარეთ მდებარე წერტილში შეიძლება მოცემული სიბრტყის პარალელური სიბრტყის გავლება და მხოლოდ ერთის.
12. დამტკიცება, რომ თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამე სიბრტყით, მაშინ გადაკვეთის წრფეები პარალელურია.
13. დამტკიცება, რომ ორი პარალელური სიბრტყის შორის მოთავსებული პარალელური წრფეების სიგრძეები ტოლია.

§ 27. წრფეებისა და სიბრტყეების პარალელობა

წრფეთა პარალელობა

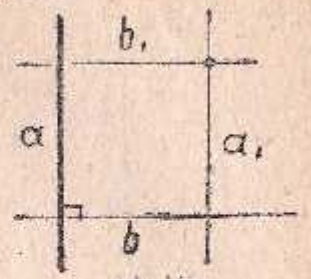
განსაზღვრება. **ორ წრფეს ურთიერთპარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთ სიბრტყეს პარალელურ კუთხით კვეთენ.**

თეორემა 27. 1. ურთიერთპარალელური წრფეების პარალელური ურთიერთგადამკვეთი წრფეები ურთიერთპარალელურია.

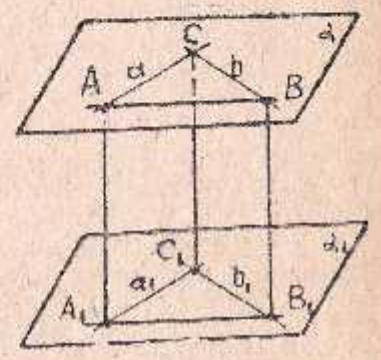
დამტკიცება. ვთქვათ a და b ურთიერთპარალელური წრფეებია, a_1 და b_1 კი — a და b წრფეების პარალელური ურთიერთგადამკვეთი წრფეები. დავამტკიცოთ, რომ $a_1\perp b_1$.

ვნებდეთ, რომ a, b, a_1 და b_1 წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ (ნახ. 145). რადგან $b\parallel b_1$ და $a_1\parallel b$, ამიტომ $a\perp b_1$. რადგან $a\parallel a_1$ და $b_1\perp a$, ამიტომ $a_1\perp b_1$.

ახლა დავუშვათ, რომ a და b წრფეები სივრცეში α სიბრტყეში მდებარეობენ, ხოლო a_1 და b_1 წრფეები — თანმყოფად a_1 სიბრტყეში (ნახ. 146). a და b წრფეები a_1 სიბრტყის პარალელურია (თეორემა 26.6), ამიტომ α და a_1 სიბრტყეები ურთიერთპარალელურია (თეორემა 26.8). ვთქვათ, C არის a და b წრფეების ურთიერთგადაკვეთის წერტილი. C_1 კი — a_1 და b_1 წრფეების ურთიერთგადაკვეთის წერტილი. პარალელური a და a_1 წრფეების სიბრტყეში გავავლოთ CC_1 წრფის პარალელური წრფე. იგი a და a_1 წრფეებს გადაკვეთს A და A_1 წერტილებში. ანალოგიურად, b და b_1 პარალელური წრფეების სიბრტყეშიც გავავლოთ CC_1 წრფის პარალელური წრფე, რომელიც b და b_1 წრფეებს გადაკვეთს B და B_1 წერტილებში.



ნახ. 146



ნახ. 146

CAA_1C_1 და CBB_1C_1 ოთხკუთხედები პარალელოგრამებია, რადგან მათი მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია. ABB_1A_1 ოთხკუთხედი ორგორეთვე პარალელოგრამია, რადგან $AA_1\parallel BB_1$, როგორც ერთდაიმავე CC_1 წრფის პარალელური მონაკვეთები, და $AA_1=BB_1$, როგორც პარალელურ სიბრტყეებს შორის მოთავსებული პარალელური წრფეების მონაკვეთები.

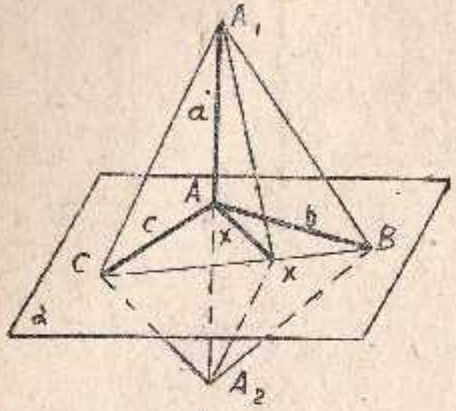
$\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად, რადგან $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, როგორც პარალელოგრამების მოპირდაპირე გვერდები. მაშასადამე, $\angle A_1C_1B_1=\angle ACB=90^\circ$, ე. ი. $a_1\perp b_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

წრფისა და სიბრტყის პარალელობა

განსაზღვრება. **სიბრტყის გადამკვეთ წრფეს ამ სიბრტყისადმი მართობული ეწოდება, თუ იგი გადაკვეთის წერტილზე გამავალი და მოცემულ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფის მართობულია.**

თეორემა 27. 2. თუ სიბრტყის გადამკვეთი წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე და გადაკვეთის წერტილზე გამავალი ორი წრფის მართობულია, მაშინ იგი სიბრტყის მართობულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, a არის წრფე, რომელიც α სიბრტყეს A წერტილში კვეთს და ამ სიბრტყეზე შეუბარე b და c წრფეების მართობულია (ნახ. 147). დავამტკიცოთ რომ a წრფე α სიბრტყის მართობულია.



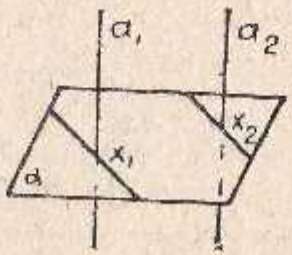
ნახ. 147

α სიბრტყეში A წერტილზე გავავლოთ b და c წრფეებისაგან განსხვავებული ნებისმიერი x წრფე და ვაჩვენოთ, რომ იგი a წრფის მართობულია. α სიბრტყეში გავავლოთ ნებისმიერი ისეთი წრფე, რომელიც A წერტილზე არ გაივლის და b, c და x წრფეებს გადაკვეთს. ვთქვათ გადაკვეთის წერტილებია B, C და X.

a წრფეზე A წერტილიდან სხვადასხვა მიმართულებით ავაგოთ AA_1 და AA_2 ტოლი მონაკვეთები. $CA_1=CA_2$. რადგან CA წარმოადგენს A_1A_2 მონაკვეთის შუამართობს, ანალოგიურად, $BA_1=BA_2$. ბოლოსადაც, $\triangle A_1BC=\triangle A_2BC$ სამკუთხედების ტოლობის ნიშანია თანახმად. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს A_1BX და A_2BX კუთხეების ტოლობა, და მაშასადამე, სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად $\triangle A_1BX=\triangle A_2BX$. ამ სამკუთხედების A_1X და A_2X გვერდების ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $\triangle A_1XA_2$ ტოლფერდა. ამიტომ მისი XA შუალინა სიმაღლეცაა. ე. ი. $x\perp a$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 27.3. **თუ სიბრტყე ორი ურთიერთპარალელური წრფიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ იგი მეორე წრფის მართობულიც იქნება.**

დამტკიცება. ვთქვათ a_1 და a_2 არის ორი ურთიერთპარალელური წრფე, α — სიბრტყე, რომელიც a_1 წრფის მართობულია (ნახ 148).



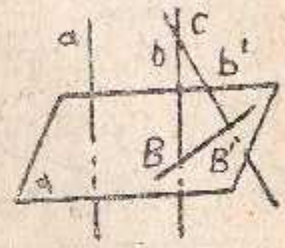
ნახ. 148

დავამტკიცოთ, რომ ეს სიბრტყე a_2 წრფის მართობულიცაა. α სიბრტყეში a_2 წრფისა და α სიბრტყის გადაკვეთის წერტილზე გავავლოთ ნებისმიერი x_2 წრფე. α სიბრტყისა და a_1 წრფის გადაკვეთის წერტილზე გავავლოთ x_2 წრფის პარალელური x_1 წრფე. ეს წრფე α სიბრტყეში ძევს. რადგან a_1 წრფე α — სიბრტყის მართობულია, ამიტომ a_1 და x_1 წრფეები

ურთიერმართობულია. 27.1 თეორემის თანახმად კი ამ წრფეების პარალელური ურთიერთგადაკვეთა a_2 და x_2 წრფეებიც ავტომატურად ერთმანეთის მართობულია. ამრიგად, a_2 წრფე α სიბრტყეში ნებისმიერი x_2 წრფის მართობულია, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ a_2 წრფე α სიბრტყის მართობულია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 27. 4. **თუ ორი წრფე ერთიდაიმავე სიბრტყის მართობულია, მაშინ ისინი პარალელურია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, a და b არის α სიბრტყის მართობული წრფეები (ნახ. 149). დავუშვათ, რომ a და b ერთმანეთის პარალელური არ არის. b წრფის რომელიმე C წერტილზე გავავლოთ a წრფის პარალელური b წრფე. b' წრფე α სიბრტყის მართობულია (თეორემა 27.3). ვთქვათ, B და B' არის α სიბრტყესთან b და b' წრფეების გადაკვეთის წერტილები. მაშინ BB' წრფე ურთიერთგადაკვეთა b და b_1 წრფეების მართობულია. ეს კი შეუძლებელია. მივედით წინააღმდეგობამდე. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 149

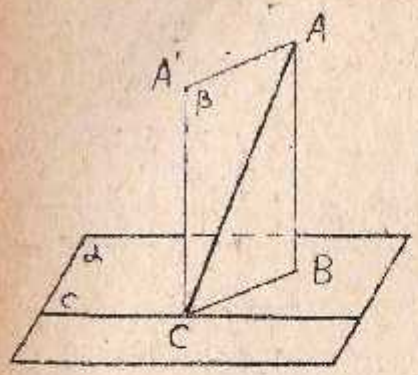
§12. მართობის თეორემა

მოცემული წერტილიდან მოცემულ სიბრტყეზე დაშვებული მართობი ეწოდება ამ მონაკვეთს, რომელიც მოცემულ წერტილს აერთებს სიბრტყესთან და ძევს სიბრტყის მართობულ წრფეზე. მონაკვეთის იმ ბოლოს, რომელიც სიბრტყეში ძევს, მართობის ფუძე ეწოდება. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი ეწოდება ამ წერტილიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს.

მოცემული წერტილიდან მოცემული სიბრტყისადმი გავლებული დახრილი ეწოდება ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელიც სიბრტყისადმი მართობს არ წარმოიქმნის და, რომლის ერთი ბოლო მოცემულ წერტილშია, ხოლო მეორე — სიბრტყეზე. მონაკვეთის იმ ბოლოს, რომელიც სიბრტყეში ძევს, დახრილის ფუძე ეწოდება. ერთიდაიმავე წერტილიდან გავლებული მართობისა და დახრილის ყველა შემაერთებელ მონაკვეთს დახრილის გეგმილი ეწოდება.

თეორემა 27.5. (სამი მართობის თეორემა). **თუ სიბრტყეზე მდებარე წრფე დახრილის ფუძეზე გადის და ამ დახრილის გეგმილის მართობულია, მაშინ იგი დახრილის მართობულიც არის. პირიქით თუ სიბრტყეზე მდებარე წრფე დახრილის მართობულია, მაშინ ის დახრილის გეგმილის მართობულიც არის.**

დამტკიცება. ვთქვათ, AB არის α სიბრტყისადმი გავლებული მართობი, AC — დაბრილი, ხოლო c კი α სიბრტყეში მდებარე წრფე, რომელიც დაბრილის C ფუძეზე გადის (ნახ. 150). გავავლოთ α სიბრტყის მართობი CA' წრფე. ივი AB წრფის პარალელურია (თეორემა 27.4). AB და AC-ზე გავავლოთ β სიბრტყე. $c \perp CA'$ აგების თანახმად, ხოლო $c \perp CB$ პირობის თანახმად. ამიტომ c წრფე β სიბრტყის, მაშასადამე AC წრფის მართობულია.



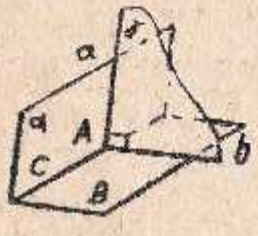
ნახ. 150

ანალოგიურად, თუ c წრფე CA დაბრილის მართობულია, მაშინ, რადგან c წრფე CA' წრფის მართობულია, იგი β სიბრტყის მართობულია. მაშასადამე c წრფე დაბრილის BC გეგმილის მართობულია, თეორემა დამტკიცებულია.

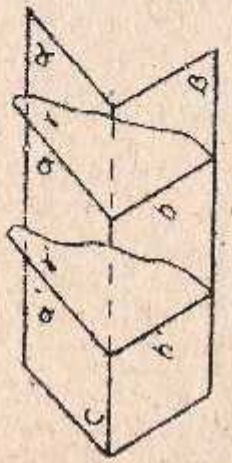
სიბრტყეთა მართობულობა

განსაზღვრება. **ორ ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეს ურთიერთმართობული ეწოდება, თუ მესამე სიბრტყე, რომელიც სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფის მართობულია, ამ სიბრტყეებს კვეთს ურთიერთმართობულ წრფეებზე** (ნახ. 151).

სიბრტყეთა მართობულობის გასხაზვისთვის არ არის დაწოლილებული γ სიბრტყის შერჩევაზე: მართლაც, თუ ავიღებთ სხვა რომელიმე γ' სიბრტყეს, რომელიც c წრფის მართობულია, მაშინ იგი α და β სიბრტყეებს გადაკვეთს a' და b' წრფეებზე, რომლებიც შესაბამისად a და b წრფეების პარალელურია. (ნახ. 152). ამიტომ a და b წრფეების მართობულობიდან გამომდინარეობს a' და b' წრფეების პარალელობა (თეორემა 27.1).



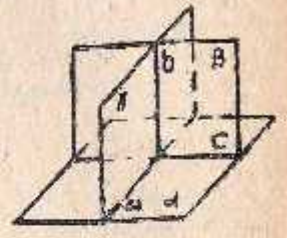
ნახ. 151



ნახ. 152

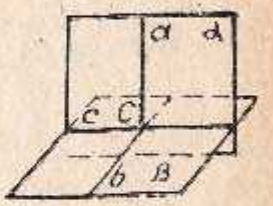
თეორემა 27.6. **თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები ურთიერთმართობულია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, β სიბრტყე გადის α სიბრტყის მართობულ b წრფეზე, ხოლო c კი α და β სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეა (ნახ. 153). დავამტკიცოთ, რომ $\alpha \perp \beta$. b წრფისა და α სიბრტყის გადაკვეთის წერტილზე α სიბრტყეში გავავლოთ c წრფის მართობული a წრფე. a და b წრფეებზე გავავლებული γ სიბრტყე c წრფის მართობულია, რადგან c წრფე a და b წრფეებს მართობულია. ვინაიდან $a \perp b$ ამიტომ $\alpha \perp \beta$, თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 153

თეორემა 27.7. **თუ ორი ურთიერთმართობული სიბრტყიდან ერთ-ერთში გავავლებთ მაინც გადაკვეთის წრფის მართობულ წრფეს, მაშინ ეს წრფე მეორე სიბრტყის მართობულიც იქნება.**



ნახ. 154

დამტკიცება. ვთქვათ, α და β მოცემული ურთიერთმართობული სიბრტყეებია, რომელთა გადაკვეთის წრფეა c. a არის α სიბრტყეში მდებარე წრფე, რომელიც c წრფის მართობულია (ნახ. 154). დავამტკიცოთ, რომ a წრფე β სიბრტყის მართობულია. a და c წრფეების გადაკვეთის C წერტილზე β სიბრტყეში გავავლოთ c წრფის მართობული b წრფე. a და b წრფეებზე გავავლოთ γ სიბრტყე. c წრფის მართობულია, რადგან მასში მდებარე a და b წრფეების მართობულია. რადგან α და β სიბრტყე ურთიერთმართობულია, ამიტომ a და b წრფეებიც ურთიერთმართობულია. ვიცით, რომ a წრფე მართობულია β სიბრტყეში მდებარე b და c წრფეების. ამიტომ $\alpha \perp \beta$. თეორემა დამტკიცებულია.

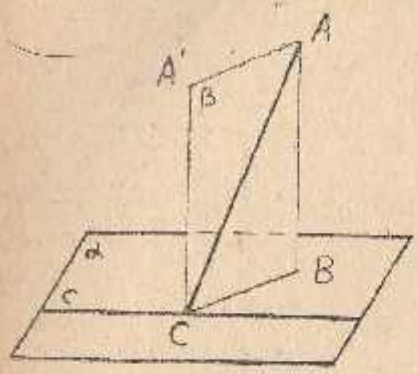
მანძილი აცდენილ წრფეებს შორის

ორი აცდენილი წრფის საერთო მართობი ერთადერთი მონაკვეთის, რომლის ბოლოებიც ამ წრფეებზეა და მათგანის მართობულია.

ნატკიცება, რომ ორ აცდენილ წრფეს აქვს საერთო მართობი და მასთან მხოლოდ ერთი. ივი ამ წრფეებზე გამავალი პარალელური სიბრტყეების საერთო მართობია.

აცდენილ წრფეებს შორის მანძილი ეწოდება მათი საერთო მართობის სიგრძეს. ივი ამ წრფეებზე გამავალ პარალელური სიბრტყეებს შორის მანძილის ტოლია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, AB არის α სიბრტყისადმი გავლებული მართი ბა, AC — დახრილი, ხოლო c კი α სიბრტყეში მდებარე წრფეა, რომელიც დახრილის C ფუძეზე გადის (ნახ. 150). გავავლოთ α სიბრტყის მართობი CA' წრფე. იგი AB წრფის პროექციაა (თეორემა 27.4). AB და AC-ზე გავავლოთ β სიბრტყე $c \perp CA'$ პირობის თანახმად. ხოლო $c \perp CB$ პირველობის თანახმად. ამიტომ c წრფე β სიბრტყის, მაწასადამე AC წრფის მართობულია.



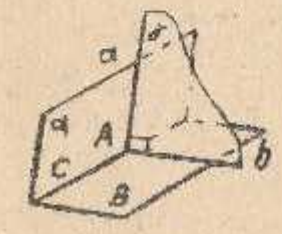
ნახ. 150

ანალოგიურად, თუ c წრფე CA დახრილის მართობულია. მაშინ, რადგან c წრფე CA' წრფის მართობულია, იგი β სიბრტყის მართობულიცაა. მაშასადამე c წრფე დახრილის BC გეგმილის მართობულია, თეორემა დამტკიცებულია.

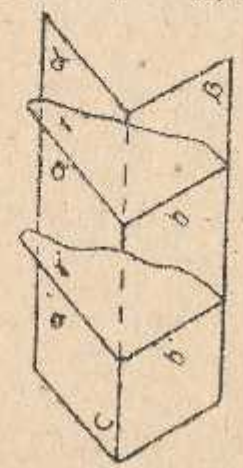
სიმრავლეთა მართობულობა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა: **ორ ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეს ურთიერთმართობული ეწოდება, თუ მესამე სიბრტყე, რომელიც სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფის მართობულია, ამ სიბრტყეებს კვეთს ურთიერთმართობულ წრფეებზე** (ნახ. 151).

სიბრტყეთა მართობულობის განსაზღვრებაში არ ითქმის ცალკეულებული γ სიბრტყის შერჩევაზე. ვარდაც, თუ ავიღებთ სხვა რომელიმე γ' სიბრტყეს, რომელიც c წრფის მართობულია, მაშინ იგი α და β სიბრტყეებს გადაკვეთს a' და b' წრფეებზე, რომლებიც შესაბამისად a და b წრფეების პარალელურია. (ნახ. 152). ამიტომ a და b წრფეების მართობულობიდან გამომდინარეობს a' და b' წრფეების მართობულობა (თეორემა 27.1).



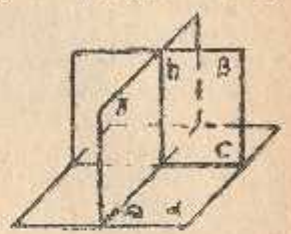
ნახ. 151



ნახ. 152

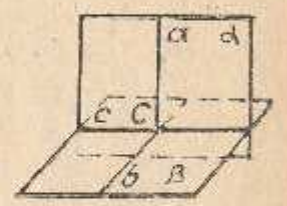
თ ე ო რ ე მ ა 27.6. **თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები ურთიერთმართობულია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, β სიბრტყე გადის α სიბრტყის მართობულ b წრფეზე, ხოლო c კი α და β სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეა (ნახ. 153). დავამტკიცოთ, რომ $\alpha \perp \beta$. b წრფისა და α სიბრტყის გადაკვეთის წერტილზე α სიბრტყეში გავავლოთ c წრფის მართობული a წრფე. a და b წრფეებზე გავლებული γ სიბრტყე c წრფის პარალელურია, რადგან c წრფე a და b წრფეების მართობულია. ვიცით, რომ $a \perp b$ ამიტომ $\alpha \perp \beta$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 153

თ ე ო რ ე მ ა 27.7. **თუ ორი ურთიერთმართობული სიბრტყიდან ერთ-ერთში გავავლებთ მათი გადაკვეთის წრფის მართობულ წრფეს, მაშინ ეს წრფე მეორე სიბრტყის მართობულიც იქნება.**



ნახ. 154

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, α და β მოცემული ურთიერთმართობული სიბრტყეებია, რომელთა გადაკვეთის წრფეა c. a არის α სიბრტყეში მდებარე წრფე, რომელიც c წრფის მართობულია (ნახ. 154). დავამტკიცოთ, რომ a წრფე β სიბრტყის მართობულია. a და c წრფეების გადაკვეთის C წერტილზე β სიბრტყეში, გავავლოთ c წრფის მართობული b წრფე. a და b წრფეებზე გამავალი γ სიბრტყე c წრფის პარალელურია, რადგან მასში მდებარე a და b წრფეები c წრფის მართობულია. რადგან α და β სიბრტყე ურთიერთმართობულია, ამიტომ a და b წრფეებიც ერთიმეორის მართობულია, მაგალითად, რომ a წრფე მართობულია β სიბრტყეში მდებარე b და c წრფეებს. ამიტომ $\alpha \perp \beta$. თეორემა დამტკიცებულია.

მანძილი ასტენილ წრფეებს შორის

ორი ასკვნილი წრფის საერთო მართობი ეწოდება მონაკვეთს, რომლის ბოლოები ამ წრფეებზეა და თითოეული მათგანის მართობულია.

მტკიცდება, რომ ორ ასკვნილ წრფეს აქვს საერთო მართობი და მხოლოდ ერთი. იგი ამ წრფეებზე გამავალი პარალელური სიბრტყეების ალერთი მართობია.

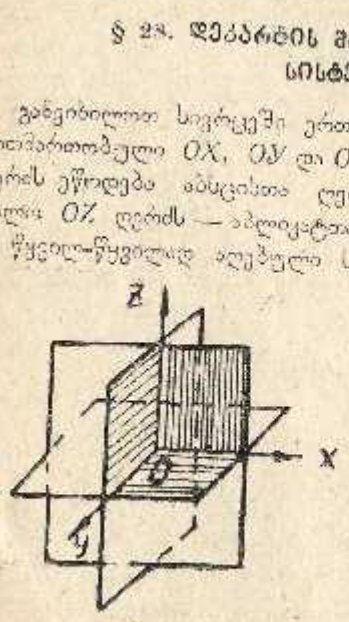
ასკვნილ წრფეებს შორის მანძილი ეწოდება მათი საერთო მართობის სიგრძეს. იგი ამ წრფეებზე გამავალ პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილის ტოლია.

1. განსაზღვრეთ ერთიანურთაბრთობული წრფეები სივრცეში.
2. დაამტკიცეთ, რომ ერთიანურთაბრთობული წრფეების პარალელური ერთიანურთაბრთობული წრფეები ერთიანურთაბრთობულია.
3. რომელი წრფეა ერთიანურთაბრთობული?
4. დაამტკიცეთ, რომ თუ სიბრტყის გადამკვეთი წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე და გადამკვეთის ერთერთზე განსაკუთრებული წრფის მართობულია, მაშინ იგი სიბრტყის მართობულია.
5. დაამტკიცეთ, რომ თუ სიბრტყე ორი ერთიანურთაბრთობული წრფიდან ერთერთის მართობულია, მაშინ იგი ნებისმიერ წრფის მართობულია.
6. დაამტკიცეთ, რომ ორ სიბრტყეს ერთი საერთო მართობული წრფე აქვს.
7. რა ეწოდება მოცემული წერტილიდან სიბრტყემდე დაშვებული მართობის?
8. რას ეწოდება წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი?
9. რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხის წიბო? სახეები? ნახევარსიბრტყეები?
10. დაამტკიცეთ სამი მართობის თეორემა.
11. რომელი სიბრტყეებს ეწოდება ურთიერთმართობული?
12. დაამტკიცეთ, რომ თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები მართობულია.
13. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი ურთიერთმართობული სიბრტყიდან ერთერთში აღებული მაინც გადაკვეთის წრფის მართობულ წრფეს, მაშინ ეს წრფე მეორე სიბრტყის მართობულიც აღმოჩნდება.
14. რას ეწოდება ოცდაერთი წრფეების საერთო მართობი?
15. რას ეწოდება ორი ერთიანურთაბრთობული წრფეების შორის?

§ 28. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

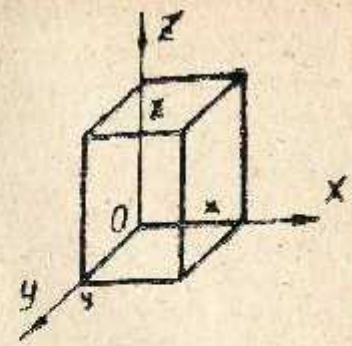
განვიხილოთ სივრცეში ერთიდაიმავე მასშტაბის ნებისმიერი სამი ერთიანურთაბრთობული OX, OY და OZ კოორდინატთა ღერძი (ნახ. 153). OX ღერძს ეწოდება აბსცისთა ღერძი, OY ღერძს — ორდინატთა ღერძი, ხოლო OZ ღერძს — აპლიკატთა ღერძი.

წყვილ-წყვილად აღებული კოორდინატთა ღერძები განსაზღვრავენ ე. წ. კოორდინატთა XOY, YOZ და ZOX სიბრტყეებს. კოორდინატთა ღერძების გადაკვეთის O წერტილს კოორდინატთა სათავე ეწოდება. კოორდინატთა ღერძების ასეთ სისტემას ეწოდება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში.



ნახ. 153

სივრცეში აღებულ ნებისმიერ M წერტილზე გავავლოთ კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები, რომლებიც კოორდინატთა OX, OY და OZ ღერძებს გადაკვეთენ წერტილებში, რომელთა კოორდინატებია შესაბამისად x, y და z (ნახ. 156). ამრიგად, სივრცის ნებისმიერ M წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა გარკვეული დალაგებული (x, y, z) სამეული. x-ს ეწოდება M წერტილის აბსცისა, y-ს — ორდინატი, ხოლო z-ს აპლიკატი. x, y და z რიცხვებს ეწოდება M წერტილის კოორდინატები და წერენ $M(x, y, z)$.



ნახ. 156

კუთვნილი ახლა მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა (x, y, z) სამეული. აბსცისთა ღერძის x წერტილზე, ორდინატთა ღერძის y წერტილზე და აპლიკატთა ღერძის z წერტილზე გავავლოთ შესაბამისად OX, OY და OZ ღერძების მართობული სიბრტყეები. ცხადია, რომ ეს სიბრტყეები ერთ წერტილში გადაიკვეთებიან და მოცემული (x, y, z) სამეული შეესაბამება მათი გადაკვეთის M წერტილს. ამ წესით ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი (x, y, z) დალაგებულ სამეულს შეესაბამება სივრცის გარკვეული წერტილი, რომლის კოორდინატებია x, y და z.

ამრიგად, სივრცის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული სამეულების სიმრავლეს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

შევნიშნოთ, რომ თუ სივრცეში მოცემულია რაიმე ორი $A_1(x_1, y_1, z_1)$ და $A_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილები, მაშინ A_1A_2 მონაკვეთის შუა $A(x, y, z)$ წერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2},$$

ხოლო A_1A_2 მონაკვეთის d სიგრძე (მახვილი A_1 და A_2 წერტილებს შორის) — ფორმულით

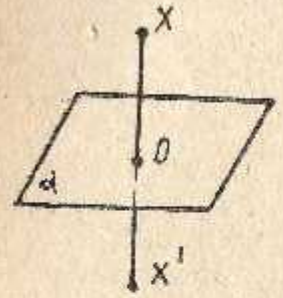
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

1. რას ეწოდება აბსცისთა ღერძი, ორდინატთა ღერძი — აპლიკატთა ღერძი?
2. რას ეწოდება კოორდინატთა სათავე?
3. რას ეწოდება სივრცის ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები?
4. როგორ განსაზღვრება რაიმე მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები ამ მონაკვეთის ბოლოების კოორდინატების საშუალებით?
5. მოიყვანეთ ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა.
6. ს. ო. ოთხეთია და სხვა

§ 29. ფიგურათა გარდაქმნა სივრცეში

სივრცეში ფიგურათა გარდაქმნა ისეგე განისაზღვრება, როგორც სიბრტყეზე (§ 13). სივრცეში წერტილის მიმართ სიმეტრია, წრფივი მიმართ სიმეტრია და პოლოთეტია აგრეთვე ისეგე განისაზღვრება, როგორც სიბრტყეზე.

გარდა წერტილის მიმართ სიმეტრიისა და წრფის მიმართ სიმეტრიისა, განიხილება სიბრტყის მიმართ სიმეტრიაც. ამ გარდაქმნის აზრი ასეთია: ვთქვათ, α ნებისმიერი ფიქსირებული სიბრტყეა (ნახ. 157). ფიგურის X წერტილიდან α სიბრტყეზე ვუშვებთ XO მართობს და მის გაგრძელებაზე O წერტილს მაჩარებს ვაგებთ XO-ის ტოლ OX' მონაკვეთს. გარდაქმნას, რომელსაც X წერტილი გადაჰყავს მის სიმეტრიულ X' წერტილში, ეწოდებენ α სიბრტყის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნას. თუ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნას ფიგურა თავის თავში გადაჰყავს, მაშინ ფიგურას ეწოდებენ სიმეტრიულს α სიბრტყის მიმართ, ხოლო α სიბრტყეს — სიმეტრიის სიბრტყეს.



ნახ. 157

სივრცეში მოძრაობა ისეგე განისაზღვრება, როგორც სიბრტყეზე. სახელდობრ, მოძრაობა ეწოდება გარდაქმნას, რომელიც წერტილებს შორის მანძილებს არ ცვლის. სივრცეში წერტილის, წრფისა და სიბრტყის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნები მოძრაობებია. შევნიშნოთ, რომ ისევე როგორც სიბრტყეზე, მოძრაობას წრფე გადაჰყავს წრფეში, სხივი — სხივში, მონაკვეთი — მონაკვეთში და კუთხე მის ტოლ კუთხეში. სივრცეში მოძრაობის ახალი თვისება ის არის, რომ მოძრაობას სიბრტყე გადაჰყავს სიბრტყეში.

პარალელური გადატანა. პარალელური გადატანა ეწოდება ისეთ გარდაქმნას, რომელსაც ფიგურის ნებისმიერი (x, y, z) წერტილი გადაჰყავს $(x+a, y+b, z+c)$ წერტილში, სადაც a, b, c — მუდმივებია. ამრიგად, პარალელური გადატანა მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b, \qquad z' = z + c,$$

სადაც x', y' და z' წარმოადგენენ იმ წერტილის კოორდინატებს, რომელშიაც პარალელური გადატანისას გადადის (x, y, z) წერტილი.

ორ პარალელურ გადატანას სრულდება სიბრტყეზე, მაშინ ფიგურის ნებისმიერი (x, y) წერტილი გადადის ისეთ (x', y') წერტილში, რომ

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b,$$

სადაც a და b რაიმე მუდმივებია.

პარალელური გადატანას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. პარალელური გადატანა მოძრაობაა.
2. პარალელური გადატანისას წერტილები გადაადგილდება პარალელური (ან თანხვედრილი) წრფეების გასწვრივ ერთი და იმავე მანძილზე.
3. პარალელური გადატანისას თითოეული წრფე გადადის თავისივე პარალელურ წრფეში (ან თავის თავში).
4. ნებისმიერი ორი A და A' წერტილისათვის არსებობს მხოლოდ ერთი პარალელური გადატანა, რომელსაც A წერტილი A' წერტილში გადაჰყავს.
5. ორი თანამიმდევრობით შესრულებული პარალელური გადატანა გვაძლევს პარალელურ გადატანას.
6. პარალელური გადატანის შებრუნებული გარდაქმნა არის პარალელური გადატანა.
7. სივრცეში პარალელურ გადატანას ყოველი სიბრტყე გადაჰყავს ან თავის თავში, ან თავის პარალელურ სიბრტყეში.

● სივრცეში პოლოთეტია და მსგავსების გარდაქმნა ისევე განისაზღვრება, როგორც სიბრტყეზე. ისევე, როგორც სიბრტყეზე, მტკიცდება, რომ სივრცეში პოლოთეტია არის მსგავსების გარდაქმნა.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

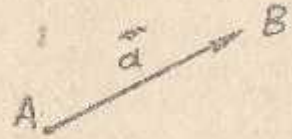
1. რისგან ფიგურას ეწოდება სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული?
2. რას ეწოდება სიმეტრია სიბრტყის?
3. რას ეწოდება მოძრაობა?
4. რას ეწოდება პარალელური გადატანა?
5. ჩამოაყალიბეთ პარალელური გადატანის თვისებები.
6. რას ეწოდება პოლოთეტია?

§ 30. ვექტორები

ფიზიკის, მექანიკის და სხვადასხვა ტექნიკური საგნების შესწავლისას გვხვდება სიდიდეები, რომლებიც სივრცით განისაზღვრებიან მათი რიცხვითი მნიშვნელობებით. ასეთ სიდიდეებს სკალარული სიდიდეები ეწოდება. სკალარული სიდიდეების ნაგალითებია სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, მასა, ტემპერატურა და ა. შ. არსებობენ სხვა სახის სიდიდეებიც, რომელთა განსაზღვრისათვის გარდა რიცხვითი მნიშვნელობისა საჭიროა აგრეთვე მიმართულების ცოდნა. ასეთ სიდიდეებს ვექტორული სიდიდეები ეწოდება. ვექტორული სიდიდეების მაგალითებია ძალა, სიჩქარე, აჩქარება, მაგნიტური ველის დაძაბულობა და ა. შ.

სხვადასხვა სახის ვექტორული სიდიდეების ზოგადად შესწავლისათვის (მათი კონკრეტული თვისებების გათვალისწინებლად) შემოვიღოთ ე. წ. ვექტორის ცნება.

მიმართული მონაკვეთის ვექტორი ეწოდება (ნახ. 158). ვექტორების აღნიშვისათვის გამოიყენება ლათინური ანბანის ცალკე ასოები $a, b, c, d, \ldots$. ზოგჯერ ვექტორს მისი გამომსახველი მონაკვეთის ბოლოების მითითებით აღნიშნავენ. მაგალითად, 158-ე ნახაზზე გამოსახული a ვექტორი $\overrightarrow{AB}$-თი შეიძლება აღინიშნოს. a ვექტორის ასეთი აღნიშვნისას A-ს a ვექტორის საწყისი წერტილი, B-ს კი მისი ბოლო წერტილი ეწოდება. როცა ვექტორი მისი გამომსახველი მონაკვეთის ბოლოების მითითებით აღინიშნება, პირველ ადგილზე ყოველთვის ვექტორის საწყისი წერტილი იწერება. ზოგჯერ სიტყვას „ვექტორი“ ნაცვლად ჩანაწერში ზემოთ ისრის ან ხაზი იწერება, მაგალითად ჩანაწერი a ასე იკითხება: „a ვექტორია“.



ნახ. 158

ორ სხივს ერთნაირად მიმართული ეწოდება, თუ არსებობს პარალელური გადატანა, რომელიც ერთ სხივს მეორეში გადაიყვანს. ორ სხივს საწინააღმდეგოდ მიმართული ეწოდება, თუ ერთი მათგანი და მეორის დამატებითი სხივი ერთნაირადაა მიმართული.

$\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორებს ერთნაირად მიმართული ეწოდება, თუ AB და CD სხივები ერთნაირადაა მიმართული, ხოლო საწინააღმდეგოდ მიმართული — თუ AB და CD სხივები საწინააღმდეგოდაა მიმართული.

ცხადია, რომ თუ a და b ვექტორები საწინააღმდეგოდაა მიმართული და b და c ვექტორებიც საწინააღმდეგოდაა მიმართული, მაშინ a და c ვექტორები ერთნაირადაა მიმართული.

ვექტორის სიგრძე (აბსოლუტური სიდიდე, მოდული) ეწოდება ვექტორის გამომსახველი მონაკვეთის სიგრძეს. a ვექტორის სიგრძე $|a|$-ით აღინიშნება.

ორ ვექტორს ტოლი ეწოდება, თუ არსებობს პარალელური გადატანა, რომელიც ერთ ვექტორს მეორეს შეუთავსებს. აქედან გამომდინარეობს, რომ ტოლი ვექტორები ერთნაირადაა მიმართული და მათი სიგრძეები ტოლია. პირიქით, თუ ვექტორები ერთნაირადაა მიმართული და მათი სიგრძეები ტოლია, მაშინ ეს ვექტორები ერთმანეთის ტოლია.

ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილები შეიძლება ერთმანეთს ემთხვეოდეს. ასეთ ვექტორს ნულოვანი ვექტორი ეწოდება. ნულოვანი ვექტორი 0-ით აღინიშნება. ნულოვანი ვექტორის მიმართულება არა აქვს, ხოლო მისი სიგრძე ნულის ტოლად ითვლება. ყველა ნულოვანი ვექტორი ერთმანეთის ტოლია განსაზღვრების თანახმად.

პარალელური გადატანის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი წერტილიდან შეიძლება გადავიდეთ მოცემული ვექტორის ტოლი ვექტორით და მასთან ძალიან ერთი.

ვთქვათ $\bar{a}$ ვექტორის საწყისი წერტილია $A_1(x_1, y_1, z_1)$, ბოლო წერტილი კი $A_2(x_2, y_2, z_2)$. $\bar{a}$ ვექტორის კოორდინატები ეწოდება $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$, რიცხვებს. ვექტორის კოორდინატებს ვექტორის ასოთი აღნიშვნის გვერდით დავწერთ: მოცემულ შემთხვევაში $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$, ან უბრალოდ $\overline{(a_1, a_2, a_3)}$*. ნულოვანი ვექტორის კოორდინატები ნულის ტოლია.

ადვილად წერტილის შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $|\bar{a}(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

თეორემა 30. 1. **ტოლ ვექტორებს შესაბამისი კოორდინატები ტოლი აქვთ, და პირიქით, თუ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები ტოლია, მაშინ ვექტორები ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ $\bar{a}$ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილებია $A_1(x_1, y_1, z_1)$ და $A_2(x_2, y_2, z_2)$. რადგან $\bar{a}$ ვექტორის ტოლი $\bar{b}$ ვექტორი პარალელური გადატანით მიიღება, ამიტომ მისი საწყისი და ბოლო წერტილი შესაბამისად იქნება: $B_1(x_1 + c, y_1 + d, z_1 - k)$, $B_2(x_2 + c, y_2 + d, z_2 + k)$. აქედან ჩანს, რომ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებს ერთი და იგივე $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ კოორდინატები აქვს.

ახლა დავამტკიცოთ შებრუნებული დებულება. ვთქვათ, $\overrightarrow{A_1A_2}$ და $\overrightarrow{B_1B_2}$ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები ტოლია. ვთქვათ, B_1 წერტილის კოორდინატებია x_1', y_1', z_1', ხოლო B_2 წერტილის კოორდინატები — x_2', y_2', z_2'. პირობის თანახმად $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$, $y_2 - y_1 = y_2' - y_1'$, $z_2 - z_1 = z_2' - z_1'$. აქედან $x_2' - x_2 = x_1' - x_1$, $y_2' - y_2 = y_1' - y_1$, $z_2' - z_2 = z_1' - z_1$. პარალელური გადატანა, რომელიც

$$x' = x + x_1' - x_1, \qquad y' = y + y_1' - y_1, \qquad z' = z + z_1' - z_1$$

ფორმულებითაა მოცემული, A_1 წერტილს B_1 წერტილში, A_2 წერტილს კი B_2 წერტილში გადიყვანს, ე. ი. $\overrightarrow{A_1A_2}$ და $\overrightarrow{B_1B_2}$ ვექტორები ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

---

* თუ $\bar{a}$ ვექტორს განვიხილავთ სიბრტყეზე, მაშინ მას ორი კოორდინატი გააჩნია, რომლებიც ანალოგიურად განისაზღვრება. აღნიშნავს ანალოგიური იქნება, მაგალითად $\bar{a}(a_1, a_2)$ ან (a_1, a_2). შეიძლება ის აგრეთვე, რომ შემდგომში მოყვანილი ყველა ფორმულა და ფორმულის სამართლიანია სიბრტყეზე განხილული ვექტორებისათვის. კერძოდ, სიბრტყისათვის შებრუნებული ფორმულის მისაღებად საჭიროა შესაბამის ფორმულაში სივრცისათვის შესაბამისი კოორდინატი ჩაგდებულით ნულის ტოლად.

ვთქვათ, $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია a_1, a_2, a_3, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები კი — b_1, b_2, b_3. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი ეწოდება $\vec{c}$ ვექტორს, რომლის კოორდინატებია a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, ე. ი. $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) + \vec{b}(b_1, b_2, b_3) = \vec{c}(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ნებისმიერი $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებისათვის

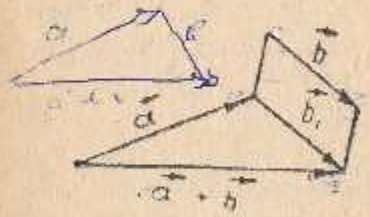
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}, \quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

თ ე ო რ ე მ ა 30. 2. **ნებისმიერი A, B, C წერტილებისათვის მართებულია შემდეგი ვექტორული ტოლობა:**

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

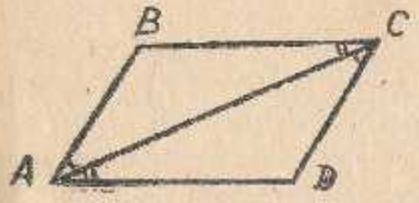
მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ მოცემული წერტილებია. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, ხოლო $\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატები კი — x_3-x_2, y_3-y_2, z_3-z_2. მაშასადამე, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1. ეს კი $\overrightarrow{AC}$ ვექტორის კოორდინატებია. თეორემა 30.1-ის თანახმად $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორები ერთნაირების ტოლია, თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა საშუალებას $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამის აგების შემდეგ წესს გვაძლევს: $\vec{a}$ ვექტორის ბოლოდან უნდა გადავდოთ $\vec{b}$ ვექტორის ტოლი $\vec{b}_1$ ვექტორი. ვექტორი, რომლის საწყისი $\vec{a}$ ვექტორის საწყისთან ემთხვევა, ხოლო კი $\vec{b}_1$ ვექტორის ბოლოა, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამის ტოლია (ნახ. 159). ვექტორთა შეკრების ამ წესს „სამკუთხედის წესი“ ეწოდება.



ნახ. 159

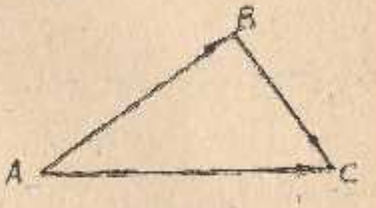
ვთქვათ, მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი (ნახ. 160). დავამტკიცოთ, რომ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (ვექტორების შეკრების „პარალელოგრამის წესი“). მართლაც, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. მაგრამ $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{AD}$ ვექტორები ტოლია, ამიტომ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ და $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ ვექტორების სხვაობა ეწოდება ისეთ



ნახ. 160

$\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ ვექტორს, რომელიც $\vec{b}$ ვექტორთან ჯამში $\vec{a}$ ვექტორს გვაძლევს: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. აქედან გვაქვთ $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. ვექტორის კოორდინატებს: $c_1=a_1-b_1$, $c_2=a_2-b_2$, $c_3=a_3-b_3$.

ვთქვათ, მოცემულია სიბრტყის სისტემა $A\vec{B}$ და $A\vec{C}$ ვექტორები. ვიპოვნოთ, რომ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ (ნახ. 161). მართლაც, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.



ნახ. 161

$\vec{a}$ და $\vec{a}$ არანულოვან ვექტორებს მოპირდაპირე ვექტორები ეწოდება თუ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. ცხადია, რომ მოპირდაპირე ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები მოპირდაპირე რიცხვებია.

ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მოპირდაპირე ვექტორებია. რაიმე A წერტილიდან გადავდოთ $\vec{a}$-ს ტოლი $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი. B წერტილიდან გადავდოთ $\vec{b}$-ს ტოლი ვექტორი. რადგან $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$, ამიტომ ვექტორების შეკრების სამკუთხედის წესის თანახმად $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$. ამრიგად, მოპირდაპირე ვექტორის გამოსახვის თანახმად $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$. ამრიგად, მოპირდაპირე ვექტორებს სიგრძეები ტოლია და ისინი საწინააღმდეგოდ არიან მიმართულნი.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლება

$\overrightarrow{(a_1, a_2, a_3)}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება $\overrightarrow{(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)}$ ვექტორს, ე. ი.

$$\overrightarrow{(a_1, a_2, a_3)} \cdot \lambda = \overrightarrow{(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)}.$$

განსაზღვრებიდან მივიღებთ, რომ

$$\overrightarrow{(a_1, a_2, a_3)}\lambda = \lambda\overrightarrow{(a_1, a_2, a_3)}.$$

ცხადია, რომ $\vec{a}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი არის $\vec{b} = (-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$ ვექტორი.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციას განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისა და ნებისმიერი λ და μ რიცხვებისათვის

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}.$$

ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორისა და λ რიცხვისათვის

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

თეორემა 30. 3. $\lambda\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე $|\lambda||\vec{a}|$-ის ტოლია. თუ $\vec{a}\neq 0$, მაშინ $\lambda\vec{a}$ ვექტორის მიმართულება $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულებას ემთხვევა, როცა $\lambda>0$, და $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების საწინააღმდეგოა, როცა $\lambda<0$.

დამტკიცება. ავაგოთ $\overrightarrow{OA}$ და $\overrightarrow{OB}$ ვექტორები, რომლებიც შესაბამისად $\vec{a}$ და $\lambda\vec{a}$ ვექტორების ტოლია (O კოორდინატთა სათავეა). ვთქვათ, $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია a_1, a_2 და a_3. მაშინ A წერტილის კოორდინატებია a_1, a_2, a_3, ხოლო B წერტილის კოორდინატები კი λa_1, λa_2 და λa_3.

ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად

$$OA=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

$$OB=\sqrt{(\lambda a_1)^2+(\lambda a_2)^2+(\lambda a_3)^2}=|\lambda|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

$$AB=\sqrt{(\lambda a_1-a_1)^2+(\lambda a_2-a_2)^2+(\lambda a_3-a_3)^2}=|\lambda-1|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$|\lambda\vec{a}|=|\overrightarrow{OB}|=|\lambda|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=|\lambda||\overrightarrow{OA}|=|\lambda||\vec{a}|.$$

თუ $\lambda<0$, მაშინ

$$OB=-\lambda|\vec{a}| \quad \text{და} \quad AB=(1-\lambda)|\vec{a}|.$$

ე. ი. $OA+OB=AB$, რაც იმას ნიშნავს, რომ O წერტილი მდებარეობს A და B წერტილებს შორის, ამრიგად, OA და OB სხივები და მაშასადამე OA და OB ვექტორები საწინააღმდეგოდაა მიმართული.

თუ $\lambda>0$, მაშინ $\vec{a}$ და $\lambda\vec{a}$ ვექტორები საწინააღმდეგოდაა ნამართული. რადგან $\lambda\vec{a}$ და $-\lambda\vec{a}$ მოპირდაპირე ვექტორებია, ამიტომ $\vec{a}$ და $\lambda\vec{a}$ ვექტორები ერთნაირად იქნება მიმართული, თეორემა დამტკიცებულია.

ორ არანულოვან ვექტორს კოლინეარული ეწოდება თუ ისინი ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ.

თეორემა 30. 4. **კოლინეარული ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია და პირიქით, თუ ორი ვექტორის შესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია, მაშინ ეს ვექტორები კოლინეარულია.**

დამტკიცება. ვთქვათ $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ და $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ მოცემული კოლინეარული ვექტორებია, განვიხილოთ ვექტორი $\vec{c}=\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$, სადაც „+" ნიშანი აღებული მაშინ, როცა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ერთნაირადაა მიმართული „−" ნიშანი კი მაშინ, როცა ისინი საწინააღმდეგოდაა მიმართული. $\vec{c}$ ვექტორი $\vec{a}$ ვექტორის ტოლია, რადგან ისინი ერთნაირადაა მიმართული და ტოლი სიგრძეები აქვთ (თეორემა 30.3). თუ $\vec{a}$ და $\vec{c}$ ვექტორების კოორდინატებს ვოსმასწეთს გავუტოლებთ, მივიღებთ:

$$a_1=\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}b_1,\quad a_2=\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}b_2,\quad a_3=\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}b_3.$$

აქედან

$$\frac{a_1}{b_1}=\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|},\quad \frac{a_2}{b_2}=\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|},\quad \frac{a_3}{b_3}=\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}.$$

მაშასადამე $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$, ანუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კოორდინატები პროპორციულია.

ვთქვათ, ახლა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კოორდინატები პროპორციულია. დავამტკიცოთ, რომ ვექტორები კოლინეარულია. გვაქვს $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$, თუ ამ შეფარდებებით საერთო მნიშვნელობას λ-თი აღვნიშნავთ, მივიღებთ: $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, $a_3=\lambda b_3$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, ე. ი. 30.3 თეორემის ძალით ნიშნავს, რომ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ან თანამიმართულია, ან საწინააღმდეგოდ მიმართული, ე. ი. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები კოლინეარულია, თეორემა დამტკიცებულია.

ვექტორის დაშლა ორი არაკოლინეარული ვექტორის მიმართ სიბრტყეზე

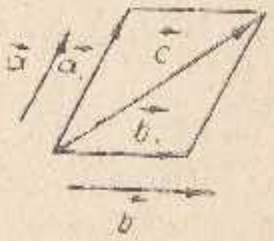
თეორემა 30.5. თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, მაშინ ამ ვექტორებით განსაზღვრულ სიბრტყეზე* მდებარე ყოველი $\vec{c}$ ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

სახით, სადაც λ და μ რაიმე მუდმივებია, ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

დამტკიცება. თუ $\vec{c}=\vec{0}$, მაშინ $\vec{c}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}$, ვთქვათ $\vec{c}$ არანულოვანი ვექტორია. $\vec{c}$ ვექტორის ბოლოებზე გავავლოთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების პარალელური წრფეები (ნახ. 162). მივიღებთ, რომ $\vec{c}=\vec{a}_1+\vec{b}_1$. სადაც $\vec{a}_1$ და $\vec{b}_1$ ვექტორები შესაბამისად $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კოლინეარული ვექტორებია. კოლინეარობის პირობიდან $\vec{a}_1=\lambda\vec{a}$ და $\vec{b}_1=\mu\vec{b}$, სადაც λ და μ რაიმე მუდმივებია, ე. ი.

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}.$$



ნახ. 162

* ორი არაკოლინეარული ვექტორით განსაზღვრულ სიბრტყეს ეწოდება ნებისმიერ სიბრტყეს, რომელზედაც ამ ვექტორები კოლინეარული ვექტორები მდებარეობენ.

თუ $\vec{c}$ ვექტორი $\vec{a}$ ან $\vec{b}$ ვექტორის კოლინეარულია, მაშინ უკანასკნელ ტოლობაში შესაბამისად $\mu=0$ ან $\lambda=0$.

ვაჩვენოთ, რომ ეს წარმოდგენა ერთადერთია. ვთქვათ არსებობს ორი წარმოდგენა:

$$\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b} \quad \text{და} \quad \vec{c}=\lambda_2\vec{a}+\mu_2\vec{b}.$$

თუ პირველ ტოლობას წევრ-წევრად გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ:

$$\vec{0}=(\lambda_1-\lambda_2)\vec{a}+(\mu_1-\mu_2)\vec{b}.$$

რადგან $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, ამიტომ ბოლო ტოლობა შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\lambda_1-\lambda_2=0$ და $\mu_1-\mu_2=0$, ე. ი. $\lambda_1=\lambda_2$ და $\mu_1=\mu_2$. თეორემა დამტკიცებულია.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

მოცემული $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ და $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ რიცხვს და $\vec{a}\cdot\vec{b}$-ით აღინიშნება. $\vec{a}\cdot\vec{a}$ სკალარული ნამრავლი $\vec{a}^2$-ით აღინიშნება და მას $\vec{a}$ ვექტორის სკალარული კვადრატი ეწოდება. ცხადია, რომ $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

ვექტორთა სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$. მართლაც $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$. მართლაც $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(a_1+b_1)\cdot c_1+(a_2+b_2)c_2+(a_3+b_3)c_3=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

კუთხე ორ არანულოვან $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებს შორის ეწოდება BAC კუთხეს. კუთხე ნებისმიერ ორ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის ეწოდება საერთო სათავის მქონე მათ ტოლ ვექტორებს შორის კუთხეს. კუთხე ათანაბარებულ ვექტორებს შორის ჩვენთვალოთ ნულის ტოლად.

თეორემა 30. 6. **ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის მათი სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს.**

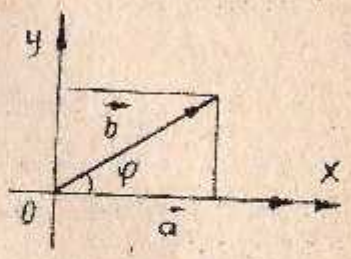
დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მოცემული ვექტორებია და φ არის მათ შორის მდებარე კუთხე. გვაქვს:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2.$$

აქედან

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2).$$

ამრიგად $\vec{a}\cdot\vec{b}$ სკალარული ნამრავლი $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორების სიგრძეებით გამოისახება და ამიტომ არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე. შევარჩიოთ XOY კოორდინატთა სისტემა ისე, როგორც 163-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. ასეთ შერჩეულ კოორდინატთა სისტემაში $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $|\vec{a}|$ და 0, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია $|\vec{b}|\cos\varphi$ და $|\vec{a}|\sin\varphi$. ამიტომ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ სკალარული ნამრავლისათვის გვექნება: $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+0\cdot|\vec{b}|\sin\varphi=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.



ნახ. 163

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ვექტორები ურთიერთმართობულია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია, და პირიქით, თუ ნულისაგან განსხვავებული ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია, მაშინ ეს ვექტორები ურთიერთმართობულია.

ვექტორის დაშლა სამი არაკომპლანარული ვექტორის მიხედვით

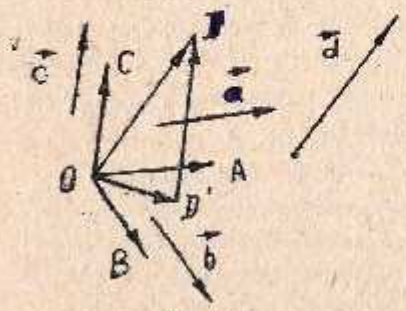
სამ არანულოვან ვექტორს კომპლანარული ეწოდება, თუ ერთი წერტილიდან გადადებული მათი ტოლი ვექტორები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ.

შევნიშნოთ, რომ თუ სამი ვექტორი არაკომპლანარულია, მაშინ ამ ვექტორებიდან ნებისმიერი ორი არაკოლინეარულია.

თეორემა 30.7. **თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ არაკომპლანარული ვექტორებია, მაშინ ნებისმიერი $\vec{d}$ ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ**

$$\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\eta\vec{c}$$

სახით, სადაც λ, η და μ რაიმე მუდმივებია. ეს წარმოდგენა ერთადერთია.



ნახ. 164

დამტკიცება. თუ $d=0$, მაშინ $\vec{d}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\vec{c}$.

ვთქვათ $\vec{d}$ არანულოვანი ვექტორია. სივრცის ნებისმიერი O წერტილიდან გადავდოთ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ და $\vec{d}$ ვექტორების ტოლი $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ და $\overrightarrow{OD}$ ვექტორები (ნახ. 164). აღვნიშნოთ α-თი $\overrightarrow{OA}$ და $\overrightarrow{OB}$ ვექტორებით განსაზღვრული სიბრტყე.

თუ D წერტილი OC წრფეზე მდებარეობს, მაშინ $\overrightarrow{OD}=\eta\cdot\vec{c}$.

ვთქვათ D წერტილი OC წრფეზე არ მდებარეობს. D წერტილზე გავლოთ OC წრფის პარალელური წრფე, რომელიც α სიბრტყეს D' წერტილში გადაკვეთს. რადგან $\overrightarrow{OC}$ და $\overrightarrow{D'D}$ ვექტორები კოლინეარულია, ამიტომ

$$\overrightarrow{D'D}=\eta\overrightarrow{OC}. \tag{1}$$

ვინაიდან $\overrightarrow{OA}$ და $\overrightarrow{OB}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, ამიტომ ამ ვექტორებით განსაზღვრულ სიბრტყეში მდებარე $\overrightarrow{OD'}$ ვექტორი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\overrightarrow{OD'}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\cdot\overrightarrow{OB}. \tag{2}$$

რადგან $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD'}+\overrightarrow{D'D}$, ამიტომ (1) და (2) ტოლობების ძალით

$$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\eta\overrightarrow{OC},$$

ანუ

$$\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\eta\vec{c}.$$

ვიცვნოთ, რომ ეს წარმოდგენა ერთადერთია. ვთქვათ არსებობს ორი წარმოდგენა:

$$\vec{d}=\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}+\eta_1\vec{c} \quad\text{და}\quad \vec{d}=\lambda_2\vec{a}+\mu_2\vec{b}+\eta_2\vec{c}.$$

თუ პირველ ტოლობას წევრ-წევრად გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ:

$$\vec{0}=(\lambda_1-\lambda_2)\vec{a}+(\mu_1-\mu_2)\vec{b}+(\eta_1-\eta_2)\vec{c}.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების პერპენდიკულარულ $\vec{e}$ ვექტორზე, რომელიც ცხადია არ არის $\vec{a}$-ს მართობული. მივიღებთ:

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\vec{a}\cdot\vec{e})=0.$$

რადგან $\vec{a}$ და $\vec{e}$ არანულოვანი ვექტორებია, ამიტომ $\vec{a}\cdot\vec{e}\neq 0$, ე. ი. $\lambda_1-\lambda_2=0$. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\mu_1-\mu_2=0$ და $\eta_1-\eta_2=0$.

ამრიგად $\lambda_1=\lambda_2$, $\mu_1=\mu_2$ და $\eta_1=\eta_2$. თეორემა დამტკიცებულია.

ვექტორს ერთეულოვანი ეწოდება, თუ მისი სიგრძე ერთის ტოლია. საკოორდინატო ღერძების თანამიმართულ ერთეულოვან ვექტორებს საკოორდინატო ვექტორები ანუ კვეზაები ეწოდება. OX, OY და OZ ღერძების კვეზაებს აღვნიშნოთ შესაბამისად $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$-ით ე. ი. $\vec{i}=(1,\vec{0},0)$,

$\vec{j}=(\overrightarrow{0,\ 1,\ 0})$, $\vec{k}=(\overrightarrow{0,\ 0,\ 1})$. მაშინ სულისმიერი $\vec{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$ ვექტორისათვის ვღებულობთ

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}.$$

მართლაც,

$$\vec{a}=(\overrightarrow{a_1,\ 0,\ 0})+(\overrightarrow{0,\ a_2,\ 0})+(\overrightarrow{0,\ 0,\ a_3})=a_1(\overrightarrow{1,\ 0,\ 0})+$$
$$+a_2(\overrightarrow{0,\ 1,\ 0})+a_3(\overrightarrow{0,\ 0,\ 1})=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}.$$

ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი

განსაზღვრება. $\vec{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$ და $\vec{b}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ეწოდება $\vec{c}(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$ ვექტორს.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის აღსანიშნავად $\vec{a}\times\vec{b}$ ან $[\vec{a},\ \vec{b}]$ სიმბოლოებია. ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$[\vec{a},\ \vec{b}]=-[\vec{b},\ \vec{a}].$$

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებიდან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ ცხადია, რომ მათი ვექტორული ნამრავლი ხულოვან ვექტორს წარმოადგენს.

თეორემა 30. 9. **არანულოვანი ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ნულოვანი ვექტორის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ეს ვექტორები კოლინეარულია.**

დამტკიცება. ვთქვათ $\vec{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$ და $\vec{b}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ არანულოვანი კოლინეარული ვექტორებია. მაშინ $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, საიდანაც $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$ და $b_3=\lambda a_3$. ამიტომ ამ ვექტორების ვექტორული ნამრავლისათვის ვღებულობთ:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)=$$
$$=\vec{c}(a_2\lambda a_3-a_3\lambda a_2,\ a_3\lambda a_1-a_1\lambda a_3,\ a_1\lambda a_2-a_2\lambda a_1)=\vec{c}(0,0,0)=\vec{0}.$$

პირიქით, თუ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, მაშინ $a_2b_3-a_3b_2=0$, $a_3b_1-a_1b_3=0$ და $a_1b_2-a_2b_1=0$. აქედან

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

ე. ი. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები კოლინეარულია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 30. 9. **ორი არაკოლინეარული ვექტორის ვექტორული ნამრავლი ამ ვექტორების მართობულია.**

დამტკიცება. ვთქვათ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია,

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{a} = (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = 0.$$

ანალოგიურად $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{b} = 0$. ამრიგად $[\vec{a}, \vec{b}]$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების პარალელურია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 30. 10. **ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის სიგრძე მათი სიგრძეებისა და ამ ვექტორებს შორის კუთხის სინუსის ნამრავლის ტოლია. ე. ი.**

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi. \qquad (3)$$

დამტკიცება. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

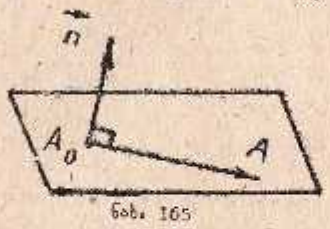
თეორემა 30. 6-ს ძალით $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. ამიტომ

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\varphi = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\varphi,$$ საიდანაც მივიღებთ (3). თეორემა დამტკიცებულია.

(3) ტოლობიდან ჩანს, რომ ორი არაკოლინეარული ვექტორის ვექტორული ნამრავლის სიგრძე რიცხობრივად ტოლია იმ პარალელოგრამის ფართობის (თუ გვგულისხმობთ, რომ ეს ვექტორები ერთ წერტილშია მოდებული).

სიბრტყის განტოლება

შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება. ვთქვათ $A_0(x_0, y_0, z_0)$ არის სიბრტყის რომელიმე წერტილი, ხოლო $n(a, b, c)$ — სიბრტყის მართობული ვექტორი საწყისით A_0 წერტილში (ნახ. 165). ვთქვათ $A(x, y, z)$ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია. მაშინ რადგან



ნახ. 165

$\overrightarrow{A_0A}$ ვექტორის კოორდინატებია $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ და $\overrightarrow{A_0A}$ ვექტორი $\vec{n}$ ვექტორის მართობულია, ამიტომ $\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{n} = 0$. საიდანაც

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

პირიქით, თუ $A(x, y, z)$ აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, მაშინ $\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{n} = 0$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ A წერტილი სიბრტყეზე ძევს. ამრიგად, (1) წარმოადგენს მოცემული სიბრტყის განტოლებას.

შევნიშნოთ, რომ სიბრტყის განტოლება ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

სადაც a, b და c სიბრტყის მართობული ვექტორის კოორდინატებია.

როგორც ცნობილია, წრფე სივრცეში საკმაოდ ეფექტურად შეიძლება მივცეთ ორი განსხვავებული სიბრტყით. ამიტომ წრფე სივრცეში ძოლებით ორი ისეთი სიბრტყის განტოლებათა სისტემით, რომელთაგან თითოეული ამ წრფეზე გადის, ესე იგი წრფის განტოლებას სივრცეში აქვს სახე:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

ამ სისტემის ნებისმიერი (x, y, z) ამონახსნი წრფეზე მდებარე წერტილის წარმოადგენს, და პირიქით წრფის ყოველი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (2) სისტემას.

ძირითადი თვისებები ორწრფივ ფორმებისათვის

1. რას ეწოდება ვექტორი?
2. რაგვარი აღინიშნება ვექტორი?
3. რას ეწოდება ვექტორის სიგრძე (აბსოლუტური სიდიდე, მოდული)?
4. როგორ ვექტორებს ეწოდება ტოლი ვექტორები?
5. როგორ ვექტორს ეწოდება საწყისი ვექტორი, როგორ აღინიშნება იგი?
6. როგორ განსაზღვრება ვექტორის კოორდინატები. რისი საშუალებით და ბოლო წერტილის კოორდინატების მიხედვით?
7. რაგვარ ვექტორებს ეწოდება ერთნაირად მიმართული, საწინააღმდეგოდ მიმართული?
8. მოიყვანეთ ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა.
9. დამტკიცეთ, რომ ტოლ ვექტორებს შესაბამება კოორდინატებში ტოლი აქვთ, და პირიქით, თუ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები ტოლია, მაშინ ვექტორებიც ტოლია.
10. რას ეწოდება ორი ვექტორის ჯამი?
11. დამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი A, B და C წერტილებისთვის მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

12. ვამოიყვანეთ ვექტორთა შეკრების „სამკუთხედის წესი", „პარალელოგრამის წესი".
13. რაგვარ ვექტორებს ეწოდება ნულისაგან განსხვავებული ვექტორები?
14. განსაზღვრეთ ვექტორების სხვაობა.
15. განსაზღვრეთ ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი.
16. დამტკიცეთ, რომ $\lambda\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე $|\lambda||\vec{a}|$-ის ტოლია თუ $a \neq 0$, მაშინ $\lambda\vec{a}$ ვექტორის მიმართულება $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების ემთხვევა, როცა $\lambda > 0$ და $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების საწინააღმდეგოა, როცა $\lambda < 0$.
17. რაგვარ ვექტორებს ეწოდება კოლინეარული?
18. როგორ სამ ვექტორს ეწოდება კომპლანარული?
19. დამტკიცეთ, რომ კოლინეარული ვექტორების წესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია, და პირიქით, თუ ორივე ვექტორის შესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია, მაშინ ეს ვექტორები კოლინეარულია.
20. დამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, მაშინ ამ ვექტორებით განსაზღვრულ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი $\vec{c}$ ვექტორი შეიძლება წარმოვიდგინოთ

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

სახით, სადაც λ და μ რაიმე მუდმივებია. ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

81. რას ეწოდება მოცემული $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ და $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, როგორ გამოითვლება იგი?

82. რას ეწოდება $\vec{a}$ ვექტორის სკალარული კვადრატი?

83. რას ეწოდება კუთხე ორ არანულოვან $\vec{AB}$ და $\vec{AC}$ ვექტორებს შორის?

84. რას ეწოდება კუთხე სივრცეში ორ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის?

85. დაამტკიცეთ, რომ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ტოლია მათი სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლის.

86. მოიყვანეთ ორი ვექტორის მართობულობის პირობა.

87. დამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ურთიერთმართობული ვექტორებია, მაშინ ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ $\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$ სახით, სადაც λ, μ და ν რიცხვები მოიძებნებიან და ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

88. რას ეწოდება საკოორდინატო ვექტორებში ანუ მგეზავები?

89. დამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ სახით, სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ საკოორდინატო ვექტორებია.

90. რას ეწოდება ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი?

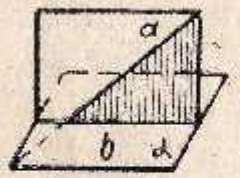
91. ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ ვექტორული ნამრავლის თვისებები.

92. გამოითვალეთ სიბრტყის განტოლება.

§ 21. კუთხეები წრფეებსა და სიბრტყეებს შორის

წრფეთა კუთხედის ორთოგონალური გეგმილის შესახებ

ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფე ქმნის მოსაზღვრე და ვერტიკალურ კუთხეებს. ვერტიკალური კუთხეები ერთმანეთის ტოლია, ხოლო მოსაზღვრე კუთხეები ერთმანეთს 180°-მდე ავსებენ. ამ კუთხეთაგან უმცირესის კუთხურ ზომას წრფეებს შორის კუთხე ეწოდება. განსაზღვრების თანახმად ურთიერთმართობულ წრფეებს შორის კუთხე 90°-ის ტოლია, პარალელურ წრფეებს შორის კუთხე ნულის ტოლად ჩაითვალოთ.



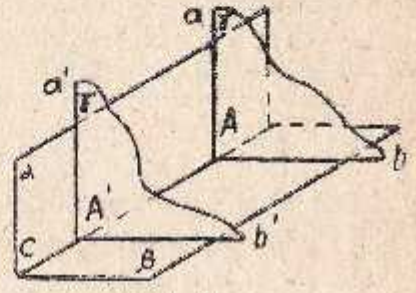
ნახ. 166

აკვეთილ წრფეებს შორის კუთხე ეწოდება ამ წრფეების პარალელურ ურთიერთგადამკვეთ წრფეებს შორის კუთხეს. მტკიცდება, რომ ეს კუთხე არ არის დამოკიდებული ურთიერთგადამკვეთი წრფეების შერჩევაზე.

ახლა მოკლედ განსაზღვრების თანახმად ურთიერთმართობული ისეთ წრფეებს, რომლებიც ერთმანეთს მართი კუთხით კვეთს, მსგავსად აკვეთილ წრფეებისაც ზოგჯერ ურთიერთმართობულს უწოდებენ, თუ ცალი შორის კუთხე 90°-ის ტოლია.

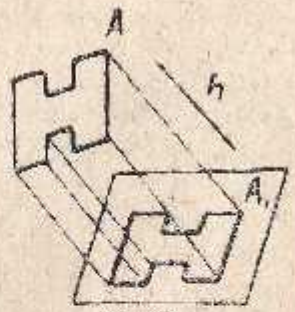
განვსაზღვროთ წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის ცნება. ვთქვათ a არის სიბრტყე, ხოლო a — ამ სიბრტყის გადამკვეთი მისი არამართობული წრფე (ნახ. 166). a წრფის წერტილებიდან α სიბრტყეზე დაშვებული მართობების ფუძეები b წრფეზე ძევს. ამ წრფეს ეწოდება a წრფის გეგმილი α სიბრტყეზე. წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება კუთხეს ამ წრფესა და სიბრტყეზე მის გეგმილს შორის. მტკიცებულია, რომ კუთხე წრფესა და მის პარალელურ სიბრტყეს შორის ნულის ტოლია, ხოლო კუთხე ურთიერთმართობულ წრფესა და სიბრტყეს შორის 90°-ის ტოლია. რადგან a წრფე, მისი b გეგმილი α სიბრტყეზე და a წრფისა და α სიბრტყის გადაკვეთის წერტილიდან ამ სიბრტყისადმი აღმართული ნახევარი ურთ სიბრტყეში ძევს, ამიტომ კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის 90°-ზე ნაკლებს კუთხეს ამ წრფესა და სიბრტყისადმი მართობს შორის.

ეთქვათ, მოცემული სიბრტყეები ერთმანეთს კვეთს. გავიგოთ მათი გადაკვეთის წრფის მართობული სიბრტყე. ეს სიბრტყე მოცემულ სიბრტყეებს ორ წრფეზე კვეთს. ამ წრფეებს შორის კუთხეს ეწოდება კუთხე ორ მოცემულ სიბრტყეს შორის. (ნახ. 167). მტკიცდება, რომ ორ სიბრტყეს შორის კუთხე არ არის დამოკიდებული მკვეთი სიბრტყის შერჩევაზე.



ნახ. 167

სიბრტყეზე სივრცული ფიგურათა გამოსახვისათვის ჩვეულებრივად პარალელურ დაგვიმილებას იყენებენ. გავეცნოთ ფიგურის გამოსახვის ამ ხერხს. ავიღოთ სივრცეში h წრფე, რომელიც ნახაზის სიბრტყეს კვეთს და ფიგურის სივრცისეული A წერტილზე გავავლოთ h-ის პარალელური წრფე. ამ წრფისა და ნახაზის სიბრტყის გადაკვეთის A_1 წერტილი იქნება A წერტილის გამოსახულება (ნახ. 168), ხოლო



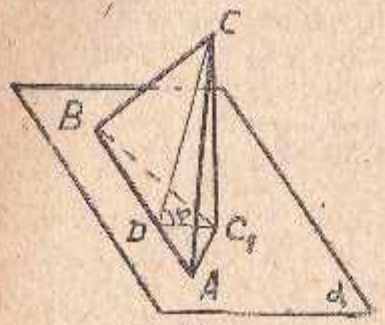
ნახ. 168

ასეთნაირად ავაგებთ ფიგურის თითოეული წერტილის გამოსახულებას — მივიღებთ თვით ფიგურის გამოსახულებას, რომელსაც მოცემული ფიგურის პარალელური გეგმილი ეწოდება.

ფიგურის ორთოგონალური გეგმილი მოცემულ სიბრტყეზე ეწოდება ამ ფიგურის პარალელური გეგმილს სიბრტყისადმი მართობული მიმართულებით.

თეორემა 31.1. **მრავალკუთხედის ორთოგონალური გეგმილის ფართობი მრავალკუთხედის ფართობისა და მრავალკუთხედის სიბრტყესა და გეგმილის სიბრტყეს შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლის ტოლია.**

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ სამკუთხედი და მისი გეგმილი ამ სიბრტყეზე, რომელიც სამკუთხედის ერთერთ გვერდზე გადის (ნახ. 169). ABC სამკუთხედის გეგმილი α სიბრტყეზე არის ABC_1 სამკუთხედი. გვიგულისხმოთ სამკუთხედის CD სიმაღლე. სამი მართობის თეორემის თანახმად C_1D არის ABC_1 სამკუთხედის სიმაღლე. CDC_1 კუთხე ABC სამკუთხედის სიბრტყესა და გეგმილის სიბრტყეს (α სიბრტყეს) შორის კუთხის ტოლია, ვთქვათ $C_1D-CD\cdot\cos\varphi$.



ნახ. 169

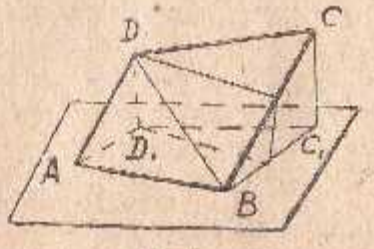
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD,\quad S_{\triangle ABC_1}=\frac{1}{2}AB\cdot C_1D$$

აქედან

$$S_{\triangle ABC_1}=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\varphi.$$

ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში თეორემა მართებულია. თეორემა მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა α სიბრტყის ნაცვლად აღებულია მისი პარალელური სიბრტყე. მართლაც პარალელურ სიბრტყეებზე ფიგურის გეგმილები დაგეგმილების მიმართულებით პარალელურ გადატანას ერთმანეთის ტოლებად. პარალელურად გადატანით შეთავსებული ფიგურები კი ერთმანეთის ტოლია.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. დავუშვათ მოცემული მრავალკუთხედი სამკუთხედებად. თითოეული სამკუთხედის, რომელსაც არა აქვს გეგმილი სიბრტყის პარალელური გვერდი, დავყოთ ორ ისეთ სამკუთხედად, რომელთაც საერთო გვერდი გეგმილი სიბრტყის პარალელურია, მაგალითად, ისე, როგორც 170-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. ცხადია, მრავალკუთხედი დაიყოფა ისეთ $\triangle_1$, $\triangle_2$, ..., $\triangle_n$ სამკუთხედებად, რომ მათთვის და მათი შესაბამისი $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, ..., $\triangle_n'$ გეგმილებისათვის გვექნება:



ნახ. 170

$$S_{\triangle_1'}=S_{\triangle_1}\cdot\cos\varphi;\quad S_{\triangle_2'}=S_{\triangle_2}\cdot\cos\varphi;\ \ldots\quad S_{\triangle_n'}=S_{\triangle_n}\cdot\cos\varphi. \tag{1}$$

სადაც φ არის კუთხე მოცემული მრავალკუთხედის სიბრტყესა და მის მრავალკუთხედის გეგმილის სიბრტყეს შორის.

თუ (1) ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ მივიღებთ:

$$S_{\triangle_1'}+S_{\triangle_2'}+\ldots+S_{\triangle_n'}=(S_{\triangle_1}+S_{\triangle_2}+\ldots+S_{\triangle_n})\cdot\cos\varphi,$$

აქედან

$$S'=S\cdot\cos\varphi,$$

სადაც S და S' შესაბამისად მოცემული მრავალკუთხედის და მისი გეგმილის ფართობებია.

ᲙᲘᲗᲮᲕᲔᲑᲘ ᲗᲕᲘᲗᲨᲔᲤᲐᲡᲔᲑᲔᲚᲘᲡᲐᲗᲕᲘᲡ

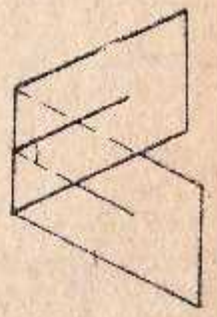
1. რას ეწოდება კუთხე ორ ურთიერთგადამკვეთ წრფეს შორის?
2. რას ეწოდება კუთხე ალდებულ წრფეებს შორის?
3. რას ეწოდება კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის?
4. რას ეწოდება კუთხე ორ სიბრტყეს შორის?
5. რას ეწოდება ფიგურის პარალელური გეგმილი?
6. რას ეწოდება ფიგურის ორთოგონალური გეგმილი ნებისმიერ სიბრტყეზე?
7. დაამტკიცეთ, რომ მრავალკუთხედის ორთოგონალური გეგმილის ფართობი მრავალკუთხედის ფართობისა და მრავალკუთხედის სიბრტყესა და გეგმილის სიბრტყეს შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლის ტოლია.

§ 32. მრავალწახნაგები

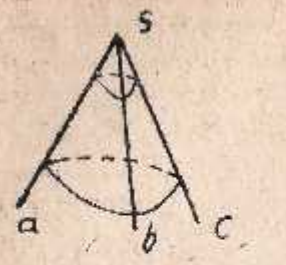
მრავალწახნაგა კუთხოვანი

განსაზღვრება. **სივრცის წრფით შემოსაზღვრული ორი ნახევარსიბრტყით შექმნილ ფიგურას ორწახნაგა კუთხე ეწოდება** (ნახ. 171). **ამ ნახევარსიბრტყეებს წახნაგები ეწოდება. ხოლო მათ შემომსაზღვრელ საერთო წრფეს — ორწახნაგა კუთხის წიბო.**

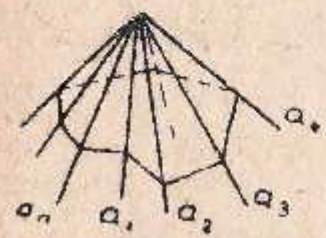
ორწახნაგა კუთხის წიბოს მართობული სიბრტყე წახნაგებს ორ ნახევარწრფეზე კვეთს, ამ ნახევარწრფეებით შექმნილ კუთხეს ორწახნაგა კუთხის საზომად ეწოდება. ორწახნაგა კუთხის ზომად მიღებულია მისი შესაბამისი სახოვანი კუთხის ზომა. ორწახნაგა კუთხის ზომა არ არის დამოკიდებული სახოვანი კუთხის არჩევაზე, რადგან პარალელური გადატანით სახოვანი კუთხეები ერთმანეთს უკუთავსდება.


ნახ. 171

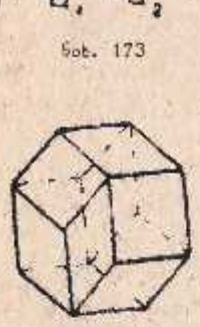
განსაზღვრება. **სამწახნაგა კუთხე (abc) ეწოდება ისეთ ფიგურას, რომელიც შედგება სამი**



ნახ. 172



ნახ. 173



ნახ. 174

ბრტყელი კუთხისაგან: (ab), (bc) და (ac) (ნახ. 172). ამ კუთხეებს სამწახნაგა კუთხის წახნაგები ეწოდება, ხოლო მათ გვერდებს—წიბოები. ბრტყელი კუთხეების საერთო წვეროს სამწახნაგა კუთხის წვერო ეწოდება.

ანალოგიურად განისაზღვრება $(a_1a_2a_3\ldots a_n)$ მრავალწახნაგა კუთხეცვლა ფიგურა, რომელიც შედგება (a_1a_2), (a_2a_3), ..., (a_na_1) ბრტყელი კუთხეებისაგან (ნახ. 173). მრავალწახნაგა კუთხისათვის წახნაგი, წიბო და წვერო ისეთივე განისაზღვრება, როგორც სამწახნაგა კუთხისათვის.

მრავალწახნაგა

განსაზღვრება. **მრავალწახნაგა ეწოდება სხეულს, რომელიც შემოსაზღვრულია სასრული რაოდენობის სიბრტყეებით** (ნახ. 174) **მრავალწახნაგას საზღვარს მისი ზედაპირი ეწოდება.**

მრავალწახნაგას ამოზნექილი ეწოდება, თუ იგი მისი შემომსაზღვრელი თითოეული სიბრტყის ერთ ნახევარზე ძევს. ამოზნექილი მრავალწახნაგას ზედაპირის და მისი შემომსაზღვრელი ერთიერთი სიბრტყის საერთო ნაწილს წახნაგი ეწოდება. მრავალწახნაგას წახნაგები წარმოადგენენ ბრტყელ მრავალკუთხედებს, რომელთა გვერდებს მრავალწახნაგას წიბოები ეწოდება, ხოლო წვეროებს — მრავალწახნაგას წვეროები.

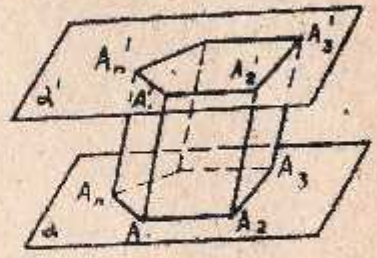
პრიზმა

განსაზღვრება. **მრავალწახნაგას, რომლის ორი წახნაგი პარალელურ სიბრტყეებში მოთავსებული ბრტყელი n-კუთხედებია, ხოლო დანარჩენი n წახნაგი ბრტყელ პარალელოგრამებს წარმოადგენენ, პრიზმა ეწოდება.** (ნახ. 175).

პარალელურ სიბრტყეებში მდებარე n-კუთხედებს პრიზმის ფუძეები

ეწოდება, ხოლო დანარჩენ წახნაგებს — გვერდითი წახნაგები. პრიზმის იმ წიბოებს, რომლებიც ფუძეების გვერდებს არ წარმოადგენენ გვერდითი წიბოები ეწოდება. ყველა გვერდითი წიბო ერთმანეთის პარალელურია.

ცხადია, რომ პრიზმის ფუძეები ტოლი მრავალკუთხედებია, რადგან პარალელური გადატანით ისინი ერთმანეთს შეუთავსდებიან.



ნახ. 175

პრიზმის ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან მეორე ფუძის შემცველ სიბრტყეზე დაშვებულ მართობს პრიზმის სიმაღლე ეწოდება. მონაკვეთს, რომელიც ერთ წახნაგზე არამდებარე ორ წვეროს აერთებს, პრიზმის დიაგონალი ეწოდება. კვეთას, რომელიც მიიღება პრიზმის სხვადასხვა გვერდით წახნაგზე მდებარე ორ გვერდით წიბოზე ვამავალი სიბრტყით, დიაგონალური კვეთა ეწოდება. კვეთის, რომელიც პრიზმის ყველა გვერდით წიბოს კვეთს და მათი ჭართობულია პერპენდიკულარული კვეთა ეწოდება.

პრიზმას მართი ეწოდება თუ მისი გვერდითი წიბოები ფუძეების მართობულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში პრიზმას დახრილი ეწოდება. მართ პრიზმას წესიერი ეწოდება, თუ მისი ფუძეები წესიერი მრავალკუთხედებია.

პრიზმის გვერდითი ზედაპირი (გვერდითი ზედაპირის ფართობი) ეწოდება გვერდითი წახნაგების ფართობების ჯამს, ხოლო სრული ზედაპირი გვერდითი ზედაპირისა და ფუძეების ფართობთა ჯამს.

თეორემა 32. 1. **მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირი ფუძის პერიმეტრისა და პრიზმის სიმაღლის ე. ი. გვერდითი წიბოს, ნამრავლის ტოლია.**

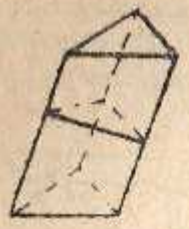
დამტკიცება. მართი პრიზმის გვერდითი წახნაგები მართკუთხედებია, ამ მართკუთხედების ფუძეები პრიზმის ფუძეში მდებარე მრავალკუთხედის გვერდებია, ხოლო სიმაღლეები გვერდითი წიბოს ტოლია. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ პრიზმის გვერდითი ზედაპირი

$$S=a_1l+a_2l+\ldots+a_nl=pl,$$

სადაც p პრიზმის ფუძის პერიმეტრია, ხოლო l — გვერდითი წიბოს სიგრძე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 32.2. **დახრილი პრიზმის გვერდითი ზედაპირი პერპენდიკულარული კვეთის პერიმეტრისა და გვერდითი წიბოს ნამრავლის ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, პრიზმის პერპენდიკულარული კვეთის



ნახ. 176

პერიმეტრი pl. ტოლია, სადაც გვერდითი წიბოა l, კვეთის სპირტეკე პრიზმას ორ ხაზიანად ეყრის (ნახ. 176), ერთ-ერთი ნაწილი პარალელეპიპედად ისე გადავიტანოთ, რომ პრიზმის ერთი ფუძე მეორეს დეუთავსდეს. მივიღებთ მართ პრიზმას, რომლის ფუძე თავდაპირველი პრიზმის კვეთია, ხოლო გვერდითი წიბო l-ის ტოლია. ამ პრიზმას იგივე გვერდითი ზედაპირი აქვს, რაც თავდაპირველს, ამიტომ, თავიდან მოკეცილი პრიზმის ზედაპირი pl-ის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

პარალელეპიპედი

პრიზმას, რომლის ფუძე პარალელოგრამია, პარალელეპიპედი ეწოდება. ცხადია, პარალელეპიპედის ყველა წახნაგი პარალელოგრამია.

პარალელეპიპედს იმ წახნაგებს, რომლებსაც საერთო წვერო არა აქვთ, მოპირისპირე წახნაგები ეწოდება.

თ ე ო რ ე მ ა 32.3. **პარალელეპიპედის მოპირდაპირე წახნაგები ერთმანეთის პარალელურია და ტოლია.**

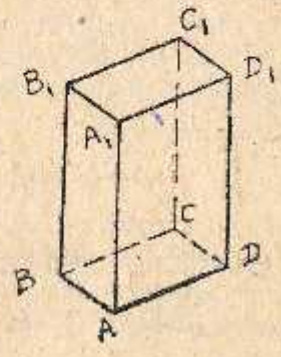
დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გახედნილოთ პარალელეპიპედის ორი მოპირდაპირე წახნაგი. ნებისმიერად, AA_1D_1D და BB_1C_1C (ნახ. 177), რადგან პარალელეპიპედის ყველა წახნაგი პარალელოგრამია, ანიტომ $AD \parallel BC$ და $AA_1 \parallel BB_1$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ განსახილველი წახნაგები ერთმანეთის პარალელურია.

AA_1D_1D წახნაგი AB წიბოს გასწვრივ პარალელურად გადატანილას BB_1C_1C წახნაგს შეუთავსდება. რადგან AB, A_1B_1, D_1C_1 და DC მონაკვეთები ერთმანეთის პარალელური და ტოლია. მაშასადამე, ეს წახნაგები ტოლია.

ანალოგიურად მტკიცდება პარალელეპიპედის ნებისმიერი ორი მოპირდაპირე წახნაგის პარალელურობა და ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

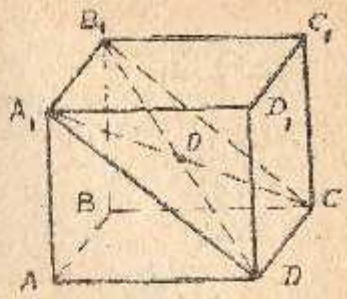
თ ე ო რ ე მ ა 32.4. **პარალელეპიპედის დიაგონალები ერთმანეთს ერთ წერტილში კვეთს და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ პარალელეპიპედის რომელიმე ორი დიაგონალი, მაგალითად, A_1C და B_1D (ნახ. 178). რადგან



ნახ. 177

$ABCD$ და AA_1B_1B საერთო AB გვერდის მქონე პარალელოგრამებია, ანიტომ $A_1B_1 \parallel DC$ და $A_1B_1 = DC$. მაშასადამე, A_1B_1CD პარალელოგრამია, პარალელეპიპედის A_1C და B_1D დიაგონალები ამ პარალელოგრამის დიაგონალებია, ამიტომ ისინი ერთმანეთს კვეთს და გადაკვეთას O წერტილი თითოეულს შუაზე ყოფს. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ პარალელეპიპედის ნებისმიერი ორი დიაგონალი ერთმანეთს კვეთს და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა. ამედან დავასკვნით, რომ პარალელეპიპედის ოთხივე დიაგონალი ერთ წერტილში იკვეთება და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 178

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ პარალელეპიპედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი ამ პარალელეპიპედის სიმეტრიის ცენტრია.

მართი პარალელეპიპედს, რომლის ფუძე მართკუთხედია, მართკუთხა პარალელეპიპედი ეწოდება. ცხადია, რომ მართკუთხა პარალელეპიპედის ყველა წახნაგი მართკუთხედია.

მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის ყველა წიბო ტოლია, კუბი ეწოდება.

მართკუთხა პარალელეპიპედის არაპარალელური წიბოების სიგრძეებს, მისი **განზომილებები** ეწოდება. მართკუთხა პარალელეპიპედს აქვს სამი განზომილება.

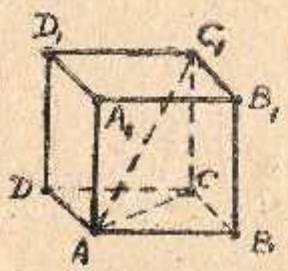
თ ე ო რ ე მ ა 32.5. **მართკუთხა პარალელეპიპედის ნებისმიერი დიაგონალის კვადრატი მისი სამი განზომილების კვადრატების ჯამის ტოლია.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ მართკუთხა $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედი (ნახ. 179). მართკუთხა AC_1C სამკუთხედიდან პითაგორას თეორემის თანახმად:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

მართკუთხა ACB სამკუთხედიდან პითაგორას თეორემით მივიღებთ: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, აქედან

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2.$$

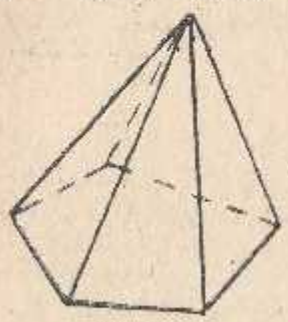


ნახ. 179

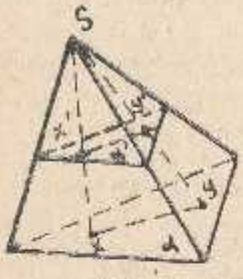
თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. **მრავალწახნაგას, რომლის ერთ-ერთი წახნაგი ნებისმიერი მრავალკუთხედია, ხოლო დანარჩენი წახნაგები — საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებია, პირამიდა ეწოდება** (ნახ. 180)

ამ მრავალკუთხედს პირამიდის ფუძე ეწოდება, ხოლო საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებს — გვერდითი წახნაგები. გვერდითი წახნაგების საერთო წვეროს პირამიდის წვერთ ეწოდება. ნიბოებს, რომლებიც ფუძის გვერდებს არ წარმოადგენენ, გვერდითი წიბოები ეწოდება. პირამიდის წვეროდან ფუძის შეხვედრილ სიბრტყეზე დაშვებულ მართობს პირამიდის სიმაღლე ეწოდება.



ნახ. 180



ნახ. 181

პირამიდას ეწოდება n-კუთხა, თუ მისი ფუძე n-კუთხედია. სამკუთხა პირამიდას ტეტრაედრი ეწოდება.

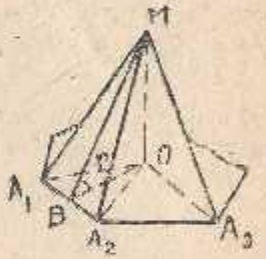
თეორემა 32.6. **პირამიდის ფუძის პარალელური სიბრტყე, რომელიც ამ პირამიდას კვეთს, მისგან მსგავს პირამიდას ჩამოკვეთს.**

დამტკიცება. ვთქვათ, S არის პირამიდის წვერო, α — მისი ფუძის სიბრტყე და α' — გადამკვეთი სიბრტყე (ნახ. 181). პირამიდის ფუძეზე აგებულთ ნებისმიერი ორი X და Y წერტილი. XS და YS მონაკვეთები α' სიბრტყეს X' და Y' წერტილებში კვეთს. $XY \parallel X'Y'$, როგორც α და α' პარალელური სიბრტყეების ბრსაზე $(XSY$ სამკუთხედის) სიბრტყით გადაკვეთისას მიღებული წრფეები, მაშასადამე, $\triangle SXY \sim \triangle SX'Y'$, საიდანაც $\frac{X'S}{XS}=\frac{Y'S}{YS}$. ე. ი. $\frac{X'S}{XS}=k$ წეფარდება არ არის დამოკიდებული X წერტილის შერჩევაზე.

აქედან გამომდინარეობს, რომ α' სიბრტყით ჩამოკვეთილი პირამიდა მოცემული პირამიდისაგან მიიღება S წერტილის მიმართ ამ ჰომოთეტიის გარდაქმნით, რომლის კოეფიციენტია k. ჰომოთეტიური ფიგურები კი მსგავსია, თეორემა დამტკიცებულია.

პირამიდის გვერდითი ზედაპირი ეწოდება მისი გვერდითი წახნაგების ფართობთა ჯამს, ხოლო სრული ზედაპირი — გვერდითი ზედაპირისა და ფუძის ფართობის ჯამს.

ვთქვათ, მოცემულია პირამიდა, რომლის ფუძე $A_1A_2\ldots A_n$ ძრავალკუთხედია და თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის φ კუთხეს (ნახ. 182). ფუძის ფართობი აღვნიშნოთ Q-თი. გამოვლოთ პირამიდას MO სიმაღლე და O წერტილი შევაერთოთ ფუძის წვეროებთან ფუძე ლიაყოფ სამკუთხედებად, რომლებიც წარმოადგენენ გვერდითი წახნაგების ორთოგონალურ გეგმილებს. ორთოგონალური გეგმილის ფართობის ცნობისათვლელი ფორმულის თანახმად



ნახ. 182.

$$S_{\triangle MA_1A_2}=\frac{S_{\triangle AOB}}{\cos\varphi},\ S_{\triangle MA_2A_3}=\frac{S_{\triangle BOC}}{\cos\varphi},\ldots$$

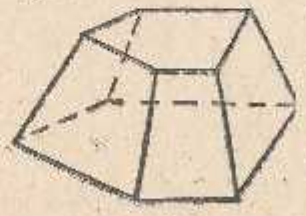
თუ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მარჯვენა ნაწილში მივიღებთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის, ხოლო მარჯვენა მხარეში — ფუძის Q ფართობს გაყოფილს $\cos\varphi$-ზე, ამრიგად ასეთი სახით პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობია $\frac{Q}{\cos\varphi}$.

პირამიდას ეწოდება წესიერი, თუ მისი ფუძე წესიერი მრავალკუთხედია, ხოლო სიმაღლის ფუძე ამ მრავალკუთხედის ცენტრს ემთხვევა. წესიერი პირამიდის ღერძი ეწოდება წრფეს, რომელიც მის სიმაღლეს შეიცავს. ცხადია, წესიერი პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია; მაშასადამე, გვერდითი წახნაგები ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედებია. წესიერი პირამიდის გვერდითი წახნაგის სიმაღლეს, რომელიც გავლებულია პირამიდის წვეროდან, აპოთემა ეწოდება.

ტეტრაედრს, რომლის ყველა წიბო ტოლია წესიერი ტეტრაედრი ეწოდება.

თეორემა 32.7. **წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირი ფუძის ნახევარპერიმეტრისა და აპოთემის ნამრავლის ტოლია.**

დამტკიცება. თუ ფუძის გვერდია a, ხოლო გვერდების რაოდენობაა n, მაშინ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი ტოლია: $\frac{al}{2}n=\frac{anl}{2}=\frac{pl}{2}$, სადაც l არის აპოთემა, ხოლო p — ფუძის პერიმეტრი. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 183.

32.5 თეორემის თანახმად სიბრტყე, რომელიც პირამიდის ფუძის სიბრტყის პარალელურია და პირამიდას კვეთს, მისგან მისივე მსგავს პირამიდას ჭრის. შეკრუნ ნაწილს ეწოდება მრავალწახნაგას წაკვეთილი, რომელსაც წაკვეთილი პირამიდა ეწოდება (ნახ. 183). წაკვეთილი პირა-

მიდის იმ წახნაგებს, რომლებიც პარალელურ სიბრტყეებში ძევს, პარამიდის ფუძეები ეწოდება, დანარჩენ წახნაგებს გვერდითი წახნაგები ეწოდება. წაკვეთილი პარამიდის ფუძეები ბსგავსი (უფრო მეტიც, ჰომოთეტიური) მრავალკუთხედებია, გვერდითი წახნაგები კი — ტრაპეციები. იმ წაკვეთილ პარამიდას, რომელიც წესიერი პარამიდისაგან მიიღება, წესიერი ეწოდება. წესიერი წაკვეთილი პარამიდის გვერდითი წახნაგები ტოლფერდა ტრაპეციებია; მათ სიმაღლეებს პარამიდის წახნაგების აპოთემები ეწოდება.

თეორემა 32. 8. **წესიერი წაკვეთილი პარამიდის გვერდითი ზედაპირი ფუძეთა პერიმეტრების ნახევარჯამისა და აპოთემის ნამრავლის ტოლია.**

დამტკიცება. პარამიდის გვერდითი წახნაგები ტრაპეციებია, რომლებსაც აქვთ ერთდაიგივე ზომა a ფუძე, ქვედა b ფუძე და l სიმაღლე (აპოთემა), ამიტომ ყოველი წახნაგის ფართობია $\frac{1}{2}(a+b)l$. ყველა წახნაგის ფართობი ე. ი. გვერდითი ზედაპირია $\frac{1}{2}(an+bn)\cdot l$, სადაც $a\cdot n$ და $b\cdot n$ ფუძეების პერიმეტრებია, თეორემა დამტკიცებულია.

ამოხსნები თვითშემოწმებისათვის

1. რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხე (კუთხის წახნაგი, კუთხის წიბო)?
2. რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე?
3. რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხის ზომა?
4. რას ეწოდება ამწახნაგა კუთხე (ამწახნაგა კუთხის წახნაგი, წიბო)?
5. რას ეწოდება მრავალწახნაგა კუთხე?
6. რას ეწოდება მრავალწახნაგა, ძირგალწახნაგის ზედაპირი?
7. როგორი მრავალწახნაგას ეწოდება ამოზნექილი?
8. რას ეწოდება ამოზნექილი მრავალწახნაგის წახნაგი, წიბო, წვერო?
9. რას ეწოდება პრიზმა?
10. რას ეწოდება პრიზმის ფუძეები, გვერდითი წახნაგები, წიბოები?
11. რას ეწოდება პრიზმის სიმაღლე?
12. რას ეწოდება პრიზმის დიაგონალი, დიაგონალური კვეთი?
13. როგორი პრიზმას ეწოდება სწორი, დახრილი?
14. როგორი პრიზმა ეწოდება წესიერი?
15. რას ეწოდება პრიზმის გვერდითი ზედაპირი, სრული ზედაპირი?
16. დამტკიცეთ, რომ სწორი პრიზმის გვერდითი ზედაპირი ფუძის პერიმეტრისა და პრიზმის სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.
17. დამტკიცეთ, რომ დახრილი პრიზმის გვერდითი ზედაპირი მკვეთებულ-პერპენდიკულარული კვეთის პერიმეტრისა და გვერდითი წიბოს ნამრავლის ტოლია.
18. რას ეწოდება პარალელეპიპედი?
19. დამტკიცეთ, რომ პარალელეპიპედის დიაგონალები ერთმანეთის პარალელური და ტოლია.
20. დამტკიცეთ, რომ პარალელეპიპედის დიაგონალების ერთ წერტილში კვეთის და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

21. როგორ პარალელეპიპედს ეწოდება სწორკუთხა?
22. რას ეწოდება კუბი?
23. რას ეწოდება სწორკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებები?
24. დამტკიცეთ, რომ პარალელეპიპედის ნებისმიერი დიაგონალის კვადრატი ტოლია მისი სამი განზომილების კვადრატების ჯამის.
25. რას ეწოდება პირამიდა?
26. რას ეწოდება პირამიდის ფუძე, გვერდითი წახნაგები, წიბოები, სიმაღლე?
27. როგორი პირამიდას ეწოდება სწორი?
28. დამტკიცეთ, რომ პირამიდის ფუძის პარალელური სიბრტყე, რომელიც ამ პირამიდას კვეთს, ჰგავს მასვე პირამიდას ხაზოვნად.
29. დამტკიცეთ, რომ ამ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობია, რომლის ფუძის პერიმეტრია Q და აპოთემაა l გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან φ კუთხეა ქმნის $\frac{Q}{2\cos\varphi}\cdot l$ ტოლია.
30. როგორ პირამიდას ეწოდება წესიერი?
31. რას ეწოდება წესიერი პირამიდის ღერძი, აპოთემა?
32. დამტკიცეთ, რომ წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირი ტოლია ნახევარ-პერიმეტრისა და აპოთემის ნამრავლის ტოლია.
33. რას ეწოდება წაკვეთილი პირამიდა?
34. რას ეწოდება წაკვეთილი პირამიდის ფუძეები, გვერდითი წახნაგები?
35. რას ეწოდება წესიერი წაკვეთილი პირამიდა?
36. რას ეწოდება წესიერი წაკვეთილი პირამიდის აპოთემა?
37. დამტკიცეთ, რომ წესიერი წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი ზედაპირი ფუძეთა პერიმეტრების ნახევარჯამისა და აპოთემის ნამრავლის ტოლია.

§ 33. ბრუნვის სხეულები

ტრაპეციის შემთხვევაში ბრუნვის სხეული ეწოდება ისეთ სხეულს, რომელსაც რაიმე წრფის (ბრუნვის ღერძის) მართობული სიბრტყეები წრეებზე კვეთს, რომელთა ცენტრები ამ წრფეზე მდებარეობს. ბრუნვის სხეულია მაგალითებია წრიული ცილინდრი, კონუსი, ბირთვი.

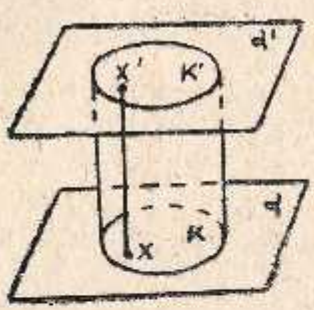
ცილინდრი

გახვასხილოთ ყველა პარალელური წრფე, რომლებიც კვეთენ იმ პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთში მდებარე წრეს. სიერეს შეესაბამება ამ წრფეებზე მდებარე ყველა ის მონაკვეთი, რომლებიც მოთავსებულია ამ პარალელურ სიბრტყეებს შორის **ცილინდრი** (ზუსტად წრიული ცილინდრი) ეწოდება. ჯოხაკვეთს, რომელის ერთი ბოლო ამ წრეწირზეა, **ცილინდრის მსახველი** ეწოდება.

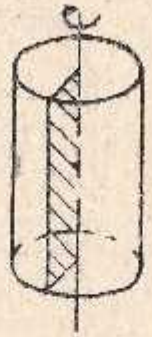
ცილინდრის ზედაპირი შედგება პარალელურ სიბრტყეებში მდებარე ორი ტოლი წრისაგან, რომლებსაც ცილინდრის ფუძეები ეწოდება, და გვერდითი ზედაპირისაგან.

ცილინდრის ეწოდება მართი, თუ ძისი მსახველები ფუძის სიბრტყის მართობულია. შემდგომში გავეცნობილებით მხოლოდ მართ ცილინდრს, რომელსაც სიმოკლისათვის ცილინდრს ვუწოდებთ.

184-ე ნახაზზე გამოსახულია მართი ცილინდრი. იგი შეკვეთილია α და α' პარალელურ სიბრტყეებით შორის მოთავსებული პარალელური XX' მონაკვეთებით. ამ სიბრტყეებში მდებარე K და K' წრეები ცილინდრის ფუძეებია.



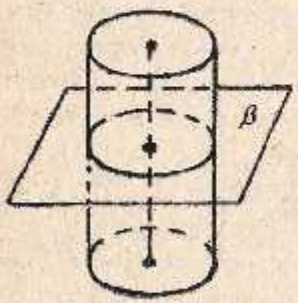
ნახ. 184



ნახ. 185

მართი ცილინდრი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სხეული, რომელიც მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით მისი გვერდის, ჰემცველი წრფის გარშემო (ნახ. 185).

ცილინდრის რადიუსი ეწოდება მისი ფუძის რადიუსს. ცილინდრის ერთ-ერთი ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან მეორე ფუძეზე დაშვებულ მართობს ცილინდრის სიმაღლე ეწოდება. ცილინდრის ფუძეთა ცენტრებზე გამავალ წრფეს ცილინდრის ღერძი ეწოდება; იგი მსახველების პარალელურია. ცილინდრის ღერძზე გამავალი სიბრტყით მიღებულ კვეთას ღერძული კვეთა ეწოდება. ცილინდრის მსახველზე ღერძული კვეთის პერპენდიკულარულად გამავალ სიბრტყეს, ცილინდრის მხებ სიბრტყე ეწოდება.



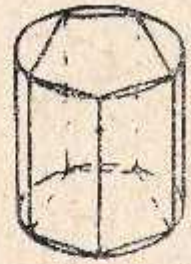
ნახ. 186

თეორემა 33. 1. **ცილინდრის მკვეთი სიბრტყე, რომელიც ღერძის პერპენდიკულარულად არის გავლებული, ცილინდრის გვერდით ზედაპირს გადაკვეთს წრეწირზე, რომელიც ფუძის წრეწირის ტოლია.**

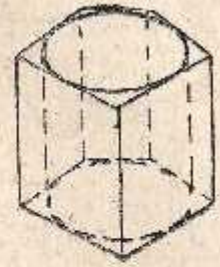
დამტკიცება. ვთქვათ β ცილინდრის ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყეა (ნახ. 186). ცხადია, ეს სიბრტყე ფუძეების პარალელურია. პარალელური გადატანა ცილინდრის ღერძს გასწყრივ, რომელიც β

სიბრტყეს შეუთავსებს ცილინდრის ფუძის სიბრტყეს, კვეთაში მიღებულ წრეწირს შეუთავსებს ფუძის წრეწირს. თეორემა დამტკიცებულია.

პრიზმას ეწოდება ცილინდრში ჩახაზული, თუ მისი ფუძეები ცილინდრის ფუძეებში ჩახაზული მრავალკუთხედებია. პრიზმის გვერდითი წიბოები ცილინდრის მსახველებია წარმოადგენენ (ნახ. 187).



ნახ. 187



ნახ. 188

პრიზმას ეწოდება ცილინდრზე შემოხაზული, თუ მისი ფუძეები ცილინდრის ფუძეებზე შემოხაზული მრავალკუთხედებია. შემოხაზული პრიზმის გვერდითი წახნაგები ეხებიან ცილინდრის გვერდით ზედაპირს (ნახ. 188).

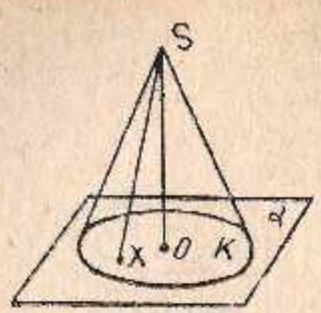
კონუსი

სხეულს შეკვეთილს ყველა იმ მონაკვეთისაგან, რომლებიც რაიმე წრის (კონუსის ფუძის) წერტილებს აერთებს ფუძის სიბრტყეში არამდებარე რაიმე წერტილთან (კონუსის წვეროსთან), **კონუსი** (წრიული კონუსი) ეწოდება, მონაკვეთის, რომელიც კონუსის წვეროს ფუძის წრეწირის წერტილთან აერთებს, კონუსის მსახველი ეწოდება. კონუსის ზედაპირი შედგება ფუძისა და გვერდითი ზედაპირისაგან.

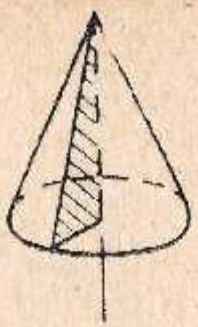
კონუსს ეწოდება მართი, თუ კონუსის წვეროსა და ფუძის ცენტრის შემაერთებელი წრფე ფუძის სიბრტყეს მართობულია. შემდგომში მხოლოდ მართ კონუსს განვიხილავთ. სიმოკლისათვის მას უბრალოდ კონუსს ვუწოდებთ.

189-ე ხაზაზე გამოსახულია მართი კონუსი, მისი წვეროა S წერტილი, ხოლო ფუძე — α სიბრტყეში მდებარე K წრე. კონუსი შექმნილია ყველა იმ SX მონაკვეთისაგან, რომელიც S წვეროს აერთებს ფუძის X წერტილებთან.

მართი კონუსი შეიძლება განვიხილოთ როგორც სხეული, რომელიც მიიღება მართკუთხა სამკუთხედის ბრუნვით მისი კათეტის შემცველი წრფის გარშემო (ნახ. 190).



ნახ. 189



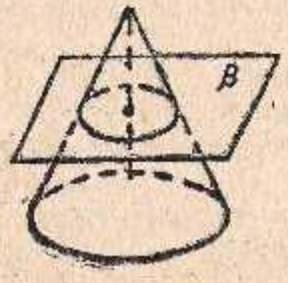
ნახ. 190

კონუსის სიმაღლეს ეწოდება მართობს, რომელიც დაშვებულია წვეროდან ფუძის სიბრტყეზე. ძართ კონუსში სიმაღლის ფუძე ფუძია ცენტრს ემთხვევა. რართი კონუსია ღერძი ეწოდება წრფეს, რომელიც ძია სიმაღლეს შეიცავს. კვეთს, რომელიც კონუსის ღერძზე გამავალ სიბრტყით მიიღება, ღერძული კვეთი ეწოდება. სიბრტყეს, რომელიც კონუსის მსახველზე გადის და ამ მსახველზე გავლებული ღერძის მართობულია, კონუსის მხები სიბრტყე ეწოდება.

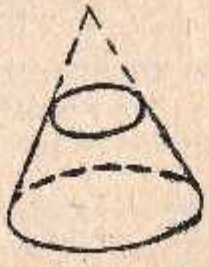
თეორემა 33.2. **კონუსია მკვეთი სიბრტყე, რომელიც ღერძის მართობულად არის გავლებული, კონუსს კვეთს წრეზე, ხოლო გვერდით ზედაპირს — წრეწირზე, რომლის ცენტრი კონუსის ღერძზე ძევს.**

დამტკიცება. ვთქვათ, β არის კონუსის ღერძის მართობული სიბრტყე, რომელიც კონუსს კვეთს (ნახ. 191). კონუსის წვეროს მიმართ ჰომოთეტიის გარდაქმნა, რომელიც β სიბრტყეს და კონუსის ფუძის სიბრტყეს შეათავსებს, β სიბრტყით კონუსის კვეთსა და კონუსის ფუძესაც შეათავსებს. მაშასადამე, კონუსია კვეთი სიბრტყით არის წრე, ხოლო გვერდითი ზედაპირის კვეთი — წრეწირი, რომლის ცენტრი კონუსის ღერძზე ძევს. თეორემა დამტკიცებულია.

კონუსის ღერძის მართობული სიბრტყე მისგან მცირე კონუსს ჩამოაკვეთს. დარჩენილ ნაწილს წაკვეთილი კონუსი ეწოდება (ნახ. 192).

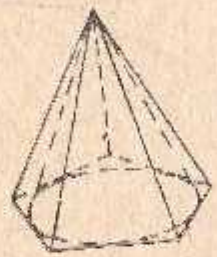


ნახ. 191

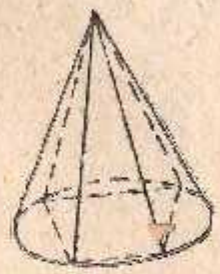


ნახ. 192

პირამიდის კონუსში ჩახაზული ეწოდება, თუ მისი ფუძე კონუსის ფუძის წრეწირში ჩახაზული მრავალკუთხედია, ხოლო წვერო — კონუსის წვეროა (ნახ. 193). კონუსში ჩახაზული პირამიდის გვერდითი წიბოები კონუსის მსახველებია. პირამიდას კონუსზე შემოხაზული ეწოდება, თუ მისი ფუძე კონუსის ფუძეზე შემოხაზული მრავალკუთხედია, ხოლო წვერო კონუსის წვეროს ემთხვევა (ნახ. 194). შემოხაზული პირამიდის გვერდითი წახნაგების სიბრტყეები კონუსის მხები სიბრტყეებია.



ნახ. 193



ნახ. 194

პირთვი სფერო

პირთვი ეწოდება სივრცის ყველა იმ წერტილისაგან შედგენილ სხეულს, რომლის დაშორება მოცემული წერტილიდან არ აღემატება. მოცემულ წერტილს პირთვის ცენტრი ეწოდება, ხოლო მოცემულ მანძილს — პირთვის რადიუსი. პირთვის სიზლვრის ეწოდება პირთვული ზედაპირი, ანუ სფერო. ამგვარად, სფეროს წერტილები პირთვის ყველა ის წერტილია, რომელიც ცენტრიდან რადიუსის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. ნებისმიერი მონაკვეთი, რომელიც პირთვის ცენტრს აერთებს პირთვის ზედაპირთან, ეწოდება რადიუსი. ნებისმიერი მონაკვეთი, რომელიც პირთვის ზედაპირის ორ წერტილს აერთებს და პირთვის ცენტრზე გადის, დიამეტრი ეწოდება. ნებისმიერი დიამეტრის ბოლოებს ეწოდება პირთვის დიამეტრალურად მოპირდაპირე წერტილები.

პირთვი, ისევე როგორც ცილინდრი და კონუსი, ბრუნვის სხეულს წარმოადგენს. იგი მიიღება ნახევარწრის ბრუნვით მისი დიამეტრის შემცველი წრფის გარშემო (ნახ. 195).

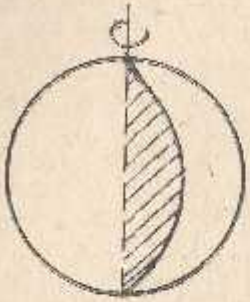
მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 33.3. **პირთვის ყოველი კვეთა სიბრტყით არის წრე. ამ წრის ცენტრი პირთვის ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძეა.**

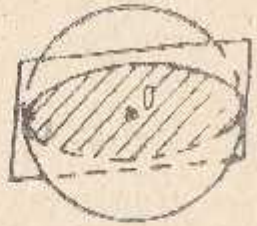
თეორემა 33.4. **პირთვის ცენტრიდან თანაბრად დაშორებული სიბრტყეები პირთვს ტოლ წრეებზე კვეთენ.**

პირთვის ცენტრზე გამავალ სიბრტყეს დიამეტრალური სიბრტყე ეწო-

ღება. დიამეტრალური სიბრტყით ბირთვის გადაკვეთისას მიღებულ წრეს დიდი წრე ეწოდება. (ნახ. 194). ხოლო სფეროს გადაკვეთას მიღებულ წრეწირს — დიდ წრეწირი.



ნახ. 195



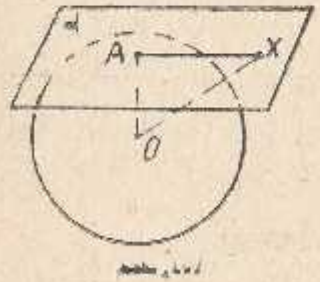
ნახ. 196

თ ე ო რ ე მ ა 33.5. **ბირთვის ნებისმიერი დიამეტრალური სიბრტყე მისი სიმეტრიის სიბრტყეა. ბირთვის ცენტრი მისი სიმეტრიის ცენტრია.**

სიბრტყეს, რომელიც ბირთვის ზედაპირის რაიმე წერტილზე გადის და ამ წერტილზე გამავალი რადიუსის მართობულია, მხები სიბრტყე ეწოდება, ამ წერტილს კი — შეხების წერტილი.

თ ე ო რ ე მ ა 33.6. **მხებ სიბრტყეს ბირთვთან აქვს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი — შეხების წერტილი.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, α არის ბირთვის მხები სიბრტყე, ხოლო A — შეხების წერტილი (ნახ. 197). ავიღოთ α სიბრტყის A-საგან განსხვავებული ნებისმიერი X წერტილი. რადგან OA მართობია, ხოლო OX — დახრილი, ამიტომ $OX > OA = R$. მაშასადამე, X წერტილი ბირთვს არ ეკუთვნის. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 197

ბირთვული ზედაპირის რაიმე წერტილზე გამავალ წრეწირს, რომელიც ამ წერტილზე გამავალი რადიუსის მართობულია, მხები ეწოდება. ვტკიცდება, რომ ბირთვული ზედაპირის ნებისმიერ წერტილზე გადის მხებთა უსასრულო სიმრავლე და თითოეული მათგანი ბირთვის ნებს სიბრტყეში ძევს.

შევადგინოთ სფეროს განტოლება. ვთქვათ R რადიუსიანი სფეროს ცენტრი $O(a, b, c)$ წერტილში მდებარეობს, რადგან სფეროს ნებისმიერი

(x, y, z) წერტილიდან მის ცენტრამდე მანძილი R-ის ტოლია, ამიტომ ორი წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

თუ სფეროს ცენტრი კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა, მაშინ სფეროს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

მტკიცდება, რომ ორი სფეროს გადაკვეთის წირი წრეწირის წირმოადგენს.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. რას ეწოდება ბრუნვა სხეული?
2. რა ეწოდება წრიული ცილინდრი, ცილინდრის ღერძი, ფუძე?
3. რას ეწოდება ცილინდრის რადიუსი, სიმაღლე, ღერძი, ღერძული კვეთა, ჭრილი ცილინდრის?
4. დამტკიცეთ, რომ ცილინდრის ღერძის პერპენდიკულარულად გავლებული სიბრტყე ცილინდრის გვერდით ზედაპირს გასდევს წრეწირზე, რომელიც ფუძეა წრეწირის ტოლია.
5. რას უწოდებენ ცილინდრის ნახაზელს, ცილინდრზე შემოხაზულ პრიზმას?
6. რას ეწოდება წრიული კონუსი, კონუსის წვერო, ნახაზელი, ფუძე, ვეფხვითია ზედაპირი?
7. რომელ კონუსია ეწოდება მართი?
8. რას ეწოდება კონუსის სიმაღლე, ღერძი, ღერძული კვეთი, მაგი სიბრტყე?
9. დამტკიცეთ, რომ კონუსის ღერძის პერპენდიკულარულად გავლებული სიბრტყე გვერდით ზედაპირს გასდევს წრეწირზე, რომლის ცენტრი კონუსის ღერძის კვეთის წრეწირზე.
10. რას ეწოდება წაკვეთილი კონუსი?
11. რომელი პრიზმის ეწოდება კონუსში ჩახაზული, კონუსში შემოხაზული?
12. რას ეწოდება ბირთვი, ბირთვული ზედაპირი ანუ სფერო?
13. რას ეწოდება ბირთვის რადიუსი, დიამეტრი?
14. ჩამოაყალიბეთ თეორემები ბირთვის შესახებ.
15. როდის სიბრტყეს უწოდებენ ბირთვის მხებ სიბრტყეს?
16. დამტკიცეთ, რომ მხებ სიბრტყეს ბირთვთან აქვს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი — შეხების, წერტილი.
17. რისგან წრეწირს ეწოდება ბირთვის მხები?
18. განმარტეთ სფეროს განტოლება.

§ 34. სხეულის მოცულობა

ავიღოთ ორი ჭურჭელი: ერთი კუბის ფორმისა, ხოლო მეორე ნებისმიერი ფორმის. ვთქვათ, ორივე ჭურჭელი საკმაო სითხით. დავუშვათ, რომ პირველ ჭურჭელში ჩავიდა m კგ სითხე, ხოლო მეორეში — n კგ. ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ მეორე ჭურჭელი $\frac{n}{m}$-ჯერ მეტია პირველზე. რი-

ცხვს, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ მეტია ლორე ჭერქველი პარველზე, ვეწოდოთ ხეორე ჭერქვლის მაცილობა. პირველი ჭერქველი აქ საზომი ერთეულია. ამ აზრით ვრცანებს შეიძლება შეეადარით კუბი და ხეხიაძიერი სველი, ანდაც კუბი საზომი ერთეული. მოცულობის ცნების ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს მოცულობის შემდეგი თვისებები:

1. ყოველ სხეულს აქვს გარკვეული მოცულობა.
2. ტოლ სხეულებს ტოლი მოცულობები აქვთ (ტოლი მოცულობების მქონე ფიგურებს ტოლდიდი ეწოდებათ).
3. თუ სხეულს ორ ნაწილად გაეყოთ, მაშინ ამ ნაწილების მოცულობათა ჯამი მოცემული სხეულის მოცულობის ტოლია.

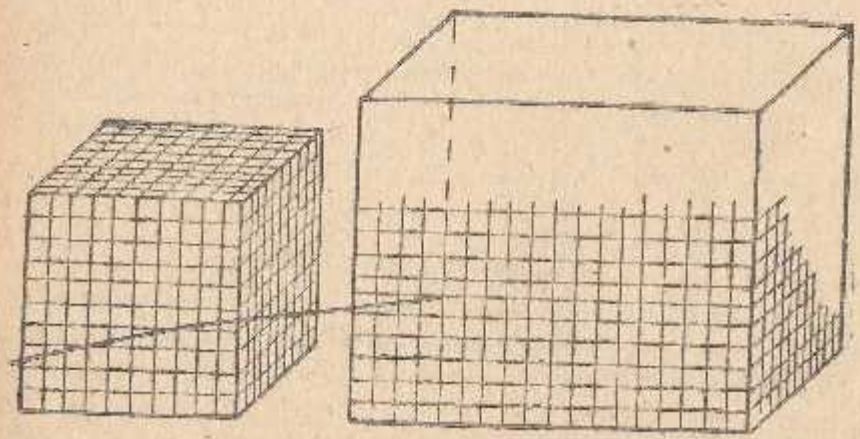
ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ სხვადასხვა სიფიგურების მოცულობის გამოსათვლელ ფორმულებს.

მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა

ვიპოვოთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა. 198-ე ნახაზზე გამოსახულია კუბი, რომელიც მოცულობის საზომ ერთეულს წარმოადგენს და მართკუთხა პარალელეპიპედი. რომლის მოცულობაც უნდა ვიპოვოთ. სიგრძის ერთეულად მიღებულია კუბის წიბოს სიგრძე.

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა პარალელეპიპედის a, b, და c წიბოების სიგრძეები გამოისახება სასრული ათწილადებით და მძიმის შემდეგ ათობითი ნიშნების რაოდენობა n-ს არ აღემატება.

კუბის ერთი წვეროდან გამომავალი წიბოები დავყოთ 10^n ტოლ ნაწილად და დანაწევრების წერტილებზე გავავლოთ ამ წიბოების პარალელური სიბრტყეები. კუბი დაიყოფა $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$ რაოდენობის მკრთ კუბებად. რომელთა წიბოები $\frac{1}{10^n}$-ის ტოლია.



ნახ. 198

ცალკეული მკრთ კუბის მოცულობა. მოცულობის თვისების თანახმად დიდი კუბის მოცულობა ცალკე კუბების მოცულობათა ჯამის ტოლია. მაგრამ დიდი კუბის მოცულობა ერთის ტოლია, ხოლო მკრთ კუბების რაოდენობა 10^{3n}-ია, ამიტომ მკრთ კუბის მოცულობა $\frac{1}{10^{3n}}$-ის ტოლია.

რადგან $\frac{a}{\frac{1}{10^n}} = a \cdot 10^n$, $\frac{b}{\frac{1}{10^n}} = b \cdot 10^n$, $\frac{c}{\frac{1}{10^n}} = c \cdot 10^n$

ბაკვეები მთელია, ამიტომ პარალელეპიპედის წიბოები შეგვიძლია დავყოთ $\frac{1}{10^n}$-ის ტოლ ნაწილებად, რომელთა რაოდენობა მთელი რიცხვით გამოისახება. a წიბოზე მათი რაოდენობა $a \cdot 10^n$ აგნება, b წიბოზე $b \cdot 10^n$, ხოლო c წიბოზე — $c \cdot 10^n$. წიბოს დაყოფის წერტილებზე გავავლოთ ამ წიბოს პარალელური სიბრტყეები. ამით პარალელეპიპედი დავყოფთ მკრთ კუბებად, რომელთა წიბოები $\frac{1}{10^n}$-ის ტოლია. მათი რაოდენობაა $a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^n \cdot c \cdot 10^n = abc \cdot 10^{3n}$. პარალელეპიპედის მოცულობა მასში მოთავსებული მკრთ კუბების მოცულობათა ჯამის ტოლია, რადგან მკრთ კუბის მოცულობა $\frac{1}{10^{3n}}$-ია ტოლია, ხოლო ასეთი კუბების რაოდენობაა $abc \cdot 10^{3n}$, ამიტომ ამ შემთხვევაში პარალელეპიპედის მოცულობის გამოსათვლელად მივიღებთ:

$$abc \cdot 10^{3n} \frac{1}{10^{3n}} = abc.$$

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა a, b, c წრფეებიდან თუნდაც ერთის სიგრძე უსასრულო ათწილადით გამოისახება. ავღნიშნოთ a_1-ით და a_2-ით a რიცხვის მიახლოებითი უნაკლოებები ნაკლებობით და ბეტობით n ათობით ნიშნამდე სიზუსტით. b და c რიცხვების მიახლოებითი ძირეული უნაკლოებები იმავე სიზუსტით ავღნიშნოთ b_1-ით და b_2-ით, c_1-ით და c_2-ით. იმ პარალელეპიპედის მოცულობა, რომლის წიბოებია a_1, b_1 და c_1, ნაკლებია მოცემული პარალელეპიპედის მოცულობაზე, რადგან მისი მოთავსება შეიძლება მოცემულის ძირით. იმ პარალელეპიპედის მოცულობა, რომლის წიბოებია a_2, b_2 და c_2, ეტია მოცემული პარალელეპიპედის მოცულობაზე, რადგან მასში მოთავსებულია მოცემული პარალელეპიპედის მოთავსება. ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად a_1, b_1, c_1 წიბოების მქონე პარალელეპიპედის მოცულობა $a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$-ის ტოლია, ხოლო a_2, b_2, c_2 წიბოების მქონე პარალელეპიპედის მოცულობა $a_2 \cdot b_2 \cdot c_2$-ის ტოლია. ამრიგად, მოცემული პარალელეპიპედის მოცულობა ჭარაკსებულია

$a_1b_1c_1$-ის და $a_2b_2c_2$-ის ტოლის. რადგან, როცა n საკმარისად დიდია, $a_1b_1c_1$ და $a_2b_2c_2$ გაუძლებენ abc რიცხვის მიახლებით მნიშვნელობას ხების მიერ წინასწარ მოცემული სიზუსტით, ამიტომ

$$V = n \cdot b \cdot c.$$

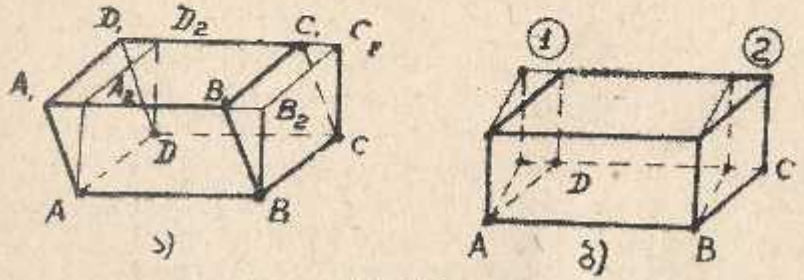
ამრიგად, მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა მისი განზომილებების ნამრავლის ტოლია.

რადგან მართკუთხა პარალელეპიპედის ორი განზომილების ნამრავლი ფუძის ფართობია, ხოლო მესამე — სიმაღლეა, ამიტომ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

დახრილი პარალელეპიპედის მოცულობა

თეორემა 34.1. **ნებისმიერი პარალელეპიპედის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და ამ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მოცემული დახრილი პარალელეპიპედია (ნახ. 199, ა)). BC წიბოზე გავავლოთ $ABCD$ ფუძის მართობული სიბრტყე და მოცემულ პარალელეპიპედს შევაშენოთ სამკუთხა $BB_1B_2CC_1C_2$ პრიზმა. ახლა AD წიბოზე გავავალი და $ABCD$ ფუძის მართობული სიბრტყით მიღებულ სტეულს ჩამოვკვეთოთ სამკუთხა პრიზმა. კვლავ მივიღებთ პარალელეპიპედს. ამ პარალელეპიპედის მოცულობა თავდაპირველი პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლია, რადგან ჩამოკვეთილი და მიშენებული სამკუთხა პრიზმები ტოლია. მართლაც, AB მო-



ნახ. 199

ნაკვეთზე პარალელური გადატანისას ეს პრიზმები ერთმანეთს შეუთავსდება. მაშასადამე, მათ ერთნაირი მოცულობები აქვთ.

პარალელეპიპედის აღწერილი გარდაქმნისას მისი სიმაღლე და ფუძის ფართობი არ იცვლება. არ იცვლება აგრეთვე ერთი გვერდითი წახნაგის სიბრტყეები, ორი სხვა სიბრტყე კი ფუძის მართობული ხდება. თუ დანარჩენ

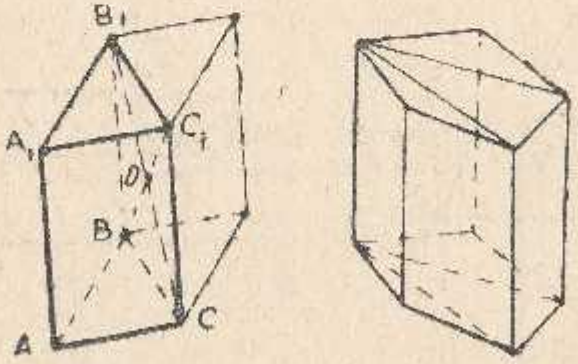
ნი ტახრილი გვერდითი წახნაგების მიმართ კიდევ ერთხელ გამოვიყენებთ ასეთ გარდაქმნას, მივიღებთ პარალელეპიპედს, რომლის ყველა გვერდითი წახნაგი ფუძის ნორმალურია, ე. ი. მართი პარალელეპიპედს. მიღებული მართი პარალელეპიპედი ანალოგიური ხერხით გარდაგქმნათ მართკუთხა პარალელეპიპედად, რისთვისაც ჯერ მას მივაშენოთ პრიზმა 1, შემდეგ ვამოვკვეთოთ პრიზმა 2 (ნახ. 199, ბ)). ეს გარდაქმნაც ადვილად არ ცვლის პარალელეპიპედის მოცულობას, სიმაღლესა და ფუძის ფართობს.

ამრიგად, რადგან ნაკვეთული პარალელეპიპედის მართკუთხა პარალელეპიპედად ზემოთ აღწერილი ხერხით გარდაქმნისას არ იცვლება მოცულობა, სიმაღლე და ფუძის ფართობი, ამიტომ თავდაპირველი პარალელეპიპედის მოცულობაც ფუძის ფართობისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

პრიზმის მოცულობა

თეორემა 34.2. **ნებისმიერი პრიზმის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.**

დამტკიცება. ჯერ გავიხსენოთ სამკუთხა პრიზმა (ნახ. 200). შევეცადოთ იგი პარალელეპიპედამდე, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. O წერტილი მიღებული პარალელეპიპედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია, ამიტომ იგი წარმოადგენს ამ პარალელეპიპედის სიმეტრიის ცენტრს. ამრიგად, მიშენებული პრიზმა თავდაპირველის სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ და ამიტომ აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა ძოცემული პრიზმის გაორკეცებული მოცულობის ტოლია.



ნახ. 200

ნახ. 201

პარალელეპიპედის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. პარალელეპიპედის ფუძის ფართობი ABC სამკუთხედის გაორკეცებული ფართობის ტოლია, ხოლო მისი სიმაღლე მოცემული

პრიზმის სიმაღლის ტოლია. აქედან დავასკვნით, რომ მოცემული პრიზმის მოცულობა ძალა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლია ტოლია.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი პრიზმა (ნახ. 201). პრიზმის რომელიმე გვერდით წიბოსა და მის არამეზობელ ყოველ გვერდით წიბოზე გავავლოთ სიბრტყეები, რაც ყოველ ეს 201-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. ასეთნაირად პრიზმა დაიყოფა სამკუთხა პრიზმებად. რომელიც ფუძეები მოცემული პრიზმის ფუძეს წარმოადგენენ, ხოლო სიმაღლეები მოცემული პრიზმის სიმაღლის ტოლია.

მოცემული პრიზმის მოცულობა მისი შემადგენელი სამკუთხა პრიზმების მოცულობათა ჯამის ტოლია. ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად სამკუთხა პრიზმის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია, ამიტომ მოცემული პრიზმის მოცულობა

$$V=S_1H+S_2H+\ldots+S_nH=(S_1+S_2+\ldots+S_n)H,$$

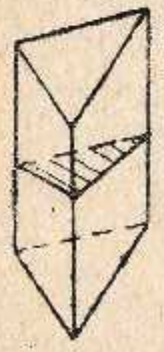
სადაც S_1, S_2, ..., S_n არის იმ სამკუთხედების ფართობები, რომლებიც მოცემული პრიზმის ფუძეს შეადგენენ, H — პრიზმის სიმაღლეა. ფუძის შემადგენელი სამკუთხედების ფართობთა ჯამი მოცემული პრიზმის ფუძის S ფართობის ტოლია, ამიტომ

$$V=SH,$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დახრილ პრიზმაში გაკლებულ კვეთას, რომელიც გვერდითი წიბოების მართობულია და ყოველ მათგანს კვეთს, პრიზმის პერპენდიკულარული კვეთი ეწოდება.

თეორემა 34.2. **ნებისმიერი პრიზმის მოცულობა მისი პერპენდიკულარული კვეთის Q ფართობისა და l გვერდითი წიბოს ნამრავლის ტოლია.**



ნახ. 202

დამტკიცება. გავლებული კვეთის სიბრტყე პრიზმას ორ ნაწილად ყოფს (ნახ. 202). ცრურწერთი ნაწილი პარალელურად გადავატანოთ ისე, რომ პრიზმის ფუძეები ერთმანეთს დაემთხვეს. მივიღებთ წართ პრიზმას, რომელსაც ფუძედ მოცემული პრიზმის კვეთი აქვს, ხოლო სიმაღლე l-ის ტოლია. ამ პრიზმას იგივე მოცულობა აქვს, რაც მოცემულს. ამრიგად, მოცემული პრიზმის მოცულობა Ql-ის ტოლია, თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 34.3. **პირამიდის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ერთი მესამედის ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია პირამიდა, რომლის სიმაღლეა H, ხოლო ფუძეა ფართობი Q. ეპოვოთ მისი V მოცულობა. პირამიდას კვლავ განვათავსებთ ფუძის პარალელურად სიბრტყით (ნახ. 203). პირამიდის წვეროდან მანძილი აღვნიშნოთ x-ით. კვეთის $S(x)$ ფართობი და მოცემული პირამიდის $V(x)$ მოცულობა x არგუმენტის ფუნქციებია. თუ მივიღებთ, რომ $S(0)=0$ და $V(0)=0$, მაშინ $S(x)$ და $V(x)$ ფუნქციები განსაზღვრული იქნება $[0, H]$ მონაკვეთზე. მივცეთ x-ს ნაზრდი $\Delta x>0$ ($x+\Delta x\leqslant H$), მაშინ $V(x)$ მოცულობა აგრეთვე ძიძგებს ΔV ნაზრდს. აქ ΔV არის მკვეთი სიბრტყეებს შორის მოთავსებული წვეტკვეთილი პირამიდის მოცულობა. თრი კვეთიდან თითოეულზე ავაგოთ პრიზმა, რომლის სიმაღლეა Δx. მოცულობათა თვისებების თანახმად გვაქვს:

$$S(x)\Delta x<\Delta V<S(x+\Delta x)\cdot\Delta x,$$

აქედან

$$S(x)<\frac{\Delta V}{\Delta x}<S(x+\Delta x). \qquad (1)$$

ვიპოვოთ $S(x)$ ფუნქცია. განსახილველი კვეთი და პირამიდის ფუძე პომოთეტიური მრავალკუთხედებია, ამასთან პომოთეტის კოეფიციენტი $\frac{H}{x}$-ის ტოლია, პომოთეტის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{Q}{S(x)}=\frac{H^2}{x^2},\quad \text{საიდანაც}\quad S(x)=\frac{Q}{H^2}x^2.$$

შევნიშნოთ, რომ $S(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0, H]$ მონაკვეთზე, ამიტომ $\lim\limits_{\Delta x\to 0} S(x+\Delta x)=S(x)$. (1) ორმაგი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=S(x)$. მაშასადამე, $V'(x)=S(x)$. ე. ი. $V(x)$ ფუნქცია კვეთის $S(x)$ ფართობისათვის პირველადი ფუნქციაა. ძიებული პირამიდის მოცულობა $V=V(H)$. რადგან $V(0)=0$, ამიტომ შეიძლება დაწეროს:

$$V=V(H)-V(0)$$

ანუ

$$V=\int_0^H S(x)dx.$$

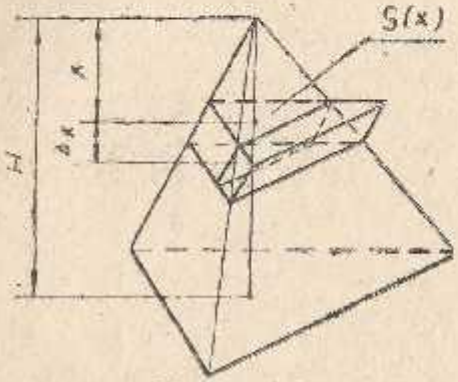
ინტეგრებით მივიღებთ:

$$V=\int_0^H \frac{Q}{H^2}x^2dx=\frac{Q}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{1}{3}QH.$$

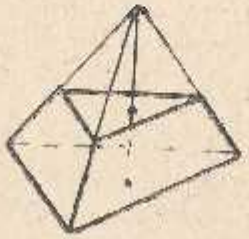
ამრიგად,

$$V=\frac{1}{3}QH.$$

თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 203



ნახ. 204

თ ე ო რ ე მ ა 34.5. **წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით**

$$V=\frac{1}{3}H(Q_1+\sqrt{Q_1Q_2}+Q_2),$$

სადაც Q_1 და Q_2 წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების ფართობებია, ხოლო H — სიმაღლეა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $Q_1>Q_2$ მოცემული წაკვეთილი პირამიდა შევიყვანოთ პრიზმაში (ნახ. 204). ვთქვათ, x მისი სიმაღლეა. წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა ორი ისეთი პრიზმული პირამიდის მოცულობათა სხვაობის ტოლია, რომელთაგან ერთის ფუძის ფართობია Q_1 და სიმაღლე x, ხოლო მეორის ფუძის ფართობია Q_2 და სიმაღლე $x-H$. რადგან ეს პირამიდები მსგავსია, ამიტომ $\frac{Q_1}{Q_2}=\left(\frac{x}{x-H}\right)^2$. აქედან $x=\frac{H\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. წაკვეთილი პირამიდის მოცულობისათვის მივიღებთ

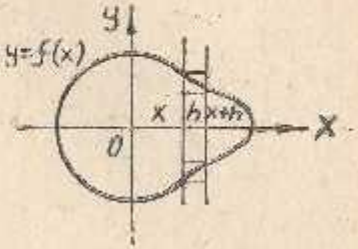
$$V=\frac{1}{3}\left[Q_1\frac{H\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}-Q_2\left(\frac{H\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}-H\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}H\frac{Q_1\sqrt{Q_1}-Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}=\frac{1}{3}H(Q_1+\sqrt{Q_1Q_2}+Q_2).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ბრუნვის სხეულის მოცულობის ცვლადი ფორმულა

ვიპოვოთ ბრუნვის სხეულის მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა. მივიღოთ სხეულის ბრუნვის ღერძი OX ღერძად და შევიყვანოთ დეკარტის x, y, z კოორდინატები. XOY სიბრტყე სხეულის ზედაპირს კვეთს წირზე, რომლისთვისაც OX ღერძი სიმეტრიის ღერძია. ვთქვათ, $y=f(x)$ არის წირის იმ ნაწილის განტოლება, რომელიც ღერძის ზემოთ მდებარეობს (ნახ. 205).



ნახ. 205

აბსცისათა ღერძის x წერტილზე გავავლოთ ამ ღერძის მართობული სიბრტყე და $V(x)$-ით აღვნიშნოთ სხეულის იმ ნაწილის მოცულობა, რომელიც ამ სიბრტყის მარცხნივ ძევს. ცხადია, $V(x)$ არის x-ის ფუნქცია. ვიპოვოთ მისი წარმოებული.

წარმოებულის თანახმად

$$V'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h)-V(x)}{h}.$$

$V(x+h)-V(x)$ სხეულის იმ ფენის მოცულობა, რომლის სისქეა h და მოთავსებულია x და $x+h$ აბსცისებიანი მკვეთი წირტილებში გამავალ, x ღერძის მართობულ სიბრტყეებს შორის. ვთქვათ, $[x, x+h]$ მონაკვეთზე $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა M, ხოლო უმცირესი m; მაშინ სხეულის განსახილველი ფენა შეიცავს πm^2h რადიუსიან და h სიმაღლის მქონე ცილინდრს და მოთავსებულია ამ ცილინდრში, რომლის რადიუსია M და სიმაღლეა იგივე h (იხ. ნახ. 205). ამიტომ

$$\pi m^2h\leqslant V(x+h)-V(x)\leqslant\pi M^2h,$$

$$\pi m^2\leqslant\frac{V(x+h)-V(x)}{h}\leqslant\pi M^2$$

თუ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ უკანასკნელი უტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები, როცა $h\to 0$ მიისწრაფვის ერთი და იმავე $\pi f^2(x)$ ზღვრისაკენ. იმავე ზღვრისაკენ მიისწრაფვის ჯამ შორის მოთავსებული შეფარდებაც, ე. ი. წარმოებული $V'(x)=\pi f^2(x)$.

ანალიზის ცნობილი ფორმულის თანახმად:

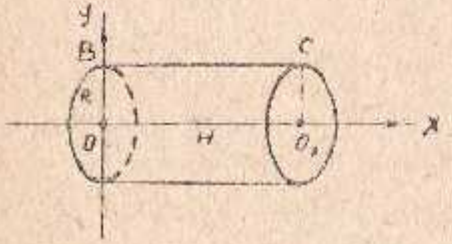
$$V(b)-V(a)=\int_a^b \pi f^2(x)dx,\quad a<b.$$

ამ ფორმულით გამოითვლება სხეულის იმ ნაწილის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია a და b აბსცისებიან მქრქნე წერტილებზე გამავალ, x ღერძის მართობულ, სიბრტყეებს შორის.

ცილინდრის მოცულობა

თეორემა 34. 6. **ცილინდრის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ცილინდრი, რომლის სიმაღლეა H, ხოლო ფუძის რადიუსია R. იგი მიღებულია R და H კვერდების მქონე BCO_1O მართკუთხედის ბრუნვით H კვერდის შემცველი ღერძის გარშემო. OX ღერძად მივიღოთ ცილინდრის ბრუნვის ღერძი, ხოლო OY ღერძად — მართკუთხედის R კვერდის შემცველი ღერძი (ნახ. 206).



ნახ. 206

რადგან BC მდებარეობს $y=R$ წრფეზე, ხოლო ცილინდრი მოთავსებულია O და H აბსცისების მქონე წერტილებზე გამავალ, x ღერძის მართობულ სიბრტყეებს შორის, ამიტომ მისი მოცულობა

$$V=\int_0^H \pi R^2 dx=\pi R^2 x\Big|_0^H=\pi R^2\cdot H.$$

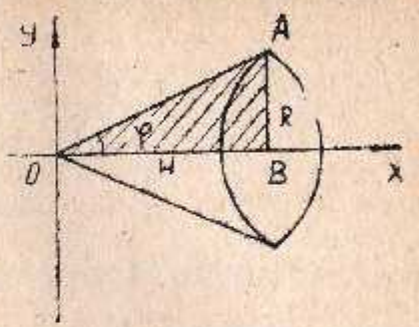
თეორემა დამტკიცებულია.

კონუსის მოცულობა

თეორემა 34.7. **კონუსის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ერთი მესამედის ტოლია.**

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია კონუსი, რომლის სიმაღლეა H, ხოლო ფუძის რადიუსია R. იგი მიღებულია R და H კათეტების მქონე OAB მართკუთხა სამკუთხედის H კათეტის შემცველი ღერძის გარშემო. OX ღერძად მივიღოთ კონუსის ბრუნვის ღერძი, ხოლო OY ღერძად — O წერტილში გავლებული OB კათეტის მართობული ღერძი (ნახ. 207).

OA წრფის განტოლების აქვს სახე $y=kx$, სადაც $k=\operatorname{tg}\varphi=\frac{R}{H}$.



ნახ. 207

რადგან OA მდებარეობს $y=\frac{R}{H}x$ წრფეზე, ხოლო კონუსი მოთავსებულია 0 და H აბსცისების მქონე წერტილებზე გამავალ, x ღერძის მართობულ სიბრტყეებს შორის, ამიტომ, მისი მოცულობა

$$V=\int_0^H \pi\left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^2dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლოგიღრად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ წაკვეთილი კონუსის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

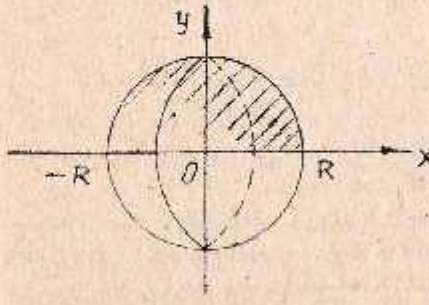
$$V=\frac{1}{3}\pi H(R_1^2+R_1R_2+R_2^2),$$

სადაც H წაკვეთილი კონუსის სიმაღლეა, ხოლო R_1 და R_2 ფუძეებს რადიუსებია.

ბირთვისა და მისი ნაწილების მოცულობა

თეორემა 34.8. R რადიუსიანი ბირთვის მოცულობა $\frac{4}{3}\pi R^3$-ის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია R რადიუსიანი ბირთვი, რომელიც მიღებულია $2R$ დიამეტრის მქონე ნახევარწრის ბრუნვით დიამეტრის შემცველი ღერძის გარშემო. OX ღერძად ვიღოთ ბრუნვის ღერძი, ხოლო კოორდინატთა სათავედ სფეროს ცენტრი (ნახ. 208). XOY სიბრტყე ბირთვის წრეწირზე, რომელიც ცნობილია შემდეგი განტოლებით ხოლოდ:



ნახ. 208

$$x^2+y^2=R^2.$$

OX ღერძის ზემოთ მდებარე ნახევარწრეწირი მოიცემა განტოლებით

$$y=\sqrt{R^2-x^2}, \qquad -R\leqslant x\leqslant R.$$

ამიტომ ბირთვის მოცულობა

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(\sqrt{R^2-x^2})^2dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=$$

$$=\pi\cdot\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

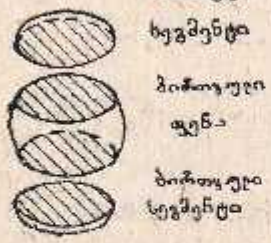
თეორემა დამტკიცებულია.

ბირთვული სეგმენტი ეწოდება ბირთვის იმ ნაწილს, რომელსაც ბირთვს ძისი მკვეთი სიბრტყე ჩამოაცილებს (ნახ. 209). ბირთვული სეგმენტის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

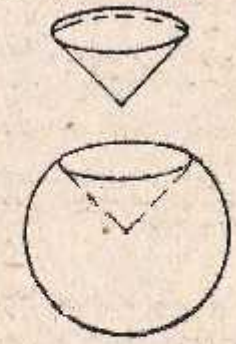
$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

სადაც, H ბირთვული სეგმენტის სიმაღლეა, ხოლო R — ბირთვის რადიუსი.

ბირთვული ფენა ეწოდება ბირთვის იმ ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია ბირთვის კადამკვეთ ორ ერთიერთპარალელურ სიბრტყეს შორის (ნახ. 209). ბირთვული ფენის მოცულობის მისაღებად საჭიროა ბირთვის მოცულობას გამოვაკლოთ ბირთვის გადამკვეთი ერთიერთპარალელური სიბრტყეებით ჩამოყვეთილი ბირთვული სეგმენტების მოცულობათა ჯამი.



ნახ. 209



ნახ. 210

ბირთვული სექტორი ეწოდება ისეთ სხეულს, რომელიც ბირთვული სეგმენტისა და კონუსისაგან ასე შეგვიძლია მივიღოთ: თუ ბირთვული სეგმენტი **ნახევარბირთვზე** ნაკლებია, მაშინ ბირთვული სეგმენტი შევაცალოთ კონუსით, რომლის წვერიც ბირთვის ცენტრია ეწოდება, ხოლო ფუძე სეგმენტის ფუძეა. თუკი სეგმენტი მეტია ნახევარბირთვზე, მაშინ მითითებული კონუსი სეგმენტიდან ამოვიღოთ (ნახ. 210). ცხადია, ბირთვული სექტორის მოცულობა მიიღება შესაბამისი ბირთვული სეგმენტისა და კონუსის მოცულობათა შეკრებით ან გამოკლებით. ბირთვული სექტორის მოცულობის გამოსათვლელად მიიღება შემდეგი ფორმულა:

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2H,$$

სადაც R არის ბირთვის რადიუსი, ხოლო H — შესაბამისი ბირთვული სეგმენტის სიმაღლე.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

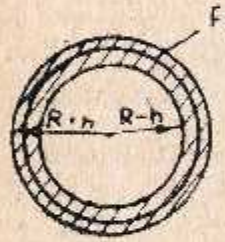
1. ჩამოაყალიბეთ მოცულობის ძირითადი თვისებები.
2. დამტკიცეთ, რომ წარმკვეთი პირამიდების მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და ამ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.
3. დამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი პირამიდის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია (ჯერ განიხილეთ სამკუთხა პირამიდა).
4. დამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი პრიზმის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.
5. დამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი პრიზმის მოცულობა მისი პერპენდიკულარული კვეთის ფართობისა და გვერდითი წიბოს ნამრავლის ტოლია.
6. დამტკიცეთ, რომ პირამიდის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ერთ-მესამედის ტოლია.
7. მოიყვანეთ წაკვეთილი პირამიდის მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა.
8. მოიყვანეთ პრიზმის სხეულის მოცულობის ზოგადი ფორმულა.
9. დამტკიცეთ, რომ ცილინდრის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.
10. დამტკიცეთ, რომ კონუსის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ერთი მესამედის ტოლია.
11. დამტკიცეთ, რომ R რადიუსიანი ბირთვის მოცულობა $\frac{4}{3}\pi R^3$-ის ტოლია.
12. რას ეწოდება ბირთვული სეგმენტი, ბირთვული ფენა, ბირთვული სექტორი?
13. მოიყვანეთ ბირთვის, ბირთვული სეგმენტისა და ბირთვული სექტორის მოცულობათა ფორმულები.

§ 35. სხეულის ზედაპირის ფართობი

განვიხილოთ ერთი პრაქტიკული ამოცანა. წარმოვიდგინოთ შენობის გუმბათი და კვადრატული ფორმის რკინის ბრტყელი ფურცელი, რომლის გვერდის სიგრძე 1 მ-ია. ვთქვათ, შენობის გუმბათის და რკინის ფურცლის ფართობები ტოლია. თუ გუმბათის შეღებვაზე დაიბარჯა V_1 ლ საღებავი, ხოლო რკინის ფურცლის შეღებვაზე V_2 ლ საღებავი, მაშინ ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ შენობის გუმბათის ფართობი $\frac{V_1}{V_2}$-ჯერ მეტია რკინის ფურცლის

ფართობზე, $\frac{V_1}{V_2}$ სიდიდე ახასიათებს გუმბათის ზედაპირის ფართობის სიდიდეს 1 მ² ფართობის ეროვნულთან შედარებით. საღებავის V_2 რაოდენობა, რომელიც საჭიროა რკინის ფურცლის შესაღებად, დაახლოებით იმ პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლია, რომლის ფუძეა 1×1 მ ზომის კვადრატი, ხოლო სიმაღლე h, რაც საღებავის ფენის სისქის ტოლია. ამიტომ გუმბათის ზედაპირის ფართობის შესაფასებლად მიიღება $\frac{V_1}{h}$ სიდიდე.

ახლა გადავიდეთ ზედაპირის ფართობის გეომეტრიულ განსაზღვრებაზე. ვთქვათ, F არის მოცემული ზედაპირა. აღვნიშნოთ F_h სხეული, რომელიც შეიცავს სივრცის ყველა იმ წერტილისაგან, რომლებიდანაც მანძილი F ზედაპირის რაიმე წერტილამდე h-ს არ აღემატება. თვალსაჩინოდ F_h შეიძლება ისეთ სხეულად წარმოვიდგინოთ, რომელსაც მივიღებთ, თუ F ზედაპირს ორივე მხრიდან h სისქის საღებავის ფენით დავფარავთ.



ნახ. 211

ვთქვათ, V_h არის F_h სხეულის მოცულობა. F ზედაპირის ფართობი ვუწოდოთ $\frac{V_h}{2h}$ შეფარდების ზღვარს, როცა $h \to 0$, ე. ი.

$$S = \lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h}.$$

მტკიცდება, რომ ისეთი მარტივი ამოზნექილი ზედაპირებისათვის, როგორიცაა პრიზმისა და პირამიდის გვერდითი ზედაპირები, ზემოთმოცემული განსაზღვრება იძლევა ზედაპირის ფართობის ჩვენთვის ცნობილ მხატვრულობას — გვერდითი წახნაგების ფართობთა ჯამს.

სფეროს ფართობი

ვიპოვოთ სფეროს ფართობი. ვთქვათ, F არის R რადიუსიანი მოცემული სფერო, F_h სხეული, რომელზეც ლაპარაკია ზედაპირის ფართობის განსაზღვრებაში. წარმოიდგინეთ ორნი $R+h$ და $R-h$ რადიუსიან ერთ სფეროს შორის (ნახ. 211). ამ სხეულის მოცულობა $R+h$ და $R-h$ რადიუსიანი ბირთვების მოცულობათა სხვაობის ტოლია, ე. ი.

$$V_h = \frac{4}{3}\pi[(R+h)^3 - (R-h)^3].$$

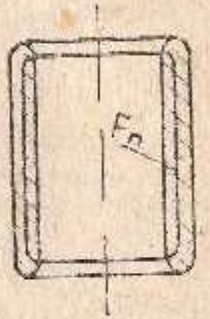
აქედან შეიძლება დავწეროთ:

$$\frac{V_h}{2h} = \frac{4\pi}{3 \cdot 2h}(6hR^2 + 2h^3) = 4\pi R^2\left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right).$$

როცა $h \to 0$, $\frac{V_h}{2h}$ შეფარდება მიისწრაფვის $4\pi R^2$-საკენ. ამრიგად R-რადიუსიანი სფეროს ფართობი $4\pi R^2$-ის ტოლია.

ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი

ვიპოვოთ ამ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, რომლის რადიუსია R და სიმაღლე h. მოცემულ შემთხვევაში F_h სხეული, რომელზეც ლაპარაკია ზედაპირის ფართობის განსაზღვრებაში, მოთავსებულია $R+h$ და $R-h$ რადიუსების მქონე ცილინდრულ ზედაპირებსა და ცილინდრის ღერძის პარალელურ ამ ორ სიბრტყეს შორის, რომლებიც ერთმანეთისაგან $H+2h$ მანძილითაა დაშორებული (ნახ. 212). ამ ფენის ის ნაწილი, რომელიც ცილინდრის ფუძეთა სიბრტყეებს შორისაა მოთავსებული, მთლიანად F_h სხეულს შეადგენს. თუ უგულვებელვყოფთ, რომ სიბრტყეებს შორის დაშორების H-ის ტოლია, მივიღებთ:



ნახ. 212

$$V_h < [\pi(R+h)^2 - \pi(R-h)^2](H+2h),$$
$$V_h > [\pi(R+h)^2 - \pi(R-h)^2]H$$

ანუ

$$4\pi RhH < V_h < 4\pi Rh(H+2h).$$

აქედან

$$2\pi RH < \frac{V_h}{2h} < 2\pi RH + 4\pi Rh.$$

როცა $h \to 0$, უტოლობის ბოლოები მიისწრაფვის $2\pi RH$-საკენ, მაშასადამე

$$\lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h} = 2\pi RH.$$

ამრიგად, ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = 2\pi RH,$$

სადაც R არის ცილინდრის ფუძის რადიუსი, ხოლო H — სიმაღლე. ანალოგიურად შეიძლება კონუსის გვერდითი ზედაპირის და სფერული ალკვნეტის ფართობი.

კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=\pi Rl$$

სადაც R არის კონუსის ფუძის რადიუსი, ხოლო l — მსახველის სიგრძე.

სფერული სეგმენტის ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს სახე:

$$S=2\pi RH$$

სადაც R არის სფეროს რადიუსი, ხოლო H — სეგმენტის სიმაღლე.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. ჩამოაყალიბეთ სხეულის ზედაპირის ფართობი.
2. გამოიყვანეთ ცილინდრის ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა.
3. რა ფორმულით გამოითვლება პირთველი სეგმენტის ზედაპირის ფართობი?
4. გამოიყვანეთ ცილინდრის გვერდითა ზედაპირის გამოსათვლელი ფორმულა.
5. რა ფორმულით წოდებენება კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი?

ამოცანები

§ 1. პლანიმეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები

1.1. M წერტილი CD წრეზე C და D წერტილებს შორის მდებარეობს. იპოვეთ CD მონაკვეთის სიგრძე, თუ: 1) $CM=2,5$ სმ, $MD=3,5$ სმ 2) $CM=3,1$ დმ, $MD=4,6$ დმ 3) $CM=12,3$ მ, $MD=3,8$ მ.

1.2. AB სხივზე მონიშნულია C წერტილი. იპოვეთ BC მონაკვეთის სიგრძე, თუ: 1) $AB=1,5$ მ, $AC=0,3$ მ 2) $AB=2$ სმ, $AC=4,4$ სმ.

1.3. 15 მ სიგრძის AB მონაკვეთზე აღნიშნულია C წერტილი. იპოვეთ AC და BC მონაკვეთების სიგრძეები, თუ: 1) AC მონაკვეთი BC მონაკვეთზე 3 მ-ით გრძელია, 2) AC მონაკვეთი BC მონაკვეთზე ორჯერ გრძელია, 3) C წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია, 4) AC და BC მონაკვეთების სიგრძეები ისე შეფარდებულია ერთმანეთს, როგორც 2 : 3.

1.4. წრეწირზე გადადებულია სამი მონაკვეთი $AB=20$ სმ, $AC=5,1$ სმ, $BD=7,9$ სმ. ამასთან C და D წერტილები მდებარეობს A და B წერტილებს შორის. იპოვეთ CD მონაკვეთის სიგრძე.

1.5. წრეზე გადადებულია სამი მონაკვეთი $AB=3$ სმ, $BC=5$ სმ $CD=4$ სმ. ამასთან B წერტილი მდებარეობს A და C წერტილებს შორის, ხოლო C წერტილი B და D წერტილებს შორის. იპოვეთ მანძილი AB და CD მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის.

1.6. წრეზე მდებარე A წერტილიდან გადადებულია $AB=60$ სმ და $AC=100$ სმ, მონაკვეთები. ამასთან B და C წერტილები A წერტილიდან ერთ მხარეს მდებარეობს. იპოვეთ: BC მონაკვეთის სიგრძე, მანძილი A წერტილიდან BC მონაკვეთის შუაწერტილამდე, მანძილი AB და AC მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის.

1.7. წრეზე მდებარე A წერტილიდან გადადებულია $AB=6$ სმ და $AC=5$ სმ მონაკვეთები, ამასთან A წერტილი მდებარეობს B და C წერტილებს შორის. იპოვეთ: BC მონაკვეთის სიგრძე; მანძილი A წერტილიდან BC მონაკვეთის შუაწერტილამდე; მანძილი AC და BC მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის.

1.8. A, B, C წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს. იპოვეთ BC მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB=2{,}7$ მ, $AC=3{,}2$ მ. რამდენი ამონახსნი აქვს ამოცანას?

1.9. სამი — A, B, C წერტილი ერთ წრეწირზე მდებარეობს. ცნობილია, რომ $AB=4{,}3$ სმ, $AC=7{,}5$ სმ, $BC=3{,}2$ სმ. შეიძლება თუ არა, რომ A წერტილი B და C წერტილებს შორის მდებარეობდეს? შეიძლება თუ არა, რომ C წერტილი A და B წერტილებს შორის მდებარეობდეს? სამი — A, B, C წერტილიდან რომელი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის?

1.10. A, B, C წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს. გაარკვიეთ თუ არა B წერტილი AC მონაკვეთს, თუ: 1) $AC=5$ სმ, $BC=7$ სმ, 2) $AC=9{,}1$ მ, $AB=9{,}2$ მ 3) $AB=3$ დმ, $BC=4$ დმ, $AC=7$ დმ? პასუხი ახსენით.

1.11. A, B, C წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს. შეიძლება თუ არა, რომ B წერტილი მდებარეობდეს A და C წერტილებს შორის თუ: 1) $AC=5$ სმ, $AB=7$ სმ 2) $AC=7$ მ, $BC=7{,}6$ მ? პასუხი ახსენით.

1.12. შეიძლება თუ არა, რომ A, B, C წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობდეს, თუ $AB=1{,}6$ მ, $AC=1{,}3$ მ, $BC=3$ მ? პასუხი ახსენით.

1.13. A წერტილიდან B და C წერტილებამდე მანძილები 5 სმ-ს და 7 სმ-ს უდრის, B და C წერტილებს შორის მანძილი კი 6 სმ-ია. შეიძლება თუ არა, რომ A, B და C წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობდეს? პასუხი ახსენით.

1.14. შეიძლება თუ არა, რომ A, B, C წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობდეს, თუ დიდი AB მონაკვეთია სიგრძე AC და BC მონაკვეთების სიგრძეების ჯამზე ნაკლები? პასუხი ახსენით.

1.15. მოცემულია ოთხი წერტილი: A, B, C და D. ცნობილია, რომ A, B, C წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს და B, C, D წერტილებიც, აგრეთვე, ერთ წრეწირზე მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ ოთხივე წერტილი ერთ წრეწირზე მდებარეობს.

1.16. მოცემულია ოთხი წრფე: a, b, c და d. ცნობილია, რომ a, b, c წრფეები, ერთ წერტილში გადაკვეთს ერთმანეთს და b, c, d წრფეებიც, აგრეთვე ერთ წერტილში გადაკვეთს ერთმანეთს. დაამტკიცეთ, რომ ოთხივე წრფე ერთ წერტილზე გადის.

1.17. a სხივი (ad) კუთხის გვერდებს შორის გადის. იპოვეთ (ad) კუთხე, თუ: 1) $\angle(ac)=35°$, $\angle(ad)=75°$ 2) $\angle(ac)=57°$, $\angle(ad)=62°$ 3) $\angle(ac)=94°$, $\angle(ad)=85°$.

1.18. c სხივი $60°$-იანი (ab) კუთხის გვერდებს შორის გადის. იპოვეთ (ac) და (bc) კუთხეებში, თუ: 1) (ac) კუთხე (bc) კუთხეზე $30°$-ით

მეტია, 2) (ac) კუთხე (bc) კუთხეზე ორჯერ მეტია, 3) c სხივი (ab) კუთხეს შეკრავს ტოლ კუთხეებად.

1.19. c სხივი (ab) კუთხის გვერდებს შორის გადის, რომელი კუთხეა მეტი: $\angle(ab)$ თუ $\angle(ac)$? რატომ?

1.20. შეიძლება თუ არა, რომ c სხივი (ab) კუთხის გვერდებს შორის გადიოდეს, თუ: 1) $\angle(ac)=30°$, $\angle(cb)=80°$, $\angle(ab)=50°$; 2) $\angle(ac)=100°$, $\angle(cb)=90°$; 3) (ac) კუთხე (ab) კუთხეზე მეტია?

1.21. AB წრფე გადაკვეთს CD მონაკვეთს, ხოლო CD წრფე გადაკვეთს AB მონაკვეთს. დაამტკიცეთ, რომ AB და CD მონაკვეთები ერთმანეთს გადაკვეთს.

1.22. მოცემულია ABC სამკუთხედი. AC გვერდზე აღებულია B_1 წერტილი, ხოლო BC გვერდზე — A_1 წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ AA_1 და BB_1 მონაკვეთები ერთმანეთის გადაკვეთს.

1.23. AB და CD მონაკვეთები, რომლებიც ერთ წრეწირზე არ მდებარეობს, ერთმანეთს გადაკვეთს E წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ AC მონაკვეთი არ გადაკვეთს BD წრეწირს.

§ 2. კუთხეები

ამოცანები გამოთვლაზე

2.1. იპოვეთ შემდეგი კუთხეების მოსაზღვრე კუთხეები: 1) $30°$, 2) $45°$, 3) $60°$, 4) $90°$.

2.2. შეიძლება თუ არა ორივე მოსაზღვრე კუთხე იყოს: 1) ნაკვეთი, 2) ბლაგვი, 3) ხარისხი? პასუხი დაასაბუთეთ.

2.3. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ ერთი მათგანი ორჯერ მეტია მეორეზე.

2.4. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ: 1) ერთი მათგანი $30°$-ით მეტია მეორეზე, 2) მათი სხვაობა $40°$-ს უდრის, 3) ერთი მათგანი სამჯერ ნაკლებია მეორეზე.

2.5. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ მათი გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც: 1) $2:3$; 2) $3:7$; 3) $1:25$; 4) $22:23$.

2.6. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთი $30°$-ის ტოლია. რას უდრის დანარჩენი კუთხეები?

2.7. იპოვეთ კუთხე, რომელიც თავისი მოსაზღვრე კუთხის $\frac{3}{7}$-ს უდრის.

2.8. რას უდრის კუთხე, თუ მისი მოსაზღვრე ორი კუთხის ჯამი $100°$-ს შეადგენს?

2.9. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის ჯამი 50°-ს უდრის. იპოვეთ ეს კუთხეები.

2.10. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ერთი კუთხე ოთხჯერ მეტია მეორეზე. იპოვეთ ეს კუთხეები.

2.11. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ერთი კუთხე 50°-ით ნაკლებია ვეორეზე. იპოვეთ ეს კუთხეები.

2.12. იპოვეთ კუთხეები, რომლებიც ორი წრფის გადაკვეთისას მიიღება, თუ სამი მათგანის ჯამი 270°-ს უდრის.

2.13. გაშლილი (aa_1) კუთხის წვეროდან ერთ ნახევარსიბრტყეში გავლებულია b და c სხივები. რას უდრის (bc) კუთხე, თუ: 1) $\angle(ab)=50°$, $\angle(ac)=70°$; 2) $\angle(a_1b)=50°$, $\angle(ac)=70°$ 3) $\angle(ab)=60°$, $\angle(a_1c)=30°$?

2.14. გაშლილი (aa_1) კუთხის წვეროდან ერთ ნახევარსიბრტყეში გავლებულია b და c სხივები. ცნობილია, რომ $\angle(ab)=60°$, ხოლო $\angle(ac)=30°$. იპოვეთ (a_1b), (a_1c) და (bc) კუთხეები.

2.15. AB ნახევარწრფიდან სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში გადადებულია $\angle BAC=80°$ და $\angle BAD=70°$. იპოვეთ CAD კუთხე.

2.16. AB ნახევარწრფიდან სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში გადადებულია BAC და BAD კუთხეები. იპოვეთ CAD კუთხე, თუ: 1) $\angle BAC=30°$, $\angle BAD=170°$ 2) $\angle BAC=87°$, $\angle BAD=98°$ 3) $\angle BAC=140°$, $\angle BAD=30°$.

2.17. რას უდრის მოცემული კუთხის ბისექტრისასა და გვერდს შორის კუთხე, თუ მოცემული კუთხე ტოლია: 1) 30°-ის, 2) 52°-ის, 3) 172°-ის?

2.18. იპოვეთ კუთხე, თუ მისი ბისექტრისა გვერდთან ადგენს კუთხეს, რომელიც ტოლია: 1) 60°-ის, 2) 75°-ის, 3) 89°-ის.

2.19. იპოვეთ მოცემული კუთხის ბისექტრისა და მისი ერთ-ერთი გვერდის დაგრძელების შორის კუთხე, თუ მოცემული კუთხე უდრის: 1) 50°-ს, 2) 90°-ს, 3) 150°-ს.

2.20. OC სხივი გადის 160°-იანი AOB კუთხის გვერდებს შორის. OA გვერდის პერპენდიკულარული OD სხივი COB კუთხის ბისექტრისას წარმოადგენს. იპოვეთ AOC და COB კუთხეები.

2.21. ABC და CBD კუთხეები მოსაზღვრეა. $\angle CBD=40°$. B წვეროდან გავლებულია ABC კუთხის ბისექტრისა და AB წრფის პერპენდიკულარული წრფე. იპოვეთ კუთხე ამ ბისექტრისასა და პერპენდიკულარულ წრფეს შორის.

ამოცანები დამტკიცებაზე

2.22. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი კუთხე ტოლია, მაშინ მათი მოსაზღვრე კუთხეებიც ტოლია.

2.23. დაამტკიცეთ, რომ მართი კუთხის მოსაზღვრე კუთხე მართი კუთხეა.

2.24. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ერთი კუთხე მართია, მაშინ დანარჩენი სამი კუთხეც მართია.

2.25. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან სამი ტოლია, მაშინ წრფეები პერპენდიკულარულია.

2.26. დაამტკიცეთ, რომ ვერტიკალური კუთხეების ბისექტრისები ერთ წრფეზე მდებარეობს.

2.27. დაამტკიცეთ, რომ ორი მოსაზღვრე კუთხის ბისექტრისებიც ურთიერთპერპენდიკულარულია.

2.28. OC სხივი გადის AOB კუთხის გვერდებს შორის. AOC და COB კუთხეების გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 7 : 3, მათი სხვაობა კი ტოლია 72°-ის. დაამტკიცეთ რომ $\angle AOC$ და $\angle COB$ მოსაზღვრე კუთხეებია.

2.29. AB სხივიდან სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში გადადებულია BAC და BAD ტოლი კუთხეები. დაამტკიცეთ, რომ თუ M წერტილი AB სხივის დამატებით სხივზე მდებარეობს, მაშინ $\angle CAM=\angle DAM$.

2.30. დაამტკიცეთ, რომ თუ კუთხის წვეროდან გამოსული სხივი გაყავთ კუთხის რომელიმე მონაკვეთს, რომლის მოლოები კუთხის გვერდებზე მდებარეობს, მაშინ იგი აგრეთვე გადაკვეთს ნებისმიერ სხვა მონაკვეთს, რომლის მოლოები ამ კუთხის გვერდებზეა.

§ 8. სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. ტოლფერდა სამკუთხედი

ამოცანები გამოთვლაზე

3.1. AB და CD მონაკვეთები ერთმანეთს გადაკვეთს O წერტილში, რომელიც თითოეულის შუაწერტილია. რას უდრის BD მონაკვეთი, თუ AC მონაკვეთი 10 მ-ის ტოლია?

3.2. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი (გვერდების სიგრძეთა ჯამი) 1 მ-ის ტოლია, ხოლო ფუძეა 0,4 მ, იპოვეთ ფერდის სიგრძე.

3.3. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდზე აგებულია ტოლგვერდა სამკუთხედი; ტოლგვერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 45 სმ-ია. ტოლფერდა სამკუთხედისა კი — 40 სმ. გაიგოთ მოცემული სამკუთხედის ფუძე.

3.4. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 7,5 მ-ის ტოლია, ხოლო ფერდი — 2 მ-ის. იპოვეთ ფუძე.

3.5. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 15,6 მ-ის ტოლია. იპოვეთ მისი გვერდები, თუ: 1) ფუძე ფერდზე 3 მ-ით ნაკლებია; 2) ფუძე ფერდზე 3 მ-ით მეტია.

3.6. ტოლფერდა სამკუთხედის შუალინია ყოფს ამ სამკუთხედის პერიმეტრს ნაწილებად: 15 სმ და 6 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

3.7. ტოლფერდა სამკუთხედის შუალინია პერიმეტრს ყოფს 12 სმ-ისა და 9 სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

3.8. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეზე, რომლის ფუძე და ფერდი შესაბამისად 10 სმ და 13 სმ-ია, გავლებულია შუალინია. იპოვეთ შუალინიის სიგრძე, თუ ცნობილია რომ შუალინით შექმნილი ერთ-ერთი სამკუთხედის პერიმეტრი 30 სმ-ია.

3.9. ABC სამკუთხედის AB გვერდზე აღებულია D წერტილი. იპოვეთ CD მონაკვეთის სიგრძე, თუ ABC, ACD და BCD სამკუთხედების პერიმეტრები შესაბამისად 50 მ-ს, 45 მ-ს და 35 მ-ს უდრის.

3.10. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC, გავლებულია BD შუალინია. იპოვეთ მისი სიგრძე, თუ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი 50 მ-ია, ხოლო ABD სამკუთხედისა — 40 მ.

3.11. ABC სამკუთხედის BC გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ $\angle CAD=\angle ACD$: ABC და ABD სამკუთხედების პერიმეტრები შესაბამისად 37 სმ და 24 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AC გვერდი.

3.12. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში AB ფერდი 14 სმ-ია. მისი D შუაწერტილიდან ამ ფერდისადმი გავლებული პერპენდიკულარული წრფე BC ფარდს კვეთს E წერტილში. E წერტილი შეერთებულია A-სთან. AEC სამკუთხედის პერიმეტრი 24 სმ-ია. იპოვეთ AC-ს სიგრძე.

3.13. ABC სამკუთხედში $\angle A=38^\circ$, $\angle B=110^\circ$, $\angle C=32^\circ$. AC გვერდზე აღებულია D და E წერტილები ისე, რომ $BD=AD$ და $BE=EC$. იპოვეთ DBE კუთხე.

3.14. ABC სამკუთხედის AD მედიანის გაგრძელებაზე გადადებულია ამ მედიანის ტოლი DE მონაკვეთი და E წერტილი შეერთებულია C წერტილთან. იპოვეთ ACE კუთხე, თუ $\angle ACD=56^\circ$, $\angle ABD=40^\circ$.

ამოცანები დამტკიცებაზე

3.15. ტოლფერდა ABC სამკუთხედის ფუძეა AB. C წვეროდან გადადებულია ტოლი მონაკვეთები: CA_1 გვერდზე — CA_1 და CB გვერდზე — CB_1. დაამტკიცეთ, რომ ტოლია სამკუთხედები: 1) CAB_1 და CBA_1 2) ABB_1 და BAA_1.

3.16. BAC კუთხის გვერდებზე გადადებულია AM და AN ტოლი მონაკვეთები. ამ კუთხის ბისექტრისის ნებისმიერი D წერტილი შეაერთეთ M და N წერტილებთან. დაამტკიცეთ, რომ $DM=DN$.

3.17. ტოლფერდა ABC სამკუთხედის AB ფუძეზე მოცემულია A_1 და B_1 წერტილები. ცნობილია, რომ $AB_1=BA_1$. დაამტკიცეთ, რომ AB_1C და BA_1C სამკუთხედები ტოლია.

3.18. ABC სამკუთხედის AB გვერდზე აღებულია D წერტილი, ხოლო $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის A_1B_1 გვერდზე — D_1 წერტილი. ცნობილია, რომ ADC და $A_1D_1C_1$ სამკუთხედები ტოლია და DB და D_1B_1 მოსაკვეთები ტოლია. დაამტკიცეთ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობა.

3.19. AB და CD მონაკვეთები ერთმანეთის გადაკვეთს O წერტილში. დაამტკიცეთ ACO და DBO სამკუთხედების ტოლობა, თუ ცნობილია, რომ $\angle ACO=\angle DBO$ და $BO=CO$.

3.20. AC და BD მონაკვეთები ერთმანეთს გადაკვეთს O წერტილში. დაამტკიცეთ BAO და DCO სამკუთხედების ტოლობა, თუ ცნობილია, რომ $\angle BAO=\angle DCO$ და $AO=OC$.

3.21. ABC სამკუთხედის AC და BC გვერდებზე აღებულია C_1 და C_2 წერტილები, დაამტკიცეთ, რომ ABC სამკუთხედი ტოლფერდაა, თუ ABC_1 და BAC_2 სამკუთხედები ტოლია.

3.22. ACC_1 და BCC_1 სამკუთხედები ტოლია. მათი A და B წვეროები CC_1 წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ ABC და ABC_1 სამკუთხედები ტოლფერდაა.

3.23. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილები ავსებენ ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებს.

3.24. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის თითოეულ გვერდზე ვიდებულია ტოლი მონაკვეთები, $AB_1=BC_1=CA_1$. დაამტკიცეთ, რომ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

3.25. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის AB, BC და CA გვერდების გაგრძელებაზე აღებულია შესაბამისად B_1, C_1 და A_1 წერტილები, ისე რომ B წერტილი მდებარეობს A და B_1 წერტილებს შორის, C წერტილი B-სა და C_1-ს შორის, ხოლო A წერტილი C-სა და A_1-ს შორის, ამასთან $AA_1=BB_1=CC_1$. დაამტკიცეთ, რომ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

3.26. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედში: 1) ფუძესთან მდებარე წვეროებიდან გავლებული ბისექტრისები ტოლია, 2) ამავე წვეროებიდან გავლებული მედიანებიც ტოლია.

3.27. დაამტკიცეთ, რომ ტოლ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებში: 1) A და A_1 წვეროებიდან გავლებული შუალინიები ტოლია, 2) A და A_1 წვეროებიდან გავლებული ბისექტრისები ტოლია.

3.28. A, B, C, D წერტილები ერთ წრფეზე ძევს. ამასთან, AB და CD მონაკვეთებს საერთო შუაწერტილი აქვს. დაამტკიცეთ, რომ თუ ABE სამკუთხედი ტოლფერდაა AB ფუძით, მაშინ CDE სამკუთხედიც ტოლფერდაა CD ფუძით.

3.29. დაამტკიცეთ სამკუთხედების ტოლობა კუთხის, ამ კუთხის ბისექტრისისა და ამ კუთხის მიმდებარე გვერდის მიხედვით.

3.30. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC, გავლებულია BM მედიანა. მასზე აღებულია D წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ ტოლია სამკუთხედები: 1) ABD და CBD, 2) AMD და CMD.

3.31. ABC და ABC_1 ტოლფერდა სამკუთხედებია საერთო AB ფუძით. დაამტკიცეთ ACC_1 და BCC_1 სამკუთხედების ტოლობა.

3.32. A, B, C, D წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ თუ ABE_1 და ABE_2 სამკუთხედები ტოლია, მაშინ CDE_1 და CDE_2 სამკუთხედებიც ტოლია.

3.33. დაამტკიცეთ სამკუთხედების ტოლობა ორი გვერდისა და ერთ-ერთი მათგანისადმი გავლებული მედიანის მიხედვით.

3.34. AB და CD მონაკვეთები ერთმანეთს გადაკვეთს. დაამტკიცეთ, რომ თუ $AD=AC$ და $BD=BC$, მაშინ AB სხივი CAD კუთხის ბისექტრისაა, ხოლო AB და CD წრეწირები ურთიერთმართობულია.

3.35. AB და CD მონაკვეთები ერთმანეთს გადაკვეთს O წერტილში ისე, რომ $AC=CO$ და $BD=DO$. დაამტკიცეთ, რომ $\angle CAO = \angle OBO$.

3.36. ABC და BAD სამკუთხედები ტოლია, ამასთან, C და D წერტილები AB წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ: 1) CBD და DAC სამკუთხედები ტოლია, 2) CD წრფე AB მონაკვეთს შუაზე ყოფს.

3.37. ტოლი სიგრძის AB და CD მონაკვეთები O წერტილში გადაიკვეთება ისე, რომ $AO=OD$. დაამტკიცეთ, რომ ABC და DCB სამკუთხედები ტოლია.

3.38. დაამტკიცეთ სამკუთხედების ტოლობა ერთი წვეროდან გამოსული ორი გვერდის და მედიანის მიხედვით.

3.39. დაამტკიცეთ სამკუთხედების ტოლობა გვერდის, ამ გვერდისადმი გავლებული მედიანის და მედიანის ბოლო ამ გვერდთან შექმნილი კუთხეების მიხედვით.

3.40. დაამტკიცეთ სამკუთხედების ტოლობა მედიანისა და იმ კუთხეების მიხედვით, რა კუთხეებადაც მედიანა სამკუთხედის კუთხეს გაყოფს.

3.41. AOA_1 კუთხის ერთ გვერდზე გადადებულია OA და OB მონაკვეთები, მეორე გვერდზე — OA_1 და OB_1 მონაკვეთები. $OA=OA_1$, $OB=OB_1$. დაამტკიცეთ, რომ AB_1 და A_1B მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილი ამ კუთხის ბისექტრისაზე აღის.

§ 4. წრეთა პარალელობა. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. მონაკვეთის შუამართობი. კუთხის ბისექტრისა

ამოცანები გამოთვლაზე

4.1. ორ პარალელურ წრფესა და მკვეთს შორის ორი შიგა ცალმხრივი კუთხის სხვაობა 30°-ს უდრის. იპოვეთ ეს კუთხეები.

4.2. ორ პარალელურ წრფესა და მკვეთს შორის ორი შიგა ჯვარედინი კუთხის ჯამი 130°-ს უდრის. რას უდრის ეს კუთხეები?

4.3. ორი პარალელური წრფის მკვეთით გადაკვეთისას მიღებული ერთ-ერთი კუთხე 72°-ს უდრის. იპოვეთ დანარჩენი შვიდი კუთხე.

4.4. ორ პარალელურ წრფესა და მკვეთს შორის ერთ-ერთი შიგა კუთხე 130°-ია. იპოვეთ ამ კუთხის ბისექტრისასა და მეორე პარალელურ წრფეს შორის კუთხეები.

4.5. მოცემულია ორი კუთხე, რომელიც გვერდებში პარალელურ წრფეებზე მდებარეობს. იპოვეთ ეს კუთხეები, თუ ერთია მათგანი 90°-ით მეტია მეორეზე.

4.6. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე კუთხე, თუ მისი ორი კუთხეა: 1) 50° და 30°, 2) 40° და 75°, 3) 65° და 80°, 4) 25° და 120°.

4.7. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ისინი შემდეგი რიცხვების პროპორციულია: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5; 4) 4, 5, 6; 5) 5, 6, 7.

4.8. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეებს შორის კუთხე, თუ ფუძესთან მდებარე კუთხეა: 1) 40°; 2) 55°; 3) 72°.

4.9. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხე, თუ ფუძეებს შორის კუთხეა: 1) 80°; 2) 120°; 3) 30°.

4.10. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 70°-ს უდრის. იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები. რამდენი ამოხსნა აქვს ამოცანას?

4.11. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 100°-ს უდრის. იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.

4.12. ტოლფერდა სამკუთხედში წვეროსთან მდებარე კუთხე, უდრის 30°-ს. მის ფერდზე დაშვებულია სიმაღლე. იპოვეთ კუთხე, რომელსაც ეს სიმაღლე ფუძესთან შეადგენს.

4.13. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხე უდრის 30°-ს. იპოვეთ კუთხე რომელიც ერთი ფერდი მეორე ფერდზე დაშვებულ სიმაღლესთან შეადგენს.

4.14. ABC სამკუთხედში $\angle A=35°$, $\angle B=60°$. B წვეროზე გავლებულია BD მონაკვეთი (D წერტილი AC გვერდზეა) ისე, რომ $BC=CD$. იპოვეთ ეკსტერიორი იმ კუთხეებიდან, რომელთა წვეროებია D წერტილშია.

4.15. მოცემულია 43°-ის ტოლი კუთხე. წერტილზე, რომელიც კუთხის გვერდებზე არ მდებარეობს, გავლებულია კუთხის ერთი გვერდის პარალელური და მეორე გვერდის პერპენდიკულარული წრფე. იპოვეთ ამ წრფეებით შედგენილი კუთხეებიდან ტმასრესი.

4.16. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებულ სიმაღლესა და ფერდს შორის კუთხე 20°-ით ნაკლებია ფუძესთან მდებარე კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4.17. ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდის სიმაღლესა და მეორე ფერდს შორის კუთხე 24°-ით ნაკლებია ფუძესთან მდებარე კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები. განიხილეთ ორი შემთხვევა.

4.18. მართკუთხა სამკუთხედში ერთი მახვილი კუთხე ტოლია 45°-ს. იპოვეთ კათეტები, თუ მათი ჯამი 36 სმ-ს უდრის.

4.19. მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხე უდრის 45°-ს. იპოვეთ ჰიპოტენუზა, თუ ჰიპოტენუზისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ჯამი 12 სმ-ის ტოლია.

4.20. ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხის ბისექტრისა მას გვერდთან ადგენს 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე, თუ მისი ფერდი 25 სმ-ის ტოლია.

4.21. წრეწირიდან 10 სმ რანძილზე აღებული წერტილიდან ამ წრეწირისადმი გავლებულია ორი დაბრილი, რომელთა სიგრძეების შეფარდებაა 1 : 2. უმცირესი დაბრილი წრეწირთან ადგენს 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ დაბრილების სიგრძეები.

4.22. მართკუთხა სამკუთხედში ერთი მახვილი კუთხე უდრის 60°-ს. ჰიპოტენუზისა და მცირე კათეტის ჯამი 1,8 მ-ია. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

4.23. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი მახვილი კუთხე უდრის 30°-ს, იპოვეთ მახვილი კუთხე ჰიპოტენუზასა და მართი კუთხის ბისექტრისას შორის.

4.24. ორი პარალელური წრფის მკვეთი წრფე ერთ-ერთთან ადგენს 150°-იან კუთხეს. იპოვეთ ამ პარალელურ წრეწირებს შორის მოთავსებული მკვეთის მონაკვეთის სიგრძე, თუ პარალელურ წრეწირებს შორის მანძილი 46 მმ-ია.

4.25. ტოლფერდა სამკუთხედის შიგა კუთხეებისა და ერთ-ერთი გარე კუთხის ჯამი უდრის 210°-ს. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4.26. ABC სამკუთხედში $\angle A=65°$, $\angle B=73°$, C კუთხის CD ბისექტრისა სამკუთხედს ყოფს CBD და ACD სამკუთხედებად. იპოვეთ ამ სამკუთხედების კუთხეები.

4.27. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC, გავლებულია CD ბისექტრისა. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ADC კუთხე უდრის 1) 60°-ს; 2) 75°-ს; 3) α-ს.

4.28. 108°-ის ტოლი ABC კუთხის წვეროზე გავლებულია მისი ბისექტრისის პერპენდიკულარული MN წრფე. იპოვეთ MN წრფითა და ABC კუთხის გვერდებით შედგენილი კუთხეები.

4.29. ABC სამკუთხედში A და B წვეროებიდან გავლებულია ბისექტრისები. მათი გადაკვეთის წერტილია D. იპოვეთ ADB კუთხე, თუ 1) $\angle A=50°$, $\angle B=100°$; 2) $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$; 3) $\angle C=\gamma$.

4.30. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებული მედიანა და ბისექტრისა 10°-იან კუთხეს ადგენენ. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4.31. ABC სამკუთხედში A და C კუთხეების ბისექტრისები M წერტილში იკვეთება. იპოვეთ ABC კუთხე, თუ ის AMC კუთხის სამმაგის უდრის.

4.32. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის წვეროებთან მდებარე გარე კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთით წარმოქმნილი უმცირესი კუთხე.

4.33. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი გარე კუთხე 70°-ს უდრის. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4.34. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ მის ორ წვეროსთან მდებარე გარე კუთხეები 120°-ს და 150°-ს უდრის.

4.35. სამკუთხედის ორი გარე კუთხე 100°-ს და 150°-ს უდრის. იპოვეთ მესამე გარე კუთხე.

4.36. ABC სამკუთხედში B წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე 3-ჯერ მეტია A კუთხეზე და 40°-ით მეტი C კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4.37. ABC სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია BD სიმაღლე. იპოვეთ CBD კუთხე, თუ ცნობილია, რომ $\angle A=\alpha$.

4.38. ABC სამკუთხედის ბლაგვი B კუთხის წვეროდან გავლებულია BD სიმაღლე. იპოვეთ ABD და CBD სამკუთხედების კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$.

4.39. ABC სამკუთხედის A და B წვეროსთან თითო-თითოდ აღებული გარე კუთხეების ჯამი 240°-ს უდრის. რას უდრის სამკუთხედის C კუთხე?

4.40. მოცემულია ABC სამკუთხედი. AC გვერდის გაგრძელებაზე აღებულია $AD=AB$ და $CE=CB$ მონაკვეთები. იპოვეთ DBE სამკუთხედის კუთხეები, თუ $\angle ABC=70°$, $\angle ACB=80°$.

4.41. სამკუთხედის ერთ-ერთი შიგა კუთხე 30°-ს უდრის. ბოლო ერთ-ერთი გარე კუთხე — 40°-ს. იპოვეთ დანარჩენი შიგა კუთხეები.

4.42. ABC სამკუთხედში $\angle A=42°$, $\angle B=56°$. A და B წვეროებზე გავლებულია სამკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების პარალელური წრფეები. იპოვეთ ამ წრფეებით მიღებული კუთხეებიდან ჭრილის.

4.43. ABC სამკუთხედის A და C წვეროდან გავლებული სიმაღლეები M წერტილში ერთმანეთს გადაკვეთს. იპოვეთ $\angle AMC$, თუ $\angle A=70°$, $\angle C=80°$.

4.44. ABC სამკუთხედში BD მედიანა AC გვერდის ხახევარს უდრის. იპოვეთ სამკუთხედის B კუთხე.

4.45. მოცემულია ორი კუთხე. ერთი კუთხის გვერდები მეორე კუთხის გვერდების შემცველი წრფეების პერპენდიკულარულია. წრფეებზე დადებარეობს. ერთო კუთხე 4-ჯერ ნაკლებია მეორეზე. იპოვეთ თითოეული კუთხის სიდიდე.

4.46. ABC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის BC ჰიპოტენუზაზე აღებულია ორი E და D წერტილი ისე, რომ $BE=BA$ და $CD=CA$. იპოვეთ $\angle DAE$.

4.47. ABC სამკუთხედში AC გვერდის გაგრძელებაზე აღებულია D და E წერტილები ისე, რომ A წერტილი მდებარეობს D და C-ს შორის, ხოლო C წერტილი — A-სა და E-ს შორის. ამასთან $AD=AB$ და $CE=CB$. იპოვეთ DBE სამკუთხედის კუთხეები, თუ $\angle BAC=40°$, $\angle ACB=30°$.

4.48. ABC სამკუთხედში გავლებულია AD და CE სიმაღლეები. M არის მათი გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ $\angle AMC$, თუ მოცემულია $\angle BAC=25°$ და $\angle BCA=75°$.

4.49. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდებზე დაშვებული AD და CE სიმაღლეები ქმნიან AMC კუთხეს, რომელიც 48°-ის ტოლია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები.

4.50. ABC სამკუთხედში C წვეროდან გავლებულია შიგა და გარე კუთხის ბისექტრისები. პირველი ბისექტრისა AB გვერდთან ქმნის 43°-ის ტოლ კუთხეს. იპოვეთ კუთხე მეორე ბისექტრისასა და AB გვერდის გაგრძელებას შორის.

4.51. ჰიპოტენუზის შუაწერტილიდან აღმართულია პერპენდიკულარი კათეტთან გადაკვეთამდე და მიღებული წერტილი შეერთებულია მეორე კათეტის ბოლოსთან მონაკვეთით, რომელიც სამკუთხედის კუთხეს ყოფს შეფარდებით 2 : 5 (ტრისექტრისა ნაწილი ჰიპოტენუზასთანაა), გაიგეთ ეს კუთხე.

4.52. ABC სამკუთხედში $AB=BC=14$ სმ. AB ფერდის D შუაწერტილზე გავლებული პერპენდიკულარი სამკუთხედის ფუძეს კვეთს

E წერტილში. E წერტილი შეერთებულია B წერტილთან. იპოვეთ ABC სამკუთხედის AC ფუძე, თუ BEC სამკუთხედის პერიმეტრი 40 სმ-ია.

4.53. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში $AB=BC=18$ სმ. AB გვერდის D შუაწერტილიდან AB გვერდისადმი გავლებულია DE პერპენდიკულარი BC გვერდის გადაკვეთამდე, ხოლო E წერტილი შეერთებულია A წერტილთან. AEC სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია 27 სმ-ის. იპოვეთ AC-ს სიგრძე.

ამოცანები დამტკიცებაზე

4.54. დაამტკიცეთ, რომ თუ რომელი წრფე ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთს გადაკვეთს, მაშინ იგი მეორესაც გადაკვეთს.

4.55. დაამტკიცეთ, რომ პარალელური წრფეებიდან და მკვეთი შედგენილი შიგა ცალმხრივი კუთხეების ბისექტრისები ურთიერთპარალელურია.

4.56. AB და CD მონაკვეთები E წერტილში გადაიკვეთება და ამ წერტილით შეაზე იყოფა. დაამტკიცეთ, რომ AC და BD წრფეები პარალელურია.

4.57. ABC და BAD სამკუთხედები ტოლია. C და D წერტილები AB წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს. დაამტკიცეთ რომ AC და BD წრფეები პარალელურია.

4.58. დაამტკიცეთ რომ, თუ პარალელური წრფეს და მკვეთს შორის შიგა ცალმხრივი კუთხეების ბისექტრისები ურთიერთმართობულია.

4.59. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში D და E წერტილები აღებულია AC ფუძეზე ისე, რომ $AD=CE$. D და E წერტილებიდან ფუძისადმი გავლებულია პერპენდიკულარები სამკუთხედის ფერდების გადაკვეთამდე შესაბამისად M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $DM=EN$.

4.60. ABC სამკუთხედში $\angle B=110°$, $\angle C=50°$. AD სამკუთხედის სიმაღლეა. დაამტკიცეთ, რომ $\angle DAC=2\angle DAB$.

4.61. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC და წვეროსთან მდებარე B კუთხე 36°-ს უდრის, გავლებულია AD ბისექტრისა. დაამტკიცეთ, რომ CAD და ADB სამკუთხედები ტოლფერდაა.

4.62. ABC სამკუთხედში C წვეროდან გავლებულია CD მედიანა. დამტკიცეთ, რომ DBC და DAC სამკუთხედებში B და A წვეროებიდან გავლებული სიმაღლეები ტოლია.

4.63. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე გარე კუთხის ბისექტრისა ფუძის პარალელურია.

4.64. a წრფე BC მონაკვეთის მის შუაწერტილში გადაკვეთს. დაამტკიცეთ, რომ B და C წერტილები a წრფიდან ერთნაირადაა დაშორებული.

4.65. BC ნონაკვეთი α წრეს O წერტილში გადაკვეთს. B და C წერტილებიდან α წრეზე მიხაზულია ტოლი, დაამტკიცეთ, რომ O წერტილი BC მონაკვეთის შუაწერტილია.

4.66. დაამტკიცეთ, რომ ბისექტრისის პერპენდიკულარული წრეც კუთხის გვერდებს ტოლ მონაკვეთებად ჰკვეთს.

4.67. ABC სამკუთხედში გავლებულია B კუთხის ბისექტრისა, რომელიც AC გვერდს D წერტილში გადაკვეთს. D წერტილზე გავლებულია BC გვერდის პარალელური წრფე, რომელიც AB გვერდს F წერტილში გადაკვეთს. დაამტკიცეთ, რომ $DF=BF$.

4.68. სამკუთხედის ბისექტრისის ფუძეზე გავლებულია წრფეები, რომლებიც მისი გვერდების პარალელურია. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრფეების მონაკვეთები, რომლებიც მოთავსებულია სამკუთხედის გვერდებს შორის, ტოლია.

4.69. სამკუთხედის ბისექტრისაზე აღებულ წერტილზე სამკუთხედის გვერდების პარალელურად გაყვანილია წრფეები. სამკუთხედის გვერდებს შორის მოთავსებული ამ წრფეების მონაკვეთები ტოლი აღმოჩნდა. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი ტოლფერდაა.

4.70. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის ბისექტრისა შეკრულ ფოფს ჰიპოტენუზაზე დაშვებულ ძღვიანსა და სიმაღლეს შორის მდებარე კუთხეს.

4.71. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისადმი გავლებულ მედიანასა და სიმაღლეს შორის მდებარე კუთხე ამ სამკუთხედის მახვილი კუთხეთა სხვაობის ტოლია.

4.72. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ხუთისმაგვარი კუთხის ბისექტრისას და სიმაღლეს შორის კუთხე დახარჩენი ორი კუთხის სხვაობის ნახევრის ტოლია.

4.73. დაამტკიცეთ, რომ თუ კათეტი პიპოტენუზაზე ორჯერ ნაკლებია, მაშინ ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხე $30°$-ს.

4.74. BD სხივი გადის ABC კუთხის კვერდებს შორის. CD წრფე BA გვერდის პარალელურია, ამასთან $BC=CD$. დაამტკიცეთ, რომ BD სხივი მოცემული კუთხის ბისექტრისაა.

4.75. დაამტკიცეთ, რომ თუ მედიანა ტოლის ამ გვერდის ნახევარს, რომელსაც ის შეკრულ ფოფს, მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა.

4.76. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხედის ერთი გვერდი ორჯერ მეტია მეორეზე, ხოლო მათ შორის კუთხე $60°$-ია, მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა.

4.77. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებული მედიანა და ბისექტრისა ერთმანეთს არ ემთხვევა.

4.78. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროზე და ფერდებისადმი გავლებული სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილზე გაევალი წრეც სამკუთხედის ფუძის პერპენდიკულარულია.

4.79. ABC სამკუთხედის A და C კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის O წერტილზე გავლებულია AC გვერდის პარალელური წრფე, რომელიც AB და BC გვერდებს გადაკვეთს შესაბამისად M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $MN=AM+CN$.

§ 5. წრეწირი. ცენტრალური და ჩახაზული კუთხეები. მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე. კუთხე წვეროთი წრეწირის შიგნით და წრეწირის გარეთ

ამოცანები გასორციელებლად

5.1. წრეწირის რადიუსი ტოლია 10 სმ-ს; M წერტილი O ცენტრიდან დაშორებულია 15 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან OM წრფის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილებამდე.

5.2. წრეწირებია, რომელთა რადიუსებია 30 სმ და 40 სმ, ერთმანეთს ეხებიან. იპოვეთ მანძილი წრეწირების ცენტრებს შორის გარე და შიგა შეხების შემთხვევებში.

5.3. მოცემული წრეწირის წერტილიდან გავლებულია დიამეტრი და ქორდა, რომელიც რადიუსის ტოლია. იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

5.4. წრეწირის მოცემული წერტილიდან გავლებულია რადიუსის ტოლი ორი ქორდა. იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

5.5. მოცემულია წრეწირის ორი ერთიერთისპერპენდიკულარული ქორდა. ერთ-ერთი მათგანი შეიძლება იყოს 3 სმ-ისა და 7 სმ-ის სიგრძის თუ მონაკვეთად. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან თითოეულ ქორდამდე.

5.6. გავლებულია წრეწირის ორი ერთიერთისპერპენდიკულარული ქორდა ისე, რომ მანძილი ცენტრიდან თითოეულ ქორდამდე 1 სმ-ია, თითოეული ქორდის სიგრძე 6 სმ-ია. იპოვეთ თითოეული ქორდის შეწყვეტების სიგრძე.

5.7. წრეწირის ქორდა მას დიამეტრს კუთხის $60°$-იანი კუთხით და დიამეტრია იყოფა 8 სმ და 3 სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ მანძილი ქორდის ბოლოებიდან დიამეტრზე დაშვებული მართობების ფუძეებს შორის.

5.8. წრეწირის ქორდა მას დიამეტრს კუთხის $30°$-იანი კუთხით და იყოფა 6 სმ და 12 სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ: ა) მანძილი ქორდის ბოლოებიდან დიამეტრამდე; ბ) მანძილი ქორდის შუაწერტილიდან დიამეტრამდე.

5.9. ქორდა დიამეტრს კუთხის 30°-იანი კუთხით ჰკვეთს. იპოვეთ ამ ქორდის სიგრძე, თუ მისი მონაკვეთების სიგრძეებია 2 სმ და 6 სმ.

5.10. 16 სმ სიგრძის ქორდა 90°-იანი რკალის საშუალებით ეფარება წრეწირს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

5.11. 15 სმ რადიუსიან წრეწირში გავლებული ქორდა ჰკვეთს 120°-იან რკალს. იპოვეთ მანძილი წრეწირის ცენტრიდან ქორდამდე.

5.12. გავლებულია წრეწირის ორი პარალელური ქორდა, რომლებიც ჰკიდიან 90°-იან რკალებს. იპოვეთ მანძილი ქორდებს შორის, თუ ერთი ქორდის სიგრძეა 12 სმ.

5.13. წრეწირის რადიუსის შუაწერტილზე გავლებულია მისი პერპენდიკულარული ქორდა. იპოვეთ კუთხე ამ ქორდის ბოლოებზე გავლებულ რადიუსებს შორის.

5.14. წრეწირის A წერტილიდან გავლებულია ორი ქორდა AB და AC, რომლებიც წრეწირის რადიუსის ტოლია. იპოვეთ მანძილი წრეწირის ცენტრიდან BC ქორდამდე, თუ წრეწირის რადიუსი 10 სმ-ის ტოლია.

5.15. მოცემულია ორი კონცენტრული (საერთო ცენტრის მქონე) წრეწირი. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსები, თუ დიდი წრეწირის დიამეტრი მცირე წრეწირით იყოფა 9 სმ, 12 სმ, 9 სმ სიგრძის მონაკვეთებად.

5.16. წრეწირი მოთავსებულია მეორე წრეწირის შიგნით. დიდი წრეწირის დიამეტრი, რომელიც მცირე წრეწირის ცენტრზე გადის, მცირე წრეწირით ამ ნაწილად იყოფა, რომლებიც შესაბამისად 2 სმ-ის, 10 სმ-ისა და 6 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ წრეწირების დიამეტრები და ცენტრებს შორის მანძილი.

5.17. წრეწირი მოთავსებულია მეორე წრეწირის შიგნით. დიდი წრეწირის დიამეტრი, რომელიც მცირე წრეწირის ცენტრზე გადის, მცირე წრეწირით ამ ნაწილად იყოფა, რომელთაგან ორი კიდური მონაკვეთის სიგრძე 10 სმ და 3 სმ-ია. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსები და მანძილი ცენტრებს შორის, თუ რადიუსები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 5.

5.18. მოცემულია ორი კონცენტრული წრეწირი. დიდი წრეწირის ორი ურთიერთმართობული ქორდიდან სამთაოებული წარმოადგენს მცირე წრეწირის მხების მონაკვეთს და გადაკვეთის წერტილით იყოფა 3 სმ და 7 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებად. იპოვეთ მცირე წრეწირის რადიუსი.

5.19. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. წრეწირების რადიუსები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 2 : 3. იპოვეთ წრეწირების დიამეტრები, თუ წრეწირების ცენტრებს შორის მანძილი 10 სმ-ია.

5.20. ორი წრეწირი შიგნიდან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსები, თუ ისინი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 5 : 2, ხოლო ცენტრებს შორის მანძილი 15 სმ-ია.

5.21. R რადიუსიანი სამი წრეწირი გარედან ეხება ერთიმეორეს. იპოვეთ იმ სამკუთხედის გვერდები და კუთხეები, რომლის წვეროები წრეწირების ცენტრებია.

5.22. ორი ტოლი წრეწირი შიგნიდან ეხება ძესაძე წრეწირს და ეხება ერთმანეთსაც. სამივე ცენტრის შეერთებით მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი 18 სმ-ია. იპოვეთ დიდი წრეწირის რადიუსი.

5.23. იპოვეთ რკალის გრადუსული ზომა თუ მის ბოლოზე გავლებული რადიუსი ამ რკალის მომჭიმავ ქორდასთან 40°-იან კუთხეს შეადგენს.

5.24. იპოვეთ კუთხე ქორდასა და მის ბოლოში გავლებულ რადიუსს შორის, თუ ქორდით მოჭიმული რკალის გრადუსული ზომაა 62°.

5.25. წრეწირზე აღნიშნულია ოთხი წერტილი: A, B, C, D. რას უდრის ADC კუთხე, თუ ABC კუთხე α-ს ტოლია? (განიხილეთ ორი შემთხვევა)

5.26. წრეწირის AB და AC რკალის გრადუსული ზომები შესაბამისად არის 110° და 38°. იპოვეთ BAC კუთხე (განიხილეთ ორი შემთხვევა).

5.27. წრეწირის AD და BC ქორდები ერთმანეთის გადაკვეთს. ABC კუთხე 10°-ის უდრის, ACD კუთხე კი 20°-ს. იპოვეთ CAD კუთხე.

5.28. სამკუთხედის გვერდი 10 სმ-ს უდრის, მისი შებრტყელებირე კუთხე 150°. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

5.29. A, B, C წერტილები წრეწირზე მდებარეობს. რას უდრის AC ქორდა, თუ ABC კუთხე 30°-ის ტოლია, წრეწირის დიამეტრი კი 10 სმ-ია?

5.30. A, B, C წერტილები წრეწირზე მდებარეობს. რას უდრის ABC კუთხე, თუ AC ქორდა წრეწირის რადიუსის ტოლია? განიხილეთ ორი შემთხვევა.

5.31. როგორ კუთხეებს ადგენს წრეწირის რადიუსის ტოლი AB ქორდა A წერტილში გავლებულ მხებთან?

5.32. რა კუთხეებით გადაკვეთს ერთმანეთს რადიუსის ტოლი ქორდის ბოლოებში გავლებული მხებები?

5.33. სამი წერტილით წრეწირი გაყოფილია სამ რკალად, რომელთა გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 7 : 11 : 6. იპოვეთ ამ სამკუთხედის კუთხეები, რომლის წვეროებსაც ეს წერტილები წარმოადგენენ.

5.34. იპოვეთ რკალის გრადუსული ზომა, თუ ამ რკალის ბოლოდან გავლებული ტანი მომჭრილი ქორდის სართობელი წრფე დამატებით რკალს ყოფს შეფარდებით $5:2$.

5.35. ტოლფერდა სამკუთხედის კუთხე წვეროსთან უდრის $40°$-ს. ერთი ფერდი წარმოადგენს ხახვანაწერწერის დიამეტრს; ეს ნახვანაწერწერი სხვა გვერდებით იყოფა 3 ნაწილად. იპოვეთ ეს ნაწილები.

5.36. AB დიამეტრის გაგრძელებაზე აღებული C წერტილიდან გავლებულია CD მხები. $\angle ADC=114°$. იპოვეთ BD რკალის გრადუსული ზომა.

5.37. ABC სამკუთხედის AB გვერდი წარმოადგენს წრეწირის დიამეტრს, BC ძაბებია, ხოლო AC წრეწირით შეწყვეტა. იპოვეთ C კუთხე.

5.38. M წერტილიდან გაყვანილია წრეწირის ორი მკვეთი: MAB, რომელიც გადის წრეწირის O ცენტრზე, და MCD, რომელიც გარე ნაწილია წრეწირის რადიუსის ტოლია. იპოვეთ მკვეთის შორის კუთხე, თუ ცენტრალური DOB კუთხე ტოლია $72°$.

5.39. $60°$-ის ტოლ მახვილ კუთხეში ჩახაზულია ორი წრეწირი, რომლებიც გარედან ესხებიან ერთმანეთს. ცნობილ წრეწირის რადიუსი უდრის r-ს. იპოვეთ დიდი წრეწირის რადიუსი.

5.40. ტოლფერდა ABC ($AB=BC$) სამკუთხედის BD სიმაღლე წარმოადგენს წრეწირის დიამეტრს. იპოვეთ ფერდებს შორის მოთავსებული რკალის გრადუსული ზომა, თუ $\angle A=62°$.

5.41. AB დიამეტრი და CD ქორდა M წერტილში იკვეთება. $\angle CMB=73°$. BC რკალის გრადუსული ზომაა $110°$. იპოვეთ BD რკალის გრადუსული ზომა.

5.42. AB და CD ქორდები M წერტილში იკვეთება. $\angle AMC=40°$. AD რკალის გრადუსული ზომა $20°$-ით მეტია CB რკალის გრადუსულ ზომაზე. იპოვეთ AD რკალის გრადუსული ზომა.

5.43. AB ქორდის გაგრძელებაზე აღებული C წერტილიდან გავლებული CD მხები BDA რკალს ყოფს შეფარდებით $7:9$. იპოვეთ კუთხე C თუ BDA რკალის გრადუსული ზომა $112°$-ია.

5.44. იპოვეთ $200°$-იანი რკალის ბოლოებზე გავლებული მხებებით შედგენილი მახვილი კუთხე.

5.45. ქორდა წრეწირს ყოფს შეფარდებით $11:7$. იპოვეთ ამ ქორდის ბოლოებზე გავლებული მხებებით შექმნილი მახვილი კუთხე.

5.46. წრეწირი გაყოფილია შეფარდებით $5:9:10$ და გაყოფის წერტილებში გავლებულია მხებები. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის უდიდესი კუთხე.

5.47. AB რკალის გრადუსული ზომაა $40°$. OA რადიუსის გაგრძელებაზე გადაღებულია AB ქორდის ტოლი AC მონაკვეთი და C წერტილი შეერთებულია B-სთან. იპოვეთ $\angle ACB$.

5.48. ABC სამკუთხედში C კუთხე მართია. C ცენტრიდან AC რადიუსით შემოხაზულია წრეწირი, რომელიც ჰიპოტენუზას D წერტილში კვეთს და CB კათეტს E-ში. იპოვეთ AD და DE რკალების გრადუსული ზომა, თუ $\angle B=37°$.

5.49. AB და AC ორი ქორდაა, რომელთა შორის $\angle BAC$ უდრის $74°$. B და C წერტილებზე გავლებულია მხებები M წერტილში გადაკვეთამდე. იპოვეთ $\angle BMC$.

5.50. წრეწირის AB და AC ქორდების შეკვეთილი წრფეები წარმოადგენენ მეორე წრეწირის მხებებს. იპოვეთ BC რკალის გრადუსული ზომა, თუ მეორე წრეწირის A კუთხის გვერდებს შორის მოთავსებული ერთ-ერთი რკალი $130°$-ის ტოლია.

5.51. წრეწირის AB და CD არაგადამკვეთი ქორდების შეკვეთილი წრფეები წარმოადგენენ მეორე წრეწირის მხებებს. იპოვეთ ქორდებს შორის მოთავსებული მეორე AC რკალის გრადუსული ზომა, თუ BD რკალის გრადუსული ზომაა $70°$, ხოლო მეორე წრეწირის მხებებს შორის მოთავსებული ერთ-ერთი რკალი $154°$-ის ტოლია.

5.52. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფუძეა 6 სმ, ხოლო ფერდი — 9 სმ, ჩახაზულია წრეწირი. იპოვეთ შეხების წერტილთა მიღებული ფერდის მონაკვეთები.

5.53. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი უდრის 2 სმ; კუთხე წვეროსთან არის $120°$. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი.

5.54. იპოვეთ იმ ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი და სიმაღლე, რომლის წვეროსთან მდებარე კუთხეა $120°$, თუ სამკუთხედზე შეხაზული წრეწირის რადიუსია 10 სმ.

5.55. ABC ტოლფერდა სამკუთხედია. შემოხაზული წრის OA რადიუსი AC ფუძესთან ქმნის OAC კუთხეს, რომელიც უდრის $20°$. იპოვეთ $\angle BAC$ (ორი შემთხვევა).

5.56. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი ჩახაზული წრის შეხების წერტილით იყოფა შეფარდებით $7:5$ (წვეროდან). იპოვეთ ფერდისა და ფუძის შეფარდება.

ამოცანები დამტკიცებაზე

5.57. დაამტკიცეთ, რომ თუ დიამეტრი ფუძეზე ყოფს ქორდას, რომელიც ცენტრზე არ გადის, მაშინ ის ამ ქორდის პარალელურია.

5.58. წრეწირის AB დიამეტრის ბოლოებში აღმართულია მისი პერპენდიკულარული CD ქორდის მიმართულებით. დაამტკიცეთ $AC=AD$ და $BC=BD$.

5.59. დაამტკიცეთ, რომ, თუ წრეწირის მოცემული წერტილიდან გავლებული ორი ქორდა, ამავე წერტილიდან გავლებულ დიამეტრთან ტოლ კუთხეებს ქმნის, მაშინ ეს ქორდები ერთმანეთის ტოლია.

5.60. წრეწირის AC და AD ქორდები AB დიამეტრთან ტოლ კუთხეებს ქმნის. გავლეთ BC და BD ქორდები და დაამტკიცეთ, რომ ABC სამკუთხედი ABD სამკუთხედის ტოლია.

5.61. ორი წრეწირი, რომელთა ცენტრებია O და O_1 წერტილებშია, გადაკვეთება A და B ორ წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ $\angle OBO_1 = \angle OAO_1$.

5.62. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს, შეხების წერტილზე გავლებული მკვეთი თითოეულ წრეწირს ყოფს ორ, ტოლად. დაამტკიცეთ, რომ მკვეთის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მოთავსებული სხვადასხვა წრეწირის რკალების გრადუსული ზომები ტოლია.

5.63. წრეწირები, რომელთა ცენტრებია O და O_1 წერტილები, A და B წერტილებში გადაკვეთს ერთმანეთს. დაამტკიცეთ, რომ AB წრფე OO_1 წრფის მართობულია.

5.64. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის ერთი და იმავე დიამეტრის ბოლოებიდან გავლებული ორი პარალელური ქორდა ტოლია.

5.65. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის ტოლი რკალების მომჭიმავი ქორდები ერთმანეთის ტოლია.

5.66. წრეწირზე აღნიშნულია A, B, C და D წერტილები ისე, რომ მცირე რკალები AC და BD ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ABC და BCD სამკუთხედები ტოლია.

5.67. დაამტკიცეთ, რომ პარალელურ ქორდებს შორის მოთავსებული რკალების გრადუსული ზომები ტოლია.

5.68. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი კონცენტრული წრეწირი გადაკვეთილია მკვეთით, მაშინ წრეწირებს შორის მოთავსებული მკვეთის მონაკვეთები ტოლია.

5.69. O ცენტრის მქონე წრეწირის AB ქორდის გაგრძელებაზე გადადებულია რადიუსის ტოლი BC მონაკვეთი. OC მკვეთზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ O წერტილი მდებარეობს C და D წერტილებს შორის. დაამტკიცეთ, რომ $\angle AOD = 3\angle ACD$.

5.70. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის ცენტრიდან ტოლი მანძილებით დაშორებული ქორდები ერთმანეთის ტოლია.

5.71. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის ტოლი ქორდები ცენტრიდან ტოლი მანძილითაა დაშორებული.

5.72. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის ორი ქორდიდან უდიდესი უფრო მცირე მანძილითაა დაშორებული წრეწირის ცენტრიდან.

5.73. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის ორი ქორდიდან უდიდესია ის, რომელიც უფრო ნაკლებ მანძილითაა დაშორებული წრეწირის ცენტრიდან.

5.74. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილზე გავლებული ყველა ქორდიდან უმცირესია ის, რომელიც ამ წერტილზე გამავალი დიამეტრის მართობულია.

5.75. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის შიგნით მდებარე მოცემულ წერტილზე გამავალი უმცირესი ქორდა ამ წერტილზე გამავალი დიამეტრის მართობულია.

5.76. წრეწირის ორი ქორდა ერთმანეთის წრეწირის ცენტრისაგან განსხვავებულ წერტილში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ ვადაკვეთის წერტილით არ შეიძლება ორივე ქორდა შუაზე გაიყოს.

5.77. დაამტკიცეთ, რომ ორი ტოლი ერთიერთგადაკვეთი ქორდის შონაკვეთები წესაბამისად ტოლია.

5.78. წერტილზე, რომელიც მდებარეობს წრეწირზე ან მის შიგნით, გავლებულია ორი ტოლი ქორდა. დაამტკიცეთ, რომ ამ წერტილზე გამავალი დიამეტრი ქორდებით შედგენილ კუთხეს შუაზე ყოფს.

5.79. წრეწირზე აღებულია 4 წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ მოპირდაპირე რკალების შეკვეთილებზე გამავალი წრფეები ერთიერთმართობულია.

5.80. OA და OB წრეწირის ურთიერთმართობული რადიუსებია; ამ რადიუსებზე როგორც დიამეტრებზე აგებული წრეწირების გადაკვეთის წერტილია C. დაამტკიცეთ რომ: 1) OC სხივი AOB კუთხის ბისექტრისაა.

2) A, C და B წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს.

5.81. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხედის ერთი გვერდი წარმოადგენს მეორე გვერდის შეკვეთილზე გამავალი წრეწირის დიამეტრს, მაშინ სამკუთხედი ტოლფერდაა.

5.82. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტოლფერდა სამკუთხედის ერთი გვერდი წარმოადგენს წრეწირის დიამეტრს, მაშინ ეს წრეწირი სამკუთხედის ფუძის შეკვეთილზე გადის.

5.83. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ორ ნებისმიერზე, რომლებზეც დიამეტრებზე შემოხაზული წრეწირების გადაკვეთის ერთ-ერთი წერტილი მდებარეობს მესამე გვერდის შემკვეთ წრფეზე.

5.84. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ნებისმიერი წერტილიდან ერთ-ერთ წვერომდე მანძილი ტოლის დანარჩენ ორ წვერომდე მანძილების ჯამს.

5.85. ორი წრეწირის შეხების წერტილზე გავლებულია მკვეთი; დაამტკიცეთ, რომ მიღებული ქორდების ბოლოებზე გავლებული მხებები და რადიუსები პარალელურია.

5.86. ორი წრეწირის შეხების წერტილზე გავლებულია მათი საერთო მხები. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრეწირებისადმი საერთო მხებზე აღებული წერტილიდან გავლებული მხებების მონაკვეთები ტოლია.

5.87. მოცემულია კუთხე, რომლის გვერდები წრეწირს ეხება. დაამტკიცეთ, რომ ცენტრზე გამავალი სხივი საკუთხით კუთხია წვეროში, წარმოადგენს ამ კუთხის ბისექტრისას.

5.88. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორ წრეწირს გააჩნია საერთო შიგა მხებები*, ძაბით შეხების წერტილებს შორის მოთავსებული ამ მხებების მონაკვეთები ტოლია.

5.89. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორ წრეწირს გააჩნია საერთო გარე მხებები**, მაშინ შეხების წერტილებს შორის მოთავსებული ამ მხებების მონაკვეთები ტოლია.

5.90. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის დიამეტრის ბოლოებზე გავლებული ნებისმიერი ორი პარალელური ქორდების ბოლო წერტილების შემაერთებელი წრფე წრეწირის ცენტრზე გაივლის.

5.91. დაამტკიცეთ, რომ ორი წრეწირის საერთო გარე მხებები და ცენტრებზე გამავალი წრფე ან პარალელურები არიან, ან იკვეთებიან ერთ წერტილში; საერთო შიგა მხებები და ცენტრებზე გამავალი წრფე ერთ წერტილში იკვეთებიან.

5.92. S წერტილზე გავლებულია წრეწირის SA და SB მხებები. l მხები SA და SB მონაკვეთებს A_1 და B_1 წერტილებში გადაკვეთს. დაამტკიცეთ, რომ SA_1B_1 სამკუთხედის პერიმეტრი არ არის დამოკიდებული იმაზე, რომელი l მხებია აღებული.

5.93. ორ წრეწირს აქვს საერთო ცენტრი. დაამტკიცეთ, რომ დიდი წრეწირის ქორდები, რომლებიც მცირე წრეწირს ეხებიან, ტოლია.

5.94. წრეწირის AB დიამეტრისა და AC ქორდით შედგენილი კუთხე 30°-ის ტოლია. წრეწირის ცენტრი O წერტილშია. C წერტილში გამავალი მხები AB-ს გაგრძელების D წერტილში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ $OC=\frac{1}{2}\ OD$.

5.95. AB ქორდის B ბოლოზე გავლებულია წრეწირის მხები (AB რკალი 90°-ზე ნაკლებია) წრეწირის ცენტრია O წერტილი. OA რადიუსის პერპენდიკულარული დიამეტრის გაგრძელება მხებსა და ქორდის გაგრძელებას კვეთს შესაბამისად C და D წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ BC და CD ხოხკვეთები ტოლია.

---

* ორი წრეწირის საერთო მხებს შიგა მხები ეწოდება, თუ მათი ცენტრები მხების მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ.

** ორი წრეწირის საერთო მხებს გარე მხები ეწოდება, თუ მათი ცენტრები მხების მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ.

5.96. წრეწირის მხებები აღგუნენ 60°-ის ტოლ კუთხეს. დაამტკიცეთ, რომ: ა) მათი გადაკვეთის წერტილის წრეწირის ცენტრთან შემაერთებელი მონაკვეთი წრეწირის დიამეტრის ტოლია; ბ) შეხების წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი უდრის მხების მონაკვეთს შესებას გადაკვეთის წერტილიდან შეხების წერტილამდე.

5.97. O ცენტრის მქონე წრეწირის a მხები კვეთს პარალელურ b და c მხებებს M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $\angle MON=90°$.

5.98. ორი წრეწირი ცენტრებით O და O_1 წერტილებში გარედან ეხება ერთმანეთს A წერტილში. BC მათი საერთო გარე მხებია (B და C წერტილები შეხების წერტილებია). დაამტკიცეთ, რომ BAC კუთხე ძირითია.

5.99. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის A წვერო შეერთებულია სამკუთხედზე შემოხაზული წრის O ცენტრთან. A წვეროდან გავლებულია AD სიმაღლე. დაამტკიცეთ, რომ $\angle BAD=\angle OAC$.

5.100. წრეწირში ჩახაზულია ABC სამკუთხედი. დაამტკიცეთ, რომ A კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე იმ წრფის პარალელურია, რომელიც წრეწირის ცენტრსა და წრეწირისა და A კუთხის ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილზე გადის.

5.101. წრეწირის გარეთ მდებარე A წერტილიდან გავლებულია ორი მკვეთი. BC და DE მათი მონაკვეთებია, რომლებიც წრეწირის ქორდებს წარმოადგენენ, ამასთან B მდებარეობს A და C წერტილებს შორის, ხოლო D—A და E-ს შორის. დაამტკიცეთ, რომ:

1) თუ $BC=DE$, მაშინ $AB=AD$.

2) თუ $AB=AD$, მაშინ $BC=DE$.

5.102. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედში (რომელიც ტოლგვერდა არ არის) ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების ცენტრები მდებარეობენ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის შემცველ წრფეზე და ერთმანეთს არ ემთხვევიან.

5.103. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში ბისექტრისა წარმოადგენს იმავე წვეროდან გამოსული სიმაღლისა და შემოხაზული წრეწირის რადიუსით შედგენილი კუთხის ბისექტრისას.

§ 6. მრავალკუთხედები. პარალელოგრამი. მართკუთხედი. რომბი. კვადრატი. ტრაპეცია. ჩახაზული და შემოხაზული ოთხკუთხედები

ამოცანები გამოთვლაზე

6.1. გამოთვალეთ ოთხკუთხედის მეოთხე კუთხის სიდიდე, თუ მისი სამი კუთხე უდრის: ა) 89°, 92°, 97° ბ) 72°, 89°, 92°.

6.2. $ABCD$ ოთხკუთხედში $\angle D=102°$. $\angle A=\angle B=\angle C$. გამოთვალეთ ოთხკუთხედის უკუნა კუთხე.

6.3. 40°-ის ტოლი კუთხის შიგნით აღებულ წერტილზე კუთხის გვერდებისადმი გავლებულია პერპენდიკულარები. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის კუთხეები.

6.4. განსაზღვრეთ ოთხკუთხედის გარე კუთხეები, თუ მისი სამი შიგა კუთხე უდრის 38°, 154°, 44°.

6.5. სამკუთხედის ორი წვეროდან დაშვებულ სიმაღლეებს შორის კუთხე 130°-ია. იპოვეთ მესამე წვეროსთან მდებარე კუთხე.

6.6. დიაგონალით ოთხკუთხედი გაყოფილია ორ სამკუთხედად, რომელთა პერიმეტრებია 25 მ და 27 მ; ოთხკუთხედის პერიმეტრი კი უდრის 32 მ-ს. იპოვეთ ამ დიაგონალის სიგრძე.

6.7. პარალელოგრამის ერთი კუთხე 40°-ს უდრის, იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.

6.8. იპოვეთ პარალელოგრამის კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ ერთი მათგანი მეორეზე 30°-ით მეტია.

6.9. პარალელოგრამის დიაგონალი მის ორ გვერდთან 25°-იან და 35°-იან კუთხეებს ადგენს. იპოვეთ პარალელოგრამის კუთხეები.

6.10. იპოვეთ პარალელოგრამის ყველა კუთხე, თუ ორი მათგანის ჯამია: 1) 80°; 2) 100°; 3) 160°.

6.11. იპოვეთ პარალელოგრამის ყველა კუთხე, თუ ორი მათგანის სხვაობაა: 1) 70°; 2) 110°; 3) 140°.

6.12. იპოვეთ პარალელოგრამის ყველა კუთხე, თუ: ა) პარალელოგრამის ერთი კუთხე სამჯერ მეტია მეორეზე; ბ) პარალელოგრამის კუთხეები ისე შეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 7.

6.13. $ABCD$ პარალელოგრამში BD დიაგონალი CD გვერდთან ადგენს 65°-ის ტოლ კუთხეს. $\angle ABC=84°$. იპოვეთ $\angle ADB$ და $\angle BCD$.

6.14. $ABCD$ პარალელოგრამში AC დიაგონალი DC გვერდთან ადგენს 40°-ის ტოლ კუთხეს. იპოვეთ $\angle ADC$ და $\angle BAC$, თუ $\angle ABC=110°$.

6.15. პარალელოგრამის მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეებს შორის მოთავსებული კუთხე უდრის 110°-ს. იპოვეთ პარალელოგრამის კუთხეები.

6.16. პარალელოგრამის ორი კუთხე ისე შეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1 : 3. იპოვეთ კუთხე პარალელოგრამის სიმაღლეებს შორის, რომლებიც გავლებულია: ა) ბლაგვი კუთხის წვეროდან; ბ) მახვილი კუთხის წვეროდან.

6.17. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეზე დებია წერტილიდან გავლებულია გვერდების პარალელური ორი წრფე. იპოვეთ მიღებული პარალელოგრამის პერიმეტრი.

6.18. პარალელოგრამის პერიმეტრი უდრის 152 სმ-ს, მისი ერთი გვერდი 25 სმ-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

6.19. პარალელოგრამის ორი გვერდი ისე შეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3 : 4. მისი პერიმეტრი კი 2,8 მ-ს უდრის. იპოვეთ გვერდები.

6.20. $ABCD$ პარალელოგრამში B წვეროდან AD გვერდზე დაშვებული მართობი ამ გვერდს შუაზე ყოფს. იპოვეთ პარალელოგრამის BD დიაგონალი და გვერდები, თუ ცნობილია, რომ პარალელოგრამის პერიმეტრი 3,8 მ-ს უდრის, ხოლო ABD სამკუთხედის პერიმეტრი 3 მ-ია.

6.21. $ABCD$ პარალელოგრამში B წვეროდან AD გვერდზე დაშვებული მართობი ამ გვერდს შუაზე ყოფს. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები, თუ $BD=0,9$ მ-ს, ხოლო პარალელოგრამის პერიმეტრი 3,8 მ-ის ტოლია.

6.22. პარალელოგრამში მახვილი კუთხე უდრის 60°. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე პარალელოგრამის გვერდს შუაზე ყოფს. იპოვეთ პარალელოგრამის მცირე დიაგონალი, თუ პერიმეტრია 24 სმ-ის ტოლია.

6.23. $ABCD$ პარალელოგრამში AB გვერდი უდრის 9 სმ და შეადგენს პერიმეტრის $\frac{3}{10}$-ს. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის სხვა გვერდები.

6.24. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის ბისექტრისა მის გვერდს ყოფს შეფარდებით 2 : 1, ბლაგვი კუთხია წვეროს მხრიდან. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები, თუ მისი პერიმეტრი 60 სმ-ს უდრის.

6.25. პარალელოგრამის ერთი კუთხე სამჯერ მეტია მეორეზე. ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე მოპირდაპირე გვერდს ორ ნაწილად ყოფს: 2 სმ და 4 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის სიმაღლე (ორი ამონახსენი).

6.26. $ABCD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია და მისი პერიმეტრი 10 სმ-ს ტოლია. იპოვეთ BD დიაგონალის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ ABD სამკუთხედის პერიმეტრი 8 სმ-ის ტოლია.

6.27. პარალელოგრამის გვერდებია 8 სმ და 3 სმ; მის დიდ გვერდთან მდებარე ორი კუთხის ბისექტრისები მოპირდაპირე გვერდს ყოფენ სამ ნაწილად. იპოვეთ მიღებული მანძილები.

6.28. $ABCD$ პარალელოგრამში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია წრფე, რომელიც BC და AD გვერდებზე ჩამოჭრის მონაკვეთებს: $BE=2$ მ და $AF=2,8$ მ. იპოვეთ BC და AD გვერდები.

6.29. $ABCD$ პარალელოგრამში გადატანილია A კუთხის ბისექტრისა, რომელიც BC გვერდს E წერტილში გადაკვეთს. რას უდრის BE და EC მონაკვეთები, თუ $AB=9$ სმ, $AD=15$ სმ?

6.30. პარალელოგრამში დიაგონალები 20°-ის ტოლ კუთხეს ადგენენ. განსაზღვრეთ კუთხეები პარალელოგრამის დიაგონალსა და მის გვერდებს შორის.

6.31. ტრაპეციის დიაგონალით და გვერდით შედგენილი კუთხე უდრის 36°-ს, ხოლო კუთხეები დიაგონალებს შორის.

6.32. პარალელოგრამში წვეროდან დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარი ჭრის კუთხეს ფუძის შეფარდებით $3:1$. იპოვეთ კუთხის სიდიდე (გრადუსებში) ამ პერპენდიკულარსა და მეორე დიაგონალს შორის.

6.33. ტრაპეციაში წვეროდან დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარი ჭრის კუთხეს ფუძის შეფარდებით $2:3$. იპოვეთ:
ა) პარალელოგრამის გვერდებთან დიაგონალებით შედგენილი კუთხეები;
ბ) გავლებული პერპენდიკულარით მეორე დიაგონალთან შედგენილი კუთხე.

6.34. პარალელოგრამის ერთ-ერთი კუთხის ბისექტრისა პარალელოგრამის გვერდის შეცავს ფუძეზე ფუძეს. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი, თუ მისი მცირე გვერდი 10 სმ-ს უდრის.

6.35. პარალელოგრამში სამკუთხედის პიპოტენუზა 6 სმ-ის ტოლია. პიპოტენუზის შუაწერტილზე გავლებულია კათეტების პარალელური წრფეები, განსაზღვრეთ მიღებული ოთხკუთხედის სახე და იპოვეთ მისი დიაგონალები.

6.36. პარალელოგრამში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან გვერდებისადმი გავლებული პერპენდიკულარები შესაბამისად 4 სმ-ისა და 6 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის პერიმეტრი.

6.37. პარალელოგრამში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი მცირე გვერდიდან 4 სმ-ით უფრო შორსაა. უდიდეს დიდი გვერდიდან პარალელოგრამის პერიმეტრი 56 სმ-ს უდრის. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

6.38. პარალელოგრამის დიაგონალებს შორის კუთხე უდრის 60°, თითოეული დიაგონალისა და თითოეული მცირე გვერდის ჯამი არის 3,6 მ. იპოვეთ დიაგონალების სიგრძე.

6.39. მოცემულია პარალელოგრამი $ABCD$; M მისი BC გვერდის შუაწერტილია. მოცემულია, რომ AM და MD ურთიერთპერპენდიკულარულია და $ABCD$ პარალელოგრამის პერიმეტრი უდრის 24 მ. იპოვეთ მისი გვერდები.

6.40. პარალელოგრამის წვეროდან მის დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარი ამ დიაგონალს ყოფს შეფარდებით $1:3$. იპოვეთ დიაგონალის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი დიდი გვერდიდან 2 მ-ით არის დაშორებული.

6.41. პარალელოგრამის სამკუთხედის ფერდული ტოლია 6 სმ-ის უდრის. მასში ჩახაზულია პარალელოგრამი, რომლის სამკუთხედთან საერთო კუთხე აქვს. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი.

6.42. ტოლფერდა პარალელოგრამში ჩახაზულია პარალელოგრამი, რომ მისი ორი წვერო პარალელოგრამის ფუძეებზე მდებარეობს, დანარჩენი ორი კი — გვერდებზე. რას უდრის პარალელოგრამის გვერდები, თუ ცნობილია, რომ ისინი ისე შეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5 : 2, პარალელოგრამის პიპოტენუზა კი 45 სმ-ის ტოლია.

6.43. წრეწირის ერთი წერტილიდან გავლებულია ორი ურთიერთმართობული ქორდა, რომლებიც ცენტრიდან 6 სმ-ით და 10 სმ-ით არიან დაშორებული. იპოვეთ მათი სიგრძეები.

6.44. რომბის დიაგონალების მიერ მის ერთ გვერდთან შედგენილი კუთხეები ისე შეფარდება ერთმანეთს, როგორც $4:5$. იპოვეთ რომბის კუთხეები.

6.45. რომბის გვერდი მის დიაგონალებთან შეადგენს კუთხეებს, რომელთა სხვაობა უდრის 20°-ს. იპოვეთ რომბის კუთხეები.

6.46. რომბში ერთი დიაგონალი უდრის რომბის გვერდს.
ა) რას უდრის რომბის კუთხეები?
ბ) იპოვეთ რომბის დიაგონალებით მის გვერდებთან შედგენილი კუთხეები.

6.47. რომბის წვეროდან გავლებული სიმაღლეები ადგენენ 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ: ა) რომბის კუთხეები; ბ) რომბის დიაგონალებით მის გვერდებთან შედგენილი კუთხეები.

6.48. რომბის წვეროდან გაველებული სიმაღლეები ადგენენ 120°-იან კუთხეს. იპოვეთ: ა) რომბის კუთხეები. ბ) რომბის დიაგონალებით მის გვერდებთან შედგენილი კუთხეები.

6.49. რომბის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე რომბის გვერდს შუაზე ყოფს. იპოვეთ: ა) რომბის კუთხეები; ბ) რომბის პერიმეტრი, თუ მისი მცირე დიაგონალი უდრის 20 მმ.

6.50. რომბის პერიმეტრი 8 სმ-ია, სიმაღლე კი 1 სმ. იპოვეთ რომბის ბლაგვი კუთხე.

6.51. წრეწირზე ალებული A წერტილიდან გავლებულია ორი ქორდა AB და AC, რომლებიც წრეწირის რადიუსის ტოლია. იპოვეთ BC ქორდამდე, თუ წრეწირის ცენტრიდან BC ქორდამდე მანძილი 10 სმ-ის ტოლია.

6.52. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის მახვილი კუთხეა 60°, ისეა ჩახაზული 6 სმ გვერდის სწორი რომბი, რომ რომბიანი კუთხე მათ საერთო აქვთ, ხოლო რომბის ყველა წვერო სამკუთხედის გვერდებზე მდებარეობს. იპოვეთ სამკუთხედის პიპოტენუზა.

6.53. კვადრატის დიაგონალი 4 მ-ია. მისი გვერდი მეორე კვადრატის დიაგონალის ტოლია. იპოვეთ მეორე კვადრატის გვერდი.

6.54. მოცემულია კვადრატი, რომლის გვერდი 3 მ-ს უდრის. მისი დიაგონალი მეორე კვადრატის გვერდის ტოლია. იპოვეთ მეორე კვადრატის დიაგონალი.

6.55. კვადრატის დიაგონალი უდრის 12 სმ-ს. კვადრატის წვეროებზე გავლებულია დიაგონალების პარალელური წრეწირები. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

6.56. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის თითოეული კათეტი 2 მ-ს უდრის. ამ სამკუთხედში ჩახაზულია კვადრატი, რომელსაც მასთან საერთო კუთხე აქვს. იპოვეთ კვადრატის პერიმეტრი.

6.57. კვადრატში ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მის თითოეულ გვერდზე მართკუთხედის ერთი წვერო მდებარეობს და მართკუთხედის გვერდები კვადრატის დიაგონალების პარალელურია. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები, თუ ცნობილია, რომ ერთი მათგანი ორჯერ მეტია მეორეზე და კვადრატის დიაგონალი 12 მ-ს უდრის.

6.58. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია კვადრატი ისე, რომ მისი ორი წვერო ჰიპოტენუზაზე მდებარეობს. დანარჩენი ორი კი — კათეტებზე. იპოვეთ კვადრატის გვერდი, თუ ცნობილია, რომ ჰიპოტენუზა 3 მ-ს უდრის.

6.59. ბარე წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია ორი ერთიერთმართობული მხები; წრეწირის რადიუსი 10 სმ-ს უდრის. იპოვეთ მხებების სიგრძეები (მანძილი მოცემული წერტილიდან შეხების წერტილამდე).

6.60. ორი წრის რადიუსებია 2,5 და 6,7; ხოლო საერთო შიგა მხებები ერთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ შიგა მხებების წრეკვეთის სიგრძე შეხების წერტილებს შორის.

6.61. წრეწირზე, რომლის რადიუსი უდრის 5 სმ, შემოხაზულია მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის პერიმეტრია 70 სმ. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

6.62. მოცემულია $R=$ სმ რადიუსის წრეწირი. გარე M წერტილიდან ამ წრეწირისადმი გავლებულია ურთიერთპერპენდიკულარული ორი მხები MA და MB. შეხების A და B წერტილებს შორისაა უცნობი AB რკალზე აღებულია ნებისმიერი C წერტილი და მასზე გავლებულია მხები, რომელიც MA და MB მხებებს გადაკვეთს შესაბამისად K და L წერტილებში. იპოვეთ MKL სამკუთხედის პერიმეტრი.

6.63. გარე წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია ორი ურთიერთმართობული მხები. შეხების წერტილთა შემაერთებელი ჭრილი უდრის 2 დმ-ს. იპოვეთ მანძილი წრეწირიდან ცენტრიდან ამ ჭრილამდე.

6.64. წრეწირზე, რომლის რადიუსი უდრის 4 სმ, შემოხაზულია მართკუთხა სამკუთხედი 26 სმ-იანი პიპოტენუზით. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

6.65. სამკუთხედის გვერდები 8 სმ-ს, 10 სმ-ს და 12 სმ-ს უდრის. იპოვეთ იმ სამკუთხედის გვერდები, რომლის წვეროებსაც მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილები წარმოადგენს.

6.66. სამკუთხედის პერიმეტრი 12 სმ-ს უდრის. გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია მონაკვეთებით. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი.

6.67. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3 : 4 : 5, მისი პერიმეტრი უდრის 60 სმ-ს. იპოვეთ იმ სამკუთხედის პერიმეტრი და გვერდები, რომლის წვეროებიც მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია.

6.68. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 7 : 8 : 9. იმ სამკუთხედის პერიმეტრი, რომლის წვეროებიც მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია, უდრის 24 სმ-ს. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის გვერდები.

6.69. ტოლფერდა სამკუთხედის შუახაზი, რომელიც ფუძის პარალელურია, 3 სმ-ის უდრის, იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ მისი პერიმეტრი 16 სმ-ია.

6.70. იმ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის შუაწერტილს, რომლის კათეტებია 3 სმ და 4 სმ, გავლებულია კათეტების პარალელური წრფეები. იპოვეთ მიღებული მართკუთხედის პერიმეტრი.

6.71. რომბის დიაგონალებია 10 სმ და 24 სმ. მასში ჩახაზულია ოთხკუთხედი, რომლის წვეროებს რომბის გვერდების შუაწერტილები წარმოადგენს. იპოვეთ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

6.72. ოთხკუთხედის დიაგონალებია 10 მ და 12 მ, მასში ჩახაზულია ოთხკუთხედი, რომლის წვეროებს მოცემული ოთხკუთხედის შუაწერტილები წარმოადგენს. იპოვეთ ჩახაზული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

6.73. ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმაღლეა 30 სმ. განსაზღვრეთ რა მანძილზეა ცისი გვერდებიდან ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი.

6.71. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან გავლებული ბისექტრისის ნაწილი 30 სმ-ს და ფეხებთან ლებულს 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე.

6.75. $ABCD$ რომბში B კუთხე უდრის 120°-ს. განსაზღვრეთ ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეებს შორის მოთავსებული დიაგონალის მოხაზვეთი, თუ $AC = 21$ სმ.

6.76. $ABCD$ რომბის B წვეროდან გავლებულია BM და BN ნორმალები, რომლებიც AD და DC გვერდებს შეიცავს. ამ მონაკვეთებს AC დიაგონალთან გადაკვეთის წერტილებია K და L. იპოვეთ KL, მოხაზვეთი, თუ AC დიაგონალი 15 სმ-ია.

6.77. ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხეებია 68° და 74°. იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.

6.78. ტოლფერდა ტრაპეციაში ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე დიდ ფუძეს ყოფს 16 სმ-ად და 36 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებად. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფუძე.

6.79. რას უდრის ტოლფერდა ტრაპეციის კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ მოპირდაპირე კუთხეების სხვაობა 42°-ია?

6.80. ტოლფერდა ტრაპეციის მცირე ფუძე ფერდის ტოლია, დიაგონალი კი ფერდის პერპენდიკულარულია. იპოვეთ ტრაპეციის კუთხეები.

6.81. ტრაპეციაში ფერდები მცირე ფუძის ტოლია, დიაგონალი ობტუზ-ან აღმართს 30°-ის ტოლ კუთხეს. იპოვეთ ტრაპეციის ყველა კუთხე.

6.82. ტრაპეციის დიაგონალი ფერდის პერპენდიკულარულია. ამ დიაგონალის პირდაპირ მდებარე ძახვილი კუთხე უდრის 40°-ს. იპოვეთ ტრაპეციის დანარჩენი კუთხეები, თუ მცირე ფუძე მეორე ფერდის ტოლია.

6.83. ტოლფერდა ტრაპეციის დიდი ფუძე 2,7 მ-ია, ფერდი — 1 მ, მათ შორის კუთხე — 60°. იპოვეთ მცირე ფუძე.

6.84. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ ცნობილია, რომ მახვილი კუთხე უდრის 60°-ს, ხოლო ფუძეები 15 სმ და 49 სმ-ია.

6.85. ტოლფერდა ტრაპეციაში ერთი კუთხე უდრის 60°-ს. ფერდი უდრის 24 სმ-ს, ხოლო ფუძეების ჯამია 43 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

6.86. ტოლფერდა ტრაპეციაში ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე დიდ ფუძეს 6 სმ-ისა და 30 სმ-ის სიგრძის მონაკვეთებად ყოფს. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

6.87. $ABCD$ მართკუთხა ტრაპეციაში ADC მახვილი კუთხე უდრის 45°-ს და გვერდი $AD = 17$, CD გვერდის E შუაწერტილიდან მისამართულია პერპენდიკულარი, რომელიც BA გვერდის გაგრძელებას F წერტილში კვეთს. იპოვეთ BF-ის სიგრძე.

6.88. $ABCD$ ტრაპეციაში BC მცირე ფუძე უდრის 1 სმ-ს. B წვეროდან გავლებულია ფერდის პარალელური წრფე. მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრია 12 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი.

6.89. $ABCD$ ტრაპეციაში $(AB \| CD)$ BD დიაგონალი შუამართკუთხედის ყოფს 6 სმ და 21 სმ სიგრძის ნაწილებად. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

6.90. ტრაპეციის დიაგონალი ტრაპეციის შუამართკუთხედს ყოფს ორ მონაკვეთად, რომლებიც ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 3 : 5. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები, თუ შუამონაკვეთია მონაკვეთების სხვაობა 10 სმ-ის ტოლია.

6.91. ტრაპეციის შუამონაკვეთის სიგრძე უდრის 8 სმ-ს და დიაგონალით იყოფა ორ მონაკვეთად, რომელთა სხვაობა 2 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძის სიგრძე.

6.92. ტოლფერდა ტრაპეციაში ფერდი შუამონაკვეთის ტოლია. პერიმეტრი 21 სმ-ია. იპოვეთ ფერდის სიგრძე.

6.93. $ABCD$ არის ტოლფერდა ტრაპეცია. ამასთან AD დიდი ფუძეა. ACD და BAC სამკუთხედების პერიმეტრების სხვაობა უდრის 6-ს, ტრაპეციის შუამონაკვეთი კი 12-ია. იპოვეთ AD.

6.94. ტოლფერდა ტრაპეციაში მახვილი კუთხე უდრის 45°-ს, შიგა სიმაღლეა 12, შუამონაკვეთი კი — 21. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე.

6.95. ტრაპეციის ფუძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 3, ხოლო შუახაზი 5 მ-ს უდრის. იპოვეთ ფუძეები.

6.96. ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 7 : 3, ხოლო სხვაობა კი 2,2 მ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის შუამონაკვეთის სიგრძე.

6.97. ტრაპეციის შუახაზი 7 სმ-ს უდრება, ხოლო მისი ერთი ფუძე 4 სმ-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

6.98. ტრაპეციის ფერდი გაყოფილია 4 ტოლ ნაწილად და დაყოფის წერტილებში გავლებულია ტრაპეციის ფუძეების პარალელური წრფეები. იპოვეთ ტრაპეციის ფერდებს შორის მოთავსებული პარალელური წრფეების მონაკვეთების სიგრძეები, თუ ტრაპეციის ფუძეებია 23 სმ და 15 სმ.

6.99. ტრაპეციის ფერდი სამ ტოლ ნაწილადაა გაყოფილი და დაყოფის წერტილებიდან მეორე ფერდისაკენ გავლებულია ფუძის პარალელური მონაკვეთები. რას უდრის ამ მონაკვეთების სიგრძეები, თუ ტრაპეციის ფუძეები 2 მ და 5 მ-ია?

6.100. ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია 17 სმ და 3 სმ. იპოვეთ დიაგონალების შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძე.

ნ.101. მოცემული წრფის ერთ მხარეს აღებულია ორი — A და B წერტილი, რომლებიც ამ წრფიდან 10 მ-ისა და 20 მ-ის მანძილზე იდებარეობს. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუაწერტილიდან მოცემულ წრფემდე მანძილი.

ნ.102. მოცემული წრფის სხვადასხვა მხარეს აღებულია ორი — A და B წერტილი, რომლებიც ამ წრფიდან 10 სმ-ით და 4 სმ-ით არიან დაშორებული. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუაწერტილიდან მოცემულ წრფემდე მანძილი.

ნ.103. დიამეტრის ბოლოებს წრეწირის მხებიდან 1,6 მ-ით და 0,6 მ-ით არიან დაშორებული. იპოვეთ დიამეტრის სიგრძე.

ნ.104. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი ნახვილ კუთხეს შუაზე ყოფს. ტრაპეციის პერიმეტრი 132 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 5. იპოვეთ ტრაპეციის შუაპონაკვეთი.

ნ.105. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი მახვილ კუთხეს შუაზე ყოფს. ამ ტრაპეციის პერიმეტრი 4,8-ია, დიდი ფუძე კი 1,5. იპოვეთ მცირე ფუძე.

ნ.106. ტრაპეციაში დიაგონალებს წარმოადგენენ მახვილი კუთხის ბისექტრისებს. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ დიაგონალი შუაპონაკვეთის ყოფს 10 სმ-ისა და 18 სმ-ის სიგრძის ნაწილებად.

ნ.107. $ABCD$ ტრაპეციაში (AD დიდი ფუძეა) AC დიაგონალი CD გვერდის პერპენდიკულარულია და BAD კუთხეს შუაზე ყოფს; $\angle CDA = 60°$. ტრაპეციის პერიმეტრია — 2. იპოვეთ AD.

ნ.108. მართკუთხა ტრაპეციაში ერთი კუთხე ტოლია 135°-ს, შუაპონაკვეთი 18 სმ-ს, ხოლო ფუძეების შეფარდებაა 1 : 8. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფერდი.

ნ.109. მართკუთხა ტრაპეცია დიაგონალით იყოფა ორ სამკუთხედად — ტოლგვერდად 8 სმ-ის ტოლი გვერდით და მართკუთხა სამკუთხედად. იპოვეთ ტრაპეციის შუაპონაკვეთი.

ნ.110. ტრაპეციის დიაგონალი მისი ფუძეების პერპენდიკულარულია; დიდ ფუძესთან ძლებარე ბლაგვი კუთხე ტოლია 120°-ს, ხოლო მასთან მიძლებარე ფერდი — 7 სმ-ს, დიდი ფუძე 12 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის შუაპონაკვეთის სიგრძე.

ნ.111. ტრაპეციის ფუძეებია 24 სმ და 48 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის ფერდებს შორის მოთავსებული მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც ფუძეების პარალელურია და გაყოფს დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე.

ნ.112. ჩახაზული ოთხკუთხედის 3 კუთხე (მიმდევრობით) ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1 : 2 : 3. იპოვეთ ოთხკუთხედის კუთხეები.

ნ.113. წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის ორი კუთხე არის 75° და 55°. იპოვეთ დახარჩენი ორი კუთხე.

ნ.114. მართკუთხედის დიაგონალი გვერდთან 12°-იან კუთხეს ქმნის. როგორ ოთხ ნაწილად იყოფა მართკუთხედის წვეროებით მასზე შემახახული წრეწირი?

ნ.115. $ABCD$ ჩახაზულ ოთხკუთხედში AC დიაგონალი BD დიაგონალის პერპენდიკულარულია და მას შუაზე ყოფს. იპოვეთ ამ ოთხკუთხედის კუთხეები, თუ $\angle BAD = 70°$.

ნ.116. ტოლფერდა ტრაპეციის წვეროებზე გაყვანილია წრეწირი; ტრაპეციის ფუძეები ჭიმავს 120°-იან და 20°-იან რკალებს. იპოვეთ ტრაპეციის კუთხეები. (ორი ამონახსნი).

ნ.117. $ABCD$ ოთხკუთხედში B და D კუთხეები მართია. AC დიაგონალი AB გვერდთან შეადგენს 40°-იან კუთხეს, AD გვერდთან კი 30°-იანს. იპოვეთ მახვილი კუთხე AC და BD დიაგონალების შორის.

ნ.118. $ABCD$ ოთხკუთხედში მოცემულია: $\angle ABC = 116°$, $\angle ADC = 64°$, $\angle CAB = 35°$ და $\angle CAD = 55°$. იპოვეთ დიაგონალებს შორის მოთავსებული კუთხეები.

ნ.119. წრეწირი ჩახაზულია რომბში. როგორ ოთხ ნაწილად ყოფს წრეწირს გვერდების შეხების წერტილები, თუ რომბის მახვილი კუთხე უდრის 37°-ს

ნ.120. მართკუთხედის მცირე გვერდი ტოლია 1 მ-ს. დიაგონალეს შორის კუთხე უდრის 60°-ს. იპოვეთ შემახახული წრეწირის რადიუსი.

ნ.121. მართკუთხედის მცირე გვერდი 10 სმ-ის ტოლია. დიაგონალებს შორის კუთხე ტოლია 120°-ის. იპოვეთ შემახახული წრეწირის რადიუსი.

ნ.122. რომბის გვერდი უდრის 8 სმ-ს, ხოლო მახვილი კუთხე 30°-ს. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ნ.123. სამი ძმძღვენი გვერდი ოთხკუთხედისა, რომელშიც შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა, ტოლია 6 სმ-ის, 8 სმ-ის და 9 სმ-ის. იპოვეთ ამ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

ნ.124. შემოხაზული ოთხკუთხედის სამი გვერდი (მიმდევრობით) ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1 : 2 : 3. იპოვეთ გვერდები, თუ ცნობილია, რომ მისი პერიმეტრი უდრის 24 მ-ს.

ნ.125. წრეწირზე შემოხაზულია ტრაპეცია, რომლის პერიმეტრი უდრის 12 სმ-ს. იპოვეთ ამ ტრაპეციის შუაპონაკვეთი.

ნ.126. წრეწირზე შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ერთი კუთხე უდრის 30°-ს, მისი შუაპონაკვეთი უდრია 1 მ-ს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

6.127. მართკუთხა ტრაპეციაში ჩახაზულია 9 სმ რადიუსის მქონე წრეწირი. იპოვეთ ტრაპეციის შუახაზის სიგრძე, თუ ტრაპეციის მახვილი კუთხე 30°-ის ტოლია.

6.128. მართკუთხა ტრაპეციაში ჩაწერილია 6 სმ რადიუსის მქონე წრეწირი. იპოვეთ ტრაპეციის მახვილი კუთხე, თუ ტრაპეციის ნაკლები ფუძე 18 სმ?

ამოცანები დამოუკიდებლად

6.129. შესაძლებელია თუ არა სამკუთხედის ასეთი გვერდები: 1) 5 მ; 10 მ; 12 მ; 2) 1 მ; 2 მ; 3,3 მ; 3) 1,2 მ; 1 მ; 2,2 მ?

6.130. შეიძლება თუ არა სამკუთხედის გვერდები შეეფარდებოდეს ერთმანეთს ასე, როგორც: 1 : 2 : 3? 2 : 3 : 4?

6.131. შეიძლება თუ არა სამკუთხედის გვერდის ტოლი იყოს 52 მმ-ის და პერიმეტრი იყოს 100 მმ?

6.132. ტოლფერდა სამკუთხედის ორი გვერდი ტოლია: ა) 2 სმ და 6 სმ; ბ) 15 სმ და 14 სმ; გ) 8 სმ და 1 დმ; დ) 5 კმ და 10 სმ. ამ გვერდებიდან რომელი შეიძლება იყოს ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე?

6.133. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის თითოეული გვერდი მისი პერიმეტრის ნახევარზე ნაკლებია.

6.134. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის შიგნით მდებარე წერტილიდან ამ სამკუთხედის წვეროებამდე მანძილების ჯამი პერიმეტრის ნახევარზე მეტია.

6.135. ABC სამკუთხედის ($AC>BC$) C კუთხის ბისექტრისაზე აღებულია M წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ AC და CB გვერდების სხვაობა მეტია AM და BM მონაკვეთების სხვაობაზე.

6.136. შეიძლება თუ არა ოთხკუთხას ჰქონდეს: ა) ორი მახვილი კუთხე; ბ) ორი მართი კუთხე; გ) სამი მახვილი კუთხე; დ) სამი ბლაგვი კუთხე?

6.137. შესაძლებელია თუ არა ასეთი ოთხკუთხედის რომლის გვერდების შეფარდება იყოს 2 : 3 : 4 : 10?

6.138. დაამტკიცეთ, რომ ამოზნექილ ოთხკუთხედში ერთ გვერდთან მდებარე ორი კუთხის ბისექტრისები ადგენენ კუთხეს, რომელიც ტოლია მესამე და მეოთხე კუთხის ნახევარჯამის.

6.139. დაამტკიცეთ, რომ ამოზნექილ ოთხკუთხედში ორი მოპირდაპირე კუთხის ბისექტრისები ადგენენ კუთხეს, რომელიც დანარჩენი ორი კუთხის ნახევარსხვაობასთან ერთად შეადგენს 180°-ს.

6.140. $ABCD$ ოთხკუთხედში $\angle A-\angle C=90°$. დაამტკიცეთ, რომ დანარჩენი ორი კუთხის ბისექტრისა ერთმანეთის პარალელურია ან ერთმანეთს ემთხვევა.

6.141. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედის თითოეული დიაგონალის სიგრძე მის ნახევარპერიმეტრზე ნაკლებია.

6.142. დაამტკიცეთ, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედი, რომლისა A და B კუთხეების ჯამი ტოლია 180°-ს და $\angle A=\angle C$, პარალელოგრამს წარმოადგენს.

6.143. $ABCD$ პარალელოგრამში E წერტილი BC გვერდის შუაწერტილია, F წერტილი — AD გვერდისა. დაამტკიცეთ, რომ $BEDF$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

6.144. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის მედიანა ნაკლებია იმ გვერდის ნახევარჯამზე, რომელთანაც ის არის მოთავსებული.

6.145. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხას ორი გვერდი პარალელურია და ტოლი დიაგონალი მაინც მეორესთან გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

6.146. $ABCD$ პარალელოგრამის AB და CD გვერდებზე გადადებულია ტოლი AE და CG წონაკვეთები, ხოლო BC და AD გვერდებზე კი ტოლი BF და DH მონაკვეთები. დაამტკიცეთ, რომ $EFGH$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

6.147. $ABCD$ პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდების გაგრძელებებზე გადაზომილია AK და CL ტოლი მონაკვეთები. B და L წერტილები, აგრეთვე K და D წერტილები შეერთებულია. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული $LBKD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

6.148. ABC სამკუთხედის წვეროებზე დაყრდნობილია წრეწირები, რომლებიც მოპირდაპირე გვერდების პარალელურია. მათ გადაკვეთის წერტილები სხვა სამკუთხედის წვეროებია. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული სამკუთხედის წვეროები ამ სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია.

6.149. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეების ბისექტრისები პარალელურია ან ერთმანეთს ემთხვევა.

6.150. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

6.151. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამში ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეებს შორის კუთხე პარალელოგრამის მახვილი კუთხის ტოლია.

6.152. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამში მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეებს შორის ერთ-ერთი კუთხე პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის ტოლია.

6.153. პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთაზე წერტილზე გავლებულია წრფე. დაამტკიცეთ, რომ მისი მონაკვეთი, რომელიც პარალელური გვერდების შორისაა მოთავსებული, ამ წერტილით შუაზე იყოფა.

6.154. დაამტკიცეთ, რომ თუ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გავავლებთ ორ წრფეს და მიმდევრობით შეუერთებთ პარალელოგრამის გვერდებთან ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილებს, მაშინ მიღებული ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

6.155. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან გავლებულია ფეხდების პარალელური ასტვები. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული პარალელოგრამის პერიმეტრი არ არის დამოკიდებული წერტილის აღებილმდებარეობაზე და ტოლია სამკუთხედის ფერდების ჯამის.

6.156. დაამტკიცეთ, რომ $ABCD$ პარალელოგრამში B და D წოპირდებარე წვეროები AC წრფიდან ტოლი მანძილითაა დაშორებული.

6.157. $ABCD$ პარალელოგრამში B და D კუთხეების ბისექტრისები AC დიაგონალს კვეთს M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $BNDM$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

6.158. ABC სამკუთხედში A კუთხის ბისექტრისა BC გვერდს D წერტილში კვეთს; D-დან CA-ს პარალელურად გავლებული წრფე AB-ს E წერტილში კვეთს; E-დან BC-ს პარალელურად გავლებული წრფე კი AC-ს F წერტილში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ $EA=FC$.

6.159. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის მედიანების ჯამი მეტია სამკუთხედის პერიმეტრის $\frac{3}{4}$-ზე და ნაკლებია მის პერიმეტრზე.

6.160. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის გვერდების წყვილწყვილად ნაშრავლთა ჯამი მეტია გვერდების კვადრატების ჯამის ნახევარზე.

6.161. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის ნებისმიერი წერტილიდან მისი გვერდებისა განსაზღვრულ წრფეებამდე მანძილებია ჯამი ამ პარალელოგრამისათვის მუდმივი სიდიდეა. რას ტოლის, იგი?

6.162. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის სამივე სიმაღლე (ან მათი გაგრძელებები) ერთ წერტილში იკვეთება.

6.163. $ABCD$ პარალელოგრამის BC და CD გვერდებზე, გარედან აგებულია BCM და CDN ტოლგვერდა სამკუთხედები. დაამტკიცეთ, რომ A, M და N წერტილები ტოლგვერდა სამკუთხედის წვეროებია.

6.164. დაამტკიცეთ, რომ თუ პარალელოგრამის დიაგონალები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ის მართკუთხედია.

6.165. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედში დიაგონალები ტოლია და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ ეს ოთხკუთხედი წარმოადგენს მართკუთხედს.

6.166. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის (რომელიც რომბს არ წარმოადგენს) შიგა კუთხეების ბისექტრისები ერთიერთად გადაკვეთისას რომბს მართკუთხედს.

6.167. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის გარე კუთხეების ბისექტრისები გადაკვეთისას ადგენენ მართკუთხედს.

6.168. პარალელოგრამში (რომელიც რომბს არ წარმოადგენს) გავლებულია შიგა კუთხის ბისექტრისები. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული წანაკუთხედის დიაგონალი პარალელოგრამის მოსაზღვრე გვერდების სხვაობის ტოლია.

6.169. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხედის დიაგონალებზე დაშვებული სიმაღლეები ტოლია.

6.170. მართებულია თუ არა დებულება: „თუ ამოზნექილი ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლია და ერთ-ერთი კუთხე მართია, მაშინ ის მართკუთხედს წარმოადგენს“? პასუხი დაასაბუთეთ.

6.171. ABC ტოლფერდა სამკუთხედია. AC ფუძის ნებისმიერ P წერტილზე აღმართულია AC-ს პერპენდიკულარული, ერთი ფერდისა და მეორის გაგრძელების გადაკვეთამდე. შესაბამისად E და F წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $PE+PF$ უდრის ფუძეზე დაშვებულ გარშემოხაზულ სიმაღლეს.

6.172. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედი, რომლის ყველა გვერდი ერთმანეთის ტოლია, რომბია.
დაამტკიცეთ, რომ თუ პარალელოგრამის დიაგონალი ნახევარ კუთხეების ბისექტრისაა, მაშინ ის რომბია.

6.173. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედში თითოეული კუთხის ბისექტრისა ოთხკუთხედის რომელიმე დიაგონალს შოიცავს, მაშინ ეს ოთხკუთხედი რომბია.

6.174. დაამტკიცეთ, რომ თუ პარალელოგრამის დიაგონალები ერთმანეთზე მართობულია, მაშინ ის რომბია.

6.175. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ერთიერთს პერპენდიკულარულია და მათი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ ეს ოთხკუთხედი რომბია.

6.176. დაამტკიცეთ, რომ რომბის დიაგონალი წარმოადგენს რომბის ერთი კუთხიდან გამოსული ორი სიმაღლით შედგენილი კუთხის ბისექტრისას.

6.177. მოცემულია $ABCD$ კვადრატი. მის ყოველ გვერდზე გადაღებულია ტოლი მონაკვეთები: $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$. დაამტკიცეთ, რომ $A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხედი კვადრატია.

6.178. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხედის გარე კუთხეების ბისექტრისები გადაკვეთისას კვადრატს ქმნიან.

6.179. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირების ცენტრებს შორის მანძილის კვადრატი ამ წრეწირების რადიუსების ჯამს.

6.180. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი სამკუთხედის ფიზეკატრისა და ჰიპოტენუზის სხვაობის ტოლია.

6.181. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ამოზნექილი ოთხკუთხედის დიაგონალები თანატოლია და ოთხკუთხედის კუთხეებს ბისექტრისები წარმოადგენენ, მაშინ ასეთი ოთხკუთხედი კვადრატს წარმოადგენს.

6.182. ABC სამკუთხედში ($AB \neq AC$) გავლებულია AD სიმაღლე, AE ბისექტრისა და AF მედიანა. დაამტკიცეთ, რომ E წერტილი მდებარეობს D და F წერტილებს შორის.

6.183. ABC მართკუთხა სამკუთხედში BD არის მახვილი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე. დაამტკიცეთ, რომ BD ტოლია ABC, ABD და BCD სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების ჯამს.

6.184. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილები პარალელოგრამის წვეროებია.

6.185. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხედის კვერდების შუაწერტილები რომბის წვეროებია და პირიქით, რომბის გვერდების შუაწერტილები მართკუთხედის წვეროებია.

6.186. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის წვეროები თანაბრადაა დაშორებული წრფიდან, რომელიც მისი ორი გვერდის შუაწერტილებზე გადის.

6.187. დაამტკიცეთ, რომ ქორდის ბოლო წერტილებზე გავლებული მართობები ნებისმიერ დიამეტრა გადაკვეთენ ცენტრიდან ტოლად დაშორებულ წერტილებში.

6.188. $ABCD$ ოთხკუთხედში $AB=BC$ და $CD=AD$. ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია ნებისმიერი თანმიმდევრობით. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული ოთხკუთხედი მართკუთხედს წარმოადგენს.

6.189. $ABCD$ პარალელოგრამის AD და BC პარალელური გვერდების შუაწერტილები E და F შეერთებულია D და B წვეროებთან. დაამტკიცეთ, რომ ამ მონაკვეთებით AC დიაგონალი 3 ტოლ ნაწილად იყოფა.

6.190. დაამტკიცეთ რომ სამკუთხედი ტოლფერდაა, თუ მას ორი ნედიანა ტოლი აქვს.

6.191. ABC ტოლფერდა სამკუთხედის AB ფუძის M წერტილზე გავლებულია წრფე, რომელიც BC ფერდს და AC ფერდის გაგრძელების კვეთს P და Q წერტილებში ისე, რომ MP და MQ მონაკვეთები ტოლი იყოს. დაამტკიცეთ AQ და PB მონაკვეთების ტოლობა.

6.192. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის სამი მედიანიდან ერთ-ერთის სიგრძე ისეა დაკავშირებული ამ სამკუთხედის ფართობთან, რომელიც გაცნობილია პითაგორას თეორემიდან.

6.193. $ABCD$ პარალელოგრამის DC გვერდის F შუაწერტილი შეერთებულია B წვეროსთან. A წვეროდან BF წრფისადმი გავლებული მართობის ფუძეა K წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $AD=DK$.

6.194. მართებულია თუ არა დებულება: „თუ წრფე ვადის სამკუთხედის შეერთებულ წერტილზე და მისი მონაკვეთი, მოთავსებული ფერდებს შორის, ფუძის ნახევრის ტოლია, მაშინ ეს მონაკვეთი სამკუთხედის შუამონაკვეთს წარმოადგენსო“. პასუხი დაასაბუთეთ.

6.195. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდისადმი გავლებული შუალია ფუძესთან 30°-იან კუთხეს ადგენს, მაშინ სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

6.196. შეიძლება თუ არა ძიძგიერობით აღებული ტრაპეციის კუთხეები ისე შეეფარდებოდეს ერთმანეთს, როგორც: ა) 6 : 3 : 4 : 2; ბ) 8 : 7 : 13 : 12?

6.197. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის დიაგონალები ერთმანეთის გადაკვეთის წერტილით შუაზე არ იყოფიან.

6.198. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფერდების ჯამი მეტია ფუძეთა სხვაობაზე.

6.199. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტრაპეციის ფუძეთა შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი ფუძეთა პერპენდიკულარულია, მაშინ ტრაპეცია ტოლფერდაა.

6.200. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალებია და ფერდების გაგრძელებათა გადაკვეთის წერტილებით განსაზღვრული წრფე ტრაპეციის ფუძეთა პერპენდიკულარულია და მათ შუაზე ყოფს.

6.201. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა ტრაპეციის გვერდების შუაწერტილები რომბის წვეროებს წარმოადგენს.

6.202. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა ტრაპეციაში ნებისმიერ გვერდების შუაწერტილების შემაერთებელი წრფეები ურთიერთმართობულია.

6.203. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ტრაპეციის ფერდი ტრის მკრივე ფუძეს, ვაშინ მათი შეხლების შემაერთებელი დიაგონალი წარმოადგენს დიდ ფუძესთან შედგენილ კუთხის ბისექტრისას.

6.204. ტრაპეციაში დიაგონალები წარმოადგენენ ერთ-ერთ ფუძესთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისებს. დაამტკიცეთ, რომ ამ ტრაპეციის სამი გვერდი ერთმანეთის ტოლია.

6.205. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფუძეებს შორის მოთავსებული ყოველი მონაკვეთი ტრაპეციის შუაწონაკვეთით შეღუნე იყოფა.

6.206. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ოთხკუთხედის დიაგონალების კვადრატების ჯამი ორჯერ მეტია მოპირდაპირე გვერდების შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთების კვადრატების ჯამზე.

6.207. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის დიაგონალების შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი ფუძეების პარალელურია და მათი სხვაობის ნახევარს უდრის.

6.208. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეცია ფერდთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები გადაკვეთისას მართ კუთხეს აღგენს და მათი გადაკვეთის წერტილი ტრაპეციის შუამონაკვეთზეა მოთავსებული.

6.209. წრეწირში AB დიამეტრის პერპენდიკულარულად გაყვანილია CC_1 და DD_1 ორი ქორდა (C და D წერტილები მოთავსებულია AB დიამეტრის ერთ მხარეს). დაამტკიცეთ, რომ CD და C_1D_1 ქორდების შეაწერტილების შემაერთებელი MM_1 მონაკვეთი AB-ს პერპენდიკულარულია.

6.210. $ABCD$ ტრაპეციაში $AD \| BC$ და $AD=2BC$. D წვეროდან AB წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძეა K წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $KC=DC$.

6.211. შეიძლება თუ არა შეიხაზოს წრეწირი ისეთ ოთხკუთხედზე, რომლის კუთხეები მიმდევრობით ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1) 2 : 4 : 5 : 3? 2) 5 : 7 : 8 : 9?

6.212. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც იგი ტოლფერდაა.

6.213. $ABCD$ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის O ცენტრი (AB და CD ტრაპეციის ფუძეებია) შეერთებულია ტრაპეციის წვეროებთან. დაამტკიცეთ, რომ $\angle AOD = \angle BOC$.

6.214. ABC სამკუთხედში გავლებულია BB_1 და CC_1 სიმაღლეები. ცნობილია გადაკვეთის წერტილი ორთოცენტრი K-თი. დაამტკიცეთ, რომ A, B_1, K, C_1 წერტილები ერთსა და იმავე წრეწირზე ძევს.

6.215. ABC სამკუთხედის A და B წვეროებიდან გავლებულია სიმაღლეები. დაამტკიცეთ, რომ ეს წვეროები და ორივე სიმაღლეთა ფუძეები ერთსა და იმავე წრეწირს ეკუთვნის. სად იქნება ამ წრეწირის ცენტრი? რას უდრის მისი რადიუსი?

6.216. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტრაპეციის შუამონაკვეთი უდრის ძეტრია მეოთხედს, მაშინ ამ ტრაპეციაში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა.

6.217. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორთოკუთხედის სამი ბისექტრისა ერთ წერტილში იკვეთება, მაშინ მეოთხე ბისექტრისაც ამ წერტილზე გადის.

6.218. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია, მაშინ მასში ოთხივე კუთხის ბისექტრისა ერთ წერტილში იკვეთება.

6.219. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის მიგა კუთხეების ბისექტრისები გადაკვეთისას ორკუთხედს ემსახუნ, მაშინ ამ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შეხაზვა.

6.220. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედის გარე კუთხეების ბისექტრისებით შექმნილ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შეხაზვა.

6.221. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ამოზნექილ ოთხკუთხედში ერთ-ერთი დიაგონალი ჰყოფს მის ორ კუთხეს შუაზე, მაშინ ასეთ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა.

6.222. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია და გადაკვეთის წერტილით ერთ-ერთი მათგანი შუაზე იყოფა, მაშინ ასეთ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა.

6.223. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩაიხაზა და ერთ-ერთი დიაგონალი შეარობადებს ოთხკუთხედის რომელიმე კუთხის ბისექტრისას, მაშინ ამ ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია.

6.224. ორი წრეწირის გადაკვეთის A და B წერტილებზე გავლებული მკვეთები წრეწირებს გადაკვეთენ შესაბამისად C, D და M, N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ CM და ND ჭორდები პარალელურია.

6.225. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტრაპეციის ერთ ფუძესთან მდებარე კუთხეების ჯამი ცდრის $90°$-ს, მაშინ ამ ტრაპეციის ფუძეების შეაწერტილებს შორის მანძილი ბაზერ ნაკლებია ფუძეების სხვაობაზე.

6.226. კოშკში წრეში ჩახაზულია ოთხკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე კვერდების შეწყვეტის წერტილები იკვეთებიან. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრფეთა გადაკვეთისას მიღებული კუთხეების ბისექტრისები ს და ოთხკუთხედის კვერდების გადაკვეთის წერტილები რომბის წვეროებს წარმოადგენენ.

6.227. ABC სამკუთხედის AB და BC კვერდებზე გარედან აგებულია კვადრატები $ABDE$ და $BCKF$. დაამტკიცეთ, რომ $DF=2BP$, სადაც BP არის ABC სამკუთხედის მედიანა.

6.228. ABC სამკუთხედის C გარე კუთხია ბისექტრისაზე აღებულია D წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $AC+CB<AD+DB$.

6.229. წრეწირში ჩახაზული $MNPQ$ ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია და F წერტილში იკვეთებიან. დაამტკიცეთ, რომ წრეწ, რომელიც გადის F წერტილზე და NP კვერდის შეწერტილზე MQ კვერდის მართობულია.

6.230. წრეწირში ჩახაზული $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია და E წერტილში კვეთიან. E წერტილზე AB გვერდის პერპენდიკულარულად გამავალი წრფე CD გვერდს კვეთს M წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ EM ართ CED სამკუთხედის მედიანა.

6.231. ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედში P და Q შესაბამისად AB და CD გვერდების შუაწერტილებია, ხოლო AC და BD დიაგონალების შუაწერტილებია M და N. დაამტკიცეთ, რომ თუ $BC=AD$, მაშინ MN პერპენდიკულარულია PQ-ს.

6.232. ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედში P და Q შესაბამისად AB და CD გვერდების შუაწერტილებია, ხოლო AC და BD დიაგონალების შუაწერტილებია M და N. დაამტკიცეთ, რომ თუ MN პერპენდიკულარულია PQ-ს, მაშინ $BC=AD$.

§ 7. ფიგურათა გარდაქმნა

7.1. აგეთ კოორდინატთა სათავის მიმართ $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(-3;\ 1)$, $D(-2;\ 2)$, $E(-3;\ -4)$, $F(2;\ -1)$ წერტილებს სიმეტრიული წერტილები.

7.2. აგეთ სამკუთხედის ერთ-ერთი წვეროს მიმართ მისი დანარჩენი ორი წვეროს სიმეტრიული წერტილები.

7.3. ცენტრული სიმეტრია აიბრტყის რომელ წერტილს ასახავს თავის თავზე?

7.4. რომელ წრფეებს ასახავს ცენტრული სიმეტრია თავის თავზე?

7.5. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის ცენტრი მისი სიმეტრიის ცენტრია.

7.6. აგეთ x ღერძის მიმართ $A(1;\ 1)$, $B(-2;\ 3)$, $C(0;\ -1)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები.

7.7. აგეთ y ღერძის მიმართ $D(2;\ 0)$, $E(-4;\ 1)$, $F(-2;\ -2)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილები.

7.8. დაამტკიცეთ, რომ წრფე, რომელიც წრეწირის ცენტრზე გადის, ამ წრეწირის სიმეტრიის ღერძია.

7.9. მოცემული წრეწირის სიმეტრიის რამდენი ღერძი გადის მოცემულ წერტილზე?

7.10. სიმეტრიის რამდენი ღერძი აქვს ფიგურას, რომელიც ორი წრეწირისაგან შედგება?

7.11. აგეთ წერტილები, რომლებიც გადადის პომოთეტიით $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 2)$, $C(-1;\ 1)$, $D(3;\ -1)$ წერტილები, თუ პომოთეტიის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, პომოთეტიის კოეფიციენტი კი უდრის: 1) 2-ს; 2) 3-ს.

7.12. პომოთეტიით X წერტილი X' წერტილში გადადის, Y წერტილი კი — Y' წერტილში. იპოვეთ პომოთეტიის ცენტრი, თუ X, X', Y, Y' წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს.

7.13. პომოთეტიით X წერტილი X' წერტილში გადადის. აგეთ პომოთეტიის ცენტრი, თუ k უდრის: 1) 2-ს; 2) 3-ს, 3) 4-ს.

7.14. რომელიმე წერტილის მიმართ სიმეტრიით X წერტილი X' წერტილში გადადის. აგეთ წერტილი, რომელშიც ამ სიმეტრიით Y წერტილი გადადის.

7.15. რომელიღაც წრფის მიმართ სიმეტრიით X წერტილი X' წერტილში გადადის. აგეთ წერტილი, რომელშიც ამ სიმეტრიით Y წერტილი გადადის.

7.16. ერთი ფიგურის წერტილს შორის მანძილი 10 სმ-ზე ნაკლებია, მეორე ფიგურის რომელიღაც ორ წერტილს შორის მანძილი კი — 10 სმ-ზე მეტი. შეიძლება თუ არა, რომ ეს ორი ფიგურა სიმეტრიული იყოს: 1) წერტილის მიმართ; 2) წრფის მიმართ?

7.17. აგეთ ფიგურა, რომელშიც გადადის ABC სამკუთხედი C წვეროს გარშემო 60°-იანი კუთხით შემობრუნებისას: 1) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით; 2) საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

7.18. შეიძლება თუ არა, რომ სამკუთხედს ჰქონდეს ზუსტად ორი სიმეტრიის ცენტრი?

7.19. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი მისი სიმეტრიის ცენტრია.

7.20. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედი, რომელსაც სიმეტრიის ცენტრი აქვს, პარალელოგრამია.

7.21. დაამტკიცეთ, რომ წრფე, რომელიც ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძისადმი გავლებულ მედიანას შეიცავს, სამკუთხედის სიმეტრიის ღერძია.

7.22. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხედს აქვს სიმეტრიის ღერძი, მაშინ ის სამკუთხედის ერთ-ერთ წვეროში გადის.

7.23. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხედს აქვს სიმეტრიის ღერძი, მაშინ ის ტოლფერდაა.

7.24. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხედს აქვს ორი სიმეტრიის ღერძი, მაშინ ის ტოლგვერდაა.

7.25. სიმეტრიის რამდენი ღერძი აქვს ტოლგვერდა სამკუთხედს?

7.26. დაამტკიცეთ, რომ წრფე, რომელიც კუთხის ბისექტრისას ეკუთვნის, ამ კუთხის სიმეტრიის ღერძია.

7.27. სიმეტრიის რამდენი ღერძი შეიძლება ჰქონდეს კუთხეს?

7.28. არსებობს თუ არა ფიგურა, რომელსაც სიმეტრიის რამდენიმე ცენტრი აქვს?

7.29. სიმეტრიის რამდენი ცენტრი აქვს ფიგურას, რომელიც ორი პარალელური წრფისაგან შედგება? სად მდებარეობს ისინი?

7.30. სიმეტრიის რამდენი ღერძი აქვს მონაკვეთს?

7.31. სიმეტრიის რამდენი ღერძი აქვს წრეწირს?

7.32. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირში, რომლებიც კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე მისი გვერდების პარალელურად გადის, კვადრატის სიმეტრიის ღერძებია.

7.33. დაამტკიცეთ, რომ რომბის დიაგონალები მისი სიმეტრიის ღერძებია.

7.34. დაამტკიცეთ, რომ ტოლი სიგრძის მონაკვეთები და ტოლი სიდიდის კუთხეები ცარაობით შეუთავსდება ერთმანეთს.

7.35. $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ პარალელოგრამებში: $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$ და $\angle A=\angle A_1$. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამები ტოლია, ანუ მოძრაობით ერთმანეთს შეუთავსდება.

7.36. დაამტკიცეთ, რომ ორი რომბი ტოლია, თუ მათი დიაგონალები ტოლია.

§ 8. ფიგურათა მსგავსება

ამოცანები გამოთვლაზე

8.1. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4 : 5 : 6. იპოვეთ მისი, მსგავსი სამკუთხედის გვერდები, თუ ამ უკანასკნელის უმცირესი გვერდი 0,8 მ-ია.

8.2. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 5 : 4. იპოვეთ მისი მსგავსი სამკუთხედის გვერდები, თუ ამ უკანასკნელის პერიმეტრი 55 მ-ია.

8.3. სამკუთხედის გვერდები 0,8 მ, 1,6 მ და 2 მ-ია. იპოვეთ მისი მსგავსი სამკუთხედის გვერდები, თუ ამ უკანასკნელის პერიმეტრი 5,5 მ-ია.

8.4. ერთი სამკუთხედის პერიმეტრი მისი მსგავსი მეორე სამკუთხედის პერიმეტრის $\frac{11}{13}$-ს შეადგენს, ორი შესაბამისი გვერდის სხვაობა 1 მ-ია. იპოვეთ ეს გვერდები.

8.5. მსგავსი სამკუთხედების პერიმეტრები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 10 : 9. ერთი სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 6 : 7 : 8. იპოვეთ ორივე სამკუთხედის გვერდები, თუ სამკუთხედების უმცირესი გვერდების ჯამი 38 სმ-ის ტოლია.

8.6. ოთხკუთხედის გვერდებია 14 სმ, 21 სმ, 10 სმ და 42 სმ. იპოვეთ მის მსგავსი ოთხკუთხედის გვერდები, თუ მისი უმცირესი გვერდი 4 სმ-ია ტოლია.

8.7. ოთხკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2$, მისი მსგავსი ოთხკუთხედის პერიმეტრია 75 სმ. იპოვეთ მისი გვერდები.

8.8. ერთი ოთხკუთხედის გვერდებია 10 დმ, 15 დმ, 20 დმ და 25 დმ, მისი მსგავსი ოთხკუთხედის უდიდესი და უმცირესი გვერდების ჯამი 28 დმ-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე ოთხკუთხედის გვერდები.

8.9. ორი მსგავსი ტრაპეციის უდიდესი გვერდებია 35 მ და 14 მ, ხოლო მათი პერიმეტრების სხვაობა 60 მ-ის ტოლია. იპოვეთ თითოეული ტრაპეციის პერიმეტრი.

8.10. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 8 და 50, ფერდი კი — 42. ფუძის პარალელური წრფე ტრაპეციას ორ მსგავს ტრაპეციად ყოფს. იპოვეთ უმცირესი მათგანის პერიმეტრი.

8.11. A კუთხის გვერდები გადაკვეთილია BC და DE ორი პარალელური წრფით (B და D წერტილები ძევს კუთხის ერთ გვერდზე, C და E — მეორე გვერდზე). იპოვეთ:

ა) AE, თუ $AB=8$ მ, $AD=12$ მ, $AC=10$ დმ.

ბ) AD, თუ $AC:AE=\frac{3}{11}:0{,}6$ და $BD=12$ დმ

გ) AB, თუ $AB+AD=21$ მ, $AC=12$ მ და $AE=16$ მ.

8.12. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფერდი უდრის 100 და ფუძე 20-ს, ჩახაზულია წრეწირი. იპოვეთ მანძილი ფერდებზე მოთავსებულ შეხების წერტილებს შორის.

8.13. ABC სამკუთხედის AB გვერდზე აღებულ D წერტილზე გავლებულია AC გვერდის პარალელური DF მონაკვეთი. იპოვეთ BF მონაკვეთი, თუ $AD:DB=5:6$, $BC=22$ სმ.

8.14. ABC სამკუთხედის გვერდებია a, b და c. AC-ს პარალელური წრფე AB და BC გვერდებს გადაკვეთს M და N წერტილებში ისე, რომ $AM=BN$. იპოვეთ MN.

8.15. ABC სამკუთხედში C კუთხე მართია, $AC=6$ სმ, $BC=12$ სმ. BC გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ $\angle ADC=90^\circ-\angle B$. როგორ წაწილებად ყოფს D წერტილი BC გვერდს?

8.16. ABC სამკუთხედში გავლებულია BD წრფე ისე, რომ $\angle BDC=\angle ABC$. AC გვერდზე მიღებულია მონაკვეთები AD და DC. იპოვეთ BC, თუ $AD=9$ და $DC=16$.

8.17. ABC სამკუთხედში გავლებულია BD წრფე ისე, რომ $\angle ABD=\angle BCA$. იპოვეთ DC, თუ $AB=8$ და $AC=10$.

8.18. ბაღაგკუთხა ტოლფერდი ABC სამკუთხედში ფუძე $AC=32$ მ, ფერდი კი 20 მ-ია. B წვეროდან ფერდისადმი გავლებულია პერპენდიკულარი ფუძესთან გადაკვეთამდე. როგორ წაწილებად ყოფს ის ფუძეს?

8.19. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC და მისი მპაპირდაპირეა კუთხე 36°, გავლებულია AD ბისექტრისა. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფუძე, თუ მისი ფერდია a.

8.20. ABC ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა 12 სმ, ხოლო ფერდი 18 სმ. AB და BC ფერდებზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ $BM=BN$. იპოვეთ BM მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AMNC$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი 40 სმ-ია.

8.21. ABC სამკუთხედში ჩახაზულია $ABEF$ რომბი ისე, რომ A მათი საერთო კუთხეა და E წვერო BC გვერდზეა. იპოვეთ რომბის გვერდი, თუ $AB=c$ და $AC=b$.

8.22. სამკუთხედში ჩახაზულია პარალელოგრამი ისე, რომ მათ ერთი კუთხე საერთო აქვთ. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია, რომლებიც ამ კუთხეს შეადგენენ, ტოლია 15-ის და 10-ის, ხოლო პარალელოგრამის იმ გვერდების, რომლებიც სამკუთხედის ღიობნელი გვერდების პარალელურია, ერთმანეთს ეთმანეთის, როგორც 3 : 2. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი.

8.23. $ABCD$ პარალელოგრამში გვერდი AB 420 მ. BC გვერდზე აღებულია E წერტილი ისე, რომ $BE:EC=5:7$ და გავლებულია წრფე DE, რომელიც AB-ს გაგრძელებას F წერტილში კვეთს. იპოვეთ BF.

8.24. $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია. მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია BC-ს პერპენდიკულარული წრფე, რომელიც BC-ს E წერტილში კვეთს, AB-ს კი გაგრძელებას F-ში. იპოვეთ BE, თუ $AB=a$, $BC=b$ და $BF=c$.

8.25. $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია; F წერტილი AB-ს გაგრძელებაზეა; E არის DF-ისა და AC-ს გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ BF, თუ $AE:EC=m:n$ და $AB=a$.

8.26. რომბის წვეროზე გავლებული წრფე რომბის ორი გვერდის გაგრძელებას მოაჭრის p და q მონაკვეთებს. იპოვეთ რომბის გვერდი.

8.27. პარალელოგრამში ჩახაზულია რომბი ისე, რომ მისი გვერდები პარალელოგრამის დიაგონალების პარალელურია. იპოვეთ რომბის გვერდი, თუ პარალელოგრამის დიაგონალებია l და m.

8.28. პარალელოგრამის პერიმეტრი 96-ია, მისი ორითოეული დიაგონალი გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის პერიმეტრი, რომლის წვეროები დაყოფის წერტილებია.

8.29. ორი ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეებს შორის მდებარე კუთხეები ტოლია. ერთი სამკუთხედის ფერდი და ფუძე შესაბამისად 17 სმ-ს და 15 სმ-ს უდრის, მეორე სამკუთხედის ფუძე 8 სმ-ია. იპოვეთ მისი ფერდი.

8.30. ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებში: $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $AB=5$ მ, $BC=7$ მ, $A_1B_1=10$ მ, $A_1C_1=8$ მ. იპოვეთ სამკუთხედების დანარჩენი გვერდები.

8.31. ABC და DEF სამკუთხედებში: $\angle A=\angle E$, $\angle B=\angle D$, $AB=16$ სმ, $BC=20$ სმ, $DE=12$ სმ, $AC=EF=6$ სმ. იპოვეთ AC, EF და DF.

8.32. ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების B და B_1 კუთხეები ტოლია. ABC სამკუთხედის B კუთხის ბისექტრის მიმდებარე გვერდები $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის B_1 კუთხის ბისექტრის მიმდებარე გვერდებზე 2,5-ჯერ მეტია. იპოვეთ AC და A_1C_1 გვერდები, თუ მათი ჯამი 4,2 მ-ია.

8.33. ორ ტოლფერდა სამკუთხედში წვეროსთან მდებარე კუთხეები ტოლია. პირველი სამკუთხედის პერიმეტრია 544 მ. იპოვეთ მისი გვერდები, თუ მეორე სამკუთხედის ანალოგიური გვერდები ასე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $1:2$.

8.34. ორი წრეწირი ერთმანეთს გარედან ეხება. შეხების წერტილზე გავლებული წრფე წარმოშობს წრეწირებში ქორდებს, რომელთაგან ერთი $2\frac{13}{5}$-ჯერ მეტია მეორეზე. იპოვეთ რადიუსები, თუ მანძილი ცენტრებს შორის უდრის 36 სმ-ს.

8.35. ორი წრეწირი ერთმანეთია შიგნიდან ეხება. შეხების წერტილზე გავლებული წრფე წარმოშობს წრეწირებში ქორდებს, რომელთაგან ერთი 3-ჯერ მეტია მეორეზე. იპოვეთ რადიუსები, თუ მანძილი ცენტრებს შორის უდრის 8 სმ-ს.

8.36. ორ წრეწირს, რომელთა რადიუსებია 3 სმ და 1 სმ, შეხების წერტილი აქვს გარედან. იპოვეთ მანძილი შეხების წერტილიდან წრეწირთა საერთო მხებამდე.

8.37. მანძილი ორ წრეწირების ცენტრებს შორის, რომელთა რადიუსებია 17 და 10, ტოლია 21-ის. გამოთვალეთ მანძილი პატარა წრეწირის ცენტრიდან საერთო გარე მხებთან დადებულების წერტილამდე.

8.38. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრია 36 სმ. ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის შეუშუერტელზე გავლებულია ერთ-ერთი ფერდის პარალელური წრფე. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი.

8.39. CD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა; E წერტილი BC-ზე ისეა და ამასთანავე $DE\parallel AC$. იპოვეთ DE, თუ $BC=a$ და $AC=b$.

8.40. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის კათეტებია a და b, ჩახაზულია კვადრატი, რომელსაც სამკუთხედთან აქვს საერთო მართი კუთხე. იპოვეთ კვადრატის პერიმეტრი.

8.41. სამკუთხედში, რომლის ფუძე არის a და სიმაღლე h, ჩახაზულია კვადრატი ისე, რომ ერთი ორი წვერო ძევს სამკუთხედის ფუძეზე, ორი სხვა კი — გვერდებზე. იპოვეთ კვადრატის გვერდი.

8.42. სამკუთხედში, რომლის ფუძე უდრის 48 სმ-ს და სიმაღლე 16 სმ-ს, ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის გვერდები ისე შეფარდებულა ერთმანეთს, როგორც 5 : 9. ამასთანავე, უდიდესი გვერდი სამკუთხედის ფუძეზე ძევს. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

8.43. სამკუთხედში, რომლის ფუძე უდრის 30 სმ და სიმაღლე 10 სმ-ს, ჩახაზულია მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედი ისე, რომ მისი პიპოტენუზა მოცემული სამკუთხედის ფუძის პარალელურია და მასთან კუთხის წვერო ამ ფუძეზე ძევს. იპოვეთ პიპოტენუზა.

8.44. სამკუთხედში ჩახაზულია ნახევარწრეწირი, რომელიც სამკუთხედის ფუძეს ეხება, დიამეტრი კი (მისი ბოლოები ფერდებზეა) ფუძის პარალელურია. იპოვეთ რადიუსი, თუ სამკუთხედის ფუძე უდრის a-ს და სიმაღლე h-ს.

8.45. სამკუთხედის 120°-იან კუთხის შემადგენელი გვერდებია 6 სმ და 12 სმ. იპოვეთ ამ კუთხის ბისექტრისა.

8.46. $ABCD$ ტრაპეციის AB და CD ფერდების გაგრძელებები E წერტილში გადაკვეთის ერთმანეთს. იპოვეთ AED სამკუთხედის გვერდები, თუ $AB=5$ სმ, $BC=10$ სმ, $CD=6$ სმ, $AD=15$ სმ.

8.47. $ABCD$ ტრაპეციის AB და CD ფერდების გაგრძელებები E წერტილში გადაკვეთს ერთმანეთს. იპოვეთ AED სამკუთხედის E წვეროდან დაშვებული სიმაღლე, თუ $BC=7$ სმ, $AD=21$ სმ, ტრაპეციის სიმაღლე კი 3 სმ-ია.

8.48. O არის $ABCD$ ტრაპეციის ($BC\|AD$) დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ OB, თუ $AO=6$, $OC=4$ და $BD=13$.

8.49. ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილით ერთ-ერთი დიაგონალი იყოფა მონაკვეთებად, რომლებიც ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 9 : 20. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები, თუ მისი შუამონაკვეთი უდრის 29 სმ-ს.

8.50. $ABCD$ ტრაპეციაში ($BC\|AD$) $\angle ABD=\angle BCD$. იპოვეთ AB, თუ $BC=1$, $DC=1{,}5$, $BD=2$.

8.51. $ABCD$ ტრაპეციაში $\angle ABC=\angle ACD$. იპოვეთ AC დიაგონალი, თუ ფუძეები BC და AD შესაბამისად უდრის 2-სა და 8-ს.

8.52. წრფე, რომელიც ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილ-ზე გადის, ერთ-ერთ ფუძეს $m : n$ შეფარდებით ყოფს. რა შეფარდებით ყოფს იგი მეორე ფუძეს?

8.53. ტრაპეციის ფუძეების პარალელური წრფე ერთ ფერდს $m : n$ შეფარდებით ყოფს. რა შეფარდებით ყოფს იგი მეორე ფერდს?

8.54. $ABCD$ ტრაპეციაში BD მცირე დიაგონალი AD და BC ფუძეების პერპენდიკულარულია: A და C მახვილი კუთხეების ჯამი უდრის 90°-ს. $AD=9$ და $BC=4$. იპოვეთ BD.

8.55. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია 6 და 1,5. დიდი ფუძის შეხვედრის მცირე ფუძის წვეროებთან შემაერთებელი წრფეები ტრაპეციის დიაგონალებს გადაკვეთენ M და N წერტილებში. იპოვეთ MN.

8.56. ტრაპეციის ფუძეებია 24 სმ და 48 სმ. იპოვეთ ტრაპეციაში მოქცეული მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც ფეხების პარალელურია და გადის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე.

8.57. ერთიერთგადამკვეთი ორი ქორდიდან გადაკვეთის წერტილით ერთი გაყოფილია შუახე, მეორე კი 48 სმ-ისა და 3 სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ პირველი ქორდის სიგრძე.

8.58. ერთიერთგადამკვეთი ორი ქორდიდან გადაკვეთის წერტილით ერთი გაყოფილია 12 მ-ისა და 18 მ-ის ტოლ ნაწილებად, მეორე კი შეფარდებით 3 : 3. იპოვეთ მეორე ქორდის სიგრძე.

8.59. ერთიერთგადამკვეთი ორი ქორდიდან პირველი უდრის 32 სმ-ს, მეორე ქორდის მონაკვეთებია 12 სმ და 16 სმ. იპოვეთ პირველი ქორდის მონაკვეთები.

8.60. მოცემულია P წერტილი, რომელიც 11 სმ რადიუსის მქონე წრეწირის ცენტრიდან დაშორებულია 7 სმ-ით. ამ წერტილში გავლებულია 18 სმ სიგრძის ქორდა. იპოვეთ მონაკვეთები, რომლებადაც ყოფს P წერტილი.

8.61. წრეწირია წერტილიდან ნის დიამეტრზე დაშვებულია პერპენდიკულარი. იპოვეთ ამ პერპენდიკულარის სიგრძე, თუ დიამეტრის მონაკვეთებია 1) 12 სმ და 3 სმ; 2) 16 სმ და 9 სმ; 3) 2 მ და 5 მ.

8.62. დიამეტრის წერტილზე მიდგმულია პერპენდიკულარი წრეწირთან გადაკვეთამდე. იპოვეთ ამ პერპენდიკულარის სიგრძე, თუ დიამეტრი უდრის 40 სმ, პერპენდიკულარი კი დიამეტრის ერთი ბოლოდან დაშორებულია 8 სმ-ით.

8.63. ერთიერთგადამკვეთი ორი წრეწირის რადიუსები უდრის 13 სმ-ს და 15 სმ-ს, ხოლო საერთო ქორდა უდრის 24 სმ-ს. იპოვეთ მანძილი ცენტრებს შორის.

8.64. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, თუ ფუძე უდრის 16 სმ-ს და სიმაღლე 4 სმ-ს.

8.65. რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის სიმაღლისა და ფუძის ჯამი უდრის წრეწირის დიამეტრს. იპოვეთ სიმაღლის სიგრძე.

8.66. წრეწირისადმი ერთი წერტილიდან გავლებულია მკვეთი და მხები. იპოვეთ მხების მონაკვეთის სიგრძე, თუ მკვეთის გარე კი შიგა მონაკვეთები, სათანადოდ გაზომილებია შემდეგი რიცხვებით: 1) 4 და 5; 2) 2,25 და 1,75; 3) 1 და 2.

8.67. მხების მონაკვეთის სიგრძე 20 სმ-ია, ხოლო იმავე წერტილიდან გავლებული ცენტრსა მკვეთი უდრის 30 სმ-ს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსის სიგრძე.

8.68. ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია მხები და მკვეთი. იპოვეთ მხების მონაკვეთის სიგრძე, თუ ის 5 სმ-ით მეტია მკვეთის გარე მონაკვეთზე და იმდენითვე ნაკლებია შიგა მონაკვეთზე.

8.69. ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია მხები და ჩაქვითი. ჩაქვთი უდრის 8-ს და მისი შიგა მონაკვეთი მკლის სიგრძით მეტია გარე მონაკვეთზე. იპოვეთ ხების მონაკვეთის სიგრძე.

8.70. ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია მხები და მკვეთი. ხების მონაკვეთი მეტია მკვეთის შიგა და გარე მონაკვეთებზე შესაბამისად 2 სმ-ითა და 4 სმ-ით. იპოვეთ მკვეთის სიგრძე.

8.71. ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია მხები და მკვეთი. იპოვეთ მათი სიგრძე, თუ მხები 20 სმ-ით ნაკლებია მკვეთის შიგა მონაკვეთზე და 8 სმ-ით მეტია გარე მონაკვეთზე.

8.72. მკვეთი $2\frac{1}{2}$ -ჯერ მეტია მის გარე მონაკვეთზე, რამდენჯერ მეტი იქნება ის იმავე წერტილიდან გავლებული მხების მონაკვეთზე?

8.73. მოცემული წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია 12 სმ სიგრძის მკვეთი და მხები, რომლის სიგრძე მკვეთის შიგა ნაწილის $\frac{2}{3}$ შეადგენს. იპოვეთ მხების სიგრძე.

8.74. მოცემული წერტილიდან გავლებულია მკვეთი და 20 სმ სიგრძის მხები. იპოვეთ მკვეთის სიგრძე, თუ მისი გარე ნაწილი ისე შეეფარდება შიგა ნაწილს, როგორც 4 : 5.

8.75. ერთი წერტილიდან გავლებულია წრეწირის მკვეთი და მხები. მათი ჯამი უდრის 30 სმ-ს, ხოლო მკვეთის შიგა მონაკვეთი 2 სმ-ით ნაკლებია მხებზე. იპოვეთ მკვეთისა და ხების სიგრძე.

8.76. ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია მკვეთი და მხები. მათი ჯამი უდრის 15 სმ-ს, ხოლო მკვეთის გარე მონაკვეთი 2 სმ-ით ნაკლებია მხებზე. იპოვეთ მკვეთისა და მხების სიგრძე.

8.77. A წერტილიდან გავლებულია ორი მკვეთი, რომელთაგან წრეწირს გადაკვეთენ: პირველი — D და B წერტილებში, მეორე — E და C წერტილებში. იპოვეთ:

1) AE, თუ $AD=5$ სმ, $DB=15$ სმ და $AC=25$ სმ;

2) BD, თუ $AB=24$ მ, $AC=16$ მ და $EC=10$ მ;

3) AB და AC, თუ $AB:AC=3:2$, ხოლო $AD-AE=3$; 7.

8.78. M წერტილიდან გავლებულია ორი მკვეთი, რომელთაგან წრეწირს გადაკვეთენ: პირველი — A და B წერტილებში, მეორე — C და D წერტილებში. იპოვეთ:

1) CD, თუ $MB=1$ მ, $MD=15$ დმ და $CD=MA$;

2) MD, თუ $MA=16$ სმ, $AB=12$ სმ და $MC:CD=5:7$;

3) AB, თუ $AB=MC$, $MA=20$ და $CD=1$.

8.79. ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია ორი ჭკვეთი. პირველის შიგა მონაკვეთი უდრის 4 მ, გარე მონაკვეთი — 9 მ, ხოლო მეორის შიგა მონაკვეთი 72 მ-ით მეტია მისივე გარე მონაკვეთზე. იპოვეთ მეორე მკვეთის სიგრძე.

8.80. წრეწირის რადიუსი უდრის 7 სმ-ს. ცენტრიდან 9 სმ-ით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია მკვეთი ისე, რომ ის წრეწირით შუაზე იყოფა. იპოვეთ ჭკვეთის სიგრძე.

8.81. წრეწირის რადიუსი უდრის $3\frac{1}{2}$ სმ-ს. ცენტრიდან $5\frac{1}{2}$ სმ-ით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია მკვეთი ისე, რომ მისი გარე მონაკვეთი შეეფარდება შიგა მონაკვეთს, როგორც 3 : 2. იპოვეთ მკვეთის სიგრძე.

8.82. ორი ქორდა გადაკვეთილია ურთიერთმართობულად. იპოვეთ მაღალ გადაკვეთამდე, თუ ქორდების სიგრძეა a და b, მათი გადაკვეთაში შეფარდება კი არის $m:n$.

ამოცანები დამტკიცებაზე

8.83. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედში, რომელთაც ფუძის მიმართ ბისექტრისასთან მიყვანილი კუთხეები ტოლი აქვთ მსგავსია.

8.84. წრეწირში ჩახაზულია ორი კუთხე, რომელთაგან ერთის და იმავე რკალს უყრდნობიან. დაამტკიცეთ, რომ ამ დროს მიღებული სამკუთხედები მსგავსია.

8.85. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC და მისი შიგა მართობიერი კუთხეა 36°, გავლებულია AD ბისექტრისა. დაამტკიცეთ, რომ ABC და CAD სამკუთხედები მსგავსია.

8.86. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის შეკვეთილებით შეკვეთილი სამკუთხედი მისივე მსგავსია.

8.87. ABC სამკუთხედში გავლებულია AE და BD სიმაღლეები. დაამტკიცეთ, რომ C, D და E წერტილები ABC სამკუთხედის ძაგვისი სამკუთხედის წვეროებია.

განსაზღვრეთ შემთხვევა, როცა ABC სამკუთხედი: ა) ბრტყელკუთხაა; ბ) ბლაგვკუთხაა (A კუთხე მახვილია).

8.88. ტრაპეციის დიდი ფუძე ორჯერ მეტია მის მცირე ფუძეზე. დიაგონალთა გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფე. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული ტრაპეციები სიმაღლეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2.

8.89. ABC კუთხის გვერდებზე აღებულია ოთხი წერტილი: K, L, M და N (M და N წერტილები კუთხის ერთ გვერდზეა). ანგარიშეთ, პარალელურია თუ არა LM და KN წრფეები, თუ: $BM=MN$, $BL=KL$.

8.90. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლე ამ სამკუთხედს მის მსგავს ორ სამკუთხედად ყოფს.

8.91. დაამტკიცეთ, რომ ორი მართკუთხა სამკუთხედი მსგავსია, თუ მათი ჰიპოტენუზებზე დაშვებული სიმაღლეები პირველის ერთხაზრი შეფარდებით ყოფენ.

8.92. დამტკიცეთ, რომ ორ მსგავსი სამკუთხედში ორი შესაბამისი გვერდების ფარდობა ტოლია ორი შესაბამისი: ა) სიმაღლისა, ბ) ბისექტრისისა და გ) медианის ფარდობისა.

8.93. ABC სამკუთხედის AA_1, BB_1 და CC_1 სიმაღლეები K წერტილში იკვეთება. დაამტკიცეთ, რომ $AK\cdot A_1K=BK\cdot B_1K=CK\cdot C_1K$.

8.94. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $ABCD$ ტრაპეციისათვის მართებულია ტოლობა $AO\cdot BO=DO\cdot CO$, სადაც O არის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი.

8.95. $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალები M წერტილში გადაკვეთის ერთმანეთს. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედზე შეიძლება შემოიხაზოს წრეწირი, თუ $AM\cdot CM=BM\cdot DM$.

8.96. წრეწირზე შემოხაზულია $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეცია. E და K წერტილები წარმოადგენენ AB და CD ფუძეების წრეწირთან შეხების წერტილებს. დაამტკიცეთ, რომ EK მონაკვეთი ფუძეების პარალელურია.

8.97. ABC სამკუთხედში M და K წერტილები მდებარეობენ შესაბამისად AB და BC გვერდებზე. AK და CM მონაკვეთები იკვეთებიან P წერტილში და ამ წერტილით თითოეული იყოფა შეფარდებით 2:1 წვეროს მხრიდან. დაამტკიცეთ, რომ AK და CM სამკუთხედის მედიანებია.

8.98. ABC სამკუთხედის AC გვერდის ნებისმიერ P წერტილზე გავლებულია AK და CM медианების პარალელური წრფეები, რომლებიც სამკუთხედის BC და AB გვერდებს კვეთენ შესაბამისად E და F წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ AK და CM მედიანები EF მონაკვეთს სამ ტოლ ნაწილად ყოფენ.

8.99. ტრაპეციის დიაგონალების საერთო ქორდა გაყვანილია და გაგრძელებულია ტრაპეციიდან წრეწირებამდე. დაამტკიცეთ, რომ ასეთი ტოლია.

8.100. ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილზე გატარებულია ფუძეების პარალელური წრფე. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის გვერდების შიგა ამ წრფიდან მოკვეთილ მონაკვეთს O წერტილი შუაზე ყოფს.

8.101. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის ორ მოპირდაპირე გვერდს ნორის მიმართებებული ნახაზეული ვექტორის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე დანარჩენი ორი გვერდიდან ერთ-ერთის პარალელურად და ამ წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ ოთხკუთხედი ტრაპეციაა.

8.102. $ABCD$ ტრაპეციის თითოეული ფუძის ბოლოები გადაყვანილია ტოლ გვერდა სამკუთხედებში. დაამტკიცეთ, რომ ამ სამკუთხედების ბეჭდის წვეროთა შემაერთებელი წრფე ტრაპეციის დიაგონალთა გადაკვეთის წერტილზე გადის.

8.103. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფუძეების გაგრძელებები და მისი ფუძეების შეაწერტილების შემაერთებელი წრფე ერთ წერტილში იკვეთება.

8.104. დაამტკიცეთ რომ წრფე, რომელიც ტრაპეციის ფუძეების გადაკვეთის წერტილია და დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გადის, ტრაპეციის ფუძეების შეაწერტილებზეც გადის.

8.105 დაამტკიცეთ, რომ წრფეები, რომლებიც აერთებენ შემოხაზული ტრაპეციის მოპირდაპირე გვერდების შეხების წერტილებს, მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გადიან.

8.106. $ABCD$ ტრაპეციის AD ფუძეზე E წერტილი აღებულია ისე, რომ $AE:ED=m:n$ და E წერტილზე გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფე. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრფის ტრაპეციაში ფუძეებს შორის მოთავსებული მონაკვეთი ტოლია $\frac{mCD+nAB}{m+n}$.

8.107. $ABCD$ პარალელოგრამში M და N შესაბამისად BC და CD გვერდებია შეაწერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ AM და AN წრფეებით BD დიაგონალი სამ ტოლ ნაწილად იყოფა.

8.108. $ABCD$ ტრაპეციაში AB და CD ფუძეების შემკვეთი წრფეების გადაკვეთის E წერტილზე გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფე, რომელიც BD და AC წრფეებს შესაბამისად M და N წერტილებში კვეთენ. დაამტკიცეთ, რომ $ME=EN$.

8.109. ტრაპეციის ფუძეების პარალელურად გავლებულია წრფე, დაამტკიცეთ, რომ ამ წრფის მონაკვეთი, მოთავსებული გვერდებსა და ერთ დიაგონალს (ან მათ გაგრძელებებს) შორის უდრის ამავე წრფის მონაკვეთს მეორე გვერდსა და მეორე დიაგონალს (ან მათ გაგრძელებებს) შორის.

8.110. $ABCD$ ტრაპეციაში AB და CD ფერდულების შემცველი წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფე, რომელსაც BD და AC წრფეები შესაბამისად M და N წერტილებში კვეთენ. დაამტკიცეთ, რომ $MN=\frac{2ab}{a-b}$, სადაც $AD=a$ და $BC=b$ $(a>b)$.

8.111. ოთხკუთხედის ყოველი გვერდი ზრდადობის მიხედვით იყოფება ორ-ორ წერტილში ისე, რომ მათი წრეწირის შიგნით მოთავსებული მონაკვეთები ერთმანეთის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ამ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ხაზვა.

8.112. ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედის AB და CD გვერდებია შემცველი წრფეების გადაკვეთის წერტილია S. დაამტკიცეთ, რომ თუ $SB\cdot SA=SC\cdot SD$, მაშინ $ABCD$ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

8.113. R_1 და R_2 რადიუსიანი წრეწირები გარედან ეხება ერთმანეთს. d არის ნაწძალი წრეწირების შეხების წერტილიდან მათ საერთო გარე მხებამდე. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{d}$.

8.114. დაამტკიცეთ, რომ ძახვილი წრეწირის ნებისმიერი წერტილიდან ქორდამდე ამ წერტილიდან ქორდის ბოლოებზე გავლებული მხებებამდის მანძილის საშუალო პროპორციულია.

8.115. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ორი გვერდის ნამრავლი, შეიძლება გავლებული სიმაღლისა და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის ნამრავლის ტოლია.

8.116. დაამტკიცეთ, რომ მანძილი სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრიდან მისი გვერდამდე ორჯერ ნაკლებია მანძილზე სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილიდან ამ გვერდის მოპირდაპირე წვეროამდე.

8.117. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის კუთხის ბისექტრისის კვადრატი ტოლია ამ კუთხის შემადგენელი გვერდების ნამრავლისა და მისი სექტრისასთან შესაბამისი გვერდის გადაკვეთით მიღებული მონაკვეთების ნამრავლის სხვაობის.

8.118. $ABCD$ ტრაპეციაში E და F შესაბამისად BC და AD ფუძეების შუაწერტილებია. P არის BF და AE მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო Q კი ED და CF მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ PQ ტრაპეციის ფუძეების პარალელურია.

8.119. მოცემული წრეწირის ცენტრი $ABCD$ ოთხკუთხედის AD გვერდის O შუაწერტილში ძევს და ეხება დანარჩენ სამ გვერდს. დაამტკიცეთ, რომ $\triangle ABO$ მსგავსია $\triangle DOC$-სი და $AD=2\sqrt{ab}$, სადაც $AB=a$, და $CD=b$.

§ 3. პითაგორას თეორემა

ამოცანები გასათვლელად

9.1. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები ორი კათეტით:

ა) $a=3$, $b=4$; ბ) $a=9$, $b=40$;
გ) $a=20$, $b=21$; დ) $a=11$, $b=60$.

9.2. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები პიპოტენუზითა და კათეტით:

ა) $c=13$, $a=5$; ბ) $c=25$, $a=7$;
გ) $c=17$, $a=8$; დ) $c=85$, $a=84$.

9.3. მართკუთხედის გვერდები 60 სმ და 91 სმ-ია. რას უდრის დიაგონალი?

9.4. სამკუთხედის ფერდები 30 სმ და 25 სმ-ია, ხოლო ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე — 24 სმ. იპოვეთ ფუძე.

9.5. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ფუძე უდრის a-ს. იპოვეთ ფერდი.

9.6. კვადრატის დიაგონალია a. რას უდრის კვადრატის გვერდი?

9.7. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდია a. იპოვეთ სიმაღლე.

9.8. ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდი 17 სმ-ია, ხოლო ფუძე — 16 სმ. იპოვეთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე.

9.9. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე უდრის 4 სმ-ს. მასთან მდებარე კუთხე კი უდრის 45°-ს. იპოვეთ ფერდი.

9.10. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის გვერდები, თუ მისი სიმაღლე უდრის 35 სმ-ს, ხოლო ფუძე ისე შეეფარდება ფერდს, როგორც 48 : 25.

9.11. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 64 სმ-ია, ხოლო მისი ფერდი ფუძეზე 11 სმ-ით მეტია. იპოვეთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე.

9.19. იპოვეთ რომბის გვერდი, თუ მისი დიაგონალებია: 1) 6 სმ და 8 სმ; 2) 16 დმ და 30 დმ; 3) 5 მ და 12 მ.

9.13. რომბში, რომელიც თავისი დიაგონალით იყოფა ორ ტოლგვერდა სამკუთხედად, ჩახაზულია წრეწირი, რომლის რადიუსი ელერის 2 ერთეულია. იპოვეთ რომბის გვერდი.

9.14. იპოვეთ რომბის დიაგონალები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3 : 4. პერიმეტრი კი უდრის 1 მ.

9.15. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი 5 მ-ია, ხოლო მისი გეგმილი ჰიპოტენუზაზე — 3 მ. იპოვეთ ჰიპოტენუზა და მეორე კათეტი.

9.16. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები, თუ ჰიპოტენუზაზე მათი გეგმილებია: 1) 9 სმ და 16 სმ; 2) 36 მ და 64 მ.

9.17. კათეტები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5 : 6. ხოლო ჰიპოტენუზა ელერის 122 სმ. იპოვეთ ჰიპოტენუზის მონაკვეთები, რომლებიც სიმაღლის გავლებით შეიქმნება.

9.18. კათეტების შეფარდება უდრის 3 : 2, სიმაღლე კი ჰიპოტენუზას ყოფს ორ მონაკვეთად, რომელთაგან ერთი 2 ც-ით ნაკლებია მეორეზე. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

9.19. კათეტები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3 : 7, ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე კი უდრის 42 სმ-ს. იპოვეთ ჰიპოტენუზის მონაკვეთები.

9.20. წრეწირის რადიუსი 5 მ-ია. ცენტრიდან 13 მ-ით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია წრეწირის მხებები. იპოვეთ მხებების სიგრძე.

9.21. AB დიამეტრია, AC — ქორდა; AD არის ქორდის გეგმილი AB დიამეტრზე. იპოვეთ:

1) AD-ს სიგრძე, თუ $AB=18$ სმ და $AC=12$ სმ;

2) რადიუსი, თუ AC 12 მ და AD 4 მ;

3) DB, თუ $AC=24$ სმ და $DB=\frac{7}{9}AD$.

9.22. AB დიამეტრია, AC — ქორდა; AD არის ამ ქორდის გეგმილი AB დიამეტრზე. იპოვეთ:

1) AC-ს სიგრძე, თუ $AB=35$ სმ და $AC=5AD$;

2) AC-ს სიგრძე, თუ რადიუსი უდრის r-ს და $AC=DB$.

9.23. მართკუთხედის გვერდებია 5 და 12. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

9.24. წრეწირში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 8 : 15. იპოვეთ ეს გვერდები, თუ წრეწირის რადიუსი 34 სმ-ია.

9.25. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები უდრის 16 სმ და 12 სმ-ს. იპოვეთ ჰიპოტენუზის ნაწილები.

9.26. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი, თუ კათეტებია 24 და 7.

9.27. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 2-ს ტოლია. ერთ-ერთი კათეტია b. იპოვეთ მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

9.28. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 2-ს ტოლია. იპოვეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

9.29. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია $\frac{79(3-2\sqrt{2})}{2}$-ის. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი.

9.30. იპოვეთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის შეფარდება ამავე სამკუთხედის ჰიპოტენუზასადმი გავლებული სიმაღლის სიგრძესთან.

9.31. მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი. შეხების წერტილი ჰიპოტენუზას ყოფს შეფარდებით 2 : 3. იპოვეთ სამკუთხედის ყველა გვერდი, თუ ჩახაზული წრეწირის ცენტრი მართი კუთხის წვეროდან $\sqrt{2}$ სმ-ით არის დაშორებული.

9.32. მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის შეხების წერტილი ჰიპოტენუზას ყოფს 5 სმ და 12 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

9.33. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტი ტოლია 15 სმ; ხოლო მეორე კათეტის გეგმილი ჰიპოტენუზაზე ტოლია 16 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

9.34. სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი, რომლის რადიუსი 3 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ ერთი მათგანი შეხების წერტილით გაყოფილია 4 სმ და 3 სმ ტოლ ნაწილებად.

9.35. სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე დიდი კუთხე 45°-ია, ხოლო სამაღლე ფუძეს 20 სმ-ის და 21 სმ-ის ტოლ ნაწილებად ყოფს. იპოვეთ დიდი გვერდი.

9.36. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალი ტოლია 39 სმ-ს, ხოლო სამაღლე — 15 სმ-ს. იპოვეთ ტრაპეციის შუამონაკვეთის სიგრძე.

9.37. ტოლფერდა ტრაპეციაში ფუძეები 10 სმ და 24 სმ-ია, ფერდი კი — 25 სმ; იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.

9.38. ტოლფერდა ტრაპეციაში ფერდი 41 სმ-ია, სიმაღლე — 40 სმ, შუამონაკვეთი კი — 45 სმ. იპოვეთ ფუძეები.

9.39. $ABCD$ მართკუთხა ტრაპეციაში $(AB\|CD)$ $AB=16$ სმ და $CD=10$ სმ, ხოლო ფერდი უდრის 8 სმ-ს. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი.

9.40. ტრაპეციაში, რომლის ფერდების სიგრძეებია 4 და 6, ჩახაზულია წრეწირი. გამოთვალეთ წრეწირის ცენტრიდან ტრაპეციის წვეროებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი.

9.41. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის შეღებულია 5 სმ და ერთ მათ კუთხეს ეყრდნობა შეფარდებით 1 : 2. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

9.42. მართკუთხედის თრი წვეროდან დიაგონალზე დაწვდებული პერპენდიკულარები ამ დიაგონალს ათ ტოლ მონაკვეთად ყოფს. მართკუთხედის ცალკე გვერდის სიგრძე არის $19\sqrt{2}$. იპოვეთ დიდი გვერდის სიგრძე.

9.43. წრეწირის რადიუსი უდრის 8 დმ-ს; AB ქორდა კი უდრის 12 დმ-ს. A წერტილზე გავლებულია მხები და B წერტილიდან — მისი პარალელური BC ქორდა. იპოვეთ მანძილი მხებსა და BC ქორდას შორის.

9.44. წრეწირის ქორდა არის 10 სმ. ქორდის ერთ ბოლოზე გავლებული წრეწირის მხები, ხოლო მეორეზე — ამ მხების პარალელური კვეთს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ მკვეთის შიგა პირველი 12 სმ.

9.45. R რადიუსის მქონე წრეწირში გავლებულია ქორდა, რომლის სიგრძეა $\frac{1}{2}R$. ქორდის ერთ ბოლოზე გავლებულია წრეწირის მხები, ხოლო მეორეზე — მხების პარალელური მკვეთი. იპოვეთ მანძილი მკვეთსა და მხებს შორის, თუ $R=20$.

9.46. იპოვეთ ქორდის სიგრძე თუ წრეწირის რადიუსია 9 და მანძილი ქორდის ერთი ბოლოდან ქორდის მეორე ბოლოზე გავლებულ მხებამდე უდრის 2-ს.

9.47. A წერტილი MN წრფიდან დაშორებულია 2 სმ-ით. წრეწირი, რომლის რადიუსი უდრის 16 სმ-ს, შემოხაზულია ისე, რომ გადის A წერტილზე და ეხება MN წრფეს. იპოვეთ მანძილი შეხებით მიღებულ წერტილსა და A წერტილს შორის.

9.48. ტოლფერდა ტრაპეციაა ფუძეებია 20 სმ და 12 სმ. იპოვეთ ამ ტრაპეციის დიაგონალი და ფერდი, თუ ცნობილია, რომ შემოხაზული წრეწირის ცენტრი მდებარეობს დიდ ფუძეზე.

9.49. წერტილი დაშორებულია წრეწირის ცენტრიდან 25 სმ-ით. ამ წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია თრი მხები. წრეწირის რადიუსი 7 სმ-ია. იპოვეთ მანილი შეხების წერტილთა შორის.

9.50. კრთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია თრი მხები. მხების სიგრძე უდრის 156 დმ-ს, მანძილი შეხების წერტილთა შორის კი 120 დმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

9.51. AC და CB ქორდებია: CD არის სიმაღლე $DE \parallel BC$. იპოვეთ შეფარდება $AE : BC$, თუ $AC : CB = 4 : 5$.

9.52. AC და CB ქორდებია; CD არის სიმაღლე; $DE \perp AC$ და $DF \perp CB$. იპოვეთ DE-სი და DF-ის სიგრძე, თუ $AC=75$ დმ და $BC=100$ დმ.

9.53. AB და CD არის თრი პარალელური ქორდა, რომელთაგან 15 სმ-ის ტოლი რადიუსის ძენარ წრეწირის ცენტრის სხივდასხვა მხარეზეა მოთავსებული. ქორდა $AB=18$ სმ-ს, ქორდა $CD=24$ სმ-ს. იპოვეთ ამ ქორდებს შორის მანძილი.

9.54. თრი პარალელური ქორდა AB და CD 30 სმ-ის ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირის O ცენტრის ერთ მხარეზეა მოთავსებული. ქორდა $AB=48$ სმ, ქორდა $CD=36$ სმ. იპოვეთ ამ ქორდებს შორის მანძილი.

9.55. პარალელური ქორდების სიგრძეა 40 დმ და 42 დმ, ხოლო მანძილი კი 22 დმ-ია. იპოვეთ რადიუსის სიგრძე.

9.56. მოცემულია თრი პარალელური წრფე, რომელთაგან ერთმანეთისაგან 15 დმ-ითაა დაშორებული. მათ შორის ერთ-ერთი წრფიდან 3 დმ-ის მანძილზე აღებულია M წერტილი, რომელზედაც გავლებულია ორივე წრფის მხები წრეწირი. იპოვეთ მანძილი ცენტრსა და M წერტილს შორის, თუ ეს წრეწირი ერთ-ერთ წრფეზე აღებულ.

9.57. ბაძაღლები დიამეტრის ერთი ბოლოდან მიიკ პარალელური ქორდის ბოლოებამდე არის 13 სმ და 84 სმ. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

9.58. წრეწირში AB ქორდის F შუაწერტილზე გავლებულია CD დიამეტრი. იპოვეთ AC მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB=10$ სმ, $CF=12$ სმ.

9.59. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა a და ფერდი — b. იპოვეთ შეხაზული წრეწირის რადიუსი.

9.60. ჰიპოტენუზა $AB=34$ სმ; კათეტი $BC=16$ სმ. იპოვეთ იმ ჰიპოტენუზის მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც ჰიპოტენუზისადმია ინვარიანტული მასი შეხაზწერტილიდან AC კათეტამდე.

9.61. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა a და ფერდი — b. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

9.62. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე 10 სმ-ია და ფერდი — 13 სმ. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის r რადიუსი და შემოხაზული წრეწირის R რადიუსი.

9.63. წრეწირზე, რომლის რადიუსია 3, შემოხაზულია ტოლფერდა სამკუთხედი. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ ფუძესთან მდებარე მახვილი კუთხე უდრის 30°.

9.64. AB არის წრეწირის დიამეტრი; BC მხებია; D არის AC წრფის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილი. მოცემულია: $AD=32$ სმ და $DC=18$ სმ. იპოვეთ რადიუსის სიგრძე.

9.65. წრეწირი ეხება მართკუთხა სამკუთხედის ფიდ კათეტს, ვიდის შუაწერტილში მდებარე კუთხის წვეროდან და მისი ცენტრი მდებარეობს სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ კათეტთა სიგრძეებია 6 სმ და 12 სმ.

9.66. ერთი წერტილიდან გამოსული მდებარეობს და მეორეთ შესაბამისად ტოლია 20 სმ და 10 სმ-ს; მეორეთ ცენტრიდან დაშორებულია 5 სმ-ით. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

9.67. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან იმ წერტილამდე, საიდანაც გამოდის მხები და მეორეთ, თუ მათი სიგრძე შეადგენს ტოლია 4 სმ და 6 სმ-ს, ხოლო მეორეთ ცენტრიდან დაშორებულია 12 სმ-ით.

9.68. წრეწირის O ცენტრის A წერტილიდან შეიძლება გავატაროთ ორი წრეწირის კვეთს M წერტილში. M წერტილზე გავლებული მხები A წერტილიდან გაყვანილ მხებებს კვეთს D და E წერტილებში. იპოვეთ DE მონაკვეთის სიგრძე, თუ წრეწირის რადიუსი 15 დმ, AO მანძილი კი უდრის 39 დმ-ს.

9.69. კათეტი $AC=15$ სმ; კათეტი $CB=8$ სმ. C ცენტრიდან CB რადიუსით შემოხაზულია წრეწირი, რომელიც ჰიპოტენუზას კვეთს D წერტილში. იპოვეთ BD-ს სიგრძე.

9.70. მართკუთხა სამკუთხედის ძირითა კუთხის წვეროდან საკმარისი კათეტის ტოლი რადიუსით შემოხაზულია წრეწირი ჰიპოტენუზას ყოფს 98 სმ-ისა და 527 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებიდ (საკლები კათეტის მხრიდან). იპოვეთ კათეტები.

9.71. ორი ურთიერთგადამკვეთი წრეწირის რადიუსებია 17 და 39; მათ ცენტრებს შორის მანძილია 44. იპოვეთ მათი საერთო ქორდის სიგრძე.

9.72. 18 სმ და 6 სმ რადიუსიანი წრეწირები ერთმანეთს გარედან ეხებიან. ერთი წრეწირის ცენტრიდან გავლებულია მეორე წრეწირის მხები და შეხების წერტილიდან გავლებული მათი საერთო მხების მონაკვეთის სიგრძე.

9.73. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ მათი საერთო გარე მხების სიგრძე (შეხების წერტილთა შორის მანძილი), თუ წრეწირების რადიუსებია 16 სმ და 25 სმ.

9.74. ორი წრეწირის რადიუსებია 27 სმ და 13 სმ, მათ ცენტრებს შორის მანძილი კი უდრის 50 სმ. იპოვეთ მათი საერთო მხების სიგრძე.

9.75. ერთმანეთის გარეთ მდებარე ორი წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი უდრის 65 დმ-ს; მათი საერთო გარე მხების სიგრძე 63 დმ-ია, საერთო შიგა მხების სიგრძე კი 25 დმ-ია. იპოვეთ რადიუსების სიგრძე.

9.76. მოცემულია ორი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია 5 სმ და 2 სმ. მათი საერთო გარე მხების სიგრძე $1\frac{1}{2}$-ჯერ მეტია მათ საერთო შიგა მხებზე. იპოვეთ ცენტრებს შორის მანძილი.

9.77. წრეწირისადმი საერთო წერტილიდან გავლებული მხები და მეორეთი ურთიერთპერპენდიკულარულია; მხები უდრის 12 სმ-ს, მეორეთის მიგა ნაწილი კი 10 სმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

9.78. წრეწირზე, რომლის რადიუსი 12 სმ-ია, შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფერდი უდრის 25 სმ-ს. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეები.

9.79. ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი უდრის 6 სმ-ს. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4 : 9.

9.80. წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეები უდრის 36 სმ და 1 მ-ს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

9.81. r-რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფუძეების შეფარდება არის $m : n$. იპოვეთ ამ ტრაპეციის გვერდები.

9.82. წრეწირის ერთი წერტილიდან გავლებულია 10 სმ და 12 სმ სიგრძის ორი ქორდა, რომლებიც მახვილ კუთხეს ქმნიან. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ მანძილი მეორე ქორდის შუაწერტილიდან დიდ ქორდამდე უდრის 4 სმ-ს.

9.83. წრეწირის რადიუსი უდრის r-ს. იპოვეთ იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც გავლებულია დიამეტრის ბოლოდან და ამ დიამეტრის პერპენდიკულარულ რადიუსს შუაზე ყოფს.

9.84. 25 სმ რადიუსის მქონე წრეწირის ქორდა უდრის 30 სმ-ს. იპოვეთ მანძილი ქორდის ერთ-ერთი ბოლოდან ამ ქორდით მოჭრილი უმცირესი რკალის შუაწერტილამდე.

9.85. საკუთხედის დიაგონალები 30 სმ და 25 სმ-ია. იპოვეთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე, თუ ფუძეა: 1) 25 სმ; 2) 11 სმ.

9.86. A და B წერტილები მდებარეობენ a წრფის ერთ მხარეს. სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში. მანძილი A და B წერტილებიდან ამ წრფემდე უდრის 2 სმ-ს და 3 სმ-ს. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ მანძილი A და B წერტილების გეგმილებს შორის 12 სმ-ია.

9.87. ABC მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში AB ჰიპოტენუზა გაგრძელებულია BC-ს ტოლ BD სიგრძეზე და D წერტილი შეერთებულია C-სთან. იპოვეთ ADC სამკუთხედის გვერდები, თუ კათეტი $BC=a$.

9.88. მოცემული წრფისადმი ერთი წერტილიდან გავლებულია პერპენდიკულარი და ორი დახრილი. იპოვეთ პერპენდიკულარის

სიგრძე, თუ დახრილები უდრის 41 სმ და 50 სმ, მათი პროექციები კი მოცემულ წრფეზე ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3 : 10.

9.89. პარალელოგრამის გვერდებია 15 სმ და 12 სმ. ერთ-ერთი დიაგონალი მისი გვერდის პერპენდიკულარულია. იპოვეთ დიაგონალების სიგრძეები.

9.90. მოცემული წერტილიდან წრფისადმი გაველებულია ორი დახრილი. ერთი მათგანის სიგრძეა 13 სმ, მისი გეგმილი წრფეზე 12 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე დახრილის სიგრძე, თუ ის წრფესთან ადგენს 30°-იან კუთხეს.

9.91. მოცემული წერტილიდან წრფისადმი გაველებულია ორი დახრილი; ერთი მათგანის სიგრძეა 17 სმ და მისი გეგმილი წრფეზე 15 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე დახრილის გეგმილი წრფეზე, თუ იგი წრფესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს.

9.92. წრფიდან 6 მ-ით დაშორებული წერტილიდან მისადმი გაველებულია ორი დახრილი, რომელთაგან ერთი 13 მ-ია. მეორე დახრილი წრფესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ მანძილი დახრილის ფუძეებს შორის (ორი ამოხსნა).

9.93. B წერტილიდან მოკვეთილი წრფისადმი გაველებულია BC პერპენდიკულარი და BA დახრილი; AC-ზე აღებულია D წერტილი და BD წრფე გაგრძელებულია AC-ს პერპენდიკულარულ AE წრფესთან გადაკვეთამდე E წერტილში. იპოვეთ AE-ს სიგრძე, თუ $BA=53$ დმ, $AD=8$ დმ და $DC=20$ დმ.

9.94. სამკუთხედში ფუძე 60 მ-ია. სიმაღლე 12 მ, ფუძის მედიანა კი 13 მ. იპოვეთ ფერდები.

9.95. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების შეფარდება, თუ მართი კუთხის წვეროდან გაველებული სიმაღლე და მედიანა ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 40 : 41.

9.96. მართკუთხა ტრაპეციაში ნაკრები დიაგონალი უდრის ლატერალურ ფერდს. იპოვეთ დიდი დიაგონალის სიგრძე, თუ დახრილი ფერდი უდრის a-ს, ხოლო მცირე ფუძე უდრის b-ს.

9.97. $ABCD$ ტრაპეციის BD მცირე დიაგონალი AD და BC ფუძეების პერპენდიკულარულია; A და C მახვილი კუთხეების ჯამი უდრის 90°-ს. ფუძეები $AD=a$ და $BC=b$. იპოვეთ AB და CD ფერდების სიგრძე.

9.98. ABC მართკუთხა სამკუთხედში კათეტი $AC=15$ სმ, კათეტი $BC=20$ სმ; AB ჰიპოტენუზაზე მოზომილია 4 სმ-ია ტოლი სიგრძის მონაკვეთი AD და D წერტილი შეერთებულია C-სთან, **იპოვეთ CD.**

9.99. ABC არის მართკუთხა სამკუთხედი C მართი კუთხით. AB ჰიპოტენუზის გაგრძელებაზე მოზომილია BC კათეტის ტოლი მონაკვეთი BD და D წერტილი შეერთებულია C-თან. იპოვეთ CD, თუ $BC=7$ სმ და $AC=24$ სმ.

9.100. ბლაგვკუთხა სამკუთხედში ერთ-ერთი გვერდი 16 სმ-ია; მისი ბოლოებიდან გავლებული სიმაღლეები ბლაგვი კუთხის წვეროდან დაშორებულია მანძილებით 2 სმ და 3 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი ორი გვერდი.

9.101. ABC სამკუთხედში AC გვერდის C ბოლოდან მისადმი გავლებული პერპენდიკულარი AB გვერდის გაგრძელებასთან გადაკვეთამდე D წერტილში. იპოვეთ BD და CD, თუ $AB=45$, $BC=39$ და $AC=42$.

9.102. მართკუთხა ABC სამკუთხედის კათეტი $AC=6$ დმ, ხოლო კათეტი $BC=12$ დმ. B ცენტრიდან BC რადიუსით შემოხაზულია წრეწირი და მისადმი გავლებულია ჰიპოტენუზის პარალელური მხები (მანათან მხები და სამკუთხედი ჰიპოტენუზის სხვადასხვა მხარეზეა). BC კათეტი გაგრძელებულია გაველებულ მხებამდე გადაკვეთამდე. იპოვეთ რამდენზეა გაგრძელებული კათეტი.

9.103. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 15 დმ და 20 დმ. იპოვეთ მანძილი ნაშთი ნახაზული წრეწირის ცენტრიდან ჰიპოტენუზამდე გაველებულ სიმაღლემდე.

9.104. სამკუთხედის ორი გვერდი შესაბამისად ტოლია 6 სმ და 8 სმ. ამ გვერდებზე დაშვებული მედიანები ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე გვერდი.

9.105. მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულ და მასზე შემოხაზულ წრეწირთა რადიუსები შესაბამისად 2 სმ და 5 სმ ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

9.106. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები შესაბამისად ტოლია 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ მანძილი ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრიდან მასზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრამდე.

9.107. კვადრატის ორი წვერო $5\sqrt{2}$-რადიუსიან წრეწირზე ძევს. ხოლო ორი დანარჩენი კი ამ წრეწირის მხებზეა. იპოვეთ ამ კვადრატის დიაგონალის სიგრძე.

9.108. წრეწირი ეხება კვადრატის ორ მოსაზღვრე გვერდს, ხოლო მის ორ დანარჩენ გვერდს ყოფს 2 სმ და 23 სმ-ის ტოლ ნონკვეთებად. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

9.109. მართკუთხა ტრაპეციის ფუძეები უდრის 17 დმ და 25 დმ-ს, უდიდესი ფერდი კი 10 დმ-ია. ამ ფერდის შუაწერტილიდან მისადმი გავლებულია პერპენდიკულარი მეორე ფერდის გაგრძელებასთან გადაკვეთამდე. იპოვეთ ამ პერპენდიკულარის სიგრძე.

9.110. მართკუთხა ABC სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე დაშვებულ სიმაღლეზე, როგორც დიამეტრზე, შემოხაზულია წრეწირი, რომელიც CA და CB კათეტებზე იძლევა m და n შიგა მოხაზვეთებს. იპოვეთ კათეტების სიგრძე ($m=12$ და $n=3$).

9.111. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 75 დმ და 100 დმ. ჰიპოტენუზის მოხაზვეთებზე, რომლებიც სიმაღლის ვალვებით მიიღება, სამკუთხედის მხარეზე აგებულია ტანგენციალური ტრაპეცია. იპოვეთ ამ ტანგენციალურ ტრაპეციაში მოქცეული კათეტების მონაკვეთების სიგრძეები.

ამოცანები დამტკიცებაზე

9.112. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა ტრაპეციაში დიაგონალების კვადრატების სხვაობა უდრის ფუძეთა კვადრატების სხვაობას.

9.113. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ორი გვერდის კვადრატების სხვაობა შესაბამ გვერდზე მათი გეგმილების კვადრატების სხვაობის ტოლია.

9.114. M არის ABC სამკუთხედის AD სიმაღლის რომელიმე წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $AB^2-AC^2=BM^2-CM^2$.

9.115. დაამტკიცეთ, რომ კათეტების კვადრატების შეკრება უდრის ჰიპოტენუზაზე აღებული ამ კათეტების გეგმილების შეფარდების.

9.116. დამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის კვადრატის შეფარდება ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის კვადრატთან უდრის ჰიპოტენუზის შეფარდებას მეორე კათეტის გეგმილთან ჰიპოტენუზაზე.

9.117. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზული წრეწირის დიამეტრი არის ტრაპეციის პარალელური გვერდებია საშუალო პროპორციული.

9.118. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალის კვადრატი უდრის ფერდის ავადრატს, დამატებული ფუძეების ნამრავლი.

9.119. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ტრაპეციის დიაგონალების კვადრატების ჯამი უდრის ფერდების კვადრატების ჯამს პლუს ფუძეების გორიზონტალებული ნამრავლი.

9.120. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს, წაწერ სადრომ გარე მხები მათი დიამეტრების საშუალო პროპორციულია.

9.121. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის შებრუნებულის კვადრატი უდრის კათეტების შებრუნებულების კვადრატების ჯამს.

9.122. CD არის ABC მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე. ვთქვათ R, R_1 და R_2 არია შესაბამისად ABC, BDC და ACD სამკუთხედებზე შეხოხაზული წრეწირების რადიუსები. დაამტკიცეთ, რომ $R^2=R_1^2+R_2^2$.

9.123. CD არის ABC მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე. ვთქვათ r, r_1 და r_2 არის შესაბამისად ABC, BDC და ACD სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები. დაამტკიცეთ, რომ $r^2=r_1^2+r_2^2$.

9.124. ABC მართკუთხა სამკუთხედის ($\angle B=90^\circ$) BC კათეტის D შუაწერტილი შეერთებულია A წვეროსთან. დაამტკიცეთ, რომ $AC^2-AD^2=3\left(\frac{BC}{2}\right)^2$.

9.125. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის კუბი მეტია კათეტების კუბების ჯამზე.

9.126. $\angle MON=90^\circ$. ერთ-ერთ გვერდზე აღებულია A წერტილი, ხოლო მეორეზე სამი B, C, და D წერტილი ისე, რომ $OA=OB=BC=CD$. დაამტკიცეთ, რომ ΔABC მსგავსია ΔDBA-სი.

9.127. მართკუთხა ABC სამკუთხედის AC კათეტი სამჯერ მეტია AB კათეტზე. AC კათეტი K და F წერტილებით გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. დაამტკიცეთ, რომ $\angle AKB+\angle AFB+\angle ACB=90^\circ$

9.128. BC არის ABC ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე. CD სიმაღლეა. დაამტკიცეთ, რომ $2AB^2+BC^2=BD^2+2AD^2+3CD^2$.

9.129. მოცემული r-რადიუსიანი წრეწირისადმი გაყვანებულია ორი პარალელური მხები. მესამე მხები წრეწირს C წერტილში ეხება და პარალელურ მხებებს A და B წერტილებში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ $r^2=AC\cdot BC$.

9.130. D და E წერტილები შესაბამისად ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის AB და BC გვერდებზე მდებარეობენ. AD არის AB გვერდის მესამედი; BE კი BC გვერდის მეოთხედია. დაამტკიცეთ, რომ DE მონაკვეთი უდრის შემოხაზული წრეწირის რადიუსს.

9.131. ვთქვათ a და b სამკუთხედის გვერდებია, რომელთა შეფიასებები ერთიერთპერპენდიკულარულია. დაამტკიცეთ, რომ ამ სამკუთხედის მესამე გვერდი $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$-ის ტოლია.

9.132. მოცემულია AB დიამეტრის მქონე ნახევარწრეწირი, რომლის ცენტრია O წერტილი. AO და OB რადიუსებზე, როგორც დიამეტრებზე ნახევარწრეწირის შიგნით აგებულია ორი ნახევარწრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ იმ წრეწირის დიამეტრი, რომელიც ეხება სამივე ნახევარწრეწირს, ისე შეფარდება მოცემული ნახევარწრეწირის რადიუსს, როგორც 2:3.

9.133. B წერტილი მდებარეობს A და C წერტილებს შორის. AB და AC-ზე როგორც დიამეტრებზე აგებულია წრეწირები. B წერტილში გავლებული AC-ს პერპენდიკულარული წრფე დიდ წრეწირს D

წერტილში კვეთს. C წერტილიდან გავლებულია მცირე წრეწირის მხები CK. დაამტკიცეთ, რომ $CO=CK$.

9.124. BD წარმოადგენს ABC სამკუთხედის სიმაღლეს. A წერტილზე გავლებულ AB-ს პერპენდიკულარულ წრფეზე გადადებულია DC-ს ტოლი AN მონაკვეთი. C წერტილზე გავლებულ BC-ს პერპენდიკულარულ წრფეზე გადადებულია AD-ს ტოლი CM მონაკვეთი. დაამტკიცეთ, რომ $BM=BN$.

9.125. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის შუაწერტილიდან პიპოტენუზაზე დაშვებული მართობი. დაამტკიცეთ, რომ პიპოტენუზის მიღებული მონაკვეთებია კვადრატებია უდრიან მეორე კათეტის კვადრატს.

9.126. წრეწირი გავლებულია ოთხი ურთიერთგადამკვეთი ურთიერთპერპენდიკულარული წრფით. დაამტკიცეთ, რომ ამ ქორდების კვადრატების ჯამი მეტია დიამეტრის კვადრატზე.

9.127. წრეწირში გავლებულია ოთხი ურთიერთგადამკვეთი ურთიერთპერპენდიკულარული ქორდა. დაამტკიცეთ, რომ ქორდების წონაკვეთების კვადრატების ჯამი დიამეტრის კვადრატის ტოლია.

9.128. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში ფერდების მედიანების გაორკეცებული ჯამი მეტია გასამკეცებულ ფუძეზე.

§ 10. პოსინუსების თეორემა. სინუსების თეორემა. სამკუთხედების ამოხსნა

ამოცანების განმარტებები

10.1. იპოვეთ სამკუთხედის წესიერ გვერდია სიგრძე, თუ ორი სხვა გვერდი ერთმანეთთან $60°$-იან კუთხეს ადგენს და მათი სიგრძეები შესაბამისად უდრის 5-ს და 8-ს.

10.2. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე გვერდის სიგრძე, თუ ორი სხვა გვერდი ერთმანეთთან $120°$-იან კუთხეს შეადგენს და მათი სიგრძეები შესაბამისად უდრის 3-ს და 5-ს.

10.3. პარალელოგრამის გვერდები უდრის 23 სმ-ს და 11 სმ-ს, დიაგონალები კი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 3. იპოვეთ დიაგონალები.

10.4. პარალელოგრამის დიაგონალები უდრის 17 სმ და 19 სმ, გვერდები კი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 3. იპოვეთ გვერდები.

10.5. პარალელოგრამის დიაგონალები ფუძის 12 სმ და 14 სმ, გვერდების სხვაობა კი 4 სმ-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

10.6. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები და დიაგონალები, თუ დიდი გვერდი უდრის ფერდს დიაგონალს, გვერდების ჯამია 3 სანა, დიაგონალების სხვაობა კი 2 სა.

10.7. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე უდრის $4\sqrt{2}$, ხოლო ფერდის მედიანა — 5. იპოვეთ ფერდის სიგრძე.

10.8. ტოლფერდა სამკუთხედში გავლებულია ფერდის წედიანა, იპოვეთ სამკუთხედის ფუძე, თუ ფერდი უდრია 4 სმ, ხოლო მედიანის სიგრძე 3 სმ.

10.9. სამკუთხედის გვერდებია: 16, 18 და 26. იპოვეთ უდიდესი გვერდის მიდიანა.

10.10. სამკუთხედის ორი გვერდია 7 და 11; მესამე გვერდის მედიანა უდრის 6. იპოვეთ მესამე გვერდი.

10.11. სამკუთხედის ერთი გვერდი არის 26 დმ, მისი მედიანა კი — 16 დმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ორი სხვა გვერდი, თუ მათი შეფარდებია 3 : 5.

10.12. სამკუთხედის ფუძე უდრის 23 ს; ფერდების მედიანები კი უდრის 15 და $22\frac{1}{2}$-ს. იპოვეთ მესამე მედიანა.

10.13. BD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა, იპოვეთ AD და DC მონაკვეთები, თუ AB 10 მ, $BC=12$ მ და $AC=20$ მ.

10.14. BD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა. იპოვეთ BC გვერდი, თუ $AD:DC=8:5$ და $AB=16$ ს.

10.15. BD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა. იპოვეთ AC გვერდი, თუ $AB:BC=2:7$ და $DC-AD=1$ მ.

10.16. სამკუთხედის პერიმეტრია 32. A კუთხის ბისექტრისა ყოფს BC გვერდს 3-ის და 5-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე.

10.17. ძირთკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედის კათეტი უდრის a-ს. როგორ ნაწილებად ყოფს მას მოპირდაპირე კუთხის ბისექტრისა?

10.18. სამკუთხედია ბისექტრისა, რომელიც 9 სმ და 6 სმ-ის ტოლ გვერდებს შორის გადია, მესამე გვერდს ყოფს მონაკვეთებად, რომელთაგან ერთ-ერთი მოცემული გვერდებიდან ერთ-ერთის ტოლია. იპოვეთ მესამე გვერდი.

10.19. იპოვეთ კათეტები, თუ მათი კუთხის ბისექტრისა პიპოტენუზას ყოფს 15 სმ და 20 სმ-ის ტოლ ნაწილებად.

10.20. ძირთკუთხა სამკუთხედის ბისექტრისა კათეტს ყოფს m და n მონაკვეთებად ($m>n$). იპოვეთ მეორე კათეტი და პიპოტენუზა.

10.21. ძირთკუთხა სამკუთხედს კათეტებია 24 სმ და 18 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის მახვილ კუთხეთა ბისექტრისები.

10.22. პარალელოგრამის ერთ გვერდი 5 სმ-ია, დიაგონალები კი უდრის 40 სმ-ს და 74 სმ-ს. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცემულ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

10.23. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების მედიანები ტოლია $\sqrt{52}$ და $\sqrt{73}$. იპოვეთ სამკუთხედის ჰიპოტენუზა.

10.24. სამკუთხედში, რომლის გვერდებია 9 სმ და 15 სმ, ჩახაზულია პარალელოგრამი ისე, რომ მისი ერთი გვერდი სიგრძით 6 სმ მდებარეობს სამკუთხედის ფუძეზე, ხოლო დიაგონალები შესაბამისად სამკუთხედის გვერდების პარალელურია. იპოვეთ პარალელოგრამის მეორე გვერდი და სამკუთხედის ფუძე.

10.25. სამკუთხედში ჩახაზულია პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 3 სმ და 5 სმ, ხოლო დიაგონალი 6 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ ცნობილია, რომ პარალელოგრამის დიაგონალები შესაბამისად სამკუთხედის გვერდების პარალელურია, ხოლო მისი მცირე გვერდი სამკუთხედის ფუძეზე მდებარეობს.

10.26. ABC სამკუთხედში ჩახაზულია $ADEF$ რომბი ისე, რომ წვეროები D, E და F მდებარეობს შესაბამისად AB, BC და AC გვერდებზე. იპოვეთ BE და EC მონაკვეთები, თუ $AB=14$ სმ, $BC=12$ სმ და $AC=10$ სმ.

10.27. სამკუთხედში ჩახაზულია რომბი, რომლის გვერდი არის m. სამკუთხედსა და რომბს ერთი კუთხე საერთო აქვთ, ხოლო რომბში ამ კუთხის პირდაპირ მდებარე წვეროთ მოთავსებულია სამკუთხედის გვერდზე და ყოფს მას მონაკვეთებად, რომელთა სიგრძეებია p და q. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

10.28. სამკუთხედში ჩახაზულია რომბი ისე, რომ მისი ერთი კუთხე საერთო აქვთ, ხოლო მოპირდაპირე წვეროთ სამკუთხედის გვერდს ყოფს 2 : 3 შეფარდებით; რომბის დიაგონალები უდრის m და n. იპოვეთ სამკუთხედის ის გვერდები, რომელთა შორის მდებარეობს სამკუთხედისა და რომბის საერთო კუთხე.

10.29. ცნობილია $AB=15$ მ, $AC=21$ მ და $BC=24$ მ. D არის CB ნაკვეთის შუაწერტილი. იპოვეთ მონაკვეთები, რომლებადაც AD ჭრილი ყოფს BC ჭრილს.

10.30. მოცემულ წრეწირს ეხება მასზე მცირე და ერთმანეთის ტოლი ორი სხვა წრეწირი ერთი შიგნიდან, მეორე გარედან. შეხების წერტილთა შორის მანძილი 60 სმ-ია. მცირე წრეწირების რადიუსებია r, დიდისა R. იპოვეთ მანძილი მცირე წრეწირების ცენტრებს შორის.

10.31. ორივე კათეტიდან თანაბრად დაშორებული წერტილი, რომელიც ჰიპოტენუზაზე მდებარეობს, ჰიპოტენუზას ყოფს 30 სმ და 40 სმ ტოლ მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

10.32. სამკუთხედის გვერდები უდრის 51 სმ, 85 სმ და 104 სმ. გავლებულია წრეწირი, რომელიც ეხება ორივე მცირე გვერდს, ხოლო ცენტრი მდებარეობს უდიდეს გვერდზე. რამდენ ნაწილებად იყოფა უდიდესი გვერდი ცენტრით?

10.33. ტოლფერდა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი სიმაღლეს ყოფს 12 : 5 შეფარდებით; ფერდი უდრის 60 სმ-ს. იპოვეთ ფუძე.

10.34. ტოლფერდა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი შეადგენს სიმაღლის $\frac{2}{7}$ ნაწილს, ხოლო ამ სამკუთხედის პერიმეტრი უდრის 56 სმ-ს. იპოვეთ მისი გვერდები.

10.35. ტოლფერდა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი ფუძეზე დაშვებულ სიმაღლეს ყოფს 5 სმ და 3 სმ მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

10.36. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე უდრის 30 სმ, ხოლო ფერდი 39 სმ. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

10.37. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის წვეროსთან მდებარე კუთხეა 120°, ხოლო ფერდი — a. ჩახაზულია წრეწირი. იპოვეთ ამ წრეწირის რადიუსი.

10.38. ტოლფერდა სამკუთხედის სიმაღლე უდრის 20 სმ-ს, ხოლო ფუძე ისე შეეფარდება ფერდს, როგორც 4 : 3. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

10.39. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში ფერდი $AB=10$ მ და ფუძე $AC=12$ მ; A და C კუთხეების ბისექტრისები გადაიკვეთება D წერტილში. იპოვეთ, BD-ს სიგრძე.

10.40. სამკუთხედის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს ყოფს 8 სმ და 10 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის ყველა გვერდი, თუ მასში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი ბისექტრისას ყოფს 3 : 2 შეფარდებით.

10.41. სამკუთხედ ABC-ში მოცემულია a, b და c გვერდები. BD არის B კუთხის ბისექტრისა; O არის BD-სა და C კუთხის ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ შეფარდება $OD : OB$.

10.42. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 15 სმ და 20 სმ. მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია სიმაღლე და ბისექტრისა. რა ნაწილებად დაიყო ჰიპოტენუზა?

10.43. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის კათეტებია 15 დმ და 20 დმ, მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია სიმაღლე და დმ კუთხეების ბისექტრისები. რომელსაც ეს სიმაღლე კათეტებთან შეადგენს. იპოვეთ ბისექტრისებს შორის მოთავსებული ჰიპოტენუზის მონაკვეთი.

10.44. მართკუთხა ABC სამკუთხედში კათეტი $BC=6$ სმ და ჰიპოტენუზა $AB=10$ სმ. გავლებულია ABC კუთხის და მისი მოსაზღვრე კუთხის ბისექტრისები, რომლებიც AC კათეტსა და მის გაგრძელებას D და E წერტილებში გადაკვეთს. იპოვეთ DE-ს სიგრძე.

10.45. ABC მაკუთხა სამკუთხედია; BD სიმაღლეა; AE არის A კუთხის ბისექტრისა; EF პერპენდიკულარულია AC-ზე. იპოვეთ EF, თუ $BD=30$ სმ და $AB:AC=7:8$.

10.46. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფუძეა 12 სმ და სიმაღლე 8 სმ, ჩახაზულია წრეწირი. ამ წრეწირისადმი გავლებულია სამკუთხედის ფუძის პარალელური მხები. იპოვეთ მხების ის მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც მოკვეთილია სამკუთხედის გვერდების შორის.

10.47. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი ტოლია 10 სმ, ფუძე კი — 12 სმ. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირისადმი გავლებულია სამკუთხედის სიმაღლის პარალელური მხები. რომლებიც ამ სამკუთხედს ჩამოჭრიან ორ ტრაპეციას მარჯვენა სამკუთხედს. იპოვეთ ამ სამკუთხედების გვერდები.

10.48. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის სიგრძეა 48, ფერდისა კი — 30. იპოვეთ მანძილი შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების ცენტრებს შორის.

10.49. სამკუთხედის გვერდები ისე წევრადრებია ერთმანეთს, როგორც $5:4:3$. ამ სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი. იპოვეთ შეფარდება გვერდების იმ მონაკვეთებისა, რომლებადაც ისინი იყოფიან შეხების წერტილებით.

10.50. ორი ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდები ტოლი სიგრძისაა, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია. ფუძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $9:40$; ფერდის სიგრძე ორის 41 დმ. იპოვეთ ფუძეების სიგრძე.

10.51. ABC სამკუთხედის AB გვერდზე მოცემულია წერტილი D. იპოვეთ CD-ს სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ $AB=14$, $BC=37$, $AC=15$ და $AD=14$.

10.52. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძე და ფერდი შესაბამისად ტოლია 5 სმ და 20 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხის ბისექტრისა.

10.53. ABC სამკუთხედში $\angle A$ სიდიდით ორჯერ მეტია $\angle B$-ზე. იპოვეთ BC, თუ $AB=15$ და $AC=12$.

10.54. ქორდა დიამეტრს კვეთს α კუთხით და იყოფა ორ მონაკვეთად სიგრძეებით 12 სმ და 7 სმ. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან ქორდამდე, თუ $\operatorname{tg}\alpha=2$.

10.55. ქორდა დიამეტრს კვეთს α კუთხით და ყოფს მას ორ მონაკვეთად სიგრძით 12,2 სმ და 6 სმ. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან ქორდამდე, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{31}$.

10.56. R-რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის

ფუძესთან მდებარე მახვილი კუთხის სიდიდეა α. იპოვეთ ამ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ $R=9$, $\sin\alpha=\frac{3}{4}$.

10.57. ორი მიგა შეხების წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილია d. დიდი წრეწირის ცენტრიდან მცირე წრეწირისადმი გავლებული მხები ცენტრთა ხაზთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ დიდი წრეწირის რადიუსი, თუ $d=36$, $\sin\alpha=\frac{1}{6}$.

10.58. წრეწირის დიამეტრის ბოლოდან გავლებული a სიგრძის ქორდა დიამეტრთან ადგენს α სიდიდის კუთხეს. ქორდის მეორე ბოლოდან გავლებულია წრეწირისადმი მხები და ვიგრძელებულია დიამეტრის გაგრძელებასთან გადაკვეთამდე. იპოვეთ მხების მონაკვეთის სიგრძე შეხების წერტილიდან მის დიამეტრის გაგრძელებასთან გადაკვეთამდე, თუ $a=203$, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

10.59. R-რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია ტრაპეცია ისე, რომ მისი დიდი ფუძე ემთხვევა დიამეტრს, ხოლო მცირე ფუძე უდრის α სიდიდის რკალს. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ $R=32(2-\sqrt{3})$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

10.60. R და r-რადიუსიანი წრეწირების ცენტრთა წრფესა და საერთო გარე მხებს შორის კუთხის სიდიდე α-ს ტოლია. იპოვეთ ცენტრებს შორის მანძილი, თუ $R=10$, $r=6$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

10.61. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. გავლებულია მათი ორი საერთო გარე მხები, რომლებიც α კუთხეს ქმნიან. დიდი წრეწირის რადიუსია R. იპოვეთ მცირე წრეწირის რადიუსი, თუ $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{11}$, $R=16$.

10.62. ორი ვარე შეხების წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილია d. გავლებულია მათი ორი საერთო გარე მხები, რომლებიც α სიდიდის კუთხეს ქმნიან. იპოვეთ $R\cdot r$, სადაც R და r ამ წრეწირთა რადიუსებია, თუ $d=8$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

10.63. წრეწირში, რომლის რადიუსია $18\frac{59}{77}$ ჩახაზულია სამკუთხედი. ამ სამკუთხედის ორი კუთხე α და β სიდიდის კუთხეებს ჰქმნიან.

იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{3}{5}$, $\sin\frac{\beta}{4}=\frac{8}{17}$.

10.64. r-რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფერდი მცირე ფუძესთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, თუ $r=18$, $\sin\alpha=\frac{3}{4}$.

10.65. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფუძეა a, ხოლო ფუძესთან მდებარე კუთხე — α, ჩახაზულია წრეწირი. იპოვეთ ამ წრეწირის რადიუსი, რომელიც ეხება ჩახაზულ წრეწირს და სამკუთხედის ფერდებს, თუ $a=16$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

10.66. სამკუთხედში, რომლის გვერდია a, ხოლო ამ გვერდის მოპირდაპირე კუთხე — α, ჩახაზულია წრეწირი. მის ცენტრზე და მოცემულ გვერდის ბოლოებზე გავლებულია მეორე წრეწირი. იპოვეთ მისი რადიუსი, თუ $a=10$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{7}$.

10.67. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია a და b, ხოლო მახვილი კუთხე β-ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე, თუ $a=72$, $b=66$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=23$.

10.68. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია a და b, ხოლო მისი მახვილი კუთხე β-ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის ფერდი, თუ $a=70$, $b=50$, $\cos\beta=\frac{1}{8}$.

10.69. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია a და b, ხოლო მახვილი კუთხის სიდიდე β-ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ $a=16$, $b=6$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$.

10.70. მართკუთხა ტრაპეციის d დიაგონალი ფერდის მართობულია. ხოლო ტრაპეციის მახვილი კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე, თუ $d=80$, $\cos\alpha=\frac{1}{8}$.

10.71. მართკუთხა ტრაპეციის d დიაგონალი მართობულია ფერდის, ტრაპეციის მახვილი კუთხე α-ს ტოლია, იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფუძე, თუ $d=45$, $\sin\alpha=\frac{4}{9}$.

10.72. მართკუთხა ტრაპეციის d დიაგონალი ფერდის მართობულია, ხოლო ტრაპეციის მახვილი კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფერდი, თუ $d=25$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

10.73. გამოთვალეთ მართკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი დიაგონალი ტოლია d-ს, ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხე α-ს ტოლია. $d=\frac{15\sqrt{2}}{\cos 10^\circ}$, $\alpha=70^\circ$.

10.74. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების ჯამი უდრის m-ს, მახვილი კუთხე კი α-ს ტოლია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $m=56$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

10.75. მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხე α-ს ტოლია, ხოლო მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი უდრის r-ს. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $r=6$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

10.76. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი უდრის b-ს, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე α-ს ტოლია. გამოთვალეთ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი, თუ $b=28$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{7}$.

10.77. მოცემული α სიდიდის კუთხის შიგნით მდებარეობს წერტილი, რომელიც კუთხის წვეროდან დაშორებულია a მანძილით, ხოლო კუთხის ერთი გვერდიდან b მანძილით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან კუთხის მეორე გვერდამდე, თუ $\alpha=65$, $b=25$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

10.78. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა a და ფუძესთან მდებარე კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ ფერდის მედიანა, თუ $\alpha=2C$, $\operatorname{tg}\alpha=4$.

10.79. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე უდრის α-ს, ხოლო სიმაღლე m-ით მეტია ჩახაზული წრის რადიუსზე. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, თუ $m=18$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{8}$.

10.80. $ABCD$ რომბის AB გვერდის გაგრძელებაზე აღებულია M წერტილი, ისე რომ B წერტილი A და M წერტილებს შორისაა. $MD=MC$ და $\operatorname{tg}\angle MDC=1{,}6$. იპოვეთ MB, თუ რომბის გვერდია 30.

10.81. $ABCD$ რომბის AB გვერდის გაგრძელებაზე აღებულია M წერტილი, ისე რომ B წერტილი A და M წერტილებს შორისაა. $MD=MC$ და $\operatorname{tg}\angle MDC=1{,}6$. იპოვეთ AB, თუ $BM=14$.

10.82 $ABCD$ რომბის AB ვერტიკალის გაგრძელებაზე აღებულია M წერტილი, ისე რომ B მდებარეობს A და M წერტილებს შორის. $MD=MC$ და $\operatorname{tg}\angle MDC=\frac{8}{5}$. იპოვეთ $MA:MB$.

ამოცანები დამტკიცებაზე

10.83. დაამტკიცეთ, რომ თუ ABC სამკუთხედში $AC^2+BC^2=AB^2$, მაშინ $\angle C$ მართია.

10.84. a, b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო m_a—a გვერდისადმი გავლებული მედიანა. დაამტკიცეთ, რომ $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

10.85. BD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა. დაამტკიცეთ, რომ $AB>AD$ და $BC>DC$.

10.86. BD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა, ხოლო O ჩახაზული წრეწირის ცენტრია. დაამტკიცეთ, რომ $BO>OD$.

10.87. დაამტკიცეთ, რომ თუ D წერტილი ეკუთვნის ABC სამკუთხედის AC გვერდს და $AD:DC=AB:BC$, მაშინ BD წარმოადგენს B კუთხის ბისექტრისას.

10.88. ABC სამკუთხედის A წვეროსთან მდებარე გარე კუთხის ბისექტრისა BC გვერდის გაგრძელებას კვეთს D წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}$.

10.89. ABC სამკუთხედის შიგა და გარე კუთხეების ბისექტრისებია, რომლებიც გადაკვეთილია A წეროდან, BC წრფეს კვეთენ შესაბამისად D და D_1 წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{CD_1}{D_1B}=\frac{CD}{DB}$.

10.90. ABC ტოლფერდა სამკუთხედია $(AB=BC)$. AD ბისექტრისაა. დაამტკიცეთ, რომ თუ $BD=AC$, მაშინ $\angle B=36°$.

10.91. ABC ტოლფერდა სამკუთხედია $(AB=BC)$. AD ბისექტრისაა. დაამტკიცეთ, რომ თუ $BD=AC$, მაშინ $AD=AC$.

10.92. დაამტკიცეთ რომ, თუ სამკუთხედში სრულდება $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}$ დამოკიდებულება, მაშინ ეს სამკუთხედი ტოლფერდაა.

10.93. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სამკუთხედის ჩაწერიანების კვადრატების ჯამი შეადგენს სამკუთხედის ყველა გვერდის კვადრატების ჯამის 75%-ს.

10.94. სამკუთხედის ერთი კუთხე $30°$-ის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ამ კუთხის პირდაპირ მდებარე გვერდი სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის ტოლია.

10.95. ABC სამკუთხედის BK მედიანა და CD ბისექტრისა გადაიკვეთებიან P წერტილში, დაამტკიცეთ, რომ $\frac{PC}{PD}-\frac{AC}{BC}=1$.

10.96. ABC სამკუთხედის A კუთხის ბისექტრისა გადაკვეთს წრეწირს, რომელიც ამ სამკუთხედშია შემოხაზული, K წერტილში. დამტკიცეთ, რომ AK მოთავსებულია პრიზმის სიგრძე AB-ზე ეფრის AB და AC გვერდების ნახევარჯამს.

10.97. დაამტკიცეთ, რომ თუ ABC სამკუთხედის გვერდები a, b და c აკმაყოფილებს პირობას $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$, მაშინ კუთხე B უდრის $60°$-ს.

10.98. ABC სამკუთხედში $\angle B=\angle A+\varphi$, $\angle C=\angle A+2\varphi$, $(\varphi>0)$. დაამტკიცეთ, რომ $AB-BC=2R\sin\varphi$, სადაც R სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.

10.99. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების კვადრატების ჯამი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ამ ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

10.100. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის შედიანი კუთხეს ეფრს ისეთ ნაწილებად, რომელთა სიგრძეები წესიერისად ფეხებთან მდებარე კუთხეების სიდიდეების პროპორციულია.

10.101. დაამტკიცეთ, რომ თუ ABC სამკუთხედში $AC^2-AB^2=2BC\cdot R$, სადაც R შემოხაზული წრეწირის რადიუსია, მაშინ $\angle B-\angle C=90°$.

10.102. ABC სამკუთხედის გვერდებია $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, დამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sin\left(\angle B+\frac{\angle C}{2}\right):\sin\frac{\angle C}{2}=\frac{a+b}{c}.$$

10.103. სამკუთხედის ერთი წვეროდან გამოსული ხაზიდან და შედეგად ამ წვეროსთან მდებარე კუთხეს ეფრს სამ ტოლ ნაწილად. დამტკიცეთ, რომ ასეთი სამკუთხედი ბრთკუთხაა.

10.104. მოცემულია ორი კონცენტრული წრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ ერთი წრეწირის რომელიმე წერტილიდან მეორე წრეწირის დიამეტრის ბოლოებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი არ არის დამოკიდებული არც წერტილის და არც დიამეტრის არჩევაზე.

10.105. ABC სამკუთხედში, რომლის C კუთხე $60°$-ის ტოლია, გავლებულია AP და BQ ბისექტრისები. ვთქვათ O გადაკვეთის წერტილია. დამტკიცეთ, რომ $OP=OQ$.

§ 11. ფიგურათა ფართობები

ამოცანები გამოთვლაზე

11.1. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები, თუ ისინი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 4 : 9, ხოლო ფართობი უდრის 36 მ²-ს.

11.2. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი ფართობი უდრის 144 სმ²-ს, ხოლო ორი გვერდის შეფარდება უდრის 1 : 2.

11.3. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები, თუ მისი პერიმეტრი 74 დმ-ია, ფართობი კი 3 ჰა?

11.4. იპოვეთ ფართობი ნარიკუთხა სამკუთხედისა, რომლის ჰიპოტენუზა უდრის 25 სმ და ერთი კათეტი 7 სმ-ს.

11.5. მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი უდრის 120 სმ², კათეტები კი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 9 : 40. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

11.6. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ფუძე 120 მ-ია, ფერდი კი 100 მ.

11.7. იპოვეთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ჰიპოტენუზა უდრის a-ს.

11.8. იპოვეთ კვადრატის ფართობი, თუ მისი დიაგონალი 14 სმ-ია.

11.9. მოცემული კვადრატის დიაგონალზე, როგორც გვერდზე, აგებულია მეორე კვადრატი. იპოვეთ ამ კვადრატების ფართობების შეფარდება.

11.10. ორი კვადრატის ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3 : 5. იპოვეთ მცირე კვადრატის გვერდი, თუ დიდი კვადრატის გვერდი 5 სმ-ის ტოლია.

11.11. სამკუთხედის პერიმეტრია 10 სმ, ხოლო მისი ფართობი კი — 3 სმ². იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის მსგავსი სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი ფართობია 12 სმ².

11.12. მოცემული a და b კათეტებით იპოვეთ ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე.

11.13. პარალელოგრამში ერთი გვერდისადმი გავლებული სიმაღლე სამჯერ ნაკლებია ამ გვერდზე. პარალელოგრამის ფართობი უდრის 48 სმ². იპოვეთ ეს გვერდი და სიმაღლე.

11.14. პარალელოგრამის a და b გვერდები ადგენენ 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

11.15. პარალელოგრამის ფართობი უდრის S-ს, ხოლო მისი გვერდების სიგრძეებია a და b. იპოვეთ პარალელოგრამის მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა, თუ $S=15$, $a=6$, $b=5$.

11.16. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ მისი კუთხეებიდან შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1 : 5, ხოლო გვერდი უდრის a-ს.

11.17. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 10 სმ-ია, მახვილი კუთხე 30°-ია.

11.18. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 12 სმ-ია, მცირე დიაგონალი კი 13 სმ-ია.

11.19. პარალელოგრამსა და მართკუთხედს შესაბამად ტოლი გვერდები აქვს. იპოვეთ პარალელოგრამის მახვილი კუთხე, თუ მისი ფართობი უდრის მართკუთხედის ფართობის ნახევარს.

11.20. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა, თუ მისი გვერდის სიგრძე დიაგონალების სიგრძეების საშუალო გეომეტრიულია.

11.21. რომბის მახვილი კუთხე φ-ს ტოლია, ხოლო მასში ჩახაზული წრის რადიუსი უდრის r-ს. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ $\sin\varphi=\frac{1}{4}$, $r=2$.

11.22. ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობია S, ხოლო ფუძეზე დაშვებული სიმაღლეა სიგრძე უდრის h-ს. იპოვეთ ფუძესთან შედგენილი კუთხის გრადუსული ზომა, თუ $S=11$, $h=\sqrt{11}$.

11.23. ტრაპეციის ფუძეები უდრის 3 სმ და 16 სმ, 3 სმ სიგრძის ფერდი ფუძესთან ადგენს 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

11.24. ტრაპეციის ფუძეებია 10 სმ და 36 სმ, ხოლო ფართობი 225 სმ²-ია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.

11.25. ტრაპეციის ფუძე უდრის 26 სმ-ს, სიმაღლე — 10 სმ-ს, ხოლო ფართობი 200 სმ²-ია. იპოვეთ ტრაპეციის მეორე ფუძე.

11.26. ტრაპეციის სიმაღლე 20 სმ-ის ტოლია, ფართობი კი 400 სმ²-ია. იპოვეთ ტრაპეციის შუამონაკვეთი.

11.27. ტრაპეციის ფართობი უდრის 36 სმ²-ს, სიმაღლე კი 2 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები, თუ ისინი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 4 : 5.

11.28. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, თუ მისი დიაგონალი უდრის 8 სმ-ს და დიდ ფუძესთან შეადგენს 45°-იან კუთხეს.

11.29. იპოვეთ იმ ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, რომლის ფუძეები უდრის 42 სმ და 54 სმ-ს, დიდ ფუძესთან მდებარე კუთხე კი 45°-ია.

11.30. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეები უდრის 51 სმ და 69 სმ-ს, ფერდი კი 41 სმ-ია. იპოვეთ ფართობი.

11.31. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიდი ფუძე 44 მ-ია, ფერდი — 17 მ და დიაგონალი — 39 მ. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

11.32. მართკუთხა ტრაპეციაში ერთი კუთხე უდრის 30°-ს. ფუძეების ჯამი უდრის m-ს და ფერდების ჯამი ტოლია n. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

11.33. ABC სამკუთხედის ფართობი 18 სმ²-ია. D წერტილი AC გვერდზე აღებულია ისე, რომ $DC=2AD$. იპოვეთ ABD და DBC სამკუთხედების ფართობები.

11.34. D წერტილი ძევს ABC სამკუთხედის AB გვერდზე. როგორ შეეფარდება AD ნაწილეთი DB-ს, თუ ACD სამკუთხედის ფართობი სამჯერ ნაკლებია ABC სამკუთხედის ფართობზე?

11.35. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე პიპოტენუზას 37 სმ-ისა და 18 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებად ყოფს.

11.36. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 6 მ და 8 მ. მართი კუთხის წვეროდან პიპოტენუზაზე დაშვებულია პერპენდიკულარი. იპოვეთ მიღებულ სამკუთხედთა ფართობები.

11.37. მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი ტოლია $2\sqrt{3}$ სმ²-ის. იპოვეთ მისი სიმაღლე, რომელიც დაშვებულია პიპოტენუზაზე, თუ ეს სიმაღლე მართ კუთხეს ყოფს $1:2$ შეფარდებით.

11.38. მართკუთხა სამკუთხედში კათეტები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $3:4$, სიმაღლე სამკუთხედის ფართობს ყოფს ნაწილებად, რომელთა სხვაობაა 84 დმ². იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის ფართობი.

11.39. $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი AB ფუძის პარალელური EF წრფით გაყოფილია შუაზე. იპოვეთ მონაკვეთი AF, თუ $AD=28$ სმ და $BC=12$ სმ.

11.40. ტრაპეციის ფართობი მისი დიაგონალით იყოფა შეფარდებით $3:7$. როგორი შეფარდებით იყოფა ის შუახაზით?

11.41. დიაგონალი ტრაპეციის ფართობს ყოფს შეფარდებით $3:7$. როგორი შეფარდებით გაყოფს ამავე ტრაპეციის ფართობს ზედა ფუძის ბოლოდან ფერდის პარალელურად გავლებული წრფე?

11.42. ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია 3 სმ და $\sqrt{41}$ სმ. M და N წერტილები მდებარეობენ ფერდებზე ისე, რომ MN ფუძეების პარალელურია და ტრაპეციის ფართობს ზუსტად ყოფს. იპოვეთ MN.

11.43. იპოვეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდისა და სიმაღლის სიგრძეთა ჯამი უდრის m-ს.

11.44. გამოთვალეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდისა და სიმაღლის სიგრძეთა ჯამი უდრის $3\sqrt{7\sqrt{3}+12}$.

11.45. ტოლფერდა სამკუთხედის გვერდებია $AB=BC=50$ სმ და $AC=60$ სმ. გავლებულია AE და CD სიმაღლეები და D და E წერტილები შეერთებულია. იპოვეთ DBE სამკუთხედის გვერდები.

11.46. ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდის მედიანის სიგრძე ტოლია m-ის და ფუძესთან α სიდიდის კუთხეს შეადგენს. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი, თუ $m=10$, $\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

11.47. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფართობია S, ფერდების მედიანების შორის შეკმნილი იმ კუთხის სიდიდე, რომელიც ფუძის შუაპერპენდიკულარზე მდებარეობს, α-ს ტოლია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფუძის სიგრძე, თუ $S=900$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$.

11.48. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი სამიღლე 36 სმ-ია, ხოლო ფერდები 55 სმ და 60 სმ-ია.

11.49. პარალელოგრამის ერთი გვერდი უდრის 2 მ, მეორე კი 16 დმ; მაძღილი დიდ გვერდებს შორის უდრის 8 დმ. იპოვეთ მახვილი მეორე გვერდებს შორის.

11.50. პარალელოგრამში სიმაღლეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $2:3$. იპოვეთ მოსაზღვრე გვერდების შეფარდება.

11.51. პარალელოგრამის პერიმეტრია 70 სმ. იპოვეთ მისი გვერდები და ფართობი, თუ პარალელოგრამის სიმაღლეები 2 სმ-ისა და 5 სმ-ის ტოლია.

11.52. პარალელოგრამის პერიმეტრი უდრის 48 სმ, მისი სიმაღლეები კი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $5:7$. იპოვეთ მათი შეკავშირისი გვერდები.

11.53. პარალელოგრამის სიმაღლეებია h_1 და h_2, ხოლო მათ შორის კუთხე არის α, იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ $h_1=13$, $h_2=4$, $\sin\alpha=\frac{13}{17}$.

11.54. ABC სამკუთხედში $AB=16$ სმ, $BC=20$ სმ; A წერტილიდან გავლებული სიმაღლე უდრის 5 სმ-ს. იპოვეთ C წერტილიდან გავლებული სიმაღლე.

11.55. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე უდრის 30 დმ; სიმაღლე კი 20 დმ-ია. იპოვეთ ფერდის დაშვებული სიმაღლე.

11.56. ABC სამკუთხედში $AB=3AC$. იპოვეთ B და C წვეროებიდან გავლებულ სიმაღლეთა შეფარდება.

11.57. სამკუთხედში გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $4:5:6$. იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლეების შეფარდება.

11.58. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე უდრის 3 დმ-ს, ფერდზე დაშვებული სიმაღლე კი 4 დმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის გვერდები.

11.59. ABC სამკუთხედში მოცემულია ორი გვერდი: $BC=16$ მ და $AC=12$ მ და შესაბამისი სიმაღლეების ჯამი $AD+BE=14$ მ. იპოვეთ AD და BE.

11.60. სამკუთხედის ორი გვერდი შესაბამისად უდრის 6 სმ-ს და 3 სმ-ს. იპოვეთ მესამე გვერდი, თუ ცნობილია, რომ მოცემულ გვერდებზე დაშვებული სიმაღლეებია ნახევარწრის მესამე სიმაღლეა.

11.61. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ მისი დიაგონალებია 72 სმ და 40 სმ.

11.62. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე h-ის ტოლია, ხოლო ფერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე h_1-ის. იპოვეთ $\frac{1}{\cos\alpha}$, სადაც α სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხის სიდიდეა, თუ $h=10$, $h_1=4$.

11.63. იპოვეთ რომბის სიმაღლე, თუ მისი დიაგონალებია 16 მ და 12 მ.

11.64. იპოვეთ რომბის გვერდი, თუ ცნობილია რომ მისი დიაგონალები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1 : 2, რომბის ფართობი კი 12 სმ²-ია.

11.65. მოცემული სამკუთხედის ფართობის რა ნაწილს შეადგენს სამკუთხედის ფართობი, რომელიც მწვერვალებად შეალონაკვეთითაა მოცემული?

11.66. სამკუთხედში გავლებულია ყველა შუამონაკვეთი. მოცემული სამკუთხედის ფართობის რა ნაწილს შეადგენს შეალონაკვეთებით შედგენილი სამკუთხედის ფართობი?

11.67. პარალელოგრამის გვერდების შეაწერტილები შეერთებულია მიმდევრობით. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი, თუ პარალელოგრამის ფართობი 24 სმ²-ია.

11.68. სამკუთხედის ფუძის პარალელური წრფე ამ სამკუთხედის ფართობს ყოფს 2 : 1 შეფარდებით (წვეროს მხრიდან). რა შეფარდებით ყოფს ეს წრფე გვერდებს?

11.69. სამკუთხედის გვერდის პარალელური წრფე ამ სამკუთხედს ტოლდიდ ნაწილებად ყოფს. იპოვეთ მცირე სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ მოცემული სამკუთხედის პერიმეტრია 52 სმ.

11.70. სამკუთხედის სიმაღლე უდრის h-ს. წვეროდან რა მანძილზეა ამ სამკუთხედის ფართობის შუაზე გამყოფი და ფუძის პარალელური წრფე?

11.71. სამკუთხედის ფუძის პარალელური წრფე მის ფერდს ყოფს შეფარდებით 5 : 3 (წვეროს მხრიდან), ხოლო ფართობს — ნაწილებად, რომელთა სხვაობა 78 სმ²-ია. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

11.72. მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი პიპოტენუზის პერპენდიკულარული წრფით გაყოფილია შუაზე. იპოვეთ, რა მანძილითაა დაშორებული ეს წრფე უმცირესი მახვილი კუთხის წვეროდან, თუ დიდი კათეტი უდრის 20 მ-ს.

11.73. სამკუთხედის ფერდი გაყოფილია შეფარდებით 2 : 3 : 4 (წვეროს მხრიდან) და დაყოფის წერტილებზე გავლებულია ფუძის პარალელური წრფეები. რა შეფარდებით გაიყო სამკუთხედის ფართობი?

11.74. სამკუთხედის ფუძის პარალელური ორი წრფით გაყოფილია სამ ტოლდიდ ნაწილად. რა შეფარდებით დაიყო მისი ფერდებად წვეროს ნახიდან?

11.75. სამი მსგავსი მრავალკუთხედის ფართობთა ჯამია 252 სმ², პერიმეტრები კი შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 3 : 4. იპოვეთ თითოეული მრავალკუთხედის ფართობი.

11.76. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობა, თუ მოცემულია მისი სამი გვერდი: 1) 13, 14, 15; 2) 5, 6, 9; 3) 17, 65; 80; 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6.

11.77. სამკუთხედის გვერდები ტოლია: 25 დმ, 29 დმ, 36 დმ. იპოვეთ უმცირესი სიმაღლე.

11.78. იპოვეთ იმ სამკუთხედის უდიდესი სიმაღლე, რომლის გვერდებია: 113; 112; 15.

11.79. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები: 1) თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 26 : 25 : 3, სამკუთხედის ფართობი კი უდრის 9 სმ²-ს; 2) თუ გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, ფართობი კი უდრის 144 სმ²-ს.

11.80. იპოვეთ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის დიაგონალია 17 სმ და ამ დიაგონალის ერთ მხარეზე დებებარე გვერდებია 10 სმ და 21 სმ, ხოლო მეორე მხარეზე დებებარე გვერდები კი უდრის 8 სმ და 15 სმ-ს.

11.81. ურთიერთგადამკვეთი ორი წრეწირის რადიუსებია 17 სმ და 39 სმ, მათი ცენტრებს შორის 44 სმ-ია. იპოვეთ საერთო ქორდის სიგრძე.

11.82. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი ერთი გვერდი 51 სმ-ია, დიაგონალები კი უდრის 40 სმ და 74 სმ-ს.

11.83. სამკუთხედის ორი გვერდითა და ფართობით იპოვეთ მესამე გვერდი: 1) $a=17$, $b=28$, $s=210$; 2) $a=7$, $b=11$, $s=\sqrt{1440}$.

11.84. სამი წრეწირი, რომელთა რადიუსები შესაბამისად ტოლია 6 სმ, 7 სმ, 5 სმ წყვილ-წყვილად ეხებიან ერთმანეთს. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებია ამ წრეწირთა ცენტრები.

11.85. სამი ერთმანეთის ტოლი r რადიუსის მქონე წრეწირიდან თითოეული ეხება ორ დანარჩენს. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შედგენილია იმ წრეწირთა საერთო გარე მხებებით.

11.86. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდი შესაბამისად უდრის 27 სმ და 29 სმ-ს, მესამე გვერდის შუალინა კი უდრის 26 სმ-ს.

11.87. იპოვეთ ფართობი სამკუთხედისა, რომლის შეალინები ერთიანერთი პერპენდიკულარულია და 9-ისა და 8-ის ტოლია.

11.88. ტოლფერდა სამკუთხედის შედიანები უდრის 15, 15 და 18-ს. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

11.89. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის და ჩახაზული წრეწირის R და r რადიუსები სამკუთხედისათვის, რომლის გვერდებია: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

11.90. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი უდრის 6-ს, სიმაღლე კი 4-ს. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

11.91. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე 48 დმ-ია, ფერდი კი 30 დმ. იპოვეთ შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირის რადიუსები და მანძილი მათ ცენტრებს შორის.

11.92. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხის სიდიდე უდრის α-ს, ხოლო სიმაღლის სიგრძე m-ით მეტია ჩახაზული წრის რადიუსზე. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $m = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

11.93. ნარკვეთია სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტი ტოლია 15 სმ, ხოლო ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია 3 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

11.94. მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი უდრის 24 სმ², ხოლო პიპოტენუზაა 10 სმ. იპოვეთ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

11.95. იპოვეთ სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსთა ნამრავლი, თუ სამკუთხედის გვერდები უდრია 26 სმ, 28 სმ და 30 სმ.

11.96. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების შეკრებება უდრის 1,05-ს, შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირებია რადიუსებს შორის სხვაობა 17 დმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

11.97. წრეწირის ქორდა, რომელიც 16 სმ-ის ტოლია, დაშორებულია ცენტრიდან 15 სმ-ით. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოხაზულია ამ წრეწირზე, თუ კაცათ, რომ სამკუთხედის პერიმეტრი უდრის 200 სმ-ს.

11.98. წრეწირის ერთი წერტილიდან გაველებულია 9 სმ და 17 სმ სიგრძის ორი ქორდა. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ მანძილი ქორდების წაგანერტილს შორის უდრის 5 სმ.

11.99. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მოცემულია შემოხაზული წრეწირის რადიუსი R და ორი კუთხე 45° და 60°.

11.100. წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი უდრის a-ს და მახვილი კუთხე 30°-ს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

11.101. წრეწირზე, რომლის რადიუსი 2-ის ტოლია, შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია 20-ის ტოლი ფართობით. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძის სიგრძე.

11.102. ტოლფერდა ტრაპეციის მახვილი კუთხე უდრის α-ს, ხოლო მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია r. განსაზღვრეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; $r = 1{,}1$.

11.103. r-რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია ტრაპეცია, რომლის ფერდები დიდ ფუძესთან ადგენენ α და β კუთხეებს. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე, თუ $r = \frac{13}{6+\sqrt{15}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{1}{4}$.

11.104. r-რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია ტრაპეცია, რომლის ფერდები დიდ ფუძესთან ადგენენ α და β კუთხეებს. გამოთვალეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $r = \sqrt{5}$, $\sin\alpha = 0{,}25$; $\sin\beta = 0{,}2$.

11.105. r-რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია ტრაპეცია, რომლის ფერდები დიდ ფუძესთან ადგენენ α და β სიდიდის კუთხეებს. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ $r = 2{,}25$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{7}$.

11.106. წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედის პერიმეტრი უდრის 60 სმ-ს, მისი ფართობი კი 240 სმ²-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

11.107. წრეწირზე, რომლის რადიუსი უდრის 25 სმ-ს, შემოხაზულია მრავალკუთხედი, რომლის ფართობი უდრის 20 დმ²-ს. იპოვეთ მისი პერიმეტრი.

11.108. R რადიუსის მქონე ორი წრეწირის ცენტრებით O_1 და O_2 წერტილებში ერთმანეთს ეხება. A, B, C და D წერტილებში მათ ეხება წრფე იმგვარად, რომ $AB = BC = CD$. იპოვეთ O_1ADO_2 თთხკუთხედის ფართობი.

11.109. სამკუთხედის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომლის ცენტრი სამკუთხა ზოლის გვერდზეა და რომელიც ორ დანარჩენ გვერდს ეხება.

11.110. R რადიუსის მქონე წრეწირში ჩახაზულია სამკუთხედი, რომლის ორი კუთხეა 15° და 60°. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, თუ $R = \sqrt[4]{108}$.

11.111. AB და CD ორგადამკვეთი ქორდებით მოჭრილი რკალებს გრადუსული ზომებია შესაბამისად 120° და 90°. M არის AD და BC ქორდების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ AMB და CMD სამკუთხედების ფართობების, თუ მათი კამი შეადგენს 100 მ²-ს.

11.112. R-რადიუსიან წრეწირში ცენტრის ერთ მხარეზე გავლებულია ორი პარალელური ქორდა. ერთი მათგანი ჰიმავს 60°-იან რკალს, მეორე — 120°-იანს. მათი ბოლოები შეერთებულია. იპოვეთ მიღებული ტრაპეციის ფართობი.

11.113. ორი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია R და r, გარედან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ ამ ტანგენციის ფართობი, რომელიც შექმნილია ამ წრეწირთა ორი საერთო მხებით და შეხების წერტილებს შემაერთებელი ჭრილებით.

11.114. მართკუთხა სამკუთხედში მაჯვილი კუთხის ბისექტრისა მთებრადაბრე კათეტს ყოფს 4 სმ და 5 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

11.115. ABC სამკუთხედში $AB=44$, BC 37 და $AC=15$, D წერტილი ძევს AB გვერდზე. იპოვეთ CD, თუ $AD=14$.

11.116. სამკუთხედის ორი გვერდი ტოლია 12 სმ და 14 სმ, ხოლო მისი ფართობი 84 სმ². იპოვეთ მესამე გვერდი.

11.117. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ფუძე არის a, ხოლო ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე ტოლია იმ მონაკვეთის სიგრძის, რომელიც ერთმანეთს ფუძისა და ფერდის შუა წერტილებს.

11.118. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ ფუძე არის a, და მასთან მდებარე კუთხეები 30° და 45°-ია.

11.119. მართი კუთხის შიგნით მოცემულია M წერტილი, რომელიც კუთხის გვერდებიდან დაშორებულია 4 სმ და 8 სმ. M წერტილზე გავლებული წრფე მართი კუთხიდან ჩამოკვეთს სამკუთხედს, რომლის ფართობი შეადგენს 100 სმ². იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

11.120. a და b კათეტების მქონე მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია კვადრატი, რომელსაც სამკუთხედთან საერთო მართი კუთხე აქვს. იპოვეთ კვადრატის ფართობი.

11.121. იპოვეთ იმ კვადრატის ფართობი, რომელიც ჩახაზულია a გვერდის მქონე წესიერ სამკუთხედში.

11.122. სამკუთხედის გვერდები უდრის 10 სმ, 17 სმ და 21 სმ. ამ სამკუთხედში ისეთნაირად არის ჩახაზული 24 სმ პერიმეტრის მქონე მართკუთხედი, რომ მისი ერთი გვერდი წარმოადგენს სამკუთხედის უდიდეს გვერდზე. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

11.123. სამკუთხედის ფუძე 30 სმ-ია, ხოლო სიმაღლე 10 სმ. მასში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის ფართობი 63 სმ²-ია. იპოვეთ ამ მართკუთხედის გვერდები.

11.124. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფუძესთან მდებარე კუთხის სიდიდეა α, ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი დიდი გვერდი სამკუთხედის ფუძეზე ძევს. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდების სიგრძეები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც $8:5$, სამკუთხედის ფუძის სიგრძეა 22, ხოლო $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$.

11.125. სამკუთხედში, რომლის ფართობი 100-ის ტოლია, გავლებულია ფუძის პარალელური წრფე. მიღებული მცირე სამკუთხედის

ფართობი 64-ია. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის სამი წვეროს მკრივე სამკუთხედის წვეროებს ემთხვევა, ხოლო მეოთხე წვერო დიდი სამკუთხედის ფუძეზე ძევს.

11.126. სამკუთხედს მასში ჩახაზულ რომბთან აქვს საერთო კუთხე. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ სამკუთხედის ფართობი არის Q, ხოლო სამკუთხედის გვერდები, რომელთა შორის მოთავსებულია საერთო კუთხე, ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $m:n$.

11.127. ABC სამკუთხედში გავლებულია BD და CE სიმაღლეები და D და E წერტილები შეერთებულია. იპოვეთ ADE სამკუთხედის ფართობის შეფარდება ABC სამკუთხედის ფართობთან: 1) თუ $\angle A=45°$; 2) $\angle A=30°$.

11.128. მოცემულია ABC სამკუთხედის გვერდები: $AB=15$, $AC=14$ და $BC=13$. B კუთხის ბისექტრისა გაგრძელებულია წერტილამდე C წერტილიდან AC გვერდისადმი გავლებულ პერპენდიკულართან გადაკვეთამდე E წერტილში. იპოვეთ CE-ს სიგრძე.

11.129. სამკუთხედის სიმაღლის სიგრძე ტოლია 4-ის, იგი სამკუთხედის ფუძეს ყოფს ორ ნაწილად, რომელთა სიგრძეთა შეფარდებაა $1:3$. იპოვეთ იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც სიმაღლის პარალელურია და სამკუთხედს ყოფს ორ ტოლდიდ ფიგურად.

11.130. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებზე, რომლის პიპოტენუზა არის 9, სამკუთხედის გარეთ აგებულია კვადრატები. ამ კვადრატების ცენტრები შეერთებულია ერთმანეთთან. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის ფართობი.

11.131. ACB და ADB ტოლი მართკუთხა სამკუთხედები მოთავსებულია საერთო AB ჰიპოტენუზის ერთ მხარეზე; ამასთანავე, $AD=BC=12$ სმ და $AC=BD=16$ სმ. იპოვეთ მოკლებული სამკუთხედების საერთო ნაწილის ფართობი.

11.132. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეების ჯამი m-ის ტოლია, ხოლო მაჯვილი კუთხის სიდიდე უდრის α-ს. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ $m=24$, $\alpha=15°$.

11.133. რომბში ჩახაზულია წრეწირი, ხოლო ამ წრეწირში — კვადრატი. იპოვეთ რომბის მაჯვილი კუთხის გრადუსული ზომა, თუ კვადრატის ფართობი ოთხჯერ ნაკლებია რომბის ფართობზე.

11.134. 30°-იანი მაჯვილი კუთხის მქონე რომბში ჩახაზულია წრეწირი, ხოლო წრეწირში — კვადრატი. იპოვეთ რომბის ფართობის შეფარდება კვადრატის ფართობთან.

11.135. იპოვეთ რომბის სიმაღლე, თუ მისი ფართობია 96სმ², ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალი 12 სმ-ია.

11.136. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 12 სმ-ია, მცირე დიაგონალი კი უდრის 13 სმ-ს.

11.137. $ABCD$ პარალელოგრამში გვერდი $AB=37$ სმ; დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან AD გვერდზე დაშვებული პერპენდიკულარი მას ყოფს მონაკვეთებად: $AE=26$ სმ და $ED=14$ სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

11.138. რომბია დიაგონალების სიგრძეა 150 სმ და 200 სმ. მისი ბლაგვი კუთხის წვეროდან, გატარებულია სიმაღლეები და მათი ბოლოებს შეერთებულია. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის ფართობი.

11.139. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, რომლის ფუძეები უდრის 12 სმ და 20 სმ, დიაგონალები კი ურთიერთპერპენდიკულარულია.

11.140 იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, თუ მისი დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია და სიმაღლე უდრის h-ს.

11.141. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, რომლის ფუძეებია 10 სმ და 26 სმ, დიაგონალები კი პერპენდიკულარულია ფერდებისაღმი.

11.142. $ABCD$ ტრაპეციის ფუძეებია BC და AD, ხოლო O დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობი, თუ AOD და BOC სამკუთხედების ფართობებია შესაბამისად 36 და 9.

11.143. ტრაპეციის დიაგონალებია 20 და 15, სიმაღლე 12. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

11.144. მართკუთხა ტრაპეციის d დიაგონალი ფერდია მაჩთობულია, ხოლო მახვილი კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $d=3\sqrt{2}$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

11.145. ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზულია 5 სმ რადიუსის მქონე წრეწირი. ტრაპეციის ზედა ფუძე ძის სიმაღლეზე ორჯერ ნაკლებია. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

11.146. ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზულია წრეწირი. შეხების წერტილით ტრაპეციის ერთ-ერთი ფერდი იყოფა 1 სმ და 4 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

11.147. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია a და b, ხოლო მახვილი კუთხე β-ს ტოლია. გამოთვალეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $a=22$, $b=12$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{5}$.

11.148. წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი უდრის 3 სმ-ს და მახვილი კუთხე 30°-ს, იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

11.149. ტოლფერდა ტრაპეციაში ფერდი შეამონაკვეთის ტოლია, ტრაპეციის პერიმეტრი უდრის P-ს, ხოლო მახვილი კუთხე α-ს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $P=48$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

11.150. წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი უდრის 72 სმ², ხოლო ტრაპეციის სიმაღლე 2-ჯერ ნაკლებია მის ფერდზე. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

11.151. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, რომლის ფუძეებია 142 სმ და 89 სმ, დიაგონალები კი უდრის 120 სმ და 153 სმ-ს.

11.152. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალი შუახე ყოფს ტრაპეციის ბლაგვ კუთხეს. ტრაპეციის მცირე ფუძე ტოლია 3 სმ-ის, ხოლო ტრაპეციის პერიმეტრია 42 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

11.153. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეების და ფერდის შეფარდებაა 10 : 4 : 5, მისი ფართობი 112 სმ²-ია. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი.

11.154. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 21 სმ და 9 სმ, ხოლო სიმაღლეა 8 სმ. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

11.155. R-რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია ტრაპეცია, რომლის ფერდი ჩრდილი ფუძის ტოლია, ხოლო ამ ფუძით მოქმედი რკალის გრადუსული ზომა α-ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ წრეწირის ცენტრი ტრაპეციის შიგნით ძევს, $R=18$ და $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

11.156. სამკუთხედის ფუძე არის 30 სმ, ხოლო ფერდები — 26 სმ და 28 სმ. სამკუთხედის სიმაღლე გაყოფილია 2 : 3 შეფარდებით (სამკუთხედის წვეროს მხრიდან), გაყოფის წერტილზე კი გავლებულია ფუძის პარალელური წრფე. იპოვეთ მიღებული ტრაპეციის ფართობი.

11.157. $ABCD$ ოთხკუთხედში M არის AD გვერდის შუაწერტილი. მოცემულია: $MB \perp AB$, $MC \perp CD$; $AD=50$ სმ; $AB=15$ სმ და $CD=7$ სმ. იპოვეთ $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობი.

11.158. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძის შუაწერტილიდან ფერდზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიგრძე h-ის ტოლია და ფერდს შუახე ყოფს. ტრაპეციის ბლაგვი კუთხის სიდიდეა α. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $h=5$, $\sin 2\alpha=-\frac{1}{10}$.

11.159. $ABCD$ ოთხკუთხედში მოცემულია: $AB=26$ სმ, $BC=30$ სმ, $CD=17$ სმ, $AD=25$ სმ და დიაგონალი $AC=28$ სმ. იპოვეთ ოთხკუთხედის ფართობი და BD დიაგონალი.

11.160. კვადრატში, რომლის გვერდი ტოლია 4, ორი მოსაზღვრე გვერდის შუაწერტილები შეერთებულია ერთმანეთთან და მოპირდაპირე წვეროსთან. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის ფართობი.

11.161. კვადრატში, რომლის გვერდის სიგრძეა $\sqrt{4\sqrt{3}+6}$, ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი, რომლის ერთ-ერთი წვერო კვადრატის წვეროს ემთხვევა. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

11.162. კვადრატში, რომლის გვერდია a, ჩახაზულია ძირეზ კვადრატი ისე, რომ მისი წვეროები პირველი კვადრატის თითოეულ გვერდს ყოფს შესაბამებით $p:q$. გამოთვალეთ ჩაახაზული კვადრატის ფართობი.

11.163. კვადრატის გვერდის სიგრძე უდრის a-ს. მასში ჩახაზულია ისეთი კვადრატი, რომლის გვერდი მოკეცილი კვადრატის გვერდთან ადგენს α-ს ტოლ კუთხეს. იპოვეთ ჩაახაზული კვადრატის ფართობი, თუ $a=6$, $\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$.

11.164. პარალელოგრამის გვერდებია a და b, ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხე უდრის α-ს. გამოსთვალეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ $a=6$, $b=4$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$.

11.165. პარალელოგრამის დიაგონალებია d_1 და d_2, ხოლო ნაკლები კუთხე უდრის α-ს. გამოთვალეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ $d_1=5$, $d_2=5$, $\operatorname{tg}\alpha=4$.

ამოცანები დამტკიცებაზე

11.166. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის კვერდები ამ გვერდებზე დაშვებული სიმაღლეების უკუპროპორციულია.

11.167. პარალელოგრამში a და b გვერდებისადმი გავლებული სიმაღლეებია h_a და h_b. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$.

11.168. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამში ტოლდება სამაღლე შეესაბამება მკრთე კვერდს.

11.169. ABC სამკუთხედში გავლებულია AD მედიანა. დაამტკიცეთ, რომ ABD და ACD სამკუთხედები ტოლდიდია.

11.170. ABC სამკუთხედში BD ნედიანის F შუაწერტილი შეერთებულია A და C წვეროებთან. დაამტკიცეთ, რომ AFD, CFD, BGF და ABF ტოლდიდი სამკუთხედებია.

11.171. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფუძეების შუაწერტილებზე გამავალი წრფე, ნაკ ორ ტოლდიდ ნაწილად ყოფს.

11.172. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის შუა მონაკვეთის შუაწერტილში გამავალი და ფუძის გადამკვეთი წრფე ამ ტრაპეციას ორ ტოლდიდ ნაწილად ყოფს.

11.173. ტრაპეციას დიაგონალები ყოფენ ოთხ ნაწილად. დაამტკიცეთ, რომ ფერდებთან მიმდებარე ნაწილები ერთმანეთის ტოლდიდია.

11.174. $ABCD$ პარალელოგრამში მისი ერთი წვერო შეერთებულია მოპირდაპირე გვერდების შუაწერტილებთან და მოპირდაპირე წვეროსთან. დაამტკიცეთ, რომ ამ გზით მიღებული ოთხი სამკუთხედი ტოლდიდია.

11.175. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ორ სამკუთხედს თითო ტოლი კუთხე აქვს, მაშინ მათი ფართობების შეფარდება ამ კუთხეთა შემადგენელი გვერდების ნამრავლის შეფარდების ტოლია.

11.176. ვთქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებში $\angle A+\angle A_1=180^\circ$. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}$.

11.177. ABC სამკუთხედში BD და CE სიმაღლეებია. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

11.178. დაამტკიცეთ, რომ თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდისა, მაშინ სამკუთხედების ფართობების შეფარდება ამ გვერდებით შეკრული კუთხეების სინუსების შეფარდების ტოლია.

11.179. დაამტკიცეთ, რომ ისეთი სამკუთხედის ფართობი, რომლის ორი გვერდი m-ისა და n-ის ტოლია, არ აღემატება $\frac{mn}{2}$-ს.

11.180. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი არ აღემატება $\frac{a^2+b^2}{4}$, სადაც a და b სამკუთხედის გვერდებია.

11.181. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი არ აღემატება $\frac{1}{2}(a^2+b^2-ab)$, სადაც a და b სამკუთხედის გვერდებია.

11.182. $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. DAO და DOC სამკუთხედები ტოლდიდია. დაამტკიცეთ, რომ BAO და BCO სამკუთხედები ასევე ტოლდიდია.

11.183. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი ტოლია $\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha$, სადაც c ჰიპოტენუზაა, ხოლო α მახვილი კუთხეა.

11.184. დაამტკიცეთ, რომ მოცემული ჰიპოტენუზის მქონე მართკუთხა სამკუთხედებს შორის უდიდესი ფართობი აქვს ტოლფერდა სამკუთხედს.

11.185. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან ფერდებამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა, რას უდრის იგი? რა შეიცვლება მიღებულებთ, თუ წერტილს ფუძის გაგრძელებაზე ავიღებთ?

11.186. O წერტილი ტოლფერდა სამკუთხედის ნებისმიერი შიგა წერტილია, დაამტკიცეთ, რომ ამ წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე მანძილების ჯამი არ არის დამოკიდებული O წერტილის მდებარეობაზე. რას უდრის ეს ჯამი?

11.187. ძართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე აგებული ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი ტოლია შეტანილი სამკუთხედის ფართობზე. დაამტკიცეთ, რომ კათეტების შეფარდებაა $\sqrt{3}$-ის ტოლია.

11.188. სამკუთხედის ფუძის შეუწყვეტილიდან გავლებულია გვერდების პარალელური წრფეები. დაამტკიცეთ, რომ ამ გზით მიღებული პარალელოგრამის ფართობი, უდრის სამკუთხედის ფართობის ნახევარს.

11.189. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთ კათეტზე აგებული კვადრატის ფართობი ტოლია იმ სიმაღლეზე აგებული კვადრატის ფართობზე, რომელიც ჰიპოტენუზამდეა გავლებული.

11.190. სამკუთხედის ერთ-ერთი დიაგონალის შეუწყვეტელი წეერთებული მეორე დიაგონალის ბოლოებთან. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული ტეხილი სამკუთხედს ორ ტოლფერდა ნაწილად ყოფს.

11.191. ტრაპეციის ფუძეების შეუწყვეტელების შემაერთებელ მონაკვეთზე დებული წერტილი შეერთებულია მის წვეროებთან, დაამტკიცეთ, რომ ფერდებზე დაყრდნობილი სამკუთხედები ტოლდიდია.

11.192. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხედის ერთი დიაგონალი მეორე დიაგონალის შუაზე ყოფს, მაშინ ის შუაზე ყოფს აგრეთვე სამკუთხედის ფართობსაც.

11.193. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტრაპეციაში AB ფუძის M შუაწერტილს შეეერთებთ CD ფუძის ბოლოებთან, მაშინ მიღებული CMD სამკუთხედის ფართობი ტრაპეციის ფართობის ნახევარის ტოლია.

11.194. $ABCD$ ტრაპეციის CD ფუძის K შუაწერტილიდან AB ფუძის გაგრძელებაზე დაშვებულია KE პერპენდიკულარი. დაამტკიცეთ: 1) $S_{AEK}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$; 2) $S_{ABCD}=AB\cdot EK$.

11.195. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის სამი მედიანა მას ყოფს ექვს ტოლდიდ სამკუთხედად.

11. 196. ორი ტოლდიდი სამკუთხედი, რომელთა ტოლი ფუძეები ძევს ერთ წრფეზე, გადაკვეთილია მათი ფუძეების პარალელური წრფით. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში მოქცეული ამ პარალელური წრფის მონაკვეთები ტოლია.

11.197. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის R რადიუსი გამოითვლება ფორმულით: $R=\frac{abc}{2h_c}$, სადაც a და b სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო h_c—ც გვერდზე დაშვებული სიმაღლეა.

11.198. დაამტკიცეთ, ტოლობა $S^2=\frac{1}{2}Rh_a\cdot h_b\cdot h_c$, სადაც h_a, h_b, h_c სამკუთხედის სიმაღლეებია, R — შემოხაზული წრეწირის რადიუსია, ხოლო S სამკუთხედის ფართობია.

11.199. დაამტკიცეთ ტოლობა $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$, სადაც h_a, h_b, h_c სამკუთხედის სიმაღლეებია, ხოლო r — ჩახაზული წრეწირის რადიუსია.

11.200. ჩახაზული $ABCD$ ოთხკუთხედის BD დიაგონალი შუაზე ყოფს AC დიაგონალს. დაამტკიცეთ, რომ $AB\cdot AD=CB\cdot CD$.

11.201. ჩახაზულ ოთხკუთხედში ერთი დიაგონალი მეორეს შუაზე ყოფს. დაამტკიცეთ, რომ პირველი დიაგონალის კვადრატი ტოლია ოთხკუთხედის უველა გვერდის კვადრატების ჯამის ნახევარს.

11.202. სამკუთხედის m_a და m_b მედიანები გადაკვეთისას α კუთხეს ქმნიან. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი $\frac{2}{3}m_am_b\sin\alpha$-ს ტოლია.

11.203. პარალელოგრამის დიაგონალებია m და n, კუთხე დიაგონალებს შორის α-ს ტოლია. α-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება ეს პარალელოგრამის ფართობი უდიდესი? როგორი სახის პარალელოგრამი გვექნება ამ შემთხვევაში?

11.204. $ABCD$ პარალელოგრამის შიგნით აღებულია O წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ OAB და OCD სამკუთხედების ფართობების ჯამი არ არის დამოკიდებული O წერტილის შერჩევაზე.

11.205. $ABCD$ პარალელოგრამის AD გვერდზე აღებულია ნებისმიერი E წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $S_{AEB}+S_{ECD}=S_{BEC}$.

11.206. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამში მანძილი დიაგონალის ნე-

ბისმიერი წერტილიდან ორ მიმდებარე გვერდებამდე ამ გვერდების სიგრძეთა უკუპროპორციულია.

11.207. სამკუთხედის გვერდებია a და b, ხოლო მათ შორის მდებარე კუთხეა α. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის α კუთხის ბისექტრისა გამოითვლება ფორმულით $\frac{2ab\cos\alpha/2}{a+b}$.

11.208. ოთხკუთხედის წვეროებზე გავლებულ მისი დიაგონალების პარალელური წრფეები. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრფეებით შექმნილი პარალელოგრამის ფართობი არჯერ მეტი იქნება მოცემული ოთხკუთხედის ფართობზე.

11.209. S არის $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობი. დაამტკიცეთ, რომ $(AB+CD)(BC+AD)\geqslant 4S$.

11.210. E არის $ABCD$ კვადრატის BC გვერდის შუაწერტილი, CF არის DCE სამკუთხედის სიმაღლე. დაამტკიცეთ, რომ $S_{ABCD}=5S_{CDF}$.

11.211. პარალელოგრამში შეერთებულია თითოეული გვერდის შუაწერტილი შემდეგი გვერდის ბოლოსთან, რის შედეგად მიღებულია შიდა პარალელოგრამი. დაამტკიცეთ, რომ მისი ფართობი შეადგენს მოცემული პარალელოგრამის ფართობის $\frac{1}{5}$-ს.

11.212. $ABCD$ კვადრატია. E და F არის CD და AD გვერდების შუაწერტილები; M არის BE და FC მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ BMC სამკუთხედის ფართობი შეადგენს კვადრატის ფართობის $\frac{1}{5}$-ს.

11.213. დაამტკიცეთ, თუ a,b,c,d ოთხკუთხედის გვერდებია (მიმდევრობით აღებული), ხოლო S — ფართობი, მაშინ $S\leqslant\frac{ab+cd}{2}$.

11.214. $ABCD$ ოთხკუთხედის C წვეროზე გატარებულია BD დიაგონალის პარალელური წრფე, რომელიც AD წრფეს N წერტილში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ $S_{ABN}=S_{ABCD}$.

11.215. ABC სამკუთხედის AB გვერდის ნებისმიერ D წერტილზე გატარებული AC-ს და BC-ს პარალელური წრფეები BC და AC გვერდებს, შესაბამისად E და F წერტილებში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ $S_{CEF}=\sqrt{S_{ADF}\cdot S_{BDE}}$.

11.216. ABC სამკუთხედის AB და AC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად M და N წერტილები, ხოლო MN მონაკვეთზე P წერტილი, ისე, რომ $\frac{BM}{MA}=\frac{NA}{NC}=\frac{MP}{NP}$. დაამტკიცეთ, რომ $S_{BPC}=2S_{AMN}$.

11.217. ABC ტოლფერდა სამკუთხედია. AC ფუძის ნებისმიერ P წერტილზე აღმართულია AC-ს პერპენდიკულარული ერთი ფერდისა და მეორის გაგრძელების გადაკვეთამდე შესაბამისად E და F წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $S_{AEC}+S_{APF}=2S_{ABC}$.

11.218. ამოზნექილ $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალები პერპენდიკულარულია. $ABCD$-ზე შემოხაზულია O ცენტრიანი წრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ AOC ტუნიკი $ABCD$-ს ყოფს ორ ტოლდიდ ნაწილად.

11.219. პარალელოგრამის დიაგონალის წერტილზე გავლებულია პარალელოგრამის გვერდების პარალელური წრფეები. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული ოთხი პარალელოგრამიდან ის პარალელოგრამები, რომლებიც ამ დიაგონალით არ უკვეთავენ, ტოლდიდია.

11.220. ნებისმიერი ამოზნექილი ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია მიმდევრობით. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული პარალელოგრამის ფართობი ოთხკუთხედის ფართობის ნახევრის ტოლია.

11.221. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის პერიმეტრის შეფარდება ერთერთი გვერდის სიგრძესთან ტოლია ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის შეფარდების ჩაპაზონული წრეწირის რადიუსთან.

11.222. დაამტკიცეთ, რომ ძარღვულია სამკუთხედში კათეტების ჯამი ნაკლებია ჰიპოტენუზისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ჯამზე.

11.223. დაამტკიცეთ, რომ ყველა იმ სამკუთხედებიდან, რომლებიც მოცემულ წრეწირშია ჩახაზული, უდიდესი ფართობი ტოლგვერდა სამკუთხედს ეკუთვნის.

11.224. დაამტკიცეთ, რომ r რადიუსიან წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედების ფართობებიდან უდიდესი $2r^2$-ის ტოლია.

11.225. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი კათეტების ჯამისა და ჰიპოტენუზის სხვაობის ნახევარს ტოლია.

11.226. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფერდია a და სიმაღლეა h, ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ ერთი გვერდი ძევს სამკუთხედის ფუძეზე, ხოლო ორი მოპირდაპირე წვეროდან — ფერდებზე. დაამტკიცეთ, რომ უდიდესი ფართობის მქონე ჩახაზული მართკუთხედის ფართობია $\frac{ah}{4}$.

11.227. ტრაპეციის ფუძეებია a და b. დაამტკიცეთ, რომ იმ წონასწორთას სიგრძე, რომელიც ფუძეების პარალელურია და ტრაპეციის ფართობს შუაზე ყოფს, ტოლია $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

11.228. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი მისი სამი m_a, m_b და m_c მედიანის საშუალებით გამოითვლება ფორმულით

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)}.$$

11.229. α და β სამკუთხედის a გვერდთან შედგენილ კუთხეებია. დაამტკიცეთ, რომ ამ სამკუთხედის ფართობი ტოლია $\dfrac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

11.230. ABC სამკუთხედის გვერდებია a, b და c. ბისექტრისების ფუძეებია D, E და F. დაამტკიცეთ, რომ $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

11.231. დაამტკიცეთ, რომ ყოველ სამკუთხედში ხახვევარპერიმეტრი p და S ფართობი აკმაყოფილებენ უტოლობას $p^2\geq 3\sqrt{3}S$.

11.232. ABC სამკუთხედის გვერდებია $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრზე გამავალი წრფე ქვეს სამკუთხედის AC და BC გვერდებს და დაშორებულია წვეროებიდან შესაბამისად d_A, d_B და d_C მანძილებით. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $ad_A+bd_B=cd_C$.

11.233. ABC მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი BC ჰიპოტენუზას ეხება D წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S=BD\cdot DC$.

11.234. ვთქვათ a და b მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია, ხოლო r მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი $S=(a+r)(b+r)$.

11.235. ვთქვათ a და b მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია, ხოლო r მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი $S=(a+b)r-r^2$.

11.236. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში წვეულ-წვეულად აღებული გვერდების ნახევრების ჯამთა ნაშთა მისი სამი სიმაღლის ჯამთან უდრის ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრს.

11.237. ვთქვათ a, b, c, d ამოზნექილი ოთხკუთხედის გვერდებია. S კი — ფართობი. დაამტკიცეთ, რომ $S\leq\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

ამ შემთხვევაში იქნება ტოლობა?

§ 12. წრეწირის სიგრძე. წრიხა და ვიხი
ნაწილების ფართობი
ამოცანები გამოთვლაზე

12.1. წესიერ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების სხვაობა უდრის 1-ს. გაიგეთ სამკუთხედის გვერდი.

12.2. გამოთვალეთ r რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზული წესიერი სამკუთხედის ფართობი.

12.3. წესიერ სამკუთხედში, რომლის გვერდი არის a, ჩახაზულია წრეწირი, რომელშიაც ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხედი. იპოვეთ ექვსკუთხედის ფართობი.

12.4. წესიერ სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი, ხოლო წრეწირში ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხედი. იპოვეთ სამკუთხედისა და წესიერი ექვსკუთხედის ფართობთა შეფარდება.

12.5. წრეწირში ჩახაზულია კვადრატი და წესიერი სამკუთხედი. კვადრატის ფართობი 24-ია. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

12.6. წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი 84 სმ-ია. იპოვეთ მისი ტოლფიდი წესიერი სამკუთხედის გვერდი.

12.7. წესიერი სამკუთხედის, კვადრატისა და წესიერი ექვსკუთხედის ფართობები ტოლია. რამდენ შეეფარდება ერთმანეთს ამ ფიგურების გვერდები?

12.8. იპოვეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის, კვადრატისა და ექვსკუთხედის ფართობთა შეფარდება, თუ მათი პერიმეტრები ტოლია.

12.9. a გვერდის მქონე კვადრატისაგან ამგვარად არის ჩამოჭრილი კუთხეები, რომ მიღებულია წესიერი რვაკუთხედი. იპოვეთ ამ რვაკუთხედის ფართობი, თუ $a=\sqrt{\sqrt{2}+1}$.

12.10. წრეწირში ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხედი. იპოვეთ მისი ფართობი, თუ $R=4\sqrt{3}$.

12.11. წრეწირში ჩახაზული წესიერი რვაკუთხედის ფართობი უდრის $16\sqrt{\frac{2}{3}}$. იპოვეთ იმავე წრეწირში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის ფართობი.

12.12. წრეწირში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი უდრის $3{,}25\sqrt{3}$-ს. იპოვეთ იმავე წრეწირში ჩახაზული წესიერი თორმეტკუთხედის ფართობი.

12.13. წრეწირში ჩახაზული წესიერი თორმეტკუთხედის ფართობი უდრის $18\sqrt{2}$-ს. იპოვეთ იმავე წრეწირში ჩახაზული წესიერი რვაკუთხედის ფართობი.

12.14. წრეწირზე შესხმული მრავალკუთხედის პერიმეტრია 20, ხოლო ფართობი 60. გამოთვალეთ წრეწირის რადიუსი.

12.15. წესიერი ექვსკუთხედის ფართობია 24 სმ². იპოვეთ ამ ექვსკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობი.

12.16. წესიერ ექვსკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი, რომელშიც ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი, თუ ექვსკუთხედის გვერდი ტოლია a-სი.

12.17. ძალმოსილი r რადიუსით იპოვეთ წრეწირზე შემოხაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი.

12.18. იპოვეთ წესიერი n-კუთხედის გვერდი, თუ მისი S ფართობის მიხედვით.

12.19. მოცემულია წესიერი 12-კუთხედის ფართობი Q. იპოვეთ იმავე წრეში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი.

12.20. მოცემულია წესიერი 8-კუთხედის ფართობი Q. იპოვეთ იმავე წრეში ჩახაზული კვადრატის ფართობი.

12.21. წრეწირში ჩახაზული წესიერი ცხრაკუთხედის გვერდის სიგრძე ტოლია $2a\cos\frac{\pi}{9}$. იპოვეთ შემოხაზული წესიერი ცხრაკუთხედის გვერდის სიგრძე.

12.22. წესიერ n-კუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია r-ს. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, თუ $n=7$, $r=5\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$.

12.23. წესიერ ათკუთხედში ჩახაზულია r-რადიუსიანი წრეწირი. იპოვეთ ამ ათკუთხედის პერიმეტრი, თუ $r=2\operatorname{ctg}15°$.

12.24. წრეწირში ჩახაზულია და მასზე შემოხაზულია წესიერი n-კუთხედები. იპოვეთ n-კუთხედების გვერდების შეფარდება ($n=3$; $n=6$).

12.25. R-რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია წესიერი n-კუთხედი. მისი გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია მიმდევრობით. იპოვეთ მიღებული n-კუთხედის გვერდი, თუ n უდრის: 1) 6; 2) 8.

12.26. მიმდევრობით შეერთებულია წესიერი 8-კუთხედის 4 გვერდის შუაწერტილები ერთი გვერდის გამოტოვებით. იპოვეთ მიღებული კვადრატის გვერდი, თუ 8-კუთხედის გვერდი უდრის a-ს.

12.27. მიმდევრობით შეერთებულია წესიერი 12-კუთხედის 6 გვერდის შუაწერტილები ორი გვერდის გამოტოვებით. იპოვეთ მიღებული წესიერი 6-კუთხედის გვერდი, თუ 12-კუთხედის გვერდი უდრის a-ს.

12.28. წესიერი n-კუთხედის გვერდი უდრის a-ს. იპოვეთ შემცირებული დიაგონალი, თუ $n=10$, $a=\frac{3,4}{\cos 15°}$.

12.29. ტოლგვერდა სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი. ამ წრეწირის მიერ სამკუთხედის კუთხეებიდან ჩამოკვეთილ კუთხეთა ბაზისებში ჩახაზულია მცირე წრეწირები. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი, თუ მცირე წრეწირის რადიუსი არის $\sqrt{3}$.

17.30. ორი წრეწირის საერთო ქორდა ერთ-ერთი წრეწირისათვის შესახებ ჩახაზული კვადრატის გვერდია, ხოლო მეორისათვის — ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი. იპოვეთ მანძილი წრეწირთა ცენტრებს შორის, თუ მცირე წრეწირის რადიუსი უდრის r-ს (განიხილეთ წრეწირთა განლაგების ორივე შესაძლო შემთხვევა).

12.31. ორი ერთიერთგანმკვეთი წრეწირის საერთო ქორდა ტოლია a-სა და ერთი წრეწირისათვის ჩახაზული სამკუთხედის გვერდს, მეორე წრეწირისათვის — წესიერი ჩახაზული ექვსკუთხედის გვერდს. იპოვეთ მანძილი წრეწირების ცენტრებს შორის (განიხილეთ წრეწირთა ორი შესაძლებელი მდებარეობა).

12.32. წრეწირის რადიუსი 4 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ წრეწირის რკალის გრადუსული ზომა, თუ ამ რკალის სიგრძეა 1) 2π სმ; 2) $0,2\pi$ სმ.

12.33. იპოვეთ წრეწირის იმ რკალის გრადუსული ზომა, რომლის სიგრძეც რადიუსის ტოლია.

12.34. იპოვეთ წრეწირის სიგრძე და რადიუსი, თუ მისი $36°$-იანი რკალის სიგრძე 15 სმ-ია.

12.35. მოცემული a ქორდით იპოვეთ მას მიერ მოჭრილი რკალის სიგრძე, თუ რკალის გრადუსული ზომაა: 1) $60°$; 2) $90°$; 3) $120°$.

12.36. მოცემული რკალის სიგრძეა l. იპოვეთ მისი შესაბამისი ქორდა, თუ რკალის გრადუსული ზომაა 1) $60°$; 2) $90°$; 3) $120°$.

12.37. იპოვეთ წრეწირის სიგრძე, თუ ის წესიერი ჩახაზული ექვსკუთხედის პერიმეტრზე 7 სმ-ით მეტია.

12.38. მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეა α, ხოლო მისი ფართობია S. იპოვეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძე, თუ $\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$, $S=\frac{169}{\pi^2}$.

12.39. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა b, ფუძესთან მდებარე კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის სიგრძე, თუ $b=21$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\pi}$.

12.40. იპოვეთ წრის ფართობი, თუ წრეწირის სიგრძეა l.

12.41. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ მისი სიგრძე და ამავე რადიუსის მქონე წრის ფართობი ერთმანეთის ტოლია.

12.42. იპოვეთ წრის ფართობი, თუ მასში ჩახაზული კვადრატის ფართობია $\frac{15}{\pi}$.

12.43. იპოვეთ წრის ფართობი, თუ ის მასზე შემოხაზული კვადრატის ფართობზე $4,3$ π^2-ით ნაკლებია.

12.44. მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრია $2p$, ხოლო ჰიპოტენუზა — c. იპოვეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრის ფართობი.

12.45. სამკუთხედის გვერდები ტოლია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეების ფართობთა შეფარდება.

12.46. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედში ხახაზული წრის ფართობი, თუ კათეტების გეგმილები ჰიპოტენუზაზე ტოლია 9 მ და 16 მ.

12.47. მართკუთხა სამკუთხედის მერძევი ტოტის 24 სმ, მაგი ფართობი კი 24 სმ². იპოვეთ შემოხაზული წრის ფართობი.

12.48. იპოვეთ 120° კუთხის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი, თუ მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია $\sqrt{3}$ სმ.

12.49. წრეში, რომლის ფართობია 52π, ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის გვერდები ერთმანეთის, როგორც 3 : 2. იპოვეთ ამ მართკუთხედის ფართობი.

12.50. R რადიუსიან წრეში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის ფართობი წრის ფართობის ნაწილს შეადგენს. იპოვეთ ამ მართკუთხედის გვერდები.

12.51. R რადიუსის მქონე წრეწირში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის ფართობი n-ჯერ ნაკლებია წრის ფართობზე. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

12.52. წრეზე, რომლის ფართობია Q, შემოხაზულია რომბი 30°-იანი კუთხით. იპოვეთ ამ რომბის ფართობი.

12.53. რომბი, რომლის გვერდი ტოლია დიაგონალის ნახევრის, R-რადიუსიანი წრის ტოლფერდაა. იპოვეთ რომბის გვერდი.

12.54. რომბის მახვილი კუთხე არის α, ხოლო მასში ჩახაზული წრის ფართობი — S. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ $\sin\alpha = \frac{4}{7}$, $S = 6\pi$.

12.55. იპოვეთ იმ წრის ფართობი, რომელიც შემოხაზულია ტოლფერდა სამკუთხედზე, თუ ცნობილია, რომ ამ სამკუთხედის ფუძე ტოლია 24 სმ, ფერდი კი 13 სმ-ია.

12.56. წრეზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე მახვილი კუთხეა α. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობის შეფარდება წრის ფართობთან, თუ $\sin\alpha = \frac{2}{\pi}$.

12.57. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზული წრის ფართობი, თუ მისი დიდი ფუძე არის a, ხოლო მცირე ფუძესთან მდებარე კუთხე ტოლია 120°.

12.58. წრეზე შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ერთი კუთხეა 150° და შუამონაკვეთი 40 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ წრის ფართობი.

12.59. ორი წრის საერთო ქორდით ამოჭრილია 60° და 120° რკალები. იპოვეთ ამ წრეების ფართობთა შეფარდება.

12.60. r რადიუსის ბქონე სამი ტოლი წრეწირი შეკვეთ-შეკვეთად ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც წრეწირთა ცენტრებით შედგენილ სამკუთხედსა და შემოხაზულ წრეს შორის მდებარეობს.

12.61. R რადიუსის მქონე წრე გარშემორტყმულია ოთხი ტოლი წრით, რომლებიც მოცემულ წრეს იმგვარად ეხებიან, რომ არ ოთხი წრიდან ყოველი ორი მეზობელი წრე ერთმანეთსაც ეხება. იპოვეთ ოთხი წრიდან ერთ-ერთის ფართობი.

12.62. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები უდრის 6 სმ და 8 სმ. მცირე კათეტისა და ჰიპოტენუზის შუაწერტილებზე ვალებულია წრეწირი, რომლისთვისაც ჰიპოტენუზა ხედია. იპოვეთ ამ წრეწირით შემოსაზღვრული წრის ფართობი.

12.63. იპოვეთ ფართობი წრიული რგოლისა, რომელიც ერთი და იმავე ცენტრის მქონე ორ წრეწირს შორისაა მოთავსებული, თუ წრეწირების რადიუსებია: 1) 4 სმ და 6 სმ; 2) 5.5 მ და 6, 5 მ; 3) a და b ($a > b$).

12.64. ორი კონცენტრული წრეწირით შექმნილ რგოლში დიდი წრეწირის ქორდა ეხება მცირე წრეწირს და უდრის a-ს. იპოვეთ რგოლის ფართობი.

12.65. წრია ფართობი, რომლის რადიუსი არის R, ორი კონცენტრული წრეწირით დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ ამ წრეწირთა რადიუსები.

12.66. წრიული რგოლის ფართობი ტოლია S. დიდი წრეწირის რადიუსი ტოლია მცირე წრეწირის სიგრძის. იპოვეთ მცირე წრეწირის რადიუსი.

12.67. იპოვეთ ორ კონცენტრულ წრეწირთა შორის მოქცეული წრიული რგოლის ფართობი, თუ წრეწირთა სიგრძეებია C_1 და C_2 ($C_1 > C_2$).

12.68. წესიერ სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი და მასზე შემოხაზულია წრეწირი. იპოვეთ მიღებული რგოლის ფართობი, თუ სამკუთხედის გვერდი უდრის a-ს.

12.69. წესიერი სამკუთხედის ფართობია Q. მასზე შემოხაზულია და მასში ჩახაზულია წრეწირები. იპოვეთ ამ წრეწირებს შორის მოთავსებული რგოლის ფართობი.

12.70. იპოვეთ წესიერ სამკუთხედში ჩახაზული წრის ფართობის შეფარდება მასზე შემოხაზული წრის ფართობთან.

12.71. იპოვეთ კვადრატზე შემოხაზული წრის ფართობის შეფარდება მასში ჩახაზული წრის ფართობთან.

12.72. წესიერ n-კუთხედზე, რომლის გვერდია a, შემოხაზულია და მასში ჩახაზულია წრეწირები. იპოვეთ მიღებული რგოლის სიგანე, თუ $n = 9$, $a = 34$ ctg10°.

12.73. წესიერ ექვსკუთხედში, რომლის გვერდი არის a, ჩახაზულია წრეწირი და ამაზე ექვსკუთხედზე შემოხაზულია მეორე წრეწირი. იპოვეთ იმ წრიული რგოლის ფართობი, რომელიც მოქცეულია ამ ორ წრეწირს შორის.

12.74. იპოვეთ წესიერ ექვსკუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირების ფართობთა შეფარდება.

12.75. იპოვეთ R-რადიუსიანი წრიული სექტორის ფართობი, თუ ამ სექტორის შესაბამისი ცენტრალური კუთხეა: 1) 45°; 2) 90°; 3) 150°; 4) 240°; 5) 300°; 6) 330°.

12.76. იპოვეთ სექტორის რადიუსი, თუ მისი ფართობი უდრის 157 მ²-ს და ცენტრალური კუთხე 72°-ია.

12.77. იპოვეთ სექტორის კუთხე, თუ მისი ფართობი უდრის 56,8 სმ²-ს, ხოლო რადიუსი 6 სმ-ია.

12.78. წრის ფართობის რა ნაწილს შეადგენს სექტორის ფართობი, თუ მისი ცენტრალური კუთხეა ა) 180°, ბ) 90°, გ) 45°, დ) 20°, ე) 18°.

12.79. იპოვეთ სექტორის ცენტრალური კუთხე, თუ სექტორის ფართობი შეადგენს წრის ფართობის: ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) $\frac{15}{16}$.

12.80. მოცემულია სექტორი, რომელიც წარმოადგენს R-რადიუსიანი წრის მეოთხედს. მისი რკალის შუაწერტილზე გავლებულია მხები სექტორის კიდური რადიუსების გაგრძელებასთან გადაკვეთამდე. იპოვეთ ამ მხების სიგრძე.

12.81. სექტორის ცენტრალური კუთხე უდრის 60°-ს, რადიუსი კი უდრის R-ს. იპოვეთ სექტორში ჩახაზული წრის რადიუსი.

12.82. წრიულ სექტორში, რომლის ცენტრალური კუთხეა 120°, ჩახაზულია წრეწირი. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი, თუ მოცემული წრეწირის რადიუსი არის R.

12.83. სექტორის ცენტრალური კუთხეა α, რადიუსი კი — b. იპოვეთ ამ სექტორში ჩახაზული წრის რადიუსი, თუ $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

12.84. სექტორის რადიუსი არის r და მისი რკალის ნომშეთავე ქორდა უდრის a-ს. იპოვეთ ამ სექტორში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

12.85. ACB რკალის ბოლოებზე გავლებულია წრეწირის მხებები D წერტილში გადაკვეთამდე. იპოვეთ ორ მხებსა და რკალს შორის მოთავსებული $DACB$ ფართობი, თუ წრეწირის რადიუსი უდრის R-ს და რკალი შეიცავს: 1) 90°-ს; 2) 120°-ს; 3) 60°-ს.

12.86. AMB რკალი შეიცავს 120°-ს; OA და OB რადიუსებია; AC და BC მხებებია; DME არის რკალი CA და CB-ს შორის შემოხაზული C ცენტრიდან ისე, რომ ეხება AMB რკალს. იპოვეთ $CDME$ და $OAMB$ სექტორების ფართობთა შეფარდება.

12.87. ორი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია r და $3r$, გარედან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია ორ წრეწირსა და მათ საერთო გარე მხებს შორის.

12.88. იპოვეთ სეგმენტის ფართობი, თუ მისი რადიუსი უდრის R-ს და რკალი შეიცავს: 1) 90°; 2) 60°; 3) 45°; 4) 30°-ს.

12.89. იპოვეთ სეგმენტის ფართობი, თუ ქორდა უდრის a-ს, რკალი კი შეიცავს: 1) 120°, 2) 90°, 3) 60°-ს.

12.90. წრე, რომლის რადიუსია R, ჩახაზული კვადრატის გვერდის ტოლი ქორდით გაყოფილია ორ სეგმენტად. იპოვეთ მცირე სეგმენტის ფართობი.

12.91. R-რადიუსიან წრეში ცენტრის სიგანისაშეა მხარეზე გავლებულია ორი პარალელური ქორდა, რომელთაგან ერთი ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდის ტოლია, ხოლო მეორე — ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის გვერდის. იპოვეთ წრის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია ქორდებს შორის.

12.92. R რადიუსის მქონე წრეში, ცენტრის სიგანისაშეა მხარეზე გავლებულია პარალელური ქორდები, რომელთაგან ერთი ჰიმავს 60° რკალს, ხოლო მეორე 120°. იპოვეთ ქორდებს შორის მოთავსებული წრის ნაწილის ფართობი.

12.93. წრეში ცენტრის ერთ მხარეზე გავლებულია ორი პარალელური ქორდა, რომელთაგან ერთი ჰიმავს სიდიდით 120°-იან რკალს, მეორე კი — 60°-იანს. გამოთვალეთ ქორდებს შორის მოთავსებული წრის ნაწილის ფართობი, თუ წრის რადიუსია $2\sqrt{\frac{3}{\pi}}$.

12.94. ნახევარწრეწირის დიამეტრი უდრის $2R$ -ს. ამ დიამეტრზე აგებულია წესიერი სამკუთხედი. სამკუთხედი და ნახევარწრეწირი მდებარეობენ დიამეტრიდან ერთ და იმავე მხარეზე. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობის ის ნაწილი, რომელიც მდებარეობს წრის გარეთ.

12.95. იპოვეთ იმ წრიული სეგმენტის ფართობი, რომლის ფუძეა $a\sqrt{3}$ და სიმაღლეა $\frac{a}{2}$.

12.96. იპოვეთ სეგმენტის ფართობი, თუ ქორდის სიგრძე უდრის $2\sqrt{\frac{b}{\pi-2}}$, რკალი კი შეიცავს 90°-ს.

12.97. ტოლგვერდა სამკუთხედის ცენტრიდან შემოხაზულია მისი გვერდების გადამკვეთი წრეწირი ისე, რომ თითოეული გარე რკალის გრადუსული ზომაა 90°. სამკუთხედის გვერდია a. იპოვეთ შიგა

რკალებითა და გვერდების შესაბამისკვეთებით წენოსაზღვრული ფართობი.

12.98. წრეწირში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდი უდრის a-ს. გამოთვალეთ მის წიერ ჩამოკვეთილი მცირე სეგმენტის ფართობი, თუ $a=\frac{6}{\sqrt{4\pi-3\sqrt{3}}}$.

12.99. ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდის ტოლი ქორდით წრე დაყოფილია ორ სეგმენტად. იპოვეთ მიღებულ სეგმენტთა ფართობების შეფარდება.

12.100. წრეწირში ჩახაზული კვადრატის გვერდი უდრის $\frac{4}{\sqrt{\pi-2}}$. იპოვეთ მას შიერ ჩამოკვეთილ სეგმენტთა ფართობების ჯამი.

12.101. იპოვეთ წრის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მასში ჩახაზული: 1) კვადრატის; 2) წესიერი სამკუთხედის; 3) წესიერი ექვსკუთხედის გარეთაა მოთავსებული. წრის რადიუსია R.

12.102. სეგმენტის რკალის გრადუსული ზომაა 120°, რკალის სიგრძე კი არის 20. იპოვეთ იმ სეგმენტში ჩახაზული წრეწირის სიგრძე.

12.103. ერთი და იმავე R რადიუსის მქონე ორ ურთიერთგადამკვეთ წრეთა ცენტრებმა შორის მანძილი ტოლია იმავე R რადიუსის. იპოვეთ ამ წრეების საერთო ნაწილის ფართობი.

12.104. ურთიერთგადამკვეთი ორი წრეწირის საერთო ქორდა ტოლია a-ს და ერთ წრეში ჩაჯდომის ∠-ით რკალს, მეორეში კი — 90°-იანს. იპოვეთ წრეების საერთო ნაწილის ფართობი (ორი შემთხვევა).

12.105. სეგმენტში, რომლის რკალი არის 60°, ჩახაზულია კვადრატი. იპოვეთ კვადრატის ფართობი, თუ წრის რადიუსი უდრის $2\sqrt{3}+\sqrt{17}$.

12.106. კვადრატზე, რომლის გვერდი არის a, შემოხაზულია წრეწირი. ერთ-ერთ მიღებულ სეგმენტში ჩახაზულია კვადრატი. იპოვეთ ამ კვადრატის ფართობი.

12.107. იპოვეთ იმ წრის რადიუსი, რომელშიც გაყვანილია 6 სმ სიგრძის ქორდა, ხოლო ამ ქორდის მიერ ჩამოკვეთილ სეგმენტში ჩახაზულია 2 სმ გვერდის მქონე კვადრატი.

12.108. სეგმენტში, რომლის რკალის გრადუსული ზომაა 120°, ჩახაზულია კვადრატი. იპოვეთ კვადრატის გვერდის სიგრძე, თუ წრის რადიუსია $2+\sqrt{19}$.

12.109. AMB სეგმენტში ჩახაზულია $ACDB$ ტრაპეცია. რომლის გვერდი $AC=CD$ და $\angle CAB=31°$. იპოვეთ AMB რკალის გრადუსული ზომა.

12.110. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის ვერცერი ბის პერპენდიკულარულ რადიუსს შეაზე პყოფს.

12.111. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი ტოლია იმ წრეწირზე შემოხაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობის $\frac{3}{4}$-ის.

12.112. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი 8-კუთხედის გვერდი გამოითვლება ფორმულით: $a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, სადაც R შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.

12.113. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი 12-კუთხედის გვერდი გამოითვლება ფორმულით: $a_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, სადაც R შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.

12.114. R-რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია წესიერი n-კუთხედი a_n-ის ტოლი გვერდით. დაამტკიცეთ, რომ იმავე წრეწირში ჩახაზული წესიერი $2n$-კუთხედის გვერდი გამოითვლება ფორმულით $a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}$.

12.115. დაამტკიცეთ, რომ $r=R\cos\frac{180°}{n}$, სადაც r და R შესაბამისად წესიერ n-კუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსებია.

12.116. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი შრავალკუთხედის ცენტრალური კუთხე მისი გარე კუთხის ტოლია.

12.117. a_n წესიერი n-კუთხედის გვერდია, ხოლო S — ფართობი. დაამტკიცეთ, რომ $S=\frac{1}{4}na_n^2\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$.

12.118. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი ექვსკუთხედის პერიმეტრი ნაკლებია მისი ტოლდიდი კვადრატის პერიმეტრზე.

12.119. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი შრავალკუთხედის გვერდების შუაწერტილები წარმოადგენენ წესიერი შრავალკუთხედის წვეროებს გვერდების იმავე რიცხვით.

12.120. დაამტკიცეთ, რომ წესიერ n-კუთხედში წერტილები, რომლებიც თითოეულ გვერდს ყოფს ერთნაირი წეფარდებით, წარმოადგენენ წესიერი n-კუთხედის წვეროებს.

12.121. დაამტკიცეთ, რომ თუ რომელიმე წრეწირში ჩახაზული შრავალკუთხედის ყველა გვერდი ესება პირველი წრეწირის კონცენტრულ წრეწირს, მაშინ ეს შრავალკუთხედი წესიერია.

12.122. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი მრავალკუთხედის ნიკნით მდებარე ნებისმიერი წერტილიდან მის გვერდებამდე მანძილების ჯამი დრის მრავალკუთხედის პერიმეტრის ნამრავლს მისი გვერდების რიცხვზე.

12.123. დაამტკიცეთ, რომ R-რადიუსიან წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედების ფართობებიდან უდიდესი ტოლია $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$-ს.

12.124. ნახევარწრეწირის დიამეტრი უყოფილია n ტოლ ნაწილად. ყოველ მონაკვეთზე, როგორც დიამეტრზე აგებულია ნახევარწრეწირები. დაამტკიცეთ, რომ აგებული ნახევარწრეწირებია საგანძეებია ჯამი მოცემული ნახევარწრეწირის სიგრძის ტოლია.

12.125. დაამტკიცეთ, რომ კვადრატის პერიმეტრი ნაკლებია მისი ტოლდიდი წრის წრეწირის სიგრძეზე.

12.126. ABC რკალი შეიცავს 120°-ს. მის ბოლოებზე გავლებულია მხებები ურთიერთგადაკვეთამდე D წერტილში და ძიძლებული $ABCD$ ფიგურაში ჩახაზულია წრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრეწირის სიგრძე ტოლია ABC რკალის სიგრძის.

12.127. CD არის ABC მართკუთხა ($\angle C=90°$) სამკუთხედის სიმაღლე. დაამტკიცეთ, რომ ACD და BCD სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეების ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც ამ სამკუთხედების ფართობები.

12.128. დაამტკიცეთ, რომ წრის ფართობის შეფარდება მასში ჩახაზული კვადრატის ფართობთან ტოლია $\frac{\pi}{2}$-ის.

12.129. ვთქვათ წესიერი n-კუთხედის ფართობია S, ხოლო პერიმეტრი — P. დაამტკიცეთ, რომ $S=\frac{\sqrt{3}}{24}P^2$.

12.130. დაამტკიცეთ რომ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე აგებული ნახევარწრეწირის ფართობის ტოლია კათეტებზე აგებული ნახევარწრეწირების ფართობების ჯამს.

12.131. ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზულია წრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ წრის ფართობის შეფარდება ტრაპეციის ფართობთან ტოლია წრეწირის სიგრძის შეფარდების ტრაპეციის პერიმეტრთან.

12.132. ნახევარწრეა დიამეტრი გაყოფილია n ტოლ ნაწილად. ყოველ მონაკვეთზე, როგორც დიამეტრზე აგებულია ნახევარწრე. დაამტკიცეთ, რომ აგებული ნახევარწრეების ფართობების ჯამი n-ჯერ ნაკლებია მოცემული ნახევარწრის ფართობზე.

12.133. დაამტკიცეთ რომ წრიული რგოლის ფართობი იმ წრის ფართობის ტოლია, რომლის დიამეტრი ტოლია მხებ დიდი წრეწირის ქორდის წარმოდგენას.

12.134. დაამტკიცეთ, რომ წესიერ მრავალკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების დიამეტრების კვადრატების სხვაობა მრავალკუთხედის ვერდის სიგრძის კვადრატის ტოლია.

12.135. AB ნახევარწრეწირის დიამეტრია. D არის AB დიამეტრის ნებისმიერი C წერტილში გამავალი AB-ს პერპენდიკულარული წრფისა და ნახევარწრეწირის გადაკვეთის წერტილი. AC და CB მოვაკვეთებზე, როგორც დიამეტრებზე, აგებულია ნახევარწრეწირები (მოცემული ნახევარწრის ნიკნით). დაამტკიცეთ, რომ სამი ნახევარწრეწირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი $\frac{\pi CD^2}{4}$-ის ტოლია.

12.136. მართკუთხა სამკუთხედის ძირბრტყინველია 90°-ით მაძლი კუთხის წვეროს გარშემო. დაამტკიცეთ რომ გაფენების პრინციპით მიღებული სექტორების ფართობების ჯამი უდრის მოკლებული სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობს.

12.137. AB არის R რადიუსიანი ნახევარწრეწირის დიამეტრი. C და D წერტილები ნახევარწრეწირის სამ ტოლ ნაწილად ყოფენ. AC და AD ქორდებია. დაამტკიცეთ, რომ ACD ფიგურის ფართობი $\frac{\pi R^2}{6}$-ის ტოლია.

12.138. R-რადიუსიანი წრის ფართობი ორი კონცენტრული წრეწირით გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრეწირების რადიუსებია $\frac{R}{\sqrt{3}}$ და $\frac{R\sqrt{6}}{3}$-ის ტოლია.

§ 13. ამოცანები ალგებრაზე

13.1. წრეწირის მოცემულ წერტილზე გაავლეთ ამ წრეწირს პერპენდიკულარული წრფე.

13.2. წრეწირზე არამდებარე წერტილზე გაავლეთ ამ წრეწირის ბისექტრული წრფე.

13.3. მოცემული მონაკვეთი გაყავით n ტოლ ნაწილად. ($n\in N$, $n\geqslant 2$).

13.4. კუთხე გაყავით ოთხ ტოლ ნაწილად.

13.5. ძირითი კუთხე გაყავით სამ ტოლ ნაწილად.

13.6. კუთხის გვერდებს მოპირის გაშვებულ მოცემული სახეობის მიცემულ წერტილზე გავავლეთ კუთხის გვერდების გადამკვეთი წრფე ისე, რომ მანძილი ამ წერტილიდან კუთხის გვერდებამდე გადაკვეთის წერტილებამდე ტოლი იყოს.

13.7. ალგებრული სამკუთხედი ორი გვერდისა და შეზომაზეული წრეწირის რადიუსის მიხედვით.

13.8. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდისა და ტოლდადესი მათგანის მიმდებარე დაბარე კუთხის მიხედვით, თუ:

1) $a=6$ სმ, $b=4$ სმ, $\alpha=75°$;

2) $a=4$ სმ, $b=6$ სმ, $\beta=100°$.

13.9. ააგეთ ტოლფერდა სამკუთხედი ფერდისა და ფუძესთან მდებარე კუთხის მიხედვით.

13.10. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი კათეტისა და ერთადერთი მიბეული კუთხის მიხედვით.

13.11. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი ჰიპოტენუზისა და მახვილი კუთხის მიხედვით.

13.12. ააგეთ კვადრატი ა) გვერდის მიხედვით, ბ) დიაგონალის მიხედვით.

13.13. ააგეთ მოცემული სამკუთხედის ტოლფერდა კვადრატი.

13.14. ააგეთ მოცემული ტრაპეციის ტოლფერდა კვადრატი.

13.15. ააგეთ სამკუთხედი, თუ მოცემულია გვერდი, მასთან მიმდებარე კუთხე და დანარჩენი ორი გვერდის ჯამი.

13.16. ააგეთ სამკუთხედი, თუ მოცემულია გვერდი, მასთან მიმდებარე კუთხე და დანარჩენი ორი გვერდის სხვაობა.

13.17. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი კათეტების ჯამისა და ჰიპოტენუზის მიხედვით.

13.18. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი ერთ-ერთი კათეტისა და მეორე კათეტის და ჰიპოტენუზის ჯამის მიხედვით.

13.19. ააგეთ სამკუთხედი ABC, თუ მოცემულია $\angle A$, $\angle B$ და $AB+AC$.

13.20. ააგეთ სამკუთხედი ABC, თუ მოცემულია $\angle B$, $\angle C$ და $BC-AC$.

13.21. ააგეთ სამკუთხედი, თუ მოცემულია მისი ორი კუთხე და პერიმეტრი.

13.22. ააგეთ სამკუთხედი ABC, თუ მოცემულია $\angle B$, AC გვერდი და B წვეროდან AC გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

13.23. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდისა და ერთი მათგანისადმი გავლებული მედიანის მიხედვით.

13.24. ააგეთ სამკუთხედი მისი ფუძის და ფერდებს შედიანების მიხედვით.

13.25. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდის და მესამე გვერდის შუამდების მიხედვით.

13.26. ააგეთ სამკუთხედი ABC, თუ მოცემულია $\angle B$, BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლე და AC გვერდის მედიანა.

13.27. ააგეთ სამკუთხედი მისი სამი მედიანის მიხედვით.

13.28. ააგეთ პარალელოგრამი მისი გვერდების და ერთ-ერთი სიმაღლის მიხედვით.

13.29. ააგეთ პარალელოგრამი მისი დიაგონალების და ერთ-ერთი გვერდის მიხედვით.

13.30. ააგეთ სამკუთხედი მისი ორი გვერდისა და ერთ-ერთ მათგანზე დაშვებული სიმაღლის მიხედვით.

13.31. ააგეთ სამკუთხედი მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლისა და მედიანის მიხედვით.

13.32. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდისა და ამ გვერდებს შორის გამავალი სიმკუთხედის ბისექტრისის მიხედვით.

13.33. ააგეთ ტრაპეცია მისი ოთხი გვერდის მიხედვით.

13.34. ააგეთ ტრაპეცია მისი ფუძეების, ერთ-ერთი ფერდისა და სიმაღლის მიხედვით.

13.35. ააგეთ ტრაპეცია მისი ფუძეებისა და დიაგონალების მიხედვით.

13.36. მოცემულ ორ წერტილზე გაავლეთ მოცემულის რადიუსის წრეწირი.

13.37. იპოვეთ მოცემული წრეწირის ცენტრი.

13.38. წაიკვეთული რკალი გაყავით ორ ტოლ ნაწილად.

13.39. მოცემულ წერტილზე გაავლეთ წრფე, რომელიც მოცემული წრეწირი მოკვეთილი სიგრძის ქორდას ჩამოაჭრის.

13.40. წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილზე გაავლეთ ქორდა ისე, რომ იგი ამ წერტილით შუაზე იყოფოდეს.

13.41. წრეწირის გარეთ მდებარე მოცემულ წერტილზე გაავლეთ ამ წრეწირის მხები.

13.42. გაავლეთ მოცემული ორი წრეწირის საერთო გარე მხები.

13.43. გაავლეთ მოცემული ორი წრეწირის საერთო შიგა მხები.

13.44. ააგეთ ტოლფერდა სამკუთხედი მისი ფუძისა და ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის მიხედვით.

13.45. იპოვეთ წრეწირის მოცემულ წერტილზე გამავალ ქორდათა შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი.

13.46. ააგეთ მოცემული ორი კვადრატული წრფისა და მოცემული წრეწირის მხები წრეწირი.

§ 14. სხვადასხვა სახის ამოცანები

ამოცანები გაანგარიშებაზე

14.1. ABC სამკუთხედში $\angle A$ ორჯერ მეტია $\angle B$-ზე, $AC=b$, $AB=c$. იპოვეთ BC.

14.2. რომბის გვერდია a, ხოლო მახვილი კუთხე α. რომბის ერთი წვეროდან გავლებული ორი სიმაღლე რომბს სამ ტოლდიდ ნაწილად ყოფს. იპოვეთ ამ სიმაღლების სიგრძეები. გააკეთეთ ანგარიშები.

14.7. გამსაზღვრეთ მართკუთხა სამკუთხედის კუთხეები, თუ ხასზე შებჭდილი წრეწირის რადიუსი ისე შეეფარდება მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსს, როგორც 5 : 2.

14.8. სამკუთხედის ორი გვერდი a-სა და b-ს ტოლია, ხოლო მათი შესაბამისი მედიანები ერთმანეთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე გვერდი. რა პირობებში არსებობს ასეთი სამკუთხედი?

14.9. სამი წრეწირი წყვილ-წყვილად ეხება ერთმანეთს გარედან. ორის მათგანის რადიუსია 3, ხოლო მესამის რადიუსია 1. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი სადაც A, B და C წრეწირების შეხების წერტილებია.

14.6. სამკუთხედის შიგნით აღებულ რაიმე წერტილზე გავლებულია სამკუთხედის გვერდების პარალელური წრფეები. ეს წრფეები სამკუთხედს ყოფს ექვს ნაწილად, რომელთაგან სამი სამკუთხედია შესაბამისად S_1, S_2 და S_3 ფართობებით. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის ფართობი.

14.7. პარალელოგრამში რომლის გვერდებია a და b ($a \geq b$) და კუთხეა α, გავლებულია შიგა კუთხეების ბისექტრისები. იპოვეთ ბისექტრისებით შემოსაზღვრული ოთხკუთხედის ფართობი.

14.8. სამკუთხედის ორი გვერდი b-სა და c-ს ტოლია. იპოვეთ მესამე გვერდი, თუ იგი მასზე დაშვებული სიმაღლის ტოლია.

14.9. ABC სამკუთხედში გავლებულია AA_1, BB_1 და CC_1 სიმაღლეები. იპოვეთ $A_1B_1C_1$ და ABC სამკუთხედების ფართობების შეფარდება, თუ ABC სამკუთხედის კუთხეები ცნობილია.

14.10. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 51, 85 და 104. წრეწირი, რომლის ცენტრიც უდიდეს გვერდზე ძევს, ეხება ორივე მცირე გვერდს. იპოვეთ იმ მონაკვეთებიდან უდიდესის სიგრძე, რომლებადაც წრეწირის ცენტრი ყოფს სამკუთხედის გვერდს.

14.11. ორი ერთიერთგარეშემკვეთი წრეწირის რადიუსებია R და r, ხოლო ცენტრებს შორის მანძილი d-ს ტოლია. იპოვეთ მათი საერთო ნაწილის ფართობი.

14.12. r-რადიუსიანი წრეწირი შიგნიდან ეხება R-რადიუსიან წრეწირს. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც ეხება ორივე წრეწირს და მათ საერთო დიამეტრს.

14.13. წრეწირში ჩახაზულია $ABCD$ მართკუთხედი, რომლის AB გვერდი უდრის a-ს. KP არის AB გვერდის პარალელური დიამეტრი, $\angle BKC = \beta$. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

14.14. წრეში, რომლის რადიუსია 1, ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი და კვადრატი, რომელთაც საერთო წვერო აქვთ. იპოვეთ მათი საერთო ნაწილის ფართობი.

14.15. წესიერი ABC სამკუთხედის შიგნით აღებული ნებისმიერი P წერტილიდან BC, CA და AB გვერდებზე დაშვებულია შესაბამისად PD, PE და PF მართობები. იპოვეთ $\dfrac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}$.

14.16. ABC სამკუთხედში $\angle A = \alpha$, ხოლო $BC = a$. იპოვეთ დანარჩენი ორი გვერდი, თუ a არის ამ სამკუთხედში ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსების საშუალო გეომეტრიული.

14.17. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში ($\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$) ჩახაზულია r-რადიუსიანი წრეწირი. ამ წრეწირისადმი BC გვერდის პარალელურად გავლებულია მხები, რომელიც AB და AC გვერდებს შესაბამისად K და M წერტილებში კვეთს. იპოვეთ $BCMK$ ტრაპეციის ფართობი.

14.18. R-რადიუსიან წრეწირზე აღებულ ორ A და B წერტილებს შორის მანძილი l-ის ტოლია. რა ცვლილებას მნიშვნელობა მიიღოს $AC^2 + BC^2$ ჯამმა, თუ C წერტილიც იმავე წრეწირზე მდებარეობს?

14.19. სამი r, r_1 და R რადიუსიანი წრეწირები წყვილ-წყვილად ეხება ერთმანეთს გარედან. იპოვეთ იმ ქორდის სიგრძე, რომელსაც მესამე წრეწირი ჩამოკვეთს პირველი ორი წრეწირის საერთო შიგა მხებს.

14.20. იპოვეთ ჩახაზული ოთხკუთხედის დიაგონალები, თუ მოცემულია მისი გვერდები a, b, c და d.

14.21. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობის შეფარდება მისი შუამედიანებით შედგენილი სამკუთხედის ფართობთან.

14.22. a, b, c გვერდების მქონე სამკუთხედში ჩახაზულია ნახევარწრე, რომლის დიამეტრიც c გვერდზეა. იპოვეთ ნახევარწრის რადიუსი.

14.23. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია b და c, იპოვეთ სამკუთხედის მართი კუთხის ბისექტრისა.

14.24. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 21 სმ და 9 სმ, ხოლო სიმაღლე 8 სმ-ია. იპოვეთ ამ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

14.25. ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი AC და BC გვერდებს ეხება შესაბამისად M და N წერტილებში და BD ბისექტრისას კვეთს P და Q წერტილებში. $\angle A = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle B = \dfrac{\pi}{3}$. იპოვეთ PQM და PQN სამკუთხედების ფართობების შეფარდება.

14.26. r-რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია ტოლფერდა $ABCD$ ტრაპეცია ($AB \| DC$). ტრაპეციის ფერდების წრეწირთან შეხების

წერტილებია E და K. $\angle BAD = 60°$. იპოვეთ $ABEK$ ოთხკუთხედის ფართობი.

14.27. წრეწირში ჩახაზული $ABCD$ ოთხკუთხედის A და B კუთხის ბისექტრისების გადაკვეთის E წერტილი ძევს CD გვერდზე. ცნობილია, რომ $\frac{CD}{BC} = m$. იპოვეთ ADE და BCE სამკუთხედების ფართობთა შეფარდება.

14.28. ამოზნექილი $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალების შეკვეთილების შემაერთებელი მონაკვეთი ტოლია AD და BC გვერდების შეკვეთილების შემაერთებელი მონაკვეთის. იპოვეთ AB და CD-ს შემცველი სხივებით შექმნილი კუთხე.

14.29. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის შიგა M წერტილიდან AB, BC და CA გვერდებზე დაშვებული პერპენდიკულარების ტოლია შესაბამისად l, m და n-ის. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ A, B და C კუთხეები აქვს შესაბამისად α, β და γ.

14.30. $ABCD$ რომბის ფართობი 2-ის ტოლია. ABD სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი AB გვერდს K წერტილში ეხება. K წერტილზე გავლებულია AC დიაგონალის პარალელური KL წრფე (L წერტილი BC გვერდზე აღებულია). იპოვეთ BAD კუთხე თუ KBL სამკუთხედის ფართობი a-ს ტოლია.

14.31. წრეწირში ჩახაზულია $ABCD$ ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია BC და AD. CD რკალის E წერტილი შეერთებულია ტრაპეციის ყველა წვეროსთან. ცნობილია, რომ $\angle CED = 120°$, $\angle ABE = \angle BAE = \alpha$. იპოვეთ ABE სამკუთხედის პერიმეტრის შეფარდება მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსთან.

14.32. სამკუთხედში ერთ-ერთი კუთხე დახარჩენი ორი კუთხის სხვაობის ტოლია. წაკვეთილი გვერდი 1-ის ტოლია, ხოლო დახარჩენ ორ გვერდზე აგებული კვადრატების ფართობების ჯამი ორჯერ მეტია ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობზე. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე.

14.33. სამკუთხედში ერთ-ერთი კუთხე დანარჩენი ორი კუთხის ჯამის ტოლია. უმცირესი გვერდი 2-ის ტოლია, ხოლო ამ სამკუთხედის ფართობის შეფარდება მასზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძესთან $\frac{1}{4}$-ის ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე.

14.34. ABC სამკუთხედის BC გვერდი 2-ის ტოლია, ხოლო C წვეროდან AB გვერდზე დაშვებული სიმაღლე $\sqrt{2}$-ის. ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია $\sqrt{5}$. იპოვეთ AB და AC, თუ ABC კუთხე სასკელია.

14.35. ჩაწერილია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომელზედაც შემოხაზულია წრეწირი და რომელშიაც ჩახაზულია წრეწირი. ტრაპეციის სიმაღლის შეფარდება შემოხაზული წრეწირის რადიუსთან $\sqrt{\frac{2}{3}}$-ის ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის კუთხეები.

14.36. ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძე 3-ჯერ მეტია მასში ჩახაზული წრეწირის სიგრძეზე. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

14.37. AB დიამეტრის მქონე წრეწირს C და D წერტილებში კვეთს ერთი წრეწირი, ცენტრით A წერტილში. ეს წრეწირი AB დიამეტრს კვეთს E წერტილში. CE რკალის M წერტილზე გავლებული BM სხივი პირველ წრეწირს კვეთს F წერტილში. იპოვეთ MN, თუ $CN = a$, $ND = b$.

14.38. $ABCD$ რომბის გვერდი l-ის ტოლია, ხოლო $\angle BAD = \alpha$. რომბში ჩახაზული წრეწირის ჭდეები, მის AB და AD გვერდს კვეთს M და N წერტილებში ისე, რომ $AM \geqslant AN$. იპოვეთ MB და ND, თუ $MN = 2a$.

14.39. ABC სამკუთხედში $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $AC = b$. BC გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ $BD = 3DC$. B და D წერტილებზე გავლებულია AC გვერდის შემცველი წრფის შემხები წრეწირი. იპოვეთ ამ წრეწირის რადიუსი.

14.40. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის BC და AB გვერდებზე დაშვებული AP და CQ სიმაღლეებია. იპოვეთ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია 15, BPQ სამკუთხედისა — 2, ხოლო PQ მონაკვეთის სიგრძეა $2\sqrt{2}$.

14.41. ABC სამკუთხედის BAC კუთხე ტოლია $\frac{\pi}{3}$-ის. სამკუთხედის A და C წვეროებზე მათ მიმდებარე გვერდების შემცველი წრფეებისადმი გავლებულია ერთმანეთის მხებები, რომელთა გადაკვეთის წერტილი A და C წერტილებიდან დაშორებულია 1 ერთეულით. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

14.42. ტრაპეციის ერთ-ერთ ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია 40°-ის და 50°-ის, ხოლო შუამონაკვეთი — 4-ის. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები, თუ მათი შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძეა 1.

14.43. 3-ის ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირი ჩახაზულია ABC სამკუთხედში და ეხება BC გვერდს D წერტილში. 4-ის ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირი, რომელიც ეხება AB და AC გვერდების გაგრძელებებს, ეხება BC გვერდს E წერტილში. იპოვეთ ED, თუ BCA კუთხე 120°-ის ტოლია.

14.44. მოცემულია წრეწირი, რომლის ცენტრი $ABCD$ ოთხკუთხედის AD გვერდის შუაწერტილში ძევს და ეხება დანარჩენ სამ გვერდს. იპოვეთ AD, თუ $AB=12$ და $CD=75$.

ამოცანები შემჭიდროებაზე

14.45. ორი კონცენტრული წრიდან ცნობილის წრეწირი ეფიდეს წრეს ყოფს ორ ტოლდიდ ნაწილად. დაამტკიცეთ, რომ უცილობელია, წრეწირის პარალელურ მხებებს შორის მოთავსებული რგოლის ნაწილის ფართობი ცნობილს წრეწირში ჩახაზული კვადრატის ფართობზე ოჯერ მეტია.

14.46. მართკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძეა 1 სმ. ცნობილია, რომ ორი ურთიერთშემართობული წრფით მისი გაყოფა ოთხ მართკუთხედად ისე, რომ სამი მათგანის ფართობი 1 სმ²-ს, ხოლო მეოთხისა 2 სმ²-ზე არანაკლებია. დაამტკიცეთ, რომ ასეთი მართკუთხედის მეორე გვერდი $3+2\sqrt{2}$-ზე არანაკლებია.

14.47. $ABCD$ კვადრატის გვერდი 1-ის ტოლია. AB და AD გვერდებზე აღებულია P და Q წერტილები ისე, რომ APQ სამკუთხედის პერიმეტრი 2-ის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ $\angle PCQ=45^\circ$.

14.48. გამოთვათ მახვილკუთხა სამკუთხედის a, b და c გვერდებისადმი გავლებული სიმაღლეებია h_a, h_b, h_c, ხოლო შესაბამისი m_a, m_b, m_c, r და R შესაბამისად ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსებია. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leqslant 1+\frac{R}{r}$ და $R\geqslant 2r$.

14.49. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სამკუთხედისათვის $P\geqslant 3\sqrt{3}r$, სადაც P სამკუთხედის ნახევარპერიმეტრია, ხოლო r — ჩახაზული წრის რადიუსი.

14.50. ABC სამკუთხედში ჩახაზულია წრე და ამ წრეში ჩახაზულია წესიერი $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი. დაამტკიცეთ, რომ $P_{ABC}\geqslant 2P_{A_1B_1C_1}$, სადაც P-თი აღნიშნულია შესაბამისი სამკუთხედის პერიმეტრი.

14.51. ABC სამკუთხედში $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$, ხოლო m_a, m_b და m_c შესაბამისად a, b და c გვერდების მედიანებია. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\geqslant\frac{9}{4}$.

14.52. a, b, c გვერდებიან სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსია r, ხოლო მასზე შემოხაზულისა — R. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{1}{2Rr}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\leqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{1}{4r^2}.$$

14.53. ცნობილია, რომ $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3}$. სადაც A, B და C წარმოადგენენ ABC სამკუთხედის კუთხეებს. დაამტკიცეთ, რომ ამ სამკუთხედის ერთი კუთხე მაინც 60°-ის ტოლია.

14.54. h_c მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლეა, ხოლო r ჩახაზული წრის რადიუსია, დაამტკიცეთ, რომ $0{,}4<\frac{r}{h_c}<0{,}5$.

14.55. დაამტკიცეთ, რომ თუ A, B, C — ბლაგვკუთხა სამკუთხედის კუთხეებია, მაშინ $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C<0$.

14.56. წრეწირში ჩახაზულია $ABCD$ ტრაპეცია; M არის ტრაპეციის AD და BC ფუძეების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო N — წრეწირის B და D წერტილებზე გავლებული მხებების გადაკვეთის წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $MN\|AB$.

14.57. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა a, ფერდი — b, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე უდრის 20°-ს, დაამტკიცეთ, რომ $a^3+b^3=3ab^2$.

14.58. სამკუთხედის a, b და c გვერდები აკმაყოფილებენ პირობას $a^2+b^2=5c^2$. დაამტკიცეთ, რომ a და b გვერდების მედიანები ურთიერთმართობულია.

14.59. დაამტკიცეთ, რომ ჩახაზულ ოთხკუთხედში დიაგონალების ნამრავლი ტოლია ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ნამრავლთა ჯამის.

14.60. ტოლგვერდა სამკუთხედის ცენტრზე გავლებულია წრფე. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის წვეროებიდან ამ წრფემდე მანძილების კვადრატების ჯამი არ არის დამოკიდებული წრფის შერჩევაზე და გვერდის კვადრატის ნახევრის ტოლია.

14.61. პარალელოგრამის გვერდებზე გარედან აგებულია კვადრატები. დაამტკიცეთ, რომ კვადრატების ცენტრების შეერთებით მიღებული ოთხკუთხედი კვადრატია.

14.62. R და r შესაბამისად ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსებია. დაამტკიცეთ, რომ მანძილი ამ წრეწირების ცენტრებს შორის $\sqrt{R(R-2r)}$-ის ტოლია.

14.63. წრეწირში ჩახაზულია ABC სამკუთხედი, $AC=a$. დაამტკიცეთ, რომ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი უდრება რიცხვს $AB=BC$.

14.64. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში $R \geqslant 2r$, სადაც R და r ამ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსებია. ამასთან ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

14.65. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ ABC სამკუთხედში ადგილი აქვს უტოლობას $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$.

14.66. დაამტკიცეთ, რომ ორი ტოლფერდა ტოლია, თუ მათი შესაბამისი გვერდები ტოლია.

14.67. რომბში, რომელიც კვადრატს არ წარმოადგენს, ჩახაზულია კვადრატი. დაამტკიცეთ, რომ კვადრატის გვერდები რომბის დიაგონალების პარალელურია.

14.68. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ოთხკუთხედის რომელიმე ორი ძირითადი გვერდების შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი დანარჩენი ორი გვერდის ნახევარჯამის ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი ტრაპეციაა.

14.69. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ამოხაზული ოთხკუთხედის დიაგონალები პერპენდიკულარულებია, მაშინ მათი გადაკვეთის წერტილის პროექციები ოთხივე გვერდზე, მდებარეობენ ერთ წრეწირზე.

14.70. დაამტკიცეთ, რომ ABC სამკუთხედისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\sqrt[3]{\frac{R}{2S^2}} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right),$$

სადაც S სამკუთხედის ფართობია, R — შემოხაზული წრის რადიუსი, h_a, h_b, h_c — მისი სიმაღლეები.

14.71. ABC სამკუთხედში ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} \cdot \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2C}$$

დაამტკიცეთ, რომ ეს პირობა ეკვივალენტურია ტოლობის

$$\cos A + \cos B = 1.$$

14.72. დაამტკიცეთ, რომ $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

ა) $S = \frac{1}{4}(AC^2 - BD^2)\operatorname{tg} A$.

ბ) $S = \frac{1}{2}(AB^2 - AD^2)\operatorname{tg} \angle AOD$,

სადაც O დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია.

14.73. R-რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია ტრაპეცია, ხოლო მახვილი კუთხე ასეთია, რომ ის ამასთან შემოხაზულია r-რადიუსიან წრეზე. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha},$$

14.74. დაამტკიცეთ, რომ შემოხაზული ოთხკუთხედის დიაგონალები და მისი მოპირდაპირე გვერდების შეხების წერტილებზე გამავალი წრფეები ერთ წერტილში იკვეთება.

14.75. სამკუთხედის გვერდებია a, b და c. ამ სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია გვერდების პარალელური წრფეები. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრფეების ის მონაკვეთები, რომლებიც ჩაითვალებულია სამკუთხედის შიგნით, გამოითვლება ფორმულით:

$$\frac{a(b+c)}{a+b+c}, \quad \frac{b(a+c)}{a+b+c} \quad \text{და} \quad \frac{c(a+b)}{a+b+c}$$

14.76. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. ეს წრეწირები შიგნიდან ეხებიან R_1-რადიუსიან წრეწირს ამ წრეწირის დიამეტრის ბოლოებში. R_2-რადიუსიანი წრეწირი ეხება სამივე წრეწირს. დაამტკიცეთ, რომ $R_1 \geqslant 3R_2$.

14.77. ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი AB გვერდს ეხება D წერტილში. ამასთან $AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$. დაამტკიცეთ, რომ ABC სამკუთხედი მართკუთხაა.

14.78. დაამტკიცეთ, რომ მახვილკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრიდან სამკუთხედის გვერდებამდე მანძილების ჯამი ამ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების ჯამის ტოლია.

14.79. ABC მართკუთხა ($\angle C = 90°$) სამკუთხედის შიგნით აღებულია O წერტილი ისე, რომ OAB, OBC და OCA სამკუთხედები ტოლფერდაა. დაამტკიცეთ, რომ $OA^2 + OB^2 = OC^2$.

14.80. ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი გვერდებს ეხება D, E და F წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $S_{DEF} : S_{ABC} = r : 2R$, სადაც r და R შესაბამისად ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსებია.

14.81. მახვილკუთხა სამკუთხედის გვერდებია a, b და c. დაამტკიცეთ, რომ იმ სამკუთხედის პერიმეტრი, რომლის წვეროებია მოცემული სამკუთხედის სიმაღლეების ფუძეები არის $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \cdot 8p = \frac{2S}{R}$, სადაც $p = \frac{a+b+c}{2}$, S სამკუთხედის ფართობია, ხოლო R შემოხაზული წრის რადიუსი.

14.82. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ჩახაზული ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთ მართობულია, ძაშინ, მისი მოპირდაპირე გვერდების კვადრატების ჯამი შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის კვადრატის ტოლია.

14.83. დაამტკიცეთ, რომ, თუ S სამკუთხედის ფართობია, ხოლო P — პერიმეტრია, მაშინ $\rho \leq \frac{\sqrt{3}}{3} S$.

14.84. ნახევარწრეა AB დიამეტრის ნებისმიერი M წერტილზე AB-ს მართობულად გავლებული წრფე ხახვარწრეწირს კვეთს N წერტილში. MNB ფიგურაში ჩახაზული წრეწირი AB დიამეტრს ეხება D წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ ND არის MNB კუთხის ბისექტრისა.

14.85. სამკუთხედის a, b, c გვერდები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას და აკმაყოფილებენ უტოლობას $a<b<c$. დაამტკიცეთ, რომ $ac=6Rr$, სადაც R და r შესაბამისად სამკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსებია.

14.86. R-რადიუსიან წრიულ სექტორში ჩახაზულია r– რადიუსიანი წრეწირი. სექტორის ქორდა $2a$-ს ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{a}$.

14.87. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის ნებისმიერი წერტილიდან მასში ჩახაზული სამკუთხედის გვერდებზე დაშვებული მართობების ფუძეები ერთ წრფეზე მდებარეობენ.

14.88. სიბრტყეზე აღებულია A, B, C და D წერტილები ისე, რომ $AB \perp CD$ და $AC \perp BD$. დაამტკიცეთ, რომ $AD \perp BC$.

14.89. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი და ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრი ერთ წრფეზე მდებარეობენ.

14.90. K არის ABC სამკუთხედის BC გვერდის წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ ტოლობას $AK^2=AB\cdot AC-KB\cdot KC$ აგება აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $AB=AC$ ან $\angle BAK=\angle CAK$.

სტერეომეტრია

§ 15. სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები. წრფეთა და სიბრტყეთა პარალელობა და მართობულობა

ამოცანები გამოთვლაზე

15.1. სიბრტყიდან 3სმ-ის ტოლი მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია დახრილი. იპოვეთ ამ დახრილის სიგრძე, თუ მისი გეგმილი სიბრტყეზე 4სმ-ის ტოლია.

15.2. A წერტილიდან α სიბრტყისაძდი გავლებულია პერპენდიკულარი და დახრილი, რომლებიც ერთმანეთთან $60°$-იან კუთხეს ქმნიან. ცნობილია დახრილის სიგრძე, ხოლო პერპენდიკულარის სიგრძე 7-ის ტოლია.

15.3. A წერტილი სიბრტყიდან დაშორებულია h მანძილით. იპოვეთ A წერტილიდან გავლებულ იმ დახრილთა სიგრძეები, რომლებიც სიბრტყესთან ადგენენ შემდეგ კუთხეებს: 1) $30°$, 2) $45°$, 3) $60°$.

15.4. დახრილი α-ს ტოლია. რას უდრის ამ დახრილის გეგმილი სიბრტყეზე, თუ დახრილის მიერ სიბრტყესთან შედგენილი კუთხე: 1) $45°$-ია, 2) $60°$-ია, 3) $30°$-ია?

15.5. M წერტილიდან ρ სიბრტყისაძმი გავლებულ პერპენდიკულარსა და დახრილს შორის კუთხე α-ს ტოლია. დახრილის სიგრძეა a. იპოვეთ მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე, თუ $a=10$, $\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

15.6. α სიბრტყის A წერტილიდან გავლებულია დახრილი და მასზე აღებულია B და C წერტილები. იპოვეთ მანძილი C წერტილიდან α სიბრტყემდე, თუ მანძილი B წერტილიდან α სიბრტყემდე არის 6, $AB=8$ და $AC=20$.

15.7. სივრცის რომელიღაც წერტილიდან გავლებულია მოცემული სიბრტყისაძმი პერპენდიკულარი და დახრილი. პერპენდიკულარის სიგრძე 6 სმ-ია, დახრილისა კი 9 სმ. იპოვეთ პერპენდიკულარის გეგმილი დახრილზე.

15.8. მოცემული წერტილი სიბრტყიდან დაშორებულია $5\sqrt{2}$-ით. ამ წერტილიდან ამავე სიბრტყისაძმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან ადგენენ $30°$-იან კუთხეს,

ხოლო ერთი ერთეულოვანი ნაკვეთის მანძილი დახრილების ფუძეებს შორის.

15.9. სიბრტყიდან 1 მ მანძილით დაშორებული წერტილიდან ამ სიბრტყისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი. იპოვეთ მანძილი დახრილთა ფუძეებს შორის, თუ ცნობილია, რომ დახრილები ურთიერთმართობულია და სიბრტყისადმი გავლებულ მართობთან ქმნიან 60°-იან კუთხეებს.

15.10. მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი; მათ შორის კუთხე 60°-ია. მათ წვეტებს შორის კუთხე კი ნახევარია. იპოვეთ თითოეული დახრილისა და მის გეგმილს შორის შედგენილ კუთხეები.

15.11. სიბრტყიდან a მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან 30°-იან კუთხეებს ადგენს, ამასთან მათი გეგმილები ერთმანეთთან 120°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ მანძილი დახრილთა ბოლოებს შორის.

15.12. მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი სიგრძით $7\sqrt{2}$. ძათ შორის კუთხე 60°-ია, ხოლო მათ გეგმილებს შორის კუთხე ტოლია 90°. იპოვეთ მანძილი მოცემული წერტილიდან სიბრტყემდე.

15.13. სიბრტყიდან a მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან ადგენენ 45°-იან კუთხეებს, ხოლო ერთმანეთთან 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ მანძილი დახრილთა ბოლოებს შორის.

15.14. სიბრტყიდან d მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან ადგენენ α და β კუთხეებს, ხოლო ერთმანეთთან მართ კუთხეს. იპოვეთ დახრილთა ბოლოებს შორის მანძილი. თუ $d=13$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

15.15. სიბრტყიდან a მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან ადგენენ 45°-იან და 30°-იან კუთხეებს, ხოლო ერთმანეთთან მართ კუთხეს. იპოვეთ მანძილი დახრილთა ბოლოებს შორის.

15.16. მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა სიგრძეებია 15 და 20. პირველის გეგმილი სიბრტყეზე 9-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე დახრილის გეგმილი.

15.17. წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა სიგრძეებია 10 სმ და 17 სმ. ამ დახრილთა გეგმილებს შორის სხვაობა 9 სმ-ია. იპოვეთ დახრილთა გეგმილები.

15.18. წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთაგან ერთი მეორეზე 26 სმ-ით მეტია. დახრილთა გეგმილები 12 სმ-სა და 40 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ დახრილთა სიგრძეები.

15.19. წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი. იპოვეთ დახრილთა სიგრძეები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1 : 2 და დახრილთა გეგმილების სხვაობა 1 სმ-ია და $\sqrt{13}$-ის ტოლია.

15.20. წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა სიგრძეებია 23 სმ და 33 სმ. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სიბრტყემდე, თუ დახრილთა გეგმილები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 3.

15.21. AB მონაკვეთი პარალელურია სიბრტყის, რისი ბოლოებიდან სიბრტყისადმი გავლებულია AC და BD დახრილები. AC დახრილი სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს. განსაზღვრეთ ამ სიბრტყისადმი BD-ს დახრის კუთხის სიდიდე, თუ $AC=\sqrt{6}$, $BD=3$, $\alpha=60°$.

15.22. AB მონაკვეთი სიბრტყის პარალელურია. მისი ბოლოებიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი $AC=6$ და $BD=4$. AC დახრილი სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს, იპოვეთ BD-ს დახრის კუთხე ამ სიბრტყისადმი, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

15.23. AB მონაკვეთი პარალელურია სიბრტყის და $AB=4{,}5$. მონაკვეთი BA_1, რომელიც B წერტილს ერთად A წერტილის A_1 გეგმილთან, სიბრტყესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს, იპოვეთ BA_1.

15.24. სიბრტყის პარალელური AB მონაკვეთის ბოლოებიდან ამ სიბრტყისადმი გავლებულია AC მართობი და BD დახრილი, რომელიც AB მონაკვეთის მართობულია. რას ტოლია CD მანძილი, თუ $AB=21$, $AC=15$, $BD=25$?

15.25. A და B წერტილებიდან α სიბრტყეზე დაშვებულია მართობები. იპოვეთ მანძილი A და B წერტილებს შორის, თუ მართობების სიგრძეებია 3 მ და 2 მ, მათ ფუძეებს შორის მანძილი 2,4 მ-ია, ხოლო AB მონაკვეთი სიბრტყის არ კვეთს.

15.26. მოცემული მონაკვეთის სიგრძე 125 სმ-ია. მისი ბოლოებიდან სიბრტყემდე დაშორებულია 100 სმ-ით და 56 სმ-ით. იპოვეთ მონაკვეთის გეგმილის სიგრძე.

15.27. იპოვეთ მანძილი AB მონაკვეთის შუაწერტილიდან ამ მონაკვეთის არაგადამკვეთ სიბრტყემდე, თუ A და B წერტილებიდან სიბრტყემდე მანძილებია: 1) 3,2 სმ და 5,2 სმ; 2) 7,4 სმ და 6, 1 სმ; 3) a და b.

15.28. AB მონაკვეთის ბოლოებში და M შუაწერტილში გავლებულია ერთმანეთის პარალელური წრფეები, რომლებიც იღებენ სიბრტყეს A_1, B_1 და M_1 წერტილებში. იპოვეთ MM_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ AB მონაკვეთი სიბრტყეს არ კვეთს და: 1) $AA_1=8$ სმ; $BB_1=7$ სმ; 2) $AA_1=3{,}6$ დმ, $BB_1=4{,}8$ დმ; 3) $AA_1=8{,}3$ სმ; $BB_1=4{,}1$ სმ; 4) $AA_1=a$, $BB_1=b$.

15.29. მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს. მისი ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 8 სმ-ით და 2 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი ამ მონაკვეთის შუა წერტილიდან სიბრტყემდე.

15.30. 1 მ სიგრძის მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს. მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 0,3 მ-ითა და 0,3 მ-ით. იპოვეთ მონაკვეთის გეგმილის სიგრძე.

15.31. 10 მ სიგრძის მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს; მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 2 მ-ითა და 3 მ-ით. იპოვეთ კვეთს მოცემულ მონაკვეთსა და სიბრტყეს შორის.

15.32. ნაკვეთია $ABCD$ პარალელოგრამი და სიბრტყე, რომელიც ამ პარალელოგრამს არ კვეთს. პარალელოგრამის წვეროებზე გავლებულია პარალელური წრფეები, რომლებიც მოცემულ სიბრტყეს A_1, B_1, C_1 და D_1 წერტილებში კვეთს. იპოვეთ DD_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ:
1) $AA_1=2$ მ, $BB_1=2$ მ, $CC_1=8$ მ; 2) $AA_1=4$ მ, $BB_1=3$ მ, $CC_1=1$ მ; 3) $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$.

15.33. AB მონაკვეთი M სიბრტყის პარალელურია; AC და BD M სიბრტყისადმი AB-ს პერპენდიკულარულად და მისგან სხვადასხვა მიმართულებით გავლებული ტოლი დახრილებია. მონაკვეთია $AB=2$ სმ M სიბრტყიდან დაშორებულია 7 სმ-ით, AC და BD მონაკვეთები 8 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი CD.

15.34. სიბრტყეზე გავლებულია ორი პარალელური წრფე, რომელთა შორის მანძილი 12-ის ტოლია. A წერტილი ამ წრფეებიდან თანაბრადაა დაშორებული, ხოლო სიბრტყიდან კი $\sqrt{13}$-ის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან წრფემდე.

15.35. ორი პარალელური წრფე AB და CD ჭრის M სიბრტყეზე კრთომწერილებს 28 სმ-ის დაშორებით. EF წრფე AB-ს პარალელურია და მისგან 17 სმ-ითაა დაშორებული. M სიბრტყიდან კი 15 სმ ით. იპოვეთ მანძილი EF-სა და CD-ს შორის. (ორი შემთხვევა)

15.36. b სიგრძის AB მონაკვეთის A ბოლოზე გავლებულია ამ მონაკვეთის მართობული სიბრტყე. ამ სიბრტყეში გავლებულია წრფე. იპოვეთ მანძილი B წერტილიდან ამ წრფემდე, თუ მანძილი A წერტილიდან წრფემდე a-ს ტოლია.

15.37. მოცემულია ორი პარალელური სიბრტყე. ერთ-ერთ მათგანზე აღებულ A და B წერტილებზე გავლებულია პარალელური წრფეები, რომლებიც მეორე სიბრტყეს A_1 და B_1 წერტილებში კვეთს. იპოვეთ A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB=a$.

15.38. ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილი a-ს ტოლია. b სიგრძის მონაკვეთი თავისი ბოლოებით ამ სიბრტყეებს ეყრდნობა. იპოვეთ მონაკვეთის გეგმილი თითოეულ სიბრტყეზე.

15.39. ორი a და b სიგრძის მონაკვეთები ბოლოებით თან პარალელური სიბრტყეს ეყრდნობა. პირველი (a სიგრძის) მოსაზვეთის გეგმილი სიბრტყეზე c-ს ტოლია. იპოვეთ მეორე მონაკვეთის გეგმილი.

15.40. მოცემულია ABC სამკუთხედი. AB წრფის პარალელური სიბრტყე ამ სამკუთხედის AC გვერდს კვეთს A_1 წერტილში, ხოლო BC გვერდს — B_1 წერტილში. იპოვეთ A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ:
1) $AB=15$ სმ, $AA_1:AC=2:3$; 2) $AB=8$ სმ, $AA_1:A_1C=3:2$; 3) $B_1C=10$ სმ, $AB:BC=4:5$; 4) $AA_1=a$, $AB=b$, $A_1C=c$.

15.41. AB, AC და AD წრფეები წყვილ-წყვილად მართობულია. იპოვეთ CD მონაკვეთი, თუ: 1) $AB=3$ სმ; $BC=7$ სმ; $AD=1{,}5$ სმ; 2) $BD=9$ სმ, $BC=16$ სმ; $AD=5$ სმ; 3) $AB=b$, $BC=a$, $AD=d$; 4) $BD=c$, $BC=a$, $AD=d$.

15.42. A წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე მანძილები a-ს ტოლია. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან კვადრატის სიბრტყემდე, თუ კვადრატის გვერდი b-ს ტოლია.

15.43. O წერტილი არის ცენტრი კვადრატისა, რომლის გვერდიც უდრის a-ს; OA არის კვადრატის სიბრტყისადმი პერპენდიკულარული მონაკვეთი, რომლის სიგრძე უდრის b-ს. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე.

15.44. A წერტილიდან კვადრატის ყველა გვერდამდე მანძილები a-ს ტოლია. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან კვადრატის სიბრტყემდე, თუ კვადრატის დიაგონალი d-ს ტოლია.

15.45. წესიერი სამკუთხედის გვერდი $7\sqrt{6}$-ის ტოლია. M წერტილი ისე არჩეულია, რომ მონაკვეთები, რომლებიც მას სამკუთხედის წვეროებთან აერთებს სამკუთხედის სიბრტყესთან 45°-იან კუთხეებს ადგენენ. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე.

15.46. M წერტილი თანაბრადაა დაშორებული წესიერი სამკუთხედის ყველა წვეროდან და 5-ია ტოლი მანძილისა. დაშორებულია ამ სამკუთხედის სიბრტყიდან. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე, თუ სამკუთხედის გვერდი $12\sqrt{3}$-ის ტოლია.

15.47. წესიერი სამკუთხედის გვერდი a-ს ტოლია. M წერტილი ისეა შერჩეული, რომ სამკუთხედის ყველა წვეროსა და M წერტილის შემაერთებელი წრფეებით სამკუთხედი α კუთხის ქმნიან. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე, თუ $\alpha=7$, სად $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

15.48. A წერტილი a სიგრძის კვეთის შეხების წერტილებია სამკუთხედის წვეროებიდან a მანძილზე მდებარეობს. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

15.49. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდები 3 მ-ია. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის სიბრტყემდე იმ წერტილიდან, რომელიც სამკუთხედის თითოეული წვეროდან დაშორებულია 2 მ-ით.

15.50. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 2 და 5. M წერტილი დაშორებულია სამკუთხედის სიბრტყიდან $1\frac{5}{7}$-ის ტოლი მანძილით და ერთნაირადაა დაშორებული ყველა წვეროდან. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან წვეროებამდე.

15.51. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის წვეროდან ამ სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AD მართობი, იპოვეთ მანძილი D წერტილიდან BC გვერდამდე, თუ $AD=13$ სმ, $BC=6$ სმ.

15.52. ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 3 და 4; C მახვილი კუთხის წვეროდან აღმართულია სამკუთხედის სიბრტყისადმი CM პერპენდიკულარი, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან ჰიპოტენუზამდე.

15.53. ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 2 სმ და 3 სმ. C მახვილი კუთხის წვეროდან აღმართულია სამკუთხედის სიბრტყისადმი CD პერპენდიკულარი, რომლის სიგრძე 1 სმ-ის ტოლია. D წერტილი შეერთებულია A და B წერტილებთან. იპოვეთ ABD სამკუთხედის ფართობი.

15.54. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 10, 17 და 21. ამ სამკუთხედის ტოლდიდი A კუთხის წვეროდან მისი სიბრტყისადმი გავლებულია AK პერპენდიკულარი, რომლის სიგრძე ტოლია 15-ის. იპოვეთ მანძილი K წერტილიდან ტოლდიდს გვერდამდე.

15.55. C მახვილი კუთხის წვეროდან ABC სამკუთხედში მახვილი კუთხის წვეროდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AD მართობი. იპოვეთ მანძილები D წერტილიდან B და C წვეროებამდე, თუ $AC=a$, $BC=b$, $AD=c$.

15.56. M წერტილი ABC სამკუთხედის ყველა წვეროდან $2\sqrt{7}$-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე, თუ $BC=6$, $\angle A=60°$.

15.57. სამკუთხედის გვერდებია a, b და c. M წერტილი ისეა შერჩეული, რომ სამკუთხედის ყველა წვეროსა და M წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთები სამკუთხედის სიბრტყესთან α კუთხეს ქმნიან. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე, თუ $a=30$, $b=5$, $c=25$, $\cos\alpha=\frac{29}{48}$.

15.58. მოცემულია ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფუძეა 6 მ, ხოლო ფერდი — 5 მ. ჩახახული წრეწირის ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყისაღმი აღმართულია 2 მ სიგრძის მართობი. იპოვეთ მანძილები მართობის ბოლოდან სამკუთხედის გვერდებამდე.

15.59. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძე და სიმაღლე 1 მ-ის ტოლია. მოცემული წერტილი სამკუთხედის სიბრტყედან დაშორებულია 6 მ-ით. იპოვეთ ამ წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე მანძილები. თუ ცნობილია, რომ ისინი ტოლია.

15.60. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის AB გვერდის D შუაწერტილიდან გავლებულია სამკუთხედის სიბრტყისადმი DM მართობი. მანძილი M წერტილიდან BC გვერდამდე ტოლია 59-ის. იპოვეთ DM, თუ სამკუთხედის გვერდის სიგრძეა $32\sqrt{11}$.

15.61. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის AB გვერდის D შუაწერტილიდან გავლებულია სამკუთხედის სიბრტყისადმი DM მართობი, მანძილი M წერტილიდან BC გვერდამდე ტოლია $10\sqrt{19}$. იპოვეთ DM, თუ ეს სამკუთხედის გვერდის ტოლია.

15.62. წრის ცენტრიდან მისი სიბრტყისადმი აღმართულია პერპენდიკულარი, რომლის სიგრძეა 39. იპოვეთ მანძილი პერპენდიკულარის ბოლოდან წრეწირის წერტილებამდე, თუ წრის ფართობია 79 π.

15.63. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრიდან ამ სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია მართობი, რომლის სიგრძეა 2,4 მ. იპოვეთ მანძილი ამ მართობის ბოლოდან სამკუთხედის გვერდებამდე, თუ წრეწირის რადიუსი 0,7 მ-ია.

15.64. მოცემული წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი 1,1 მ-ის ტოლია, ხოლო თითოეულ გვერდამდე მანძილი 0,1 მ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

15.65. კვადრატის O ცენტრიდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართულია OM პერპენდიკულარი. M წერტილიდან კვადრატის AB გვერდისადმი გავლებულია MC პერპენდიკულარი. იპოვეთ ამ კუთხის სიდიდე, რომელსაც MC ადგენს OC გეგმილთან, თუ $AB=7\sqrt{3}$ და $OM=3,5$.

15.66. ABC სამკუთხედის A წვეროდან მისი სიბრტყის გარეთ გავლებულია AD წრფე, რომელიც AB და AC გვერდებთან ქმნის

ტოლ მახვილ კუთხეებს. რა პარალელებად ყოფს BC გვერდს AD წრფის გეგმილი სამკუთხედის სიბრტყეზე, თუ $AB=51$ მ, $AC=34$ მ და $BC=30$ მ?

15.67. კვადრატის წვეროდან ამ კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართულია მართობი. ამ მართობის ბოლოდან კვადრატის სხვა წვეროებამდე მანძილები a-სა და b-ს ტოლია ($a<b$). იპოვეთ მართობის სიგრძე და კვადრატის გვერდის სიგრძე.

15.68. $ABCD$ მართკუთხედის A წვეროდან ამ მართკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AK მართობი, რომლის K ბოლოდან სხვა წვეროებამდე მანძილები 6 მ-ის, 7 მ-ისა და 9 მ-ის ტოლია. იპოვეთ AK მართობის სიგრძე.

15.69. მართი კუთხის სიბრტყის გარეთ მდებარე M წერტილი კუთხის წვეროდან დაშორებულია a-მანძილით, ხოლო კუთხის გვერდებიდან — b მანძილით. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან კუთხის სიბრტყემდე.

15.70. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც მეორე კათეტთან $45°$-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კუთხე ჰიპოტენუზასა და სიბრტყეს შორის.

15.71. კვადრატის სიბრტყე ერთ-ერთ მის გვერდზე გავლებულ სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ ამ კუთხის სინუსი, რომელსაც ქმნის იმავე სიბრტყესთან კვადრატის დიაგონალი, თუ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

15.72. α და β სიბრტყეები ერთიერთმართობულია. α სიბრტყის A წერტილიდან სიბრტყეთა გადაკვეთის c წრფემდე მანძილი 0,5 მ-ის ტოლია. β სიბრტყეში გავლებულია c წრფის პარალელური b წრფე, რომელიც c წრფიდან დაშორებულია 1,2 მ-ით. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან b წრფემდე.

15.73. ერთიერთმართობული α და β სიბრტყეები კვეთენ c წრფეზე კვეთს. α სიბრტყეში გავლებულია a წრფე ($a\|c$), ხოლო β სიბრტყეში — b წრფე ($b\|c$). იპოვეთ მანძილი a და b წრფეებს შორის, თუ მანძილი a და c წრფეებს შორის 1,5 მ-ია, ხოლო მანძილი b და c წრფეებს შორის — 0,8 მ.

15.74. $30°$-იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მოკვეთილია წერტილი, რომელიც მეორე წახნაგიდან დაშორებულია 17,2 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან წიბომდე.

15.75. იპოვეთ ორწახნაგა კუთხის სიდიდე, თუ მის ერთ წახნაგზე აღებული წერტილი ორჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული წიბოდან, ვიდრე მეორე წახნაგიდან.

15.76. $45°$-იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მოკვეთილია წერტილი, რომელიც მეორე წახნაგიდან დაშორებულია a მანძილით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან წიბომდე.

15.77. α სიდიდის ორწახნაგა კუთხის ერთ-ერთ წახნაგზე მოკვეთილია წერტილი, რომელიც წიბოდან დაშორებულია a მანძილით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან მეორე წახნაგამდე, თუ $a=12$, $\sin\alpha=\frac{3}{4}$.

15.78. $60°$-იანი ორწახნაგა კუთხის შიგნით აღებული წერტილი ორივე წახნაგიდან დაშორებულია 13 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი წერტილიდან წიბომდე.

15.79. β სიდიდის ორწახნაგა კუთხის შიგნით აღებულია წერტილი, რომელიც a მანძილითაა დაშორებული თითოეული წახნაგიდან. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე, თუ $a=12$, $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{2}{3}$.

15.80. წერტილი ორი ურთიერთმართობული სიბრტყიდან a და b მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სიბრტყეთა ურთიერთგადაკვეთის წრფემდე.

15.81. ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მოკვეთილია A და B წერტილები; ამ წერტილებიდან დაშვებულია პერპენდიკულარები მეორე წახნაგზე: $AC=1$ დმ, $BD=2$ დმ; და წიბოზე: $AF=3$ დმ და BF. იპოვეთ BF.

15.82. ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე აღებული ორი წერტილი წიბოდან დაშორებულია 51 სმ-ით და 34 სმ-ით, მანძილი პირველი წერტილიდან მეორე წახნაგამდე 15 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი მეორე წერტილიდან მეორე წახნაგამდე.

15.83. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია 7 მ და 24 მ-ია. იპოვეთ მანძილი მართი კუთხის წვეროდან ამ სამკუთხედის სიბრტყემდე, რომელიც ჰიპოტენუზაზე გავლის და სამკუთხედის სიბრტყესთან $30°$-იან კუთხეს ადგენს.

15.84. ABC სამკუთხედის გვერდებია: $AB=9$, $BC=6$ და $AC=5$. AC გვერდზე გადის M სიბრტყე, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყესთან ქმნის $45°$-იან კუთხეს. იპოვეთ მანძილი B წვეროდან M სიბრტყემდე.

15.85. ABC სამკუთხედის BC გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყესთან φ კუთხეს ქმნის. იპოვეთ მანძილი A წვეროდან სიბრტყემდე, თუ $AB=29$, $BC=36$, $AC=25$, $\sin\varphi=\frac{2}{5}$.

15.86. AB და CD პარალელური წრფეები ჰკვეთს ერთიერთგადაკვეთის ორ სიბრტყეზე, რომლებიც ქმნიან $60°$-იან კუთხეს. A და D

წერტილები პარალელური გადაკვეთის წრფეებია და მანძილი მათ შორის 6,3 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი AB-სა და CD-ს შორის.

15.87. ორ ურთიერთმართობულ სიბრტყეში მდებარე A და B წერტილებიდან ამ სიბრტყეების ურთიერთგადაკვეთის წრფეზე დაშვებულია AC და BD მართობები. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ: 1) $AC=6$ მ, $BD=7$ ც, $CD=6$ მ; 2) $AC=3$ მ, $BD=4$ მ, $CD=12$ მ; 3) $AD=4$ მ, $BC=7$ მ, $CD=1$ მ; 4) $AD-BC=5$ მ; $CD=1$ მ; 5) $AC=a$, $BD=b$, $CD=c$. 6) $AD=a$, $BC=b$, $CD=c$.

15.88. A და B $120°$-იანი ორწახნაგა კუთხის წიბოზე მდებარე წერტილებია; AC და BD სხვადასხვა წახნაგზე გავლებული წიბოს პერპენდიკულარებია. იპოვეთ CD მონაკვეთის სიგრძე, თუ:

1) $AB=AC=BD=a$;

2) $AB=3$, $AC=2$, $BD=1$.

15.89. ორწახნაგა კუთხის წახნაგებზე მდებარე A და B წერტილებიდან კუთხის წიბოზე დაშვებულია AA_1 და BB_1 მართობები. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ და ორწახნაგა კუთხე α-ს ტოლია.

15.90. ორ მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედს საერთო ჰიპოტენუზა აქვთ და მათი სიბრტყეები ერთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ მანძილი მათი კუთხეების წვეროებს შორის, თუ ჰიპოტენუზის სიგრძეა $5\sqrt{2}$.

15.91. ორ ტოლფერდა სამკუთხედს აქვთ საერთო ფუძე და მათი სიბრტყეები დახრილია ერთმანეთისადმი $60°$-ით. საერთო ფუძის სიგრძე 16, ერთი სამკუთხედის ფერდის სიგრძე 17, ხოლო მეორე სამკუთხედის ფერდები ერთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის წვეროებს შორის.

15.92. საერთო AB ფუძის მქონე ტოლფერდა ABC და ABD სამკუთხედები სხვადასხვა სიბრტყეშია აღებულ. ამ სიბრტყეებს შორის კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ CD, თუ: 1) $AB=24$ მ, $AC=13$ მ, $AD=37$ მ, $CD=35$ მ; 2) $AB=32$ მ, $AC=65$ მ, $AD=20$ მ, $CD=63$ მ.

15.93. ABC მართკუთხა ($\angle C=90°$) სამკუთხედის AC კათეტზე გავლებული სიბრტყე სამკუთხედის სიბრტყესთან φ კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მანძილი B წვეროდან ამ სიბრტყემდე, თუ $AB=25$, $AC=15$, $\sin\varphi=\frac{3}{5}$.

15.94. მართკუთხა სამკუთხედის პიპოტენუზაზე P სიბრტყეზე ძევს, კათეტები კი P სიბრტყესთან α და β კუთხეებს ქმნიან. იპოვეთ კუთხე სამკუთხედის სიბრტყეებ და P სიბრტყეს შორის, თუ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

15.95. AB წრფე M სიბრტყის პარალელურია და მისგან დაშორებულია a მანძილით. AB-ზე გავლებ P სიბრტყე, რომელიც M სიბრტყესთან ქმნის $45°$-იან კუთხეს, P სიბრტყეზე გავლებულია წრფე $45°$-ით AB-სთან. იპოვეთ მანძილი AB-სა და M სიბრტყეს შორის.

15.96. დახრილი სიბრტყესთან $45°$-იან კუთხეს ქმნის, დახრილის ფუძეზე, მოცემულ სიბრტყეში გავლებული წრფე, რომელიც გადის მანძილთან $45°$-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ φ კუთხე ამ წრფესა და დახრილს შორის.

15.97. სიბრტყის გარეთ მდებარე წერტილიდან ამ სიბრტყისადმი გავლებულია მართობი და ორი ტოლი დახრილი, რომლებიც მართობთან α კუთხეს ქმნიან. იპოვეთ φ კუთხე დახრილთა გეგმილებს შორის, თუ დახრილებს შორის კუთხე β-ს ტოლია.

15.98. პარალელოგრამის გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც პარალელოგრამის მოპირისპირე გვერდიდან დაშორებულია a მანძილით. იპოვეთ მანძილი პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან ამ სიბრტყემდე.

15.99. ტრაპეციის ფუძეზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც მეორე ფუძიდან დაშორებულია a მანძილით. იპოვეთ მანძილი ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან ამ სიბრტყემდე, თუ ტრაპეციის ფუძეები ისე უკუფარდება ერთმანეთს, როგორც $m:n$.

15.100. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის A და B წვეროებიდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AA_1 და BB_1 მართობები. იპოვეთ მანძილი C წვეროდან A_1B_1 მონაკვეთის შუაწერტილამდე, თუ $AB=2$ ც, $CA_1=3$ მ, $CB_1=7$ მ და A_1B_1 მონაკვეთი არ კვეთს სამკუთხედის სიბრტყეს.

15.101. ტოლფერდა ABC სამკუთხედის ძაფელი კუთხეების A და B წვეროებიდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AA_1 და BB_1 მართობები. იპოვეთ მანძილი C წვეროდან A_1B_1 მონაკვეთის შუაწერტილამდე, თუ $A_1C=4$ ც, $A_1A=3$ მ, $B_1C=6$ ც, $B_1B=2$ მ და A_1B_1 მონაკვეთი არ კვეთს სამკუთხედის სიბრტყეს.

15.102. წესიერი სამკუთხედის წვეროები დაშორებულია α სიბრტყიდან 51, 45 და 27 სმ-ის ტოლი მანძილებით. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის ცენტრიდან α სიბრტყემდე.

15.103. მართკუთხა ABC სამკუთხედის C მართი კუთხის წვეროზე გავლებულია პიპოტენუზის პარალელური სიბრტყე. AB სიბრტყე

პირამიდებიდან დაშორებულია 1 მ-ით. კათეტების გეგმილები სიბრტყეზე 3 მ-ისა და 5 მ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდა.

15.104. ABC მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის C წვეროზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც პირამიდის პარალელურია და მისგან 4-ის ტოლი მანძილით არის დაშორებული. კათეტების გეგმილების სიგრძეებია ამ სიბრტყეზე $\sqrt{2}$ და $\sqrt{3}$. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.

15.105. რომბის ერთ გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც მოპირდაპირე გვერდიდან დაშორებულია 4 მ-ით. ამ სიბრტყეზე დიაგონალების გეგმილების სიგრძეებია 2 მ და 3 მ. იპოვეთ რომბის გვერდის გეგმილები.

15.106. რომბის გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც დიაგონალებთან ქმნის შესაბამისად α და 2α ტოლ კუთხეებს. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხე, თუ $\alpha=30°$.

15.107. AB მონაკვეთი უდრის a-ს და M სიბრტყეზე ჭრის. AC და BD მონაკვეთების სიგრძე უდრის b-ს. ამასთან AC მონაკვეთი M სიბრტყის პერპენდიკულარულია, BD კი პერპენდიკულარულია AB-სი და M-სიბრტყესთან ადგენს 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ CD.

15.108. პარალელოგრამის ფართობია Q. მისი სიბრტყე დახრილია P სიბრტყისადმი α კუთხით. პარალელოგრამის ერთი გვერდი P სიბრტყეშია მოთავსებული. გამოთვალეთ პარალელოგრამის P სიბრტყეზე გეგმილის ფართობი, თუ $Q=75$, $\cos\alpha=\frac{1}{6}$.

15.109. რომბია გვერდი არის a, ხოლო მახვილი კუთხე φ. ერთ-ერთ გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, ნებისმიერ გვერდთან β კუთხის ადგენს. იპოვეთ რომბის გეგმილის ფართობი ამ სიბრტყეზე, თუ $a=9$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\sin\beta=\frac{1}{4}$.

ამოცანები მზომელობაზე

15.110. A, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეში არ ძევს. დაამტკიცეთ, რომ AB და CD წრფეები ერთმანეთის არ კვეთს.

15.111. შეიძლება თუ არა ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილზე მესამე ისეთი წრფის გავლება, რომელიც მოცემულ ორ წრფესთან ერთად ერთ სიბრტყეში იქნება მოთავსებული. პასუხი ახსენით.

15.112. A, B, C წერტილები ერთდროულად ორ სხვადასხვა სიბრტყეს ეკუთვნის. დაამტკიცეთ, რომ ეს წერტილები ერთ წრფეზე ძევს.

15.113. მოცემულია სამი სხვადასხვა წყვილ-წყვილად ურთიერთგადამკვეთი სიბრტყე. დაამტკიცეთ, რომ თუ ამ სიბრტყეთა ყოველი ორი წრფე ერთმანეთს კვეთს, მაშინ მათი გადაკვეთის წერტილზე გადის მესამე წრფეც.

15.114. ოთხი წერტილი ერთ სიბრტყეში არ ძევს. შეიძლება თუ არა, რომ რომელიმე სამი მათგანი ერთ წრფეს ეკუთვნოდეს? პასუხი ახსენით.

15.115. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთი რომელ სიბრტყეს კვეთს, მანამ მეორე წრფეც იმავე სიბრტყეს კვეთს.

15.116. მოცემულია ორი სხვადასხვა წრფე, რომელთაგანაც A წერტილში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ის წრფე რომელიც მოცემულ ორ წრფეს კვეთს და A წერტილზე არ გადის, ერთ სიბრტყეში ძევს.

15.117. დაამტკიცეთ, რომ წრფეები, რომლებიც კვეთს მოცემულ წრფეს და გადის ამ წრფის გარეთ მდებარე ნებისმიერ წერტილში, ერთ სიბრტყეზე ძევს.

15.118. დაამტკიცეთ, რომ თუ AB და CD წრფეები ერთ სიბრტყეში არ ძევს, მაშინ AC და BD წრფეებიც არ ძევს ერთ სიბრტყეში.

15.119. მოცემულია ოთხი წერტილი, რომლებიც ერთ სიბრტყეში არ ძევს. რამდენი სვდასავე ისეთი სიბრტყის გავლება შეიძლება, რომელიც მოცემული ოთხიდან სამ წერტილზე გაივლის? პასუხი ახსენით.

15.120. შეიძლება თუ არა სიბრტყის გავლება სამ ისეთ წერტილზე, რომლებიდან ერთი წრფეზე ძევს? პასუხი ახსენით.

15.121. შეიძლება თუ არა ერთ წრფეზე მდებარე სამ წერტილზე ორი სხვადასხვა სიბრტყის გავლება? პასუხი ახსენით.

15.122. მოცემულია ოთხი წერტილი. ცნობილია, რომ სულ მცირე ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფე არ არსებობს. დაამტკიცეთ, რომ მოცემული ოთხი წერტილი ერთ სიბრტყეში არ ძევს.

15.123. დაამტკიცეთ, რომ ყველა ის წრფე, რომელიც ორ მოცემულ ურთიერთპარალელურ წრფეს კვეთს, ერთ სიბრტყეში ძევს.

15.124. a და b წრფეები ერთმანეთს კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ b წრფის პარალელური და a წრფის გადამკვეთი ყველა წრფე ერთ სიბრტყეში ძევს.

15.125. a და b წრფეები ერთ სიბრტყეში არ ძევს. შეიძლება თუ არა a და b წრფეების პარალელური c წრფის გავლება? პასუხი ახსენით.

15.126. A, B, C, D წერტილები ერთ სიბრტყეში არ ძევს. დაამტკიცეთ, რომ AB, BC, და AD, CD მონაკვეთთა შუაწერტილების შემაერთებელი რიგნაკვეთები ტოლია.

15.127. A, B, C, D წერტილები ერთ სიბრტყეში არ ძევს. დაამტკიცეთ რომ AB და BC მონაკვეთების შუაპერპენდიკულარებზე გავლებული წრფე პარალელურია AD და CD მონაკვეთების შუაპერპენდიკულარებზე გავლებული წრფისა.

15.128. მოცემული A, B, C, D წერტილები, ერთ სიბრტყეს არ ეკუთვნის. დაამტკიცეთ, რომ AB, BC, CD, DA მონაკვეთების შუაპერპენდიკულარები ერთ სიბრტყეს. ორ ფიგურის წვეროებია ეს წერტილები? პასუხი დასაბუთეთ.

15.129. მოცემულია ოთხი A, B, C, D წერტილი, რომლებიც ერთ სიბრტყეში არ ძევს. დაამტკიცეთ, რომ AB და CD, AC და BD, AD და BC მონაკვეთების შუაპერპენდიკულარების ერთმანეთის ერთ წერტილში კვეთა.

15.130. დაამტკიცეთ, რომ თუ AB და CD წრფეები აცდენილია, მაშინ AC და BD წრფეებიც აცდენილია.

15.131. AB და CD წრფეები ერთმანეთს კვეთს. შეიძლება თუ არა, რომ AC და BD წრფეები აცდენილი იყოს?

15.132. დაამტკიცეთ, რომ ორი აცდენილი წრფედან ერთ-ერთი სიბრტყეზე შეიძლება მეორე წრფის პარალელური სიბრტყის გავლება.

15.133. ორი სიბრტყე ერთმანეთს a წრფეზე კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ თუ ეს ორი სიბრტყე α სიბრტყეს ერთიერთპარალელურ წრფეებზე კვეთს, მაშინ a წრფე α სიბრტყის პარალელურია.

15.134. დაამტკიცეთ, რომ თუ წრფე ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთის კვეთს, მაშინ ის მეორე სიბრტყესაც გადაკვეთს.

15.135. დაამტკიცეთ, რომ იმ მონაკვეთების შუაწერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა ბოლოებიც ორ აცდენილ წრფეზე ძევს, არის სიბრტყე.

15.136. მოცემულია ოთხი A, B, C და D წერტილი, რომლებიც ერთ სიბრტყეში არ ძევს. დაამტკიცეთ, რომ AB და CD წრფეებს პარალელური სიბრტყე AC, AD, BD და BC წრფეების პარალელოგრამის წვეროებში კვეთა.

15.137. α და β სიბრტყეები γ სიბრტყის პარალელურია. შეიძლება თუ არა, რომ α და β სიბრტყეები ერთმანეთს კვეთდეს?

15.138. α და β სიბრტყეები ერთმანეთს კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი γ სიბრტყე α და β სიბრტყეებიდან ერთ-ერთს მაინც კვეთს.

15.139. დაამტკიცეთ, რომ ყველა ის წრფე, რომელიც მოცემულ წერტილზე მოცემული სიბრტყის პარალელურად გადის, ერთ სიბრტყეში ძევს.

15.140. $ABCD$ და ABC_1D_1 პარალელოგრამები სხვადასხვა სიბრტყეებში ძევს. დაამტკიცეთ, რომ CDD_1C_1 ოთხკუთხედი აგრეთვე პარალელოგრამია.

15.141. ორი ერთიერთპარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთზე მდებარე $ABCD$ პარალელოგრამის წვეროებზე გავლებულია პარალელური წრფეები, რომლებიც მეორე სიბრტყეს A_1, B_1, C_1, D_1 წერტილებში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ $A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხედი აგრეთვე პარალელოგრამია.

15.142. ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთზე მდებარე ABC სამკუთხედის წვეროებზე გავლებულია პარალელური წრფეები, რომლებიც მეორე სიბრტყეს A_1, B_1 და C_1 წერტილებში კვეთს. დაამტკიცეთ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობა.

15.143. ერთ წერტილზე გამავალი სამი წრფე მოცემულ სიბრტყეს კვეთს A, B, C წერტილებში, ხოლო ამ სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს — A_1, B_1, C_1 წერტილებში. დაამტკიცეთ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების მსგავსება.

15.144. დაამტკიცეთ, რომ თუ A წერტილზე გამავალი ოთხი წრფე α სიბრტყეს კვეთს პარალელოგრამის წვეროებში, მაშინ ისინი ნებისმიერ სიბრტყეს, რომელიც α-ს პარალელურია და A წერტილზე არ გადის, აგრეთვე პარალელოგრამის წვეროებში გადაკვეთს.

15.145. მოცემულია ორი ურთიერთის პარალელური α_1 და α_2 სიბრტყე და A წერტილი, რომელიც ამ სიბრტყეებიდან არც ერთში არ ძევს. A წერტილზე გავლებულია ნებისმიერი წრფე, ვთქვათ, ეს წრფე α_1 და α_2 სიბრტყეებს X_1 და X_2 წერტილებში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ AX_1 და AX_2 მონაკვეთების სიგრძეების $AX_1 : AX_2$ შეფარდება არ არის დამოკიდებული აღებულ წრფეზე.

15.146. A წერტილი α სიბრტყის გარეთ ძევს, X არის α სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი. X' კი — AX მონაკვეთის წერტილი, რომელიც ამ მონაკვეთს ყოფს $m : n$ შეფარდებით. დაამტკიცეთ, რომ X' წერტილთა გეომეტრიული ადგილი არის α სიბრტყის პარალელური სიბრტყე.

15.147. მოცემულია სამი პარალელური სიბრტყე: α_1, α_2, α_3. კოშვათ, X_1, X_2, X_3 არის ნებისმიერ წრფესთან ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წერტილები. დაამტკიცეთ, რომ X_1X_2 და X_2X_3 მონაკვეთთა სიგრძეების $X_1X_2 : X_2X_3$ შეფარდება არ არის დამოკიდებული წრფეზე, ე. ი. ერთნაირია ნებისმიერი ორი წრფისათვის.

15.148. მოცემულია ოთხი ერთმანეთის პარალელური წრფე. დაამტკიცეთ, რომ თუ ერთი რომელიმე სიბრტყე იმ წრფეებიდან პარალელოგრამის წვეროებში კვეთს, მაშინ ნებისმიერი სიბრტყე, რომელიც მოცემული წრფეების პარალელური არ არის, მათ კვეთს აგრეთვე პარალელოგრამის წვეროებში.

15.149. მოცემულია ორი პარალელური სიბრტყე, მათი გადამკვეთი წრფე და წრეწირი ერთ-ერთ სიბრტყეში. წრეწირის ყოველ X

წერტილში გავლებულია წრფე, რომელიც მოცემული წრფის პარალელურია და მეორე სიბრტყეს კვეთს რომელიმე X' წერტილში. რას წარმოადგენს X' წერტილთა გეომეტრიული ადგილი? პასუხი ახსენით.

15.150. მოცემულია ორი ერთმანეთის პარალელური სიბრტყე, წერტილი ამ სიბრტყეების გარეთ და წრეწირი ერთ-ერთ სიბრტყეში. წრეწირის ყოველ X წერტილზე და მოცემულ წერტილზე გავლებულია წრფე, რომელიც მეორე სიბრტყეს რაიმე X' წერტილში კვეთს. რას წარმოადგენს X' წერტილთა გეომეტრიული ადგილი? პასუხი ახსენით.

15.151. სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრზე გავლებულია სამკუთხედის სიბრტყის მართობული წრფე. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრფის ყოველი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული სამკუთხედის წვეროებიდან.

15.152. D წერტილი თანაბრადაა დაშორებული წესიერი სამკუთხედის წვეროებიდან და მის სიბრტყეს არ ეკუთვნის. დაამტკიცეთ, რომ D წერტილზე და სამკუთხედის ცენტრზე გამავალი წრფე, სამკუთხედის სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

15.153. α სიბრტყის გარეთ აღებული S წერტილიდან, ამ სიბრტყისაკენ გავლებულია ტოლი SA, SB, SC დახრილები და SO მართობი. დაამტკიცეთ, რომ მართობის O ფუძე არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი.

15.154. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრზე გავლებულია წრფე, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყის მართობულია. დაამტკიცეთ რომ ამ წრფის ყოველი წერტილი ერთნაირადაა დაშორებული სამკუთხედის გვერდებიდან.

15.155. ბისექტორის შუაწერტილზე გავლებულია სიბრტყე. დაამტკიცეთ, რომ მონაკვეთის ბოლოები ერთნაირადაა დაშორებული ამ სიბრტყიდან.

15.156. პარალელოგრამის დიაგონალზე გავლებულია სიბრტყე. დაამტკიცეთ, რომ მეორე დიაგონალის ბოლოები ერთნაირადაა დაშორებული ამ სიბრტყიდან.

15.157. დაამტკიცეთ, რომ მანძილი მონაკვეთის შუაწერტილიდან სიბრტყემდე უდრის: 1) მისი ბოლოებიდან სიბრტყემდე მანძილების ნახევარჯამს, თუ მონაკვეთი სიბრტყეს არ კვეთს. 2) ამ მანძილების სხვაობის მოდულის ნახევარს, თუ მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს.

15.158. $ABCD$ მართკუთხედის სიბრტყისაკენ A წვეროდან გავლებულია პერპენდიკულარი. ამ პერპენდიკულარის M წერტილი შეერთებულია B, C, D წერტილებთან. დაამტკიცეთ, რომ MBC და MDC სამკუთხედები მართკუთხაა.

15.159. მოცემულია a წრფე და α სიბრტყე. დაამტკიცეთ, რომ α სიბრტყის მართობული და a წრფის გადამკვეთი ყველა წრფე ძევს ერთ სიბრტყეში, რომელიც α სიბრტყის მართობულია.

15.160. a წრფის A წერტილზე გავლებულია ამ წრფის მართობული β სიბრტყე და b წრფე. დაამტკიცეთ, რომ b წრფე β სიბრტყეში ძევს.

15.161. წრფეზე აღებულ წერტილზე გავლებულია სამი წრფე. თითოეული გავლებული წრფე პერპენდიკულარულია მოცემული წრფისა. დაამტკიცეთ, რომ გავლებული წრფეები ერთ სიბრტყეს ეკუთვნიან.

15.162. $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილიდან გავლებულია OM მონაკვეთი ისე, რომ $MA=MC$ და $MB=MD$. დაამტკიცეთ, რომ OM წრფე პარალელოგრამის სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

15.163. დაამტკიცეთ, რომ თუ სიბრტყეზე მდებარე კუთხის წვეროზე გავლებულ სხივს, რომელიც კუთხის გვერდებთან ტოლ მახვილ კუთხეებს ქმნის, მაშინ ამ სხივის გარშემო შემოხაზული კუთხის ბისექტრისა იქნება.

15.164. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ერთი კათეტი M სიბრტყეშია, ხოლო მეორე კათეტი ამ სიბრტყესთან $45°$-იან კუთხეს ქმნის, მაშინ ჰიპოტენუზა M სიბრტყეს თან $30°$-იან კუთხეს შეადგენს.

15.165. დაამტკიცეთ, რომ, თუ AB დახრილი M სიბრტყესთან $45°$-იან კუთხეს ქმნის და ამავე დროს M სიბრტყეზე მდებარე AC წრფე AB დახრილის გეგმილთან შეადგენს $45°$-იან კუთხეს, მაშინ $\angle BAC = 60°$.

15.166. დაამტკიცეთ, რომ, თუ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე გამავალი სიბრტყე კათეტებთან შეადგენს $30°$-იან და $45°$-იან კუთხეებს, მაშინ ამ სამკუთხედის სიბრტყესთან შეადგენს $60°$-იან კუთხეს.

15.167. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია a და b. M წერტილი დაშორებულია სამკუთხედის სიბრტყიდან h მანძილით და ერთნაირადაა დაშორებული ყველა წვეროდან. დაამტკიცეთ, რომ მანძილი M წერტილიდან წვეროებამდე გამოითვლება ფორმულით $0{,}5\sqrt{a^2+b^2+4h^2}$.

15.168. M წერტილი ABC სამკუთხედის ყველა წვეროდან l მანძილითაა დაშორებული. $BC=a$, $\angle BAC=\alpha$. დაამტკიცეთ, რომ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე გამოითვლება ფორმულით $\sqrt{l^2-\dfrac{a^2}{4\sin^2\alpha}}$.

15.169. მართკუთხა სამკუთხედის შიგნით კუთხის წვეროდან ამ სამკუთხედის საბურტყვისადმი გავლებული პერპენდიკულარი არის. საწყისების კათეტებია a და b, ხოლო პერპენდიკულარის სიგრძეა h. დაამტკიცეთ, რომ მაძებარი პარალელოგრამის პერპენდიკულარის ამ მონაკვეთის, რომელიც საბურტყვში არ მდებარეობს, გამოთვლება დადებულია $\sqrt{h^2 - \frac{ab}{a^2+b^2}}$.

15.170. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის ჩახვეული კუთხის A წვეროზე გავლებულია სამკუთხედის საბურტყვისადმი AK პერპენდიკულარი. K წერტილი შეერთებულია B და C წვეროებთან. დაამტკიცეთ, რომ BCK სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

15.171. დაამტკიცეთ, რომ კუთხის ცენტრიდან ტოლფარდობით დაშორებული პარალელოგრამის, რომელიც ამ კუთხის ნიშნებისაგან გადის და მოცემული კუთხის საბურტყვი არ კმაყოფილება.

15.172. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამი წრფიდან ყოველი ორი ურთიერთ, მაშინ ეს წრფეები ან ერთ პარალელოგრამში მდებარეობენ, ან ერთ წერტილში იკვეთებიან.

15.173. დაამტკიცეთ, რომ ორწახნაგა კუთხის წახნაგების გადამკვეთი წრფე ერთიდაიმავე კუთხის ორივე წახნაგისთან ბასრ და ტოლ კუთხეებს ადგენს.

§ 16. ვექტორები. კოორდინატთა მეთოდი.

ამოცანების ამოხსნა

16.1. მოცემულია $A(3,2)$, $B(1,3)$ და $C(2, -1)$ წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{AC}$ ს კოორდინატები.

16.2. მოცემულია $A(1,2, -1)$, $B(2, -1, 0)$ და $C(1, 1, -1)$ წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{AC}$ ს კოორდინატები.

16.3. მოცემულია $A(0,1)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(2, 1)$ წერტილები. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{BD}$ ვექტორებს შორის იპოვეთ ტოლი ვექტორები.

16.4. მოცემულია თხი წერტილი: $A(2, 7, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, -4, 5)$, $D(-2, 3, -1)$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, AD, $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{BD}$ ვექტორებს შორის იპოვეთ ტოლი ვექტორები.

16.5. მოცემულია სამი წერტილი: $A(1; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 1)$. იპოვეთ ისეთი $D(x, y)$ წერტილი, რომ $\overrightarrow{AB}$, და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორები ტოლი იყოს.

16.6. მოცემულია სამი წერტილი: $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(0, 2, -1)$. იპოვეთ $D(x, y, z)$ წერტილი, თუ ცნობილია, რომ: 1) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორები ტოლია; 2) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორია ჯამი ნულის ტოლია.

16.7. მოცემულია $\vec{a}(3; 4)$, $\vec{b}(5; 5\sqrt{3})$. იპოვეთ $|\vec{a}|$ და $|\vec{b}|$.

16.8. მოცემულია $\vec{a}(2; 3; 2\sqrt{3})$, $\vec{b}(-1; 4; 2\sqrt{2})$. იპოვეთ $|\vec{a}|$ და $|\vec{b}|$.

16.9. $\vec{a}$ $(5; m)$ ვექტორის სიგრძე 13-ს უდრის. იპოვეთ m.

16.10. $\vec{b}$ $(n; 24)$ ვექტორის სიგრძე 25-ია. იპოვეთ n.

16.11. $\vec{a}(2; 3; m)$ ვექტორის სიგრძე 7-ს უდრის. იპოვეთ m.

16.12. $\vec{b}(1; n; 5)$ ვექტორის სიგრძე $\sqrt{35}$-ს უდრის. იპოვეთ n.

16.13. ვექტორის სიგრძეა $7\sqrt{3}$. იპოვეთ ამ ვექტორის საკოორდინატო ნაკრების ჯამი, თუ ცნობილია, რომ ისინი დაკავშირებულია და ერთმანეთის ტოლია.

16.14. იპოვეთ ვექტორების ჯამი: 1) $\vec{a}(1; -2)$ და $\vec{b}(2; -3)$; 2) $\vec{a}(-3; 4)$ და $\vec{b}(2; -3)$; 3) $\vec{a}(3; 1)$ და $\vec{b}(-2; -1)$; 4) $\vec{a}(-5; 4)$ და $\vec{b}(2; -2)$; 5) $\vec{a}(-1; 1)$ და $\vec{b}(2; 4)$.

16.15. იპოვეთ ვექტორების ჯამი: 1) $\vec{a}(2; -1; 3)$ და $\vec{b}(-1; 2; -1)$; 2) $\vec{a}$ $(1; 0; -1)$ და $\vec{b}(2; -1, 4)$.

16.16. იპოვეთ $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორი, თუ: 1) $\vec{a}(1; 4)$, $\vec{b}$ $(1; 3)$; 2) $\vec{a}(-3; 7)$ $\vec{b}(2; -1)$, 3) $\vec{a}(5, 3)$, $\vec{b}$ $(4; 4)$; 4) $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(1; 2)$; 5) $\vec{a}(1; 5)$, $\vec{b}(2; 7)$.

16.17. იპოვეთ $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ 1) $\vec{a}(2; 1; 5)$ და $\vec{b}(3; 1; -2)$; 2) $\vec{b}(1; -2; 0)$ და $\vec{b}(-2; 0; -1)$.

16.18. იპოვეთ $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ: 1) $\vec{a}(1; -4)$, $\vec{b}(-4; 8)$; 2) $\vec{a}(2; 5)$, $\vec{b}(4; 3)$; 3) $\vec{a}(10; 7)$, $\vec{b}(2; -2)$.

16.19. იპოვეთ $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:
1) $\vec{a}(1; 0; 2)$, $\vec{b}(1; 3; 4)$,
2) $\vec{a}(0; -1; -3)$, $\vec{b}(1; 2; 3)$.

16.20. იპოვეთ $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ: 1) $\vec{a}(1; -4)$, $\vec{b}(-4; 8)$, 2) $\vec{a}(-2; 7)$, $\vec{b}(4; -1)$; 3) $\vec{a}(15; 0)$, $\vec{b}(0; -8)$,

16.21. იპოვეთ $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:
1) $\vec{a}(3; 1; 2)$, $\vec{b}(1; -2, -4)$,
2) $\vec{a}(0; 1; 1)$, $\vec{b}(1; 0; 1)$.

16.22. მოცემულია: $\vec{a}-(3; -5; 2)$ და $\vec{b}=(-1; 1; -4)$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}| \cdot |\vec{a}-\vec{b}|$.

16.23. იპოვეთ $\sqrt{2}\,|\vec{a}|$, თუ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, $A(0; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(4; 6; 5)$ და $D(1; 6; 3)$.

16.24. მოცემულია $\vec{a}(3; 2)$ და $\vec{b}(0; -1)$ ვექტორები, იპოვეთ ვექტორი: 1) $-2\vec{a}+4\vec{b}$; 2) $3\vec{a}-\vec{b}$; 3) $4\vec{a}+\vec{b}$.

16.25. მოცემულია $\vec{a}(1; 3; -1)$ და $\vec{b}(1; 0; -2)$ ვექტორები. იპოვეთ ვექტორი: 1) $\vec{a} - 3\vec{b}$; 2) $2\vec{a} - \vec{b}$.

16.26. მოცემულია: $\vec{a}=(1; 1; -1)$ და $\vec{b}=(2; 0; 0)$. იპოვეთ $\sqrt{2}|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

16.27. მოცემულია $\vec{a}(3; 2)$ და $\vec{b}(0; -1)$ ვექტორები. იპოვეთ საკრძე ვექტორისა: 1) $-2\vec{a}-4\vec{b}$; 2) $4\vec{a}+3\vec{b}$; 3) $3\vec{a}+10\vec{b}$.

16.28. მოცემულია $\vec{a}(1; 2; 3)$ და $\vec{b}(2; -1; 0)$ ვექტორები. იპოვეთ $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$.

2) მოცემულია $\vec{a}=(1; 3; -3)$ და $\vec{b}=(2; 0; 10)$ იპოვეთ $|2\vec{a} + 2\vec{b}|$.

16.29. $\lambda\vec{a}$ ვექტორია სიგრძე 5-ს ტოლის, იპოვეთ λ, თუ: 1) $\vec{a}(-6; 8)$; 2) $\vec{a}(3; -4)$; 3) $\vec{a}(2; 3; 6)$.

16.30. m-ისა და n-ის რა ნიშნულებისათვისაა ტოლი მოცემული ვექტორები კოლინეარული: 1) $\vec{a}(2, n, 3)$, $\vec{b}(3, 2, m)$; 2) $\vec{a}(m, 2, 5)$, $\vec{b}(1, -, n)$; 3) $\vec{a}(m, n, 2)$, $\vec{b}(5, 9, 3)$?

16.31. იპოვეთ $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეები, თუ ცნობილია: $A(1; -3; 0)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(-3; 1; 1)$.

16.32. მოცემულია $\vec{a}(1; 2; 1)$ და $\vec{b}(2; 3; -1)$. იპოვეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

16.33. n-ის რა მნიშვნელობისათვისაა მართობული მოცემული ვექტორები: 1) $\vec{a}(2, -1, 3)$, $\vec{b}(1, 3, n)$; 2) $\vec{a}(n, -2, 1)$, $\vec{b}(n, -n, -1)$; 3) $\vec{a}(n, -2, 1)$, $\vec{b}(n, 2n, 4)$; 4) $\vec{a}(4, 2n, -1)$, $\vec{b}(-1, 1, n)$?

16.34. მოცემულია: $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$. იპოვეთ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

16.35. იპოვეთ $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ თუ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

16.36. მოცემულია: $|\vec{a}|=5$ და $|\vec{b}|=2$. m-ის რომელი დადებითი მნიშვნელობისათვის არის $\vec{a}-m\vec{b}$ და $\vec{a}-m\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული?

16.37. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ $(3\vec{a}+2\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$, თუ $|\vec{a}|=5$ და $|\vec{b}|=2$.

16.38. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია, ამასთან $|\vec{a}|=4$ და $|\vec{b}|=3$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|$.

16.39. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ქმნიან $\varphi=120°$ კუთხეს, ამასთან $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=5$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$.

16.40. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ქმნიან $\varphi=60°$-იან კუთხეს, ამასთან $|\vec{a}|=8$ და $|\vec{b}|=5$. იპოვეთ $|\vec{a}-\vec{b}|$.

16.41. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ქმნიან $\varphi=60°$ კუთხეს, ამასთან $|\vec{a}|=4\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=3\sqrt{3}$. იპოვეთ $|3\vec{a}-2\vec{b}|$.

16.42. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ქმნიან $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ კუთხეს. იპოვეთ $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$, თუ ცნობილია, რომ $|\vec{a}|=3$ და $|\vec{b}|=4$.

16.43. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია, ხოლო $\vec{c}$ ვექტორი თითოეულ მათგანთან ადგენს $\frac{\pi}{3}$-ის ტოლ კუთხეს. იპოვეთ $(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{a})$, თუ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$ და $|\vec{c}|=1$.

16.44. მოცემულია: $|\vec{a}|=3$; $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $(\vec{a},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c})=60°$. იპოვეთ $\frac{(\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c})^2}{373}$.

16.45. მოცემულია: $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=15$, $|\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{10}$. იპოვეთ $|\vec{a}-\vec{b}|$.

16.46. მოცემულია: $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. იპოვეთ $|\vec{a}+\vec{b}|$.

16.47. ცნობილია, რომ $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორი შეიზე ყოფს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეს. იპოვეთ $|\vec{a}|:|\vec{b}|$.

16.48. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებიდან ყოველი წყვილი ქმნის $60°$-იან კუთხეს. იპოვეთ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ ვექტორის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ $|\vec{a}|=4$; $|\vec{b}|=2$ და $|\vec{c}|=6$.

16.49. მოცემულია: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=1$ და $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, იპოვეთ $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{c}$.

16.50. იპოვეთ $\vec{a}(2; -4; 4)$ და $\vec{b}(-3; 2; 6)$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

16.51. მოცემულია: $\vec{a}=(1; 2; 1)$ და $\vec{b}=(2; -1; 0)$. იპოვეთ ალებ, სადაც φ, $\vec{a}-\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეა.

16.52. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს ქმნიან $\alpha=60°$ კუთხეს, ამასთან $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$. იპოვეთ γ-ასი, სადაც φ ახლის კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორებს შორის.

16.53. მოცემულია: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a},\vec{b})=60°$. იპოვეთ $\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

16.54. მოცემულია $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a},\vec{b})=60°$. გამოთვალეთ $\sqrt{21}$ ალებ, სადაც φ, $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეა.

16.55. იპოვეთ $3\sqrt{5}$ ალებ, სადაც φ, $\vec{a}(2; 1; 0)$ და $\vec{b}(0; -1; 1)$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალებს შორის მახვილი კუთხეა.

16.56. სამკუთხედის წვეროებია $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ და $C(3; -2; 1)$. იპოვეთ A წვეროსთან მდებარე ამავე კუთხის გარე დახრილი ზომა.

16.57. მოცემულია ოთხი წერტილი: $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$, $D(2, -3, 1)$. იპოვეთ $\vec{AB}$ და $\vec{CD}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

16.58. ABC სამკუთხედის ორი გვერდი ემთხვევა $\vec{AB}=3\vec{i}-4\vec{j}$ და $\vec{BC}=\vec{i}-5\vec{j}$ ვექტორებს. იპოვეთ $\vec{CD}$ ვექტორის სიგრძე, სადაც CD სამკუთხედის სიმაღლეა.

16.59. მოცემულია $\vec{a}(1, -1, 2)$, $\vec{b}(2, 1, 0)$ იპოვეთ $[\vec{a}, \vec{b}]$.

16.60. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(3, -1, -2)$ და $\vec{b}(1, 2, -1)$. იპოვეთ: 1) $[(2\vec{a}+\vec{b}), \vec{b}]$, 2) $[(2\vec{a}-\vec{b}), (2\vec{a}+\vec{b})]$.

16.61. მოცემულია $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ და $C(3, 2, 1)$ წერტილები. იპოვეთ

1) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$, 2) $[(\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{CA}), \overrightarrow{CB}]$.

16.62. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე $\varphi = \frac{\pi}{6}$. იპოვეთ $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ თუ $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$.

16.63. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. იპოვეთ: 1) $|(\vec{a}+\vec{b}), (\vec{a}-\vec{b})|$; 2) $|(3\vec{a}-\vec{b}), (\vec{a}-2\vec{b})|$.

16.64. მოცემულია: $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$ და $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$. იპოვეთ $|[\vec{a}, \vec{b}]|$.

16.65. მოცემულია: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$ და $|[\vec{a}, \vec{b}]|=72$. იპოვეთ $\vec{a}-\vec{b}$.

16.66. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, ხოლო $|\vec{a}|=1$ და $|\vec{b}|=2$. იპოვეთ: 1) $[\vec{a}, \vec{b}]^2$; 2) $[(2\vec{a}-\vec{b}), (\vec{a}+2\vec{b})]^2$; 3) $[(\vec{a}+3\vec{b}), (3\vec{a}-\vec{b})]^2$.

16.67. მოცემულია $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ და $C(5, 2, 6)$ წერტილები. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი.

16.68. მოცემულია წერტილები: $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 2)$ $C(0, 0, 3)$, $D(1, 2, 0)$. ამ წერტილთაგან რომელი ძევს: 1) XOY სიბრტყეში, 2) OZ ღერძზე, 3) YOZ სიბრტყეში?

16.69. მოცემულია $A(3; 2; 5)$; $B(-1; -2; 2)$ $C(7; 0; -9)$, $D\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{6}; 6\right)$ წერტილები. დაადგინეთ, რომელი მათგანი მიეკუთვნება $2x-3y+z-5=0$ სიბრტყეს.

16.70. მოცემულია $A(1, 2, 3)$ წერტილი. იპოვეთ ამ წერტილიდან საკოორდინატო ღერძებზე და საკოორდინატო სიბრტყეებზე დაშვებული პერპენდიკულარების ფუძეები.

16.71. იპოვეთ მანძილი $(1, 2, -3)$ წერტილიდან: 1) საკოორდინატო სიბრტყეებამდე 2) საკოორდინატო ღერძებამდე, 3) კოორდინატთა სათავემდე.

16.72. იპოვეთ იმ წერტილის ორდინატი, რომელიც OY ღერძზე ძევს და თანაბრადაა დაშორებული $A(1; -3; 7)$ და $B(5; 7; -5)$ წერტილებიდან.

16.73. OX ღერძზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც ერთნაირადაა დაშორებული $A(1, 2, 3)$ და $B(-2, 1, 3)$ წერტილებიდან.

16.74. XOY სიბრტყეში იპოვეთ $D(x, y, 0)$ წერტილი, რომელიც ერთნაირადაა დაშორებული $A(1, 2, 3)$ $B(2, 1, 0)$ $C(0, -1, 0)$ წერტილებიდან.

16.75. იპოვეთ წერტილები, რომლებიც ერთნაირადაა დაშორებული $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ წერტილებიდან, ხოლო მათი დაშორება YOZ სიბრტყიდან 2-ის ტოლია.

16.76. მოცემულია მიახლებითის ერთი $A(2, 3, -1)$ ბოლო და მისი $C(1, 1, 1)$ შეაწერტილი. იპოვეთ მინაკვეთის მეორე $B(x, y, z)$ ბოლო.

16.77. იპოვეთ $ABCD$ პარალელოგრამის 1) წვეროს კოორდინატები, თუ პარალელოგრამის სამი დახარისხებული წვეროს კოორდინატებია ცნობილი: $A(2, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(4, 1, 0)$.

16.78. მოცემულია $(1, 2, 3)$, $(0, -1, 2)$, $(1, 0, -3)$ წერტილები. იპოვეთ წერტილები, რომლებიდან მოცემული წერტილების სიმეტრიული საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

16.79. მოცემულია $(1, 2, 3)$, $(0, -1, 2)$, $(1, 0, -3)$ წერტილები. იპოვეთ წერტილები, რომლებიდან მოცემული წერტილების სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ამოცანები დამოკიდებებზე

16.80. დაამტკიცეთ, რომ $A(2; 4; -1)$, $B(1; 1; -3)$, $C(-2; 0; 5)$, $D(-1; 3; 4)$ წერტილები პარალელოგრამის წვეროებს წარმოადგენს.

16.81. დაამტკიცეთ, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედი რომბია, თუ: 1) $A(5, 7, 8)$, $B(2, 2, 6)$, $C(-1, 3, 2)$, $D(2, 8, 4)$.

16.82. დაამტკიცეთ, რომ სამი ვექტორი კომპლანარულია, თუ ორი მათგანი კოლინეარულია.

16.83. $\vec{a}$ ვექტორი საკოორდინატო ღერძებთან ქმნის შესაბამისად α, β, γ კუთხეებს. 1) დაამტკიცეთ, რომ $\vec{a}$ ს თანამიმართულებიანი ერთეულოვანი ვექტორის კოორდინატებია $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. 2) დაამტკიცეთ ტოლობა: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

16.84. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორები ტოლი სიგრძისაა. დაამტკიცეთ, რომ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

16.85. A წერტილი $ABCD$ და $AB_1C_1D_1$ პარალელოგრამების საერთო წვეროა. დაამტკიცეთ $B\overrightarrow{B_1}$, $C\overrightarrow{C_1}$ $D\overrightarrow{D_1}$ ვექტორების კომპლანარობა.

16.86. დაამტკიცეთ, რომ, თუ M არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი და O – სივრცის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ შესრულდება ტოლობა

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

16.87. დაამტკიცეთ, რომ, თუ O, A, B წერტილები არ ეკუთვნიან ერთ წრფეს და $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, მაშინ $OBAC$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

16.88. მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი. დაამტკიცეთ, რომ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, სადაც O სივრცის ნებისმიერი წერტილია.

16.89. დაამტკიცეთ, რომ თუ M არის ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი და O — სივრცის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ შესრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

16.90. დაამტკიცეთ, რომ, თუ O წერტილი ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია, მაშინ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

16.91. ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების მედიანების გადაკვეთის წერტილები ერთმანეთს ემთხვევიან. დაამტკიცეთ, რომ $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ ვექტორები კომპლანარულია.

16.92. გამოიყვანეთ კოორდინატებით მოცემულ ორ ვექტორს შორის კუთხის კოსინუსის ფორმულა და დაამტკიცეთ ტოლობა:

$$(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2).$$

16.93. დაამტკიცეთ: $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leqslant |\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$. რა პირობებში სრულდება ტოლობა?

16.94. დაამტკიცეთ, თეორემა სამი პერპენდიკულარის შესახებ ვექტორთა სკალარული ნამრავლის გამოყენებით.

16.95. დაამტკიცეთ, რომ იმ მონაკვეთის შუაწერტილი, რომლის ბოლოებია $A(a, c, -b)$ და $B(-a, d, b)$ წერტილები, OY ღერძზე ძევს.

16.96. დაამტკიცეთ, რომ იმ მონაკვეთის შუაწერტილი, რომლის ბოლოებია $C(a, b, c)$ და $D(p, q, -c)$ წერტილები XOY სიბრტყეში ძევს.

16.97. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედის გვერდების კვადრატების ჯამი დიაგონალების კვადრატებისა და დიაგონალების შუაწერტილებს შორის მანძილის კვადრატის ჯამის ტოლია.

16.98. M არის $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ თუ,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0},$$

მაშინ $ABCD$ პარალელოგრამია.

16.99. O არის ABC სამკუთხედის ნებისმიერი შიგა წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ აღგილი აქვს ტოლობას

$$S_A \cdot \overrightarrow{OA} + S_B \cdot \overrightarrow{OB} + S_C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

სადაც S_A, S_B, S_C შესაბამისად BOC, CAO და ABO სამკუთხედის ფართობებია.

16.100. ვთქვათ O წერტილი ABC სამკუთხედის ნებისმიერი შიგა წერტილია. d_a, d_b, d_c — მანძილებია O წერტილიდან შესაბამისად BC, AC და AB გვერდებამდე. დაამტკიცეთ, რომ $d_a \cdot \overrightarrow{OA} + d_b \cdot \overrightarrow{OB} + d_c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

16.101. ვთქვათ O არის ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი. დაამტკიცეთ, რომ $a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, სადაც $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

16.102. ვთქვათ P არის ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $aPA^2 + bPB^2 + c \cdot PC^2$ მუდმივია, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

§ 17. კუბი. პარალელეპიპედი. პრიზმა

ამოცანები გაგონთავლაზე

17.1. იპოვეთ კუბის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.2. იპოვეთ კუბის წიბო, თუ მისი ზედაპირის ფართობი 24 $ძ^2$-ის ტოლია.

17.3. იპოვეთ კუბის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი დიაგონალი 7 სმ-ის ტოლია.

17.4. იპოვეთ კუბის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი დიაგონალური კვეთის ფართობი $5\sqrt{2}$ $სმ^2$-ის ტოლია.

17.5. კუბის წიბოს აგებულია $5\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ იმ კუთხის ტანგენსი, რომელიც გადის ერთი წვეროდან გამოსული სამიდეს წიბოს ბოლოზე.

17.6. კუბის წიბო a-ს ტოლია. იპოვეთ ფუძის კვეთიდან განაკვეთი სიბრტყით კუბის კვეთის ფართობი, თუ კუთხე ამ სიბრტყესა და ფუძეს შორის არის: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

17.7. იპოვეთ $15\sqrt{2}\lg\alpha$, სადაც α არის კუთხე, რომელსაც ადგენს კუბის დიაგონალი თავის წახნაგთან.

17.8. კუბის წიბო a-ს ტოლია. იპოვეთ ბადმილი კუბის წვეროდან ნის დიაგონალამდე.

17.9. კუბის წიბო a-ს ტოლია. იპოვეთ ქვედა ფუძის დიაგონალზე და ზედა ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შეაწყვეტილებზე გაძვალი კვეთის პერიმეტრი და ფართობი.

17.10. იპოვეთ კუბის მოსაზღვრე წახნაგთა ალესილ დიაგონალებს შორის მდებარე კუთხე.

17.11. კუბის იმ კვეთის ფართობი, რომელიც წესიერი ექვსკუთხედია, უდრის Q-ს. იპოვეთ კუბის ზედაპირის ფართობი.

17.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბში AA_1 და CC_1 მიპირდაპირე წიბოების K და L შეაწყვეტილები შეერთებულია კუბის B და D_1 წვეროებთან. იპოვეთ მიღებული $KBLD_1$ ოთხკუთხედის გვერდები და დიაგონალები, თუ კუბის წიბო უდრის a-ს.

17.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბში შევაროთოთ რივიგობიან სამკუთხედებს შეა წერტილები: AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA და AA_1. იპოვეთ მიღებული ექვსკუთხედის ფართობი, თუ კუბის წიბო უდრის a-ს.

17.14. კუბის წიბო უდრის a-ს. იპოვეთ უმოკლესი სანილი დიაგონალიდან მის არაგადამკვეთ წიბომდე.

17.15. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალები მისი სამი განზომილების მიხედვით: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.

17.16. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 4 სმ და 2 სმ; პარალელეპიპედის სამალლე კი 5 სმ-ია. იპოვეთ მისი დიაგონალი და კუთხე, რომელსაც ეს დიაგონალი ქმნის ფუძის სიბრტყესთან.

17.17. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი მისი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 45°-იან კუთხეს. ფუძის გვერდებია 12 სმ და 16 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის სიმალლე.

17.18. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი მისი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის სიმალლე, თუ ფუძის გვერდებია 6 სმ და $2\sqrt{3}$ სმ.

17.19. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია a და b. პარალელეპიპედის დიაგონალი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი 60°-იანი კუთხით. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.20. იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი მისი სამი განზომილების მიხედვით: 10 სმ, 22 სმ, 16 სმ.

17.21. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოები ისე შეფარდებენ ერთმანეთს, როგორც 3 : 7 : 8. ზედაპირის ფართობი კი უდრის 502 სმ²-ს. იპოვეთ წიბოები.

17.22. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 7 დმ და 24 დმ, ხოლო პარალელეპიპედის სიმალლეა 8 დმ. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

17.23. მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი წიბო უდრის 5 სმ-ს, დიაგონალური კვეთის ფართობი უდრის 205 სმ²-ს და ფუძის ფართობი 360 სმ²-ს. იპოვეთ ფუძის გვერდები.

17.24. იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლეა 2 მ, ფუძის ფართობი 3 მ² და დიაგონალური კვეთის ფართობი 5 მ².

17.25. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოებია 3 სმ, 4 სმ და 7 სმ. იპოვეთ იმ კუთხის ფართობი, რომელიც გადის ერთი წვეროდან გამოსული სამივე წიბოს ბოლოზე.

17.26. მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი წიბოს სიგრძეა 5,5 სმ, ფუძის გვერდების სიგრძეებია 3,3 სმ და 6 სმ. იპოვეთ მკვრივ გვერდითი წახნაგების დიაგონალებზე გამოვლილი კვეთის ფართობი.

17.27. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდები ისე შეფარდებენ ერთმანეთს, როგორც 7 : 24, დიაგონალური კვეთის ფართობი კი უდრის 50 დმ²-ს. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.28. მართკუთხა პარალელეპიპედის სამი წახნაგის დიაგონალები, რომლებიც თავს იყრიან ერთ წვეროში, a-ს, b-სა და c-ს ტოლია. იპოვეთ პარალელეპიპედის განზომილებები.

17.29. მართკუთხა პარალელეპიპედის წახნაგების დიაგონალები უდრის a, b და c. იპოვეთ მისი ზედაპირის ფართობი.

17.30. მართკუთხა პარალელეპიპედის ერთი წვეროდან გამოსული სამი წიბოს ბოლოებზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α სიდიდის კუთხეს. ფუძის გვერდების სიგრძეებია a და b. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი, თუ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$, $a=5$, $b=2$.

17.31. მართკუთხა პარალელეპიპედის d დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α სიდიდის კუთხეს. მთელი გვერდითი წახნაგებით B

სიდიდის კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $d=2\sqrt{3}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\sin\beta=\frac{3}{4}$.

17.32. მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი წახნაგების დიაგონალები ფუძის სიბრტყესთან ქმნიან α და β კუთხეებს. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალის მიერ ფუძის სიბრტყესთან შექმნილი კუთხე, თუ $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17.33. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის დიაგონალი ტოლია d-ს და ფუძის გვერდთან α-ს ტოლ კუთხეს ქმნის. ამ გვერდსა და მას მოპირდაპირე გვერდზე, რომელიც ზედა ფუძეზეა ძოძიავსკებული, გაველებულია სიბრტყე. რომელიც ფუძის სიბრტყესთან β-ს ტოლ კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.34. მართკუთხა $ABCD\,A'B'C'D'$ პარალელეპიპედის ორი მოსაზღვრე გვერდითი წახნაგის AB' და CB' დიაგონალები ფუძის AC დიაგონალთან ქმნიან α და β კუთხეებს. იპოვეთ კუთხე $AB'C$ სამკუთხედის სიბრტყესა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

17.35. მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი წახნაგების დიაგონალები ფუძის სიბრტყესთან ქმნიან α და β კუთხეებს. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალის მიერ პარალელეპიპედის ფუძის სიბრტყესთან შექმნილი კუთხე.

17.36. მართი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბოა 5 მ, ფუძის გვერდებია 6 მ და 8 მ, ხოლო ფუძის ერთ-ერთი დიაგონალი 12 მ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალები.

17.37. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 3 სმ და 5 სმ, ხოლო ფუძის ერთ-ერთი დიაგონალი 6 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიდი დიაგონალი, თუ ვიცით, რომ მისი მცირე დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან კუთხეს.

17.38. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 10 სმ და 17 სმ, ფუძის ერთი დიაგონალი 21 სმ-ია; პარალელეპიპედის დიდი დიაგონალი 29 სმ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.39. იპოვეთ მართი პარალელეპიპედის დიაგონალები, თუ მისი თითოეული წიბო α-ს ტოლია, ხოლო ფუძის ერთ-ერთი კუთხე 60°-ია.

17.40. მართი პარალელეპიპედის ერთი წვეროდან გამოსული წიბოები უდრის 1 მ-ს, 2 მ-ს და 3 მ-ს. ამასთან ორი ტოლფერდა ურთიერთ-

შორის ქმნის 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის ტოტალები.

17.41. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 2 სმ და 5 სმ, მაღალი ფუძის მცირე გვერდებს შორის კი 4 სმ; გვერდითი წიბო უდრის $2\sqrt{2}$ სმ-ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალები.

17.42. მართი პარალელეპიპედის ფუძეს გვერდებია 6 ᲓᲛ და 8 მ; მათ შორის კუთხე 30°-ია. გვერდითი წიბო 5 მ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.43. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდების სიგრძეებია 3 სმ და 4 სმ. მათ შორის კუთხე 60°-ია. გვერდითი წიბო ფუძის გვერდების სამსკველია პროპორციულია. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალები.

17.44. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 3 სმ და 5 სმ, მათ შორის კუთხე 60°-ია. პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ტოლია 220 სმ²-ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირია ფართობი და მცირე დიაგონალური კვეთის ფართობი.

17.45. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა $ABCD$; $AB=29$ სმ, $AD=35$ სმ, $BD=25$ სმ და გვერდითი წიბო უდრის 48 სმ-ს. იპოვეთ AB_1C_1D კვეთის ფართობი.

17.46. მართი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბო 10 ᲓᲛ-ია. ფუძის გვერდებია 23 ᲓᲛ და 11 ᲓᲛ, ხოლო ფუძის დიაგონალები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 3. იპოვეთ დიაგონალური კვეთების ფართობი.

17.47. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 2 სმ და 6 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე 60°. იპოვეთ პარალელეპიპედის სიბრტყით კვეთის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ ეს სიბრტყე კვეთს პარალელეპიპედის ყველა გვერდით წიბოს და ფუძის სიბრტყესთან 30°-იან კუთხეს ადგენს.

17.48. მართი პარალელეპიპედია ფუძე რომბია. რომბის დიაგონალებია 8 სმ და 2 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი, თუ გვერდითი წახნაგის დიაგონალია 13 სმ.

17.49. მართი პარალელეპიპედის ფუძე რომბია, დიაგონალური კვეთების ფართობებია 28 მ² და 21 მ², ხოლო პარალელეპიპედის სიმაღლეა 7 მ. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.50. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი a გვერდითა და α ბლაგვი კუთხით. პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალი მისი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს β კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $a=12$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\beta=3$.

17.51. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი, რომბის მცირე დიაგონალი d, სიდიდე მახვილი კუთხე α. პარალელეპიპედის სიმაღლე ტოლია $\frac{1}{2}d$-სი. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $d=\sqrt{7.1}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

17.52. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი, რომბის დიდი დიაგონალია d, ხოლო ბლაგვი კუთხე α. პარალელეპიპედის სიმაღლე ტოლია $\frac{1}{2}d$-სი. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი, თუ

$$d=4,\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}=1{,}5.$$

17.53. მართი პარალელეპიპედის ფუძე არის რომბი, რომლის მახვილი კუთხე φ და დიდი დიაგონალი d. პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ

$$d=\sqrt{11},\quad \sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{5},\quad \operatorname{tg}\beta=2\sqrt{3}.$$

17.54. იპოვეთ მართი პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძეა რომბი, რომლის მახვილი კუთხე უდრის α-ს, მცირე დიაგონალი d-ს, ხოლო პარალელეპიპედის სიმაღლე ორჯერ ნაკლებია მისი ფუძის გვერდზე.

17.55. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდები ისე უკავშირდებიან ერთმანეთს, როგორც $1:2$, ხოლო ფუძის მახვილი კუთხე უდრის α-ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხე, თუ პარალელეპიპედის სიმაღლე ფუძის დიდი დიაგონალის ტოლია.

17.56. ქართი პარალელეპიპედის ფუძე რომბია, მისი დიაგონალური კვეთის ფართობებია 20 მ^2 და 15 მ^2. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.57. მართი პარალელეპიპედის ფუძე რომბია. ქვედა ფუძის ერთ-ერთ გვერდსა და მას ძაბირდაპირე გვერდზე, რომელიც ზედა ფუძეზე მდებარეობს, გავლებულია სიბრტყე; იგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 45°-იან კუთხეს. მიღებული კვეთის ფართობია $10\sqrt{2}$ მ^2. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.58. პარალელეპიპედის სამი წახნაგის ფართობებია: 1 მ^2, 2 მ^2 და 3 მ^2. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.59. პარალელეპიპედის წახნაგები ტოლი რომბებია $\sqrt{3}$-ის ტოლი გვერდითა და 60°-იანი მახვილი კუთხით. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.60. პარალელეპიპედის გვერდითი წიბოა 7 სმ, ხოლო ფუძე არის კვადრატი, რომლის გვერდია 9 სმ. გვერდითი წიბო ფუძის მიმდებარე გვერდებთან ქმნის 60°-იან კუთხეებს. იპოვეთ მცირე დიაგონალური კვეთის ფართობი.

17.61. პარალელეპიპედის ფუძე კვადრატია, რომლის ფართობია 36 სმ^2. ზედა ფუძის ერთი წვეროდან ტოლი მანძილებითაა დაშორებული ქვედა ფუძის ყველა წვეროდან. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ გვერდითი წიბოს სიგრძეა 5 სმ.

17.62. პარალელეპიპედის ფუძე კვადრატია. ზედა ფუძის ერთი წვეროდან ტოლი მანძილებითაა დაშორებული ქვედა ფუძის ყველა წვეროდან. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი, თუ ფუძის გვერდის სიგრძეა 4 სმ, გვერდითი წიბოს სიგრძე კი $\sqrt{13}$ სმ.

17.63. პარალელეპიპედის ფუძე კვადრატია; ზედა ფუძის ერთი წვეროდან ტოლი მანძილებითაა დაშორებული ქვედა ფუძის ყველა წვეროდან. ფუძის გვერდის სიგრძეა a, გვერდითი წიბო კი b. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალები და დიაგონალური კვეთების ფართობები.

17.64. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის დიაგონალია $3\sqrt{2}$ სმ, ხოლო სიმაღლეა 4 სმ.

17.65. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობი ტოლია 144 სმ^2-ს, სიმაღლე კი 14 სმ-ია. იპოვეთ პრიზმის დიაგონალი.

17.66. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით, ხოლო ფუძის გვერდი უდრის a-ს. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $a=\frac{\sqrt{51}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

17.67. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალის სიგრძე უდრის d-ს და დახრილია გვერდითი წახნაგისადმი α კუთხით. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $d=3\sqrt{3}$, $\sin\alpha=\frac{2}{3}$.

17.68. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 32 მ^2-ია, ზედაპირის ფართობი კი 40 მ^2. იპოვეთ სიმაღლე.

17.69. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი უდრის 9 სმ-ს. ზედაპირის ფართობი კი 144 სმ^2-ია. იპოვეთ ფუძის გვერდი და გვერდითი წიბო.

17.70. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგის ფართობია $23\sqrt{2}$ მ², ხოლო დიაგონალური კვეთის ფართობი.

17.71. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის დიაგონალია 12 სმ, ხოლო გვერდითი წახნაგის დიაგონალი $\sqrt{97}$ სმ. იპოვეთ პრიზმის დიაგონალი.

17.72. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდის სიგრძეა 30 სმ, სიმაღლე კი 40 სმ. იპოვეთ მანძილი ფუძის გვერდიდან პრიზმის იმ დიაგონალამდე, რომელიც ამ გვერდს არ გადაკვეთს.

17.73. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი ტოლია a-ს. კვერდითი წიბო კი $4a$-ს. იპოვეთ პრიზმის დიაგონალზე ფუძის დიაგონალის პარალელურად გავლებული კვეთის ფართობი.

17.74. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუაწერტილებზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან კუთხეს და გადაკვეთს სამ წიბოს. იპოვეთ ფუძის ფართობი, თუ კვეთის ფართობი 14 სმ²-ის ტოლია.

17.75. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის ორი მიმდებარე გვერდის შუაწერტილებზე გამავალი სიბრტყე კვეთს მესამე გვერდით წიბოს და დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. ფუძის გვერდის სიგრძეა a. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი, თუ

$$a=\sqrt{5}\text{ სმ},\quad \cos\alpha=\frac{1}{4}.$$

17.76. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის გვერდია a, ხოლო სიმაღლეა h.

17.77. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობი, თუ მისი სამაღლეა $\sqrt{3}$ სმ-ის ტოლია, ხოლო წრფე, რომელიც აერთებს ზედა ფუძის ცენტრს ქვედა ფუძის გვერდის შუაწერტილთან, ფუძის სიბრტყესთან 60°-იან კუთხეს ადგენს.

17.78. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგის ფართობი, თუ პრიზმის სიმაღლე 3-ის ტოლია, ხოლო წრფე, რომელიც ზედა ფუძის ცენტრს ქვედა ფუძის წვეროსთან აერთებს, ფუძის სიბრტყესთან α°-იან კუთხეს ადგენს.

17.79. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოსა და ღერძზე გამავალი კვეთის ფართობი, თუ ფუძის გვერდია a, ხოლო გვერდითი წიბოა b.

17.80. წესიერ სამკუთხა პრიზმას გვერდით წიბოზე გავლებულია ორიპირდაპირე წახნაგისადმი პერპენდიკულარული მკვეთი სიბრტყე, რომლის ფართობი ტოლია Q. პრიზმის ფუძის გვერდი ტოლია a. იპოვეთ პრიზმის ზედაპირის ფართობი.

17.81. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ერთ გვერდზე გავლებულია მკვეთი სიბრტყე, რომელიც კვეთს მოპირდაპირე გვერდის წიბოს და ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს. ფუძის გვერდი ტოლია 3 სმ-ის. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

17.82. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი ტოლია 4 სმ-ს, ხოლო გვერდითი წიბო 2 სმ-ს. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ქვედა ფუძის გვერდზე და ზედა ფუძის წვეროზე.

17.83. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდსა და მასპირდაპირე წიბოს შეაწერტილზე გავლებული სიბრტყე ფუძის სიბრტყესთან 60°-იან ორწახნაგა კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ პრიზმის ფუძის გვერდის სიგრძე 3 სმ-ის ტოლია.

17.84. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდია $3\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ პრიზმის იმ სიბრტყითი კვეთის ფართობი, რომელიც ფუძის ორი გვერდის შუაწერტილზე გადის და ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 30°-იან კუთხეს, ამასთან ცნობილია რომ კვეთის სიბრტყე პრიზმის მხოლოდ ერთ გვერდით წიბოს გადაკვეთს.

17.85. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუაწერტილებზე გამავალი სიბრტყე კვეთს ერთ გვერდით წიბოს და დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. კვეთის ფართობია S. იპოვეთ პრიზმის ფუძის ფართობი, თუ $S=12$, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

17.86. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდია $6\sqrt{6}$ სმ. იპოვეთ პრიზმის იმ სიბრტყითი კვეთის ფართობი, რომელიც ფუძის ორი გვერდის შუაწერტილზე გადის და ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს, ამასთან ცნობილია, რომ კვეთის სიბრტყე პრიზმის მხოლოდ ერთ გვერდით წიბოს გადაკვეთს.

17.87. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ძირითადული წიბო a-ს ტოლია. იპოვეთ ფუძის გვერდზე გამავალი იმ კვეთის ფართობი, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან კუთხეს.

17.88. წესიერი სამკუთხა პრიზმის თითოეული წიბოს სიგრძეა $6\sqrt{3}$ სმ. ფუძის ერთ-ერთ გვერდზე და პრიზმის ღერძის შეაწერტილზე გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

17.89. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ქვედა ფუძის გვერდზე გაველებული სიბრტყე გვერდით წახნაგებს კვეთს წრფეებზე, რომელთა შორის კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ კუთხე, რომელსაც ეს სიბრტყე ადგენს პრიზმის ფუძესთან.

17.90. წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბოს ტოლის ფუძის გვერდს. იპოვეთ კუთხე ფუძის გვერდსა და გვერდითი წახნაგის იმ დიაგონალს შორის, რომელიც ფუძის გვერდს არ კვეთს.

17.91. წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგები კვადრატებია. იპოვეთ კუთხე ორი გვერდითი წახნაგის ორგადამკვეთ დიაგონალებს შორის.

17.92. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო კუთხე ორი გვერდითი წახნაგის ორგადამკვეთ დიაგონალებს შორის α-ს. იპოვეთ პრიზმის სიმაღლე.

17.93. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის გვერდია a, ხოლო სიმაღლეა h.

17.94. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის ათთოეული წიბო $7\sqrt{5}$ სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის დიდი დიაგონალი.

17.95. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის თითოეული წიბო 7 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მცირე დიაგონალი.

17.96. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის თითოეული წიბო a-ს ტოლია. იპოვეთ პრიზმის დიაგონალები და დიაგონალური კვეთების ფართობები.

17.97. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობია 1 მ². იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.98. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 72 სმ². გვერდითი წახნაგის დიაგონალია 5 სმ. იპოვეთ პრიზმის ფუძის გვერდი, თუ ის პრიზმის სიმაღლეზე ნაკლებია.

17.99. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 288 სმ². გვერდითი წახნაგის დიაგონალია 10 სმ. იპოვეთ პრიზმის სიმაღლე, თუ ის ფუძის გვერდზე მეტია.

17.100. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის თითოეული წიბო a-ს ტოლია. ქვედა ფუძის ერთ გვერდსა და ზედა ფუძის ნიშპირდაპირ გვერდზე გაყვანილია სიბრტყე. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი.

17.101. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდია 3 სმ, სიმაღლე კი — 13 სმ. ზედა და ქვედა ფუძეების ორი მოპირდაპირე (ერთ წახნაგზე არა მდებარე) გვერდზე გაყვანილია სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

17.102. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდია და ფუძეების ცენტრთა შემაერთებელი მონაკვეთის შეფეწერტილზე გაყვანილი სიბრტყე ფუძის სიბრტყესთან ქმნის მახვილ კუთხეს, რომელიც უდრის α-ს. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ პრიზმის ფუძის გვერდი უდრის a-ს.

17.103. წესიერი ხუთკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი უდრის a-ს. პრიზმის სიმაღლე ტოლია ფუძის დიაგონალის $\frac{1}{4}$-ის. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $a=\frac{2}{\sqrt{\cos 36^\circ}}$.

17.104. მართი სამკუთხა პრიზმის ყველა წიბო ტოლია. გვერდითი ზედაპირის ფართობია 192 მ². იპოვეთ სიმაღლე.

17.105. იპოვეთ ნორმი სამკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 50 სმ-ია და ფუძის გვერდებია 40 სმ, 13 სმ და 37 სმ.

17.106. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდებია 10 სმ, 17 სმ და 21 სმ; პრიზმის სიმაღლე კი 11 სმ-ია. იპოვეთ გვერდითი წიბოსა და ფუძის მცირე სიმაღლეზე გავლებული კვეთის ფართობი.

17.107. ნორმი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდებია 25 დმ, 29 დმ და 36 დმ. ზედაპირის ფართობი კი 1620 დმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი და სიმაღლე.

17.108. ნორმი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდები. ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $17:10:9$. გვერდითი წიბო კი 16 სმ-ია; პრიზმის ზედაპირის ფართობია 1440 სმ². იპოვეთ ფუძის გვერდები.

17.109. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფერდი ისე შეეფარდება ფუძეს, როგორც $5:6$. პრიზმის სიმაღლე უდრის ფუძის სიმაღლეს, რომელიც ტარებულია დამშვებელის ზედაპირის ფართობი 2520 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის წიბოები.

17.110. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ერთ გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც კვეთს მოპირდაპირე გვერდით წიბოს და ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. ფუძის ფართობი ტოლია Q. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

17.111. მართი პრიზმის გვერდითი წიბო 18 სმ-ის ტოლია. მისი ფუძე ძირითანია სამკუთხედია, რომლის კათეტებია 7 სმ და 8 სმ. იპოვეთ იმ სიბრტყით კვეთის ფართობი, რომელიც გადის 8 სმ-ის ტოლ კათეტზე და ფუძის სიბრტყესთან 60°-იან კუთხეს შეადგენს.

17.112. მართი პრიზმის ფუძე ABC ტოლფერდა სამკუთხედია $AB=BC=14$ სმ, $AC=4$ სმ. AC გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან 30°-იან ორწახნაგა კუთხეს ქმნის და მოპირდაპირე წიბოს D წერტილში გადაკვეთს. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

17.113. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე ტოლფერდა ABC სამკუთხედია, რომელშიც $AB=BC=a$, ხოლო $\angle A=\alpha$. AC გვერდზე გავლებულია სიბრტყე ფუძისადმი φ კუთხით $\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ კვეთში მიღებულია სამკუთხედი.

17.114. მართი პრიზმის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ერთ-ერთი მახვილი კუთხე უდრის α-ს. პრიზმის უდიდესი გვერდითი წახნაგი არის კვადრატი. იპოვეთ კუთხე ორი დი-

ნახაზები გვერდითი წახნაგის ტრაპეციათა დიაგონალებს შორის.

17.115. მართი პრიზმის ფუძე რომბია; პრიზმის დიაგონალებია სიგრძეები $2\sqrt{10}$ სმ და $2\sqrt{17}$ სმ, სიმაღლე — 2 სმ. იპოვეთ ფუძის გვერდი.

17.116. მართი პრიზმის ფუძეა ოთხკუთხედი, რომლის მაღვილი კუთხე უდრის α-ს, ხოლო პრიზმის სიმაღლეა შეფარდებით მისი ფუძის გვერდთან — k-ს. ფუძეა გვერდსა და მის ბისექტრისაზე გავლებული სიბრტყე. იპოვეთ კუთხე ამ სიბრტყესა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

17.117. მართი პრიზმის ფუძე $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის გვერდებია: $AB=CD=13$ სმ, $BC=11$ სმ და $AD=21$ სმ; მისი დიაგონალური კვეთის ფართობი ტოლია 180 სმ²-ს. იპოვეთ პრიზმის ზედაპირის ფართობი და AB_1C_1D კვეთის ფართობი.

17.118. დახრილი პრიზმაა გვერდითი წიბოა 15 სმ და ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 30°-იანი კუთხით. იპოვეთ პრიზმის სიმაღლე.

17.119. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ორი გვერდითი წახნაგი ერთიერთპერპენდიკულარულია; მათი საერთო წიბო 8 სმ-ია და დაშორებულია ორი სხვა გვერდითი წიბოდან 12 სმ-ით და 5 სმ-ით. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.120. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.121. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.122. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.123. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.124. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბოს უდრის a-ს, ხოლო პრიზმის სიმაღლეა შეფარდებით მისი ფუძის გვერდთან — k-ს. ფუძეა გვერდსა და მის ბისექტრისაზე გავლებული სიბრტყე. იპოვეთ კუთხე ამ სიბრტყესა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

17.125. მართი პრიზმის ფუძე $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის გვერდებია: $AB=CD=13$ სმ, $BC=11$ სმ და $AD=21$ სმ; მისი დიაგონალური კვეთის ფართობი ტოლია 180 სმ²-ს. იპოვეთ პრიზმის ზედაპირის ფართობი და AB_1C_1D კვეთის ფართობი.

17.126. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.127. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.128. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.129. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.130. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.131. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.132. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.133. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.134. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.135. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.136. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.137. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.138. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.139. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.140. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.141. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.142. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.143. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.144. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.145. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.146. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.147. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.148. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.149. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.150. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.151. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.152. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.153. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.154. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.155. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.156. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.157. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.158. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.159. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.160. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.161. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.162. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.163. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.164. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.165. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.166. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.167. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.168. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.169. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.170. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.171. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.172. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.173. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.174. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.175. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.176. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.177. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.178. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.179. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.180. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.181. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.182. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.183. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.184. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.185. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.186. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.187. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.188. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.189. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.190. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.191. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.192. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.193. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.194. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.195. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.196. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.197. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.198. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.199. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.200. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.201. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.202. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.203. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.204. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.205. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.206. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.207. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.208. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.209. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.210. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.211. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.212. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.213. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.214. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.215. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.216. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.217. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.218. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წიბოსთან ორწახნაგა კუთხე 120°-ია. ამ წიბოდან პრიზმის სხვა გვერდით წიბოებზე დაშვებულია 8 სმ და 7 სმ. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.219. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებად შორის მანძილები 37 სმ, 13 სმ და 40 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი დიდ გვერდით წახნაგსა და მის მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შორის.

17.220. მანძილი დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის უდრის 37 სმ-ს, 15 სმ-სა და 26 სმ-ს. გვერდითი ზედაპირი კი პერპენდიკულარული კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

17.221. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 8 სმ-ს; პერპენდიკულარული კვეთის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17, მის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართ

17.138. დაამტკიცეთ, რომ კრებულ სიბრტყის წერტილის მქონე სამი წიბოს მილიებზე გამავალი სიბრტყეც, კუბის ამ დიაგონალის პერპენდიკულარულია, რომელიც საწყის წერტილიდან გამოდის.

17.137. პარალელეპიპედის ფუძე რომბია; ცნობილია დიაგონალური კვეთის მაჩვენებელი. დაამტკიცეთ, რომ ასეთ დიაგონალური კვეთის ფუძის სიმეტრიული პერპენდიკულარულია.

17.138. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი; პარალელეპიპედის დიაგონალური კვეთების ფართობებია Q_1 და Q_2. დაამტკიცეთ, რომ გვერდითი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $2\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}$.

17.139. პარალელეპიპედის დიაგონალური კვეთები სიბრტყეებს შორის კუთხე α-ს ტოლია; კვეთების ფართობებია Q_1 და Q_2. დაამტკიცეთ, რომ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობის გამოთვლისთვის ფორმულა

$$\sqrt{Q_1^2+Q_2^2-2Q_1Q_2\cos\alpha}+\sqrt{Q_1^2+Q_2^2+2Q_1Q_2\cos\alpha}.$$

17.140. პარალელეპიპედის წვეროდან გავლებული სამი წახნაგის ფართობები. ამ ფორმულებიდან, რომელიც წიგნებიდან, ამოწერილია პარალელეპიპედი. დაამტკიცეთ, რომ ასეთი წვეროდან პარალელეპიპედის დიაგონალის კვადრატის ტოლია.

17.141. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილიდან პოლიედრის მახასიათებელი პარალელეპიპედის ნებისმიერი დიაგონალის პოლუსებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი არ არის დამოკიდებული დიაგონალის შერჩევაზე.

17.142. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებები a, b, c და დიაგონალი d დაკავშირებულია უტოლობით $(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2\geq abcd\sqrt{3}$.

17.143. დაამტკიცეთ, რომ, თუ პრიზმის დიაგონალური კვეთები ტოლფერდა სამკუთხედია, მაშინ მისი ფუძეები მონაკვეთი გვერდითი წიბოს პარალელურია.

17.144. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმაში B_1D და D_1B დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ A_1C და B_1D დიაგონალებს შორის 60°-იანი კუთხეა.

17.145. სამკუთხა პრიზმის ორი გვერდითი წახნაგი ურთიერთპერპენდიკულარულია. დაამტკიცეთ, რომ ამ წახნაგების ფართობების კვადრატების ჯამი პრიზმის მესამე გვერდითი წახნაგის ფართობის კვადრატის ტოლია.

17.146. პრიზმის ფუძე ტოლგვერდა სამკუთხედია; ზედა ფუძის ერთ-ერთი წვეროს გვედა ფუძის ცენტრში გეგმილდება. დაამტკიცეთ, რომ პრიზმის ერთ-ერთი წახნაგი მართკუთხედია.

17.147. დაამტკიცეთ, რომ თუ პარალელეპიპედის წიბოებიდან ერთის ტოლ პარალელოგრამებს წარმოადგენენ, მაშინ ასეთი რომბებია.

§ 18. პირამიდა

ამოცანები გამოთვლაზე

18.1. ფუძის a გვერდისა და h გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე.

18.2. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის აპოთემა.

18.3. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ჩვედაპირის ფართობი.

18.4. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა 7 სმ. ხოლო ფუძის გვერდი 6 სმ-ია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

18.5. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა $2\sqrt{15}$ სმ. პირამიდის აპოთემა დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი 60°-იანი კუთხით. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

18.6. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირი 14,76 მ²-ია, ხოლო სრული ზედაპირი — 18 მ². იპოვეთ ფუძის გვერდი და პირამიდის სიმაღლე.

18.7. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი, თუ მოცემულია პირამიდის h სიმაღლე და P გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.8. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი, თუ მისი გვერდითი წიბო 5 სმ-ია, ხოლო სრული ზედაპირი 16 სმ².

18.9. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 4 სმ-ია, გვერდითი წიბო კი — 10 სმ. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

18.10. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი a-ს ტოლია, ხოლო გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან φ კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის დიაგონალური კვეთის ფართობი, თუ $a=4$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

18.11. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 8 სმ, ხოლო დიაგონალური კვეთის ფართობი $2\sqrt{34}$ სმ². იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.12. ფუძის a გვერდის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, თუ მისი დიაგონალური კვეთი ფუძის ტოლდიდია.

18.13. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 7 სმ. ხოლო იმ კვეთის ფართობი, რომელიც პირამიდის სიმაღლეზეა და ამასთანავე გადის, რაც ხნობრივად ფუძის დიაგონალის სიგრძის ტოლია, იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.14. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 4 სმ-ის ტოლია. ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე კი 60°. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.15. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა a. ხოლო გვერდით წახნაგსა და ფუძის სიბრტყეს შორის ორწახნაგა კუთხის სიდიდე α-ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $a=6$, $\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

18.16. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა 4 სმ. ფუძის გვერდთან შექმნილი ორწახნაგა კუთხეა β. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $\cos\beta=0{,}6$.

18.17. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი ტოლია a-ს, ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ $a=\sqrt{21}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

18.18. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე, თუ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18.19. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე ტოლია H-ს. ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $H=\sqrt{7}$, $\operatorname{tg}\alpha=3$.

18.20. კუბში, რომლის წიბოს სიგრძეა $3\sqrt[3]{10}$, ჩაწერილია ცილინდრი, რომლის ფუძის წრეწირი ეხება კუბის წახნაგების დიაგონალებს. იპოვეთ მოცემული პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.21. კუბის ზედა ფუძის ცენტრი და ქვედა ფუძის გვერდების შუაწერტილები ამ კუბში ჩახაზული პირამიდის წვეროებია. კუბის წიბო ტოლია a-ს, იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.22. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი ტოლია a-ს, ხოლო პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე — α-ს,

იპოვეთ მახვილი პირამიდის ფუძის ცენტრიდან მის გვერდებამდე, თუ $\alpha=20°$, $\cos\alpha=\frac{1}{8}$.

18.23. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის, რომლის სიმაღლის სიგრძეა h, ფუძის დიაგონალზე და მასი მოპირდაპირე გვერდითი წიბოს შუაწერტილზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის იმავე დიაგონალზე გამავალ დიაგონალურ სიბრტყესთან α სიდიდის ორწახნაგა კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ $h=12$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

18.24. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოს სიგრძე ტოლია b-სი და ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს. ფუძის დიაგონალზე გვერდითი წიბოს პარალელურად გაველებულია სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ $b=7$, $\cos\alpha=\frac{6}{7}$.

18.25. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა $9\sqrt{2}$ სმ, ხოლო გვერდითი წიბოსი — 10 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის დიაგონალზე და გვერდითი წიბოს პარალელურია.

18.26. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია $5\sqrt[4]{27}$ სმ. გვერდითი წიბო სიმაღლესთან 30°-იან კუთხეს ქმნის. ფუძის ერთ წვეროზე ამ წვეროს მოპირდაპირე წიბოს პერპენდიკულარულად გაველებულია სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

18.27. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე 20 სმ-ია, ხოლო ფუძის გვერდი კი — 30 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის გვერდზე ამ გვერდის მოპირდაპირე გვერდითი წახნაგის ძირითადებულად.

18.28. წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაში ჩახაზულია კუბი ისე, რომ მისი ოთხი წვერო პირამიდის გვერდით წიბოებზეა და სამი ოთხი ქვეს ფუძის სიბრტყეზე. იპოვეთ კუბის წიბო, თუ პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 12 სმ და სიმაღლის სიგრძეა 4 სმ.

18.29. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი ტოლია a ს, ხოლო გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. ამ პირამიდაში ჩახაზულია კუბი ისე, რომ მისი ოთხი წვერო მდებარეობს პირამიდის ფუძეზე, ოთხი კი — პირამიდის ფუძეზე. იპოვეთ კუბის წიბო.

18.30. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცემულია წიბო ტოლია a-ს. იპოვეთ პირამიდის ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუაწერტილებსა და პირამიდის სიმაღლის შუაწერტილზე გავლებული კვეთის ფართობი.

18.31. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე, თუ ეს კუთხე უდრის გვერდით წიბოსა და პირამიდის სიბრტყეს შორის მდებარე კუთხეს.

18.32. წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაში გვერდით წიბოსთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე უდრის 120°. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, თუ მისი დიაგონალური კვეთის ფართობი არის S.

18.33. ფუძის a გვერდისა და h გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე.

18.34. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის ჯამური ზედაპირის ფართობი.

18.35. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის ზედაპირის ფართობი.

18.36. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო უდრის 11 სმ-ს და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ ფუძის გვერდი.

18.37. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ ფუძის გვერდია $\sqrt{15}$ სმ და გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან შეადგენს 45°-იან კუთხეს.

18.38. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 12 სმ, გვერდითი წიბოა სიგრძე კი $\sqrt{195}$ სმ. იპოვეთ ამ კვეთის ფართობი, რომელიც პირამიდის გვერდით წიბოსა და სიმაღლეზე გადის.

18.39. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოს სიგრძე უდრის l-ს, ხოლო მისი სიმაღლის სიგრძეა h. იპოვეთ პირამიდის ფუძის წიბოსთან ორწახნაგა კუთხის გრადუსული ზომა, თუ $l=\sqrt{7}$, $h=\sqrt{3}$.

18.40. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ პირამიდის ფუძის გვერდი არის a, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე — 60°.

18.41. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე უდრის 4 სმ-ს და აპოთემა 5 სმ-ია.

18.42. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე უდრის H-ს, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე α-ს. იპოვეთ პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ $H=\sqrt{3}$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

18.43. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე, თუ ფუძის გვერდის სიგრძეა 13 სმ და გვერდითი ზედაპირის ფართობი ორჯერ მეტია ფუძის ფართობზე.

18.44. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი და აპოთემა, თუ მისი გვერდითი წიბოა 10 სმ. სრული გვერდითი ზედაპირი 144 სმ².

18.45. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა a, ხოლო გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან α სიდიდის ორწახნაგა კუთხეს ადგენს. ამ პირამიდის ფუძის ცენტრზე ერთ-ერთი გვერდითი წახნაგის პარალელურად გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ $\alpha=15°$. $\left(\text{ანს. } \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

18.46. $SABC$ წესიერი სამკუთხა პირამიდაში ფუძის გვერდი არის a, გვერდითი წიბო კი b. ამ პირამიდაში AB და BC წიბოების შუაწერტილებზე SB წიბოს პარალელურად გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი.

18.47. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ამ გვერდის პირდაპირ მდებარე გვერდითი წიბოს ბარითებულია. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ ფუძის გვერდია a, ხოლო პირამიდის სიმაღლეა h.

18.48. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის გვერდის ტოლია. გვერდითი წახნაგების ცენტრებში შეერთებულია ერთი-ნეთთან. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის ფართობის შეფარდება პირამიდის ფუძის ფართობთან.

18.49. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, თუ წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხეა 90°, ხოლო ფუძის ფართობი — S.

18.50. წესიერი სამკუთხა პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხეა 90°. იპოვეთ ამ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის შეფარდება მისი ფუძის ფართობთან.

18.51. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე უდრის H-ს, ხოლო გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. ფუძის გვერდზე და ძირითადთან გვერდითი წიბოს შუა წერტილზე გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

18.52. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის გვერდთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ კუთხე გვერდით წიბოსა და პირამიდის სიმაღლეს შორის.

18.53. მანძილი წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდიდან მის მოპირდაპირე წიბომდე ორჯერ ნაკლებია ფუძის გვერდზე. იპოვეთ კუთხე გვერდით წახნაგსა და პირამიდის ფუძის სიბრტყეს შორის.

18.54. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე უდრის α-ს, ხოლო პირამიდის გვერდითი ზედაპირი S-ს. იპოვეთ მანძილი პირამიდის ფუძის ცენტრიდან გვერდითი წახნაგის აპოთემის შუაწერტილამდე.

18.55. ფუძის მოკუმშული a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სიმაღლე.

18.56. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ბოთიეში.

18.57. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ზედაპირის ფართობი.

18.58. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სრული ზედაპირი, თუ მისი გვერდითი წიბოა a, ხოლო ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია r.

18.59. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სრული ზედაპირი, თუ მისი ბოთიეშია l, ხოლო ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია r.

18.60. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, თუ პირამიდის სიმაღლე უდრია h-ს, ხოლო გვერდითი წიბო b-ს.

18.61. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია $5\sqrt{6}$ სმ, ხოლო ფუძის გვერდთან შექმნილი ორწახნაგა კუთხე α. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

18.62. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ბოთიეშის სიგრძე უდრის m-ს, ხოლო ორწახნაგა კუთხე ფუძის წიბოსთან α-ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ $m=3\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$.

18.63. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია $\sqrt{33}$ სმ, ხოლო გვერდითი წახნაგი უდიდესი დიაგონალური კვეთის ტოლდიდია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.64. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სიმაღლეა h, ხოლო ფუძის გვერდი კი — a. იპოვეთ უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობი.

18.65. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სიმაღლეა $\sqrt{39}$ სმ, ხოლო ფუძის გვერდი კი — 12 სმ. იპოვეთ მცირე დიაგონალური კვეთის ფართობი.

18.66. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო 8 დმ-ია. ფუძის გვერდი კი 4 დმ, ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუა წერტილებზე გავლებულია ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარული სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

18.67. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, თუ ფუძის ფართობია Q, ხოლო ფუძესთან მიდებარე თითოეული ორწახნაგა კუთხე φ-ს ტოლია.

18.68. პირამიდის ფუძის ფართობია α, ხოლო გვერდითი ზედაპირი კი — S. იპოვეთ ფუძესთან მდებარე თორწახნაგა კუთხეების, თუ ისინი ერთმანეთის ტოლია.

18.69. პირამიდის ფუძეს წარმოადგენს, რომლის გვერდები 6 სმ-ისა და 8 სმ-ის ტოლია. პირამიდის ბოთიეშის გვერდითი წიბო 13 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.70. პირამიდას ფუძეში აქვს რომბი, რომლის დიაგონალებია 6 მ და 8 მ. პირამიდის სიმაღლე გადის რომბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და 1 მ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი.

18.71. პირამიდის ფუძე არის პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 3 სმ და 7 სმ, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალი 6 სმ-ია. პირამიდის სიმაღლე დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გადის და 4 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი წიბო.

18.72. პირამიდის ფუძე არის პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 20 სმ და 36 სმ, ფართობი კი 360 სმ²-ია. პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და უდრის 12 სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.73. პირამიდას ფუძედ აქვს პარალელოგრამი, რომლის გვერდები უდრია 3 მ-ს და 4 მ-ს, ერთ-ერთი დიაგონალი კი 3 მ-ია. პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და უდრის 2 მ-ს. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

18.74. პირამიდის ფუძე არის მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზა a-ს ტოლია. თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.75. პირამიდის ფუძე არის მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. ყოველი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან $60°$-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.76. პირამიდის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია 7 და 2,3. პირამიდის ყველა წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $\operatorname{ctg}\alpha=3,25$.

18.77. $SABC$ პირამიდას ფუძედ აქვს ABC მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზა AB 26 სმ და კათეტი $AC=24$ სმ; SA წიბო ABC სიბრტყის პერპენდიკულარულია და უდრის 18 სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.78. პირამიდას ფუძედ აქვს სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. ფუძის საშუალო სიდიდის გვერდის მოპირდაპირე გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია და უდრის 16 სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

18.79. პირამიდას ფუძედ აქვს რომბი a გვერდითა და β მახვილი კუთხით, ფუძესთან ორწახნაგა კუთხეებს აქვთ ტოლი და ტოლი α სი-

დიდე, იპოვეთ პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ

$$a=7,\ \sin\beta=\frac{3}{4},\ \cos\alpha=\frac{1}{3}.$$

18.80. პირამიდას ფუძედ აქვს რომბი, რომლის მცირე დიაგონალის სიგრძეა d, ხოლო მახვილი კუთხის სიდიდე α თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან β სიდიდის ორწახნაგა კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ

$$d=2,\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=3,\quad \cos\beta=\frac{1}{6}.$$

18.81. პირამიდას ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ტოლ გვერდებს შორის მოთავსებული კუთხის სიდიდეა α, ხოლო მისი მოპირდაპირე გვერდის სიგრძეა a. პირამიდის გვერდითი წახნაგები ფუძის სიბრტყესთან β სიდიდის ორწახნაგა კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ $a=6$,

$$\cos\beta=\frac{3}{7},\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2.$$

18.82. პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფუძე 6 სმ-ია და სიმაღლე 9 სმ, პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია და თითოეული უდრის 13 სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.83. პირამიდას ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფუძე 12 სმ-ია, ფერდი — 10 სმ. გვერდითი წახნაგები ფუძესთან ქმნიან 45°-ს ტოლ ორწახნაგა კუთხეებს. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.84. პირამიდის ფუძე არის ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 40 სმ, 25 სმ და 25 სმ. პირამიდის სიმაღლე ვადის ფუძის დიდი გვერდის პირდაპირ მდებარე კუთხის წვეროზე და 8 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი.

18.85. პირამიდის ფუძედ აქვს ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის დიაგონალის სიგრძეა $3\sqrt{5}$ და იგი დიდ ფუძესთან ადგენს α კუთხეს. ყველა გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი φ კუთხით. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ

$$\sin 2\alpha=0{,}8,\quad \cos\varphi=\frac{2}{3}.$$

18.86. პირამიდას ფუძედ აქვს ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის პარალელური გვერდების სიგრძეებია 3 და 9. ყველა გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

18.87. პირამიდის ფუძეა ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფერდი უდრის a-ს, ხოლო ძირითადი კუთხე — α-ს. ყველა გვერდითი წახნაგი პირამიდის ფუძის სიბრტყესთან ქმნის ერთსა და იმავე β კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

18.88. პირამიდის ფუძე კვადრატია. მისი სიმაღლე გადის ფუძის ერთ-ერთ წვეროზე. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, თუ ფუძის გვერდი 20 სმ-ია, ხოლო სიმაღლეა 21 სმ.

18.89. პირამიდის ფუძეა n-გვარედანი რომბი. პირამიდის ორი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია და ერთმანეთთან β სიდიდის ბრტყელ კუთხეს ადგენენ. ორი დანარჩენი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია α სიდიდის კუთხით. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ

$$a=5,\ \sin\beta=0{,}6,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0{,}4.$$

18.90. პირამიდას ფუძედ აქვს რომბი, რომლის გვერდი 25 სმ-ია და ნაკრები დიაგონალი 30 სმ; პირამიდის სიმაღლე გადის მისი ფუძის ბლაგვი კუთხის წვეროზე და უდრის 32 სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

18.91. პირამიდას ფუძედ აქვს რომბი, რომლის გვერდის სიგრძეა a და მახვილი კუთხეა სიდიდე α. პირამიდის წვეროდან ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში დგომილება, ხოლო უდიდესი გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან β სიდიდის კუთხეს შეადგენს. ფუძის ნაკრებ დიაგონალზე პირამიდის გვერდითი წიბოა პარალელურად გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ $a=20$, $\sin\alpha=\frac{7}{10}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$.

18.92. პირამიდას ფუძედ აქვს a გვერდიანი ტოლგვერდა სამკუთხედი; ერთ-ერთი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარული ტოლგვერდა სამკუთხედია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.93. პირამიდის ფუძე წესიერი სამკუთხედია. ერთ-ერთი გვერდითი წახნაგი ფუძის მართობულია, ხოლო დანარჩენი ორი წახნაგი ფუძესთან ქმნის α კუთხეს, რა კუთხეებს ადგენს გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყესთან.

18.94. პირამიდის სიმაღლის შუაწერტილზე გავლებულია ფუძის პარალელური კვეთი. ფუძის ფართობი არის Q. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

18.95. პირამიდის სიმაღლე დაყოფილია ოთხ ტოლ ნაწილად და დაყოფის წერტილებზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყეები. ფუძის ფართობია 400 სმ². იპოვეთ კვეთების ფართობები.

18.96. პირამიდის სიმაღლეა 16 სმ-ია. ფუძის ფართობი 512 სმ²-ის ტოლია. ფუძიდან რა მანძილითაა დაშორებული ფუძის პარალელური კვეთი, თუ კვეთის ფართობი 50 სმ²-ია?

18.97. პირამიდის ფუძის ფართობი ტოლია 150 სმ²-ს, პარალელური კვეთის ფართობი კი 54 სმ²-ს, მანძილი მათ შორის ტოლია 14 სმ. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.98. პირამიდაში ფუძიდან h მანძილზეა გატარებულია ფუძის პარალელური კვეთი. ფუძის ფართობია Q_1, ხოლო კვეთის ფართობია Q_2. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.99. პირამიდაში, ფუძის პარალელურად გავლებული სიბრტყე მის გვერდით ზედაპირს ყოფს შეფარდებით 4 : 5 (წვეროდან). როგორი შეფარდებით ყოფს ეს სიბრტყე პირამიდის სიმაღლეს?

18.100. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე, თუ მისი გვერდითი წიბოა c, ხოლო ფუძეების გვერდებია a და b $(a>b)$.

18.101. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე 7 სმ-ის ტოლია. ფუძეთა გვერდებია 10 სმ და 2 სმ. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი წიბო.

18.102. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე ტოლია 53 სმ-ს, ამოთხმა კი 61 სმ-ია, ფუძეების გვერდები ასე შეეფარდება ერთმანეთს. როგორც 7 : 3. იპოვეთ ეს გვერდები.

18.103. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე 2 სმ-ია, ხოლო ფუძეთა გვერდებია 3 სმ და 5 სმ. იპოვეთ პირამიდის დიაგონალი.

18.104. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე 4-ის ტოლია. ფუძეთა გვერდებია 2 და 8. იპოვეთ დიაგონალური კვეთების ფართობები.

18.105. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძეთა გვერდებია 3 მ და 2 მ. სიმაღლე 4 მ-ია. იპოვეთ სრული ზედაპირი.

18.106. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე ტოლია 4 სმ-ს, დიაგონალი 5 სმ-ს. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

18.107. იპოვეთ წესიერი წაკვეთილი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძეების გვერდები, თუ პირამიდის სიმაღლე 7 სმ-ია, გვერდითი წიბო 9 სმ და დიაგონალი 11 სმ.

18.108. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის დიდი ფუძის გვერდი არის a, პატარასი კი b. გვერდითი წიბო ფუძესთან შეადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

18.109. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი წიბო ტოლია ფუძის გვერდს და a-ს ტოლია, ხოლო კუთხე პირამიდის გვერდით წიბოსა და მისი დიდი ფუძის გვერდს შორის უდრის α-ს. იპოვეთ წაკვეთილი პირამიდის დიაგონალური კვეთის ფართობი.

18.110. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების ფართობებია Q და q. გვერდითი წიბო კი ქმნის ფუძესთან შეადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

18.111. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების ფართობებია Q და q. გვერდითი ზედაპირის ფართობია P. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

18.112. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლეა h, ხოლო ფუძეების გვერდებია a და b $(a>b)$.

18.113. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის AC_1 და A_1C დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია, თითოეული მათგანი უდრის 2 სმ-ს. იპოვეთ სიმაღლე.

18.114. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის დიაგონალები გვერდითი წიბოების პერპენდიკულარულია; ქვედა ფუძის გვერდი 9 სმ-ია, გვერდითი წიბო კი 8 სმ. იპოვეთ ზედა ფუძის გვერდი, წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე და განსაზღვრეთ მისი დიაგონალების ერთმანეთის წერტილიდან ქვედა ფუძის სიბრტყემდე.

18.115. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე, თუ მისი ფუძეების გვერდებია a და b, გვერდითი ზედაპირი კი ფუძეების ჯამის ტოლდიდია.

18.116. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ამოთხმა ტოლია 12 სმ-ს, გვერდითი წიბო — 13 სმ-ს და გვერდითი ზედაპირის ფართობი — 120 სმ²-ს. იპოვეთ ფუძეების გვერდები.

18.117. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლეა 12 სმ-ია, ფუძეების გვერდების სხვაობა 10 სმ-ია, და სრული ზედაპირის ფართობი ტოლია 512 სმ²-ს. იპოვეთ ფუძეების გვერდები.

18.118. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების გვერდების სიგრძეებია 4 სმ და 8 სმ. ამოთხმა ფუძის სიბრტყესთან 60°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.119. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ქვედა და ზედა ფუძეების გვერდების სიგრძეებია a და b. გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. იპოვეთ წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $a=7$, $b=5$, $\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

18.120. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ორწახნაგა კუთხე ფუძესთან 60°-ია; ფუძეების დიაგონალების სიგრძეებია $6\sqrt{2}$ სმ

და $8\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.121. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდაში ფუძის გვერდი ტოლია 6 დმ, ხოლო აპოთემა — 4 დმ. ფუძის პარალელურად გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძიდან 1 დმ მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირი იმ წაკვეთილი პირამიდისა, რომელიც წარმოიქმნა მოცემული პირამიდიდან ფუძის პარალელური სიბრტყით.

18.122. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების გვერდებია 6 სმ და 8 სმ, გვერდითი წიბო კი 10 სმ-ია. იპოვეთ მცირე ფუძის დიაგონალის პოლუსზე ამ დიაგონალის პერპენდიკულარულად გავლებული კვეთის ფართობი.

18.123. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე, თუ მისი გვერდითი წიბოა c, ხოლო ფუძეების გვერდებია a და b $(a>b)$.

18.124. წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების გვერდებია 2 სმ და 6 სმ. გვერდითი წახნაგი დიდ ფუძესთან ქმნის 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ სიმაღლე.

18.125. წესიერი წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდებია 4 დმ და 1 დმ. გვერდითი წიბო 2 დმ-ია. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.126. წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების გვერდებია 6 დმ და 12 დმ. სიმაღლე 1 დმ-ია. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.127. წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ორწახნაგა კუთხე ფუძესთან 60°-ია; ამ ფუძის გვერდი არის a და სრული ზედაპირის ფართობი უდრის S-ს. იპოვეთ მეორე ფუძის გვერდი.

18.128. წესიერი წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის დიდი ფუძის გვერდია a, ხოლო მცირესი — b. გვერდითი წიბო ფუძესთან 45°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გვერდით წიბოსა და პირამიდის ღერძზე გადის.

18.129. წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძეთა გვერდებია 6 მ და 5 მ, ხოლო სიმაღლეა 3 მ. გაავლეთ კვეთი ქვედა ფუძის გვერდია და ამ გვერდის პირდაპირ ძუძუარე ზედა ფუძის წვეროზე. იპოვეთ კვეთის ფართობი და ორწახნაგა კუთხე კვეთსა და ქვედა ფუძეს შორის.

18.130. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე, თუ მისი გვერდითი წიბოა c, ხოლო ფუძეების გვერდებია a და b $(a>b)$.

18.131. წესიერი ექვსკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების გვერდებია 4 სმ და 2 სმ, სიმაღლე 1 სმ-ია. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.132. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლეა h, ხოლო ფუძეების გვერდებია a და b $(a>b)$.

18.133. წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების შესაბამისი გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 13 : 17, შუა კვეთის პერიმეტრი კი ტოლია 45 მ. იპოვეთ ფუძეების პერიმეტრები.

18.134. წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების ფართობებია 9 სმ² და 25 სმ². იპოვეთ შუა კვეთის ფართობი.

18.135. წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების ფართობებია 2 მ² და 98 მ². იპოვეთ სიმაღლის შუაწერტილზე გამავალი პარალელური კვეთის ფართობი.

18.136. წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე არის h, ფუძეების ფართობები კი Q და q. რა მანძილზეა ზედა ფუძიდან მისი პარალელური კვეთი, რომლის ფართობიც ფუძეების ფართობთა საშუალო პროპორციულია?

18.137. წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების ფართობებია 18 მ² და 128 მ². იპოვეთ იმ პარალელური კვეთის ფართობი, რომელიც ყოფს სიმაღლეს შეფარდებით 2 : 3 (დაწყებული მცირე ფუძიდან).

18.138. წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად და დაყოფის წერტილებზე გატარებულია ფუძეების პარალელური სიბრტყეები. იპოვეთ ძირებიდან კვეთების ფართობები, თუ ფუძეების ფართობებია Q და q ($Q=32$; $q=2$).

ამოცანები დამტკიცებაზე

18.139. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო პერპენდიკულარულია ფუძის დიაგონალებიდან ერთ-ერთისა.

18.140. დაამტკიცეთ, რომ თუ წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე უდრის მისი ფუძის გვერდს, მაშინ გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყესთან შეადგენენ 60°-იან კუთხეს.

18.141. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი ტეტრაედრის წახნაგების ცენტრები მეორე წესიერი ტეტრაედრის წვეროებია. იპოვეთ ამ ტეტრაედრების წიბოთა შეფარდება.

18.142. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი სამკუთხა პირამიდის არაგვერდიგვერდა წიბოები ერთიერთისპერპენდიკულარულია.

18.143. ტეტრაედრის ყოველი წახნაგი ტოლგვერდა სამკუთხედია. დაამტკიცეთ, რომ მოპირდაპირე წიბოების შუაწერტილებზე გამავალი წრფე, პერპენდიკულარულია ამ წიბოებისა.

18.144. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტეტრაედრის ორი გადამკვეთი წიბო ურთ-სა-საშისად პერპენდიკულარულია მოპირდაპირე წიბოებისა, მა-

შინ დანარჩენი ორი მოპირდაპირე წიბოც პერპენდიკულარულია.

18.145. დაამტკიცეთ, რომ, თუ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ბრტყელი კუთხე წვეროსთან 60°-ია, მაშინ ნახაზდაპირე გვერდითი წიბოები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

18.146. კუბის ერთი წვეროდან გავლებულია წაბნიგების სამი დიაგონალი; მათი ბოლოები მონაკვეთებითაა შეერთებული. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდა, რომლის წიბოები აგებული ეწყობა მონაკვეთია, არის წესიერი ტეტრაედრი.

18.147. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლის ფუძეზე გავატარეთ კვეთი, რომელიც პარალელურია ორი ალდგნილი წიბოსი. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული კვეთი მართკუთხედია და კვეთის ფართობი ტოლია $\frac{2}{9}ab$-სი, სადაც a ფუძის გვერდია, ხოლო b გვერდითი წიბოა.

18.148. პირამიდის ფუძეა პარალელოგრამი. მისი სიმაღლე ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გადის. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდის სიმაღლეზე გამავალი ნებისმიერი სიბრტყე პირამიდის სრულ ზედაპირს ორ ტოლდიდ ნაწილად ყოფს.

18.149. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდის სიმაღლე კუთხვნის გვერდით წიბოზე გამავალ, პირამიდის ფუძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეს.

18.150. პირამიდის გვერდითი წიბოები ერთმანეთის ტოლია, ხოლო მისი ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია. დაამტკიცეთ, რომ ამ პირამიდას ერთადერთი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

18.151. პირამიდის გვერდითი წახნაგები ერთნაირადაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი. შეიძლება თუ არა პირამიდის ფუძე იყოს: 1) მართკუთხედი? 2) ტოლფერდა ტრაპეცია?

18.152. პირამიდის გვერდითი წიბოები ერთნაირადაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი. შეიძლება თუ არა პირამიდის ფუძე იყოს 1) პარალელოგრამი? 2) ტრაპეცია?

18.153. პირამიდის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი a და b კათეტებით; პირამიდის სიმაღლე ფუძის მართი კუთხის წვეროზე გადის და H-ის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{1}{2}\left(aH+bH+ab+\sqrt{a^2H^2+b^2H^2+a^2b^2}\right).$$

18.154. წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების ფართობებია Q_1 და Q_2, ხოლო შეკვეთის ფართობია M. დაამტკიცეთ, რომ $\sqrt{M}=\frac{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}}{2}$.

18.155. დაამტკიცეთ შემდეგი ოთხი დებულების ტოლფასობა:
1. პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია;
2. პირამიდის გვერდითი წიბოები ერთნაირადაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი;
3. პირამიდის გვერდითი წიბოები სიმაღლესთან ქმნიან ტოლ კუთხეებს;
4. პირამიდის ფუძეზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა და პირამიდის სიმაღლე გადის ამ წრეწირის ცენტრში.

18.156. დაამტკიცეთ. შემდეგი სამი დებულების ტოლფასობა:
1. პირამიდის გვერდითი წახნაგების სიმაღლეები ტოლია;
2. პირამიდის სიმაღლე გვერდითი წახნაგებთან ქმნის ტოლ კუთხეებს;
3. პირამიდის ყველა გვერდითი წახნაგი ერთნაირადაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი.

18.157. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდის ფუძესთან ნებისმიერ ორწახნაგა კუთხეები ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც პირამიდის ფუძეში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა და პირამიდის სიმაღლე გადის ამ წრეწირის ცენტრში.

18.158. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხა პირამიდის ორწახნაგა კუთხეები ტოლია, მაშინ ამ პირამიდის ყველა წიბო ერთმანეთის ტოლია.

18.159. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი ტეტრაედრის სიმაღლის შეკვეთა ფუძის წესიერ სამკუთხედთან შეიძლება მხოლოდ წესიერ-წვეროდ პერპენდიკულარული წრფე.

18.160. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხა პირამიდაში სიმაღლე გადის ფუძის სიმაღლეებია გადაკვეთის წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც პირამიდის მოპირდაპირე წიბოები ერთიერთპერპენდიკულარულია.

§ 19. ცილინდრი. კონუსი. ბირთვი
ამოცანები ანალიზზე

19.1. ცილინდრის ფუძის რადიუსია 2 ს, სიმაღლეა 3 მ. იპოვეთ ღერძული კვეთის დიაგონალი.

19.2. ცილინდრის ღერძული კვეთი არის კვადრატი, რომლის ფართობია Q. იპოვეთ ცილინდრის ფუძის ფართობი.

19.3. ცილინდრის სიმაღლეა 6 სმ, ფუძის რადიუსი 5 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გავლებულია ცილინდრის ღერძის პარალელურად ბისგან 4 სმ-ის მანძილზე.

19.4. ცილინდრის სიმაღლეა 8 დმ, ფუძის რადიუსია 5 დმ. ცილინდრი გადაკვეთილია სიბრტყით ისე, რომ კვეთი კვადრატია. იპოვეთ მანძილი ამ კვეთიდან ღერძამდე.

19.5. ცილინდრში გაყვანებულია დერძის პარალელური სიბრტყე ისე, რომ ის ფუძის წრეწირიდან 120°-იან რკალს ჩამოჭრის. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ მანძილი დერძიდან მკვეთ სიბრტყემდე $4\sqrt{2}$ სმ-ია, ხოლო მსახველია $2\sqrt{6}$ სმ.

19.6. ცილინდრი, რომლის სიმაღლე h-ის ტოლია, გადაკვეთილია ცილინდრის დერძის პარალელური სიბრტყით, რომელიც დერძიდან დაშორებულია d მანძილით. მკვეთი სიბრტყე ფუძის წრეწირს მოკვეთს α სიდიდის რკალს. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ

$$h=14,\quad d=5,\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{10}.$$

19.7. ცილინდრის ფუძის ფართობი n-ჯერ შეეფარდება მისი დერძული კვეთის ფართობს, როგორც $\pi:4$. იპოვეთ კუთხე დერძული კვეთის დიაგონალებს შორის.

19.8. ცილინდრის სიმაღლე 6 დმ-ია, ფუძის რადიუსია 5 დმ. ბოკოზედა 10 დმ სიგრძის მონაკვეთის ბოლოები ორივე ფუძის წრეწირზე ძევს. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი ამ მონაკვეთიდან დერძამდე.

19.9. ტოლგვერდა ცილინდრში (დიაგონალი ცილინდრის სიმაღლის ტოლია) ზედა ფუძის წრეწირის წერტილი წრფით შეერთებულია ქვედა ფუძის წრეწირის წერტილთან. ამ წერტილებში გავლებულ რადიუსებს შორის კუთხე 60°-ია. იპოვეთ გავლებულ წრფესა და ცილინდრის დერძს შორის კუთხე.

19.10. ცილინდრში, რომლის დერძითი კვეთა კვადრატია, ზედა ფუძის წრეწირის წერტილი შეერთებულია ქვედა ფუძის წრეწირის წერტილთან. შემაერთებელი წრფე ქმნის ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს. იპოვეთ მანძილი ამ წრფესა და ცილინდრის დერძს შორის, თუ ცილინდრის სიმაღლე უდრის h-ს.

19.11. მონაკვეთი, რომელიც აერთებს ცილინდრის ზედა ფუძის წრეწირის წერტილს ქვედა ფუძის წრეწირის წერტილთან, უდრის l-ს და ცილინდრის ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ მანძილი ამ წრფიდან ცილინდრის დერძამდე, თუ ცილინდრის დერძითი კვეთა კვადრატია.

19.12. ცილინდრში ჩაიწერება წესიერი n-კუთხა პრიზმა. იპოვეთ კუთხე პრიზმის გვერდითი წახნაგის დიაგონალსა და ცილინდრის დერძს შორის, თუ ფუძის რადიუსი ცილინდრის სიმაღლის ტოლია.

19.13. ცილინდრის სიმაღლე 2 მ-ია, ფუძეების რადიუსია 7 მ. ამ ცილინდრში ჩახრილად ჩაიწერება კვადრატი ისე, რომ მისი ყველა წვერო ფუძეების წრეწირებზე ძევს. იპოვეთ კვადრატის გვერდი.

19.14. კონუსის ფუძის რადიუსი 3 მ-ია, სიმაღლე 4 მ. იპოვეთ მსახველი.

19.15. კონუსის l მსახველი ფუძის სიბრტყესთან 30°-იან კუთხეს შეადგენს. იპოვეთ სიმაღლე.

19.16. კონუსის ფუძის რადიუსია R. დერძული კვეთი მართკუთხა სამკუთხედია. იპოვეთ მისი ფართობი.

19.17. კონუსის ფუძის ფართობია 9π სმ², ხოლო მსახველი — 5 სმ. იპოვეთ დერძული კვეთის ფართობი.

19.18. კონუსის მსახველი l-ის ტოლია, დერძული კვეთის წვეროსთან მდებარე კუთხე φ-ს უდრის. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობი, თუ:

$$l=\frac{11}{\sqrt{\pi}},\quad \sin\frac{\varphi}{2}=\frac{3}{\sqrt{11}}.$$

19.19. კონუსის მსახველისა და სიმაღლის სიგრძეების სხვაობა ტოლია m-ს. მათ შორის მოთავსებული კუთხის სიდიდე კი α-ს. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობი, თუ $m=\frac{5}{\sqrt{\pi}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

19.20. წესიერი კონუსია (დერძული კვეთი ტოლგვერდა სამკუთხედია), ფუძის რადიუსია R. იპოვეთ იმ ორ მსახველზე გავლებული კვეთის ფართობი, რომელთა შორის კუთხეა α.

19.21. კონუსის ფუძის ფართობისა და მისი დერძული კვეთის ფართობის შეფარდება ტოლია π. იპოვეთ ფუძისადმი მსახველის დახრის კუთხე.

19.22. კონუსის სიმაღლეა 20 სმ. ფუძის რადიუსია 25 სმ. იპოვეთ წვეროზე გავლებული კვეთის ფართობი, თუ ამ კვეთიდან კონუსის ფუძის ცენტრამდე მანძილია 12 სმ.

19.23. კონუსის სიმაღლე არის H, კუთხე სიმაღლესა და მსახველს შორის 60°-ია. იპოვეთ ორ ურთიერთპერპენდიკულარულ მსახველზე გაბმული კვეთის ფართობი.

19.24. კონუსის სიმაღლეა 6 სმ, ფუძის რადიუსი — 3 სმ. იპოვეთ წვეროზე გამავალი იმ კვეთის ფართობი, რომელიც ფუძის წრეწირიდან კვეთს 90°-იან რკალს.

19.25. კონუსის წვეროდან გავლებულია 45°-იანი კუთხით გავლებულია სიბრტყე, რომელიც [illegible] ფუძის წრეწირის ბეთანგებს. კონუსის სიმაღლე უდრის 1 სმ-ს, იპოვეთ კვეთის ფართობი.

19.26. კონუსის ორ მსახველზე, რომელთა შორის კუთხის სიდიდეა α, გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან β სიდიდის კუთხეს ქმნის. კვეთის ფართობი S-ის ტოლია. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე, თუ $S=27$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=5$, $\sin\beta=\frac{2}{3}$.

19.27. კონუსის ფუძის რადიუსია R, ხოლო მსახველი ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს შეადგენს. კონუსის წვეროზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც მის სიმაღლესთან φ კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი.

19.28. კონუსის სიმაღლე მახვილთან ქმნის α კუთხეს. კონუსის წვეროზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან β კუთხეს ქმნის. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ კონუსის სიმაღლეა h.

19.29. კონუსის სიმაღლეა H. წვეროდან რა მანძილზე უნდა გავავლოთ ფუძის პარალელური სიბრტყე, რომ კვეთის ფართობი ფუძის ფართობის ნახევრის ტოლი იყოს?

19.30. კონუსის ფუძის რადიუსია R. იპოვეთ იმ პარალელური კვეთის ფართობი, რომელიც კონუსის სიმაღლეს შუაზე ყოფს.

19.31. კონუსის ფუძის რადიუსი უდრის R-ს. იპოვეთ იმ პარალელური კვეთის ფართობი, რომელიც კონუსის სიმაღლეს ყოფს შეფარდებით $m : n$ (წვეროდან ფუძისაკენ).

19.32. კონუსი წვეროდან d მანძილზე გადაკვეთილია ფუძის პარალელური სიბრტყით. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ კონუსის ფუძის რადიუსია R, ხოლო სიმაღლეა H.

19.33. კონუსის სიმაღლის შუაწერტილზე გავლებულია l მსახველის პარალელური წრფე. იპოვეთ წრფის იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც კონუსის შიგნითაა მოთავსებული.

19.34. კონუსის მსახველი 13 სმ-ია, სიმაღლეა 12 სმ. კონუსი გადაკვეთილია ფუძის პარალელური წრფით, რომლითაც ფუძემდე მანძილი 6 სმ-ია, ხოლო სიმაღლემდე — 2 სმ. იპოვეთ წრფის იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც კონუსის შიგნითაა მოთავსებული.

19.35. კონუსში ჩახაზულია კუბი ისე, რომ კუბის ერთ-ერთი წახნაგი მდებარეობს კონუსის ფუძის სიბრტყეში. კონუსის სიმაღლის შეფარდება კუბის წიბოსთან ტოლია k-ს. იპოვეთ კუთხე კონუსის მსახველსა და სიმაღლეს შორის.

19.36. კონუსის ფუძის რადიუსია R, სიმაღლეა H. იპოვეთ კონუსში ჩახაზული კუბის წიბო.

19.37. კონუსის ფუძის რადიუსია R, სიმაღლე H. მასში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხა პრიზმა, რომლის გვერდითი წახნაგები კვადრატებია. იპოვეთ პრიზმის წიბო.

19.38. კონუსში, რომლის სიმაღლეა 20 სმ და რადიუსი 8 სმ, ჩახაზულია ცილინდრი. იპოვეთ ამ ცილინდრის ფუძის რადიუსი, თუ მისი სიმაღლეა 6 სმ.

19.39. კონუსის ფუძის რადიუსია r, მისი მსახველი ფუძის სიბრტყესთან φ კუთხით. ამ კონუსშია ჩახაზული პირამიდა, რომელსაც ფუძედ აქვს მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ერთ-ერთი მახვილი კუთხეა α. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $r=3$, $\cos\varphi=\frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=3$.

19.40. კონუსში, რომლის მსახველი ტოლია l-ს, ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხა ტოლფერდაბოლოიანი პრიზმა. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირი, თუ კუთხე კონუსის მსახველსა და სიმაღლეს შორის α ტოლია.

19.41. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსებია 3 მ და 6 მ, ხოლო სიმაღლეა 4 ნ. იპოვეთ მსახველი.

19.42. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსებია R და r; მსახველი ფუძესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ სიმაღლე.

19.43. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსებია 12 სმ და 7 სმ; მსახველი დახრილია ფუძისადმი 45°-იანი კუთხით. იპოვეთ ღერძული კვეთის ფართობი.

19.44. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსებია 11 სმ და 14 სმ; მსახველი 13 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი მცირე ფუძის ცენტრიდან დიდი ფუძის წრეწირამდე.

19.45. წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე არის H. იპოვეთ მსახველი, თუ ის დახრილია ფუძისადმი 30°-იანი კუთხით.

19.46. წაკვეთილი კონუსის მსახველი $2a$-ს ტოლია და ფუძესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს. ერთი ფუძის რადიუსი ორჯერ მეტია მეორე ფუძის რადიუსზე. იპოვეთ ამ რადიუსი.

19.47. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსებია 3 დმ და 7 დმ; მსახველი 5 დმ-ია. იპოვეთ ღერძული კვეთის ფართობი.

19.48. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების ფართობებია 4 დმ² და 16 დმ². სიმაღლის შეკვეთილზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

19.49. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების ფართობებია M და m. იპოვეთ ფუძის პარალელური წაკვეთის ფართობი.

19.50. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების ფართობებია 49² და 25 ნ². სიმაღლე დაყოფილია 3 ტოლ ნაწილად და დაყოფის წერტილებზე გავლებულია ფუძეების პარალელური სიბრტყეები. იპოვეთ ამ თეთრების ფართობები.

19.51. წაკვეთილი კონუსის ფუძეებია ფართობებია 1 მ² და 49 მ². პარალელური კვეთის ფართობი ტოლია ამათ ნახევარჯამს. რა ნაწილებად ყოფს ეს კვეთი სიმაღლეს?

19.52. წაკვეთილი კონუსის სიმაღლეა 10 სმ, ფუძეების რადიუსები კი 8 სმ და 12 სმ-ია. მკვეთ ფუძიდან რა მანძილზეა პარალელური კვეთა, რომლის ფართობიც ფუძეების ფართობთა საშუალო პროპორციულია?

19.53. ბირთვი, რომლის რადიუსია 41 დმ, გადაკვეთილია სიბრტყით ცენტრიდან 9 დმ-ის მანძილზე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

19.54. ბირთვის რადიუსი შეიცვალა ერთით. როგორ შეიცვალა ამ რადიუსის პერპენდიკულარული სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ სფეროს რადიუსია $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$.

19.55. R-რადიუსიანი სფერო ეხება φ სიდიდის ორწახნაგა კუთხის წახნაგებს. იპოვეთ მანძილი სფეროს ცენტრიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე, თუ $R=7$, $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{3}$.

19.56. სფეროს რადიუსი 53 სმ-ია. წერტილი ძევს მხებ სიბრტყეზე 16 სმ-ის მანძილზე შეხების წერტილიდან. იპოვეთ ყველაზე მანძილი ამ წერტილიდან სფეროს ზედაპირამდე.

19.57. ბირთვის რადიუსია R. რადიუსის ბოლოში გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ამ რადიუსთან $60°$-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

19.58. R-რადიუსიანი ბირთვის ზედაპირის ერთ წერტილში გავლებულია ორი სიბრტყე: პირველი ეხება ბირთვის მხები სიბრტყე, მეორე კი — პირველ სიბრტყესთან $30°$-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

19.59. R-რადიუსიანი ბირთვის ზედაპირის მოცემულ წერტილში გავლებულია ორი სიბრტყე: ერთი ბირთვის მხებია, მეორე პირველისადმი α სიდიდის კუთხით. იპოვეთ ბირთვის მეორე სიბრტყით კვეთის ფართობი, თუ $R=\frac{8}{\sqrt{\pi}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{4}$.

19.60. ბირთვია ზედაპირზე მოცემულია სამი წერტილი. მათ შორის მანძილებია 6 სმ, 8 სმ და 10 სმ. ბირთვის რადიუსი 13 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან ამ სამ წერტილზე გამავალ სიბრტყემდე.

19.61. ბირთვის დიამეტრი 25 სმ-ია. ბირთვის ზედაპირზე მოცემულია A წერტილი და წრეწირი, რომლის წერტილებიდან A-მდე მანძილი (წრეწირის გასწვრივ) 15 სმ-ია. იპოვეთ ამ წრეწირის რადიუსი.

19.62. R-რადიუსიან ორი ბირთვის ისეთი მდებარეობაა შესაძლებელი, რომ ერთის ცენტრი მეორის ზედაპირზე ძევს. იპოვეთ იმ წირის სიგრძე, რომელზეც მათი ზედაპირები გადაიკვეთება.

19.63. ბირთვების რადიუსებია 25 დმ და 29 დმ, მათ ცენტრებს შორის მანძილი 36 დმ-ია. იპოვეთ იმ წირის სიგრძე, რომელზეც ეთი ზედაპირები გადაიკვეთება.

19.64. R-რადიუსიანი ბირთვი ტოლგვერდა სამკუთხედის ყველა გვერდს ეხება. სამკუთხედის გვერდი a-ს ტოლია. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

19.65. სამკუთხედის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის სიბრტყიდან იმ ბირთვის ცენტრამდე, რომელიც სამკუთხედის ყველა გვერდს ეხება. ბირთვის რადიუსია 5 სმ.

19.66. რომბის დიაგონალებია 12 სმ და 20 სმ. ბირთველი ზედაპირი მის ყველა გვერდს ეხება. ბირთვის რადიუსია 10 სმ. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან რომბის სიბრტყემდე.

19.67. რომბის ყველა გვერდი ეხება სფეროს, რომლის რადიუსია 5 სმ. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ რომბის გვერდის სიგრძეა 8 სმ, ხოლო მანძილი რომბის სიბრტყიდან სფეროს ცენტრამდე 4 სმ-ია.

19.68. ბირთვის ზედაპირზე მდებარე წერტილზე გავლებულია ორი ურთიერთმართობული სიბრტყე, რომლებიც ბირთვს r_1-რადიუსიან და r_2-რადიუსიან წრეებზე. იპოვეთ ბირთვის R რადიუსი.

19.69. ბირთვის რადიუსი 7 სმ-ია. მის ზედაპირზე მოცემულია ორი ტოლი წრეწირი, რომლებსაც აქვთ 2 სმ სიგრძის საერთო ქორდა. იპოვეთ წრეწირების რადიუსები, თუ ცნობილია, რომ წრეწირების სიბრტყეები ურთიერთმართობულია.

19.70. იპოვეთ α გვერდის მქონე კუბზე შემოხაზული ბირთვის რადიუსი.

19.71. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოებია 4 სმ, 6 სმ და 12 სმ. იპოვეთ შემოხაზული ბირთვის რადიუსი.

19.72. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის სიმაღლე 2 სმ-ია, ფუძის გვერდი კი 4 სმ. იპოვეთ შემოხაზული ბირთვის რადიუსი.

19.73. ბირთვის რადიუსი 9 დმ-ია. მასში ჩახაზულია წესიერი ოთხკუთხა პრიზმა, რომლის სიმაღლე 14 დმ-ია. იპოვეთ პრიზმის ფუძის გვერდი.

19.74. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის სიმაღლე 8 მ-ია, გვერდითა წახნაგის დიაგონალი კი 13 მ. იპოვეთ შემოხაზული ბირთვის რადიუსი.

19.75. R-რადიუსიან სფეროში შემოხაზულია წესიერი ექვსკუთხა პრიზმა. იპოვეთ პრიზმის ზედაპირის ფართობი.

19.76. წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო 2 მ-ია, ფუძის გვერდი კი 3 მ. იპოვეთ მასზე შემოხაზული ბირთვის დიამეტრი.

19.77. ბირთვში, რომლის რადიუსი 14 სმ-ია, ჩახაზულია წესიერი სამკუთხა პრიზმა. მისი გვერდითი წახნაგის დიაგონალი 26 სმ-ია. იპოვეთ პრიზმის ფუძის გვერდი.

19.78. მართ პრიზმას ფუძედ აქვს სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 6 სმ, 8 სმ და 10 სმ. პრიზმის სიმაღლე 24 სმ-ია. იპოვეთ მასზე შემოხაზული ბირთვის რადიუსი.

19.79. R-რადიუსიან ბირთვზე შემოხაზულია წესიერი სამკუთხა პრიზმა. იპოვეთ პრიზმის ზედაპირის ფართობი.

19.80. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა h და გვერდითი წიბო b. იპოვეთ მასზე შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.81. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 4 მ, სიმაღლეკი 4 ნ-ია. იპოვეთ მასზე შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.82. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი ქმნის α-ს, ხოლო გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ პირამიდაზე შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.83. იპოვეთ α წიბოს მქონე წესიერ ტეტრაედრზე შემოხაზული ბირთვის რადიუსი.

19.84. იპოვეთ წესიერ პირამიდაში ჩახაზული სფეროს რადიუსი, თუ პირამიდის სიმაღლე ტოლია h და ორწახნაგა კუთხე ფუძესთან უდრის 1) 60°-ს, 2) 45°-ს.

19.85. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე — α-ს. იპოვეთ პირამიდაში ჩახაზული სფეროს რადიუსი.

19.86. პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო 9 სნ-ია, სიმაღლე კი 3 სმ. იპოვეთ შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.87. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე ტოლია h, გვერდითი წიბოები კი ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.88. პირამიდას ფუძედ აქვს წესიერი სამკუთხედი, რომლის გვერდი 3 დმ-ია. ერთი გვერდითი წიბო კი ფუძის პერპენდიკულარულია და უდრის 2 დმ-ს. იპოვეთ შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.89. α-სიმაგნელიან ტოლგვერდა კონუსში ჩახაზულია სფერო, სფეროში კი ჩახაზულია კუბი. იპოვეთ კუბის წიბო.

19.90. წესიერი წაკვეთილი ორკუთხა პირამიდის ფუძეების გვერდებია 7 დმ და 1 დმ. გვერდითი წიბო დახრილია ფუძისადმი 45°-იანი კუთხით. იპოვეთ შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.91. წესიერი წაკვეთილი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძეების გვერდებია 8 ნ და 4 მ; სიმაღლე 7 მ-ია. იპოვეთ შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.92. წესიერი წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე 17 სნ-ია. ფუძეებზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსებია 5 სმ და 12 სმ. იპოვეთ შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.93. R-რადიუსიან სფეროსზე ჩაწერილია წესიერი წაკვეთილი ორკუთხა პირამიდა, რომლის ორწახნაგა კუთხე ფუძესთან 45°-ია. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

19.94. კონუსის სიმაღლე 8 მ-ია, მსახველი — 10 მ. იპოვეთ ჩახაზული სფეროს რადიუსი.

19.95. კონუსის სიმაღლე არის h, მსახველი კი l. იპოვეთ შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.96. სფეროს რადიუსი 5 სმ-ია. ამ სფეროში ჩახაზულია კონუსი, რომლის ფუძის რადიუსი 4 სმ-ია. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე.

19.97. იპოვეთ $3\sqrt{2}$ სნ რადიუსის მქონე სფეროში ჩახაზული კონუსის ფუძის რადიუსი, თუ ამ კონუსის სიმაღლეა $4\sqrt{2}$ სმ.

19.98. კონუსის მსახველი უდრის l-ს და იგი სიმაღლესთან ქმნის α კუთხეს. კონუსის ორ მსახველზე, რომელთა შორის კუთხე β-ს ტოლია, გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ მანძილი ამ სიბრტყიდან სფეროს ცენტრამდე, რომელიც ჩახაზულია კონუსში.

19.99. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსებია 3 მ და 4 მ; სიმაღლე კი — 7 მ. იპოვეთ შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

19.100. სფეროს რადიუსი 10 სნ-ია. მასში ჩახაზულია წაკვეთილი კონუსი, რომლის ფუძეების რადიუსები არის 6 სმ და 9 სმ. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე (ორი შემთხვევა).

19.101. სფეროზე შემოხაზულია წაკვეთილი კონუსი, რომლის ფუძეების რადიუსებია r და R. იპოვეთ სფეროს რადიუსი.

19.102. წაკვეთილ კონუსში ჩახაზულია R-რადიუსიანი ბირთვი. მსაბვეელია და კონუსის ქვედა ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის ფუძეთა რადიუსები და მსაბვეელი.

19.103. სფეროზე შემოხაზულია წაკვეთილი კონუსი, რომლის ერთი ფუძის ფართობი 4-ჯერ აღემატება მეორე ფუძის ფართობს. იპოვეთ კუთხე კონუსის ძაბვეელსა და მისი უფრო სიბრტყეს შორის.

ამოცანები მეტყველებაზე

19.104. დაამტკიცეთ, რომ სფეროს დიამეტრია ბოლოები და სფეროს სხვა შეხების წერტილი მართკუთხა სამკუთხედის შვერილებს წარმოადგენს.

19.105. დაამტკიცეთ, [illegible] ბირთვის ცენტრიდან თანაბრად დაშორებულ ქვეყანას ტ[illegible] რადიუსები აქვს.

19.106. დაამტკიცეთ, რომ ბირთვის ორი კვეთიდან დიდი რადიუსი აქვს იმ კვეთას, რომლის სიბრტყე სფეროს ცენტრთან უფრო ახლოა.

19.107. R-რადიუსიანი ბირთვისადმი გავლებულია ზხები სიბრტყე, ბირთვი იყოფება სიბრტყეთ, რომელიც ზხებ სიბრტყესთან φ კუთხეს ქმნის და გადის შეხების წერტილზე. დაამტკიცეთ, რომ კვეთის ფართობი ტოლია $\pi R^2 \sin^2\varphi$.

19.108. დაამტკიცეთ, რომ, თუ პარალელეპიპედის ყველა წახნაგი ტოლია, მაშინ მასში შეიძლება სფერო ჩაიხაზოს.

19.109. დაამტკიცეთ, რომ თუ სფერო ეხება პარალელეპიპედის ყველა წიბოს, მაშინ ეს პარალელეპიპედი კუბია.

19.110. დაამტკიცეთ, რომ ცილინდრზე შემოხაზული ყოველი ოთხკუთხა პრიზმის მოპირდაპირე გვერდითი წახნაგების ფართობთა ჯამები ტოლია.

19.111. ცილინდრის სიმაღლეა h, ფუძის დიამეტრია d ($h<d$). დაამტკიცეთ, რომ, თუ ღერძიდან $\frac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$ მანძილზე გავავლებთ სიბრტყეს, მაშინ ცილინდრის კვეთა კვადრატი იქნება.

19.112. დაამტკიცეთ, რომ, თუ პირამიდის გვერდითი წიბოები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ მასზე შეიძლება სფეროს შემოხაზვა.

19.113. დაამტკიცეთ, რომ წესიერ პირამიდაზე შემოხაზული სფეროს რადიუსი უდრის გვერდითი წიბოს კვადრატს გაყოფილს პირამიდის გარკვეულ სიმაღლეზე.

19.114. დაამტკიცეთ, რომ ყოველ პირამიდაში, რომლის ფუძის გვერდებით შექმნილი ორწახნაგა კუთხეები ტოლია, შეიძლება ჩაიხაზოს სფერო.

19.115. ბირთვში ჩახაზულ წესიერ სამკუთხა პირამიდაში ჩახაზულია ბირთვი, დაამტკიცეთ, რომ ეს პირამიდა არის წესიერი ტეტრაედრი, თუ ბირთვების ცენტრები ერთმანეთის ემთხვევა.

19.116. დაამტკიცეთ, რომ თუ სფერო ეხება ტეტრაედრის ყველა წიბოს, მაშინ მისი ერთიერთმოპირდაპირე წიბოების სიგრძეთა ჯამები ტოლია.

19.117. პირამიდის ტვეში გვერდითი წიბო ერთმანეთის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ამ პირამიდაზე შეიძლება კონუსის შემოხაზვა.

19.118. დაამტკიცეთ, რომ კოხეთა ღერძული კვეთის წვეროსთან მდებარე კუთხე იქნება მარხილი, ძახვილი ან ბლაგვი, იმისდა მიხედვით, არის თუ არა კონუსის სიმაღლე ფუძის რადიუსის ტოლი, მასზე მეტი ან ნაკლები.

19.119. დაამტკიცეთ, რომ, თუ წაკვეთილ კონუსში შეიძლება სფეროს ჩახაზვა, მაშინ მისი მსახველის ტოლის ფუძეების რადიუსების ჯამს,

19.120. კონუსის ღერძული კვეთის წვეროსთან მდებარე კუთხე ბასხვილია, დაამტკიცეთ, რომ კონუსის კვეთის კონუსის წვეროზე გამავალი ნებისმიერი სიბრტყით აქვს ფართობი, რომელიც ღერძული კვეთის ფართობს არ აღემატება.

19.121. ნახევარბირთვსა და მასში ჩახაზულ კონუსს აქვთ საერთო ფუძე და საერთო სიმაღლე. სიმაღლის შუაწერტილზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყე. დაამტკიცეთ, რომ კვეთის, იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც ჩაწერილია კონუსში, ტოლია კონუსის გვერდითი ზედაპირისა და პარალელოგრამის ფართობის ნახევრის ტოლია.

19.122. წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირი ტოლია იმ წრის ფართობისა, რომლის რადიუსი ტოლია წაკვეთილი კონუსის მსახველის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ასეთ კონუსში შეიძლება ბირთვის ჩახაზვა.

19.123. წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე მისი ფუძეების დიამეტრების საშუალო პროპორციულია. დაამტკიცეთ, რომ ასეთ კონუსში შეიძლება ბირთვის ჩახაზვა.

19.124. R და r შესაბამისად წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული სფეროების რადიუსებია. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{R}{r}\geq\sqrt{2}+1$.

19.125. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხა პრიზმის ჩახაზვა სფეროში შეიძლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის მართია.

19.126. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ტეტრაედრის მოპირდაპირე წიბოები წყვილ-წყვილად ტოლია, მაშინ ტეტრაედრზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული სფეროები კონცენტრულია.

19.127. დაამტკიცეთ: არსებობს, რომ პირამიდაზე შეიძლებოდეს სფეროს შემოხაზვა. აუცილებელია და საკმარისია, რომ პირამიდის ფუძეზე შემოხაზული წრეწირი.

19.128. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდა წესიერია, თუ სფერო პირამიდის ფუძის კვერდებს შეაწერტილებში ეხება და გვერდით წიბოებს შეაწერტილებში კვეთს.

19.129. $SABC$ სამკუთხა პირამიდის S წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხეებია: $\angle BSC=90^\circ$, $\angle ASC=\angle ASB=60^\circ$. A, S წვეროები და SB, SC, AB და AC წიბოების შუაწერტილები სფეროზე ბრებაროობენ. დაამტკიცეთ, რომ SA წიბო ამ სფეროს დიამეტრია.

§ 20. კუბის, პარალელეპიპედის, პრიზმის მოცულობა

ამოცანები გასათვლელად

20.1. იპოვეთ კუბის მოცულობა, თუ მისი წახნაგის d დიაგონალის სიგრძეა a.

20.2. იპოვეთ კუბის ძირცულობა მისი d დიაგონალის მიხედვით.

20.3. იპოვეთ კუბის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალური კვეთის ფართობია $16\sqrt{2}$ სმ².

20.4. იპოვეთ კუბის: მოცულობა მისი S გვერდითი ზედაპირის ფართობის მიხედვით.

20.5. კუბის მოცულობა 8 მ³-ია. იპოვეთ მისი ზედაპირის ფართობი.

20.6. იპოვეთ კუბის მოცულობა, თუ მანძილი მისი დიაგონალიდან იმ წიბომდეა, რომელიც ამ დიაგონალს არ კვეთს, უდრის $3\sqrt{2}$ სმ.

20.7. წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაში ჩახაზულია კუბი ისე, რომ მისი თითო წვეროთ მდებარეობს პირამიდის იპოთენზებზე, ხოლო თითო — ფუძის სიბრტყეზე. პირამიდის ყველა წიბო ერთმანეთის ტოლია და თითოეული მათგანი უდრის a-ს. იპოვეთ კუბის მოცულობა.

20.8. მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია: 15 მ, 50 მ და 36 მ. იპოვეთ ამ პარალელეპიპედის ტოლფიდი კუბის წიბო.

20.9. მართკუთხა პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი 22 სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი წიბოები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $1:2:3$.

20.10. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალის სიგრძეა 14 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი წიბოები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $2:3:6$.

20.11. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა 48 სმ³-ის ტოლია. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი წიბოები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $1:2:3$.

20.12. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია a და b. მისი დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან α კუთხე ქმნის. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ $a=6$, $b=8$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$.

20.13. მართკუთხა პარალელეპიპედის წახნაგების ფართობებია 7 მ², 14 მ² და 32 მ². იპოვეთ მისი მოცულობა.

20.14. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალური კვეთა წარმოადგენს კვადრატს, რომლის ფართობიც ტოლია 25 სმ²-ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ ფუძის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $3:4$.

20.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედში A, C და D_1 წვეროებზე გატარებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან ორწახნაგა კუთხეს. ფუძის გვერდებია 4 სმ და 3 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.16. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი უდრის l-ს და გვერდით წიბოსთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი ფუძეა პეთიმეტრი უდრის P-ს.

20.17. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალის სიგრძეა $3\sqrt{2}$ სმ და იგი ერთ წახნაგთან ქმნის 30°-იან კუთხეს, მეორესთან 45°-იანს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.18. იპოვეთ იმ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა, რომლის დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს შეადგენს, ხოლო გვერდით წახნაგთან — β კუთხეს. დიაგონალის სიგრძეა d.

20.19. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი უდრის 13 სმ, ხოლო მისი გვერდითი წახნაგების დიაგონალებია $4\sqrt{10}$ სმ და $3\sqrt{17}$ სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.20. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 4 სმ და $2\sqrt{6}$ სმ. პარალელეპიპედის დიაგონალი დიდ გვერდით წახნაგთან ქმნის 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.21. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდის სიგრძე 6 სმ-ის ტოლია და ფუძის დიაგონალთან 60°-იან კუთხეს ქმნის. მოცემულ გვერდზე და მის მოპირდაპირე გვერდზე, რომელიც მეორე ფუძეზე მდებარეობს, გავლებულია კვეთი. კვეთის სიბრტყე ფუძის სიბრტყესთან 45°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.22. მართკუთხა პარალელეპიპედის d დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს β კუთხეს. ფუძის დიაგონალსა და მის გვერდს შორის კუთხეა α. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ

$$d=3\sqrt{7},\quad \sin\beta=\frac{3}{5},\quad \sin 2\alpha=\frac{1}{3}.$$

20.23. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა უდრის V-ს. ხოლო დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს β კუთხეს. ფუძის დიაგონალებს შორის კუთხე უდრის α-ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის სიმაღლე, თუ $V=25$ სმ³, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.24. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის დიაგონალი d-ს ტოლია; ფუძის დიაგონალებს შორის კუთხე უდრის α-ს, მცირე გვერდითი წახნაგის დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან β კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ

$$d=5,\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5},\ \operatorname{tg}\beta=2,$$

20.25. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდი a-ს ტოლია და ფუძის დიაგონალთან α კუთხეს ქმნის. მოცემულ გვერდზე და მის მოპირდაპირე გვერდზე, რომელიც მეორე ფუძეზე მდებარეობს, გავლებულია კვეთი. კვეთის სიბრტყე ფუძის სიბრტყეს-

თან φ კუთხეს შეადგენს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ

$$a=2,\ \operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2},\ \operatorname{tg}\varphi=2.$$

20.26. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია a და b, ხოლო მათ შორის კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ პარალელეპიპედის ნოკლულობა, თუ მისი სიმაღლეა h.

20.27. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 3 სმ და 5 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე 30°-ია. გვერდითი ზედაპირის ფართობი არის 24 სმ². იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.28. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია a და b. ხოლო მათ შორის კუთხე α-ს ტოლია. პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ტოლია s-ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ $a=7$, $b=5$, $s=60$, $\sin\alpha=\frac{2}{7}$.

20.29. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია $2\sqrt{2}$ სმ და 5 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე 45°. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი მცირე დიაგონალია 7 სმ.

20.30. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 8 სმ და 15 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე 60°-ია. პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.31. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 1 სმ და 4 სმ, ხოლო მახვილი კუთხე — 60°. პარალელეპიპედის დიდი დიაგონალი უდრის 5 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.32. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ მისი სიმაღლე უდრის h-ს, ხოლო დიაგონალები ფუძესთან ადგენენ α და β კუთხეებს.

20.33. მართი პარალელეპიპედის ფუძე რომბია, რომლის გვერდია 5 სმ. კუთხე ორი გვერდითი წახნაგის სიბრტყეებს შორის უდრის 60°-ს. პარალელეპიპედის დიდი დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.34. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი, რომლის მცირე დიაგონალია d, ხოლო მახვილი კუთხე α. პარალელეპიპედის სიმაღლე ტოლია $\frac{1}{2}d$-სი. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ

$$d=5,\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=3.$$

20.35. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი d მცირე დიაგონალითა და α მახვილი კუთხით. პარალელეპიპედის სიმაღლეა H. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ $d=4$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}$, $H=4$.

20.36. მართი პარალელეპიპედის ფუძე არის პარალელოგრამი, რომლის ერთ-ერთი კუთხე უდრის 30° და ფუძის ფართობი — 4 დმ², ხოლო პარალელეპიპედის გვერდითი წახნაგების ფართობებია 6 დმ² და 12 დმ². იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.37. მართ პარალელეპიპედში ფუძის გვერდებია a და b, ხოლო მათ შორის მდებარე მახვილი კუთხე — 60°. ფუძის დიდი დიაგონალი უდრის პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.38. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია a და b, ხოლო მათ შორის მახვილი კუთხე α-ს ტოლია. ფუძის დიდი დიაგონალი პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალის ტოლია. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ $a=3$, $b=2$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$.

20.39. მართ პარალელეპიპედს ფუძედ აქვს პარალელოგრამი, რომლის ერთი დიაგონალია 17 სმ, გვერდები კი 9 სმ და 10 სმ. ამ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობია 334 სმ². იპოვეთ მისი მოცულობა.

20.40. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 13 დმ და 37 დმ. ფუძის დიდი დიაგონალი უდრის 40 დმ-ს. გვერდითი წიბო ისე შეეფარდება პარალელეპიპედის დიდ დიაგონალს, როგორც 15 : 17. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.41. მართ პარალელეპიპედს ფუძედ აქვს პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 3 სმ და 5 სმ, მათ შორის კუთხე 60°-ია. დიდი დიაგონალური კვეთის ფართობი 63 სმ². იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.42. მართი პარალელეპიპედის დიაგონალებია 9 სმ და $\sqrt{33}$ სმ, ფუძის პერიმეტრი უდრის 18 სმ-ს, გვერდითი წიბო კი 4 სმ-ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.43. მართი პარალელეპიპედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი დაშორებულია ფუძის სიბრტყიდან 3 სმ-ით, გვერდითი წახნაგებიდან კი — 2 სმ-ით და 4 სმ-ით. ფუძის პერიმეტრი 30 სმ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.44. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი, რომლის ფართობი 1 მ²-ია. დიაგონალური კვეთების ფართობებია 3 მ² და 6 მ². იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.45. პარალელეპიპედს ტუჩეკ აქვს რომბი. მისი დიაგონალური კვეთები ფუძის პარპენდიკულარულია და ამ კვეთების ფართობებია 100 სმ² და 105 სმ². იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა, თუ მისი სიმაღლე 10 სმ-ია.

20.46. მართი პარალელეპიპედის ფუძე არის $ABCD$. მისი AB წიბო 50 სმ-ია; B_1 წვეროდან AD წიბოზე დაშვებული B_1E პერპენდიკულარი ტოლია 41 სმ-ს და AD-ს ყოფს მონაკვეთებად $AE = 30$ სმ და $ED = 18$ სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა.

20.47. დახრილ პარალელეპიპედში გვერდითი წიბოს კუთვნილი ფუძის სიბრტყეზე ტოლის 5 დმ, ხოლო სიმაღლე — 12 დმ. გვერდითი წიბოსადმი პერპენდიკულარული კვეთი რომბია, რომლის ფართობი ტოლია 24 დმ². იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა.

20.48. პარალელეპიპედის წიბო ტოლია 8 სმ-ს, კუთხე ორ მისაზღვრულ გვერდით წახნაგს შორის 30°-ია, ხოლო მათი ფართობებია 20 სმ² და 17 სმ². იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა.

20.49. პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი, რომლის გვერდი ტოლია a-ს, ხოლო მახვილი კუთხე — 30°. ერთი გვერდითი წახნაგის დიაგონალი ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია, სილი გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან 60°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა.

20.50. პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 3 სმ და 7 სმ, ხოლო ერთ-ერთ დიაგონალი — 6 სმ. დიდი დიაგონალური კვეთი ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია და მისი ფართობი ტოლია 22,5 სმ²-ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა.

20.51. პარალელეპიპედის წახნაგები ტოლი რომბებია $3\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლი გვერდით და 60°-იანი კუთხით. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა.

20.52. პარალელეპიპედის ყველა წიბო ერთმანეთის ტოლია და ტოლია 3 სმ-ს. ფუძის მახვილი კუთხეა 60°, ხოლო გვერდითი წიბო ფუძის გვერდებთან ქმნის 45°-იან კუთხეებს. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა.

20.53. დახრილი პარალელეპიპედის ფუძეა $ABCD$ რომბი a გვერდითა და α მახვილი კუთხით. AA_1 წიბო AB და AD წიბოებთან ჩ-ს ტოლ კუთხეებს ქმნის. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა, თუ $a=4$, $AA_1=18$, $\cos\alpha=\frac{5}{9}$, $\cos\beta=\sqrt{\frac{13}{15}}$.

20.54. პარალელეპიპედს ფუძედ აქვს კვადრატი, რომლის გვერდია 18 ამ. გვერდითი წიბოს სიგრძეა 14 სმ და იგი ფუძის მიმდებარე გვერდებთან ქმნის ტოლ მახვილ კუთხეებს. მანძილი ფუძეების შესაბამის გვერდებს შორის ტოლია 16 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა.

20.55. პარალელეპიპედის ფუძეა კვადრატი, რომლის გვერდი 1 მ-ის ტოლია. ერთ-ერთი გვერდითი წიბო 2 მ-ია და ფუძის თითოეულ მიმდებარე გვერდთან 60°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა.

20.56. პარალელეპიპედის ფუძედ აქვს მართკუთხედი, რომლის გვერდებია $3\sqrt{2}$ სმ და 3 სმ. გვერდითი წიბოს სიგრძეა 7 სმ და იგი ფუძის გვერდებთან ქმნის 60°-იან კუთხეებს. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზოცულობა.

20.57. ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზოცულობა.

20.58. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზოცულობა, თუ მისი d დიაგონალია და ფუძეა a გვერდის მიმდებარე.

20.59. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი ტოლია a-ს, ხოლო პრიზმის დიაგონალი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. იპოვეთ პრიზმის ზოცულობა. თუ $a=\sqrt{23}$, $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$.

20.60. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის სრული ზედაპირი, თუ მისი ფუძის ფართობი არის P და ზოცულობა — V.

20.61. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი 3,5 სმ-ია, ხოლო გვერდითი წახნაგის დიაგონალი 2,5 სმ. იპოვეთ პრიზმის ზოცულობა.

20.62. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი 6 სმ-ია, გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი 32 სმ². იპოვეთ ზოცულობა.

20.63. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზოცულობა, თუ მისი დიაგონალი გვერდითი წახნაგის სიბრტყესთან ქმნის 30°-იან კუთხეს, ხოლო ფუძის გვერდი ტოლია $2\sqrt{2}$ სმ-ს.

20.64. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედა ფუძის ცენტრი და ქვედა ფუძის გვერდების შუაწერტილები წარმოადგენს პრიზმაში ჩახაზული პირამიდის წვეროებს. პირამიდის ზოცულობაა 9 სმ³. იპოვეთ პრიზმის ზოცულობა.

20.65. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი ტოლია a-ს, ხოლო ორი მოსაზღვრე გვერდითი წახნაგის დიაგონალებს შორის კუთხე — α-ს. იპოვეთ პრიზმის ზოცულობა.

20.66. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი ტოლია a-ს, ხოლო მისი ზოცულობა — V-ს. იპოვეთ ორი მოსაზღვრე წახნაგის დიაგონალთა შორის მდებარე კუთხის კოსინუსი.

20.67. ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის ზოცულობა.

20.68. წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო ტოლია ფუძის სიმაღლეს, მასზე გავლებული კვეთის ფართობი კი ტოლია 48 სმ². იპოვეთ პრიზმის ზოცულობა.

20.69. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი a-ს ტოლია. გვერდითი ზედაპირი ფუძეების ფართობთა ჯამის ტოლდებოდა. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.70. პრიზმას ფუძედ აქვს R-რადიუსიან წრეში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედი, ხოლო გვერდითი წახნაგები კვადრატებია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.71. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდია $4\sqrt{3}$ სმ; ფუძის გვერდსა და მისი მოპირდაპირე გვერდითი წიბოს შეაწერტილზე დაღლებული სიბრტყე ფუძის სიბრტყესთან $30°$-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.72. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ქვედა ფუძის გვერდზე და ზედა ფუძის მოპირდაპირე წვეროზე გავლებული სიბრტყე პრიზმას ფუძის სიბრტყესთან ადგენს β ორწახნაგა კუთხეს. კვეთის ფართობია S. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $S=6$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

20.73. ტეტრაედრში მოთავსებულია წესიერი სამკუთხა პრიზმა ისე, რომ მისი ერთი ფუძის წვეროები მდებარეობს ტეტრაედრის გვერდით წიბოებზე, ხოლო მეორე ფუძის წვეროები — ტეტრაედრის ფუძის სიბრტყეზე. ტეტრაედრის წიბო უდრის a-ს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ მისი ყველა წიბო ერთმანეთის ტოლია.

20.74. R რადიუსიან სფეროში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხა პრიზმა, რომლის ყველა წიბო ერთმანეთის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.75. კონუსის მსახველი უდრის l-ს და ადგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. ამ კონუსში ჩახაზულია სფერო, ხოლო სფეროში — წესიერი სამკუთხა პრიზმა, რომლის ყველა წიბო ერთმანეთის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.76. ფუძის a გვერდისა და b კვერდიანი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის მოცულობა.

20.77. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის უდიდესი დიაგონალი ედრის 8 სმ-ს და პრიზმის გვერდით წიბოსთან ქმნის $30°$-იან კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.78. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის მოცულობა, რომლისა უდიდესი დიაგონალია d, ხოლო გვერდითი წახნაგები — კვადრატებია.

20.79. R რადიუსის მქონე სფეროზე შემოხაზულია წესიერი ექვსკუთხა პრიზმა. იპოვეთ მისი მოცულობა.

20.80. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის უდიდესი დიაგონალური კვეთი ფუძის ტოლდებოდა; ფუძის გვერდი არის a. იპოვეთ ამ პრიზმის ტოლდებოდა კუბის წიბო.

20.81. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმა, რომლის გვერდითი წიბოები უდრის 3 სმ, დიაგონალური სიბრტყეთ გაკვეთილია ორ ტოლ ოთხკუთხა პრიზმად. იპოვეთ ექვსკუთხა პრიზმის მოცულობა, თუ ოთხკუთხა პრიზმას გვერდითი ზედაპირი ტოლია 30 სმ².

20.82. წესიერ ექვსკუთხა პრიზმაში უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობი 4 მ²-ია, ხოლო მახვილი ორ მოპირდაპირე გვერდით წახნაგს შორის 2 მ-ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.83. მართი ოთკუთხა პრიზმის ასმაღლები h. დიაგონალები დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α და β კუთხეებით და ფუძის დიაგონალებს შორის კუთხე γ-ს ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4},\ \operatorname{ctg}\beta=\frac{4}{5},\ \sin\gamma=\frac{2}{5},$$

20.84. მართი ოთკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობია s. დიაგონალური კვეთის ფართობებია P და Q. ორწახნაგა კუთხის სიდიდე მათ შორის უდრის α-ს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $s=6$,

$$P=10,\quad Q=7,\quad \sin\alpha=\frac{10}{21}.$$

20.85. მართი პრიზმის სიმაღლე უდრის h-ს; მას ფუძედ აქვს მართკუთხა ტრაპეცია α სიდიდის მახვილი კუთხით, რომელიც შემოხაზულია რადიუსიან წრეზე. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ

$$h=5,\quad \sin\alpha=\frac{2}{7},\quad r=1.$$

20.86. მართი პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის დიაგონალი უდრის d-ს, ხოლო კუთხე დიაგონალსა და დიდ ფუძეს შორის — α-ს. პრიზმის დიაგონალი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი β კუთხით. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.87. მართი პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფუძეები შესაბამისად უდრის a და b ($a>b$), ხოლო მახვილი კუთხე — α-ს. სიბრტყე, რომელიც გადის ხედა ტრაპეციის დიდ ფუძესა და ქვედა ტრაპეციის ცენტრ ფუძეზე, ქმნის ფუძის სიბრტყესთან β კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.88. მართ პრიზმას ფუძედ აქვს $ABCD$ ტრაპეცია, რომლის პარალელური გვერდებია $AD=39$ სმ და $BC=22$ სმ, არაპარალელური კი — $AB=26$ სმ და $CD=25$ სმ. AA_1CC_1 კვეთის ფართობი 400 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.89. მართი პრიზმის ფუძეა რომბი, რომლის პერიმეტრია p, ხოლო მახვილი კუთხე α. კვეთი, რომელიც გავლებულია ქვედა ფუძის დიდ დიაგონალზე და ხედა ფუძის პირველი კუთხის წვეროზე,

მართკუთხა სამკუთხედს წარმოადგენს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $p=16\sqrt{15}$, $\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

20.90. მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. დიდი გვერდითი წახნაგის დიაგონალი 20 სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.91. მართი სამკუთხა პრიზმაში ფუძის გვერდები 4 სმ-ის, 5 სმ-ისა და 7 სმ-ის ტოლია, ხოლო გვერდითი წიბო ფუძის დიდი სიმაღლის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.92. მართი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგების ფართობებია M, N და P, ხოლო მისი გვერდითი წიბო — l. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.93. მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის კათეტების შეფარდებაა 24 : 7; ფუძის პიპოტენუზა ისე შეეფარდება პრიზმის სიმაღლეს, როგორც 5 : 2; გვერდითი ზედაპირის ფართობი 140 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.94. r რადიუსის მქონე სფეროზე შემოხაზული მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის ძახვილი კუთხე უდრის α-ს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.95. მართი სამკუთხა პრიზმის სიმაღლე 5 მ-ია, მოცულობა კი 24 მ³. გვერდითი წახნაგების ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 17 : 17 : 16. იპოვეთ ფუძის გვერდები.

20.96. მართი პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფერდა უდრის a-ს, ხოლო ფერდებს შორის კუთხე — α-ს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი ზედაპირია S.

20.97. მართი პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი. ამ სამკუთხედის ფუძე ერის a, ხოლო მასთან მდებარე კუთხე — 45°. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი ზედაპირი უდრის პრიზმის ფუძეთი ფართობების ჯამს.

20.98. მართი პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი. ამ სამკუთხედის ფუძე უდრის a-ს, ხოლო ფუძესთან მდებარე კუთხე — α-ს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი ზედაპირი უდრის ფუძეების ფართობების ჯამს.

20.99. მართი პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი წვეროსთან მდებარე α კუთხით. ამ კუთხის გამავალ დიაგონალურ წახნაგის დიაგონალი უდრის l-ს და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.100. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობია 48 სმ², ხოლო გვერდითი წახნაგების ფართობებია 9 სმ², 10 სმ² და 17 სმ². იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.101. მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის ფართობია S და მახვილი კუთხეა α. დიდი გვერდითი წახნაგის ფართობი Q-ს ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ

$$Q=7,\quad S=12,\quad \sin 2\alpha=0{,}75.$$

20.102. მართი პრიზმის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი α მახვილი კუთხით. უდიდესი გვერდითი წახნაგის დიაგონალი ქმნის d-ს და ივი ქმნის გვერდით წიბოსთან β კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.103. R-რადიუსიან სფეროში ჩახაზულია მართი სამკუთხა პრიზმა. პრიზმის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი α სიდიდის მახვილი კუთხით, ხოლო პრიზმის უდიდესი გვერდითი წახნაგი კვადრატია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $R=5$, $\sin 2\alpha=\sqrt{\frac{2}{5}}$.

20.104. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ერთ-ერთი გვერდი უდრის a-ს, ხოლო მისი მიმდებარე კუთხეები შესაბამისად ტოლია α და β. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირი, თუ ცნობილია, რომ მისი მოცულობა უდრის V-ს.

20.105. ცილინდრში ჩახაზული სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი წახნაგი გადის ცილინდრის ღერძზე. ამ წახნაგის დიაგონალი პრიზმის ფუძის მიმდებარე გვერდებთან შესაბამისად ქმნის α და β კუთხეებს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ ცილინდრის სიმაღლე უდრის H-ს.

20.106. დახრილ პრიზმაში გავლებულია კვეთი, რომელიც გვერდითი წიბოებიც მართობულია და ყოველ მათგანს კვეთს, იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ კვეთის ფართობია Q, ხოლო გვერდითი წიბოები l-ის ტოლია.

20.107. დახრილი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბოები 15 მ-ის ტოლია, ხოლო მათ შორის მანძილებია 26 მ, 25 მ და 17 მ. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.108. სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოებს შორის მანძილები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9 : 10 : 17. გვერდითი წიბო 1 მ-ია. გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი 6 მ². იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.109. სამკუთხა პრიზმის სამ გვერდით წიბოს შორის მანძილი მიმდევრობით ტოლია a, b და c-სი. პრიზმის სიმაღლეა H და პრიზმის გვერდით წიბოსთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ

$$a=13,\quad b=14,\quad c=15,\quad \cos\alpha=\frac{2}{3}\quad H=5.$$

20.110. პრიზმის ფუძე სამკუთხედია, რომლის ერთი გვერდი 2 სმ-ია ტოლია, ხოლო თითოეული დანარჩენი 3 სმ-ის ტოლია. გვერდითი წიბოს 4 სმ-ია და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ ამ პრიზმის ტოლდიდი კიდეა წიბო.

20.111. პრიზმის ფუძეც ორკუთხედი, რომლის გვერდებია 3 სმ, 5 სმ და 7 სმ, გვერდითი წიბო 8 სმ-ია და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.112. სწორკუთხა პრიზმის ფუძეა გვერდებია 5 მ, 6 მ და 9 მ; გვერდითი წიბო ტოლია 10 მ-ს და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.113. პრიზმას ფუძედ აქვს წესიერი ABC სამკუთხედი, რომლის გვერდის ორის a. A_1 წვეროს გეგმილი ჰყოფს ქვედა ფუძის ცენტრი და AA_1 წიბო ფუძის გვერდთან შეადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.114. პრიზმის ფუძეა პარალელოგრამი, რომლის გვერდები ტოლია 3 დმ და 6 დმ. ხოლო ნახვილი კუთხე — 45°. პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის 4 დმ და იგი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი 30° კუთხით. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.115. იპოვეთ მოცულობა დახრილი სამკუთხა პრიზმისა, რომლის ფუძეა a გვერდის მქონე ტოლგვერდა სამკუთხედი. ცნობილია აგრეთვე, რომ პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის ფუძის გვერდს და იგი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი 60° კუთხით.

20.116. პრიზმის ფუძეს წესიერი ექვსკუთხედი a გვერდით. გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს და მისი გეგმილი ამ სიბრტყეზე ტოლია პრიზმის ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $a=2$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

20.117. პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი. ამ სამკუთხედის ერთ-ერთ კათეტზე გამავალი გვერდითი წახნაგი a გვერდის მქონე კვადრატია და ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $\sin\alpha=0{,}25$, $a=4$.

20.118. სამკუთხა პრიზმის ორი გვერდითი წახნაგის ფართობებია P და Q, ორწახნაგა კუთხე მათ შორის — α; გვერდითი წიბო a-ს ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $P=18$, $Q=25$, $a=10$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

20.119. დახრილი პრიზმის ფუძე ტოლგვერდა სამკუთხედია, რომლის გვერდი a-ს ტოლია. ერთ-ერთი გვერდითი წახნაგი ფუძის მართობულია და წარმოადგენს რომბს, რომლის მცირე დიაგონალი a-ს ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.120. დახრილი ABC $A'B'C'$ პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი, რომელშიც $AB=AC$ a, ხოლო კუთხე $CAB=\alpha$. ზედა ფუძის B' წვერო ერთნაირად არის დაშორებული ქვედა ფუძის ყველა გვერდიდან, ხოლო $B'B$ წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.121. დახრილი პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფერდი მცირე ფუძის ტოლია და უდრის a-ს, ხოლო მახვილი კუთხე უდრის β-ს. პრიზმის ზედა ფუძის ერთ-ერთი წვერო ქვედა ფუძის ყველა წვეროდან თანაბრად არის დაშორებული. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან α-ს ტოლ კუთხეს ქმნის.

20.122. დახრილი პრიზმის ფუძეა აქვს $ABCD$ ოთხკუთხედი, რომლის დიაგონალებიც ურთიერთპერპენდიკულარულია. AA_1C_1C დიაგონალური კვეთის ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია, დიაგონალი BD 16 დმ და ფართობი $AA_1C_1C=250$ დმ². იპოვეთ მოცულობა.

20.123. დახრილი სამკუთხა პრიზმის ერთ-ერთი გვერდითი წახნაგის ფართობია 30 სმ², ხოლო მანძილი ამ წახნაგის სიბრტყიდან მოპირდაპირე წიბომდე — 5 სმ. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

ამოცანები დამტკიცებაზე

20.124. კუბის დიაგონალი a-ს ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ კუბის მოცულობა იქნება $\frac{a^3}{3\sqrt{3}}$.

20.125. მართკუთხა პარალელეპიპედის წახნაგების ფართობებია Q_1, Q_2, Q_3. დაამტკიცეთ, რომ მისი მოცულობა $\sqrt{Q_1Q_2Q_3}$-ის ტოლია.

20.126. დახრილი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბოსთან შექმნილი ორწახნაგა კუთხე α-ს ტოლია; ამ წიბოდან ორ მეზობელ წიბოებამდე მანძილები a და b-ს ტოლია. გვერდითი წიბოა c. დაამტკიცეთ, რომ მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $abc\sin\alpha$.

20.127. პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი. ამ სამკუთხედის ერთ-ერთ კათეტზე გამავალი გვერდითი წახნაგი a გვერდის მქონე კვადრატია და ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს ქმნის. დაამტკიცეთ, რომ პრიზმის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $\frac{1}{2}a^3\sin\alpha$.

20.128. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხა პრიზმის მოცულობა უდრის გვერდითი წახნაგის ფართობის ნახევარს, გამრავლებულს მანძილზე ამ წახნაგიდან მის მოპირდაპირე წიბომდე.

20.129. დაამტკიცეთ, რომ ამ მართი პრიზმის მოცულობა, რომლის ფუძეა ტოლგვერდა სამკუთხედი, უდრის პარალელეპიპედის ფართობების საშუალო არითმეტიკულის ნამრავლს ამ წახნაგებს შორის მანძილზე.

20.130. მართი პარალელეპიპედის სიმაღლეა H, ფუძის გვერდებია a და b. დაამტკიცეთ, რომ გვერდით წიბოსთან შედგენილი ორწახნაგა კუთხე უნდა იყოს $90°$, რომ პარალელეპიპედის მოცულობა უდიდესი იყოს.

20.131. სწორკუთხა პრიზმის თითოეული წიბოა a, პრიზმის მოცულობა V-ს ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ გვერდითი წიბოს დახრის კუთხე ფუძის სიბრტყესთან განისაზღვრება ფორმულით

$$\sin x=\frac{4V\sqrt{3}}{3a^3}.$$

20.132. პრიზმის ყოველი წახნაგი არის რომბი, რომლის გვერდია a და მახვილი კუთხეა α. დაამტკიცეთ, რომ პრიზმის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

20.133. წახნაგკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი d-ს ტოლია და ორ მოსაზღვრე გვერდით წახნაგთან ადგენს α და β კუთხეებს. დაამტკიცეთ, რომ პარალელეპიპედის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

§ 21. პირამიდის მოცულობა

ამოცანები გამოთვლაზე

21.1. h სიმაღლის და ფუძის a გვერდის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა.

21.2. ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა.

21.3. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე 3 მ-ია, გვერდითი წიბო 5 მ. იპოვეთ მოცულობა.

21.4. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო არის l და იგი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი $60°$ კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.5. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო ტოლია l-ს და იგი ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია α კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $l=9$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

21.6. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე — α-ს.

21.7. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა h, ხოლო აპოთემასა და სიმაღლეს შორის კუთხეა α. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $h=4$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

21.8. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია α კუთხით, ხოლო სიმაღლისა და ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის ჯამი a-ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.9. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობაა V, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე — α. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე, თუ $V=32$, $\operatorname{tg}\alpha=3$.

21.10. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი არის a. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალური კვეთი ფუძის ტოლფერდაა.

21.11. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის ფართობია 36 სმ², გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი $3\sqrt{265}$ სმ². იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.12. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო a-ს ტოლია, ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე უდრის α-ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $a=7$, $\cos\alpha=\frac{1}{49}$.

21.13. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით, ხოლო დიაგონალური კვეთის ფართობი s-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $\operatorname{tg}\alpha=1$, $s=9$.

21.14. V მოცულობის წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა გადაკვეთილია სიბრტყით, რომელიც პირამიდის სიმაღლეზე გადის. იპოვეთ პირამიდის მიღებული ნაწილების მოცულობები.

21.15. სფეროში ჩახაზულია წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა, რომლის სიმაღლეს სფეროს ცენტრი ყოფს ორ ნაწილად: 4 სმ და 5 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.16. წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაში ჩახაზულია კუბი, რომლის ზედა წიბეების წვეროები მდებარეობს პირამიდის გვერდით წიბოებზე, ხოლო ქვედა წიბეების წვეროები პირამიდის ფუძის სიბრტყეში. იპოვეთ კუბის მოცულობისა და პირამიდის მოცულობის შეფარდება, თუ პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს.

21.17. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე — α-ს. ამ პირამიდაში ჩახაზულია სფერო. ვპოვოთ ამ პირამიდის მოცულობა, თუ ცნობილია სფეროს ზედაპირის და შეკვეთილი პირამიდის გვერდითი წახნაგების შეხების წერტილები, აგრეთვე ნებისმიერი წერტილი, რომელიც მდებარეობს მოცემული პირამიდის ფუძის სიბრტყეში.

21.18. h სიმაღლისა და ფუძის α კუთხის მიხედვით ვპოვოთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის მოცულობა.

21.19. ფუძის α კუთხისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით ვპოვოთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის მოცულობა.

21.20. წესიერი ტეტრაედრის a წიბოს მიხედვით ვპოვოთ მისი მოცულობა.

21.21. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო უდრის l-ს, ხოლო სიმაღლე — h. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.22. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო უდრის l-ს და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა, თუ $l=5$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

21.23. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის პერიმეტრია $\sqrt{36}$ სმ, სიმაღლე კი $11\sqrt{3}$ სმ. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.24. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ვპოვოთ m, ფუძის სიმაღლე კი — h. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.25. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია $\sqrt{60}$ სმ, პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან დახრილია 45°-იანი კუთხით. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.26. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 12 სმ, ხოლო გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტყესთან 45°-იანი კუთხით. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.27. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტყესთან α კუთხით. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა, თუ $a=6$, $\lg\alpha=10$.

21.28. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე ტოლია h, გვერდითი წახნაგი კი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან კუთხეს. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.29. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოები ურთიერთმართობულია, თითოეული მათგანი b-ს ტოლია. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.30. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა $6\sqrt{2}$ სმ, გვერდითი წიბოები კი ურთიერთპერპენდიკულარულია. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.31. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი ტოლია 3 სმ, ხოლო მისი გვერდითი ზედაპირი — 9 სმ². ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.32. ვპოვოთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლე არის h, ხოლო წესიერისთან მდებარე ყველა ბრტყელი კუთხე ბრტყელია.

21.33. წესიერი ტეტრაედრის წახნაგზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია $2\sqrt{6}$. ვპოვოთ ტეტრაედრის მოცულობა.

21.34. ვპოვოთ კუბის მოცულობის შეფარდება წესიერი ტეტრაედრის მოცულობასთან, თუ ცნობილია, რომ ტეტრაედრის წიბო უდრის კუბის წახნაგის დიაგონალს.

21.35. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხით. ხოლო სიმაღლისა და ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის ჯამი a-ს ტოლია. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.36. წესიერი ტეტრაედრის წახნაგების ცენტრებში წარმოიქმნება ახალი ტეტრაედრის წვეროებს. ვპოვოთ მათი მოცულობების შეფარდება.

21.37. წესიერი სამკუთხა პირამიდის წვეროსა და ფუძის ორი გვერდის შუაწერტილებზე გავლებულია კვეთი. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო კუთხე მკვეთ სიბრტყეს და ფუძის სიბრტყეს შორის — α-ს.

21.38. წესიერ $SABC$ ტეტრაედრში AC წიბოზე და K წერტილზე, რომელიც SB წიბოზე მდებარეობს, გავლებულია კვეთი, ამასთან $BK:KS=2:1$. ვპოვოთ $KABC$ ჩაკვეთილი პირამიდის მოცულობა, თუ ტეტრაედრის წიბო არის a.

21.39. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირი სამჯერ მეტია ფუძის ფართობზე. ფუძეში ჩახაზული წრის ფართობი რიცხობრივად ამ წრის რადიუსის ტოლია. ვპოვოთ პირამიდის მოცულობა.

21.40. წესიერი სამკუთხა პირამიდა გაკვეთილია ფუძის პერპენდიკულარული სიბრტყით, რომელიც ფუძის ორ გვერდს შეეხება. ვპოვოთ ჩაკვეთილი პირამიდის მოცულობა, თუ თავდაპირველად მოცემული პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეა 45°.

21.41. h სიმაღლისა და ფუძის α გვერდის მიხედვით ვპოვოთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობა.

21.42. ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით ვპოვოთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობა.

21.43. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 4 სმ, გვერდითი წიბო $\sqrt{43}$ სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.44. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობა 6 სმ³-ია, ფუძის გვერდი 1 სმ-ია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

21.45. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი a-ს ტოლია, ხოლო ფუძესთან შედგენილი თრგუნავნაგა კუთხე 45°-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.46. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი წიბო l-ის ტოლია და პირამიდის სიმაღლესთან ქმნის 30°-იან კუთხეს.

21.47. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობაა 4116 სმ³, ხოლო გვერდითი წიბოს სიგრძე თრჯერ მეტია ფუძის გვერდის სიგრძეზე. იპოვეთ ფუძის გვერდის სიგრძე.

21.48. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია a. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ მისი გვერდითი ზედაპირი ათჯერ აღემატება ფუძის ფართობს.

21.49. წესიერ ექვსკუთხა პირამიდას და წესიერ სამკუთხა პირამიდას ტოლი ფუძის გვერდები აქვს, ხოლო მათი ორთოგონალური ფუძის გვერდებზე თრჯერ მეტია. იპოვეთ ექვსკუთხა პირამიდისა და სამკუთხა პირამიდის მოცულობების შეფარდება.

21.50. წესიერი თრთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგის ფართობი ტოლია S-ს, ხოლო წყვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე — α-ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.51. პირამიდის ფუძე მართკუთხედია, რომლის გვერდებია 9 მ და 12 მ. ყველა გვერდითი წიბო 21,5 მ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.52. პირამიდას ფუძედ აქვს მართკუთხედი, რომლის გვერდებია 6 სმ და 15 სმ, სიმაღლე კი გადის ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და გვერდითი ზედაპირის ფართობია 126 სმ². იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.53. თრთხკუთხა პირამიდის ფუძეა მართკუთხედი, რომლის დიაგონალია b, ხოლო დიაგონალებს შორის მდებარე კუთხე — 60°. ამასთან პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 45° კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.54. თრთხკუთხა პირამიდის ფუძეა მართკუთხედი, რომლის ფართობი ტოლია S. პირამიდის გვერდითი წიბოები ერთმანეთის ტოლია და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 45°-იან კუთხეს. ხოლო, ფუძის დიაგონალებს შორის კუთხე ტოლია 60°. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.55. თრთხკუთხა პირამიდის ფუძეა მართკუთხედი, რომლის დიაგონალი ტოლია d-ს, ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხე α-ს. პირამიდის თითოეული წიბო დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი β კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $d=10$ სმ, $\sin\alpha=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=3$.

21.56. თრთხკუთხა პირამიდის ყველა გვერდითი წიბო სიმაღლესთან ქმნის α კუთხეს. პირამიდის ფუძეა მართკუთხედი, რომლის დიაგონალებს შორის კუთხეა β. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლე უდრის h-ს.

21.57. პირამიდის ფუძე მართკუთხედია. პირამიდის ყოველი გვერდითი წიბო l-ის ტოლია და მართკუთხედის მოსაზღვრე გვერდებთან ადგენს α და β კუთხეებს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.58. პირამიდის ფუძეა მართკუთხედი, რომლის დიაგონალთა შორის კუთხე უდრის α-ს. ამ პირამიდაზე შემოხაზულია R რადიუსის მქონე სფერო. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ მისი ყველა გვერდითი წიბო ფუძესთან ქმნის ერთსა და იმავე β კუთხეს.

21.59. a წიბოს მქონე კუბის ცენტრი შეერთებულია კუბის ყველა წვეროსთან. იპოვეთ თითოეული წარმოქმნილი პირამიდის მოცულობა.

21.60. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედა ფუძის ცენტრი და ქვედა ფუძის გვერდების შუაწერტილები წარმოადგენს პრიზმაში ჩახაზული პირამიდის წვეროებს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ ჩახაზული პირამიდის მოცულობა არის V.

21.61. პირამიდის ფუძეა მართკუთხედი, რომლის ფართობი უდრის S. პირამიდის ორი გვერდითი წახნაგი ფუძეს პერპენდიკულარულია, ხოლო დანარჩენი ორი — დახრილი და ფუძესთან ქმნიან 30°-იან და 60°-იან კუთხეებს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.62. პირამიდის ფუძეა კვადრატი. პირამიდის ორი გვერდითი წახნაგი ფუძეს პერპენდიკულარულია, ხოლო დანარჩენი ორი დახრილია ფუძისადმი 45°-იანი კუთხით. სიდიდით საშუალო გვერდითი წიბოს სიგრძეა $3\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.63. პირამიდის ფუძეა მართკუთხედი, რომლის დიაგონალებს შორის კუთხე უდრის α-ს. პირამიდის ერთ-ერთი გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყეს პერპენდიკულარულია, ხოლო გვერდითი წიბოებიდან ყველაზე უდიდესი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს β კუთხეს. პირამიდაზე შემოხაზული სფეროს რადიუსი უდრის R-ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.64. პირამიდის ფუძეა 30°-იანი მახვილი კუთხის მქონე რომბი, ხოლო გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძისადმი 60° კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ რომბში ჩახაზული წრის რადიუსი არის r.

21.65. პარალელოგრამის ფუძეა რომბი α მახვილი კუთხით. პარალელოგრამის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ მისი გვერდითი წახნაგები ფუძესთან ქმნის ერთსა და იმავე ორწახნაგა β კუთხეს, ხოლო ახლოს ჩახაზული სფეროს რადიუსი უდრის r-ს.

21.66. პარალელოგრამის ფუძეა რომბი α მახვილი კუთხით. პარალელოგრამის ყველა გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის ერთსა და იმავე β კუთხეს. იპოვეთ პარალელოგრამში ჩახაზული სფეროს რადიუსი, თუ პარალელოგრამის მოცულობა უდრის V-ს.

21.67. პარალელოგრამის ფუძედ აქვს რომბი, რომლის გვერდი 15 სმ-ია. ამ პარალელოგრამის თითოეული წახნაგი ფუძისადმი დახრილია 45°-იანი კუთხით. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა. თუ ნისი გვერდითი ზედაპირია 300 სმ².

21.68. პარალელოგრამის ფუძე ორის რომბი d_1 და d_2 დიაგონალებით ($d_1 > d_2$). პარალელოგრამის სამაღლე გადის რომბის მახვილი კუთხის წვეროზე. მცირე დიაგონალზე ვამჯდარი დიაგონალური კვეთის ფართობი უდრის Q-ს. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.69. პარალელოგრამის ფუძე არის რომბი, რომლის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო მახვილი კუთხე — α-ს. პარალელოგრამის ყველა გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის ერთსა და იმავე β კუთხეს. ფუძის დიდ დიაგონალსა და პარალელოგრამის წვეროზე გავლებული კვეთის ფართობი უდრის S-ს. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.70. პარალელოგრამის ფუძეა რომბი, რომლის გვერდია a და მახვილი კუთხე α. გვერდითი წახნაგებიდან ორი ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია, ხოლო დანარჩენი ორი — დახრილია ძისადმი φ კუთხით. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.71. პარალელოგრამის ფუძედ აქვს პარალელოგრამი, რომლის გვერდების სიგრძეებია 5 მ და 4 მ, ერთი დიაგონალის სიგრძე კი 3 მ. პარალელოგრამის სამაღლის სიგრძეა 17,75 მ. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.72. პარალელოგრამის ფუძე პარალელოგრამია, რომლის გვერდები უდრის 9 სმ და 10 სმ, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალი — 11 სმ. წარმოვიდგინოთ გვერდითი წიბოები ერთმანეთის ტოლია და ყოველი მათგანი გვერდითი წიბოთაგანი უდრის 10,5 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.73. პარალელოგრამის ფუძეა პარალელოგრამი, რომლის დიაგონალები α კუთხით იკვეთებიან. პარალელოგრამის სამაღლის სიგრძეა h და გადის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში. არჩეული გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყესთან β და γ კუთხეებს ადგენენ. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა, თუ

$$h=6,\ \sin\alpha=\frac{7}{8},\quad \operatorname{ctg}\beta=\frac{5}{9},\quad \operatorname{ctg}\gamma=0{,}9.$$

21.74. პარალელოგრამის ფუძედ აქვს ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია 3 სმ და 5 სმ, ფერდი კი 7 სმ. პარალელოგრამის სამაღლე გადის ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და ყველაზე გვერდითი წიბო 10 სმ-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.75. პარალელოგრამის ფუძე ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის პარალელურები აღმრიცხებია 10 სმ და 6 სმ. ყოველი გვერდითი წახნაგი ფუძესთან ქმნის φ-ს ტოლ ორწახნაგა კუთხეს. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა, თუ $\operatorname{tg}\varphi=0{,}5$.

21.76. პარალელოგრამის ფუძეა ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის მახვილა კუთხეა α, ხოლო ფართობი S. ყველა გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ერთსა და იმავე β ორწახნაგა კუთხეს შეადგენს. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა, თუ $S=27$, $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{8}{9}$.

21.77. პარალელოგრამის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის გვერდები 6 სმ, 6 სმ და 8 სმ. თითოეული გვერდითი წიბო 9 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.78. პარალელოგრამის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფუძე ტოლია 6 სმ, ხოლო სამაღლე — 9 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა, თუ თითოეული გვერდითი წიბო უდრის 13 სმ.

21.79. პარალელოგრამის ფუძეა სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 6 სმ, 5 სმ და 5 სმ. პარალელოგრამის გვერდითი წახნაგები მის ფუძესთან ადგენენ 45°-იან კუთხეებს. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.80. პარალელოგრამის ფუძედ აქვს ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფერდი 7 სმ-ია. ფუძე კი 6 სმ. პარალელოგრამის წვერო დაშორებულია ფუძის ყველა გვერდიდან ტოლი მანძილებით, რომელიც ასე შეფარდება პარალელოგრამის სიმაღლეს, როგორც 5 : 4. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.81. პარალელოგრამის ფუძეა სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 4 სმ, 4 სმ და $3\sqrt{3}$ სმ. პარალელოგრამის ყველა გვერდითი წიბო დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი 60°-იანი კუთხით. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.82. პარალელოგრამის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფერდი უდრის a-ს, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე — α-ს. პარალელოგრამის ყველა გვერდითი წიბო დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი ერთი და იმავე β კუთხით. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა.

21.83. სამკუთხა პარალელოგრამის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფართობი უდრის S-ს, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე — α-ს. იპოვეთ პარალელოგრამის მოცულობა, თუ კუთხე ყოველი გვერდითი წიბოსა და პარალელოგრამის სიმაღლეს შორის უდრის β-ს.

21.84. პარალელოგრამის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფერდია

a. ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე — β. ამ სამკუთხედის ფუძეზე გამავალი გვერდითი წახნაგის პირამიდის ფუძის პერპენდიკულარულია. ამ წახნაგზე მდებარე გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყისადმი φ კუთხით არის დახრილი. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ

$$a=6,\quad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3},\quad \operatorname{tg}\varphi=2.$$

21.85. პირამიდის ფუძეა წესიერი სამკუთხედი, რომლის გვერდი უდრის a-ს. პირამიდის ორი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია, ხოლო ტოლი გვერდითი წიბოები ერთმანეთთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ იმ მართი სამკუთხა პრიზმის სიმაღლე, რომელიც მოცემული პირამიდის ტოლფერდაა და მასთან აქვს საერთო ფუძე.

21.86. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოებია 3 სმ, 4 სმ და 5 სმ და იგინი ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.87. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგები ურთიერთპერპენდიკულარულია; მათი ფართობებია 6 მ², 4 მ² და 3 მ². იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.88. სამკუთხა პირამიდის ორი ურთიერთპერპენდიკულარული წახნაგი ტოლგვერდა სამკუთხედია, რომლის თითოეული გვერდი 4 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.89. სამკუთხა პირამიდაში ორი გვერდითი წახნაგი ურთიერთპერპენდიკულარულია. ამ წახნაგთა ფართობებია P და Q, ხოლო მათი საერთო წიბოს სიგრძე უდრის a-ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.90. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის ჰიპოტენუზა $4\sqrt{3}$ სმ-ია, ხოლო მახვილი კუთხე არის — 30°. პირამიდის გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყისადმი 45°-იანი კუთხითაა დახრილი. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.91. პირამიდის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის მახვილი კუთხე უდრის α-ს, ხოლო პირამიდის სიმაღლე H-ს, ყველა გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია β კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ

$$H=3,\quad \operatorname{ctg}\beta=\sqrt{2},\quad \sin 2\alpha=\frac{1}{3}.$$

21.92. პირამიდის ფუძეა ABC მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტი $AC=b$ და $\angle B=\beta$. AC და BC კათეტებზე გამავალი პირამიდის გვერდითი წახნაგები ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულებ არიან, ხოლო მესამე წახნაგი ფუძესთან φ ორწახნაგა კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $b=5\sqrt{2}$ სმ, $\sin\beta=0{,}6$, $\operatorname{tg}\varphi=4$.

21.93. პირამიდის ცუდელი გვერდითი წიბო უდრის b-ს. მისი ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტები ისეა შეფარდებული ერთმანეთის, როგორც $m:n$, ხოლო პირამიდის ფუძეს c-ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.94. პირამიდის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის მახვილი კუთხე უდრის α-ს, ხოლო პირამიდის სიმაღლე — H-ს. ყველა გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ტოლი დახრილობის კუთხეს ქმნის, რომელიც β-ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.95. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია. ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი უდრის r-ს. პირდ. მახვილი კუთხე α-ს. პირამიდის ყველა გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის ერთსა და იმავე β კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.96. პირამიდას ფუძედ აქვს სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 39 სმ, 17 სმ და 28 სმ; თითოეული გვერდითი წიბო უდრის 22,9 სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.97. მოცემული სამკუთხა პირამიდის ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეები ტოლია; ფუძის გვერდებია: 7 სმ, 8 სმ და 9 სმ; პირამიდის მოცულობა 40 სმ³-ია. იპოვეთ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

21.98. პირამიდის ფუძე არის სამკუთხედი, რომლის ორი კუთხე α-ა და β-ს ტოლია. სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსია R. პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის γ კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.99. პირამიდის ფუძეა სამკუთხედი, რომლის ორი კუთხეა α და β. პირამიდის სიმაღლეა h და თითოეულ გვერდით წიბოსთან φ კუთხეს ადგენს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $h=2\sqrt{18}$ სმ, $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{221}{92}$.

21.100. სამკუთხა პირამიდის ერთი წიბო 4 სმ-ის ტოლია, ხოლო ისეთი დაწარწენა — 3 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.101. სამკუთხა პირამიდის ფუძის ერთი გვერდი 16 სმ-ია. მისი მოპირდაპირე გვერდითი წიბო კი 18 სმ; დაწარწენი 4 წიბო ერთმანეთის ტოლია და თითოეული უდრის 17 სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.102. $SABC$ პირამიდის ფუძედ აქვს ABC სამკუთხედი. ამასთან, $AB=13$ სმ, $BC=27$ სმ და $AC=16$ სმ; SAB და SAC წახნაგები ABC სიბრტყის პერპენდიკულარულია, SBC წახნაგი კი მასთან შეადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა და SBC წახნაგის ფართობი.

21.103. სამკუთხა პირამიდის ფუძის კიდეები უდრის a-ს, ხოლო მისი

მაძღერარე კუთხეები შესაბამისად — α და β. ყველა გვერდითი წიბო პირამიდის სიმაღლესთან ქმნის ერთსა და იმავე კუთხეს, რომელიც φ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.104. სამკუთხა პირამიდაში, დათითეული გვერდითი წიბო უდრის a-ს, წვეროსთან მდებარე ერთი ბრტყელი კუთხე არის $90°$, ხოლო ყოველი დანარჩენი — $60°$. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.105. სამკუთხა პირამიდის ერთი გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყეს პერპენდიკულარულია და უდრის l-ს, ორი დანარჩენი — ერთმანეთთან ქმნის α კუთხეს, ხოლო ფუძის სიბრტყესთან — ერთსა და იმავე β კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.106. პირამიდის სიმაღლის შეღწერტილიდან გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყე, რა შეფარდებით ყოფს ეს სიბრტყე პირამიდის მოცულობას?

21.107. პირამიდის სიმაღლეა h. წვეროდან რა მანძილზე მდებარეობს სიბრტყე, რომელიც ფუძის პარალელურია და პირამიდის მოცულობას შუაზე ყოფს?

21.108. პირამიდის სიმაღლე უდრის 8 მ, ხოლო მისი ფუძე წესიერი ექვსკუთხედია. პირამიდის წვეროდან 3 მეტრის დაშორებით გავლებული ფუძის პარალელური სიბრტყე მოჭრილი კვეთის ფართობი უდრის 4 მ². იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.109. h სიმაღლისა და ფუძის a და b გვერდების მიხედვით $(a>b)$ იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.110. l გვერდიანი წიბოსა და ფუძეების a და b გვერდების მიხედვით $(a>b)$ იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.111. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა უდრის 430 სმ³-ს, სიმაღლე 10 ძ-ს და ერთი ფუძის გვერდი 8 ძ-ს. იპოვეთ მეორე ფუძის გვერდი.

21.112. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა, თუ მისი ფიგურული უდრის 9 სმ-ს, ფუძეების გვერდები კი 7 სმ და 5 სმ-ია.

21.113. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ფუძის გვერდების სიგრძეებია $4\sqrt{3}$ სმ და $2\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ ფუძის სიბრტყესთან $60°$-ან კუთხეს ქმნის, იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.114. წესიერი წაკვეთილი პირამიდის ფუძეებია კვადრატები, რომელთა გვერდებია a და b $(a>b)$. გვერდითი წიბოები დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი $45°$ კუთხით. იპოვეთ წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.115. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა,

თუ დიდი ფუძის გვერდი არის a, პატარა ფუძის გვერდი — b, ხოლო გვერდითი წახნაგის ძახველი კუთხე — $60°$.

21.116. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ამოთხვა და ფუძეებს გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $5:8:2$, მოცულობა არის $1\frac{3}{4}$ მ³. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

21.117. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე უდრის 3 სმ, ხოლო მისი მოცულობა — 38 სმ³. ამ პირამიდის ფუძეთა ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $4:9$. იპოვეთ წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი ზედაპირი.

21.118. წესიერ წაკვეთილ ოთხკუთხა პირამიდაში ფუძის გვერდებია a და b, ხოლო გვერდითი ზედაპირი უდრის სრული ზედაპირის ნახევარს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.119. R რადიუსის მქონე სფეროში ჩაწერილია წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდა, რომლის დიდი ფუძე გადის სფეროს ცენტრზე, ხოლო გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს. იპოვეთ წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.120. h სიმაღლისა და ფუძეების a და b გვერდების მიხედვით $(a>b)$ იპოვეთ წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.121. l გვერდიანი წიბოსა და ფუძეების a და b გვერდების მიხედვით $(a>b)$ იპოვეთ წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.122. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა, თუ მისი ფუძეების გვერდებია 30 მ და 20 მ, გვერდითი ზედაპირი კი ფუძეების ჯამის ტოლია.

21.123. წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი წიბოები დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი $60°$-იანი კუთხით. ქვედა და ზედა ფუძეთა გვერდები შესაბამისად უდრის a-სა და b-ს $(a>b)$. იპოვეთ წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.124. წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ქვედა და ზედა ფუძეების გვერდებია a და b, ხოლო გვერდითი წიბო დახრილია ქვედა ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. იპოვეთ წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა, თუ $a=\sqrt{39}$, $b=3$, $\operatorname{tg}\alpha=11$.

21.125. წესიერ წაკვეთილ სამკუთხა პირამიდაში ქვედა და ზედა ფუძეების გვერდები a-სა და b-ს ტოლია, ხოლო ქვედა ფუძის წიბოსთან შექმნილი ორწახნაგა კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.126. წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე უდრის H-ს და ორის ფუძეთა გვერდების საშუალო პროპორციულია გვე-

დიდი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.127. წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე ტოლია 10 მ; ერთი ფუძის გვერდებია 27 მ, 29 მ და 52 მ, ხოლო მეორე ფუძის პერიმეტრი 72 მ ტოლია. იპოვეთ წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.128. პირამიდას ფუძედ აქვს ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფუძეა 8 სმ, ხოლო ფერდი — 6 სმ. თითოეული გვერდითი წიბოა 9 სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.129. h სიმაღლისა და ფუძეების a და b გვერდების მიხედვით ($a>b$) იპოვეთ წესიერი ეგვსკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.130. l გვერდითა წიბოსა და ფუძეების a და b გვერდების მიხედვით ($a>b$) იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.131. იპოვეთ წესიერი ეგვსკუთხა წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა, თუ მისი ფუძეების გვერდებია a და b და გვერდითი წიბო ქვედა ფუძის სიბრტყესთან შეადგენს 30°-იან კუთხეს.

21.132. R რადიუსის წრეწირში ჩაწერილია წესიერი ექვსკუთხა წაკვეთილი პირამიდა, რომლის ქვედა ფუძის სიბრტყე გადის სფეროს ცენტრზე, ხოლო გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.133. წესიერი წაკვეთილი პირამიდის ფუძეებია ორი წესიერი რვაკუთხედი. ქვედა ფუძის გვერდი უდრის 0,1 მ, ზედა ფუძის გვერდი — 0,3 მ, ხოლო წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე — 0,5 მ. წაკვეთილი პირამიდა შევსებულია სრულ პირამიდამდე. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.134. წაკვეთილი პირამიდის ფუძეთა ფართობები ტოლია S_1 და S_2 ($S_1<S_2$), ხოლო მოცულობა — V. იპოვეთ სრული პირამიდის მოცულობა.

21.135. წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების ფართობები უდრის 245 მ²-ს და 80 მ²-ს, ხოლო ს რ უ ლ ი პირამიდის სიმაღლე კი 35 მ-ს. იპოვეთ წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა.

21.136. წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლე უდრის 15 მ-ს; მისი მოცულობა 475 მ³-ია; ფუძეების ფართობები ისე შეუფარდება ერთმანეთს, როგორც 4 : 9. იპოვეთ ეს ფართობები.

21.137. წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა უდრის 76 მ³-ს, სიმაღლე 6 მ-ია და ერთი ფუძის ფართობი 13 მ²-ია. იპოვეთ მეორე ფუძის ფართობი.

21.138. წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების ფართობთა სხვაობაა 6 სმ². სიმაღლე 9 სმ-ია და მოცულობა 42 სმ³. იპოვეთ ფუძეების ფართობები.

21.139. წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა უდრის 1720 მ³-ს; მისი სიმაღლე 20 მ-ია; ფუძეების შესაბამისი გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:8. იპოვეთ ფუძეების ფართობები.

ამოცანები დამტკიცებაზე

21.140. დაამტკიცეთ, რომ იმ პირამიდის მოცულობა, რომლის ფუძე არის V მოცულობის მქონე კუბის წახნაგი, სულ წვეროთ იმ კუბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილს, გამოითვლება ფორმულით $\frac{1}{6}V$.

21.141. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხა პირამიდის ნაკეცლობა მისი სრული ზედაპირის ფართობისა და ჩახაზული სფეროს რადიუსის ნამრავლის მესამედის ტოლია.

21.142. დაამტკიცეთ, რომ, თუ წერტილი ძევს წესიერი ტეტრაედრის ზედაპირზე ან მის შიგნით, მაშინ ამ წერტილიდან ყველა წახნაგამდე მანძილების ჯამი უდრის ტეტრაედრის სიმაღლეს.

21.143. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოები წყვილ-წყვილად პერპენდიკულარულია, გვერდითი წახნაგების ფართობებია: S_1, S_2, S_3. დაამტკიცეთ, რომ მოცულობა $\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3}$-ის ტოლია.

21.144. წესიერი n-კუთხა პირამიდა მის სიმაღლეზე გამავალი სიბრტყითაა გადაკვეთილი. ტოლია თუ არა მიღებული პირამიდების მოცულობები? პასუხი დაასაბუთეთ.

21.145. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სიბრტყე, რომელიც გადის წესიერი ტეტრაედრის ორი მოპირდაპირე წიბოს შუაწერტილებზე, ამ ტეტრაედრს ორ ტოლი მოცულობის ნაწილად ყოფს.

21.146. პირამიდის ფუძის პარალელური კვეთა პირამიდას ყოფს ორ ნაწილად, რომლებსაც ტოლი მოცულობები აქვთ. დაამტკიცეთ, რომ იმ ნაწილებს ფართობთა შეფარდება, რომლებადაც გვერდითი ზედაპირია გაყოფილი, ტოლია $1:(\sqrt[3]{4}-1)$.

21.147. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე h-ის ტოლია და გვერდით წახნაგთან α კუთხეს ადგენს. პირამიდის ფუძეს გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ამ გვერდის პირდაპირ ძღვანარე წახნაგს პერპენდიკულარულია. დაამტკიცეთ, რომ მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{1}{3}h^3\sin 4\alpha\lg\alpha.$$

§ 22. ცილინდრის, კონუსის და გირთვის მოცულობა

ამოცანები გამოთვლაზე

22.1 H სიმაღლისა და ფუძის R რადიუსიან მახვილკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედის ბრუნვით მიღებული ცილინდრის მოცულობა.

22.2. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელსაც ქმნის კვადრატი ნახ. a გვერდის გარშემო ბრუნვის დროს.

22.3. ცილინდრის ღერძული კვეთი არის კვადრატი, რომლის დიაგონალი უდრის 4 სმ-ს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

22.4. ცილინდრის მოცულობაა 35π მ³. ღერძული კვეთის ფართობი კი — 8 მ². იპოვეთ ცილინდრის ფუძის დიამეტრი.

22.5. კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა $\sqrt[3]{\frac{31}{\pi}}$, ბრუნავს მის გვერდზე მდებარე ღერძის გარშემო, რომელიც კვადრატის ღერძის პარალელურია და დაშორებულია მისგან გვერდის სიგრძის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

22.6. ცილინდრის ღერძული კვეთის დიაგონალები ერთმანეთის კვეთის ფუძისაკენ მიმართულია α კუთხით. ცილინდრის მოცულობა ტოლია V-ს. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე, თუ

$$V=16,\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\pi}.$$

22.7. წრეში, რომელიც ცილინდრის ფუძეს წარმოადგენს, გავლებულია a სიგრძის ქორდა. ამ ქორდის შესაბამისი ცენტრალური კუთხე α-ს ტოლია. ცილინდრის სიმაღლე უდრის H-ს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ $a=\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$, $H=16$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{5}$.

22.8. ცილინდრი გადაკვეთილია ღერძის პარალელური სიბრტყით, რომელიც ფუძის წრეწირს α სიდიდის რკალს ჩამოჭრის. კვეთის დიაგონალის სიგრძეა d და ფუძესთან β სიდიდის კუთხეა ქმნის. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ

$$d=4\sqrt[3]{\frac{7}{\pi}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{16},\quad \sin\beta=\frac{5}{8}.$$

22.9. ცილინდრის ქვედა ფუძის ცენტრზე გამავალი სიბრტყე დახრილია ამ ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით და ხვდა ფუძეს კვეთს

b სიგრძის ქორდაზე, რომელიც β რკალს ჭიმავს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ $\operatorname{tg}\alpha=2$, $b=\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$, $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=5$.

22.10. A წერტილი მდებარეობს ცილინდრის ზედა ფუძის წრეწირზე, B წერტილი — ქვედა ფუძის წრეწირზე. AB წრფე ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს, ხოლო ღერძთან კვეთის სიბრტყესთან — β კუთხეს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ AB მოხაზავს ღერძის სიგრძე უდრის l-ს.

22.11. ცილინდრის მსახველზე გავლებული სიბრტყე ღერძთან კვეთის სიბრტყესთან (რომელიც გადის იმავე მსახველზე) ქმნის α-ს ტოლ კუთხეს. ცილინდრის ამ სიბრტყით კვეთას შედეგად მიიღება მართკუთხედი, რომლის დიაგონალი უდრის l-ს და ცილინდრის ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

22.12. ცილინდრში ჩახაზული წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის H სიმაღლისა და ფუძის α გვერდის მიხედვით იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

22.13. ცილინდრზე შემოხაზული წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის H სიმაღლისა და ფუძის α გვერდის მიხედვით იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

22.14. ცილინდრში ჩახაზული წესიერი სამკუთხა პრიზმის H სიმაღლისა და ფუძის α გვერდის მიხედვით იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

22.15. ცილინდრზე შემოხაზული წესიერი სამკუთხა პრიზმის H სიმაღლისა და ფუძის α გვერდის მიხედვით იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

22.16. ცილინდრში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხა პრიზმა, ხოლო პრიზმაში კი ჩახაზულია ცილინდრი. იპოვეთ ცილინდრების მოცულობათა შეფარდება.

22.17. იპოვეთ წესიერ ექვსკუთხა პრიზმაში ჩახაზული ცილინდრის მოცულობა, თუ პრიზმის ყველა წიბო a-ს ტოლია.

22.18. იპოვეთ წესიერ ექვსკუთხა პრიზმაზე შემოხაზული ცილინდრის მოცულობა, თუ პრიზმის ყველა წიბო a-ს ტოლია.

22.19. ცილინდრში ჩახაზულია მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის დიაგონალი ფუძის მიმდებარე გვერდებთან შესაბამისად ქმნის α და β კუთხეებს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობასა და ცილინდრის მოცულობის შეფარდება.

22.20. წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდითა წიბო უდრის a-ს და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. ამ პრიზმაშია ჩახაზული ცილინდრი ქვედა ტუჩით კვეთით. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

22.21. H სიმაღლისა და ფუძის R რადიუსის მიხედვით იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.22. l მსახველისა და ფუძის R რადიუსის მიხედვით იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.23. l მსახველისა და ფუძის Q ფართობის მიხედვით იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.24. კონუსის მსახველის სიგრძე l-ის ტოლია, ხოლო ფუძის წრეწირის სიგრძეა c. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.25. l მსახველისა და H სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.26. კონუსის l მსახველი ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.27. კონუსის სიმაღლის სიგრძე h-ის ტოლია, ხოლო მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხე უდრის α-ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ $h=\sqrt[3]{\frac{56}{2\pi}}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

22.28. კონუსის ფუძის ფართობია s, ხოლო მსახველი ფუძის სიბრტყესადმი დახრილია α კუთხით. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ $s=\sqrt{36\pi}$, $\operatorname{tg}\alpha=3$.

22.29. კონუსის სიმაღლის სიგრძეა 24 სმ, ხოლო მოცულობა 392 π-სმ^3. იპოვეთ კონუსის მსახველის სიგრძე.

22.30. კონუსის V მოცულობისა და R ფუძის რადიუსის მიხედვით იპოვეთ ღერძული კვეთის ფართობი.

22.31. კონუსის ღერძული კვეთი არის ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ფართობი 9 მ^2-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.32. კონუსის სიმაღლის სიგრძეა $\sqrt[3]{\frac{69}{\pi}}$ სმ, ღერძული კვეთი კი მართკუთხა სამკუთხედია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.33. კონუსის ფუძის ფართობია $\frac{49}{\pi}$ დმ^2, ღერძული კვეთის ფართობი კი — 39 დმ^2. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.34. კონუსის მსახველსა და მის სიმაღლეს შორის სხვაობა უდრის d-ს, ხოლო მათ შორის ძლებარე კუთხე — α-ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.35. კონუსის ღერძული კვეთის წვეროსთან მდებარე კუთხე უდრის 2α-ს, ხოლო კონუსის სიმაღლისა და მსახველის სიგრძეთა ჯამი a-ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.36. იპოვეთ იმ კონუსის მოცულობა, რომლის ფუძეში მდებარე α სიგრძის ქორდა ტოლია α რკალს, ხოლო კონუსის სიმაღლეა H.

22.37. კონუსის ფუძეში α სიგრძის ქორდა ჭიმავს α სიდიდის რკალს. მსახველსა და სიმაღლეს შორის კუთხე უდრის β-ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ $\alpha=\frac{3}{\sqrt{\pi}}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{8}$.

22.38. კონუსის ფუძეში ჩახაზულია კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა a. კონუსის წვეროზე და ამ კვადრატის ერთ-ერთ გვერდზე გამავალი სიბრტყე კვეთაში წარმოქმნის სამკუთხედს, რომლის წვეროსთან მდებარე კუთხის სიდიდეა α. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ $\alpha=2\sqrt[6]{\frac{126}{\pi^2}}$, $\cos\alpha=\frac{7}{8}$.

22.39. კონუსის ორ მსახველზე, რომელთა შორის კუთხე უდრის α-ს, გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლეა h.

22.40. კონუსის წვეროზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც კონუსის ფუძის წრეწირს ყოფს შეფარდებით $p:q$; ეს სიბრტყე დაშორებულია კონუსის ფუძის ცენტრიდან a-ს ტოლი მანძილით და კონუსის სიმაღლესთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.41. კონუსის სიმაღლის შუაწერტილზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყე. კვეთის ფართობია 17,25-მ^2, ხოლო კონუსის სიმაღლის სიგრძე კი 4 მ. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.42. კონუსის ფუძის რადიუსია $17\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ ფუძის პარალელური იმ კვეთის რადიუსი, რომელიც კონუსის მოცულობას შუაზე ყოფს.

22.43. ერთ ფუძეზე აგებულია კონუსი და მისი ტოლფერდა ცილინდრი. ცილინდრის სიმაღლის შუაწერტილზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყე. იპოვეთ კონუსისა და ცილინდრის ძირებული კვეთების ფართობების შეფარდება.

22.44. კონუსში, რომლის სიმაღლეა 12 სმ, ჩახაზულია სფერო რადიუსით 3 სმ. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.45. კონუსში ჩახაზულია სფერო. მისი ეხებიან ერთმანეთის წრეწირზე, რომლის რადიუსი უდრის r-ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ კონუსის მსახველსა და სიმაღლეს შორის კუთხეა α.

22.46. კონუსში ჩახაზულია სფერო. სფეროს ხებადაპირისა და კონუსის გვერდითი ზედაპირის შეხების წრის რადიუსი უდრის r-ს, ხოლო წერტილი, რომელიც აერთებს სფეროს ცენტრს კონუსის ფუძის წრეწირის ნებისმიერ წერტილთან, ქმნის კონუსის სიმაღლესთან α კუთხეს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.47. პირამიდის ფუძეა კონუსის ფუძეში ჩახაზული მართკუთხა სამკუთხედი. პირამიდის წვეროა კონუსის წვეროს. პირა-

მიცის გვერდითი წახაზეგებე, რომლებიც შეკრავენ ფუძის კუთხეტებს, ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α და β კუთხეებს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობის შეფარდება კონუსის მოცულობასთან.

22.48. პირამიდის ფუძეში მოთავსებულია სამკუთხედი α ნაკვეთი კუთხით. ეს სამკუთხედი ჩაიხაზულია კონუსის ფუძეში. პირამიდის წვეროს ეწოდებება კონუსის ერთ-ერთის მსახველის შუაწერტილს, იპოვეთ კონუსის მოცულობისა და პირამიდის მოცულობის შეფარდება.

22.49. კონუსში, რომლის ფუძის რადიუსია R, ჩახაზულია ნებისმიერი პირამიდა, რომლის ფუძის პერიმეტრი უდრის $2p$-ს. იპოვეთ კონუსისა და პირამიდის მოცულობათა შეფარდება.

22.50. კონუსში ჩახაზულია ცილინდრი, რომლის ქვედა ფუძე მდებარეობს კონუსის ფუძის სიბრტყეში. წრეწირ, რომელიც აერთებს ცილინდრის ზედა ფუძის ცენტრს და კონუსის ფუძის წრეწირის წერტილს, ქმნის ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს. იპოვეთ კონუსის მოცულობის შეფარდება ცილინდრის მოცულობასთან, თუ კუთხე კონუსის მსახველსა და მის სიმაღლეს შორის უდრის β-ს.

22.51. კონუსის სიმაღლეე ღერძის H-ს, ხოლო მსახველსა და სიმაღლეს შორის კუთხე α-ს. ამ კონუსში ჩახაზულია მეორე კონუსი ისე, რომ მეორე კონუსის წვეროა ცნობილი კონუსის ფუძის ცენტრს, ხოლო ორივე კონუსის მსახველები ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ ჩახაზული კონუსის მოცულობა.

22.52. სფეროს წვეროს მქონე ორი კონუსის ფუძეები ერთსა და იმავე სიბრტყეში მდებარეობენ. მათი მოცულობათა სხვაობაა V. მცირე კონუსის ფუძის წრეწირისაგან დიდი კონუსის ფუძის წრეწირის ნებისმიერი წერტილიდან გავლებული მხებებს შორის კუთხის სიდიდეა α. იპოვეთ მეორე კონუსის მოცულობა, თუ $V=11$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

22.53. a კათეტისა და მისი მოპირდაპირე α კუთხის მქონე მართკუთხა სამკუთხედი ბრუნავს მოცემული კათეტის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა, თუ $a=3\sqrt[3]{\frac{29}{\pi}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}$.

22.54. ტოლგვერდა სამკუთხედი ბრუნავს თავისი კვერდის გარშემო. სამკუთხედის გვერდის სიგრძეა a. იპოვეთ მიღებული ბრუნვის სხეულის მოცულობა.

22.55. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი ბრუნავს ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა, თუ ჰიპოტენუზის სიგრძეა $\sqrt[6]{\frac{6}{\pi}}$ სმ.

22.56. მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია a და b, ბრუნავს ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

22.57. სამკუთხედის ფუძის სიგრძეა 11 სმ, სიმაღლის კი — $2\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ სმ. სამკუთხედი ბრუნავს თავისი ფუძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა.

22.58. ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფუძის სიგრძეა a, ხოლო კუთხე წვეროსთან α, ბრუნავს ფუძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა, თუ $a=\frac{4}{\sqrt[6]{\pi}}$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=3$.

22.59. ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფერდის სიგრძეა b, ხოლო კუთხე წვეროსთან — α. ბრუნავს ფერდის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა, თუ $b=\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$, $\sin\alpha=\frac{3}{8}$.

22.60. ABC სამკუთხედი ბრუნავს AB კვერდის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა, თუ $AB=\frac{5}{\pi}$, $BC=9$, $\sin B=\frac{1}{3}$.

22.61. იპოვეთ იმ წაკვეთილი კონუსის მოცულობა, რომლის ფუძეების რადიუსებია R_1 და R_2 ($R_2<R_1$). ხოლო სიმაღლეა h.

22.62. წაკვეთილი კონუსის ფუძის რადიუსებია R და r; მსახველი ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 45°-იან. იპოვეთ მოცულობა.

22.63. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსებია R და r, ხოლო მსახველი ღერძ ფუძისადმი დახრილია α კუთხით. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის მოცულობა, თუ $R=\sqrt[3]{\frac{62}{\pi}}+8$, $r=2$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$.

22.64. წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე უდრის 3 სმ-ს. ერთი ფუძის რადიუსი ორჯერ მეტია მეორისაზე. მსახველი კი დახრილია ფუძისადმი 45°-იანი კუთხით. იპოვეთ მოცულობა.

22.65. წაკვეთილი კონუსის მოცულობა 584 π სმ³-ია. ფუძეების რადიუსები კი 10 სმ და 7 სმ. იპოვეთ სიმაღლე.

22.66. წაკვეთილი კონუსის მოცულობა უდრის 248 π სმ³-ს. მისი სიმაღლე 8 სმ-ია. ერთი ფუძის რადიუსი 4 სმ-ია. იპოვეთ მეორე ფუძის რადიუსი.

22.67. წაკვეთილი კონუსის მოცულობაა 1427π სმ³ ფუძეების რადიუ-

სები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 5 : 4, ხოლო მათი სხვაობა 3 სმ-ია. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე.

22.68. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსები და მსახველი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4 : 11 : 15, მოცულობა კი უდრის 181π სმ³-ს. იპოვეთ ფუძეების რადიუსები და მსახველი.

22.69. წაკვეთილი კონუსი, რომლის ფუძეების რადიუსებია 3 სმ და 5 სმ, ასევეა სიმაღლის სრული კონუსის ტოლდიდია. იპოვეთ სრული კონუსის ფუძის რადიუსი.

22.70. წაკვეთილი კონუსის მოცულობაა 78 მ³, ერთი ფუძის ფართობი 9-ჯერ მეტია მეორისაზე. წაკვეთილი კონუსი შევსებულია სრულამდე. იპოვეთ სრული კონუსის მოცულობა.

22.71. წაკვეთილი კონუსის ღერძული კვეთის ფართობი ფუძეების ფართობთა სხვაობის ტოლია; ფუძის რადიუსებია R და r. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.72. კონუსის სიმაღლის შეეწერტილზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყე. იპოვეთ ჩიღებული წაკვეთილი კონუსის მოცულობა, თუ კვეთის ფართობია 11 სმ², ხოლო წაკვეთილი კონუსის სიმაღლეა 3 სმ.

22.73. წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე 12 სმ-ია, შუა პარალელური კვეთის ფართობი ტოლია 225π სმ²-ს. მოცულობა კი 2800π სმ³-ს. იპოვეთ ფუძეების რადიუსები.

22.74. წაკვეთილი კონუსის მსახველი 17 სმ-ია, ღერძული კვეთის ფართობი 420 სმ². შუა კვეთის ფართობი უდრის 196π სმ²-ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.75. წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე უდრის 18 სმ-ს, ფუძეების რადიუსებია 5 სმ და 11 სმ. მისი სიმაღლე ფუძეების პარალელური ორი სიბრტყით გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის ნაწილების მოცულობანი.

22.76. ცნობილია მოცემული R და r რადიუსების მეშვეობით იპოვეთ წაკვეთილი კონუსისა და სრული კონუსის მოცულობათა შეფარდება.

22.77. წაკვეთილი კონუსი, რომლის მსახველია l, შემოხაზულია R რადიუსის მქონე სფეროზე. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის მოცულობა.

22.78. წაკვეთილი კონუსის ღერძული კვეთის დიაგონალები კვეთის წერტილით იყოფა შეფარდებით 2 : 1 (დიდი ფუძის მხრიდან). დიაგონალთა შორის კუთხე, რომელიც მიმართულია კონუსის

ფუძისაკენ, უდრის α-ს, ხოლო დიაგონალის სიგრძე l-ს. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის მოცულობა.

22.79. ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის პარალელური გვერდებია 7 სმ და 17 სმ, ფართობით კი 144 სმ², ბრუნავს სიმეტრიის ღერძის უკუშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

22.80. კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა $\sqrt[3]{\frac{33\sqrt{12}}{\pi}}$ სმ, ბრუნავს ღერძის გარშემო, რომელიც გავლებულია კვადრატის სიბრტყეში დიაგონალის პარალელურად და ამ დიაგონალის მართობულია. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა.

22.81. ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძეა $\sqrt[3]{\frac{130}{\pi}}$ მ, ბრუნავს მის გარეთ მდებარე ღერძის გარშემო, რომელიც მისი გვერდის პარალელურია და დაშორებულია მისგან სამკუთხედის სიმაღლის სიგრძის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

22.82. წესიერი ექვსკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძეა $\sqrt[3]{\frac{57}{\pi}}$ სმ, ბრუნავს თავისი დიამეტრის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა.

22.83. ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია 2 სმ და 3 სმ, ხოლო მახვილი კუთხე — $60°$, ბრუნავს მცირე ფუძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა.

22.84. ტოლფერდა ტრაპეციის დიდი ფუძე უდრის a-ს, ხოლო მახვილი კუთხე — α-ს. ტრაპეციის დიაგონალი ტრაპეციის ფერდის პერპენდიკულარულია. ტრაპეცია ბრუნავს მისი დიდი ფუძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა.

22.85. ბირთვის რადიუსი 1 მ-ია. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა.

22.86. სამი ბირთვია რადიუსებია: 3 სმ, 4 სმ და 5 სმ. იპოვეთ იმ ბირთვის რადიუსი, რომლის მოცულობა ამ ბირთვების მოცულობათა ჯამს უდრის.

22.87. ბირთვის O ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყემდე მანძილი უდრის d-ს. ბირთვის OA რადიუსსა და კვეთის O_1A რადიუსს შორის კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა, თუ $d = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

22.88. ძეტალია ცილინდრისაგან, რომლის ფუძის დიამეტრი და სიმაღლე

ერთმანეთის ტოლია და თითოეული ტოლის $4\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ სმ. ჩაწერილობის ბირთვი, იპოვეთ ამ ბირთვის რადიუსი.

22.89. მეტალის ბირთვისაგან ჩამოასხეს კოხტა, რომლის სიძაღლე ორჯერ მეტია ფუძის რადიუსზე. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე, თუ ბირთვის რადიუსია $\sqrt[3]{4}$ სმ.

22.90. იპოვეთ ტოლგვერდა კონუსისა და მასში ჩახაზული ბირთვის მოცულობათა შეფარდება.

22.91. R-რადიუსიან ბირთვში ჩახაზულია კუბი და მის წიბოებზე აგებულია წესიერი პირამიდები, რომელთა წვეროები ბირთვის ზედაპირზე იყვს. იპოვეთ მიღებული ბრტყელწახნაგა სხეულის მოცულობის შეფარდება ბირთვის მოცულობასთან.

22.92. AB მოხაზვეთი არის დიამეტრი ხაზვარწრეწირისა, რომლის ცენტრი მოთავსებულია O წერტილში. ხაზვარწრეწირის შიგნით, OA და OB რადიუსებზე, როგორც დიამეტრებზე, აგებულია ხაზვარწრეწირები. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც წარმოქმნილია სამი ხაზვარწრეწირით შემოფარგლული ფიგურის ბრუნვით AB წინაკვეთის გარშემო; AB უდრის 20 სმ.

22.93. წესიერ სამკუთხა პრიზმაზე, რომლის სიმაღლე ორჯერ აღემატება ფუძის გვერდს, შემოხაზულია ბირთვი. იპოვეთ ბირთვისა მოცულობის შეფარდება პრიზმის მოცულობასთან.

22.94. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა, რომელიც ჩახაზულია k სიმაღლის მქონე წესიერ პირამიდაში, თუ პირამიდის ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე უდრის 60°-ს.

22.95. ბირთვზე შემოხაზულია წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდა, რომლის ფუძეების გვერდები იგი შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $m : n$. იპოვეთ პირამიდისა და ბირთვის მოცულობათა შეფარდება.

22.96. იპოვეთ წესიერ ტეტრაედრზე შემოხაზული კონუსის მოცულობის შეფარდება ამავე ტეტრაედრში ჩახაზული ბირთვის მოცულობასთან.

22.97. კონუსში, რომლის ღერძითი კვეთია ტოლგვერდა სამკუთხედი, ჩახაზულია ბირთვი. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ ბირთვის მოცულობა უდრის $\frac{32}{3}\pi$ სმ^3.

22.98. კონუსის სიმაღლე და მსახველი შესაბამისად უდრის 4 სმ და 5 სმ. იპოვეთ კონუსში ჩახაზული ხაზვარბირთვის მოცულობა, რომლის ფუძე მდებარეობს კონუსის ფუძეზე.

22.99. კონუსში ჩახაზულია ხაზვარბირთვი, რომლის ფუძე მდებარეობს კონუსის ფუძის სიბრტყეში, ხოლო ბირთვის ზედაპირი ეხება კონუსის ზედაპირს. იპოვეთ ხაზვარბირთვის მოცულობა, თუ კონუსის მსახველი უდრის L-ს და ღია ფუძის სიბრტყესთან აღგენს α კუთხეს.

22.100. კონუსში ჩახაზულია სფეროს რადიუსი უდრის R-ს, ხოლო კონუსის ღერძული კვეთის წვეროსთან მდებარე კუთხე — 2α-ს. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია სფეროსა და კონუსის ზედაპირებით.

22.101. ბირთვში ჩახაზულია კონუსი, რომლის ღერძული კვეთის ფართობი უდრის S-ს, ხოლო კუთხე კონუსის სიმაღლესა და მსახველს შორის — α-ს. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა.

22.102. ბირთვის დიამეტრის მართობული სიბრტყე ყოფს დიამეტრას 3 სმ და 9 სმ სიგრძის ნაწილებად. რა ნაწილებად გაიყოფა ბირთვის მოცულობა?

22.103. ბირთვის მოცულობის რა ნაწილს შეადგენს ბირთვული სეგმენტის მოცულობა, თუ ამ სეგმენტის სიმაღლე ბირთვის დიამეტრის 0,1 ნაწილის ტოლია?

22.104. ორი ტოლი ბირთვი მოთავსებულია ისე, რომ ერთის ცენტრი მეორის ზედაპირზეა. იპოვეთ ბირთვების საერთო ნაწილის მოცულობის შეფარდება მთელი ბირთვის მოცულობასთან.

22.105. ბირთვის დიამეტრი 30 სმ-ია. ის იმავე დროს წარმოადგენს ცილინდრის ღერძს, რომლის ფუძის რადიუსი 12 სმ-ია. იპოვეთ ცილინდრში მოთავსებული ბირთვის ნაწილის მოცულობა.

22.106. სფერული სექტორის რადიუსი არის R, ღერძითი კვეთის კუთხე კი 120°-ია. იპოვეთ მოცულობა.

22.107. იპოვეთ სფერული სექტორის მოცულობა, თუ მისი ფუძის წრეწირის რადიუსი უდრის 60 სმ-ს, სფეროს რადიუსი კი 75 სმ-ია.

22.108. წრიული სექტორი, რომლის კუთხე 30°-ია და რადიუსია R, ბრუნავს ერთ-ერთი გვერდითი რადიუსის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

22.109. ბირთვის მოცულობა უდრის V-ს. იპოვეთ მისი სექტორის მოცულობა, რომლის ცენტრალური კუთხე ღერძით კვეთაში უდრის α-ს.

22.110. ბირთვში, რომლის რადიუსი 65 სმ-ია, ცენტრის ერთ მხარეზე გავლებულია ორი პარალელური სიბრტყე: ისინი ცენტრიდან დაშორებულია არიან 16 სმ-ითა და 25 სმ-ით. იპოვეთ სიბრტყეების შორის მოთავსებული ბირთვის ნაწილის მოცულობა.

22.111. წაკვეთილ კონუსში ჩახაზულია სფერო. დაამტკიცეთ, რომ წაკვეთილი კონუსის მოცულობა $\frac{2\pi}{3}\sqrt{Rr}(R^2+r^2+Rr)$-ის ტოლია, სადაც R და r ფუძეების რადიუსებია.

22.112. წაკვეთილი კონუსის ღერძული კვეთის დიაგონალები ურთიერთმართობულია. დაამტკიცეთ, რომ მისი მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $V=\frac{\pi}{3}(R-r)(R^2+r^2+Rr)$, სადაც R და r ფუძეების რადიუსებია.

22.113. კონუსის ფუძე ჩახაზულია a წიბოს მქონე კუბის წახნაგში, ხოლო წვერო მდებარეობს მოპირდაპირე წახნაგის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ კონუსის მოცულობა $V=\frac{1}{12}\pi a^3$.

22.114. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორ ტოლ კონუსს აქვს საერთო სიმაღლე და პარალელური ფუძეები, მაშინ მათი აერთიანი ნაწილის მოცულობა შეადგენს თითოეული მათგანის მოცულობის მეოთხედს.

22.115. ვთქვათ, V, V_1 და V_2 არის მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და კათეტების გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობანი. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{1}{V^2}=\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}.$$

22.116. პირთეში ჩახაზულია კონუსი, რომლის სიმაღლეა H. კონუსის მოცულობა პირთევის მოცულობის 1/4-ის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ პირთევის მოცულობა ცდება $\frac{1}{3}\pi H^3$ -ზე $\frac{1}{6}\pi(\sqrt{3}-1)^3H^3$.

22.117. დაამტკიცეთ, რომ თუ სფეროს სექტორის ღერძული კვეთის ფართობი უდრის დიდი წრის ფართობის $\frac{1}{3}$-ს, მაშინ სექტორის მოცულობა შეადგენს პირთევის მოცულობის $\frac{1}{4}$-ს.

22.118. α-ქორდიანი წრიული სეგმენტი ბრუნავს ამ ქორდის პარალელური დიამეტრის გარშემო. დაამტკიცეთ, რომ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა არ არის დამოკიდებული წრის რადიუსის სიდიდეზე.

22.119. R-რადიუსიან და H სიმაღლის მქონე კონუსში — ჩახაზულია r-რადიუსიანი და h სიმაღლის მქონე ცილინდრი. დაამტკიცეთ, რომ, $\frac{r}{R}+\frac{h}{H}=1$.

22.120. სამკუთხელი ბრუნვის ღერძის გარშემო და შემდეგ ამ ვერტიკის პარალელური წრფის გარშემო, რომელიც მისგან d მანძილითაა დაშორებული. დაამტკიცეთ, რომ ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობათა სხვაობა უდრის სამკუთხედის ფართობისა და d რადიუსიანი წრეწირის სიგრძის ნამრავლს.

§ 23. ცილინდრის, კონუსის, ბირთვის ზედაპირის ფართობი

ამოცანები გამოთვლაზე

23.1. ცილინდრის სიმაღლეა 7 სმ, ფუძის რადიუსი კი 2 სმ. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი.

23.2. მართკუთხედის გვერდებია a და b. იპოვეთ ამ მართკუთხედის a გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

23.3. ცილინდრის ფუძის დიამეტრი უდრის 1 სმ-ს, სიმაღლე კი — ფუძის წრეწირის სიგრძეს. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

23.4. ტოლგვერდა ცილინდრის სიმაღლე უდრის h-ს. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

23.5. ცილინდრის ფუძის რადიუსი უდრის R-ს, მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი უდრის ფუძეების ფართობთა ჯამს. იპოვეთ სიმაღლე.

23.6. ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობი $\frac{13}{2\pi}$ სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

23.7. ცილინდრის ფუძის ფართობი Q-ს ტოლია, ხოლო ღერძული კვეთის ფართობია M. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი.

23.8. იპოვეთ ტოლგვერდა ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობია $64\frac{2}{3}$ სმ^2.

23.9. ცილინდრის სიმაღლე 10 სმ-ით მეტია მისი ფუძის რადიუსზე. იპოვეთ ფუძის რადიუსი, თუ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობია 144π სმ^2.

23.10. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი არის S, ხოლო ფუძის წრეწირის სიგრძე — C. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ $S=5$, $C=3\pi$.

23.11. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის წრფივი წარმმადგენს a-გვერდის კვადრატს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

23.12. ცილინდრის სიმაღლე არის H. მისი გვერდითი ზედაპირის შლილში მსახველი დიაგონალთან შეადგენს $60°$-იან კუთხეს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ $H=2\sqrt{\pi}$.

23.13. ცილინდრის სიმაღლეა H. ცილინდრის მსახველი მისი გვერდითი ზედაპირის შლილის დიაგონალთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ ცილინდრის ზედაპირის ფართობი, თუ

$$H=\sqrt{\frac{3}{\pi}},\ \operatorname{tg}\alpha=\pi.$$

23.14. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილი მართკუთხედია, რომლის დიაგონალი უდრის d-ს და ფუძესთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ $d=7\sqrt{\pi}$, $\sin\alpha=\frac{4}{7}$.

23.15. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილი მართკუთხედია, რომლის დიაგონალები ერთმანეთისადმი ქმნის α კუთხეს. დიაგონალის სიგრძე უდრის d-ს. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი.

23.16. a-გვერდიანი კვადრატი ბრუნავს მის გარეშე მდებარე ღერძის გარშემო, რომელიც კვადრატის გვერდის პარალელურია და დაშორებულია მისგან გვერდის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

23.17. ცილინდრში ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხა პრიზმა. იპოვეთ ცილინდრისა და პრიზმის გვერდითი ზედაპირების ფართობების შეფარდება.

23.18. იპოვეთ a-წიბოიან კუბზე შემოხაზული ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი.

23.19. ტოლგვერდა სამკუთხედის ორი წვერო მდებარეობს ცილინდრის ზედა ფუძის წრეწირზე, ხოლო მესამე წვერო — ქვედა ფუძის წრეწირზე. სამკუთხედის სიბრტყე ცილინდრის მსახველთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი, თუ სამკუთხედის გვერდი უდრის a-ს.

23.20. კონუსის სიმაღლეა 6 სმ, ფუძის რადიუსი კი — 8 სმ. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

23.21. კონუსის სიმაღლეა 4 სმ, მსახველი კი — 5 სმ. იპოვეთ სრული ზედაპირის ფართობი.

23.22. კონუსის ფუძის ფართობია S, ხოლო მსახველები ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია α კუთხით. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირი.

23.23. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი s-ის ტოლია, ხოლო მსახველსა და სიმაღლეს შორის კუთხე უდრის α-ს. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობი, თუ $s=147$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

23.24. კონუსის ფუძის რადიუსი R-ის ტოლია, ხოლო მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხე უდრის α-ს. იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ $R=\sqrt{\frac{57}{2\pi}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{7}$.

23.25. უდიდესი კუთხე კონუსის მსახველებს შორის $60°$-ია. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირისა და ფუძის ფართობების შეფარდება.

23.26. ტოლგვერდა კონუსის H სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ მისი სრული ზედაპირის ფართობი.

23.27. კონუსის ფუძის ფართობია 9π სმ², მისი სრული ზედაპირის ფართობი — 24π სმ². იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

23.28. კონუსის სიმაღლე ისე შეეფარდება მსახველს, როგორც 4 : 5, კონუსის მოცულობა კი 96π სმ³-ია. იპოვეთ მისი სრული ზედაპირის ფართობი.

23.29. კონუსის სიმაღლე 15 მ-ია, მოცულობა კი უდრია 320π მ³-ს. იპოვეთ სრული ზედაპირის ფართობი.

23.30. კონუსის სიმაღლე 6 სმ-ია, გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი 24π სმ². იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

23.31. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის ფართობია 16 მ², ხოლო ღერძითი კვეთის ფართობი — $\frac{55}{\pi}$ მ².

23.32. კონუსის ღერძული კვეთის წვეროსთან მდებარე კუთხეა 2β, ხოლო კვეთის პერიმეტრია $2p$. იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ $p=11\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\sin\beta=\frac{7}{7}$.

23.33. კონუსის ღერძული კვეთი წარმოადგენს ტოლგვერდა სამკუთხედს. ამ სამკუთხედის წვეროსთან შემდგარ კუთხეს α-ს ტოლია. ხოლო მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი უდრის R-ს. იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, $R=\frac{9}{\sqrt{2\pi}}$.

23.34. კონუსის სიმაღლე უდრის მასი ფუძის დიამეტრს. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობის შეფარდება გვერდით ზედაპირთან.

23.35. კონუსის ფუძის ცენტრიდან მის მსახველამდე მანძილი უდრის d-ს, ხოლო კუთხე მსახველსა და სიმაღლეს შორის — α-ს. იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირი.

23.36. კონუსის გვერდითი ზედაპირი ორჯერ მეტია მისი ფუძის ფართობზე. კონუსის ღერძული კვეთის ფარიობი უდრის Q-ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

23.37. კონუსის ფუძის რადიუსია R, ხოლო გვერდითი ზედაპირი უდრის ფუძისა და ღერძული კვეთის ფართობების ჯამს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

23.38. იპოვეთ კუთხე კონუსის მსახველსა და მისი ფუძის სიბრტყეს შორის, თუ კონუსის გვერდითი ზედაპირი ფუძის ფართობისა და მისი სრული ზედაპირის საშუალო პროპორციულია.

23.40. კონუსის სრული ზედაპირის შეფარდება მისი ღერძული კვეთის ფართობთან უდრის k-ს. იპოვეთ კუთხე კონუსის სიმაღლესა და მსახველს შორის.

23.41. კონუსის სიმაღლეა H, ხოლო მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხეა α. ამ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი კონუსის სიმაღლის პერპენდიკულარული სიბრტყეთ შეიზე იყოფა. იპოვეთ მანძილი ამ სიბრტყიდან კონუსის ფუძემდე, თუ $H=24$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{8}$.

23.42. კონუსის სრული ზედაპირი ფუძის პარალელური ჭვრეთით გაყოფილია შუაზე. კონუსის ფუძის რადიუსი უდრია 1 სმ-ს და მსახველი — 6 სმ-ს. იპოვეთ მსახველის ზედა მონაკვეთი.

23.43. R რადიუსის მქონე ლითონის ბირთვიდან ჩამოასხეს კონუსი, რომლის გვერდითი ზედაპირი სამჯერ მეტია ფუძის ფართობზე. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე.

23.44. კონუსის ორ მსახველზე, რომელთა შორის კუთხე უდრის α-ს, გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობის შეფარდება კონუსის სრულ ზედაპირთან, თუ კონუსის მსახველი მის ფუძესთან β კუთხეს ქმნის.

23.45. ტოლგვერდა სამკუთხედი ბრუნავს თავისი გვერდის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის ზედაპირის ფართობი, თუ სამკუთხედის გვერდის სიგრძეა $\frac{7}{\sqrt[4]{3\pi^2}}$ სმ.

23.46. ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის პერიმეტრია 72 სმ, ბრუნავს ფუძეზე დაწვეთილი სიმაღლის გარშემო. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფერდის სიგრძე, თუ ბრუნვითი სხეულის სრული ზედაპირის ფართობია 180π სმ^2.

23.47. სამკუთხედის ფუძე არის b და სიმაღლე h. იპოვეთ იმ სხეულის ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება ამ სამკუთხედის ბრუნვით ფუძის გარშემო.

23.48. ABC მართკუთხა სამკუთხედი ($\angle C=90^\circ$) ბრუნავს AC კათეტის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $BC=\sqrt{\frac{11}{\pi}}$, $\cos B=\frac{11}{29}$.

23.49. a და b კათეტიანი მართკუთხა სამკუთხედი ბრუნავს თავისი ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

23.50. იპოვეთ ზედაპირის ფართობი იმ სხეულისა, რომელიც მიიღება ტოლფერდა სამკუთხედის ბრუნვით მისი ფერდის გარშემო, თუ ფუძე უდრის 30 სმ-ს, ფერდი კი 25 სმ-ს.

23.51. ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის წვეროსთან მდებარე კუთხე 120°-ია. ბრუნავს ფერდის გარშემო, რომლის სიგრძე არის a. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის ზედაპირის ფართობი.

23.52. სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 10 სმ, 17 სმ და 21 სმ, ბრუნავს უდიდესი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

23.53. რომბი, რომლის ფართობია $\frac{45}{4\pi}$ დმ^2, ბრუნავს თავისი ერთ-ერთი გვერდის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

23.54. $ABCD$ ტრაპეციაში, სადაც $BC\|AD$, მოცემულია: $\angle BAD=60^\circ$, $AB=8$ სმ, $AD=5$ სმ და $BC=CD$. იპოვეთ ზედაპირის ფართობი იმ სხეულისა, რომელიც მიიღება ამ ტრაპეციის ბრუნვით AD გვერდის გარშემო.

23.55. ტოლფერდა ტრაპეციის შიგაგანაცი წერტილის პერპენდიკულარულია, ფერდის სიგრძე უდრია b-ს და დიდ ფუძესთან ადგენს α კუთხეს. ტრაპეცია ბრუნავს დიდი ფუძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის ზედაპირის ფართობი, თუ $b=\frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{\pi}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

23.56. ორ კონუსს აქვს კონცენტრული ფუძეები და სიმაღლეები მსახველს შთრის ერთი და იგივე α კუთხე. ეარეთ მდებარე კო-

თლ. ძისი მსახვეველი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 45°-იან კუთხეს, და ფუძეთა რადიუსებია R და r.

23.81. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსები და მსახვეველი ასე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1 : 4 : 5, სიმაღლე 8 სმ-ია. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

23.82. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე, თუ მისი სრული ზედაპირის ფართობი 572 π მ²-ია, ფუძეების რადიუსები კი 6 მ და 14 მ.

23.83. წაკვეთილი კონუსის სიმაღლეა 53 დმ, მსახვეველი — 55 სმ და გვერდითი ზედაპირის ფართობი — 26π მ². იპოვეთ ფუძეების რადიუსები.

23.84. წაკვეთილი კონუსის მსახვეველის სიგრძეა 5 სმ, ფუძეების რადიუსებია 5 სმ და 1 სმ. იპოვეთ იმ ცილინდრის ფუძის რადიუსი, რომლის სიმაღლე წაკვეთილი კონუსის სიმაღლის ტოლია, ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობი წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობის ტოლია.

23.85. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების რადიუსებია 6 სმ და 10 სმ; მსახველი კი 4 სმ. იპოვეთ იმ ცილინდრის რადიუსი, რომელსაც ისეთივე სიმაღლე აქვს და რომლის სრული ზედაპირიც მოცემული წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ტოლდიდია.

23.86. წაკვეთილი კონუსის მსახველი ფუძის სიბრტყესთან 30°-იან კუთხეს ქმნის, ხოლო ლერძული კვეთის ფართობია $\frac{23}{\pi}$ მ². იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

23.87. წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი უდრის S-ს და ფუძეების რადიუსებია R და r. იპოვეთ სრული კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

23.88. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის სიმაღლე, თუ მისი გვერდითი ზედაპირი ფუძეების ჯამის ტოლდიდია, და ფუძეების რადიუსებია R და r.

23.89. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი მსახველი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან კუთხეს, და ფუძეების ფართობებია Q და q.

23.90. წაკვეთილი კონუსის სიმაღლეა H, მსახველი — l და გვერდითი ზედაპირის ფართობი — S. იპოვეთ ლერძული კვეთის ფართობი.

23.91. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის ლერძული კვეთის ფართობი, თუ მოცემულია ფუძეთა ფართობები Q და q, და გვერდითი ზედაპირის ფართობი S.

23.92. იპოვეთ სფეროზე შემოხაზული წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი მსახველი 13 სმ-ია, სფეროს რადიუსი კი — 6 სმ.

23.93. წაკვეთილი კონუსის მსახველის სიგრძეა l და დიდი ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს ადგენს. ლერძული კვეთის დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულები არიან. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ $l = 3\sqrt{\frac{7}{\pi}}$, $\sin\alpha = \frac{5}{6}$.

23.94. წაკვეთილ კონუსში ჩახაზულია r-რადიუსიანი სფერო. კონუსის მსახველი ფუძისადმი დახრილია α კუთხით. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $r = \sqrt{\frac{5}{\pi}}$, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

23.95. წაკვეთილ კონუსში ლერძული კვეთის დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია და თითოეულის მათგანის სიგრძე უდრის a-ს, ხოლო მსახველისა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხე α-ს. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი.

23.96. ტოლფერდა ტრაპეციის ბრუნავს თავისი სიმეტრიის ღერძის გარშემო. ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია a და b. ხოლო ფერდის სიგრძე და დიდ ფუძეს შორის მოთავსებული კუთხის სიდიდეა α. იპოვეთ ბრუნვითი სხეულის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $a = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$, $b = \frac{13}{\sqrt{\pi}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

23.97. α-გვერდიანი კვადრატი ბრუნავს დიაგონალის ბოლოზე გავლებული ამ დიაგონალის პერპენდიკულარის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

23.98. α-გვერდიანი ტოლგვერდა სამკუთხედი ბრუნავს ღერძის გარშემო, რომელიც სამკუთხედის გარეთაა, სამკუთხედის გვერდის პარალელურია და ამ გვერდიდან სამკუთხედის ცენტრამდეა დაშორებული. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

23.99. იპოვეთ ზედაპირის ფართობი სხეულისა, რომელიც მიღებულია α-გვერდიანი წესიერი ექვსკუთხედის ბრუნვით დიამეტრის გარშემო.

23.100. მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტები არის 5 სმ და 12 სმ, ბრუნავს გარეშე ღერძის გარშემო, რომელიც დიდი კათეტის პარალელურია და დაშორებულია მისგან 3:3-ით. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის ზედაპირის ფართობი.

23.101. მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია 15 სმ და 20 სმ, ბრუნავს თავისი უდიდესი მახვილი კუთხის წვეროზე გავლებუ-

ლი და მიპოტენუზის პერპენდიკულარული ღერძის გარშემო, იპოვეთ ჩრუხვის სხეულის ზედაპირის ფართობი.

23.102. სამკუთხედის გვერდებია 9 სმ, 10 სმ და 17 სმ. ის ბრუნავს თავისი ტოლფერდა კუთხის წვეროზე გაყვანილი სიმაღლის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

23.103. სფეროს რადიუსი ტოლია 5 სმ-ს. იპოვეთ მისი ზედაპირის ფართობი.

23.104. ბირთვის ზედაპირის ფართობი 225 π მ²-ია. იპოვეთ მისი მოცულობა.

23.105. ბირთვის ზედაპირის ფართობია S, იპოვეთ მისი მოცულობა.

23.106. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობი, თუ დიდი წრის ფართობი 1 მ²-ია.

23.107. იპოვეთ ბირთვის ზედაპირის ფართობი, თუ მოცემულია მისი მოცულობა V.

23.108. მანძილი მხებ სიბრტყეზე აღებული A წერტილიდან სფეროს O ცენტრამდე d-ს ტოლია. AO მონაკვეთი დახრილია მხები სიბრტყისადმი α კუთხით. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობი, თუ $d=\frac{5}{\sqrt{\pi}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

23.109. სამკუთხედის მიპოტენუზა და კათეტები სამი სფეროს დიამეტრებია. რისგორი დამოკიდებულებაა მათი ზედაპირების ფართობებს შორის?

23.110 სფეროში ცენტრის ერთ მხარეზე გავლებულია ორი პარალელური კვეთი, მათი ფართობებია 49 π დმ² და 4 π მ². მათ შორის მანძილი 9 დმ-ია. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობი.

23.111. იპოვეთ იმ სფეროს ზედაპირი, რომელიც შემოხაზულია კონუსზე, თუ ამ კონუსის ფუძის რადიუსი არის R, ხოლო სიმაღლე — h.

23.112. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის შეფარდება მასში ჩახაზული კუბის ზედაპირთან.

23.113. სფეროში ჩახაზულია კონუსი, რომლის მსაზველი ტოლია ფუძის დიამეტრს. იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირის შეფარდება სფეროს ზედაპირთან.

23.114. კონუსში ჩახაზული სფეროს ზედაპირი მისი ფუძის ტოლდიდია. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობის შეფარდება კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობთან.

23.115. სფეროზე შემოხაზულია წესიერი სამკუთხა პრიზმა, ხოლო მასზე შემოხაზულია სფერო. იპოვეთ ამ სფეროთა ზედაპირების შეფარდება.

23.116. სფეროზე შემოხაზულია ცილინდრი. იპოვეთ მათი ზედაპირების ფართობებია შეფარდება.

23.117. სფეროს რადიუსი 2 მ-ია. მაში ჩახაზულია ტოლგვერდა კონუსი. იპოვეთ ამ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი.

23.118. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია a, ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე — α. იპოვეთ ამ პირამიდაში ჩახაზული სფეროს ზედაპირის ფართობი, თუ $a=\frac{14}{\sqrt{\pi}}$, $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$.

23.119. სფეროში ჩახაზულია კონუსი, რომლის მსაზველი ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია α კუთხით. სფეროს ზედაპირის ფართობია Q. იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ $Q=3\pi\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\frac{3}{4}$.

23.120. კონუსში ჩახაზულია სფერო, რომლის ზედაპირი კონუსის ფუძის ფართობის ტოლია. იპოვეთ კონუსის ღერძულ კვეთაში წვეროსთან მდებარე კუთხის კოსინუსი.

23.121. იპოვეთ კუთხე წრკვეთილი კონუსის ფუძესა და მსაზველს შორის, თუ ცნობილია, რომ კონუსის სრული ზედაპირი ორჯერ აღემატება მასში ჩახაზულ სფეროს ზედაპირს.

23.122. კონუსში ჩახაზულია სფერო. სფერულ და კონუსურ ზედაპირთა შეხების წრეწირი სფეროს ზედაპირს ყოფს შეფარდებით 1 : 4. იპოვეთ კუთხე კონუსის მსაზველსა და მისი ფუძის სიბრტყეს შორის.

23.123. იპოვეთ იმ სფეროს ზედაპირი, რომელიც ჩახაზულია სამკუთხა პირამიდაში, თუ ცნობილია, რომ პირამიდის ყველა წიბო ტოლია და უდრის a-ს.

23.124. წესიერი წრკვეთილი სამკუთხა პირამიდის კვეთითი წარმოქმნის სიბრტყესთან α კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის შეფარდება მასში ჩახაზული სფეროს ზედაპირთან.

23.125. იპოვეთ იმ სფეროს ზედაპირის ფართობი, რომელიც ჩახაზულია პირამიდაში. ცნობილია, რომ პირამიდის ფუძეში მდებარეობს სამკუთხედი, რომლის გვერდებია: 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ, ხოლო პირამიდის წვეროს დაშორებულია ფუძის თითოეული გვერდისაგან 5 სმ-ით.

23.126. სფეროს რადიუსია R. იპოვეთ იმ სფერული სეგმენტის სიმაღლე,

ფართობზე.

23.127. წრიული სეგმენტი, რომლის რკალი 120°-ია და ფართობია Q, ბრუნავს თავისი სიმაღლის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის სრული ზედაპირის ფართობი.

23.128. სფეროს რადიუსი 15 სმ-ია. იპოვეთ მისი ზედაპირის ფართობის ნაწილი, რომელიც ჩანს ცენტრიდან 25 სმ-ით დაშორებული წერტილიდან.

23.129. წრიული სექტორი, რომლისაც 90°-იანი კუთხე და Q ფართობი აქვს, ბრუნავს ზუსტ რადიუსიან გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

23.130. იპოვეთ ბირთვის მოცულობის რა წილს შეადგენს იმ სფერული სექტორის მოცულობა, რომლის ღერძული კვეთა ტოლგვერდა სამკუთხედია.

ამოცანები დამტკიცებაზე

23.131. დაამტკიცეთ, რომ ტოლგვერდა კონუსის სრული ზედაპირი ტოლდიდია იმ სფეროს ზედაპირისა, რომელიც აგებულია კონუსის სიმაღლეზე, როგორც დიამეტრზე.

23.132. დაამტკიცეთ, რომ კვადრატის ბრუნვით თავის გვერდის გარშემო მიღებული სხეულის ზედაპირი ამ კვადრატის გვერდის ტოლი რადიუსის მქონე სფეროს ზედაპირის ტოლდიდია.

23.133. დაამტკიცეთ, რომ კონუსის ბოცულობა უდრის მისი გვერდითი ზედაპირისა და ფუძის ცენტრიდან მსახველამდე მანძილის ნამრავლის მესამედს.

23.134. სფეროში ჩახაზულ წესიერ სამკუთხა პრიზმაში ჩახაზულია სფერო. დაამტკიცეთ, რომ ამ სფეროების ზედაპირების ფართობთა შეფარდება ტოლია 1:5.

23.135. ტოლგვერდა კონუსის სიმაღლე ბირთვის დიამეტრს წარმოადგენს. დაამტკიცეთ, რომ კონუსის სრული ზედაპირი ბირთვის ზედაპირის ტოლდიდია.

23.136. კვადრატის გვერდი ბირთვის რადიუსს წარმოადგენს. დაამტკიცეთ, რომ თავისივე გვერდის გარშემო კვადრატის ბრუნვით მიღება სხეული, რომლის ზედაპირი ბირთვის ზედაპირის ტოლდიდია.

23.137. დაამტკიცეთ, რომ ტოლგვერდა კონუსის მოცულობის შეფარდება იმ ბირთვის მოცულობასთან, რომელის დიამეტრიც კონუსის ფუძის დიამეტრის ტოლია, უდრის $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

23.138. დაამტკიცეთ, რომ R-რადიუსიანი სფეროს ფართობი იმ ცილინდრის ზედაპირის ფართობს უდრის, რომლის სიმაღლე და რადიუსი R-ის ტოლია.

23.139. დაამტკიცეთ, რომ ბირთვსა და მასზე შემოხაზული წაკვეთილი კონუსის მოცულობათა შეფარდება ამ ფიგურების ზედაპირების ფართობთა შეფარდების ტოლია.

23.140. სფეროზე შემოხაზულია ისეთი წაკვეთილი კონუსი, რომლის მსახველი ფუძის სიბრტყესთან შეადგენს 45°-იან კუთხეს. დაამტკიცეთ, რომ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ორჯერ მეტია სფეროს ზედაპირის ფართობზე.

23.141. ბირთვი კუბის ყველა წახნაგს ეხება. დაამტკიცეთ, რომ ამ ფიგურების ზედაპირების ფართობთა შეფარდება ტოლია $\frac{\pi}{6}$.

23.142. ბირთვში ჩახაზულ ცილინდრში ჩახაზულია ბირთვი. დაამტკიცეთ, რომ ამ ბირთვების ზედაპირების ფართობების შეფარდებაა $\frac{1}{2}$.

23.143. დაამტკიცეთ, რომ რომბის დიაგონალებია გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობების შეფარდება უდრის ამავე სხეულების ზედაპირების ფართობთა შეფარდებას.

23.144. ცილინდრი ჩახაზულია ბირთვში. დაამტკიცეთ, რომ ამ ფიგურების ზედაპირების ფართობთა შეფარდება, ტოლია $\frac{3}{4}$-ის, თუ ცილინდრის სიმაღლესა და დიამეტრს ტოლი სიგრძეები აქვთ.

23.145. სფეროში ჩახაზულ კონუსში ჩახაზულია სფერო. დაამტკიცეთ, რომ ამ სფეროების ფართობთა შეფარდება გამოითვლება ფორმულით $\sin^2 2\varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2}$, სადაც φ კონუსის მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხეა.

23.146. დაამტკიცეთ, რომ თუ უდიდესი კუთხე კონუსის მსახველია შორის 120°-ია, მაშინ მისი გვერდითი ზედაპირი ისეთი ცილინდრის გვერდითი ზედაპირია ტოლდიდია, რომელსაც აქვს კონუსის ფუძე და სიმაღლე.

23.147. დაამტკიცეთ, რომ თუ სფეროზე შემოხაზულია კონუსი, რომლის სიმაღლე ორჯერ მეტია სფეროს დიამეტრზე, მაშინ კონუსის მოცულობა და სრული ზედაპირის ფართობი ორჯერ მეტი აქვს სფეროს მოცულობასა და ზედაპირის ფართობზე.

23.148. დაამტკიცეთ, რომ თუ ABC სამკუთხედი ბრუნავს $BC=a$ გვერდის გარშემო, მაშინ მიღებული სხეულის მოცულობა უდრის $\frac{4}{3}\pi\frac{Q^2}{a}$, სადაც Q სამკუთხედის ფართობია.

23.149. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამ ტოლ ნაწილად გაყოფილი ნახევარწრეწირი ბრუნავს თავისი დიამეტრის გარშემო, მაშინ შუა რკალით შემოხაზული ზედაპირი კიდური რკალებით შემოხაზული ზედაპირების ჯამის ტოლდიდია.

28.150. დაამტკიცეთ, რომ სფერულ სეგმენტში ჩაიხაზული კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი სეგმენტის ფუძის ფართობისა და გვერდითი ზედაპირის ფართობას საშუალო პროპორციულია.

28.151. წრეკვეთილი კონუსის ღერძით კვეთაზე შემოხაზულია წრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ: 1) გვერდითი ზედაპირი იმ წრის ფართობის ტოლია, რომლის რადიუსი ტოლია კონუსის მსახველის. 2) კონუსის მოცულობა $V = \frac{1}{6} S \cdot H$, სადაც S სრული ზედაპირის ფართობია, ხოლო H — სიმაღლე.

28.152. დაამტკიცეთ, რომ თუ კონუსსა და ცილინდრს აქვთ ერთნაირი ფუძე და სიმაღლე, მაშინ კონუსის მოცულობა ღერძის ცილინდრის მოცულობაა, შემცირებულს ამ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირისა და მისი ფუძის რადიუსის ნამრავლის ერთი მესამედით.

§ 24. სხვადასხვა სახის ამოცანები

ამოცანები გამოთვლაზე

24.1. კუბის ორი მეზობელი გვერდითი წახნაგის დიაგონალები ან კვეთს ერთმანეთს. ამ დიაგონალებს შორის მანძილი ღერძის d-ს. იპოვეთ კუბის მოცულობა.

24.2. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი ბაკლებია გვერდითი წიბოზე და ღერძის a-ს. ზედა ფუძის გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან 45°-იან კუთხეს ქმნის და პრიზმას ორ ნაწილად ყოფს. იპოვეთ პრიზმის ზედა ნაწილის მოცულობა და სრული ზედაპირი.

24.3. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფერდი ღერძის a-ს. ხოლო ფერდებს შორის კუთხე — α-ს. მოცემული კუთხის მოპირდაპირე გვერდითი წახნაგის დიაგონალი მასაზღვრე გვერდით წახნაგებთან φ კუთხეებს ქმნის. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

24.4. ღახრილი პრიზმის ფუძეა მართკუთხედი a და b გვერდებით. ორი მასაზღვრე გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან შესაბამისად ქმნის α და β კუთხეებს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ გვერდითი წიბო ღერძის c-ს.

24.5. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლეს ფუძიდან გვერდით წიბოზე დაშვებული პერპენდიკულარი ღერძის p-ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ გვერდით წახნაგებს შორის მთავასებული ორწახნაგა კუთხე α-ს ტოლია.

24.6. იპოვეთ მოცულობა წესიერი სამკუთხა პირამიდისა, რომლის წვეროსთან მდებარე პრტყელი კუთხე ღერძის 90°, ხოლო მანძილი

გვერდით წიბოსა და ფუძის მოპირდაპირე გვერდს შორის — d-ს ტოლია.

24.7. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლის ფუძიდან გვერდით წახნაგზე დაშვებული პერპენდიკულარი ღერძის a-ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ გვერდითი წიბოს დახრის კუთხე ფუძის სიბრტყისადმი ღერძის α-ს.

24.8. პირამიდის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზა ღერძის c-ს, ხოლო მახვილი კუთხეებიდან უფრო მცირე — α-ს. ყოველი გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β-ს ტოლ კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ მისი სიმაღლე გადის ფუძეს შემოხაზული გალაკვეთის წერტილზე.

24.9. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლის ფუძიდან გვერდით წიბოზე დაშვებული პერპენდიკულარი ღერძის p-ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ გვერდით წახნაგსა და პირამიდის ფუძეს შორის მოთავსებული ორწახნაგა კუთხე α-ს ტოლია.

24.10. წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაში შერჩეულია ორი გვერდითი წიბო, რომლებიც ერთ წახნაგზე არ მდებარეობენ; ამ წიბოებს შორის მდებარე კუთხის კოსინუსი ღერძის k-ს. იპოვეთ პირამიდის წვეროსთან მდებარე პრტყელი კუთხის კოსინუსი.

24.11. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლის შუაწერტილიდან დაშვებულია პერპენდიკულარები გვერდით წიბოზე და გვერდით წახნაგზე. ამ პერპენდიკულართა სიგრძეებია შესაბამისად არის a და b. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

24.12. იპოვეთ კოსინუსი იმ კუთხისა, რომელიც მდებარეობს წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ამოთხრძისა და ფუძის დიაგონალს შორის, თუ ცნობილია, რომ პირამიდის გვერდითი წიბო ღერძის ფუძეა გვერდს.

24.13. წესიერ სამკუთხა პირამიდაში, რომლის გვერდით წიბოსა და ფუძის გვერდს შორის კუთხეა α, გვერდითი წიბოს შუაწერტილზე გავლებულია გვერდითი წახნაგის პარალელური კვეთა. იპოვეთ მიღებული პირამიდის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ კვეთის ფართობი ტოლია S-ს.

24.14. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია a, ხოლო ფუძის ერთ-ერთი წვეროდან მის მოპირდაპირე გვერდით წახნაგზე დაშვებული სიმაღლე — b. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

24.15. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია a. ძირი ყველა დიაგონალური კვეთი ერთმანეთის ტოლდიდია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა და გვერდითი ზედაპირი.

24.16. კუბში მოთავსებულია ოთხკუთხა პირამიდა ამგვარად, რომ

წრეა გავლებული. ცნობილია, რომ ამ წრეების ერთ-ერთ წერტილში მდებარეობს პარალელოგრამის წვერო. ამ წერტილის მდებარეობა ცალსახად განსაზღვრავს პარალელოგრამის ფართობს. რა კუთხეებია დახრილი პარალელოგრამის გვერდები წრეების ცენტრებს შორის მანძილის ტოლი?

24.17. პარალელოგრამის ყველა გვერდითი წახნაგის სიმაღლეები ტოლია. რა კუთხით არიან ისინი დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი, თუ პარალელოგრამის სრული ზედაპირის ფართობის ფუძის ფართობზე?

24.18. წესიერი ოთხკუთხა პარალელოგრამის ფუძის გვერდი არის a, ხოლო წვეროსთან მდებარე პარალელოგრამის ფართობი ტოლია ფუძის ფართობისა. იპოვეთ პარალელოგრამის ფუძესთან შედგენილი კუთხე.

24.19. პარალელოგრამის ფუძეა ტოლფერდა მახვილკუთხა სამკუთხედი, რომლის ფერდი უდრის b-ს, ხოლო ფუძესთან მდებარე კუთხე — α-ს. პარალელოგრამის ყველა გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის ერთსა და იმავე β კუთხეს. იპოვეთ ფარითობი პარალელოგრამის კვეთისა ამ სიბრტყით, რომელიც გადის მოკლებული α კუთხის წვეროსა და პარალელოგრამის სიმაღლეზე.

24.20. პარალელოგრამის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ერთ-ერთი ნაკვეთი კუთხე უდრის α-ს. პარალელოგრამის ყველა გვერდითა წიბო ერთნაირად არის დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი. იპოვეთ ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეები, თუ პარალელოგრამის სიმაღლე უდრის m-ს სამკუთხედის ჰარმონიულზე, რომელიც პარალელოგრამის ფუძეში მდებარეობს.

24.21. სამკუთხა პარალელოგრამის გვერდითი ზედაპირი უდრის S-ს, ხოლო თითოეული გვერდითი წიბო — l-ს. იპოვეთ წვეროსთან მდებარე პარალელოგრამის კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ ისინი ერთმანეთის ტოლია და მეორეს სიდიდით $\frac{\pi}{3}$.

24.22. პარალელოგრამის ფუძეა $ABCD$ პარალელოგრამი, რომელშიც ფართობია AC. BD დიაგონალი AD-ს პერპენდიკულარულია. AD და BC წიბოებთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეები უდრის 45°, ხოლო AB და CD წიბოებთან მდებარე — 60°. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდითი ზედაპირი და მოცულობა.

24.23. მახვილი კუთხე იმ რომბისა, რომელიც მდებარეობს ოთხკუთხა პარალელოგრამის ფუძეში, უდრის α-ს, ხოლო პარალელოგრამის სრული ზედაპირის შეფარდება ფუძის გვერდის კვადრატთან — k-ს. იპოვეთ პარალელოგრამის ამოთხრილის და სიმაღლეს შორის მდებარე კუთხის სინუსი, თუ მისი ყველა გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყისადმი ერთნაირადაა დახრილი.

24.24. წესიერი სამკუთხა პარალელოგრამის ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე — α-ს. პარალელოგრამი კვეთილია ფუძის პარალელური სიბრტყით. კვეთის ფართობი მიღებული წარკვეთილი პარალელოგრამის გვერდითი ზედაპირის ტოლია. იპოვეთ მანძილი წარკვეთილი პარალელოგრამის ფუძემდე.

24.25. პარალელოგრამის ფუძეა კვადრატი, რომლის გვერდი უდრის a-ს. პარალელოგრამის ორი გვერდითი წიბოდან ფუძის პერპენდიკულარულია. ხოლო დიდი გვერდითი წიბო დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი β კუთხით. პარალელოგრამში ჩახაზულია მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის ერთი ფუძე მდებარეობს პარალელოგრამის ფუძის სიბრტყეში, ხოლო მეორე ფუძის წვეროები — პარალელოგრამის გვერდით წიბოებზე. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ მისი დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს ქმნის.

24.26. პარალელოგრამის ფუძე წესიერი სამკუთხედია, ხოლო ორი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია. პარალელოგრამის წვეროსთან მდებარე ორი ერთმანეთის პარალელური კიდის ნაში ტოლია $\frac{\pi}{2}$-ს. იპოვეთ ეს კუთხეები.

24.27. წესიერი ოთხკუთხა პარალელოგრამის სიმაღლე გვერდით წიბოსთან ქმნის α კუთხეს. პარალელოგრამის წვეროში, ფუძის დიაგონალის პარალელურად, გავლებულია სიბრტყე, რომელიც მეორე დიაგონალთან ქმნის β კუთხეს. მიღებული კვეთის ფართობი ტოლია S-ს. იპოვეთ პარალელოგრამის სიმაღლე.

24.28. პარალელოგრამის ფუძე წესიერი ექვსკუთხედია, რომლის გვერდი არის a. ერთ-ერთი გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია და ტოლია ფუძის გვერდის. იპოვეთ პარალელოგრამის სრული ზედაპირი.

24.29. წესიერი ოთხკუთხა პარალელოგრამის ფუძეა კვადრატი, რომლის დიაგონალი ტოლია a-სი. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის სრული ზედაპირი და მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ კვადრატის დიაგონალი და პარალელოგრამის გვერდითი წიბო ერთმანეთის ტოლია.

24.30. წესიერი სამკუთხა პარალელოგრამის ფუძის წვეროზე და ორი გვერდითი წიბოს შუაწერტილებზე გაველებულია სიბრტყე. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდითი ზედაპირის შეფარდება მისი ფუძის ფართობთან, თუ ცნობილია, რომ მკვეთი სიბრტყე გვერდითი წახნაგის პერპენდიკულარულია.

24.31. წრფის მონაკვეთი, რომელიც აერთებს წესიერი სამკუთხა პარალელოგრამის ფუძის ცენტრს გვერდითი წიბოს შუაწერტილთან, უდრის ფუძის გვერდს. იპოვეთ მოსაზღვრე გვერდით წახნაგებს შორის მდებარე კუთხის კოსინუსი.

24.32. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო ქმნის ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს. ფუძის წვეროსა და მოპირდაპირე გვერდით წიბოს შეკვეთილზე გავლებულია ფუძის ერთ-ერთი დიაგონალის პარალელური სიბრტყე. იპოვეთ კუთხე ამ სიბრტყესა და პირამიდის ფუძის სიბრტყეს შორის.

24.33. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a-ს. ფუძის ერთ-ერთ წიბოზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც მოპირდაპირე გვერდითი წიბოს პერპენდიკულარულია და ამ წიბოს ყოფს $m : n$ შეფარდებით (ფუძის წვეროს მხრიდან). იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირი.

24.34. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ამოთხრილი მიეცა ფუძის სიბრტყესთან და გვერდითი წიბოს მიერ ამავე სიბრტყესთან შექმნილი კუთხეების ჯამი უდრის $\frac{\pi}{4}$-ს. იპოვეთ ეს კუთხეები.

24.35. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგი პირამიდის ფუძის სიბრტყესთან ქმნის კუთხეს, რომლის ტანგენსი უდრის k-ს. იპოვეთ ტანგენსი იმ კუთხისა, რომელსაც ქმნის გვერდითი წიბო და ამ წიბოს მოპირდაპირე წახნაგის ამოთხრილი.

24.36. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო ორჯერ აღემატება ფუძის გვერდს. იპოვეთ კუთხე გვერდითი წახნაგის ამოთხრასა და ფუძეში მდებარე სამკუთხედის სიმაღლეს შორის (სიმაღლე ორ ქვეის გვერდით წახნაგს).

24.37. სამკუთხა პირამიდის ფუძის ერთ-ერთი გვერდის შეფარდება ყველა დანარჩენ მის ბოლო წიბოსთან უდრის k-ს. იპოვეთ პირამიდის ორი ერთმანეთის ტოლი გვერდითი წახნაგის მიერ შედგენილი ორწახნაგა კუთხე და აგრეთვე განსაზღვრეთ k რიცხვის დასაშვები მნიშვნელობები.

24.38. წესიერ სამკუთხა პირამიდაში ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე უდრის α-ს, ხოლო პირამიდის გვერდითი ზედაპირი S-ს. იპოვეთ მანძილი პირამიდის ფუძის ცენტრიდან გვერდით წახნაგამდე.

24.39. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდით წიბოსა და სიმაღლეზე გავლებულია სიბრტყე. მკვეთი სიბრტყის ფართობის შეფარდება პირამიდის სრულ ზედაპირთან უდრის k-ს. იპოვეთ ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე.

24.40. წესიერი $SABC$ სამკუთხა პირამიდის ფუძის C წვეროზე გავლებულია SA გვერდითი წიბოს პერპენდიკულარული სიბრტყე. ეს სიბრტყე ფუძის სიბრტყესთან ადგენს კუთხეს, რომლის კოსინუსი უდრის $\frac{2}{3}$-ს. იპოვეთ თრ გვერდით წიბოებს შორის კუთხის კოსინუსი.

24.41. $SABC$ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს. ფუძის BC გვერდსა და AS გვერდით წიბოს L წერტილზე გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ კუთხე ამ სიბრტყესა და ფუძის სიბრტყეს შორის, თუ $AD : DC = k$.

24.42. იპოვეთ კუთხე წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგის ამოთხრისა და მისი ფუძის სიბრტყეს შორის, თუ ცნობილია, რომ სხვაობა ამ კუთხესა და მეორე კუთხეს შორის, რომელსაც ქმნის პირამიდის გვერდითი წიბო მისი ფუძის სიბრტყესთან, უდრის α-ს.

24.43. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო კუთხე ორ მოსაზღვრე გვერდით წახნაგს შორის α-ს. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი.

24.44. წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაში ორ მოსაზღვრე გვერდით წახნაგს შორის ჭდებარე კუთხის კოსინუსი უდრის k-ს. იპოვეთ გვერდით წახნაგსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხის კოსინუსი და k რიცხვის დასაშვები მნიშვნელობები.

24.45. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის დიაგონალსა და სიმაღლეზე გავლებულია სიბრტყე. მკვეთი სიბრტყის ფართობის შეფარდება პირამიდის გვერდით ზედაპირთან უდრის k-ს. იპოვეთ მოპირდაპირე გვერდითი წახნაგების ამოთხრების შორის კუთხის კოსინუსი.

24.46. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირი სუთჯერ აღემატება მისი ფუძის ფართობს. იპოვეთ პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე.

24.47. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის დიაგონალური კვეთის ფართობის შეფარდება მისი ფუძის ფართობთან უდრის k-ს. იპოვეთ პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხის კოსინუსი.

24.48. წესიერი წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის მახვილ კუთხეს, რომელიც უდრის α-ს. იპოვეთ კუთხე პირამიდის სიმაღლესა და მისი გვერდის წიბოს შორის.

24.49. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო მისი გვერდითი ზედაპირი — S-ს. იპოვეთ მოსაზღვრე გვერდით წახნაგთა შორის მდებარე კუთხე.

24.50. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ორ მოსაზღვრე გვერდით წახნაგს შორის კუთხის კოსინუსი, თუ პირამიდის გვერდითი წიბო უდრის ფუძის გვერდს.

24.51. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე უდრის გვერდით წიბოსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხეს. იპოვეთ ეს კუთხე.

24.52. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის შეფარდება ფუძის ფართობთან უდრის k-ს. იპოვეთ კუთხე პირამიდის გვერდით წიბოსა და სიმაღლეს შორის.

24.53. წესიერი ოთხკუთხა წაკეცთილი პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. პირამიდაში ჩაწერილია მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომ მისი ზედა ფუძე ეშთხვევა პირამიდის ზედა ფუძეს, ხოლო ქვედა ფუძე მდებარეობს პირამიდის ქვედა ფუძის სიბრტყეში. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის შეფარდება პარალელეპიპედის გვერდით ზედაპირთან, თუ პარალელეპიპედის დიაგონალი მისი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს.

24.54. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის ქვედა ფუძის გვერდი უდრის a-ს, ხოლო ზედა ფუძის გვერდი — b-ს. გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. ქვედა ფუძის გვერდსა და ფუძეთა ცენტრებს შემაერთებელი მონაკვეთის შუაწერტილში გავლებულია სიბრტყე, რომელიც მოპირდაპირე გვერდით წახნაგს კვეთს რომელიღაც წერტილში. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან ქვედა ფუძემდე.

24.56. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. სიბრტყე, გავლებული ქვედა ფუძის გვერდსა და ზედა ფუძის მის პარალელურ გვერდზე, ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს. პირამიდის გვერდითი ზედაპირი უდრის S-ს. იპოვეთ ზედა და ქვედა ფუძეთა გვერდები.

24.57. წესიერი სამკუთხა წაკვეთილი პირამიდის გვერდითი წიბოს სიგრძეა $3\sqrt{11}$, ხოლო გვერდითი წახნაგის დიაგონალის სიგრძე 15; ამ დიაგონალსა და დიდი ფუძის გვერდზე გავლებული სიბრტყე გვერდითი წიბოს პერპენდიკულარულია. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

24.58. წესიერი ოთხკუთხა წაკვეთილი პირამიდის დიდი ფუძის გვერდი უდრის a-ს. გვერდითი წიბო და პირამიდის დიაგონალი ფუძეთა სიბრტყესთან შესაბამისად ქმნიან α და β კუთხეებს. იპოვეთ პირამიდის მცირე ფუძის ფართობი.

24.59. წაკვეთილი პირამიდის ფუძეებია წესიერი სამკუთხედები. ზედა ფუძის ერთი გვერდის შუაწერტილის ქვედა ფუძის მისი პარალელური გვერდის შუაწერტილთან შემაერთებელი წრფე ფუძეთა სიბრტყეების პერპენდიკულარულია. უდიდესი გვერდითი წიბო უდრის l-ს და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც აერთებს ზედა და ქვედა ფუძეთა ცენტრებს.

24.60. წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის ორი გვერდითი წახნაგი ერთმანეთის ტოლი მართკუთხა ტრაპეციაა, რომლის მახვილი კუთხე უდრის α-ს, ხოლო ამ წახნაგთა შორის მდებარე ორწახნაგა კუთხე β-ს ტოლია. იპოვეთ კუთხე მესამე გვერდითი წახნაგსა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

24.61. კორპუსში ჩახაზულია სამკუთხა პირამიდა, რომლის გვერდითი წიბოები წყვილ-წყვილად ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ კუთხე კონუსის მსაძველსა და მის სიმაღლეს შორის.

24.62. კონუსის მსაძველსა და სიმაღლეს შორის კუთხე უდრის α-ს. კონუსის წვეროზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც სიმაღლესთან ქმნის β კუთხეს ($\beta < \alpha$). როგორი შეფარდებით ყოფს ეს სიბრტყე ფუძეს წრეწირს?

24.63. კონუსში ჩახაზულია ცილინდრი, რომლის სიმაღლე უდრის კონუსის ფუძის დიამეტრს, ხოლო ცილინდრის სრული ზედაპირი — კონუსის ფუძის ფართობს. იპოვეთ კუთხე კონუსის მსაძველსა და მისი ფუძის სიბრტყეს შორის.

24.64. პირამიდის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფერდი უდრის a-ს, ხოლო ფუძეს შორის მდებარე კუთხე — α-ს. პირამიდის გვერდითი წახნაგი, რომელიც გადის მოცემული α კუთხის მოპირდაპირე გვერდზე, ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს. იპოვეთ პირამიდაზე შემოხაზული კონუსის მოცულობა, თუ მისი ყველა გვერდისთვის წიბოს ერთმანეთის ტოლია.

24.65. ორ კონუსს აქვს საერთო სიმაღლე; მათი წვეროები მდებარეობს ამ სიმაღლის ერთმანეთის მოპირდაპირე ბოლოზე. ერთი კონუსის მსაძველი ტოლია l-ს და სიმაღლესთან ქმნის α კუთხეს, ხოლო მეორე კონუსის მსაძველი სიმაღლესთან ქმნის β კუთხეს. იპოვეთ ორივე კონუსის საერთო ნაწილის მოცულობა.

24.66. წაკვეთილი კონუსი შემოხაზულია წესიერ სამკუთხა წაკვეთილ პირამიდაზე. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირი, თუ ცნობილია, რომ იმ ტრაპეციის მახვილი კუთხე, რომელიც პირამიდის გვერდითი წახნაგია, უდრის α-ს და რომ ამ ტრაპეციაში შეიძლება ჩაიხაზოს r რადიუსის მქონე წრეწირი.

24.67. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ მცირე კათეტის გარშემო სამკუთხედის ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა უდრის იმ სხეულების მოცულობათა ჯამს, რომლებიც მიიღება სამკუთხედის ბრუნვით ჰიპოტენუზისა და დიდი კათეტის გარშემო.

24.66. კონუსი მიღებულია S ფართობის მქონე მართკუთხა სამკუთხედის ბრუნვით მისი ერთ-ერთი კათეტის ირგვლივ. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ იმ წრეწირის სიგრძე, რომელიც შემოხაზულია ამ სამკუთხედის ბრუნვის დროს მედიანების გადაკვეთის წერტილით, უდრის L-ს.

24.68. ABC სამკუთხედი ბრუნავს ამ სამკუთხედის სიბრტყეში მდებარე წრფის გარშემო, რომელიც გადის მის გარეთ A წვეროზე და AB და AC გვერდებისადმი ერთნაირადაა დახრილი. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა, თუ $AB=a$, $AC=b$ და კუთხე $BAC=\alpha$.

24.70. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხე, თუ ცნობილია, რომ იმ სხეულთა მოცულობები, რომლებიც მიიღებიან რომბის ბრუნვით მისი დიაგონალისა და მისი გვერდის გარშემო, ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $1:2\sqrt{5}$.

24.71. კონუსის ფუძის ცენტრიდან მსხვილზე დამვებული პერპენდიკულარი ბრუნავს კონუსის ღერძის გარშემო. იპოვეთ კუთხე კონუსის მსახველსა და ღერძს შორის თუ ბრუნვითი ზედაპირი კონუსის მოცულობას შეადგენს ყოფს.

24.72. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი უდრის a-ს, ხოლო მისი მოპირდაპირე კუთხე — α-ს. ეს სამკუთხედი ბრუნავს იმ წრფის გარშემო, რომელიც მდებარეობს სამკუთხედთა სიბრტყეში, გადის მოცემული კუთხის წვეროზე და მისი ბისექტრისის პერპენდიკულარულია. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

24.73. ბლაგვკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედი ბრუნავს იმ წრფის გარშემო, რომელიც გადის მისი სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილზე, დიდი გვერდის პარალელურად. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა, თუ ბლაგვი კუთხე უდრის α-ს, ხოლო ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდი a-ს.

24.74. ABC სამკუთხედში A კუთხე უდრის α-ს, კუთხე B — β-ს. ($\alpha>\beta$), ხოლო BD ბისექტრისა — l-ს. ABD და BDC სამკუთხედები ბრუნავენ BD წრფის გარშემო. იპოვეთ ამ ორი ბრუნვის სხეულის საერთო ნაწილის მოცულობა.

24.75. წესიერი სამკუთხედის გვერდი უდრის a-ს. სამკუთხედი ბრუნავს იმ წრფის გარშემო, რომელიც მდებარეობს სამკუთხედის სიბრტყეში მის გარეთ. ეს წრფე გადის სამკუთხედის წვეროზე და სამკუთხედის გვერდთან ქმნის α-ს ტოლ კუთხეს. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა და გამოარკვიეთ α-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება ეს მოცულობა უდიდესი.

24.76. მართკუთხა ტრაპეციაში ჩახაზულია წრის რადიუსი r-ს, ხოლო ტრაპეციის მახვილი კუთხე — α-ს. ტრაპეცია ბრუნავს

ბლაგვი გვერდის ირგვლივ. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

24.77. ნახევარსფეროში ჩახაზულია სხეული, რომელიც შედგება ცილინდრისა და მასზე დადგმული კონუსისაგან. ცილინდრის ქვედა ფუძე მდებარეობს ნახევარსფეროს დიდი წრის სიბრტყეში, ხოლო ცილინდრის ზედა ფუძე ემთხვევა კონუსის ფუძეს და ეხება სფეროს ზედაპირს. კონუსის წვერო მდებარეობს სფეროს ზედაპირზე. კონუსის მსახველი ქმნის მის ფუძესთან α კუთხეს. იპოვეთ სხეულის მოცულობის და ნახევარსფეროს მოცულობის შეფარდება.

24.78. ნახევარსფეროში ჩახაზულია კონუსი. მისი წვერო ემთხვევა იმ წრეწირის ცენტრს, რომელიც ნახევარსფეროს ფუძეა. კონუსის ფუძის სიბრტყე ნახევარსფეროს ფუძის სიბრტყის პარალელურია, ხოლო წრფე, რომელიც აერთებს კონუსის ფუძის ცენტრს ნახევარსფეროს დიდი წრის წრეწირია ნებისმიერ წერტილთან, კონუსის ფუძეა სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ ნახევარსფეროს მოცულობისა და კონუსის მოცულობის შეფარდება.

24.79. სფეროში ჩახაზულია პირამიდა, რომლის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი a სავრძის კათეტით და ამ კათეტთან მიმდებარე α სიდიდის მახვილი კუთხით. პირამიდის გვერდითი წიბოები ერთმაგეთის ტოლია. სფეროს ცენტრი პირამიდის წახნაგზე ძევს, ხოლო სფეროს რადიუსი, რომელიც გავლებულია პირამიდის ფუძის ერთ-ერთ წვეროზე, ფუძის სიბრტყესთან β სიდიდის კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $\alpha=4$,

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{9}{8},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}.$$

24.80. R რადიუსის მქონე ნახევარსფეროში ჩახაზულია კუბი იმგვარად, რომ მისი ოთხი წვერო მდებარეობს ნახევარსფეროს ფუძეზე, ხოლო დანარჩენი 4 წვერო მდებარეობს სფერულ ზედაპირზე. იპოვეთ კუბის მოცულობა.

24.81. სფეროზე შეხოხაზული წაკვეთილი კონუსის მსახველი უდრის a-ს, ხოლო კუთხე მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის — α-ს. იპოვეთ იმ კონუსის მოცულობა, რომლის ფუძეა სფერული ზედაპირისა და წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის შეხების წრე, ხოლო მისი წვერო ემთხვევა წაკვეთილი კონუსის დიდი ფუძის ცენტრს.

24.82. წაკვეთილ კონუსში ჩახაზულია სფერო, რომლის მოცულობა კონუსის მოცულობაზე ორჯერ ნაკლებია. იპოვეთ კუთხე კონუსის მსახველსა და მისი ფუძის სიბრტყეს შორის.

24.83. სამკუთხედი, რომლის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 13 : 14 : 15, პირველს სამჯერ ბოძის გვერდის ფარშემო. მიღებულ ბრუნვის სხეულში ჩახაზულია სფერო. როგორ შეეფარდება მისი მოცულობა ბრუნვის სხეულის მოცულობას?

24.84. სფერულ აკუტორში, რომლის ღერძითი კვეთის კუთხე 120°-ია, ჩახაზულია ტოლგვერდა კონუსი. კონუსის წვეროდ ავიღეთ სექტორის სფერული ზედაპირის, კონუსის ფუძე კი ეყრდნობა სექტორის კონუსურ ზედაპირს. იპოვეთ კონუსისა და სექტორის მოცულობათა შეფარდება.

24.85. კონუსის ღერძითი კვეთაში წვეროსთან მდებარე კუთხე ტოლია α-ს, ხოლო ფუძის რადიუსი R-ს. იპოვეთ იმ სფეროს რადიუსი, რომლის ცენტრი მდებარეობს კონუსის წვეროში და კონუსის მოცულობას ყოფს ორ ტოლ ნაწილად.

24.86. სამკუთხა პირამიდის ორი წახნაგი ერთმანეთის ტოლი ძირითა სამკუთხედია საერთო კათეტით, რომელიც უდრის l-ს. წახნაგებს შორის კუთხე ტოლია α-ს. პირამიდის დანარჩენი ორი წახნაგი ქმნის ორწახნაგა β კუთხეს. იპოვეთ პირამიდაზე შემოხაზული სფეროს რადიუსი.

24.87. R რადიუსის მქონე სფეროში ჩახაზულია საერთო ფუძის მქონე ორი კონუსი, რომელთა წვეროები ეკუთვნის სფეროს დიამეტრის ურთიერთსაპირისპირო ბოლოებს. სფერულ სეგმენტს, რომელიც იტევს უფრო მცირე კონუსს, ღერძით კვეთაში აქვს α-ს ტოლი რკალი. იპოვეთ მანძილი ამ კონუსებში ჩახაზულ სფეროების ცენტრებს შორის.

24.88. იპოვეთ წესიერი n-კუთხა პირამიდის მოცულობის შეფარდება მასში ჩახაზული სფეროს მოცულობასთან, თუ კუთხე პირამიდის გვერდით წიბოსა და მისი ფუძის სიბრტყეს შორის ტოლია α-ს.

24.89. წესიერ სამკუთხა პირამიდაში ჩახაზული სფეროს რადიუსი პირამიდის ფუძის გეერდზე ორჯერ უფრო ნაკლებია, იპოვეთ პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხის კოსინუსი.

ამოცანები დამოუკიდებლად

24.90. დაამტკიცეთ, რომ თუ წრფე ერთ სიბრტყეში მდებარე წყვილ-წყვილად გადაკვეთს სამ წრფესთან ტოლ კუთხეებს ადგენს, მაშინ იგი ამ სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

24.91. AB და CD მონაკვეთები ერთ სიბრტყეში ამ მდებარეობენ.

MN მათი შეერთებელი მონაკვეთია, დაამტკიცეთ, რომ $AC + BD \geq 2 \cdot MN$.

24.92. AB და CD ძოხაკვეთები პარალელურ სიბრტყეებში მდებარეობენ. ამ ძოხაკვეთების ბოლოები წარმოადგენენ სამკუთხა პირამიდის წვეროებს. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდის მოცულობა არ შეიცვლება, თუ მონაკვეთების გადაკვეთაწერტილით მოცემულ პარალელურ სიბრტყეებში თავისთავის პარალელურად.

24.93. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხა პირამიდას ყოველი ორი მოპირდაპირე წიბოების ჯამი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ამ პირამიდის წვეროები წარმოადგენენ ერთმანეთის წვეულ-წვეულად შემხები სფეროების ცენტრებს.

24.94. დაამტკიცეთ, რომ ნების მიერ სამკუთხა პირამიდაში არსებობს ერთი ნაირც ისეთი წერტილი, რომ ამ წერტილიდან გამოსული წიბოების ტოლი მონაკვეთებით შეიძლება აიგოს სამკუთხედი.

24.95. წესიერი პირამიდის ფუძის ნებისმიერ წერტილზე გავლებულია ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარული წრფე. დაამტკიცეთ, რომ, ამ წერტილიდან წახნაგების შეცნეველ სიბრტყეებამდე გადაკვეთის წერტილებამდე მანძილების ჯამი—მუდმივი სიდიდეა.

24.96. ტეტრაედრის შიგნით აღებულია ნებისმიერი წერტილი. d_1, d_2, d_3, d_4 არის მანძილები ამ წერტილიდან პირამიდის წახნაგებამდე, ხოლო h_1, h_2, h_3, h_4 პირამიდის შესაბამისი სიმაღლეებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} + \frac{d_4}{h_4} = 1.$$

24.97. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხა პირამიდას გვერდითი წიბოები ურთიერთმართობულია, მაშინ გვერდითი წახნაგების ფართობების კვადრატების ჯამი ფუძის ფართობის კვადრატის ტოლია.

24.98. სფერო ეხება სამკუთხა პირამიდის ყველა გვერდით წახნაგს მათზე შემოხაზული წრეწირების ცენტრებში. პირამიდის წვეროსთან შეკრებილი ბრტყელი კუთხეები ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდა წესიერია.

24.99. დაამტკიცეთ, რომ წაკვეთილ კონუსში ჩახაზული სფეროს ზედაპირი ნაკლებია წაკვეთილი კონუსის გვერდით ზედაპირზე.

24.100. $ABCA_1B_1C_1$ წესიერი სამკუთხა პრიზმაა. დაამტკიცეთ, რომ თუ AB_1, BC_1 და CA_1 დიაგონალებიდან რომელიმე ორი ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ ამ დიაგონალების ყოველი წყვილი ურთიერთმართობულია.

24.101. P არის $SABC$ პირამიდის ABC წახნაგის შეღიარების გადაკვე-

თის წერტილი, ხოლო Q კი SAB სამკუთხედის SB ფერდის პარალელური წაპირისკენ შეწერტილია, დაამტკიცეთ, რომ

$$\vec{PQ}=\frac{1}{6}\vec{SA}-\frac{1}{12}\vec{SB}-\frac{1}{3}\vec{SC}.$$

24.102. მოცემულია ერთ სიბრტყეში არაშეკვეთილი A,B,C,D წერტილები. სიბრტყე BC, CD, DA და AB მონაკვეთებს ქვეთს შესაბამისად P, Q, R და S წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{BP}=\vec{CP}+\vec{CQ}+\vec{DQ}$, $\vec{DR}+\vec{AR}+\vec{AS}+\vec{BS}=\vec{0}$, მაშინ $PQRS$ პარალელოგრამია.

პასუხები

§ 1.

1.1. 1) 6 სმ; 2) 7,7 დმ; 3) 18,1 მ. **1.2.** 1) 1,2 მ; 2) 2,4 სმ. **1.3.** 1) $AC=9$ მ, $BC=6$ მ; 2) $AC=10$ მ, $BC=5$ მ; 3) $AC=BC=7{,}5$ მ; 4) $AC=6$ მ, $BC=9$ მ. **1.4.** 7 სმ. **1.5.** 8,5 სმ. **1.6.** 40 სმ, 80 სმ, 80 სმ. **1.7.** 11 სმ, 0,5 სმ, 5,5 სმ. **1.8.** 0,5 მ ან 5,9 მ. **1.10.** 1) არ ეკუთვნის; 2) არ აკუთვნის; 3) ეკუთვნის. **1.11.** 1) არ შეიძლება; 2) არ შეიძლება. **1.12.** არ შეიძლება. **1.13.** არ შეიძლება. **1.14.** არ შეიძლება. **1.17.** 1) 110°; 2) 119°; 3) 179°. **1.18.** 1) $\angle(ac)=15°$, $\angle(bc)=15°$; 2) $\angle(ac)=40°$, $\angle(bc)=20°$; 3) $\angle(ac)=\angle(bc)=30°$; 4) $\angle(ac)=24°$, $\angle(bc)=36°$. **1.19.** (ab) კუთხე ბლაგვია. **1.20.** 1) არ შეიძლება; 2) არ შეიძლება; 3) არ შეიძლება.

§ 2.

2.1. 1) 150°; 2) 135°; 3) 120°; 4) 90°. **2.2.** 1) არ შეიძლება; 2) არ შეიძლება; 3) შეიძლება. **2.3.** 60°, 120°. **2.4.** 1) 105° და 75°; 2) 110° და 70°; 3) 45° და 135°. **2.5.** 1) 72° და 108°; 2) 54° და 126°; 3) 55° და 125°; 4) 88° და 92°. **2.6.** 150°, 150°, 30°. **2.7.** 54°. **2.8.** 130°. **2.9.** 25°, 25°. **2.10.** 144° და 36°. **2.11.** 65° და 115°. **2.12.** ყველა კუთხე მახვილია. **2.13.** 1) 20°; 2) 60°; 3) 90°. **2.14.** $\angle(a_1b)=120°$, $\angle(a_1c)=150°$, $\angle(bc)=30°$. **2.15.** 10°. **2.16.** 1) 110°; 2) 175°; 3) 179°. **2.17.** 1) 15°; 2) 26°; 3) 86°. **2.18.** 1) 120°; 2) 150°; 3) 178°. **2.19.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **2.20.** 20°, 140°. **2.21.** 20°.

§ 3.

3.1. 10 მ. **3.2.** 0,3 ᲓᲛ. **3.3.** 10 სმ. **3.4.** 3,5 მ. **3.5.** 1) 3,2 მ, 6,2 მ, 6,2 მ; 2) 7,2 მ, 4,2 მ, 4,2 მ. **3.6.** 10 მ, 10 სმ, 1 სმ. **3.7.** 6 სმ, 6 სმ, 9 სმ ან 8 სმ, 8 სმ, 5 სმ. **3.8.** 12 სმ. **3.9.** 15 მ. **3.10.** 15 მ. **3.11.** 13 სმ. **3.12.** 10 სმ. **3.13.** 40°. **3.14.** 96°.

§ 4.

4.1. 105° და 75°. **4.2.** 75°. **4.3.** სამი კუთხე, თითოეული 72°, ოთხი კუთხე, თითოეული 108°. **4.4.** 65° და 115°. **4.5.** 45° და 135°. **4.6.** 1) 100°; 2) 65°; 3) 35°; 4) 55°. **4.7.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 40°, 60°, 80°; 3) 45°, 60°, 75°; 4) 48°, 60°, 72°; 5) 50°, 60°, 70°. **4.8.** 1) 100°; 2) 70°; 3) 36°. **4.9.** 1) 30°, 2) 30°; 3) 75°. **4.10.** 70° და 40° ან 55° და 55°. **4.11.** 60°, 60°. **4.12.** 15°. **4.13.** 30°. **4.14.** 51°30′. **4.15.** 42°. **4.16.** 55°, 55°, 70°. **4.17.** 1) 38°, 38°, 104°; 2) 65°, 65°, 48°. **4.18.** 18 სმ. **4.19.** 8 სმ. **4.20.** 12,5 სმ. **4.21.** 20 სმ და 10 სმ. **4.22.** 1,2 მ. **4.23.** 75°. **4.24.** 92 სმ. **4.25.** 15°, 15°, 150°. **4.26.** 21°, 73°, 86° და 21°, 65°, 94°. **4.27.** 3) ორი კუთხე $\left(120°-\frac{2}{3}\alpha\right)$-ის ტოლია, მესამე კი $-\left(\frac{4}{3}\alpha-60°\right)$. **4.28.** 36°, 144°. **4.29.** 2) $180°-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; 3) $90°+\frac{\gamma}{2}$. **4.30.** 35°, 55°. **4.31.** 60°. **4.32.** 45°. **4.33.** 35°, 55°, 110°. **4.34.** 30°, 60°,

90°. 4.35. 110°. 4.36. $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$. 4.37. α. 4.38. ABD სამკუთხედის გარეგანი კუთხეებია: $\angle A=\alpha$, $\angle D=90°$, $\angle B=90°-\alpha$; CBD სამკუთხედის გარეგანი კუთხეებია: $\angle D=90°$, $\angle B=\alpha+\beta-90°$, $\angle C=180°-\alpha-\beta$. 4.39. 60°. 4.40. 35°, 40°, 105°. 4.41. 140°, 10°. 4.42. 52°. 4.43. 150°. 4.44. 90°. 4.45. 36° და 144°. 4.46. 45°. 4.47. 20°, 40°, 120°. 4.48. 110°. 4.49. 21°, 54°, 132°. 4.50. 50°. 4.51. 70°. 4.52. 24 სმ. 4.53. 9 სმ.

§ 4.

5.1. 5 სმ და 25 სმ. 5.2. 70 სმ, 10 სმ. 5.3. 60°. 5.4. 120°. 5.5. 2 სმ. 5.6. 2 სმ და 4 სმ. 5.7. 5,5 სმ. 5.8. ა) 6 სმ და 3 სმ; ბ) 1,5 სმ. 5.9. 1 სმ. 5.10. 8 სმ. 5.11. 7,5 სმ. 5.12. 12 სმ. 5.13. 120°. 5.14. 5 სმ. 5.15. 15 სმ და 6 სმ. 5.16. 16 სმ და 10 სმ; 2 სმ. 5.17. 12,5 სმ და 5 სმ; 2,5 სმ. 5.18. 2 სმ. 5.19. 12 სმ და 8 სმ. 5.20. 10 სმ და 25 სმ. 5.21. R და 60°. 5.22. 9 სმ. 5.23. 100°. 5.24. 59°. 5.25. α და $180°-\alpha$. 5.26. 36°, 106°. 5.27. 150°. 5.28. 10 სმ. 5.29. 5 სმ. 5.30. 30°, 150°. 5.31. 30° და 150°. 5.32. 60° და 20°. 5.33. 52°30′, 82°30′ და 45°. 5.34. 108°. 5.35. 40°, 40° და 100°. 5.36. 45°. 5.37. 45° 5.38. 24°. 5.39. 3π. 5.40. 112°. 5.41. 76°. 5.42. 150°. 5.43. 7°. 5.44. 20°. 5.45. 40°. 5.46. 105°. 5.47. 35°. 5.48. 16°, 74°. 5.49. 32°. 5.50. 100°. 5.51. 18°. 5.52. 3 სმ და 6 სმ. 5.53. 4 სმ. 5.54. 10 სმ, 5 სმ. 5.55. 55°, 35°. 5.56. 6 : 5.

§ 5.

5.1. ა) 82; ბ) 107. 5.2. $\angle A=\angle B=\angle C=85°$. 5.3. 40°, 90°, 140°. 90°. 5.4. 142°, 22°, 136°, 60°. 5.5. 50° და 130°. 5.6. 10 მ. 5.7. 40°, 140°, 140°. 5.8. 65°, 115°, 65°, 115°. 5.9. 60°, 120°, 60°, 120°. 5.10. 1) 40°, 140°, 40°, 140°; 2) 50°, 130°, 50°, 130°; 3) 80°, 100°, 80°, 100°. 5.11. 1) 55°, 125°, 55°, 125°; 2) 35°, 145°, 35°, 145°; 3) 20°, 160°, 20°, 160°. 5.12. ა) 36°, 144°, 36°, 144°; ბ) 54°, 126°, 54°, 126°. 5.13. 16°, 96°. 5.14. 110°, 40°. 5.15. 70°, 110°, 70°, 110°. 5.16. ა) 45°; ბ) 135°. 5.17. 10 მ. 5.18. 25,5 სმ, 50,5 სმ. 5.19. 0,6 მ, 0,8 მ. 5.20. 1,1; 1,1; 8,5. 5.21. 0,9; 1. 5.22. 6 სმ. 5.23. 6 სმ, 9 სმ, 6 სმ. 5.24. 7,5 სმ, 22,5 სმ. 5.25. 2 სმ და 4 სმ. 5.26. 3 სმ. 5.27. 3 სმ, 2 სმ, 3 სმ. 5.28. $BC=AD=4,8$ მ. 5.29. $BP=9$ სმ, $CE=6$ სმ. 5.30. 25°, 55°. 5.31. 72°, 108°. 5.32. 45°. 5.33. ა) 36°, 54°; ბ) 18°. 5.34. 60 სმ. 5.35. 3 სმ. 5.36. 40 სმ. 5.37. 10 სმ, 18 სმ. 5.38. 1,2 მ. 5.39. 4 მ, 8 მ. 5.40. 6 მ. 5.41. 12 სმ. 5.42. 10 სმ, 25 სმ და 7,5 სმ, 18,75 სმ. 5.43. 12 სმ, 20 სმ. 5.44. 80°, 100°. 5.45. 70°, 110°. 5.46. ა) 60°, 120°; ბ) 30°, 60°. 5.47. ა) 30°, 150°; ბ) 15°, 75°. 5.48. ა) 60°, 120°; ბ) 30°, 60°. 5.49. ა) 60°, 120°; ბ) 80 მ. 5.50. 150°. 5.51. 5 სმ. 5.52. 18 სმ. 5.53. 2 მ. 5.54. 2 მ. 5.55. 48 სმ. 5.56. 4 მ. 5.57. 48, 8 მ. 5.58. 1 მ. 5.59. 10 სმ. 5.60. 9,2. 5.61. 30 სმ. 5.62. 2 დმ. 5.63. 1 დმ. 5.64. 60 სმ. 5.65. 4 სმ, 5 სმ, 6 სმ. 5.66. 6 სმ. 5.67. 30 სმ; 7,5 სმ, 10 სმ, 12,5 სმ. 5.68. 14 სმ, 16 სმ, 18 სმ. 5.69. 6 სმ, 5 სმ, 5 სმ. 5.70. 7 სმ. 5.71. 34 სმ. 5.72. 22 მ. 5.73. 10 სმ. 5.74. 30 სმ. 5.75. 7 სმ. 5.76. 5 სმ. 5.77. 112°, 106°. 5.78. 20 სმ. 5.79. 70°, 110°. 5.80. 60°, 120°. 5.81. 60°, 120°. 5.82. 100°, 80°, 140°. 5.83. 1,7 მ. 5.84. 152 სმ. 5.85. 9,5 სმ, 33,5 სმ. 5.86. 24 სმ, 36 სმ. 5.87. 17. 5.88. 20 სმ. 5.89. 12 სმ, 42 სმ. 5.90. 12 სმ, 32 სმ, 9 სმ. 5.91. 10 სმ. 5.92. 5,25 სმ. 5.93. 15. 5.94. 33. 5.95. 4 მ. 6 მ. 5.96. 4 მ. 5.97. 5 სმ, 9 სმ. 5.98. 17 სმ, 19 სმ, 21 სმ. 5.99. 3 მ, 4 მ. 5.100. 7 სმ. 5.101. 15 მ. 5.102. 3 სმ. 5.103. 2,2 მ. 5.104. 42 სმ. 5.105. 1. 5.106. 96 სმ. 5.107. 0,6. 5.108. 28 სმ. 5.109. 6 სმ. 5.110. 7,75 სმ. 5.111. 32 სმ. 5.113. 45°, 90, 135°, 90°. 5.113. 105°, 125°. 5.114. 24°, 156°, 24°, 156°. 5.115. 70°, 90°, 110°, 90°. 5.116. 75°, 105°, 105°, 75° და 35°, 145°, 145°, 35°. 5.117. 80°. 5.118. 81°, 99°. 5.119. 37°, 143°, 37°, 143°. 5.120. 1 მ. 5.121. 10 სმ. 5.123. 2 სმ. 5.123. 30 სმ. 5.124. 3 მ, 6 მ, 9 მ, 6 მ. 5.125. 3 სმ. 5.126. 25 სმ. 5.127. 27 სმ. 5.128. 30°.

6.1. 0,8 მ, 1 მ, 1,2 მ. 6.2. 10 მ, 25 მ, 20 მ. 6.3. 1 მ, 2 მ, 2,5 მ. 6.4. 6,5 მ, 5,5 მ. 6.5. 20 სმ, $23\frac{1}{3}$ სმ, $26\frac{2}{3}$ სმ და 18 სმ, 21 სმ, 24 სმ. 6.6. 2,5 სმ, 4,2 სმ, 2 სმ, 6,3 სმ. 6.7. 18 სმ, 9 სმ, 12 სმ, 36 სმ. 6.8. 8 დმ, 12 დმ, 16 დმ, 20 დმ. 6.9. 100 მ, 40 მ. 6.10. ა) 15 მ; ბ) 22 დმ, გ) 9 მ. 6.12. 18. 6.13. 12 სმ. 6.14. $\frac{bc}{a+c}$. 6.15. $CD=3$ სმ, $BD=9$ სმ. 6.16. 20. 6.17. 3,6. 6.18. $\frac{a\sqrt{5}-a}{2}$. 6.19. 6 სმ. 6.20. $\frac{bc}{b+c}$. 6.21. $x=\frac{bc}{b+c}$. 6.22. 25. 6.23. 300 მ. 6.24. $\frac{bc}{a+2c}$. 6.25. $\frac{a(m-n)}{n}$. 6.26. $\sqrt{pq}$. 6.27. $\frac{lm}{m+l}$. 6.28. 32. 6.29. 13,6 სმ. 6.30. $AC=4$ მ, $B_1C_1=14$ მ. 6.31. $AC=24$ სმ, $EF=18$ სმ, $DF=15$ სმ. 6.32. $A_1C_1=1,2$ მ, $AC=3$ მ. 6.33. 108,8 მ, 217,6 მ, 217,6 მ. 6.34. 10 სმ, 26 სმ. 6.35. 12 სმ, 4 სმ. 6.36. 1,5 სმ. 6.37. 30. 6.38. 27 სმ. 6.39. $\frac{ab}{a+b}$. 6.40. $\frac{ab}{a-b}$. 6.41. $\frac{ah}{a-h}$. 6.42. 12 სმ, 18 სმ. 6.43. 12 სმ. 6.44. $\frac{ah}{a+2h}$. 6.45. 4 სმ. 6.46. 15 სმ, 12 სმ. 6.47. 4,5 სმ. 6.48. 5,2. 6.49. 18 სმ, 40 სმ. 6.50. 3. 6.51. 4. 6.52. $n:m$. 6.53. $m:n$. 6.54. 6. 6.55. 1. 6.56. 32 სმ. 6.57. 24 სმ. 6.58. 33 მ. 6.59. 24 სმ, 8 სმ. 6.60. 12 სმ, 6 სმ. 6.61. 6 სმ, 12 სმ, 3 მ. 6.62. 16 სმ. 6.63. 14 სმ და 4 სმ. 6.64. 10 სმ. 6.65. $\frac{2}{3}r$. 6.66. 1) 6; 2) 3; 3) $\sqrt{3}$. 6.67. 21 სმ. 6.68. 10 სმ. 6.69. $\frac{a}{2}$. 6.70. 15 სმ. 6.71. 12 სმ, 36 სმ. 6.72. $1\frac{1}{2}$ სმ. 6.73. 6 სმ. 6.74. 30 სმ. 6.75. 18 სმ, 12 სმ. 6.76. 9 სმ, 6 სმ და $12\frac{1}{2}$ სმ, $2\frac{1}{2}$ სმ. 6.77. 1) 4 სმ; 2) 20 მ; 3) $AB=25$ მ, $AC=15$ მ. 6.78. 1) 9 დმ; 2) 36 სმ; 3) 25. 6.79. 24 სმ. 6.80. 8 სმ. 6.81. 10 სმ, 25 სმ და 7,5 სმ, 18,75 სმ. 6.82. mx და nx, სადაც $x=\frac{am-bn}{n^2-m^2}$.

§ 6.

6.1. ა) 5; ბ) 41; გ) 39; დ) 67. 6.2. ა) 12; ბ) 24; გ) 15; დ) 13. 6.3. 109 სმ. 6.4. 25 სმ და 11 სმ. 6.5. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 6.6. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 6.7. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 6.8. 15 სმ. 6.9. $2\sqrt{2}$ სმ. 6.10. 125 სმ, 125 სმ, 240 სმ. 6.11. 13,44 სმ. 6.12. 1) 5 სმ; 2) 17 დმ; 3) 5,5 მ. 6.13. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. 6.14. 3 დმ, 4 დმ. 6.15. $\frac{25}{3}$, $\frac{20}{3}$. 6.16. 1) 35 სმ, 20 სმ; 2) 60 მ, 80 მ. 6.17. 50 სმ, 72 სმ. 6.18. 5,2 მ. 6.19. 18 სმ, 32 სმ. 6.20. 12 მ. 6.21. 1) 8 სმ; 2) 18 მ; 3) 14 სმ. 6.22. 1) 7 სმ, 2) $r(\sqrt{5}-1)$. 6.23. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

9.24. 33 см, 60 см. **9.25.** 10 см. **9.26.** 3. **9.27.** $\frac{b\sqrt{c-b^2}}{c+b+\sqrt{c^2-b^2}}$. **9.28.** $\frac{1}{2}c(\sqrt{2}-1)$. **9.29.** 79. **9.30.** $\sqrt{2}-1$. **9.31.** 5, 8, 10. **9.32.** 8 см, 15 см. **9.33.** 5 см. **9.34.** 7 см, 24 см, 25 см. **9.35.** 28 см. **9.36.** 36. **9.37.** 24 см. **9.38.** 36 см, 54 см. **9.39.** 44 см. **9.40.** 52. **9.41.** $5,5\sqrt{3}$. 10. **9.42.** 30. **9.43.** 9 см. **9.44.** 6 $\frac{1}{4}$. **9.45.** 3,5. **9.46.** 6. **9.47.** 8. **9.48.** $8\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$. **9.49.** 12,44 см². **9.50.** 65 см. **9.51.** $AE:EC=16:25$. **9.52.** 56 см, 45 см. **9.53.** 21 см. **9.54.** 6 см. **9.55.** 25 см. **9.56.** 6 см. **9.57.** 42,5 см. **9.58.** 13. **9.59.** $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **9.60.** $9\frac{1}{15}$ см. **9.61.** $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. **9.62.** $R=\frac{169}{24}$ см, $r=\frac{10}{2}$ см. **9.63.** $4\sqrt{3}+6$; $6\sqrt{3}+12$. **9.64.** 20 см. **9.65.** $2\frac{11}{18}$. **9.66.** 17 см. **9.67.** 13 см. **9.68.** 20 см. **9.69.** $7\frac{9}{17}$ см. **9.70.** 175 см, 500 см. **9.71.** 30. **9.72.** 12. **9.73.** 40 см. **9.74.** 48 см, 20 см. **9.75.** 38 см, 22 см. **9.76.** 9. **9.77.** 13 см. **9.78.** 32 см, 18 см. **9.79.** 5,18. **9.80.** 30 см. **9.81.** $\frac{2mr}{\sqrt{mn}}$, $\frac{2nr}{\sqrt{mn}}$, $\frac{(m+n)r}{\sqrt{mn}}$. **9.82.** 6,25 см. **9.83.** $0,8\sqrt{5}$. **9.84.** $5\sqrt{10}$. **9.85.** 1) 24 см; 2) 24 см. **9.86.** 13 см. **9.87.** $AC=a$, $AD=a(\sqrt{2}-1)$. **9.88.** 40 см. **9.89.** 9 см, 25,63 см. **9.90.** 10 см. **9.91.** 8 см. **9.92.** 17,53 см, 5,53 см. **9.93.** 18 см. **9.94.** 37 см, $\sqrt{269}$ см. **9.95.** 4 : 5. **9.96.** $\sqrt{a^2+3b^2}$. **9.97.** $AB=\sqrt{a(a-b)}$, $CD=\sqrt{b(a+b)}$. **9.98.** 13 см. **9.99.** 11,2 см. **9.100.** 12 см, 8 см. **9.101.** 25,56. **9.102** 15 см. **9.103.** 1 см. **9.104.** $2\sqrt{5}$. **9.105.** 6,8. **9.106.** $\sqrt{5}$. **9.107.** 16. **9.108.** 17. **9.109.** 35 см. **9.110.** $CA=39$, $CB=26$. **9.111.** 27 см, 64 см.

§ 10.

10.1. 7. **10.2.** 7. **10.3.** 20 см, 30 см. **10.4.** 10 см, 15 см. **10.5.** 7 см, 11 см. **10.6.** 4 см, 7 см, 7 см, 9 см. **10.7.** 6. **10.8.** $\sqrt{10}$. **10.9.** 11. **10.10.** 14. **10.11.** 13 см, 25 см. **10.12.** 16,5. **10.13.** $AD=1$ см, $DC=15$ см. **10.14.** 10 см. **10.15.** 1,8 см. **10.16.** 15. **10.17.** $a(\sqrt{2}-1)$, $a(2-\sqrt{2})$. **10.18.** 10 см. **10.19.** 21 см, 28 см. **10.20.** $x\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$, $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. **10.21.** $9\sqrt{5}$ см, $8\sqrt{10}$ см. **10.22.** 24 см. **10.23.** 10. **10.24.** $4\sqrt{2}$. **10.25.** 9 см, 9 см, $6\sqrt{2}$ см. **10.26.** $BE=7$ см, $EC=5$ см. **10.27.** $\frac{m(p+q)}{q}$, $\frac{m(p+q)}{p}$, $p+q$. **10.28.** $\frac{5}{6}\sqrt{m^2+n^2}$, $\frac{5}{4}\sqrt{m^2+n^2}$. **10.29.** $BE=10$ см, $EC=14$ см. **10.30.** $\sqrt{R^2-3r^2}$. **10.31.** 42,56. **10.32** 39 см, 65 см. **10.33.** 50 см. **10.34.** 16 см, 20 см, 20 см. **10.35** 10, 10, 12. **10.36.** 10 см. **10.37.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})$. **10.38** 8 см. **10.39.** 5 см. **10.40.** 12 см, 13 см, 18 см. **10.41.** $\frac{b}{a+c}$. **10.42.** 9 см, $1\frac{5}{7}$ см, $14\frac{2}{7}$ см. **10.43** 8. **10.44.** 15 см. **10.45.** 26 см. **10.46.** 3 см. **10.47.** 3 см, 4 см, 5 см. **10.48.** 15. **10.49.** 2 : 1, 3 : 2, 2 : 1. **10.50.** 18 см, 80 см. **10.51.** 13. **10.52.** 6 см. **10.53.** 18. **10.54.** 5. **10.55.** 0,1. **10.56.** 96. **10.57.** 42. **10.58.** 87. **10.59.** 44. **10.60.** 12. **10.61.** 6. **10.62.** 2. **10.63.** 96. **10.64.** 40. **10.65.** 1. **10.66.** 7. **10.67.** 69. **10.68.** 40. **10.69.** 37. **10.70.** 10. **10.71.** 20. **10.72.** 9. **10.73.** 60. **10.74.** 96. **10.75.** 72. **10.76.** 98. **10.77.** 33. **10.78.** 25. **10.79.** 32. **10.80.** 3. **10.81.** 140. **10.82.** 11.

§ 11.

11.1. 4 см 9 см. **11.2.** $36\sqrt{2}$ см. **11.3.** 12 см, 25 см. **11.4.** 84 см². **11.5** 82 см. **11.6.** 4800 см². **11.7.** $\frac{a^2}{4}$ **11.8.** 98 см². **11.9.** 1 : 2. **11.10.** 4,65 см. **11.11.** 20. **11.12.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **11.13.** 4 см, 12 см. **11.14.** $0,8\ ab$. **11.15.** 30. **11.16.** $0,5a^2$. **11.17.** 200 см², **11.18.** 202,8 см². **11.19.** 30°. **11.20.** 30. **11.21.** 64. **11.22.** 45. **11.23.** 14,25 см². **11.24.** 10 см. **11.25.** 14 см. **11.26.** 20 см. **11.27.** 16 см, 20 см. **11.28.** 32. **11.29.** 288 см². **11.30.** 24 см². **11.31** 540 см². **11.32.** $\frac{mn}{6}$. **11.33.** 6 см², 12 см². **11.34.** 1 : 2. **11.35.** 6 см². **11.36.** 9,64 см², 15,36 см² **11.37.** $\sqrt{3}$ см. **11.38.** 300 см². **11.39.** 10 см. **11.40.** 2 : 3. **11.41.** 3 : 2. **11.42.** 5 см. **11.43.** $m^2(7\sqrt{3}-12)$. **11.44.** 27. **11.45.** 14 см, 16,8 см. **11.46.** 64. **11.47.** 30 **11.48.** 2250 см² и 522 см². **11.49.** 1 см. **11.50.** 3 : 2. **11.51.** 25 см, 10 см. 50 см². **11.52.** 14 см, 30 см **11.53.** 68. **11.54.** 10 см. **11.55.** 24 см. **11.56.** 1 : 3. **11.57.** 6 : 5 : 4. **11.58.** $4\sqrt{5}$ см. **11.59.** $AD=6$ см $BE=8$ см. **11.60.** 4 см. **11.61.** 1440 см². **11.62.** 5. **11.63.** 9,6 см. **11.64.** $\sqrt{15}$ см. **11.65.** 0,25. **11.66.** 0,25. **11.67.** 12 см². **11.68.** $(\sqrt{6}+2):1$ и $(\sqrt{3}+1):2$. **11.69.** $26\sqrt{2}$ см. **11.70.** $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. **11.71.** 256 см². **11.72.** $10\sqrt{2}$ см. **11.73.** 4 : 21 : 56.

11.74. $1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **11.75.** 22 см², 72 см², 128 см². **11.76.** 1) 84; 2) 12; 3) 288; 4) 10. **11.77.** 2 см. **11.78.** 112. **11.79.** 1) 130 см, 125 см, 15 см; 2) 18 см, 20 см, 34 см. **11.80.** 144 см². **11.81.** 30 см. **11.82.** 1224 см² **11.83.** 1) 25 и 39, 2) 14 и 12. **11.84.** 84 см². **11.85.** $2r^2(2\sqrt{3}+3)$. **11.86.** 270 см². **11.87.** 30. **11.88.** 144. **11.89.** 1) $R=\frac{65}{8}$, $r=4$; 2) $R=\frac{65}{8}$, $r=1,5$; 3) $R=\frac{145}{6}$, $r=\frac{7}{3}$; 4) $R=\frac{35}{\sqrt{96}}$, $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **11.90.** 4,5. **11.91.** 25 см, 6 см, 15 см. **11.92.** 54. **11.93.** 60 см². **11.94.** 2 см. **11.95.** 130 см². **11.96.** 8,4 см². **11.97.** 1700 см². **11.98.** 10,625 см. **11.99.** $0,25(3+\sqrt{3})R^2$. **11.100.** $0,5a^2$. **11.101.** 2. **11.102.** 66. **11.103.** 13. **11.104.** 90. **11.105.** 90. **11.106.** 8 см. **11.107.** 16 см. **11.108.** $1,25\sqrt{3}\ R^2$. **11.109.** 6 см. **11.110.** 4,5 **11.111.** 60 см², 40 см². **11.112.** $0,3R^2$. **11.113.** $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$. **11.114.** 54 см². **11.115.** 13. **11.116.** 15 см. **11.117.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **11.118.** $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}-1)$. **11.119.** 20 см, 10 см и 5 см, 40 см. **11.120.** $\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$. **11.121.** $2r^2(7-4\sqrt{3})$. **11.122.** $6\frac{6}{13}$ см, $5\frac{7}{13}$ см. **11.123.** 7 см, 5 см и 21 см, 3 см. **11.124.** 90. **11.125.** 90.

11.126. $\frac{2\pi a}{(m+n)^2}Q$. 11.127. 0,5; 0,75. 11.128. 5ϑ. 11.129. 3. 11.130. 32. 11.131. 75 ϑ². 11.132. 48. 11.133. 30. 11.134. 4. 11.135. 9,6 ϑ². 11.136. $202\frac{1}{2}$ ϑ², 11.137. 1400 ϑ². 11.138. 6912 ϑ². 11.139. 0,6 ϑ². 11.140. R^2. 11.141. 216 ϑ², 11.142. 81. 11.143. 150. 11.144. 20. 11.145. 175 ϑ². 11.146. 20 ϑ². 11.147. 17. 11.148. 4,8 ϑ². 11.149. 48. 11.150. 3 ϑ. 11.151. 8316 ϑ². 11.152. 96 ϑ². 11.153. 48 ϑ. 11.154. 10,625 ϑ. 11.155. 24. 11.156. $282,24\vartheta^2$. 11.157. 425 ϑ². 11.158. 3. 11.159. 588 ϑ². $\sqrt{1621}$ ϑ. 11.160. 6. 11.161. 6. 11.162. $\frac{a^2(p^2-q^2)}{(p+q)^2}$. 11.163. 27. 11.164. 2. 11.165. 39.

§ 13.

13.1. $2\pi\sqrt{3}$. 13.2. $3\pi^2\sqrt{3}$. 13.3. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. 13.4. 2:1. 13.5. $27\sqrt{3}$. 13.6. $84\sqrt{6}$ ϑ. 13.7. 140; 657; 2; 608. 13.8. $4\sqrt{3}:9:6\sqrt{3}$. 13.9. 2. 13.10. 72. 13.11. 6. 13.12. 6,5. 13.13. 24. 13.14. 6. 13.15. 29 ϑ². 13.16. $\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$. 13.17. $2r^2\sqrt{3}$. 13.18. $\frac{1}{r\sqrt{3}}\sqrt{2S\sqrt{3}}$. 13.19. $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$. 13.20. $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$. 13.21. 59. 13.22. 58. 13.23. 43. 13.24. $a_3:b_3=r:R$, $a_3:b_3=1:2$, $a_6:b_6=\sqrt{3}:3$. 13.25. 1) $R\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$. 13.26. $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$. 13.27. $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$. 13.28. 6,8. 13.29. 18. 13.30. $\frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\frac{r}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. 13.31. $\frac{2}{3}\sqrt{3}a$ и $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 13.32. 1) 90°; 2) 22,5°. 13.33. $\frac{360}{2\pi}$. 13.34. 450 ϑ, $\frac{225}{\pi}$ ϑ. 13.35. 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{9}$. 13.36. 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi}$; 3) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$. 13.37. $\frac{7\pi}{16-\pi}$. 13.38. 53. 13.39. 63. 13.40. $\frac{l^2}{4\pi}$. 13.41. 2. 13.42. 30. 13.43. $\frac{4,3\pi}{4-\pi}$. 13.44. $\pi(p-c)^2$. 13.45. 4225 : 1024. 13.46. 25π м². 13.47. 25π ϑ². 13.48. $2(7+4\sqrt{3})$ ϑ². 13.49. 96. 13.50. $\frac{R}{2}(\sqrt{4-\pi}+\sqrt{4+\pi})$. $\frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi}-\sqrt{4-\pi})$. 13.51. $\frac{R}{2}\left(\sqrt{4+\frac{2\pi}{n}}\pm\sqrt{4-\frac{2\pi}{n}}\right)$. 13.52. $\frac{8Q}{\pi}$. 13.53. $R\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$. 13.54. 42. 13.55. 285,61 π ϑ². 13.56. 2. 13.57. $\frac{\pi a^2}{12}$. 13.58. 314 ϑ². 13.59. 3 : 1. 13.60. $\frac{r^2}{2}(2\sqrt{3}-\pi)$. 13.61. $\pi R^2(3\pm2\sqrt{2})$. 13.62. $\frac{100\pi}{9}$. 13.63. 1) 20π ϑ²; 2) 12π ϑ²; 3) $\pi(a^2-b^2)$. 13.64. $\frac{\pi a^2}{4}$. 13.65. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$, $\frac{R\sqrt{6}}{3}$, R. 13.66. $\sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$. 13.67. $\frac{c_1^2-c_2^2}{4\pi}$. 13.68. $\frac{\pi a^2}{4}$.

13.69. $\frac{\pi Q\sqrt{3}}{3}$. 13.70. 1 : 4. 13.71. 2. 13.72. 17. 13.73. $\frac{\pi a^2}{4}$. 13.74. 2 : 1.

13.75. 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$; 3) $\frac{\pi R^2}{12}$; 4) $\frac{2\pi R^2}{3}$; 5) $\frac{5\pi R^2}{6}$; 6) $\frac{11\pi R^2}{12}$.

13.76. 15,81 ϑ. 13.77. 180,8°. 13.78. а) 0,5; б) 0,25; в) 0,125; г) 0,05. 13.79. а) 180°, б) 240°, в) 337,5°. 13.80. $2R$. 13.81. $\frac{R}{4}$. 13.82. $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$. 13.83. 1,5.

13.84. $\frac{ar}{a+2r}$. 13.85. 1) $\frac{R^2}{2}(4-\pi)$; 2) $\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$; 3) $\frac{R^2}{6}(2\sqrt{3}-\pi)$.

13.86. 1 : 2. 13.87. $r^2\left(\frac{4\sqrt{3}}{\pi}-\frac{11}{6}\right)$. 13.88. 1) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$; 2) $\frac{R^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$;

3) $\frac{R^2}{8}(\pi-2\sqrt{2})$; 4) $\frac{R^2}{12}(\pi-3)$. 13.89. 1) $\frac{a^2}{36}(4\pi-3\sqrt{3})$; 2) $\frac{a^2}{8}(\pi-2)$;

2) $\frac{a^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$. 13.90. $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$. 13.91. $\frac{(\pi+\sqrt{3})R^2}{2}$. 13.92. $\frac{R^2}{3}(\pi+\sqrt{3})$.

13.93. 2. 13.94. $\frac{R^2}{6}(2\sqrt{3}-\pi)$. 13.95. $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 13.96. 3. 13.97. $\frac{a^2}{24}(\pi-6+6\sqrt{3})$.

13.98. 1. 13.99. $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$. 13.100. 2. 13.101. 1) $(\pi-2)R^2$; 2) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$;

3) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. 13.102. 3. 13.103. $\frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{24}$. 13.104. $\frac{a^2}{24}(7\pi-6-6\sqrt{3})$ и $\frac{a^2}{24}(13\pi+6-6\sqrt{3})$. 13.105. 1. 13.106. $0,04a^2$. 13.107. $\frac{1}{16}$ ϑ. 13.108. 3. 13.109. 154.

§ 14.

14.1. $\sqrt{b^2+bc}$. 14.2. $\frac{a}{3}\sqrt{13+12\cos\alpha}$. 14.3. $\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\beta=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

14.4. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. 14.5. $\frac{9\sqrt{3}}{16}$. 14.6. $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

14.7. $\frac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha$. 14.8. $\sqrt{\frac{1}{4}(b^2+c^2+2\sqrt{3b^2c^2-a^4-c^4})}$. 14.9. Заданному объединению соответствует $1-\cos^2A-\cos^2B-\cos^2C$; заданному пересечению $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C-1$; заданному объединению $S_{A_1B_1C_1}=0$. 14.10. 65. 14.11. $R^2\arccos\frac{d^2+R^2-r^2}{2Rd}+r^2\arccos\frac{d^2+r^2-R^2}{2rd}-Rd\sqrt{1-\left(\frac{d^2+R^2-r^2}{2Rd}\right)^2}$. 14.12. $4R^2\frac{R-r}{(R+r)^2}$.

14.13. $\frac{a}{2\cos\beta}$. 14.14. $\frac{3\sqrt{3}-9}{4}$. 14.15. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 14.16. $\frac{a}{2}\left[5+4\cos\alpha\pm\right.$
$\left.\pm\sqrt{16\cos^2\alpha+8\cos\alpha-23}\right]$. 14.17. $2r^2\left[\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}\right]$. 14.18. $AC^2+BC^2=l^2+4\operatorname{ctg}\alpha\cdot S_{ABC}$. Задача не имеет решения,

ბოგდანის S_{ABC} ფორმულის. 14.19. $\frac{4V r_1}{r_1+r}R$. 14.20. $\sqrt{\frac{ab+cd}{bc+ad}}(ac+bd)$;

$\sqrt{\frac{ad+bc}{ab+cd}}(ac+bd)$. 14.21. $\frac{3}{4}$. 14.22. $\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, სადაც

$p=\frac{a+b+c}{2}$. 14.23. $\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$. 14.24. $\frac{35}{8}$. 14.25. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. 14.26. $\frac{7\sqrt{3}}{4}r^2$.

14.27. $m=1$. 14.28. $\frac{\pi}{2}$. 14.29. $\frac{(l\sin\alpha+m\sin\alpha+n\sin\beta)^2}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}$. 14.30. $\arcsin\sqrt{a}$.

14.31. $2\left[\operatorname{ctg}\left(30^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(30^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)+\sqrt{3}\right]$. 14.32. $\frac{1}{\sqrt{2-\frac{n}{2}}}$. 14.33.

$\frac{8}{\sqrt{16-\pi^2}}$. 14.34. $AB=3\sqrt{2}$; $AC=\sqrt{13}$. 14.35. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$.

14.36. $\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $\pi-\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. 14.37. $\sqrt{ab}$.

14.38. $ND=\frac{l(1-\cos\alpha)+2a+\sqrt{4a^2+4al(1-\cos\alpha)-l^2\sin^2\alpha}}{2}$, $MB=$

$=\frac{l(1-\cos\alpha)+2a-\sqrt{4a^2+4al(1-\cos\alpha)-l^2\sin^2\alpha}}{2}$. 14.39. $R=\frac{5-4\cos\beta}{8\sin\beta}\times$

$\times\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot b$. 14.40. $\frac{9}{2}$. 14.41. $AB=BC=AC=\sqrt{3}$. 14.42. 5 და 3.

14.43. $3\sqrt{3}$. 14.44. 60.

§ 15

15.1. 50. 15.2. 14. 15.3. 1) $2h$; 2) $h\sqrt{2}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{3}}h$. 15.4. 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$;

3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 15.5. 2. 15.6. 15. 15.7. 4 სმ. 15.8. 20. 15.9. $2\sqrt{2}$ ნ. 15.10. 45°.

15.11. $3a$. 15.12. 7. 15.13. $a\sqrt{2}$. 15.14. 39. 15.15. $a\sqrt{6}$. 15.16. 16. 15.17. 6 სმ,

15 სმ. 15.18. 15 სმ, 4 სმ. 15.19. 4 სმ, 8 სმ. 15.20. 9 სმ. 15.21. 45.

15.22. 20. 15.23. 9. 15.24. $\sqrt{AB^2+BD^2-AC^2}=29$. 15.25. 2,6 მ. 15.26. 117.

15.27. 1) 4,25 სმ; 2) 6,75 სმ; 3) $\frac{a+b}{2}$. 15.28. 1) 6 მ; 2) 4,2 ფუთი; 3) 6,2 სმ; 4) $\frac{a+b}{2}$.

15.29. 3. 15.30. 0,6 მ. 15.31. 30°. 15.32. 1) 7 ნ; 2) 2 ნ; 3) $a+c-b$. 15.33. 8 სმ.

15.34. 7. 15.35. 25 სმ; 39 სმ. 15.36. $\sqrt{a^2+b^2}$. 15.37. $A_1B_1=a$.

15.38. $\sqrt{b^2-a^2}$. 15.39. $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. 15.40. 1) 5 სმ; 2) 8 სმ; 3) 6 სმ; 4) $\frac{bc}{a+c}$.

15.41. 1) 6,5 სმ; 2) 15 სმ; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$. 15.42. $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$.

15.43. $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}$. 15.44. $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{2}}$. 15.45. 14. 15.46. 10. 15.47. 7.

15.48. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. 15.49. 1 მ. 15.50. 3,5. 15.51. 14 სმ. 15.52. 2,6. 15.53. 3,5 სმ²,

15.54. 17. 15.55. $BD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; $CD=\sqrt{a^2+c^2}$. 15.56. 4. 15.57. 25.

15.58. 2,5 ნ. 15.59. 6,5 ნ. 15.60. 37. 15.61. 40. 15.62. 40. 15.63. 2,5 მ.

15.64. 6 ნ. 15.65. 30. 15.66. 18 მ; 2 მ. 15.67. ტოლია $\sqrt{2a^2-b^2}$;

ტოლია $\sqrt{b^2-a^2}$. 15.68. 2 ნ. 15.69. $\sqrt{2b^2-a^2}$. 15.70. 30°. 15.71. 9,2.

15.72. 1,2 ნ. 15.73. 1,7 ნ. 15.74. 34 ნ. 15.75. 30°. 15.76. $a\sqrt{2}$. 15.77. 13,5.

15.78,26. 15.79. 18. 15.80. $\sqrt{a^2+b^2}$. 15.81. 6 ფუთი. 15.82. 10 სმ. 15.83. 3,36 მ.

15.84. 4. 15.85. 8. 15.86. 7,5 სმ. 15.87. ა) 11 ნ; ბ) 13 ნ; გ) 8 ნ; დ) 7 ნ;

ე) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; ვ) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. 15.88. $2a$; ნ. 15.89. $\sqrt{b^2-a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$.

15.90. 5. 15.91. 13. 15.92. ა) $\cos\alpha=\frac{1}{14}$; ბ) $\cos\alpha=\frac{2}{21}$. 15.93. 7,5. 15.94. 60.

15.95. $2a$. 15.96. 60°. 15.97. $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$. 15.98. $\frac{a}{2}$. 15.99. $\frac{am}{m+n}$.

(*m* შეგახსენებთ ამ ფორმულის ბოლომდე ხაზგასმული ასოების მნიშვნელობას). 15.100. $\sqrt{22}$ მ.

15.101. 4 მ. 15.102. 41. 15.103. 6 მ. 15.104. 30. 15.105. 5 მ, 3 მ. 15.106. 62°.

6.107. $\sqrt{a^2+b^2}$. 15.108. 12,5. 15.109. 40,5.

§ 16.

16.1. $\overrightarrow{AB}(-2;1)$; $\overrightarrow{BC}(1;-4)$; $\overrightarrow{AC}(-1;-3)$. 16.2. $\overrightarrow{AB}(1;-3;1)$; $\overrightarrow{BC}(-1;0;-1)$;

$\overrightarrow{AC}(0;-3;0)$. 16.3. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. 16.4. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. 16.5. $D(-2;0)$.

16.6. 1) $D(-2;3;0)$. 2) $D(2;1;-2)$. 16.7. $|\vec{a}|=5$; $|\vec{b}|=13$. 16.8. $|\vec{a}|=5$; $|\vec{b}|=5$.

16.9. $m=\pm 12$. 16.10. $n=\pm 7$. 16.11. $m=\pm 6$. 16.12. $n=\pm 2$. 16.13. 21.

16.14. 1) $(3;-5)$; 2) $(-1;1)$; 3) $(1;0)$; 4) $(-3;2)$; 5) $(1;3)$. 16.15. 1) $(3;1;2)$;

2) $(3;-1;3)$. 16.16. 1) $(0;1)$; 2) $(-8;3)$; 3) $(1;-1)$; 4) $(-1;1)$; 5) $(-1;-2)$.

16.17. 1) $(-1;-2;7)$; 2) $(3;-2;1)$. 16.18. 1) 5; 2) 10; 3) 13. 16.19. 1) 7; 2) $\sqrt{2}$.

16.20. 1) 13; 2) 10; 3) 17. 16.21. 1) 7, 2) $\sqrt{2}$. 16.22. 54. 16.23. 4.

16.24. 1) $(-6;-8)$, 2) $(9;7)$. 3) $(12;7)$. 16.25. 1) $(-2;3;5)$; 2) $(1;6;0)$

16.26. 12. 16.27. 1) 10; 2) 13; 3) 15. 16.28. 1) $\sqrt{146}$; 2) 2. 16.29. 1) $\pm\frac{1}{2}$;

2) ± 1; 3) $\pm\frac{5}{7}$. 16.30. 1) $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{9}{2}$; 2) $m=-2$; $n=-2,5$;

3) $m=4$; $n=6$. 16.31. $\sqrt{105}$; $\sqrt{53}$. 16.32. 7. 16.33. 1) $n=\frac{1}{3}$; 2) $n=-1$;

3) $n=2$; 4) $n=4$. 16.34. 21. 16.35. 1. 16.36. 4. 16.37. 57. 16.38. 35. 16.39. 7.

16.40. 7. 16.41. 15. 16.42. 75. 16.43. -7. 16.44. 1. 16.45. 20. 16.46. 20. 16.47. 1.

16.48. 10. 16.49. $-14,5$. 16.50. $\frac{5}{21}$. 16.51. 9. 16.52. 6,5. 16.53. 0. 16.54. 3.

16.55. 3. 16.56. 90. 16.57. $\frac{10}{61\sqrt{7}}$. 16.58. 19. 16.59. $(-2;4;3)$. 16.60. 1) (10; 2; 14);

2) (20; 4; 28). 16.61. 1) $(6;-4;-6)$; 2) $(-12;8;12)$. 16.62. 15. 16.63. 1) 24; 2) 60.

16.64. 16. 16.65. $\pm 30^\circ$. 16.66. 1) 3; 2) 27; 3) 300. 16.67. 14. 16.68. 1) D; 2) C; 3) B.

16.69. A; C; D. 16.70. OX ღერძზე $(1,0,0)$ წერტილი. OY ღერძზე $(0,2,0)$

წერტილი. OZ ღერძზე $(0;0;3)$ წერტილი. XOY სიბრტყეზე $(1,2,0)$ წერტილი; XOZ

სიბრტყეზე $(1;0;3)$ წერტილი; YOZ სიბრტყეზე $(0;2;3)$ წერტილი. 16.71. 1) XOY

координатных осей 3; XOZ координатных осей 2; YOZ координатных осей 1; 2) OX ординаты $\sqrt{13}$; OY ординаты $\sqrt{10}$; OZ ординаты $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{14}$. 16.72. 2. 16.73. (0; 0; 0). 16.74. $D\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$. 16.75. (2; 2; 2) и (−2; −2; −2). 16.76. $B(0; -1; 3)$. 16.77. $D(5; 2; -2)$. 16.78. XOY координаты основания (1; 2; −3); (0; −1; −3); (1; 0; 3); XOZ координаты основания (1; −2; 3); (0; 1; 2); (1; 0; −3). YOZ координаты основания (−1; 2; 3); (0; −1; 2); (−1; 0; −3). 16.79. (−2; −2; −3); (0; 1; −2); (−1; 0; 3)

§ 17.

17.1. 54 см². 17.2. 2:9. 17.3. 98 дм². 17.4. 20 см². 17.5. 37,5 см². 17.6. 1) $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2a^2}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2a^2}{\sqrt{5}}$. 17.7. 15. 17.8. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. 17.9. $a\left(\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; $\frac{9a^2}{8}$. 17.10. 60°. 17.11. $\frac{8}{3}Q\sqrt{3}$. 17.12. $KB=BL=LD_1=D_1K=\frac{a}{2}\sqrt{5}$; $BD_1=a\sqrt{3}$; $KL=a\sqrt{2}$; ромбы. 17.13. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. 17.14. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 17.15. 1) 2; 2) 7; 3) 11. 17.16. $5\sqrt{2}$ см; 45°. 17.17. 20 см. 17.18. 12 см. 17.19. $2(a+b)^2\sqrt{2(a^2+b^2)}$. 17.20. 1464 см². 17.21. 6 см; 14 см; 16 см. 17.22. 2 см². 17.23. 40 см; 9 см. 17.24. 14 см. 17.25. 16,5 см². 17.26. 39 см². 17.27. 12² см². 17.28. $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{4}}$; $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$; $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$. 17.29. $\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$. 17.30. 35. 17.31. 7,5. 17.32. 45°. 17.33. $2a^2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$. 17.34. $\arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. 17.35. $\operatorname{arcctg}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}$. 17.36. 13 см; 9 см. 17.37. 10 см. 17.38. 1416 см². 17.39. $2a\sqrt{2}$. 17.40. 4 см; $\sqrt{12}$ см. 17.41. 7 см; 5 см. 17.42. 188 см². 17.43. 5 см; 7 см. 17.44. $220-84\sqrt{3}$. 17.45. 1872 см². 17.46. $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$. 17.47. 12 см². 17.48. 399 см². 17.49. 82 см². 17.50. 48. 17.51. 21,3. 17.52. 24. 17.53. 30. 17.54. $\frac{b^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 17.55. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$. 17.56. 50 см². 17.57. 40 см². 17.58. 12 см². 17.59. 9 см². 17.60. 60 см². 17.61. 96 см². 17.62. 60 см². 17.63. 17,28. b; $\sqrt{b^2+2a^2}$; $\sqrt{4a^2+b^2}$; $a\sqrt{2b^2-a^2}$; $a\sqrt{2}$. 17.64. 66 см². 17.65. 22 см. 17.66. 17. 17.67. 24. 17.68. 13. 17.69. 6 см; 8 см. 17.70. 46 см². 17.71. 13 см. 17.72. 24 см. 17.73. $3a^2$. 17.74. $8\sqrt{3}$. 17.75. 17,5 см². 17.76. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3ab$. 17.77. 3 см². 17.78. 9 см². 17.79. $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. 17.80. $\frac{6Q}{\sqrt{3}}+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. 17.81. 9 см². 17.82. 8 см². 17.83. 81 см². 17.84. 2,25 см². 17.85. 48. 17.86. 40,5 см². 17.87. $\frac{4}{3}a^2\sqrt{3}$. 17.88. 48 см². 17.89. $\cos x=-\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 17.90. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

17.91. $\arccos\frac{1}{3}$. 17.92. $\frac{a\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 17.93. $3\sqrt{3+a^2-(a\sqrt{3})}$. 17.94. 35 см. 17.95. 14 см. 17.96. $2a$ и $a\sqrt{3}$; $a^2\sqrt{3}$ и $2a^2$. 17.97. $3b^2$. 17.98. 3 см. 17.99. 5 см. 17.100. $2a^2$. 17.101. 63 см². 17.102. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. 17.103. 10. 17.104. 2 см. 17.105. 4980 см². 17.106. 86 см². 17.107. 9 см²; 1 см. 17.108. 25 см; 23 см; 30 см; 24 см. 17.110. $Q\sqrt{2}$. 17.111. 56 см². 17.112. 32 см². 17.113. $\frac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$. 17.114. $\arccos\frac{2}{\sqrt{8+\sin^2 2\alpha}}$. 17.115. 5 см. 17.116. $\operatorname{arctg}\frac{k}{\sin\alpha}$. 17.117. 906 см²; 340 см². 17.118. 7,5 см. 17.119. 240 см². 17.120. 84 см². 17.121. 12 см. 17.122. 2 см. 17.123. 576 см². 17.124. $3a(1+a\sqrt{3})$. 17.125. 8 см. 17.126. 144 см². 17.127. 70. 17.128. 492 см². 17.129. 9. 17.130. $\arccos\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$. 17.131. $a^2(4+\sqrt{3})$.

§ 18.

18.1. $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$. 18.2. $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$. 18.3. $a(a+\sqrt{a^2+4h^2})$. 18.4. 9 см. 18.5. 10 см. 18.6. 1,8 см; 4 см. 18.7. $\sqrt{2h^2-\sqrt{4h^4+p^2}}$. 18.8. $\sqrt{2}$ см. 18.9. 14 см². 18.10. 24. 18.11. 72 см². 18.12. $3a^2$. 18.13. 63 см². 18.14. 32 см². 18.15. 99. 18.16. 60 см². 18.17. 64. 18.18. 60. 18.19. 42. 18.20. 80. 18.21. $\frac{3}{2}d^2$. 18.22. 15. 18.23. 27. 18.24. 21. 18.25. 45 см². 18.26. 75 см². 18.27. 456,8 см². 18.28. 3 см². 18.29. $\frac{a\sin\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. 18.30. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$. 18.31. $\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. 18.32. 45. 18.33. $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$. 18.34. $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$. 18.35. $\frac{a\sqrt{3}}{4}(a+\sqrt{a^2+12h^2})$. 18.36. 16,5 см. 18.37. 3,75 см². 18.38. 63 см². 18.39. 30°. 18.40. $\frac{2}{4}a^2\sqrt{3}$. 18.41. 286 см². 18.42. 4,5. 18.43. 6,5 см. 18.44. 16 см и 6 см и 12 см и 8 см. 18.45. 75. 18.46. $\frac{ab}{c}$. 18.47. $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. 18.48. $\frac{1}{9}$. 18.49. $8\sqrt{3}$. 18.50. $\sqrt{3}$. 18.51. $\frac{1}{2}h^2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 18.52. $\arcsin\frac{4\cos\alpha}{\sqrt{3}}$. 18.53. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 18.54. $\frac{\sqrt{5}\sqrt{3\cos\alpha}}{6\cos\alpha}$. 18.55. $\sqrt{b^2-a^2}$. 18.56. $\sqrt{h^2+\frac{3a^2}{2}}$. 18.57. $\frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+\sqrt{3a^2+4h^2})$. 18.58. $2r(r\sqrt{3}+\sqrt{3a^2-r^2})$. 18.59. $2r(1+r)\sqrt{3}$. 18.60. $\frac{3}{2}\gamma(a^2-4h^2)(3b^2+4h^2)$.

18.61. 900 см². 18.62. 99 см². 18.64. см. 18.65. 90 см². 18.66. 3 см. 18.67. $\frac{Q}{\cos\varphi}$.

18.73. $22+\sqrt{136}$. 18.74. $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta$. 18.75. $2\sqrt{3}$ дм. 18.76. 32,2. 18.77. 6 см^2. 18.78. 448 дм^2. 18.79. 147. 18.80. 42. 18.81. 60. 18.82. 12 см. 18.83. 3 см. 18.84. 540 дм^2. 18.85. 27. 18.86. 84. 18.87. $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$. 18.88. 10 см. 18.89. 36. 18.90. 24 см. 18.91. 25. 18.92. $\frac{1}{4}a^2(\sqrt{3}+\sqrt{15})$. 18.93. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. 18.94. $\frac{1}{4}Q$. 18.95. 225 дм^2; 100 дм^2; 25 дм^2. 18.96. 11 см. 18.97. 35 дм. 18.98. $\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. 18.99. 2 : 1. 18.100. $\sqrt{c^2-\frac{1}{2}(a-b)^2}$. 18.101. 9 см. 18.102. 56 см; 24 дм. 18.103. 6 дм. 18.104. $20\sqrt{2}$. 18.105. 168 см^2. 18.106. 12 дм^2. 18.107. 2 дм; 10 дм. 18.108. $a-b$. 18.109. $3a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-4\cos 2\alpha}$. 18.110. $\frac{1}{2}(Q-q)$. 18.111. $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{c^2-(Q-q)^2}$. 18.112. $a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$. 18.113. $\sqrt{3}$ дм. 18.114. $1\frac{5}{9}$ дм, $5\frac{2}{9}$ дм, $5\frac{1}{7}$ дм. 18.115. $\frac{ab}{a+b}$. 18.116. 20 см, 10 см. 18.117. 2 дм, 12 дм. 18.118. 96 дм^2. 18.119. 52. 18.120. 55 дм^2. 18.121. 26,25 см^2. 18.122. 14 дм^2. 18.123. $\sqrt{c^2-\frac{1}{3}(a-b)^2}$. 18.124. 2 дм. 18.125. 1 см^2. 18.126. 64 см^2. 18.127. $\sqrt{3a^2-\frac{4S}{\sqrt{3}}}$. 18.128. $\frac{a^2-b^2}{2}$. 18.129. 24 см^2; 30°. 18.130. $\sqrt{c^2-(a-b)^2}$. 18.131. 36 дм^2. 18.132. $\frac{3}{2}(\sqrt{3}(a^2+b^2)+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2})$. 18.133. 39 см, 51 см. 18.134. 16 см^2. 18.135. 32 см^2. 18.136. $\frac{h\sqrt[4]{q}}{\sqrt[4]{Q}+\sqrt[4]{q}}$. 18.137. 50 см^2. 18.138. $\frac{1}{9}(Q+4q+4\sqrt{Qq})=8$; $\frac{1}{9}(4Q+q+4\sqrt{Qq})=18$.

§ 19.

19.1. 5 см. 19.2. $\frac{\pi Q}{4}$. 19.3. 36 дм^2. 19.4. 3 см. 19.5. 96 дм^2. 19.6. 14. 19.7. 90°. 19.8. 3 см. 19.9. $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$. 19.10. $\frac{h\sqrt{-\cos 2\alpha}}{2\sin\alpha}$. 19.11. $\frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 19.12. 45°. 19.13. 10 см. 19.14. 5 см. 19.15. 0,5 l. 19.16. R^2. 19.17. 12 дм^2. 19.18. 99. 19.19. 50. 19.20. $2R^2\sin\alpha$. 19.21. 45°. 19.22. 500 дм^2. 19.23. $2h^2$. 19.24. 13,5 дм^2. 19.25. $100\sqrt{2}$ дм^2. 19.26. 6. 19.27. $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\varphi}$, $\alpha+\varphi<90°$.

19.28. $\frac{h^2\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha\sin^2\beta}$. 19.29. $\frac{H}{\sqrt{2}}$. 19.30. $\frac{1}{4}\pi R^2$. 19.31. $\pi R^2\frac{m^2}{(m+n)^2}$. 19.32. $\pi\frac{R^2d^2}{H^2}$. 19.33. $\frac{3l}{4}$. 19.34. 3 см. 19.35. $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}(k-1))$. 19.36. $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. 19.37. $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. 19.39. 81. 19.40. $\frac{3\sqrt{2}l^2\sin^2 2\alpha}{8\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. 19.41. 5 см. 19.42. $R-r$. 19.43. 96 дм^2. 19.44. 20 см. 19.45. $2H$. 19.46. a, $2a$. 19.47. 30 см^2. 19.48. 9 см^2. 19.49. $\frac{1}{4}(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2$. 19.50. 9 м^2, 16 м^2. 19.51. $\frac{1}{2}$ основ трапеции. 19.52. 4 см. 19.53. 16π м^2. 19.54. 27. 19.55. 21. 19.56. 2 см. 19.57. $\frac{\pi R^2}{4}$. 19.58. $\frac{\pi R^2}{4}$. 19.59. 4. 19.60. 12 см. 19.61. 12 см. 19.62. $\pi R\sqrt{3}$. 19.63. 45 м. 19.64. $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{12}}$. 19.65. 3 см. 19.66. 8 см. 19.67. 42 дм^2. 19.68. $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. 19.69. 5 см. 19.70. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 19.71. 7 см. 19.72. 3 см. 19.73. 8 см. 19.74. 11 см. 19.75. $12R^2\sqrt{3}$. 19.76. 4 см. 19.77. 18 см. 19.78. 13 см. 19.79. $18R^2\sqrt{3}$. 19.80. $\frac{b^2}{2h}$. 19.81. 3 см. 19.82. $\frac{a(3+\cos 2\alpha)}{4\sin 2\alpha}$. 19.83. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. 19.84. $\frac{1}{3}h$, $h(\sqrt{2}-1)$. 19.85. $\frac{a}{6}\sqrt{\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}}$. 19.86. 8,1 дм. 19.87. $1,5h$. 19.88. 2 см. 19.89. $\frac{1}{3}a$. 19.90. 5 см. 19.91. 5 м. 19.92. 12 см. 19.93. $56R^2$. 19.94. 3 м. 19.95. $\frac{l^2}{2h}$. 19.96. 8 см 6 см 2 см. 19.97. 4 см. 19.98. $\frac{l\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}}{\cos\frac{\beta}{2}}$. 19.99. 5 см. 19.100. 2 см 6 см 14 см. 19.101. $\sqrt{Rr}$. 19.102. $R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. 19.103. $\arccos\frac{1}{3}$.

§ 20.

20.1. $\frac{d^3\sqrt{2}}{4}$. 20.2. $\frac{1}{9}d^3\sqrt{3}$. 20.3. 64 дм^3. 20.4. $\frac{1}{6}S\sqrt{\frac{1}{6}S}$. 20.5. 243^3. 20.6. 1000 дм^3. 20.7. $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$. 20.8. 30 см. 20.9. 6 дм^3. 20.10. 288 дм^3. 20.11. 88 дм^3. 20.12. 90. 20.13. 36 см^3. 20.14. 60 см. 20.15. $\frac{114\sqrt{3}}{5}$. 20.16.

$\frac{1}{n}(p^2 - c^2\sin^2\alpha)l\cos\alpha$. 20.17. 13,5 l^3. 20.18. $r^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. 20.19. 164 l^3. 20.20. 96 l^3. 20.21. 648 l^3. 20.22. 56. 20.23. 5 l^3. 20.24. 72. 20.25. 108. 20.26. $ab\sin\alpha$. 20.27. 11,25 l^3. 20.28. 42. 20.29. 60 l^3. 20.30. 780 l^3. 20.31. $4\sqrt{3}$ l^2. 20.32. $\frac{h^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{clg}\beta$. 20.33. 187,5 l^3. 20.34. 250. 20.35. 48. 20.36. 12 q^3. 20.37. $\frac{ab\sqrt{6a^2}}{2}$. 20.38. 16. 20.39. 360 l^3. 20.40. 36 l^3. 20.41. $\frac{135\sqrt{3}}{2}l^3$. 20.42. 64 l^3. 20.43. 240 l^3. 20.44. 384. 20.45. 525 l^3. 20.46. 17280 l^3. 20.47. 312 q^3. 20.48. 54 l^3. 20.49. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. 20.50. 57,2 l^3. 20.51. 54 l^3. 20.52. 13,5 l^3. 20.53. 64. 20.54. 450 l^3. 20.55. $\sqrt{2}$ l^3. 20.56. 125 l^3. 20.57. a^2b. 20.58. $a^3\sqrt{a^2-2b^2}$. 20.59. 92. 20.60. $3P\div\frac{4V}{1\,P}$. 20.61. 8 l^3. 20.62. $6\sqrt{2}\,l^3$ и 32 l^3. 20.63. 108 l^3. 20.64. 54 l^3. 20.65. $\frac{a^3\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. 20.66. $\frac{V^2}{V^2+a^6}$. 20.67. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. a^2b. 20.68. 192 l^3. 20.69. $\frac{1}{9}a^3$. 20.70. 2,25 l^3. 20.71. 48 l^3. 20.72. 12. 20.73. $(27\sqrt{2}-27\sqrt{3})\frac{a^3}{2}$. 20.74. $\frac{2\sqrt{39}R^3}{169}$. 20.75. $\frac{16\sqrt{7}}{49}l^3\cdot\cos^3\alpha\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$. 20.76. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. 20.77. 72 l^3. 20.78. $\frac{2d^3\sqrt{3}}{11\sqrt{}}$. 20.79. $4\sqrt{3}R^3$. 20.80. 1,5a. 20.81. $18\sqrt{3}$ l^2. 20.82. 6 l^3. 20.83. 15. 20.84. 16. 20.85. 45. 20.86. $\frac{a^3}{2}\sin2\alpha\operatorname{tg}\beta$. 20.87. $\frac{1}{8}(a^2-b^2)(a-b)\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. 20.88. 7320 l^3. 20.89. 60. 20.90. 48 l^3. 20.91. 42 l^3. 20.92. $\frac{1}{4l}\sqrt{(M+N+P)(M+N-P)(M-P-N)(N+P-M)}$. 20.93. 103 l^3. 20.94. $2r^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 20.95. 3,4 l^3; 2,4 l^3; 3,2 l^3. 20.96. $\frac{1}{2}aS\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$. 20.97. $\frac{a^3(\sqrt{2}-1)}{8}$. 20.98. $\frac{1}{8}a^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 20.99. $\frac{1}{6}\beta^3\sin2\beta\cos\beta\operatorname{clg}\frac{\alpha}{2}$. 20.100. 12 l^3. 20.101. 10,5. 20.102. $\frac{1}{3}d^3\sin\beta\sin2\beta\sin\alpha$. 20.103. 25. 20.104. $\frac{2V\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$. 20.105. $\frac{H^2\cos\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{2\sin^2\alpha}$. 20.106. Q. 20.107. 3960 l^3. 20.108. 1 l^3. 20.109. 630. 20.110. 2 l^3. 20.111. 45 l^3.

20.112. 100 l^3. 20.113. $\frac{1}{8}a^3\sqrt{2}$. 20.114. $18\sqrt{2}\,a^3$. 20.115. $\frac{3a^3}{2}$. 20.116. 7,2.

20.117. 2. 20.118. 7,5. 20.119. $\frac{1}{3}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$. 20.120. $\frac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\pi-\alpha}{4}}$.

20.121. $2a^3\cos^3\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$. 20.122. 2 l^3. 20.123. 75.

§ 21.

21.1. $\frac{a^2h}{3}$. 21.2. $\frac{1}{6}a^2\sqrt{4b^2-2a^2}$. 21.3. 32 l^3. 21.4. $\frac{1}{12}l^3\sqrt{3}$. 21.5. 144. 21.6. $\frac{1}{6}a^3\operatorname{tg}\alpha$. 21.7. 48. 21.8. $\frac{4a^3\operatorname{tg}\alpha}{3(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}$. 21.9. 6. 21.10. $\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$. 21.11. 32 l^3. 21.12. 32. 21.13. 9. 21.14. $\frac{1}{2}V$. 21.15. 54 l^3. 21.16. $\frac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}$. 21.17. $\frac{1}{3}a^3\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 21.18. $\frac{1}{12}\sqrt{3}\,a^2h$. 21.19. $\frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2-a^2}$. 21.20. $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$. 21.21. $\frac{\sqrt{3}}{4}b(l^2-b^2)$. 21.22. 4,5. 21.23. 66 l^3. 21.24. $\frac{\sqrt{3}}{27}h^2\sqrt{9m^2-h^2}$. 21.25. 5 l^3. 21.26. 72 l^3. 21.27. 90. 21.28. $\frac{1}{3}h^3\sqrt{3}$. 21.29. $\frac{1}{6}b^3$. 21.30. 36 l^3. 21.31. $\frac{V47}{24}$. 21.32. $\frac{1}{2}h^3\sqrt{3}$. 21.33. 48. 21.34. $\frac{\sqrt{3}a^3\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}$. 21.36. 27 : 1. 21.37. $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{48}$. 21.38. $\frac{1}{16}a^3\sqrt{2}$. 21.39. $\frac{2\sqrt{5}}{\pi^3}$. 21.40. $\frac{a^3}{128}$. 21.41. $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2h$. 21.42. $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3(b^2-a^2)}$. 21.43. 72 l^3. 21.44. 7 l^3. 21.45. $\frac{3}{4}a^3$. 21.46. $\frac{2l^3}{16}$. 21.47. 14 l^3. 21.48. $\frac{9}{4}a^2\sqrt{11}$. 21.49. $\frac{6\sqrt{1838}}{47}$. 21.50. $\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2 15^\circ}\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 21.51. 360 l^3. 21.52. 120 l^3. 21.53. $\frac{b^3\sqrt{3}}{24}$. 21.54. $\frac{1}{9}S\sqrt{S}\sqrt{2T}$. 21.55. 5536 l^3. 21.56. $\frac{2}{3}h^3\operatorname{tg}^2\alpha\sin\beta$. 21.57. $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. 21.58. $\frac{4}{3}R^3\sin^3 2\beta\sin^2\beta\sin\alpha$. 21.59. $\frac{1}{6}a^2$. 21.60. $6V$. 21.61. $\frac{1}{3}S\sqrt{S}$. 21.62. 9 l^3. 21.63. $\frac{2}{3}R^3\sin2\beta\cos\beta\sin\alpha$. 21.64. $\frac{br^2\sqrt{3}}{3}$. 21.65. $\frac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}$. 21.66.

$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt[3]{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. 21.67. 500 см³. 21.68. $\frac{1}{12}d_1\sqrt{15Q^2-d_1^2d_2^2}$. 21.69.

$\frac{2S}{3\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta\sin\frac{\alpha}{2}}$. 21.70. $\frac{a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{3}$. 21.71. 71 см³. 21.72. 200 см³.

21.73. 63. 21.74. 80 см³. 21.75. 40 см³. 21.76. 18. 21.77. 45 см³. 21.78. 108 см³.

21.79. 6 см³. 21.80. 16 см³. 21.81. 12 см³. 21.82. $\frac{1}{6}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. 21.83.

$\frac{S\sqrt{2S\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}}{6\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}$. 21.84. 64. 21.85. $\frac{a}{3\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

21.86. 10 см³. 21.87. 4 см³. 21.88. 9 см³. 21.89. $\frac{2l^2Q}{3a}$. 21.90. 12 см³. 21.91. 6.

21.92. 75. 21.93. $\frac{mnc^3\sqrt{4b^2-c^2}}{12(m^2+n^2)}$. 21.94. $\frac{1}{3}H^3\operatorname{ctg}^2\beta\sin2\alpha$. 21.95.

$\frac{\sqrt{2}}{12}r^3\operatorname{tg}\beta\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$. 21.96. 420 см³. 21.97. 60 см³. 21.98.

$\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\gamma$. 21.99. 55 см³. 21.100. $\sqrt{21}$ см³. 21.101. 576 см³.

21.102. 400 см³. 180 см³. 21.103. $\frac{a^3\operatorname{ctg}\varphi\sin\alpha\sin\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$. 21.104. $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$.

21.105. $\frac{l^3\sin\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\beta}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$. 21.106. 7 : 1. 21.107. $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

21.108. 75,85 см³. 21.109. $\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$. 21.110. $\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\sqrt{l^2-\frac{1}{2}(a-b)^2}$.

21.111. 5 см, 21.112. 109 см³. 21.113. 84 см³. 21.114. $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{2}}{6}$. 21.115.

$\frac{(a^3-b^3)\sqrt{2}}{6}$. 21.116. 10,5 см². 21.117. 10 $\sqrt{19}$ см². 21.118. $\frac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$.

21.119. $\frac{2}{3}R^3\sin2\alpha(1-\cos2\alpha+\cos^2 2\alpha)$. 21.120. $\frac{h}{4\sqrt{3}}(a^2+ab+b^2)$. 21.121.

$\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\sqrt{3l^2-(a-b)^2}$. 21.122. 1900 см³. 21.123. $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{3}}{12}$. 21.124.

11. 21.125. $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. 21.126. $\frac{H^3\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha}$. 21.127. 1900 см³. 21.128. 48 см³.

21.129. $\frac{h\sqrt{3}}{2}(a^2+ab+b^2)$. 21.130. $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+ab+b^2)\sqrt{l^2-(a-b)^2}$. 21.131.

$\frac{1}{2}(a^3-b^3)$. 21.132. $\frac{21R^3}{16}$. 21.133. 315 см³. 21.134. $\frac{VS_2\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2}-S_1\sqrt{S_1}}$. 21.135.

232 см³. 21.136. 20 см², 45 см², 21.137. 8 см². 21.138. 2 см², 8 см². 21.139. 128 см², 80 см².

22.1. πR^2H. 22.2. πa^3. 22.3. $4\pi\sqrt{2}$. 22.4. 17,5 л. 22.5. 93. 22.6. 4. 22.7. 75.

22.8. 91. 22. 9. 65. 22. 10. $\frac{\pi l^3\sin2\alpha\cos^2\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. 22. 11. $\frac{\pi l^3\sin2\beta\cos\beta}{8\cos^2\alpha}$. 22. 12.

$\frac{1}{2}\pi a^2H$. 22.13. $\frac{1}{4}\pi a^2H$. 22.14. $\frac{1}{3}\pi a^2H$. 22.15. $\frac{1}{12}\pi a^2H$. 22.16. 4 : 1. 22.17.

$\frac{3}{4}\pi a^3$. 22.18. πa^3. 22.19. $\frac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}$. 22.20. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}\sin^2 2\alpha}{128\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. 22.21.

$\frac{1}{3}\pi R^2H$. 22.22. $\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2-R^2}$. 22.23. $\frac{1}{3}Q\sqrt{l^2-\frac{Q}{\pi}}$. 22.24.

$\frac{c^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2l^2-c^2}$. 22.25. $\frac{1}{3}\pi l(l^2-H^2)$. 22.26. $\frac{1}{2}\pi l^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. 22.27. 55.

22.28. 6. 22.29. 25 см². 22.30. $\frac{3V}{\pi R}$. 22.31. 9π см². 22.32. 23 см². 22.33. 91 см². 22.34.

$\frac{1}{3}\pi a^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. 22.35. $\frac{\pi a^3\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}{6\cos^4\frac{\alpha}{2}}$. 22.36. $\frac{\pi a^3H}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 22.37. 81.

22.38. 22. 22.39. $\frac{\pi l^3}{3\sin^2\beta}\left(\cos^2\beta+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$. 22.40. $\frac{2\pi a^3}{3\cos\alpha\sin2\alpha\cos^2\frac{\pi q}{p+q}}$. 22.41.

92 см². 22.42. 12 см. 22.43. 35 : 36. 22.44. 72π см². 22.45. $\frac{\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$.

22.46. $\frac{\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha}{24\cos^6\alpha}$. 22.47. $\frac{2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\pi(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}$. 22.48. $\frac{2\pi}{\sin2\alpha}$. 22.49. $\pi R:P$. 22.50.

$\frac{\cos^3\alpha\cos^2\beta}{3\sin\alpha\sin\beta\cos^2(\alpha+\beta)}$. 22.51. $\frac{1}{2}\pi l^3\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. 22.52. 99. 22.53. 29. 22.54.

$\frac{\pi a^3}{4}$. 22.55. 18 см³. 22.56. $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. 22.57. 44 см³. 22.58. 48. 22.59. 3.

22.60. 15. 22.61. $\frac{1}{3}\pi h(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)$. 22.62. $\frac{\pi}{3}(R^3-r^3)$. 22.63. 31. 22.64.

63π см³. 22.65. 5 см. 22.66. 7 см. 22.67. 78 см. 22.68. 28; 5,5 и 12,5. 22.69. 7 см.

22.70. 61 см². 22.71. $\frac{\pi^3}{3}|R^3-r^3|$. 22.72. 77 см³. 22.73. 10 см, 20 см. 22.74. 3020π см³.

22.75. 218π см³; 366π см³; 602π см³. 22.76. $1-\left(\frac{r}{R}\right)^3$, если $r<R$. 22.77.

$2\pi R\frac{l^2-R^2}{3}$. 22.78. $\frac{7}{54}\pi l^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. 22.79. 457π см³. 22.80. 56 см². 22.81.

65 см². 22.82. 57 см³. 22.83. 2π см². 22.84. $\frac{\pi r^3}{3}\sin^2 2\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

22.85. $\frac{4}{3}\pi\,d^3$. 22.86. 6 см. 22.87. 180. 22.88. 20 дм. 22.89. 20 дм. 22.90. 9 : 4.

22.91. 2 : π. 22.92. 1002π см^3. 22.93. 64π : 27. 22.94. $\frac{\pi a^3}{81}$. 22.95. $\frac{2}{\pi}\,\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$. 22.96. 8 : 1. 22.97. 74π. 22.98. $\frac{1152\pi}{125}$. 22.99. $\frac{\pi d^3}{12}\sin^2\alpha$.

22.100. $\frac{2}{3}\pi R^3\,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$. 22.101. $\frac{\pi r\sqrt{2\sin 2\alpha}}{3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$. 22.102. 45π см^3; 243π дм^3. 22.103. 0,028. 22.104. 3 : 16. 22.105. 3528π см^3. 22.106. $\frac{1}{3}\pi R^3$. 22.107. $112{,}5\pi$ см^3. 22.108. $\frac{1}{3}\pi R^3\left(2-\sqrt{3}\right)$. 22.109. $\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$. 22.110. 64152π дм^3.

§ 23.

23.1. 36π дм^2. 23.2. $2\pi ab$. 23.3. π^3. 23.4. πh^2. 23.5. R. 23.6. 5,5 дм^2. 23.7. $\pi M+2Q$. 23.8. 97 дм^2. 23.9. 4 дм. 23.10. 2,76. 23.11. $\frac{a^2}{12}$. 23.12. 6. 23.13. 12,72. 23.14. 33. 23.15. $\frac{1}{2}d^2\sin\alpha$. 23.16. $12\pi a^2$. 23.17. $\pi : 3$. 23.18. $\pi a^2(\sqrt{3}-2)$. 23.19. $\frac{1}{4}\pi a^2(3\sin^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\alpha$. 23.20. 80 см. 23.21. 24 см. 23.22. $\frac{S}{\cos\alpha}$. 23.23. 49. 23.24. 37. 23.25. 2 : 1. 23.26. πH^2. 23.27. 12 дм^2. 23.28. 96π см^2. 23.29. 200π см^2. 23.30. 24π дм^2. 23.31. 73 см^2. 23.32. 88. 23.33. 64. 23.34. $\frac{\sqrt{S}}{3}$. 23.35. $\frac{\pi a^2}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}$. 23.36. $\frac{\pi Q\sqrt{Q}}{2\sqrt[4]{3}}$.

23.37. $\frac{2}{3}\,\frac{\pi^3R^3}{\pi^2-1}$. 23.38. $2\operatorname{arctg}\pi$. 23.39. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 23.40. $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{\pi}{h}$. 23.41. 9. 23.42. 6 дм. 23.43. $2R\sqrt[3]{4}$. 23.44. $\frac{\sin\alpha}{4\pi\cos\beta\cos^2\frac{\beta}{2}}$. 23.45. 49 см^2. 23.46. 37 дм. 23.47. $2\pi h\sqrt{\pi^2+\frac{h^2}{4}}$.

23.48. 29. 23.49. $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2-b^2}}$. 23.50. 1320π см^2. 23.51. $\frac{1}{2}\pi a^2(3+\sqrt{3})$. 23.52. 216π см^2. 23.53. 96 см^2. 23.54. $226\pi\sqrt{3}$ см^2. 23.55. 11. 23.56. $\frac{1}{3}\pi R^3\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha$. 23.57. $\pi r^2(5\sqrt{2}+7)$. 23.58. $\frac{\pi a^2}{2}$. 23.59. $\pi:\sqrt{7}$. 23.60. 30 дм. 23.61. $\sin^4\frac{\alpha}{2}$. 23.62. $2\pi(\sqrt{2}+1)a^2$. 23.63. 31.

23.64. $\frac{2\pi d^2}{\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 23.65. 39. 23.66. $\frac{27\sqrt{2}}{8}$ дм^3. 23.67. $\frac{9\sin 2\alpha\cos\alpha}{8\pi\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$.

23.68. 216°. 23.69. 360°. $\frac{R}{L}$; фигурирует π-угол. Задача содержательна при $\alpha<180°$. 23.70. 1) $\approx 255°$; 2) $\approx 212°$. 23.71. 30°. 23.72. 1 см. 23.73. 11 дм^2. 23.74. $\frac{1}{3}\pi M\sqrt{15}$. 23.75. $\frac{1}{21}\pi S\sqrt{5S}$. 23.76. $\frac{\pi h^3}{24}$. 23.77. 35π см^2. 23.78. 4 дм. 23.79. $2\pi(R^2-r^2)$. 23.80. $\pi(R^2-r^2)\sqrt{2}$. 23.81. 100π см^2. 23.82. 14 см. 23.83. 26 см, 12 см. 23.84. 5 см. 23.85. 5 см. 23.86. 46 см^2. 23.87. $\frac{SR^2}{R^2-r^2}$. 23.88. $\frac{2Rr}{R+r}$. 23.89. $2(Q-q)$. 23.90. $\frac{SH}{L\pi}$. 23.91. $\frac{1}{\pi}\sqrt{S^2-(Q-q)^2}$. 23.92. 169π см^2. 23.93. 84. 23.94. 28. 23.95. $\frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$. 23.96. 56. 23.97. $4\pi a^2\sqrt{2}$. 23.98. $2\pi a^2\sqrt{3}$. 23.99. $2\pi a^2\sqrt{3}$. 23.100. 270π см^2. 23.101. 1440π см^2. 23.102. 1024π см^2. 23.103. 100π см^2. 23.104. $560{,}5\pi$ см^2. 23.105. $\sqrt[3]{36\pi}V^2$. 23.106. 4 см. 23.107. $3\pi R^2$. 23.108. 81. 23.109. Содержательна. Задача допускает два решения: $\frac{\pi(R^2+h^2)^2}{h^2}$. 23.110. 25π см^2. 23.111. $\frac{\pi(R^2+h^2)^2}{h^2}$.

23.112. $S:\pi=\pi:2$. 23.113. $\frac{9}{10}$. 23.114. 3 : 5. 23.115. 5 : 1. 23.116. 2 : 3. 23.117. 9π см^2. 23.118. 49. 23.119. 49. 23.120. $\frac{Y}{25}$. 23.121. $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$. 23.122. $\arccos\frac{3}{5}$. 23.123. $\frac{\pi a^2}{6}$. 23.124. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}(4\operatorname{ctg}^2\alpha+3)$. 23.125. $\frac{64\pi}{9}$ дм^2. 23.126. $\frac{3}{2}R$. 23.127. $\frac{21\pi Q}{6\pi-3\sqrt{3}}$. 23.128. 180π см^2. 23.129. $2Q(4-\sqrt{2})$. 23.130. $\frac{1}{3}$.

§ 24.

24.1. $3a^2\sqrt{3}$. 24.2. $\frac{a^3}{8}$, $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

24.3. $\frac{a^2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 24.4. $\frac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}$.

24.5. $\frac{9p^3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$. 24.6. $\frac{d^3\sqrt{2}}{3}$. 24.7. $\frac{\sqrt{3}a^3\sqrt{(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)^3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$.

24.8. $\frac{a^3}{36}\sqrt{3\cos^2\alpha+1}\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\beta$. 24.9. $\frac{\sqrt{3}\,p^3\sqrt{(4+\mathrm{tg}^2\alpha)^3}}{8\,\mathrm{tg}^2\alpha}$. 24.10. $\frac{1+k}{2}$.

24.11. $\frac{18\,a^8b^8}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}$. 24.12. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 24.13. $\frac{16}{3}\mathrm{Sctg}\,\alpha\times$

$\times\frac{\sqrt{3S\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}}{\sin 2\alpha}$. 24.14. $\frac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$. 24.15. $\frac{3}{4}a^3$.

24.16. $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$ или $\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{5}}$. 24.17. 60°. 24.18. $\frac{1}{6}a^2\sqrt{1+\sqrt{5}}$. 24.19.

$-\frac{b^2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{2\cos^2\alpha}$. 24.20. $\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{\sin\alpha}$, или $\mathrm{arc\,tg}\frac{2}{\cos\alpha}$. 24.21. $\arcsin\frac{S}{l^2}\pm\frac{\pi}{3}$.

$\arcsin\frac{S}{l^2}$. 24.22. $\frac{m^2(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{6}$. $\frac{1}{6}m^2\sqrt{3}$. 24.23. $\frac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha}$. 24.24.

$\frac{a\sqrt{3}}{3\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)\mathrm{tg}\alpha$. 24.25. $\frac{a^2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

24.26. $\arccos(\sqrt{3}-1)$ или $\frac{\pi}{2}+\arccos(\sqrt{3}-1)$. 24.27. $\sin\beta\sqrt{-\frac{S\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}$.

24.28. $\frac{1}{2}a^2(6+3\sqrt{3}+\sqrt{7})$. 24.29. $\frac{1}{2}a^2(1+\sqrt{7})$. $\frac{1}{12}a^2\sqrt{2}$. 24.30. $\sqrt{5}$.

24.31. $\frac{7}{15}$. 24.32. $\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{3}$. 24.33. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{3(2n-m)}{m}}\right)$. 24.34.

$\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ или $\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$. 24.35. $\frac{3k}{k^2-2}$. 24.36. $\arccos\frac{\sqrt{5}}{30}$.

24.37. $2\arcsin\frac{k}{\sqrt{3}}$; $0<k<\sqrt{3}$. 24.38. $\frac{\sin\alpha}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}$. 24.39. $2\,\mathrm{arctg}(2k\sqrt{3})$.

24.40. $\frac{1}{7}$. 24.41. $\mathrm{arctg}\left(\frac{k}{k-3}\mathrm{tg}\alpha\right)$. 24.42. $\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{ctg}\alpha\pm\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha-8}}{2}$. 24.43.

$\frac{a^2}{\sqrt{-\cos\alpha}}$. 24.44. $\sqrt{-k}$; $-1<k<0$. 24.45. $16k^3-1$. 24.46. $2\mathrm{arctg}\sqrt{3}$.

24.47. $\frac{4k^2}{4k^2+1}$. 24.48. $\mathrm{arctg}\,(2\mathrm{ctg}\alpha)$. 24.49. $\arccos\left(-\frac{a^4}{S^2}\right)$. 24.50. $-\frac{1}{3}$.

24.51. $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 24.52. $\frac{\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}\sin(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\cos\beta}$. 24.54. 28 см.

24.55. $\frac{a(a-b)\mathrm{tg}\alpha}{3a-b}$. 24.56. $\sin(\alpha\pm\beta)\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin^2\beta}}$. 24.57. 168. 24.58.

$\frac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. 24.59. $\frac{l}{3}\sqrt{3-4\cos 2\alpha}$. 24.60. $\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$. 24.61. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

24.62. $\frac{\arccos\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha}}{\pi-\arccos\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha}}$. 24.63. $\mathrm{arctg}\frac{2(4+\sqrt{6})}{5}$. 24.64. $\frac{\pi a^3\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{24\cos^3\frac{\alpha}{2}}$. 24.65.

$\frac{\pi l^3\sin^2 2\alpha\cos 3\alpha\sin^3\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$. 24.66. $\frac{8\sqrt{3}\,\pi r^2}{3\sin^2\alpha}$. 24.67. $\frac{1}{2}\arcsin[2(\sqrt{2}-1)]$ или

$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin[2(\sqrt{3}-1)]$. 24.68. $S/2$. 24.69. $\frac{\pi}{3}ab(a+b)\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$.

24.70. $\arccos\frac{1}{9}$. 24.71. $\sec\cos\frac{1}{\sqrt{3}}$. 24.72. $\frac{\pi a^2}{3}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\alpha$. 24.73.

$\frac{\pi a^2}{6}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}-3\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right)$. 24.74. $\frac{\pi a^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{3\sin^2\alpha}$. 24.75. $\frac{1}{2}\pi a^2\times$

$\times\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, если $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 24.76. $\frac{8\pi r^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\alpha}$. 24.77. $2\sin^2\alpha\times$

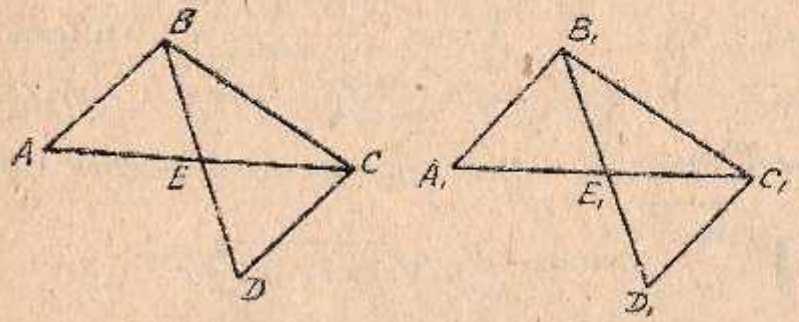
$\times\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. 24.78. $\frac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. 24.79. 85. 24.80. $\frac{2}{3}R^2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

24.81. $\frac{\pi a^3}{12}\sin^3\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 24.82. $\mathrm{arc\,tg}\,2$. 24.83. 3 : 7. 24.84. 9 : 64. 24.85.

$R\sqrt[3]{\frac{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}}$. 24.86. $\frac{l}{2\cos^3\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\beta+\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

25.87. $\frac{R\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8}\right)}$. 24.88. $\frac{n\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha\sin^2\frac{\pi}{n}}{4\pi}$. 24.89. $\frac{23}{25}$.

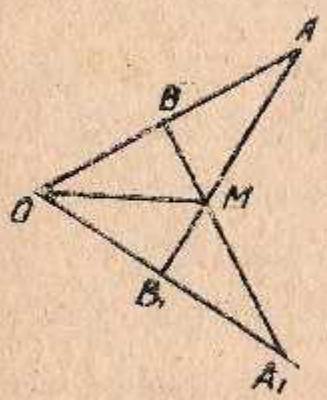
§ 3



ნახ. 213.

3.38. (ნახ. 212). BF და B_1F_1-ის გაგრძელებაზე მოვათავსოთ FO ტოლი EO და F_1D_1 ტოლი E_1D_1 ისე, რომ D და D_1 წერტილები შესაბამისად C და C_1 წერტილებიან.

3.40. იხილეთ 3.26-ის ამოხსნა.

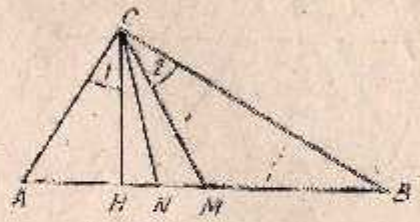


ნახ. 214.

3.41. (ნახ. 214). $\triangle AOB_1 = \triangle A_1OB$; $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M$, $\triangle OMB = \triangle OMB_1$.

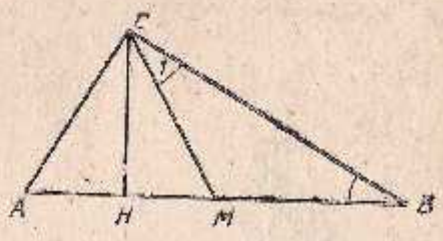
§ 4

4.70. (ნახ. 215). $CM = MB$, $\angle 2 = \angle 1$.



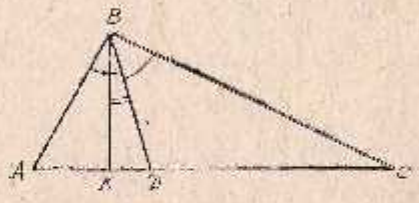
ნახ. 215.

4.71. (ნახ. 216). $\angle B = \angle 1$; $\angle A = \angle HCB$



ნახ. 216.

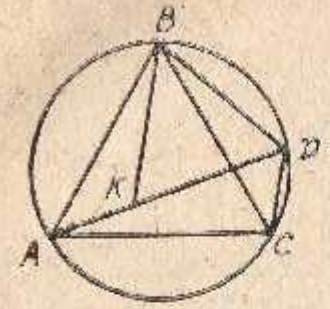
4.72. (ნახ. 217). ვთქვათ, $\angle A > \angle C$. $\angle A = 90° - \left(\frac{\angle B}{2} - x\right)$, $\angle C = 90° - \left(\frac{\angle B}{2} + x\right)$.



ნახ. 217.

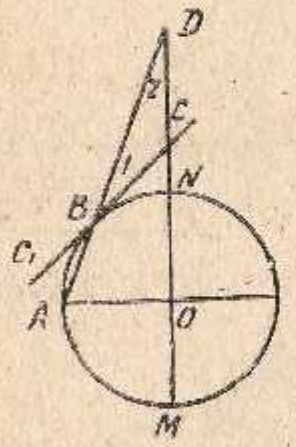
§ 5

5.88. პარალელოგრამის კუთხეზე ბისექტრებს შორის მდებარე მონაკვეთის მიმართ ცენტრალურ სიმეტრიაში ერთმანეთში გადადის მეზობელი გვერდების შუაწერტილები და დიაგონალის ნაწილი.



ნახ. 218.

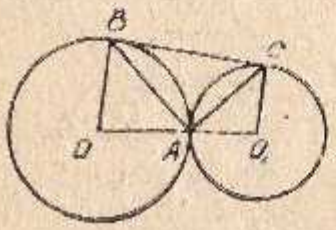
5.94. (ნახ. 218). ABC ტოლგვერდა სამკუთხედია. გავლებით, რომ $DA = DB = DC$. ვთვლით $DK = DB$, K წერტილი შეიერთებით B-სთან. $\triangle BDK$ ტოლგვერდაა, ე. ი. $BK = BD$. $\triangle ABK = \triangle CBD$, ამიტომ $AK = DC$.



ნახ. 219.

5.95. (ნახ. 219). $\angle 1 = \angle ABC_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.

$$\angle 2 = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{BN}\right) = \frac{1}{2}\left(90^\circ - \overset{\frown}{BN}\right) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}.$$

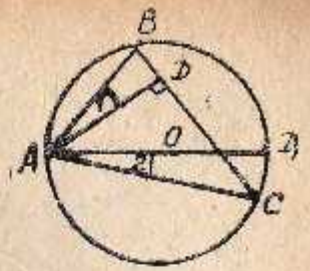


ნახ. 220.

5.98. (ნახ. 220). $\angle OAB + \angle O_1AC = 90^\circ$, მაგრამ $\angle O + \angle O_1 = 180^\circ$.

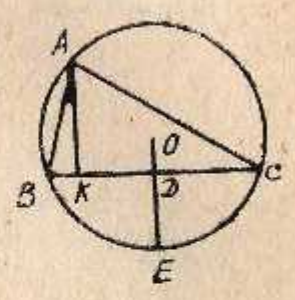
5.99. (ნახ. 221). $\angle 1 = \frac{1}{2}B_1C = 90^\circ - \frac{1}{2}AC$,

$$\angle 1 = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}.$$



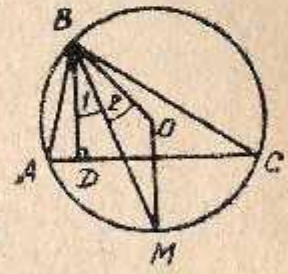
ნახ. 221.

5.100. (ნახ. 222). $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC}$, ამიტომ $OE \perp BC$.



ნახ. 222.

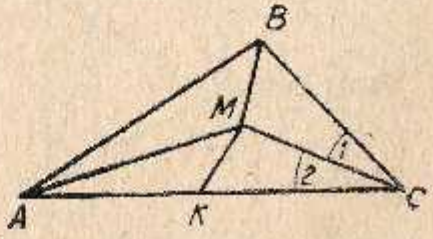
5.102. (ნახ. 223) $OM \parallel BD$ ისეთივე ამოცანაა 5.100.



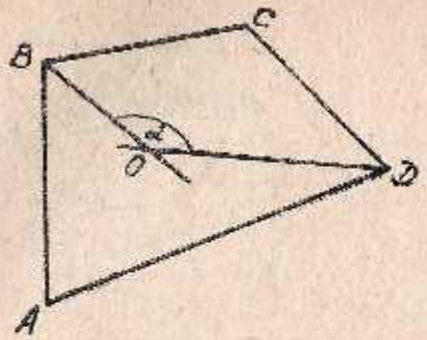
ნახ. 223.

§ 6

5.105. (ნახ. 224). AC მკვეთილზე გადებულია CB-ს ტოლი CK მონაკვეთი. K წერტილი შეიერთებით M-თან, $AK < AM - MK$.



ნახ. 224.



ნახ. 225.

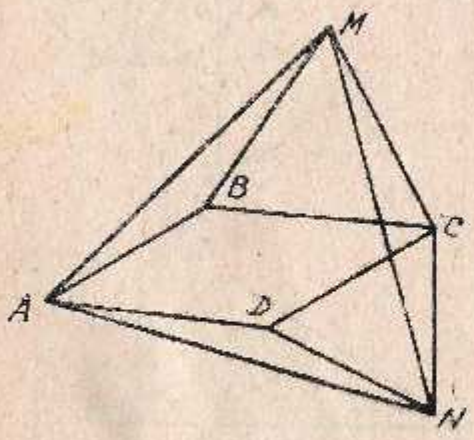
6.139. (ნახ. 225) $\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}+$
$+\frac{\angle D}{2}+\frac{\angle C}{2}=180^\circ$ (1).
$\frac{\angle B}{2}+\angle C+\frac{\angle D}{2}+\alpha=$
$=360^\circ$ (2).
(2) ტოლობას გამოვაკლოთ (1) ტოლობა.

6.140. იხილეთ ამოცანა 6.139.

6.141. პირველი ტრაპეციის ფსიმეტრალურ მეოთხეებს გადაკვეთის წერტილი წვეტიანი სამკუთხედის წვეროებთან და თითოეული მიღებული სამკუთხედისათვის ჩაწერილი წრეწირის ცენტრია სამკუთხედის ცენტრი.

6.142. თანაბარი გვერდისადმი დაწერილი სამკუთხედის ტოლობა დავუშვათ კატეტებში და მიღებული ტოლობები შევკრიბოთ.

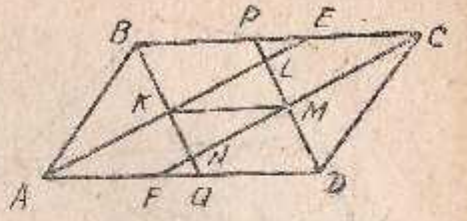
6.143. სამკუთხედის წვეროებზე გავატარეთ პარალელურ გადატანის პარალელური წრფეები.



ნახ. 226.

6.144. (ნახ. 226). $\triangle ABM=$
$=\triangle NCM=\triangle NDA$.

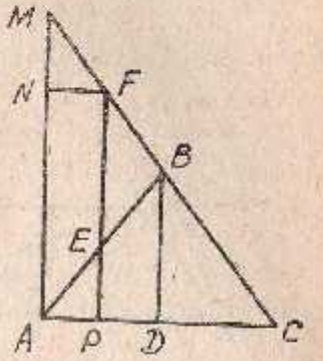
6.145. (ნახ. 227). $EGMK$ პარალელოგრამია.



ნახ. 227.

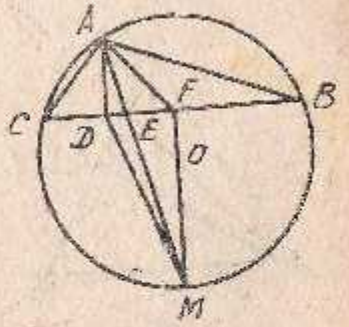
6.146. დებულება არაა სწორი.

6.147. (ნახ. 228). A წერტილიდან აღვმართოთ AC-ს პერპენდიკულარი BC გვერდის გაგრძელების გადაკვეთამდე M წერტილში. გავავლოთ $FN \parallel AC$.
$\triangle MNF=\triangle EPA$.



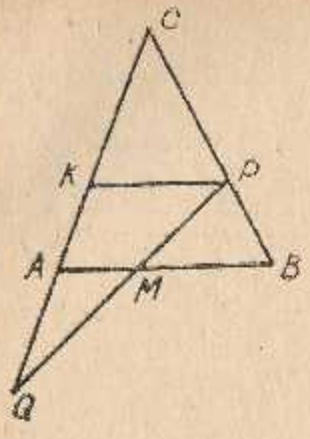
ნახ. 228.

6.148. (ნახ. 229). F წერტილიდან CB გვერდისადმი აღმართული პერპენდიკულარი წრეწირს გადაკვეთს M წერტილში. $AFMD$ ტრაპეციაა. AM დიაგონალი გადაკვეთს E წერტილში.



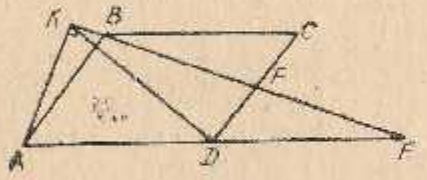
ნახ. 229.

6.149. თითოეული ჩახაზული წრეწირის რადიუსი გამოვსახოთ შესაბამისი სამკუთხედის გვერდების საშუალებით.



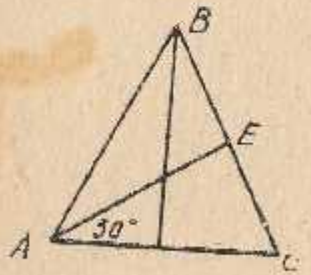
ნახ. 230.

ა.187. (ნახ. 230) დამტკიცოთ $PK = AB$.



ნახ. 231.

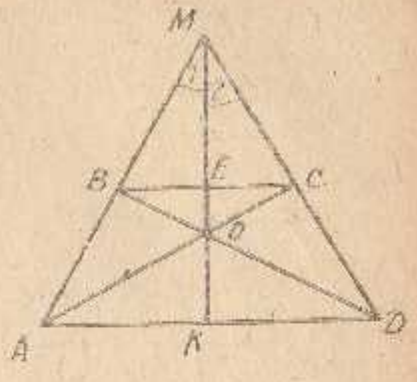
ა.188. (ნახ. 231) დამტკიცოთ BF მაშუალედი AD მკუნძის გაგრძელების დამატებითი E წერტილში. $AD = DE$.



ნახ. 232.

ა.189. (ნახ. 232) ამოვწეროთ BF მაშალი და დავუნახოთ $BF = AL$.

ა.200. (ნახ. 232). $\triangle OBM = \triangle OCM$. $\angle 1 = \angle 2$.



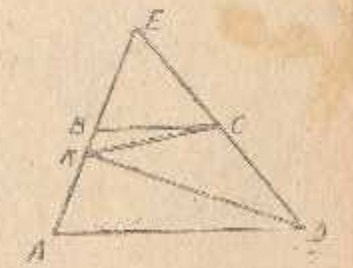
ნახ. 233.

ა.206. (ნახ. 234). მკვრივ წერტილს დასმულებულია E წერტილის დამატებით AEB სამკუთხედის EM წრფისა და დავუნახოთ, რომ ტრაპეციის ფუძეების მანძილების ტოლია.



ნახ. 234.

ა.210. (ნახ. 235). დავამტკიცოთ ტრაპეციის ფერდები გადაკვეთის E წერტილიდან ERD სიმეტრიულია სამკუთხედში KB ჭიდაობაა.

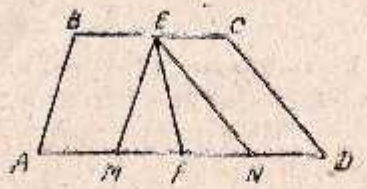


ნახ. 235.

6.215. AB გვერდზე ისეთი M წერტილი ვიპოვოთ, რომ MC და MD წრფეებით $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი ტოლ ნაწილებად დაიყოს.

6.224. გადაკვეთილი სხეული ცილინდრია, რომლის ფუძეებია ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები, ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობი $S=P\cdot AA_1$, სადაც P სამკუთხედის პერიმეტრია.

6.225. (ნახ. 236). BC გვერდის E წერტილიდან გავავლოთ AB და CD დიაგონალების პარალელური წრფეები.



ნახ. 236.

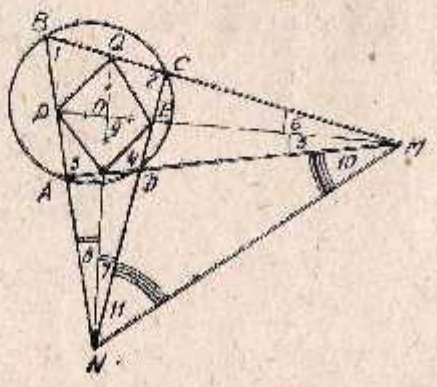
6.226. (ნახ. 237). $\triangle MQN$-დან $\angle 9=180^\circ-(\angle 10+\angle 11+\angle 8+\angle 7)$.

$\angle 10+\angle 11=180^\circ-\angle 4$.

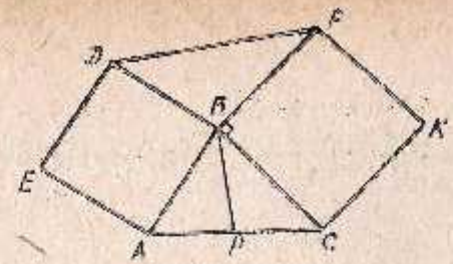
$$\angle 8=\frac{180^\circ-\angle 1-\angle 9}{2}.$$

$$\angle 7=\frac{180^\circ-\angle 1-\angle 2}{2}, \text{ ე. ი. } \angle 8+\angle 7=90^\circ.$$

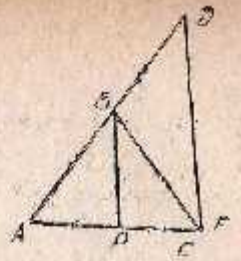
$\triangle PEN$-ში და $\triangle MQF$-ში NO და MO ბისექტრისებია, საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ $PO\perp MN$.



ნახ. 237.

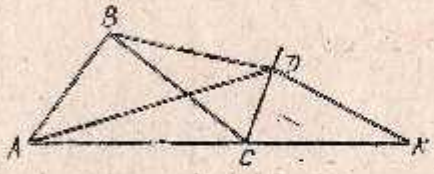


ნახ. 238.



ნახ. 239.

6.227. (ნახ. 238, 239). სამკუთხედი DBF მოვაბრუნოთ B წერტილის გარშემო ისე, რომ F დაეთანადოს C-ს. AB და BD ერთ წრფეზე აღმოჩნდება; ამიტომ $\angle ABC+\angle DBF=180^\circ$ (ნახ. 239).



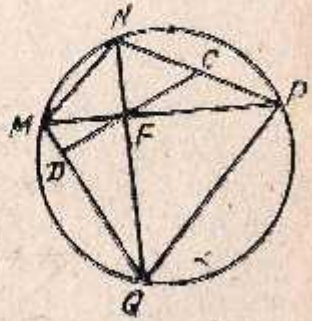
ნახ. 240.

6.228. (ნახ. 240). AC-ს გავაგრძელებთ წრეზე BC-ს ტოლი CK. K წერტილი ვეყრდნობით D-ით.

$$\triangle BCD=\triangle KCD.$$

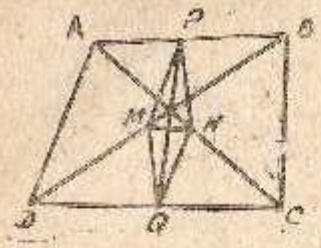
6.229. (ნახ. 241). $\angle MQN=\frac{1}{2}\overset{\frown}{MN}=$

$=\angle CPF=\angle CPP=\angle MFD.$



ნახ. 241.

6.230. ბიშეგი ამოცანა 6.229.

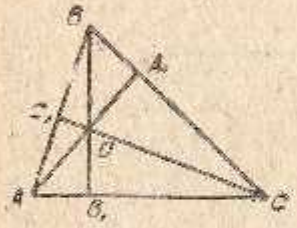


ნახ. 241.

6.231. (ნახ. 242). დაგვჭირდეს, რომ $PMQN$ პარალელოგრამია.

6.232. ისეთივე ამოცანა 6.231.

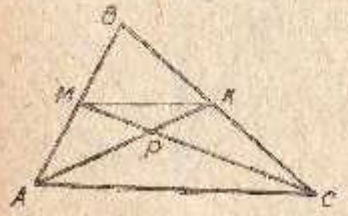
§ 8



ნახ. 243.

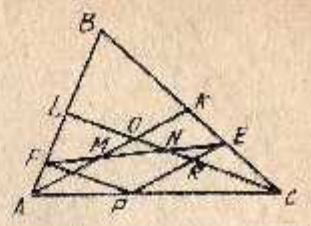
8.93. (ნახ. 243). $\triangle AOB_1 \sim \triangle BOA_1$.

8.94. (ნახ. 244). $\triangle MKP \sim \triangle CAP$.
$MK \parallel AC$ და $MK = \frac{1}{2} AC$.



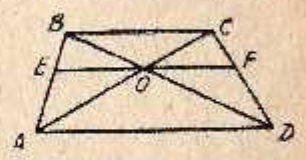
ნახ. 244.

8.95. (ნახ. 245). $\frac{PM}{FE} = \frac{FQ}{PP} = \frac{LO}{LC} = \frac{1}{3}$.

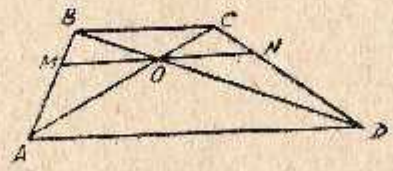


ნახ. 245.

8.100. (ნახ. 246). $\triangle ABC \sim \triangle AEO$ და $\triangle DCB \sim \triangle FO$.

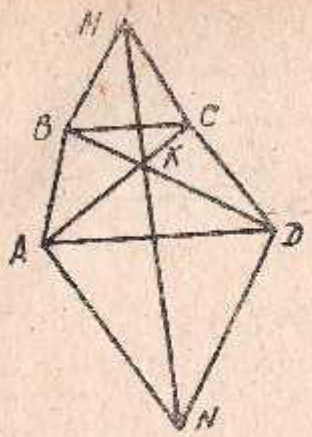


ნახ. 246.



ნახ. 247.

8.101. (ნახ. 247). $\triangle ABC \sim \triangle AMO$, $\triangle DBC \sim \triangle DON$.
$\frac{AB}{AM} \quad \frac{CD}{DN}$



ნახ. 248.

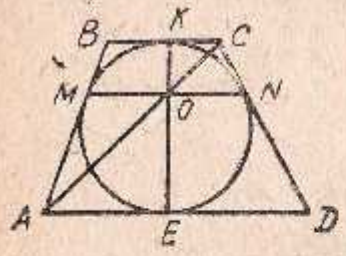
8.102. (ნახ. 248). ვთქვათ AC დიაგონალი MN-ს კვეთს K წერტილში.

$\triangle ANK \sim \triangle CMK$ ამიტომ $\frac{MK}{KN} = \frac{MC}{AN}$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ჩვენს დიაგონალზე MN-ს ყოფს დანარჩენი დიაგონალებიც.

8.103. ფერდების გაგრძელების გადაკვეთის წერტილი შევაერთოთ ფუძის შუაწერტილთან და გამოვიყენოთ, რომ ეს წირი გადის ტრაპეციის შუაწერტილიდან.

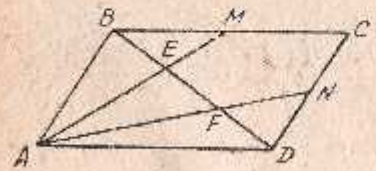
8.104. დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გავატაროთ ფუძების პარალელური წრფე. გამოვიყენოთ 8.100 და 8.103 ამოცანები.



ნახ. 249.

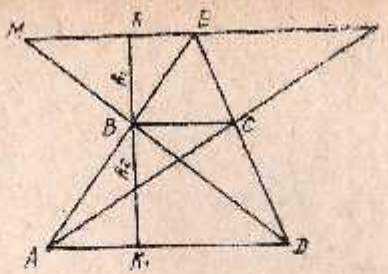
8.105. (ნახ. 249). $\frac{AO}{OC} = \frac{AM}{MB}$, სადაც $\frac{AO}{OC} = \frac{AE}{BK}$ ანალოგიურად გამოვა, რომ MN შეიცავს წვეტის დიაგონალსაც და ფუძეს შეკრიბავს.

8.106. პატარა ტრაპეცია შევავსოთ პარალელოგრამამდე და გამოვიყენოთ მიღებული პარალელოგრამის მსგავსება.



ნახ. 250.

8.107. (ნახ. 250) $\triangle ABF \sim \triangle NDF$, $\frac{BF}{FD} = \frac{2}{1}$.



ნახ. 251.

8.108. (ნახ. 251).
$\triangle MBE \sim \triangle DBA$, $\triangle NCE \sim \triangle ACD$.

8.109. იხილეთ ამოცანა 8.108.

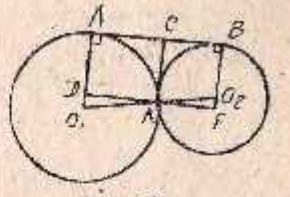
8.110. (ნახ. 251). $\frac{ME}{AD} = \frac{h_1}{h_2}$ (1). $\triangle MED \sim \triangle BCD$, ამიტომ

$$\frac{ME}{BC} = \frac{h_1 \div h_2}{h_2} = 1 \div \frac{h_1}{h_2} \quad (2).$$

(2) ტოლობას გამოვაკლოთ (1).

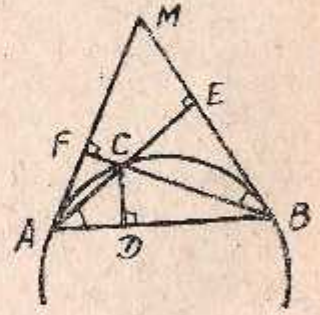
8.112. დასკვნიდან რომელიმე სამ წერტილზე შემოვატაროთ წრეწირი და გამოვიკვლიოთ, რომ მეოთხე წერტილი ამ წრეწირზე ძევს.

8.113. (ნახ. 252). შეხების წერტილზე გავატაროთ გარე მხებს პარალელური DF. $\triangle O_1DK \sim \triangle O_2FK$.

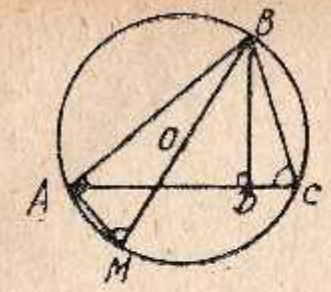


ნახ. 252.

8.114. (ნახ. 253) $\triangle ACD \sim \triangle BCE$, $\triangle BCD \sim \triangle ACF$.

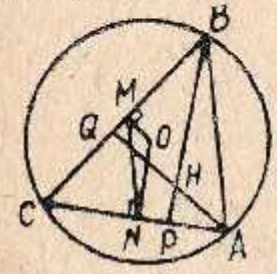


ნახ. 253.



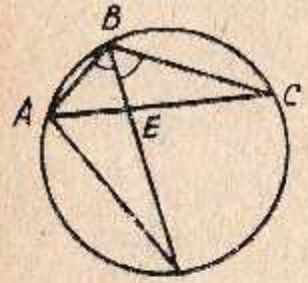
ნახ. 254.

8.115. (ნახ. 254). $\triangle BDC \sim \triangle BAM$.



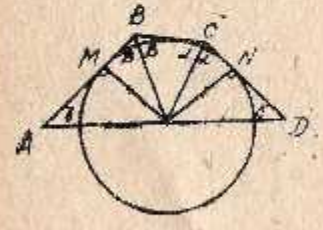
ნახ. 255.

8.116. (ნახ. 255). O შემოხაზული წრის ცენტრია. $OM \perp CB$, $ON \perp AC$.
$\triangle OMN \sim \triangle BAB$.



ნახ. 256.

8.117. (ნახ. 256). ABC სამკუთხედსა შემოხაზული წრეწირია. BE ბისექტრისა გაგრძელით და წრეწირამდე გადაკვეთის D წერტილი შეაერთეთ A-სთან.
$\triangle ABD \sim \triangle EBC$.



ნახ. 257.

8.119. (ნახ. 257). $\triangle AMO = \triangle DNO$.
ამიტომ $\angle A = \angle D$.
$\alpha + \beta = \gamma = 180°$.

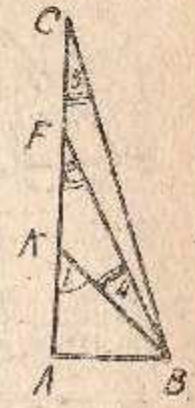
9.121. ტოლობები $c \cdot h = a \cdot b$ ეკვივალენტურია ტოლობების.
9.123. $\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD$.
ამიდან $c : a : b = r : r_1 : r_2$.

9.126. (ნახ. 258). AB გვერდი ტოლგვერდა a-ს სამკუთხედში და გადაკვეთილი სამკუთხედებია წაგვკრებია II ხარისხის.



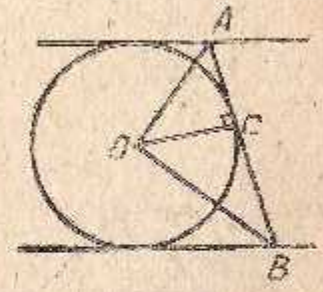
ნახ. 258.

9.127. (ნახ. 259). $\angle 3 = \angle 4$. ამიტომ ამოცანა 9.12,ბ.



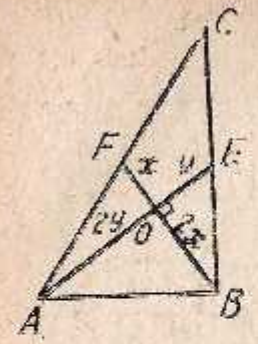
ნახ. 259.

9.129. (ნახ. 260). $\triangle AOB$ მართკუთხაა (O წრეწირის ცენტრია).



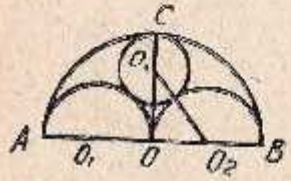
ნახ. 260.

9.180. $\triangle DBE$ მართკუთხა.



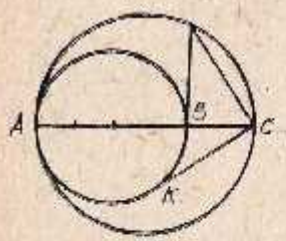
ნახ. 261.

9.181. (ნახ. 261). $4y^2+x^2=\frac{c^2}{4}$ და $4x^2+y^2=\frac{b^2}{4}$.



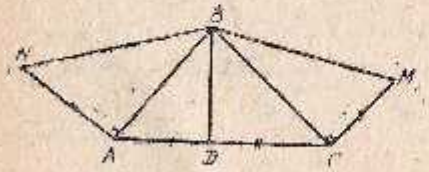
ნახ. 262.

9.182. (ნახ. 262).
O_1OO_2 სამკუთხედი მართკუთხაა.



ნახ. 263.

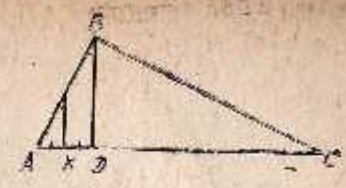
9.183. (ნახ. 263).
$CD^2=AC\cdot BC$;
$CK^2=AC\cdot BC$.



ნახ. 264.

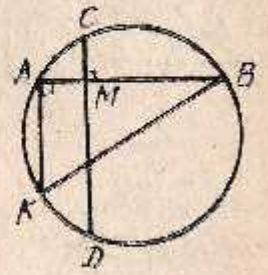
9.184. (ნახ. 264).
$B_1M^2=CM^2+CB^2=AD^2+$
$+BD^2+DC^2$.

9.185. (ნახ. 265).
$CK^2-AK^2=(CK+AK)(CK-AK)$.



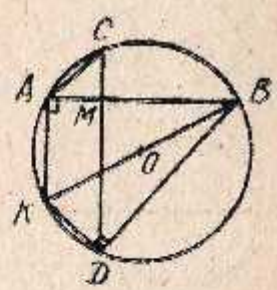
ნახ. 265.

9.186. (ნახ. 266). გავავლოთ $AK\parallel CD$. $AK<CD$.



ნახ. 266.

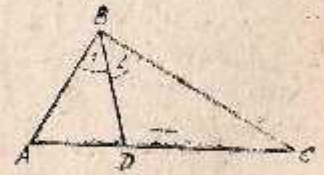
9.187. (ნახ. 267). გავავლოთ $AK\perp CD$,
$AC=KD$.



ნახ. 267.

§ 10

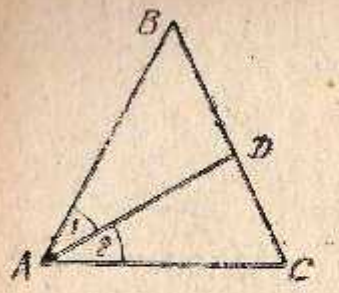
10.8ა. (ნახ. 268). ეთქვათ BDC სამკუთხედში $BC>BD$. ვთქვათ, BE ბისექტრისაა, მაშინ $BC>BD$. ვთქვათ, BE ბისექტრისას დასაბუთებლად გამოვიყენოთ კუთხის ბისექტრისის თვისება.



ნახ. 268.

10.88. C წერტილზე გავლებით AD-ს პარალელური წრფე.

10.89. გამოვიყენოთ სამკუთხედის ბისექტრისის და მასზე აგებული პარალელოგრამის თვისება (თეორემა 18.5 იხილეთ 10.28).



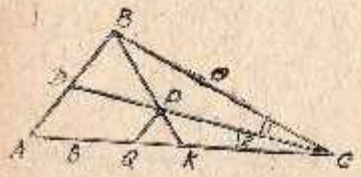
ნახ. 269.

10.90. (ნახ. 67).

$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$. (იხილეთ ამოცანა 8.117).

10.91. იხილეთ ამოცანა 10.90.

10.92. ოვრემ გალერდენისთვის ჩაწერილი სიწრფეების თეორემა.



ნახ. 270.

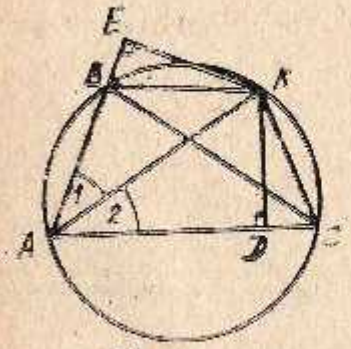
10.93. (ნახ. 270). P წერტილიდან გავლებული AB-ს პარალელური PQ.

$\triangle ACD$ და $\triangle QCP$-ს მსგავსებიდან

გვაქვს $\frac{PC}{PD} = \frac{b + 2QK}{b - 2QK}$

$\triangle ABK$ და $\triangle QPK$-ს მსგავსებიდან გვაქვს $QK = \frac{b}{2} \cdot \frac{PK}{BK}$.

CBK სამკუთხედში ბისექტრისის თვისებიდან გვაქვს $\frac{BK}{PK} = \frac{2a + b}{b}$.



ნახ. 271.

10.96. (ნახ. 271). $KD \perp AC$, $KE \perp AB$,

$AE = AD$.

$\triangle BEK = \triangle CDK$.

ამიტომ $BE = DC$.

$AE = AB + DC$.

10.97. პირობიდან ვიღებთ, რომ $b^2 - a^2 + c^2 = ac$.

ამიტომ კოსინუსების თეორემით $\cos B = \frac{1}{2}$.

10.98. პირობიდან გამომდინარეობს რომ $\angle B = \angle A + \varphi = 60°$.

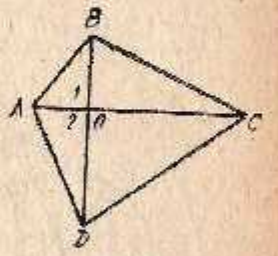
$c - a = 2R \sin C - 2R \sin A$.

10.99. (ნახ. 272). კოსინუსების თეორემით

$AB^2 + DC^2 = AO^2 + BO^2 + DO^2 + CO^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos \angle 1 - 2DO \cdot CO \cdot \cos \angle 1$,

$AD^2 + BC^2 = AO^2 + OD^2 + BO^2 + CO^2 + 2AO \cdot DO \cdot \cos \angle 1 + 2BO \cdot CO \cdot \cos \angle 1$,

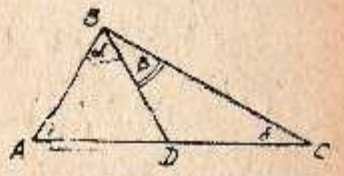
$\cos \angle 1 = 0$.



ნახ. 272.

10.100. (ნახ. 273). სამკუთხედის თვისებით

$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$; $\frac{DC}{BD} = \frac{\sin \beta}{\sin \delta}$.



ნახ. 273.

10.101. $AC = 2R \sin B$,

$AB = 2R \sin C$,

$BC = 2R \sin A$.

ამ თანაფარდობების ბასეზე ვიღებთ $AC^2 - AB^2 = 2BC \cdot R$ მარტივად გამოდგება $\sin(B - C) = 1$.

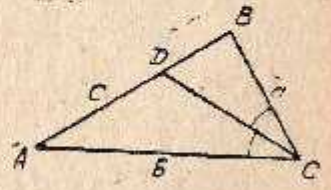
10.102. (ნახ. 274). გავავლოთ C კუთხის ბისექტრისა CD.

$\angle ADC = \angle B + \frac{\angle C}{2}$.

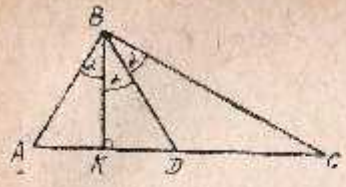
$\sin\left(\angle B + \frac{\angle C}{2}\right) : \sin \frac{\angle C}{2} = b : AD$.

ბისექტრისის თვისების ძალით

$\frac{b}{a} = \frac{AD}{BD}$ ანუ $AD = \frac{bc}{a + b}$.



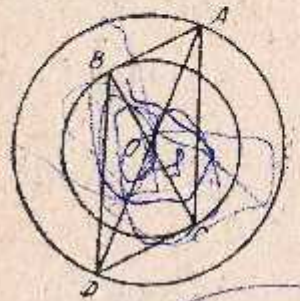
ნახ. 274.



ნახ. 275.

10.103. (ნახ. 275). $AK=KD$. ამტკიცებთ $DC=2KD$.

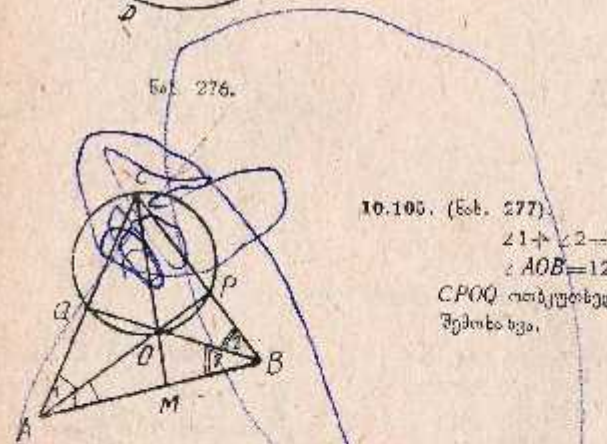
ბისექტრისის თვისების ძალით $BC=2\,BK$.



ნახ. 276.

10.104. (ნახ. 276).

$ABDC$ ოთხკუთხედი ჩახაზვადია.



ნახ. 277.

10.105. (ნახ. 277).

$\angle 1+\angle 2=60°$.

$\angle AOB=120°$.

$CPOQ$ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შეხახვა.

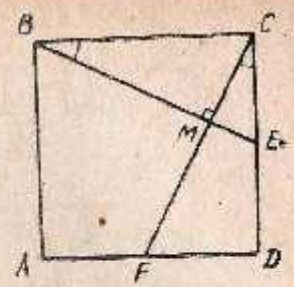
§ 11

11.200. $\sin A=\sin C$. $S_{BCD}=S_{ABD}$.

11.201. გამოიყენეთ კოსინუსების თეორემა და იხილეთ ამოცანა 11.200.

11.207. გამოიყენეთ, რომ მოცემული სამკუთხედის ფართობის ტოლია ბისექტრისის გეკლუნით მიღებული სამკუთხედების ფართობთა ჯამს.

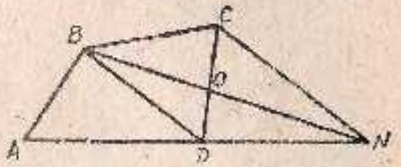
11.213. (ნახ. 278). $\angle BMC=90°$.



ნახ. 278.

11.214. (ნახ. 279).

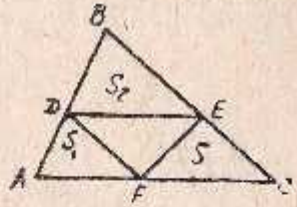
$S_{BCO}=S_{DON}$, რიდგან $S_{BNC}=S_{CND}$.



ნახ. 279.

11.215. (ნახ. 280). $DE \parallel AC$; $DF \parallel BC$.

$$\frac{S_1}{S_1}=\frac{DE^2}{AF^2}=\frac{FC^2}{AF^2}; \quad \frac{S}{S_1}=\frac{FC}{AF}.$$



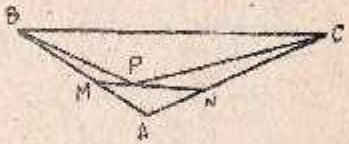
ნახ. 280.

11.216. (ნახ. 281).

$$\frac{BM}{AM}+\frac{AN}{NC}+\frac{MP}{PN}=K.$$

$$\frac{AB}{AM}=K\div 1; \quad \frac{AC}{AN}=\frac{K\div 1}{K};$$

$$\frac{MN}{PM}=\frac{K\div 1}{K}; \quad \frac{MN}{PN}=K\gtrless 1.$$



ნახ. 281.

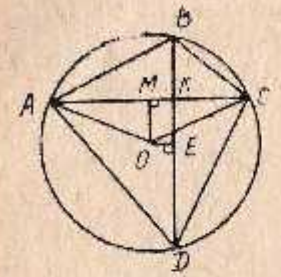
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=\frac{(K\div 1)^2}{K}; \quad \frac{S_{BMP}}{S_{AMN}}=\frac{K^2}{K\div 1};$$

$$\frac{S_{CNP}}{S_{AMN}}=\frac{1}{K(K\div 1)}.$$

$$S_{AMN}+S_{BPC}:S_{ABC}-S_{BMP}-S_{CNP}=$$

$$\frac{S_{AMN}+S_{BPC}}{S_{AMN}}=\frac{(K+1)^2}{K}-\frac{K^2}{K+1}-\frac{1}{K(K+1)}=3.$$

11.217. იხილეთ ამოცანა 6.171.



ნახ. 282.

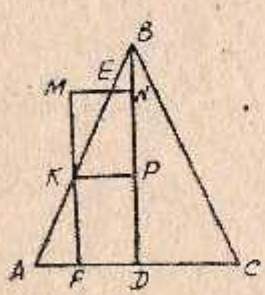
11.218. (ნახ. 282).

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BK+\frac{1}{2}AC\cdot OM=$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot BL=\frac{1}{4}AC\cdot BD.$$

11.222. დასაბუთებული ტერმინის თითოეულ შხრივ ამოცანათა კრებულშია.

11.223. წრეწირში ჩახაზული ABC სამკუთხედის ერთ-ერთი ფუძის შუაპერპენდიკულარის ნებისმიერი წერტილი გვძლევა ტოლფერდას. ეს ამოცანა ზოგადობით ნაკლებია: იგი გვერდით ამოიხსნება.



ნახ. 283.

11.226. (ნახ. 283) AB ფუძეზე ავიღოთ K წერტილი ისე, რომ $AK<KB$.

$$KP\perp AC.$$

KF-ის გაგრძელებაზე დავდოთ $KM=KF$, $MN\perp BD$; $KP\perp BD$.

$\triangle AFK=\triangle EMK$, ამიტომ

$$S_{NKP}+S_{AKF}=S_{BMN}+S_{KENP}+$$
$$+S_{EMK}>S_{MNPK}=S_{FKPD}$$

ე. ი. $S_{FKPD}<\frac{1}{2}S_{ABD}$, თუ $AK=KB$

ამოხსნა:

$S_{FKPD}=\frac{1}{2}S_{ABD}$. ე. ი. ABD სამკუთხედში ჩახაზული ნებისმიერი პარალელოგრამის ერთ-ერთი წვეროს მდებარეობის შეცვლა მოახდენს პარალელოგრამის ფართობის $\frac{1}{2}S_{ABD}$. ტოლი ABC სამკუთხედში ჩახაზული მართკუთხედისა ცნობილი ფართობის მქონე მართკუთხედია ფართობი $\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{ab}{4}$.

11.227. (ნახ. 284). $EF\parallel AD$

$S_{AEFD}=S_{EBCF}=S$.

$ABCD$ ტრაპეციის შევსებით AKD სამკუთხედამდე.

$S_{KEC}=S_1$ $\triangle EKF\sim\triangle BKC$

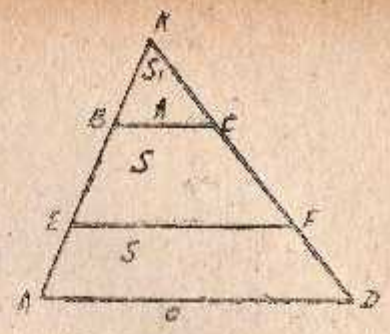
ე. ი.

$$\frac{S_1+S}{S}=\frac{EF^2}{b^2}=\frac{S}{S_1}=\frac{EF^2-b^2}{b^2} \quad (1)$$

$\triangle AKD\sim\triangle BKC$ ე. ი.

$$\frac{S_1+2S}{S_1}=\frac{a^2}{b^2} \quad (2)$$

(2)-დან განვსაზღვროთ S_1 და ჩავსვათ (1)-ში.



ნახ. 284.

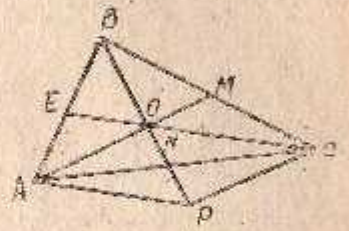
11.225. (ნახ. 285).

$\triangle AOC$ შევსებით $AOCP$ პარალელოგრამამდე.

$$AO=\frac{2}{3}m_a,\quad AP=CO=\frac{2}{3}m_c,$$

$$OP=\frac{2}{3}m_b.$$

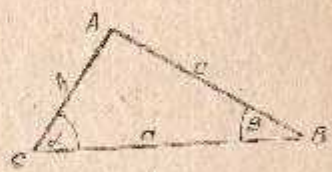
$S_{ABC}=3S_{AOP}$, S_{AOP} გამოვთვალოთ ჰერონის ფორმულით.



ნახ. 285.

11.230. (ნახ. 286).

ხაზგასმის თეორემის თანახმად $\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{c}{\sin\alpha}$, საიდან $S=\frac{ac\sin\beta}{2}$.



ნახ. 286.

11.380. (ნახ. 287). BDF და ABC სამკუთხედებს $\angle B$ საერთო აქვთ.

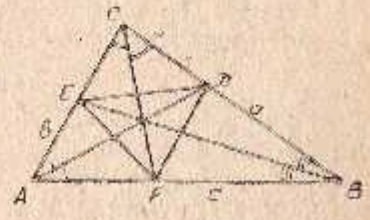
მტკიცება:

$$\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}}=\frac{BF\cdot BD}{AB\cdot BC},$$

$$\frac{BF}{AF}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow\frac{BF}{AB}=\frac{BC}{AC+BC}$$

ანალოგიურად

$$\frac{BD}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}$$ ე. ი.



ნახ. 287.

$$\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}}=\frac{ac}{(a+b)(b+c)}$$ ანალოგიურად:

$$\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}=\frac{ab}{(a+c)(b+c)},$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

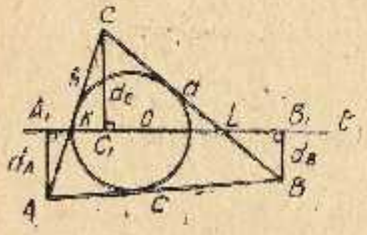
$\triangle DEF$-ის ფართობი გამოვსახოთ ABC, EDC, AEF, BDF სამკუთხედების ფართობების საშუალებით.

11.281. $$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\geq\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(ბოლოს a, b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო $a+b+c=2p$).

$p\geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$. კუბურიანის ორივე მხარე ამკვეთით ავიყვანთ და გავამრავლოთ P-ზე; მივიღებთ

$$p^4\geq 27p(p-a)(p-b)(p-c)\Rightarrow p^2\geq 3\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=3\sqrt{3}S.$$



ნახ. 288.

11.282. (ნახ. 288).

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

r—ჩახაზული წრის რადიუსია.

$$S_{CKL}=\frac{1}{2}\,CK\cdot CL\cdot\sin C=$$

$$=\frac{1}{2}(CK+CL)\cdot r$$ ე. ი.

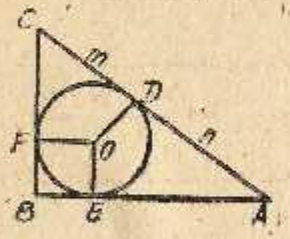
$$\frac{1}{2}(a+b+c)r\cdot\frac{1}{2}\,CK\cdot CL\sin C=\frac{1}{2}ab\sin C\cdot\frac{1}{2}(CK+CL)r\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a+b+c)CK\cdot CL=ab(CK+CL)\quad(1)$$

$$\triangle AKA_1\sim\triangle CKC_1\Rightarrow CK=\frac{bd_c}{d_A+d_c},$$

$$\triangle BLB_1\sim\triangle CLC_1\Rightarrow CL=\frac{ad_c}{d_B+d_c}.$$

მიღებული შეფარდებები ჩავსვათ (1)-ში და ვიღებთ
$(a+b+c)d_c=(d_A+d_c)a+(d_B+d_c)b$ რაც იგივეა $ad_A+bd_B=c^2d_c$.



ნახ. 289.

11.283. (ნახ. 289).

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\,AB\cdot BC=\frac{1}{2}(n+r)(m+r)=$$

$$=\frac{1}{2}(mn+nr+mr+r^2)$$ ე. ი.

$$2S_{ABC}=mn+nr+mr+r^2=mn+$$
$$+r(n+m+r)=mn+pr$$ ე. ი. $S_{ABC}=mn$.

11.284. იხილეთ 11.223.

11.285. იხილეთ 11.234.

11.286. $$\frac{ab+bc+ac}{h_a+h_b+h_c}=\frac{ab+bc+ac}{\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}}=\frac{abc}{2S\frac{ab+bc+ac}{abc}}=\frac{abc}{2S}=2R.$$

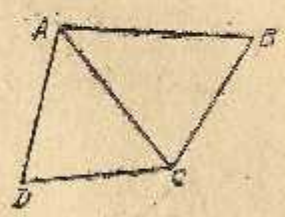
11.287. (ნახ. 290).

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}\,AB\cdot BC\sin B+$$

$$+\frac{1}{2}\,AD\cdot DC\sin D\leq\frac{1}{2}(AB\cdot BC+AD\cdot DC)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{AB^2+BC^2}{2}+\frac{AD^2+DC^2}{2}\right)=$$

$$S_{ABCD}\leq\frac{AB^2+BC^2+CD^2+AD^2}{4}.$$



ნახ. 290.

§ 13

13.126. იხილეთ ამოცანა 11.253.

13.126. ამოხსენით, თუ რამდენი სამკუთხედია მოცემული წრეწირის ტოლფერდა.

13.127. მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულ წრეწირზე გატარებული მესამე მხებით მოჭრილი სამკუთხედის ფერიმეტრი ტოლია. მტკიცეთ სამკუთხედის ფართობის ტოლობა ამ წევრთაგან შედგენილი ნამრავლის ნახევარზე.

13.128. თუ ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზულია წრე, მაშინ ფუძეთა შეკრებილი ტოლია.

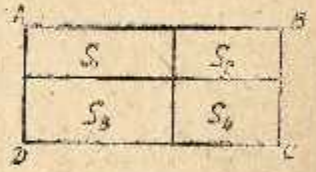
§ 14

14.48. (ნახ. 291).

ვთქვათ $S_1\geq 1$, $S_2\geq 1$, $S_3\geq 1$, $S_4\geq 1$, $S_2\geq 2$.

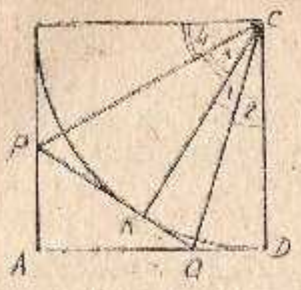
$S_1\cdot S_2=S_3+S_4\Rightarrow S_1+S_4\geq$
$\geq 2\sqrt{S_1\cdot S_4}=2\sqrt{S_1\cdot S_2}=2\sqrt{2}$.

$S_1+S_2+S_3+S_4\geq 2+2\sqrt{2}$.



ნახ. 291.

ბიჭების მარკეტინგების ერთი გვერდი 1 სმ-ია, ხოლო წვრილი გვერდი $2+2\sqrt{2}$.



ნახ. 292.

14.47. (ნახ. 292).

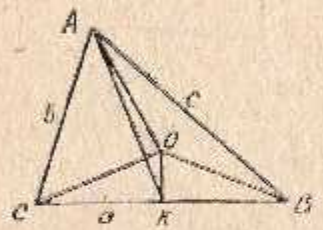
C წერტილიდან $CB=1$ რადიუსით შემოხაზული წრეწირი. ამ წრეწირის ნებისმიერ K წერტილზე გავავლოთ მხები AB და AD მხებებამდე გადაკვეთამდე P და Q წერტილებში.

$BP=PK$, $KQ=QD \Rightarrow P_{APQ}=2$.

$CK=CD$, $KQ=QD \Rightarrow \angle 1=\angle 2$.

ანალოგიურად $\angle 3=\angle 4$. ე. ი.

$$\angle PCQ=45^\circ.$$



ნახ. 293.

14.48. (ნახ. 293).

O შეხების წრეწირის ცენტრია.

$$OK \perp CB.$$

$$AK-OA \leqslant OK \Rightarrow \frac{(m_a-R)a}{2} \leqslant S_{COB}.$$

ანალოგიურად

$$\frac{(m_b-R)b}{2} \leqslant S_{AOC},$$

$$\frac{(m_c-R)c}{2} \leqslant S_{AOB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(m_a-R)a}{2}+\frac{(m_b-R)b}{2}+\frac{(m_c-R)c}{2} \leqslant S \Rightarrow \frac{am_a}{2}+\frac{bm_b}{2}+\frac{cm_c}{2} \leqslant$$

$$\leqslant R\cdot\frac{a+b+c}{2}+S.$$

ამ უტოლობას ვიხილავდით S-ზე.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}=r\cdot\frac{a+b+c}{2}$, მივიღებთ ლი-ტლვუდის ცნობილ უტოლობას.

14.49. $\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3p-(a+b+c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{3} \geqslant \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow \frac{p^3}{27} \geqslant (p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p^3}{27} \geqslant p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2 \Rightarrow \frac{p^3}{27} \geqslant \frac{S^2}{p^2} = r^2.$$

14.50. ხელოვნური ამოცანა 14.49.

14.51. რადგანაც $m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$

ანალოგიურად

$$m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}, \quad m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

წყვილ-წყვილად ეს ტოლობები და გამოვიყენოთ ტოლობა

$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2} \geqslant 2, \quad \frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2} \geqslant 2, \quad \frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2} \geqslant 2.$$

14.52. 1) თუ გამოვიყენებთ თანრიგის ხაშუალო არითმეტიკულის და გეომეტრიულის შესახებ განტოლებას

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \leqslant \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

2) როგორც ცნობილია

$$R=\frac{abc}{4S}, \quad r=\frac{S}{p} \Rightarrow \frac{1}{2Rr}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4S}{abc}\cdot\frac{p}{S}=\frac{2p}{abc}=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{ab}+\frac{3}{bc}+\frac{3}{ac}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ac}\right).$$

ცხადი ტოლობიდან

$$a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac} \leqslant \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2Rr} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ac}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2.$$

3) $\frac{1}{4r^2}=\frac{p^2}{4S^2}=\frac{\frac{1}{4}(a+b+c)^2}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}=$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}=\frac{a+b+c}{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}=$$

$$\frac{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}=\frac{1}{a^2-(b-c)^2}+\frac{1}{b^2-(c-a)^2}+\frac{1}{c^2-(a-b)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \leqslant \frac{1}{c^2}.$$

14.53. თუ გამოვიყენებთ ცნობილ ტოლობას გვექნება

$$\sin A+\sin B+\sin C=\sqrt{3}\cos A+\sqrt{3}\cos B+\sqrt{3}\cos C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)+\left(\frac{1}{2}\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sin C-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right)=0 \Rightarrow \sin(A-60^\circ)+\sin(B-60^\circ)+\sin(C-60^\circ)=0$$

$$2\sin\left(\frac{A+B}{2}-60^\circ\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C-60^\circ}{2}\cos\frac{C-60^\circ}{2}=0,$$

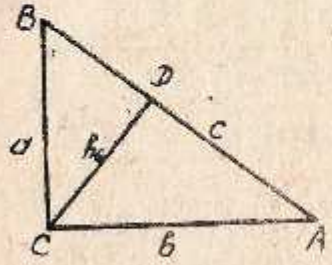
$$\Rightarrow \sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}-60^\circ\right)\cos\frac{A-B}{2}-\sin\left(30^\circ-\frac{C}{2}\right)\cos\left(60^\circ-\frac{A+B}{2}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(30^\circ-\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(60^\circ-\frac{A+B}{2}\right)\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(30^\circ-\frac{C}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{A}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{B}{2}\right)=0.$$

ტოლობა სამკუთხედში მაშინ და მხოლოდ მაშინ სრულდება, როდესაც რომელიმე კუთხე A, B ან C უდრის 60°-ს.

14.54. (ნახ. 294).



ნახ. 294.

ვთქვათ $\frac{r}{h_c}>0{,}4$.

ეს უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობის

$$\frac{(a+b-c)c}{2ab}>0{,}4\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a+b-\sqrt{a^2+b^2})\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}>$$

$$>\frac{2}{5}\Rightarrow 5(a+b)\sqrt{a^2+b^2}>5a^2+$$

$$+5b^2+4ab$$

კვადრატში ავიყვანოთ და გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$5a^3b-5a^2b^2+5ab^3>0\Rightarrow 5ab(a-b)^2\geq 0.$$

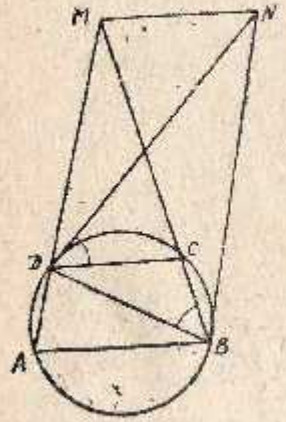
ბოლოდროინდელ $\frac{r}{h_c}<0{,}5$ ტოლობიდან შემდეგი ტოლობის

$$\frac{(a+b-c)c}{2ab}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow (a+b)\sqrt{a^2+b^2}<a^2+b^2+ab.$$

კვადრატში ავიყვანოთ და გამარტივების შემდეგ მივიღებთ $a^2b^2>0$.

14.55. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lg A+\lg B+\lg C=\lg A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C.$$



ნახ. 295.

14.56. (ნახ. 295).

$\angle NDC=\angle CBD\Rightarrow \angle ABD=\angle MDN$

თავის მხრივ

$$\angle ABD=\angle CDB=\angle NBC.$$

ე. ი. $\angle ABD=\angle CDB=\angle NBC=\angle MDN\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MDC=\angle MCD=\angle NDB=\angle NBD\Rightarrow$

$\angle N=\angle M$.

$MNBD$ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა

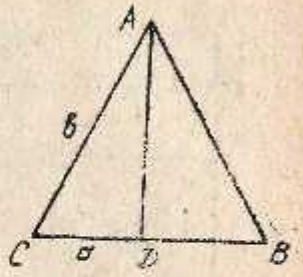
$\angle DBM=\angle MND\Rightarrow \angle CDN=\angle MND$

ე. ი. $MN\parallel DC$.

14.57. (ნახ. 296).

$\triangle ACD$-დან $CD=b\sin 10^\circ\Rightarrow a=2b\sin 10^\circ$.

a-ს მიღებული მნიშვნელობა ხასიათდება ცხრილში მოცემული ტოლობაში და გამოვიანგარიშოთ α კუთხის სიდიდის უკიდურესი მნიშვნელობა.



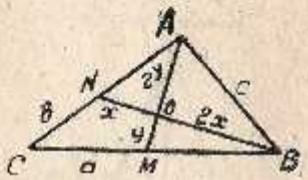
ნახ. 296.

14.58. (ნახ. 297).

$$36y^2=2c^2+2b^2-a^2$$

$$36x^2=2c^2+2a^2-b^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=\frac{4c^2+b^2+a^2}{36}=\frac{c^2}{4}.$$



ნახ. 297.

14.59. (ნახ. 298)

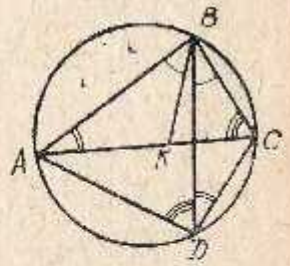
ვთქვათ B სხივი, ისე რომ,

$\angle ABK=\angle DBC$

$\triangle ABK\sim\triangle DBC\Rightarrow AK\cdot BD=AB\cdot CD$.

$\triangle ABD\sim\triangle KBC\Rightarrow KC\cdot BD=BC\cdot AD$

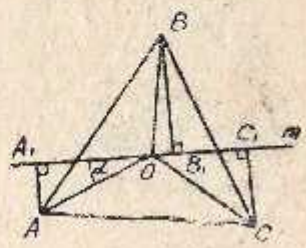
შეკრიბოთ მიღებული ტოლობები.



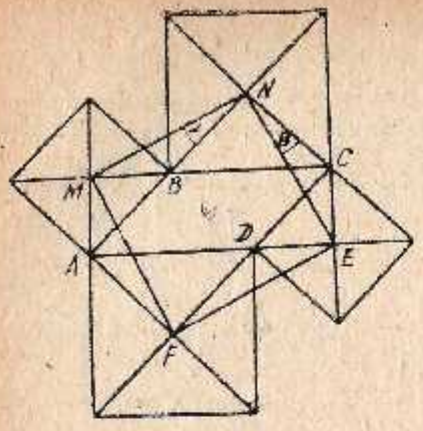
ნახ. 298.

14.60. (ნახ. 299).

α კუთხით და R რადიუსით გამოსახავთ ნებისმიერი ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერ სამ წერტილამდე მანძილებს AA_1, BB_1, CC_1 და ჩაწერილი მათი კვადრატების ჯამში.

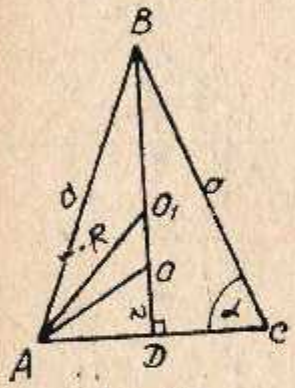


ნახ. 299.



ნახ. 300.

14.81. (ნახ. 300).
ვიცით რომ,
$\triangle MNB = \triangle ENC$.



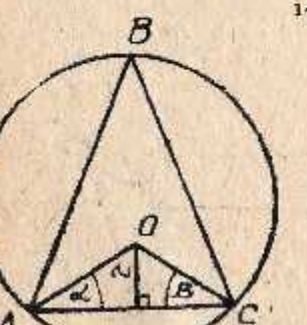
ნახ. 301.

14.82. (ნახ. 301).
BD აღვნიშნოთ h-ით

$$R=\frac{h}{2\sin^2\alpha},\quad r=\frac{h\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

$\left(OO_1=h-(R+r)\right)$ ამ ტოლობაში ჩასვით R და r-ის ძიებულ გამოსახულებებში. გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$OO_1=\sqrt{R(R-2r)}.$$



ნახ. 302.

14.83. (ნახ. 302).
O ჩაიხაზული წრეწირის ცენტრია

$$\angle A+\angle C=\frac{360^\circ-\overset{\frown}{AC}}{2}=\text{const}.$$

ცხადია $(\alpha+\beta)$-ც მუდმივი სიდიდეა.

$$a=r(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\Rightarrow r=\frac{a\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

r უდიდესია მაშინ $\cos(\alpha-\beta)=1$.

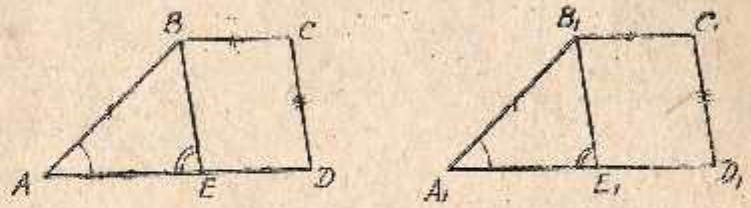
14.84. ამოცანა 14.83-ის ანალოგიურად, თუ საკუთხედის ერთი გვერდი დამოკიდებულია, მაშინ ჩახაზული წრის რადიუსი რომ უდიდესი იყოს, საჭიროა ეფიორჩენი ორი გვერდი იყოს ტოლი. ე. ი. ბოლოებზე წრეწირზე ჩახაზული სამკუთხედებიდან ჩახაზული წრის რადიუსი უდიდესი იქნება ტოლგვერდას, რომლისთვისაც $R=2r$. სადაც შემოხვევაში $R>2r$.

14.85. $\cos A+\cos B+\cos C=\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}+$

$$+\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\leq\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A+C}{2}+\cos\frac{B+C}{2}=K.$$

ე. ი. A, B და C კუთხეების ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის $\cos A+\cos B+\cos C\leq K$. ტოლობას მაშინ აქვს ადგილი როცა $A=B=C$ ე. ი. როცა თითოეული მათგანი 60°-ია.

ამ დროს $K=3\cdot\cos 60^\circ=\frac{3}{2}\Rightarrow\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$.



ნახ. 303.

14.86. (ნახ. 303) გავავლოთ $BE\parallel CD$ და $B_1E_1\parallel C_1D_1$.

14.87. (ნახ. 304).

წერტილი A და B არის ჩახაზული ოთხკუთხედის ორი წვეროა და წერტილი AB არის მოპირისპირე OE-ის. თუ ავღნიშნავთ OE-ს შიგნით B წერტილის სიმეტრიულ B_1 წერტილს და გავავლებთ $OH\perp EF$ მივიღებთ

$$\angle B_1OE=\angle EOB=\alpha,$$

$$\angle AOH=\angle HOB_1=\beta,$$

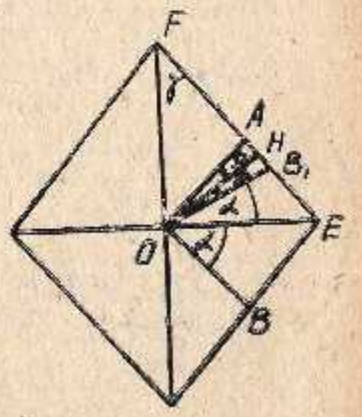
რადგან $OH\perp EF\Rightarrow\angle HOE=$

$$=\angle HOB_1+\angle B_1OE=\alpha+\beta=$$

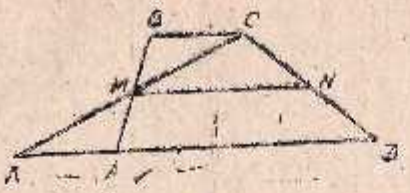
$$=\angle OFE=\gamma.$$

მაგრამ $90^\circ=\angle AOB=2(\alpha+\beta)=$

$$=2\gamma+\gamma=45^\circ$$ რაც დამტკიცებას საჭიროებს.



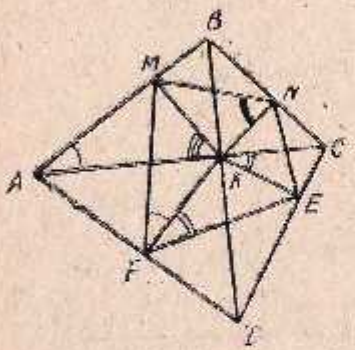
ნახ. 304.



ნახ. 305.

14.69. (ნახ. 305).
გავავლოთ CM მონაკვეთი და ისე გავატაროთ BC-ზე მოვნახოთ $CM=MK$.
K შევაერთოთ A და D წერტილებთან.
$AK \parallel BC$

ახლა K, A და D წერტილები ერთ წრფეზეა



ნახ. 306.

14.70. (ნახ. 306).
$AMKF$, $MKNB$, $NKFC$ და $FKFD$ პარალელოგრამებია. შევადაროთ წინააღმდეგი წყვილი:

$\angle MAK = \angle MFK$
$\angle MAK = \angle MKB$

ე. ი. $\angle MFK = \angle MKB$

ანალოგიურად

$\angle FFK = \angle FKC$
$\angle MNK = \angle MKA$
$\angle ENK = \angle EKD$

მიღებული ტოლობები შეიძლება.

14.70. $ah_a = 2S$, $bh_b = 2S$, $ch_c = 2S \Rightarrow abch_ah_bh_c = 8S^3 \Rightarrow$

$$\frac{1}{h_ah_bh_c} = \frac{abc}{8S^3} = \frac{abc}{4S} \cdot \frac{1}{2S^2} = \frac{R}{2S^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right) \geq \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{h_ah_bh_c}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{R}{2S^2}}.$$

14.71.

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C} = \frac{\sin 2A+\sin 2B}{\sin 2C} \Rightarrow \frac{\sin A+\sin B}{\sin(A+B)} = \frac{\sin 2A+\sin 2B}{\sin(360^\circ-2(A+B))}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A+\sin B}{\sin(A+B)} = -\frac{\sin 2A+\sin 2B}{\sin 2(A+B)} \Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}} = -$$

$$= -\frac{2\sin(A+B)\cos(A-B)}{2\sin(A+B)\cos(A+B)} \Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2}\cos(A+B) = -\cos\frac{A+B}{2}\cos(A-B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2}\left(2\cos^2\frac{A+B}{2}-1\right)+\cos\frac{A+B}{2}\left(2\cos^2\frac{A-B}{2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)-$$

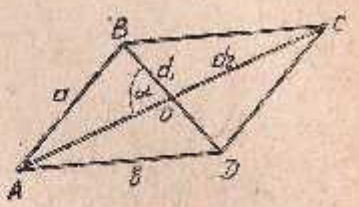
$$-\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)\left(2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}-1\right)=0,$$

$$\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2} \neq 0,$$

ე. ი. $2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=1 \Leftrightarrow \cos A+\cos B=1$.

14.72. (ნახ. 307).
ა) ჩაწერილი ოთხკუთხედში საპირისპირო კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.
ბ) $\angle ABO$ და $\triangle ADO$-დან ჩაწერილი α და β გვერდებზე საპირისპირო კუთხეების ტოლობის საშუალებით.

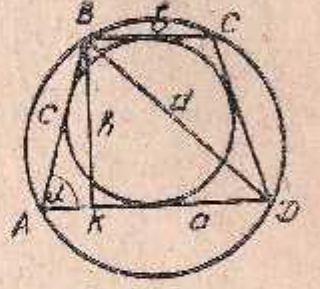


ნახ. 307.

14.73. (ნახ. 308).

$$r = \frac{c\sin\alpha}{2},$$

$$R = \frac{d}{2\sin\alpha}$$

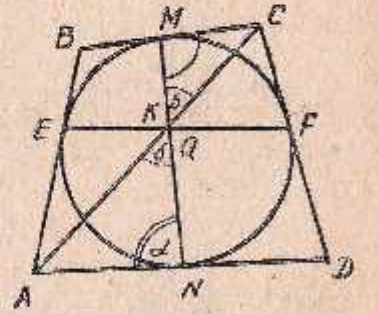


ნახ. 308.

14.74. (ნახ. 309).
M, F, N და E შესაბამის წერტილებია.
გავავლოთ MN ქორდა AC დიამეტრის K წერტილში.

$$\frac{AK}{\sin\alpha} = \frac{AN}{\sin\delta}; \quad \frac{KC}{\sin\beta} = \frac{MC}{\sin\delta},$$

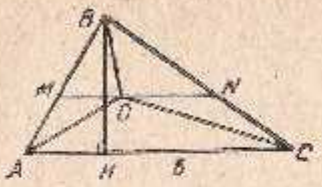
$\alpha+\beta=180^\circ \Rightarrow \frac{AK}{AN} = \frac{KC}{MC} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AN}{MC}$



ნახ. 309.

გავავლოთ EF მონაკვეთი AC დიამეტრის ქვეშ Q წერტილში.
ანალოგიურად გვაქვს $\frac{AQ}{QC} = \frac{AE}{CF}$ $AN=AE$, $MC=CF \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AQ}{QC}$,
ე. ი. K და Q ერთი და იგივე წერტილებია. $\Rightarrow AC$ დიამეტრი გადის EF და MN მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილში.
ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ BD დიაგონალიც ამ წერტილში გადის.

14.76. (ნახ. 310).

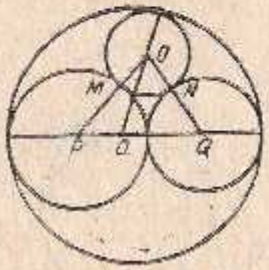


ნახ. 310.

$$\triangle ABC \sim \triangle MBN \Rightarrow \frac{MN}{AC} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow$$

$$\frac{MN}{b} = \frac{h_b - r}{h_b} = 1 - \frac{r}{h_b} = 1 - \frac{\frac{S}{p}}{\frac{2S}{b}} = 1 - \frac{b}{a+b+c} = \frac{a+c}{a+b+c} \Rightarrow MN = \frac{b(a+c)}{a+b+c}$$

14.78. (ნახ. 311).



ნახ. 311.

P, Q, O და O_1 წრეწირების ცენტრებია.

$PM = r_1 = x$,

$QN = r_2 = y$.

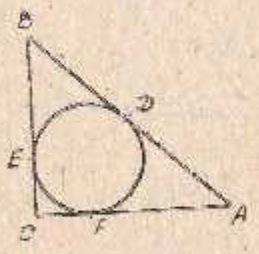
ორ განივკუთხედში, რომ $\angle PO_1O + \angle QO_1O = 0$ და ამ ტოლობებს განსაზღვრულობაში POO_1 და QOO_1 სამკუთხედებიდან გვექნება

$$\frac{PO_1^2 + OO_1^2 - OP^2}{2PO_1 \cdot OO_1} + \frac{OO_1^2 + O_1Q^2 - OQ^2}{2 \cdot OO_1 \cdot O_1Q} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(R_1 - R_2)^2 + y^2 - (R_2 + x)^2}{y} + \frac{(R_1 - R_2)^2 + x^2 - (R_2 + y)^2}{x} = 0 \Rightarrow$$

$xy = \frac{R_2R_1^2}{R_1 + R_2}$ ვამტკიცებთ უტოლობაში $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ და გვეთანხმება, რომ $x + y = R_1$ მიიღება

$$\frac{R_2R_1^2}{R_2 + R_1} \leq \frac{R_1^2}{4} \Rightarrow R_2 \leq \frac{R_1}{3}.$$



ნახ. 312.

14.77. (ნახ. 312).

$$AC \cdot BC = (AD + CE)(CE + BD) = 2AD \cdot BD \Rightarrow CE = \frac{-AB + \sqrt{AB^2 + 4AD \cdot DB}}{2} = \frac{-AB + \sqrt{AB^2 + 2AC \cdot BC}}{2}.$$

$$P_{ABC} = AB + BC + AC = 2AB + 2EC \Rightarrow BC + AC = \sqrt{AB^2 + 2AC \cdot BC} \Rightarrow BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

14.78. (ნახ. 313).

O არის ABC სამკუთხედის შემხები წრეწირის ცენტრი.

$OC' \perp AB$, $OA' \perp BC$, $OB' \perp AC$.

$AC'OB'$ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა, ამიტომ ამოცანა 14.59 ძალით შეიძლება დაიწეროს

$$AO \cdot B'C' = AB' \cdot OC' + AC' \cdot OB'.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

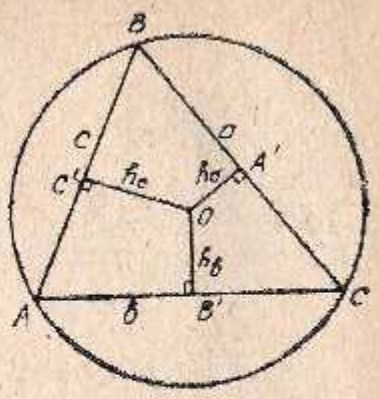
$$B'C' = \frac{1}{2}a, \quad AB' = \frac{1}{2}b \text{ და } AC' = \frac{1}{2}c,$$

მივიღებთ $R \cdot a = b \cdot h_c + c \cdot h_b$.

ანალოგიურად

$R \cdot b = c \cdot h_a + a h_c$,

$R \cdot c = b \cdot h_a + a h_b$.



ნახ. 313.

14.79. (ნახ. 314).

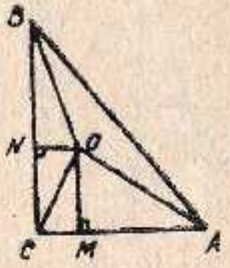
$$OA^2 + OB^2 = OM^2 + ON^2 + AM^2 + NB^2$$

$$ON = \frac{1}{3}AC \Rightarrow AM = \frac{2}{3}AC = 2 \cdot NO$$

ანალოგიურად

$$BN = 2MO$$

$$OA^2 + OB^2 = 5(OM^2 + ON^2) = 5 \cdot CO$$

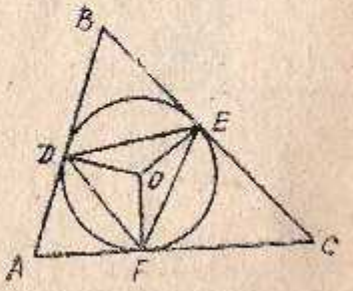


ნახ. 314.

14.80. (ნახ. 315).

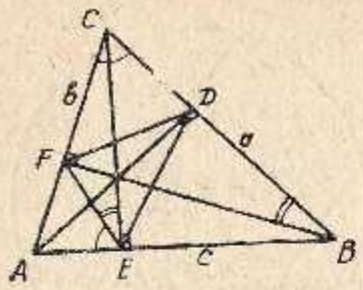
$$S_{DEF} = \frac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C) \Rightarrow$$

$$= \frac{r}{2R}p(R \sin A + R \sin B + R \sin C).$$



ნახ. 315.

14.81. (ნახ. 316).



E, F და D სიმაღლეების ფუძეებია, CB გვერდზე როგორც დიამეტრზე შენოვაბოთი წრეწირი.

E და F წერტილები კუთვნიან ამ წრეწირს,

$$\angle CEF = \angle FBC \Rightarrow \angle AEF = \angle FCB \Rightarrow$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AFE \Rightarrow EF = \frac{a \cdot Af}{c}$$

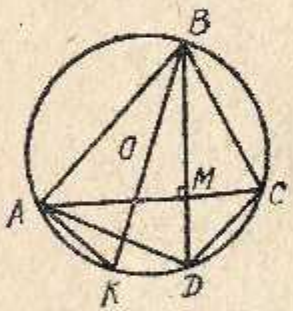
თავის მხრივ

ნახ. 316.

$$Af = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \Rightarrow EF = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc},$$

ანალოგიურად

$$FD = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}, \quad DE = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}.$$



ნახ. 317.

14.82. (ნახ. 317).

გავავლოთ BK დიამეტრი

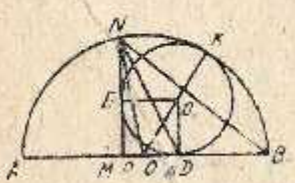
$$\triangle ABK \sim \triangle MBC \Rightarrow \frac{AB}{R} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB \cdot BC = 2R \cdot BM,$$

ანალოგიურად

$$AB \cdot AD = 2R \cdot AM$$

ორივე ტოლობა მიეყვანეთ ერთმანეთში და შევკრიბოთ.



ნახ. 318.

14.83. იხილეთ ამოცანა 14.49.

14.84. (ნახ. 318).

$\triangle OO_1D$-დან

$$OD^2 + O_1D^2 = OO_1^2 \Rightarrow (r - OM)^2 +$$

$$+ r^2 = (R - r)^2 \Rightarrow r^2 =$$

$$= (R - a)(R + a - 2r) \Rightarrow \frac{r^2}{R + a - 2r} =$$

$$= \frac{R^2 - a^2}{R + a} \Leftarrow \frac{r^2}{(R + a)^2 - 2r(R + a)} =$$

$$= \frac{R^2 - a^2}{(R + a)^2}.$$

(სადაც R და r შესაბამისად დიდი და პატარა წრეწირის რადიუსებია ხოლო $a = OM$)

თუ გამოიყენებთ ბრიანშონის შემდეგ თეორემას: ნებისმიერი ფართობის წიბოიანი შეკვრის შეფარდება ამავე ფართობის წვერთაო ტოლფაც იქნება ერთმანეთის ტოლი, მაშინ

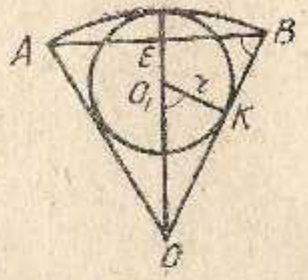
წვერის შეფარდების მეორე ფარდობის წვეროა ცენტრი გვექნება

$$\frac{r^2}{(R + a - r)^2} = \frac{R^2 - a^2}{(R + a)^2 + (R^2 - a^2)} \Rightarrow \frac{MD}{DB} = \frac{MN}{NB}.$$

14.85. $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, $S = \frac{a + b + c}{2} r$ და $b = \frac{a + c}{2}$

14.86. (ნახ. 319).

$\triangle OO_1K \sim \triangle OBE$.



ნახ. 319.

14.87. (ნახ. 320).

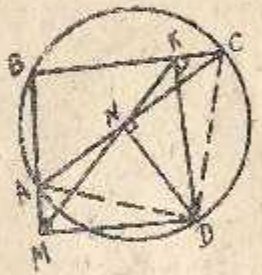
$ANDM$ და $DNKC$ ოთხკუთხედებზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა:

$$\Rightarrow \angle ADM = \angle ANM \text{ და}$$

$$\angle KNC = \angle KDC.$$

თავის მხრივ

$$\angle ADM = \angle KDC \Rightarrow \angle KNC = \angle ANM.$$



ნახ. 320.

14.89. (ნახ. 321).

$AD = DC$, $BE = EC$, $DL \perp AC$, $EL \perp BC$, $BN \perp AC$, $AM \perp BC$.

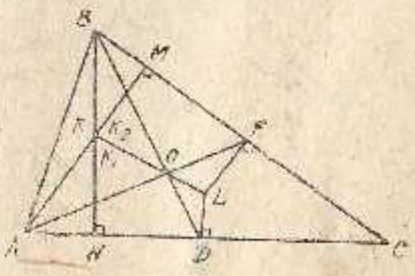
L — შემოხაზული წრის ცენტრია, O — მკუთხედის განაკვეთების წერტილი.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ K მდებარეობს OL წრეწირზე.

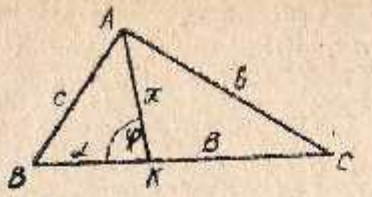
განვიხილოთ OL წრიული და ვთქვათ AM სიმაღლესთან ალვნიშნოთ K_1-ით. $BN \parallel DL \Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle BK_1O \sim \triangle DLO \Rightarrow K_1O = 2 \cdot LO.$$

OL-ის განტოლების გამოვიყენოთ AM სიმაღლესთან ალვნიშნოთ K_2-ით. ანალოგიურად მივიღებთ $K_2O = 2LO$. რადგანაც K_1 და K_2 წერტილები ერთსა და იმავე OL წრიულზეა და $K_2O = K_1O$ შეგვიძლია ვთქვათ K_1 განმეორდება K-ში.



ნახ. 321.



ნახ. 322.

14.80. (ნახ. 322).

თუ $AB=AC$, მაშინ საჭირო ტოლობის ნაცვლად შეიძლება საკმარისი აღმოჩნდეს, სიტყვა თუ $\angle BAK=\angle CAK$ ახლდეს. სწორედაა 8.117.

კოსინუსების $x^2=cb-\alpha\cdot\beta$ (3) გარდაქმნების თვითონ.

$$c^2=\alpha^2+x^2-2\alpha x\cos\varphi,$$
$$b^2=\beta^2+x^2+2\beta x\cos\psi.$$

ეს ტოლობები შევაბრუნოთ β და α-ზე და შევკრიბოთ.

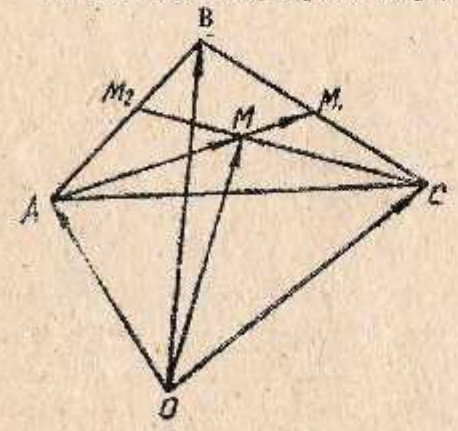
$$\beta c^2+\alpha b^2=\alpha^2\beta+\beta x^2+\alpha\beta^2+\alpha x^2=\beta c^2+\alpha b^2=\alpha\cdot\beta(\alpha+\beta)+x^2(\alpha+\beta)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{\beta c^2+\alpha b^2}{\alpha+\beta}-\alpha\cdot\beta \quad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან გვაქვს:

$$\frac{\beta c^2+\alpha b^2}{\alpha+\beta}=c\cdot b,$$
$$\beta c^2+\alpha b^2-cb(\alpha+\beta)=0,$$
$$\alpha\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^2-\frac{b}{c}(\alpha+\beta)+\beta=0,$$
$$\frac{b}{c}=1 \text{ ან } \frac{b}{c}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

§ 16

16.87. ამტკიცებენ, რომ $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{CC_1}$, ისარგებლებენ $\overrightarrow{BB_1}$ გამოსახვით $\overrightarrow{AB_1}$ და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორებით, ასევე $\overrightarrow{DD_1}$ ვექტორით $\overrightarrow{AD_1}$ და $\overrightarrow{AD}$ ვექტორებით.



ნახ. 323.

16.88. (ნახ. 323).

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+$$
$$+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1}.$$

თვეთან შიძლება

$$\overrightarrow{AM_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+$$
$$+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AO}+$$
$$+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

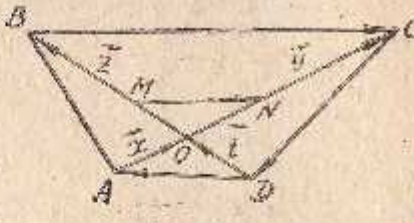
თუ ამ უკანასკნელის ნაცვლად $\overrightarrow{OM}$-ის გამოსახულებაში გავაკეთებთ

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

16.91. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}$ და $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{O}$ ტოლობების გამოკლებით ვიღებთ, რომ

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{0}.$$

16.97. (ნახ. 324).



ნახ. 324.

აღვნიშნოთ $\overrightarrow{AO}=\vec{x}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{y}$, $\overrightarrow{DO}=\vec{t}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{z}$. მაშინ

$$\overrightarrow{AB}=\vec{x}+\vec{z},\ \overrightarrow{BC}=\vec{z}+\vec{y},\ \overrightarrow{CD}=-\vec{y}-\vec{t},$$
$$\overrightarrow{DA}=\vec{t}-\vec{x},$$
$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{ON}=\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}-\vec{x}=\frac{\vec{y}-\vec{x}}{2},$$
$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{\vec{t}+\vec{z}}{2}-\vec{t}=\frac{\vec{z}-\vec{t}}{2}.$$

ე. ი. $\overrightarrow{ON}=\frac{\vec{y}-\vec{x}}{2}=\frac{\vec{z}-\vec{t}}{2}$, $2\overrightarrow{MN}=\vec{y}-\vec{x}-\vec{z}+\vec{t}$.

ამრიგად

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2=(\vec{x}+\vec{z})^2+(\vec{y}-\vec{z})^2+(-\vec{y}-\vec{t})^2+(\vec{t}-\vec{x})^2=$$
$$=\vec{x}^2+2\vec{x}\vec{z}+\vec{z}^2+\vec{y}^2-2\vec{y}\vec{z}+\vec{z}^2+\vec{y}^2+2\vec{y}\vec{t}+\vec{t}^2+\vec{t}^2-2\vec{t}\vec{x}+\vec{x}^2=$$
$$=\vec{x}^2+\vec{y}^2+2\vec{x}\vec{y}-2\vec{x}\vec{y}+\vec{z}^2+\vec{t}^2+2\vec{t}\vec{z}-2\vec{t}\vec{z}+2\vec{x}\vec{z}-2\vec{y}\vec{z}+$$
$$+\vec{z}^2+\vec{y}^2+2\vec{y}\vec{t}+\vec{t}^2-2\vec{t}\vec{x}+\vec{x}^2=(\vec{x}+\vec{y})^2+(\vec{z}+\vec{t})^2+$$
$$+(\vec{z}^2-2\vec{y}\vec{z}+\vec{y}^2)+(\vec{t}^2-2\vec{t}\vec{x}+\vec{x}^2)-2\vec{x}\vec{y}-2\vec{t}\vec{z}+2\vec{x}\vec{z}+$$
$$+2\vec{y}\vec{t}=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+(\vec{y}-\vec{z})^2+(\vec{t}-\vec{x})^2-2\vec{x}(\vec{y}-\vec{z})+$$
$$+2\vec{t}(\vec{y}-\vec{z})=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+(\vec{y}-\vec{z})^2+(\vec{t}-\vec{x})^2+$$
$$+2(\vec{y}-\vec{z})(\vec{t}-\vec{x})=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+(\vec{y}-\vec{z}+\vec{t}-\vec{x})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+(2\overrightarrow{MN})^2,$$

ე. ი. $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+(2MN)^2$.

16.99. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $\alpha=\angle BOC$, $\beta=\angle AOC$, $\gamma=\angle AOB$; $a=|\vec{a}|$, $b=|\vec{b}|$, $c=|\vec{c}|$.

განვიხილოთ ვექტორი $\vec{r}=2(S_A\cdot\overrightarrow{OA}+S_B\cdot\overrightarrow{OB}+S_C\cdot\overrightarrow{OC})=bc\sin\alpha\cdot\vec{a}+ac\sin\beta\times\vec{b}+ab\sin\gamma\cdot\vec{c}$. იმის შესამოწმებლად, რომ $\vec{r}=\vec{0}$, საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ $(\vec{a},\vec{r})=(\vec{b},\vec{r})=(\vec{a},\vec{r})=0$. $(\vec{a},\vec{r})=a^2bc(\sin\alpha+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta)=a^2bc(\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma))=0$, რადგან $\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $(\vec{b},\vec{r})=(\vec{c},\vec{r})=0$.

16.100. იხილეთ 16.99.

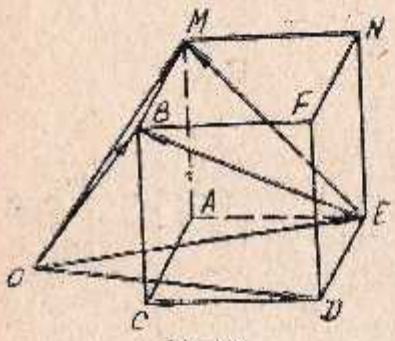
16.101. იხილეთ 16.99.

16.107. თუ O ნებისმიერი წერტილის ტოლობა, მაშინ $A'A^2 = PO^2 + 2(\vec{PO}, \vec{OA}) + OA^2$. რიდგან $A'O$ და OA სიდიდეები მუდმივია, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ მუდმივია რიცხვი $2a(\vec{PO}, \vec{OA}) + 2b(\vec{PO}, \vec{OB}) + 2c(\vec{PO}, \vec{OC}) = (2\vec{PO}, a\vec{OA} + b\cdot\vec{OB} + c\vec{OC})$. იხილეთ 16.131.

§ 17

17.140. მოცემული წვეროდან გავლებული სიბრტყე ჭიმის ზედაპირისა კვეთილებს სიწრფეებით გამსახვრელი ტრიალი პარალელოგრამების ცნობილ წვეროდან გამოსულ დიაგონალის ზედაპირისა კვეთილია.

17.141. (ნახ. 325).



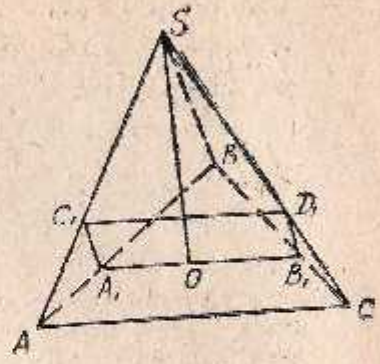
ნახ. 325.

$$\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM},$$
$$\vec{OD} = \vec{OE} + \vec{ED}$$
$$\vec{OM}^2 = \vec{OB}^2 + 2\cdot\vec{OB}\cdot\vec{BM} + \vec{BM}^2,$$
$$\vec{OD}^2 = \vec{OE}^2 + \vec{ED}^2 + 2\cdot\vec{OE}\cdot\vec{ED} =$$
$$= \vec{OM}^2 + \vec{OD}^2 = \vec{OB}^2 + \vec{OE}^2 + \vec{BM}^2 +$$
$$+ \vec{ED}^2 + 2\cdot\vec{OB}\cdot\vec{BM} + 2\cdot\vec{OE}\cdot\vec{ED} =$$
$$= \vec{OB}^2 + \vec{OE}^2 + \vec{BM}^2 + \vec{ED}^2 +$$
$$+ 2\cdot\vec{OB}\cdot\vec{BM} - 2\cdot\vec{OE}\cdot\vec{DE} = \vec{OB}^2 + \vec{OE}^2 +$$
$$+ \vec{BM}^2 + \vec{ED}^2 + 2\cdot\vec{OB}\cdot\vec{BM} -$$
$$- 2\cdot\vec{BM}\cdot\vec{OE} = \vec{OB}^2 + \vec{OE}^2 + 2\vec{BM}^2 +$$
$$+ 2\vec{BM}\cdot\vec{EB} = \vec{OB}^2 + \vec{OE}^2 + 2\vec{BM}^2 =$$
$$= 2\vec{BM}(\vec{EM} + \vec{MB}) = \vec{OB}^2 + \vec{OE}^2 + 2\vec{BM}^2 + 2\vec{BM}\cdot\vec{EM} + 2\vec{EM}\cdot\vec{MB} = \vec{OB}^2 +$$
$$+ \vec{OE}^2 + 2\vec{BM}^2 - 2\vec{BM}^2 = \vec{OB}^2 + \vec{OE}^2.$$

17.142. $(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 = \sqrt{((ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2)^2} =$
$$= \sqrt{a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 + 2a^2b^2(c)^2 + 2(a^2(bc)^2 + 2(ab)^2c^2)} =$$
$$= \sqrt{a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 + 2(abc)^2} \geq \sqrt{3}\,abc.$$
რადგან
$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{2} \geq a^2b^2c^2 +$$
$$+ a^2b^2c^2 = a^2b^2c^2 = a^2b^2c^2.$$

§ 18

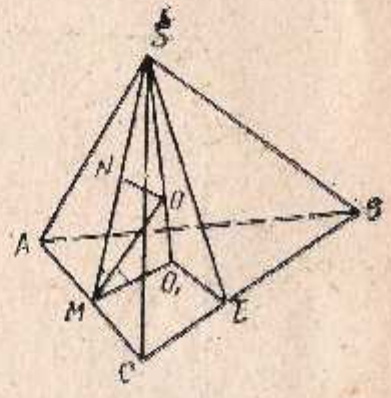
18.147. 18.147. (ნახ. 326).



ნახ. 326.

გვაქვს $A_1B_1D_1C_1$ მილებული პარალელოგრამი, რადგან $A_1B_1 \parallel AC$ და $C_1D_1 \parallel AC$, მაშასადამე $A_1B_1 \parallel C_1D_1$. ანალოგიურად $A_1C_1 \parallel B_1D_1$. ე. ი. $A_1B_1D_1C_1$ პარალელოგრამია. $SB \perp AC$ (იხილეთ 18.142). მაშასადამე $A_1B_1D_1C_1$ მართკუთხედია.

18.148. (ნახ. 327).



ნახ. 327.

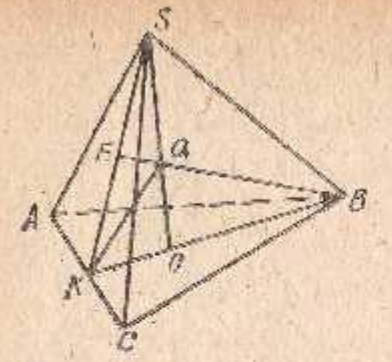
SO_1 სამკუთხედის და SMO_1 ტოლფერდა კუთხის ბისექტრისის გადაკვეთის O წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ყველა წახნაგიდან.
რადგან $\angle SMO_1 = \angle SEO_1$ მაშასადამე $MO_1 = O_1E$. ე. ი. O_1 არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი. ანალოგიურად N წერტილი ASC სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილს. ე. ი. SM სიმაღლე ერთდროულად ბისექტრისაცაა, მაშასადამე $AS = SC$

§ 19

19.109. ამტკიცებენ, რომ ბრილიანტების ყველა წახნაგი რომბია, მაგრამ ყველების, დიაგონალების გადაკვეთის, წერტილების შემცირებული ძირითადი ფიგურების ცნობილია, სიდიდით გამოძერწილობაში, რომ პრიზმა პირამიდა.

19.112. შეიძლება სფეროს ცენტრი იქნეს პირამიდის სიმაღლის შემცველი წრეწირი და ჩაბმული გვერდითი წახნაგის შეხების წერტილზე გავლებული ამ წახნაგის დაკლებული ხაზების გადაკვეთის წერტილი.

19.114. ჩაბმული სფეროს ცენტრი იქნება პირამიდის სიმაღლისა და ტოლფერდა ერთ-ერთ ორწახნაგა კუთხის შესაბამისი ნახევრად კუთხის ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილი.



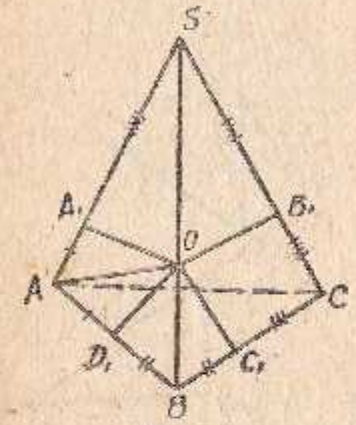
ნახ. 328.

19.115. (ნახ. 328).

რეგულარული წესიერი პირამიდაში ჩახაზული და შემოხაზული ბირთვის ცენტრები დედაბოძის სიმაღლეზე. ამ შემთხვევაში ასეთი კუთხეებია ერთმანეთის.

ვთქვათ SO სიმაღლეზე მდებარე O_1 წერტილი არის ჩახაზული და შემოხაზული ბირთვის ცენტრი. გავავლოთ $BK \perp AC$, რომელიც მაგრამდე წესიერია $OE \parallel BK$. სამი პერპენდიკულარის თეორემის თანახმად $SK \perp AC$. $OO_1 \perp \perp ABC$. $O_1E \perp ASC$. $O_1E = O_1O = r$. განვიხილოთ O_1OB და O_1ES სამკუთხედები. ორივე სამკუთხედი მართკუთხაა $O_1S = O_1B = R$, $O_1E = O_1O = r$. გ. ა. მ. სამკუთხედები ტოლია $\Rightarrow ES = OB$.

ანალოგიურად O_1KE და O_1KO სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს $KE = OK$ ე. ი. $BK = SK$. გამოვდა, რომ ABC ტოლგვერდა და ASC ტოლფერდა სამკუთხედების ფუძეები AC ტოლია. ამიტომ AC ფუძე აქვს ამ ფუძის შესაბამისი სიმაღლეც ტოლი აქვთ. ანუ სამკუთხედები ტოლია.



ნახ. 329.

19.118. (ნახ. 329).

ვთქვათ სფეროს AS, SC, BC, AB წიბოებთან შეხების წერტილებია A_1, B_1, C_1 და D_1.

ცხადია, $AA_1 = AD_1$, $BC_1 = BD_1$, $CC_1 = CB_1$, $A_1S = SB_1$.

ამ ტოლობების მარცხენა და მარჯვენა მხარეების შეკრებით მივიღებთ სიმაღლეებიდან ტოლობას.

19.124. (ნახ. 330).

ვთქვათ O_1 ჩახაზული სფეროს ცენტრია, ხოლო O_2 შემოხაზული სფეროს ცენტრია. $AM = MD = a$. $EO = H$. $\triangle MEO$-ში MO_2 ბისექტრისაა, ამიტომ $\frac{H-r}{r} = \frac{\sqrt{a^2+H^2}}{a}$.

თუ ორივე ბრტყელი ამოვუვლით კვადრატში და შევატარებთ წესიერების გარდაქმნებს ვიღებთ:

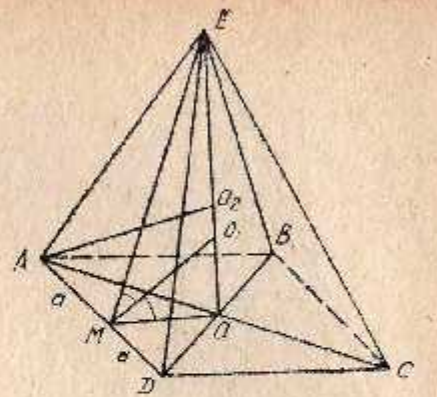
$$H = \frac{2a^2r}{a^2-r^2}.$$

შეორეს მხრივ ცხადია, რომ

$$H = \sqrt{R^2-2a^2}+R,$$

ანუ $\frac{2a^2r}{a^2-r^2} = \sqrt{R^2-2a^2}+R$,

$2a^2r - a^2R + r^2R = \sqrt{R^2-2a^2}(a^2-r^2)$.



ნახ. 330.

ორივე მხარეს ავაყვანთ კვადრატში და ჩვენტარებით წესიერების გარდაქმნებს ვიღებთ:

$$a^4 - 2rRa^2 + 2r^2R + r^4 = 0.$$

მივიღეთ a^2-ის მიმართ კვადრატული განტოლება და რადგან a^2 მაძღვრელი რაოდენობა დასკვნებით უნდა იყოს დადებითი ე. ი.

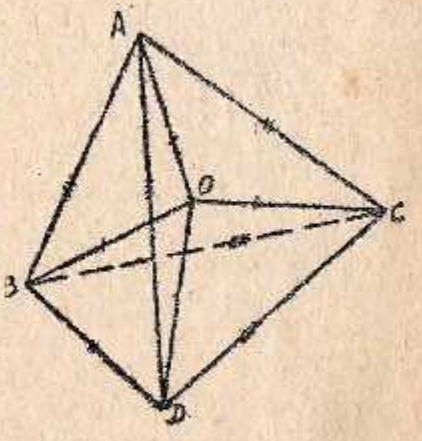
$$r^2R^2 - 2r^2R - r^4 \geq 0,$$

ანუ $\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\cdot\frac{R}{r} - 1 \geq 0$.

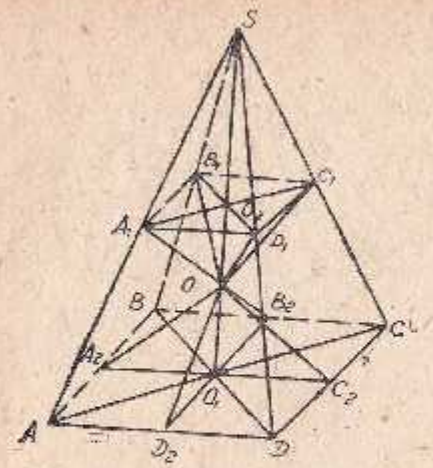
აქედან $\frac{R}{r} \geq 1 + \sqrt{2}$.

19.126. (ნახ. 331).

ვთქვათ O შემოხაზული სფეროს ცენტრია. განვიხილოთ ოთხი პირამიდა, რომელთაც საერთო O წვერო აქვთ, ხოლო ფუძეებად მოკავშირე პირამიდის წახნაგებია. ამ პირამიდების ფიგურის შესაბამისად ტოლია. ამტკიცებთ რომ ტოლი იქნება იმ პირამიდების O წვეროდან დაშვებული სიმაღლეები.



ნახ. 331.



ნახ. 332.

19.128. (ნახ. 332).

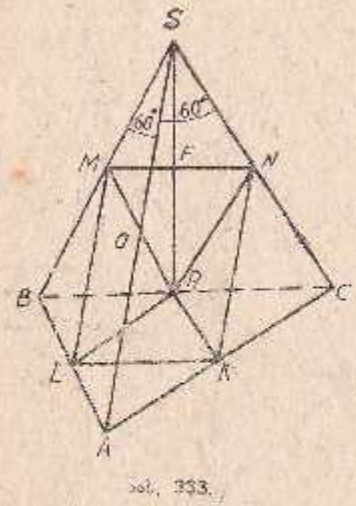
დამტკიცება ხდება ტეტრაედრის თანაკვეთა სიბრტყეების, ზოგადი წერტილების შესახებ ანალოგიური თეორემის დახმარებით.

კოველი სწორი ეხება ფუძეს გვერდებს A_2, B_2, C_2, D_2 წერტილებში. და კიდის გაგრძელება წიბოებს A_1, B_1, C_1 და D_1 წერტილებში. შფოთის O ცენტრიდან ფუძეზე დაშვებული OO_1 პერპენდიკულარია.

$ABCD$ თანაკვეთისთვის O_1 არის ხახვისებური და შეთანხმული წრფეწირების ცენტრი. აქედან კი თანაკვეთისთვის A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 და A_1D_1 ერთად გვერდების წახნაგებს შეესაბამებიან, ამიტომ $A_1B_1C_1D_1$ თანაკვეთი აგებია გვერდიტა. O_1 იყოს მისი ცენტრი. O_1O_2 ფუძის პარალელურია.

$O_2D_1DO_1$, $O_2A_1AO_1$, $O_2B_1BO_1$ და $O_2C_1CO_1$ მართკუთხა ტრაპეციებია

ცხადია O_1O_1 სიმაღლეა პირამიდის ფუძეები კი ტოლი ე. ი. ეს ტრაპეციები ტოლია, ამიტომ $A_1A=B_1B=C_1C=D_1D \Rightarrow AS=SB=SC=SD$.



ნახ. 333.

19.129. (ნახ. 333).

L, M, N და K წერტილები შესაბამისად AB, SB, SC და AC წიბოების შუაწერტილებია.

$LMNK$ მართკუთხედი.

სამკუთხედში SBC-ში გავავლოთ SP ბისექტრისა. AS-ის გვერდი BSC სიბრტყეზე ასახვის SP-ს შეესაბამება წრფეზე. სამი პერპენდიკულარის თეორემის თანახმად $MN \perp SP$ ე. ი. $SB=SC$ და $BP=PC$. $SNPM$ კვადრატია ე. ი. P სფეროს ცენტრია.

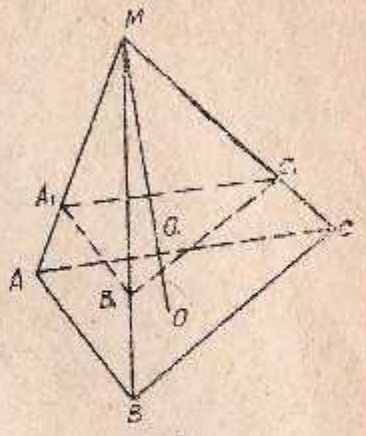
$\angle PKA$ სამკუთხედია, რომელიც სფეროში ჩახაზული მართკუთხა სამკუთხედია ე. ი. $\angle BAC=90°$.

$\triangle SAB=\triangle SAC$ ე. ი. $AB=AC$.

$AP=SP$ ანუ $AB=AC=SC=SB$.

AS-ის ნებისმიერი O წერტილი არის ხვედრის ცენტრი.

21.146. (ნახ. 334).



ნახ. 334.

ვთქვათ $MO=h$, $MO_1=h_1$.

$$V_{MABC}=2V_{MA_1B_1C_1}\Rightarrow\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h=$$

$$=2\cdot\frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}\cdot h_1\Rightarrow\frac{h_1}{h}=\frac{S_{ABC}}{2S_{A_1B_1C_1}}$$

ვიპოვოთ:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{h^2}{h_1^2}=\frac{h_1}{h}\Rightarrow\frac{h_1}{h}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{h}{h_1}\Rightarrow\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$ თავის

ხახვის $\frac{S_{MB_1C_1}}{S_{MBC}}=\frac{B_1C_1^2}{BC^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{MBC}=\sqrt[3]{4}\,S_{MB_1C_1}$.

ანალოგიურად $S_{MAB}=\sqrt[3]{4}\cdot S_{MA_1B_1}$,

$S_{MAC}=\sqrt[3]{4}\cdot S_{MA_1C_1}$. გვერდიტა ფუძეპირები $S_{MA_1B_1}=S_{MA_1C_1}=$

$\Rightarrow S_{MA_1B_1}\parallel S_{MB_1C_1}$ $S_{MABC}=S_{MAC}+S_{MAB}+S_{MCB}=\sqrt[3]{4}\cdot S_{MA_1B_1C_1}$

$S_{ABCA_1B_1C_1}=S_{MABC}-S_{MA_1B_1C_1}=(\sqrt[3]{4}-1)\cdot S_{MA_1B_1C_1}$

ე. ი. $\frac{S_{MA_1B_1C_1}}{S_{ABCA_1B_1C_1}}=\sqrt[3]{4}-1$.

21.147. (ნახ. 335).

$MO\perp ABCD$, $ME\perp AB$, $MF\perp DC$.

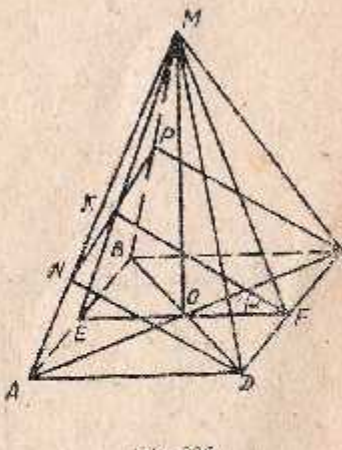
$V_{MNPCD}=\frac{1}{3}S_{NPCD}\cdot MK$, $EO=$

$=h\operatorname{tg}\alpha$, $MK=ME-KE=$

$=h\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)=\frac{h\cdot\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$,

$\frac{KN}{AE}=\frac{MK}{ME}\Rightarrow KN=\frac{AE\cdot MK}{ME}=$

$=\frac{EO\cdot MK}{ME}=h\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos 2\alpha$.



ნახ. 335.

$V_{MNPCD}=\frac{1}{3}(NK+DF)\cdot KF\cdot MK=$

$=\frac{1}{3}(h\operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha+h\operatorname{tg}\alpha)\times$

$\times 2h\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=h\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}=$

$=\frac{2}{3}h^3\operatorname{tg}^2\alpha(\cos 2\alpha+1)\cos 2\alpha=\frac{4}{3}h^3\sin^2\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{3}h^3\operatorname{tg}\alpha\sin 4\alpha$.

§ 24

24.91. BC პირველის წაწერტილა შეესრიალა M და N წერტილებთან.

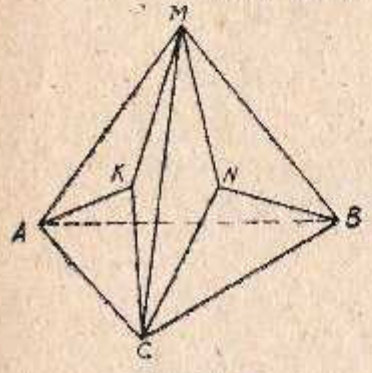
24.92. დაადგინეთ, რომ სამკუთხედის ტოლობა დამყარებულია სხვადასხვა წვეროდან გამოსული სამი წრფისათვის. ასეთი ტოლობები დაწერეთ ოთხი რომელიმე წვეროსათვის და წარმოადგინეთ.

24.95. პირამიდის წარმოქმნილის ოთხკუთხედი წახნაგის შეკვეთილ სიბრტყესთან წრფის გადაკვეთის წერტილებზე ძამაძილი გამოსახეთ ფუძის შესაბამის წვეროებზე მანძილებით და წახნაგის ფუძესთან დაბრის კუთხის სინუსებით.

24.96. ნებისმიერ წახნაგების პირამიდებისათვის S_1, S_2, S_3, S_4 ამწან $S_1d_1 + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4 = 3V = S_1h_1$, აქედან $\frac{d_1}{h_1} = 1 - \frac{S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4}{S_1h_1}$

ამიტომ გამოსახეთ დამოკიდებული წერტილებისა და მიღებული ხედვების შესახებ.

24.97. ცნების ფორმირების განსაზღვრებად მისი გამოყენება გამოსახეთ ჭეშმარიტი ნაბიჯით და ასეთივე ცრუთი დამოკიდებული.

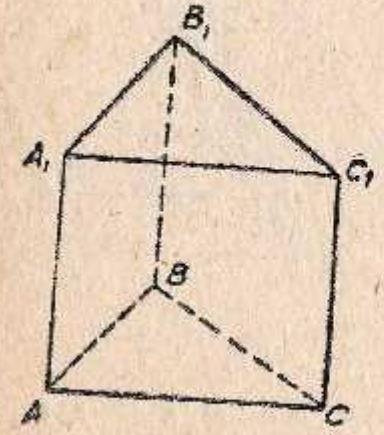


ნახ. 335.

24.98. (ნახ. 336).

პირველ AMC სამკუთხედზე შეძლებული წრეწირის ცენტრია K, ხოლო BMC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი N. $MK = MN$, რომელიც M წერტილის პერპენდიკულარულ მდებარეობელი ბისექტრის წინაპირობები.

$\triangle KMC = \triangle NMC$, ამიტომ $\angle KMC = \angle NMC \Rightarrow \angle AMK = \angle BMN \Rightarrow \triangle AMK = \triangle BMN \Rightarrow AM = BM$.



ნახ. 337.

24.100. (ნახ. 337).

პირველ $AB_1 \perp CA_1$ გამო

$$0 = \vec{AB_1} \cdot \vec{CA_1} = (\vec{AB} + \vec{BB_1}) \times (\vec{CA} + \vec{AA_1}) = \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + \vec{CA} \cdot \vec{BB_1} + \vec{BB_1} \cdot \vec{AA_1} = \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AA_1}^2,$$

საიდან გამოთვლების წინაპირობები, რომ $\vec{AB} \cdot \vec{CA} = \vec{AB} \cdot \vec{BC}$ და ბოლოსტრიგონომეტრიული მსჯელობის გამოყენებით:

$$\vec{AB_1} \cdot \vec{BC_1} = \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AA_1}^2 = 0.$$

24.101. (ნახ. 338).

$$\vec{CD} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$$

$$\vec{CA} = \vec{CS} + \vec{SA}$$

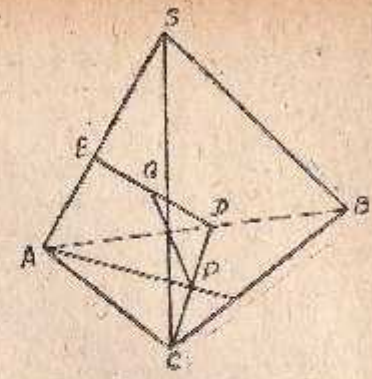
$$\vec{CB} = \vec{CS} + \vec{SB}$$

$$\vec{PQ} = \vec{PD} + \vec{DQ} = \frac{1}{3}\vec{CD} + \frac{1}{4}\vec{BS} =$$

$$= \frac{1}{6}(\vec{SA} + \vec{CS} + \vec{SB} + \vec{CS}) + \frac{1}{4}\vec{BS} =$$

$$= \frac{1}{6}\vec{SA} + \frac{1}{12}\vec{BS} + \frac{1}{3}\vec{CS} =$$

$$= \frac{1}{6}\vec{SA} - \frac{1}{12}\vec{SB} - \frac{1}{3}\vec{SC}.$$



ნახ. 338.

საცნობარო მასალა

სამკუთხედი

სამკუთხედის გვერდებია a, b, c; სიმაღლეებია — h_a, h_b, h_c; მედიანები — m_a, m_b, m_c; მიმდებარე კუთხეებია — A, B, C; ბისექტრისებია — l_a, l_b, l_c; r — ჩახაზული წრის რადიუსი; R — შემოხაზული წრის რადიუსი; $p=\frac{a+b+c}{2}$ — ნახევარპერიმეტრი; S — სამკუთხედის ფართობია.

1. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

2. $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$.

3. $h_a\leqslant l_a\leqslant m_a$; $h_b\leqslant l_b\leqslant m_b$; $h_c\leqslant l_c\leqslant m_c$.

4. $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

5. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$;

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

6. $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$; $l_a=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]}$;

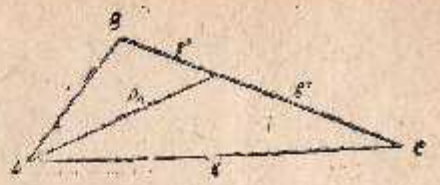
$l_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$; $l_b=\frac{1}{a+c}\sqrt{ac[(a+c)^2-b^2]}$;

$l_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$; $l_c=\frac{1}{a+b}\sqrt{ab[(a+b)^2-c^2]}$;

7.

ა) $l_a^2=bc-b'c'$,

ბ) $\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$.



ნახ. 332

სამკუთხედის ფართობი

1. $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$; $S=\frac{1}{2}b\cdot h_b$; $S=\frac{1}{2}c\cdot h_c$.

2. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (ჰერონის ფორმულა);

3. $S=\frac{1}{2}ab\sin C$; $S=\frac{1}{2}bc\sin A$; $S=\frac{1}{2}ac\sin B$;

4. $S=r\cdot p$, $r=\frac{S}{p}$;

5. $S=\frac{abc}{4R}$, $R=\frac{abc}{4S}$;

6. $S=\frac{r}{\sqrt{3}}(h_a+h_b+h_c)$;

7. $S=\frac{1}{2}\sqrt{2h_ah_bh_cR}$;

8. $S=\frac{p}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}$;

9. $S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}}$;

10. თუ $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$, მაშინ:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{h_a^2}{h_{a_1}^2}=\frac{h_b^2}{h_{b_1}^2}=\frac{h_c^2}{h_{c_1}^2}.$$

სინუსების თეორემა

1. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

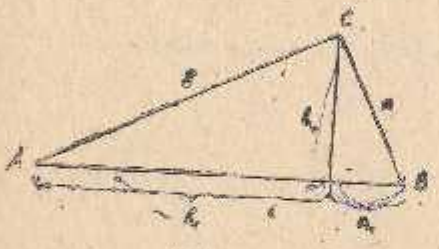
ე. $\frac{a}{\sin A}=2R$; $\frac{b}{\sin B}=2R$; $\frac{c}{\sin C}=2R$.

კოსინუსების თეორემა

1. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$; $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$;
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

მართკუთხა სამკუთხედი

1. დამოკიდებულება მართკუთხა სამკუთხედის ელემენტებს შორის:



ნახ. 340

ა) $h_a=b$; $h_b=a$; $h_c=\frac{ab}{c}$.

ბ) $h_c^2=a_c\cdot b_c$.

გ) $a^2+b^2=c^2$ (პითაგორას თეორემა).

დ) $a=c\cdot\sin A$,
$b=c\cdot\sin B$;
$a=b\cdot\operatorname{tg}A$;
$a=c\cdot\cos B$;
$b=c\cdot\cos A$;
$a=b\cdot\operatorname{ctg}B$.

ე) $r=\frac{a+b-c}{2}$; $r=p-c$; $R=\frac{c}{2}$.

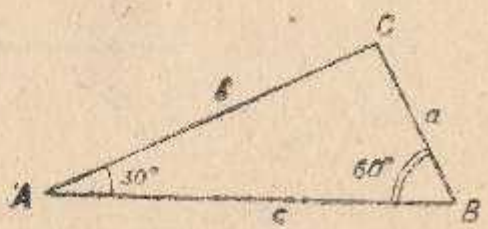
ვ) $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}$; $m_c=R=\frac{c}{2}$.

ზ) $S=\frac{1}{2}ab$.

2. 30°-იანი კუთხის მქონე მართკუთხა სამკუთხედი:

ა) $a=\frac{c}{2}$,

ბ) $b=\frac{c\sqrt{3}}{2}$.



ნახ. 341

წესიერი სამკუთხედი

1. $a_3=R\sqrt{3}$; $a_3=2\sqrt{3}r$ (a_3 — სამკუთხედის გვერდია);

2. $R=\frac{a_3}{\sqrt{3}}$; $R=2r$;

3. $r=\frac{a_3}{2\sqrt{3}}$; $r=\frac{R}{2}$;

4. $S=\frac{a_3^2\sqrt{3}}{4}$; $S=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$; $S=3\sqrt{3}r^2$.

ოთხკუთხედები

$ABCD$ პარალელოგრამში, $AB=a$, $AD=b$:

1) $AC^2+BD^2=2(a^2+b^2)$.

2) $S=ah_a$; $S=bh_b$.

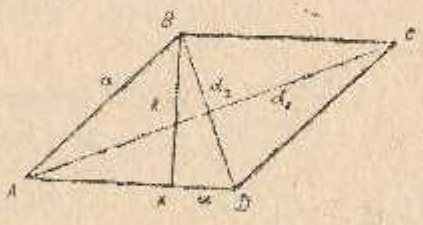
3) $S=ab\sin A$.

4) $S=\frac{h_1\cdot h_2}{\sin\alpha}$.



ნახ. 342

$ABCD$ ოთხკუთხედში d_1 და d_2 დიაგონალებია; a — გვერდი:



ნახ. 343

1) $AC^2+BD^2=4a^2$.

2) $S=ah$.

3) $S=a^2\sin A$.

4) $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$.

5) $BD=2a\sin\frac{A}{2}$; $AC=2a\cos\frac{A}{2}$.

კვადრატი

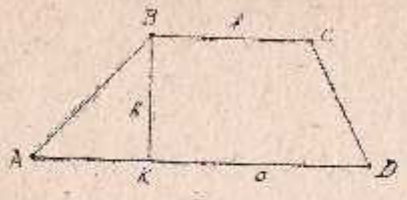
1. $a_4=R\sqrt{2}$; $a_4=2r$. (a_4 — კვადრატის გვერდია).

2. $R=\frac{a_4}{\sqrt{2}}$; $R=\sqrt{2}r$.

3. $r=\frac{a_4}{2}$; $r=\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

4. $S=a^2$; $S=2R^2$; $S=4r^2$.

$ABCD$ ტრაპეციაში $AD=a$, $BC=b$, $KB=h$.



ნახ. 344

1. $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$;

2. როცა $AB=CD$: $AK=\frac{a-b}{2}$; $KD=\frac{a+b}{2}$.

3. თუ ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალები ერთმანეთის პერპენდიკულარულია, მაშინ სიმაღლე შუაწონაკვეთის ტოლია— $h=\frac{a+b}{2}$ და $S=h^2$.

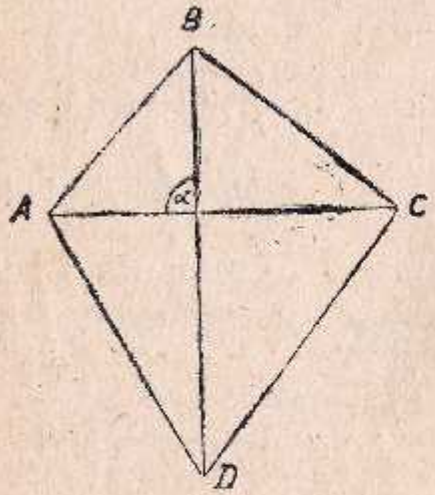
ოთხკუთხედები. შემოხაზული და ჩახაზული ოთხკუთხედები

1. წრეწირზე შემოხაზული $ABCD$ ოთხკუთხედისათვის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია — $AB+CD=AD+BC$.

2. წრეწირში ჩახაზული $ABCD$ ოთხკუთხედისათვის მოპირდაპირე კუთხეებია ჯამი ტოლია — $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ$.

3. ოთხკუთხედის ფართობი დიაგონალებია და მათ შორის კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია

$$S=\frac{AC\cdot BD}{2}\cdot\sin\alpha.$$



ნახ. 345

წესიერი ექვსკუთხედი. წესიერი n-კუთხედი

1. $a_6=R$; $a_6=\frac{2r}{\sqrt{3}}$ (a_6 — წესიერი ექვსკუთხედის გვერდია)

2. $R=a_6$; $R=\frac{2r}{\sqrt{3}}$;

3. $r=\frac{a_6\sqrt{3}}{2}$; $r=\frac{\sqrt{3}}{2}R$;

4. $S=\frac{3\sqrt{3}a_6^2}{2}$; $S=\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$; $S=2\sqrt{3}r^2$.

5. მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი ტოლია $180^\circ(n-2)$, სადაც n გვერდების რიცხვია;

6. მრავალკუთხედის გარე კუთხეების ჯამი 360°-ის ტოლია;

7. n-კუთხედში შეიძლება $\frac{n(n-3)}{2}$ დიაგონალის გავლება;

8. წესიერი n-კუთხედის ცენტრალური კუთხე $\frac{360^\circ}{n}$-ის ტოლია;

9. წესიერი n-კუთხედის კუთხე $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$-ის ტოლია;

10. წესიერი n-კუთხედის გვერდი $a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, სადაც R შემოხაზული წრეწირის რადიუსია;

11. წესიერ n-კუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი $r=R\cos\frac{180^\circ}{n}$;

12. წესიერი ერთსახელა მრავალკუთხედების პერიმეტრები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც შემოხაზული ან ჩახაზული წრეწირების რადიუსები

$$\frac{P}{P_1}=\frac{R}{R_1}=\frac{r}{r_1};$$

13. წესიერი ერთსახელა მრავალკუთხედების ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც შესაბამისი შემოხაზული ან ჩახაზული წრეწირების რადიუსების კვადრატები

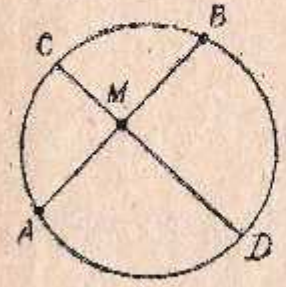
$$\frac{S}{S_1}=\left(\frac{R}{R_1}\right)^2=\left(\frac{r}{r_1}\right)^2;$$

14. წრეწირის სიგრძის შეფარდება დიამეტრთან ყველა წრეწირისათვის ერთი და იგივე რიცხვია. ეს რიცხვი აღინიშნება π ასოთი. $\pi\approx 3,1$. $\frac{c}{2R}=\pi$. წრეწირის სიგრძე $c=2\pi R$; წრის ფართობი $S=\pi R^2$.

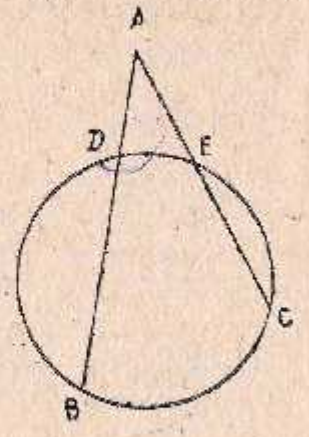
15. S სექტორის ფართობია, R — სექტორის რადიუსი, ცენტრალური კუთხე α — რადიანი. $S=\frac{1}{2}R^2\alpha$;

16. სეგმენტის ფართობი $S=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$;

1. ჩახაზული კუთხე ზომავს იმ რკალის ნახევრით, რომელსაც იგი ეყრდნობა.



ნახ. 346

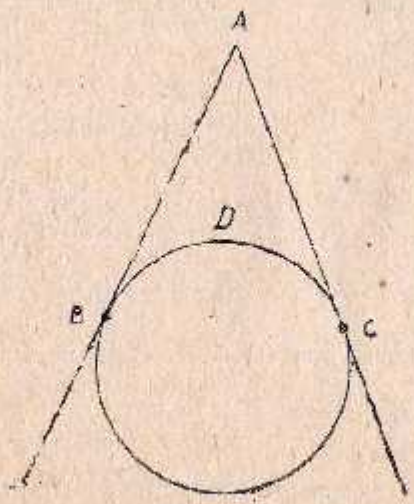


ნახ. 347

$$\angle AMD=\frac{1}{2}(\overset{\smile}{AD}+\overset{\smile}{BC});\qquad \angle BAC=\frac{1}{2}(\overset{\smile}{BC}-\overset{\smile}{DE});$$

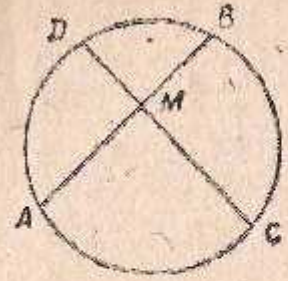
2. მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე იზომება მასთ მოყრის მთავსებული რკალის ნახევრით.

3. ძაბებს ნორია მთავსებელია $\angle BAC=180^\circ-\overset{\smile}{BDC}$.

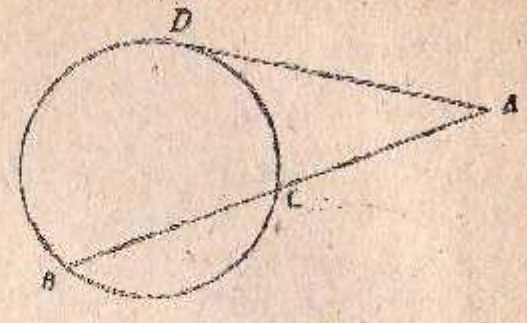


ნახ. 348

4. პროპორციული მონაკვეთები წრეში.



ნახ. 349



ნახ. 350

$AM\cdot MB=CM\cdot MD$ (ნახ. 223).
AD მხების მონაკვეთია. $AD^2=AB\cdot AC$ (ნახ. 224).
$AB\cdot AD=AC\cdot AE$ (ნახ. 224).

ვექტორები

1. ვექტორთა შეკრების სამკუთხედის წესი: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;
2. მრავალკუთხედის წესი: $\overrightarrow{AA_n}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\dots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$;
3. ვექტორთა გამოკლების ტოლობა: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$;
4. ვექტორის ნამრავლი ორ a და b არაკოლინეარულ ვექტორის მეშვეობით (სიბრტყეზე): $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$;
5. ნამდვილ სამი არაკომპლანარული $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორების მეშვეობით (სივრცეში): $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$;
6. ორი ნულოვან ვექტორთა სკალარული ნამრავლი:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b});$$

7. ვექტორთა შეკრება და გამოკლება კოორდინატებში:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;\ y_1\pm y_2;\ z_1\pm z_2);$$

8. ვექტორის გამრავლება რიცხვზე:

$$p\vec{a}=(px;\ py;\ pz);$$

9. სკალარული ნამრავლი კოორდინატებში:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2;$$

10. ვექტორის სიგრძე: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;
11. ორი ნულოვანი ვექტორთა ვექტორული ნამრავლის სიგრძე

$$|[\vec{a},\ \vec{b}]|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\cdot\vec{b});$$

12. არანულოვან $\vec{a}(X_1, Y_1, Z_1)$ და $b(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი

$$|\vec{a}, \vec{b}| = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\};$$

13. ნებისმიერ ორ $A(x_1; y_1; z_1)$ და $B(x_2; y_2; z_2)$ წერტილს შორის:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

სხეულები

1. ტარაკეთის პარალელეპიპედის დიაგონალის კვადრატი უდრის მისი სამი განზომილების კვადრატების ჯამს

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

2. პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი პერპენდიკულარული კვეთის პერიმეტრის ნამრავლის ტოლია.

3. მართი პრიზმის ზედაპირის ფართობი უდრის ფუძის პერიმეტრის ნამრავლს წიბოზე.

4. წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობია S, აპოთემა — a, ფუძის პერიმეტრი — P

$$S = \frac{1}{2} P \cdot a;$$

5. წესიერი წაკვეთილი პირამიდის გვერდითა ზედაპირის ფართობია S, აპოთემა — a, P_1 და P_2 ფუძეების პერიმეტრებია, მაშინ

$$S = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot a;$$

6. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობაა V, განზომილებანი a, b, c, მაშინ $V = a \cdot b \cdot c$;

7. პარალელეპიპედის სიმაღლეა h, ფუძის კვეთები — a და b, მათ შორის კუთხე — α, მოცულობა $V = ab h \sin\alpha$.

8. პრიზმის ფუძის ფართობია S, თუ ფუძის გვერდზე გამავალი საბრტყე ფუძესთან ადგენს α კუთხეს, მაშინ კვეთის ფართობია $Q = \frac{S}{\cos\alpha}$;

9. პირამიდის ტოლუცლობა $V = \frac{1}{3} Q h$, სადაც Q ფუძის ფართობია, h სიმაღლე;

10. წაკვეთილი პირამიდის მოცულობა $V = \frac{1}{3} h(Q + \sqrt{Q \cdot q} + q)$, სადაც h წაკვეთილი პირამიდის სიმაღლეა, Q — ქვედა ფუძის ფართობი, q — ზედა ფუძის ფართობი.

11. მრუდწირული ტრაპეციის ბრუნვით მიღებული ფიგურის მოცულობა

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx;$$

12. ცილინდრის სიმაღლეა H, ფუძის წრეწირის რადიუსია R, გვერდითი ზედაპირის ფართობია S, სრული ზედაპირის ფართობია T, მოცულობა — V, მაშინ

$$S = 2\pi RH, \quad T = 2\pi R(H + R), \quad V = \pi R^2 H;$$

13. კონუსის სიმაღლეა H, ფუძის წრეწირის რადიუსი — R, გვერდითი ზედაპირის ფართობი S, სრული ზედაპირის ფართობი — T, მოცულობა — V, მსახველი — l, მაშინ

$$S = \pi Rl, \quad T = \pi R(l + R), \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

14. წაკვეთილი კონუსის სიმაღლეა H, მსახველი — l, ქვედა ფუძის წრეწირის რადიუსია R, ზედა ფუძის წრეწირის რადიუსი — r, გვერდითი ზედაპირის ფართობი — S, სრული ზედაპირის ფართობი — T, მოცულობა V, მაშინ

$$S = \pi(R + r)l; \quad T = \pi[(R + r)l + R^2 + r^2]; \quad V = \frac{\pi}{3} H(R^2 + Rr + r^2);$$

15. სფეროს რადიუსი არის R, კვეთის რადიუსი — r, მანძილი ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყემდე — d

$$r = \sqrt{R^2 - d^2};$$

16. სფერული სარტყელის ზედაპირის ფართობი $S = 2\pi RH$: R სფეროს რადიუსია, H — სფერული სარტყელის სიმაღლე.

სფეროს ზედაპირის ფართობი $S = 4\pi R^2$, სადაც R სფეროს რადიუსია;

17. სფერული სექტორის ზედაპირის ფართობი $S = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2})$, R — სფეროს რადიუსია, H — სექტორის სიმაღლე;

18. სფერული სექტორის მოცულობა $V = \frac{2}{3} \pi RH$;

19. ბირთვის მოცულობა $V = \frac{4}{3} \pi R^3$;

20. სფერული სეგმენტის მოცულობა $V = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H \right)$.

ლათინური ანბანი

A, a — ა	N, n — ნ
B, b — ბე	O, o — ო
C, c — ცე	P, p — პე
D, d — დე	Q, q — ქიუ
E, e — ე	R, r — ერ
F, f — ეფ	S, s — ს
G, g — ჟე	T, t — ტე
H, h — ჰაშ	U, u — უ
I, i — ი	V, v — ვი
J, j — ჟი	W, w — დუბლ-ვე
K, k — კ	X, x — იქს
L, l — ელ	Y, y — იგრეკ
M, m — მ	Z, z — ზედ

ბერძნული ანბანი

A, α — ალფა	N, ν — ნიუ
B, β — ბეტა	Ξ, ξ — ქსი
Γ, γ — გამა	O, o — ომიკრონი
Δ, δ — დელტა	Π, π — პი
E, ε — ეფსილონი	P, ρ — რო
Z, ζ — ძეტა	Σ, σ — სიგმა
H, η — ეტა	T, τ — ტაუ
Θ, θ — თეტა	Φ, φ — ფი
I, ι — იოტა	X, χ — ხი
K, κ — კაპა	Υ, υ — იფსილონი
Λ, λ — ლამბდა	Ψ, ψ — ფსი
M, μ — მიუ	Ω, ω — ომეგა

ლიტერატურა

1. დ. ავხაჭიშვილი და სხვები. მათემატიკის ამოცანათა კრებული (უმაღლეს სასწავლებლებში შესასვლელად). თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1980 წ.
2. დ. ავხაჭიშვილი და სხვები. მეთოდური მითითებები და სავარჯიშოები ზემაღალ გამოცდასათვის მათემატიკაში ხელმძღვანელობს პ. ი. ლენინის სახელობის პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში შემსვლელთათვის, თბილისი, 1982 წ.
3. დ. ავხაჭიშვილი და სხვები. მეთოდური მითითებები და სავარჯიშოები წერითი გამოცდისათვის მათემატიკაში ხელმძღვანელობს პ. ი. ლენინის სახელობის პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში შემსვლელთათვის, თბილისი, 1983 წ.
4. М. И. Абрамович, М. І. Стародубцев. Математика (геометрия и тригонометрические функции). Москва, «Высшая школа», 1976 г.
5. Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Сахаров, Сборник задач по элементарной математике, Москва, «Наука», 1974 г.
6. К. С. Барыбин. Сборник геометрических задач на доказательство. Учпедгиз, Москва, 1952 г.
7. Е. С. Березинская, Н. А. Колмогоров, Ф. Ф. Нагибин, Р. С. Черкасов. Сборник задач и вопросов по геометрии, Москва, 1959 г.
8. ა. ბუაძე, ო. ხანდოშკელი, ა. ფცქიძე, ს. ჭილაშვილი. მათემატიკა უმაღლეს სასწავლებლებში შესასვლელათვის. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1981 წ.
9. М. В. Говоров, П. Т. Дыбов, Н. В. Мирошин, С. Ф. Смирнова. Сборник конкурсных задач по математике, Москва, «Наука», 1983 г.
10. Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. Пособие по математике для поступающих в вузы. Москва, «Наука», 1976 г.
11. И. Г. Дыбов и др. (под редакцией профессора А. И. Прилепко). Сборник задач по математике для поступающих в вузы, Москва, «Высшая школа», 1983 г.
12. В. К. Егорова и др. (под редакцией М. И. Сканави). Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Москва «Высшая школа» 1980 г.
13. С. М. Ермаков, В. С. Сафонова. Варианты письменных работ по математике (в помощь поступающим в высшие учебные заведения). Издательство Ленинградского университета, 1974 г.
14. Е. Б. Вахобский, А. Д. Рыжик. Задачи по элементарной математике повышенной трудности. Москва, «Наука», 1971 г.
15. В. В. Зайцев, В. В. Рыжков, М. И. Сканави. Элементарная математика. Москва, «Наука», 1967 г.
16. П. С. Залогин. Конкурсные задачи по математике, Киев, «Техника», 1964 г.
17. В. В. Зорин, Т. Т. Фисенко. Пособие по математике для поступающих в вузы, Москва, «Высшая школа» 1980 г.
18. ქ. ლომსაძე, ზ. სულთანი, გ. თევდორაძე. ვარიანტები საშუალო სკოლის მე-9 და მე-10 კლასების სახელმძღვანელოდ) გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, 1983 წ.

19. ა. ქოლმოგოროვი, ა. ბუტიონცევი, ბ. ჩერკასოვი. გეომეტრია. სავლისწინარე საშუალო სკოლის VI—VIII კლასებისათვის. გამომცემლობა „განათლება". თბილისი, 1983 წ.
20. Л. Д. Кутасов, Т. С. Пиголкина, В. Н. Чехлов, Т. Х. Яковлева. Пособие по математике для поступающих в вузы. Москва, «Наука», 1981 г.
21. В. С. Кушенко Сборник конкурсных задач по математике с решениями. Издательство «Судостроение». Ленинград, 1968 г.
22. Б. В. Ладский, Л. В. Овсянников, Л. Н. Туликов. М. И. Шабунин, Б. В. Федосов. Задачи по элементарной математике. Москва, «Наука», 1973.
23. Б. Н. Маткеев, П. М. Матвиев. Сборник задач по математике (в помощь поступающим в вузы) Издательство Казанского университета, 1967 г.
24. П. С. Моденов. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. Москва, «Советская Наука». 1957 г.
25. Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. Задачи вступительных экзаменов по математике. Москва, «Наука», 1980 г.
26. ნ. ნიკოლაძე, გ. ხახუტაშვილი. გეომეტრიის ამოცანათა კრებული. რუსული სკოლის VI—VIII კლასებისათვის. გამომცემლობა „განათლება". თბილისი, 1967 წ.
27. ა. პოგორელოვი. გეომეტრია 6—10. გამომცემლობა „განათლება". თბილისი, 1983 წ.
28. ნ. რიბკინი. გეომეტრიის ამოცანათა კრებული. ნაწილი I. პლანიმეტრია. სახელმძღვანელო VI—IX კლასებისათვის. გამომცემლობა „ცოდნა", თბილისი, 1960 წ.
29. ხ. რიბკინი. გეომეტრიის ამოცანათა კრებული. სტერეომეტრია. ნაწილი II. IX—X კლასებისათვის. გამომცემლობა „განათლება". თბილისი, 1969 წ.
30. ნათემატიკის ამოცანათა კრებული (უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში სათანადო გამოცდებისათვის). გ. სვანიძის რედაქციით. გამომცემლობა „განათლება". თბილისი, 1975 წ.
31. პ. ქ. სტრატილატოვი. ტრიგონომეტრიის ამოცანათა კრებული (საშუალო სკოლის მე-9 მე-10 კლასებისათვის). გამომცემლობა „ცოდნა". თბილისი, 1965 წ.
32. გ. სუხარევიშვილი. გეომეტრიის ამოცანების ამოხსნის თავისებური (გეომეტრიული ამოცანები გამოსვლარიშებაზე, დამტკიცებაზე და აგებაზე) გამომცემლობა „ცოდნა". თბილისი, 1962 წ.
33. გ. ტაბიძე, გ. გოგიჩაძე. ზოგიერთი საკონკურსო ამოცანა ნათემატიკაში, „განათლება". თბილისი, 1969 წ.
34. Справочник по элементарной математике (под редакцией члена-корр АН УССР П. Ф. Фильчакова). «Наукова Думка», Киев, 1967 г.
35. გ. წულაია, ნ. ფხაკაძე, ო. ჯავახიშვილი. ამოცანათა კრებული მათემატიკაში, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1970 წ.
36. გ. ჭელიძე, ნ. ლომჯარია, გ. ხახუბაია. მათემატიკა (ინტერვენტებისათვის). „განათლება", თბილისი, 1972 წ.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

წინასიტყვაობა 3

პლანიმეტრია

§ 1. პლანიმეტრია. ძირითადი ცნებები და აქსიომები 5
§ 2. კუთხეები 10
§ 3. სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. ტოლფერდა სამკუთხედი . . . 13
§ 4. წრფეთა პარალელურობის ნიშნები 19
§ 5. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. სამკუთხედის გარე კუთხე. დანარჩენებლებში სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის 21
§ 6. მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. პარალელოგრამის წრფეები 30
§ 7. პარალელოგრამის შუაპერპენდიკულარი. კუთხის ბისექტრისის თვისება . 36
§ 8. წრეწირი. სამკუთხედზე შემოხაზული და სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი 38
§ 9. ცენტრალური და ჩახაზული კუთხეები 52
§ 10. მსგავსია და ერთიდ მეტი ერთეული კუთხე 56
კუთხე წვეროთი წრეწირის შიგნით და წრეწირის გარეთ 58
§ 11. მრავალკუთხედები 60
§ 12. ოთხკუთხედები 63
პარალელოგრამი 64
მართკუთხედი. რომბი. კვადრატი 65
თალესის თეორემა. სამკუთხედის შუაპარალელი 67
ტრაპეცია. ტრაპეციის შუაპარალელი 69
ტოლფერდა ტრაპეციის თვისებები 72
ჩახაზული და შემოხაზული ოთხკუთხედები 74
§ 13. ფიგურათა კარდინალობა 83
§ 14. ფიგურათა ტოლობა. მსგავსები. გარდაქმნა 86
§ 15. ფიგურათა მსგავსება. სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები 91
§ 16. ფაითაგორას თეორემა პარალელოგრამის, გეომეტრიის და კუთხეების ფართის 95
§ 17. ჰიპოგორას თეორემა 93
§ 18. კოსინუსების თეორემა. სინუსების თეორემა 98
§ 19. სამკუთხედების ამოხსნა 71
§ 20. ფიგურათა ფართობები 73
სამკუთხედის ფართობი 74
პარალელოგრამის ფართობი 75
სამკუთხედის ფართობი 77
ტრაპეციის ფართობი 79
ოთხკუთხედის ფართობი 79
მსგავსი ფიგურების ფართობების შეფარდება 82
§ 21. წრეწირი წრეწირებში 82
§ 22. წრეწირის სიგრძე. წრის ფართობი 84
§ 23. ფიგურის ძირითადი კონფიგურაციები. სიმეტრია 106
წრეწირის შეხების ცენტრალური 89
წრეწირის ბისექტრისის პერპენდიკულარი 89
წრეწირის განტოლება 90
წრეწირის განტოლება 91
წრფისა და წრეწირის ურთიერთმდებარეობა 91
ორი წრეწირის ურთიერთმდებარეობა 92
§ 24. ამოცანების ამოხსნა 96

სტერეომეტრია

§ 25. სტერეომეტრის ძირითადი ცნებები და აქსიომები 98
§ 26. წრფეებისა და სიბრტყეების პარალელურობა 101
პარალელური და ატვირთული წრფეები 101
წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა 103
სიბრტყეთა პარალელურობა 111
§ 27. წრფეებისა და სიბრტყეების მართობულობა 105
წრფესა მართობულობა 116

წრფისა და სიბრტყის პარალელობა 107
ამის პარალელის თეორემის 109
სიბრტყეთა პარალელობა 110
პარალელი ტრანსფორმაციის შესახებ 111
§ 28. ფიგურის პროექცია კოორდინატთა სიბრტყეზე სიბრტყეში 112
§ 29. ფიგურათა გადაქცევა სიბრტყეში 114
§ 30. ვექტორები 115
ვექტორის კოორდინატები 117
ვექტორების შეკრება 118
ვექტორის რიცხვზე გამრავლება 119
ვექტორის დაშლა ორი არაკოლინეარული ვექტორის მიხედვით სიბრტყეზე 121
ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი 122
ვექტორის ღერძზე ამ ღერძთან შეთანხმებული ვექტორის პიხედვით 123
ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი 125
სიბრტყის განტოლება 126
§ 31. კუთხეები წრფეებსა და სიბრტყეებს შორის 128
პარალელეპიპედის ორთოგონალური გეგმილის ფორმები 128
§ 32. მრავალწახნაგები 131
პრიზმა 131
მრავალწახნაგა 132
პრიზმა 132
პარალელეპიპედი 134
პირამიდა 136
§ 33. ბრუნვის სხეულები 139
ცილინდრი 139
კონუსი 141
ბირთვი სფერო 143
§ 34. სხეულის მოცულობა 145
მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა 146
დახრილი პარალელეპიპედის მოცულობა 148
პრიზმის მოცულობა 149
პირამიდის მოცულობა 151
ბრუნვის სხეულის მოცულობის ზოგადი ფორმულა 152
ცილინდრის მოცულობა 154
კონუსის მოცულობა 154
ბირთვისა და მისი ნაწილების მოცულობა 155
§ 35. სხეულის ზედაპირის ფართობი 157
პრიზმის ფართობი 158
ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი 159

ამოცანები

ალგებრა

§ 1. პლანიმეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები 161
§ 2. კუთხეები 163
ამოცანები გამოთვლაზე 163
ამოცანები დამტკიცებაზე 164
§ 3. სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. ტოლფერდა სამკუთხედი 165
ამოცანები გამოთვლაზე 165
ამოცანები დამტკიცებაზე 166
§ 4. წრეწირთა პარალელობა. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. მონაკვეთის შეკითხვა. კუთხის ბისექტრისა 169
ამოცანები გამოთვლაზე 169
ამოცანები დამტკიცებაზე 173
§ 5. წრეწირი. ცენტრალური და ჩახაზული კუთხეები. მენებითი და კორდით შეკვეთილი კუთხე კუთხე წვეროთი წრეწირის შიგნით და წრეწირის გარეთ 175
ამოცანები გამოთვლაზე 175
ამოცანები დამტკიცებაზე 179

§ 6. მრავალკუთხედები. პარალელოგრამი. მართკუთხედი. რომბი. კვადრატი. ტრაპეცია. ჩახაზული და შემოხაზული ოთხკუთხედები 183
ამოცანები გამოთვლაზე 183
ამოცანები დამტკიცებაზე 194
§ 7. ფიგურათა ტოლდადება 202
§ 8. ფიგურათა მსგავსება 204
ამოცანები გამოთვლაზე 204
ამოცანები დამტკიცებაზე 211
§ 9. პითაგორას თეორემა. 215
ამოცანები გამოთვლაზე 215
ამოცანები დამტკიცებაზე 224
§ 10. კოსინუსების თეორემა. სინუსების თეორემა. სამკუთხედების ამოხსნა 226
ამოცანები გამოთვლაზე 226
ამოცანები დამტკიცებაზე 234
§ 11. ფიგურათა ფართობი 236
ამოცანები გამოთვლაზე 236
ამოცანები დამტკიცებაზე 249
§ 12. წრეწირის სიგრძე. წრის და მისი ნაწილების ფართობა 254
ამოცანები გამოთვლაზე 254
ამოცანები დამტკიცებაზე 263
§ 13. ამოცანები ორებზე 265
§ 14. სხვადასხვა სახის ამოცანები 267
ამოცანები გამოთვლაზე 267
ამოცანები დამტკიცებაზე 272

სტერეომეტრია

§ 15. სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები. წრფეთა და სიბრტყეთა პარალელობა და პერპენდიკულარობა 277
ამოცანები გამოთვლაზე 277
ამოცანები დამტკიცებაზე 288
§ 16. ვექტორები. კოორდინატთა მეთოდი 294
ამოცანები გამოთვლაზე 294
ამოცანები დამტკიცებაზე 299
§ 17. კუთხე. პარალელეპიპედი. პრიზმა 301
ამოცანები გამოთვლაზე 301
ამოცანები დამტკიცებაზე 313
§ 18. პირამიდა 315
ამოცანები გამოთვლაზე 315
ამოცანები დამტკიცებაზე 327
§ 19. ცილინდრი, კონუსი. ბირთვი 329
ამოცანები გამოთვლაზე 329
ამოცანები დამტკიცებაზე 337
§ 20. კუბის, პარალელეპიპედის, პრიზმის მოცულობა 339
ამოცანები გამოთვლაზე 339
ამოცანები დამტკიცებაზე 351
§ 21. პირამიდის მოცულობა 352
ამოცანები გამოთვლაზე 352
ამოცანები დამტკიცებაზე 363
§ 22. ცილინდრის, კონუსის და ბირთვის მოცულობა 366
ამოცანები გამოთვლაზე 366
ამოცანები დამტკიცებაზე 376
§ 23. ცილინდრის, კონუსის, ბირთვის ზედაპირის ფართობი 377
ამოცანები გამოთვლაზე 377
ამოცანები დამტკიცებაზე 388
§ 24. სხვადასხვა სახის ამოცანები 390
ამოცანები გამოთვლაზე 390
ამოცანები დამტკიცებაზე 400
პასუხები 403
მითითებები ამოცანებისათვის დამტკიცებაზე 424
საგნობარი მასალა 473
ლათინური და ბერძნული ანბანი 482
ლიტერატურა 483

Толпухин Сергей Багратович
Абесадзе Гайоз Иосифович
Озбегашвили Гиви Багратович
Хочолава Владимир Владимирович
Мегревели Зураб Юстинович

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

(На грузинском языке)

რედაქტორი ა. დანელია
ხელმძღვანელი რედაქტორი გ. ზალალიშვილი
ტექნიკური რედაქტორი ზ. მახარაშვილი
უფროსი კორექტორი ნ. დოლიძე
კორექტორი ლ. ლაბარტელიანი
გამომშვები ა. მანჯავიძიანი

ИБ № 3691

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 18.04.87. საბეჭდი ქაღალდი № 2. ქაღალდის ზომა 60×90 1/16. გარნიტურა ვენა. ბეჭდვა ზედაპირული. სასტანდარტო თაბახი 30,5. სალ. გატ. 30,5. საღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 28,04. ტირაჟი 30 000.

შეკვ. № 669. ფას 08338.

ფასი 1 მან. 20 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, რუსთაველის გ. № 52.
Издательство «Ганатлеба», ул. Орджоникидзе № 50

1987

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნის ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის ბეჭდვითი სიტყვის კომბინატი, თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.

Комбинат печати Государственного комитета Грузинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Тбилиси, ул. Марджанишвили, 5.